

图书在版编目 (CIP) 数据

系统工程方法与应用/黄贯虹, 方刚编著. —广州: 暨南大学出版社, 2005. 5

ISBN 7 - 81079 - 527 - 9

I. 系... II. ①黄...②方... III. 系统工程 IV. N945

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 032821 号

出版发行: 暨南大学出版社

地 址: 中国广州暨南大学

电 话: 编辑部 (8620) 85226593 85228960

营销部 (8620) 85226712 85228291 85220602 (邮购)

传 真: (8620) 85221583 (办公室) 85223774 (营销部)

邮 编: 510630

网 址: <http://www.jnupress.com> <http://press.jnu.edu.cn>

排 版: 暨南大学出版社照排中心

印 刷:

开 本: 890mm × 1240mm 1/32

印 张: 9.25

字 数: 250 千

版 次: 2005 年 5 月第 1 版

印 次: 2005 年 5 月第 1 次

印 数: 1—3000 册

定 价: 16.00 元

(暨大版图书如有印装质量问题, 请与出版社营销部联系调换)

目 录

前 言	(1)
第一章 系统科学概述	(1)
第一节 系统科学的形成与发展	(1)
第二节 系统的基本概念与特征	(6)
第三节 系统科学若干学科简介	(27)
第二章 系统工程思想	(48)
第一节 系统工程概述	(48)
第二节 系统工程方法论	(54)
第三节 系统分析与设计	(61)
第四节 系统模型与模拟	(75)
第三章 层次分析法 (AHP)	(78)
第一节 AHP 概述	(78)
第二节 基本原理和方法	(80)
第三节 AHP 计算	(93)
第四节 环保分析实例	(106)
第四章 灰色系统理论及其应用 (I)	
——灰色关联度分析方法	(116)
第一节 灰色系统概述	(116)
第二节 灰色关联分析	(118)

第三节	其他关联分析法	(134)
第四节	赤潮研究实例	(144)
第五章	灰色系统理论及其应用 (II)	
——	灰色系统建模方法	(152)
第一节	灰色系统模型	(152)
第二节	GM ($n, 1$) 建模与应用	(162)
第三节	GM ($1, h$) 建模与应用	(173)
第六章	系统辨识方法 (I)	
——	数学模型描述形式	(181)
第一节	系统辨识概述	(181)
第二节	系统辨识的数学模型	(198)
第七章	系统辨识方法 (II)	
——	现代系统辨识方法	(216)
第一节	现代系统辨识概述	(216)
第二节	模型结构辨识	(218)
第三节	最小二乘辨识方法	(226)
第四节	最小二乘递推算法与改进	(238)
第八章	系统的动态优化	(249)
第一节	系统优化概述	(249)
第二节	低阶系统的优化	(255)
第三节	二次线性系统的递阶优化	(271)
参考文献		(287)

前 言

人类举世瞩目的阿波罗登月计划与当今壮观的长江三峡水利工程，都是现代系统工程的巨作。系统工程（Systems Engineering）作为系统科学的一门实践技术学科，虽然从它的诞生到发展至今只有半个世纪，但已形成了自身的理论体系。系统工程既是探索各种工程系统之间带有普遍联系的学科，也是各学科理论间相互渗透、相互联系、相互作用的结果。现在，系统工程的研究对象已由工程系统扩展到社会经济系统、乃至自然环境生态系统，其应用面之广泛而有效，令人振奋，因此已成为热门的边缘学科。经济的腾飞，要靠科学技术的猛进，作为一门新兴的组织、管理和协调技术的软科学——系统工程，如何取代“拍脑袋”决策的管理方法，是普及并深化系统工程知识的目的所在。

由于系统工程的理论、方法及其应用涉及面非常宽广，因而无法在一本书或一本教材中全面而详细地阐述。基于这一点，本书首先通过对系统科学体系和系统工程思想的描述，结合系统科学若干分支学科的简介，以求宏观综述系统工程的方法，加强读者对系统工程的应用意识。然后结合编者相关课题项目，向读者系统介绍几种较为流行的系统工程方法：一是用于多目标管理与决策的层次分析法（AHP）；二是面向“灰色”系统建模方法的灰色系统理论；三是针对具有“黑箱”特性的系统辨识；四是系统的动态优化。本书并非以运筹学的方法作为系统工程的核心，而是始终以系统为中心，延伸至系统工程，再结合系统具有层次性、灰色性和“黑

箱”性特征，深入到建立系统模型及其优化的方法与应用。同时，本书内容组织的另一个特点是，读者只需具备相关高等数学的知识，就可通读本书的内容。

本书第一、三、四、五、八章由黄贯虹编写，第二、六、七章由方刚编写。

本书可作为理工和管理专业大学本科生的教材，也可作为相关专业研究生的教学参考书，还可作为相关科研及工程技术人员的参考资料。

在本书编写过程中，华南理工大学系统工程专家黄昭庆教授给本书编者提出了许多宝贵的建议。本书的出版，也得到了广东技术师范学院的大力支持。在此一并致以诚挚的谢意。另一方面，由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，诚请同行和读者指正。

编者

2004 年 10 月

第一章 系统科学概述

我们不能只限于知道该怎么做，而不知道为什么该这么做。系统科学（Systems Science）能够告诉我们，它就像一个巨大的天体黑洞，吸进人类几乎所有的聪明智慧，把各种各样的科学凝聚在一起，形成一股超级科学 DNA 链，它将复制宇宙。

第一节 系统科学的形成与发展

毫无疑问，科学促进了社会的发展，但同样不容忽视，社会的发展也推动着科学的进步，这种“相辅相成，两条腿走路”的共同发展模式将永久持续。进入 19 世纪以来，由于大工业、大工程、大科学、大组织的不断涌现，研究和处理这些复杂系统问题，仅仅依靠传统的科学理论和方法就显得远远不够了。

运筹学应该是第二次世界大战的副产品。从运筹学的产生到发展至今，始终围绕着两大方面的问题——理论问题与技术问题进行探讨。其中理论问题强调怎样将定性分析与定量分析相结合，以求获得——在一定的条件下——找出解决问题的最好办法，其核心问题在于寻求定量分析的方法。定性分析虽然是定量分析的导向或指南，但定量分析最终是定性分析的结果和依据。事实上，运筹学也正是在这种思想方法的基础上建立起来的，而定量分析的根本当属数学问题了。另一方面，要争取时间，提高效率，就必须发展自动

化技术，而通信技术又是信息来源快捷准确的保障，两者构成了上述所谓的“技术问题”。

扩大应用面是运筹学发展的另一主要方向。正像一把锤子，它产生的开始很可能只是单地用于敲、砸石头而已，显然，后来它的使用不但广泛而且普遍，还有许多的用具是由它衍生而制成的。这一简单而又具有普遍性的道理，很适合对许多学科发展过程的比喻。总之，任何一门科学技术一旦被作为一种工具使用，那么，它将被人类千方百计地推广到社会的各个领域，这正是应用科学的思想精髓。

如果说任何事物总是表现为“相互依存，相互矛盾”的话，这种关系的区别只是表现为强弱而已。那么运筹学本身的理论问题与伴随而来的两大技术问题之间的关系也不外乎如此。作为一门决策技术的基础理论——运筹学，由于两个技术问题的制约，以及怎样利用解决这两个技术问题的方法——控制论和信息论，所以运筹学在被应用于解决问题时，仍缺乏普遍性、系统性和宏观性的方法。但不可否认的一点是，运筹学本身也像其他任何学科一样，是在永无静止地充实、完善和发展着的。

正是在这种情况下，一门组织、管理和协调的技术学科——系统工程应运而生。当然，有些国外专家和学者并不认为系统工程与运筹学有多大的区别，而是认为系统工程是运筹学的另一种叫法。20 世纪 40 年代以来，西方学者对定量化系统方法的实际应用相继取了许多不同的名称，如运筹学、管理科学、系统工程、系统分析、系统研究、费用效果分析等等。他们所谓的运筹学，是指目的在于增加现有系统的分析工作；所谓管理科学，是指大企业的经营管理技术；所谓系统工程，是指设计新系统的科学方法；所谓系统分析，是指对若干可供选择的执行特定任务的系统方案进行比较选择；如果上述选择比较着重成本费用方面，即所谓费用效果分析；所谓系统研究，是指拟定新系统的实现程序。由于历史原因形成的这些名称，被认为是混淆了工程技术与其理论基础、技术学科的区

别，用词不够妥当，认识也不够深刻。

用定量化系统方法处理大型复杂系统问题，无论是系统的组织建立，还是系统的经营管理，都可以统一地看成是工程实践。“工程”（Engineering）这个词，18 世纪在欧洲出现的时候，是指作战兵器的制造和执行服务于军事目的的工作。从后一种含义引申出一种更普遍的看法，把服务于特定目的各项工作的总体称为工程，如水力工程、机械工程、土木工程、电力工程、电子工程、冶金工程、化学工程等等。如果这个特定目的是系统的组织建立或是系统的经营管理，就可以统统看成是系统工程。于是，国内有专家和学者把国外所称的运筹学、管理科学、系统分析、系统研究以及费用效果分析的工程实践内容，用系统概念统一称为系统工程；而把国外所称的运筹学、管理科学、系统分析、系统工程、系统研究及费用效果分析的数学理论和算法统一称为运筹学。

显然，前面对系统工程产生的分析及观点，认为运筹学应是系统工程的一部分。因为任何一门应用学科都应是由基础理论和应用的实践内容两个部分所组成，不论是运筹学还是系统工程也都是这样的。关键在于，运筹学更注重微观分析，而系统工程则更注重整体的系统分析，并且在有必要的时候，能引用控制论和信息论的方法，处理具有自动化和通信两大技术问题为因素的系统问题。从宏观而论，用控制论和信息论的方法定量化研究与分析具有某些特定功能的大型复杂系统问题，也是系统工程的重要课题之一。同样是作为一门组织、管理和协调的技术学科，系统工程无疑是内容丰富、应用更广泛且更具有系统性的。

下面，让我们回头看看上述两大技术问题。所谓自动化技术，是指在生产、管理和科研过程中，为了达到预定的目标，在没有人直接干预下，用自动机器或者自动系统，按照预定的程序代替人力来操纵，以提高工作效率，减轻人的劳动强度。显然，要实现自动化，就必须研制自动控制装置，运用系统的理论和方法把系统的各个部分连接起来，使人工系统实现自动运转。于是，便形成了有

关自动化技术的理论，也就是自动控制理论。当然，最初的自动化只不过是单个设备的自动化，后来，才逐渐发展为综合自动化甚至智能自动化。比如，工业生产中的自动生产线就是一种综合自动化。随着电子技术的飞跃发展，目前人类的自动化技术已经达到了相当高的程度。

通信技术研究的是系统中的信息转换和传输问题。人类的通信技术虽然可以追溯到远古时代，但通信技术的迅速发展还是近百年的事情。特别是无线电通信技术、微波通信技术、卫星通信技术和光纤通信技术的产生，结合现代计算机技术，使现代通信技术变得越来越广泛、越来越复杂。因此，设计、制造和管理这些通信网络不仅需要复杂的电子技术、精密的机械技术，而且必须用系统的观点加以分析和处理，这就使得通信技术变成了系统科学中的一门工程技术。

随着一类新的工程技术——系统工程——的产生，不断提高对系统的认识，就成了一种必然的结果。任何一门科学技术均有其严格的研究方法论，这种方法论与其哲学体系是息息相关的。人类朴素的系统思想尽管在很早以前就产生了，但是，在系统科学逐步形成以前，一种取代古代朴素的系统思想的机械论，仍无法上升到科学的系统观。系统观也叫做系统哲学，是关于一切系统的共同特征和规律的科学，是关于系统的一般哲学观和方法论，属于应用哲学的范畴。当然，科学的系统观还处于形成之中，但是，它的形成应当是从一般系统论开始的。

如果说，运筹学的产生就预示了系统科学的诞生，那么，系统工程理论及其应用的实践内容的确定则是系统科学诞生的标志。然而，一开始，系统工程理论本身作为研究系统的一门技术并非无所不能，尤其是对生命系统的研究，不仅缺乏对生命现象的理论解释，更缺乏对其分析和研究的方法。这正预示了系统科学领域的分支学科需要不断的扩充和发展，以求对系统工程提供理论方法的指导。

一般系统论也正是在这种情况下产生的，它与理论生物学的发展密切相关。生物学史上长期存在着机械论与活力论之争。机械论认为，人和动物都是机器，它把生命的本质归结为物理和化学过程，认为仅仅依靠物理和化学方法就可以弄清各种生命现象。而活力论认为，生物体里存在着一种支配生命的“活力”，这种活力是一种非物质的东西，是不能进行物理和化学分析的。显然，这两种说法都是错误的。

那么，应该怎样来解释生命现象呢？以奥地利生物学家贝塔朗菲为首的一批科学家认为：应该把生命看成一个有机的整体，强调生物的自至性、独立性和系统整体性。从而开始了机体系统论的研究，后来，贝塔朗菲又把机体系统论扩展到生物学以外，创立了一般系统论。20 世纪 50 年代，贝塔朗菲联合一些科学家成立了“一般系统研究会”，创办刊物、著书立说。不久，国际上掀起了一股系统论的研究热潮，相继产生了各种系统理论，例如耗散结构理论、协同论、超循环理论、生命系统论、突变理论等等，从而形成了系统科学中的各个重要分支学科。当然，随着人类社会的发展和科学技术的进步，将会产生更多研究系统的理论方法，不断扩大系统科学的内容，并且各门学科将不断被加以丰富和充实。

图 1 - 1 显示了系统科学发展至今的主要分支学科及其关系，并且主要的研究工具及手段是基础数学和计算机。另一方面，突变理论虽是系统科学的主要分支学科之一，但是它和模糊数学一样，是研究耗散结构、协同论、超循环理论和生命系统等学科的重要工具和手段。

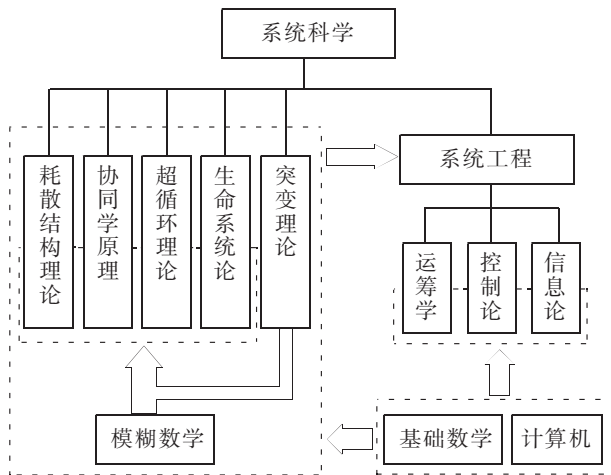


图 1-1 系统科学体系框图

第二节 系统的基本概念与特征

了解系统科学的形成和发展背景，固然对系统科学思想的认识是重要的，但若要了解系统科学本身，则应从系统科学中最重要概念“系统”开始。正因为系统科学是分析和研究系统的科学方法论，所以说，对系统的认识，是系统科学的中心和基点。虽然人类对系统很早以前就开始有所认识，但只有在这种认识上升到理论阶段，才标志着系统科学的开始。

一、系统概念

系统是具有特定功能的、相互间具有有机联系的诸多要素或单元（Elements）所构成的整体。系统，源自古希腊语，有“共同”和“给以位置”的含义。在《韦氏大辞典》（Webster 大辞典）中

“系统”一词被解释为“有组织的或被组织化的整体；结合着整体所形成的各种概念和原理的综合；由有规划的相互作用、相互依存的形式组成的诸要素集合等等”。在日本工业标准（JIS）中，“系统”定义为“许多组成要素保持有机的秩序，向同一目的行动的东西”。一般系统论的创始人贝塔朗菲把“系统”定义为“相互作用的诸要素的综合体”。美国著名学者阿柯夫认为，系统是由两个或两个以上相互联系的任何种类的要素所构成的集合。因此，系统不是一个不可分解的要素，而是一个可以分成许多部分的整体。

例如，对于一个生产企业系统来说，“产、供、销”是构成生产企业系统的三大要素。这个系统是以生产要素为中心和市场营销为导向运行的，但是若没有原材料、能源等的供应，那么，生产就无法保障。同理，产品销售若跟不上，则生产也无法维持。因此说，一个生产企业系统的营运是依靠“产、供、销”配套成龙而进行的，它运行的目的就是获取最大利润。虽然产、供、销各有其特点和功能，但正是它们之间所存在的上述关系，为达到同一目标而构成了一个不可分割的整体。当然，在分析研究这个系统时，可以根据“产、供、销”所具有的不同功能分别看作整个系统的三个子系统，如图1-2所示。

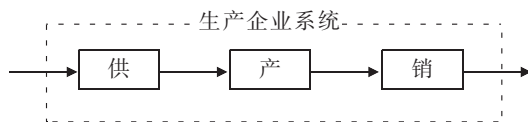


图 1-2 企业生产系统过程

综上所述，一个形成系统的诸要素的集合永远具有一定的特性或者表现一定的行为，而这些特性或行为是它的任何一个部分都不能单独具备的。系统是一个由许多要素所构成的整体，但从系统功能的观点来看，它又是一个不可分的整体，如果硬把系统拆开，那

么它将失去其原来的性质。

在物质世界中，一个系统内的任何部分都可以被看成一个子系统，而每一个子系统又可以成为一个更大规模系统中的一部分。这是一种系统分析的思想方法。但在现代社会，人们倾向于把事物看成为一个大系统中的一部分，而不是把整体拆分成许多互不联系的局部，这是一种综合的思想方法，即系统方法。

系统是一切事物的存在形式，系统的运行过程也正是一切事物的生命过程。所以说，对系统的认识，是培养对物质世界中一切事物认识的整体、系统思维方法的关键。

但是，如果就事物本身存在而论，就没有单独地把它作为系统来研究的必要。只有当我们不仅仅要认识它的存在，而且还要考虑达到与此同样的目的，确定有没有更好的方法去改变它时，才出现了系统的意义。

二、系统三要素

一个机组、一个工厂、一个部门、一项计划、一个研究项目、一种组织、一套制度等都可以看作为一个系统。系统具有输出某种产物的目的，但它不能无中生有，也就是说，必有输入经过处理才能得到输出，输出是处理的结果，代表系统的目的。处理是使输入变为输出的一种活动，一般由人与装备分别或联合进行。于是，我们说输入、处理、输出是系统的三大基本要素。显然，如果输入原材料，经过加工或作业得到的产品作为输出，即为生产系统。一项计划也可视为输入，经过执行后，就是处理，得到结果即是输出，属于管理系统。然而执行后的成果不一定是理想的，此时可以利用考核，校验、修改计划，加强执行，这些在系统中称为反馈或回授（Feedback），如图1-3所示。

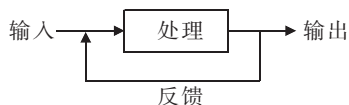


图 1-3 反馈系统基本结构图

三、系统特性

作为一个系统，从其概念和意义可以表现出它有如下四个最主要的基本特征。

1. 系统的集合性

任何一个系统，都是由两个或两个以上互有区别的单元或要素互相、有机地结合起来完成某一特定功能的综合体。

2. 系统的相关性

所谓系统的相关性，就是指系统的各要素之间、要素与系统整体之间以及系统与环境之间的相互联系和相互作用。系统正是通过这三个方面表现了系统的相关性。

首先，系统的相关性表现在要素之间。英国生物学家达尔文早就发现，在三叶草、土蜂、田鼠和猫之间，存在着一种有趣的关系。三叶草靠土蜂传授花粉，因此，三叶草的繁殖，直接受土蜂多少的制约。但达尔文又发现，土蜂的多少在很大程度上又由田鼠的多少来决定，因为田鼠吃土蜂，并且常常毁坏它们的蜂房。而靠近村镇的地方有很多猫又靠捕捉田鼠过日子，所以，猫的多少又决定着田鼠的数量。这样，猫、田鼠、土蜂和三叶草就构成一个互相维持生命过程的生态系统。在这个系统中，田鼠和猫、田鼠和土蜂之间是冲突的关系，土蜂和三叶草之间是互利关系。它们之间的这些关系，就首先反映了系统内部要素与要素之间的相关性。其实，世上的任何系统都是这样的。

其次，系统与要素之间的相关特性，表现为系统依赖要素，而要素是构成系统的基础。要素的性质和功能，直接影响着系统的性

质和功能。系统与要素的关系还表现在：系统对要素具有支配、控制和协调的作用。不但每个要素的特性和功能离不开系统整体，而且，要素之间的关系也是由系统决定的。例如，一个企业是由许多子系统组成的，但是这些子系统的活动，都是受企业整体的目标制约的。财务部门监督与控制各部门的开支，是为了降低企业的经营成本；质检部门对各道工序进行严格的质量检验，是为了保证产品进入市场竞争的质量。而这一切，都是为了提高企业的经济效益，正是这个整体目标制约着企业的各部门、各车间之间的相互关系。

再者，系统的相关性，还表现在系统与环境之间的相互关系。所谓环境，就是指系统受周围影响的一切因素和条件。事实上，环境和系统是相对而言的，环境是系统以外的系统，即系统是环境这个大系统的子系统，是从环境中分离出来的一个单位。

3. 系统的目的性

要研究任何一个系统，都是为了达到某一目的，而且往往不是单一的目的。世界上，万事万物的发展变化都有目的性吗？人的活动具有目的性，这是毫无疑问的。可是，说其他事物的发展变化也有目的性，这却是科学史和哲学史上一个长期争论不休的问题。人们之所以要争论这个问题，就是因为：人们要认识世界，就要探讨事物产生、发展和变化的原因，就要回答各种“为什么”和“为了什么”的问题，也就是要摸清事物发展和变化的目的性。

世界上万事万物都在有规律地运动变化着。比如，行星在按照自己的轨道运行；草木的发芽、生长和结籽；动物的出生、觅食和繁殖。他们的活动都指向一个目标，那就是维持自身和种族的存在，好像有一个预定的目的支配着万事万物的发展变化。

最早对事物的目的性进行研究的，大概要算古希腊的著名哲学家亚里士多德了。他认为不但人的活动具有目的性，而且世上一切事物的发展变化都有目的性。他认为事物的目的性就是事物的自然本性，自然本性是事物产生和存在的原因。任何事物都有一定的自然本性，并且按照这种自然本性来活动，这就意味着一切事物的发

展变化都有目的性。从亚里士多德的这些观点可以看出，把事物拟人化，并且把事物的目的性同自然本性等同起来，这显然是不科学的。

亚里士多德的这些观点，后来被中世纪的宗教哲学引向了极端，发展成为神学目的论。就像牛顿建立了万有引力定律，并以此解释地球绕太阳转的现象，但对地球绕太阳运转的初速度，归为上帝之手的相助。按照神学目的论的观点，世界上一切事物都是由上帝制造出来的，任何事物都跟人类一样具有目的性。例如，人长睫毛是为了保护眼睛，动物长皮毛是为了保温，等等。而这一切都是受上帝支配、安排的，把无知事物归为万能的上帝所知，是神学论的主要手段，这使科学技术在相当长的时间里没有多大的进展。

到了近代，神学目的论逐渐被机械论的世界观所代替，但是，这个时候，人们的认识又从一个极端滑向另一个极端。机械论的世界观把一切生物和人都看成机器，不但否定无机物、有机物和生物的目的性，而且否定人的目的性，把人和机器混同起来。每个人在实践中都能够体验到自己行动的目的性，不仅人同机器有本质的区别，就是一般的生物也不能同机器混为一谈。生命有机体可以在自然界生长出来，但是自然界里生长不出机器来。虽然复杂的机器系统可以达到很高的自动化程度，但是，机器在本质上都是被动系统，它要靠人来操纵，而且机器本身也不能繁殖机器。而人和动物在本质上都是主动系统，能自己生长和发育，他们的行为都带有很强的目的性。比如，猫扑老鼠，目的是为了捉住它；人下了班赶快回家去，是为了吃饭和休息，等等。这些都使机械论的世界观由于完全否定事物的目的性而陷入困境。于是，事物的目的性问题，又成为近代科学和哲学研究的一个重要课题。

后来，达尔文创立了进化论，用了大量的事实证明：物种是由无机物进化而来的，物种也不是固定不变的，而是在不断进化的；深刻地揭示了生物演化是物种与环境相互作用的结果。这就为科学地探讨事物的目的性问题打下了坚实的基础，而现代生物学的迅速

发展，又为这一探讨提供了良好的条件，系统科学家正是在这个基础上，提出了关于系统目的性的理论。

那么，什么叫系统的目的性呢？系统科学认为，所谓系统的目的性，就是系统的目标指向性、针对性或者方向性。按照系统论的创始人贝塔朗菲的说法，系统的目的性也叫“果决性”。“果”是结果，“决”是决定。果决性就是结果决定原因的意思。这并非有悖于“原因决定结果”的通常思维方法，而是体现了系统科学是从系统的整体上来看待事物的因果关系的。

原因决定结果，属于传统单因素分析法，这种方法是把整体分解为部分，认为单一的原因决定了单一的结果，也就是有一因必有一果，或者有一果必有一因。但事实上，事物之间的因果关系是很复杂的，一般都不是一个原因对应一个结果。有的是一种原因导致多种结果，例如，由于下雨，旱地里的庄稼长得旺盛了，可涝洼地的庄稼却被淹没了，同时，场院里晒的粮食发霉了，而池塘里的青蛙和鱼虾更加活跃起来，等等，这一切都是由下雨这同一个原因引起的；有的是多种原因导致一个结果，比如，一辆汽车出了事故，原因可能是多方面的，如天太黑、司机疏忽大意、道路太滑、行人太多等等；有的是多种原因导致多种结果，例如，一个工厂由于管理得当、设备良好、原料及能源充足等多种原因，结果生产效益高、职工平均收入增加，同时技术革新也取得效果，等等；有的异因同果，比如，吃饭或打葡萄糖液都可以使病人得到营养；有的同因异果，比如，青霉素针剂对大多数病人的消炎是非常有效的，但对某些病人来说，甚至会引起致命的过敏反应而禁用；还有的事物互为因果，比如，热能够引起燃烧，但反过来，燃烧又可以产生更多的热能。可见，事物的因果关系是相当复杂的。

系统科学认为：事物的因果关系之所以会这么复杂，就是因为在每个系统内部、各个要素之间，以及要素与系统、系统与环境之间都存在着相互联系和相互作用的关系，原因和结果也是相互联系、相互作用和相互转化的，不但原因可以决定结果，结果也可以

决定原因。系统科学正是通过对事物全面和整体的认识，揭示了系统中结果决定原因的这一特性，并且指出：系统的果决性就是系统的目的性。可见，系统科学所说的目的性是有特定的科学含义的，它所说系统活动的指向性、针对性和方向性，就是系统在发展过程中走向最终状态的针对性。

系统科学不但给目的性的含义作出了科学的规定，而且还揭示了系统目的性的不同类型，一类是静态的目的性或叫适应性，是指一种安排似乎有助于某一目的，也就是指系统的环境适应性。任何一个系统都存在于一定的环境之中，因此，它必然要与环境产生物质、能量和信息的交换，以适应环境的变化，这是系统持续存在的保证。动植物对环境的适应性就属于这种类型，比如，植物的刺可以对付吃草的动物；动物的皮毛可以保持体温；动物身上的保护色有利于躲避天敌的袭击，等等。另一类则是动态的目的性，是指系统活动的方向性，例如，一切系统不论它存在多久，都要经历一个产生、发展、衰落和消亡的过程，朝着这个方向发展，就是它的动态目的。又比如，一种结构的安排，使过程以某种方式达到某种结果，飞机的结构安排就产生适应于空中飞行的功能。

系统科学研究还表明：系统的目的性是有不同层次的，一个系统目的性的层次的高低，标志着这个系统的组织水平。一般来说，系统的组织等级越高，它的目的性就越强。自然界、生物界和人类各有不同的组织等级，因此，它们目的性也不在一个水平上。人类行为的目的性是系统目的性的最高层次，人类能够清楚地了解自己行为的目的，并预见将来的后果，从而采取相应的行为。

4. 系统的整体性

所谓系统的整体性，就是在要素组成系统以后，由于彼此的相互联系和作用所产生的那些新的性质和特点。换句话说，就是系统的性质和特点：不是它的各个组成部分的性质和特点的简单相加，而是由于它们彼此相互联系和作用新产生的。有句谚语说：“一个和尚挑水吃，两个和尚抬水吃，三个和尚没水吃。”非常有趣地体

现了系统的整体特性。

整体特性是系统最基本的特征。贝塔朗菲认为：一般系统论就是对整体性表述为“整体大于它的各个孤立部分之和”，并把它作为一般系统论的一个定律，人称“贝塔朗菲定律”。这个定律的意思是：系统整体的一些特征跟组成它的要素特征相比，好像是“新加的”、“多出来的”，作为系统整体中组成的要素，具有它自己在独立存在的状况下所没有的特征。比如，人作为一个活的有机整体，能思维，会说话，可以从事各种活动。但是，组成人体的各个肢体器官，在独立存在的情况下，哪个也不具有这些性质和功能。又比如，一个氢原子是由一个质子和一个电子组成的，作为一个系统整体，氢原子在常温下具有气体的性质而且容易燃烧，但是，作为构成原子要素的质子和电子，它们在单独存在的情况下就不具有这些性质。

系统之所以会产生整体性，是因为系统虽然是由要素组成的，但是这些要素组成系统，并不是要素的简单相加堆积，而是按照一定的方式和秩序有机地组织起来的，这个组织过程，就是一个整体化的过程。在这个过程中，各要素之间形成了相互联系和动态的相互作用，由于这种相互联系和相互作用，就使得各要素在系统内部的行为同它们在孤立状态下的行为不一样了，于是，便形成了系统的整体性。事实上，系统的整体性，就是要素形成系统以后产生的有机性、组合性和组织性。

当然，各种系统的整体性的形成又是不一样的。例如，物理系统的整体性，如原子、分子和晶体等，它们的整体性都来源于各要素的联合。而生物系统的整体组织又有自身的特点，自然界和人类都不能用各种要素组成一个生物体，生物的整体组织是由原始整体的分化逐步建立起来的。比如，植物从种子发芽或从亲体的一部分断开，逐步生长为一个个体；动物的一个精子和卵子结合形成胚胎，胚胎再逐步发育，形成动物个体，等等。社会系统整体性的产生又与自然系统不同，它的形成与人的设计和创造有关。例如，人

们可以根据某种社会需要建立一个组织，如政治团体、管理体系和工厂企业等等。又如观念系统的整体性，则是人脑对感性材料思维、加工和创造的结果。总之，虽然各类系统形成的途径不同，但是它们都有一个共同的特征，这就是整体性特征。

注重整体效应是系统工程思想的基本点，源于贝塔朗菲定理，即出自“整体性是系统最基本的特征”。它不但是组织、管理、协调、规划等活动的基本准则，而且也是艺术、文化乃至人类的各种活动等的基本准则。所以，在现实社会中，我们会反复多次地听到“从大局考虑”、“顾全大局”等等。据说，法国著名的雕塑家罗丹曾经给大文学家巴尔扎克雕了一座塑像。塑像雕好以后，很受人们称赞。人们特别对雕像巴尔扎克的一双手赞不绝口，说这双手太逼真、太生动了。可是，罗丹听到后，却毫不犹豫地 from 雕像上砍去了这双手，他解释说……

重视整体效应，必须以系统的目的性、相关性和整性三位一体为中心。即以系统的目的性为导向，结合系统的相关性，以系统的整体性为准则，实现综合、平衡地进行科学决策。例如，一个地区经济系统，主要以大农业、工业、商业饮食业、交通邮电业和建筑业这五大部门作为系统的五大要素。而这五大部门又可视为区域经济系统的子系统，其中，大农业是以农、林、牧、副、渔等五个行业为其要素，从而构成区域经济系统的一个子系统。过去，片面强调粮食生产，毁林开荒，乱垦草场，从而破坏了生态平衡，造成水土流失，气候失调，结果是耕地增加了，但产量却大大地下降了，林、牧等其他四个行业收入也减少了。目前情况虽有很大的好转，但是生态平衡问题显得非常突出，因为生态平衡很容易在短期内受到人为的破坏，可是想恢复平衡可能要花上十年甚至几十年的不懈努力。

四、系统三原则及系统科学的研究方法

系统科学的思想也是以“三位一体”为中心，即以“目的性”

为导向，结合“相关性”，以“整体性”为准则。因此，在这里我们称“目的性”、“相关性”和“整体性”这三个系统特性为系统三原则。因为，只有首先确定系统所要实现的目的，找到实现该目的的诸要素，结合认识诸要素之间、要素和系统、系统与环境的相关性，以及各要素的功能或任务，才能真正建立起所要研究的对象系统。然后，寻求有用的物理模型、数学模型或模拟模型等来定量分析，验证是否可能，若能，则以“整体”为准则，用数学方法分析和研究，从而得到实现系统目的的方法。行为和过程的决策，如图 1 - 4 所示。

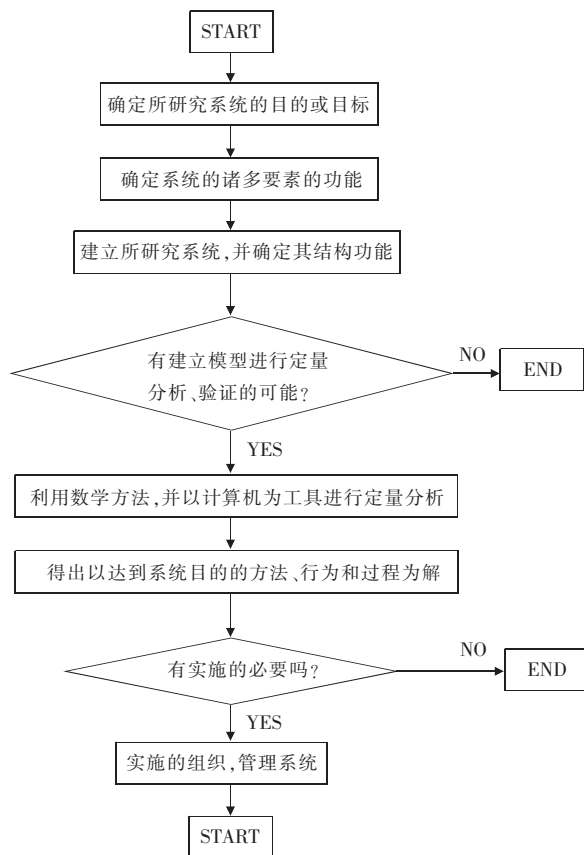


图 1 - 4 系统科学研究方法程序框图

五、系统分类

对系统的分类，是对系统认识和总结的方法之一，以便于系统的综合与分析。系统分类是相对于不同性质的系统而言的，这是因为：一方面，一个系统可能是由各种不同性质的子系统构成的，通

过对系统的分类，认识其子系统的作用、功能及结构，便于对整个系统的认识与研究。另一方面，任何一个系统从其所处的环境系统的构成中分离出来，便于对任何系统与其自身所处的环境系统加以综合、平衡。

例如，一个石油化工总厂，在不存在供销问题的情况下，构成一个独立的生产系统。为了实现获取最大经济效益的目标，又根据该系统的结构与功能特性及其所处环境，确定了这个系统是由最终产品生产系统、组织管理系统、节能系统、污染处理和排污系统等子系统为大要素构成的。如图 1 - 5 所示。

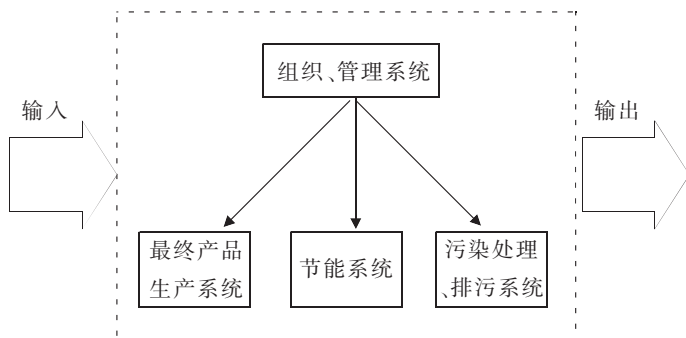


图 1 - 5 石油化工生产系统

为使统一的经济指标便于定量分析，可将资金的年投入额作为输入，资金的年回收额为输出，那么两者的差额即作为整个生产系统的目标函数。显然，节能系统是根据产品的生产性质所设置的，因为该厂的最终产品，是通过对石油加热后，分离出各类不同品质的油类和液化石油气等产品。为达到更高的经济效益，热回收是节能系统执行的主要任务或目的，它是由换热网络系统来实现的。而

污染处理与排污系统是根据生产内部结构与外部环境的关系而设置的，即整个生产系统的内部经济效益要与外部的生态效益挂钩，才能算是整个生产系统经济效益的目标。

又如，人体若以维持生命为目标，那么其呼吸系统、消化系统和泌尿系统为子系统，构成了人体维持生命的机体系统。但这个系统无不与人赖以生存的环境息息相关，即为了研究人体维持生命的这样一个系统，就必须从诸多影响维持生命的要素，及所构成的环境系统加以分析，这些要素包括吃、穿、住、行、职业和医疗卫生等等，从而构成了由人体维持生命的内部系统和其环境诸要素的更大系统。

系统的分类，源于系统所具有的独立特性，而系统的独立性，是根据系统具有的功能与结构——所要实现的系统目标——而言的，即系统的独立性，又是由系统的目的性分化出来的。另一方面，系统又具有层次性、有序性等一般特征，在此就不一一叙述。以下将描述各分类系统。

1. 自然系统与人造系统

所谓自然系统，就是说它的组成要素是自然物，它的特点是自然形成，像海洋系统、矿藏资源系统和生态系统等。

人造系统是人为产生的系统。人造系统包括三种类型，一是由人们加工自然物中获得的系统，如工具、仪器、设备、工业工程等等系统；二是由一定的制度、组织、程序等所构成的管理和社会系统；三是根据人们对自然现象和社会现象的认识而发展和建立起来的学科体系。

实际上，大多数系统是自然系统与人造系统的复合系统。这是因为人造系统处于自然系统之中，是与自然系统息息相关、脉脉相通的。

2. 实体系统与概念系统

凡是以矿物、生物、机械、能量和人等实体为构成要素所组成的系统都是实体系统。凡是由概念、原理、原则、方法、制度、程

序等概念性的非物质实体所构成的系统称为概念系统，如管理系统、教育系统、各学科系统等。

事实上，实体系统和概念系统在多数情况下是结合的，实体系统是概念系统的物质基础，而概念系统往往是为实体系统的研究与利用提供指导和服务。

3. 动态系统和静态系统

在量化分析系统特性的过程中，动态系统就是，系统的状态变量是时间的函数，即它的状态变量是随时间而变化的。而静态系统则是，表征系统运行规律的数学模型中不含有时间因素，即模型中的变量不随时间而变化，它只是动态系统的一种极限状态，即处于稳态的系统。静态或稳态是相对的，而动态则是永恒的。

例如，一个百货公司为商品流通系统中的一种营业系统，若以年度 t 为时间单位， $X(t)$ 为第 t 年的进货额， $Y(t)$ 为第 t 年的销售额， $W(t)$ 为第 t 年的中间消耗额，那么 $Y(t) - X(t) - W(t)$ 就是该营业系统的第 t 年的利润额，即为该营业系统的一个目标函数，其中 $Y(t)$ 、 $X(t)$ 、 $W(t)$ 就是以时间 t 为变量的状态变量。那么随着时间的变化，该营业系统就是一个动态系统。

又如，人类系统的部分演化过程是从猿类系统进化为人类系统。可是，从猿到人的进化过程是一个相当长的演化过程，在猿还没有进化为人之前的这段过程中，就猿与人的身型差异而言，猿类系统是处在一种静态或稳态过程。这就好比量变到质变的过程是动态的，而量变过程的本身，相对于质变而言是静态的。

4. 开放系统与封闭系统

所谓封闭系统，就是那些与环境没有物质交换和流通的系统。而开放系统就是指与环境有材料、能量或情报等物质交换和流通的系统。例如，20 世纪初，美国生物学家威尔逊做了一个实验，发现了一种奇怪的现象，他把两种不同颜色的海绵体都磨成碎末，然后把它们掺和到一块。过了一会儿，他发现这两种颜色的海绵体碎末又自动分开了，而且相同颜色的海绵体碎末又重新聚到一起，形

成一个新的海绵体。但是，如果我们把一些红色和蓝色的玻璃球同放一个杯子中摇晃，使它们混合在一起，则上述有趣的现象将无法出现。

是否有物质的输入和输出，是区别开放系统和封闭系统的一个最基本的特征，贝塔朗菲正是根据这个特征给这两种系统下定义的。因为海绵是一种动物，那些海绵体碎末实际上是一些活着的海绵细胞，这些细胞都是开放系统，它们既可以从海水里吸取氧气和食物颗粒，也可以排出废物，即有自动输入和输出的能力。因此，它们是一个个能自由活动的活着的小机体，且海绵这种生物具有同类细胞相聚的本领和惊人的再生能力，所以才会出现上述实验中的现象。同海绵一样，一切活着的生命有机体本质上都是开放系统，如所有活着的植物、动物、微生物和人类都属于这类系统。另外，各种社会系统也属于开放系统。相反，每一个玻璃球体都是封闭系统，由于没有自动输入和输出物质的能力，也就无法自行运动，即为一种“死体”。另一方面，开放系统和封闭系统的区别还有以下几个重要的基本特征。

开放系统能够始终保持自身的稳定状态，而封闭系统最终只能达到平衡状态。即一个开放系统，尽管不断地有外界输入物质和能量，也不断地向外界输出物质和能量，其组成的成分在不断地改变，但是，这个系统的宏观结构始终能保持稳定不变的状态。比如，一个人的血量就是相对稳定的，正常人的血量大约是体重的7%~8%，即一个体重60千克的人，其血量大约在4.5升左右。又比如，人体的结构也是相对稳定的。相反，虽然在封闭系统内部存在着物质运动，但是运动的结果不是产生稳定状态，而是产生平衡状态，达到平衡状态以后，系统也就不运动了。如化学反应一般都是在密封的容器里进行的，这样，反应物和容器就构成了一个封闭系统。通过系统内部的化合和分解，最后就会达到一种平衡状态，于是，化学反应也就停止了，系统也就不运动了。科学研究表明，一切封闭系统都具有这样的特点。

开放系统在受到外界刺激的情况下，能够通过自身的调节，重新恢复稳定状态。如人和动物在外界的温度发生变化时，能够通过自身的调节，保持体温的相对稳定。又如，一个正常的成年人在一次献血 200 ~ 300 毫升以后，血浆蛋白的浓度可以在一昼夜间得到恢复，在营养适宜的条件下，红细胞的数量和血红蛋白浓度可以在三四周的时间内完全恢复正常。可是封闭系统就无法实现这一特征的过程，若把一瓶墨水吸出一些，它永远不会再自行恢复成一瓶。

开放系统又具有等结局性，或叫异因同果性。封闭系统则具有不等结局性，或者叫做同因同果性。所谓异因同果性或等结局性，就是开放系统可以从不同的起点出发，沿着不同的路径，达到相同的结果。比如，德国生物学家杜里舒就拿海胆这种海生动物做过实验，发现从一个完整的海胆胚胎中，或从半个海胆胚胎中，或从两个海胆胚胎的结合中，都可以产生一个正常的海胆个体。又如，作为开放系统的管理系统在不同地域、时间和配置人员等条件下，管理方法和其系统的配置构成是不相同的，但不论该管理系统如何变化，它所要达到的结果只有一个——获取最佳效益。另一方面，要达到最佳效益的管理途径一般是多种的。

可是，作为封闭系统，它们的最终结果都是由起始条件决定的。比如，在化学反应过程中，反应物最后的浓度就是由起始条件决定的。就拿制作食盐工艺过程来说，它的浓度就取决于开始制作时所加的盐和水的量比，即所谓不等结局性或者同因同果、异因异果。

开放系统与封闭系统的区别的另一个特征，就是开放系统一方面通过系统内部的运动和作用，能量的分布逐渐趋向均匀。另一方面，由于开放系统与其所处的外部环境系统的联系，能量在不断地得到补充和释放。所以，开放系统中的能量分布状态是不断变化着的，无法达到完全均匀的程度，而只能保持相对稳定的状态。例如，在经济学中，消费者或需求方、厂商或供给方、商品或服务构

成市场的基本要素。显然市场是个开放系统，其中，商品价格或物价 P 以及成交量 Q 的形成，是厂商供给价格与消费需求价格达成平衡的结果，即为商品的成交价格 P_0 和成交量 Q_0 。在价格与数量的坐标图中，即为供给线 S 与需求线 D 的交点 E ，如图 1 - 6 所示。当供给与需求相对稳定时，物价也会相对稳定，这很重要。当供给与需求发生变化时，即供给线与需求线发生变化时，原来的供求就会失衡，从而形成新得供求平衡，因此形成新的交易价格与交易量。

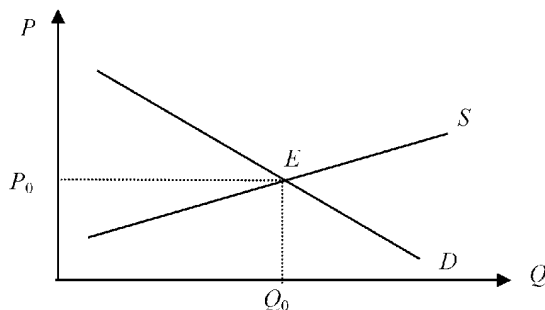


图 1 - 6 商品成交价格与成交量形成坐标图

可是封闭系统是遵守热力学第二定律，能量的分布总是趋向于均匀的。当然，两者的区别还不只是这些。不过，仅以上面所谈的区别就足以看出，传统的物理学和化学是不适用于解释开放系统的，因为它们所涉及的是封闭系统的规律。而生物现象、心理现象和社会或经济现象等都属于开放系统的现象。

5. 反馈自调节系统

导弹制导系统大体上是由观测系统、操作控制系统、发射系统、导弹系统和人等要素所组成的，是一个典型的人造反馈自调节系统。反馈自调节系统的认识关键在于“反馈”二字。“反馈”是从英文 Feedback 翻译过来的，其本义是“反喂”、“反送”的意

思。该词在第二节已出现过，参见图 1 - 3 所示，控制论把系统中输出对输入的这种反作用的过程称为反馈。

系统科学研究表明，反馈有两种情况。一种是输出端的输出结果反作用于输入端时，对输入起强化作用，即反馈的结果起着使系统朝着偏离控制目标的方向运动的作用，这种情况称为正反馈。正反馈使系统越来越不稳定，甚至导致整个系统的崩溃和解体，如一个工厂的产品投放市场后卖不出去，在已知这种情况下还继续生产这种产品，就会使产品积压越来越多，甚至使工厂陷入困境。另一种情况是，输出端的输出结果反作用于输入端时，对输入起着削弱作用，即反馈的结果起着使系统朝着控制目标的方向运动的作用，这种反馈称为负反馈。如前面所提的导弹制导系统中的反馈，就属于这种反馈。人们把具有负反馈机制的系统，叫做反馈自调节系统。

反馈自调节系统有两种不同的类型，一类是把系统引向一个预期的目标，使系统处于自调节状态，即根据反馈的信息，不断地调整系统的行为，使系统与目标之间的差距逐渐减少，直至达到系统的最终目的。比如，狮子在捕捉猎物以前，总是先选择进攻的目标，然后再采取行动。在进攻的过程中，要根据猎物的逃跑路线，不断地改变自己的行为，直到接近并捕获猎物为止。像导弹的制导、老鹰抓兔子、司机驾驶车辆等等，都属于这种类型。反馈自调节系统的另一种类型，是把系统维持在某些变量上。如电路上的自动开关装置，人和恒温动物的体温调节系统，自动开关水调装置等等，都是属于第二种类型的反馈自调节系统。当然，与技术系统相比，生理系统中的反馈调节更精密、更复杂。

6. 自组织系统

人和动植物的伤口之所以能够愈合，正说明它们都有一定的再生能力。这种再生现象正说明了一种自组织的过程，而组织过程正是系统化的过程。如人们在生活中总是期望把自己的家庭布置得既美观又实用，以求舒适和方便，其中“布置”就是一种组织。又

如，各级政府在其所管辖的区内制定城市建设规划，其目的就是期望达到较好的社会、经济和生态效益。为了便于说明，以城镇建设系统为例。城镇建设系统主要以居民区、商业区、工业区三大布局系统为其要素，如图 1 - 7 所示。

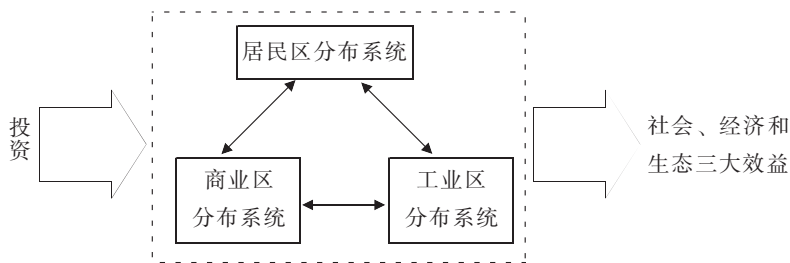


图 1 - 7 城镇建设系统结构图

城镇建设系统的目标是整体布局合理，具体表现为社会、经济和生态三大效益。其中，经济效益主要指建设投资最省；生态效益主要指环境良好；社会效益主要以交通便利、防洪保险、少占用地、发展弹性大等为准则。至于何为投资最省，何为环境良好，则可按照对其影响的诸多要素进行详细的划分，作准确的分析。

可见，上述所谓的“家庭布置”、“城市建设规划”或“城镇建设规划”就是一种自组织形式。前苏联学者鲁扎文认为，自组织系统是有序性量度随着时间增长的系统。不但生物系统是自组织系统，人类社会、社会组织和人的思维也是自组织系统，因为这些系统都存在着从无序到有序，从低级到高级的进行过程。

总之，系统的分类方法有很多，如可分为可控与不可控系统、生物系统与非生命系统等等。系统的分类目的，是便于人们从不同的角度去认识和刻画各种各样的系统，以求充分研究、开发和利用各种各样的系统。

六、什么是系统科学

前面我们已论述了系统科学的产生和发展，以及系统的若干重要概念、特性和分类等。那么，什么是系统科学呢？通过上述讨论得知，系统科学是从系统的思想出发，由对事物进行系统研究和处理的一系列学科所组成的科学总体系，即以系统为研究和应用对象的一门大科学。它的形成和发展历史远不如自然科学、社会科学、数学科学等那样悠久，只是近半个世纪以来，才逐步发展成为一门新兴的现代科学技术体系。

1978年，钱学森等发表了“组织管理的技术——系统工程”一文，从那以后的短短几十年内，系统科学在我国得到迅速发展。今天，系统工程作为系统科学的应用与实践技术学科，不仅其理论与方法有了很大发展，取得了许多重大成果，而且对促进科技进步、经济和社会发展都发挥了重要作用。系统工程在国家各部门、各单位、各组织，从微观到宏观的组织管理、领导和决策、规划、预测和可行性研究等都得到广泛应用，并且日益显示出其巨大潜力，因而也越来越引起各级领导、决策部门、学术界以及各行各业人们的广泛注意和高度重视。

系统科学，由于系统的涉及面之广，所引用定量方法的理论之多，成为横跨自然科学、社会科学的学科体系，故系统科学称为跨学科科学，又称横向科学，也有边缘科学之说。所谓边缘科学，实际上就是各种学科相互渗透、相互联系、相互作用所产生的学科。迄今为止，系统科学已开始形成其自身的理论体系，以数学为其定量分析的重要手段，并借助于电子计算机，来实现系统科学对系统的研究、开发和利用的最终目的。

第三节 系统科学若干学科简介

一、运筹学 (Operations Research)

1. 运筹学的起源与发展

Operations Research (OR) 的原意是作战研究, 它最早起始于第一次世界大战, 当时有个叫林恰斯塔的人发表了著名的“林恰斯塔 N^2 法则”。该法则的含意是, 当两军交战时, 一方的伤亡与另一方兵力的平方成正比。林恰斯塔根据理论性研究推导出上述方法, 后来把这种科学分析方法应用到雷达使用和对潜水艇作战上, 在第二次世界大战中取得了很大的成效, 从而孕育了第二次世界大战中诞生的运筹学的思想和方法论。从作战研究开始的运筹学, 目前已被广泛应用到企业经营管理等方面, 并成为不可不用的方法。总之, 人们以生命换来的研究成果一旦用于和平, 就会对人类作出贡献。

那么, 中文“运筹学”虽然是由 OR——即作战研究——演变而来的, 但“运筹”两字又出于何处呢? 据说, 原来是中国学者想起了我国著名史书《史记》里的一句话“夫运筹帷幄之中, 决胜于千里之外”, 认为把 OR 译成“运筹学”最恰当不过, 于是, 就把这门学科命名为运筹学了。

第二次世界大战期间, 不少于 700 名的美国、英国和加拿大科学家参与了涉及先进军事技术的研究, 当时, 在英国称之为 Operations Research, 而在美国则称之为 Operations Analysis。最有名的, 首推英国曼彻斯特大学物理学家、英国战斗和司令部科学顾问、战后伦敦国际战略研究所创始人之一、因宇宙线研究而获诺贝尔奖的伯莱克特领导的运筹小组, 这个小组包括三名心理学家、两名应用数学家、一名天文物理学家、一名普通物理学家、两名数学家、一

名海军军官、一名陆军军官和一名测量技术人员，共同研究把雷达信息通报给防空武器系统的最佳方式，研究雷达与防空武器的最佳配置，对英国防空系统效率的提高作出了重要贡献。同时，又研究了英国商船的最佳海运线，力求避开德军的潜艇进攻，以把损失降到最低为目标，以及其他许多作战策略研究。

后来，人们发现运筹学方法不但适用于军事，而且适用于民用，于是战后，科学家们又把战争中发展起来的运筹学方法逐步推广应用到工业、农业、商业等社会生产活动的各个领域。正巧，战后由于大型企业的不断涌现和市场的激烈竞争，以及新工艺、新产品的迅速发展，使得人们单凭经验和直觉判断，已无法解决经营管理中的许多复杂问题，也迫切需要新的科学方法的帮助。运筹学的推广和应用，正好适应了这一客观要求。电子计算机的迅速发展应用，又为用运筹学方法解决大型复杂问题提供了强有力的计算工具，进而更加促进了运筹学的发展和应用。于是，用来解决军事作战问题的数学方法和综合的系统分析技术，便逐步发展成为普遍适用的科学方法和技术，这样，运筹学作为一门新型学科，在 20 世纪 50 年代应运而生。

2. 什么是运筹学

美国科学家莫尔斯和金搏尔，总结了二战期间英美两国在这方面的科学活动，先是在 1946 年以秘密形式开始进行，后又在 1950 年以公开形式出版了《运筹学方法》一书。他们指出“运筹学是为领导机关对其控制下的事务采取策略提供定量根据的科学方法”。在他们之后，科学家们关于运筹学的定义众说纷纭，各种不同说法几乎可以开出一张很长的单子。直到今天为止，它始终没有一个统一的定义，这大概是由于它的研究对象、研究内容和应用范围十分广泛的缘故吧。有的说，运筹学是“能够帮助决策者解决那些可以用定量方法和有关理论来处理的问题”的科学；有的说，运筹学“主要是研究人力、物力的运用和筹划，以发挥最大效益”的科学；有的认为，运筹学是“管理系统的人，为了获得关于系

统运行的最优解而必须使用的一种科学方法”；还有的人认为，“它是一门应用数学”。

但是，综上所述，我们可以通俗地说，运筹学就是运用数学方法来寻求事情的最优方案的学科。即用数学的方法，仔细分析，认真筹划，找出解决问题的各种方案，决定一种最好的方案。它是系统科学总体系中一门定量化研究和处理系统问题的技术学科，是量化的系统方法的技术基础和工具。运筹学的内容，属于确定性理论的有线性规划、非线性规划、整数规划、图论、网络分析、几何规划等；属于随机理论的有排队论、库存论、对策论、决策论、动态规划等等。

3. 运筹学实例

这里我们引用一些有趣的例子，说明运筹学中若干方法产生和所解决的问题。

[例 1 - 1] 齐王赛马与囚犯难题

战国时代，一次齐王和他的大将田忌赛马，双方约定各出上等马、中等马、下等马各一匹，分三场进行比赛，每次胜者可得 1 000 两白银。论马的实力，田忌的上、中、下等马均分别不如齐王的上、中、下等马。于是，田忌的谋师孙臆出计。结果，田忌净赢 1 000 两白银。

该问题属于对策论的范畴。对策论是研究有利害冲突的双方或一方，在竞争性运动中如何找出制胜对方的最优策略的科学，又称为博弈论。由美籍数学家冯·诺意曼和经济学家莫根施特恩共同创立于 1944 年。在对策论中，还有一个经典的例子就是以下的囚犯难题。

一位法官分别对两个被隔离囚禁的盗贼说，如果你们都坦白，各判监禁 3 个月；如果一个坦白，一个沉默，就判……两个都沉默，就……结果两个囚犯很为难，如下表 1 - 1 所示。

表 1 - 1 对囚犯的判决 单位：月

囚犯 A \ 囚犯 B	坦白	沉默
坦白	3 h 3	0 h 6
沉默	6 h 0	1 h 1

在实际市场中，寡头垄断在选择竞争还是采取合作时，却总是面对类似的囚犯难题。这是因为公开合作或阴谋勾结都是非法的，在无约束的合作下，加之各怀私心，即使都认为联合能够使寡头们成为垄断者而得到更多的好处，但要形成默契却是相当困难的。

[例 1 - 2] 打鸡蛋问题

有个学者买了 6 个鸡蛋，在一次准备用餐前，其妻已将 5 个好鸡蛋打入一个碗，忽然有人找这位学者的妻子，于是，妻子吩咐学者将另一个鸡蛋也打入碗中，并准备这顿用餐。这位学者走进厨房，脑子忽然想到，似乎须面对几种方案的择一，结果会如表 1 - 2 所示。

表 1 - 2 打鸡蛋方案及其结果

余下的一个鸡蛋	好	坏
1. 直接打入	吃 6 个	吃 0 个
2. 另用一碗	吃 6 个、多洗一碗	吃 5 个、多洗一碗
3. 扔进垃圾桶	吃 5 个	吃 5 个

此问题属决策论范畴。所谓决策论，通俗地说，就是关于拿主意、作决定的科学，也就是决策者根据外界情况，研究怎样从若干个可行方案中选择最优方案的基本理论和方法。

[例 1 - 3] 物资调运问题

某种物资有三个产地 A_1 、 A_2 、 A_3 ，产量分别为 a_1 、 a_2 、 a_3 。五个销售地 $B_1 \dots B_5$ ，销量分别为 $b_1 \dots b_5$ ，其中 A_i 到 B_j 的距离分别为 d_{ij} ($i=1 \ 2 \ 3 \ j=1 \ 2 \dots 5$)。那么，怎样才能做到总运输量

Z 最小呢?若设 A_i 运往 B_j 的量为 X_{ij} , 则按要求应由以下模型反映这个问题。

$$\begin{aligned} \min : Z &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 d_{ij} X_{ij} \\ \text{s. t. : (或约束)} & \begin{cases} \sum_{j=1}^5 X_{ij} = a_i & (i = 1, 2, 3) \\ \sum_{i=1}^3 X_{ij} = b_j & (j = 1, 2, \dots, 5) \end{cases} \end{aligned}$$

其中, 对于任意的 i, j , 都有 $X_{ij} \geq 0$, 这是不成文的规定。

这类问题属于线性规划问题。物资调运问题是线性规划中提出的第一个问题, 这一问题首先由前苏联的康德洛诺维奇于 1938 年得到解决。由于当时战争气氛很浓, 因此物资调运就成了极为重要的问题之一。

[例 1 - 4] 排工问题或指派问题

某一机构要求翻译人员分别把一份资料译成 E、J、G、R 四种外文。该机构有甲、乙、丙、丁四位翻译人员, 并且对上述四种外文的翻译能力各有不同, 如表 1 - 3 所示。怎样安排才能以最小的时数把这个工作完成呢?

