

高等院校电子科学与技术专业系列教材

# 光学电磁理论

陈 军 编著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书以电磁理论为基础,将电磁理论与经典光学理论及现代光电信息技术相结合.从麦克斯韦方程组出发,对电磁波特别是针对光波段在各种媒介,包括在分层介质、多层膜、金属及有损介质、金属波导、介质波导及各类光纤、晶体及其他各向异性介质中的传播特性及部分非线性光学效应进行了系统而深入的分析,并对现代光学及电信息技术中的典型应用实例进行了分析.书后附“光学电磁理论教学软件”光盘一张.

本书可作为高等院校光学工程、光电信息工程专业以及相关专业的硕士研究生的学位课教材和相关专业选修课教材,并可供从事光学、光电子、光通信等专业的技术人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

---

光学电磁理论/陈军编著. —北京:科学出版社,2005  
(高等院校电子科学与技术专业系列教材)

ISBN 7 - 03 - 015891 - 1

I. 光… II. 陈… III. 光-电磁理论-高等学校-教材 IV. O431.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 077035 号

---

责任编辑:马长芳 贾瑞娜/责任校对:李奕萱

责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2005年9月第一版 开本:B5(720×1000)

2006年5月第二次印刷 印张:17

印数:3 001—5 000 字数:326 000

定价:32.00元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

## 《高等院校电子科学与技术专业系列教材》编委会

主 编 姚建铨 天津大学  
副主编 金亚秋 复旦大学  
陈治明 西安理工大学  
吕志伟 哈尔滨工业大学

委 员 (按姓氏音序排列)

曹全喜 西安电子科技大学  
崔一平 东南大学  
傅兴华 贵州大学  
郭从良 中国科技大学  
郭树旭 吉林大学  
黄卡玛 四川大学  
金伟琪 北京理工大学  
刘纯亮 西安交通大学  
刘 旭 浙江大学  
罗淑云 清华大学  
马长芳 科学出版社  
毛军发 上海交通大学  
饶云江 重庆大学  
张怀武 电子科技大学  
张在宣 中国计量学院  
周乐柱 北京大学  
邹雪城 华中科技大学  
秘 书 资丽芳 科学出版社

# 序 言

21 世纪,随着现代科学技术的飞速发展,人类历史即将进入一个崭新的时代——信息时代,其鲜明的时代特征是,支撑这个时代的诸如能源、交通、材料和信息等基础产业均将得到高度发展,并能充分满足社会发展和人民生活的多方面需求.作为信息科学的基础,微电子技术和光电子技术同属于教育部本科专业目录中的一级学科“电子科学与技术”.微电子技术伴随着计算机技术、数字技术、移动通信技术、多媒体技术和网络技术的出现得到了迅猛的发展,从初期的小规模集成电路(SSI)发展到今天的巨大规模集成电路(GSI),成为使人类社会进入信息化时代的先导技术.20 世纪 60 年代初出现的激光和激光技术以其强大的生命力推动着光电子技术及其相关产业的发展,光电子技术集中了固体物理、波导光学、材料科学、半导体科学技术和信息科学技术的研究成就,成为具有强烈应用背景的新兴交叉学科,至今光电子技术已经应用于工业、通信、信息处理、检测、医疗卫生、军事、文化教育、科学研究和社会发展等各个领域.可以预言,光电子技术将继微电子技术之后再次推动人类科学技术的革命和进步.因此,本世纪将是微电子和光电子共同发挥越来越重要作用的时代,是电子科学与技术飞速发展的时代.

电子科学与技术对于国家经济发展、科技进步和国防建设都具有重要的战略意义.今天,面对电子科学技术的飞速发展,世界上发达国家像美国、德国、日本、英国、法国等都竞相将微电子技术和光电子技术引入国家发展计划.我国对微电子技术和光电子技术的研究也给予了高度重视.在全国电子科学技术的科研、教学、生产和使用单位的共同努力下,我国已经形成了门类齐全、水平先进、应用广泛的微电子和光电子技术的科学研究领域,并在产业化方面形成了一定规模,取得了可喜的进步,为我国科学技术、国民经济和国防建设做出了积极贡献,在国际上也争得了一席之地.但是我们应该清醒地看到,在电子科学与技术领域,我国与世界先进水平仍有不小的差距,尤其在微电子技术方面的差距更大.这既有历史、体制、技术、工艺和资金方面的原因,也有各个层次所需专业人才短缺的原因.

为了我国电子科学与技术事业的可持续发展和抢占该领域中高新技术的制高点,就必须统筹教育、科研、开发、人才、资金和市场等各种资源和要素,其中人才培养是极其重要的一环.根据教育部加强高等学校本科教育的有关精神,电子科学与技术教学指导委员会和科学出版社,经过广泛而深入的调研,组织出版了这套电子科学与技术本科专业系列教材.

本系列教材具有以下特色:

1. 多层次. 考虑到多层面的需求(普通院校、重点院校或研究型大学、应用型大学),根据不同的层次,有针对性地编写不同的教材,同层次的教材也可能出版多种面向的教材.

2. 延续传统、更新内容,基础精深、专业宽新. 教材编写在准确诠释基本概念、基本理论的同时,注重反映该领域的最新成果和发展方向,真正使教材能够达到培养“厚基础、宽口径、会设计、可操作、能发展”人才的目的.

3. 拓宽专业基础,加强实践教学. 适当拓宽专业基础知识的范围,以增强培养人才的适应性;注重实践环节的设置,以促进学生实际动手能力的培育.

4. 适应教学计划,考虑自学需要. 教材的编写完全按照教学指导委员会最新的课程设计和课程要求的指示精神,同时给学生留有更大的选择空间,以利于学生的个性发展和创新能力的培养.

5. 立体化. 教材的编写是立体的,包括主教材、学习辅导书、教师参考书和多媒体课件等等.

本系列教材的编写集中了全国高校的优势资源,突出了多层次与适应性、综合性与多样性、前沿性与先进性、理论与实践的结合. 在教材的组织和出版过程中得到了相关学校教务处及学院的帮助,在此表示衷心的感谢.

根据电子科学与技术专业发展战略的要求,我们将对这套系列教材不断更新,以保持教材的先进性和适用性. 热忱欢迎全国同行以及关注电子科学与技术领域教育及发展前景的广大有识之士对我们的工作提出宝贵意见和建议.

教育部“电子科学与技术”教学指导委员会主任  
中国科学院院士,天津大学教授

# 前 言

21 世纪属于信息时代。信息学科与信息产业的迅猛发展促使传统的光学仪器学科向光电信息学科扩展。现代光电信息学科及其产业的发展要求新一代科学研究与工程技术人员具有扎实的电磁理论基础,具有应用电磁理论来解决光电信息学科及现代光学中各种问题的能力,成为知识结构新和创新精神强的高层次人才。本书将电磁理论与传统的经典光学及现代光电信息技术相结合,力求形成理工结合、经典理论与现代学科紧密结合的新体系。

本书从电磁场理论出发,用麦克斯韦方程组对不同介质以及不同边界条件下的电子波(光波)求解,对电磁波在各种媒介(包括在分层介质、多层膜、金属及有损介质、金属波导、介质波导)及各类光纤(包括阶跃及渐变折射率光纤、变折射率介质、晶体及其他各向异性介质)中的传播特性及部分非线性光学效应进行了系统而深入的分析,并对现代光电信息技术中的典型应用实例进行分析。

希望读者通过对本书的学习,达到如下目的:

- 1) 掌握电磁场理论的基本知识,学习在不同边界条件下求解麦克斯韦方程组的基本方法。
- 2) 利用电磁场理论分析、求解光学中的基本问题。
- 3) 利用电磁场理论分析、求解现代光学特别是前沿学科中出现的光学现象及应用问题。

本书作者特别希望通过针对各部分理论与现代光电信息技术中的许多典型应用实例以及相关技术相结合,进行深入的理论分析,使得教材内容更加生动与充实,也使读者对相应的理论有更深入的理解,并更能引起读者的兴趣。本书在内容上涉及电动力学、工程电磁学、物理光学、波导及光纤、晶体及非线性光学等多内容,较为深入地将电磁理论与现代光学结合起来,用电磁理论对现代光学及在光电信息学科中的基础知识及出现的新现象、新问题进行求解与分析。作者希望通过这样一种思路与方法,使电磁理论与光学、光学工程、光电信息技术等相关方面相结合,力求该教材在内容与体系上有新的突破。

本书是在作者对浙江大学光电工程系的研究生学位课程“光学电磁理论”进行了十余年教学以及对教材做多次修改之后写成的。从历届我系毕业的研究生反馈的信息获知,这类书籍在他们走上工作岗位以后仍然起着很好的参考书作用。特别是如果这些研究生曾经用过此书上课,查阅此书会使他们更感到熟悉、方便和快捷,可以借助于此书的许多内容及解法思路,创造出适合于其研究与工作实践的方

法,收到很好的效果.

此书也可作为从事光学、光电子、光通信等专业技术人员的参考书籍. 经过 5 年的电化教学实践,作者编制的课堂用教学软件取得了比较好的教学效果,这一教学软件与本书配套出版,以便于现代电化教学及远程教学. 对于本书中可能有的错误与整体结构的不足,作者十分诚恳希望读者能及时指出并告知,以便使本书得以不断地修正与提高.

(E-mail: chenjun1@zju.edu.cn)

作 者

2005 年 6 月 26 日

于浙江大学求是园

# 目 录

序言

前言

<b>1 电磁场理论基础及麦克斯韦方程组</b>	1
1.1 场论基础	1
1.2 静电场、静磁场基本定律	6
1.3 时变电磁场	10
1.4 真空中的麦克斯韦方程组	12
1.5 介质中的麦克斯韦方程组	13
1.6 电磁边界条件	20
1.7 无源波动方程	24
1.8 有源波动方程	27
1.9 电磁场的能量	35
1.10 麦克斯韦方程组的完备性、对偶性*	38
<b>2 电磁波在无限大均匀介质中的传播</b>	41
2.1 无限大均匀介质中的平面波解	41
2.2 无限大均匀介质中的球面波解	42
2.3 无限大均匀介质中柱坐标系下的高斯光束基模解	43
2.4 单色平面波的基本特性	46
2.5 平面电磁波的能量和能流密度	48
2.6 准单色光波	52
2.7 任意简谐波及相速度	56
2.8 光波的偏振	57
<b>3 电磁波在分层介质中的传播</b>	69
3.1 平面电磁波两介质界面上的反射和折射	69
3.2 全反射、倏逝波	74
3.3 古斯-汉森位移	84
3.4 电磁波在分层介质上的反射和透射	87
<b>4 电磁波在金属中的传播</b>	94
4.1 复介电常数、复折射率	94
4.2 电磁波在金属界面上的折射	96

4.3	复数波矢 $\mathbf{K}$ .....	101
4.4	金属作为良导体的条件 .....	104
4.5	电磁波在金属表面的反射 .....	105
4.6	电磁波的色散 .....	109
4.7	增益介质中的复数折射率 $\tilde{n}$ 、复数极化率 $\tilde{\chi}$ 、增益系数 $g$ .....	114
<b>5</b>	<b>电磁波在金属波导中的传播</b> .....	<b>117</b>
5.1	波导管中的场方程及边界条件 .....	117
5.2	矩形波导中的电磁波 .....	118
5.3	无穷大平板波导中的电磁波 .....	129
5.4	圆形规则波导中的电磁波 .....	131
<b>6</b>	<b>电磁波在介质波导中的传播</b> .....	<b>138</b>
6.1	薄膜介质波导一般概念 .....	138
6.2	射线法分析薄膜波导 .....	139
6.3	用电磁理论求解薄膜介质波导 .....	142
6.4	介质薄膜波导中的场分布 .....	150
6.5	介质平板波导的传输功率 .....	152
6.6	圆形介质波导(光纤)的一般概念 .....	154
6.7	圆形介质波导的电磁理论解法 .....	156
6.8	矢量解的特征方程 .....	160
6.9	矢量解的模式分类及特征方程 .....	162
6.10	矢量模的特性 .....	163
6.11	非均匀光纤 .....	170
<b>7</b>	<b>电磁波在晶体中的传播</b> .....	<b>176</b>
7.1	晶体基础 .....	176
7.2	晶体中光波的结构 .....	185
7.3	电磁波在不同晶系的晶体中的传播 .....	191
7.4	晶体宏观光学性质的几何表示 .....	197
7.5	光波在晶体表面的折射和反射 .....	210
7.6	双轴晶中的内锥折射和外锥折射 .....	215
7.7	晶体中的非线性效应 .....	219
7.8	电光效应 .....	230
7.9	介质中的磁光效应 .....	248
7.10	其他的非线性光学效应 .....	257
	<b>参考文献</b> .....	<b>259</b>

# 1 电磁场理论基础及麦克斯韦方程组

光是一种电磁波,到目前为止,用电磁场理论来处理光的各种问题仍是光学中的一个重要方法.麦克斯韦在总结了从库仑、安培到法拉第等前人的电磁学定律的基础上,以严格完美的数学形式提出了麦克斯韦方程组,建起了电磁场理论的大厦.这一方程组描写了电磁场的空间分布、随时间的变化、各场量相互间的联系以及运动情况.在任意条件下以任意形式传播的电磁波均可以用这一方程组描写,并通过给定的初始条件及边界条件对电磁场求解.

本书就是以电磁场理论为出发点,对光波在各种情况下的传播求解,从而得出光在这些条件下的传播特性.因此,电磁场理论是本门课程的基础,而场的概念及其数学表达与运算是基本工具.

## 1.1 场论基础

所谓场,是指带有某种物理量的空间.用数学语言来描述,即为:如果空间或部分空间中每一点对应于某一量的值,则这样的空间称之为场.如果对应的该物理量是标量,则这种场称为标量场或数量场: $u(P) = u(x, y, z)$ 或 $u(\rho, \varphi, z)$ 或 $u(r, \theta, \varphi)$ .若该量为矢量,则这种场就称为矢量场: $V(P) = V(x, y, z)$ 或 $V(\rho, \varphi, z)$ 或 $V(r, \theta, \varphi)$ .

以上写法采用了三种坐标系,即直角坐标系、柱坐标系及球坐标系.这是在电磁场理论中用得最多的坐标系.下面介绍场论中的几个基本概念.

### 1.1.1 方向导数

设定一标量场 $u(P) = u(x, y, z)$ .为直观观察场的变化,将具有同一函数值 $C$ 的点集合在一起,这些点组成一曲面,即 $u(P) = C$ ( $C$ 为常数),这样的曲面称之为等位面或等量面.例如点电荷 $q$ (坐标为 $0, 0, 0$ )产生的电位场为 $u = q/4\pi\epsilon r$ ,它的等位面方程为 $q/4\pi\epsilon r = C$ ,或

$$x^2 + y^2 + z^2 = (q/4\pi\epsilon C)^2$$

这是一簇以原点为球心的球面.通常选择常数 $C$ 为等差级数,此时在任何切割平面上都能得到等位线图形.等位线密度给出了关于在场的各个方向上 $u$ 变化情况的清晰概念.由于 $C$ 取的是等差级数,显见等位线越密, $u$ 的空间变化速率越大.

偏导数  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_0}$ 、 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_0}$ 、 $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{P_0}$  能表达标量场  $u$  中  $P_0$  点沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向变化的大小;而对于标量场  $u(P)$ ,需要研究某一点沿任一方向的变化情况,故定义方向导数的概念如下:

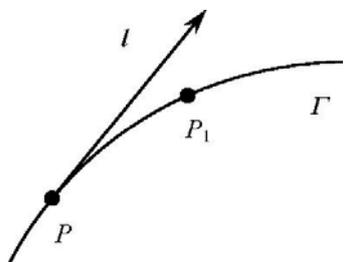


图 1.1.1 方向导数示意

**定义 1.1** 设  $\Gamma$  是通过场  $u(P)$  中某一点  $P$  的任一条曲线,  $l$  是  $\Gamma$  曲线在  $P$  点的切线(图 1.1.1), 若极限

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{u(P_1) - u(P)}{P_1 P} \quad (1.1.1)$$

存在,则称此极限为场  $u(P)$  在  $P$  点沿  $l$  方向的方向导数,记作为  $\frac{\partial u}{\partial l}$ . 可见  $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial z}$  是  $u(P)$  沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$

方向的方向导数,且有关系式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial l} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

这就是方向导数的解析表示式,其中  $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$  为切线  $l$  的方向余弦. 场  $u(P)$  在某点  $P$  上沿不同方向具有不同的方向导数值,即沿不同方向其变化率不同. 由此引出了最大变化率即梯度的概念.

### 1.1.2 梯度

引入矢量  $\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$ , 并记之为  $\text{grad } u$  或  $\Delta u$ , 设  $l$  方向上单位矢量为  $L$ , 即

$$\mathbf{L} = \cos\alpha \mathbf{i} + \cos\beta \mathbf{j} + \cos\gamma \mathbf{k} \quad (1.1.3)$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\Delta u) \cdot \mathbf{L} = \Delta_l u \quad (1.1.4)$$

上式表明数量场  $u(P)$  在任一点  $P$  处沿任一方向  $l$  的方向导数是矢量  $\Delta u$  在该方向上的投影. 由此可知,当  $l$  的方向与  $\Delta u$  的方向重合时,方向导数  $\frac{\partial u}{\partial l}$  值为最大. 由此得出结论:矢量  $\Delta u$  的方向是使  $u(P)$  在  $P$  点上方向导数最大的方向,而  $\Delta u$  的模就是最大的方向导数值. 矢量  $\Delta u$  就称为数量场  $u(P)$  在  $P$  点的梯度.

梯度与等位面的关系: 由于在等位面上  $u(P)$  为常量,故有  $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ , 即  $(\Delta u) \cdot \mathbf{L} = 0$ .

$= 0$ . 可见, 梯度  $\Delta u$  垂直于等位面的切平面, 即梯度  $\Delta u$  与等位面的法线平行.

**结论** 场  $u(P)$  在  $P$  点的梯度  $\Delta u$  具有如下性质:

$$(1) \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \Delta u \text{ 为矢量.}$$

(2)  $\Delta u$  的方向沿着过  $P$  点的等位面之法线方向 (一般指向为  $u(P)$  的增加方向).

(3)  $\Delta u$  的大小即为沿等位面法线方向的方向导数值, 也是  $P$  点的最大方向导数值.

引入

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.1.5)$$

称之为哈密顿 (Hamilton) 算子. 它既是一个微分算子, 又是一个矢量, 故也称之为矢性微分算子.

### 1.1.3 散度

散度是针对矢量场而言的. 首先引入流量概念: 对任意矢量场  $\mathbf{A}(P)$ , 称式

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} ds \quad (1.1.6)$$

为通过封闭曲面  $S$  的流量. 其中  $\mathbf{N}$  是曲面  $S$  的外法线方向单位矢量.

设场  $\mathbf{A}(P)$  是一个稳定的不可压缩的流体流速场, 这样, 在任一时刻内在曲面  $S$  中储藏的流体量保持不变, 通过封闭曲面  $S$  的净流量也不变.

(1) 当  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$  时, 曲面  $S$  内无沟也无源.

(2) 当  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} > 0$  时, 曲面  $S$  内有源.

(3) 当  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} < 0$  时, 曲面  $S$  内有沟.

设封闭曲面  $S$  包围的体积  $V$  中只有源, 则  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} > 0$  表示由曲面  $S$  内的源所发出的液量, 亦即表示源的强弱. 而  $\left[ \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] / V$  表示单位体积内的源所发出的液量大小, 即表示  $V$  中源的平均强度. 当曲面以任意方式压缩成点  $P$  时, 上式之极限即表示点  $P$  处源的强度, 称之为矢量  $\mathbf{A}$  在  $P$  点的散度, 记作  $\text{div} \mathbf{A}$  或  $\Delta \cdot \mathbf{A}$ .

散度定义

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{D(V) \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{V} \quad P \in V \quad (1.1.7)$$

由定义知散度是一个数量场,其值仅与点  $P$  的位置有关,而与坐标系统选择无关. 在直角坐标系中有

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \Delta \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.1.8)$$

其中

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

散度有如下两个基本性质:

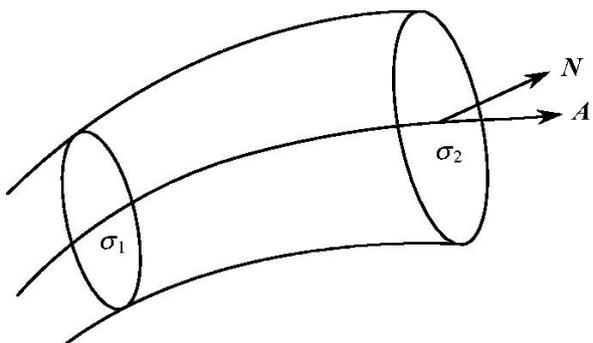


图 1.1.2 管量场中的矢量管

$$(1) \Delta \cdot (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \Delta \cdot \mathbf{A} + \beta \Delta \cdot \mathbf{B} \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$

$$(2) \Delta \cdot (u \mathbf{A}) = u \Delta \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \Delta u \quad (u \text{ 为数量场}).$$

若在矢量场  $\mathbf{A}(P)$  中处处有  $\Delta \cdot \mathbf{A} = 0$ , 则称  $\mathbf{A}(P)$  为无源场或管量场. 在管量场中, 通过由力线构成的矢量管上任两个截面  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的通量(流量)是一个定值, 此流量称矢量管的强度(图 1.1.2).

### 1.1.4 旋度

对于具有通量源的矢量场, 可以用通量及散度 ( $\operatorname{div}$ ) 表示, 而对于具有旋涡源的矢量场, 则可以用环流量及旋度 ( $\operatorname{rot}$ ) 表示(图 1.1.3). 引入环流及环流密度的概念.

环流——在矢量场  $\mathbf{A}(P)$  中, 矢量  $\mathbf{A}$  沿封闭曲线  $\Gamma$  路径的线积分  $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} A \cos \theta dl$ , 称之为矢量  $\mathbf{A}$  沿  $\Gamma$  曲线的环流量. 对于具体的场, 环流量有其具体的意义, 例如  $\mathbf{A}$  为力场, 则  $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  是力沿封闭曲线  $\Gamma$  所做的功.

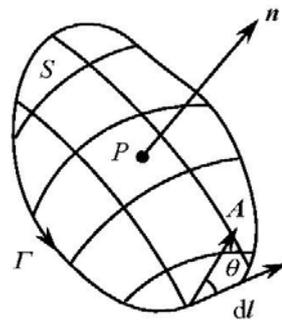


图 1.1.3 环流及旋度

环流密度——矢量场中给定一点  $P(x, y, z)$ , 通过  $P$  点有一小曲面  $S$ , 边界为

$\Gamma$ , 法线为  $\mathbf{n}$ , 则  $\frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{S}$  表示了在此面积上环流的平均值. 当曲面  $S$  按任意方式

缩成一点时, 若上式的极限存在, 则称之为场  $\mathbf{A}$  在  $P$  点在  $\mathbf{n}$  方向上的环流密度

$$W_n(P) = \lim_{D(S) \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{S} \quad P \in S \quad (1.1.9)$$

环流密度  $W_n(P)$  不仅与点  $P$  的位置有关, 还与法线  $\mathbf{n}$  的方向有关. 同一点  $P$  上不同方向上的环流密度是不同的. 其中使场  $\mathbf{A}$  在该点具有最大环流密度的方向即为旋度的方向, 而其最大环流密度的模即为该点旋度的模, 由此定义旋度. 它是一个矢量, 记作  $\text{rot } \mathbf{A}$  或  $\Delta \times \mathbf{A}$ .

$$\text{rot } \mathbf{A} = \Delta \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.1.10)$$

设  $\mathbf{N} = \cos\alpha \mathbf{i} + \cos\beta \mathbf{j} + \cos\gamma \mathbf{k}$  是曲面法线  $\mathbf{n}$  的单位矢量, 则可以由斯托克斯公式证明

$$\begin{aligned} (\Delta \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{N} &= \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos\beta + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = W_n(P) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

由此可见,  $\mathbf{n}$  方向上的环流密度是旋度  $\Delta \times \mathbf{A}$  在该方向上的投影.

**结论** 矢量场  $\mathbf{A}(P)$  在  $P$  点的旋度  $\Delta \times \mathbf{A}$  具如下性质:

$$(1) \Delta \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \Delta \times \mathbf{A} \text{ 是矢量.}$$

(2)  $\Delta \times \mathbf{A}$  的方向是该点环流密度最大的方向.

(3)  $\Delta \times \mathbf{A}$  的大小即为该点最大环流密度值.

旋度的基本性质:

$$(1) \Delta \times (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \Delta \times \mathbf{A} + \beta \Delta \times \mathbf{B} \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数})$$

$$(2) \Delta \times (u\mathbf{A}) = u\Delta \times \mathbf{A} + \Delta u \times \mathbf{A} \quad (u \text{ 为数量场})$$

### 1.1.5 势函数, 势量场

据前所述, 梯度  $\Delta u(P)$  是数量场  $u(P)$  的梯度场, 梯度场是矢量场. 例如, 若有温度场  $u(P)$ , 则梯度  $\Delta u(P)$  代表了各点温度变化最大的方向及大小, 即温度场的梯度场是矢量场. 实际中这类场是大量存在的.

**定义 1.2** 对于矢量场  $\mathbf{A}(P)$ , 如果存在单值函数  $u(P)$ , 使得  $\mathbf{A} = \Delta u$ , 则称  $\mathbf{A}(P)$  为势量场,  $u(P)$  称为势量场  $\mathbf{A}(P)$  的势函数. 用数学式表达为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.1.12)$$

**定义 1.3** 设矢量  $\mathbf{A}$  的三个分量  $A_x$ 、 $A_y$ 、 $A_z$  在单连通域  $D$  中连续且具有连续偏导数,则在  $D$  中以下断语相当:

- (1)  $\mathbf{A}$  是一个势量场,又称保守场.
- (2)  $\Delta \times \mathbf{A} = 0$ ,  $\mathbf{A}$  必是无旋场(因为  $\Delta \times \Delta u \equiv 0$ ).
- (3)  $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 回路积分为零.
- (4)  $\int_{\Gamma_1}^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma_2}^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ , 线积分  $\int_{\Gamma}^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  与路径无关.
- (5) 势量场  $\mathbf{A}$  的势函数  $u$  为保守函数.

例如,重力场、静电场均为势量场.点电荷产生的电场强度  $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \cdot \mathbf{r}$ . 可以证明具有这种中心场形式的场  $\mathbf{A} = f(r) \cdot \mathbf{r}$  必为势量场,或称保守场.

对于无旋场  $\mathbf{A}$ ,它的势函数  $u$  是标量,故又称  $u$  是矢量场  $\mathbf{A}$  的标势.对于无源场,必有  $\Delta \cdot \mathbf{B} = 0$ ,故可定义一个矢势  $\mathbf{A}$ ,使得  $\mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A}$ ,由于  $\Delta \cdot (\Delta \times \mathbf{A}) = 0$ ,故对任一无源场必存在一矢势  $\mathbf{A}$ .

标势(无旋场)	矢势(无源场)
$\Delta \times \Delta u = 0$	$\Delta \cdot (\Delta \times \mathbf{A}) = 0$
$\mathbf{A} = \Delta u \rightarrow \Delta \times \mathbf{A} = 0$	$\mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A} \rightarrow \Delta \cdot \mathbf{B} = 0$
$u$ 为 $\mathbf{A}$ 的标势	$\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{B}$ 的矢势

有关时变电磁场的动态标势及矢势将在有源波动方程一节中详细讨论.

## 1.2 静电场、静磁场基本定律

### 1.2.1 静电场

#### 1. 库仑定律

两点电荷带电量为  $q_1$ 、 $q_2$ ,相距为  $r$ ,则电荷 1 对电荷 2 的作用力为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \mathbf{n} \quad (1.2.1)$$

式中,  $\mathbf{n}$  为  $r$  的单位矢量;  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  法拉/米(F/m);  $\epsilon_r$  为相对介电常数.

作用力叠加原理:  $i$  个点电荷作用在第  $j$  个电荷上的作用力为

$$\mathbf{F}_j = \sum_i \mathbf{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \sum_i \frac{q_i q_j}{(r_{ij})^2} \cdot \mathbf{r}_{ij0} \quad (1.2.2)$$

式中,  $r_{ij}$  为第  $i$  个电荷到第  $j$  个电荷的距离;  $\mathbf{r}_{ij0}$  是  $\mathbf{r}_{ij}$  的单位矢量.

当电荷为连续分布时,设电荷密度为  $\rho(\mathbf{r})$ ,则体电荷对电荷  $q_j$  的作用力为

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_V \frac{q_j \cdot \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_{j0}}{r_j^2} dv \quad (1.2.3)$$

式中,  $r_j$  为体元  $dv$  到  $q_j$  的距离;  $\mathbf{r}_{j0}$  为  $\mathbf{r}_j$  的单位矢量.

## 2. 电场

从场的观点出发则认为,  $F_{21}$  是由  $q_1$  产生静电场对点电荷  $q_2$  产生的电场力. 由  $q_1$  产生的电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}|^2} \quad (1.2.4)$$

则  $q_2$  在电场  $\mathbf{E}_1$  中所受的电场力为

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot q_2 \quad (1.2.5)$$

电场叠加原理: 由  $i$  个点电荷产生的合电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \cdot \sum_i \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (1.2.6)$$

由体电荷产生的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} \cdot dv \quad (1.2.7)$$

其中  $\mathbf{r}'$  为体元到场内任一点  $P$  的距离矢量,  $\mathbf{r}$  为任一点  $P(x, y, z)$  的位置矢量.

## 3. 高斯定理

通过闭合曲面  $S$  的总电通量  $\Phi_e$  等于曲面  $S$  所包围的电荷总量  $Q$ , 即

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i q_i = Q \quad (1.2.8)$$

高斯定理的微分形式可由取极限求得

$$\lim_{D(V) \rightarrow 0} \left[ \oint_S \frac{\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{V} \right] = \lim_{D(V) \rightarrow 0} \left[ \frac{Q}{V} \right] \quad (1.2.9)$$

得到微分形式

$$\Delta \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.2.10)$$

## 4. 静电场的场特性

(1) 由  $\Delta \cdot \mathbf{D} = \rho$  得, 静电场散度为  $\rho$ , 静电场是有源场, 源的强度与该点电荷密度有关.

(2) 静电场是中心场, 故  $\Delta \times \mathbf{E} = 0$ , 即静电场是无旋场, 沿闭合曲线一周电场力做功为零. 电场力做功仅与起止点位置有关.

(3) 静电场是保守场,故存在一势函数,即电势. 定义  $\mathbf{E} = \Delta(-u)$ , 由  $\Delta \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$  可得

$$\Delta^2 u = -\rho/\varepsilon \quad (1.2.11)$$

这就是电势  $u$  的泊松方程. 在自由体电荷密度  $\rho=0$  的区域内, 上式变为

$$\Delta^2 u = 0 \quad (1.2.12)$$

这就是电势  $u$  的拉普拉斯方程.

所有静电场问题都可以归结为求解泊松方程或拉普拉斯方程的问题. 在已知电荷密度分布  $\rho(\mathbf{r})$  (或  $\rho=0$ ), 并已知边界条件下, 求得相应方程的解  $u(\mathbf{r})$ , 便可求得全空间的电场分布  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . 有关静电场的各种解法在此不作详细讨论.

## 1.2.2 静磁场

### 1. 电流、电荷、连续性方程

(1) 电流密度  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{V}$ , 表示单位时间穿过单位面积的电量, 单位为  $\text{C/s} \cdot \text{cm}^2$ .  $\mathbf{V}$  为电荷流动速度 ( $\text{cm/s}$ ).

(2) 电流强度  $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ , 表示单位时间内垂直穿过导线截面  $S$  的电量, 单位为  $\text{C/s}$ .

(3) 电荷守恒, 连续性方程.

取一封闭曲面  $S$ , 单位时间内穿出  $S$  流走的电量等于  $S$  曲面内单位时间内减少的电量, 这就是电荷守恒定律, 即

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{-\partial\rho}{\partial t} dv \quad (1.2.13)$$

$V$  为封闭曲面  $S$  所围的体积. 若取  $V \rightarrow 0$ , 得到微分形式的连续性方程

$$\Delta \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (1.2.14)$$

### 2. 微分形式欧姆定律

由欧姆定律  $I = V/R$ ,  $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}$ , 其中  $\sigma$  为电导率, 可得微分形式的欧姆定律

$$|\mathbf{J}| = \frac{I}{S} = \frac{V/\left[\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}\right]}{S}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (1.2.15)$$

### 3. 毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律

如图 1.2.1 所示, 由电流强度为  $I$  的载流导线产生的磁场  $\mathbf{B}$  可由毕奥-萨伐

尔-拉普拉斯定律求得

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}|^2} \quad (1.2.16)$$

式中,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  亨利/米(H/m), 为真空中的磁导率;  $|\mathbf{r}|$  为线元  $d\mathbf{l}$  到该点的距离;  $\mathbf{r}_0$  为  $\mathbf{r}$  的单位矢量.

