



国防科工委“十五”规划教材·力学

气动弹性设计基础

陈桂彬 邹丛青 杨 超 编著

北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社 西北工业大学出版社
哈尔滨工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书介绍了飞行器气动弹性设计的基本原理和基本方法,包括 4 个主要内容,即气动弹性静力问题、气动弹性动稳定性——颤振、气动伺服弹性稳定性分析以及气动弹性动力响应。除了阐述基本概念和基本理论外,书中还介绍了常用的工程处理方法;对近年来在气动弹性技术上的新进展,也作了简要的介绍。

本书为高等航空院校相关专业本科生和研究生的教学用书或参考书,也可供航空工业部门和其他工业部门结构设计人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

气动弹性设计基础/陈桂彬等编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2004.10
ISBN 7-81077-516-2

I. 气… II. 陈… III. 气动弹性—设计
IV. V211.47

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094202 号

气动弹性设计基础

陈桂彬 邹丛青 杨超 编著

责任编辑 刘晓明

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083)

发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail:bhpress@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16

印张:15.75 字数:353 千字

2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷

印数:2 000 册

ISBN 7-81077-516-2 定价:22.00 元

国防科工委“十五”规划教材编委会

(按姓氏笔画排序)

主 任：张华祝

副主任：王泽山 陈懋章 屠森林

编 委：王 祁	王文生	王泽山	田 蔚	史仪凯
乔少杰	仲顺安	张华祝	张近乐	张耀春
杨志宏	肖锦清	苏秀华	辛玖林	陈光禹
陈国平	陈懋章	庞思勤	武博祯	金鸿章
贺安之	夏人伟	徐德民	聂 宏	贾宝山
郭黎利	屠森林	崔锐捷	黄文良	葛小春



前 言

本书是为航空高等院校编写的教材,旨在为飞行器设计或相关专业本科生提供一本基本理论与分析方法并重的教科书,以适应日趋重要并正在不断发展的气动弹性设计领域的需要。本书也可作为相关专业研究生的教材或参考书,并可供航空、航天、兵器、建筑及桥梁等工业部门的设计人员参考。

顾名思义,“气动弹性力学”作为力学学科是研究弹性物体在气流作用下的各种力学行为。而作为设计学科则不仅是揭示各种现象的机理,更为重要的是把它的基本原理应用到飞行器设计上,并作为一种设计的准则、规范和指导思想。所以,气动弹性设计已经成为飞行器设计中的重要内容。

本书介绍了气动弹性设计的两个重要组成部分,即气动弹性静力问题和气动弹性动力问题。

在静气动弹性部分,主要包括机翼扭转发散、载荷重新分布、操纵反效及操纵效率等静气动弹性现象。从二元翼段出发,介绍静气动弹性的基本概念、基本原理,并介绍了长直机翼静气动弹性的计算方法、近似方法以及矩阵分析方法,从而揭示静气动弹性问题在飞行器设计中的特点及影响因素。

在动气动弹性部分,涵盖了两个主要问题:一个是稳定性问题,另一个是动力响应问题。本书重点介绍了气动弹性稳定性问题,即颤振。对颤振的基本概念、发生的机理及其基本原理、求解方法和工程分析方法,都结合实际作了较为详尽的介绍。对动力响应问题,限于篇幅,仅作了一般性介绍,重点在飞机受到阵风时动力响应的基本概念和理论、非定常气动力特点以及工程处理方法等。抖振振动由于带有强迫振动的性质,所以也放在动力响应中一并介绍。为了弥补有些读者可能在气动力知识上的不足,本书还专门介绍了为进行颤振分析常用的非定常气动力计算方法。

由于伺服控制系统已经广泛地应用于飞行控制中,为了保证装有伺服飞行控制系统的飞行器在其飞行范围内不会发生气动伺服弹性不稳定



(也称伺服颤振)现象,必须进行气动伺服弹性稳定性分析。本书在上述颤振分析的基础上,也重点介绍了气动伺服弹性问题的基本概念和原理、气动伺服弹性基本方程和分析方法;通过实例完整地阐述了飞机和导弹的气动伺服弹性稳定性分析的全过程以及提高气动伺服弹性稳定性的措施。

围绕现代飞行器设计技术的发展,本书还介绍了气动弹性设计方法和技术的最新进展,这些技术上的进步,对飞行器设计极具影响。例如,气动弹性和气动伺服弹性的状态空间方法;主动柔性机翼工程的设计理念及其主动控制技术,包括颤振主动抑制及阵风减缓、气动伺服弹性鲁棒稳定性分析方法以及复合材料气动弹性剪裁的设计理念等。这些内容都展示出气动弹性设计在飞行器设计中的重要地位,也展示出气动弹性设计对提高飞行器性能的突出作用,使读者更全面地认识到气动弹性设计是先进飞行器设计的必备手段。

气动弹性设计最初是适应航空事业的需要而发展起来的,不言而喻,自然会受到航空科技院校有关专业研究生和本科生以及航空工业部门技术人员的关心。鉴于此,我们在编写中多取材于飞行器,而对于航空技术领域以外的气动弹性问题将不予讨论。为了控制学时和篇幅,本书侧重于介绍基本理论和工程处理方法,而略去了某些繁琐公式的推导过程。

本书在每章的最后附有思考题,供读者和教学作业使用。参考文献放在各章的后面,供读者查阅;但不要认为这些参考文献是全面的,因为在这方面的文献浩如烟海。本书中所列的文献资料都是作者认为有意义的。

本书共分 11 章,陈桂彬编写第 1,5~9 章,杨超编写第 2~4 章,邹丛青编写第 10,11 章。本书由陈桂彬主编。

作者特别感谢我系的朱斯岩老师,她在本书的全部编写过程中,参加了对全书内容安排的讨论,以她讲授本课程的实际体验,提出了宝贵的意见,并和宋晨一起绘制了书中的全部插图、表格以及进行文字录入工作,使本书得以顺利完成。

本书承西北工业大学赵令诚教授、南京航空航天大学卢叔全教授审阅,提出许多宝贵的意见,对此表示衷心感谢。作者也衷心感谢将对本书提出批评和建议的读者。

作 者

2004 年 5 月



总 序

国防科技工业是国家战略性产业,是国防现代化的重要工业和技术基础,也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来,在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下,国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中,取得了举世瞩目的辉煌成就;研制、生产了大量武器装备,满足了我军由单一陆军,发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要,特别是在尖端技术方面,成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术,使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备,使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路,建立了专业门类基本齐全,科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系,奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础;掌握了大量新技术、新工艺,研制了许多新设备、新材料,以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术,大大提高了国家的科技水平和竞争力,使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济作出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。⁵⁰多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,生产和传播国防科技新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替代的作用。国防科工委高度重视,



积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版 200 种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量,在广泛动员全国相关专业领域的专家、学者竞投编著工作的基础上,以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的 100 多位专家、学者,对经各单位精选的近 550 种教材和专著进行了严格的评审,评选出近 200 种教材和学术专著,覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与技术、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者,他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等,具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中,国防特色专业重点教材和专著的出版,将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出,进入 21 世纪,我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标,对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展,提升国防实力,需要造就宏大的人才队伍,而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务,落实科教兴国和人才强国战略,推动国防科技工业



走新型工业化道路,加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华,实现志向,提供了缤纷的舞台,希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识,树立正确的世界观、人生观、价值观,努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任,创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好,国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝

目 录

第 1 章 绪 论

1.1	气动弹性问题的概述	1
1.2	气动弹性力学发展的历史梗概	2
1.3	气动弹性方框图	3
1.4	气动弹性问题的分类	5
1.4.1	气动弹性的力三角形	5
1.4.2	热气动弹性的力四面体	6
1.4.3	气动伺服弹性问题	7
1.5	飞行器设计与气动弹性设计	8
1.5.1	在飞机设计中的气动弹性设计	8
1.5.2	气动弹性设计在飞机设计中的新进展	11
	思考题	12
	参考文献	12

第 2 章 气动弹性静力问题的基本原理和解析方法

2.1	气动弹性静力问题的基本原理	13
2.1.1	扭转发散	14
2.1.2	载荷重新分布	15
2.1.3	操纵效率与操纵反效	17
2.1.4	非线性影响	22
2.2	长直机翼的解析方法	23
2.2.1	长直机翼的扭转发散	23
2.2.2	长直机翼的载荷重新分布	26
2.2.3	长直机翼的操纵反效及操纵效率	29
	思考题	32
	参考文献	33

第 3 章 气动弹性静力问题的矩阵分析方法

3.1	气动力影响系数的矩阵表示	34
3.1.1	马蹄涡系	35
3.1.2	三元机翼的气动力影响系数矩阵	36
3.1.3	气动力影响系数矩阵 A 的近似求解方法	38
3.2	气动弹性静力问题分析的基本方程	41



3.2.1	大展弦比直机翼静气动弹性基本方程	41
3.2.2	大展弦比后掠机翼静气动弹性基本方程	43
3.2.3	一般翼面静气动弹性基本方程	44
3.3	机翼发散计算与分析	45
3.3.1	机翼发散基本方程	45
3.3.2	机翼发散计算方法	46
3.3.3	带有掠角的机翼发散的特点	50
3.3.4	提高发散动压的设计考虑	53
3.4	机翼载荷重新分布的计算与分析	54
3.4.1	载荷重新分布基本方程	54
3.4.2	载荷重新分布的两种计算情况	55
3.5	副翼操纵效率与反效	59
3.5.1	操纵反效基本方程	59
3.5.2	操纵效率计算方法	61
3.5.3	提高操纵效率的设计考虑	62
	思考题	63
	参考文献	63

第4章 非定常气动力计算方法

4.1	准定常气动力	64
4.1.1	格罗斯曼理论	64
4.1.2	细长体理论	68
4.1.3	气动力导数	69
4.1.4	活塞理论	70
4.2	非定常气动力	72
4.2.1	西奥道生理论	72
4.2.2	亚声速偶极子格网法简述	74
4.2.3	超声速偶极子格网法特点	76
	思考题	77
	参考文献	77

第5章 颤振的基本概念

5.1	颤振概述	78
5.2	颤振的物理本质	81
5.2.1	自激振动	81
5.2.2	机翼弯扭颤振现象	82
5.2.3	机翼-副翼颤振现象	85
5.3	简化的颤振理论	86
5.3.1	颤振方程的建立	86



5.3.2	频率重合理论	88
5.3.3	举 例	89
5.4	影响颤振速度的因素	91
	思考题	93
	参考文献	93
第 6 章 颤振分析基础		
6.1	应用准定常气动力理论的二元机翼颤振	94
6.2	应用非定常气动力理论的二元机翼颤振	99
6.3	颤振行列式的求解	101
6.3.1	西奥道生法	101
6.3.2	$V-g$ 法	103
6.3.3	$p-k$ 法	106
6.3.4	关于计及压缩性影响的颤振计算	108
6.4	二元机翼-副翼颤振	109
	思考题	112
	参考文献	112
第 7 章 工程颤振分析和设计方法(一)		
7.1	工程颤振分析的概述	113
7.2	大展弦比直机翼的运动方程	115
7.3	大展弦比直机翼的颤振计算——用准定常气动力理论	118
7.4	大展弦比直机翼的颤振计算——用非定常气动力理论	122
7.5	大展弦比后掠机翼颤振分析的特点	127
	思考题	130
	参考文献	130
第 8 章 工程颤振分析和设计方法(二)		
8.1	小展弦比机翼的颤振计算	131
8.1.1	小展弦比机翼的运动方程	131
8.1.2	用偶极子格网法的颤振计算	133
8.1.3	应用活塞理论的颤振计算	134
8.2	尾翼颤振分析的特点	136
8.2.1	常规的固定尾翼颤振分析	136
8.2.2	全动水平尾翼的颤振分析	137
8.2.3	T 形尾翼的颤振分析	139
8.3	操纵面的颤振	139
8.4	操纵面颤振的防止	142
8.4.1	操纵面质量平衡	143
8.4.2	不可逆操纵	145



8.4.3	操纵面颤振设计概要	146
8.5	气动弹性设计的程序	146
8.5.1	气动弹性设计规范	147
8.5.2	气动弹性设计步骤	148
8.5.3	有关颤振分析中的试验介绍	150
	思考题	153
	参考文献	154
第9章	气动弹性动力响应	
9.1	动力响应概述	155
9.2	弹性飞机的扰动运动方程	156
9.3	飞机受到阵风的动力响应	160
9.3.1	刚硬机翼——应用准定常理论	160
9.3.2	刚硬机翼——应用非定常理论	162
9.3.3	弹性机翼——应用非定常理论	166
9.4	气动弹性抖振	167
9.4.1	抖振的现象	168
9.4.2	抖振边界及抖振载荷	168
	思考题	170
	参考文献	170
第10章	气动伺服弹性(动)稳定性分析	
10.1	气动伺服弹性概念	172
10.1.1	气动伺服弹性力学的定义及分类	172
10.1.2	气动伺服弹性问题的形成	172
10.1.3	气动伺服弹性的分析与综合	174
10.2	飞机气动伺服弹性稳定性分析的特点	174
10.2.1	舵面伺服操纵系统的动力学特性	174
10.2.2	结构反馈控制回路的动力学特性	175
10.3	气动伺服弹性运动方程的建立	176
10.3.1	自由度和运动方程	176
10.3.2	复阻抗	179
10.4	气动伺服弹性稳定性分析的频域方法	183
10.4.1	奈奎斯特图线方法在气动伺服弹性稳定性分析中的应用	183
10.4.2	传递函数的确定	184
10.4.3	气动伺服弹性系统稳定裕度的确定	187
10.4.4	不利耦合的排除	188
10.4.5	频域方法在多回路气动伺服弹性稳定性分析中的应用	190
10.5	导弹的气动伺服弹性稳定性分析	194



10.5.1	自由度选择和运动方程的建立	194
10.5.2	广义准定常气动力 A_q 和控制力 $Q_{\Delta\beta}$	195
10.5.3	细长体理论在弹体气动力上的应用	197
思考题		199
参考文献		199

第 11 章 气动弹性设计的新进展

11.1	气动弹性系统的状态空间法	201
11.1.1	状态变量、状态空间表达式	201
11.1.2	状态空间法中非定常气动力的拉氏域有理近似	202
11.1.3	气动弹性系统的状态空间表达式	204
11.1.4	气动弹性系统稳定性问题的状态空间法	207
11.2	气动伺服弹性鲁棒稳定性分析的状态空间法	208
11.2.1	奇异值	209
11.2.2	基于系统回差矩阵最小奇异值的鲁棒稳定裕度估算	209
11.2.3	在 μ 方法下的系统鲁棒稳定裕度	213
11.3	主动气动弹性机翼设计技术	218
11.3.1	AAW 设计理念——对传统设计思想的突破	218
11.3.2	AAW 技术中的主动控制	220
11.3.3	颤振主动抑制控制律设计	221
11.4	复合材料气动弹性剪裁	226
11.4.1	气动弹性剪裁的概念	227
11.4.2	气动弹性剪裁的机理	227
11.4.3	气动弹性剪裁的性能效益	228
11.4.4	气动弹性综合优化设计	232
思考题		233
参考文献		234

第1章 绪论

1.1 气动弹性问题的概述

气动弹性问题作为一门力学学科是研究弹性物体在气流中的力学行为,其任务是研究气动力和弹性体之间的相互影响。气动弹性力学所研究的各类气动弹性现象,不外乎起因于空气动力、弹性力和惯性力之间的相互作用。而作为设计学科,则不仅是揭示各种现象的机理,更为重要的是把它的基本原理应用到飞行器设计上,并作为一种设计的准则、规范和指导思想。由于在研究问题上的特殊性,致使在研究方法上也具有其自身的特点。

弹性力学的经典理论是研究弹性体在给定外力或位移作用下的应力与应变。通常,物体上的外作用力与变形无关,即认为在小变形下,不影响外力的作用。在这种情况下,常常忽略物体尺寸的变化,并按照初始形状进行计算。但是,在大多数重要的气动弹性问题中,情况起了变化。也就是说,应认为外力是随着物体的变形情况而改变的,即载荷本身不是事先可以确定的,弹性变形对它起着重要作用。在弹性变形决定以前,空气动力的大小是不知道的。因此,通常在问题解出以前,外载荷是不知道的。例如,在研究飞机的气动弹性问题时,要把它当做弹性体处理,此时机翼上的升力要取决于机翼翼面相对于气流的位置和运动,即此时的气动力载荷不是一个事先可以确切给出的值。这也是气动弹性问题研究的主要特点之一。

气动弹性力学主要关心的问题之一是结构在气流中的稳定性。因为,对于一定的结构,其空气动力将会随着气流流速的增加而增加,而结构的弹性刚度却与气流速度无关,所以存在一个临界风速;在这个速度下,结构变成不稳定的。这种不稳定性会产生极大的变形,并且会导致结构的破坏,这是飞机设计中决不允许的。从稳定性这个角度出发,根据惯性力在所考虑的问题中是否允许忽略,把上述的不稳定性又可区分为静不稳定性和动不稳定性。前者主要是扭转变形发散,而后者主要是颤振。而从气动弹性问题的整体来看,它所包含的内容,不仅是稳定性,还包括有很多其他问题。诸如在气动弹性静力问题中,由于弹性变形会引起载荷重新分布,也会使飞机的操纵效率降低,甚至发生操纵反效。在气动弹性动力问题中,还有飞机对外载荷的动力响应,这种响应可以是飞机的变形、运动或诱生的动应力。例如由操纵面偏转、突风等引起的响应都属于这类问题。



1.2 气动弹性力学发展的历史梗概

气动弹性问题几乎伴随着飞行器发展的全过程。早在 1903 年,即在莱特(Wright)兄弟有动力载人飞行成功的前 9 天,Smithsonian 学院的兰利(Langley)教授在 Potomac 河畔进行的“空中旅行者”号有动力试飞失败了,事后才认识到这是典型的气动弹性问题——机翼扭转变形发散。Coller 教授曾评论:“若不是气动弹性问题,兰利很可能要代替莱特兄弟的历史地位”。然而不久,又出现了一系列的气动弹性问题。先是发生在第一次世界大战初期,英国的 Handley Page 0/400 双引擎轰炸机发生剧烈的尾翼颤振而坠毁;仅一年后 DH—9 飞机上又发生了类似的尾翼颤振事故。由此促使了 F. W. Lanchester 和 L. Bairstow 以及 A. Fage 进行了第一批有目的的气动弹性颤振研究。他们所研究的由机身扭转和升降舵偏转这两个自由度组合的二元颤振,可能是最早的颤振理论分析。此外,在第一次世界大战中,德国有两架战斗机由于静气动弹性发散而发生致命的结构破坏:一架是 Albatros D—III 飞机,另一架是 Fokker D—VIII 飞机。后者是一种悬臂式单翼机,投入战争后接二连三地发生高速俯冲时机翼毁坏事故。此后,对 6 个机翼进行了强度试验,结论是其强度足以承受 6 倍设计载荷。原型机和生产型飞机的机翼之间惟一的不同就在于后者有一根加强后梁,本意是增大实战中飞机强度特性,然而却未料到由此改变了机翼弹性轴位置,从而导致静气动弹性发散。这个弄巧成拙的教训使设计者逐渐认识到,结构设计仅靠强度规范是远远不够的,必须要包含刚度规范的内容。所以气动弹性是飞机设计中不可忽视的重要方面。到 1926 年,H. Reissner 公开发表了解决扭转发散问题的一种理论,也阐明了空气动力中心与弹性轴相对位置的重要性,这对于中高展弦比的梁式机翼来说是一个尤为重要的概念。20 世纪 20 年代末,H. G. Küssner, W. J. Duncan 和 R. A. Frazer 建立了机翼颤振的理论基础。1934 年,T. Theodorsen 获得了翼面—操纵面组合的二维不可压流谐振荡空气动力的精确解,建立了解析求解翼面颤振问题的基础。

第二次世界大战爆发的前后,航空工业有了长足的发展。提高飞机的飞行速度,是当时空战中制胜的重要手段。那时,舵面和尾翼的颤振是气动弹性方面事故的主要原因,特别是调整片的颤振是经常发生的。到第二次世界大战结束以前,飞行速度提高到跨声速范围,同时出现了第一批超声速飞机,因此又提出了新的气动弹性问题。此时,要求从事航空事业的机构,必须拥有一支强有力的研究队伍,来解决大量出现的气动弹性问题。于是,气动弹性力学开始发展成一门独立的科学分支。

20 世纪 50 年代初期,飞行进入了超声速范围,新的气动弹性问题大量涌现。小展弦比后掠机翼和三角形机翼成为气动弹性研究的主要对象。这就要求必须研究全新的颤振分析原理和解法。计算机的出现,使许多气动力计算方法应运而生,一些亚声速和超声速非定常气动力计算方法就是在这种情况下产生的。直到 70 年代,计算机的进一步发展,计算速度的迅速提



高,使得跨声速非定常气动力计算方法得到发展。此外,还有风洞试验,长期以来是进行试验研究的必不可少的手段。正是这些辅助工具,解决了目前存在的大量气动弹性问题。

进入超声速飞行速度范围,特别是在近代高速飞行器上,由于进入大气层时的高温环境,使得结构产生了热应力,为此需要研究结构在受热条件下的气动弹性现象,这就形成了“热气动弹性”的问题。

现代飞行器上普遍使用了伺服控制。飞行控制系统随着其功能不断发展,通频带变宽、权限增大;而飞行器结构设计的趋势是柔性增大。柔性飞行器结构、非定常气动力和控制系统之间的相互作用,发展了一门全新的而又与经典的颤振密切相关的分支学科,即气动伺服弹性力学。它作为一门涉及多门学科的交叉边缘学科,正蓬勃地发展,并在飞机设计中发挥愈来愈重要的作用。

最后,必须要提及的是,气动弹性力学作为一门广泛应用的学科,不仅在航空航天工程方面,而且在民用建筑、机械工程等方面的应用正日益增长。1940年建成通车才4个月的美国 Tacoma 悬索桥,在 18 m/s 的低风速下,经过一个多小时愈振愈烈的颤振后而倒塌。事故后,人们才认识到这是与机翼颤振现象相类似的桥梁颤振。这一教训一直为后来的桥梁设计所重视。这个事件表明了气动弹性在航空技术以外的领域中的重要性。从此以后,桥梁颤振问题得到了有关部门的高度重视。

1.3 气动弹性方框图

利用方框图来表示气动弹性之间所存在的基本物理关系是十分明了的。特别是对于气动弹性稳定性问题中的反馈过程,用方框图的方法来说明,就更加明确。这种方法是由冯元桢首先引用到气动弹性力学中来的。现在以弹性机翼为例来说明方框图的意义。当假设机翼是刚性机翼时,系统的两个参数,即升力 L 和攻角 α ,通过机翼处于一定的空气动力相互影响之中。此时攻角 α 作为输入参数,而刚性机翼所产生的气动力 L 作为输出参数。这样所绘制的方框图如图 1-1 所示。它象征性地描述出机翼的作用。事实上,机翼不可能是刚硬的,也就是攻角 α 与升力 L 之间的关系还和机翼的弹性变形有关。更确切的描述是把机翼的功能看做是由两个元件组成:第一个元件是产生升力的元件,第二个元件是弹性力学系统。在仅考虑机翼的空气动力功能时,可把机翼看成刚性的;而在考虑机翼弹性变形时,则把空气动力看成是另外一个外力系在起作用。也就是说,在

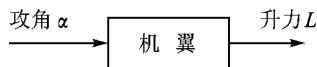


图 1-1 刚性机翼的空气动力方框图

分析机翼的空气动力功能和弹性力学功能时,可以把这两种功能分别进行描述。在把这两种功能联系起来考虑它们的相互影响时,则应该用物理上准确的方式来表达弹性机翼的总特性。这时,产生升力的弹性机翼的气动弹性特征可用图 1-2 来表示。由图可见,当机翼具有攻角 α 时,由此产生空气动力,并产生空气动力矩 M_a ,这个力矩使弹性机翼产生扭转变形 θ 。由此,

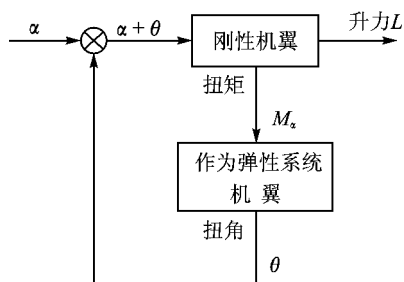


图 1-2 弹性机翼的气动弹性方框图

表明机翼处于临界状态下,变形 θ 的幅度是不定的。发生这种不稳定性时的空气流动速度称为扭转发散的临界速度。

新的几何攻角就成为 $\alpha + \theta$, 从而产生新的气动力矩 M_a , 使得气动弹性系统构成一条闭合回路, 它是一个反馈系统。从这种意义上来看, 气动弹性力学也就是研究具有弹性反馈系统的空气动力学问题。

现在来研究以下机翼扭转发散问题, 这是气动弹性静力学的稳定性问题。在上述中, 对攻角 α 和弹性扭角规定为攻角 $\alpha = \theta = 0$ 时, 升力 $L = 0$ 。 $\theta = 0$ 是 $\alpha = 0$ 时的惟一解答(零解)。现在可以考察下列问题: 当 $\alpha = 0$ 时是否存在非零解 $\theta \neq 0$? 参见图 1-3。如果这个解存在, 则

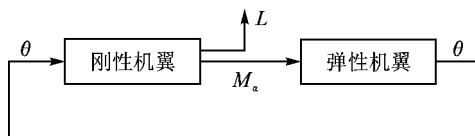


图 1-3 临界扭转发散的方框图

在气动弹性动力学问题中, 机翼要体现出 3 种不同的功能, 它将产生: ① 空气动力; ② 惯性力; ③ 弹性变形。把这 3 种功能写在如图 1-4 所示的三个方框中。按空气动力学原理, 刚性机翼会产生升力 L , 而机翼振动时则引起惯性力 I 。这两种力合在一起 ($L + I$) 使弹性机翼产生变形 θ ; 变形 θ 又产生新的作用力 L 和 I 。这就以反馈过程的形式构成一条闭合回路。以一个作用在俯仰受到约束的机翼上的突风响应为例, 其方框图如图 1-4 所示。

与上述突风响应问题相伴的是机翼的颤振问题。在颤振问题里, 不是去求机翼对于突风的响应, 而是在图 1-4 中, 令 $G=0$ 后寻求该齐次方程有没有非零解。所以, 面对这两种气动弹性动力学问题, 或是齐次系统有非零解, 即发生颤振; 或是有解答, 即突风响应问题。

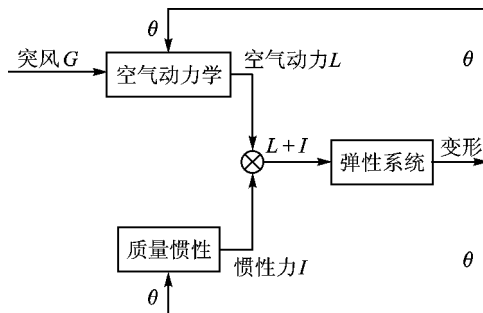


图 1-4 弹性机翼的突风响应



1.4 气动弹性问题的分类

1.4.1 气动弹性的力三角形

1946 年英国人 Collar 绘制了气动弹性力三角形,由此对气动弹性问题做了很好的分类。这个三角形直观地表达了气动弹性问题中各种力之间的联系,从而区分了各学科的研究范畴。如图 1-5 所示,力三角形的顶点表示系统的每种作用力,即弹性力、惯性力和空气动力。它们在气动弹性过程中处于相互影响的状态下,于是每一种气动弹性问题可按照该问题中这些作用力所处的相互关系进行直观的区别。在图 1-5 中,所有气动弹性动力学问题,都处在该三角形的内部,这时 3 种作用力都参与作用。而处于该三角形左边的外侧,均属于气动弹性静力学问题,这时只有弹性力和空气动力起作用。下面针对图 1-5 所提出的气动弹性问题,作简略的说明。

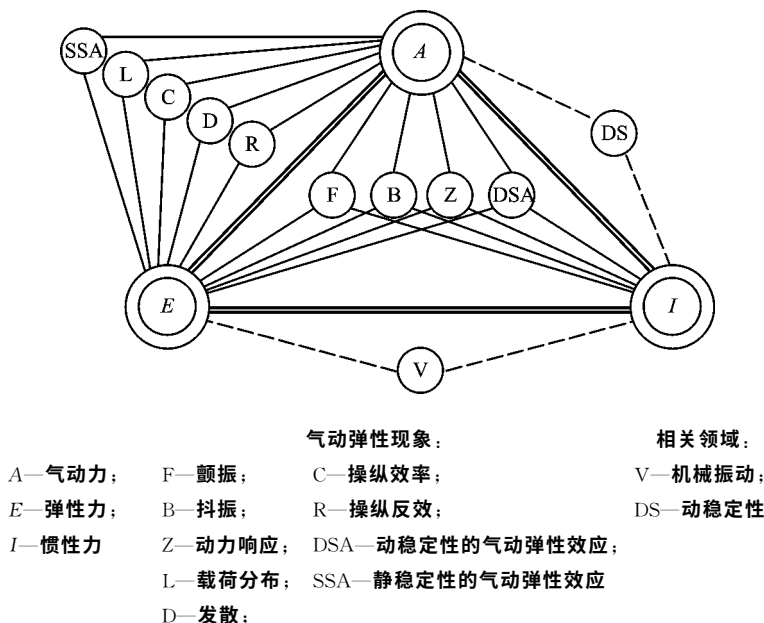


图 1-5 气动弹性的力三角形

首先,讨论处于三角形内部的气动弹性动力学问题。

颤振:是指发生在飞机飞行中的动不稳定性,此时的速度称为颤振速度。在飞行达到颤振速度时所发生的自激振动,大多数都会造成灾难性的后果。颤振现象的形态是多种多样的。在发生颤振时,大多是整架飞机都在某种程度上参与了这个过程。



抖振:是指由于气流中存在紊流度或不连续性,而由飞机自己产生的某个部件或全机的振动。例如,当飞机作某种机动飞行时,尾翼处于机翼的尾流中,在尾翼上则会发生这种振动。此外,在跨声速范围内,由于机翼上的激波和压力脉动,也会发生抖振振动。

动力响应:是指由于弹性系统受到与系统无关的、随时间任意变化的外界扰动力的作用而发生的强迫振动。这些干扰力可以是谐和的(最简单的情况)、周期性的(例如旋涡共振问题)、脉冲型的(例如孤立突风)或时间随机性的(例如大气紊流)。动力响应问题不仅在飞机结构上,而且在高层工程结构中都有重要的实际意义。

然后,讨论处于三角形左外侧边的气动弹性静力学问题。在该问题中只有系统的弹性力、定常的空气动力及与系统无关的静态外力的相互作用;如果不存在静态外力,就成为气动弹性静力学的稳定性问题。下面将讨论其中最重要的问题。

扭转发散:是指在飞行中的飞机升力面的静不稳定性。发生不稳定的飞行速度称为发散速度。其中升力面的弹性在不稳定性中起了主要作用。意即:在一个确定的风速下,弹性升力面受定常升力作用而发生扭转变形直到破坏。

载荷分布:是指升力面的弹性变形,对飞机的整个升力分布具有相应的影响。因此,在该问题中,是要确定由于升力面的弹性而引起的升力分布变化。

操纵效率:是指研究升力面结构弹性变形对舵面效率的影响。在工程上,保证后掠弹性机翼具有足够的舵面效率是进行机翼结构设计和气动设计的一个重要准则。

操纵反效:是与上述操纵效率相关联的一个问题。由于升力面结构弹性变形的影响,飞行速度的增加,导致操纵效率降低;在一个确定的飞行速度下,舵面效率变为零,该速度称为反效速度。超过该速度后,舵面作用就与原来预期的作用相反了。

最后,要提及的是飞机的弹性变形及其产生的气动弹性效应,对飞行静和动稳定性也都具有影响。这就使得飞行力学和气动弹性力学发生了紧密的联系。

为了完整起见,在图 1-5 中,以虚线表示了两个相关领域的学科,即机械振动学和经典的刚体飞行力学学科。这些都是力学的独立分支,但它们和气动弹性力学又无严格的界限。

1.4.2 热气动弹性的力四面体

在近代航空航天工程的领域内,特别是在近代高速飞行器上,由于进入大气层时的高温环境,热效应的重要性越来越大,故经典的气动弹性力学表达式不再适用。为此需要研究结构在受热条件下的气动弹性现象,这就形成了“热气动弹性”的问题。

热气动弹性力学这个概念,也可以直观地用一个热气动弹性的力四面体表示。它是在经典的气动弹性力三角形上增加一个角点,即热效应产生的热力。如图 1-6 所示的四面体,是由 I. E. Garrick 绘制得到的。这个力四面体的每一个面都表示了一类相互交叉影响的问题的范围。

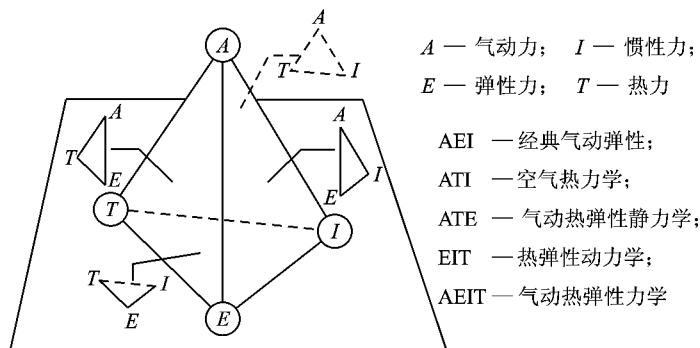


图 1-6 热气动弹性的力四面体

气动力/弹性力/惯性力:这是经典的气动弹性问题,已在 1.4.1 节讲述。

气动力/热力/惯性力:组成空气热力学,它是属于气动弹性力学以外的学科。

气动力/热力/弹性力:组成热气动弹性静力学问题,这里必须考虑热效应对气动弹性静力学特性的影响。

弹性力/惯性力/热力:组成热气动弹性动力学问题,这里必须考虑热效应对振动特性的影响。

当把上述这四个面汇聚在一起时,表示了上述所有问题的相互影响,即热气动弹性力学。

图 1-6 中所表示的热气动弹性力四面体是完全建筑在一个基面上的,该基面的特征就是材料的特性。其含义是材料的物理性质在所有的热气动弹性过程中具有基本的意义。

随着航天飞行器的发展,由于又出现了通常的升力面和操纵面,因此常规的气动弹性问题在空间飞行器上又重新具有意义;尤其是热气动弹性问题更受到了特别的重视。

1.4.3 气动伺服弹性问题

由于现代飞行器上普遍使用了伺服控制,故飞行器控制系统随着其功能不断发展,其通频带变宽、权限增大。而飞行器结构设计的发展趋势是柔性增大。由此,柔性飞行器结构、非定常空气动力和控制系统三者之间的相互作用,引发了气动弹性领域中的新课题。

以上所述的三者相互作用,也可用相互作用三角形示于图 1-7 中。由图可见:在三角形的三个边线上,各构成气动伺服弹性的子问题,如由结构动力学和非定常空气动力学的相互作用构成了为广大设计人员所熟知的气动弹性力学,诸如颤振、动力响应等问题;由结构动力学和飞行控制系统的相互作用构成了伺服弹性力学,它在气动伺服弹性技术的发展中愈来愈起到重要的作用,其中一个重要的原因是它能起到地面的校核作用;由非定常空气动力学和飞行控制系统的相互作用构成了气动伺服动力学,这项技术的研究尚很初步。气动伺服弹性技术则是汇集了三者的相互作用于一体的边界学科。也可以说是由于飞行控制的参与,改变了以没有控制系统情况为基础的气动弹性稳定性和动响应特性。应注意到,在经典的颤振理论中,



维持结构振动所需的能量完全由非定常气动力提供;而在气动伺服弹性耦合中,飞行控制系统也会对结构响应提供激励。这是由于飞机传感器除接受机身刚体运动外,还接受了结构振动信号。因此,若结构运动的频率在飞行控制系统的带宽内,则飞机控制面就要偏转,以控制结构响应。如果这种控制面的运动进一步引发结构响应的惯性力和气动力激励,就可能导致不稳定的结构振荡。

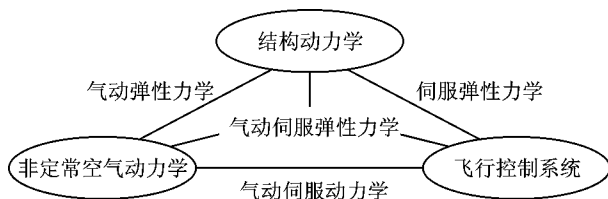


图 1-7 结构动力学、非定常空气动力学及飞行控制系统相互作用三角形

1.5 飞行器设计与气动弹性设计

尽管气动弹性现象早就普遍存在于大自然中,但真正作为一门科学技术来研究,是在飞机诞生以后的 20 年里。为了解决不断出现在飞机上的气动弹性问题,促使了气动弹性逐渐形成学科。应看到,飞机设计的过程也是气动弹性的设计过程,二者是密切相关的。

1.5.1 在飞机设计中的气动弹性设计

气动弹性现象所引起的效应,在现代高速飞机的设计过程中占有非常重要的地位。这些气动弹性效应都必须综合考虑到飞机设计中去,以防止出现不利的气动弹性现象。这些措施和方法,有的已作为设计人员所遵循的设计准则,甚至作为设计规范而强制执行。现就几个主要气动弹性现象对飞机设计的影响简述如下:

颤振是在飞机设计中所考虑的气动弹性现象中影响最大的一种。在飞机结构设计的同时就必须考虑防止发生颤振的问题。现代高速飞机可以出现多种颤振类型。对于预防颤振的方法和措施,大多可采用增加刚度,或者通过调整质量分布来降低耦合;也可将上述二者联合应用。事实上,影响颤振的最重要因素是机翼的扭转刚度。注意到机翼结构设计是由强度和刚度规范准则支配的,但不能片面强调某一个因素。例如在机翼设计中过高地追求扭转刚度所带来的高颤振速度,所设计出的机翼是不合理的。

对于在机翼上的较大的集中质量,其所在的位置,要以预防颤振为先决条件来考虑。例如:在机翼上某一给定的集中质量,可能需要较高的机翼刚度,这就势必增加机翼结构质量。为了预防颤振,在飞机设计初始阶段,就要对这些大的集中质量分布进行分析和模拟研究,以确定最佳的质量分布。



在颤振特性上,机翼的平面形状和展弦比也有重要的影响。减少机翼展弦比,增大机翼后掠都会使颤振速度提高。操纵面的设计必须考虑到颤振的影响,诸如在确定气动力和质量的平衡及铰链位置等时,必须考虑。

此外,当飞机作某种机动飞行时,若尾翼处于翼面的尾流中,则在尾翼上就会发生抖振。除此以外,在跨声速范围内,由于机翼上的激波和压力脉动,也会发生抖振,这种抖振有时称为自激抖振。为了减缓抖振的发生,要注意在飞机设计中,保持机翼-机身连接处光滑的外形,这对于减少因机翼-机身干扰而产生流动分离是有效的。此外,把尾翼的位置放在扰动存在的区域以外,可避免尾翼的绕流抖振。在跨声速时,机翼上流动分离及机翼-机身连接处的流动分离,形成了尾翼扰流抖振。紊流的强度和最高强度的位置随机翼的厚度、弯度和攻角变化。

在飞机设计中存在两个重要的动响应问题,即突风及着陆问题。此外,机炮射击、投放炸弹等也都会产生突加载荷。

在计算飞机的外载荷时,有时把结构看作是完全刚硬的。这种做法,除了忽略了结构变形诱导出的附加气动力外,还忽略了由于突然施加的外载荷而引起的振动。事实上它对结构内部的应力却有不可忽视的影响。附加的惯性力连同振动所产生的应力,最终以增加机翼和机身梁的弯曲和扭转应力的形式出现。所以梁的设计必须考虑承受这部分载荷。

气动弹性效应阵风等载荷设计条件,是一个重要的影响因素。例如,在阵风条件下直机翼的动响应在根部产生的扭转,比起刚硬假设所算出的弯扭要高出 15 % ~ 20 %。特别对于带有后掠角的机翼,就必须考虑气动弹性效应。图 1-8 表示了考虑机翼弹性的重要性。图中所示是一架有后掠角机翼的飞机,其当量速度为 250 m/s,且在 3 500 m 高空飞行。图中虚线表示机身加速度历程,其峰值定为 1。实线给出了机翼翼尖加速度历程对机身加速度峰值之比。由图可见,在有后掠角机翼上确定正确的载荷分布,机翼弹性占有重要地位。

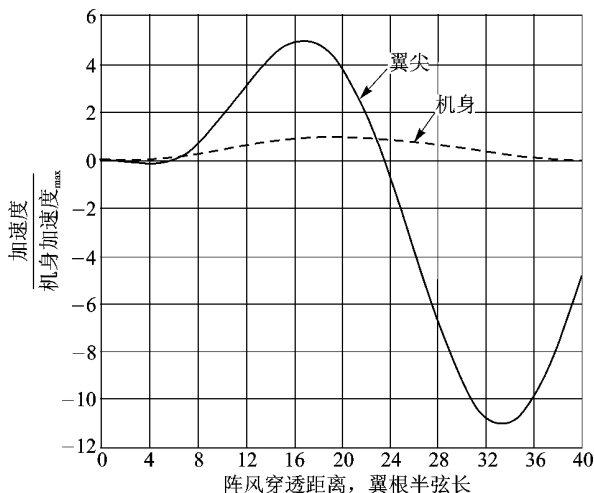


图 1-8 带有后掠角机翼的飞机在由于阵风通过时其翼尖和机身加速度的比



除了上述的气动弹性动力问题在飞机设计中必须考虑以外,还有很多气动弹性静力问题也必须在飞机设计中一并考虑。例如,飞行速度的提高、升力面的弹性变形引起了飞行载荷的重新分布。这就产生了一个气动弹性静力问题,即确定由于升力面的弹性而引起的升力分布

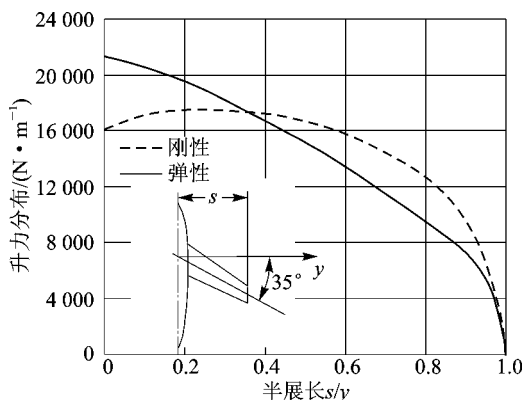


图 1-9 在加速度为 $2g$ 的机动飞行中完全刚体和弹性后掠机翼的飞机载荷分布

变化。图 1-9 表示了一个载荷分布的例子,即后掠的弹性机翼和其相应的完全刚性机翼,在加速度为 $2g$ 的机动飞行中具有升力分布。由图可见,在该情况下,由于弹性机翼的总升力的作用线移向机翼根部,所以从强度观点来看,大展弦比机翼的弹性变形对载荷分布一般是有利的。然而,对前掠机翼来说,其结果适得其反。

与载荷重新分布相关的气动弹性静力问题是扭转发散。在直机翼中最常见的发散问题是扭转发散。影响直机翼发散的设计参数主要是机翼扭转刚度以及气动中心到扭心之间的

距离。

此外,气动弹性效应中另一个重要问题就是翼面弹性变形对舵面效率的影响。而与此相关联的一个问题就是操纵面反效。为了直观地说明在副翼效率上的速度影响,在图 1-10 中展示了一架战斗机在海平面飞行时,在副翼效率上的速度影响。

注意,在以上所述的气动弹性对飞机设计的影响中,存在着 3 种不同的(临界)速度,即颤振临界速度、发散临界速度和副翼反效临界速度。在对平直机翼、后掠机翼和前掠机翼的 3 种临界速度作了分析之后,可大致绘出图 1-11 的图形,以供设计者参考。

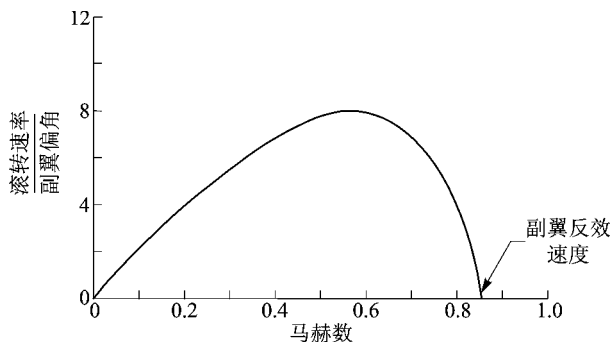


图 1-10 在副翼效率上的速度影响

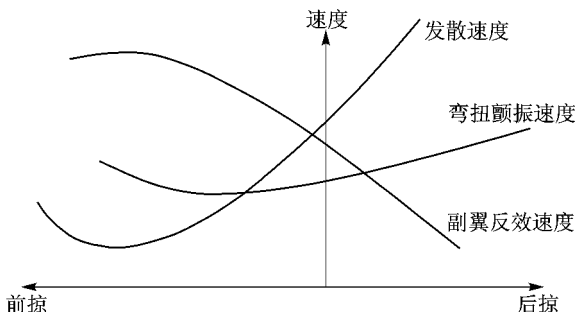


图 1-11 机翼的 3 种临界速度比较

1.5.2 气动弹性设计在飞机设计中的新进展

现代飞行器都具有大柔性、结构与起飞重量比小的特点,在高性能数字式控制系统的支持下,能充分利用气动弹性效应,把结构、气动力和飞行控制系统等多种学科集成一体。该设计方法,重点在解决飞行中飞行控制系统、柔性结构和气动力之间的相互作用问题。它将在飞机设计中起主要作用。

近年来所发展的主动控制技术和气动伺服弹性技术,以及二者的结合,在飞机设计中起了关键的作用。为了验证这项技术,国外开展了大量的研究,并提出“主动气动弹性机翼”的概念和工程实施计划。其最终目的是通过验证“主动气动弹性机翼”概念,确定具有工程应用价值的理论和设计方法。

从主动气动弹性机翼技术的研究看,它是气动伺服弹性技术的拓宽和延伸。气动伺服弹性技术是主动气动弹性机翼技术的核心内容。主动气动弹性技术的设计思想与传统的利用结构的强度和刚度来被动地防止不良的气动弹性效应的设计方法不同,它是通过全权限、快速响应的数字式主动控制系统来主动且有效地利用机翼的柔性。传统的设计方法中,由控制面产生控制力,从而控制飞机运动。而机翼的柔性产生的气动弹性效应会减弱控制面的效能,同时也使机翼的其他气动弹性特性变差,例如颤振速度降低等。为了避免这种不利的情况,只能采用被动的防止方法,这就势必使结构的质量增加。

在主动气动弹性机翼技术中,机翼带有多个前缘和后缘控制面。在主动控制系统的操纵下,多个控制面协调偏转,主动使机翼发生所希望的弹性变形;变形的机翼产生控制力,使飞机运动特性改变。研究证明:主动气动弹性机翼能获得如下的效益:① 显著地增强控制力;② 在所有飞行范围内减少气动阻力;③ 减小机翼结构质量;④ 在同样的展长和后掠角时,开拓了新的、先进的机翼设计手段;⑤ 抑制颤振,提高颤振速度;⑥ 阵风与机动载荷减缓,提高了机动性。由此可见,主动气动弹性机翼技术的出现,使飞机设计中防止气动弹性的不良影响,从被动方式走向主动设计方式。这在一定程度上说明,气动弹性设计不仅作为飞机设计的



指导思想,还将成为飞机设计的新理念。

思考题

- 1.1 飞行器气动弹性设计的任务是什么?在研究的内容中主要关心什么问题?
- 1.2 利用气动弹性的力三角形,来解释气动弹性领域内的分类,并对各种气动弹性现象作出说明。
- 1.3 简要说明在飞机设计中的气动弹性设计。
- 1.4 根据自己的理解,考虑气动弹性设计在飞机设计中的新发展。

参考文献

- 1 冯 Y C. 空气弹性力学引论. 冯钟越,管德译. 北京:国防工业出版社,1963
- 2 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海:上海科学技术文献出版社,1982
- 3 道尔 E H, 小柯蒂斯 H C, 斯坎伦 R H. 气动弹性力学现代教程. 陈文俊,尹传家译. 北京:宇航出版社,1991
- 4 诸德超,陈桂彬,邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室,1986
- 5 杨超,陈桂彬,邹丛青. 未来战斗机关键技术——主动柔性机翼. 国际航空,1997(11)
- 6 Bisplinghoff R L, Ashley H, Halfman R L. Aeroelasticity. Addison - Wesley Publishing Company, Inc. , 1955
- 7 Noll T E. Aeroservoelasticity. AIAA - 90 - 1073,1990
- 8 Taylor R, Pratt R W, Caldwell B C, et al. Improved Design Procedures in Aeroservoelasticity. AIAA - 98 - 4458,1998
- 9 Weisshaar T W. Aeroelasticity - Advances and Future Directions. AIAA - 92 - 2446 - CP, 1992



2.1.1 扭转发散

将上述二元翼段连同刚心处的扭转弹簧一起偏转一个初始角度 α_0 ，然后开启风洞，气流速度为 V 。此时，由于翼段是弹性连接于支点上的，所以在气动力与弹簧力的作用下，翼段将在新的攻角 $\alpha (\alpha = \alpha_0 + \theta)$ 下达到平衡（见图 2-1）。显然，附加的攻角 θ 是因为翼段具有弹性支持而产生的扭转变形，体现了弹性体在气流中的效应，所以，这是一种气动弹性效应。

不难设想，如果弹簧的刚度很大，或者风洞的流速很低，则扭角 θ 会很小；如果弹簧的刚度很低，或者翼段处于高速气流下，则扭角 θ 将很大，以至于发生弹簧扭转超过极限而导致破坏的现象。

这个附加攻角 θ 与气流速度有密切的关系，这种关系有时会达到极为敏感的程度。根据气动力理论，翼型上的二元（平面）流动的气动力可以表示为升力（作用于气动力中心 A ，向上为正）和绕 A 点的力矩 M_A （抬头为正，与攻角无关）。所以，可得到升力和绕刚心的气动力矩分别为

$$L = C_L q S = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (\alpha_0 + \theta) q S \quad (2-1)$$

$$M = M_A + L e \quad (2-2)$$

式中 C_L ——升力系数；

q ——气流动压， $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ ， ρ 为空气密度；

S ——翼段参考面积；

M ——绕刚心的气动力矩；

e ——以气动力中心 A 为起点量至刚心的距离，向后为正；

$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ ——翼段升力线斜率。

事实上，在不影响问题本质的前提下，不妨假定 $M_A = 0$ ，于是绕刚心的气动力矩成为

$$L e = C_L q S e = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (\alpha_0 + \theta) q S e \quad (2-3)$$

根据气动力矩与弹簧力矩平衡的条件，可以写出平衡方程

$$K_\theta \theta = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (\alpha_0 + \theta) q S e \quad (2-4)$$

式中， K_θ 是扭转弹簧常数。进一步处理成

$$\left(K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S \right) \theta = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S \alpha_0 \quad (2-5)$$

由此解得



$$\theta = \frac{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S \alpha_0}{K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S} \quad (2-6)$$

由式(2-6)可以看出,当动压 q 达到某一特定值时,式(2-6)的分母项成为零, θ 就趋于无穷大,翼段成为扭转不稳定。这种现象称为扭转发散。显然,在变形达到无穷大之前,弹簧早已破坏了。可见式(2-6)分母为零的条件就是扭转发散的“发散条件”,即发散条件可表示为

$$K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S = 0 \quad (2-7)$$

由此可得发散动压为

$$q_D = \frac{K_\theta}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e S} \quad (2-8)$$

又因为动压为 $\frac{1}{2} \rho V^2$, 故可求得发散速度为

$$V_D = \sqrt{\frac{2K_\theta}{\rho \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e S}} \quad (2-9)$$

分析式(2-8)可以发现,当 e 是负值时,即刚心移至气动中心之前时, q_D 为负,没有物理意义。这说明此时二元翼段在任何动压下都是气动弹性扭转稳定的。正因为如此,对于超声速情况,由于气动中心后移,刚心到了气动中心之前,扭转发散的危險就大为降低了,可见,扭转发散是典型的亚声速现象。同时,式(2-8)还表明,发散动压 q_D 与初始攻角 α_0 无关。所以,可以进一步令方程(2-5)的等号右边为零来研究这一现象。当 $\alpha_0 = 0$ 时,方程(2-5)成为

$$\left(K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S \right) \theta = 0 \quad (2-10)$$

这是一个以 θ 为变量的齐次方程。这个方程除有 $\theta = 0$ 的解之外,还可以是任意非零解,其条件是式(2-10)中 θ 的系数等于零。该条件可表示为

$$K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S = 0 \quad (2-11)$$

由上式可解得使 θ 具有非零解的动压 q , 这一动压就是式(2-8)表示的发散动压 q_D , 而式(2-11)也正是发散条件式(2-7)。

2.1.2 载荷重新分布

将式(2-6)中的 θ 值代入升力 L 的表达式(2-1), 则有

$$L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left[\alpha_0 + \frac{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S \alpha_0}{K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S} \right] q S = \frac{K_\theta \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}{K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e q S} \alpha_0 q S \quad (2-12)$$



可见,在发散条件式(2-7)成立时,升力亦同样趋于无穷大。而当动压 q 小于发散动压 q_D 时,式(2-12)的分母将大于零,此时式(2-12)具有确定值,升力将随动压而改变。这种现象就属于载荷重新分布的问题。

综上所述,可以用一个框图来表示气动力与弹性系统之间的关系。图 2-2 所示的 α_0 可称为输入攻角,升力 L 是输出,弹性扭角 θ 则是系统的反馈量。由此可见,气动弹性问题就是当系统具有弹性反馈时的气动问题。

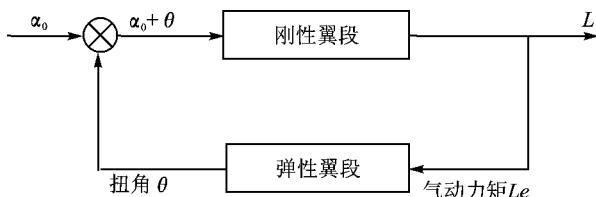


图 2-2 弹性机翼的气动弹性反馈

观察式(2-6)可以发现,如果将其分子、分母同除以 K_θ ,则有

$$\theta = \frac{\frac{\partial C_{L_{eq}}}{\partial \alpha} S \alpha_0 / K_\theta}{1 - \frac{\partial C_{L_{eq}}}{\partial \alpha} S / K_\theta} \quad (2-13)$$

上式分子项表示当不考虑气动弹性效应所附加的气动力时,亦即在原先的 α_0 攻角下的气动力所产生的弹性扭角,记作 θ^r ,即

$$\theta^r = \frac{\partial C_{L_{eq}}}{\partial \alpha} S \alpha_0 / K_\theta \quad (2-14)$$

利用式(2-8),则式(2-13)成为

$$\frac{\theta}{\theta^r} = \frac{1}{1 - \frac{\partial C_{L_{eq}}}{\partial \alpha} S / K_\theta} = \frac{1}{1 - \frac{q}{q_D}} \quad (2-15)$$

此式表示考虑了气动弹性效应后弹性扭转变形的放大因子;当动压趋近于发散动压时,扭角 θ 将急剧增大。当然对于任何实际升力面,弹性扭角不可能达到无穷大,因为弹性扭转与气动力矩之间的线性关系只能在小攻角时成立;攻角稍大时,这种关系早已不符合了。但是,弹性扭转加大,会使结构破坏。因此,飞行器的允许飞行速度必须低于升力面的发散速度。

当式(2-5)的等号右边不为零时,也就是在一定的初始攻角 α_0 下,将成为变量 θ 的非齐次方程,于是在 θ 的系数不等于零的条件下, θ 可有确定值。而只有当动压 q 小于发散动压 q_D 时,系数才不等于零。有了 θ 的确定值,就可以根据式(2-1)求得在考虑气动弹性效应后的升力 L 。这个问题就是载荷重新分布问题。根据以上所述,可以了解到扭转发散与载荷重新分布具有密切的联系;但它们又有本质的区别,并且不可能同时存在。从数学上讲,求发散动压



属于求解方程(2-10)的特征值问题,参数 q_D 是其特征值。由此可以得到确定发散动压 q_D 的一般方法。而载荷重新分布问题则是非齐次方程的问题。

如果再把式(2-10)改写为

$$K_\theta \theta = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} eqS\theta$$

则可以更明显地看出它的力学意义:假想系统产生一个小的扭角 θ , 当 $q = q_D$ 时, 因 θ 而附加的气动力恰好与扭角 θ 产生的弹簧扭矩相平衡。在力学中这是静力稳定性的问题。 q_D 就是随遇平衡的临界值。上式中的两项若都以 q 为横坐标, 则可以画出如图 2-3 所示的两条直线。图中表示, 当动压 q 较小时, 附加的气动力矩小于弹簧扭矩, 说明系统是稳定的; 当动压 q 增大时, 同样的 θ 角产生的气动力矩将随之增大, 而弹簧扭矩却是一个恒定值, 与动压无关。所以必定在某一动压 q 下, 两个扭矩相等。当动压再继续增大时, 附加的气动力矩将超过弹簧的恢复力矩, 从而使微小的扭角 θ 都会使系统成为弹性静不稳定。按图 2-3 中的交点, 可以确定发散动压 q_D 。

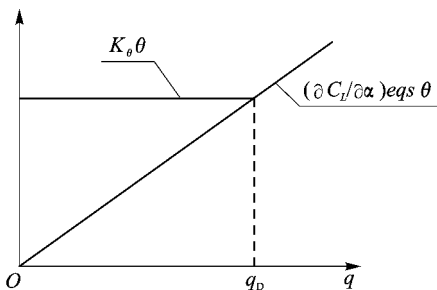


图 2-3 弹性反作用力矩和附加气动力矩随动压的变化

2.1.3 操纵效率与操纵反效

为了研究二元翼段操纵面效率的基本物理关系, 可以利用一个带有操纵舵面的模型来阐明, 如图 2-4 所示。

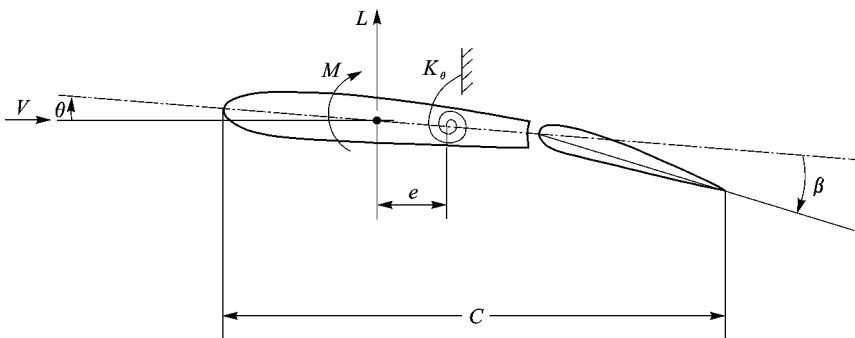


图 2-4 带操纵面的二元翼段

2.1.2 节讨论的是翼段在对称面内飞行的基本气动弹性现象。这里将讨论操纵面偏转(可对应于机翼的副翼)时, 飞行器产生绕机体轴的滚转时所产生的气动弹性现象。仍然同以前一样, 将二元翼段用弹簧支持在刚心上, 使机翼攻角为零, 固定在风洞中。然后操纵面偏转



β 角,并开启风洞。此时偏转操纵面引起翼段上气动力改变。例如,操纵面向下偏转,将使翼型弯度加大,从而使升力增大。这个增量可以表示为 $\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta q S$ 。其作用点一般均位于翼剖面的气动中心的后面;如果把它移至气动中心上,则同时产生一个对气动中心的力矩,可以用 $\frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} \beta q S C$ 来表示, C 为翼段弦长。通常这个力矩为低头力矩,也就是导数 $\frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta}$ 为负值。这个低头力矩使翼段向减小攻角的方向产生弹性扭转变形,于是将附加一个向下的升力,使总升力减小。一般情况下,这个附加升力往往与操纵面偏转直接产生的升力方向相反,从而减小操纵面偏转的效率。随着动压的增大,效率会不断降低。当动压增大到某一临界值时,偏转角 β 将完全失去效用;如果再增大动压,则甚至会产生相反的效果。这就是气动弹性的又一种现象,称为操纵效率和操纵反效问题。

为了得出操纵反效的临界动压,以及观察操纵效率随动压的变化,在这里列出图 2-4 所示的翼段平衡方程。设操纵面未偏转之前翼段攻角为零,这个假定对于所论问题是没有影响的。假定翼段在扭转了角度 θ 后达到平衡位置,那么根据平衡条件,可得出对刚心的力矩平衡方程为

$$K_\theta \theta = \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta q S e + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta q S e + \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} \beta q S C$$

即

$$\left(K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q S e \right) \theta = q S \left(e \frac{\partial C_L}{\partial \beta} + C \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} \right) \beta \quad (2-16)$$

上式表明,该气动弹性系统在偏转操纵面 β 后,在气动力与弹性力作用下产生的扭转变形为

$$\theta = \frac{q S \left(e \frac{\partial C_L}{\partial \beta} + C \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} \right) \beta}{K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q S e} \quad (2-17)$$

此时的升力系数由两部分组成:一部分是弹性扭角 θ 引起的;另一部分是偏转 β 直接引起的。利用式(2-17),即可得到

$$C_L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta = \frac{\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} q S C + K_\theta \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right) \beta}{K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q S e} \quad (2-18)$$

上式中,由于 $\frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta}$ 通常为负,所以在动压尚未到达发散动压之前(即分母不为零),如果动压 q 增大,则可致使分子为零。此时 $C_L = 0$,说明在这一动压下操纵面偏转不产生升力,操纵面失去效用。这一动压称为操纵反效临界动压,记作 q_R 。由上式分子为零的条件得



$$q_R SC \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} + K_\theta \frac{\partial C_L}{\partial \beta} = 0 \quad (2-19)$$

可解得反效动压

$$q_R = \frac{K_\theta \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} / \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)}{-SC \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}} \quad (2-20)$$

或反效速度

$$V_R = \sqrt{\frac{K_\theta \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} / \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)}{-\frac{\rho}{2} SC \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}}} \quad (2-21)$$

由上式可见,反效的临界状态与距离 e 无关,即翼段刚心位置对操纵反效速度没有影响。这是因为翼段处于反效临界状态时,升力为零,仅有纯力偶。另外,反效临界状态与初始攻角也没有关系。

假如翼段是刚硬支持的,显然此时操纵面偏转角所产生的升力增量仅仅与 β 有关,把这个升力系数记作 C_L^r ,即

$$C_L^r = \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta \quad (2-22)$$

当动压 $q < q_R$ 时,虽然尚未达到操纵反效的极端情况,但是由于气动弹性的影响,将使操纵效率降低;降低的程度可以用比值 C_L/C_L^r 来表示。这一比值称为操纵效率,记作 η 。由式(2-18),(2-22)可得

$$\eta = \frac{C_L}{C_L^r} = \frac{\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} q SC + K_\theta \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)}{\left(K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q Se \right) \frac{\partial C_L}{\partial \beta}}$$

即

$$\eta = \frac{\left(q \frac{Se}{K_\theta} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \cdot \frac{C}{e} \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} / \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right) + 1}{1 - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{K_\theta} q Se} \quad (2-23)$$

考虑到式(2-8)和式(2-20),则上式成为

$$\eta = \frac{1 - q/q_R}{1 - (q_R/q_D)(q/q_R)} \quad (2-24)$$

可见,操纵效率 η 是随着飞行动压、反效动压与发散动压之比 q_R/q_D 而变化的。对于 $q_R < q_D$ 的情况,当 $q \rightarrow q_R$ 时, $\eta \rightarrow 0$ 。对于 $q_R = q_D$ 的情况, η 总为 1,这说明使 $q_R = q_D$ 的设计可能获得弹性翼段的最佳操纵效率。至于 $q_R > q_D$ 的情况,当 $q \rightarrow q_D$ 时,效率趋于无穷大;但如果 $q_D < q <$



q_R , 效率成为负值, 并且操纵已经反效, 因此, 在这种情况下的 q_D 也成为一个临界的反效速度, 也就是说, 操纵反效在 q_R 或 q_D 时都会发生。但究竟在哪个动压下发生, 要取 q_R 和 q_D 中的较小者。总之, 飞行器设计时, 一方面要尽可能地提高发散和反效动压, 另一方面还要通过设计参数调整选择合适的 q_R/q_D , 使飞行范围内的操纵效率尽可能高。

例题 一个二元翼段, 其操纵面以扭转弹簧 K_β 支持于翼段的铰链轴, 如图 2-5 所示。试求该气动弹性系统的扭转发散动压 q_D 及反效动压 q_R 。

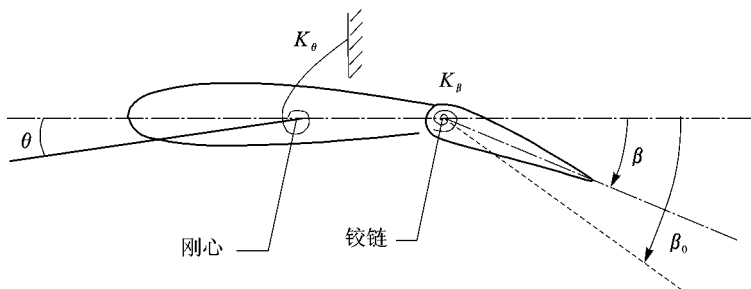


图 2-5 铰链弹性支持的二元翼段

解 该系统由于刚心与铰链轴均为弹性支持, 因此当操纵面偏转 β_0 后, 系统由于气动弹性效应使原先处于自由状态的弹簧都产生变形, 在 θ, β 的位置上达到平衡。对刚心的力矩平衡方程为

$$K_\theta \theta = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta q S e + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta q S e + \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} \beta q S C \quad (a)$$

对铰链轴的力矩平衡方程为

$$K_\beta (\beta - \beta_0) = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} \theta q S C + \frac{\partial C_H}{\partial \beta} \beta q S C \quad (b)$$

式中 C_H ——对铰链轴的气动力矩系数;

β_0 ——操纵面初始偏角。

用矩阵将 (a), (b) 两式表示为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q S e - K_\theta & \frac{\partial C_L}{\partial \beta} q S e + \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} q S C \\ \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} q S C & \frac{\partial C_H}{\partial \beta} q S C - K_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_\beta \beta_0 \end{bmatrix} \quad (c)$$

由此可得当系统初始输入 $\beta_0 = 0$ 时, 上列方程有非零解的条件是系统行列式等于零。所以此系统扭转发散的条件为

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q S e - K_\theta & \frac{\partial C_L}{\partial \beta} q S e + \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \beta} q S C \\ \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} q S C & \frac{\partial C_H}{\partial \beta} q S C - K_\beta \end{vmatrix} = 0 \quad (d)$$



从上式可以解出特征根 q_1 和 q_2 , 取其较小者即为扭转发散的动压 q_D 。将上式展开有

$$q^2 S^2 C^2 \left(\frac{e}{C} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_H}{\partial \beta} - \frac{e}{C} \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} - \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} \right) - qSC \left(K_\theta \frac{\partial C_H}{\partial \beta} + K_\beta \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{e}{C} \right) + K_\theta K_\beta = 0$$

则

$$q_D = \min \left(\frac{1}{SC} \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AE}}{2A} \right) \quad (A \neq 0) \quad (e)$$

或

$$q_D = \frac{-1}{SC} \frac{E}{B} \quad (A = 0, B < 0) \quad (f)$$

式中

$$A = \frac{e}{C} \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_H}{\partial \beta} - \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \frac{\partial C_H}{\partial \alpha}$$

$$B = - \left(K_\theta \frac{\partial C_H}{\partial \beta} + K_\beta \frac{e}{C} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)$$

$$E = K_\theta K_\beta$$

为了求得反效速度 q_R , 首先假定系统尚未发散, 所以 $\Delta \neq 0$ 。于是可以由式(c)解出平衡位置

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} K_\beta qS \left(e \frac{\partial C_L}{\partial \beta} + C \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \right) \\ -K_\beta \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qS e - K_\theta \right) \end{bmatrix} \beta_0 \quad (g)$$

由于操纵反效情况下升力为零, 可得

$$C_L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta = 0$$

将式(g)代入上式, 则有

$$C_L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{K_\beta q_R S \beta_0}{\Delta} \left(e \frac{\partial C_L}{\partial \beta} + C \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \frac{K_\beta \beta_0}{\Delta} \left(e q_R S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - K_\theta \right) = 0$$

因此反效动压

$$q_R = \frac{K_\beta \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} / \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)}{-SC \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}}$$

此式与刚性操纵系统的反效动压式(2-20)一致。而式(e)和式(f)表明, 此系统的扭转发散动压不同于式(2-8)。

前面讨论了两大类静气动弹性的基本现象。当刚心位于气动中心之后时, 由于气动弹性的影响, 系统将存在一个临界动压 q_D ; 当气流动压达到 q_D 时, 系统完全失去抵抗外力的能力, 成为静不稳定。提高发散动压的主要途径是增大扭转刚度或减小气动中心与刚心之间的距离



e 。同时,气动弹性效应还会引起操纵效率降低和反效现象,这一事实又说明系统还存在另一个临界动压 q_R 。相应于这一动压,操纵面将完全失去效用。当 $q_R < q_D$ 时,动压增大,操纵效率降低;当 $q_R = q_D$ 时,操纵效率为最佳,始终为 1。提高 q_R 的主要方法仍然是增大扭转刚度。

还应指出,虽然以上公式是在二元翼段上得到的,但在进行整个弹性升力面的气动弹性静力分析时,上述结果可以作为第一次近似估算。这时,可以取 70 %~80 % 半翼展处的翼剖面特征参数进行计算。

2.1.4 非线性影响

仍然考虑前述二元翼段。当扭角相当大时,升力和攻角间的线性关系及扭角间的线性关系都不成立了,这时必须考虑非线性的影响。

一般来说,当扭角相当大时,弹簧的刚度将增加。例如,可用下式表示弹簧恢复力矩,即

$$M_e = -K_\theta \theta - K_{\theta_3} \theta^3$$

式中, K_θ, K_{θ_3} 均为正值。

当攻角相当大时,气流分离,升力将减小。例如,可把升力表示成

$$L = \left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_3 \alpha^3 \right]$$

式中, $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ 和 $\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_3$ 都是正值。

根据气动力矩与弹簧力矩平衡的条件,并假设绕刚心的气动力矩 M_A 和初始攻角 α_0 均为零,式(2-4)平衡方程可改写为

$$K_\theta \theta + K_{\theta_3} \theta^3 = \left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_3 \theta^3 \right] q S e \quad (2-25)$$

整理后得到

$$\theta \left\{ q S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - K_\theta - \theta^2 \left[q S e \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_3 + K_{\theta_3} \right] \right\} = 0 \quad (2-26)$$

所以, θ 有非零解的条件是

$$\theta^2 = \frac{q S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - K_\theta}{\left[q S e \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_3 + K_{\theta_3} \right]} \quad (2-27)$$

因为 θ 必须是实数,所以上式中右端也必须为正值。

现在讨论 $e > 0$ 时上式的解。仍记(见式(2-8))

$$q_D = \frac{K_\theta}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e S}$$

在式(2-27)中,分母恒为正,所以有非零解的条件是式(2-27)的分子也为正值。当 $q < q_D$



时,分子为负,由式(2-27)可见 θ 无非零解,且由式(2-26)可见这时 θ 必须为零。当 $q > q_D$ 时,分子为正, θ 才有非零解。扭角随速压变化情况如图 2-6 所示。由图可见,当 $q > q_D$ 时, θ 为有限值,而且它可能有两个平衡位置。这将视扰动的初始条件,也可能因弹簧的固有缺陷而决定翼段将处在哪个平衡位置。

这里需要说明的是,若不考虑非线性影响,则当 $q < q_D$ 时,若翼段受扰动而有一扭角 θ ,则弹性恢复力矩将使翼段回复平衡位置;当 $q > q_D$ 时,随速压增大,气动附加力矩将使扭角无限增大,直至破坏。当考虑非线性影响后,因扭角增大时,刚度因非线性增大,升力因非线性而减小,所以虽然翼段受扰动后不是回复平衡位置,但也不像线性情况那样无限增大,而是有确定的平衡位置,且其扭角为有限值。

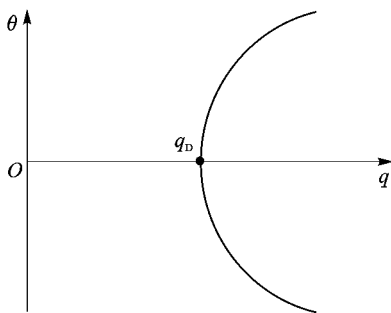


图 2-6 非线性情况下扭角随速压的变化

事实上还未从实验中观察到如图 2-6 所示的扭角变化关系,这可能是因为:虽然 $q > q_D$ 时变形将是有限值,但这是在绕刚心的气动力矩 M_A 和初始攻角 α_0 均为零的情况下得到的;而实际上初始攻角 α_0 不为零,故在气动力作用下,变形仍将导致结构破坏。

2.2 长直机翼的解析方法

实际机翼与二元翼段有所不同。例如,它们的剖面性质可能沿翼展变化,剖面之间都是弹性连接,因此有相对变形。大展弦比平直机翼多被低速、亚声速飞机和巡航导弹以及轻型飞机等飞行器采用。本节将分别讨论一个大展弦比平直机翼的扭转发散、操纵反效和操纵效率以及载荷重新分布的解析方法,进一步说明静气动弹性的基本分析方法和概念。

2.2.1 长直机翼的扭转发散

处理扭转发散问题可以认为是静气动弹性中最简单的一个。很多基本的方法和概念都可以用它说明。所以,为了简化问题的描述,本节中气动力采用“片条”假设。处理一个长直机翼,利用微分方程是一个常用的方法,特别是它的数学处理较为方便。

为了简单起见,假设机翼各剖面的刚心位于同一直线上(称为弹性轴),如图 2-7 所示。大部分长直机翼可以认为是一个根部固支的弹性梁,其弹性轴垂直于翼根。气动中心线与弹性轴间距为 $e(y)$,重心线与弹性轴间距为 $d(y)$ 。假设气动中心线和重心线在弹性轴之前为正。 l 为半展长。

气动力采用片条假设以简化关系方程。所谓片条理论,即假定在展向位置 y 处翼剖面的



局部升力系数 $C_L(y)$ 只与局部攻角 $\alpha(y)$ 成正比, 而与其他剖面无关, 亦即机翼上各剖面的气流都只是沿翼型作二元平面流动, 而不考虑气流沿展向流动的三元效应。据此假设, 其升力系数为

$$C_L(y) = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\infty} \alpha(y)$$

式中, $\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\infty}$ 是无限翼展(二元翼型)的升力线斜率; 对于不可压流平板, 一般取为 2π 。同时, 假定机翼没有气动力扭转。

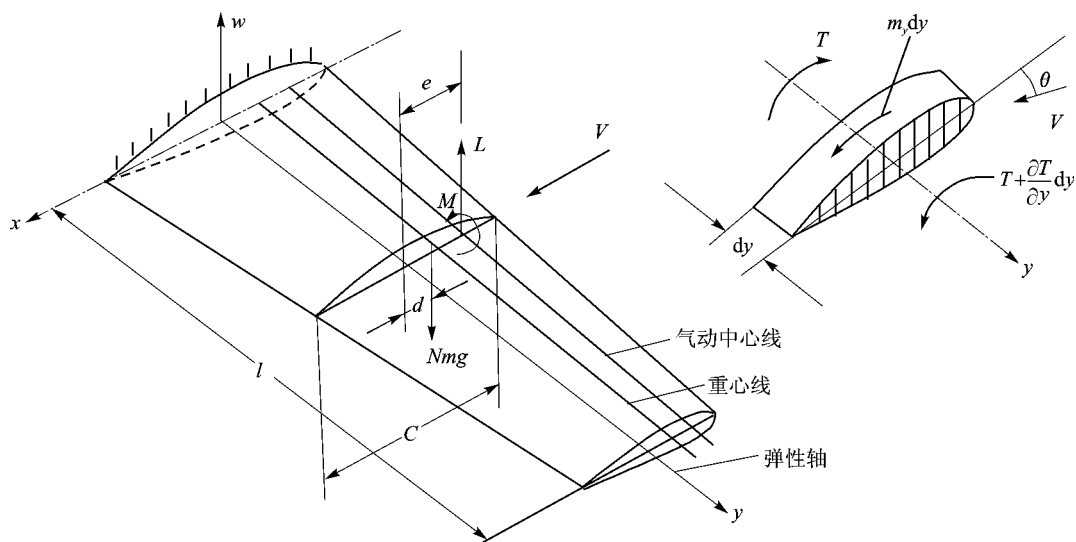


图 2-7 长直机翼

根据梁的理论, 对于图 2-7 所示的微段, 可有下列扭矩平衡微分方程

$$\left(T + \frac{dT}{dy} dy \right) + m_y dy - T = 0 \quad (2-28)$$

即

$$\frac{dT}{dy} = -m_y \quad (2-29)$$

式中, m_y 是作用于单位展长上的外力矩。同前述一样, 考虑到气动弹性的影响, 微段在气动力矩与弹性扭矩作用下, 攻角由初始的 α_0 变到新的攻角 $\alpha_0 + \theta(y)$ 下达到平衡。在这一攻角下, 微段上的外力矩成为

$$m_y = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} [\alpha_0 + \theta(y)] q C(y) e(y) + C_{m_0}(y) C^2(y) q - Nmg(y) d(y) \quad (2-30)$$

上式代入式(2-31), 得



$$\frac{d}{dy} \left[GJ(y) \frac{d\theta}{dy} \right] = - \left\{ \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} [\alpha_0 + \theta(y)] q C(y) e(y) + C_{m0}(y) C^2(y) q - Nmg(y) d(y) \right\} \quad (2-31)$$

或(均略写了以 y 为自变量的函数关系)

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q C e \theta = - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha_0 q C e + C_{m0} C^2 q - Nmg d \right) \quad (2-32)$$

式中 $\theta(y)$ ——机翼的弹性扭转角, 是 y 的函数, 抬头为正;

$GJ(y)$ ——机翼扭转刚度;

$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(y)$ ——升力线斜率;

$C_{m0}(y)$ ——绕气动中心的零升力矩系数;

$C(y)$ ——剖面弦长;

$e(y)$ ——剖面气动力中心到刚心的距离;

$d(y)$ ——剖面重心到刚心的距离;

$mg(y)$ ——翼段单位长度的重量;

N ——过载系数。

相应地, 机翼边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad \theta &= 0 \\ y = l, \quad \frac{d\theta}{dy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

通过 2.1 节的讨论, 可以了解到求解扭转发散的问题其本质是解决气动弹性静稳定性问题, 方程(2-32)是一个具有变系数的线性微分方程, 等号右边是一个与变形 θ 无关的项。保留平衡方程(2-32)中与变形 θ 有关的项, 而令其他项均为零, 从而求得临界动压 q_D 。也就是说, 只需求解方程(2-32)所对应的齐次方程

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q C e \theta = 0 \quad (2-34)$$

当 $GJ, C, e, \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ 均为常数时, 该机翼简化为均匀梁情况(也称均匀机翼), 上式可简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dy^2} + \lambda^2 \theta &= 0 \\ \lambda^2 &= \frac{q C e}{GJ} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2-35)$$

方程(2-34)或(2-35)代表了一个特征值问题。只有当 q 达到某些特定值(即特征值)时, θ 才具有满足边界条件式(2-33)的非零解。这样的 θ 称为特征函数。显然, 取其最小的特征值 q_D 即为发散动压, 这是因为对于发散问题, 只有最小值才有实用意义。当 $q < q_D$ 时, 平衡是稳定的; 当 $q = q_D$ 时, 机翼一旦受到扰动, 便处于随遇平衡; 而当 $q > q_D$ 时, 则平衡失去稳定。



同时,由方程(2-35)的第二式可以看出,若刚心位于气动中心之前,即 $e < 0$ 时, λ^2 成为负值,此时方程(2-35)不可能有非零解,所以机翼不会发生发散现象。

对于均匀机翼,齐次方程(2-35)可获得精确解。其通解为

$$\theta(y) = A \sin \lambda y + B \cos \lambda y$$

引入边界条件式(2-33)后,得到

$$B = 0$$

$$A \cos \lambda l = 0$$

于是有特征方程

$$\cos \lambda l = 0$$

它具有无限多个特征值

$$\lambda_i l = (2i + 1) \frac{\pi}{2} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

相应的特征函数(可取 A 为 1)是

$$\theta_i(y) = \sin \lambda_i y \quad (i = 1, 2, \dots, \infty)$$

它表示机翼处于随遇平衡的形态。将最小特征值 $\lambda_1 \left(\lambda_1 = \frac{\pi}{2l} \right)$ 代入式(2-35),即是发散动压

$$q_D = \frac{\lambda_1^2}{\frac{C_e}{GJ} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}} = \frac{\pi^2 GJ}{4l^2 C_e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}} \quad (2-36)$$

发散速度为

$$V_D = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{2GJ}{\rho C_e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}} \quad (2-37)$$