这个问题属整数规划的范畴, 而整数规划实际上又是线性规划的特殊情况。

表 1 - 3 四个翻译分别对四个语种的翻译能力

单位: 小时

	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	2	8	11	9

[例 1 - 5] 导弹检修问题

要在导弹系统的寿命期内能使之正常运行，需要定期检修，以保证导弹系统的可靠性。由于检测工作耗费很大，所以提出多长时间检查一次的一类问题。属于可靠性分析的内容。

[例 1 - 6] 服务员设置问题

设置多少个服务员，才能有最佳的有效工作安排。这类问题很具代表性，因为它涉及到许多诸如机场跑道的飞机起落安排、港口码头船只泊位、医院病床的设置、汽车走量等的排队论问题，排队系统又称为随机服务系统。

[例 1 - 7] 中国邮递员问题

一位邮递员骑着自行车，在其负责的划区内传递报信等邮件。那么，如何选择一个线路，使邮递员既能跑遍所有规定的传送点，又能使骑车的路线最短，属于图论问题。这类问题是由中国学者管梅谷教授于 20 世纪 70 年代末提出并解决。美国学者们为纪念这一著名的图论问题，称之为中国邮递员问题。

瑞士数学家欧拉被公认为图论的创始人。在 1736 年，他解决了人们提出的所谓“哥尼斯堡七桥难题”。18 世纪，哥尼斯堡城中的普雷·格尔河上有七座桥，连接着河中的两个小岛与河的两岸，如图 1 - 8 所示。当时有许多人到七桥散步，于是有人提出能否不重复地走过这七座桥，结果始终没人能成功。后来，欧拉证明了这种走法不存在。

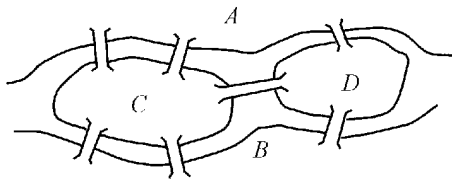


图 1 - 8 哥尼斯堡七桥

讲到图论，很值得一提的是著名的“四色难题”，即用四种颜色就可以在地图上区别划界的国家或地区。迄今为止，也只有用计算机证明了这个难题。

[例 1 - 8] 电路板设计问题

电路板设计问题，属于网络分析的内容。网络分析的理论基础是图论。这类问题还涉及到公路、铁路网的设计，化工换热网络系统的设计等许多实际问题。

[例 1 - 9] 旅行售货员路线问题

如果一个旅行售货员，要在若干个固定的城市进行旅行售货服务，对象是乘交通工具往返于这几个地区之间的旅客。倘若飞机、火车、汽车往返时间和售价一样，船只由于顺水与逆水之分而有所不同，故存在着省时又省费用的最佳路线问题，属于组合问题的范畴。

鉴于运筹学内容涉及面之广，问题之多，在此就不一一列举。选用了几个例子，目的在于帮助初学者对系统工程最重要的基础内容——运筹学，加深宏观上的感性认识。

二、控制论

在人类社会实践活动中，控制现象比比皆是。例如，古老的风磨自动控制装置在早期已开始被人类所使用，如图 1 - 9 所示。事实上，不仅技术系统里存在控制问题，人和动物也存在着各种控制的问题。

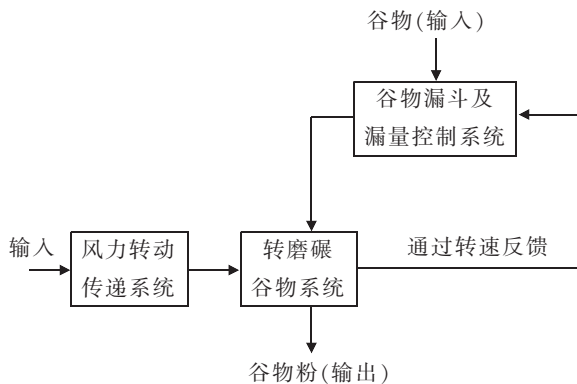


图 1-9 风磨自动控制装置框图

20 世纪 30、40 年代，来自包括美国数学家维纳在内的一大批不同专业的科学家经常聚集在一起，围绕着这个问题进行热烈的讨论，他们的目的就是要在理论上找到技术系统与生物系统之间在某些功能上的相似性、统一性和共同遵循的规律，以便在技术上研制出能够模拟人的智能的技术装置。他们的讨论很有成效，取得很多一致的看法。不过，这个难关的突破，与二次大战中维纳参加过盟军高炮自制的研究工作是密切相关的。如果说改进防空系统的研究给予维纳的联想还不足以建立一门学科的话，那么，抓住这一联想进行艰辛而努力的探索，就是维纳获得成功的秘诀。为了证实机器、人与动物在行为和动作上的共同点，大战结束后，作为一名数学家，维纳涉足了许多数学之外的研究领域，进行了广泛而深入的研究和探索，终于获得了成功。1948 年，维纳的《控制论》一书出版，标志着控制论科学的诞生。

维纳等人的研究，主要表现在三方面：第一，机器与人和动物一样，都是系统，只不过机器是技术系统，而人与动物是生物系统

罢了；第二，机器与人和动物在某些功能上也有相似的地方，此处所提的功能就是行为，按维纳的说法，行为就是一个实体对外界环境作出的反应和变化；第三，机器与人和动物的控制活动都遵循和服从共同的规律与原理，这就是信息交换和反馈原理。

当然，控制论体系中，应属对技术系统研究的自动控制理论的内容丰满，而且应用又极为广泛。19世纪以来，随着通信技术的发展，人类的控制技术有了很大的进步，各种自动控制已不像早期的那样，单靠机器力的传导实现控制，而是以电信传递信息为主，计算机参与操作和控制被推向高层次的控制技术领域。

三、信息论

沟通对信息的要求，是人类社会实践活动的关键内容之一。从通信理论到信息科学是信息论的产生和发展的过程。信息理论，开始于电话线路理论，即在有杂音 N 时，通话的信号 S 能听清多少。这时 S 与 N 之比 (S/N) 构成一个大致的标准。进一步对它反复思考，直到找出通话的实质是什么，信息的本质是什么。这样一来，夏诺恩好容易摸索到一个叫“熵”的概念。“熵”这个术语在研究冗长度和可靠性领域中起到很重要的作用。

然而，信息论之所以能够作为一门严密的通信科学理论创立起来，主要还应归功于美国贝尔电话实验的数学家申农。他在前人和他人研究成果的基础上作了更进一步的研究，使通信理论更加系统化、理论化和科学化。1948年，申农在《贝尔系统技术》杂志上发表了《通信的数学理论》一文；1949年，他又发表了《在噪声中的通信》一文。这两篇著名论文奠定了信息论的基础，因此申农成为了信息论的奠基人。他在论文中提出了通信系统的基本模型，以此模型为对象，以概率论和数理统计为工具，提出了度量信息量的数学公式和编码定理，从而解决了从量的方面来描述信息的传输和提取的一系列问题。

信息论与控制论的发展是相辅相成的。控制论的创始人维纳，

从控制和通信的角度进行了长期的研究，提出了滤波理论。其中，最著名的滤波理论当属于卡尔曼滤波原理，卡尔曼是现代控制理论的创始人。如果说信息论主要着眼于信息的度量和传输的一般原理的话，那么控制论则主要着眼于信息的处理、控制和利用。

信息论不仅在控制论中得到应用，而且很快被推广到各个科学领域，如医学、心理学、经济学和计算机等许多学科。20 世纪的 60 年代，申农的信息论又进一步发展，更加完善。但由于申农的信息论中所指的信息实际上只是统计信息，它带有严格的数学前提，这往往在现实世界中很难满足。半个世纪以来，科学家为克服这种局限性和片面性，相继提出了“语义信息”、“有效信息”、“相对信息”和“模糊信息”等概念和理论，正在为建立一门研究信息的产生、获取、变换、传输、存储、处理、显示、识别和利用的新学科而努力。这就是信息科学，这标志着信息论的发展。

图 1 - 10 显示了今天所谓的管理信息系统的功能。

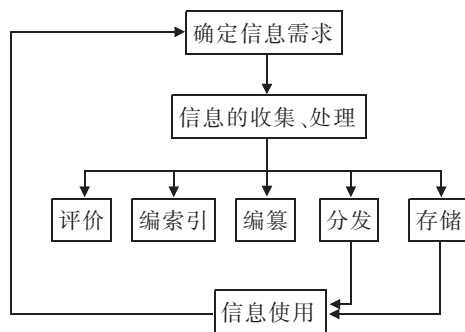


图 1 - 10 管理信息系统功能框图

四、耗散结构理论

布鲁塞尔学派的学术带头人普利高津创立了耗散结构理论，并以此于 1977 年荣获诺贝尔奖。普利高津是比利时一位物理学家兼

化学家，可是他之所以想起创立耗散结构理论，却是由于生命现象引起的。

1. 耗散结构的提出

19 世纪，由于生产的发展，特别是由于蒸汽机的广泛使用，为了提高热机的效率，热力学开始建立和发展起来。1842——1848 年，由迈尔、焦耳、赫尔姆霍茨等人建立了热力学第一定律。1850——1851 年，汤姆生和克劳修斯建立了热力学第二定律，从而奠定了热力学的理论基础。为了从微观的角度说明宏观的热力学现象，克劳修斯、麦克斯韦、玻尔兹曼、吉布斯等人建立了统计物理学。这个时期的热力学和统计物理学主要研究一个系统处于平衡态，以及从一个平衡态过渡到另一个平衡态的过程，即可逆过程的运动规律。对于非平衡系统与不可逆过程，除了根据热力学第二定律指出“一个不与外界发生物质和能量交换的孤立系统，自发地趋于平衡态这一过程是不可逆的”之外，没有给出更多的知识。因而称之为平衡态热力学和统计物理学。

然而，在描述时间的问题上，热力学理论和动力学理论发生了根本性的分歧。

首先，自从牛顿创立了经典力学，人们用经典力学解释机械运动非常得心应手，但是一旦用于解释生命现象就行不通了。原来在牛顿经典力学理论中，时间是可逆的，过去、将来和现在都没有区别。可是在生命过程中，情况就大不一样了，在生命现象里，时间是不可逆的。因此，在牛顿力学里，时间概念同生命现象中的时间概念是不相同的。

接着，经典力学发展到了量子力学，可情况却没有改变。在量子力学中，时间也是可逆的，但关键在于量子力学里还渗透着一种“现实世界简单性”的信念。这就意味着，只要了解基本粒子，就可以了解宇宙这个物质世界；只要了解生物大分子、核糖酸和蛋白质，就能认识生命现象了。显然，这与贝诺朗菲定律是相悖的。

1865 年，克劳修斯建立了热力学第二定律，引进了一个新的

概念“熵”(Entropy)。如果把宇宙看作一个孤立系统,由于不可逆和时间单向性,它的熵是增加的,如图 1-11 所示。这个结论在当时是非常令人惊讶的。“熵”概念的提出,是 19 世纪科学思想的一个巨大贡献,它的意义完全可以和生物学中提出的“进化”概念相媲美。

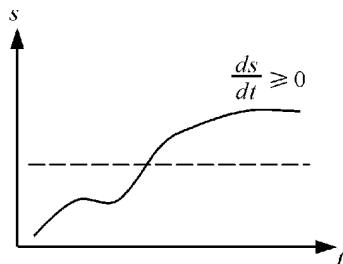


图 1-11 孤立系统的熵增加

从克劳修斯开始,物理学面临着两个概念:可重复时间和看起来正在逐渐衰减的时间。但它们都不能用来描述物理世界的复杂性,必须寻找第三个时间概念。

19 世纪的热力学和生物学都涉及到世界运动变化的方向。热力学第二定律说明的是一个孤立系统朝着均匀、无序简单、趋向平衡态的方向演化,这实际上是一种退化的方向。克劳修斯把这一理论推广到整个宇宙,就得出了“宇宙热寂说”的悲观结论。生物学的进化论描述的却是系统从无序到有序,由简单到复杂,由低级到高级,从缺乏功能到有功能、多功能的有组织的方向演化。这是一个进化的方向。在生物界和人类社会,这种进化的现象最为明显。于是又产生了克劳修斯和达尔文的矛盾——退化和进化的矛盾,似乎生物界包括人类社会遵循着与物理世界完全不同的规律,有着迥然不同的演化方向。

20 世纪初,以研究平衡态为主的经典热力学和统计物理学已

基本建立，在各方面得到广泛的应用，不仅为热机等应用科学奠定了理论基础，而且直接促进了量子论等现代科学的创立。20 世纪前半叶，主要研究的是近平衡态线性区的不可逆过程。人们发现，在一个稳定的平衡态附近，主要的趋势是趋于平衡。驰豫、输运、涨落等现象，是平衡附近的主要不可逆过程，它们都受趋于平衡这一总的倾向所支配。

1931 年，挪威的昂萨格在研究交叉的输运过程中，提出了输运系数对称原理，即昂萨格倒易关系。

普利高津在昂萨格倒易关系的基础上继续工作，得到了最小熵产生原理，即 $ds/dt \leq 0$ ，此式表明，线性非平衡区的系统随着时间的发展，总是朝着熵产生减少的方向进行，直至达到一个稳定态 ($ds/dt = 0$)，此时熵产生不再随时间变化。最小熵产生原理的提出使人们在线性非平衡区找到了一个类似于平衡态的熵和自由能之类的物理量，在给定外部边界条件下，这个量普遍地决定了系统所处的定态。

普利高津发现在力学、物理学、化学、生物学以及社会学的不可逆现象中，存在着与生物进化类似的第二类的演化方式，存在着从简单到复杂，从无序到有序，从对称到对称破缺的进化。他概括了这些性质迥然不同的系统在进化过程中的共同特点，指出一个开放系统，不管是力学、物理学、化学的系统，还是生物学、社会学的系统，在从平衡态到近平衡态再到远离平衡态推进的过程中，当到达远离平衡态的非线性区时，一旦系统的某个参量变化达到一定的阈值，通过涨落，系统就可能发生突变，即非平衡相交，由原来的无序的混乱状态转变为一种时间、空间或功能有序的新的状态。这种有序状态需要不断地与外界交换物质和能量才能维持，并保持一定的稳定性，且不因外界微小的扰动而消失。这种在远离平衡的非线性区形成的新的稳定的宏观有序结构，普利高津称为耗散结构 (Dissipative Structure)。系统这种能够自行产生的组织性和相干性，称为自组织现象。因此普利高津又把耗散结构理论称为非平衡系统

的自组织理论。

2. 耗散结构的产生

普利高津在建立了耗散结构概念的基础上，进一步探讨了产生耗散结构的几个必要条件。

第一，系统必须是一个开放系统。根据热力学第二定律，一个孤立系统的熵自发地趋于极大，因此，不可能自发地产生新的有序结构。而对于一个开放系统来说，熵 s 的变化则可以分为两部分，一部分是系统本身由于不可逆过程，例如热传导、扩散、化学反应等，所引起的熵的增加，即熵产生 dis ，这一项永远是正的；另一部分是系统与外界交换物质和能量引起的熵流 des ，这一项可正可负，整个系统熵的变化 ds 就是这两项之和，即 $ds = dis + des$ ，如图 1-12 所示。

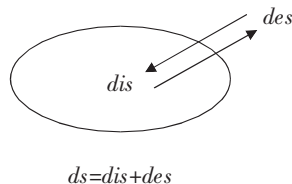


图 1-12 开放系统熵特性

根据熵增加原理 $dis \geq 0$ ，平衡态 $dis = 0$ 。而 des 可以大于或小于零。如果 des 小于零，其绝对值又大于 dis 时，则有 $ds = des + dis < 0$ 。这表明只要从外界流入的负熵流足够大，就可以抵消系统自身的熵产生，使系统的总熵减少，逐步从无序向新的有序方向发展，形成并维持一个低熵的非平衡态的有序结构。这样，普利高津在不违反热力学第二定律的条件下，通过引入负熵流来抵消熵产生，说明了开放系统可能从混沌无序状态向新的有序状态转化，从而解决了克劳修斯和达尔文的矛盾，回答了科学上这个似是而非的问题。他把热力学和进化论统一起来，把物理世界的规律和生物发

展的规律统一起来，为用物理学、化学方法研究生物学开辟了道路。

显然，开放系统仅仅是产生耗散结构的一个必要条件而不是充分条件。如果开放系统从外界引入的是正熵流而不是负熵流，那么将只能加快系统无序化的过程，而不可能形成新的有序结构。

第二，系统应当远离平衡态。普利高津根据最小熵产生原理指出，不仅系统在平衡态时自发趋势是趋于无序，在近平衡态线性区时的系统，即使有负熵流流入，也不能形成新的有序结构，而只能是逐步趋于平衡，导致有序性破坏。系统只有远离平衡时才具有新的规律性，才有可能形成新的有序结构。只有在远离平衡的条件下，系统才可能在不与热力学第二定律发生冲突的条件下向有序、有组织、多功能方向进化。因此，他提出了“非平衡是有序之源”这一著名论断。

第三，系统内部各个要素之间存在非线性的相互作用。例如，在化学中的自催化或交叉催化反应，流体力学中存在的非线性流机制，这种相互作用使各个要素之间产生相干效应和协调动作。例如，激光器中各个发光原子的同步振荡，使无序的自然光转化为有序的激光；又如化学钟，一切分子在有规则的时间间隔内，同时改变它们的化学同一性，它们的颜色随着化学钟反应的节奏而变化。

如果没有非线性相互作用，即没有负熵流存在，也不可能产生耗散结构。另外，由于各个要素之间的关系是非线性的，因此只能用非线性方程来描述其运动变化。非线性方程必然存在着多种解，其中有些解可能是稳定的，有的解是不稳定的，从而使系统演化发展可能出现几种不同的结果，这就产生了进化的复杂性和多样性。因此这里要用数学中的分支点理论才能进行计算。

第四，系统从无序向有序演化是通过随机的涨落来实现的。涨落在不同的条件下起着迥然不同的作用。对于近平衡区的系统在一定条件下，正是这种涨落引起了在相空间中系统运动轨道的混乱，导致了无序。而对于耗散结构来说，涨落却成了促使系统从不稳定

的定态跃迁到一个新的稳定的有序状态的积极因素，是形成新的稳定有序结构的杠杆。通过涨落导致有序，是耗散结构理论的另一个重要结论。

总之，普利高津等人的这一发现，在于生命运动过程同热力学第二定律研究的孤立系统不同。它是一个开放系统，也就是说，它只是与周围环境进行物质和能量的交换，才能维持其生命。普利高津的研究表明，一个开放系统在远离平衡状态的情况下，由于非线性的复杂因素的影响，离开了原来的状态，当与某些特殊事物耦合，达到一定数值的时候，会突然以新的方式组织起来，产生新的质变，从原来混沌无序的混合状态，转变为在时空上或者功能上的有序状态。当然，各种开放系统的变化规律，严格地说，就是耗散结构的性质、形式、稳定性和演变规律的科学。

普利高津曾写道：“经典观点认为，物理学、化学等学科所研究的简单系统，与生物学、人类科学等学科所研究的复杂系统有着明显的不同。确实，人们很难想象出有比气体或液体的简单行为与生命的演化更大的区别。现在，这个鸿沟正在被填平。在过去的10年中，我们提出的耗散结构理论指出，在非平衡的条件下，气体或者液体这种简单的系统或者简单的化学反应，能表现出非常复杂的行为。耗散结构理论开辟了将数学和物理的知识应用于其他领域的通道，架设了软硬科学之间的桥梁，使我们能够讨论自然科学在描述人类行为中的作用。”

耗散结构理论建立至今已有几十年的历史，它对当代科学和哲学发展的影响日益显著，有人甚至认为它代表了下一次的科学革命。

五、协同学原理

协同学（Synergetics）这个词是从希腊文而来的，意思是协同作用的科学。提起“协同”两字，对初学者来说，不难有一个粗犷的认识。而山猫与野兔的生态平衡关系，也正说明了协同学原理

反映着一种具有协同作用的生态现象。

耗散结构理论指出，一个开放系统之所以由无序状态变为有序状态，非平衡是它的变化根源。但后来，德国的斯图加特大学教授、著名物理学家哈肯发现，处在平衡状态的系统也可以从无序变为有序。这与哈肯早年研究激光是分不开的，因为他在研究过程中发现，激光是一种具有典型的远离平衡状态由无序到有序的现象。

哈肯教授研究了许多平衡状态从无序到有序的例子，结果发现，一个开放系统从无序转化为有序，关键并不在于它是不是处于平衡状态，也不在于系统离平衡态有多远，而在于系统内部大量子系统的协同作用。用哈肯教授的解析：协同作用就是开发系统中大量子系统之间的互相作用达到整体的、集体的或者合作的效应。如在竞争的市场中，由许多经销同类商品或服务的商家聚集一起便构成一个专卖或专营市场。从商家个体之间而言，似乎竞争更加激烈了，可是，商家群体能吸引更多的顾客，足以抵消商家个体间的竞争，这就是商家的协同作用。

哈肯在 1973 年第一次提出协同学原理的基本观点。1975 年他在《现代物理评论》上发表了一篇论文《远离平衡系统和非物理学系的合作现象》。1977 年，他又出版了《协同导论》这一专著，在 1978 年发行第二版的时候，他又增加了“混沌态”一章，从而初步形成了协同的基本框架。1983 年出版的《高等协同学》，使他的协同学原理更加成熟和完善了。

协同论具有广阔的应用范围，它在物理学、化学、生物学、天文学、经济学、社会学以及管理科学等许多方面都取得了重要的应用成果。比如，我们常常无法描述一个个体的命运，但却能够通过协同论去探求群体的“客观”性质；又如，针对合作效应和组织现象能够解决一些系统的复杂性问题，可以应用协同论去建立一个协调的组织系统以实现工作的目标。协同论应用于生物群体关系，可将物种间的关系分成三种情况：①竞争关系；②捕食关系；③共生关系。每种关系都必须使各种生物因子保持协调消长和动态平

衡，才能适应环境而生存。协同论应用于生物形态学，提出形态形成的基本途径是，通过某些化学物质的扩散与反应形成一种“形态源场”，由形态源场支配基因引起细胞分化而形成生物机体。由于协同论强调不同系统之间的类似性，因此它试图以远离热动平衡的物理系统或化学系统来类比和处理生物系统和社会系统，所以协同论除设计了许多物理、化学的模型外，还设计了许多生灭过程、生态群体网络和社会现象模型，如“社会舆论模型”、“生态群体模型”、“经络模型”、“人口动力模型”、“捕食者——被捕食者系统模型”、“形态形成模型”等等。协同论还探讨了人的大脑中化学图样的形成和求知过程与脑细胞之间的联系模型等。

协同学原理在描述系统由无序向有序演化的时候，把注意力放在了揭示系统内部相互作用的具体机制上，进而证明了物质自己运动的基本原则。由于协同学揭示了不同系统中产生新结构的自组织的某些共同规律，所以它的原理在许多领域里得到广泛应用。

六、突变理论 (Catastrophe Theory)

几乎我们每个人在读中学的时候，就初涉这一哲学问题，并且对这种现象有着大量的感性认识。过去，哲学家们总是认为，质变就是飞跃，飞跃就是突变。但根据对许多现象发现，质变又有突变式和渐变式两种，于是，他们就这两种形式的质变分为爆发式飞跃和非爆发式飞跃。这样一来，哲学家们就陷入了自相矛盾的境地，因为，既然质变就是飞跃，飞跃就是突变，那么无论是爆发式飞跃，还是非爆发式飞跃，都只能是突变，还是无法包括渐变的情况。这样，如何解释质变就成了一个十分头痛的问题。

突变论为这个难题的解决开辟了新的途径。1972年，法国数学家雷内·托姆出版了一本名叫《结构稳定性和形态发生学》的书。这本书提出了一套系统的突变论的研究办法。托姆运用了数学模型的方法，揭示了系统的质变是通过飞跃和渐变两种形式实现的。有了数学模型，就使托姆能撇开某些具体问题，集中精神地研

究这些数学模型，这样就落入了数学的范畴。然后再运用研究出的结果指导或解决实际中的某些问题。突变的发现，曾引起很大的轰动。由于托姆在这方面的突出贡献，他获得了当前国际数学界的最高奖——菲兹奖章。

突变论的出现引起各方面的重视，被称为“是牛顿和莱布尼茨发明微积分三百年以来数学上最大的革命”。突变论作为一门数学分支时，它是关于奇点的理论，它可以根据势函数而把临界点分类，并且研究各种临界点附近的非连续现象的特征。突变论与耗散结构论、协同论一起，在有序与无序的转化机制上，把系统的形成、结构和发展联系起来，成为推动系统科学发展的重要学科。

突变理论是以研究系统的稳定结构为突破口。因为所谓突变，准确地说，就是系统从一种稳定状态进入不稳定状态，由于控制因子的变化，使得处于不稳定状态的系统，而又进入另一种稳定状态的跃迁过程。所以，只有首先弄清楚系统结构稳定机制，知道系统在什么条件下保持性状不变，不变的机理何在，才能进而研究系统在什么条件下发生质变，质变的机制又是什么。

突变论是建立在拓扑理论的基础上。即通过利用拓扑学原理的分析模型，推导出突变形式的七种类型，分别为折迭型、尖顶型、燕尾型、蝴蝶型、双曲脐型、椭圆脐型和抛物脐型。

突变论认为，系统所处的状态，可用一组参数描述。当系统处于稳态时，标志该系统状态的某个函数就取唯一的值；当参数在某个范围内变化，该函数值有不止一个极值时，系统必然处于不稳定状态。托姆指出，系统从一种稳定状态进入不稳定状态，随着参数的再变化，又使不稳定状态进入另一种稳定状态。那么，系统状态就在这一瞬间发生了突变。因此，突变论给出了系统状态的参数变化的区域。

突变论提出，高度优化的设计很可能有许多不理想的性质，因为结构上最优，常常联系着对缺陷的高度敏感性，就会产生特别难于对付的破坏性，以致发生真正的“灾变”。例如，在工程建造

中，高度优化的设计常常具有不稳定性，当出现不可避免的制造缺陷时，由于结构高度敏感，其承载能力将会突然变小，而出现突然的全面塌陷。突变论不仅能够应用于许多不同的领域，而且也能够在许多不同的方式来应用。

通过突变论能够有效地理解物质状态变化的相变过程理解物理学中的激光效应，并建立数学模型，通过初等突变类型的形态可以找到光的焦散面的全部可能形式。应用突变论还可以恰当地描述捕食者——被捕食者系统这一自然界中群体消长的现象。过去用微积分方程式长期不能满意解释的，现在通过突变论能使预测和实验结果很好地吻合。突变论还对自然界生物形态的形成作出解释，用新颖的方式解释生物的发育问题，为发展生态形成学作出了积极贡献。突变论对哲学上量变和质变规律的深化，具有重要意义。很长时间以来，关于质变是通过飞跃还是通过渐变，在哲学上引起重大争论，历史上形成三大派观点，分别是“飞跃论”、“渐进论”和“两种飞跃论”。突变论认为，在严格控制条件的情况下，如果质变中经历的中间过渡态是稳定的，那么它就是一个渐变过程。质态的转化，既可通过飞跃来实现，也可通过渐变来实现，关键在于控制条件。应用突变论还可以设计许许多多的解释模型。例如经济危机模型，它表现经济危机在爆发时是一种突变，并且具有折迭型突变的特征，而在经济危机后的复苏则是缓慢的，它是经济行为沿着“折迭曲面”缓慢滑升的渐变。此外，还有“社会舆论模型”、“战争爆发模型”、“人的习惯模型”、“对策模型”、“攻击与妥协模型”等等。

突变论能解说和预测自然界和社会上的突然现象，无疑它也是软科学研究的重要方法和得力工具之一。突变理论已经被广泛地应用在物理学、化学、生物学、工程学等许多领域。《大英百科全书》1977年版中写道：“突变论使人类有了战胜愚昧无知的珍奇武器，获得了一种观察宇宙万物的深奥见解。”著名数学家斯图尔特客观地评价了突变论，他写道：“适当地理解突变理论，可以为我

们生存的世界提供新颖而深入的见解。但它还需要加以发展、检验、修改，经历一般成为可靠的科学工具的全部过程。但我毫不怀疑，它不是宇宙中的唯一事物。” 尽管对于它的某些应用还存在着一些争论，但是，一般来说对突变理论本身都是给予很高的评价。特别是突变理论运用数学模型揭示了系统通过突变形成稳定结构的规律，为发展系统科学作出了重大贡献，尤其是在系统科学中能刻画生命现象的其他分支学科理论的分析与论证。

第二章 系统工程思想

思想是知识建筑的框架，当我们的的大脑神经网络吸收并形成了它时，知识将永远属于我们，知识才会变得更加有用。

第一节 系统工程概述

一、产生与发展

可以这样说，在人类历史上，早就有了系统工程思想的萌芽。以战国时代秦国太守李冰父子主持修建的驰名中外的四川都江堰水利工程为例，用今天的系统工程科学的观点来看，它就是一项宏大的系统工程。这项工程由“鱼嘴”岷江分水工程，“飞沙堰”分洪和排沙工程，“宝瓶口”引水工程这三个分系统和 120 多个附属渠道工程巧妙地连接而成。根据今天的试验表明，工程在排沙、引水、防洪等方面都作了准确的数量分析，使工程兼有防洪、灌溉、漂水、行舟等多种功能。由于在渠道上设置了水尺测量水位，合理控制分水流量，有节制地灌溉了 14 个县的几百万亩的农田。该工程不仅在施工时期有一套管理办法，还建立了持续不断的岁修养护制度，每年按规定淘沙修堤，使工程经久不衰。直到今天，这项运行了两千多年的灌溉工程，仍能发挥它的重大效益。

有许许多多的例子都能充分说明，早期朴素的系统工程思想，

由于社会的需要而萌发。而所有这些过程，都是在为系统工程这门学科的产生，做了大量积累的准备。

系统工程（Systems Engineering）一词源于美国。20 世纪 40 年代，美国贝尔电话公司在发展通讯网络中，为缩短从科学发明到投入应用的时间，认识到不能只研究电话机和交换台等设备，更需要研究整个工程项目的协调。于是，按照时间顺序，把工作划分为规划、研究、发展、工程应用及通用工程等五个阶段，并首先提出了系统工程一词。

50 年代前后，美国兰德公司，采用系统分析的方法对军事作战进行了系统的研究，为系统工程的广泛应用奠定了基础。1957 年，哥德与麦霍尔两人写出了第一本以“系统工程”命名的书。1958 年 1 月，美国海军在顾问公司的协助下完成了“计划评审法”，用于北极星导弹核潜艇的研制计划上，使北极星导弹核潜艇提前两年完成。在此期间，美国把全部军事技术的发展工作建立在系统工程这一新的基础之上，即在国防部设置了系统分析部，并提出“规划、计划、预算编制法”，用于统一国防力量。它涉及到人员的培养、军事技术政策、武器系统的发展规划、科研工作的组织管理、生产制造、评定、运用、训练直到某些部队的改编。60 年代初，系统工程在科技领域、教育领域都得到了充分的发展。

70 年代，系统工程最辉煌的成就，自然应该是世人瞩目的阿波罗登月计划的成功。该计划从 1961 年到 1972 年，历时 11 年，参加研究的工程技术人员达 42 万之多，2 万多家公司和工厂，大学研究机构 120 多所，使用了 600 多台计算机，耗资 300 多亿美元。由于采用了系统工程的方法，使计划能得以按时完成。它主要的成功点就是在整个计划的组织管理、技术实施过程中，采用了系统分析、网络分析技术等系统工程方法。

从 1972 年起，经济发达国家开始重视系统工程在生态环境领域中的研究与应用。到 80 年代中期开始，生态环境问题成为全球关注的问题。有许多专家、学者认为，21 世纪是生态环境的世纪。

1991年1月，海湾战争爆发，系统工程再次使以美国为首的多国部队在干预海湾的军事行动中，仅用短暂的100天便获得了成功。这场战争从打不打、怎样打，直到打完后有什么结果、该怎么办等整个过程，以美国为首的多国部队采用了系统工程的方法，事先进行了战略研究。不过，战略目标不外乎以两点为主，就是为石油而战和控制伊拉克的军事扩张。

我国从70年代开始推广应用系统工程方法，并且在制定全国和地区经济计划、能源规划、电子系统规划、城市交通系统、人口控制系统等方面取得了一系列成果。规划期将历时13年的长江三峡工程采用系统工程进行设计，它是现代系统工程的巨大成就之一。作为系统科学的实践技术学科——系统工程，因而成为一个热门的软科学。

二、系统工程概念

通过第一章和上一节的论述，我们对系统工程的整体轮廓已有了一定的认识。毕竟，系统工程作为一门学科，仍处于发展阶段。对系统工程虽有比较统一的认识，但却没有统一的定义，专家、学者各有其说。不过可以这样认为，各种各样的说法，区别主要在于没有严格的固定文字描述而已。这些各种各样的系统工程定义，不难在有关资料里查阅得知。

国际学术界往往把（广义的）系统分析作为系统工程的同义词来解释。所谓系统分析，就是对研究对象（系统）建立一种数学模型，按照这种模型进行数学的分析，然后将分析的结果实施于原来的系统。

单从“系统工程”的字面认识，亦不难给系统工程下定义。首先，什么是工程，通俗地说，就是人们为达到某种目的所必要完成的各项工作的总体。于是“人”、“必要的各项工作”和“工程实施的对象”就可以构成一个工程系统中的三大要素。再有“为达到某种目的”，就可以根据系统的原理对工程进行系统化。其

次，前面曾提到过，组织过程就是系统的过程。而有组织，就要管理；有管理，就要进行协调。于是，作为一门学科，系统工程就是一门组织、管理和协调的技术和方法。

那么，系统工程的目的又是什么呢？这也就是对系统工程认识的关键之一。首先，系统工程要求对要现实某种目的的内部系统功能进行设计；其次，从工程的产生、发展到运行，都要进行组织和管理。从而达到通过人和装备对工程系统运行实现有效的控制；最后，整个工程系统的运行要与其外界环境系统实现某种平衡。这种平衡就是整个工程系统过程的输入和输出的最佳效果。当然，这种效果是需要有共同的准则来衡量的。

可见，系统工程在工程的筹建或更新中，有两个并行的过程，一个是工程技术过程，另一个是管理控制过程。这两个过程是共同处于系统“处理”的全过程中，如图 2 - 1 所示。于是，系统工程的目的，就是为达到“输入”和“输出”的最佳效果，在某种特定的条件下，对“处理”全过程现实最佳设计与控制。

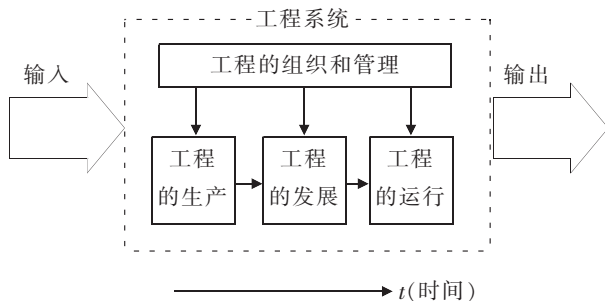


图 2 - 1 系统工程的“处理”过程框图

工程系统的“输入”通常可分三大类，就是人力、物力和财力；“输出”的效果亦可分为三大类，就是社会、经济和生态环境三大效益。这三大效益之间的关系通常是相互联系、相互作用的。

因此，在有必要的时候应做出某种综合平衡，以求最佳综合效益。而这三大效益怎样取、如何细分，使它们能够用量的指标来衡量，这要根据具体情况而定。而另一个重要的指标，就是系统“处理”全过程的时间 t ，需要在最短的时间内完成工程项目，也是效益的关键。所谓“在某种特定的条件下”，实际上是一种约束。比如说，“人力”中的人才可能是有限的，资金的投入也是有限的。又如，一个生产系统，其生产所需的原料不足、电力无法保证供应等等，都构成对生产的制约。

当我们确立了系统工程的目的以后，随之而来的另一个关键问题应该是系统工程的实施办法。如果要把某一工程作为一个项目实现的话，首先应是项目及目的的建立；其次是项目完成的可行性研究；再者是项目的实施，这样就构成了系统工程实现的三部曲，如图2-2所示。

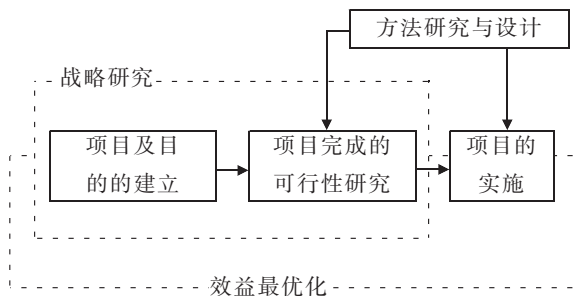


图2-2 系统工程实现过程图

例如，一项建筑工程上马之前，在资金和人力、物力都不成问题的情况下，首先要确定项目的功能，然后请有关专家进行建筑设计，并执行对该项目的综合评价，包括建筑设计是否可行、建筑工程所选择的地理位置是否合适等等。其中，大型高层建筑设计还必须考虑所选择的地基结构状况，对项目有影响的因素都应事前做好

充分的考查、研究。否则有可能造成施工无法顺利进行甚至失效，以致造成财物的损失，甚至造成对人的伤害。这就是所谓该项目战略研究规划的首要内容之一。

三、理论和应用学科体系

作为一门科学的系统工程，其理论和应用由四个不同层次的体系构成：哲学体系、理论体系、技术体系和工程体系。其中，不同的体系是由所要解决问题的来源和解决问题的方法、指导的关系而决定的，且不同层次的体系又由不同的内容组成，如图 2 - 3 所示。可见，系统工程本身也是一门跨学科的科学，亦为一门边缘学科。它是根据不同的应用对象——各种各样的工程，并根据这些工程的功能特征，利用所需的多种方法，以达到这些工程系统的目的，从而实现对工程系统的最佳设计、最佳控制和最佳经济管理。于是，系统工程作为一个学科体系而言，又可按照各种不同功能特征的工程分类。例如，经济系统工程、社会系统工程、生态环境系统工程、化工系统工程、计算机系统工程、航天系统工程、能源系统工程和军事系统工程等，为系统工程的实践内容的学科。

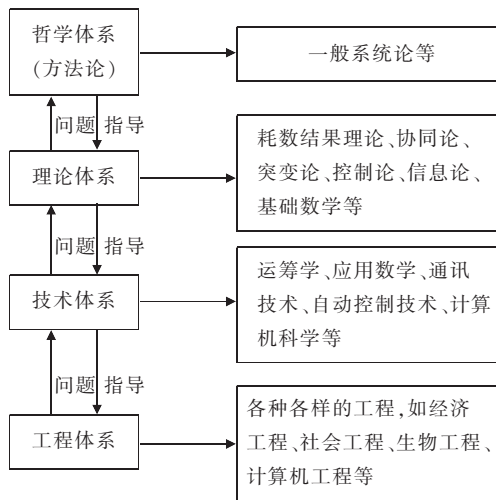


图 2 - 3 系统工程的理论和应用体系框图

第二节 系统工程方法论

系统工程的实质就是方法论，方法论就是把设想付诸实现的过程。在前面的讨论中，我们对系统科学和系统工程的研究方法都有粗略的概括。本节开始，我们主要对系统工程的研究方法稍加叙述。

一、Hall 三维结构

系统工程方法论是提供解决问题的一整套公开程序的一种方法论。言语、数学和图解是系统工程和通讯联络的要素。正如运筹学研究的那样，人们惯用系统工程中的各种形式和方法。

自 20 世纪 60 年代以来，许多专家、学者对系统工程方法进行

了大量的探讨工作。但是企图找到能处理世界上所有问题的标准方法的设想是不现实的，也是根本不可能的。然而，实践证明，尽管没有这样一个万应灵丹式的方法，总可找到一个能适应各种不同问题的方法思路（即思想方法）——方法结构。在这种方法结构中，在国外影响最大的是 1969 年美国学者霍尔提出的系统工程三维结构，简称 Hall 三维结构，如图 2 - 4 所示。它概括地表示出系统工程的步骤和阶段以及涉及到的知识范围，是各种具体的系统工程的基础，其三维分别是时间、逻辑和知识。

1. 时间维

表示系统工作从规划到更新的大略顺序，共分七个阶段：

- (1) 规划阶段：谋求系统工程活动的政策或规划。
- (2) 拟订方案：提出具体的规划。
- (3) 研制阶段：实现系统的研究方案，并做出生产计划。
- (4) 生产阶段：生产出系统的零部件及整个系统，并提出系统的安装计划。
- (5) 安装阶段：把系统安装好，并完成系统的运行计划。
- (6) 运行阶段：系统为预定的使用服务。
- (7) 更新阶段：取消旧系统以新系统代之，或将原系统改进，使之更有效地工作。

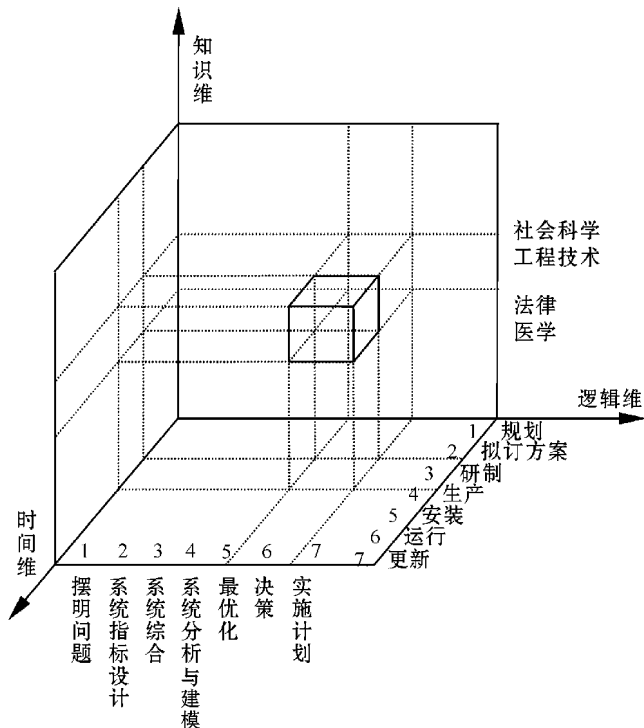


图 2 - 4 Hall 三维知识结构

2. 逻辑维

是指系统的每一个阶段要完成的步骤，共有七个阶段：

(1) 摆明问题：尽量全面的收集和提供有关要解决的历史、现状及发展趋势的资料和数据。

(2) 系统指标设计：弄清并提出解决问题需要达到的目的，而且要定出衡量是否能达到目标的标准。

(3) 系统综合：把可能入选的能够达到预期目标的政策、活动、控制或整个系统概念化、条理化。

(4) 系统分析和建立模型：根据目标的达到、问题的解决和

要求的满足去加深理解所提出的政策、活动、控制或系统的相互关系、性能和特征。建立模型的关键是抓住主要矛盾，这样，通过模型中各变量要素的分析研究得出的结论才会是有效的，否则，可能会带来灾难性后果。

(5) 最优化（或选择阶段的评定）：精心选择所提出政策的参数与系数，使每个政策都是能够满足系统指标的最好政策。

(6) 决策：选定一个或多个政策或进一步考虑系统的价值。

(7) 实施计划（或执行下一阶段）：不断修改，完善上述六个步骤，并把他们确定下来。以保证顺利进入系统的下一个阶段。

3. 知识维

指的是完成上述各阶段、步骤所需要的各种专业知识和技术素养。

例如，利用区域社会经济系统工程制定中长期的县级总体规划。所谓区域社会经济系统工程，就是在一定的地域空间形成社会再生产、分配、交换、消费等循环的各功能不同的部分所组成（其部分诸如自然资源和自然条件、产业部门、生产性基础设施、人口及社会基础设施、社会管理机构等），而且是为了实现最大的经济、社会、生态环境效益的目标体系而协调地设计和有机地组织起来的总体。县级系统的各个层次与系统的结构关系如图 2 - 5 所示。其中，生产子系统共分五大类：大农业、工业、交通邮电业、商业饮食业、建筑业。规划的大体步骤如图 2 - 6 所示。

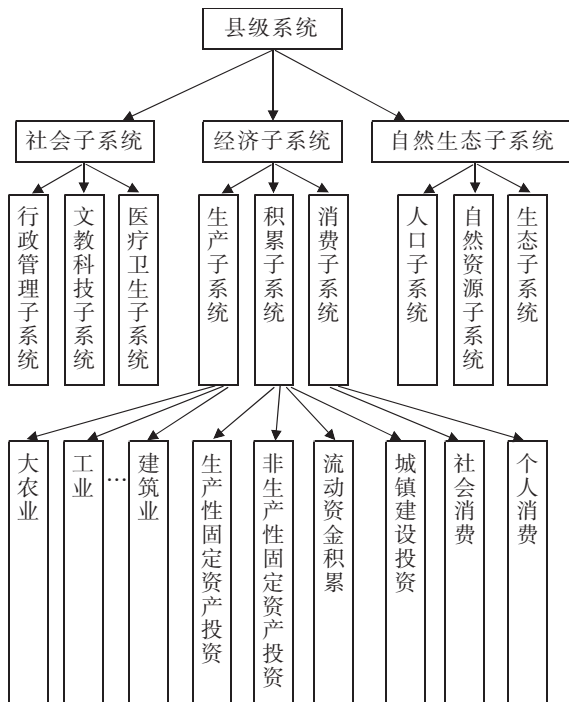


图 2-5 县级系统与各个层次子系统的结构关系图

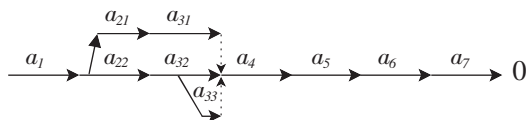


图 2-6 县级总体规划大体步骤图

其中：

a_1 ——与县有关决策部门协调，确定经济规划的目的，并从县内若干关键部门抽调技术骨干参与规划小组；

a_{21} ——培训县技术骨干；

a_{22} ——收集有关数据和资料；

a_{31} ——过去和现状的诊断分析；

a_{32} ——制作投入产出表并进行投入产出分析；

a_{33} ——对有关经济指标进行预测；

a_4 ——总汇，请县有关领导及各决策部门，有关学者、专家与规划小组共同进行战略研讨，确定战略目标；

a_5 ——建立优化模型；

a_6 ——上机计算，得出若干方案；

a_7 ——战略研讨以求作出决策。

二、系统工程的功能体系

由于系统工程的研究对象是工程系统，而工程系统又是开放系统，所以需要表征系统外部结构和内部结构的情况。所谓外部结构，就是给该系统输入信号时，能得到什么样的输出信号，其着眼点是输入和输出的关系，这也可以叫做性能变换。所谓内部结构，就是该系统具有什么样的机器和人所构成的，其着眼点是机构，上述关系可用图 2 - 7 表示。

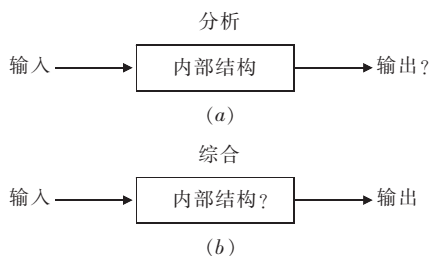


图 2 - 7 综合与分析同内、外部结构关系图

一般来说，当已给出内部结构时，把求其外部结构的工作叫分析；在外部结构给定后，将决定其内部结构的工作叫综合。比如，某机械系统给定后，调查研究其性能的工作就是分析。而设计这种机械系统的工作就是综合。因此，综合事物远比分析事物要困难，但为了综合，必须首先积累许多分析的结果。又如，阿波罗登月计划中能称得上技术要素的部分，据说多数采用分析方法，而同时也采用较小规模系统（子系统）综合性的方法。

于是，系统工程的功能主要表征为：一是以输入和输出与工程系统的环境协调的外部功能；二是以工程系统的内部执行从输入到输出的内部功能。可见，系统工程的功能关键是其内部功能。而其外部功能的具体表现，实质上就是对其内部功能的制约。例如，电影制片商欲制作卖座较高的娱乐片获取更好的利润，而政府有可能要通过对影片的内部进行审核，确定影片对社会的影响度，方能决定是否给予公映权。

在工程系统的内部结构已定的情况下，内部功能的优劣往往是以效益和性能给予评价。这是系统分析工作内容的主要部分。其中，效率主要在预定的输出结果为目标下，以投入的人力、物力和财力以及时间等四大要素来衡量；而性能的好坏则以工程系统的稳定性、可靠性和适应性等因素评判。如果说工程系统的内部功能着重经济效益的话，那么，其外部功能则表征为对经济效益的制约，这种制约主要为该系统输入的人力、物力、财力的限制，以及输出的社会和生态环境效益的制约。

另一方面，系统内部结构的设计——系统综合，来源于两大因素为依据的分析结果：一是环境制约因素的分析结果，二是系统内部分析的结果。当然，这两大因素是相互联系、相互作用和相互制约的。

综上所述，系统工程的功能统一性，具体表征为：以最小的努力达到最大的效果，其实质就是系统最优化。

第三节 系统分析与设计

一、系统分析概念

系统分析是一种研究在自然条件下，受人控制和影响的任何有目的运行系统机理的分析技术。所谓运行系统包含广泛的对象：从有人操作的普通机械直到按照一定规则活动的社会经济结构成分等。

系统分析所研究的主要内容：一是定量描述系统运行效果的方法；二是寻找系统内部与外部环境之间的相互作用机理，并构造相应的数学和逻辑模型的方法；三是系统的最优构成与控制方法。

上述概念表明，系统分析是进行系统研究的一种方法，即在若干选定的目标和准则下，分析构成事物的许多系统的功能及其相互之间的关系，利用定量方法提供允许和可操作的数据，借以制订可行的方案，并推断可能产生的效果，以期寻求对系统整体效益最大化的策略。所以系统分析对整个问题的目标的设定、方法的选择、有限资源的最佳调配以及行动策略的决定等，都是有效的工具。

系统分析从对系统或事物的观察开始，经过思考、了解、判断，产生对系统的输入、输出及转换过程做出某种假设求证。为了假设求证，通常借助于各种模型以及模拟实验，求得最佳方案，使对系统整体有利。采用系统分析方法对事物进行探讨时，决策者可以获得对问题综合的和整体的认识，既不忽略内部各因素的相互关系，又能顾全外界环境变化所可能带来的影响。特别是通过信息，及时反映系统的作用状态，随时了解和掌握新形势的发展。在已知的情况下，以最有效的策略解决复杂的问题，以期顺利地达到系统的各项目标。

二、系统分析的特点

系统分析以系统整体效益为目标，以寻求解决特定问题的最优策略为重点，运用定性和定量分析的方法，给予决策者以价值判断，以求得有利的决策。其特点略述如下：

- (1) 以整体为目标：系统的整体性原则。
- (2) 以特定问题为对象：系统分析的针对性。
- (3) 运用定量方法：建模及用数学方法。
- (4) 凭借价值判断：决策的前提。

应当指出：系统分析是系统建立过程的一个中间环节，它有承上启下的纽带作用，它使系统开发计划得以实现，明确系统的概念和建立系统的必要性，并明确系统的目标。但是，系统分析不是从着手执行所给予的目的开始，而是进一步探讨和寻求目的的实质，对规划各阶段所给出的目的的妥善性给予评价，或对表述不清的目的给出具体的定义，以期后续阶段的可行性得以落实。因此，系统分析是整个系统建立过程中的关键部分，特别是在设计一些技术比较复杂、投资费用很高、建设周期较长的工程系统时，不确定的内部矛盾因素和外部不可控因素的数量极大，层次关系复杂，系统分析的作用就显得更加突出。科学的系统分析可以保证系统设计达到最优化，避免技术上的重大失误和经济上的严重损失。

三、系统分析的要素和步骤

1. 系统分析要素

根据上述系统分析的概念和特点可以看出，为了进行系统分析，通常应考虑下列六个要素：

- (1) 目标：系统目的的具体化。
- (2) 替代方案：选优的前提。
- (3) 指标：对替代方案进行分析的出发点，是衡量总体目标的具体标志。

(4) 模型：分析对象的抽象，定量分析的前提。

(5) 标准：评价方案优劣的尺度。

(6) 决策：定性和定量分析的最终结果。决策是决策者根据分析结果的不同侧面、个人的经验判断以及各种决策原则进行综合的整体考虑，最后作出选优决策。各种决策原则包括：

①当前与长远利益相结合。

②局部和整体效益相结合。

③内部和外部条件相结合。

④定量与定性相结合。

2. 系统分析步骤

系统分析的步骤可分六步进行，如图 2 - 8 所示。

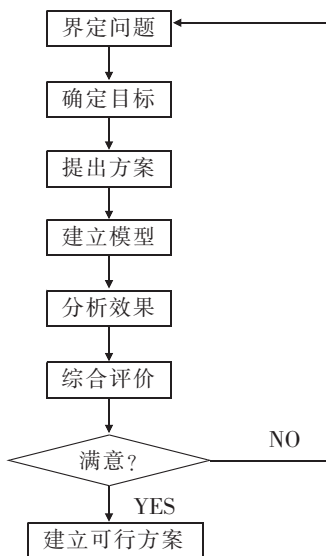


图 2 - 8 系统分析程序框图

(1) 划定问题范围：利用系统的相关性原则。

- (2) 确定目标：根据系统的目的性原则。
- (3) 收集资料，提出方案：系统分析的基础和依据。
- (4) 建立分析模型：抽象描述系统功能的主要因素及其相互关系，即系统的输入、输出、转换关系以及系统的目标和约束等。
- (5) 分析替代方案的效果：凭借共同标准分析。
- (6) 综合分析评价：定性与定量分析相结合，提出可行方案，供决策者参考。

四、系统环境分析

根据系统的相关性，系统环境分析是系统分析的一项重要内容。由于系统工程研究的对象是开放系统，随着系统相关的环境因素的属性或状态发生变化时，通过输入使系统发生变化。比如某种材料或能源出现短缺，或出现新发展等等；以及来自环境中的资源、财源、交通、人力、时间等方面的限制；还有政策对输出的制约。比如说，政策规定某厂家的污染排放标准，由于通常污染处理费用很大而构成对产品的制约。

从系统观点看，全部环境因素共分为三大类，各类所包含的主要因素如图 2 - 9 所示。

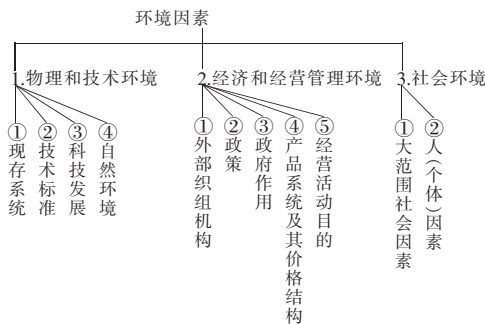


图 2 - 9 环境因素层次结构图

1. 物理和技术环境

物理和技术环境因素是由于事物属性所产生的联系而构成的因素和处理问题中的方法性因素。它包括：

(1) 现存系统：实践表明，运行中的现存系统的现状和有关知识是系统分析中所不可缺少的。现存系统又表现有以下几个方面：

第一，现存系统的并存性和协调性；

第二，现存系统的各项指标；

第三，利用现存系统技术推广新技术；

第四，现存系统是收集各种数据资料的来源。

(2) 技术标准：制订系统规划、分析系统结构和特性时所应遵守的约束条件。使用技术标准，不仅可以提高系统分析和设计的质量，还能节约分析时间和提高分析的经济效果。

(3) 科技发展因素的估量：在新系统充分发展之前，必须解决以下三个问题。

问题一：有否可用科技成果或新的发明出现；

问题二：有否新加工技术或工艺方法出现；

问题三：有否新的维修、安装、操作方法出现。

(4) 自然环境因素包括以下三个方面：

第一，自然地理：地势、位置、河流、交通、人造物等；

第二，天然原材料及其供应：金属和非金属矿产、石油、煤炭、地下水等；

第三，自然因素的物理特性：河流分布、流量、水深、水位等。

2. 经济和经营管理的环境

经济和经营管理的环境是影响系统经济过程和经营状态的因素，它包括以下几个方面的因素。

(1) 外部组织机构将与未来系统的行为发生直接或间接的联

系，它包括同类企业、供应企业、用户、协作单位、科研咨询机构、上级组织等，而这些联系又包括合同关系、财务关系、指导关系、技术转让、技术协作、咨询服务、情报交流等。

(2) 政策因素一般可分两大类。一类是政府的政策：对系统起控制、调配、监督等约束作用；另一类是管理系统内部的政策：系统正常运行的基础。它又包括：

第一，合理分配政策；

第二，各种资源的绝对数量和总预算的政策；

第三，选题研究和发展项目方面的政策；

第四，对用户承担责任方面的政策；

第五，保护学术自由、专利和保密方面的政策；

第六，产品质量方面的政策；

第七，有关行政工作制度、标准和程序的政策，是实现上述六条的保证。

(3) 政府作用主要表现为：通过对政府政策的制定和实施，以实现政府一级的更大系统的最佳管理、最佳控制。

(4) 产品系统来自社会需求及其发展，产品价格结构决定于政府的政策和市场供求关系。

(5) 经营活动的目的：对企业来说，主要是增强企业实力，搞好经营决策和提高竞争能力。

3. 社会环境

社会环境因素是系统分析必须考虑的人或集团关系的因素。即包括：

(1) 大范围的社会因素包括人口潜能和城市形式的研究。

(2) 人（个体）的因素，主要以心理学及人类工程学两个方面入手分析。

五、环境分析案例

现以上海新港口的地址选择分析作为系统环境分析的实例。

上海港目前的吞吐能力已是饱和状态。为了适应我国经济建设和外贸发展的需要，必须考虑上海新港的建设。而考虑新港港址的选择时，首先要对新港的环境进行分析。港口选址涉及到政治、经济、地理条件、技术、交通、城市设施等环境因素的总体。为了选好港址，必须把影响港址选择的诸多因素搞清楚，即围绕建港目的提出各种可能的环境因素。经过反复研究，采用专家调查法，对新港选址的环境因素做出如下归纳。

（一）影响港址选择的环境因素

1. 政策环境

- （1）“十二大”总方针；
- （2）国民经济翻两番的要求；
- （3）“一要吃饭，二要建设”的方针。

2. 物理技术环境

- （1）气候条件：风级、浪高；
- （2）航道：现状、稳定性、增深可能性；
- （3）岸滩河势：岸滩、河势稳定性以及保存的难易程度；
- （4）回淤：淤积量、清淤条件；
- （5）地质条件：软土层厚度；
- （6）主要港口建筑物：围堰、码头、防波堤的结构及施工条件；

- （7）规模：泊位数、船型适应性；
- （8）运行与维修：航行、装卸、运行、维修的方便与安全。

3. 经济与经营环境

- （1）投资额；
- （2）建设周期；
- （3）投资环境；
- （4）每年可创造的利润和税金；
- （5）对农业、渔业、副业、服务行业、航运业、地方工业、

上海市、长江流域、全国经济、国际贸易的收益影响。

4. 对周围城市及地区的规划与发展

- (1) 上海卫星城规划；
- (2) 对浦东开发；
- (3) 对江浙规划；
- (4) 对新港区原有工业的意义；
- (5) 对港口外市政配套关系；
- (6) 新港与上海市及行政区的关系。

5. 与全国交通网络的联系

- (1) 连通铁路、公路、内河、长江、海、航空港的交通条件；
- (2) 货物流向的合理性；
- (3) 与“老港区”的联系。

6. 资源环境

- (1) 符合国家能源政策的程度；
- (2) 对上海能源的影响；
- (3) 需投入的能源：如煤、油等；
- (4) 电力供应能力；
- (5) 需征用的土地；
- (6) 征用土地的可能性；
- (7) 填土源条件；
- (8) 淡水供应能力；
- (9) 建筑材料供应；
- (10) 项目的施工力量；
- (11) 副食品供应。

7. 环境保护

- (1) 废水排放；
- (2) 废气排放；
- (3) 对生态影响；
- (4) 对风景区、名胜古迹的影响。

8. 与国内重大项目的关系

- (1) 南水北调；
- (2) 三峡高坝。

9. 军事方面

- (1) 与军港建设的关系；
- (2) 对社会治安、国家安全的考虑。

(二) 环境因素量化法

为了说明各种环境因素对港址选择的重要性以及各种因素综合的需要，需采用各种量化方法。从定量化难易程度来看，上述环境因素可分为三大类。

1. 因素本身可以直接量化

如港区淤积量就可用单位吞吐量的淤积量来表示；投资额可用单位泊位的总投资额来衡量。

2. 可间接定量的环境因素

如气候条件是指港区的风力、风速和浪高等自然条件。这直接量化有困难，但气候条件主要影响装卸作业，如大风及高浪条件下不能进行装卸。因此，全年的可装卸天数的多少可用于间接量化气候条件。

3. 定性环境因素的量化

对这类因素主要是通过各种途径制定定量依据，再借用模糊理论的概念和方法使其量化。也可使用“评分”的方法，如对岸滩稳定性。在多少年内等深浅离岸的变化超过多少米时认为是不稳定的，至今尚难作出定量的描述，所以只能使用“评分”方法。

六、系统目标分析

1. 建立总目标

总目标的建立来源于以下四种情况的分析：

- (1) 由于社会发展需要而提出的必须予以解决的新课题。
- (2) 由于国防建设发展的新要求。
- (3) 目的明确，但目标系统有较多选择的情况。
- (4) 由于系统改善自身状态而提出的课题。

2. 目标分析四项要求

- (1) 制订目标应当是稳妥的。
- (2) 制订目标应当注意到目标可能起到的所有作用。
- (3) 应当把各种目标归纳为目标系统。
- (4) 要摆明对出现的目标冲突。