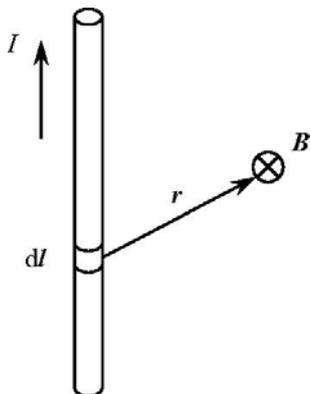


图 1.2.1 载流导线产生的磁场

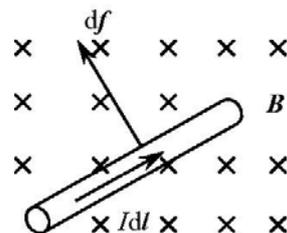


图 1.2.2 载流导线在磁场中受力

#### 4. 安培力公式

如图 1.2.2, 载流导线在磁场  $\mathbf{B}$  中受力可表示为

$$d\mathbf{f} = I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.2.17)$$

若磁场  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  是由图 1.2.1 中的载流导线  $L_1$  产生, 则载流导线  $L_2$  的线元  $d\mathbf{l}$  上受的磁场力可表示为

$$d\mathbf{f} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\mathbf{l} \times \int_{L_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (1.2.18)$$

#### 5. 磁通连续性原理——磁场中的高斯定理

通过闭合曲面  $S$  的磁通量为零, 即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1.2.19)$$

或以微分形式

$$\Delta \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.20)$$

表示磁场是无源场, 不存在“磁荷”, 磁力线是无头无尾的闭合曲线.

#### 6. 安培环路定律(图 1.2.3)

设有一闭合曲线  $L$ , 被其环住的电流为  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , 它们产生的磁场为  $\mathbf{B}$ , 则

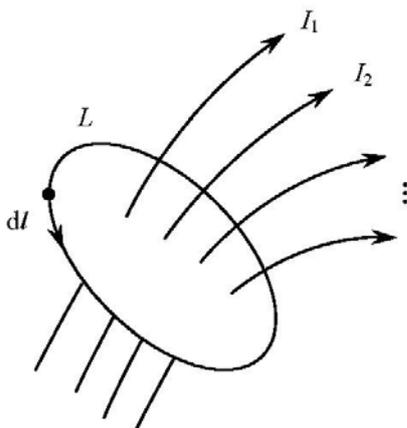


图 1.2.3 安培环路定律

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (1.2.21)$$

微分形式为

$$\Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.2.22)$$

表示磁场的旋度不为零,磁场是有旋场.由电流激发的磁场以涡旋形式出现,这是与静电场截然不同的场.

小结 静磁场的特性为:

(1) 静磁场为无源有旋场,磁力线闭合,无头无尾.

(2) 磁场为非保守场,电流激发磁场以涡旋形式出现.

(3) 由  $\Delta \cdot \mathbf{B} = 0$ , 因为有  $\Delta \cdot (\Delta \times \mathbf{A}) \equiv 0$ , 故存在着磁场矢势  $\mathbf{A}$ , 有

$$\mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A}$$

## 1.3 时变电磁场

在导电媒质中,静电场和静磁场可以同时存在而构成静态电磁场.这时由静电场形成恒稳电流的流动,继而又由恒稳电流激励起静磁场.静磁场只是一种结果,它并不出现在电场的计算中.因此,在静态情况下,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{D}$  与静磁场中的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  是相互独立的矢量对,它们互不相关.

但当电场或磁场随时间而变化,即为时变电磁场的情况下,变化的电场可以激励出时变的磁场,而时变的磁场又可激励出时变电场.这时电场矢量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{D}$  与磁场矢量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  之间就存在着一定的相互联系.这一联系是以法拉第电磁感应定律为基础的.在此基础上引入位移电流概念之后对安培环路定律进行修正,最终导出了描写时变电磁场变化规律的麦克斯韦方程组.

### 1.3.1 法拉第电磁感应定律

变化的磁场可以在闭合回路  $L$  中产生感生电动势  $\varepsilon$

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3.1)$$

式中,  $\Phi$  为磁通量.

而另一方面,在闭合回路  $L$  中,感生电动势可以通过电场强度  $\mathbf{E}$  沿闭合回路的积分求得

$$\varepsilon = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3.2)$$

由式(1.3.1)、式(1.3.2)得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3.3)$$

取微分形式,得

$$\Delta \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3.4)$$

由此引入了一个“涡旋电场”的概念:与静电场不同,当磁场为时变的情况时, $\Delta \times \mathbf{E}$ 不再为零,此时产生的电场不再是无旋场,而是可以有涡旋的,封闭回路  $L$  中  $\mathbf{E}$  的线积分即环流量不再为零. 这是时变电、磁场与静电、磁场的主要区别之一.

### 1.3.2 全电流定律,位移电流的引入

如图 1.3.1 所示回路,交流电源交变地对电容器充放电. 如图虚线所示作一封闭曲面  $S$  将电容器的一块平板包围在里面. 倘若 1.2 节中的安培环路定律在现在的时变情况下仍然成立,则由式(1.2.22)有

$$\Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.3.5)$$

式中,  $\mathbf{B}$  为导线上电流产生的磁感强度;  $\mathbf{J}$  为导线上传导电流密度,在下面暂记为  $\mathbf{J}_c$ . 这时,由恒等式  $\Delta \cdot (\Delta \times \mathbf{B}) \equiv 0$ , 必有  $\Delta \cdot (\mu_0 \mathbf{J}_c) = 0$ , 即  $\Delta \cdot \mathbf{J}_c = 0$ , 但另一方面从

连续性方程知  $\Delta \cdot \mathbf{J}_c = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$ . 在现在时变的

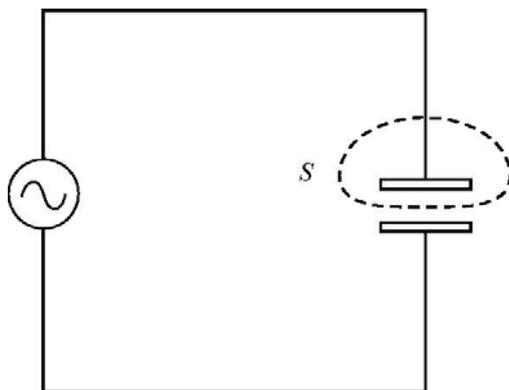


图 1.3.1 全电流定律

情形下,封闭曲线  $S$  内的电荷密度  $\rho$  显然是随时间在变化的,即  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ , 这就与连续性方程发生了矛盾. 因此必须修改安培环路定律,使之适合于时变电磁场的情况.

由连续性方程  $\Delta \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , 设想由变化的电场产生一个位移电流  $\mathbf{J}_d$ , 使得

$$\Delta \cdot (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d) = 0 \quad (1.3.6)$$

这里暂把  $\mathbf{J}_c$  记为传导电流,以区别于位移电流  $\mathbf{J}_d$  及总电流密度  $\mathbf{J}$ .

将式(1.3.6)与连续性方程比较,且假设静电场中的高斯定理此处仍成立,则有

$$\Delta \cdot \mathbf{J}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

故有位移动电流

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.3.7)$$

这样,安培环路定律在时变电磁场情况下就变成了如下形式

$$\Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D) = \mu_0 \mathbf{J}_c + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.3.8)$$

式中,  $\mathbf{J}_c$  为传导电流密度;  $\mathbf{J}_D$  为位移电流密度;  $\mathbf{J}$  为总电流密度. 而通常为简便起见,把传导电流  $\mathbf{J}_c$  简记为  $\mathbf{J}$ ,这样便得时变电磁场中的全电流定律

$$\Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.3.9)$$

## 1.4 真空中的麦克斯韦方程组

至此,麦克斯韦在总结了这些电磁学基本定律的基础上,得到了一组完美的描写时变电磁场基本规律的数学表达式,即麦克斯韦方程组.

微分形式

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (1) \text{ 法拉第电磁感应定律} \\ \Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (2) \text{ 全电流定律} \\ \Delta \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 & (3) \text{ 高斯定理} \\ \Delta \cdot \mathbf{B} = 0 & (4) \text{ 磁场高斯定理} \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

其相应的积分形式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (2) \quad (1.4.2)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q / \varepsilon_0 \quad (3)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0 \quad (4)$$

以上为真空中的麦克斯韦方程组. 与之相应的真空中物质方程为

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} & (1) \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} & (2) \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} & (3) \end{array} \right. \quad (1.4.3)$$

在真空中  $\sigma = 0$ , 因此真空中无传导电流. 由式(1.4.1)可见,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  为电磁场的两

个最初基本量.

## 1.5 介质中的麦克斯韦方程组

当传播空间充满介质时,由于介质在电场及磁场中将发生极化及磁化,使麦克斯韦方程组相对于真空时将作相应的变化.以下将从物质的微观结构、介质的极化和磁化出发导出介质中的麦克斯韦方程组.

### 1.5.1 介质的极化、极化电荷、极化电流

在外加电场  $\mathbf{E}$  的作用下,介质的分子被极化;无极分子则其正负电荷中心在外场  $\mathbf{E}$  作用下被拉开  $l$  距离而形成偶极子,有极分子则在  $\mathbf{E}$  作用下重新趋向而与  $\mathbf{E}$  方向更趋一致.无论何种极化均会在介质中产生剩余电荷.当电场是均匀时,若介质是均匀的,则在界面上产生剩余电荷;若介质是不均匀的,或介质均匀而电场不均匀,则会在介质内部产生剩余电荷.这种剩余体电荷就叫作束缚电荷,它与自由电荷不同.束缚电荷是由外加电场在介质中产生极化引起的,它们是被束缚的,不能在物质内部穿行,唯一可能的运行就是正负电荷朝着相反的方向作位移,位移量一般比原子的尺度还小,极化分子具有感生偶极矩,这些偶极矩又产生它们自己的电场,叠加在外加电场之上,使介质中的电场与真空中情况不同.这时麦克斯韦方程组中的第三式的电荷密度  $\rho$  应当包括自由电荷与束缚电荷两项,即

$$\Delta \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} \quad (1.5.1)$$

式中,  $\rho_p$  代表束缚电荷,它与介质的极化有关.可以证明有下式成立

$$\rho_p = -\Delta \cdot \mathbf{P} \quad (1.5.2)$$

此外  $\mathbf{P}$  为介质的极化强度,它表示了在某一体元  $\Delta V$  内的分子偶极矩的平均值

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (1.5.3)$$

其中分子偶极矩

$$\mathbf{p}_i = q_i \mathbf{l} \quad (1.5.4)$$

综上所述,外电场对介质极化造成了偶极子,而偶极子的存在又在介质中形成了束缚电荷.

式(1.5.2)证明:取介质中由封闭曲面  $S$  包围的体积  $V$ ,由于极化及电场或介质的不均匀性,在  $V$  内造成了一定的剩余体电荷.从极化观点看,在  $V$  内剩余的负电荷总数应等于极化在  $S$  界面上穿出  $S$  曲面的正电荷数.设  $V$  中剩余电荷密度为  $\rho_p$ ,则  $V$  内总剩余负电荷总量为  $-\int_V \rho_p \cdot dV$ . 穿出  $S$  曲面的正电荷量可如此求出:作一小体元  $dV$ ,使其长度正好等于偶极子长

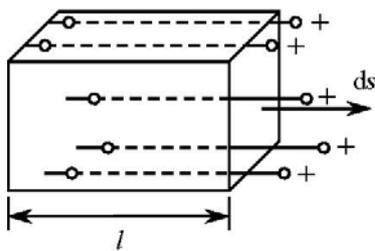


图 1.5.1 小体元中的偶极子

度  $l$ , 方向则以与电场方向相同为正, 其端面正好落在  $S$  曲面上, 端面面积为  $ds$ , 其法线方向向外为正 (图 1.5.1). 则在此小体元中, 在外场  $\mathbf{E}$  作用下偶极子穿出面元  $ds$  的正电荷量为  $nql \cdot ds$ , 其中  $n$  为单位体积内的分子数,  $q$  为每个偶极子所带的正 (或负) 电荷量. 因此, 穿出  $S$  曲面净正电荷总量为  $\oint_S nql \cdot ds$ , 积分中的矢积已考虑了  $l$  与  $ds$  的方向. 故得到的为净的正电荷数.  $V$  内剩余负电荷数与穿出  $S$  面

正电荷数相等, 则有

$$\oint_S nql \cdot ds = - \int_V \rho_p dv$$

而上式左端积分号内  $nql$  正是极化强度  $\mathbf{P}$ , 故证得

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot ds = - \int_V \rho_p dv$$

取其微分形式, 得到

$$\rho_p = - \Delta \cdot \mathbf{P}$$

证毕.

将式 (1.5.2) 代入式 (1.5.1), 得

$$\epsilon \Delta \cdot \mathbf{E} = \rho_p + \rho_f = \rho_f - \Delta \cdot \mathbf{P}$$

或写作

$$\Delta \cdot (\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \tag{1.5.5}$$

令  $\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}$ , 且把上式中自由电荷密度  $\rho_f$  简记为  $\rho$ , 则有

$$\Delta \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{1.5.6}$$

这就是介质中的高斯定理.

当电场较弱时, 电场与极化成线性关系, 可表示为

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{1.5.7}$$

其中  $\chi$  为电极化率. 将式 (1.5.7) 代入式 (1.5.6) 得

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} + \epsilon \chi \mathbf{E} = \epsilon (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \tag{1.5.8}$$

$$\Delta \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ 或 } \Delta \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \tag{1.5.9}$$

上式即为介质中的麦克斯韦方程的第三方程, 其中

$$\epsilon = \epsilon \epsilon_r \tag{1.5.10}$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

$\epsilon$  为相对介电常数, 它包含了介质的极化. 要注意式 (1.5.9) 中的  $\rho$  是指自由电荷, 而电极化引起的束缚电荷已包括在极化项  $\mathbf{P}$  中, 即包括在电位移矢量  $\mathbf{D}$  中了.

下面再讨论极化电流. 当外加电场随时间而发生变化时, 介质的极化强度  $\mathbf{P}$  也发生变化. 可以设想为偶极子的距离  $l$  即偶极距  $\mathbf{p}$  随时间而变, 这样必相应于

一个电流,其电流密度为  $\mathbf{J}_p$ ,求法如下.

总极化强度  $\mathbf{P} = [\sum_i q_i \mathbf{l}_i] / \Delta V$ ,它随时间变化

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sum_i q_i \mathbf{l}_i}{\Delta V} = \frac{\sum_i q_i \mathbf{v}}{\Delta V} = \mathbf{J}_p \quad (1.5.11)$$

上式右端表示了单位体积、单位时间内流过的电荷量,即电流密度,这一电流是极化引起的.故得极化电流密度

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (1.5.12)$$

### 1.5.2 介质的磁化,磁化电流

在外磁场作用下,由于分子电流取向更有规律,形成宏观的磁化电流.极化电流和磁化电流的产生,使得麦克斯韦方程组中的第二方程中电流密度  $\mathbf{J}$  除了包括传导电流外,还应包括极化电流与磁化电流.

磁化电流与介质的磁化有如下关系

$$\mathbf{J}_M = \Delta \times \mathbf{M}$$

**证明** 考察在磁场  $\mathbf{B}$  中由封闭曲线  $L$  围住的一介质面积  $S$ ,当场不均匀时,在  $S$  面内穿入与穿出的分子电流数不等,故通过该  $S$  面的净电流密度不为零,此值即为磁化电流密度.其中被边界  $L$  环链的净分子总电流和(矢量和)即为从  $S$  面背面流向前面的电流  $I_M$ ,而在  $L$  内部未被  $L$  环链住的分子电流其流入与流出电流总和为零.

被  $L$  环链的分子电流矢量和可用类似于求束缚电荷时的考虑方法求得:在边界  $L$  上作一小柱体,其截面积正好等于分子电流圈面积  $a$ ,其轴线正落在边界  $L$  上,长度为  $d\mathbf{l}$ ,则只要分子电流圈中心落在柱体内的这些分子电流必环链住边界  $L$ ,它们就都对磁化电流有贡献.设介质内单位体积中分子个数为  $n$ ,则由这一小柱体中所有分子电流环链  $L$  的总电流为  $nia \cdot d\mathbf{l}$ ,其中  $i$  为分子电流,矢量积表示净的流出电流(图 1.5.2).对封闭曲线  $L$  作线积分,求得与整个边界  $L$  曲线环链的总分子电流值为

$$I_M = \oint_L nia \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5.13)$$

$I_M$  就是通过截面  $S$  的总磁化电流强度,它在数值上应等于在此  $S$  面上对磁化电流密度的积分,故有

$$\oint_L nia \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{s} \quad (1.5.14)$$

而上式左端又可改写为

$$\oint_L nia \cdot d\mathbf{l} = \oint_L nm \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5.15)$$

其中  $\mathbf{M}$  为磁化强度

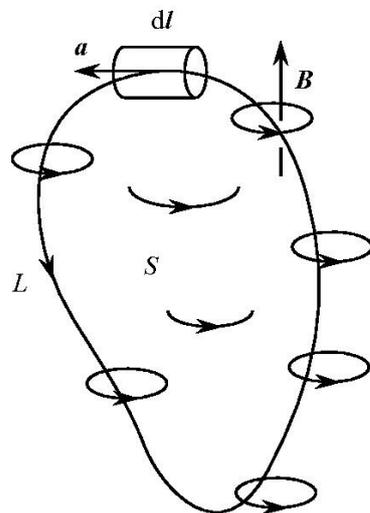


图 1.5.2 分子电流圈与磁化电流

$$\mathbf{M} = \left[ \sum_i \mathbf{m}_i \right] / \Delta V = \frac{\sum_i i_i \mathbf{a}_i}{\Delta V} \quad (1.5.16)$$

比较式(1.5.14)与式(1.5.15)得

$$\int_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\text{①}}{=} \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5.17)$$

写成微分形式

$$\mathbf{J}_M = \Delta \times \mathbf{M} \quad (1.5.18)$$

证毕.

综上所述,外磁场对介质产生磁化,造成了磁偶极子,而磁化的结果形成了磁化电流  $\mathbf{J}_M$ .

将极化电流  $\mathbf{J}_P$  式(1.5.12)与磁化电流  $\mathbf{J}_M$  式(1.5.18)代入真空中的麦克斯韦方程组(1.4.1)中的(2)

$$\Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

此时式中  $\mathbf{J}$  应包括了传导电流密度  $\mathbf{J}_c$ 、极化电流密度  $\mathbf{J}_P$ 、磁化电流密度  $\mathbf{J}_M$ , 即

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M \quad (1.5.19)$$

即得

$$\begin{aligned} \Delta \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left[ \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \Delta \times \mathbf{M} \right] + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

将上式整理,得

$$\Delta \times \left[ \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right] = \mathbf{J}_c + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E}) \quad (1.5.21)$$

令

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \mathbf{H} \quad (1.5.22)$$

且有  $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , 并将传导电流  $\mathbf{J}_c$  简记为  $\mathbf{J}$ , 则得

$$\Delta \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.5.23)$$

这就是介质中的全电流定律, 其中的  $\Delta \times \mathbf{H}$  项中包含了磁化电流,  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  项中包含了极化电流及位移电流项, 而  $\mathbf{J}$  则只代表了传导电流. 这也正是介质中的麦克斯韦方程组的第二方程.

### 1.5.3 介质中的麦克斯韦方程组及物质方程

综合上述讨论,至此可以写出介质中的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (1) \\ \Delta \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & (2) \\ \Delta \cdot \mathbf{D} = \rho & (3) \\ \Delta \cdot \mathbf{B} = 0 & (4) \end{cases} \quad (1.5.24)$$

采用国际单位制(SI)时,传导电流密度  $\mathbf{J}$  的单位为安培/米<sup>2</sup> (A/m<sup>2</sup>),自由电荷密度  $\rho$  的单位为库仑/米<sup>2</sup> (C/m<sup>2</sup>).同时得到了电磁场对材料介质作用的关系式,即物质方程(或称本构方程)

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (1.5.25)$$

麦克斯韦方程及物质方程描写了整个电磁场空间及全时间过程中电磁场的分布及变化情况.在这组方程中包含了下列参数

$$\begin{cases} \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H} & \text{电场、磁场} \\ \Delta \left[ \text{即 } \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] & \text{场空间分布情况} \\ t \left[ \text{及 } \frac{\partial}{\partial t} \right] & \text{时间变化情况} \\ \rho, \mathbf{J}, \epsilon, \mu & \text{场中介质特性} \end{cases}$$

因此,所有关于电磁波的产生及传播问题,均可归结到在给定的初始条件和边界条件下求解麦克斯韦方程组的问题,这也正是本书用以解决光波在各种介质、各种边界条件下传播问题的关键及核心.

#### 1.5.4 电磁性质的本构关系及各类物质的参数特征

为了清楚地表示电磁性质的本构关系,将其列于表 1.5.1 中.

表 1.5.1 电磁性质的本构关系

电场、极化	磁场、磁化
偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$	磁偶极矩 $\mathbf{M} = i\mathbf{a}$
极化强度 $\mathbf{p} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}$	磁化强度 $\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V}$
线性关系 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$	线性关系 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$
电极化率 $\chi_e$	磁化率 $\chi_m$

续表

电场、极化	磁场、磁化
电感强度 $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E$ $= \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E$ 相对介电常数 $\epsilon_r = 1 + \chi_e$	磁场强度 $B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 H + \mu_0 \chi_m H = \mu_0 (1 + \chi_m) H$ $= \mu_0 \mu_r H = \mu H$ 相对磁介常数 $\mu_r = 1 + \chi_m$

表 1.5.1 说明:

(1) 在高频电磁场中, 电磁场随时间变化极快, 以致极化和磁化跟不上场的变化而减小. 此时, 电极化率  $\chi_e$  或介电常数  $\epsilon$ 、磁化率  $\chi_m$  或磁介常数  $\mu$  均为场变化频率  $\omega$  的函数, 即

$$\epsilon = \epsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega)$$

(2) 铁电、铁磁物质在电磁场中不再呈线性极化及磁化.

(3) 强光(电磁场)作用下介质将出现非线性极化.

表 1.5.2 归纳了各类物质的参数特征以及变化趋势.

表 1.5.2 各类物质的参数特征

	真空	介质		半导体 (不良导体)	导体 (非完纯导体)	理想导体 (完纯导体)
		理想介质	电介质			
电导率 $\sigma$	$\sigma = 0$	$\sigma = 0$	$\sigma \neq 0$	$\sigma \neq 0$ 渐大	$\sigma \neq 0$ , 大	$\sigma = \infty$
相对介电常数 $\epsilon_r$	$\epsilon_r = 1$	$\epsilon_r \neq 1$				
相对磁导率 $\mu_r$	$\mu_r = 1$	$\mu_r \neq 1$				
传导电流 $J_c$	$J_c = 0$	$J_c = 0$	$J_c$ 小	$J_c$ 渐大	$J_c$ 大	只有 $J_c$
位移电流 $J_D$	—	只有 $J_D$	$J_D$ 大	$J_D$ 渐小	$J_D$ 小	$J_D = 0$

表 1.5.2 说明:

(1) 对于像玻璃、空气等光学介质, 可近似为理想介质, 其光学吸收近似为零. 这是因为对理想介质有  $\sigma = 0$ , 光波(电磁波)通过介质时无传导电流, 故没有焦耳热损耗, 即没有吸收. 而对于任何  $\sigma \neq 0$  的实际介质, 光波通过介质时都会有传导电流产生, 必伴随有焦耳热损耗, 这时就有吸收存在.

(2) 介质中传导电流  $J_c$  大大小于位移电流  $J_D$ , 而在半导体中  $J_c$  与  $J_D$  几近相等, 在导体中传导电流显著地大于位移电流. 若是理想导体, 只存在传导电流而没有位移电流.

(3)  $\mu_r \neq 1$  的物质叫磁性物质. 当  $\mu_r \geq 1$  时为顺磁物质, 如锰、铬、氮、氧等,  $\mu_r \leq 1$  时为逆磁物质, 如金、银、铜、水、氢、氯等. 而当  $|\mu_r| \gg 1$  时则为铁磁物质, 如铁、镍、钴、钆等.

### 1.5.5 不同介质中物质方程的表示

#### 1. 均匀、各向同性介质

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

此处  $\varepsilon, \mu$  均为常数.

#### 2. 非均匀、各向同性介质

此时  $\varepsilon(\mathbf{r})$ 、 $\mu(\mathbf{r})$  均为  $\mathbf{r}$  的函数, 但对某一定点的  $\varepsilon, \mu$  值则是各向等值的.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.5.26)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

#### 3. 均匀、各向异性介质

此时  $\varepsilon$  为一张量, 但不是  $\mathbf{r}$  的函数

$$\mathbf{D} = [\varepsilon_{ij}] \mathbf{E} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$\varepsilon_{ij}$  为二阶张量, 或写作

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (1.5.27)$$

式中,  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  为矢量  $\mathbf{D}$  的三个分量,  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$  为矢量  $\mathbf{E}$  的三个分量.

#### 4. 非均匀、各向异性介质

此时  $\varepsilon$  不仅是二阶张量, 而且又是  $\mathbf{r}$  的函数, 于是

$$\begin{pmatrix} D_1(\mathbf{r}) \\ D_2(\mathbf{r}) \\ D_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = [\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})] \begin{pmatrix} E_1(\mathbf{r}) \\ E_2(\mathbf{r}) \\ E_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (1.5.28)$$

#### 5. 强场作用下的非线性介质

在强场作用下, 非线性介质的极化强度  $\mathbf{P}$  不再与  $\mathbf{E}$  成线性关系, 而与之成非线性关系, 写为幂级数形式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 [\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \cdots] \quad (1.5.29)$$

式中,  $\chi^{(1)}$ 、 $\chi^{(2)}$ 、 $\chi^{(3)}$  分别为二阶、三阶、四阶张量电极化率.

## 1.6 电磁边界条件

在  $\epsilon$  和  $\mu$  均为连续的空间区域内, 麦克斯韦方程是可解的, 光学中往往处理由  $\epsilon$  和  $\mu$  表征的物理性质在一个或多个光滑表面上发生突变的情况. 在两介质之间光滑表面上一点, 在界面一边介质中的场矢量与界面另一边的场矢量可以由边界条件联系起来, 而边界条件可直接由麦克斯韦方程推出.

### 1.6.1 电磁场矢量在媒介分界面上的边界条件

由于两介质分界面上在某些情况下场矢量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  发生跃变, 因此这些量的导数往往不连续. 这时不能在界面上直接应用微分形式的麦克斯韦方程组, 而必须由积分形式的麦克斯韦方程组出发导出界面上的边界条件.

#### 1. 对于电场强度 $\mathbf{E}$ (电场矢量 $\mathbf{E}$ )

由介质中的麦克斯韦方程组(1.5.24)的第一方程, 写为积分形式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.6.1)$$

考虑由两种介质组成的界面(图 1.6.1). 假若取回路积分的路径为  $L$ , 这是一个环绕边界表面的长方形闭合回路, 两个长边分别位于区域 1 和 2, 且平行于界面, 边长为  $\Delta l$ , 高为  $\Delta h$ . 当取  $\Delta h \rightarrow 0$  时, 积分回路中二段  $\Delta h$  上的积分总贡献为零, 则式(1.6.1)积分式的左端为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1t} \cdot \Delta l - E_{2t} \cdot \Delta l = (E_{1t} - E_{2t}) \cdot \Delta l \quad (1.6.2)$$

在作积分时, 其中回路的两个  $\Delta h$  边段与  $E_t$  垂直, 矢积为零. 式(1.6.1)右端假设  $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$  在这一小范围内均匀的条件下为

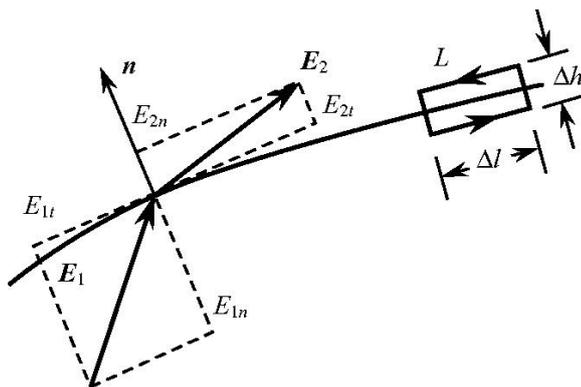
$$- \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta l \cdot \Delta h \quad (1.6.3)$$

令  $\Delta h \rightarrow 0$ , 上式的右边趋向于零, 这意味着长方形宽度无限小, 两个长边任意接近边界, 这时由式(1.6.2)与式(1.6.3)相等, 即得

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.6.4)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (1.6.5)$$

图 1.6.1 两种介质界面上,电场强度切向量  $E_t$  连续

可见,在两种介质界面上电场强度矢量的切向分量连续.

## 2. 对于磁场强度 $\mathbf{H}$ (磁场矢量)

将介质中的麦克斯韦方程组第二方程,写为积分形式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.6.6)$$

如图 1.6.2 取类似的积分回路  $L$ ,对于  $\mathbf{H}$  作回路积分,且考虑到当  $\Delta h \rightarrow 0$  时两段  $\Delta h$  上积分为零,可得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{1t} - H_{2t}) \Delta l \quad (1.6.7)$$

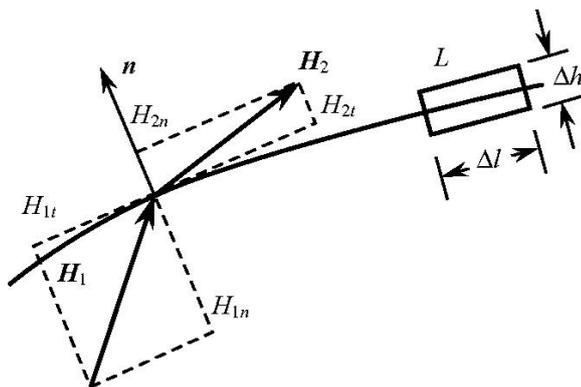


图 1.6.2 两种介质分界面上磁场强度关系

式(1.6.6)右端在假设小范围内  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  是均匀的,并设界面上的面传导电流的线密度为  $\alpha$ ,可得

$$I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \Delta l \cdot \alpha + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \Delta l \cdot \Delta h \quad (1.6.8)$$

当  $\Delta h \rightarrow 0$  时,有

$$H_{1t} - H_{2t} = \alpha \quad (1.6.9)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha \quad (1.6.10)$$

当界面上无传导电流时,  $\alpha = 0$ , 此时  $\mathbf{H}$  的切向分量连续; 否则其切向分量不连续.

### 3. 对于电位移矢量 $\mathbf{D}$

由介质中的麦克斯韦方程组第三方程, 写为积分形式

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad (1.6.11)$$

取一个如图 1.6.3 所示的围绕边界表面的小圆柱体, 高度为  $\Delta h$ , 底面积为  $\Delta S$ , 当使得  $\Delta h \rightarrow 0$  时圆柱体收缩为面, 上式积分中柱体侧面上的积分为零, 故有

$$(\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n}) \cdot \Delta \mathbf{S} = Q \quad (1.6.12)$$

令  $\Delta S \rightarrow 0$ , 可得极限情况

$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma \quad (1.6.13)$$

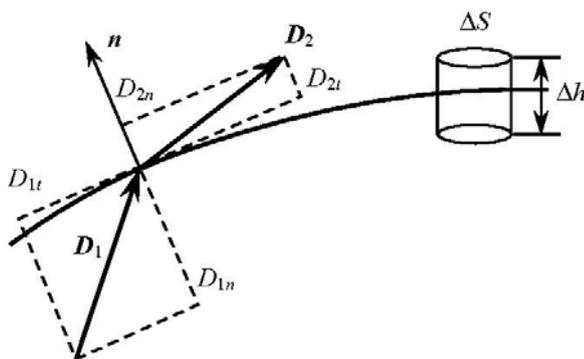


图 1.6.3 两种介质界面上的电位移矢量关系

当  $\Delta h \rightarrow 0$  时,  $\sigma$  为界面上的自由电荷面密度. 写成矢量形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (1.6.14)$$

### 4. 对于磁感应矢量 $\mathbf{B}$

由介质中麦克斯韦方程组第四方程, 写为积分形式

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1.6.15)$$

取类似于图 1.6.3 的小圆柱体  $S$ , 当使得圆柱体高  $\Delta h \rightarrow 0$  时, 上式积分中圆柱体侧面上积分为零, 可得上述积分式对于磁感应矢量  $\mathbf{B}$  的法向分量  $B_n$ , 有

$$(\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n}) \cdot \Delta \mathbf{S} = 0 \quad (1.6.16)$$

设  $\Delta S \rightarrow 0$ , 可得极限情况

$$B_n - B_{1n} = 0 \quad (1.6.17)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (1.6.18)$$

可见,  $\mathbf{B}$  矢量的法向分量在界面上连续.

在解光波(电磁波)在界面上的传播状况时均要利用这些边界条件.

