弹性动力学的几个专题

TANXING DONGLIXUE DE JIGE ZHUANTI

王其申 著

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹性动力学的几个专题/王其申著．—合肥:合肥工业大学出版社,2005.12
ISBN 7-81093-332-9

Ⅰ.弹...　Ⅱ.王...　Ⅲ.弹性动力学—文集　Ⅳ.0347-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 134005 号

弹性动力学的几个专题

王其申　著　　责任编辑　疏利民　　责任校对　方　丹

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2005 年 12 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2005 年 12 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787×1092　1/16
电　话	总编室:0551—2903038	印　张	13　　字　数　316 千字
	发行部:0551—2903198	发　行	全国新华书店
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	纸　张	山东光华纸业集团有限公司

ISBN 7-81093-332-9/O·24　　定价:26.00 元

目　录

自　　序

近年来，我所在的学校提出了“稳定、拓展、上层次”的发展方针，作为学校的一员，我为学校近年来的发展步伐所鼓舞，也想为学校的进一步发展尽绵薄之力。思虑再三，决定汇编这本论文集，既是作为展示学校整体发展实力的一个细胞，也是对自己的一种激励。

(一)

我的科研之路平凡而不平坦。尽管青少年时期也曾有过种种的幻想，尽管我也曾为中学名校的尖子生，也曾就读于名牌大学，但上个世纪那场“轰轰烈烈”的“革命”中断了我的学业，8 年的中教生涯使我离科研前沿越来越远。在“科学的春天”里，已过而立之年的我有幸重回母校，在被人们戏称为“回炉班”的进修班中才修完了大学本科的主要课程。正当我在为此而庆幸的时候，命运之神又给了我双重打击。新婚不久的前妻染上了“不死的癌症”——类风湿性关节炎，先是关节强直，生活不能自理，继而瘫痪在床，日常生活全靠我来护理，这样的生活延续了 20 年；我的双眼患有先天性白内障，由于长期生活的艰辛，就在回炉班期间视力下降到左眼 0.1 和右眼 0.01。就在我极度苦闷之际，是恩师——北京大学力学系的王大钧教授给我引了路，在他多次动员而我终未能去就读他的研究生的情况下，为我设计了后来的科研之路：偏重理论、偏重数学。在回炉班没有毕业论文任务的情况下，他带我做了可以算得上做毕业论文的工作，教我查文献，指导我如何一步一步地做科研；在我回到家乡的这所地方性师范院校从教后，又不失时机地给我寄来资料和最新出版物，指导我选定科研课题；在我形成论文初稿后，逐字逐句地审阅，甚至帮我改正错别字；在我为生活而迷茫的时候，给我压担子，指方向；为了扩大我的视野，多次资助我出席国内、国际学术会议。……正是有了恩师的指引，我的科研才有了一点点成绩，可以说，这本论文集本身就包含了恩师的心血，值此文集出版之际，我最要说的就是：谢谢恩师。

(二)

这本文集收录了我 20 年来的主要科研成果，分为 4 个专题，共计收录了 28 篇专题学术论文，全部在国内外公开出版物上发表过。其中第一专题“弹性结构振动的定性性质”和第二专题“弹性结构振动的反问题”基本上是在王大钧教授指导下完成的；第三专题“特征值的包含定理”早期也曾得到过恩师的指导，只有第四专题“泛复变函数方法在力学与物理中的应用”完全是个人的独立工作。有关这些专题研究的价值，笔者在此不敢自吹自擂，相信读者自有公正的评价。

需要说明的是，文集中收录的论文包括本人独撰的论文 14 篇，作为第一作者的论文 13 篇。出于对合作者的尊重，对所有合著的论文，我都在该文的第一页下方做了注释。至于收入本文集的唯一一篇本人仅为第二作者的论文，其理由也在该部分的序言和该首页的下方做了说明。

文集并未包含作者的全部学术论文，本人作为第二作者及排名更后的论文理所当然地没有收入，作者在教学研究领域和近几年在声学领域的一些成果，由于难以纳入这本文集的专题之下也未收入。

(三)

科学的道路是漫长的，我在这条道路上已经走过了 20 多年，虽有一点成绩，但与众多的同行相比，相距甚远。出版这本文集的目的，更在于向众多的同行请教。如果能够得到诸位同行尤其是大师级的同行的指教，笔者不胜感激！

(四)

本文集的出版得到安庆师范学院学科专业建设基金的资助，在此表示诚挚的感谢！

作　者

2005 年 8 月 28 日于安庆

第一专题

弹性结构振动的定性性质

研究结构的固有振动的定性性质具有重要的理论意义和应用价值。首先，定性性质的理论是讨论振动反问题的基础，在这类问题中利用频率和模态数据确定结构的物理参数；其次，利用定性性质的理论可有助于判断频率和模态的真伪。

在这一部分中，收录了笔者作为第一作者或独撰的学术论文共 9 篇，其中发表在国家核心期刊上的论文 5 篇。该部分着重研究了任意支承条件下的杆和梁的离散系统刚度矩阵以及相应连续系统格林函数的振荡特性，导出了这些系统频谱的离散性和相间性；证明了位移模态和应变模态的充分必要条件；修正了梁的正系统的定义；验证了离散系统刚度矩阵和相应连续系统格林函数之间的极限关系；阐明了由离散系统刚度矩阵的符号振荡性直接导出相应连续系统格林函数振荡性的极限过渡法。此外，也汇集了均匀各向同性弹性圆柱体的各种振动模式以及边界参数变动对梁的频率和模态的影响。

各向同性弹性圆柱体的固有振动

摘　要　本文以严密的数学形式导出了各向同性弹性圆柱体固有振动方程的通解，在侧面自由的边条件下证明了通解与历史上已有的 Pochhammer 解的一致性。在此基础上全面给出了圆柱体振动问题的各种可能的振型和相应的频率方程。

关键词　圆柱体　固有振动　侧面自由　振型　频率方程

一　引　言

关于各向同性弹性圆柱体的固有振动的问题，早在 1876 年，Pochhammer 即在文献[1]中进行了研究，给出了方程的一组解（以下简称 Po－解）。随后出现的各种文献资料都没有超出 Po－解的范围，只是在频率分析、振型分析、有限元分析及其他近似解法等方面作了大量工作。鉴于 Po－解的导出过程并无严格的数学依据，本文从分离变量法入手，首先导出了各向同性弹性圆柱体固有振动方程组的通解，证明了在圆柱侧面自由边条件下通解化为 Po－解；在此基础上，对圆柱固有振动问题进行了全面系统的振型分析和频率分析。

二　基本方程组及其通解

各向同性弹性圆柱体固有振动方程是[2,3]

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} - \mu\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{u} \tag{2.1}$$

在柱坐标 r、θ、z 下，它的分量形式是

$$\begin{cases}\rho\ddot{u}_r = (\lambda + 2u)\dfrac{\partial\varepsilon_0}{\partial r} - \dfrac{2\mu}{r}\dfrac{\partial\omega_z}{\partial\theta} + 2\mu\dfrac{\partial\omega_\theta}{\partial z}\\[2ex] \rho\ddot{u}_\theta = (\lambda + 2u)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varepsilon_0}{\partial\theta} - 2\mu\dfrac{\partial\omega_r}{\partial z} + 2\mu\dfrac{\partial\omega_z}{\partial r}\\[2ex] \rho\ddot{u}_z = (\lambda + 2u)\dfrac{\partial\varepsilon_0}{\partial z} - \dfrac{2\mu}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) + \dfrac{2\mu}{r}\dfrac{\partial\omega_r}{\partial\theta}\end{cases} \tag{2.2}$$

式中 ρ 是柱体材料的密度，$\boldsymbol{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$，是位移矢量，$\lambda$、$\mu$ 是弹性常数，“$\cdot$”表示对时间的微商，而

* 本文原载于《安庆师范学院学报》(自然科学版)，1984 年第 1 期。

$$\varepsilon_0 = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z) = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}/2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

对(2.1)式两边取散度，由于 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = 0$，我们有

$$\rho \ddot{\varepsilon}_0 = (\lambda + 2\mu)\ \nabla^2 \varepsilon_0 \tag{2.5}$$

利用分离变量法，不难求得

$$\varepsilon_0 = -A \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} \mathrm{J}_m(hr) \cos(m\theta + \theta_0) \cos(\alpha z + \beta) \mathrm{e}^{ipt} \tag{2.6}$$

式中

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \alpha^2 \tag{2.7}$$

而 A 是积分常数，p 是圆频率，由于周期性可知 m 必为整数，α 则由端面条件来决定。

再对(2.1)式两边取旋度，由于 $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varepsilon_0 = 0$，我们有

$$\rho \ddot{\boldsymbol{\omega}} = -\mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = -\mu(\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - \nabla^2 \boldsymbol{\omega})$$

因

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.8}$$

故有

$$\rho \ddot{\boldsymbol{\omega}} = \mu\ \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{2.9}$$

这是个矢量方程，它的 Z 向(轴向)方程是

$$\rho \omega_z = \mu\ \nabla^2 \omega_z \tag{2.10}$$

相应的分离变量形式的解是

$$2\omega_z = Bk^2 \mathrm{J}_{m'}(kr) \sin(m'\theta + \theta_1) \cos(\alpha_1 z + \beta_1) \mathrm{e}^{ipt} \tag{2.11}$$

式中

$$k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - \alpha_1{}^2 \tag{2.12}$$

其余各量意义同前，只是 m'、α_1 是独立于 m、α 的本征值。(2.9)式的径向分量式是

$$\rho \ddot{\omega}_r = \mu\left(\nabla^2 \omega_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} - \frac{\omega_r}{r^2}\right)$$

由(2.8)式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_\theta}{\partial\theta}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_r)-\frac{\partial\omega_z}{\partial z} \tag{2.13}$$

故有

$$\rho r\ddot{\omega}_r=\mu\left[r\,\nabla^2\omega_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_r)+2\frac{\partial\omega_z}{\partial z}-\frac{\omega_r}{r}\right]=\mu\left[\nabla^2\left(r\omega_r+2\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)\right] \tag{2.14}$$

为了消去 $2\frac{\partial\omega_z}{\partial z}=-Bk^2\alpha_1\mathrm{J}_{m'}(kr)\sin(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)\mathrm{e}^{ipt}$ 的非齐次项，我们可令

$$r\omega_r=f_1(r,\theta,z,t)+f_2(r,\theta,z,t)$$

不难验证，相应于上述非齐次项的特解是：

$$2f_2=-B\alpha_1 r\frac{\mathrm{dJ}_{m'}(kr)}{\mathrm{d}r}\sin(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)\mathrm{e}^{ipt}$$

而 f_1 满足齐次方程

$$\rho\ddot{f}_1=\mu\,\nabla^2 f_1$$

于是解得：

$$2f_1=-C\frac{\rho p^2}{\mu}m''\mathrm{J}_{m''}(k'r)\sin(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)\mathrm{e}^{ipt}$$

式中

$$k'^2=\frac{\rho p^2}{\mu}-\alpha_2{}^2 \tag{2.15}$$

这样，我们得到

$$\begin{aligned}2\omega_r=&-C\frac{\rho p^2}{\mu}\frac{m''}{r}\mathrm{J}_{m''}(k'r)\sin(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)\mathrm{e}^{ipt}\\&-B\alpha_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_{m'}(kr)\sin(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)\mathrm{e}^{ipt}\end{aligned} \tag{2.16}$$

最后，由(2.13)式不难求得

$$\begin{aligned}2\omega_\theta=&-C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_{m''}(k'r)\cos(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)\mathrm{e}^{ipt}\\&-B\frac{\alpha_1 m_1}{r}\mathrm{J}_{m'}(kr)\cos(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)\mathrm{e}^{ipt}\end{aligned} \tag{2.17}$$

以(2.6)、(2.11)、(2.16)、(2.17)式代入方程组(2.2)并对 t 积分，立即得到：

$$\begin{cases} u_1 = \left\{A \dfrac{\mathrm{dJ}_m(hr)}{\mathrm{d}r}\cos(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta) + B\dfrac{m'}{r}\mathrm{J}_{m'}(kr)\cos(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1) + \right. \\ \qquad\qquad \left. C\alpha_2 \dfrac{\mathrm{dJ}_{m''}(k'r)}{\mathrm{d}r}\cos(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\right\}\mathrm{e}^{ipt} \\ u_\theta = \left\{-A\dfrac{m}{r}\mathrm{J}_m(hr)\sin(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta) - B\dfrac{\mathrm{dJ}_{m'}(kr)}{\mathrm{d}r}\sin(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)\right. \\ \qquad\qquad \left. - C\dfrac{\alpha_2 m''}{r}\mathrm{J}_{m''}(k'r)\sin(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\right\}\mathrm{e}^{ipt} \\ u_z = \{-A\alpha\mathrm{J}_m(hr)\cos(m\theta+\theta_0)\sin(\alpha z+\beta) \\ \qquad\qquad + Ck'^2\mathrm{J}_{m''}(k'r)\cos(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)\}\mathrm{e}^{ipt} \end{cases} \tag{2.18}$$

这就是各向同性弹性圆柱体固有振动方程组的通解，这里 A、B、C 是积分常数，它由初始条件来决定；J_m、$\mathrm{J}_{m'}$、$\mathrm{J}_{m''}$ 都是贝塞尔函数；m、m'、m'' 及 α、α_1、α_2 是各自独立的本征值。

三　频率方程

在导出圆柱固有振动方程的通解以后，下面我们来证明，在圆柱侧面自由的边条件下，$m=m'=m''$，$\theta_0=\theta_1=\theta_2$，$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$，$\beta=\beta_1=\beta_2$，从而解式(2.18) 化为 Po－解。

圆柱侧面自由的边条件是

$$\sigma_{rr}\big|_{r=a} = \sigma_{r\theta}\big|_{r=a} = \sigma_{rz}\big|_{r=a} = 0$$

这里 a 是圆柱半径，以u 的表达式代入，并记$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_m(hr)\big|_{r=a}$ 为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_m(ha)$ 等等，则有

$$\begin{aligned} &Af_{11}(a)\cos(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta) + Bf_{12}(a)\cos(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1) \\ &\qquad + Cf_{13}(a)\cos(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &Af_{21}(a)\sin(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta) + Bf_{22}(a)\sin(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1) \\ &\qquad + Cf_{23}(a)\sin(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &Af_{31}(a)\cos(m\theta+\theta_0)\sin(\alpha z+\beta) + Bf_{32}(a)\cos(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1+\beta_1) \\ &\qquad + Cf_{33}(a)\cos(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中：

$$f_{11}(a) = -\frac{\rho p^2\lambda}{\lambda+2\mu}\mathrm{J}_m(ha) + 2\mu\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_m(ha)}{\mathrm{d}a^2}$$

$$f_{12}(a) = 2\mu m'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{J}_{m'}(ka)}{a} \qquad f_{13}(a) = 2\mu\alpha_2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_{m''}(k'a)}{\mathrm{d}a^2}$$

$$f_{21}(a) = m\left[\frac{2}{a}\frac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a} - \frac{2\mathrm{J}_m(ha)}{a^2}\right] \qquad f_{22}(a) = \frac{m'^2}{a^2}\mathrm{J}_{m'}(ka) + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{a}\frac{\mathrm{dJ}_{m'}(ka)}{\mathrm{d}a}\right)$$

$$f_{23}(a)=a_2m''\left[\frac{2}{a}\frac{\mathrm{dJ}_{m''}(k'a)}{\mathrm{d}a}-\frac{2\mathrm{J}_{m''}(k'a)}{a^2}\right]$$

$$f_{31}(a)=-2\alpha\frac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a}\qquad f_{32}(a)=-\frac{\alpha_1m'}{a}\mathrm{J}_{m'}(ka)\qquad f_{33}(a)=(k'^2-\alpha_2^2)\frac{\mathrm{dJ}_{m''}(k'a)}{\mathrm{d}a}$$

为了证明我们的结论，我们首先指出以下几点事实：

(1)(2.18) **式对一切** $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ **和** $0\leqslant z\leqslant l$ **都成立；**

(2) **矩阵**$\{f_{ij}(a)\}_{3\times3}$ **具有这样两条性质：**

性质 1　它的每一列中三个元素不同时为 0[*1]。

事实上，矩阵的每一个元素都可以改写成 J_m **与** $\mathrm{dJ}_m/\mathrm{d}a$ **的线性组合，如果它的某一列三个元素同时为** 0，**则必有** $\mathrm{J}_m=\mathrm{dJ}_m/\mathrm{d}a=0$，**这与贝塞尔函数的性质矛盾。**

性质 2　当 $m=m'=m''$，$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$ **时，矩阵的每两列是线性无关的。**[**2]

这可由以下事实来证明，即用数值解法不难验证 $\begin{vmatrix}f_{11}&f_{1j}\\f_{21}&f_{2j}\end{vmatrix}$ **与** $\begin{vmatrix}f_{11}&f_{1j}\\f_{31}&f_{3j}\end{vmatrix}$ $(j=2.3)$ **以及** $\begin{vmatrix}f_{12}&f_{13}\\f_{22}&f_{23}\end{vmatrix}$ **与** $\begin{vmatrix}f_{12}&f_{13}\\f_{32}&f_{33}\end{vmatrix}$ **没有公共根。**

从这些事实出发，即可证明我们的结论。首先我们证明 $m=m'=m''$，**我们用反证法。**

假如结论不真，则可分为两种情况：

情况一：m、m'、m'' **各不相同。**

此时，m、m'、m'' **中至少有一个不为** 0，**不妨设** $m\neq0$，**因：**

$$\cos(m'\theta+\theta_1)=\cos\left(\theta_1-\frac{m'}{m}\theta_0\right)\cos m'\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)-\sin\left(\theta_1-\frac{m'}{m}\theta_0\right)\sin m'\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)$$

$$\cos(m''\theta+\theta_2)=\cos\left(\theta_2-\frac{m''}{m}\theta_0\right)\cos m''\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)-\sin\left(\theta_2-\frac{m''}{m}\theta_0\right)\sin m''\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)$$

由三角函数的正交性，以 $\cos m\left(\theta+\dfrac{\theta_0}{m}\right)$**乘以**(3.1) **式两边并对** θ **由** 0 **至** 2π **积分得到**

$$Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)=0$$

同理有

$$Af_{21}(a)\cos(\alpha z+\beta)=0\qquad Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)=0$$

由矩阵$\{f_{ij}(a)\}$ **的性质** 1 **和** z **的任意性，可以推得** $A=0$，**同理可以推得** $B=C=0$，**这与** A、B、C **不全为** 0 **矛盾。**

情况二：m、m'、m'' **中有两个相等，不妨设** $m=m'\neq m''$；

---

* **有三种例外：**(1)$m=\alpha=0$；(2)$m'=0$；(3)$\alpha_2=0$。**这时，相应的列的三元素可以同时为零，但这不影响我们的结论。**

** **以上两条性质在** $k'=0$ **时是例外，但在** $k'=0$ **时方程的解已不再含贝塞尔函数，必须另加讨论，但不会给出新的结果。**

此时，如果 $m \neq 0$，则以 $\cos(m\theta+\theta_0)$ 乘以(17.1) 式两边并对 θ 积分有

$$Af_{11}(a)\ \cos(\alpha z+\beta)+Bf_{12}(a)\ \cos(\alpha_1 z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.4}$$

同理有

$$Af_{21}(a)\ \cos(\alpha z+\beta)+Bf_{22}(a)\ \cos(\alpha_1 z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.5}$$

$$Af_{31}(a)\ \sin(\alpha z+\beta)+Bf_{32}(a)\ \sin(\alpha_1 z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.6}$$

又以 $\sin(m\theta+\theta_0)$ 乘以(3.1) 式两边并积分可得

$$Bf_{12}(a)\ \cos(\alpha_1 z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.7}$$

同理有

$$Bf_{22}(a)\ \cos(\alpha_1 z+\beta)\sin(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.8}$$

$$Bf_{32}(a)\ \sin(\alpha_1 z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.9}$$

如果 $\theta_1 \neq \theta_0$，鉴于它们是初相位，不妨设 $|\theta_1-\theta_0|<\pi$，于是 $\sin(\theta_1-\theta_0)\neq 0$，由(3.7) 式 — (3.9) 式和矩阵 $\{f_{ij}\}$ 的性质 1 即得 $B=0$，再由(3.4) 式 — (3.6) 式可得 $A=0$，而由(3.1) 式 — (3.3) 式得 $C=0$，这同样是矛盾的。

如果 $\theta_1=\theta_0$，则(3.4) 式 — (3.6) 式成为

$$\begin{cases} Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{12}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)=0 \\ Af_{21}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{22}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)=0 \\ Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)+Bf_{32}(a)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)=0 \end{cases} \tag{3.10}$$

这时，如果 $\alpha\neq\alpha_1$，完全类似地讨论给出 $A=B=C=0$，从而矛盾，如果 $\alpha=\alpha_1$，此时必有 $\beta=\beta_1$（证明见后），于是消去公因子后与矩阵 $\{f_{ij}(a)\}$ 的性质 2 矛盾。

如果 $m=m'=0$，(3.1) 式 — (3.3) 式成为

$$\begin{cases} Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)\cos\theta_0+Cf_{13}(a)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\cos(m''\theta+\theta_2)=0 \\ Bf_{22}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta)\sin\theta_1+Cf_{23}(a)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\sin(m''\theta+\theta_2)=0 \\ Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)\cos\theta_0+Cf_{33}(a)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)\cos(m''\theta+\theta_2)=0 \end{cases} \tag{3.11}$$

这时对参数的不同情况的讨论或者给出 $A=B=C=0$ 的矛盾结果，或 A、B、C 虽不全为 0，但并未超出 Po — 解的范围。

综合以上情况，只能得出结论 $m=m'=m''$。同理可以得 $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$。

更进一步，我们可以证明 $\theta_0=\theta_1=\theta_2$，分别以 $\cos(m\theta+\theta_0)$ 和 $\sin(m\theta+\theta_0)$ 乘以(3.1) 式 — (3.3) 式的各式并积分，注意到业已证明 $m=m'=m''$，$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$，则有

$$
\begin{cases}
Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{12}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0) \\
\qquad\qquad +Cf_{13}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\cos(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Af_{21}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{22}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0) \\
\qquad\qquad +Cf_{23}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\cos(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)+Bf_{32}(a)\sin(\alpha z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0) \\
\qquad\qquad +Cf_{33}(a)\sin(\alpha z+\beta_2)\cos(\theta_2-\theta_0)=0
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

及

$$
\begin{cases}
Bf_{12}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)+Cf_{13}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\sin(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Bf_{22}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)+Cf_{23}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\sin(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Bf_{32}(a)\sin(\alpha z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)+Cf_{33}(a)\sin(\alpha z+\beta_2)\sin(\theta_2-\theta_0)=0
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

如果 θ_0、θ_1、θ_2 互不相等，则 $\sin(\theta_1-\theta_0)\neq 0$，$\sin(\theta_2-\theta_0)\neq 0$，由(3.13)式及矩阵 $\{f_{ij}(a)\}$ 的性质 2 推出 $B=C=0$，同时也有 $A=0$，从而矛盾；如果 θ_0、θ_1、θ_2 中只有两个相等，例如 $\theta_0=\theta_1$，则由(3.13)式推得 $C=0$，再由(3.12)式得 $A=B=0$，仍旧矛盾，这就表明 $\theta_0=\theta_1=\theta_2$，同理也有 $\beta=\beta_1=\beta_2$。这就完成了全部证明，即在圆柱侧面自由的边条件下，解式(2.18)化成Po一解。

$$
\begin{cases}
u_r=\left[A\dfrac{\mathrm{dJ}_m(hr)}{\mathrm{d}r}+B\dfrac{m}{r}\mathrm{J}_m(kr)+C\alpha\dfrac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\cos(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta)\mathrm{e}^{ipt} \\
u_\theta=\left[-A\dfrac{m}{r}\mathrm{J}_m(hr)-B\dfrac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}-C\alpha m\dfrac{\mathrm{J}_m(kr)}{r}\right]\sin(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha a+\beta)\mathrm{e}^{ipt} \\
u_z=[-A\alpha\mathrm{J}_m(hr)+Ck^2\mathrm{J}_m(kr)]\cos(m\theta+\theta_0)\sin(\alpha z+\beta)\mathrm{e}^{ipt}
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

相应的频率方程是：

$$
\begin{vmatrix}
-\dfrac{\lambda\rho p^2}{\lambda+2\mu}\mathrm{J}_m(ha)+2\mu\dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_m(ha)}{\mathrm{d}a^2} & 2\mu m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\dfrac{\mathrm{J}_m(ka)}{a} & 2\mu\alpha\dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_m(ka)}{\mathrm{d}a^2} \\
m\left[\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{2\mathrm{J}_m(ha)}{a^2}\right] & \dfrac{m^2}{a^2}\mathrm{J}_m(ka)+a\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ka)}{\mathrm{d}a}\right) & \alpha m\left[\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ka)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{2\mathrm{J}_m(ka)}{a^2}\right] \\
-2\alpha\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a} & -\alpha m\dfrac{\mathrm{J}_m(ka)}{a} & (k^2-a^2)\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ka)}{\mathrm{d}a}
\end{vmatrix}=0
\tag{3.15}
$$

式中：

$$
h^2=\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}-\alpha^2 \qquad k^2=\frac{\rho p^2}{\mu}-\alpha^2
$$

四 振型分析

从(3.14)式、(3.15)式出发,可以得到圆柱体自由振动的一系列振型及相应的频率方程。首先,它当然包含人们熟悉的扭振、纵振动和横振动。

1. 扭振

当 $m=\beta=0,\theta_0=\pi/2$ 时,$u_r=u_z=0$,

$$u_\theta=-B\frac{\mathrm{d}J_0(kr)}{\mathrm{d}r}\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt}=B'J_1(kr)\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt} \tag{4.1}$$

相应的频率方程是行列式(3.15)的中心元素

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{J_1(ka)}{a}=0 \tag{4.2}$$

它的一个解是 $k=0$,即

$$p=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4.3}$$

这时,u_θ 应由原方程重新计算可得

$$u_\theta=Br\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt} \tag{4.4}$$

式中波数

$$\alpha=\frac{n\pi}{l}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{4.5}$$

这就是人们熟悉的扭转振动。

2. 纵振动

取 $m=\theta_0=0,\beta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$,即有

$$\begin{cases}u_\theta=0\\ u_r=\left[A\dfrac{\mathrm{d}J_0(hr)}{\mathrm{d}r}+C\alpha\dfrac{\mathrm{d}J_0(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt}\\ u_z=[-A\alpha J_0(hr)+Ck^2J_0(kr)]\sin\alpha z\mathrm{e}^{ipt}\end{cases} \tag{4.6}$$

相应的频率方程是行列式(3.15)的四角元素构成的二阶主子式:

$$\begin{vmatrix}-\lambda\dfrac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}J_0(ha)+2\mu\dfrac{\mathrm{d}^2J_0(ha)}{\mathrm{d}a^2} & 2\mu\alpha\dfrac{\mathrm{d}^2J_0(ka)}{\mathrm{d}a^2}\\ -2\alpha\dfrac{\mathrm{d}J_0(ha)}{\mathrm{d}a} & (k^2-\alpha^2)\dfrac{\mathrm{d}J_0(ka)}{\mathrm{d}a}\end{vmatrix}=0 \tag{4.7}$$

展开后,即得 Pochhammer 方程

$$(k^2-\alpha^2)^2 g_1(ha)+4h^2\alpha^2 g_1(ka)=2(k^2+\alpha^2)h^2 \tag{4.8}$$

式中 $g_1(x)=x\mathrm{J}_0(x)/\mathrm{J}_1(x)$，这就是纵振动。顺便指出，在其基频取近似值 $p\approx\alpha\sqrt{E/\rho}$（$E=\mu\dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ 是弹性模量）时，h 为纯虚数，$\mathrm{J}_0(hr)$ 应为虚宗量贝塞尔函数 $\mathrm{I}_0(hr)$ 所代替。

3．横振动

当取 $m=1,\theta_0=\beta=0$ 时有

$$\begin{cases} u_r=\left[A\dfrac{\mathrm{dJ}_1(hr)}{\mathrm{d}r}+B\dfrac{1}{r}\mathrm{J}_1(kr)+C\alpha\dfrac{\mathrm{dJ}_1(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\cos\theta\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt} \\ u_\theta=\left[-A\dfrac{\mathrm{J}_1(hr)}{r}-B\dfrac{\mathrm{dJ}_1(hr)}{\mathrm{d}r}-C\alpha\dfrac{\mathrm{J}_1(kr)}{r}\right]\sin\theta\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt} \\ u_z=\left[-A\alpha\mathrm{J}_1(hr)+Ck^2\mathrm{J}_1(kr)\right]\cos\theta\sin\alpha z\mathrm{e}^{ipt} \end{cases} \tag{4.9}$$

相应的频率方程是

$$\begin{vmatrix} \left(\alpha^2-k^2+\dfrac{2}{a^2}\right)\mathrm{J}_1(ha)-\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ha)}{\mathrm{d}a} & 2\left[\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ka)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{\mathrm{J}_1(ka)}{a^2}\right] & -2\alpha\left[\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ka)}{\mathrm{d}a}+\left(k^2-\dfrac{1}{a^2}\right)\mathrm{J}_1(ka)\right] \\ 2\left[\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ha)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{\mathrm{J}_1(ha)}{a^2}\right] & \left(\dfrac{2}{a^2}-k^2\right)\mathrm{J}_1(ka)-\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ka)}{\mathrm{d}a} & 2\alpha\left[\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ka)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{\mathrm{J}_1(ka)}{a^2}\right] \\ -2\alpha\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ha)}{\mathrm{d}a} & -\alpha\dfrac{\mathrm{J}_1(ka)}{a} & (k^2-\alpha^2)\dfrac{\mathrm{dJ}_1(ka)}{\mathrm{d}a} \end{vmatrix}=0 \tag{4.10}$$

这一方程的根在给定细长比 αa 和泊松比 ν 的情况下可以通过数值计算而求得。在 αa 很小时，取 $\mathrm{J}_1(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{16}+\dfrac{x^5}{384}$（第二行只需前两项）可以求得基频近似值为

$$p^2=\frac{\alpha^4 a^2 E}{4\rho}$$

这与材料力学中作为一维模型的梁的横振动的基频很好地吻合。事实上，在圆柱振动过程中，其轴线 $r=0$ 没有轴向位移，运动是在垂直轴线的平面内由初始条件所决定的方向上进行，也和纵振动相似。在基频振动时，h、k 均为纯虚数。

除了以上人们熟悉的三种振型外，Po－解还包括以下振型：

4．类薄膜振动

当 $\theta_0=\alpha=0,\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$u_r=u_\theta=0$，而

$$u_z=C\mathrm{J}_m(kr)\cos m\theta\mathrm{e}^{ipt} \tag{4.11}$$

这时，圆柱的横截面像薄膜一样在垂直截面的方向上振动。在这种情况下，圆柱侧面自由的边条件中，$\sigma_{rr}=\sigma_{rz}=0$ 自动满足，由 $\sigma_{r\theta}=0$ 推得频率方程是

$$\frac{\mathrm{dJ}_m(ka)}{\mathrm{d}a}=0 \tag{4.12}$$

由于此时 $k^2=\dfrac{\rho p^2}{\mu}$，$k=0$ 不代表振动，所以其基频为

$$p=\frac{\delta}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{4.13}$$

式中 δ 是方程 $\mathrm{J}'_m(\delta)=0$ 的非 0 最低根。当 $m=0$ 时，正好和三型理论[5] 中的最低阶的轴剪振型相一致。

由于这种情况不能满足圆柱端部自由的边条件，所以它只适用于无限长圆柱体。

5. 横截面变形振动

在 $\alpha=\beta=0$，$\theta_0=0$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，$u_z=0$，而

$$\begin{cases} u_r=\left[A\dfrac{\mathrm{dJ}_m(hr)}{\mathrm{d}r}+Bm\dfrac{\mathrm{J}_m(kr)}{r}\right]\cos m\theta\mathrm{e}^{ipt} \\ u_\theta=\left[-Am\dfrac{\mathrm{J}_m(hr)}{r}-B\dfrac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\sin m\theta\mathrm{e}^{ipt} \end{cases} \tag{4.14}$$

圆柱截面在自身平面内振动，呈现平面应力状态。圆柱侧面自由的边条件中 $\sigma_{rz}=0$ 自动满足，而由 $\sigma_{rr}|_{r=a}=\sigma_{r\theta}|_{r=a}=0$ 给出频率方程为：

$$\begin{vmatrix} -\left(k^2-\dfrac{2m^2}{a^2}\right)\mathrm{J}_m(ha)-\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a} & 2m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\dfrac{\mathrm{J}_m(ka)}{a} \\ 2m\left[\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{\mathrm{J}_m(ha)}{a^2}\right] & \left(2\dfrac{m^2}{a^2}-k^2\right)\mathrm{J}_m(ka)-\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{dJ}_m(ka)}{\mathrm{d}a} \end{vmatrix}=0 \tag{4.15}$$

这里

$$h^2=\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu},\quad k^2=\frac{\rho p^2}{\mu} \tag{4.16}$$

作为这种振动的例子，考虑无限薄柱即薄板，在其周边自由时，在薄板自身平面内所作的振动就是这种情况。

6. 径向振动和切向振动

作为上述横截面变形振动的更特殊的情况，当 $m=\theta_0=0$ 时，我们得到径向振动。

$$u_\theta=u_z=0，\text{而 } u_r=A\frac{\mathrm{dJ}_0(hr)}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{ipt} \tag{4.17}$$

相应的频率方程是

$$k^2\mathrm{J}_0(ha)+\frac{2}{a}\frac{\mathrm{dJ}_0(ha)}{\mathrm{d}a}=0 \tag{4.18}$$

其基频为

$$p_0=\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{4.19}$$

其中 x 是方程 $\gamma^2 g_1(x)=2$ 的最低根，而 $\gamma^2=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}=2\frac{1-\nu}{1-2\nu}$。这和三型理论[5]中最低径向振型的结论一致。

同样，当 $m=0,\theta_0=\frac{\pi}{2}$ 时，我们得到切向振型：

$$u_r=u_z=0;\quad u_\theta=-B\frac{\mathrm{dJ}_0(kr)}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{ipt} \tag{4.20}$$

相应的频率方程是：

$$k^2\mathrm{J}_0(ka)+\frac{2}{a}\frac{\mathrm{dJ}_0(ka)}{\mathrm{d}a}=0 \tag{4.21}$$

或

$$g_1(ka)=0 \tag{4.22}$$

对于上述径向振动和切向振动，由于 $r=0$ 时分别有 $u_r=0$ 和 $u_\theta=0$，即圆柱轴线始终静止。所以圆柱可以看作是在上下两底中心固定的。径向振动形成的弹性波是纵波而切向振动形成的波是横波。

五　小　结

我们从各向性弹性圆柱体固有振动的基本方程组出发，首先导出了方程组的通解，接着在圆柱侧面自由的边条件下证明了通解化为 Po－解，并给出了频率方程的一般表达式(3.15)式；随后我们讨论了圆柱固有振动的各种振型，有关振型的要点列表附书后。

本文准备过程中得到北京大学王大钧教授的指导，作者谨致谢意。

参考文献

[1] L. Pochhammer, *Ueber die Fortpflanzungs geschwinigkeiten Schwlng-ungen in einem unbegrenztn isotropen Krescy linder*, Zeitschrift fur Mathematik, 1876(81), 324—336

[2] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, London, England, 1927

[3] 武际可，王敏中．弹性力学引论[M]．北京：北京大学出版社，1981

[4] 王大钧．弹性系统的振动(讲义)．北京大学力学系，1980

[5] R. D. Mindlin and H. D. Meniven, *Axially Symmetric Waves in Elastic Rods*, *Journal of Applied Mechanics*, 1960(27), 145—151

Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质

摘　要　本文讨论了 Euler 梁的离散模型在任意边界支承(固支、铰支、滑支和自由)下的固有频率和模态的定性性质。文中指出梁的非零频率是分离的，并给出了梁的单个非刚体模态满足的充要条件。

关键词　梁　频率　模态　定性性质

一　Euler 梁的离散模型

研究结构的固有振动的定性性质具有重要的理论意义和应用价值。首先，定性性质的理论是讨论振动反问题的基础[1]，在这类问题中利用频率和模态数据确定结构的物理参数。其次，利用定性性质的理论可有助于判断频率和模态的真伪。本文将在一般的支承条件下(固支、滑支、铰支和自由)，讨论 Euler 梁离散模型的固有振动的一些重要的定性性质。本文用振荡矩阵的理论及共轭梁的概念证明，在上述各种支承下，梁的非零频率是分离的，关于变号数 S_u 和 S_w 的限制是梁的非刚体模态满足的必要条件。最后又证明，这一限制也是梁的非刚体模态所满足的充分条件。

文[2] 已证明，梁的差分离散模型等价于图 1 所示的弹簧 — 质点 — 刚杆系统。图中 $(m_r)_0^N$ 和 $(k_r)_0^N$ 分别是质点质量和弹簧刚度，$(l_r)_1^N$ 是刚杆长度。系统的固有振动方程为

$$\lambda \boldsymbol{Mu} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{EKE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Eu} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}(k_0\theta_0\boldsymbol{e}^{(1)} - k_N\theta_{N+1}\boldsymbol{e}^{(N+1)}) \tag{1}$$

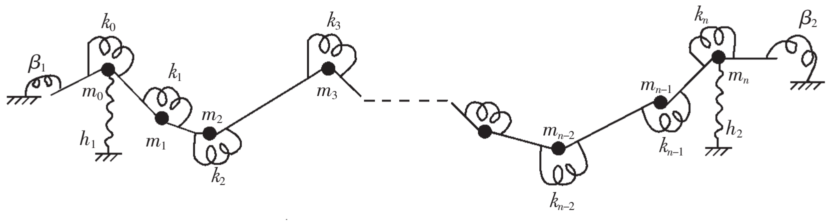

图 1　与梁的差分离散模型等价的弹簧 — 质点 — 刚杆系统

其中 $\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}(m_0, \cdots, m_N)$，$\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(k_0, \cdots, k_N)$，$\boldsymbol{L} = \mathrm{diag}(l_1, \cdots, l_N)$，

* 本文原载于《振动工程学报》1990 年第 4 期，原文作者为王其申、何北昌、王大钧(北京大学力学系)。

$$\boldsymbol{e}^{(1)}=\begin{Bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}_{(N+1)},\qquad \boldsymbol{e}^{(N+1)}=\begin{Bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{Bmatrix}_{(N+1)}$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\end{pmatrix}_{N\times(N+1)}$$

而 λ 是系统的特征值(圆频率的平方)，$\boldsymbol{u}=(u_0,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$ 是质点组的位移矢量，θ_0 和 θ_{N+1} 分别是弹簧 k_0 的左端和弹簧 k_N 的右端虚拟杆的转角。下面以左端为例说明系统的边界支承：

1. 固支：$m_0\to\infty,\theta_0=0$。这时，由(1)的第一个分量方程得到 $u_0\to 0$；
2. 铰支：$m_0\to\infty,k_0\to 0$。这时同样可以得到 $u_0\to 0$；
3. 自由：$k_0\to 0$；
4. 滑支：$\theta_0=0$。

因此，在固支、铰支、自由和滑支这四类端点条件下，方程(1)均可化为

$$\lambda\boldsymbol{Mu}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{EKE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Eu}=\boldsymbol{Au} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_1^{N+1}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{EKE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}$

令 $\boldsymbol{A}_1=(a_{ij})_2^{N+1},\quad \boldsymbol{A}_{N+1}=(a_{ij})_1^N,\quad \boldsymbol{A}_{1,N+1}=(a_{ij})_2^N$

容易验证：$|\boldsymbol{A}|=0,\quad |\boldsymbol{A}_{1,N+1}|>0,\quad a_{r,r+1}=a_{r+1,r}<0$

若 $k_0>0$，则 $|\boldsymbol{A}_1|>0$；若 $k_N>0$，则 $|\boldsymbol{A}_{N+1}|>0$。借助上述记号，可以写出各种支承下的梁的刚度矩阵和质量矩阵：

两端铰支	$\boldsymbol{A}_p=\boldsymbol{A}_{1,N+1}\big|_{k_0=k_N=0},\boldsymbol{M}_p=\mathrm{diag}(m_1,\cdots,m_{N-1})$
固支—自由	$\boldsymbol{A}_{cf}=\boldsymbol{A}_1\big|_{k_n=0},\boldsymbol{M}_{cf}=\mathrm{diag}(m_1,\cdots,m_N)$
铰支—滑支	$\boldsymbol{A}_{ps}=\boldsymbol{A}_1\big|_{k_0=0},\boldsymbol{M}_{ps}=\boldsymbol{M}_{cf}$
两端固支	$\boldsymbol{A}_c=\boldsymbol{A}_{1,N+1},\boldsymbol{M}_c=\boldsymbol{M}_p$
铰支—固支	$\boldsymbol{A}_{pc}=\boldsymbol{A}_{1,N+1}\big|_{k_0=0},\boldsymbol{M}_{pc}=\boldsymbol{M}_p$
固支—滑支	$\boldsymbol{A}_{cs}=\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{M}_{cs}=\boldsymbol{M}_{cf}$
两端自由	$\boldsymbol{A}_f=\boldsymbol{A}\big|_{k_0=k_N=0},\boldsymbol{M}_f=\boldsymbol{M}$
铰支—自由	$\boldsymbol{A}_{pf}=\boldsymbol{A}_1\big|_{k_0=k_N=0},\boldsymbol{M}_{pf}=\boldsymbol{M}_{cf}$
自由—滑支	$\boldsymbol{A}_{fs}=\boldsymbol{A}\big|_{k_0=0},\boldsymbol{M}_{fs}=\boldsymbol{M}$
两端滑支	$\boldsymbol{A}_s=\boldsymbol{A},\boldsymbol{M}_s=\boldsymbol{M}$

二 共轭梁和梁的刚度矩阵的振荡性

引入 $$\boldsymbol{\theta}=-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta},\quad \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{w},\quad \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\tau} \tag{3}$$
这里
$$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_N)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{w}=(w_0,\cdots,w_N)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\tau}=(\tau_0,\cdots,\tau_N)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)^{\mathrm{T}}$$

它们都有着非常明确的几何、物理意义：$\boldsymbol{\theta}$ 在弹簧 — 质点 — 刚杆系统中表示刚杆的转角，它是梁的挠曲线的斜率的差分近似；$\boldsymbol{w}$ 是连接同一弹簧的两个刚杆之间的相对转角，它是相应于梁的广义应变的一个量；$\boldsymbol{\tau}$ 是作用于弹簧上的弯矩；而 $\boldsymbol{\varphi}$ 是作用于刚杆上的剪力。利用式(3) 可以把方程(2) 写为
$$\lambda\overline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\tau}=\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\tau} \tag{4}$$
其中 $$\overline{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{K}^{-1},\overline{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{M}^{-1},\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}$$
此式与方程(2) 形式相同。于是，类似于梁的连续模型，完全可以对梁的离散模型引入共轭梁的概念，它是具有参数$(l_r)_1^N$、$(\overline{m}_r=1/k_r)_0^N$ 和$(\overline{k}_r=1/m_r)_0^N$ 的弹簧 — 质点 — 刚杆系统，而 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}$ 是它的位移矢量。类似于第一节，可以讨论共轭梁的边界支承以及考虑到端点条件后的刚度矩阵和质量矩阵，进而得出原梁和共轭梁的边界条件之间的关系：

原　梁	固支	铰支	自由	滑支
共轭梁	自由	铰支	固支	滑支

记 $$\widetilde{\boldsymbol{L}}^{-1}=\mathrm{diag}(l_1^{-1},\cdots,l_N^{-1},0)\quad \widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}^{(N+1)}]$$
可以验证 $$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{L}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}$$
考虑 $\boldsymbol{A}$ 的符号倒换矩阵 $\boldsymbol{A}^*=((-1)^{i+j}a_{ij})_1^{N+1}$。由于 $\boldsymbol{K}$、$\widetilde{\boldsymbol{E}}^*$ 和$(\boldsymbol{L}^{-1})^*$ 都是完全非负矩阵(即它们的各阶子式均非负)，故 $\boldsymbol{A}^*$ 也是完全非负矩阵，进而 $\boldsymbol{A}^*$ 的截断矩阵 $\boldsymbol{A}_1^*$、$\boldsymbol{A}_{N+1}^*$ 和 $\boldsymbol{A}_{1,N+1}^*$ 都是完全非负的。可以直接验证，这些矩阵的次对角线上的元素均为正数。又注意到上一节中关于 $\boldsymbol{A}$ 的截断矩阵的奇异性的讨论和振荡矩阵的定义[4][5]，便得出结论：$\boldsymbol{A}_{1,N+1}$ 是符号振荡矩阵；而当 k_0 和 k_N 大于零时，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_{N+1}$ 也分别是符号振荡矩阵。

为了以后讨论方便，下面研究方程(2) 的另一些变形形式
$$\lambda\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta} \tag{5}$$
$$\lambda\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi} \tag{6}$$

与前面类似，可以说明$(\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})^*$ 和$(\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})^*$ 都是完全非负矩阵，其次对角元素为正。当 $k_0+k_N\neq 0$ 且 $1/m_0+1/m_N\neq 0$ 时，$\det(\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})^*$ 和 $\det(\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})^*$ 均非零，从而 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$ 都是符号振荡矩阵。又 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 是正定的对角矩阵，于是可以得出结论：当 $k_0+k_N\neq 0$ 且 $1/m_0+1/m_N\neq 0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$ 都是符

号振荡的。

三　Euler 梁的固有振动的一些定性性质

1. 在利用振荡矩阵的理论及共轭梁的概念讨论梁的定性性质之前，先不加证明地引进三个引理。

令 $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，这里 $\boldsymbol{x}=(x_0,\cdots,x_N)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_N)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{z}=(z_0,\cdots,z_N)^{\mathrm{T}}$。于是有

引理 1　若向量 $\boldsymbol{x}$ 的最小变号数满足 $S_x^-=j$，则

$$S_y^-\geqslant j+1-H(x_0)-H(x_N)$$

且
$$S_z^-\geqslant j+H(k_0)-H(x_0)-H(x_N)+H(k_N)$$

这里
$$H(t)=\begin{cases}1 & (t\neq 0)\\ 0 & (t=0)\end{cases}$$

代表端点条件的影响。

引理 2　若向量 $\boldsymbol{z}$ 的最大变号数满足 $S_z^+=j$，则 $S_y^+\leqslant j-1$，进而有 $S_x^+\leqslant j$。

引理 3　若向量 $\boldsymbol{y}$ 的变号数满足 $S_y=j$，则有 $S_x^+\leqslant j+1$ 且 $S_z^-\geqslant j-1+H(k_0)+H(k_N)$。

2. 下面先讨论受静定约束的梁做固有振动时的定性性质。

由前两节可知，两端铰支梁及其共轭梁的刚度和质量矩阵都是符号振荡的，于是利用振荡矩阵的理论可以说明：两端铰支梁的 $N-1$ 个频率 $(\lambda_i^p)_1^{N-1}$ 是分离的，即

$$\lambda_1^p<\lambda_2^p<\cdots<\lambda_{N-1}^p$$

另外，有如下关于变号数的等式

$$S_{u_p^{(i)}}=S_{w_p^{(i)}}=i-1\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

由此及边界条件得到

$$S_{u^{(i)}}^-=i-1\quad S_{w^{(i)}}^+=i+1\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

再利用引理 1 和引理 2，便得到

$$S_{\theta_p^{(i)}}^-\geqslant i,\quad S_{\theta_p^{(i)}}^+\leqslant i\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

于是有
$$S_{\theta_p^{(i)}}=i\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

同理，可以证明：固支—自由梁的 N 个频率 $(\lambda_i^{(cf)})_1^N$ 是分离的，并且有

$$S_{u_{cf}^{(i)}}=S_{w_{cf}^{(i)}}=S_{\theta_{cf}^{(i)}}=i-1\quad(i=1,\cdots,N)$$

铰支—滑支梁的 N 个频率是分离的，并且有

$$S_{u_{ps}^{(i)}}=S_{w_{ps}^{(i)}}=S_{\theta_{ps}^{(i)}}=i-1\quad(i=1,\cdots,N)$$

3. 现在讨论两端滑支梁的一些定性性质。因为这时有 $k_0+k_N\neq 0$ 且 $1/m_0+1/m_N\neq 0$，由式(5)、(6) 和第二节的讨论及振荡矩阵的理论可知

$$\lambda_2^s<\lambda_3^s<\cdots<\lambda_{N+1}^s$$

$$S_{\theta_s^{(i)}}=S_{\varphi_s^{(i)}}=i-2\quad(i=2,\cdots,N+1)$$

根据引理 3，有

$$S_{u_s^{(i)}}^+\leqslant i-1,\quad S_{w_s^{(i)}}^-\geqslant i-1,\quad S_{w_s^{(i)}}^+\leqslant i-1,\tag{7}$$

又因为 $$\lambda_i^s\boldsymbol{u}_s^{(i)}=-\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_s^{(i)}=-\bar{\boldsymbol{K}}_s\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_s^{(i)}$$

故由引理 3 可以得到

$$S_{u_s^{(i)}}^-\geqslant i-1\tag{8}$$

于是，式(7) 和(8) 给出

$$S_{u_s^{(i)}}=S_{w_s^{(i)}}=i-1\quad(i=2,\cdots,N+1)$$

4. 最后，讨论受其他约束的梁在固有振动时的定性性质。

由前两节可知，两端固支梁的刚度矩阵是振荡的，因此，它的 $N-1$ 个频率是分离的，即

$$\lambda_1^c<\lambda_2^c<\cdots<\lambda_{N-1}^c$$

并且有 $$S_{u_c^{(i)}}=i-1\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

考虑包含端点位移的矢量 $\boldsymbol{u}^{(i)}=(0,u_{c1}^{(i)},\cdots,u_{c,N-1}^{(i)},0)^{\mathrm{T}}$，便有

$$S_{u^{(i)}}^+=i+1,\qquad S_{u^{(i)}}^-=i-1$$

利用引理 1 得出

$$S_{\theta_c^{(i)}}^-\geqslant i,\qquad S_{w_c^{(i)}}^-\geqslant i+1\tag{9}$$

又因为 $$\lambda_i\boldsymbol{u}^{(i)}=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\tau}^{(i)}=-\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\tau}^{(i)},\boldsymbol{w}^{(i)}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{(i)}$$

由引理 2 立即得到

$$S_{w_c^{(i)}}^+=S_{\tau_c^{(i)}}^+\leqslant i+1,\qquad S_{\theta_c^{(i)}}^+\leqslant i\tag{10}$$

于是，式(9) 和(10) 给出

$$S_{\theta_c^{(i)}}=i,\qquad S_{w_c^{(i)}}=i+1\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

因为两端自由梁和两端固支梁共轭，故可以直接得出如下结论：两端自由梁的 $N-1$ 个频率是分离的，$\lambda_3^f<\lambda_4^f<\cdots<\lambda_{N+1}^f$，其非刚体模态的变号数满足

$$S_{u_f^{(i)}}=i-1,\quad S_{\theta_f^{(i)}}=i-2,\quad S_{w_f^{(i)}}=i-3\quad(i=3,\cdots,N+1)$$

类似地，可以证明：铰支—固支梁的 $N-1$ 个频率 $(\lambda_i^{pc})_1^{N-1}$ 是分离的，并且有

$$S_{u_{pc}^{(i)}}=i-1,\quad S_{\theta_{pc}^{(i)}}=S_{w_{pc}^{(i)}}=i\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

铰支—自由梁的 $N-1$ 个非零频率 $(\lambda_i^{pf})_2^N$ 是分离的，而其非刚体模态满足

$$S_{u_{pf}^{(i)}} = S_{\theta_{pf}^{(i)}} = i-1,\quad S_{w_{pf}^{(i)}} = i-2\quad (i=2,\cdots,N)$$

固支—滑支梁的 N 个频率 $(\lambda_i^{cs})_1^N$ 是分离的，并且有

$$S_{u_{cs}^{(i)}} = S_{\theta_{cs}^{(i)}} = i-1,\quad S_{w_{cs}^{(i)}} = i\quad (i=1,\cdots,N)$$

自由—滑支梁的 N 个非零频率 $(\lambda_i^{fs})_2^{N+1}$ 是分离的，而它的非刚体模态的变号数满足

$$S_{u_{fs}^{(i)}} = i-1,\quad S_{\theta_{fs}^{(i)}} = S_{w_{fs}^{(i)}} = i-2\quad (i=2,\cdots,N+1)$$

四　单个模态满足的充分必要条件

1. 给定向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $l_i>0(i=1,\cdots,N)$，由此可以构造向量 $\boldsymbol{w}$。在一定的边界约束下，$\boldsymbol{u}$ 成为以 $(l_i)_1^N$ 为杆长的弹簧—质点—刚杆系统的模态的充分必要条件是 S_u 和 S_w 满足上节给出的关系式。例如，对两端铰支梁，该条件是 $S_u=S_w$；如果特别要求 $\boldsymbol{u}$ 是两端铰支梁的第 i 个振型，则该条件成为

$$S_u = S_w = i-1\quad (1\leqslant i\leqslant N-1)$$

前一节中已经论证了上述条件的必要性，而在本节中将证明这些条件也是充分的。为此，先不加证明地引入一条引理。

引理 4　设 $a_i>0(i=1,\cdots,k+1)$；又设 $(d_r)_1^k$ 为一组常数，其中至少有一个数的值为 $d(d>0)$，而其他数的值或为 $-\varepsilon d(\varepsilon>0)$ 或为零，则方程组

$$\begin{aligned}
(a_1+a_2)x_1-a_2x_2 &= d_1\\
-a_rx_{r-1}+(a_r+a_{r+1})x_r-a_{r+1}x_{r+1} &= d_r(r=2,\cdots,k-1)\\
-a_kx_{k-1}+(a_k+a_{k+1})x_k &= d_k
\end{aligned}\tag{11}$$

的解存在，并且具有形式

$$x_r = \xi_r d\quad (r=1,\cdots,k)$$

其中 ξ_r 是常数，当 ε 充分小时有 $\xi_r>0$。

2. 下面证明，若向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$S_u = S_w = i-1$$

则以它们为第 i 个模态的两端铰支梁存在。为此，先说明条件 $S_u=S_w=i-1(1\leqslant i\leqslant N-1)$ 的几何意义。

考虑分段线性函数

$$u_r(\xi-L_{r-1})/l_r + u_{r-1}(L_r-\xi)/l_r\quad (r=1,\cdots,n)\tag{12}$$

其中

$$L_0=0,\quad L_r=\sum_{p=1}^{r} l_p,\quad L_{r-1}\leqslant\xi\leqslant L_r;\quad u_0=0=u_N$$

这实际上就是图 1 所示系统在两端铰支条件下振动时刚杆所构成的曲线。由于 $S_u = i-1$，故曲线(12) 有 $i-1$ 个节点。于是可以把它分成 i 段，在每一段中函数(12) 非零并且具有相同符号，而相邻两段的符号相反。因而，可以在每一段中找到一处极值 $u_{\alpha_j} \neq 0 (j=1,\cdots,i)$；当 $u_{\alpha_j} > 0$ 时，这是极大值。而当 $u_{\alpha_j} < 0$ 时，这是极小值。又由于 $S_w = i-1$，故不能出现 $u_{\alpha_{j-1}} = u_{\alpha_j} = u_{\alpha_{j+1}}$ 的情形，于是

$$w_{\alpha_j} \cdot u_{\alpha_j} < 0 \quad (j = 1,\cdots,i)$$

进而可以得出结论：在$(w_{\alpha_j},\cdots,w_{\alpha_{j+1}})$ 中有且仅有一次符号改变，这里 $1 \leqslant j \leqslant i-2$；而在$(w_1,\cdots,w_{\alpha_1})$ 和$(w_{\alpha_{i-1}},\cdots,w_{N-1})$ 中均无符号改变。因此，可以把 w 的分量分类。非零的 w 分量可以分成 i 组。在第 $j(1 \leqslant j \leqslant i)$ 组中，下列不等式成立：

$$w_{s_{j-1}} w_{\alpha_j} \leqslant 0, \quad w_r w_{\alpha_j} > 0 \quad (r = s_j,\cdots,\alpha_j,\cdots,t_j)$$

$$w_{t_{j+1}} w_{\alpha_j} \leqslant 0$$

对每个 $j(1 \leqslant j \leqslant i)$，考察方程组

$$\left.\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{l_{s_j}} + \frac{1}{l_{s_j+1}}\right)\tau_{s_j} + \frac{\tau_{s_j+1}}{l_{s_j+1}} = \lambda m_{s_j} u_{s_j} - \frac{\tau_{s_j-1}}{l_{s_j}} \\
&\frac{\tau_{r-1}}{l_r} - \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}}\right)\tau_r + \frac{\tau_{r+1}}{l_{r+1}} = \lambda m_r u_r \quad (r = s_j+1,\cdots,t_j-1) \\
&\frac{\tau_{t_{j-1}}}{l_{t_j}} - \left(\frac{1}{l_{t_j}} + \frac{1}{l_{t_{j+1}}}\right)\tau_{t_j} = \lambda m_{t_j} u_{t_j} - \frac{\tau_{t_{j+1}}}{l_{t_j+1}}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中

$$\tau_{s_1-1} = 0 = \tau_{t_i+1}$$

若

$$u_{s_j} \neq 0 \quad \text{或} \quad w_{s_j-1} = 0$$

并且

$$u_{t_j} \neq 0 \quad \text{或} \quad w_{t_j+1} = 0$$

则取

$$m_r = \begin{cases}
\left(-w_{\alpha_j}\rho_j + \delta_{s_j r}\dfrac{\tau_{s_j-1}}{l_{s_j}} + \delta_{t_j r}\dfrac{\tau_{t_j+1}}{l_{t_j+1}}\right)\Big/(\lambda u_r) & (w_r u_r < 0) \\
\left(\varepsilon_j w_{\alpha_j}\rho_j + \delta_{s_j r}\dfrac{\tau_{s_j-1}}{l_{s_j}} + \delta_{t_j r}\dfrac{\tau_{t_j+1}}{l_{t_j+1}}\right)\Big/(\lambda u_r) & (w_r u_r > 0) \\
1 & (u_r = 0)
\end{cases} \tag{14}$$

其中参数

$$\rho_j、\varepsilon_j > 0; \quad r = s_j,\cdots,t_j; \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

适当地选取 ε_j，由引理 4，可以解出

$$\tau_r = \xi_r \rho_j w_{\alpha_j} \quad (\xi_r > 0; r = s_j, \cdots, t_j)$$

从而 $(k_r)_{s_j}^{t_j}$ 均为正数。显然，$(m_r)_{s_j+1}^{t_j-1}$ 为正数。现在来看 m_{s_j}：若 $w_{s_j-1} = 0$ 或 $w_{s_j} u_{s_j} < 0$，则 m_{s_j} 显然是正数；若

$$w_{s_j-1} \neq 0$$

且

$$w_{s_j} u_{s_j} > 0$$

这时

$$t_{j-1} = s_{j-1}$$

且

$$w_{t_j-1} u_{t_j-1} < 0$$

则

$$m_{s_j} = (\varepsilon_j w_{\alpha_j} \rho_j + \tau_{s_j-1} / l_{s_j}) / (\lambda u_{s_j}) = (\varepsilon_j w_{\alpha_j} \rho_j + \xi_{t_j-1} \rho_{j-1} w_{\alpha_{j-1}} / l_{s_j}) / (\lambda u_{s_j})$$

只要选取 ρ_{j-1}/ρ_j 值充分大，便有 $m_{s_j} > 0$；而不管 ρ_{j-1}/ρ_j 取什么样的正值，恒有 $m_{t_{j-1}} > 0$。类似地，可以说明，上面解出的 $m_{t_j} > 0$ 为正数或通过适当地选取 ρ_j/ρ_{j+1} 的值可使得 m_{t_j} 为正数。

若 $u_{s_j} = 0$ 且 $w_{s_j-1} \neq 0$，或者 $u_{t_j} = 0$ 且 $w_{t_j+1} \neq 0$，需要对上面的证明过程作一些修改。不失一般性，假定 $u_{s_j} = 0$ 且 $w_{s_j-1} \neq 0$，而 $u_{t_j} \neq 0$ 或 $w_{t_j+1} = 0$，这时必有

$$t_{j-1} = s_j - 1, w_{s_j-1} u_{s_j-1} < 0$$

且

$$w_{s_j+1} u_{s_j+1} < 0$$

另外式(13) 中关于 m_{s_j} 的方程成为

$$\left(\frac{1}{l_{s_j}} + \frac{1}{l_{s_j+1}}\right)\tau_{s_j} = \frac{\tau_{s_j-1}}{l_{s_j}} + \frac{\tau_{s_j+1}}{l_{s_j+1}} \tag{15}$$

取

$$m_r = \begin{cases} \left(-w_{\alpha_j}\rho_j + \delta_{s_j+1,r}\dfrac{\tau_{s_j}}{l_{s_j+1}} + \delta_{t_j r}\dfrac{\tau_{t_j+1}}{l_{t_j+1}}\right)\Big/(\lambda u_r) & (w_r u_r < 0) \\ \left(\varepsilon_j w_{\alpha_j}\rho_j + \delta_{t_j r}\dfrac{\tau_{t_j+1}}{l_{t_j+1}}\right)\Big/(\lambda u_r) & (w_r u_r > 0) \\ 1 & (u_r = 0) \end{cases} \tag{16}$$

其中 $r = s_j, \cdots, t_j$。同前，可以说明：适当地选取正数 ε_j 可使 $(k_r)_{s_j+1}^{t_j}$ 为正数；$(m_r)_{s_j+2}^{t_j}$ 和 m_{s_j} 为正数或通过适当地选取 ρ_j/ρ_{j+1} 可使得它们为正数。下面考虑 m_{s_j+1}，由式(15) 和式(16) 得到

$$m_{s_j+1} = \frac{l_{s_j}}{l_{s_j} + l_{s_j+1}}\left(-\frac{l_{s_j} + l_{s_j+1}}{l_{s_j}} w_{\alpha_j}\rho_j + \frac{\tau_{s_j+1}}{l_{s_j+1}} + \frac{\tau_{s_j-1}}{l_{s_j}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda u_{s_j+1}} \tag{17}$$

为使 τ_{s_j}、$m_{s_j+1} > 0$，由式(15) 和式(17) 可知，应选取 ρ_{j-1}/ρ_j 满足不等式

$$-\frac{w_{\alpha_j}}{w_{\alpha_{j-1}}} \cdot \frac{l_{s_j}}{\xi_{t_j-1}}\left(\frac{\xi_{s_j+1}}{l_{s_j+1}} - \frac{l_{s_j} + l_{s_j+1}}{l_{s_j}}\right) < \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} < -\frac{w_{\alpha_j}}{w_{\alpha_{j-1}}} \cdot \frac{l_{s_j}}{\xi_{t_j-1}} \cdot \frac{\xi_{s_j+1}}{l_{s_j+1}} \tag{18}$$

显然,满足上式的 ρ_{j-1}/ρ_j 总存在。因为 $w_{t_j-1}u_{t_j-1}<0$,所以不需要改变 ρ_{j-1}/ρ_j 的值即可使 $m_{t_j-1}>0$。对于其他情形,完全可以类似地讨论。

若向量 w 的某个分量 $w_n=0$,则必然存在某个 $j(1\leqslant j\leqslant i-2)$,使得 $n-1=t_j$ 而 $n+1=s_{j+1}$,这时 k_n 可取任意值。前面的讨论未包括第 n 个质点的运动方程。为满足该方程,应取

$$m_n=\begin{cases}(\tau_{n-1}/l_n+\tau_{n+1}/l_{n+1})/(\lambda u_n) & (u_n\neq 0)\\ 1 & (u_n=0)\end{cases}\tag{19}$$

由于
$$\tau_{n-1}=\xi_{t_j}w_{\alpha_j}\rho_j$$
且
$$\tau_{n+1}=\xi_{s_{j+1}}w_{\alpha_{j+1}}\rho_{j+1}$$
故可以适当调节 ρ_j/ρ_{j+1} 的值,使得

$$(\tau_{n-1}/l_n+\tau_{n+1}/l_{n+1})/u_n>0\quad(u_n\neq 0)$$

或者
$$\tau_{n-1}/l_n+\tau_{n+1}/l_{n+1}=0\quad(u_n=0)$$

如前所述,这时不需改变 ρ_j/ρ_{j+1},就能使 m_{t_j}、$m_{s_{j+1}}>0$。

于是说明了条件 $S_u=S_w$ 能够保证两端铰支梁的结构参数取正数。

3. 以上证明方法不难推广到其他支承的情况,下面以左端为例加以说明。

若左端为自由端,取 $s_1=1$,$\tau_{s_1-1}=0$,结构参数的算法同前,只是 $m_0=k_1w_1/(\lambda u_0 l_1)$。利用关于变号数 S_u 和 S_w 的条件可以说明 $w_1u_0>0$,因而 $m_0>0$。

若左端为滑支端,$\alpha_1=s_1=1$ 且 $\tau_{s_1-1}=0$,结构参数的确定方法同前。

若左端为固支端,则 $(m_r)_1^{s_1-1}$ 和 $(k_r)_0^{s_1-1}$ 的确定需要单独处理,而其他结构参数的取法同前。利用关于变号数 S_u 和 S_w 的条件可以说明,在固支条件下有

$$w_{\alpha_1}w_{r-1}<0$$

和
$$w_{\alpha_1}u_r<0\quad(r=1,\cdots,s_1-1)$$

另外
$$w_{\alpha_1}w_{s_1-1}\leqslant 0,\quad w_{s_1}u_{s_1}<0$$

这说明按照式(14)定出的 m_{s_1} 总是正的,不受 τ_{s_1-1} 的值的影响。适当地选取 $k_0,\cdots,k_{s_1-1}$ 的值,使之依次递减,就能保证

$$m_r=\left[\frac{\tau_{r-1}}{l_r}-\left(\frac{1}{l_{r+1}}+\frac{1}{l_r}\right)\tau_r+\frac{\tau_{r+1}}{l_{r+1}}\right]\cdot\frac{1}{\lambda u_r}\quad(r=1,\cdots,s_1-1)\tag{20}$$

为正数。

至此,已经说明:关于变号数 S_u 和 S_w 的条件也是单模态数据满足的充分条件。

参考文献

[1] 王大钧. 结构动力学中的特征值反问题. 振动与冲击,1988(2),31-43

[2] 何北昌,王大钧,王其申. Euler 梁有限差分模型的振动逆问题. 振动工程学报,

1989(2),1－8
[3] Gladwell G. M. L. ,*Inverse Problems in Vibration*,Martinus Nijhoff Publishers,1986
[4] Gantmakher F. P. ,Krein M. G. ,*Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems*,Moscow-Leningrad State Publishing House of Technical-Theoretical Literature,1950,Translation,Washington D. C. ,U. S. Atomic Energy Commission,1961

二阶连续系统的离散模型频率和振型的定性性质

摘　要　本文论述了振动中的二阶连续系统(诸如非均匀杆的纵振动、非均匀轴的扭转振动、非均匀弦的横振动)的离散模型固有频率和振型的如下定性性质:频率的分离性;位移振型和内力振型的节点分布规律;位移振型的充分必要条件等。