3. 实例分析

中共中央书记处关于北京建设提出了四项要求，这可以看作是四项分目标，而进行北京建设则是总目标，参见图 2 - 10。目标集是通过树形分析将四项要求进行分解，使高度概括的总目标具体化。目标集建立的依据，一是中央书记处对北京建设的四项要求；二是北京现实情况的调查研究。在展开中仍可使用效能原理和组态设计的思想，将各个目标逐步进行分解。下面只看其中关于目标一的展开例。先调查分析了北京社会的治安基本情况后，为了实现社会治安、社会秩序、道德风尚达到最好的要求，就要应用效能原理和组态设计从资料库和经验搜索对应的分目标和解决问题的手段和方法。比如要加强社会治安，就要减少刑事案件发案率。为此，就要加强教育，提高人口素质；加强法制及队伍建设，以维护社会安定团结的局面；严格治安管理和部分人员的安置管理，以减少犯罪隐患和预防犯罪；减少和清除犯罪诱发因素等。如图 2 - 11 所示。

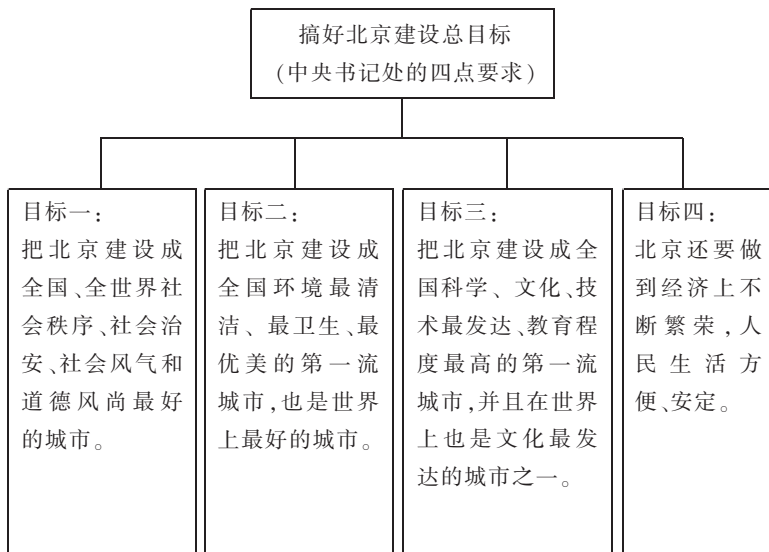


图 2 - 10 总目标及分目标结构图

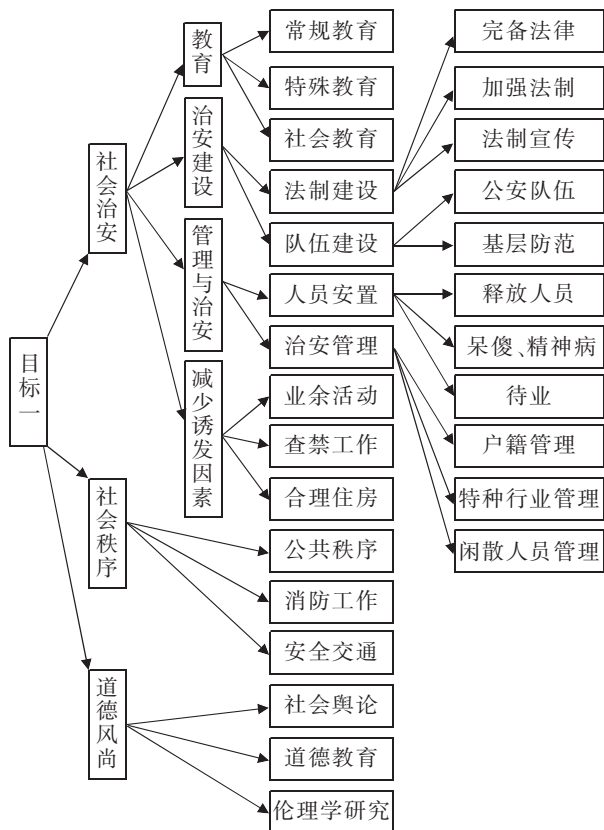


图 2 - 11 社会系统分目标展开

七、系统结构分析

系统结构分析就是寻求系统合理结构的分析方法。根据系统工程特性，可用下面两个公式表达。

$$E^{**} = \underset{\rho \rightarrow G}{\overset{\rho \rightarrow O}{\text{Max}}} \rho(X, R, C) \quad (2-1)$$

$$S_{\text{opt}} = \text{Max}\{S | E^{**}\} \quad (2-2)$$

其中：

X：系统组成要素集；

R：系统组成要素集的相关关系集；

C：系统要求及其相关关系在阶层上的可能分布形式；

ρ ：X、R、C的结合效果函数；

$\rho \rightarrow G$ ： ρ 函数在对应于系统目标集的条件；

$\rho \rightarrow O$ ： ρ 函数在相应于环境因素集的条件；

E^{**} ： ρ 函数在两个对应条件下所能得到的最优效果。

式(2-2)表示具有最佳结合效果的系统结构中能给出最大输出的系统 S_{opt} 。显然，系统结构分析的内容就是寻求 X、R、O 的最优结合形式，即有最优结合效果， E^{**} 的系统结构形式及 E^{**} 条件下给出最大系统输出的系统 S_{opt} 。

八、系统评价

1. 评价原则

- (1) 保证评价的客观性。
- (2) 保证方案的可比性。
- (3) 评价指标要成系统。
- (4) 评价指标必须与国家方针、政策、法令的要求一致。

2. 评价步骤

- (1) 对各评价方案作出简要说明。
- (2) 确定评价指标系统。
- (3) 确定各评价指标权重。
- (4) 单项评价：查明各项指标的实现程度。
- (5) 单项评价指标综合：得出大类指标的价值。

(6) 综合评价：综合各大类指标的价值和总价值。

3. 评价指标体系

(1) 政策性指标：包括政府的方针、政策、法令以及法律约束和发展规划等方面的要求。

(2) 技术性指标：如产品的性能、寿命、可靠性、安全性等，工程项目的地质条件、设备、设施、建筑物、运输等技术指标要求。

(3) 经济性指标：包括方案成本、利润和税金、投资额、流动资金占有额、回收期、建设周期以及地方性间接收益等。

(4) 社会性指标：如社会福利、社会节约、综合发展、就业机会、污染、生态环境等。

(5) 资源性指标：物资、人力、能源、水源、土地等条件。

(6) 时间性指标：如工程速度、时间节约、试制周期等。

九、系统设计

所谓系统设计，就是在系统分析的基础上，用系统思想综合运用各有关学科知识、技术的经验，通过总体研究和详细设计等环节，落实到具体的工程上，以创造满足设计目标的人造系统。

1. 系统设计的基本原则

(1) 追求整体最优。

(2) 主导事件原则。

(3) 信息分类要适应决策的需求。

2. 系统设计中的若干问题

(1) 系统设计的过程：就是目标→功能→结构→效益的多次分析与综合的过程。

(2) 设计方案问题：

问题一：系统设计要搞多方案；

问题二：方案产生过程要应用创造性技术；

问题三：方案数量要适当。

第四节 系统模型与模拟

一、模型的概念与特征

科学家和工程师在研究实际或拟议的系统的时候，为了便于实验与预测，总是先设法把所要研究的系统的结构型态或运动状态变为易于考虑的形式即模型。模型是系统或过程的一种简化、抽象和类比表示，它不再包括原系统或过程的全部特征，但能描述原系统或原过程带本质的输入、特性和输出，而且提供相似于原系统或过程所处的环境条件的表示。

所以，我们说模型可以认为是实际系统的代替物。模型应反映出系统的主要组成部分和各部分的相互作用，以及在运用条件下因果的作用和反作用的关系与相互关系。因此，模型在系统工程中占有最重要的地位。

综上所述，模型具有三个主要的特点：

- 第一，它是现实世界一部分的抽象或模仿；
- 第二，它是由那些与分析的问题有关的因素构成；
- 第三，它表明了有关因素的相互关系。

二、模型的作用和分类

系统工程的研究方法正是围绕着建模为主体，并通过模型对系统进行了解、观测计量、变换、试验，研究其中主要因素及其相互关系，从而作出有关的决策。所以，工程工程的实质就是如何建模以及对模型进行量的分析的方法。

模型的一种分类如图 2 - 12 所示。模型又可分为确定性的与随机的、静态的与动态的模型等。

三、模型的构造

1. 构造模型的一般原则

- (1) 建方框图，如图 2 - 13 所示。
- (2) 考虑信息相关性。
- (3) 考虑准确性。
- (4) 考虑结集性。

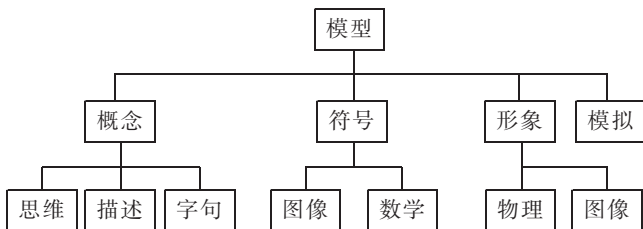


图 2 - 12 模型的一种分类框图

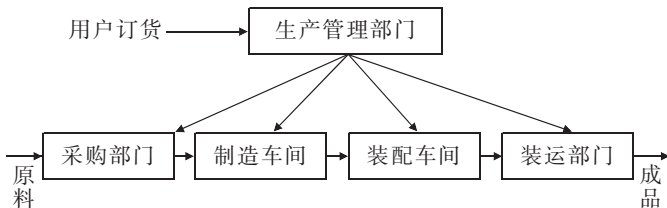


图 2 - 13 工厂系统框图

2. 建模的基本步骤

对于建模，很难给出一个严格的步骤，建模主要取决于对问题的理解、洞察力、训练、技巧和经验等。

- (1) 明确建模的目的和要求。

- (2) 对系统进行一般语言描述。
- (3) 弄清系统中的主要因素及其相互关系。
- (4) 确定模型的结构。
- (5) 估计模型中的参数。
- (6) 对模型进行实验研究。
- (7) 根据实验结果，对模型作必要的修正。

四、模拟的概念及作用

工程技术人员为了深入考虑系统的运动变化规律，以及获取解决实际问题的启发，在表达系统的模型建立起来之后，总是要在人为控制的条件下，通过改变特定的参数选择来观察模型的响应，预测系统在真实环境条件下的品质和行为。这个过程称为模拟或仿真。

模拟技术在系统工程中具有极大的重要性。由于现代工业和军事系统等复杂性，从系统初始概念的设计到系统的制造、使用，不同形式的模拟得到了广泛的应用。在开始系统设计之前，模拟用来评价设计概念，预测系统在建立起来之后的行为表现；在系统设计过程中，模拟用来实验不同的设计方案；在系统设计、制造出来之后，模拟用来估价整个系统的效率。系统工程应用的模拟主要是计算机模拟，计算机模拟又有连续模拟与离散模拟之分。

第三章 层次分析法 (AHP)

当我们要选购一套住房的时候，总是那么不容易。道理很简单，因为我们要考虑许多的方方面面。

第一节 AHP 概述

人们在进行社会、经济以及科学领域问题的系统分析中，面临的常常是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂系统。数学模型是处理这些复杂系统的有力工具。但是，由于某些因素，特别是那些对人们的主观判断起重要作用的因素，一般很难在数学模型中反映出来。因此，许多专家、学者试图寻求具有较强功能，容易反映人们主观判断的一种模型，便于用在系统的决策分析的过程中。另一方面，从系统的观点来分析，任何系统都具有层次性这一特性。并且，各种同一层次的复杂因素对问题的分析都有着不同的重要性。如何将这些因素之间的关系条理化，并按其重要性排列，对系统分析来说，是十分重要的。首先，让我们看看以下几个例子。

[例 3 - 1] 旅游地点的选择

由若干人组成的旅游小组，设有三个地点可供选择。旅游小组为实现“最愉快”的旅游目标，就得从这一目标的诸多因素来权衡，这些因素包括费用、景色、居住条件、饮食条件和旅游条件等，进而确定出去旅游观光的地点。

〔例 3 - 2〕 方案选择

某国有工厂在扩大企业自主权后，有一笔企业留成利润可由厂方自行决定如何使用。可供选择方案有：作为奖金发放给职工；扩建职工食堂、托儿所等福利设施；开办职工业余学校和短训班；建立图书馆、职工部和业余文工队；引进新技术设备，进行企业技术改造等。从调动职工劳动积极性，提高职工文化技术水平，增强企业竞争能力等方面来看，这些方案各有其合理之处。于是，怎样对这些方案进行优劣评价或者按照优劣次序排列这五个方案，以便从中选择一种方案将企业留成利润合理使用，达到企业发展的目的呢？

〔例 3 - 3〕 县级财政支出的分配问题

对于一个县来说，财政支出项目中主要包括：用于工业、农业的扩大再生产，城市维护，文教科卫，优抚救济和价格补贴及其他公共消费，以及以上各项目的行政管理支出等。假如某县 2000 年的财政支出费有 5 亿元，那么以上所列的各财政支出项目应被分配多少才是比较科学、合理的？

从以上 3 个例子可以看出，许多系统分析问题都可以看成某种意义下的排序问题。为了寻找一种简单、合理、实用的排序方法。美国运筹学家 Saaty 在 20 世纪 70 年代初提出一种层次分析法（Analytical Hierarchy Process），简称 AHP，所谓 AHP 就是把系统的复杂问题中的各种因素，通过划分为相互联系的有序层次，使之条理化，根据对一定客观现实的判断就每一层次相对重要性给予定量表示，利用数学方法确定表达每一层次的全部元素的相对重要次序的权值，并通过排序的结果分析和解决问题的一种决策分析方法。

事实上，如果说分析和综合是大脑分析问题的一种基本思考，那么 AHP 对于这种思考过程提供了一种数学表达及数学处理方法。因此有人称 AHP 是一种思维工具。由于 AHP 具有高度的逻辑性、系统性、灵活性、简洁性等特点，十分适用于实际应用问题，许多社会、经济、科学以至数学问题都可以纳入这种分析过程。对这种

方法已进行了大量的应用研究，所解决的问题有优先排序、方案生成、选择最优政策、决定需求、分配资源、结果预测、偏好度量、系统设计、规划制度、冲突解决和最优化等等。由于这种方法的应用不需要高深的数学知识，所以 AHP 作为一种简易的新决策方法是很值得推广和普及应用的。

自从高兰尼柴 1982 年来我国讲学，介绍了他导师 Saaty 首倡的 AHP 以后，由于这种方法对解决大系统中多层次、多目标的决策问题具有简易且行之有效等特点，因此 AHP 的应用在我国的发展亦较快。1984 年，我国的学者刘豹、许树柏等人在《系统工程》上首次发表“层次分析——规划决策的工具”一文，专门介绍 Saaty 的 AHP，使之在我国得到了推广和应用。随后，我国许多专家、学者在 AHP 的理论问题的研究做了大量的工作，并在政治、经济、生态环境和能源等方面的应用发表了大量的文章。不过，AHP 作为决策的方法毕竟还处于发展和普及的初级阶段，怎样进一步发展 AHP 及其应用到基层领导的管理决策中去，仍有待不懈的努力。

第二节 基本原理与方法

一、AHP 的基本原理

为了说明 AHP 的基本原理，让我们首先分析下面这样一个简单的事例。

假定我们已知 n 个西瓜的重量总和为 1，每只西瓜的重量分别为 $W_1, W_2, \dots, W_n$ ；若不是，则用

$$W_i = W_i / \sum_{j=1}^n W_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

代替 w_i 即可。把这 n 个西瓜的重量两两比较或相除，很容易

得到表示 n 只西瓜相对重量关系的比较矩阵，以后称之为判断矩阵

$$A = \begin{bmatrix} W_1/W_1 & W_1/W_2 & \dots & W_1/W_n \\ W_2/W_1 & W_2/W_2 & \dots & W_2/W_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ W_n/W_1 & W_n/W_2 & \dots & W_n/W_n \end{bmatrix} \triangleq [a_{ij}]_{n \times n} \quad (3-1)$$

于是，对任意的 i, j ，显然有 $a_{ii} = 1$ 、 $a_{ij} > 0$ ，且 $a_{ij} = 1/a_{ji}$ 。可见，矩阵 A 是一个正互反阵。又由于，对 $\forall i, j$ ，有

$$a_{ij} = \frac{W_i}{W_j} = \frac{W_i/W_k}{W_j/W_k} = \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \text{ 或 } a_{ij}a_{jk} = a_{ik} \quad (3-2)$$

设 $W = [W_1 \ W_2 \ \dots \ W_n]^T$ ，则有

$$AW = \begin{bmatrix} W_1/W_1 & W_1/W_2 & \dots & W_1/W_n \\ W_2/W_1 & W_2/W_2 & \dots & W_2/W_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ W_n/W_1 & W_n/W_2 & \dots & W_n/W_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nW_1 \\ nW_2 \\ \dots \\ nW_n \end{bmatrix} = nW$$

由上式可知， n 是 A 的一个特征根。即每只西瓜的重量恰好是 A 所对应特征根 n 的特征向量。又由于 A 满足 (3-2) 式，所以我们称 A 具有完全一致性质，故又称 A 为完全一致正互反矩阵，这就是所谓判断矩阵的完全一致性。

很自然我们会提出一个相反的问题：如果事先不知道每只西瓜的重量，也没有衡器称量，但可通过两两比较，判断出两两西瓜重量之比，能否由此计算出这 n 个西瓜的相对重量呢？这就相当于，在一个系统中，能否通过人对 n 个因素两两的比较，一般来说，这点尚较容易做到，然后得出这 n 个因素的权重值。注意到，这是 AHP 思想的关键。

可以证明，在判断矩阵 A 具有完全一致性的条件下，我们能够通过解判断矩阵 A 的最大特征值问题。即通过

$$AW = \lambda_{\max} W \quad (3-3)$$

求出正规化特征向量或权重向量，即若假设 n 个西瓜总重量为

1, 从而得到 n 只西瓜相对重量。为了证明这个关系, 我们首先提出一个引理。

引理 1 正互反阵的最大特征值是实数, 并且它有对应正的特征向量。

事实上, 该引理是以下 Perron 定理的特例。

定理 1 设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 是元素均为正的方阵, 则一定有实的特征值 $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\max}$ 是特征方程 $f_A(\lambda)$ 的一个单根, 且大于其他所有特征值的模, $\lambda_{\max}$ 对应 A 的特征向量可以由正分量组成。

定理 2 $n \times n$ 阶的互反阵 A 是完全一致的充要条件为 A 的 $\lambda_{\max}$ 满足 $\lambda_{\max} = n$ 。

证明: 必要性

若 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为正互反阵, 则由式 (3-2) 有

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}/a_{12} & a_{12}/a_{12} & \cdots & a_{1n}/a_{12} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{11}/a_{1n} & a_{12}/a_{1n} & \cdots & a_{1n}/a_{1n} \end{bmatrix}$$

可见, A 的秩为 1。所以 A 有 $n-1$ 重零特征值, 即可设 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 。但是

$$f_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

于是, 由

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = A \text{ 的迹} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = n$$

有 $\lambda_1 = \lambda_{\max} = n$ 。

充分性

设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为正互反阵, 且 $\lambda_{\max} = n$, 即有 $AW = \lambda_{\max} W$ 。

由引理 1 知, $\lambda_{\max} > 0$, $W_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。而由

$$\begin{cases} \lambda_{\max} W_1 = a_{11} W_1 + a_{12} W_2 + \dots + a_{1n} W_n \\ \lambda_{\max} W_2 = a_{21} W_1 + a_{22} W_2 + \dots + a_{2n} W_n \\ \dots \\ \lambda_{\max} W_n = a_{n1} W_1 + a_{n2} W_2 + \dots + a_{nn} W_n \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \lambda_{\max} = a_{11} (W_1/W_1) + a_{12} (W_2/W_1) + \dots + a_{1n} (W_n/W_1) \\ \lambda_{\max} = a_{21} (W_1/W_2) + a_{22} (W_2/W_2) + \dots + a_{2n} (W_n/W_2) \\ \dots \\ \lambda_{\max} = a_{n1} (W_1/W_n) + a_{n2} (W_2/W_n) + \dots + a_{nn} (W_n/W_n) \end{cases}$$

将该方程组的 n 个子式相加得

$$\begin{aligned} n\lambda_{\max} &= n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[a_{ij} (W_j/W_i) + \frac{1}{a_{ij} (W_j/W_i)} \right] \\ &= n + \sum_{j<i} \left[a_{ij} (W_j/W_i) + \frac{1}{a_{ij} (W_j/W_i)} \right] \end{aligned}$$

令 $b_{ij} = a_{ij} W_j/W_i$, 则 $b_{ij} + 1/b_{ij} \geq 2$, 将该式代入上式, 可得

$$n\lambda_{\max} = n + \sum_{j<i} (b_{ij} + \frac{1}{b_{ij}}) \geq n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$$

于是有, $\lambda_{\max} \geq n$ 。已知 $\lambda_{\max} = n$, 则由上式可知

$$b_{ij} + \frac{1}{b_{ij}} = 2 \Leftrightarrow b_{ij} = 1$$

即 $a_{ij} W_j/W_i = 1$ 或 $a_{ij} = W_i/W_j$ 。故由正互反阵的完全一致性定义知 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 是完全一致的。

这样, 我们就论证了, 判断矩阵 A 在满足完全一致性的条件下, 能够通过求其最大特征值的正规特征向量, 得到 n 个西瓜的相对重量。可是, 问题并非仅此简单而已, 因为通过两两西瓜比较其重量而给予判断是有误差偏离的, 因此, 判断矩阵常常是不满足完全一致性。这就意味着, 在不完全一致的条件下, 正互反阵的 $\lambda_{\max}$

$\geq n$ ，这一事实我们在证明定理 2 的过程中已论证过。从此可断言，若 $\lambda_{\max}$ 与 n 相差大，说明判断的偏差致使 A 可能是不可取的。若 $\lambda_{\max}$ 与 A 相差小，说明判断较准， A 可能有用。这一类问题的解决方法与其计算等问题，将在下面陆续讨论。

二、建立层次结构模型

如果说系统工程的关键一环是如何建模的话，则 AHP 的关键就在于建立层次结构模型。所以必须根据系统分析的方法，加以对系统因素和其层次的分析，进而设计系统层次结构的表示模型。

为解决建模问题，Saaty 将问题中所包含的因素划分为不同层次，大体上分为以下三大层。

1. 最高层

最高层又称目标层，表示解决问题的目的，即层次分析要达到的总目标。

2. 中间层

中间层是指策略层、约束层或准则层，表示采取某种措施、政策、方案等来实现预定总目标所涉及的中间环节。中间层也可以是多层次的。

3. 最低层

最低层包括指标层、方案层、措施层等，表示要选用的解决问题的各种措施、政策、方案等。

且用框图形式说明层次的递阶结构与因素的从属关系，如下例所示。需要指出，当中间层的某一策略、约束或准则所包含的因素较多时，如超过 9 个，可将该层次进一步划分为若干子层次。

【例 3 - 4】（续例 3 - 1）把“最愉快”作为旅游的目标，把费用支出、景色、居住条件、饮食条件和旅途条件等，作为选择旅游景点判断准则。从而构造 AHP 层次结构模型如图 3 - 1 所示。

【例 3 - 5】（续例 3 - 2）把“合理使用企业留存利润”作为目标，以调动职工劳动生产积极性、提高生产技术水平、改善职

工物质文化生活状况等为策略，判断各项可使用留存利润的实施项目。进而建立合理判断各使用留存利润项目的重要权值的 AHP 层次结构模型，如图 3 - 2 所示。

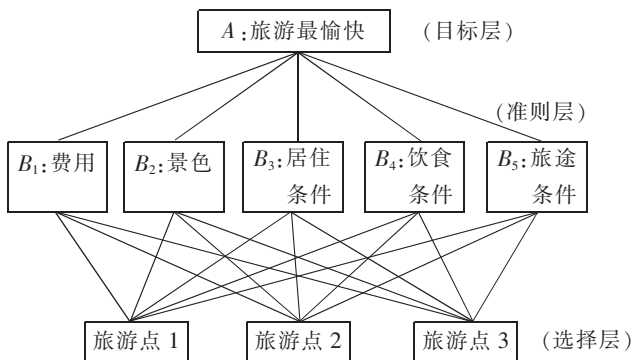


图 3 - 1 选择最佳旅游景点的 AHP 结构模型

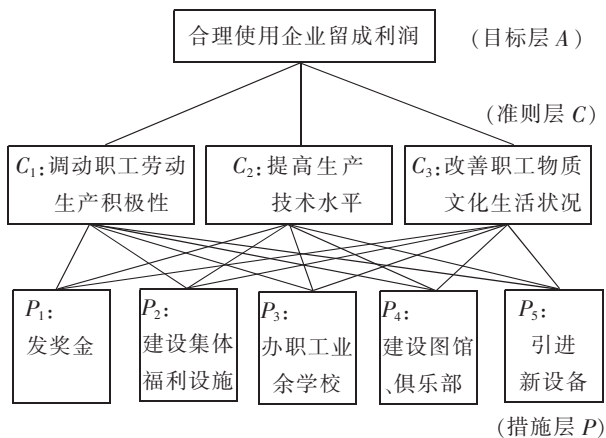


图 3 - 2 合理使用企业留存利润的 AHP 结构模型图

[例 3 - 6] (续例 3 - 3) 县级财政支出 AHP 模型。合理分配县级财政支出,即如何有效利用县级财政基金,一直以来就是各县级领导所关注的问题。为了科学合理地构造分配财政基金的 AHP 层次结构模型,系统分析要求,必须了解县级财政收支基本原理和实际情况,作为构造 AHP 模型的依据。

由于国民收入是当年新创造的价值所构成的,物质生产部门的劳动者从事生产活动所创造的财富 $c + v + m$,除补偿当年消耗的生产资料 c 之外,所剩部分即为当年新创造的价值 $v + c$,它是可供个人消费和社会支配的数量极限。 v 以工资形式作为劳动者生存繁衍所需基金分配给他们; m 是劳动者以剩余的产品的价值形式对社会所作的贡献,是财政分配的主要对象, m 又可以划分为三个项目,即用于扩大再生产的资金 m_1 、用于公共消费的资金 m_2 和用于行政管理的资金 m_3 等三大开支。非物质生产部门职工的工资福利以及从公共消费所得受益,都是社会消费基金所提供的。显然,在生产得到不断发展的基础上,逐步提高人民的物质和文化生活水平,使人民的消费结构日趋合理和消费水平日益提高,是社会主义生产的目的所在,也是商品经济和财政分配的方向和归宿。扩大再生产和国家行政管理,分别是实现社会主义生产目的的物质基础和行政手段,都是必要的。这样,财政支出即财政基金分配比例是一个重要的决策参数。在发展各种事业上,按价值计算,各种事业各自能够得到多少劳动力、生产资料和生活资料的数量或比例,社会或国家职能机构必须预先计算好这种比例,使其发挥最大的生产效益及社会效益。

财政基金主要来源是各项税收即财政收入,而财政基金的运行如图 3 - 3 所示。

县地方财政支出的基本特点如下:

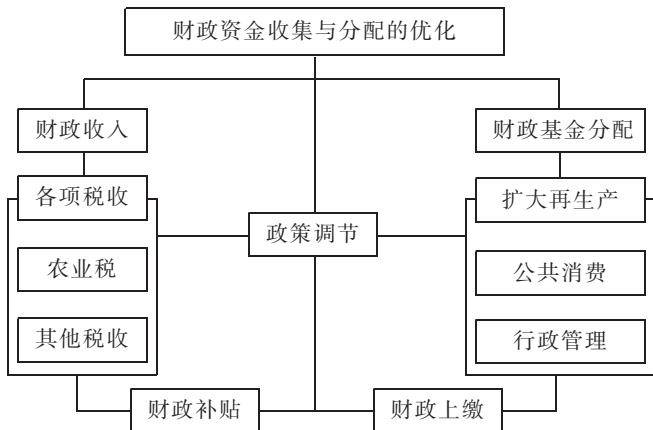


图 3-3 县财政基金运行简图

(1) 用于扩大再生产 m_1 ：包括支工、支农、工商事业费、流动资金等；由于工商事业费、流动资金的数额很小，数字又缺乏连续性，因而把它们合并在其他项目。

(2) 公共消费 m_2 ：包括文化教育科技卫生、城市维护、优抚经济、价格补贴及其他。

(3) 国家行政管理 m_3 ：县行政事业的各项开支。

依据这种特点，做出以合理分配财政支出为总目标，即目标层 A；以满足扩大再生产 m_1 、公共消费 m_2 和行政管理 m_3 的需求为准则，即准则层 m；又以支工 p_1 、支农 p_2 、城市维护 p_3 、文教科卫 p_4 、优抚救济 p_5 和价格补贴及其他 p_6 作为具体实施分配，即分配层 p，构成合理分配县级地方财政支出的 AHP 层次结构模型，如图 3-4 所示。

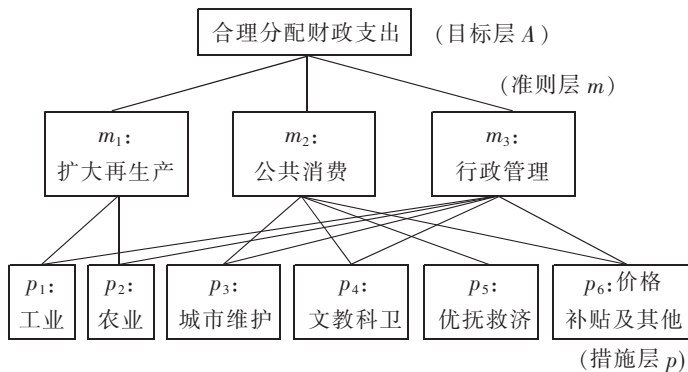


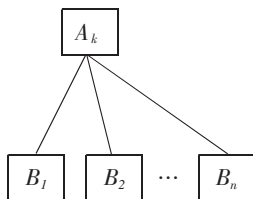
图 3-4 合理分配县级财政支出 AHP 模型

三、构造判断矩阵

任何系统分析都以一定的信息为基础。AHP 的信息基础主要是人们通过对客观事实的认识，因而对每一层次各元素的相互重要性给出判断，并标值量化，进而构造出判断矩阵，这是 AHP 的关键一步。具体地说，假定 A 层元素 A_k 与下层次中的元素 B_1 、 B_2 、 $\dots$ 、 B_n 有联系，如图 3-5 所示，将它们两两比较，判断出其相对重要性，标值量化方法如下。

用数字 1~9 及其倒数表示相对重要性程度，标准为：

- 1——表示 B_i 与 B_j 一样重要；
- 3——表示 B_i 比 B_j 重要一点；
- 5——表示 B_i 比 B_j 重要；
- 7——表示 B_i 比 B_j 重要得多；
- 9——表示 B_i 比 B_j 极端重要；

图 3 - 5 A_k —B 关联图

用 2, 4, 6, 8 分别表示两邻判断的中值。反之, 当 B_j 与 B_i 比较时, 其标量是 B_i 比 B_j 标量的倒数。于是乎, 通过如下表 3 - 1 构造判断矩阵 A_k , 其中 A_k —B 表示在 A 层元素 A_k 下层次 B 元素间的关系。为简化表示, 今后本书中也可用表 3 - 1 代替判断矩阵 A_k 。

表 3 - 1 判断矩阵 A_k 构造表

A_k —B	B_1	B_2	...	B_n
B_1	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}
B_2	b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...
B_n	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}

[例 3 - 7] (续例 3 - 4) 构造判断矩阵 A 如下:

A—B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
B_1	1	3	5	5	5
B_2	$\frac{1}{3}$	1	3	3	3
B_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1
B_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1
B_5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1

Saaty 提出的这种标量尺度虽然没有严格的理论证明,但是经过多次实验及人的心理因素分析得出的结果,下面用几点事实说明。

第一,在估计事物的区别性时,可用五种判断很好的表示,即相等、较强、强、很强、绝对强。当需要更精度时,还可以用在相邻判断之间作比较。

第二,心理学家认为: 7 ± 2 个项目为心理学极限,即若取 7 ± 2 以内的元素逐时比较,它们之间的差别较易掌握。那么其区别可分别用 9 个数字表示。

第三,社会调查也表明,在一般情况下,人们至多需要七个标度点来区分事物间质的差别或重要性程度的不同。

第四, Saaty 曾用过 26 种标度法进行比较,发现 1 ~ 9 标度范围是可行的,也是比较好地将思维判断予以数量化。

四、排序和一致性检验

1. 层次单排序及其一致性检验

所谓层次单排序,是指根据判断矩阵计算对于上层某元素而言,本层次与之有联系元素的重要性次序的权值。它是对本层次所有的元素针对上一层次而言的重要性进行排序的基础。

层次单排序计算,即对判断矩阵 B , 求出满足 $BW = \lambda_{\max} W$ 的特征根与特征向量。式中 $\lambda_{\max}$ 为 B 的最大特征根, W 为对应于 $\lambda_{\max}$ 的正规化向量, W 的分量 W_i 即为所对应因素 B_i 的单排序的权值,参见图 3 - 5 所示。

前面已提到,判断矩阵仅仅是专家对实际情况作出主观判断的数值矩阵,一般来说,这种判断可能是不准确的。因此,有必要给出检验判断矩阵是否满足一致性的标准。

由定理 2 的证明中可知,若正矩阵 B 满足完全一致性,设 B 的 n 个特征值 $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ 、 λ_2 、 $\dots$ 、 λ_n , 则有以下等式成立,即

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$$

且若 B 不满足完全一致性，则有 $\lambda_{\max} \geq n$ 。于是，我们定义

$$\mu = -\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \lambda_i$$

为判断矩阵 B 对一致性矩阵偏离的某种指标，则由上式知

$$\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

因此，定义一致性指标 CI (Consistent Index) 为

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} \quad (3-4)$$

不过，为了得到一个对不同阶数判断矩阵均适用的一致性检验的临界值，还必须考虑一致性与矩阵阶数之间的关系。实际上，判断矩阵阶数越大，两两比较的比例测度越难达到一致。例如，二阶互反矩阵总是一致性矩阵，构造三阶矩阵判断也容易达到一致性，而对于 9 阶矩阵，独立给出的两两比较判断有 28 个，很难使其达到一致性。因此，又需要根据判断矩阵的阶数对一致性指标 CI 进行修订。

Saaty 提出用平均随机一致性指标 RI 修订 CI 的方法。这一方法在 AHP 中的应用已经被普遍接受，他利用概率统计的方法，计算出 RI 对应于 1~9 阶判断矩阵的值，如表 3-2 所示。

表 3 - 2 各阶判断矩阵一致性指标 CI 的修正值 RI

判断矩阵阶数	1	2	3	4	5
RI 值	0	0	0.58	0.90	1.12
判断矩阵阶数	6	7	8	9	
RI 值	1.24	1.32	1.41	1.45	

于是, Saaty 推荐用

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (3 - 5)$$

来代替 CI, 进行一致性检验。当 $CR < 0.1$ 时, 认为判断矩阵有可以接受的一致性, 否则, 由于判断矩阵偏离一致性程度过大而需要考虑对判断矩阵进行重新修订。

2. 层次总排序及其一致性检验

利用同一层次中所有层次单排序的结果, 计算出对上一层次而言, 本层次所有元素重要性权值, 即为层次总排序。层次总排序需从上至下逐层顺序地进行, 即若对于上一层所有元素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的总排序已经完成, 得到权值分别为 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 。本层次所有因素 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 对应 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的单排序结果为 $b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni}$ 。其中, 若 B_j 与 A_i 无关, 则 $b_{ji} = 0$ 。所以 B 层次总排序结果的计算方法及结果如下表 3 - 3 所示。

思想方法同层次单排序方法相同, 层次总排序仍需要进行一致性的检验, 于是, AHP 提出层次总排序一致性指标 CI 为

$$CI = \sum_{i=1}^n a_i (CI)_i \quad (3 - 6)$$

其中 $(CI)_i$ 为与 A_i 对应的 B 层次中判断矩阵的一致性指标。

表 3 - 3 层次总排序计算表

层次 A \ 层次 B	A ₁	A ₂	...	A _m	B 层总 排序结果
	a ₁	a ₂	...	a _m	
B ₁	b ₁₁	b ₁₂	...	b _{1m}	$\sum a_i b_{1i}$
B ₂	b ₂₁	b ₂₂	...	b _{2m}	$\sum a_i b_{2i}$
...	...	...	...	...	...
B _n	b _{n1}	b _{n2}	...	b _{nm}	$\sum a_i b_{ni}$

同理，层次总排序的一致性指标需要通过层次总排序的随机一致性指标 RI 为

$$RI = \sum_{i=1}^m a_i (RI)_i \quad (3 - 7)$$

对层次总排序一致性指标 RI 进行修补，其中， $(RI)_i$ 为与 A_i 对应的 B 层次中判断的随机一致性指标。AHP 规定用

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{\sum_{i=1}^m a_i (CI)_i}{\sum_{i=1}^m a_i (RI)_i} \quad (3 - 8)$$

作为层次总排序的最终一致性检验指标，当 $CR \leq 0.1$ 时，则认为层次总排序的计算结果满足一致性，否则，需要重新调整判断矩阵，直至满足一致性。可见，判断是 AHP 的一个关键环节，它取决于判断者思维的一致性结果。同时，需要指出，即使最后结果满足一致性，在理论上，只能说明判断者的判断思维是一致的，并非说明其结果一定符合实际情况。例如，县级财政支出优化分配对各个县的具体情况，其 AHP 最优结果可能是不同的。

第三节 AHP 计算

AHP 计算的根本问题是如何计算判断矩阵的最大特征根及其

对应的特征向量。下面，将介绍几种近似计算方法的基本步骤，以便初学者自编计算程序。因为，在 AHP 的实际应用过程中，常常需要多次修订判断阵矩，使其满足一致性和符合实际要求。所以，在计算机上实现 AHP 的计算是理想的办法。一般来说，计算判断矩阵的最大特征及其对应向量，并不需要追求较高的精度，这是因为判断矩阵本身有相当的误差范围。应用层次分析法给出的层次中各因素优先排序权，从本质上来说是表达某种定性的概念。

一、幂值法

幂值法是一种递推的近似算法，设 A 为任一对 n 阶判断矩阵，幂值法的计算步骤如下：

(1) 任取与判断矩阵 A 同阶的正规化初值向量 W^0 ；

(2) 计算 $\bar{W}^{k+1} = AW^k$ ， $k=0, 1, 2, \dots$

(3) 令 $\alpha = \sum_{i=1}^n \bar{W}_i^{k+1}$ 计算

$$W^{k+1} = \frac{1}{\alpha} \bar{W}^{k+1}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3-9)$$

(4) 对于预先给定的精度 ε ，当 $|\bar{W}_i^{k+1} - \bar{W}_i^k| < \varepsilon$ 对 $i=1, 2, \dots, n$ 成立，则 $W = W^{k+1}$ 为所求的特征向量，否则返回第 (2) 步。其中 $\bar{W}_i^k$ 和 $\bar{W}_i^{k+1}$ 分别表示向量 $\bar{W}^k$ 和 $\bar{W}^{k+1}$ 的第 i 个分量；

(5) 计算判断矩阵 A 的最大特征根。

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \bar{W}_i^{k+1} / n \bar{W}_i^k \quad (3-10)$$

二、方根法

方根法属于一次性算法，设 A 为 n 阶判断矩阵，则方根法的计算步骤如下：

(1) 计算判断矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 每行元素的乘积 M_i 为

$$M_i = \prod_{j=1}^n a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-11)$$

(2) 计算 M_i 的 n 次方根为

$$\bar{W}_i = \sqrt[n]{M_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-12)$$

(3) 对向量 $\bar{W} = [\bar{W}_1 \ \bar{W}_2 \ \dots \ \bar{W}_n]^T$ 正规化如下：

$$W_i = \bar{W}_i / \sum_{j=1}^n \bar{W}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-13)$$

则 $W = [W_1 \ W_2 \ \dots \ W_n]^T$ 即为所求 A 的最大矩阵特征值的特征向量。

(4) 计算判断矩阵的最大特征根为

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{(AW)_i}{nW_i} \quad (3-14)$$

其中, $(AW)_i$ 是 AW 的第 i 个分量。

[例 3-8] 某 AHP 模型中, 因素 A 层所对应 B 层因子的判断矩阵 A 如下, 用方根法计算 A 的最大特征根及其对应的特征向量。

A—B	B_1	B_2	B_3
B_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
B_2	5	1	3
B_3	3	$\frac{1}{3}$	1

具体计算步骤如下：

(1) 根据式 (3-11) 计算判断矩阵每一行元素的乘积如下：

$$M_1 = 1 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15} = 0.067$$

$$M_2 = 5 \times 1 \times 3 = 15$$

$$M_3 = 3 \times \frac{1}{3} \times 1 = 1$$

(2) 依照式 (3-12) 计算 M_i 的 n 次方根 W_i 如下：

$$\overline{W}_1 = \sqrt[3]{M_1} = \sqrt[3]{0.067} = 0.405$$

$$\overline{W}_2 = \sqrt[3]{M_2} = \sqrt[3]{15} = 2.466$$

$$\overline{W}_3 = \sqrt[3]{M_3} = \sqrt[3]{1} = 1$$

(3) 根据式 (3-13) 对向量

$$\overline{W} = [\overline{W}_1 \ \overline{W}_2 \ \overline{W}_3]^T = [0.405 \ 2.466 \ 1]^T$$

正规化计算如下, 因为

$$\sum_{j=1}^3 \overline{W}_j = 0.405 + 2.466 + 1 = 3.871$$

所以

$$W_1 = \overline{W}_1 / \sum_{j=1}^3 \overline{W}_j = 0.405 / 3.871 = 0.105$$

$$W_2 = \overline{W}_2 / \sum_{j=1}^3 \overline{W}_j = 2.466 / 3.871 = 0.637$$

$$W_3 = \overline{W}_3 / \sum_{j=1}^3 \overline{W}_j = 1 / 3.871 = 0.258$$

则所求特征向量为 $W = [0.105 \ 0.637 \ 0.258]^T$

(4) 按式 (3-14) 计算判断矩阵的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 如下:

因为

$$AW = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.105 \\ 0.637 \\ 0.258 \end{bmatrix}$$

其中

$$(AW)_1 = 1 \times 0.105 + \frac{1}{5} \times 0.637 + \frac{1}{3} \times 0.258 = 0.318$$

$$(AW)_2 = 5 \times 0.105 + 1 \times 0.637 + 3 \times 0.258 = 1.936$$

$$(AW)_3 = 3 \times 0.105 + \frac{1}{3} \times 0.637 + 1 \times 0.258 = 0.785$$

于是判断矩阵 A 的最大特征根为

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \sum_{i=1}^3 \frac{(AW)_i}{nW_i} = \frac{(AW)_1}{3W_1} + \frac{(AW)_2}{3W_2} + \frac{(AW)_3}{3W_3} \\ &= \frac{0.318}{3 \times 0.105} + \frac{1.936}{3 \times 0.637} + \frac{0.785}{3 \times 0.258} = 3.037\end{aligned}$$

三、和积法

和积法也是一次性的计算方法，其算法如下：

(1) 将判断矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 每一列正规化为

$$\bar{b}_{ij} = a_{ij} / \sum_{k=1}^n a_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3-15)$$

(2) 每一列经正规化后的判断矩阵按行相加有

$$\bar{W}_i = \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-16)$$

(3) 对向量 $\bar{W} = [\bar{W}_1 \ \bar{W}_2 \ \dots \ \bar{W}_n]^T$ 正规化为

$$W_i = \bar{W}_i / \sum_{j=1}^n \bar{W}_j \quad (3-17)$$

那么 $W = [W_1 \ W_2 \ \dots \ W_n]^T$ 即为所求判断矩阵 A 的特征向量。

(4) 计算 A 的最大特征根为

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{(AW)_i}{nW_i} \quad (3-18)$$

其中, $(AW)_i$ 是 AW 的第 i 个分量。

[例 3-9] 用和积法计算 [例 3-8] 所给出的判断矩阵 A 的最大特征根及其对应的特征向量。

具体计算步骤如下：

(1) 将判断矩阵 A 每一列正规化如下：

第一列分量正规化，因为

$$\sum_{k=1}^3 b_{k1} = 1 + 5 + 3 = 9$$

所以，根据式 (3-15) 有

$$\bar{b}_{11} = b_{11} / \sum_{k=1}^3 b_{k1} = \frac{1}{9} = 0.111$$

$$\bar{b}_{21} = b_{21} / \sum_{k=1}^3 b_{k1} = \frac{5}{9} = 0.556$$

$$\bar{b}_{31} = b_{31} / \sum_{k=1}^3 b_{k1} = \frac{3}{9} = 0.333$$

同理，第二列有

$$\sum_{k=1}^3 b_{k2} = \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{3} = 1.533$$

$$\bar{b}_{12} = b_{12} / \sum_{k=1}^3 b_{k2} = \frac{0.2}{1.533} = 0.130$$

$$\bar{b}_{22} = b_{22} / \sum_{k=1}^3 b_{k2} = \frac{1}{1.533} = 0.652$$

$$\bar{b}_{32} = b_{32} / \sum_{k=1}^3 b_{k2} = \frac{0.333}{1.533} = 0.217$$

第三列正规化为

$$\sum_{k=1}^3 b_{k3} = \frac{1}{3} + 3 + 1 = 4.333$$

$$\bar{b}_{13} = b_{13} / \sum_{k=1}^3 b_{k3} = \frac{0.333}{4.333} = 0.077$$

$$\bar{b}_{23} = b_{23} / \sum_{k=1}^3 b_{k3} = \frac{3}{4.333} = 0.692$$

$$\bar{b}_{33} = b_{33} / \sum_{k=1}^3 b_{k3} = \frac{1}{4.333} = 0.231$$

(2) 正规化后的判断矩阵 $\bar{A}$ 按行相加。因为按列正规化后的判断矩阵为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.111 & 0.130 & 0.077 \\ 0.556 & 0.652 & 0.692 \\ 0.333 & 0.217 & 0.231 \end{bmatrix}$$

所以，根据式 (3 - 16) 计算有

$$\bar{W}_1 = \sum_{j=1}^3 \bar{b}_{1j} = 0.111 + 0.130 + 0.077 = 0.317$$

$$\bar{W}_2 = \sum_{j=1}^3 \bar{b}_{2j} = 0.556 + 0.652 + 0.692 = 1.900$$

$$\bar{W}_3 = \sum_{j=1}^3 \bar{b}_{3j} = 0.333 + 0.217 + 0.231 = 0.781$$

(3) 将向量 $\bar{W} = [0.317 \quad 1.900 \quad 0.781]^T$ 正规化，因为

$$\sum_{j=1}^3 \bar{W}_j = 0.317 + 1.900 + 0.781 = 2.998$$

所以，根据式 (3 - 17) 计算，可得

$$W_1 = \bar{W}_1 / \sum_{k=1}^3 \bar{W}_k = \frac{0.317}{2.998} = 0.106$$

$$W_2 = \bar{W}_2 / \sum_{k=1}^3 \bar{W}_k = \frac{1.900}{2.998} = 0.634$$

$$W_3 = \bar{W}_3 / \sum_{k=1}^3 \bar{W}_k = \frac{0.781}{2.998} = 0.261$$

则所求判断矩阵 B_2 的特征向量为

$$W = [0.106 \quad 0.634 \quad 0.261]^T$$

(4) 计算判断矩阵 A 的最大特征根如下，因为

$$AW = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.106 \\ 0.634 \\ 0.261 \end{bmatrix}$$

所以有

$$(AW)_1 = 1 \times 0.106 + \frac{1}{5} \times 0.634 + \frac{1}{3} \times 0.261 = 0.320$$

$$(AW)_2 = 5 \times 0.106 + 1 \times 0.634 + 3 \times 0.261 = 1.941$$

$$(AW)_3 = 3 \times 0.106 + \frac{1}{3} \times 0.634 + 1 \times 0.261 = 0.785$$

则根据式 (3 - 18) 有

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \sum_{i=1}^3 \frac{(AW)_i}{nW_i} = \frac{(AW)_1}{3W_1} + \frac{(AW)_2}{3W_2} + \frac{(AW)_3}{3W_3} \\ &= \frac{0.320}{3 \times 0.106} + \frac{1.941}{3 \times 0.634} + \frac{0.785}{3 \times 0.261} = 3.036\end{aligned}$$

四、实例计算

[例 3 - 10] (续例 3 - 6) 层次分析结构模型, 如图 3 - 2 所示, 各种因素两两进行判断比较, 构造判断矩阵。现假定根据某厂情况构造的数值判断矩阵如下。

(1) 构造目标层对应于准则层 A—C 因素的判断矩阵。

相对于合理使用企业利润促进企业发展的总目标, 比较各准则之间的相对重要性, 构造 A—C 的判断矩阵 A 如下:

A—C	C ₁	C ₂	C ₃
C ₁	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
C ₂	5	1	3
C ₃	3	$\frac{1}{3}$	1

(2) 构造准则层对应于方案层 C—P 的判断矩阵。

第一, 相对于调动职工劳动积极性准则, 根据各种使用留成利润方案措施之间相对重要性比较, 作出 C₁—P 的判断矩阵 C₁ 如下:

C_1-P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	1	2	3	4	7
P_2	$\frac{1}{3}$	1	3	2	5
P_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	1
P_4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	1	3
P_5	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

第二，相对于提高生产技术水平准则，构造各种使用留成利润措施方案之间相对重要性比较，作出 C_2-P 的判断矩阵 C_2 如下：

C_2-P	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
P_3	7	1	5	3
P_4	3	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$
P_5	5	$\frac{1}{3}$	3	1

第三，相对于改善职工物质及文化生活准则，构造出各种使用企业留成利润措施方案相对重要性比较，作出 C_3-P 的判断矩阵 C_3 如下：

C_3-P	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	1	3	3
P_2	1	1	3	3
P_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1
P_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1

(3) 计算各判断矩阵最大特征根和所对应的特征向量或权重向量，并计算一致性检验结果。

第一，对于判断矩阵 A ， $\lambda_{\max} = 3.038$ ，则

$$W_A = \begin{bmatrix} 0.105 \\ 0.637 \\ 0.258 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} CI = 0.019 \\ RI = 0.580 \\ CR = 0.033 \end{array}$$

第二，对于判断矩阵 C_1 ， $\lambda_{\max} = 5.126$ ，则

$$W_{c_1} = \begin{bmatrix} 0.491 \\ 0.232 \\ 0.092 \\ 0.138 \\ 0.046 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (CI)_1 = 0.032 \\ (RI)_1 = 1.120 \\ CR = 0.028 \end{array}$$

第三，对于判断矩阵 C_2 ， $\lambda_{\max} = 4.117$ ，则

$$W_{c_2} = \begin{bmatrix} 0.055 \\ 0.564 \\ 0.118 \\ 0.263 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (CI)_2 = 0.039 \\ (RI)_2 = 0.900 \\ CR = 0.43 \end{array}$$

第四，对于判断矩阵 C_3 ， $\lambda_{\max} = 4.000$ ，则

$$W_{c_3} = \begin{bmatrix} 0.406 \\ 0.406 \\ 0.094 \\ 0.094 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (CI)_3 = 0 \\ (RI)_3 = 0 \\ CR = 0 \end{array}$$

(4) 层次总排序及其一致性检验。

根据上述各判断矩阵所计算的各因素权重结果，将各使用企业利润方案相对于合理使用企业利润，促进企业新发展总目标的层次总排序计算如下表 3 - 4 所示。

表 3 - 4 层次总排序表

层次 P \ 层次 C	c ₁	c ₂	c ₃	层次 P 总排序 W
P ₁	0.105	0.637	0.258	0.157
P ₂	0.491	0	0.406	0.164
P ₃	0.232	0.055	0.406	0.393
P ₄	0.092	0.564	0.094	0.113
P ₅	0.138	0.118	0.094	0.172

层次总排序一致性检验如下：

$$CI = \sum_{i=1}^3 c_i (CI)_i$$

$$= 0.105 \times 0.032 + 0.639 \times 0.039 + 0.258 \times 0 = 0.028$$

$$RI = \sum_{i=1}^3 c_i (RI)_i$$

$$= 0.105 \times 1.12 + 0.637 \times 0.9 + 0.258 \times 0.9 = 0.923$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.023}{0.923} = 0.025$$

(5) 结论。

对于该厂合理使用企业留成利润，促进企业新发展，更好为四化建设作贡献这个目标，所考虑的五种方案的相对优先排序为，开办职工业余技术学校 P₃ 为 0.393；引进新技术设备，进行企业技术改造 P₅ 为 0.172；扩建职工宿舍、食堂、托儿所等福利措施 P₂ 为 0.164；作为奖金发给职工 P₁ 为 0.157；建图书馆、俱乐部和文体工队 P₄ 为 0.113。厂领导和职代会可根据上述分析结果，决定各种考虑的实施先后次序，或决定分配使用企业留成利润的比例。

【例 3 - 11】（续例 3 - 6）关于合理分配县级财政支出的讨论。在确定其 AHP 层次结构模型的基础上，根据某财税部门提供的资料拟定判断矩阵，从必须力求做到财政收支平衡的要求出发，财政收入数额即为财政支出数额的权限值。根据各因素的重要性关

系以及考虑到某县历年来财政支出的分配比例，以满足扩大再生产、公共消费以及行政管理的需要为准则，构造判断矩阵，进行计算，所得判断矩阵及相应的计算结果如下。

(1) 构造判断矩阵，并对其一致性检验。

判断矩阵 A

A	m_1	m_2	m_3
m_1	1	$\frac{1}{7}$	1
m_2	7	1	4
m_3	1	$\frac{1}{4}$	1

$$CI = 0.0175$$

判断矩阵 m_1

m_1	P_1	P_2
P_1	1	$\frac{1}{4}$
P_2	4	1

$$CI = 0$$

判断矩阵 m_2

m_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	1	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{8}$
P_4	9	1	8	3
P_5	1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{6}$
P_6	8	$\frac{1}{3}$	6	1

$$CI = 0.03634$$

判断矩阵 m_3

m_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_6
P_1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$
P_2	6	1	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
P_3	2	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
P_4	9	5	5	1	3
P_6	7	4	5	$\frac{1}{3}$	1

$$CI = 0.0797$$

(2) 计算各判断阵的权重向量，并列出层次总排序，如表 3 - 5 所示，并进行总排序的一致性检验。

$$CR = \frac{\sum_{j=1}^3 m_j(CI)_j}{\sum_{j=1}^3 m_j(RI)_j} = 0.0467 < 0.10$$

由上可见，各判断矩阵和层次总排列都有满意的一致性。所提出的七种财政分配项目的优先次序或分配权重次序为表 3 - 6 列示。

表 3 - 5 合理分配县级财政支出层次总排序表

m	m_1	m_2	m_3	权重 W	$W \times 0.8496$
P_1	0.1248	0.7248	0.1504	0.0301	0.0256
P_2	0.2000		0.0342	0.0301	0.0256
P_3	0.8000		0.1295	0.1193	0.1014
P_4		0.0514	0.0617	0.0465	0.0395
P_5		0.5878	0.4901	0.4998	0.4246
P_6		0.0565		0.0410	0.0346
		0.3043	0.2845	0.2633	0.2237

表 3-6 某县财政支出项目权重排序及分配比例表

次序	1	2	3	4	5	6	7
项目	P_4	P_6	m_3	P_2	P_3	P_5	P_1
占财政支出 (%)	42.46	22.37	15.04	10.14	3.95	3.48	2.56

第四节 环保分析实例

一、引言

对于一个发展中国家，由于人口的不断增长和经济的迅速发展，使人们赖以生存的水资源——河流——受到来自工业污水、生活废水的严重污染和水土流失严重，因此备受社会各界的关注。另一方面，又由于综合治理河流污染的具体投入项目多，而影响河流水质的因素则更多，这使有关部门对于如何充分有效地利用有限的资金，综合治理河流污染问题的分析、研究和决策，变得相当困难。显然，这样复杂的决策问题，属于多因素、多层次、多目标系统分析的范畴，于是，这里利用 AHP 方法，结合系统分析手段，建立 AHP 结构模型，再通过专家调查法，有效统计各界对各影响决策分析因素的主观评判，确定对大类投入项目的投资比例。

二、建立 AHP 结构模型

1. 确定总目标

以“合理分配综合治理河流污染投资”为目标层 I。

2. 确定实施方案

根据综合治理河水污染投资项目的细分，确定五个投资项目作为实施方案层 P，具体项目如下：

(1) 建立污水处理厂 P_1 ：简称 TWWS，包括增建、改建和扩

建等，以及 TWWS 的辅助设施工程，如地下管道传输污水工程等。

(2) TWWS 的运行费用开支 P_2 。

(3) 管理费用开支 P_3 ：主要包括行政监管、管理设备、组织建设和植树造林等。

(4) 科技研究与开发 P_4 ：包括管理与处理污染技术的研究与开发、建设实验室等。

(5) 排水工程 P_5 ：包括疏通和清理河道、非污染源的雨水管道工程设施等。

3. 建立准则层 M - N - O

由于存在诸多影响判断 P 层各投资项目的因素，所以把准则层再细分为三个层次。

(1) 上层 M 的经济、社会和环境三大因素。

(2) 中层 N 按上层 M 的因素细分为 12 个因素。

(3) 下层 O 则按中层因素，并结合 P 层投资项目，再进一步细分得到，如图 3 - 6 所示。

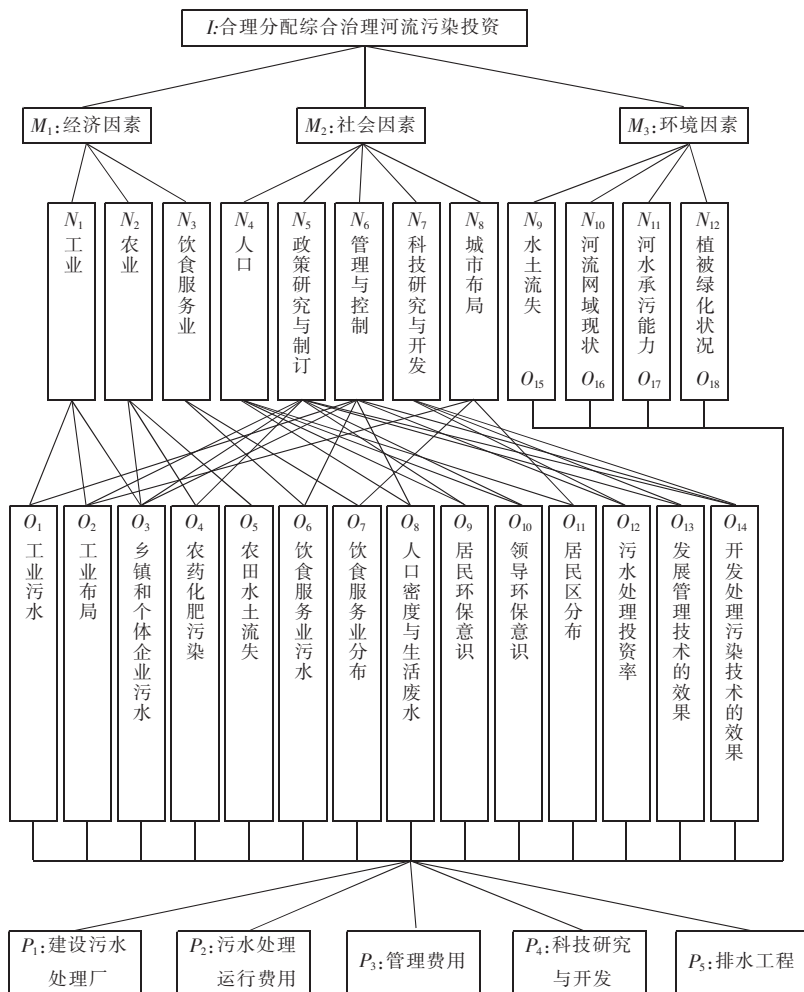


图 3 - 6 合理分配综合治理河流污染投资的 AHP 结构模型

三、构建判断矩阵并计算权重

如何构建判断矩阵，是利用 AHP 方法进行合理分配河流污染投资研究的关键之一，因为它直接影响到 AHP 最终的计算结果。于是，这里先采用专家调查法，这些专家主要包括大学院校、科研机构、环保机构和一线工程的专家等，在这个过程中，需要作好简易执行判断的调查准备工作，这样能让各位有关专家有效配合 AHP 重要性的判断。然后经过统计方法，确定各个层次因素相关的判断矩阵，并进行相关计算如下。

注：由于各判断矩阵均为对称阵，所以这里判断矩阵的下三角元素从略。

1. I - M 层次

I - M	M_1	M_2	M_3	
M_1	1	1	2	$M_1 = 0.4$
M_2		1	2	$M_2 = 0.4$
M_3			1	$M_3 = 0.2$
				$CI = 0$

2. M - N 层次

(1) 构建判断矩阵如下：

$M_1 - N$	N_1	N_2	N_3
N_1	1	2	4
N_2		1	2
N_3			1

$M_2 - N$	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
N_4	1	3	2	3	4
N_5		1	$\frac{1}{2}$	1	2
N_6			1	2	3
N_7				1	2
N_8					1

$M_3 - N$	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}
N_9	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	1
N_{10}		1	2	8
N_{11}			1	6
N_{12}				1