对比式(2-8)和式(2-36)发现,二者具有相同的形式,所以可以把 $\frac{\pi^2 GJ}{4l}$ 称为有效刚度。

2.2.2 长直机翼的载荷重新分布

对于图 2-7 所示的长直机翼,2.2.1 节中已经得出了机翼微段的平衡方程(2-32)及边界条件式(2-33)。这里,仍然采用片条理论,所以仍然以式(2-32)作为基础。

对于载荷重新分布(简称载荷分布)问题,前面已经讲过,讨论它的前提是飞行动压 q 要小于发散动压 q_D ,即机翼尚未达到失去静稳定平衡的临界状态。所以,在这里要解决的问题是,机翼将在什么样的扭转变形 $\theta(y)$ 下达到平衡。有了这一扭角分布 $\theta(y)$,当然载荷(升力)的分布就能确定。

现在来看式(2-32)。它的等号右边不为零,在一定的初始攻角 α_0 和飞行过载 N 下,是个确定的值,式(2-32)成为非齐次方程。对于均匀机翼,把它改写为下列形式:



$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = K \quad (2-38)$$

式中

$$\lambda^2 = \frac{qCe}{GJ} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$$

$$K = -\frac{1}{GJ} \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha_0 qCe + C_{m0} C^2 q - Nmgd \right)$$

上式的通解为

$$\theta(y) = A \sin \lambda y + B \cos \lambda y + \frac{K}{\lambda^2} \quad (2-39)$$

式中,积分常数由边界条件式(2-33)确定,所以有

$$A = -\frac{K}{\lambda^2} \tan \lambda l$$

$$B = -\frac{K}{\lambda^2}$$

由此得到扭角

$$\theta(y) = \frac{K}{\lambda^2} (1 - \tan \lambda l \sin \lambda y - \cos \lambda y) \quad (2-40)$$

上式中,当 $\lambda l \rightarrow \pi/2$ 时, $\theta \rightarrow \infty$, 即当机翼达到发散动压的状态时,弹性变形达到无穷大。这个结果与 2.2.1 节中是一致的。

若保持攻角 α_0 为定值,则机翼上的载荷分布可以表示为

$$L(y) = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} [\alpha_0 + \theta(y)] qC = L^r + \Delta L(y) \quad (2-41)$$

式中, $L^r = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha_0 qC$, 是刚硬机翼上的载荷; $\Delta L(y) = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta(y) qC$, 是弹性扭转变形所附加的载荷。不失一般性,不妨令 $d=0, C_{m0}=0$, 并利用式(2-38)和式(2-40), 则

$$\Delta L(y) = \alpha_0 (\cos \lambda y + \tan \lambda l \sin \lambda y - 1) \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qC \quad (2-42)$$

于是,弹性机翼的载荷与刚硬机翼的载荷比为

$$\frac{L}{L^r} = \frac{L^r + \Delta L}{L^r} = \cos \lambda y + \tan \lambda l \sin \lambda y \quad (2-43)$$

这个分布表示在图 2-8 中。

如果重心与弹性轴不重合(实际上往往是这样的),即 $d \neq 0$, 此时,问题的求解就与过载系数 N 有关。从式(2-38)中,可以反映出这一点。此时,为了保持 α_0 为定值(这意味着飞行姿态一定),还要寻求过载系数 N 。为此要附加一个全机平衡的条件,即飞机总升力与质量力平衡

$$q\alpha_0 \int_0^l C \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} dy + q \int_0^l C \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta dy = \frac{1}{2} NW \quad (2-44)$$



式中, W 是飞机总重量。将式(2-40)代入上式, 则可得

$$N = \frac{\alpha_0 \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\tan \lambda l}{\lambda l} + \frac{C}{e} C_{m0} \left(\frac{\tan \lambda l}{\lambda l} - 1 \right)}{\left[\frac{W}{2l} - \frac{mgd}{e} \left(1 - \frac{\tan \lambda l}{\lambda l} \right) \right]} \bigg/ qC \quad (2-45)$$

这样, 就可按式(2-40)得到 $\theta(y)$ 。于是可由下式算出载荷分布为

$$L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} [\alpha_0 + \theta(y)] qC$$

应当指出, 载荷重新分布问题通常分两种情况: 一是寻求保持飞机在一定的攻角 α_0 下的过载系数 N 和相应的载荷分布, 这种情况就是前面所假定的情况; 二是寻求保持飞机在过载一定(即总升力一定)条件下的载荷分布及相应的飞机攻角 α_0 。这两种情况的计算方法在第3章里细述。但不论哪一种情况, 为了求得 N 或 α_0 , 都可按不同情况附加不同平衡条件, 使问题得到解决。

图2-8和图2-9中的两组曲线是分别对应两种不同情况给出的载荷重新分布。

图2-8表示了第一种情况下的载荷分布。由图可见, 随着 λl (它反映了动压 q) 的提高, 弹性影响不断增加, 不仅载荷加大, 而且压力中心向翼尖移动, 使翼根弯矩增大。

图2-9表示了第二种情况下的载荷分布。同样可以看出, 动压增高, 弹性影响增加, 压力中心也向翼尖处移动。不同的是翼根处载荷反而减小一点, 这是因为在第二种情况下为保持机翼总升力不变所致。因此, 总的来说, 在翼面设计时, 弹性影响所引起的载荷重新分布问题是有重要意义的, 如果按刚硬机翼上的载荷来设计可能是不安全的。

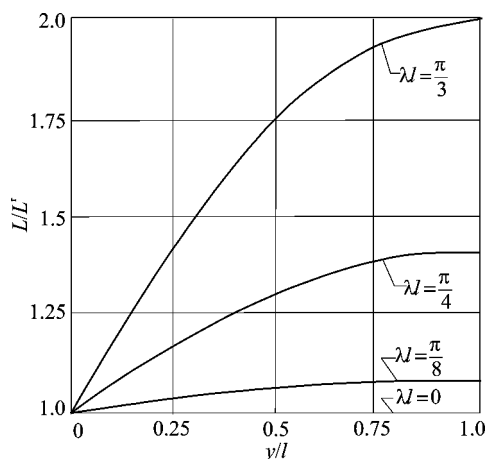


图2-8 均匀机翼的升力重新分布
(攻角一定)

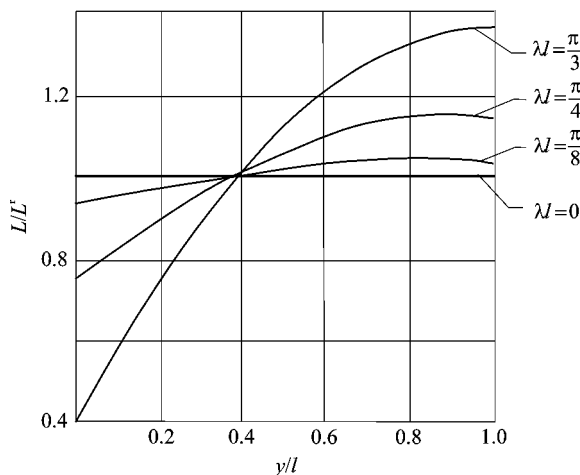


图2-9 均匀机翼的升力重新分布
(总升力一定)



2.2.3 长直机翼的操纵反效及操纵效率

飞机的机翼、尾翼及其他飞行器都有气动操纵面,它们的静气动弹性问题在性质上也是一致的。本节仅以机翼的副翼偏转产生绕机身纵轴的滚转来说明操纵反效和操纵效率。在此把机身简化为一根轴,平直机翼简化为一根垂直固支于机身的梁。与前述相仿,只考虑扭转变形的影响。

设副翼原先处于零攻角,副翼右翼下偏,左翼上偏,此时机翼受反对称载荷。由于副翼偏转,飞机可能绕机身轴线转动,产生滚转角速度 p ,还可能产生角加速度 $\dot{p}$,各剖面的扭转变形为 $\theta(y)$,如图 2-10 所示。由于滚转角速度 p 在 y 处有下洗速度 py ,故它使攻角减小 py/V 。又由于滚转角加速度 $\dot{p}$,故在 y 处还作用惯性力 $-m\dot{p}y$ 。该机翼半展长 l ,副翼在翼尖部位,从距翼根 l_1 处开始。 β 为副翼偏角,下偏为正。

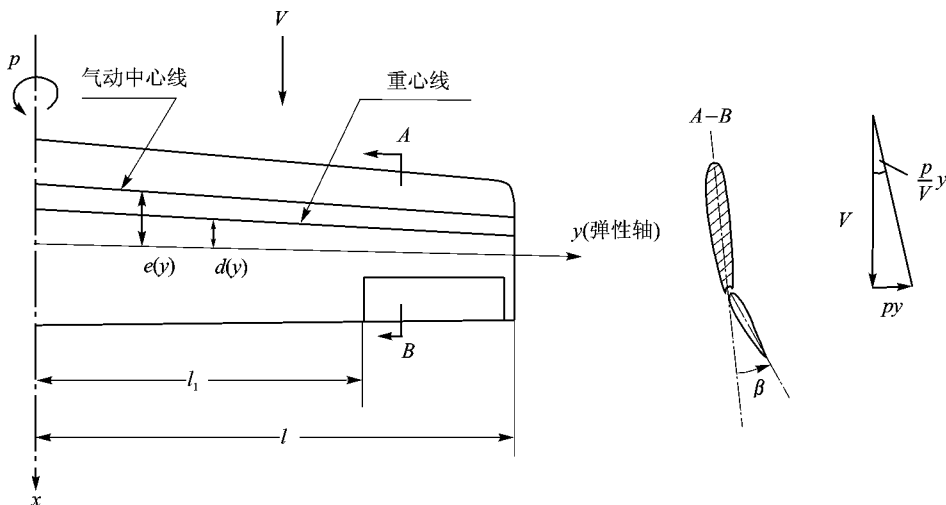


图 2-10 带副翼的长直机翼

气动力仍采用片条理论,则扭转平衡方程为

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q C_e \theta = - \left(q C_e \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta + q C^2 \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \beta - q C_e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{py}{V} - m \dot{p} y d \right) \quad (y \geq l_1) \quad (2-46a)$$

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q C_e \theta = q C_e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{py}{V} + m \dot{p} y d \quad (y \leq l_1) \quad (2-46b)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} y = 0, \quad \theta &= 0 \\ y = l, \quad \frac{d\theta}{dy} &= 0 \end{aligned}$$



由方程(2-46)求出满足上述边界条件 $\theta(y)$ 的解,即是机翼的弹性扭角分布。有了扭角分布就不难确定升力的分布为

$$\left. \begin{aligned} L(y) &= qC \left\{ \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left[\theta(y) - \frac{py}{V} \right] \right\} & (l > l_1) \\ L(y) &= qC \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left[\theta(y) - \frac{py}{V} \right] & (l < l_1) \end{aligned} \right\} \quad (2-47)$$

同时,还可以根据副翼偏转后的滚转情况,写出滚转平衡方程,以此得到 β 与 p 或 $\dot{p}$ 的关系。设飞机绕其纵轴(x 轴)的滚转惯量为 I_x ,则绕 x 轴的滚转力矩 M_x 可以表示为

$$M_x = I_x \dot{p} = 2 \int_0^l L(y) y dy \quad (2-48)$$

例如对于匀速滚转, $\dot{p}=0$, 上式就等于零。对于均匀机翼可求得精确解。不失一般性,还可对问题作进一步的简化。假定重心与刚心重合,并引入记号

$$1_a(y) = \begin{cases} 1 & (y > l_1) \\ 0 & (y < l_1) \end{cases} \quad (2-49)$$

则方程(2-46)的两式可以合并,写作

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \lambda^2 \theta = \lambda^2 \frac{p}{V} y - K \lambda^2 \beta 1_a(y) \quad (2-50)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{q e C}{G J} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ K &= \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + \frac{C}{e} \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \right) / \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2-51)$$

方程(2-46)的通解是

$$\left. \begin{aligned} \theta(y) &= A \sin \lambda y + B \cos \lambda y + \frac{p}{V} y - K \beta & (y \geq l_1) \\ \theta(y) &= F \sin \lambda y + D \cos \lambda y + \frac{p}{V} y & (y \leq l_1) \end{aligned} \right\} \quad (2-52)$$

利用边界条件式(2-33),并利用 $y=l_1$ 处边界的连续性,有

当 $y=0$ 时, $\theta=0$, 则

$$D = 0$$

当 $y=l$ 时, $\frac{d\theta}{dy}=0$, 则

$$\lambda A \cos \lambda l - \lambda B \sin \lambda l + \frac{p}{V} = 0$$

当 $y=l_1$ 时,考虑 $\theta(y)$ 连续,则

$$A \sin \lambda l_1 + B \cos \lambda l_1 + \frac{p}{V} l_1 - K \beta = F \sin \lambda l_1 + \frac{p}{V} l_1$$



当 $y=l_1$ 时, 考虑在 l_1 处无集中扭矩, 则

$$\lambda A \cos \lambda l_1 - \lambda B \sin \lambda l_1 + \frac{p}{V} = \lambda F \cos \lambda l_1 + \frac{p}{V}$$

由此解出

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{p}{V} \frac{1}{\lambda \cos \lambda l} + K\beta \cos \lambda l_1 \tan \lambda l \\ B &= K\beta \cos \lambda l_1 \\ F &= A - K\beta \sin \lambda l_1 \\ D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-53)$$

把这些常数代入式(2-52), 经过整理, 得

$$\theta(y) = \frac{pl}{V} C_2(y) + \beta C_1(y) \quad (2-54)$$

式中

$$\begin{aligned} C_1(y) &= -K \left\{ 1_a(y) [1 - \cos \lambda(y - l_1)] - \frac{\sin \lambda(l - l_1)}{\cos \lambda l} \sin \lambda y \right\} \\ C_2(y) &= \frac{y}{l} - \frac{\sin \lambda y}{\lambda l \cos \lambda l} \end{aligned}$$

把式(2-54)代入式(2-48), 可得副翼偏角 β 与滚转角速度 p 的关系。当 p 为稳定值($\dot{p}=0$)时, 则有

$$\begin{aligned} M_x &= 2 \int_0^l L(y) y dy = \\ &= 2 \int_0^l qC \left\{ \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left[\frac{pl}{V} C_2(y) + \beta C_1(y) - \frac{py}{V} \right] + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta 1_a(y) \right\} y dy = \\ &= 2 \int_0^l qC \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{pl}{V} \left[C_2(y) - \frac{y}{l} \right] y dy + 2 \int_0^l qC \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \beta \left[C_1(y) + \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_L / \partial \alpha} 1_a(y) \right] y dy = 0 \end{aligned} \quad (2-55)$$

通常副翼的操纵效率用 $\partial(pl/V)/\partial\beta$ 来衡量, pl/V 表示飞机作等速滚转时的翼尖螺旋角。 $(pl/V)/\beta$ 就是单位副翼偏角所引起的翼尖螺旋角。依据式(2-55), 假定 C 为常值, 可得副翼操纵效率

$$\eta_a = \frac{\partial \left(\frac{pl}{V} \right)}{\partial \beta} = \frac{\int_0^l \left[C_1(y) + \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_L / \partial \alpha} 1_a(y) \right] y dy}{-\int_0^l \left[C_2(y) - \frac{y}{l} \right] y dy} \quad (2-56)$$

由上式可得, 当机翼(含副翼)的构造及气动参数确定后, 操纵效率 η_a 将随 λl (它显含于 $C_1(y)$ 和 $C_2(y)$) 变化, 而 λl 的变化即反映了动压的变化。图 2-11 表示了这种关系。图中假定

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} / \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) = 0.5, \quad \left(\frac{C}{e} \right) \left(\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} / \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) = -0.6, \quad \frac{l_1}{l} = 0.6$$



图 2-11 表明: λl (动压) 增大, 则由于弹性变形而产生的负滚转力矩将逐渐加大, 所以净滚转力矩势必减小。当动压增大到某个临界值 q_R 时, 净滚转力矩降至零。动压再增大, 则净滚转力矩转化为负值, 使飞机出现操纵反效的现象。当动压 $q = q_R$ 时, 效率 $\eta_a = 0$ 。从图中可以确定 $\lambda l = 1.44$ 时, $\eta_a = 0$, 由此求得 q_R 。

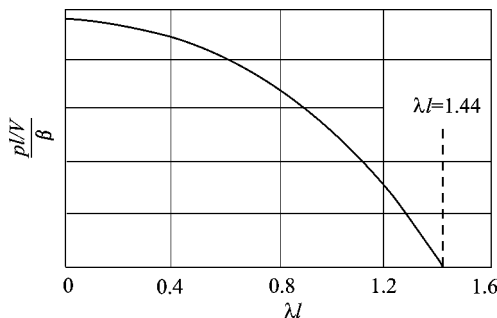


图 2-11 操纵效率与动压的关系

令式(2-56)的分子为零, 并利用式(2-54), 则有

$$\int_0^l \left[C_1(y) + \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_L / \partial \alpha} l_a(y) \right] y dy = \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \left(\frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda l} - 1 \right) + \frac{C}{e} \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \left(\frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda l} - 1 - \frac{\lambda^2 l^2 - \lambda^2 l_1^2}{2} \right) = 0$$

即

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + \frac{C}{e} \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \right) (\cos \lambda l - \cos \lambda l_1) + \frac{\lambda^2 l^2 - \lambda^2 l_1^2}{2} \frac{C}{e} \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \cos \lambda l = 0 \quad (2-57)$$

这是一个超越方程。求得满足上式的最小 λl , 把它记作 $\lambda_R l$, 然后再由式(2-51)求出反效动压

$$q_R = \frac{GJ}{eC} \frac{\lambda_R^2}{\alpha} \quad (2-58)$$

因为从式(2-48)导出 η_a 时, 引用了条件 $\dot{p} = 0$, 而后又由 $\eta_a = 0$ 导出反效动压 q_R 时, 实际又必定是 $p = 0$ 。所以总的来说, 可以认为操纵反效的条件是

$$p = 0, \quad \dot{p} = 0 \quad (2-59)$$

应当指出, 对于较复杂的机翼, 求出解析解是不可能的, 一般需借助数值方法求解。

思考题

- 2.1 为什么说扭转发散是典型的亚声速现象?
- 2.2 分析扭转发散和载荷重新分布在物理上和数学上的区别。
- 2.3 分析操纵反效和操纵效率二者在物理上和数学上的区别。



2.4 在长直机翼的静气动弹性解析方法中作了哪些简化假设？

2.5 试述提高发散速度和操纵反效速度的途径,并说明原因。

参考文献

- 1 Fung Y C. An Introduction to the Theory of Aeroelasticity. J. Wiley & Sons, Inc. ,1955
- 2 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海:上海科学技术文献出版社,1982
- 3 诸德超,陈桂彬,邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室,1986
- 4 卢叔全. 气动弹性讲义. 南京航空学院,1991

第 2 章 气动弹性静力问题的矩阵分析方法

第 2 章中讨论了气动弹性静力问题的两大类问题,并且都以微分方程作为研究的起点。对于均匀长直机翼可以得出精确解,对于其他情况可借助近似方法。这对于列出问题的模型和理解问题的性质已有了一个基础。对于实际翼面(或升力面),一般都要采用近似方法,并借助数值方法去求解。在利用数值方法时,虽然也可以从第 2 章的方式入手,但不如直接将问题建立为积分方程,然后用矩阵形式去求解更为方便。特别是考虑到计及翼面上三元流动效应的气动力分布也是以矩阵形式表达的,于是问题都可以统一为矩阵分析方法。

本章首先介绍亚声速定常升力线理论及其矩阵表达,从气动力引起的结构变形角度,导出静气动弹性分析的基本方程,然后分别讨论机翼发散和载荷重新分布的计算与分析,最后讨论副翼操纵效率与反效。

3.1 气动力影响系数的矩阵表示

在处理气动弹性力学问题时,对气动力提出的问题是:已知升力面(因弹性变形而形成)上的攻角分布(或下洗分布),寻求它所产生的升力分布(或环量分布)。这属于空气动力学中的一类问题。这类问题通常需要用相当复杂的方法求解。本节以定常亚声速流中有限翼展机翼(展弦比大于 3)普朗特(Prandtl)“升力线理论”为例,介绍气动力影响系数的矩阵一般表达式。

第 2 章所用片条理论,其数学处理简单,且在展弦比大于 5 时,能给出足够精确的结果。为了修正三元流动的影响,对于展向升力分布接近椭圆分布的直机翼,其升力线斜率可作如下修正:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \frac{\lambda}{\lambda + 2} \quad (3-1a)$$

式中, λ 是机翼展弦比; $\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)$ 是无限翼展机翼的升力线斜率。上式对于 $\lambda > 3$ 时是一个良好的近似。在处理静气动弹性问题时,由于翼面的扭转变形,攻角沿翼展变化,这时可以用另一修正公式,即

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \frac{\lambda}{\lambda + 4} \quad (3-1b)$$

不难设想,未作上述修正的片条理论将给出升力分布的偏高值。当然,采用偏高值对静气动弹



性计算是偏于保守的。

3.1.1 马蹄涡系

机翼的弹性变形引起了攻角的改变,因而引起气动力的改变。有很多的空气动力学理论可用以确定攻角和气动力的关系,这里不能一一详细讨论,而只能以一种气动力理论(马蹄涡升力线理论)为例,说明在研究静气动弹性问题时,如何应用这些理论。

根据空气动力学理论,在图 3-1 中表示了机翼起动涡(环量 Γ)的形成。初始时,沿图中虚线所示曲线,机翼环量 Γ 为零(Thomson 定理);为了保持 $\Gamma = 0$,因此又必定存在一个大小相等、方向相反的环量 $+\Gamma$ 。这样,当机翼向前运动时,起动涡留在原处,而机翼处存在着附着涡,其环量为 $+\Gamma$ 。由此产生升力 L 。由气动力理论儒可夫斯基(Joukowski)定理可知,如果涡线垂直地在流速为 V 的流体中,则流体对它要产生升力,升力为

$$L = \rho V \Gamma \quad (3-2)$$

根据平滑流过后缘(Kutta 流动)条件,这个环量与 α 攻角有以下关系式:

$$\Gamma = \frac{1}{2} b V \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \quad (3-3)$$

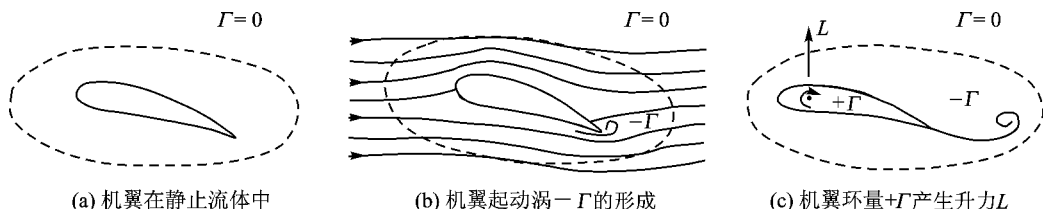


图 3-1 机翼起动时环量的形成

若机翼展向无限长,则一根两端延伸到无穷远的直涡线会使得流体各点产生圆周速度,称为诱导速度。该诱导速度 w 与距涡中心点的距离 r 成反比,与涡的环量成正比,即

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3-4)$$

实际上,机翼是有限展长的,它将造成各剖面处的流动互相影响。升力线理论就是考虑这种影响的一种气动力理论。该理论适合展弦比大于 3 的直机翼。根据赫姆霍兹(Helmholz)定理,对于有限翼展机翼,这个代表机翼存在的附着涡涡线,在翼尖处不能终止,它将顺着来流方向沿机翼向后方延伸,形成自由涡,并在远后方与起动涡相连,如图 3-2 (a) 所示。这两条自由涡涡线对机翼产生诱导速度(下洗速度)。它的作用可以认为相当于两条半无限长的涡线。

正是由于这两条自由涡对机翼的升力分布有着重要的影响,附着涡与两条向远后方延伸的自由涡就形成了代表机翼存在的马蹄涡。对于环量沿展向分布变化的机翼,可按上述推理,由一组马蹄涡系叠加起来代表机翼的存在,而在机翼后方形成整个自由涡面,如图 3-2 (b)



所示。

为了考虑有限翼展机翼各剖面之间的互相影响,用马蹄涡系代表机翼是个通用的方法,由此可以计算空气动力影响系数。

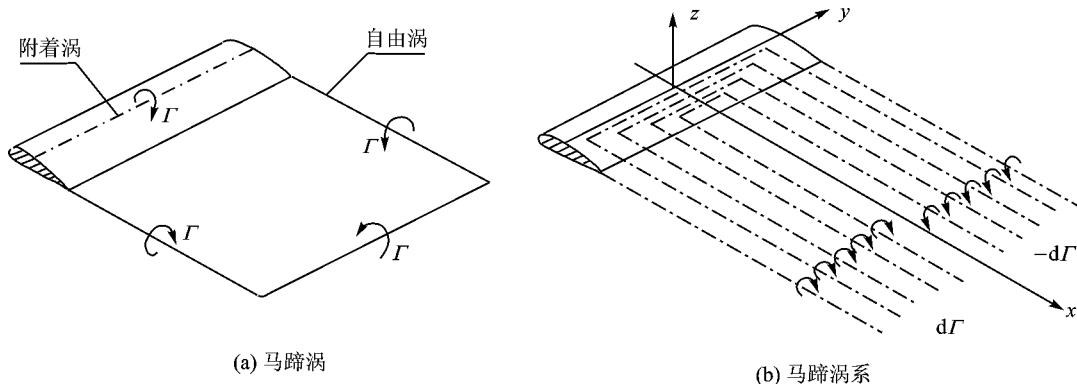


图 3-2 用马蹄涡系代替机翼

3.1.2 三元机翼的气动力影响系数矩阵

本节中以图 3-3 所示的有限翼展直机翼为例。

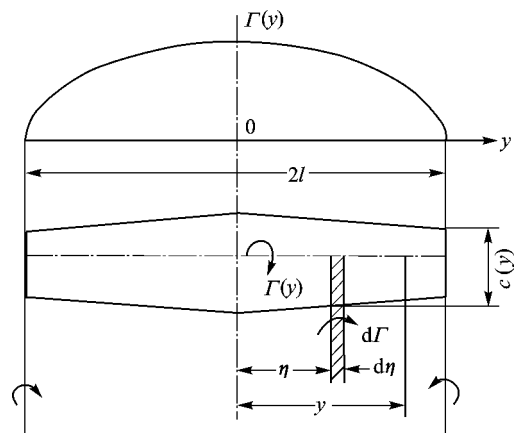


图 3-3 环量沿翼展方向变化的机翼

根据图 3-2 (b),把全机翼(两个机翼)用变涡强 $\Gamma(y)$ 的涡线代表,则机翼尾流中连续分布着无限多个自由涡线 $d\Gamma$,由机翼延伸到无穷远。如图 3-3 所示,设在翼展 η 处的涡带宽度为 $d\eta$,它由机翼向后延伸。每一自由涡线 $d\Gamma(y)$ 相当于半根两端都延伸到无限远的涡线。在附着涡的 y 点处的下洗速度为

$$dw = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{d\Gamma(\eta)}{y - \eta} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta}$$

于是整个涡面对 y 处引起的下洗速度为

$$w(y) = \int_{-l}^l \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta}$$

如图 3-4 所示,由于机翼及其后方存在诱导的下洗速度,所以在翼展 y 处(第 i 点位置处)来流与机翼间的攻角将向下倾斜一个角度,即

$$\alpha_i(y) = \frac{w(y)}{V} \quad (3-5)$$

则该处有效攻角为

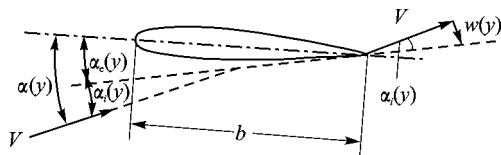


图 3-4 有效攻角

$$\alpha_e(y) = \alpha(y) - \alpha_i(y) = \alpha(y) - \frac{1}{4\pi V} \int_{-1}^1 \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \quad (3-6)$$

式中, $\alpha(y)$ 为翼展 y 处剖面的几何攻角。

同时,由式 (3-3) 可知,与 α_e 对应的 Γ 为

$$\Gamma(y) = \frac{V}{2} b(y) \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha_e(y) \quad (3-7)$$

将式 (3-6) 代入式 (3-7), 则得环量分布的基本方程

$$\Gamma(y) = \frac{V}{2} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} b(y) \left[\alpha(y) - \frac{1}{4\pi V} \int_{-1}^1 \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{(y - \eta)} \right] \quad (3-8)$$

这就是用升力线理论计算机翼环量分布的积分-微分基本方程。由式 (3-8) 表示的环量分布回答了本章 3.1 节一开始的提问。这类方程的求解只能借助于近似方法。

若用 y_i 表示沿 y 向的第 i 个点 (站), 则给定一系列 (n 个) 点上攻角 α 值, 即可求得第 i 点上的环量 $\Gamma(y_i)$ 值。又由于

$$L(y_i) = \rho V \Gamma(y_i)$$

$$L(y_i) = \frac{1}{2} \rho V^2 b(y_i) C_L(y_i)$$

两式相等, 可有升力系数与环量的关系为

$$b(y_i) C_L(y_i) = \frac{2}{V} \Gamma(y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3-9)$$

综上所述, 攻角与升力系数的分布必将有以下关系式:

$$A s = \alpha \quad (3-10)$$

或

$$s = A^{-1} \alpha \quad (3-11)$$

式中 A, A^{-1} ——气动力影响系数矩阵;

s ——各点 (站) 处的 $b C_L$ 组成的列阵, $s = [b(y_1) C_L(y_1) \cdots b(y_n) C_L(y_n)]^T$;

α ——各点 (站) 处的 α 组成的列阵。

关于 A 的求解, 见 3.1.3 节。

式 (3-10) 和式 (3-11) 给出了已知升力面上的攻角分布与它所产生的升力分布的关系式。该公式虽然是从大展弦比和升力线理论推导得到的, 但对小展弦比机翼、三角翼和后掠翼



等有同样的矩阵形式,只是气动力影响系数矩阵求解方法和结果有所不同。

3.1.3 气动力影响系数矩阵 A 的近似求解方法

下面以大展弦比机翼的配置法为例,说明气动力影响系数的求解过程和形式。配置法是一种近似方法,是在翼展的有限个点处满足方程,一般需要沿翼展划分成若干点(站)。

如图 3-5 所示,对于大展弦比机翼,为了求得矩阵 A,通常先作一坐标变换,然后在 n 个点上进行配位,所以该方法又称为配位法。设坐标变换为

$$\left. \begin{aligned} y &= l \cos \varphi & (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \eta &= l \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

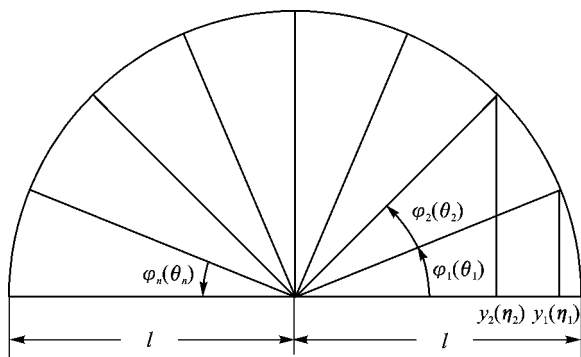


图 3-5 坐标变换与剖面分站

再沿全机的翼展长 $2l$, 分成 n 个等分角, 相应地标以 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, 其点号顺序与 y 轴正向相反。设

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(y) &= \sum_{j=1}^n A_j \sin j\varphi \\ \Gamma(\eta) &= \sum_{j=1}^n A_j \sin j\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

把式 (3-12) 和式 (3-13) 代入式 (3-8), 并利用 (不加推导) 关系式

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

则得到

$$\frac{b}{2l} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha = \sum_{j=1}^n A_j \left[\sin j\varphi + \frac{b}{8l} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{j \sin j\varphi}{\sin \varphi} \right] \quad (3-14)$$

上式应在各个点处满足。由此即求出 A_j 与 α 的矩阵方程为



$$\frac{1}{2l}\Theta\alpha = \Phi_2 r + \frac{1}{8l}\Theta\Phi_1\Phi_3 r \quad (3-15)$$

式中, $r = [A_1 \cdots A_n]^T$;

$$\Theta = \text{diag}\left(\frac{\partial C_{L_1}}{\partial \alpha} b_1 \cdots \frac{\partial C_{L_n}}{\partial \alpha} b_n\right);$$

$$\Phi_1 = \text{diag}\left(\frac{1}{\sin \varphi_1} \cdots \frac{1}{\sin \varphi_n}\right);$$

$$\Phi_2 = [\phi_{2ij}], \phi_{2ij} = \sin j\varphi_i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$\Phi_3 = [\phi_{3ij}], \phi_{3ij} = j \sin j\varphi_i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

进一步考虑到式 (3-9), 还可以有环量分布与升力系数分布的关系式

$$s = 2l\Phi_2 r$$

或

$$r = \frac{1}{2l}\Phi_2^{-1}s \quad (3-16)$$

将式 (3-16) 代入式 (3-15), 消去 r , 则得到式 (3-10) 和 (3-11) 预期的形式

$$\alpha = As$$

或

$$s = A^{-1}\alpha$$

式中

$$A = \Theta^{-1} + \frac{1}{8l}\Phi_1\Phi_3\Phi_2^{-1} \quad (3-17)$$

显然, A^{-1} 的元素 a_{ij} 代表仅当 j 点处有一单位攻角时, 在 i 点处所产生的升力 (用 bC_L 表示)。这个矩阵是不对称的。

当式 (3-17) 中 $l \rightarrow \infty$ (无限翼展情况) 时, 则有

$$A = \Theta^{-1} \quad \text{和} \quad A^{-1} = \Theta \quad (3-18)$$

显然, 上式就是片条理论的结果, A 和 A^{-1} 均为对角矩阵。

在进行计算时, 可以把气动力分为相对于机身轴线的对称及反对称分布两种情况。对称分布时, 环量分布也是对称的, 所以可设

$$\Gamma(y) = \text{vl} (A_1 \sin \varphi + A_3 \sin 3\varphi + \cdots)$$

此时攻角与局部升力系数的关系为

$$\alpha = A^s s$$

当反对称分布时, 设

$$\Gamma(y) = \text{vl} (A_2 \sin 2\varphi + A_4 \sin 4\varphi + \cdots)$$

相应地有

$$\alpha = A^a s$$



式中 A^s, A^a 分别是对称及反对称气动力影响系数矩阵。只要在式 (3-17) 中保留 j 为奇数或偶数的项,即可求得。

剖面位置的选取,通常可由等分角取得,因为只需计算半个机翼,所以都在 $0 \sim 90^\circ$ 之间作等分。例如当半机翼取 4 个剖面时, φ_i 分别为 $\pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ 。此时,对称载荷有

$$A^s = \Theta^{-1} + \frac{1}{8l} \begin{bmatrix} 10.453 & -3.828 & 0 & -0.293 \\ -2.072 & 5.657 & -2.389 & 0 \\ 0 & -1.828 & 4.330 & -1.707 \\ -0.224 & 0 & -3.154 & 4.000 \end{bmatrix} \quad (3-19a)$$

反对称载荷有

$$A^a = \Theta^{-1} + \frac{1}{8l} \begin{bmatrix} 10.453 & -3.696 & 0 & 0 \\ -2.000 & 5.657 & -2.000 & 0 \\ 0 & -1.531 & 4.330 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-19b)$$

综上所述,升力线理论是计算有限翼展机翼上升力分布的一种方法。它用一系列叠加的马蹄涡线代替机翼。在机翼后面延伸出去的自由涡,引起诱导下洗速度,从而改变了气流的来流方向,也就是改变了几何攻角的大小,以此求得升力分布与攻角之间的关系。它适用于计算大展弦比直机翼。这个理论又进一步发展为推广的升力线理论。推广的升力线理论又称四分之三弦点法。这个方法的要点是把沿展向变化的附着涡安排在沿翼展 $1/4$ 弦线处,同样,在机翼后方引出一个自由涡面,而其运动学流动条件则要求在 $3/4$ 弦线处得到满足,即以 $3/4$ 弦线处的点作为下洗速度控制点。这种方法可以用来计算亚声速的大展弦比平面形状机翼,特别是后掠机翼。

当机翼展弦比小于 3 后,升力线理论就不能给出准确的结果了,对这种情况就应采用升力面理论。此时环量分布将是 $\Gamma(x, y)$, 而不是 $\Gamma(y)$ 。随着大型数字计算机的发展,马蹄涡格网法已为矩阵方法提供了亚、超声速任意平面形状机翼的升力分布,可用于大展弦比机翼、小展弦比机翼、三角翼、后掠翼以及组合形状机翼等,可以方便地按升力变化的剧烈程度或不连续部位(如前、后操纵面)而划分网格,对于机翼前、后缘有转折或有操纵面的情况,处理也比较方便。

升力面的核函数法是从升力面的环量分布积分方程出发的,是升力面方法的一种。这种方法在机翼上布置连续的基本旋涡面,其环量分布是用一些函数的加权迭代来表示的,这些函数满足前、后缘及侧缘边界条件。在机翼上确定若干控制点,用积分方程建立环量分布和控制点处诱导下洗速度的联系,而诱导下洗速度则可和当地边界条件相联系,从中解出加权系数的值,由此求得的环量分布即可确定机翼上的载荷分布。这种方法可适用于大、小展弦比机翼。

Woodward 方法也是升力面方法的一种。它也把机翼沿展向及弦向分成若干元素,在每一元素上布置等强度的面涡或线性变化的面涡。其控制点取在每一元素的中线的 95% 处。从



面涡的基本解出发,便可根据控制点处的边界条件确定各元素上的面涡的强度。但在这一方法中上述控制点位置是按经验确定的,而计算结果表明,控制点位置对结果影响是很敏感的。

对于导弹、航天飞机、空天飞机中的超声速及高超声速翼面,还可以采用活塞理论、牛顿冲击理论进行计算。这些方法也把翼面沿展向及弦向分成若干元素进行分析。由于定常气动力方法较多,这里不一一介绍,详细内容可参考相关的气动力方面的教材和文献。

3.2 气动弹性静力问题分析的基本方程

本节将在 3.1 节的基础上,进一步结合结构弹性变形的特性,推导具有广泛适用性的静气动弹性分析的基本方程。这一基本方程,可以作为发散、操纵效率和载荷重新分布等静气动弹性分析的出发方程,为上列各项静气动弹性性能的分析做好准备。

由二元机翼的发散、操纵反效和载荷分布的讨论可见,静气动弹性问题有两个基本关系:一个是机翼攻角及其引起的气动力间的关系;另一个是作用在机翼上的载荷及其产生的弹性变形的关系。

对于机翼攻角及其引起的空气动力,已在 3.1 节进行了讨论,它们之间的联系由气动力影响系数矩阵 A 来表示(见式(3-10)或式(3-11)),即

$$As = \alpha$$

或

$$s = A^{-1}\alpha$$

A 的计算因所用空气动力计算理论和方法的不同而不同,还因载荷情况(对称、反对称、不对称)的不同而不同。

另外,由于假定静气动弹性系统属于线性系统,弹性变形扭角 θ 及其所引起的附加气动力 bC_L^e 以及刚体情况下的攻角 α^r 及其所引起的气动力 bC_L^r 间也有类似关系,即有

$$As = \alpha$$

$$As^e = \theta$$

$$As^r = \alpha^r$$

且

$$\alpha = \alpha^r + \theta \quad (3-20)$$

$$s = s^r + s^e \quad (3-21)$$

3.2.1 大展弦比直机翼静气动弹性基本方程

对于大展弦比机翼,其弦向刚度比展向刚度要大得多,因而其弦向的变形比展向的变形要小得多。因此,为简化起见,可以假设机翼弦向剖面也是绝对刚硬的。这就是说剖面没有弦向变形。根据结构力学的知识,对于薄壳结构,可以引出弯心(或称刚心)的概念,当剪力通过该



点时,剖面相对扭角将等于零。经验证明,对于大展弦比机翼,只要没有大开口或者展向结构形式没有很大改变,则其刚轴基本上还是一直线。这样的机翼的弹性特性便可以近似地用一刚轴的弹性特性来表示。

这样的刚轴基本上和机身对称平面相垂直,且机翼的弯、扭之间没有耦合,可以分别加以处理。同时,对于直机翼,弯曲变形并不引起攻角的变化,引起的气动载荷也很小,故在研究静气动弹性问题时可不予考虑,只需考虑扭转变形引起的攻角变化即可。

综上所述,一个大展弦比直机翼的弹性特性近似可以用一垂直于机身对称平面的刚轴的弹性特性来表示,且只需研究其扭转特性即可。

设一大展弦比直机翼根部是固支的,刚轴沿展向与 y 轴重合。对于大展弦比直机翼,一般可引入 3 个假设:

- ① 机翼在其自身平面内是绝对刚硬的;
- ② 其弦向剖面是绝对刚硬的;
- ③ 有一直刚轴,且刚轴近似垂直于飞机对称平面。

对于这样的大展弦比直机翼,外载荷及变形关系可以简化。因为大展弦比直机翼的弦向剖面是刚性的,所以只要用剖面的刚心的垂直变形及对刚心的扭角就可以表示剖面的弹性变形。根据假设③,作用在刚轴上的力只引起刚轴的弯曲,而不会引起刚轴的扭转,而刚轴的弯曲也不会引起附加的气动力。

由此可见,对于大展弦比直机翼,作用在剖面上的分布载荷也可以加以简化,只需研究作用在各代表片条的剖面载荷对刚轴的扭矩 t 及它引起的对刚轴的扭角 θ 即可。通常将扭角 θ 沿展向分成若干片条,在每一片条上作用的载荷包括空气动力及重力。通常,气动力简化为作用在剖面空气动力中心上的升力 L 及对于它的俯仰力矩 M_{AC} (抬头为正);但在结构分析中,则常简化为各片条作用在刚轴上的升力 L 及对于刚轴的气动力扭矩 M_E 。显然,气动力引起的扭矩为

$$M_E = M_{AC} + L e$$

式中, e 表示剖面气动中心与刚轴的距离,刚心在后为正。

再设片条重心与刚心距离为 d ,重心在后为正,则这些载荷对刚轴的扭矩 t 可表示为

$$t(y) = M_{AC} + L e + N m g d + q b (b m_{AC} + C_L e) + N m g d \quad (3-22)$$

式中, q 为动压, b 为片条弦长, m 为片条质量, N 为过载系数, g 是重力加速度, m_{AC} 为空气动力对空气动力中心的俯仰力矩系数 (抬头为正)。如果把机翼根部固支,则其各剖面的扭转变形 $\theta(y)$ 可用积分方程表示,即

$$\theta(y) = \int_0^l f_{\theta\theta}(y, \eta) t(\eta) d\eta \quad (3-23)$$

相应矩阵表达式



$$\theta = F_{\theta\theta} t = q F_{\theta\theta} \bar{E} W s + q F_{\theta\theta} \bar{F} W m + N F_{\theta\theta} \bar{G} W g \quad (3-24)$$

式中, $F_{\theta\theta}$ ——机翼的扭转柔度影响系数矩阵, 是对称矩阵; 其中的元素 f_{ij} 表示在第 j 个片条剖面对其刚轴作用单位扭矩 (抬头为正) 时, 在第 i 个片条剖面引起的扭角 (抬头为正);

$\bar{E} = \text{diag} (e_1 \cdots e_n)$ ——以各剖面的刚心到气动中心的距离写出的对角矩阵, 刚心在后为正;

$\bar{F} = \text{diag} (b_1^2 \cdots b_n^2)$ ——各剖面的中弦长平方写出的对角矩阵;

$\bar{G} = \text{diag} (d_1 \cdots d_n)$ ——各剖面重心与刚心距离写出的对角矩阵, 重心在后为正;

W ——由积分数值方法确定的各剖面加权数组成的对角矩阵;

$m = [m_{AC1} \cdots m_{ACn}]^T$ ——各剖面俯仰力矩系数组成的列阵;

$g = [m_1 g \cdots m_n g]^T$ ——各剖面片条重量组成的列阵。

因此, 大展弦比直机翼静气动弹性基本方程可写为

$$\theta = q E s + q F m + N G g \quad (3-25)$$

式中

$$E = F_{\theta\theta} \bar{E} W$$

$$F = F_{\theta\theta} \bar{F} W$$

$$G = F_{\theta\theta} \bar{G} W$$

3.2.2 大展弦比后掠机翼静气动弹性基本方程

对于大展弦比后掠机翼, 类似大展弦比直机翼, 也可引入 3 个假设:

- ① 机翼在其自身平面内是绝对刚硬的;
- ② 其弦向剖面是绝对刚硬的;
- ③ 有一直刚轴, 但此刚轴有一后掠角 (一般此后掠角不等于机翼前缘后掠角)。

因此, 对于大展弦比后掠机翼, 通常有两种方式处理其结构模型: 一种是假设与刚轴垂直的剖面是刚硬的; 另一种是假设其顺气流剖面是刚硬的。通常采用后一种假设。这样, 其展向片条的划分与大展弦比直机翼相同。同样, 也可把作用在各片条上的分布空气动力及重力简化为作用在剖面刚心上的向上的力 L 和 Nmg 以及对刚心的扭矩 t (其表达式与式 (3-22) 相同)。但是, 由于后掠机翼的弹性变形是弯、扭耦合的, 也就是说, 这时作用在刚轴上的力所引起的刚轴的弯曲还将引起顺气流扭角的变化。所以, 对于大展弦比后掠机翼, 要同时考虑作用在刚轴上的力及力矩所引起的顺气流扭角。同理, 这时有

$$\theta = q (F_{\theta\theta} \bar{E} + F_{\theta z}) W s + q F_{\theta\theta} \bar{F} W m + N (F_{\theta\theta} \bar{G} - F_{\theta z}) W g \quad (3-26)$$

式中, $F_{\theta z}$ 的元素 f_{ij} 表示在第 j 个剖面的刚轴上作用一向上的单位力时, 在第 i 个剖面引起的顺气流扭角 (抬头为正)。因此, 大展弦比后掠机翼静气动弹性基本方程为

$$\theta = q E s + q F m + N G g \quad (3-27)$$

式中



$$E = (F_{\theta\theta} \bar{E} + F_{\theta z}) W$$

$$F = F_{\theta\theta} \bar{F} W$$

$$G = (F_{\theta\theta} \bar{G} - F_{\theta z}) W$$

以上各式中, W 为展向积分加权矩阵。

3.2.3 一般翼面静气动弹性基本方程

下面讨论一般翼面(如小展弦比机翼)的外载荷及其引起的弹性变形间的关系式。如

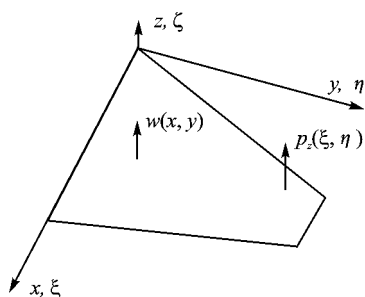


图 3-6 一般翼面及其坐标

图 3-6 所示,一般翼面的特点是翼面的弦向剖面有了变形。假设机翼的上反角(或下反角)不很大,因此可以把机翼的翼面当作 xy 平面(或 $\xi\eta$ 平面)看待,把它分成若干小块(网格),分别求出每一小块的变形,并求出它们之间的相互关系和相互影响。

机翼上任意点的挠度 $w(x, y)$ 和作用在翼面上的分布载荷 $p_z(x, y)$ 的关系表示为

$$w(x, y) = \iint_S f_{zz}(x, y, \xi, \eta) p_z(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

式中, S 表示翼面面积, $f_{zz}(x, y, \xi, \eta)$ 的定义是在 (ξ, η) 点上作用 z 向单位载荷引起 (x, y) 点上的 z 向变形。上式表示作用在整个翼面上的分布载荷在 (x, y) 点上的总挠度。对气动弹性分析来说,关心其弹性扭角的变化,即

$$\theta(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \iint_S f_{\theta z}(x, y, \xi, \eta) p_z(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3-28)$$

式中, $f_{\theta z}(x, y, \xi, \eta) = \frac{\partial f_{zz}(x, y, \xi, \eta)}{\partial x}$, 称为影响函数。

作用在点 (ξ, η) 处的单位面积外力 $p_z(\xi, \eta)$ 由两部分组成:一部分是空气动力 $q C_L(\xi, \eta)$, 其中 q 是动压;另一部分是质量引起的惯性力 $\rho(\xi, \eta) g N$, 其中 $\rho(\xi, \eta)$ 是单位翼面积的质量。这样,作用在点 (ξ, η) 处的单位面积外力可表示为

$$p_z(\xi, \eta) = q C_L(\xi, \eta) - \rho(\xi, \eta) g N$$

则有

$$\theta(x, y) = \iint_S f_{\theta z}(x, y, \xi, \eta) [q C_L(\xi, \eta) - \rho(\xi, \eta) g N] d\xi d\eta \quad (3-29)$$

应当指出,这里的空气动力 $q C_L(\xi, \eta)$ 包含两部分:一部分是假定机翼不变形,对应于当地从零升力线量起的几何攻角 α^r 的气动力;另一部分是由于机翼的弹性变形而导致的气动力。

把积分形式化成矩阵形式

$$\theta = q F_{\theta z} W s - N F_{\theta z} W g \quad (3-30)$$



式中, θ 表示各网格点处的顺气流扭角向量, 矩阵 $F_{\theta z}$ 中的元素 f_{ij} 表示在第 j 个网格的气动力(或重力)作用点上作用一向上单位力时在第 i 个网格点处引起的顺气流扭角(抬头为正); W 为展向积分加权矩阵(对角), 因数值积分方法的不同而不同, 在最简单的情况下, 可表示为 $W = \text{diag}(\Delta l_1 \cdots \Delta l_n)$, Δl_i 为第 i 个网格的局部展长。上式可简写为

$$\theta = qEs + NGg \quad (3-31)$$

式中

$$E = F_{\theta z} W$$

$$G = -F_{\theta z} W$$

方程(3-31)是分析气动弹性静力问题的基本方程, 适用于小展弦比、大展弦比和后掠翼面等任何形式的翼面, 可用于分析静气动弹性发散、载荷分布和操纵反效等。

以上分别给出了3种情况下的外载荷与变形的关系式(3-25), (3-27), (3-31), 它们可以统一写作如下形式:

$$\theta = qEs + qFm + NGg \quad (3-32)$$

各种情况下, E, F, G 的表达式不尽相同。

还有一点要说明, 对于大展弦比机翼, 只需求得每一展向片条上总的空气动力即可。但为提高空气动力计算的准确性, 也可把这样的片条沿弦向再分成若干网格, 然后再求得各片条的 bC_L 及 m_{AC} 。当然, 也可以把大展弦比机翼当作小展弦比机翼那样处理, 但计算量会大大增加。

在处理气动弹性效应引起的扭转发散和载荷重新分布时, 也只需考虑对称情况。这是因为反对称的载荷会引起飞机的滚转, 从而产生惯性力和阻尼气动力, 这将在很大程度上缓和它对扭转发散和强度的影响。由此可见, 对于第一类气动弹性静力问题, 计算时应取对称的载荷分布情况; 而对于机翼的操纵反效和操纵效率问题, 可对应飞机的滚转情况, 显然, 只需考虑对飞机纵轴反对称的载荷分布即可。所以第二类气动弹性静力问题应取反对称情况进行分析。

3.3 机翼发散计算与分析

本节从静气动弹性基本方程的矩阵形式出发, 推导机翼发散基本方程, 讨论机翼发散的计算方法。

上面已经指出, 对于处理扭转发散问题, 应以对称气动力载荷作为计算情况。这是因为在同样的攻角分布下对称情况的气动载荷将大于反对称的载荷, 所以使发散动压降低。

3.3.1 机翼发散基本方程

在讨论二元机翼的发散时已经指出, 机翼的发散问题从物理本质上说, 是静稳定性问题; 从数学上看, 是特征值问题。

因为机翼的发散问题在物理本质上是稳定性问题, 所以在研究机翼的发散时, 可以不考虑



作用在机翼上的原平衡力系,而只需研究机翼受微扰动后的变形(仍记作 θ) 及它所引起的附加气动力,即可以不考虑重力引起的惯性力和刚体攻角所引起的气动力。联系到式 (3-10) 有

$$\theta = qEs^e \quad (3-33)$$

$$\theta = As^e \quad (3-34)$$

如前所述,对于不同机翼,虽然都可表示成上式,但 E 的含义是不同的。上式表明,在任何微扰动 θ 引起的附加气动力 s^e 作用下产生的变形恰好也是 θ 。这说明,附加气动力矩恰好和与 θ 相应的弹性恢复力矩相等;也就是说,气动力矩和弹性恢复力矩的总和为零,微扰动没有形成净恢复力矩。这时机翼处于中性稳定状态,即发散临界状态,这时的动压为发散动压 q_D 。以上两方程可合并为

$$s^e = q_D A^{-1} E s^e \quad (3-35)$$

上式是一个齐次方程组,它含有未知量 q_D 及 s^e 。该方程即为机翼发散的基本方程。

3.3.2 机翼发散计算方法

如前所述,发散在数学上是一特征值问题。式 (3-35) 中, s^e 有非零解的条件为

$$|I - q_D A^{-1} E| = 0 \quad (3-36)$$

式中, I 为单位矩阵。满足上式的 q_D 即为特征值。与特征值相应可求得特征向量 s^e 。由于式 (3-35) 是齐次方程组,所以与 s^e 成比例的任何列向量均满足方程 (3-35)。

若式 (3-35) 代表 n 个方程,则展开式 (3-36) 即可得到关于 q_D 的 n 阶代数方程,求解后可得到 n 个 q_D 。事实上,最感兴趣的是最小的 q_D 值。而研究特征值问题时,若只需求其最大或最小的特征值,则通常都用迭代法。迭代法实际只求最大的特征值,所以式 (3-35) 应改为

$$\lambda s^e = D s^e \quad (3-37)$$

式中

$$\lambda = \frac{1}{q_D}, \quad D = A^{-1} E$$

迭代具体方法如下:

① 先设一 s_0^e 。 s_0^e 是任意的非零列阵,即该列阵中至少有一个元素不为零。将它后乘 D 得一列

$$b_1 = D s_0^e$$

② 在 b_1 中任意选取其第 i 个元素 b_{i1} 将 b_1 正则化,即得

$$s_1^e = \frac{1}{b_{i1}} b_1$$

通常把 b_1 中绝对值最大的元素取作 b_{i1} 。由式 (3-37) 可见 $\lambda = b_{i1}$, 它就是特征值的第一次近似值。



③ 重复上述过程。一般地说可写作

$$b_{j+1} = DS_j^e = \lambda_{j+1} s_{j+1}^e$$

④ 在迭代过程中,检查是否满足收敛条件

$$\left| \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_{j+1}} \right| \leq \varepsilon_0$$

式中, ε_0 是给定的最大容许误差。

⑤ 若不满足要求,则重复第③,④步。若已满足收敛条件,即得

$$q_D = \frac{1}{\lambda}$$

因为矩阵代数中已证明这样迭代将收敛到其最大特征值,从而求得最小 q_D 值。最后所求得的 s^e 即为发散时升力系数向量。

例题 分别用片条理论、升力线理论(气动载荷对称分布)和升力线理论(气动载荷反对称分布)确定图 3-7 所示的大展弦比直机翼的发散速度。机翼几何数据见图 3-7。其刚轴沿机翼的 35 % 弦线,刚轴垂直于对称平面。已知:

$$l = 12.7 \text{ m}, \quad \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 5.5$$

$$\text{diag} (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4) = \begin{bmatrix} 2.782 & & & \\ & 3.47 & & \\ & & 4.55 & \\ & & & 5.715 \end{bmatrix}$$

其中元素的单位为 m 。

解 因为该机翼是大展弦比直机翼,所以可将机翼沿展向等分成 4 个片条,以各片条的中间剖面作为该片条的计算剖面。每一片条的气动力都集中在其 1/4 弦线点上。

已知与之相应的扭转柔度影响系数矩阵为

$$F_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 3.683 & 1.620 & 0.609 & 0 \\ 1.600 & 1.620 & 0.681 & 0 \\ 0.681 & 0.981 & 0.981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \times \frac{1}{9.81}$$

其中元素的单位为 $\text{rad}/(\text{N} \cdot \text{m})$ 。

因为刚轴沿 35 % 弦线,在气动中心 25 % 弦线之后,故 $e = 0.1b$,即

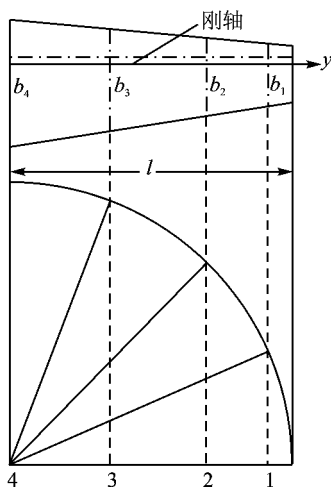


图 3-7 大展弦比直机翼示意图



$$\bar{E} = 0.1 \times \text{diag} (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4) = \begin{bmatrix} 0.278 & & & \\ & 0.347 & & \\ & & 0.455 & \\ & & & 0.572 \end{bmatrix}$$

其中元素的单位为 m_0 。

当积分时机翼各站不是等分时,采用摩尔索夫 (Multhopp) 法。因对称,只取半个机翼,剖面数为 $(m+1)/2$ (m 是全翼展剖面数,是奇数,此例中 $m=7$),则其加权矩阵为对角矩阵

$$W = \frac{\pi l}{m+1} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{m+1} & & & \\ & \sin \frac{2\pi}{m+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

这样

$$E = F_{\theta\theta} \bar{E} W = \begin{bmatrix} 1.955 & 1.982 & 1.412 & 0 \\ 0.860 & 1.982 & 1.412 & 0 \\ 0.362 & 0.833 & 1.412 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \times \frac{1}{9.81}$$

其中元素的单位为 $\text{rad} \cdot m/N_0$ 。

下面用不同气动力理论计算 A ,并求 q_D , V_D 。

1. 片条理论

片条理论假设作用在各片条上的升力只取决于该片条的攻角 (见式 (3-18)),即

$$A^{-1} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \text{diag} (b_1 \quad \cdots \quad b_n)$$

式中, $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ 应按风洞试验结果或按理论公式计算。设剖面的升力线斜率 a_0 为 5.5,此机翼的展弦比 λ 为 6.15,则按式 (3-1a) 有

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 2} = 4.15$$

由式 (3-18),即可求得 A^{-1} 。由此,代入式 (3-37),并进行迭代。迭代过程如下:

$$s^e = q A^{-1} E s^e = q \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} 5.438 & 5.512 & 3.292 & 0 \\ 2.983 & 6.877 & 4.900 & 0 \\ 1.626 & 3.749 & 6.354 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^e \times 10^6$$



进行迭代计算,最后得到的升力系数分布、临界发散动压和海平面临界速度分别为

$$s^e = [1 \quad 0.969 \quad 0.724 \quad 0]^T$$

$$q_D = \frac{1}{13.62 \times 10^{-6} \times \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}} \text{ N/m}^2 = 17\,690 \times 9.81 \text{ N/m}^2$$

$$V_D = 532.2 \text{ m/s}$$

对应的弹性扭角分布为

$$\theta = A s^e = [1 \quad 0.776 \quad 0.447 \quad 0]^T$$

2. 升力线理论法 (载荷对称分布, 取 $j=1,3,5,7$)

利用式 (3-19a), 并代入本例题原始数据, 则对称气动力影响系数矩阵为

$$A^s = \begin{bmatrix} 16.82 & -3.768 & 0 & -0.288 \\ -2.039 & 10.810 & -2.351 & 0 \\ 0 & -1.800 & 8.302 & -1.68 \\ -0.221 & 0 & -3.105 & 7.118 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

其中元素的单位为 rad/m 。

$$(A^s)^{-1} = \begin{bmatrix} 6.229 & 2.309 & 0.821 & 0.446 \\ 1.249 & 10.22 & 3.196 & 0.805 \\ 0.340 & 2.446 & 13.98 & 3.313 \\ 0.341 & 1.138 & 6.121 & 15.51 \end{bmatrix}$$

其中元素的单位为 m/rad 。代入式 (3-37), 并进行迭代法求解, 其解为

$$\frac{1}{q_D} (s^e)^s = 51.83 \times 10^{-6} [0.762 \quad 1 \quad 0.821 \quad 0.382]^T$$

由此得出

$$\frac{1}{q_D^s} = 51.83 \times 10^{-6}, q_D^s = 19\,290 \times 9.81 \text{ N/m}^2, V_D^s = 555.7 \text{ m/s}$$

$$(s^e)^s = [0.762 \quad 1 \quad 0.821 \quad 0.382]^T$$

$$\theta^s = [1 \quad 0.820 \quad 0.490 \quad 0]^T$$

其中元素的单位为 rad 。

3. 升力线理论法 (气动载荷反对称分布, 取 $j=2,4,6,8$)

利用式 (3-19b), 并代入本例题原始数据, 则反对称气动力影响系数矩阵为

$$A^a = \begin{bmatrix} 16.82 & -3.637 & 0 & 0 \\ -1.969 & 10.81 & -1.969 & 0 \\ 0 & -1.507 & 8.302 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.181 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$



其中元素的单位为 rad/m_0 。

$$(A^a)^{-1} = \begin{bmatrix} 6.196 & 2.157 & 0.511 & 0 \\ 1.167 & 9.975 & 2.365 & 0 \\ 0.212 & 1.81 & 12.480 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.143 \end{bmatrix}$$

其中元素的单位为 m/rad 。代入式 (3-37), 并进行迭代法求解, 其解为

$$\frac{1}{q_D} (s^e)^a = 47.22 \times 10^{-6} [0.782 \quad 1 \quad 0.730 \quad 0]^T$$

由此得出

$$\frac{1}{q_D^a} = 47.22 \times 10^{-6}, q_D^a = 21\,180 \times 9.81 \text{ N/m}^2, V_D^a = 582 \text{ m/s}$$

$$(s^e)^a = [0.782 \quad 1 \quad 0.730 \quad 0]^T$$

$$\theta^a = [1 \quad 0.811 \quad 0.472 \quad 0]^T$$

其中元素的单位为 rad 。

由上可见, 3 种方法所求得的 V_D 均为超声速, 而求得此值所用的 A 矩阵却是在不可压缩情况下得出的。所以, 以上结果不能直接应用。但是, 以上研究问题的方法仍是有用的。且对于这一机翼, 由于 V_D 超过声速很多, 所以即使考虑压缩性影响后, 预计也不会在亚声速范围内出现发散。

其次, 在以上 3 种方法求得的分散动压中, 片条理论 q_D 最小, 对称载荷情况次之, 反对称时最大。所以, 计算扭转发散时, 一般不需计算反对称的情况, 这个结论适合于通常的平直机翼。这是因为反对称的载荷分布将小于对称分布, 气动力偏大, 则临界速度就会降低。而片条理论认为各剖面的 $\partial C_L / \partial \alpha$ 为常数, 而翼尖扭角本来就大, 这样一来使翼尖气动力显然偏大, 所以片条理论得出的发散临界动压偏低。

3.3.3 带有掠角的机翼发散的特点

直机翼在迎面气流 V 中, 速度沿翼展没有分量, 因此机翼的弯曲不引起升力, 所以只要考虑机翼扭转即可。在后掠角为 Λ 的机翼上则不然, 由于 V 在展向有分量 $V \sin \Lambda$, 所以机翼的弯曲 (其挠度用 w 表示) 也将引起升力, 此时的气动弹性问题要同时研究扭转与弯曲。

设飞机在对称面作曲线飞行, 速度为 V , 过载系数为 N_0 。由于对称性, 故只研究一个机翼, 如图 3-8 所示。

假定机翼为细长悬臂梁, 其刚轴记作 $\bar{y}$, 固支于机身, 用有效根部表示。由于机翼转过一个后掠角 Λ , 对于 $\bar{y}$ 方向的梁, 其单位展长翼段 (图 3-8 的 AB) 的升力为

$$L(\bar{y}) = \frac{1}{2} \rho (V \cos \Lambda)^2 c \frac{\partial \bar{C}_L}{\partial \alpha} \bar{\alpha} = q c \frac{\partial \bar{C}_L}{\partial \alpha} \bar{\alpha} \cos^2 \Lambda$$

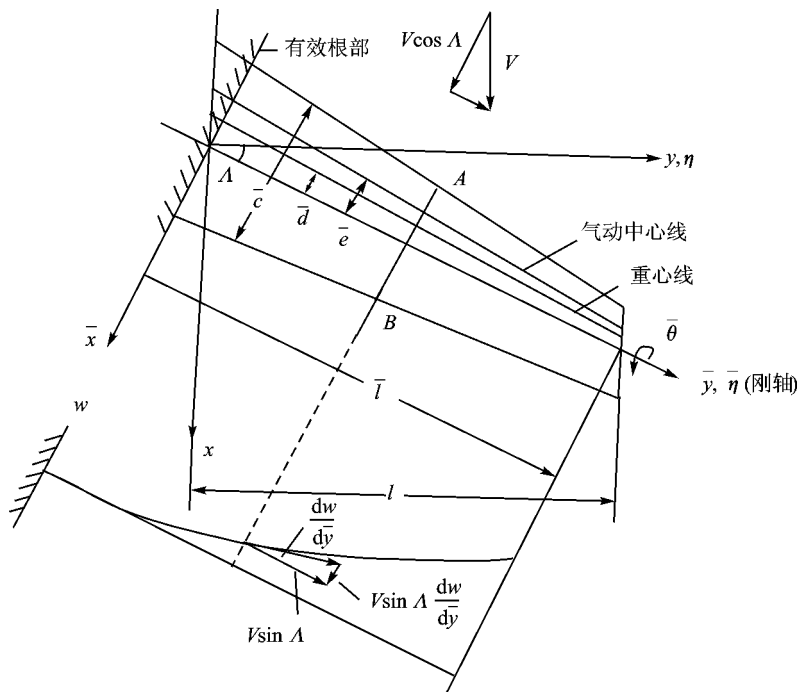


图 3-8 细长后掠机翼

式中, $q = \frac{1}{2} \rho V^2$;

$\bar{\alpha}$ ——翼段 (AB 方向) 的有效攻角;

$\frac{\partial \bar{C}_L}{\partial \alpha}$ ——沿 AB 方向翼型的气动力导数。

当机翼没有弯曲时,有效攻角 $\bar{\alpha}$ 为

$$\bar{\alpha} = \bar{\theta} + \bar{\alpha}^r$$

若有弯曲时,弯曲斜率用 $dw/d\bar{y}$ 来表示,如图 3-9 所示,则气流引起下洗分量 $\frac{dw}{d\bar{y}} V \sin A$,于是

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^r + \bar{\theta} - \frac{dw}{d\bar{y}} V \sin A / V \cos A = \bar{\alpha}^r + \bar{\theta} - \frac{dw}{d\bar{y}} \tan A \quad (3-38)$$

得到单位长度上的升力

$$L(\bar{y}) = q \bar{c} \frac{\partial \bar{C}_L}{\partial \alpha} \left(\bar{\alpha}^r + \bar{\theta} - \frac{dw}{d\bar{y}} \tan A \right) \cos^2 A \quad (3-39)$$

其作用点在气动中心上。此外,还有绕气动中心的力矩 $q \bar{C}_{m_0} \cos^2 A$ 以及重心线上有重力 $N g m(\bar{y})$ 。

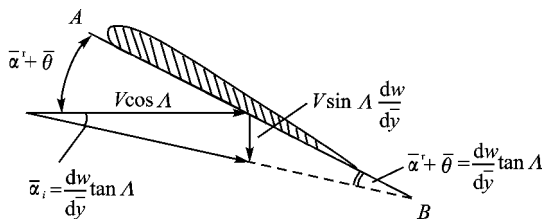


图 3-9 沿 AB 方向的有效攻角

后掠机翼在向上的升力作用下,不仅有扭转,而且有向上的弯曲变形,式 (3-39) 表明了有效攻角的减小,因此可以认为,弹性变形 (包括弯曲) 使总的攻角变化量减小 $\frac{dw}{dy} \tan \Lambda$ 。这就

减小了弹性变形附加的气动力,因此起到稳定的作用。相反,如果是前掠机翼,则向上的升力虽然也产生向上的弯曲,但因为 Λ 为负值,所以会使攻角的变化量增大,从而增大了弹性变形

附加的气动力,使不稳定的趋势增大。当后掠角增大到一定程度时,甚至会使机翼弯曲变形的影响抵消了扭转的影响,或者超过了后者的影响。经过这样的分析,可以断定,后掠机翼将比平直机翼具有较高的发散动压;当后掠角大到一定程度时,甚至机翼就不会发生扭转发散。而金属前掠机翼,由于发散动压太低,通常不大采用。目前,为了发挥前掠机翼的气动特性,现代飞行器采用复合材料气动弹性剪裁技术设法提高发散动压,甚至消除发散。 q_D 随着后掠角 Λ 的变化如图 3-10 所示 (为典型金属机翼情况),从图中可以看出后掠角的影响是显著的。

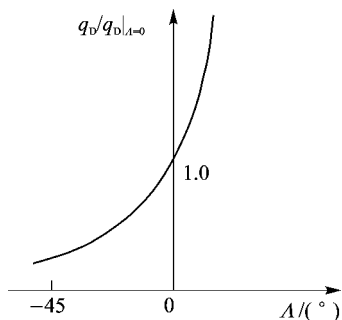


图 3-10 后掠角 Λ 对于 q_D 的影响

例题 一等剖面的均质大展弦比前掠翼,机翼的刚轴、重心线与 $1/4$ 弦线重合 (即 $d = e = 0$)。机翼前掠角为 Λ ,弦长为 b ,半展长为 l ,气动力用片条理论计算,其剖面的沿机翼刚轴的 $\partial C_L / \partial \alpha = a_0$ 。机翼沿刚轴的弯曲刚度为 EI (常值),计算其发散动压 q_D 。

解 对于前掠翼,发散基本方程为

$$s^e = q_D A^{-1} E s^e$$

其中,由于 $e = 0$,有

$$E = F_{\theta z} W$$

对于片条理论,有

$$A^{-1} = b a_0 \cos \Lambda \cdot I$$

为简化起见,将机翼沿展向 3 等分,取每段的中间剖面作为计算站,可以求得



$$F_{\theta z} = \frac{l^2 \sin \Lambda}{72EI \cos^2 \Lambda} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 21 \\ 1 & 9 & 25 \end{bmatrix}$$

取

$$W = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

可得

$$A^{-1}E = \frac{ba_0 l^3 \sin \Lambda}{216EI \cos \Lambda} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 21 \\ 1 & 9 & 25 \end{bmatrix}$$

则发散基本方程可写作

$$\lambda s^e = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 21 \\ 1 & 9 & 25 \end{bmatrix} s^e$$

这里

$$\lambda = \frac{216EI \cos \Lambda}{q_D ba_0 l^3 \sin \Lambda}$$

用迭代法可求得

$$\lambda = 33.33$$

$$s^e = [0.414 \quad 0.880 \quad 1]^T$$

由此可求得

$$q_D = 6.481 \frac{EI}{ba_0 l^3} \frac{\cos \Lambda}{\sin \Lambda}$$

本章参考文献 [2] 用解析法求得的 q_D 为

$$q_D = 6.33 \frac{EI}{ba_0 l^3} \frac{\cos \Lambda}{\sin \Lambda}$$

由以上计算可见,若 l 为常值,则随前掠角 Λ 增加, q_D 迅速减小;若 $l/\cos \Lambda$ 为常值,则在 $\Lambda < 35^\circ$ 时,随 Λ 增大, q_D 逐渐减小。

以上是对一简化模型在 $d=e=0$ 条件下导出的结果,它只是定性地说明在前掠翼上由于弯曲引起的扭角所产生的影响,也说明前掠翼的发散是一种严重问题。

3.3.4 提高发散动压的设计考虑

根据许多试验结果,总结出要提高机翼的发散速度,使其超过最高飞行速度(为安全计,



一般使发散速度至少超过最高飞行速度的 15 % 以上), 通常采用的办法有:

- ① 加强机翼的扭转刚度;
- ② 增加机翼的根梢比和减小它的展弦比;
- ③ 增加机翼的后掠角;
- ④ 各剖面刚心尽量靠前缘, 减小刚心与气动力中心的距离。亚声速时气动力中心位置在 25 % 弦线附近, 超声速在 50 % 弦线附近, 一般大展弦比机翼刚轴位置在 30 % ~ 40 % 的范围内。
- ⑤ 采用复合材料气动弹性剪裁设计技术, 提高发散速度或消除发散。

3.4 机翼载荷重新分布的计算与分析

本节从静气动弹性基本方程的矩阵形式出发, 推导载荷重新分布基本方程, 并讨论机翼载荷重新分布的计算方法。

3.4.1 载荷重新分布基本方程

当飞机小于发散速度时, 由于机翼的弹性变形, 机翼上的升力沿展向分布将发生变化, 这对于结构强度计算及稳定性计算都有重要影响。这里, 仍以大展弦比直机翼为例来导出载荷重新分布的基本方程。

由式 (3-10), (3-20), (3-21) 以及静气动弹性基本方程 (3-27) 可得到下式

$$As^e = qEs^e + \theta^r \quad (3-40)$$

式中

$$\theta^r = qEs^r + qFm + NGg \quad (3-41)$$

上式中, 注意各种情况下 E, F, G 的不同。 θ^r 表示不考虑附加气动力时, 作用于刚硬机翼的分布外力和力矩所引起的顺气流扭角 (以下简称扭角) 向量。它与扭角变形无关, 用上标 r 表示。式 (3-41) 中右端三项分别对应于不考虑附加气动力时气动力中心上的升力、对气动力中心的力矩以及计及过载影响的重力引起的扭角。式 (3-40) 中右端第一项表示因弹性变形而附加的气动力引起的扭角。

在上式中, q 由飞行条件确定。此外, m, g 及 A, E, F, G 都由机翼的气动特性和结构参数所决定, 是给定的。在其余的 s^r, s^e 及 N 中, 有

$$N = \frac{L}{Mg}$$

式中, Mg 为飞机总重量。它们之间还有一个关系式。在对称情况下, 有

$$\frac{1}{2}NMg = q \int_0^l b C_L dy$$



上式未计及尾翼的升力,上式中积分域 s 为一个机翼。上式的矩阵形式为

$$N = \frac{2q}{Mg} \mathbf{I}^T W s = \frac{2q}{Mg} \mathbf{I}^T W (s^e + s^r) \quad (3-42)$$

式中,上标 r 表示与变形无关 $\mathbf{I} = [1 \cdots 1]^T$, W 为一展向积分加权矩阵(对角)。

式(3-40), (3-41) 及式(3-42) 组成载荷重新分布的基本方程,由此方程出发就可求得气动弹性对机翼升力展向分布的影响。但以上两式只有 $n+1$ 个方程(n 为 A 方阵的阶数),所以还应补充给定 s^r 或 N 及其他条件。

3.4.2 载荷重新分布的两种计算情况

关于载荷重新分布,一般存在两种情况:一是给定刚性机翼的攻角 α^r ,亦即固定飞行姿态,确定过载系数 N (这时 N 取决于全部载荷);二是给定过载系数 N ,确定载荷分布,即总升力一定,确定机翼的攻角 α^r 和 s^e 。下面分别讨论这两种情况的计算方法。

1. 给定刚性机翼的攻角分布 α^r ,确定相应的升力分布及过载系数 N

由式(3-10b),得

$$s^r = (A^s)^{-1} \alpha^r \quad (3-43)$$

注意,上式中 A 的上标 s 表示对称情况。

将上式及式(3-21), (3-41), (3-42) 代入式(3-40),消去 s^e ,即得

$$s = \left(A^s - qE - \frac{2q}{Mg} G m \mathbf{I}^T W \right)^{-1} (\alpha^r + qFm) \quad (3-44)$$

求得 s 后,即可由式(3-42) 求得 N 。

当 q 达到某一临界值时,上式中的求逆矩阵的行列式等于零,因此逆矩阵不存在或者说对于任一微小扰动, s 将趋于无穷大。这个临界值就是该情况下的发散动压。

另一种情况是,若刚性机翼的 C_L^r 已由风洞试验模型或高精度的数值计算求出,而只是求弹性引起的修正量 C_L^e ,则可把式(3-42) 写成

$$N = N^r + N^e = \frac{2q}{Mg} \mathbf{I}^T W (s^e + s^r)$$

式中

$$N^r = \frac{2q}{Mg} \mathbf{I}^T W s^r$$

$$N^e = \frac{2q}{Mg} \mathbf{I}^T W s^e$$

则

$$N = N^r + \frac{2q}{Mg} \mathbf{I}^T W s^e \quad (3-45)$$

其中 N^r 已求出。把上式代入式(3-41) 后,再代入式(3-40),得



$$s^e = \left(A^s - qE - \frac{2q}{Mg} Ggl^T W \right)^{-1} (qEs^r + qFm + N^r Gg) \quad (3-46)$$

由此可解得 s^e , 按式 (3-45) 可求得 N_0 。

2. 给定过载系数 N , 即总升力一定, 确定机翼的攻角 α^r 和 s^e

这时相当于作用于机翼的总载荷是不变的, 即不论是刚硬机翼, 还是弹性机翼, 它们的总升力值一样, 亦即由于弹性变形引起的附加气动载荷总和为零, 可表示为

$$\int_0^l b C_L^e dy = 0$$

即

$$l^T W s^e = 0 \quad (3-47)$$

假定机翼无气动扭转及几何扭转, 即

$$\alpha^r = \alpha^r l$$

注意到本问题中 $\alpha^r = \alpha_0$ 和 $\alpha^e(0)$ 都是未知的, 所以, 利用关系式

$$A^s s^r = \alpha^r = \alpha^r l$$

$$2ql^T W s^r = NMg$$

可解得 α^r 和 s^r 。有了 s^r , 则可求得 (见式 (3-41))

$$\theta^r = qEs^r + qFm + NGg$$

这就是刚硬机翼载荷引起的扭角。利用式 (3-40), 并考虑翼根处有弹性变形引起的附加攻角 $\alpha^e(0)$, 所以有

$$A^s s^e = qEs^e + \theta^r + \alpha^e(0) l \quad (3-48)$$

其中 s^e 与 $\alpha^e(0)$ 为未知量, 利用式 (3-47) 和上式, 则有

$$\begin{bmatrix} A^s - qE & -l \\ l^T W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^e \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

由此可解得 s^e 与 $\alpha^e(0)$, 从而可求得 s_0 。

例题 试求图 3-11 所示机翼的弹性变形对载荷分布的影响。飞机以 480 km/h 的速度作对称机动飞行, 过载系数 $N=3.5$ 。

已知: 飞机总重为 $W (W=Mg) = 40\,200\text{ N}$, 飞行高度在 5 000 m 时, $q = 7 \times 10^3\text{ N/m}^2$, 升力线斜率为 $\partial C_L / \partial \alpha = 5.5\text{ rad}^{-1}$, 剖面零升力矩系数为 $m_{AC} = -0.012$, 半翼展长 $l = 10.2\text{ m}$ 。

按图 3-11 分为 5 站 (半翼展), 结构分布数据列于表 3-1。

表 3-1 结构分布数据表

站号	$\theta_i / (^\circ)$	y_i / m	c_i / m	e_i / m	d_i / m	$(mg)_i / \text{N}$
1	18	9.701	2.125	0.39	0.54	280
2	36	8.252	2.487	0.455	0.62	1 220
3	54	5.996	3.051	0.545	0.74	1 740

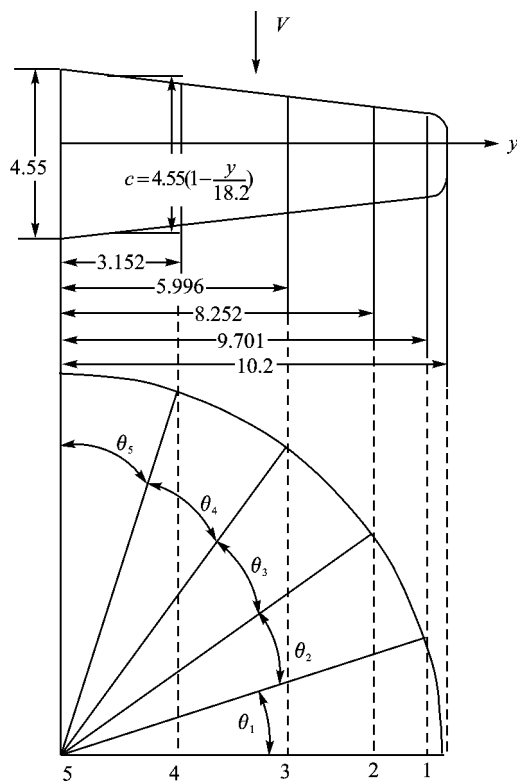


图 3-11 机翼尺寸及分站 (长度单位: m)

4	72	3.152	3.787	0.680	1.28	4 360
5	90	0	4.550	0.818	0	12 500

$$F_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 4.35 & 2.42 & 1.28 & 0.74 & 0 \\ 2.42 & 2.42 & 1.28 & 0.74 & 0 \\ 1.28 & 1.28 & 1.28 & 0.74 & 0 \\ 0.74 & 0.74 & 0.74 & 0.74 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-7}$$