### 1.6.2 两种无损耗媒介的分界面上的边界条件

在无损介质中电导率  $\sigma = 0$ , 故不可能存在传导电流而只可能有束缚电荷及位移电流. 因此在无损介质的界面上必有  $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ , 因此有  $\alpha = 0$ , 此时得到无损介质分界面上边界条件为

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, & B_{1n} &= B_{2n} \\ E_{1t} &= E_{2t}, & H_{1t} &= H_{2t} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.19)$$

在一般情况下, 实际媒质均有一点损耗, 即两种媒质的电导率  $\sigma$  不为零而有一定值. 此时电流是由体电流密度定义的, 它分布在有限厚度内, 表面电流为零, 分界面上不存在自由面电流, 故仍有  $\mathbf{J} = 0$ . 由此得出结论, 在跨越几乎所有的实际媒质边界时, 均有  $\mathbf{J} = 0$ , 即  $\mathbf{H}$  的切向分量  $H_t$  连续.

### 1.6.3 电介质与导体分界面上的边界条件

#### 1. 理想导体

在理想导体内部不存在电场, 而在时变情况下, 由麦克斯韦方程组描述的  $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$  和  $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$  之间的关系将保证在时变情况下导体内部的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  也为零. 这与静态场不同, 在静态时, 导体中的稳定电流将产生静磁场, 而这一静磁场并不影响电场. 因此, 当  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{D}$  在导体内为零时, 静态的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  可以不为零. 而在时变情况下, 理想导体内部则有

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H}_t = 0, \quad \mathbf{D}_t = 0, \quad \mathbf{B} = 0 \quad (1.6.20)$$

所有的电荷只存在于导体表面, 导体在电场作用下可以有电荷流动, 可以存在自由电荷及表面传导电流. 故理想导体边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} D_n &= \rho \\ E_{1t} &= 0 \\ B_{1n} &= 0 \\ H_{1t} &= \alpha \end{aligned} \right. \quad (1.6.21)$$

## 2. 实际导体

上述边界条件是对理想导体而言的,如:对于超导体,分界面上  $H_{1t}$  不与  $H_{2t}$  连续;而对于实际导体或电导率不为  $\infty$  的任何实际介质,则磁场矢量  $\mathbf{H}$  的切向分量在边界上实际上是连续的. 理由正如在 1.6.2 节所述,电流是在导体内部流动的(除非是超导体),它分布在有限的厚度内,表面电流是零. 而在导出边界条件时,如图 1.6.2 中作的闭合回路,当它的两个长边无限靠近界面时,则回路中包含的电流就为零了,因此分界面两侧  $\mathbf{H}$  切向分量必定相等,故实际导体有  $H_{1t} = H_{2t}$ ,类似地有

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ D_{1n} &= D_{2n} \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

## 1.7 无源波动方程

### 1.7.1 无源波动方程一般形式

在光学的一般情况中,我们更多的是关心电磁波的传播问题,即研究无源空间中的电磁波传播过程. 最简单的情况是在真空中的传播,此时真空中无自由电荷及传导电流,麦克斯韦方程组简化为

$$\begin{cases} \Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (1) \\ \Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (2) \\ \Delta \cdot \mathbf{E} = 0 & (3) \\ \Delta \cdot \mathbf{B} = 0 & (4) \end{cases} \quad (1.7.1)$$

把式(1.7.1)中的式(1)两边取旋度并用式(2)代入,得

$$\Delta \times \Delta \times \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.7.2)$$

应用矢量公式

$$\Delta \times \Delta \times \mathbf{E} = \Delta (\Delta \cdot \mathbf{E}) - \Delta^2 \mathbf{E} \quad (1.7.3)$$

又由式(3)有  $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$ , 故得  $\Delta \times \Delta \times \mathbf{E} = -\Delta^2 \mathbf{E}$ . 因此可得

$$\Delta^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.4)$$

同样,可得

$$\Delta^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.5)$$

若令  $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ , 得

$$\begin{cases} \Delta^2 \mathbf{E} - \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta^2 \mathbf{B} - \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (1.7.6)$$

这就是真空中的波动方程, 常数  $C$  就是电磁波在真空中传播的速度, 从  $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  及  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ , 求得  $C = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ , 这正是光在真空中传播的速度. 麦克斯韦由此预言, 光必是一种电磁波.

从介质中的麦克斯韦方程组式(1.5.24)出发, 用类似的方法可以导出介质中的电磁波波动方程

$$\Delta^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.7)$$

$$\Delta^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.8)$$

其中

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu_r}} \quad (1.7.9)$$

### 1.7.2 时谐电磁场, 定态波动方程

如果电磁场场矢量的每一个坐标分量都随时间  $t$  以相同频率  $\omega$  作简谐变化, 则称这类电磁场为时谐电磁场. 任何复杂变化的场都可以用傅里叶积分的方法分解为许多简谐变化的场的叠加, 因此讨论简谐电磁场的波动方程是最具普遍意义的.

对于简谐电磁场, 电场矢量可写为

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x, y, z, t) \\ &= \mathbf{i}A_{x0}(x, y, z)\cos[\omega t + \varphi_x(x, y, z)] + \mathbf{j}A_{y0}(x, y, z)\cos[\omega t + \varphi_y(x, y, z)] \\ & \quad + \mathbf{k}A_{z0}(x, y, z)\cos[\omega t + \varphi_z(x, y, z)] \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

或用复数表达  $\mathbf{E} = \text{Re}[\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}]$ ; 或直接写作

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \quad (1.7.11)$$

则有

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$$

其中

$$\begin{cases} E_x = E_{x0} e^{i\omega t} = A_{x0} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \\ E_y = E_{y0} e^{i\omega t} = A_{y0} e^{i(\omega t + \varphi_y)} \\ E_z = E_{z0} e^{i\omega t} = A_{z0} e^{i(\omega t + \varphi_z)} \end{cases} \quad (1.7.12)$$

其中  $E_{x0} = A_{x0} e^{i\varphi_x}$ ,  $E_{y0} = A_{y0} e^{i\varphi_y}$ ,  $E_{z0} = A_{z0} e^{i\varphi_z}$ . 它们均为复数, 称为之复振幅. 类似地也可对  $\mathbf{H}$  写出时谐表达式.

谐变矢量对时间求导可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E}, \quad \text{即 } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \quad (1.7.13)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}, \quad \text{即 } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \quad (1.7.14)$$

此时, 时谐电磁场的麦克斯韦方程组成为如下形式

$$\begin{cases} \Delta \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} = -i\omega \mu \mathbf{H} & (1) \\ \Delta \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} = i\omega \varepsilon \mathbf{E} & (2) \\ \Delta \cdot \mathbf{H} = 0 & (3) \\ \Delta \cdot \mathbf{E} = 0 & (4) \end{cases} \quad (1.7.15)$$

此处假设介质中无自由电荷及传导电流.

同样, 对上式的式(1)取旋度并将式(2)代入之, 就得到对时谐电磁场下的定态波动方程, 即亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \Delta^2 \mathbf{H} + K^2 \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

其中

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{V} = \omega \cdot \sqrt{\mu\varepsilon}$$

### 1.7.3 非均匀介质中的波动方程

当介质为非均匀且各向同性时, 有  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ , 于是

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.7.17)$$

这时

$$\Delta \cdot \mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}) \Delta \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \varepsilon(\mathbf{r}) \quad (1.7.18)$$

当介质中无自由电荷时,  $\rho=0$ , 则有  $\Delta \cdot \mathbf{D}=0$ , 于是

$$\Delta \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \neq 0 \quad (1.7.19)$$

在导出波动方程过程中可见

$$\Delta \times (\Delta \times \mathbf{E}) = \Delta (\Delta \cdot \mathbf{E}) - \Delta^2 \mathbf{E} = -\Delta \left[ \mathbf{E} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right] - \Delta^2 \mathbf{E} \quad (1.7.20)$$

由此得到非均匀介质中的波动方程为

$$\Delta^2 \mathbf{E} + \Delta \left[ \mathbf{E} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right] = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.7.21)$$

类似地,可以得到关于  $\mathbf{H}$  的非均匀介质中波动方程为

$$\Delta^2 \mathbf{H} + \frac{\Delta \varepsilon \times (\Delta \times \mathbf{H})}{\varepsilon} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.7.22)$$

此时仅假设  $\varepsilon$  是  $\mathbf{r}$  的函数,而  $\mu$  在全空间内均为常数.

## 1.8 有源波动方程

上节讨论的无源波动方程涉及电磁波在空间的传播,而电磁波的辐射往往是由变速运动电荷产生的.这就是由有源波动方程,即非齐次波动方程所描写的交变电流辐射电磁场的规律,辐射源就是变化的电荷分布和电流分布.本节将从引入电磁场的动态标势和矢势概念出发,通过研究标、矢势的解——推迟势——引出相互作用的有限传播速度这一概念,并利用推迟势导出最基本的电偶极辐射的辐射电磁场计算公式.

### 1.8.1 电磁波的标势、矢势

与 1.1.5 节所述的静电场及静磁场类似,在变化的电磁场中也存在着标势与矢势.

在时变电磁场中,仍有  $\Delta \cdot \mathbf{B} = 0$ ,故由矢量恒等式  $\Delta \cdot (\Delta \times \mathbf{A}) \equiv 0$  可以断言,必存在一个  $\mathbf{A}$ ,使得  $\mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A}$ ,而仍满足麦克斯韦方程组第三方程  $\Delta \cdot \mathbf{B} = 0$ ,故称  $\mathbf{A}$  为矢势,或称动态矢量位.同样也可导出电磁场的动态标量位(动态标势).

将  $\Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  变换为

$$\Delta \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.8.1)$$

令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\Delta \varphi \quad (1.8.2)$$

则式(1.8.1)成为  $\Delta \times (-\Delta \varphi) = 0$ ,可见  $\Delta \varphi$  这个梯度场是一个无旋场, $\varphi$  即为势函数.当然  $\varphi$  是时变磁场的标势,故称动态标势.综上所述,得到电磁场的标、矢势

与场矢量的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\Delta \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A} \end{cases} \quad (1.8.3)$$

### 1.8.2 洛伦兹规范和库仑规范

经式(1.8.3)这样的替换后,  $\mathbf{A}$  与  $\varphi$  并不能唯一地确定电磁场, 这是因为当

$$\Delta \times \left[ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.8.4)$$

成立时, 若任意加上一个  $\Delta \times \psi = 0$  的函数  $\psi$ , 仍满足

$$\Delta \times \left[ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \psi \right] = 0 \quad (1.8.5)$$

故仍不能解出一个确定的  $\mathbf{E}$ . 因此应加上一个约束条件, 即规范. 常用的规范有两种:

#### 1) 洛伦兹规范

辅助条件为

$$\Delta \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1.8.6)$$

#### 2) 库仑规范

辅助条件为

$$\Delta \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.8.7)$$

在这种规范下,  $\mathbf{A}$  为无源场, 因而电场表达式(1.8.3)中第二项  $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  为无源场, 而第一项  $(-\Delta \varphi)$  为无旋场.  $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  项对应于感应电场, 即变化磁场产生的涡旋电场, 而  $-\Delta \varphi$  项对应于库仑场.

不同的规范对应着不同的一组  $(\mathbf{A}, \varphi)$ , 但不同规范又对应着同一的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ , 因此, 如果用势来描述电磁场, 与规范选择无关, 势作不同的规范变换, 所有的物理量和物理规律都应保持不变, 这种不变性称为规范不变性. 从数学上解悉这种规范变换的自由性是由于在势的定义式(1.8.3)中只给出了  $\mathbf{A}$  的旋度而没有给出  $\mathbf{A}$  的散度. 仅有旋度是不足以确定一个矢量场的, 为确定  $\mathbf{A}$  必须再给出  $\mathbf{A}$  的散度. 而电磁场  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  本身对  $\mathbf{A}$  的散度没有任何限制. 因此作为确定势的辅助条件, 我们可以取  $\Delta \cdot \mathbf{A}$  为任意值, 每一种选择就对应一种规范, 但不同的规范都对应着同一  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ . 从计算方便考虑, 不同的问题可以采用不同的规范.

### 1.8.3 达朗贝尔方程——有源波动方程

把式(1.8.3)表示的  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  代入麦克斯韦第二方程

$$\Delta \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.8.8)$$

得到了动态标势  $\varphi$  与矢势  $\mathbf{A}$  所满足的方程

$$\frac{1}{\mu} \Delta \times \Delta \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon \left[ -\Delta \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \right] \quad (1.8.9)$$

利用

$$\Delta \times \Delta \times \mathbf{A} = \Delta (\Delta \cdot \mathbf{A}) - \Delta^2 \mathbf{A} \quad (1.8.10)$$

将式(1.8.9)化为

$$\Delta^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \Delta \left[ \Delta \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \quad (1.8.11)$$

同样,把式(1.8.3)代入麦克斯韦第三方程  $\Delta \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$ , 得到

$$-\Delta^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \Delta \cdot \mathbf{A} = \rho/\varepsilon \quad (1.8.12)$$

由式(1.8.11)与式(1.8.12)确定的  $\mathbf{A}$  与  $\varphi$  的方程是适用于任何规范的一般式,下面对具体规范条件下的方程作讨论.

#### 1. 采用库仑规范

由库仑规范条件  $\Delta \cdot \mathbf{A} = 0$  得到

$$\begin{cases} \Delta^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi = -\mu \mathbf{J} \\ \Delta^2 \varphi = -\rho/\varepsilon \end{cases} \quad (1.8.13)$$

这种规范的特点是标势  $\varphi$  满足的方程与静电场电势  $u$  满足的泊松方程(1.2.11)相同,其解是库仑势,解出  $\varphi$  后代入第一式即可解出  $\mathbf{A}$ ,从而确定辐射电磁场.

#### 2. 采用洛伦兹规范

由洛伦兹规范条件  $\Delta \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , 在介质中可改写为  $\Delta \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ,

将此式代入式(1.8.11)与式(1.8.12)得到

$$\begin{cases} \Delta^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \\ \Delta^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon \end{cases} \quad (1.8.14)$$

这就是矢势与标势的有源波动方程,即达朗贝尔方程,第一式表示了电流  $\mathbf{J}$  产生的矢势波,第二式表示了由电荷  $\rho$  产生的标势波. 当电流及电荷随时间变化时,产生的矢势波及标势波在空间传播,由此产生交变的电磁场  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{B}$ .

#### 1.8.4 达朗贝尔方程的解,推迟势

求解关于  $\varphi$  及  $\mathbf{A}$  的达朗贝尔方程,就是求解由给定的电荷源及电流源产生的电磁辐射场问题. 以洛伦兹规范下的非齐次波动方程(1.8.14)为例,这两个方程具有完全相同的形式,故可以以求解其中之一的标势达朗贝尔方程为例,另一方程可照此求解.

由式(1.8.14)表示的标势波动方程中,  $\rho$  为空间自由电荷密度,这是一个线性方程,因此由空间电荷密度  $\rho(\mathbf{r}', t)$  产生的势  $\varphi$  可以看作由许多体元内的变化电荷(点电荷)产生的势的叠加. 现考虑位于  $M(\mathbf{r}')$  点的变化电荷  $Q(\mathbf{r}', t)$ , 它的电荷密度可以用狄拉克函数与点电荷乘积表示

$$\rho(\mathbf{r}', t) = Q(t) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.8.15)$$

因此点电荷的标势达朗贝尔方程可写为

$$\Delta^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} Q(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.8.16)$$

解此方程便可求得由位于  $M(\mathbf{r}')$  点的变化电荷  $Q(\mathbf{r}', t)$  在观察点  $M(\mathbf{r})$  所产生的势  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . 为求解  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , 可以先考虑当  $M'$  点位于坐标原点时的情况,如图1.8.1

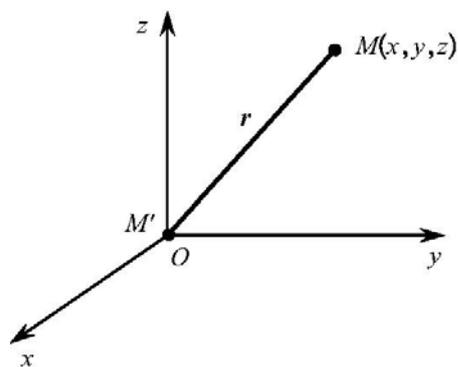


图 1.8.1 点电荷位于坐标原点时在  $M$  点产生的势  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

所示. 由于点电荷辐射的球对称性,式(1.8.16)可采用球坐标下的表达形式

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} Q(t) \delta(r) \quad (1.8.17)$$

与该方程相应的齐次方程的通解为

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{f\left[t - \frac{r}{v}\right]}{r} + \frac{g\left[t + \frac{r}{v}\right]}{r} \quad (1.8.18)$$

可以假设非齐次方程(1.8.17)的解也具有式(1.8.18)类似的形式,考虑到点电荷辐射是向外辐射的球面波,故取式(1.8.18)的第一项为非齐次方程解的形式. 再

考虑到由静电荷  $Q$  激发的静电势为  $u = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r}$ , 当  $Q(t)$  为变化电荷时,方程(1.8.17)具有如下形式的解

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q\left[t - \frac{r}{v}\right]}{4\pi\epsilon r} \quad (1.8.19)$$

将试解形式代回式(1.8.17)可知,不论在  $r=0$  的点或  $r \neq 0$  的点,该解均满足达朗贝尔方程. 其中  $r$  为矢径  $\mathbf{r}$  的模.

再考虑  $M'$  点不位于原点时的一般情况,可得解的一般式为

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q\left[\mathbf{r}', t - \frac{r_{MM'}}{v}\right]}{4\pi\epsilon r_{MM'}} \quad (1.8.20)$$

或写为狄拉克函数形式

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q(\mathbf{r}, t) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \delta\left[t - t + \frac{r_{MM'}}{v}\right]}{4\pi\epsilon r_{MM'}} \quad (1.8.21)$$

其中  $M(\mathbf{r})$  为观察点,点电荷位于  $M'(\mathbf{r}')$  点,  $r_{MM'}$  为观察点  $M$  到点电荷坐标点  $M'$  的矢径

$$r_{MM'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (1.8.22)$$

如图 1.8.2 所示.

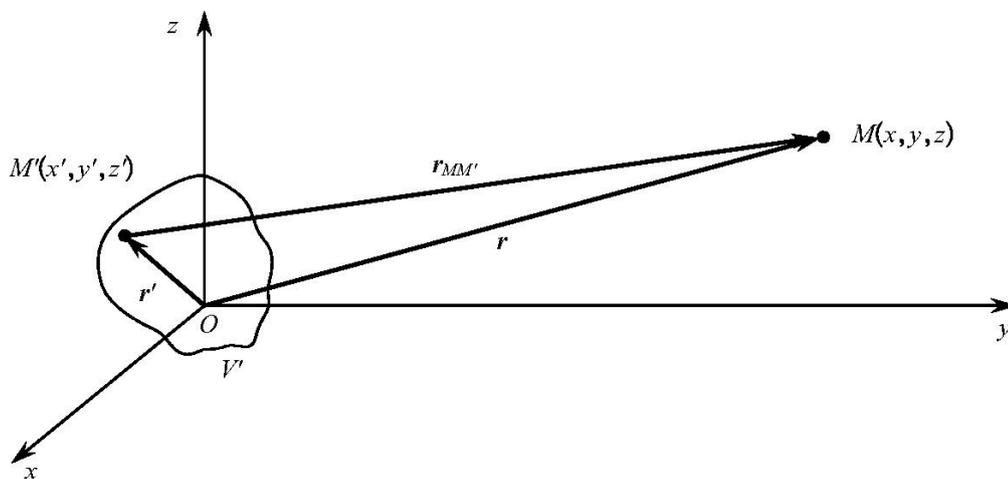


图 1.8.2 连续体电荷产生的推迟势

当电荷为连续分布时,其电荷密度为  $\rho(\mathbf{r}', t)$ ,由场的叠加性,它所激发的标势为

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho\left[\mathbf{r}', t - \frac{r_{MM'}}{v}\right]}{4\pi\epsilon r_{MM'}} dV' \quad (1.8.23)$$

或写作狄拉克函数的形式

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}', t') \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \delta\left[t' - t + \frac{r_{MM'}}{v}\right]}{4\pi \epsilon r_{MM'}} d x' d y' d z' d t' \quad (1.8.24)$$

类似地,可以由求解矢势  $\mathbf{A}$  的达朗贝尔方程得到变化的电流分布  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$  所激发的矢势

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{V'} \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{J}\left[\mathbf{r}', t - \frac{r_{MM'}}{v}\right]}{r_{MM'}} d v' \quad (1.8.25)$$

由式(1.8.23)及式(1.8.25)给出了空间观察点  $M(\mathbf{r})$  在  $t$  时刻的矢势和标势. 它意味着,  $M$  点的势是由位于  $V'$  中各点源  $M'$  中的变化电荷或变化电流分布所激发的.  $M$  点  $t$  时刻的势  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  是各  $M'$  点在早一个时刻  $t - \frac{r_{MM'}}{v}$  的电荷(电流)分布贡献的总和. 因此,  $M$  点  $t$  时刻的电磁场是由源电荷、电流分布的各个不同点在不同时刻所激发的总和. 在  $M'$  点激发的势经过了  $\frac{r_{MM'}}{v}$  时刻后才传到  $M$  点而激发  $M$  点的势, 即  $M$  点的势比  $M'$  点推迟了一个时间, 所推迟的时间  $\frac{r_{MM'}}{v}$  正是电磁波从  $M'$  点传播到  $M$  点所需的时间,  $v$  是介质中电磁波传播的速度, 若为真空中, 这一推迟时间即为  $\frac{r_{MM'}}{C}$ ,  $C$  为真空中电磁波传播速度. 因此式(1.8.23)、式(1.8.25)又称作推迟势. 求出这两个推迟势后, 又可由式(1.8.3)求出任意空间点的电磁场矢量  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$ .

### 1.8.5 电偶极辐射

本节讨论最简单的真空中的电偶极辐射.

当电流密度变化具有简谐振荡这一最简形式时

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot e^{i\omega t} \quad (1.8.26)$$

它可以是微观的激发态原子发光的振荡偶极子模型, 或变速运动带电粒子辐射射线的模型, 也可以是宏观的交流电天线辐射长波长电磁波的情形. 以宏观交流电辐射为例, 电偶极子由一对带  $\pm Q$  的电荷构成, 并用导线联结两电荷, 电荷变化为

$$Q = Q_0 e^{i\omega t} \quad (1.8.27)$$

体系偶极矩

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{l} = Q_0 \mathbf{l} e^{i\omega t} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t} \quad (1.8.28)$$

相应的变化电流

$$I = \frac{dQ}{dt} = i\omega Q_0 e^{i\omega t} \quad (1.8.29)$$

对于这种简谐振荡电流,由式(1.8.25)得到在真空中的推迟势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-i(Kr_{MM'} - \omega t)}}{r_{MM'}} dV' \quad (1.8.30)$$

式中,  $K = \omega/C$  为波数.

由远场( $r_{MM'} \gg \lambda$ )且电荷分布区域的线度远小于波长时,可作如下近似.

由  $\mathbf{r}_{MM'} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , 得近似线度

$$r_{MM'} \approx r - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}' \quad (1.8.31)$$

$\mathbf{n}_0$  为  $\mathbf{r}$  的单位矢量. 代入式(1.8.30)得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot e^{-iK(r - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}')} \cdot e^{i\omega t}}{r - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}'} dV' \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - Kr)} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') (1 + iK\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}' + \dots) dV' \end{aligned} \quad (1.8.32)$$

积分号内级数展开式各项则对应于各级电、磁多极辐射. 在作级数展开时,在积分号内分母中的  $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}'$  项相对于  $r$  为小量,故可以略去. 取级数展开的第一项,即相应于电偶极辐射的矢势

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e^{-iKr}}{4\pi r} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot e^{i\omega t} \cdot dV' \quad (1.8.33)$$

对于振荡偶极子,由式(1.8.27)~式(1.8.29)得

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(Q \cdot \mathbf{l}) = I \cdot \mathbf{l} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{i\omega t} \cdot dV' \quad (1.8.34)$$

将此式代入式(1.8.33),得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e^{-iKr}}{4\pi r} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{i\mu_0 \omega \mathbf{p}_0}{4\pi r} e^{-iKr} \cdot e^{i\omega t} \quad (1.8.35)$$

由此可求出电偶极辐射的磁场矢量

$$\mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A} = -\frac{i\mu_0 K}{4\pi r} e^{-iKr} \cdot \mathbf{n}_0 \times \left[ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] \quad (1.8.36)$$

由于

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} = i\omega \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.8.37)$$

代入式(1.8.36)后可使系数为实数,得

$$\mathbf{B} = \frac{-i\mu_0 K}{4\pi r \cdot i\omega} \cdot e^{-iKr} \left[ \mathbf{n}_0 \times \left[ \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right] \right] = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 C^3 r} e^{-iKr} \cdot \left[ \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right] \times \mathbf{n}_0 \quad (1.8.38)$$

对于电场  $\mathbf{E}$ ,由于  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$  具有时谐形式,而使电荷密度  $\rho$  也必为含  $e^{i\omega t}$  的时谐形

式,因此由洛伦兹规范下  $\mathbf{A}$  与  $\varphi$  所具有完全相同的方程形式而得到形式相同的  $\varphi$  解,继而求得  $\mathbf{E}$ . 当然,由于得知  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{E}$  均具有  $e^{i\omega t}$  的时谐形式,则可直接由  $\Delta \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{i\omega}{C^2} \mathbf{E}$  求得

$$\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{i\omega}{C^2} \mathbf{E} \text{ 求得}$$

$$\mathbf{E} = \frac{-iC}{K} \Delta \times \mathbf{B} = \frac{-iC}{K} (-iK r_0 \times \mathbf{B}) = C \mathbf{B} \times \mathbf{n}_0 \quad (1.8.39)$$

将式(1.8.38)代入上式,得

$$\mathbf{E} = \frac{e^{-iKr}}{4\pi \epsilon_0 C^2 r} \left[ \left[ \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right] \times \mathbf{n}_0 \right] \times \mathbf{n}_0 \quad (1.8.40)$$

若取球坐标原点在电荷分布区内,并以  $\mathbf{p}$  方向为极轴,则由上述  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  解的表达式可知,  $\mathbf{B}$  沿纬线振荡,  $\mathbf{E}$  沿经线振荡,则有一般表示式

$$\begin{cases} \mathbf{B}(r, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 C^2 r} \left| \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right| e^{-iKr} (\sin\theta) \cdot \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{E}(r, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 C^2 r} \left| \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right| e^{-iKr} (\sin\theta) \cdot \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (1.8.41)$$

这就是振荡偶极子的电偶极辐射电磁波解. 它是一个单色球面波,并且是线偏振的.  $\mathbf{B}$  矢量振动方向垂直于传播方向,且在与  $\mathbf{p}$  垂直的平面内,磁力线是纬线圆周,  $\mathbf{B}$  永远垂直于  $\mathbf{K}$ ,故  $\mathbf{B}$  是横向的. 而  $\mathbf{E}$  由于要在空产满足  $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{E}$  线必须形成闭合曲线,如图 1.8.3 所示,电力线是经面上的闭合曲线,而在两极处又必须为 0,因此,除了赤道线之外其他区域  $\mathbf{E}$  就必含有纵向分量,可见  $\mathbf{E}$  不是横向的.

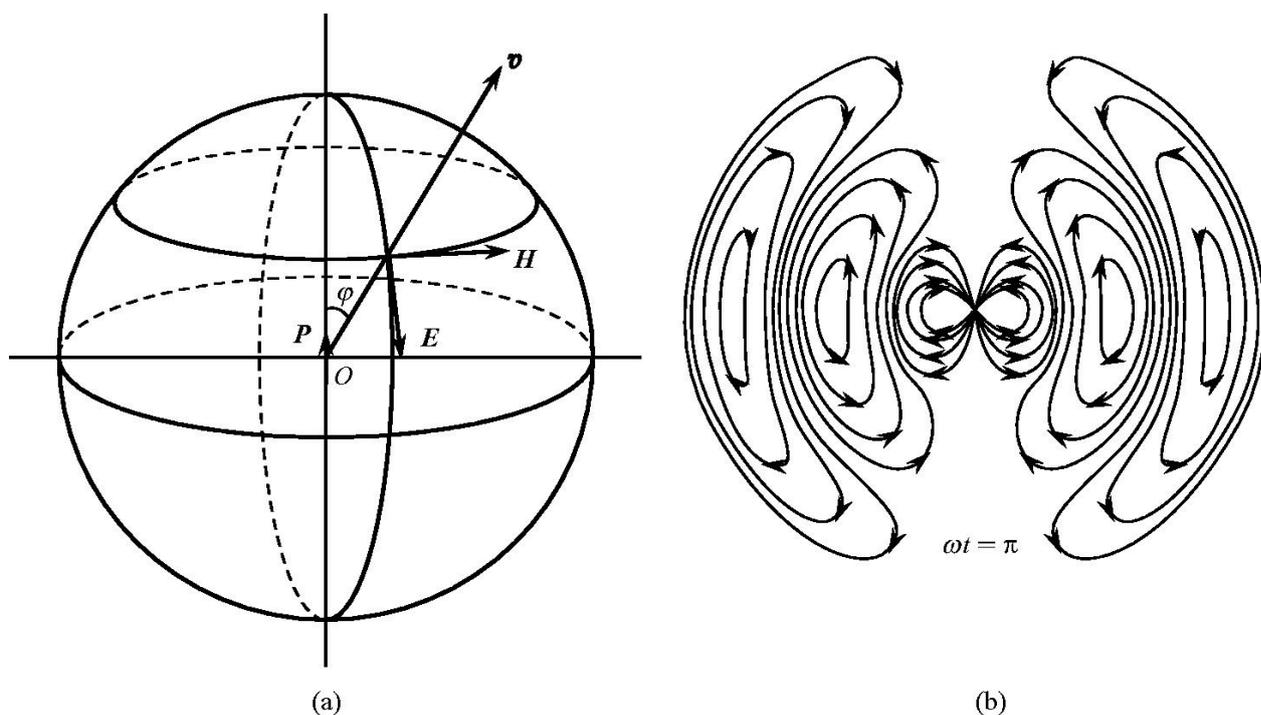


图 1.8.3

(a) 振荡偶极子辐射的球面电磁波; (b) 振荡偶极子在  $\omega t = \pi$  的电力线,偶极子位于中心,方向是竖直的

因此,电偶极辐射是空间中的 TM 波,只有当传播到远场时才近似为 TEM 波.

对于微观的变速运动带电粒子辐射,如原子自发辐射,按经典电子理论,是由构成原子的正负电荷中心作偶极振荡形成的.此时,偶极子的偶极矩为

$$\mathbf{p} = ql_0 e^{i\omega t} = q\mathbf{l} \quad (1.8.42)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{i\omega t} dV' \quad (1.8.43)$$

对于一个振荡偶极子,不论  $V$  取多大,上式总是成立的,因此,仍与式(1.8.34)一致,求得由带 $\pm q$ 电量的单个振荡偶极子产生的电磁场表达式与式(1.8.41)完全相同的,只是此时的  $\mathbf{p}$  表示单个振荡偶极子的偶极矩,而不是宏观变化电流情况时的体系偶极矩.因此,原子自发辐射对应一个电偶极子作简谐振荡时,辐射出线偏振单色球面波,即相当于无限长正弦波列.但实际上电偶极子既然辐射能量,必作阻尼振荡,因此辐射准单色球面波,即波列为有限长度.而且实际光源是由大量原子构成,不同原子的辐射或同一原子再次被激发后的不同时刻辐射,它们的频率、位相、振动方向……均不可能相同,因此尽管单个振荡偶极子辐射单色线偏光,但从大量原子发光的统计效应来看,其辐射的光振动在空间方向上概率相等,因此宏观效果是自然光,并且具有较大的频率范围及无规的相位特性,是非相干光.

## 1.9 电磁场的能量

### 1.9.1 洛伦兹力

带电粒子或系统在电磁场中不仅受电场力作用,而且受磁场力作用,二者总和即为洛伦兹力.磁场中带电导线  $d\mathbf{l}$  所受磁场力为

$$d\mathbf{F}_m = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.9.1)$$

相应的磁场力密度为

$$\mathbf{f}_m = \frac{d\mathbf{F}_m}{dV} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.9.2)$$

电场中带电系统或电荷受电场力

$$d\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E} \quad (1.9.3)$$

相应的电场力密度

$$\mathbf{f}_e = \rho\mathbf{E} \quad (1.9.4)$$

故有系统受电磁场的总力密度

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_m = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.9.5)$$

对于单个带电粒子,如电子  $e$ ,受电磁场力的总和为

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.9.6)$$

即为带电粒子受的洛伦兹力.  $e$  为带电粒子的电量,  $\mathbf{v}$  为带电粒子的运动速度.

## 1.9.2 电磁场的能量和能流

### 1. 基本定义

#### (1) 能量密度

$$w(\mathbf{r}, t) = \frac{dW}{dV} \quad (\text{J/m}^3)$$

表示场内单位体积内的能量.

#### (2) 能流密度

$$\mathbf{S} \quad (\text{W/m}^2)$$

其方向就是能量传输的方向,数值等于单位时间内垂直到过单位截面的能量,即电磁场传输的功率面密度,又称坡印亭矢量  $\mathbf{S}$ .