(2) 根据上述判断矩阵计算权重值和一致性结果，并列于表 3 - 7。

表 3 - 7 M - N 层总排序与检验

$\begin{matrix} & M \\ N \end{matrix}$	M_1	M_2	M_3	权重
N_1	0.4000	0.4000	0.2000	0.2285
N_2	0.5714			0.1143
N_3	0.2857			0.0572
N_4	0.1429	0.4031		0.1612
N_5		0.1367		0.0547
N_6		0.2444		0.0978
N_7		0.1367		0.0547
N_8		0.0791		0.0316
N_9			0.0612	0.0122
N_{10}			0.5445	0.1090
N_{11}			0.3331	0.0666
N_{12}			0.0612	0.0122
CI	0	0.0083	0.0069	CR = 0.005

3. N - O 层次

(1) 构建判断矩阵如下：

$N_1 - O$	O_1	O_2	O_3
O_1	1	7	2
O_2		1	$\frac{1}{5}$
O_3			1

$N_2 - O$	O_3	O_4	O_5
O_3	1	7	4
O_4		1	$\frac{1}{2}$
O_5			1

$N_3 - O$	O_6	O_7
O_6	1	9
O_7		1

$N_4 - O$	O_8	O_9	O_{10}	O_{11}
O_8	1	5	3	9
O_9		1	$\frac{1}{2}$	2
O_{10}			1	5
O_{11}				1

N ₅ - O	O ₂	O ₃	O ₄	O ₉	O ₁₀	O ₁₃	O ₁₄
O ₂	1	1	5	4	3	2	2
O ₃		1	5	4	3	2	2
O ₄			1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
O ₉				1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
O ₁₀					1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
O ₁₃						1	1
O ₁₄							1

N ₆ - O	O ₁	O ₃	O ₆	O ₈	O ₁₂	O ₁₃	O ₁₄
O ₁	1	1	2	$\frac{1}{2}$	3	3	3
O ₃		1	2	$\frac{1}{2}$	3	3	3
O ₆			1	$\frac{1}{4}$	2	2	2
O ₈				1	5	5	5
O ₁₂					1	1	1
O ₁₃						1	1
O ₁₄							1

N ₇ - O	O ₁₂	O ₁₃	O ₁₄
O ₁₂	1	2	$\frac{1}{3}$
O ₁₃		1	$\frac{1}{2}$
O ₁₄			1

$N_8 - O$	O_2	O_7	O_{11}
O_2	1	5	2
O_7		1	$\frac{1}{3}$
O_{11}			1

(2) 根据上述判断矩阵计算权重值和一致性结果，并列于表3 - 8。

表 3 - 8 N - O 层总排序与检验

$N \backslash O$	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	权重
O_1	0.2285	0.1143	0.0572	0.1612	0.0547	0.0978	0.0547	0.0316	0.1710
O_2	0.6694					0.1846			0.0526
O_3	0.0880				0.2589			0.5815	0.1258
O_4	0.2426	0.3333			0.2589	0.1846			0.0097
O_5		0.0611			0.0493				0.0692
O_6		0.6056							0.0618
O_7			0.9000			0.1053			0.0092
O_8			0.1000					0.1095	0.1291
O_9				0.5928		0.3434			0.0215
O_{10}				0.1155	0.0530				0.0427
O_{11}				0.2352	0.0867				0.0169
O_{12}				0.0565				0.3090	0.0271
O_{13}						0.0607	0.3874		0.0232
O_{14}					0.1466	0.0607	0.1692		0.0382
CI	0.0010	0.0046	0	0.0074	0.0067	0.0046	0.0092	0.0019	$CR = 0.002$

4. O - P 层次

构建 O - P 层次的各判断矩阵后，将权重与一致性检验结果列于表 3 - 9。

表 3 - 9 O - P 层总排序与检验

P O		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	CI
O ₁	0.1710	0.4159	0.2356	0.2356	0.0531	0.0597	0.0054
O ₂	0.0526	0.7986		0.0965	0.1049		0.0035
O ₃	0.1258	0.5074	0.1876	0.2135	0.0353	0.0562	0.0357
O ₄	0.0097			0.7396	0.0938	0.1666	0.0071
O ₅	0.0692			0.7928	0.0760	0.1312	0.0109
O ₆	0.0618	0.5393	0.2888	0.0562	0.0466	0.0691	0.0289
O ₇	0.0092	0.0954		0.2772	0.4673	0.1601	0.0103
O ₈	0.1291	0.4888	0.3421	0.0402	0.0402	0.0887	0.0375
O ₉	0.0215		0.5	0.5			0
O ₁₀	0.0427	0.2361	0.1352	0.5343	0.0498	0.0446	0.0221
O ₁₁	0.0189	0.5362		0.3552	0.560	0.0526	0.0142
O ₁₂	0.0271	0.2737	0.2737	0.2617	0.0600	0.1309	0.0020
O ₁₃	0.0232	0.3936		0.3936	0.1375	0.0753	0.0014
O ₁₄	0.0382	0.6694			0.2426	0.0880	0.0035
O ₁₅	0.0122			0.2	0.2	0.6	0
O ₁₆	0.1090	0.4139	0.2570	0.2570	0.0361	0.0360	0.0133
O ₁₇	0.0666	0.4112	0.2538	0.2538	0.0406	0.0406	0.0216
O ₁₈	0.0122	0.5	0.5				0
权重		0.4152	0.2009	0	0.0074	0.0067	CR = 0.018

四、计算结果分析

1. 具体准则 O 层因素分析

为便于分析，现将 O 层因素，按前十名权重值排序结果列于表 3 - 10。

表 3 - 10 权重值排前十名的 O 层因素

次序	1	2	3	4	5
因素	O ₁	O ₈	O ₃	O ₁₆	O ₅
权值 (%)	0.1710	0.1291	0.1258	0.1090	0.0692
次序	6	7	8	9	10
因素	O ₁₇	O ₆	O ₂	O ₁₀	O ₁₄
权值 (%)	0.0666	0.0618	0.0526	0.0427	0.0382

从表 3 - 10 的排序结果可见，工业污水的权重值排在第一位，城市生活废水排在第二位，乡镇企业污水及河水污染现状分列第三和第四位；排在前四位因素的权重值远大于其他 14 个因素的权重值，并且其权重值合计为 0.5349。这样的结果，与我国许多城市的状况是相吻合的。显然，工业污水和生活废水对河流的排放，是导致许多城市河水受严重污染这一现状的主要原因。于是，应加强对河流主要污染源的管理与控制，同时，也要提高领导层的环境保护意识。另一方面，由于乡镇及个体企业的高速发展，而且分散于城市郊区内外，这些企业污水排放与控制问题也显得较为突出。

2. 措施层 P 的投资项目分析

将所计算的 P 层因素排序结果列于表 3 - 11。

表 3 - 11 各投资项目的权重排序结果

次序	1	2	3	4	5
实施项目	P ₁	P ₃	P ₂	P ₅	P ₄
权重 (%)	41.52	24.93	20.09	7.07	6.39

从表 3 - 11 的计算结果可知，建设污水处理厂占总投资的 41.52%，列第一位，管理费用的支出占总投资的 24.93%，污水处理运行费用占 20.09%。前三位合计占总投资的 86.54%，而排水工程与技术研发分列第四和第五位。

第四章 灰色系统理论及其应用 (I)

——灰色关联度分析方法

一开始，许多事情总是朦朦胧胧的，可后来就不这样了，因为我们用智慧去认识它们。

第一节 灰色系统概述

我国控制论专家邓聚龙教授于 20 世纪 80 年代初创立并发展了灰色系统理论，该理论把部分信息已知而部分信息未知的系统称为灰色系统，并把一般系统论、信息论和控制论的观点和方法延伸到社会、经济、生态等抽象系统，结合运用数学方法，发展了一套解决信息不完全系统的理论与方法。由于成果显著而备受国内外学术界的瞩目。迄今为止，灰色系统方法不仅广泛应用于各行业、各领域，而且已渗透到自然科学和社会科学的许多领域，如灰色系统决策、灰色系统控制、灰色规划和灰色统计等等。

一、基本概念

1. 灰色信息

在控制论中，对于一个信息系统而言，常把完全信息或已知信息称为“白色信息”，而把完全缺乏信息或未知信息称为“黑色信息”。于是，介于这两者之间，我们把不充分、不完全的信息称为“灰色信息”。

2. 灰色系统

所谓灰色系统 (Grey System), 简称 G 系统, 是相对于一定的认识层面, 系统内部的信息部分已知, 而部分未知, 即信息不完全。这是相对于白色系统和黑色系统而言的。

类似这种说法, 在黑箱理论中, 控制论专家艾什比把对其有部分了解的黑箱系统, 即不是一个完全的黑箱, 称为“部分可察黑箱”, 后来称之为灰箱。关于灰箱理论, 生物学家 Erol Bassar 这样解释: “系统科学者, 尤其是生物系统研究者, 一般是与灰箱——得到一定程度阐明的黑箱——而不是与完全的黑箱打交道。”

例如, 在海洋生态与海洋环境中非常关注的“赤潮”现象, 所谓赤潮是海洋浮游植物, 简称藻类, 在一定条件的环境下, 忽然形成爆发式增殖后大量死亡, 在分解过程中消耗大量的溶解氧, 致使流行区水体出现缺氧状态, 并在一般情况下呈现红色, 从而形成所谓的赤潮。其后果是不仅使海水鱼类窒息死亡, 并且造成沿海养殖业的巨大损失, 更破坏了水体的生态平衡。

迄今为止, 赤潮现象系统中输出结果的信息是明确的, 而输入的原因信息却是不明确的, 因为虽然专家们能够达成一个共识, 认为赤潮与其所在的环境中理化因素有关。这些物理和化学的因素包括: 水流、温度 (T)、浊度、浮游动物种群密度、盐度 (S)、溶解氧 (DO)、酸碱度 (pH)、磷酸盐 (PO_4)、硝酸盐 (NO_3)、亚硝酸盐 (NO_2)、硅 (Si)、铁 (Fe)、锰 (Mn)、叶绿素和维生素等等。但在赤潮机理中, 尚无法确定是哪些因素或是哪些因素的相互作用致使赤潮的发生。于是, 这显然构成一个灰色系统。

3. 灰色系统分类

(1) 非本征性系统: 具有物理原型的系统称为非本征性系统, 如电路系统、交通系统、人体系统等。

(2) 本征性系统: 没有物理原型的系统称为本征性系统, 如社会系统、经济系统、生态系统和环境系统等。

一般来说, 非本征性系统中灰色系统较少, 而本征性系统中的

灰色系统较多，于是，在灰色理论中，灰色系统也相应地分为非本征性灰系统和本征性灰系统。

二、灰色系统理论的思想

由于大系统往往是信息不完全系统，这类系统没有物理原型，其运行机制、作用原理、因素之间的关系、结构状况等均不明确。所以，灰色系统理论试图通过灰色系统关联分析，提取建立数学模型的所需变量，实现对离散数据建立微分方程的动态模型，即灰色模型，以期达到对灰色系统进行定量分析的目的，使灰色系统的白度增加，即增加对灰色系统的认识，了解其变化规律，最后从中提取所需要的信息，再用于相关的预测、决策与控制。

第二节 灰色关联分析

一、相关概念

1. 系统建模

在系统分析中，理想的办法是利用定量分析法建立适当的数学模型，抽象地表达系统的运行特性，达到研究系统结构和功能的目的。对于本征性系统，在建立系统的数学模型之前，通常需要对可观测到的因果变量进行相关性分析，即关联程度分析，因为有许多可观测到灰因子或者说是灰因素往往现实中不能全部作为建立数学模型的变量，于是，通过关联程度分析，可选择部分因子做建模变量，实际上是灰因子的白化处理办法。

例如，通过测量观察中国南海水域发现，尽管海洋水体中有多达 200 多种浮游植物的存在，但能形成赤潮的藻种也不过 8 种，这些赤潮生物会与诸多的海水理化因子中哪些因子具有关联性呢？

又如，大众关心的上市公司股票市值与投资入购买欲望息息相

关，这种购买欲望与上市公司状况和市场经济环境的诸多因素有关，这些诸多因素按会计年度可观测的数据样本是非常有限的，如何测量众多因素与股票市值的关联度，使投资人能够注重参考重要的因素进行投资分析。

过去常用的办法是利用数理统计方法，但要求样本较大，且符合典型的概率分布，有一定的局限性。于是，灰色系统理论建立了所谓灰色关联分析方法：通过一定的数据处理，在随机的因素序列间，找出它们的关联性，找出主要特性和主要影响因素。

2. 灰色关联分析法

灰关联是指事物之间不确定性关联，或系统因子与主行为之间的不确定性关联。而灰关联分析是以行为因子序列的几何接近度，分析并确定因子间的影响程度或因子对主行为的贡献测度而进行的一种分析方法。

我们先直观说明上述灰关联的含义，如有下列四个因素的比较时间数据序列，并根据其序列数据作图，如图 4 - 1 所示。

$$X_0(t) = \{x_0(1) \ x_0(2) \ \dots \ x_0(n)\}$$

$$X_1(t) = \{x_1(1) \ x_1(2) \ \dots \ x_1(n)\}$$

$$X_2(t) = \{x_2(1) \ x_2(2) \ \dots \ x_2(n)\}$$

$$X_3(t) = \{x_3(1) \ x_3(2) \ \dots \ x_3(n)\}$$

其中， $X_0(t)$ 是主因素或参考因素， $X_1(t)$ 、 $X_2(t)$ 和 $X_3(t)$ 是比较因素或比较因子。

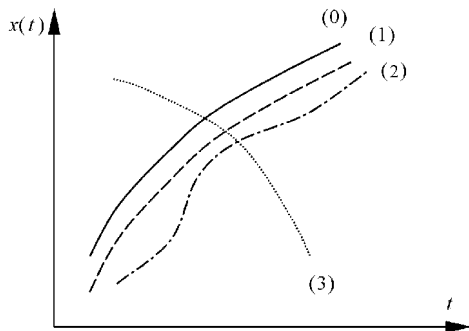


图 4-1 四个因素序列比较图

可见曲线 (0) 与 (1) 比较相近, 即几何形状最接近, 在灰关联意义下, 认为 $X_0(t)$ 和 $X_1(t)$ 灰关联度最大, 将其灰关联度记作 γ_1 ; 曲线 (0) 与 (2) 差异较大, 就认为相应的 γ_2 较小; 而曲线 (0) 与 (3) 差异最大, 则认为 γ_3 最小。若将灰关联度排序, 则有 $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$ 。这种因素分析, 实际上是一种曲线间几何形状的分析比较, 即几何形状越接近, 那么灰关联程度就越大, 反之则小。下面通过灰关联法确定灰关联测度, 从而明确用于衡量因素间关联程度大小的量化方法。

二、灰关联度

1. 灰关联系数

设主因素时间数列和比较因素时间数列分别为

$$X_0(t) = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\}$$

$$X_i(t) = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}$$

其中, t 既可以是时间序列, 也可以是指标序列, 也可以是空间分布序列。记

$$\begin{aligned}\Delta_i(t) &= |x_0(t) - x_i(t)| \\ \Delta_{\min}^{(i)} &= \min_{i \neq j} |x_0(t) - x_i(t)| \\ \Delta_{\max}^{(i)} &= \max_{i \neq j} |x_0(t) - x_i(t)| \\ t &= 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

定义 1 $X_0(t)$ 和 $X_i(t)$ 的灰关联系数如下：

$$\zeta_i(t) = \frac{\Delta_{\min}^{(i)} + \rho \Delta_{\max}^{(i)}}{\Delta_i(t) + \rho \Delta_{\max}^{(i)}} \quad (4-1)$$

式中 $\zeta_i(t)$ 称为 $x_0(t)$ 对 $x_i(t)$ 在时间 t 的灰相关系数, $\rho \in [0, 1]$, 称为分辨系数。

注：灰关联系数满足

$$\frac{\rho}{1+\rho} \leq \zeta_i(t) \leq 1$$

因为, 当 $\Delta_i(t) = \Delta_{\min}^{(i)}$ 时, 灰关联系数 $\zeta_i(t)$ 的上界值为 1。当 $\Delta_i(t) = \Delta_{\max}^{(i)}$ 时, 灰关联系数 $\zeta_i(t)$ 达到最小下界值如下：

$$\begin{aligned}\zeta_i(t) &= \frac{\Delta_{\min}^{(i)} + \rho \Delta_{\max}^{(i)}}{\Delta_i(t) + \rho \Delta_{\max}^{(i)}} = \frac{\Delta_{\min}^{(i)} + \rho \Delta_{\max}^{(i)}}{\Delta_{\max}^{(i)} + \rho \Delta_{\max}^{(i)}} \\ &= \frac{\Delta_{\min}^{(i)} / \Delta_{\max}^{(i)}}{1 + \rho} + \frac{\rho}{1 + \rho} = \frac{\Delta_{\min}^{(i)}}{\Delta_{\max}^{(i)}} \left[\frac{\rho}{1 + \rho} \right] + \left[\frac{\rho}{1 + \rho} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \rho} \left[1 + \frac{\Delta_{\min}^{(i)}}{\Delta_{\max}^{(i)}} \right]\end{aligned}$$

在实际中, 经过灰关联数据处理后, 通常会出现 $\Delta_{\min}^{(i)} = 0$ 的情形。可见 $\rho/(1+\rho)$ 是灰关联系数 $\zeta_i(t)$ 的可达下界值。

2. 灰关联度

由于灰关联系数仅表示各时刻数据间的灰关联程度, 为进一步对整个数据序列间进行比较, 即 $X_0(t)$ 和 $X_i(t)$ 的比较, 将取灰相关系数的均值作为集中化处理 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 间的整体相关程度, 于是, 作如下定义。

定义 2 设定 $x_0(t)$ 与 $x_i(t)$ 间相关程度的灰关联度为

$$\gamma_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \zeta_i(t) \quad (4-2)$$

注一：由于灰关联系数 $\zeta_i(t)$ 是时间的函数，若将各时刻 t 的关联函数 $\zeta_i(t)$ 点绘成曲线，如图 4-2 所示。

用 $\zeta_i(t)$ 表示 $x_0(t)$ 与自己比较所得的关联系数的话，显然 $\zeta_0(t) = 1$ ，那么灰关联度也可以定义为 $\zeta_i(t)$ 和 $\zeta_0(t)$ 分别与坐标所围成的面积 S_i 和 S_0 比，即 $\gamma = S_0/S_i$ 。但由于用这种方式定义的灰关联度计算比较烦琐，故通常不采用这个定义的算法计算灰关联度。引入该定义的目的是为了从几何意义上直观解释灰关联度的几何度量思路，灰关联度并非空间距离测度。

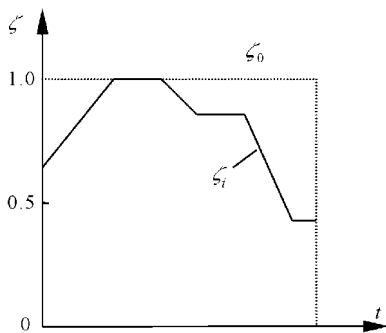


图 4-2 灰关联函数图

注二：灰关联度的性质

记灰关联度是一种关系 R ，由上述定义可见 R 具有下列性质：

- (1) 自反性：即 $x_i(t)Rx_i(t)$ ，且 $\zeta_{ii} = 1$ 。
- (2) 对称性：若 $x_i(t)Rx_j(t)$ ，则 $x_j(t)Rx_i(t)$ ，且 $\zeta_{ij} = \zeta_{ji} \in [0, 1]$
- (3) 传递性：若 $x_i(t)Rx_j(t)$ ， $x_j(t)Rx_k(t)$ ，则 $x_i(t)Rx_k(t)$ ，

且 $\zeta_{ij}, \zeta_{ik}, \zeta_{jk} > 0$ 。

[例 4 - 1] 根据 1988 年统计的发达国家企业研究与开发经费来源情况, 如下表 4 - 1 所示, 以美国为主因素, 比较其他发达国家的关联程度, 即用灰关联分析法分析其他发达国家与美国的相似程度。

表 4 - 1 发达国家企业研究与开发经费来源情况

		单位: %		
		1. 政府	2. 企业	3. 其他
美国	X_0	33.6	66.4	0
日本	X_1	1.6	98.0	0.4
西德	X_2	16.1	82.2	1.7
法国	X_3	23.5	69.6	6.9
英国	X_4	23.2	65.6	11.3
意大利	X_5	16.9	77.7	5.4

数据来源 Main Science and Technology Indicators, 1981 - 1987 OECD, 1988。

(1) 将计算关联系数的相关数据列于下表 4 - 2。

表 4 - 2 灰关联系数的相关数据表之一

	1	2	3	$\Delta_{\min}$	$\Delta_{\max}$
Δ_1	32.0	31.6	0.4	0.4	32.0
Δ_2	17.5	15.8	1.7	1.7	17.5
Δ_3	10.1	3.2	6.9	3.2	10.1
Δ_4	10.4	0.8	11.3	0.8	11.3
Δ_5	16.7	11.3	5.4	5.4	16.7

(2) 若分辨系数取 $\rho = 0.5$, 将计算关联系数的相关数据列示下表 4 - 3。

表 4 - 3 灰关联系数的相关数据表之二

i	$\varphi = \rho \Delta_{\max}^{(i)}$	$\rho \Delta_{\min}^{(i)} + \varphi$	$\Delta_i(1) + \varphi$	$\Delta_i(2) + \varphi$	$\Delta_i(3) + \varphi$
1	16.00	16.40	48.00	47.60	16.40
2	8.75	10.45	26.25	24.55	10.45
3	5.05	8.25	15.15	8.25	11.95
4	5.65	6.45	16.05	6.45	16.95
5	8.35	13.75	25.05	19.65	13.75

(3) 若分辨系数取 $\rho = 0.5$ ，将关联系数的计算值列示下表 4 - 4。

表 4 - 4 灰关联系数计算数值表

t	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
1	0.3417	0.3981	0.5446	0.4019	0.5489
2	0.3445	0.4257	1	1	0.6997
3	1	1	0.6904	0.3805	1
Σ	1.6862	1.8238	2.2350	1.7824	2.2486

(4) 将灰关联度的计算及其排序结果列于下表 4 - 5。

(5) 结论：经灰关联分析计算的关联度表明，意大利和法国的企业研究与开发费用的来源情形与美国是较为相近的。其次是西德、英国和日本。

表 4 - 5 关联度和排序表

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
计算值	0.5621	0.6079	0.7450	0.5941	0.7495
排序结果	5	3	2	4	1

3. 灰关联度的分辨率

从上述灰关联系数和灰关联度的定义可知，灰关联系数 ζ 的计

算值与其分辨系数 ρ 的取值有关，于是会影响到灰关联度 γ 的计算结果。因为

$$\frac{\rho}{1+\rho} \leq \zeta_i(t) \leq 1$$

所以

当 $\rho=1$ 时， $\zeta_i(t)=0.5$ ，即 $\zeta_i(t) \in [0.5, 1]$

当 $\rho=0.1$ 时， $\zeta_i(t)=0.09$ ，即 $\zeta_i(t) \in [0.09, 1]$

即当 ρ 的取值大， $\zeta_i(t)$ 值的范围就小；当 ρ 的取值小， $\zeta_i(t)$ 值的范围就大，从而影响灰关联系数的分辨率。

进一步，若设 $L_\zeta(\rho) = \rho/(1+\rho)$ $\rho \in (0, +\infty)$ ，为灰关联系数 ζ 的下界函数，其曲线图形参见图 4-3，是上界为 1 的递增函数。

对 $L_\zeta(\rho)$ 求导

$$\frac{dL_\zeta(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{(1+\rho)^2}$$

它的曲线图形如图 4-4 所示，是上界为 1 的递减函数。

所以，可以得出分辨系数具有以下特性：

(1) ρ 不仅可以调节灰关联系数 ζ 的大小，还可以控制 ζ 的变化范围。

(2) 当 $\rho \rightarrow +\infty$ 时，所有的 $\zeta \rightarrow 1$ ，即关联系数蜕化为一点，从而关联度也蜕化为一点。即无法进行灰关联分析。

(3) 当 $\rho \leq 0.5463$ 时，灰关联度的分辨率最好，即比较容易观察灰关联度分辨率的变化。

事实上，由于 $L_\zeta(\rho)$ 与 L_ζ 和 ρ 轴所围成的面积 S 是

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\rho)^2} d\rho = [\arctg \rho]_0^{+\infty} = 1$$

在任意一点 $\rho = \rho_0$ 时，其面积为

$$S = \int_0^{\rho_0} \frac{1}{(1 + \rho)^2} d\rho = [\arctg \rho_0]_0^+ = 1$$

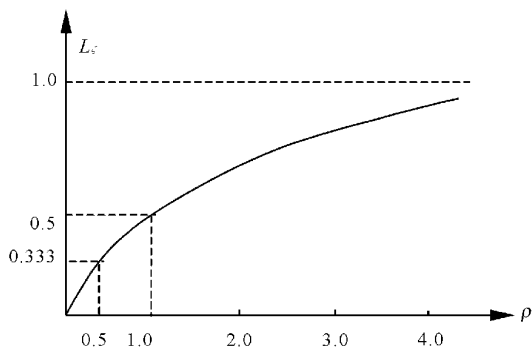


图 4 - 3 灰关联系数下界函数图

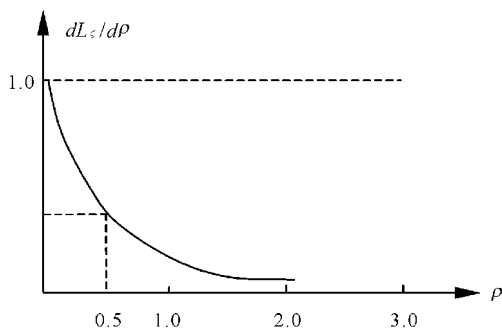


图 4 - 4 分辨率函数导数图

根据灰关联系数面积关联度的含义，取 $S/S_0 = 0.5$ 时，即界于 0 和 1 之间的中间值，去辨识灰关联度最理想。于是，满足 $S/S_0 = 0.5$ 的 $\rho_0 = 0.5463$ 。并且当 $\rho \leq 0.5463$ 时， $L_c(\rho)$ 的下降速度最快。所以 ρ 的取值范围在 $(0, 0.5)$ 去辨识灰关联度最好。

[例 4 - 2] 在区域经济分析中, 研究经济活力的一个重要指标是商业性的销售额, 也称为商业收入。由于投资是区域经济规模和成长的关键, 所以某地区从 19×1 — 19×5 年的商业收入 (X_0) 与固定资产总投资 (X_1)、工业投资额 (X_2)、农业投资额 (X_3)、商业投资额 (X_4) 和交通投资额 (X_5) 进行比较分析, 如表 4 - 6 所示。希望认识各项投资对本地商业的影响, 从而能够充分利用有限资源发展本地经济。

(1) 计算: 这里用灰关联分析法, 研究该地区各项投资对本地商业活力的贡献, 实质上就是通过关联度的计算和排序确定各投资活动对商业活动的影响力。下表 4 - 7 列示在分辨系数在不同取值时, 灰关联度的计算值和排序结果, 中间计算过程从略。

表 4 - 6 某地区商业收入和各项投资统计表

单位: 亿元

	19×1 年	19×2 年	19×3 年	19×4 年	19×5 年
X_0	11. 19	13. 28	16. 82	18. 90	22. 80
X_1	308. 58	316. 00	295. 00	346. 00	367. 00
X_2	195. 40	189. 90	187. 20	205. 00	222. 70
X_3	24. 60	21. 00	12. 20	15. 10	14. 57
X_4	20. 00	25. 60	23. 30	29. 20	30. 00
X_5	18. 89	19. 00	22. 30	23. 50	27. 65

表 4 - 7 ρ 不同取值下关联度计算值与排序表

ρ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
1	0. 794	0. 781	0. 694	0. 868	0. 853
0. 5	0. 680	0. 663	0. 567	0. 799	0. 772
0. 1	0. 405	0. 386	0. 327	0. 501	0. 437
排序	3	4	5	1	2

(2) 结论:

第一, ρ 不同取值不影响关联度值的排序结果。

第二, 在 ρ 不同取值下, 将相邻关联度的排序值的差异率计算并列于下表 4-8, 可见, ρ 较小时, 关联度的分辨效果明显。

第三, 从计算结果可见, 商业和交通的投入对商业活力的影响最大, 其次是固定资产和工业投资, 最后是农业的投入。显然商业的投资对商业的产出是有着直接的影响, 它对商业收入的灰关联度计算值排列第一位; 关联度列第二位的是交通投资, 显示交通在对商业的间接影响因素中起着最重要的作用, 说明商业活力扩大和持续增长交通是关键; 固定资产总投资和工业投资对商业销售的影响程度分列第三和第四位; 而农业投资对商业的影响力在上列诸因素中排列最后。于是, 可以看出, 灰关联分析的结果与实际是相吻合的。

表 4-8 关联度分辨率效果比较表

ρ	1	0.5	0.1
$(\gamma_4 - \gamma_5) / \gamma_4$	0.038	0.073	0.127
$(\gamma_5 - \gamma_1) / \gamma_5$	0.049	0.058	0.073
$(\gamma_1 - \gamma_2) / \gamma_1$	0.016	0.025	0.046
$(\gamma_2 - \gamma_3) / \gamma_2$	0.111	0.144	0.152

4. 原始数据标准化

由于计算关联系数值主要取决主因素与比较因素序列中各对应数据的差值, 而在数据单位不同时, 会直接影响到关联系数的可比性, 所以在这种情况下, 首先需要对原始数据作无量纲处理, 常用的方法有以下几种:

(1) 初值比处理: 将所有因素序列中, 把第一个不等于 0 的数据作为本序列的分母, 重新确定因素序列, 即若假定 $x_i(1) \neq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$, 则初值比序列为

$$X_i^{(0)}(t) = \left\{ \frac{x_i(1)}{x_i(1)}, \frac{x_i(2)}{x_i(1)}, \dots, \frac{x_i(n)}{x_i(1)} \right\},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m$$

(2) 最大值比处理：设 $H_i = \max X_i(t)$ 是各因素序列中数据的最大值，则最大值比序列为

$$X_i(t)_{\max} = \left\{ \frac{x_i(1)}{H_i}, \frac{x_i(2)}{H_i}, \dots, \frac{x_i(n)}{H_i} \right\},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m$$

(3) 最小值比处理：设 L_i 是各因素序列中最小但不为 0 的最小值，则最小值比序列为

$$X_i(t)_{\min} = \left\{ \frac{x_i(1)}{L_i}, \frac{x_i(2)}{L_i}, \dots, \frac{x_i(n)}{L_i} \right\},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m$$

(4) 均值比处理：设 $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_i(t)$ ，则均值比序列为

$$\bar{X}_i(t) = \left\{ \frac{x_i(1)}{\bar{x}_i}, \frac{x_i(2)}{\bar{x}_i}, \dots, \frac{x_i(n)}{\bar{x}_i} \right\},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m$$

[例 4-3] 用灰关联分析法研究某地区中山柏生长与当地气候的关系，现将各月生长量与气候因子的统计数据列于表 4-9。

表 4-9 中山柏各月生长量与气候资料表

月份	中山柏逐月生长量 X_0 (cm)	月平均气温 X_1 ()	月降雨量 X_2 (mm)	月日照时数 X_3 (hour)	月平均相对湿度 X_4 (%)
1	0.01	4.20	17.00	54.50	81.00
2	0.50	7.40	10.80	73.80	79.00
3	1.50	10.00	17.40	84.70	75.00
4	10.80	16.10	19.70	137.00	75.00
5	13.00	21.10	248.70	149.60	77.00
6	16.30	23.90	72.20	109.50	79.00
7	18.00	24.70	96.90	101.60	83.00
8	19.30	24.50	269.50	164.60	86.00

(续上表)

月份	中山柏逐月生长量 X_0 (cm)	月平均气温 X_1 ()	月降雨量 X_2 (mm)	月日照时数 X_3 (hour)	月平均相对湿度 X_4 (%)
9	14.80	22.00	194.80	81.60	83.00
10	10.30	18.00	58.10	84.00	82.00
11	8.00	13.10	4.90	79.30	81.00
12	1.00	6.80	12.60	66.50	82.00

(1) 将原始数据初值比处理，如下表 4 - 10 所示。

表 4 - 10 原始数据初值比计算结果

t	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	50.00	1.76	0.63	1.35	0.97
3	150.00	2.38	1.02	1.55	0.92
4	1080.00	3.83	1.16	2.51	0.92
5	1300.00	5.03	14.60	2.74	0.95
6	1630.00	5.69	4.25	6.44	0.97
7	1800.00	5.88	5.70	1.86	1.02
8	1930.00	5.83	15.85	3.02	1.06
9	1480.00	5.24	11.46	1.45	1.02
10	1030.00	4.28	3.42	1.54	1.01
11	800.00	3.12	0.29	1.45	1.00
12	100.00	1.62	0.74	1.22	1.01

(2) 计算主因素与各比较因素在时刻的绝对差，计算结果如下表 4 - 11。

表 4 - 11 原始数据标准化处理后的绝对差

t	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
1	0	0	0	0
2	48.29	49.37	48.65	49.03
3	147.82	148.98	148.45	149.02
4	1076.17	1078.84	1077.49	1079.02
5	1294.97	1285.40	1297.26	1299.05
6	1624.31	1625.75	1623.56	1629.03
7	1794.12	1794.30	1798.14	1798.98
8	1924.17	1914.15	1926.98	1928.94
9	1474.76	1468.54	1478.55	1478.98
10	1025.72	1026.58	1028.46	1028.99
11	796.88	799.71	798.53	799.00
12	98.38	99.26	98.78	98.99

(3) 取 $\rho = 0.5$, 将计算关联系数的相关数据计算值列于下表 4 - 12和 4 - 13。

表 4 - 12 关联系数相关数据计算值之一

i	1	2	3	4
$\Delta_{\min}$	0	0	0	0
$\Delta_{\max}$	1924.17	1914.15	1926.98	1928.94
$\varphi = \rho \Delta_{\max}$	962.09	957.08	963.49	964.47

表 4 - 13 关联系数相关数据计算值之二

t	$\Delta_i(T) + \varphi_1$	$\Delta_i(T) + \varphi_2$	$\Delta_i(T) + \varphi_3$	$\Delta_i(T) + \varphi_4$
1	962.09	957.08	963.49	964.47
2	1010.38	1006.45	1012.14	1013.50
3	1109.91	1106.06	1111.94	1113.49
4	2038.26	2035.92	2040.98	2043.49
5	2257.06	2242.48	2260.75	2263.52

(续上表)

t	$\Delta_i(T) + \varphi_1$	$\Delta_i(T) + \varphi_2$	$\Delta_i(T) + \varphi_3$	$\Delta_i(T) + \varphi_4$
6	2586.40	2582.83	2587.05	2593.50
7	2756.21	2751.38	2761.63	2763.45
8	2886.26	2871.23	2890.47	2893.41
9	2436.85	2425.62	2442.04	2443.45
10	1987.81	1983.66	1991.95	1993.46
11	1758.97	1756.79	1762.02	1763.47
12	1060.47	1056.34	1062.27	1063.46

(4) 计算关联系数值, 结果见表 4 - 14。

表 4 - 14 关联系数值计算结果

t	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
1	1	1	1	1
2	0.9522	0.9509	0.9519	0.9516
3	0.8668	0.8653	0.8665	0.8662
4	0.4720	0.4701	0.4721	0.4720
5	0.4263	0.4268	0.4262	0.4261
6	0.3720	0.3706	0.3724	0.3719
7	0.3491	0.3479	0.3489	0.3490
8	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333
9	0.3948	0.3946	0.3945	0.3947
10	0.4840	0.4825	0.4837	0.4838
11	0.5470	0.5448	0.5468	0.5469
12	0.9072	0.9060	0.9070	0.9069
Σ	7.1047	7.0928	7.1033	7.1024

(5) 关联度计算, 见表 4 - 15。

表 4 - 15 关联度计算值和排序结果表

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
计算值	0.5921	0.5911	0.5919	0.5918
排序	1	4	2	3

(6) 检验与结论：按照灰色系统理论关联度的几何接近度来检验关联分析法计算结果的合理性，可以采用作图法进行比较判断。将采样值（即原始数据）均值化处理，其比值均以 1 的倍数作出比较图形，见图 4 - 5。

显然，从几何形状上看，中山柏生长曲线 X_0 与月平均气温的变化曲线 X_1 最接近，差异最大的是月平均降雨量的变化曲线 X_2 。这表示影响该地区中山柏生长的主要气候因素是气温，而降雨量在树木适宜生长的范围之内。从而说明关联分析法的分析结果是合理的。

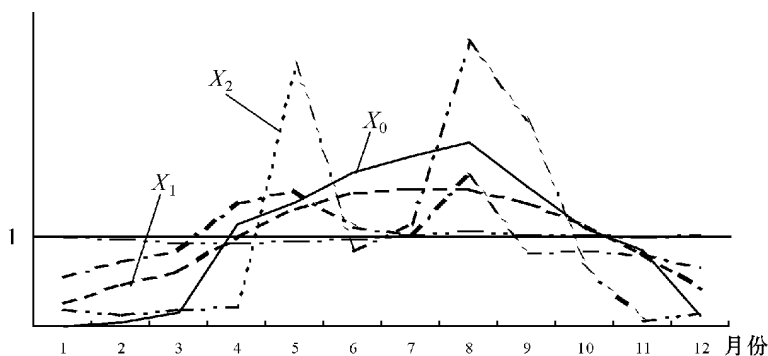


图 4 - 5 原始数据均值化比较图

第三节 其他关联分析法

在灰色系统理论中，灰关联分析法的关联度是基于几何接近的度量方式，于是，如果能通过不同的度量方法测量主因素与比较因素间的相关程度，不但可以在不同的测量数据的情况下选择适当的几何接近度量，还可能通过不同的度量来了解和分析因素间的相关性，这在系统实践中也是很有意义的。下面将介绍其他两种不同的灰关联度的计算方法。

一、相对变率关联分析

当主数据列和比较数据列中的各项原始数据均大于 0 时，可以采用相对变率关联分析法。

假设主函数 $X_0(t)$ 与比较函数 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 均为时间 t 的连续可导函数，则若 $X_1(t)$ 的相对变化速率 $\frac{1}{X_1} \frac{dX_1}{dt}$ 在几何上比 $X_2(t)$ 更接近 $X_0(t)$ 的相对变化速率 $\frac{1}{X_2} \frac{dX_2}{dt}$ ，那么 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 的关联度要大于 $X_2(t)$ 与 $X_0(t)$ 的关联度，并且消除了原始数据量纲问题。基于这样的设想，于是作如下定义。

定义 3 对于主因素函数 $X_0(t)$ 和比较因素函数 $X_i(t)$ 均为时间 t 连续可导的函数，于是可设定

$$\zeta_i(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{1}{X_0} \frac{dX_0}{dt} - \frac{1}{X_i} \frac{dX_i}{dt} \right|} \quad (4-3)$$

为 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 的关联函数。

注：显然式 (4-3) 满足下列条件：

(1) $0 \leq \zeta_i(t) \leq 1$ 。

(2) $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 在时刻 t 的相对变化速率越接近, 则 $\zeta_i(t)$ 越大。

(3) 当 $\zeta_i(t) = 1$ 时, 说明 $X_0(t)$ 和 $X_i(t)$ 是完全平行的两条曲线。

对于离散的时间序列, 可将上述定义 3 推广为如下定义。

定义 4 设主因素时间数列和比较因素时间数列分别为

$$X_0(t) = \{x_0(1) \ x_0(2) \ \dots \ x_0(N)\}$$

$$X_i(t) = \{x_i(1) \ x_i(2) \ \dots \ x_i(N)\}$$

则 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 的关联系数为

$$\zeta_i(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{\Delta x_0(t)}{x_0(t)} - \frac{\Delta x_i(t)}{x_i(t)} \right|}, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (4-4)$$

式中, $\Delta x_0(t) = x_0(t+1) - x_0(t)$;

$$\Delta x_i(t) = x_i(t+1) - x_i(t)。$$

于是, 定义 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 的关联度如下:

定义 5 若由式 (4-4) 决定 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 的关联系数为 $\zeta_i(t)$, 则

$$\gamma_i = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} \zeta_i(t) \quad (4-5)$$

为 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 的关联度。

[例 4-4] 仍以 [例 4-3] 的原始数据为例, 采用相对变率关联分析法进行计算和分析如下。

(1) 计算主因素与个比较因素的逐月相对变化速率如下表 4-16。

表 4 - 16 各气候因子与中山柏生长量的相对变化速率值表

t	$\frac{\Delta x_0(t)}{x_0(t)}$	$\frac{\Delta x_1(t)}{x_1(t)}$	$\frac{\Delta x_2(t)}{x_2(t)}$	$\frac{\Delta x_3(t)}{x_3(t)}$	$\frac{\Delta x_4(t)}{x_4(t)}$
1	49.000	0.762	- 0.365	0.354	- 0.025
2	2.000	0.351	0.611	0.147	- 0.051
3	6.200	0.610	0.132	0.617	0
4	0.204	0.310	11.620	0.092	0.026
5	0.254	0.133	0.709	- 0.280	0.026
6	0.104	0.033	0.342	- 0.072	0.051
7	0.072	- 0.008	1.781	0.620	0.036
8	- 0.233	- 0.102	- 0.277	- 0.504	- 0.035
9	- 0.304	- 0.182	- 0.702	0.029	- 0.012
10	- 0.223	- 0.272	- 0.915	- 0.055	- 0.012
11	0.875	- 0.481	1.571	- 0.161	0.012

(2) 根据式 (4 - 4) 计算关联系数如表 4 - 17。

表 4 - 17 各气候因子与中山柏生长量的关联系数

t	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
1	0.0203	0.0198	0.0201	0.0200
2	0.7936	0.4186	0.3505	0.3278
3	0.6766	0.1415	0.1519	0.1389
4	0.9041	0.0805	0.8992	0.8489
5	0.8920	0.5094	0.6519	0.8193
6	0.9337	0.0807	0.8503	0.9497
7	0.9299	0.3691	0.6460	0.9653
8	0.8841	0.9578	0.7867	0.8374
9	0.8196	0.7153	0.7502	0.7740
10	0.9532	0.5910	0.8432	0.8258
11	0.7174	0.5896	0.4912	0.5368
Σ	8.5245	4.4733	6.4412	7.0439

(3) 根据式 (4 - 5) 计算关联度并列排序结果如表 4 - 18。

表 4 - 18 各气候因子与中山柏生长量的关联度计算与排序结果表

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
计算值	0.7756	0.4067	0.5856	0.6396
排序	1	4	3	2

(4) 结论：与 [例 4 - 3] 的计算结果相比较，除比较因素 X_2 和 X_3 与主因素 X_0 关联度的排序结果有先后的差异外，其他是相一致的。从计算方法看，当原始数据均大于 0 的情况下，采用这种方法计算较为简易，并且关联度的辨识度较高。

二、斜率关联度分析法

在数学上，关联度是指函数相似的程度，一条曲线的变化趋势可以用该曲线的斜率变化来描述。如果两条曲线的斜率处处相等，那么这两条曲线的变化趋势就接近平行。

定义 6 设 $X_0(t)$ 与 $X_1(t)$ 均为时间 t 的连续可导函数，两者间的关联函数为

$$\zeta_i(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{dX_0(t)}{dt} - \frac{dX_1(t)}{dt} \right|} \quad (4 - 6)$$

于是，对于离散的主因素 $X_0(t)$ 与比较因素 $X_1(t)$ 的时间序列，则可定义如下：

定义 7 对于以下主序列 $X_0(t)$ 和任一比较序列 $X_1(t)$

$$X_0(t) = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(N)\}$$

$$X_1(t) = \{x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(N)\}$$

令

$$\begin{aligned}\zeta_i(t) &= \frac{1}{1 + \left| \frac{1}{\sigma_{x_0}} \frac{\Delta X_0(t)}{\Delta t} - \frac{1}{\sigma_{x_i}} \frac{\Delta X_i(t)}{\Delta t} \right|} \\ &= \frac{1}{1 + \left| \frac{\Delta X_0(t)}{\sigma_{x_0}} - \frac{\Delta X_i(t)}{\sigma_{x_i}} \right|} \\ t &= 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (4-7)$$

为 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 的关联系数, 式中

$$\Delta x_0(t) = x_0(t+1) - x_0(t)$$

$$\Delta x_i(t) = x_i(t+1) - x_i(t)$$

$$\Delta t = (t+1) - t = 1$$

其中 $X_0(t)$ 和 $X_i(t)$ 的标准差分别是

$$\sigma_{x_0} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [x_0(t) - \bar{x}_0]^2}$$

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [x_i(t) - \bar{x}_i]^2}$$

注: 采用这种方法计算 $X_0(t)$ 与 $X_i(t)$ 关联系数及其关联度, 具有以下特点:

- (1) 原始数据不需标准化;
- (2) 原始数据中含有 0 或负值时不影响相关计算;
- (3) 关联度计算式与式(4-5) 相同。

[例 4-5] 仍按[例 4-3] 的原始数据表 4-9 为例, 计算步骤如下。

- (1) 计算各序列的标准差如表 4-19。

表 4-19 各气候因子与中山柏生长量序列标准差值表

σ_{x_0}	σ_{x_1}	σ_{x_2}	σ_{x_3}	σ_{x_4}
6.87	7.18	93.34	33.19	3.22

(2) 计算主因素与个比较因素的逐月斜率如下表 4 - 20。

表 4 - 20 各气候因子与中山柏生长量的斜率值表

t	$\frac{\Delta x_0(t)}{\sigma_{x_0}}$	$\frac{\Delta x_1(t)}{\sigma_{x_1}}$	$\frac{\Delta x_2(t)}{\sigma_{x_2}}$	$\frac{\Delta x_3(t)}{\sigma_{x_3}}$	$\frac{\Delta x_4(t)}{\sigma_{x_4}}$
	σ_{x_0}	σ_{x_1}	σ_{x_2}	σ_{x_3}	σ_{x_4}
1	0.071	0.446	-0.066	0.582	-0.621
2	0.146	0.362	0.071	0.328	-1.242
3	1.354	0.850	0.025	1.576	0
4	0.320	0.696	2.453	0.0380	0.621
5	0.480	0.390	-1.891	-1.201	0.621
6	0.247	0.111	0.265	-0.238	1.242
7	0.189	-0.028	1.849	1.898	0.932
8	-0.655	-3.480	-0.800	-2.500	-0.932
9	-0.655	-0.557	-1.965	-0.072	-0.311
10	-0.355	-0.682	-0.570	-0.142	-0.311
11	-1.310	-0.877	0.082	-0.386	0.311

(3) 计算关联系数如表 4 - 21。

表 4 - 21 各气候因子与中山柏生长量的关联系数表

t	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
1	0.727	0.897	0.662	0.591
2	0.822	0.930	0.846	0.419
3	0.665	0.429	0.818	0.425
4	0.727	0.319	0.943	0.767
5	0.917	0.297	0.373	0.867
6	0.880	0.982	0.673	0.501
7	0.822	0.376	0.369	0.574
8	0.765	0.873	0.351	0.783
9	0.911	0.552	0.579	0.774
10	0.754	0.823	0.824	0.958
11	0.098	0.418	0.520	0.500
Σ	8.088	6.896	6.958	7.159

(4) 计算关联度如表 4 - 22。

表 4 - 22 各气候因子与中山柏生长量的关联度计算值及排序表

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
计算值	0.735	0.627	0.632	0.651
排序	1	4	3	2

(5) 结论：各气候因子对中山柏生长量影响程度的排序结果与 [例 4 - 4] 是一致的。

三、灰关联优势分析法

当同时进行多个参考因素的比较分析时，称为优势分析，即此时存在多个参考因素的数据序列与多个比较因素的数据序列的关联分析，则可以通过确定反映它们之间关系程度的关联矩阵，进而分析得出优势因素。

设有 m 个参考序列和 n 个比较序列如下：

参考序列： $Y_i(k) = \{y_i(k) \mid k = 1, 2, \dots, L\} \quad i = 1, 2, \dots, m$ ；

比较序列： $X_j(k) = \{x_j(k) \mid k = 1, 2, \dots, L\} \quad j = 1, 2, \dots, n$ 。

并设 $Y_i(k)$ 与 $X_j(k)$ 的关联度为 r_{ij} ，则定义 R 为参考序列与比较序列两组因素的关联矩阵如下：

$$R_{xy} = [r_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

在上述关联矩阵中，每一行元素表示不同比较因素对同一参考因素的影响程度；每一列元素表示同一比较因素对不同参考因素的影响程度。据此可以分析哪些是优势因素。

[例 4 - 6] 某县对其农业经济的各项投入与相关产出（含收入和产值）进行优势分析，从而得出该县的优势经济项目和潜力

项目。该县的相关经济数据如表 4 - 23 至表 4 - 25 所示。

表 4 - 23 某县 19×1—19×5 年对各项农业投资情况表

单位：万元

投资项目		19×1	19×2	19×3	19×4	19×5
农业总投资	X_1	452.64	409.23	407.07	410.38	475.59
种植业投资	X_2	205.92	185.48	158.29	190.09	190.01
林业投资	X_3	5.69	7.67	6.76	5.64	22.37
牧业投资	X_4	188.00	157.74	152.35	153.85	144.35
工副业投资	X_5	53.03	58.17	62.27	78.81	118.86

表 4 - 24 某县 19×1—19×5 年的各项农业收入情况表

单位：万元

投资项目		19×1	19×2	19×3	19×4	19×5
农业总收入	Y_1	369.86	344.92	331.64	439.98	504.06
种植业收入	Y_2	263.33	228.61	210.90	280.25	239.73
林业收入	Y_3	4.69	7.78	3.62	5.74	8.76
牧业收入	Y_4	9.24	6.80	2.81	4.88	40.27
工副业收入	Y_5	92.60	101.73	114.31	149.11	215.30

(1) 分别计算各农业项目的收入和产值因素与各投资因素灰关联度, 计算时, 由于各数据列的数据单位相同, 所以原始数据无须标准化, 并取分辨系数 $\rho = 0.3$ 。

表 4 - 25 某县 19×1—19×5 年的各项农业产值情况表

单位：万元

投资项目		19×1	19×2	19×3	19×4	19×5
农业总产值	Z_1	665.10	679.61	662.56	737.84	754.15
种植业产值	Z_2	375.13	358.97	354.52	380.31	284.75
林业产值	Z_3	19.84	25.11	20.31	25.75	71.43
牧业产值	Z_4	177.54	193.79	202.65	182.67	182.67
工副业产值	Z_5	92.60	101.73	115.10	149.11	251.30

(2) 分别将收入项目与投资项目的关联矩阵和产值项目与投资项目的关联矩阵分列表 4 - 26 和表 4 - 27, 并计算各行列的平均值。

表 4 - 26 收入项目与投资项目的关联矩阵数据表

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	平均值	排序
Y_1	0.7208	0.8578	0.8915	0.8615	0.8846	0.8432	2
Y_2	0.7958	0.8450	0.9092	0.8099	0.8050	0.8330	4
Y_3	0.9607	0.8988	0.7272	0.9270	0.8397	0.8707	1
Y_4	0.9723	0.9045	0.7182	0.8008	0.8121	0.8416	3
Y_5	0.9179	0.6914	0.8249	0.4997	0.8055	0.7479	5
平均值	0.8735	0.8395	0.8142	0.7798	0.8294	...	...
排序	1	2	4	5	3	...	...

表 4 - 27 产值项目与投资项目的关联矩阵数据表

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	平均值	排序
Z_1	0.8551	0.9227	0.9635	0.9164	0.9698	0.9255	1
Z_2	0.7215	0.7107	0.8340	0.8140	0.7244	0.7609	4
Z_3	0.9740	0.8439	0.8226	0.7210	0.8654	0.8454	2
Z_4	0.8925	0.7609	0.9268	0.5902	0.7075	0.7756	3
Z_5	0.8481	0.7808	0.8182	0.5006	0.7980	0.7491	5
平均值	0.8582	0.8038	0.8730	0.7084	0.8130	...	...
排序	2	4	1	5	3	...	...

(3) 计算各农业项目的产值对各农业项目收入的关联矩阵如表 4 - 28 所示。计算中, 原始数据无需标准化处理, 分辨系数同样取 $\rho = 0.3$ 。

表 4 - 28 产值项目与收入项目的关联矩阵数据表

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	平均值	排序
Y_1	0.8768	0.7014	0.8991	0.7736	0.8899	0.8282	1
Y_2	0.9153	0.6328	0.8590	0.5284	0.4814	0.6834	5
Y_3	0.9636	0.8556	0.8376	0.9647	0.8178	0.8879	2
Y_4	0.9667	0.8031	0.7234	0.8672	0.8007	0.8322	3
Y_5	0.9650	0.5667	0.8258	0.7086	0.8325	0.7797	4
平均值	0.9375	0.7119	0.8290	0.7685	0.7645	...	...
排序	1	5	2	3	4	...	...