一　引　言

大多数有关振动理论的研究是用计算或实验方法作定量分析的。但是对振动系统的频率和振型的定性性质的研究也有其重要意义。例如,它可以验证由计算或实验得到的频率和振型是否是这个系统可能的固有频率和振型;帮助制定简化的计算或实验方案;保证在结构设计中对频率和振型所提出的要求的合理性;考察连续系统的离散模型的合理性;对某些只需定性知识的工程问题避免复杂的定量分析等。

关于振动系统定性性质的研究,Gladwell[1]曾作过综述。本文作者也曾研究过梁的定性性质[2]。本文对诸如非均匀杆的纵振动、非均匀轴的扭转振动、非均匀弦的横振动等二阶连续系统所对应的离散系统的定性性质作了系统论述。主要结果是:频率的分离性;位移振型和内力振型的节点分布规律;振型的充分必要条件以及位移振型的形态等。鉴于上述几种系统的动力学方程完全类似,故以下只对杆的离散系统进行讨论,结果同样适用于轴、弦及其他类似的系统。

二　离散模型的位移振型的方程

图1所示非均匀连续杆,其横截面面积 A、弹性模量 E、体密度 ρ 都是轴向坐标 x 的函数:$A=A(x)$,$E=E(x)$,$\rho=\rho(x)$。一般的边条件是杆的两端都有弹簧相连。当弹簧常数为0或无穷时,相应端点分别是自由端或固定端。

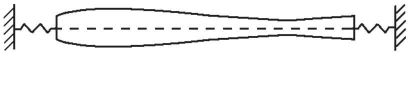

图1　连续杆

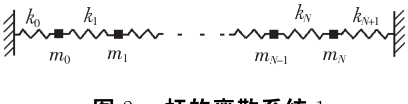

图2　杆的离散系统1

* 本文原载于《振动与冲击》1992年第3期,原文作者为王其申和王大钧(北京大学力学系)。

不难验证，采用物理离散化，或用对空间进行三点差分的离散模型，或用有限单元法的一次型函数和集中质量矩阵的模型都可将连续杆离散化为图 2 所示的弹簧质点系统。图中 $\{m_r\}_0^N$ 是结点质量而 $\{k_r\}_0^{N+1}$ 则是弹簧伸长系数。记各质点的纵向位移向量为 $\{x\}=(x_0,x_1,\cdots,x_N)^{\mathrm{T}}$，各弹簧的伸长组成的向量为 $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{N+1}\}^{\mathrm{T}}=(x_0,x_1-x_0,\cdots,x_N-x_{N-1},-x_N)^{\mathrm{T}}$，系统的质量矩阵 $[M]=\mathrm{diag}(m_0,\cdots,m_N)$，弹簧常数矩阵 $[K]=\mathrm{diag}(k_0,\cdots,k_{N+1})$，引入 $(N+1)\times(N+2)$ 阶常矩阵：

$$[E]=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\end{pmatrix}$$

则各弹簧的伸长向量 $\{\varepsilon\}$ 与内力向量 $\{T\}$ 可以表示为：

$$\{\varepsilon\}=[E]^{\mathrm{T}}\{x\}\qquad \{T\}=[K]\{\varepsilon\}=[K][E]^{\mathrm{T}}\{x\}\tag{1}$$

离散系统中每个质点自由振动的方程是：

$$m_r\ddot{x}_r=T_{r+1}-T_r\quad (r=0,\cdots,N)\tag{2}$$

或者可以写成矩阵形式：

$$[M]\{\ddot{x}\}=-[E]\{T\}=-[E][K][E]^{\mathrm{T}}\{x\}\tag{3}$$

令 $x_r=u_r\mathrm{e}^{i\omega t}$，那么固有圆频率 ω 和固有振型 $\{u\}=(u_0,u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 所满足的方程则是：

$$[C]\{u\}=\omega^2[M]\{u\}\tag{4}$$

其中 $[C]=[E][K][E]^{\mathrm{T}}=\{C_{ij}\}_0^N$ 是 $N+1$ 阶方阵。

如果连续系统左端固定，可取 $k_0\to\infty$，$u_0=0$；如果连续系统右端固定，则取 $k_{N+1}\to\infty$，$u_N=0$。当这两种情况之一出现时，方程(4)分别化为 N 阶方程：

$$[C_0]\{u\}=\omega^2[M_0]\{u\}\tag{5}$$

$$[C_N]\{u\}=\omega^2[M_N]\{u\}\tag{6}$$

这里 $[C_0]=\{C_{ij}\}_1^N$，$[C_N]=\{C_{ij}\}_0^{N-1}$，$[M_0]=\mathrm{diag}(m_1,\cdots,m_N)$，$[M_N]=\mathrm{diag}(m_0,\cdots,m_{N-1})$。

如果系统左端自由，取 $k_0=0$；如果系统右端自由，则取 $k_{N+1}=0$。在这两种情况之一出现时，离散系统的运动方程仍为(4)式，只是其中 k_0 或 k_{N+1} 为 0。

考察以下三种典型的系统及其运动方程：

(1) 两端自由的系统，其运动方程即为(4)式。其中

$$[C_{ff}]=[C]\,|_{k_0=0=k_{N+1}},[M_{ff}]=[M]$$

(2) 左端固定右端自由的系统,运动方程即为(5)式。其中

$$[C_{cf}] = [C_0]|_{k_{N+1}=0}, [M_{cf}] = [M_0]$$

(3) 两端固定的系统,其运动方程是 $N-1$ 阶方程:

$$[C_{cc}]\{u\} = \omega^2[M_{cc}]\{u\} \tag{7}$$

其中$[C_{cc}] = [C_{0N}] = \{C_{ij}\}_1^{N-1}$, $[M_{cc}] = \text{diag}(m_1, \cdots, m_{N-1})$。

容易写出:

$$[C_{ff}] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix}$$

因 $\det[C_{ff}] = 0$,当$\{u\} = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 时,系统的势能 $V = \dfrac{1}{2}\{u\}^{\mathrm{T}}[C_{ff}]\{u\} = 0$,系统是半正定的。但

$$[C_{cf}] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix}$$

$$[C_{cc}] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{N-2} & k_{N-2}+k_{N-1} & -k_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N \end{bmatrix}$$

都是正定的。

三　内力振型方程

由于应力是一些工程问题中重要而又易于测量的力学量,因此内力的定性性质也需予以充分的重视。

以$[E]^{\mathrm{T}}[M]^{-1}$ 乘方程(3)的两边并注意到$[T]$的定义式(1),即得内力向量所满足的方

程：

$$[K]^{-1}\{\ddot{T}\} = -[E]^{\mathrm{T}}[M]^{-1}[E]\{T\} \tag{8}$$

或者记内力向量的幅值为$\{\sigma\}$，即$\{T\} = \{\sigma\}e^{i\omega t}$，称$\{\sigma\}$为与$\{u\}$相应的内力振型。则$\{\sigma\}$满足：

$$[\bar{C}]\{\sigma\} = \omega^2[\bar{M}]\{\sigma\} \tag{9}$$

其中

$$[\bar{C}] = [E]^{\mathrm{T}}[M]^{-1}[E] = \{\bar{C}_{ij}\}_0^{N+1}$$

$$= \begin{pmatrix} m_0^{-1} & -m_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -m_0^{-1} & m_0^{-1}+m_1^{-1} & -m_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m_{N-1}^{-1} & m_{N-1}^{-1}+m_N^{-1} & -m_N^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -m_N^{-1} & m_N^{-1} \end{pmatrix}$$

$$[\bar{M}] = [K]^{-1} = \mathrm{diag}(k_0^{-1}, \cdots, k_{N+1}^{-1})$$

方程(8)或(9)表明，原离散系统的内力对应于一个新系统的位移。新系统的质点质量正好是原系统的弹簧常数的倒数，新系统的弹簧常数则是原系统的质点质量的倒数，称此新系统为原系统的共轭系统，如图3所示。

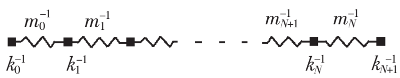

图3　共轭系统

原系统和共轭系统的边条件之间以及三种典型系统的运动方程之间存在如表1所示的对应关系。

表1　原系统和共轭系统之间的对应关系

原系统	共轭系统
自由：$k_r = 0, \sigma_r = 0$ ($r = 0$ 或 $N+1$，下同)	固定：$k_r^{-1} \to \infty$
固定：$k_r \to \infty, u_r = 0$	自由：$m_r^{-1} = 0$
自由—自由：$N+1$ 维方程 $[M_{ff}] = \mathrm{diag}(m_0, \cdots, m_N)$ $[C_{ff}] = [C]\|_{k_0=0=k_{N+1}}$	固定—固定：N 维方程 $[\bar{M}_{cc}] = \mathrm{diag}(k_1^{-1}, \cdots, k_N^{-1})$ $[\bar{C}_{cc}] = \{\bar{C}_{ij}\}_1^N$
固定—自由：N 维方程 $[M_{cf}] = \mathrm{diag}(m_1, \cdots, m_N)$ $[C_{cf}] = [C_0]\|_{k_{N+1}=0}$	自由—固定：N 维方程 $[\bar{M}_{fc}] = \mathrm{diag}(k_1^{-1}, \cdots, k_N^{-1})$ $[\bar{C}_{fc}] = \{\bar{C}_{ij}\}_1^N \|_{m_0^{-1}=0}$
固定—固定：$N-1$ 维方程 $[M_{cc}] = \mathrm{diag}(m_1, \cdots, m_{N-1})$ $[C_{cc}] = [C_{0N}]$	自由—自由：N 维方程 $[\bar{M}_{ff}] = \mathrm{diag}(k_1^{-1}, \cdots, k_N^{-1})$ $[\bar{C}_{ff}] = \{\bar{C}_{ij}\}_1^N \|_{m_0^{-1}=0=m_N^{-1}}$

四　固有频率的定性性质

由于各种端条件下原系统和对应的共轭系统的质量矩阵(即方程(4)中的$[M]$和方程(9)中的$[\overline{M}]$)都是具有正元素的对角阵,刚度矩阵$[C]$和$[\overline{C}]$都是三对角矩阵,且其主对角元素以及次主对角元素非0,于是都可化为Jacobi矩阵的标准特征值问题。

Jacobi矩阵的特征值和特征向量具有一系列重要而又优美的定性性质。它们的证明可以从文献[3]的第三章中找到。这里首先列出有关特征值的三个结果:

(1) Jacobi矩阵的特征值是分离的。即不论其元素是什么,都不会有重特征值。

(2) 设$[A]$为N阶Jacobi矩阵,$[A^*]$除其右下角元素a_{NN}^*异于$[A]$的右下角元素a_{NN}外,其余元素均相同。则当$a_{NN}^*>a_{NN}$时,$[A]$的特征值$\{\lambda_i\}_1^N$与$[A^*]$的特征值$\{\lambda_i^*\}_1^N$互相交错。即

$$\lambda_1<\lambda_1^*<\lambda_2<\lambda_2^*<\cdots<\lambda_N<\lambda_N^* \tag{10}$$

(3) Jacobi矩阵$[A]$与其去掉第N行第N列所得的截短矩阵$[A^0]$的特征值交错。即

$$\lambda_1<\lambda_1^0<\lambda_2<\lambda_2^0<\cdots<\lambda_{N-1}<\lambda_{N-1}^0<\lambda_N \tag{11}$$

根据以上三个结论,可得图2所示离散系统1的固有频率的定性性质:

(1) 固有频率是分离的。即

$$\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_p \tag{12}$$

这里p为$N-1(k_0=k_{N+1}=\infty)$、$N(k_0$、k_{N+1}之一为无穷,另一个有限)或$N+1(k_0$、k_{N+1}均有限),下同。

(2) 系统2与系统1的差别只在于$k_{N+1}<k_{N+1}^*$,则此两系统频率交错:

$$\omega_1<\omega_1^*<\cdots<\omega_p<\omega_p^* \tag{13}$$

又若$k_{N+1}<k_{N+1}^*=\infty$,则

$$\omega_1<\omega_1^0<\cdots<\omega_{p-1}<\omega_{p-1}^0<\omega_p \tag{14}$$

(3) 系统3与系统1的差别只在于其右端处质量$m_N^*>m_N$,两者之$k_{N+1}=0$,则两系统频率交错:

$$\omega_1^{**}<\omega_1<\cdots<\omega_p^{**}<\omega_p \tag{15}$$

五　固有振型的定性性质

为了区别起见,我们称$\{u\}$为位移振型而称$\{\sigma\}$为内力振型。下面分别讨论其定性性质。

(一) 位移振型

文献[3]的第三章中证明了Jacobi矩阵的特征向量的一些重要性质。它们是:

(1) 相应于 λ_i 的特征向量恰有 $i-1$ 个节点(端点固定时相应的位移 0 点不计在内);

(2) 两个相邻特征向量的节点交错而不重合。

由此,可得系统 1 的固有振型的性质:

(1) 与 ω_i 相应的位移振型恰有 $i-1$ 个节点;

(2) 两相邻位移振型的节点交错;

文献[4] 证明了由两个模态数据及相应频率可以唯一地构造出一个系统 1。从这个意义上我们可以给出如下重要性质:

(1) 系统 1 只有两个独立的振型及相应频率;

(2) 系统 1 的任意两个位移振型$\{u^{(i)}\}$、$\{u^{(j)}\}$之间应该满足某种相容关系。若记

$$w_r = u_r - u_{r-1} = \sigma_r / k_r \quad (r = 1, \cdots, N) \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \omega_j^2 u_{rj} w_{r+1,i} - \omega_i^2 u_{ri} w_{r+1,j} \\ q_r &= \omega_j^2 u_{rj} w_{ri} - \omega_i^2 u_{ri} w_{rj} \\ R_r &= w_{rj} w_{r+1,i} - w_{ri} w_{r+1,j} \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, \cdots, N-1)$$

则 p_r、q_r、$R_r(r=1,\cdots,N-1)$ 必取同样的符号或同时为 0。又在自由端处,应有 $p_0 = 0$ 或 $q_N = 0$。

此外,直接从方程(4) 出发并利用上述性质(1),还能推出有关位移振型形态的如下性质:

(1) 相邻两质点不可能同时为节点;

(2) 相邻三质点的位移振幅不可能相等;

(3) 振幅的极大(极小) 值 u_r 只能发生在 $u_r > 0(u_r < 0)$ 处,不可能发生在 $u_r < 0(u_r > 0$ 处);

(4) 相邻两质点振幅相等只能发生在极值处;

(5) 在自由端处,必有 $u_0 w_1 < 0$ 或 $u_N w_N > 0$。

(二) 内力振型

对两端自由的系统,由第三节中的分析,$\{u\}$ 的 $N+1$ 维方程(4)(其中 $k_0 = 0 = k_{N+1}$) 对应内力振型的 N 维方程:

$$[\overline{C}_{\alpha}]\{\sigma\} = \omega^2 [\overline{M}_{\alpha}]\{\sigma\} \tag{17}$$

$\{u\}$ 的第一振型$\{u^{(1)}\} = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 对应的$\{\tau^{(1)}\} = \{0\}$ 是平凡解,因此$\{u^{(i)}\}$ 对应的内力振型$\{\sigma^{(i)}\}$ 是方程(17) 的第 $i-1$ 个特征向量。根据 Jacobi 矩阵的特征向量的性质(1),$\{\sigma^{(i)}\}$ 的节点数应为$(i-1)-1 = i-2$。所以两端自由的系统的第 i 个内力振型的节点数为 $i-2(i = 2, \cdots, N+1)$ 而$\{\sigma^{(1)}\} = \{0\}$。

对固定 — 自由的系统,方程(5) 和(17)(其中 $m_0^{-1} = 0$) 都是 N 维方程,它们的频率及排序完全相同,从而$\{u^{(i)}\}$ 所对应的$\{\sigma^{(i)}\}$ 也是方程(17) 的第 i 振型。这样固定 — 自由系统第 i 内力振型的节点数仍为 $i-1$。

对固定 — 固定的系统,与 $N-1$ 维方程(7) 的第 i 振型$\{u^{(i)}\}$ 相应的内力振型$\{\sigma^{(i)}\}$ 是方

程(17)(其中 $m_0^{-1}=m_N^{-1}=0$)的第 $i+1$ 振型,方程(17)此时的第一振型$\{\sigma^{(1)}\}=(1,\cdots,1)^T$不与方程(7)的任一解对应。所以两端固定系统的第 i 内力振型的节点数是 i。

归纳为公式,第 i 内力振型的节点数是:

$$S_{\sigma^{(i)}}=i-2+H(k_0)+H(k_{N+1}) \tag{18}$$

这里

$$H(s)=\begin{cases}1 & (s\neq 0)\\ 0 & (s=0)\end{cases}$$

上述关于位移振型的性质(2)至(8)同样适用于内力振型。

六 结束语

离散系统 1 是连续杆的离散模型。离散系统和连续系统在频率和振型的定性性质方面有何异同?比较文献[3]第八章中关于连续杆的性质和本文关于离散系统的性质,可以看出:对于连续杆和相应的离散系统,除了固有频率和振型一个是无限对,一个是有限对这一重要区别外,在其他定性性质如频率的分离性、交错性、振型节点的个数(或者说变号数)及分布规律、振型的形态等方面,二者是相同的或者说是相对应的。也就是说,连续杆的离散系统 1 保持了连续系统频率和振型的定性性质,在定性性质方面,这种离散化是合理的。

本文仅论述了最简单的连续系统的最简单的离散模型的定性性质,对于广泛的连续系统及其各种离散系统的定性性质的研究是有意义的,而首要的问题是采取什么样的研究途径。胡海昌教授给我提出了方向性的建议,我将进一步进行研究,并对胡海昌教授表示衷心感谢。

参考文献

[1] G. M. L. Gladwell, *Qualitative Properties of Vibrating Systems*, Proc. R. Soc. Lond, A. 1985(401), 299—315

[2] 王其申,何北昌,王大钧. Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质. 振动工程学报, 1990(4), 58—66

[3] G. M. L. 格拉德威尔著. 王大钧,何北昌译. 振动中的反问题. 北京:北京大学出版社, 1991

[4] 王其申,王大钧. 由部分模态及频率数据构造杆件离散系统. 振动工程学报, 1987(1), 83—87

杆、梁差分离散系统的柔度矩阵及其极限

摘　要　本文导出了任意边条件的杆和悬臂梁、简支梁的格林函数及杆、梁离散系统的柔度矩阵，验证了柔度系数和格林函数之间的极限关系。

关键词　杆　梁　柔度系数　格林函数

引　言

杆和梁的运动方程可表达为

$$Lu(x,t)=-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+f(x,t) \tag{1}$$

式中，u 为杆的轴向位移或梁的横向位移，L 代表杆的弹性算子 $-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EA\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ 或梁算子 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$。

对于具有某种边条件的杆或梁，在 $x=s$ 处，受静态单位集中力，其余点不受力的情况下，任意点 x 处的静态位移记为 $G(x,s)$，数学上称为具有某种边条件的方程(1)的格林函数。

连续系统可用许多方法离散化，其离散系统由有限个广义坐标 $u_i(t)(i=1,2,\cdots,N)$ 组成向量$\{u\}$描述。对空间坐标 x 运用差分法，可以将杆的偏微分方程离散成常微分方程组，它相当于一个弹簧—质量串连的力学系统[1]。梁被差分离散后，对应一个弹簧—质量—刚性杆系统[2]。它们的运动方程可统一写为

$$[A]\{u(t)\}=-[M]\{\ddot{u}(t)\}+\{f(t)\} \tag{2}$$

这里$[A]$是刚度矩阵，$[M]$是质量矩阵。

刚度矩阵$[A]$的逆矩阵

$$[R]=[A]^{-1}=[r_{ij}]_{N\times N}$$

称为柔度矩阵，其元素 r_{ij} 的物理意义是仅在第 j 个质点上施以单位力而引起的第 i 质点的位移，称为柔度系数或影响系数。

一个自然的推测是：随着差分点趋于无穷多，所有差分步长一致趋于零时，柔度系数应以由方程(1)表达的连续系统的格林函数为极限。严格证明这一推测属于微分方程理论的任务，本文避开从数学上一般性的证明，对工程上常用的任意边条件的杆和悬臂梁、简支梁

* 本文原载于《力学与实践》1996 年第 5 期，原文作者为王其申、王大钧(北京大学力学系)。

给出一个构造性的证明，即分别导出它们的柔度矩阵和格林函数，然后直接验证了以上推测的正确性。

这个结论至少有两点意义。一是由此结论可知，杆、梁的上述差分离散系统的任意静力解收敛到杆、梁连续系统的对应解。二是利用此结论以及离散系统的柔度矩阵的振荡性，可以证明，连续系统的积分方程的核也具有振荡性。这在研究杆、梁的振动的定性性质以及振动反问题中有重要的意义。

一　任意支承杆的柔度矩阵和格林函数

1.1　**任意支承杆差分离散系统的刚度矩阵是**[1]

$$[A]=\begin{bmatrix} K_0+K_1 & -K_1 & & & & \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & & & \\ & -K_2 & K_2+K_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -K_{N-2} & K_{N-2}+K_{N-1} & -K_{N-1} \\ & & & & -K_{N-1} & K_{N-1}+K_N \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中，$K_0=0$ **对应于左端自由；**$K_0=(E_0A_0+E_1A_1)/(2l_0)$ **时对应于左端固定；而当** $K_0\neq 0$ **且与杆的截面物理参数无关时代表弹性支承，这时** K_0 **表示左端支承弹簧的线刚度。**K_N **的情况类似。又**

$$K_r=(E_rA_r+E_{r+1}A_{r+1})/(2l_r)\quad (r=1,\cdots,N-1) \tag{4}$$

这里及以下 $E=E(x)$ **是材料的弹性模量，**$A=A(x)$ **是杆的横截面面积，**$E_rA_r=EA\mid_{x=x_r}$**，**$l_r=x_{r+1}-x_r=\Delta x_{r+1}(r=0,1,\cdots,N)$ **为差分步长。不难验证，杆的差分模型的柔度矩阵** $[R]=[r_{ij}]_{N\times N}$ **的元素即柔度系数是**

$$r_{ij}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{\alpha=0}^{i-1}K_\alpha^{-1}\cdot\sum\limits_{\beta=j}^{N}K_\beta^{-1}\right)\Big/\sum\limits_{\gamma=0}^{N}K_\gamma^{-1} & (i\leqslant j)\\[2ex] \left(\sum\limits_{\alpha=0}^{j-1}K_\alpha^{-1}\cdot\sum\limits_{\beta=i}^{N}K_\beta^{-1}\right)\Big/\sum\limits_{\gamma=0}^{N}K_\gamma^{-1} & (i>j)\end{cases} \tag{5}$$

这一公式对于杆的任意支承方式都适用。特别地，当杆存在自由端时上式更为简单。例如固定 — 自由杆，因 $K_N=0$**，其柔度系数化为**

$$r_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{\alpha=0}^{i-1}K_\alpha^{-1} & (i\leqslant j)\\[2ex] \sum\limits_{\alpha=0}^{j-1}K_\alpha^{-1} & (i>j)\end{cases} \tag{6}$$

1.2　**任意支承杆的格林函数满足如下方程**

$$\begin{cases}-(EAG')'=\delta(x-s) \quad (0<x,s<l)\\ G'(0,s)-hG(0,s)=0=G'(l,s)+HG(l,s)\end{cases} \tag{7}$$

不难解得

$$G(x,s)=\begin{cases}C_1\left(\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{EA}+\frac{1}{E_0A_0h}\right) & (x\leqslant s)\\ (1-C_1)\left(\int_x^l \frac{\mathrm{d}t}{EA}+\frac{1}{E_lA_lH}\right) & (x>s)\end{cases} \tag{8}$$

式中，常数

$$C_1=\left(\frac{1}{E_lA_lH}+\int_s^l \frac{\mathrm{d}t}{EA}\right)\Big/\left(\frac{1}{E_0A_0h}+\int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{EA}+\frac{1}{E_lA_lH}\right) \tag{9}$$

此处，$E_0A_0=EA\mid_{x=0}$，$E_lA_l=EA\mid_{x=l}$。**注意到边条件中** $h=K_l/E_0A_0$，$H=K_r/E_lA_l$，K_l、K_r **是左、右端点处支承弹簧的线刚度，那么上式可以改写为**

$$G(x,s)=\begin{cases}\left(\frac{1}{K_l}+\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{EA}\right)\left(\frac{1}{K_r}+\int_s^l \frac{\mathrm{d}t}{EA}\right)\Big/\left(\frac{1}{K_l}+\int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{EA}+\frac{1}{K_r}\right) & (x\leqslant s)\\ \left(\frac{1}{K_l}+\int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{EA}\right)\left(\frac{1}{K_r}+\int_x^l \frac{\mathrm{d}t}{EA}\right)\Big/\left(\frac{1}{K_l}+\int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{EA}+\frac{1}{K_r}\right) & (x>s)\end{cases} \tag{10}$$

1.3　**现在我们来证明，对于任意支承杆的差分离散模型，随着分法的细密，其柔度系数确以相应连续模型的格林函数为极限。**

事实上，对于任意确定的 $x,s\in[0,l]$，**在差分过程中必有这样的** i,j **存在，使** $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$，$x_{j-1}\leqslant s\leqslant x_j(1\leqslant i,j\leqslant N)$，**且当** $x<s$ **时** $i<j$，**而** $x>s$ **时** $i>j$。**又随着分法的细密即** $N\to\infty$，$\max\Delta x_\alpha\to 0$ **时，这样的** i,j **亦同时趋于无穷。另一方面，对工程实际中的杆**，EA **必为连续或至多有有限个第** 1 **类间断点的分段连续函数，从而** $1/EA$ **可积并成立如下公式**

$$\frac{2}{E_rA_r+E_{r+1}A_{r+1}}=\frac{1+b_r}{E(\xi_r)A(\xi_r)} \quad (x_r\leqslant\xi_r\leqslant x_{r+1}) \tag{11}$$

式中，$b_r=0$（EA **在**$[x_r,x_{r+1}]$ **内连续**）**或有界**（EA **在**$[x_r,x_{r+1}]$ **内有间断点**）。**于是当左端固定时成立如下极限**

$$\sum_{\alpha=0}^{i-1}K_\alpha^{-1}=\sum_{\alpha=0}^{i-1}\frac{\Delta x_{\alpha+1}}{E(\xi_\alpha)A(\xi_\alpha)}+\sum_{\alpha=0}^{i-1}\frac{b_\alpha\Delta x_{\alpha+1}}{E(\xi_\alpha)A(\xi_\alpha)}\to\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{EA} \tag{12}$$

注意只有有限个 $b_\alpha\neq 0$，**所以第二个和数极限为零。**

又当左端为弹性支承时，$K_0=K_l$，**这样**

$$\sum_{\alpha=0}^{i-1}K_\alpha^{-1}\to\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{EA}+\frac{1}{K_l} \tag{13}$$

当视 $K_l\to\infty$ **相应于固定端时，以上结果可以统一记为**（13）**式。同理**

$$\sum_{\beta=j}^{N} K_{\beta}^{-1} \to \int_{s}^{l} \frac{\mathrm{d}t}{EA} + \frac{1}{K_r}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} K_{\gamma}^{-1} \to \frac{1}{K_l} + \int_{0}^{l} \frac{\mathrm{d}t}{EA} + \frac{1}{K_r}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{j-1} K_{\alpha}^{-1} \to \int_{0}^{s} \frac{\mathrm{d}t}{EA} + \frac{1}{K_l}$$

$$\sum_{\beta=i}^{N} K_{\beta}^{-1} \to \int_{x}^{l} \frac{\mathrm{d}t}{EA} + \frac{1}{K_r}$$

比较(5)式与(10)式，以上讨论表明，当杆端固定或弹性连接时，$r_{ij} \to G(x,s)$。至于自由端，例如固定—自由杆，其 r_{ij} 由(6)式表出，而其格林函数也是(10)式的特例。因此时 $K_l^{-1}=0$，$K_r^{-1} \to \infty$，故

$$G(x,s) = \int_{0}^{\min(x,s)} \frac{\mathrm{d}t}{EA} \quad (0 \leqslant x,s \leqslant l) \tag{14}$$

由上面的讨论显然亦有 $r_{ij} \to G(x,s)$。对弹性支承—自由杆结论同样成立。唯一例外是两端自由杆，不过这时方程(7)的非平凡解也不存在。

二 悬臂、简支梁的柔度系数和格林函数

梁的支承方式比较复杂，最有实用价值的则是固支—自由梁，即悬臂梁和两端铰支梁，也即简支梁。下面只对这两种梁的情况加以讨论。

1. 文[2] 已经给出固支—自由梁差分模型的刚度矩阵是

$$[A] = [E][L]^{-1}[E][K][E]^{\mathrm{T}}[L]^{-1}[E]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

这里$[L] = \mathrm{diag}(l_0,\cdots,l_{N-1})$，$[K] = \mathrm{diag}(K_0,\cdots,K_{N-1})$。

$$K_0 = \frac{2E_0 I_0}{l_0}, \quad K_r = \frac{2E_r I_r}{l_{r-1}+l_r} \quad (r=1,\cdots,N-1) \tag{16}$$

微分矩阵$[E]$和它的逆$[F]$分别是

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{N\times N} \qquad [F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & \cdots & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

这样

$$[R] = [F]^{\mathrm{T}}[L][F]^{\mathrm{T}}[K]^{-1}[F][L][F] \tag{17}$$

其元素则是

$$r_{ij}=\begin{cases}\sum_{\alpha=0}^{i-1}\left(\sum_{p=\alpha}^{i-1}l_p\right)K_\alpha^{-1}\left(\sum_{q=\alpha}^{j-1}l_q\right) & (i\leqslant j)\\ \sum_{\alpha=0}^{j-1}\left(\sum_{p=\alpha}^{i-1}l_p\right)K_\alpha^{-1}\left(\sum_{q=\alpha}^{j-1}l_q\right) & (i>j)\end{cases}\tag{18}$$

如同对于杆的讨论一样，在差分过程中总存在这样的 i,j，使对任意的 x、s 有

$$x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\qquad x_{j-1}\leqslant s\leqslant x_j$$

于是

$$\sum_{p=\alpha}^{i-1}l_p=x-x_\alpha+b_i\Delta x_i,\qquad \sum_{q=\alpha}^{j-1}l_q=s-x_\alpha+b'_j\Delta x_j$$

$$K_\alpha^{-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta x_\alpha}{E(x_\alpha)I(x_\alpha)}+\frac{\Delta x_{\alpha+1}}{E(x_\alpha)I(x_\alpha)}\right]$$

这里 b_i、b'_j 均为小于 1 的正数。这样随着差分点的无限增加，所有差分步长一致趋于零时，(18) 式的极限形式就是

$$\begin{aligned}r_{ij}&=\sum_{\alpha=0}^{\min(i,j)-1}(x-x_\alpha+b_i\Delta x_i)\frac{\Delta x_\alpha+\Delta x_{\alpha+1}}{2E(x_\alpha)I(x_\alpha)}(s-x_\alpha+b'_j\Delta x_j)\\ &\to\int_0^{\min(x,s)}\frac{(x-t)(s-t)}{E(t)I(t)}\mathrm{d}t\,(0\leqslant x,s\leqslant l)\end{aligned}\tag{19}$$

后者正是文[3] 所给出的固支—自由梁的格林函数表达式。在本节中 $I=I(x)$ 是梁截面的二次矩。

2. 再来考察两端铰支梁。

文[4] 给出的简支梁的刚度矩阵是

$$[A]=[\widetilde{E}][L]^{-1}[\widetilde{E}]^{\mathrm{T}}[K][\widetilde{E}][L]^{-1}[\widetilde{E}]^{\mathrm{T}}\tag{20}$$

这里 $[L]=\mathrm{diag}(l_0,\cdots,l_N)$，$[K]=\mathrm{diag}(K_1,\cdots,K_N)$，$N\times(N+1)$ 阶矩阵 $[\widetilde{E}]=[E,\boldsymbol{e}_N]$，$\boldsymbol{e}_N=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$。因为 $[\widetilde{E}][L]^{-1}[\widetilde{E}]^{\mathrm{T}}$ 的形状恰好就是(3) 式，只是应以 l_i^{-1} 代替(3) 中的 K_i，这样若记 $([\widetilde{E}][L]^{-1}[\widetilde{E}]^{\mathrm{T}})^{-1}=\{b_{ij}\}_{N\times N}$，则

$$b_{ij}=\begin{cases}\sum_{p=0}^{i-1}l_p\cdot\sum_{q=j}^{N}l_q\Big/\sum_{t=0}^{N}l_t=\dfrac{x_i(l-x_j)}{l} & (i\leqslant j)\\ \sum_{p=0}^{j-1}l_p\cdot\sum_{q=i}^{N}l_q\Big/\sum_{t=0}^{N}l_t=\dfrac{x_j(l-x_i)}{l} & (i>j)\end{cases}\tag{21}$$

我们得到两端铰支梁的柔度系数是

$$r_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{\alpha=1}^{i-1}\dfrac{x_\alpha(l-x)(\Delta x_\alpha+\Delta x_{\alpha+1})x_\alpha(l-s)}{2EIl^2}+\\ \quad\sum\limits_{\alpha=i}^{j-1}\dfrac{x_\alpha(l-x_\alpha)(\Delta x_\alpha+\Delta x_{\alpha+1})x_\alpha(l-s)}{2EIl^2}+\\ \quad\sum\limits_{\alpha=j}^{N}\dfrac{x(l-x_\alpha)(\Delta x_\alpha+\Delta x_{\alpha+1})s(l-x_\alpha)}{2EIl^2}\quad(i\leqslant j)\\ \sum\limits_{\alpha=1}^{j-1}\dfrac{x_\alpha(l-x)(\Delta x_\alpha+\Delta x_{\alpha+1})x_\alpha(l-s)}{2EIl^2}+\\ \quad\sum\limits_{\alpha=j}^{i-1}\dfrac{s(l-x_\alpha)(\Delta x_\alpha+\Delta x_{\alpha+1})x_\alpha(l-x)}{2EIl^2}+\\ \quad\sum\limits_{\alpha=i}^{N}\dfrac{x(l-x_\alpha)(\Delta x_\alpha+\Delta x_{\alpha+1})s(l-x_\alpha)}{2EIl^2}\quad(i>j)\end{cases}\tag{22}$$

式中略去了二阶以上小量而 $EI=E(x_\alpha)I(x_\alpha)$。当 $N\to\infty$ 且所有 $\Delta x_\alpha\to 0$ 时，i、j、$N-i$、$N-j$、$j-i$ 都同时趋于 ∞，于是

$$r_{ij}\to\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\frac{(l-x)(l-s)}{l^2}\cdot\frac{t^2}{EI}\mathrm{d}t+\\ \quad\displaystyle\int_x^s\frac{x(l-s)}{l^2}\cdot\frac{t(l-t)}{EI}\mathrm{d}t+\int_s^l\frac{xs}{l^2}\cdot\frac{(l-t)^2}{EI}\mathrm{d}t\quad(x\leqslant s)\\ \displaystyle\int_0^s\frac{(l-x)(l-s)}{l^2}\cdot\frac{t^2}{EI}\mathrm{d}t+\\ \quad\displaystyle\int_s^x\frac{s(l-x)}{l^2}\cdot\frac{t(l-t)}{EI}\mathrm{d}t+\int_x^l\frac{xs}{l^2}\cdot\frac{(l-t)^2}{EI}\mathrm{d}t\quad(x>s)\end{cases}\tag{23}$$

另一方面，直接解如下边值问题

$$\begin{cases}(EIG'')''=\delta(x-s)\quad(0<x,s<l)\\ G(0,s)=G''(0,s)=0=G(l,s)=G''(l,s)\end{cases}$$

求出连续到二阶导数的格林函数则是

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{l-s}{l}\displaystyle\int_0^x\frac{t(t-x)}{EI}\mathrm{d}t+\frac{x}{l}\int_0^s\frac{(l-t)(s-t)}{EI}\mathrm{d}t+\frac{xs}{l^2}\int_0^l\frac{(l-t)^2}{EI}\mathrm{d}t\quad(x\leqslant s)\\ \dfrac{l-x}{l}\displaystyle\int_0^s\frac{t(t-s)}{EI}\mathrm{d}t+\frac{s}{l}\int_0^x\frac{(l-t)(x-t)}{EI}\mathrm{d}t+\frac{xs}{l^2}\int_0^l\frac{(l-t)^2}{EI}\mathrm{d}t\quad(x>s)\end{cases}\tag{24}$$

易于验证，(23) 式就是(24) 式，即简支梁的差分离散模型的柔度系数也以相应的格林函数为极限。

三　结束语

以上我们证明了任意支承杆和两种常用梁的差分离散模型的柔度系数在差分点无限增多且差分步长一致趋于零时，以其相应的格林函数为极限。这里使用的方法原则上也可以用来讨论其他支承方式的静定、超静定梁的同类问题，只不过更加繁琐。而在实际应用中，本文的讨论已经具有相当的广泛性。

参考文献

[1] 王其申，王大钧．由部分模态及频率数据构造杆件离散系统．振动工程学报，1987(1)，83－87

[2] 何北昌，王大钧，王其申．Euler 梁有限差分模型的振动逆问题．振动工程学报，1989(2)，1－9

[3] Gladwell G. M. L.，*Inverse Problems in Vibration*，Martinus Nijhoff Publishers，1986

[4] 王其申，王大钧，何北昌．由频谱数据构造两端铰支梁的差分离散系统．工程力学，1991(4)，10－19

杆、梁离散和连续系统的振动定性性质的统一论证

摘　要　采用极限过渡法，从杆、梁差分离散系统刚度矩阵的符号振荡性导出相应系统格林函数的振荡性，从而统一论证了离散与连续系统的固有频率和模态的定性性质。

关键词　杆　梁　极限过渡　定性性质

引　　言

研究振动系统的固有频率和振型的定性性质有其重要的理论意义和应用价值。对一般结构，其定性性质的研究十分困难，目前只对单跨杆、梁的研究比较成熟，有许多重要而漂亮的结果[1-4,6]，但也存在一些重要的缺陷。不能将离散和连续系统作统一论证就是其中之一。

考察以下特征值问题

$$Ly = \lambda\rho y \qquad (x \in I) \tag{1}$$

$$B_1 y\,|_{x=0} = 0, \quad B_2 y\,|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

这里 L 是结构动力学中几类常见的二阶（杆）或四阶（梁）微分算子，B_1、B_2 是相应的边界算子，点集 $I = \{x \mid x \in [0,l] \cup y(x) \neq 0\}$。

方程(1)、(2) 可以离散为如下特征值问题[1]

$$[A]\{u\} = \omega^2[M]\{u\} \tag{3}$$

这里$[A]$ 是刚度矩阵，$[M]$ 是质量矩阵。对静定或超静定的杆和梁，文献[2-4] 已证明$[A]$ 是符号振荡矩阵，由此可得杆、梁离散系统有以下基本特性：

① 系统的频率是分离的，可按递增次序排列为：$(0) < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_N$；

② 相应于 ω_i 的位移模态在 I 上恰有 $i-1$ 个变号数；

③ 称以点$(x_r, u_r)(r = 0, \cdots, N+1)$为顶点的折线为振型线，则两相邻序号的振型线的节点彼此相间。

方程(1)、(2) 也可化为积分方程特征值问题

$$y(x) = \omega^2\int_0^l G(x,s)\rho(s)y(s)\mathrm{d}s \tag{4}$$

---

* 本文原载于《力学学报》1997 年第 1 期，原文作者为王其申、王大钧（北京大学力学系）。

借助振荡核理论[5]，可证静定、超静定的杆和梁的格林函数是振荡核，从而杆、梁连续系统的频率模态有与离散系统完全类似的基本特性。

研读文献[4,5]后发现，为了阐明频率和模态的基本性质，离散系统依据符号振荡矩阵的理论而连续系统则依据振荡核理论，二者不协调。其次，证明杆、梁连续系统格林函数属于振荡核的过程冗长繁杂，而且杆和梁的推理过程差别很大。能否从离散模型直接过渡到连续模型？为此本文全面考察了两种模型之间的对应关系，通过极限过渡，成功地由离散模型的基本特性直接导出了连续模型的相应特性。

一　从柔度矩阵到格林函数

极限过渡法首先必须解决数学模型之间的对应关系。即从离散系统的何种特性过渡到连续系统的相应特性。

显然，差分方程(3)通过极限过程可以逼近微分方程(1)[7]。但由极限理论，在此过程中上节的性质①和性质③不一定能保持。

考察另一途径。从(3)式的改写形式

$$\{u\} = \omega^2[R][M]\{u\} \tag{5}$$

通过极限过渡去逼近积分方程(4)。这里$[R]=[A]^{-1}=\{r_{ij}\}_1^N$是离散系统的柔度矩阵。

事实上，方程(5)的分量形式是

$$u_i = \sum_{j=1}^{N}\omega^2 r_{ij}m_j u_j = \omega^2\sum_{j=1}^{N} r_{ij}\rho_j u_j(l_{j-1}+l_j)/2 \quad (i=1,\cdots,N) \tag{6}$$

式中$l_r = x_{r+1}-x_r=\Delta x_{r+1}(r=0,\cdots,N)$是差分步长。当分点无限增多且$l_r$同时趋于零时，文献[6]已证明对任意的$x,s\in I$，总存在这样的$i,j$使$x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i, x_{j-1}\leqslant s\leqslant x_j(0\leqslant i, j\leqslant N+1)$并有$r_{ij}\to G(x,s)\approx G(x_i,x_j)$。又由连续性有$\rho_j=\rho(x_j)\to\rho(s), u_i=y(x_i)\to y(x), u_j\to y(s)$。这样，代数方程(5)以积分方程(4)为极限。

二　关于极限过渡的一个定理

在极限过渡法中，为使系统频率和模态的基本特性得以保持，如上所述，单靠极限过程不行。改而考虑这样的问题：如果方程(5)中的柔度矩阵是振荡矩阵，与之对应的格林函数$G(x,s)$是否是振荡核？为此给出下述定理。

定理　设有代数特征值问题

$$\{u\} = \lambda[R][M]\{u\} \tag{7}$$

式中$\{u\}$是定义在$[0,l]$上的分点$0=x_0<x_1<\cdots<x_N<x_{N+1}=l$上并去掉端点处可能的零分量后的列向量，若当$N\to\infty$且$\max\limits_{1\leqslant r\leqslant N+1}\Delta x_r\to 0$时$[R]$的元素$r_{ij}$以$G(x,s)$为极限，则当$[R]$为振荡矩阵时$G(x,s)$为克劳格核。

证明 根据克劳格核的定义[5]，我们只要证明，对$[0,l]$内任意确定的点集$\{\xi_r\}_1^n$，$\{s_r\}_1^n \in I$，成立下列不等式

$$G\begin{pmatrix}\xi_1,\cdots,\xi_n\\ s_1,\cdots,s_n\end{pmatrix}=\det\{G(\xi_i,s_j)\}_1^n\geqslant 0\quad\left(0\leqslant\begin{matrix}\xi_1<\cdots<\xi_n\\ s_1<\cdots<s_n\end{matrix}\leqslant l\right)\tag{8}$$

$$G\begin{pmatrix}\xi_1,\cdots,\xi_n\\ \xi_1,\cdots,\xi_n\end{pmatrix}>0\quad(0\leqslant\xi_1<\cdots<\xi_n\leqslant l)\tag{9}$$

为此，把任意点集$\{\xi_r\}_1^n\cup\{s_r\}_1^n$从小到大重新排列，注意，如果某个$\xi_r=s_k$时，二者合为一个分点，这样得新点集$\{\eta_r\}_1^m(m<2n)$。以此为基础插入新分点组成满足定理条件的点集$\{x_r\}_0^{N+1}(N>m)$。与此对应的离散系统具有特征值方程(7)，相应的矩阵$[R]$是振荡矩阵。因振荡矩阵是完全非负矩阵，故其子式$R\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_n\\ j_1,\cdots,j_n\end{pmatrix}\geqslant 0$。这里$i_r$，$j_r$分别是$\xi_r$，$s_r$在点集$\{x_r\}_0^{N+1}$中的序号数。又当$N\to\infty$且$\max\limits_{1\leqslant r\leqslant N+1}\Delta x_r\to 0$时$r_{ij}\to G(x,s)$，取极限即得(8)式。

为了证明(9)式，我们借助结构动力学中应变能正定这一事实。

设想在点ξ_j上各作用一个集中力$F_j(j=1,\cdots,n)$，则由格林函数定义，系统内s_i处的位移是$u_i=\sum\limits_{j=1}^{n}r_{ij}F_j$，系统内的应变能是

$$V=\sum_{i,j=1}^{n}r_{ij}F_iF_j/2\tag{10}$$

只要系统静定或超静定，都有$V>0$，故(10)式右端为正定二次型，亦即(9)式成立。定理证毕。

需要指出，上述定理只能证明相应的格林函数是克劳格核。从应用角度看，这已够了，因为在由核的振荡性进一步推导频率和模态的基本特性时只用到(8)，(9)两式[4]。

三 杆、梁连续系统核的振荡性

综上所述，杆、梁差分离散系统的柔度系数r_{ij}以相应格林函数为极限，柔度形式的离散系统运动方程组(5)趋于积分方程(4)；另一方面，静定、超静定的杆、梁离散系统的刚度矩阵是符号振荡矩阵，它的逆即柔度矩阵必为振荡矩阵[5]。这样根据上节定理得出结论：静定、超静定的杆、梁连续系统的格林函数是克劳格核。从核$G(x,s)$的振荡性到对称核$K(x,s)=G(x,s)\sqrt{\rho(x)\rho(s)}$的振荡性的证明是显然的。

致谢 本文的写作得到胡海昌教授的启发和帮助，笔者谨向胡海昌教授致谢。

参考文献

[1] 何北昌等. Euler 梁有限差分模型的振动逆问题. 振动工程学报,1989(2),1－7

[2] 王其申等. 二阶连续系统的离散模型频率和振型的定性性质. 振动与冲击,1992(3),7－12

[3] 王其申等. Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质. 振动工程学报,1990(4),58－66

[4] Gladwell G. M. L., *Inverse Problems in Vibration*, Martinus Nijhoff Publishers, 1986,中译本,振动中的反问题. 王大钧,何北昌译. 北京:北京大学出版社,1991

[5] Gantmakher F. P., Krein M. G., *Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems*, Moscow-Leningrad State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, 1950, Translation, Washington D. C., U. S. Atomic Energy Commission, 1961

[6] 王其申,王大钧. 杆、梁离散系统的柔度系数和连续系统的格林函数. 力学与实践,1996(5)

[7] 南京大学数学系计算数学专业. 常微分方程数值解法. 北京:科学出版社,1979

梁的正系统的补充定义及其格林函数振荡性的证明

摘　要　本文对文[1]给出的欧拉—贝努利系统的定义作了补充，证明了补充定义的正系统的格林函数的振荡性。

关键词　梁的正系统　格林函数　振荡性

一　引　言

关于梁的连续系统的振动频率和模态的定性性质及有关反问题，文[1]作了相当详细而又精彩的定性分析，给出了正的欧拉—贝努利系统的定义，证明了梁的正系统的格林函数的振荡性，进而确定了静定、超静定梁的频率和位移模态的一系列基本特性并讨论了梁的连续系统的振动反问题。然而文[1]这部分的论述却有一个重要的疏漏：它所定义的正系统没有包含工程上极有价值的两端弹性支承梁和简支梁。为此，本文修正了文[1]有关梁的正系统的定义，并就补充定义的梁的正系统的格林函数的振荡性作了证明。

二　梁的正系统的定义

长为 l，具有抗弯刚度 $EJ(x)$ 和线密度 $\rho(x)$ 的欧拉—贝努利梁的位移模态满足的方程是

$$[EJ(x)u''(x)]'' = \omega^2\rho(x)u(x) \tag{1}$$

这里 ω 是圆频率，$u(x)$ 是位移模态。梁的模态满足的端条件可以一般地记为

$$[EJ(x)u''(x)]'_{x=0} + h_1u(0) = 0 = [EJ(x)u''(x)]'_{x=l} - h_2u(l) \tag{2}$$

$$EJ(0)u''(0) - k_1u'(0) = 0 = EJ(l)u''(l) + k_2u'(l) \tag{3}$$

为节约篇幅，本文不效法文[1]，未将方程(1)—(3)无量纲化。(2)、(3)两式中 h_1、h_2 是约束线位移的弹簧线刚度，k_1、k_2 则是限制梁端角位移的旋转弹簧刚度，它们均为非负数。常见约束方式自由、滑支、铰支和固支以左端为例分别对应于 $h_1 = 0 = k_1$；$h_1 = 0, k_1 = \infty$；$h_1 = \infty, k_1 = 0$；$h_1 = \infty = k_1$。

文[1]给出的方程(1)—(3)所组成的系统为正的定义是

$$h_1 + h_2 > 0, k_1 + k_2 > 0 \tag{4}$$

这一定义包含了固支—自由、固支—滑支、固支—铰支、两端固支和铰支—滑支等五

* 本文原载于《安庆师范学院学报》(自然科学版)1997年第1期，原文作者为王其申、王大钧(北京大学力学系)。

种静定、超静定梁，却未包含工程上最常见的两端弹性支承梁以及两端铰支梁($k_1 = 0 = k_2$)，这是文[1]的一个疏漏。

鉴于两端铰支梁的工程价值，且它显然属于正系统(无刚体运动模态和零频率)，笔者提出以下完整的定义：若

$$h_1 + h_2 > 0, k_1 + k_2 > 0 \tag{4}$$

或者

$$h_1 \cdot h_2 > 0 \tag{5}$$

则称由方程(1)、(2)和(3)所描述的系统为正系统。

式(4)意味着h_1、h_2不能同时为零，同时k_1、k_2也不能同时为零；式(5)意味着允许k_1和k_2都为零，但在此种情况下h_1和h_2全不为零。这就包含了两端弹性支承以及铰支的情况。我们来证明，这样定义的正系统的确排除了刚体运动模态和零频率。

事实上，若记

$$Bu = [EJ(x)u''(x)]''$$

则由方程(1)、(2)和(3)可得

$$(Bu, u) = \lambda(\rho u, u) \quad (\lambda = \omega^2) \tag{6}$$

$$(Bu, u) = h_1 u^2(0) + h_2 u^2(l) + k_1[u'(0)]^2 + k_2[u'(l)]^2 + \int_0^l EJ(x)[u''(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{7}$$

这样$\lambda \geqslant 0$，但是只有在(4)、(5)两式均不成立的情况下，才可能存在不全为零的c和d，使得

$$u(x) = cx + d, \lambda = 0$$

同时满足端条件(2)和(3)。这就是说，只要(4)、(5)两式之一成立，就有$\lambda > 0$。

三　梁的格林函数的振荡性

文[1]通过定理10.2.1—定理10.2.5的准备，在定理10.2.6中证明了当(4)式成立时梁的格林函数属于振荡核。注意到定理10.2.4与10.2.5的成立与端条件无关，所以这里需要补充证明的就是定理10.2.1—定理10.2.3在(5)式成立且k_1、k_2都为零时也成立。

与文[1]定理10.2.1相对应的是

定理1　设$h_1 \cdot h_2 > 0, k_1 = 0 = k_2$，则在端条件(2)和(3)下，梁的格林函数$u(x) = G(x, s)$满足

$$M'(x) = [EJ(x)u''(x)]' = \begin{cases} -c(0 \leqslant x < s) \\ 1 - c(s < x \leqslant l) \end{cases} \tag{8}$$

其中$0 < c < 1$。

证明 由格林函数的定义，$u(x)$ 满足(2)、(3) 两式及方程

$$M''(x)=[EJ(x)u''(x)]''=\delta(x-s)$$

积分一次即有(8) 式。现在要证的只是 $0<c<1$。

因为 $k_1=0=k_2$，$M(0)=0=M(l)$。若 $c<0$，则 $M'(x)>0(0<x<l)$，这就构成了矛盾。同样若 $c>0$，则 $M'(x)<0(0<x<l)$，仍然构成矛盾。定理 1 得证。

与文[1] 定理 10.2.2 相对应的是

定理 2 在 $h_1\cdot h_2>0$ 且 $k_1=0=k_2$ 并满足端条件(2) 和(3) 的情况下，梁的格林函数满足

$$G(x,s)>0\quad(x,s\in I)$$

式中集合 $I=\{x\mid x\in[0,l];u(x)\neq 0\}$。

证明 因为此时有 $M(0)=0=M(l)$，由定理 1 有 $M(x)<0(0<x<l)$。这样当 $u'(x)>0(0<x<l)$ 时，$u(x)$ 从 $u(0)>0$ 单调上升，而当 $u'(x)<0(0<x<l)$ 时，$u(x)$ 单调下降至 $u(l)>0$，又若 $u'(x)$ 从 $u'(0)>0$ 单调下降至 $u'(l)<0$，$u(x)$ 从 $u(0)>0$ 先单调上升再单调下降至 $u(l)>0$，在这三种情况下都有 $u(x)=G(x,s)>0$。至于 h_1 和 h_2 之一或同时为 ∞ 时，$u(0)$ 或 $u(l)$ 为零，但此时 $x=0$ 或 $x=l$ 已不属于集合 I。证毕。

为了证明与文[1] 定理 10.2.3 相应的定理，我们首先给出以下引理。

引理 设 $\varphi'(x)$ 在$(0,l)$ 上改变符号 n 次，则连续函数 $\varphi(x)$ 在$(0,l)$ 上改变符号不超过 $n+1$ 次。若 $\varphi(0)\varphi'(0)>0$ 或 $\varphi(l)\varphi'(l)<0$，则 $\varphi(x)$ 的变号数还将各减少 1。

证明 记 $\varphi'(x)$ 的变号点为$\{x_r\}_1^n$，则在子区间$[x_r,x_{r+1}](r=0,1,\cdots;x_0=0,x_{n+1}=l)$ 上应用罗尔定理及反证法可知，$\varphi(x)$ 最多各有一个变号点，从而 $\varphi(x)$ 的变号数不超过 $n+1$。当 $\varphi(0)\varphi'(0)>0$ 时，在$[0,x_1]$ 上 $\varphi(x)$ 从正值单调上升至极大值或从负值单调下降至极小值，即在$[0,x_1]$ 上不改变符号。同理当 $\varphi(l)\varphi'(l)<0$ 时 $\varphi(x)$ 在$[x_n,l]$ 上不改变符号。引理得证。

显然 $\varphi(0)=0$ 或 $\varphi(l)=0$ 时引理后一半成立。

利用上述引理，我们不难证明

定理 3 在$\{s_i\}_1^n(0\leqslant s_1<\cdots<s_n\leqslant l)$ 处的 n 个力$\{F_i\}_1^n$ 的作用下，梁的位移的变号数不超过 $n-1$。

证明 在$\{F_i\}_1^n$ 的作用下，梁的位移是

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}F_iG(x,s_i)$$

而由材料力学[2] 可知，$u(x)$ 满足以下剪力方程

$$M'(x)=[EJ(x)u''(x)]'=\begin{cases}C_0 & (0\leqslant x<s_1)\\ C_i & (s_i<x<s_{i+1};i=1,\cdots,n-1)\\ C_n & (s_n<x\leqslant l)\end{cases}$$

其中 $C_i = C_0 + \sum_{j=1}^{i} F_j (i = 1, \cdots, n)$。上式表明，$M'(x)$ 最多只在外力作用点处改变符号一次，从而其变号数不超过 n。在 $k_1 = 0 = k_2$，$M(0) = 0 = M(l)$ 的情况下，由引理可知 $M(x)$ 的变号数不超过 $n-1$，$u'(x)$ 和 $u(x)$ 的变号数不超过 n 和 $n+1$。但在 h_1、h_2 有限时，若 $u(0)u'(0) > 0$，则 $u(x)$ 的变号数少 1；若 $u(0)u'(0) < 0$，因 $u(0)M'(0) < 0$，$M'(0)M(0^+) > 0$，那么 $M(0^+)u(0) > 0$，则 $u'(x)$ 及相应的 $u(x)$ 的变号数也少 1。$x = l$ 的情况类似。当 h_1、h_2 为 ∞ 时，$u(0)$ 或 $u(l)$ 为 0，$u(x)$ 的变号数还是各减少 1。总之，$u(x)$ 的变号数不超过 $n-1$。证毕。

在证明了以上三个定理以后，仿照文[1] 即可得到结论：补充定义后的梁的正系统的格林函数属于振荡核。进而即可推证梁的频谱和模态的一系列基本特性。

参考文献

[1] G. M. L. 格拉德威尔著. 王大钧，何北昌译. 振动中的反问题. 北京：北京大学出版社，1991

[2] S. 铁摩辛柯，J. 盖尔著. 材料力学. 胡人礼译. 北京：科学出版社，1978

任意支承梁的固有频谱和模态的定性性质

摘　要　确定了任意支承方式下欧拉梁横振动时其频谱和位移、转角、应变模态的一些重要特性，阐明了梁的位移模态的充分必要条件。

关键词　任意支承梁　频谱　模态　定性性质

引　　言

梁是重要的工程构件之一。梁作横向振动时频谱和模态的定性性质是对梁的频谱和模态的规律性认识，它是检验实验和计算结果的可靠性的重要依据；也可保证动态设计、结构修改和振动反问题中给定数据的合理性；又是检验连续系统的离散模型是否合理的一个基本方面。有鉴于此，许多作者给予结构振动的定性性质以极大的关注。就梁而言，文[1-5]尤其是文[1]作了大量卓越的工作。

细长梁振动的模态方程是

$$[r(x)u''(x)]'' = \omega^2\rho(x)u(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{1}$$

式中 $r(x) = EJ(x)$ 是梁横截面的抗弯刚度，$\rho(x)$ 是梁沿杆轴分布的线密度，ω 是圆频率，$u(x)$ 是相应的位移模态函数。梁的支承方式一般地表示为

$$\begin{aligned} &[r(x)u''(x)]'_{x=0} + h_1u(0) = 0 = [r(x)u''(x)]'_{x=l} - h_2u(l) \\ &r(0)u''(0) - k_1u'(0) = 0 = r(l)u''(l) + k_2u'(l) \end{aligned} \tag{2}$$

此处 h_1、h_2 是约束梁端线位移的弹簧刚度，k_1、k_2 则是约束梁端角位移的扭转弹簧刚度，它们都是非负数。通常所说的梁端支承方式为自由、滑支、铰支和固支，以左端 $x = 0$ 为例，分别对应于 $h_1 = 0 = k_1$；$h_1 = 0, k_1 = \infty$；$h_1 = \infty, k_1 = 0$ 和 $h_1 = \infty = k_1$。

业已证明，欧拉—贝努利算子 $Bu = [r(x)u''(x)]''$ 在端条件(2)下是自伴的[1]，因而方程(1)在端条件(2)下的特征值 $\lambda = \omega^2$ 全是实数。为使上述系统的特征值全是正数，必须且只须

$$\{h_1 + h_2 > 0, k_1 + k_2 > 0\} \quad \text{或} \quad h_1 \cdot h_2 > 0 \tag{3}$$

称这样的系统为正的欧拉—贝努利系统，以下简称梁的正系统。它们不含刚体运动模态。据此定义，固支—自由、固支—滑支、固支—铰支、两端固支、两端铰支和铰支—滑支梁均属正系统，文[1,2,5]证明了包含上述六种梁在内的梁的正系统的格林函数属于振荡核。

* 本文原载于《力学学报》1997 年第 5 期，原文作者为王其申和王大钧(北京大学力学系)。

根据振荡核的理论[3]，梁的正系统的频谱和位移模态具有以下基本特征：

1）系统的频率是严格分离的，即有

$$(0<)\omega_0<\omega_1<\cdots<\omega_n<\cdots$$

2）设$\{\varphi_i(x)\}_0^\infty$是系统的位移模态族，则在区间$I=\{x\mid x\in[0,l]\}$上$\varphi_i(x)(i=0,1,\cdots)$有且仅有$i$个节点，从而改变符号$i$次，记作$S_{\varphi_i}=i$。

3）相邻两模态φ_i和φ_{i+1}的节点彼此相间。

以前的结果未涉及转角、应变模态的规律，更未给出存在刚体运动的梁，包括自由梁这样的重要系统的结果。本文首先确定了六种静定、超静定梁的转角、弯矩（应变）和剪力模态的节点规律；接着通过引入共轭梁的概念，导出了存在刚体运动模态的梁的频率的分离性和各种模态的节点规律；最后采用构造法证明了任意支承梁位移模态的充分必要条件。

一　预备知识

首先给出以下定义和引理。

称$u(x_0^-)u(x_0^+)<0$的点x_0为函数$u(x)$的节点。$u(x)$在区间I上的节点的总数称为$u(x)$在I上的节点数，记作S_u。

引理1　设$u(x)$在I上可微且以$\{\xi_m\}_1^i$为其顺次节点，则$S_{u'}\geqslant i-1$；如果$u(0)u'(0)>0$或$u(l)u'(l)<0$，则$u'(x)$的节点数将至少各增加1。

引理1的前半部分直接由罗尔(Rolle)定理推出。如果$u(0)u'(0)>0$，$u(x)$在$(0,\xi_1)$上至少有一个极值点，即$S_{u'}$至少增加1。同理$u(l)u'(l)<0$也使$S_{u'}$至少增加1。

$u(0)=0$或$u(l)=0$时引理1后一半显然也成立。

引理2　设$u'(x)$在I上以$\{\eta_m\}_1^i$为其节点，则$S_u\leqslant i+1$；如果$u(0)u'(0)>0$或$u(l)u'(l)<0$，则$u(x)$的节点数将各减少1。

事实上，由罗尔定理并用反证法可知，在子区间$(\eta_m,\eta_{m+1})(m=0,\cdots,i;\eta_0=0,\eta_{i+1}=l)$内，$u(x)$最多只有一个节点，故$S_u\leqslant i+1$；又当$u(0)u'(0)>0$时，$u(x)$或者从正数单调增至极大值或者从负数单调降至极小值，即在$(0,\eta_1)$内不变号。同理当$u(l)u'(l)<0$时$u(x)$在(η_i,l)内不改变符号。

$u(0)=0$或$u(l)=0$时引理2的后一半也成立。

二　静定、超静定梁的模态的节点数

从以上引理出发，我们不难证明：

性质1　设$\varphi(x)$是正的欧拉—贝努利系统的相应于ω_i的位移模态，记$M(x)=r(x)\varphi''(x)$，则$M'(x)$，$M(x)$，$\varphi'(x)$在I上的节点数分别满足

$$i-1+\Delta(h_1^{-1})+\Delta(h_2^{-1})\leqslant S_{M'}\leqslant i+1-\Delta(h_1)-\Delta(h_2)\tag{4}$$

$$i-\Delta(k_1)-\Delta(k_2)+\Delta(h_1^{-1})+\Delta(h_2^{-1})\leqslant S_M\leqslant i+2-\Delta(k_1)-\Delta(k_2)-\Delta(h_1)-\Delta(h_2) \tag{5}$$

$$i-1+\Delta(h_1^{-1})+\Delta(h_2^{-1})\leqslant S_{\varphi'}\leqslant i+1-\Delta(h_1)-\Delta(h_2) \tag{6}$$

其中 $\Delta(0)=1$，而当 $t\neq 0$ 时 $\Delta(t)=0$。

事实上，由于 $\varphi(x)$ 是相应于 ω_i 的位移模态，则 $S_\varphi=i$ 且 $\varphi'(x)$，$M(x)$，$M'(x)$ 均连续。注意到端条件(2)，由引理 1 依次可得(4)—(6) 式的左半部分。又因 $M''(x)=\lambda_i\rho(x)\varphi(x)$，故由引理 2 依次可得(4)—(6) 式的右半部分。

由此性质立即可得六种静定、超静定梁的剪力 M'_i，弯矩 M_i，转角 $\varphi'_i(x)$ 等模态均有确定的变号数。具体规律列于表 1 的第 1—6 行。而弹性支承梁的模态的节点数与弹簧常数有关。

表 1　任意支承梁相应于非零频率的第 i 阶模态的节点数

Table 1　The number of nodes of the i-th mode associated non-zero frequencies for beams with arbitrary supports

Type of supports	h_1	k_1	h_2	k_2	$S_{M'}$	S_M	$S_{\varphi'}$	S_φ
fixed — free	∞	∞	0	0	i	i	i	i
fixed — sliding	∞	∞	0	∞	i	$i+1$	i	i
fixed — pinned	∞	∞	∞	0	$i+1$	$i+1$	$i+1$	i
fixed — fixed	∞	∞	∞	∞	$i+1$	$i+2$	$i+1$	i
pinned — pinned	∞	0	∞	0	$i+1$	i	$i+1$	i
pinned — sliding	∞	0	0	∞	i	i	i	i
free — pinned	0	0	∞	0	i	$i-1$	i	i
free — sliding	0	0	0	∞	$i-1$	$i-1$	$i-1$	i
free — free	0	0	0	0	$i-1$	$i-2$	$i-1$	i
sliding — sliding	0	∞	0	∞	$i-1$	i	$i-1$	i

注：当栏中数为负数时对应刚体运动模态。

设 $\{\xi_m\}_1^i$ 是 $\varphi_i(x)$ 在 I 上的顺次节点，则由性质 1 可得以下推论。首先(6) 式清楚地显示：

性质 2　自由或滑支端的存在将使 $\varphi'_i(x)$ 的节点数减少 1。于是当梁左端($x=0$) 自由或滑支时，有

$$\varphi(0)\varphi'_i(x)<0\quad(0\leqslant x\leqslant\xi_1) \tag{7}$$

当梁右端($x=l$) 自由或滑支时，有

$$\varphi(l)\varphi'_i(x)>0\quad(\xi_i<x\leqslant l;i=1,2,\cdots) \tag{8}$$

对基模态，(7)、(8) 两式的成立范围是$(0<x<l)$。

性质 3　对于表 1 中的各种梁，位移模态 φ_i 和转角模态 φ'_i，φ'_i 和弯矩模态 M_i，M_i 和剪力模态 M'_i 的节点彼此相间。

事实上，由表 1 的节点数和罗尔定理即可得到上述性质。

性质 4　这些模态的极大值处振幅为正，极小值处振幅为负。例如，如 $\varphi'_i(\eta_m) = 0$，则有 $M_i(\eta_m) \neq 0$，且 $\varphi_i(\eta_m) M_i(\eta_m) < 0$。

三　存在刚体运动模态的梁的定性性质

为了确定这类梁的振动的基本特性，和离散模型一样[4]，我们引入共轭梁的概念。记

$$\bar{u}(x) = M(x) = r(x) u''(x) \tag{9}$$

则方程(1) 可改写为

$$[r^*(x) \bar{u}''(x)]'' = \lambda \rho^* \bar{u}(x) \tag{10}$$

它可视为定义在区间$[0, l]$ 上，具有参数

$$r^*(x) = \rho^{-1}(x) \qquad \rho^*(x) = r^{-1}(x)$$

的某种“梁” 的模态方程，称此“梁” 为原梁的共轭梁，共轭梁的“位移” 模态就是原梁的弯矩模态。

在变换(9) 下，因有

$$\bar{u}''(x) = \lambda \rho(x) u(x), \quad [r^*(x) \bar{u}''(x)]' = \lambda u'(x)$$