其中元素的单位为 $\text{rad}/(\text{N} \cdot \text{m})$ 。



$$A^s = 0.025 \begin{bmatrix} 11.147 & -2.924 & 0 & -0.291 & 0 \\ -1.524 & 6.772 & -1.695 & 0 & -0.306 \\ 0 & -1.231 & 5.218 & 1.342 & 0 \\ -0.094 & 0 & -1.142 & 4.356 & -2.094 \\ 0 & -0.179 & 0 & -1.992 & 3.928 \end{bmatrix}$$

其中元素的单位为 rad/m_0 。

解 由积分的数值方法确定各剖面加权数组成的对角矩阵。通常在计算静气动弹性问题时,为了提高精度,宜采用摩尔索夫 (Multhopp) 方法。一般地,只要对半个翼展进行计算,当整个翼展上共取 m 个剖面 (m 为奇数) 时,半翼展上只有剖面数为

$$n = \frac{m+1}{2}$$

对于 Multhopp 积分方法,它的加权矩阵 (对角阵) 为

$$W = \frac{\pi l}{m+1} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{m+1} & & & & \\ & \sin \frac{2\pi}{m+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

本题相当于全翼展取剖面数 $m=9$, 则

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi l}{10} \cdot \text{diag} \left(\sin 18^\circ \quad \sin 36^\circ \quad \sin 54^\circ \quad \sin 72^\circ \quad \frac{1}{2} \right) = \\ &\quad \text{diag} (0.990 \quad 1.884 \quad 2.592 \quad 3.048 \quad 1.602) \\ (A^s)^{-1} l &= [7.840 \quad 13.296 \quad 18.367 \quad 25.702 \quad 24.030]^T \end{aligned}$$

其中元素的单位为 m/rad 。

$$\alpha^r = \frac{NMg}{2q l^T W (A^s)^{-1} l} = 0.051$$

其中元素的单位为 rad 。于是刚硬机翼升力分布为

$$s^e = \alpha^r (A^s)^{-1} l = [0.398 \quad 0.674 \quad 0.931 \quad 1.303 \quad 1.218]^T$$

其中元素的单位为 m_0 。

$$\theta^r = qEs^r + qFm + NGg = [0.029 \quad 0.025 \quad 0.020 \quad 0.011 \quad 0]^T$$

其中元素的单位为 rad 。最后将以上结果代入式 (3-49), 得到下列修正弹性影响的升力分布为



$$\begin{bmatrix} 0.272 & -0.074 & -0.013 & -0.008 & 0 & -1 \\ -0.038 & 0.164 & -0.043 & -0.001 & -0.008 & -1 \\ -0.000 & -0.031 & 0.127 & -0.034 & 0 & -1 \\ -0.003 & -0.000 & 0.029 & 0.106 & -0.051 & -1 \\ 0 & -0.004 & 0 & -0.049 & 0.096 & -1 \\ 0.990 & 1.884 & 2.592 & 3.047 & 1.602 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^e \\ s_2^e \\ s_3^e \\ s_4^e \\ s_5^e \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.029 \\ 0.025 \\ 0.020 \\ 0.011 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此解得

$$[(s^e)^T | \alpha^e(0)] = [0.009\ 28 \quad 0.010\ 86 \quad 0.009\ 65 \quad -0.007\ 26 \quad -0.015\ 94 \quad | \quad -0.001\ 23]$$

其中元素的单位为 m/rad 。此列阵的前 5 个元素组成 s^e ，又可得总的载荷分布为

$$qs = qs^r + qs^e = \begin{bmatrix} 2\ 782 \\ 4\ 718 \\ 6\ 938 \\ 9\ 122 \\ 8\ 528 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 95 \\ 76 \\ 67 \\ -51 \\ -112 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 847 \\ 4\ 794 \\ 7\ 005 \\ 9\ 071 \\ 8\ 416 \end{bmatrix}$$

其中元素的单位为 N/m 。

图 3-12 画出了这一结果。由计算结果表明,此例讨论的机翼,其弹性对载荷分布的影响约占百分之几。攻角 $\alpha^e(0)$ 为负值表示 为保持 N 不变,则弹性机翼的根部攻角必须略小于刚性机翼的攻角 α^r 。

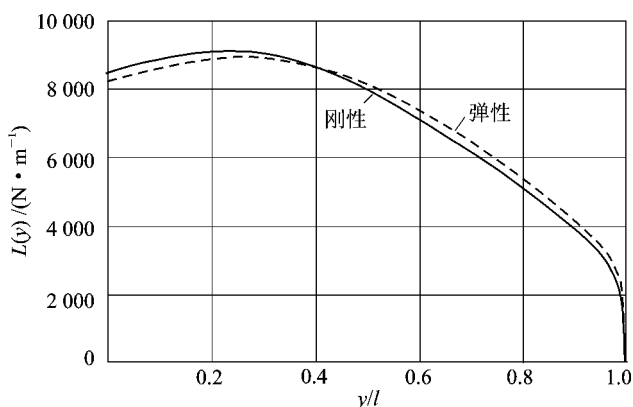


图 3-12 弹性机翼升力的重新分布



3.5 副翼操纵效率与反效

3.5.1 操纵反效基本方程

对于平直机翼和后掠机翼,副翼偏转引起的气动力一般都作用在刚轴的后面。它使机翼产生低头方向的扭转,使迎角减小。这样,偏转副翼所引起的升力增量及其对飞机的滚转力矩都减小了。当飞行速度达到特定值时,偏转副翼所引起的滚转力矩为零,即副翼操纵失效。这时的飞行速度及速压分别被称为副翼反效速度及反效速压。对于前掠翼,虽然偏转副翼引起的气动力作用在当地剖面的刚心后面,但相对于根部剖面而言,可能会产生相反的效果。所以,前掠翼的副翼反效可能不像其他气动弹性问题那样严重。

为确定副翼反效速度,本节仍以大展弦比直机翼为例说明。与前述一样,它也是从静气动弹性问题的基本方程出发,但这时

$$C_L^r = \frac{\partial C_L^r}{\partial \beta} \beta$$

$$m_{AC} = \frac{\partial m_{AC}}{\partial \beta} \beta$$

式中, β 为副翼偏角(下偏为正); $\partial C_L^r / \partial \beta$ 表示副翼作单位偏转时,刚体机翼上各剖面的升力系数的增量; $\partial m_{AC} / \partial \beta$ 表示副翼作单位偏转时各剖面空气动力中心的俯仰力矩(抬头为正)系数的增量。

其次,偏转副翼引起的升力是反对称的,所以机翼的升力总的变化为零,即

$$N = 0$$

将上述各关系式代入式(3-25),得

$$\theta = qEs^e + qEu\beta + qFv\beta \quad (3-50)$$

$$\text{式中, } u = \left[\frac{\partial C_L^r}{\partial \beta} b_1 \quad \cdots \quad \frac{\partial C_L^r}{\partial \beta} b_n \right]^T, \quad v = \left[\frac{\partial m_{AC1}}{\partial \beta} \quad \cdots \quad \frac{\partial m_{AC2}}{\partial \beta} \right]^T。$$

注意到此时载荷的反对称分布,又有

$$\theta = A^a s^e \quad (3-51)$$

在反效临界状态,副翼偏转所引起的升力产生的绕飞机纵轴的滚转力矩为零,则有

$$2q_R \int_0^l \left(b C_L^e + b \frac{\partial C_L^r}{\partial \beta} \beta \right) y dy = 0$$

其矩阵表达式为

$$q_R l^T Y W (s^e + \beta u) = 0 \quad (3-52)$$

上式中, $Y = \text{diag} (y_1 \quad \cdots \quad y_n)$, y_i 为各网格的气动力作用点的 y 坐标; W 为展向积分加权矩



阵。若记

$$h^T = l^T Y W \quad (3-53)$$

则得

$$q_R h^T (s^e + \beta u) = 0 \quad (3-54)$$

上式可写作

$$\beta = - \frac{h^T s^e}{Sl \frac{\partial m_x^r}{\partial \beta}} \quad (3-55)$$

式中

$$\frac{\partial m_x^r}{\partial \beta} = \frac{1}{Sl} h^T u$$

$\frac{\partial m_x^r}{\partial \beta}$ 表示在刚体机翼上,副翼作单位偏转时引起的滚转力矩系数; Sl 为机翼参考面积; l 为半展

长。有时,可用 $c = \left[\frac{\partial \alpha_1^r}{\partial \beta} \quad \cdots \quad \frac{\partial \alpha_n^r}{\partial \beta} \right]^T$ 表示副翼作单位偏转所引起的各剖面的迎角的变化,

于是

$$u = (A^a)^{-1} c \quad (3-56)$$

将式 (3-51), (3-55), (3-56) 代入式 (3-50), 得到操纵反效的基本方程为

$$s^e = q_R (A^a)^{-1} E \left[I - \frac{1}{Sl \frac{\partial m_x^r}{\partial \beta}} ((A^a)^{-1} c + E F v) h^T \right] s^e \quad (3-57)$$

上式也是一个特征值问题,可用矩阵迭代法求得反效动压及相应的气动力分布。

3.5.2 操纵效率计算方法

仍以副翼效率为例,说明气动弹性对操纵效率的影响及计算方法。

当飞行速度小于副翼反效速度时,偏转副翼将引起滚转力矩,使飞机绕纵向体轴旋转。旋转运动引起阻尼力矩。飞机在滚转力矩作用下,旋转速度增大。这时,阻尼力矩也相应增加,使飞机旋转加速度减缓。当旋转速度增大到一定程度时,偏转副翼所引起的滚转力矩与旋转运动引起的阻尼力矩相等,机翼达到一个稳定的滚转速度。通常就把这个稳定的滚转角速度 p (或其量纲为 1 的量) 与副翼偏角 β 的比值作为副翼操纵效率的度量。

当飞机以滚转角速度 p 绕纵向体轴 x 轴旋转时,在展向 y 处的剖面的速度为 py 。它使机翼局部迎角发生变化。若利用准定常空气动力理论,它引起 y 处剖面局部攻角的改变为

$$\Delta \alpha = - \frac{py}{V}$$



其中 V 为飞行速度。通常引入滚转速度的量纲为 1 的量 $\bar{p}$, 则

$$\bar{p} = \frac{pl}{V}$$

则滚转运动引起的各剖面的升力系数与局部弦长的乘积为

$$- (A^a)^{-1} \left[\frac{py_1}{V} \quad \cdots \quad \frac{py_n}{V} \right]^T = - (A^a)^{-1} y \bar{p}$$

式中, $y = [y_1/l \quad \cdots \quad y_n/l]^T$ 。记 $p = \left[\frac{\partial C_L^r}{\partial \bar{p}} b_1 \quad \cdots \quad \frac{\partial C_L^r}{\partial \bar{p}} b_n \right]^T$, 则有

$$p = - (A^a)^{-1} y$$

此外

$$s = s^e + \beta u + \bar{p} p$$

将上述关系式代入式 (3-25), 且注意到这时 $N=0$, 故得

$$\theta = qEs^e + qEu\beta + qE\bar{p}p + qFv\beta \quad (3-58)$$

注意到此时载荷的反对称分布, 又有

$$\theta = A^a s^e \quad (3-59)$$

当飞机以稳定角速度旋转时, 气动力对 x 轴的力矩和为零, 即

$$q \int_0^l \left(b C_L^e + b \frac{\partial C_L^r}{\partial \beta} \beta + b \frac{\partial C_L^r}{\partial \bar{p}} \bar{p} \right) y dy = 0$$

利用式 (3-53) 中 h 的表达式, 其矩阵形式为

$$qh^T (s^e + u\beta + \bar{p}p) = 0 \quad (3-60)$$

将式 (3-59) 代入到式 (3-58), 得

$$(A^a - qE) s^e = qE (u\beta + \bar{p}p) + qFv\beta \quad (3-61)$$

消去式 (3-60) 和式 (3-61) 中的 s^e , 得

$$h^T (u\beta + \bar{p}p) + qh^T (A^a - qE)^{-1} E (u\beta + \bar{p}p) + qh^T (A^a - qE)^{-1} F v \beta = 0 \quad (3-62)$$

因

$$I + q (A^a - qE)^{-1} E = (A^a - qE)^{-1} A^a$$

故将式 (3-62) 整理后可得

$$\frac{\bar{p}}{\beta} = - \frac{h^T (A^a - qE)^{-1} (A^a u + qFv)}{h^T (A^a - qE)^{-1} A^a p} \quad (3-63)$$

上式也可写作

$$\frac{\bar{p}}{\beta} = \frac{h^T (A^a - qE)^{-1} (A^a u + qFv)}{h^T (A^a - qE)^{-1} y} \quad (3-64)$$

式 (3-63) 和式 (3-64) 即为考虑气动弹性影响后的副翼操纵效率计算公式。



通常,当 $q < q_R$ 时,可以得出操纵效率 $\bar{p}/\beta$ 与动压 q 的关系。 q 增大,则 $\bar{p}/\beta$ 降低。

3.5.3 提高操纵效率的设计考虑

在设计飞行器时,为了保证飞行安全和操作灵活,对副翼反效提出如下要求:

- ① 反效速度至少须高出俯冲速度 15 % ;
- ② 在飞机俯冲时,要保证滚转速度等于最大滚转速度的 1/2。

提高操纵效率,一般采用以下几种措施:

- ① 采用可动翼段(即将整个翼段变成副翼);
- ② 利用绕流片增加滚动力矩;
- ③ 增加副翼弦长与机翼展长;
- ④ 增加副翼沿机翼的展长;
- ⑤ 提高机翼的扭转刚度。

机翼的后掠角越大,则操纵效率越差,副翼反效速度越小,而发散临界速度刚好相反,即后掠角越大,发散速度也越大。现代高速飞行器的后掠角一般都是很大的,因此操纵效率可能成为设计的一个临界问题。

思考题

- 3.1 简述“升力线理论”的要点。
- 3.2 说明气动力影响系数矩阵 A 的求解过程。
- 3.3 大展弦比直机翼和后掠机翼在处理气动弹性静力问题上有什么差异?
- 3.4 讨论式 (3-32) 对不同情况下矩阵 E, F 和 G 的表达式。
- 3.5 分析前、后掠机翼扭转发散的特点。
- 3.6 在飞机设计中,如何考虑提高发散动压的问题?
- 3.7 通过 3.3 节和 3.4 节的例题比较扭转发散和载荷重新分布在处理方法上的不同。
- 3.8 通过例题总结一下载荷重新分布的计算方法。
- 3.9 为什么机翼后掠角越大越容易反效?
- 3.10 比较前、后掠翼在发散、操纵效率、载荷重新分布以及飞机纵向静稳定性方面的特点和区别?

参考文献

- 1 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海:上海科学技术文献出版社,1982
- 2 Bisplinghoff R L, Ashley H, Halfman R L. Aeroelasticity. Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1955
- 3 叶逢培. 气动弹性学基础. 北京航空学院 503 教研室, 1982



- 4 诸德超,陈桂彬,邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室,1986
- 5 卢叔全. 气动弹性讲义. 南京航空学院,1991

第4章 非定常气动力计算方法

非定常气动力计算是气动弹性计算中的重要组成部分,特别是对于颤振分析。本章只介绍与颤振计算相关的谐振荡形式的非定常气动力概念、特点和基本计算方法。为了准确确定机翼的颤振临界速度,必须研究振动机翼所受的非定常气动力。由于精确计算非定常气动力的复杂性,因此对非定常气动力进行不同情况的简化假设,又形成了一些工程实用的准定常理论。本章将在 4.1 和 4.2 节中分别讨论准定常气动力和非定常气动力。在准定常气动力中除了介绍经典的格罗斯曼理论以外,还把细长体理论气动导数法以及活塞理论等常用的工程算法也一并作了介绍。在非定常气动力中除介绍西奥道生理论外,还分别概要地介绍了亚声速和超声速偶极子格网法;在以后的章节讨论中,将直接引用这些结果。

4.1 准定常气动力

4.1.1 格罗斯曼理论

在定常气动力理论中,曾假设机翼可以用一连续分布的旋涡来代替,如图 4-1 所示。当薄翼作振动时,升力和旋涡强度都随时间变化;但在非粘性流中包围所有奇点周界内的总环量必须保持为零。因此,旋涡必然会从薄翼后缘脱落下来,并被气流沿流线带向下游,如图 4-2 所示。因此,在研究振动机翼的气动力时,必须考虑这些尾涡的影响,即考虑它们对机翼上各点的诱导速度。为了简化计算,引入准定常假设,即认为从后缘脱落的自由涡的影响可以不计,而附着涡在薄翼上的分布应使气流恰能在该瞬间无分离地流过机翼表面,且满足库塔条件。这种理论在前苏联用来计算振动的二元薄翼的空气动力。这是一种准定常理论,称作格罗斯曼理论。

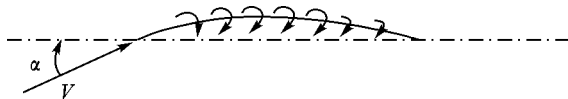


图 4-1 在定常气动力中用连续分布的旋涡代替薄翼

由于线化假设,颤振只和振动引起的附加气动力有关。所以,只需研究振动的二元平板上所受的气动力即可。

图 4-3 所示的是一个弦长为 $2b$ 的二元平板,平板的运动可描述为刚心 E 点的平移 h (向

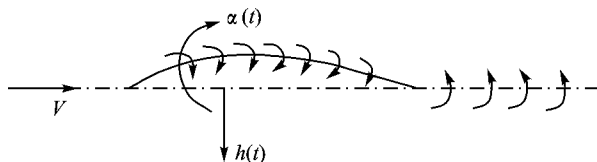


图 4-2 薄翼作振动时旋涡的流动示意

下为正)及绕 E 点的转角 α (抬头为正)。 E 点距翼弦的中点为 ab , a 是一个量纲为 1 的系数, 当 E 点位于中点后时为正。

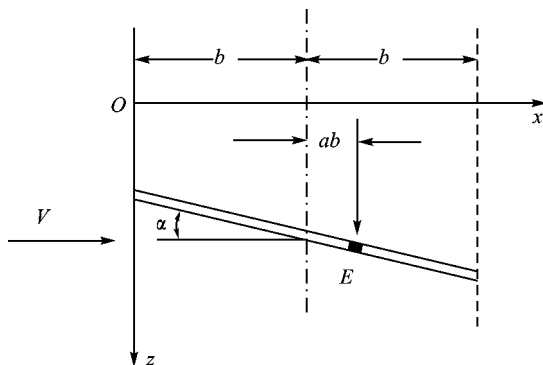


图 4-3 二元平板气动力计算图例

同样,用一系列旋涡代替平板,其强度为 $\gamma(x)$,以逆时针旋向为正,则按照儒可夫斯基定理,作用在单位展长上的气动力(向下为正)为

$$L = \int_0^{2b} \rho V \gamma(x) dx = \rho V \int_0^{2b} \gamma(x) dx \quad (4-1)$$

式中 V ——来流速度;

ρ ——空气密度。

旋涡对平板上距前缘为 x 点的诱导速度(向下为正)为

$$w(x) = \int_0^{2b} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi(\xi - x)} \quad (4-2)$$

该式本来只适用于定常情况;但在准定常假设下,该式对于同一瞬间的 $\gamma(\xi, t)$ 和 $w(x, t)$ 仍是成立的。该诱导速度 w 应恰能满足该瞬间的边界条件,即

$$\frac{w(x, t)}{V} = \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \quad (4-3)$$

此外,还应满足库塔条件,即

$$\gamma(2b) = 0 \quad (4-4)$$

对式(4-2)进行以下的变量置换,即



$$x = b(1 - \cos \theta) \quad (4-5)$$

$$\xi = b(1 - \cos \phi) \quad (4-6)$$

并设旋涡分布为

$$\gamma(\xi) = 2V \left(A_0 \cot \frac{\phi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\phi \right) \quad (4-7)$$

它已满足式(4-4)所表示的库塔条件。现将式(4-5), (4-6), (4-7)代入式(4-2), 得

$$\omega = -\frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{A_0 \cot \frac{\phi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\phi}{\cos \phi - \cos \theta} \sin \phi d\phi \quad (4-8)$$

根据葛劳涅公式

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\phi d\phi}{\cos \phi - \cos \theta} = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (4-9)$$

则式(4-8)可写成

$$\omega = V \left(-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right) \quad (4-10)$$

将式(4-10)代入式(4-3), 并经积分得

$$A_0 = \frac{-1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial t} \right) d\theta \quad (4-11)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \cos n\theta d\theta \quad (4-12)$$

再将式(4-7)代入式(4-1), 得

$$L = 2\pi\rho V^2 b \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \quad (4-13)$$

并可导出气动力对前缘的力矩(抬头为正)

$$M_{LE} = \rho V \int_0^{2b} x\gamma(x) dx = L \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \pi \rho V^2 b^2 (A_1 - A_2) \quad (4-14)$$

定义

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 (2b)} \quad (4-15)$$

$$C_{M_{LE}} = \frac{M_{LE}}{\frac{1}{2} \rho V^2 (2b)^2} \quad (4-16)$$

则得

$$C_L = 2\pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \quad (4-17)$$



$$C_{M_{LE}} = \frac{1}{4}C_L + \frac{\pi}{4}(A_1 - A_2) \quad (4-18)$$

平板作振动时,如图 4-3 所示,则有

$$z(x, t) = h(x, t) + [x - (1 + a)b]\alpha(x, t) \quad (4-19)$$

将式(4-19)代入式(4-11)和式(4-12),得

$$A_0 = -a - \frac{1}{V}(\dot{h} - ab\dot{\alpha}) \quad (4-20)$$

$$A_1 = -\frac{L\dot{\alpha}}{V} \quad (4-21)$$

$$A_2 = 0 \quad (4-22)$$

将以上三式代入式(4-13)和(4-14),得

$$L = -2\pi\rho V^2 b \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] \quad (4-23)$$

$$M_{LE} = \frac{b}{2}L - \frac{1}{2}\pi\rho V b^3 \dot{\alpha} \quad (4-24)$$

且有

$$C_L = -2\pi \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] \quad (4-25)$$

$$C_{M_{LE}} = \frac{1}{4}C_L - \frac{b}{4} \frac{\pi}{V} \dot{\alpha} \quad (4-26)$$

注意,在不可压流中二元平板的理论升力线斜率为 2π ,通常记作 a_0 ,则式(4-23)及式(4-25)可写为

$$L = -\rho V^2 a_0 b \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right]$$

$$C_L = -a_0 \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right]$$

在实际应用时,可以采用风洞实验所得到的翼型的升力线斜率代替上二式中的 a_0 。此外,式(4-26)中第一项的 $1/4$ 表示气动焦点在 $1/4$ 弦长处。实际应用时也可以用风洞实验数据的焦点位置来作相应的修正。

若转化成气动力对刚心点 E 的力矩,则有

$$M_E = 4\pi\rho V^2 b^2 \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4} \right) \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] - \frac{1}{2}\pi\rho V b^3 \dot{\alpha} \quad (4-27a)$$

或

$$M_E = 2\rho V^2 a_0 b^2 \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4} \right) \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] - \frac{1}{2}\pi\rho V b^3 \dot{\alpha} \quad (4-27b)$$

$$C_{M_E} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1+a}{2} \right) C_L - \frac{b}{4} \frac{\pi}{V} \dot{\alpha} \quad (4-28)$$



在式(4-23)及式(4-25)中, $\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a\right)b \frac{\dot{\alpha}}{V}$ 正是机翼 3/4 弦长处的 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{V \partial t}$ 值, 即该点处的翼面下洗值(亦即在 3/4 弦长处诱导速度和速度之比)。这说明按准定常理论计算总升力时, 可把旋涡看成是集中作用在 1/4 弦长处, 而计算 3/4 弦长处的诱导速度, 并使其在该点满足与翼面相切的边界条件, 以求得总的旋涡强度。在总力矩式(4-24)及式(4-27)中的最后一项 $-\pi \rho V b^3 \dot{\alpha} / 2$, 是角速度引起的阻尼力矩。

4.1.2 细长体理论

细长体理论是一种适应于细长体的气动力工程方法。对于飞机机身、导弹弹体、外挂油箱和火箭等, 当长细比较大时(一般大于 10 左右), 称为细长体。在颤振和气动伺服弹性分析中, 这种细长体的非定常气动力可采用一维弹性谐振荡细长体理论进行分析计算。

如图 4-4 所示轴对称细长体, 通常的分析方法是虚拟动量法。单位长度在法向上所受的气动力表示为

$$\Delta p = \frac{d}{dt}(mv) \quad (4-29)$$

式中 m ——单位长度上和物体相同体积的气体质量;

v ——气体在该方向的扰动速度, 细长体可不考虑横剖面之间的互相影响。

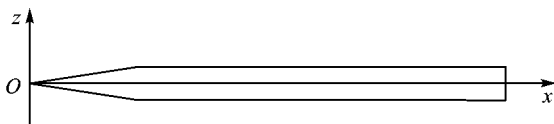


图 4-4 细长体纵向位移 w 及坐标系示意图

而又因为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}$$

$$m = \rho s(x) \cdot 1$$

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} + V \frac{\partial z}{\partial x}$$

式中 ρ ——当地的大气密度;

$s(x)$ ——细长体纵向对称轴横截面积;

z ——细长体某处的振动位移;

V ——飞行速度。

将以上三式代入式(4-29), 得

$$\Delta p = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[s(x) \left(\frac{\partial z}{\partial t} + V \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] =$$



$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} s(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) z + V \frac{\partial}{\partial x} \left[s(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) z \right] \right\} \quad (4-30)$$

取 n 阶振动模式, 采用假定模式法表示的振动, 细长体上任一点位移可表示为

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x) q_i(t) \quad (4-31)$$

式中 q_i ——细长体第 i 阶运动(或振动)的广义坐标;

f_i ——细长体第 i 阶运动(或振动)的模式。

用矩阵形式可表示为

$$z = Fq \quad (4-32)$$

式中, q 为广义坐标向量, F 为各阶模式列向量 f_i 组成的模式矩阵, 即

$$F = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n]$$

引入简谐条件, 细长体沿轴向分成 m 份, 则可以得到用离散形式表示的细长体上第 j 段单位长度上的法向气动力为

$$\Delta p_j = \rho \left\{ s_j(-\omega^2) F + V s_j(i\omega) \frac{\partial F}{\partial x} + V \left[s_j(i\omega) \frac{\partial F}{\partial x} + V s_j \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_j i\omega F + V \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_j \frac{\partial F}{\partial x} \right] \right\} q \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (4-33)$$

式中, $i = \sqrt{-1}$ 。

4.1.3 气动力导数

对于细长体, 准定常理论可以从定常流动的关系式出发(如图 4-4 所示), 认为攻角 α 等于合成速度向量与细长体纵向轴线之间的瞬时倾角, 则升力(向上为正)公式有如下形式:

$$\Delta p = -\frac{1}{2} \rho V^2 S C_y^a \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \quad (4-34)$$

式中 C_y^a ——细长体升力线斜率, 一般是攻角、马赫数以及弹性细长体轴向坐标的函数;

S ——气动力计算参考面积;

$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial t}$ ——局部攻角。

将细长体分为 m 个气动块, 则可得到用离散形式表示的细长体上第 j 段单位长度的法向气动力为

$$\Delta p_i = -\frac{1}{2} \rho V^2 S C_{y_i}^a \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_i \right] \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4-35)$$

仍采用式(4-32)表示任一点位移, 将式(4-32)代入式(4-35)中, 有

$$\Delta p = -\frac{1}{2} \rho V^2 S C \left(F' q + \frac{1}{V} \dot{F} q \right) \quad (4-36)$$

式中, $C = \text{diag} (C_{y_1}^a, C_{y_2}^a, \dots, C_{y_m}^a)$ 为由细长体各段升力线斜率组成的对角阵, 各段的升力线斜



率可由计算或试验得到,是高度、马赫数和攻角的函数; F' 为矩阵 F 对 x 的导数。

可见,气动导数法用于细长体非定常气动力计算时适合任意运动速度。

4.1.4 活塞理论

对于小展弦比翼面,在计算气动力时,必须采用升力面理论来进行颤振分析,这就会使计算工作大为复杂。这里介绍一种简化的气动力理论——活塞理论来分析颤振。试验证明,在马赫数为 $2 \sim 5$ 之间,用这种理论对超声速翼面进行颤振计算,都能得到满足工程精度要求的结果。

活塞理论的基本假设是翼剖面的厚度很薄和飞行马赫数很高 ($Ma^2 \gg 1$)。在上述假设前提下,即在翼面上某一点的扰动对其他点所产生的影响是很弱的。活塞理论略去了这种微弱的效应,并认为翼型上某一点的压力只与该点的下洗速度有关,形象地比作活塞在一元管道中运动时,其所受到的压力只与其运动速度有关。显然,在活塞理论中是不考虑三元效应的,幸而在实际上这种效应确是随马赫数 Ma 的提高而减少了。

考察一个无限长的气缸,如图 4-5 所示,未经扰动的气体压力、密度和声速分别为 p_∞, ρ_∞ 和 c_∞ 。设活塞行进的速度为 W ,且 $|W| \ll c_\infty$,因此,由于活塞运动所产生的扰动属于微扰动,它的传播过程也就可以看作等熵过程。现在来计算活塞表面上的压力 p 、密度 ρ 以及声速 c 。

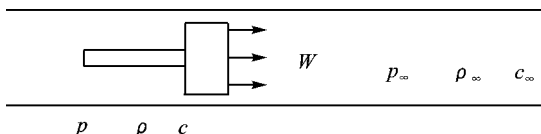


图 4-5 比喻活塞理论的无限长的气缸

设在 dt 时间内,活塞运动速度变化了 dW ,此时扰动传播的距离为 $c dt$,而受扰动的气体质量为 $\rho c F dt$ (F 表示活塞面积),故总的动量变化为 $\rho c F dt \cdot dW$ 。另一方面,压力变化为 dp ,故活塞产生的冲量为 $dp F dt$ 。于是按牛顿定律有

$$\begin{aligned} dp F dt &= \rho c F dt \cdot dW \\ dp &= \rho c \cdot dW \end{aligned} \quad (4-37)$$

由等熵公式

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma \quad (4-38)$$

其中 γ 为比热比。当地声速为

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (4-39)$$

把式 (4-38), (4-39) 代入式 (4-37), 得



$$p^{(-\frac{\gamma+1}{2\gamma})} dp = \frac{\gamma}{c_\infty} p_\infty^{(\frac{\gamma-1}{2\gamma})} dW \quad (4-40)$$

积分得

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} p^{(\frac{\gamma-1}{2\gamma})} = \frac{\gamma}{c_\infty} p_\infty^{(\frac{\gamma-1}{2\gamma})} W + C$$

由于在无限远前方 $p = p_\infty$ 处,相应地有 $W = 0$,故可确定上式中的积分常数

$$C = \frac{2\gamma}{\gamma-1} p_\infty^{(\frac{\gamma-1}{2\gamma})}$$

代回原式并整理得

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{W}{c_\infty} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (4-41)$$

由于活塞前进速度 $|W| \ll c_\infty$,故有 $|W/c_\infty| \ll 1$,上式展开后则可略去高阶微分项。当只保留一阶项时,称为一阶活塞理论,即扰动压力为

$$p - p_\infty = \rho_\infty c_\infty W \quad (4-42)$$

当保留二阶项时,可得到二阶活塞理论,即扰动压力为

$$p - p_\infty = \rho c_\infty^2 \left[\left(\frac{W}{c_\infty} \right) + \frac{\gamma+1}{4} \left(\frac{W}{c_\infty} \right)^2 \right] \quad (4-43)$$

应用活塞理论计算振动翼面气动力时,翼表面上一点的上洗速度即相当于活塞运动速度。如图 4-6 所示,分析翼上(下)表面的上(下)洗速度。

对于上表面有

$$w = \left(V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) z(x, y, t) + V \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \quad (4-44a)$$

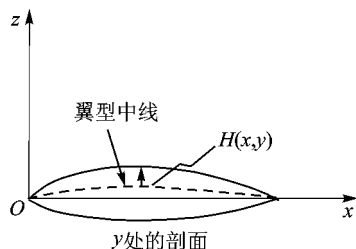


图 4-6 应用活塞理论计算作用在翼面上的气动力

对于下表面有

$$w = - \left(V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) z(x, y, t) + V \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \quad (4-44b)$$

式中, $H(x, y)$ 是由翼剖面中线量起的厚度函数,上(下)洗的方向取其离开翼型的方向为正。将式(4-44)代入式(4-43),由作用在机翼表面上的压力分布可得到上(下)表面的压力差(其中的 $p_\infty, \rho_\infty, c_\infty$ 改记为 p, ρ, c)

$$\Delta p(x, y, t) = -2\rho c \left[1 + G \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \right] \left[\left(V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) z(x, y, t) \right] \quad (4-45)$$

式中, $G = \frac{\gamma+1}{2}$ 。由上式可见,采用二阶活塞理论时,可以计入翼型的厚度效应。

采用假设模态法,取前 n 阶固有振动的模态,于是翼面的一般运动位移可表示为



$$z(x, y, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y) q_i(t)$$

式中 $f_i(x, y)$ ——第 i 阶固有振动的模态；

$q_i(t)$ ——随时间变化的广义坐标。

把上式代入式(4-45)后,得

$$\Delta p(x, y, t) = -2\rho c \sum_{j=1}^n \left[1 + G \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \right] \left[V \frac{\partial}{\partial x} f_j(x, y) q_j(t) + f_j(x, y) \dot{q}_j(t) \right] \quad (4-46)$$

可见,非定常气动力取决于所选的位移函数以及翼型的厚度函数。

4.2 非定常气动力

4.2.1 西奥道生理论

如图 4-2 所示,在非定常理论中,考虑了由后缘流下的尾迹中自由涡的影响。因此,在二元流动的范围,这是个准确的理论。当考虑三元效应的非定常理论时,问题变得很复杂,所以早期的工程颤振计算常常采用二元的非定常理论。

关于机翼作简谐振动的情况,西奥道生曾给出了完整的解答。此处不作详细叙述,直接引出由非定常理论导出的结果。如图 4-3 所示,在不可压流中的二元平板,当它以频率 ω 作简谐振动时,有

$$h = h_0 e^{i\omega t} \quad (4-47)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t} \quad (4-48)$$

由非定常理论求得

$$L = -\pi\rho b^2 (\dot{V}\alpha + \ddot{h} - a b \ddot{\alpha}) - 2\pi\rho V b C(k) \left[V\alpha + \dot{h} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \dot{\alpha} \right] \quad (4-49)$$

$$M_E = \pi\rho b^2 \left[ab(\dot{V}\alpha + \ddot{h} - a b \ddot{\alpha}) - \frac{1}{2} V b \dot{\alpha} - \frac{1}{8} b^2 \ddot{\alpha} \right] + 2\pi\rho V b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) C(k) \left[V\alpha + \dot{h} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \dot{\alpha} \right] \quad (4-50)$$

式中 k ——减缩频率,量纲为 1, $k = \frac{b\omega}{V}$;

ω ——简谐振动的圆周频率;

$C(k)$ ——西奥道生函数。

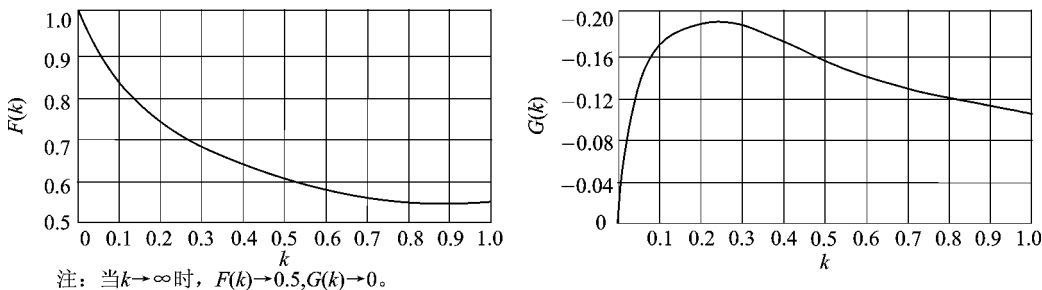
$$C(k) = F(k) + iG(k) \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (4-51)$$

$$F(k) = \frac{J_1(J_1 + Y_0) + Y_1(Y_1 - J_0)}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2} \quad (4-52)$$



$$G(k) = -\frac{Y_1 Y_0 + J_1 J_0}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2} \quad (4-53)$$

式中, J_0, J_1, Y_0 和 Y_1 是 k 的第一类和第二类标准贝塞尔函数。 $F(k)$ 和 $G(k)$ 随 k 的变化如图 4-7 所示。



注: 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $F(k) \rightarrow 0.5, G(k) \rightarrow 0$ 。

图 4-7 西奥道生函数

关于式(4-49)及式(4-50)中的气动力表达式的物理意义可作如下解释:

在式(4-49)中第一个括号内的项可以改写为

$$\frac{d}{dt}(\dot{h} - ab\dot{\alpha} + V\alpha)$$

它代表有攻角 α 时中点处的下洗加速度; 而 $\pi\rho b^2$ 则为气流视在质量, 二者的乘积就可看作是机翼振动时带动空气和它一起振动而产生的惯性反作用力, 这些力的合力作用点将通过机翼的中点, 设用 L_1 表示。在式(4-49)中的第二项, 如果略去 $C(k)$ 的作用, 则与准定常理论的升力式(4-23)一致。它代表由环量而产生的升力, 正比于 $3/4$ 弦长点处的下洗; 而合力则通过气动力中心, 设用 L_2 来表示。不难设想, $C(k)$ 就是由于考虑了自由涡的作用而引起的修正项, 这种修正不仅表示升力大小将有所改变, 而且还表示升力将落后于运动一个相位差。

在力矩表达式(4-50)中的第一项是由 3 部分组成的。第一部分显然是由于 L_1 所产生的对刚心 E 的力矩; 第二部分 $-\pi\rho b^3\dot{\alpha}/2$ 是准定常理论中所指的阻尼力矩; 第三部分 $-\pi\rho b^4\ddot{\alpha}/8$ 可看作是由机翼围绕中点作角加速运动而引起的气流的惯性反作用力矩。式(4-50)中的第二项是由 L_2 所产生的对刚心的力矩。

这里应该说明为什么自由涡对于升力 L_2 的修正要与减缩频率 k 有关。这是因为减缩频率 k 表征着流动随着时间变化的特征。冯·卡门曾经给出过如下有趣的解释: 设想机翼上有一点处发生一扰动, 并且与机翼一起振动, 受到扰动影响的流体将以平均速度 V 向下游流去, 设机翼受扰动的振动角频率是 ω , 于是扰动的波长将是 $2\pi V/\omega$ 。因此, 比值

$$\frac{\frac{2b}{2\pi V}}{\omega} = \frac{b\omega}{\pi V}$$

与减缩频率成正比, 并说明了 k 代表机翼特征长度 $2b$ 与扰动波长的比。换言之, k 表征着机



翼上其他各点感受扰动的方式。由于振动机翼上每一点都扰动着气流,因此可以说减缩频率 k 表征着机翼各点处运动之间的相互影响作用。

在计算时采用式(4-49)及式(4-50)的形式,自然是不方便的。如果注意到在简谐运动时的式(4-47)和式(4-48)(其中 h 与 α 代表振幅,并且可以是复数,以表示它们之间可以存在有相位差),则把它们代入式(4-49)及式(4-50)中,经过整理可得

$$L = \pi \rho b^3 \omega^2 \left\{ L_h \frac{h}{b} + \left[L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \alpha \right\} \quad (4-54)$$

$$M_E = \pi \rho b^4 \omega^2 \left\{ \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \frac{h}{b} + \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right] \alpha \right\} \quad (4-55)$$

式中

$$L_h = 1 - i \frac{2}{k} [F(k) + iG(k)]$$

$$L_a = \frac{1}{2} - i \frac{1}{k} \{ 1 + 2[F(k) + iG(k)] \} - \frac{2}{k} [F(k) + iG(k)]$$

$$M_h = \frac{1}{2}$$

$$M_a = \frac{3}{8} - i \frac{1}{k}$$

4.2.2 亚声速偶极子格网法简述

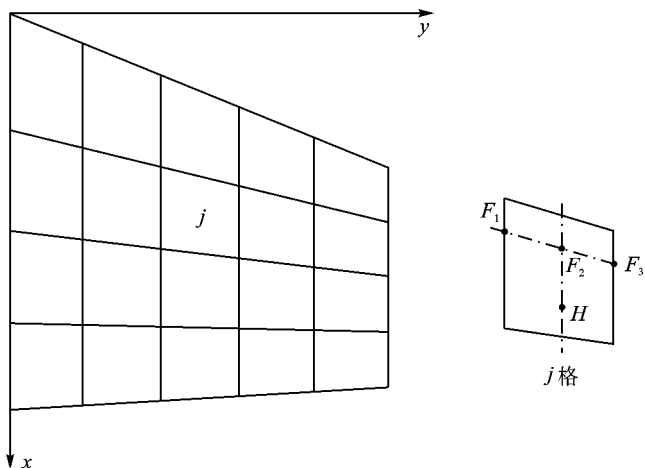
亚声速偶极子格网法是基于小扰动线化位势流方程的面元法,适用于亚声速范围,是当前颤振工程分析中流行的非定常气动力计算方法之一。

采用亚声速偶极子格网法计算非定常气动力,先要将升力面进行合理的气动网格划分。将升力面分成若干个两侧边平行于来流的梯形块,并认为每小块上的空气动力作用在分块的中剖面与分块 $1/4$ 弦线的交点,则该点称为压力点(如图 4-8 所示的 F_2 点);边界条件则是在分块的中剖面与分块 $3/4$ 弦线的交点处满足,那么该点称为下洗控制点(如图 4-8 所示的 H 点)。假定将升力面划分成 n 个网格。

空气动力坐标系约定如下:升力面坐标系规定原点位于升力面根前缘, x 轴顺气流, y 轴沿翼展向外, z 轴由右手定则确定。

通过求解基本方程确定气动分块上的非定常气动力分布。由线性非定常气动力理论可知,对于每个网格中 $3/4$ 弦长点(即下洗控制点 H)处应满足下列积分方程:

$$w_i = \frac{1}{4\pi\rho V^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \rho V^2 \Delta c_{p_j} \Delta x_j \cos \varphi_j \int_{l_j} K_{ij} dl_j = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^n \Delta c_{p_j} \Delta x_j \cos \varphi_j \int_{l_j} K_{ij} dl_j \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n) \quad (4-56)$$

图 4-8 升力面网格上的 F_1, F_2, F_3 和 H 点

式中 w_i ——第 i 个网格 $3/4$ 弦长点处的下洗速度；

Δc_{p_j} ——第 j 个网格上的压力系数，它与压力 Δp_j 有关系式

$$\Delta c_{p_j} = \frac{2\Delta p_j}{\rho V^2}$$

Δx_j ——第 j 个网格的中剖面长度；

l_j ——第 j 个网格的过 $1/4$ 弦点的展长(图 4-8 中 $\overline{F_1 F_3}$)；

φ_j ——第 j 个网格的后掠角(图 4-8 中 $\overline{F_1 F_3}$ 的后掠角)；

K_{ij} ——气动力计算核函数；

n ——升力面的气动网格分块数。

式(4-56)可化为矩阵形式，有非定常气动压力分布表达式

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho V^2 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{w} \quad (4-57)$$

式中 Δp ——压力作用点处的压力分布列阵；

$\mathbf{w}$ ——下洗控制点处的下洗速度列阵；

$\mathbf{D}$ ——气动力影响系数矩阵，其元素为

$$D_{ij} = \frac{\Delta x_i}{8\pi} \cos \varphi_j \int_j K_{ij} dl_j \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n) \quad (4-58)$$

这里，核函数 K_{ij} 与影响系数 D_{ij} 的计算较为复杂，详细的推导可参见有关文献。

对于薄翼面，考虑到在 H 点上满足边界条件，所以各气动网格 H 点的下洗速度与振动模态应有下列关系：



$$w = \left(F' + i \frac{k}{b} F \right) q \quad (4-59)$$

式中 q ——广义坐标向量；

F —— H 点处各阶模态列向量 f_i 组成的模态矩阵，见式(4-32)解释；

F' —— H 点处矩阵 F 对 x 的导数；

b ——参考长度；

k ——减缩频率， $k = \frac{b\omega}{V}$ ；

V ——飞行速度；

ω ——简谐振动的圆周频率。

将式(4-59)代入式(4-57)中，可以得到频域内的非定常气动压力分布表达式

$$\Delta p = Pq \quad (4-60)$$

式中， P 为压力系数矩阵，其表达式为

$$P = \frac{1}{2} \rho V^2 D^{-1} \left(F' + i \frac{k}{b} F \right) \quad (4-61)$$

4.2.3 超声速偶极子格网法特点

超声速偶极子格网法与亚声速偶极子格网法相似，也是基于线化理论的面元法，适合于马赫数为 3 以内的超声速范围。

如图 4-8 所示，网格划分和亚声速偶极子格网法相似。其不同之处在于，压力偶极子分布在整个网格上，下洗控制点在网格中剖面的 85 % ~ 95 % 处。在超声速情况下，只有在任意一点 H 为顶点的倒置马赫锥中的点所发出的扰动才会影响到 H 点。

基本方程也与亚声速偶极子格网法相近，下洗仍可写为

$$w = \left(F' + i \frac{k}{b} F \right) q \quad (4-62)$$

由奇异积分方程转化而来的线性方程组为

$$w_i = \frac{1}{4\pi\rho V^2} \sum_j \Delta p_j \iint_{S_j} K_{ij} dS \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n) \quad (4-63)$$

式中， S_j 指从第 j 个下洗点发出的倒置马赫锥与翼面相交的区域。用压力系数代替压力差，则

$$\Delta p_j = \Delta c_{p_j} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right)$$

于是方程(4-63)可以写为

$$w_i = \sum_j \frac{1}{8\pi} \Delta c_{p_j} \iint_{S_j} K_{ij} dS \quad (4-64)$$

令



$$D_{ij} = \frac{1}{8\pi} \iint_{S_j} K_{ij} dS \quad (4-65)$$

式中, D_{ij} 称为空气动力影响系数。于是, 可以写成

$$w = D \Delta c_p \quad (4-66)$$

即

$$\Delta c_p = D^{-1} w \quad (4-67)$$

思考题

- 4.1 什么是准定常气动力, 它的本质是什么?
- 4.2 考虑活塞理论的基本假设是什么? 考查活塞理论的使用条件。
- 4.3 从翼面附着涡和自由涡的角度说明非定常气动力与定常气动力的区别。
- 4.4 为什么谐振荡的线性非定常气动力是复数形式?
- 4.5 非定常气动力在气动弹性(特别是颤振)分析中的作用是什么?

参考文献

- 1 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1982
- 2 Bisplinghoff R L, Ashley H, Halfman R L. Aeroelasticity. Addison - Wesley Publishing, Company, Inc., 1955
- 3 诸德超, 陈桂彬, 邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室, 1986
- 4 管德. 非定常空气动力计算. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1991
- 5 管德. 飞机气动弹性力学手册. 北京: 航空工业出版社, 1994

第5章 颤振的基本概念

在第2,3章中所述的气动弹性静力问题的章节中,归纳起来,其基本物理内容仅包括了两类性质不同的现象:一类是扭转发散(或静不稳定性)以及与之密切相关的载荷重新分布问题;另一类是以操纵反效为主题的操纵面效率问题。从本章开始将进入到气动弹性动力学问题的讨论;在这个领域内,最令人关注的现象就是“颤振”。颤振或动不稳定性,经常导致结构的灾难性破坏。研究这种现象的困难之一在于颤振具有多种类型,所以颤振分析是一个非常广泛的题目。由于颤振在工程实践中具有重要的意义,所以在动气动弹性问题中,将着重于颤振的讨论。本章介绍颤振的基本概念。在5.1节中,对颤振问题作简单的概要介绍,提出所要讨论问题的范围。在5.2节中,将阐明颤振的性质是自激振动,进而从空气动力观点出发对颤振机理作定性分析。为了进一步了解颤振的过程,在5.3节中介绍一种简化的颤振理论。在5.4节中,对在升力面设计中影响颤振速度的主要因素作初步讨论。

5.1 颤振概述

飞行器及其部件处于气流中的动稳定性就是颤振问题。下面将分别概述有关颤振的特点。

1. 颤振是一种自激振动

颤振是一种自激振动。任何一个升力面,当它在气流中运动时,到达某一速度,在非定常空气动力、惯性力及弹性力的相互影响和相互作用下,刚好使它的振动持续下去,这种现象称为颤振。

在地面上的飞行器受到扰动后会起振动,但由于阻尼的缘故,这种振动总是不断衰减直至消失。在飞行中的飞行器,由于种种原因,也会引起振动;但由于处于气流中,情况就有所不同,一旦发生振动,就会引起附加的气动力。在这些气动力中,有些将起激励作用,而有些将起阻尼作用。因此,对于线性系统,以后的变化过程就可能有如下3种情况:① 振幅不断衰减而最终消失;② 振幅不断扩大而导致结构毁坏;③ 振幅保持不变,振动是简谐的。如果振动是衰减的,则称结构是动力稳定的;反之,如果振动是扩散的,则称结构是动力不稳定的。通常,把由于气动弹性原因而引起的、飞行器部件的不衰减的且振幅相当大的十分危险的振动称为颤振。颤振是在其本身的运动引起的气动力激励下发生的,所以颤振是一种自激振动。

2. 颤振是几个自由度之间耦合作用的结果

为了描述颤振的现象,以一个平直的悬臂机翼为例。当发生颤振的振动运动时,同时应具



有弯曲和扭转两个自由度。若能约束扭转自由度,只保留有弯曲自由度时,则该悬臂机翼就不会发生颤振;反之,如果使机翼只具有扭转自由度时,则只在攻角接近失速攻角时,才能够发生失速颤振。通常,单自由度的操纵面振动,都会在气流中被阻尼掉,除非气流分离。由此可见,颤振的一个基本特点就是存在许多自由度的耦合。此外,在不同自由度运动之间的相位差也是发生颤振的主要原因。

根据长直机翼结构上的特点,其在任意弦向切面的弹性变形,只需用两个量就足以描述,即在某参考点上的挠度和绕该点的转角(相应于弯曲和扭转变形)。对于操纵面,如副翼或襟翼,可认为其自身较为刚硬,故只考虑它对铰链线转动自由度即可。这样在分析机翼颤振问题时,只需考虑弯曲、扭转和副翼偏转三个自由度即可。只在特殊情况下,变量中两个是主要的,与此对应的颤振形态,称为二自由度颤振形态。对于一架飞机所具有的应考虑自由度(含刚体运动自由度),提供了很多种二自由度、三自由度和多自由度的颤振形态的可能组合。由于事先并不清楚在上述的这些形态中哪一个是在工程上有实际意义的颤振速度,因此就需要通过大量的理论分析计算和试验来最终确定。应该看到,能否正确寻求这种给定结构的关键颤振形态,在一定程度上还取决于设计者的经验。

3. 颤振临界速度的概念

对于给定的飞行器结构,当飞行速度由小到大时,振动会由衰减的转变成扩散的。也就是说,当飞行速度较小时,振动的衰减是快的;当飞行速度增大时,这种衰减便减慢了;在某一飞行速度时,扰动引起的振动振幅正好维持不变,这一速度便是颤振临界速度,简称为颤振速度,这时候的振动频率称为颤振频率;在超过临界值很小的飞行速度下,即使偶然的小扰动,也会引起激烈的振动,这就发生了颤振。

通常,飞行器可以发生多种多样的振动。对每一种振动,可以在某一临界速度下转变为扩散的。因此,同一飞行器和部件就可能存在很多个颤振临界速度,就有可能在好多个速度范围内发生颤振。但是,人们所关心的是具有实际意义的、其中最小的一个颤振临界速度。

确定颤振临界速度的问题,实际上是一个研究振动运动稳定性的问题,即在什么条件下飞行器或其部件的振动变成是简谐的。注意到这一点是很重要的,这使颤振分析简化了。例如为了确定颤振临界速度,只需研究作简谐振动的飞行器或其部件的气动力就可以了。

此外,如果飞行器部件作微幅振动时是稳定的,则通常在作大振幅振动时也将是稳定的。在操纵面的颤振中有时存在这种例子,当超过临界速度后开始发生颤振;但当振幅增大到一定幅度后,就停止增长而作等幅振动。这种非线性作用的确切性质还不很清楚,可能是由于在大振幅时阻尼的增长,或者是由于气流分离使激振力减小,甚至可能是结构刚度的改变。在一般的颤振分析中往往只限于研究微幅振动运动的稳定性,在这个前提下就可以应用线性化理论。

4. 经典颤振与失速颤振

颤振作为气弹性动稳定性问题,具有多种现象形态,其中的物理关系有时相当深奥以致很难理解。而就其空气动力方面发生的原因而言,颤振问题可分为两大类。第一类的特征是



它发生于势流中,因此流动分离和边界层效应对颤振过程没有重要影响。这类颤振主要发生于飞行器结构的流线型剖面升力系统中,通常称为“经典颤振”。第二类颤振问题与流动分离和旋涡形成有直接关系。其颤振现象和第一类颤振问题具有不同的特性,把它称为“失速颤振”。失速颤振是一种升力面颤振。如果在全部或部分振动时间里流动发生分离,处于失速状态,那么颤振现象就与经典颤振所表现出的特性有所不同。它的发生既不取决于惯性、弹性和气动耦合,也不取决于运动和运动引起的气动力间的相位差。此外,失速颤振主要是扭转。作为一种近似,可以假定颤振频率和在静止空气中的扭转固有振动频率相等,且其振幅是有限的,因而增大扭转固有频率,即增加扭转刚度或减少质量转动惯量,可以提高失速颤振速度。对于旋转机械,例如螺旋桨、涡轮叶片等,失速颤振是一种严重的气动弹性不稳定现象,因为这些机械有时必须在接近桨叶定常失速攻角的状态下工作。至于飞行器的升力面,例如飞机的机翼和尾翼,则很少遇到失速颤振。由于篇幅所限,本书中所论及的颤振均属“经典”颤振稳定性问题。事实上这种颤振在实际中是最危险的,因为这种自激振动能在几秒钟甚至更短的时间内使结构发生振动破坏,从而引起飞行器的灾难性后果,因而对这类颤振过程的空气动力学基础的研究也较为广泛深入。

在本书所论及的颤振分析中包含两个基本问题,一是研究在气动力作用下飞行器及其部件振动的稳定性问题;二是确定升力面在气流中作振动运动时所产生的附加气动力。前者是着重讨论的对象;对后者,将直接引用已有的资料而不加以详细的推导和讨论。

考虑到颤振分析是一个非常广泛的题目,故将由浅入深地进行讨论。在建立了颤振的基本概念后,提出颤振分析基础,进而讨论工程中的颤振分析。

5. 颤振研究方法的特点

颤振分析的任务是求出颤振发生的条件,亦即求出颤振临界速度,并寻求在飞行器飞行速度范围内避免颤振发生的措施,进而寻找提高临界速度的方法。为达到上述目的,除分析计算外,风洞模型试验及颤振试飞也都是颤振研究的重要方法。在进行理论分析和数值计算时,必须知道结构的动力特性,即结构的固有振动频率、模态及阻尼等。所以结构振动学将成为学习本课程的基础。此外,在进行颤振分析时,还必须知道作用在飞行器结构上的空气动力。由于在振动的飞行器结构附近的流场是一种非定常流,因而就需要研究非定常流动的空气动力学。非定常流理论远比定常流理论复杂,从20世纪30年代开始,很多科学家都致力于这方面的研究,提出了各种供理论分析和工程颤振分析的非定常气动力计算方法。本书在有关章节中,引用了现成的计算结果,略去了繁琐的推导过程。

飞行器结构是无限多自由度的弹性体,原则上,在颤振分析中没有自由度的限制;但为了避免颤振分析过于复杂,应在建模中尽可能地减少自由度,保留那些对颤振有重要影响的模态。



5.2 颤振的物理本质

人们对于实际工程中的颤振计算,往往是建立在数学观点上的理解。为此,在讨论颤振问题之前,有必要对颤振的物理现象作进一步的讨论。从广泛的意义上来说,所谓颤振是指弹性系统在均匀气流中的自激振动;而自激振动是不同于自由振动,也不同于强迫振动的一种振动。首先通过一个简单的例子来说明自激振动及其性质。

5.2.1 自激振动

考察一个有阻尼的单自由度系统,如图 5-1 所示。系统受到非周期变化的外力 F ,其大小是与重块速度 $\dot{y}$ 成正比的,可以写作 $F=F_0\dot{y}$ 。式中, F_0 等于常数。该系统的运动方程是

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0\dot{y} \quad (5-1a)$$

整理后,得

$$\ddot{y} + \left(\frac{c-F_0}{m}\right)\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \quad (5-1b)$$

上式仍是齐次微分方程。把这个方程和有阻尼的单自由度系统运动方程相比较,可以看出,若 $F_0 < c$,则这两个方程就没有区别,此时,重块 m 将作阻尼振动。若 $F_0 > c$,则情况就完全不同了,下面将讨论这种情况。

为求解方程,仍设

$$y = e^{\lambda t}$$

代入式(5-1b)中,消去 $e^{\lambda t}$,得特征方程

$$\lambda^2 + \left(\frac{c-F_0}{m}\right)\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (5-2)$$

方程的两个根是

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & -\left(\frac{c-F_0}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c-F_0}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \\ & \frac{F_0-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{F_0-c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (5-3)$$

式中, $\left(\frac{F_0-c}{2m}\right)$ 是正值。

如果 $k/m \leq [(F_0-c)/2m]^2$,则式(5-3)中的 λ_1 和 λ_2 都是正的实数。方程(5-1b)的通解就是

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

式中, C_1, C_2 是任意常数。将这个解画成曲线,如图 5-2 所示。它表明重块位移随时间 t 逐渐

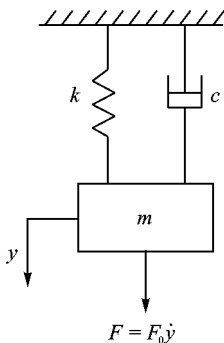


图 5-1 受有外力 F 的有阻尼单自由度系统



增大,即重块不再回到平衡位置。这种现象称为变形扩大,表明系统是静不稳定的。

如果 $k/m > [(F_0 - c)/2m]^2$, 则表示式(5-3)中的根号内是负值,其平方根就是虚数。在这种情况下有

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{F_0 - c}{2m} \right) \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{F_0 - c}{2m} \right)^2}$$

此时方程(5-1b)的通解是

$$y(t) = A e^{\left(\frac{F_0 - c}{2m} \right) t} \cos(\omega t - \phi)$$

其频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{F_0 - c}{2m} \right)^2}$$

由于 $(F_0 - c)/2m$ 是正值, $y(t)$ 将振荡地扩大,其曲线如图 5-3 所示。它表明系统作扩散振动,重块的振幅将逐渐增大。

这种现象称为自激振动,该系统是“动不稳定的”。由此可见,自激振动与强迫振动不同,它并不是由于外界有周期性变化的激励力而引起的振动,而是由于外力是该系统的位移和速度(有时是加速度)的函数。在一定的条件下,这种非周期性外力在该系统内变为周期性的激励力,使得系统发生振幅扩散的振动。研究一个系统是否会发生自激振动,也就是要研究这个系统的动稳定性。

颤振是由空气动力所引起的振动。由于在一个振动过程中弹性力和惯性力作为保守系统的内力总是处于平衡状态,因此单位振动周期内势能和动能之和保持常数。振动系统如果要在没有外界激励条件下获得振动激励,就只有从气流中吸取能量。如果这个能量大于所存在的结构阻尼引起的能量损耗,就会发生气动力自激颤振振动。

按照这种从能量角度考虑问题的方式,就可以用普遍适用的形式直观地描述颤振现象。下面以机翼弯扭颤振及机翼-副翼颤振现象为例,定性地描述产生这种现象的机理。

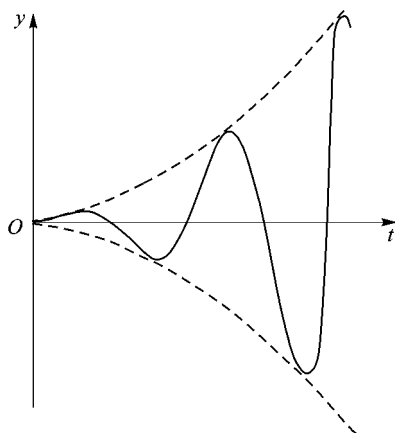


图 5-3 系统是动不稳定的

5.2.2 机翼弯扭颤振现象

设机翼的重心在扭心的后面,则机翼作为一个弹性体,在受到扰动后就会产生弯扭耦合振动。当机翼向前飞行(或有迎面气流吹向静止的机翼)且作弯扭振动时,在机翼上会产生一些附加的气动力。按照能量输入的考虑,机翼弯、扭耦合振动时,在一个振动周期内可得到图 5-4 所示的气动力的能量平衡图(这种物理关系可利用准定常考虑的方式得到)。其中,



图 5-4(a)表示的是机翼振动中弯曲和扭转之间相位差为零的情况。在这种情况下,每个振动周期内气动力给机翼的能量为零,所以不可能发生气动力振动激励;图 5-4(b)表示的则是相位差为 90° 的情况,即弯曲运动超前扭转运动。在这种情况下,整个振动周期内气动力都作正功,因而就会发生振动激励。

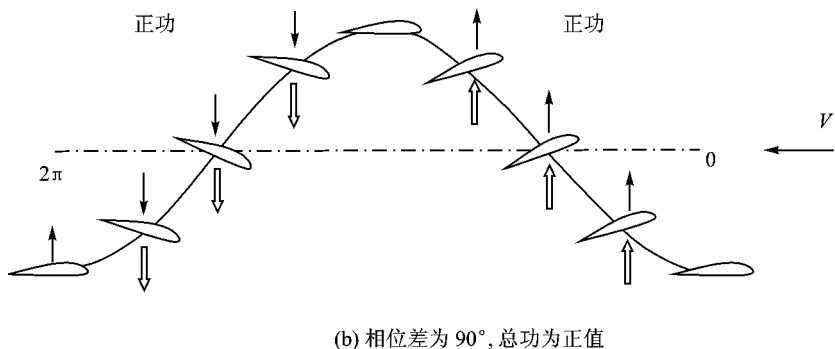
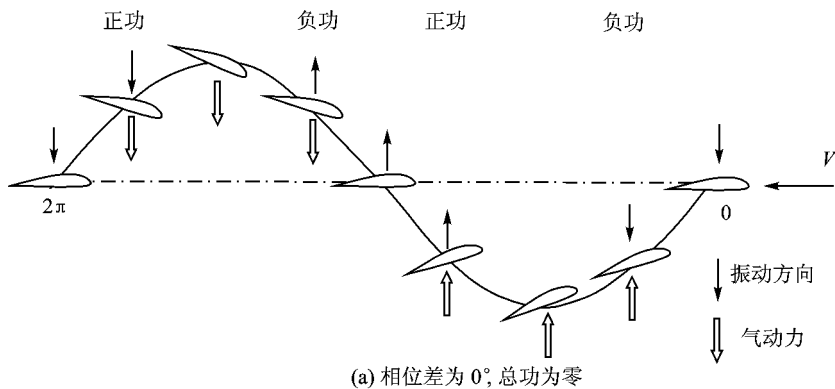


图 5-4 具有弯曲和扭转两个自由度的振动机翼在一个振动周期内气动力的能量平衡

进一步对图 5-4(b)进行分析可以看到,以飞行速度 V 飞行的飞机,由于受到干扰而产生了弹性位移。因为弯曲运动和扭转运动有 90° 的相位差,所以当弯曲变形达到最大时,扭转变形为零。当翼剖面由于弹性作用回到平衡位置时,扭转变形达到最大;随着扭转变形的减小,弯曲变形又达到负的最大值。

假如机翼扭转了 θ 角,则攻角的改变也是 θ ,这就使机翼升力改变了 ΔL_θ ,其方向和机翼运动方向相同。当机翼向下运动时,攻角减少 θ ,升力则相应地减少 ΔL_θ 。这种附加的气动力 ΔL_θ 可以看作是促进机翼运动的力。所以在弯曲变形和扭转变形有 90° 相位差的情况下, ΔL_θ 是激振力。



此外,由于有弯曲振动,也就有弯曲振动速度,因此机翼的基本速度 V 的大小和方向都有改变,如图 5-5 所示。机翼作弯曲振动时,就有弯曲运动速度(图中的 V' 和 $\dot{y}$ 都以相对气流形式表示),其结果是使机翼的攻角改变了 $\Delta\alpha$,相应的升力也就改变了 ΔL_a 。这个附加气动力总是与机翼弯曲运动的方向相反,因此力 ΔL_a 是减振力。

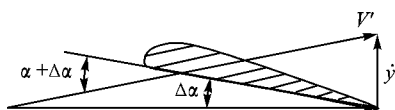


图 5-5 弯曲振动时翼剖面的攻角改变示意图

综上所述,飞行中的机翼在作弯、扭振动时,同时会产生两种附加的气动力 ΔL_θ 和 ΔL_a ,二者作用性质相反: ΔL_θ 是起激励作用的,而 ΔL_a 则是起减振作用的。

下面再分析一下这两种力随飞行速度 V 变化的情况。按空气动力学,由 θ 而产生的附加升力可以用下列公式表示,即

$$\Delta L_\theta = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L^a \theta \quad (5-4)$$

式中 C_L^a ——机翼的升力系数曲线斜率;

ρ ——空气密度;

S ——机翼面积;

V ——飞行速度。

由式(5-4)可以看出 ΔL_θ 与飞行速度 V 的平方成正比。

由 $\Delta\alpha$ 角而产生的附加升力可以用下列公式表示,即

$$\Delta L_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L^a (\Delta\alpha) \quad (5-5)$$

由图 5-5 可知

$$\Delta\alpha = \frac{\dot{y}}{V} \quad (5-6)$$

将式(5-6)代入到式(5-5),得

$$\Delta L_a = \frac{1}{2} \rho V S C_L^a \dot{y} \quad (5-7)$$

由式(5-7)可以看到 ΔL_a 与飞行速度 V 成正比。现在,两个附加气动力随飞行速度 V 的变化关系如图 5-6 所示。可以看出,在速度范围 I 内,减振力 ΔL_a 比激励力 ΔL_θ 大,所以机翼的振动是衰减的。而在速度范围 II 内,激励力 ΔL_θ 大于减振力 ΔL_a ,所以机翼的振动是不断扩大的,并最终导致机翼破坏,这就是所谓的颤振现象。在速度范围 I 和 II 的交界处,激励力和减振力相等,此时的速度称作机翼颤振临界速度,并记作 V_F 。

这里再一次看到,机翼发生颤振时与自由振动不

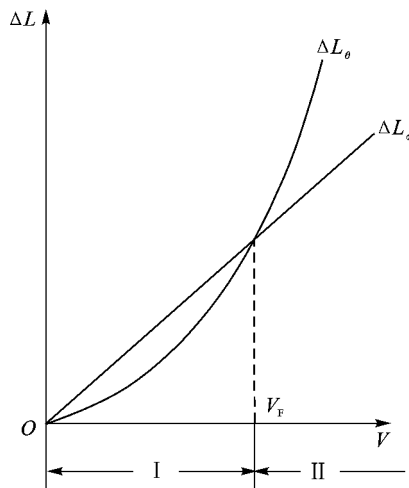


图 5-6 激励力 ΔL_θ 和减振力 ΔL_a 随飞行速度 V 的变化关系曲线



同,它是在有气流输入能量的情况下产生的。当然,它与强迫振动也不同,完全是因为机翼本身的弯、扭耦合变形,形成一种换能器才能使它成为一种能源,这就是自激振动的情况。

5.2.3 机翼-副翼颤振现象

机翼-副翼颤振现象可作为说明颤振现象的第二个例子。这是机翼弯曲和副翼偏转耦合类型的颤振。当振动的机翼具有副翼时,也能按上述情况进行类似的分析。这时系统具有机翼弯曲和副翼偏转两个自由度。图 5-7 表示了这种耦合振动时气动力的能量平衡。图 5-7(a) 表示的是机翼弯曲和副翼偏转之间相位差为零的情况,此时气动力在一个振动周期内所作的功为零,因此,不存在振动激励。而图 5-7(b) 则表示副翼的偏转落后机翼弯曲 90° 。此时在整个振动周期内气流中的能量不断输送给振动系统,因此发生激励振动。

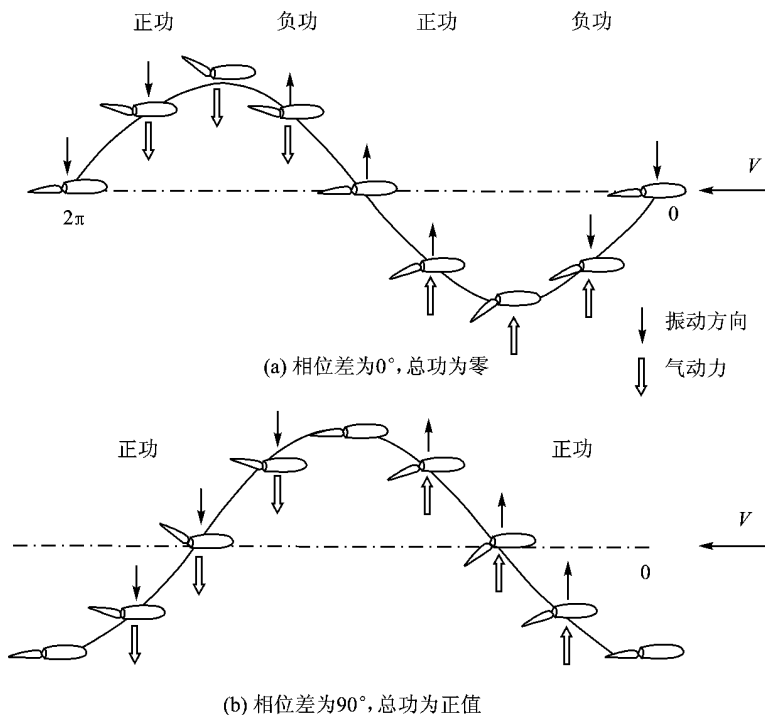


图 5-7 具有机翼弯曲和副翼偏转两个自由度的振动系统在一个振动周期内气动力的能量平衡

由于这个颤振过程中,气动力主要是通过副翼输入能量,所以也称为副翼颤振。下面定性地分析这种情况。

机翼在作弯曲振动时副翼会产生偏转,其原因是显而易见的,也可由图 5-8 看出。由于副翼的偏转使机翼的升力改变,改变值为 ΔL_β ,故可以看出,当机翼向下作加速运动时,副翼向上偏转, ΔL_β 则向下,与机翼的运动方向一致,因此 ΔL_β 是激励力,其大小为



$$\Delta L_{\beta} = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{L_{\beta}}^{\beta} \beta \quad (5-8)$$

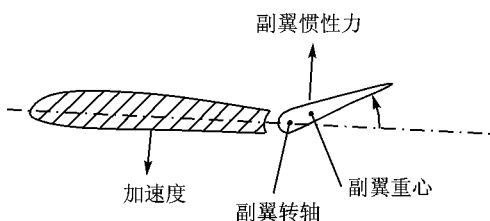


图 5-8 机翼作弯曲振动时副翼产生的偏转

式中 β ——副翼偏转角；

$C_{L_{\beta}}^{\beta}$ ——由舵偏引起的升力系数曲线斜率。

上式表明 ΔL_{β} 与 V^2 成正比。而机翼弯曲振动速度 $\dot{y}$ 所引起的附加升力仍可用式 (5-7) 表示, 即 ΔL_{α} 与 V 成正比。

依同样方法, 作出 ΔL_{β} 及 ΔL_{α} 随 V 的变化曲线, 也可以说明存在一个颤振临界速度。当飞行速度低于临界速度时, 机翼弯曲副翼偏转的振动

是衰减的; 当高于这个临界速度时, 则振动是扩大的。

由例中可见, 颤振是由空气动力所引起的振动, 且除了气流以外没有其他的能源。所以只有当振动的机翼能从气流中吸取能量时, 才可能发生颤振, 即振动的机翼在完成一个周期振动时能从气流中吸取能量, 这种振动称作空气动力不稳定的振动。

当然, 飞机颤振并不止上述两种类型, 还有很多其他类型的颤振, 这里不再一一列举。但应指出, 上述两个例子的分析都是粗略定性的, 比较精确的分析将借助于较完善的气动力公式, 将在以下各章节引用不同的气动力公式来讨论各种颤振计算方法。

5.3 简化的颤振理论

为什么翼面在气流速度达到某一值时会发生颤振? 能量是怎样从气流中吸取来的, 又怎样从一个自由度传到另一个自由度? 此外, 对于颤振问题能不能找出一些简便的计算方法或公式? 为解决这些问题, 并说明颤振的物理本质, 就试图把其他学科中有关自激振动的理论移植过来, 建立了简化的颤振理论。

在简化的颤振理论中, 最典型而又具有工程指导意义的就是频率重合理论。它可以对颤振作粗略的估算, 同时也是工程设计中预防颤振的一条重要准则。下面就以一个典型翼段为对象, 说明频率重合理论。

5.3.1 颤振方程的建立

现在考察图 5-9 所示的典型二元翼段, 研究它在气流中的振动。

该翼段是绝对刚硬的, 并以扭转弹簧 k_a 及线弹簧 k_h 支持在 E 点 (即刚心)。翼段质量为 m ; 重心在 G 点, 它与刚心的距离为 σ , 并以重心在后为正。图中 A 点为气动中心, 它与刚心的距离为 e 。该翼段有两个自由度, 以静平衡为起点, 取坐标 h 和 α , 其中 h 为刚心处的挠度, 向下为正; α 为绕刚心的转角, 抬头为正。对于气动力只需采用定常气动力理论, 即假设升力只

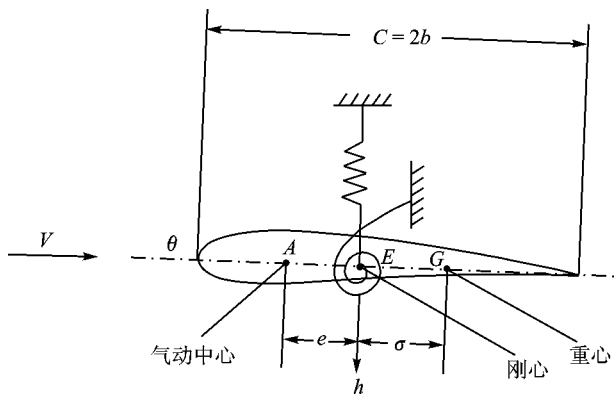


图 5-9 典型的二元翼段

与每一时刻的实际攻角有关,删去了一切气动惯性及气动阻尼项,只保留与各广义坐标成比例的气动刚度。由此可以列写翼段的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m\dot{h} + m\sigma\ddot{\alpha} + k_h h + L &= 0 \\ I_0\ddot{\alpha} + (m\sigma\ddot{\alpha} + m\dot{h})\sigma + k_a\alpha - eL &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

即

$$\left. \begin{aligned} m\dot{h} + S_a\ddot{\alpha} + k_h h + L &= 0 \\ S_a\dot{h} + I_a\ddot{\alpha} + k_a\alpha - eL &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

式中 S_a ——翼段对刚心的静矩, $S_a = m\sigma$;

I_a ——翼段对刚心的惯量, $I_a = I_0 + m\sigma^2$ 。

按定常气动力理论有

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha = qS \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha \quad (5-11)$$

式中 S ——翼段的平面面积;

$$q = \frac{1}{2}\rho V^2。$$

则运动方程(5-10)成为

$$\left. \begin{aligned} m\dot{h} + S_a\ddot{\alpha} + k_h h + qS \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha &= 0 \\ S_a\dot{h} + I_a\ddot{\alpha} + k_a\alpha - qSe \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

为求解式(5-12),可设

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 e^{\lambda t} \\ \alpha &= \alpha_0 e^{\lambda t} \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

式中, λ 是待求的常数,可能是复数, $\lambda = \zeta + i\omega$, ζ 和 ω 都是实数。



对于式(5-12)所解得结果,可有下列 3 种情况:

① $\zeta < 0$, 则

$$e^{\lambda t} = e^{\zeta t} e^{i\omega t} = e^{\zeta t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

表明运动是衰减运动,系统是稳定的。

② $\zeta = 0$, 则 $e^{\lambda t} = e^{i\omega t}$, 表明运动是简谐振动,系统处于中立稳定的临界状态。

③ $\zeta > 0$, 表明运动是发散的,系统是动不稳定的。

现在把式(5-13)代入式(5-12),消去 $e^{\lambda t}$, 得

$$\begin{bmatrix} m\lambda^2 + k_h & S_a \lambda^2 + qS \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ S_a \lambda^2 & I_a \lambda^2 + k_a - qSe \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5-14)$$

5.3.2 频率重合理论

很多颤振分析实例表明,在颤振临界点附近,常有两个分支在气流中的频率相互接近的现象。频率接近意味着两个振型的耦合性加强,由此提出了一种高度简化的颤振理论,即频率重合理论。频率重合理论是:当风速增大时,会使得两个分支频率改变,一直到两个频率重合。这两个分支的耦合振动就有可能从气流中吸取能量,从而达到颤振临界点。

由式(5-14)得到它的特征方程是

$$A\lambda^4 + B\lambda^2 + C = 0 \quad (5-15)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= mI_a - S_a^2 \\ B &= mk_a + I_a k_h - (me + S_a)qS \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ C &= k_h \left(k_a - qSe \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

由此可解得

$$\lambda^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5-17)$$

当 $q=0$ 时,也就是没有气流时, $B>0, B^2-4AC>0$ 。式(5-14)算出的 λ^2 是两个负的实数, $\lambda=i\omega$ 是纯虚数。这样就求得翼段在真空中的两个固有频率(即自由振动频率),该振动是简谐的, $\zeta=0$ 。

有气流时, $q>0$ 而仍满足 $B^2-4AC>0$ 时,则还是有两个振动频率,其值随 q 变化。当 q 增大到使 $B^2-4AC<0$ 时,则 λ^2 成为复数。因此至少会有一个 λ 值的实部 ζ 是正的,这表明振幅不断扩大,运动是不稳定的,发生了颤振。

$$B^2 - 4AC = 0 \quad (5-18)$$



给出了稳定与不稳定的界限。由式(5-18)可算出一个确定的 q 值,在该值之下,就会出现动不稳定性,即颤振。

由式(5-18),可以得到

$$Dq_F^2 + Eq_F + F = 0$$

$$q_F = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \quad (5-19)$$

式中 $D = \left[(me + S_a) S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right]^2$;

$$E = [-2(me + S_a)(mk_a + k_h I_a) + 4(mI_a - S_a^2)ek_h] S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha};$$

$$F = (mk_a + k_h I_a)^2 - 4(mI_a - S_a^2)k_h k_a。$$

由式(5-19)确定的 q_F ,至少有一个应为正实数,才能使颤振发生。若两个均为正实数,则选其中较小者为颤振动压;若两个均不是正实数,则不会发生颤振。利用上述推导,还可作很多有意义的研究,但其中最重要的结果是:当 $S_a < 0$ 时,即重心在弹性轴的前面时,不会颤振。相反地,当 S_a 在大于零的情况下增大时,产生颤振的动压 q_F 则减小。在工程实际中通常在可能产生颤振的结构上,采取附加质量配重,目的就在于减小 S_a 和提高 q_F 。

注意,由式(5-18)的条件,式(5-17) λ^2 只有一个值,即 $\lambda^2 = -B/2A$,因此只有一个振动频率。可以说:当流速 V 增大到使两个振动频率相等时,就达到颤振临界点,如图5-10所示。这就是根据简单的定常气动力导出的频率重合理论。如果采用稍复杂的气动理论,例如准定常气动力,则翼段在气流中的两个振动频率虽然也随气流速度变化而相互接近,但不会相等,如图5-10的实线所示。

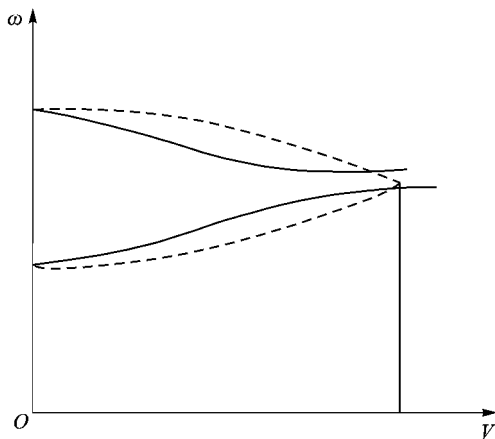


图5-10 准定常气动力情况下 $V-\omega$ 的曲线

5.3.3 举例

按照频率重合理论,可以估算颤振临界速度。下面举例说明之。

例题 试求图5-9所示的翼段在静止气流中的振动频率,并按频率重合理论求出颤振速度。图中翼段的弦长为 $2b$ 。

解 取 $\partial C_L / \partial \alpha = 2\pi$ 代入方程(5-12),则化成



$$\frac{\ddot{h}}{b} + \frac{S_a}{mb} \ddot{\alpha} + \omega_h^2 \left(\frac{h}{b} \right) + \left(\frac{\pi \rho b S}{m} \right) \frac{V^2}{b^2} \alpha = 0$$

$$\frac{b S_a}{I_a} \left(\frac{\ddot{h}}{b} \right) + \ddot{\alpha} + \omega_a^2 \alpha - \left(\frac{\pi \rho b S}{m} \right) \left(\frac{m b^2}{I_a} \right) \left(\frac{e}{b} \right) \frac{V^2}{b^2} \alpha = 0$$

设

$$h = h_0 e^{i\omega t}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

代入以上方程, 消去 $e^{i\omega t}$ 。若代入以下的翼段有关数据, 即设

$$\frac{m}{\pi \rho b S} = 5, \quad \frac{S_a}{mb} = 0.25, \quad \frac{I_a}{mb^2} = 0.5, \quad \frac{e}{b} = 0.4, \quad \frac{\omega_h}{\omega_a} = 0.5$$

则得

$$(\omega_h^2 - \omega^2) \left(\frac{h_0}{b} \right) + \left(0.2 \frac{V^2}{b^2} - 0.25 \omega^2 \right) \alpha_0 = 0$$

$$-0.5 \omega^2 \left(\frac{h_0}{b} \right) + \left(\omega_a^2 - \omega^2 - 0.16 \frac{V^2}{b^2} \right) \alpha_0 = 0$$

两式同除以 ω_a^2 , 并记 $X = \frac{V}{b\omega_a}$, 得

$$\begin{bmatrix} 0.25 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} & 0.2X^2 - 0.25 \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \\ -0.5 \frac{\omega^2}{\omega_a^2} & 1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} - 0.16X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h_0}{b} \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = 0$$

于是得到特征方程

$$0.875 \frac{\omega^4}{\omega_a^4} - (1.25 - 0.26X^2) \frac{\omega^2}{\omega_a^2} + (0.25 - 0.04X^2) = 0$$

在静止气流中, $V=0$, 即可由上方方程解得

$$\left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1.188 \\ 0.241 \end{bmatrix}$$

由此得到两个固有频率

$$\frac{\omega_1}{\omega_a} = 0.490$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_a} = 1.09$$

再按频率重合条件

$$(1.25 - 0.26X^2)^2 - 4 \times 0.875 \times (0.25 - 0.04X^2) = 0$$

即

$$X^4 - 7.544X^2 + 10.170 = 0$$

由此解得

$$X_F^2 = 1.757$$

$$X_F = \frac{V_F}{b\omega_a} = 1.326$$



$$\frac{\omega_F}{\omega_\alpha} = 0.6732$$

频率重合理论所用的气动力表达式很粗略,所得的结果与实际情况自然有较大出入;但它的运算大为简化,且很有助于作参数分析(因为在较少自由度情况下,它有时甚至能提供封闭形式解,从而给出 V_F 与某些参数的显式联系)。至今,在飞行范围内力图避免频率重合几乎成为飞机设计师的一条守则。

5.4 影响颤振速度的因素

在上述简化颤振理论分析的基础上,为进一步深入观察弹性系统的颤振特性,在本节简单地指出一些在升力面设计中影响颤振的因素。它们大都具有普遍意义,因此十分重要;特别是格罗斯曼所证明的一些表达机翼结构参数对弯扭颤振速度影响的关系,可供工程设计时参考。但是这些关系的可信度也受到假设的限制,如流体是不可压缩的,机翼是非后掠的,副翼是锁住的等。这些影响颤振速度的因素大多来自结构和气动力两个方面,归纳起来有以下 6 种。

1. 升力面弯曲刚度和扭转刚度的影响

升力面的弯曲刚度和扭转刚度对颤振速度的影响较大。例如在二元翼段上的计算和实验证明,若把升力面的弯曲刚度和扭转刚度同时增加 n 倍,则颤振速度约增加 $\sqrt{n}$ 倍。但是它们二者的单独影响却完全不同。在颤振中扭转起主要作用,故扭转刚度的影响要大得多。当弯曲刚度不变,只把扭转刚度变化 n 倍时,则颤振速度会变化 nk 倍, $k=0.55\sim 0.6$, 因不同机翼而异。对于蒙皮受力的机翼来说,当只有弯曲刚度增加时, V_F 变动不大,甚至会稍微下降。这种现象可解释如下:当颤振时,弯曲和扭转要以同一频率联合振动,扭转固有频率自然要比弯曲固有频率高,必须在有外加能量时才能使它们以同一频率联合振动;但当只提高弯曲刚度时,弯曲固有频率也随之提高,而与扭转固有频率相近,它们就容易以同一频率联合振动,这就会使 V_F 降低,当弯、扭固有频率相等时,则会得到最小的 V_F 。如果再提高弯曲刚度,则会使 V_F 增加,但现代蒙皮受力机翼不会有这种情况。此外,还须指出,增大刚度必定要增大结构受力元件尺寸,也就是增加了质量。因此,这种措施会降低飞机的性能。

2. 重心、刚心和焦点位置的影响

重心在弦向的位置对 V_F 的影响很大:重心后移会降低 V_F ;重心前移会提高 V_F ;重心位于刚心之前则不会发生颤振。利用这个概念来防止颤振是行之有效的,即在翼面前缘置放配重,使重心前移,以提高颤振速度 V_F 。这种方法在操纵面上用得最多。重心位置对颤振速度 V_F 的影响可参看图 5-11。其中 $\bar{X}=X_G/C$, X_G 是重心到前缘的距离, C 为弦长。

当重心位置一定时,应使刚心靠后一些(与重心靠近),这样可以提高颤振速度 V_F 。若重心、刚心间距离不变,则把它们一起向前移(与焦点靠近),也可以使颤振速度 V_F 有所增加。



3. 升力面上的集中质量影响

集中质量(如飞机机翼上的发动机)对颤振速度有颇大影响。重物质量和它在弦向位置的不同,可能使颤振速度提高,也可能降低;有时也会改变颤振模态,改变主要的自由度。重物的支架(如发动机架)的弹性也影响颤振速度。翼尖油箱,尤其是在小展弦比机翼上,将使颤振速度降低。

如果飞机机翼内装有油,则在设计取油程序时应考虑到对颤振速度的影响。图 5-12 上画出了两种不同取油程序对颤振速度的影响。显然,应该采用第 1 种程序。

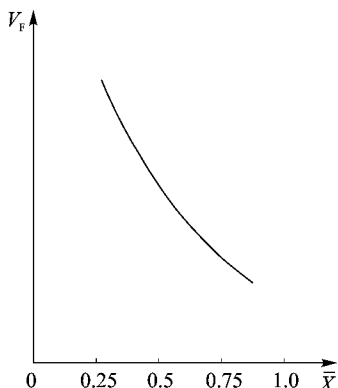


图 5-11 重心位置对 V_F 的影响曲线

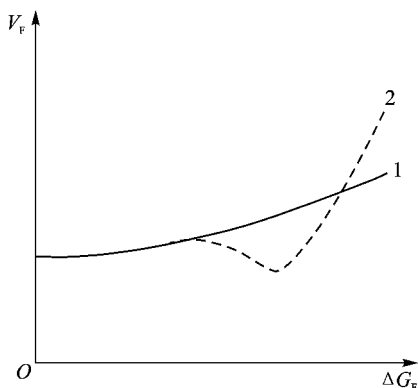


图 5-12 取油程序对颤振速度的影响

4. 升力面平面形状的影响

当翼展和机翼面积不变时,根梢比 η 愈大,则颤振速度也增高;因为 η 增大时,翼端部分翼弦减小,使该处(经常是颤振开始产生的地点)气动力减少,就会使颤振速度增加。

5. 飞行高度的影响

飞行高度增高,大气密度 ρ 减小,而速压应相同,所以

$$V_{FH} = V_{F0} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_H}}$$

式中 V_{F0} ——海平面($H=0$)上的颤振速度;

ρ_0 ——海平面上的大气密度。

6. 空气压缩性的影响

当马赫数 $Ma > 0.5$ 时,应考虑空气压缩性。但在亚声速的情况下,空气压缩性对颤振速度影响并不大,随马赫数 Ma 增加, V_F 开始缓慢降低;当马赫数 Ma 接近 1 时,随马赫数 Ma 增加, V_F 急剧降低。如图 5-13 所示,到一定马赫数 Ma 时, V_F 出现最小值,再增加马赫数 Ma 时, V_F 逐渐增加。这就是通常所说的跨声速凹坑。

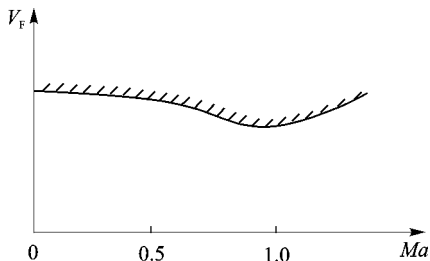


图 5-13 压缩性对颤振速度的影响

通常,可以先不考虑空气压缩性,求出颤振速度,而后用一个与马赫数 Ma 有关的因子来修正。

思考题

- 5.1 颤振的性质及其特点是什么?
- 5.2 为什么颤振必须要在两个或两个以上自由度耦合下才会发生?此外,还须具有什么条件?
- 5.3 为什么说在研究振动稳定性问题时,注意到简谐运动条件是非常重要的?
- 5.4 比较自激振动与强迫振动之间的不同。
- 5.5 按照能量输入的观点观察颤振发生的条件。
- 5.6 频率重合理论是在什么样的简化条件下得出的?
- 5.7 研究简化的颤振理论,对于飞机设计的意义何在?
- 5.8 复习振动学中的两个自由度运动方程的建立。
- 5.9 以机翼为例,比较弯曲刚度和扭转刚度对提高颤振速度的效果。
- 5.10 分别以重心、刚心和焦点位置对颤振速度的影响作出综合评述。
- 5.11 5.4 节讨论的影响颤振速度的因素在飞机设计中有什么应用价值?