(4) 从表 4 - 26 可以看出：列项关联度排序显示，对各项收入的综合影响程度总投资、种植业和工副业的投资分列第一、第二和第三位，而林业和牧业的投资则排第四和第五位。说明要提高农业总收入，应加大对农业的总体投资，其中种植业和工副业的投资是重点，数据也显示种植业和工副业对农业总收入的贡献是最大的，同时，农业总收入的持续增长最依赖种植业和工副业投资的增加。

从行项关联度排序结果显示，林业收入最依赖各项目的投资，其次是农业总收入和牧业收入，最后是种植业和工副业收入。这表示林业和牧业收入的发展潜力最大，虽然该县从数据上显示林业和牧业尚处于无足轻重的地位，可是，若能平衡发展该县的各农业经济项目，林业和牧业将会有较大的潜力可挖。这一观点可以从表 4 - 28 反映产值对收入影响度的计算和排序结果看出，在农业产值项目中，除总投资外，对农业收入影响最大的是林业和牧业，于是应该加大对潜力项目林业和牧业的投资，将会给该县农业总收入带来最明显的效果。

另一方面，从表 4 - 27 可知：列项关联度的排序结果是，在该县各项农业产值对收入的作用，林业投资的影响力最大，其次是总投资和工副业的投资，种植业和牧业分列第四和第五位。

第四节 赤潮研究实例

一、赤潮研究的意义

海洋是人类未来战略资源开发的重点，认识海洋和开发海洋已成为世界关注的热门课题，其中对近海海洋赤潮的研究已是立项重点之一。因为赤潮是由海洋中的浮游植物群落，又称藻种群，在一定的条件下，短时间内可大量暴发而使海水变色的自然灾害，赤潮发生时，海水往往呈现红色。近年来，由于各种原因，赤潮现象不断发生，其危害程度越来越严重，除破坏海洋生态环境、危害海产养殖业和海洋渔业资源外，还发现赤潮所产生的毒素可通过食物链威胁人类健康。所以各国政府高度重视，特别是发达国家，拨巨款投入研究与治理，当中以美国、加拿大、日本等水平较为先进。但在数学模型应用于赤潮的研究方面也仅处于摸索阶段，至今还没有一种比较有效和完善的方法来解决预报和防治赤潮这一难题。

由于海洋浮游植物是赤潮原因生物最重要的组成部分，人们在研究赤潮的每一个环节中，都涉及到这些生物群落在整个生态系统中的位置、作用及各种环境因子之间的动态关系。于是本节利用灰色系统理论中的关联分析法对大鹏湾海域的三种赤潮藻种与其环境因子进行相关分析，从而判断构成大鹏湾赤潮的“优势”因素。这三种藻种分别是尖刺拟菱形藻、中肋条骨藻和反曲原甲藻，它们是大鹏湾春季赤潮发生的主要藻种。

二、大鹏湾的地理位置与采样

大鹏湾位于广东省宝安县大鹏半岛与香港九龙半岛之间，参见大鹏湾地理位置图 4 - 6。该湾为溺谷湾，东、北、西三面环山。湾口东起大鹏半岛黑岩角，西至九龙半岛大浪咀，方向朝东南。口

宽 9.26km，纵深 18km，弧长 100km，面积约 335km²。湾顶沙头角湾附近水深 8~10m，中部水深 18m，湾口水深 22~24m。该湾北部泥底，南部为沙底，局部为细沙和砾石。大部分沿岸潮间带狭窄，只有海湾顶部及西南沿岸潮间带滩涂略宽。无大河注入，淤积甚少，海底深槽平坦，两侧岸坡陡直。

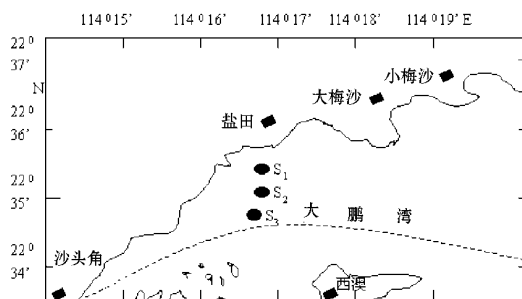


图 4-6 大鹏湾采样站位分布图

所有数据皆取自大鹏湾盐田海域的调查结果，采样时间是 1990 年 3 月 30 日至 6 月 25 日，每隔 2d 采样一次。共 19 个因子 (31 个数据×19×3 个站位)。浮游动物采样分定性与定量两种：定性是用浅水 2 号浮游生物网，网口是 31.6cm，全长为 140cm，用 GB36 筛绢垂直拖网采样；定量是用 2L 的采水器，标本少则全部计数，多则浓缩后计数。浮游植物采样按照《海洋调查规范》(国家海洋局，1975)，用直径 37cm，长 130cm，孔径 70μm 的拖网在采样点进行垂直拖网，采样站位 S₁ 离岸约 100m；站位 S₂ 离岸边约 500m，站位 S₃ 离岸大约 1 000m。各站位的采样深度分别为：表层深度为 0.5m，底层深度分别为 3m、5m 和 9m；S₁₁ 和 S₁₂、S₂₁ 和 S₂₂ 与 S₃₁ 和 S₃₂ 分别表示 S₁、S₂ 和 S₃ 三个站位的表底层。

三、灰关联分析法

1. 选定序列组

把尖刺拟菱形藻、反曲原甲藻、中肋条骨藻的种群密度作为参考序列 $\{X_i^{(0)}(k) | k = 1, 2, \dots, N\}$ ($i = 1, 2, 3$)，其中样值个数 $N = 31$ ；以浮游动物种群密度(ind/L)、温度 $\{T(C^\circ)\}$ 、盐度 $\{S(0)\}$ 、溶解氧 $\{DO(mg/L)\}$ 、酸碱度 $\{pH\}$ 、浊度、磷酸盐 $\{PO_4(\mu g/L)\}$ 、亚硝酸盐 $\{NO_2(\mu g/L)\}$ 、硝酸盐 $\{NO_3(\mu g/L)\}$ 、硅 $\{Si(\mu g/L)\}$ 、铁 $\{Fe(\mu g/L)\}$ 和锰 $\{Mn(\mu g/L)\}$ 等12个因子作为比较序列 $\{X_j(k) | k = 1, 2, \dots, N\}$ ($j = 1, 2, \dots, 12$)。

2. 采样数据初值化

为使各因素具备可比性，将各序列初值化参考序列，即 $\{Y_i^{(0)}(k) | k = 1, 2, \dots, N\} = \{X_i^{(0)}(k)/X_i^{(0)}(1) | k = 1, 2, \dots, N\}$ ($i = 1, 2, 3$)，其中若采样值 $X_i^{(0)}(1) = 0$ ，则取下一个采样值，比较序列亦然，即 $\{Y_j^{(k)}\} = \{X_j(k)/X_j(1)\}$ ($j = 1, 2, \dots, N$)。

3. 计算关联系数

$\zeta_{ij} = \{\zeta_{ij}(k) | k = 1, 2, \dots, N\}$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 12$) 为第 i 个经初值的参考序列 $\{Y_i^{(0)}(t)\}$ 与第 j 个比较序列 $\{Y_j(t)\}$ 的关联系数，其中，

$$\zeta_{ij}(k) = \frac{\min_{j,k} \Delta_{ij}(k) + \max_{j,k} \Delta_{ij}(k)}{\Delta_{ij}(k) + \rho \max_{j,k} \Delta_{ij}(k)},$$

$$i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 12; k = 1, 2, \dots, N$$

式中， $\Delta_{ij}(k) = |Y_i^{(0)}(k) - Y_j(k)|$ ，取分辨系数 $\rho = 0.1$ 。

4. 计算关联度

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta_{ij}(k), \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 12$$

其中， γ_{ij} 为第 i 个参考序列 $\{Y_i^{(0)}(t)\}$ 与第 j 个比较序列 $\{Y_j(t)\}$ 的关联度。并将计算值及其排序结果列于表 4-29 至表 4-32。并作出尖刺拟菱形藻、中肋条骨藻和反曲原甲藻的种群密度分别在第一和第二个站位的表、底层与表 4-33 中排前四位的因素比较图，见

图 4 - 7 至图 4 - 9 , 以进行定量与定性相结合的分析。图中 , 为便于进行直观比较 , 故将排前四位的浮游动物、浊度、Fe 和 Mn 等因素的折线图按其采样值比其均值后作出 , 其比值均以 1 值为中心上下波动 , 从三个比较图均可以看出 , 当排在前四位的因素的采样值与其均值的比——呈现其均值的倍数——大多在均值线的下方时 , 三个藻种的密度均低于其均值 ; 而当前四位的因素的采样值与其均值的比值大多在均值线的上方时 , 三个藻种的密度大多高于其均值 , 这充分表明了这三个藻种的增殖密度与前四位因素有着较密切的关联性。

表 4 - 29 尖刺拟菱形藻与各因子的关联度及排序结果

站 位	S ₁		S ₂		S ₃		均值	排序
层次 因素	表层 S ₁₁	底层 S ₁₂	表层 S ₂₁	底层 S ₂₂	表层 S ₃₁	底层 S ₃₂		
1. 浮游动物	0.9094	0.9404	0.9378	0.8710	0.9844	0.8858	0.9215	1
2. T	0.8482	0.9143	0.8590	0.7208	0.9373	0.6124	0.8153	8
3. S	0.8627	0.9187	0.8795	0.7426	0.9467	0.6434	0.8323	7
4. DO	0.8750	0.9273	0.8917	0.7769	0.9533	0.6568	0.8468	5
5. pH	0.8617	0.9230	0.8815	0.7505	0.9468	0.6475	0.8352	6
6. 浊度	0.8984	0.9239	0.9125	0.8049	0.9764	0.8517	0.8946	3
7. PO ₄	0.4616	0.5394	0.4036	0.4003	0.6044	0.7720	0.5302	12
8. NO ₂	0.8364	0.6787	0.8148	0.6628	0.6738	0.6718	0.7231	10
9. NO ₃	0.8536	0.8825	0.6976	0.7390	0.9291	0.6288	0.7884	9
10. Si	0.5109	0.8441	0.7457	0.5876	0.7220	0.5367	0.6578	11
11. Fe	0.9061	0.8749	0.9338	0.8270	0.9826	0.8470	0.8952	2
12. Mn	0.8916	0.9434	0.9120	0.7932	0.9695	0.6235	0.8555	4

表 4 - 30 反曲原甲藻与各因子的关联度及排序结果

站 位	S ₁		S ₂		S ₃		均值	排 序
层次	表层	底层	表层	底层	表层	底层		
因素	S ₁₁	S ₁₂	S ₂₁	S ₂₂	S ₃₁	S ₃₂		
1. 浮游动物	0.7422	0.8783	0.9531	0.8449	0.9535	0.8303	0.8671	1
2. T	0.7188	0.8495	0.8642	0.8446	0.9071	0.5772	0.7935	8
3. S	0.7268	0.8555	0.8847	0.8450	0.9182	0.6194	0.8083	7
4. DO	0.7292	0.8594	0.8969	0.8447	0.9256	0.6255	0.8136	5
5. pH	0.7257	0.8557	0.8891	0.8450	0.9188	0.6233	0.8096	6
6. 浊度	0.7214	0.8580	0.9336	0.8461	0.9385	0.7730	0.8451	2
7. PO ₄	0.4078	0.4891	0.3926	0.7726	0.5914	0.6702	0.5540	12
8. NO ₂	0.7050	0.6459	0.8363	0.8475	0.6628	0.6122	0.7183	10
9. NO ₃	0.7199	0.8280	0.7154	0.8498	0.9038	0.6050	0.7703	9
10. Si	0.5411	0.7860	0.7676	0.8406	0.7353	0.5363	0.7012	11
11. Fe	0.7305	0.8056	0.9476	0.8456	0.9486	0.7450	0.8372	3
12. Mn	0.7330	0.8742	0.9320	0.8450	0.9407	0.6317	0.8261	4

表 4 - 31 中肋骨条藻与各因子的关联度及排序结果

站 位	S ₁		S ₂		S ₃		均值	排 序
层次	表层	底层	表层	底层	表层	底层		
因素	S ₁₁	S ₁₂	S ₂₁	S ₂₂	S ₃₁	S ₃₂		
1. 浮游动物	0.9417	0.9766	0.9503	0.9286	0.9897	0.8747	0.9436	1
2. T	0.8722	0.9432	0.8630	0.7671	0.9297	0.5751	0.8251	8
3. S	0.8882	0.9481	0.8842	0.7901	0.9399	0.6113	0.8436	7
4. DO	0.8999	0.9576	0.8957	0.8258	0.9473	0.6190	0.8576	5
5. pH	0.8865	0.9527	0.8887	0.7972	0.9401	0.6161	0.8469	6
6. 浊度	0.8186	0.9595	0.9261	0.8612	0.9724	0.8001	0.9063	2
7. PO ₄	0.4320	0.5318	0.3842	0.4275	0.6004	0.7430	0.5198	12
8. NO ₂	0.8567	0.6898	0.8317	0.7389	0.6669	0.6885	0.7454	10
9. NO ₃	0.8741	0.9144	0.7116	0.8038	0.9277	0.6382	0.8116	9
10. Si	0.5091	0.8703	0.7531	0.6457	0.7120	0.5367	0.6712	11
11. Fe	0.9308	0.9005	0.9494	0.8751	0.9896	0.7885	0.9057	3
12. Mn	0.9159	0.9818	0.9236	0.8523	0.9705	0.6354	0.8799	4

表 4 - 32 12 个因子对三类藻种群密度影响度的因素排序结果

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
尖刺拟菱形藻	浮游动物	Fe	浊度	Mn	DO	pH	S	T	NO ₃	NO ₂	Si	PO ₄
反曲原甲藻	浮游动物	浊度	Fe	Mn	DO	pH	S	T	NO ₃	NO ₂	Si	PO ₄
中肋条骨藻	浮游动物	浊度	Fe	Mn	DO	pH	S	T	NO ₃	NO ₂	Si	PO ₄

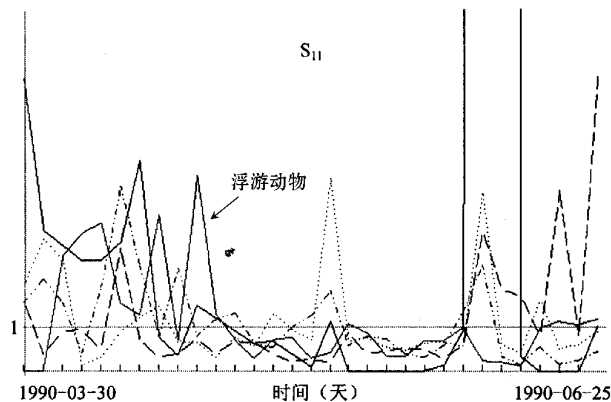


图 4 - 7 尖刺拟菱形藻与排列前四位因素在 S_{11} 站位的比较

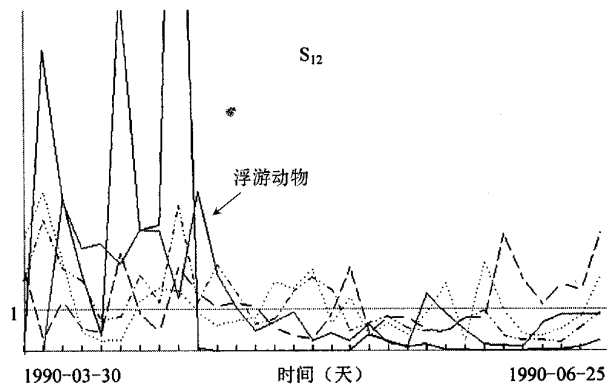


图 4 - 8 中肋条骨藻与前四位因素在 S_{12} 站位的比较

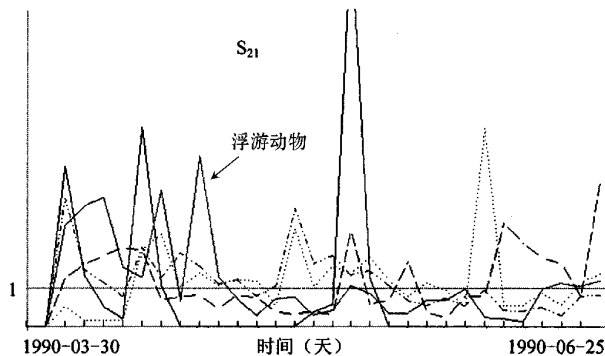


图 4 - 9 反曲原甲藻与前四位因素在 S_{21} 站位的比较

(注：上述图中，——拟尖刺菱形藻、中肋骨条藻或反曲原甲藻；- - - 浊度；····· Fe；— · — Mn)

四、结论与讨论

结果表明，由于浮游动物以藻类为饵料，对（1）拟尖刺菱形藻、（2）反曲原甲藻、（3）中肋骨条藻的种群密度影响最大。当浮游动物密度增大时，这些藻种的种群密度是降低的，反之亦然。这一结果从图 2 - 4 中赤潮生物种群密度与浮游动物的比较可以清楚的说明这一点，因此关联度排序结果均列第一位是合理的；浊度对（2）、（3）的影响度列第二位，对（1）的影响度列第三位。说明海水的清洁度对海洋赤潮生物有着重要的影响。另外，浊度也反映了海洋的透明度，直接影响浮游植物的光合作用。浊度大与之一对应海洋污染程度高（特别针对海洋作业和挖泥工程）和透明度降低抑制浮游植物（藻类）的增殖效应。在比较图中，浊度的峰值与三种藻的种群密度峰值均有良好的对应关系；Fe 对（1）的影响度列第二位，对（2）和（3）均列第三位；Mn 对（1）、（2）和（3）的影响均排在第四位。铁的影响度和锰因子，藻类并不直

接吸收，但是它们具有催化和激活藻类酶的作用，从图上可以看出，较高的铁、锰浓度是刺激这三类藻种群密度增殖的重要原因。本结论希望能得到实验室的验证；DO 对三类藻种的影响列第五位。在赤潮暴发之前，浮游动物的密度增大，且对应的溶解氧浓度较高。当赤潮暴发后，浮游植物大量死亡，此时又消耗大量的溶解氧，使溶解氧浓度迅速降低；pH 的影响列第六位；S 和 T 对这三类藻种的影响度分列第七和第八位。

从表 4 - 26 的计算结果可见，除 Fe 和浊度两个因子对尖刺拟菱形藻、反曲原甲藻和中肋条骨藻的影响度在第二和第三位上互有交换以外，其他因素对该三类藻种的影响度的排序结果均相一致。12 个环境理化因子对该三类藻种的种群密度关联排序结果分别为：浮游动物、浊度、铁、锰、溶解氧、酸碱度、盐度、温度、磷酸盐、亚硝酸盐、硝酸盐和硅，充分表现出这三种赤潮生物所具有的共性。相比较之下，上述前 8 个因子对这三种赤潮生物均有较大的影响，从而构成中国南海大鹏湾赤潮发生的“优势”因素。而磷酸盐、亚硝酸盐、硝酸盐和硅对这三类藻种密度增殖的影响相对较弱。作者认为该海域属于富营养化区，有充分的养分提供给藻类增殖，即使在赤潮发生时也是如此，所以该海域营养盐不能成为有效因子。

第五章 灰色系统理论及其应用（II）

——灰色系统建模方法

朦胧也是一种美，但在它的背后，有许多比它更美的东西，这要取决我们用什么方法去挖掘了。

第一节 灰色系统模型

灰色系统理论建模的主要任务是根据社会、经济、环境与生态等系统的行为特征数据，找出因素本身或因素之间的数学关系，从而了解系统的动态和发展趋势。其建模过程源于系统辨识的建模方法，即通过表征系统行为的特征数据得到模拟合成的数学模型；与白色系统建模过程相反，白色系统分析往往是根据系统中理化机理和各种状态变量间的关系，先建立数学模型，再对系统进行描述，是模型在前，行为在后，利用模型研究行为的顺过程。而灰色系统建模过程是利用系统行为特征建立数学模型，是行为在前，模型在后的逆过程。

一、灰色行为数列

在一般情况下，任何可采集的系统动态行为特征的数据列，均由于多种原因，使其具有系统动态变化的随机性、结构关系的模糊性和指标数据的不完整性，如果把这些数据列的特性综合为系统动态行为的灰色性，则称为系统灰色行为数列，或称为系统的灰色过程。

于是，把任何一组表征系统动态行为的原始数据均可称为系统灰色行为数列，简称灰数列。

二、灰色系统模型表征

依据系统辨识理论，灰色系统方法是建立特定的微分方程模型

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x_0}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_0}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_0}{dt} + a_n x_0 \\ = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m \end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{n-i} x_0}{dt^{n-i}} = \sum_{j=1}^m b_j x_j \quad (5-1)$$

式中， x_0 是灰色系统主行为变量， $x_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 是参考因子变量，且 $a_0 = 1$ 。该模型用于描述任何灰色系统行为特性，称为灰色模型 (Grey Model)，表为 $GM(n, h)$ ，其中 n 是模型式 (5-1) 微分方程的阶数， $h (= m + 1)$ 是模型的变量个数，即 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ 。

三、GM(n, h)模型辨识

对 $GM(n, h)$ 模型的辨识，实际上就是通过主行为因素 x_0 和各参考因子 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的原始数据对模型式 (5-1) 中的参变量 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 和 $b_0, b_1, \dots, b_m$ 进行估计，从而确定拟和系统的 $GM(n, h)$ 模型。对于这种特定的灰色模型，灰色系统建模方法是根据 $GM(n, h)$ 模型机理，通过对系统原始数据进行累加生成后的数据，实现对模型参变量的估计。当得到模型的响应值，即 $GM(n, h)$ 模型的输出值，再通过对灰色系统 $GM(n, h)$ 模型的响应值累减生成后还原为主因素变量 x_0 的计算值 $\hat{x}_0$ 。最后，将计算值 $\hat{x}_0$ 与主因素的原始数据 $x_0^{(0)}$ 比较，进行误差分析，即对 $GM(n, h)$ 模型的精度进行分析。其方法过程如图 5-1 所示。

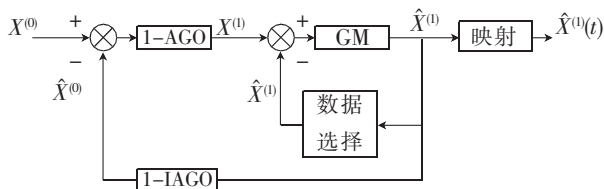


图 5 - 1 灰色系统模型辨识方法过程图

1. 数据的累加与累减生成处理

从直观意义上看，灰色系统建模方法对原始数据的累加生成处理，主要作用有以下两个方面：

(1) GM 是企图建立近似的（灰色）微分方程模型，就建模的机理而言，由于 x 是 x 的积分，在近似建模中，实际上积分就是累加生成，这是灰色系统建模对原始数据累加生成处理的必要过程；另一方面，对积分导数离散化就是微分，所以微分可视为累减生成了，这是 GM 模型通过系统辨识估计模型参变量进行离散数据生成使用的过程，也是 GM 模型计算值还原系统行为特性的计算值的必要手段。

注：累加生成（Accumulated Generating Operation）简记 AGO；累减生成（Inverse Accumulated Generating Operation）简记 IAGO。

(2) 对反映灰色系统行为的原始数据进行累加生成新的数据列，可以弱化原始数据反映系统行为过程的随机性。

若设 GM(n, h) 模型中各变量的原始数据列为

$$X_i^{(0)} = \{x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(T)\}, \\ i = 1, 2, \dots, m$$

则令 GM(n, h) 模型中各变量就是上述原始数据累加生成的数据列如下：

$$X_i = X_i^{(1)} = \{x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(T)\}, \\ i = 1, 2, \dots, m$$

其中，

$$x_i^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^t x_i^{(0)}(k), \quad i = 1, 2, \dots, T$$

事实上，是对原始数据列作一次累加生成，简记 1 - AGO。直观来看，若 X_0 的原始数据列 $X_0^{(0)}$ 为图 5 - 2 (a) 所示，那么 1 - AGO 数据列 $X_0 = X_0^{(1)}$ 则为图 5 - 2 (b) 所示。

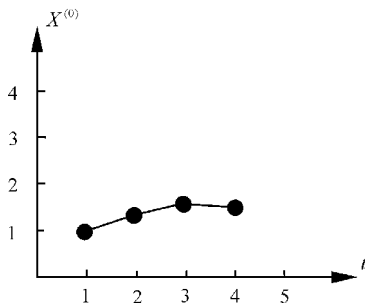


图 5 - 2 (a) 原始数据图

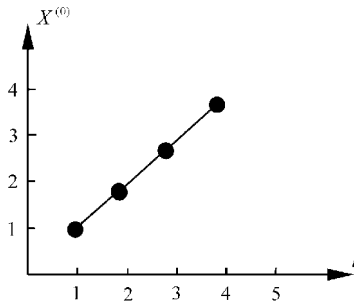


图 5 - 2 (b) 累加生成数据图

若对 X_0 作 s 次累加生成，简记 s - AGO，则有

$$X_i^{(s)} = \{x_i^{(s)}(t) = \sum_{k=1}^t x_i^{(s-1)}(k) \mid t = 1, 2, \dots, T\},$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

一般情况下，对于非负数据列，累加生成的次数越多，生成数据列的随机性就弱化的越多。在 GM 模型中，多采用 1 - AGO 对原始数据加工处理。显然，通过 1 - AGO 处理的原始数据，得到的 GM(n, h) 模型，当计算出该模型的计算值 $X_0^{(0)}$ 后，需要通过一次累减生成（简记 1 - IAGO）还原为 $X_0^{(0)}$ ，即若

$$X_0^{(1)} = \{x_0^{(1)}(t) \mid t = 1, 2, \dots, T\}$$

则

$$X_0^{(0)} = \{x_0^{(0)}(1) = x_0^{(1)}(1),$$

$$X_0^{(0)}(t) = x_0^{(1)}(t) - x_0^{(1)}(t-1) \quad t = 2, 3, \dots, T\}$$

如果对原始数据经过多次累加生成 (s -AGO) 后的数据建立 GM 模型, 则所得到的模型计算值须通过同样次数的累减生成 (s -IAGO) 进行还原。

2. 光滑离散函数

由数值逼近理论说明, 积分运算或求和运算实际上是一种光滑运算; 相反, 求导、微分或差分则是粗糙运算, 这是 GM 建模的基础。由于 GM 模型要求建模所使用的离散数据列满足光滑性, 才能保证数据列符合灰指数律。所以要求 GM 建模数据列为光滑离散函数, 下面给出判断离散函数满足光滑性的弱条件。

设 $X^{(0)}$ 为非负离散数据列 $\{x^{(0)}(t) \quad t=1, 2, \dots, T\}$ 则令

$$\varepsilon_k = \frac{x^{(0)}(t)}{\sum_{k=1}^{t-1} x^{(0)}(k)} = \frac{x^{(0)}(t)}{x^{(1)}(t-1)} \quad k=3, 4, \dots, T$$

若 $\{\varepsilon_k; k=3, \dots, T\}$ 是递减数列, 且 $0 \leq \varepsilon_k < 1$; 并满足当 T 充分大时, 该数列收敛于 0, 则称数据列 $X^{(0)}$ 为光滑离散函数。

注: 对本征性灰系统, 均可采用光滑数据列进行 GM 建模。若原始数据列 $X^{(0)}$ 不满足光滑性时, 则可对原始数据列 AGO 加工处理, 直到 s -AGO 后 $X^{(s)}$ 为光滑离散函数为止。

3. 估计 GM(n, h) 模型的参变量

以下将分几个步骤对 GM 模型式 (5-1) 中的参变量作辨识估计。

(1) 假定对 $h = m+1$ 个原始数据列 $X_0^{(0)}, X_1^{(0)}, \dots, X_m^{(0)}$ 进行 1-AGO 处理得到的 $X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, \dots, X_m^{(1)}$ 满足 GM 建模的光滑性, 则可在 $X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, \dots, X_m^{(1)}$ 各数据列的基础上建立 GM(n, h) 模型如下:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{n-i} x_0^{(1)}}{dt^{n-i}} = \sum_{j=1}^m b_j x_j^{(1)} \quad (5-2)$$

(2) 由于离散等距时间数列 $\Delta t = t - (t - 1) = 1$, 于是将微商改作差商表示如下 :

$$\frac{d^{n-i}x_0^{(1)}}{dt^{n-i}} = \frac{\Delta^{n-i}x_0^{(1)}}{\Delta t^{n-i}} = \Delta^{n-i}x_0^{(1)}$$

(3) 对数据列 $X_0^{(1)} = \{x_0^{(1)}(t) \mid t = 1, 2, \dots, T\}$ 作多次 IAGO 处理, 并表达如下 :

1 - IAGO :

$$\nabla^{-1}x_0^{(1)}(t) = x_0^{(1)}(t) - x_0^{(1)}(t-1), \\ t = 2, 3, \dots, T$$

2 - IAGO :

$$\nabla^{-2}x_0^{(1)}(t) = \nabla^{-1}x_0^{(1)}(t) - \nabla^{-1}x_0^{(1)}(t-1), \\ t = 2, 3, \dots, T$$

同理有

n - IAGO :

$$\nabla^{-n}x_0^{(1)}(t) = \nabla^{-(n-1)}x_0^{(1)}(t) - \nabla^{-(n-1)}x_0^{(1)}(t-1), \\ t = 2, 3, \dots, T$$

(4) 由于

$$\nabla^{n-i}x_0^{(1)}(t) = \nabla^{-(n-i)}x_0^{(1)}(t), \\ t = 2, 3, \dots, T \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

所以, GM 模型(5-2) 式改写为如下模型算式。

$$\nabla^{-n}x_0^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i [-\nabla^{-(n-i)}x_0^{(1)}(t)] \\ + [-a_n \nabla^0 x_0^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^m b_j x_j^{(1)}(t)], \\ t = 2, 3, \dots, T \quad (5-3)$$

(5) 进一步, 在模型式(5-3) 中, 设矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} \nabla^{-n} x_0^{(1)}(2) \\ \nabla^{-n} x_0^{(1)}(3) \\ \dots \\ \nabla^{-n} x_0^{(1)}(T) \end{bmatrix} \alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\nabla^{-(n-1)} x_0^{(1)}(2) & -\nabla^{-(n-2)} x_0^{(1)}(2) & \dots & -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(2) \\ -\nabla^{-(n-1)} x_0^{(1)}(3) & -\nabla^{-(n-2)} x_0^{(1)}(3) & \dots & -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(3) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\nabla^{-(n-1)} x_0^{(1)}(T) & -\nabla^{-(n-2)} x_0^{(1)}(T) & \dots & -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(T) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\nabla^0 x_0^{(1)}(2) & -\nabla^0 x_1^{(1)}(2) & \dots & x_m^{(1)}(2) \\ -\nabla^0 x_0^{(1)}(3) & -\nabla^0 x_1^{(1)}(3) & \dots & x_m^{(1)}(3) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\nabla^0 x_0^{(1)}(T) & -\nabla^0 x_1^{(1)}(T) & \dots & x_m^{(1)}(T) \end{bmatrix}$$

于是,GM模型式(5-3)改写为矩阵模型如下:

$$Y = A\alpha_1 + B\alpha_2$$

或

$$Y = [A \ B] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

或

$$Y = C\alpha$$

其中

$$C = [A \ B] \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

(6) 根据最小二乘法原理有GM模型式(5-2)的参变量的估计值应为

$$\begin{aligned} \alpha &= (C^T C)^{-1} C^T Y \\ &= [(A \ B)^T (A \ B)]^{-1} (A \ B)^T Y \end{aligned} \quad (5-5)$$

注:一般情况下,灰色系统建模法用 $x_0^{(1)}(t)$ 和 $x_0^{(1)}(t-1)$ ($t =$

$2, 3, \dots, T)$ 的两点平滑值, 即 $\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(t) + x_0^{(1)}(t-1)] (t = 2, 3, \dots, T)$ 替代矩阵 B 中 $\nabla^0 x_0^{(1)}(t) (t = 2, 3, \dots, T)$, 于是

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(1)] & x_1^{(1)}(2) & \dots & x_m^{(1)}(2) \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(3) + x_0^{(1)}(2)] & x_1^{(1)}(3) & \dots & x_m^{(1)}(3) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(T) + x_0^{(1)}(T-1)] & x_1^{(1)}(T) & \dots & x_m^{(1)}(T) \end{bmatrix}$$

当计算出 α 的估计值 $\hat{\alpha}$ 后, 即可得到灰色系统的 $GM(n, h)$ 模型式 (5-2), 求解该微分方程, 则可得到该灰色系统的响应函数。

[例 5-1] 利用下表 5-1 数据列建立下列 $GM(2, 2)$ 模型

$$\frac{d^2 x_0^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx_0^{(1)}}{dt} + a_2 x_0^{(1)} = b x_1^{(1)}(t)$$

表 5-1 原始数据列及其累加生成数据表

t	$X_0^{(0)}$	$X_1^{(0)}$	$X_0^{(1)}$	$X_1^{(1)}$
1	2.874	7.040	2.874	7.040
2	3.278	7.645	6.152	14.685
3	3.337	8.075	9.489	22.750
4	3.390	8.530	12.879	31.290
5	3.679	8.774	16.558	40.064

(1) 估计微分方程模型参数: 根据估计参数 a 算式, 因为

$$Y = [\nabla^{-2} x_0^{(1)}(2), \nabla^{-2} x_0^{(1)}(3), \nabla^{-2} x_0^{(1)}(4), \nabla^{-2} x_0^{(1)}(5)]^T \\ = [0.404 \quad 0.059 \quad 0.053 \quad 0.289]^T$$

$$[A \dots B] = \begin{bmatrix} -\nabla^{-1}x_0^{(1)}(2) & -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(1) + x_0^{(1)}(2)] & x_1^{(1)}(2) \\ -\nabla^{-1}x_0^{(1)}(3) & -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(3)] & x_1^{(1)}(3) \\ -\nabla^{-1}x_0^{(1)}(4) & -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(3) + x_0^{(1)}(4)] & x_1^{(1)}(4) \\ -\nabla^{-1}x_0^{(1)}(5) & -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(4) + x_0^{(1)}(5)] & x_1^{(1)}(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3.278 & -4.513 & 14.685 \\ -3.337 & -7.820 & 22.750 \\ -3.390 & -11.184 & 31.290 \\ -3.679 & -14.718 & 40.064 \end{bmatrix}$$

所以有

$$\alpha = [a_1, a_2, b]^T = [-0.298, 1.100, -0.240]^T$$

于是, 得到 GM(2, 2) 微分方程模型

$$\frac{d^2 x_0^{(1)}}{dt^2} - 0.298 \frac{dx_0^{(1)}}{dt} + 1.1x_0^{(1)} = -0.24x_1^{(1)}(t)$$

(2) 计算微分方程模型特征根: 由于特征方程为 $\lambda^2 - 0.298\lambda + 1.1 = 0$, 所以其特征根分别为

$$\lambda_{1,2} = \frac{0.298 \pm \sqrt{0.298^2 - 4 \times 1.1}}{2} = 0.149 \pm i$$

即有

$$\lambda_1 = a + i\omega = 0.149 + i$$

$$\lambda_2 = a - i\omega = 0.149 - i$$

(3) 求微分方程模型的响应函数: 由于系统微分方程模型的特征根是共轭复根, 所以其响应函数可表示为

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) e^{-at} \\ &= (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) e^{-0.149t} \end{aligned}$$

令 $t=0$, 得 $x_0^{(1)}(0) = 2.874$ 。且当 $t=0$ 时

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} = 2.874 - 2.643 = 0.201$$

则有 $A_1 = x_0^{(1)}(0) = 2.874$, 于是有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx_0^{(1)}}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d(A_1 \cos t + A_2 \sin t)e^{-at}}{dt} \right|_{t=0} \\ &= [(-A_1 \sin t + A_2 \cos t)e^{-at} \\ &\quad + (-A_1 \cos t + A_2 \sin t)(-a)e^{-at}]_{t=0} \end{aligned}$$

即有

$$A_2 - 0.149 \times 2.872 = 0.201$$

所以有

$$x_0^{(1)}(t+1) = (2.874 \cos t + 0.659 \sin t)e^{-0.149t}$$

可见系统微分方程模型的响应函数是一个振荡衰减过程。

四、GM 模型分类

灰色系统建模用到的模型，一般是微分方程描述的动态模型；时间函数形式的响应模型；拉普拉斯变换关系的线性常系数动态模型。对于一个 n 阶、 $h (= 1 + m)$ ：表示 1 个主因素和 m 个参考因子) 个变量的 $GM(n, h)$ 模型，不同的 n 和 h 的 GM 模型有着不同的意义和用途，描述灰色系统常用的 GM 模型有以下三类。

1. 预测模型 $GM(n, 1)$

$GM(n, 1)$ 模型是指具有一个变量的 n 阶导数的灰色系统模型，实际上这个变量就是灰色系统中的主因素。在实际中，建立 $GM(n, 1)$ 模型的 n 一般小于 3。由于 n 越大，计算也就越复杂，而且精度不高。一般情况下多取 $n=1$ ，则 $GM(1, 1)$ 模型即为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u$$

显然，该模型计算简单，缺点是不能反映灰色系统的动态过程，但通过建立多次残差 $GM(1, 1)$ 模型进行修改补充，就能够反映系统的动态情况。

2. 状态模型 GM(1 h)

即为控制论中的状态模型，或称传递函数模型，表示系统一种输入与输出的关系。在灰色系统理论中 GM(1 h)模型是对系统参考因子 $X_j(j=1, 2, \dots, m)$ 对主因素 X_0 影响的过程状态描述。其模型为

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} + ax_0^{(1)} = b_1 x_1^{(1)} + b_2 x_2^{(1)} + \dots + b_m x_m^{(1)}$$

其中， $h=1+m$ 。需要指出的是，GM(1 1)模型是对单一的主因素变量灰色系统行为数据列的模拟或拟合；而 GM(1 h)模型是拟合灰色系统可能的诸多输入（即为参考或比较因子）与输出（即为主因素）的关联描述，于是，可利用对参考因子数据列的预测实现对主因素行为特征的预测。

3. 静态模型 GM(0 h)

GM(0 h)表示不考虑主因素变量的导数，只需了解主因素与各参考因子间的静态关系，所以是静态模型。其形式为

$$x_0^{(1)} = \sum_{j=1}^{h-1} b_j x_j^{(1)} + b_0, \quad h = m + 1$$

下面将按上述模型分类分别讨论第一类的预测模型和第二类的状态模型的建模机理及其应用，而第三类的静态模型是不含导数项的线性方程模型显然较为简单，在此不再赘述。

第二节 GM(n 1)建模与应用

一、GM(n 1)模型

在式 (5-2) 中，令 $h=1$ ，并记

$$u = \sum_{j=1}^{h-1} b_j x_j^{(1)}$$

则相应的微分方程为

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{n-i} X_0^{(1)}}{dt^{n-i}} = u$$

称之为 GM(n, 1) 模型, 其中,

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \dots u]^T \\ &= [(A \ B)^T (A \ B)]^{-1} (A \ B)^T Y \\ Y &= [\nabla^n X_0^{(1)}(2), \nabla^n X_0^{(1)}(3), \dots, \nabla^n X_0^{(1)}(T)]^T \\ A &= \begin{bmatrix} -\nabla^{-(n-1)} X_0^{(1)}(2) & -\nabla^{-(n-2)} X_0^{(1)}(2) & \dots & -\nabla^{-1} X_0^{(1)}(2) \\ -\nabla^{-(n-1)} X_0^{(1)}(3) & -\nabla^{-(n-2)} X_0^{(1)}(3) & \dots & -\nabla^{-1} X_0^{(1)}(3) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\nabla^{-(n-1)} X_0^{(1)}(T) & -\nabla^{-(n-2)} X_0^{(1)}(T) & \dots & -\nabla^{-1} X_0^{(1)}(T) \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[X_0^{(1)}(2) + X_0^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[X_0^{(1)}(3) + X_0^{(1)}(2)] & 1 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}[X_0^{(1)}(T) + X_0^{(1)}(T-1)] & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[例 5-2] 设有贫信息 (即数据量小) 的灰色系统行为数据列及其相关计算值如下表 5-2 所示, 试建立 GM(2, 1) 模型。

表 5-2 某一灰色系统行为数据及其累加和累减生成数据表

t	1	2	3	4	5
$X_0^{(0)}$	2.874	3.278	3.307	3.390	3.679
$X_0^{(1)}$	2.874	6.152	9.459	12.849	16.528
$\nabla^{-1} X_0^{(1)}$		3.278	3.307	3.390	3.679
$\nabla^{-2} X_0^{(1)}$		0.404	0.059	0.053	0.289

1. 估计 GM(2, 1) 模型的参变量

根据 GM(2, 1) 的模型结构, 有

$$\frac{d^2 x_0^{(1)}}{dt} + a_1 \frac{dx_0^{(1)}}{dt} + a_2 x_0^{(1)} = u$$

利用最小二乘法估计微分方程模型参数

$$\alpha = [a_1, a_2, u]^T = ([A \dots B]^T [A \dots B])^{-1} [A \dots B]^T Y$$

其中

$$[A \dots B] = \begin{bmatrix} -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(2) & -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(1) + x_0^{(1)}(2)] & 1 \\ -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(3) & -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(3)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(T) & -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(T-1) + x_0^{(1)}(T)] & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [\nabla^{-2} x_0^{(1)}(2), \nabla^{-2} x_0^{(1)}(3), \dots, \nabla^{-2} x_0^{(1)}(T)]^T$$

则微分方程模型的特征方程为 $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ ，其特征根分别为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}$$

注：下面补充说明，求二阶常系数微分方程的响应函数的方法。

设方程为 $ax'' + bx' + cx = u$ ，则其特征方程为 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ 。该特征方程的两个特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b_1^2 + 4ac}}{2}$$

并且满足如下关系

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}, \lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}$$

于是，原微分方程的特征方程可表示为

$$x'' - (\lambda_1 + \lambda_2) x' + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

再变换为

$$(x' - \lambda_1 x')' = \lambda_2 (x' - \lambda_1 x)$$

令 $y = x' - \lambda_1 x$, 则有 $y' = \lambda_2 y$ 。故对该一阶微分方程求解可得

$$y = x' - \lambda_1 x = Ae^{\lambda_2 t}$$

其中, A 是任意常数。再次对求解得出的一阶微分方程求解又可得

$$x = Be^{\lambda_1 t} + Ae^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt \quad (B \text{ 为任意常数})$$

$$= \begin{cases} (B + A) e^{\lambda_1 t} & (\text{当 } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ 时}) \\ Be^{\lambda_1 t} + \frac{A}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} & (\text{当 } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ 时}) \end{cases}$$

最后求得二阶常系数线性微分方程的通解为

(1) 若 $\lambda_1 = \lambda_2$, 其通解为

$$x = e^{\lambda_1 t} (c_1 + c_2 t)$$

则系统动态过程是单调的。

(2) 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 其通解为

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{u}{a_2}$$

则系统动态过程可能是非单调的。式中 c_1 和 c_2 是两个任意常数。

若 λ_1 和 λ_2 为共轭复根, 则系统动态过程是周期振荡的。

由于本例所给定的数据列有

$$Y = \begin{bmatrix} \nabla^{-2} x_0^{(1)}(2) \\ \nabla^{-2} x_0^{(1)}(3) \\ \nabla^{-2} x_0^{(1)}(4) \\ \nabla^{-2} x_0^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.404 \\ 0.059 \\ 0.053 \\ 0.289 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(2) \\ -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(3) \\ -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(4) \\ -\nabla^{-1} x_0^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.278 \\ -3.307 \\ -3.390 \\ -3.679 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(3) + x_0^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(4) + x_0^{(1)}(3)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(5) + x_0^{(1)}(4)] & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.513 & 1 \\ -7.820 & 1 \\ -11.184 & 1 \\ -14.7185 & 1 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.48 \\ -1.04 \\ 92.9 \end{bmatrix}$$

故得到相应的微分方程模型为

$$\frac{d^2 x_0^{(1)}}{dt} + 30.48 \times \frac{dx_0^{(1)}}{dt} - 1.04 \times x_0^{(1)} = 92.9$$

2. 估计响应函数的参变量

根据本例开始的论述，由于上述微分方程的响应函数模型为

$$x_0^{(1)}(t+1) = c_1 e^{0.0314k} + c_2 e^{-30.514k} - 89.33$$

对上述响应函数求导，得

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dk} = 0.0314c_1 e^{0.0314k} - 30.514c_2 e^{-30.514k}$$

两式分别取 $t=0$ 和 $k=0$ 得到以下联立方程组

$$c_1 + c_2 = 92.204$$

$$0.0314c_1 - 30.514c_2 = 0.213$$

解得 $c_1 = 92.192$ ， $c_2 = -0.1$ 。于是得到响应函数模型，

$$x_0^{(1)}(t+1) = 92.192e^{0.0314k} + 0.1e^{-30.514k} - 89.33$$

3. 模型精度检验

分别将 $k=0, 1, 2, 3, 4$ 代入响应函数式，得到微分方程模型的响应序列 $x_0^{(1)}$ ，并对 $x_0^{(1)}$ 作 1- IAGO 为灰色系统主因素行为序列

计算值 $X_0^{(0)}$ ，再进行残差和相对误差计算，下面将计算值列于表5 - 3。

表 5 - 3 模型精度检验计算表

t	$X_0^{(1)}$	$X_0^{(0)}$	$\varepsilon = X_0^{(1)} - X_0^{(0)}$	$\varepsilon / X_0^{(0)} (\%)$
0	2.862	2.862	0.012	0.4175
1	6.050	3.188	0.090	2.7456
2	9.349	3.299	0.038	1.1387
3	12.760	3.411	- 0.021	- 0.1695
4	16.292	3.532	0.147	3.9957

二、GM(1, 1)模型

根据上述讨论可见：在 GM(n, 1)模型中，当 $n > 1$ 时，计算和求解过程相当复杂。所以，在一般情况下，如果能通过较简单的 GM(1, 1) 模型较好地拟合灰色系统主因素行为过程，则利用 GM(1, 1) 模型作为灰色系统行为的预测模型是较为理想的。

对于 GM(1, 1) 模型

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u$$

有

$$\alpha = [a, u]^T = [B^T, B]^{-1} B^T Y$$

其中

$$Y = [x_0^{(0)}(2), x_0^{(0)}(3), \dots, x_0^{(0)}(T)]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(3) + x_0^{(1)}(2)] & 1 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(T) + x_0^{(1)}(T-1)] & 1 \end{bmatrix}$$

求解微分方程模型的响应函数如下：

$$x_0^{(1)}(t+1) = [x_0^{(0)}(1) - \frac{u}{a}]e^{-at} + \frac{u}{a}$$

或

$$x_0^{(0)}(t+1) = x_0^{(1)}(t+1) - x_0^{(1)}(t)$$

其中, $t=0, 1, 2, \dots, T$, $x_0^{(0)}(1) = x_0^{(0)}(0)$ 。

[例 5-3] 根据下表相关数据建立 GM(1, 1)模型。

表 5-4 某地区 1991 - 1998 年国民生产总值和相关计算数据表

单位：亿元

年份	1991	1992	1993	1994
t	1	2	3	4
$x_0^{(0)}(t)$	33.27	30.93	43.88	63.51
$x_0^{(1)}(t)$	33.27	62.20	108.08	171.59
年份	1995	1996	1997	1998
t	5	6	7	8
$x_0^{(0)}(t)$	127.84	138.84	141.78	156.47
$x_0^{(1)}(t)$	298.62	437.46	579.24	735.71

于是, 由表 5-4 中的数据, 可计算出

$$\alpha = [-0.199, 41.4562]^T$$

那么, 相应的 GM(1, 1)模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.199x^{(1)} = 41.4562$$

响应函数为

$$x_0^{(1)}(t+1) = 241.62e^{0.199t} - 208.35$$

[例 5-4] 某地 1991 - 1995 年人口数据及其 1 - AGO 数据列计算如下表所示, 利用 1991 - 1994 年的数据建立该地区 GM(1, 1)人口预测模型, 预测该地区 1995 年人口数, 并与实际数相比较。

表 5 - 5 某地 1991 - 1995 年人口及 1 - AGO 计算数据表

单位：万人

年份	1991	1992	1993	1994	1995
t	1	2	3	4	5
$X_0^{(0)}$	383.3775	393.0404	399.3632	406.0071	414.6215
$X_0^{(1)}$	383.3775	776.4179	1175.7811	1581.7882	

(1) 估计模型参数 α 。因为

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(1) + x_0^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(3)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(3) + x_0^{(1)}(4)] & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -579.8977 & 1 \\ -976.0995 & 1 \\ -1378.7846 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [393.0404 \ 399.3632 \ 406.0071]^T$$

所以

$$\begin{aligned} \alpha &= [a \ \mu]^T = [B^T B]^{-1} B^T Y \\ &= [-0.01623178 \ 383.5911]^T \end{aligned}$$

于是该地区人口预测的 GM(1, 1) 模型为

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} - 0.01623178x_0^{(1)} = 383.5911$$

其响应函数为

$$x_0^{(1)}(t+1) = 24015.49e^{0.01623178t} - 23632.11$$

(2) 模型计算精度检验：检验计算下表 5 - 6 所示。

表 5 - 6 模型响应值、还原值和误差计算表

单位：万元

t	$X_0^{(1)}$	$X_0^{(0)}$	$X_0^{(0)}$	残差	误差 (%)
2	776.3711	392.9936	393.0404	0.048	0.012
3	1175.7970	399.4258	399.3672	-0.062	-0.015
4	1581.7600	405.9629	406.0071	0.044	0.010

注：还原计算式为

$$X_0^{(0)}(t) = x_0^{(1)}(t) - x_0^{(1)}(t-1)$$

可见，还原计算值与原始数据的平均相对误差为 0.012%，说明模型拟合精度较高。

(3) 模型预测。

当时 $t=4$ 时， $x_0^{(0)}(5) = 412.6055$ （万人）。从表 5-4 可知 1995 年该地区实际人口为 414.6215 万人，计算值与实际人口误差 0.48%，说明预测结果较为理想。

三、模型及其预测精度评价

1. GM(1,1)模型精度检验

GM 模型的精度一般采用后验残差进行检验，即若按 GM(1,1) 模型计算值序列 $X_0^{(1)}$ 还原为灰色系统特征行为数列 $X_0^{(0)}$ 后，计算其与原始数据列 $X_0^{(0)}$ 的残差

$$\varepsilon(t) = X_0^{(0)}(t) - \bar{X}_0^{(0)}(t), \quad t = 1, 2, \dots, T$$

并分别计算原始数列和残差序列的方差 S_0^2 和 S_ε^2 ，利用后验差比值和小误差概率进行 GM(1,1) 模型精度评价如下：

$$S_0^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [x_0^{(0)}(t) - \bar{x}_0^{(0)}]^2$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}]^2$$

其中

$$\bar{x}_0^{(0)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_0^{(0)}(t), \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon(t)$$

设后验差比值检验系数和小误差概率检验值为

$$C = S_\varepsilon^2 / S_0^2$$

$$P = P\{|\varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}| < 0.6745 S_0\}$$

一般情况下，模型精度按下表 5 - 7 所列等级评价。

表 5 - 7 GM(1, 1)模型精度评价等级

精度评价等级	p	C
1 级 (好)	$0.95 \leq p$	$C \leq 0.35$
2 级 (合格)	$0.80 \leq p < 0.95$	$0.35 < C \leq 0.50$
3 级 (勉强)	$0.70 \leq p < 0.80$	$0.50 < C \leq 0.65$
4 级 (不合格)	$p < 0.70$	$0.65 < C$

注：p = 满足 $|\varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}| < 0.6745S_0$ 的基本事件数 / T

GM 精度等级 = {p 值等级, C 值等级}

2. GM 模型预测精度评价

由上述讨论可知，后验差方法用于衡量 GM 模型的拟合精度，但不能评价模型的预测精度。于是采用以推算预测值的均方差作为模型预测精度评价尺度。

因为 GM(1, 1)模型的计算值为

$$x_0^{(1)}(t+1) = [x_0^{(0)}(1) - \frac{u}{a}]e^{-at} + \frac{u}{a}$$

求导还原处理为

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} = [u - ax_0^{(0)}(1)]e^{-at}$$

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} = x_0^{(1)}(t+1) - x_0^{(1)}(t) = x_0^{(1)}(t+1)$$

于是，系统行为特征的预测值为

$$x_0^{(0)}(t+1) = [u - ax_0^{(0)}(1)]e^{-at}$$

按方差传播原理，该预测序列值的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0^{(0)}(t+1)}^2 &= \left(\frac{\partial x_0^{(0)}}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial x_0^{(0)}}{\partial u} \right)^2 \sigma_u^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 x_0^{(0)}}{\partial a \partial u} \sigma_{au} + \left(\frac{\partial x_0^{(0)}}{\partial x_0^{(0)}(1)} \right)^2 \sigma_0^2 \end{aligned}$$

由于，上式中的第三项对预测值的方差影响较小，故改写为

$$\sigma_{x_0^{(0)}(t+1)}^2 = \left(\frac{\partial x_0^{(0)}}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial x_0^{(0)}}{\partial u} \right)^2 \sigma_u^2 + 2 \frac{\partial^2 x^{(0)}}{\partial a \partial u} \sigma_{au}$$

可以证明，若记

$$\bar{B} = [B^T B]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{bmatrix}$$

其中， $\bar{b}_{12} = \bar{b}_{21}$ 。则有

$$\sigma_u^2 = \bar{b}_{11} \sigma_0^2, \sigma_a^2 = \bar{b}_{22} \sigma_0^2, \sigma_{au} = \bar{b}_{12} \sigma_0^2 = \bar{b}_{21} \sigma_0^2$$

式中

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [\varepsilon(t)]^2}$$

于是有

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0^{(0)}(t+1)}^2 &= \{[atx_0^{(0)}(1) - x_0^{(0)}(1) - tu]^2 \bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} \\ &\quad + 2[atx_0^{(0)}(1) - x_0^{(0)}(1) - tu] \bar{b}_{12}\}^{\frac{1}{2}} e^{-at} \sigma_0 \end{aligned}$$

即 $x_0^{(0)}(t+1)$ 的预测值为

$$x_0^{(0)}(t) \pm \sqrt{\sigma_{x_0^{(0)}(t)}^2}$$

四、负时间数列的 GM(1, 1) 模型

一般情况下，GM 建模仅针对非负数据列，即反映灰色系统行为特征的原始数据是非负值，但实际中，若原始数据列出现负值时，则可采用非负化处理后，再利用 GM 建模方法建立灰模型。原始数据非负化处理方法如下：

(1) 设有负值的原始数据列为

$$X_0^{(0)} = \{x_0^{(0)}(t) | t = 1, 2, \dots, T\}$$

(2) 选定数据列中最小负数为

$$\min(-) = \min\{x_0^{(0)}(t)\}$$

(3) 令 $\tilde{x}_0^{(0)}(t) = x_0^{(0)}(t) + 2|\min(-)|$ ， $t = 1, 2, \dots, T$ 。

(4) 利用非负化或正化处理后的数据列 $\hat{X}_0^{(0)}$ 作为原始数据列建立 GM 模型。

第三节 GM(1 h)建模与应用

一、GM(1 h)建模

若灰色系统的主因素行为特征数据列为 $X_0^{(0)}$ ，参考因子行为特征数据列为 $X_j^{(0)} (j = 1, 2, \dots, m)$ ，即当 $X_0^{(0)}$ 为系统输出行为数据列， $X_j^{(0)} (j = 1, 2, \dots, m)$ 是影响系统输出的关联因子行为输入数据列时，需要观察关联因子整体对系统输出因子的影响状况，则可建立 GM(1 h) 状态模型进行研究与分析，其中 $n=1$ 表示对系统输出变量的一阶导数， $h=m+1$ 表示模型中的 h 个变量，即 1 个系统主因素变量和 m 个参考因子变量，模型如下：

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} + ax_0^{(1)} = b_1x_1^{(1)} + b_2x_2^{(1)} + \dots + b_mx_m^{(1)}$$

模型中参变量的估计值为

$$\alpha = [a, b_1, b_2, \dots, b_m]^T = [B^T B]^{-1} B^T Y$$

其中

$$Y = [x_0^{(0)}(2), x_0^{(0)}(3), \dots, x_0^{(0)}(T)]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(1)] & x_1^{(1)}(2) & \dots & x_m^{(1)}(2) \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(3) + x_0^{(1)}(2)] & x_1^{(1)}(3) & \dots & x_m^{(1)}(3) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(T) + x_0^{(1)}(T-1)] & x_1^{(1)}(T) & \dots & x_m^{(1)}(T) \end{bmatrix}$$

$$x_0^{(1)}(t+1) = [x_0^{(0)}(1) - \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{a} x_j^{(1)}(t+1)] e^{-at} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{a} x_j^{(1)}(t+1),$$

$$t = 2, 3, \dots, T$$

【例 5-5】 设某系统输出数据列及其关联输入数据列如下表 5-8 所示，试建立 GM(1, 2) 模型描述该系统输出与输入的关联状态。

表 5-8 某系统输出与输入数据及其 1-AGO 数据表

t	1	2	3	4	5
$X_0^{(0)}$	2.874	3.278	3.307	3.390	3.679
$X_1^{(0)}$	7.040	7.465	8.075	8.530	8.774
$X_0^{(1)}$	2.874	6.152	9.459	9.849	16.528
$X_1^{(1)}$	7.040	14.685	22.760	31.290	40.064

(1) 估计 GM(1, 2) 模型中的参变量。

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} + ax_0^{(1)} = b_1 x_1^{(1)}$$

因为

$$Y = [x_0^{(0)}(2) \ x_0^{(0)}(3) \ x_0^{(0)}(4) \ x_0^{(0)}(5)]^T$$

$$= [3.278 \ 3.307 \ 3.390 \ 3.379]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(2) + x_0^{(1)}(1)] & x_1^{(1)}(2) \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(3) + x_0^{(1)}(2)] & x_1^{(1)}(3) \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(4) + x_0^{(1)}(3)] & x_1^{(1)}(4) \\ -\frac{1}{2}[x_0^{(1)}(5) + x_0^{(1)}(4)] & x_1^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.513 & 14.685 \\ -7.806 & 22.790 \\ -11.154 & 31.260 \\ -14.689 & 40.064 \end{bmatrix}$$

所以有

$$\alpha = [a, b_1]^T = [B^T B]^{-1} B^T Y = [2.2273 \ 0.9067]^T$$

于是，得到 GM(1, 2) 微分方程模型为

$$\frac{dx_0^{(1)}}{dt} + 2.2273x_0^{(1)} = 0.9067x_1^{(1)}$$

(2) 求模型的响应函数，因为

$$x_0^{(1)}(t+1) = [x_0^{(1)}(1) - \frac{b_1}{a}x_1^{(1)}(t+1)]e^{-at} + \frac{b_1}{a}x_1^{(1)}(t+1)$$

式中

$$x_0^{(1)} = x_0^{(1)}(1) = 2.874$$

所以有

$$x_0^{(1)}(t+1) = [2.874 - 0.41x_1^{(1)}(t+1)]e^{-2.2273t} + 0.41x_1^{(1)}(t+1)$$

$$t=0, 1, 2, 3, 4$$

(3) 模型精度检验，如表 5-9 所示。

表 5-9 模型计算值及其还原值与原始值绝对误差和相对误差计算表

t	$X_0^{(1)}$	$X_0^{(0)}$	$\varepsilon = X_0^{(0)} - X_0^{(1)}$	$\varepsilon / X_0^{(0)} (\%)$
0	2.874	2.874	0	0
1	5.978	3.111	0.167	5.1
2	9.265	3.287	0.020	0.6
3	12.737	3.472	-0.082	-2.4
4	16.389	3.572	0.107	2.9

二、GM(1, h)模型应用

在实际应用中，状态模型 GM(1, h) 一般用于描述系统主因素与关联因子（即参考或比较因子）间的相关行为特征。建立 GM(1, h) 的模型机理在于系统参考因子与系统主因素间存在灰关联性，也就是，在系统原有主因素和关联因子的原始数据列表达的行为过程中，建立 $X_0^{(0)}$ 与 $X_j^{(0)}$ ($j=1, 2, \dots, m$) 间的灰关联模型 GM(1, h)，而模型响应 $X_0^{(1)}$ 的还原数据列 $X_0^{(0)}$ 是系统 GM(1, h)

模型输入 $X_j^{(0)} (j=1, 2, \dots, m)$ 的结果。

注意到，在建立灰色系统主因素和关联因子的状态模型 $GM(1, h)$ 之前，需要考虑到诸多可能与主因素具有灰关联性的参考因子，而通过灰色关联分析法选定 m 个确定的关联因子建立 $GM(1, h)$ 状态模型是必要的。因为，选择适量与主因素相关联的因子建立状态模型 $GM(1, h)$ ，有利于通过 $X_0^{(0)}$ 与 $X_0^{(0)}$ 的拟合状态对关联因子对主因素影响的研究分析。

[例 5-6] 在第四章第四节的赤潮研究案例中，研究发现：拟尖刺菱形藻在我国沿海均有分布，在南海大鹏湾亦为主要的硅藻类赤潮生物，几乎全年都有分布，数量高峰大多出现于夏季。近两年来大鹏湾共发生过多次拟尖刺菱形藻赤潮，由于最近国外有人报道该种多纹变形能产生一种称为软骨藻酸（Domoic Acid）的毒素，又称为记忆健忘型毒素（ASP），故引起特别注意。因此，本例运用灰色系统理论的分析方法先对拟尖刺菱形藻的种群增殖与各海水理化因子间的关系进行灰关联计算、排列与分析，确定对拟尖刺菱形藻的种群密度增殖有重要影响的八个因素，并利用灰色系统的 $GM(1, h)$ 模型对拟尖刺菱形藻的种群的增殖势态进行分析与研究。

1. 地理位置和采样数据

如第四章第四节所述。

2. 确定参考因子和比较因子

这里把拟尖刺菱形藻的种群密度作为参考序列 $\{X_0(k) | k=1, 2, \dots, N\}$ ，其中样值个数 $N=31$ ；以浮游动物种群密度（ind/L）、温度 $\{T(^\circ)\}$ 、盐度 $\{S(0)\}$ 、溶解氧 $\{DO(mg/L)\}$ 、酸碱度 $\{pH\}$ 、浊度、磷酸盐 $\{PO_4(\mu g/L)\}$ 、亚硝酸盐 $\{NO_2(\mu g/L)\}$ 、硝酸盐 $\{NO_3(\mu g/L)\}$ 、硅 $\{Si(\mu g/L)\}$ 、铁 $\{Fe(\mu g/L)\}$ 、锰 $\{Mn(\mu g/L)\}$ 、硒 $\{Se(\mu g/L)\}$ 、钒 $\{V(\mu g/L)\}$ 和钼 $\{Mo(\mu g/L)\}$ 等 15 个因子作为比较序列 $\{X_i(k) | k=$

$1, 2, \dots, N\}(i=1, 2, \dots, 15)$ 。

3. 灰关联分析

(1) 使各因素具备可比性并将各序列初值化：参考序列 $\{Y_0(k) | k=1, 2, \dots, N\} = \{X_0(k)/X_0(1) | k=1, 2, \dots, N\}$ ，其中，若采样值 $X_0(1) = 0$ ，则取下一个采样值，比较序列亦然，即 $\{Y_i(k)\} = \{X_i(k)/X_i(1)\}(i=1, 2, \dots, N)$ 。

(2) 计算灰关联系数：设 $\zeta_i = \{\zeta_i(k) | k=1, 2, \dots, N\}(i=1, 2, \dots, 15)$ 为经初值化的参考序列 $\{Y_0(t)\}$ 与第 i 个比较序列 $\{Y_i(t)\}$ 的关联系数为

$$\zeta_i(k) = \frac{\min_k \Delta_i(k) + \max_k \Delta_i(k)}{\Delta_i(k) + \rho \max_k \Delta_i(k)},$$

$$i=1, 2, \dots, 15; k=1, 2, \dots, N$$

式中， $\Delta_i(k) = |Y_0(k) - Y_i(k)|$ ， $\rho (0 < \rho < 1)$ 为分辨系数，本文取 $\rho = 0.1$ 。

(3) 计算灰关联度为

$$\gamma_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta_i(k), \quad i=1, 2, \dots, 15$$

其中， γ_i 为参考序列 $\{Y_0(t)\}$ 与第 i 个比较序列 $\{Y_i(t)\}$ 的关联度。

(4) 灰关联排序：本文分别对三个站位 S_1 、 S_2 和 S_3 以及表、底层的采样数据进行计算，排序结果列示于表 5-10。

表 5-10 拟尖刺菱形藻与各因子的关联度及排序结果

站 位 层次 因素	S_1		S_2		S_3		均值	排序
	表层 S_{11}	底层 S_{12}	表层 S_{21}	底层 S_{22}	表层 S_{31}	底层 S_{32}		
1. 浮游动物	0.9094	0.9404	0.9378	0.8710	0.9844	0.8858	0.9215	1
2. T	0.8482	0.9143	0.8590	0.7208	0.9373	0.6124	0.8153	10
3. S	0.8627	0.9187	0.8795	0.7426	0.9467	0.6434	0.8323	9
4. DO	0.8750	0.9273	0.8917	0.7769	0.9533	0.6568	0.8468	6
5. PH	0.8617	0.9230	0.8815	0.7505	0.9468	0.6475	0.8352	8

(续上表)

站 位 层次 因素	S ₁		S ₂		S ₃		均值	排 序
	表层	底层	表层	底层	表层	底层		
	S ₁₁	S ₁₂	S ₂₁	S ₂₂	S ₃₁	S ₃₂		
6. 浊度	0.8984	0.9239	0.9125	0.8049	0.9764	0.8517	0.8946	3
7. PO ₄	0.4616	0.5394	0.4036	0.4003	0.6044	0.7720	0.5302	15
8. NO ₂	0.8364	0.6787	0.8148	0.6628	0.6738	0.6718	0.7231	13
9. NO ₃	0.8536	0.8825	0.6976	0.7390	0.9291	0.6288	0.7884	12
10. Si	0.5109	0.8441	0.7457	0.5876	0.7220	0.5367	0.6578	14
11. Fe	0.9061	0.8749	0.9338	0.8270	0.9826	0.8470	0.8952	2
12. Mn	0.8916	0.9434	0.9120	0.7932	0.9695	0.6235	0.8555	4
13. Se	0.8053	0.9150	0.8888	0.7447	0.9393	0.7271	0.8367	7
14. V	0.8528	0.9210	0.8880	0.7735	0.9445	0.7056	0.8476	5
15. Mo	0.8810	0.8949	0.8308	0.7241	0.8978	0.5608	0.7982	11

4. 灰色模型辨识

经上述灰关联分析,本文选取对拟尖刺菱形藻种群密度增殖的影响度列前八位的因素:浮游动物、铁、浊度、锰、钒、溶解氧、硒和酸碱度,作为建立拟尖刺菱形藻种群密度灰关联模型GM(1, h)的要素,方法如下:

(1) 设 $\{X_i^{(0)}(k) \mid k = 1, 2, \dots, N\}$ ($i = 1, 2, \dots, h$) 分别为拟尖刺菱形藻、浮游动物、铁、浊度、锰、钒、溶解氧、硒和酸碱度的原始序列,其中, $N=31$ 为采样值个数, $h=9$ 为变量个数。

(2) 为建模提供中间信息,弱化原始序列的随机性,对原始序列进行一次累加生成化序列。

$$X_i(k) = \sum_{t=1}^k X_i^{(0)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, h$$

(3) 建立 GM(1, h) 模型。其中

$$\frac{dX_1}{dt} + aX_1 = \sum_{i=2}^h b_{i-1}X_i$$

$$\alpha = [a, b_1, b_2, \dots, b_{h-1}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N$$

$$Y_N = [X_1(2), X_1(3), \dots, X_1(N)]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[X_1(2) + X_2(1)] & X_2(2) & \dots & X_n(2) \\ -\frac{1}{2}[X_1(3) + X_2(2)] & X_2(3) & \dots & X_n(3) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\frac{1}{2}[X_1(N) + X_2(N-1)] & X_2(N) & \dots & X_n(N) \end{bmatrix}$$

并分别对 S_1 、 S_2 和 S_3 等三个站位的表、底层的采样值，将模型的参数估计值 a 的计算结果列于表 5 - 11。并将 GM 模型的预测值与实测值的比较图作于图 5 - 2，其中纵坐标为拟尖刺菱形藻的种群密度 (cell/L)，横坐标为天数。

表 5 - 11 三个站位表底层的模型参数

参数 站位		a	b_1	b_2	b_3	b_4
S_1	表层	- 0.2269	- 2.5234	0.2763	10.5234	- 0.7505
	底层	0.4012	2.0433	- 0.5704	- 14.6572	0.2919
S_2	表层	0.2385	- 3.4798	- 0.0482	- 7.3364	0.3193
	底层	- 0.0536	7.6625	1.0598	- 6.5949	- 0.1196
S_3	表层	0.1704	- 0.3140	- 0.3096	3.9879	1.0956
	底层	- 0.2520	- 0.3915	0.1549	- 3.1967	- 0.1083
参数 站位			b_5	b_6	b_7	b_8
S_1	表层		2.6233	- 2.6936	- 0.4442	1.9905
	底层		- 6.1873	- 1.6069	2.1332	- 5.0881
S_2	表层		0.9804	6.2593	1.5687	- 5.7345
	底层		- 2.2748	- 7.1694	- 0.8934	5.7518
S_3	表层		- 1.7215	3.2427	1.6728	- 3.6691
	底层		- 0.0996	- 1.0885	0.9904	0.6037