所以原梁与共轭梁的支承方式及各种模态之间存在如下对应关系：

原梁	固支	铰支	滑支	自由	位移	转角	弯矩	剪力
共轭梁	自由	铰支	滑支	固支	弯矩	剪力	位移	转角

由此即得三种存在刚体运动模态梁的如下特性：

1) 自由 — 铰支和自由 — 滑支梁，它们的共轭梁就是固支 — 铰支和固支 — 滑支梁。所以其非零频率是分离的：$0 = \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_n < \cdots$；相应于 ω_i 的弯矩模态在 I 上有确定的节点数 $i-1$。其剪力、位移、转角模态均有确定的节点数，具体规律列于表 1 中 7、8 两行。

2) 两端自由梁，它的共轭梁是两端固支梁。其非零频率是分离的：$0 = \omega_0 = \omega_1 < \cdots < \omega_n < \cdots$；相应于 $\omega_i (i = 2, 3, \cdots)$ 的弯矩模态在 I 上有确定的节点数 $i-2$。其模态的变号数列于表 1 第 9 行。

3) 对两端滑支梁，改写方程(1) 为

$$[r(x) v'(x)]' = Q(x) \qquad (v(x) = u'(x)) \tag{11}$$

$$[\rho^{-1}(x) Q'(x)]' = \lambda v(x) \tag{12}$$

相应的端界条件可表示为

$$v(0) = 0 = v(l), \quad Q(0) = 0 = Q(l) \tag{13}$$

注意到(11)、(12) 式的左端正好是斯图谟 — 刘维尔算子，在端条件(13) 下都是正的自

伴算子。记其格林函数分别为 $G_1(x,s)$ 和 $G_2(x,s)$，那么方程

$$[\rho^{-1}(x)(r(x)v'(x))'']' = \lambda v(x) \tag{14}$$

在端条件(13)下的格林函数则是

$$G(x,s) = \int_0^l G_1(x,t)G_2(t,s)\mathrm{d}t \tag{15}$$

因为 $G_1(x,s)$，$G_2(x,s)$ 都是振荡核[1,3]，通过引入核 $G(x,s)$ 的 p 重相伴核并应用文[1]中相伴核的性质定理 8.9.1，即可证明 $G(x,s)$ 也是振荡核[3]，进而推得两端滑支梁的基本振动特性是：1）非零频率是严格分离的，即 $0 = \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_n < \cdots$；2）相应于 $\omega_i(i = 1,2,\cdots)$ 的转角模态 $\varphi'_i(x)$ 在 I 上有确定的节点数 $i-1$；3）鉴于引理 1，2 的成立与系统是否为正无关，故从性质 2）出发，仿照性质 1 的推理，同样可知两端滑支梁的弯矩、剪力、位移模态均有确定的节点数，结果列于表 1 第 10 行。

四　梁的位移模态的充分必要条件

性质 4　表 1 所列的 10 种梁的位移模态的充分必要条件是：1^0 满足相应的端条件；2^0 至少存在三阶连续导数；3^0 $\varphi_i(x)$ 和 $\varphi''_i(x)$ 有如表 1 所列的节点数。

条件的必要性已于上述，我们采用构造法来证明条件的充分性。即设有满足上述条件 2^0 和表 1 所列 10 种端条件之一的函数 $u(x)$，当 u 和 u'' 在 I 上的节点数也满足表 1 的相应要求时，存在某一真实梁（不是唯一的），此梁以 $u(x)$ 作为自己的第 $i(=S_u)$ 阶位移模态。

记 $u(x)$，$u''(x)$ 的顺序节点为 $\{\xi_m\}_1^i$，$\{x_m\}_{N_1}^{N_2}$，这里 N_1 取 0（固定端）、1（铰支和滑支）或 2（自由端），N_2 取 $i+1$（固定端）、i（铰支和滑支）或 $i-1$（自由端）。在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = N_1,\cdots,N_2-1)$ 内把运动方程(1)积分两次有

$$r(x)u''(x) = r(x_k)u'''(x_k)(x-x_k) + \lambda\int_{x_k}^{x}\mathrm{d}z\int_{x_k}^{z}\rho(s)u(s)\mathrm{d}s \tag{16}$$

记 $x'_k = \min(x_k,\xi_k)$，$x''_k = \max(x_k,\xi_k)$，因有

$$u''(x)u'''(x_k) > 0, (x_k < x < x_{k+1})$$

$$u''(x)u(x) < 0, (x''_k < x < x'_{k+1})$$

$$u''(x)u(x) > 0, (x'_k < x < x''_k \text{ 或 } x'_{k+1} < x < x''_{k+1})$$

为获得正函数 $r(x)$，可分四种情况选取 $\rho(x)$：

a）当 $\xi_k \leqslant x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \xi_{k+1}$ 时，可取

$$\rho(x) = d_k \quad (x_k < x \leqslant x_{k+1})$$

b）当 $x_k < \xi_k < x_{k+1} \leqslant \xi_{k+1}$ 时，可取

$$\rho(x) = \begin{cases} \varepsilon_{k1} d_k & (x_x < x < \xi_k) \\ d_k & (\xi_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}) \end{cases}$$

c）当 $\xi_k \leqslant x_k < \xi_{k+1} < x_{k+1}$ 时，可取

$$\rho(x)=\begin{cases} d_k & (x_x < x \leqslant \xi_{k+1}) \\ \varepsilon_{k2} d_k & (\xi_{k+1} < x \leqslant x_{k+1}) \end{cases}$$

d）当 $x_k < \xi_k < \xi_{k+1} < x_{k+1}$ 时，可取

$$\rho(x)=\begin{cases} \varepsilon_{k1} d_k & (x_x < x \leqslant \xi_k) \\ d_k & (\xi_k < x \leqslant \xi_{k+1}) \\ \varepsilon_{k2} d_k & (\xi_{k+1} < x \leqslant x_{k+1}) \end{cases}$$

这里 $d_k, \varepsilon_{k1}, \varepsilon_{k2}$ 都是待调节的正常数。对于这样选取的 $\rho(x)$，在以上四种情况下，函数

$$F(x)=\lambda\int_{x_k}^{x}\mathrm{d}z\int_{x_k}^{z}\rho(s)u(s)\mathrm{d}s \tag{17}$$

的图形如图 1(a) ～ (d) 所示。图中假定 $u'''(x_k)<0$。在相反的情况下图形特征不变，只是正好反向。因 $F(x), F'(x)$ 均正比于 d_k，故只要取 $\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{k2}$ 足够小并适当调节 d_k，即可做到

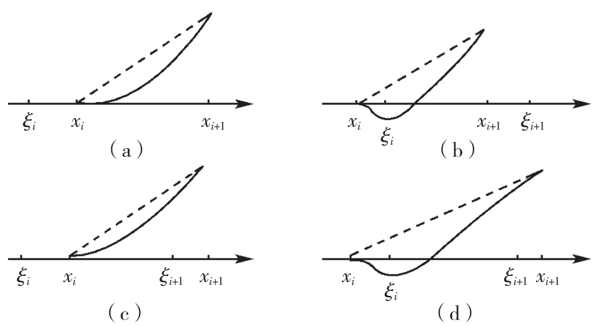

图 1

$$r(x_k)u'''(x_k)(x_{k+1}-x_k)+F(x_{k+1})=0$$

$$r(x)=[r(x_k)u'''(x_k)(x-x_k)+F(x)]/u''(x)>0(x_k<x<x_{k+1}) \tag{18}$$

$$r(x_{k+1})=[r(x_k)u'''(x_k)+F'(x_{k+1})]/u'''(x_{k+1})>0 \tag{19}$$

以上讨论不仅适用于 $k=N_1,\cdots,N_2-1$ 的区段，也完全适用于 $u''(x)$ 的最后一个同号段$[x_{N_2},1]$。同样当梁的左端$(x=0)$ 自由或铰支时，以上讨论还适用于$[0,x_{N_1}]$ 段（这时 $r(0)$ 可取任意正数）。只当梁的左端滑支或固支时需另行讨论。

当梁左端$(x=0)$ 滑支时，(1) 式的积分形式是

$$r(x)u''(x)=r(0)u''(0)+\lambda\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^z\rho(s)u(s)\mathrm{d}s \tag{20}$$

这时 $u''(0)u(x)<0(0\leqslant x\leqslant x_1)$，故只要按上面的情况 a 或 c 选取 $\rho(x)$，则函数

$$f(x)=\lambda\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^z\rho(s)u(s)\mathrm{d}s \tag{21}$$

的图形如图 1(a) 或(c) 所示，而 $A = r(0)u''(0)$ 是常数。这样只要取 ε_{02} 足够小并适当选取 d_0 即有

$$A + f(x_1) = 0$$

$$r(x) = [A + f(x)]/u''(x) > 0 \quad (0 < x < x_1) \tag{22}$$

$$r(x_1) = f'(x_1)/u'''(x_1) > 0 \tag{23}$$

当梁左端固支时，式(1) 的积分形式是

$$r(x)u''(x) = A + Bx + f(x)$$

此时 $u''(0)u(x) > 0 (0 < x < x_0)$；$u''(0)u'''(x_0) < 0$，取 $\rho(x) = d_{-1} (0 \leqslant x \leqslant x_0)$，$r(0)$ 取任意正数，选取 $r'(0)$ 以使 $B = [r(x)u''(x)]'_{x=0}$ 与 A 异号，则 $A + f(x)$ 与 $-Bx$ 的图形如图 2 所示，可见调节 d_{-1} 就可做到

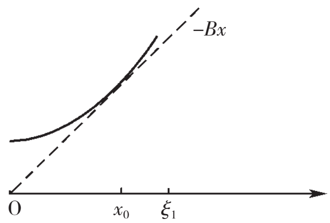

图 2

$$A + Bx_0 + f(x_0) = 0$$

$$r(x) = [A + Bx + f(x)]/u''(x) > 0 \quad (0 < x < x_0)$$

$$r(x_0) = [B + f'(x_0)]/u'''(x_0) > 0$$

我们获得了整个梁段上的正的 $r(x)$。至此性质 4 得证。

五　结束语

以上我们获得了梁作横振动时频谱和模态的一系列定性性质。需要指出的是，因为梁的弯曲应力、应变与弯矩成正比，所以文中获得的有关弯矩模态的定性性质同样适用于应力和应变模态。

参考文献

[1] Gladwell G. M. L.，*Inverse Problems in Vibration*，中译本．王大钧，何北昌译．振动中的反问题，北京：北京大学出版社，1991

[2] 王其申，王大钧．杆、梁离散和连续系统的振动定性性质的统一论证．力学学报，1997，29(1)

[3] Gantmakher F. P.，Krein M. G.，*Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems*，Moscow-Leningrad State Publishing House of Technical-Theoretical Literature，1950，Translation，Washington D. C.，U. S. Atomic Energy Commission，1961

[4] 王其申，何北昌，王大钧．Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质，振动工程学报，1990，3(4)

[5] 王其申，王大钧．梁的正系统的补充定义及格林函数的振荡性．安庆师范学院学报，1997(1)

静定、超静定梁的柔度系数和格林函数

摘　要　本文导出了左端固支右端自由、滑支、铰支、固支以及左端铰支右端铰支、滑支这六种梁的柔度系数和相应的格林函数，验证了二者之间的极限关系。

关键词　杆　梁　柔度系数　格林函数

一　引　　言

无论是对梁的平衡问题，还是对梁的振动问题，柔度系数和格林函数都是两个重要的概念，不过它们分属于离散系统和连续系统。柔度系数和格林函数之间的关系如何？就物理意义而言，后者应为前者的极限形式，前者则是后者的离散近似。但从数学上严格证明这一结论，则尚属少见。此前，笔者曾在文[1]中证明过两种常见梁——悬臂梁和简支梁的差分柔度系数当差分点无限增多且所有差分步长一致趋于 0 时确以相应的格林函数为极限。作者在本文中将扩大以上成果，导出了固支—自由、固支—滑支、固支—铰支、两端固支、两端铰支及铰支—滑支等六种静定、超静定梁的柔度系数和格林函数，并验证了它们之间的极限关系。

二　静定、超静定梁的格林函数

长为 l，线密度为 $\rho(x)$、抗弯刚度为 $r(x)=EI(x)$ 的 Euler 梁的横振动方程是

$$[r(x)u''(x)]''=\omega^2\rho(x)u(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l)\tag{1}$$

端点支承条件可以统一表示为

$$[r(x)u''(x)]'_{x=0}+h_1u(0)=0=[r(x)u''(x)]'_{x=l}-h_2u(l)\tag{2}$$

$$r(0)u''(0)-k_1u'(0)=0=r(l)u''(l)+k_2u'(l)\tag{3}$$

式中 ω 是圆频率，h_1、h_2 是约束梁端线位移的拉伸弹簧刚度，k_1、k_2 是约束梁端角位移的扭转弹簧刚度，它们均为正数。[2] 已证明，当

$$\{k_1+k_2>0,h_1+h_2>0\}\quad\text{或}\quad h_1h_2>0\tag{4}$$

时，系统为正的 Euler-Bellowni 系统。当 k_i、h_i 取不同组合时，梁的正系统包括以下六种：

固支—自由梁　$k_1=h_1=\infty,k_2=h_2=0$；

* 本文原载于《安庆师范学院学报》1998 年第 2 期，原文作者为王其申、王大钧(北京大学力学系)。

固支—滑支梁 $k_1 = h_1 = \infty, k_2 = \infty, h_2 = 0$；

固支—铰支梁 $k_1 = h_1 = \infty, k_2 = 0, h_2 = \infty$；

固支—固支梁 $k_1 = h_1 = \infty, k_2 = \infty, h_2 = \infty$；

铰支—铰支梁 $k_1 = k_2 = 0, h_1 = h_2 = \infty$

铰支—滑支梁 $k_1 = 0, h_1 = \infty, k_2 = \infty, h_2 = 0$。

为了寻求上述六种梁的格林函数，我们只要在端条件(2)、(3)下求解如下方程

$$[r(x)G''(x,s)]'' = \delta(x-s) \quad (0 \leqslant x, s \leqslant l) \tag{5}$$

积分一次有

$$[r(x)G''(x,s)]' = \begin{cases} C_1 & (x < s) \\ 1 + C_1 & (x > s) \end{cases} \tag{6}$$

此式表明，所谓格林函数，就是在梁上 s 点作用一个单位集中力而形成的梁的静位移。继续积分三次有

$$G(x,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}z \int_0^z \frac{C_1 t + C_2}{r(t)} \mathrm{d}t + C_4 x + C_6 & (x < s) \\ \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}z \int_0^z \frac{(C_1 + 1)t + C_3}{r(t)} \mathrm{d}t + C_5 x + C_7 & (x > s) \end{cases} \tag{7}$$

由 $x = s$ 处位移、转角、弯矩的连续性条件求得

$$C_3 = C_2 - s, C_5 = C_4 - \int_0^s \frac{t-s}{r(t)} \mathrm{d}t, C_7 = C_6 - \int_0^s \mathrm{d}z \int_0^z \frac{t-s}{r(t)} \mathrm{d}t$$

这样

$$G(x,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}z \int_0^z \frac{C_1 t + C_2}{r(t)} \mathrm{d}t + C_4 x + C_6 & (x < s) \\ \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}z \int_0^z \frac{C_1 t + C_2}{r(t)} \mathrm{d}t + C_4 x + C_6 + \int_s^x \mathrm{d}z \int_s^z \frac{t-s}{r(t)} \mathrm{d}t & (x > s) \end{cases} \tag{8}$$

采用分部积分消除中间变量 z 有

$$G(x,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)(C_1 t + C_2)}{r(t)} \mathrm{d}t + C_4 x + C_6 & (x < s) \\ \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)(C_1 t + C_2)}{r(t)} \mathrm{d}t + C_4 x + C_6 + \int_s^x \frac{(x-t)(t-s)}{r(t)} \mathrm{d}t & (x > s) \end{cases} \tag{9}$$

下面，根据具体端条件来求得积分常数。

a) 固支—自由梁，容易求得

$$C_4 = C_6 = 0, \quad C_1 = -1, \quad C_2 = s$$

于是

$$G^{(cf)}(x,s) = \int_0^{\min(x,s)} \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)} \mathrm{d}t \tag{10}$$

b）固支 — 滑支梁，它的积分常数是

$$C_4 = C_6 = 0, \quad C_1 = -1, \quad C_2 = s - \int_0^s \frac{s-t}{r(t)}\mathrm{d}t \Big/ \int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{r(t)}$$

于是

$$G^{(cs)}(x,s) = \int_0^{\min(x,s)} \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{x-t}{r(t)}\mathrm{d}t \cdot \int_0^s \frac{s-t}{r(t)}\mathrm{d}t \Big/ \int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{r(t)} \tag{11}$$

c）固支 — 铰支梁，它的积分常数是

$$C_4 = C_6 = 0, \quad C_1 = -1 + \int_0^s \frac{(l-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t \Big/ \int_0^l \frac{(l-t)^2}{r(t)}\mathrm{d}t,$$

$$C_2 = s - l\int_0^s \frac{(l-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t \Big/ \int_0^l \frac{(l-t)^2}{r(t)}\mathrm{d}t$$

代入有

$$\begin{aligned} G^{(cp)}(x,s) = & \int_0^{\min(x,s)} \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{(l-t)(x-t)}{r(t)}\mathrm{d}t \\ & \cdot \int_0^s \frac{(l-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t \Big/ \int_0^l \frac{(l-t)^2}{r(t)}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{12}$$

d）两端固支梁，它的积分常数满足

$$C_4 = C_6 = 0$$

$$(C_1+1)\int_0^l \frac{l-t}{r(t)}t\mathrm{d}t + (C_2 - s)\int_0^l \frac{l-t}{r(t)}\mathrm{d}t = \int_0^s \frac{(l-t)(t-s)}{r(t)}\mathrm{d}t$$

$$(C_1+1)\int_0^l \frac{t\mathrm{d}t}{r(t)} + (C_2 - s)\int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{r(t)} = \int_0^s \frac{t-s}{r(t)}\mathrm{d}t$$

这样有

$$\begin{aligned} G^{(cc)}(x,s) = & \int_0^{\min(x,s)} \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t - \Big[\int_0^x \frac{t(x-t)}{r(t)}\mathrm{d}t \int_0^s \frac{t(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t \int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{r(t)} + \int_0^x \frac{x-t}{r(t)}\mathrm{d}t \cdot \\ & \int_0^s \frac{s-t}{r(t)}\mathrm{d}t \int_0^l \frac{t^2\mathrm{d}t}{r(t)} - \Big(\int_0^x \frac{t(x-t)}{r(t)}\mathrm{d}t \int_0^s \frac{s-t}{r(t)}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{x-t}{r(t)}\mathrm{d}t \int_0^s \frac{t(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t\Big) \int_0^l \frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}\Big] \Big/ \Delta \end{aligned} \tag{13}$$

式中，$\Delta = \int_0^l \frac{t^2}{r(t)}\mathrm{d}t \cdot \int_0^l \frac{\mathrm{d}t}{r(t)} - \left(\int_0^l \frac{t}{r(t)}\mathrm{d}t\right)^2$

e）两端铰支梁，它的积分常数满足

$$C_2 = C_6 = 0, \quad (C_1+1)l - s = 0$$

$$\int_0^l \frac{(l-t)C_1 t}{r(t)}\mathrm{d}t + C_4 l + \int_s^l \frac{(l-t)(t-s)}{r(t)}\mathrm{d}t = 0$$

故有

$$G^{(pp)}(x,s)=\begin{cases}\dfrac{xs}{l^2}\displaystyle\int_0^l\frac{(l-t)^2}{r(t)}\mathrm{d}t-\frac{l-s}{l}\int_0^x\frac{t(x-t)}{r(t)}\mathrm{d}t-\frac{x}{l}\int_0^s\frac{(l-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t(x<s)\\ \dfrac{xs}{l^2}\displaystyle\int_0^l\frac{(l-t)^2}{r(t)}\mathrm{d}t-\frac{l-x}{l}\int_0^s\frac{t(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t-\frac{s}{l}\int_0^x\frac{(l-t)(x-t)}{r(t)}\mathrm{d}t(x>s)\end{cases}\tag{14}$$

f) **铰支 — 滑支梁，它的积分常数是**

$$C_2=C_6=0,\quad C_1=-1,\quad C_4=\int_0^s\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_s^l\frac{s\mathrm{d}t}{r(t)}$$

相应的格林函数就是

$$G^{(ps)}(x,s)=\begin{cases}xs\displaystyle\int_s^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+x\int_x^s\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_0^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{r(t)}\quad(x<s)\\ xs\displaystyle\int_x^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+s\int_s^x\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_0^s\frac{t^2\mathrm{d}t}{r(t)}\quad(x>s)\end{cases}\tag{15}$$

三　静定、超静定梁的差分柔度系数

由方程(1)—(3) **所描述的** Euler **梁，在二阶中心差分格式下，可以化为图** 1 **所示的质点 — 弹簧 — 刚杆系统**[3]**。上节所述六种梁的离散系统运动方程可以统一表示为**

$$\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{EKE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Eu}=\lambda\boldsymbol{Mu}\tag{16}$$

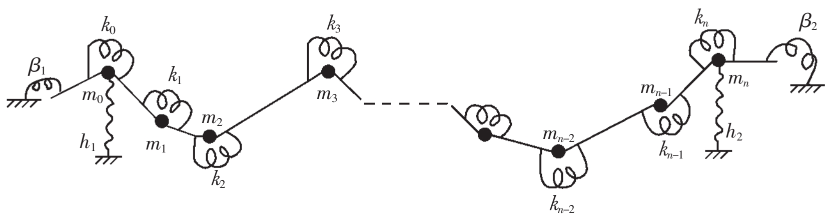

图 1　**与梁的差分离散模型等价的弹簧 — 质点 — 刚杆系统**

式中 $\lambda=\omega^2$ (**圆频率的平方**) **是特征值**，$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(l_1,\cdots,l_{N+1})$，$\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}(k_0,\cdots,k_N)$，

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\&1&-1&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\&&&1&-1&\\&&&&1&-1\end{bmatrix}_{N\times(N+1)}$$

$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$ **是系统的位移矢量。记**

$$\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}_1^{N+1}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{EKE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A}_1=\{a_{ij}\}_2^{N+1},\boldsymbol{A}_N=\{a_{ij}\}_1^N,\boldsymbol{A}_{1N}=\{a_{ij}\}_2^N$$

则上节所述六种梁的刚度矩阵分别是

固支 — 自由梁　$\boldsymbol{A}^{(cf)}=\boldsymbol{A}_1\mid_{K_N=0}$　　固支 — 固支梁　$\boldsymbol{A}^{(cc)}=\boldsymbol{A}_{1N}$

固支 — 滑支梁　$\boldsymbol{A}^{(cs)}=\boldsymbol{A}_1$　　铰支 — 铰支梁　$\boldsymbol{A}^{(pp)}=\boldsymbol{A}_{1N}\mid_{k_0=k_N=0}$

固支 — 铰支梁　$\boldsymbol{A}^{(cp)}=\boldsymbol{A}_N\mid_{k_N=0}$　　铰支 — 滑支梁　$\boldsymbol{A}^{(ps)}=\boldsymbol{A}_1\mid_{k_0=0}$

容易验证，$\det\boldsymbol{A}_{1N}>0$，当 $k_0+k_N>0$ 时 $\det\boldsymbol{A}_1>0$，$\det\boldsymbol{A}_N>0$。这样，它们均可逆且其逆正是我们需要的柔度矩阵。为了求出以上六种梁的柔度系数，除了我们已在文[1] 中讨论过的悬臂梁和简支梁外，下面分两种办法导出其余 4 种梁的柔度系数。

1）对固支 — 滑支梁，直接求逆给出：

$$\boldsymbol{R}^{(cs)}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{EKE}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{LF}$$

这里

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\&1&1&\cdots&1&1\\&&&\cdots&&\\&&&&1&1\\&&&&&1\end{bmatrix}$$

$(\boldsymbol{EKE}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 正好是文[1] 中两端固定杆的柔度矩阵，利用文[1] 的结果马上给出：

$$r_{ij}^{(cs)}=\begin{cases}\Big\{\displaystyle\sum_{n=1}^{i-1}l_n\Big[\sum_{m=1}^{n}l_m\sum_{p=0}^{m-1}k_p^{-1}\sum_{q=n}^{N}k_q^{-1}+\sum_{m=n+1}^{i}l_m\sum_{p=0}^{n-1}k_p^{-1}\sum_{q=m}^{N}k_q^{-1}\Big]\\\qquad+\displaystyle\sum_{n=i}^{j}l_n\sum_{m=1}^{n}l_m\sum_{p=0}^{m-1}k_p^{-1}\sum_{q=n}^{N}k_q^{-1}\Big\}\Big/\sum_{r=0}^{N}k_r^{-1}&(i\leqslant j)\\\displaystyle\sum_{n=1}^{j}l_n\Big[\sum_{m=1}^{n}l_m\sum_{p=0}^{m-1}k_p^{-1}\sum_{q=n}^{N}k_q^{-1}+\sum_{m=n+1}^{i}l_m\sum_{p=0}^{n-1}k_p^{-1}\sum_{q=m}^{N}k_q^{-1}\Big]\Big/\sum_{r=0}^{N}k_r^{-1}&(i>j)\end{cases}\tag{17}$$

类似地，对于固支 — 滑支梁，有

$$\boldsymbol{R}^{(ps)}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{K}}\overline{\boldsymbol{E}})^{-1}\boldsymbol{LF}$$

其中，$\overline{E}$ 是 E 划去最后一列所得的方阵，$\overline{\boldsymbol{K}}=\mathrm{diag}(k_1,\cdots,k_N)$，$(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{K}}\overline{\boldsymbol{E}})^{-1}$ 正好是文[1] 中固定 — 自由杆的柔度矩阵。于是，直接计算给出

$$r_{ij}^{(ps)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{i}l_n\Big[l_{1n}\sum_{p=n}^{N}k_p^{-1}+\sum_{m=n+1}^{i}l_m\sum_{p=m}^{N}k_p^{-1}\Big]+\sum_{n=i+1}^{j}l_nl_{1i}\sum_{p=n}^{N}k_p^{-1}&(i\leqslant j)\\\displaystyle\sum_{n=1}^{j}l_n\Big[l_{1n}\sum_{p=n}^{N}k_p^{-1}+\sum_{m=n+1}^{i}l_m\sum_{p=m}^{N}k_p^{-1}\Big]&(i>j)\end{cases}\tag{18}$$

2）对固支 — 铰支梁和两端固支梁，可用数学归纳法证明其柔度系数分别是

$$r_{ij}^{(cp)} = \sum_{n=1}^{\alpha} l_{ni} l_{nj} k_{n-1}^{-1} - \sum_{n=1}^{i} l_{ni} l_{nN} k_{n-1}^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{j} l_{nj} l_{nN} k_{n-1}^{-1} \Big/ \sum_{n=1}^{N} l_{nN}^2 k_{n-1}^{-1} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(cc)} = \Big[& \sum_{n=1}^{\alpha} k_{n-1}^{-1} \sum_{p=\beta+1}^{N} k_p^{-1} \Big(\sum_{q=n}^{\alpha} l_{nq}^2 l_{i+1,p} l_{j+1,p} k_q^{-1} + \sum_{q=\alpha+1}^{\beta-1} l_{m} l_{nq} l_{q+1,p} l_{j+1,p} k_q^{-1} \\ & + \sum_{q=\beta}^{p-1} l_{ni} l_{nj} l_{q+1,p}^2 k_q^{-1} \Big) \Big] \Big/ \sum_{n=1}^{N} k_{n-1}^{-1} \sum_{m=1}^{n} l_{mn}^2 k_{m-1}^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

以上几式中，$\alpha = \min(i,j)$，$\beta = \max(i,j)$，$l_{st} = \sum_{n=s}^{t} l_n$。

为了证明(19)、(20) 式的正确性，以(19) 式为例对离散系统的自由度数 N 做归纳法证明如下：

首先，令 $N = 3$，即对只有两个质点运动的固支 — 铰支梁，其刚度矩阵是

$$\boldsymbol{A}_3^{(cp)} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_0}{l_1^2} + k_1 \left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2} \right)^2 + \dfrac{k_2}{l_2^2} & -\dfrac{k_1}{l_2} \left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2} \right) - \dfrac{k_2}{l_2} \left(\dfrac{1}{l_2} + \dfrac{1}{l_3} \right) \\ -\dfrac{k_1}{l_2} \left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2} \right) - \dfrac{k_2}{l_2} \left(\dfrac{1}{l_2} + \dfrac{1}{l_3} \right) & \dfrac{k_1}{l_2^2} + k_1 \left(\dfrac{1}{l_2} + \dfrac{1}{l_3} \right) \end{bmatrix}$$

易于算得

$$\det \boldsymbol{A}_3^{(cp)} = \frac{k_0 k_1 k_2}{l_1^2 l_2^2 l_3^2} \left(\frac{l_3^2}{k_2} + \frac{l_{23}^2}{k_1} + \frac{l_{13}^2}{k_0} \right) \tag{21}$$

$$r_{3,11}^{(cp)} = l_1^2 k_0^{-1} - l_1^2 k_0^{-1} \cdot l_{13}^2 k_0^{-1} \Big/ \sum_{n=1}^{3} l_{n3}^2 k_{n-1}^{-1}$$

$$\begin{aligned} r_{3,12}^{(cp)} = r_{3,21}^{(cp)} &= l_1 l_3 k_0^{-1} (l_{12} l_3 k_2^{-1} + l_1 l_{23} k_1^{-1}) \Big/ \sum_{n=1}^{3} l_{n3}^2 k_{n-1}^{-1} \\ &= l_1 l_{12} k_0^{-1} - (l_{12} l_{13} k_0^{-1} + l_2 l_{23} k_1^{-1}) l_1 l_{13} K_0^{-1} \Big/ \sum_{n=1}^{3} l_{n3}^2 k_{n-1}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{3,22}^{(cp)} &= l_3^2 (l_2^2 k_1^{-1} k_2^{-1} + l_{12}^2 k_0^{-1} k_2^{-1} + l_1^2 k_0^{-1} k_1^{-1}) \Big/ \sum_{n=1}^{3} l_{n3}^2 k_{n-1}^{-1} \\ &= l_{12}^2 k_0^{-1} + l_2^2 k_1^{-1} - (l_{12} l_{13} k_0^{-1} + l_2 l_{23} k_1^{-1})^2 \Big/ \sum_{n=1}^{3} l_{n3}^2 k_{n-1}^{-1} \end{aligned}$$

完全符合(19) 式。现在假定(19) 式以及

$$\det \boldsymbol{A}_N^{(cp)} = \frac{k_0 \cdots k_{N-1}}{l_1^2 l_2^2 \cdots l_N^2} \sum_{n=1}^{N} l_{nN}^2 k_{n-1}^{-1} \tag{22}$$

对 N 个差分区段的情况成立，我们来证明当差分区段为 $N+1$ 时(19)、(22) 式仍成立。注意到固支 — 铰支梁与两端铰支梁的刚度矩阵的差别仅在于 $k_0 \neq 0$，由此有

$$\det \boldsymbol{A}_{N+1}^{(cp)} = \det \boldsymbol{A}_{N+1}^{(pp)} + \frac{k_0}{l_1^2} \det \overline{\boldsymbol{A}}_N^{(cp)}$$

此处 $\overline{\boldsymbol{A}}_N^{(cp)}$ 是差分段为 $N+1$ 的系统截去 l_1 段后所得系统的刚度矩阵，故

$$\det \boldsymbol{A}_{N+1}^{(cp)} = \frac{k_1\cdots k_N}{l_1^2 l_2^2\cdots l_{N+1}^2} l_{1,N+1}^2 + \frac{k_0}{l_1^2}\cdot\frac{k_1\cdots k_N}{l_2^2\cdots l_N^2}\sum_{n=2}^{N}\frac{l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}} = \frac{k_0 k_1\cdots k_N}{l_1^2 l_2^2\cdots l_N^2}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}}$$

此式也可以把它看作是具有 $N+1$ 个差分区段的固支—自由梁的刚度矩阵的右下角最末一个元素的代数余子式而得到，即

$$\det \boldsymbol{A}_{N+1}^{(cp)} = (\boldsymbol{A}_{N+1}^{(cf)})_{N+1,N+1}$$

完全类似的有

$$\boldsymbol{A}_{N+1,ij}^{(cp)} = \boldsymbol{A}_{N+1,ij}^{(pp)} + \frac{k_0}{l_1^2}\overline{\boldsymbol{A}}_{N,i-1,j-1}^{(cp)}$$

此处第一个下标表示差分区段数，第二、三个下标才是相应元素的行、列号。由两端铰支梁的柔度系数公式[1] 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{N+1,ij}^{(pp)} &= r_{N+1,ij}^{(pp)}\cdot\det \boldsymbol{A}_{N+1}^{(pp)}\\ &= \frac{k_1\cdots k_N}{l_1^2\cdots l_{N+1}^2}\left(\sum_{n=2}^{\alpha}\frac{l_{1,n-1}^2 l_{i+1,N} l_{j+1,N}}{k_{n-1}} + \sum_{n=\alpha+1}^{\beta}\frac{l_{1\alpha} l_{1,n-1} l_{n,N+1} l_{\beta+1,N+1}}{k_{n-1}} + \sum_{n=\beta+1}^{N+1}\frac{l_{1i} l_{1j} l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}}\right)\end{aligned}$$

而由归纳法假设有

$$\begin{aligned}\frac{k_0}{l_1^2}\overline{\boldsymbol{A}}_{N,i-1,j-1}^{(cp)} &= \frac{k_0}{l_1^2}\cdot\frac{k_1\cdots k_N}{l_2^2\cdots l_{N+1}^2}\left(\sum_{n=2}^{\alpha}\frac{l_{ni}l_{nj}}{k_{n-1}}\cdot\sum_{n=2}^{N+1}\frac{l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}} - \sum_{n=2}^{i}\frac{l_{ni}l_{n,N+1}}{k_{n-1}}\cdot\sum_{n=2}^{j}\frac{l_{nj}l_{n,N+1}}{k_{n-1}}\right)\\
&= \frac{k_0 k_1\cdots k_N}{l_1^2 l_2^2\cdots l_{N+1}^2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{l_{ni}l_{nj}}{k_{n-1}} - \frac{l_{1i}l_{1j}}{k_0}\right)\left(\sum_{n=1}^{N+1}\frac{l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}} - \frac{l_{1,N+1}^2}{k_0}\right) - \right.\\
&\left.\left(\sum_{n=1}^{i}\frac{l_{ni}l_{n,N+1}}{k_{n-1}} - \frac{l_{1i}l_{1,N+1}}{k_0}\right)\left(\sum_{n=1}^{j}\frac{l_{nj}l_{n,N+1}}{k_{n-1}} - \frac{l_{1j}l_{1,N+1}}{k_0}\right)\right]\\
&= \frac{k_0\cdots k_N}{l_1^2\cdots l_{N+1}^2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{l_{ni}l_{nj}}{k_{n-1}}\cdot\sum_{n=1}^{N+1}\frac{l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}} - \sum_{n=1}^{i}\frac{l_{ni}l_{n,N+1}}{k_{n-1}}\cdot\sum_{n=1}^{j}\frac{l_{nj}l_{n,N+1}}{k_{n-1}}\right) + \right.\\
&\left.\frac{1}{k_0}\left(\sum_{n=1}^{i}\frac{l_{ni}l_{n,N+1}l_{1j}l_{1,N+1}}{k_{n-1}} + \sum_{n=1}^{j}\frac{l_{nj}l_{n,N+1}l_{1i}l_{1,N+1}}{k_{n-1}} - \sum_{n=1}^{\alpha}\frac{l_{ni}l_{nj}l_{1,N+1}^2}{k_{n-1}} - \sum_{n=1}^{N+1}\frac{l_{1i}l_{1j}l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}}\right)\right]\end{aligned}$$

中括号内的第一项正是我们需要的，考察第二项：

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= \frac{k_1\cdots k_N}{l_1^2\cdots l_{N+1}^2}\left(\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{l_{n\alpha}l_{n,N+1}l_{1\beta}l_{1,N+1}}{k_{n-1}} + \sum_{n=1}^{\beta}\frac{l_{n\beta}l_{n,N+1}l_{1\alpha}l_{1,N+1}}{k_{n-1}} - \right.\\
&\left.\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{l_{n\alpha}l_{n\beta}l_{1,N+1}^2}{k_{n-1}} - \sum_{n=1}^{\beta}\frac{l_{1\alpha}l_{1\beta}l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}} - \sum_{n=\beta+1}^{N+1}\frac{l_{1i}l_{1j}l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}}\right)\\
&= \frac{k_1\cdots k_N}{l_1^2\cdots l_{N+1}^2}\left[\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{l_{n\alpha}l_{1,N+1}}{k_{n-1}}(l_{1\beta}l_{n,N+1} - l_{n\beta}l_{1,N+1}) + \right.\\
&\left.\sum_{n=1}^{\beta}\frac{l_{1\alpha}l_{n,N+1}}{k_{n-1}}(l_{n\beta}l_{1,N+1} - l_{1\beta}l_{n,N+1}) - \sum_{n=\beta+1}^{N+1}\frac{l_{1i}l_{1j}l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{k_1\cdots k_N}{l_1^2\cdots l_{N+1}^2}\Big[\sum_{n=2}^{\alpha}\frac{l_{n\alpha}l_{1,N+1}-l_{1\alpha}l_{n,N+1}}{k_{n-1}}(l_{1\beta}l_{n,N+1}-l_{n\beta}l_{1,N+1})-$$

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\beta}\frac{l_{1\alpha}l_{n,N+1}l_{1,N+1}l_{\beta+1,N+1}}{k_{n-1}}-\sum_{n=\beta+1}^{N+1}\frac{l_{1i}l_{1j}l_{n,N+1}^2}{k_{n-1}}\Big]=-\boldsymbol{A}_{N+1,ij}^{(pp)}$$

这里用到了诸如 $l_{1i}l_{1j}=l_{1\alpha}l_{1\beta}$ 的转换，(19) 式得证。

采用完全类似的方法，并注意以下事实：

$$\det\boldsymbol{A}_N^{(cc)}=\det\boldsymbol{A}_N^{(cp)}+\frac{k_N}{l_N^2}\det\widetilde{\boldsymbol{A}}_{N-1}^{(cc)}$$

即可证明(20) 式的成立。此处 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{N-1}^{(cc)}$ 是从 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_N^{(cc)}$ 中划去最后一行和最后一列所得的矩阵。

四　极限关系的验证

和文[1] 一样，当差分点无限增多，所有差分步长一致趋于零时，我们有

当 $i\leqslant j$ 时，

$$\lim r_{ij}^{(cs)}=\Big\{\int_0^x\mathrm{d}z\Big[\int_0^z\mathrm{d}u\int_0^u\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\int_z^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_z^x\mathrm{d}u\int_u^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]+$$

$$\int_x^s\mathrm{d}z\int_z^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^u\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big\}\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}$$

$$=\Big\{\int_0^x\mathrm{d}z\Big[\int_0^z\frac{z-t}{r(t)}\mathrm{d}t\Big(\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big)+\Big(x\int_x^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-z\int_z^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_z^x\frac{t\,\mathrm{d}t}{r(t)}\Big)$$

$$\cdot\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]+\Big[s\int_s^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-x\int_x^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_x^s\frac{t\,\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]\int_0^x\frac{x-t}{r(t)}\mathrm{d}t\Big\}\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}$$

$$=\int_0^x\Big[z\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]\mathrm{d}z-x\int_0^x\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_0^x\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{r(t)}+\Big\{\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big(-z\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_0^x\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}+$$

$$x\int_x^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big)+\Big[s\Big(\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-\int_0^s\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big)-x\int_x^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_x^s\frac{t\,\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]\int_0^x\frac{x-t}{r(t)}\mathrm{d}t\Big\}\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}$$

$$=\int_0^x\frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t-\int_0^s\frac{s-t}{r(t)}\mathrm{d}t\cdot\int_0^x\frac{x-t}{r(t)}\mathrm{d}t\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\quad(x\leqslant s)$$

当 $i>j$ 时，

$$\lim r_{ij}^{(cs)}=\int_0^s\mathrm{d}z\Big[\int_0^z\mathrm{d}u\int_0^u\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\int_z^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_z^x\mathrm{d}u\int_z^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}$$

$$=\int_0^s\mathrm{d}z\Big[\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big(\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big)+\Big(x\int_x^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-z\int_z^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_z^x\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}\Big)\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}$$

$$=-s\int_0^s\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_0^s\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{r(t)}+\int_0^s\mathrm{d}z\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big[x\Big(\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\Big)+\int_z^x\frac{t\,\mathrm{d}t}{r(t)}\Big]\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}$$

$$=\int_0^s\frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}\mathrm{d}t-\int_0^s\frac{s-t}{r(t)}\mathrm{d}t\cdot\int_0^x\frac{x-t}{r(t)}\mathrm{d}t\Big/\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\quad(x>s)$$

即

$$\lim r_{ij}^{(cs)}=G^{(cs)}(x,s)$$

同理有

$$\lim r_{ij}^{(ps)}=\begin{cases}\int_0^x dz\left[\int_0^z du\int_z^l \frac{dt}{r(t)}+\int_z^x du\int_u^l \frac{dt}{r(t)}\right]+\int_x^s dz\int_0^x du\int_z^l \frac{dt}{r(t)} & (x\leqslant s)\\ \int_0^s dz\left[\int_0^z du\int_z^l \frac{dt}{r(t)}+\int_z^x du\int_u^l \frac{dt}{r(t)}\right] & (x>s)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^x dz\left[z\int_z^l \frac{dt}{r(t)}+x\int_x^l \frac{dt}{r(t)}-z\int_z^l \frac{dt}{r(t)}+\int_z^x \frac{t\,dt}{r(t)}\right]+\int_x^s\left(x\int_z^l \frac{dt}{r(t)}\right)dz & (x\leqslant s)\\ \int_0^s\left[x\int_x^l \frac{dt}{r(t)}+\int_z^x \frac{t\,dt}{r(t)}\right]dz & (x>s)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2\int_x^l \frac{dt}{r(t)}+\int_0^x \frac{t^2\,dt}{r(t)}+x\left(z\int_z^l \frac{dt}{r(t)}\Big|_x^s+\int_z^x \frac{t\,dt}{r(t)}\right) & (x\leqslant s)\\ xs\int_x^l \frac{dt}{r(t)}+s\int_s^x \frac{t\,dt}{r(t)}+\int_0^s \frac{t^2\,dt}{r(t)} & (x>s)\end{cases}$$

$$=G^{(ps)}(x,s)$$

$$\lim r_{ij}^{(cp)}=\int_0^{\min(x,s)}\frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}dt-$$

$$\int_0^x \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}dt\int_0^s \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}dt\Big/\int_0^l \frac{(l-t)^2}{r(t)}dt$$

$$=G^{(cp)}(x,s)$$

$$\lim r_{ij}^{(cc)}=\int_0^\alpha \frac{du}{r(u)}\int_\beta^l \frac{dv}{r(v)}\left[\int_u^\alpha \frac{(t-u)^2(v-x)(v-s)}{r(t)}dt+\right.$$

$$\left.\int_\alpha^\beta \frac{(\alpha-u)(t-u)(v-t)(v-\beta)}{r(t)}dt+\int_\beta^v \frac{(x-u)(s-u)(t-v)^2}{r(t)}dt\right]$$

$$\Big/\int_0^l \frac{dz}{r(z)}\int_0^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt$$

$$=\left\{\int_0^\alpha \frac{dz}{r(z)}\int_z^\alpha \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt\cdot\int_\beta^l \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}dt+\int_0^\alpha \frac{\alpha-u}{r(u)}\cdot\right.$$

$$\left[\int_\beta^l\left(\frac{v-\beta}{r(v)}\int_\alpha^\beta \frac{(v-t)(t-u)}{r(t)}dt\right)dv\right]du$$

$$\left.+\int_0^\alpha \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)}dt\cdot\int_\beta^l \frac{dz}{r(z)}\int_\beta^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt\right\}\Big/\int_0^l \frac{dz}{r(z)}\int_0^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt \tag{23}$$

这里 $\alpha=\min(x,s)$，$\beta=\max(x,s)$。**因为**

$$\int_\beta^l \frac{dz}{r(z)}\int_\beta^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt=\int_0^l \frac{dz}{r(z)}\int_\beta^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt-\int_0^\beta \frac{dz}{r(z)}\int_\beta^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt$$

$$=\int_0^l \frac{dz}{r(z)}\int_0^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt-\int_0^l \frac{dz}{r(z)}\int_0^\beta \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt-\int_0^\beta \frac{dz}{r(z)}\int_\beta^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt \tag{24}$$

而

$$\int_0^l \frac{dz}{r(z)}\int_0^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt=\int_0^l\left[\int_0^z \frac{(z-t)^2}{r(t)}dt\right]d\int_0^z \frac{dt}{r(t)}$$

$$=\int_0^l \frac{(l-t)^2}{r(t)}dt\cdot\int_0^l \frac{dt}{r(t)}-\int_0^l\left[\int_0^z \frac{dt}{r(t)}\cdot\int_0^z \frac{2(z-t)}{r(t)}dt\right]dz$$

$$\int_0^l\left[\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^z\frac{z-t}{r(t)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z=z\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^z\frac{z-t}{r(t)}\mathrm{d}t\,\Big|_0^l-\int_0^l zd\left(\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^z\frac{z-t}{r(t)}\mathrm{d}t\right)$$

$$=l\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^l\frac{l-t}{r(t)}\mathrm{d}t-\int_0^l z\left(\frac{\mathrm{d}z}{r(z)}\int_0^z\frac{z-t}{r(t)}\mathrm{d}t+\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\right)\mathrm{d}z$$

$$=l\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^l\frac{l-t}{r(t)}\mathrm{d}t-\int_0^z\frac{z-t}{r(t)}\mathrm{d}t\int_0^z\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}\,\Big|_0^l$$

$$+\int_0^l\left(\int_0^z\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\right)\mathrm{d}z-\int_0^l\left[z\left(\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\right)^2\right]\mathrm{d}z$$

$$=l\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\cdot\int_0^l\frac{l-t}{r(t)}\mathrm{d}t-\int_0^l\frac{l-t}{r(t)}\mathrm{d}t\int_0^l\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}-\int_0^l\left(\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}\int_0^z\frac{z-t}{r(t)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z$$

这样

$$\int_0^l\frac{\mathrm{d}z}{r(z)}\int_0^z\frac{(z-t)^2}{r(t)}\mathrm{d}t=\int_0^l\frac{t^2\mathrm{d}t}{r(t)}\int_0^l\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}-\left(\int_0^l\frac{t\mathrm{d}t}{r(t)}\right)^2=\Delta$$

可见，由(23)式中大括号内第三项和(24)式第一项即给出(13)式的第一项，再把大括号内其余所有项“化整为零”后合并同类项即可完全证明

$$\lim r_{ij}^{(\alpha)}=G^{(\alpha)}(x,s)$$

五　结束语

以上我们分别导出了六种静定、超静定梁的格林函数和柔度系数，验证了它们之间的极限关系。这一结果将被用来从离散系统的定性性质直接导出相应连续系统的定性性质。

参考文献

[1] 王其申，王大钧．杆、梁差分离散系统的柔度矩阵及其极限．力学与实践，1996(5)

[2] 王其申，王大钧．梁的正系统的补充定义及其格林函数振荡性的证明．安庆师范学院学报，1997(1)

[3] 何北昌，王大钧，王其申．Euler梁有限差分模型的振动逆问题．振动工程学报，1989(2)

梁的截面形状误差对其频率和模态的影响

摘　要　本文讨论了由于加工等原因引起的截面形状误差对其固有振动的频率和模态的影响，并就简支梁、悬臂梁和固支—滑支梁的情况进行了敏度分析。

关键词　梁　截面形状误差　频率　模态　敏度分析

一　引　　言

近来，人们对结构形状变化对其固有振动的特征量（频率和模态）的影响很感兴趣[1—4]，这是因为这一工作有着重要的工程应用价值。对于一维和二维结构，结构形状包括两个方面，一是横截面的形状，它对结构振动的影响主要表现在方程中；二是结构的边界形状、位置及支承方式，它们对振动的影响主要表现在边界条件上。关于结构形状对其频率的敏度分析，应用变分法[1]或摄动法[2,3]均可获得有效的结论。但要同时对频率和模态进行敏度分析，文[4]所提出的方法似乎更加适用。因此，本文仿照文[4]的方法，讨论了由于加工、安装需要等原因引起的截面形状误差对梁的频率和模态的影响，给出了任意支承梁的频率、模态关于形状误差的导数的分析表达式。结果表明，当梁端固支、铰支或自由时，文[1]的结论完全正确。而当梁含有滑支端时，文[1]有关频率的敏度分析表达式需加修正。

二　频率和模态关于截面形状误差的导数的确定

长为 l、横截面抗弯刚度 $S_0(x)=EJ_0(x)$、线密度为 $\rho_0(x)$ 的梁的位移模态所满足的方程是：

$$[S_0(x)u''_i(x)]''=\lambda_i\rho_0(x)u_i(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l) \tag{1}$$

$$[S_0(x)u''_i(x)]'_{x=0}+h_1u_i(0)=0=[S_0(x)u''_i(x)]'_{x=l}-h_2u_i(l) \tag{2}$$

$$S_0(0)u''_i(0)-k_1u'_i(0)=0=S_0(l)u''_i(l)+k_2u'_i(l) \tag{3}$$

这里“′”表示对空间变量 x 的导数。$\lambda_i=\omega_i^2$ 是第 i 个特征值，$u_i(x)$ 是相应的位移模态。设想由于加工误差等原因导致刚度和线密度出现增量 $\tau f(x)$、$\tau g(x)$，这里 τ 是个小量，即

$$S(x)=S_0(x)+\tau f(x),\quad \rho(x)=\rho_0(x)+\tau g(x) \tag{4}$$

此处 $f(x)$、$g(x)$ 均为有界已知函数。则方程(1)—(3)变为：

* 本文原载于《安庆师范学院学报》1998年第4期，这里文字略有改动。

$$[S(x)u''_{i\tau}(x)]'' = \lambda_{i\tau}\rho(x)u_{i\tau}(x) \tag{5}$$

$$[S(x)u''_{i\tau}(x)]'_{x=0} + h_1 u_{i\tau}(0) = 0 = [S(x)u''_{i\tau}(x)]'_{x=l} - h_2 u_{i\tau}(l) \tag{6}$$

$$S(0)u''_{i\tau}(0) - k_1 u'_{i\tau}(0) = 0 = S(l)u''_{i\tau}(l) + k_2 u'_{i\tau}(l) \tag{7}$$

定义特征量关于 τ 的导数为

$$\dot{\lambda}_i = \lim_{\tau\to 0}\frac{\lambda_{i\tau}-\lambda_i}{\tau},\quad \dot{u}_i = \lim_{\tau\to 0}\frac{u_{i\tau}-u_i}{\tau}\quad (i=1,2,\cdots) \tag{8}$$

则把(5)—(7) **式对 τ 求导后并令 $\tau\to 0$ 得**

$$[S_0(x)\dot{u}''_i(x)]'' - \lambda_i\rho_0(x)\dot{u}_i(x) = \dot{\lambda}_i\rho_0(x)u_i(x) + \lambda_i g(x)u_i(x) - [f(x)u''_i(x)]'' \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}&[S_0(x)\dot{u}''_i(x)]'_{x=0} + h_1\dot{u}_i(0) = -[f(x)u''_i(x)]'_{x=0}\\ &[S_0(x)\dot{u}''_i(x)]'_{x=l} - h_2\dot{u}_i(l) = -[f(x)u''_i(x)]'_{x=l}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$S_0(0)\dot{u}''_i(0) - k_1\dot{u}'_i(0) = -f(0)u''_i(0),\quad S_0(l)\dot{u}''_i(l) + k_2\dot{u}'_i(l) = -f(l)u''_i(l) \tag{11}$$

不同于方程(1)—(3),$\dot{\lambda}_i$ **与** $\dot{u}_i$ **所满足的方程**(9)—(11) **是非齐次的。为了消除非齐次边条件,我们引入辅助函数** $f_i(x)$ **并让它满足**

$$[S_0(x)f''_i(x)]'' = 0 \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}&[S_0(x)f''_i(x)]'_{x=0} + h_1 f_i(0) = -[f(x)u''_i(x)]'_{x=0}\\ &[S_0(x)f''_i(x)]'_{x=l} - h_2 f_i(l) = -[f(x)u''_i(x)]'_{x=l}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$S_0(0)f''_i(0) - k_1 f'_i(0) = -f(0)u''_i(0),\quad S_0(l)f''_i(l) + k_2 f'_i(l) = -f(l)u''_i(l) \tag{14}$$

它的物理意义是在边界力$-[f(x)u''_i(x)]'_{x=0,l}$ **和边界弯矩**$[-f(x)u''_i(x)]_{x=0,l}$ **的作用下产生的位移。它的解不难通过直接积分**(12) **式而求得。一旦** $f_i(x)$ **被确定后,则由线性微分方程的叠加原理可设**

$$\dot{u}_i(x) = Z_i(x) + f_i(x)\quad (i=1,2,\cdots) \tag{15}$$

而将问题(9)—(11) **转化为**

$$\begin{aligned}&[S_0(x)Z''_i(x)]'' - \lambda_i\rho_0(x)Z_i(x) = \dot{\lambda}_i\rho_0(x)u_i(x) + \\ &\lambda_i g(x)u_i(x) - [f(x)u''_i(x)]'' + \lambda_i\rho_0(x)f_i(x)\end{aligned} \tag{16}$$

$$[S_0(x)Z''_i(x)]'_{x=0} + h_1 Z_i(0) = 0 = [S_0(x)Z''_i(x)]'_{x=l} - h_2 Z_i(l) \tag{17}$$

$$S_0(0)Z_i(0) - k_1 Z'_i(0) = 0 = S_0(l)Z''_i(l) + k_2 Z'_i(l) \tag{18}$$

对于这样一个非齐次方程齐次边条件的物理问题,不难利用所谓模态叠加法即数学上的按特征函数族展开法求解如下:

令

$$Z_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j u_j(x) \tag{19}$$

将此代入(16)式并注意到 $u_j(x)$ 满足方程(1)，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_i)C_j\rho_0(x)u_j(x)\\&\quad=\dot{\lambda}_i\rho_0(x)u_i(x)+\lambda_i g(x)u_i(x)-[f(x)u''_i(x)]''+\lambda_i\rho_0(x)f_i(x)\end{aligned} \tag{20}$$

利用 $\{u_i(x)\}_1^{\infty}$ 的正交归一关系：

$$\int_0^l \rho_0(x)u_i(x)u_j(x)\mathrm{d}x=\delta_{ij} \tag{21}$$

我们得到 $\dot{\lambda}_i$、系数 $C_j(j\neq i)$ 的如下表达式

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i&=[f(x)u''_i(x)]'u_i(x)\mid_0^l-f(x)u''_i(x)u'_i(x)\mid_0^l+\\&\quad\int_0^l f(x)[u''_i(x)]^2\mathrm{d}x-\lambda_i\int_0^l[g(x)u_i(x)+\rho_0(x)f_i(x)]u_i(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}C_j&=\frac{1}{\lambda_j-\lambda_i}\Big\{\lambda_i\int_0^l[g(x)u_i(x)+\rho_0(x)f_i(x)]u_j(x)\mathrm{d}x-[f(x)u''_i(x)]'u_j(x)\mid_0^l+\\&\quad f(x)u''_i(x)u'_j(x)\mid_0^l-\int_0^l f(x)u''_i(x)u''_j(x)\mathrm{d}x\Big\}\end{aligned} \tag{23}$$

为了确定 C_i，我们利用 $u_{i\tau}(x)$ 的归一关系

$$\int_0^l \rho(x)u_{i\tau}^2(x)\mathrm{d}x=1\quad(i=1,2,\cdots)$$

两边对 τ 求导后并令 $\tau\to 0$ 得

$$2\int_0^l \rho_0(x)u_i(x)\dot{u}_i(x)\mathrm{d}x+\int_0^l g(x)u_i^2(x)\mathrm{d}x=0$$

注意到(15)—(19)和 $\{u_i(x)\}_1^{\infty}$ 的正交性，我们得到

$$C_i=-\frac{1}{2}\int_0^l[g(x)u_i(x)+2\rho_0(x)f_i(x)]u_i(x)\mathrm{d}x \tag{24}$$

至此，$u_i(x)$ 对 τ 的导数是

$$\dot{u}_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j u_j(x)+f_i(x)\quad(i=1,2,\cdots) \tag{25}$$

其中 C_j 由(23)、(24)式确定而 $f_i(x)$ 是(12)—(14)式的解。

三 举 例

作为例子，我们来看三种最常见的梁：两端铰支、固支 — 自由和固支 — 滑支梁的情况。

1. 对两端铰支梁，由于 $u_i(0) = u_i(l) = u''_i(0) = u''_i(l) = 0$，因而(12)—(14) 式给出 $f_i(x) \equiv 0 (i = 1,2,\cdots)$，这样

$$\dot{\lambda}_i = \int_0^l f(x)[u''_i(x)]^2 \mathrm{d}x - \lambda_i \int_0^l g(x) u_i^2(x) \mathrm{d}x \tag{26}$$

这与文[1] 的结果完全一致。同时还有

$$C_j = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\left[\lambda_i \int_0^l g(x) u_i(x) u_j(x) \mathrm{d}x - \int_0^l f(x) u''_i(x) u''_j(x) \mathrm{d}x\right]$$

$$(j = 1,\cdots, i-1, i, i+1,\cdots)$$

$$C_i = -\frac{1}{2}\int_0^l g(x) u_i^2(x) \mathrm{d}x$$

和

$$\begin{aligned}\dot{u}_i = & -\frac{1}{2} u_i(x) \int_0^l g(x) u_i^2(x) \mathrm{d}x + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\left[\lambda_i \int_0^l g(x) u_i(x) u_j(x) \mathrm{d}x - \int_0^l f(x) u''_i(x) u''_j(x) \mathrm{d}x\right] u_j(x)\end{aligned} \tag{27}$$

2. 对固支 — 自由梁，由于 $u_i(x)$ 满足的边条件是 $u_i(0) = u'_i(0) = 0, S_0(l) u''_i(l) = 0$，$[S_0(x) u''_i(x)]'_{x=l} = S_0(l) u'''_i(l) + S'_0(l) u''_i(l) = 0$。但对工程实际中的梁 $S_0(l) \neq 0$ 而有 $u''_i(l) = 0 = u'''_i(l)$。这样$[f(x) u''_i(x)]'_{x=l} = 0$。故与简支梁一样，对固支 — 自由梁也有 $f_i(x) \equiv 0 (i = 1,2,\cdots)$，这就得出：

$$\dot{\lambda}_i = \int_0^l f(x)[u''_i(x)]^2 \mathrm{d}x - \lambda_i \int_0^l g(x) u_i^2(x) \mathrm{d}x$$

与文[1] 结果完全一致。同时 $\dot{u}_i$ 亦由(27) 式表示。

3. 对固支 — 滑支梁，$[f(x) u''_i(x)]'_{x=l} \neq 0$，由(12)—(14) 式可以求得：

$$f_i(x) = \int_0^x \int_0^\xi \frac{[f(x) u''_i(x)]'_{x=l}(l-t)}{S_0(t)} \mathrm{d}t \mathrm{d}\xi \quad (i = 1,2,\cdots) \tag{28}$$

其中 $u_i(x)$ 是由方程(1)—(3) 当 $h_1 = \infty = k_1 = k_2, h_2 = 0$ 时所确定的第 i 阶位移模态。进而可得：

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i = & [f(x) u''_i(x)]'_{x=l} \cdot u_i(l) + \int_0^l f(x)[u''_i(x)]^2 \mathrm{d}x - \\ & \lambda_i \int_0^l g(x) u_i^2(x) \mathrm{d}x - \int_0^l \rho_0(x) f_i(x) u_i(x) \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{29}$$

与文[1] 结果相比，这里多出了一、四两项。第一项反映了由于截面参数变动引起边界力的变化对频率的影响；第四项反映了由于结构参数变动引起模态变动对频率的影响。

至于模态导数，则有

$$\dot{u}_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j u_j(x) + f_i(x) \quad (i = 1,2,\cdots)$$

其中

$$C_j = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\left\{\lambda_i\int_0^l [g(x)u_i(x) + \rho_0(x)f_i(x)]u_j(x)\mathrm{d}x - [f(x)u''_i(x)]'_{x=l}u_j(l) - \int_0^l f(x)u''_i(x)u''_j(x)\mathrm{d}x\right\} \quad (j = 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots)$$

$$C_i = -\frac{1}{2}\int_0^l [2\rho_0(x)f_i(x) + g(x)u_i(x)]u_i(x)\mathrm{d}x \tag{23}$$

四　结束语

以上我们从梁的模态方程出发，直接导出了频率和模态对梁的截面参数变动的导数。结果表明，对由固支、铰支或自由端组成的梁，文[1] 的结果完全正确，但对含有滑支端的梁，参数变动引起模态和边界力的变动的影响不可忽略，必须用本文(29) 式代替文[1] 的(19.2)式。

参考文献

[1] Liu Zhong-sheng et al., *Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics*, Acta Mechanica Solida Sinica, 1993, 6(3)

[2] 胡海昌．弹性力学的变分原理及其应用．北京：科学出版社，1982

[3] Jamal. A. Masad., *Natural Frequencies of Rectangular Membrane with Boundary Perturbation*, Journal of Vibration and Contral, 1995(1)

[4] Liu Zhong-sheng et al., *Eigenpair Derivative with Respect to Boundary Shape*, AIAA, 1996

第二专题

弹性结构振动的反问题

振动反问题是 20 世纪中后期学术界一个非常活跃的领域。它在工程领域中的应用价值是人所共知的，至今这一领域仍有许多新的成果在不断涌现。笔者有幸和自己的导师王大钧一起较早涉及了这一领域。而在这一领域中的工作又是和弹性结构振动的定性性质密不可分的。

在这一部分中，收录了笔者作为第一作者或独撰的学术论文共 8 篇，其中发表在国家核心期刊上的论文 4 篇，国际学术会议上宣读的论文 1 篇。该部分着重研究了两端铰支梁的频谱反问题；在国内率先研究了任意支承条件下的杆和梁的离散系统以及相应连续系统的模态反问题；与二阶离散系统密切相关的 Jacobi 矩阵的两类新的反问题；杆梁组合单支结构以及弹性基础上的杆的模态反问题等。

弹簧—质点系统的逆特征值问题

摘　要　本文讨论了几种特定情况下弹簧—质点系统物理参数的计算方法，并指出了弹簧—质点系统逆特征值问题的一些特点。

一　引　言

对于雅可比矩阵的逆特征值问题，文献[1]、[2]、[3]作了详细的讨论。作为其力学模型，考虑图1所示的弹簧—质点系统，其自由振动归结为广义特征值问题：

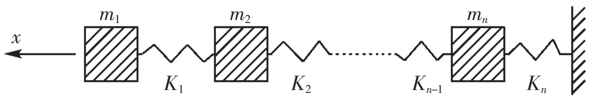

图1　一端固定一端自由的弹簧—质点系统

$$(\omega^2 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{X} = 0 \tag{1}$$

式中，ω 是圆频率，质量矩阵 $\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}\{m_i\}_1^n$，刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是 Jacobi 矩阵：

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2+K_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{n-2}+K_{n-1} & -K_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -K_{n-1} & K_{n-1}+K_n \end{pmatrix}$$

而 $\boldsymbol{X}$ 是位移矢量，$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$。这个问题也可表达为等价的非对称三对角矩阵的标准特征值问题：

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})\boldsymbol{X} = 0 \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 是单位阵，而

* 本文原载于《安庆师范学院学报》1987年第1期，原文作者为王其申、王大钧（北京大学力学系）。

** 本文曾在全国第一次逆特征值问题讨论会上宣读。

$$
\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}
a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-c_1 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -b_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & a_n
\end{pmatrix} \tag{3}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
a_i &= \frac{K_{i-1}+K_i}{m_i}\\
b_i &= K_i/m_i\\
c_{i-1} &= K_{i-1}/m_i
\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,n;K_0=0) \tag{4}
$$

显然有

$$
a_i = b_i + c_{i-1} \tag{5}
$$

作为一般的非对称三对角矩阵的逆特征值问题，从纯数学的角度看来，似乎需要$(3n-2)$个参数才能唯一确定其全部元素，但此处考虑到其力学背景，矩阵(3)的元素之间存在约束关系(5)式，因而实际需要的参数将少于这种数学估计。我们讨论以下四种情况：

(1) 一般的弹簧—质点系统，即对系统的质量分布与弹簧常数事先不加任何限制。这时需要$2n$个参数可以唯一确定系统本身。

(2) 事先假定系统内质量均匀分布；

(3) 事先假定系统内弹簧常数均相同；

在这两种情况下，当另一组物理参数(弹簧常数或质量分布)不同时，需要$(n+1)$个已知参数亦可唯一确定系统本身。

(4) 如果事先假定系统内质量均匀分布而弹簧常数也相同。这时仅需两个已知参数即可唯一确定系统本身。

下面，首先讨论一下矩阵(3)的两条性质。

二 预备知识

为了叙述弹簧—质点系统物理参数的计算方法，我们首先给出以下两个引理。

引理1 对于附有约束条件(5)的正定矩阵(3)，成立如下公式：

$$
b_i = \Delta_i/\Delta_{i-1} \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{6}
$$

这里Δ_i是$\boldsymbol{J}$的顺序主子式，即

$$
\Delta_0 = 1,\quad \Delta_1 = a_1
$$

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1\\ -c_1 & a_2 \end{vmatrix}\cdots
$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{7}$$

证明 由矩阵(3)的正定性,显然$\Delta_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n-1)$。以下我们采用数学归纳法证明引理。

对于b_1,显然有$b_1 = a_1 = \Delta_1/\Delta_0$;

同样,$b_2 = a_2 - c_1 = a_1(a_2 - c_1)/a_1 = \Delta_2/\Delta_1$;

现在设当$i = k$时有$b_k = \Delta_k/\Delta_{k-1}$,那么

$$b_{k+1} = a_{k+1} - c_k = (a_{k+1} - c_k)\Delta_k/\Delta_k = (a_{k+1}\Delta_k - c_k \cdot b_k\Delta_{k-1})/\Delta_k = \Delta_{k+1}/\Delta_k$$

按归纳法,引理证毕。顺便指出,按上面的推理,同样有

$$b_n = a_n - c_{n-1} = \Delta_n/\Delta_{n-1}$$

引理 2 对于附有约束条件(5)的正定矩阵(3),成立下述公式:

$$(u_i - u_{i+1})K_i = \lambda\sum_{j=1}^{i} m_j u_j \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