参考文献

- 1 道尔 E H, 小柯蒂斯 H C, 斯坎伦 R H. 气动弹性力学现代教程. 陈文俊, 尹传家译. 北京: 宇航出版社, 1991
- 2 诸德超, 陈桂彬, 邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室, 1986
- 3 Scanlan R H, Rosenbaum R. Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter. The Macmillan Company, New York, 1951
- 4 Bisplinghoff R L, Ashley H, Halfman R L. Aeroelasticity. Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1955

第 6 章 颤振分析基础

在第 4 章中,概括地介绍了不可压缩流中振动的二元机翼上的气动力,分别讨论了准定常气动力理论和非定常气动力理论。作为颤振分析的基础,本章以二元机翼为分析对象,对于气动力直接引用第 4 章的结果。在 6.1 节中,首先建立运动方程,并应用准定常气动力理论讨论二元机翼颤振。在 6.2 节中,讨论应用非定常气动力理论时的二元机翼颤振。在采用非定常气动力理论时,由于减缩频率 k 隐含在各气动力系数内,因此就有一个如何求解颤振行列式的问题,将在 6.3 节中作专门的讨论。在 6.4 节中,将讨论二元机翼-副翼的颤振以及操纵面的配平问题。

6.1 应用准定常气动力理论的二元机翼颤振

在准定常气动力假设上所建立的颤振分析方法,是由格罗斯曼提出的。在这个理论中,略去了非定常气动力中的一些因素。因此,最后所得到的颤振结果是近似的,颤振速度偏于保守;但颤振计算的工作量相对减少,且其结果简明,易于对颤振速度的各种影响因素进行分析。多年来经过大量的风洞试验,证明了该理论在工程中的应用的可行性。

以下首先建立运动方程,并在此基础上引用准定常气动力理论,进而求解颤振方程。现在来讨论一个具有两个自由度、弦长为 $2b$ 、宽度为一个单位长度的二元翼段。两个自由度分别是:弯曲 h (在弹性轴上测量,向下为正);绕弹性轴的转动(前缘向上为正)。翼段分别由一个线弹簧和一个盘旋弹簧支持在弹性轴 E 点(相应于刚心处),弹簧常数分别为 K_h 和 K_a 。如图 6-1 所示, E 点在翼弦中点后 ab 处。重心到弹性轴的距离以 x_a 表示,量纲为 1。于是机翼上任一点的位移

$$Z = h + r\alpha \quad (6-1)$$

式中 r ——从弹性轴 E 量起的距离(在 E 点的后面为正)。

引用拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6-2)$$

式中 T ——系统的动能;

U ——系统的势能;

Q_i ——与 q_i 相应的广义力,它由虚功表达式 $\delta W_e = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$ 中导出。

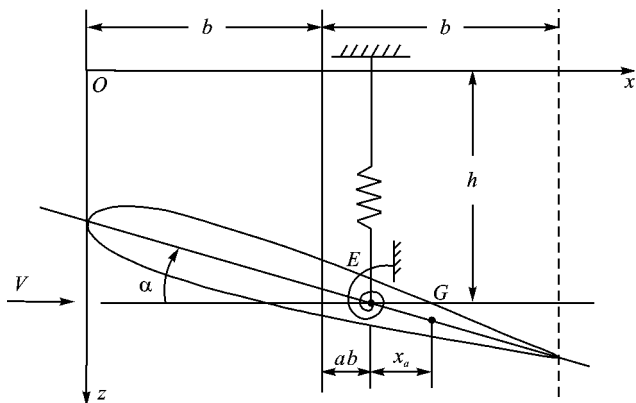


图 6-1 对二元翼段所规定的符号

二元翼段的动能是

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2b} (\dot{h} + r\dot{\alpha})^2 dm = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + S_a \dot{h} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} I_a \dot{\alpha}^2 \quad (6-3)$$

式中 m ——单位展长的机翼质量, $m = \int_0^{2b} dm$;

S_a ——单位展长机翼对弹性轴的质量静矩, $S_a = \int_0^{2b} r dm = m x_a b$;

I_a ——单位展长机翼对转轴的质量惯矩, $I_a = \int_0^{2b} r^2 dm = m r_a^2 b^2$;

r_a ——对弹性轴的回转半径,量纲为 1。

二元翼段的势能是

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_a \alpha^2 \quad (6-4)$$

应用拉格朗日方程,得

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{h} + S_a\ddot{\alpha} + K_h h &= Q_h \\ S_a\ddot{h} + I_a\ddot{\alpha} + K_a \alpha &= Q_a \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

式中 Q_h ——与 h 相应的广义力,即由翼段振动引起的气动力(向下为正);

Q_a ——与 α 相应的广义力,即由翼段振动引起的气动力矩(以翼段前缘向上为正)。

以下对 Q_h 和 Q_a 采用准定常气动力理论来进行颤振分析。引用第 4 章中准定常气动力的结果,可知

$$L = -\frac{1}{2} \rho V^2 (2b) a_0 \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right]$$

以及得到对刚心 E 的力矩



$$M_E = \frac{1}{2}\rho V^2 (2b)^2 \left\{ a_0 \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4} \right) \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] - \frac{b\pi}{4V} \dot{\alpha} \right\}$$

代入到式(6-5), 经整理后得到颤振运动方程

$$m\ddot{h} + K_h h + S_a \ddot{\alpha} + \rho V^2 b a_0 \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] = 0 \quad (6-6)$$

$$S_a \ddot{h} + I_a \ddot{\alpha} + K_a \alpha + 2\rho V^2 b^2 \left\{ \frac{b\pi}{4V} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1+a}{2} \right) a_0 \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] \right\} = 0 \quad (6-7)$$

注意, 在颤振临界状况下(这时 $V=V_{cr}$), 机翼作简谐运动, 即

$$h = h_0 e^{i\omega t}$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

代入式(6-6)及式(6-7)得

$$(K_h - m\omega^2 + i\rho V b a_0 \omega) h + \left\{ -S_a \omega^2 + \rho V^2 b a_0 \left[1 + i\omega \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{V} \right] \right\} \alpha = 0 \quad (6-8)$$

$$\left[-S_a \omega^2 + i2\rho V b^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1+a}{2} \right) a_0 \omega \right] h + \left\{ K_a - I_a \omega^2 + 2\rho V^2 b^2 \left[i \frac{b\pi}{4V} \omega + \left(\frac{1}{4} - \frac{1+a}{2} \right) a_0 \left[1 + i\omega \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{V} \right] \right] \right\} \alpha = 0 \quad (6-9)$$

引入符号

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= m \\ c_{12} &= c_{21} = -S_a \\ c_{22} &= I_a \\ a_{11} &= K_h \\ a_{22} &= K_a \\ b_{12} &= -\rho b a_0 \\ b_{22} &= -2\rho b^2 a_0 \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ d_{11} &= \rho b a_0 \\ d_{12} &= -\rho b^2 a_0 \left(\frac{1}{2} - a \right) \\ d_{21} &= 2\rho b^2 a_0 \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ d_{22} &= 2\rho b^3 \left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4} \right) a_0 \left(\frac{1}{2} - a \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

代入到式(6-8)和式(6-9)中, 得

$$(a_{11} - c_{11}\omega^2 + i\omega V d_{11}) h + (c_{12}\omega^2 - b_{12}V^2 - i\omega V d_{12}) \alpha = 0 \quad (6-11)$$



$$(c_{21}\omega^2 - i\omega Vd_{21})h + (a_{22} - c_{22}\omega^2 + b_{22}V^2 + i\omega Vd_{22})\alpha = 0 \quad (6-12)$$

以上的联立方程具有非零解的条件是系数行列式等于零,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - c_{11}\omega^2 + i\omega Vd_{11} & c_{12}\omega^2 - b_{12}V^2 - i\omega Vd_{12} \\ c_{21}\omega^2 - i\omega Vd_{21} & a_{22} - c_{22}\omega^2 + b_{22}V^2 + i\omega Vd_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (6-13)$$

这个行列式通常称为颤振行列式。它和自由振动时的固有频率方程不同,现在所得到的式(6-13)是一个复数方程。它包含实部及虚部两个方程,并有两个未知数,即颤振频率 ω 及颤振临界速度 V 。

展开上式,并分成实、虚两部,得

$$A_1\omega^4 - (C_1 + C_2V^2)\omega^2 + (E_1 + E_2V^2) = 0 \quad (6-14)$$

$$-B_1\omega^2 + (D_1 + D_2V^2) = 0 \quad (6-15)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ B_1 &= d_{11}c_{22} + c_{11}d_{22} - c_{12}d_{21} - c_{21}d_{12} \\ C_1 &= a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} \\ C_2 &= c_{11}b_{22} - b_{12}c_{21} + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \\ D_1 &= d_{11}a_{22} + a_{11}d_{22} \\ D_2 &= d_{11}b_{22} - b_{12}d_{21} \\ E_1 &= a_{11}a_{22} \\ E_2 &= a_{11}b_{22} \end{aligned} \right\} \quad (6-16)$$

由式(6-15)解得

$$\omega^2 = \frac{D_1 + D_2V^2}{B_1} \quad (6-17)$$

代入式(6-14),得

$$\bar{L}V^4 + \bar{M}V^2 + \bar{N} = 0 \quad (6-18)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \bar{L} &= D_2(B_1C_2 - D_2A_1) \\ \bar{M} &= B_1C_2D_1 + B_1C_1D_2 - B_1^2E_2 - 2D_1D_2A_1 \\ \bar{N} &= B_1C_1D_1 - B_1^2E_1 - D_1^2A_1 \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

求解式(6-18)得

$$V^2 = \frac{-\bar{M} \pm \sqrt{\bar{M}^2 - 4\bar{L}\bar{N}}}{2\bar{L}} \quad (6-20)$$

取两个根中较小的正根作为颤振速度 V_F ,再代回式(6-17),即得颤振频率 ω_F 。在求得 V_F 及 ω_F 后,还可以代回式(6-11)及式(6-12),求得两振幅之比,即



$$\frac{h}{\alpha} = -\frac{c_{12}\omega^2 - b_{12}V^2 - i\omega Vd_{12}}{a_{11} - c_{11}\omega^2 + i\omega Vd_{11}} \quad (6-21)$$

这个比值为复数。它表明,在颤振时 h 和 α 有相位差。这显然和机翼固有振动情况不同。在一个无阻尼系统作为主振动时,各点相位差是 0° 或 180° , 因此,固有振型只需要一张图就能表示了。现在由于相位差不等于 0° 或 180° , 就必须用一系列的图形,才能表达出颤振的振型。

例题 参看图 5-9, 试使准定常气动力理论更加简化。只考虑刚心处速度引起的气动阻尼力,取

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{V} \right)$$

$$M_E = e \cdot L$$

有关翼段的数据与 5.3.3 节中例题相同,求该二元机翼的颤振速度。

解 该翼段的运动方程是

$$m\ddot{h} + S_a\ddot{\alpha} + K_h h + \frac{1}{2}\rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{V} \right) = 0$$

$$S_a \ddot{h} + I_a \ddot{\alpha} + K_a \alpha - \frac{1}{2}\rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{V} \right) e = 0$$

在颤振临界状态下

$$h = h_0 e^{i\omega t}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

代入上述有关的数据,由以上方程得

$$\begin{bmatrix} 0.25 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} + i0.2 \frac{\omega}{\omega_a} X & 0.20X^2 - 0.25 \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \\ -0.5 \frac{\omega^2}{\omega_a^2} - i0.16 \frac{\omega}{\omega_a} X & 1 - 0.16X^2 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h_0}{b} \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = 0$$

式中

$$X = \frac{V}{b\omega_a}$$

该方程的特征方程可分为实部和虚部两个方程。其实部方程为

$$0.875 \frac{\omega^4}{\omega_a^4} - (1.25 - 0.26X^2) \frac{\omega^2}{\omega_a^2} + (0.25 - 0.04X^2) = 0$$

虚部方程为

$$0.2 - 0.24 \frac{\omega^2}{\omega_a^2} = 0$$

由虚部方程得颤振频率

$$\frac{\omega_F}{\omega_a} = 0.91$$

代入实部方程得

$$-0.1840 + 0.1767X^2 = 0$$



解得量纲为 1 的颤振速度,即

$$X_F = \frac{V_F}{b\omega_a} = 1.02$$

6.2 应用非定常气动力理论的二元机翼颤振

由 6.1 节已经导出二元机翼的运动方程,即

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{h} + S_a\ddot{\alpha} + K_h h &= L \\ S_a\ddot{h} + I_a\ddot{\alpha} + K_a\alpha &= M_E \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

用非定常理论计算气动力时,由于可供使用的气动力只有简谐振动产生的气动力,故以第 4 章中的非定常气动力公式代入式(6-22)的等号右边项,同时令

$$h = h_0 e^{i\omega t}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

则可得

$$-m\omega^2 h - S_a\omega^2 \alpha + K_h h - \pi\rho b^3 \omega^2 \left\{ L_h \frac{h}{b} + \left[L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \alpha \right\} = 0 \quad (6-23)$$

$$\begin{aligned} & -S_a\omega^2 h - I_a\omega^2 \alpha + K_a\alpha - \\ & \pi\rho b^4 \omega^2 \left\{ \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \frac{h}{b} + \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right] \alpha \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6-24)$$

式中

$$L_h = 1 - i \frac{2}{k} [F(k) + iG(k)] \quad (6-25)$$

$$L_a = \frac{1}{2} - i \frac{1}{k} \{1 + 2[F(k) + iG(k)]\} - \frac{2}{k^2} [F(k) + iG(k)] \quad (6-26)$$

$$M_h = \frac{1}{2} \quad (6-27)$$

$$M_a = \frac{3}{8} - i \frac{1}{k} \quad (6-28)$$

为了计算方便,所有有关的气动力系数均已制成表格,在需要时可以查阅:U. S Army Air Force TR4798 或 R. H. Scanlan 和 R. Rosenbaum 的《Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter》一书的附录。这里仅摘录了不可压缩流中的一小部分系数,见表 6-1。这个表就是对不同的 k 值列出的 L_h , L_a , M_h 和 M_a 之值。这些系数有些是复数,其虚数部分代表与相应位移有相位差的那些气动力。 L_h , L_a , M_h 及 M_a 和西奥道生的函数 $C(k)$ 的关系见式(6-25)~(6-28)。



表 6-1 $Ma=0$ 时的非定常气动力的系数

k	$1/k=V/b\omega$	L_h	L_a	M_h	M_a
∞	0.00	1.000 0+0.000 0i	0.500 0+0.000 0i	0.500 0	0.375 0+0.000 0i
4	0.25	0.984 8-0.251 9i	0.421 8-0.942 3i	0.500 0	0.375 0-0.250 0i
2	0.50	0.942 3-0.512 9i	0.185 8-0.984 1i	0.500 0	0.375 0-0.500 0i
1.2	0.83	0.853 8-0.883 3i	-0.382 3-1.594 9i	0.500 0	0.375 0-0.833 3i
0.8	1.25	0.708 8-1.385 3i	-1.522 8-2.271 2i	0.500 0	0.375 0-1.250 0i
0.6	1.67	0.540 7-1.929 3i	-3.174 9-2.830 5i	0.500 0	0.375 0-1.666 7i
0.5	2.00	0.397 2-2.391 6i	-4.886 0-3.186 0i	0.500 0	0.375 0-2.000 0i
0.4	2.50	0.175 2-3.125 0i	-8.137 5-3.562 5i	0.500 0	0.375 0-2.500 0i
0.34	2.94	-0.022 1-3.805 3i	-11.714 0-3.739 6i	0.500 0	0.375 0-2.941 2i
0.3	3.33	-0.195 0-4.433 3i	-15.473 0-3.782 2i	0.500 0	0.375 0-3.333 3i
0.27	3.75	-0.379 8-5.108 4i	-20.033 7-3.684 7i	0.500 0	0.375 0-3.750 0i
0.24	4.17	-0.552 0-5.824 2i	-25.319 0-3.526 0i	0.500 0	0.375 0-4.166 7i
0.2	5.00	-0.886 0-7.276 0i	-37.766 5-2.846 0i	0.500 0	0.375 0-5.000 0i
0.16	6.25	-1.345 0-9.535 0i	-61.437 0-1.128 8i	0.500 0	0.375 0-6.250 0i
0.12	8.33	-2.002 0-13.438 5i	-114.492 0+3.242 0i	0.500 0	0.375 0-8.333 3i
0.1	10.00	-2.446 0-16.640 0i	-169.346 0+7.820 0i	0.500 0	0.375 0-10.000 0i
0.08	12.50	-3.010 0-21.510 0i	-272.410 0+16.115 0i	0.500 0	0.375 0-12.500 0i
0.06	16.67	-3.753 0-29.733 3i	-499.853 0+32.822 2i	0.500 0	0.375 0-16.666 7i

引入翼段作单纯弯曲(上下平移)振动时的固有频率

$$\omega_h = \sqrt{\frac{K_h}{m}} \quad (6-29)$$

及翼段作单纯扭转振动时的固有频率

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K_a}{I_a}}$$

并以 $-\pi\rho b^3\omega^2$ 及 $-\pi\rho b^4\omega^2$ 分别除式(6-23)及(6-24), 可得

$$\left[\frac{m}{\pi\rho b^2} \left(1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right) + L_h \right] \frac{h}{b} + \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_a + \left[L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \right\} \alpha = 0 \quad (6-30)$$

$$\left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_a + \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \right\} \frac{h}{b} + \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} r_a^2 \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2} \right) + \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right] \right\} \alpha = 0 \quad (6-31)$$



由以上两式可得颤振行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega_a} \right)^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \right] + L_h & \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a + L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \\ \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a + M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h & \frac{m}{\pi \rho b^2} r_a^2 \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2} \right) + M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \end{vmatrix} = 0 \quad (6-32)$$

式中已将各物理量转化为量纲为 1 的量。其中 $m/\pi\rho b^2$ 称翼段与空气质量比,量纲为 1; ω_h/ω_a 为单纯弯曲与单纯扭转固有频率的比,该值对于一个特定的翼段是给定的; a, x_a, r_a 等符号的意义已如前述,对于一个特定的翼段也是给定的。于是问题在于如何由方程(6-23)求出 ω_a/ω 及 k 这两个未知量。由于 k 是隐含在各气动力系数内的(通常各气动力系数与 k 的关系是以数值表的形式给出的),因此,在这个复数方程中,外表上看来似乎就只有一个未知量。关于如何求解颤振行列式等于零所构成的复数方程,将在下一节进一步讨论。

6.3 颤振行列式的求解

6.2 节讨论了用非定常理论计算气动力时的颤振方程,可以看到它和采用准定常气动力的情况不同,方程的系数不显含 V ,必须给定 $1/k=V/b\omega$ 的值,才能知道 L_h 等的值。本节主要介绍如何求解颤振行列式等于零所构成的复数方程。由于求解的方法较多,这里仅介绍常用的 3 种。

6.3.1 西奥道生法

在 6.2 节所叙述的把颤振行列式分成实数和虚数部分两个行列式,从而求解出颤振速度的方法,在美国的文献中常称作西奥道生法。在式(6-32)中,令

$$\left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 = X \quad (6-33)$$

且只有对角线项包含有 X 。对于一个给定的 k 值,行列式的所有项都是已知的(复数)。特征方程的形式为

$$X^2 - (B_R + iB_I)X + (C_R + iC_I) = 0 \quad (6-34)$$

如果把实数和虚数部分分开,就可以写成两个以 X 为未知量的且具有实系数的方程

$$\left. \begin{aligned} X^2 - B_R X + C_R &= 0 \\ B_I X - C_I &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

分别解上述两个方程,并以 X_R, X_I 分别表示实部方程和虚部方程所得的正根。通常, $X_R \neq X_I$ 。显然,只有 $X_R = X_I$ 时才能求得颤振方程的解。因此,给定一组 k 值解得一组 X_R 及 X_I 后,作 $\sqrt{X_R - k}$ 及 $\sqrt{X_I - k}$ 两条曲线,如图 6-2 所示,其交点所对应的 k 值表示颤振行列式等于零的 k



值,于是可以求得 V_F 及 ω_F 。

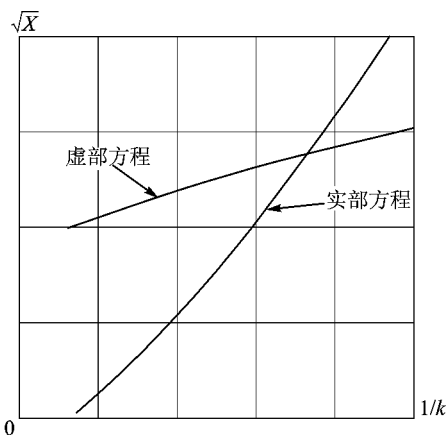


图 6-2 用西奥道生法求解

颤振行列式的 $\sqrt{X} - \frac{1}{k}$

对于可压缩流体,在查寻气动力数据表时要求同时假定马赫数 Ma 和减缩频率 k ,才能求得行列式的数值。先假定马赫数为 Ma ,用上述方法可以算出一个颤振临界速度 V ,但它对应于另一个马赫数 Ma' 。不断地改变 Ma ,又会导致其他的 Ma' ,直到 $Ma = Ma'$ 时,即可得到真实的解。所以,需要一个试凑的过程。

例题 已知二元翼段的参数如下:

$$\left(\frac{1}{2} + a\right) = \frac{e}{b} = 0.4, \quad \frac{m}{\pi \rho b S} = 5$$

$$\frac{S_a}{mb} = 0.25, \quad \frac{I_a}{mb^2} = 0.5$$

试用非定常气动力,分别按 $1/k = V/b\omega = 1.25$ 及 1.67 列出颤振方程,求出颤振临界点。

解 把已知参数代入到运动方程,并记 $X = (\omega_a/\omega)^2$,得方程

$$\begin{bmatrix} 5 + L_h - 1.25X & 1.25 - 0.4L_h + L_a \\ 1.75 - 0.4L_h & 2.3 + 0.16L_h - 0.4L_a + M_a - 2.5X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{b} \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$$

由表 6-1 可查到有关 L_h 等气动力系数,代入上方程后,得到如下特征方程:

$1/k = 1.25$ 时

$$\begin{vmatrix} 4.56704 - 1.50864i - X & -0.44506 - 1.21350i \\ 0.58659 + 0.30173i & 1.35901 - 10.25730i - X \end{vmatrix} = 0$$

展开后得

实部方程:

$$X^2 - 5.92605X + 5.7340 = 0$$

虚部方程:

$$1.76594X - 2.37924 = 0$$

由实部方程解得

$$X_R = 4.71406, \quad 1.21199$$

又由虚部方程解得

$$X_I = 1.34729$$

同理,按 $1/k = 1.67$ 时的特征方程

$$\begin{vmatrix} 4.43256 - 1.53624i - X & -1.71294 - 1.64986i \\ 0.61349 + 0.30725i & 1.61259 - 0.33670i - X \end{vmatrix} = 0$$

得到实部和虚部两个方程:



$$X^2 - 6.045\,15X + 7.174\,60 = 0$$

$$1.872\,94X - 2.431\,29 = 0$$

解得 $X_R = 4.423\,06$, $1.622\,09$, $X_I = 1.298\,11$

以 $1/k$ 为横坐标, 作 X_R 及 X_I 的两直线, 得交点

$$1/k_F = 1.37, \quad X_F = 1.32$$

于是求得颤振临界状态时的频率及速度

$$\frac{\omega_F}{\omega_a} = \frac{1}{\sqrt{X_F}} = \frac{1}{1.32} = 0.87$$

$$\frac{V_F}{b\omega_a} = \frac{1}{K_F \sqrt{X_F}} = 1.37 \times 0.87 = 1.19$$

6.3.2 V-g 法

这是当前颤振计算中较常用的方法。在这个方法中引入了结构阻尼系数 g 。实验表明, 振动时结构阻尼力的大小与振动位移量成正比, 因而也与弹性恢复力成正比, 而与频率无关。此外, 它与速度反相, 即与位移有 90° 相位差。引用结构阻尼系数 g 来表示结构阻尼力, 即结构阻尼力为 $-ig_h K_h h$ (或 $-ig_a K_a \alpha$)。而结构阻尼力与弹性恢复力之和可用

$$-(1 + ig_h)K_h h = -(1 + ig_h)m\omega_h^2 h_0 e^{i\omega t}$$

及

$$-(1 + ig_a)K_a \alpha = -(1 + ig_a)I_a \omega_a^2 \alpha_0 e^{i\omega t}$$

表示, 通常取 $g_h = g_a = g$ 。在式(6-30)及式(6-31)中引入结构阻尼力, 得

$$\left\{ \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[1 - (1 + ig) \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 \right] + L_h \right\} \frac{h}{b} + \left\{ \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a + \left[L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \right\} \alpha = 0 \quad (6-36)$$

$$\left\{ \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a + \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \right\} \frac{h}{b} +$$

$$\left\{ \frac{m}{\pi \rho b^2} r_a^2 \left[1 - (1 + ig) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \right] + \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right] \right\} \alpha = 0$$

(6-37)

相应地有颤振行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 (1 + ig) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \right] + L_h & \frac{m}{\pi \rho b^2} x_b + M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \\ \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a + L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h & \frac{m}{\pi \rho b^2} r_a^2 \left[1 + (1 + ig) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \right] + M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \end{vmatrix} = 0 \quad (6-38)$$



令

$$Z = (1 + ig) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \quad (6-39)$$

它是一个复数未知数,式(6-38)就成为关于 Z 的复系数二次方程。求解后,得两个复根 $Z = Z_R + iZ_I$ 。由 Z 的定义式(6-39)可得

$$\omega = \frac{\omega_a}{\sqrt{Z_R}} \quad (6-40)$$

$$g = \frac{Z_I}{Z_R} \quad (6-41)$$

在计算式(6-38)之前,必须先设一组 k 值,而 $k = \omega b/V$ 。因而,在由式(6-40)算出一个 ω 值后,就有

$$V = \frac{\omega b}{k} = \frac{b}{k} \cdot \frac{\omega_a}{\sqrt{Z_R}} \quad (6-42)$$

由式(6-41)解得的 g 值的物理意义是:飞机在上式给出的 V 值下飞行时,若机翼作临界简谐振动,则它必须具有按式(6-41)算出的结构阻尼值。若机翼的真实结构阻尼小于此值,则必须给它再增加一些阻尼才能作临界简谐振动,那么实际上机翼在这个飞行速度下已经作发散振动,即已进入颤振范围;反之,若真实结构阻尼大于此值,则必须减少才能达到临界,故实际上机翼作衰减振动处于亚临界范围。事实上,结构总是存在一定的阻尼,但是很难精确地测定。所以,从保守的方面考虑,常认为机翼的结构阻尼是零。假如由式(6-41)算出的 g 值是负的(比所设之真实阻尼的零值要小),就表示要施以负阻尼力,即施加激励力,机翼才作临界简谐振动。实际上机翼并未受此激励力,故机翼振动衰减尚未达到颤振状况,即由式(6-42)算出的 V 值比颤振速度 V_F 小。

在计算颤振速度时,也要假设一组 k (即一组 $1/k$) 值,求得相应的 V, g, ω 。绘制成 $V-g$ 图线,通常取与 $g=0$ (由图线插值得到) 所对应的 V 值作为颤振速度 V_F , 如图 6-3 所示。图 6-3(a) 中两条曲线所对应的频率 ω 分别接近 ω_h 及 ω_a , 故有时称之为弯曲分支及扭转分支。由图可见,发生颤振的是扭转分支。还可以取计算中的 ω 值,作出 $V-\omega$ 的两条曲线,如图 6-3(b) 所示。当 V 增加时,两条分支的频率逐渐靠近。通常在接近颤振速度时,都有类似现象。

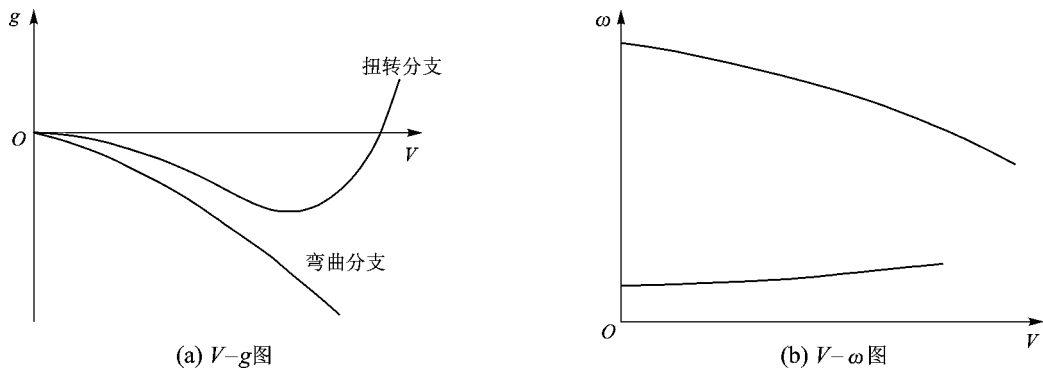
$V-g$ 法用在两个自由度的系统上并不见得比西奥道生的解法简单,但这条曲线在颤振点上的斜率大致上表明颤振的剧烈程度,而且这样在数学上也把颤振问题概括为复特征值问题。若用矩阵表达,方程的一般形式是

$$(A - ZB)q = 0 \quad (6-43)$$

或

$$Dq = Zq \quad (6-44)$$

式中, $D = B^{-1}A$, 它和 A 都是复数矩阵,其阶数等于系统的自由度数; q 是系统的位移矩阵。

图 6-3 用 $V-g$ 法求解颤振行列式的图线

对于多自由度系统,采用式(6-43)或式(6-44)便于电子计算机求解,用复数雅可比法能够求出全部复数特征根 Z ,且具有同样的精确度。这点和静稳定性问题不同,颤振问题是需要求出全部特征根的。

例题 试用 $V-g$ 法求解 6.3.1 节例题中机翼的颤振速度。

解 在该例题中已求解出特征方程。

当 $1/k=1.25$ 时,有

$$Z^2 - (5.926\ 05 - 1.765\ 94i)Z + (5.713\ 0 - 2.379\ 24i) = 0$$

算出复数根是

$$\begin{aligned} Z &= 2.963\ 025 - 0.882\ 97i \pm \sqrt{2.286\ 48 - 2.853\ 28i} = \\ &= 2.963\ 025 - 0.882\ 97i \pm (1.723\ 79 - 0.827\ 62i) = \\ &\begin{cases} 4.686\ 82 - 1.710\ 59i \\ 1.239\ 24 - 0.055\ 35i \end{cases} \end{aligned}$$

于是算得相应的

$$\frac{\omega}{\omega_a} = \frac{1}{\sqrt{Z_R}} = \begin{cases} 0.461\ 91 \\ 0.898\ 30 \end{cases}$$

$$g = \frac{Z_I}{Z_R} = \begin{cases} -0.364\ 98 \\ -0.044\ 66 \end{cases}$$

$$\frac{V}{b\omega_a} = \frac{1}{k} \frac{\omega}{\omega_a} = \begin{cases} 0.577\ 39 \\ 1.122\ 88 \end{cases}$$

又当 $1/k=1.67$ 时

$$Z^2 - (6.045\ 15 - 1.872\ 94i)Z + (7.174\ 60 - 2.431\ 29i) = 0$$

算出根是



$$Z = 3.022\ 58 - 0.936\ 47i \pm \sqrt{1.084\ 38 - 3.229\ 81i} = \begin{cases} 4.521\ 14 - 2.014\ 11i \\ 1.524\ 02 + 0.141\ 17i \end{cases}$$

相应的

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_a} &= \frac{1}{\sqrt{Z_R}} = \begin{cases} 0.479\ 30 \\ 0.810\ 04 \end{cases} \\ g &= \frac{Z_I}{Z_R} = \begin{cases} -0.445\ 49 \\ 0.092\ 63 \end{cases} \\ \frac{V}{b\omega_a} &= \frac{1}{k} \frac{\omega}{\omega_a} = \begin{cases} 0.785\ 40 \\ 1.352\ 76 \end{cases} \end{aligned}$$

若按直线插值求 $Z_I=0$ 即颤振点,可由方程

$$\frac{\frac{1}{k} - 1.25}{1.67 - 1.25} = \frac{Z_I + 0.055\ 35}{0.141\ 17 + 0.055\ 35} \quad \text{及} \quad Z_I = 0$$

解得

$$\frac{1}{k_F} = \frac{V_F}{b\omega} = 1.37$$

再按直线插值算出颤振临界点的 Z 值,即

$$Z_F = 1.239\ 24 + \frac{(1.524\ 02 - 1.239\ 24)}{(1.67 - 1.25)}(1.37 - 1.25) = 1.32$$

所以颤振频率

$$\frac{\omega_F}{\omega_a} = \frac{1}{\sqrt{Z_F}} = 0.87$$

颤振折算速度

$$\frac{V_F}{b\omega_a} = \frac{1}{k_F \sqrt{Z_F}} = 1.19$$

注意,在采用 $V-g$ 法时,所选取的气动力系数 L_h, L_a, M_h 和 M_a 不仅是减缩频率 k 的函数,也同时随马赫数 Ma 而变化。在上例题中,没有考虑随马赫数 Ma 变化的因素。

6.3.3 $p-k$ 法

20 世纪 70 年代初,在美国提出另一种求解颤振行列式的方法,即 $p-k$ 法。它比 $V-g$ 法稍进一步说明了亚临界自由振动衰减的程度。这一方法中,设机翼作任意运动,即

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 e^{(\gamma+i)\omega t} = h_0 e^{\bar{p}t} \\ \alpha &= \alpha_0 e^{(\gamma+i)\omega t} = \alpha_0 e^{\bar{p}t} \end{aligned} \right\} \quad (6-45)$$

式中, $\bar{p} = \gamma\omega + i\omega, i = \sqrt{-1}$ 。由上式可见

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{h\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)}{h(t)} \right] \quad (6-46)$$



表示了振动的衰减率。

机翼作任意运动时的气动力表达式更为复杂,但是人们最关心的还是颤振临界状态。在这种状态下,机翼作简谐振动。在这个状态的附近,机翼的振动也近似为简谐振动,所以在计算气动力时,仍用简谐振动机翼的非定常气动力公式。在计算中所用的减缩频率 k 就取与式(6-45)中 ω 相应的 k 。

机翼作简谐振动时,有 $\ddot{h} = -\omega^2 h$,而对式(6-45)则有 $\ddot{h} = d^2(h)/dt^2$ 。可见,对简谐振动机翼所导得的式(6-23)和式(6-24),只需用 $\frac{d^2}{dt^2}$ 代替 $-\omega^2$,即可导出作任意运动时的有关方程。

通常再引入量纲为 1 的算子,则

$$p = \frac{b}{V} \frac{d}{dt} = \gamma k + ik = \delta + ik \quad (6-47)$$

式中, $\delta = \gamma k$ 。于是,可将式(6-23)和式(6-24)稍加变化,即得

$$\left[\frac{V^2}{b^2} \begin{bmatrix} mb & S_a \\ S_a b & I_a \end{bmatrix} p^2 + \begin{bmatrix} K_h b & 0 \\ 0 & K_a \end{bmatrix} - \pi \rho b^3 \omega^2 \begin{bmatrix} L_h & L_a - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h \\ \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h \right] b & \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a\right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h \right] b \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \frac{h}{b} \\ \alpha \end{bmatrix} = 0 \quad (6-48)$$

式(6-48)可以表示为

$$\left[\frac{V^2}{b^2} \bar{M} p^2 + \bar{K} + \frac{1}{2} \rho V^2 \bar{A}(k) \right] q = 0 \quad (6-49)$$

式中, $\bar{M}$, $\bar{K}$ 及 $\bar{A}$ 的含义可由式(6-48)和式(6-49)之对应关系直接找出;矩阵 q 代表了机翼两个自由度位移列阵 $\begin{bmatrix} h/b & \alpha \end{bmatrix}^T$ 。

对于二元机翼,可直接由式(6-48)导出颤振行列式:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[p^2 + \left(\frac{\omega_a b}{V} \right)^2 \left(\frac{\omega_h}{\omega_a} \right)^2 \right] - k^2 L_h & \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a p^2 - k^2 \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \\ \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a p^2 - k^2 \left[L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] & r_a^2 \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[p^2 + \left(\frac{\omega_a b}{V} \right)^2 \right] - k^2 \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (6-50)$$



式中, $p = \bar{p}b/V$, 量纲为 1, 即 $p = rk + ik$ 。求解上式时, 先要设一个大气密度 ρ 及飞行速度 V (事实上就确定了马赫数 Ma)。再假定某一减缩频率 k 值下, 会同马赫数 Ma 查取相应表格中气动力系数 L_a, L_h, M_a 和 M_h , 即可求解上式, 并求出两个根: $p^{(1)} = \gamma^{(1)} k^{(1)} + ik^{(1)}$ 及 $p^{(2)} = \gamma^{(2)} k^{(2)} + ik^{(2)}$ 。比较 $k^{(1)}$ 与上述假定的 k 值, 以更接近 k 的 $k^{(1)}$ 值重新查表上的气动力系数, 由此反复迭代到满意为止。此时即寻求到了机翼在气流中自由振动的第一支模态, 其频率 $\omega_1 = k_1 V/b$, 衰减率是 γ_1 。同理以 $k^{(2)}$ 作为第二分支的初始试凑值, 通过迭代找出第二个模态的频率 $\omega_2 = k_2 V/b$ 。

在飞行高度不变的情况下, 改变飞行速度 V (即在原速度 V 的基础上作适当的增加), 重复以上步骤, 从而找出在增量速度下, 该机翼两支模态的频率及衰减率。如此对速度 V 逐级增加, 就算出一系列相应的模态频率及衰减率。直到可以用来描绘 $V-\gamma$ 及 $V-\omega$ 图。注意到在 $V-\gamma$ 图上与横坐标相交的点, 它所对应的速度就是颤振速度 V_F 。

从上述过程可见, $p-k$ 法的计算工作量远大于 $V-g$ 法; 但其所计算的结果可以认为就是最终结果, 不必再对马赫数 Ma 进行迭代。此外, $V-\gamma$ 图与 $V-g$ 图不同。在 $V-\gamma$ 图中, 处于亚临界状态所对应的 γ 值可认为是真实的衰减率, 因此可以和飞行颤振试验的结果相对比。

6.3.4 关于计及压缩性影响的颤振计算

在各种颤振求解方法中, 其中有些是没有计及压缩性影响的, 即所引用或所计算出的气动力都是按不可压缩流动建立起来的。在考虑压缩性影响时, 气动力除了取决于减缩频率外, 还取决于马赫数 Ma 。在计算颤振时, 除了预设 k 值外, 还必须预设马赫数 Ma , 根据这二者去查取气动力系数。例如在 $V-g$ 法中, 开始是对减缩频率 k 的试凑迭代求解, 求得的是在一组 k 值下的 $V-g$ 曲线所确定的颤振速度 V_F 。若在某给定的高度 (即当地声速也随之而定), 就相应有一个马赫数 Ma 。这就引出一个新问题, 即计算所得的 V_F 除以给定的声速算出的马赫数 Ma , 不一定和原始的马赫数 Ma 相等。为了确定与预设的 ρ, M 相匹配的 V_F , 就必须进行一个针对马赫数 Ma 的迭代过程。在给定 ρ 值后, 要设一组马赫数 Ma , 对每一个 Ma , 给定一组减缩频率 k 值, 求得 V_F 。在此基础上作 V_F-Ma 曲线, 如图 6-4 所示。

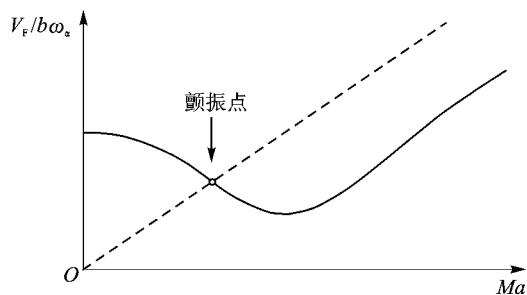


图 6-4 $V_F/b\omega_a - Ma$ 曲线



图 6-4 中的虚直线代表对于给定高度(即给定声速 c), 飞行速度 V 与飞行马赫数 Ma 成正比, 即 $V = Ma \cdot c$, 于是 $(V/b\omega_a) = Ma(\alpha/b\omega_a)$ 也是直线关系。当虚直线与数值计算结果所连成的曲线 $V_F/b\omega_a - Ma$ 相交时, 交点对应的马赫数 Ma 及 $V_F/b\omega_a$ 即为颤振临界点的对应值。

图 6-4 中的实线有一定的代表性。因为一般翼剖面上的空气动力在马赫数 Ma 接近 1 时达到最大值, 故这时 $V_F/b\omega_a$ 最小。当 $Ma \gg 1$ 时, 由空气动力的活塞理论, 气动力压力正比于 $\rho V^2/Ma$, 故 $Ma \gg 1$ 时, V_F 大体上正比于 $\sqrt{Ma}$ 。

6.4 二元机翼-副翼颤振

本节讨论二元机翼-副翼颤振。在二元机翼构型的基础上, 在后缘装有副翼, 如图 6-5 所示。图中 eb 为副翼前缘至翼弦中点的距离, cb 为副翼铰链轴至翼弦中心的距离。在副翼铰链轴上附有旋转弹簧, 其刚度系数为 K_β , 副翼偏角为 β , 且下偏为正。图中坐标系原点取在翼弦中点。

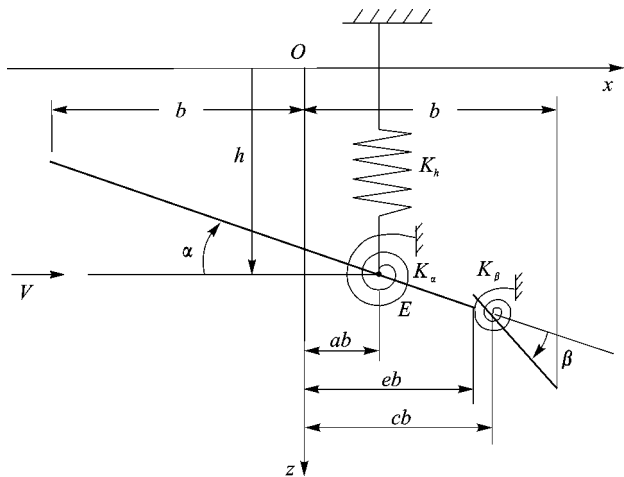


图 6-5 二元机翼-副翼示意图

机翼上任一点的位移可表示为

$$\begin{aligned} z &= h + (x - ab)\alpha \quad (-b \leq x < eb) \\ z &= h + (x - ab)\alpha + (x - cb)\beta \quad (eb \leq x \leq b) \end{aligned} \quad (6-51)$$

为引用拉格朗日方程, 计算二元翼段的动能为



$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b \dot{z}^2 m_0 dx = \\
&\frac{1}{2} \int_{-b}^{eb} [\dot{h} + (x - ab)\dot{\alpha}]^2 m_0 dx + \frac{1}{2} \int_{eb}^b [\dot{h} + (x - ab)\dot{\alpha} + (x - cb)\dot{\beta}]^2 m_0 dx = \\
&\frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_a \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_\beta \dot{\beta}^2 + S_a \dot{h} \dot{\alpha} + S_\beta \dot{h} \dot{\beta} + [(c - a)bS_\beta + I_\beta] \dot{\alpha} \dot{\beta} \quad (6-52)
\end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
m &= \int_{-b}^b m_0 dx \\
S_a &= \int_{-b}^b (x - ab) m_0 dx = m x_a b \\
I_a &= \int_{-b}^b (x - ab)^2 m_0 dx = m r_a^2 b^2 \\
S_\beta &= \int_{eb}^b (x - cb) m_0 dx = m x_\beta b \\
I_\beta &= \int_{eb}^b (x - cb)^2 m_0 dx = m r_\beta^2 b^2
\end{aligned} \right\} \quad (6-53)$$

以上各式中, m_0 为单位面积的翼段质量; m 为单位展长的翼段质量; S_a 为单位展长机翼对刚心的质量静矩; I_a 为单位展长机翼对刚心的质量惯矩; S_β 为单位展长副翼对副翼转轴的质量静矩; I_β 为单位展长副翼对副翼转轴的质量惯矩。

二元翼段的势能为

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_a \alpha^2 + \frac{1}{2} K_\beta \beta^2 \quad (6-54)$$

代入拉格朗日方程, 得

$$\left. \begin{aligned}
m \ddot{h} + S_a \ddot{\alpha} + S_\beta \ddot{\beta} + K_h h &= Q_h \\
S_a \ddot{h} + I_a \ddot{\alpha} [(c - a)bS_\beta + I_\beta] \ddot{\beta} + K_a \alpha &= Q_a \\
S_\beta \ddot{h} + [(c - a)bS_\beta + I_\beta] \ddot{\alpha} + I_\beta \ddot{\beta} + K_\beta \beta &= Q_\beta
\end{aligned} \right\} \quad (6-55)$$

在副翼有偏转时, 气动力表达式计入了副翼偏转的影响。由广义力的定义可知, 单位展长机翼的升力为 L' ; 单位展长机翼上气动力对刚心 E 的力矩为 M' ; 单位展长上气动力对副翼铰链轴的力矩为 T' 。 L' , M' 及 T' 的表达式可以在有关的文献资料中查到, 例如本章后所附的参考文献[4]。

上式中引入简谐振动, 假设

$$\left. \begin{aligned}
h &= h_0 e^{i\omega t} \\
\alpha &= \alpha_0 e^{i\omega t} \\
\beta &= \beta_0 e^{i\omega t}
\end{aligned} \right\} \quad (6-56)$$

在运动方程中引入结构阻尼, 并把上式的系数化成量纲为 1 的形式, 可利用单自由度系统固有



频率

$$\left. \begin{aligned} \omega_h &= \sqrt{\frac{K_h}{m}} \\ \omega_a &= \sqrt{\frac{K_a}{I_a}} \\ \omega_\beta &= \sqrt{\frac{K_\beta}{I_\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (6-57)$$

则得

$$\left. \begin{aligned} A_{11} \frac{h}{b} + A_{12} \alpha + A_{13} \beta &= 0 \\ B_{11} \frac{h}{b} + B_{12} \alpha + B_{13} \beta &= 0 \\ C_{11} \frac{h}{b} + C_{12} \alpha + C_{13} \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-58)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[1 - (1 + i g_h) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega_h}{\omega_a} \right)^2 \right] + L_h \\ A_{12} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a + L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \\ A_{13} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} x_\beta + L_\beta - (c - e) L_z \\ B_{11} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} x_a + M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \\ B_{12} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} r_a^2 \left[1 - (i + i g_a) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \right] + M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (M_h + L_a) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \\ B_{13} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} [(c - a) x_\beta + r_\beta^2] + M_\beta - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_\beta - (c - e) M_z + (c - e) \left(\frac{1}{2} + a \right) L_z \\ C_{11} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} x_\beta + T_h - (c - e) P_h \\ C_{12} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} [(c - a) x_\beta + r_\beta^2] + T_a - (c - e) P_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) T_h + (c - e) \left(\frac{1}{2} + a \right) P_h \\ C_{13} &= \frac{m}{\pi \rho b^2} r_\beta^2 \left[1 - (1 + i g_\beta) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega_\beta}{\omega_a} \right)^2 \right] + T_\beta - (c - e) (P_\beta + T_z) + (c - e)^2 P_z \end{aligned} \right\} \quad (6-59)$$

上式中的气动力系数都是 k 的函数。在计及压缩性影响时, 它们还是马赫数 Ma 的函数。由此得到颤振行列式为



$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{vmatrix} = 0 \quad (6-60)$$

当采用 $V-g$ 法求解时, 令 $g_h = g_a = g_\beta$, 并引入

$$\lambda = (1 + ig) \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2$$

展开行列式, 可得 λ 的复系数三次方程, 即

$$\lambda^3 + L\lambda^2 + M\lambda + N = 0 \quad (6-61)$$

式中, L, M 和 N 都是复系数。求解时可用牛顿法, 求得一个复根后即可降阶, 用解二次方程的方法求得其余两个根。

思考题

6.1 6.1 节中应用拉格朗日方程建立了振动运动方程, 试用其他方法例如力的平衡法, 建立振动运动方程。

6.2 试比较 6.1 节的例题与 5.3.3 节的例题, 哪个计算结果精度更高些, 为什么?

6.3 广义气动力与一般空气动力有什么关系? 为什么叫它广义的?

6.4 熟悉非定常气动力系数的查表过程。

6.5 采用非定常气动力和采用准定常气动力在求解颤振行列式上有什么不同?

6.6 区分 $V-g$ 法和 $p-k$ 法在原理上及计算方法上的主要差异。

6.7 在 $V-g$ 图中, 解释 g 的物理意义。

6.8 练习推导二元机翼-副翼的振动运动方程。

6.9 式(6-61)中, L, M, N 都是复系数, 考虑如何求解该式。

参考文献

- 1 冯 Y C. 空气弹性力学引论. 冯钟越, 管德译. 北京: 国防工业出版社, 1963
- 2 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1982
- 3 诸德超, 陈桂彬, 邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室, 1986
- 4 Scanlan R H, Rosenbaum R. Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter. The Macmillan Company, New York, 1951

第 7 章 工程颤振分析和设计方法(一)

第 6 章中,以二元机翼为对象,讨论了颤振分析的基础。在第 7、第 8 两章中将主要讨论工程颤振分析方法。本章的重点是针对大展弦比机翼颤振计算的讨论。在 7.1 节中,对工程颤振分析作了简要的说明;在 7.2 节中,以大展弦比直机翼为例,讨论运动方程的建立;在 7.3 和 7.4 节中,采用气动力的片条理论分别以准定常气动力理论和非定常气动力理论来讨论大展弦比直机翼的颤振计算;在 7.5 节中,针对大展弦比后掠机翼讨论了颤振分析的特点。

注意,无论在前面或以后所讨论的颤振问题中,都是以线化理论为基础的。实践证明:只要运动的幅度不太大时,以线化理论来处理颤振问题,在临界速度的附近是比较接近真实情况的。

7.1 工程颤振分析的概述

三元机翼是一个复杂的连续弹性体,具有无穷多个自由度,所以比起二元机翼要复杂得多。对于一个真实的飞机结构,要想精确地研究它是不可能的。这就需要有工程上的手段,使其成为能够反映主要弹性及惯性特性的物理模型及数学模型。

在结构分析中,为了描述结构的变形,可以有两种方法。一种方法是在结构上选择一定数量的点,通过这些点上的位移来描述结构的变形。这种方法就形成了“集中质量法”。在集中质量法中,把机翼分成一定数量的片条,并认为每一片条都是作为一个整体在运动。另一种方法是用由连续函数组成的级数展开式,这种方法就形成了广义坐标,这是在颤振分析中常用的方法。

把一个复杂弹性结构的变形用有限数量的广义坐标来表示,等于是在弹性体上加上了某种约束。因此,结构不再是完全弹性的,而是“半刚固”的。这里重要的是选择描述弹性位移的广义坐标;当广义坐标选定以后,就可以根据拉格朗日方程导出运动方程。因此,就要从模型试验和实际工程经验中去恰当地选择半刚固形态。为了说明广义坐标的选择,作为例子,选择一个大展弦比直机翼来讨论。该机翼根部固支,并以一根弹性轴来表示,把它当作度量机翼挠度的参考线。这样对沿翼弦方向的机翼剖面变形可以用 3 个量来表示,即弹性轴的弯曲(向下为正)、绕弹性轴的转动(前缘向上为正)以及副翼绕其铰链的转动(后缘向下为正)。对于展向某一个剖面在时间 t 时,上述 3 个量分别以 $h(y, t)$ 、 $\alpha(y, t)$ 及 $\beta(y, t)$ 来表示。如果要求完全描述任意函数 $h(y, t)$ 、 $\alpha(y, t)$ 及 $\beta(y, t)$,则需要一整套的广义坐标。但是,它和振动分析中的情况一样,往往可以选取少量广义坐标作为颤振机翼的代表。在本例中取了 3 个广义坐



标, 设

$$\left. \begin{aligned} h(y, t) &= \bar{h}(t)f(y) \\ \alpha(y, t) &= \bar{\alpha}(t)\phi(y) \\ \beta(y, t) &= \bar{\beta}(t)\psi(y) \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

式中, $\bar{h}(t)$, $\bar{\alpha}(t)$ 及 $\bar{\beta}(t)$ 是未知的时间函数, 而 $f(y)$, $\phi(y)$ 及 $\psi(y)$ 则是 3 个假定的 y 的函数; 当假定了上述 3 个 y 的函数后, 机翼的变形形式就受到了限制。如果 $f(y)$, $\phi(y)$ 及 $\psi(y)$ 选择得当, 所求得的颤振速度就比较接近实际。此处函数 $f(y)$, $\phi(y)$ 及 $\psi(y)$ 称为变形的半刚固形态, 或者简称形态。广义坐标 $\bar{h}(t)$, $\bar{\alpha}(t)$ 及 $\bar{\beta}(t)$ 是基于这些函数定义的。

通常, 操纵面可以认为是刚体的, 因而 $\psi(y)$ 可以取为常数, 因为操纵面最低阶的扭转频率通常比颤振频率高得多。在结构设计中, 为了保证这一点, 经常把操纵杆尽量安排在操纵面翼展的中间。在需要增置平衡质量时, 也应尽可能靠近操纵拉杆。

在本例中, 对函数 $f(y)$, $\phi(y)$ 及 $\psi(y)$ 可选为机翼自由振动的纯弯、纯扭振型。但是, 为了便于计算, 也可以选择近似于纯弯、纯扭振型的多项式, 甚至于选取一些初等函数。这些函数一定要满足机翼根部约束的边界条件。例如, 对于翼根部剖面固支的悬臂机翼选为

$$f(y) = \frac{1}{l^2}y^2, \quad \phi(y) = \frac{1}{l}y, \quad \psi(y) = 1$$

就完全满足了位移边界条件。

当选用机翼自由振动的固有振型时, 所得到的结果最好。若在本例中选取前三阶固有振型, 即

$$\begin{bmatrix} f_1(y) \\ \phi_1(y) \\ \psi_1(y) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_2(y) \\ \phi_2(y) \\ \psi_2(y) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_3(y) \\ \phi_3(y) \\ \psi_3(y) \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

则可以写出

$$\left. \begin{aligned} h(y, t) &= q_1(t)f_1(y) + q_2(t)f_2(y) + q_3(t)f_3(y) \\ \alpha(y, t) &= q_1(t)\phi_1(y) + q_2(t)\phi_2(y) + q_3(t)\phi_3(y) \\ \beta(y, t) &= q_1(t)\psi_1(y) + q_2(t)\psi_2(y) + q_3(t)\psi_3(y) \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

式中, $q_1(t)$, $q_2(t)$ 及 $q_3(t)$ 是广义坐标。

在颤振分析中, 通常选取以主振型(固有振型)为模态(“基”)的广义坐标, 称之为主坐标。这样做的优点是: ① 能够更好地反映真实机翼的质量和刚度特性; ② 广义质量矩阵和广义刚度矩阵都是对角矩阵; ③ 前几阶的固有频率和振型可以用实物的地面共振试验取得, 而且还能测定相应的广义质量。这样, 可以使得理论计算与试验互相校核。当然, 这样做也使得气动力矩阵的计算工作量增加了。而且在做颤振计算之前, 总要先求出机翼(或飞机)在无气流时的固有频率和振型, 也就是说先做振动计算和地面试验, 为颤振计算提供原始资料。

现代飞机的刚度比较小, 机翼上往往有大的集中质量, 机身可能较重。因此, 主坐标的数



目需要选取得多一些。在新飞机的研制中,由于无经验可循,则必须采用机翼或全机的主振型,一般要取 6~10 个自由度(主坐标),有时甚至还要多些。

值得注意的是,颤振分析本身除了要借助于高速计算机外,还包含了很强的技巧性。设计人员除了要作出一些重要的简化假定外,还需要把分析对象表示为仅具有少量的自由度,而且仅考虑那些有可能发生颤振的形态。这就要求设计人员,依靠所积累的工程实际经验,作出对重要模态和自由度的正确选择,在尽量减少颤振分析工作量的同时,得到最准确的结果。

最后要提及的是关于非线性问题。因为无论是在前面或以后所讨论的颤振问题,都是以线化理论为基础的,而真实的物理现象并不是线性的,因此就存在如何评价线化理论的正确性的问题。关于这方面只是从实践证明了当运动的幅值不太大时,以线化理论来处理颤振问题,在临界速度的附近是比较接近真实情况的。事实上,即使是在线化理论的范围之内,在理论上也未必能做到尽善尽美的程度。在以后的章节中将会看到,在处理工程实际问题时,常常要引入一些附加的假设来简化颤振计算。例如:① 以弹性梁代替三元机翼;② 用“片条”假设来简化空气动力;③ 气动力系数是对应于处在零攻角的平板翼型计算的,即不计非线性厚度效应;④ 有时忽略空气压缩性效应等。所以在一些要求有准确度的实际问题中,必须采用理论分析和模型试验、飞行试验相结合的技术途径。

7.2 大展弦比直机翼的运动方程

本节讨论大展弦比直机翼的颤振计算。在讨论中,引用了两个重要的假设:① 在气动力计算上,应用片条理论;② 在结构上,把机翼简化为由各剖面刚心连成的一根直线,称之为弹性轴。本节从建立运动方程出发,分别采用准定常及非定常气动理论进行颤振计算,并应用实例说明计算过程。

如图 7-1 所示,大展弦比直机翼的弦向剖面可以认为是绝对刚硬的,而且它有一根近似于垂直对称面的直弹性轴。因此,机翼的变形可以用弹性轴的弯曲 $h(y, t)$ 和弦向剖面绕弹性轴的扭转 $\alpha(y, t)$ 来表示,即

$$w(x, y, t) = h(y, t) + r(x)\alpha(y, t) \quad (7-4)$$

式中, w 为平直机翼任意一点的变形,向下为正; r 为从弹性轴量起的弦向距离,以顺气流方向向后为正; h 以向下为正; α 以前缘抬头为正。

机翼的第 j 阶固有振型 $w_j(x, y)$ 也可以表示为弹性轴的弯曲 $h_j(y)$ 及绕弹性轴的扭转 $\alpha_j(y)$, 即

$$w_j(x, y) = h_j(y) + r(x)\alpha_j(y) \quad (7-5)$$

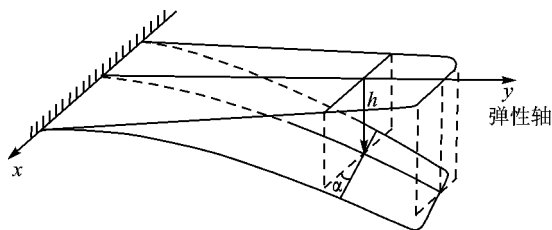


图 7-1 大展弦比直机翼颤振计算示意图



现在,把机翼的变形运动转化到用主坐标来描述,即把机翼在垂直方向的运动位移用 n 个固有振型叠加组成,则

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^n [h_j(y) + r(x)\alpha_j(y)] \cdot \xi_j(t) \quad (7-6)$$

为了引用拉格朗日方程,先要计算机翼的动能 T 及势能 U 。

机翼的动能为

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \gamma(x, y) [\dot{w}(x, y, t)]^2 dx dy = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \dot{\xi}_j^2 \quad (7-7)$$

式中 $\gamma(x, y)$ ——机翼单位面积质量;

S ——机翼面积。

$$M_j = \int_0^l [m h_j^2(y) + 2S_\alpha h_j(y)\alpha_j(y) + I_\alpha \alpha_j^2(y)] dy \quad (7-8)$$

式中 l ——半展长。

$$\left. \begin{aligned} m &= \int_{\text{弦}} \gamma(x, y) dx \\ S_\alpha &= \int_{\text{弦}} \gamma(x, y) r(x) dx \\ I_\alpha &= \int_{\text{弦}} \gamma(x, y) r^2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (7-9)$$

式(7-9)中的 m, S_α, I_α 分别为单位展长机翼的质量、对弹性轴的质量静距及惯距。

机翼的势能为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \omega_j^2 \xi_j^2 \quad (7-10)$$

式中 ω_j ——第 j 阶固有频率。

把以上动能、势能代入拉格朗日方程得

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_j} \right] + \frac{\partial T}{\partial \xi_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7-11)$$

式中, Q_j 代表与第 j 个主坐标对应的广义力。由此可得到颤振分析所用的运动方程

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7-12)$$

这里如何选用固有振型及取用多少阶固有振型,直接涉及颤振分析工作的繁简。通常,对于大展弦比直机翼,在没有较大的集中质量情况下,在初步估算颤振时,往往只取机翼的第一阶主弯曲振型及第一阶主扭转振型,此时机翼变形运动降为两个自由度。

进一步简化,还可以用与第一阶纯弯振型 $f(y)$ 及第一阶纯扭振型 $\phi(y)$ 相联系的 $h(y)$ 和 $\alpha(y)$ 作为两个广义坐标,即



$$\left. \begin{aligned} h(y, t) &= f(y)h(t) \\ \alpha(y, t) &= \phi(y)\alpha(t) \end{aligned} \right\} \quad (7-13)$$

代入式(7-4), 则

$$w(x, y, t) = f(y)h(t) + r(x)\phi(y)\alpha(t) \quad (7-14)$$

这样得到的运动方程与式(7-12)不同, 在等号左边将出现惯性耦合项, 此时动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iint_S \gamma(x, y) [f(y)\dot{h}(t) + r(x)\phi(y)\dot{\alpha}(t)]^2 dx dy = \\ &\quad \frac{1}{2} (c_{11}\dot{h}^2 - 2c_{12}\dot{h}\dot{\alpha} + c_{22}\dot{\alpha}^2) \end{aligned} \quad (7-15)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \int_0^l m(y) \cdot f^2(y) dy \\ c_{12} &= c_{21} = - \int_0^l S_a(y) f(y) \phi(y) dy \\ c_{22} &= \int_0^l I_a(y) \phi^2(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (7-16)$$

上式中的 m, S_a 和 I_a 的表达式仍为式(7-9)。此时的势能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \left[\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \right]^2 h^2(t) dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ(y) \left[\frac{\partial \phi(y)}{\partial y} \right]^2 \alpha^2(t) dy = \\ &\quad \frac{1}{2} a_{11} h^2 + \frac{1}{2} a_{22} \alpha^2 \end{aligned} \quad (7-17)$$

代入式(7-11)拉格朗日方程, 得

$$\left. \begin{aligned} c_{11}\ddot{h} - c_{12}\ddot{\alpha} + a_{11}h &= Q_h \\ -c_{21}\ddot{h} + c_{22}\ddot{\alpha} + a_{22}\alpha &= Q_a \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

考虑纯弯曲自由振动, 这时无外力 Q_h , 得

$$c_{11}\ddot{h} + a_{11}h = 0$$

同理, 考虑纯扭转自由振动, 这时无外力 Q_a , 得

$$c_{22}\ddot{\alpha} + a_{22}\alpha = 0$$

由于运动是简谐的, 以 $h = h_0 e^{i\omega t}$, $\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$ 代入上式, 即可求出

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= c_{11}\omega_h^2 \\ a_{22} &= c_{22}\omega_a^2 \end{aligned} \right\} \quad (7-19)$$

ω_h 及 ω_a 分别为纯弯曲及纯扭转自由振动频率。由此可见, 广义刚度 a_{11}, a_{22} 可以通过相应的广义质量和纯弯曲或纯扭转固有频率来表示, 于是式(7-18)又可改写为

$$\left. \begin{aligned} c_{11}\ddot{h} - c_{12}\ddot{\alpha} + c_{11}\omega_h^2 h &= Q_h \\ -c_{21}\ddot{h} + c_{22}\ddot{\alpha} + c_{22}\omega_a^2 \alpha &= Q_a \end{aligned} \right\} \quad (7-20)$$



式中, Q_h 和 Q_α 分别对应于广义坐标 $h(t)$, $\alpha(t)$ 的广义气动力。

现在来求广义空气动力。按广义力的定义 $Q_h \delta h = \delta W_h$, 当有增量 δh 时各翼段上的升力 L' 将在位移 $f(y) \delta h$ 上作功, 因此相应的功增量

$$\delta W_h = \int_0^l L' f(y) \delta h dy$$

因此

$$Q_h = \int_0^l L'(y, t) f(y) dy \quad (7-21)$$

依同理, 按广义力的定义

$$Q_\alpha \delta \alpha = \delta W_\alpha$$

当有增量 $\delta \alpha$ 时, 各翼段的气动力矩 M' 将在位移 $\phi(y) \delta \alpha$ 上作功, 由此得出

$$Q_\alpha = \int_0^l M'(y, t) \phi(y) dy \quad (7-22)$$

7.3 大展弦比直机翼的颤振计算——用准定常气动力理论

本节所讨论的大展弦比直机翼, 采用了气动力片条理论, 即认为机翼的任意弦向剖面上的气动力, 可以按照二元机翼理论计算, 于是在此处可以直接引用第4章的结果。

在二元机翼准定常气动力公式中, 分别用 $f(y)h(t)$ 及 $\phi(y)\alpha(t)$ 代替 h 及 α , 则得

$$L' = -\rho V^2 a_0 b(y) \left\{ \phi(y) \alpha(t) + \frac{f(y) \dot{h}(t)}{V} + \left[\frac{1}{2} - a(y) \right] b(y) \frac{\phi(y) \dot{\alpha}(t)}{V} \right\} \quad (7-23)$$

式中, $a(y)b(y)$ 为沿翼展向各剖面上弹性轴在翼弦中点后的距离。

$$\begin{aligned} M' = & 2\rho V^2 a_0 b^2(y) \left[\frac{1+a(y)}{2} - \frac{1}{4} \right] \left\{ \phi(y) \alpha(t) + \frac{f(y) \dot{h}(t)}{V} + \left[\frac{1}{2} - a(y) \right] b(y) \frac{\phi(y) \dot{\alpha}(t)}{V} \right\} - \\ & \frac{1}{2} \pi \rho V b^3(y) \phi(y) \dot{\alpha}(t) \end{aligned} \quad (7-24)$$

以式(7-23)及式(7-24)分别代入式(7-21)及式(7-22)中, 即求得 Q_h 和 Q_α 。再以所求得的 Q_h , Q_α 代入式(7-18), 经过整理后可得到形式上和二元机翼类同的方程式, 即

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \ddot{h} - c_{12} \ddot{\alpha} + a_{11} h - b_{12} V^2 \alpha + d_{11} \dot{h} - d_{12} V \dot{\alpha} &= 0 \\ -c_{21} \ddot{h} + c_{22} \ddot{\alpha} + a_{22} \alpha + b_{22} V^2 \alpha - d_{21} V \dot{h} + d_{22} V \dot{\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-25)$$

式中, 各系数的含义如下:

c_{11} , c_{12} , c_{22} , 如式(7-16)所示, 称为广义质量; a_{11} , a_{22} , 如式(7-19)所示, 称为广义刚度。



$$\left. \begin{aligned}
 b_{12} &= -\rho \int_0^l a_0 b(y) f(y) \phi(y) dy \\
 b_{22} &= -2\rho \int_0^l a_0 b^2(y) \left[\frac{1+a(y)}{2} - \frac{1}{4} \right] \phi^2(y) dy \\
 d_{11} &= \rho \int_0^l a_0 b(y) f^2(y) dy \\
 d_{12} &= -\rho \int_0^l a_0 \left[\frac{1}{2} - a(y) \right] b^2(y) \phi(y) f(y) dy \\
 d_{21} &= 2\rho \int_0^l a_0 b^2(y) \left[\frac{1+a(y)}{2} - \frac{1}{4} \right] f(y) \phi(y) dy \\
 d_{22} &= 2\rho \int_0^l b^3(y) \left\{ \frac{\pi}{4} - a_0 \left[\frac{1+a(y)}{2} - \frac{1}{4} \right] \left[\frac{1}{2} - a(y) \right] \right\} \phi^2(y) dy
 \end{aligned} \right\} \quad (7-26)$$

式中, b_{11}, b_{22} 可称为气动刚度系数; d_{11}, d_{12}, d_{21} 和 d_{22} 可称为气动阻尼系数。在颤振临界状态, 机翼作简谐振动, 即

$$h(t) = h_0 e^{i\omega t}, \quad \alpha(t) = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

且此时飞行速度 $V = V_F$, 代入式(7-22), 则可得到对于 h_0 及 α_0 的联立一次齐次方程式, 它与式(6-11)和式(6-12)在形式上完全相同。由特征行列式为零就得到式(6-13), 其求解方法和二元机翼的求解方法一致, 此处不再重复。以下将通过一个具体机翼的数字计算实例来说明颤振计算过程。

例题 试采用准定常气动力理论对某大展弦比机翼求解其弯曲-扭转型颤振临界速度。已知机翼的半展长为 5.8 m, 机翼升力曲线斜率 $\partial C_L / \partial \alpha = 4.32$ 。其几何参数、惯性及弹性特性由表 7-1 给出。

表 7-1 机翼的几何参数、惯性及弹性特性

y/l	弦长 $2b/m$	弯曲刚度 $\cdot 10^{-6}$ $EI/(N \cdot m^2)$	扭转刚度 $\cdot 10^{-5}$ $GJ/(N \cdot m^2)$	单位长度质量 m/kg	单位长度转动 惯量 $I_a/(kg \cdot m^2)$	重心到弯心间 距离 x_a/m	弯心至中点的 距离 ab/m
0	3.15	4.08	16	79.0	74.0	0.10	-0.575
0.1	2.94	3.00	13	37.5	32.6	0.31	-0.450
0.2	2.74	1.87	10.4	32.5	26.0	0.33	-0.440
0.3	2.53	1.24	7.6	28.0	19.7	0.33	-0.415
0.4	2.32	0.82	5.2	23.5	13.7	0.33	-0.400
0.5	2.11	0.53	3.7	19.5	9.25	0.32	-0.375
0.6	1.91	0.32	2.8	15.5	5.83	0.31	-0.365
0.7	1.70	0.17	2.0	12.5	3.51	0.28	-0.340
0.8	1.49	0.09	1.4	10.5	2.28	0.22	-0.315
0.9	1.29	0.05	0.8	8.5	1.51	0.16	-0.285
1.0	1.08	0.04	0.5	6.2	0.99	0.09	-0.270



解 作为第一次近似结果,取等剖面均匀机翼的第一阶纯弯曲与第一阶纯扭转振型作为位移函数,见表 7-2。然后应用数值积分法计算系数 a_{11}, a_{12} 等,见表 7-3。

表 7-2 等剖面机翼的位移函数

y/l	$f(y)$	$\phi(y)$	$f\phi$	f^2	ϕ^2	f^*	ϕ^*	f^{*2}	ϕ^{*2}
0	0	0	0	0	0	2.0	1.0	4.0	1.0
0.1	0.033 5	0.156	0.005 24	0.001 12	0.024 4	1.725	0.988	2.974	0.976
0.2	0.127 7	0.309	0.039 46	0.017 3	0.095 5	1.451	0.951	2.108	0.904
0.3	0.270	0.454	0.112	0.069 7	0.206	1.180	0.891	1.396	0.794
0.4	0.460	0.588	0.270	0.211	0.345	0.928	0.809	0.850	0.655
0.5	0.679	0.707	0.480	0.461	0.500	0.679	0.707	0.461	0.500
0.6	0.928	0.809	0.746	0.850	0.655	0.460	0.588	0.210	0.345
0.7	1.186	0.891	1.053	1.396	0.794	0.270	0.454	0.069 7	0.203
0.8	1.451	0.951	1.381	2.108	0.904	0.127 7	0.309	0.017 3	0.043 7
0.9	1.725	0.988	1.703	2.974	0.975	0.033 5	0.156	0.001 12	0.024 3
1.0	2.0	1.0	2.0	4.0	1.0	0	0	0	0

注: $\frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{(1.875)^2}{l^2} f^*$; $\frac{d\phi}{dy} = \frac{\pi}{2l} \phi^*$ 。