5. 结论

(1) 由于浮游动物以拟尖刺菱形藻为饵料，当浮游动物密度

增大时，拟尖刺菱形藻的种群密度会下降，反之亦然。因此对拟尖刺菱形藻的种群密度影响最大，所以关联排序结果列第一位是合理的。

(2) Fe 对拟尖刺菱形藻的种群密度影响排第二位。尽管拟尖刺菱形藻并不直接吸收铁因子，但它具有激活藻类酶的作用。该结论应进一步得到实验室的验证。

(3) 浊度对拟尖刺菱形藻的影响度排列第三位。说明海水的清洁度对尖刺菱形藻的种群密度有着重要的影响。这是因为浊度反映了海水的透明度，它直接影响到拟尖刺菱形藻的光合作用。

(4) Mn、V 和 Se 分列第四、五和七位。它们的作用与 Fe 相同。DO 排第六位。pH、盐度和温度各排第八、九和十位。而 Mo、NO₃、NO₂、Si 和 PO₄ 对拟尖刺菱形藻的影响度相对较弱。

(5) 从图 5 - 2 可以看出，三个站位表底层的六个 GM 模型值与测量值较相吻合，说明模型系统辨识的有效性。

注：从上例可见，在建立灰色系统状态模型进行的过程中，对系统灰色因子进行系统灰关联分析是灰色系统研究的必要手段。通过系统灰关联分析，对系统灰关联排序，从而确定建立灰色系统状态模型，才有可能利用系统辨识方法建立拟合度较好的 GM 状态模型，为进一步对灰色系统的研究打下良好的基础。

第六章 系统辨识方法 (I)

——数学模型描述形式

引进工程的硬朗作风，研究就变得更加实用。相比之下，数学更显其严格的逻辑性，以至于存在许多苛刻的条件，但这并没有影响到我们，哪怕现实中几乎不存在。

第一节 系统辨识概述

系统辨识是研究建立系统数学模型的一种理论和方法。所谓辨识就是从含有噪声的输入输出数据中提取被研究对象的数学模型。一般来说，这个模型只是对象的输入输出特性在某种准则意义下的一种近似，近似的程度取决于人们对系统先验知识的认识深化程度和对数据集合性质的了解，以及所选用的辨识方法是否合理。或者说，辨识技术帮助人们在表征被研究系统对象、现象或过程的复杂因果关系时，尽可能准确地确立它们之间的定量依存关系。

利用系统辨识方法建立系统数学模型，不仅仅是由于需要提高系统的性能或控制、增加对系统的认识或仿真，而且也反映出相关学科的发展与需要。例如，社会与环境系统、经济与企业系统、生物与生态系统和其他高精工程系统的需要是现代系统辨识得到发展的动力。数学与优化理论的引入及计算机的高速发展，给予系统辨识理论与应用注入了新的活力。

一、建立系统数学模型的基本方法

1. 机理分析法

这种方法通常需要分析系统的运行规律，运用一些已知的定律、定理和原理，如化学动力原理、生物学定律、牛顿定理、物料平衡方程、能量平衡方程和传热传质原理等，才能建立系统运行过程的数学模型。这种方法也称为理论建模法。

[例 6 - 1] 求图 6 - 1 的加热装置的数学模型。

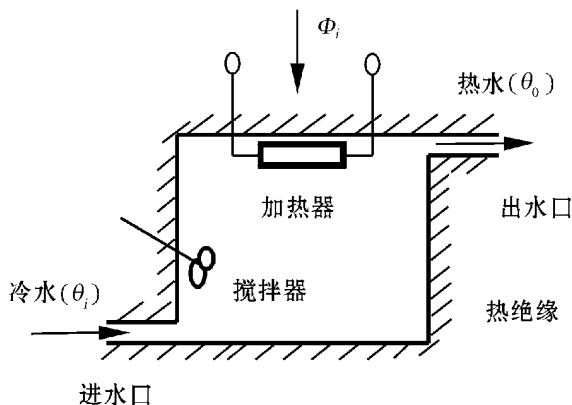


图 6 - 1 (a) 加热装置原理图

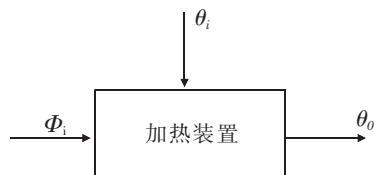


图 6 - 1 (b) 加热装置方块图

设水箱进水流量和出水流量 q 保持不变。进水的水温为 θ_i ，水箱的水温（即出水的水温）为 θ_0 ，加热器在单位时间里提供的热量（称热流量）为 Φ_i 。根据热量平衡定理可列出热平衡方程式

$$\Phi_i + \Phi_c = \Phi_T + \Phi_0 + \Phi_s$$

式中采用实用单位制，热流量单位为 W ，温度单位为 $^{\circ}C$ ，水流量单位为 kg/s ，并且

Φ_c ：进水带来的热流量。若水的比热为 C_p ($J/kg \cdot ^{\circ}C$) 则

$$\Phi_c = CqC_p\theta_i$$

Φ_T ：水箱中水得到的热流量。它将引起水箱中水温的上升，设水箱中水的热容量为 C ($J/^{\circ}C$)，则

$$\Phi_T = C \frac{d\theta_0}{dt}$$

Φ_0 ：出水带走的热流量为

$$\Phi_0 = qC_p\theta_0$$

Φ_s ：水箱向周围散失的热流量。设水箱只通过内壁向周围散热，并设周围环境温度也为 θ_i ，以及等效热阻为 R ($^{\circ}C/W$)，则有

$$\Phi_s = \frac{\theta_0 - \theta_i}{R}$$

于是，热平衡方程式可表示为

$$C \frac{d\theta_0}{dt} + qC_p(\theta_0 - \theta_i) + \frac{\theta_0 - \theta_i}{R} = \Phi_i$$

经整理后可得加热装置的微分方程模型为

$$T \frac{d\theta_0}{dt} + (qC_p R + 1)\theta_0 = R\Phi_i + (qC_p R + 1)\theta_i$$

上例表明机理分析法只能用于简单过程的建模。对于比较复杂的实际系统运行过程来说，这种建模方法有很大的局限性。这是因为进行理论建模时，对所研究的对象必须提出合理的简化假定，否则会使问题过于复杂化，然而这些假定往往不一定能符合实际情

况。何况实际过程的机理有时也并非完全知道。另外，系统的某些因素也可能在不断变化，而又难以精确描述，如水箱的积垢和老化等。诸如此类的原因使得理论建模法必须和下面所说的测试法结合起来使用。

2. 测试法

系统的输入输出信号一般总是可以测量的。由于系统的动态特性必然表现在这些输入输出数据之中，那么就可以利用输入输出数据所提供的信息来建立系统行为特征的数学模型。这种建模方法就叫做辨识。

就某种意义上来说，测试法较机理分析法有一定的优越性。因为它无须深入了解系统的机理。但是，这又不是绝对的，测试法的关键之一是必须设计一个合理的实验，以获得系统所含的最大信息量，这点往往又是非常困难的。因此，两种建模方法在不同的应用场合可能各有千秋。实际使用时，两种方法应该是相互补充，而不能相互取代。自动控制专家 Aström 把理论建模问题称作“白箱”问题；又把辨识建模问题称作“黑箱”问题。本章的重点是讨论“黑箱”问题。同时，Aström 还提出一种“灰箱”理论，即理论建模和辨识建模两种方法结合起来使用，机理已知的部分采用理论建模方法，机理未知的部分采用辨识建模的方法。这将充分发挥两种方法各自的优点。

不论采用哪种建模方法，都必须首先弄清待辨识对象的层次及其所处的环境条件，明确模型应包含的变量。一个系统的变量可能很多，它包括输入变量（控制变量和干扰变量）和输出变量（观测变量和状态变量），如图 6 - 2 所示。模型中应该包括哪些变量完全取决于建模的目的。它只应包括建模目的影响比较显著的变量，影响不大的变量则不应该包括在内，以免模型过于复杂而失去其使用价值。另外，建立系统数学模型时，一般需要遵守以下几个基本原则。

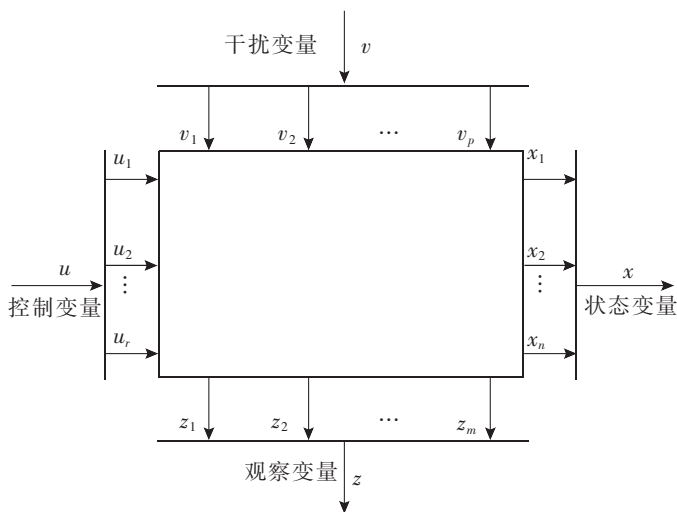


图 6-2 系统变量分类图

- (1) 目的性：明确建模目的，不同的建模目的牵涉到建模方法可能不同。
- (2) 实在性：模型的理化概念要明确。
- (3) 可辨性：模型结构要合理；输入信号必须是持续激励的；数据要充分。
- (4) 经济性：待辨识模型的参数个数要尽可能少。

二、数学模型的分类

数学模型的分类方法很多，常见的是按连续与离散、定常与时变、集中参数与分布参数来分类。还可以按线性与非线性、动态与静态、确定性与随机性、宏观与微观进行区分。

1. 线性模型

是用来描述线性系统。它的显著特性是满足叠加原理和均匀

性，即满足下列算子运算

$$\begin{cases} (a_1 + a_2)x = a_1x + a_2x \\ a_1(a_2x) = a_2(a_1x) \\ a_1(x + y) = a_1x + a_1y \end{cases}$$

式中， x 和 y 为系统状态变量； a_1 和 a_2 分别为作用于 x 和 y 的算子。

2. 非线性模型

用于描述非线性系统，一般不满足叠加原理。

3. 动态模型

用来描述系统处于过渡过程时的各状态变量之间的关系，一般为时间的函数。

4. 静态模型

描述系统处于稳态时，即各状态变量的各阶导数均为零的各个状态变量之间的关系，一般就不是时间的函数。

5. 确定性模型

所描述的系统，当状态确定后，其输出响应是唯一确定的。

6. 随机性模型

当系统状态确定后，其输出响应仍然是不确定的。

7. 宏观模型

用来研究事物的宏观现象，一般用联立方程或积分方程描述。

8. 微观模型

研究事物内部微小单元的运动规律，一般用微分方程或差分方程描述。

注：在讨论线性与非线性问题时，需要注意以下两点：

(1) 系统线性与关于参数空间线性的区别：如果模型的输出关于输入变量是线性的，称之为系统线性；如果模型的输出参数空间是线性的，称之为关于参数空间线性。例如，对于模型 $y = a + bx + cx^2$ 来说，输出 y 关于输入 x 是非线性的，但关于参数 a 、 b 和 c 却是线性的，即模型是系统非线性的，但却是关于参数空间线

性的。

(2) 本质线性和非本质线性的区别：如果模型经过适当的数学变换可将本来是非线性模型转变成线性模型时，则原来的模型称作本质线性，否则原来的模型称为非本质线性。例如，在经济学中，著名的 Cobb - Douglas 生产函数模型为

$$Y = AL^{a_1}K^{a_2}, 0 < a_1, a_2 < 1, a_1 + a_2 = 1$$

其中，Y 为产值，L 为劳动力投入，K 为资本品投入，A 为技术水平参数。但是若通过以下数学变换，即

$$\begin{cases} y = \log Y \\ u_1 = \log L \\ u_2 = \log K \\ a_0 = \log A \end{cases}$$

则原模型变换为

$$y = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2$$

于是，可见 Cobb - Douglas 生产函数模型是一个本质线性模型。

三、辨识的定义

这里引入若干著名学者曾对辨识给出的经典定义。

1. L. A. Zadeh, 1962

辨识就是在输入和输出数据的基础上，从一组给定的模型类中，确定一个与所测系统等价的模型。

这个定义明确辨识的三大要素：

- (1) 输入输出数据。
- (2) 模型类。
- (3) 等价准则。

其中，数据是辨识的基础；准则是辨识的优化目标；模型类是寻求模型的范围。当然，按照这个定义，寻找一个与实际系统完全等价的模型无疑是非常困难的。从实际观点出发，对模型的要求并非如此苛刻，为此对辨识又有一些比较实用的定义。

2. P. Eykhoff, 1974

辨识问题可以归结为用一个模型来表征客观系统（或将要构造的系统）本质特征的一种演算，并用这个模型把对客观系统的理解表示成有用的形式。

V. Strejc 对 P. Eykhoff 的定义作如下解释：这个辨识定义强调一个非常重要的概念，最终模型只应表示动态系统的本质特征，并且把它表示成适当的形式。这就意味着，并不期望获得一个物理实际确切的数学描述，所要的只是一个适合于应用的模型。

3. L. Ljung, 1978

辨识有三个要素——数据、模型类和准则。辨识就是按照一个准则在一组模型类中选择一个与数据拟合最好的模型。

显然这个定义似乎更加实用。总而言之，辨识的实质就是从一组模型类中选择一个模型，按照某种准则，使之能最好的拟合所关心的实际系统的动态特性。例如，一个热交换系统过程，如图6-3所示，欲建立 T/Q 模型，经观测得到一组输入输出数据，记作 {Q(k)} 和 {T(k)} $k = 1, 2, \dots, L$ 。同时，选定一组模型类

$$\begin{aligned} T(k) + a_1 T(k-1) + \dots + a_n T(k-n) \\ = b_1 Q(k-1) + \dots + b_n Q(k-n) + e(k) \end{aligned}$$

和一个等价准则

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^L e^2(k) \\ &= \sum_{k=1}^L [T(k) + a_1 T(k-1) + a_2 T(k-2) + \dots + a_n T(k-n) \\ &\quad - b_1 Q(k-1) - b_2 Q(k-2) - \dots - b_n Q(k-n)]^2 \end{aligned}$$

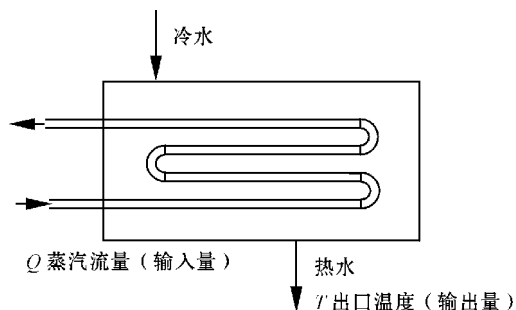


图 6-3 热交换器示意图

那么所谓热交换器的蒸汽流量 Q : 热水温度 T 通道的数学模型辨识问题就是根据所观测到的数据 $\{Q(k)\}$ 和 $\{T(k)\}$, 从上述模型类式子中, 寻找到一个模型, 也就是确定上述模型类式子中的未知参数 n 和 a_i 和 $b_i, i=1, 2, \dots, n$, 使准则 $J = \min$ 。

另外还有一点需要指出, 由于观测到的数据一般都含有噪声, 因此辨识建模实际上是一种实验统计方法, 它所获得的模型只不过是与实际系统外特性等价的一种近似描述。

四、系统辨识的表达形式

这里着重讨论线性离散模型的辨识问题。所谓线性离散模型是指一个或几个变量可以表示成另外一些变量在时间或空间的离散点上的线性组合, 如图 6-4 所示

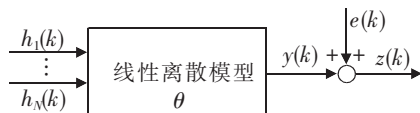


图 6-4 线性离散模型的数学表达式的形式

图中, $H(k)$ 和 $z(k)$ 分别是模型的输入输出变量, 它们在离散

点上必须是可观测的； $e(k)$ 是模型噪声； θ 是未知模型参数。记

$$H(k) = [h_1(k) \ h_2(k) \ \dots \ h_N(k)]^T$$

$$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N]^T \quad (6-1)$$

则线性离散模型的输出可表示成

$$z(k) = \sum_{i=1}^N \theta_i h_i(k) + e(k) = H(k)^T \theta + e(k) \quad (6-2)$$

这种线性组合关系就是本章将着重描述的辨识问题的基本表达形式，称作最小二乘模式。这就是说，本章所研究的辨识问题，其模型都必须能化成这种最小二乘格式，其中 $H(k)$ 和 $z(k)$ 变量要求可观测。

[例 6-2] 将差分方程化成最小二乘模式

考虑如下方程

$$z(k) + a_1 z(k-1) + a_2 z(k-2) + \dots + a_n z(k-n)$$

$$= b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n) + e(k)$$

其中，方程的输入输出变量 $u(t)$ 、 $z(t)$ 在个离散点上都是可观测的。记

$$H(k) = [-z(k-1) \ \dots \ -z(k-n) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n)]^T$$

$$\theta = [a_1 \ \dots \ a_n \ b_1 \ \dots \ b_n]^T$$

则 $H(k)$ 是可观测的向量，那么差分方程所对应的最小二乘模式为

$$z(k) = H(k)^T \theta + e(k) \quad (6-3)$$

总之，如果图 6-5 是待辨识系统，那么描述它的模型必须是能化成图 6-4 所示的辨识表达模式，即最小二乘格式，输出量应是输入向量 $H(k)$ 的线性组合，如模型式 (6-3)。注意，辨识表达式中的输入量 $H(k)$ 已不再是原系统的输入量 $u(t)$ ，它还可能包括其他一些量。比如例 6-2 中的 $H(k)$ 不但包含了原系统的输入量 $u(t)$ ，还包含原系统的输出量 $z(t)$ 。同时，噪声项 $e(t)$ 也不再是原来的测量噪声 $w(t)$ 了。

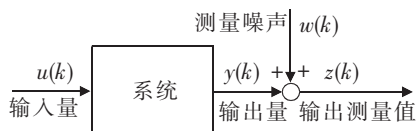


图 6-5 待辨识系统

五、辨识算法的基本方法

辨识的目的就是根据系统所提供的测量信息，在某种准则意义下，估计出模型的未知参数，其基本原理如图 6-6 所示。

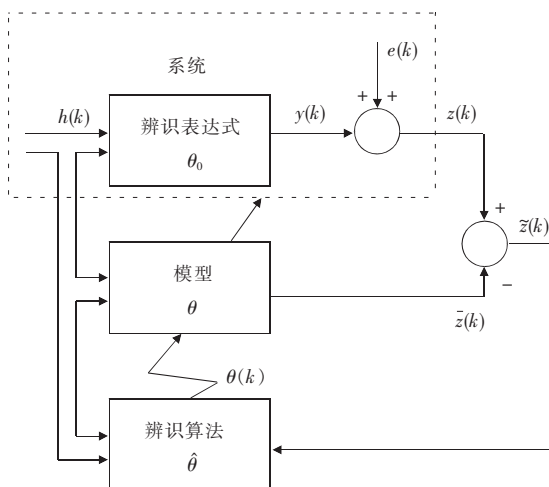


图 6-6 系统辨识基本原理方框图

为了得到模型参数 θ 的估计值 $\hat{\theta}$ ，通常采用逐步逼近的办法。在时刻 $t = k$ ，根据前一时刻的估计参数计算出模型该时刻的输出，即系统输出预报值

$$z(k) = H(k)^T \hat{\theta}(k-1)$$

同时计算输出预报误差，或称新息

$$\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$$

其中，系统输出量

$$z(k) = H(k)^T \theta + e(k)$$

及辨识表达式的输入量 $H(k)$ 都是可以测量的。然后将新息 $\tilde{z}(k)$ 反馈到辨识算法中去，在某准则条件下，计算出时刻 k 的模型参数估计值 $\theta(k)$ ，并据以更新模型参数。这样不断迭代下去，直至对应的准则函数取最小值。这时模型的输出 $\hat{z}(k)$ 也在该准则意义下最好的逼近系统的输出值 $z(k)$ ，于是便获得了所需要的模型。

上述辨识算法可以推广到多输出系统。即如果系统的输入是 m 维向量，那么辨识问题的表达形式应为

$$Z(k) = H(k)^T \theta + E(k) \quad (6-4)$$

其中，

$$Z(k) = [z_1(k) \ z_2(k) \ \dots \ z_m(k)]^T$$

$$E(k) = [e_1(k) \ e_2(k) \ \dots \ e_m(k)]^T$$

$$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_m]^T$$

$$H(k) = \begin{bmatrix} h_{11}(k) & h_{12}(k) & \dots & h_{1N}(k) \\ h_{21}(k) & h_{22}(k) & \dots & h_{2N}(k) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ h_{m1}(k) & h_{m2}(k) & \dots & h_{mN}(k) \end{bmatrix}^T$$

六、输入输出数据的处理

输入输出数据通常都含有直流成分或低频成分，用任何辨识方法都无法消除它们对辨识精度的影响。此外，数据中的高频成分对辨识是不利的。因此，对输入输出数据一般都要进行零均值化和剔除高频成分的预处理。处理得好，就能显著提高辨识的精度。

1. 零均值化

设实际观测到的输入输出为 $u^*(k)$ 和 $z^*(k)$ ，则零均值化后

的数据为

$$\begin{cases} u(k) = u^*(k) - u_0 \\ z(k) = z^*(k) - z_0 \end{cases}$$

其中, u_0 和 z_0 分别为输入输出数据的直流分量。但是, u_0 和 z_0 在数据采集过程中并不知道, 因此上式实际中没有使用价值。下面引入两种实用的零均值化的方法。

(1) 差分法: 对于例 6-2 给出的采用差分方程形式描述的单输入输出系统模型, 引入单位时延算子 z^{-1} , 令 $z^{-1}z(k) = z(k-1)$ 。并设多项式

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \end{cases}$$

则该差分方程的辨识模型为

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (6-5)$$

在辨识算法中所用的输入输出数据 $u(k)$ 和 $z(k)$ 应是经过零均值化处理后的数据。但是, 实际能观测到的数据是 $u^*(k)$ 和 $z^*(k)$, 而 $u(k)$ 和 $z(k)$ 则是不知道的。如果上述辨识模型两边乘以 $(1 - z^{-1})$, 则有

$$A(z^{-1})\Delta z(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-1) + \Delta e(k-1) \quad (6-6)$$

其中, 差分两量 Δu 和 Δz 为

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= (1 - z^{-1})u(k) \\ &= u(k) - u(k-1) = u^*(k) - u^*(k-1) \\ \Delta z(k) &= (1 - z^{-1})z(k) \\ &= z(k) - z(k-1) = z^*(k) - z^*(k-1) \end{aligned}$$

那么可以直接利用 Δu 和 Δz 进行辨识, 他们已不含直流成分了。这样实际上已间接地对输入输出数据进行了零均值化处理, 不过模型的噪声性质也相应变化了。比如 $\Delta e(k)$ 就不一定是白噪声了。因此具体选用辨识算法时, 要注意到噪声的影响。

(2) 平均法: 输入输出数据直流分量的估计值应该等于观测数据的平均值。因此在 k 时刻, 它们的递推形式为

$$\begin{cases} u_0(k) = u_0(k-1) + \frac{1}{k} [u^*(k) - u_0^*(k-1)] \\ z_0(k) = z_0(k-1) + \frac{1}{k} [z^*(k) - z_0^*(k-1)] \end{cases} \quad (6-7)$$

其中, $u_0(k-1)$ 和 $z_0(k-1)$ 表示上一时刻直流分量的估计值。由此可进而用下式对数据进行零均值化处理

$$\begin{cases} u(k) = u^*(k) - u_0(k) \\ z(k) = z^*(k) - z_0(k) \end{cases} \quad (6-8)$$

2. 剔除高频

通常可以利用如下的低通滤波器剔除数据中的高频部分

$$\begin{cases} \bar{u}(k) = \alpha \bar{u}(k-1) + u(k) - u(k-1) \\ \bar{z}(k) = \alpha \bar{z}(k-1) + z(k) - z(k-1) \end{cases} \quad (6-9)$$

其中, $\alpha = e^{-T_0/T}$, T_0 为采样时间, T 为系统过程的时间常数。

七、系统数学模型辨识

系统数学模型包括模型结构辨识和模型参数辨识两部分组成。

1. 模型结构辨识

模型结构辨识包括模型验前结构和结构参数确定的这两个内容。模型结构假定就是根据辨识的目的, 利用已有的知识(定律、定理和原理等)对具体问题进行分析, 包括机理分析、实验研究和近似技巧确定一个验前假定模型, 再用模型鉴别方法选出可用的模型。为此, 首先要明确所要建立的模型是静态的还是动态的, 是连续的还是离散的, 是线性的还是非线性的, 是参数模型还是非参数模型等等。非参数模型辨识方法获得的模型是非参数模型, 例如系统的脉冲响应、阶跃响应、系统的频率响应等。非参数模型辨识方法是在假设系统过程是线性的前提下, 不必事先确定模型的具体结构, 因而可以用于比较复杂的系统建模。

然而, 模型的验前结构并不一定是最终的模型形式, 它必须经过模型检验后才能确认。模型结构辨识的第二项内容就是在假定模

型结构的前提下，利用辨识的方法确定模型结构参数。

2. 模型参数辨识

当模型结构确定后，如传递函数、状态方程和差分方程等参数模型，就需要进行模型参数辨识。它的方法很多，如最小二乘法、极大似然法、最小方差法和鲁棒（Robust）建模法等。其中最小二乘法是最基本、应用最广泛的一种方法。多数的工程问题和许多经济、社会及环境等问题均可以用它得到满意的辨识结果。但是，最小二乘法也有一些重大的缺陷，比如当系统是时变的或受到有色噪声严重干扰时，它几乎不能适应。

对于非参数模型，其表现形式是以时间或频率为自变量的实验曲线，往往经过适当的数学处理，又可以转变成参数模型，例如常用的传递函数形式。参数模型中的参数估计算法常分为两类：一类是迭代算法，属于离线控制的算法；另一类是递推算法，是一种实时在线控制的估计算法。

八、模型检验与辨识精度

1. 模型检验

模型检验是系统辨识不可缺少的步骤之一。但是，它没有一般的方法可循。它和模型结构问题密切相关。如果模型结构不合理，模型检验一般是不能通过的。

必须承认辨识得到的模型只能是近似的，不能期望会找到一个和实际系统完全一致的模型。如果模型的特性和所需研究的实际系统特征基本一致，那么就应该认为模型是满意的。最后检验模型的标准应该是模型的实际应用效果。

模型是否可靠必须经过多方面的检验。通常需要检验如下几个方面：

(1) 利用在不同时间区段内采集的数据，分别建立模型。如果模型的特性，如零极点分布等基本相符，则模型是可靠的。

(2) 利用两组不同的数据，独立辨识出模型，并分别计算它

们的损失函数，然后将两组数据交叉使用，再计算各自的损失函数。如果对应的损失函数没有明显变化，则模型是可靠的。

注：损失函数实际上是系统输出 z 与模型输出 $\hat{z}$ 的一个误差函数。

(3) 增加辨识中使用的数据长度，如果损失函数不再显著下降，则模型是可靠的。

(4) 检验模型与系统输出残差序列 $\{\varepsilon(k)\}$ 的白色性。如果残差序列 $\{\varepsilon(k)\}$ 可以视作零均值的白色噪声序列，则认为模型是可靠的。

2. 辨识精度

基于输入输出数据利用辨识方法得到的模型，由于

(1) 所假定的模型结构只是实际系统的一种近似。

(2) 数据受随机噪声干扰。

(3) 数据长度有限等原因，必然具有误差。

所以，需要对辨识结果的精度进行评价。评价之前，需要明确评价的标准。一般来说，同一个辨识结果，在一种评价标准下精度可能很高，而在另一个评价标准下却未必也很高。这说明：辨识精度一定要指明条件。最终评价则是它在实际应用中的效果。如果实践证明达到了当初建模的目的，则辨识就是成功的。

九、系统辨识的应用

系统辨识源于工业工程控制，它不仅在工业领域中有着广泛的应用，而且在经济、社会和环境也有重要的应用价值。

1. 用于控制系统的设计和分析

利用辨识方法获得被控制过程的数学模型之后，以此模型为基础可以设计出比较合理的控制系统或用于分析原有控制系统的性能，以便提出改进。

2. 用于在线控制

其原理结构如图 6 - 7 所示。例如，大型油轮航向的控制，它

依靠船舵来控制船头的方向和位置。由于船的惯性很大，其动态特性又与航行中的负荷和吃水深度等因素有关，而且风、浪对船的驾驶影响也是很大的，所以一艘大型油轮的控制是比较困难的。这种难于控制的问题可以采用图 6 - 6 的原理，在线建立控制对象的数学模型，不断调整控制器的参数，可以获得较好的控制效果。当然，辨识用于控制时，如何选择模型结构、误差准则和模型精度等问题也是很重要的。

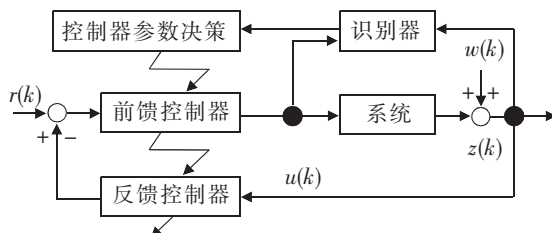


图 6 - 7 在线辨识和控制

3. 用于预报预测

辨识用于天气、水文、人口、能源、交通等问题的预报预测的基本思想是：在模型结构确定的条件下，建立时变模型，并预测时变模型的参数，然后以此为基础对过程的状态进行预报。

4. 用于监视系统参数并实现故障诊断

许多生产过程，比如飞机、核反应堆、大型化工和动力装置以及大型转动机械等，希望经常监视和检测可能出现的故障。这意味着必须不断从系统中收集信息，推断系统动态特性的变化情况。然后，根据系统特性的变化情况判断故障已否发生、何时发生、故障大小、故障位置等。这是系统辨识近年来新的应用领域。

第二节 系统辨识的数学模型

系统辨识是研究建立数学模型的一种技术，一个实际系统，其动态特性的精确描述是极为复杂的，它们中很多是属于分布参数系统，而且其特性往往是具有非线性，有时甚至还是随时间变化的。但是在建立它们的数学模型时，人们总是尽可能采用简化的处理方法近似地加以数学描述。在很多情况下，系统的数学模型都简化为线性定常参数系统，这也是本章着重讨论的范围。

一个系统的数学模型可根据人们的需要用不同的方式加以描述，这里主要可区分为连续系统和离散系统。自然存在的系统通常都是连续型的；离散系统只不过是人们出于某种需要，特别是为了便于数字计算的需要，把连续的系统过程加以离散化的结果。

根据研究方法的不同，系统的数学模型还可区分为输入输出模型和状态空间模型两大类。输入输出模型只刻画系统外在特征，而不深入到其系统内部，它是一种广为采用的描述方式。状态模型则进一步深入到系统过程的内部，因此它可以包含更多的信息，它的应用有日益增长的趋势。

系统数学模型的描述方式及其分析研究属于控制理论的基本内容，这里只扼要给出其主要结果，并侧重单输入输出系统（SISO）的数学模型描述，至于多输入输出（MIMO）系统的数学模型则有类似的结果。下面先讨论确定性模型，随后涉及随机性模型。

一、输入输出模型

1. 连续型输入输出模型

连续系统输入输出模型的基本形式是常微分方程。

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t)$$

$$= b_1 \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{du(t)}{dt} + b_n u(t) \quad (6-10)$$

其中, $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入输出变量。对线性时不变系统来说, 系数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 都是常数。对上式进行 Laplace 变换, 在零起始条件下得到系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (6-11)$$

其中, s 为算子; $Y(s)$ 和 $U(s)$ 分别是 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的 Laplace 变换。由上式可见传递函数只是微分方程的缩写。

许多工程系统具有纯迟延, 它的传递函数是 $G(s) = e^{-\tau s}$, 其中 τ 为迟延时间, 属于待辨识的模型结构参数。

若式 (6-11) 中 $G(s)$ 的有理分式已经给定, 就很容易确定系统的单位阶跃响应 $h(t)$ 、单位脉冲响应 $g(t)$ 及频率响应 $G(j\omega)$ 等。这些响应连同传递函数不过是以不同的形式描述输入量与输出量之间的关系, 它们之间可以进行等价变换。这些响应又都可通过实验来测定, 其结果以曲线的形式出现, 难以用若干个参数去表征, 这类模型称为“非参数模型”。与此相对应, 传递函数 $G(s)$ 则属于“参数模型”之列。

系统的输出量 $y(t)$ 与输入量 $u(t)$ 还可以通过单位脉冲响应 $g(t)$, 按以下算式联系起来。

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

由于任何一个连续 SISO 系统都可以用差分方程来表示, 这个差分方程又可以通过拉氏变换转成传递函数模型 $G(s)$ 。于是可以通过用脉冲响应求传递函数模型。若系统输入 $\delta(t)$ 函数, 则输出为脉冲响应函数 $g(t)$, 它的变化趋势如图 6-8 所示。

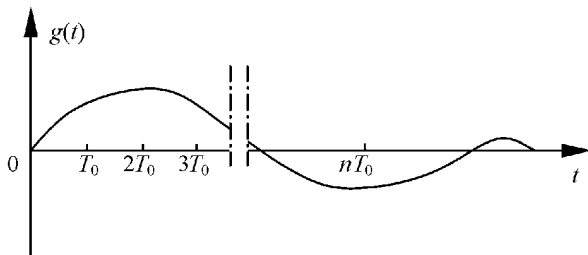


图 6 - 8 脉冲响应函数曲线图

因 $\delta(t)$ 函数只作用于 $t=0$ 时刻，而在其他时刻系统的输入均为 0，故系统的输出是从 $t=0$ 开始的脉冲响应函数 $g(t)$ 。如果采样周期或间隔为 T_0 ，并设系统可用 n 阶差分方程表示，则有

$$g(t_0) + a_1 g(t_0 + T_0) + \dots + a_n g(t_0 + nT_0) = 0 \quad (6-12)$$

式中 $a_1, \dots, a_n$ 为待定的 n 个常数。

根据上式将时间依次延迟 T_0 ，可得到 n 个方程，即有

$$\begin{aligned} & a_1 g(t_0 + T_0) + a_2 g(T_0 + 2T_0) + \\ & \quad \dots + a_n g(t_0 + nT_0) = -g(t_0) \\ & a_1 g(t_0 + 2T_0) + a_2 g(T_0 + 3T_0) + \\ & \quad \dots + a_n g[t_0 + (n+1)T_0] = -g(t_0 + T_0) \\ & \quad \dots \\ & a_1 g(t_0 + nT_0) + a_2 g[t_0 + (n+1)T_0] + \\ & \quad \dots + a_n g[t_0 + 2nT_0] = -g[t_0 + (n-1)T_0] \end{aligned}$$

求解上述 n 个联立方程，可以得到差分方程的 n 个系数 $a_1, \dots, a_n$ 。

任何一个线性定常系统，如果其传递函数 $G(s)$ 的特征根为 $s_1, s_2, \dots, s_n$ ，则其传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \dots + \frac{c_n}{s - s_n} \quad (6-13)$$

式中 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为待求的 $2n$ 个未知数。

对式 (6-13) 求拉氏反变换，可得系统的脉冲响应函数，

$$g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \dots + c_n e^{s_n t} \quad (6-14)$$

则 $t + T_0, t + 2T_0, \dots, t + nT_0$ 时刻的脉冲响应函数分别为

$$\begin{cases} g(t + T_0) = c_1 e^{s_1(t+T_0)} + c_2 e^{s_2(t+T_0)} + \dots + c_n e^{s_n(t+T_0)} \\ g(t + 2T_0) = c_1 e^{s_1(t+2T_0)} + c_2 e^{s_2(t+2T_0)} + \dots + c_n e^{s_n(t+2T_0)} \\ \dots \\ g(t + nT_0) = c_1 e^{s_1(t+nT_0)} + c_2 e^{s_2(t+nT_0)} + \dots + c_n e^{s_n(t+nT_0)} \end{cases} \quad (6-15)$$

将式 (6-12) 中的 t_0 换成 t , 并将式 (6-14) 和式 (6-15) 代入式 (6-12), 可得

$$\sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} [1 + a_1 e^{s_i T_0} + a_2 (e^{s_i T_0})^2 + \dots + a_n (e^{s_i T_0})^n] = 0 \quad (6-16)$$

要使式 (6-16) 成立, 应令各方括号内的值为 0, 即有

$$1 + a_1 e^{s_i T_0} + a_2 (e^{s_i T_0})^2 + \dots + a_n (e^{s_i T_0})^n = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

令 $x = e^{s_i T_0}$, 则上式变为

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0 \quad (6-17)$$

解该方程, 有 x 的 n 个解 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。设

$$e^{s_1 T_0} = x_1, e^{s_2 T_0} = x_2, \dots, e^{s_n T_0} = x_n \quad (6-18)$$

则有

$$s_1 = \frac{\ln x_1}{T_0}, s_2 = \frac{\ln x_2}{T_0}, \dots, s_n = \frac{\ln x_n}{T_0}$$

至此, 已将 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 求出, 下面求 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 。根据式 (6-14)、(6-15) 和式 (6-18) 可得

$$\begin{cases} g(0) = c_1 + c_2 + \dots + c_n \\ g(T_0) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ g(2T_0) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_n x_n^2 \\ \dots \\ g[(n-1)T_0] = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1} + \dots + c_n x_n^{n-1} \end{cases}$$

求解上述方程组可得 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 。最后把 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_n$

... ϵ_n 代入式 (6 - 13), 就可求出相关系统的传递函数模型 $G(s)$ 。

[例 6 - 3] 设原系统具有二阶传递函数

$$G(s) = \frac{0.35}{(s - 0.5)(s + 0.7)}$$

其脉冲响应为

$$g(t) = 1.75(e^{-0.5t} - e^{-0.7t})$$

设采样间隔 $T_0 = 1$ 秒, $g(t)$ 的前 4 个值如表 6 - 1 所列, 试用辨识方法求系统传递函数。

表 6 - 1 前 4 个脉冲响应值表

t (秒)	0	1.0	2.0	3.0
g (t)	0	0.1924	0.2122	0.1762

(1) 估计参数 a_1, a_2 。由式 (6 - 12) 可得

$$0.1924a_1 + 0.2122a_2 = 0$$

$$0.2122a_1 + 0.1762a_2 = -0.1924$$

可解出: $a_1 = 3.66889, a_2 = -3.3265$ 。

(2) 求极点 s_1, s_2 。由式 (6 - 17) 有

$$1 + 3.66889x - 3.3265x^2 = 0$$

解得: $x_1 = 0.60811, x_2 = 0.49488$ 。

于是, 相应的系统极点为

$$s_1 = \ln 0.60811 = -0.49748$$

$$s_2 = \ln 0.49488 = -0.70340$$

(3) 估计参数 c_1, c_2 。根据式 (6 - 14), 脉冲响应可写成

$$g(kT_0) = c_1 e^{-0.49748kT_0} + c_2 e^{-0.70340kT_0}$$

分别令 $k = 0, 1$, 可得到方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 0.60811c_1 + 0.49488c_2 = 0.1924 \end{cases}$$

求解得出： $c_1 = 1.6994$ ， $c_2 = -1.6994$ 。

最后由式 (6-13)，所求的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1.6994}{s + 0.49748} - \frac{1.6994}{s + 0.70340} \\ &= \frac{0.34987}{(s + 0.49748)(s + 0.70340)} \end{aligned}$$

可见，所求的传递函数与真实的传递函数非常接近。

2. 离散型输入输出模型

如上所述，离散系统往往是连续加以离散化的结果。离散系统的输出量和输入量只在采样时刻取值，分别记为 $y(kT_0)$ 和 $u(kT_0)$ ，其中 T_0 为采样周期。为书写方便 kT_0 时常写为 k 。

离散型输入输出模型的基本表达形式是差分方程，

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) \\ = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \end{aligned} \quad (6-19)$$

在零起始条件下对上式进行 z 变换就得到过程的脉冲传递函数，

$$G(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (6-20)$$

其中， z 为运算符，它与算子 s 的关系为 $z = e^{T_0 s}$ ， z^{-1} 通常称为延迟算子， z^{-i} 代表把信号推迟 iT_0 时间或称推迟 i 拍。

由于式 (6-19) 所表达的系统模型可表示为更一般的形式

$$A(z^{-1})z(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) \quad (6-21)$$

式中，

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \\ B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \end{cases}$$

n_a ， n_b 和 d 是这类模型的结构参数， n_a 和 n_b 分别是 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的阶次， d 是延迟步数，延迟时间为 dT_0 。

如果模型式 (6-21) 还受到噪声的影响，则可进一步描述为随机时不变线性系统离散时间模型。

$$A(z^{-1})z(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + D(z^{-1})e(k) \quad (6-22)$$

式中,

$$D(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_d} z^{-n_d}$$

根据不同噪声形式, 可将模型分为以下几种:

(1) 带控制量的自回归 (CAR 或 ARX) 模型, 即式 (6-22) 中的 $D(z^{-1}) = 1$, 也即 $d_1 = d_2 = \dots = d_{n_d} = 0$, 模型中仅存在白噪声。

(2) 带控制量的自回归滑动平均 (CARMA 或 ARMAX) 模型, 即为式 (6-22) 所描述的模型。

(3) 自回归滑动平均 (ARMA) 模型, 即为式 (6-22) 中的控制量 $u(k) = 0$ 时的情况。

(4) 自回归 (AR) 模型, 指式 (6-22) 中的控制量 $u(k) = 0$, 且 $D(z^{-1}) = 1$, 也即 $d_1 = d_2 = \dots = d_{n_d} = 0$, 此时模型中仅存在输出变量和白噪声时的情况。如果方程左边不是输出变量, 而是有色噪声, 那么, 这种情况就是白噪声通过自回归模型的成形滤波器产生的有色噪声。

(5) 滑动平均 (MA) 模型, 指式 (6-22) 中的控制量 $u(k) = 0$, 且 $A(z^{-1}) = 0$, 也即 $a_1 = a_2 = \dots = a_{n_a} = 0$, 这种情况就是白噪声通过平滑平均模型的成形滤波器产生的有色噪声。

事实上, 利用式 (6-20) 很容易用迭代法计算系统的阶跃响应和脉冲响应。因为根据脉冲传递函数的定义有

$$\begin{aligned} G(z^{-1}) &= g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots \\ &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} &b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n} \\ &= g(0) + [g(1) + a_1 g(0)] z^{-1} \\ &\quad + [g(2) + a_1 g(1) + a_2 g(0)] z^{-2} + \dots \\ &\quad + [g(n) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i g(n-i)] z^{-n} + \dots \end{aligned}$$

$$+ [g(2n) + \sum_{i=1}^{2n-1} a_i g(2n-i)] z^{-2n} + \dots$$

令上式等号两边 z^{-1} 同次项的系数相等, 当 z^{-1} 的次数从 0 到 n 时, 可得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ \dots \\ g(n) \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

当次数从 $n+1$ 到 $2n$ 时, 也得到以下矩阵方程。

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(2) & \dots & g(n) \\ g(2) & g(3) & \dots & g(n+1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g(n) & g(n+1) & \dots & g(2n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \dots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(n+1) \\ -g(n+2) \\ \dots \\ -g(2n) \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

式 (6-24) 上边的矩阵称为汉克 (Hankel) 矩阵。因为汉克矩阵的秩为 n , 故该矩阵方程有唯一组解 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。即可求出脉冲传递函数中分母的个未知系数, 再将它们代入矩阵方程式 (6-23), 则可得出 $G(z^{-1})$ 分子的各项未知系数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 。如果所求脉冲响应序列 $g(i)$ 不是那么准确, 则可用更多的 $g(i)$ 序列, 用最小二乘法估计 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。

[例 6-4] 设采样间隔 $T_0 = 0.05s$, 系统脉冲响应 $g(i)$ 如下表 6-2 所列, 求系统脉冲传递函数。

表 6 - 2 系统脉冲响应采样数据表

t/s	0	0.05	0.10	0.15
i	0	1	2	3
g (i)	0	7.157039	9.491077	8.563839
t/s	-	0.20	0.25	0.30
i	-	4	5	6
g (i)	-	5.930506	2.845972	0.144611

将系统脉冲响应采样序列值代入方程式 (6 - 24) 有

$$\begin{bmatrix} 7.157039 & 9.491077 & 8.563839 \\ 9.491077 & 8.563839 & 5.930506 \\ 8.563839 & 5.930506 & 2.845972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.930506 \\ -2.845972 \\ -0.144611 \end{bmatrix}$$

则可求解得

$$a_1 = -2.232576, a_2 = 1.764088, a_3 = -0.496585$$

然后将其代入方程式 (6 - 22), 则可得

$$b_1 = 7.157309, b_2 = -6.487547, b_3 = 0$$

于是求得系统脉冲函数

$$G(z^{-1}) = \frac{7.157309z^{-1} - 6.487547z^{-2}}{1 - 2.232576z^{-1} + 1.764088z^{-2} - 0.496585z^{-3}}$$

在进行连续系统离散化, 即微分方程化为等效的差分方程时, 需要就两个相邻采样时刻之间的输入量 $u(t)$ 的变化规律作出近似假定, 通常都假定采样周期 T_0 很小, 在此期间内可认为输入量保持其前一采样时刻的数值不变, 即 $u(t) = u(kT_0)$, $kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0$ 。将微分方程变为差分方程的方法很多。本节的第三段将给出一个通用的方法, 极易在计算机上实现。

二、状态空间模型

1. 连续型状态空间模型

线性时不变连续状态空间的数学模型描述是

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad (6-25)$$

式中, $x(t) (\in R^{n \times 1})$ 是系统的状态变量; $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别表示输出量和输入量, 对于 SISO 系统, 它们都是标量; A 、 b 和 c 是具有适当维数的矩阵, 分别是系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵。

容易证明, 模型式 (6-25) 的传递函数是

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b$$

上式表明, 系统的输入输出函数模型可以由状态空间模型唯一确定, 但反过来则不然。系统的输入输出模型, 即微分方程模型或传递函数模型, 是可以变换成状态空间模型, 但其具体表达模型式并非唯一, 而取决于状态向量 $x(t)$ 选择。

由于可控性和可观性是状态空间模型的基本特征, 而模型式 (6-25) 完全可控和完全可观的充要条件分别是

(a) 系统的可控矩阵为

$$T_c = [b \dots Ab \dots A^{n-1}b] \text{ 的秩为 } n$$

(b) 系统的可观矩阵为

$$T_o = [c^T \dots A^T c^T \dots (A^T)^{n-1} c^T]^T \text{ 的秩为 } n$$

如果系统的传递函数是既约的, 则由它变换生成的状态空间模型都是可控和可观的。

所以对状态向量 $x(t)$ 进行线性变换 $\bar{x}(t) = Tx(t)$, 其中 T 是可逆变换矩阵, 那么模型式 (6-25) 则变换为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}u(t) \\ y(t) = \bar{c}\bar{x}(t) \end{cases} \quad (6-26)$$

式中 $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{b} = Tb$, $\bar{c} = Tc$ 。经线性变换后, 系统矩阵的特征矩阵的特征值不变, 系统的输入输出关系, 即传递函数也不变。

如果系统是可控和可观的, 只要适当选择线性变换矩阵 T , 模型式 (6-26) 将成为规范状态空间模型, 通常可分为以下可控规范型和可观规范型两类四种模式。

(1) 可控规范 I 型：取变换矩阵 $T_{c/I} = T_c L$ ，其中

$$L = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 & \\ \dots & \ddots & \ddots & 0 & \\ a_1 & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

那么可控规范 I 型的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵分别是

$$\bar{A}_{c/I} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & I_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_{c/I} = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$$

$$\bar{c}_{c/I} = [\bar{c}_{11} \ \bar{c}_{21} \ \dots \ \bar{c}_{n1}]^T = c T_{c/I}^{-1}$$

(2) 可控规范 II 型：变换矩阵取 $T T_{c/II} = T_c$ ，则可控规范 II 型的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵分别为

$$\bar{A}_{c/II} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -a_n \\ \dots & \dots & -a_{n-1} \\ I_{n-1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_{c/II} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

$$\bar{c}_{c/II} = [\bar{c}_{12} \ \bar{c}_{22} \ \dots \ \bar{c}_{n2}]^T = c T_{c/II}^{-1}$$

(3) 可观规范 I 型：变换矩阵取 $T_{o/I} = T_o$ ，则可观规范 I 型的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵分别为

$$\bar{A}_{o/I} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & I_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_{o/I} = [\bar{b}_{11} \ \bar{b}_{21} \ \dots \ \bar{b}_{n1}]^T = T_{o/I}$$

$$\bar{c}_{o/I} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

(4) 可观规范 II 型：变换矩阵取 $T_{o/II} = T_o$ ，则可观规范 II 型的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵分别为

$$\bar{A}_{o/II} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -a_n \\ \dots & \dots & -a_{n-1} \\ I_{n-1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_{o/II} = [\bar{b}_{12} \quad \bar{b}_{22} \quad \dots \quad \bar{b}_{n2}]^T = T_{o/II} b$$

$$\bar{c}_{o/II} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

以上各规范型状态空间模型系数矩阵中的元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为原状态空间模型系统矩阵 A 的特征多项式系数，即

$$\det[sI - A] = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

注意到，规范型模型所含的参数个数远少于非规范型。例如，在一般情况下，模型式 (6-25) 不是规范型，它所含的参数个数可以达到 $n^2 + 2n$ 个之多。但变换成规范型之后，参数个数可以减少到只有 $2n$ 个。可见系统采用规范型描述将有利于系统的参数辨识。

另一方面，在输入量 $u(t)$ 的作用下，方程式 (6-25) 的解如下：

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \\ y(t) = cx(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

其中， e^{At} 是系统的转移矩阵，由 A 唯一确定； $x(0)$ 是起始状态向量。

2. 离散型状态空间模型

离散型状态空间的模型如下，

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) \end{cases} \quad (6-27)$$

于是有

(1) 对应的脉冲传递函数模型为

$$G(z^{-1}) = c(zI - A)^{-1}b$$

利用迭代法容易由模型式 (6-27) 得到以下的 (2) 和 (3)

(2) 单位脉冲响应为

$$g(k) = cA^{k-1}b$$

(3) 单位阶跃响应为

$$h(k) = c \left[\sum_{j=0}^{k-1} A^j \right] b$$

(4) 在输入量的作用下, 方程式 (6-27) 的解为

$$\begin{cases} x(k+1) = A^k x(k) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} b u(j) \\ y(k) = c x(k) \end{cases}$$

(5) 离散状态空间模型也可以如连续状态空间模型那样变换成规范型。

(6) 离散系统的输入量 $u(k)$ 和输出量 $y(k)$ 还可通过脉冲响应 $g(k)$ 建立关系式如下:

$$y(k) = T_0 \sum_{i=0}^{k-1} g(i) u(k-i)$$

三、系统数学模型之间的等价相互转换

由于系统辨识是利用系统的输入输出数据来建立数学模型的, 因此其模型结构采用离散差分方程模型便于系统辨识的计算。

1. 微分方程模型转换为差分方程模型

SISO 连续型的系统微分方程模型转换为差分方程模型为: 对于如下系统模型, 即本节模型式 (6-10)

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ &= b_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{du(t)}{dt} + b_n u(t) \end{aligned}$$

式中, $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别是系统的输出和输入量; $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 为模型参数。按采样周期 T_0 , 分以下三个步骤将它转换为差分方程模型。

(1) 将上式变换为可控规范型状态空间模型表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{b}u(t) \\ y(t) = \bar{c}x(t) \end{cases} \quad (6-28)$$

式中,

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \\ x_1(t) &= y(t) \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \dots \quad x_n(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

其中,

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{b} = Tb, \quad \bar{c} = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1]$$

(2) 将模型式 (6-28) 离散化: 当采样周期 T_0 足够小时, 使得在一个采样周期内满足

$$u(t) = u(kT_0), \quad kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0$$

则可将模型式 (6-28) 变换为模型式 (6-27), 即

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) \end{cases} \quad (6-29)$$

式中,

$$\begin{aligned} A &= e^{\bar{A}T_0} \approx I + T_0\bar{A} \\ b &= \left[\int_0^{T_0} e^{\bar{A}(T_0-t)} dt \right] \bar{b} \approx T_0\bar{b} \\ c &= \bar{c} \end{aligned}$$

(3) 最后将离散化模型转换为差分方程模型: 由于模型式 (6-29) 的脉冲函数为

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = c(zI - A)^{-1}b$$

将模型式 (6-29) 中的系统矩阵代入上式, 并记 $q = (z-1)/T_0$,

则有

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \bar{c}(qI - \bar{A})^{-1}\bar{b}$$

其中，

$$(qI - \bar{A})^{-1} = \frac{1}{\det [qI - \bar{A}]} \text{adj} (qI - \bar{A})$$

$$\det [qI - \bar{A}] = \det \begin{bmatrix} q & -1 & & & \\ & q & -1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & q & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= a_n + a_{n-1}q + \dots + a_1q^{n-1} + q^n$$

由于 $\bar{b} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^T$ ，因 $(qI - \bar{A})^{-1}\bar{b}$ 而只取决于 $\text{adj} (qI - \bar{A})$ 阵的最后一列元素，而与其他元素无关，于是由

$$\text{adj} (qI - \bar{A}) = \begin{bmatrix} * & * & \dots & 1 \\ * & * & \dots & q \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ * & * & \dots & q^{n-1} \end{bmatrix}$$

可得

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j}q^j}{\sum_{j=0}^{n-1} a_{n-i}q^j + q^n}$$

将 $q = (z - 1)/T_0$ 代入，并展开二项式有

$$(z - 1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i z^{j-i}$$

其中，

$$C_j^i = j! / i! (j - i) !$$

所以有

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} T_0^{n-j} \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i z^{-(n-j+i)}}{1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j C_n^j z^{-j} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j} T_0^{n-j} \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i z^{-(n-j+i)}}$$

最后得到与该脉冲传递函数对应的差分方程模型是

$$y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_{n-1} y(k-n+1) + \dots + \alpha_n y(k-n) \\ = \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_{n-1} u(k-n+1) + \dots + \beta_n u(k-n) \quad (6-30)$$

式中模型参数为

$$\alpha_{n-i} = (-1)^{n-i} C_n^{n-i} + \sum_{j=i}^{n-1} a_{n-j} T_0^{n-j} (-1)^{j-i} C_j^{j-i} \\ \beta_{n-i} = \sum_{j=i}^{n-1} b_{n-j} T_0^{n-j} (-1)^{j-i} C_j^{j-i} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

注：在模型式 (6-29) 的近似假定下，可利用 Pade 一阶近似将 $z = e^{T_0 s}$ 中的 $e^{T_0 s}$ 展开，得到

$$z \cong \frac{2 + T_0 s}{2 - T_0 s}, \quad s \cong \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}$$

利用该式也可实现微分方程模型和差分方程模型之间的相互转换，这种变换称为双线性变换。

2. 状态方程模型转化为差分方程模型

SISO 系统离散状态方程模型转化为差分方程模型为，若给定离散状态方程模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) \end{cases}$$

式中，如模型式 (6-25) 所述， $x \in R^{n \times 1}$ 、 $A \in R^{n \times n}$ 、 $b \in R^{1 \times n}$ 、 $c \in R^{1 \times n}$ ， $y(k)$ 和 $u(k)$ 分别为系统输入和输出标量。以下通过两个步骤将其转化为差分方程模型。

(1) 转换为可观规范 I 型：在系统是完全可观的条件下，则可通过可观阵

$$T_o = [c^T \dots A^T c^T \dots \dots (A^T)^{n-1} c^T]^T$$

对系统状态变量进行线性变换 $\bar{x}(k) = T_o x(k)$ ，可将上述离散状态方程模型变为可观规范 I 型

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \bar{b} u(k) \\ y(k) = \bar{c} \cdot \bar{x}(k) \end{cases} \quad (6-31)$$

式中，

$$\bar{A} = T_o A T_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & I_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_o b = [\bar{b}_1 \quad \bar{b}_2 \quad \dots \quad \bar{b}_n]^T$$

$$\bar{c} = c T_o^{-1} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

其中， $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 A 的特征多项式系数，即

$$\det[zI - A] = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$$

(2) 再转换为差分方程模型：经过线性变换后，过程的输入输出关系不变，因此模型式 (6-31) 的脉冲传递函数也是原系统的脉冲函数。即

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \bar{c}(zI - \bar{A})^{-1} \bar{b}$$

其中

$$\begin{aligned} (zI - \bar{A})^{-1} &= \frac{1}{\det[zI - \bar{A}]} \text{adj}(zI - \bar{A}) \\ \det[zI - \bar{A}] &= \det \begin{bmatrix} z & -1 & & & \\ & z & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & z & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha_n + \alpha_{n-1} z + \dots + \alpha_1 z^{n-1} + z^n \end{aligned}$$

由于 $\bar{c} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ ，因而 $(zI - \bar{A})^{-1} \bar{b}$ 只取决于 $\text{adj}(zI - \bar{A})$

阵的第一行的元素，而与其他元素无关，于是若假定

$$\text{adj}(zI - \bar{A}) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ & 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \dots \\ & 0 & & 1 & \alpha_1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{n-1} \\ z^{n-2} \\ \dots \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

若令

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_1 & 1 & & & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ddots & & \\ \dots & \dots & \ddots & 1 & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$$

则又有

$$[m_1 \ m_2 \ \dots m_n] = [z^{n-1} \ z^{n-2} \ \dots \ 1] P$$

最后得到

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{1}{\det[zI - \bar{A}]} [z^{n-1} \ z^{n-2} \ \dots \ z \ 1] P \bar{b}$$

令

$$P \bar{b} = \beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^T$$

有

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_n z^{-n}} \quad (6-32)$$

注：根据上述讨论可知，以上两种变换方式均可实现逆转换。即，既可以将差分方程模型转换为微分方程模型，又可以转换为状态空间模型。

第七章 系统辨识方法 (II)

——现代系统辨识方法

当我们来到网络年代，才真正认识到虚拟世界。其实不然，数学模型早就把我们领入了虚拟空间，所以才有今天的网络世界。

第一节 现代系统辨识概述

系统辨识方法可分为两类，一类是非参数模型辨识方法，又称为经典系统辨识方法，是在线性系统的假设前提下，不必事先确定模型的具体结构，因而工程系统仍常使用。另一类是参数模型辨识方法，也称为现代系统辨识方法，必须在假定的一种模型结构下，先利用结构辨识方法确定模型的结构参数，如系统模型的阶次和纯延迟等；再通过某种准则确定模型的参数。

本书将重点讨论参数模型辨识方法，即现代系统辨识方法。并着重最小二乘类参数辨识方法，包括最小二乘法、增广最小二乘法和广义最小二乘法等，其中最小二乘法是最基本，也是应用最广泛的一种方法。最小二乘类的辨识方法都是以最小二乘原理为基础的。

现代系统辨识方法把待辨识系统作为“黑箱”，如图 7-1 所示，只考虑系统的输入输出特性，而不强调系统的内部机理。图中，输入 $u(k)$ 和输出 $z(k)$ 是可观测的； $G(z^{-1})$ 用来描述系统的输入输出特性，称为系统模型，通常可以表示为

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (7-1)$$

其中，

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \\ B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \end{cases} \quad (7-2)$$

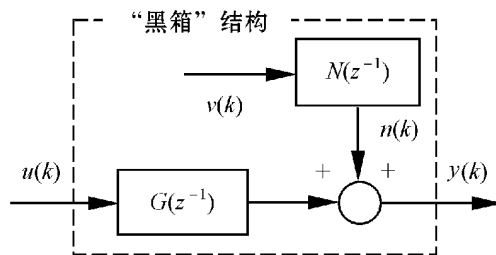


图 7-1 SISO 系统的“黑箱”结构

当系统输入的附加噪声 $n(k)$ 构成平稳随机序列，且均值为 0，谱密度是 $\cos\omega$ 的有理函数时，则附加噪声可表示为

$$n(k) = N(z^{-1})v(k)$$

其中， $v(k)$ 是白噪声； $N(z^{-1})$ 是如下噪声模型

$$N(z^{-1}) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}$$

式中，

$$\begin{cases} C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c} \\ D(z^{-1}) = d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d} \end{cases}$$

注：最小二乘法参数辨识中各方法选用，主要取决于所用的模型结构，如

(1) 最小二乘法所用的模型是

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) + y(k)$$

(2) 增广最小二乘法所用的模型是

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) + D(z^{-1})v(k)$$

(3) 广义最小二乘法所用的模型是

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{1}{C(z^{-1})}v(k)$$

综上所述，不论采用哪种辨识方法，所辨识的系统模型总是一样的，只是噪声模型有所不同而已。在实际应用中，应如何选择噪声模型，要根据实际效果判定。

第二节 模型结构辨识

从以上概述可知，在对系统模型式(7-1)进行参数辨识之前，需要确定其模型结构，即要确定式(7-2)中的阶次 n_a 和 n_b ，以及系统可能出现的纯延迟 $\tau = kT_0$ 。对于 SISO 系统，模型阶次辨识的方法有：Hankel 矩阵秩定阶法、行列式比定阶法、F 检验定阶法、AIC 定阶法和最终预报误差准则定阶法等。这里仅介绍前几种方法，其他方法可在相关文献中查阅。注意方法的选择，要与实际辨识效果为依据。另一方面，模型阶次与模型参数的估计可能是相互利用的，即参数估计需要确定模型阶次，而有时模型阶次估计又要利用参数的估计值。

一、Hankel 矩阵秩定阶法

对于一个可控可观的 SISO 系统，

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) \end{cases} \quad (7-3)$$

其可观矩阵和可控矩阵的秩均为 n_0 ，即为系统的真实阶数。那么可观矩阵或可控矩阵中有 n_0 行或 n_0 列向量是线性无关的。于是有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \dots \\ cA^{n_0-1} \\ \dots \\ cA^L \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \dots \\ cA^{n_0-1} \end{bmatrix} = n_0$$

$$\begin{aligned} & \text{rank} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n_0-1}b \quad \dots A^Lb] \\ &= \text{rank} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n_0-1}b] = n_0 \end{aligned}$$

设系统的脉冲响应序列记作 $g(1)$ 、 $g(2)$ 、 $\dots$ 、 $g(L)$ ，以下分几种情况进行分析。

1. 脉冲响应序列不含噪声

构造 Hankel 矩阵如下：

$$H_l(k) = \begin{bmatrix} g(k) & g(k+1) & \dots & g(k+l-1) \\ g(k+1) & g(k+2) & \dots & g(k+l) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g(k+l-1) & g(k+l) & \dots & g(k+2l-2) \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

其中 $l \geq n_0$ ，且是 Hankel 矩阵的维数； $1 \leq k \leq L - 2l - 2$ ， k 决定用哪些脉冲响应序列组成 Hankel 矩阵。另一方面，由于 $g(k) = cA^{k-1}b$ ，所以有：

$$H_l(k) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \dots \\ cA^{l-1} \end{bmatrix} A^{k-1} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{l-1}b]$$

根据以下两个矩阵秩的性质

(1) $\text{rank}XP = \text{rank}X$ ， P 是正则矩阵。

(2) 根据西勒维斯特不等式

$$\text{rank}X + \text{rank}XY - n \leq \text{rank}Y \leq \min \{ \text{rank}X, \text{rank}Y \}$$

有

$$\text{rank}H_l(k) = n_0, \quad l \geq n_0, \forall k \quad (7-5)$$

所以,由式(7-5)可知,当 $l \geq n_0$ 时,Hankel 矩阵的秩仍为 n_0 。所以能通过对不同的 l 值,来判定 Hankel 矩阵的奇异性,从而确定系统的阶次 n_0 。

而实际中,系统的脉冲响应会多少带有噪声的情况。这时,即使 $l \geq n_0$,也不能确保 Hankel 行列式均为 0。于是,可采用以下两种方法处理。

2. 脉冲响应序列带有弱噪声

引进 Hankel 矩阵行列式的平均比值:

$$D_l = \frac{\frac{1}{L-2l+2} \sum_{k=1}^{L-2l+2} \det H_l(k)}{\frac{1}{L-2l} \sum_{k=1}^{L-2l} \det H_{l+1}(k)} \quad (7-6)$$

可以证明,当 $1 \leq l \leq n_0$ 时, D_l 值随着 l 的增大而增加;当 $l > n_0$ 时, D_l 值分母虽不为 0,但却较分子项急剧下降,从而使 D_l 值在 $l = n_0$ 处达到最大值,如图 7-2 所示。

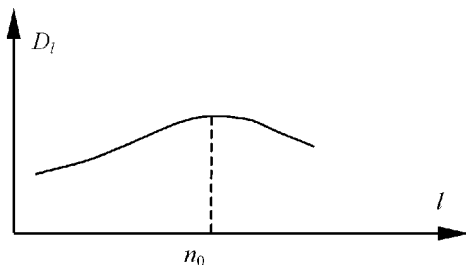


图 7-2 Hankel 矩阵行列式平均比值

3. 脉冲响应序列带有强噪声

可用脉冲响应序列的自相关系数构造 Hankel 矩阵如下:

$$H_l(k) = \begin{bmatrix} \rho(k) & \rho(k+1) & \dots & \rho(k+l-1) \\ \rho(k+1) & \rho(k+2) & \dots & \rho(k+l) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho(k+l-1) & \rho(k+l) & \dots & \rho(k+2l-2) \end{bmatrix} \quad (7-7)$$

其中，

$$\rho(k) = \frac{R_g(k)}{R_g(0)}, \quad R_g(k) = \frac{1}{L-k} \sum_{i=1}^{L-k} g(i)g(i+k)$$

这样就可以利用式 (7-7) 构造的 Hankel 矩阵，可靠地确定系统模型的阶次 $l = n_0$ 。

[例 7-1] 若知某系统的脉冲响应序列如表 7-1 所示，确定该系统模型的阶次。

表 7-1 某系统脉冲响应序列值表

k	0	1	2	3	4	5	6	7
g(k)	1.0	0.8	0.65	0.54	0.46	0.39	0.35	0.31
k	8	9	10	11	12	13	14	15
g(k)	0.28	0.26	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19
k	16	17	18	19	20	21	22	23
g(k)	0.19	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17	0.17	0.16
k	24	25	26	27	28	29	30	31
g(k)	0.16	0.15	0.15	0.15	0.15	0.14	0.14	0.14
k	32	33	34	35	36	37	38	39
g(k)	0.13	0.13	0.13	0.13	0.12	0.12	0.12	0.12
k	40	41	42	43	44	45	46	47
g(k)	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.10	0.10

方法一：按式 (7-4) 构造 Hankel 矩阵，并按式 (7-6) 计算 Hankel 矩阵的平均比值，得到

$$D_2 = \frac{\frac{1}{47} \sum_{k=0}^{46} \det H_2(k)}{\frac{1}{45} \sum_{k=0}^{44} \det H_3(k)} \approx -2.998$$

$$D_3 = \frac{\frac{1}{45} \sum_{k=0}^{44} \det H_3(k)}{\frac{1}{43} \sum_{k=0}^{42} \det H_4(k)} \approx 911.9$$

$$D_4 = \frac{\frac{1}{43} \sum_{k=0}^{42} \det H_4(k)}{\frac{1}{41} \sum_{k=0}^{40} \det H_5(k)} \approx 56.296$$

可见， D_3 为最大值，所以系统模型的阶次可确定为 3 阶。

方法二：按式（7-7）构造 Hankel 矩阵。根据表 7-1 所给出的脉冲响应序列值，计算它们的自相关系数如下表 7-2 所示。

表 7-2 脉冲响应序列自相关系数计算值表

k	$\rho(k)$	k	$\rho(k)$	k	$\rho(k)$
0	1	3	0.72231277	6	0.60107303
1	0.88052126	4	0.67060564	7	0.57697552
2	0.79025506	5	0.62999127	...	...