这里λ是(3)的任一特征值。而$(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$是相应的特征矢量。

证明 因λ是$\boldsymbol{J}$的特征值,而$\{u\} = (u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$是相应的特征矢量:

$$\boldsymbol{J}\{u\} = \lambda\{u\}$$

具体写出来就是:

$$a_1u_1 - b_1u_2 = \lambda u_1$$

$$-c_{i-1}u_{i-1} + a_iu_i - b_iu_{i+1} = \lambda u_i \quad (i = 2,\cdots,n)$$

以(4)式关系代入并取$u_{n+1} = 0$,则有

$$\left.\begin{aligned} & K_1(u_1 - u_2) = \lambda m_1 u_1 \\ & -K_{i-1}(u_{i-1} - u_i) + K_i(u_i - u_{i+1}) = \lambda m_i u_i \\ & (i = 2,3,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

把前i个式子相加,即得:

$$(u_i - u_{i+1})K_i = \lambda\sum_{j=1}^{i} m_j u_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

这就是所要证明的。

上面导出的公式虽然简单,但是从它可以推出特征矢量的一系列重要性质。不过这不是本文的重点,因而不拟一一介绍,仅只介绍以下几点:

推论一 相应于基频的振型从自由端算起是严格递减的。即

$$u_1^{(1)} > u_2^{(1)} > \cdots > u_n^{(1)} (> 0) \tag{10}$$

这是因为右端的和数恒正且 $K_i > 0$。

推论二 相应于最高频率的振型$\{u^{(n)}\}$ **的分量满足**

$$(-1)^{s-1}\sum_{j=1}^{s} m_j u_j^{(n)} > 0 \tag{11}$$

这里已经假设各振型的第一分量取正值。这时，$u_s^{(n)} = (-1)^{s-1} \mid u_s^{(n)} \mid$**，而** $K_s > 0$。

推论三 相应于第 i **个本征值的特征矢量**$\{u^{(i)}\}$ **的分量满足**

1) **当** $u_s^{(i)} \neq u_{s+1}^{(i)}$ **时，**$\sum\limits_{j=1}^{s} m_j u_j^{(i)} \neq 0$；

当 $u_s^{(i)} = u_{s+1}^{(i)}$ **时，必有**$\sum\limits_{j=1}^{s} m_j u_j^{(i)} = 0$。

在作了以上准备以后，下面我们转入正题。

三 弹簧 — 质点系统物理参数的算法

1. **一般情况，即对系统物理参数事先不加任何限制，这时有：**

定理 1 设给定 $2n$ **个正数**$(\lambda_i)_1^n$、$(\mu_i)_1^{n-1}$ **与** A**，满足** $\lambda_i < \mu_i < \lambda_{i+1}(i = 1,2,\cdots,n-1)$，**则存在唯一的图** 1 **所示的弹簧 — 质点系统，它以**$(\lambda_i)_1^n$ **为其固有圆频率的平方，而以**$(\mu_i)_1^{n-1}$ **为固定** m_1 **所得系统固有圆频率的平方，并以** A **为系统的总质量。**

证明 事实上，可以用各种算法，由数组$(\lambda_i)_1^n$ **和**$(\mu_i)_1^{n-1}$ **唯一确定对称元素的雅可比阵** $J(a,d,n)$**，例如文献**[2]、[4]**。余下的问题是确定系统的物理参数** m_i、$K_i(i = 1,2,\cdots,n)$。**为此我们首先将** $J(a,d,n)$ **非对称化**

$$b_j c_j = d_j^2 \quad (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

这不改变矩阵 *J* 及各阶主子式的本征值，我们按以下程序：

令 $b_1 = a_1$**，于是** $c_1 = d_1^2/b_1$。**一般地则有**

$$b_i = a_i - c_{i-1} \quad (i = 2,3,\cdots,n-1) \tag{12}$$

$$c_i = d_i^2/b_i \quad (i = 2,3,\cdots,n-1) \tag{13}$$

由引理 1**，这样得到的** $b_i > 0(i = 1,2,\cdots,n-1)$**，从而** $c_i > 0(i = 1,2,\cdots,n-1)$。

为了确定参数 m_i、$K_i(i = 1,2,\cdots,n)$**，由**(4) **式**

$$m_{i+1}/m_i = b_i/c_i \quad (i = 1,2,\cdots,n-1) \tag{14}$$

于是

$$m_2 = \frac{b_1}{c_1}m_1, m_3 = \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2}m_1, \cdots, m_n = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{c_1 c_2 \cdots c_{n-1}}m_1 \tag{15}$$

按已知，$\sum_{i=1}^{n} m_i = A$，于是可以求得 m_1，进而可以算出全部 m_i。

其次，$K_i = m_i b_i (i = 1,2,\cdots,n)$，这就可以定出全部弹簧常数。

以上计算每一步都是唯一确定的，从而定理成立。

上面的讨论可以推广到以下情况：

a. 两端固定的弹簧 — 质点系统

此时，唯一改变之处是矩阵(3) 的元素 a_1 变为

$$a_1 = \frac{K_0 + K_1}{m_1} (K_0 \neq 0)$$

这时，类似地有

定理 1′　设给定两组相间的正数：$0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots < \lambda_n < \mu_n$ 和正常数 A，则存在唯一的两端固定的弹簧 — 质点系统，它以 $(\mu_i)_1^n$ 为其固有圆频率的平方，而以 $(\lambda_i)_1^n$ 为与其相应的左端自由的弹簧 — 质点系统固有圆频率的平方，系统的总质量为 A。

事实上，当给定两组频谱 $(\lambda_i)_1^n$、$(\mu_i)_1^n$ 时，业已证明，可以同时构造标准正定对称 Jacobi 阵 $J(a,d,n)$ 与 $J(a^*,d,n)$，二者唯一不同之点在于 $a_1^* = a_1 + a_1^0$，其余元素均相同(参见文献[1])。这样为了构造系统，马上可以得出

$$a_1^0 = \frac{K_0}{m_1} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

系统其余参数的确定方法可由 $J(a,d,n)$ 按定理 1 所述方法进行。

b. 两端自由的弹簧 — 质点系统

此时，只要将定理 1 的条件稍加修改，即

$$0 = \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < \mu_{n-1} < \lambda_n$$

则定理 1 所叙述的结论及参数计算方法完全适用于两端自由的系统。

需要指出的是，从理论上讲 $b_n = a_n - c_{n-1} = \Delta_n / \Delta_{n-1}$(按引理 1) $= 0$，从而必有 $c_{n-1} = a_n$，$K_n = 0$ 代表两端自由系统。但在实际计算中，由于积累误差的存在难于做到 $c_{n-1} = a_n$，而这意味着 K_n 不等于 0，这当然不合实际，这就要求尽量做到 c_{n-1} 与 a_n 相差极小，可以忽略不计。为了保证计算精度，减小积累误差，可以采取相应措施。

2. 考虑系统内质量均匀分布的情况。这时由于系统参数受到限制，问题归结为对称 Jacobi 阵的逆特征值问题。系统物理参数仅有 $(n+1)$ 个，因而上述定理 1 不适用于这种情况。事实上，如果仍然给出 $2n$ 个已知参数，满足条件的系统很可能是不存在的。

对于质量均匀分布的系统，我们有

定理 2　设给定 $(n+1)$ 个实数：$\lambda > 0, A > 0, (1 >) u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$，满足

$$(u_s - u_{s+1}) \sum_{j=0}^{s} u_j > 0 \quad (s = 0,1,2,\cdots,n-1; u_0 = 1, u_n = 0),$$

则存在唯一的质量均匀分布的图 1 所示的弹簧 — 质点系统，它以 λ 为其第 i 个固有圆频率的

平方，而以$\{u\}=(1,u_1,\cdots,u_{n-1})^{\mathrm{T}}$为其第$i$个振型，$A$是系统的总质量。这里$i$是$\{u\}$的分量序列的变号数加1。

证明　事实上，由引理2，在定理所给条件下，我们马上可以得到

$$m_1=m_2=\cdots=m_n=m=\frac{A}{n}$$

$$K_{s+1}=\lambda m\sum_{j=0}^{s}u_j/(u_s-u_{s+1})\quad(s=0,1,2,\cdots,n-1)\tag{16}$$

这样确定的$K_s(s=1,2,\cdots,n)$全是正数. 同时显然有

$$\boldsymbol{J}\{u\}=\lambda\{u\}$$

定理得证。应该指出，对于这种情况，如果给定系统的频谱与总质量，逆问题不一定有解，即使有解，也不一定唯一。我们考察两个质点的情况。这时矩阵(3)成为

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{K_1}{m} & -\dfrac{K_1}{m}\\[2ex] -\dfrac{K_1}{m} & \dfrac{K_1+K_2}{m}\end{bmatrix}\tag{17}$$

要使这样的系统具有特征值$\lambda_1=\omega_1^2,\lambda_2=\omega_2^2$，$\lambda_1$、$\lambda_2$必须满足$\lambda_2/\lambda_1\geqslant3+2\sqrt{2}$或$\omega_2/\omega_1\geqslant\sqrt{2}+1$。当等号成立时，相应的系统是唯一的。如果上述条件不满足，则逆问题的解不存在。在质点多于两个的情况下，判断逆问题的解是否存在及唯一变得十分困难。

3. 系统内弹簧常数均相同而质量分布不均匀的情况，这时类似地有：

定理3　设给定$(n+1)$个实数：$\lambda>0,A>0,(1>)u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$，满足

$$2-\frac{u_{i-1}+u_{i+1}}{u_i}>0\quad(i=2,3,\cdots,n-1;u_0=1,u_n=0)\tag{18}$$

则存在唯一的图一所示的弹簧常数均相同的弹簧—质点系统，它以λ为其第i个固有圆频率的平方，而以$\{u\}=(1,u_1,\cdots,u_{n-1})^{\mathrm{T}}$为其第$i$个振型，系统的总质量等于$A$。这里$i$等于$\{u\}$的变号数加1。

证明　事实上，由定理条件和(9)式可得

$$\left.\begin{aligned}&m_1=\frac{1-u_1}{\lambda}K\\&m_{i+1}=\left(2-\frac{u_{i-1}}{u_i}-\frac{u_{i+1}}{u_i}\right)K/\lambda(i=1,2,\cdots,n-1;u_n=0)\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

而由$\sum\limits_{i=1}^{n}m_i=A$，即

$$\left[2n-1-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{u_{j-1}}{u_j}+\frac{u_{j+1}}{u_j}\right)\right]\frac{K}{\lambda}=A\tag{20}$$

由于(19)式中K/λ的系数均大于0，从而(20)式中括号内的数为正数，这样，即可定出正数

K，进而定出全部 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$。定理证毕。

有意思的是，这里顺便给出不等式：对弹簧常数相同的系统，其第一振型还满足

$$2n-2<\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{u_{j-1}}{u_j}+\frac{u_{j+1}}{u_j}\right)<2n-1 \tag{21}$$

和第二种情况中我们指出过的一样，如果给定系统的频谱和总质量，逆问题的解不一定存在，即使存在也不一定唯一。

4. 对于质量分布与弹簧常数均相同的系统，不难想象，其实际需要的已知参数仅需两个，例如系统的总质量 A 和任一固有圆频率 ω_i。因为在这种情况下归结为常矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值问题，设其特征值为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$，则

$$m_1=m_2=\cdots=m_n=m=\frac{A}{n}$$

$$\omega_i^2=\lambda_i K/m \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

四　结　　语

以上讨论表明，弹簧—质点系统的逆特征值问题与纯数学的 Jacobi 阵的逆特征值问题是不同的，前者以后者为基础但由于真实系统参数之间存在联系，从而归结为受约束的 Jacobi 阵的逆问题。

参考文献

[1] C. Boor and G. H. Golub, *The Numerically Stable Reconstruction of a Jacobi* Matrix from Spectral Data, *Linear Algebra and Appl.*, 1978(21), 245—260

[2] L. J. Gray and D. G. Wilson, *Construction of a Jacobi Matrix from Spectral Data*, *Linear Algebra and Appl.*, 1976(14), 131—134

[3] Hochstadt H., *On the Construction of a Jacobi Matrix from Spectral Data*, *Linear Algebra and Appl.*, 1974(8), 435—446

[4] D. Boley and S. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems for Band Matrices*, Proc. dundee Conference on Numerical Analysis, 1977

由部分模态及频率数据构造杆件离散系统

摘　要　杆件的固有振动问题，可用有限元方法或差分法离散化为一个弹簧—质点串联系统的固有振动问题。本文给出了由部分模态和相应频率构造任意端条件（两端固定，一端固定一端自由，两端自由以及两端有弹性支承）下的离散系统的逆特征值问题解的存在、唯一性和解法。

关键词　逆问题　离散系统　模态

杆的纵向振动问题，可用有限元方法或差分法离散为一个弹簧—质点串联系统的固有振动问题。对于这种系统，由给定两组严格相间的频率数据构造物理参数的问题，借助于 Jacobi 矩阵的逆特征值问题已获得解决[1][2]。鉴于测量高阶离散系统的完整的频谱并非易事，有些工程问题给有模态信息，甚至是主要的信息，因此讨论另一类逆问题，即由部分模态及频率数据构造物理参数，是很有实际意义的。文[3]处理过一端固定一端自由的弹簧—质点系统。本文讨论了上述系统两端边界条件任意的逆特征值问题的解的存在、唯一性及解法。

系统固有振动的方程为

$$[E][K][E]^{\mathrm{T}}\{u\}=\omega^2[M]\{u\} \tag{1}$$

其中 ω 是圆频率，$[K]=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_{n+1})$，$k_i$ 是弹簧常数；$[M]=\mathrm{diag}(m_1,m_2,\cdots,m_n)$，$m_i$ 是集中惯性常数；$[E]$ 矩阵为

$$[E]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\end{bmatrix}_{n\times(n+1)}$$

一　构造两端固定的杆的离散模型

由方程(1)，令 $\omega_i^2=\lambda_i$，$w_j^{(i)}=u_j^{(i)}-u_{j-1}^{(i)}$（$u_0^{(i)}=u_{n+1}^{(i)}=0$），得

$$\left.\begin{aligned}\frac{k_j}{m_j}w_j^{(i)}-\frac{k_{j+1}}{m_j}w_{j+1}^{(i)}=\lambda_i u_j^{(i)}\\ \frac{k_j}{m_j}w_j^{(s)}-\frac{k_{j+1}}{m_j}w_{j+1}^{(s)}=\lambda_s u_j^{(s)}\end{aligned}\right\}(j=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

---

* 本文原载于《振动工程学报》1987 年第 1 期，原文作者为王其申、王大钧（北京大学力学系）。

* * 本文曾在全国第三届振动理论及应用学术会议上宣读。

记

$$P_j^{(i,s)}=\lambda_s u_j^{(s)} w_{j+1}^{(i)}-\lambda_i u_j^{(i)} w_{j+1}^{(s)}$$
$$Q_j^{(i,s)}=\lambda_s u_j^{(s)} w_j^{(i)}-\lambda_i u_j^{(i)} w_j^{(s)}$$
$$R_j^{(i,s)}=w_j^{(s)} w_{j+1}^{(i)}-w_j^{(i)} w_{j+1}^{(s)}$$

则有

$$\frac{k_j}{m_j}=\frac{P_j^{(i,s)}}{R_j^{(i,s)}},\quad \frac{k_{j+1}}{m_j}=\frac{Q_j^{(i,s)}}{R_j^{(i,s)}} \tag{3}$$

这表明若给定两个正数 $\lambda_i<\lambda_s$，及两个向量 $\{u^{(i)}\}=(u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_n^{(i)})^{\mathrm{T}}$ 和 $\{u^{(s)}\}=(u_1^{(s)},u_2^{(s)},\cdots u_n^{(s)})^{\mathrm{T}}$，它们的变号数分别为 $i-1$ 和 $s-1$，且 $i<s$，并且满足：当 $j=1,n$ 时 $P_j^{(i,s)}$、$Q_j^{(i,s)}$、$R_j^{(i,s)}$ 三者同号，当 $j=2,3,\cdots,n-1$ 时三者同号或同时为零。那么，由式(3)可得正值的 m_j、k_j。即存在一个两端固定的杆的离散模型，它以 $\{u^{(i)}\}$ 和 $\{u^{(s)}\}$ 为模态，对应的圆频率为 $\sqrt{\lambda_i}$ 和 $\sqrt{\lambda_s}$。

如果对每个 j，$P_j^{(i,s)}$、$Q_j^{(i,s)}$、$R_j^{(i,s)}$ 都同号，系统将能唯一确定。如果对某个 j 三者为零，则相应的 m_j、k_{j+1} 存在而不唯一，物理参数中增加一待定常数因子，这就需要用另给的模态数据来确定它们。当所给两个向量的变号数恰好差 1，即 $s=i+1$ 时，可以证明 $R_j^{(i,s)}>0(j=1,2,\cdots,n)$，故只要 $P_j^{(i,s)}$、$Q_j^{(i,s)}$ 也恒正，解存在唯一。

二　构造一端固定一端自由的杆的离散模型

此时两端的弹簧常数之一为零，设 $k_{n+1}=0$，由方程(1)有

$$k_n w_n^{(i)}=\lambda_i m_n u_n^{(i)},k_n w_n^{(s)}=\lambda_s m_n u_n^{(s)} \tag{4}$$

从而得

$$\frac{w_n^{(i)}}{\lambda_i u_n^{(i)}}=\frac{w_n^{(s)}}{\lambda_s u_n^{(s)}}>0 \tag{5}$$

这表明 $u_n^{(i)}$、$u_{n-1}^{(i)}$、$u_n^{(i)}$、$u_{n-1}^{(i)}$、λ_i、λ_s 之间必须满足这一关系。

总之，如果给定的两组频率和模态数据满足式(5)，并且对 $j=2,3,\cdots,n-1$ 有 $P_j^{(i,s)}$、$Q_j^{(i,s)}$、$R_j^{(i,s)}$ 同号或同时为零，对 $j=1$ 三者同号，则存在一个一端固定一端自由杆的离散模型，以所给数据为两组圆频率的平方和模态。

三　构造两端自由的杆的离散模型

此时 $k_1=k_{n+1}=0$，若给定的 $\{u^{(i)}\}$、$\{u^{(s)}\}$ 和 λ_i、λ_s 满足：①$w_2^{(i)}/\lambda_i u_1^{(i)}=w_2^{(s)}/\lambda_s u_1^{(s)}<0$；②$w_n^{(i)}/\lambda_i u_n^{(i)}=w_n^{(s)}/\lambda_s u_n^{(s)}>0$；③$P_j^{(i,s)}$、$Q_j^{(i,s)}$、$R_j^{(i,s)}(j=2,\cdots,n-1)$ 同号或同时为零，则存在一个两端自由杆的离散模型，以 $\{u^{(i)}\}$、$\{u^{(s)}\}$ 为两个模态，以 $\sqrt{\lambda_i}$ 和 $\sqrt{\lambda_s}$ 为相应的圆频率。顺便指出，刚体运动模态不能利用。

四　质量均匀分布的情况

此时 $m_j = m(j=1,\cdots,n)$。若给定一个变号数为 $i-1$ 的向量 $\{u\} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$ 和正数 λ，满足 $(u_s - u_{s-1})\sum_{j=s}^{n} u_j > 0(s=1,2,\cdots,n; u_0 = 0)$，则存在唯一的质量均匀分布的一端固定一端自由的杆，它以 $\{u\}$ 为第 i 个模态，以 $\sqrt{\lambda}$ 为相应的圆频率。

事实上，对于右端为自由端的弹簧质点系统，第 s 个弹簧的弹性力和右边部分所有质点的惯性力平衡，即

$$k_s(u_s - u_{s-1}) = \lambda \sum_{j=s}^{n} m_j u_j = \lambda m \sum_{j=s}^{n} u_j$$

于是

$$k_s = \lambda m \sum_{j=s}^{n} u_j / w_s$$

上面的讨论可推广到两端固定的情形，只要补充一个已知参数即可，例如 k_{n+1}。应当注意，当杆的质量均匀，刚度又具有某种对称性时，其模态分量中常含一个或几个 $u_s = u_{s-1}$，这时参数不能唯一确定。不过利用对应最高频率的模态，不会出现 $u_s = u_{s-1}$，总可唯一确定参数。

五　刚度均匀的情况

此时 $k_j = k(j=1,\cdots,n)$。若给定正数 λ 和一个向量 $\{u\}$，满足：①$2|u_s| \geqslant |u_{s-1} + u_{s+1}|(s=1,\cdots,n-1; u_0 = 0)$，且等号只在 $u_s = 0$ 时成立；②$u_{n-1}/u_n < 1$，则存在一个一端固定一端自由的刚度均匀的杆，它以 $\{u\}$ 为模态，以 $\sqrt{\lambda}$ 为相应的圆频率。

事实上，在方程(2)的第一式中取 $j=n$，得

$$m_n = (1 - u_{n-1}/u_n)k/\lambda > 0$$

取 $j=s$，有

$$m_s = [2 - (u_{s-1} + u_{s+1})/u_s]k/\lambda > 0$$

如某个 $u_s = 0$，则 m_s 不能唯一确定而需另换模态数据。上述结果也可推广到两端固定的情形。幸运的是，利用第一模态总可以构造一个刚度均匀的杆。

最后说明一点：本文所谓物理参数唯一确定都应理解为可以差一个常数因子。

六　算　　例

根据以上讨论的解法编制了程序并计算了许多例子。仅举以下数例。表 1 是两端固定等截面杆的有限元离散模型，给出第一和第二模态的计算结果。表 2 是以杆的半长为界的两段等截面杆组成的阶梯形杆的有限元模型，用第一和第四模态的结果。表 3 是两端自由的锥形杆，用第二、三模态的计算结果。表 4 为两端固定、刚度均匀、质量也均匀的杆，用第一和第二模态分别计算的结果。结果表明，前者远远优于后者。表中 $OMKI$、$OMKJ$ 是输入的频率数据，$UI(N)$、$UJ(N)$ 是输入的模态数据，$K(N)$、$M(N)$ 分别为弹簧常数和质量的计算结果，$KE(N)$、$ME(N)$ 为相应的精确值。计算结果表明尤以弹簧系数的结果为佳，而两端固定、两端自由的杆的精度高于一端固定一端自由的杆的精度。

表 1　两端固定的等截面杆

$OMKI$ = 0.25590E+04			$OMKJ$ = 0.50551E+04		
$UI(N)$	$UJ(N)$	$M(N)$	$K(N)$	$ME(N)$	$KE(N)$
0.4948E−01	0.9416E−01	0.7815E−02	0.2060E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.9412E−01	0.1523E+00	0.7806E−02	0.2059E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1296E+00	0.1522E+00	0.7791E−02	0.2056E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1523E+00	0.9412E−01	0.7806E−02	0.2063E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1601E+00	0.1503E−03	0.7768E−02	0.2064E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1523E+00	−0.9415E−01	0.7778E−02	0.2058E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1296E+00	−0.1526E+00	0.7847E−02	0.2056E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.9412E−01	−0.1523E+00	0.7837E−02	0.2057E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.4948E−01	−0.9360E−01	0.7558E−02	0.2062E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
			0.2056E+08		0.2060E+08

表 2　两段等截面的阶梯杆

$OMKI$ = 0.25590E+04			$OMKJ$ = 0.96154E+04		
$UI(N)$	$UJ(N)$	$M(N)$	$K(N)$	$ME(N)$	$KE(N)$
0.5714E−01	0.1243E+00	0.7798E−02	0.2060E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1087E+00	0.7685E−01	0.7804E−02	0.2060E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1496E+00	−0.7685E−01	0.7802E−02	0.2060E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1759E+00	−0.1244E+00	0.7807E−02	0.2056E+08	0.7800E−02	0.2060E+08
0.1849E+00	−0.1236E−05	0.5829E−02	0.2064E+08	0.5950E−02	0.2060E+08
0.1759E+00	0.2487E+00	0.3904E−02	0.1032E+08	0.3900E−02	0.1030E+08
0.1496E+00	0.1537E+00	0.3906E−02	0.1028E+08	0.3900E−02	0.1030E+08
0.1087E+00	−0.1537E+00	0.3903E−02	0.1031E+08	0.3900E−02	0.1030E+08
0.5713E−01	−0.2487E+00	0.3902E−02	0.1030E+08	0.3900E−02	0.1030E+08
			0.1031E+08		0.1030E+08

表 3　两端自由的锥形杆

$OMKI=0.30940E+04$			$OMKJ=0.55429E+04$		
$UI(N)$	$UJ(N)$	$M(N)$	$K(N)$	$ME(N)$	$KE(N)$
0.1311E+00	0.1897E+00	0.1708E−02	0.0000E+01	0.1950E−02	0.0000E+01
0.1218E+00	0.1462E+00	0.8207E−02	0.9098E+07	0.7800E−02	0.1030E+08
0.1070E+00	0.8695E−01	0.1538E−01	0.3124E+08	0.1560E−01	0.3090E+08
0.8592E−01	0.1943E−01	0.2338E−01	0.5144E+08	0.2340E−01	0.5150E+08
0.6032E−01	−0.3645E−01	0.3116E−01	0.7202E+08	0.3120E−01	0.7210E+08
0.3273E−01	−0.6504E−01	0.3900E−01	0.9257E+08	0.3900E−01	0.9270E+08
0.5898E−02	−0.6124E−01	0.4676E−01	0.1132E+09	0.4680E−01	0.1133E+09
−0.1758E−01	−0.3206E−01	0.5425E−01	0.1338E+09	0.5460E−01	0.1339E+09
−0.3559E−01	0.6891E−02	0.6289E−01	0.1544E+09	0.6240E−01	0.1545E+09
−0.4668E−01	0.3835E−01	0.7115E−01	0.1744E+09	0.7020E−01	0.1751E+09
−0.5027E−01	0.4986E−01	0.3576E−01	0.1892E+09	0.3705E−01	0.1957E+09
			0.0000E+01		0.0000E+01

表 4　两端自由、均匀质量、均匀刚度的杆

$OMKI=0.25590E+04$		$K=0.2060E+08$		$OMKJ=0.50551E+04$
$UI(N)$	$MI(N)$	$ME(N)$	$UJ(N)$	$MJ(N)$
0.4948E−01	0.7794E−02	0.7800E−02	0.9416E−01	0.7811E−02
0.9412E−01	0.7755E−02	0.7800E−02	0.1523E+00	0.7808E−02
0.1296E+00	0.7858E−02	0.7800E−02	0.1522E+00	0.7779E−02
0.1523E+00	0.7796E−02	0.7800E−02	0.9412E−01	0.7786E−02
0.1601E+00	0.7764E−02	0.7800E−02	0.1503E−03	0.1000E+21
0.1523E+00	0.7796E−02	0.7800E−02	−0.9415E−01	0.7775E−02
0.1296E+00	0.7858E−02	0.7800E−02	−0.1526E+00	0.7861E−02
0.9412E−01	0.7755E−02	0.7800E−02	−0.1523E+00	0.7830E−02
0.4948E−01	0.7794E−02	0.7800E−02	−0.9360E−01	0.7614E−02

参考文献

[1] Boor C. and Golub G. H., *The Numerically Stable Reconstruction of a Jacobi Matrix from Spectral Data*, *Linear Algebra and Appl.*, 1978(21), 245−260

[2] Gray L. J. and Wilson D. G., *Construction of a Jacobi Matrix from Spectral Data*, *Linear Algebra and Appl.*, 1976(14), 131−134

[3] Gladwell G. M. L., *Inverse Problems in Vibration*, Martinus Nijhoff Publishers, 1986, 109

由频谱数据构造两端铰支梁的差分离散系统

摘　要　本文讨论了两端铰支梁的差分离散系统固有振动的若干定性性质，证明了左端铰支、右端反共振、铰支、固支这三种梁的频谱的相间性。据此给出了由三组严格相间的频谱数据构造简支梁差分离散系统物理参数的算法和算例，并讨论了逆问题解存在的充要条件。

关键词　简支梁　频谱　逆问题

一　引　言

对基于悬臂梁的频谱逆问题，我们已在文[1]中获得了圆满的结论。鉴于在工程问题中简支梁占有同样重要的地位，因此本文讨论基于简支梁的差分离散系统的频谱逆问题。

文[1]获得的梁的物理模型如图1所示：

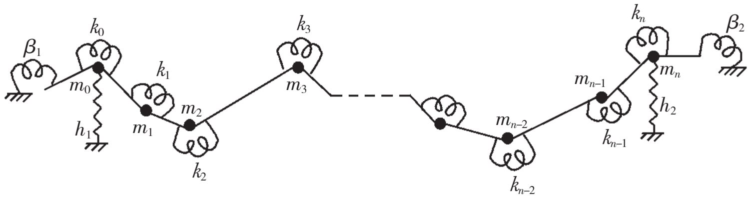

图1

这里 m_r、$k_r(r=0,1,\cdots,N)$ 分别为集中在结点处的质量和弹簧常数，$l_r(r=1,\cdots,N)$ 为刚杆长度。若记第 r 个质点的位移振幅为 $u_r(r=0,1,\cdots,N)$ 和

$$\left.\begin{aligned}\theta_r&=(u_r-u_{r-1})/l_r(r=1,\cdots,N)\\ \tau_r&=k_r(\theta_{r+1}-\theta_r)(r=1,\cdots,N-1)\\ \varphi_r&=(\tau_{r-1}-\tau_r)/l_r(r=1,\cdots,N-1)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

则两端铰支梁的横振动方程是

$$\omega^2 m_r u_r=\varphi_{r+1}(r=1,\cdots,N-1)\tag{2}$$

---

* 本文原载于《工程力学》1991年第4期，原文作者为王其申、王大钧、何北昌（北京大学力学系）。

写成矢量形式是

$$
\left.\begin{aligned}
\{\theta\} &= (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N)^{\mathrm{T}} = [L]^{-1}[E]^{\mathrm{T}}\{u\} \\
\{\tau\} &= (\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{N-1})^{\mathrm{T}} = -[K][E]\{\theta\} \\
\{\varphi\} &= (\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N)^{\mathrm{T}} = -[L]^{-1}[E]^{\mathrm{T}}\{\tau\}
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

和

$$
\omega^2[M]\{u\} = [E]\{\varphi\} = [C]\{u\} \tag{4}
$$

式中，ω 是圆频率，$\{u\}=(u_1,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$，$[M]=\mathrm{diag}(m_1,\cdots,m_{N-1})$，$[K]=\mathrm{diag}(k_1,\cdots,k_{N-1})$，$[L]=\mathrm{diag}(l_1,\cdots,l_N)$，$(N-1)\times N$ 阶常矩阵

$$
[E] = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
$$

而

$$
[C] = [E][L]^{-1}[E]^{\mathrm{T}}[K][E][L]^{-1}[E]^{\mathrm{T}} \tag{5}
$$

相应的边条件是

$$
u_0 = 0 = \tau_0,\ u_N = 0 = \tau_N \tag{6}
$$

说明一点：为了与差分模型一致，图 1 中梁的左、右端点保留了弹簧 k_0 与 k_N 及虚拟杆 l_0 与 l_{N+1}。当 $\tau_0=0=\tau_N$ 时，则认为 $\theta_0=\theta_1$，$\theta_N=\theta_{N+1}$。

以下我们首先给出差分简支梁固有横振动的若干定性性质，着重考察了当右端支承条件改变时，相应频谱与简支梁频谱之间的相间关系，并以此为基础讨论了由三组严格相间的频谱数据构造差分简支梁物理参数的条件和算法。

二　差分简支梁固有横振动的若干定性性质

可以证明：差分简支梁作横振动时的刚度矩阵$[C]$是符号振荡矩阵。而由振荡矩阵的理论知：

1. 简支梁的频谱是严格分离的，从而可记：$(0<)\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_{N-1}$。

2. 相应于 ω_i 的模态$\{u^{(i)}\}=(u_1^{(i)},\cdots,u_{N-1}^{(i)})^{\mathrm{T}}$ 恰有 $i-1$ 个变号数。这又暗含着 $u_1^{(i)}\neq 0$，$u_{N-1}^{(i)}\neq 0$。

下面，我们进一步证明：

3. $u_1^{(i)}\theta_1^{(i)}>0, u_1^{(i)}\tau_1^{(i)}<0, u_1^{(i)}\varphi_1^{(i)}>0(i=1,\cdots,N-1)$

事实上，$u_1^{(i)}\theta_1^{(i)}=u_1^{(i)}\cdot u_1^{(i)}/l_1>0$。为了证明后两个不等式，不妨设 $u_1^{(i)}>0$ 并用反证法，即 $\tau_1^{(i)}>0$。于是存在一个 s 使 $u_r^{(i)}>0(r=1,\cdots,s)$ 而 $u_{s+1}^{(i)}\leqslant 0$，这样 $\theta_{s+1}^{(i)}<0$。

另一方面由运动方程有 $\varphi_1^{(i)}>\varphi_2^{(i)}>\cdots>\varphi_{s+1}^{(i)}$，因 $\varphi_1^{(i)}=-\tau_1^{(i)}/l_1<0$，这样就有 $0<\tau_1^{(i)}<\tau_2^{(i)}<\cdots<\tau_{s+1}^{(i)}$ 和 $0<\theta_1^{(i)}<\cdots<\theta_{s+1}^{(i)}$，这与上文矛盾。在 $u_1^{(i)}<0, \tau_1^{(i)}<0$ 时可以导出同样的矛盾。这就表明 $u_1^{(i)}\tau_1^{(i)}<0$，同时即有 $u_1^{(i)}\varphi_1^{(i)}>0$。完全类似地可得：

$$u_{N-1}^{(i)}\theta_N^{(i)}<0, u_{N-1}^{(i)}\tau_{N-1}^{(i)}<0, u_{N-1}^{(i)}\varphi_N^{(i)}<0 \quad (i=1,\cdots,N-1)$$

由此推出

$$\theta_N^{(i)}\varphi_N^{(i)}>0 \quad (i=1,\cdots,N-1) \tag{7}$$

4. $\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\theta_N^{(i)}\varphi_N^{(i)}}{\omega_i^2}<\frac{1}{l_N}$

证明　记 $[U]=[\{u^{(1)}\},\{u^{(2)}\},\cdots,\{u^{(N-1)}\}]$ 和 $[\Lambda]=\mathrm{diag}(\omega_1^2,\cdots,\omega_{N-1}^2)$ 并满足 $[U]^{\mathrm{T}}[M][U]=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$，则有

$$[U]^{\mathrm{T}}[C][U]=[U]^{\mathrm{T}}[E][\Phi]=[\Lambda]$$

或

$$[\Theta]^{\mathrm{T}}[L][\Phi]=[\Lambda] \tag{8}$$

这里 $[\Theta]=[L]^{-1}[E]^{\mathrm{T}}[U]$，$[\Phi]=[L]^{-1}[E]^{\mathrm{T}}[K][E][\Theta]$ 都是 $N\times(N-1)$ 阶矩阵。引入 $\{e\}=(-1,-1,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}$ 并记

$$[\widetilde{\Theta}]=[\{e\},\{\theta^{(1)}\},\cdots,\{\theta^{(N-1)}\}],[\widetilde{\Phi}]=[\{e\},\{\varphi^{(1)}\},\cdots,\{\varphi^{(N-1)}\}],l=\sum_{r=1}^{N}l_r$$

不难验证：$[\widetilde{\Theta}]^{\mathrm{T}}[L][\widetilde{\Phi}]=[\widetilde{\Lambda}]=\mathrm{diag}(l,\omega_1^2,\cdots,\omega_{N-1}^2)$，这样

$$[L]^{-1}=[\widetilde{\Phi}][\widetilde{\Lambda}][\widetilde{\Theta}]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

其最后一个元素给出

$$\frac{1}{l_N}=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\theta_N^{(i)}\varphi_N^{(i)}}{\omega_i^2}+\frac{1}{l} \tag{10}$$

结论得证。

三　右端支承改变时频谱的相间性

考虑以下三种情况下频谱的相间性：梁的左端为铰支（$u_0=0=\tau_0$），右端分别为

1）反共振（$u_N=0=\varphi_N$），相应频谱记为 $\{\upsilon_i\}_1^{N-1}$；

2）铰支（$u_N=0=\tau_N$），相应频谱记为 $\{\omega_i\}_1^{N-1}$；

3）固支（$u_N=0=\theta_{N+1}$），相应频谱记为 $\{\mu_i\}_1^{N-1}$。

为了确定这三组频谱的相间性，我们考察图1所示简支梁右端受外力偶矩 T_N 作用时的强迫振动问题。强迫振动的方程是：

$$\omega^2[M]\{u\}=[c][u]+\frac{T_N}{l_N}\{e^{(N-1)}\}$$

其中 $\{e^{(N-1)}\}=(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $(N-1)$ 阶单位矢量。强迫振动的任意解可以表示成 $\{u\}=\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i\{u^{(i)}\}$。利用正交归一关系，不难确定系数如下：

$$\alpha_i=T_N\theta_N^{(i)}/(\omega_i^2-\omega^2)\quad(i=1,\cdots,N-1)$$

于是

$$\{u\}=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{T_N\theta_N^{(i)}}{\omega_i^2-\omega^2}\{u^{(i)}\}\tag{11}$$

$$\{\theta\}=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{T_N\theta_N^{(i)}}{\omega_i^2-\omega^2}\{\theta^{(i)}\}\tag{12}$$

$$\{\varphi\}=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{T_N\theta_N^{(i)}}{\omega_i^2-\omega^2}\{\varphi^{(i)}\}-\frac{T_N}{l_N}\{e^{(N)}\}\tag{13}$$

这样，当右端反共振时，$\varphi_N=0$，式(13)给出：

$$\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\theta_N^{(i)}\varphi_N^{(i)}}{\omega_i^2-\omega^2}-\frac{1}{l_N}=0\tag{14}$$

这就是 $\upsilon_i(i=1,\cdots,N-1)$ 满足的方程。为了确定 υ_i 的位置，记函数

$$f(\omega^2)=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\theta_N^{(i)}\varphi_N^{(i)}}{\omega_i^2-\omega^2}$$

的零点为 $\{\upsilon_i^*\}_1^{N-2}$。由式(7)，$\theta_N^{(i)}\varphi_N^{(i)}>0$，因而在 (ω_i,ω_{i+1}) 内，$f(\omega^2)$ 从 $-\infty$ 严格单调递增至 $+\infty$，故有一根即 $\omega_i<\upsilon_i^*<\omega_{i+1}(i=1,\cdots,N-2)$，如图2所示。又在 $(-\infty,\omega_1)$ 内，$f(\omega^2)$ 从0递增至 $+\infty$，这样，$f(\omega^2)=1/l_N$ 的根恰好分布为：

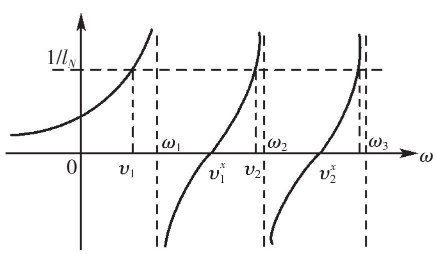

图2

$$0<\upsilon_1<\omega_1<\upsilon_1^*<\upsilon_2<\omega_2<\cdots<\omega_{N-2}{}^*<\upsilon_{N-1}<\omega_{N-1}$$

式(10)保证了第一个不等号的成立。

完全类似地，当右端固支时，$\theta_{N+1}=0$，因

$$\theta_N = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\theta_N^{(i)})^2}{\omega_i^2 - \omega^2} T_N, T_N = -k_N\theta_N$$

故$\{\mu_i\}_1^{N-1}$满足的方程是：

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\theta_N^{(i)})^2}{\omega_i^2 - \omega^2} = -\frac{1}{k_N} \tag{15}$$

这样，

$$g(\omega^2) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\theta_N^{(i)})^2}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

的根$\{\mu_i^*\}_1^{N-2}$分布为$\omega_i < \mu_i^* < \omega_{i+1}(i = 1, \cdots, N-2)$，更有

$$\omega_1 < \mu_1 < \mu_1^* < \omega_2 < \mu_2 < \cdots < \omega_{N-2} < \mu_{N-2}{}^* < \omega_{N-1} < \mu_{N-1} \tag{16}$$

为确定$\{\upsilon_i\}_1^{N-1}$与$\{\mu_i\}_1^{N-1}$的相间性，设$\{v^{(j)}\}(j = 1, \cdots, N-1)$是铰支—反共振梁的模态，考察方程

$$\upsilon^2[M]\{v\} = [C']\{v\} - \varphi'_N\{e^{(N-1)}\}$$

$[C']$是铰支—反共振梁的刚度矩阵。完全同样地处理，可得上述方程的任意解为：

$$\{v\} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\varphi'_N v_{N-1}^{(j)}}{\upsilon_j^2 - \upsilon^2}\{v^{(j)}\}$$

与之相应的

$$\{\theta'\} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\varphi'_N v_{N-1}^{(j)}}{\upsilon_j^2 - \upsilon^2}\{\theta'^{(j)}\}$$

$$\{\tau'\} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\varphi'_N v_{N-1}^{(j)}}{\upsilon_j^2 - \upsilon^2}\{\tau'^{(j)}\}$$

对铰支—反共振梁，因$\theta'_{N+1} = 0$，故

$$\tau'_N = -k_N\theta'_N = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{v_{N-1}^{(j)}\theta'^{(j)}_N}{\upsilon_j^2 - \upsilon^2} k_N\varphi'_N$$

另一方面，

$$\tau'_N = \tau'_{N-1} + l_N\varphi'_N = -\varphi'_N\left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{v_{N-1}^{(j)}\tau'^{(j)}_{N-1}}{\upsilon_j^2 - \upsilon^2} - l_N\right)$$

两式联立即得铰支—固支梁的又一频率方程：

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{v_{N-1}^{(j)}[k_N\theta'^{(j)}_N + \tau'^{(j)}_{N-1}]}{\upsilon_j^2 - \upsilon^2} = l_N \tag{17}$$

而由(11)、(12)式，

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{N-1}^{(j)} &= u_{N-1}\mid_{\omega=\upsilon_J} = -l_N T_N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\theta_N^{(i)})^2}{\omega_j^2 - \upsilon_j^2} \\ \theta'^{(j)}_N &= \theta_N \mid_{\omega=\upsilon_J} = T_N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\theta_N^{(i)})^2}{\omega_i^2 - \upsilon_j^2} \\ \tau'^{(j)}_{N-1} &= \tau_{N-1}\mid_{\omega=\upsilon_J} = T_N(\varphi_N = 0) \end{aligned}\right\} \quad (j = 1,\cdots,N-1) \tag{18}$$

记 $P_j = \left[\sum_{i=1}^{N-1}\frac{(\theta_N^{(i)})^2}{\omega_i^2-\upsilon_j^2}\right]\left[\sum_{i=1}^{N-1}\frac{(\theta_N^{(i)})^2}{\omega_i^2-\upsilon_j^2}+\frac{1}{k_N}\right]T_N^2 \quad (j=1,\cdots,N-1)$，(17) 式成为：

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{P_j}{\upsilon_j^2-\upsilon^2} = -\frac{1}{k_N} \tag{19}$$

首先，$P_j \neq 0(j=1,\cdots,N-1)$，否则(19) 式的根将少于$(N-1)$ 个，这与前文矛盾。据此，$\upsilon_j \neq \mu_{j-1}^*$，$\upsilon_j \neq \mu_{j-1}$。

其次，注意到 $P_1 > 0$，我们分三种情况考察 υ_2 与 μ_1 的相对位置：

(1)$\omega_1 < \upsilon_2 < \mu_1$，此时 $P_2 > 0$，方程(19) 在(υ_1,υ_2) 内至少应有一根，这矛盾。

(2)$\mu_1 < \upsilon_2 < \mu_1^*$，此时 $P_2 < 0$，方程(19) 在(υ_1,υ_2) 内无根或有偶数个根，这同样矛盾。

(3)$\mu_1^* < \upsilon_2 < \omega_2$，此时 $P_2 > 0$，方程(19) 在(υ_1,υ_2) 内至少应有一根，注意到(16) 式即有：$\omega_1 < \mu_1 < \mu_1^* < \upsilon_2 < \omega_2$。

依此类推，可以证明总有 $P_j > 0(j=2,\cdots,N-1)$ 和 $0 < \upsilon_1 < \omega_1 < \mu_1 < \upsilon_2 < \omega_2 < \cdots < \omega_{N-2} < \mu_{N-2} < \upsilon_{N-1} < \omega_{N-1} < \mu_{N-1}$

四　逆问题的提法和算法

以上讨论表明：如果给定三组严格相间的正数 $0 < \upsilon_1 < \omega_1 < \mu_1 < \cdots < \upsilon_{N-1} < \omega_{N-1} < \mu_{N-1}$，则存在一离散化的简支梁，它以$\{\omega_i\}_1^{N-1}$ 为其频谱，而以$\{\upsilon_i\}_1^{N-1}$、$\{\mu_i\}_1^{N-1}$ 为与它相应的左端铰支、右端反共振或固支的梁的频谱。其物理参数的计算方法是：

由$\{\omega_i\}_1^{N-1}$、$\{\mu_i\}_1^{N-1}$ 并由(15) 式确定 $\theta_N^{(i)}\quad(i=1,\cdots,N-1)$；

由$\{\omega_i\}_1^{N-1}$、$\{\upsilon_i\}_1^{N-1}$ 并由(14) 式确定 $\varphi_N^{(i)}\quad(i=1,\cdots,N-1)$；

由于(14)、(15) 式中含有 l_N 与 k_N，所以在以上解答中含有两个正常数因子。以下计算按递推步骤进行：

(1) 令 $n=N$，$u_n^{(i)}=0=\tau_n^{(i)}$，$\theta_N^{(i)}$，$\varphi_N^{(i)}$ 已求出，

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_N} - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\theta_N^{(i)}\varphi_N^{(i)}}{\omega_i^2} \tag{20}$$

$$(2)\ u_{n-1}^{(i)} = u_n^{(i)} - l_n\theta_n^{(i)},\ \tau_{n-1}^{(i)} = \tau_n^{(i)} + l_n\varphi_n^{(i)} \quad (i=1,\cdots,N-1) \tag{21}$$

$$\frac{1}{m_{n-1}} = \sum_{i=1}^{N-1}(u_{n-1}^{(i)})^2,\ k_{n-1} = \sum_{i=1}^{N-1}\frac{(\tau_{n-1}^{(i)})^2}{\omega_i^2} \tag{22}$$

$$\varphi_{n-1}^{(i)}=\varphi_n^{(i)}+\omega_i^2 m_{n-1}u_{n-1}^{(i)},\theta_{n-1}^{(i)}=\theta_n^{(i)}-\frac{\tau_{n-1}^{(i)}}{k_{n-1}}(i=1,\cdots,N-1)\tag{23}$$

$$\frac{1}{l_{n-1}}=\frac{1}{l}+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\theta_{n-1}^{(i)}\varphi_{n-1}^{(i)}}{\omega_i^2}\tag{24}$$

(21) 式的推导参见文献[2]，式(24) 由式(9) 给出。

(3) 令 $n=n-1$，当 $n>1$ 时重复步骤(2)，当 $n=1$ 时停止。

五　解的存在条件及说明

在上述算法中，m_r、$k_r(r=1,\cdots,N-1)$ 大于 0 是显然的，问题在于 $\{l_r\}_1^{N-1}$。为了保证 $l_r>0$，对所给频谱数据还应附加下述限制条件：

前已指出：$[C]$ 是符号振荡矩阵，据文献[2] 之定理 5.7.3，须有

$$[u_{N-P},u_{N-P+1},\cdots,u_{N-1}]=U\begin{bmatrix}N-P & N-P+1 & \cdots & N-1\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_P\end{bmatrix}>0$$

$$(P=1,\cdots,N-1;1<i_1<\cdots<i_P\leqslant N-1)$$

对简支梁，不难验证：

$$[u_{N-P},\cdots,u_{N-1}]=(-1)^P l_{N-P+1}\cdots l_N[\theta_{N-P+1},\cdots,\theta_N]$$

于是应有：

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^P[\theta_{N-P+1},\cdots,\theta_N]>0\\&(-1)^P[\varphi_{N-P+1},\cdots,\varphi_N]>0\end{aligned}\right\}\quad(P=1,\cdots,N-1)\tag{25}$$

利用前面定义的$[\Theta]$、$[\Phi]$，(25) 式可以表示为：

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^P[\theta_{N-P+1},\cdots,\theta_N]=(-1)^P\Theta\begin{bmatrix}N-P+1, & \cdots, & N\\ i_1, & \cdots, & i_P\end{bmatrix}>0\\&(-1)^P[\varphi_{N-P+1},\cdots,\varphi_N]=(-1)^P\Phi\begin{bmatrix}N-P+1, & \cdots, & N\\ i_1, & \cdots, & i_P\end{bmatrix}>0\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

$$(P=1,\cdots,N-1;1\leqslant i_1<\cdots<i_P\leqslant N-1)$$

在逆问题中，这些不等式均可用已知频谱数据来表示，例如

$$[\theta_{N-1},\theta_N]=\left[\theta_N-\frac{\tau_{N-1}}{k_{N-1}},\theta_N\right]=-\frac{1}{k_{N-1}}[l_N\varphi_N,\theta_N]=\frac{l_N}{k_{N-1}}[\theta_N,\varphi_N]$$

$$[\varphi_{N-1},\varphi_N]=[\omega^2 m_{N-1}u_{N-1},\varphi_N]=m_{N-1}[\omega^2(-l_N\theta_N),\varphi_N]=l_N m_{N-1}[\varphi_N,\omega^2\theta_N]$$

因此加给原始数据的限制条件是：

$$\left.\begin{array}{l}[\theta_N,\varphi_N,\omega^2\theta_N,\omega^2\varphi_N,\cdots,\omega^{P-1}\theta_N]<0\\ [\varphi_N,\omega^2\theta_N,\omega^2\varphi_N,\omega^4\theta_N,\cdots,\omega^{P-1}\varphi_N]<0\end{array}\right\}(P\ \text{是奇数}) \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{l}[\theta_N,\varphi_N,\omega^2\theta_N,\omega^2\varphi_N,\cdots,\omega^{P-2}\theta_N,\omega^{P-2}\varphi_N]>0\\ [\varphi_N,\omega^2\theta_N,\omega^2\varphi_N,\omega^4\theta_N,\cdots,\omega^{P-2}\varphi_N,\omega^{P-2}\theta_N]>0\end{array}\right\}(P\ \text{是偶数}) \tag{28}$$

这些条件对于存在一个真实的简支梁离散系统既是必要的也是充分的。关于充分性的证明从略。

最后说明一点：上述计算中包含两个常数因子 l_N 与 k_N，它们可以直接给出。如果不能事先给出，则在计算时先令 $l_N=k_N=1$，相应的解记为 $\{\bar{m}_r,\bar{k}_r,\bar{l}_r\}_1^{N-1}$。再令 $l_N=\alpha,k_N=\beta$，则：

$$m_r=\frac{\beta}{\alpha^2}\bar{m}_r,k_r=\beta\bar{k}_r,l_r=\alpha\bar{l}_r\quad(r=1,\cdots,N-1) \tag{29}$$

至于 α、β 可用各种办法确定，例如系统的总质量和全长。

六　算例 · 结束语

按 §4 的步骤我们编制 Fortran 程序进行了实例计算，原始数据通过解正问题得出。

1. 均匀正方形截面梁，长 4m，取 11 个差分点，结点处集中质量 $m_r=100$，弹簧刚度 $k_r=10^5$，采用 8 位有效数字，计算结果见表 1。

表 1

$P-P$	$P-C$	$P-R$	$M(N)$	$K(N)$	$L1(N)$
0.598866100000D+02	0.142067900000D+03	0.196033200000D+02	0.97037D+02	0.97032D+05	0.39987D+00
0.911862600000D+03	0.138969100000D+04	0.557405200000D+03	0.10147D+03	0.10147D+06	0.40010D+00
0.424802500000D+04	0.546344200000D+04	0.319353300000D+04	0.99346D+02	0.99347D+05	0.40002D+00
0.119364400000D+05	0.139862200000D+05	0.999263700000D+04	0.10029D+03	0.10029D+06	0.40000D+00
0.250000000000D+05	0.276075100000D+05	0.223787900000D+05	0.99940D+02	0.99940D+05	0.40000D+00
0.428381300000D+05	0.454448500000D+05	0.401098000000D+05	0.99995D+02	0.99995D+05	0.40000D+00
0.630265500000D+05	0.650501300000D+05	0.608484300000D+05	0.10000D+03	0.10000D+06	0.40000D+00
0.818135600000D+05	0.829328000000D+05	0.805863400000D+05	0.10000D+03	0.10000D+06	0.40000D+00
0.951655320000D+05	0.954832680000D+05	0.948134380000D+05	0.10000D+03	0.10000D+06	0.40000D+00
				0.20000D+06	0.40000D+00

2. 正方形截面阶梯梁，中段（从 1m 至 3m）截面面积是两端的两倍，跨长、密度、弹性模量、分点同例 1，计算结果见表 2。

表 2

$P-P$	$P-C$	$P-R$	$M(N)$	$K(N)$	$L1(N)$
0.881433500000D+02	0.161725700000D+03	0.257999200000D+02	0.10015D+03	0.10016D+06	0.39991D+00
0.101888240000D+04	0.159091530000D+04	0.648499600000D+03	0.99934D+02	0.99915D+05	0.40001D+00
0.588062870000D+04	0.732025890000D+04	0.463446150000D+04	0.20004D+03	0.40011D+06	0.40008D+00
0.187306110000D+05	0.213866687000D+05	0.156361509000D+05	0.19999D+03	0.39998D+06	0.40000D+00
0.352555235000D+05	0.391946080000D+05	0.314444838000D+05	0.20000D+03	0.40001D+06	0.40000D+00
0.552369128000D+05	0.581871068000D+05	0.527371324000D+05	0.20000D+03	0.40000D+06	0.40000D+00
0.911112228000D+05	0.918465630000D+05	0.900948065000D+05	0.20000D+03	0.40000D+06	0.40000D+00
0.140508578600D+06	0.140750330400D+06	0.140301128500D+06	0.10000D+03	0.10000D+06	0.40000D+00
0.183289458500D+06	0.181131784800D+06	0.183227500200D+06	0.10000D+03	0.10000D+06	0.40000D+00
				0.20000D+06	0.40000D+00

3. **正方形截面锥形梁，跨长、密度、弹性模量、分点同例** 1，**截面面积从端部至中点线性递增两倍，其计算结果见表** 3。

表 3　两端自由的锥形杆

$P-P$	$P-C$	$P-R$	$M(N)$	$K(N)$	$L1(N)$
0.982952710000D+02	0.178112070000D+03	0.306520940000D+02	0.12005D+03	0.14406D+05	0.40002D+00
0.132367196000D+04	0.181059815000D+04	0.802880460000D+03	0.13997D+03	0.19596D+06	0.39999D+00
0.645392802000D+04	0.773100199000D+04	0.486490390000D+04	0.16001D+03	0.25602D+05	0.40001D+00
0.176411801300D+05	0.197469509600D+05	0.149008149500D+05	0.18000D+03	0.32400D+06	0.40000D+00
0.374202571900D+05	0.399055231700D+05	0.338309483300D+05	0.19994D+03	0.40001D+05	0.40000D+00
0.631623331900D+05	0.653637972300D+05	0.598444250800D+05	0.18001D+02	0.32400D+05	0.40000D+00
0.946860512200D+05	0.959763788500D+05	0.924853238000D+05	0.16010D+03	0.25600D+06	0.40000D+00
0.125139664410D+06	0.125586018790D+06	0.124274876820D+06	0.14000D+03	0.19600D+06	0.40000D+00
0.168437371470D+06	0.168481118300D+06	0.168327929210D+06	0.12333D+03	0.14400D+06	0.40000D+00
				0.20000D+06	0.40000D+00

以上算例充分表明：由频谱数据构造简支梁离散模型是可行的。至于稳定性问题，我们已在文[1] **中作过分析，此处不再重复。**

参考文献

[1] 何北昌，王大钧，王其申．Euler 梁有限差分模型的振动逆问题．振动工程学报，1989(2)，1－9

[2] Gladwell G. M. L.，*Inverse Problems in Vibration*，Martinus Nijhoff Publishers，1986，109

[3] Gantmakher F. P. and Krein M. G.，*Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems*，Moscow – Leningrad State Publishing House of Technical – Theoretical Literature，1950，Translation，Washington D. C.，U. S. Atomic Energy Commission，1961

An Inverse Mode Problem for Continuous Second-order Systems

Abstract In this paper we discuss the necessary conditions of modes in second-order systems, such as rods vibrating in longitudinal or torsional motion, then consider the problem of constructing a second-order system which has one or two specified displacement modes or strain modes.

Introduction

In reference[1], the condition and method for construction of cross-sectional area $A(x)$ of a rod with constant density ρ and modulus of elasticity E from frequency data are given. The analysis and construction method are complicated, and the constructed parameters are very sensitive to changes in the frequency data, so the method is inconvenient in engineering problems. In this paper, we discuss the condition and method for construction of $A(x)$, $\rho(x)$, $E(x)$ of a rod from specified modes data. This also has the advantage that it is linear problem.

Some Properties of a Mode

For a mode of vibration a rod in longitudinal vibration, the differential equation is

$$(EA\Phi'(x))' + \omega^2 \rho A\Phi(x) = 0 \tag{1}$$

where ω and $\Phi(x)$ are the natural frequency and mode respectively, and E, ρ and A are functions of x. The end condition can be defined by

$$\Phi'(0) - h\Phi(0) = 0, \Phi'(l) + H\Phi(l) = 0 \tag{2}$$

where l is the length of the rod, h, $H \geqslant 0$. The end condition is free when h (or H) is equal to zero, and fixed when h (or H) tends towards infinity.

It has been proved [Res. 1] that the frequencies of a rod are distinctive: $0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots$, when $h + H > 0$, and that the i-th mode has $i-1$ nodes, i. e.

(1) $S_{\Phi_i} = i - 1$ (3)

Besides, we give the following properties of a mode:

---

* 本文原载于《'94 北京国际振动工程学术会议论文集》(1994.6)，原文作者为王其申、王大钧(北京大学力学系)。

(2)$\Phi_i(0)\Phi'_i(0) \geqslant 0, \Phi_i(l)\Phi'_i(l) \leqslant 0$ (4)

(3)The number of nodes of Φ'_i is

$$S_{\Phi'_I} = i - \Delta(h) - \Delta(H) \tag{5}$$

where $\Delta(0) = 1, \Delta(t) = 0 (t \neq 0)$.

Let $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{i-1}$ be the nodes of the i -th mode Φ_i, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ be the nodes of Φ'_i(x_0 *or* x_{i-1} node does not exist if h or H equals zero), so

$$0 \leqslant x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \cdots < \xi_{i-1} < x_{i-1} \leqslant l \tag{6}$$

This can be proved by the use of the Rolle theorem.

(4) From eq. (1), it further holds that

$$\Phi_i(x_j)\Phi'_i(x_j) < 0 \quad i = 1, 2, \cdots, ; j = 0, 1, \cdots, i-1 \tag{7}$$

Construction of Cross-sectional Parameters from One Mode Data

For a given positive frequency ω and a mode function $\Phi(x)$ with piecewise continuous second-order derivative in $(0, l)$, and also requiring that $\Phi(x)$ satisfies the necessary conditions, exp. (3) to exp. (7). Then the spring constants of the ends of the rod can be obtained from eq. (2), $h = \Phi'(0)/\Phi(0)$, $H = -\Phi'(l)/\Phi(l)$.

The construction of cross — sectional parameters can be considered in the following three cases:

(1)A, ρ are known, then from eq. (1), we have

$$E(x) = [E(0)A(0)\Phi'(0) - \omega^2 \int_0^x \rho A\Phi(s)\mathrm{d}s]/A\Phi'(x)$$

it can be seen that $\Phi(x)$ should satisfy

$$\omega^2 \int_0^{x_j} \rho A\Phi(s)\mathrm{d}s = B \quad (j = 0, 1, \cdots; \Phi'(x_j) = 0)$$

where B is a constant, and furthermore B and $\Phi'(0)$ have the same sign or are identically zero, hence

$$E(x) = \begin{cases} [B - \omega^2 \int_0^x \rho A\Phi(s)\mathrm{d}s]/A\Phi'(x) & x \neq x_j \\ -\omega^2 \rho(x_j)\Phi(x_j)/\Phi''(x_j) & x = x_j \end{cases}$$

(2) If E, ρ are known, then from eq. (1), we have

$$A(x) = c\exp\{-\int_0^x [(\omega^2 \rho\Phi(s) + E\Phi''(s))/(E\Phi'(s))]\mathrm{d}s\}$$

where c is a positive constant. It is shown that when the limit of the integrand exists at $x = x_j$, $A(x)$ can be determined uniquely apart from a constant factor.

(3) If E, A are known, then from eq. (1), we obtain

$$\rho(x) = -[EA\Phi'(x)]'/(\omega^2 A\Phi(x))$$

It is obvious that if $[EA\Phi'(x)]'/(\omega^2 A\Phi(x)) < 0$, at $x \neq \xi_i$, and if at $x = \xi_j$ there exists limit which is a negative number, then $\rho(x)$ can be determined.

Example 1 One mode is given as $\Phi(x) = \cos x + \sin x$, then the following conditions are satisfied: $S_\Phi = S_{\Phi'} = 1, h = \Phi'(0)/\Phi(0) = 1, \Phi'(5\pi/4) = 0$. So

(1) If ρ, A are constants, then $E = \omega^2\rho$.

(2) If E, A are constants, then $\rho = E/\omega^2$.

(3) If ρ, E are constants, and ω given as $\omega^2 = E/\rho$, then $A =$ constant.

This example shows $\omega = \sqrt{E/\rho}$ and $\Phi(x)$ are respectively the 2^{nd} frequency and mode of the rod with constant E, A and ρ. The length of the rod is $5\pi/4$, the left end being elastically supported with $k = 1$, right end being free.

Construction of Cross-sectional Parameters from Two Mode Data

Two positive square frequencies λ, μ and two mode functions $\Phi(x), \Psi(x)$ with piecewise continuous second-order derivative are given, $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ satisfy the necessary conditions, exp. (3) to exp. (7), and

$$\Phi(0)\Psi'(0) - \Phi'(0)\Psi(0) = 0, \Phi(l)\Psi'(l) - \Phi'(l)\Psi(l) = 0$$

It is expected to construct a unique rod which has modes $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ and associated frequencies $\sqrt{\lambda}$ and $\sqrt{\mu}$. They should satisfy the equations

$$\begin{aligned} &\Phi''(x) + \Phi'(x)(EA)'/(EA) + \lambda\rho\Phi(x)/E = 0 \\ &\Psi''(x) + \Psi'(x)(EA)'/(EA) + \lambda\rho\Psi(x)/E = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

therefore

$$\rho/E = z\{x\}/f(x), EA = c\exp\{-\int_0^x [g(s)/f(s)]\mathrm{d}s\} \tag{9}$$

where

$$\begin{aligned} f(x) &= \mu\Phi'(x)\Psi(x) - \lambda\Phi(x)\Psi'(x) \\ g(x) &= \mu\Phi''(x)\Psi(x) - \lambda\Phi(x)\Psi''(x) \\ z(x) &= \Phi''(x)\Psi'(x) - \Phi'(x)\Psi''(x) \end{aligned}$$

It can be seen that if $z(x), f(x)$ are all non-zero and the same sign, or identically zero at any point x on $(0, l)$; $g(x)/f(x)$ has finite limit, and $z(x)/f(x)$ has a positive limit at point s where $f(s) = 0$, then EA and ρA can be determined uniquely apart from a single scale factor.

Example 2 $\Phi(x) = \cos x + \sin x, \psi(x) = \cos 3x + \sin 3x + \cos x - \sin x$ on $(0, \pi/2)$,

$\lambda = 1, \mu = 3$ are given, then

$$z(x) = 8 + 12\sin 2x(1 - \sin 2x) > 0 \qquad f(x) = 4 + 4\sin 2x > 0$$

$$g(x) = 4\cos 2x(3\sin 2x + 1)$$

hence

$$EA = E_0 A_0 (1 + \sin 2x)\exp(-3\sin 2x/2) \tag{10}$$

$$\rho A = E_0 A_0 [2 + 3\sin 2x(1 - \sin 2x)]\exp(-3\sin 2x/2) \tag{11}$$

And

$$h = \Phi'(0)/\Phi(0) = 1, H = -\Phi'(l)/\Phi(l) = 1$$

It can be verified Φ and Ψ are respectively the 1st and 2nd mode of the rod with the EA and ρA described in exp. (10) and exp. (11), $h = H = 1$.

Construction of a rod from two strain modes data is a significant problem, because in same cases, the measurement of strain is more accurate than that of displacement, or construction of a system which has specified strain modes is expected. Moreover, in the numerical computation of $z(x), g(x)$ and $f(x)$, the first and second-order derivatives of given displacement modes have to be carried out, but only the first order derivative and a integration of given strain modes are needed to be computed for the strain mode data, and the error in the former case is generally more than that in the latter case. This conclusion has been verified from numerical examples.

It should be noted, because a integrand may have a constant difference, the value of $\Phi(0)$ can be determined from $\Phi(0) = \Phi'(0)/h$, so in this case, the value of h should be given.

A important conclusion is that a rod can be uniquely constructed from two modes data, so in some sense, there are only two independent modes for a rod.

This work is supported by National Natural Science Foundation and Education Committee of China.

References

[1] G. M. L. Gladwell, *Inverse Problems in Vibration*, Martinus Nijhoff Publishers, 1986

[2] Wang Qishen, Wang Dajun, *Construction of the Discrete System for the Rod by the Partial Natural Modes and Frequencies Data*, J. of *Vibration Engineering*, Vol. 1. 1987, pp. 83—87

[3] Wang Dajun, He Beichang, Wang Qishen, *On the Construction of the Euler - Bernoulli Beam Via Two Sets of Modes and the Corresponding Frequencies*, Acta Mech. Sin., Vol. 22. No. 4, 1991, pp. 479—483

两类 Jacobi 矩阵的特征反问题及其应用

Abstract In this paper the problems are discussed in which a Jacobi matrix is constructed by the minimum and maximum eigenvalues of its all order main sub-matrices or by its eigenvector corresponding to the minimum eigenvalue and minimum eigenvalues of its all order main sub-matrices. Their solving method and some examples are given. Also the above problems are studied for applications in construction vibration.