表 7-3 用数值积分法计算系数 a_{11}, a_{22}, c_{11}

y/l	计算系数 a_{11}			计算系数 a_{22}			计算系数 c_{11}		
	$10^{-6} EI /$ ($N \cdot m^2$)	$(f_i^*)^2$	$10^{-6} EI_i$ $(f_i^*)^2 /$ ($N \cdot m^2$)	$10^{-5} G J_i /$ ($N \cdot m^2$)	$(\phi_i^*)^2$	$10^{-5} G J_i$ $(\phi_i^*)^2 /$ ($N \cdot m^2$)	m_i / kg	f_i^2	$m_i f_i^2 / kg$
0	4.08	4.0	16.32	16.0	1.0	16.0	79	0	0
0.1	3.00	2.93	8.79	13.0	0.975	12.69	37.5	0.001 12	0.042
0.2	1.87	2.095	3.92	10.4	0.905	9.41	32.5	0.017 3	0.562
0.3	1.24	1.417	1.755	7.6	0.794	6.03	28.0	0.069 7	1.951
0.4	0.82	0.848	0.695	5.2	0.655	3.41	23.5	0.211 4	4.96
0.5	0.53	0.472 5	0.250	3.7	0.500	1.85	19.5	0.460 9	9.00
0.6	0.32	0.209 5	0.066 7	2.8	0.346	0.969	15.5	0.850 5	13.2
0.7	0.17	0.074 5	0.013	2.0	0.196	0.392	12.5	1.376	17.41
0.8	0.09	0.016 3	0.001	1.4	0.095	0.133	10.5	2.108	22.15
0.9	0.05	0.001 11	—	0.8	0.023	0.018	8.5	2.974	25.28
1.0	0.04	0	—	0.5	0	0	6.2	4.0	24.80
Σ			23.651			42.9			100.696



通过计算得

$$a_{11} = 23.651 \times 10^6 \times \frac{5.8}{10} \left(\frac{1.875}{5.8} \right)^4 = 149\,500$$

$$a_{22} = 42.9 \times 10^5 \times \frac{5.8}{10} \left(\frac{\pi}{2 \times 5.8} \right) = 183\,000$$

$$c_{11} = 100.696 \times \frac{5.8}{10} = 62$$

同理

$$c_{12} = -11.59, \quad c_{22} = 15.82$$

$$b_{12} = -16.55, \quad b_{22} = 1.405$$

$$d_{11} = 23.2, \quad d_{12} = -12.29$$

$$d_{21} = 1.41, \quad d_{22} = 2.88$$

以颤振临界状态下的 $h(t) = h_0 e^{i\omega t}$ 和 $\alpha(t) = \alpha_0 e^{i\omega t}$ 、此时的 $V = V_F$ 代入式(7-25)可得到对于 h_0 及 α_0 的联立一次齐次方程。按颤振行列式为零的条件,可得到特征方程,把它分成实部和虚部以后就得到两个方程,即

$$\begin{aligned} A_1 \omega^4 - (C_1 + C_2 V_F^2) \omega^2 + (E_1 + E_2 V_F^2) &= 0 \\ -B_1 \omega^2 + (D_1 + D_2 V_F^2) &= 0 \end{aligned}$$

可以按照式(6-16)计算,得

$$A_1 = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = 847$$

$$B_1 = d_{11} c_{22} + c_{11} d_{22} - c_{12} d_{21} - c_{21} d_{12} = 420$$

$$C_1 = a_{11} c_{22} + c_{11} a_{22} = 13.71 \times 10^6$$

$$C_2 = c_{11} b_{22} - b_{12} c_{21} + d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21} = -195$$

$$D_1 = d_{11} a_{22} + a_{11} d_{22} = 4.8 \times 10^6$$

$$D_2 = d_{11} b_{22} - b_{12} d_{21} = -9.3$$

$$E_1 = a_{11} a_{22} = 2.74 \times 10^{10}$$

$$E_2 = a_{11} b_{22} = -21 \times 10^4$$

再按照式(6-19)计算,得

$$L = D_2 (B_1 C_2 - D_2 A_1) = 0.688 \times 10^6$$

$$M = B_1 C_2 D_1 + B_1 C_1 D_2 - B_1^2 E_2 - 2 D_1 D_2 A_1 = -32.67 \times 10^{10}$$

$$N = B_1 C_1 D_1 - B_1^2 E_1 - D_1^2 A_1 = 35.6 \times 10^{14}$$

于是,可算出机翼的弯曲扭转颤振临界速度

$$V_F^2 = \frac{32.67 \times 10^{10} - \sqrt{32.67^2 \times 10^{20} - 4 \times 0.688 \times 35.6 \times 10^{20}}}{2 \times 0.688 \times 10^6} (\text{m/s})^2 = 11\,159 (\text{m/s})^2$$

$$V_F = 105.63 \text{ m/s} = 380 \text{ km/h}$$



上述计算结果,是选取等剖面均匀机翼的第一阶弯曲与扭转振型作为位移函数的。下面把位移函数取为机翼的第一阶纯弯曲及纯扭转振型作为位移函数,其计算过程同上。其结果为

$$V_F^2 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - 4Lm}}{2L} = 12\,686 \text{ (m/s)}^2$$

故

$$V_F = 112.6 \text{ m/s} = 405 \text{ km/h}$$

比较这两个结果,可见仅相差 6%,由此可见采用均匀机翼的固有振型作为位移函数是可行的。在求解 V_F^2 时,当发现其为复数时,则在物理上反映出机翼不会发生对应于所选位移函数的颤振。当有实数解时,其中较小的一个正实数解就是对应的颤振临界速度。超过这个速度以后,机翼开始颤振。一般的实践经验表明,这样算出的临界速度对于实际的临界速度之误差大约在 15%~18%。

7.4 大展弦比直机翼的颤振计算——用非定常气动力理论

本节讨论如何用非定常气动力理论计算广义力。根据片条理论,可直接引用第 4 章中二元机翼非定常气动力的结果。

$$L' = \pi \rho b^3(y) \omega^2 \left\{ L_h \frac{f(y)h(t)}{b(y)} + \left[L_a - \left(\frac{1}{2} + a(y) \right) L_h \right] \phi(y) \alpha(t) \right\} \quad (7-27)$$

$$M' = \pi \rho b^4(y) \omega^2 \left\{ \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a(y) \right) L_h \right] \frac{f(y)h(t)}{b(y)} + \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a(y) \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a(y) \right)^2 L_h \right] \phi(y) \alpha(t) \right\} \quad (7-28)$$

上式中,各气动系数 L_h, M_h 等都是减缩频率的函数;而 $k = \omega b/V$, 其中 b 又是 y 的函数,所以 k 也是 y 的函数。气动力系数不仅显含 k , 还通过西奥道生函数关系 $C(k) = F(k) + iG(k)$ 与 k 成函数关系。由西奥道生函数关系曲线可见,在通常有实用意义的 k 值范围内, $F(k)$ 及 $G(k)$ 的变化不大。因此,通常都指定一参考半弦长 b_r (一般取机翼半展长 3/4 处的半弦长) 及相应的 $k_r = \omega b_r/V$, 将各气动力系数中所含 $C(k)$ 都取作 $C(k_r)$, 但显含的 k 则仍按当地弦长得出的 $k(y) = \omega b(y)/V$ 计算,即改用

$$\left. \begin{aligned} L_h &= K_1(L_h) + \frac{b_r}{b} K_2(L_h) \\ L_a &= K_1(L_a) + \frac{b_r}{b} K_2(L_a) + \left(\frac{b_r}{b} \right)^2 K_3(L_a) \\ M_a &= K_1(M_a) + \frac{b_r}{b} K_2(M_a) \\ M_h &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7-29)$$



式中, $K_1(L_h) = 1, K_1(L_a) = 0.5, K_1(M_a) = 0.375$ 以及 $M_h = 0.5$ 是气动力系数中的不变部分; 而 $K_2(L_h), K_2(L_a), K_3(L_a)$ 及 $K_2(M_a)$ 是气动力系数中的可变部分。这些系数在有关的资料中均已制成表格, 可以从系数表(见表 7-4)中查得。此外, 还要注意在式(7-29)中的 b 是随展向位置 y 而变的。

表 7-4 颤振计算用不可压流气动力系数表

$V/b\omega$	$K_2(L_h)$		$K_2(L_a)$		$K_3(L_a)$		$K_2(M_a)$
0	-0	—	-0	—	-0	—	-0
0.25	-0.015 25	-0.251 85i	-0.015 25	-0.501 85i	-0.062 96	+0.007 63i	-0.250 00i
0.50	-0.057 70	-0.512 90i	-0.057 70	-1.012 90i	-0.256 45	+0.028 85i	-0.500 00i
0.83	-0.146 17	-0.888 33i	-0.146 17	-1.716 66i	-0.736 10	+0.121 79i	-0.833 33i
1.25	-0.291 25	-1.385 25i	-0.291 25	-2.635 25i	-1.731 56	+0.364 06i	-1.250 00i
1.67	-0.459 33	-1.929 33i	-0.459 33	-3.596 00i	-3.215 56	+0.765 55i	-1.666 67i
2.00	-0.602 80	-2.391 60i	-0.602 80	-4.391 60i	-4.783 20	+1.205 60i	-2.000 00i
2.50	-0.825 00	-3.125 00i	-0.825 00	-5.625 00i	-7.812 50	+2.062 50i	-2.500 00i
2.94	-1.022 35	-3.805 29i	-1.022 35	-6.746 47i	-11.192 0	+3.006 92i	-2.941 18i
3.33	-1.195 33	-4.433 33i	-1.195 33	-7.766 66i	-14.777 8	+3.984 44i	-3.333 33i
3.75	-1.379 83	-5.108 36i	-1.379 83	-8.858 36i	-19.153 9	+5.173 69i	-3.750 00i
4.17	-1.551 67	-5.824 16i	-1.551 67	-9.990 83i	-24.267 4	+6.465 27i	-4.166 67i
5.00	-1.886 00	-7.276 00i	-1.886 00	-12.276 0i	-36.380 0	+9.430 00i	-5.000 00i
6.25	-2.345 00	-9.535 00i	-2.345 00	-15.785 0i	-59.593 8	+14.656 2i	-6.250 00i
8.33	-3.001 67	-13.438 5i	-3.001 67	-21.771 8i	-111.986	+25.013 8i	-8.333 33i
10.00	-3.446 00	-16.640 0i	-3.446 00	-26.640 0i	-166.400	+34.460 0i	-10.000 0i
12.50	-4.010 00	-21.510 0i	-4.010 00	-34.010 0i	-268.875	+50.125 0i	-12.500 0i
16.67	-4.753 33	-29.733 3i	-4.753 33	-46.400 0i	-495.556	+79.222 2i	-16.666 7i

按广义力定义

$$\left. \begin{aligned} Q_h &= \int_0^l L'(y, t) f(y) dy = \pi \rho \omega^2 [A_{hh} h(t) + A_{ha} \alpha(t)] \\ Q_a &= \int_0^l M'(y, t) \phi(y) dy = \pi \rho \omega^2 [A_{ah} h(t) + A_{aa} \alpha(t)] \end{aligned} \right\} \quad (7-30)$$

式中



$$\left. \begin{aligned}
 A_{hh} &= \int_0^l b^2 f^2 dy + b_r K_2(L_h) \int_0^l b f^2 dy \\
 A_{ha} &= - \int_0^l ab^3 f \phi dy + b_r K_2(L_a) \int_0^l b^2 f \phi dy + b_r^2 K_3(L_a) \int_0^l b f \phi dy - b_r K_2(L_h) \int_0^l \left(\frac{1}{2} + a\right) b^2 f \phi dy \\
 A_{ah} &= - \int_0^l ab^3 f \phi dy - b_r K_2(L_h) \int_0^l \left(\frac{1}{2} + a\right) b^2 f \phi dy \\
 A_{aa} &= \int_0^l \left(\frac{1}{8} + a^2\right) b^4 \phi^2 dy + b_r K_2(M_a) \int_0^l b^3 \phi^2 dy + b_r K_2(L_h) \int_0^l \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 b^3 \phi^2 dy - \\
 &\quad b_r^2 K_3(L_a) \int_0^l \left(\frac{1}{2} + a\right) b^2 \phi^2 dy - b_r K_2(L_a) \int_0^l \left(\frac{1}{2} + a\right) b^3 \phi^2 dy
 \end{aligned} \right\} \quad (7-31)$$

把式(7-30)代入式(7-20),即得颤振方程

$$\left. \begin{aligned}
 [c_{11}(\omega_h^2 - \omega^2) - \pi\rho\omega^2 A_{hh}]h + [c_{12}\omega^2 - \pi\rho\omega^2 A_{ha}]\alpha &= 0 \\
 [c_{21}\omega^2 - \pi\rho\omega^2 A_{ah}]h + [c_{22}(\omega_a^2 - \omega^2) - \pi\rho\omega^2 A_{aa}]\alpha &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7-32)$$

引入 $X = (\omega_a/\omega)^2$, 可得颤振行列式, 即

$$\begin{vmatrix} c_{11}\left[1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega_a}\right)^2 X\right] + \pi\rho A_{hh} & \pi\rho A_{ha} - c_{12} \\ \pi\rho A_{ah} - c_{21} & c_{22}(1 - X) + \pi\rho A_{aa} \end{vmatrix} = 0 \quad (7-33)$$

若以 $V-g$ 法求解上式时,则需要引入结构阻尼项,即以

$$Z = (1 + ig)\left(\frac{\omega_a}{\omega}\right)^2$$

代替上式中的 X 。

为了说明采用非定常气动力时的颤振计算过程,仍以大展弦比直机翼的具体实例来分析。

例题 图 7-2 所示的大展弦比直机翼,其刚轴位于距前缘 35% 弦长处。现将机翼分为 6 段,其各段所代表的剖面在展向的位置坐标、质量及对弹性轴的质量矩阵和静矩均已列在

表 7-5 中,并已知机翼的第一阶自由-自由纯弯曲及扭转振型为

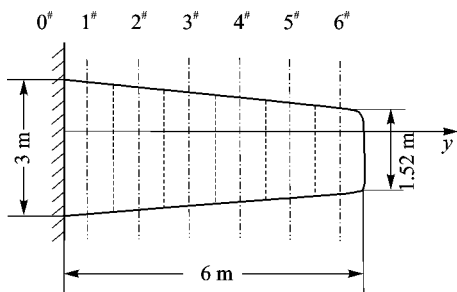


图 7-2 大展弦比直机翼颤振计算例题示图

$$f = \begin{bmatrix} -0.056 & 0 \\ -0.047 & 9 \\ 0.014 & 6 \\ 0.217 & 8 \\ 0.447 & 2 \\ 0.724 & 7 \\ 1.000 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} 0.000 & 0 \\ 0.009 & 7 \\ 0.128 & 5 \\ 0.746 & 5 \\ 0.838 & 4 \\ 0.916 & 9 \\ 1.000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_h = 62.20 \text{ rad/s}, \quad \omega_a = 100.64 \text{ rad/s}$$



表 7-5 机翼各剖面的展向坐标、质量及对弹性轴的质量静矩和惯矩的数据表

站 号	各站坐标 y_i/m	各站质量 m_j/kg	对弹性轴静矩 $S_{aj}/(\text{kg} \cdot \text{m})$	对弹性轴惯矩 $I_{aj}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
0	0	1 387	—	—
1	0.406 4	277.2	40.82	40.33
2	1.270 0	254.2	36.29	28.80
3	2.540 0	115.5	18.14	23.05
4	3.560 0	46.22	9.072	17.28
5	4.572 0	32.35	6.895	15.55
6	5.588 0	18.50	2.722	12.86

试用 $V-g$ 法计算机翼在高度 6 090 m 处的颤振速度。

解 ① 由已知数据可以作如下的数值积分：

$$c_{11} = \sum_{j=0}^6 m_j f_j^2 = 55.254 \text{ kg}$$

$$c_{12} = c_{21} = \sum_{j=0}^6 S_{aj} f_j \phi_j = 13.604 \text{ kg}$$

$$c_{22} = \sum_{j=0}^6 I_{aj} \phi_j = 50.664 \text{ kg}$$

$$\int_0^l b f^2 dy = 1.628 1 \text{ m}^2, \quad \int_0^l b^2 f^2 dy = 1.488 8 \text{ m}^3$$

$$\int_0^l b f \phi dy = 2.083 6 \text{ m}^2, \quad \int_0^l b^2 f \phi dy = 1.983 9 \text{ m}^3$$

$$\int_0^l b^3 f \phi dy = 1.887 0 \text{ m}^4, \quad \int_0^l b^2 f \phi^2 dy = 3.116 4 \text{ m}^3$$

$$\int_0^l b^3 \phi^2 dy = 3.203 8 \text{ m}^4, \quad \int_0^l b^4 \phi^2 dy = 3.358 6 \text{ m}^5$$

$$a = -0.3, \quad \rho = 0.669 \text{ kg/m}^3$$

② 按式(7-31), 并利用表 7-4, 计算 $1/k_r$ 所对应的 A_{hh} , A_{ha} , A_{ah} 及 A_{aa} 。

$$A_{hh} = 1.985 0 + 0.952 5 \times 1.628 1 \times K_2(L_h) = 1.985 0 + 1.550 8 K_2(L_h)$$

$$A_{ah} = 0.3 \times 1.914 5 - 0.2 \times 0.952 5 \times 1.980 1 \times K_2(L_h) = 0.574 05 - 0.377 20 K_2(L_h)$$

$$A_{ha} = A_{ah} + 0.952 5 \times 1.980 1 \times K_2(L_a) + (0.952 5)^2 \times 2.038 6 \times K_3(L_a) =$$

$$0.574 35 - 0.377 20 \times K_2(L_h) + 1.886 0 \times K_2(L_a) + 1.890 4 \times K_3(L_a)$$

$$A_{aa} = 0.215 \times 3.358 4 + 0.952 5 \times 3.203 9 \times K_2(M_a) + 0.04 \times 0.952 5 \times 3.203 9 \times K_2(L_a) -$$

$$0.2 \times 0.952 5 \times 3.203 9 \times K_2(L_a) - 0.2 \times (0.952 5)^2 \times 3.116 4 \times K_3(L_a) =$$



$$0.722\ 06 + 3.051\ 7 \times K_2(M_a) + 0.122\ 07 \times K_2(L_h) - \\ 0.610\ 34 \times K_2(L_a) - 0.565\ 47 \times K_3(L_a)$$

利用表 7-4, 可以算得这 4 个系数值。例如对于 $1/k_r = 1.25$, 求得

$$A_{hh} = 1.037\ 1 - 2.148\ 2i$$

$$A_{ha} = -3.147\ 5 - 3.768\ 1i$$

$$A_{ah} = 0.676\ 2 + 0.523\ 5i$$

$$A_{aa} = 1.843\ 4 - 2.581\ 2i$$

③ 把以上系数代入式(7-33), 注意, 此时的 Z 已引入结构阻尼。展开行列式, 解得

$$Z_1 = 2.788\ 6 - 0.268\ 3i, \quad Z_2 = 1.009\ 2 - 0.052\ 7i$$

$$\omega_1 = 60.27, \quad \omega_2 = 100.18$$

$$g_1 = -0.096\ 2, \quad g_2 = -0.052\ 2$$

$$V_1 = 71.76, \quad V_2 = 119.3$$

④ 重复步骤②及③, 依次算出 $1/k_r$ 在选定值上所对应的根。在本题中计算了 $1/k_r = 1.25, 2.0, 2.5$ 及 2.94 , 其结果列于表 7-6 中。

表 7-6 对应于不同 $1/k_r$ 的计算结果

$1/k_r$	ω_1	g_1	V_1	ω_2	g_2	V_2
1.25	60.27	-0.096	71.8	100.18	-0.052	119.3
2.00	61.82	-0.183	117.8	92.76	-0.058	176.7
2.50	63.39	-0.273	150.9	86.67	-0.024	206.4
2.94	64.78	-0.392	181.4	81.96	0.043	229.5

按表 7-6 中数据, 可以在 $V-g$ 图中绘出两个分支, 如图 7-3 所示。图中对应于 $g=0$ 时的速度 $V_F = 214.6\ \text{m/s} = 773\ \text{km/h}$ 。

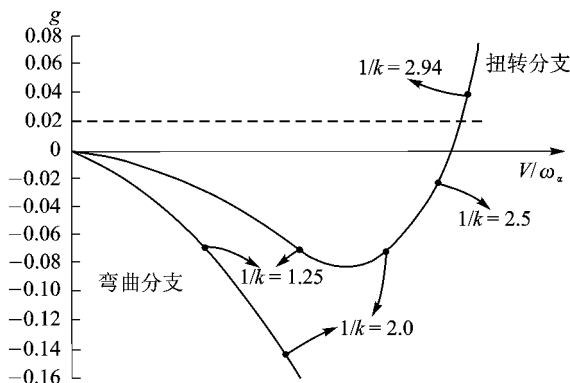


图 7-3 算例中的 $V-g$ 图



由上算例可以看出,当给出一个 k 值时,可以找到两组 ω_a, g 和 V_F 值,所以在图上有两条曲线。也可以说,在每个飞行速度 V 之下都有用两种不同阻尼值维持的等幅振动。然而,在 $V=0$ 时,机翼有两个不需任何阻尼(即 $g=0$)而成立的等幅振动,其模态是接近纯弯曲的耦合弯曲固有振型以及接近扭转的耦合扭转固有振型,相应的频率就是两个固有频率 ω_1 及 ω_2 。既然在 $V=0$ 时的情况是这样,那么根据物理现象的连续性,不难预料,随着 V 值的增大,需要不同阻尼维持的两个等幅振动中,其中之一必定与弯曲固有振型接近,或者说它就是弯曲固有振型的变态。这就是为什么在图 7.3 中,分别称这两条曲线为“弯曲分支”和“扭转分支”的原因。在计算中可以通过 ω 值来鉴别这两个分支。在同一速度下, ω 接近 ω_h 的就是弯曲分支;而另一个接近 ω_a 的 ω 就是扭转分支。

对于图 7.3 所示的情况,也可以这样说明:扭转振型逐渐失去稳定;或者说,就颤振而言该机翼的扭转振型是危险振型。对于更多自由度的问题,或者对于复杂结构需要选取较多的假设位移函数来组合表示颤振模态时,如何能选取到危险的振型,又使取用的位移函数最少,还保证了计算结果的可靠性,是颤振工程分析中的重要问题之一。

在上述非定常气动力理论中,由于没有考虑到有限翼展的影响,因此所算出的颤振临界速度一般偏于保守,即小于真实的颤振临界速度。

值得提出的是,上面所引用的 $f(y), \phi(y)$ 称为位移函数,其选择是否恰当将会影响到最终结果的准确性。通常,把机翼作自由振动时的振动形态作为位移函数,因为固有振型至少已经充分地反映了机翼的惯性及弹性特性。工程实践证明,这样所得的结果一般都是相当可靠的。据一般工程实践经验,在选取 $f(y)$ 及 $\phi(y)$ 时,大体上可遵循下列准则。

1. 对于不带集中质量的机翼

如本节所述可以选取第一阶纯弯曲固有振型和第一阶纯扭转固有振型作为位移函数 $f(y)$ 及 $\phi(y)$ 。当重心轴与弹性轴距离很大时,则应考虑采用耦合振动时的固有振型。

2. 对于带有集中质量(如发动机等)的机翼

① 取第一阶纯弯曲振型和第一阶纯扭转振型作为位移函数 $f(y)$ 及 $\phi(y)$ (应考虑到集中质量的影响)。

② 取第一阶纯弯曲振型和第二阶纯扭转振型作为位移函数 $f(y)$ 及 $\phi(y)$ (应考虑到集中质量的影响)。

对上述两种情况都应该进行颤振计算,并取结果中较小的一个作为颤振临界速度。

③ 当机翼上带有若干个大的集中质量时,则应研究自由振动中有几个固有振型相耦合的情况。

7.5 大展弦比后掠机翼颤振分析的特点

大展弦比后掠机翼在颤振分析上与直机翼的相同之处在于,仍可假设机翼具有一根直的



弹性轴,也可假设其弦向剖面是不变形的;但和直机翼不同的是,该弹性轴有一后掠角,如图 7-4 所示。这种后掠式机翼在颤振分析上具有以下 2 个特点:

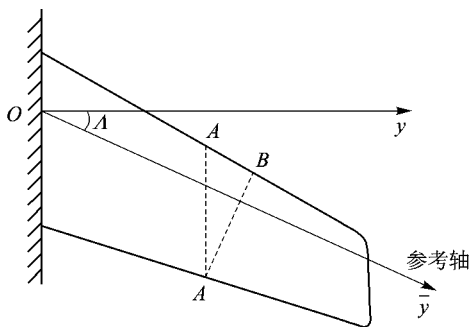


图 7-4 大展弦比后掠翼颤振分析示意图

① 从振动上来说,在考虑整架飞机振动时,不能把机翼作为悬臂梁处理。由于机身振动的原因,会把机翼的扭转振动与弯曲振动联合起来。

② 从气动力方面说,由于气流与机翼前缘有一角度,故应考虑气动力的后掠效应。此时气流可分解为与前缘垂直的分量 $V_n = V \cos \Delta$ 和与前缘平行的分量 $V_t = V \sin \Delta$ 。其中 Δ 为后掠角。经验表明:当后掠角较小时,可以采用“侧滑机翼”的假设,亦即仅考虑垂直分量 V_n 的作用,而把切线分量的作用略去不计。这样,在计算气动力时,就可

以应用前面所导出的全部公式;但当后掠角 Δ 较大时,切线分量就不能再略去不计。

此外,在计算后掠机翼的气动载荷时,可以依据平行于气流方向的剖面(A-A)进行,也可以依据与弹性轴相垂直的剖面(A-B)进行。因此,在列写颤振行列式上就存在两种计算方法。一些实验结果表明,依据顺气流方向的剖面计算颤振临界速度所得的结果比较接近实际,所以在以下的讨论中只涉及这一种方法。

参看图 7-4, $\bar{y}$ 为参考轴,它可取为弹性轴, Δ 则为参考轴后掠角。机翼上各点的位移可以通过参考轴的线位移 $h(y, t)$ 及剖面绕 O-O 轴(该轴垂直于气流通过参考轴与剖面的交点)的角位移 $\alpha(y, t)$ 表示。和直机翼不同,后掠机翼参考轴的弯曲变形与剖面绕 O-O 轴的扭转变形是分不开的。因此每一个固有振型将包括弯、扭两个部分。一般,它们对位移的贡献是同量级的。所以,对于后掠机翼通常不能用纯弯、纯扭振型作位移函数,而要用耦合的固有振型作位移函数。

如果已知机翼各阶固有振型,则可设

$$\left. \begin{aligned} h(y, t) &= \sum_{i=1}^n h_i(y) \xi_i(t) \\ \alpha(y, t) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(y) \xi_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (7-34)$$

则机翼上一点的位移可表示为

$$w(x, y, t) = h(y, t) + r(y, t) \alpha(y, t) \quad (7-35)$$

式中, $r(y, t)$ 为从各剖面与参考轴交点量起沿 x 方向的距离(向后为正)。于是可导出颤振运动方程,即

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



式中,在广义质量 M_i 中的 S_a, I_a 对后掠机翼应是对 $O-O$ 轴的质量静距和惯矩;而展向坐标及所有的展向积分都是沿 y 轴方向进行的。

在计算广义气动力时,则应计及后掠角的影响。如果不考虑弯曲(即 $h(y, t)$)引起的顺气流方向攻角的变化,则可把前述气动导数简单地乘以 $\cos \Lambda$ 。例如,对于非定常气动力理论来说有

$$\bar{L} = \pi \rho b^3 \omega^2 \cos \Lambda \left\{ L_h \frac{h(y, t)}{b} + \left[L_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \alpha(y, t) \right\} \quad (7-36)$$

$$\bar{M} = \pi \rho b^4 \omega^2 \cos \Lambda \left\{ \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] \frac{h(y, t)}{b} + \left[M_a - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_a + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right] \alpha(y, t) \right\} \quad (7-37)$$

式中的气动力系数和长直机翼相同。

当后掠角 Λ 大于 45° 时就必须考虑切线分量 $V \sin \Lambda$ 的影响。在机翼上任意作一根展向的线,并在其上取一点。如果用 h 表示该点所在剖面弹性轴的位移,用 α 表示该剖面绕弹性轴转角,用 ζ 表示这一点的位移,参看图 7-5,则有

$$\zeta = h + (x_0 - x) \alpha \quad (7-38)$$

而

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} + (x_0 - x) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad (7-39)$$

由于切线速度分量的影响,在这一点将引起附加上洗

$$\Delta W = V \sin \Lambda \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (7-40)$$

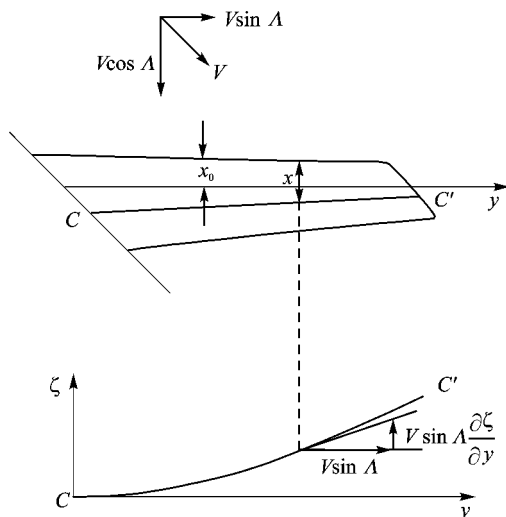


图 7-5 $\Lambda > 45^\circ$ 时切线 $V \sin \Lambda$ 分量的影响



于是无分离条件为

$$\frac{W - \Delta W}{V_n} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{V_n} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (7-41)$$

式中, W 是由于附着涡所产生的诱导速度, V_n 为法向速度。把式(7-38), (7-39), (7-40)代入式(7-41), 得

$$\frac{W}{V_n} = -\alpha - (x - x_0) \left(\frac{\dot{\alpha}}{V_n} + \tan \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \left(\frac{\dot{h}}{V_n} + \tan \Delta \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (7-42)$$

而对于直机翼的无分离条件, 有

$$\frac{W}{V} = -\alpha - (x - x_0) \frac{\dot{\alpha}}{V_n} + \frac{\dot{h}}{V_n} \quad (7-43)$$

比较式(7-42)及式(7-43)可知, 只要以 V_n 代替 V , 以 $\frac{\dot{\alpha}}{V_n} + \tan \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial y}$ 代替 $\frac{\dot{\alpha}}{V}$, 并以 $\frac{\dot{h}}{V_n} + \tan \Delta \frac{\partial h}{\partial y}$ 代替 $\frac{\dot{h}}{V}$, 那么就可以利用前面已经得到的公式来计算气动力了。

思考题

- 7.1 在结构分析中通常如何描述结构的变形?
- 7.2 为什么在颤振分析中经常选取以固有振型为模态的广义坐标?
- 7.3 在处理工程实际问题时通常要引入一些什么假设?
- 7.4 比较大展弦比直机翼和第6章二元机翼在运动方程的建立上有什么不同?
- 7.5 7.2节的讨论是建立在什么重要假设基础上的?
- 7.6 如何求广义气动力?
- 7.7 什么是片条理论? 在什么情况下可以采用片条理论?
- 7.8 复算7.3节中所给出的例题, 考虑影响颤振速度的因素。
- 7.9 从物理概念出发来解释 $V-g$ 图上的曲线。
- 7.10 复算7.4节中所给出的例题和7.3节的例题, 比较其在计算方法上的不同。
- 7.11 比较后掠机翼与长直机翼在颤振分析上的异同。
- 7.12 在计算后掠机翼的广义气动力时如何计及后掠角的影响?

参考文献

- 1 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1982
- 2 诸德超, 陈桂彬, 邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室, 1986
- 3 Bisplinghoff R L, Ashley H, Halfman R L. Aeroelasticity. Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1955

第 8 章 工程颤振分析和设计方法(二)

本章所讨论的问题是第 7 章的继续,但更着重于工程实际的分析方法及设计。在 8.1 节中,讨论基于不同气动力理论的小展弦比机翼的颤振分析;在 8.2 节中,介绍尾翼颤振分析的特点;在 8.3 节中,专门对操纵面的颤振进行分析,同时讨论防止操纵面颤振的方法;在 8.4 节中,针对飞机设计中的气动弹性设计作一般性介绍。

8.1 小展弦比机翼的颤振计算

高速飞机为了降低阻力多采用相对厚度小的小展弦比机翼。对于这种机翼的颤振分析,原则上与长直机翼没有太大的区别,但在具体处理上有两个明显的特点:① 在结构上,由于展弦比小,所以机翼的弦向变形不容忽略,因而结构的变形不能再简单地用弯曲和扭转两个模式来描述。② 在气动力上,不适于采用片条理论,需要按升力面理论计算。此外,还应计入压缩性影响。

8.1.1 小展弦比机翼的运动方程

现考虑如图 8-1 所示的具有一般平面形状的小展弦比机翼。已知该机翼的质量、刚度和几何尺寸,坐标系示于图中。机翼平面上任一点位移用 $z(x, y, t)$ 来表示。

分析方法和以前所讲的方法相同,即① 通过事先假设的位移函数及广义坐标来表示机翼的运动状态;② 计算相应的动能、势能及广义力,利用拉格朗日方程导出颤振运动方程;③ 根据机翼作简谐运动时必须满足的条件导出颤振行列式;④ 由颤振行列式展开求出颤振临界速度及频率。

通常,先要计算出机翼的前几阶固有频率及相应的固有振型。设分别用 ω_i 及 $f_i(x, y)$ 表示,其中 $i=1, 2, \dots, n$, 分别代表第一阶、第二阶、…、第 n 阶。于是机翼的一般运动情况可表示为

$$z(x, y, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y) \xi_i(t) \quad (8-1)$$

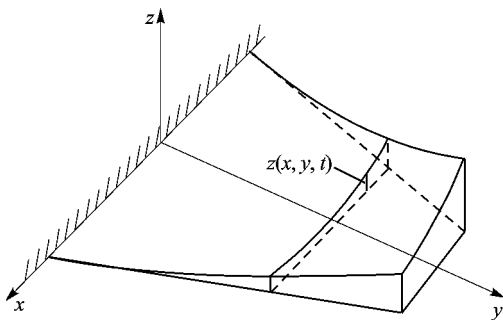


图 8-1 小展弦比机翼颤振分析示意图



式中, $\xi_i(t)$ 是随时间变化的广义坐标。若结构离散化后具有 N 个结点, 显然 $n < N$, f_i 通常表示为 $(N, 1)$ 阶的向量, 则上式的矩阵形式为

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n f_i \xi_i(t) \quad (8-2)$$

式中, $\mathbf{Z}$ 及 f_i 都是 m 阶列阵。固有振型 f_i 满足自由振动运动方程, 即

$$\omega_i^2 \mathbf{M} f_i = \mathbf{K} f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-3)$$

式中, $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{K}$ 分别为机翼的质量矩阵及刚度矩阵。按振动理论, 固有振型具有正交性, 即

$$f_i^T \mathbf{M} f_j = \begin{cases} M_i & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (8-4)$$

及

$$f_i^T \mathbf{K} f_j = \begin{cases} K_i = M_i \omega_i^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (8-5)$$

式中, M_i 及 K_i 分别是与第 i 阶固有振型相应的广义质量及广义刚度。

当采用固有振型的叠加来描述机翼变形时, 机翼的动能为

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \gamma(x, y) [\dot{\mathbf{z}}(x, y, t)]^2 dx dy$$

式中, $\gamma(x, y)$ 为机翼单位面积的质量, 积分域 S 表示整个机翼面积。上式的矩阵形式为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i^T \mathbf{M} f_j \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$$

引用正交条件, 则有

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\xi}_i^2 \quad (8-6)$$

机翼结构的变形势能为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i^T \mathbf{K} f_j \xi_i \xi_j$$

按固有振型的正交条件, 则有

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 \xi_i^2 \quad (8-7)$$

在计算气动力时, 对小展弦比机翼, 已经不能再引用片条理论, 而必须采用升力面理论。现设机翼上的压力分布是 $p(x, y, t)$, 则按广义力定义, 当机翼有虚位移 $\delta \xi_i$ 时, 系统所作的虚功为

$$\delta W_e = Q_i \delta \xi_i = \iint_S p(x, y, t) f_i(x, y) \delta \xi_i dx dy$$

故广义力为



$$Q_i = \iint_S p(x, y, t) f_i(x, y) dx dy \quad (8-8)$$

将式(8-6), (8-7)及式(8-8)代入拉格朗日方程, 即可得到颤振运动方程

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-9)$$

由上式可见, 其惯性力项和弹性力项的各自由度之间都是不耦合的, 但等号右边的广义力项 Q_i 是和各广义坐标有关的, 所以上列各式都不是独立的, 需联立求解。为了计算气动力 $p(x, y, t)$, 本节内只介绍在亚声速范围使用的偶极子格网法以及在超声速范围内使用的活塞理论, 以作示例。

8.1.2 用偶极子格网法的颤振计算

有关亚声速偶极子格网法的原理, 已在第4章的有关节中作了介绍。本节从广义气动力计算出发, 说明广义气动力的表达形式。在该法中将机翼分成若干梯形网格, 网格的展弦比不能太大, 以接近1为好。在每一网格的 $1/4$ 弦长线上布置等强度的压力偶极子, 认为网络上的压力合力作用在网格的 $1/4$ 弦长点上。该点称为压力点。在中切面 $3/4$ 弦长点处满足物面条件, 这些点称为下洗点或控制点, 如图4-8所示(见4.2.2节)。由偶极子格网法可求得影响系数矩阵 D , 并有

$$\bar{w} = D\bar{p}$$

式中, $\bar{w} = \frac{w}{V}$, 为法洗速度, 量纲为1; $\bar{p} = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$, 为气动载荷系数; $\bar{w}, \bar{p}$ 为 $(m, 1)$ 阶, D 为 (m, m)

阶, m 为翼面上的气动网格数, 且

$$\bar{w} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial t}$$

以式(8-1)代入上式, 并考虑机翼作简谐运动, 故有

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{i\omega}{V} f_j \right) \xi_j \\ p &= \frac{1}{2} \rho V^2 D^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{i\omega}{V} f_j \right) \xi_j \end{aligned}$$

由式(8-8), 写出其矩阵形式为

$$Q_i = f_i^T \Delta S p = \frac{1}{2} \rho V^2 f_i^T \Delta S D^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{i\omega}{V} f_j \right) \xi_j \quad (8-10)$$

式中, $\Delta S = \text{diag}(\Delta S_1 \cdots \Delta S_m)$ 表示各面元的面积, f_i, f_j 表示第 i, j 模态。但需注意, 它和式(8-2)中的模态是有区别的。在式(8-2)中的 f 为 $(N, 1)$ 阶, 是 N 个结构节点的模态, 由振动计算直接给出; 而式(8-10)中的 f 为 $(m, 1)$ 阶, 因此, 气动力计算结点和计算固有模态所选



的结构结点位置是不同的。在计算式(8-10)时,先要对原来的固有模态,用插值的方法求得按气动力计算结点相应位移表示的固有模态;还要注意 f_i, f_j 相应的点也不同。 f_j 与气动力计算时的边界条件相联系,所以是控制点处的模态;而 f_i 与力作用点的位移相联系,是力作用点处的模态。

式(8-10)可以表示为

$$Q_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij} \xi_j \quad (8-11)$$

式中

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \rho V^2 f_i^T \Delta S D^{-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + i \frac{\omega}{V} f_i \right)$$

颤振时,机翼作简谐振动,即

$$\xi_j = \xi_j e^{i\omega t} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

把式(8-11)代入到式(8-9)中,当用 $V-g$ 法计算时,要引入结构阻尼,则得到颤振运动方程

$$\left[M - (1 + ig) \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 K + \bar{Q} \right] \xi = 0 \quad (8-12)$$

式中 $M = \text{diag} (M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_n)$;

$$K = \text{diag} \left[M_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right) \quad M_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \quad \dots \quad M_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right) \right];$$

$$\bar{Q} = [\bar{Q}_{ij}];$$

$$\xi = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_n];$$

$$\bar{Q}_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\omega^2}, \text{它是马赫数 } Ma \text{、减缩频率 } k \text{ 及模态 } f \text{ 的函数。}$$

由此得颤振行列式

$$|M_i - \lambda K + \bar{Q}_{ij}| = 0 \quad (8-13)$$

式中

$$\lambda = (1 + ig) \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2$$

对于上式,当阶数 n 较高时,便不能用行列式展开的方法,而要用求特征值及特征向量的方法。

8.1.3 应用活塞理论的颤振计算

本节介绍应用活塞理论的颤振计算。活塞理论是一种简化的气动力理论,只适用于对超声速机翼进行颤振计算。试验表明,马赫数 Ma 在 $2 \sim 5$ 之间,都能得到比较准确的结果。由第4章中关于活塞理论推导的结果,可得到广义力为

$$Q_i = \iint_S \Delta p(x, y, t) f_i(x, y) dx dy =$$



$$\begin{aligned}
 & -2\rho c \sum_{j=1}^n \iint_S \left[1 + G \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \right] \left[V \frac{\partial}{\partial x} f_j(x, y) \xi_j + f_j(x, y) \dot{\xi}_j \right] f_i(x, y) dx dy = \\
 & -2\rho c \sum_{j=1}^n [V(A_{ij} + GC_{ij}) \xi_j + (B_{ij} + GD_{ij}) \dot{\xi}_j] \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \quad (8-14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
 A_{ij} &= \iint_S \frac{\partial}{\partial x} f_j(x, y) f_i(x, y) dx dy \\
 B_{ij} &= \iint_S f_j(x, y) f_i(x, y) dx dy \\
 C_{ij} &= \iint_S \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \frac{\partial}{\partial x} f_j(x, y) f_i(x, y) dx dy \\
 D_{ij} &= \iint_S \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) f_j(x, y) f_i(x, y) dx dy
 \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

这些都是常数,取决于所选的位移函数以及翼型的厚度函数。

按 8.1.2 节的方法算出机翼的动能、势能以及本节中应用活塞理论导出的广义力,就可以把它们代入拉格朗日方程,从而得到颤振运动方程,即

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega^2 \xi_i = -2\rho c \sum_{j=1}^n [V(A_{ij} + GC_{ij}) \xi_j(t) + (B_{ij} + GD_{ij}) \dot{\xi}_j] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-16)$$

由式(8-16)可以看出,作用在机翼上的空气动力起两种作用:一部分是 $-2\rho c \sum_{j=1}^n [V(A_{ij} + GC_{ij}) \xi_j]$, 起的作用和弹性力相似;另一部分是 $-2\rho c \sum_{j=1}^n [(B_{ij} + GD_{ij}) \dot{\xi}_j]$, 起的作用和阻尼力相似。

在颤振临界状态,机翼作简谐运动,即

$$\xi_i(t) = \bar{\xi}_i e^{i\omega t}$$

再引入结构阻尼,则式(8-16)的颤振方程就化成

$$M_i \left[\left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 (1 + ig) - 1 \right] \bar{\xi}_i + \frac{2\rho}{Ma} \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{V}{\omega} \right)^2 (A_{ij} + GC_{ij}) + i \frac{V}{\omega} (B_{ij} + GD_{ij}) \right] \bar{\xi}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-17)$$

式中, Ma 表示马赫数; g 表示阻尼系数,并假设对各阶固有振型阻尼系数是一样的。

在具有 n 个自由度的情况下,为方便起见,可以把颤振行列式写成

$$\left| \frac{Ma}{2\rho} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 (1 + ig) \mathbf{K} - \frac{Ma}{2\rho} \mathbf{M}_i + [\mathbf{A} + \mathbf{GC}] \left(\frac{V}{\omega} \right)^2 + i[\mathbf{B} + \mathbf{GD}] \left(\frac{V}{\omega} \right) \right| = 0 \quad (8-18)$$

式中, $\mathbf{M}_i = \text{diag} (M_1 \quad \dots \quad M_n)$; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 均为矩阵,其元素分别为 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} 和 D_{ij} 。



应用活塞理论计算颤振临界速度,其结果的准确程度随马赫数 Ma 的增高而增加。与试验结果相比较可知:应用活塞理论所求得的颤振速度都是比较保守的。当 $Ma=1.3$ 时,计算结果与试验结果比较,误差是 23 %;当 $Ma=2$ 时,误差是 9 %,都过于保守。此外,一些实验的结果表明,对于三角形机翼,应用活塞理论所得的结果要比非尖削的后掠机翼的情况好。这个原因可能是由于非尖削的后掠机翼存在着很大的翼梢效应所致,特别是在低马赫数下格外显著,而在活塞理论中是根本不考虑这些效应的。

8.2 尾翼颤振分析的特点

飞机是一个无穷多自由度系统,而颤振的发生是在各部件同时参与下进行的,各部件的振动是相互联系在一起的振动。在研究机翼的颤振时,忽略了它与其他部件的联系,是因为机翼和机身间的连接比较刚硬,机身对机翼的影响较小。而后机身是柔度较大的结构,它和尾翼的振动密切相关,必须要考虑机身的影响,这就使尾翼的颤振分析变得复杂了。在分析方法上,对于尾翼大体上也可以直接应用前述的方法。尾翼具有多种结构形式,如常规的固定尾翼、全动水平尾翼及 T 形尾翼等。每一种构型的尾翼,可能发生的颤振形式也是多种多样的,很难预料哪几种自由度的组合会产生最低的颤振速度;同时,还要保证应有的准确度,所以如何选择自由度是一个很重要的问题。在作简化假设时,必须建立在实际经验和实验结果的基础上。以下将分别对不同构型的尾翼介绍其在颤振分析上的特点。

8.2.1 常规的固定尾翼颤振分析

在没有其他的理由可以作为依据时,至少应该考虑以下的自由度。

(1) 对于对称的尾翼颤振

- ① 升降舵绕铰链轴的转动(升降舵可作为简单的刚体处理);
- ② 机身的垂直弯曲;
- ③ 水平安定面的弯曲。

如果水平安定面的弯曲固有频率比机身弯曲的固有频率高得多(例如大 3 倍以上),则可以认为水平安定面是刚硬的。因此,上述颤振形式就简化为两个自由度(即机身的垂直弯曲及升降舵的偏转)的颤振问题了。

(2) 对于反对称的尾翼颤振

● 升降舵颤振

- ① 升降舵绕其铰链轴的转动,左右两个升降舵转动方向相反;
- ② 机身的扭转;
- ③ 水平尾翼的弯曲。



● 方向舵颤振

- ① 方向舵绕其铰链轴的转动;
- ② 机身的侧向弯曲;
- ③ 机身扭转或垂直安定面的弯曲。

如果垂直安定面的第一次弯曲频率比机身的第一次弯曲或扭转频率大得多,那么也可以把它们看作是刚体,而取消相应的自由度。此外,两个升降舵如果是刚硬连接的,那么自然也不会发生机身扭转、升降舵反方向偏转型的颤振。

在计算时,可以把机身看作是一个自由梁,而机翼和尾翼是附在机身上的集中质量。对于小型飞机还可进一步简化,把机身自机翼后梁起作为一个悬臂梁那样来处理,而取消了飞机整体俯仰自由度。确定了自由度后,采用固有模态为位移函数,就可以按照前面的原理,利用拉格朗日方程,或者利用伽辽金方法进行求解。

注意,舵面的平衡度对于颤振临界速度有着重大的影响。通常,在规范中规定,当舵面达到完全平衡或稍微超平衡时,可以不进行颤振临界速度的计算。只有当平衡不满足规范中的要求时,就有必要进行颤振分析了。最好能作出不同的平衡度下,颤振速度随频率比(舵系统频率与对应的机身弯曲、扭转频率之比)的变化曲线,以及对不同频率比作出颤振速度对平衡度的变化曲线。这些曲线可以帮助判别是否会发生颤振,或者需要采取什么措施。

8.2.2 全动水平尾翼的颤振分析

对于全动水平尾翼的颤振分析,必须考虑机身、尾翼和尾翼操纵系统。但机身-尾翼颤振和尾翼颤振这两种颤振型,仍可能成为颤振的临界状态。在全动尾翼操纵系统刚度较小的情况下,尾翼的旋转频率远低于尾翼的一阶扭转频率。这时操纵系统旋转刚度就成为影响全动水平尾翼颤振的关键因素。

全动水平尾翼在结构构型上与普通常规的尾翼不同。最常见的构型是通过一根大轴把平尾安装于后机身上的。由于大轴是可以转动的,就不可避免地存在间隙,给全动水平尾翼刚体模态的支持刚度带来不确定因素;而且在飞机的使用过程中,由于磨损会使间隙发生变化。为此在颤振分析时应作变参数分析,使支持刚度能覆盖所要求的范围。

由于间隙的存在,转动轴在间隙范围内作微幅振动时,其刚度等于零,这就有可能发生振幅急剧扩大。振幅扩大到超过间隙的范围时,大轴就受到了约束,系统具有了原有的刚度,颤振速度立即得到提高,振动趋于衰减;但振动衰减到小于间隙时,剧烈的振动再度发生。最终的现象是大轴连同水平尾翼,作极限环振动。

对于线性系统,颤振临界条件与振幅无关。但是,在具有非线性结构的系统中,振幅的变化明显地改变颤振临界条件。目前,在飞机的飞行中,已经遇到过由于结构非线性引起的颤振问题。在工程上较为简单的方法是采用描述函数法进行非线性分析。描述函数法给出计及结构非线性效应后的等效刚度,即



$$K' = \bar{\delta}K$$

式中, K 是假定不存在结构非线性效应时的系统物理刚度; $\bar{\delta}$ 是一个系数, 在不同的情况下有不同的表达式。例如, 在自由间隙情况, 分析如图 8-2 所示的载荷-位移图, 其中 $\bar{s}$ 表示间隙值的一半。对于这种情况, 描述函数 $\bar{\delta}$ 的表达式如下:

当振幅 $A \leq \bar{s}$ 时

$$\bar{\delta} = 0$$

当振幅 $A > \bar{s}$ 时

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\pi}(\pi - 2t_1 - \sin 2t_1)$$

$$t_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{A}\right)$$

式中

上述描述函数体现了结构非线性的对称间隙。 $\bar{\delta}$ 对 $(A/\bar{s})$ 的曲线如图 8-3 所示。当 $\bar{\delta} = 1$ 时, 即 $\bar{s} = 0$ 的情况, 就是一般的线性状态。这样的处理方法就是把一个非线性问题准线性化了。

在实际的飞行中, 水平尾翼上是有空气动力载荷作用的。因此还应考虑有间隙的系统在外载荷作用下的情况, 即如图 8-4 所示的预载间隙。其描述函数的表达式比较复杂, 读者需要时可参看有关文献, 此处从略。

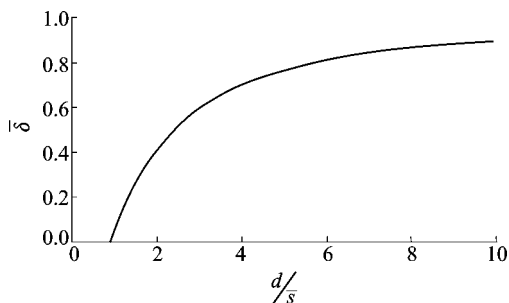


图 8-3 $\bar{\delta}-(A/\bar{s})$ 曲线

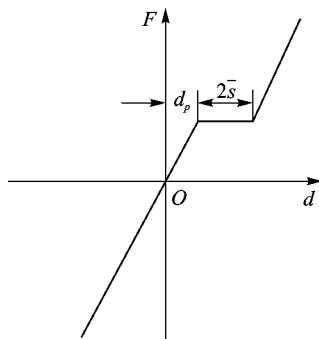


图 8-4 载荷-位移图(预载间隙)

为了使用描述函数法, 需要使用非耦合模态, 即如图 8-5 所示的机身-全动水平尾翼组合。为了计算尾翼支持轴承(即图中的 A 和 B)及操纵系统中的间隙, 使用了尾翼刚体扑动和刚体旋转模态。在线性假设下的这两个频率值, 需要用试凑的方法确定, 以便同机身-全动尾翼组合的固有频率和模态协调。

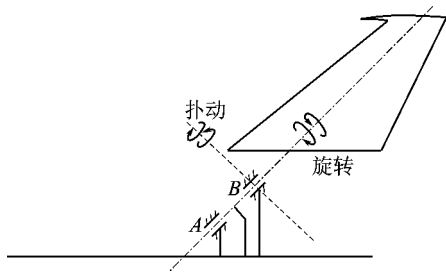


图 8-5 机身-全动水平尾翼组合图

8.2.3 T 形尾翼的颤振分析

所谓 T 形尾翼是指水平尾翼置放于垂直尾翼顶端翼梢处的尾翼构型。它在颤振分析中具有特殊性。在振动计算上,除应考虑机身弯曲、扭转自由度外,还须考虑垂直尾翼和水平尾翼之间的相互关系。这 3 个部件的耦合构成了 T 形尾翼振动计算的特点。显然,垂直尾翼的任何运动都会涉及到水平尾翼,水平尾翼好似垂直尾翼的翼尖外挂物和翼梢挡板。它致使垂直尾翼的固有频率降低,且不利于颤振。

8.3 操纵面的颤振

操纵面与调整片颤振是最常发生的颤振。而其中方向舵发生颤振的可能要远小于副翼和升降舵。飞机在飞行过程中,若发生了操纵面或调整片的颤振,不一定会导致灾难性的事故。当速度超过颤振速度时,振幅会逐渐增大,但并不一定出现振幅无限制增大的现象。这是由于非线性的作用,会使颤振维持在一个大而有限的振幅下。有利的非线性作用,给予了驾驶员降低速度的时间。人们对于这种非线性的确切实质并不十分了解,所以在任何情况下,都不能依赖于这种作用,而必须在飞机结构设计中绝对避免这种颤振发生。在历史上,由于操纵面甚至调整片颤振,曾引发过多次结构破坏,有时则导致飞机坠毁。

操纵面颤振会出现多种形式,诸如机翼弯曲-副翼型、机翼扭转-副翼型、机翼弯曲和扭转-副翼型、平尾-升降舵型、后机身垂直弯曲-平尾-升降舵型、垂尾-方向舵型、后机身扭转-垂直尾翼-方向舵型以及含有调整片的一些颤振型等。本节中作为举例,只介绍上述的一种颤振型,即机翼弯曲、扭转-副翼型的颤振分析。依据同样的原理,也可分析上述涉及到的升降舵和方向舵的颤振。

承接 6.4 节二元机翼-副翼颤振的介绍,在本例中除同样要考虑机翼的弯曲和扭转变形外,还要考虑副翼的偏转(当机翼作对称振动时,副翼作同向偏转;当机翼作反对称振动时,副翼作反方向偏转)。考虑图 8-6 所示的机翼-副翼图,其半翼展长设为 l ,副翼区起始于 l_1 ,终

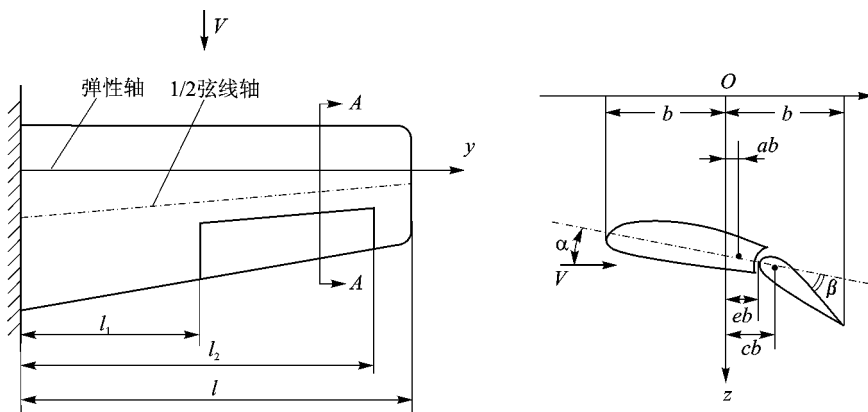


图 8-6 机翼-副翼图

止于 l_2 。它们相应的弯曲模态为 $f(y)$ 、扭转模态为 $\varphi(y)$ ，并分别选取广义坐标为 $h(t)$ 及 $\alpha(t)$ 。副翼的偏转振型为 $\psi(y)$ ，一般取 $\psi(y)=1$ ，其相应的广义坐标为 $\beta(t)$ 。以上的 y 均表示沿翼展方向的坐标，图中的 a, b, e 和 c 都是 y 的函数。参见式(6-51)，这里用 $f(y)h(t), \varphi(y)\alpha(t)$ 及 $\psi(y)\beta(t)$ 分别置换 h, α 和 β ，则机翼上任一点的位移可表示为

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= f(y)h(t) + (x - ab)\varphi(y)\alpha(t) & (\text{在非副翼区}) \\ z(x, y, t) &= f(y)h(t) + (x - ab)\varphi(y)\alpha(t) + (x - cb)\psi(y)\beta(t) & (\text{在含副翼区}) \end{aligned} \quad (8-19)$$

机翼的动能可写为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iint_S \dot{z}^2(x, y, t) \gamma(x, y) dx dy = \\ &\frac{1}{2} (C_{11} \dot{h}^2 + C_{22} \dot{\alpha}^2 + C_{33} \dot{\beta}^2) - C_{12} \dot{h} \dot{\alpha} - C_{13} \dot{h} \dot{\beta} - C_{23} \dot{\alpha} \dot{\beta} \end{aligned} \quad (8-20)$$

式中 γ ——单位面积机翼质量。

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \int_0^l f^2(y) m(y) dy \\ C_{12} &= - \int_0^l f(y) \varphi(y) S_a(y) dy \\ C_{22} &= \int_0^l \varphi^2(y) I_a(y) dy \\ C_{33} &= \int_{l_1}^{l_2} \psi^2(y) I_\beta(y) dy \\ C_{13} &= - \int_{l_1}^{l_2} f(y) \psi(y) S_\beta(y) dy \\ C_{23} &= - \int_{l_1}^{l_2} [S_\beta(y)(c - a)b + I_\beta(y)] \varphi(y) \psi(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$



式中 $m(y)$ ——单位展长机翼的质量, $m(y) = \int_{-b}^b \gamma(x, y) dx$;

$S_a(y)$ ——单位展长机翼质量对弹性轴的静质矩, $S_a(y) = \int_{-b}^b \gamma(x, y)(x - ab) dx$;

$I_a(y)$ ——单位展长机翼质量对弹性轴的惯性矩, $I_a(y) = \int_{-b}^b \gamma(x, y)(x - ab)^2 dx$;

$S_\beta(y)$ ——单位展长副翼质量对副翼转轴的静质矩, $S_\beta(y) = \int_{eb}^b \gamma_a(x, y)(x - cb) dx$;

$I_\beta(y)$ ——单位展长副翼质量对副翼转轴的惯矩, $I_\beta(y) = \int_{eb}^b \gamma_a(x, y)(x - cb)^2 dx$ 。

式中, γ_a 为单位面积副翼质量。机翼的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \left[\frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right]^2 h^2(t) dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ(y) \left[\frac{d\varphi(y)}{dy} \right]^2 \alpha^2(t) dy + \frac{1}{2} K_\beta \beta^2(t) = \frac{1}{2} [a_{11} h^2(t) + a_{22} \alpha^2(t) + a_{33} \beta^2(t)] \quad (8-22)$$

机翼的弯曲、扭转及副翼偏转各自独立运动时, 引入频率 ω_h, ω_α 及 ω_β , 即

$$\left. \begin{aligned} \omega_h^2 &= \frac{a_{11}}{c_{11}} \\ \omega_\alpha^2 &= \frac{a_{22}}{c_{22}} \\ \omega_\beta^2 &= \frac{a_{33}}{c_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (8-23)$$

则应变能写为

$$U = \frac{1}{2} (c_{11} \omega_h^2 h^2 + c_{22} \omega_\alpha^2 \alpha^2 + c_{33} \omega_\beta^2 \beta^2) \quad (8-24)$$

代入拉格朗日方程, 得到如下颤振微分方程:

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \ddot{h} - c_{12} \ddot{\alpha} - c_{13} \ddot{\beta} + c_{11} \omega_h^2 h &= Q_h \\ -c_{12} \ddot{h} + c_{22} \ddot{\alpha} - c_{23} \ddot{\beta} + c_{22} \omega_\alpha^2 \alpha &= Q_\alpha \\ -c_{13} \ddot{h} - c_{23} \ddot{\alpha} + c_{33} \ddot{\beta} + c_{33} \omega_\beta^2 \beta &= Q_\beta \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

在颤振临界条件下, 引入机翼作简谐运动的条件, 同时再引入结构阻尼, 得

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 (c_{11} h - c_{12} \alpha - c_{13} \beta) + (1 + ig) c_{11} \omega_h^2 h &= Q_h \\ -\omega^2 (-c_{12} h + c_{22} \alpha - c_{23} \beta) + (1 + ig) c_{22} \omega_\alpha^2 \alpha &= Q_\alpha \\ -\omega^2 (-c_{13} h - c_{23} \alpha + c_{33} \beta) + (1 + ig) c_{33} \omega_\beta^2 \beta &= Q_\beta \end{aligned} \right\} \quad (8-26)$$

根据广义力的定义, 有



$$\left. \begin{aligned} Q_h &= \int_0^l L'(y, t) f(y) dy \\ Q_a &= \int_0^l M'_E(y, t) \varphi(y) dy \\ Q_\beta &= \int_0^l T'(y, t) \psi(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (8-27)$$

式中 L' ——单位展长机翼的升力；

M'_E ——单位展长机翼气动力对弹性轴的力矩；

T' ——单位展长副翼气动力对副翼铰链轴的气动力矩。

这些气动力可在相关文献资料或书中查到,这里只直接引用其结果。

$$\left. \begin{aligned} Q_h &= \pi \rho b_r^3 \omega^2 \left(A_{hh} \frac{h}{b_r} + A_{ha} \alpha + A_{h\beta} \beta \right) \\ Q_a &= \pi \rho b_r^4 \omega^2 \left(A_{ah} \frac{h}{b_r} + A_{aa} \alpha + A_{a\beta} \beta \right) \\ Q_\beta &= \pi \rho b_r^4 \omega^2 \left(A_{\beta h} \frac{h}{b_r} + A_{\beta a} \alpha + A_{\beta\beta} \beta \right) \end{aligned} \right\} \quad (8-28)$$

式中, b_r 为参考半弦长,通常取 75 % 半翼展处的半弦长。气动力系数 $A_{hh}, A_{ha}, A_{h\beta}, A_{ah}, A_{aa}, A_{a\beta}, A_{\beta h}, A_{\beta a}$ 及 $A_{\beta\beta}$ 的含义可由 L', M'_E 和 T' 代入到式(8-27)的过程中查明,此处略去了推导过程。但须注意,这些气动力系数是减缩频率 $k(k=\omega b/V)$ 的函数,而其中的 b 是 y 的函数,所以气动力也是 y 的函数。为简化起见,对气动力系数中的西奥道生函数 $C(k)$ 都取成参考半弦长处的 $C(k_r)$ 。对其中显含的 k ,则用当地实际的 k 值。对于副翼,考虑到其弦长变化不大,所以对其气动力系数,即使把显含的 k 用 k_r 代替,也不致引起多大的误差。但对副翼以外的气动力系数,凡显含的 k ,仍要用当地弦长计算。将式(8-28)代入到式(8-26),就可得到相应的运动方程和颤振行列式,从而求得机翼-副翼的颤振速度。

最后应注意,在上述的计算过程中,需要给出副翼操纵系统的刚度 K_β ,但 K_β 很难用计算方法给出精确值,必须依靠实验手段来测定。在飞机设计过程中,实施颤振计算时,这个实验还没有做。所以通常的做法是,假设一组 ω_β 值,从而求出一组颤振速度 V_F ,以供设计人员参考。此外,要充分估计操纵面颤振中可能存在的误差,由于计算中存在诸多的不利因素,例如操纵面非定常气动力计算不准、操纵面的铰链和支持刚度难以计算以及各种非线性因素的影响等,所以在设计阶段的计算通常是不可靠的。

8.4 操纵面颤振的防止

本节所讨论的防止颤振的方法,主要是针对主舵面系统。从气动弹性观点来看,可以分成两个主要类别:① 中小型飞机的人力操纵,这种操纵系统是可逆的;② 伺服控制的操纵系统,



这种操作系统是不可逆的。本节将主要介绍人力操纵舵面系统防止颤振的方法,因为它的颤振危险性最大,在飞机设计过程中,必须给予足够的关注。对于主要用于高速飞机的伺服控制舵面,由于是通过液压控制元件与机体相连,通常在具有很高的连接刚度时,它与主升力面之间的联系构成不可逆链。此时,舵面和升力面几乎可看作是一个整体,从理论上讲在很大程度上排除了舵面颤振的危险。但是,一个新的问题出现了,这种伺服控制舵面与自动飞行控制系统或增稳系统相结合,会导致气动伺服弹性不稳定性的可能,关于这一点将在第10章作详细的介绍。

迄今为止,在前面已经介绍的全部气动弹性现象中,提高临界速度的主要方法是增加结构的刚度,通常是扭转刚度;但这要付出巨大的质量代价。所以最常用的预防措施是操纵面的质量平衡。

8.4.1 操纵面质量平衡

防止颤振的关键在于破坏各种不同自由度之间任何可能发生的耦合。

现在仍然讨论一个二元机翼。假设它具有无穷大的扭转刚度,在机翼上装有副翼,且副翼的质量中心位于铰链轴的后面。设翼段开始处于静止,当突然给它一个向上的运动时,机翼将作垂直运动,副翼则因惯性力引起运动,如图8-7所示,称作惯性耦合。显然,如果副翼的质量中心位于铰链线上,就不会有惯性耦合;但是,还可能存在空气动力耦合和弹性耦合。对于空气动力耦合而言,即使副翼的质量中心位于铰链轴上,也还会由于垂直运动而激起副翼运动,此时可能会有不为零的对铰链轴的空气动力矩,由此造成空气动力耦合。此外,还会有弹性耦合,它是由于可能存在的一些弹性联系,致使机翼的垂直挠度引起副翼转动。

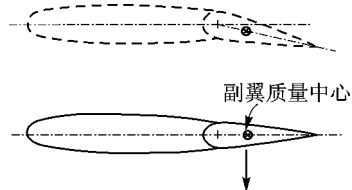


图8-7 机翼弯曲-副翼偏转耦合

为了说明问题,仍以8.3节的讨论为基础。在机翼、副翼发生颤振时,包括机翼弯曲、机翼扭转和副翼偏转等3个自由度。现假设在实际机翼的扭转变形甚小,往往略去不计,只考虑机翼弯曲、副翼刚体偏转形式的颤振,同时假定副翼是一刚体。

现采用假定振型法,取机翼弯曲变形为

$$h(y, t) = f(y)h(t)$$

副翼偏转则为 $\beta(t)$;然后,依照8.3节的推导过程,分别计算它的动能和势能,并代入到拉格朗日方程,就有

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{h} + a_{12}\ddot{\beta} + c_{11}h &= Q_h \\ a_{12}\ddot{h} + a_{22}\ddot{\beta} + c_{22}\beta &= Q_\beta \end{aligned} \right\} \quad (8-29)$$

式中, $a_{11}, c_{11}, a_{22}, c_{22}$ 符号的意义与式(8-25)中符号的意义不同,其含意中已经去掉了机翼扭



转项的有关内容,此处不再列出。与质量平衡概念有关的系数 a_{12} 可表示为

$$a_{12} = \int_{l_1}^{l_2} \int_{c_a} f(y) \cdot x \gamma_a dx dy \quad (8-30)$$

或

$$a_{12} = \iint f(y) \cdot x dm$$

质量平衡的含意就是使操纵面的质量分布满足一定的平衡条件。在这种平衡条件下,机翼振动时,副翼由于质量惯性力所产生的对铰链轴的力矩为零。因此,副翼(或操纵面)相对翼面没有转动,好像和翼面联成一个整体运动。由式(8-29)看,就是要求系数 $a_{12} = 0$ 。当气动力不起耦合作用时,则机翼弯曲和副翼偏转各列一式,亦即机翼作弯曲振动时不会带动副翼偏转。再由式(8-30)可知, a_{12} 值与机翼振型 $f(y)$ 有关,因此副翼的质量平衡也是相对于某个振动形态而言的。也就是说,对某个振动形态达成平衡的质量分布,对于另一种振动形态就不一定是平衡的。所以,质量平衡只能要求按照几个主要振动情况来达到平衡。

通常要求副翼(或操纵面)在静平衡和动平衡两方面合乎一定规定。所谓静平衡就是要使

$$\sum_{\text{副翼}} m_i x_i = 0 \quad (8-31)$$

式中, x_i 代表微元质量 m_i 离铰链轴的距离,亦即使副翼重心落在铰链轴线上。联系 a_{12} 的表达式(8-30),就是当机翼作简单的上下平移运动时 $a_{12} = 0$ 的条件,这时 $f(y) = \text{常数}$ 。只要将式(8-30)的积分改为和式就立即可以看出这一点。当 $\sum m_i x_i = 0$ 时,称为 100 % 静平衡;若 $\sum m_i x_i < 0$,则称为过度平衡,这表示重心在铰链轴之前。由此可引出静平衡度的概念。静平衡度定义为

$$\text{静平衡度} = \frac{\text{实际所加配重}}{\text{为达到 } 100 \% \text{ 静平衡所需配重}} \times 100\%$$

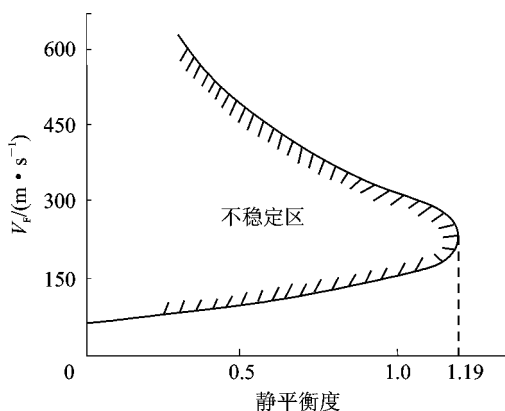


图 8-8 某机翼弯曲-副翼偏转时 V_F 与静平衡度的关系曲线

图 8-8 绘制了某一机翼弯曲-副翼偏转时,颤振速度 V_F 与静平衡度的关系。对应每一静平衡度可算出两个 V_F 值,在此界限内为不稳定区。由图可见,超过一定过度平衡后,将不再发生这种颤振。

当质量分布能使

$$\sum m_i x_i y_i = 0 \quad (8-32)$$

时,就称为达到 100 % 的动平衡。对于机翼, y_i 通常代表 m_i 到翼根的距离;对于尾面, y_i 则代表到机身弹性轴的距离。动平衡相应于 $f(y) = y$ 时系数 $a_{12} = 0$ 。这就是当翼面运动为简单刚体滚转时 $a_{12} = 0$ 的条件。动平衡



度定义为

$$\text{动平衡度} = \frac{\text{实际所加配重}}{\text{为达到 } 100 \% \text{ 动平衡所需配重}} \times 100 \%$$

大于 100 % 的动平衡度相应于负值的 $\sum m_i x_i y_i$, 也称为过渡平衡。

在有关颤振计算的规范中提出了对操纵面的各种关于质量平衡的要求, 例如规定静、动平衡度, 这些都是为了防止某一种比较常见的颤振现象而规定的。例如对于方向舵是为了防止机身扭转-机身侧向弯曲-方向舵偏转类型颤振; 对于升降舵则是为了防止机身垂直弯曲-水平安定面弯曲-升降舵偏转类型颤振; 而对于副翼则是为了防止机翼弯曲-副翼偏转类型颤振。

注意, 把质量平衡作为初步估计颤振趋势的判据是有意义的。但还应看到, 质量平衡的机翼并不意味着已经排除了所有颤振的可能性; 而另一方面, 设计一个对于所有可能的振动形态都是质量平衡的机翼, 也是不可能的。不过, 质量平衡在防止操纵面颤振方面, 仍然是有用的。

8.4.2 不可逆操纵

避免操纵面颤振的另一种方法就是不可逆操纵。不可逆操纵是指操纵面上的力不反馈给驾驶员时的操纵方式。这时操纵面不具有单独的自由度, 显然也就不会发生颤振了。现代的高速飞机或重型飞机, 操纵是利用辅助动力源来进行的。一般是用液压泵, 驾驶员仅仅操作一个与活门类似的装置, 这个装置按需要的方向转动操纵面, 就构成了不可逆系统。

带有这种形式的操纵系统, 从理论上讲应该不会发生操纵面颤振的问题, 而且不需要质量平衡。但在实际上副翼与不可逆装置之间一定会有柔性存在, 这种柔性通常用操纵面对其系统的固有频率表示。尽管在飞机设计过程中尽量把助力器系统装置靠近操纵面, 但仍免不了系统柔性的增加。因此, 用不可逆操纵的方法防止颤振就相当于用提高系统刚度的方法来防止颤振。

这里还应提到一种操纵面系统的类型, 即全动舵面。在飞机中全动舵面采用绕垂直于翼根的一根轴线转动的方式, 这种方式经常用于飞机的俯仰操纵。从表面上看, 与通常的机翼一样, 也会发生典型的弯曲颤振。但事实上, 由于通过转轴与机体连接, 所以全动操纵面的扭转频率是相当低的, 这就使它的颤振危险比通常的机翼要高, 有时需要采取质量平衡的措施。

综上所述所提及的两种防止舵面颤振的方法可以看出: 前者是基于质量平衡, 破坏不同自由度之间耦合的原则; 后者若能应用刚固的不可逆操纵系统, 便消除了操纵面的自由度。当然, 事实上这是不可能的。但经验表明: 若操纵面的旋转频率高于主翼面颤振危险模态的频率, 当高出一定倍数时, 则操纵面颤振速度会大大提高, 甚至不出现颤振, 这就是防止颤振的频率分离原则。值得注意的是这两种防止颤振的方法最好不要去混合应用, 采用部分用质量平衡、部分用提高系统刚度相结合的方法更难做到。也就是说, 为了避免颤振, 要么是用质量平衡的方法, 要么是用提高系统刚度的方法。



8.4.3 操纵面颤振设计概要

操纵面颤振防止是极为重要的一项设计工作,因为万一在预防操纵面颤振的措施中,出现了严重错误,即会导致飞机在非常低的速度下发生颤振。在新飞机的设计阶段中,考虑操纵面的颤振问题要晚于考虑机翼的颤振问题。只有在试飞临近时,操纵面颤振才处于愈加重要的地位。在一架新飞机的设计过程中,预防颤振的工作也随各设计阶段而展开。下面介绍具体步骤。

(1) 早期设计阶段

主要的任务是确定如何预防操纵面颤振方案,应用关于质量平衡的简单规则,或用没有质量平衡的不可逆操纵来预防颤振,以决定操纵系统的总体设计。

(2) 中期设计阶段

已经完成了振动特性的计算,把有关的振动模态取出并用于操纵面的颤振计算中,并校核对防止颤振的要求。在这个阶段,所作的颤振计算通常是以十分简单的方式完成的;但常常会在一些模态上作一些变化,以判断颤振对这种变化效果的敏感性。这项工作以后,有可能保证了今后的设计中不需要进一步的修改。

(3) 临飞之前阶段

这时地面的共振试验已经完成,设计人员可以根据试验所测得的结果,完成全部的操纵面颤振计算。如果发现振动试验测量的模态与计算出的模态有明显的差异,则可以提出并允许在这个阶段作限制飞行。

(4) 早期飞行阶段

力图要取得飞行试验与理论推算之间的互相关系,这种相互关系将取决于估算的安全裕度。

(5) 后期飞行阶段

通常都会因为气动力的原因,而要对操纵面进行某种修改,此时设计人员必须对全部的修改进行有关颤振可能性的校核性计算。

在上述这一系列的阶段中,假设不发生颤振,则操纵面颤振设计过程可以告一段落;若万一出现了颤振,就要进行全面的颤振计算。对于这个计划,以及对于机翼颤振的类似计划中,都是在各种形式的指导原则下进行的。在这里设计者的经验起了很大的帮助作用。这些指导原则有很多还没有提到,将在 8.5 节中比较全面地讨论这些指导原则。

8.5 气动弹性设计的程序

迄今为止,已经讨论了变形扩大、操纵反效等静气动弹性现象,也讨论了各不同形式的颤振的物理性质,以及这些现象是如何用理论方法确定的。但是,颤振问题是很复杂的,完成气动弹性设计必须要借助于一定的指导原则。要力图避免出现当飞机已进入飞行阶段时,刚完



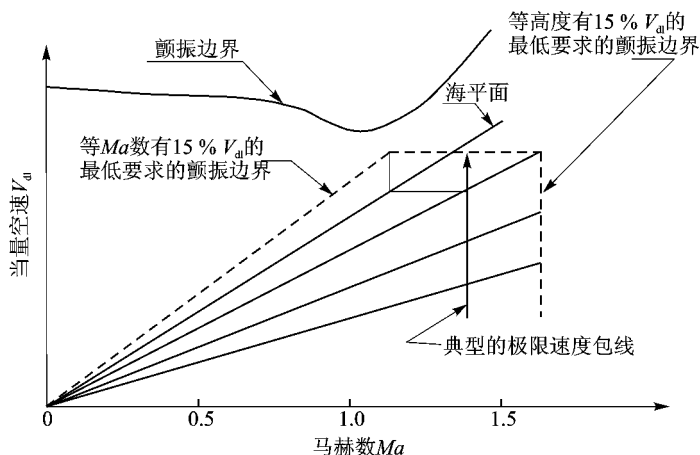
成颤振计算又要求对飞机作大修改的问题。气动弹性设计有两个主要目的:一是防止在飞机上发生气动弹性不稳定,同时避免在设计中因气动弹性问题而作大更改;二是在现代飞机设计中,利用气动弹性特点提高飞机性能,例如主动气动弹性机翼技术的应用就体现了这点。本节只介绍在一般情况下,气动弹性设计的指导原则及设计程序。

8.5.1 气动弹性设计规范

飞机强度和刚度规范是飞机设计的指令性文件,是飞机设计时必须遵守的法则。国际上很多有独立设计和制造飞机能力的国家,都有自己的强度和刚度规范。我国在充分总结飞机研制的科技成果和经验的基础上,以先进国家飞机强度和刚度规范为主要参考,结合我国国情,编制了我国新的军用飞机强度规范。其中第7册“气动弹性不稳定性”就是为防止颤振、发散等不稳定现象所规定的设计指南。对于民用飞机,我国发布有“中国民用航空条例”,其中也有专门针对颤振、发散等问题的条款。这些规范中,就其总体内容对飞机设计的一般要求是:飞机设计、制造、材料应使飞机及其部件在全部飞行包线内的各种外挂物组合、质量、装载以及引起较大刚度损失的机动飞行等条件下,飞行速度直到1.15倍极限速度 V_{jx} 都不发生颤振、发散、嗡鸣以及其他动态气动弹性和气动伺服弹性不稳定现象。对于超声速飞机,如果由于空气动力加热引起较大的刚度损失,还应考虑气动热弹性不稳定现象。

为了确保安全,分析或试验或者两者同时应证明可满足以下条件:

① 在等马赫数和等高度线上所求得的飞机极限速度包线的所有点上,提高15%当量空速不会发生颤振、发散、嗡鸣,以及不会发生气动热弹性、气动伺服弹性和其他动态气动弹性不稳定现象。详见图8-9。



注: 当量空速 V_a 是真空速乘以 $\sqrt{\Delta}$, 其中 Δ 为给定高度上自由流空气密度与标准海平面空气密度之比。

图8-9 最低要求的颤振余量图示



② 在所有高度上,飞行速度直到极限速度 V_{jx} ,任何危险颤振模态的阻尼系数 g 至少应为 0.03。详见图 8-10。

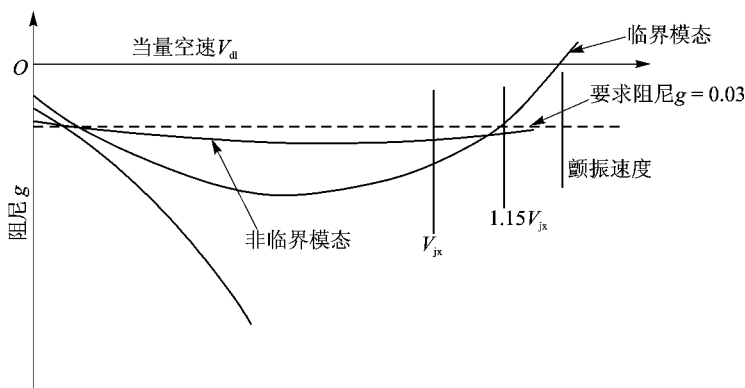


图 8-10 所要求阻尼的图示

此外,在详细设计要求中,分别对增稳系统、破损—安全稳定性、旋转颤振、外挂物、壁板颤振、变几何形状飞机、操纵面和调整片等作了详细设计规定的规定。上述的种种要求保证了在飞机设计中的气动弹性及伺服气动弹性的稳定性。

应注意,由于目前跨声速范围的非定常气动力计算还不能作为工程设计的可靠依据,所以对于飞行马赫数在高亚声速以上的飞机,达到最大设计马赫数的最低高度的颤振分析,仅能作为定性的参考。