计算 Hankel 矩阵的行列式结果如下：

$$\det H_2(0) \approx 0.0149$$

$$\det H_3(0) \approx -0.00001235$$

$$\det H_4(0) \approx -0.000000058$$

通过 Hankel 矩阵的行列式的计算可知，因为 $\det H_3(0)$ 已经非常小了，所以系统模型的阶次既可定为 3 阶，也可以定为 2 阶。

二、行列式比定阶法

与 Hankel 矩阵定阶法相似，行列式比定阶法是利用系统输入

输出数据构造类似 Hankel 矩阵的行列式，并根据行列式的比值确定系统模型阶次的方法。以下将分两种情况讨论，即系统无噪声和带有白噪声。

1. 系统无噪声

若对如下 SISO 系统模型

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) \quad (7-8)$$

其中 $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别为系统的输入输出变量，并记

$$Y_n = \begin{bmatrix} y(n) & y(n-1) & \dots & y(1) \\ y(n+1) & y(n) & \dots & y(2) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ y(n+L-1) & y(n+L-2) & \dots & y(L) \end{bmatrix}$$

$$U_u = \begin{bmatrix} u(n) & u(n-1) & \dots & u(1) \\ u(n+1) & u(n) & \dots & u(2) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u(n+L-1) & u(n+L-2) & \dots & u(L) \end{bmatrix}$$

$$H_n = [Y_n \dots U_n] \quad (7-9)$$

式中， L 为数据长度。输入 $u(k)$ 是充分持续激励的信号，则 $\text{rank} U_n = n$ 。假定系统模型式 (7-8) 的真实阶次为 n_0 。那么由于受模型式 (7-8) 的线性约束，则有 $\text{rank} Y_n = n_0$ 。更进一步，若设 n 为模型的估计阶次，那么根据已被证明的结论

$$\text{rank} H_n = \min\{n + n_0, 2n\}$$

有

$$\det H_n > 0, n \leq n_0; \det H_n = 0, n > n_0$$

于是，若有最小 n ，满足 $\det H_n = 0$ ，则 $n_0 = n - 1$ 。但实际中，由于计算误差等原因，所以很难满足 $\det H_n = 0$ 这个判断条件，于是采用如下行列式比替代。设：

$$d_n = \frac{\det H_n}{\det H_{n+1}} \quad (7-10)$$

当 d_n 从 $n=1$ 开始计算起, 如 d_{n+1} 较 d_n 有明显增加时, 则可确定 $n_0 = n$, 其数值特性参见图 7-3 所示。

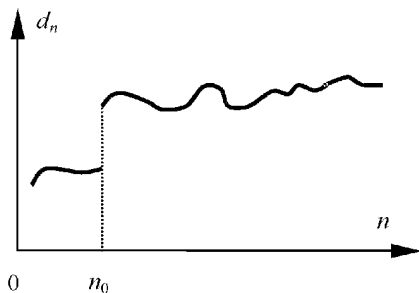


图 7-3 行列式比 d_n 随阶次 n 变化图

2. 系统带有白噪声

将模型式 (7-8) 换作为

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k-i) + v(k) \quad (7-11)$$

模型中, $v(k)$ 为均值 0、方差 σ_v^2 的独立随机变量。那么模型阶次的估计与无噪声的情形相似。即如式 (7-10) 一般定义行列式比如下

$$d_n^* = \frac{\det H_n^*}{\det H_{n+1}^*} \quad (7-12)$$

式中,

$$H_n^* = \frac{1}{L} H_n^T H_n; H_{n+1}^* = \frac{1}{L} H_{n+1}^T H_{n+1}$$

同理, 当 d_n^* 从 $n=1$ 开始计算起, 如 d_{n+1}^* 较 d_n^* 有明显增加时, 则可以认为 n 比较接近模型的阶次, 即有 $n_0 = n$ 。

[例 7-2] 按式 (7-12) 计算如下带有白噪声系统模型的行列式比。

$$y(k) - 1.63y(k-1) + 0.638y(k-2)$$

$$= 0.01u(k) + 0.0004u(k-1) - 0.0024u(k-2) + v(k)$$

其中, $0 < \sigma_v^2 \leq 1$, 输入信号 $u(k)$ 采用 M 序列 (参见相关文献), 循环周期 $T_0 = 31\text{bit}$, 幅度为 1; 数据长度取 $L = 100$ 。

按式 (7-9) 构造矩阵, 并将按式 (7-12) 计算矩阵行列式比如图 7-4 所示。可见, 模型的估计阶次为 2。

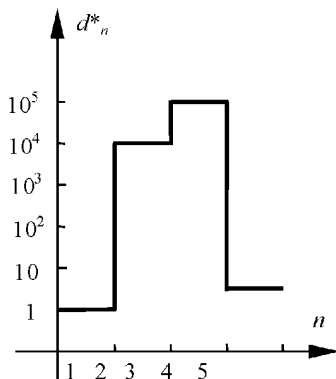


图 7-4 行列式比 d_n^* 的变化

注: 实验表明, 噪声方差较小时, 当 $\sigma_v^2 \leq 1$, 不会影响行列式比式 (7-11) 的定阶效果。但若 $\sigma_v^2 > 2$ 时, 会出现 n 到了 n_0 时, d_n^* 并没有显著的增加, 于是需要选用其他的定阶方法。

总之, 上面所讨论的两类方法, 即 Hankel 矩阵秩定阶法和行列式比定阶法都是在获得系统模型参数估计值之前确定模型的阶次, 它们基本上与模型参数辨识方法无关。而另一些方法, 如 F 检验定阶法和最终预报误差准则定阶法等则需要在得到系统模型参数的估计值之后, 再确定系统模型的阶次。另外, 在讨论过程中, 关于系统含有色噪声的情况, 因本书篇幅有限, 则不在这里论述。

若读者需要进一步了解相关内容，可参阅相关文献。

注：关于系统模型的纯延迟时间的确定以及如何节省模型的参数，则将在本章第三节末给出论述。

事实上，在建立系统数学模型的过程中，如能先确定系统模型的结构，进而再估计模型的参数，自然较为理想。接下来，本章将着重研究利用最小二乘法的方法估计系统模型的参数。

第三节 最小二乘辨识方法

高斯于 1795 年在他著名的星体运动轨迹研究报告中提出了最小二乘法，由于其原理简单，算法也不难实现，所以发展成为估计理论及方法的基础，应用相当广泛，所以颇受重视。经典最小二乘法是一次完成计算，因而在理论研究应用更加方便。而现代递推算法则更适用于计算机在线控制。

一、基本方法

1. 最小二乘模式

设时不变 SISO 系统输入输出关系可表达为如下形式：

$$z(k) = h^T(k)\theta + e(k) \quad (7-13)$$

式中， $z(k)$ 为系统输出量； $h(k)$ 为可观测数据向量； $e(k)$ 为均值 0 的随机噪声。其中，若 L 为数据的长度，则系统模型参数要满足极小化的以下准则函数，

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^L [z(k) - h^T(k)\theta]^2 \quad (7-14)$$

把满足极小化准则式 (7-14) 中参数 θ 的估计值 $\hat{\theta}$ ，称为参数 θ 的最小二乘估计值。这意味着，通过最小二乘法估计模型参数 θ ，进而确定系统估计模型 $z(k) = h^T(k)\hat{\theta}$ ，它与实际观测值最“接近”，也就是吻合程度最好。

[例 7-3] 如一个离散时间的 SISO 系统, 输入和输出数据列分别为 $\{u(k)\}$ 和 $\{z(k)\}$, $k=1, 2, \dots, L$ 。若选定系统模型为

$$z(k) + az(k-1) = bu(k-1) + e(k)$$

式中, a 和 b 为模型的待辨识参数, 则有

$$z(k) = [-z(k-1) \ u(k-1)] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + e(k)$$

那么, 求 a 和 b 满足

$$\begin{aligned} \min J &= \min \sum_{k=1}^L e^2(k) \\ &= \min \sum_{k=1}^L [z(k) + az(k-1) - bu(k-1)]^2 \end{aligned}$$

于是, 通过输入输出数据求出 a 和 b 的估计值的方法, 就是最小二乘法。

2. 动态系统数学模型的最小二乘表达

设时不变 SISO 动态系统的数学模型为

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (7-15)$$

模型中, $u(k)$ 和 $z(k)$ 分别为系统的输入输出量; $e(k)$ 是噪声; 多项式 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 如式 (7-2) 所示, 根据本章第二节系统结构辨识的讨论, 这里假设模型式 (7-15) 的阶次为 $n = n_a = n_b = n_0$ 。于是可将模型式 (7-15) 表达为最小二乘模式式 (7-13) 为

$$z(k) = h^T(k)\theta + e(k)$$

其中,

$$\begin{aligned} h(k) &= [-z(k-1) \ \dots \ -z(k-n) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n)]^T \\ \theta &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T, \\ k &= 1, 2, \dots, L \end{aligned}$$

可改写为线性方程组模型

$$z_L = H_L \theta + e_L \quad (7-16)$$

其中,

$$z_L = [z(1) \quad z(2) \quad \dots \quad z(L)]^T$$

$$e_L = [e(1) \quad e(2) \quad \dots \quad e(L)]^T$$

$$H_L = \begin{bmatrix} h^T(1) \\ h^T(2) \\ \dots \\ h^T(L) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -z(0) & \dots & -z(1-n) & u(0) & \dots & u(1-n) \\ -z(1) & \dots & -z(2-n) & u(1) & \dots & u(2-n) \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -z(L-1) & \dots & -z(L-n) & u(L-1) & \dots & u(L-n) \end{bmatrix}$$

另外，噪声的统计特性描述如下：

$$E\{e_L\} = \begin{bmatrix} E\{e(1)\} \\ E\{e(2)\} \\ \dots \\ E\{e(L)\} \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Cov}\{e_L\} = E\{e_L e_L^T\}$$

$$= \begin{bmatrix} E\{e^2(1)\} & E\{e(1)e(2)\} & \dots & E\{e(1)e(L)\} \\ E\{e(2)e(1)\} & E\{e^2(2)\} & \dots & E\{e(2)e(L)\} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ E\{e(L)e(1)\} & E\{e(L)e(2)\} & \dots & E\{e^2(L)\} \end{bmatrix} = \sigma_n^2 I$$

其中， σ_n^2 是 $e(k)$ 的方差，即 $e(k)$ 为白噪声。且白噪声与输入 $u(k)$ 是不相关的，即有

$$E\{e(k)e(k-1)\} = 0, \quad \forall k \mid (k > 1)$$

注意到，在推导最小二乘算法时，并不需要考虑噪声的统计特性。上述关于噪声的假设，只是在评价最小二乘估计的性质时必须用到。有时在评价最小二乘估计的某些统计特性时，甚至还要假设 $e(k)$ 服从正态分布。

注：关于数据长度 L ，也就是在进行系统模型参数的辨识中，

所需要的数据量，这里分几种情况说明。

(1) 当 $L < 2n$ 时，即模型式 (7-16) 的方程个数少于待辨识参数个数，显然 θ 不能唯一确定。

(2) 当 $L = 2n$ 时，并且当测量矩阵 H_L 满秩时，则有

$$\theta = H_L^{-1} z_L + H_L^{-1} e_L$$

可见，只有当不考虑噪声的影响时，模型参数才有唯一解。这种情况在此不讨论。

(3) 当 $L > 2n$ 时，可以使用最小二乘法对模型参数进行有效辨识。所以，只有当数据量充分大的情况下进行系统模型辨识。

二、最小二乘解法

1. 一般最小二乘法

对于模型式 (7-13)，及其准则函数式 (7-14)，准则函数可改写为二次型，即

$$\begin{aligned} J(\theta) &= (z_L - H_L \theta)^T (z_L - H_L \theta) \\ &= (z_L - H_L \theta)^T I_L (z_L - H_L \theta) \end{aligned} \quad (7-17)$$

若 θ_1 满足 $J(\theta_1) = \min J(\theta)$ ，则有

$$\left. \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta} (z_L - H_L \theta)^T I_L (z_L - H_L \theta) \Big|_{\theta_1} = 0$$

展开后，根据

$$\frac{\partial}{\partial x} (a^T x) = a^T, \quad \frac{\partial}{\partial x} (x^T A x) = 2x^T A$$

其中， A 为对称阵。于是可得 $(H_L^T I_L H_L) \theta_1 = H_L^T I_L z_L$ 。当 $H_L^T I_L H_L$ 为正定矩阵时，则有

$$\theta_1 = (H_L^T I_L H_L)^{-1} H_L^T I_L z_L = (H_L^T H_L)^{-1} H_L^T z_L \quad (7-18)$$

另一方面，由于 L 阶单位矩阵 I_L 是正定阵，所以 $H_L^T I_L H_L$ 也是正定矩阵，则有

$$\left. \frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_1} = 2H_L^T I_L H_L > 0$$

最后，得到 θ_1 是唯一满足 $J(\theta_1) = \min J(\theta)$ 中参数 θ 的估计量值。

[例 7-4] 对于一个二阶系统模型，其差分方程模型如下

$$z(k) - 1.5z(k-1) + 0.7z(k-2)$$

$$= 1.0u(k-1) + 0.5u(k-2) = e(k)$$

该系统在计算机上仿真，输入 $u(k)$ 为幅值 1 的 PRBS 信号，噪声 $\{e(k)\}$ 是服从 $(0, 1)$ 的正态分布序列，其方差可以调整。系统输入输出的采样数据长度 $L = 100$ ，对不同的噪声水平，采用最小二乘法估计该系统模型的参数如下表所示。系统参数真值为

$$\theta_1 = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2]^T = [-1.50 \quad 0.70 \quad 1.00 \quad 0.50]^T$$

表 7-3 不同噪声水平下最小二乘估计计算值表

噪声水平	a_1	a_2	b_1	b_2
$\sigma = 0$	-1.50 ± 0.00	0.70 ± 0.00	1.00 ± 0.00	0.50 ± 0.00
$\sigma = 0.1$	-1.50 ± 0.01	0.69 ± 0.01	0.99 ± 0.01	0.49 ± 0.01
$\sigma = 0.5$	-1.48 ± 0.04	0.64 ± 0.03	0.96 ± 0.05	0.48 ± 0.07
$\sigma = 1$	-1.47 ± 0.06	0.66 ± 0.06	0.93 ± 0.12	0.46 ± 0.14
$\sigma = 5$	-1.48 ± 0.07	0.74 ± 0.08	0.98 ± 0.61	0.41 ± 0.61
参数真值	1.50	0.70	1.00	0.50

从表中计算结果可见，当噪声不存在时，可获得精确的计算结果。随着噪声的加大，最小二乘估计值的方差也越大。

2. 加权最小二乘法

同样针对模型式 (7-13) 的参数辨识，由于考虑到所观测数据的可信度，有理由相信现在时刻的数据比过去时刻的数据对系统的影响更大。所以引入加权因子 $w_k = r^{L-k}$ ， $0 < r < 1$ ， $k = 1, 2, \dots, L$ 。故对准则函数式 (7-14) 经加权处理有

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^L w_k [z(k) - h^T(k)\boldsymbol{\theta}]^2$$

$$= (\mathbf{z}_L - \mathbf{H}_L \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{W}_L (\mathbf{z}_L - \mathbf{H}_L \boldsymbol{\theta}) \quad (7-19)$$

其中加权矩阵

$$\mathbf{W}_L = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_L \end{bmatrix}$$

所以, 根据以上一般最小二乘算法, 同理可得, 满足准则函数式 (7-19) 极小化的模型式 (7-13) 中参数 $\boldsymbol{\theta}$ 唯一估计量为

$$\boldsymbol{\theta}_w = (\mathbf{H}_L^T \mathbf{W}_L \mathbf{H}_L)^{-1} \mathbf{H}_L^T \mathbf{W}_L \mathbf{z}_L \quad (7-20)$$

3. Markov 估计法

在一定条件下, 还可以进一步根据噪声的方差对加权因子作最佳选择, 那么所得到的模型式 (7-13) 的参数估计量则称为 Markov 估计, 也称为最小方差估计。

若模型式 (7-16) 中的噪声向量 $\mathbf{e}_L$ 满足均值为 0, 并与 $\mathbf{H}_L$ 统计独立。设 $\mathbf{V}_L = \text{Cov}\{\mathbf{e}_L\}$, 取加权阵 $\mathbf{W}_L = \mathbf{V}_L^{-1}$, 代入式 (7-20)。则有

$$\boldsymbol{\theta}_M = (\mathbf{H}_L^T \mathbf{V}_L^{-1} \mathbf{H}_L)^{-1} \mathbf{H}_L^T \mathbf{V}_L^{-1} \mathbf{z}_L \quad (7-21)$$

即为 Markov 估计值。还可以证明, $\boldsymbol{\theta}_M$ 偏差的协方差阵将达到最小值。其中加权矩阵 $\mathbf{W}_L = \mathbf{V}_L^{-1}$, 即可视为一种对加权因子的最佳选择。

三、统计特性

由于系统受到噪声的干扰, 所以系统模型参数的估计值的可信度或可靠性需要根据它们的统计特性加以评价。另一方面, 白噪声的方差亦是未知量, 也需要进行估计。

1. $\boldsymbol{\theta}$ 的统计特性

(1) 无偏性——用于衡量参数估计值是否围绕参数真值波动。

即满足

$$E\{\boldsymbol{\theta}\} = \boldsymbol{\theta}_0$$

(2) 一致性——估计值以概率 1 收敛于真值。是最受关注的统计特性。即满足

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}^{P,1} = \boldsymbol{\theta}_0$$

(3) 有效性——意味着参数估计值偏差的协方差阵将达到最小值。可以证明, 当 e_L 服从正态分布, 则 $\boldsymbol{\theta}_l$ 偏差的协方差将达到矩阵不等式的下界

$$\text{Cov}\{\boldsymbol{\theta}\} = \sigma_n^2 E\{(\mathbf{H}_L^T \mathbf{H}_L)^{-1}\} = \mathbf{M}^{-1} \quad (7-22)$$

其中, $\mathbf{M}$ 为 Fisher 信息矩阵。

$$\mathbf{M} = E\left\{\left[\frac{\partial \log P(z_L|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right]^T \left[\frac{\partial \log P(z_L|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right] \middle| \boldsymbol{\theta}_l\right\}$$

(4) 渐进正态性——即若噪声服从正态分布, 则参数估计量也服从正态分布。

综上所述, 将以上三种最小二乘类的参数估计值的统计特性列于下表 7-4 所示。所满足的条件有三: (I) e_L 和 $\mathbf{H}_L$ 统计独立; (II) e_L 是白噪声; (III) e_L 服从正态分布。

表 7-4 参数估计值的统计特性

方法	一般最小二乘法	加权最小二乘法	Markov 估计法
参数	$\boldsymbol{\theta}_l$	$\boldsymbol{\theta}_w$	$\boldsymbol{\theta}_M$
条件	(II)	(I)	(I) 和 (III)
无偏性	✓	✓	✓
一致性	✓	✓	✓
有效性	✓附加条件 (III)		✓
渐近正态性	✓附加条件 (III)		✓

表 7-4 表明, 在一定的条件下, 最小二乘法能给出较好的参数估计值, 这能说明最小二乘法是较为理想的辨识方法。

2. 白噪声方差 σ_n^2 的估计

在一般最小二乘法下，设系统输出残差为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{z}_L - \mathbf{H}_L \boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{T} \mathbf{e}_L$$

其中，

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_L - \mathbf{H}_L (\mathbf{H}_L^T \mathbf{H}_L)^{-1} \mathbf{H}_L^T$$

因 $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}$ 和 $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$ ，所以 $E\{\boldsymbol{\varepsilon}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}_L\} = E\{\mathbf{e}_L^T \mathbf{T} \mathbf{e}_L\}$ 。则根据以下性质

$$\begin{cases} \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} = \text{Tr}[\mathbf{A} \mathbf{a} \mathbf{a}^T] \\ E\{\text{Tr} \mathbf{A}\} = \text{Tr}[E\{\mathbf{A}\}] \\ \text{Tr}[\mathbf{A} \mathbf{B}] = \text{Tr}[\mathbf{B} \mathbf{A}] \end{cases}$$

和 $\mathbf{e}_L$ 与 $\mathbf{H}_L$ 统计独立，有

$$\begin{aligned} E\{\boldsymbol{\varepsilon}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}_L\} &= E\{\text{Tr}[\mathbf{T} \mathbf{e}_L \mathbf{e}_L^T]\} \\ &= \text{Tr}\{E[\mathbf{T} \mathbf{e}_L \mathbf{e}_L^T]\} = \sigma_n^2 \text{Tr}[E\{\mathbf{T}\}] \\ &= \sigma_n^2 E\{\text{Tr}[\mathbf{I}_L - \mathbf{H}_L (\mathbf{H}_L^T \mathbf{H}_L)^{-1} \mathbf{H}_L^T]\} \\ &= \sigma_n^2 E\{\text{Tr}[\mathbf{I}_L - \text{Tr}[\mathbf{H}_L (\mathbf{H}_L^T \mathbf{H}_L)^{-1} \mathbf{H}_L^T]]\} \\ &= (L - \dim \boldsymbol{\theta}_1) \sigma_n^2 = (L - 2n) \sigma_n^2 \end{aligned}$$

可见

$$\sigma_n^2 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}_L}{L - \dim \boldsymbol{\theta}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}_L}{L - 2n} \quad (7-23)$$

是噪声方差 σ_n^2 的无偏估计，所以可作为白噪声方差的估计值。

四、系统纯延迟 τ 的辨识

在上述讨论的具体算法中，为简化表示，纯延迟往往被忽略。而在实际系统中，它确实存在。即若数据的采样间隔 T_0 不是很大，即当 $\tau = dT_0$ 时，系统模型的传递函数为

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-(d+1)} + b_2 z^{-(d+2)} + \dots + b_n z^{-(d+n)}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

模型在第 k 次采样的输出为

$$z_m(k) = -a_1 z_m(k-1) - a_2 z_m(k-2) - \dots - a_n z_m(k-n)$$

$$= b_1 u(k-d-1) + b_2 u(k-d-2) + \dots + b_n u(k-d-n)$$

可见，不同之处仅在于输入信号从 $u(k-i)$ 变为 $u(k-d-i)$ 。所以有关最小二乘辨识法中，只要将数据中的 $u(k-i)$ 改用 $u(k-d-i)$ 替代即可，其他则没有任何变化。

在多数实际应用中，纯延迟是由物料传输造成的，因而可以准确测量。但在化工系统中，往往由于一些重要的状态变量无法测量，所以需要通过辨识方法获得。可采用阶跃响应曲线或计算输入与输出信号的互相关函数确定系统模型的纯延迟，这里介绍以下另外两种方法。

1. 最小损失函数法

利用损失函数，即误差函数 J ，可在模型阶次确定的情况下，对不同的纯延迟反复进行最小二乘辨识估计，若能使误差函数 J 趋于最小值，其中 J 的取法与模型阶次相同，从而确定系统模型的纯延迟。其计算机算法如图 7-5 所示。

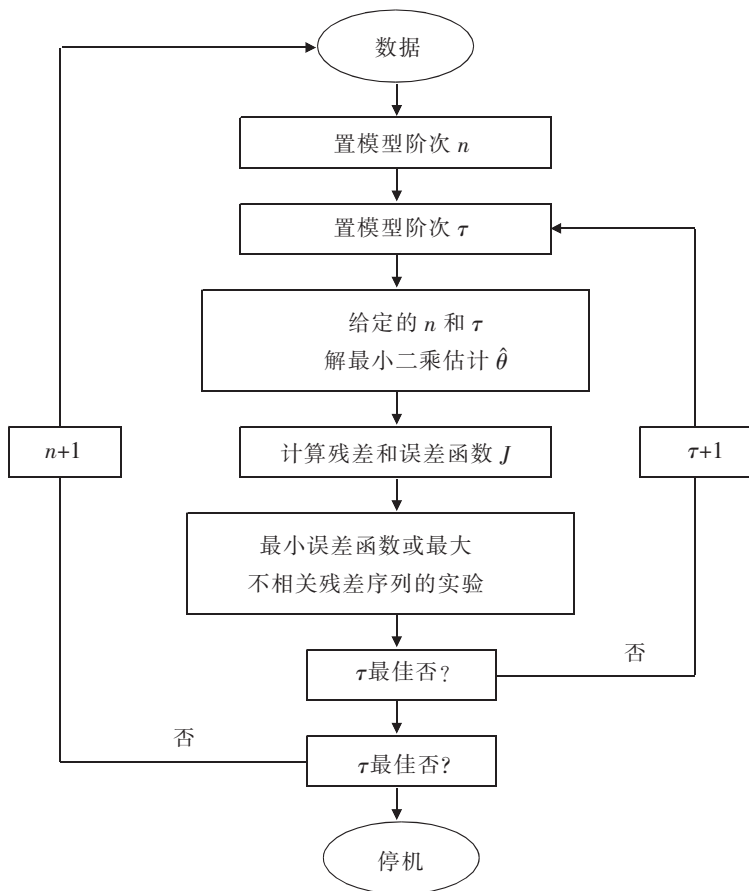


图 7-5 含辨识阶次和纯延迟的最小二乘算法框图

〔例 7-5〕 某系统的选择模型如下：

$$z(k) + \sum_{i=1}^n a_i z(k-i) = \sum_{i=1}^n b_i u(k-d-i) + e(k)$$

输入为 RPBS 信号，周期 $T = 31T_0$ ， $T_0 = 6\text{min}$ ，幅值

$a = \pm 21/h$ ，数据长度 $L=220$ ，测试结果如图 7 - 6 所示。

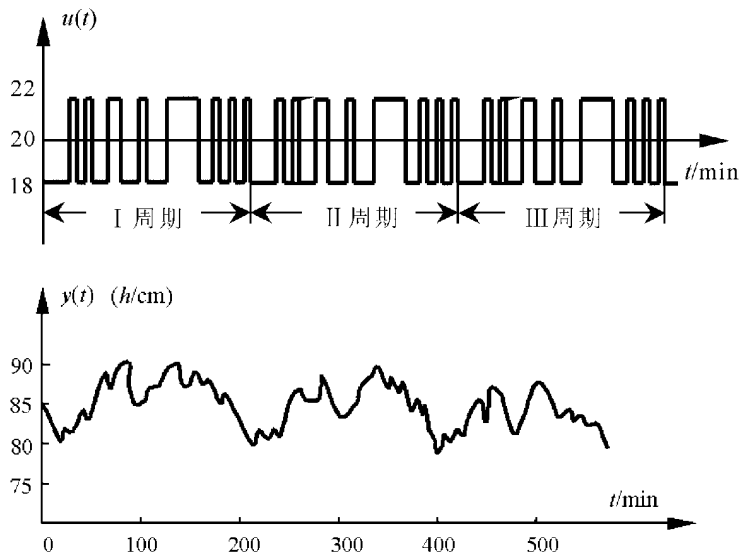


图 7 - 6 系统动态测试曲线图

用普通最小二乘法估计该模型参数，并确定模型阶次和系统纯延迟。其计算结果列于表 7 - 5 所示。表中

$$J = \sum_{k=1}^L e^2(k), \quad J^* = \sum_{k=1}^L [z(k) - \hat{z}(k)]^2$$

表 7 - 5 一般最小二乘法辨识参数以及相关计算结果表

阶次	估计值	d = 0	d = 1	d = 2
n = 1	a ₁	- 0. 772039	- 0. 693777	- 0. 716995
	b ₀	- 0. 00963866	- 0. 12273	- 0. 106088
	b ₁	- 0. 135285	- 0. 0643629	- 0. 0150611
	J	487. 322	429. 466	749. 081
	J *	1019. 33	824. 082	1663. 53
n = 2	a ₁	- 0. 798828	- 0. 715232	- 0. 783625
	a ₂	0. 105763	0. 0790032	0. 114188
	b ₀	- 0. 109312	- 0. 127249	- 0. 110253
	b ₁	- 0. 124043	- 0. 0523924	- 0. 0156055
	b ₂	- 0. 0569231	- 0. 0370224	- 0. 0287444
	J	416. 166	407. 132	733. 922
	J *	751. 42	718. 826	1465. 71
n = 3	a ₁	- 0. 694532	- 0. 638918	- 0. 753188
	a ₂	- 0. 202548	- 0. 184397	- 0. 00357652
	a ₃	- 0. 255654	- 0. 251124	0. 126782
	b ₀	- 0. 029633	- 0. 135981	- 0. 102194
	b ₁	- 0. 127648	- 0. 0525865	- 0. 00995803
	b ₂	- 0. 0536588	- 0. 00979632	- 0. 0258521
	b ₃	- 0. 00966471	- 0. 032792	- 0. 0195689
	J	357. 187	353. 319	721. 136
	J *	689. 745	586. 711	1435. 57

2. F 检验法

先辨识模型参数，再利用 F 检验法对模型参数进行检验，确定模型纯延迟，并剔除 0 值参数。可见，这种方法还能起到节省模型参数的作用。具体方法如下：

对于模型式 (7 - 16)，当白噪声 e_L 服从正态分布，设模型阶次为 n ，估计参数为

$$\theta_1 = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_{2n}]^T = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]^T$$

根据式 (7 - 22)

$$\text{Cov}\{\boldsymbol{\theta}\} = \sigma_n^2 \text{E}\{(\mathbf{H}_L^T \mathbf{H}_L)^{-1}\} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_n^2 \mathbf{P}_L$$

再根据式 (7 - 23), 白噪声方差的估计值为

$$\sigma_n^2 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}_L}{L - 2n} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{L - 2n} J_L$$

其中, J_L 即为 $\boldsymbol{\theta}_L$ 的损失函数。并设 p_i 为 $\mathbf{P}_L$ 第 i 个对角元素, 则根据正态分布特性, θ_i 的 95% 置信区间为

$$\theta_i - 1.96\sigma \sqrt{p_i} < \theta_i < \theta_i + 1.96\sigma \sqrt{p_i}$$

即

$$\theta_i = \theta_i \pm 1.96\sigma \sqrt{p_i}$$

显然, 当 θ_i 很小时, 可作 $\theta_i \stackrel{F}{=} 0$ 。将其在模型参数中剔除, 并重新辨识其他的模型参数。最后, 若通过 F 检验有

$$b_1^F = \dots = b_{d-1}^F = 0, b_d^F \neq 0$$

则系统纯延迟为 d , 即 $\tau = dT_0$ 。

第四节 最小二乘递推算法与改进

前面所给出了最小二乘辨识方法的一次完成算法, 在具体使用时, 尤其在多次计算时, 所占内存较大, 而且不能实现在线控制的辨识。另一方面, 还存在两个方面的缺陷: 一是当模型噪声是有色噪声时, 最小二乘估计不满足无偏性和一致性; 二是随着数据的增加, 最小二乘法会出现所谓的“数据饱和”现象。为解决这些问题, 本节将进一步讨论最小二乘辨识方法的递推算法和经改进的最小二乘估计方法。

一、新增数据递推法

该方法的思路就是, 利用每次获得新的观测数据就修正原来的

模型参数估计值, 即

新的估计值 $\theta_k = \text{原来估计值 } \theta_{k-1} + \text{修正值}$

具体方法如下。

1. 导出式 (7-20) 中 P 的递推关系式

将一次完成算法的加权最小二乘辨识参数式 (7-20) 表达为

$$\begin{aligned}\theta_w &= (H_L^T W_L H_L)^{-1} H_L^T W_L Z_L \stackrel{\Delta}{=} P_L H_L^T W_L Z_L \\ &= \left[\sum_{i=1}^L w_i h(i) h^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^L w_i h(i) h^T(i) \right] \quad (7-24a)\end{aligned}$$

设

$$P_k^{-1} = \sum_{i=1}^L w_i h(i) h^T(i) \stackrel{\Delta}{=} H_k^T W_k H_k$$

其中,

$$H_k = \begin{bmatrix} h^T(1) \\ h^T(2) \\ \dots \\ h^T(k) \end{bmatrix}, \quad W_k = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_k \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned}P_k^{-1} &= w_k h(k) h^T(k) + \sum_{i=1}^{k-1} w_i h(i) h^T(i) \\ &= w_k h(k) h^T(k) + P_{k-1}^{-1}\end{aligned}$$

2. 推导估计参数的递推关系式

设 $z_{k-1} = [z(1) \dots z(k-1)]^T$, 则有

$$\begin{aligned}\theta_{W_{k-1}} &= (H_{k-1}^T W_{k-1} H_{k-1})^{-1} H_{k-1}^T W_{k-1} z_{k-1} \\ &= P_{k-1} \left[\sum_{i=1}^{k-1} w_i h(i) z(i) \right]\end{aligned}$$

所以有

$$P_{k-1}^{-1} \theta_{W_{k-1}} = \sum_{i=1}^{k-1} w_i h(i) z(i)$$

再设 $z_k = [z(1) \ z(2) \ \dots \ z(k)]^T$, 则根据上述关系式可得

$$\begin{aligned}
\theta_{W_k} &= (H_k^T W_k H_k)^{-1} H_k^T W_k z_k \\
&= P_{k-1} \left[\sum_{i=1}^{k-1} w_i h(i) z(i) \right] \\
&= P_k [P_{k-1}^{-1} \theta_{W_{k-1}} + w_k h(k) z(k)] \quad (7-24) \\
&= P_k \{ [P_{k-1}^{-1} + w_k h(k) h^T(k) z(k)] \theta_{W_{k-1}} + w_k h(k) z(k) \} \\
&= \theta_{W_{k-1}} + P_k h(k) w_k [z(k) - h^T(k) \theta_{W_{k-1}}]
\end{aligned}$$

定义增益矩阵为

$$K_k \triangleq P_k h(k) w_k$$

那么式 (7-24) 可表达为

$$\theta_{W_k} = \theta_{W_{k-1}} + K_k [z(k) - h^T(k) \theta_{W_{k-1}}] \quad (7-25)$$

3. 导出增益矩阵的递推关系式

根据上面的讨论有

$$P_k^{-1} = P_{k-1}^{-1} + w_k h(k) h^T(k)$$

则有

$$P_k = [P_{k-1}^{-1} + w_k h(k) h^T(k)]^{-1} \quad (7-26)$$

为避免计算逆矩阵, 根据矩阵的反演等式

$$(A + CC^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + C^T A^{-1}C)^{-1}C^T A^{-1}$$

可将式 (7-26) 写作

$$\begin{aligned}
P_k &= P_{k-1} + P_{k-1} h(k) h^T(k) P_{k-1} [h^T(k) P_{k-1} h(k) + w_k^{-1}]^{-1} \\
&= \left[I - \frac{P_{k-1} h(k) h^T(k)}{h^T(k) P_{k-1} h(k) + w_k^{-1}} \right] P_{k-1} \quad (7-27)
\end{aligned}$$

将上式 (7-27) 代入增益矩阵的定义式, 整理得

$$K_k = P_{k-1} h(k) [h^T(k) P_{k-1} h(k) + w_k^{-1}]^{-1} \quad (7-28)$$

4. 综合一次完成算法的递推关系式

最后, 综合式 (7-24a)、(7-24b)、(7-27) 和 (7-28) 可得到加权最小二乘参数估计递推辨识法如下:

$$\begin{cases} \theta_{W_k} = \theta_{W_{k-1}} + K_k [z(k) - h^T(k) \theta_{W_{k-1}}] \\ K_k = P_{k-1} h(k) [h^T(k) P_{k-1} h(k) + w_k^{-1}]^{-1} \\ P_k = [I - K_k h^T(k)] P_{k-1} \end{cases} \quad (7-29)$$

注一：算式 (7 - 29) 中，增益矩阵是时变矩阵； P_k 是对称矩阵，在递推计算的过程中，为了保证其对称性，有时可采用以下算法对 P_k 进行递推计算，替换式 (7 - 29) 中的第三个算式。

$$P_k = P_{k-1} - \frac{[P_{k-1}h(k)][P_{k-1}h^T(k)]^T}{h^T(k)P_{k-1}h(k) + w_k^{-1}}$$

$$= P_{k-1} - K_{k-1}K_{k-1}^T[h^T(k)P_{k-1}h(k) + w_k^{-1}]$$

注二：递推计算的初始状态 θ_{w0} 和 P_0 的取法。

(1) 利用第一批长度为 L_0 的数据计算并设

$$\begin{cases} P_0 = P_{L_0} = (H_{L_0}^T W_{L_0} H_{L_0})^{-1} \\ \theta_{w0} = P_0 H_{L_0}^T W_{L_0} Z_{L_0} \end{cases} \quad (7 - 30)$$

(2) 直接取

$$P_0 = a^2 I, \quad \theta_{w0} = \varepsilon \quad (7 - 31)$$

其中， a 为充分大的实数， ε 为充分小的实数向量。因为

$$P_k^{-1} = \sum_{i=1}^k w_i h(i) h^T(i)$$

$$P_{k-1}^{-1} \theta_{wk-1} = \sum_{i=1}^{k-1} w_i h(i) z^T(i)$$

根据式 (7 - 24b) 中模型参数的表达式，可知

$$\begin{aligned} \theta_{wk} &= \left[\sum_{i=1}^k w_i h(i) h^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^k w_i h(i) h^T(i) \right] \\ &= \left[P_0^{-1} + \sum_{i=1}^k w_i h(i) h^T(i) \right]^{-1} \left[P_0^{-1} \theta_{w0} + \sum_{i=1}^k w_i h(i) h^T(i) \right] \end{aligned}$$

显然，要使上式成立就必须有

$$P_0^{-1} \rightarrow 0, \quad \theta_{w0} \rightarrow 0$$

故有式 (7 - 31) 成立。

注三：递推算法的停算标准。

设 $\theta_{wk} = [\theta_k(1) \quad \theta_k(2) \quad \dots \quad \theta_k(2n)]^T$ ，那么在递推计算的过程中，只要选定一个适当小的数 ε ，满足

$$\max_{\forall i} \left| \frac{\theta_k(i) - \theta_{k-1}(i)}{\theta_{k-1}(i)} \right| < \varepsilon$$

即可停止计算，这意味着所有的估计参数值均变化不大时终止递推计算。

注四：准则函数递推算法。

可以证明，当准则函数按式（7-19）计算时，即

$$J_L = (z_L - H_L \theta_w)^T W_L (z_L - H_L \theta_w)$$

那么，准则函数和模型参数估计一起递推的算式如下：

$$J_k = J_{k-1} + \tilde{z}^2(k) [h^T(k) P_{k-1} h(k) + w_k^{-1}]^{-1} \quad (7-32)$$

式中

$$\tilde{z}(k) = z(k) - h^T(k) \theta_{w,k-1}$$

其中， $\tilde{z}(k)$ 称作为新息（Innovation）。

注五：可以证明，当系统噪声为 0 均值的白噪声时，上述递推算法所估计的模型参数是一致收敛于模型参数真值的。

二、模型阶次递推算法

考虑如下模型

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (7-33)$$

其中， $\{e(k)\}$ 为 0 均值的白噪声，为简单起见，设：

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots + b_n z^{-n}$$

现在已辨识 n 阶模型参数的基础上，导出 n+1 阶模型的参数。令

$$\theta_n = [a_1 \quad b_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_n]^T$$

$$\theta_{n+1} = [a_1 \quad b_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_n \quad \dots \quad a_{n+1} \quad b_{n+1}]^T$$

$$z_L = [z(1) \quad z(2) \quad \dots \quad z(L)]^T$$

其中 L 为数据长度。根据式（7-18），n 阶模型参数的最小二乘估计值为

$$\theta_{1,n} = (H_n^T H_n)^{-1} H_n^T z_L \stackrel{\Delta}{=} P_n H_n^T z_L \quad (7-34)$$

其中,

$$H_n = \begin{bmatrix} -z(0) & u(0) & -z(1) & \dots & u(1-n) \\ -z(1) & u(1) & -z(2) & \dots & u(2-n) \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -z(L-1) & u(L-1) & -z(L-2) & \dots & u(L-n) \end{bmatrix}$$

当模型的阶次为 $n+1$, 参数的估计值则为

$$\theta_{1,n+1} = (H_{n+1}^T H_{n+1})^{-1} H_{n+1}^T z_L \stackrel{\Delta}{=} P_{n+1} H_{n+1}^T z_L \quad (7-35)$$

其中,

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} \dots & -z(-n) & u(-n) \\ H_n & \dots & -z(1-n) & u(1-n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -z(L-n-1) & u(L-n-1) \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} [H_n \quad X_n]$$

并且有

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (H_{n+1}^T H_{n+1})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} H_n^T \\ X_n^T \end{bmatrix} [H_n \quad X_n] \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} P_n^{-1} & [X_n^T H_n]^T \\ X_n^T H_n & X_n^T X_n \end{bmatrix}^{-1} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} P_n^{-1} & S_n^T \\ S_n & Q_n \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

求分块矩阵逆矩阵可得

$$P_{n+1} = \begin{bmatrix} P_n + R_n S_n P_n & -R_n \\ -R_n^T & P_n^* \end{bmatrix}$$

其中,

$$\begin{aligned} R_n &= P_n S_n^T P_n^* \\ P_n^* &= (Q_n - S_n^T P_n S_n)^{-1} \end{aligned}$$

最后, 根据式 (7-34) 和式 (7-35) 有

$$\theta_{1,n+1} = \begin{bmatrix} P_n + R_n S_n P_n & -R_n \\ -R_n^T & P_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_n^T \\ X_n^T \end{bmatrix} z_L$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_{I,n} - R_n X_n^T (z_L - H_n \theta_{I,n}) \\ P_n^* X_n^T (z_L - H_n \theta_{I,n}) \end{bmatrix} \quad (7-36)$$

为了减少计算量，可以证明式 (7-37) 成立。

$$\theta_{I,n+1} = \begin{bmatrix} \theta_{I,n} - R_n X_n^T (z_L - S_n \theta_{I,n}) \\ P_n^* X_n^T (z_L - S_n \theta_{I,n}) \end{bmatrix} \quad (7-37)$$

三、最小二乘适应算法

在新增数据递推算算法中，新参数估计值依赖新息与增益矩阵对原参数估计值的修正。容易证明，当 $k \rightarrow \infty$ 时， $P \rightarrow 0$ ，也同样导致增益矩阵 $K \rightarrow 0$ ，从而使该递推算算法失去修正效果。针对这种所谓“数据饱和”现象，提出最小二乘适应算法，它包括以下两种算法。

1. 遗忘因子法

该算法是对过去的数据增添遗忘因子，即降低老数据的信息量，加强新信息的可信度。

针对 SISO 系统的数学模型式 (7-33)，其最小二乘表达式为

$$z_L = H_L \theta + e_L$$

其中 $e(k)$ 是均值为 0 的不相关随机噪声，对输出数据附加衰减因子 δ ($0 < \delta \leq 1$)，即有

$$z_L^* = [\delta^{L-1} z(1) \quad \delta^{L-2} z(2) \quad \dots \quad \delta z(L-1) \quad z(L)]^T$$

则增加衰减因子后的最小二乘模型可表达为

$$z_L^* = H_L^* \theta + e_L^* \quad (7-38)$$

其中

$$H_L^* = \begin{bmatrix} \delta^{L-1} h^T(1) \\ \delta^{L-2} h^T(2) \\ \dots \\ \delta h^T(L-1) \\ h^T(L) \end{bmatrix}$$

于是，根据前面的讨论，容易得到如下参数算式。

方法一：一次完成算法

$$\theta_I^* = (H_L^{*\tau} H_L^*)^{-1} H_L^{*\tau} z_L \stackrel{\Delta}{=} P_L H_L^{*\tau} z_L^* \quad (7-39)$$

方法二：递推算法

令 $\mu = \delta^2$ ，且

$$P_k^{-1} = \sum_{i=1}^L \mu^{L-i} h(i) h^{\tau}(i) \stackrel{\Delta}{=} H_L^{*\tau} H_k^*$$

则有

$$\begin{cases} \theta_{I,k}^* = \theta_{I,k-1}^* + K_k [z(k) - h^{\tau}(k) \theta_{I,k-1}^*] \\ K_k = P_{k-1} h(k) [h^{\tau}(k) P_{k-1} h(k) + \mu]^{-1} \\ P_k = \frac{1}{\mu} [I - K_k h^{\tau}(k)] P_{k-1} \end{cases} \quad (7-40)$$

注：初始状态可选择式 (7-31)，但遗忘因子 μ 必须选择接近 1 的正数，通常在 $[0.9, 1]$ 的范围。对于线性系统，则选择 $[0.95, 1]$ 的范围。

2. 限定记忆法

上述遗忘因子法是老数据所含的信息在模型参数辨识中始终起作用，而限定记忆法却始终依赖有限个最新数据，即每增加一个新的数据，就要去掉一个老数据的信息，数据长度 L 始终保持不变。于是，限定记忆法更适合用于克服“数据饱和”现象。

针对遗忘因子法所讨论的最小二乘模型，就第 k 至 $(k+L-1)$ 的 L 个数据所提供的信息，到再增加一组新数据 $z(k+L)$ 、 $h(k+L)$ ，其中信息向量

$$h(k+L) = \begin{bmatrix} -z(k+L-1) \\ \vdots \\ -z(k+L-n) \\ u(k+L-1) \\ \vdots \\ u(k+L-n) \end{bmatrix}$$

$$H_{k+1}(k+L) = \begin{bmatrix} h^r(k+1) \\ h^r(k+2) \\ \dots \\ h^r(k+L) \end{bmatrix}$$

$$z_{k+1}(k+L) = \begin{bmatrix} z(k+1) \\ z(k+2) \\ \dots \\ z(k+L) \end{bmatrix}$$

$$H_k(k+L) = \begin{bmatrix} h^r(k) \\ h^r(k+1) \\ \dots \\ h^r(k+L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^r(k) \\ H_{k+1}(k+L) \end{bmatrix}$$

$$z_k(k+L) = \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k+1) \\ \dots \\ z(k+L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(k) \\ z_{k+1}(k+L) \end{bmatrix}$$

则同理可导出限定记忆法的递推算式如下：

$$\begin{cases}
 \theta_{I_{k+1}}^{\#}(k+L) = \theta_{I_k}^{\#}(k+L) + K_k(k+L) \\
 \quad \times [z(k) - h^{\tau}(k)\theta_{I_k}^{\#}(k+L)] \\
 K_{k+1}(k+L) = P_k(k+L)h(k) \\
 \quad \times [1 - h^{\tau}(k)P_k(k+L)h(k)] \\
 P_{k+1}(k+L) = [I - K_{k+1}(k+L)h^{\tau}(k)]P_k(k+L) \quad (7-41) \\
 \theta_{I_{k+1}}^{\#}(k+L) = \theta_{I_{k+1}}^{\#}(k+L-1) + K_k(k+L) \times [z(k+L) \\
 \quad - h^{\tau}(k+L)\theta_{I_{k+1}}^{\#}(k+L-1)] \\
 K_k(k+L) = P_k(k+L-1)h(k+L) \\
 \quad \times [1 - h^{\tau}(k+L)P_k(k+L)h(k+L)]_{.1} \\
 P_k(k+L) = [I - K_k(k+L)h^{\tau}(k+L)]P_k(k+L)
 \end{cases}$$

注一：根据上述限定记忆递推算式 (7-41) 的计算步骤如下：

(1) 确定初始条件：

$$\theta_{I_0}^{\#}(0) = \varepsilon \text{ (充分小的实向量)}$$

$$P_0(0) = a^2 I \text{ (a 为充分大的数)}$$

(2) 计算递推算法的初始状态 $\theta_{I_0}^{\#}(L-1)$ 和 $P_0(L-1)$ ；

(3) 每获得新的第 k 组数据 $z(k+L)$ 、 $h(k+L)$ ，根据式 (7-41) 的后三个算式计算 $\theta_{I_k}^{\#}(k+L)$ 和 $P_k(k+L)$ ；再利用式 (7-41) 的前三个算式计算 $\theta_{I_{k+1}}^{\#}(k+L)$ 和 $P_{k+1}(k+L)$ 。如此迭代计算至最终计算结果。

注二：根据式 (7-23)，可以证明，准则函数的递推算式为

$$\begin{aligned}
 J_{k+1}(k+L) &= J_k(k+L) \\
 &+ \frac{\tilde{z}_2^2(k+L)}{1 + h^{\tau}(k+L)P_k(k+L)h(k+L)} \\
 &- \frac{\tilde{z}_1^2(k)}{1 + h^{\tau}(k)P_k(k+L)h(k)} \quad (7-42)
 \end{aligned}$$

其中，

$$\tilde{z}_2(k+L) = z(k+L) - h^{\tau}(k+L)\boldsymbol{\theta}_{1,k}^{\#}(k+L-1)$$

$$\tilde{z}_1(k) = z(k) - h^{\tau}(k)\boldsymbol{\theta}_{1,k}^{\#}(k+L)$$

第八章 系统的动态优化

完成一项任务应该有多个方法，哪种方法更好呢？这就出现了优化的意义。但是，我们也意识到：“最好”是“好”的敌人。

第一节 系统优化概述

一、控制系统

1. 控制量与输出量

所谓控制系统或可控系统是指这样一些变量：能够通过系统输入改变系统输出的运行状态，从而执行所要求的任务。其中，输入的量就是系统的控制量；而输出就是那些量值，它们能同要求的任务有所联系，而且它们的变化又有着重要的实际意义。通常，对于系统输出需完成特定的任务，这种输出量应达到某一设定的预期值或函数。

例如，对于调节问题，输出应该达到并保持一个恒定的设定值。而在随动系统或伺服机构中，输出是跟随着一个随时间变化的设定值。

2. 控制时界与约束

当系统控制随着时间的变化时，称为控制策略或控制轨迹，而所关心——在不同时段中的控制策略——的时间间隔，就叫做控制

时界。控制时界通常可以是有界的，也可以是无界的；可以是事先确定的，也可随控制过程而定。

在许多情况下，系统的输入输出量： x 和 y 并非任意地变化，即需要满足一定的约束（条件），如：

$$h(x, y) = 0 \quad \text{或} \quad h(x, y) \leq 0$$

而大多数情况下为后者约束条件。于是，满足约束条件的输入输出就称为容许控制量和输出量。在某些场合下，这些约束可能是瞬间满足的，而瞬间不等式约束通常对应着实际条件的限制，如图 8-1 所示，即图中的控制量 u_1 和 u_2 满足

$$u_1^2 + u_2^2 \leq 1$$

构成的一个闭合区域的控制空间，称为容许控制约束区。

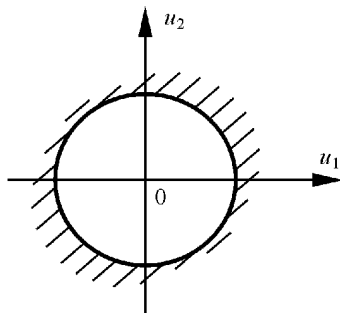


图 8-1 闭合区域的约束

但在另一种场合下，这些约束的积分则是必须满足的。积分不等式约束

$$\int_0^T f(t) dt < k$$

往往是对应着一些与轨道有关的变量限制。如火箭的推进燃料就是有限的，等等。同样，对输出量的约束也是如此。

3. 控制系统的分类

按系统的控制方式，共分以下五类：

(1) 开环控制系统：一种预定的控制系统，对被控后所产生的结果没有任何调节作用。开环系统的控制既可以是静态的，也可以是动态的。

(2) 反馈控制系统：即闭环控制系统，能使可控变量成为控制系统状态的函数。与开环系统不同，由于控制是状态的函数，所以闭环系统的控制一般就是一个动态优化问题。

(3) 自适应控制系统：能随环境变化而改变系统自身的参数或控制的方式，使系统仍按设定的最优状态下运行。

(4) 自组织控制系统：能自行选择最适应环境的系统结构。

(5) 多级控制系统：能采用多层分级控制的系统，又称递阶控制系统。

二、系统优化评价

一般来说，控制系统可以通过不同方式，即控制轨迹，去完成设定的任务，同时又能满足各项约束。在这些可能允许控制的轨迹中进行合理的选择，需要寻求一个目标函数，即评价函数。确定系统评价函数，是系统优化的关键之一，在实际中，往往不是一件容易的事情，但在多数情况下，目标函数是一个标量。

在静态系统中，目标函数一般分为线性与非线性的，对应的系统优化方法：线性规划与非线性规划。这里，我们关注的是系统的动态问题，目标函数以积分的表达形式，它与系统的控制轨迹和变化发展相关联。例如，以下为目标函数

$$J_1 = \int_0^T dt, \quad J_2 = \int_{t_0}^t r dt$$

其中， J_1 表示最短时间问题，式中的时界 T 是自由的，是利用一个优化程序来确定的； J_2 中的 r 为基本支付。另一种目标函数 $J_3 = g(t_f)$ 是一个终点判据，它只包含末端瞬时的变量值。这样，最优

控制轨迹是使支付最少或时间最短，或能耗最省等的设定值，并满足必要的各项约束。

三、系统优化方法

综上所述，系统优化方法实际上就是系统既能达到设定值（任务）和优化准则（目标函数），又能满足约束条件的控制轨迹问题。任何系统一旦具备了数学的描述，即包括数学模型、准则函数和约束条件，就可按经典理论得出实际的解法。相关的数学描述可分为以下三类。

1. 静态过程

在系统的静态过程中，优化方法将针对准则函数线性或非线性、有无约束等情况，分别选用极值原理法、拉格郎日法、单纯形法和非线性规划法等。

2. 动态过程

在动态过程中，对于线性问题

$$J = J(x, u, t)$$

$$\text{s. t. } \dot{\phi} = \dot{x} - A(t)x - B(t)u = 0$$

其中，输入 $x \in R^n$ ，控制 $u \in R^m$ ， $A(t) \in R^{n \times n}$ ， $B(t) \in R^{n \times m}$ ， J 为线性函数。通常选用变分法、动态规划和梯度法等。如果 J 是非线性准则函数，其约束条件为

$$\phi = \dot{x} - g(x, u, t) = 0$$

通常非线性问题总是尽可能转化为线性问题处理，按照现有的理论方法，至少转化为准线性问题进行优化计算。

3. 复合静态或动态系统

复合静态或动态系统属于大系统问题，大系统优化可按数学规划和变分法的分解—协调法，递阶控制与优化。

四、优化方法的选择与处理

在优化实践中，谨慎选用优化方法及其优化处理将起着重要

作用。

1. 在优化方法选用中，应该考虑以下因素

- (1) 问题的描述是静态的还是动态的；
- (2) 问题的描述是线性的还是非线性的；
- (3) 问题的描述是单变量的还是多变量的。
- (4) 问题的相关约束情况。