一 引 言

对于 Jacobi 矩阵(对称三对角矩阵)的特征反问题,文[1]作了相当全面的阐述。纵观已有的成果,基本上集中在由两组频谱或两个特征对(指特征值及相应的特征向量)构造 Jacobi 矩阵的元素这样两类问题上,习惯上称之为频谱型或特征向量型反问题。对于反问题的第三类型——混合型,即由一组频谱数据和一个特征向量构造矩阵元素的问题,尚未见诸文献。此外,Jacobi 矩阵的顺序主子阵在 Jacobi 矩阵的理论中占有十分重要的地位。基于这两点,本文提出并求解了以下两类有关 Jacobi 矩阵的特征反问题。

问题 1 给定$(2N-1)$个正数 $0<\lambda_1^{(N)}<\lambda_1^{(N-1)}<\cdots<\lambda_1^{(1)}<\lambda_2^{(2)}<\cdots<\lambda_N^{(N)}$,构造如下标准形式的 Jacobi 矩阵:

$$J_N(a_r,b_r)=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{N-2} & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{N-1} & a_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中 $a_r>0(r=1,\cdots,N)$,$b_r>0(r=1,\cdots,N-1)$,使其第 r 阶顺序主子阵恰以 $\lambda_1^{(r)}$、$\lambda_r^{(r)}$ 为它们的最低、最高特征值。

问题 2 给定正数 $0<\lambda_1^{(N)}<\cdots<\lambda_1^{(1)}$ 和正向量 $\{x\}=\{x_1,\cdots,x_N\}^{\mathrm{T}}$,其中 $x_1=1$,$x_r>0(r=2,\cdots,N)$,构造一个标准形式的 Jacobi 矩阵 $J_N(a_r,b_r)$,使其第 r 阶顺序主子阵恰以 $\lambda_1^{(r)}$ 为其最低特征值,而以 $\{x\}$ 为 $J_N(a_r,b_r)$ 的相应于 $\lambda_1^{(N)}$ 的特征向量。

---

* 本文原载于《高等学校计算数学学报》1995 年第 4 期,原文作者为王其申、王大钧(北京大学力学系)。

为了求解以上两类反问题，我们首先摘引了Jacobi矩阵的三条有关性质，接着给出了以上反问题的解法，继而讨论了它们在结构振动问题中的应用，最后附有几个成功的算例。

二 问题的解法

为了求解上述问题，我们不加证明地指出Jacobi矩阵的几条重要特性。有关这些性质的证明可以参见文献[2]。

性质1 对于Jacobi矩阵$J_N(a_r, b_r)$，成立如下三项递推关系

$$D_r(\lambda) = (a_r - \lambda)D_{r-1}(\lambda) - b_{r-1}^2 D_{r-2}(\lambda) \quad (r = 2, \cdots, N) \tag{2}$$

此处$D_r(\lambda) = \det\{J_r - \lambda I\}$，$J_r$是$J_N$的第$r$阶顺序主子阵，$D_0(\lambda) = 1$。

性质2 序列

$$D_N(\lambda), D_{N-1}(\lambda), \cdots, D_2(\lambda), D_1(\lambda), D_0(\lambda)$$

构成Sturm序列，由此可以进一步推证

(1) $D_0(\lambda)$不改变符号($D_0(\lambda) = 1$)；

(2) $D_r(\lambda)(r = 1, \cdots, N)$有且仅有$r$个零点，并且这些零点都是节点；

(3) $D_r(\lambda)$与$D_{r+1}(\lambda)$的节点彼此相间。

作为这一性质的直接推论，又有

推论 记$D_r(\lambda)$的最小节点为$\lambda_1^{(r)}$，最大节点为$\lambda_r^{(r)}$，则

(1) $\lambda_1^{(N)} < \lambda_1^{(N-1)} < \cdots < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \cdots < \lambda_N^{(N)}$

(2) 当$\mu < \lambda_1^{(r)}$时，必有$D_r(\mu) > 0$；当$\mu > \lambda_r^{(r)}$时，必有$(-1)^r D_r(\mu) > 0 \quad (r = 1, \cdots, N)$。

需要指出的是，性质2及其推论的成立仅与$b_r(r = 1, \cdots, N-1)$是否为零有关，而与a_r的值无关。

性质3 设Jacobi矩阵$J_N(a_r, b_r)$的特征值按递增次序排列为：$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$，相应的特征向量记为$\{x^{(r)}\} = \{x_{r1}, \cdots, x_{rN}\}^{\mathrm{T}} \quad (r = 1, \cdots, N)$，则有

$$x_{rj} = x_{r1} D_{j-1}(\lambda_r)/b_1 b_2 \cdots b_{j-1} \quad (r = 1, \cdots, N; j = 2, \cdots, N) \tag{4}$$

这里x_{r1}是任意非零常数，当特征向量首一规范化时，可取$x_{r1} = 1$。

利用这些性质，我们不难采用构造性解法求解上节提出的两个反问题。

(一) 问题1的解法

由(2)式和问题1的提法马上可以写出

$$a_1 = \lambda_1^{(1)} > 0 \tag{5}$$

$$D_r(\lambda_1^{(r)}) = (a_r - \lambda_1^{(r)})D_{r-1}(\lambda_1^{(r)}) - b_{r-1}^2 D_{r-2}(\lambda_1^{(r)}) = 0$$

$$D_r(\lambda_r^{(r)}) = (a_r - \lambda_r^{(r)})D_{r-1}(\lambda_r^{(r)}) - b_{r-1}^2 D_{r-2}(\lambda_r^{(r)}) = 0$$

$$(r = 2, \cdots, N)$$

由此解得

$$a_r = \Delta_{ra}/\Delta_r, b_{r-1}^2 = \Delta_{rb}/\Delta_r \quad (r = 2, \cdots, N) \tag{6}$$

式中

$$\begin{cases} \Delta_r = D_{r-1}(\lambda_r^{(r)}) D_{r-2}(\lambda_1^{(r)}) - D_{r-1}(\lambda_1^{(r)}) D_{r-2}(\lambda_r^{(r)}) \\ \Delta_{ra} = \lambda_r^{(r)} D_{r-1}(\lambda_r^{(r)}) D_{r-2}(\lambda_1^{(r)}) - \lambda_1^{(r)} D_{r-1}(\lambda_1^{(r)}) D_{r-2}(\lambda_r^{(r)}) (r = 2, \cdots, N) \\ \Delta_{rb} = (\lambda_r^{(r)} - \lambda_1^{(r)}) D_{r-1}(\lambda_r^{(r)}) D_{r-1}(\lambda_1^{(r)}) \end{cases} \tag{7}$$

由上面的推论知 $D_{r-1}(\lambda_1^{(r)}) > 0, D_{r-2}(\lambda_1^{(r)}) > 0$，当 r 为偶数时，$D_{r-1}(\lambda_r^{(r)}) < 0, D_{r-2}(\lambda_r^{(r)}) > 0$，这样显然有

$$\Delta_r < 0, \Delta_{ra} < 0, \Delta_{rb} < 0 \quad (r = 2, 4, \cdots)$$

从而有 $a_r > 0, b_{r-1}^2 > 0 (r = 2, 4, \cdots)$。

同理可知当 r 为奇数时，Δ_r、Δ_{ra}、Δ_{rb} 同时大于 0，从而亦有 $a_r > 0, b_{r-1}^2 > 0 (r = 3, 5, \cdots)$。于是(5)、(6)两式就是问题 1 的解。因为，构造过程显示，所给 $(2N-1)$ 个正数的确是所得矩阵的各阶顺序主子阵的特征值，而由性质 2，它们只能是最小和最大特征值。

（二）问题 2 的解法

在问题 2 的提法下，和问题 1 类似地有

$$a_1 = \lambda_1^{(1)} > 0 \tag{8}$$

$$(a_r - \lambda_1^{(r)}) D_{r-1}(\lambda_1^{(r)}) - b_{r-1}^2 D_{r-2}(\lambda_1^{(r)}) = 0 \quad (r = 2, \cdots, N) \tag{9}$$

又由性质 3 有

$$b_{r-1} = \frac{D_{r-1}(\lambda_1^{(N)})}{b_1 b_2 \cdots b_{r-2} x_r} = \frac{D_{r-1}(\lambda_1^{(N)})}{D_{r-2}(\lambda_1^{(N)})} \cdot \frac{x_{r-1}}{x_r} \quad (r = 2, \cdots, N) \tag{10}$$

由问题 2 的条件和性质 2 的推论显然可见 $b_r > 0 (r = 1, \cdots, N-1)$。又由(9)式解得

$$a_r = \lambda_1^{(r)} + b_{r-1}^2 D_{r-2}(\lambda_1^{(r)}) / D_{r-1}(\lambda_1^{(r)}) \quad (r = 2, \cdots, N) \tag{11}$$

由归纳法可见，问题 2 的解存在，且所求得的 $a_r (r = 1, \cdots, N)$、$b_r (r = 1, \cdots, N-1)$ 均为正数。

和问题 1 一样，由性质 2，这样构造出的矩阵只能以 $\{\lambda_1^{(r)}\}_1^N$ 为其各阶顺序主子阵的最低特征值。同时直接验算将会表明，所给向量 $\{x\}$ 的确是被构造的矩阵的相应于 $\lambda_1^{(N)}$ 的特征向量。

三　反问题的应用

诸多文献[3,4] 已经指出，图 1 所示的弹簧—质量系统的运动方程是

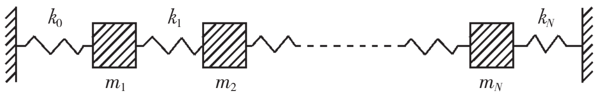

图 1

$$[A]\{u\} = \omega^2[M]\{u\} \tag{12}$$

这里 $\{u\} = \{u_1, \cdots, u_N\}^T$ 是位移振幅向量，ω 是系统的固有圆频率，质量矩阵 $[M] = \mathrm{diag}(m_1, \cdots, m_N)$，刚度矩阵 $[A]$ 是标准形式的 Jacobi 矩阵：

$$[A] = \begin{Bmatrix} k_0+k_1 & -k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{N-2} & k_{N-2}+k_{N-1} & -k_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N \end{Bmatrix}$$

当 k_0 或 k_N 为 0 时相应支承方式为自由端，k_0、k_N 不为 0 时相应于固定端。上述方程可以简单地转化为非对称的 Jacobi 矩阵的特征值问题

$$J_N\{u\} = \lambda\{u\} \tag{13}$$

式中 $\lambda = \omega^2$，

$$J_N(a_r, b_r, c_r) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{N-2} & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{N-1} & a_N \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{k_{r-1}+k_r}{m_r} \quad (r = 1, \cdots, N) \\ b_r = \dfrac{k_r}{m_r}, c_r = \dfrac{k_r}{m_{r+1}} \quad (r = 1, \cdots, N-1) \end{cases} \tag{15}$$

它也可以转化为对称三对角矩阵的标准特征值问题

$$J_N\{x\} = \lambda\{x\} \tag{16}$$

J_N 的形式仍如(1)，只是此时

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{k_{r-1}+k_r}{m_r} & (r=1,\cdots,N) \\ b_r = \dfrac{k_r}{\sqrt{m_r m_{r+1}}} & (r=1,\cdots,N-1) \end{cases} \tag{17}$$

同时注意，$\{x\} = [M]^{1/2}\{u\}$ 已经不是系统的固有模态。

基于以上事实，与引言中所叙述的两个反问题相对应，我们有

应用问题 1 给定 $(2N-1)$ 个正数 $0 < \lambda_1^{(N)} < \lambda_1^{(N-1)} < \cdots < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \cdots < \lambda_N^{(N)}$，构造一个自由 — 固定的弹簧 — 质量系统，使此系统的前 r 个质点所组成的截断系统分别以 $\sqrt{\lambda_1^{(r)}}$、$\sqrt{\lambda_r^{(r)}}$ 为其最低及最高圆频率。

事实上，由第二部分，我们可由 $\lambda_1^{(1)} \cup \{\lambda_1^{(r)}, \lambda_r^{(r)}\}_2^N$ 构造对称三对角矩阵 $J_N(a_r, b_r)$。但要由此利用(17)式进一步确定系统的物理参数 $\{m_r, k_r\}_1^N$ 却存在这样的困难：如何证明所求得的 $\{k_r\}_2^N$ 是正数？为了避开这一点，我们采用在文[5]中曾经使用过的方法。注意到元素由(15)式表出的非对称三对角矩阵 $J_N(a_r, b_r, c_r)$ 与由(17)式表出的对称三对角矩阵 $J_N(a_r, b_r)$ 的各阶顺序主子阵有完全相同的特征多项式，我们可先把已求得的对称矩阵 $J_N(a_r, b_r)$ 按下述规则非对称化：

$$a'_r = a_r \quad (r=1,\cdots,N) \tag{18}$$

$$b'_r = \frac{d_r}{d_{r-1}}, c'_r = \frac{b_r^2}{b'_r} \quad (r=1,\cdots,N-1) \tag{19}$$

这里 d_r 是 J_N 的第 r 阶顺序主子式，$d_0 = 1$。

因为 J_N 的最低特征值 $\lambda_1^{(N)} > 0$，所以 $d_r > 0 (r=1,\cdots,N)$，这样 $b'_r > 0, c'_r > 0 (r=1,\cdots,N-1)$。同时我们不难验证，这样求得的 a'_r、b'_r、c'_r 满足(15)式所要求的约束关系，即

$$\begin{cases} b'_1 = d_1 = a_1 \\ c'_r + b'_{r+1} = c'_r + \dfrac{d_{r+1}}{d_r} = \dfrac{b_r^2}{b'_r} + \dfrac{a_{r+1}d_r - b_r^2 d_{r-1}}{d_r} = a'_{r+1} (r=1,\cdots,N-2) \end{cases}$$

最后，因为 $a_N d_{N-1} - b_{N-1}^2 d_{N-2} > 0$，又有

$$a'_N = a_N > \frac{b_{N-1}^2 d_{N-2}}{d_{N-1}} = c'_{N-1}$$

至此，在相差一个常数因子的意义上，我们即可求得待构造的自由 — 固定的弹簧 — 质量系统的全部物理参数：

$$k_r = m_r b'_r, m_{r+1} = \frac{k_r}{c'_r} \quad (r=1,\cdots,N-1) \tag{20}$$

$$k_N = m_N(a'_N - c'_{N-1}) \tag{21}$$

我们再看问题 2 的应用。

应用问题 2　给定正数 $0 < \lambda_1^{(N)} < \cdots < \lambda_1^{(1)}$ 和正向量 $\{x\} = \{1, x_2, \cdots, x_N\}^{\mathrm{T}}$，构造自由—固定或两端固定的弹簧—质量系统，使其前 r 个质点组成的截断系统以 $\sqrt{\lambda_1^{(r)}}$ 为其最低圆频率，而以 $\{x\}$ 为构造系统的基模态。

这一问题的可解性条件较为苛刻，限于篇幅，其可解性条件及其解法将另文讨论。

四　算　例

为了验证上面的结果，我们编制微机程序计算了几个实例。

例 1　给定 19 个正数如表 1 的 2、3 列，构造一个 10 阶标准形式的 Jacobi 矩阵，计算结果列于表 1 的 4、5 两列。

表 1　由两组特征值构造的 Jacobi 矩阵

r	$\lambda(r,1)$	$\lambda(r,r)$	$a(r)$	$b(r)$
1	.1000e+01		.1000e+01	.3162e+00
2	.9000e+00	.2000e+01	.1900e+01	.9165e+00
3	.8000e+00	.3000e+01	.2200e+01	.1126e+01
4	.7000e+00	.4000e+01	.3090e+01	.1557e+01
5	.6000e+00	.5000e+01	.3279e+01	.1842e+01
6	.5000e+00	.6000e+01	.4087e+01	.2187e+01
7	.4000e+00	.7000e+01	.4347e+01	.2488e+01
8	.3000e+00	.8000e+01	.5071e+01	.2813e+01
9	.2000e+00	.9000e+01	.5364e+01	.3114e+01
10	.1000e+00	.1000e+02	.6050e+01	

例 2　原始数据同例 1，构造一个自由—固定的弹簧—质量系统，计算结果列于表 2 的 4、5 列。

表 2　由两组特征值构造的弹簧—质量系统

r	$\lambda(r,1)$	$\lambda(r,r)$	$m(r)$	$k(r)$
1	.1000e+01		.7800e+02	.7800e+02
2	.9000e+00	.2000e+01	.7800e+03	.1404e+04
3	.8000e+00	.3000e+01	.3009e+04	.5215e+04
4	.7000e+00	.4000e+01	.7126e+04	.1680e+05
5	.6000e+00	.5000e+01	.1635e+05	.3683e+05
6	.5000e+00	.6000e+01	.2445e+05	.6308e+05
7	.4000e+00	.7000e+01	.3404e+05	.8489e+05
8	.3000e+00	.8000e+01	.3421e+05	.8859e+05
9	.2000e+00	.9000e+01	.2898e+05	.6688e+05
10	.1000e+00	.1000e+02	.1592e+05	.2942e+05

例 3 给定 10 个正数和一个 10 维正向量如表 3 之 2、3 列，构造一个 10 阶标准对称 Jacobi 矩阵，计算结果列于表 3 的 4、5 两列。

为了进一步验证本文的正确性，我们又以表 1 至表 3 的 4、5 两列所列数据作为 Jacobi 矩阵的元素解特征值正问题，求出相应各阶顺序主子阵的最小、最大特征值以及对应 $\lambda_1^{(N)}$ 的基模态，计算结果分别列于表 4 至表 6。以上算例的结果显示，本文推理是正确的。

表 3 由一组特征值和一个特征向量构造 Jacobi 矩阵

r	$\lambda(r,1)$	$x(r)$	$a(r)$	$b(r)$
1	.1000e+01	.1000e+01	.1000e+01	.6000e+00
2	.9000e+00	.1500e+01	.4500e+01	.3333e+01
3	.8000e+00	.1800e+01	.6648e+01	.3572e+01
4	.7000e+00	.1900e+01	.8319e+01	.4593e+01
5	.6000e+00	.2000e+01	.9867e+01	.5403e+01
6	.5000e+00	.2000e+01	.1105e+02	.5836e+01
7	.4000e+00	.1900e+01	.1139e+02	.5436e+01
8	.3000e+00	.1800e+01	.9575e+01	.4484e+01
9	.2000e+00	.1500e+01	.7681e+01	.3299e+01
10	.1000e+00	.1000e+01	.5048e+01	

	表 4		表 5		表 6	
r	$\lambda(r,1)$	$\lambda(r,r)$	$\lambda(r,1)$	$\lambda(r,r)$	$\lambda(r,1)$	$x(r)$
1	.1000e+01		.1000e+01		.1000e+01	.1883e+00
2	.9000e+00	.2000e+01	.9000e+00	.2000e+01	.9000e+00	.2824e+00
3	.8000e+00	.3000e+01	.8000e+00	.2998e+01	.8000e+00	.3389e+00
4	.7001e+00	.4000e+01	.6999e+00	.4000e+01	.7001e+00	.3577e+00
5	.6001e+00	.5000e+01	.6000e+00	.5000e+01	.6001e+00	.3765e+00
6	.4999e+00	.6000e+01	.5000e+00	.6000e+01	.5002e+00	.3766e+00
7	.3998e+00	.7000e+01	.4000e+00	.7000e+01	.4003e+00	.3579e+00
8	.2996e+00	.8000e+01	.3000e+00	.7999e+01	.3003e+00	.3391e+00
9	.1996e+00	.9000e+01	.2000e+00	.9000e+01	.2003e+00	.2825e+00
10	.9967e−01	.1000e+02	.9999e−01	.1000e+02	.1003e+00	.1884e+00

参考文献

[1] 周树荃，戴华．代数特征值反问题．郑州：河南科技出版社，1991，184－267

[2] Ф. Р. Ганмахер и М. Г. Крейн，Осцилляцонные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем，Москва 1950，82－90

[3] 格拉德威尔 G. M. L.．振动中的反问题．王大钧，何北昌译．北京：北京大学出版社，1991

[4] 蒋尔雄．一个固有频率的反问题及其解法．振动与冲击，1983(4)，1－6

[5] 王其申，王大钧．弹簧—质点系统的逆特征值问题．安庆师范学院学报，1987(1)，22－30

杆梁组合单支结构的振动反问题

摘 要 本文证明了杆梁组合单支结构差分离散系统固有振动的刚度矩阵的符号振荡性，导出了其频率和模态的若干定性性质，进而讨论了由两组位移或应变模态及相应频率构造其物理参数的条件、方法和算例。

关键词 杆梁组合单支结构 定性性质 模态反问题

一 引言 运动方程组

对弹性直杆和 Euler 梁的振动反问题，文[1]—[4]已获得较为满意的结果，而对工程实际中广泛应用的杆梁组合结构则尚缺乏研究。鉴于此，本文研究了杆梁组合结构差分离散系统固有振动的运动方程组，结果发现，对杆梁组合单支结构，其刚度矩阵属于符号振荡矩阵，因而频谱是分离的，其模态具有确定的变号数，但对一般的杆梁组合结构，则未必保持上述特性。

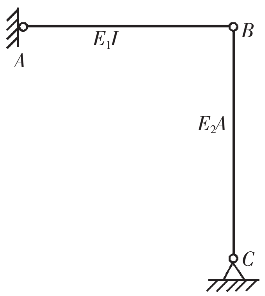

图 1

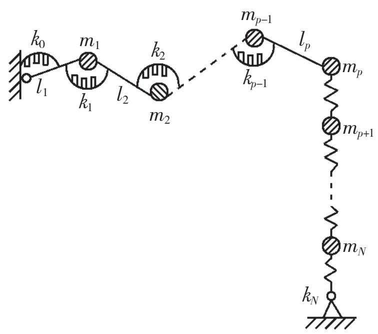

图 2

考察图 1 所示杆梁组合单支结构，当梁作横振动并用二阶中心差分[2]，柱作纵振动并用一阶差分时，相应物理模型如图 2 所示。图中$\{m_r\}_0^N$为各结点质量，$\{k_r\}_0^{p-1}$为梁的转动弹簧刚度，$\{k_r\}_p^N$为柱的线刚度，$\{l_r\}_1^{N+1}$为差分步长。m_r、k_r和相应结点处的线密度d_r及抗弯（抗拉）刚度的关系是：

---

* 本文原载于《安庆师范学院学报》（自然科学版）1995 年第 4 期。

$$\left.\begin{aligned}&m_r=\frac{l_r+l_{r+1}}{2}d_r(r=1,\cdots,p-1,p+1,\cdots,N)\quad m_0=\frac{l_1d_0}{2}\\&m_p=\frac{1}{2}(l_pd_p^{(b)}+l_{p+1}d_p^{(r)})\quad k_0=\frac{2}{l_1}(EI)_0\\&k_r=\frac{2(EI)_r}{l_r+l_{r+1}}(r=1,\cdots,p-1)\quad k_s=\frac{(EA)_s}{l_{s+1}}(p,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

为简略起见，本文直接从物理模型出发。控制图 2 所示系统的运动方程组是

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2m_ru_r=k_{r-1}\frac{w_{r-1}}{l_r}-k_rw_r\left(\frac{1}{l_r}+\frac{1}{l_{r+1}}\right)+k_{r+1}\frac{w_{r+1}}{l_{r+1}}(r=1,\cdots,p-2)\\&\omega^2m_{p-1}u_{p-1}=k_{p-2}\frac{w_{p-2}}{l_{p-1}}-k_{p-1}w_{p-1}\left(\frac{1}{l_{p-1}}+\frac{1}{l_p}\right)\\&\omega^2m_pu_p=k_{p-1}\frac{w_{p-1}}{l_p}-k_pw_p\\&\omega^2m_su_s=k_{s-1}w_{s-1}-k_sw_s(s=p+1,\cdots,N)\end{aligned}\right.\tag{2}$$

这里 ω 是圆频率，$u=(u_1,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$ 是位移模态，量

$$\left.\begin{aligned}&w_r=\frac{u_{r-1}}{l_r}-\left(\frac{1}{l_r}+\frac{1}{l_{r+1}}\right)u_r+\frac{u_{r+1}}{l_{r+1}}(r=0,1,\cdots,p-1;u_{-1}=u_0=0)\\&w_s=u_{s+1}-u_s\quad(s=p,\cdots,N;u_{N+1}=0)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

是一组与结点 x_r 处的应变 ε_r 相应的量

$$\left.\begin{aligned}&w_0=-\frac{l_1\varepsilon_0}{h},\qquad w_r=-\frac{l_r+l_{r+1}}{2h}\varepsilon_r(r=1,\cdots,p-1)\\&w_s=l_{s+1}\varepsilon_s(s=p,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

此处 h 是梁横截面的高度。当 $k_0\neq0$ 时相应于梁左端固支，$k_0=0$ 相应于梁左端铰支。

因为不论是用差分法处理振动问题，还是实际测量结构的模态和频率，$\{l_r\}_1^{N+1}$ 与 h 均为已知正数。这样 $\{w_r\}_0^N$ 和 $\{\varepsilon_r\}_0^N$ 是两组可互换的量，以下亦称 $\{w_r\}_0^N$ 为系统的应变模态。

二　杆梁组合结构固有振动的定性性质

当 $k_0=0$ 即梁左端铰支时，(2) 式的矢量形式是

$$\omega^2\boldsymbol{Mu}=\boldsymbol{E}_N\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KFL}^{-1}\boldsymbol{E}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{M}=\operatorname{diag}(m_1,\cdots,m_N)$，$\boldsymbol{L}=\operatorname{diag}(l_1,\cdots,l_p,1,\cdots,1)$，$\boldsymbol{K}=\operatorname{diag}(k_1,\cdots,k_N)$，$n\times(n+1)$ 阶常矩阵 $\boldsymbol{E}_n$ 和 $N\times(N+1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{F}$ 是

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_p&0\\0&-\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$

I 则是单位阵。

记 $B=\{b_{ij}\}_{N\times(N+1)}=E_NL^{-1}F^{\mathrm{T}}$，则不难验证 $B^*=\{(-1)^{i+j}b_{ij}\}$ 是完全非负矩阵，$A^*=B^*K(B^{\mathrm{T}})^*$ 也是完全非负矩阵。直接验算还表明 $\det A>0$，$a_{r,r+1}=a_{r+1,r}<0(r=1,\cdots,N-1)$。这样由振荡矩阵理论即知，$A$ 是符号振荡矩阵。又当 $k_0\neq 0$ 时，方程(2)的刚度矩阵 $\widetilde{A}$ 与 A 的唯一差别是 $\widetilde{a}_{11}=a_{11}+k_0/l_1^2$，易见这不影响 $\widetilde{A}$ 的符号振荡性。于是不论梁左端铰支或固支都有：

1. 杆梁组合单支结构固有振动的频率是离散的，即$(0<)\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_N$。且有 $\omega_i^{(p)}<\omega_i^{(c)}(i=1,\cdots,N)$，这里上标 p、c 分别代表铰支和固支。

2. 相应于 ω_i 的位移模态恰有 $i-1$ 个变号数，记作 $S_{u^{(i)}}=i-1\quad(i=1,\cdots,N)$。

需要指出的是，对于非单支的杆梁组合结构，由于其刚度矩阵必有某些次主对角元素为 0，因而必非符号振荡矩阵。

3. 记 $\tau=KFL^{-1}E_N^{\mathrm{T}}u$，则 τ 满足方程：

$$\omega^2K^{-1}\tau=FL^{-1}E_N^{\mathrm{T}}M^{-1}E_NL^{-1}F^{\mathrm{T}}\tau=A_1\tau \tag{6}$$

称它为以$\{\overline{m}_r,\bar{k}_r,\bar{l}_r\}=\{k_r^{-1},m_r^{-1},l_r\}$为参数的共轭杆梁组合单支结构的运动方程。同样可以验证 $\det A_1>0$，A_1 的次主对角元素全小于零，$A_1^*=(B^{\mathrm{T}})^*M^{-1}B^*$ 也是完全非负矩阵。这样，当左端铰支时，A_1 也是符号振荡矩阵，从而与 ω_i 相应的应力模态 $\tau^{(i)}$ 以及相应的应变模态 $w^{(i)}$ 亦有确定的变号数，即 $S_{\tau^{(i)}}=S_{w^{(i)}}=i-1\quad(i=1,\cdots,N)$。

以上讨论表明，当梁左端铰支时，杆梁组合单支结构位移模态的必要条件是：矢量 u 与由(3)式确定的 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_N)^{\mathrm{T}}$ 应有相同的变号数。如果进一步要求 u 为系统的第 i 模态，则必要条件是 $S_u=S_w=i-1\quad(i=1,\cdots,N)$。

如果梁的左端固支，此时 $\tau=(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_N)$。按照文[4]，共轭结构的左端就为自由端。这样共轭结构将有 0 本征值，刚度矩阵不是振荡矩阵。不过仍可推论，共轭结构与原结构频率之间的关系是 $\bar{\omega}_{i+1}=\omega_i(i=1,\cdots,N)$。因而应有 $S_{\tau^{(i)}}=S_{w^{(i)}}=i(i=1,\cdots,N)$。实例计算证明了这一点。详细证明从略。

三　反问题的提法和限制条件

考虑如下反问题：

给定两个矢量和两个正数 λ、μ，试确定两组正数$\{m_r,k_r\}_1^N$，使以 m_r、k_r 为其截面物理参数的杆梁组合单支结构以给定矢量为其两个不同的位移(或应变)模态，而以$\sqrt{\lambda}$、$\sqrt{\mu}$ 为相应的圆频率。

为了求解这一反问题，必须解决这样两个问题：① 所给矢量和正数 λ、μ 应满足什么条件？② 当此条件满足时，如何确定这两组正数 m_r、k_r？本节和下节将分别回答这两个问题。正如前文所述，在下面的讨论中$\{l_r\}_1^{N+1}$ 将视为已知。

假设给定位移模态 $u=(u_1,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$、$v=(v_1,\cdots,v_N)^{\mathrm{T}}$，则由(3)式即可确定相应的应

变模态 w 和 z。只是当左端固支时，$w=(w_0,w_1,\cdots,w_N)^{\mathrm{T}}$，$z=(z_0,z_1,\cdots,z_N)^{\mathrm{T}}$。反之，如果给定 w，则 u 的分量是

$$\left.\begin{aligned}
&u_s=-\sum_{i=s}^{N}w_i \quad (s=N,\cdots,p)\\
&u_{p-1}=\left(1-\frac{l_p}{l}\right)u_p-\frac{l_p}{l}\sum_{i=1}^{p-1}l_i\sum_{j=i}^{p-1}w_j\\
&u_{r-1}=l_r w_r+\left(1+\frac{l_r}{l_{r+1}}\right)u_r-\frac{l_r}{l_{r+1}}u_{r+1}\,(r=p-1,\cdots,2)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 $l=\sum_{i=1}^{p}l_i$ 是梁段的全长。由 z 求 v 类同。

同一质点对应不同频率的运动方程是

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda m_r u_r=\frac{w_{r-1}}{l_r}k_{r-1}-\left(\frac{1}{l_r}+\frac{1}{l_{r+1}}\right)w_r k_r+\frac{w_{r+1}}{l_{r+1}}k_{r+1} \quad (r=1,\cdots,p-2)\\
&\mu m_r v_r=\frac{z_{r-1}}{l_r}k_{r-1}-\left(\frac{1}{l_r}+\frac{1}{l_{r+1}}\right)z_r k_r+\frac{z_{r+1}}{l_{r+1}}k_{r+1}\\
&\lambda m_{p-1}u_{p-1}=\frac{w_{p-2}}{l_{p-1}}k_{p-2}-\left(\frac{1}{l_{p-1}}+\frac{1}{l_p}\right)w_{p-1}k_{p-1}\\
&\mu m_{p-1}v_{p-1}=\frac{z_{p-2}}{l_{p-1}}k_{p-2}-\left(\frac{1}{l_{p-1}}+\frac{1}{l_p}\right)z_{p-1}k_{p-1}\\
&\lambda m_p u_p=\frac{w_{p-1}}{l_p}k_{p-1}-w_p k_p\\
&\mu m_p v_p=\frac{z_{p-1}}{l_p}k_{p-1}-z_p k_p
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda m_s u_s=w_{s-1}k_{s-1}-w_s k_s\\
&\mu m_s v_s=z_{s-1}k_{s-1}-z_s k_s
\end{aligned}\right\}\quad (s=p+1,\cdots,N) \tag{9}$$

这就是反问题的出发方程。式中 $\lambda=\omega_i^2$，$\mu=\omega_j^2$ 是两个不同的特征值。引入

$$\left.\begin{aligned}
&a_r=\lambda u_r z_{r-1}-\mu v_r w_{r-1}\\
&b_r=\lambda u_r z_r-\mu v_r w_r\\
&e_r=z_r w_{r-1}-w_r z_{r-1}
\end{aligned}\right\}\quad (r=1,\cdots,N) \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&c_r=\lambda u_r z_{r+1}-\mu v_r w_{r+1}\\
&f_r=z_{r+1}w_{r-1}-w_{r+1}z_{r-1}
\end{aligned}\right\}\quad (r=1,\cdots,p-2) \tag{11}$$

则(8)、(9)两式可以改写成

$$\left.\begin{aligned}
&a_s k_{s-1} - b_s k_s = 0 \quad (s = N, \cdots, p+1) \\
&a_p k_{p-1} - l_p b_p k_p = 0 \\
&a_{p-1} k_{p-2} - \left(1 + \frac{l_{p-1}}{l_p}\right) b_{p-1} k_{p-1} = 0 \\
&a_r k_{r-1} - \left(1 + \frac{l_r}{l_{r+1}}\right) b_r k_r + \frac{l_r}{l_{r+1}} c_r k_{r+1} = 0 (r = p-2, \cdots, 1)
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
&a_s m_s - e_s k_s = 0 \quad (s = N, \cdots, p) \\
&a_{p-1} m_{p-1} - \left(\frac{1}{l_{p-1}} + \frac{1}{l_p}\right) e_{p-1} k_{p-1} = 0 \\
&a_r m_r - \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}}\right) e_r k_r \ \frac{1}{l_{r+1}} f_r k_{r+1} = 0 (r = p-2, \cdots, 1)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned}
&k_{s-1} = \frac{b_s}{a_s} k_s \quad m_s = \frac{e_s}{a_s} k_s \quad (s = N, \cdots, p+1) \\
&k_{p-1} = \frac{l_p b_p}{a_p} k_p \quad m_p = \frac{e_p}{a_p} k_p \\
&k_{r-1} = \det C_1^{(r)} \cdot k_{p-1} \quad m_r = \det C_2^{(r)} k_{p-1} (r = p-1, \cdots, 1)
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这里 $C_1^{(r)}$ 和 $\boldsymbol{C}_2^{(r)}$ 都是三对角矩阵，其主对角元素分别是 $\left\{\frac{b_j}{a_j} + \left(1 + \frac{l_j}{l_{j+1}}\right)\right\}_r^{p-1}$ 和 $\left\{\frac{e_r}{a_r}\left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}}\right), \frac{b_{r+1}}{a_{r+1}}\left(1 + \frac{l_{r+1}}{l_{r+2}}\right), \cdots, \frac{b_{p-1}}{a_{p-1}}\left(1 + \frac{l_{p-1}}{l_p}\right)\right\}$，左次主对角元素均为 -1，右次主对角元素分别是 $\left\{-\frac{c_j l_j}{a_j l_{j+1}}\right\}_r^{p-2}$ 和 $\left\{\frac{-f_r}{a_r l_{r+1}}, -\frac{c_{r+1} l_{r+1}}{a_{r+1} l_{r+2}}, \cdots, -\frac{c_{p-2} l_{p-2}}{a_{p-1} l_{p-1}}\right\}$。鉴于结构物理参数恒正，所以作为反问题的已知数据必须满足

(1) 所给矢量必须有确定的变号数，且当 $\lambda < \mu$ 时，

$$S_w = S_u + 2 - r_0 < S_z = S_v + 2 - r_0$$

(2) a_s、b_s、$e_s (s = N, \cdots, p)$ 同号且 $a_r \neq 0 (r = 1, \cdots, N)$；

(3) $\boldsymbol{C}_2^{(r)}$ 为正定矩阵而 $C_1^{(r)}$ 为正定$(k_0 \neq 0)$或半正定矩阵$(k_0 = 0)$。上面 $r_0 = 1 (k_0 \neq 0)$ 或 $r_0 = 0 (k_0 = 0)$。

以上讨论表明：在相差一个常数因子的意义上，存在唯一的杆梁组合单支结构，它以所给矢量为其位移（或应变）模态，而以$\sqrt{\lambda}$、$\sqrt{\mu}$ 为相应圆频率。

四　算法和算例

根据上节的讨论，当给定两个位移模态和差分步长时，由(3)式算出相应的应变模态；当给定应变模态和差分步长时，则由(7)式计算相应的位移模态。再由(10)、(11)两式算出相应的a_r、b_r、e_r、c_r、f_r，并由(10)、(11)两式按指标递减次序在指定k_N后即可求出全部物理参数。

按照以上递推算法，我们编制了微机程序并计算了若干实例。

例1　长为4m的等截面梁和杆，均取9个等分点，梁左端固支，结点质量$m_r = 100(r = 1,\cdots,7)$，$m_8 = 250$，$m_s = 400(s = 9,\cdots,15)$。取正问题一、二阶模态(位移模态5位有效数字，应变模态3位有效数字)为输入数据，计算结果见表1、表2。表中第一栏为输入本征值和差分步长。由表可知，结点质量计算值误差不超过5%和10%，刚度计算值误差则很小。

NO.1	.78896E+04	.59293E+05	.500E+00	
r	$U(r)$	$V(r)$	$M(r)$	$K(r)$
0				.9999E+07
1	.10241E−01	.20328E−01	.1028E+02	.9996E+07
2	.29018E−01	.53700E−01	.9968E+01	.1000E+08
3	.54642E−01	.93135E−01	.9945E+01	.9996E+07
4	.85486E−01	.13245E+00	.9973E+01	.9990E+07
5	.12003E+00	.16683E+00	.1026E+02	.1003E+08
6	.15691E+00	.19345E+00	.9480E+01	.9935E+07
7	.19503E+00	.21192E+00	.1047E+02	.1011E+08
8	.23356E+00	.22476E+00	.2485E+02	.8000E+07
9	.22991E+00	.15491E+00	.4001E+02	.8002E+07
10	.21719E+00	.39139E−01	.3996E+02	.8001E+07
11	.19591E+00	−.88236E−01	.4004E+02	.7999E+07
12	.16689E+00	−.18945E+00	.3998E+02	.8002E+07
13	.13130E+00	−.23450E+00	.4000E+02	.7999E+07
14	.90518E−01	−.21003E+00	.4000E+02	.8000E+07
15	.46170E−01	−.12329E+00	.4000E+02	.8000E+07

NO. 2	.78896E+04	.59293E+05	.500E+00	
r	$W(r)$	$Z(r)$	$M(r)$	$K(r)$
0	.2050E−01	.4070E−01		.1003E+08
1	.1710E−01	.2610E−01	.1108E+02	.1002E+08
2	.1370E−01	.1210E−01	.1018E+02	.1003E+08
3	.1040E−01	−.2460E−03	.9908E+01	.1007E+08
4	.7390E−02	−.9860E−02	.1017E+02	.1004E+08
5	.4690E−02	−.1550E−01	.9892E+01	.1004E+08
6	.2460E−02	−.1630E−01	.1009E+02	.1002E+08
7	.8440E−03	−.1130E−01	.1006E+02	.1002E+08
8	−.3650E−02	−.6980E−01	.2509E+02	.8032E+07
9	−.1270E−01	−.1160E+00	.3963E+02	.7969E+07
10	−.2130E−01	−.1270E+00	.4054E+02	.8013E+07
11	−.2900E−01	−.1010E+00	.3988E+02	.8011E+07
12	−.3560E−01	−.4500E−01	.4001E+02	.8006E+07
13	−.4080E−01	.2450E−01	.4006E+02	.8003E+07
14	−.4430E−01	.8670E−01	.4013E+02	.8017E+07
15	−.4620E−01	.1230E+00	.3961E+02	.8000E+07

例 2　长各为 $4m$ **的变截面梁和等截面杆，梁左端铰支，分法同上例。**$k_r=(3.2-0.2r)\times10^8(r=1,\cdots,7)$，$m_r=320-20r(r=1,\cdots,7)$，$m_8=270$，$k_s=1.5\times10^8(s=8,\cdots,15)$，$m_s=375(s=9,\cdots,15)$。**以正问题**1、3**模态（位移模态取**6**位有效数字，应变模态取**5**位有效数字）为输入模态，计算结果列于表**3、**表**4。**由表可知，结点处质量计算误差较大，刚度计算值误差很小。**

NO. 3	.10848E+05	.15985E+05	.500E+00	
r	$U(r)$	$V(r)$	$M(r)$	$K(r)$
0				.0000E+00
1	.601390E−01	.134801E+00	.1571E+03	.2871E+09
2	.118983E+00	.244054E+00	.2831E+03	.2761E+09
3	.175227E+00	.304335E+00	.2629E+03	.2588E+09
4	.227712E+00	.299118E+00	.2452E+03	.2399E+09
5	.275601E+00	.222295E+00	.2215E+03	.2201E+09
6	.318578E+00	.796923E−01	.1999E+03	.2001E+09
7	.357087E+00	−.111931E+00	.1799E+03	.1801E+09
8	.392630E+00	−.328552E+00	.2701E+03	.1500E+09
9	.370720E+00	−.354010E+00	.3752E+03	.1501E+09
10	.338770E+00	−.237990E+00	.3746E+03	.1500E+09
11	.297620E+00	−.268750E−01	.3749E+03	.1500E+09
12	.248400E+00	.194980E+00	.3749E+03	.1500E+09
13	.192450E+00	.338920E+00	.3750E+03	.1500E+09
14	.131270E+00	.347420E+00	.3750E+03	.1500E+09
15	.665380E−01	.217090E+00	.3750E+03	.1500E+09

NO. 4	.10848E+05	.15985E+05	.500E+00	
r	$W(r)$	$Z(r)$	$M(r)$	$K(r)$
0	.00000E+00	.00000E+00		.0000E+00
1	.25900E−02	.51094E−01	.2823E+03	.2986E+09
2	.52002E−02	.97945E−01	.2809E+03	.2797E+09
3	.75178E−02	.13100E+00	.2605E+03	.2600E+09
4	.91919E−02	.14321E+00	.2407E+03	.2401E+09
5	.98233E−02	.13156E+00	.2201E+03	.2201E+09
6	.89369E−02	.98041E−01	.2002E+03	.2001E+09
7	.59326E−02	.49994E−01	.1800E+03	.1801E+09
8	.21910E−01	.25450E−01	.2702E+03	.1501E+09
9	.31960E−01	−.11600E+00	.3751E+03	.1501E+09
10	.41150E−01	−.21110E+00	.3750E+03	.1500E+09
11	.49220E−01	−.22190E+00	.3743E+03	.1500E+09
12	.55950E−01	−.14390E+00	.3752E+03	.1500E+09
13	.61170E−01	−.85000E−02	.3750E+03	.1500E+09
14	.64730E−01	.13030E+00	.3749E+03	.1500E+09
15	.66540E−01	.21710E+00	.3751E+03	.1500E+09

五　结束语

综上所述，杆梁组合单支结构的频率和模态具有振荡特性，而由两个位移（或应变）模态及相应频率构造其物理参数是可行的。其实本文正是文[1]、[3]的综合与推广，文[1]、[3]则可视为本文的特例。顺便指出，在文[1]中，我们仅讨论了由位移模态构造杆件离散系统的问题，这里采用与文[1]表 1 相应的应变模态（两位有效数字）作为输入数据，获得了令人满意的结果（见表 5）。

NO. 5	.25852E+09	.36500E+10	.500E+00	
r	$W(r)$	$Z(r)$	$M(r)$	$K(r)$
0	.5700E−01	.1200E+00		.2168E+08
1	.5200E−01	−.4700E−01	.7983E−02	.2151E+08
2	.4100E−01	−.1500E+00	.8020E−02	.2177E+08
3	.2600E−01	−.4700E−01	.8412E−02	.2178E+08
4	.9000E−02	.1200E+00	.8206E−02	.2142E+08
5	−.9000E−02	.2500E+00	.5967E−02	.1028E+08
6	−.2600E−01	−.9500E−01	.3898E−02	.1038E+08
7	−.4100E−01	−.3100E+00	.3869E−02	.1024E+08
8	−.5200E−01	−.9500E−01	.3901E−02	.1019E+08
9	−.5700E−01	.2500E+00	.3883E−02	.1030E+08

最后我们指出，本文的讨论可以推广到更为一般的杆梁组合结构，例如单杠(图 3) 结构。

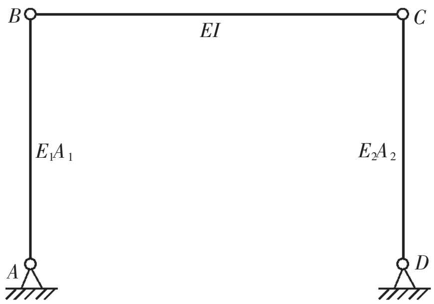

图 3

参考文献

[1] 王其申，王大钧．由部分模态及频率数据构造杆件离散系统．振动工程学报，1987(1)，83－87

[2] 何北昌，王大钧，王其申．Euler 梁有限差分模型的振动逆问题．振动工程学报，1989(2)，1－9

[3] 王大钧，何北昌，王其申．由两组模态及相应频率构造 Euler 梁．力学学报，1990(4)，479－483

[4] 王其申，何北昌，王大钧．Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质．振动工程学报，1990(4)，58－66

[5] G. M. L. 格拉德威尔．振动中的反问题．王大钧，何北昌译．北京：北京大学出版社，1991

弹性基础上的杆的离散系统频谱和模态的定性性质及其模态反问题

摘　要　本文讨论了具有弹性基础的杆件离散系统频谱和模态的若干定性性质，提出并求解了由系统的一个特征对（位移或应变模态及相应频率）确定基础刚度、由两个特征对确定基础及杆件刚度、由三个特征对确定基础及杆件刚度和结点质量等三个模态反问题。

关键词　杆件离散系统　弹性基础　定性性质　模态反问题

一　引　言

关于任意支承条件下杆件离散系统频谱和模态的定性性质，我们已在文[1,2]中作过详细讨论。但在工程实际中还有另外一类杆，它们在沿杆长方向上与弹性基础相连，例如研究埋入土中的桩的纵向振动时就会遇到这类问题。针对这一事实，本文讨论了沿长度方向与弹性基础相连接的杆的离散系统的数学模型和运动方程组，确定了这种系统固有振动的频谱和模态的若干定性性质，指出其频谱和模态仍满足一般杆件离散系统都具有的基本特性，着重阐明了基础刚度对系统频率和模态的影响。在此基础上提出并求解了这种系统的如下反问题。

问题 1　已知杆的刚度、质量分布及与基础相连后的一个特征对（指位移或应变模态及相应频率，下同），确定基础的刚度分布。

问题 2　已知杆的质量分布及与基础相连后的两个特征对，确定杆及基础的刚度分布。

问题 3　已知与基础相连后杆的三个特征对，确定杆的刚度和质量分布及基础刚度。

文中详细讨论了以上三个反问题的解的存在条件、解法并附有计算实例。

二　系统的数学模型及运动方程组

诸多文献已经指出，杆的离散系统可以用弹簧 — 质量系统来表示。当杆沿长度方向与基础相连时，基础对杆的纵振动的影响同样可以用加在结点质量上的附加弹簧来表示。因此本文所考察的离散系统的数学模型如图 1 所示。图中$\{m_r\}_1^N$、$\{k_r\}_1^{N+1}$分别表示杆的结点质量和连接弹簧的刚度系数，$\{c_r\}_1^N$代表弹性基础加在结点质量上的弹簧常数。这种系统的运动方程组是

* 本文原载于《安庆师范学院学报》1997 年第 2 期，原文作者为王其申、王大钧（北京大学力学系）。

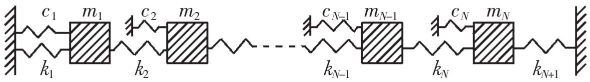

图 1

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2 m_1 u_1 = (c_1 + k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2\\&\omega^2 m_r u_r = -k_r u_{r-1} + (c_r + k_r + k_{r+1})u_r - k_{r+1}u_{r+1}(r = 2,\cdots,N-1)\\&\omega^2 m_N u_N = -k_N u_{N-1} + (c_N + k_N + k_{N+1})u_N\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中 ω 是圆频率，当 k_1 或 k_{N+1} 为 0 时表示除基础的影响外不再另有约束。为了确定起见，下面只就 $k_{N+1}=0$ 的情况加以讨论。

引入

$$p_r = u_r - u_{r-1}(r = 1,\cdots,N; u_0 = 0)\tag{2}$$

称 $\{p\} = (p_1,\cdots,p_N)^{\mathrm{T}}$ 为位移模态 $\{u\} = (u_1,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$ 相对应的应变模态并记 $\lambda = \omega^2$，则(1)式可以改写为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda m_r u_r = c_r u_r + k_r p_r - k_{r+1}p_{r+1}(r = 1,\cdots,N-1)\\&\lambda m_N u_N = c_N u_N + k_N p_N\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

(1)、(3)两式就是下文讨论模态反问题的出发方程，(2)式则是应变模态与位移模态的互换式。

三　系统模态和频谱的若干定性性质

(1)式的矩阵形式是

$$[A]\{u\} = \lambda[M]\{u\}\tag{4}$$

其中 $[M] = \mathrm{diag}(m_1,\cdots,m_N)$，刚度矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} c_1+k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -k_2 & c_2+k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{N-1} & c_{N-1}+k_{N-1}+k_N & -k_N\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_N & c_N+k_N \end{bmatrix}$$

是对称三对角矩阵。由 Jacobi 矩阵的理论[3]立刻可以指出系统的频谱和模态具备以下三条基本特性：

1. 系统的频谱是严格分离的，按递增次序可将它们排列为：$(0<)\omega_1<\cdots<\omega_N$；

2. 对应于 $\omega_i(i=1,\cdots,N)$ 的模态 $\{u^{(i)}\}$ 恰有 $(i-1)$ 个变号数，记作 $S_{u^{(i)}} = u-1$。这条性质等价于：$\{u^{(i)}\}$— 线(即以 $(j,u_j^{(i)})$ 为顶点的折线)有且仅有 $(i-1)$ 个零点，并且所有这

些零点都是节点。

作为性质 2 的推论有：$u_1^{(i)} \neq 0, u_N^{(i)} \neq 0 (i = 1, \cdots, N)$。不失一般性以下假设 $u_1^{(i)} > 0 (i = 1, \cdots, N)$。

3. $\{u^{(i)}\}$— 线与 $\{u^{(i+1)}\}$— 线的节点彼此相间。

除了满足以上基本特性外，下面我们着重考察 $c_r (r = 1, \cdots, N)$ 对系统频谱和模态的影响。

记 $[U] = \{u_r^{(i)}\}_{N\times N}$。由于 $[A]$ 是正定对称矩阵，可取 $[U]$ 为带权 $[M]$ 的正交矩阵。这样 $[V] = ([U]^{\mathrm{T}})^{-1}$ 且有

$$[V][A][U] = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$$

$$\lambda_j = \sum_{r,s=1}^{N} a_{rs} u_{sj} v_{rj} \quad (j = 1, \cdots, N) \tag{5}$$

上式两边对 a_{ik} 求导有

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{ik}} = u_{kj} v_{ij} + \sum_{r,s=1}^{N} a_{rs} \left(u_{sj} \frac{\partial v_{rj}}{\partial a_{ik}} + \frac{\partial u_{sj}}{\partial a_{ik}} v_{rj} \right)$$

因有

$$\sum_{s=1}^{N} a_{rs} u_{sj} = \lambda_j m_r u_{rj}, \sum_{r=1}^{N} a_{rs} v_{rj} = \lambda_j m_r v_{sj} \quad (j = 1, \cdots, N)$$

对任意的 $i、j、k = 1, \cdots, N$，我们得到

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{ik}} = u_{kj} v_{ij} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial a_{ik}} \sum_{r=1}^{N} m_r u_{rj} v_{rj} = u_{kj} v_{ij} \tag{6}$$

在本文的情况下，$a_{ii} = c_i + k_i + k_{i+1} (i = 1, \cdots, N)$，这样

4. 基频 ω_1 是 $c_r (r = 1, \cdots, N)$ 的严格递增函数，即弹性基础的存在将使基频升高；

5. $\omega_i (i = 2, \cdots, N)$ 是 $c_1、c_N$ 的严格增函数，是 $c_r (r = 2, \cdots, N-1)$ 的增函数。

考虑特殊情况，当 $c_r / m_r = \lambda_0 > 0$ 时，则有 $\lambda_r(\lambda_0) = \lambda_0 + \lambda_r(0)$。这里 $\lambda_r(x) (r = 1, \cdots, N)$ 表示当 $\lambda_0 = x$ 时方程(1) 的相应特征值。注意，在此特殊情况下系统频率一致升高但趋密集。

关于基础刚度对模态的影响我们只想指出一点：对于不具弹性基础的弹簧 — 质量系统，文[1] 已指出它的应变模态 $\{p^{(i)}\}$ 同样具有确定的变号数。这一性质在存在弹性基础特别是基础刚度极不均匀时不再保持。考虑两种特殊情况：

a. 在某个中间结点 x_r 处，$c_r \gg c_j (j = 1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, N; r \neq 1, N)$。这时 c_r 的作用相当于一个固定约束，$u_r \to 0$。这样的系统 $S_{p^{(1)}}$ 将从没有弹性基础时的 0 变到 3，$S_{p^{(j)}} (j = 2, \cdots, N)$ 也将增加 1 或 3，视 u_r 是否为相应模态的节点而定。这就导致不确定性。

b. 对于上文指出的 $c_r / m_r = \lambda_0$ 的特殊情况，(1) 式表明，弹性基础的存在将使杆的右端支承方式相当于弹性支承，从而应变模态的变号数 $S_{p^{(j)}} = j (j = 1, \cdots, N)$，除非 $c_N = 0$。

所以一般情况下，弹性基础的存在使得应变模态的变号数变得难以确定，因而也就无法给出这种系统位移模态的充分必要条件。

四　具有弹性基础的杆的离散系统的模态反问题

现在着手求解本文开始提出的三个反问题。

1. 问题 1：已知杆的刚度、质量分布及与基础相连后的一个特征对，确定基础刚度。

根据问题 1 的提法，由(3) 式立即给出

$$\left.\begin{aligned} c_r &= \lambda m_r - k_r \frac{p_r}{u_r} + k_{r+1} \frac{p_{r+1}}{u_r} (r = 1, \cdots, N-1) \\ c_N &= \lambda m_N - k_N \frac{p_N}{u_N} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

可见由系统的任一位移(或应变) 模态及足够高的相应频率即可完全确定与杆相连的弹性基础刚度。只是注意一点，如果所给模态的某个中间分量 $u_r = 0$ 时，应有 $k_r p_r = k_{r+1} p_{r+1}$ 且 $u_{r-1} u_{r+1} < 0$。

例 1　两段长度相等的等截面阶梯杆，其截面物理参数分别为 $\{m_r\}_1^{10} = \{4(0.0078), 0.00585, 4(0.0039), 0.00195\}$，$\{k_r\}_1^{10} = \{5(0.206 \times 10^8), 5(0.103 \times 10^8)\}$，令 $\{c_r\}_1^{10} = \{5(0.1 \times 10^8), 5(0.12 \times 10^8)\}$ 解正问题，再以正问题的第一应变模态及相应频率为输入数据，计算所得的基础刚度值列于表 1。输入模态的精度取三位有效数字，计算结果令人满意。

表 1

N	$p(N)$	$m(N)$	$k(N)$	$c(N)$
1	.268E+00	.7800E−02	.2060E+08	.9973E+07
2	.216E+00	.7800E−02	.2060E+08	.1001E+08
3	.123E+00	.7800E−02	.2060E+08	.9992E+07
4	.580E−02	.7800E−02	.2060E+08	.1001E+08
5	.112E+00	.5850E−02	.2060E+08	.9984E+07
6	.248E+00	.3900E−02	.1030E+08	.1200E+08
7	.125E+00	.3900E−02	.1030E+08	.1199E+08
8	.629E−01	.3900E−02	.1030E+08	.1198E+08
9	.314E−01	.3900E−02	.1030E+08	.1200E+08
10	.151E−01	.1950E−02	.1030E+08	.1195E+08
λ_1	.1791E+10			

2. 问题 2：已知杆的质量分布及与基础相连后的两个特征对，确定杆及基础的刚度分布。

当给定两个特征对 $(\lambda, \{u\})$ 与 $(\eta, \{v\})$ 时，由(2) 式有

$$p_r = u_r - u_{r-1}, q_r = v_r - v_{r-1} \quad (r = 1, \cdots, N; u_0 = v_0 = 0))$$

再由(3) 式有

$$\left.\begin{aligned}&\lambda m_r u_r = c_r u_r + k_r p_r - k_{r+1} p_{r+1} \quad (r = 1,\cdots,N-1)\\&\lambda m_N u_N = c_N u_N + k_N p_N\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}&\eta n_r v_r = c_r v_r + k_r q_r - k_{r+1} q_{r+1} \quad (r = 1,\cdots,N-1)\\&\eta n_N v_N = c_N v_N + k_N q_N\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

记

$$\left.\begin{aligned}a_r &= u_r q_r - v_r p_r\\b_r &= \lambda u_r q_r - \eta v_r p_r\\g_r &= (\eta - \lambda) u_r v_r\end{aligned}\right\} \quad (r = 1,\cdots,N) \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}f_r &= p_{r+1} q_r - p_r q_{r+1}\\h_r &= u_r q_{r+1} - v_r p_{r+1}\end{aligned}\right\} \quad (r = 1,\cdots,N-1) \tag{11}$$

则得

$$\left.\begin{aligned}c_r &= \frac{b_r}{a_r} m_r + \frac{f_r}{a_r} k_{r+1}\\k_r &= \frac{g_r}{a_r} m_r + \frac{b_r}{a_r} k_{r+1}\end{aligned}\right\} \quad (r = 2,\cdots,N) \tag{12}$$

这就是待求量的递推公式。注意，由于 $p_1 = u_1$，故只当 $m_1 g_1 + h_1 k_2 = 0$ 时，

$$c_1 + k_1 = \lambda m_1 + p_2 k_2 / u_1 \tag{13}$$

如果进一步记

$$A_j^{(r)} = \frac{g_j}{a_j} \prod_{i=r}^{j-1} \frac{h_i}{a_i} \quad \left(j = r,\cdots,N;\ r = 2,\cdots,N;\ \prod_{i=r}^{r-1} \alpha_i = 1\right) \tag{14}$$

则问题 2 有解的充分必要条件是：

①$\{u\}$、$\{v\}$ 有确定的变号数且当 $\lambda < \eta$ 时 $S_u < S_v$；② $a_r \neq 0 (r = 2,\cdots,N)$；③ $k_r = \sum_{j=r}^{N} A_j^{(r)} m_j > 0 (r = 2,\cdots,N)$；④ $c_r = \frac{b_r}{a_r} m_r + \frac{f_r}{a_r} \sum_{j=r+1}^{N} A_j^{(r+1)} m_j \geqslant 0 (r = 2,\cdots,N)$ 但其中至少有一个等号不成立；⑤ $g_1 m_1 + h_1 \sum_{j=2}^{N} A_j^{(2)} m_j = 0$。

问题 2 的具体算法是：由已知数据计算 a_r、b_r、f_r、g_r、h_r，然后由(12)式按递减次序递推求出 $\{c_r、k_r\}_2^N$，再由(13)式计算 $c_1 + k_1$，这两个量在问题 2 的提法下不唯一确定。

例 2　矩形截面锥形杆，其截面物理参数为 $\{m_r\}_1^{10} = \{0.702, 0.624, 0.546, 0.468, 0.39, 0.312, 0.234, 0.156, 0.078, 0.0195\} \times 10^{-2}$，$\{k_r\}_1^{10} = \{1957, 1751, 1545, 1339, 1133, 927, 721, 515, 309, 103\} \times 10^5$，给定基础刚度 $\{c_r\}_1^{10} = \{18, 18, 16, 16, 14, 14, 12, 12, 10, 10\} \times 10^6$ 解正问题，再以正问题的一、三位移模态及相应频率和结点质量为输入数据并指定 k_1，计算结果列于表 2。表中输入模态的精确度取 4 位有效数字。

表 2

N	$u(N)$	$v(N)$	$m(N)$	$k(N)$	$c(N)$
1	.6062E−01	.1361E+00	.7020E−01	.1957E+09	.1777E+08
2	.1196E+00	.1639E+00	.6240E−01	.1750E+09	.1813E+08
3	.1707E+00	.4687E−01	.5460E−01	.1544E+09	.1595E+08
4	.2071E+00	−.1310E+00	.4680E−01	.1338E+09	.1603E+08
5	.2267E+00	−.2226E+00	.3900E−01	.1133E+09	.1403E+08
6	.2262E+00	−.1309E+00	.3120E−01	.9261E+08	.1397E+08
7	.2091E+00	.1050E+00	.2340E−01	.7210E+08	.1199E+08
8	.1753E+00	.3390E+00	.1560E−01	.5147E+08	.1202E+08
9	.1327E+00	.4270E+00	.7800E−02	.3093E+08	.9994E+07
10	.7154E−01	.2863E+00	.1950E−02	.1028E+08	.9994E+07
ω_i^2	.6160E+09	.2533E+10			

顺便指出，对于由两个特征对和杆的刚度分布以确定杆的质量及基础刚度分布的问题；由两个特征对和基础刚度以确定杆的质量、刚度分布的问题，完全可以进行类似的讨论。限于篇幅，这里从略。

3. 问题 3：已知与基础相连后杆的三个特征对，确定杆的质量、刚度分布及基础刚度。

当给定三个特征对时，由(2)式可以获得 6 个向量$\{u\}$—$\{p\}$、$\{v\}$—$\{q\}$、$\{w\}$—$\{R\}$，它们满足如下方程组

$$\left.\begin{aligned} \lambda m_r u_r &= c_r u_r + k_r p_r - k_{r+1} p_{r+1} \\ \eta m_r v_r &= c_r v_r + k_r q_r - k_{r+1} q_{r+1} \\ \mu m_r w_r &= c_r w_r + k_r R_r - k_{r+1} R_{r+1} \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, \cdots, N-1) \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda m_N u_N &= c_N u_N + k_N p_N \\ \eta m_N v_N &= c_N v_N + k_N q_N \\ \mu m_N w_N &= c_N w_N + k_N R_N \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

记

$$\left.\begin{aligned} d_r &= \begin{vmatrix} u_r & p_r & p_{r+1} \\ v_r & q_r & q_{r+1} \\ w_r & R_r & R_{r+1} \end{vmatrix} \qquad d_{1r} = \begin{vmatrix} \lambda u_r & p_r & p_{r+1} \\ \eta v_r & q_r & q_{r+1} \\ \mu w_r & R_r & R_{r+1} \end{vmatrix} \\ d_{2r} &= \begin{vmatrix} u_r & \lambda u_r & p_{r+1} \\ v_r & \eta v_r & q_{r+1} \\ w_r & \mu w_r & R_{r+1} \end{vmatrix} \qquad d_{3r} = -\begin{vmatrix} u_r & p_r & \lambda u_r \\ v_r & q_r & \eta v_r \\ w_r & R_r & \mu w_r \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, \cdots, N) \tag{17}$$

易见

$$\frac{c_r}{m_r}=\frac{d_{1r}}{d_r},\frac{k_r}{m_r}=\frac{d_{2r}}{d_r},\frac{k_{r+1}}{m_r}=\frac{d_{3r}}{d_r}\quad(r=2,\cdots,N-1)\tag{18}$$

另一方面，因 $d_1=0$，这就要求 $d_{21}=0$。当此条件满足时，可由(15)式的前两式令 $r=1$ 解得

$$\frac{c_1+k_1}{m_1}=\frac{e_1}{h_1},\frac{k_2}{m_1}=\frac{g_1}{h_1}\tag{19}$$

这里 g_1、h_1 由(10)、(11)式定义而 $e_1=\lambda u_1q_2-\eta v_1p_2$。

同样，因应有 $d_{3N}=0$ 而 $(u_N,v_N,w_N)\parallel(\lambda u_N,\eta v_N,\mu w_N)$，故 m_N、k_N、c_N 中有一个是自由未知量，例如可取 m_N 为自由未知量，这时

$$k_N=\frac{g_N}{a_N}m_N,c_N=\frac{b_N}{a_N}m_N\tag{20}$$

式中 a_N、b_N、g_N 由(10)式定义。

这样，当以下条件：1)$\{u\}$、$\{v\}$、$\{w\}$ 均有确定的变号数，且当 $\lambda<\eta<\mu$ 时 $S_u<S_v<S_w$；2)d_{21} 且 g_1、h_1、e_1 同号；3)d_r、d_{1r}、d_{2r}、$d_{3r}(r=2,\cdots,N-1)$ 同号或同时为零；4)$d_{3N}=0$ 且 a_N、b_N、g_N 同号均满足时，即可构造出杆件离散系统及与之相连的基础刚度系数。又当 $d_r(r=2,\cdots,N-1)$ 均不为零时，除 c_1、k_1 外，在相差一个常数因子的意义上，构造系统是唯一确定的。

例 3 杆及基础刚度同例 2，分别取正问题的一、二、三位移模态和应变模态及相应频率为输入数据，计算结果列于表 3、表 4。

表 3

N	$u(N)$	$v(N)$	$W(N)$	$m(N)$	$k(N)$	$c(N)$
1	.60624E−01	.10160E+00	.13606E+00	.7105E−01	.1983E+09	.1800E+08
2	.11964E+00	.16905E+00	.16392E+00	.6320E−01	.1772E+09	.1827E+08
3	.17070E+00	.17040E+00	.46869E−01	.5528E−01	.1564E+09	.1620E+08
4	.20713E+00	.95857E−01	−.13100E+00	.4739E−01	.1356E+09	.1620E+08
5	.22673E+00	−.33672E−01	−.22262E+00	.3949E−01	.1147E+09	.1417E+08
6	.22616E+00	−.17741E+00	−.13095E+00	.3160E−01	.9386E+08	.1419E+08
7	.20907E+00	−.29007E+00	.10505E+00	.2369E−01	.7301E+08	.1214E+08
8	.17533E+00	−.33242E+00	.33900E+00	.1579E−01	.5216E+08	.1215E+08
9	.13265E+00	−.29911E+00	.42699E+00	.7913E−02	.3131E+08	.1020E+08
10	.71540E−01	−.17512E+00	.28633E+00	.1950E−02	.1030E+08	.1000E+08
ω_i^2	.61602E+09	.13883E+10	.25334E+10			

表 4

N	$p(N)$	$q(N)$	$R(N)$	$m(N)$	$k(N)$	$c(N)$
1	.6062E－01	.1016E＋00	.1361E＋00	.7066E－01	.1971E＋09	.1800E＋08
2	.5902E－01	.6745E－01	.2786E－01	.6321E－01	.1762E＋09	.1870E＋08
3	.5106E－01	.1351E－02	－.1170E＋00	.5520E－01	.1562E＋09	.1617E＋08
4	.3643E－01	－.7454E－01	－.1779E＋00	.4736E－01	.1354E＋09	.1620E＋08
5	.1960E－01	－.1295E＋00	－.9162E－01	.3947E－01	.1146E＋09	.1417E＋08
6	－.5630E－03	－.1437E＋00	.9168E－01	.3156E－01	.9378E＋08	.1416E＋08
7	－.1710E－01	－.1127E＋00	.2360E＋00	.2370E－01	.7291E＋08	.1216E＋08
8	－.3374E－01	－.4235E－01	.2340E＋00	.1577E－01	.5203E＋08	.1214E＋08
9	－.4267E－01	.3331E－01	.8799E－01	.7876E－02	.3119E＋08	.1013E＋08
10	－.6111E－01	.1240E＋00	.1407E＋00	.1950E－02	.1032E＋08	.1002E＋08
ω_i^2	.61602E＋09	.13883E＋10	.25334E＋10			