### 2. 场和电荷系统的能量转化和守恒定律

设场内某区域有电荷分布  $\rho$  及电流分布  $\mathbf{J}$ , 能量守恒定律表明单位时间内流入区域  $V$  的能量等于场对  $V$  内电荷做功的功率与  $V$  内单位时间内电磁场能量增加之和.

现在有场对  $V$  内电荷做功功率为  $\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv$ ,  $V$  内电磁场能量增加为  $\frac{d}{dt} \int_V w dv$ , 流过区域界面  $\Sigma$  进入  $V$  内的能量为  $\oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ , 这里取负号是因为规定法线向外为正. 故根据能量守恒定律有

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv + \frac{d}{dt} \int_V w dv \quad (1.9.7)$$

其微分形式

$$-\Delta \cdot \mathbf{S} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1.9.8)$$

又称坡印亭定理.

## 1.9.3 能量密度 $w$ 及能流密度 $\mathbf{S}$ 的表达式

本节将从麦克斯韦方程,洛伦兹力及能量守恒定律导出  $w$ 、 $\mathbf{S}$  与  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  之间的关系.

由式(1.9.8),右端第一项  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  即为电磁场对电荷系统做的功,  $\mathbf{f}$  是系统受

的洛伦兹力,故

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

应用  $\mathbf{J} = \rho \cdot \mathbf{v}$  代入上式右端第二项,显然,第二项为零,于是上式改写为

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (1.9.9a)$$

由麦克斯韦第二方程  $\Delta \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ,用  $\mathbf{E}$  乘其两边,得到该式左边为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot (\Delta \times \mathbf{H}) &= -\Delta \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\Delta \times \mathbf{E}) \\ &= -\Delta \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.9.9b)$$

右边为

$$\mathbf{E} \cdot \left[ \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.9.9c)$$

故得

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\Delta \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \left[ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \quad (1.9.10)$$

由式(1.9.8)移项后,有

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -\Delta \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1.9.11)$$

比较式(1.9.10)与式(1.9.11),可得

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.9.12)$$

式中的  $\mathbf{S}$  即为能流密度,又称坡印亭矢量. 第二式可改写为一般形式

$$dw = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (1.9.13)$$

在线性介质中,利用物质方程,并对上式积分可得

$$w = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left[ \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right] \quad (1.9.14)$$

由此即得能流密度  $\mathbf{S}$  及能量密度  $w$  的表达式.

为进一步说明式(1.9.10)与式(1.9.11)作比较的正确性及坡印亭矢量定理的物理意义,可将式(1.9.10)用于全空间,将区域  $V$  扩展到无穷远,并取其积分形式

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathbf{r} - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \quad (1.9.15)$$

若场源分布在有限区域内,当  $V \rightarrow \infty$  时在无穷远处封闭曲面  $\Sigma$  上的  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{H}$  场矢量

趋向于零,故上式右端第一项的面积分为零. 上式仅存两项. 左端  $\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$  是场对电荷做功, 根据能量守恒定律, 它应当等于  $V$  内电磁场能量减少率, 因此右端  $\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv$ , 就是电磁场能量减少率. 而在式(1.9.10)中的  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  则就应当是能流密度了, 故前述比较是正确的.

#### 1.9.4 电磁能量的传输

电磁波在传输过程中其能量是在场中传播的, 即使是在稳恒电流或低频电流的情况下, 能量也是在场中传播而不是靠导线中带电粒子运行传输的. 例如, 在导线中的直流电若按导线内电子运动的动能计算, 当电流密度为  $\mathbf{J} = 1 [\text{A}/\text{m}^2]$  时, 由  $\mathbf{J} = \sum e\mathbf{v} = ne\mathbf{v}$ , 金属内单位体积内自由电荷数  $n$  为  $10^{23}/\text{cm}^3$  数量级,  $e = 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}]$ , 可算得  $|\mathbf{v}| = 6 \times 10^{-5} [\text{m}/\text{s}]$ , 可见电子的平均漂移速度极小, 电子运动的动能极小, 它并不是供给负载上消耗的能量, 导线及负载上消耗的能量完全是从场中传输的. 导线上电流和周围空间的电磁场相互约制, 使电磁波的能量在导线附近的电磁场中沿一定方向传输. 在传输过程中, 一部分能量进入导线内部变为焦耳热损耗. 在负载电阻中, 电磁能量从场中流入电阻内, 供负载消耗.

例如, 有同轴电缆内导线半径  $a$ 、外导线半径  $b$ , 两线间为绝缘介质, 当导线载有稳恒电流  $I$ , 线间电压为  $U$  时, 电磁波在两线间的介质空间中传播. 因此其传输的总功率为坡印亭矢量  $\mathbf{S}$  (即传输功率密度) 在传输空间的截面积上积分, 即

$$P = \int_S \mathbf{S} \cdot d\sigma = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\sigma \quad (1.9.16)$$

此式适用于电磁波在任何空间中传输时的传输功率计算, 只要将  $\mathbf{S}$  对给定的传输空间的全截面进行积分, 这将在讨论全反射的倏逝波、金属波导及介质波导时被多次应用.

### 1.10 麦克斯韦方程组的完备性、对偶性\*

#### 1.10.1 完备性

若在给定初始条件和边界条件下, 体系的电磁运动规律完全由上述方程组唯一决定, 则称此方程组是完备的. 麦克斯韦方程组即具有此完备性(证明略).

#### 1.10.2 对偶性

在无源的空间区域, 麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Delta \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \Delta \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \Delta \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1.10.1)$$

我们来考虑满足上述方程的场  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ ，再考虑另一个场  $\mathbf{E}'$ 、 $\mathbf{B}'$ ，若作如下替换

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \mathbf{H}, & \mathbf{D} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \mathbf{B} \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \mathbf{H} &= -\mathbf{E}, & \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \mathbf{B} &= -\mathbf{D} \end{aligned} \quad (1.10.2)$$

可得

$$\begin{cases} \Delta \times \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} \\ \Delta \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \\ \Delta \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ \Delta \cdot \mathbf{D}' = 0 \end{cases} \quad (1.10.3)$$

这就是说，麦克斯韦方程组在上述变换下形式不变，只是方程次序有了变化。我们称为  $\mathbf{E}'$  和  $\mathbf{B}'$  是  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的对偶场。这一特性称为电磁场的对偶性。对偶性可由图 1.10.1 说明，其中  $\mathbf{E}$  线为实线， $\mathbf{H}$  线为虚线。

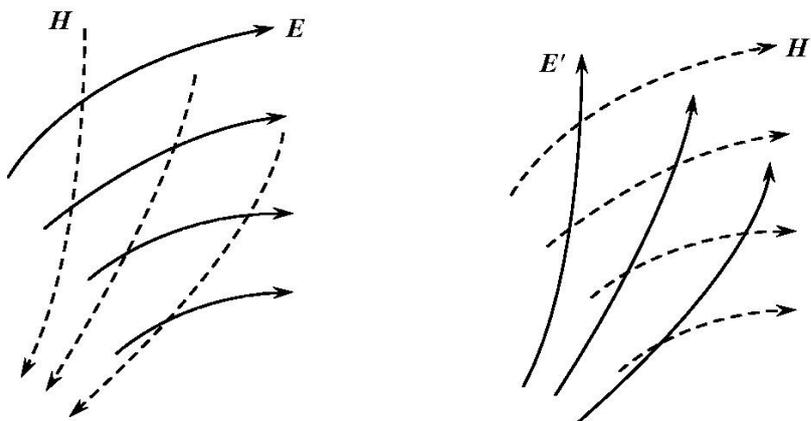


图 1.10.1 一对对偶的电磁场

在有源空间区域，由于有了自由电荷  $\rho$  及传导电流  $\mathbf{J}$  这两项，使麦克斯韦方程组的对偶性被破坏。产生破坏的根源在于方程组中源的不对称性，即存在着电荷而不存在所谓的磁荷。所以物理学家都希望自然界存在磁单极而使麦克斯韦方程

组具有更高程度的对称性. 尽管迄今为止实验上还没有确凿证据肯定磁单极的存在, 但人们还是相信它应当存在. 如果真的存在, 那么麦克斯韦方程组就应当成为如下的形式

$$\begin{cases} \Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{J}_m & (1) \\ \Delta \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e & (2) \\ \Delta \cdot \mathbf{D} = \rho_e & (3) \\ \Delta \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m & (4) \end{cases} \quad (1.10.4)$$

式(1)中的负号( $-\mu_0 \mathbf{J}_m$ )是磁荷守恒定律的要求. 此时, 由式(1)求散度再利用式(4), 可得

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \Delta \cdot \mathbf{J}_m = 0 \quad (1.10.5)$$

这就是磁荷守恒定律(连续性方程).

现在若从假设的完美的麦克斯韦方程组(1.10.4)式出发, 再作上述的场对偶变换(1.10.2)同时对源也作相应变换, 得

$$\begin{cases} \rho = \rho_m / C, & \mathbf{J}_e = \mathbf{J}_m / C \\ \rho_m = -\rho_e \cdot C, & \mathbf{J}_m = -\mathbf{J}_e \cdot C \end{cases} \quad (1.10.6)$$

则麦克斯韦方程组的变换后形式在有源时也不变, 这时对有源场也完全对偶了.

从对偶变换的不变性可以看出, 对任何一个电磁体系, 我们总可以找到其相应的对偶体系, 其场分布由对偶体系确定, 即

$$\mathbf{E} = -C\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E}/C \quad (1.10.7)$$

例如, 若有一纯电场  $\mathbf{E}(x, y, z)$  的体系, 则一定存在一个纯磁场体系, 其  $\mathbf{B}(x, y, z)$  的函数形式与  $\mathbf{E}(x, y, z)$  完全相同, 两者仅仅相差一个常数因子, 反之亦然. 又例如在讨论辐射时, 电偶极辐射与磁偶极辐射场之间完全对偶, 这样, 求出了电偶极子的场  $\mathbf{E}$  的形式, 则可以利用对偶性很方便地写出磁偶极子的  $\mathbf{B}$  场, 其函数形式与  $\mathbf{E}$  完全一样, 但相差一个系数  $C$ . 因此, 利用电磁场的对偶性在某些时候求解电场或磁场时有许多方便之处.

## 2 电磁波在无限大均匀介质中的传播

在无限大均匀媒质中没有自由电荷和传导电流,场矢量的每一个直角分量  $E_i$  都满足齐次波动方程

$$\Delta^2 E_i - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \quad i = x, y, z \quad (2.1)$$

$$\Delta^2 H_i - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = 0 \quad i = x, y, z \quad (2.2)$$

这个方程可以有多种形式的解,其中最常见的是在直角坐标中的平面波解、在球坐标下的球面波解以及在柱坐标系中的高斯光束解.

### 2.1 无限大均匀介质中的平面波解

在直角坐标系中,场矢量的各个分量  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$  均满足式(2.1)的标量方程. 对于时谐电磁场  $\mathbf{E} = \mathbf{U}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ , 其各分量亥姆霍兹方程的标量方程为

$$\Delta^2 U_i(\mathbf{r}) + K^2 U_i(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.1.1)$$

$U_i(\mathbf{r})$  是  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  的各个分量 ( $i = x, y, z$ ). 上述标量方程为二阶常微分方程, 其通解为

$$U_i(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_1 e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{A}_2 e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.1.2)$$

这两项代表了沿  $+\mathbf{r}$  及  $-\mathbf{r}$  方向传播的波, 在约定取  $e^{i\omega t}$  为时谐场时间项时,  $e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$  项代表了正向传播的平面波, 并设  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{a}e^{i\omega t}$ , 则正向传播平面波矢量解为

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{U}^+(\mathbf{r})e^{i\omega t} = \mathbf{a}e^{i(\omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})} \quad (2.1.3)$$

而反向传播的波为

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{U}^-(\mathbf{r})e^{i\omega t} = \mathbf{a}e^{i(\omega t + \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})} \quad (2.1.4)$$

$\mathbf{E}^+$  与  $\mathbf{E}^-$  为一对沿相反方向传播的波, 假如两波的复振幅互为复数共轭, 即

$$\mathbf{U}^+(\mathbf{r}) = [\mathbf{U}^-(\mathbf{r})]^* \quad (2.1.5)$$

则称这一对波为位相共轭波.

注意, 这里的位相共轭波与通常说的  $\mathbf{E}^+$  的复数共轭  $[\mathbf{E}^+]^*$  的区别. 后者有

$$[\mathbf{E}^+]^* = \mathbf{U}^{+*}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (2.1.6)$$

由此得到正向传播平面波实函数形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{+*}(\mathbf{r}, t)] = a \cos(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1.7)$$

有时为简化书写,常把复数共轭项简记为 C.C.(complex conjugate),故式(2.1.7)可简写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) + \text{C.C.}]$$

以下各场量实数表达式也都可类同上式来表达. 反向传播的平面波的实函数表达式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^-(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{-*}(\mathbf{r}, t)] = a \cos(\omega t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1.8)$$

## 2.2 无限大均匀介质中的球面波解

球面波即波阵面为球面的光波,在球面坐标系中描写球面波是方便的,此时波矢量  $\mathbf{K}$  与半径  $\mathbf{r}$  总是同方向的. 因此,场矢量仅与位置  $\mathbf{r}$  有关而与方位  $\theta, \varphi$  无关,即球面波的波动方程及其解的相应表达式中的空间项为  $r$ .

考虑代表球面波的解,其函数形式为

$$U = U(\mathbf{r}, t) = U(r) e^{i\omega t} \quad (2.2.1)$$

其中

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

在球面坐标系中,当  $U$  与  $\theta, \varphi$  无关时,有如下微分关系

$$\begin{aligned} \Delta^2 U(r) &= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \cdot \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right] \right\} = \frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial U(r)}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rU(r)] \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

因而波动方程成为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rU) = 0 \quad (2.2.3)$$

对于以式(2.2.1)表达的时谐电磁场的球面波形式,则可将式(2.2.3)代入亥姆霍兹方程(1.7.16),得到在球面坐标系中的亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [rU(r)] + K^2 [rU(r)] = 0 \quad (2.2.4)$$

上述矢量方程的球坐标三分量标量方程仍具相同形式,因此可求出其标量解后求得矢量解

$$U^+(r) = \frac{\mathbf{a}}{r} e^{-iKr} \quad (2.2.5)$$

及

$$U^-(r) = \frac{\mathbf{a}}{r} e^{iKr} \quad (2.2.6)$$

$U^+(r)$  表示由原点向外发散的球面波,  $U^-(r)$  表示向原点会聚的球面波, 则有发散球面波解为

$$\mathbf{E}^+(r) = \frac{\mathbf{a}}{r} e^{i(\omega t - Kr)} \quad (2.2.7)$$

会聚球面波解为

$$\mathbf{E}^-(r) = \frac{\mathbf{a}}{r} e^{i(\omega t + Kr)} \quad (2.2.8)$$

可见  $U^+(r) = [U^-(r)]^*$ , 故发散球面波  $\mathbf{E}^+$ , 与会聚球面波  $\mathbf{E}^-$  也是一对位相共轭波.

对于发散球面波, 其实函数形式为

$$\varepsilon^+ = \frac{1}{2} [\mathbf{E}^+(r, t) + \mathbf{E}^{+*}(r, t)] = \frac{\mathbf{a}}{r} \cos(\omega t - Kr) \quad (2.2.9)$$

而对会聚球面波, 其实函数形式为

$$\varepsilon^- = \frac{1}{2} [\mathbf{E}^-(r, t) + \mathbf{E}^{-*}(r, t)] = \frac{\mathbf{a}}{r} \cos(\omega t + Kr) \quad (2.2.10)$$

磁场也是完全类似的波动公式及解.

## 2.3 无限大均匀介质中柱坐标系下的高斯光束基模解

在无穷大均匀介质中取柱面坐标系下的亥姆霍兹方程的圆柱对称解, 就是在激光光学中常见的高斯光束基模解.

当介质为均匀时,  $n(r) = n$ , 此时场矢量在柱坐标系下在垂直于  $z$  轴的平面上各  $\mathbf{r}$  方向上等同 ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ), 故横向关系仅与  $r$  有关而与  $\theta$  无关. 在这种圆柱对称的情况下有如下微分关系

$$\Delta^2 = \Delta_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.3.1)$$

得到适合这种圆柱对称解的亥姆霍兹方程为

$$\Delta_r^2 U(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(r, z) + K^2 U(r, z) = 0 \quad (2.3.2)$$

现在考虑一种能流主要沿  $z$  方向传播的近似平面波, 可以用标量波近似为

$$U(x, y, z) = A(x, y, z)e^{-iKz} = A(r, z)e^{-iKz} \quad (2.3.3)$$

之所以称之为近似平面波,是由于振幅  $A(x, y, z)$  是沿  $z$  轴缓慢变化,且在与  $z$  垂直的  $(x, y)$  平面上沿  $r$  为非均匀分布的.

将此试解(2.3.3)代入亥姆霍兹方程,得

$$\Delta^2 A - 2iK \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (2.3.4)$$

运算中由于已设  $A$  为  $z$  的缓变函数而略去了  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$  项.

为了得到圆柱对称解,方便的办法是引入两个复函数  $p(z)$  和  $q(z)$ ,使  $A$  成为如下形式

$$A = A_0 \exp \left[ -i \left( p(z) + \frac{K}{2q(z)} r^2 \right) \right] \quad (2.3.5)$$

把式(2.3.5)代入式(2.3.4),得

$$-\frac{K^2}{q^2} r^2 - 2 \frac{iK}{q} - K^2 r^2 \left[ \frac{1}{q} \right]' - 2Kp' = 0 \quad (2.3.6)$$

式中撇号表示对  $z$  微分. 如果上式对所有的  $r$  都成立,则  $r$  的不同幂的系统必须为零,这样就导致

$$\left[ \frac{1}{q} \right]' + \left[ \frac{1}{q} \right]^2 = 0 \quad (2.3.7)$$

及

$$p' = -\frac{i}{q} \quad (2.3.8)$$

这样,对于柱面坐标系下的圆柱对称解,标量波动方程就可简化为式(2.3.7)及式(2.3.8).

引入函数  $V(z)$ ,使

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.3.9)$$

则得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \left[ \frac{V}{q} \right]' = \left[ \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{q} \right]' \right] V = 0 \quad (2.3.10)$$

故有

$$\frac{\partial V}{\partial z} = a, \quad V = az + b \quad (2.3.11)$$

得

$$\frac{1}{q} = \frac{a}{az + b} \quad (2.3.12)$$

其中  $a, b$  为任意常数. 可将式(2.3.12)写为

$$q = z + \varphi \quad (2.3.13)$$

其中  $\varphi$  为复常数,  $q_0 = q(z=0) = b/a$ . 由式(2.3.8)写得另一个复函数

$$p' = -\frac{i}{q} = \frac{i}{z + \varphi} \quad (2.3.14)$$

故有

$$p(z) = -i \ln \left[ 1 + \frac{z}{q_0} \right] \quad (2.3.15)$$

将式(2.3.13)和式(2.3.15)一起代入式(2.3.5), 得标量波动方程的下列圆柱对称解

$$A = A_0 \exp \left\{ -i \left[ -i \ln \left( 1 + \frac{z}{q_0} \right) + \frac{K}{2(\varphi + z)} \cdot r^2 \right] \right\} \quad (2.3.16)$$

现在用一个新常数  $\omega_0$  重新表示  $\varphi$ , 即

$$\varphi = i \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi n}{K} \quad (2.3.17)$$

利用式(2.3.17)这一表达, 将式(2.3.16)代入式(2.3.3), 得到波动方程的圆柱对称解

$$U(x, y, z) = U(r, z) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \cdot \exp \left\{ -i \left[ Kz + \frac{Kr^2}{2R(z)} - \varphi(z) \right] \right\} \\ \cdot \exp \left[ -\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right] \quad (2.3.18)$$

式中

$$R(z) = z \left[ 1 + \left[ \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda z} \right]^2 \right] = z \left[ 1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right] \quad (2.3.19)$$

$$\omega(z) = \omega_0^2 \left[ 1 + \left[ \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right]^2 \right] = \omega_0^2 \left[ 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right] \quad (2.3.20)$$

$$\varphi(z) = \arctan \left[ \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right] = \arctan \left[ \frac{z}{z_0} \right] \quad (2.3.21)$$

其中

$$z_0 = \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \quad (2.3.22)$$

以上就是在激光光学中经常出现的基模高斯光束. 式(2.3.18)只是波动方程(2.3.2)的一个特解, 即基模解. 光束参数  $R(z)$  表示等相面曲率半径,  $\omega(z)$  表示光斑半径,  $\omega_0$  为基模高斯光束的腰斑半径,  $\varphi(z)$  表示附加相位,  $z_0$  称为高斯光斑束的共焦参数, 或称瑞利焦深. 当  $z = z_0$  时, 有  $\omega(z) = \sqrt{2} \omega_0$ , 即  $z_0$  表示光斑半径增加

到腰斑的 $\sqrt{2}$ 倍处的位置。

以上求解意味着,高斯光束也是麦克斯韦方程在无限大均匀介质中的一个传播解。从激光器中产生的高斯基模光束在无损耗的均匀介质中完全可以以高斯基模解的形式在无穷大均匀介质中稳定传播而保持其基模解形式。

最后还需指出,当无穷大介质的折射率是以圆柱对称的形式变化时,即

$$n^2(r) = n_0^2 \left[ 1 - \frac{K_2 r^2}{K} \right] \quad (2.3.23)$$

式中, $K_2$ 是一个代表介质特征的常数; $n_0$ 是对称轴处的折射率; $r$ 是离对称轴的距离。在这类被称作为类透镜介质的非均匀介质中,完全类似于在均匀介质中的推导方法,仍可得到波动方程在这类圆柱对称形式变化的类透镜介质中有高斯基模解,只不过方程(2.3.7)、方程(2.3.8)变为如下形式

$$\left[ \frac{1}{q} \right]^2 + \left[ \frac{1}{q} \right]' + \frac{K_2}{K} = 0 \quad (2.3.24)$$

$$p' = -\frac{i}{q} \quad (2.3.25)$$

再继续解上述方程求得基模解。有关类透镜介质中的波动方程的高斯基模解,可参看有关的激光原理方面书籍,在此不再详细推导。

## 2.4 单色平面波的基本特性

现在讨论正向传播的单色平面波。由2.1节知,应具有如下实数表达形式

$$\begin{aligned} \varepsilon^+(\mathbf{r}, t) &= a \cos(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) = \operatorname{Re} [ a e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} ] \\ &= \frac{1}{2} [ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) ] \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

式中, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})}$ ,为单色平面波的复数表达形式。

### 2.4.1 单色平面波的等相面、相速度

由式(2.4.1),令其相位项为常数,得到等相面方程

$$\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \varphi \quad (2.4.2)$$

$\varphi$ 为常数。式(2.4.2)是一个以 $\mathbf{K}$ 为法线,到原点距离为 $(\omega t - \varphi)/|\mathbf{K}|$ 的平面簇方程。这意味着在任一时刻 $t$ 的等相面是一个与 $\mathbf{K}$ 垂直的平面。在某一时刻 $t$ ,所有满足等相面矢量方程(2.4.2)的点 $P(\mathbf{r})$ 均位于与 $\mathbf{K}$ 垂直的平面上。因此,平面波的等相面是与 $\mathbf{K}$ 垂直的平面(图2.4.1)。

等相面沿其法线方向移动的速度即为相速度,其大小为

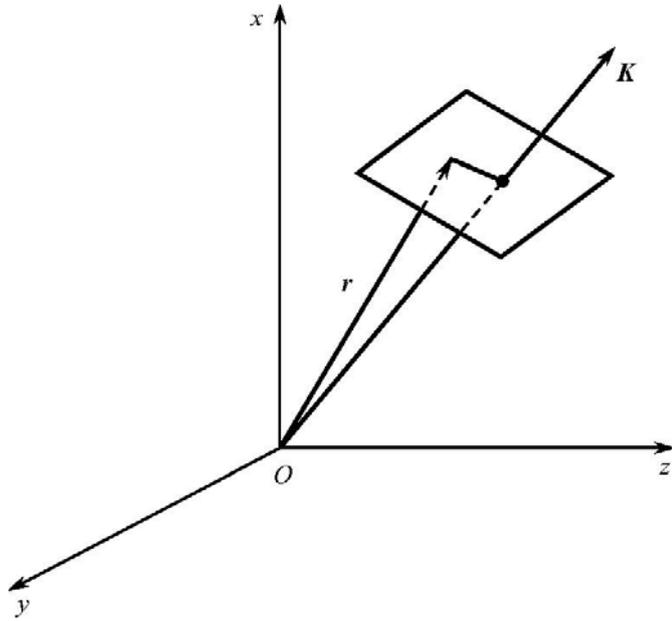


图 2.4.1 平面波的等相位面

$$v_{\phi} = \frac{dr_K}{dt} \quad (2.4.3)$$

方向为等向面法线方向。

对于平面电磁波,法线方向为  $\mathbf{K}$ ,故有相速度

$$v_{\phi} = \frac{dr_K}{dt} = \frac{\omega}{K} \quad (2.4.4)$$

由上式可见,平面波的相速度就是波动方程中出现的光速  $v$ ,仅在各向同性均匀介质中,光速才能和相速相等。

## 2.4.2 单色平面波场矢量相互关系及横向性

### 1. $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{K}$ 的关系

当介质中无源时有  $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$ ,对于平面波解

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \quad (2.4.5)$$

亦满足此式,即

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \mathbf{E} &= \Delta \cdot \{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \} \\ &= -i\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \\ &= -i\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

故得

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.4.7)$$

由此可见  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{K}$  相互垂直, 即平面电磁波是横电波,  $\mathbf{E}$  的取向即为偏振方向, 它可以在与  $\mathbf{K}$  垂直的平面上任意取向.

## 2. $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 的关系

由时谐电磁场的麦克斯韦第一方程(1.7.15)及物质方程得

$$\Delta \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{B} \quad (2.4.8)$$

故得

$$\mathbf{B} = \frac{i}{\omega} \Delta \times \mathbf{E} = \frac{i}{\omega} \Delta \times \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} = \frac{1}{\omega} \mathbf{K} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{K}_0 \times \mathbf{E} \quad (2.4.9)$$

式中,  $\mathbf{K}_0$  是波矢  $\mathbf{K}$  的单位矢量. 此时有

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{K} \cdot \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{E}}{\omega} = 0 \quad (2.4.10)$$

上式表明  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{B}$  垂直, 可见平面电磁波又是横磁波. 综括以上两点得出结论: 平面电磁波是横电磁波(TEM波),  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{K}$  三矢量相互垂直, 组成右手直角系.

由式(2.4.9)知  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{E}$  同相位, 其值之比为

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v \quad (2.4.11)$$

在真空中

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad (2.4.12)$$

### 2.4.3 波阻抗 $\eta_0$ 、 $\eta$

真空中的波阻抗  $\eta_0$  定义为

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12}}} = 377(\Omega) \quad (2.4.13)$$

$\eta_0$  又称为真空中的本征阻抗, 它表示了真空中均匀平面波的电场强度与磁感强度的振幅值之比.

介质中的波阻抗  $\eta$  为

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \cdot \eta_0 \quad (2.4.14)$$

## 2.5 平面电磁波的能量和能流密度

### 2.5.1 能量密度 $w$

根据 1.9.3 节中导出的电磁场能量密度表达一般式(1.9.14), 对于平面电磁

波,由  $\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$  得  $\mu \epsilon E^2 = B^2$ , 代入能量密度一般式,得

$$w = \frac{1}{2} \left[ \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right] = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 \quad (2.5.1)$$

由上式可见,平面电磁波的电场能量与磁场能量相等.

对于时谐电磁场平面波,电磁场能量密度为

$$\begin{aligned} w &= \epsilon E^2 = \epsilon [ \operatorname{Re} ( E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} ) ]^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \{ 1 + \cos[2(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

以上表达的是瞬时能量密度,而实际感兴趣的往往是时间平均值,即对一个周期内取时间平均值

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T w(\mathbf{r}, t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\epsilon E_0^2}{2} \{ 1 + \cos[2(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \} dt = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

### 2.5.2 能流密度(坡印亭矢量)

由式(1.9.12)表达的一般电磁场的能流密度(坡印亭矢量)瞬时值为  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , 对于平面电磁波,有  $\mathbf{B} = \sqrt{\mu \epsilon} \mathbf{K}_0 \times \mathbf{E}$ , 代入上式得到坡印亭矢量表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\mu} \mathbf{E} \times (\mathbf{K}_0 \times \mathbf{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{K}_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} w \mathbf{K}_0 = v_\varphi w \mathbf{K}_0 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

上式表示,在均匀的无限大介质中,平面电磁波①能流密度大小 = 能量密度 × 相速度,②能流密度方向为波矢量  $\mathbf{K}$  的方向.

同样,考察时间平均能流密度,其大小为

$$\langle \mathbf{S} \rangle = v_\varphi \langle w \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \quad (2.5.5)$$

其方向仍为波矢量  $\mathbf{K}$  的方向.

### 2.5.3 复数形式的时间平均能量密度及坡印亭矢量

在1.7.2节中已提及时谐电磁场.单色平面波就是随时间正弦变化的时谐场.即使是具有复杂频率谱的非单色波,也可分解为许多不同频率的单色波组合.讨论这类谐波的较方便的方法是把每个场矢量表示为复数.例如考虑场矢量的某

个分量

$$a(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.5.6)$$

式中  $\varphi$  为相位. 如果定义  $a(t)$  的复振幅

$$A = |A| e^{i\varphi} \quad (2.5.7)$$

则式(2.5.6)可写为

$$a(t) = \operatorname{Re}[Ae^{i\omega t}] \quad (2.5.8)$$

经常简单地用下式表示

$$a(t) = Ae^{i\omega t} \quad (2.5.9)$$

而不是用式(2.5.6)或式(2.5.8)表示. 当然这样做是不严格的, 仅仅为了计算及书写时的简洁, 它出现时, 式(2.5.9)的意思总是理解为取  $Ae^{i\omega t}$  的实部. 要注意的是, 在大多数情形下用复数形式(2.5.9)表示场矢量, 就线性数学运算(如微分、积分、求和)而论是不成问题的, 但当涉及场矢量乘积(或乘方)时, 如能量密度和坡印亭矢量, 就会出现例外, 这时必须采用物理量的实数形式.

例如, 考虑两个正弦函数  $a(t)$  和  $b(t)$  的乘积

$$a(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi_1) = \operatorname{Re}[Ae^{i\omega t}] \quad (2.5.10)$$

$$b(t) = |B| \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re}[Be^{i\omega t}] \quad (2.5.11)$$

用实函数运算, 可得

$$a(t)b(t) = \frac{1}{2} |AB| [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (2.5.12)$$

但是, 如果用复函数形式求积, 则得

$$a(t)b(t) = AB e^{i2\omega t} = |AB| e^{i(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)} \quad (2.5.13)$$

这一结果与式(2.5.12)比较可以看出两者是不相等的. 也就是说, 如果  $x$  和  $y$  为任意两个复数, 则下面的不等式一般是正确的

$$\operatorname{Re}[x] \cdot \operatorname{Re}[y] \neq \operatorname{Re}[xy] \quad (2.5.14)$$

因此, 对于  $a(t)$  与  $b(t)$  两个正弦函数乘积的时间平均为

$$\begin{aligned} \langle a(t)b(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T |A| \cos(\omega t + \varphi_1) |B| \cos(\omega t + \varphi_2) dt \\ &= \frac{1}{2} |AB| \cdot \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] dt \end{aligned}$$

式中,  $T = 2\pi/\omega$  为振荡周期, 故在  $T$  时间内求平均时, 含  $\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$  项对  $T$  平均为零, 上式可改写为

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{2} |AB| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.5.15)$$

如果用式(2.5.8)所示的  $a(t)$  和  $b(t)$  的复数表示形式,直接写成

$$\langle \operatorname{Re}[a(t)]\operatorname{Re}[b(t)] \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[a(t) \cdot b^*(t)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[AB^*] \quad (2.5.16)$$

上式中 \* 表示复数共轭.

将上面讨论的一般关系应用于场矢量,采用场矢量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$  的复函数形式,对于时谐电磁场,由能量密度瞬时表达式  $w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ ,求得能量密度时间平均为

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*] \quad (2.5.17)$$

由坡印亭矢量瞬时表达式  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ,求得时间平均的坡印亭矢量为

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \quad (2.5.18)$$

同样,对于简谐平面电磁波的情况,由式(2.5.3)写为复数形式的时间平均能量密度为

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \quad (2.5.19)$$

而由式(2.5.5)得复数形式的平面电磁波时间平均坡印亭矢量

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \quad (2.5.20)$$

在光学中,常常把时间平均能流密度即时间平均坡印亭矢量的大小叫作光强.对于平面波,有

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_0^2 \quad (2.5.21)$$

由式(2.4.14)知  $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{\eta}$ ,  $\eta$  在真空中即为  $\eta_0$ , 因此有

$$I = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_0} E_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{377(\Omega)} E_0^2 \quad (2.5.22)$$

$I$  的量纲为  $\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} = \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ , 这是功率密度的量纲.

在平常的许多问题中,常常只考虑光的相对强弱,因而常略去常数因子而把光强写作

$$I = E_0^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (2.5.23)$$

以上写法在严格计算光强时是不可取的,必须按

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\eta} E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (2.5.24)$$

做计算.  $\eta$  是介质中的波阻抗, 由式(2.4.14)给出.