2. 在系统优化解方面，应关注以下问题

- (1) 解的存在性；
- (2) 解的唯一性；
- (3) 优化的必要条件；
- (4) 优化的充分条件；
- (5) 极值的性质。

3. 在优化解的计算方面

- (1) 现有的数值近似解法；
- (2) 用户计算机配置；
- (3) 迭代计算的收敛性；
- (4) 计算时间。

五、大系统控制原理

1. 单级—单目标控制

总体控制系统，实际上就是一个单级—单目标控制器 C 对一个系统 S 的总控制，如图 8 - 2 所示。

2. 单级—多目标控制

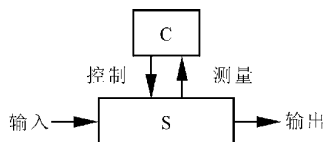


图 8 - 2 单级—单目标控制

显然，对于一个复杂系统，采用单级—单目标控制的模式是相当困难的。如果把一个大系统分解为若干独立的子系统，那么就出现了如图 8 - 3 所示的单级—多目标控制的模式。

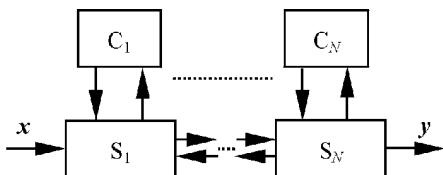


图 8 - 3 单级—多目标控制

3. 多级—多目标结构

然而，上面所给出子系统独立性的假设一般是不现实的，因为复杂系统中的子系统间往往是相互关联的，因此个体最优不能导致整体最优。所以由总体控制器找出的只能是次优解，次优的程度取决于子系统间的关联程度。通常情况下，大系统中的子系统间的关联性很强，当由一个准则函数控制器把每一个控制器连接一体时，则这些控制器的控制动作必须有先有后。为了做到这一点，于是设置一个二级控制器，在有必要的时候，可以根据子系统间的关联与调节，调整子系统的任何一个控制器。可见，当子系统再进行分解后，按照上述的思路，就构成了多级—多目标的控制结构体系，使每一个上级的控制器只控制下级的一个子系统，这个子系统是由多个控制器所组成的控制系统，如图 8 - 4 所示。

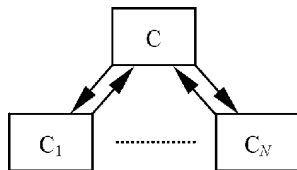


图 8 - 4 多级—多目标控制

4. 子系统间的协调原理

上述多级—多目标的控制形成了递阶控制原理，而它的另一个原理，或是更接近数学的描述，这一点很重要，就是把一个总体问题 P ，分解为若干子问题 P_i ，我们希望通过求解子问题，得到满足总体问题的准则，也就是想有 $[P_1, P_2, \dots, P_n]$ 的解就是 P 的解。前面提到过，一般情况下，这是不现实的。于是乎，有必要引进一个干预向量或协调参数 λ ，并满足： $[P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_n(\lambda)]|_{\lambda=\lambda^*}$ 就是 P 的解。这从数学方法上，通过递阶优化——从选定初始值 λ_0 ，经过迭代计算至终值 λ^* ——就解决了复杂系统递阶控制的协调问题。

第二节 低阶系统的优化

本节主要讨论低阶系统（ ≤ 20 阶）动态优化的基本方法，包括变分法和极大值原理，并针对二次目标函数的线性动态系统的协调优化加以论述。因为在实际应用中，有许多问题通过系统辨识，可用具有这类特征的动态系统进行描述，所以低阶系统的动态优化很有现实意义。更进一步研究表明：对于 10 阶以上的系统，采用递阶方法就更有其优势。

一、动态优化的数学描述

设一般非线性动态系统的优化模型为

状态方程（约束）

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u, t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x &\in X, u \in U, t_0 \leq t \leq t_f\end{aligned}\quad (8-1)$$

目标函数

$$\min : J = h(x, t_f) + \int_0^{t_f} g(x, u, t) dt \quad (8-2)$$

其中

$$\begin{aligned}x &= [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \\ u &= [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T\end{aligned}$$

即 x 为 n 维状态向量, u 为 m 维控制向量; f 是连续二阶可微的解析向量函数, $x(t_0)$ 是假定已知的初始状态, h 和 g 都是 C^2 空间中的非线性标量, 并在 $h(x, t_f)$ 项中

$$x = [x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)]^T$$

以下表达均与上同。

注一：事实上，许多实际系统，可以利用系统辨识方法，确定方程式（8-1）作为的表征模型。

注二：系统控制问题实际上就是如何选择控制轨迹 $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_f$)，确保模型式（8-1）所描述的系统处于理想的动态行为，其中，系统末端时刻 t_f 可以是固定的，也可以是自由的。

注三：所谓系统具有“理想的”动态行为是指：当系统稳态运行时，受干扰后使其从原来的状态改变为一个已知或可测的状态 x_0 ，那么就可以由控制向量 u 使系统状态在控制轨迹上始终向着目标函数 J 运行。

注四：目标函数中的 $h(x, t_f)$ 项的意义在于：确保系统在末端时刻 t_f ，使状态 x 接近某个目标状态；而积分项是使系统在整个优化的时段上，不必强烈地控制，也不允许过分偏离设定的“理想”轨迹。

注五：必须约束系统的状态和控制，因为任何一个实际系统都

受到来自环境的制约。如一项工程的完工期是有限的；一种化学反应过程只有在温度保持在某个范围 $T \pm \Delta T$ 内才能发生；生活中常用的浮子水阀受水位的控制，而水位又受入水流量的影响，等等。于是 $x \in X$ 称为允许状态， $u \in U$ 叫做允许控制，其中 X 与 U 分别是区间 (t_0, t_f) 允许状态集与允许控制集。

综上所述，系统优化模型式 (8-1) 和 (8-2) 的意义是：要寻求一个允许控制 u^* ，使得方程式 (8-1) 所描述的动态系统沿着允许状态轨迹 x^* 运行，并满足式 (8-2) 设定的性能指标 J 的极小化为最优，也就称为系统的动态优化。

二、系统的动态优化解

1. 最优控制问题

(1) 优化解的存在问题。对于许多实际系统，要事先判定最优控制的存在是相当不容易的，于是选用恰当的方法进行试探，往往是比较可行的，若能最终找到优化解，问题也就得到解决了。

(2) 优化解的不唯一性。事实上，目前为止，除有限类的问题，如二次线性问题等特殊情况下，大多都难用定量分析法找到动态系统的总体最优控制。所谓“总体”最优，是指能找到 u^* ，对于 $\forall u \in U, \forall x \in X$ ，满足

$$\begin{aligned} J &= h(x^*, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*, u^*, t) dt \\ &\leq h(x, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t) dt \end{aligned}$$

但如果能从所有的局部最优，求得总体的最优控制，相比直接求总体最优，这样要容易得多，也就解决了最优控制解一般不唯一问题的困扰。

2. 最优控制的必要条件

这里将利用变分法与极值原理确认求解动态优化的必要条件，也就是说，一个上述优化模型式 (8-1) 和式 (8-2)，若能满足

这些必要条件，则可以得到局部最优。

因为，当目标函数式（8-2）中的 h 可导时，则有

$$h(x, t_f) = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} h(x, t) dt + h(x_0, t)$$

其中，

$$\frac{d}{dt} h(x, t) = \frac{\partial h^T(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t}$$

式中，

$$\frac{\partial h^T(x, t)}{\partial x} = \left[\frac{\partial h(x, t)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial h(x, t)}{\partial x_n} \right]$$

且由于 $h(x_0, t_0)$ 已确定，故可将该项从目标函数中去掉，并设立一个新的目标函数

$$J^* = \int_{t_0}^t [g(x, u, t) + \frac{\partial h^T(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t}] dt \quad (8-3)$$

所以，引入拉格朗日乘子

$$\lambda = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]^T$$

结合优化模型的约束，置

$$G(x, \dot{x}, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \frac{\partial h^T(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \lambda^T [f(x, u, t) - \dot{x}] \quad (8-4)$$

建立拉格朗日函数

$$L^* = \int_{t_0}^t G(x, \dot{x}, u, \lambda, t) dt$$

为简化表达，下面的推导将不再表示各函数中的变量，特殊情况除外。如式（8-4）表达成

$$\begin{aligned} G &= g + \frac{\partial h^T}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda^T (f - \dot{x}) \\ &= (g + \lambda^T f) + \left[\frac{\partial h^T}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] - \lambda^T \dot{x} \end{aligned} \quad (8-5)$$

其中，定义哈密尔顿函数 H 为

$$H = g + \lambda^T f \quad (8-6)$$

根据变分法和极值原理可知：如果存在极值、即局部最优解 x^* ， $\dot{x}^*$ ， μ^* ， λ^* ，则它们必满足

$$\begin{aligned} \Delta L^* = & \left[\frac{\partial G^T}{\partial x} \Delta x + G - \frac{\partial G^T}{\partial \dot{x}} x \Delta t \right] \Big|_{t=t_f} \\ & + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial G^T}{\partial x} \Delta x - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^T}{\partial x} \Delta \dot{x} + \frac{\partial G^T}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial G^T}{\partial \lambda} \Delta \lambda \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (8-7)$$

其中，积分外的项，由于

$$\dot{x}^*(t_f) = f(x^*, \mu^*, t_f)$$

在局部最优解上有

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial G^T}{\partial x} \Delta x + G - \frac{\partial G^T}{\partial \dot{x}} x \Delta t \right] \Big|_{(x^*, \dot{x}^*, \mu^*, \lambda^*, t_f)} \\ & = \left[\left(\frac{\partial h^T}{\partial x} - \lambda^T \right) \Delta x + \left(H + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Delta t \right] \Big|_{(x^*, \dot{x}^*, \mu^*, \lambda^*, t_f)} = 0 \end{aligned} \quad (8-8)$$

同样，对于积分内的 h 函数项，在局部最优解 0 上（下同）

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h^T}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] \Delta x - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial h^T}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] \Delta \dot{x} \\ & = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h^T}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 h^T}{\partial x \partial x} \dot{x} \right] \Delta x \end{aligned}$$

式中，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h^T}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] &= \frac{\partial h^T}{\partial x} \Big|_{x=x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t \partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 h^T}{\partial x \partial x} \dot{x} &= \frac{\partial h^T}{\partial x} \Big|_{x=x} \ddot{x} + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \end{aligned}$$

可见，若 h 是二次连续偏导函数，则偏导可交换，于是式（8-7）中积分内含 h 函数项的合计为 0，也就是式（8-5）中的第二项在局部最优解上的积分为 0。

于是，在局部最优解 x^* ， $\dot{x}^*$ ， μ^* ， λ^* 上，式（8-7）可改写为

$$\Delta L^* = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H^*}{\partial x} + \frac{d\lambda^*}{dt} \right) \Delta x + \frac{\partial H^*}{\partial u} \Delta u + (f - \dot{x}) \Delta \lambda^* \right] dt = 0 \quad (8-9)$$

其中，哈密尔顿函数的偏导

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} = \left[\frac{\partial H}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial H}{\partial x_n} \right] \Big|_{x^*, u^*, \lambda^*, t_f}$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial u} = \left[\frac{\partial H}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial H}{\partial u_m} \right] \Big|_{x^*, u^*, \lambda^*, t_f}$$

由于系统的状态约束满足

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*, u^*, t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{(x^*, u^*, \lambda^*, t_f)} \quad (8-10)$$

于是说明式(8-9)中 $\Delta \lambda$ 的系数为0。又因为 λ^* 可按 Δx 的系数为0选择，即

$$\lambda^* = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{(x^*, u^*, \lambda^*, t_f)} \quad (8-11)$$

式(8-11)称为共态方程， $\lambda(t)$ 则称为共态向量。式(8-9)余下的最后一项 Δx 的系数必为0，即有

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{(x^*, u^*, \lambda^*, t_f)} = 0 \quad (8-12)$$

综上所述，式(8-8)、式(8-10)至式(8-12)构成系统优化模型式(8-1)和式(8-2)存在局部最优控制解的必要条件。为表达清晰，下面将四组条件重新组织如下：

$x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda^*$ 为非线性动态系统模型式(8-1)和式(8-2)的局部最优解的必要条件是：对 $\forall t \in [t_0, t_f]$ $x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda^*$ 满足

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}, \lambda^* = - \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (8-13)$$

$$\left[\left(\frac{\partial h^*}{\partial x} - \lambda^* \right) \Delta x + \left(H + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Delta t \right] \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (8-14)$$

其中, H 为哈密尔顿函数。

3. 优化模型的边界条件

从上面的讨论可以看出: 为求解最优控制问题, 需要满足两类边界条件, 一是由初始状态 $x(t_0) = x_0$ 给定, 二是系统末端时刻 t_f 的边界条件式 (8-14)。但在某些场合中, 尚缺少函数 g 或 h , 可通过较简单的方式确定系统在 t_f 的边界条件如下。

(1) 当系统终态与末端时间确定, 则取边界条件

$$x(t_f) = x_f \quad (8-15)$$

(2) 终态自由, 末端时间确定, 若在 k 维曲面 $q(x) = 0$ 上, 则定义边界条件

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} - \lambda \right] \Big|_{(x^*, \lambda^*, t_f)} = d^T \left[\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{(x^*, \lambda^*, t_f)} \right] \quad (8-16)$$

$$q(x) \Big|_{(x^*, t_f)} = 0 \quad (8-17)$$

其中, $d = [d_1, \dots, d_k]^T$ 是常系数向量

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \left[\frac{\partial q_1}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial q_k}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_k}{\partial x_1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial q_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

(3) 当系统末端时间自由, 终态确定, 则可用以下边界条件替代式 (8-14)。

$$\left[H + \frac{\partial h}{\partial t} \right] \Big|_{(x^*, \mu^*, \lambda^*, t_f)} = 0 \quad (8-18)$$

(4) 当末端时间和系统终态自由, 边界条件可取式 (8-18) 与

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x^*, t_f)} \quad (8-19)$$

一般来说, 动态系统优化的必要条件都构成了一个两点边值问题, 用通常的办法求解是相当困难的。于是, 对于描述逼真的非线性

性动态系统模型，往往可以在适当的轨迹或平衡点附近对非线性方程进行线性化，也能获得系统动态行为很好的近似。而对于一个二次目标的线性动态系统，两点边界问题就是线性的，因线性问题可用叠加的方法求解，即问题可以转化为一个单点边值问题。

[例 8 - 1] 考虑如下典型的二次目标函数的线性动态系统优化问题。

$$\begin{aligned} \min : J &= \frac{1}{2}x_1(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt \\ \text{s. t. : } &\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \\ x_1(0) = x_1^*, x_2(0) = x_2^* \end{cases} \end{aligned}$$

哈密尔顿函数为

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1(x_1 + x_2) + \lambda_2(x_2 + u)$$

其必要条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 & \text{或} & u = -\lambda_2 \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} = \dot{\lambda}_1 = x_1 + \lambda_1 \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} = \dot{\lambda}_2 = x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad (8-20)$$

以及在末端时刻满足 $\lambda_1(T) = x_1(T)$, $\lambda_2(T) = 0$ ，把控制变量 $u = -\lambda_2$ 代入上式有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - \lambda_1 \end{cases} \quad (8-21)$$

所以上述优化问题就简化为：利用分裂边界条件求解方程式（8 - 20）和式（8 - 21）的问题，边界条件为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^*, x_2(0) = x_2^* \\ \lambda_1(T) &= x_1(T), \lambda_2(T) = 0 \end{aligned}$$

三、二次目标的线性动态系统优化

1. 优化模型

$$\min J = \left(\frac{1}{2} x^T S x \right) \Big|_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (8-22)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_f) = x_0 \end{cases} \quad (8-23)$$

其中, x 和 u 如前所述, A 和 B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times m$ 阶时变矩阵; Q 、 S 为实对称半正定矩阵, R 实对称正定阵; 状态和控制变量无界, 且 $x(t_f)$ 是自由的。系统目标函数的意义: 不需强烈地控制可使系统状态变量逐步接近状态空间的原点; 三个加权矩阵的意义分别是:

- (1) Q 表示状态趋近原点。
- (2) S 表示控制力的消耗。
- (3) R 确保在末端时刻的状态充分接近原点。

这类控制模式称为线性调解器问题。

2. 最优控制解

可以证明, 优化模型式 (8-22) 和式 (8-23) 的最优控制解为

$$u(t) = K(t)x(t) \quad (8-24)$$

式中, 增益矩阵

$$K(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (8-25)$$

其中,

$$\begin{cases} \dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \\ P(t_f) = S \end{cases} \quad (8-26)$$

且当 A 、 B 、 Q 、 R 均为定常, 系统 ($t_f \rightarrow \infty$) 可控时, 式 (8-24) 的增益矩阵是常定。

事实上, 优化模型式 (8-22) 和式 (8-23) 的哈密尔顿函数为

$$H = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T Ax + \lambda^T Bu$$

于是，有最优控制解的必要条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 & \text{或} & u = -R^{-1}B\lambda \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} = Qx + A^T\lambda \\ \lambda(t_f) = Sx \Big|_{t=t_f} \end{cases} \quad (8-27)$$

于是由式 (8-23) 有

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

所以两点边值问题就变成求解以下方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda \\ x(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = Sx \Big|_{t=t_f} \end{cases} \quad (8-28)$$

由式 (8-28) 中的第三个式子，可假设共态解为

$$\lambda(t) = P(t)x(t)$$

则有

$$P(t_f) = S$$

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t)$$

将式 (8-27) 中的第二式和式 (8-28) 中的第一式代入上式，整理可得对于任意的 x ，则有

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0$$

所有左项必为 0，即有式 (8-26) 中的第一个式子成立，即为著名的黎卡蒂方程；同时也有末端时刻条件，即式 (8-26) 的第二个式子；最后有

$$u = -R^{-1}B^T Px = Gx$$

3. 线性伺服机构最佳控制

对于上述调节器的优化模型，实质上是求控制量，使系统状态

趋向原点。这里将指出在现实应用中要求系统输出随设定的轨迹，并且可能会受到干扰。

目标函数

$$\min : J = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|_S^2 \Big|_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|_Q^2 + \|\mathbf{u}\|_R^2) dt \quad (8-29)$$

式中，

$$\|\bullet\|_X^2 = \bullet^T X \bullet$$

$\mathbf{y}$ 是系统输出向量， $\boldsymbol{\eta}$ 既是预设轨迹，也可能是恒定静态值。

s. t. (约束)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (8-30)$$

其中， $\boldsymbol{\omega}(t)$ 是假定已知的系统干扰输入，使状态改变为某个数值 $\mathbf{x}_0$ 时，则控制促使系统再回到预定的 $\boldsymbol{\eta}$ ，从而确保所用的控制消耗与对的输出偏差之间所有平衡。

那么，可以导出

最佳控制解

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{P}\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (8-31)$$

其中

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \mathbf{P}(t_f) = (\mathbf{C}^T\mathbf{S}\mathbf{C}) \Big|_{t=t_f} \end{cases} \quad (8-32)$$

又

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T\boldsymbol{\xi} + \mathbf{P}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi}(t_f) = (\mathbf{C}^T\mathbf{S}\boldsymbol{\eta}) \Big|_{t=t_f} \end{cases} \quad (8-33)$$

可以看出，伺服机构问题是由式 (8-32) 和式 (8-33) 两部分组成，式 (8-32) 是调节器部分；式 (8-33) 是前置滤波器部分，是让预定值 $\boldsymbol{\eta}$ 、干扰 $\boldsymbol{\omega}$ 和系统矩阵决定最佳驱动函数

$$R^{-1}B^T\xi_0$$

[例 8 - 2] 锅炉压力与温度的优化控制模型

$$\min : J = \int_0^t (e^T Q e + u^T R u) dt$$

$$s. t. \dot{y} = Ay + Bu + C$$

式中 $e = y - a$, 并且

$$y = [P_b \quad q_c \quad t_s \quad x_3 \quad q_d]^T$$

$$u = [u_1 \quad u_2]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 396 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 325 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25/154 & -1/154 & -1/154 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -/83 & 1.375/83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -325 \times 10^{-7} \\ -649.35 \times 10^{-6} q_s + 129.87 \times 10^{-4} \\ -662.62 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} -1.225 \frac{q_s^2}{1000} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$$

其中 ,

P_b : 锅炉压力对设定值的偏差

t_s ：对设定温度的偏差

x_3 ：中间变量

q_c ：燃料流量率 (kg/h)

q_d ：过热蒸汽流量率

q_s ：预先给定的值，使得在适当的时间内系统能够达成稳态

[例 8 - 3] 河流污染控制模型

一河段为适当长的河道，接受一个可控污染源是经处理的污水，那么，可以把每一河段作为最佳搅拌反应器，其模型如图 8 - 4 所示。

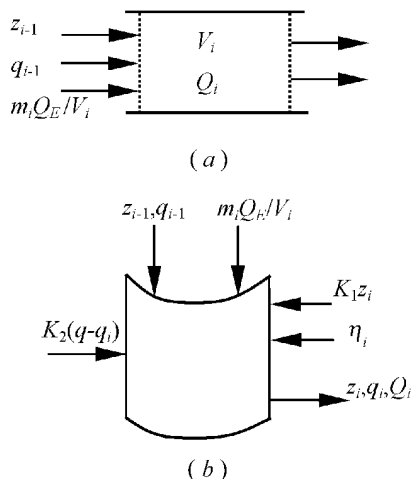


图 8 - 4 河段最佳搅拌反应器模型

于是提出：每一河段在单污染源的情况下，河段中某个平均点上，生化耗氧量 BOD 与含氧量 DO 的一个两阶状态方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_i = -K_{1i}z_i + \frac{Q_{i-1}}{V_i}z_{i-1} - \frac{Q_i + Q_E}{V_i}z_i + \frac{m_i Q_E}{V_i} \\ \dot{q}_i = K_{2i}(q_i^s - q_i) + \frac{Q_{i-1}}{V_i}q_{i-1} - \frac{Q_i + Q_E}{V_i}q_i - K_{1i}z_i + \frac{\eta_i}{V_i} \end{cases} \quad (8-34)$$

其中,

V_i : 第 i 河段的水容量;

Q_E : 第 i 河段的污水流量率;

z_i : 第 i 河段的 BOD;

q_i : 第 i 河段的 DO 浓度;

K_{1i} : 第 i 河段的 BOD 逐日衰减率;

K_{2i} : 第 i 河段的 DO 补给率;

Q_i : 第 i 河段的水流量率;

q_i^s : 第 i 河段的 DO 饱和值;

η_i/V_i : 第 i 河段的底部沉渣的 DO 变动;

m_i : 第 i 河段排放污水中的 BOD 浓度。

研究表明: 式 (8-34) 中的各系数按表 8-1 取值为宜。

表 8-1 河段污染优化控制系数

系数	量值	系数	量值
K_{1i}	0.32/天	K_{2i}	0.2/天
η_i/V_i	0.1 毫克/公升/天	q_i^s	10 毫克/公升
Q_E/V	0.1	Q/V	0.9

于是, 第 i 河段式 (8-34) 可表达为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ q_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} m_i + \begin{bmatrix} 0.9z_{i-1} \\ 0.9q_{i-1} + 1.9 \end{bmatrix} \quad (8-35)$$

显然, 考虑多污染源的情况更切合实际, 所以可按不同的污染

源分离多个河段，在原模型的基础上，推广至多污染输入的模型，设按污染源分为 s 个河段， $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s$ 为传输延迟时间，则可建立如下关系

$$\begin{cases} z_{i-1}(t) = \sum_{j=1}^s a_j z_{i-1}(t - \theta_j) \\ q_{i-1}(t) = \sum_{j=1}^s a_j q_{i-1}(t - \theta_j) \end{cases} \quad (8-36)$$

其中，上式中的系数有

$$\sum_{j=1}^s a_j = 1$$

于是，可将式 (8-36) 代入状态方程式 (8-35)，得到具有延迟的状态方程作为优化模型的约束。其目标函数为

$$\min : J = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^s [2(z_i - z_i^*)^2 + (q_i - q_i^*)^2 + (m_i - m_i^*)^2] dt$$

四、离散模型的优化

1. 非线性优化

(1) 目标函数

$$\begin{aligned} \min J &= g(x_k, k) \Big|_{k=k_0, k_f} + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} h(x_k, u_k, k) \\ &\stackrel{\Delta}{=} g_k \Big|_{k=k_0, k_f} + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} h_k \end{aligned} \quad (8-37)$$

(2) 约束条件为

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) \stackrel{\Delta}{=} f_k \\ x_{k_0} = x_0 \end{cases} \quad (8-38)$$

(3) 最优轨迹的必要条件为

$$\begin{cases} H_k = h_k + \lambda_{k+1}^T f_k \\ x_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} \Rightarrow x_{k+1} = f_k \\ \frac{\partial H_k}{\partial u_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_k}{\partial u_k} + \frac{\partial f}{\partial u_k}^T \lambda_{k+1} \\ \lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \Rightarrow \lambda_k = \frac{\partial f_k^T}{\partial x_k} \lambda_{k+1} + \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \\ \eta_k^T (\lambda_k - \frac{\partial g_k}{\partial x_k}) \Big|_{k=k_0}^{k=k_f} = 0 \end{cases} \quad (8-39)$$

一般情况下，通过上式可得出一个非线性的两点边值问题

$$x_{k+1} = f_k, \lambda_{k+1} = \Phi_k$$

初值和终值均由式 (8-39) 的最后一个式子给出。

2. 线性二次优化

(1) 调节器模型为

$$\min J = \frac{1}{2} \|x\|_S^2 \Big|_{k=k_f} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_f-1} (\|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2) \quad (8-40)$$

$$\text{s. t. } x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (8-41)$$

必要条件解

$$u_k = -R_k^{-1} B_k^T A^T (P_k - Q_k) x_k = G_k x_k \quad (8-42)$$

式中，

$$P_k = Q_k + A_k^T (P_{k+1}^T + B_k R_k^{-1} B_k^T)^{-1} A_k$$

式 (8-42) 中得 G_k 可以作为“增益”，利用 P_k 就可计算 G_k 序列，如连续时间的调节器，得到一个闭环的离散时间系统，如图 8-5 所示。

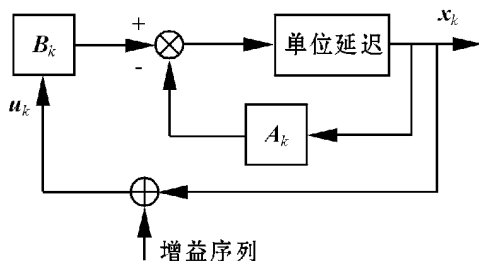


图 8 - 4 离散调节器原理

(2) 伺服机构问题为

$$\min_u \left\{ J = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{k_f-1} (\| x_k - x_T \|_Q^2 + \| u \|_R^2) \right] \right\} \quad (8-43)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + C \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (8-44)$$

其中, x_T 为设定参考状态。最优控制解为

$$u_k = -R_k^{-1} B_k^T (P_{k+1} x_{k+1} + s_{k+1}) \quad (8-45)$$

式中,

$$\begin{cases} P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} (I + B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1})^{-1} A_k \\ s_k = -Q_k x_T + A_k^T P_{k+1} (I + B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1})^{-1} \\ \quad \times B_k R_k^{-1} B_k^T s_{k+1} + A_k^T s_{k+1} \\ P_{k_f} = 0, \quad s_{k_f} = 0 \end{cases} \quad (8-46)$$

第三节 二次线性系统的递阶优化

前面提到过, 二次线性动态系统的最佳控制模型, 是相当实用

的优化模型，并可通过求解相应的黎卡蒂方程，得到系统的最佳控制解，但 n 阶黎卡蒂方程含有 $n(n+1)/2$ 个方程项，对于高阶系统模型，会给计算机的实现造成存储量、计算量和数值求解的稳定等问题，于是可采用递阶方法有效实现。另一方面，递阶方法是大系统优化的基本方法。

一、目标协调法

假设总体系统由 N 个相互关联的子系统组成，对于子系统 i ， x_i 为 n_i 维状态向量， u_i 为 m_i 维控制向量， z_i 为其他子系统状态产生的 r_i 维输入向量，并且

$$z_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j \quad (8-47)$$

1. 优化模型

状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i \\ x_i(0) = x_{0i} \end{cases} \quad (8-48)$$

将式 (8-47) 代入式 (8-48)，可设

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (8-49)$$

其中， A 、 B 为致密阵，且

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \quad \dots \quad x_N]^T \\ u &= [u_1 \quad \dots \quad u_N]^T \end{aligned}$$

目标函数

$$\min J = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \|x_i(T)\|_{P_i}^2 + \int_0^T F_i dt \right] \quad (8-50)$$

式中，

$$F_i = \frac{1}{2} (\|x_i\|_{Q_i}^2 + \|u_i\|_{R_i}^2 + \|z_i\|_{S_i}^2)$$

2. 数学描述

目标协调法又称关联平衡法，是将极小化问题转化为简单极大

化问题，并利用两级目标协调结构解决迭代计算问题，如图 8 - 5 所示。

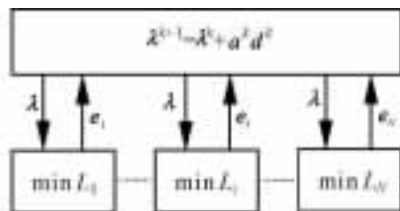


图 8 - 5 总系统两级目标协调结构

为了设计一个这样的二级递推算算法，先设置拉格朗日函数

$$L(x, u, z, \lambda) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \|x_i(T)\|_{p_i}^2 + \int_0^T [F_i + \lambda_i^T (z_i - \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j)] dt \right] \quad (8-51)$$

再定义对偶函数

$$\Phi(\lambda) = \min_{x, u, z} \{L(x, u, z, \lambda)\} \quad (8-52)$$

因为所有的约束和目标函数均为二次的，即为凸函数，于是根据拉格朗日强对偶定理有

$$\max_{\lambda} \Phi(\lambda) = \min_u J$$

这就意味着式 (8 - 51) 的极小值问题等效于式 (8 - 52) 对偶函数关于 λ 的极大值问题。根据拉格朗日函数的相加可分性，即若设 L_i 为第 i 个子系统的子拉格朗日函数，则总系统可分解为 N 个独立的子拉格朗日函数，即当 $\lambda = \lambda^*$ 时，为设定的轨迹，则有

$$L(x, u, z, \lambda^*) = \sum_{i=1}^N L_i \quad (8-53)$$

其中，

$$L_i = \frac{1}{2} \|x_i(T)\|_{p_i}^2 + \int_0^T [F_i + \lambda^{*T} (z_i - \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j)] dt$$

最后，定义 $\Phi(\lambda^*)$ 的梯度简单表达式

$$\nabla \Phi(\lambda^*) \Big|_{\lambda=\lambda^*} = \begin{bmatrix} z_1 - \sum_{j=1}^N L_{1j}x_j \\ \vdots \\ z_i - \sum_{j=1}^N L_{ij}x_j \\ \vdots \\ z_N - \sum_{j=1}^N L_{Nj}x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (8-54)$$

即这个梯度是由互联关系中的误差确定的。这样，就可以建立如图 8-5 所示的二级递阶算法，图中第一级给定的 $\lambda = \lambda^*$ 是由第二级的每一个子系统在约束式 (8-48) 下的最小化，从获得式 (8-52) 中的 $\Phi(\lambda^*)$ 项而确定的，所得出的 x_i 、 u_i 被送回第二级。在第二级中，这些向量经整理后代入 (8-54) 式就构成互联误差，并利用梯度过程算式

$$\lambda^{k+1}(t) = \lambda^k(t) + a^k d^k(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

产生一个新的 λ 。其中， a 是步长、 d^k 是搜索方向。常用以下两种方法：

(1) 最速上升法，则

$$d^k(t) = e^k(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

(2) 共轭梯度法，则

$$d^{k+1}(t) = e^{k+1}(t) + \beta^k d^k(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中，

$$\beta^{k+1} = \int_0^T (e^{k+1})^\tau e^{k+1} dt / \int_0^T (e^k)^\tau e^k dt$$

其中， $d^0 = e^0$ 。

于是，当 $e^k(t)$ ($0 \leq t \leq T$) 充分小时，就意味着系统达到总体最优。

注：这种方法提供了有可能处理大系统的二次型线性问题，至

少在理论上，它比用整体方法更容易求解，并且梯度容易计算。但在实际应用中有着难以克服的缺陷，如最佳步长 a 的确定，还有目标函数中 z 项不能与一个真实的物理状况相对应，引入它只是为了避免保证在第一级计算中不出现奇异现象等。所以还没有被广泛地用于解决实际的大系统问题。尽管如此，该方法有着重要意义，因为它的概念十分简单明了。

[例 8 - 4] 对于模型

$$\begin{aligned} \min : J &= \int_0^T (x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 + u_2^2) dt \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2 + u_2 \end{cases} \end{aligned}$$

将约束改写为

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + z_2 + u_1 \\ x_2 = -z_2 + x_2 + u_2 \\ z_1 = -2x_2 \\ z_2 = x_1 \end{cases}$$

于是对于特定的 λ_1^* 和 λ_2^* ，拉格朗日函数为 $L = L_1 + L_2$ ，其中

$$L_1 = \int_0^T [x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + P_1(-x_1 + x_1 + z_1 + u_1) + \lambda_1^* z_1 - \lambda_2^* x_1] dt$$

$$L_2 = \int_0^T [x_2^2 + z_2^2 + u_2^2 + P_2(-x_2 + x_2 - z_2 + u_2) + \lambda_2^* z_2 - 2\lambda_1^* x_2] dt$$

从而问题简化为：当 λ_1^* 和 λ_2^* 给定时，分别求 L_1 对 x_1 、 u_1 、 z_1 和 L_2 对 x_2 、 u_2 、 z_2 的极小值问题，而在第二级上可利用梯度

$$\nabla \Phi(\lambda^*) = \begin{bmatrix} z_1 + x_2 \\ z_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

改进 λ_1^* 和 λ_2^* ，其中， x_1 、 z_1 和 x_2 、 z_2 均为各自独立地从第一级求得的解。

二、关联预估法

与上一段所讨论的对象相同，只是总体系统优化模型中的目标函数没有含 z 的二次项。即

$$\min : J = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \|x_i(T)\|_{p_i}^2 + \int_0^T F_i' dt \right]$$

式中，

$$F_i' = \frac{1}{2} (\|x_i\|_{Q_i}^2 + \|u_i\|_{R_i}^2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i \\ x_i(0) = x_{0i} \end{cases}$$

式中，

$$z_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j$$

拉格朗日函数为

$$L = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \|x_i(T)\|_{p_i}^2 + \int_0^T [F_i' + \lambda_i^T (z_i - \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j) + p_i^T E_i] dt \right]$$

式中，

$$E_i = A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i - \dot{x}_i$$

其中， p_i 是 n_i 维伴随向量。当 $\lambda_i = \lambda_i^*$ 、 $z_i = z_i^*$ 给定时

$$L|_{\lambda=\lambda^*, z=z^*} = \sum_{i=1}^N L_i|_{\lambda_i=\lambda_i^*, z_i=z_i^*}$$

式中，

$$\begin{aligned} L_i = & \frac{1}{2} \|x_i(T)\|_{p_i}^2 + \int_0^T [F_i' + (\lambda_i^*)^T z_i - \sum_{j=1}^N (\lambda_i^*)^T L_{ij} x_j \\ & + p_i^T (E_i|_{z_i=z_i^*})] dt \end{aligned}$$

通过简单的二级迭代算法改善协调向量 λ^* 和 z^* ，如从 k 迭代至 $k+1$ ，即把 N 个独立子系统的拉格朗日函数 L_i ，对给定的 λ_{ik}^* 和 z_{ik}^* 求最小如下。令

$$\begin{cases} \partial L / \partial z_{ik}^* = 0 \\ \partial L / \partial \lambda_{ik}^* = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

即有

$$\begin{cases} z_{ik}^* = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_{ik} \\ \lambda_{ik}^* = C_i^T p_{ik} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

求出上述线性方程解为 x_{ik}^* 和 p_{ik}^* ，再令

$$\begin{cases} z_{i, k+1}^* = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_{ik}^* \\ \lambda_{i, k+1}^* = C_i^T p_{ik}^* \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

从而实现对 λ_{ik}^* 和 z_{ik}^* 的重新预估，因此称为关联预估法。

注：该方法的二级算法简单有效，所列方程更具物理意义，不会像目标协调法那样，既可能发生无效的线性搜索，又要加进一个的二次项以避免可能出现的奇异问题。并且，前人的经验说明，关联预估法的收敛速度较快。

[例 8-5] (续例 8-3)，关于河流污染控制问题，根据式 (8-35) 与式 (8-36) 所给出的模型，可把一个分布延迟的三条河段系统的状态方程写作

$$\begin{cases} z_1 = -1.32z_1 + 0.1\Delta m_1 + 0.9z_0 + 5.35 \\ q_1 = -0.32z_1 - 1.2q_1 + 0.9q_0 + 1.9 \\ \begin{cases} z_2 = 0.9 \sum_{j=1}^3 a_j z_1(t - \tau_j) - 1.32z_2 + 0.1\Delta m_2 + 4.19 \\ q_2 = 0.9 \sum_{j=1}^3 a_j q_1(t - \tau_j) - 0.32z_2 - 1.2q_2 + 1.9 \end{cases} \\ \begin{cases} z_3 = 0.9 \sum_{j=1}^3 a_j z_2(t - \tau_j) - 1.32z_3 + 0.1\Delta m_3 + 1.59 \\ q_3 = 0.9 \sum_{j=1}^3 a_j q_2(t - \tau_j) - 0.32z_3 - 1.2q_3 + 1.9 \end{cases} \end{cases}$$

其中, $\Delta m = m - m^*$ 。假定相关延迟参数为表 8-2 列示, 按延迟项展开为泰勒级数并取前两项, 就能将原属无限维的状态空间, 转化为足够精确的有限维状态空间的近似描述。

表 8-2 某三段河流延迟参数表

τ_1	0	a_1	0.15	z_0	0
τ_2	1/2 (天)	a_2	0.7	q_0	10
τ_3	1 (天)	a_3	0.15	...	...

如上述第二个方程组的第一个式子可改写为

$$z_2 = 0.9[0.15z_1(t) + 0.7z_1(t - 0.5) + 0.15z_1(t - 1)] - 1.32z_2 + 0.1\Delta m_2 + 4.19$$

由于方程中有二级延迟, 于是引入 4 个附加状态变量 $z_{4 \sim 7}$, 并令 $z_4(t) = z_1(t - 0.5)$, 则有

$$z_4(s) = z_1(s)e^{-0.5s}$$

因为

$$z_1(s)e^{-0.5s} = z_1(s)[1 + 0.5s + \frac{0.25}{2}s^2 + \dots]^{-1}$$

所以取前三项有

$$z_1(t) = z_4(t) + 0.5z_4(t) + 0.125\ddot{z}_4(t)$$

令 $z_4 = z_5$, 则 $z_5 = 8z_1 - 8z_4 - 4z_5$, 同样对另一个延迟, 设 $z_1(t - 1) = z_6$, 则有

$$z_6 = z_7, z_7 = 2z_1 - 2z_6 - 2z_7$$

于是, 可把本例一开始所列的第二个方程组的第一个式子改写为

$$z_2 = 0.135z_1 + 0.63z_4 + 0.135z_6 - 1.32z_2 + 0.1\Delta m_2 + 4.19$$

同理, 可把其他方程组中各式子, 对每个延迟引入四个附加变量, 使总体系统模型的阶次增加到 22 阶。这样一来, 总体系统优化模型将分解为三个子系统, 分别对应三个 2 阶、10 阶和 10 阶的方程组, 就能够利用关联预估法求解河流污染的最佳控制解。进一

步建立目标函数

$$\min : J = \int_0^3 \sum_{i=1}^3 [2(z_i - z_i^*)^2 + (q_i - q_i^*)^2 + (m_i - m_i^*)^2] dt$$

其意义在于：如果在初始时刻之前，系统由于受干扰而处于状态 x_0 ，它是一个 22 维的向量，那么求解目标函数的最小化，可确保系统及其控制能回到稳定状态 $z^* = [z_1^*, z_2^*, z_3^*]$ 、 $q^* = [q_1^*, q_2^*, q_3^*]$ 和 $m^* = [m_1^*, m_2^*, m_3^*]$ ，于是就保证了 BOD、DO 和控制变量均不会出现过大的偏差。对于一个二次型的目标函数，只要选用适当的加权，就能保证 BOD 和 DO 值在一定的 $z^* \pm \Delta z^*$ 与 $q^* \pm \Delta q^*$ 范围内。大量的实验说明，上述目标函数中所选择的加权是恰当的。

三、离散型问题

1. 目标协调法

$$\min : J = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \|x_{ik}\|_{P_i}^2 + \sum_{k=0}^{k-1} F_{ik} \right] \quad (8-55)$$

式中，

$$F_{ik} = (\|x_{ik}\|_{Q_i}^2 + \|u_{ik}\|_{R_i}^2 + \|z_{ik}\|_{S_i}^2)/2$$

$$\text{s. t. } x_{ik} = A_i x_{ik} + B_i u_{ik} + C_i z_{ik}$$

$$x_i(0) = x_{i0}$$

$$i = 1, 2, \dots, N, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (8-56)$$

其中， $x_i(k) = x_{ik}$ ，其他相同。与连续型目标协调法相同，二级中使用梯度

$$\nabla \Phi(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda^*} = \begin{bmatrix} \dots \\ z_{ik} - \sum_{j=1}^N L_{ij} x_{jk} \\ \dots \end{bmatrix}$$

改善拉格朗日乘子向量。

2. 塔穆勒三级法

在原约束条件下定义对偶函数

$$\max_{\rho} \varphi(\rho)$$

其中,

$$\varphi(\rho) = \min_{x, u} \left[\frac{1}{2} \|x_{ik}\|_{p_i}^2 + \sum_{k=0}^{K-1} F_{ik} + \rho_{ik}^T E_{ik} + \lambda_i^{*T} z_i - \sum_{j=1}^N \lambda_j^{*T} L_{ji} x_i \right]$$

式中 $E_{ik} = x_{ik} - A_i x_{ik} + B_i u_{ik} + C_i z_{ik}$, 初始状态 $x_i(0) = x_{i0}$ 。于是对指定的 $\rho = \rho^*$ 算出对偶函数的数值, 并利用 $\varphi(\rho)$ 的梯度

$$\nabla \varphi(\rho)|_{\rho=\rho^*} = E_{ik} \quad i=1, 2, \dots, N; \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

使 $\varphi(\rho)$ 极大, 即式中的 x_i 、 u_i 是在优化模型的约束下使 L_i 极小化后所得的解, 塔穆勒三级法如图 8-6 所示。

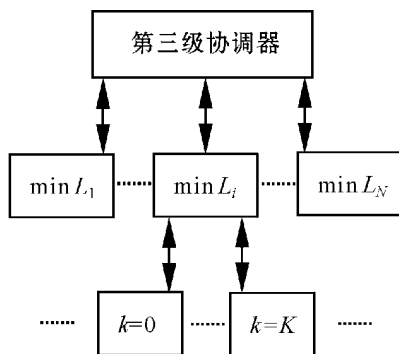


图 8-6 塔穆勒三级协调法示意图

当通过第二级确定 $\rho = \rho^*$ 和 $\lambda = \lambda^*$ 时, 可分别对每个时间序列 k 使 $\varphi(\rho)$ 极小化, 即对第 i 个子系统定义哈密尔顿函数为

$$H_{ik} = F_{ik} + \lambda_i^{*T} z_i - \sum_{j=1}^N \lambda_j^{*T} L_{ji} x_i + \rho_{ik}^{*T} x_{i, k+1} \quad (8-57)$$

式中, $x_{i, k+1}$ 为式 (8-56) 所示, 并将式 (8-57) 代入 $\varphi(\rho)$, 可得

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_{iK}\|_{\mathbf{P}_i}^2 - \boldsymbol{\rho}_{i,K-1}^{*\tau} \mathbf{x}_{iK} + \sum_{k=1}^{K-1} (\mathbf{H}_{ik} - \boldsymbol{\rho}_{i,k-1}^{*\tau} \mathbf{x}_{ik})$$

其中, $\boldsymbol{\rho}(-1)=0$ 。于是, 可得到第 i 个子系统, 在不同的时刻 k 上, 对于确定的 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}^*$ 的极小化问题的显式解如下:

(1) 当 $k=0$ 时, 分别对 $\mathbf{H}_{i0}$ 求 u_{i0} 和 z_{i0} 的偏导, 并令其为 0, 则有

$$\begin{cases} u_{i0} = -\mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^{\tau} \boldsymbol{\rho}_{i0}^* \\ z_{i0} = -\mathbf{S}_i^{-1} (\mathbf{C}_i^{\tau} \boldsymbol{\rho}_{i0}^* + \boldsymbol{\lambda}_{i0}^*) \end{cases} \quad (8-58)$$

(2) 当 $k=1, 2, \dots, K-1$ 时, 对 x_{ik} 、 u_{ik} 、 z_{ik} 求

$$\mathbf{H}_{ik} - \boldsymbol{\rho}_{i,k-1}^{*\tau} \mathbf{x}_{ik}$$

的极小化解为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{ik} = -\mathbf{Q}_{ik}^{-1} [\mathbf{A}_{ik}^{\tau} \boldsymbol{\rho}_{i,k}^* - \mathbf{P}_{i,k-1}^* - \sum_{j=1}^N (\boldsymbol{\lambda}_j^{*\tau} \mathbf{L}_{ji})^{\tau}] \\ u_{ik} = -\mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^{\tau} \boldsymbol{\rho}_{ik}^* \\ z_{ik} = -\mathbf{S}_i^{-1} (\mathbf{C}_i^{\tau} \boldsymbol{\rho}_{ik}^* + \boldsymbol{\lambda}_{ik}^*) \end{cases} \quad (8-59)$$

(3) 当 $k=K$ 时, 对 $\mathbf{x}_{iK}$ 求

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_{iK}\|_{\mathbf{P}_i}^2 - \boldsymbol{\rho}_{i,K-1}^{*\tau} \mathbf{x}_{iK}$$

的极小解为

$$\mathbf{x}_{iK} = \mathbf{P}_i^{-1} \boldsymbol{\rho}_{i,K-1}^{*\tau} \quad (8-60)$$

总之, 对目标函数式 (8-55) 和约束式 (8-56) 所构成的优化模型, 可以用一个三级算法求解, 即在预定的 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 和 $\boldsymbol{\rho}^*$ 下, 在第一级中按式 (8-58) 至式 (8-60) 求的最优解 x 、 u 和 z 。在第二级中利用梯度改进 $\boldsymbol{\rho}$, 从而获得 $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ 的极大值。在第三级中利用第二级所改进的迭代计算改善 $\Phi(\boldsymbol{\lambda})$, 使其达到极大值。最后, 当 $\nabla \varphi(\boldsymbol{\rho})$ 和 $\nabla \Phi(\boldsymbol{\lambda})$ 同时为 0 时, 就可达到整体最优。

[例 8-6] 对于模型

$$\min J = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2} (x_{1k}^2 + x_{2k}^2 + u_{1k}^2 + u_{2k}^2 + z_{1k}^2 + z_{2k}^2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_{1k+1} = x_{1k} + u_{1k} + z_{1k} \\ x_{2k+1} = -x_{2k} + u_{2k} + z_{2k} \\ z_{1k} = x_{2k} \\ z_{2k} = x_{1k} \end{cases}$$

对于给定的 λ^1 和 λ^2 , 拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2} (x_{1k}^2 + x_{2k}^2 + u_{1k}^2 + x_{2k}^2 + z_{1k}^2 + z_{2k}^2) \\ &\quad + \lambda_1 (z_{1k} - x_{2k}) + \lambda_2 (z_{2k} - x_{1k}) \\ &= \sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{2} x_{1k}^2 + \frac{1}{2} u_{1k}^2 + \frac{1}{2} z_{1k}^2 + \lambda_{1k} z_{1k} - \lambda_{2k} z_{1k} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{2} x_{2k}^2 + \frac{1}{2} u_{2k}^2 + \frac{1}{2} z_{2k}^2 - \lambda_{1k} z_{2k} + \lambda_{2k} z_{2k} \right) \\ &= L_1 + L_2 \end{aligned}$$

于是, 可先在前两个约束式下得到两个独立的动态优化解, 再利用第二级中的对偶函数的梯度

$$\nabla \Phi(\lambda^*) = \begin{bmatrix} z_1 + x_2 \\ z_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

对 λ_1 和 λ_2 改进。对于独立的 L_1 和 L_2 子系统而言, 可采用上节所述的二次离散法, 但选用塔穆勒三级法更为有效, 如 L_1 在第一个约束式下, 当给定 ρ_1 、 λ 时, 可算出四个独立的最小问题解为

$$\begin{aligned} u_{10} &= -\rho_{10}, \quad z_{10} = -(\rho_{10} + \lambda_{10}) \\ x_{11} &= -(\rho_{11} - \rho_{10} - \lambda_{21}), \quad u_{11} = -\rho_{11}, \quad z_{11} = -(\rho_{11} + \lambda_{11}) \\ x_{12} &= -(\rho_{12} - \rho_{11} - \lambda_{22}), \quad u_{12} = -\rho_{12}, \quad z_{12} = -(\rho_{12} + \lambda_{12}) \\ x_{13} &= \rho_{12} \end{aligned}$$

再用梯度

$$\nabla_1 = -x_{1k+1} + x_{1k} + u_{1k} + z_{1k}$$

改进 ρ_1 , 就可得到优化模型在一个三级结构中的解。

3. 具有延迟的塔穆勒算法

许多实际系统具有时间延迟特性, 这里针对总系统优化模型

$$\min : J = \frac{1}{2} \|x_K\|_{P_K}^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{2} (\|x_k\|_{Q_k}^2 + \|u_k\|_{R_k}^2) \quad (8-61)$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. : } x_{k+1} &= A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + \dots + A_\theta x_{k-\theta} \\ &\quad + B_0 u_k + B_1 u_{k-1} + \dots + B_\theta u_{k-\theta} \\ x_k &= 0, u_k = 0 (k < 0) \quad x(0) = x_0 \\ x_{\min} &\leq x_k \leq x_{\max} \quad k = 1, 2, \dots, K \\ u_{\min} &\leq u_k \leq u_{\max} \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned}$$

其中, $x_k = x(k)$, 其他相同。 x 是 n 维向量, u 是 r 维向量, A_i 、 B_i ($i=0, 1, \dots, \theta$) 分别是 $n \times n$ 、 $n \times r$ 阶矩阵, P 、 Q 和 R 均为正定对角阵。

那么定义哈密尔顿函数为

$$H_k = F'_k + \sum_{j=0}^{\theta} \rho_{k+j}^T (A_j x_k + B_j u_k) \quad (8-62)$$

式中,

$$\begin{aligned} H_k &= H(x_k, u_k, \rho_k, k) \\ F'_k &= \frac{1}{2} (\|x_k\|_{Q_k}^2 + \|u_k\|_{R_k}^2) \\ \rho_k &= 0 \quad k \geq K \end{aligned}$$

当 $\rho = \rho^* = [\rho_0^*, \rho_1^*, \dots, \rho_{K-1}^*]$ 固定时, 拉格朗日函数为

$$L_{\rho^*} = \frac{1}{2} (\|x_K\|_{P_K}^2 - \rho_{K-1}^{*\tau} x_K + \sum_{k=0}^{K-1} (H_k - \rho_{k-1}^{*\tau} x_k))$$

约束为总模型 s. t. 中的后两个式子。可见, 总体优化模型的最优控制解为 x 、 u : 满足对应 ρ 最大的 L_{ρ^*} 最小。按塔穆勒三级算法, 拉格朗日函数可分解为 $K+1$ 个独立子系统的最小问题解。

(1) 当 $k=0$ 时,

$$\begin{aligned} \min_{u_0} H_0 &= F'_0 + \sum_{j=0}^{\theta} \rho_j^T (A_j x_0 + B_j u_0) \\ \text{s. t. : } x(0) &= x_0, \quad u_{\min} \leq u_0 \leq u_{\max} \end{aligned}$$

由于 R 是对角阵，于是容易解得

$$u_0^* = \text{sig}_u \left[-R_0^{-1} \sum_{j=0}^{\theta} B_j^T \rho_j^* \right] \quad (8-63)$$

式中， $\text{sig}_u(\psi)$ 表示 ψ 的第 i 个元素为

$$\text{sig}_u(\psi) = \begin{cases} u_{\min i} & (\psi_i < u_{\min i}) \\ \psi_i & (u_{\min i} \leq \psi_i \leq u_{\max i}) \\ u_{\max i} & (\psi_i > u_{\max i}) \end{cases}$$

(2) 当 $k=1, 2, \dots, K-1$ 时，

$$\begin{aligned} \min_{x_k, u_k} &: H_k - \rho_{k-1}^{*\tau} x_k \\ \text{s. t.} &: x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max}, u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max} \end{aligned}$$

最优控制解为

$$\begin{cases} x_k^* = \text{sig}_x \left[-Q_k^{-1} (-\rho_{k-1}^* + \sum_{j=0}^{\theta} A_j^T \rho_{k+j}^*) \right] \\ u_k^* = \text{sig}_u \left[-R_k^{-1} \sum_{j=0}^{\theta} B_j^T \rho_{k+j}^* \right] \end{cases} \quad (8-64)$$

(3) 当 $k=K$ 时，

$$\min_{x_K} : \frac{1}{2} \|x_K\|_{P_K}^2 - \rho_{K-1}^{*\tau} x_K$$

其解为

$$x_K^* = \text{sig}_x [P_K^{-1} \rho_{K-1}^*] \quad (8-65)$$

注：从 $K+1$ 个子系统所获得的解式 (8-63) 至式 (8-65)，都是独立单变量和受界限约束的解，使对预定的 $\rho = \rho^*$ 满足拉格朗日函数极小化，在第二级中容易通过离散状态方程式两边的误差作为梯度去改进 ρ^* ，使对偶函数取极大值。因此，这种算法显然简单易行，是目标协调法中唯一较成功的算法。因为不必为时间延迟而扩大状态空间，可以大大减少计算机的工作量；不等式约束还可采用非常简单的方法处理；而且目标函数也有意义，这是由于没有按传统目标协调法求解，即要引进附加项去避免出现奇异解问题。

[例 8-7] 道路交通灯的最佳控制

参见图 8 - 7 , 表示一个交叉路口单向直行的简单情况。

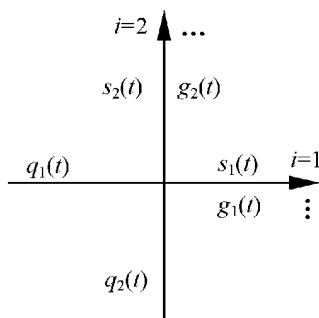


图 8 - 7 饱和交叉路口示意图

图中：

$q_i(t)$ ：沿方向 i 到达的车流量

s_i ：沿方向 i 的饱和车流量

$g_i(t)$ ：沿方向 i 的平均离去车流量

另外，定义

G_i ：沿方向 i 的绿灯持续时间

l ：黄灯的时间损失

C ：放行周期的持续时间，已知常数

$u_i(t)$ ：控制变量，为沿方向 i 的绿灯百分比

$x_i(t)$ ：状态变量，为沿方向 i 的瞬时车队长度

于是有

$$C = G_1 + G_2 + l$$

$$u_i(t) = g_i(t)/s_i = G_i/C$$

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= x_i(k) - g_i(k) + q_i(k) \\ &= x_i(k) - s_i u_i(k) + q_i(k) \end{aligned}$$

$$i = 1, 2$$

事实上，因为放行时间是 C 已知常数，那么只须有一个控制变量 $u = u_i$ 即可，另一个控制变量则为 $C - u_i = l$ 。并且控制变量和状态变量均须受到不等式 $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ 和 $0 \leq x_i(k) \leq x_{\max}$ 的约束。

进一步，如果有两个相连接的交叉路口，与方向 $i=1$ 相同， m 为两个路口之间的延迟单位的个数，则有

$$q_3(k) = s_i u_i(k - m)$$

于是，按照这个思路，可建立一个动态道路网络交通灯最佳控制模型为

$$\begin{aligned} \min_{u(k)} J &= \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{2} (\|x(k)\|_Q^2 + \|u(k) - u_0\|_R^2) \\ \text{s. t. : } x(k+1) &= Ax(k) + B_0 u(k) + B_1 u(k-1) + \dots \\ &\quad + B_m u(k-m) + v \\ 0 &\leq x(k) \leq x_{\max} \\ u_{\min} &\leq u(k) \leq u_{\max} \end{aligned}$$

其中， x 表示为一个有 n 条车队网络的 n 维状态变量，为 A 阶单位阵， u 为 r 个交通灯的 r 维控制变量， v 为系统外部的输入量。在目标函数中， Q 与 R 是对角加权阵， u_0 是预定的名义控制向量，在实际中， J 中的含 u_0 项并没有意义，目的只是使优化模型标准化而已，所以选择 R 时通常是使含 u_0 项只是对 J 影响很小的一个量。本质上，目标函数是用于惩罚车队过长而使延迟最小的办法。

参考文献

1. 周其节等. 自动控制原理(上、下). 北京:电子工业出版社,1985
2. 潘立登等. 系统辨识与建模. 北京:化学工业出版社,2004
3. 吴旭光. 系统建模和参数估计——理论与算法. 北京:机械工业出版社,2002
4. 李言俊等. 系统辨识理论及应用. 北京:国防工业出版社,2003
5. 方崇智等. 过程辨识. 北京:清华大学出版社,1988
6. T. L. Saaty. The Analytic Hierarchy Process. McGraw Hill Inc., 1980.
7. 赵焕臣等. 层次分析法——一种简易的新决策方法. 北京:科学出版社,1986
8. 易德生等. 灰色理论与方法. 北京:石油工业出版社,1992
9. 邓聚龙. 灰色控制系统. 武汉:华中理工大学出版社,1985
10. 傅立. 灰色系统理论及其应用. 北京:科技文献出版社,1992
11. 刘宏良. 中国水环境预测与测量导论. 北京:中国环境科学出版社,1988
12. 北京环境保护科学学院. 水污染控制手册. 上海:上海科技出版社,1989
13. 周斌等. 大系统的最优化及控制(译). 北京:机械工业出版社,1983
14. 郭一新. 系统工程 BASIC 程序设计. 北京:科学出版社,1987
15. 邓自立等. 动态系统分析及其应用——建模、滤波、预

- 报、控制的新方法和程序库. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985
16. 黄贯虹等. 大鹏湾优势藻引发赤潮的灰分析. 生态学报, 2002, 22 (6)
17. 黄伟建等. 大鹏湾海水理化因子对夜光藻增殖的灰关联分析. 应用与环境生物学报, 1996, 2 (2)
18. 黄贯虹等. 大鹏湾海水环境要素与夜光藻增殖的灰关联模型. 生态学杂志, 1999, 18 (4)
19. 黄贯虹等. 大鹏湾春季海水理化因素与骨条藻种群密度的灰色系统模型研究. 南中国海红潮的预防和管理. 香港国际会议论文集 (E - 3), 2000
20. Huang Weijian, Huang Guan hong. Application of AHP on Policy Decision Study of Investment in Synthetic Controlling River Pollution of Guangzhou. Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making, July 19-24, 1992, Taiwan
21. 黄伟建等. 大鹏湾海水环境要素与浮游动物增殖的灰色模型研究. 海洋学报, 1999
22. 黄伟建等. 大鹏湾生态因子灰关联分析. 生态科学, 1997, 16 (1)
23. 黄伟建等. 大鹏湾海水理化因子与浮游动物数量的关系. 海洋与湖沼, 1998, 29 (3)
24. 运筹学教材编写组. 运筹学. 北京: 清华大学出版社, 1990
25. 胡运权. 运筹学教程. 北京: 清华大学出版社, 1998
26. 汪应洛. 系统工程理论、方法与应用. 北京: 高等教育出版社, 1998
27. 牛林山等. 什么是系统工程 (译). 北京: 机械工业出版社, 1982
28. 王寿云等. 系统工程名词浅释. 北京: 科学出版社, 1982
29. 邵光远等. 系统科学入门. 北京: 知识出版社, 1990

30. 姜璐等. 系统科学新论. 北京: 华夏出版社, 1990
31. 沈泰昌等. 系统工程基础. 北京: 国防工业出版社, 1981
32. 王慧炯. 系统工程导论. 上海: 上海科学技术出版社, 1980