对于军用飞机,由作战技术要求确定的最大速压,应是飞机俯冲拉起时达到的最大速压,它是飞机强度和刚度设计的基础。颤振分析的目的在于确定满足这个速压要求的安全飞行颤振边界。对于达到最大速压的最低高度的颤振分析,通常的做法是:以飞机最终分析结果的颤振速度 V_F (当量空速) 为飞行速度限制的基础。颤振速度 V_F 与极限速度 V_{jx} 的关系为

$$V_F \geq f_c \cdot f_s \cdot V_{jx} \quad (8-33)$$

式中, f_c 为空气压缩性修正系数,它的确定方法是利用工程型号的跨声速颤振模型进行风洞试验或按经验确定; f_s 是颤振余量,在我国的强度规范中已经明确规定为 1.15。

飞机强度与刚度规范是飞机研制的主要国家针对本国飞机设计和制造的实践,结合本国实际情况,总结出的理论和经验。尽管各国规范内容不一样,但其主要的精神是一致的。

8.5.2 气动弹性设计步骤

1. 常规的颤振分析步骤

在飞机设计中,如何协调并安排好颤振分析工作是十分重要的。下面给出了一个简要的颤振分析程序,可供了解颤振分析所包含的主要内容,同时也可了解到这些工作是如何安排在



飞机设计的各个阶段的。现将这些主要内容以图 8-11 所示的流程图形式表示。需要说明的是,对于不同的飞机还可根据特殊性,对上述内容进行增减。例如对改型飞机,就没有必要做完图中的全部工作。

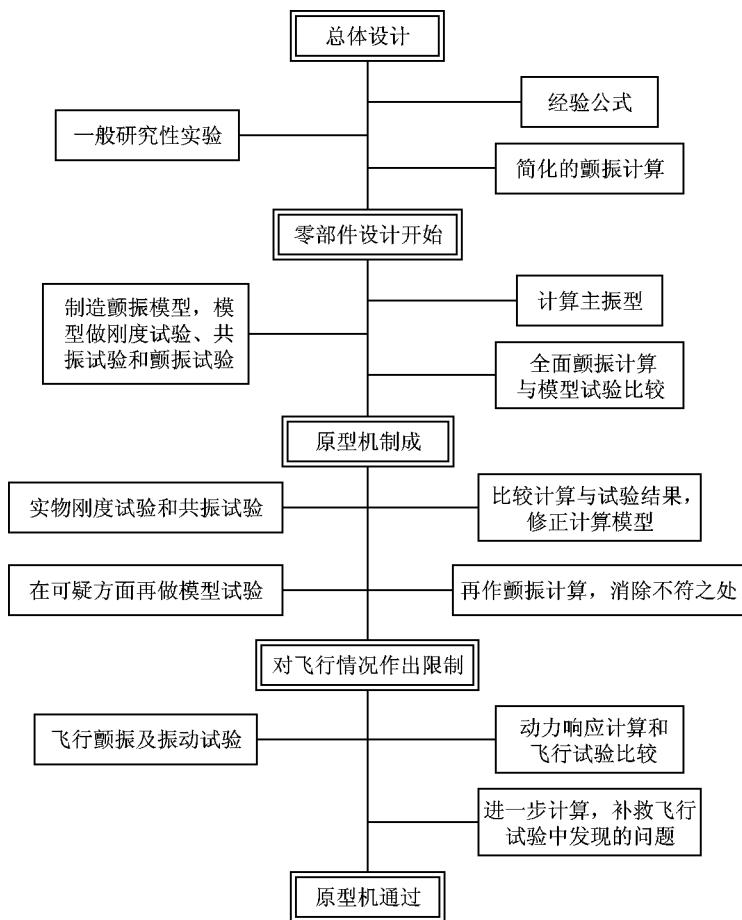


图 8-11 在飞机设计中颤振分析步骤示意图

由图所示,颤振分析大体上可分为实验分析和计算分析两大类。目前,就颤振计算而言,已经成为一种常规的计算,但仍需要有各种实验来验证。

2. 气动伺服弹性稳定性分析

伺服系统已广泛用于现代飞机的飞行控制中,最初采用的是液压助力器,后来发展了增稳系统和自动驾驶仪。至今主动控制系统已经进入工程应用阶段。为了保证装有伺服飞行控制系统的飞机的稳定性,必须进行气动伺服弹性分析。这项分析主要包括地面试验、理论计算及试飞。这些工作大多放在飞机设计的后期。在飞行控制系统确定以后,要进行气动伺服弹性



分析的建模,对飞机进行初步的气动伺服弹性稳定性分析。飞机试飞前,在全机地面振动试验之后,进行地面的伺服弹性试验;通过试验取得的结果,修正计算模型,从而计算出气动伺服弹性稳定性的临界速度,即研究整个闭环系统的输入/输出关系,确定系统是否稳定及稳定余量是多少。通常以相位裕度和增益裕度来作为系统稳定余量的度量。为了确保系统的稳定性,必须同时给出这两个量。考虑到系统动态特性可能变化及数学模型在数据上的误差,所以通常认为,增益裕度至少为 6 dB,相位余量至少为 $\pm 60^\circ$ 。气动伺服弹性稳定性分析的最终结论来自气动伺服弹性稳定性的试飞结果。这项试飞必须要在不带飞行控制系统的飞机能安全飞行的速度范围内进行

8.5.3 有关颤振分析中的试验介绍

在颤振分析中,试验占有极为重要的地位。现对 3 种主要的试验作一些简要的介绍。

1. 飞机地面振动试验

飞机地面振动试验的任务是测定飞机结构的振动特性,主要包括飞机的各阶固有频率、模态、阻尼系数和广义质量。该实验通常在第一批制造出来的飞机中进行。由实验的结果去检验或修正振动计算的结果,是颤振分析过程中一项最基本的试验。无论是新型或改型飞机,都要进行这项试验。

飞机地面振动试验的关键技术在于分离高度密集的固有模态,因而其试验技术也主要按这个目标发展。目前地面振动试验技术可分为两类:一类是基于相位共振原理的多点激振方法;另一类是基于参数识别的方法。在我国常用的方法是前者,即基于相位共振原理的多点激振方法。它的试验原理是:在某一个固有频率 ω_n 下,调整激振力的分布使其与阻尼力平衡,此时所有点的振动位移响应彼此之间的相位要么同相,要么反相,且和激振力之间有 90° 的相位差。通常的飞机地面振动试验系统如图 8-12 所示。由图可见,地面振动试验主要是把握好支持、激振和测量三大系统的运用。

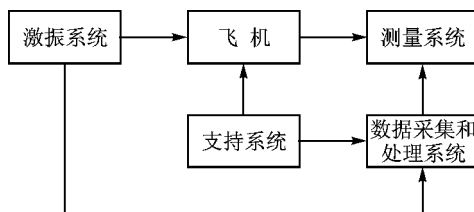


图 8-12 飞机地面振动试验系统示意图

(1) 支持系统

对于全机的振动试验的支持系统的选择,要根据被试飞机的具体情况,如质量、场地环境等因素,选择橡皮绳悬吊、气囊或空气弹簧等。但不管选择什么样的支持,都应做到:不因为支持系统的存在而显著改变飞机的自由-自由运动特性。通常希望飞机在该支持下刚体运动频



率小于最低一阶的弹性体振动频率的 $1/3$, 并以这样的指标来衡量试验条件是否满足自由-自由支持。

(2) 激振系统

激振系统应具备有多点激振和调节力分布的能力。激振器所带来的附加质量和附加刚度, 不能对测试结果有显著的影响。

(3) 测量系统

应能实现多点测量, 且各传感器应具有统一的相位基准。选择传感器时, 除了频率范围、灵敏度等一般性要求外, 还要注意, 对被测试件的附加质量影响应小到可以忽略不计。

对于被测试的飞机, 应要求其结构完整, 并且是经检验合格的产品, 质量分布应与飞行状态相一致。各种外挂物可用试验构件代替, 构件的刚度和质量特性应与实物一致。

对于要求测量全机振型的项目, 应在测量结果中给出广义质量矩阵, 通常要求质量矩阵中各项满足 $M_{ij}/\sqrt{M_{ii} \cdot M_{jj}} \leq 0.15$ 的条件。

2. 颤振模型风洞试验

颤振模型风洞试验的主要任务是: ① 校核颤振计算并验证理论计算方法; ② 研究参数影响, 以供选择设计方案, 也可作为新技术探索的手段。

气动弹性模型试验的基础是相似律。气动弹性模型的相似律, 可以由运动方程的相似变换方法来建立。例如颤振的运动方程为

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M} + (1 + ig) \mathbf{K} - \frac{1}{2} \rho V^2 b \mathbf{A} \right] \mathbf{q} = 0$$

式中符号的意义均同前。此处引用符号 k_x 表示模型的 x 参数 x_m 同实物的 x 参数 x_a 之比, 即 $k_x = x_m/x_a$, 则模型的运动方程可用实物参数写为

$$k_q q \left[-k_\omega^2 k_m \omega_a^2 \mathbf{M}_a + (1 + ik_g g_a) k_K \mathbf{K}_a - \frac{1}{2} k_\rho k_V^2 k_b k_A \rho_a V_a^2 b_a \mathbf{A}_a \right] = 0 \quad (8-34)$$

由上式可知, 若

$$k_K = k_\omega^2 k_m = k_g k_k = k_\rho k_V^2 k_b k_A \quad (8-35)$$

则模型与实物具有相同的颤振方程。由上式看到, 必须有 $k_g = 1$ 。同时若模型和实物有相同的马赫数 Ma 、雷诺数 Re 、比热比 γ 、重力参数 V/gb 、减缩频率 $b\omega/V$ 、相似的空气动力外形和振动模态, 则 $k_A = 1$ 。在上述前提下, 由式(8-35)可得

$$k_K = k_\omega^2 k_m = k_\rho k_V^2 k_b \quad (8-36)$$

考虑到减缩频率相同, $k_b \cdot k_\omega/k_V = 1$, 质量比为

$$k_m = k_\rho k_b^3 \quad (8-37)$$

刚度比为

$$k_K = k_\rho k_V^2 k_b \quad (8-38)$$

对于低速风洞颤振试验模型, 由于没有马赫数效应及低速风洞的风速可变而密度不变, 所



以其基本比例尺可选择如下。

(1) 长度比

原则上是根据风洞尺寸尽量取大。但应注意重力效应,即 k_V 太小, k_b 大时模型自重会导致过大变形。故长度比要同速度比协调。

(2) 速度比

按预计实物颤振速度和风洞可用速度来确定。通常取风洞速度范围的中间值。

(3) 密度比

按要模拟的实物飞行高度所对应的大气密度和风洞工作密度确定。空气密度通常认为是不变的常数。值得注意的是,开始预计模型颤振速压 q_F 时所用的密度 ρ 往往对应于某个飞行高度,它一般不会等于在风洞中达到 q_F 时的密度 ρ_{F0} ;当密度效应明显时,风洞试验中的颤振速压就严重偏离预计值。

对于高速风洞颤振试验模型,首选的 3 个基本比例尺是:长度、密度及速压。长度比按风洞实验段与实物尺寸来定;密度比按风洞中空气密度及实物飞行状态下的空气密度来定;速压比是根据风洞前驻点压力 p_0 可达到的极限与实物估算出的颤振速压来定。

高速风洞颤振试验比低速风洞颤振试验的难度要大得多,这是因为高速风洞试验段要比低速小得多,给予测试的时间短,且试验模型的强度要求比较突出。

颤振风洞试验是一项非常复杂的工作,从模型设计直到风洞试验,都包含严格的技术过程。例如:模型从加工完毕经调试后到安装在风洞内,要不断经历地面振动试验的校核;又如全机模型在风洞中的安装及防护等,都含有关键的试验技术,它们都将直接影响试验结果的正确性。

3. 飞行颤振试验

飞行颤振试验的任务是:① 验证飞机在设计的飞行包线范围内的气动弹性稳定性,并进一步探讨扩大飞行包线的可能性。② 进行与颤振有关的课题研究,例如颤振主动抑制系统研究、解耦挂架的防颤振原理研究。

飞行颤振试验在试验技术和分析技术上是很复杂的,所以目前主要作为新机定型试飞的组成部分,用以验证新飞机的颤振余量。通常在为了这种目的的试飞中,飞机不能飞到颤振临界状态,只能在亚临界状态下进行响应测量和分析。它的基本原理是:在选定的不同飞行高度、速度下,对飞机施加激振,记录飞机对激振的响应,通过对响应的分析,求出若干个感兴趣的频率和阻尼。根据这些亚临界响应参数随速度或速压的变化,来确定飞机的颤振余量。

目前实用的飞行颤振试验方法中,最基本的区别在于激励方法不同。下面介绍常用的方法。

(1) 脉冲激励

通过飞行员人工激励操纵面,或者借助于小火箭,来产生作用时间很短的脉冲激励信号,对飞行中的飞机进行激励。脉冲激励是一种比较简便的方法,所用的设备也不复杂,进行一次



试验所需的时间比较短。但要得到高信噪比的响应信号比较困难,必须依靠复杂的数据处理方法,才能得到模态频率和阻尼。

(2) 简谐激励

简谐激励可以通过电磁激励器来实现,常用的激励有稳态激励和衰减振荡两种。简谐激励的主要特点是:试验中激励频率可调,激励能量大;但试验的时间长,且试验设备也相对比较复杂。

(3) 扫描激励

利用专用的信号发生器产生一种特定信号,在一个选定的频率范围内,按一定的规律连续改变激励信号的频率,从而对飞机结构进行扫描激励。这种激励方法可以避免简谐激励费时太多的问题,但往往激励能量不能满足要求。

(4) 随机激励

利用大气紊流或机械的、空气动力的方法,产生随机信号对飞机结构进行激励,且记录结构的响应信号。利用大气紊流激励,设备简单,但它在低频范围内能量比较集中,所以比较容易激励出低频模态;此外,还需要用较为复杂的参数识别技术来求得模态频率和阻尼。

飞行颤振试验中所测得的信号,除记录在机械的记录器上,同时还把信号发送到地面遥测分析站,经过实时分析,得出模态频率及运动衰减率,并及时传送给试飞员,以减少飞行颤振试验中潜在的危险,保证试验的质量。

在飞行颤振试验中,不可能让飞机飞到颤振临界速度,只能得到亚临界的飞行试验结果,然后在这个结果的基础上进行外推,从而得到颤振余量。由于必须使用外推的方法,使试飞的结果的可信度不会太高,最终还要依靠理论分析、地面试验和飞行试验的综合分析来进行颤振速度余量的评估。

近年来,鲁棒气动伺服弹性分析理论的发展,提出了 μ 分析的方法,把飞行试验和理论计算结合起来。目前研究发展的 μ 方法,既使用计算模型,也使用飞行数据,综合了两种方法的优点。这种方法使用鲁棒稳定性框架,把理论气动伺服弹性模型同一系列描述模型误差和不确定性的范数有界的算子联系起来。以结构奇异值 μ 作为多变量鲁棒稳定性测度,计算稳定裕度,这一稳定裕度在包含了模型误差后是鲁棒的。其飞行数据很容易用于 μ 分析方法上,从而大大提高了试飞的质量,降低了试飞的成本。

思考题

- 8.1 小展弦比机翼在颤振分析上与大展弦比机翼相比有哪些特点?
- 8.2 采用活塞理论有什么优点?分析它的使用范围。
- 8.3 把 8.1 节的 $V-g$ 法改为 $p-k$ 法,写出其基本运动方程。
- 8.4 考虑尾翼颤振分析的特点;分析时应考虑哪些自由度,为什么?



- 8.5 说明全动水平尾翼的特点和怎样处理间隙问题。
- 8.6 通过本节学习,认识带有操纵面颤振分析的特点。
- 8.7 认识在飞机设计过程中,对操纵面颤振分析的重要性及难点。
- 8.8 操纵面质量平衡的基本依据是什么?质量平衡是否意味着消除了所有颤振的可能性?
- 8.9 分析不可逆操纵系统在现代飞机中对于防止颤振的作用。
- 8.10 熟悉有关气动弹性规范中的图示(图 8-9)意义。
- 8.11 考虑在飞机设计中颤振工作的程序,说明每一步工作的意义和内容。
- 8.12 地面振动试验的任务是什么?说明地面共振试验结果在工程上的应用价值。

参考文献

- 1 冯 Y C. 空气弹性力学引论. 冯钟越,管德译. 北京:国防工业出版社,1963
- 2 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海:上海科学技术文献出版社,1982
- 3 诸德超,陈桂彬,邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室,1986
- 4 管德主编. 气动弹性试验. 北京:北京航空学院出版社,1986
- 5 管德主编. 飞机气动弹性力学手册. 北京:航空工业出版社,1994

第9章 气动弹性动力响应

在气动弹性设计的领域内,主要包含三方面的问题:一是气动弹性静力学问题,在第2,3两章已经作了详细介绍;二是气动弹性动稳定性问题,其中主要是颤振,已经分别在第5,6,7,8章作了讨论;三是气动弹性动力响应问题,即本章将讨论的内容。在9.1节中,对动力响应作简要的概述;在9.2节中,建立弹性飞机的扰动运动方程;在9.3节中,对飞机受到阵风的动力响应作概念上的介绍;在9.4节中,对气动弹性抖振问题作扼要的叙述。

9.1 动力响应概述

气动弹性动力学问题包含着两个重要的实际问题,即气动弹性动稳定性问题和气动弹性动力响应问题。有关动稳定性问题,在前几章中已经作了机理上的介绍和工程上处理方法的讨论。由此可看到,它的特点是外界的激励作用力是零,即系统所有作用力都是系统的位移、速度或加速度的函数。在本章所要讨论的动力响应问题,其中外力是随时间任意变化的,系统的运动将取决于初始条件及外载荷的性质。

现代飞机在飞行的过程中,能引起弹性结构振动的随时间变化的外力可以有如下几种:

① 由大气紊流和阵风引起的交变力。阵风为孤立阵风时,可以具有脉冲型特性。而大气紊流可以看作一种连续的、不规则的阵风。因此在求解大气紊流问题时就需要有统计概念,把受到大气紊流的飞机当作一个线性系统看待;大气紊流是这个线性系统的随机输入量;希望求得的是这个线性系统的随机输出量,例如,由于大气紊流而产生的机翼根部的弯矩增加。

② 由着陆碰撞、投弹及机炮等引起的脉冲型交变力。它们虽然属于动力响应范畴,但并不属于气动弹性问题,所以在本章不作介绍。

③ 由于机翼、发动机等部件后面的尾流,以及与跨声速范围的激波有关的流动分离所引起的激振作用,即所谓的抖振。

在计算动力响应时把飞机作为一个系统,有几种不同的处理方法。可以把它看成刚体,也可以把它看成弹性体,或者把它的若干部分看成弹性体。当把飞机看成刚体时,计算过程可以在一定程度上得到简化,但是也会给计算结果带来一定的误差。误差包括两个方面。一方面是由于忽略了飞机结构变形所带来的后果。飞机结构的变形,特别是机翼的变形,会引起附加的气动力,这个附加的气动力反过来又会影响结构的变形,这就形成了一种反馈现象。若把飞机当作刚体来处理,就相当于忽略了这个反馈现象。误差的另一方面是飞机受到外力后,不仅会产生刚体运动,还会使结构产生弹性振动,这种振动会使飞机结构的应力产生显著的变化。



假如把飞机视为刚体来处理,就等于忽略了可能产生的弹性振动。由上述两方面的误差来源可见,把飞机当作弹性体看待,会得出更接近实际的结果。

气动弹性的动力响应问题,主要与强度和疲劳有关;此外,还关系到飞行性能和乘员的舒适性等问题。由于激励力可以具有十分不同的本质,为了求解有关的气动弹性问题,就应该相应地考虑采用不同的解的表达式和解法。在工程实际中,大多数问题采用数值分析方法。此外,当飞机在紊流的大气层中飞行或者在粗糙跑道上滑跑时,所受到的激励是随机的。对此需要付出巨大的劳动,收集有关统计资料,建立有关的阵风载荷谱和跑道载荷谱。由于随机性载荷没有确定性的时间历程,故只能用统计方法加以描述;如果这个过程是平稳的,则响应过程也将是平稳的。在这种情况下,所关心的是运用统计方法求得响应的自相关函数或功率谱密度函数。其结果则给出了响应时间历程的统计信息。由于位移随时间的变化仍是不确定的,故不能由它的统计信息导出诸如速度、应力等统计信息。于是每一种变量的统计信息都必须由专门的统计分析直接得到。这就又增加了随机性动力响应分析的复杂性。

对于具有伺服控制系统的飞机,需要考虑飞行控制系统对飞机动力响应特性的影响。近年来,随着气动伺服弹性综合技术的发展和主动控制技术在飞机上的应用,已经可以利用伺服控制机构来控制某些操纵面,使其主动地与飞机的弹性振动产生有利的反馈作用,从而达到降低飞机气动弹性阵风应力、延长飞机使用寿命和改善飞行舒适度的目的。阵风减缓是主动控制技术中的一项重要内容,在理论上已日趋完善和成熟,且正在向工程实际应用中发展。

9.2 弹性飞机的扰动运动方程

在以下的讨论过程中,为简单起见,把飞机处理成在 xOy 平面压扁的弹性面,如图 9-1 所示。其坐标轴取为主中心惯性轴,其原点 O 位于飞机的重心位置。飞机的刚体运动只考虑 3 个自由度,即上下平移、俯仰运动和滚转运动,并考虑了一定数量的弹性自由度,通过对应的广义坐标和位移函数表示。

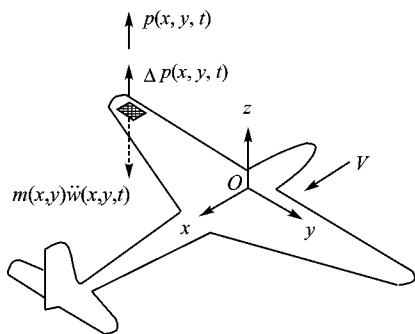


图 9-1 受到扰动作用的理想化弹性飞机

在扰动运动开始之前,认为扰动位移和速度等初始条件等于零,且原有的气动载荷和飞机的重力已处于平衡状态。于是问题归结为计算图 9-1 所示的弹性面在外加扰动载荷作用下,偏离其定态平衡状况的位移与变形随时间而变化的历程。

设作用在图 9-1 的弹性面上外加扰动载荷的单位面积强度为 p 。通常,它具有任意空间与时间函数的形式。扰动还将产生附加气动力,设其单位面积强度为 Δp 。由此得到扰动运动的平衡方



程如下:

对于 z 轴向的力的平衡条件为

$$\iint_S m(x, y) \ddot{w}(x, y, t) dx dy = \iint_S [p(x, y, t) + \Delta p(w, x, y, t)] dx dy \quad (9-1)$$

对于绕 x 轴的平衡条件为

$$\iint_S m(x, y) \ddot{w}(x, y, t) y dx dy = \iint_S [p(x, y, t) + \Delta p(w, x, y, t)] y dx dy \quad (9-2)$$

对于绕 y 轴的平衡条件为

$$\iint_S m(x, y) \ddot{w}(x, y, t) x dx dy = \iint_S [p(x, y, t) + \Delta p(w, x, y, t)] x dx dy \quad (9-3)$$

以及各微元的平衡条件为

$$w(x, y, t) - w(0, 0, t) - x \frac{\partial}{\partial x} w(0, 0, t) - y \frac{\partial}{\partial y} w(0, 0, t) = \iint_S F(x, y; \xi, \eta) [p(\xi, \eta, t) + \Delta p(w, \xi, \eta, t) - m(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta \quad (9-4)$$

式中 $w(x, y, t)$ ——各点偏离其平衡位置的 z 轴向位移;

$m(x, y)$ ——弹性面上单位面积的质量;

S ——弹性面的总面积;

$F(x, y; \xi, \eta)$ ——把弹性面在重心处固定的柔度影响函数。

上述方程通常是不可能直接求解的,而应把它转化成一组联立常微分方程。若不计附加气动力,还可简化为一组独立的常微分方程。为了解上述方程,还要把这个具有无限多个自由度的系统化为具有有限个自由度的当量系统。这种当量化的方法通常可应用假定模态法、有限元素法以及模态叠加法。在实际工程问题中,多采用模态叠加法,主要原因是它回避了假设模态法对分析者要具有经验的要求,同时也避免了有限元素法中成千上万自由度的繁杂。但它所要付出的代价是要依据有限元模型做出固有振动的计算。本节将只对模态叠加法作扼要介绍。现在,利用模态叠加法计算飞机的动力响应。

为此,设

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (9-5)$$

式中, $\phi_i(x, y)$ 为飞机自由-自由状态的第 i 个正规化固有振型,并设正规化条件为

$$\iint_S m(x, y) \phi_i^2(x, y) dx dy = M \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9-6)$$

式中, M 是飞机的总质量, q_i 是对应的广义坐标。

自由-自由固有振型系列中应包含 3 个刚体运动。在主中心惯性坐标系内,它们分别为



9.3 飞机受到阵风的动力响应

飞机在紊乱大气中飞行时的反应是最重要的动力响应问题之一。一般仅考虑垂直于航迹的扰动分量,这种垂直扰动称为阵风,并以符号 w_g 表示。阵风所引起的载荷常常是设计大型飞机机翼的主要因素。

计算飞机在飞行中的阵风载荷,实际上有两方面的主要问题:一个方面是研究阵风的构成和性质,这不属于本专业范围,在这里不进行讨论;另一方面是飞机遇到阵风后将会引起什么样的响应。考虑阵风载荷的结构设计,多半以孤立的阵风为依据,所以阵风形式的合理表示方法是计算孤立阵风响应方法的基础。例如阵风的强度、梯度、波振面以及阵风速度的展向分布等参数对于飞机的动力响应和所产生的应力,都有重要的影响。本节的主要内容是计算飞机对于已知孤立阵风的响应,并分为刚硬机翼和弹性机翼两种不同的情况介绍。

9.3.1 刚硬机翼——应用准定常理论

为了避免一开始就陷入复杂的计算,首先讨论最简单的情况。为此,需要作出下列假设:

- ① 飞机是刚硬的;
- ② 扰动运动对称于飞机纵向对称面,并且略去俯仰运动的影响;
- ③ 在初始情况下飞机以速度 V 作等速水平飞行;
- ④ 阵风垂直于航迹,并沿展向均匀分布;
- ⑤ 飞机前进速度不变;
- ⑥ 应用准定常理论计算气动力,假设在任何时刻阵风速度沿弦向均匀分布并等于弦长中点处的阵风速度。

于是,飞机的扰动运动将只有一个自由度,即是垂直于航迹的位移 q ,设以向上为正,如图 9-2 所示。如果用 M 代表飞机的质量,则扰动运动方程为

$$M\ddot{q}(t) = Q(q, t) \quad (9-19)$$

式中, Q 是广义力,由阵风与飞机的扰动运动产生。

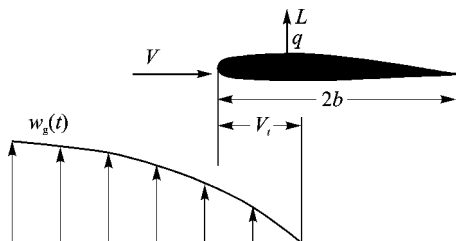


图 9-2 遭遇到阵风的刚硬机翼



如用 L 表示作用在单位翼展上的升力,则根据准定常片条理论,有

$$L(q, t) = \rho V^2 b \frac{dC_L}{d\alpha} \left[\frac{w_g(t)}{V} - \frac{\dot{q}(t)}{V} \right] \quad (9-20)$$

式中, ρ 是气流密度; b 是半弦长; $\frac{dC_L}{d\alpha}$ 是升力曲线的斜率,它需要根据有限翼展与压缩性等影响加以修正。广义力

$$Q(q, t) = \int_{-l}^l L(q, t) dy = \frac{1}{2} \rho V S \frac{dC_L}{d\alpha} [w_g(t) - \dot{q}(t)] \quad (9-21)$$

式中, S 是机翼面积; l 是半翼展。为了方便起见,引入符号

$$\lambda = \frac{\rho V S}{2M} \frac{dC_L}{d\alpha} \quad (9-22)$$

则式(9-19)可改成

$$\ddot{q}(t) = \lambda [w_g(t) - \dot{q}(t)] \quad (9-23)$$

容易看到,上式的积分因子是 $e^{\lambda t}$, 所以

$$\frac{d}{dt} [\dot{q}(t) e^{\lambda t}] = \lambda w_g(t) e^{\lambda t}$$

积分并利用初始条件

$$q(0) = \dot{q}(0) = 0 \quad (9-24)$$

得

$$\dot{q}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t w_g(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau$$

再次积分并利用初始条件式(9-24),得

$$q(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda \sigma} d\sigma \int_0^\sigma w_g(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau$$

更换积分次序后,得

$$q(t) = \lambda \int_0^t w_g(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau \int_\tau^t e^{-\lambda \sigma} d\sigma = \int_0^t w_g(\tau) (1 - e^{-\lambda(t-\tau)}) d\tau \quad (9-25)$$

如果 $w_g(t)$ 是一阶跃函数,即是所谓的陡沿阵风(sharpe-edge gust),有的资料也称锐边阵风。所以,当 $t > 0$ 时, w_g 是一常数;而当 $t < 0$ 时, w_g 为零。于是,式(9-25)成为

$$q(t) = w_g t - \frac{w_g}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (9-26)$$

由此

$$\ddot{q}(t) = \lambda w_g e^{-\lambda t} \quad (9-27)$$

当 $t = 0$ 时加速度达到最大值

$$\ddot{q}_{\max} = \lambda w_g \quad (9-28)$$

除以重力加速度 g ,即得到所谓的陡沿阵风公式

$$\Delta n = \frac{\ddot{q}_{\max}}{g} = \frac{\rho V}{2} \frac{S w_g}{M g} \frac{dC_L}{d\alpha} \quad (9-29)$$



其中 Δn 代表过载因子的增量。

式(9-26)给出了位移 q 对陡沿阵风的过渡导纳,而式(9-25)则给出了对于任意阵风波阵面的杜阿麦积分。

陡沿阵风公式是根据 9.3.1 节提到的 6 个假设及如图 9-3 所示的理想化阵风波阵面导出的。实际上这些假设自然很难满足,但是对于飞机设计工作,这个公式却很有用。如果根据它把试验所得的加速度资料折算成所谓的有效阵风速度,就可以计算同类飞机的阵风过载因子。但是,必须针对每一类飞机确定出相应的有效阵风速度,因为简化假设对于不同的飞机大小、外形、柔度、重心位置、动安定性以及飞行马赫数等具有不同的影响。

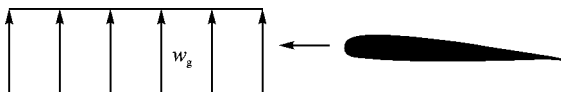


图 9-3 陡沿阵风

9.3.2 刚硬机翼——应用非定常理论

对于这种情况,运动方程仍如式(9-19)所示。为了方便起见,将时间变量改为量纲为 1 的参数 d ,即

$$d = \frac{Vt}{b_R} \quad (9-30)$$

式中, b_R 代表某参考半弦长。因此, d 则是用此半弦长来度量所走过的距离时得到的数据。

根据非定常片条理论,由阵风所引起的单位翼展升力为

$$L_g(d) = \rho b V \frac{dC_L}{d\alpha} \left[w_g(0)\psi(d) + \int_0^d \frac{d}{d\sigma} w_g(\sigma)\psi(d-\sigma) d\sigma \right] \quad (9-31)$$

式中, $\psi(d)$ 称作库□纳函数(Küssner's function),描述了机翼穿过一陡沿阵风时升力的生成过程。正确的 $\psi(d)$ 不能写成简单的解析函数形式,但是通常可以代之以相当准确的近似表达式,即

$$\left. \begin{aligned} \psi(d) &= 1 - 0.500e^{-0.130d} - 0.500e^{-d} & (AR = \infty) \\ \psi(d) &= 1 - 0.448e^{-0.290d} - 0.272e^{-0.725d} - 0.193e^{-3.00d} & (AR = 6) \\ \psi(d) &= 1 - 0.679e^{-0.558d} - 0.227e^{-3.20d} & (AR = 3) \end{aligned} \right\} \quad (9-32)$$

以上各式是针对不可压缩气流导出的,其中 AR 代表展弦比。为了方便起见,把式(9-31)写成

$$L_g(d) = \rho b V U \frac{dC_L}{d\alpha} f(d) \quad (9-33)$$

其中 U 是最大阵风速度,而

$$f(d) = \frac{1}{U} \left[w_g(0)\psi(d) + \int_0^d \frac{d}{d\sigma} w_g(\sigma)\psi(d-\sigma) d\sigma \right] =$$



$$\frac{1}{U} \int_0^d w_g(\sigma) \psi'(d - \sigma) d\sigma \quad (9-34)$$

为了计算机翼沉浮运动而产生的单位翼展气动力 L_q , 可以应用下列公式:

$$L_q(d) = -\rho b V \frac{dC_L}{d\alpha} \int_0^d \frac{V}{b_R} q''(\sigma) \Theta(d - \sigma) d\sigma \quad (9-35)$$

式中, 上标“'”代表对 d 进行微分; 而 $\Theta(d)$ 作为瓦格纳函数 (Wagner's function), 描述了当翼剖面上的均匀下洗有一突然变化时, 围绕机翼环量的生成过程。同样它也不能写成简单的解析函数形式, 但其近似表达式可写成

$$\left. \begin{aligned} \Theta(d) &= 1 - 0.165e^{-0.0455d} - 0.335e^{-0.300d} & (AR = \infty) \\ \Theta(d) &= 1 - 0.361e^{-0.381d} & (AR = 6) \\ \Theta(d) &= 1 - 0.283e^{-0.540d} & (AR = 3) \end{aligned} \right\} \quad (9-36)$$

式(9-32)与式(9-36)均可参见本章的参考文献[6]。在式(9-35)中, 已利用了初始条件 $q'(0) = 0$, 且仅考虑了环量的作用。

在本章参考文献[7]中, 还研究了气流压缩性对上述两种函数的影响。于是, 广义力可表示为

$$\begin{aligned} Q(d) &= \int_{-l}^l [L_g(d) + L_q(d)] dy = \\ &= \frac{1}{2} \rho V S \frac{dC_L}{d\alpha} \left[U f(d) - \int_0^d \frac{V}{b_R} q''(\sigma) \Theta(d - \sigma) d\sigma \right] \end{aligned} \quad (9-37)$$

把上式代入式(9-19), 并引用式(9-30), 得

$$\frac{V^2}{b_R^2} M q''(d) = \frac{1}{2} \rho V S \frac{dC_L}{d\alpha} \left[U f(d) - \frac{V}{b_R} \int_0^d q''(\sigma) \Theta(d - \sigma) d\sigma \right] \quad (9-38)$$

再引进量纲为 1 的位移参数 ξ 和量纲为 1 的质量参数 μ , 即

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{V}{U} \frac{q}{b_R} \\ \mu &= \frac{2M}{\rho b_R S \frac{dC_L}{d\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (9-39)$$

为了计及飞机作沉浮运动时附连空气质量的惯性作用, 只需在式(9-39)的第二式中用

$$M + \pi \rho \int_{-l}^l b^2 dy$$

代替原来的 M 即可。对于二元均匀机翼, μ 的增量是 0.5。于是, 代入式(9-38), 即可得量纲为 1 的扰动方程, 即

$$\mu \xi''(d) = \int_0^d \frac{w_g(\sigma)}{U} \psi'(d - \sigma) d\sigma - \int_0^d \xi''(\sigma) \Theta(d - \sigma) d\sigma \quad (9-40)$$

并伴有初始条件



$$\xi(0) = \xi'(0) = 0 \quad (9-41)$$

方程(9-40)宜于用拉氏变换法求解。为此,在下面给出所需的几个变换公式:

$$\left. \begin{array}{ll} a(\text{常数}) & a/s \\ d^{n-1} & n!/s^n \\ e^{ad} & 1/(s-a) \\ f(d) & \mathcal{L}[f(s)] \\ f'(d) & s\mathcal{L}[f(s)] - f(0) \\ f''(d) & s^2\mathcal{L}[f(s)] - sf(0) - f'(0) \\ \int_0^\infty f_1(d)f_2(d-\sigma)d\sigma & \mathcal{L}[f_1(s)]\mathcal{L}[f_2(s)] \end{array} \right\} \quad (9-42)$$

由此,并注意到初始条件(9-41),可将式(9-40)变换成

$$s^2\mu\mathcal{L}[\xi(s)] = s\mathcal{L}\left[\frac{w_g(s)}{U}\right]\mathcal{L}[\psi(s)] - s^2\mathcal{L}[\xi(s)]\mathcal{L}[\Theta(s)] \quad (9-43)$$

对于不可压缩气流中的二元机翼($AR=\infty$),由式(9-32)和式(9-36),可得

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}[\psi(s)] = \frac{1}{s} - \frac{0.500}{s+0.130} - \frac{0.500}{s+1} \\ \mathcal{L}[\Theta(s)] = \frac{1}{s} - \frac{0.165}{s+0.046} - \frac{0.335}{s+0.300} \end{array} \right\} \quad (9-44)$$

对于陡沿阵风, $w_g(d)$ 是一常数,设取为 U ,故式(9-43)可简化为

$$\begin{aligned} s^2\left(\mu + \frac{1}{s} - \frac{0.165}{s+0.046} - \frac{0.335}{s+0.300}\right)\mathcal{L}[\xi(s)] = \\ \left(\frac{1}{s} - \frac{0.500}{s+0.130} - \frac{0.500}{s+1}\right) \end{aligned}$$

由此得到

$$s^2\mathcal{L}[\xi(s)] = \frac{0.565}{\mu} \frac{(s^3 + 0.5756s^2 + 0.09314s + 0.003141)}{(s+0.130)(s+1)(s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)} \quad (9-45)$$

式中

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 0.3455 + 0.500/\mu \\ a_2 = 0.01365 + 0.2808/\mu \\ a_3 = 0.01365/\mu \end{array} \right\} \quad (9-46)$$

由于式(9-45)右端项中分子多项式的次数低于分母多项式的次数,故按部分分式展开后,可得

$$s^2\mathcal{L}[\xi(s)] = \frac{0.565}{\mu} \left(\frac{a_1}{s+0.130} + \frac{a_2}{s+1} + \frac{a_3}{s-\gamma_1} + \frac{a_4}{s-\gamma_2} + \frac{a_5}{s-\gamma_3} \right)$$

式中, γ_1, γ_2 与 γ_3 是三次方程

$$s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$$



的根,而 $a_1 \sim a_3$ 是展开时所得到的系数。于是,经过拉氏逆变换,得

$$\xi''(d) = \frac{0.565}{\mu} f_g(d) \quad (9-47)$$

式中

$$f_g(d) = a_1 e^{-0.130d} + a_2 e^{-d} + a_3 e^{\gamma_1 d} + a_4 e^{\gamma_2 d} + a_5 e^{\gamma_3 d} \quad (9-48)$$

$f_g(d)$ 代表机翼进入陡沿阵风后量纲为 1 的加速度的变化规律。对应于若干 μ 值,图 9-4 给出了 $f_g(d)$ 对量纲为 1 的时间参数 d 的变化曲线。

通过式(9-30)及式(9-39),最后可以得到飞机沉浮运动的加速度,即

$$\ddot{q}(t) = 0.565 \frac{V}{b_R} \frac{U}{\mu} f_g(d) \quad (9-49)$$

当应用准定常气动力理论时,对应的最大加速度可自式(9-28)获得,即

$$\ddot{q}_{\max} = \lambda U = \frac{V}{b_R} \frac{U}{\mu} \quad (9-50)$$

如用 R 表示获自非定常气动力理论的最大加速度与获自准定常气动力理论的最大加速度之比值,则

$$R = \max [0.565 f_g(d)] \quad (9-51)$$

对于不同的 μ 值, R 的变化规律如图 9-5 所示。从中可以看到,飞机的量纲为 1 的质量参数 μ 对其阵风响应特性有重要影响。

至于飞机对于任意阵风波阵面的响应,可以应用式(9-43)直接从 $\mathcal{L}\left[\frac{w_g(d)}{U}\right]$ 出发寻找逆变换,或者根据上面得到的陡沿阵风响应结果,利用杜阿麦积分求取。显然后一种方法比较实用。

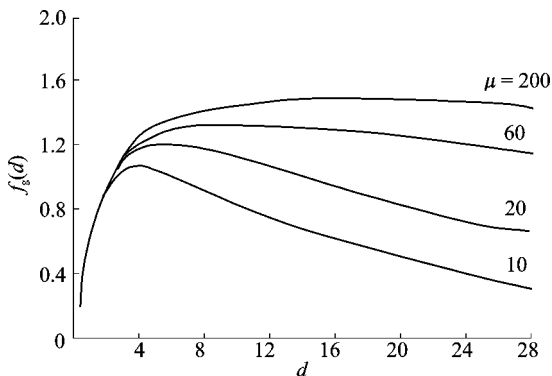


图 9-4 飞机进入陡沿阵风后加速度的变化规律

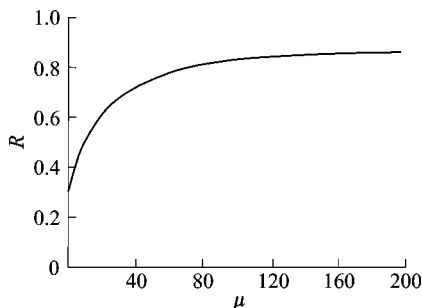


图 9-5 获自两种气动力理论的最大速度之比



9.3.3 弹性机翼——应用非定常理论

为了简便起见,这里只考虑机翼有一个沉浮运动的刚体自由度与一个弹性自由度,即基频模态的情况。然而,下面的分析方法也可以推广到更一般的情况,例如,包含飞机的刚体俯仰运动以及若干个弹性模态的情况。因此,设

$$w(x, y, t) = q_1(t) + \phi_2(x, y)q_2(t) \quad (9-52)$$

式中, $\phi_2(x, y)$ 代表机翼的基频模态,并按式(9-6)正规化。

按照气动力理论,由环量产生的升力,其强度正比于 $3/4$ 弦长处下洗,而其作用点则是 $1/4$ 弦长点。为了书写方便,用 $\phi_c(y)$ 与 $\phi_w(y)$ 来分别表示基频模态中 $1/4$ 弦长点连线与 $3/4$ 弦长点连线的变形曲线。于是,由式(9-35)可得作用在单位翼展上由运动而产生的升力,即

$$L_q(d) = -\rho b V \frac{dC_L}{d\alpha} \int_0^d \frac{V}{b_R} [q''_1(d) + \phi_w(y)q''_2(d)] \Theta(d - \sigma) d\sigma \quad (9-53)$$

但由阵风产生的升力仍如式(9-33)所示。这两种升力均作用在 $1/4$ 弦长点的连线上,故广义力可表为

$$\left. \begin{aligned} Q_1(d) &= \int_{-l}^l [L_g(d) + L_q(d)] dy = \\ &\quad \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{dC_L}{d\alpha} \left\{ Uf(d) - \frac{V}{b_R} \int_0^d [q''_1(\sigma) + \beta_{12}q''_2(\sigma)] \Theta(d - \sigma) d\sigma \right\} \\ Q_2(d) &= \int_{-l}^l [L_g(d) + L_q(d)] \phi_c(y) dy = \\ &\quad \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{dC_L}{d\alpha} \left\{ \beta_{21}Uf(d) - \frac{V}{b_R} \int_0^d [\beta_{21}q''_1(\sigma) + \beta_{22}q''_2(\sigma)] \Theta(d - \sigma) d\sigma \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9-54)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} &= \int_{-l}^l b \phi_w(y) dy / S \\ \beta_{21} &= \int_{-l}^l b \phi_c(y) dy / S \\ \beta_{22} &= \int_{-l}^l b \phi_c(y) \phi_w(y) dy / S \end{aligned} \right\} \quad (9-55)$$

需要指出,在式(9-53)中,尚未计入由于附连空气质量所产生的惯性力。它们有以下特性:

① 作用在翼弦中点连线上的升力,方向与该点的加速度方向相反,其单位翼展上的值等于空气附连质量 $\pi \rho b^2$ 与该点加速度的乘积;

② 作用在 $3/4$ 弦长点连线上的升力,具有离心力的性质,其单位翼展上的值等于附连空气质量 $\pi \rho b^2$ 与 $V\dot{a}$ 的乘积,这里 $\dot{a}$ 代表翼剖面的转动角速度;

③ 低头力矩,其单位翼展上的值等于附连空气转动惯量 $\pi \rho b^4 / 8$ 与翼剖面角加速度 $\ddot{a}$ 的乘积。



根据式(9-52)给出的运动状态,可以算出这些惯性力并计入前面已经得到的广义力中去。这样做并不会带来原则性的困难,不过是使以后的计算工作稍微麻烦一些而已。

引入式(9-30)与式(9-39)规定的符号后,可将运动方程写成量纲为1的形式:

$$\left. \begin{aligned} \mu \xi''_1(d) &= f(d) - \int_0^d [\xi''_1(d) + \beta_{12} \xi''_2(d)] \Theta(d-\sigma) d\sigma \\ \mu \xi''_2(d) + \mu k_2^2 \xi_2(d) &= \beta_{21} f(d) - \int_0^d [\beta_{21} \xi''_1(d) + \beta_{22} \xi''_2(d)] \Theta(d-\sigma) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (9-56)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= b_R \omega_2 / V \\ \xi_1 &= \frac{V}{U} \frac{q_1}{b_R} \\ \xi_2 &= \frac{V}{U} \frac{q_2}{b_R} \end{aligned} \right\} \quad (9-57)$$

方程组(9-56)的求解自然也可应用拉氏变换法。下面再介绍一种更为实用的数值计算方法。

为此,将 $0 \sim d$ 这一量纲为1的时间区间划分为 m 个相等的间隔 ϵ , 即

$$d = m\epsilon$$

于是可以得到一个时间站序列 $\{0, \epsilon, 2\epsilon, \dots, m\epsilon\}$ 。相应地,将所有函数都离散化为由该函数在这些站的函数值所组成的序列或向量。

求出各时间站上的加速度值以后,利用模态叠加法就可以求出相应的应力响应历程,也不难求出刚体模态的加速度响应历程。对于下列形式的积分

$$I = \int_0^d u(\sigma) v(d-\sigma) d\sigma$$

采用数值积分,这里略去了推导过程。

对于包括更多弹性模态的情况,也可以应用上述数值方法,当然计算工作要变得繁冗得多。

在数值解法中,积分站间隔 ϵ 的选择相当重要。这涉及到计算效率、结果精度以及解答收敛性三方面的问题。在大多数动力响应问题中,只有头几个弹性模态比较重要,设人们关心的弹性模态的最小周期为 T ,则经验表明,约取这个周期的 $\frac{1}{12}$ 来确定积分站间隔,就可以取得良好的结果。

9.4 气动弹性抖振

抖振振动是指飞机的某些部件在紊流中受到激励而产生的随机振动。它不同于颤振。颤



振是在其本身的运动引起的气动力激励下发生的,所以颤振是一种自激振动。而在抖振中,激励飞机使其发生抖振的气动力与抖振本身的运动无关,所以抖振是一种强迫振动。

9.4.1 抖振的现象

抖振的概念出现于 20 世纪 30 年代初,起因于一架容克 13 型商业飞机在英国的米欧发姆地区失事。该事件促使英国和德国科学家对这次不平常的事故开展了研究,从而得出了一系列关于扰动抖振的成果,并对容克商用机的失事作了较为确切的解释,即飞机以高速水平飞行时,进入了强烈的上升突风区域,致使攻角急剧增加,在机翼上形成流动分离;而处于机翼尾流中的尾翼,陷入了分离流动中的紊流,而引起了强烈的强迫振动,造成飞机失事。

抖振大体上可分为升力型和非升力型两类。所谓升力型是指翼面攻角太大时,由于分离流的紊流激励,使机翼本身或处于机翼尾流中的尾翼产生剧烈的随机振动响应,这种现象常称为大攻角抖振。此外,在跨声速飞行范围内,由翼面激波引起分离而产生的响应,常称为激波抖振。而非升力型抖振是指因为飞机的外形突变,使升力面落入不良的气动外形物体的尾流中,常见于飞机炸弹舱门或减速板打开、起落架放下等。

抖振的出现会影响到飞机的使用性能,直接涉及到飞机结构强度与疲劳寿命,也会涉及到飞机上电子设备的正常工作,以及飞行员的操纵能力和舒适度。为此,对于民航机来说,在巡航点与抖振起始边界之间必须留有一定的升力系数和马赫数裕量,这就要求必须测定出抖振边界;对于战斗机来说,特别是高机动性能的战斗机,经常要在超过抖振边界的状态下飞行,所以抖振响应的预测也显得很重要。

9.4.2 抖振边界及抖振载荷

至今抖振边界及抖振载荷的确定,尚不能利用理论计算的方法。因此,关于抖振问题的预测,都是建立在风洞试验方法的基础上的。

抖振试验所用的风洞模型与颤振风洞试验模型有所不同。当抖振风洞试验目的是为了确定抖振边界时,原则上只要求模型和实物的空气动力外形相似,但通常也还要求第一阶固有频率相似。为了有效地提高雷诺数,多采用半模型。实践证明,采用半模型和全模型所得到的抖振边界是相当一致的。

抖振边界的测量方法很多,诸如翼根均方根弯矩切交法、后缘压力发散法、加速度测量法以及升力线拐点法。通常认为用翼根弯矩切交法求得的抖振边界与试飞结果趋势较为一致。该法是通过在翼根上设置电阻丝片,来感受机翼根部弯矩。由测试系统测出与翼根弯矩成正比的电信号的均方根值 σ , 然后在一个固定的马赫数下,画出均方根值 σ 随攻角 α 的变化曲线,如图 9-6 所示。由图可见,在小攻角区域,曲线接近于水平,翼面上没有气流分离,所测出的 σ 值是风洞本身压力脉动的响应。在攻角 α 到达一定值时,气流出现分离,发生了抖振。此后, σ 值会随着攻角的增长而迅速增加。开始迅速增长的转变点,就确定为抖振起始攻角。转变点



用切线交点来确定,记为 α_B 。和 α_B 相对应的全机配平升力系数就定义为抖振升力系数 C_{LB} 。进一步,以 C_{LB} 随马赫数 Ma 的变化曲线就是模型的抖振边界线。抖振边界也可以把试验获得的发生抖振时的攻角 α 和马赫数 Ma 记作一个抖振点,由一系列抖振点连成边界曲线。

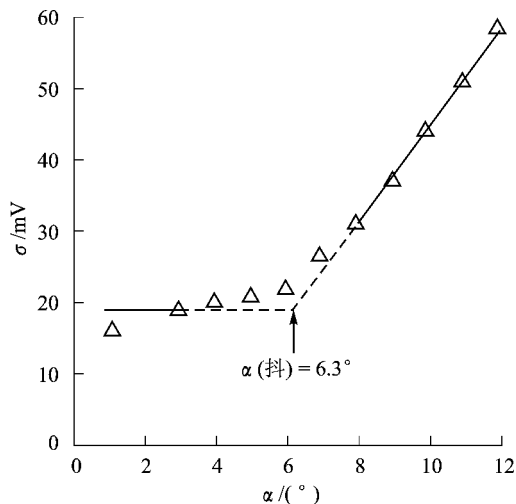


图 9-6 $\sigma - \alpha$ 曲线, $Ma = 0.597$

抖振边界几乎完全取决于气动构型。而高速范围的抖振边界对飞机性能,特别是对战斗机性能影响很大。提高抖振边界通常是采用推迟激波的发生和减弱激波、附面层干扰引起的分离等措施。在布局确定后,翼型起重要作用。现代高亚声速大型飞机,有些采用尖峰翼型,可将激波的发生推迟或减弱。此外,增大机翼后掠角会使低速范围的抖振边界降低,而高速范围的抖振边界提高。为了改善抖振边界,可以减小机翼的相对厚度,采用翼刀、前缘锯齿和人工涡流发生器等。除了上述抖振边界的测量以外,抖振载荷的测量也是很重要的,因为现代的战斗机,有时要在超过抖振起始边界的状态下飞行。而就目前的状态,预测抖振响应(或载荷)也都是以风洞试验为基础的。预测抖振载荷的风洞试验模型,原则上需满足其外形、刚度和惯性都相似的条件。但是让所设计出的模型能承受大攻角空气动力载荷是困难的。在很多情况下,都是采用简化模型,即只有空气动力外形相似和第一阶固有频率相似的模型。这时要把模型试验的结果转化到原型机上去,就需要有近似程度较高的转换方法。这些方法很多,读者可根据需要查找有关资料。注意,为了得到飞机抖振载荷,仅仅知道均方根载荷的最大值是不够的,还必须知道抖振的分布概率,例如,尾翼失速抖振的概率近似于高斯分布。



思考题

- 9.1 在气动弹性动力学中,动稳定性问题和动力响应问题各有什么特性?
- 9.2 计算动力响应时,若把系统视为刚体来处理会引起哪些误差?
- 9.3 在飞行过程中,引起弹性振动随时间变化的外力有哪些?
- 9.4 比较 9.2 节所得到的结果与一般弹性体振动的运动方程的差异。
- 9.5 如何用能量法导出 9.2 节的结果?
- 9.6 说明动力响应问题与颤振问题的运动方程的相似部分。这两种问题中的空气动力系数是不是相同的?
- 9.7 在 9.3 节中采用了 3 种不同的阵风响应处理方法,试比较它们之间的差异。
- 9.8 分析抖振和颤振的差异。
- 9.9 思考抖振的不同形式以及发生的原因。

参考文献

- 1 Bisplinghoff R L, Ashley H, Halfman R L. Aeroelasticity. Addison - Wesley Publishing Company, Inc. , 1955
- 2 冯 Y C. 空气弹性力学引论. 冯钟越,管德译. 北京:国防工业出版社,1963
- 3 诸德超,陈桂彬,邹丛青. 气动弹性力学. 航空工业部教材编审室,1986
- 4 Bisplinghoff R L, Isakson G, O'Briev T F. Gust Loads on Rigid and Elastic Airplanes. M. I. T. , Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report for the Navy Bureau of Aeronautics, Aug. 15, 1950
- 5 Donely P. Summary of Information Relating to Gust Loads on Airplanes. NACA TR997, 1950
- 6 Jones R T. The Unsteady Lift of a Wing of Finite Aspect Ratio. NACA TR 681, 1940
- 7 Lomax H. Lift Developed on Unrestricted Rectangular Wings Entering Gusts at Subsonic and Supersonic Speeds. NACA TN 2925, 1953

第 10 章 气动伺服弹性(动)稳定性分析

前面各章所讲的气动弹性问题,只涉及到单独飞机(不考虑控制系统影响)的弹性结构(例如机翼、操纵面等,当然,还可以推广到全机)和作用在其上的定常和非定常气动力。对于气动弹性问题,所有飞机都必须例行常规的分析和计算。由于现代飞机上普遍使用了伺服控制系统,而该系统所控制的对象正是气动弹性飞机,所以在飞机设计中,如果切断控制系统,去考虑单独飞机的气动弹性,即所谓的无控情况是不够的,还必须考虑弹性飞机与伺服控制系统相互作用下的气动弹性问题。这类问题,称为气动伺服弹性问题。本章将讲述其中最基本的内容——稳定性分析。

伺服控制系统,是指利用液压伺服系统去操纵舵面偏转运动的飞行控制系统。随着飞机的发展,伺服控制系统也在不断发展。最早只是一种装有液压助力器的操纵系统,用它来带动舵面偏转;以后又增加了自动控制功能,例如自动驾驶仪和稳定系统;到了现代高性能飞机上,更进一步发展了不同功能的主动控制系统。当然,不论是哪一种飞行控制系统,其末端均为按控制信号操纵的舵面。现代飞机上,几乎所有舵面都不可能是人力操纵,而是借助于伺服操纵的,所以,飞行控制与伺服操纵通常已是不可分割的整体。基于这一事实,在分析结构与控制的耦合时,伺服传动的动力学特点是必须包括的,从而就形成了“气动伺服弹性”的命名。

本章将给出有关气动伺服弹性的基本概念、原理和方法,重点放在以飞机为对象的气动伺服弹性(动)稳定性分析(以下略去“动”字),并通过单输入、单输出系统的频域方法,阐述稳定性分析的主要内容及其过程。其中,将涉及一些新的问题,例如,由于伺服操纵而引起的复刚度(阻抗);由于飞机弹性振动通过伺服控制系统而引入的舵面反馈传递函数。本章还将对导弹的气动伺服弹性中有别于飞机的部分作出补充。

之所以选定将重点放在频域方法的稳定性分析上,有以下两方面的原因:

① 因为稳定性问题是诸多气动伺服弹性问题中最重要、最具普遍意义的一项,现代飞机设计或改型时,它是必不可少的内容。它和单独飞机的颤振安全有着同样重要甚至更为重要的意义。

② 因为经典控制理论及其频域方法是诸多理论和分析的基础,有了这一基础,就可以胜任一般的气动伺服弹性稳定性的分析,并有可能深入现代控制理论及其时域方法(概要见第 11.1 节),进而研究更为深层的问题。



10.1 气动伺服弹性概念

10.1.1 气动伺服弹性力学的定义及分类

气动伺服弹性力学的定义可以叙述如下:它是一门涉及结构动力学、非定常气动力学以及自动控制理论的学科。在这个领域内,专门研究结构弹性力、惯性力、定常和非定常气动力(由于结构刚体运动或弹性振动引起)以及飞行控制系统之间的相互作用原理和分析技术。显然,气动伺服弹性首先是在飞行器设计中受到了关注而发展起来的。

为了进一步划分研究范围,可以用一个气动伺服弹性四面体的图形来说明,如图 10-1 所示。

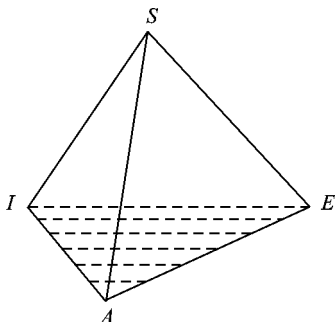


图 10-1 气动伺服弹性四面体

图 10-1 中,四面体的一个顶角表示伺服控制系统,用字母 S 表示。底部是已经熟知的气动弹性三角形,其三个顶点分别为气动力 A 、弹性力 E 和惯性力 I 。根据它们是否参与来确定分类。

图中,已知 A, E, I 三者耦合构成常规的气动弹性动力学问题;而 S, I, E 三者耦合构成伺服机械系统,由于它不考虑气动力,故是一种地面问题。以上两项都不属于气动伺服弹性的范畴。余下的还有 3 种耦合:

① S, A, I 耦合,它不考虑结构的弹性,由此构成的是气动伺服动力学,研究对象是具有伺服控制系统的刚性飞机;

② S, A, E 耦合,构成气动伺服弹性静力学问题;

③ S, A, E, I 耦合,构成气动伺服弹性动力学问题。

其中, S, A, E, I 耦合是气动弹性力学中涵盖面最广的一项,所以它在飞机气动弹性设计中具有重要意义。本章内容将只限于这一部分。

在 S, A, E, I 问题中,可以再细分一下。与单独飞机的气动弹性问题类似,根据系统上是否作用了与飞机运动无关的外部扰动,也可以分为两类。凡是不存在上述外部扰动的,称为气动伺服弹性稳定性问题;反之,就构成气动伺服弹性动响应问题,响应可以是位移或载荷。由于稳定性问题在飞机设计中是必须保证的,所以尤为重要。这类问题实质上属于伺服控制系统参与下的飞机颤振,所以也可以称为伺服颤振或有控颤振。

10.1.2 气动伺服弹性问题的形成

飞机和伺服控制系统是两大不同的系统,但它们之间却有直接的传递关系。飞机的运动信号通过传感器(例如角速度陀螺、加速度计)输入控制系统,通过控制系统产生控制信号又输



入伺服操纵的舵面,引起舵面偏转 $\Delta\beta$ 并产生舵面控制力,最终回输至飞机。这可以用一个闭合的框图来说明,如图 10-2 所示。

假如把飞机视作刚体,这样的闭环系统必定是设计稳定的。

实际上,飞机是一个弹性体。飞机在飞行中一旦受到某种扰动而发生运动,这种运动必然包含了飞机的刚体运动和飞机结构的弹性振动。装在飞机机体上的传感器不仅接收到飞机的刚体运动信号,而且同时接收到结构弹性振动的信号。只要伺服控制的通频带能覆盖飞机的主要固有频率,那么,控制系统通过伺服传动施加于舵面的偏转 $\Delta\beta$ 中就增加了一部分频率较高的偏转运动,从而增加了一部分舵面非定常气动力和惯性力。这就是因控制系统的反馈而额外作用于飞机的控制力;反过来,这部分控制力又将影响飞机的运动,由此形成一个弹性飞机和控制系统的闭合回路。当把飞机按弹性体考虑时,图 10-2 所示的闭合回路,就是典型的气动伺服弹性系统。从这个意义上讲,既然气动伺服弹性是一个闭环系统,那么单独飞机则是开环系统。因此,气动伺服弹性系统,可以定义为一个具有反馈控制的气动弹性系统。

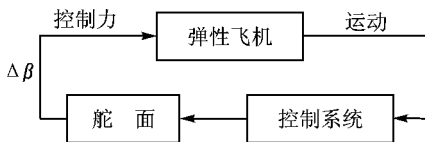


图 10-2 飞机和控制系统构成的闭合回路

图 10-2 显示出弹性飞机与伺服控制系统之间是互为反馈的。当飞机作为这个闭环系统的正向回路时,控制系统就是闭环的反馈回路。当闭环不存在与飞机运动无关的外部输入时,这个回路对应于气动伺服弹性稳定性分析的状态。通常会遇到的问题是:它们各自的单独系统是动力稳定的。也就是说,单独弹性飞机不发生颤振失稳,单独伺服控制系统也是动力稳定的;而一旦形成图 10-2 所示的闭环系统,其稳定性明显改变(更关注的是变差),有可能使原定设计的功能变差,甚至变为气动伺服弹性不稳定。这种现象揭示了飞机结构与控制系统之间动力学耦合的严重后果。这种耦合效应不仅在飞机设计中必须重视,反过来,在控制系统的设计中也应该放弃飞机为刚体的假设,否则将因偏离实际情况而带来损失。

由于助力器、自动驾驶仪和增稳系统等伺服控制系统的通频带较低,它们对于频率较高的信号,例如结构弹性振动频率,都有不同程度的衰减。因此,一般来说,控制与结构弹性振动的耦合效应还不至于十分严重。再加上不论是自动驾驶仪还是增稳系统,它们只能操纵舵面的较少行程,也就是“权限”较小,而“权限”小可以使耦合效应有所缓和。比较严重的情况是对于具有主动控制功能(例如放宽静稳定度、直接力控制、载荷减缓以及正在研究中的颤振主动抑制等)的伺服控制系统,它具有较高的通频带,而且“权限”也大,以至于可以操纵舵面的全行程。这些因素使得耦合效应增大,对于稳定性是个不利因素。事实上,对于具有宽频带、高权限的飞行控制系统的飞机,气动伺服弹性不稳定,往往是气动弹性设计的临界状况。一个成功的气动弹性设计必须在确切无误地防止单独飞机的气动弹性危害的同时,确保各种飞行条件下的气动伺服弹性稳定性。



10.1.3 气动伺服弹性的分析与综合

对于气动伺服弹性系统,就其设计任务而言,可以分为两种:一种是“分析”,另一种是“综合”。

首先是气动伺服弹性分析。它指的是对于已经给定的弹性飞机结构、质量分布以及伺服控制系统,检验其在规定飞行条件下的闭环气动弹性稳定性或动响应特性。如果是检验稳定性,则应确定闭环的失稳临界速度,或确定亚临界的稳定裕度。另外,还可以通过计算和实验,对系统的某些参数进行局部补偿或修改,以消除耦合或降低不利因素,从而改善闭环系统的气动弹性特性。总之,气动伺服弹性分析的目的是对给定的设计对象,包括飞机和控制进行气动伺服弹性检验;如果耦合的结果是不利的,则再作局部的改善。可见,所谓分析,通常是属于飞机设计中直接面对的、最基本的也是首要的任务,但它属于一种被动防止的设计模式。

其次是气动伺服弹性综合。它指的是对给定飞机预先设定一项或多项先进的气动弹性性能(或功能),并以此为目标,设计一个控制律,以此作为闭环的反馈回路,从而实现预期的性能目标。当代飞机上就已经有针对某些功能设计的专门的控制律,例如放宽静稳定度、载荷减缓等;更先进的甚至还把颤振主动抑制应用于气动伺服弹性的综合之中。总之,综合的目的是在给定的性能(或功能)目标下,实现主动控制律的设计,以它与飞机组合的闭环,可以主动地排除不利的耦合,或变不利为有利。可见,所谓综合,是指飞机设计中如何借助于控制系统实现既定目标。实现得最好,就要涉及各种优化理论和技术。这是以性能为目标,以控制系统为核心的主动控制的设计模式。尽管在常规的设计中它是一种“反向”命题,但在当代正在崛起的新的设计理念中,它的意义将超过“分析”而居首位。

10.2 飞机气动伺服弹性稳定性分析的特点

现代高性能飞机上舵面操纵大多数是依靠不可逆的液压伺服系统来实现的。由于这种系统几乎完全的不可逆性,从而获得了高于人力操纵的舵面旋转频率。但伺服操纵舵面的操纵刚度已不能简单地用弹簧常数来描述,它已经转化为伺服传动系统的有效刚度,这就引发了第一个新的特点——复阻抗。复阻抗是由于伺服操纵系统的动力学特性所导致的。另一个特点是气动伺服弹性系统的闭环反馈。这条反馈回路,最终以舵面上附加的偏转振动运动 $\Delta\beta$ 回输至飞机,形成对飞机附加的控制力输入。这条回路上的各个环节都有各自的动力学特点,它们以不同的动力学特性影响闭环系统的动力学耦合。

以下分别介绍其特点。

10.2.1 舵面伺服操纵系统的动力学特性

与人力操纵系统不同,伺服操纵系统是由液压助力器驱动舵面的。液压助力器的结构和工作原理可以用图 10-3 表示。

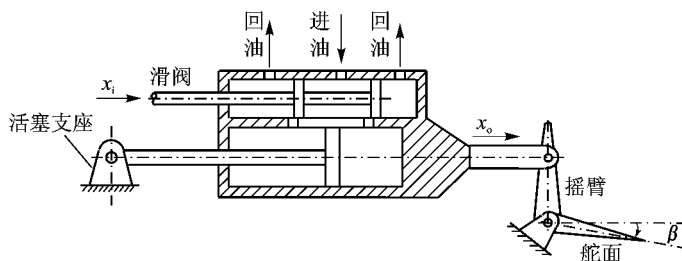


图 10-3 液压助力器示意图

助力器由作动筒本体与分油活门(滑阀)组成。助力器的意义在于由控制系统(或驾驶员)传来的微小电信号(或力信号),可以推动滑阀,开启油门,然后借助于高压油的作用,信号被转化为大的舵面铰链力矩和舵面运动。而反过来,要用外作用力或力矩去改变舵面的瞬态位置时,舵面转轴的刚度几乎是刚硬的,这种性质即为不可逆性。

假定滑阀位置不变,此时,给作动筒一个位移 x_o ,高压油立即自动产生反作用力来阻止其移动。如果 x_o 是一个低频的正弦运动,则这种自动伺服作用仍然能使作动筒处于静止状态。这就表现为舵面与飞机结构之间的连接变得十分刚硬,呈现出不可逆性。如果 x_o 的频率增高,油门通油时间减短,则使高压油的伺服反作用力下降。随着频率增高,伺服作用不断减小,直至某个频率上限,助力器伺服作用变为零。这时,舵面的刚度只取决于油的压缩性、活塞支持的刚度。由此可见,助力器的有效刚度是运动频率的函数,所以,它具有阻抗的特点。

同时注意到,上述伺服作用是假定滑阀位置 x_i 不变的,但事实是 x_i 可能受到某种激励而有变化。特别是在自动控制系统中, x_i 将参与反馈回路,伺服作用或多或少会受到 x_o 与 x_i 之间的反馈影响。舵面复阻抗是一个受多重因素影响的动力学特性。除了理想条件下可以估计外,复阻抗的确定必须依靠实验。进一步的研究表明,复阻抗不仅与频率有关,并与振幅、预载均有关。关于复阻抗的解析表达及实验原理见 10.3.2 节。

10.2.2 结构反馈控制回路的动力学特性

飞机的自动控制系统(包括主动控制系统)的控制对象是一架完整的弹性飞机。它必须由传感器感受到飞机的运动。实际上,运动信号上包括了刚体和弹性体结构振动。然后,运动信号传递至自动控制系统,再经伺服器操纵助力器的滑阀,最终传递至作动筒,实现了舵面偏转运动 $\Delta\beta$, 见图 10-4 中虚线所示的部分。

图中所示的各个环节,都有各自的动力学特性。在不同的频率下,其响应都不一样,包括相频、幅频特性。这种由弹性飞机的振动到伺服机构的相互链接作用,是用传递函数来解析表达的。传递函数表示的是输入量-输出量之间的关系。在简谐条件下,它表示了系统的频率响应特性,也就是频率传递函数。图中,有一个“模态参数”方框,它把飞机运动从广义坐标 q 转

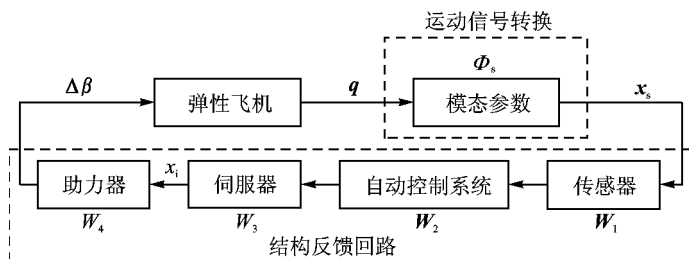


图 10-4 结构反馈控制回路

化为可量测量 x_s 。假定图 10-4 是飞机的纵向控制回路,控制飞机的俯仰运动,这是一个单输入、单输出系统。在这一回路中,传感器应该是接收飞机在垂直平面内的对称振动的,所以一个是位于机身的角速度传感器(陀螺),用来接受飞机的俯仰角速度 ω_z ;另一个是位于机身的加速度计,用来接受飞机的垂直振动过载 n_y 。在气动伺服弹性分析中,这些传感器也应该反映其动力特性,一般地,可用二阶传递函数来表示。

设传感器感受到的信号为 ω_z 和 n_y ,而飞机的振动位移用广义坐标 q 和固有模态表示,则必有关系式

$$x_s = \begin{bmatrix} \omega_z \\ n_y \end{bmatrix} = \Phi_s q \quad (10-1)$$

其中, Φ_s 表示了飞机振动的广义坐标 q 到传感器测量信号 x_s 之间的传递。矩阵 Φ_s 称为模态参数矩阵,不难推测其元素与振动模态有关,详见 10.4 节。

在图 10-4 的各环节方框外示以传递函数的符号 W_1, W_2, W_3 和 W_4 ,则按串连规则,可方便地得出 $\Delta\beta$ 与各环节的关系

$$\Delta\beta = W_4 W_3 W_2 W_1 x_s = W_{\Delta\beta, x_s} x_s \quad (10-2)$$

或

$$W_{\Delta\beta, x_s} \Phi_s q = W_{\Delta\beta, q} q \quad (10-3)$$

式中, $W_{\Delta\beta, x_s}$ 和 $W_{\Delta\beta, q}$ 分别表示了 x_s 对 $\Delta\beta$ 和 q 对 $\Delta\beta$ 的传递函数矩阵。

10.3 气动伺服弹性运动方程的建立

10.3.1 自由度和运动方程

在气动伺服弹性及其稳定性的分析中,对于飞机运动,首先要建立运动方程。方程是以全机为对象,这一点不同于以往以部件为对象的情况。全机运动的支持条件是自由-自由状态,所以它还会有刚体运动。

飞机是一个弹性体,严格来说,具有无穷多个自由度;为了要把它减少为有限个自由度,必



须采用广义坐标作为自由度。根据自由-自由的边界条件,全机自由度的选择应包括飞机的刚体运动和参与颤振的重要弹性振动模态。广义坐标用 $q(t)$ 表示。当刚体运动频率远低于弹性固有频率时,也可以不考虑刚体自由度。这个“远低”的含义,有的文献中提的是相差两个倍频程,一般地还应该包括舵面的旋转自由度,通常用 $\beta(t)$ 或 $\delta(t)$ 表示。特别是对于有全动尾翼的情况,尽管伺服操纵系统要比人力操纵系统刚硬得多,但由于其质量和转动惯量的加大,使舵面旋转频率降低,于是旋转自由度仍然十分重要。

假设飞机结构是线性系统,飞机运动以体轴的初始平衡位置为起始。如前所述,根据假定形态法,飞机运动可以表示为广义坐标与相应模态的线性组合。不失一般性,认为系统由 n 个自由度组合,其中含有一个舵面旋转自由度,于是,飞机振动位移可以表示为

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x, y) q_i(t) + f_\beta(x, y) \beta(t) \quad (10-4)$$

式中, $f_i(x, y)$ 表示第 i 阶飞机全机固有振动模态(即 f_i),与广义坐标 $q_i(t)$ 对应; x, y 系飞机平面坐标。通常,对于伺服操纵的飞机,在计算 f_i 时都假定用刚性体代替助力器。因为只有这样,排除了液压系统有能源输入这一事实,也只有不存在伺服作用的完全被动飞机才能考虑为基本的弹性力学系统,从而得到 f_i 。

$f_\beta(x, y)$ 是舵面旋转形态(即 f_β),这里假定为刚体偏转(当然也可以是舵面弹性旋转模态),与广义坐标 $\beta(t)$ 对应。而对于这个自由度,要考虑舵面的复阻抗。复阻抗表征了舵面操纵系统的伺服作用。

考虑到本章后续各节内容的需要,因此运动方程将采用频域的表达式,以便于应用频域方法求解稳定性时可直接应用。列写运动方程分两部分展开:第一部分对自由度 $q(t)$;第二部分对自由度 $\beta(t)$ 。注意,在气动伺服弹性系统的运动方程中,比通常的运动方程增加了控制力 Q 。这一控制力是由控制系统反馈而回输至飞机的舵面附加偏角 $\Delta\beta$ 所引入的。 $\Delta\beta$ 不同于自由度 $\beta(t)$ 。

① 对于自由度 $q(t)$,运动方程的频域表达式为矩阵方程,即

$$-\omega^2 [M_{qq} \quad M_{q\beta}] + \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} + [K_{qq} \quad 0] \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho V^2 [A_{qq} \quad A_{q\beta}] \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} = Q_{q, \Delta\beta} + P_q \quad (10-5)$$

式中, M, K, A 分别是飞机的广义质量、广义刚度和广义非定常气动力矩阵。显然, $K_{q\beta}$ 应为零列阵。

$Q_{q, \Delta\beta}$ 是因附加偏转 $\Delta\beta$ 引起的对应于广义坐标 $q(t)$ 的控制力列阵,反映了伺服控制系统的反馈作用。它由舵面广义质量和广义气动力组成,即

$$Q_{q, \Delta\beta} = \omega^2 M_{q, \Delta\beta} \Delta\beta - \frac{1}{2} \rho V^2 A_{q, \Delta\beta} \Delta\beta \quad (10-6)$$

P_q 是对应于广义坐标 $q(t)$ 的与运动无关的广义外力列阵,显然,对于气动伺服弹性稳定性问题, P_q 为零。



由此可以得出,求解气动伺服弹性稳定性问题时,对于广义坐标 $q(t)$,运动方程的频域表达式为矩阵方程组,即

$$\left[-\omega^2 [M_{qq} \quad M_{q\beta}] + [K_{qq} \quad 0] + \frac{1}{2} \rho V^2 [A_{qq} \quad A_{q\beta}] \right] \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} = Q_{q, \Delta\beta} \quad (10-7)$$

当上式中 $Q_{q, \Delta\beta}$ 为零时,问题转化为单独飞机的开环状态。式中矩阵 M_{qq} 的元素(用离散形式)为(参见 8.1.1 节)

$$M_{ij} = f_i^T M f_j = \begin{cases} M_{ii} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10-8)$$

列阵 $M_{q\beta}$ 的元素(用离散形式)为

$$M_{i\beta} = f_i^T M f_{\beta} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10-9)$$

广义气动力矩阵 A_{qq} 和列阵 $A_{q\beta}$ 的元素取决于所选非定常气动力理论。以常用的偶极子格网法为例,参见 8.1.2 节,则有

$$A_{ij} = f_i \Delta S D^{-1} \left(f'_j + i \frac{\omega}{V} f_j \right) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10-10)$$

以及

$$A_{i\beta} = f_i \Delta S D^{-1} \left(f'_{\beta} + i \frac{\omega}{V} f_{\beta} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10-11)$$

式中, f' 表示 f 对 x 的偏导, ΔS 为对角阵。同理,可以得到式(10-6)中 $M_{q, \Delta\beta}$ 和 $A_{q, \Delta\beta}$ 的类似形式。

② 对于自由度 $\beta(t)$,由于列写运动方程时,将出现由复阻抗形式表示的舵面操纵刚度,所以,要根据助力器的具体形式来确定。

这里以一种典型形式作为示例,选用图 10-5 所示的直线运动的液压助力器,且分油活门(滑阀)与作动筒是连为一体的。图中显示了各位置处的位移 x 和各部分的弹性等效刚度。 x_i 为分油活门的位移, x_i 与 x_o 的相对运动决定了油门的开启程度。 x_m 反映了舵面偏转,它与舵面偏角 β 的关系式是由摇臂等效长度 μ 确定的,即有

$$x_m = \mu \beta \quad (10-12)$$

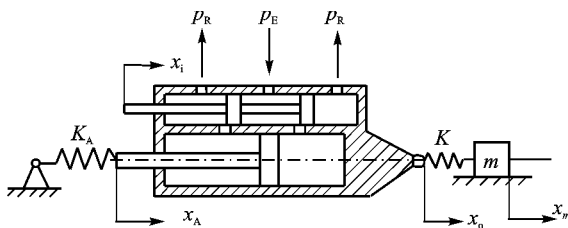


图 10-5 直线运动助力器示意图



从而,对于单一舵面偏转自由度的运动方程,其频域表达式为单一方程

$$-\omega^2 [M_{\beta q} \quad M_{\beta\beta}] \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} + K(x_m - x_o)\mu + \frac{1}{2}\rho V^2 [A_{\beta q} \quad A_{\beta\beta}] \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} = Q_{\beta, \Delta\beta} + F_{\beta} \quad (10-13)$$

式中, $K(x_m - x_o)\mu$ 表征了舵面旋转复阻抗项, K, x_m, x_o 含意见图 10-5, μ 为摇臂有效长度; $M_{\beta q}, M_{\beta\beta}$ 分别为广义质量; $A_{\beta q}, A_{\beta\beta}$ 分别是广义非定常气动力; $Q_{\beta, \Delta\beta}$ 是因控制系统反馈至舵面的 $\Delta\beta$ 而附加于飞机的对应于广义坐标 β 的控制力,由广义质量力和气动力组成,即

$$Q_{\beta, \Delta\beta} = \omega^2 M_{\beta, \Delta\beta} \Delta\beta - \frac{1}{2}\rho V^2 A_{\beta, \Delta\beta} \Delta\beta \quad (10-14)$$

F_{β} 是与运动无关的对应于广义坐标 β 的广义外力。同样,在稳定性问题中, F_{β} 项为零。

由此可以得出,求解气动伺服弹性稳定性问题时,对于自由度 β ,运动方程的频域表达式为

$$\left[-\omega^2 [M_{\beta q} \quad M_{\beta\beta}] + \frac{1}{2}\rho V^2 [A_{\beta q} \quad A_{\beta\beta}] \right] \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} + K(x_m - x_o)\mu = Q_{\beta, \Delta\beta} \quad (10-15)$$

上式中,当 $Q_{\beta, \Delta\beta}$ 为零时,问题转化为单独飞机的开环情况。

式中行阵 $M_{\beta q}$ 为式(10-9)的转置。其元素为

$$M_{\beta j} = f_{\beta}^T M f_i \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10-16)$$

元素 $M_{\beta\beta}$ 为

$$M_{\beta\beta} = f_{\beta}^T M f_{\beta} \quad (10-17)$$

广义气动力行阵 $A_{\beta q}$ 和单一元素 $A_{\beta\beta}$ 取决于所选非定常气动力理论,以常用的偶极子格网法为例,则有

$$A_{\beta j} = f_{\beta} \cdot \Delta S \cdot D^{-1} \left(f'_j + i \frac{\omega}{V} f_j \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10-18)$$

$$A_{\beta\beta} = f_{\beta} \cdot \Delta S \cdot D^{-1} \left(f'_{\beta} + i \frac{\omega}{V} f_{\beta} \right) \quad (10-19)$$

同理,还可以得出式(10-14)中 $M_{\beta, \Delta\beta}$ 和 $A_{\beta, \Delta\beta}$ 的表达式。

联立方程(10-7)和方程(10-15),即为考虑舵面偏转自由度情况下的气动伺服弹性稳定性分析的运动方程。

在某些特定的条件下,当确认舵面伺服操纵系统的刚度足够大,舵面旋转频率很高时,舵面偏转自由度 β 在全机颤振中可以略去,此时,稳定性分析的运动方程中去掉式(10-15),只保留式(10-7),并在其中去掉与 β 有关的项,即由式(10-7)简化为

$$\left(-\omega^2 M_{qq} + K_{qq} + \frac{1}{2}\rho V^2 A_{qq} \right) q = Q_{q, \Delta\beta} \quad (10-20)$$