## 2.6 准单色光波

### 2.6.1 准单色光波的物理意义

在 1.8 节中讨论的有源波动方程中, 是以电偶极子作简谐振荡辐射线偏振单色球面波的, 相当于无限长正弦波列. 但实际上电偶极子由于辐射能量而做阻尼振荡, 实际原子发光时, 每个阻尼振荡电偶极子只能产生有限长波列, 波列持续时间典型值为  $10^{-8}$  s(图 2.6.1(a)), 将其写为数学表达式为

$$a(t) = \begin{cases} A e^{i2\pi\nu_0 t} & |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

这种有限长波列所含的频谱可以从对  $a(t)$  作傅里叶变换, 并由 sinc 函数

$\left[ \text{sinc } X = \frac{\sin \pi X}{\pi X} \right]$ , 求得

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \mathcal{F}[a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i2\pi\nu_0 t} dt \\ &= A \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{i2\pi\nu_0 t} \cdot e^{-i2\pi\nu_0 t} dt \\ &= A \cdot \Delta t \frac{\sin \left[ (\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} \right]}{(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2}} = A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\Delta \nu \cdot \Delta t) \\ &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc} \left[ \frac{\Delta \omega \cdot \Delta t}{2\pi} \right] \\ &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\gamma \Delta t) \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

$A(\gamma)$  表示  $a(t)$  的频谱如图 2.6.1(b) 所示, 式中  $\gamma = \frac{\omega_0 - \omega}{2\pi} = \frac{\Delta \omega}{2\pi} = \Delta \nu$ .

当  $\pi \gamma \Delta t = (\omega_0 - \omega) \cdot \frac{\Delta t}{2} = \pi$  时,  $A(\gamma) = 0$ , 称  $\Delta \omega = \omega_0 - \omega$  为谱线宽度.

谱线宽度可以有多种表达方式, 常用谱线宽度的单位有:

频率宽度:  $\Delta \nu$  ( $s^{-1}$  即 Hz), 或  $\Delta \omega$  ( $s^{-1}$ )

波长宽度:  $\Delta \lambda$  (cm)

波数宽度:  $\Delta \lambda$  ( $cm^{-1}$ ) (2.6.3)

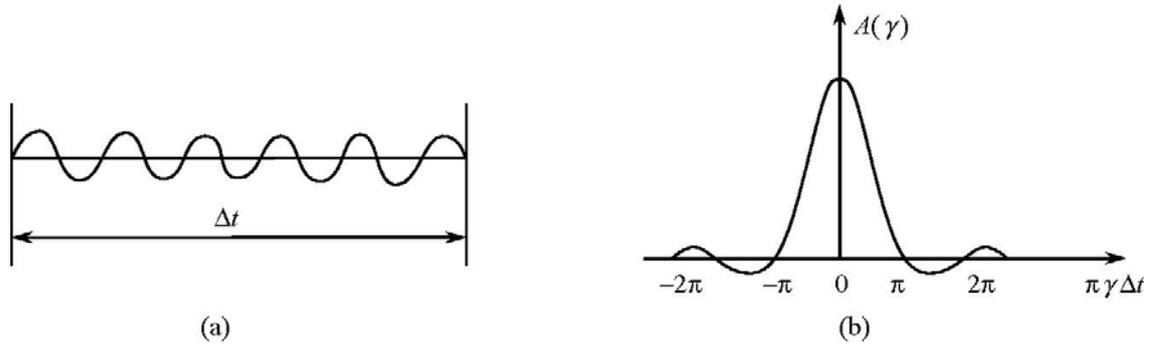


图 2.6.1 波列及其光谱分布

它们之间的关系是

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{波数}) \quad (2.6.4)$$

$$\Delta\bar{\lambda} = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{-\Delta\lambda v^2}{C^2} = \frac{\Delta v}{C} \quad (2.6.5)$$

故有

$$\Delta\lambda = -\frac{C}{v^2} \Delta v \quad (2.6.6)$$

$$\Delta\lambda = \frac{-C^2 \Delta\bar{\lambda}}{v^2} \quad (2.6.7)$$

例如 Nd:YAG 荧光半线宽为  $6.5\text{cm}^{-1}$ , 则可由式 (2.6.5) 求出

$$\Delta v = C \cdot \Delta\bar{\lambda} \approx 2 \times 10^{11} \text{ Hz} = 200 \text{ GHz} \quad (2.6.8)$$

当  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta v}{v_0} \ll 1$  时, 称之为准单色光. 准单色光相应于一列长度  $C \cdot \Delta t$  很长的波列. 它的光谱线宽度  $\Delta\lambda$  极小, 它所含的频率分布在一个极小的频谱范围  $\Delta v$  中. 也就是说, 它的单色性很好, 但又不像单色光那样理想地仅含一种频率, 因此, 称之为准单色光波. 这样的准单色光可看作是由分布在光谱线宽度  $\Delta v$  极小范围内的所有各单色分量的叠加. 这种光波又称波包.

## 2.6.2 波包和群速

对于任何非单色光波, 都可以利用傅里叶逆变换的方法分解为许多不同频率的单色光波的叠加

$$E(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} d\omega \quad (2.6.9)$$

基元函数  $e^{i(\omega t - \mathbf{K}(\omega) \cdot \mathbf{r})}$  代表了不同频率从而具有不同波数  $\mathbf{K}(\omega)$  的单色波,  $A(\omega)$  即为相应的单色波振幅. 如果一个波的傅里叶振幅  $A(\omega)$  仅在平均频率  $\bar{\omega}$  两侧很窄

的范围内有值,即为上节所述的准单色波,或称波包. 现在研究这类准单色波的特点.

先考虑两个单色平面波叠加的最简单情况. 设有两个单色平面波沿  $z$  轴传播,它们的振幅相同,频率及波数略有不同,这两个波叠加为

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_1(z, t) + E_2(z, t) = ae^{i(\omega t - Kz)} + ae^{i[(\omega + \Delta\omega)t - (K + \Delta K)z]} \\ &= 2a \cos\left[\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta Kz)\right] \cdot e^{i(\bar{\omega}t - \bar{K}z)} \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

式中,  $\bar{\omega} = \omega + \frac{\Delta\omega}{2}$  为平均频率;  $\bar{K} = K + \frac{\Delta K}{2}$  为平均波数. 合成后的波式(2.6.10)可以看作是一个变振幅的波

$$E(z, t) = A(z, t) e^{i(\bar{\omega}t - \bar{K}z)} \quad (2.6.11)$$

其变振幅  $A(z, t)$  由下式确定

$$A(z, t) = 2a \cos\left[\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta Kz)\right] \quad (2.6.12)$$

这就是拍频现象,如图 2.6.2 所示.

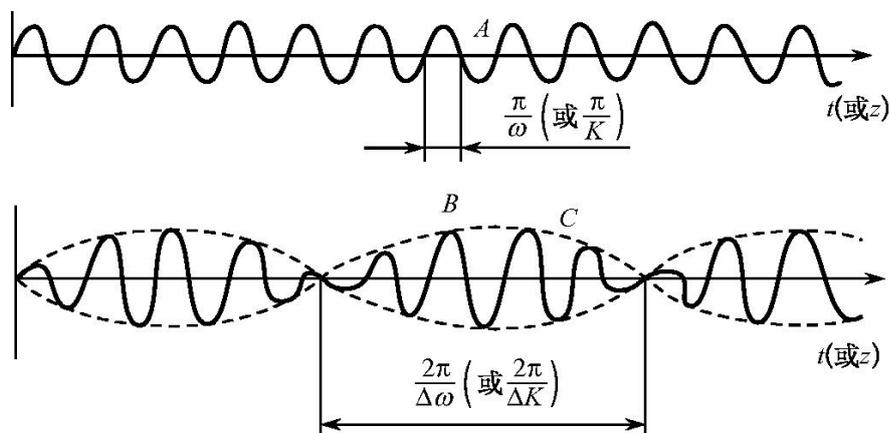


图 2.6.2 简单波包

平面波位相函数  $e^{i(\omega t - Kz)}$  变化频率为  $\bar{\omega}$ , 而其振幅函数  $\cos\left[\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta Kz)\right]$  的变化频率为  $\frac{\Delta\omega}{2}$ , 通常有  $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ , 因此振幅函数好像是一个调制波.

由式(2.6.10)可以看到,各等振幅面传播速度

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta K} \approx \frac{d\omega}{dK} \quad (2.6.13)$$

它代表了由振幅函数包络的波群的传播速度,因此又称群速度. 群速与相速是两个不同的物理概念,在一般情况下,群速往往代表了能量传播的速度,它是等振幅面的传播速度;而相速则代表了等相位面传播的速度.

### 2.6.3 激光脉冲的传播及群速度

现在考虑激光脉冲的情况. 由于激光脉冲的持续时间极短( $10^{-9} \sim 10^{-12}$  s), 从而导致了频率(或等价的波长)的有限展宽. 同样, 可以将其表达为许多单色波的叠加, 这些单色波的频率连续地分布在

$$\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2} \quad (2.6.14)$$

这样, 可以把激光脉冲表达为

$$E(z, t) = \int_{\Delta\omega} a_{\omega} e^{i(\omega t - Kz)} d\omega = \int_{\Delta\omega} a_{\omega} e^{i[(\omega - \bar{\omega})t - (K - \bar{K})z]} e^{i(\bar{\omega}t - \bar{K}z)} d\omega \quad (2.6.15)$$

上式表示的也是一个变振幅的平面波, 完全类似于式(2.6.10)及式(2.6.11), 式(2.6.15)可改写为

$$E(z, t) = A(z, t) \cdot e^{i(\bar{\omega}t - \bar{K}z)} \quad (2.6.16)$$

其振幅  $A(z, t)$  由式(2.6.15)确定

$$A(z, t) = \int_{\Delta\omega} a_{\omega} e^{i[(\omega - \bar{\omega})t - (K - \bar{K})z]} d\omega \quad (2.6.17)$$

由于

$$K - \bar{K} = \frac{dK}{d\omega} \cdot \Delta\omega = \left. \frac{dK}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \cdot (\omega - \bar{\omega}) \quad (2.6.18)$$

代入式(2.6.17)得

$$A(z, t) = \int_{\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}} a_{\omega} e^{i[(\omega - \bar{\omega}) \left\{ t - z \left. \frac{dK}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \right\}]} d\omega \quad (2.6.19)$$

为讨论这一变振幅平面波, 假定最简单的情况  $a_{\omega} = a$  为常数, 即假定该脉冲在  $\Delta\omega$  范围内各频谱分量的振幅相等. 式(2.6.19)的积分结果为

$$A(z, t) = \Delta\omega a \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} \Delta\omega \left[ t - z \left. \frac{dK}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \right] \right]}{\frac{1}{2} \Delta\omega \left[ t - z \left. \frac{dK}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \right]} \quad (2.6.20)$$

$A(z, t)$  随  $t$  (或  $z$ ) 的分布由图(2.6.3)给出. 它表示了这样一个波包: 当在某一时刻  $t$ , 其平面波振幅的空间如图分布所示, 有一处振幅极大. 振幅极大的条件为

$$t = z \left. \frac{dK}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \quad (2.6.21)$$

而在振幅极大的两侧, 满足

$$\frac{1}{2} \Delta\omega \left[ t - z \left. \frac{dK}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \right] = \pm \pi \quad (2.6.22)$$

的两点( $t$  固定)间隔内振幅有一定值, 可将此作为波包的范围. 或者可看作一个固

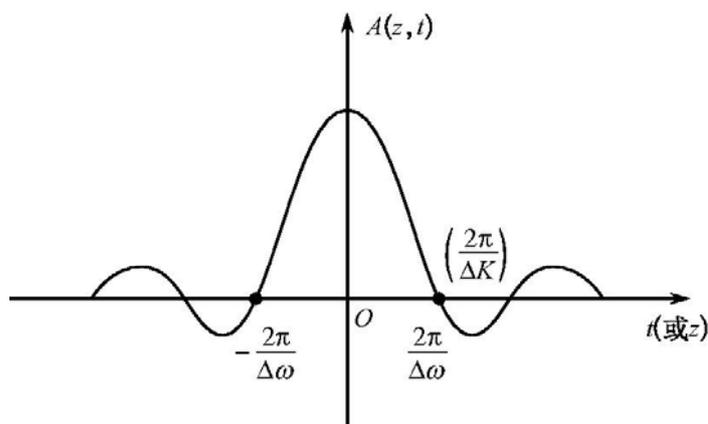


图 2.6.3 波包  $A(z, t)$  与  $t$  (或  $z$ ) 的关系  
(横坐标上的值是相应于  $z=0$  (或  $t=0$ ) 时  $t$  (或  $z$ ) 的值)

定  $z$  的点, 平面波振幅随时间变化, 在由式 (2.6.21) 确定的振幅极大两侧  $-2\pi/\Delta\omega < t < 2\pi/\Delta\omega$  范围内振幅有值, 即为波包范围. 在此时间之外振幅均接近为零. 这就是激光脉冲的延续时间或脉冲宽度.

群速度则为振幅最大值的等值面传播速度. 由式 (2.6.21) 求得

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\left. \frac{dK}{d\omega} \right|_{\omega}} = \left. \frac{d\omega}{dK} \right|_K \quad (2.6.23)$$

在介质没有明显色散的情况下, 群速度代表了波群整体的传播速度, 这时, 它也代表能量传播的速度. 关于色散介质中的情况, 将在第 4 章中做详细讨论.

## 2.7 任意简谐波及相速度

现在讨论更具有一般性的任意简谐波. 设标量波动方程

$$\Delta^2 E(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7.1)$$

的一个特解为如下一般形式的频率为  $\omega$  的标量时间简谐波

$$E(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{i[\omega t - g(\mathbf{r})]} \quad (2.7.2)$$

式中,  $A(\mathbf{r})$  为振幅, 它是空间变量  $\mathbf{r}$  的函数;  $g(\mathbf{r})$  是  $\mathbf{r}$  的标量函数. 由式 (2.7.2) 表达的这一复杂波其等相面与等幅面显然是不一致的. 这将导致在同一等相面上各点振幅不相等. 这种等相面与等幅面不重合的波称为非均匀波. 该非均匀波的等相面方程为

$$\omega t - g(\mathbf{r}) = \varphi \quad (2.7.3)$$

式中  $\varphi$  为常数. 利用  $g(\mathbf{r})$  的全微分式

$$dg(\mathbf{r}) = \Delta g(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = |\Delta g(\mathbf{r})| dr \cos\alpha = |\Delta g(\mathbf{r})| dr_n \quad (2.7.4)$$

式中,  $\Delta g(\mathbf{r})$  为  $g(\mathbf{r})$  的梯度;  $\alpha$  为  $d\mathbf{r}$  与梯度方向间夹角;  $dr_n = |dr_n|$ , 为  $d\mathbf{r}$  在梯度方向的投影.

非均匀波的相速是等相面沿其法线方向的传播速度, 其法线方向即为  $\Delta g(\mathbf{r})$  的方向, 因此, 非均匀波的相速为

$$v_\phi = \frac{dr_n}{dt} = \frac{1}{|\Delta g(\mathbf{r})|} \frac{dg(\mathbf{r})}{dt} \quad (2.7.5)$$

对式(2.7.3)关于  $t$  求导后代入上式, 得

$$v_\phi = \frac{\omega}{|\Delta g(\mathbf{r})|} \quad (2.7.6)$$

这是一个关于相速的普遍表达式, 它同样适用于平面波和球面波. 如对于球面波, 其等相面方程为

$$\omega t - kr + \varphi_0 = \varphi \quad (2.7.7)$$

可知相应的有

$$g(\mathbf{r}) = Kr - \varphi_0 \quad (2.7.8)$$

$$\Delta g(\mathbf{r}) = \Delta(Kr) = K \quad (2.7.9)$$

故有球面波相速

$$v_\phi = \frac{\omega}{|\Delta g(\mathbf{r})|} = \frac{\omega}{K} \quad (2.7.10)$$

任意简谐波的空间部分和时间部分可以分离, 即

$$E(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{[i(\omega t - g(\mathbf{r}))]} = U(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.7.11)$$

式中

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{-ig(\mathbf{r})} \quad (2.7.12)$$

因此将式(2.7.11)代入波动方程(2.7.1), 仍可得到  $U(\mathbf{r})$  满足亥姆霍兹方程

$$\Delta^2 U(\mathbf{r}) + K^2 U(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.7.13)$$

对于任何空间变量与时间变量可以分离的波函数, 其空间部分均应满足上述亥姆霍兹方程, 即定态波动方程.

## 2.8 光波的偏振

### 2.8.1 偏振的概念

光波是电磁场, 对它作完整的描述需要 4 个基本场矢量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ . 但由于在大多数光学介质中, 介质与光波的物理相互作用往往涉及电场, 在许多物质中(各

向异性介质), 折射率与电场矢量  $\mathbf{E}$  的振动方向有关. 因此在研究光波的偏振问题时, 选择电场矢量  $\mathbf{E}$  来确定光波的偏振态, 这对于光波段的电磁波而言是合理的. 而在一般的工程电磁学中, 则用极化波, 例如水平极化 ( $E_{\parallel}$ 、 $H_{\parallel}$ ), 垂直极化 ( $E_{\perp}$ 、 $H_{\perp}$ ) 等名词来表示电磁波的  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{H}$  振动状态. 在今后几章中涉及的光波偏振状态均指光波所相应的电场矢量  $\mathbf{E}$  的振动状态.

### 2.8.2 波动的复数表示, 两种表达方式及光波的位相关系

在光学中常用复数来表示光波. 常常出现如下两种不同的表达方式

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.8.1)$$

及

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}e^{-i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.8.2)$$

本章将就这两种表达方式作一详细讨论.

#### 1. 振动与波动的复数表示, 旋转复矢量

在由实轴  $x$  与虚轴  $y$  组成的复平面上, 可以用一个复数  $A = x + iy$  来表示一个点  $P(x, y)$  的位置, 所以复数  $A$  也可以看作是直角坐标系中的位置矢量  $\mathbf{r}(x, y)$  (图 2.8.1). 也可将复数  $A$  表示的位置矢量写为极坐标形式

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (2.8.3)$$

或写为指数形式

$$A = re^{i\varphi} \quad (2.8.4)$$

设点  $B$  沿  $x$  轴做简谐振动

$$V(t) = a\cos(\omega t + \delta) \quad (2.8.5)$$

则这一振动可以用一个由复平面的复数

$$A = ae^{i(\omega t + \delta)} \quad (2.8.6)$$

所代表的旋转矢量  $OP$  表示. 矢量  $OP$  以角速度  $\omega$  绕  $O$  点逆时针转动 (图 2.8.2). 按约定逆时针方向为  $+\omega$  方向, 或认为  $\omega$  矢量方向为垂直纸面, 向外, 则矢径端点  $P$  在实轴  $x$  轴上的投影在  $x$  方向移动的情况正是由式 (2.8.5) 所描述的振动.

对于沿  $z$  方向传播、振动方向沿  $x$  轴向的波动

$$E(z, t) = ae^{i(\omega t - Kz)} \quad (2.8.7)$$

则仍可用上述旋转矢量的方法来描写在任一给定位置  $z$  上的振动情况. 此时, 该点振动的相角  $\delta = -Kz$ , 不同的  $z$ , 具有不同的初相角  $\delta(z)$ .

上述振动与波动的另一种表示方法分别为

$$A = ae^{-i(\omega t + \delta)} \quad (2.8.8)$$

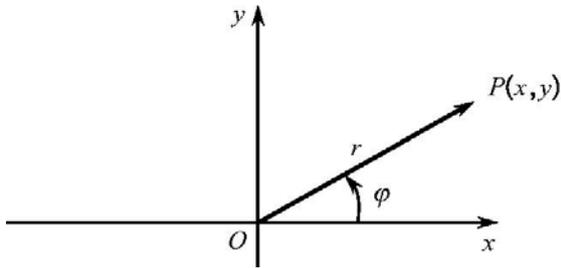
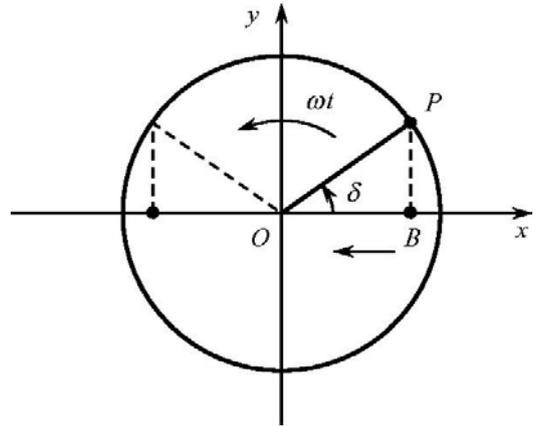


图 2.8.1 复平面上的点

图 2.8.2 复平面上的旋转矢量  $\omega t$  以逆时针方向旋转

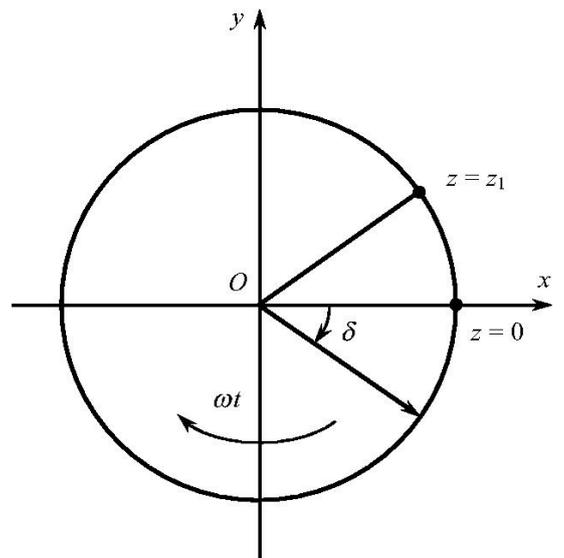
及

$$E(z, t) = ae^{-i(\omega t - Kz)} = ae^{i(Kz - \omega t)} \quad (2.8.9)$$

以式(2.8.9)描写的波动写为实数形式时常表达为

$$E(z, t) = a \cos(Kz - \omega t) \quad (2.8.10)$$

这种表达方式就其振动与波动的本质而言与式(2.8.7)完全一样,但在以旋转矢量表达的形式上则表现为此时旋转矢量规定为以顺时针方向旋转,  $\omega$  矢量方向为垂直纸面向里. 这时所有的相角均以顺时针方向为正值. 例如,对于  $z = 0$  点,  $\delta = 0$ , 当  $z = z_1$  时,  $\delta = -Kz < 0$ ,  $z_1$  点振动落后于  $z = 0$  点(图 2.8.3). 显然,波动正是沿  $z$  方向从  $z = 0$  点向  $z = z_1$  点传播的.

图 2.8.3  $\omega t$  以顺时针方向旋转的复旋转矢量

## 2. 光波及电场振动的相应关系

设有两个简谐振动

$$a(t) = a \cos(\omega t + \Phi_a) \quad (2.8.11)$$

$$b(t) = b \cos(\omega t + \Phi_b) \quad (2.8.12)$$

其相位差

$$\delta = \Phi_b - \Phi_a \quad (2.8.13)$$

当  $\Phi_b > \Phi_a$  时,  $b(t)$  相位超前  $a(t)$ , 或者说  $a(t)$  相位滞后  $b(t)$ . 例如, 当  $\delta = \frac{\pi}{2}$  时, 假设  $\Phi_a = 0$ , 图 2.8.4 示出了这两个振动的时间-振幅曲线, 此时  $\Phi_b = \delta = \pi/2$ , 我们说振动  $b(t)$  位相超前  $a(t)\pi/2$ ,  $b(t)$  振动在  $t = 0$  时刻的状态,  $a(t)$  在后一时刻  $t = \pi/2\omega$  时刻才达到. 图 2.8.4 右方示出了  $t = 0$  时刻相应于  $a(t)$  及  $b(t)$  的两个旋转矢量的位置.

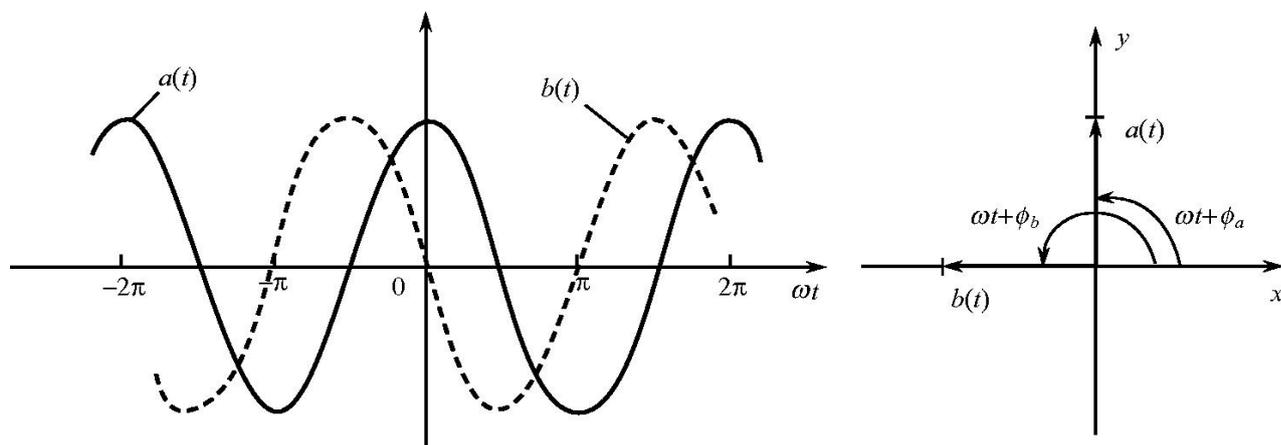


图 2.8.4 两个简谐振动的相位差,  $b(t)$  超前  $a(t)\frac{\pi}{2}$

用复数方法表达的两个振动旋转矢量示于图 2.8.5. 图 2.8.5(a) 相应的复数表达式为

$$a(t) = ae^{i(\omega t + \Phi_a)} \quad (2.8.14)$$

$$b(t) = be^{i(\omega t + \Phi_b)} \quad (2.8.15)$$

位相差

$$\delta = \Phi_b - \Phi_a \quad (2.8.16)$$

当  $\delta > 0$  时,  $\Phi_b > \Phi_a$ ,  $b(t)$  超前  $a(t)$  一个位相  $\delta$ , 此种表达下  $\omega t$  以逆时针旋转为正, 所有相角或位相差均以与  $\omega t$  相同的旋向即逆时针旋向为正.

而图 2.8.5(b) 相应的复数表达式为

$$a(t) = ae^{-i(\omega t + \Phi_a)} \quad (2.8.17)$$

$$b(t) = be^{-i(\omega t + \Phi_b)} \quad (2.8.18)$$

位相差

$$\delta = \Phi_b - \Phi_a \quad (2.8.19)$$

当  $\delta > 0$  时,  $\Phi_b > \Phi_a$ ,  $b(t)$  超前  $a(t)$  一个位相  $\delta$ , 此种情况下  $\omega t$  以顺时针旋转为正, 所有相角或位相差均以顺时针旋转为正.

在描写波动的位相时完全与上面类似. 如果有两个光波

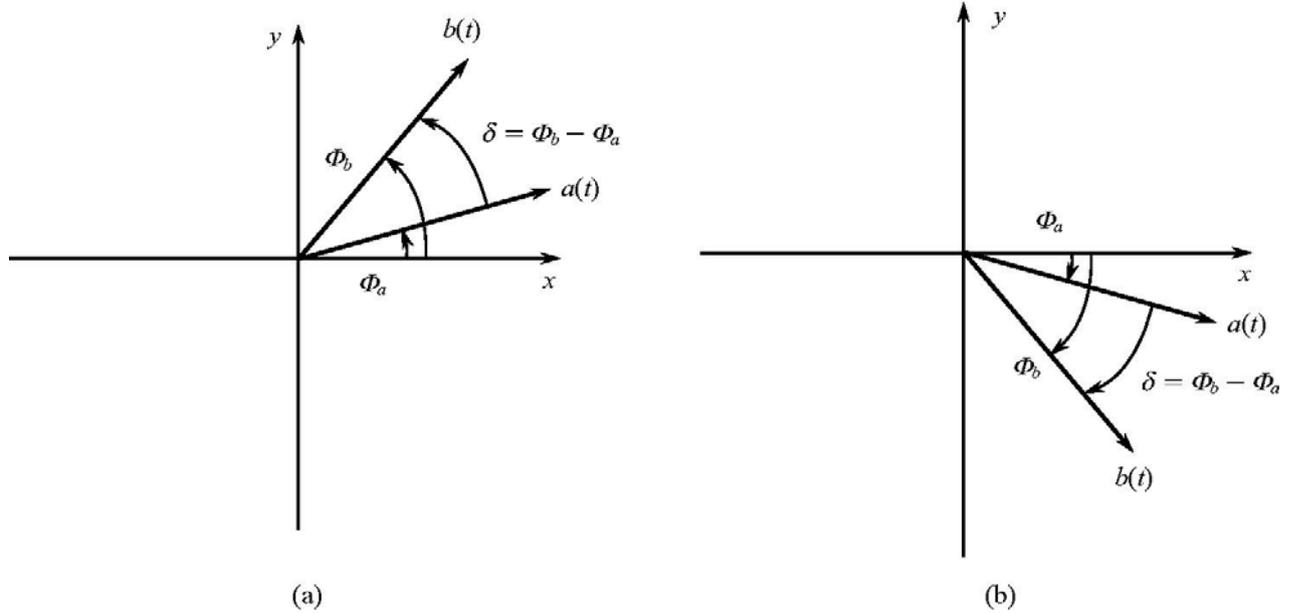


图 2.8.5 旋转矢量的相位差

(a)  $a(t) = ae^{i(\omega t + \Phi_a)}$ ,  $b(t) = be^{i(\omega t + \Phi_b)}$ ; (b)  $a(t) = ae^{-i(\omega t + \Phi_a)}$ ,  $b(t) = be^{-i(\omega t + \Phi_b)}$

$$E_1 = ae^{i(\omega t - Kz)} \quad (2.8.20)$$

$$E_2 = ae^{i[\omega t - K(z-d)]} \quad (2.8.21)$$

两光波的位相差

$$\delta = \Phi_2 - \Phi_1 = -K(z-d) - (-Kz) = Kd \quad (2.8.22)$$

$\delta > 0$ , 故有波动  $E_2$  比  $E_1$  超前  $Kd$ , 或者说两个波动传播到同一点时, 由  $E_2$  引起的振动相位超前  $E_1$  引起的振动.

对于以式(2.8.9)表达的光波

$$E_1 = ae^{-i(\omega t - Kz)} = ae^{-i(\omega t + \Phi_1)} \quad (2.8.23)$$

$$E_2 = ae^{-i[\omega t - K(z-d)]} = ae^{-i(\omega t + \Phi_2)} \quad (2.8.24)$$

则以下式定义相角时

$$\Phi_1 = -Kz$$

$$\Phi_2 = -K(z-d) \quad (2.8.25)$$

相位差

$$\delta = \Phi_2 - \Phi_1 = Kd \quad (2.8.26)$$

仍有  $\Phi_2 > \Phi_1$ , 表示  $E_2$  超前  $E_1$ .

### 2.8.3 单色平面波的偏振态

考虑两个单色平面波, 它们具有相同频率、相同传播方向, 且其振动方向相互垂直

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - Kz + \delta_x) \\ E_y &= A_y \cos(\omega t - Kz + \delta_y) \end{aligned} \quad (2.8.27)$$

或有复数表示

$$\begin{aligned} E_x &= A_x e^{i(\omega t - Kz + \delta_x)} \\ E_y &= A_y e^{i(\omega t - Kz + \delta_y)} \end{aligned} \quad (2.8.28)$$

两波在  $z$  点的振动合成, 即电矢量端点随时间变化所描述的曲线可由方程(2.8.27)消除  $\omega t - Kz$ , 得

$$\left[ \frac{E_x}{A_x} \right]^2 + \left[ \frac{E_y}{A_y} \right]^2 - 2 \frac{\cos \delta}{A_x A_y} \cdot E_x E_y = \sin^2 \delta \quad (2.8.29)$$

式中

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (2.8.30)$$

所有相角限定在  $-\pi < \delta < \pi$  范围内.

方程(2.8.29)表示的是椭圆, 它被限制在边长为  $2A_x$  及  $2A_y$  的矩形内. 将上述二次方程对角化(或将椭圆主轴化), 令  $x'$  和  $y'$  为沿椭圆主轴的新坐标轴, 则新坐标系中椭圆方程为

$$\left[ \frac{E_{x'}}{a} \right]^2 + \left[ \frac{E_{y'}}{b} \right]^2 = 1 \quad (2.8.31)$$

式中,  $a$  和  $b$  为椭圆主轴;  $E_{x'}$  和  $E_{y'}$  为电场矢量在此主坐标系中的分量.