比较以上两表可见，采用应变模态所需数据精度较低，这与我们以往的结论[2]、[4]完全一致。

五　结束语

以上我们确定了具有弹性基础的杆件离散系统频谱和模态的若干定性性质，并成功地求解了三个模态反问题。本文显示，由位移或应变模态数据构造具有弹性基础的杆件离散系统是相当有效的。

参考文献

[1] 王其申，何北昌，王大钧．二阶连续系统的离散模型频率和振型的定性性质．振动与冲击，1992(3)，7－12

[2] 王其申，王大钧．由部分模态及频率数据构造杆件离散系统．振动工程学报，1987(1)，83－87

[3] Ф. Р. Ганмахер и М. Г. Крейн，Осцилляцонные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем，Москва 1950

[4] 王大钧，何北昌，王其申．由两组模态及相应频率构造 Euler－梁．力学学报，1990(4)，479－483

由基模态构造任意支承杆的多项式型轴向刚度

摘　要　本文给出了当杆的横截面积均匀而材料线密度为已知多项式时，由基模态构造任意支乘方式下杆的多项式型的轴向刚度系数的方法，证明了所得轴向刚度的正值性，拓展了文[1]的结果。

关键词　基模态　构造　变参数杆　轴向刚度

引　　言

随着复合材料和其他新型材料的出现，变参数杆在工程实际中获得了广泛应用，这就为利用结构动力学参数构造结构的几何、物理参数提供了用武之地。基于这一背景，I. Elishakoff 等人近期发表了一组这方面的文章[1]、[3]。在文[1]中，他们假定杆的横截面积是常数，并取均匀杆在均布荷载作用下的静位移为杆做纵振动时的基模态，由此出发，讨论了由已知杆的多项式型线密度分布函数构造同样为多项式型的杆的轴向刚度的方法，并讨论了为使圆频率的平方为正数的条件。鉴于文[1]只讨论了固定 — 自由杆和两端固定杆的情况，而在实际问题中弹性支承也是重要和常见的支承方式之一，因此，本文推广他们的工作，讨论了任意支承条件下的同类问题。结果发现，这样做，不仅包含了文[1]的全部结果，而且进一步获得了固定 — 弹性支乘杆做纵振动时轴向刚度的构造问题。同时，我们还证明了所得弹性模量的正值性。

一　基本关系式

长为 l 的杆的纵振动的运动微分方程是：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)A(x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right]=\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\quad(0\leqslant x\leqslant l)\tag{1}$$

这里 $\bar{u}(x,t)$ 是轴向位移，它是轴向坐标 x 和时间 t 的函数；E 是材料的弹性模量，ρ 是材料的线密度，它们都是轴向坐标 x 的函数；A 是杆的横截面面积，本文以下假设它是常数。对于振动问题，分离掉时间变量 t 后，采用无量纲坐标 $\xi=x/l$，则位移模态 $u(\xi)$ 所满足的方程是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[E(\xi)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right]+\omega^2 l^2\rho(\xi)u=0\quad(0\leqslant\xi\leqslant l)\tag{2}$$

---

* 本文的压缩稿原载于《力学学报》2003 年第 3 期。

式中，ω 是圆频率。至于支承方式，本文考虑最一般的情况 —— 两端均为弹性支承，即

$$u'(0)-hu(0)=0,u'(l)+Hu(l)=0 \tag{3}$$

在这样的边界条件下，刚度均匀的杆在均布载荷作用下的静位移是：

$$u=w_0+w_1\xi+w_2\xi^2 \tag{4}$$

其中

$$w_0=w_1/h \quad w_2=-\frac{1+H+H/h}{2+H}w_1 \tag{5}$$

我们讨论如下振动反问题：对任意支承杆，当杆的线密度 $\rho(\xi)$ 为 ξ 的已知多项式和杆的圆频率 ω 也已知时，它的材料的弹性模量 $E(\xi)$ 应为什么样的多项式，才能使杆以(4)式中的位移作为它做纵振动时的基模态。

二　主要结果

和文[1]一样，我们分三种情况进行讨论。

1. 密度均匀的变参数杆

在密度均匀即 $\rho(\xi)=a_0>0$ 的情况下，容易看出，弹性模量应设为二次函数：

$$E(\xi)=b_0+b_1\xi+b_2\xi^2 \tag{6}$$

把(4)、(6)两式和密度函数代入方程(2)并记 $k=\omega^2l^2$ 有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}[(b_0+b_1\xi+b_2\xi^2)(w_1+2w_2\xi)]+ka_0(w_0+w_1\xi+w_2\xi^2)=0 \tag{7}$$

比较同幂次项系数有：

$$\left.\begin{aligned}&b_1w_1+2b_0w_2+ka_0w_0=0\\&4b_1w_2+2b_2w_1+ka_0w_1=0\\&6b_2w_2+ka_0w_2=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由此解得：

$$b_0=ka_0\frac{w_1^2-6w_0w_2}{12w_2^2},b_1=-ka_0\frac{w_1}{6w_2},b_2=-\frac{1}{6}ka_0 \tag{9}$$

于是材料的弹性模量是：

$$E(\xi)=-\frac{1}{6}ka_0(-\frac{w_1^2-6w_0w_2}{2w_2^2}+\frac{w_1}{w_2}\xi+\xi^2) \tag{10}$$

此式从几何上看是开口向下的抛物线，而由(5)式易于检验

$$E(0)=ka_0\frac{w_1^2-6w_0w_2}{12w_2^2}>0$$

$$E(1)=\frac{ka_0}{6}\left[\frac{w_1^2}{2w_2^2}-\left(\frac{3}{h}+1\right)\frac{w_1}{w_2}-1\right]$$

$$=\frac{ka_0}{6}\left[\frac{w_1^2}{2w_2^2}+\frac{(3/h+1)(2+H)-(1+H+H/h)}{1+H+H/h}\right]>0$$

于是，对于任意的不同时为零的 h **和** H**，上面求得的** $E(\xi)>0(0\leqslant\xi\leqslant 1)$**，从而**(10) **式就是要求的弹性模量表达式。对于左端固定的杆，**$h\to\infty$ **从而** $w_0=0$**，这样上式简化为：**

$$E(\xi)=-\frac{1}{6}ka_0\left(-\frac{w_1^2}{2w_2^2}+\frac{w_1}{w_2}\xi+\xi^2\right)\tag{11}$$

特别地，对固定—自由杆，$H=0$ **从而** $w_2=-w_1/2$**，相应的弹性模量是**

$$E_{C-F}(\xi)=\frac{1}{6}ka_0(2+2\xi-\xi^2)\tag{12}$$

又对固定—固定杆，$H\to\infty$ **从而** $w_2=-w_1$**，相应的弹性模量是**

$$E_{C-C}(\xi)=\frac{1}{12}ka_0(1+2\xi-2\xi^2)\tag{13}$$

这与文[1] **的结果完全一致。**

2. **密度线性分布的变参数杆**

在线密度线性分布即 $\rho(\xi)=a_0+a_1\xi>0$ **的情况下，弹性模量应设为三次函数：**

$$E(\xi)=b_0+b_1\xi+b_2\xi^2+b_3\xi^3\tag{14}$$

把(4)、(14) **两式和密度函数代入方程**(2) **并记** $k=\omega^2l^2$ **有**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}[(b_0+b_1\xi+b_2\xi^2+b_3\xi^3)(w_1+2w_2\xi)]+k(a_0+a_1\xi)(w_0+w_1\xi+w_2\xi^2)=0$$

比较同幂次项系数有

$$\left.\begin{aligned}&2b_0w_2+b_1w_1+ka_0w_0=0\\&4b_1w_2+2b_2w_1+k(a_0w_1+a_1w_0)=0\\&6b_2w_2+3b_3w_1+k(a_0w_2+a_1w_1)=0\\&8b_3w_2+ka_1w_2=0\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned}&b_0=\frac{ka_0}{12}\left(\frac{w_1^2}{w_2^2}-6\frac{w_0}{w_2}\right)-\frac{ka_1}{8}\frac{w_1}{w_2}\left(\frac{5}{24}\frac{w_1^2}{w_2^2}-\frac{w_0}{w_2}\right)\\&b_1=-\frac{ka_0}{6}\frac{w_1}{w_2}+\frac{ka_1}{4}\left(\frac{5}{24}\frac{w_1^2}{w_2^2}-\frac{w_0}{w_2}\right)\\&b_2=-\frac{ka_0}{6}-\frac{5ka_1}{48}\frac{w_1}{w_2}\quad b_3=-\frac{ka_1}{8}\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

为了检验这样给出的弹性模量恒为正值，注意到这里的 $E(\xi)$ 可以分解为

$$E(\xi)=E_0(\xi)+E_1(\xi)\quad(0\leqslant\xi\leqslant1)$$

式中，下标“0”、“1”分别表示仅与 a_0 及 a_1 相应的部分。易见 $E_0(\xi)$ 就是上段密度均匀时所求得的弹性模量，业已证明它恒正。至于 $E_1(\xi)$，可以验证，$E_1(0)>0,E_1(1)>0,E'_1(\xi)$ 在区间[0,1]上或者恒正或者先正后负，这样必有 $E_1(\xi)>0$。于是在区间[0,1]上成立

$$E(\xi)>0$$

和上段一样，当杆的左端固定时，也有

$$E(\xi)=\frac{ka_0}{6}\left(\frac{w_1^2}{2w_2^2}-\frac{w_1}{w_2}\xi-\xi^2\right)-\frac{ka_1}{8}\left(\frac{5}{24}\frac{w_1^3}{w_2^3}-\frac{5}{12}\frac{w_1^2}{w_2^2}\xi+\frac{5}{6}\frac{w_1}{w_2}\xi^2+\xi^3\right)\tag{17}$$

于是，进一步有

$$E_{C-F}(\xi)=\frac{ka_0}{6}(2+2\xi-\xi^2)+\frac{ka_1}{24}(5+5\xi+5\xi^2-3\xi^3)\tag{18}$$

$$E_{C-C}(\xi)=\frac{ka_0}{12}(1+2\xi-2\xi^2)+\frac{ka_1}{24}\left(\frac{5}{8}+\frac{5}{4}\xi+\frac{5}{2}\xi^2-3\xi^3\right)\tag{19}$$

这与文[1]结果一致。顺便指出，文[1]中的(36)式有误。

3. 密度按 $m(m\geqslant2)$ 次多项式分布的情况

当密度取为 $m(m\geqslant2)$ 次多项式

$$\rho(\xi)=a_0+a_1\xi+\cdots+a_m\xi^m\quad(m=2,3,\cdots)\tag{20}$$

时，相应地，弹性模量应取为 $m+2$ 次多项式

$$E(\xi)=b_0+b_1\xi+\cdots+b_{m+2}\xi^{m+2}\quad(m\geqslant2)\tag{21}$$

把(4)、(20)、(21)三式代入方程(2)并记 $k=\omega^2l^2$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(w_1+2w_2\xi)\sum_{i=0}^{m+2}b_i\xi^i\right]+k(w_0+w_1\xi+w_2\xi^2)\sum_{i=0}^{m}a_i\xi^i=0$$

比较同幂次项系数有

$$\begin{aligned}&b_1w_1+2b_0w_2+ka_0w_0=0\\&2(b_2w_1+2b_1w_2)+k(a_0w_1+a_1w_0)=0\\&(i+1)(b_{i+1}w_1+2b_iw_2)+k(a_{i-2}w_2+a_{i-1}w_1+a_iw_0)=0\quad(i=2,3,\cdots,m)\\&(m+2)(b_{m+2}w_1+2b_{m+1}w_2)+k(a_{m-1}w_2+a_mw_1)=0\\&(m+3)\cdot2b_{m+2}w_2+ka_mw_2=0\end{aligned}\tag{22}$$

由此解得

$$b_{m+2}=-\frac{ka_m}{2(m+3)},b_{m+1}=-\frac{k}{2}\left[\frac{m+4}{2(m+2)(m+3)}\frac{w_1}{w_2}a_m+\frac{1}{m+2}a_{m-1}\right]\tag{23}$$

$$b_{m-i}=-\frac{k}{2}\Big[\sum_{j=0}^{i}\Big(-\frac{w_1}{2w_2}\Big)^{i-j}\Big(\frac{1}{m+1-j}\frac{w_0}{w_2}-\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}\frac{w_1^2}{w_2^2}\Big)\cdot$$

$$a_{m-j}+\frac{m+3-j}{2(m+1-i)(m+2-i)}\frac{w_1}{w_2}a_{m-1-i}+\frac{1}{m+1-i}a_{m-2-i}\Big]\quad(i=0,1,\cdots,m-2)$$

$$\tag{24}$$

$$b_1=-\frac{k}{2}\Big[\sum_{j=0}^{m-1}\Big(-\frac{w_1}{2w_2}\Big)^{i-j}\Big(\frac{1}{m+1-j}\frac{w_0}{w_2}-\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}\frac{w_1^2}{w_2^2}\Big)a_{m-j}+\frac{1}{6}\frac{w_1}{w_2}a_0\Big]\tag{25}$$

$$b_0=-\frac{k}{2}\sum_{j=0}^{m}\Big(-\frac{w_1}{2w_2}\Big)^{i-j}\Big(\frac{1}{m+1-j}\frac{w_0}{w_2}-\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}\frac{w_1^2}{w_2^2}\Big)a_{m-j}\tag{26}$$

其实，只要在(24)式中令 $i=0,1,\cdots,m;a_{-1}=a_{-2}=0$，(24)式也适用于 b_1 和 b_0。

有了这些系数以后，我们就获得了 $E(\xi)$ 的表达式。如前所述，注意到 $E(\xi)$ 是所有 a_i 的线性函数，而与 a_0、a_1 相应的部分 $E_0(\xi)$、$E_1(\xi)$ 业已证明均大于零，这样只要适当调节 a_i 的比例，即可保证在区间$[0,1]$上 $E(\xi)>0$。

特别地，当杆左端固定时，(23)式—(26)式成为

$$b_{m+2}=-\frac{ka_m}{2(m+3)},b_{m+1}=-\frac{k}{2}\Big[\frac{m+4}{2(m+2)(m+3)}\frac{w_1}{w_2}a_m+\frac{1}{m+2}a_{m-1}\Big]\tag{27}$$

$$b_{m-i}=-\frac{k}{2}\Big[\sum_{j=0}^{i}\Big(-\frac{w_1}{2w_2}\Big)^{i-j}\Big(-\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}\frac{w_1^2}{w_2^2}\Big)a_{m-j}$$

$$+\frac{m+3-i}{2(m+1-i)(m+2-i)}\frac{w_1}{w_2}a_{m-1-i}+\frac{1}{m+1-i}a_{m-2-i}\Big](i=0,1,\cdots,m-2)$$

$$\tag{28}$$

$$b_1=-\frac{k}{2}\Big[\sum_{j=0}^{m-1}\Big(-\frac{w_1}{2w_2}\Big)^{i-j}\Big(-\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}\frac{w_1^2}{w_2^2}\Big)a_{m-j}+\frac{1}{6}\frac{w_1}{w_2}a_0\Big]$$

$$\tag{29}$$

$$b_0=-\frac{k}{2}\sum_{j=0}^{m}\Big(-\frac{w_1}{2w_2}\Big)^{i-j}\Big(-\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}\frac{w_1^2}{w_2^2}\Big)a_{m-j}\tag{30}$$

而对固定—固定杆和固定—自由杆，则有

$$E_{C-C}(\xi)=\frac{k}{2}\Big\{\sum_{j=0}^{m}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{m-j}\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}a_{m-j}+\Big[\sum_{j=0}^{m-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{m-1-j}\cdot$$

$$\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}a_{m-j}+\frac{1}{3}a_0\Big]\xi+\sum_{i=2}^{m}\Big[\sum_{j=0}^{m-i}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{m-i-j}\cdot$$

$$\frac{m+4-j}{4(m+2-j)(m+3-j)}a_{m-j}+\frac{i+3}{2(i+1)(i+2)}a_{i-1}-\frac{1}{i+1}a_{i-2}\Big]\xi^i$$

$$+\left[\frac{m+4}{2(m+2)(m+3)}a_m-\frac{1}{m+2}a_{m-1}\right]\xi^{m+1}-\frac{1}{m+3}a_m\xi^{m+2}\Big\}$$

$$E_{C-F}(\xi)=\frac{k}{2}\left\{\sum_{j=0}^{m}\frac{m+4-j}{(m+2-j)(m+3-j)}a_{m-j}+\left[\sum_{j=0}^{m-1}\frac{m+4-j}{(m+2-j)(m+3-j)}a_{m-j}+\frac{1}{3}a_0\right]\xi\right.$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\left[\sum_{j=0}^{m-i}\frac{m+4-j}{(m+2-j)(m+3-j)}a_{m-j}\ \frac{i+3}{(i+1)(i+2)}a_{i-1}-\frac{1}{i+1}a_{i-2}\right]\xi^i$$

$$\left.+\left[\frac{m+4}{(m+2)(m+3)}a_m-\frac{1}{m+2}a_{m-1}\right]\xi^{m+1}-\frac{1}{m+3}a_m\xi^{m+2}\right\}$$

三　结束语

以上我们成功地由已知横截面积均匀杆的纵振动的基模态、相应频率和多项式型的线密度函数构造出同样为多项式型的材料弹性模量。与文[1]不同的是，我们是在最一般的支承方式下进行研究并获得结论的，文[1]可以看作本文的特例。不仅如此，当 $m\geqslant 2$ 时，文[1]没有证明所得弹性模量的正值性，本文对此给予了证明。与文[4]相比，该文构造的弹性模量是分段函数，这在工程上难于实现，所以本文方法更接近于实际应用。

感谢美国佛罗里达州大西洋大学机械工程系的 I. Elishakoff 教授提供的资料。

参考文献

[1] S. Candan and I. Elishakoff, *Constructing the Axial Stiffness of Longitudinally Vibrating Rod from Fundamental Mode Shape*, *International Journal of Solids and Structures*, 2001(38) 3443－3452

[2] I. Elishakoff and S. Candan, *Apparently First Closed Form Solution for Vibrating Inhomogeneous Beams*, *International Journal of Solids and Structures*, 2001(38), 3411－3441

[3] Z. Guede and I. Elishakoff, *Apparently First Closed form Solutions for Inhomogeneous Vibrating Beams under Axial Loading*, Proc. R. Lond. A(2001), 457, 623－649

[4] Wang Q. S. And Wang D. J., *Inverse Mode Problem for Continuous Second Order Systems*, *Proceedings of the International Conference on Vibration Engineering ICVE94*, 167－170

第三专题

特征值的包含定理及应用

关于特征值的包含定理的研究由来已久，我国著名科学家胡海昌院士在这一领域有过一系列非常有影响的工作。也正是响应胡先生的号召，笔者参与了这一领域的研究工作。笔者在这一领域的第一篇文章，就曾有幸经胡先生过目并得到过鼓励。

在这一部分中，收录了笔者独撰的学术论文共 6 篇，其中发表在国家核心期刊上的论文 3 篇。该部分着重研究了实矩阵的特征值的一些包含关系，特别是在工程实际中有广泛背景的正矩阵以及正定对称矩阵的最大、最小特征值的包含关系。同时，笔者还把矩阵特征值的包含定理推广到与之相关的积分方程特征值的包含关系，这是国内较少有人研究的一个领域。

代数本征值的两个界限定理

摘　要　本文提出了同步矢量和伴生矩阵的概念。借此给出了任意实矩阵的实本征值的两个界限定理，并对定理的使用作了必要的说明。

一　引　言

确定矩阵本征值的上、下限，有着重要的理论意义和实用价值。文献[1]指出，这方面的有效方法还不多，比较简便可行的就是Collatz定理。文献[1]发展了这一定理，提出了不变形式的包含定理。本文则从另一角度改造了这一定理，既保持了简便性，又对其结果有所改进，并适用于任意实矩阵的实本征值问题。

本文首先给出了同步矢量的概念，接着叙述了利用同步矢量确定矩阵本征值上、下限的定理。在此基础上，作者构造了一个n维矢量的完备同步矢量族，进而构造了一个n阶实方阵的伴生矩阵，从而得出确定矩阵本征值上、下限的定理。最后对这两个定理的应用作了必要的说明。

二　利用同步矢量确定本征值的上、下限

我们首先给出同步矢量的定义：

定义1　设有矢量$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，如果$x_iy_i\geqslant 0$且$x_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，则称矢量$\boldsymbol{X}$是矢量$\boldsymbol{Y}$的同步矢量。

按照同步矢量的定义，我们不难证明下述定理：

定理1　设有实矩阵$\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}_{n\times n}$，$\lambda$是它的一个实本征值，矢量$\boldsymbol{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的转置矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的相应于$\lambda$的本征矢量，则：

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{AX})_i}{x_i}\leqslant\lambda\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{AX})_i}{x_i}$$

这里$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{V}$的同步矢量，而

$$(\boldsymbol{AX})_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

---

* 本文原载于《振动与冲击》1988年第1期，这里订正了个别文字。

是矢量($\boldsymbol{AX}$)的分量。

证明　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有完全相同的本征多项式：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{I}|\ (\boldsymbol{I}\text{ 是单位阵})$$

从而必有相同的本征值。因此

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\lambda\boldsymbol{V}$$

以与 $\boldsymbol{V}$ 同步的矢量 $\boldsymbol{X}$ 对上式两边作内积有：

$$\lambda=\frac{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V},\boldsymbol{X})}{(\boldsymbol{V},\boldsymbol{X})}=\frac{(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{V})}{(\boldsymbol{V},\boldsymbol{A})}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i x_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\nu_i x_i} \tag{1}$$

这里

$$z_i=\frac{(\boldsymbol{AX})_i}{x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

由于 $\nu_i x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，(1)式表明，$\lambda$ 是数轴上 z_i 点处质量为 $\nu_i x_i$ 的质点组的质心。由质心性质，有：

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} z_i\leqslant\lambda\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n} z_i$$

这就是所要证明的。

作为对比，我们不妨引述 Collatz 定理如下：

设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定(或半正定)矩阵，$\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}_{n\times n}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是任取的非 0 矢量。记

$$\lambda^-=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{AX})_i}{x_i}\qquad\lambda^+=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{AX})_i}{x_i}$$

则在区间$[\lambda^-,\lambda^+]$内至少含有 $\boldsymbol{A}$ 的一个本征值。

可以看出，与 Collatz 定理比较，定理 1 有两点改进：

(1) 定理 1 对矩阵的要求较宽而对右乘矢量要求较严。

(2) 在 Collatz 定理中，矢量 $\boldsymbol{X}$ 与所包含的本征值没有直接关系，而在定理 1 中，则存在直接对应关系。

三　关于矩阵本征值的整体上、下限

以定理 1 为基础，我们来导出关于矩阵本征值的整体上、下限的定理。

n 阶方阵的本征矢量(当然，此处是指相应于实本征值的本征矢量，下同。)是一个 n 维矢量。它必属于 n 维空间的某一卦限，在其含有 0 元素时则属于某个广义坐标面。我们就在这个卦限(在后一种情况下，则在以该广义坐标面为边界的某一卦限)内取一代表性矢量与

之同步。这样的代表性矢量可以取成其元素仅为 1 与 -1 的矢量，例如$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$、$(-1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 等。考虑到就其几何意义而言，本征矢量表征一个特征方向。因此，在取来作为代表性矢量的元素中，规定 -1 的个数不多于 1 的个数，从而共需 2^{n-1} 个矢量即可布及 n 维空间的上半空间的每一卦限。我们称这组矢量为本征矢量的完备同步矢量族。写成矩阵形式就是

$$[B]=[B_0,B_1,\cdots,B_{[n/2]}]$$

其中

$$B_0=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1\\ & & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}-1 & -1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & -1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1\end{pmatrix}$$

其余照此类推。在 B_K 中，其每列的负元素恰好为 K 个$(K=0,1,\cdots,[n/2])$，从而第 K 个子块共有 C_n^K 列。不过，对最后一个子块 $B_{[n/2]}$ 要分两种情况。其构成方法同前，只是当 n 为奇数时，它是满的；而当 n 为偶数时只需取一半。以 $n=4$ 为例，因$(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 与$(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，$(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 与$(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 实际上代表同一方向。在 n 为偶数时都有这种情况，所以只需保留具有代表性的一半。

从完备同步矢量族的构成不难看出，n 阶矩阵的任一本征矢量必有$[B]$ 的一个列矢量与之同步，应用完备同步矢量族，我们得到

定义 2　设 $\boldsymbol{X}$ 是$[B]$的任意列矢量，则以$(\boldsymbol{AX})_i/x_i$ 为元素，其行号为 i，列号与 $\boldsymbol{X}$ 相同所得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴生矩阵。记作

$$[A]=[\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{[n/2]}]$$

若记 $a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2a_{11}-a_1 & a_1-2a_{12} & \cdots & a_1-2a_{1n}\\ a_2-2a_{21} & 2a_{22}-a_2 & \cdots & a_2-2a_{2n}\\ a_3-2a_{31} & a_3-2a_{32} & \cdots & a_3-2a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n-2a_{n1} & a_n-2a_{n2} & \cdots & a_n-2a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 2(a_{11}+a_{12})-a_1 & 2(a_{11}+a_{13})-a_1 & \cdots & a_1-2(a_{1,n-1}+a_{1n}) \\ 2(a_{21}+a_{22})-a_2 & a_2-2(a_{21}+a_{23}) & \cdots & a_2-2(a_{2,n-1}+a_{2n}) \\ a_3-2(a_{31}+a_{32}) & 2(a_{31}+a_{33})-a_3 & \cdots & a_3-2(a_{3,n-1}+a_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}-2(a_{n-1,1}+a_{n-1,2}) & a_{n-1}-2(a_{n-1,1}+a_{n-1,3}) & \cdots & 2(a_{n-1,1}+a_{n-1,n})-a_{n-1} \\ a_n-2(a_{n1}+a_{n2}) & a_n-2(a_{n1}+a_{n3}) & \cdots & 2(a_{n,n-1}+a_{nn})-a_n \end{pmatrix}$$

余类推。关于$[\boldsymbol{A}_{n/2}]$的说明同前。

定理 2 实矩阵 A 的伴生矩阵$[A]$中,其元素的最小值为 A 的最小本征值的下界;其元素的最大值为 A 的最大本征值的上界。

证明 由上面的推理可知,对 A^{T} 的任一本征矢量,可以从$[B]$中找到与之同步的矢量。而由定理 1,相应的本征值(同时也是 A 的本征值)的上、下限必含在$[A]$的某一列中。由任意性,即知 A 的任一本征值必大于$[A]$的最小元而小于$[A]$的最大元。定理证毕。

四 几点说明

(1)这里给出的两个定理虽然看起来与 Collatz 定理相似,但有一点本质区别:它们是在 A 是任意实矩阵的条件下获得的,适用于对称或非对称矩阵,正定或非正定矩阵。只要这个矩阵存在实本征值。

(2)本文给出的结果在低阶矩阵情况下与 Collatz 定理一样简便。在高阶矩阵时,对于定理 1,虽然存在着难于确定同步矢量的问题,但在一些特殊情况下,它仍不失其意义(见下文的例 4、例 5),至于定理 2,虽然$[A]$的元素很多,但由于仅为加减运算,而且相当规则,适于编制程序由计算机运行,因而仍不失其简便性。

(3)值得指出的是:对实际力学问题,其振型往往可以根据系统的特征加以大致估计,从而能够确定与某一振型同步的同步矢量,并由定理 1 得出相应频率的上、下限。在所有振型都可以粗略估计的情况下,我们就可获得相应每一振型的本征值的上、下限。

(4)与此相反,在已知某一振动频率时,通过计算$[A]$,有时也能粗略估计出相应振型的要点。

五 应用举例

为说明上述定理的价值,现举例如下:

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 6\end{pmatrix}$ 的本征值的上、下限。

因:$[A]=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 5 & 7\end{pmatrix}$,$[A^{\mathrm{T}}]=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 9 & 3\end{pmatrix}$,故 $0\leqslant\lambda_1$、$\lambda_2\leqslant 7$。

事实上，$\lambda=(7\pm\sqrt{13})/2$，符合上述估计。由于$[A^{\mathrm{T}}]$的第二列中不含本征值，说明$\boldsymbol{A}$的本征矢量必与$(1,1)^{\mathrm{T}}$同步。不难直接验证这一点。

例 2　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & 1+\cos^2\theta\end{pmatrix}$的本征值的上、下限。

此时，$[A]=\begin{bmatrix}1+\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta) & 1+\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)\\ 1+\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) & 1+\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)\end{bmatrix}$

在$\boldsymbol{A}$对称的情况下，可以证明：如把$[A]$的4个元素按大小次序记为$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$，则$a_1\leqslant\lambda_{\min}\leqslant a_2$，$a_3\leqslant\lambda_{\max}\leqslant a_4$。于是

当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/8$ 时：$1+\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)\leqslant\lambda_{\min}\leqslant 1+\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$1+\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)\leqslant\lambda_{\max}\leqslant 1+\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

当 $\pi/8\leqslant\theta\leqslant\pi/4$ 时：$1+\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)\leqslant\lambda_{\min}\leqslant 1+\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)$

$$1+\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)\leqslant\lambda_{\max}\leqslant 1+\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)$$

在$\pi/4\leqslant\theta\leqslant 3\pi/8$与$3\pi/8\leqslant\theta\leqslant\pi/2$时可以写出类似的不等式。具体数值显示，这些估计式有较好的精度。

对上述矩阵$\boldsymbol{A}$，文献[1]曾指出以下现象：取

$$X=(\cos\theta+\sin\theta/5\ \ -\sin\theta+\cos\theta/5)^{\mathrm{T}}$$

它是相应于$\lambda_1=1$的近似解，应用Collatz定理，结果发现，当$0\leqslant\theta<\mathrm{arctg}(1/5)$时，所求得的区间$[\lambda^-,\lambda^+]$内竟不含$\lambda_1$。这从本文的讨论易于得到解释。因当$0\leqslant\theta<\mathrm{arctg}(1/5)$时，$\boldsymbol{X}$是$(1,1)^{\mathrm{T}}$型，而精确解却是$(1,-1)^{\mathrm{T}}$型。这恰好说明，为了包含所需要的本征值，应用Collatz定理所需的矢量必须与精确解同步。

例 3　有一弹簧—质点系统，质点质量均为m，弹簧常数均为k，求此系统固有频率的上、下限。

这个问题等价于求

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\frac{k}{m}$$

的本征值的上、下限。这有两种方法：一是通过计算$[A]$，即可得出4个固有频率的上、下限。第二种方法是根据系统具有对称性的特点，从定性分析可知：

存在刚体平移，振型是$(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$型，求得$\omega_1=0$；

存在对称振型$(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，求得$\omega_3^2=2k/m$；

存在反对称振型，其同步矢量应为$(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$与$(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，从而可得$0<\omega_2^2=2k/m$，$2k/m<\omega_4^2=4k/m$。

以上结论与事实吻合。在高阶类似情况下后一方法相当有用。

例 4 对标准 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}(a_k、b_k、c_k>0;k=1,2,\cdots,n-1,a_n>0)$$

文献[2](P85 定理 1)指出:当记其本征值为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$ 时,相应于 λ_k 的本征矢量的分量序列中恰好改变符号$(k-1)$次。据此,相应其最小本征值的本征矢量必与$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$同步,相应其最大本征值的本征矢量必与$(1,-1,1,\cdots,(-1)^{n-1})^{\mathrm{T}}$同步。由此断定:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i-b_i-c_{i-1})\leqslant\lambda_1\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i-b_i-c_{i-1})$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i+b_i+c_{i-1})\leqslant\lambda_n\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i+b_i+c_{i-1})$$

这里 $c_0=b_n=0$。

例 5 当一个完全非负矩阵的某次幂 $\boldsymbol{A}^l$(l 是自然数)是完全正矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 称为振荡矩阵。对振荡矩阵 $\boldsymbol{A}$,若记其本征值为 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$,相应于 λ_k 的本征矢量的分量序列中也恰好改变符号$(k-1)$次(参见文献[2],P105)。于是

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\leqslant\lambda_1\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\leqslant\lambda_n\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}$$

Jacobi 矩阵和振荡矩阵都是结构计算中常见的矩阵。

六 结束语

综上所述,利用同步矢量的概念以确定矩阵本征值的上、下限是一种可行的方法。它在低阶矩阵的情况下有明显的价值,在高阶情况下虽有缺点但仍有其意义。

本文在准备过程中得到北京大学王大钧教授的指导,笔者谨致谢意。

参考文献

[1] 胡海昌. 论几种本征值包含定理的内在联系. 固体力学学报,1983(11)

[2] Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн:Осцилляцонные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем,Москва 1950

包含定理与矩阵特征对的计算

摘　要　本文以正交化理论和按矩阵基向量展开为依托，从包含定理出发给出了计算矩阵实特征对的一种算法——正交迭代包含法。

关键词　矩阵特征对　包含定理　正交包含迭代法

实对称矩阵特征对（特征值和相应的特征向量）的计算是工程数学中的基本课题之一，有着重要的理论意义和应用价值，这方面的成果也极为丰富[1]。鉴于工程问题中有时仅需估计某一阶或某几阶频率的近似值，这就导致了特征值的包含定理的研究[2]。综观已有的特征值包含定理，其主旨通常只在于给出特征值的分布规律，它们在形式上往往相当简便，例如著名的 Collatz 定理。但其结果，即某个特征值的包含区间往往太宽，而且有时“事与愿违”：本来想确定第 n 阶特征值的上、下界，而所得的包含区间却根本不包含第 n 阶特征值，它所包含的是另外一阶特征值。针对前一缺点，笔者在文[3]中采用迭代法可以大大改进其结果。针对后一缺点，笔者曾经提出一种对 Collatz 定理的修正方法，即用“同步向量”[4]代替任意向量。但对一般实对称矩阵的任意一阶特征值，要确定与它相应的特征向量的“同步向量”仍是一个难于解决的问题。

为了清晰地说明问题，在此不妨引述一下文[2]39 页上所采用的一个例子。

例 1　试求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5.00000 & -1.41420 & 0\\ -1.41420 & 1.50000 & -0.40820\\ 0 & -0.40820 & 0.33333\end{pmatrix}\tag{1}$$

的各阶特征值的包含区间。

文[2]作者在求解这一问题时采用了如下特征向量的近似解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}^{(1)}&=(0.13000,0.44000,1.00000)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{Y}^{(2)}&=(0.37000,1.00000,-0.48000)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{Y}^{(3)}&=(1.00000,-0.35000,0.03000)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{2}$$

并由 Collatz 定理获得特征值的包含区间如下

$$\begin{aligned}l_1^-&=0.1537<\lambda_1<0.2135=l_1^+\\ l_2^-&=1.1727<\lambda_2<1.1837=l_2^+\\ l_3^-&=5.0957<\lambda_3<5.5756=l_3^+\end{aligned}\tag{3}$$

* 本文原载于《安庆师范学院学报》(自然科学版)1999 年第 2 期。

式中

$$l^- = \min(\boldsymbol{AY})_i/\boldsymbol{Y}_i, \quad l^+ = \max(\boldsymbol{AY})_i/\boldsymbol{Y}_i \tag{4}$$

这个例子表明，一方面，Collatz 定理的确可以用来区分特征值的分布范围，而其结果的精度完全取决于所选近似特征向量的精度。这就提出了两个问题：

（1）近似特征向量即（2）式是如何产生的？

（2）如何改进其精度？

对于第一个问题，文[2] 作者未作回答。对于第二个问题，文献作者暗示可以用迭代法。然而文[1] 已证明，文[2]（3.16）式所表示的迭代法

$$x^{n+1} = \boldsymbol{A}x^n \quad \text{或} \quad x^{n+1} = \boldsymbol{A}^{-1}x^n$$

实际上只适用于与绝对值最大（或最小）的特征值相应的特征向量，对其余的“中间”特征向量是不适用的。鉴于此，本文采用正交迭代过程，成功地解决了以上与包含定理有关的两个问题。

一　正交迭代包含定理

鉴于工程问题中经常遇到的基本上都是实对称矩阵，又因实对称矩阵通过“平移”，即设 A 为实对称矩阵，适当选取正数 μ，即可使

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I} \qquad (\boldsymbol{I}\text{ 为单位矩阵}) \tag{5}$$

为正定矩阵，且 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有完全相同的特征向量族。所以以下只讨论正定矩阵。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，其特征值可按从小到大的次序排列为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，与 λ_j 相应的特征向量记为 $\boldsymbol{X}^{(j)} = (x_{1j}, \cdots, x_{nj})^{\mathrm{T}}$，又记 $\varepsilon_i = \mathrm{Sign}(x_{in})$，则由文[4] 的定义知 $\boldsymbol{Y} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{X}^{(n)}$ 同步，而由文[4] 定理 1 知

$$l_n^- = \min_i(\boldsymbol{AY})_i/\varepsilon_i \leqslant \lambda_n \leqslant \max_i(\boldsymbol{AY})_i/\varepsilon_i = l_n^+ \tag{6}$$

上式所获得的 λ_n 的上、下界可能太宽，为此不妨以 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$ 代替 $\boldsymbol{AY}$。文[1,3] 已证明，$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$ 是较 $\boldsymbol{AY}$ 更接近的 $\boldsymbol{X}^{(n)}$ 的近似向量，这里 m 是自然数。同时有

$$\min_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})_i/\varepsilon_i \leqslant \lambda_n \leqslant \max_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})_i/\varepsilon_i \tag{7}$$

或

$$\min(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})_i/(\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{Y})_i \leqslant \lambda_n \leqslant \max(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})_i/(\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{Y})_i \tag{8}$$

即通过迭代，我们可以获得 λ_n 的越来越精确的上、下界，同时获得 $\boldsymbol{X}^{(n)}$ 的近似解。

再取任一异于 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$ 的新向量 $\boldsymbol{Z}$ 并把它与 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$ 施行正交化，记为 $\boldsymbol{Y}_{10}$

$$\boldsymbol{Y}_{10} = \boldsymbol{Z} - (\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}/(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}) \tag{9}$$

这里 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ 表示向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的数量积。则因

$$\boldsymbol{AY}_{10} = \boldsymbol{A}\left(\sum_{j=1}^{n} C_j\boldsymbol{X}^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j\lambda_j\boldsymbol{X}^{(j)} + \varepsilon\boldsymbol{X}^{(n)} \tag{10}$$

从而 $\boldsymbol{AY}_{10}$ 是较 $\boldsymbol{Y}_{10}$ 更好的 $\boldsymbol{X}^{(n-1)}$ 的近似向量，进而有

$$\min(\boldsymbol{AY}_{10})_i/(\boldsymbol{Y}_{10})_i \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \max(\boldsymbol{AY}_{10})_i/(\boldsymbol{Y}_{10})_i \tag{11}$$

与前一样，这样获得的 λ_{n-1} 的界限可能过宽，为缩小区间长度，我们继续迭代。但在迭代之前，为确保迭代收敛于 $\boldsymbol{X}^{(n-1)}$，则应再次正交化以除去因 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$ 只是 $\boldsymbol{X}^{(n)}$ 的近似向量而带来的(10)式中的 $\varepsilon\boldsymbol{X}^{(n)}$ 项。

$$\boldsymbol{Y}_{11} = \boldsymbol{AY}_{10} - (\boldsymbol{AY}_{10},\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}/(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y},\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}) \tag{12}$$

于是 $\boldsymbol{AY}_{11}$ 是较 $\boldsymbol{AY}_{10}$ 更为接近的 $\boldsymbol{X}^{(n-1)}$ 的近似向量且有

$$\min(\boldsymbol{AY}_{11})_i/(\boldsymbol{Y}_{11})_i \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \max(\boldsymbol{AY}_{11})_i/(\boldsymbol{Y}_{11})_i \tag{13}$$

这一过程可以反复进行，只要 m 足够大，$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{X}^{(n)}$ 的足够精确的近似向量，那么一般地

$$\boldsymbol{Y}_{1K} = \boldsymbol{AY}_{1,K-1} - (\boldsymbol{AY}_{1,K-1},\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}/(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y},\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}) \tag{14}$$

$\boldsymbol{AY}_{1K}$ 就是较 $\boldsymbol{AY}_{1,K-1}$ 更好的 $\boldsymbol{X}^{(n-1)}$ 的近似向量且

$$l_{n-1}^- = \min(\boldsymbol{AY}_{1K})_i/(\boldsymbol{Y}_{1K})_i \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \max(\boldsymbol{AY}_{1K})_i/(\boldsymbol{Y}_{1K})_i = l_{n-1}^+ \tag{15}$$

将给出 λ_{n-1} 的越来越精确的上界 l_{n-1}^+。

需要说明的是，在交叉使用(14)、(15)两式进行迭代的过程中，如果精确的 $\boldsymbol{X}^{(n-1)}$ 没有 0 分量，那么(15)式中作为下界的 l_{n-1}^- 也将收敛于 λ_{n-1}。但若 $\boldsymbol{X}^{(n-1)}$ 中存在 0 分量，例如 $\boldsymbol{X}_s^{(n-1)} = 0$ 而 $\boldsymbol{X}_s^{(n-2)} \neq 0(1 \leqslant s \leqslant n)$，那么 $l_{n-1}^- = (\boldsymbol{AY}_{1K})_s/(\boldsymbol{Y}_{1K})_s$ 将收敛于 λ_{n-2} 而不是 λ_{n-1}。理由如下

因 $X_s^{(n-1)} = 0$，所以

$$(\boldsymbol{AY}_{1K})_s = \sum_{j=1}^{n-1} d_j\lambda_j\boldsymbol{X}_s^{(j)} + \varepsilon\boldsymbol{X}_s^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-2} d_j\lambda_j\boldsymbol{X}_s^{(j)} + \varepsilon\boldsymbol{X}_s^{(n)}$$

$$(\boldsymbol{Y}_{1K})_s = \sum_{j=1}^{n-1} d_j\boldsymbol{X}_s^{(j)} = \sum_{j=1}^{n-2} d_j\boldsymbol{X}_s^{(j)}$$

式中 ε 是个很小的量。于是

$$(\boldsymbol{AY}_{1K})_s/(\boldsymbol{Y}_{1K})_s = \lambda_{n-2} + \alpha_K \tag{16}$$

式中 α_K 是随迭代次数 K 的增加而趋于 0 的小量。这里，(16)式中出现的是 λ_{n-2} 而不是 λ_{n-1}。以上推理过程还表明，如果 $\boldsymbol{X}_s^{(n-1)} = \cdots = X_s^{(n-m)+1} = 0$ 而 $X_s^{(n-m)} \neq 0(1 \leqslant s \leqslant n)$，则 $(\boldsymbol{AY}_{1k})_s/(\boldsymbol{Y}_{1K})_s$ 将收敛于 λ_{n-m}。实际计算也证明了这一点。当这一情况出现时，为了获得 λ_{n-1} 的下界，我们不妨采用瑞利商：

$$l_{n-1}^- = (\boldsymbol{AY}_{1K},\boldsymbol{Y}_{1K})/(\boldsymbol{Y}_{1K},\boldsymbol{Y}_{1K}) \leqslant \lambda_{n-1} \tag{17}$$

仿照以上过程，任取异于 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{AY}_{1K}$ 的向量 Z_1，把它与 $\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{AY}_{1K}$ 正交化，所得向量记为 $\boldsymbol{Y}_{20}$，再把 $\boldsymbol{AY}_{20}$ 与 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{AY}_{1K}$ 正交化而得向量 $\boldsymbol{Y}_{21}$，…，这样循环下去，亦可获得 $\boldsymbol{X}^{(n-2)}$ 的越来越精确的近似向量 $\boldsymbol{AY}_{2m}$ 和 λ_{n-2} 的越来越精确的上界。

$$l_{n-2}^{+} = \max(\boldsymbol{AY}_{2m})_i/(\boldsymbol{Y}_{2m})_i \leqslant \lambda_{n-2} \tag{18}$$

至于下界，在 $\boldsymbol{X}^{(n-2)}$ 无 0 分量时取

$$l_{n-2}^{-} = \min(\boldsymbol{AY}_{2m})_i/(\boldsymbol{Y}_{2m})_i \tag{19}$$

或者在 $\boldsymbol{X}^{(n-2)}$ 存在 0 分量时可取

$$l_{n-2}^{-} = (\boldsymbol{AY}_{2m},\boldsymbol{Y}_{2m})/(\boldsymbol{Y}_{2m},\boldsymbol{Y}_{2m}) \tag{20}$$

依次类推，可以一一求出其余特征值的上、下界及其相应的近似向量，不再一一赘述。这就是本文所提出的正交迭代包含定理。

二　算　例

为了清晰地说明以上过程和便于比较，我们仍以上文提到的例 1 为例。

例 2　试用正交迭代包含定理求例 1 中的矩阵 A 的特征值的上、下界及其近似特征向量。

解　业已证明[5]，矩阵 A 的三个特征向量分别具有 0、1、2 个变号数，故取 $\boldsymbol{Y} = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{Y} = (204.15172, -74.18986, 6.39508)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{Y} = (1125.6779, -402.60662, 32.41597)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{Y} = (6197.7558, -2209.0758, 175.14924)^{\mathrm{T}} \sim (1, -0.35643, 0.028260)^{\mathrm{T}}$$

应用(8) 式于 $\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{Y}$ 可得

$$5.40318 < \lambda_3 < 5.50586$$

结果已优于文[2]。如果再迭代一次，

$$\boldsymbol{A}^6\boldsymbol{Y} = (34112.854, -12149.976, 960.12724)^{\mathrm{T}} \sim (1, -0.35617, 0.028146)^{\mathrm{T}}$$

并应用(8) 式于 $\boldsymbol{A}^6\boldsymbol{Y}$ 可得

$$5.48177 < \lambda_3 < 5.50407, \boldsymbol{X}^{(3)} \approx (1, -0.3562, 0.02815)^{\mathrm{T}}$$

为了计算 λ_2 的上、下界，我们取 $\boldsymbol{Z} = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 并应用正交迭代过程：

$$\boldsymbol{Y}_{10} = \boldsymbol{AZ} = (3.5858, 0.4940, -0.74153)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Y}_{11} = \boldsymbol{Y}_{10} - (\boldsymbol{Y}_{10}, \boldsymbol{A}^5\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{Y}/(A^5\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{A}^5\boldsymbol{Y}) = (0.5821, 1.56461, -0.65665)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{AY}_{11} = (0.69783, 1.79175, -0.85755)^{\mathrm{T}}$$

应用(13) 式有 $1.14517 < \lambda_2 < 1.30595$，继续正交迭代

$$\boldsymbol{Y}_{12} = (0.66683, 1.80280, -0.85843)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{AY}_{12} = (0.78463, 2.11158, -1.02204)^{\mathrm{T}}$$

$$Y_{13} = (0.78187, 2.11256, -1.02212)^{T}$$

$$AY_{13} = (0.92177, 2.48032, -1.20305)^{T}$$

应用(13)式有 $1.17408 < \lambda_2 < 1.17893$，结果已优于文[2]。如果再迭代一次

$$Y_{14} = (0.91848, 2.48149, -1.20314)^{T}$$

$$AY_{14} = (1.08308, 2.91444, -1.41399)^{T}$$

此时有 $1.17447 < \lambda_2 < 1.17921$。容易发现，虽然 λ_2 的下界有了明显改善，而 λ_2 的上界却变坏了。问题何在？分析一下不难发现，问题出在正交化过程中采用 A^5Y 作为 $X^{(3)}$ 的近似向量精度不够，如果采用 A^6Y 重复上面最后一次迭代

$$Y'_{14} = AY_{13} - (AY_{13}, A^6Y)A^6Y/(A^6Y, A^6Y) = (0.91779, 2.48174, -1.20316)^{T}$$

$$AY'_{14} = (1.07929, 2.91580, -1.41410)^{T}$$

即可得到相当满意的结果：

$$1.17490 < \lambda_2 < 1.17595$$

$$X^{(2)} \approx Y_{15} = AY'_{14} - (AY'_{14}, A^6Y)A^6Y/(A^6Y, A^6Y)$$

$$\sim (0.36982, 1, -0.48494)^{T}$$

至于 λ_1 与 $X^{(1)}$，我们取 $Z_1 = (1,1,1)^{T}$ 并令

$$Y_{20} = Z_1 - (Z_1, A^6Y)A^6Y/(A^6Y, A^6Y) - (Z_1, Y_{15})Y_{15}/(Y_{15}, Y_{15})$$

$$= (0.16556, 0.56726, 1.29601)^{T}$$

则

$$AY_{20} = (0.025581, 0.087724, 0.20044)^{T}$$

应用(13)式于 AY_{20}，即有 $0.15451 < \lambda_1 < 0.15466$，结果已相当令人满意。

例3　求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & -2 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

全体特征值的上、下界。

解　取 $Y = (1, -1, 1)^{T}$，则

$$A^6Y = (590563, -2362060, 590563)^{T} \sim (1, -3.997, 1)^{T} \approx X^{(3)}$$

相应的上、下界是 $10.9964 < \lambda_3 < 11.00045$。

又取 $Z = (1, 1, -1)^{T}$，$AZ = (9, 10, -13)^{T}$

$$Y_{10} = (11.22, 0.22, -10.78)^{T} \qquad AY_{10} = (121.22, 1.12, -120.78)^{T}$$

$$Y_{11} = (121.4445, 0.222245, -120.5555)^{T}$$

$$\boldsymbol{AY}_{11} = (1331.889, 0.44455, -1330.111)^{\mathrm{T}}$$
$$\sim (1.000678, 0.000334, -0.999332)^{\mathrm{T}}$$
$$l_2^- = 2.00027, \qquad l_2^+ = 11.033184$$

容易看出，此处 l_2^+ 是 λ_2 的上界而 $l_2^- \approx \lambda_1 = 2$。这是因 $\boldsymbol{AY}_{11}$ 显示 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 存在 0 分量，事实上 $\boldsymbol{X}^{(2)} = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_2 = 11$ 是重特征值。

取瑞利商有

$$l_2^- = (\boldsymbol{AY}_{11}, \boldsymbol{Y}_{11})/(\boldsymbol{Y}_{11}, \boldsymbol{Y}_{11}) = 10.999863$$

这个例子表明：① 以上讨论适用于重特征值的情况；② 当用(15)式求得的 l_{n-1}^- 与 l_{n-1}^+ 不收敛于同一极限时，表明 $\boldsymbol{X}^{(n-1)}$ 中必有某一或某几个分量为 0。

三　结束语

以上我们讨论了正交迭代法在特征值的估计以及特征对的计算中的应用。还要指出以下两点：

(1) 对于阶数不太高的矩阵，我们可以按照以上方法计算绝对值较大的几阶特征值及其近似特征向量，而由 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 用同样方法计算绝对值较小的若干阶特征值及其近似特征向量，这是因为 $\lambda(\boldsymbol{B}) = 1/\lambda(\boldsymbol{A})$。

(2) 在迭代过程中，一旦某阶特征向量的近似式的各分量的正负号不再改变，那就表明我们已经获得了该向量的“同步向量”。

参考文献

[1] G. W. 斯图尔特著．王国荣等译．矩阵计算引论．上海：上海科技出版社，1980

[2] 胡海昌．多自由度结构固有振动理论(第三章)．北京：科学出版社，1987

[3] 王其申．关于正矩阵的最大特征值的包含定理及其应用．高等学校计算数学学报，2000(2)，105－110

[4] 王其申．代数特征值的两个界限定理．振动与冲击．1988(1)，10－16

[5] G. M. L. 格拉德威尔著．王大钧等译．振动中的反问题．北京：北京大学出版社，1991

关于正矩阵的最大特征值的包含定理及其应用

Abstract In this paper it's obtained that more exact inclusive theorem about the maximal eigenvalue of a positive matrix and two calculating methods about the maximal eigenpair of a nonderogatory positive matrix. Then a new calculation method about all eigenvalues of an oscillatory matrix is given by applying above inclusive theorem.

Key words positive matrix; maximal eigenvalue; inclusive theorem; application

一　引　言

由于矩阵特征值问题在弹性动力学和自动控制等领域均已获得广泛的应用，所以关于矩阵特征值的计算方法及其上、下界的估计均为人们所关注。随着计算机的发展，有关矩阵特征值的各种有效算法应运而生[1]。至于特征值的上、下界的估计问题，虽然也有很多成果[2—4]，且它们在数学上都有一定的理论意义和应用价值，但常因其界限太宽而缺少工程价值。鉴于此，笔者利用文[3]引入的同步向量这一概念，讨论了正矩阵的最大特征值的上、下界的确定问题，获得了这类矩阵最大特征值的较为精确的包含定理，又与幂法[1]相结合，给出了非亏损正矩阵的最大特征值的两种算法。然后，把以上结果应用于工程上的一类常见矩阵—振荡矩阵，给出了振荡矩阵及弹性结构离散系统的柔度矩阵全体特征值的一种新的算法，并就这一新算法的优劣及应用前景作了评估。

二　关于正矩阵的最大特征值的包含定理

定义 1　设有 n 阶方阵 $A=\{a_{ij}\}_1^n$，如果 $a_{ij}\geqslant 0(>0)$，则称 A 为非负(正)矩阵。

如果 A 的所有子式非负(或 >0)，则称 A 为完全非负(正)矩阵。

定义 2　设 A 为完全非负矩阵，如果存在自然数 m，使得 A^m 为完全正矩阵，则称 A 为振荡矩阵。如果 $A^*=\{(-1)^{i+j}a_{ij}\}_1^n$ 是振荡矩阵，则称 A 为符号振荡矩阵。

注意上面定义的这些矩阵都可以是对称或非对称矩阵。

对于正矩阵，Perron 定理[5]指出，它有唯一的一个绝对值最大的单重正特征值 η，且相

* 本文原载于《高等学校计算数学学报》2000 年第 2 期。

应的特征向量可以取为分量全大于零的正向量。

另一方面，文[3] 证明了如下的包含定理：

设 λ 是实矩阵的实特征值，$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的相应于 λ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 与向量 $\boldsymbol{X}$ 同步，即 $x_i y_i \geqslant 0$ 且 $y_i \neq 0$，则

$$\min \frac{(\boldsymbol{AY})_i}{y_i} \leqslant \lambda \leqslant \max \frac{(\boldsymbol{AY})_i}{y_i} \tag{1}$$

这里 $(\boldsymbol{AY})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \, (i=1,2,\cdots,n)$

根据以上两个定理，我们马上得出：

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}_1^n$ 是正矩阵，$\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 是正向量，则 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值 η 满足

$$d_1 = \min \frac{(\boldsymbol{AY})_i}{y_i} \leqslant \eta \leqslant \max \frac{(\boldsymbol{AY})_i}{y_i} = D_1 \tag{2}$$

特别地，成立以下包含关系

$$\min a_i \leqslant \eta \leqslant \max a_i \, (a_i = a_{i1} + \cdots + a_{in}) \tag{3}$$

定理的前半部分是显然的。取 $\boldsymbol{Y}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，即得(3) 式。

显然，向量 $\boldsymbol{Y}$ 选取得与特征向量 $\boldsymbol{X}$ 越接近，(2) 式的效果越好。至于(3) 式，其优点显而易见，但其结果往往不尽人意，现改进如下：

设 $(\eta,\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征对，那么 $(\eta^m,\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的一个特征对。故(2)、(3) 两式可以改写为：

$$d_m = \min \frac{(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})_i}{y_i} \leqslant \eta^m \leqslant \max \frac{(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y})_i}{y_i} = D_m \tag{4}$$

$$\min a_i^{(m)} \leqslant \eta^m \leqslant \max a_i^{(m)} \tag{5}$$

式中，$a_i^{(m)}$ 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的第 i 行元素之和。需要证明的是，随着 m 的增大，(4) 式或(5) 式给出的上、下界越来越接近。事实上

$$(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Y})_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \sum_{j=1}^{n} a_{sj} y_j = \sum_{s=1}^{n} a_{is} y_s \left[\sum_{j=1}^{n} a_{sj} y_j / y_s\right]$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} y_s d_1 < (\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Y})_i < \sum_{s=1}^{n} a_{is} y_s D_1$$

即

$$d_1^2 < d_2 \leqslant D_2 < D_1^2$$

仿此，利用数学归纳法即可证明

$$\sqrt[m]{d_m} < \sqrt[m+1]{d_{m+1}} \leqslant \eta \leqslant \sqrt[m+1]{D_{m+1}} < \sqrt[m]{D_m} \tag{6}$$

又当 Y 为正向量时，A^mY 也是正向量，这样又成立

$$\min S_i \leqslant \eta \leqslant \max S_i \qquad \left(S_i = \frac{(A^{m+1}Y)_i}{(A^mY)_i}\right) \tag{7}$$

例 1　设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，取 $Y = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，有

$$d_4 = 2278, D_4 = 3457, \sqrt[4]{d_4} = 6.9 < \sqrt[4]{D_4} = 7.66$$

取其平均值 7.26 作为 η 的近似值，误差不超过 2%。若取 $Y = (3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 并应用(4) 式，有

$$d'_2 = 50, D'_2 = 53.5, \sqrt{d'_2} = 7.07 < \eta < \sqrt{D'_2} = 7.31$$

其平均值 $\eta = 7.19$ 已十分接近真值。若采用(7) 式，更可以得到 $7.133 < \eta < 7.238$，或 $\eta \approx 7.186$。

三　非亏损正矩阵最大特征对的计算

上节的讨论表明，$\{\sqrt[m]{d_m}\}_1^{\infty}$、$\{\sqrt[m]{D_m}\}_1^{\infty}$ 分别构成单调递增或递减有界序列从而必有极限 $\overline{d}$ 和 $\overline{D}$。问题在于 $\overline{d}$ 或 $\overline{D}$ 是否就等于 η ？在一般情况下难于证明这一点，但若 A 是非亏损正矩阵，则可以证明以下定理

定理 2　设 A 是非亏损的正矩阵，则

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{d_m} = \eta = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{D_m}$$

证明　根据定理条件，不妨设 A 的特征值满足 $\eta \geqslant |\lambda_{n-1}| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_1|$，相应的特征向量族为 $X_n, X_{n-1}, \cdots, X_1$，并记 $X_j = (x_{1j}, \cdots, x_{nj})^{\mathrm{T}} (j = 1,2,\cdots,n)$，它们构成 n 维向量空间中的一组基，于是向量 Y 可表为

$$Y = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n$$

这样

$$d_m = \min[(C_1\lambda_m^1 + \cdots + C_{n-1}\lambda_{n-1}^m x_{i,n-1} + C_n\eta_{x\,in}^m)/y_i$$

$$D_m = \max[(C_1\lambda_m^1 + \cdots + C_{n-1}\lambda_{n-1}^m x_{i,n-1} + C_n\eta_{x\,in}^m)/y_i$$

前已证明，$D_m \geqslant \eta^m$。这样

$$\max[(C_1 \frac{\lambda_1^m}{\eta^m} + \cdots + C_{n-1}\lambda \frac{\lambda_{n-1}^m}{\eta^m} x_{i,n-1} + C_n x_{in})/y_i] \geqslant 1$$

对任意正整数 m 成立。故当 m 足够大时，绝对值占优项 $\max(C_n x_{in}/y_i) > 0$。又 X_n 与 Y 同步，

$x_{in}y_i > 0$，故必有 $c_n > 0$。这时

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{d_m} = \lim_{m\to\infty}\eta\sqrt[m]{C_n \cdot \min(x_{in}/y_i)} = \eta \tag{8}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{D_m} = \lim_{m\to\infty}\eta\sqrt[m]{C_n \cdot \max(x_{in}/y_i)} = \eta \tag{9}$$

定理 2 证毕。

注意到定理 2 的证明与幂法的证明[1] 十分相似，我们立刻得到非亏损的正矩阵的最大特征对的以下算法，笔者称之为新幂法。

算法一　设有非亏损的正矩阵 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_1^n$，

1^0　对任意给定的正向量 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，令 $m = 1$，$\boldsymbol{Y}^{(m)} = \boldsymbol{X}$；

2^0　计算

$$\boldsymbol{Y}^{(m+1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^{(m)},\ d_m = \min(y_i^{(m+1)}/x_i)$$

$$D_m = \max(y_i^{(m+1)}/x_i),\ \Delta = \sqrt[m]{D_m} - \sqrt[m]{d_m}$$

3^0　在 Δ 小于预先给定的足够小的正数 ε 时转 4^0，否则令 m 增加 1 重复步骤 2^0、3^0；

4^0　$\eta = (\sqrt[m]{D_m} + \sqrt[m]{d_m})/2$，$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{Y}^{(m+1)}$。

鉴于新幂法的收敛速度较慢，注意到(7)式，我们又有

算法二　设有非亏损的正矩阵 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_1^n$，

1^0　任给正向量 $\boldsymbol{Y}$，计算 $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$；

2^0　由(2)式计算 d_1，D_1 和 $\Delta = D_1 - d_1$

3^0　若 Δ 小于预先给定的足够小的正数 ε 时转 4^0，否则以 $\boldsymbol{Y}_1$ 代 $\boldsymbol{Y}$ 重复步骤 1^0、2^0、3^0；

4^0　$\eta = (d_1 + D_1)/2$，$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{Y}_1$。

算法一的收敛性已由定理 2 保证。关于算法二，注意到它实质是一种迭代算法，其证明是熟知的，这里从略。

上述两个算法稍加修改还可用来计算非亏损实矩阵的最大特征对。首先对所给矩阵施以平移变换将其最大特征值改造为绝对值占优特征值，再将起始向量取为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的最大特征值所对应的特征向量的同步向量，即可应用算法一或二计算改造后的占优特征值，求得结果后再还原为原矩阵的最大特征值。不过，在 $\boldsymbol{A}$ 是任意实矩阵的条件下，判断 $\boldsymbol{Y}$ 是否同步向量有时存在困难从而限制了以上算法的效用。

四　振荡矩阵特征值的计算

对于振荡矩阵，文[5] 指出它有 n 个不同的特征值 $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$，相应于 λ_n 的特征向量 $\boldsymbol{X}_n$ 不改变符号，因而可以取为正向量。这样，上节两个算法完全适用于振荡矩阵。另一方面，引入矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 p 阶相伴矩阵 $\boldsymbol{A}^{(p)}$，它由 $\boldsymbol{A}$ 的 p 阶子式所组成，故为 C_n^p 阶。根据振荡矩阵

的理论，$A^{(p)}$ 仍为振荡矩阵且 $A_{\max}^{(p)}=\lambda_{n-p+1}\lambda_{n-p+2}\cdots\lambda_n$ 是其最大特征值。又 $A^{(n)}=\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。于是我们有：

算法三　设有振荡矩阵 $A=\{a_{ij}\}_1^n$，

1^0　由算法一或算法二计算(λ_n,X_n)；

2^0　计算 $A^{(p)}$，再由算法一（或二）计算 $\lambda_{\max}^{(p)}$；

3^0　$\lambda_{n-p}=\lambda_{\max}^{(p+1)}/\lambda_{\max}^{(p)}$　　$(p=1,2,\cdots,n-1)$。

为了说明算法三的应用，我们考察杆、梁差分离散系统。文[6]、[7]证明了静定、超静定的杆、梁差分离散系统的刚度矩阵是符号振荡矩阵，其逆即柔度矩阵是振荡矩阵。于是上述算法可以用来计算杆、梁离散系统的频率，尤其是基频，因为它正好是柔度矩阵最大特征值的倒数的平方根。

例 2　考察两端固定的等截面直杆，它的 5 自由度差分离散系统的刚度、柔度矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix},R=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&4&3&2&1\\4&8&6&4&2\\3&6&9&6&3\\2&4&6&8&4\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$$

取 $Y_1=(1,1.7,2,1.7,1)^{\mathrm{T}}$ 并施于 R，由(4)式求得

$$d_1=3.7,D_1=3.7647,\text{取均值 }\lambda'_5=3.73235$$

$$d_2=13.8,D_2=14.059,\text{开方后取均值 }\lambda''_5=3.73215。$$

又 R 的二阶、四阶相伴矩阵分别为

$$R^{(2)}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&3&2&1&0&0&0&0&0&0\\3&6&4&2&3&2&1&0&0&0\\2&4&6&3&2&4&2&2&1&0\\1&2&3&4&1&2&3&1&2&1\\0&3&2&1&6&4&2&0&0&0\\0&2&4&2&4&8&4&4&2&0\\0&1&2&3&2&4&6&2&4&2\\0&0&2&1&0&4&2&6&3&0\\0&0&1&2&0&2&4&3&6&3\\0&0&0&1&0&0&2&0&3&4\end{pmatrix},\quad R^{(4)}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

分别令 $\boldsymbol{Y}_2=(1,2.7,3.7,2.7,2.7,4.7,3.7,2.7,2.7,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Y}_4=(1,1.7,2,1.7,1)^{\mathrm{T}}$，可以相应地求得

$$d_1^{(2)}=3.7,D_1^{(2)}=3.74074,\text{取均值}\ \lambda'_5\lambda'_4=3.72037$$

$$d_2^{(2)}=13.8,D_2^{(2)}=14.06,\text{开方后取均值}\ \lambda'_5\lambda'_4=3.73222$$

$$d_1^{(4)}=3.7/6,D_1^{(4)}=3.7647/6,\text{取均值}\ \lambda'_5\lambda'_4\lambda'_3\lambda'_2=0.62206$$

$$d_2^{(4)}=2.3/6,D_2^{(4)}=14.059/36,\text{开方后取均值}\ \lambda'_5\lambda'_4\lambda'_3\lambda'_2=0.62203$$

又 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5=1/6$，这样解得

$$\lambda'_5=3.73235,\lambda'_4=0.99677,\lambda'_1=0.26793;$$

$$\lambda''_5=3.73215,\lambda''_4=1.00002,\lambda''_1=0.26794。$$

本来还应计算 $\lambda_{\max}^{(3)}$ 进而求出 λ_3 与 λ_2，因计算量较大也可改用以下方法：因

$$\lambda_3\lambda_2=\lambda_{\max}^{(4)}/\lambda_{\max}^{(2)},\lambda_3+\lambda_2=\mathrm{tr}\boldsymbol{R}-(\lambda_1+\lambda_4+\lambda_5)$$

这样容易求得结果是

$$\lambda'_3=0.50475,\lambda''_3=0.49968;\lambda'_2=0.33235,\lambda''_2=0.33354。$$

与精确值 $\{\lambda_i\}_1^5=\{2-\sqrt{3},1/3,1/2,1,2+\sqrt{3}\}$ 相比，误差不超过 1% 和 0.1%。以上 $\boldsymbol{Y}_1$、$\boldsymbol{Y}_2$ 与 $\boldsymbol{Y}_4$ 是取 $\boldsymbol{Y}_0=\{1,1,\cdots,1\}^{\mathrm{T}}$ 并用相应矩阵迭代两次后取两位有效数字并考虑到对称性给出的。

五　结束语

以上我们成功地给出了正矩阵的最大特征值的包含定理以及由此产生的三个算法。指出以下三点：

（1）本文有关特征值问题的讨论还可以应用于这样一些矩阵，它们本身不是正矩阵或振荡矩阵，但可以转换为正矩阵（非负矩阵）或振荡矩阵。如矩阵 $\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}$ 可以转换为 $\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 可以转换为 $\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 而不改变其特征值。