10.3.2 复阻抗

式(10-13)中,考虑到舵面伺服操纵的刚度,按图 10-5 所示的助力器形式,引入了舵面



旋转有效刚度——复阻抗项 $\mu K(x_m - x_o)$ 。

复阻抗是由于液压伺服操纵而呈现的动力学特性,它受到很多实际因素的牵制,所以,必须进行实验。作为一个示例,图 10-5 中展示的是作直线运动的助力器,而且分油活门和作动筒做成一体。在这些前提下,对助力器复阻抗可作以下分析。

在线性假设下,对于助力器有下列方程:

平衡方程为

$$A\Delta p + K(x_m - x_o) = 0 \quad (10-21)$$

$$A\Delta p + K_A x_A = 0 \quad (10-22)$$

流量方程和连续方程为

$$Q = C_e e - C_p \Delta p \quad (10-23)$$

$$A(\dot{x}_o - \dot{x}_A) + \frac{V_1}{4N} \Delta \dot{p} = C_e e - C_p \Delta p \quad (10-24)$$

分油活门开启度为

$$e = n(x_i - x_o) \quad (10-25)$$

式中 A ——助力器活塞面积;

Δp ——进油和回油的液压差;

Q ——流量;

C_e, C_p ——流量系数;

V_1 ——助力器工作体积;

N ——流体弹性模量;

e ——分油活门开启度;

n —— $x \sim e$ 的传递比。

其他符号参见图 10-5。

联立式(10-21)~(10-25),并代入简谐振动条件,则可得到 x_o, x_m 和 x_i 之间有以下关系式:

$$x_o = \frac{K\Delta_1}{K\Delta_1 + A(C_e n + i\omega A)} x_m + \frac{AC_e n}{K\Delta_1 + A(C_e n + i\omega A)} x_i \quad (10-26)$$

式中

$$\Delta_1 = \frac{i\omega V_1}{4N} + \frac{i\omega A^2}{K_A} + C_p \quad (10-27)$$

注意, x_m 与舵面偏角 β 有关系式(10-12),于是有

$$K(x_m - x_o)\mu = K\mu^2 \left[\frac{A(C_e n + i\omega A)}{K\Delta_1 + A(C_e n + i\omega A)} \beta - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{AC_e n}{K\Delta_1 + A(C_e n + i\omega A)} x_i \right] = \mu^2 K_{\beta\beta} \beta + \mu H_{Fx_i} x_i \quad (10-28)$$

式中



$$K_{\beta\beta} = \frac{A(C_e n + i\omega A)}{\frac{i\omega V_1}{4N} + C_p + \frac{i\omega A^2}{K_A} + \frac{A}{K}(C_e n + i\omega A)} \quad (10-29)$$

$$H_{Fx_i} = - \frac{AC_e n}{\frac{i\omega V_1}{4N} + C_p + \frac{i\omega A^2}{K_A} + \frac{A}{K}(C_e n + i\omega A)} \quad (10-30)$$

式中, $K_{\beta\beta}$ 称为助力器复阻抗。它反映了当分油活门保持不动时, 助力器对舵面旋转自由度 β 的有效刚度。从式(10-29)可见, 它是频率 ω 的函数, 又称复刚度。 H_{Fx_i} 称为助力器的传递特性。它反映了分油活门的运动 x_i 对舵面旋转产生的作用。由式(10-30)可见, H_{Fx_i} 也随频率而变化。有了以上认识, 就不难从中得出测量复阻抗的实验装置。在图 10-6 所示的实验装置中, 固定 x_i , 测出 $\bar{F}/x_m$, 即为 $K_{\beta\beta}$; 在图 10-7 所示的实验装置中, 固定 x_m , 测出 $\bar{F}/x_i$, 即为 H_{Fx_i} 。

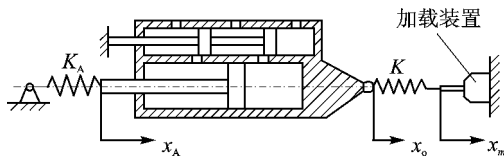


图 10-6 $\bar{F}/x_m$ 测量的实验原理

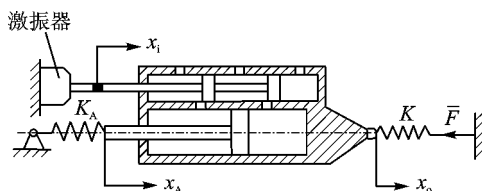


图 10-7 $\bar{F}/x_i$ 测量的实验原理

这里, 还要提到另一种助力器的形式。其主要不同点在于分油活门与作动筒不在一体上, 或是直接可以控制油门开启程度的情况, 亦即 e 与 x_o, x_i 无关。此时, 已无需关系式(10-25), 于是有

$$x_o = \frac{K\Delta_1}{K\Delta_1 + i\omega A^2} x_m + \frac{AC_e}{K\Delta_1 + i\omega A^2} e \quad (10-31)$$

式中, Δ_1 见式(10-27)。

由此得出

$$K\mu(x_m - x_o) = K\mu^2 \left(\frac{i\omega A^2}{K\Delta_1 + i\omega A^2} \beta - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{AC_e}{K\Delta_1 + i\omega A^2} e \right) = \mu^2 K_{\beta\beta} \beta + \mu H_{Fe} e \quad (10-32)$$

式中



$$K_{\beta\beta} = \frac{i\omega A^2}{\frac{i\omega V_1}{4N} + C_p + \frac{i\omega A^2}{K_A} + \frac{i\omega A^2}{K}} \quad (10-33)$$

$$H_{Fe} = - \frac{AC_e}{\frac{i\omega V_1}{4N} + C_p + \frac{i\omega A^2}{K_A} + \frac{i\omega A^2}{K}} \quad (10-34)$$

对于这种形式,完全可以仿照前述助力器的方式去进行实验,以测出此种形式的复阻抗和传递特性。在图 10-8 所示的实验装置中,测出 $\bar{F}/x_m$ 即为 $K_{\beta\beta}$;在图 10-9 所示的实验装置中,测出 $\bar{F}/e$,即为 H_{Fe} 。

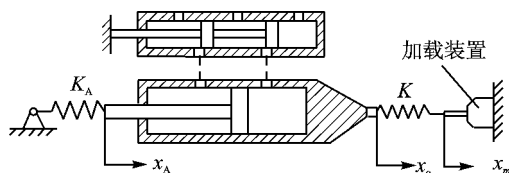


图 10-8 当分油活门与作动筒不在一体时 $\bar{F}/x_m$ 测量的实验原理

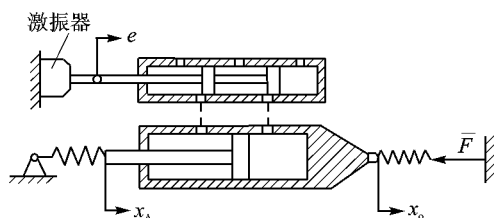


图 10-9 $\bar{F}/e$ 测量的实验原理

图 10-10 是按式(10-29)绘出的复阻抗函数 $K_{\beta\beta}(\omega)$ 。作为一个示例,虽然这仅仅是在线性假设、无预载的条件下的计算值,但也具有一定的参考意义。它表明了复阻抗的实部和虚部的对比,虚部在频率稍高时比实部要小很多。在低频段,不论实部、虚部,随频率变化都较快,随后的变化都趋于平缓。可以认为,此时液压伺服作用趋于零。

应当指出,复阻抗是必须通过实验来确定的。本节关于复阻抗的公式,也只是有助于分析、认识其动力学特性,并且为复阻抗的实验提供一个原理性的基础。

在实际飞机的例子中,也曾发现过不考虑阻抗项中与 x_i 有关的部分(即略去传递特性),其伺服气动弹性稳定性结果变化不大的情况;甚至不考虑阻抗项的

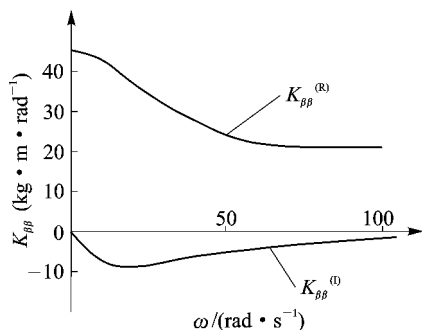


图 10-10 复阻抗函数 $K_{\beta\beta}(\omega)$



虚部,而以实刚度来计算,其结果差别也不明显。所以,对复阻抗的考虑也要具体分析。

10.4 气动伺服弹性稳定性分析的频域方法

气动伺服弹性稳定性分析中最常用的且又具有普遍适用性的方法是频域方法,特别是因为本问题的特点在于跨越了气动弹性与控制理论两个学科,所以,利用经典控制原理中的奈奎斯特方法去解决气动伺服弹性稳定性问题,更是一条顺理成章的途径。而奈奎斯特方法是一个频域方法。说到频域方法,自然会考虑到解决经典颤振问题的 $V-g$ 法和 $p-k$ 法,它们也同属频域方法。如果把式(10-3)的关系式

$$\Delta\beta = W_{\Delta\beta,q}q$$

代入运动方程组式(10-7)和式(10-15)中,则方程可以重新合并为广义坐标 q 的齐次方程组,从而归结为求解颤振的复特征值问题。但求解过程中,由于阻抗是频率 ω 的函数,所以只有当解得的实数颤振频率 ω_F 正好等于求解之初用于 $K_{\beta\beta}(\omega)$ 与 $H_{Fxi}(\omega)$ 的频率 ω 时,才具有真实的物理意义。这种相容性,只有通过迭代和插值才能达成。所以比较而言,奈奎斯特方法更为直观。事实上,它已经被普遍地用于飞机的气动伺服弹性稳定性分析,并得到了实验验证,其置信度是高的。因此在飞机强度和刚度规范中,按此法给出了稳定裕度的指标。

10.4.1 奈奎斯特图线方法在气动伺服弹性稳定性分析中的应用

本方法源于经典控制理论,它适用于单输入、单输出线性系统。由于它是频域方法,所以,可以直接应用简谐运动的非定常气动力,并且由本方法求得的闭环系统稳定裕度可以直接与飞机强度、刚度规范的指标相对比。严格地说,它不适用于多输入、多输出系统,但在工程分析中,也有了一些推广应用的方法,其结果也可以应用(见 10.4.5 节)。

本方法的基本特点是利用总的开环系统传递函数的频率响应来绘制奈奎斯特图线,并由该图线判断闭环系统的稳定性及其稳定裕度。

一个典型的闭环系统示于图 10-11。其闭环传递函数在 s 域上为

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (10-35)$$

闭环特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (10-36)$$

式中, s 是复特征根,表示为

$$s = \sigma + i\omega$$

若闭环稳定,则特征根 s 必须均在左半 s 平面,也就是 $1 + G(s)H(s)$ 在右半 s 平面无零点。

奈奎斯特稳定性判据是:为使图 10-11 所示的闭环系统稳定,则当 s 沿虚轴由 $-\infty$ 变到

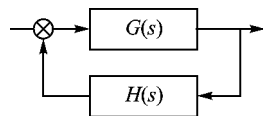


图 10-11 典型的闭环系统



十 ∞ 时,总开环传递函数 $G(i\omega)H(i\omega)$ 在其复平面上的轨迹顺时针包围 $(-1, 0)$ 点的圈数为

$$N_r = Z - P = 0 - P = -P \quad (10-37)$$

式中, Z 是 $1+G(s)H(s)$ 在右半 s 平面的零点,根据闭环稳定条件,已知为零; P 是 $G(s)H(s)$ 在右半 s 平面的极点数,负号表示逆时针方向。这条轨迹,称为奈奎斯特图线。

联系到气动伺服弹性稳定性分析,显然,图 10-11 中正向回路的传递函数 $G(s)$ 对应于单独飞机环节,反馈传递函数 $H(s)$ 对应于结构反馈的伺服控制系统。

在应用上述判据时,还应区别不同情况。

大多数的情况是在给定速度条件下,单独飞机是颤振稳定的,单独控制系统也是稳定的,而在组成闭环后对稳定性进行检验。此时,分析的前提是开环稳定,即有 $P=0$ 。若同时要保持气动伺服弹性闭环稳定,即满足 $Z=0$,则由式(10-37),有

$$N_r = 0$$

此式表明,总开环传递函数 $G(i\omega)H(i\omega)$ 的轨迹不包围 $(-1, 0)$ 点。显然,此时只要沿其正半虚轴($\omega=0 \rightarrow \infty$)来绘制奈奎斯特图线即可。

在特殊的情况下,闭环稳定性优于开环,则需要把给定的速度超过单独飞机的颤振速度,然后检验闭环稳定性,这种情况也是可能遇到的。此时,分析的前提是开环不稳定,即 $P \neq 0$ 。考虑到 $G(i\omega)H(i\omega)$ 与 $G(-i\omega)H(-i\omega)$ 对于实轴互为对称,则闭环稳定的条件为:当 $\omega=0 \rightarrow \infty$ 时, $G(i\omega)H(i\omega)$ 在其复平面上的轨迹逆时针包围 $(-1, 0)$ 点的圈数应等于开环不稳定的分支数。

由奈奎斯特图线还可以直接得出该气动伺服弹性闭环系统的稳定裕度(详见 10.4.3 节)。

要想利用奈奎斯特方法来进行气动伺服弹性稳定性分析,就必须将单独飞机和伺服控制系统分别等效为图 10-11 所示的传递函数 $G(s)$ 和 $H(s)$ (实际用的是 $G(i\omega)$ 和 $H(i\omega)$),并且要预先计算单独飞机开环颤振的临界速度 V_{F0} ,以及确认该情况下控制系统是设计稳定的,这样才能使应用判据时有明确的前提。

10.4.2 传递函数的确定

这里主要推导的是单独飞机环节的传递函数,记作 $W_{q, \Delta\beta}$,其下标表示以 $\Delta\beta$ 为输入、 q 为输出的传递。飞机环节处于正向回路。至于传感器、伺服控制系统的传递函数应由控制设计部门给定。

根据以下的推导,将会发现由于伺服控制的舵面把复阻抗引入运动方程,使飞机环节传递函数要用 W_{q, x_i} (或 $W_{q, e}$) 来表示,其下标表示以 x_i (或 e) 为输入、以 q 为输出的传递,参看图 10-4。

已知运动方程组为式(10-7)和式(10-15),考虑到式(10-6)和式(10-14),则有

$$\begin{aligned} \left[-\omega^2 [M_{qq} \quad M_{q\beta}] + [K_{qq} \quad 0] + \frac{1}{2}\rho V^2 [A_{qq} \quad A_{q\beta}] \right] \begin{bmatrix} q \\ \beta \end{bmatrix} = \\ \left[\omega^2 M_{q, \Delta\beta} - \frac{1}{2}\rho V^2 A_{q, \Delta\beta} \right] \Delta\beta \end{aligned} \quad (10-38)$$



和

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 [\mathbf{M}_{\beta q} \quad \mathbf{M}_{\beta\beta}] + \frac{1}{2} \rho V^2 [\mathbf{A}_{\beta q} \quad \mathbf{A}_{\beta\beta}] \right] \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \beta \end{bmatrix} + K(x_m - x_o) \mu = \\ & \left[\omega^2 \mathbf{M}_{\beta, \Delta\beta} - \frac{1}{2} \rho V^2 \mathbf{A}_{\beta, \Delta\beta} \right] \Delta\beta \end{aligned} \quad (10-39)$$

式中,复阻抗项见式(10-28),它表示成 β 和 x_i 的组合(或在另一种助力器情况下,表示成 β 和 e ,见式(10-32),以下均略此说明)。同时注意到上列方程组的输入控制力的 $\Delta\beta$ 项,可以与 x_i 有传递关系(参看图10-4),即

$$\Delta\beta = W_4 x_i \quad (10-40)$$

式中, W_4 是助力器传递函数。

把式(10-40)代入式(10-38)和式(10-39),则有运动方程

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 [\mathbf{M}_{qq} \quad \mathbf{M}_{q\beta}] + [\mathbf{K}_{qq} \quad \mathbf{0}] + \frac{1}{2} \rho V^2 [\mathbf{A}_{qq} \quad \mathbf{A}_{q\beta}] \right] \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \beta \end{bmatrix} = \\ & \left[\omega^2 \mathbf{M}_{q, \Delta\beta} - \frac{1}{2} \rho V^2 \mathbf{A}_{q, \Delta\beta} \right] W_4 x_i \end{aligned} \quad (10-41)$$

和

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 [\mathbf{M}_{\beta q} \quad \mathbf{M}_{\beta\beta}] + \frac{1}{2} \rho V^2 [\mathbf{A}_{\beta q} \quad \mathbf{A}_{\beta\beta}] \right] \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \beta \end{bmatrix} + \mu^2 K_{\beta\beta} \beta + \mu H_{F x_i} x_i = \\ & \left[\omega^2 \mathbf{M}_{\beta, \Delta\beta} - \frac{1}{2} \rho V^2 \mathbf{A}_{\beta, \Delta\beta} \right] W_4 x_i \end{aligned} \quad (10-42)$$

令 $x_i=1$,由上列方程组(10-41),(10-42)可求得单独飞机环节(用广义坐标表示)的频率响应 q ,此即为频域传递函数(列阵),记作 W_{q, x_i} ,亦即图10-11中的 $G(s)$ (此时 $s=i\omega$)。

还要求得反馈回路的传递函数(行阵),记作 $W_{x_i, q}$ 。它表示以飞机振动广义坐标 q 为输入,分油活门振动位移 x_i 为输出的传递。这里仍以图10-4为一示例。结构反馈传递函数为

$$W_{\Delta\beta, q}(s) = W_4(s)W_3(s)W_2(s)W_1(s)\Phi_s(s) \quad (10-43)$$

$$W_{x_i, q}(s) = W_3(s)W_2(s)W_1(s)\Phi_s(s) \quad (10-44)$$

式中 W_1, W_2, W_3, W_4 ——由控制设计部门提供,一般均表示为拉氏域(s)形式;

W_4 ——助力器传递函数,一般为一阶环节;

W_3 ——伺服器传递函数,一般为二阶环节;

W_2 ——自动控制和稳定系统或主动控制律等;

W_1 ——传感器传递函数,一般为二阶(为了反映动态特性,不能用比例环节);

Φ_s ——模态参数变换。

模态参数变换这一环节只是为了进行计算而设置的。因为广义坐标 q 是不能量测的,所以要通过 Φ_s 使之转化为可量测的角速度或过载等。 Φ_s 的功能是把固有振动模态转换为角速度传感器所在位置的角速度和加速度计所在位置的过载。固有模态要对应于传感器所在部件



的模式。以飞机的纵向回路为例,传感器感受的是俯仰角速度 ω_z 和垂直过载 n_y (以机身体轴为基准),它们安装于机身上。若机身的垂直面内弯曲振动用 $w(x, t)$ 表示, x 为机身纵轴,则有下列拉氏域(s)表达式:

$$\omega_z = 57.3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 57.3 s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (10-45)$$

和

$$n_y = \frac{1}{g} \left(\frac{d^2 w}{dt^2} \right) = \frac{1}{g} s^2 w \quad (10-46)$$

根据式(10-1)和式(10-4),则有

$$\begin{bmatrix} \omega_z \\ n_y \end{bmatrix} = \Phi_s q$$

从而可知

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} 57.3s & \\ & \frac{s^2}{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_G{}^{(1)} & f'_G{}^{(2)} & \cdots & f'_G{}^{(n-1)} \\ f_A{}^{(1)} & f_A{}^{(2)} & \cdots & f_A{}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (10-47)$$

式中 $f'_G{}^{(i)}$ ——角速度传感器位置处第 i 阶机身模式对 x 的斜率;

$f_A{}^{(i)}$ ——加速度传感器位置处第 i 阶机身模式。

将式(10-47)代入式(10-44),且已知 $W_1(s) \sim W_4(s)$ 由控制部门提供,利用简谐条件 $s = i\omega$,则可得频域传递函数 $W_{x_i, q}$,亦即图 10-11 中的 $H(s)$ (此时 $s = i\omega$)。至此可求得总的开环传递函数 W 为

$$W = W_{x_i, q} W_{q, x_i} \quad (10-48)$$

值得提出的是,若不计阻抗项中的 x_i 影响,则阻抗表达式(10-28)简化为

$$K(x_m - x_o)\mu \approx \mu^2 K_{\beta\beta} \beta$$

以此式代入方程组式(10-38)和式(10-39),则可方便地解出 $W_{q, \Delta\beta}$ 。对应地,将式(10-47)代入式(10-43),即可求得 $W_{\Delta\beta, q}$,最终,其总开环传递函数由式(10-48)改为

$$W = W_{\Delta\beta, q} W_{q, \Delta\beta} \quad (10-49)$$

事实上,由于在稳定性分析中,感兴趣的频率处于较高的弹性振动频率段,此时, x_i 的影响可能已经不重要了,所以,式(10-49)的形式是经常采用的。

甚至由于同样的原因,更进一步可假定复阻抗的虚部很小,以至于也可以略去。刚度项直接应用地面振动实验得出的实刚度,以它代替复阻抗来求解气动伺服弹性稳定性,也可得到工程上有意义的结果。这里所指的地面振动实验是将全机置于柔性支持上进行,作动筒充以油压,但传感器反馈是断开的。

但以上涉及的简化,都必须以充分的分析和长足的经验为基础,很多先期的积累是至关重要的。



10.4.3 气动伺服弹性系统稳定裕度的确定

根据 10.4.2 节的推导,可将飞机的气动伺服弹性闭环表示为图 10-11 那样的形式,如图 10-12 所示。按奈奎斯特图线法在复平面上绘制总开环的奈奎斯特图线,即可判定其稳定性。已知总开环传递函数为

$$W = W_{x_1, q} W_{q, x_1}$$

应当注意的是,在绘制前,应首先确定单独飞机的颤振速度,而且要保证飞机地面(风速 $V=0$)闭环稳定,因为地面失稳,就没有必要讨论空中的稳定性了。图 10-13 表示了某架飞机在给定的速度、高度下的奈奎斯特图线。图中的横、纵坐标分别是总开环传递函数 W 的实部和虚部。

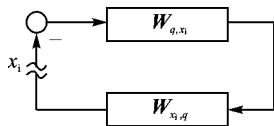


图 10-12 气动伺服弹性闭环系统

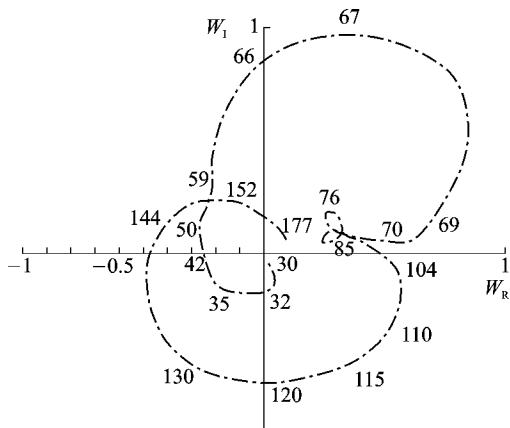


图 10-13 典型的飞机气动伺服弹性的奈奎斯特图线

由图 10-13 可见,该曲线在给定的速度、高度下没有包围 $(-1, 0)$ 点。它与负实轴交于 0.46,即在实轴上有负穿越点 $(-0.46, 0)$ 。沿曲线走向,旁注了频率值。当频率在 130~144 之间的某一频率时,曲线与 $(-1, 0)$ 点最为接近。可以预见,当给定的速度增大或系统的增益加大,使曲线扩大至恰好穿过 $(-1, 0)$ 点时,则对应于临界稳定状态。

闭环稳定裕度是稳定性分析的最终结果。稳定裕度包括了幅值裕度和相位裕度。其判断方法可由曲线直接得到。通用的方法用图 10-14 表明。

令 A 点是奈奎斯特图线穿过负实轴且与 $(-1, 0)$ 点距离最近的点。若系统为开环稳定,则幅值裕度为

$$L = 20 \log \frac{1}{|G(i\omega_A)H(i\omega_A)|} \text{dB} \quad (10-50)$$

单位为分贝(dB)。 ω_A 是 A 点的频率。

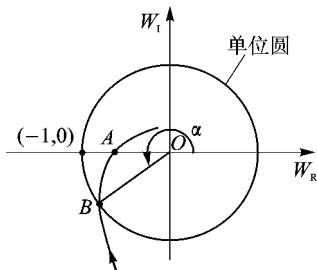


图 10-14 稳定裕度的确定

再令 B 点是奈奎斯特图线穿过单位圆, 且与负实轴的夹角最小的交点, 则相位裕度为

$$\theta = 180^\circ + \angle G(i\omega_B)H(i\omega_B) = 180^\circ + \alpha \quad (10-51)$$

单位为度($^\circ$)。 ω_B 是 B 点的频率。显然, 若无交点, 则说明相位裕度足够。相位裕度表示了使系统从稳定转变为不稳定所允许的相位偏移。

联系到图 10-13 所示的飞机, 经检验其开环为稳定, 所以在作气动伺服弹性稳定性的判定时, 可按式(10-50)得出闭环

系统的幅值裕度为

$$L = (0 - 20 \log 0.46) \text{ dB} = 6.8 \text{ dB}$$

曲线与单位圆无交点, 说明相位裕度足够。曲线穿越负实轴时的频率以及负穿越点离 $(-1, 0)$ 点的距离是人们最感兴趣的, 距离变近, 则幅值稳定裕度变小。若系统的增益提高 $1/0.46$ 倍, 则恰为临界状态; 再继续提高, 则闭环系统由稳定转入不稳定。

在“飞机的强度和刚度规范”中, 对于气动伺服弹性稳定性的稳定裕度, 有明确的规定。条款规定, 幅值裕度为 6 dB, 相位裕度为 60° 。这在气动弹性设计中是必须满足的。根据式(10-50), 不难看出, 6 dB 对应于实轴上有负穿越点 $(-0.5, 0)$ 。

10.4.4 不利耦合的排除

事实上, 假如飞机设计中没有专门关注气动伺服弹性问题, 或尚未采取必需的措施, 那么飞机发生气动伺服弹性不稳定并非罕见。这是因为现代飞机设计中, 弹性飞机结构的振动特性与伺服控制反馈系统的动力学耦合是客观存在的。但这种耦合可以采取不同的方法去减弱, 甚至排除。其基本途径可以有两种: 一种是尽量减少传感器所感受到的结构反馈信号; 另一种是在反馈回路中增设滤波器, 对信号进行陷幅或移相。

第一种途径最直接的方法是正确设置传感器的位置, 使它尽量减少感受到有关固有振型的弹性振动。例如, 若某飞机发生气动伺服弹性失稳的主要因素是反馈了机身第一阶弯曲振动模式, 那么, 为了减少耦合, 应把加速度计尽量安排在该模式的节点附近, 并且把俯仰角速度陀螺尽量安置在该模式的斜率接近于零的位置, 如图 10-15 所示。

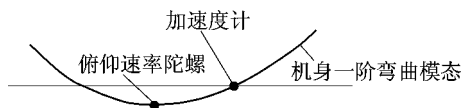


图 10-15 减少结构反馈的传感器位置示例



当然,图中的位置完全是一种理想位置,事实上,零信号的布局是难以实现的;但这种方法总是或多或少会奏效的,设计者都应该把它列为一种措施。

另一种途径是在反馈控制回路中增加结构陷幅滤波器,这是一种通用、可靠的方法。假如飞机气动伺服弹性不稳定中有某个主要的危险频率,在这个频率附近,其响应幅值有急剧升高,相位又很不利,则陷幅滤波器的作用可以使系统在危险频率附近振幅迅速变小,呈陷落状态,并产生合适的相移。有无结构陷幅滤波器在奈奎斯特图(或柏德图)上有明显的区别,如图 10-16 和图 10-17 所示。以某型战斗机为例,对于同一给定速度 510 m/s,图 10-16 表示无结构陷幅滤波器时的奈奎斯特图线,负穿点为 $(-1.5, 0)$,说明闭环不稳定;图 10-17 表示的是有结构陷幅滤波器时,负穿点移至 $(-0.27, 0)$,说明闭环稳定。前者的相位裕度很小,后者则位于单位圆内,相位裕度足够。由此可见,由于陷幅滤波器的设置,使原来不稳定的气动伺服弹性系统转变为稳定的。所以设置陷幅滤波器是设计者不可缺少的措施。一般地其传递函数的形式为

$$W_n = \frac{s^2 + 2\xi_1\omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\xi_2\omega_2 s + \omega_2^2}$$

式中, ω_1, ω_2 接近陷幅频率,其参数选择应保证总开环传递函数的频率响应降至有 6 dB 的稳定裕度。这种滤波器的优点是凹口的深度和宽度可以独立地调节,且其相位特性较好。

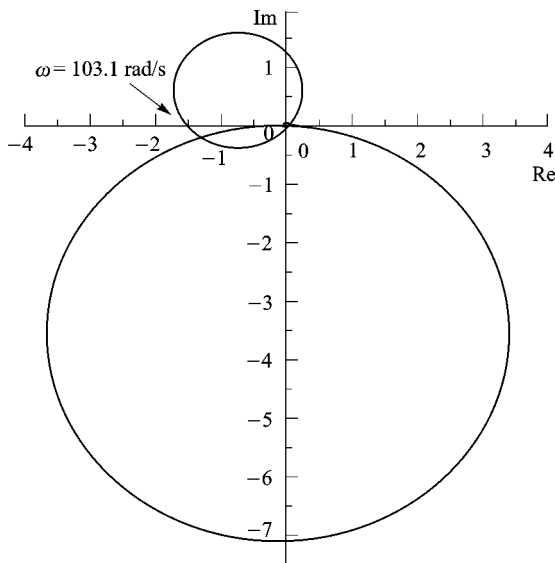


图 10-16 不带陷幅滤波器的奈奎斯特图线

图 10-18 是典型的结构陷幅滤波器的幅频、相频特性。图中的幅值用分贝表示。

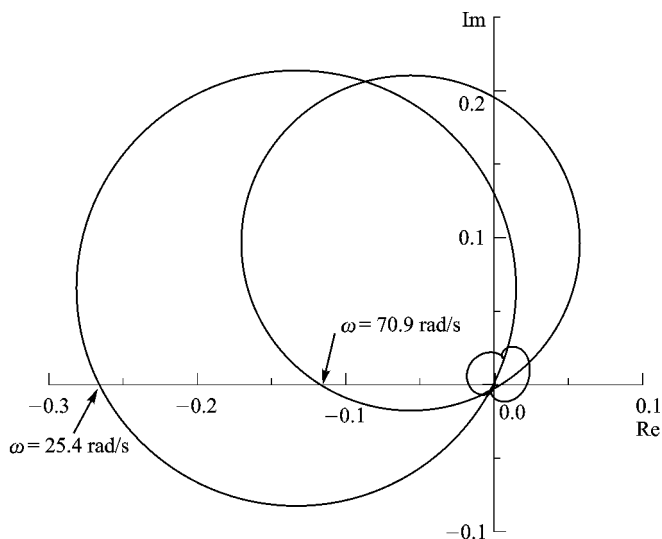


图 10-17 带有陷幅滤波器的奈奎斯特图线

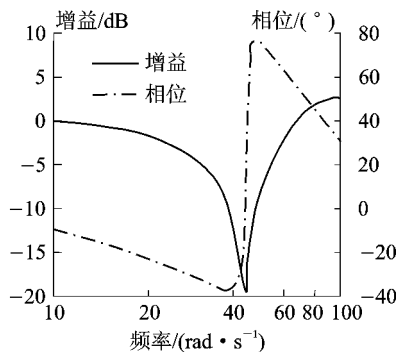


图 10-18 陷幅滤波器的幅频、相频特征

10.4.5 频域方法在多回路气动伺服弹性稳定性分析中的应用

飞机的操纵有时是互相关联的,例如飞机的偏航和滚转就是如此。因此在研究气动伺服弹性问题时,还会遇到多个控制回路之间存在耦合,其控制舵面是多个的情况,如有副翼、方向舵,甚至还有差动的平尾。一个参考的飞行控制系统如图 10-19 所示。这是一个偏航/滚转双回路系统。

图 10-19 中,偏航回路控制方向舵 δ_r ,滚转回路控制副翼 δ_a 和差动平尾 δ_H (以 1 : 0.25 为比率)。但两个回路之间是有交叉的。由于运动是非对称的,所以传感器量测的是侧向加速度 a_y 、偏航角速度 ω_y 和滚转角速度 ω_x 。

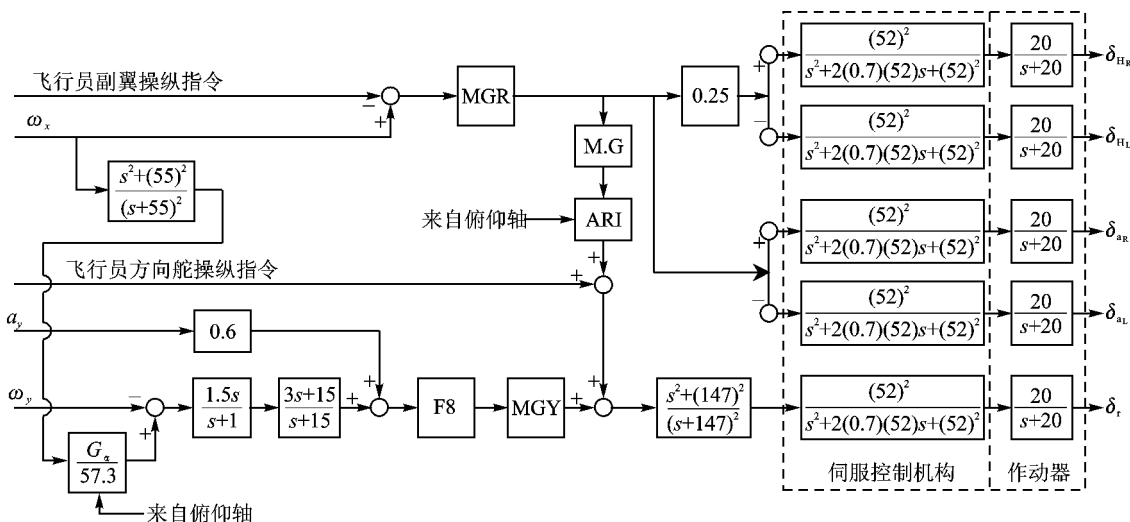


图 10-19 多回路飞行参考系统

上述双回路控制系统与飞机组成闭环系统,就成为气动伺服弹性闭环。如果把两个回路分别孤立为两个单独的回路,计算虽然简单了,但它没有计入两个回路之间的耦合影响,结果就不够可靠。所以,完全切断两个回路之间的联系是不可行的。然而,奈奎斯特方法只适用于单输入、单输出的系统,一旦系统有两个舵面输入(δ_r, δ_a (连带 δ_H)),就出现了矛盾。为了要继续采用奈奎斯特图线法解决两个舵面控制力输入的问题,需要使原系统转化为两个单一舵面输入的问题。

其基本思路是:先在偏航和滚转两个回路中选定一个回路(例如偏航)与单独飞机闭合,而把另一个回路(例如滚转)切断。此时,系统成为单输入(方向舵 δ_r),图 10-20 所示即为某战斗机的偏航回路与飞机的闭合系统。可以用奈奎斯特方法判断该回路的闭环稳定性。当确认该系统的稳定性后,再以这个闭环作为新一轮的“飞机”,并将另一回路(滚转)与之闭合。此时,系统仍然是单输入(副翼 δ_a (连带 δ_H)),从而可以再一次应用奈氏判据确定其稳定性。其过程使一个双回路的气动伺服弹性系统等效为相继分两步闭合的单输入、单输出气动伺服弹性系统。可以用图 10-21 来表示这一方法的过程。

在计算闭环之前,仍然要像前述一样,先要确认单独飞机是开环稳定的,即不发生共振。当选定自由度后,可建立运动方程。由于偏航、滚转是非对称运动,所以自由度应选择主要的反对称和非对称固有振动模态,其中可包括刚体侧向移动、偏航以及滚转。

选定广义坐标为 q ,在控制反馈信号下,方向舵附加偏转为 $\Delta\delta_r$,副翼附加偏转为 $\Delta\delta_a$ 。先按图 10-21 的左边给定的第一步分析。此时,先闭合偏航回路,于是有运动方程

$$Aq = -A_{\Delta\delta_r} \Delta\delta_r \quad (10-52)$$

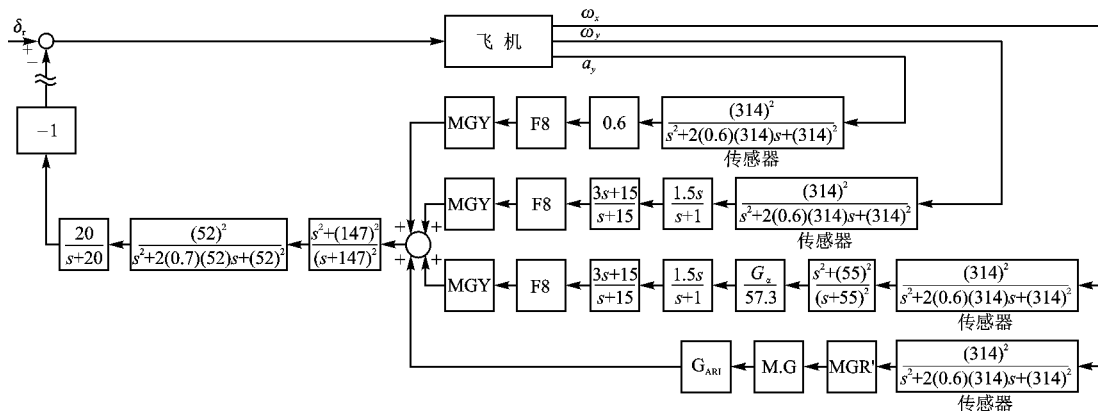


图 10-20 偏航回路与飞机闭合

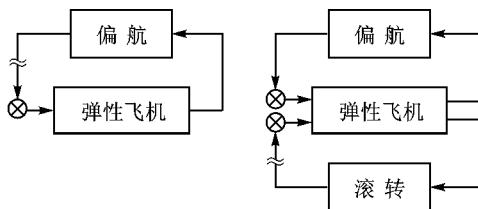


图 10-21 双回路的奈奎斯特方法示意图

式中, A 表示与 q 有关的广义质量、广义刚度和广义气动力各项之和。

如前所述, 等号后为 $\Delta\delta_r$ 引起的控制力。令偏航反馈回路有关系式

$$\Delta\delta_r = W_{\Delta\delta_r, q} q \quad (10-53)$$

式中, $W_{\Delta\delta_r, q}$ 是以 q 为输入、 $\Delta\delta_r$ 为输出的传递函数, 则式 (10-52) 可成为

$$Aq = -A_{\Delta\delta_r} \Delta\delta_r = -A_{\Delta\delta_r} W_{\Delta\delta_r, q} q = -\bar{A}_{\Delta\delta_r} q \quad (10-54)$$

或有齐次方程

$$(A + \bar{A}_{\Delta\delta_r})q = 0 \quad (10-55)$$

对于以式 (10-52) 为运动方程的飞机环节传递函数 $W_{q, \Delta\delta_r}$, 与偏航回路传递函数 $W_{\Delta\delta_r, q}$ 组成总开环后, 就可以按奈奎斯特图线法判断第一步的分析。当该闭环用式 (10-55) 表示时, 可以看出该闭环已形成新一轮的“飞机”。令其行列式

$$|A + \bar{A}_{\Delta\delta_r}| = 0 \quad (10-56)$$

即可判断新一轮“飞机”是否颤振稳定。

接下来要完成的是图 10-21 右边给定的第二步分析。此时, 把新一轮的“飞机”与滚转回路闭合起来, 于是有运动方程

$$(A + \bar{A}_{\Delta\delta_r})q = -A_{\Delta\delta_a} \Delta\delta_a \quad (10-57)$$



等号后为 $\Delta\delta_a$ 引入的控制力。同样地,以式(10-57)为运动方程的新一轮“飞机”环节的传递函数 $W_{q,\Delta\delta_a}$ 与滚转回路传递函数 $W_{\Delta\delta_a,q}$ 再一次组成最终的总开环传递函数。此时系统又成为单输入 $\Delta\delta_a$,所以可以用奈奎斯特图线最后确定双回路的气动伺服弹性稳定性。

注意,图 10-21 所示的闭合顺序是先断开滚转,计算偏航回路;然后在这个基础上,再计算滚转回路也闭合的情况。也可以把顺序倒过来,先断开偏航,计算滚转,再计算偏航也闭合的情况。这两种不同顺序的计算结果可以互相验证。但若其中有一个回路稳定,而另一个不稳定,以至于造成双回路不稳定,那么,倒换顺序再算一次,则更有利于确认哪一个是导致失稳的诱因,以便于有效地确定排除方案。

下面以某型飞机为例,对其滚转/偏航回路进行气动伺服弹性稳定性分析。分别采用两种方法。

方法一 不考虑滚转回路和偏航回路的耦合,把两个回路分别独立为两个单输入、单输出系统。采用奈奎斯特方法进行分析,计算结果如图 10-22 所示。

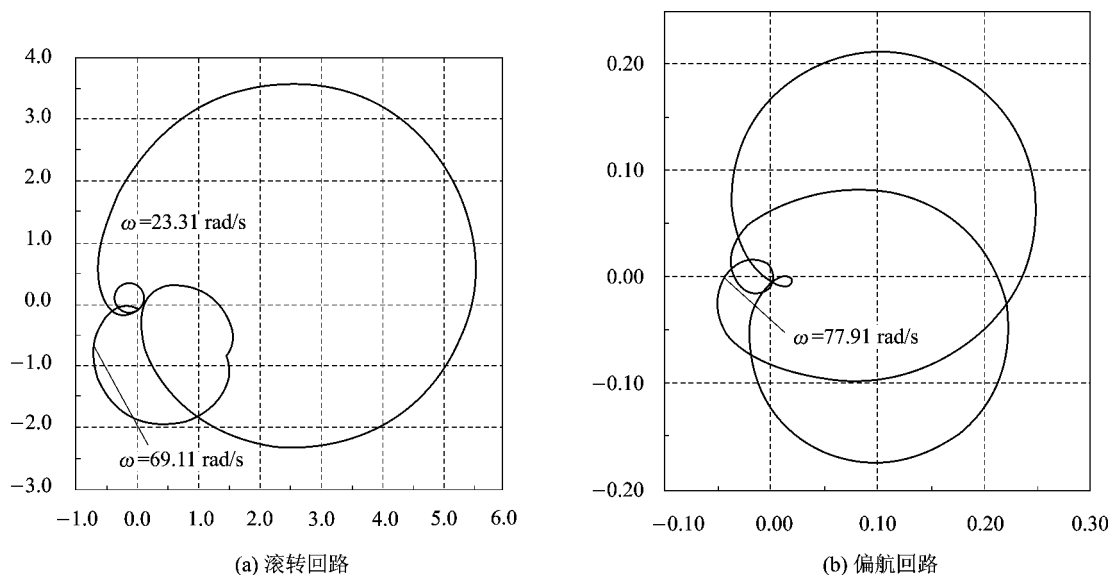


图 10-22 方法一得出的奈奎斯特图

方法二 考虑滚转回路和偏航回路的耦合,并按本节所述的办法(先闭合其中一个,继而闭合另一个),将系统等效为相继分两步的单输入、单输出系统;然后再采用奈奎斯特方法进行分析,计算结果如图 10-23 所示。

对比图 10-22 与图 10-23,可以看出,对于该系统,两种方法的结果略有差别,负穿点的频率与幅值很接近。这说明两个回路的耦合很弱,影响不大。图中也显示了系统的滚转、偏航两个回路的闭环均为稳定,但滚转回路的相位裕度不足 60° ,而偏航闭环稳定裕度足够。

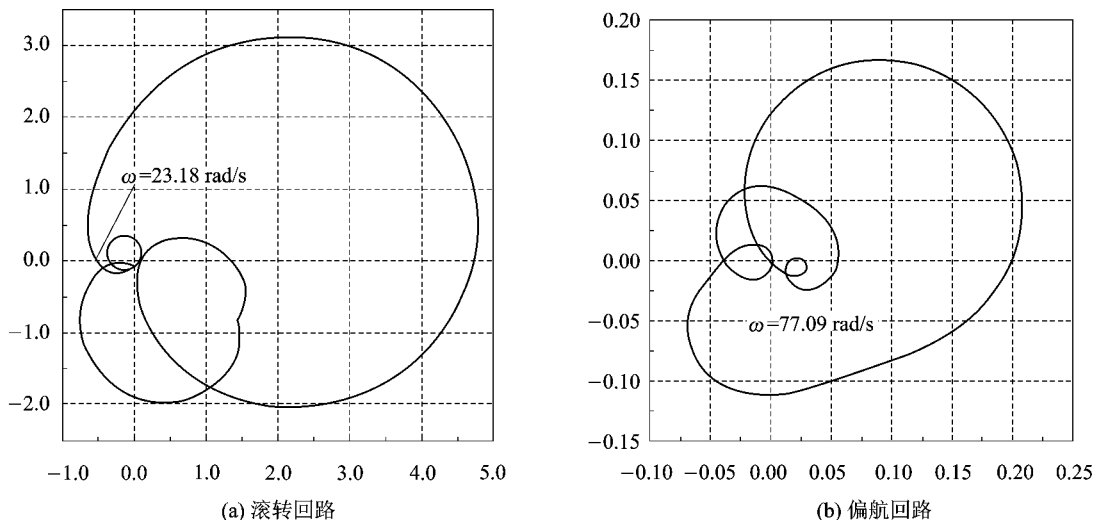


图 10-23 方法二得出的奈奎斯特图

10.5 导弹的气动伺服弹性稳定性分析

由本章 10.2~10.4 节,已经系统地阐明了气动伺服弹性稳定性分析的频域方法,但全部内容都是以飞机为依托的。本节将针对导弹来讨论这一问题。总的来说,两者有很多共同的基础,但导弹的气动伺服弹性稳定性问题也有一些特点,因此本节的重点放在这些特点上。一般来说,处理导弹的过程要比飞机的简明一些。这首先是因为两者的结构与气动布局有很大差别。除了飞航式导弹与飞机类同外,多数导弹(有翼导弹的机动型以及弹道导弹)的主体结构具有细长弹身(体)、弹翼的展向尺寸很小(甚至无弹翼)和舵面尺寸也小的特点。这些气动弹性特征,应在导弹环节的建模过程中充分利用和体现。建模过程归结为 3 个特点,即自由度的选择、准定常集中气动力的应用和细长体理论在导弹弹体上的应用。

10.5.1 自由度选择和运动方程的建立

由于导弹的弹体细长,柔度较大,故与飞机相比,除飞航导弹外,通常导弹的舵面或固定翼面都较小,相对地刚度较大。所以,在这种布局中,以升力面为主的弹性振动模态在气动伺服弹性分析中不会主要的,一般可以略去。特别是伺服操纵的小舵面,支持刚度很大,舵面旋转频率更高,可以认为,舵面旋转自由度 $\beta(t)$ 在列写运动方程中可以不考虑。这与飞机相比,是一个重要的区别。实际上,导弹的运动方程中,通常只需要考虑全弹的弹体自由度,其中包括刚体自由度和弹体的低阶固有模态弹性自由度。



另外还要指出,结构反馈而导致的附加舵面刚体偏转 $\Delta\beta$ 当然是要考虑的。由 $\Delta\beta$ 产生的质量力很小,一般可以不计。

这里,以某细长导弹为例,其外形示于图 10-24。该导弹没有固定翼面,在接近尾部处有 X 形叉舵。弹体由 3 部分组成,即头锥、中部和尾锥。 x_C 为重心位置, x_E 为舵的转轴位置。

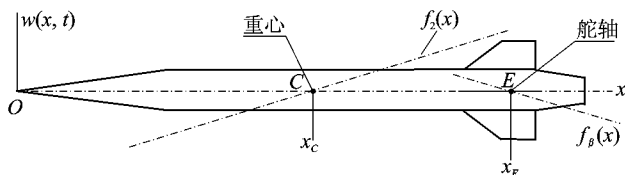


图 10-24 导弹外形示意(X 形舵转平)

若要求作该导弹的纵向(俯仰)回路的气动伺服弹性稳定性分析,则只需要考虑全弹的对称运动即可。可设弹体横向振动 $w(x, t)$ (见图 10-24)由少量几个主要形态组成,即

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x) q_i(t) \quad (10-58)$$

式中 $f_1(x)$ ——弹体刚体平移,即沉浮模态;

$f_2(x)$ ——弹体绕重心刚体转动,即俯仰模态;

其余 $f_i(x)$ ——全弹弹体的固有弯曲模态。

还要用到的是舵面的附加刚体偏转 $\Delta\beta$ 的形态 f_β ,它在确定广义控制力时是不可少的。可设

$$f_\beta(x) = \begin{cases} -(x - x_E) \frac{\pi}{180} & (\text{舵面处}) \\ 0 & (\text{其他处}) \end{cases} \quad (10-59)$$

选定自由度后,仿照式(10-7),则可得到导弹气动伺服弹性稳定性分析的运动方程,即

$$M\ddot{q} + Kq = A_q + Q_{\Delta\beta} \quad (10-60)$$

式中, M, K 分别为广义质量、广义刚度矩阵; q 是广义坐标列阵;有

$$M = \text{diag} [M_{11} \quad M_{22} \quad \cdots \quad M_{nn}] \quad (10-61)$$

M_{11} 对应于全弹质量, M_{22} 对应于全弹转动惯量;而

$$K = \text{diag} [0 \quad 0 \quad \cdots \quad K_{nn}] \quad (10-62)$$

A_q 为因导弹振动运动 q 引起的广义非定常气动力列阵; $Q_{\Delta\beta}$ 为因反馈而导致的附加舵面刚体偏转 $\Delta\beta$ 引起的广义控制力列阵。

关于 A_q 和 $Q_{\Delta\beta}$,将在下一节中讨论。

10.5.2 广义准定常气动力 A_q 和控制力 $Q_{\Delta\beta}$

考虑到图 10-24 导弹的构形,弹身细长,舵面很小,并且舵面在弦长方向的尺寸占弹身总



长很少。对于这种条件,把物理(相对于广义)气动力集中起来,采用作用于其压力中心上的集中力是合理的简化。在气动力理论上利用准定常理论也是合适的。

这里,采用以气动力导数为基础的准定常气动力。这些气动力导数是任何导弹都具备的风洞实验结果。

这一理论是以定常理论为基础的,并且不计气流的尾流影响。把攻角定义为来流速度与下洗速度之间的瞬时攻角 α_e 。

设该导弹各部分的气动力用集中于各部分的压力中心的合力来表示,并把它按同一 x 位置移至导弹弹体上,见图 10-25。若导弹头锥、中段、尾锥气动力分别是 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{l-1}$, 因舵面随弹身一起振动,这一攻角也会引起舵面上的气动力 Y_l (图中设 $l=4$)。此外,还有因舵偏 $\Delta\beta$ 引起的气动力 $Y_{\Delta\beta}$ 。因攻角 α_e 引起的第 k 个集中力的升力公式为

$$Y_k = -\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{y_k}^{\alpha_e, k} - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{y_k}^{\beta} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_k \right] \frac{180}{\pi} \quad (k = 1, 2, \dots, l) \quad (10-63)$$

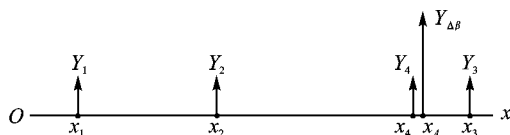


图 10-25 弹体上集中力的分布

由于舵面附加偏角 $\Delta\beta$ 引起的升力为

$$Y_{\Delta\beta} = -\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{y_l}^{\beta} \left(\frac{\partial w_{\beta}}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial w_{\beta}}{\partial t} \right) \frac{180}{\pi} \quad (10-64)$$

式中, $C_{y_l}^{\alpha}$, $C_{y_l}^{\beta}$ 分别是升力系数 C_y 对攻角 α 、舵偏角 β 的偏导数,单位是 $1/(\circ)$; $w = w(x, t)$, 见式(10-58); 同样

$$w_{\beta} = w_{\beta}(x, t) = f_{\beta}(x) \Delta\beta(t) \quad (10-65)$$

是舵面附加偏转 $\Delta\beta$ 的横向振动; S 是参考面积。

根据广义气动力定义可知,广义气动力列阵 A_q 为

$$A_q = F^T Y \quad (10-66)$$

式中, F^T 是模态矩阵 F 的转置。 F^T 的第 i 行对应于各集中气动力 $Y_1 \sim Y_l$ 的作用点(压力中心)处的第 i 阶模态值。 Y 是各个集中气动力按顺序组成的列阵,即

$$Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_l]$$

由式(10-58), (10-63)可导出广义准定常气动力列阵为

$$A_q = -\frac{1}{2}\rho V^2 C_q - \frac{1}{2}\rho V B \dot{q} \quad (10-67)$$



式中

$$C = \frac{180}{\pi} S F^T C_y^a F'$$

称为气动刚度矩阵;

$$B = \frac{180}{\pi} S F^T C_y^a F$$

称为气动阻尼矩阵。

F' 是模态矩阵中各元素对 x 作偏导数, C_y^a 是各 C_{yk}^a 组成的对角矩阵。

同理, 广义控制力列阵为

$$Q_{\Delta\beta} = -\frac{1}{2}\rho V^2 E \Delta\beta - \frac{1}{2}\rho V D \Delta\dot{\beta} \quad (10-68)$$

式中

$$E = S C_y^\beta F_{\beta,A}^T$$

$$D = S C_y^\beta (x_A - x_E) F_{\beta,A}^T$$

式中, $F_{\beta,A}^T$ 是由 $Y_{\Delta\beta}$ 的压力中心 x_A 处的各阶模态值组成的列阵。注意到, 凡升力面是呈交叉 X 形布局的, 有关的气动力升力系数导数都应该取升力系数导数的 45° 余弦。

将式(10-67)和式(10-68)代回式(10-60), 则得到采用准定常、集中力情况下的运动方程为

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + Kq + \frac{1}{2}\rho V^2 Cq + \frac{1}{2}\rho V B\dot{q} = \\ -\frac{1}{2}\rho V^2 E \Delta\beta - \frac{1}{2}\rho V D \Delta\dot{\beta} \end{aligned} \quad (10-69)$$

由此可求得导弹环节以 $\Delta\beta$ 为输入、 q 为输出的频率传递函数 $W_{q,\Delta\beta}$; 同时, 再由结构反馈求得 $W_{\Delta\beta,q}$ 。至此, 就可仿照第 10.4 节中所述, 完成频域的气动伺服弹性稳定性分析。采用准定常、集中力的方法来处理气动力, 使广义气动力的求解方法远比非定常气动力简单。事实表明, 此法结果是实用的。

图 10-26 是该导弹的纵向回路的奈奎斯特图线。图中实线部分应用了以气动力导数为基础的准定常气动力; 虚线部分见 10.5.3 节所述。

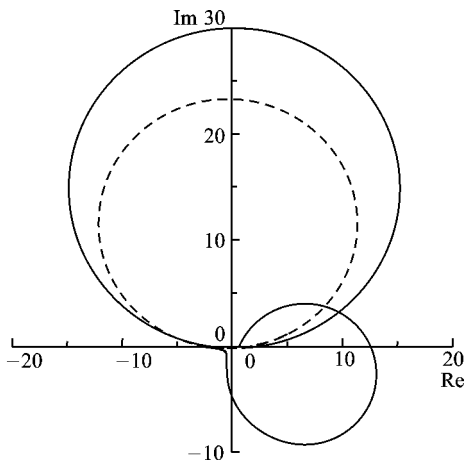


图 10-26 导弹的纵向回路奈奎斯特图线

10.5.3 细长体理论在弹体气动力上的应用

典型细长体导弹的弹体气动力, 还可以应用细长体理论。图 10-25 中, 弹体气动力是用 Y_1 、 Y_2 和 Y_3 三个集中力代表的, 分段比较少, 与实际的分布气动力有些差距, 所以也可以把弹



体部分的气动力置换为细长体理论给出的分布非定常气动力,例如分为 m 个小段,其单位长度上的气动力为 ΔP 。当然,它只能用于细长弹体。至于舵面(因弹身攻角引起)的气动力 Y_4 ,则仍用准定常气动力。

此时式(10-61)中的广义气动力 A_q 由两部分叠加,即由细长弹体引起的广义气动力和除弹体外其他部分的广义气动力叠加,分别记作 $A_{q,1}$ 和 $A_{q,2}$,分述于下。

1. $A_{q,1}$

应用细长体理论,给出单位长度气动力 ΔP ,如 4.1.2 节所述。给定弹体由前到后分为 m 段,每段段长为 $\Delta x_1 \sim \Delta x_m$,每段横剖面积取为 $S(x_1) \sim S(x_m)$ 。根据广义气动力定义,则有矩阵表示的弹体部分广义气动力列阵为

$$A_{q,1} = F^T \Delta x \Delta P \quad (10-70)$$

式中, ΔP 是 m 个段上的气动力分布列阵。利用假定模态式(10-58),则上式可表为如下形式:

$$A_{q,1} = \rho V^2 C_1 q + \rho V B_1 \dot{q} \quad (10-71)$$

式中 C_1 ——气动刚度矩阵(由细长弹体引起),且

$$C_1 = F^T \Delta x P_C \quad (10-72)$$

$$P_C = P_C(\omega^2, F, F', F'', S, S')$$

B_1 ——气动阻尼矩阵(由细长弹体引起),且

$$B_1 = F^T \Delta x P_B \quad (10-73)$$

$$P_B = P_B(F, F', S, S')$$

F ——模态矩阵;

F' —— F 中每个元素对 x 的偏导;

F'' —— F 中每个元素对 x 的二次偏导;

Δx ——各分段长度组成的对角矩阵;

S ——各分段的弹体剖面积的对角矩阵;

S' —— S 中每个元素对 x 的偏导。

2. $A_{q,2}$

仍然应用准定常理论,应用式(10-63)所示的气动力,可导出相应的广义气动力列阵,同样可表示为如下形式:

$$A_{q,2} = -\frac{1}{2} \rho V^2 C_2 q - \frac{1}{2} \rho V B_2 \dot{q} \quad (10-74)$$

式中 C_2 ——气动刚度矩阵(由准定常、弹体以外部分引起);

B_2 ——气动阻尼矩阵(由准定常、弹体以外部分引起)。

综合式(10-71)和式(10-74),可合并为式(10-67)的形式。

$$A_q = A_{q,1} + A_{q,2} = -\frac{1}{2} \rho V^2 C q - \frac{1}{2} \rho V B \dot{q} \quad (10-75)$$



由上式得到 A_q 后,继而按 10.5.2 节求出导弹环节传递函数 $W_{q,\Delta\beta}$,就不难绘制其气动伺服弹性稳定性分析的奈奎斯特图线。图 10-26 中虚线表示的是对 10.5.2 节中的同一导弹仅仅把弹体气动力改用细长体理论计算后的奈奎斯特图线。对比图 10-26 中的实线和虚线,可以看出,弹体部分采用了两种不同的气动力,在结果上有一些差别。

本章阐述了频域方法的气动伺服弹性稳定性分析技术。这是气动弹性设计中的基本内容,也是气动伺服弹性研究的基础。

然而,应当指出的是,气动伺服弹性设计的意义远不止于此。从设计思想的高度来看,“分析技术”属于一种设计检验、被动防止(不良动力学耦合)的设计技术。而当今气动伺服弹性研究已发展到了“综合技术”的阶段,即立足于主动运筹,利用主动控制律来达到优良的气动弹性性能。随着理论与实验技术等方面研究的深化,正在逐步形成结构与控制整体化布局的更新设计理念。

要实现更高的设计技术,用本章所述的频域方法受到了诸多限制。因此,时域方法应运而生,受到青睐。时域方法将在本书的最后一章中介绍。

思考题

- 10.1 气动伺服弹性问题如何分类?
- 10.2 气动伺服弹性在飞机设计中有哪些重要意义?
- 10.3 气动伺服弹性不稳定与颤振有何本质上的相同与不同?
- 10.4 飞机气动伺服弹性稳定性分析的主要特点是什么?
- 10.5 伺服操纵舵面系统有何特点?试阐明复阻抗的概念。
- 10.6 试推导式(10-32)。
- 10.7 总结一下气动伺服弹性稳定性分析的频域方法的计算步骤。
- 10.8 推导飞机环节的传递函数。
- 10.9 导弹与飞机的气动伺服弹性问题有何异同?什么条件下可以采用集中力和准定常的气动力来计算导弹的气动伺服弹性问题?
- 10.10 评述用频域方法解决单回路和多回路气动伺服弹性稳定性问题的特点。

参考文献

- 1 Lotze A, Sensburg O, Kuhn M. Flutter Investigations on a Combat Aircraft with a Command and Stability Augmentation System. Journal of Aircraft, 1977,14(4)
- 2 Peloubet R P. YF-16 Active-Control-System/Structural Dynamics Interaction Instability. AIAA PAPER No. 75~823
- 3 伏欣 H W. 气动弹性力学原理. 沈克扬译. 上海:上海科学技术文献出版社,1982



- 4 管德主编. 飞机气动弹性力学手册. 北京:航空工业出版社,1994
- 5 邹丛青,陈桂彬. 飞机的伺服-气动弹性稳定性,航空学报,1987,8(3)
- 6 Arthurs T D, Gallagher J T. Interaction Between Control Augmentation System and Airframe Dynamics on the YF-17. AIAA PAPER No. 75~824
- 7 管德主编. 气动弹性试验. 北京:北京航空学院出版社,1986
- 8 Benun D. The Influence of Powered Controls. AGARD Manual on Aeroelasticity, Bd. 1, Kap,5, 1959
- 9 Albano E, Rodden W P. A Doublet Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flow. AIAA Journal, 1969,7(2)
- 10 上潼致孝,长田正,白川详充,等. 自动控制理论. 张洪钺译. 北京:国防工业出版社,1979
- 11 邹丛青,陈桂彬. 气动弹性力学的新分支——气动伺服弹性. 北京航空航天大学学报,1996,22(2)
- 12 邹丛青,陈桂彬. 受控系统的舵面振动. 北航科研报告,BH-B415,1978
- 13 Noll T. Aeroservoelasticity. AIAA 90-1073-CP
- 14 Britt R T, Jacobson S B, Arthurs T D. Aeroservoelastic Analysis of the B-2 Bomber, Journal of Aircraft, 2000,37(5)
- 15 杨超,吴志刚. 导弹气动伺服弹性稳定性分析. 飞行力学,2000,18(4)

第 11 章 气动弹性设计的新进展

本章将概要地介绍发展中的气动弹性设计。气动弹性设计发展到目前,已经面临了众多新的方法和理念,必须关注这种不断进展着的挑战。这就是本书加上这一章的目的。

本章内容涉及到一些新的概念,需要一些有关现代控制(含鲁棒控制)理论、优化方法以及复合材料力学方面的知识。由于篇幅所限,所以在写法上力求简明易懂,某些必要的结论直接引用,不作推导。对于不具备以上基础知识的学生,如果学习本章,重点应放在开阔视界、看懂思路上,以此提供一个了解气动弹性设计的高起点。对于已经具备一定基础的读者,则可以从中获得更多的信息。需要进一步学习的读者,可参阅本章所附的参考文献。

11.1 气动弹性系统的状态空间法

状态空间法是一种近代时域方法。在气动弹性领域引入该方法,完全是由于先进的气动弹性设计的不断深化,以至于使传统的频域方法不能适用的原因。例如,10.1.3节中提出的气动伺服弹性综合技术,它必然导致控制律与弹性飞机组成的多输入、多输出系统;又如结构、伺服助力系统以及气动力的非线性问题;还有11.3节中所述的“主动气动弹性机翼”设计,这些问题都是频域方法力所不能及的。可见,时域方法是为了解决特定的需要才应用的。

同时,对于气动伺服弹性问题,为了便于融会并应用现代控制理论,一般都要把系统模型化为现代控制理论中的基本形式,即状态空间的形式。

11.1.1 状态变量、状态空间表达式

状态变量中“状态”是指系统的运动状态。状态变量,是指足以表征系统运动状态的最小个数的一组变量。把 R 个状态变量构成的向量,称作状态向量,记作

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_R(t) \end{bmatrix} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_R(t)]^T$$

以状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_R$ 为坐标轴构成的 R 维空间,称为状态空间。

由系统的状态变量构成的一阶微分方程组称为系统的状态方程。因为状态变量不一定是能够测量的物理量,所以还有系统指定的输出。该输出与状态变量的关系式,称为系统的输出方程。



状态方程和输出方程总加起来,称为系统的状态空间表达式。

一般地,不论是单输入、单输出系统,还是多输入、多输出系统,其状态空间表达式均可有如下标准形式,即系统状态空间表达式

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \left. \begin{array}{l} \text{(状态方程)} \\ \text{(输出方程)} \end{array} \right\} \quad (11-1a)$$

$$y = Cx \quad (11-1b)$$

式中, x 为状态向量; u 为输入向量; y 为输出向量; A 为状态矩阵; B 为输入(或控制)矩阵; C 为输出矩阵。状态变量并不是惟一的,状态空间表达式也不是惟一的。

状态空间表达式可以用系统方框图表示,如图 11-1 所示。

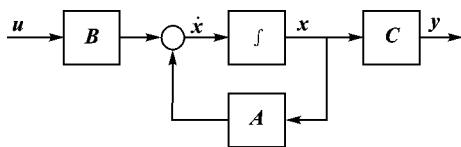


图 11-1 状态空间表达式的方框图

在状态空间的基础上来处理系统的动态问题就是状态空间法。有关的内容在现代控制理论中有详细的论述。这里,仅仅是根据气动弹性或气动伺服弹性的需要作了上述的简要提示。状态空间法可以应用于多变量系统、非线性系统、时变系统、随机过程和采样数据系统,这些优越性对于进一步的气动弹性研究或设计都是不可替代的。

11.1.2 状态空间法中非定常气动力的拉氏域有理近似

在传统的颤振方程中,非定常气动力矩阵 $A(Ma, k)$ 是利用简谐条件求得的。它随马赫数 Ma 和减缩频率 k 而变化,显然,只能用于频域方法;对于状态空间法,则是不适用的。因此,要采用时域内的气动力。

到目前为止要想直接地计算时域内任意运动的非定常气动力还十分复杂,因此,目前常用的几种方法基本上都是利用频域上若干离散频率的非定常气动力,把它延拓至拉氏域中,成为用有理函数形式表示的时域气动力。这是一种工程实用的近似方法。频、时域这两种气动力在同一频率(在 s 平面的虚轴上对应的频域离散点)时达到一致。因此,有时也把这种延拓称为有理函数拟合。目前,国内外在气动弹性系统的状态空间法建模中,主要的方法是:Roger 法、最小状态法和修正的矩阵 Padé 法。这一节中,主要介绍其中用得较多的两种,即 Roger 法和最小状态法。

1. Roger 法

其有理函数表达式为

$$\tilde{A}(s) = A_0 + A_1 \frac{b}{V}s + A_2 \left(\frac{b}{V}s \right)^2 + \sum_{j=1}^l \frac{A_{2+j}s}{s + \frac{V}{b}\beta_j} \quad (11-2)$$



式中, $A_0 \sim A_{2+j}$ 是实待定矩阵; $\bar{s} = \frac{bs}{V}$, s 是拉氏复变量; 一般地, $l \leq 4$, 可按精度要求而定; β_j 是由经验给定的正实数 (也可优选), 通常取为颤振减缩频率附近的若干 k 值, 称为气动力滞后项。

拟合的目的是根据频率域中已知的气动力矩阵 $A(k)$ 来确定式 (11-2) 中各待定矩阵。式 (11-2) 中 $\tilde{A}(\bar{s})$ 的每个元素 $\tilde{a}_{ij}$ 的待定系数最多为 7 个。设 $\tilde{a}_{ij}$ (以下用简单字符 $\tilde{a}$ 表示) 为 $\tilde{A}(\bar{s})$ 中的一个元素, 则有拉氏域表达式

$$\tilde{a}(\bar{s}) = a_0 + a_1 \frac{b}{V}s + a_2 \left(\frac{b}{V}s \right)^2 + \sum_{j=1}^4 \frac{a_{2+j}s}{s + \frac{V}{b}\beta_j} \quad (11-3)$$

式中, $a_0, a_1, \dots, a_6$ 为该元素的实待定系数。

已知条件为一组 (m 个) k 下的非定常气动力矩阵 $A(k)$ 。

具体求法如下:

将简谐条件代入式 (11-3), 并分解为实部、虚部, 等号左侧为已知数, 则

$$a(i\omega) = a_0 + a_1(ik) + a_2(-k^2) + \sum_{j=1}^4 \frac{a_{2+j}(ik)}{ik + \beta_j} \quad (11-4)$$

其中实部为

$$a(i\omega)_R = a_0 - k^2 a_2 + \sum_{j=1}^4 \frac{k^2 a_{2+j}}{k^2 + \beta_j^2} \quad (11-5a)$$

虚部为

$$a(i\omega)_I = k a_1 + \sum_{j=1}^4 \frac{k \beta_j a_{2+j}}{k^2 + \beta_j^2} \quad (11-5b)$$

取 m 个 k 下的 $a(i\omega)$ 为拟计算点, 在拟合误差平方和为最小的条件下, 用最小二乘法, 即可求得式 (11-5a), (11-5b) 中的待定系数 $a_0 \sim a_6$, 分别为

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{bmatrix} = \left[\sum_{t=1}^m (\mathbf{B}_{R,t} \mathbf{B}_{R,t}^T + \mathbf{B}_{I,t} \mathbf{B}_{I,t}^T) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{t=1}^m (a(i\omega)_{R,t} \mathbf{B}_{R,t} + a(i\omega)_{I,t} \mathbf{B}_{I,t}) \right] \quad (11-6)$$

其中, 列阵

$$\mathbf{B}_{R,t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_t^2 & \frac{k_t^2}{k_t^2 + \beta_1^2} & \frac{k_t^2}{k_t^2 + \beta_2^2} & \frac{k_t^2}{k_t^2 + \beta_3^2} & \frac{k_t^2}{k_t^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix} \quad (11-7)$$

列阵

$$\mathbf{B}_{I,t} = \begin{bmatrix} 0 & k_t & 0 & \frac{\beta_1 k_t}{k_t^2 + \beta_1^2} & \frac{\beta_2 k_t}{k_t^2 + \beta_2^2} & \frac{\beta_3 k_t}{k_t^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_4 k_t}{k_t^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix} \quad (11-8)$$

式中 k_t —— 第 t 个减缩频率;

$a(i\omega)_{R,t}$ —— 在减缩频率 k_t 下的简谐非定常气动力矩阵 $A(k_t)$ 中的元素 a 的实部;



$a(i\omega)_{1,t}$ ——在上述定义下的虚部。

此法中,对矩阵中某一下标为 i, j 的元素,其确定与其他下标的元素无关,因此方程的未知量为 $3 + l$, 计算量较小。但此法用于状态空间表达式时,气动力增广向量维数高,使状态方程规模增大,又会使后继计算量增大(见 11.1.3 节)。

2. 最小状态法

其有理函数表达式为

$$\tilde{A}(s) = A_0 + A_1 \frac{b}{V}s + A_2 \left(\frac{b}{V}s \right)^2 + \sum_{j=1}^l \frac{D_j E_j s}{s + \frac{V}{\gamma_j}} \quad (11-9)$$

式中, D_j 是列阵; E_j 是行阵; s 是拉氏复变量; A_0, A_1, A_2 及 $D_j, E_j (j=1, \dots, l)$ 为待求矩阵。

此法的提出,是为了使它用于状态空间表达式时,气动力增广向量维数尽可能达到最小(事实上现在已经有方法可使其为零)。但这个方法中 D_j, E_j 两个矩阵中的元素的确定是相互关联的,这就使求解方程中未知量激增至 $n^2(3+2l)$ 。其中 n 是系统所选自由度数,亦即矩阵 $\tilde{A}$ 的阶数。显然,用求解方程来确定待求矩阵几乎是不可能的。

通常的做法是:

- ① 给定正实数 $\gamma_j (j=1, 2, \dots, l)$;
- ② 设定列阵 D 初值, $\text{rank}(D) \neq 0$;
- ③ 施加等式约束,求行阵 E 的最小二乘解;
- ④ 用上一步求得的 E 求 D 的最小二乘解;
- ⑤ 计算拟合平方误差 $\sum \epsilon^2$, 检验精度;
- ⑥ 若精度不足,重复 $D-E-D$ 步骤,直至满足要求。

通常把约束加在 $k=0$ 或 $k=k_F$ (颤振点减缩频率) 或某个特殊要求点上,使近似式达到完全满足或加权满足。这样,可使问题得到简化。

11.1.3 气动弹性系统的状态空间表达式

11.1.2 节中得到了非定常气动力的拉氏域有理函数近似 $\tilde{A}(s)$, 把它代入运动方程, 则单独飞机气动弹性系统运动方程(不计外部输出时)的拉氏域表达式为

$$\left(s^2 [M_s \quad M_c] + [K_s \quad 0] + \frac{1}{2} \rho V^2 [\tilde{A}_s(s) \quad \tilde{A}_c(s)] \right) \begin{bmatrix} q_s \\ q_c \end{bmatrix} = 0 \quad (11-10)$$

式中 s ——拉氏变量;

q_s ——飞机结构弹性振动广义坐标 n 维列阵;

q_c ——控制面偏转广义坐标 m 维列阵(多输入);

$\tilde{A}_s(s), \tilde{A}_c(s)$ ——分别对应于结构、控制面的任意运动非定常气动力有理近似矩阵;

M, K ——广义质量和广义刚度矩阵;



s, c ——下标, 分别表示结构和控制面。

1. 采用 Roger 近似的状态空间表达式

当 $\tilde{A}_s(s)$ 和 $\tilde{A}_c(s)$ 采用 Roger 近似(见式(11-2))时, 式(11-10)可归并为

$$[B_{2,s}s^2 + B_{1,s}s + B_{0,s} \quad \underbrace{I_n \quad I_n \quad \cdots \quad I_n}_{l \uparrow}] \begin{bmatrix} q_s \\ x_a \end{bmatrix} + [B_{2,c}s^2 + B_{1,c}s + B_{0,c}]q_c = 0 \quad (11-11)$$

式中

$$B_{2,s} = M_s + \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2,s} \left(\frac{b}{V}\right)^2 \quad (11-12)$$

$$B_{1,s} = \frac{1}{2}\rho V^2 A_{1,s} \frac{b}{V} \quad (11-13)$$

$$B_{0,s} = K_s + \frac{1}{2}\rho V^2 A_{0,s} \quad (11-14)$$

$$B_{2,c} = M_c + \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2,c} \left(\frac{b}{V}\right)^2 \quad (11-15)$$

$$B_{1,c} = \frac{1}{2}\rho V^2 A_{1,c} \frac{b}{V} \quad (11-16)$$

$$B_{0,c} = \frac{1}{2}\rho V^2 A_{0,c} \quad (11-17)$$

$x_a = [x_{a1}^T \quad x_{a2}^T \quad \cdots \quad x_{al}^T]$, 称为气动力增广向量, 它的第 j 个子阵(列阵)为

$$x_{aj} = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{A_{2+j,s}s}{s + \frac{V}{b}\beta_j} q_s + \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{A_{2+j,c}s}{s + \frac{V}{b}\beta_j} q_c \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (11-18)$$

由此, 可以建立式(11-1a)所示的状态空间表达式中的状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

式中

$$x = [q_s^T \quad \dot{q}_s^T \quad x_a^T] \quad (\text{状态向量列阵}) \quad (11-19)$$

$$u = [q_c^T \quad \dot{q}_c^T \quad \ddot{q}_c^T] \quad (\text{控制(输入)向量列阵}) \quad (11-20)$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & I_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{0}_n \\ -B_{2,s}^{-1}B_{0,s} & -B_{2,s}^{-1}B_{1,s} & -B_{2,s}^{-1} & -B_{2,s}^{-1} & \cdots & -B_{2,s}^{-1} \\ \mathbf{0}_n & \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2+1,s} & -\frac{V}{b}\beta_1 I_n & & & \\ \mathbf{0}_n & \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2+2,s} & & -\frac{V}{b}\beta_2 I_n & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{0}_n & \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2+l,s} & & & & -\frac{V}{b}\beta_l I_n \end{bmatrix} \quad (11-21)$$



$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ -B_{2,s}^{-1}B_{0,c} & -B_{2,s}^{-1}B_{1,c} & -B_{2,s}^{-1}B_{2,c} \\ \mathbf{0}_n & \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2+1,c} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2+2,c} & \mathbf{0}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_n & \frac{1}{2}\rho V^2 A_{2+l,c} & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \quad (11-22)$$

式中, $\mathbf{0}_n$, I_n 分别为 n 维零矩阵和单位阵, n 为自由度数。

补充说明一点, 关于由运动方程而建立状态空间方程的方法, 可参看任何一本现代控制理论的著作。

由式(11-19)可见, 由于气动力的 Roger 近似, 引入了气动力增广向量(也称气动力状态向量) x_a , 而 x_s 的维数是 $n \cdot l$, 从而使 A, B 矩阵增大很多, 这是 Roger 法的不足之处。为了减少气动力增广向量, 出现过一些方法, 用得最广泛的就是最小状态法。

2. 采用最小状态近似的状态空间表达式

当 $\tilde{A}_s(s)$ 和 $\tilde{A}_c(s)$ 用最小状态法来近似(见式(11-9))时, 式(11-10)则可归并为

$$[B_{2,s}s^2 + B_{1,s}s + B_{0,s} \quad D_1 \quad D_2 \quad \cdots \quad D_l] \begin{bmatrix} q_s \\ x_a \end{bmatrix} + [B_{2,c}s^2 + B_{1,c}s + B_{0,c}] q_c = 0 \quad (11-23)$$

式中, 全部 B 矩阵同于式(11-12)~(11-17)。其不同之处仅在于式(11-11)中 I_n 方阵改为 D_j 列阵($j=1, 2, \dots, l$), x_a 的各子阵(见式(11-18))中的矩阵 A_{2+j} 改为行阵 E_j , 即

$$x_{aj} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 E_{j,s} s}{s + \frac{V}{b}\gamma_j} q_s + \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 E_{j,c} s}{s + \frac{V}{b}\gamma_j} q_c \quad (11-24)$$

与前述同理, 式(11-23)可化为状态空间表达式(11-1a)的形式, 其中, x, u 分别同于式(11-19), (11-20)。其状态矩阵 A 、控制矩阵 B 分别如下所示:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -B_{2,s}^{-1}B_{0,s} & -B_{2,s}^{-1}B_{1,s} & -B_{2,s}^{-1}D_1 & -B_{2,s}^{-1}D_2 & \cdots & -B_{2,s}^{-1}D_l \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\rho V^2 E_{1,s} & -\frac{V}{b}\gamma_1 & & & \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\rho V^2 E_{2,s} & & -\frac{V}{b}\gamma_2 & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\rho V^2 E_{l,s} & & & & -\frac{V}{b}\gamma_l \end{bmatrix} \quad (11-25)$$



$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ -B_{2,s}^{-1}B_{0,c} & -B_{2,s}^{-1}B_{1,c} & -B_{2,s}^{-1}B_{2,c} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\rho V^2 E_{1,c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\rho V^2 E_{2,c} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\rho V^2 E_{l,c} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11-26)$$

式中, $\mathbf{0}_n$, $\mathbf{0}$ 分别为零矩阵和零行阵(或列阵)。

注意,此法所得的矩阵 A 和 B 要比 Roger 法所得的阶数降低很多。其原因是最小状态法引入的气动力增广向量维数由 $n \cdot l$ 降至 l , 使整体的 A, B 规模缩小, 由此得名为“最小状态”法。这是一个明显的优点; 但由前述知, 它的拟合计算量却要增加很多。

至于式(11-1b)所示输出方程, 只要按给定输出 y (量测量)即可求得输出矩阵 C 。

11.1.4 气动弹性系统稳定性问题的状态空间法

本方法通常称为根轨迹法。它既可以用来求解单独飞机的颤振稳定性, 也可以求解气动伺服弹性系统的稳定性, 而且, 它对于飞机是否处于稳定的前提是无须考虑的。

首先讨论单独飞机的颤振。此时令状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 中输入为零, 即控制输入 $u = 0$, 其他输入也为零。从而状态方程为

$$\dot{x} = Ax \quad (11-27)$$

其特征方程为

$$|sI - A| = 0 \quad (11-28)$$

式中 s ——特征根, $s = \sigma + i\omega$ 。

状态矩阵 A 随动压 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 而变化。把不同动压下的特征根绘制成 s 复平面上半域(正半虚轴)上的轨迹, 称为根轨迹图, 如图 11-2 所示。图中每条曲线分别对应每个振动模态分支随着动压变化呈现的根轨迹, 动压为零时, 各分支起始点位于虚轴的固有频率值上。随着动压逐级增大, 某些分支(如图 11-2 中的第二分支)首先由 s 左半平面穿越虚轴至 s 右半平面, 说明该分支的运动由稳定转为不稳定。穿越点 A 即为颤振临界点, 由此可确定颤振频率与颤振动压以及颤振危险(不稳定)分支。图中, 略去了气动力增根的轨迹。