令  $\Phi$  ( $0 \leq \Phi < \pi$ ) 为主轴  $x'$  与  $x$  轴之间的夹角, 则主轴长度为

$$\begin{aligned} a^2 &= A_x^2 \cos^2 \Phi + A_y^2 \sin^2 \Phi + 2A_x A_y \cos \delta \cos \Phi \sin \Phi \\ b^2 &= A_x^2 \sin^2 \Phi + A_y^2 \cos^2 \Phi - 2A_x A_y \cos \delta \cos \Phi \sin \Phi \end{aligned} \quad (2.8.32)$$

其中  $\Phi$  可由下式求得

$$\tan 2\Phi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \delta \quad (2.8.33)$$

图 2.8.6 示出了偏振椭圆随位相差  $\delta$  变化而变化的情况. 应当指出, 现在按式(2.8.27)及式(2.8.30)的定义及约定,  $\delta > 0$  意味着  $\delta_y > \delta_x$ , 即  $E_y$  超前  $E_x$ , 而  $\delta < 0$  则意味着  $E_y$  滞后  $E_x$ . 如果用其他的表示方法, 如某些书中采用的

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(Kz - \omega t + \delta_x) \\ E_y &= A_y \cos(Kz - \omega t + \delta_y) \end{aligned} \quad (2.8.34)$$

时, 由于上式中  $\delta_x$ 、 $\delta_y$  与  $\omega t$  项前面的符号相反, 则会导致  $\delta$  符号与椭圆旋向的关系与图 2.8.6 相反. 但不论何种表达, 只要用位相超前或滞后的概念作统一标准, 椭圆的旋向就一致了. 例如, 下图中当  $\delta = \delta_y - \delta_x = \frac{\pi}{2}$  时, 表示  $\delta_y$  比  $\delta_x$  超前  $\frac{\pi}{2}$ .

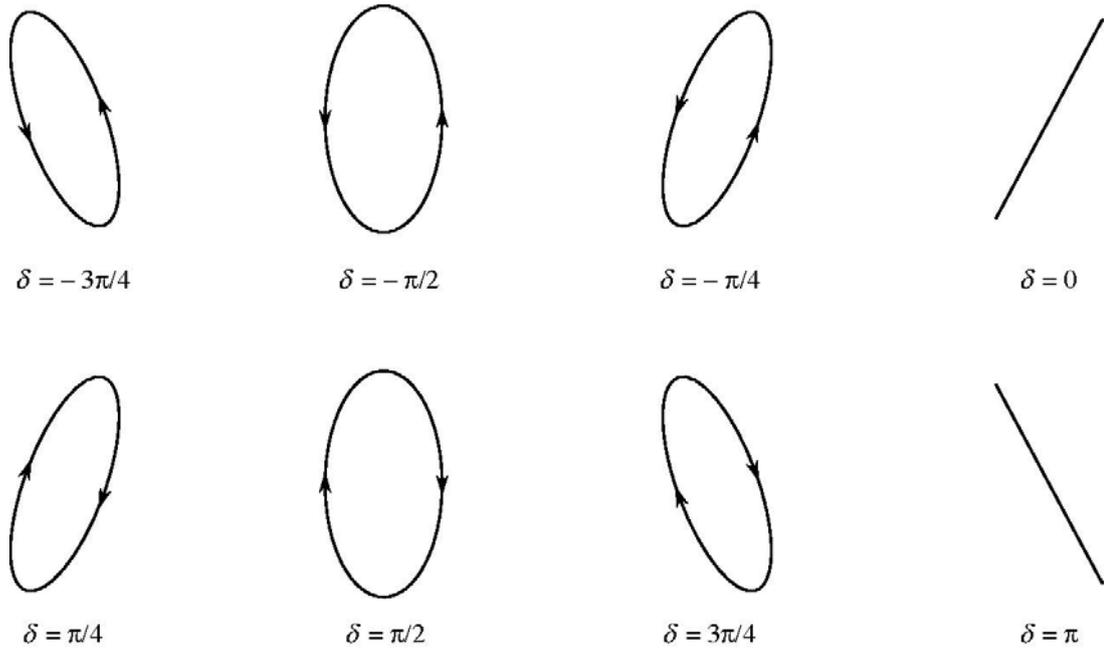


图 2.8.6 各种相角  $\delta$  的偏振椭圆  
 $(E_x = A_x \cos(\omega t - Kz), E_y = A_y \cos(\omega t - Kz))$

关于偏振的旋向,也有两种不同的定义.在大部分经典光学的书中均规定,当观察者迎光方向观察偏振光电场矢量端点顺时针旋转时为右旋椭圆偏振光,而逆时针旋转则为左旋偏振光.另一种规定则是,当光的传播方向( $\mathbf{K}$ 的方向)与圆偏振光的旋向符合右手螺旋规则时定为右旋光,而反之则为左旋光.这种规定的旋向习惯是与近代物理中的术语即右旋圆偏振光的光子沿传播方向有正的角动量是一致的.

下面讨论偏振态.

### 1. 线偏振

当  $\delta = \delta_y - \delta_x = m\pi, m = 0, 1$  时,椭圆将变成直线,此时的光称为线偏振光.

### 2. 圆偏振

当  $A_x = A_y$ , 且有  $\delta = \delta_y - \delta_x = \pm \frac{1}{2}\pi$  时,椭圆变成圆,按照经典光学的习惯,则有:

(1)  $\delta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $E_y$  落后  $E_x \frac{\pi}{2}$ , 电矢量逆时针转动,为左旋圆偏振光.

(2)  $\delta = \frac{\pi}{2}$ ,  $E_y$  超前  $E_x \frac{\pi}{2}$ , 电矢量顺时针转动,为右旋圆偏振光.

### 3. 椭圆偏振光

除上述两种情况外,其余均为椭圆偏振光,其旋向也如前面规定.

尽管“左”、“右”旋向有两种不同规定,但旋向的顺时针或逆时针相对于  $E_y$  与  $E_x$  的超前滞后关系而言则是绝对的、完全一致的,因此,指明两波的相位关系及旋转方向才是本质的东西.

#### 2.8.4 琼斯矢量表示法

1941年,R.C.Jones引入琼斯矢量,由其可有效地描述平面波的偏振状态.

考虑某一偏振光,可以表达为光矢量沿  $x$  轴和  $y$  轴的两个线偏光

$$\begin{aligned} E_x &= a_x e^{i(\omega t + \delta_x)} \\ E_y &= a_y e^{i(\omega t + \delta_y)} \end{aligned} \quad (2.8.35)$$

的叠加.省略共同的时间因子项  $e^{i\omega t}$ ,可用复振幅表达这两个分量

$$\begin{aligned} A_x &= a_x e^{i\delta_x} \\ A_y &= a_y e^{i\delta_y} \end{aligned} \quad (2.8.36)$$

因此任一偏振光可以用它的两个分量构成的一列矩阵,即琼斯矢量  $\mathbf{J}$  来表示

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x e^{i\delta_x} \\ a_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (2.8.37)$$

琼斯矢量含有电场矢量分量的振幅和相位的全部信息,因此它唯一地确定波的状态.如果我们只关心波的偏振态,可以采用归一化琼斯矢量,即

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{J} = 1 \quad (2.8.38)$$

此时有

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{bmatrix} a_x e^{i\delta_x} \\ a_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix} = \frac{a_x e^{i\delta_x}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a_y}{a_x} e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (2.8.39)$$

其中

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (2.8.40)$$

如果我们只关心两分量的相对位相及振幅比,则可取琼斯矢量如下形式

$$\mathbf{J} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a_y}{a_x} e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (2.8.41)$$

或仅取其矩阵部分

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a_y}{a_x} e^{i\delta} \\ a_x \end{bmatrix} \quad (2.8.42)$$

如对于由图 2.8.6 中所示的右旋圆偏振光, 应有  $E_y$  超前  $E_x$  一个相位角  $\pi/2$ , 即  $\delta = \delta_y - \delta_x = \pi/2$ , 则得相应的琼斯矢量

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{J}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8.43)$$

而对左旋偏振光有

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{J}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8.44)$$

沿  $x$  轴振动的线偏光

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8.45)$$

沿  $y$  轴振动的线偏光

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8.46)$$

几种典型偏振态的琼斯矢量如图 2.8.7 所列.

应当注意的是, 在应用这种方法时, 应对给定的光波表达方式及左右旋向定义等都有一预先的约定, 以免混淆. 例如在某些书中, 其线偏振光采用了如下形式

$$E_x = a_x e^{i(\delta_x - \omega t)} = a_x e^{-i(\omega t - \delta_x)} \quad (2.8.47)$$

$$E_y = a_y e^{i(\delta_y - \omega t)} = a_y e^{-i(\omega t - \delta_y)} \quad (2.8.48)$$

而将共同因子  $e^{-i\omega t}$  省去, 采用复振幅

$$A_x = a_x e^{i\delta_x} \quad (2.8.49)$$

$$A_y = a_y e^{i\delta_y} \quad (2.8.50)$$

这时再采用与式(2.8.42)相同的琼斯矢量表达方式, 就会与前述结果产生符号上的差别, 如对于右旋圆偏振,  $E_y$  超前  $E_x$   $\frac{\pi}{2}$ , 由式(2.8.40)得  $\delta_x = 0, \delta_y = -\frac{\pi}{2}$ , 从而使琼斯矢量成为

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8.51)$$

造成这种对于同一旋向的圆偏振具有两种不同表达形式的琼斯矢量的原因在于, 在后一种方法中, 其光波的一般表示式中相位项  $\delta_x, \delta_y$  与  $(-\omega t)$  项符号相反, 而在

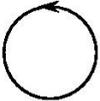
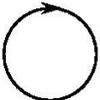
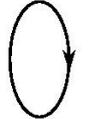
偏振椭圆	琼斯矢量
	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$

图 2.8.7 某些典型偏振态的琼斯矩阵

位相差定义中却仍沿用了  $\delta = \delta_y - \delta_x$  . 这样势必造成超前落后概念与  $\delta$  符号的相悖 .

解决的方法:①认定与采用的琼斯矢量表达式相应的约定表达式 . 这当然并不是一种普遍性较好的方法 . ②统一使光波表达式中  $\omega t$  项与位相项  $\delta_x$ 、 $\delta_y$  符号一致, 如用  $e^{i(\omega t + \delta_x)}$  , 或用  $e^{-i(\omega t + \delta_x)}$  , 二者均为标准形式, 任何实际的位相正负符号都将包括在  $\delta_x$  项之内 . 这样, 不论采用何种表达形式, 都将具有与图 2.8.7 所列出的琼斯矢量完全一致的形式而不再出现混淆与错误 .

事实上, 这种使  $\omega t$  与  $\delta_x$  符号一致的符号法则, 也将使位相差的规定符号  $\delta = \delta_y - \delta_x$  与  $E_y$  及  $E_x$  的超前落后的概念完全归于一个统一的标准, 也与旋转矢量 (图 2.8.5(a)及图 2.8.5(b)) 的相角概念相吻合 . 这样, 在运算过程中就不必顾及采用的是何种光波表达形式了 .

### 2.8.5 琼斯矢量的叠加与分解

两个偏振光满足下列关系

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = 0 \quad (2.8.52)$$

时,称为正交. 即有

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.8.53)$$

则

$$A_1 A_2^* + B_1 B_2^* = 0 \quad (2.8.54)$$

两个矢量正交,其点积为零,从广义上说,两个矢量夹角为  $90^\circ$ .

例如沿  $x$  轴与  $y$  轴方向振动的线偏光满足

$$\hat{X} \cdot \hat{Y}^* = 0 \quad (2.8.55)$$

故这两个偏振光正交. 从几何狭义说,这两个偏振光振动方向成  $90^\circ$  角.

对于右旋与左旋圆偏振光,也满足正交条件

$$\hat{R} \cdot \hat{L}^* = 0 \quad (2.8.56)$$

因为琼斯矢量是一个二阶的列矩阵,可用任何一对正交琼斯矢量作为所有琼斯矢量覆盖的数学空间的基. 任一偏振可表示成两个相互正交偏振  $\hat{X}$  和  $\hat{Y}$  或  $\hat{R}$  和  $\hat{L}$  的叠加. 尤其可以把基本的线偏振  $\hat{X}$  和  $\hat{Y}$  分解为两个圆偏振  $\hat{R}$  和  $\hat{L}$  的叠加,反过来也一样. 这些关系为

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{Y}) \quad (2.8.57)$$

$$\hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{Y})$$

或

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{R} + \hat{L}) \quad (2.8.58)$$

$$\hat{Y} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{R} - \hat{L})$$

上述关系意味着,圆偏振是由两个等幅而相位差  $\frac{\pi}{2}$  的沿  $x$  和  $y$  方向的线性振动叠加而成. 相似地,也可把线偏振看成是两个相反旋向的圆偏振的叠加.

一般地,当电场矢量沿着与  $x$  轴成  $\psi$  角的方向振动时,这一线偏光的琼斯矢量为

$$\mathbf{J}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} \quad (2.8.59)$$

而与之正交的线偏光则电场矢量在沿与  $x$  轴成  $\psi + \frac{\pi}{2}$  角度的方向上, 它的琼斯矢量为

$$\mathbf{J}_{\psi + \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \end{bmatrix} \quad (2.8.60)$$

这两个琼斯矢量正交, 满足

$$\mathbf{J}_\psi \cdot \mathbf{J}_{\psi + \frac{\pi}{2}} = 0 \quad (2.8.61)$$

或说这两个线偏光的偏振方向相互垂直.

容易证明, 一般的椭圆偏振光可用下述琼斯矩阵表达

$$\mathbf{J}(\psi, \delta) = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ e^{i\delta} \sin\psi \end{bmatrix} \quad (2.8.62)$$

此处  $\psi$  仍代表与  $x$  轴所夹的角度,  $\delta$  为相位差. 这个琼斯矢量代表的偏振态与复数  $A = e^{i\delta} \tan\psi$  所表示的偏振态相同. 可以把式 (2.8.62) 理解为: 有一个沿与  $x$  轴成  $\psi$  角的线偏光, 可以分解为  $x$  分量为  $\cos\psi$ ,  $y$  分量为  $\sin\psi$  的两个线偏光, 其中某一分量如此处  $y$  分量在经过某一器件或光路后相位比  $x$  分量有一个超前量  $\delta$ , 这样的两个线偏光合成后显然就是椭圆偏振光.

琼斯矢量最重要的应用是与琼斯算法结合来研究具有任意偏振态的平面波通过任意序列双折射元件和偏振器的传播.

### 3 电磁波在分层介质中的传播

#### 3.1 平面电磁波两介质界面上的反射和折射

##### 3.1.1 矢量形式的折、反射定律

考虑两种介质, 折射率分别为  $n_1$  及  $n_2$ , 交界面为  $xOy$  平面, 平面电磁波以  $xOz$  面为入射面入射到交界面上, 则在两种介质中存在有如下三个电磁波 (图 3.1.1)

$$\left. \begin{aligned} \text{入射波} \quad \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \\ \text{反射波} \quad \mathbf{E} &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - \mathbf{K}' \cdot \mathbf{r})} \\ \text{折射波} \quad \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega'' t - \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \right\} (3.1.1)$$

根据电磁场边界条件式(1.6.5), 有

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (3.1.2)$$

在现在的情况下, 在界面上方的介质 I 中存在  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{E}'$ , 即

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}' \quad (3.1.3)$$

在介质 II 中

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}' \quad (3.1.4)$$

代入边界条件, 得

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \mathbf{n} \times \mathbf{E}' \quad (3.1.5)$$

式中  $\mathbf{n}$  为界面法线.

把式(3.1.1)的各波表达式代入式(3.1.5), 对于交界面有  $z=0$ , 得

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E} e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - \mathbf{K}' \cdot \mathbf{r})}] |_{z=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega'' t - \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{r})} |_{z=0} \quad (3.1.6)$$

此式必须在整个界面上成立, 也就是说在  $z=0$  平面上对所有的  $x, y$  值均应成立. 而  $x, y, t$  又都是独立变量, 要使式(3.1.6)对所有  $x, y$  值都成立, 必须有

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{K}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{r} \quad (3.1.7)$$

及

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (3.1.8)$$

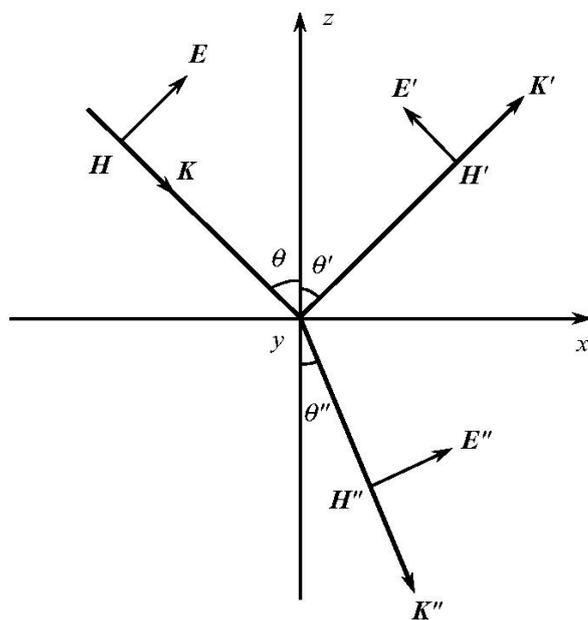


图 3.1.1 平面波在界面上的反射和折射

同时由于式(3.1.6)是对界面上的,故此时式中的 $\mathbf{r}$ 必在 $xOy$ 平面上.由式(3.1.7)得

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{K}' - \mathbf{K}) = 0 \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{K}'' - \mathbf{K}) = 0 \quad (3.1.10)$$

这就是矢量形式的折、反射定律.

### 结论

(1) 由 $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{K}' - \mathbf{K}) = 0$ (矢量形式反射定律),可得 $\mathbf{K}' - \mathbf{K}$ 与 $\mathbf{r}$ 垂直,即 $\mathbf{K}' - \mathbf{K}$ 垂直于界面;又因为 $|\mathbf{K}| = |\mathbf{K}'|$ ,可知入射角 $\theta$ 与反射角 $\theta'$ 相等,这时 $K_x = K'_x$ .这就是大家熟知的反射定律.

(2) 由 $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{K}'' - \mathbf{K}) = 0$ (矢量形式折射定律),可得 $\mathbf{K}'' - \mathbf{K}$ 与 $\mathbf{r}$ 垂直,即 $\mathbf{K}'' - \mathbf{K}$ 垂直于界面,且有 $K \sin \theta = K'' \sin \theta''$ , $\theta''$ 为折射角.又由 $\frac{K''}{K} = \frac{n_2}{n_1}$ ,可得

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta'' \quad (3.1.11)$$

这就是大家熟知的折射定律,或称斯涅耳公式.

由以上矢量形式折、反射定律可以引出作图法求折、反射波.图3.1.2(a)是利用 $(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \perp \mathbf{r}$ (垂直于 $xOy$ 平面),且 $|\mathbf{K}| = |\mathbf{K}'|$ 而求得反射波 $\mathbf{K}'$ .图3.1.2(b)则是利用 $\frac{K''}{K} = \frac{n_2}{n_1}$ 及 $(\mathbf{K}'' - \mathbf{K}) \perp \mathbf{r}$ 而求得折射波 $\mathbf{K}''$ .

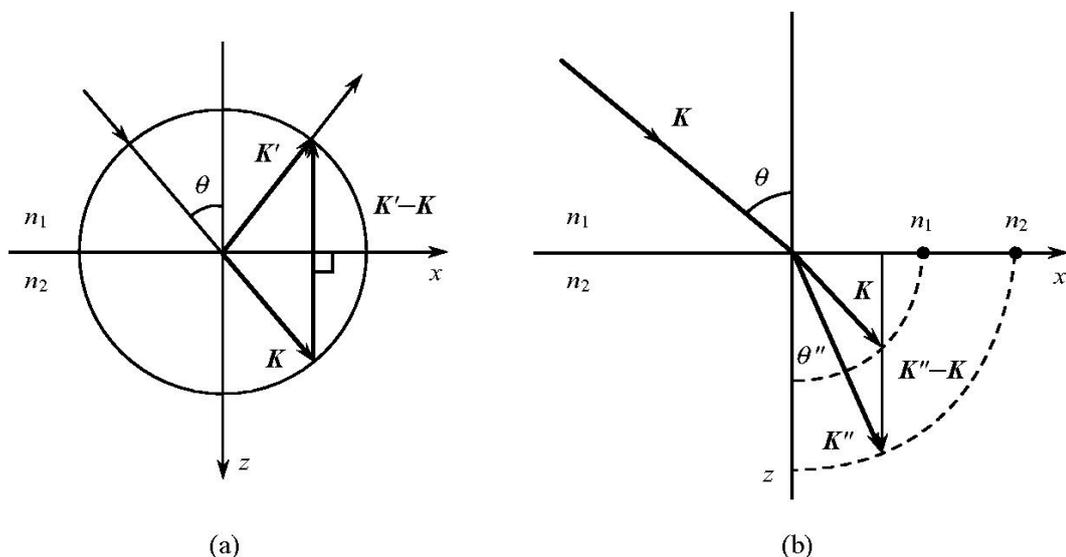


图 3.1.2 矢量形式的反射定律(a)及折射定律(b)

### 3.1.2 菲涅耳公式

菲涅耳公式最初是菲涅耳利用了光是弹性以太的许多特殊性质才导出的.现在我们利用电磁场边界条件来推导这组公式.推导中将利用的边界条件是:

电矢量切向分量连续,则

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (3.1.12)$$

磁矢量切向分量连续,则

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (3.1.13)$$

这里假设两介质是电介质,界面上无传导电流.

为讨论方便,将一般振动方向的电矢量分解为平行于入射面(即入射光线与界面法线组成的平面)的矢量  $E_p$  与垂直于入射面的矢量  $E_s$ ,然后分别对  $E_p$ 、 $E_s$  作讨论.

### 1. 对 $E$

如图 3.1.3(a)所示.  $E_s$  垂直入射面,它就是界面上的切向分量,在折、反射同时存在的条件下,切向分量连续, $E_s$  的振幅满足

$$E_{0s} + E'_{0s} = E''_{0s} \quad (3.1.14)$$

与  $E$  分量相应的  $H$  分量可由下式求得

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{K} \times \mathbf{E} \quad (3.1.15)$$

此时  $H$  在入射面上,即为  $H_p$ ,它应满足由式(3.1.13)确定的  $H$  切向分量连续的边界条件

$$\frac{1}{\mu_1} [\mathbf{K} \times \mathbf{E}^0 + \mathbf{K}' \times \mathbf{E}'^0]_t = \frac{1}{\mu_2} [\mathbf{K}'' \times \mathbf{E}''^0]_t \quad (3.1.16)$$

上式角标  $t$  表示切向分量. 根据图 3.1.3 所示的几何关系,式(3.1.16)可写为

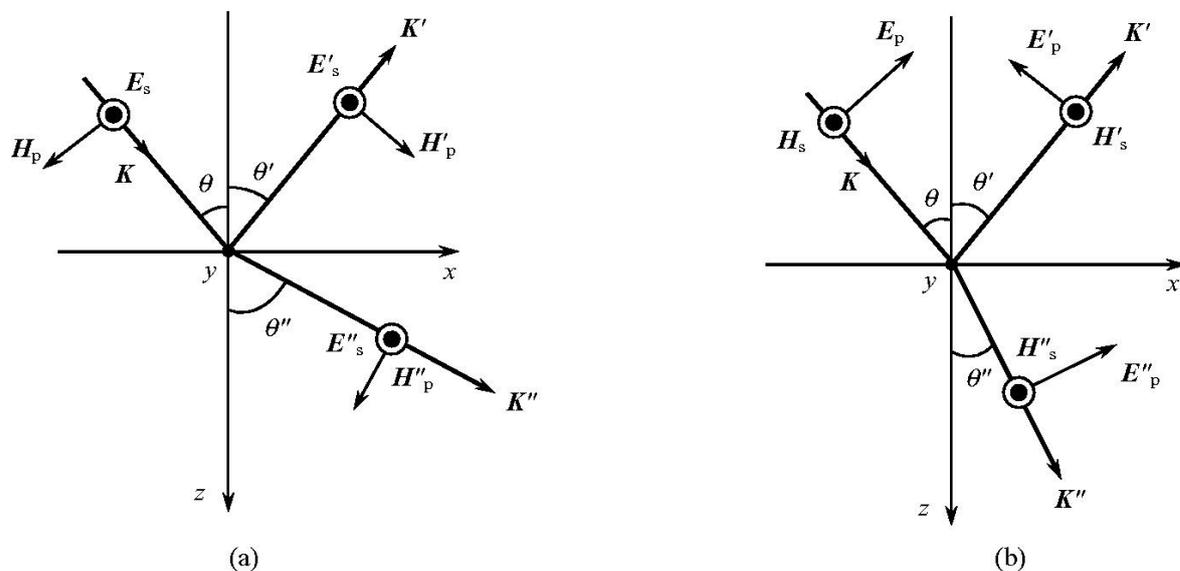


图 3.1.3 电磁波在两介质分界面上的折反射

(a)  $E$  垂直于入射面; (b)  $E$  平行于入射面

$$\frac{1}{\mu_1} (-KE_{0s} + K'E'_{0s}) \cos\theta = \frac{1}{\mu_2} (-K''E''_{0s}) \cos\theta' \quad (3.1.17)$$

## 2. 对 $E_p$

如图 3.1.3(b) 所示.  $E_p$  在入射面上, 与之相应的  $H$  垂直于入射面, 它就是界面上的磁矢量切向分量, 故应满足由式 (3.1.3) 确定的切向分量连续的边界条件

$$H_{0s} + H'_{0s} = H''_{0s} \quad (3.1.18)$$

仍可由式 (3.1.15) 将上式改写为

$$\frac{1}{\mu_1} [KE_{0p} + KE'_{0p}] = \frac{1}{\mu_2} K''E''_{0p} \quad (3.1.19)$$

而  $E_{0p}$  则要满足其切向分量连续, 应有

$$E_{0p} \cos\theta - E'_{0p} \cos\theta = E''_{0p} \cos\theta' \quad (3.1.20)$$

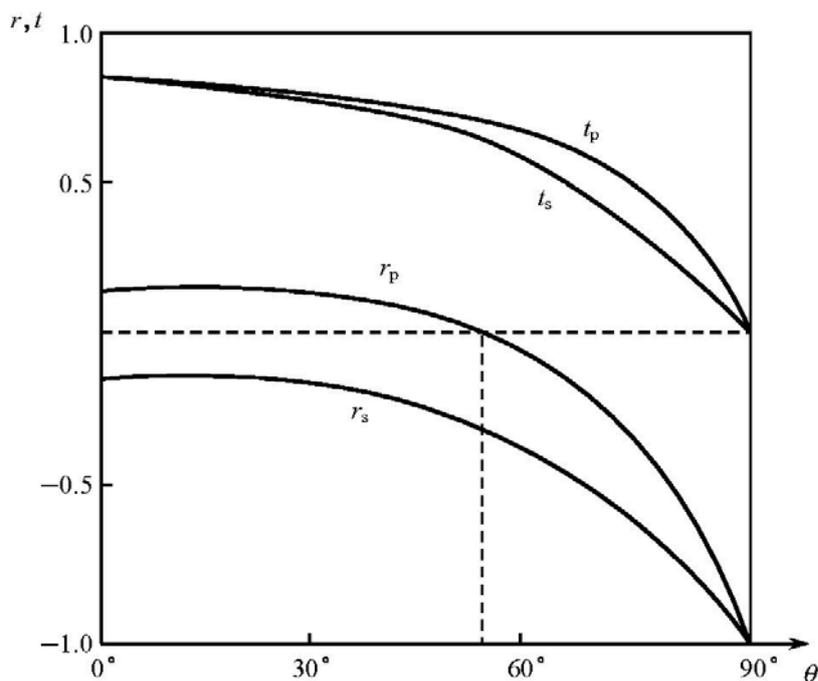
这样由式 (3.1.14)、式 (3.1.17)、式 (3.1.19)、式 (3.1.20) 四式联立求解, 可得如下关系

$$\begin{cases} E'_{0s} = \frac{K\mu_2 \cos\theta - K''\mu_1 \cos\theta'}{K\mu_2 \cos\theta + K''\mu_1 \cos\theta'} E_{0s} \\ E'_{0s} = \frac{2\mu_2 K \cos\theta}{K\mu_2 \cos\theta + K''\mu_1 \cos\theta'} E_{0s} \\ E'_{0p} = \frac{K''\mu_1 \cos\theta - K\mu_2 \cos\theta'}{K''\mu_1 \cos\theta + K\mu_2 \cos\theta'} E_{0p} \\ E'_{0p} = \frac{2\mu_2 K \cos\theta}{K''\mu_1 \cos\theta + K\mu_2 \cos\theta'} E_{0p} \end{cases} \quad (3.1.21)$$

对于一般介质其导磁系数都接近于  $\mu_0$ , 即  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ , 且由  $K/K'' = n_1/n_2 = \sqrt{\epsilon_1}/\sqrt{\epsilon_2}$ , 于是可将式 (3.1.21) 改写为如下形式

$$\begin{cases} E'_{0s} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos\theta - \sqrt{\epsilon_2} \cos\theta'}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos\theta'} E_{0s} \\ E'_{0s} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos\theta}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos\theta'} E_{0s} \\ E'_{0p} = \frac{\sqrt{\epsilon_2} \cos\theta - \sqrt{\epsilon_1} \cos\theta'}{\sqrt{\epsilon_2} \cos\theta + \sqrt{\epsilon_1} \cos\theta'} E_{0p} \\ E'_{0p} = \frac{2\sqrt{\epsilon_2} \cos\theta}{\sqrt{\epsilon_2} \cos\theta + \sqrt{\epsilon_1} \cos\theta'} E_{0p} \end{cases} \quad (3.1.22)$$

再利用折射定律  $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{n_2}{n_1}$ , 代入上式并经化简, 可得到关于反射系数  $r$  及透射系数

图 3.1.4 反射系数  $r_s$ 、 $r_p$ 、透射系数  $t_s$ 、 $t_p$  对于入射角  $\theta$  的依赖关系

$t$  的菲涅耳公式

$$\left\{ \begin{array}{l} r_s = \frac{E'_{0s}}{E_{0s}} = -\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')} \\ r_p = \frac{E'_{0p}}{E_{0p}} = \frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta + \theta')} \\ t_s = \frac{E'_{0s}}{E_{0s}} = \frac{2\sin\theta' \cos\theta}{\sin(\theta + \theta')} \\ t_p = \frac{E'_{0p}}{E_{0p}} = \frac{2\sin\theta' \cos\theta}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')} \end{array} \right. \quad (3.1.23)$$

根据菲涅耳公式(3.1.23)得到如图 3.1.4所示的 S 波及 P 波的反射系数  $r_s$ 、 $r_p$  及透射系数  $t_s$ 、 $t_p$  对于入射角  $\theta$  的依赖关系.

若取强度反射率为  $R_s = |r_s|^2$ ,  $R_p = |r_p|^2$ , 则得强度反射率  $R_s$ 、 $R_p$  关于入射角  $\theta$  的依赖关系, 如图 3.1.5. 对于 P 波, 在  $\theta = \theta_B$  时有  $R_p = 0$ ,  $\theta_B$  即为布儒斯特角, 此时  $\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$ , 同时满足  $\theta + \theta' = 90^\circ$ . 可见, 当光波以布儒斯特角入射时, 反射光为偏振光, 振动方向垂直入射面, 而透射光则为部分偏振光, 包含了 S 及 P 分量.

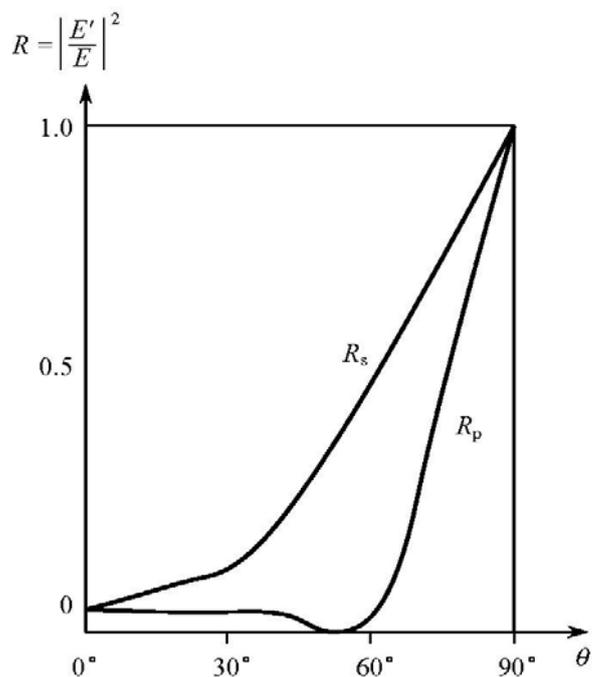
图 3.1.5 反射率  $R_s$ 、 $R_p$  对于入射角  $\theta$  的依赖关系

图 3.1.6(a)、(b)分别示出 S 波与 P 波在界面上反射时的相位变化对于入射角的依赖关系. 由图 3.1.6(b)可见,对于 P 波,入射角在经过布儒斯特角时有  $\pi$  的相位跃变.