（2）就计算量而言，本文算法未必优于其他算法如 QR 算法。但在只需计算少量特征值的情况下，例 2 显示，本文的算法有一定价值。

（3）鉴于算法一、二收敛速度较慢，可以把本文的算法一、二与其他成熟算法如逆幂法[1] 结合使用以加快收敛速度。

参考文献

[1] G. W. 斯图尔特著. 王国荣等译. 矩阵计算引论. 上海:上海科技出版社,1980
[2] 胡海昌. 论几种本征值包含定理的内在联系. 固体力学学报,1983(1),1－6
[3] 王其申. 代数本征值的两个界限定理. 振动与冲击,1988(1),10－15
[4] 古以熹. 矩阵特征值的分布. 应用数学学报,1991(17),No. 4,501－511
[5] G. M. L. 格拉德威尔著. 振动中的反问题. 王大钧等译. 北京:北京大学出版社,1991
[6] 王其申等. 二阶连续系统的离散模型频率和振型的定性性质. 振动与冲击,1992(3),7－12
[7] 王其申等. Euler 梁的频谱和模态的若干定性性质. 振动工程学报,1990(4),58－66

积分方程特征值的一个下界估计式及其应用

摘　要　导出了具有正定对称核的积分方程最小特征值的一个下界估计式。以此为基础，获得了相应特征值的一种算法。

关键词　积分方程　最小特征值　下界估计　应用

鉴于从微分方程经格林函数到积分方程的特征值问题在物理、力学和工程问题中均有广泛应用，而在工程实际中常需估计这类问题特征值的分布范围，尤其是最小特征值的上、下界。为此，本文采用一种简单方法导出了具有正定对称核的积分方程最小特征值的一个下界估计式，丰富了积分方程特征值的包含关系方面的成果[1]。以此为基础，笔者证明了上述估界过程的收敛性，进而获得了积分方程特征值及最小特征对的一种新算法。文中给出了算例。

一　正定对称核的最小特征值的下界估计

考虑如下积分方程特征值问题

$$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,s)y(s)\mathrm{d}s \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{1}$$

对正定对称核，业已证明[2]，成立以下绝对且一致收敛的广义傅立叶级数

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\varphi_i(s)/\lambda_i \tag{2}$$

这里$\{\varphi_i(x)\}_1^\infty$ 是相应的归一特征函数族。若记

$$K^{(1)}(x,s)=K(x,s)$$

$$K^{(m)}(x,s)=\int_0^l K^{(m-1)}(x,t)K(t,s)\mathrm{d}t$$

则同样成立绝对且一致收敛的级数展开式

$$K^{(m)}(x,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\varphi_i(s)/\lambda_i^m \tag{3}$$

由此即得

---

* 本文原载于《力学与实践》2000 年第 4 期。

$$\int_0^l K^m(x,x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{-m} \tag{4}$$

在正定核的条件下，所有 $\lambda_i > 0$，这样我们得到最小特征值的如下估计式

$$\lambda_l > \frac{1}{\sqrt[m]{\int_0^l K^m(x,x)\mathrm{d}x}}(m = 1,2,\cdots) \tag{5}$$

特别地，令 $m = 2^n(n = 0,1,2,\cdots)$ 并记

$$\Delta_n = \int_0^l K^{2^n}(x,x)\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{6}$$

则有

$$\lambda_1 > \Delta_n^{-2^{-n}} \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{7}$$

值得注意的是，在式(5)、式(7)中，λ_1 的下界均随 m、n 的增加而上升，从而给出 λ_1 的越来越精确的下界。现以式(5)为例证明之。

事实上，由式(4)

$$\begin{aligned}&\sqrt[m]{\int_0^l K^{(m)}(x,x)\mathrm{d}x} = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt[m]{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^m} > \\ &\frac{1}{\lambda_1}\sqrt[m+1]{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{m+1}} = \sqrt[m+1]{\int_0^l K^{(m+1)}(x,x)\mathrm{d}x}\end{aligned} \quad (m = 1,2,\cdots)$$

这就证明了 $1\Big/\sqrt[m]{\int_0^l K^{(m)}(x,x)\mathrm{d}x}$ 是 m 的增函数。

例 1　对梁长 $l = 1$ 的均匀等截面悬臂梁，文[3]给出它的格林函数是

$$G(x,s) = \int_0^{\min(x,s)} \frac{(x-t)(s-t)}{EI}\mathrm{d}t \tag{8}$$

若取梁的线密度 $\rho(x) = 1$，刚度 $EI = 1$，则其振动微分方程等价于

$$y(x) = \lambda\int_0^l G(x,s)y(s)\mathrm{d}s$$

现在我们利用式(7)求相应于基频的特征值 λ_1 的下界。在上面的假设下，不难求得

$$G(x,s) = \begin{cases}\dfrac{x^2}{2}s - \dfrac{x^3}{6}(x < s)\\[2ex] \dfrac{x}{2}s^2 - \dfrac{s^3}{6}(x > s)\end{cases}$$

$$G^{(2)}(x,s) = \begin{cases}\dfrac{1}{12}\left[x^2\left(s^2 - \dfrac{s^3}{2} + \dfrac{s^5}{20}\right) - x^3\left(\dfrac{s^2}{2} - \dfrac{s^3}{3} + \dfrac{s^4}{12}\right) + \dfrac{x^6}{60}s - \dfrac{x^7}{420}\right] (x < s)\\[2ex] \dfrac{1}{12}\left[s^2\left(x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{20}\right) - s^3\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{12}\right) + \dfrac{s^6}{60}x - \dfrac{s^7}{420}\right] (x > s)\end{cases}$$

$$\Delta_0 = \int_0^l G(x,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 > 12$$

$$\Delta_1 = \int_0^l G^{(2)}(x,x)\mathrm{d}x = \frac{11}{1680}, \quad \lambda_1 > 12.358288$$

作为下限，这里的结果已相当精确。如果进一步计算，则有

$$G^{(4)}(x,x) = \frac{1}{144}\Big[\frac{2641}{34650}x^4 - \frac{661}{9450}x^5 + \frac{13}{810}x^6 + \frac{11}{2100}x^8 - \frac{13}{3780}x^9$$

$$+ \frac{1}{2100}x^{10} + \frac{1}{9450}x^{12} - \frac{1}{20790}x^{13} + \frac{1}{145530}x^{14} - \frac{1}{70945875}x^{15}\Big]$$

$$\Delta_2 = 0.4281483, \quad \lambda_1 > 12.362362$$

事实上，最后这一结果完全可以取作 λ_1 的值而误差极微。顺便指出，如需确定 λ_1 的上界，则可任取一个在 $[0,l]$ 上的正函数并用瑞利商即可求得。如取 $y(x) = x^2/5$，则可求得 $\lambda_1 < 12.46154$。

例 2 两端铰支梁的格林函数是[3]、[4]

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{xs}{l^2}\displaystyle\int_0^l \frac{(l-t)^2}{EI}\mathrm{d}t - \frac{l-s}{l}\int_0^x \frac{t(x-t)}{EI}\mathrm{d}t - \frac{x}{l}\int_0^s \frac{(s-t)(l-t)}{EI}\mathrm{d}t & (x < s) \\ \dfrac{xs}{l^2}\displaystyle\int_0^l \frac{(l-t)^2}{EI}\mathrm{d}t - \frac{l-x}{l}\int_0^s \frac{t(s-t)}{EI}\mathrm{d}t - \frac{s}{l}\int_0^x \frac{(x-t)(l-t)}{EI}\mathrm{d}t & (x > s) \end{cases}$$

试估计梁长 $l = 1$，$\rho(x) = 1$，$EI = 1$ 的两端铰支梁的相应于基频的特征值 λ_1 的下界。

和例 1 类似，由式(7)有

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}[x(2s - 3s^2 + s^3) - x^3(1-s)] & (x < s) \\ \dfrac{1}{6}[s(2x - 3x^2 + x^3) - s^3(1-x)] & (x > s) \end{cases}$$

$$G^{(2)}(x,x) = \frac{1}{36}\left(\frac{8}{105}x^2 - \frac{4}{15}x^4 + \frac{8}{15}x^6 - \frac{16}{35}x^7 + \frac{4}{35}x^8\right)$$

$$G^{(4)}(x,x) = \frac{1}{1296}\Big(\frac{64}{225225}x^2 - \frac{22112}{23648625}x^4 + \frac{64}{51975}x^6 - \frac{16}{18375}x^8 +$$

$$\frac{64}{165375}x^{10} - \frac{32}{259875}x^{12} + \frac{64}{1576575}x^{14} - \frac{64}{3941615}x^{15} + \frac{16}{7882875}x^{16}\Big)$$

$$\Delta_0 = \int_0^l G(x,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{90}, \quad \lambda_1 > 90$$

$$\Delta_1 = \int_0^l G^{(2)}(x,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{9450}, \quad \lambda_1 > 97.21111$$

$$\Delta_2 = \int_0^l G^{(4)}(x,x)\mathrm{d}x = \frac{14.395}{36000^2}, \quad \lambda_1 > 97.408831$$

最后这一下界对应的基频是 $\omega_1 = 3.1415906$，与精确值 $\omega_1 = \pi$ 的误差已可忽略不计。

以上两例说明，在像梁的振动这类问题中，由于边界条件已经内含于格林函数之中，本文所述方法有很好的应用价值。

二　正定对称核的最小特征对的计算

上节证明了 $1\Big/\sqrt[m]{\int_0^l K^{(m)}(x,x)\mathrm{d}x}$ 是 m 的单调增函数，现在我们进一步来证明它收敛于 λ_1。

事实上，不妨设 λ_1 是核 $K(x,s)$ 的 p 重特征值，即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p < \lambda_{p+1} \leqslant \cdots$，$p$ 应为有限整数，则

$$\sqrt[m]{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{-m}} = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt[m]{p + \sum_{i=p+1}^{\infty}(\lambda_1/\lambda_i)^m}$$

由式(4)对任意 m 收敛可知，存在正数 M_1、M_2 使

$$M_1 \leqslant \sum_{i=p+1}^{\infty}(\lambda_1/\lambda_i)^m \leqslant M_2$$

因为当 $m\to\infty$ 时显然有 $\sqrt[m]{p+M_1}\to 1$，$\sqrt[m]{p+M_2}\to 1$，于是

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\int_0^l K^{(m)}}(x,x)\mathrm{d}x = \lambda_1^{-1} \tag{9}$$

证毕。上节的两个例子也验证了这一事实。

从核 $K(x,s)$ 的迭代核出发，我们不仅可以求得 λ_1，同时还可以求得与之相应的特征函数 $\varphi_1(x)$。

由式(3)及其右端级数的一致收敛性有

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\lambda_1^m\int_0^l K^{(m)}(x,s)\mathrm{d}s = \\
&\lim_{m\to\infty}\left[\varphi_1(x)\int_0^l\varphi_1(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^m\varphi_i(x)\int_0^l\varphi_i(s)\mathrm{d}s\right] \\
&= \varphi_1(x)\int_0^l\varphi_1(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=2}^{\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^m\int_0^l\varphi_i(s)\mathrm{d}s\right]\varphi_i(x)
\end{aligned}$$

作为归一化的函数族，$\int_0^l\varphi_i(s)\mathrm{d}s(i=2,3,\cdots)$ 显然有界，从而上式和号中每一项极限为零，故有

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_1^m\int_0^l K^{(m)}(x,s)\mathrm{d}s = \left[\int_0^l\varphi_1(s)\mathrm{d}s\right]\varphi_1(x) \tag{10}$$

可见，在相差一个常数因子的意义上，$\int_0^l K^{(m)}(x,s)\mathrm{d}s$ 收敛于 $\varphi_1(x)$。当然，这里假定了 λ_1 是单特征值。在重特征值的条件下可以证明类似的结论。

据此，可以验证例 1 中的函数

$$Y_0(x)=\int_0^l G^{(2)}(x,s)\mathrm{d}s=\frac{13}{720}\left(x^2-\frac{6}{13}x^3+\frac{1}{26}x^6-\frac{1}{91}x^7+\frac{3}{728}x^8\right)$$

在相差一个常数因子的意义上就是相应于 λ_1 的一个近似特征函数，亦即悬臂梁的近似基模态。

事实上，有

$$Y_1(x)=\int_0^l G(x,s)Y_0(s)\mathrm{d}s=\frac{5297}{65520}\times$$

$$\left(x^2-\frac{2430}{5297}x^3+\frac{182}{5297}x^6-\frac{36}{5297}x^7+\frac{x^{10}}{10594}-\frac{x^{11}}{5297\times 11}+\frac{x^{12}}{5297\times 44}\right)$$

$$=\frac{1}{12.36926}Y_0(x)(1+0.0027882x+0.00128686x^2+\cdots)$$

最后一步是用带余除法得到的。这表明，$Y_0(x)$ 的确是与 λ_1 相应的近似基模态。

三　其他特征值的计算

以上过程还可以用来确定核 $K(x,s)$ 的其他特征值。具体过程如下：由式(4)

$$\int_0^l K^{(m)}(x,x)\mathrm{d}x-\lambda_1^{-m}=\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i^{-m} \tag{11}$$

引用式(6)的记号，即有

$$\Delta_n-\lambda_1^{-2^n}=\lambda_2^{-2^n}\sum_{i=2}^{\infty}(\lambda_2/\lambda_i)^{2^n}$$

因为由式(9)，$\lambda_1^{-1}=\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[2^{n+1}]{\Delta_{n+1}}$，这样，仿照式(9)的证明，对上式取极限即有

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[2^n]{\Delta_n-\sqrt{\Delta_{n+1}}}=\lambda_2^{-1} \tag{12}$$

同理，可以求得

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[2^n]{\Delta_n-\sqrt{\Delta_{n+1}-\sqrt{\Delta_{n+2}}}-\sqrt[4]{\Delta_{n+2}}}=\lambda_3^{-1} \tag{13}$$

仿照这一过程，从理论上讲，我们可以求得核 $K(x,s)$ 的全体特征值的近似值。

例 3　求例 1 中的梁的第二特征值。

由例 1，$\Delta_1=\dfrac{11}{1680}$，$\Delta_2=\dfrac{0.0061653356}{144}$，故

$$\lambda_2 \approx 1/\sqrt{\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2}} = 481.41539$$

就特征值而言，这里的误差不超过 0.1%，但就频率而言，$\omega_2 = \sqrt[4]{\lambda_2}$，这里的精度尚不够。这是因为悬臂梁的频率方程 $\cos \omega l \cdot \operatorname{ch} \omega l + 1 = 0$ 非常敏感的缘故。而要改进精度，则可用

$$\lambda_2 \approx 1/\sqrt{\Delta_2 - \sqrt{\Delta_3}}$$

这就需要计算$\int_0^l K^{(8)}(x,x)\mathrm{d}x$。由例 1 可知，这个积分的计算主要是 $K^{(8)}(x,x)$ 的计算十分繁琐，所以一般而言，本过程只有理论意义，实用价值不大。当然，如果 $K^{(2^n)}(x,x)$ 易于计算时则是例外。

四　结束语

以上我们导出了具有正定对称核的积分方程最小特征值的下界估计式，进而获得了相应的最小特征对以及其他特征值的一种算法。应该补充说明的是：本文不仅适用于正定对称核，也适用于正核和只有有限多个负特征值的对称核，不过，此时求得的是绝对值最小的特征值和相应特征对。

参考文献

[1] Ivar Stakgola, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, New York: Wiley Intersciency Publication, 1979, 399－403

[2] 柯朗，希尔伯特著．数学物理方法(卷 1)．钱敏，郭敦仁译．北京：科学出版社，1981，105－110

[3] Gladwell G. M. L 著．振动中的反问题．王大钧，何北昌译．北京：北京大学出版社，1991，166—167，255

[4] 王其申，王大钧．杆、梁差分离散系统的柔度矩阵及其极限．力学与实践，1996(5)，43－47

关于积分方程特征值的包含定理及应用

摘　要　利用同号函数这一概念，导出了积分方程特征值的一个包含定理。然后将它应用于具有正核和振荡核的积分方程特征值问题，获得了确定前者最小特征值的精密上下界的方法以及后者全体特征值的一种算法。

关键词　积分方程　特征值　正核　振荡核　包含定理　算法

一　引　言

关于矩阵特征值的包含定理已有大量成果[1]、[2]，而积分方程特征值的包含定理相对较少。鉴于微分方程特征值问题常可等价于一个积分方程特征值问题，所以研究积分方程特征值的包含定理非常必要。为此，笔者仿照文[2]中的作法，首先引入一个称之为"同号函数"的概念，由此给出积分方程特征值的一个包含定理。然后，把它应用于具有正核的积分方程特征值问题，获得了它的最小特征值的一个相当精确的包含定理，进而证明了在存在完备特征函数族的条件下上述过程的收敛性，给出了具有振荡核的积分方程全体特征值的一种算法。

二　积分方程特征值的包含定理

定义 1　已知定义在区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$，函数 $g(x)$ 在区间$[a,b]$上定义并满足：当 $f(x)\neq 0$ 时 $f(x)g(x)>0(x\in[a,b])$，而当 $f(x)$ 在某点 x_0 为零时 $g(x_0)$ 亦为零或第一类间断点，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的同号函数。

利用这一概念，可以证明以下定理：

定理 1　设有积分方程特征值问题

$$y(x)=\lambda\int_0^l k(x,s)y(s)\mathrm{d}s\quad(0\leqslant x\leqslant l)\tag{1}$$

这里 $k(x,s)$ 是 x,s 的实函数。又设$(\eta,Y(x))$是它的一个实特征对，$p(x)$ 是 $Y(x)$ 的同号函数并与 $k(s,x)$ 满足同样的边条件，则

$$\min g(x)\leqslant\eta^{-1}\leqslant\max g(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l)\tag{2}$$

＊ 本文原载于《安庆师范学院学报》(自然科学版)2000 年第 3 期

其中

$$g(x)=\int_0^l k(x,s)p(s)\mathrm{d}s\Big/p(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l)\tag{3}$$

证明　由定理条件有

$$Y(x)=\eta\int_0^l k(x,s)Y(s)\mathrm{d}s$$

以 $p(x)$ 对上式两边作内积有

$$\int_0^l Y(x)p(x)\mathrm{d}x=\int_0^l\left[\eta\int_0^l k(x,s)Y(s)\mathrm{d}s\right]p(x)\mathrm{d}x=$$

$$\eta\int_0^l Y(s)\left[\int_0^l k(x,s)p(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s=\eta\int_0^l Y(s)p(s)g(s)\mathrm{d}s$$

这里 $g(x)$ 由(3)式定义，在定理的条件下，$g(x)$ 在 $[0,l]$ 上最多存在有限个间断点。又 $Y(x)p(x)\geqslant 0$，这样

$$\min_{0\leqslant x\leqslant l}g(x)\leqslant\eta^{-1}=\int_0^l Y(s)p(s)g(s)\mathrm{d}s\Big/\int_0^l Y(x)p(x)\mathrm{d}x\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}g(x)$$

注意　当 $k(x,s)$ 是对称核时，$k(x,s)=k(s,x)$，核与 $Y(x)$ 满足同样的边条件。这时定理1的条件中，“$p(x)$ 与 $k(x,s)$ 满足同样的边条件”可以改为“$p(x)$ 与 $Y(x)$ 满足同样的边条件”。

还应指出，若记 $d_1=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant l}g(x)$，$D_1=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}g(x)$，显然 d_1、D_1 均为 $p(x)$ 的泛函。

$p(x)$ 的选取将会影响区间 $[d_1,D_1]$ 在实轴上的位置，区间宽度乃至 η^{-1} 与该区间的相对位置。然而定理1断言的是这样一个事实：只要 $p(x)$ 满足定理1的条件，则必有

$$\eta^{-1}\in[d_1,D_1]$$

三　具有正核的积分方程的最小特征值的包含定理

定理1的缺点是：当 $p(x)$ 存在零点时，d_1 或 D_1 可能趋于无穷而失去实际意义。但在本节所讨论的问题中则将显示定理1的价值。

文[3]叙述了这样一个定理：

Perron 定理　若连续核 $k(x,s)$ 满足：$k(x,s)\geqslant 0$，$k(x,x)>0(0\leqslant x,s\leqslant l)$，则积分方程 $\varphi(x)=\lambda\int_0^l K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s$ 的绝对值最小的特征值 λ_0 是正的并且是单的，相应的特征函数 $\varphi_0(x)$ 在 $(0,l)$ 内不改变符号。

把定理1应用于 Perron 定理所关心的具有正核的积分方程的最小特征值，我们有

定理2　设连续核 $k(x,s)$ 满足：$k(x,s)\geqslant 0$，$k(x,x)>0(0\leqslant x,s\leqslant l)$，$\lambda_0$ 是积分方程(1)的绝对值最小的特征值，$p(x)$ 在 $(0,l)$ 内不改变符号，则

$$d_1=\min_{0\leqslant x\leqslant l}g(x)\leqslant\lambda_0^{-1}\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}g(x)\text{（这里 }g(x)\text{ 仍由(3)式定义）}\tag{4}$$

特别地取 $p(x)=1$，有

$$\min_{0\leqslant x\leqslant l}\int_0^l k(s,x)\mathrm{d}s\leqslant\lambda_0^{-1}\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}\int_0^l k(s,x)\mathrm{d}s \tag{5}$$

(4)、(5) 两式所给出的 λ_0 的上、下界可能过宽而无工程应用价值，为此改进如下：

定义 2 记 $k^{(1)}(x,s)=k(x,s)$，而

$$k^{(m+1)}(x,s)=\int_0^l k^{(m)}(x,t)k(t,s)\mathrm{d}t\quad(m=1,2,\cdots)$$

则称 $k^{(m)}(x,s)$ 为 $k(x,s)$ 的 m 重迭代核。

作为熟知的事实是：若$(\lambda_0,Y(x))$ 是积分方程(1) 的一个特征对，则$(\lambda_0^m,Y(x))$ 是积分方程 $y(x)=\lambda\int_0^l k^{(m)}(x,s)y(s)\mathrm{d}s$ 的一个特征对。这样作为定理 2 的推论有

推论 1 在定理 2 的条件下，成立不等式

$$d_m=\min_{0\leqslant x\leqslant l}g_m(x)\leqslant\lambda_0^{-m}\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}g_m(x)=D_m \tag{6}$$

这里

$$g_m(x)=\int_0^l k^{(m)}(s,x)p(s)\mathrm{d}s/p(x)\quad(m=1,2,\cdots) \tag{7}$$

或更简单的

$$g_m(x)=\int_0^l k^{(m)}(s,x)\mathrm{d}s\quad(m=1,2,\cdots) \tag{8}$$

(6) 式的成立是显然的。需要证明的是：(6) 式给出的 λ_0 的上、下界随 m 增大而越发精确。取 $m=2$，因

$$\int_0^l k^{(2)}(s,x)p(s)\mathrm{d}s\Big/p(x)=\int_0^l\left[\int_0^l k(s,t)k(t,x)\mathrm{d}t\right]p(s)\mathrm{d}s\Big/p(x)$$

$$=\int_0^l k(t,x)p(t)\left[\int_0^l k(s,t)p(s)\mathrm{d}s/p(t)\right]\mathrm{d}t\Big/p(x)$$

于是，除非 $g(x)=$ 常数，否则

$$d_1\int_0^l k(t,x)p(t)\mathrm{d}t/p(x)\leqslant g_2(x)\leqslant D_1\int_0^l k(t,x)p(t)\mathrm{d}t\Big/p(x) \tag{9}$$

进而有

$$d_1^2\leqslant d_2\leqslant\lambda_0^{-2}\leqslant D_2\leqslant D_1^2 \tag{10}$$

仿此，利用数学归纳法即可证明：

$$\sqrt[m]{d_m}\leqslant\sqrt[m+1]{d_{m+1}}\leqslant\lambda_0^{-1}\leqslant\sqrt[m+1]{D_{m+1}}\leqslant\sqrt[m]{D_m} \tag{11}$$

这一推论的实质是一种迭代逼近。尽管 d_m、D_m 仍是 $p(x)$ 的泛函，然而推论 1 表明，只要 $p(x)$ 不改变符号，则 λ_0^{-m} 必属于区间$[d_m,D_m]$。同时，随着每一次迭代，序列 d_1，$\sqrt{d_2}$，$\sqrt[3]{d_3}$，

$\cdots$ 和 D_1，$\sqrt{D_2}$，$\sqrt[3]{D_3}$，$\cdots$ 都将从左右两侧向不动点 λ_0^{-1} 逼近，从而获得越来越精确的 λ_0 的上、下界。

注意到当 $p(x)$ 在$[0,l]$ 上不改变符号时，

$$p_m(x) = \int_0^l k^{(m)}(s,x)p(s)\mathrm{d}s \quad (m = 1,2,\cdots) \tag{12}$$

也不改变符号。这样又有

推论 2 在定理 2 的条件下，成立不等式

$$\min_{0\leqslant x\leqslant l}[p_{m+1}(x)/p_m(x)] \leqslant \lambda_0^{-1} \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l}[p_{m+1}(x)/p_m(x)] \tag{13}$$

例 1 均匀等截面悬臂梁的格林函数是[3]

$$G(x,s) = \int_0^{\min(x,s)} \frac{(x-t)(s-t)}{EI}\mathrm{d}t \quad (0 \leqslant x,s \leqslant l)$$

试求其基频的上、下界。

解 不失一般性可设 $EI = 1$，$l = 1$，线密度 $\rho(x) = 1$，问题等价于寻求积分方程

$$y(x) = \lambda\int_0^l G(x,s)y(s)\mathrm{d}s$$

的最小特征值的上下界。为此取 $p(x) = x^2$，则

$$G_1(x) = \int_0^{\min(x,s)}\left[\int_0^{\min(x,s)}(x-t)(s-t)\mathrm{d}t\right]p(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{8}\left(1-\frac{4}{9}x+\frac{1}{45}x^4\right)$$

$$G_2(x) = \frac{59}{5760}\left(1-\frac{568}{1239}x+\frac{2}{59}x^4-\frac{8}{1239}x^5+\frac{1}{1858}x^8\right)$$

$$G_3(x) = \frac{1289}{1555200}\left(1-\frac{4140}{9023}x+\frac{177}{5156}x^4-\frac{426}{63161}x^5+\frac{3}{36092}x^8-\frac{1}{99253}x^9+\cdots\right)$$

这样由(11) 式求得：

$$8 < \lambda'_0 < 13.846, 9.88 < \lambda''_0 < 13.13, 10.65 < \lambda'''_0 < 12.95$$

取最后一式的均值 11.80 作为 λ_0 的近似值已十分接近其真值 $12.36(= 1.875^4)$。

应指出，在选取函数 $p(x)$ 的具体表达式时，必须让它严格满足结构位移模态必须满足的位移边条件。如在以上例子中，应取 $p(x) = x^2 f(x)$ 且 $f(x) > 0(0 \leqslant x \leqslant l)$ 即可。不过考虑到极值计算的难易，这里取 $f(x) \equiv 1$。如果取 $p(x) = x$，则 λ_0^{-m} 的下界 d_m 始终为 0；而取 $p(x) = x^3$，则 λ_0^{-m} 的上界 D_m 将始终为 ∞，故均不适宜。

四 具有正核的积分方程的最小特征对的计算

上节我们只是证明了 $\sqrt[m]{d_m}$、$\sqrt[m]{D_m}$ 构成单调递增或递减序列，现在我们进一步来证明：

定理 3 设方程(1) 的核是正的对称核并且具有完备正交特征函数族$\{y_n(x)\}_0^\infty$，其中 $y_i(x)$ 是与 λ_i 相应的特征函数。则对任意与 $y_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 在端点处零点阶数完全相

同的同号函数 $P(x)$，有

$$1^0\quad \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{d_m}=\lambda_0^{-1}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{D_m}\tag{14}$$

$$2^0\quad P_m(x)=\int_0^l k^{(m)}(x,s)P(s)\mathrm{d}s\quad (m=1,2,\cdots)\tag{15}$$

在相差一个常数因子的意义上收敛于 $y_0(x)$。

证明　在定理的条件下，$P(x)$ 可以展成如下绝对且一致收敛的广义傅立叶级数[4]：

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n y_n(x)$$

当核 $k(x,s)$ 对称时，$k^{(m)}(s,x)=k^{(m)}(x,s)$。这样

$$\begin{aligned}P_m(x)&=\int_0^l\Big[k^{(m)}(x,s)\sum_{n=0}^{\infty}C_n y_n(s)\Big]\mathrm{d}s=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\lambda_n^{-m}y_n(x)\\&=\lambda_0^{-m}\Big[C_0y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\Big)^m C_n y_n(x)\Big]\end{aligned}\tag{16}$$

首先，由 Perron 定理，λ_0 是单根，$0<\lambda_0<|\lambda_1|\leqslant\cdots$，从而 $|\lambda_0/\lambda_n|<1$。这样上式右端的级数是一致收敛的。于是当 $m\to\infty$ 时，

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_0^m P_m(x)=C_0y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\lim_{m\to\infty}\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\Big)^m\Big]C_n y_n(x)=C_0y_0(x)\tag{17}$$

此式表明，在相差一个常数因子的意义上，当 $m\to\infty$ 时，$P_m(x)$ 以 $y_0(x)$ 为极限。又因

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{d_m}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\min\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\Big)^m C_n y_n(x)\Big]\Big/P(x)}\cdot\lambda_0^{-1}$$

由于 $P(x)$ 与 $y_n(x)$ 在端点处的零点阶数相同而在其他点上均不为零，则由(17)式有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\Big)^m C_n y_n(x)=0$$

故对足够大的 m，成立不等式

$$-\frac{\alpha}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\Big)^m C_n y_n(x)/P(x)<\frac{\alpha}{2}(\alpha=\min[C_0y_0(x)/P(x)])\tag{18}$$

我们来证明 $\alpha>0$。因为 $P(x)$ 与 $y_0(x)$ 在端点处有相同阶数的零点且为同号函数，故有

$$\lim_{x\to 0}y_0(x)/P(x)=A>0,\lim_{x\to l}y_0(x)/P(x)=B>0$$

进一步，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，使得

$$y_0(x)/P(x)>A/2(0\leqslant x\leqslant\delta_1),\ y_0(x)/P(x)>B/2(\delta_2\leqslant x\leqslant l)$$

又记 $\alpha_1=\min\limits_{\delta_1\leqslant x\leqslant\delta_2}y_0(x)/P(x)$，则

$$\alpha=\min_{0\leqslant x\leqslant l}[C_0y_0(x)/P(x)]\geqslant\min\Big(\frac{AC_0}{2},\frac{BC_0}{2},\alpha_1C_0\Big)>0$$

这样对足够大的 m，成立不等式：

$$\frac{\alpha}{2} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\right)^m C_n y_n(x)/P(x) < \frac{3\alpha}{2}$$

α 显然不趋于 ∞，这样

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\min\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\right)^m C_n y_n(x)\right]\Big/P(x)} = 1$$

即有 $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{d_m} = \lambda_0^{-1}$。同理可证 $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{d_m} = \lambda_0^{-1}$。

根据这一定理，可得以下算法：

算法一　设方程(1)的核是正的对称核，函数 $P(x)$ 为正函数并与核满足同样边条件，则

1^0　令 $m=1$，按(15)式计算 $P_m(x)$ 及

$$d_m = \min[P_m(x)/P(x)],\ D_m = \max[P_m(x)/P(x)]$$

2^0　若 $\Delta = \sqrt[m]{D_m} - \sqrt[m]{d_m}$ 小于预先给定的正数 ε 时，取

$\lambda_0 = 2/(\sqrt[m]{D_m} + \sqrt[m]{d_m})$，$y_0(x) = \delta P_m(x)$（$\delta$ 是一个适当常数因子）后停止；若 $\Delta > \varepsilon$，则将 m 增加 1 后重复上述过程。

对应定理 2 的推论 2，我们又有

算法二　核与 $P(x)$ 同算法一，

1^0　$g(x) = \int_0^l k(x,s)P(s)\mathrm{d}s, d = \min[g(x)/P(x)], D = \max[g(x)/P(x)]$；

2^0　当 $\Delta = D - d$ 小于预先给定的正数 ε 时，取 $\lambda_0 = 2/(D+d)$，$y_0(x) = g(x)$ 后停止；若 $\Delta > \varepsilon$，令 $P(x) = g(x)$ 重复以上过程。

经验表明，就收敛速度而言，算法二较算法一为优，但算法二中 d 与 D 的计算复杂些。

例 2　继续考察例 1 所提出的问题。为了采用(13)式即算法二同时减少极值计算的困难，注意到本例涉及之函数均为有理函数，可以利用带余除法将 $P_m(x)/P(x)$ 展开为幂级数

$$P_1(x)/P(x) = g_2(x) = \frac{1}{8}(1 - 0.4444444x + 0.0222222x^4)$$

$$\begin{aligned} P_2(x)/P_1(x) &= g_2(x)/g_1(x) \\ &= \frac{59}{720}(1 - 0.0139898x - 0.0062222x^2 - 0.0027673x^3 + \cdots) \end{aligned}$$

由此求得 $12.203 = 720/59 < \lambda_0 < 12.496$，这样可取

$$\lambda_0 = 12.35, y_2(x) = x^2 - \frac{568}{1239}x^3 + \frac{2}{59}x^6 - \frac{8}{1239}x^7 + \frac{1}{18585}x^{10}$$

与例 1 相比，这里的改进是明显的。

五　振荡核的情况

文[3] 给出的振荡核的定义是

定义 3　设核 $k(x,s)$ 在 $(0 \leqslant x,s \leqslant l)$ 上满足

1^0　$k(x,s) > 0$；

2^0　$k\begin{pmatrix} x_1, & \cdots, & x_n \\ s_1, & \cdots, & s_n \end{pmatrix} = \det\{k(x_i,s_j)\}_1^n \geqslant 0 \quad \left(0 \leqslant \begin{matrix} x_1 < \cdots < x_n \\ s_1 < \cdots < s_n \end{matrix} \leqslant l\right)$；

3^0　$k\begin{pmatrix} x_1, & \cdots, & x_n \\ x_1, & \cdots, & x_n \end{pmatrix} > 0 \quad (0 \leqslant x_1 < \cdots < x_n \leqslant l)$

这里 n 是自然数，则称核 $k(x,s)$ 为振荡核。

振荡核具有以下性质[3]：

(1) 它的所有特征值是正的和离散的，可以排列为：$(0 <)\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$；

(2) 对应于 λ_i 的特征函数 $\varphi_i(x)$ 在 $(0,l)$ 上恰有 i 个变号数（节点）且 φ_i 与 φ_{i+1} 的节点彼此相间。

把上节的定理应用于振荡核，我们有：

算法三　设 $k(x,s)$ 是振荡核，则方程(1)的特征值可以计算如下：

1^0　由算法一或算法二计算 $(\lambda_0, y_0(x))$；

2^0　对 $n = 1,2,\cdots$，任给正函数 $Y(x_1,\cdots,x_{n+1})$，计算

$$g(x_1,\cdots,x_{n+1}) = \int_0^l \cdots \int_0^l k\begin{pmatrix} x_1, & \cdots, & x_{n+1} \\ s_1, & \cdots, & s_{n+1} \end{pmatrix} Y(s_1,\cdots,s_{n+1})\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n+1}$$

$$d = \min g(x_1,\cdots,x_{n+1})/Y(x_1,\cdots,x_{n+1})$$

$$D = \max g(x_1,\cdots,x_{n+1})/Y(x_1,\cdots,x_{n+1})$$

3^0　当 $\Delta = D - d$ 小于事先给定的正数 ε 时，取 $\lambda_0 = 2/(D+d)$ 后转 4^0，否则置 $Y(x_1,\cdots,x_{n+1}) = g(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 后重复步骤 2^0、3^0；

4^0　$\lambda_n = \lambda_{n0}/\lambda_{n-1,0}\,(n = 1,2,\cdots;\lambda_{00} = \lambda_0)$。

从理论上讲，这一算法可以计算一个振荡核的任意阶特征值，并可随意求其中的某几个特征值。不过，由于重积分及多元函数极值的计算相当繁琐，所以要用此法计算高阶特征值是有困难的。

六　结 束 语

以上我们给出了积分方程特征值的一个包含定理，由此产生了计算正核的最小特征对

和振荡核的全体特征值的三个算法。鉴于弹性结构振动的微分方程等价于某个包含格林函数的积分方程，本文对于确定结构振动频率的上下界应有一定的价值。

参考文献

[1] 胡海昌．多自由度结构固有振动理论．北京：科学出版社，1987，39－83

[2] 王其申．代数特征值的两个包含定理．振动与冲击，1988(1)，7－12

[3] G. M. L. Gladwell，*Inverse Problems in Vibration*. 王大钧等译．振动中的反问题．北京：北京大学出版社，1991

[4] 柯朗，希尔伯特．数学物理方法(卷 1)．钱敏，郭敦仁译．北京：科学出版社，1981，89－127

实对称矩阵特征值的估计及应用

摘　要　本文给出了实对称矩阵最大与最小特征值的一种估计方法及其应用。

关键词　实对称矩阵　特征值　上下界

众所周知，对于矩阵特征值的估计的研究，无论在理论上还是在应用上都有极其重要的意义。这方面的研究成果，最著名的要数 Gersgorin 圆盘定理[1] 和 Collatz 定理[2]。前者断言 n 阶矩阵的特征值必被包含在复平面上的 n 个圆盘的并集内，这在实际应用中并不方便。后者则是针对实对称矩阵的特征值，其内容是：

定理 1　(Collatz) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{X}=\{x_1,\cdots,x_n\}^{\mathrm{T}}$ 是一任意 n 维向量，记 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，则至少有 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 λ 满足

$$\min(y_i/x_i)\leqslant\lambda\leqslant\max(y_i/x_i)\tag{1}$$

这一定理形式简单且便于应用，但也有不足，就是它不知道被包含的到底是一个还是哪几个特征值，而且往往所得界限太宽。针对第一个缺点，笔者提出了同步向量的概念，推广了上述定理[3]。针对后一缺点，笔者指出[4] 可以应用迭代法和基于同步向量的包含定理，获得正矩阵的最大与最小特征值的包含关系。继以上工作，本文给出了任意实对称矩阵最大与最小特征值的可以逐步收敛的又一包含关系，由此进一步给出了矩阵特征值的一种新算法并分析了这种新算法的利弊和计算实例。

一　实对称矩阵特征值的总体上、下界

业已证明，实对称矩阵的特征值全是实数。注意到当 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵时，$\boldsymbol{A}^2$ 是正定或半正定矩阵；而对适当选取的正数 μ，$\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{I}$ 必为正定矩阵，这里 $\boldsymbol{I}$ 是单位阵。又在经过以上两种转换后，$\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{I}$ 均与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征函数族。基于这些事实，以下只讨论正定矩阵。

设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}^k$ 仍为正定矩阵。记 $T_k=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^k(k=1,2,\cdots)$，显然

$$T_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k(k=1,2,\cdots)\tag{2}$$

这里 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值。

定理 2　$\sqrt[k]{T_k}(k=1,2,\cdots)$ 构成严格单调下降序列。

证明　因为

---

* 本文原载于《安庆师范学院学报》(自然科学版) 2004 年第 4 期。

$$T_k = \lambda_n^k\left[1+\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k+\cdots+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k\right] \tag{3}$$

设 λ_n 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 重特征值($1\leqslant m\leqslant n$,即 $\lambda_n=\lambda_{n-1}=\cdots=\lambda_{n-m+1}>\lambda_{n-m}$,则

$$\sqrt[k+1]{T_{k+1}} = \lambda_n\sqrt[k+1]{m+\left(\frac{\lambda_{n-m}}{\lambda_n}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{k+1}}$$

$$<\lambda_n\sqrt[k]{m+\left(\frac{\lambda_{n-m}}{\lambda_n}\right)^{k}+\cdots+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{k}} = \sqrt[k]{T_k}$$

以上步骤对 $k=1,2,\cdots$ 均成立,定理证毕。

注意到 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k=0\quad(j=n-m,\cdots,2,1)$,于是我们进一步有:

推论 1　$\lambda_n<\sqrt[k]{T_k}\,(k=1,2,\cdots)$。

推论 2　$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{T_k}=\lambda_n$。

这表明,$\sqrt[k]{T_k}$ 不仅是 λ_n 的上界,而且是随 k 的增长越来越精确的上界。又由本节开始的讨论,这里的推论 1、2 稍作修改也适用于任意实对称矩阵的绝对值占优的特征值。至于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的整体下界,在 $\boldsymbol{A}$ 正定的条件下,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $\lambda_1^{-1}\geqslant\lambda_2^{-1}\geqslant\lambda_n^{-1}$。这样又有:

推论 3　$\lambda_1<\dfrac{1}{\sqrt[k]{T_{-k}}}\,(k=1,2,\cdots)$。

推论 4　$\lambda_1=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[k]{T_{-k}}}$。

此处 $T_{-k}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})^k\,(k=1,2,\cdots)$。

例 1　考察矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&4\end{pmatrix}$,其特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$。因

$$\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}110&109&203\\109&110&203\\203&203&422\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{-4}=\frac{1}{10^4}\begin{pmatrix}5211&-4789&-203\\-4789&5211&-203\\-203&-203&219\end{pmatrix}$$

$$T_8=65190\times2+260502=390882,\qquad \lambda_3<5.000412$$

$$T_{-8}=(50130251\times2+130379)/10^8=1.0039088,\ \lambda_1>0.9995$$

这里 T_8 与 T_{-8} 是 $\boldsymbol{A}^4$ 与 $\boldsymbol{A}^{-4}$ 的所有元素的平方和。

除由推论 4 计算 λ_1 外,注意到对适当的正数 ξ,λ_1 亦可由矩阵 $\boldsymbol{B}=\xi\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 来估计。若记 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\eta_1\leqslant\cdots\leqslant\eta_n$,显然有

$$\lambda_1 + \eta_n = \xi \tag{4}$$

于是可由推论 1、2 估计 η_n 再转换得 λ_1 的下界。

例 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同例 1，取 $\xi = 4$，则，

$$\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^8 = \begin{pmatrix} 3366 & -3195 & -85 \\ -3195 & 3366 & -85 \\ -85 & -85 & 86 \end{pmatrix}$$

则 $\eta_3 = \sqrt[16]{T_{16}} = 3.0002853$，由此得到 $\lambda_1 > 0.99971$。

二 实对称矩阵最大、最小特征值的包含关系

上节只是导出了实对称矩阵最大特征值的上界与最小特征值的下界。至于最大特征值的下界，注意到在寻求 λ_n 的上界时，我们计算了 $\boldsymbol{A}^k$。业已证明[5]，$\boldsymbol{A}^k$ 的第一列就是与 λ_n 相应的特征向量 $\boldsymbol{X}_n$ 的近似值。这样，可以采用以下两种方法之一获得 λ_n 的下界：

方法一 由瑞利商

$$\lambda_n > (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_k, \boldsymbol{Y}_k)/(\boldsymbol{Y}_k, \boldsymbol{Y}_k)\,(k = 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

这里 $\boldsymbol{Y}_k$ 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的第一列。

方法二 由 Collatz 定理

$$\lambda_n > \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_k)_j/(\boldsymbol{Y}_k)_j \tag{6}$$

至于 λ_1 的上界，同样可以由$(\boldsymbol{A}^{-1})^k$ 的第一列用以上两种方法之一来获取，也可以通过对 $\boldsymbol{B} = \xi\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 应用以上两种方法之一来获取。

例 3 矩阵 A 同例 1，由 $\boldsymbol{A}^4$ 与 $\boldsymbol{A}^{-4}$ 的表达式可以求得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_4 = (532, 531, 1031)^{\mathrm{T}}$，于是由瑞利商得 $\lambda_3 > 4.9960$。而由(6) 式得 $\lambda_3 > 4.8364$。类似地因

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}_{-4} = (0.51047, -0.48953, -0.01031)^{\mathrm{T}},$$

由瑞利商得 $\lambda_1 < 1.0013$。如利用 $\boldsymbol{B} = \xi\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_8 = (10012, -9671, -171)^{\mathrm{T}}$，于是由瑞利商有 $\eta_3 > 2.998986$，即 $\lambda_1 < 1.001014$。

比较例 2、例 3 的结果可知，为求 λ_1 的上下界，平移法较之求逆法更佳。

三 基于矩阵迹的矩阵特征值的一种算法

以上结果还可以被用来计算实对称矩阵的其他特征值。事实上，由 §1 有

$$T_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k\,(k = 1, 2, \cdots)$$

不妨取 $k = 2^m$ 并记 $\Delta_m = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^{2^m}\,(m = 0, 1, 2, \cdots)$，则

$$\lambda_{n-1}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[2^{m-1}]{\lambda_1^{2^{m-1}}+\cdots+\lambda_{n-1}^{2^{m-1}}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sqrt[2^{m-1}]{\Delta_{m-1}-\lambda_n^{2^{m-1}}}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[2^{m-1}]{\Delta_{m-1}-\sqrt{\Delta_m}}$$

类似地

$$\lambda_{n-2}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[2^{m-2}]{\lambda_1^{2^{m-2}}+\cdots+\lambda_{n-1}^{2^{m-2}}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sqrt[2^{m-2}]{\Delta_{m-2}-\sqrt[4]{\Delta_m}-\sqrt{\Delta_{m-1}-\sqrt{\Delta_m}}}$$

理论上讲，可以依此类推下去，计算正定矩阵 A 的全体特征值。不过，考虑到收敛速度与计算量，这一方法对高阶矩阵没有太大的优越性。但在矩阵阶数不太高时，利用两面"夹击"，即由 A 的幂求 $\lambda_n,\lambda_{n-1},\lambda_{n-2},\cdots$，而由 $B=\xi I-A$ 求 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$，还是可以较快算出全部特征值的。

例 4　计算矩阵 $\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$ 的全体特征值。

解　容易算出

$$\Delta_1=28,\qquad \Delta_2=292,\qquad \Delta_3=44452,$$

$$\Delta_4=1.459429\times10^9,\qquad \Delta_5=2.007888\times10^{18}$$

由此得

$$\lambda_5=3.732161,\quad \lambda_4=2.99729,\quad \lambda_3'=2.035903$$

另一方面，容易看出 $B=4I-A$ 与 A 有完全相同的迹，于是

$$\lambda_1=0.26784,\quad \lambda_2=1.00271,\quad \lambda''_3=1.96410$$

与真值（$2-\sqrt{3},1,2,3,2+\sqrt{3}$）相比，除 λ_3 外，误差已不超过 0.3%。至于 λ_3，若取 λ'_3 与 λ''_3 的均值，显然有 $\lambda_3=2$ 即为精确值。

四　结束语

以上我们获得了实对称矩阵最大、最小特征值的上下界的一种估计方法以及基于矩阵迹的矩阵特征值的一种新算法。它们在工程计算中均有一定的价值。

参考文献

[1] 周树荃等. 代数特征值反问题. 郑州:河南科技出版社,1991

[2] 胡海昌. 论几种本征值包含定理的内在联系. 固体力学学报,1983(1),1—7

[3] 王其申. 代数本征值的两个界限定理. 振动与冲击.1988(1),10—15

[4] 王其申. 关于正矩阵的最大特征值的包含定理及其应用. 高等学校计算数学学报.2000(2),105—110

[5] 斯图尔特著. 王国荣等译. 矩阵计算引论. 上海:上海科技出版社,1980

第四专题

泛复变函数方法在力学和物理中的应用

泛复变函数理论是我国数学家熊锡金教授首创的一个新的数学分支。笔者有幸较早地接触到这一理论，受熊先生的启发，发现这一理论在力学和物理学中有着广阔的应用前景，从而在此领域独立开展了一些工作。

在这一部分中，收录了笔者独撰的学术论文共 4 篇，全部发表在国家核心期刊上。该部分着重应用泛复变函数方法求解了二维双调和方程，获得了在弹性力学平面问题中十分有用的平面应力函数的一系列特解；求解了多重调和方程，确定了多重调和方程通解的结构及其纯特解；求解了三维调和方程，导出了在物理学中广泛应用的任意阶球函数。

由于后面两项工作的需要，这里收录了笔者指导的一篇本科学生的毕业论文，也是本文集收录的唯一一篇本人为第二作者的论文。

多项式型平面应力函数及其应用

摘　要　本文以泛复函为工具，通过引入双调和函数，构造出各阶多项式型平面双调和数，进而给出了狭长矩形梁的弯曲应力解。

关键词　双调和函数　矩形梁　应力解

一　由泛复函生成平面双调和函数

平面直角坐标系下的双调和方程是

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \tag{1}$$

考虑以 $z = x + ey$ 为自变量的泛复函数 $f(z)$，为使 $f(z)$ 满足方程(1)，不难发现，非实域的数 e 应满足：

$$1 + 2e^2 + e^4 = 0 \tag{2}$$

于是任意广义解析的泛复函数 $f(z) = f(x + ey)$ 都满足(1)式。$f(z)$ 的任意实分蘖同样满足方程(1)，记其分蘖形式为[1]：

$$f(z) = \varphi_0(x,y) + e\varphi_1(x,y) + e^2\varphi_2(x,y) + e^3\varphi_3(x,y) \tag{3}$$

φ_0、φ_1、φ_2、φ_3 分别为 $f(z)$ 的第一、二、三、四实分蘖，它们都是平面直角坐标系下的双调和函数。我们称以 $z = x + ey$ 为自变量的广义解析泛复函数 $f(z)$ 为平面双调和函数的生成函数。

二　多项式型平面双调和函数

乍看起来，任意平面双调和函数都可以由生成函数给出，其实不然。困难在于对任意广义解析泛复函，其实分蘖难于进行。只在一类特殊情况下才易于做到。令

$$f(z) = z^n = (x + ey)^n = \varphi_{n0} + e\varphi_{n1} + e^2\varphi_{n2} + e^3\varphi_{n3}$$

注意到 $e^4 = -1 - 2e^2$，则有

---

* 本文原载于《力学与实践》1990 年第 3 期，个别文字有所改动。

$$\varphi_{00}=1,\varphi_{10}=x,\varphi_{11}=y,\varphi_{20}=x^2,\varphi_{21}=2xy,\varphi_{22}=y^2$$

前三阶的其余分量为 0；

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{n0}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}(m-1)C_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\\
\varphi_{n1}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}(m-1)C_n^{2m+1}x^{n-2m-1}y^{2m+1}\\
\varphi_{n2}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}mC_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\\
\varphi_{n3}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}mC_n^{2m+1}x^{n-2m-1}y^{2m+1}
\end{aligned}\right\}\quad(n=3,4,\cdots)\tag{4}$$

因

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x}=nz^{n-1},\frac{\partial f(z)}{\partial y}=nz^{n-1}\cdot e$$

易见

$$\frac{\partial\varphi_{ni}}{\partial x}=n\varphi_{n-1,i}\qquad(n=1,2,\cdots;i=0,1,2,3)\tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_{n0}}{\partial y}=-n\varphi_{n-1,3} &&\frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial y}=n\varphi_{n-1,0}\\
&\frac{\partial\varphi_{n2}}{\partial y}=n(\varphi_{n-1,1}-2\varphi_{n-1,3}) &&\frac{\partial\varphi_{n3}}{\partial y}=n\varphi_{n-1,2}
\end{aligned}\right\}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{7}$$

三　特解在狭长矩形梁弯曲问题上的应用

狭长矩形截面梁，上下底面作用有多项式型的分布荷载，梁端满足圣维南边条件，无体力作用，求其弯曲解。这一问题文[2]讨论了解的存在唯一性并给出了级数解法。现在我们利用上述特解 $\varphi_{ni}(i=0,1,2,3)$ 来重解此问题。采用与文献[2]相同的坐标系。这时，边条件记为

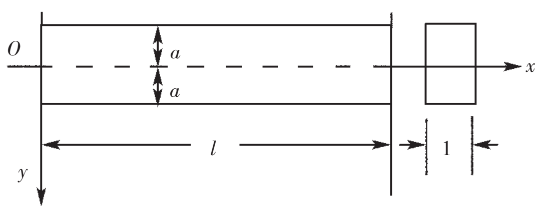

图 1

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y\big|_{y=a}=\sum_{n=0}^{p}a_nx^n,\quad \sigma_y\big|_{y=-a}=\sum_{n=0}^{p}b_nx^n\\ \tau_{xy}\big|_{y=a}=\sum_{n=0}^{p+1}c_nx^n,\quad \tau_{xy}\big|_{y=-a}=\sum_{n=0}^{p+1}d_nx^n\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

式中，a_p、b_p、c_{p+1}、d_{p+1} 中至少有一个不为 0。设应力函数为 $\varphi(x,y)$，因

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\tag{9}$$

故取

$$\varphi=\sum_{n=2}^{p+2}A_n\varphi_{n0}+\sum_{n=2}^{p+3}B_n\varphi_{n1}+\sum_{n=2}^{p+4}D_n\varphi_{n2}+\sum_{n=2}^{p+5}E_n\varphi_{n3}\tag{10}$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_y=&\sum_{n=0}^{p}A_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n0}+\sum_{n=1}^{p+2}B_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n1}+\\&\sum_{n=2}^{p+2}D_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n2}+\sum_{n=3}^{p+3}E_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n3}\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}-\tau_{xy}=&-\sum_{n=3}^{p}A_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n3}+\sum_{n=0}^{p+1}B_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n0}+\\&\sum_{n=1}^{p+2}D_{n+2}(n+2)(n+1)(\varphi_{n1}-2\varphi_{n3})+\sum_{n=2}^{p+3}E_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n2}\end{aligned}\tag{12}$$

注意到 φ_{n0}、φ_{n2} 是 y 的偶函数而 φ_{n1}、φ_{n3} 是 y 的奇函数，把(11)、(12) 式代入(8) 式可得

$$\sum_{n=0}^{p}A_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n0}+\sum_{n=2}^{p+2}D_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n2}=\sum_{n=0}^{p}\frac{a_n+b_n}{2}x^n\tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{p+1}B_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n1}+\sum_{n=3}^{p+3}E_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n3}=\sum_{n=0}^{p}\frac{a_n-b_n}{2}x^n\tag{14}$$

$$\sum_{n=0}^{p+1}B_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n0}+\sum_{n=2}^{p+3}E_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n2}=-\sum_{n=1}^{p+1}\frac{c_n+d_n}{2}x^n\tag{15}$$

$$\sum_{n=3}^{p}A_{n+2}(n+2)(n+1)\varphi_{n3}+\sum_{n=1}^{p+2}D_{n+2}(n+2)(n+1)(2\varphi_{n3}-\varphi_{n1})=\sum_{n=0}^{p+1}\frac{c_n-d_n}{2}x^n\tag{16}$$

以上四式中各阶 φ 均在 $y=a$ 处取值。

比较(14)、(15) 式中同幂次项的系数有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{i_n}(n+2m+3)(n+2m+2)(-1)^{m-1}(m-1)C_{n+2m+1}^{2m+1}a^{2m+1}B_{n+2m+3}+\\&\sum_{m=1}^{i_n+1}(n+2m+3)(n+2m+2)(-1)^{m-1}mC_{n+2m+1}^{2m+1}a^{2m+1}E_{n+2m+3}=\frac{a_n-b_n}{2}\end{aligned}$$

$$(n=0,1,\cdots,p) \tag{17}$$

$$\sum_{m=0}^{k_n}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^{m-1}(m-1)C_{n+2m}^{2m}a^{2m}B_{n+2m+2}+$$
$$\sum_{m=1}^{k_n+1}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^{m-1}mC_{n+2m}^{2m}a^{2m}E_{n+2m+2}=-\frac{c_n+d_n}{2}$$
$$(n=0,1,\cdots,p+1) \tag{18}$$

式中，$i_n=\left[\dfrac{p-n}{2}\right]$，$k_n=\left[\dfrac{p+1-n}{2}\right]$，以下约定当求和下标大于上标时该求和项视为 0。记

$$\left.\begin{aligned}u_n=&\sum_{m=2}^{i_n}(n+2m+3)(n+2m+2)(-1)^m(m-1)C_{n+2m+1}^{2m+1}a^{2m+1}B_{n+2m+3}+\\&\sum_{m=2}^{i_n+1}(n+2m+3)(n+2m+2)(-1)^m mC_{n+2m+1}^{2m+1}a^{2m+1}E_{n+2m+3}\\\nu_n=&\sum_{m=2}^{k_n}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^m(m-1)C_{n+2m}^{2m}a^{2m}B_{n+2m+2}+\\&\sum_{m=2}^{k_n+1}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^m mC_{n+2m}^{2m}a^{2m}E_{n+2m+2}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

联立(17)、(18)式解得：

$$\left.\begin{aligned}B_{n+3}&=\frac{3(a_n-b_n+2u_n)+(n+1)a(c_{n+1}+d_{n+1}-2\nu_{n+1})}{2(n+3)(n+2)(n+1)a}\\E_{n+5}&=\frac{-3(a_n-b_n+2u_n)-3(n+1)a(c_{n+1}+d_{n+1}-2\nu_{n+1})}{2(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a^3}\end{aligned}\right\}(n=0,1,\cdots,p) \tag{20}$$

于是可按下标递减的次序确定除 B_2、E_3、E_4 外的全部 B_n、E_n，至于 B_2、E_4，在(18)式中令 $n=0$ 有

$$2B_2+12a^2E_4=\nu_0-\frac{c_0+d_0}{2} \tag{21}$$

又由 $x=0$ 处边条件$\int_{-a}^{a}[\tau_{xy}]_{x=0}\mathrm{d}y=-F_y$，注意到函数的奇偶性和 $x=0$ ，有

$$\sum_{m=2}^{k_0}(-1)^{m-1}2(m^2-1)a^{2m+1}B_{2m+2}+\sum_{m=1}^{k_0+1}(-1)^{m-1}2m(m+1)a^{2m+1}E_{2m+2}=\frac{F_y}{2}$$

或
$$2B_2+4a^2E_4=t_0 \tag{22}$$

这里

$$t_0 = \sum_{m=2}^{k_0}(-1)^m 2(m^2-1)a^{2m}B_{2m+2} + \sum_{m=2}^{k_0+1}(-1)^m 2m(m+1)a^{2m}E_{2m+2} + \frac{F_y}{2a} \tag{23}$$

联立(21)、(22) **式即得**：

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= \left(3t_0 - \nu_0 + \frac{c_0+d_0}{2}\right)\Big/ 4 \\ E_4 &= \left(\nu_0 - \frac{c_0+d_0}{2} - t_0\right)\Big/ 8a^2 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

我们再来确定系数 A_n、D_n。**首先比较**(16) **式中** x^{p+1} **与** x^p **项系数，立得**：

$$D_{p+4} = \frac{d_{p+1}-c_{p+1}}{2(p+4)(p+3)(p+2)a} \qquad D_{p+3} = \frac{d_p - c_p}{2(p+3)(p+2)(p+1)a} \tag{25}$$

接着比较(13) **式中** x^p **与** x^{p-1} **项系数可得**：

$$A_{p+2} = \frac{2(a_p+b_p)-(p+1)(d_{p+1}-c_{p+1})}{4(p+2)(p+1)}$$

$$A_{p+1} = \frac{2(a_{p-1}+b_{p-1})-ap(d_p-c_p)}{4(p+2)(p+1)}$$

回到 (16) **式，比较** x^{p-1} **与** x^{p-2} **项系数有**

$$D_{p+2} = \frac{(d_{p-1}-c_{p-1})+4(p+4)(p+3)C_{p+2}^3 a^3 D_{p+4}}{2(p+2)(p+1)pa}$$

$$D_{p+1} = \frac{(d_{p-2}-c_{p-2})+4(p+3)(p+2)C_{p+1}^3 a^3 D_{p+3}}{2(p+1)p(p+1)a}$$

依此类推，一般地则有：

$$A_{n+2} = \frac{(a_n+b_n)+2r_n}{2(n+2)(n+1)} \qquad (n=0,\cdots,p) \tag{26}$$

$$D_{n+2} = \frac{(d_{p-1}-c_{p-1})-2s_n}{2(n+2)(n+1)na} \qquad (n=1,\cdots,p+1) \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned} r_n = {}& \sum_{m=2}^{i_n}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^m(m-1)C_{n+2m}^{2m}a^{2m}A_{n+2m+2} + \\ & \sum_{m=1}^{i_n+1}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^m m C_{n+2m}^{2m}a^{2m}D_{n+2m+2} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} s_n = {}& \sum_{m=1}^{i_n}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^m m C_{n+2m}^{2m+1}a^{2m+1}A_{n+2m+2} + \\ & \sum_{m=1}^{i_n+1}(n+2m+2)(n+2m+1)(-1)^m(m+1)C_{n+2m}^{2m+1}a^{2m+1}D_{n+2m+2} \end{aligned} \tag{29}$$

至此，只有 D_2、E_3 **待定。由** $x=0$ **处另外两个边条件**：

$$\int_{-a}^{a}[\sigma_x]_{x=0}\mathrm{d}y=-F_x \qquad \text{和} \qquad \int_{-a}^{a}[\sigma_x]_{x=0}y\mathrm{d}y=M$$

因

$$\sigma_x\mid_{x=0}=\sum_{m=2}^{i_0+1}(-1)^{m-1}(m-1)(A_{2m}y^{2m}+B_{2m+1}y^{2m+1})''$$
$$+\sum_{m=1}^{i_0+2}(-1)^{m-1}m(D_{2m}y^{2m}+E_{2m+1}y^{2m+1})''$$

故有

$$\sum_{m=2}^{i_0+1}(-1)^{m-1}(m-1)A_{2m}2ma^{2m-1}+\sum_{m=1}^{i_0+2}(-1)^{m-1}2m^2D_{2m}a^{2m-1}=-\frac{F_x}{2}$$

则

$$D_2=\sum_{m=2}^{i_0+1}(-1)^m m(m-1)a^{2m-2}A_{2m}+\sum_{m=2}^{i_0+2}(-1)^m m^2a^{2m-2}D_{2m}-\frac{F_x}{4a} \tag{30}$$

类似地有

$$E_3=\sum_{m=2}^{i_0+1}(-1)^m m(m-1)a^{2m-2}B_{2m+1}+\sum_{m=2}^{i_0+2}(-1)^m m^2a^{2m-2}E_{2m+1}+\frac{M}{4a^2} \tag{31}$$

至此,系数全部确定。为了说明这一方法的适用性,我们举例如下:

例 1 图 2 所示简支梁,受有二次分布荷载 $q=\frac{4q_0}{l^2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2$,求弯曲解。

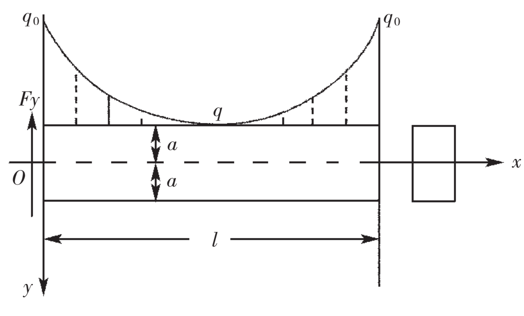

图 2

由图可知:

$$p=2,\quad a_0=c_0=d_0=0,\quad b_2=-\frac{4q_0}{l^2},\quad b_1=\frac{4q_0}{l},\quad b_0=-q_0$$

设

$$\varphi=\sum_{n=2}^{4}A_n\varphi_{n0}+\sum_{n=2}^{5}B_n\varphi_{n1}+\sum_{n=2}^{6}D_n\varphi_{n2}+\sum_{n=2}^{7}E_n\varphi_{n3}$$

反复运用(27)、(26)及(20)式即得：

$$D_6=D_5=0,A_4=-\frac{q_0}{6l^2},A_3=-\frac{q_0}{3l},D_4=D_3=0,A_2=-\frac{q_0}{4}$$

$$B_5=\frac{q_0}{20l^2a},E_7=-\frac{q_0}{420l^2a^3},B_4=-\frac{q_0}{8la},E_6=\frac{q_0}{120la^3}$$

$$B_3=\frac{q_0}{8a}-14a^4E_7=\left(\frac{1}{8a}+\frac{a}{30l^2}\right)q_0$$

$$E_5=-\frac{q_0}{80a^3}+\frac{42}{5}a^2E_7=-\left(\frac{1}{80a^3}+\frac{1}{50l^2a}\right)q_0$$

最后由(24)、(30)、(31)式有：

$$B_2=-6a^4E_6-\frac{lq_0}{16a}=-\left(\frac{a}{20l}+\frac{l}{16a}\right)q_0$$

$$E_4=6a^2E_6+\frac{lq_0}{96a^3}=\left(\frac{1}{20la}+\frac{l}{96a^3}\right)q_0$$

$$D_3=2a^2A_4=-\frac{a^2q_0}{3l^2}$$

$$E_3=2a^2B_5+4a^2E_5-9a^4E_7=\left(\frac{29a}{700l^2}-\frac{1}{20a}\right)q_0$$

这样

$$\varphi=-\frac{q_0}{420l^2a^3}(C_7^4x^4y^3-2C_7^2x^2y^5+3y^7)+\frac{q_0}{120l^2a^3}(C_6^3x^3y^3-2C_6^1xy^5)+$$
$$\frac{q_0}{20l^2a}(C_5^1x^4y-y^5)-\left(\frac{q_0}{80a^3}+\frac{q_0}{50l^2a}\right)(C_5^3x^2y^3-2y^5)-$$
$$\frac{q_0}{6l^2}(x^4-y^4)-\frac{q_0}{8la}C_3^1x^3y+\left(\frac{q_0}{20la}-\frac{lq_0}{96a^3}\right)C_4^3xy^3+$$
$$\frac{q_0}{3l}x^3+\left(\frac{q_0}{8a}+\frac{aq_0}{30l^2}\right)C_4^1x^2y+\left(\frac{29a}{700l^2}-\frac{1}{20a}\right)q_0y^3-$$
$$\frac{q_0}{4}x^2-\left(\frac{a}{20l}+\frac{l}{16a}\right)q_0\cdot 2xy-\frac{a^2q_0}{3l^2}y^2$$

计算结果与文[2]之例2相同。可以看出由于(10)式预先已满足协调方程，即文[2]之(4)式，所以未知量的个数与计算量大为减少。

以上讨论表明，多项式型平面双调和函数有其应用价值，而其通式相当规则不难记住。

参考文献

[1] 熊锡金．泛复变函数．武汉大学学报，1980(1)，26－39；1981(4)，31－38

[2] 王炜．Airy应力函数在狭长矩形梁问题中的解．力学与实践，1985(3)，15－19

由泛复函构造弹性力学平面问题的特解

摘　要　本文以泛复变函数(简称泛复函)为工具,通过引入双调和数,构造出直角坐标和极坐标下平面应力函数的一系列特解。其中有些是以往文献中尚未出现的。

关键词　泛复变函数　双调和数　平面应力函数

人们一直关注如何构造作为弹性力学平面问题特解的双调和函数[1],著名的 Gousat 公式

$$U = \mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\} \tag{1}$$

给出了由复变解析函数生成双调和函数的实用方法,但它并未完全揭示出双调和函数的内在结构。在文[2] 中笔者曾以泛复函为工具,通过引入双调和数,成功地构造出任意正整数阶平面双调和函数族。与此相仿,本文进一步导出了直角坐标系中相应于基本初等函数的各阶双调和函数,揭示了它们的内在结构。通过坐标变换,又导出了极坐标下各阶双调和函数的通式。其中有些超出了文[1] 所列文献的成果。