根轨迹法能较准确地反映非临界(非简谐)情况下的运动变化, 这是因为它采用了任意运动的非定常气动力的拉氏域近似表达。但因状态矩阵 A 的阶数远高于自由度数, 故计算量明显增大。实际上, 单独飞机的颤振中, 采用 $V-g$ 法、 $p-k$ 法是简明和可靠的; 而在气动伺服弹性稳定性问题(例如第 11.2 节和第 11.3 节的内容)中, 需要比较有、无反馈控制时颤振点的改

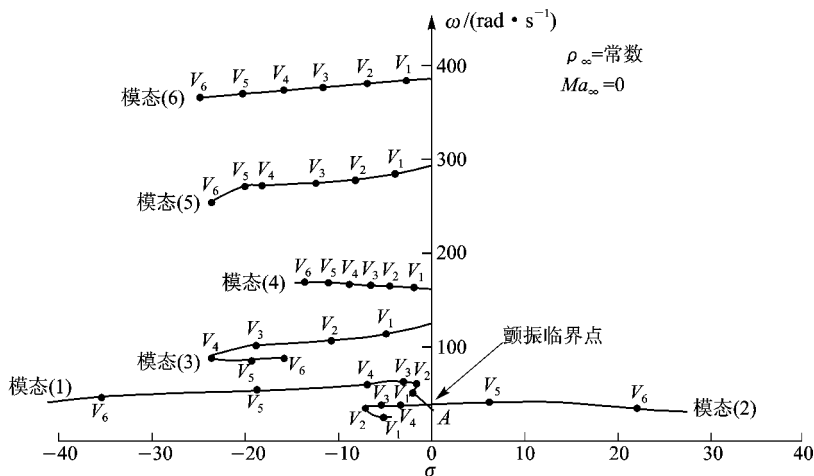


图 11-2 典型的飞机根轨迹图

变,此时,根轨迹法才是常用的方法。因此下面还要提出气动伺服弹性闭环的根轨迹图。

对于飞机气动伺服弹性闭环系统,设由伺服控制系统传递到舵面的反馈输入为

$$u = Kx \quad (11-29)$$

式中 K ——反馈控制矩阵;

x ——状态向量。

它与飞机构成闭环。联立

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= Kx \end{aligned} \right\}$$

则有

$$\dot{x} = (A + BK)x = \bar{A}x \quad (11-30)$$

式中 $\bar{A}$ ——闭环状态矩阵。

由闭环特征方程 $|sI - \bar{A}| = 0$,即可求得特征根,并绘制闭环系统的根轨迹图。可见闭环根轨迹的性状主要取决于反馈矩阵 K 。

11.2 气动伺服弹性鲁棒稳定性分析的状态空间法

首先,说明一下鲁棒性的概念。在气动伺服弹性系统中往往会遇到多输入、多输出(即多变量)的稳定性分析,例如飞机的偏航/滚转回路以及多个控制面的主动气动弹性机翼设计等。此时,要应用到鲁棒性的概念。

对于一个给定的气动伺服弹性系统,按理论假设的条件所建立的计算模型,称为标称模



型。而实际系统会因为种种不确定的因素(诸如刚度、质量、气动力、振动特性、飞行条件、控制参数和工艺误差等扰动因素)的存在而与标称系统之间出现差别。设计者除了首先要保证标称系统设计稳定外,还应留有足够的裕度以抵抗各种不确定的扰动因素,使实际系统仍保持稳定。这一性质称为系统的鲁棒稳定性。在单变量系统中,这种能力可以从奈奎斯特图线中通过幅值、相位裕度准确地给出,即稳定裕度的概念。但它不能适用于多变量系统。在多变量系统中,鲁棒稳定性的强弱是通过系统对于稳定性判据或定理满足的程度来体现的。检验鲁棒稳定性的方法通常是:把真实系统(相对于标称系统)认定为在标称模型上附加摄动(或称为不确定性)的模型,然后对真实系统判断稳定性。

目前在现代控制理论中,鲁棒控制理论是一个重要内容。以下将阐述在气动弹性领域内可以适用于多输入、多输出系统的有关方法,这些方法都只能在状态空间的基础上进行。第一种方法是基于系统回差矩阵最小奇异值的闭环鲁棒稳定裕度估算;第二种方法是用 μ 方法来计算开环和闭环的标称、鲁棒稳定裕度。这两种方法,都要运用奇异值这个数学工具。

11.2.1 奇异值

在鲁棒稳定性判据中最常用的手段是奇异值理论。奇异值的定义和性质由矩阵理论给出。

设有复矩阵 $A \in C^{m \times n}$, 且 $\text{rank } A = r$, 则矩阵 A 有 r 个奇异值, 记作 $\sigma_i(A)$ 。由矩阵理论可知

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sqrt{\lambda_i(A A^H)} > 0 \quad (11-31)$$

式中 $\lambda_i(\cdot)$ ——矩阵 $(\cdot)$ 的第 i 个特征值, σ_i 为非负平方根; H 表示复矩阵的共轭转置;

记 $\bar{\sigma}(A)$ ——矩阵 A 的最大奇异值;

记 $\underline{\sigma}(A)$ ——矩阵 A 的最小奇异值。

11.2.2 基于系统回差矩阵最小奇异值的鲁棒稳定裕度估算

这种方法可以回答以下的提问:在标称的气动伺服弹性闭环系统上,还持有多少稳定裕度?对于多变量系统,这个裕度只是一个充分条件,因此是一个保守的条件,是一种稳定裕度的估算。具体的做法是在标称系统上附加一个摄动,本节中采用了加法摄动(此外还有各种摄动方式,不赘述),以此描述真实系统。如果在摄动后仍能保持稳定,那么对应的摄动就可以折算为稳定裕度。假定系统有乘法摄动 L , 如图 11-3 所示。显然,对于标称系统,则 L 为单位矩阵 I 。

1. 回差矩阵

图 11-3 所示的闭环,其回差矩阵 $W(s)$ 由两部分组成,即 $G(s)$ 和 $K(s)$ 。

① $G(s)$ 表示气动弹性飞机(含伺服系统)传递函数矩阵。由于已有的惯例,经常是把伺服器(通常用二阶

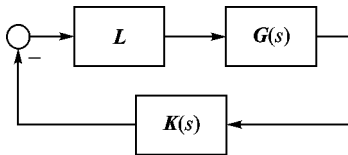


图 11-3 气动伺服弹性、乘法摄动闭环



环节表示)、助力器(通常用一阶环节表示)两个环节合为伺服系统,用一个三阶环节来表示。设单独飞机气动弹性(不含伺服)系统为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_p \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (11-32)$$

再设伺服系统为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{ac} &= \mathbf{A}_{ac}\mathbf{x}_{ac} + \mathbf{B}_{ac}u_{ac} \\ \mathbf{y}_{ac} &= \mathbf{C}_{ac}\mathbf{x}_{ac} \end{aligned} \right\} \quad (11-33)$$

根据伺服系统的输出 y_{ac} 即为飞机的输入 u_p , 联立式(11-32)与式(11-33), 得到组合起来的飞机气动弹性环节, 用状态方程、输出方程表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{F}\mathbf{x}_s + \mathbf{G}_u u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_s \end{aligned} \right\} \quad (11-34)$$

式中 $\mathbf{x}_s = [\mathbf{q}_s^T \quad \dot{\mathbf{q}}_s^T \quad \mathbf{x}_a^T \quad \mathbf{x}_{ac}^T]^T = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{x}_{ac}^T]^T$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_{ac} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ac} \end{bmatrix} \quad (11-35)$$

$$\mathbf{G}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{ac} \end{bmatrix} \quad (11-36)$$

$\mathbf{y}$ 是输出至传感器的量测量信号, 例如角速度 ω 或过载 n 。由此不难写出输出矩阵 $\mathbf{H}$ 。一般地, $\mathbf{H}$ 的诸元素由模态参数组成。

通过式(11-34)的拉氏变换式, 即可求得传递函数矩阵 $\mathbf{G}(s)$, 即

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{I}s - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}_u u(s) = \mathbf{G}(s)u(s) \quad (11-37)$$

由此, 得到

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{I}s - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}_u \quad (11-38)$$

② $\mathbf{K}(s)$ 表示反馈控制系统传递函数矩阵, 它是控制设计部门给定的。如果是以状态空间表达式给出的, 也可按上述同样方法, 由状态空间方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c u_c \\ \mathbf{y}_c &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \end{aligned} \right\} \quad (11-39)$$

得到拉氏变换形式

$$\mathbf{y}_c(s) = \mathbf{C}_c(\mathbf{I}s - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c u_c(s) = -\mathbf{K}(s)u_c(s) \quad (11-40)$$

由此, 得到

$$\mathbf{K}(s) = -\mathbf{C}_c(\mathbf{I}s - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \quad (11-41)$$

用图 11-4 可以表明以上①、②部分的输入/输出的对等关系。对于标称系统, $\mathbf{y}(s) = u_c(s)$, 以及 $u(s) = y_c(s)$ 。

③ 由此, 得到回差矩阵

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s) \quad (11-42)$$

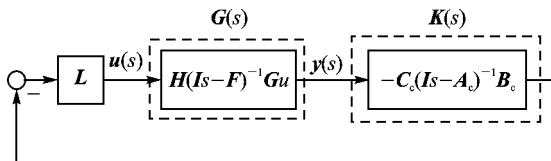


图 11-4 气动伺服弹性系统闭环方框图

由控制理论可知,闭环系统的稳定性取决于回差矩阵 $W(s)$ 及逆回差矩阵 $\bar{W}(s)$ ($\bar{W}(s) = I + [K(s)G(s)]^{-1}$) 的零点位置。对于标称稳定系统,不但要求全部零点在 s 复平面的左边平面,而且要求全部零点距离虚轴有一段“距离”,而描述“距离”的方法就是矩阵的奇异值。所以,以下的方法,是引用了奇异值作为距离的概念。

2. 基于回差矩阵最小奇异值的鲁棒稳定性估算

在气动伺服弹性标称系统中,加入摄动矩阵 L (见图 11-4),此处选用了乘法摄动,如图 11-3 所示。设给系统的摄动可归结为幅值与相位,则 L 可表示为对角矩阵

$$L = \text{diag} (K_n e^{i\phi_n})$$

下标 $n=1,2,\dots,n_c$; n_c 为控制输出向量 y_c 的维数; L 为对角矩阵,每一对角项表示了对每一输入分量的摄动。其标称系统的回差矩阵为

$$W = I + K(s)G(s)$$

判断受摄动系统的稳定性,需要一个依据。由控制理论及奇异值性质推得以下稳定性判据:

设标称系统稳定,若下式之一成立,则图 11-3 所示的受摄动系统保持稳定。

$$\textcircled{1} \quad \bar{\sigma}(L^{-1} - I) < \underline{\sigma}_m \leq \underline{\sigma}[I + K(i\omega)G(i\omega)] \quad (\forall \omega > 0) \quad (11-43)$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{\sigma}(L - I) < \underline{\sigma}_m \leq \underline{\sigma}[I + (KG)^{-1}(i\omega)] \quad (\forall \omega > 0) \quad (11-44)$$

式中, $\underline{\sigma}_m$ 是对于所有频率 ($s=i\omega$) 上回差矩阵最小奇异值 $\underline{\sigma}(I+KG)$ 中的最小值。

现采用 $\textcircled{1}$ 所示的判据 (式(11-43)) 作为示例。该不等式左边取决于摄动的增益与相位,展开式为

$$\underline{\sigma}(L^{-1} - I) = \max_n \sqrt{\left(1 - \frac{1}{K_n}\right)^2 + \frac{2}{K_n}(1 - \cos \phi_n)} \quad (n = 1, 2, \dots, n_c) \quad (11-45)$$

上列关系式可用图 11-5 表示。不等式右边是对给定的标称系统在全频率域上计算回差矩阵最小奇异值 $\underline{\sigma}(I+KG)$, 并得出其中的最小值 $\underline{\sigma}_m$, 如图 11-6 所示。该曲线是某型飞机的 $\underline{\sigma}[I+K(i\omega)G(i\omega)]$ 随频率 ω 的变化。由图 11-6 可知, 该系统 $\underline{\sigma}_m=0.4$ 。

最后,由判据式 (11-43) 可知,当受摄动系统达到闭环稳定的临界状态时,应有 $\underline{\sigma}_m = \bar{\sigma}(L^{-1} - I)$ 。这一临界条件用图 11-5 的水平虚线表示。 $\underline{\sigma}_m$ 与曲线的交点,表示了系统仍保持稳定所允许的增益 (即幅值) 摄动与相位摄动,亦即标称系统的增益裕度和相位裕度。本示例中, $\underline{\sigma}_m=0.4$ 的平线只能与相位裕度 $20^\circ, 10^\circ$ 及 0° 的曲线相交,交点分别为 A, B, C 三点,由此

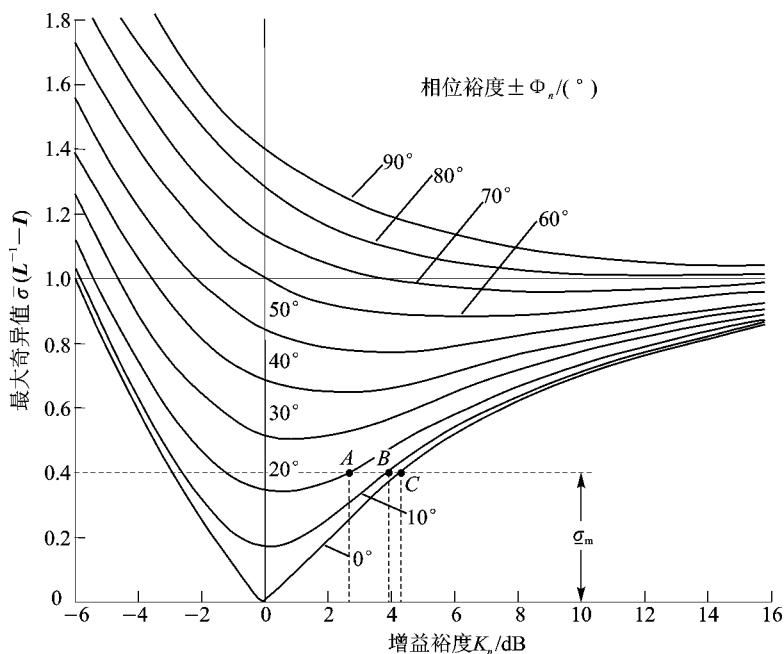


图 11-5 增益、相位稳定裕度估计曲线

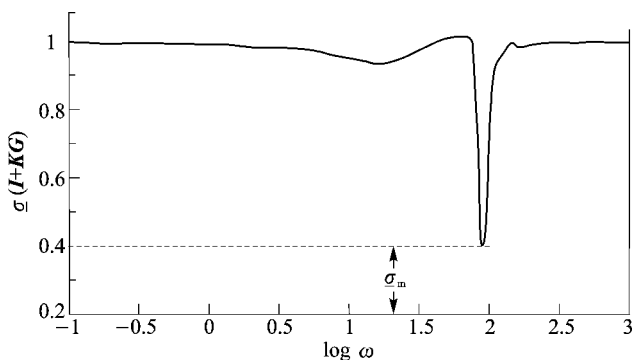


图 11-6 飞机气动伺服弹性系统的回差矩阵最小奇异值-频率的曲线

可以确定对应于这 3 个相位裕度下的增益裕度。

必须指出,式(11-43)及式(11-44)是保守的稳定性判据,它只能保守地估计系统的鲁棒稳定裕度。



11.2.3 在 μ 方法下的系统鲁棒稳定裕度

μ 方法可以回答以下的提问: 对于一个标称气动弹性系统, 在标称动压下, 要保持系统稳定, 还能有多少动压的裕度? 亦即允许最大的动压摄动是多少? 这里所给出的 μ 方法, 是用动压来表示颤振裕度。同时, μ 方法还有更重要的用途, 对于考虑不确定性的鲁棒气动弹性系统以及鲁棒气动伺服弹性系统, 也可用 μ 方法来回答鲁棒颤振裕度和鲁棒气动伺服弹性稳定裕度。目前, 已有众多的文献论述 μ 方法及其与试飞数据相结合的应用成果。

1. 结构奇异值 μ 及基于 μ 值的鲁棒稳定性定理

为了要用 μ 方法分析一个复杂的线性系统, 首先要给出一个适合于 μ 方法的鲁棒性分析的框架。这个框架如图 11-7 所示, 图中表示了 P 和 Δ 的反馈连接。其中, P 为线性系统; Δ 为不确定性摄动; u, y 分别为系统的输入、输出; z, w 分别是 Δ 的反馈连接的输入、输出信号。如果把 P 分为 4 个分量, 即

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (11-46)$$

则由图 11-7 可知, 输入 u 到输出 y 的传递关系, 由下列变换表示, 即

$$y = F_u(P, \Delta)u \quad (11-47)$$

式中

$$F_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \quad (11-48)$$

上式称为线性分式变换。

可以证明, 这种变换有一个重要特性: 多个线性分式互相连接(串联或并联)而成的复杂系统, 总是可以表示为一个等效的单一线性分式变换。例如图 11-8 所示的系统, 它由 P, Q 两个模型组成, 并分别与 Δ_P, Δ_Q 构成闭环反馈连接。它可以重新化为(推导从略)一个单一的线性分式变换, 这个新的线性分式变换中的算子由原先两个单独线性分式变换中的算子块结构组成, 即有

$$y = F_u(P, \Delta_P)u + F_u(Q, \Delta_Q)u = F_u(R, \Delta_R)u \quad (11-49)$$

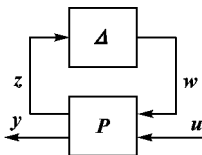


图 11-7 μ 方法进行鲁棒性分析的框架

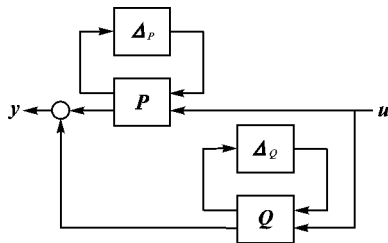


图 11-8 多个线性分式变换的连接



式中

$$R = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & P_{12} \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ P_{21} & Q_{21} & P_{22} + Q_{22} \end{bmatrix} \quad (11-50a)$$

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} \Delta_P & 0 \\ 0 & \Delta_Q \end{bmatrix} \quad (11-50b)$$

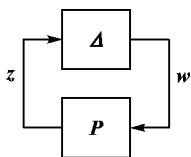


图 11-9 应用 μ 方法进行鲁棒稳定性分析框架

有了这一特性,联系到气动弹性(或气动伺服弹性)的鲁棒稳定性分析,系统就可以把引入的各种不确定性摄动与线性系统 P 用反馈关系联系起来,使任何复杂系统均可以归结为适用于 μ 方法的一般框架,如图 11-9 所示。图中 P 为气动弹性稳定的有理传递函数矩阵, Δ 为范数有界。

定义 给定复传递函数矩阵 P 稳定,以及范数有界的不确定性集合 Δ 。定义结构奇异值

$$\mu(P) = \begin{cases} 0 & (\text{若不存在 } \det(I - P\Delta) = 0, \forall \Delta \in \Delta) \\ \frac{1}{\min_{\Delta \in \Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - P\Delta) = 0\}} \end{cases} \quad (11-51)$$

根据结构奇异值 $\mu(P)$,有以下关于鲁棒稳定性的定理。

定理 1 给定图 11-9 所示的系统, α 为实标量,对于所有的 $\Delta(s)$ 满足范数有界 $\|\Delta\|_{\infty} \leq \alpha$,当且仅当 $\mu(P) < 1/\alpha$ 时, P 对于不确定性集合 Δ 是鲁棒稳定的。

通常对 Δ 引入加权矩阵,从而使所有 Δ 的范数 ≤ 1 ,即

$$\Delta = \{\Delta : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1\} \quad (11-52)$$

于是还可以有定理 2。

定理 2 叙述同上,只需把 α 改为 1。

有了定理 1 和定理 2,就可以用 $\mu(P)$ 值来判断形同图 11-9 的系统鲁棒稳定性和临界稳定情况。因此,下一步只需要把气动弹性模型转化为图 11-9 所示的框架即可。

2. 气动弹性、气动伺服弹性模型和稳定裕度

(1) 标称气动弹性模型和标称颤振裕度

气动弹性系统的广义运动方程,可以表示为适合于在 μ 框架下计算标称颤振裕度的形式。一个最直接的方法,就是对飞行条件参数动压 $\bar{q}$ 引入摄动 $\delta_{\bar{q}}$,然后求出引起不稳定的最小摄动。

对系统的动压加入一个加法摄动,作用于标称动压 $\bar{q}_0$,则

$$\bar{q} = \bar{q}_0 + \delta_{\bar{q}} \quad (11-53)$$

代入运动方程中,把含有 $\delta_{\bar{q}}$ 的项分离出来,列为单独项,写作 $\delta_{\bar{q}}z$ 。把 z 与 w 引入公式,使动压摄动与系统具有反馈连接,使之化为图 11-9 的形式。其中 w 与 z 由动压摄动相联系,即

$$w = \delta_{\bar{q}}z \quad (11-54)$$



由运动方程和上列关系式,即可得到修正的气动弹性系统的状态空间式,其形如

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \\ \dot{x} \\ \vdots \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ x \\ \vdots \\ w \end{bmatrix} \quad (11-55)$$

式中不显含动压摄动 $\delta_{\dot{q}}$,而是通过以 $\delta_{\dot{q}}$ 为元素的反馈实标量矩阵来实现对系统的影响,如图 11-10 所示框架。根据式(11-55),使 $z=P(s)w$ 即可求得传递函数 $P(s)$ 。

确定了 $P(s)$ 和 Δ ,按图 11-10 所示的模型,则可用鲁棒稳定性定理寻求使系统成为不稳定的最小动压值,也就是保持标称气动弹性系统稳定所允许的最大动压摄动值,这个摄动值称为标称颤振裕度。

(2) 鲁棒气动弹性模型和鲁棒颤振裕度

μ 方法中分析气动弹性鲁棒稳定性时,除了仍然要包含动压摄动外,主要的特点就是增加了各种因素引起的不确定性

Δ 。它可以是结构的,或是非结构的,所以必须对 Δ 有合理的描述,它是模型潜在误差的指示器。

由于线性分式变换的性质,多个子系统模块及其对应的不确定性,可以最终表现为单独的模型及不确定性。这个单独不确定性中特意地把 $\delta_{\dot{q}}$ 区分出来,以强调它是描述飞行条件的特殊摄动。

作为例子,下面再对刚度 K 也引入不确定性 Δ_K 。同时引入关于 Δ_K 的加权阵 W_K ,使不确定因素用所有 $\|\Delta_K\| \leq 1$ 的 Δ_K 来描述,即

$$K = K_0 + W_K \Delta_K \quad (11-56)$$

将式(11-53), (11-56)代入运动方程,并把含有 $\delta_{\dot{q}}$ 的项和 Δ_K 的项分别列为两个单独项,写作 $\delta_{\dot{q}} z_{\dot{q}} + \Delta_K z_K$ 。与上述(1)中类同,信号 $z_{\dot{q}}$ 和 $w_{\dot{q}}$ 之间以 $\delta_{\dot{q}}$ 与系统反馈连接;信号 z_K 和 w_K 之间以 Δ_K 与系统反馈连接。

于是,可建立鲁棒气动弹性系统的状态空间式,其形如

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \\ \dot{x} \\ \vdots \\ z_{\dot{q}} \\ z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ x \\ \vdots \\ w_{\dot{q}} \\ w_K \end{bmatrix} \quad (11-57)$$

上式可用图 11-11 表示,这也是一个标准的 μ 方法的变换框图,其摄动不确定性 Δ_K 和动压摄动以反馈方式与系统联系。同样,图中模型可用鲁棒稳定性定理寻求使系统成为不稳定的最小动压。该动压称为鲁棒颤振裕度。由于包含了不确定性 Δ_K ,所以鲁棒颤振裕度不会大

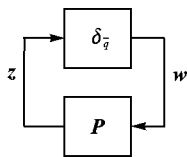


图 11-10 以动压为参数的 μ 方法的标称气动弹性稳定性模型



于标称颤振裕度。

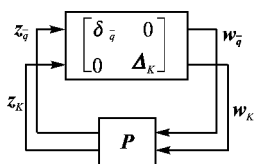


图 11-11 μ 方法的鲁棒
气动弹性稳定性模型

以上的不确定性是以刚度为例。事实上,不确定性还可以是由非正常气动力、阻尼、振动特性、控制系统和非线性等模型引起的。同样地,也可以得到与图 11-11 类同的形式。

(3) 鲁棒气动伺服弹性模型和鲁棒稳定裕度

建立这一模型的直接方法是将图 11-11 中的开环模型与控制系统形成反馈闭环系统。控制系统中还附加了传感器和伺服助力器,它们都会带来显著的不确定性,并且都具有非线性特性,标称的线性模型不能准确描述真实系统。一个 μ 方法下的鲁棒气动伺服弹性稳定性分析如图 11-12 所示。图中 A 表示伺服助力器系统; K 表示控制器系统; S 表示传感器系统;相应的不确定性分别为 Δ_A 、 Δ_K 和 Δ_S 。

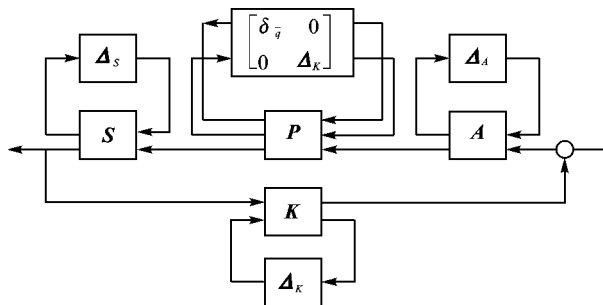


图 11-12 μ 方法下鲁棒气动伺服弹性稳定性模型

在计算鲁棒气动伺服弹性稳定裕度时,仍然可以应用 μ 方法。不同的是对象不是开环,而是闭环。同时,在不确定性建模上和算法上都带来了复杂性,可参考本章参考文献[14]。

一个实例是在 F/A-18 战斗机上应用 μ 方法计算了它的气动弹性鲁棒稳定性和气动伺服弹性鲁棒稳定性。其稳定性框图分别如图 11-13 和图 11-14 所示。图中 Δ_A 是实量对角矩阵,可以影响状态矩阵的模式响应和时间延滞。 Δ_{add} 是输入上的复数不确定性,它涵盖了作动筒非线性和未模型化等多重不确定性。 Δ_{add} 用以考虑对象的响应幅值和相位的复数不确定性。

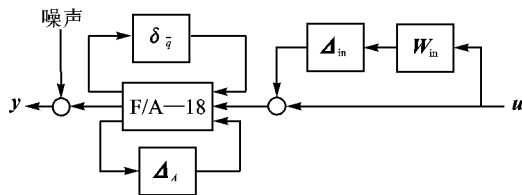


图 11-13 F/A-18 气动弹性鲁棒稳定性框图

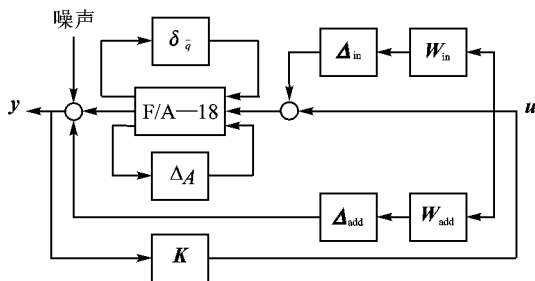


图 11-14 F/A-18 HARV 闭环气动伺服弹性鲁棒稳定性框图

3. 不确定性和飞行试验数据的并入

由上述可知,气动弹性、气动伺服弹性系统可化为 μ 框架下的线性分式变换形式,可以循此而求得标称裕度或鲁棒裕度。而这一裕度的可靠与精确取决于不确定性 Δ 。 μ 方法中最大的优点是可以充分利用飞行试验数据,用比较飞行数据与解析模型两者的传递函数来确定模型误差,并在这些误差的基础上建立不确定性 Δ 。根据模型有效性算法,可使这个不确定性既能充分反映模型误差,又不至于超出真实的误差。这样,可以通过 μ 方法计算得到最坏情况下的(而又不过于保守的)稳定裕度。由此, μ 方法的流程图可以用图 11-15 表示。

在鲁棒控制理论中还有一种方法,是根据“小增益定理”分析鲁棒稳定性;虽然也引入了不确定性,却没有考虑不确定性的结构,因此,该定理给出的条件过于保守。 μ 方法是在它的基础上作了进一步完善,从而使保守性减小。 μ 方法与 $p-k$ 法或单纯的用飞行数据作系统识别的传统方法,有着本质的不同。图 11-16 对比了三种方法的区别。单纯用计算模型是不容易得到准确结果的;单纯用飞行数据,也会因信号质量差而告失败。 μ 方法则综合了两者,用并入飞行数据后的 Δ 来修正模型,而且它的算法在软件中也易于实现,所以 μ 方法在有条件并入飞行数据的前提下,用以确定系统的鲁棒性或鲁棒稳定裕度,是一种完善的方法。

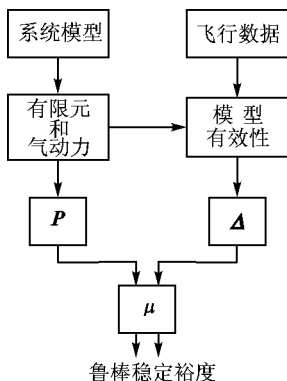
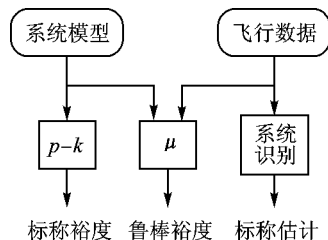
图 11-15 μ 方法数据生成流程图

图 11-16 三种方法对比



11.3 主动气动弹性机翼设计技术

主动气动弹性机翼(AAW)技术是一项多学科交叉的综合技术,从20世纪80年代中期由美国首先提出这种思想并开创颇具规模的“主动柔性机翼(AFW)工程”的验证性规划以来,历时20年,目前正在型号飞机上作了一系列设计研究。90年代中期改名为“主动气动弹性机翼”(AAW)技术。由于AAW技术的根本特点是充分利用而不是回避机翼的气动弹性效应,并借助于主动控制系统驱动控制面,形成气动伺服弹性的闭环,从而使设计达到性能优化、重量最轻。所以AAW的命名是对这种技术的高度概括,也是气动伺服弹性综合技术的延伸和深化。

AAW首先是一种全新的设计理念,或者把它称作AAW概念。但它又不仅是一种概念,而是涵盖了一整套的学科门类和实施技术。它涉及到结构动力学、控制理论、气动力理论;还涉及到气动伺服弹性(ASE)技术、主动控制技术(ACT)、优化技术、测试技术、计算机和风洞试验等一系列技术,是一个多项技术联动的大系统。所以,最终应当认定为它是一种新的设计技术。以上提到的很多技术,在实践中都是一个专门的领域。本节只就与设计理念、ASE综合有关的两项内容作一介绍,其他内容请自行参阅有关书籍和文献。

11.3.1 AAW 设计理念——对传统设计思想的突破

传统的飞机设计遵循了由强度准则进步到刚度准则的途径,这本身反映了对飞机设计在认识上的一大跨越。对刚度的足够重视,对提高飞机性能是有利的。如果要使飞机总体性能提高,那么一个永恒的目标,就是使重量最小。从减轻重量的角度看,又希望高性能的飞机柔性要大一些,这样一来气动弹性效应随之而增加。一般地,机翼(包括其他气动面)的气动弹性效应是一种负面影响。一个典型而又极具重要性的例子,就是后掠机翼滚转机动的控制面效率和反效。对于高动压的飞机,后掠翼操纵效率会构成一个设计的临界条件,万不得已时还可能推翻原定的方案而重新布局。由静气动弹性效应可知,常规的后缘控制面(副翼)偏转,在气动弹性效应下产生的气动扭转,正好与滚转机动所需的控制力反向;动压愈高,操纵效率愈低,甚至反效。此时,滚转机动能力荡然无存。为解决这一问题,传统的方法是提高机翼扭转刚度,以便加大后缘控制面偏角,从而加大控制力。但这样做的后果是结构重量增加,而且,翼型弯度增加还使飞行阻力增加。类似的例子还有很多,例如飞行载荷、颤振、阵风响应等,气动弹性效应通常为不利影响,柔性愈大愈为严重。传统的解决办法,都摆脱不了提高刚度这一条,以此来防止或减缓影响,而最直接的后果是增加飞机重量、降低飞机性能。在设计理念上,这种模式属于被动设计。

被动设计,对于飞机特别是对于高性能战斗机,只能在刚度和性能之间取折中方案。这种设计理念认可设计缺陷。



传统上也采用优化方法。但多数只能在多学科之间独立地完成,反复迭代至最终结果。例如,气动力是通过气动设计变量(如扭转、弯度)设计最小阻力;结构是通过结构设计变量(如厚度)设计最小重量,同时通过约束来保持变形、稳定性等要求。这种优化是在各自约束下,彼此以串接式传递数据进行迭代,直至数据收敛。这就是说没有达到综合优化。

AAW 技术在设计理念上有了全新的突破。对于 AAW,其最佳选择恰好是低的刚度并加上多个控制面。一般地,在左、右机翼上分别安排 4 个控制面,如图 11-17 所示。图上标明了前、后缘外侧和前、后缘内侧控制面。黑点表示传感器的位置,通过它们接受气动弹性信号。AAW 的要点正是利用机翼在气动力作用(还可以有惯性力的共同作用)

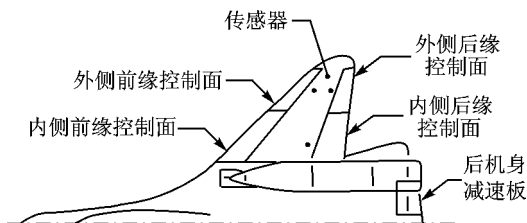


图 11-17 AAW 机翼模型的控制面与传感器

下产生的气动弹性变形或运动,由传感器接受信号,再通过主动控制系统按预定目的驱动并协调多个控制面的偏转或偏转运动,反馈至机翼,从而使整个机翼产生所希望的变形或运动,从本质上提高整个机翼控制气流能量的能力,包括吸收或是散逸能量。由此可见,主动控制起到了机翼刚度所胜任不了的作用。而主动控制律则是一个关键设计,如果设计合理,潜力是很大的。图 11-18 中显示了某架高性能战斗机,从低动压到高动压,为了要保持高的滚转机动性(用滚转速率表征)和最小阻力,由 AAW 设计的控制面协调使用的例子。控制面偏角以下偏为正,上偏为负。注意,在所有动压下,每个控制面的偏角均小于 5° ,说明所需的偏角是很小的;前缘外侧控制面起了比较重要的作用,后缘控制面在进入反效区时将改变偏角方向。这个例子说明,AAW 是利用控制面形成机翼的气动扭转,从而提供大的控制力并减小了气动阻力。显然,这样的设计中,机翼的刚度可以降低,从而使飞机重量降低,总的机翼载荷就会相应地减缓。由此例可以看出,AAW 的设计中设计者不必为刚度所困扰,刚度的不足已经通过控制面的正确配置所弥补,而且还会更好。所以,这种设计模式是一种主动设计。

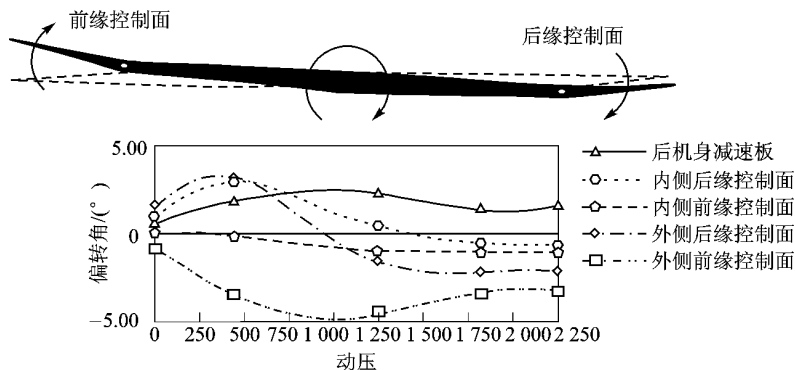


图 11-18 利用控制面的协调偏转达到高机动滚转下阻力最小



由于 AAW 是借助多个控制面的主动控制来改变整个机翼的形态和气动力分布的,所以其效益是明显的,功能是多重的,可适应的飞行条件是多种的。经美国“AAW 工程”及有关风洞模型试验和验证机试验得到的结论是,AAW 技术能获得如下收益:① 显著增强控制能力,提高机动性能;② 在所有飞行范围内减小气动阻力;③ 减轻结构重量;④ 提高稳定性,主动抑制颤振;⑤ 机动载荷减缓;⑥ 提高设计裕度。而这些优点,根据不同飞机所执行的任务不同,都可以折算为相应的起飞总重的减轻和生产成本的降低。

尽管 AAW 技术是把气动力、结构、外部载荷和主动控制率等设计要求合在一起,以实现性能尽可能的提高而重量最轻,但在具体的实施方案中是可以有各种目的与侧重的。总的来说,有两种优化方法。第一种方法是针对已有的机翼设计主动控制系统(控制律)。这种设计中,仍保持飞机原有的结构限制,不作大的改动。主要是利用传感器接受的气动弹性信号而优化主动控制面的配置,即利用控制律达到机动性能、颤振稳定性和载荷减缓等的最优(详见 11.3.2 节)。第二种方法是按 AAW 方法在标称机翼结构的基础上,耦合气动力、结构和控制系统,并在满足结构约束的条件下达到设计目标(通常是重量)的最优,由此设计一个全新的机翼。这种方法是更为完整意义上的 AAW。当然它的基础还必须加上多学科的综合优化。对于一个大型的优化命题,解决的方法必须建立在多级优化的理论上,采用分层、分解技术,完成结构控制一体化综合。

对比以上两个方法,第一种方法直接以 ASE 综合与 ACT 技术为基础,结合传统的优化方法,是可望达到的;第二种方法的技术难度明显增加,但设计潜力会更大。

11.3.2 AAW 技术中的主动控制

AAW 中主动控制的重点有 2 项:

- ① 颤振主动抑制系统(AFS);
- ② 滚转机动载荷减缓系统(RMLA)。

在“AAW 工程”中,一个重要的目的,就是要把主动控制技术的水平扩展到更具挑战性和实用性的领域,因此,必须发展多输入、多输出的主动控制方法,发展实时仿真技术、数字控制和控制评估技术、风洞演示及验证技术。它需要设计依托,而颤振主动抑制和滚转机动载荷减缓这两项正是由于其气动弹性问题中的重要性和难度而被选中。

颤振主动抑制 AFS 的目的是提高开环颤振动压;近 20 余年的持续研究表明,大约能提高 20%~30% 是合适的。同时,在 AAW 设计中还应该保持一定的其他约束,如滚转速度、控制面偏转等。图 11-19 是一个数字式颤振主动抑制系统的示意图。图中防伪频(混叠)滤波器是由于离散采样得到的输出加速度信号会有频率混叠,为使信号清晰而必须引入的。图中 200 Hz 表示采样频率;LEO,TEO 分别表示机翼前缘外侧、后缘外侧。控制器生成颤振主动抑制控制律,通常采用 LQG 法。关于控制律的设计是一项 ASE 综合技术,其方法将在 11.3.3 节讲述。

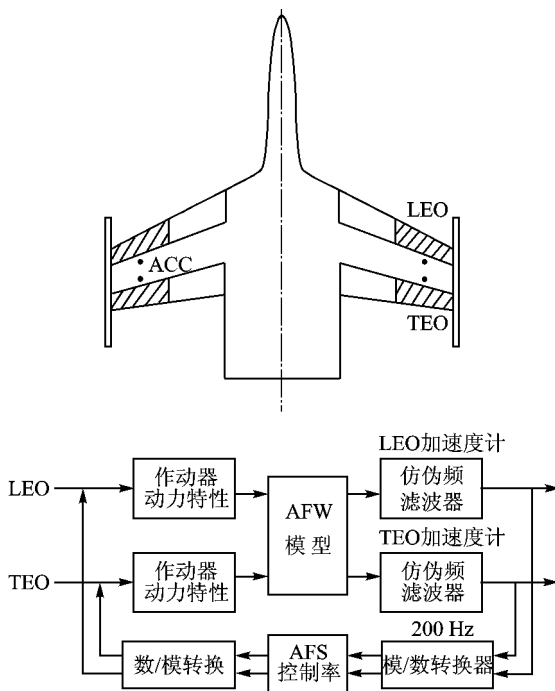


图 11-19 数字式 AFS 系统示意图

滚转机动载荷减缓系统 RMLA 的目的是利用直接的载荷反馈(应变计信号)在主要结构点上减少机翼载荷(例如给定为 20 %),同时保持滚转速率不变。图 11-20 是典型的系统示意图。图中,多个载荷传感器和滚转速率传感器接受的实际滚转速率与载荷不同于指令发生器确定的同类信号。以两者之差输入控制器。

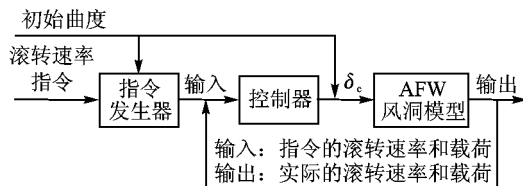


图 11-20 RMLA 主动控制系统示意图

11.3.3 颤振主动抑制控制律设计

在各种气动弹性的主动控制中颤振主动抑制系统(AFS)是一个备受关注的重点。首先是因为颤振是一个动力稳定性问题,这对于飞行器来说不是性能好坏的问题,而是飞行器的存亡



问题。所谓颤振主动抑制,就是说机翼的原设计是允许颤振不稳定的(当然,这样带来了刚度降低、重量减轻的收益),它是靠主动控制的控制面产生所需的旋转振动,从而改变整个机翼的非定常气动力分布,使机翼向气流散逸能量,最后达到颤振抑制,保持稳定,并具有稳定裕度。万一控制失败,飞机将陷入颤振而毁灭。对于飞行中万无一失的要求,AFS 从设计到工程应用的难度和风险均大,也因此成为气动弹性设计的一个关注点,以至于从提出设想,再经过设计、系统研制、飞行试验和获得初步经验等各个阶段,至今已持续了 30 余年。

AFS 系统设计是最典型的气动伺服弹性综合问题。在 AAW 设计中,它虽然是一个子问题,却涉及多门学科。目前,要求发展的是一种低阶的、鲁棒的、多输入/多输出的以及线性二次高斯(LQG)法的数字控制律。这 4 项要求必须由设计完成,而数字控制律则不一定按离散域设计,可以在连续域中设计得到模拟式控制律,然后在实施中通过 Z 变换而转换到数字式的控制。

以下的介绍仍然按连续域来进行。

当前,颤振主动抑制已经不是可行性原理试验。它已经适用于验证机的验证,并在工程实践中可靠易行。长期的研究表明,现代控制理论中基于线性二次型性能指标的最优控制,对于颤振主动抑制是适用的。因为在线性时不变系统中,最优控制律可以用矩阵计算方便地求得。最优控制的控制律设计全部在状态空间法的基础上进行。

对于控制律设计,还要区别两种情况:第一种是对气动弹性系统不考虑阵风(随机)扰动输入,这样,系统比较简单,对应的最优控制律设计是在确定的条件下进行(见 11.3.3 节第 1 条)的;第二种是考虑了阵风、测量等随机扰动,此时,需要应用随机最优控制。考虑到随机扰动,显然比较符合实际情况,但控制律也要复杂些。但不论哪一种,根据最优控制理论,其设计方法则都是成熟的。以下分别介绍这两种情况下的颤振主动抑制控制律的确定法。这些方法在现代控制理论中有详细推导,这里只根据需要给出这些方法的结论。

1. 基于状态观测器的输出反馈控制律

此法适用于无阵风扰动情况。由 11.1.3 节可知,对应的气动弹性拉氏域运动方程由式(11-10)给出,即

$$\left(s^2 [M_s \quad M_c] + [K_s \quad 0] + \frac{1}{2} \rho V^2 [\tilde{A}_s(s) \quad \tilde{A}_c(s)] \right) \begin{bmatrix} q_s \\ q_c \end{bmatrix} = 0$$

已知上式所示的系统(并含伺服系统)的状态空间表达式由式(11-34)给出,即形如

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

设计控制律(器)就是在满足式(11-34)条件下,寻求最优控制 u ,使二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (11-58)$$

为最小。其中 Q, R 分别是状态和控制的加权矩阵。一般地, Q 取半正定对角矩阵, R 为正定



对角矩阵。在设计颤振主动抑制控制律时,经验表明,可取 R 为单位矩阵, Q 的对角元素约为 10^{-3} 。现把颤振主动抑制认定为线性时不变系统,系统受扰动后恢复平衡位置的受控时间可扩展到 $[0, \infty]$, 所以, 这是一个无限时间调节器问题。

对此类问题,可以解得状态反馈控制律为

$$u = -Kx \quad (11-59)$$

式中

$$K = R^{-1}B^TP$$

为最优状态反馈(常数)矩阵, P 为下列黎卡提代数方程的正定解, 即

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (11-60)$$

由式(11-59)可以看出, 该控制律是对于状态向量 x 的反馈。而在气动弹性系统中, 状态向量 x 往往为不可量测量, 例如广义坐标 $q, \dot{q}$ 。所以需要向向量 x 有一个估计的状态向量 $\hat{x}$, 这个任务就需要由“状态观测器”来完成。观测器的输入则是 u 和可量测量 y , 输出为 $\hat{y}$, 见图 11-21。为了得到 $\hat{x}$, 则系统必须为可观的。

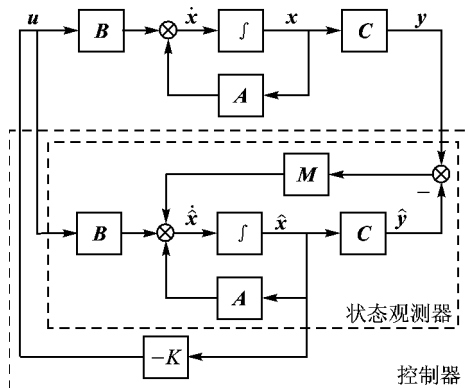


图 11-21 基于观测器的输出反馈闭环系统

由控制理论可知, 观测器的状态向量方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - MC)\hat{x} + Bu + My \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \right\} \quad (11-61)$$

式中 $\hat{x}$ ——状态估计向量;

$\hat{y}$ ——观测器输出;

M ——输出误差反馈矩阵。

对控制律的设计, 实际上可归结为通过对 M 的设计, 使 y 与 $\hat{y}$ 的误差最小。根据分离定理, M 与 K 的设计可以独立地进行, 互不影响。理论上, M 只决定了估计状态 $\hat{x}$ 逼近真实状态 x 的速度。由图 11-21 中虚线框可知, 基于状态观测器的状态估计反馈控制律的状态空间表



达式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - MC - BK)\hat{x} + My \\ u &= -K\hat{x} \end{aligned} \right\} \quad (11-62)$$

由式(11-62),可以得到由状态反馈化为输出反馈的拉氏域控制律为

$$u(s) = -K[sI - A + MC + BK]^{-1}My(s) \quad (11-63)$$

并且由式(11-62)还可以看出,输出反馈控制律的阶数等同于系统的阶数,所以这是不实用的。因此还要经过控制律的降阶处理,使高阶控制律等效为低阶控制律。图 11-22 表示了一个机翼-外挂风洞模型采用颤振主动抑制的效果,图中用根轨迹显示了开环、闭环系统颤振速度 V_F 由 34 m/s 提高至 40 m/s 的过程。

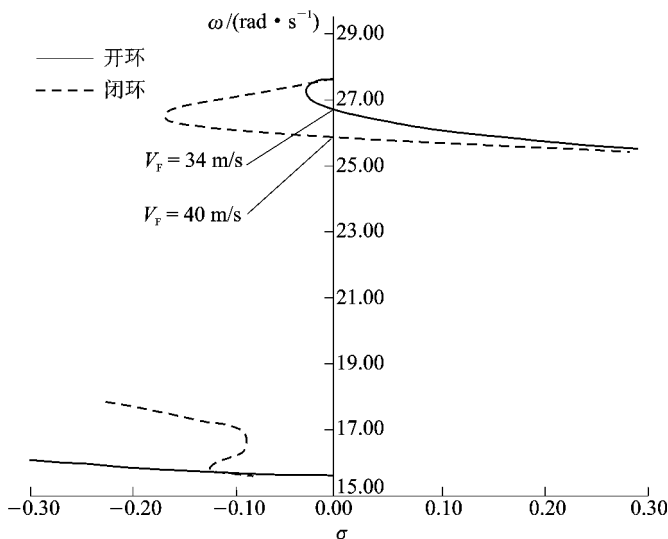


图 11-22 基于观测器的输出反馈控制律用于机翼-外挂风洞模型颤振抑制的根轨迹图

2. 线性二次型高斯问题的最优控制律

上节中,所论线性控制系统是确定性的。但是实际系统一般都会受到随机因素的影响,颤振主动抑制系统也不例外,它将受到阵风 w 或测量噪声 v 等的随机干扰。相应地,状态向量 x 和输出向量 y 分别成为随机向量序列,性能指标也是个随机变量,所以其性能指标应取期望值(即统计平均值)。

对于颤振抑制,最优控制可叙述为:对于线性系统,状态变量为正态型的情况,如果存在控制 u 使

$$E[J(u, x)] = E[y^T Q y + u^T R u] \quad (11-64)$$

为最小,则 u 为线性二次型高斯问题(LQG)的最优控制律。式中, $E[\cdot]$ 表示对 $[\cdot]$ 的期望值; Q, R 为加权矩阵。



如何从干扰输出 $y(t)$ 中克服干扰 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的影响来估计 $x(t)$, 属于最优状态估计问题。解决这种问题, 最基本的方法就是卡尔曼滤波理论。目前, 求解最优控制就要利用卡尔曼滤波理论来确定状态 x 的估计状态。

对于有阵风扰动的情况, 气动弹性拉氏域运动方程由下式给出, 即

$$\left(s^2 [M_s \quad M_c] + [K_s \quad 0] + \frac{1}{2} \rho V^2 [\tilde{A}_s(s) \quad \tilde{A}_c(s)] \right) \begin{bmatrix} q_s \\ q_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V^2 \tilde{A}_g(s) \frac{w_g}{V} \quad (11-65)$$

式中 w_g —— 阵风速度;

$\tilde{A}_g(s)$ —— 阵风非定常气动力的拉氏域有理近似矩阵, 其余同式(11-10)。

上式所示气动弹性系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + G_u u + G_w w \\ y = Hx + v \end{cases} \quad (11-66)$$

式中 x 中包括了式(11-24)中的状态向量, 并增加了阵风状态向量;

w —— 零均白噪声阵风输入;

v —— 测量白噪声干扰;

w, v 的谱强度矩阵分别为 R_w 和 R_v 。

对于式(11-66)所示气动弹性系统, 设 LQG 法的性能指标如式(11-64)所示。则根据卡尔曼滤波估计理论, 得到控制律为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases} \quad (11-67)$$

式中 x_c —— x 的估计状态;

B_c —— 卡尔曼滤波增益矩阵;

C_c —— 全状态最优调节增益矩阵。

$$A_c = F - B_c H + G_u C_c \quad (11-68)$$

$$B_c = S H^T R_v^{-1} \quad (11-69)$$

$$C_c = -R^{-1} G_u^T P \quad (11-70)$$

式中, S, P 为下列对偶定常黎卡提方程的正定解, 即

$$PF + F^T P + H^T Q H - P G_u R^{-1} G_u^T P = 0 \quad (11-71)$$

$$FS + S F^T + G_w R_w G_w^T - S H^T R_v^{-1} H S = 0 \quad (11-72)$$

其闭环如图 11-23 所示。

由 LQG 法求得满阶最优控制是随机最优问题中比较成熟的方法。但对于颤振主动抑制系统, 存在两个问题。第一个问题是控制律阶数太高, 它与原系统阶数相等, 而受控系统是一个复杂的飞机气动弹性系统。以抑制机翼对称颤振为例, 假定取 12 个广义坐标描述运动; 非定常气动力采用最小状态法进行有理近似, 取滞后项为 4 个; 控制面为 4 个, 相应的伺服系统

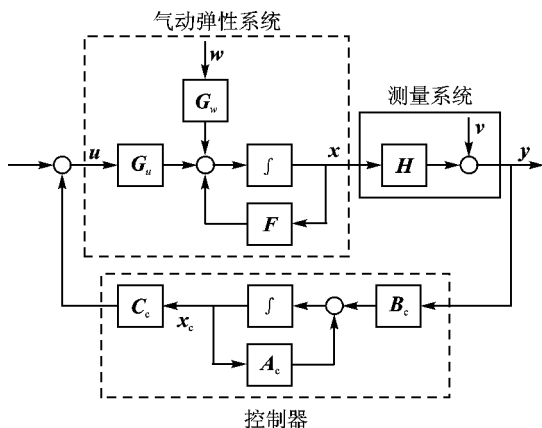


图 11-23 LQG 控制闭环系统

用三阶环节描述;最后还要加上阵风状态 2 个。如此算来状态向量的维数达到了 $(12 \times 2) + 4 + (4 \times 3) + 2 = 42$ (有时可高达 100~200)。LQG 控制律与它同阶,以至于难以在计算机上实现数字控制,所以必须作降阶处理;但降阶的结果往往是鲁棒稳定性降低和响应均方值增大。由此,又引发第二个问题,即对于降阶的稳定控制率还要进一步优化,以提高性能(例如减缓响应、控制面偏转及速率限制等)和稳定性。

控制律降阶是个不可缺少的步骤,这方面的研究文献很多,有时域的,也有频域的。在气动伺服弹性领域,应用最为广泛的降阶方法是时域方法中基于内平衡理论的降阶,又称平衡舍阶法。该方法应用在“AAW 工程”1991 数字仿真模型上,由满阶 172 个状态降至 79 个状态,仿真精度很高。还有一种降阶方法是利用 LK 变换以区分模态的“快状态”和“慢状态”,并舍去快状态以达到降阶的目的。

关于降阶方法,限于篇幅,本书不作赘述,需要时可参阅本章参考文献[27~29]。

11.4 复合材料气动弹性剪裁

复合材料有许多独特的优点,例如比强度和比刚度高,抗疲劳和抗振性能好,结构可设计性好等,特别是它所具有的显著的各向异性力学特性,为飞机翼面的结构设计提供了特殊的优越性。为了充分显示复合材料的各向异性刚度特性的潜力,在气动弹性设计中出现了气动弹性剪裁的新方法,它在飞机设计中具有广阔的应用前景。对于前掠翼飞机,气动弹性剪裁更具有突破性的贡献。前掠翼因其弯扭耦合导致的扭转发散速度过低一直是金属机翼设计中不可逾越的障碍,这一障碍直到 1974 年 Krone 在其博士论文中得以解决。他指出,利用复合材料气动弹性剪裁技术可以排除前掠翼的扭转发散,甚至不需要付出任何的重量代价。



11.4.1 气动弹性剪裁的概念

气动弹性剪裁是另一种新的设计理念,概括起来可以叙述为:气动弹性剪裁是指通过复合材料的刚度方向性及其变形耦合来控制翼面结构的静力和动力气动弹性变形,从而提高飞机性能的一种结构优化设计方法。所谓飞机性能,是指诸如飞机航程、飞行包线、机动性能、操纵安定性能以及乘坐品质等。其中相当一部分性能将有赖于改善气动弹性性能,主要有以下6种:

- ① 提高扭转发散速度;
- ② 提高操纵效率;
- ③ 提高颤振速度;
- ④ 改善静稳定性;
- ⑤ 减缓机动载荷;
- ⑥ 提高升阻比,改善升阻极曲线特性。

由于气动弹性剪裁所改善或提高的气动弹性性能,就是气动弹性剪裁的效益,故可以认为,气动弹性剪裁的效益完全有赖于变形控制的成败。

气动弹性剪裁是一种优化设计方法,在这个方法中,结构重量最小是一贯的目标,同时以应力要求、翼尖变形、扭转发散速度、颤振速度和飞行载荷等为约束条件,最终确定复合材料的铺层厚度、铺层角度及铺设方向等大量的设计变量(通常不把铺层顺序作为设计变量),这是一个优化设计的全过程。

11.4.2 气动弹性剪裁的机理

气动弹性剪裁涉及三个方面的理论基础:一是复合材料力学;二是气动弹性力学;三是优化方法。事实上,它是多学科交汇。其中,复合材料的力学特性,构成了气动弹性剪裁赖以实现的机理。改变翼面复合材料的铺层厚度、顺序、铺层角度及铺设方向,会直接改变刚度的方向性,并由此控制翼面的气动弹性变形。图 11-24 所示是一个层板机翼模型,它具体地表现了复合材料的刚度方向性如何通过铺层设计而产生控制翼面弹性变形的作用。图中所示的模型,采用了不同的铺层,粗箭头表示铺层百分比最多的方向。若规定它的坐标轴系中有一个轴是沿机翼的结构轴,则图 11-24(a)采用的是对称均衡铺层,它所显示的是相对于给定轴的正交各向异性的变形;图 11-24(b)和图 11-24(c)采用的是对称不均衡铺设,这种铺设对给定轴呈现非正交各向异性的变形。这里所称的对称是指对层合板中面的对称性;所称的不均衡,是指层合板中若有某一层的铺设角为 $+\theta$,但不存在铺设角为 $-\theta$ 的另一层与之对应。图中,翼面的气动弹性变形有 3 种,即外洗、内洗和弦向弯度。如果机翼向上弯曲会引起前缘低头(攻角减小)的扭转变形,则这种变形称为外洗,如图 11-24(b)所示;反之,如果机翼向上弯曲会引起前缘抬头(攻角增大)的扭转变形,则这种变形称为内洗,如图 11-24(c)所示。图的



左侧分别标明了在复合材料力学中通用的层合板弯扭刚度矩阵 D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$), 其中 D_{16} 和 D_{26} 的大小与正负控制了 1, 2 两个方向的弯曲与扭转之间的耦合。外洗和内洗可以强烈地影响多种重要的气动弹性性能, 诸如扭转发散、颤振、操纵效率和载荷分布等。特别是翼面的外洗可以大大提高前掠翼的发散速度甚至消除发散。同时, D_{12} ($D_{12} = D_{21}$) 项的存在将在两个主方向上呈现弯曲耦合, 在图示机翼上表现出展向弯曲与弦向弯曲的耦合, 这个耦合特性和扭转变形对于机翼的升阻极曲线特性和载荷减缓将产生重要的影响。由此可见, 复合材料气动弹性剪裁的效益, 必须借助于刚度的交叉耦合, 通过耦合才有可能控制变形, 这种耦合特性很大程度上成为气动弹性剪裁赖以实现的力学机理。关于刚度矩阵 D_{ij} 的意义和交叉耦合的概念, 可参考复合材料力学的书籍。

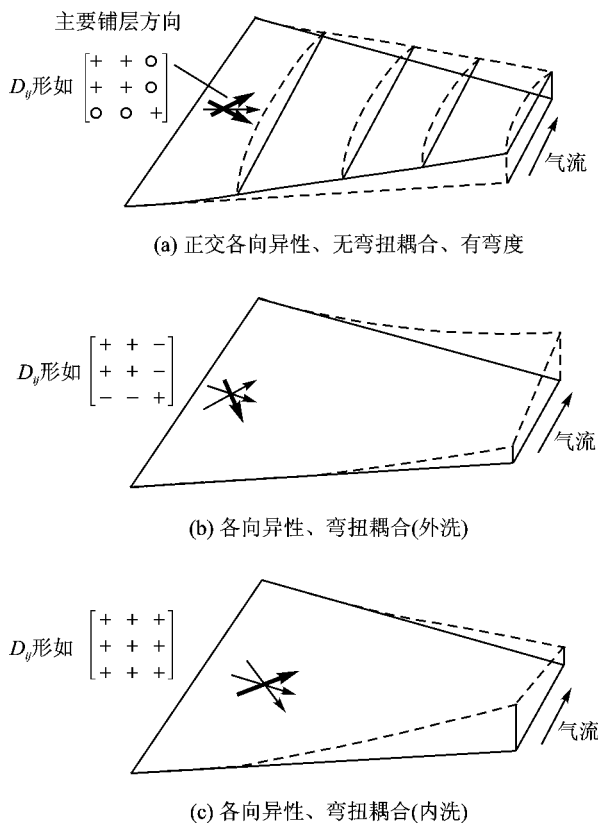


图 11-24 内洗、外洗和弦向弯度

11.4.3 气动弹性剪裁的性能效益

11.4.1 节中提到的 6 项主要性能效益, 都是通过控制机翼(升力面)的气动弹性变形实现



的,也就是控制内洗、外洗和弯度。图 11-25 中,用比较直观的方式区分了它们对各项效益的作用。图中表示,不论用何种方式的铺层达到了外洗的变形形态,其实际作用相当于使升力面的主刚度方向前旋,而内洗相当于后旋。一般情况下一个升力面外洗和内洗能起到的作用,已在图中区分开来。

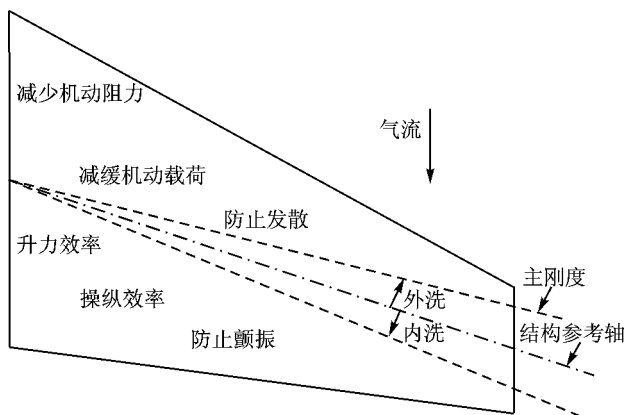


图 11-25 气动弹性剪裁效益与内洗、外洗的关系

以下分别用一些机翼模型的计算结果绘制的曲线来表明气动弹性剪裁的性能效益。

1. 提高扭转发散速度

从气动弹性原理可知,前掠翼的静气动弹性变形,具有内洗效应。机翼上弯时,同时产生抬头的扭转变形,这一变形使机翼上产生了对扭转发散极为不利的附加抬头气动力矩,使发散速度过低。这一问题,曾是前掠翼的致命弱点。直到 20 世纪 70 年代中期,由于复合材料可设计性的发展,Krone 提出了气动弹性剪裁应用于前掠翼的设计,利用刚度方向性,使之产生外洗效应,从而解决了前掠翼发散速度过低的问题,对前掠翼飞机的发展具有突破性意义。

图 11-26 表示了一个前掠翼模型的发散动压(量纲为 1)与前掠角(用负号表示前掠)的关系。该模型采用 $[0^{\circ}_4 \pm 45^{\circ}_2]$ 的铺层方式。图中给出了铝合金、 0° 铺层相对于机翼参考轴线前旋 0° 、 7.5° 以及 15° 的情况,旋角以前旋为正。此图表明,在前掠角不大的情况下,偏轴角的作用是十分明显的,前旋能显著提高扭转发散动压。显然,这是因为前旋具有外洗效应。

2. 提高操纵效率

操纵效率往往是后掠翼设计中的难题。后缘(常规的)操纵面偏转所附加于机翼的气动弹性变形会使操纵效率降低,而后掠翼的外洗效应进一步降低效率。利用复合材料气动弹性剪裁可以减少这种降低。以副翼为例,副翼下偏的一侧,其作用是要增加翼面的升力,因此,如果使翼面的铺层产生内洗,则对提高副翼的操纵效率是有利的。通常,在气动弹性分析中,把副翼的滚转操纵效率定义为

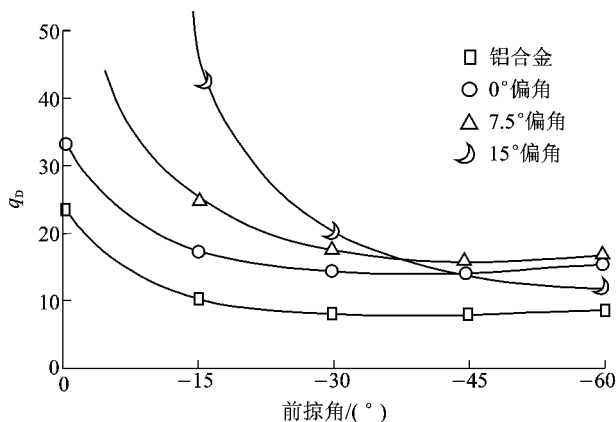


图 11-26 前掠翼的发散动压

$$\eta_x = \frac{\omega_x l}{2V} \delta$$

式中 ω_x ——稳定滚转角速度, x 为机身轴;

l ——展长;

V ——飞行速度;

δ ——副翼偏转角。

当 η_x 为负时,说明已经反效。

图 11-27 表示某一机翼模型的滚转操纵效率与复合材料铺层角度的关系。该翼面层合板由 3 种铺层方向组成,即 $\pm 45^\circ, 0^\circ$ 。当 0° 和 -45° 铺层所占百分比确定后,则 $+45^\circ$ 铺层所占百分比随之而定。从图 11-27 可以看到,当 0° 的百分比相同时(例如点 1 与点 2),减小 -45° 的百分比(亦即增加 $+45^\circ$ 的百分比),结果使滚转操纵效率提高。显然,按图示 $+45^\circ$ 方向,这样的铺层增加,将使机翼的内洗效果增强,从而提高了操纵效率。

3. 提高颤振速度

已知翼面的弯、扭固有频率差距增大,以及重心轴相对于刚轴前移,一般有利于提高颤振速度。由此可以预料,机翼内洗的变形形态,可能使机翼刚轴向后旋转,从而引起重心轴前移的效果,这对防止颤振有利。图 11-28 表示了一个平直机翼模型的颤振速度(量纲为 1)对偏轴角 θ 的关系。图中翼面用单一纤维的复合材料制成。其中 3 条曲线是颤振速度随 θ 的变化,线上分别标注了 $-0.2, 0$ 和 0.2 ,表示重心轴离刚轴之距与半弦长的比值,负号表示重心在刚轴之前。偏轴角 θ 以前旋为正。另一条曲线已注明为发散速度。由图中可见, θ 为负的铺设,对提高颤振速度是有效的,当然,只在某一 θ 的范围内是最为有效的。

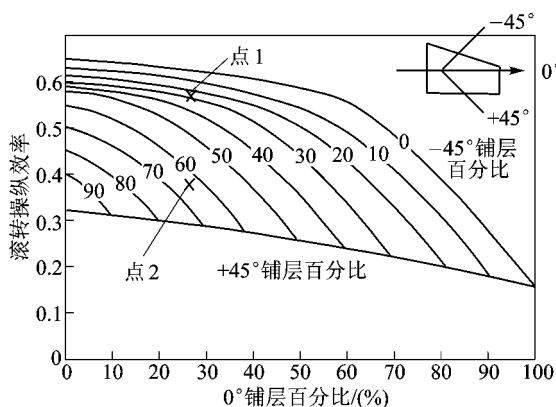


图 11-27 铺层改变机翼的滚转操纵效率

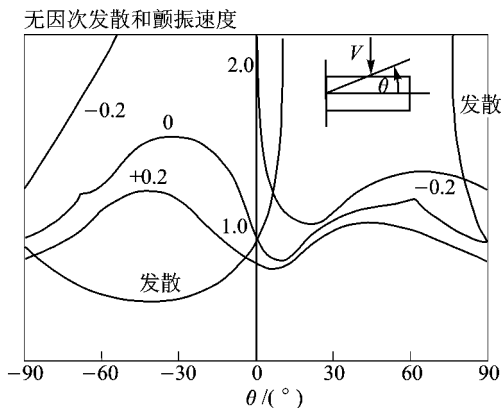
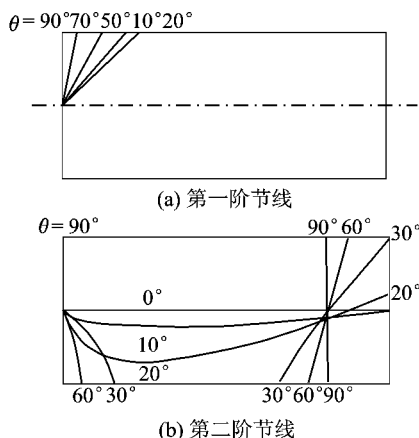
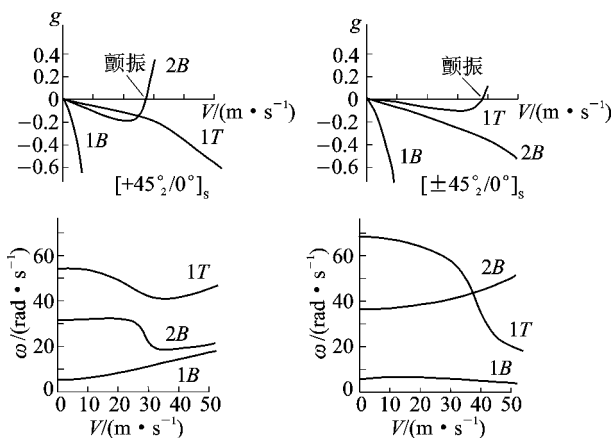


图 11-28 颤振速度随铺层方向的变化

另一方面,铺层方向还将影响翼面的固有振动特性,表现在固有频率改变以及模态节线位置改变上。由图 11-29 可见,前两阶固有模态节线,随铺层方向 θ 角而改变:第一阶节线随着 θ 由 0° 增至 90° ,逐步从固端向外偏转,到 $\theta=20^\circ$ 时又开始反向转回到固端;第二阶节线随着 θ 由 0° 到 90° ,逐步从扭转节线转化为弯曲节线。这说明 θ 改变还会使模态产生本质的改变,从而改变了颤振的基础——振动特性。还有就是改变铺层方式而影响颤振分支和速度的情形,图 11-30 表示用两种不同的铺层方式 $[+45^\circ_2/0^\circ]_s$ 和 $[\pm 45^\circ/0^\circ]_s$ 时一个层合板平直机翼模型的颤振结果,用 $V-g$, $V-\omega$ 图形给出。它表明第二种铺层的扭转固有频率明显增高,使它与弯曲频率离得较开,其颤振危险分支也由二弯转变为一扭。这正好显示了气动弹性剪裁的功能。当然,与此同时也可能使其他性能下降,所以应该进行综合优化。

图 11-29 前两阶固有模态节线位置与 θ 角的关系图 11-30 机翼模型两种铺层的不同颤振 $V-g$, $V-\omega$ 图 (B —弯, T —扭)



4. 改善静稳定性

通过翼面的气动弹性剪裁,还可以控制翼面的升力分布,从而改善静稳定性。由飞行力学可知,若飞机的重心在气动力焦点之前,则飞机具有静稳定性,焦点前移,静稳定度降低。举例来说,对于后掠机翼,如果经过气动弹性剪裁调整了机翼变形,使机翼气动力合力作用点沿翼展方向移动,就可以影响静稳定度。

5. 减缓机动载荷

如前所述,通过气动弹性剪裁,可以改变翼面上的升力分布。如果使升力合力向翼根靠近,就可以减缓机翼结构承受的机动载荷。翼尖外洗将有利于气动力合力向翼根移动。

6. 提高升阻比

飞机的升力阻力特性,可在升阻曲线图上显示,如图 11-31 所示。在设计飞机时,不论是巡航还是机动情况,都希望有一个理想的载荷分布,使升阻特性最好。其集中地反映在升阻比大。在飞机的 3 个特定点(起飞加速、巡航和机动)上,其升阻比均可通过气动弹性剪裁而得到提高。巡航时,希望机翼在气动弹性效应下产生理想的扭角分布,以利于巡航经济性。而在大过载的机动情况,则要利用气动弹性剪裁产生外洗,从而减小阻力;也可以通过剪裁产生内洗使机翼升力系数提高。图 11-31 显示了经过气动弹性剪裁的翼面与刚性翼面相比,在升阻比上取得的效益,它使转捩点延缓发生,并在 3 个特定点上,均有不同程度的效果。

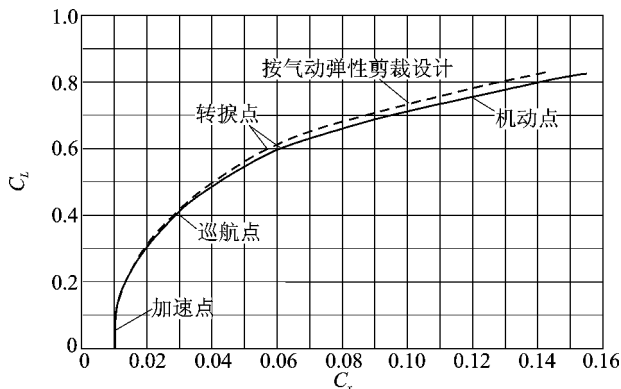


图 11-31 气动弹性剪裁改善了机翼的升阻极曲线特性

11.4.4 气动弹性综合优化设计

这一节实际上就是复合材料的气动弹性剪裁的实现。气动弹性剪裁是通过综合优化实现的。

复合材料翼面的气动弹性剪裁与金属翼面的优化相比,不同之处在于:

- ① 使用复合材料为结构,当用有限元素法进行结构分析时,元素要增加一定的复杂性;



② 需要用复合材料的破坏准则,例如蔡-Hill 准则或蔡-吴准则;

③ 在优化时可资利用的设计变量有各层厚度与角度,所以设计变量增加很多。在优化方法上,初始设计变量有时会严重影响优化结果。在采用敏度方法(局部优化)效果不佳时,可以采用遗传优化算法(全局优化)。

气动弹性剪裁工作有两部分内容:第一部分是基本分析,包括为满足设计要求而进行的应力分析、颤振分析及静气动弹性分析;第二部分则是综合优化设计。在此,对优化的提法是:

设计目标——结构重量最小;

约束函数——工艺制造要求、应力要求、颤振和发散速度要求、弹性变形要求、载荷减缓以及操纵效率等。

应当指出的是,以上各项约束往往是矛盾的。例如,在一个前掠翼的模型上曾经作过以下的计算对比,对比在两种设计下进行:第一种是按强度要求进行的初步设计,其约束为最小尺寸、最大蒙皮质量和最小颤振速度;第二种是加上最小发散速度的约束后进行气动弹性剪裁的优化设计。模型蒙皮材料为石墨-环氧树脂。表 11-1 中列出了对比结果。

从表 11-1 可见:第一种设计颤振速度高,发散速度低;第二种设计考虑了发散速度的约束,则使发散速度满足要求,但使颤振速度降低,同时使副翼效率降低。内洗对抑制发散不利,而对颤振和操纵效率却是有利的。

表 11-1 两种设计的效益对比

	第一种 (不含发散约束)	第二种 (含发散约束)
层合板铺层角 $\theta_1/\theta_2/\theta_3/(^{\circ})$	-45/0/+45	-80.9/+11.1/+14.5
蒙皮质量/kg	103.2	103.2
翼尖内洗/ $(^{\circ})$	10	5.1
发散速度/ $(\text{km} \cdot \text{h}^{-1})$	1 373	1 734
颤振速度/ $(\text{km} \cdot \text{h}^{-1})$	2 223.6	1 945.6
外翼载荷/N	274	263

思考题

- 11.1 什么是气动弹性系统的状态空间法?阐明其表达形式。
- 11.2 比较 $V-g$ 法与根轨迹法的区别,各有什么特点?
- 11.3 比较气动弹性、气动伺服弹性稳定性的频域和时域方法。
- 11.4 解决多输入、多输出系统的气动伺服弹性稳定性问题有哪些方法?各有什么特点?
- 11.5 鲁棒稳定性是什么含义?如何利用回差矩阵最小奇异值方法估算稳定裕度?
- 11.6 试述 μ 方法的基本概念。如何应用 μ 方法确定标称颤振裕度和鲁棒颤振裕度?



11.7 说明 AAW 设计理念,为什么说它是飞机设计思想的突破?

11.8 能否通过 AAW 设计理念来说明气动弹性主动控制与飞机性能、结构刚度、飞机减重等诸多问题之间的联系?

11.9 试述复合材料气动弹性剪裁的机理。为什么它对于前掠翼设计具有突破性贡献?

11.10 试比较 AAW 和复合材料气动弹性剪裁两种设计方法的异同和优缺点。

参考文献

- 1 刘豹. 现代控制理论. 北京:机械工业出版社,1983
- 2 张洪铎. 现代控制理论. 北京:北京航空学院出版社,1987
- 3 Roger K L. Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design. AGARD-CP-228, 1977
- 4 Karpel M. Design for Active and Passive Flutter Suppression and Alleviation. NASA CR-3482, 1981
- 5 Edwards J W. Unsteady Aerodynamics Modeling and Active Aeroelastic Control. NASA CR-148019, 1977
- 6 Tiffany S, Karpel M. Aeroservoelastic Modeling and Applications Using Minimum-State Approximations of the Unsteady Aerodynamics. NASA TM-101574, 1989
- 7 Nissim E. Reduction of Aerodynamic Augmented States in Active Flutter Suppression Systems. J. Aircraft, 1991,8(1)
- 8 Abel I. An Analytical Technique for Predicting the Characteristics of a Flexible Wing Equipped with an Active Flutter Suppression System and Comparison with Wind-Tunnel Data. NASA TP-1367, 1979
- 9 赵长安,王子才. 鲁棒控制系统. 北京:宇航出版社,1991
- 10 Mukhopadhyay V, Newsom J R. A Multiloop System Stability Margin Study Using Matrix Singular Values. J. Guidance, 1984,7(5)
- 11 黄圳圭,金梁. 鲁棒控制判据及其应用. 航天控制,1986(2)
- 12 孙卫,邹丛青. 耦合的气动弹性系统鲁棒稳定裕度估算. 北京航空航天大学学报,1996,22(3)
- 13 Lind R, Brenner M. Robust Flutter Margin Analysis that Incorporate Flight Data. NASA-TP-1998-206543, 1998
- 14 Lind R, Brenner M. Robust Aeroservoelastic Stability Analysis: Flight Test Applications. Springer Verlag, London, 1999
- 15 Lind R, Brenner M. Analyzing Aeroservoelastic Stability Margins Using the μ Method. AIAA-98-189, 1998
- 16 Lind R, Brenner M. Robust Flutter Margins of an F/A-18 Aircraft from Aeroelastic Flight Data. J. Guidance, Control and Dynamics, 1997,20(3)
- 17 孙卫,邹丛青. 多变量气动伺服弹性系统的鲁棒稳定性研究. 北京航空航天大学学报,1994,25(4)
- 18 Perry B, Cole S R, Miller G D. Summary of an Active Flexible Wing Program. J. Aircraft, 1995,32(1)
- 19 Pendleton E, Griffin K, Kehoe M, et al. A Flight Research Program for Active Aeroelastic Wing Technology. AIAA PAPER 96-1574-CP, 1996
- 20 杨超,陈桂彬,邹丛青. 主动气动弹性机翼技术分析. 北京航空航天大学学报,1994,25(2)



- 21 Noll T E. Aeroservoelasticity. AIAA 90 - 1073 - CP, 1990
- 22 Mukhopadhyay V, Perry B, Noll T E. Flutter Suppression Control Law Synthesis for the Active Flexible Wing Model. NASA TM 101584, 1989
- 23 Noll T E, Buttrill C, Adams W M. Aeroservoelastic Wing Tunnel Investigation Using the Active Flexible Wing Model - Status and Recent Accomplishments. AIAA 89 - 1168 - CP, 1989
- 24 唐长红, 邹丛青. 利用双目标优化寻求颤振抑制的控制律. 北京航空航天大学学报, 1990(2)
- 25 Mukhopadhyay V. Flutter Suppression Digital Control Law Design and Testing for the AFW Wing - Tunnel Model. AIAA 92 - 2095 - CP, 1992
- 26 邹丛青, 陈桂彬. 气动弹性力学的新分支——气动伺服弹性. 北京航空航天大学学报, 1995, 21(2)
- 27 Buttrill C, Bacon B. Simulation and Model Reduction for the AFW Program. AIAA 92 - 1420 - CP, 1992
- 28 Anderson L R. Order Reduction of Aeroelastic Model through LK Transformation and Reccati Iteration. AIAA 93 - 3785 - CP, 1993
- 29 Karpel M. Reduction - Order Aeroelastic Models Via Dynamic Residualization. J. Aircraft, 1990, 27(5)
- 30 Pitt D M, Goodman C E. FAMUSS: A New Aeroservoelastic Modeling Tool. AIAA - 92 - 2395 - CP, 1992
- 31 Krone N J. Divergence Elimination with Advanced Composites. AIAA PAPER 75 - 1009, 1975
- 32 Shirk, Herty T J, Weisshaar T A. Aeroelastic Tailoring - Theory, Practice and Promise. J. Aircraft, 1986, 23(1)
- 33 邹丛青. 气动弹性剪裁的机理和效益. 复合材料学报, 1989, 6(4)
- 34 张志民, 张开达, 杨乃宾. 复合材料结构力学. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1993