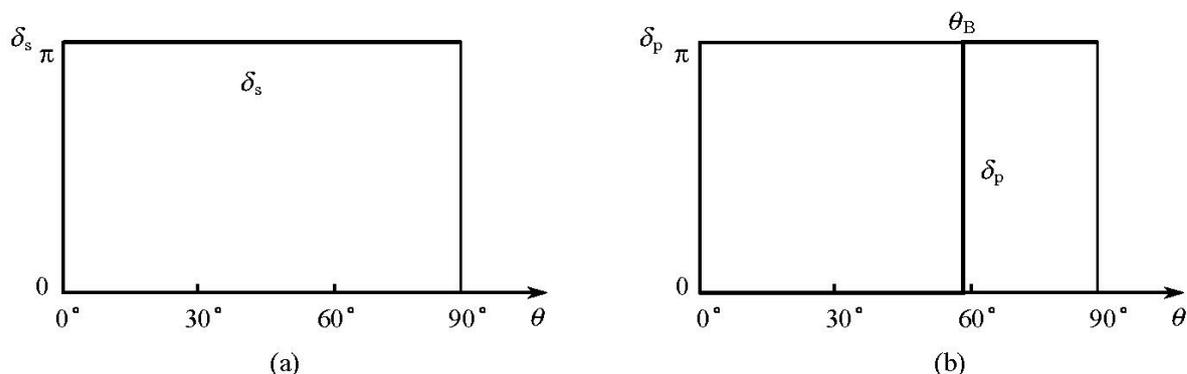


图 3.1.6 光波在界面上反射时的相位突变  
(a) S 波; (b) P 波

图 3.1.7 示出了电场矢量在不同入射角时界面上反射前后的空间方向关系. 它相应于图 3.1.6 所给出的位相关系. 其中图 3.1.7(a)、(b)、(c)是关于 P 波,图 (d)、(e)、(f)是关于 S 波的反射情况.

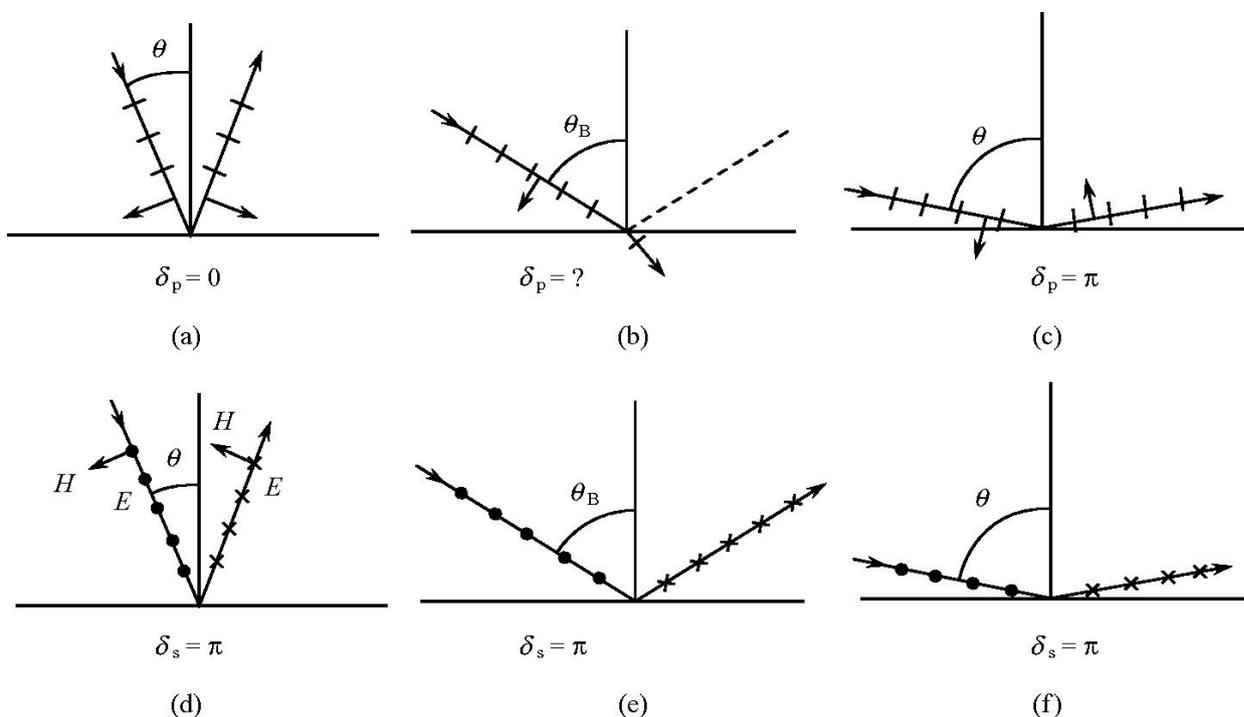


图 3.1.7 光波在界面上反射时电矢量的空间位置关系

## 3.2 全反射、倏逝波

### 3.2.1 倏逝波

光波从折射率为  $n_1$  的介质入射到  $n_2$  介质. 若  $n_1 > n_2$ , 当入射角大于临界角

$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  时发生全反射, 此时有  $\theta > \theta_c$ , 即有

$$\sin \theta > \frac{n_2}{n_1} \quad (3.2.1)$$

实验证明, 此时虽然入射波能量被全部反射回  $n_1$  介质, 但在介质  $n_2$  中的界面附近表面极薄一层中仍存在着表面波, 即称倏逝波. 由电磁场理论可以证明, 只有在介质  $n_2$  中存在表面波, 方可在两介质边界上满足边界条件. 下面就根据矢量形式的折反射定律来导出倏逝波的电场矢量函数  $\mathbf{E}$  的表达式.

由矢量形式折反射定律

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{K}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{r} \quad (3.2.2)$$

如图 3.2.1 入射面为  $xOz$ , 则有

$$K_x = K'_x = K''_x \quad (3.2.3)$$

(1) 当未发生全反射时,  $\theta < 90^\circ$ ,  $\sin \theta < 1$ , 则有

$$K'' = K \frac{n_2}{n_1} = K \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \quad (3.2.4)$$

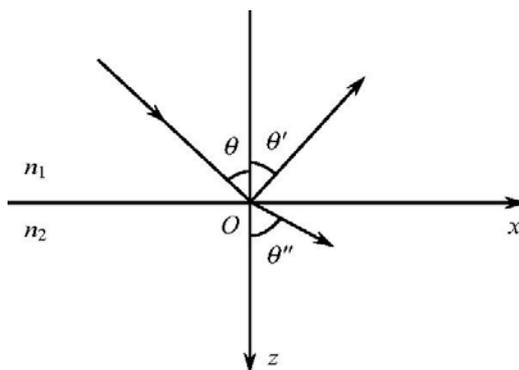


图 3.2.1 当  $n_1 > n_2$  时界面上的折、反射

而

$$K''_x = K_x = K \sin \theta \quad (3.2.5)$$

比较上两式得

$$K'' > K''_x \quad (3.2.6)$$

(2) 当发生全反射时, 由于  $\sin \theta > \frac{n_2}{n_1}$ ,  $\theta'$  无法在图中表示, 它是一个复数, 见 3.2.2 节. 比较式 (3.2.4) 及式 (3.2.5) 得

$$K'' < K''_x \quad (3.2.7)$$

这就是发生全反射与未发生全反射时的区别. 于是

$$K''_z = \sqrt{K''^2 - K''_x^2} = \sqrt{K^2 \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - K^2 \sin^2 \theta} \quad (3.2.8)$$

由于在全反射时  $\sin^2 \theta > \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2$ , 故上式根号内为负值, 可将它改写为

$$K''_z = \pm i K \sqrt{\sin^2 \theta - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2} = \pm i \mathcal{K} \quad (3.2.9)$$

式中

$$\mathcal{K} = K \sqrt{\sin^2 \theta - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2} \quad (3.2.10)$$

将式(3.2.9)代入  $\mathbf{E}'$  表达式中得

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K}' \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - K'_x x - K'_z z)} = \mathbf{E}'_0 e^{\pm \mathcal{K} z} e^{i(\omega t - K'_x x)} \quad (3.2.11)$$

上式代表一个非均匀波,它沿着入射面上的介质边界( $x$ 方向)传播,而振幅随着与界面的距离  $z$  作指数改变.当然式(3.2.11)中的  $e^{\pm \mathcal{K} z}$  项指数符号只有取负号才符合物理状况,否则,若取正号,振幅就要随距离  $z$  的增加而趋向无穷了,这显然是不可能发生的.由此得到,在介质  $n_2$  中存在的表面波为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{-\mathcal{K} z} e^{i(\omega t - K'_x x)} \quad (3.2.12)$$

这一波在沿  $x$  方向是一行波,沿  $z$  方向振幅是衰减的,随  $z$  增大振幅减小非常快,故又称倏逝波.此时,  $K'_z = -i\mathcal{K}$

### 3.2.2 倏逝波的性质

#### 1. 倏逝波是沿介质边界(即 $x$ 方向)传播的行波

倏逝波  $\mathbf{E}'$  是一个沿  $x$  方向传播的行波.由式(3.2.12)的  $e^{i(\omega t - K'_x x)}$  项可以看出这一性质.相应的相速度为

$$V''_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{K''_x} = \frac{\omega}{K'' \sin \theta} = \frac{V_2}{n_2 \sin \theta} \quad (3.2.13)$$

式中  $V_2 = \frac{\omega}{K''}$ ,即为一般情况下平面电磁波在介质  $n_2$  中传播的相速度.现在对于倏逝波,由于在全反射时有  $\sin \theta > \frac{n_2}{n_1}$ ,因此必有  $V''_{\phi} < V_2$ .可见,倏逝波沿  $x$  方向传播的相速度比普通平面波在介质  $n_2$  中沿  $x$  方向传播的相速度要慢,因此倏逝波又称为慢波.

#### 2. 倏逝波的穿透深度

由式(3.2.12)可知,  $\mathbf{E}'$  的振幅在  $z$  方向按指数形式衰减,当振幅值衰减到原振幅值的  $e^{-1}$  时,其相应的  $z$  值定义为倏逝波的穿透深度  $z_m$ ,由  $e^{-\mathcal{K} z_m} = e^{-1}$  可得穿透深度为

$$z_m = \frac{1}{\mathcal{K}} = \frac{1}{K \sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \quad (3.2.14)$$

式中,  $K = \frac{2\pi}{\lambda_1}$  是电磁波在介质  $n_1$  中的波矢模大小,故相应的  $\lambda_1$  是电磁波在介质  $n_1$  中的波长.

一般地,可以估算穿透深度.例如,光波从一折射率  $n_1 = 1.5$  的介质射入  $n_2 =$

1 的空气中,若入射角  $\theta = 70^\circ$ ,可算得穿透深度  $z_m = \lambda/4$ ,故倏逝波仅仅存在于介质界面附近极薄的一层表面上,因此称之为表面波.稍深入  $z$  方向一点距离此波振幅即趋于零,故称之为倏逝波.

### 3. 等相面及等幅面

对于沿  $x$  方向传播的行波式(3.2.12),等相面即为  $K''_x x = \text{常数}$  的面.当入射角  $\theta$  一定,波数  $K$  一定时,表面波的等相面是  $x$  等于常数的面,这是一簇与  $x$  垂直的等间隔平面簇(图 3.2.2).

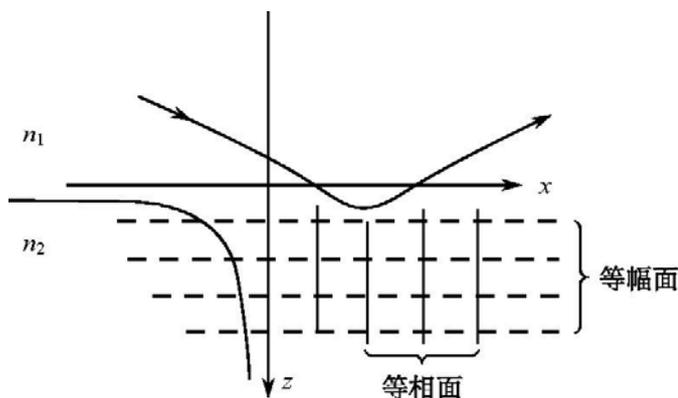


图 3.2.2 倏逝波的等相面及等幅面

等幅面则是振幅为常数的面.对于倏逝波等幅面即为  $e^{-\mathcal{R}z} = \text{常数}$  的面.当  $\theta$ 、 $n_1$ 、 $n_2$ 、 $\lambda_1$  均为定值,而且介质  $n_2$  中无吸收或衰减存在时, $\mathcal{R}$  为常数.故等幅面相应于  $z$  等于常数的面.这是与  $z$  轴垂直的平面簇.振幅在  $z=0$  处最大,沿  $z$  轴递减.当到达  $z = z_m$  处时,振幅衰减至  $E'_{z=z_m} = \frac{1}{e} E'_{z=0}$ ,由此可见,倏逝波的等相面与等幅面不重合.这种波称为非均匀波.倏逝波不是横电波,因为电矢量在其传播方向( $x$  方向)上的分量不为零.

### 4. 倏逝波的能量密度(坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ )

既然在介质  $n_2$  中存在倏逝波,那么即使在界面上发生全反射时介质  $n_2$  (光疏介质)中仍存在能流.我们将分别求出沿  $x$  及  $z$  方向的能量密度.为计算简便,可设  $\mathbf{E}$  在垂直于入射面方向振动,  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{j} = E_0 \mathbf{j} e^{i(\omega t - K \cdot r)}$ ,  $\mathbf{H}$  方向如图 3.2.3 所示.

在介质  $n_2$  中也必有  $\mathbf{E} = E'_y \mathbf{j} = \mathbf{j} (E'_0 \cdot e^{i(\omega t - K \cdot r)})$ ,  $\mathbf{H}'$  及  $\mathbf{S}'$  也可分解为  $x$ 、 $z$  方向上的分量.由式(2.5.18)得时间平均能流密度为

$$\langle \mathbf{S}' \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}'^* \times \mathbf{H}']$$

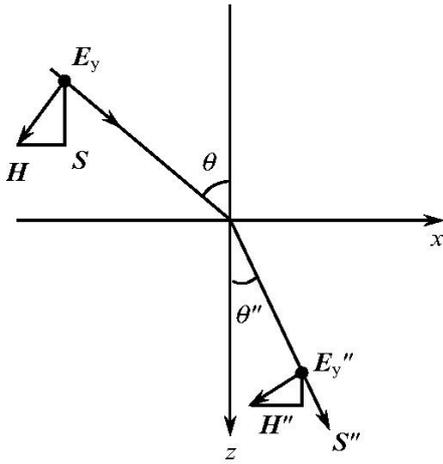


图 3.2.3 倏逝波的能流密度求法示意图

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ E'_x & E''_y & E'_z \\ H'_x & H''_y & H''_z \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E'_y H''_z) \mathbf{i} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-H'_x E''_y) \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

故有

$\langle S \rangle$  在  $x$  方向上的分量为

$$\langle S'_x \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E'_y H''_z)$$

$\langle S \rangle$  在  $z$  方向上的分量为

$$\langle S'_z \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-H'_x E''_y)$$

对于倏逝波有

$$\begin{aligned}
 H'_x &= H' \cos \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'_y \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\
 &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'_y i \sqrt{\sin^2 \theta - 1}
 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

因此

$$\langle S'_z \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-H'_x E''_y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ -E'_y \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'_y i \sqrt{\sin^2 \theta - 1} \right] = 0 \tag{3.2.17}$$

上式括号内为纯虚数,故它的实部为零.

类似地可以求出

$$\begin{aligned}
 \langle S'_x \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E'_y H''_z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'_y E'_y \sin \theta \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |E'_0|^2 e^{-2\gamma z} \frac{\sin \theta}{n_{21}}
 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

式中  $n_{21} = n_2 / n_1$ .

同样,如果  $E$  矢量在入射面内振动而  $H$  垂直于入射面,可作类似计算,得出完全一致的结论.事实上,式(3.2.17)及式(3.2.18)的结论适用于  $E$  振动方向在任意平面上的一般情况.

**结论** 倏逝波在沿介质界面方向( $x$ 方向)传播,在此方向有能量流动,能流密度有值;而在与界面垂直的方向上( $z$ 方向)则无能量流动,能流密度在该方向上的

分量为零。

以上所求的是时间平均能流密度。现在讨论倏逝波的能量密度瞬时值,为计算简便,仍假设  $\mathbf{E}$  在垂直于入射面的方向上振动。

按能流密度瞬时值表达式

$$\mathbf{S}' = \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \quad (3.2.19)$$

由 2.5 节讨论知,在用上式求  $\mathbf{S}'$  瞬时值时,式中的  $\mathbf{E}'$  及  $\mathbf{H}'$  均应采用实数表达式,即

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= E'_{0y} \mathbf{j} = \mathbf{j} \operatorname{Re} [ E'_{0y} e^{-\mathcal{K}z} e^{i(\omega t - K'_x x)} ] \\ &= E'_{0y} e^{-\mathcal{K}z} \cos(\omega t - K'_x x) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

由

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{K}' \times \mathbf{E}'}{\omega'' \mu_2} = \frac{1}{\omega \mu_2} (-K'_z E'_{0y} \mathbf{i} + K'_x E'_{0y} \mathbf{k}) \quad (3.2.21)$$

将  $K'_z = -i\mathcal{K}$  代入上式,并把  $E'_{0y}$  表达式代入,得到  $\mathbf{H}'$  的  $x$ 、 $z$  分量实数表达式

$$H'_x = \frac{-\mathcal{K}}{\omega \mu_2} E'_{0y} e^{-\mathcal{K}z} \sin(\omega t - K'_x x) \quad (3.2.22)$$

$$H'_z = \frac{1}{\omega \mu_2} K'_x E'_{0y} e^{-\mathcal{K}z} \cos(\omega t - K'_x x) \quad (3.2.23)$$

而

$$\begin{aligned} E'_x &= E'_z = H'_y = 0 \\ E'_y &= E'_{0y} e^{-\mathcal{K}z} \cos(\omega t - K'_x x) \end{aligned}$$

代入式(3.2.19)后可得坡印亭矢量的瞬时值为

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2 |K''|} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_2}} E_0'^2 [ K'_x (1 + \cos 2\alpha) \mathbf{i} + |K'_z| (\sin 2\alpha) \mathbf{k} ] e^{-2z/z_m} \quad (3.2.24)$$

式中  $\alpha = \omega t - K'_x x$ ;  $z_m = \frac{1}{\mathcal{K}}$  为穿透深度;  $E'_0$  在上述推导中就是  $E'_{0y}$ , 而因为以上结论适用于  $\mathbf{E}$  在任何平面的一般情况,故结论中的振幅  $E'_0$  是对一般振动方向的电矢量振幅。

由式(3.2.24)可见,从瞬时看,倏逝波在  $x$  方向和  $z$  方向均有流入流出的变化,只不过这一变化是以  $2\omega$  为频率的余弦及正弦简谐振动变化,因此对于  $S'_z$  的时间平均值显然为零才有式(3.2.17)的结论,而对  $S'_x$ ,则因含有的是  $(1 + \cos 2\alpha)$  因子而使时间平均不为零。

### 5. 关于全反射时的 $\theta$ 的意义

由于在全反射时有  $\sin \theta = \frac{\sin \theta}{n_2/n_1} > 1$ , 可见显然没有一个实数的折射角  $\theta$  可满

足此式,  $\theta$  只可能是复数

$$\theta = \theta_r + i\theta_i \quad (3.2.25)$$

可见, 此时  $\theta$  已不再具有通常的折射角的意义, 根据三角公式及双曲函数公式可知

$$\sin\theta = \sin\theta_r \cosh\theta_i + i\cos\theta_r \sinh\theta_i \quad (3.2.26)$$

此处

$$\begin{cases} \cosh\theta_i = \frac{e^{\theta_i} + e^{-\theta_i}}{2} \\ \sinh\theta_i = \frac{e^{\theta_i} - e^{-\theta_i}}{2} \end{cases} \quad (3.2.27)$$

由于  $\sin\theta$  必是一个大于 1 的实数, 故由式(3.2.26)知, 只有当  $\theta_r = \frac{\pi}{2}$  时方可满足  $\sin\theta > 1$  的实数条件. 故有

$$\theta = \frac{\pi}{2} + i\theta_i \quad (3.2.28)$$

复数  $\theta$  的实部  $\theta_r = \frac{\pi}{2}$  可以理解为发生全反射时在介质  $n_2$  中的倏逝波  $\mathbf{K}'$  沿  $x$  方向传播, 实部  $\theta_r$  好像具有在一般情况下的折射角类似含义, 表示了介质  $n_2$  中的电磁波即倏逝波波矢量与界面法线的夹角. 而虚部则可由下式求得

$$\sin\theta = \sin\left[\frac{\pi}{2} + i\theta_i\right] = \sin\frac{\pi}{2} \cosh\theta_i + i\cos\frac{\pi}{2} \sinh\theta_i = \cosh\theta_i \quad (3.2.29)$$

又由  $\sin\theta = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta$ , 将其代入式(3.2.29)得

$$\cosh\theta_i = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta \quad (3.2.30)$$

或

$$\frac{e^{\theta_i} + e^{-\theta_i}}{2} = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta \quad (3.2.31)$$

这是一个超越方程, 由此可解得  $\theta_i$ .

### 3.2.3 倏逝波实验检测

牛顿曾用棱镜及凸透镜观察倏逝波的存在. 如图 3.2.4 所示, 入射光线在棱镜底面发生全反射, 当透镜 3 不存在或远离棱镜 1 时, 则在反射光方向观察到完整的全反射光斑. 当透镜逐渐向棱镜靠近时, 两者间的空气间隙越来越小, 当间隙小于  $\lambda$  厚度时, 就可以观察到一部分表面波进入透镜而在全反射光波中看到了变

化,间隙越小,被截取进入透镜的能量就越多.这意味着透镜3对表面波产生了干扰,从而导致对全反射产生干扰,由此可知,全反射必须有一个表面波来引导.当透镜与棱镜接触时,从实验测量到未发生全反射(反射斑在这部分变黑)的区域正是按厚度范围到  $4\lambda$  时的球缺范围大小.

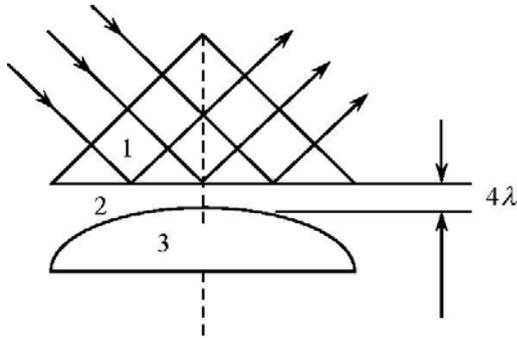


图 3.2.4 牛顿用于证明倏逝波的存在实验装置示意图

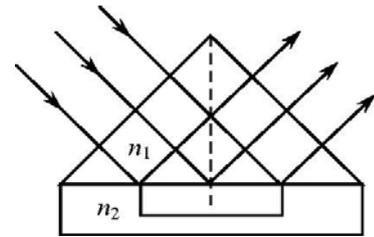


图 3.2.5 倏逝波使基板上的感光乳胶感光

这种在全内反射过程中产生的倏逝波能穿过小间隙光疏介质而进入另一种光密介质的现象叫做光学隧道效应,光学隧道显微镜正是应用了这一基本原理.

另一个证实倏逝波存在的实验如图 3.2.5 所示,将棱镜置于一涂有感光乳胶的玻璃基板上,感光胶的折射率小于棱镜玻璃的折射率.如图 3.2.5 入射的光波在棱镜底面发生全反射.但由于在乳胶介质中存在倏逝波,结果是使相应部位的乳胶感光,冲洗后可以看到曝光部分的椭圆形黑斑.这说明有一部分能量进入了第二介质中.这里说的有一部分能量进入第二介质是否与前面讨论的  $\langle S_z \rangle = 0$  有矛盾呢? 对此将作如下解释.

由

$$\cos\theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta} = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta - 1} = \pm iG \quad (3.2.32)$$

可知  $G$  为实数,即  $\cos\theta$  是一个纯虚数,将其代入菲涅耳公式,求反射系数

$$r_s = \frac{E'_{0s}}{E_{0s}} = \frac{K\mu_2 \cos\theta - K'\mu_1 \cos\theta'}{K\mu_2 \cos\theta + K'\mu_1 \cos\theta'} = \frac{a - ibG}{a + ibG} \quad (3.2.33)$$

故有  $|r_s| = 1$ . 同理,可得  $|r_p| = 1$ . 这正是全反射时的特有性质,入射光全部能量返回介质  $n_1$  中.既然全反射时能量全部返回介质  $n_1$  中,那么介质  $n_2$  中的倏逝波能量又是如何从介质  $n_1$  中进入的呢? 原因在于实际上入射光波是有限宽度的而并非无穷大.因此在入射光的边缘光线入射点  $A$  及  $B$  点处必然伴随发生衍射效应(图 3.2.6),通过衍射过程,就会有入射光的小部分能量从  $A$  点进入第二介质,成为形成倏逝波的能量源.这部分能量沿界面传播形成倏逝波,在  $AB$  之间部分是没有能量从第一介质进入第二介质的.当倏逝波到达  $B$  点时,仍通过在  $B$  点

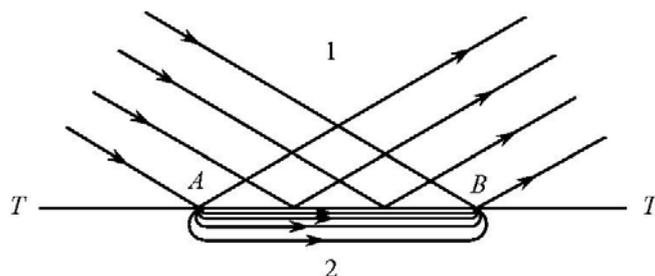


图 3.2.6 有限宽光束全反射时的边缘效应及倏逝波的产生

发生的衍射效应而使这部分能量又返回介质 1. 因此, 在两端点  $A$  与  $B$  处在垂直界面方向事实上是有时间平均能流密度值的, 而在  $AB$  之间部分则倏逝波仅仅对全反射起导引作用而没有能流越过界面, 这部分界面上产生的是真正的全反射. 当然若把  $A$  点与  $B$  点的进入和返回能量也作时间平均来对待, 则仍可得出  $\langle S_z \rangle = 0$  的结论的.

当然在理论上探讨倏逝波时, 由于讨论的入射波是无穷大平面波, 反射波亦为无穷大, 可以把两端的衍射效应设想在无穷远. 这样就不再去探究其倏逝波最初能量的来由, 而只从边界条件出发导出倏逝波的表达式及性质.

另一方面, 也可从菲涅耳公式求出透射系数, 例如

$$t_s = \frac{2 \sqrt{\epsilon} \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta'} \quad (3.2.34)$$

将  $\cos \theta' = \pm iG$  代入, 可知  $t_s \neq 0$ ,  $t_s$  是一个复数. 同理, 也有  $t_p \neq 0$ ,  $t_p$  也是一个复数. 由此可知  $E'_p$  及  $E'_s$  必有值, 因此, 也可以由此得出在介质  $n_2$  中必存在着电磁场的结论, 这一电磁场就是倏逝波.

当然, 由于  $\theta'$  是复数, 导致  $\cos \theta'$  是虚数, 以及反射率  $r$ 、透射率  $t$  均为复数, 从而使反射光相位发生跃变以及导致倏逝波的一系列特性.

### 3.2.4 全反射时的相位跃变

当入射光在界面上发生反射时, 能量被全部反射, 但反射波的相位相对于入射波有一个跃变, 这一相位差记作  $\delta$ , 即

$$\frac{E}{E} = e^{i\delta} \quad (3.2.35)$$

这一相位差又随  $E$  的振动方向不同而不同.

对于垂直于入射面的振动分量(记为 S 分量)有

$$\frac{E_s}{E_s} = e^{i\delta_s} \quad (3.2.36)$$

根据菲涅耳定理式(3.1.23)有

$$\begin{aligned}
 r_s &= \frac{E'_s}{E_s} = -\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')} = \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \cos \theta'}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta'} \\
 &= \frac{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n_1^2}}{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n_1^2}} = e^{i\delta_s}
 \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

将欧拉公式用于上式,可简化为

$$\tan \frac{\delta_s}{2} = \frac{-\sqrt{\sin^2 \theta - n_1^2}}{\cos \theta} \quad (3.2.38)$$

同样可以对平行于入射面的 P 分量求出反射波与入射波之间的相位差  $\delta_p$

$$\tan \frac{\delta_p}{2} = \frac{-\sqrt{\sin^2 \theta - n_1^2}}{n_1^2 \cos \theta} \quad (3.2.39)$$

由于全反射时发生的相变与 S 波和 P 波不同,故可用来改变光波的偏振状态. 例如用于菲涅耳棱体中把线偏振光变成圆偏振光. 如图 3.2.7 所示,入射光偏振方向与入射面成  $45^\circ$ ,它可以分解为在入射面中振动的 P 光及垂直入射面振动的 S 光. 在棱体中使之作两次全反射,如果使 P 光与 S 光相位差正好等于  $\frac{\pi}{2}$ ,

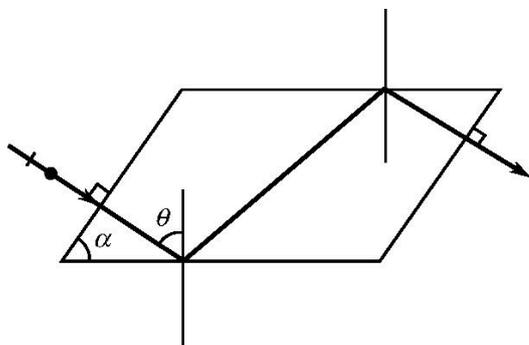


图 3.2.7 菲涅耳棱体

则出射后的光由原来的线偏振光变成了圆偏振光. 此时菲涅耳棱体起了  $\frac{1}{4}$  波片的作用.

设 P 分量 S 分量在一次全反射后相位差为

$$\delta = \delta_p - \delta_s \quad (3.2.40)$$

则由式(3.2.39)及式(3.2.40)得

$$\tan \frac{\delta}{2} = -\frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n_1^2}}{\sin^2 \theta} \quad (3.2.41)$$

为使棱体在两次反射时成为  $\frac{1}{4}$  波片,应使  $\delta = 45^\circ$ ,这样只要将菱体折射率  $n$  的倒数代入  $n_1$ ,便可由式(3.2.41)求出  $\theta$  角,这就是棱体的倾角  $\alpha$ . 例如对于  $\lambda = 1.06\mu\text{m}$ ,用 K9 玻璃作菲涅耳棱体,  $n_{1.064\mu\text{m}} = 1.5067$ ,可以求得  $\theta = 54^\circ 16'$ ,  $\alpha = 49^\circ 3'$ . 以上两种切割参数都可以满足使这一棱体对于  $1.064\mu\text{m}$  波长的红外光成为  $\frac{1}{4}$  波片的要求.

### 3.2.5 全反射的反射率、反射系数及相位跃变关于入射角 $\theta$ 的依赖关系

光波从光密介质到光疏介质交界面上的反射系数仍可按菲涅耳公式(3.1.23)求得. 由此便可求得光强反射率. 图 3.2.8 及图 3.2.9 分别示出了反射率  $R = I'/I$  及反射系数  $r = E'/E$  对于入射角  $\theta$  的依赖关系.

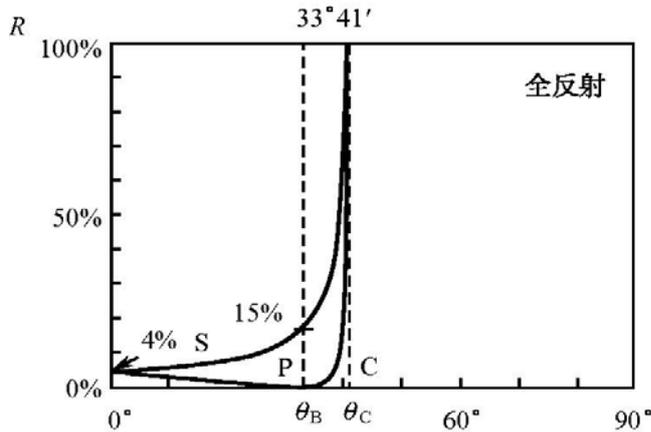


图 3.2.8 S 波及 P 波在从介质( $n=1.54$ )到空气的界面上的反射率  $R$  关于入射角  $\theta$  的关系曲线

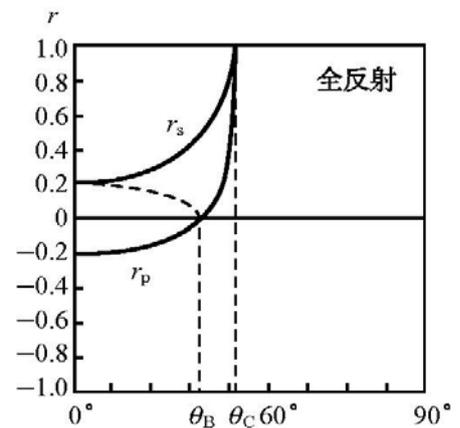


图 3.2.9 S 波及 P 波在从介质( $n=1.54$ )到空气的界面上反射系数曲线

同时,也可由求得的反射系数再求得不同入射角时的反射光波位相跃变. 图 3.2.10(a)、(b)分别示出了 P 波及 S 波的相位跃变与入射角之间的关系.