一　由泛复函生成平面应力函数

为使以泛复数 $z = x + ky$ 为宗量的泛复函数 $f(z)$ 满足平面双调和方程

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \tag{2}$$

非实域的数 k 应满足

$$1 + 2k^2 + k^4 = 0 \tag{3}$$

称这样的 k 为双调和数。由泛复函理论[3],只要 k 满足(3)式,则任意广义解析的函数 $f(z) = f(x + ky)$ 必满足(2)式。同时若记

$$f(z) = \varphi_0(x,y) + k\varphi_1(x,y) + k^2\varphi_2(x,y) + k^3\varphi_3(x,y) \tag{4}$$

则 $\varphi_i(i = 0,1,2,3)$ 也满足方程(2)式,即 $f(z)$ 的实分蘖都是平面双调和函数。

文献[3]、[4] 已证明,以 $z = x + ky$ 为宗量的基本初等函数(幂函数、指数函数、三角函数

---

* 本文原载于《力学与实践》1995 年第 4 期,个别文字有所改动。

和对数函数）在其有定义的区域上都是广义解析的。所以，为了生成平面应力函数，只需对上述函数及其复合函数、导数、积分等进行实分蘖。

注意到调和数 i 满足 $i^2+1=0$，所以调和函数必为双调和函数，而(4)式中的 φ_i 满足：

$$\varphi_0-\varphi_2=\mathrm{Re}\, f(x+iy),\qquad \varphi_1-\varphi_3=\mathrm{Im}\, f(x+iy)$$

二　直角坐标下的平面应力函数

1. 整数阶幂函数

根据上述方法，由 $f(z)=z^n(n=0,1,2,\cdots)$，文[2]已经给出直角坐标下多项式型平面应力函数为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{n0}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}(m-1)C_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\\ \varphi_{n1}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}(m-1)C_n^{2m+1}x^{n-2m-1}y^{2m+1}\\ \varphi_{n2}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}mC_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\\ \varphi_{n3}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}mC_n^{2m+1}x^{n-2m-1}y^{2m+1}\end{aligned}\right\}\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{5}$$

并且指出

$$\frac{\partial\varphi_{ni}}{\partial x}=n\varphi_{n-1,i}\qquad(i=0,1,2,3;n=1,2,\cdots)\tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi_{n0}}{\partial y}=-n\varphi_{n-1,3}\qquad\frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial y}=n\varphi_{n-1,0}\\ &\frac{\partial\varphi_{n2}}{\partial y}=n(\varphi_{n-1,1}-2\varphi_{n-1,3})\qquad\frac{\partial\varphi_{n3}}{\partial y}=n\varphi_{n-1,2}\end{aligned}\right\}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{7}$$

为将以上结果推广到负整数次幂，引入：

定义　对任意泛复数 $z=x+ky$，若有这样的泛复数 z^* 存在，使得 zz^* 为非负数 A，则称 z^* 与 z 共轭，并称 $\sqrt{A}$ 为 z 的模，记作 $|z|$。

由此定义并注意到(3)式，不难求得

$$z^*=(x-ky)\left(1+k^2\frac{y^2}{x^2+2y^2}\right)\tag{8}$$

$$|z|=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}\tag{9}$$

于是由 $z^{-n}=z^{*n}/(zz^*)^n$ 导出负整数阶平面应力函数的通式为

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{-n,0} &= \frac{\varphi_{n0}}{(x^2+y^2)^n} + \frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Re}\,(x+iy)^n \\
\varphi_{-n,1} &= \frac{-\varphi_{n1}}{(x^2+y^2)^n} - \frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Im}\,(x+iy)^n \\
\varphi_{-n,2} &= \frac{\varphi_{n2}}{(x^2+y^2)^n} + \frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Re}\,(x+iy)^n \\
\varphi_{-n,3} &= \frac{-\varphi_{n3}}{(x^2+y^2)^n} - \frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Im}\,(x+iy)^n
\end{aligned}\right\}(n=1,2,\cdots) \qquad (10)
$$

同时,(6)、(7)两式对负整数的 n 仍然成立。

2. 指数函数和三角函数

采用人们熟知的幂级数来定义以 $z=x+ky$ 为宗量的指数函数 e^z、三角函数 $\sin z$ 、$\cos z$,通过实分蘖,可以得出

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{e0} &= \mathrm{e}^x(\cos y + y\sin y/2) \\
\varphi_{e1} &= \mathrm{e}^x(3\sin y - y\cos y)/2 \\
\varphi_{e2} &= \mathrm{e}^x y\sin y/2 \\
\varphi_{e3} &= \mathrm{e}^x(\sin y - y\cos y)/2
\end{aligned}\right\} \qquad (11)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{s0} &= \sin x(\mathrm{ch}\, y - y\,\mathrm{sh}\, y/2) \\
\varphi_{s1} &= \cos x(3\,\mathrm{sh}\, y - y\,\mathrm{ch}\, y)/2 \\
\varphi_{s2} &= \sin x(-y\,\mathrm{sh}\, y)/2 \\
\varphi_{s3} &= \cos x(\mathrm{sh}\, y - y\,\mathrm{ch}\, y)/2
\end{aligned}\right\} \qquad (12)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{c0} &= \cos x(\mathrm{ch}\, y - y\,\mathrm{sh}\, y/2) \\
\varphi_{c1} &= -\sin x(3\,\mathrm{sh}\, y - y\,\mathrm{ch}\, y)/2 \\
\varphi_{c2} &= \cos x(-y\,\mathrm{sh}\, y)/2 \\
\varphi_{c3} &= -\sin x(\mathrm{sh}\, y - y\,\mathrm{ch}\, y)/2
\end{aligned}\right\} \qquad (13)
$$

以上三式等价于给出平面双调和函数族

$$
\begin{gathered}
\mathrm{e}^x\cos y,\quad \mathrm{e}^x\sin y,\quad \cos x\,\mathrm{ch}\, y,\quad \cos x\,\mathrm{sh}\, y, \\
\sin x\,\mathrm{ch}\, y,\quad \sin x\,\mathrm{sh}\, y,\quad \mathrm{e}^x y\cos y,\quad \mathrm{e}^x y\sin y, \\
\cos x\cdot y\,\mathrm{ch}\, y,\quad \cos x\cdot y\,\mathrm{sh}\, y,\quad \sin x\cdot y\,\mathrm{ch}\, y,\quad \sin x\cdot y\,\mathrm{sh}\, y
\end{gathered}
$$

3. 对数函数

我们定义指数函数 $e^{w}=z$ 的反函数为对数函数，仍然记 $w=\ln z$。设

$$\ln z=\varphi_{l0}+k\varphi_{l1}+k^{2}\varphi_{l2}+k^{3}\varphi_{l3}$$

代入定义有 $e^{w}=e^{\varphi_{l0}}e^{k\varphi_{l1}}e^{k^{2}\varphi_{l2}}e^{k^{3}\varphi_{l3}}=z$，把后三个因子作泰勒展开后进行实分蘖，可得 $\varphi_{li}(i=0,1,2,3)$ 所满足的方程，在相差一常数因子的意义上解得

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{l0}&=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}-\frac{1}{2}\frac{y^{2}}{x^{2}+y^{2}}\\
\varphi_{l1}&=\frac{3}{2}\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}\\
\varphi_{l2}&=-\frac{1}{2}\frac{y^{2}}{x^{2}+y^{2}}\\
\varphi_{l3}&=\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

这一结果也可以由积分 $\ln z=\int_{z_0}^{z}\frac{\mathrm{d}z}{z}$ 进行实分蘖后计算 4 个线积分得到。以上结果等价于给出平面双调和函数族

$$\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}},\ \arctan\frac{y}{x},\frac{y^{2}}{x^{2}+y^{2}},\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}$$

4. **一般幂函数**

当 $\zeta=\alpha+k\beta$ 是任意泛复数时，定义

$$z^{\zeta}=e^{\zeta\ln z}=\varphi_{\zeta0}+k\varphi_{\zeta1}+k^{2}\varphi_{\zeta2}+k^{3}\varphi_{\zeta3}\tag{15}$$

以 $\ln z$ 的分蘖式代入，可得如下实分蘖

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{\zeta0}&=e^{R}[(u+1)\cos t+\nu\sin t]\\
\varphi_{\zeta1}&=e^{R}[(u+3/2)\sin t-\nu\cos t]\\
\varphi_{\zeta2}&=e^{R}[u\cos t+\nu\sin t]\\
\varphi_{\zeta3}&=e^{R}[(u+1/2)\sin t-\nu\cos t]
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

式中

$$\begin{aligned}
R&=\alpha\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}-\beta\arctan\frac{y}{x}\\
t&=\alpha\arctan\frac{y}{x}+\beta\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
u&=-\frac{\alpha}{2}\frac{y^{2}}{x^{2}+y^{2}}+\frac{\beta}{2}\left(\arctan\frac{x}{y}+\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}\right)\\
\nu&=\frac{\alpha}{2}\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}+\frac{\beta}{2}\left(\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}+\frac{y^{2}}{x^{2}+y^{2}}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

三　极坐标下的平面应力函数

上节导出的(5)、(10)　、(14)、(16)式相当复杂，很难记忆。如果利用坐标变换 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 把它们转化到极坐标中，情况大为改观。即

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{n0} &= \frac{n\cos(n-2)\theta+(4-n)\cos n\theta}{4}r^n\\
\varphi_{n1} &= \frac{n\sin(n-2)\theta+(6-n)\sin n\theta}{4}r^n\\
\varphi_{n2} &= \frac{n\cos(n-2)\theta-n\cos n\theta}{4}r^n\\
\varphi_{n3} &= \frac{n\sin(n-2)\theta+(2-n)\sin n\theta}{4}r^n
\end{aligned}\right\}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{l0} &= \ln r-\frac{1}{2}\sin^2\theta, \quad & \varphi_{l1} &= \frac{3}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\\
\varphi_{l2} &= -\frac{1}{2}\sin^2\theta, & \varphi_{l3} &= \frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{\zeta0} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}[(u+1)\cos t+\nu\sin t]\\
\varphi_{\zeta1} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}[(u+3/2)\sin t-\nu\cos t]\\
\varphi_{\zeta2} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}[u\cos t+\nu\sin t]\\
\varphi_{\zeta3} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}[(u+1/2)\sin t-\nu\cos t]
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

只是此时

$$R=\alpha\ln r-\beta\theta, \quad t=\alpha\theta+\beta\ln r \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{\alpha}{2}\sin^2\theta+\frac{\beta}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)\\
\nu &= \frac{\alpha}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\beta}{2}(\ln r+\sin^2\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(19)、(20)式等价于给出双调和函数族：$\ln r$，$r^n\cos n\theta$，$r^n\sin n\theta$，$r^n\cos(n-2)\theta$，$r^n\sin(n-2)\theta(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。至于(21)式，还可以分别讨论 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 的特殊情况，从而给出一系列重要的双调和函数。限于篇幅，具体讨论从略。

四　结束语

通过对以上基本初等函数的和差积商及其有限次复合而成的初等函数乃至它们的导数、积分进行实分蘖，本文所获得的双调和函数族还可以大为扩充。这表明，以泛复函为工具构造平面应力函数是切实可行的。

参考文献

[1] 丁皓江，王敏中．在极坐标中构造平面弹性力学特解的一种方法．力学与实践．1982(1)，68—69
[2] 王其申．多项式型平面应力函数及其应用．力学与实践，1990(3)，29—33
[3] 熊锡金．泛复变函数．武汉大学学报，1980(1)，26—39；1981(4)，31—38
[4] 熊锡金．泛复变函数及其在数学和物理中的应用．长春：东北师范大学出版社，1988

由泛复函生成多项式型空间调和函数和球函数

摘　要　本文以泛复函数为工具,成功地构造出多项式型空间调和函数族。通过坐标变换和正交化过程,进而又获得了球函数。

关键词　泛复函　调和函数　球函数

一　引　言

调和函数是物理学中应用极为广泛的一类函数。借助复变解析函数这一工具,人们完全掌握了平面调和函数;通过分离变数并求解 Sturm-Liouville 方程,人们又获得了球坐标和柱坐标的调和函数 —— 球函数和柱函数。自然会问:是否存在类似复变解析函数那样的函数,从它出发可以直接导出空间调和函数族?有无新的方法获得球函数?

20 世纪 80 年代初出现的泛复变函数这一新的数学分支为我们寻求上述问题的答案提供了工具。此前,笔者曾以泛复函为工具,成功地构造过二维双调和函数族[1,2],本文则将继续利用这一工具,构造多项式型空间调和函数族。然后通过坐标变换并对变换后的函数族进行正交化,又成功地导出了球函数,包括勒让德多项式和连带(缔合)勒让德函数。

二　由泛复函构造多项式型空间调和函数

空间直角坐标系下的调和方程是

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \tag{2.1}$$

为了寻求(2.1)式的多项式型解,考虑以 $u = x + ky + sz$ 为宗量的任意广义解析函数 $f(u) = f(x + ky + sz)$。显然,要使 $f(u)$ 满足(2.1)式,除了 $f_{uu} = 0$ 的特殊情况外,必须且只须:

$$1 + k^2 + s^2 = 0 \tag{2.2}$$

这里 k,s 是非实域的泛复常数。

根据泛复函理论[3],只要 k,s 满足(2.2)式,不仅任意广义解析的泛复函数 $f(x + ky + sz)$ 必满足(2.1)式,而且它的实分蘖也满足(2.1)式,即它们必为空间调和函数。

* 本文原载于《应用数学和力学》1997 年第 9 期,这里略有改动。

考虑最简单的广义解析函数 $u^n=(x+ky+sz)^n(n=0,1,2,\cdots)$，按二项式定理，不难将其展开为：

$$u^n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-m}C_n^m C_{n-m}^l x^{n-m-l}y^l z^m k^l s^m \tag{2.3}$$

考虑到(2.2)式，$k^l s^m(m=0,\cdots,n;l=0,\cdots,n-m)$ 中只有 $(2n+1)$ 个是独立的，其余均可化为它们的组合，例如：

$$k^{2l}s^m=(-1)^l\sum_{q=0}^{l}C_l^q s^{m+2q}\qquad \left(l=0,\cdots,\left[\frac{n-m}{2}\right]\right)$$

$$k^{2l+1}s^m=(-1)^l\sum_{q=0}^{l}C_l^q k s^{m+2q}\quad \left(l=0,\cdots,\left[\frac{n-m-1}{2}\right]\right)$$

于是(2.3)式可以实分蘖为 $2n+1$ 个分支：

$$u^n=\sum_{N=0}^{n-1}(\varphi_{n1}^N s^N+\varphi_{n2}^N ks^N)+\varphi_{m}s^n \tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varphi_{n1}^N&=\sum_{m+2q=N}C_n^m\sum_{l=q}^{L}(-1)^l C_{n-m}^{2l}C_l^q x^{n-m-2l}y^{2l}z^m\\
\varphi_{n2}^N&=\sum_{m+2q=N}C_n^m\sum_{l=q}^{L'}(-1)^l C_{n-m}^{2l+1}C_l^q x^{n-m-2l-1}y^{2l+1}z^m\\
\varphi_{m}&=\sum_{m+2l=n}(-1)^l C_n^m y^{2l}z^m
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(N=0,\cdots,n-1;L=[(n-m)/2],L'=[(n-m-1)/2])$$

这就是 n 阶多项式型空间调和函数族。

三　球坐标、正交化和球函数

有意思的是，从上节导出的 n 阶多项式型空间调和函数族(2.5)可以导出球函数族。首先，作球坐标变换，令

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\theta$$

则(2.5)式转化为：

$$\varphi_{n1}^N = r^n \sum_{m+2q=N} \Big[\sum_{l=q}^{L} (-1)^l C_{n-m}^{2l} C_l^q \cos^{n-m-2l} \varphi \sin^{2l} \varphi \Big] C_n^m \sin^{n-m} \theta \cos^m \theta$$

$$\varphi_{n2}^N = r^n \sum_{m+2q=N} \Big[\sum_{l=q}^{L'} (-1)^l C_{n-m}^{2l+1} C_l^q \cos^{n-m-2l-1} \varphi \sin^{2l+1} \varphi \Big] C_n^m \sin^{n-m} \theta \cos^m \theta \tag{3.1}$$

$$\varphi_{nn} = r^n \sum_{m+2l=n} (-1)^l C_n^m \sin^{2l} \theta \cos^m \theta$$

$$N = (0, \cdots, n-1)$$

为了证明上述函数族等价于球函数族，我们先以引理形式不加证明地给出两个重要公式。

引理 1 成立如下三角级数展开式[4]：

$$\sum_{l=q}^{[n/2]} (-1)^l C_n^{2l} C_l^q \cos^{n-2l} \varphi \sin^{2l} \varphi = \sum_{j=0}^{q} A_j \cos(n-2j)\varphi$$

$$\sum_{l=q}^{[(n-1)/2]} (-1)^l C_n^{2l+1} C_l^q \cos^{n-2l-1} \varphi \sin^{2l+1} \varphi = \sum_{j=0}^{q} B_j \sin(n-2j)\varphi$$

式中

$$A_q = (-1)^q C_n^q / 4^q = B_q \qquad (q = 0, \cdots, [n/2] \text{ 或 } [(n-1)/2]) \tag{3.2}$$

引理 2 对于任意自然数 n 和 j（$j < n$），成立如下恒等式：

$$\sum_{p=0}^{[j/2]-t} 2^{j-2t-2p} C_n^{j-2t-2p} C_{n-j+2t+2p}^{t+p} C_{t+p}^p = C_n^t C_{2n-2t}^{j-2t} \qquad (t = 0, \cdots, [j/2])$$

现在我们来证明函数族(3.1)可以正交化为球函数族，采用数学归纳法。

首先，不难看出：

$$\varphi_{n1}^0 = r^n \sin^n \theta \cos n\varphi = \alpha_0 r^n P_n^n(\cos\theta) \cos n\varphi$$

$$\varphi_{n2}^0 = r^n \sin^n \theta \sin n\varphi = \alpha_0 r^n P_n^n(\cos\theta) \sin n\varphi$$

$$\varphi_{n1}^1 = r^n \sin^{n-1} \theta \cos\theta \cos(n-1)\varphi = \alpha_1 r^n P_n^{n-1}(\cos\theta) \cos(n-1)\varphi$$

$$\varphi_{n2}^1 = r^n \sin^{n-1} \theta \cos\theta \sin(n-1)\varphi = \alpha_1 r^n P_n^{n-1}(\cos\theta) \sin(n-1)\varphi$$

它们正如所期望的那样属于球函数族[5]。记：

$$\Phi_{ni}^N = \varphi_{ni}^N (N = 0, 1; i = 1, 2)$$

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) g(r,\theta,\varphi) \mathrm{d}\varphi / \pi$$

并假定对所有的 $N < j$，φ_{ni}^N 均已正交化为：

$$\Phi_{ni}^N = \alpha_N r^n P_n^{n-N}(\cos\theta) \sin(i\pi/2 - n + N)\varphi \quad (i = 1, 2)$$

我们来证明：

$$\Phi_{ni}^{j} = \varphi_{ni}^{j} - \sum_{q=1}^{[j/2]} (\varphi_{ni}^{j}, \Phi_{ni}^{j-2q}) / (\Phi_{ni}^{j-2q}, \Phi_{ni}^{j-2q})$$

$$= \alpha_j r^n P_n^{n-j}(\cos\theta) \sin(i\pi/2 - n + j)\varphi \quad (j = 2,3,\cdots,n-1; i = 1,2)$$

事实上，由引理 1 **可知：**

$$\varphi_{ni}^{j} = r^n \sum_{m+2q=j} C_n^m \sin^{n-m}\theta \cos^m\theta \sum_{h=0}^{q} A_h \sin(i\pi/2 - n + m + 2h)\varphi$$

这样，考虑到(3.2)**式并利用引理** 2 **有：**

$$\Phi_{ni}^{j} = r^n \sum_{m+2q=j} (-1)^q C_{n-m}^q \sin(i\pi/2 - n + j)\varphi C_n^m \sin^{n-m}\theta \cos^m\theta / 4^q$$

$$= r^n \sin(i\pi/2 - n + j)\varphi \sin^{n-j}\theta \sum_{q=0}^{[j/2]} \sum_{p=0}^{q} (-1)^{p+q} C_n^{j-2q} C_{n-j+2q}^q C_q^p \cos^{j-2q+2p}\theta / 4^q$$

$$= 2^{-j} r^n \sin(i\pi/2 - n + j)\varphi \sin^{n-j}\theta$$

$$\cdot \sum_{t=0}^{[j/2]} (-1)^t \cos^{j-2t}\theta \sum_{p=0}^{[j/2]-t} 2^{j-2p-2t} C_n^{j-2t-2p} C_{n-j+2t+2q}^{t+p} C_{t+p}^p$$

$$= 2^{-j} r^n \sin(i\pi/2 - n + j)\varphi \sin^{n-j}\theta \sum_{t=0}^{[j/2]} (-1)^t C_n^t C_{2n-2t}^{j-2t} \cos^{j-2t}\theta$$

$$= \alpha_j r^n P_n^{n-j}(\cos\theta) \sin(i\pi/2 - n + j)\varphi \quad (j = 2,3,\cdots,n-1; i = 1,2)$$

式中，$\alpha_j = 2^{n-j} n!/(2n-j)!(j = 0,\cdots,n-1)$。**类似地**

$$\Phi_{nn} = \varphi_{nn} - \sum_{q=1}^{[n/2]} (\varphi_{nn}, \Phi_{n1}^{n-2q}) / (\Phi_{n1}^{n-2q}, \Phi_{n1}^{n-2q})$$

$$= r^n \sum_{m+2l=n} (-1)^l C_{2l}^l C_n^m \sin^{2l}\theta \cos^m\theta / 4^l$$

$$= (r/2)^n \sum_{t=0}^{[n/2]} (-1)^t \cos^{n-2t}\theta \sum_{p=0}^{[n/2]-t} 2^{n-2t-2p} C_n^{n-2t-2p} C_{2t+2p}^{t+p} C_{t+p}^p$$

$$= (r/2)^n \sum_{t=0}^{[n/2]} (-1)^t C_n^t C_{2n-2t}^{n-2t} \cos^{n-2t}\theta = r^n P_n(\cos\theta)$$

至此，结论成立。

四 举 例

设 $n=5$,这时共有 11 个调和函数,它们是

$$\varphi_{51}^{0}=x^{5}-10x^{3}y^{2}+5xy^{4}=r^{5}\sin^{5}\theta\cos 5\varphi$$

$$\varphi_{52}^{0}=5x^{4}y-10x^{2}y^{3}+y^{5}=r^{5}\sin^{5}\theta\sin 5\varphi$$

$$\varphi_{51}^{1}=5(x^{4}-6x^{2}y^{2}+y^{4})z=5r^{5}\sin^{4}\theta\cos\theta\cos 4\varphi$$

$$\varphi_{52}^{1}=5(4x^{3}y-4xy^{3})z=5r^{5}\sin^{4}\theta\cos\theta\sin 4\varphi$$

$$\varphi_{51}^{2}=10(x^{3}-3xy^{2})z^{2}-10(x^{3}y^{2}-xy^{4})$$

$$=10r^{5}[\sin^{3}\theta\cos^{2}\theta\cos 3\varphi-\sin^{5}\theta(\cos^{3}\varphi\sin^{2}\varphi-\cos\varphi\sin^{4}\varphi)]$$

$$=10r^{5}[\cos 3\varphi\sin^{3}\theta(9\cos^{2}\theta-1)/8+\cos 5\varphi\sin^{5}\theta/8]$$

$$\varphi_{52}^{2}=10(3x^{2}y-y^{3})z^{2}-10x^{2}y^{3}+2y^{5}$$

$$=r^{5}[10\sin^{3}\theta\cos^{2}\theta\cos 3\varphi-\sin^{5}\theta(10\cos^{2}\varphi\sin^{3}\varphi-2\sin^{5}\varphi)]$$

$$=10r^{5}[\sin 3\varphi\sin^{3}\theta(9\cos^{2}\theta-1)/8+3\sin 5\varphi\sin^{5}\theta/8]$$

$$\varphi_{51}^{3}=10(x^{2}-y^{2})z^{3}-5(6x^{2}y^{2}-2y^{4})z$$

$$=r^{5}[10\sin^{2}\theta\cos^{3}\theta\cos 2\varphi-5\sin^{4}\theta\cos\theta(6\cos^{2}\varphi\sin^{3}\varphi-2\sin^{4}\varphi)]$$

$$=10r^{5}[\cos 2\varphi\sin^{2}\theta(3\cos^{3}\theta-\cos\theta)/2+\cos 4\varphi\sin^{4}\theta\cos\theta/2]$$

$$\varphi_{52}^{3}=20xyz^{3}-20xy^{3}z$$

$$=10r^{5}[\sin^{2}\theta\cos^{3}\theta\sin 2\varphi-2\sin^{4}\theta\cos\theta\cos\varphi\sin^{3}\varphi]$$

$$=10r^{5}[\sin 2\varphi\sin^{2}\theta(3\cos^{3}\theta-\cos)/2+\sin 4\varphi\sin^{4}\theta\cos\theta/2]$$

$$\varphi_{51}^{4}=5xz^{4}-30xy^{2}z^{2}+5xy^{4}$$

$$=5r^{5}(\sin\theta\cos^{4}\theta\cos\varphi-6\sin^{3}\theta\cos^{2}\theta\cos\varphi\sin^{2}\varphi+\sin^{5}\theta\cos\varphi\sin^{4}\varphi)$$

$$=5r^{5}[\cos\varphi\sin\theta(21\cos^{4}\theta-14\cos^{2}\theta+1)/8$$

$$+3\cos 3\varphi\sin^{3}\theta(9\cos^{2}\theta-1)/16+\cos 5\varphi\sin^{5}\theta/16]$$

$$\varphi_{52}^{4}=5yz^{4}-10y^{3}z^{2}+y^{5}$$

$$=r^{5}(5\sin\theta\cos^{4}\theta\sin\varphi-10\sin^{3}\theta\cos^{2}\theta\sin^{3}\varphi+\sin^{5}\theta\sin^{5}\varphi)$$

$$=5r^{5}[\sin\varphi\sin\theta(21\cos^{4}\theta-14\cos^{2}\theta+1)/8$$

$$+3\sin 3\varphi\sin^{3}\theta(9\cos^{2}\theta-1)/16+\sin 5\varphi\sin^{5}\theta/16]$$

$$\varphi_{55}=z^{5}-10y^{2}z^{3}+5y^{4}z$$

$$=r^{5}(\cos^{5}\theta-10\sin^{2}\theta\cos^{3}\theta\sin^{2}\varphi+5\sin^{4}\theta\cos\theta\sin^{4}\varphi)$$

$$=r^{5}[(63\cos^{5}\theta-70\cos^{3}\theta+15\cos\theta)/8+$$

$$5\cos 2\varphi\sin^{2}\theta(3\cos^{3}\theta-\cos\theta)/2+5\cos 4\varphi\sin^{4}\theta\cos\theta/8]$$

除前 4 个函数外，其余 7 个函数的正交化过程与结果是显然的。

参考文献

[1] 王其申．多项式型平面应力函数及其应用．力学与实践，1995(3)，29－33
[2] 王其申．由泛复函生成弹性力学平面问题的特解．力学与实践，1995(4)
[3] 熊锡金．泛复变函数及其在数学和物理中的应用．长春：东北师范大学出版社，1988
[4] 盛敏高，王其申．一组特殊函数的傅立叶级数展开．安庆师范学院学报，1996(1)
[5] 柯朗，希尔伯特著．数学物理方法(第 5 章)．钱敏，郭敦仁译．北京：科学出版社，1987

多重调和方程解的结构及其纯特解

摘　要　本文以泛复函为工具，确定了平面多重调和方程 $\nabla^{2r}u=0(r=1,2,\cdots)$ 解的结构及其一系列纯特解。

关键词　泛复函　多重调和方程　通解　纯特解

一　引　言

平面调和和双调和方程，由于它们在力学和物理学中的广泛应用，已被人们深入进行过研究[1—3]。作为这两种方程的一种推广，考虑如下一般方程：

$$\nabla^{2r}u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^r u=0\quad(r=1,2,\cdots)\tag{1}$$

称此方程为多重(r 重)调和方程，并称它的解为 r 重调和函数。对于方程(1)，当 $r\geqslant 3$ 时人们研究甚少。除了分离变数法外，还有什么方法可以统一求解这一方程？它的通解结构如何？高重($r\geqslant 3$)调和函数与调和、双调和函数之间存在何种关系？回答这些问题，不仅具有数学意义，而且也有应用价值。基于这一认识，仿照[3]，本文采用泛复函方法[4]成功地求解了方程(1)，确定了其通解的结构，并构造出满足 r 重而不满足低于 r 的多重调和方程的特解。以下称具有这种性质并有最简形式的特解为 r 重调和方程的纯特解。

二　多重调和方程解的结构

考虑以 $z=x+sy$ 为宗量的广义解析泛复函数 $f(z)$，其中 s 是非实域的泛复常数。为使 $f(z)$ 满足方程(1)，必须且只需 s 满足

$$(1+s^2)^r=0\quad(r=1,2,\cdots)\tag{2}$$

称这样的 s 为 r 重调和数。

据泛复函理论[4]，当 s 满足(2)式时，不仅广义解析的泛复函数 $f(z)$ 满足方程(1)，其实分蘖也满足方程(1)。记

$$f(z)=\sum_{j=0}^{2r-1}\varphi_j^{(r)}(x,y)s^j\tag{3}$$

---

* 本文原载于《武汉大学学报》(数学物理方法专集)1995 年第 10 期，个别文字有所改动。

则 $\varphi_j^{(r)}(x,y)(j=0,1,\cdots 2r-1)$ 均为 r 重调和函数。于是方程(1)的通解可以表示为：

$$u=\sum_{j=0}^{2r-1}\alpha_j\varphi_j^{(r)}(x,y) \tag{4}$$

为了进一步讨论方程(1)的通解的结构，首先给出如下的引理，其证明可用归纳法进行。

引理　对于满足(2)式的数 s，成立公式：

$$s^{2(r+m)}=(-1)^{m+1}\sum_{j=0}^{r-1}C_{r+m}^{j}C_{r+m-j-1}^{m}s^{2l}(m=0,1,\cdots) \tag{5}$$

利用这一引理，我们指出 r 重调和函数的如下特性

定理 1　对于由(3)式所确定的 $\varphi_j^{(r)}(x,y)$，

$$\varphi_{2j}^{(r)}-C_{r-1}^{j}\varphi_{2r-2}^{(r)},\qquad \varphi_{2j+1}^{(r)}-C_{r-1}^{j}\varphi_{2r-1}^{(r)},\qquad (j=0,1,\cdots,r-2)$$

均为 $r-1$ 重调和函数。

证明　在(3)式中令 $s^{2r-2}=-\sum\limits_{j=0}^{r-2}C_{r-1}^{j}s^{2j}$，即有

$$f(z)=\sum_{j=0}^{r-2}\left[(\varphi_{2j}^{(r)}-C_{r-1}^{j}\varphi_{2r-2}^{(r)})s^{2j}+(\varphi_{2j+1}^{(r)}-C_{r-1}^{j}\varphi_{2r-1}^{(r)})s^{2j+1}\right] \tag{6}$$

问题归结为需证此式就是 s 满足 $(1+s^2)^{r-1}=0$ 时 $f(z)$ 的实分蘖表达式。

任意一个广义解析函数 $f(z)$ 作实分蘖的基本方法是：

(1) 把 $f(z)$ 展成泰勒级数或罗朗级数，进而表示为

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(x,y)s^m \tag{7}$$

对于泰勒级数，显然易于做到这一点。下文将表明，对罗朗级数亦可做到这一点，并且展开系数 α_m 是唯一的。

(2) 应用引理 1，收缩掉(7)式中 s^{2r-1} 以后的所有项。

现在有两种收缩过程。

A：在(7)式中直接令 s 满足 $(1+s^2)^{r-1}=0$ 进行收缩，获得与 $r-1$ 重调和数相对应的实分蘖式：

$$f(z)=\sum_{j=0}^{2r-3}\varphi_j^{(r-1)}(x,y)s^j \tag{8}$$

B：先令 s 满足 $(1+s^2)^r=0$ 由(8)式收缩为(3)式，再令 s 满足 $(1+s^2)^{r-1}=0$ 由(3)式收缩为(6)式。

要证(6)式与(8)式的系数相等，容易看出，只需考察以上两种收缩过程中 s^{2l} 的变换系数是否相同。

事实上，按过程 A，

$$s^{2l} = (-1)^{l-r}\sum_{j=0}^{r-2}C_l^j C_{l-j-1}^{l-r+1}s^{2j}\,(l = r, r+1, \cdots)$$

而按过程 B,则有

$$\begin{aligned}
s^{2l} &= (-1)^{l-r+1}\sum_{j=0}^{r-1}C_l^j C_{l-j-1}^{l-r}s^{2j}\\
&= (-1)^{l-r+1}\sum_{j=0}^{r-2}C_l^j C_{l-j-1}^{l-r}s^{2j} + (-1)^{l-r}C_l^{r-1}\sum_{j=0}^{r-2}C_{r-1}^j s^{2j}\\
&= (-1)^{l-r}\sum_{j=0}^{r-2}(C_l^{r-1}C_{r-1}^j - C_l^j C_{l-j-1}^{l-r})s^{2j}\\
&= (-1)^{l-r}\sum_{j=0}^{r-2}C_l^j(C_{l-j}^{l-r+1} - C_{l-j-1}^{l-r})s^{2j}\\
&= (-1)^{l-r}\sum_{j=0}^{r-2}C_l^j C_{l-j-1}^{l-r+1}s^{2j}
\end{aligned}$$

定理得证。

由定理 1,进一步有

推论 $\varphi_{2(r-j-1)}^{r-j} = \varphi_{2r-2j}^{(r)} - \sum_{t=0}^{j}(-1)^t C_{r-j+t-1}^t \varphi_{2(r-j+t-1)}^{r-j}\,(j = 0, 1, \cdots, r-1)$。

现在,(4) 式可以改写为:

$$u = \sum_{j=0}^{r-2}[\alpha_{2j}(\varphi_{2j}^{(r)} - C_{r-1}^j\varphi_{2r-2}^{(r)}) + \alpha_{2j+1}(\varphi_{2j+1}^{(r)} - C_{r-1}^j\varphi_{2r-1}^{(r)})] + \beta_{2r-2}\varphi_{2r-2}^{(r)} + \beta_{2r-1}\varphi_{2r-1}^{(r)} \tag{9}$$

受此启发,利用归纳法立即可证:

定理 2 r 重调和方程的通解可以表示为:

$$u = \sum_{j=0}^{r-1}(b_j\varphi^{(j)} + c_j\psi^{(j)}) \tag{10}$$

这里 $\varphi^{(j)}$、$\psi^{(j)}\,(j = 1, 2, \cdots, r)$ 是 j 重调和方程的两个独立的纯特解。特别地可取

$$\varphi^{(j)} = \varphi_{2j-2}^{(j)},\ \psi^{(j)} = \varphi_{2j-1}^{(j)}\,(j = 1, 2, \cdots, r) \tag{11}$$

三 r 重调和方程相应于基本初等函数的纯特解

1. 仿照文[3],首先考虑平面直角坐标系下正整数次幂函数 $z^n\,(n = 0, 1, 2, \cdots, r)$,利用二项式定理和引理,容易导出:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2r-2}^{(r)} &= \sum_{l=r-1}^{[n/2]} (-1)^{l-r+1} C_n^{2l} C_l^{r-1} x^{n-2l} y^{2l} \\ \varphi_{2r-1}^{(r)} &= \sum_{l=r-1}^{L} (-1)^{l-r+1} C_n^{2l+1} x^{n-2m-1} y^{2l+1} \end{aligned}\right\} \left(r = 0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]; L = \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) \tag{12}$$

有趣的是，把上式转换为极坐标形式，我们发现[5]：

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2r-2}^{(r)} &= \rho^n \sum_{l=r-1}^{[n/2]} (-1)^{l-r+1} C_n^{2l} C_l^{r-1} \cos^{n-2l}\varphi \sin^{2l}\varphi \\ &= \rho^n \sum_{l=0}^{r-1} A_l \cos(n-2l)\varphi \\ \varphi_{2r-1}^{(r)} &= \rho^n \sum_{l=0}^{r-1} B_l \sin(n-2l)\varphi \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由此推论，相应于 $z^n (n = 1,2,\cdots)$ 的 r 重调和方程在极坐标下的纯特解就是

$$\rho^n \cos(n-2r+2)\varphi, \qquad \rho^n \sin(n-2r+2)\varphi \tag{14}$$

前文提及罗朗展式的实分蘖问题，这就需要讨论 $z^{-n} (n = 1,2,\cdots)$ 的分蘖式。为此引入定义：

定义 1　对于由 r 重调和数形成的任意泛复数 $z = x + ky$，如果存在同类泛复数 z^*，使得 $zz^* = A$ 为非负实数，且只当 $z = 0$ 时 A 才为零，则称 z^* 是 z 的共轭泛复数。

根据此定义，容易求得

$$z^* = (x - sy)(B_1 + B_2 s^2 + \cdots + B_r s^{2r-2})/B_1 \tag{15}$$

$$zz^* = (x^2 + y^2)^r / B_1 \tag{16}$$

式中

$$B_i = \sum_{l=i}^{r} C_r^{l-i} x^{2r-2l} y^{2l-2} \quad (i = 1,\cdots,r) \tag{17}$$

这样，我们有

$$z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x - sy}{(x^2 + y^2)^r} \sum_{i=1}^{r} B_i s^{2i-2} \tag{18}$$

把此式直接应用于由 r 重调和数形成的任意泛复数 z，我们得到

$$z^{-1} = \frac{x - sy}{(x^2 + y^2)^{r-1}} \sum_{i=1}^{r-1} b_i s^{2i-2}$$

此处

$$b_i = \sum_{l=i}^{r-1} C_{r-1}^{l-i} x^{2r-2l-2} y^{2l-2}$$

又，若在(18)式中令 $s^{2r-2} = -\sum_{j=1}^{r-1} C_{r-1}^{j-1} s^{2j-2}$，则得

$$z^{-1} = \frac{x - sy}{(x^2 + y^2)^r} \sum_{i=1}^{r-1} (B_i - C_{r-1}^{i-1} B_r) s^{2i-2}$$

利用 $C_r^l = C_{r-1}^l + C_{r-1}^{l-1}$，有

$$B_i - C_{r-1}^{i-1} B_r = \sum_{l=i}^{r-1} C_r^{l-i} x^{2r-2l} y^{2l-2} + (C_r^{r-i} - C_{r-1}^{i-1}) y^{2r-2}$$

$$= (x^2 + y^2) \sum_{l=i}^{r-1} C_{r-1}^{l-i} x^{2r-2l-2} y^{2l-2} = (x^2 + y^2) b_i$$

可见 z^{-1} 关于 s 的展开式与其展开过程无关，这正是上节需要补充证明的。前文提及罗朗级数也可以表成(4)式，正是根据上述 z^{-1} 的表达式，并且 z^{-1} 的表达式是唯一的。

有了 z^{-1} 的实分蘖式，进而即可获得 $z^{-n}(n = 1, 2, \cdots)$ 的实分蘖式。不过这样做相当繁琐，且从寻求纯特解的角度看也无必要，下节我们则按另一途径直接导出与 z^{-n} 相应的纯特解。

2. 指数函数和三角函数

我们这样定义指数函数和三角函数：

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{19}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{20}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \tag{21}$$

这里 $z = x + sy$，s 是 r 重调和数。可以由此直接寻求它们的实分蘖。不过，与 z^{-n} 一样，为了避免繁琐，我们将在下节给出与这三个函数相应的纯特解。

3. 对数函数

我们定义 $e^w = z$ 的反函数为对数函数，记作 $w = \ln z$。可以利用下面的线积分来寻求它的实分蘖：

$$\ln z = \int \frac{dz}{z} = \int \frac{x - sy}{(x^2 + y^2)^r} \left(\sum_{i=1}^{r} B_i s^{2i-2} \right) (dx + s dy) \tag{22}$$

以 B_i 的表达式代入并令 $u = y/x$ 可得：

$$\varphi_{l,2r-2}^{(r)} = \int \frac{xy^{2r-2} dx - x^2 y^{2r-3} dy}{(x^2 + y^2)^r} = -\int \frac{u^{2r-3}}{(1 + u^2)^r} du$$

$$= \frac{1}{2(r-1)} \left[\frac{u^{2r-4}}{(1 + u^2)^{r-1}} - (2r - 4) \int \frac{u^{2r-2}}{(1 + u^2)^r} du \right]$$

$$\varphi_{l,2r-1}^{(r)} = \int \frac{-y^{2r-1} dx + xy^{2r-2} dy}{(x^2 + y^2)^r} = -\int \frac{u^{2r-2}}{(1 + u^2)^r} du$$

$$= \frac{1}{2(1-r)} \left[\frac{u^{2r-3}}{(1 + u^2)^{r-1}} - (2r - 3) \int \frac{u^{2r-4}}{(1 + u^2)^{r-1}} du \right]$$

由此推得与 $\ln z$ 相对应的 r 重调和方程的纯特解是

$$x^2y^{2r-4}/(x^2+y^2)^{r-1} \text{ 与 } xy^{2r-3}/(x^2+y^2)^{r-1}(r=2,3,\cdots)。$$

四　三重调和函数族及其推论

把上节的讨论应用于 $r=3$ 的情况即有

$$\begin{aligned}\varphi_{n4}^{(3)} &= \sum_{l=2}^{[n/2]}(-1)^l C_n^{2l}C_l^2 x^{n-2l}y^{2l}\\ \varphi_{n5}^{(3)} &= \sum_{l=2}^{[(n-1)/2]}(-1)^l C_n^{2l}C_l^2 x^{n-2l-1}y^{2l+1}\end{aligned}\tag{23}$$

$$z^* = (x-sy)\left(1+\frac{x^2y^2+3y^4}{x^4+3x^2y^2+3y^4}s^2+\frac{y^4}{x^4+3x^2y^2+3y^4}s^4\right)\tag{24}$$

$$z^{-1} = (x-sy)[(x^4+3x^2y^2+3y^4)+(x^2y^2+3y^4)s^2+y^4s^4]/(x^2+y^2)^3\tag{25}$$

记 $B_1=x^4+3x^2y^2+3y^4, B_2=x^2y^2+3y^4, B_3=y^4$，可以证明

$$\begin{aligned}(B_1+B_2s^2+B_3s^4)^n &= A_1^n+C_n^1A_1^{n-1}A_2(1+s^2)+\\ &(C_n^1A_1^{n-1}A_3+C_n^2A_1^{n-2}A_2^2)(1+s^2)^2\end{aligned}\tag{26}$$

其中 $A_1=B_1-B_2+B_3, A_2=B_2-2B_3, A_3=B_3$。于是可以导出 z^{-n} 的全部 6 支实分蘖的表达式。不过，如前所述，作为纯特解，我们只关心最后两支，即

$$\varphi_{-n,4}^{(3)} = \frac{\varphi_{n4}^{(3)}}{(x^2+y^2)^n}+\frac{C_n^1y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}(\varphi_{n2}^{(3)}-2\varphi_{n4}^{(3)})+\frac{C_{n+1}^2y^4}{(x^2+y^2)^{n+2}}(\varphi_{n0}^{(3)}-\varphi_{n2}^{(3)}+\varphi_{n4}^{(3)})$$

$$\varphi_{-n,5}^{(3)} = \frac{-\varphi_{n5}^{(3)}}{(x^2+y^2)^n}-\frac{C_n^1y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}(\varphi_{n3}^{(3)}-2\varphi_{n5}^{(3)})-\frac{C_{n+1}^2y^4}{(x^2+y^2)^{n+2}}(\varphi_{n1}^{(3)}-\varphi_{n3}^{(3)}+\varphi_{n5}^{(3)})$$

或者简写为

$$\begin{aligned}\varphi_{-n,4}^{(3)} &= \frac{1}{(x^2+y^2)^n}\varphi_{n4}^{(3)}+\frac{C_n^1y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\varphi_{n2}^{(2)}+\frac{C_{n+1}^2y^4}{(x^2+y^2)^{n+2}}\varphi_{n0}^{(1)}\\ \varphi_{-n,5}^{(3)} &= \frac{-1}{(x^2+y^2)^n}\varphi_{n5}^{(3)}-\frac{C_n^1y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\varphi_{n3}^{(2)}-\frac{C_{n+1}^2y^4}{(x^2+y^2)^{n+2}}\varphi_{n1}^{(1)}\end{aligned}\tag{27}$$

这一结果可以推广到高重调和函数的情况，即 r 重调和方程对应于 z^{-n}的纯特解是：

$$\varphi_{-n,2r-2}^{(r)} = \sum_{j=0}^{r-1} C_{n+j-1}^{j} y^{2j} \varphi_{n,2r-2j-2}^{(r-j)} / (x^2 + y^2)^{n+j} \tag{28}$$

$$\varphi_{-n,2r-1}^{(r)} = -\sum_{j=0}^{r-1} C_{n+j-1}^{j} y^{2j} \varphi_{n,2r-2j-1}^{(r-j)} / (x^2 + y^2)^{n+j} \tag{29}$$

对 n 采用归纳法证明这一结果。先证(28)式。当 $n=1$ 时 $\varphi_{10}^{(1)} = x$，$\varphi_{1,2j-2}^{(j)} = 0 (j = 2, 3, \cdots, r)$。这样(18)式给出

$$\varphi_{-1,2r-2}^{(r)} = \frac{B_1 x}{(x^2+y^2)^r} = \sum_{j=0}^{r-1} C_{1+j-1}^{j} y^{2j} \varphi_{1,2r-2j-2}^{(r-j)} / (x^2+y^2)^{1+j}$$

即(28)式成立。现假设当 $n=m$ 时(28)式成立，我们来证 $n=m+1$ 时该式也成立。事实上，由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{z^m} = \frac{-m}{z^{m+1}},$$

故

$$\varphi_{-m-1,2r-2}^{(r)} = \frac{1}{-m}\frac{\partial \varphi_{-m-1,2r-2}^{(r)}}{\partial x} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{C_{m+j-1}^{j} y^{2j}}{-m}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_{m,2r-2j-2}^{(r-j)}}{(x^2+y^2)^{m+j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1}\left[\frac{C_{m+j}^{j} y^{2j}\varphi_{m,2r-2j-2}^{(r-j)} \cdot 2x}{(x^2+y^2)^{m+j+1}} - \frac{C_{m+j-1}^{j} y^{2j}\varphi_{m-1,2r-2j-2}^{(r-j)} \cdot 2x}{(x^2+y^2)^{m+j}}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1} \frac{C_{m+j-1}^{j} y^{2j}}{(x^2+y^2)^{m+1+j}}\varphi_{m+1,2r-2j-2}^{(r-j)}$$

这就证明了(28)式对 $n=m+1$ 成立，由归纳法，(28)式成立。同理可证(29)式成立。

再看指数函数和三角函数。由于(19)式定义的 e^z 满足公式：

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

我们只需对 e^{sy} 进行实分蘖。于是

$$\begin{aligned}
\varphi_{e4}^{(3)} &= e^x \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l C_l^2}{(2l)!} y^{2l} = \frac{e^x}{8}(y\sin y - y^2\cos y) \\
\varphi_{e5}^{(3)} &= e^x \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l C_l^2}{(2l+1)!} y^{2l+1} = \frac{e^x}{8}(-3\sin y + 3y\cos y - y^2\sin y)
\end{aligned} \tag{30}$$

因为 $e^x\cos y$，$e^x\sin y$ 是调和函数，$e^x y\cos y$，$e^x y\sin y$ 是双调和函数[3]，我们发现，与 e^z

相对应的三重调和方程的纯特解可以取为 $e^x y^2\cos y, e^x y^2\sin y$ 。由此还可推论，相应于 e^z 的 r 重调和方程的纯特解是 $e^x y^{r-1}\cos y, e^x y^{r-1}\sin y$ 。这一点不难利用归纳法并计算 $\nabla^2(e^x y^{r-1}\cos y)$ 与 $\nabla^2(e^x y^{r-1}\sin y)$ 予以证明。

完全类似地将发现，与 $\cos z$、$\sin z$ 相应的 r 重调和方程的纯特解是

$$\cos x\cdot y^{r-1}\operatorname{ch} y,\quad \cos x\cdot y^{r-1}\operatorname{sh} y,\quad \sin x\cdot y^{r-1}\operatorname{ch} y,\quad \sin x\cdot y^{r-1}\operatorname{sh} y$$

五　结束语

以上我们确定了 r 重调和方程解的结构并成功地构造出它的一系列纯特解。这表明，泛复函方法在力学和物理学中确有应用价值。

参考文献

[1] 郭敦仁．数学物理方法．北京:高等教育出版社
[2] 丁皓江，王敏中．在极坐标中构造平面弹性力学特解的一种方法．力学与实践，1982(1)，68—69
[3] 王其申．由泛复函构造弹性力学平面问题的特解．力学与实践，1995(4)
[4] 熊锡金．泛复变函数及其在数学和物理中的应用．长春:东北师范大学出版社，1988
[5] 盛敏高，王其申．一组特殊函数的傅立叶级数展开．安庆师范学院学报，1996(1)

一组特殊函数的傅立叶级数展开

摘　要　本文给出了一组特殊函数

$$f_{n,i}(\varphi)=\sum_{l=i}^{[n/2]}(-1)^l C_n^{2l}C_l^i\cos^{n-2l}\varphi\sin^{2l}\varphi$$

$$g_{n,i}(\varphi)=\sum_{l=i}^{[(n-1)/2]}(-1)^l C_n^{2l+1}C_l^i\cos^{n-2l-1}\varphi\sin^{2l+1}\varphi$$

的傅立叶展开式的具体形式，确定了展开式系数的组成规律。

关键词　一组特殊函数　生成函数　傅氏级数

一　引　　言

考虑二项展开式

$$(\cos\varphi+k\sin\varphi)^n=C_n^0\cos^n\varphi+C_n^1\cos^{n-1}\varphi k\sin\varphi+C_n^2\cos^{n-2}\varphi k^2\sin^2\varphi+\cdots+C_n^n k^n\sin^n\varphi$$

在某些问题的讨论中需设 $k^2=-1-s^2$，利用此式我们将上式改写成以 s^{2i}，ks^{2i} 为因子的表达式

$$(\cos\varphi+k\sin\varphi)^n=\sum_{i=0}^{[n/2]}f_{n,i}s^{2i}+\sum_{i=0}^{[(n-1)/2]}g_{n,i}ks^{2i}\tag{1}$$

其中

$$f_{n,i}(\varphi)=\sum_{l=i}^{[n/2]}(-1)^l C_n^{2l}C_l^i\cos^{n-2l}\varphi\sin^{2l}\varphi(i=0,1,2,\cdots,[n/2])\tag{2}$$

$$g_{n,i}(\varphi)=\sum_{l=i}^{[(n-1)/2]}(-1)^l C_n^{2l+1}C_l^i\cos^{n-2l-1}\varphi\sin^{2l+1}\varphi(i=0,1,2,\cdots,[(n-1)/2])\tag{3}$$

这就是本文所要讨论的函数族。(1) 式表明，可以称 $(\cos\varphi+k\sin\varphi)^n$ 为 $f_{n,i}$，$g_{n,i}$ 的生成函数，容易验证

---

* 本文原载于《安庆师范学院学报》(自然科学版)1996 年第 1 期，原作者为盛敏高、王其申。

** 本文是第二作者所指导的第一作者的毕业论文，由于本组论文有两篇引用了此文，故收入本文集。

$$f_{n,0}=\cos n\varphi,\quad g_{n,0}=\sin n\varphi$$

文[1] 已证明

$$f_{n,1}=\frac{n\cos n\varphi-n\cos(n-2)\varphi}{4}\tag{4}$$

$$g_{n,1}=\frac{(n-2)\sin n\varphi-n\sin(n-2)\varphi}{4}\tag{5}$$

二　预备知识

首先给出本文将要用到的如下引理：

引理　成立如下傅氏展开式

$$\sin^{2m}\varphi=\frac{1}{2^{2m}}\left[C_{2m}^{m}+\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{m-j}\cdot 2\cdot C_{2m}^{j}\cos(2m-2j)\varphi\right](m=0,1,2,\cdots)\tag{6}$$

$$\sin^{2m+1}\varphi=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\cdot 2\cdot C_{2m+1}^{j}\sin(2m+1-2j)\varphi(m=0,1,2,\cdots)\tag{7}$$

证明　运用数学归纳法

对于(6)式，当 $m=0$ 时(6)式明显成立。

设 $m=t$ 时(6)式成立。

当 $m=t+1$ 时，

$$\begin{aligned}\sin^{2t+2}\varphi&=\sin^{2}\varphi\sin^{2t}\varphi\\&=\frac{1}{2^{2t+2}}(2-2\cos 2\varphi)\left[C_{2t}^{t}+\sum_{j=0}^{t-1}(-1)^{t-j}\cdot 2\cdot C_{2t}^{j}\cos(2t-2j)\varphi\right]\end{aligned}$$

对此式运用积化和差公式并整理得

$$\sin^{2t+2}\varphi=\frac{1}{2^{2t+2}}\left[C_{2t+2}^{t+1}+\sum_{j=0}^{t}(-1)^{t+1-j}\cdot 2\cdot C_{2t+2}^{j}\cos(2t+2-2j)\varphi\right]$$

表明 $m=t+1$ 时(6)式成立。

综上所述，对所有自然数 m，(6)式成立。

同理可以证明(7)式成立。引理证毕。

注意到当 n 为偶数时，$f_{n,i}$ 仅由含 $\sin^{2l}\varphi$ 的项组成，则由引理并结合(4)式我们猜测，对任意的 $i=0,1,2,\cdots,[n/2]$，

$$f_{n,i}(\varphi)=\frac{(-1)^{i}}{2^{2i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\alpha_{n,i}^{j}C_{n}^{i}\cos(n-2j)\varphi\tag{8}$$

同样注意到当 n 为奇数时，$g_{n,i}$ 仅由含 $\sin^{2l+1}\varphi$ 的项所组成，由引理并结合(5)式我们猜测，对任意的 $i=0,1,2,\cdots,[(n-1)/2]$，

$$g_{n,i}(\varphi)=\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}b_{n,i}^{j}C_n^i\ \sin\ (n-2j)\varphi \tag{9}$$

式(8)、(9)正是本文所需要的傅氏级数展开式,其中 $\alpha_{n,i}^{j}$、$b_{n,i}^{j}$ 是待定系数。

三、系数 $\alpha_{n,i}^{j}$、$b_{n,i}^{j}$ 的组成规律

为了确定(8)、(9)式中系数 $\alpha_{n,i}^{j}$、$b_{n,i}^{j}$ 的组成规律,我们进行了大量实例计算并列出如下系数表。

表 1 $b_{n,i}^{j}$ 的值

i	0	1		2			3				4				
n \ j	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
1	1														
2	1														
3	1	1	1												
4	1	1	2												
5	1	1	3	1	1	1									
6	1	1	4	1	2	3									
7	1	1	5	1	3	6	1	1	1	1					
8	1	1	6	1	4	10	1	2	3	4					
9	1	1	7	1	5	15	1	3	6	10	1	1	1	1	1

表 2 $\alpha_{n,i}^{j}$ 的值

i	0	1		2			3				4				
n \ j	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
1	1														
2	1	1	2												
3	1	1	3												
4	1	1	4	1	2	2									
5	1	1	5	1	3	5									
6	1	1	6	1	4	9	1	2	2	2					
7	1	1	7	1	5	14	1	3	5	7					
8	1	1	8	1	6	20	1	4	9	16	1	2	2	2	2
9	1	1	9	1	7	27	1	5	14	30	1	3	5	7	9

据此可以推测 $b_{n,i}^{j}$、$\alpha_{n,i}^{j}$ 的可能表达式为

$$b_{n,i}^{j}=C_{n-i-j-1}^{i-j}(n\geqslant 2i+1,j=i,i-1,\cdots,1,0) \tag{10}$$

$$\alpha_{n,i}^{j}=C_{n-i-j}^{i-j}+C_{n-i-j-1}^{i-j-1}(n\geqslant 2i,,j=i,i-1,\cdots,1,0) \tag{11}$$

四 $f_{n,i}^{j}$、$g_{n,i}^{j}$ 的傅氏展开式

现在我们以定理的形式给出本文的主要结论。

定理 对于任意自然数 n,函数族

$$f_{n,i}(\varphi)=\sum_{l=i}^{[n/2]}(-1)^l C_n^{2l}C_l^i\ \cos^{n-2l}\varphi\ \sin^{2l}\varphi \tag{2}$$

$$g_{n,i}(\varphi)=\sum_{l=i}^{[(n-1)/2]}(-1)^l C_n^{2l+1}C_l^i\cos^{n-2l-1}\varphi\sin^{2l+1}\varphi \tag{3}$$

具有如下傅氏级数

$$f_{n,i}(\varphi)=\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}(C_{n-i-j}^{i-j-1}+C_{n-i-j-1}^{i-j-1})C_n^i\cos(n-2j)\varphi \tag{12}$$

$$g_{n,i}(\varphi)=\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_{n-i-j-1}^{i-j}C_n^i\sin(n-2j)\varphi \tag{13}$$

证明　对 i 作归纳法证明。

当 $i=0$ 时，前面已指出，对任意自然数 n 有

$$f_{n,0}=\cos n\varphi,g_{n,0}=\sin n\varphi$$

定理显然成立。

假设对任意 $i\leqslant t$ 时，定理成立。我们来证明 $i=t+1$ 时定理亦成立。

在以上定理中，注意到对 $f_{n,i}$ 而言 $n\geqslant 2i$，　对 $g_{n,i}$ 而言 $n\geqslant 2i+1$，我们再对 n 作归纳法。

当 $n=2(t+1)$ 时，由引理(6)式知定理(12)式成立。

当 $n=2(t+1)+1$ 时，由引理(7)式知定理(13)式成立。

设 $n=2(t+1)+m=N$ 时定理成立，则 $n=2(t+1)+m+1=N+1$ 时，由于$(\cos\varphi+k\sin\varphi)^n$ 是 $f_{n,i}$，$g_{n,i}$ 的生成函数，所以比较式

$$(\cos\varphi+k\sin\varphi)^{N+1}=(\cos\varphi+k\sin\varphi)(\cos\varphi+k\sin\varphi)^N$$

的 s^{2i} 项系数得

$$f_{N+1,i}=f_{N,i}\cos\varphi-g_{N,i}\sin\varphi-g_{N,i-1}\sin\varphi$$

$$g_{N+1,i}=f_{N,i}\cos\varphi+g_{N,i}\sin\varphi$$

故

$$f_{n+1,i}=\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\Bigg[\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}(C_{N-i-j}^{i-j}+C_{N-i-j-1}^{i-j-i})C_n^i\cos(N-2j)\varphi\cdot\cos\varphi-$$

$$\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_{N-i-j-1}^{i-j}C_N^i\sin(N-2j)\varphi\cdot\sin\varphi+$$

$$4\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-1-j}C_{N-i-j}^{i-j-1}C_N^i\sin(N-2j)\varphi\cdot\sin\varphi\Bigg]$$

$$g_{N+1,i}=\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\Bigg[\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}(C_{N-i-j}^{i-j}+C_{N-i-j-1}^{i-j-i})C_n^i\cos(N-2j)\varphi\cdot\sin\varphi+$$

$$\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}C_{N-i-j}^{i-j-1}C_N^i\sin(N-2j)\varphi\cdot\cos\varphi\Bigg]$$

对 $\cos(N+1-2j)\varphi$ 的系数进行整理得

$$\frac{1}{2}(-1)^{i-j}\{[(C_{N-i-j}^{i-j}+C_{N-i-j-1}^{i-j-1})+C_{N-i-j-1}^{i-j}+4C_{N-i-j}^{i-j-1}]C_N^i+$$
$$[-(C_{N-i-j+1}^{i-j+1}+C_{N-i-j}^{i-j})+C_{N-i-j}^{i-j+1}+4C_{N-i-j+1}^{i-j+1}]C_N^{i-1}\}$$
$$=(-1)(C_{N+1-i-j}^{i-j}+C_{N-i-j}^{i-j-1})C_{N+1}^i$$

于是

$$f_{N+1,i}(\varphi)=\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}(C_{N+1-i-j}^{i-j}+C_{N+1-i-j-1}^{i-j-1})C_{N+1}^i\cos(N+1-2j)\varphi$$

即 $n=N+1$ 时(12)式成立。

同样,对 $\sin(N+1-2j)\varphi$ 的系数进行整理得

$$\frac{1}{2}(-1)^{i-j}\{[(C_{N-i-j}^{i-j}+C_{N-i-j-1}^{i-j-1})+C_{N-i-j-1}^{i-j}]C_{N+1}^i+$$
$$[(C_{N-i-j+1}^{i-j+1}+C_{N-i-j}^{i-j})-C_{N-i-j}^{i-j+1}]C_N^{i-1}\}=(-1)^{i-j}C_{N+1-i-1}^{i-j}C_{N+1}^i$$

于是

$$g_{N+1,i}(\varphi)=\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_{N+1-i-j-1}^{i-j}C_{N+1}^i\sin(N+1-2j)\varphi$$

即 $n=N+1$ 时(13)式成立。

总之,对 $i=t+1$,当自然数 n 满足条件时,(12)、(13)式均成立。

综上所述,对任意自然数 n,对 $f_{n,i}$ 而言,$i=0,1,2,\cdots,[n/2]$ 有(12)式成立。对 $g_{n,i}$ 而言,$i=0,1,2,\cdots,[(n-1)/2]$ 有(13)式成立。定理证毕。

五 结束语

本文的结论在空间调和函数和高重调和函数表达式中将有应用。

参考文献

[1] 王其申. 由泛复函生成弹性力学平面问题的特解. 力学与实践,1995(4)

附表：圆柱体固有振动各种振型要点一览表

m	θ	α	β	位移表达表	频 率 方 程	基　　频
0	0	0	0	**径向振动**：$u_\theta = u_z = 0$ $u_r = A\dfrac{\mathrm{d}J_0(hr)}{\mathrm{d}r}e^{ipt}$	**行列式**(3.15)**的第一个一阶主子式** $\gamma^2 g_1(ha) = 2$	$\mathrm{Po} = \dfrac{\delta}{a}\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$，**其中** δ **是** $\gamma^2 g_1(x) = 2$ **的最低根**。
0	$\dfrac{\pi}{2}$	0	0	**切向振动**：$u_r = u_z = 0$ $u_\theta = -B\dfrac{\mathrm{d}J_0(kr)}{\mathrm{d}r}e^{ipt}$	**行列式**(3.15)**的中心元素**： $g_1(ka) = 2$	$\mathrm{Po} = \dfrac{x}{a}\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$，**其中** x **是** $g_1(x) = 2$ **的最低根**。
自然数	0 **或** $\dfrac{\pi}{2}$	0	0	**横截面变形振动**：$u_z = 0$ $u_r = \left[A\dfrac{\mathrm{d}J_m(hr)}{\mathrm{d}r} + B\dfrac{m}{r}J_m(kr)\right]\cos m\theta e^{ipt}$ $u_\theta = \left[-Am\dfrac{J_m(hr)}{r} - B\dfrac{\mathrm{d}J_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\sin m\theta e^{ipt}$	**行列式**(3.15)**的第一个二阶主子式**： $\begin{vmatrix} \left(\dfrac{2m^2}{a^2} - k^2\right)J_m(ha) - \dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{d}J_m(ha)}{\mathrm{d}a} & 2m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\dfrac{J_m(ka)}{a} \\ 2m\left[\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{d}J_m(ha)}{\mathrm{d}a} - \dfrac{J_m(ha)}{a^2}\right] & \left(2\dfrac{m^2}{a^2} - k^2\right)J_m(ka) - \dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{d}J_m(ka)}{\mathrm{d}a} \end{vmatrix} = 0$	
0	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{n\pi}{1}$	0 **或** $\dfrac{\pi}{2}$	**扭转振动**：$u_r = u_z = 0$ $u_\theta = Br\cos\alpha z e^{ipt}$	$\dfrac{\mathrm{d}J_1(ka)}{\mathrm{d}a} = 0$	$\mathrm{Po} = \dfrac{n\pi}{l}\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$($n$ **是自然数**)
自然数	0	0	$\dfrac{\pi}{2}$	**类薄膜振动**：$u_r = u_\theta = 0$ $u_z = CJ_m(kr)\cos m\theta e^{ipt}$	**行列式**(3.15)**的第三个一阶主子式**： $\dfrac{\mathrm{d}J_m(ka)}{\mathrm{d}a} = 0$	$\mathrm{Po} = \dfrac{\delta}{a}\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$，**其中** δ **是** $J'_m(\delta) = 0$ **的最低根**。
0	0	$\dfrac{n\pi}{1}$	0 **或** $\dfrac{\pi}{2}$	**纵振动**：$\begin{cases} u_\theta = 0 \\ u_r = \left[A\dfrac{\mathrm{d}J_0(hr)}{\mathrm{d}r} + C\alpha\dfrac{\mathrm{d}J_0(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\cos\alpha z e^{ipt} \\ u_z = [-A\alpha J_0(hr) + Ck^2 J_0(kr)]\sin\alpha z e^{ipt} \end{cases}$	**行列式**(3.15)**的第二个二阶主子式**： $(k^2 - \alpha^2)^2 g_1(ha) + 4h^2\alpha^2 g_1(ka) = 2(k^2 + \alpha^2)h^2$	**在** αa **很小时**： $\mathrm{Po} = \dfrac{n\pi}{l}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，**其中** n **是自然数**。
1	0	$\dfrac{n\pi}{1}$	0	**横振动**： $u_r = \left[A\dfrac{\mathrm{d}J_1(hr)}{\mathrm{d}r} + B\dfrac{\mathrm{d}J_1(kr)}{r} + C\alpha\dfrac{\mathrm{d}J_1(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\cos\theta\cos\alpha z e^{ipt}$ $u_\theta = \left[-A\dfrac{J_1(hr)}{r} - B\dfrac{\mathrm{d}J_1(kr)}{\mathrm{d}r} - C\alpha\dfrac{J_1(kr)}{r}\right]\sin\theta\cos\alpha z e^{ipt}$ $u_z = [-A\alpha J_1(hr) + Ck^2 J_1(kr)]\cos\theta\sin\alpha z e^{ipt}$	**行列式**(3.15)**中令** $m = 1$ **即**(4.10)**式**：	**在** αa **很小时**： $\mathrm{Po} \approx \dfrac{\alpha^2 a}{2}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

备注：$h^2 = \dfrac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \alpha^2$，　$k^2 = \dfrac{\rho p^2}{\mu} - \alpha^2$，　$\gamma^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu} = 2\,\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}$，　$g_1(x) = \dfrac{xJ_0(x)}{J_1(x)}$；　$E = \mu\dfrac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ **是弹性模量**，ν **是泊松比**。