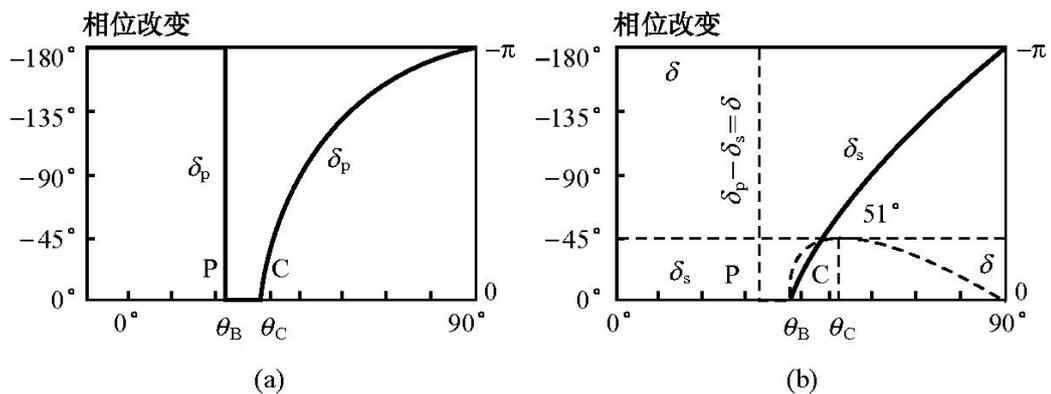


图 3.2.10 全反射时的相位跃变  $\delta_p$  (a) 及  $\delta_s$  (b) 关于入射角  $\theta$  的关系曲线  
P 波与 S 波之间的相位跃变量之差  $\delta = \delta_p - \delta_s$  关于  $\theta$  的关系曲线如 (b) 图中的虚线

## 3.3 古斯-汉森位移

当有限宽光束在界面上作全内反射时,古斯-汉森发现,光束在界面上有一侧向位移. 他们的实验如图 3.3.1 所示:一束很窄的光从棱镜的一个面入射后到达

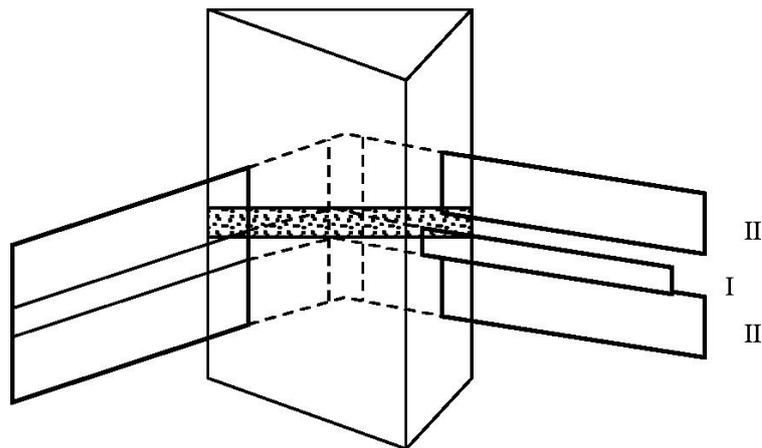


图 3.3.1 古斯-汉森位移实验

棱镜底面,在底面上的一条窄带上镀了银反射膜层.这样光带被分成了 I 和 II 两个部分.其中 II 部分的光在底面上由于其大的入射角而发生全反射,全反射后的光在侧向移过一个小距离后出射,而 I 部分的光则入射到银层上,由于银的吸收系数极高,光波仅能透入到几个纳米深的地方( $1\text{nm} = 10^{-6}\text{mm}$ ),反射光在银反射膜表面反射.这一深度比起全反射时倏逝波的穿透深度小了两个数量级,因此在金属层上反射后几乎看不到侧向位移.于是在出射棱镜后观察,可以看到出射光的 I 与 II 区之间明显的错位,这就是古斯-汉森位移的实验证明.

下面利用空间波包的位移的方法来证明古斯-汉森位移的存在(图 3.3.2).

设入射光波由两个入射方向略为不同的平面波组成,两平面波波矢的  $x$  分量分别为

$$\begin{cases} K_{x1} = \beta + \Delta\beta \\ K_{x2} = \beta - \Delta\beta \end{cases} \quad (3.3.1)$$

设两波偏振方向一致,在此就可只以标量形式进行运算.在分界面上入射光波振幅可写作

$$E_i = E_1 + E_2 = e^{i[\omega t - (\beta + \Delta\beta)x]} + e^{i[\omega t - (\beta - \Delta\beta)x]} \quad (3.3.2)$$

若略去共同的  $e^{i\omega t}$  因子,可得

$$E_i = 2\cos(\Delta\beta x)e^{-i\beta x} \quad (3.3.3)$$

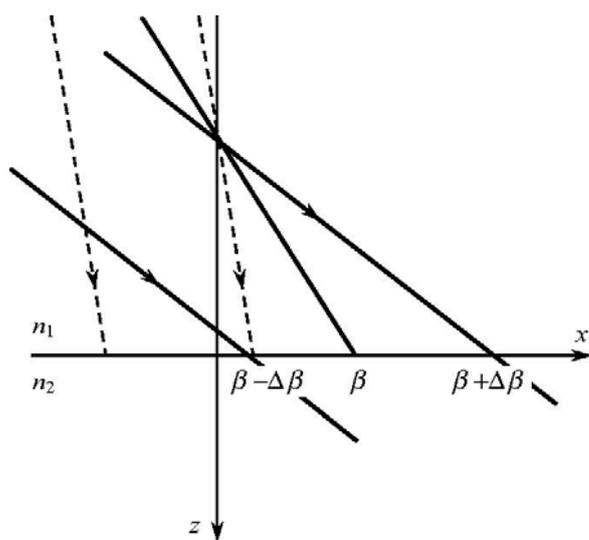


图 3.3.2 全反射时的古斯-汉森位移

上式表示了一个波矢为 $\beta$ 的波,它在 $x$ 方向上有振幅余弦的调制.这实际上就是两个平面波的干涉条纹,或称空间的振幅(或强度)波包.

两个平面波 $E_1$ 、 $E_2$ 经全内反射后均有相应的相位跃变,设分别为

$$\begin{cases} \delta = \delta + \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \Delta \beta \\ \delta = \delta - \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \Delta \beta \end{cases} \quad (3.3.4)$$

两波经全反射后的合成波为

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = e^{-i(\beta + \Delta\beta)x} e^{-i\delta_1} + e^{-i(\beta - \Delta\beta)x} e^{-i\delta_2} \\ &= e^{-i(\beta + \Delta\beta)x} e^{-i\left[\delta + \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \Delta \beta\right]} + e^{-i(\beta - \Delta\beta)x} e^{-i\left[\delta - \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \Delta \beta\right]} \\ &= 2\cos\left[\Delta\beta\left(x + \frac{\partial \delta}{\partial \beta}\right)\right] e^{-i(\beta x + \delta)} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

式中, $\delta$ 是波矢为 $\beta$ 的波在该界面上的全反射相位跃变.

若把式(3.3.5)与式(3.3.3)作比较,可以发现在 $x$ 方向上的振幅分布大值,即空间波包的顶点在全反射后位于

$$x = x_0 = -\frac{\partial \delta}{\partial \beta} \quad (3.3.6)$$

处,这表明反射后光束在 $x$ 方向有一侧向位移 $x_0$ ,这样就证明了古斯-汉森位移.

实验上为了看清这一位移,通常采用多次反射的方法,如图3.3.3将棱体加长,将棱镜的反射面中一部分镀银,其余部位则发生全内反射,这样光经多次反射后从镀银层反射的光与全反射的光就分离了.

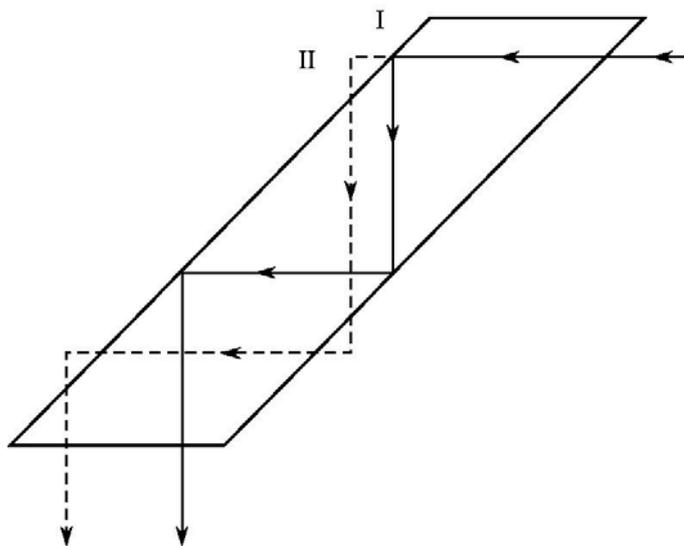


图 3.3.3 多次全反射时的古斯-汉森位移

### 3.4 电磁波在分层介质上的反射和透射

光学薄膜是处理光学介质表面时常常碰到的,常见膜层有金属膜及介质膜.金属膜的吸收较大,因此其反射率不可能做得很高.而介质膜吸收很小,多层介质膜最高反射率可达到 99.99% 或更高.

所有多层膜的问题,实质上都是解决电磁场在边界上的折反射问题.本节将对多层或单层介质膜应用电磁场在边界上的条件→介质中传播→边界……→在最后一层的界面上出射及反射,以求出膜系的反射率或透射率.

#### 3.4.1 单层膜的特征矩阵

膜系往往由许多层膜构成,层间的交界面可高达十几个到几十个.因此,应用矩阵的方法来解决这一问题将具有许多优越性.特征矩阵就是把界面两边的场利用边界条件相互联系起来的矩阵.单层膜是膜系的基本单元,也是一种最简单的膜,因此先讨论单层膜的特征矩阵.

如图 3.4.1 所示的单层膜,  $n_0$  为基底的折射率,如玻璃.  $n_1$  为介质层,  $n$  为空气的折射率.整个膜层的两边分别有场矢量  $E_1$ 、 $H_1$ 、 $E_2$ 、 $H_2$ ,则它们的膜可以用特征矩阵联系起来

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = (M) \begin{bmatrix} E_2 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

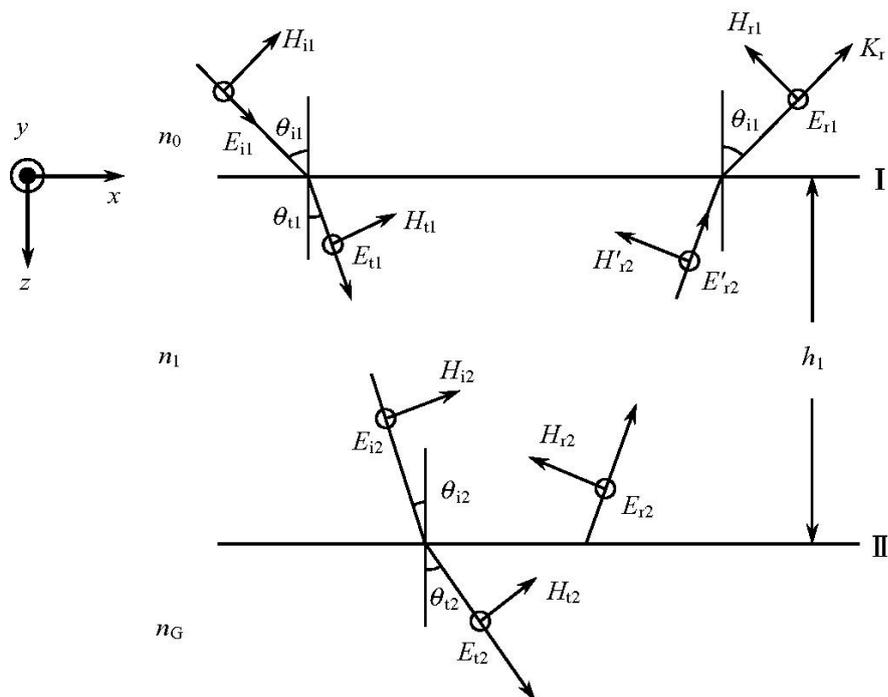


图 3.4.1 单层介质膜

下面就单层膜情况来导出特征矩阵  $M$  的表达式. 式(3.4.1)中  $E_1$ 、 $H_1$  表示在界面 I 的  $n_0$  一侧的场矢量;  $E_2$ 、 $H_2$  表示在界面 II 的  $n_c$  一侧的场矢量. 在交界面 I 上有入射波  $E_{i1}$ 、反射光波  $E_{r1}$ 、折射光波  $E_{t1}$  以及由介质  $n_0$  入射到界面 I 上的光波  $E_{r2}$ . 假设介质中无自由电荷及传导电流, 根据边界条件, 则有  $E$  的切向分量连续、 $H^*$  的切向分量连续. 先假设  $E_1$  垂直入射面, 得

$$\begin{cases} E_1 = E_{i1} + E_{r1} = E_{t1} + E_{r2} \\ H_1 = H_{i1} \cos \theta_1 - H_{r1} \cos \theta_1 = H_{t1} \cos \theta_2 - H'_{r2} \cos \theta_2 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

根据  $H_i = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_i}} E_i = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_i n_i$ , 将上式第二式化为

$$H_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} (E_{i1} - E_{r1}) n_0 \cos \theta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} (E_{t1} - E'_{r2}) n_1 \cos \theta_2 \quad (3.4.3)$$

同样, 在交界面 II 上也可以写出

$$\begin{cases} E_2 = E_{i2} + E_{r2} = E_{t2} \\ H_2 = H_{i2} \cos \theta_2 - H_{r2} \cos \theta_2 = H_{t2} \cos \theta_2 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

上式第二式亦可改为

$$H_2 = (E_{i2} - E_{r2}) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_2 = E_{t2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_c \cos \theta_2 \quad (3.4.5)$$

为求出特征矩阵, 可将式(3.4.2)的第一式及式(3.4.3)稍加变换, 求出  $E_{t1}$ 、 $E'_{r2}$  与  $E_2$ 、 $H_2$  之间的关系.

考察界面 I 上的透射场  $E_{t1}(x, y, z=0)$  与界面 II 上的入射场  $E_{i2}(x, y, z=h_1)$

$$E_{t1} = E_{t10} e^{-i(K_x x + K_z z)} \Big|_{z=0} \quad (3.4.6)$$

$$E_{i2} = E_{t10} e^{-i(K_x x + K_z z)} \Big|_{z=h_1} = E_{t1} e^{-iK_z h_1} = E_{t1} e^{i\delta_1} \quad (3.4.7)$$

式中  $\delta_1 = -K_z h_1 = \frac{-2\pi}{\lambda_0} n_1 h_1 \cos \theta_2$ , 表示波矢为  $\mathbf{K}$  的平面波在薄膜中时, 垂直横跨过两个界面的相位差(即在  $z$  方向上的相位差).

同样, 也可写出  $E'_{r2}$  与  $E_{r2}$  之间的关系

$$E'_{r2} = E_{r2} e^{i\delta_1} \quad (3.4.8)$$

因此有

$$E_2 = E_{i2} + E_{r2} = E_{t1} e^{i\delta_1} + E'_{r2} e^{-i\delta_1} \quad (3.4.9)$$

$$H_2 = (E_{i2} - E_{r2}) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_2 = (E_{t1} e^{i\delta_1} - E'_{r2} e^{-i\delta_1}) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_2 \quad (3.4.10)$$

令

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_2 \quad (3.4.11)$$

得到

$$\begin{cases} E_1 = \frac{e^{-i\delta_1}}{2} \left( E_2 + \frac{H_2}{\eta_1} \right) \\ E_2 = \frac{e^{i\delta_1}}{2} \left( E_1 - \frac{H_2}{\eta_1} \right) \end{cases} \quad (3.4.12)$$

将式(3.4.12)代入式(3.4.2)的第一式及式(3.4.3),得

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \cos \delta - H_2 \left[ \frac{i \sin \delta}{\eta_1} \right] \\ H_1 = -E_2 \eta_1 i \sin \delta + H_2 \cos \delta \end{cases} \quad (3.4.13)$$

写为矩阵运算有

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\frac{i}{\eta_1} \sin \delta \\ -i \eta_1 \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (3.4.14)$$

以上推导的是对于  $\mathbf{E}$  振动与入射面垂直的情况,即对于 S 波所作. 类似地,可以对 P 波作推导,得到类似于式(3.4.14)的结果,只是在 P 波情形下要把  $\eta_1$  改写为

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \cdot \frac{n}{\cos \theta_2} \quad (3.4.15)$$

故得单层薄膜的特征矩阵为

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\frac{i}{\eta_1} \sin \delta \\ -i \eta_1 \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (3.4.16)$$

### 3.4.2 多层膜的特征矩阵

对于多层膜的情况(图 3.4.2),可逐层应用式(3.4.1)的单层膜特征矩阵求得. 例如,对于第二层膜  $n_2$  在界面 III 以下层介质中场矢量为  $E_3$ 、 $H_3$ ,则有

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ H_2 \end{bmatrix} = (M_2) \begin{bmatrix} E_3 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

将此式代入式(3.4.1),得

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = (M_1) \begin{bmatrix} E_2 \\ H_2 \end{bmatrix} = M_1 M_2 \begin{bmatrix} E_3 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (3.4.18)$$

如此依次逐层类推,可得对  $N$  个界面的多层膜一般式

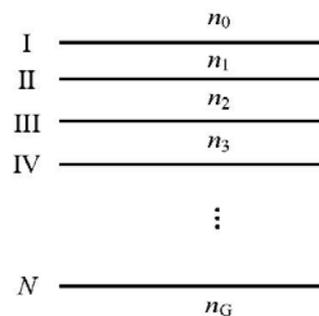


图 3.4.2 多层介质膜

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = M_1 M_2 \cdots M_N \begin{bmatrix} E_{N+1} \\ H_{N+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} E_{N+1} \\ H_{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.4.19)$$

其中

$$M = M_1 M_2 \cdots M_N \quad (3.4.20)$$

就是多层膜的特征矩阵,它等于各个单层膜特征矩阵之积.注意,矩阵运算不服从交换率,故相乘次序不可以交换.

### 3.4.3 膜系反射率的计算

由一系列膜层构成的膜系,其反射系数和透射系数可利用特征矩阵求出

$$\text{反射系数} \quad r = \frac{E_{r1}}{E_{i1}} \quad (3.4.21)$$

$$\text{透射系数} \quad t = \frac{E_{tN+1}}{E_{i1}} \quad (3.4.22)$$

将式(3.4.19)改写为

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{N+1} \\ H_{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.4.23)$$

将单层膜公式(3.4.4)中第一式及式(3.4.5)推广到  $N$  层膜的第  $N$  个界面,可写为一般式

$$E_{N+1} = E_{tN+1} \quad (3.4.24)$$

$$H_{N+1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_{tN+1} n_G \cos \theta_{N+1} = \eta_G E_{tN+1} \quad (3.4.25)$$

其中

$$\eta_G = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_G \cos \theta_{N+1} \quad (3.4.26)$$

而在界上 I 上仍有

$$E_1 = E_{i1} + E_{r1} \quad (3.4.27)$$

$$H_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} (E_{i1} - E_{r1}) n_0 \cos \theta_1 = \eta_0 (E_{i1} - E_{r1}) \quad (3.4.28)$$

式中

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_0 \cos \theta_1 \quad (3.4.29)$$

将以上各式中的  $E_1$ 、 $H_1$ 、 $E_{N+1}$ 、 $H_{N+1}$  代入式(3.4.23)得到

$$\begin{bmatrix} E_{i1} + E_{r1} \\ \eta_0 (E_{i1} - E_{r1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{tN+1} \\ \eta_G E_{tN+1} \end{bmatrix} \quad (3.4.30)$$

展开上式得

$$\begin{cases} E_{i1} + E_{r1} = AE_{tN+1} + B\eta_G E_{tN+1} \\ \eta_0 (E_{i1} - E_{r1}) = CE_{tN+1} + D\eta_G E_{tN+1} \end{cases}$$

解此联立方程,求得

$$\text{反射系数} \quad r = \frac{E_{r1}}{E_{i1}} = \frac{A\eta_0 + B\eta_0\eta_G - C - D\eta_G}{A\eta_0 + B\eta_0\eta_G + C + D\eta_G} \quad (3.4.31)$$

$$\text{透射系数} \quad t = \frac{E_{tN+1}}{E_{i1}} = \frac{2\eta_0}{A\eta_0 + B\eta_0\eta_G + C + D\eta_G} \quad (3.4.32)$$

反射率

$$R = r \cdot r^* \quad (3.4.33)$$

**例 3.1** 求基底  $n_c$  上折射率为  $n$  厚度为  $h$  的单层膜反射率.

**解** 单层膜特征矩阵

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\frac{i}{\eta} \sin \delta \\ -i\eta \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$$

其中

$$\delta = \frac{-2\pi}{\lambda} n_1 h \cos \theta_2$$

$$\eta_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} n \cos \theta_2 & (\text{S 波}) \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \cdot \frac{n_1}{\cos \theta_2} & (\text{P 波}) \end{cases}$$

反射系数

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{A\eta_0 + B\eta_0\eta_G - C - D\eta_G}{A\eta_0 + B\eta_0\eta_G + C + D\eta_G} = \frac{\eta_1 (\eta_0 - \eta_G) \cos \delta - i(\eta_0\eta_G - \eta_1^2) \sin \delta}{\eta_1 (\eta_0 + \eta_G) \cos \delta - i(\eta_0\eta_G + \eta_1^2) \sin \delta} \quad (3.4.34)$$

反射率

$$R = r \cdot r^* = \frac{(\eta_0 - \eta_G)^2 \cos^2 \delta + \left[ \frac{\eta_0\eta_G}{\eta_1} - \eta_1 \right]^2 \sin^2 \delta}{(\eta_0 + \eta_G)^2 \cos^2 \delta + \left[ \frac{\eta_0\eta_G}{\eta_1} + \eta_1 \right]^2 \sin^2 \delta} \quad (3.4.35)$$

对于正入射的情况,  $\theta = 0$ , 即  $\cos \theta_2 = \cos \theta_{N+1} = 1$ , 得  $\eta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n$ ,  $\eta_G = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_G$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} n_0$ , 代入式(3.4.35)得

$$R = \frac{(n_0 - n_G)^2 \cos^2 \delta + \left[ \frac{n_0 n_G}{n} - n \right]^2 \sin^2 \delta}{(n_0 + n_G)^2 \cos^2 \delta + \left[ \frac{n_0 n_G}{n} + n \right]^2 \sin^2 \delta} \quad (3.4.36)$$

**例 3.2** 多层高反膜在正入射下对控制波长  $\lambda_0$  的反射率 [ 高反膜每层光学厚度为  $\frac{\lambda_0}{4}$ , 正入射时  $\delta = \frac{-\pi}{2}$  ] .

**解** 多层高反膜可表示为  $G(HL)^P H A$ , 它的一个周期  $(HL)$  特征矩阵为

$$\begin{aligned} M_L M_H &= \begin{bmatrix} \cos \delta & -\frac{i}{\eta_1} \sin \delta \\ -i \eta_1 \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & -\frac{i}{\eta_2} \sin \delta \\ -i \eta_2 \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\delta = \frac{-\pi}{2}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{\eta_L} \\ i \eta_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{\eta_H} \\ i \eta_H & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\eta_H}{\eta_L} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_L}{\eta_H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_H}{n_L} & 0 \\ 0 & \frac{n_L}{n_H} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

$P$  个周期的特征矩阵为

$$(M_L M_H)^P = \begin{bmatrix} \left[ \frac{n_H}{n_L} \right]^P & 0 \\ 0 & \left[ \frac{n_L}{n_H} \right]^P \end{bmatrix} \quad (3.4.38)$$

整个膜系的特征矩阵为

$$M = M_H (M_L M_H)^P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{\eta_H} \\ i \eta_H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[ \frac{\eta_H}{\eta_L} \right]^P & 0 \\ 0 & \left[ \frac{\eta_L}{\eta_H} \right]^P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{\eta_H} \left( \frac{\eta_L}{\eta_H} \right)^P \\ i\eta_H \left( \frac{\eta_H}{\eta_L} \right)^P & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.39)$$

把  $M$  矩阵的各元代入式(3.4.31),求得  $r$  后再平方,得

$$R = \left[ \frac{n_0 - \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^{2P} \frac{n_H^2}{n_G}}{n_0 + \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^{2P} \frac{n_H^2}{n_G}} \right]^2 \quad (3.4.40)$$

## 4 电磁波在金属中的传播

前面讨论了非导电的各向同性介质中的光波传播.本章讨论电磁波在金属中的传播.在金属传播中所用的有关研究方法,也适用于一般的有损耗介质中.在有损耗的实际介质中存在有一定值的电导率.电导率与焦耳热的出现有关,这是一种不可逆现象,其中电磁能被转化为热而消耗掉了,结果是造成了电磁波在传播过程中的衰减.金属中电导率很高,这种衰减如此之大,以致光频段电磁波衰减极快而使金属几乎不透明.

讨论这类有损耗介质的一个独特的方法就是引入复介电常数(或复折射率),以便计及电导率的存在而描写出电磁波在金属及有损耗介质中的吸收.

### 4.1 复介电常数、复折射率

在一般金属中或一切有损耗介质中,由于电导率 $\sigma \neq 0$ ,因此由 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 可知,当存在电场 $\mathbf{E}$ 时实际金属或有损介质中必存在着传导电流 $\mathbf{J}$ .当然,当金属趋于理想导体时, $\sigma \rightarrow \infty$ ,为使 $\mathbf{J}$ 不成为无穷大,必有理想导体内电场为零.

对于时谐电磁场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})}$ ,必有 $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E}$ ,由此比较时谐场在理想介质( $\sigma = 0$ )与一般金属或有损耗介质( $\sigma \neq 0$ )中的麦克斯韦第二方程的区别,如表4.1.1所示.

表 4.1.1 理想介质与金属或有损介质在麦克斯韦第二方程中的区别

理想介质 ( $\sigma = 0$ )	金属或有损介质 ( $\sigma \neq 0$ )
方程 $\Delta \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\Delta \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
定态 $\Delta \times \mathbf{H} = i\omega \epsilon \mathbf{E}$	$\Delta \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + i\omega \epsilon \mathbf{E} = (\sigma + i\omega \epsilon) \mathbf{E} = i\omega \tilde{\epsilon} \mathbf{E}$
亥姆霍兹方程 $\Delta^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} = 0$	$\Delta^2 \mathbf{E} + \tilde{K}^2 \mathbf{E} = 0$
$K = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$	$\tilde{K} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon} \mu}$
当 $\mu_r = 1$ 时 $n = \sqrt{\epsilon_r}$	$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r}$
$n = \frac{c}{v}$	$\tilde{n} = \frac{c}{\tilde{v}}$

比较表中介质与金属的定态麦克斯韦第二方程可得

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\sigma + i\omega\epsilon}{i\omega} = \epsilon - \frac{i\sigma}{\omega} \quad (4.1.1)$$

这就是复数形式的介电常数.复介电常数的引入究其起因是因为金属中存在损耗( $\sigma \neq 0$ ),为与理想介质的波动方程具有完全一致的数学表达形式而人为地引入 $\tilde{\epsilon}$ .这样,在无损介质中的亥姆霍兹方程、波数、折射率、速度等在金属中相应地统统变为了复数形式.当然,此时的复参量 $\tilde{\epsilon}$ 、 $\tilde{\epsilon}$ 、 $\tilde{K}$ 、 $\tilde{n}$ 、 $\tilde{v}$ 等均已不再具有相应实参量的原有物理意义.但由于方程形式的相同而可以在运算中沿用原有的公式形式,只要把原来的实参量改为相应的复参量即可,这也正是引入复参量的目的.

此时的亥姆霍兹方程仍具有类似的平面波解形式,只是此时的波数变成了复数矢量 $\mathbf{K}$ ,即有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.1.2)$$

折射率公式仍适用,对一般介质 $\mu_r = 1$ ,则有

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu_r} = \sqrt{\tilde{\epsilon}} \quad (4.1.3)$$

可见折射率 $\tilde{n}$ 也是复数,可假设如下形式

$$\tilde{n} = n(1 - i\mathcal{K}) = n - in\mathcal{K} \quad (4.1.4)$$

式中: $\mathcal{K}$ 为消光系数; $n\mathcal{K}$ 为吸收系数; $n$ 为折射率的实部.此时平面波解(设波在 $z$ 方向传播)可写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K}_z z)} = \mathbf{E}_0 e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n \cdot \mathcal{K} \cdot z} e^{i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0} n \mathcal{K} z} e^{i(\omega t - K_z z)} \quad (4.1.5)$$

上式的第一部分为 $e$ 的实数负次方,表示 $\mathbf{E}$ 振幅随传播深度 $z$ 增大而不断衰减,第二项为平面波传播中的相位项,其中 $K_z = \frac{2\pi}{\lambda_0} n$ 为实数.

考虑光强度 $I \propto |E|^2$ (此处未考虑 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{377\Omega}$ 的系数),则有

$$I \propto (E_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n \cdot \mathcal{K} \cdot z})^2 \propto I_0 e^{-\alpha z} \quad (4.1.6)$$

由此可得吸收率

$$\alpha = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} (n\mathcal{K}) \quad (4.1.7)$$

(在不同的书中有把 $\alpha$ 称作吸收系数,或把 $n\mathcal{K}$ 称作吸收系数.)

根据

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0}} \quad (4.1.8)$$

把式(4.1.1)代入上式,得

$$\tilde{n}^2 = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right] \quad (4.1.9)$$

又由式(4.1.4)得

$$\tilde{n}^2 = (n - in\mathcal{K})^2 = n^2 - n^2\mathcal{K}^2 - 2in^2\mathcal{K} \quad (4.1.10)$$

比较式(4.1.9)及式(4.1.10),得

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = n^2 - n^2\mathcal{K}^2 \quad (4.1.11)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = 2n^2\mathcal{K} \quad (4.1.12)$$

将式(4.1.11)平方后与式(4.1.12)平方相加,得

$$n^2 + n^2\mathcal{K}^2 = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} \quad (4.1.13)$$

将此式与式(4.1.11)联立,解得

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_0}} \quad (4.1.14)$$

$$n\mathcal{K} = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_0}} \quad (4.1.15)$$

这样就导出了电导率 $\sigma$ 与光学常数 $n$ 、 $n\mathcal{K}$ 之间的关系.上两式还可写成如下形式

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (4.1.16)$$

$$n\mathcal{K} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (4.1.17)$$

式(4.1.16)、式(4.1.17)表示了金属的色散及吸收.注意,以上讨论是假设在式(4.1.3)中有 $\mu_r = 1$ 的条件下进行的.对于 $\mu_r \neq 1$ 的普遍性情况,有如下公式

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (4.1.18)$$

$$n\mathcal{K} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (4.1.19)$$

## 4.2 电磁波在金属界面上的折射

现在讨论电磁波在金属界面上的折射情况.为讨论简单,假设光波从真空入射到金属表面上,真空中波长为 $\lambda_0$ (频率为 $\omega_0$ ),在金属中的折射率为 $\tilde{n}$ ,频率也为 $\omega_0$ ,光波从真空以入射角 $\varphi_1$ 入射到界面上,入射面为 $xOz$ 平面(图4.2.1).

根据折射定律有

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\chi_2} = \tilde{n} = n - in\mathcal{K} \quad (4.2.1)$$

因此有

$$\sin\chi_2 = \frac{\sin\varphi_1}{n - in\mathcal{K}} \quad (4.2.2)$$

可见  $\chi_2$  必为复数, 此时  $\chi_2$  并不表示光波在金属中的折射角. 记作  $\tilde{\chi}_2$  以表示它为复数. 光波在金属中传播“速度”为

$$\tilde{v}_2 = \frac{C}{\tilde{n}} = \frac{C}{n - in\mathcal{K}} = \frac{C(1 + i\mathcal{K})}{n(1 + \mathcal{K}^2)} \quad (4.2.3)$$

此处  $\tilde{v}_2$  是复数速度, 它也并不表示光波的传播速度. 所有的复数参量仅仅是形式上与原来的表达式一致而不再具有原有的物理意义. 原有的表达式仍可沿用, 只要把相应的物理量改为复数参量即可.

因此, 光波在金属中的电场矢量可写为如下形式

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} e^{i\omega \left[ t - \frac{z \sin \tilde{\chi}_2 + z \cos \tilde{\chi}_2}{\tilde{v}_2} \right]} \quad (4.2.4)$$

(此处不用波矢  $\mathbf{K}$  表达是为了避免与以下的消光系数符号  $\mathcal{K}$  混淆).

下面讨论如何求出光波在金属内的实折射角  $\varphi_2$ , 即真正具有物理意义的折射角  $\varphi_2$ . 为此, 首先确定由式(4.2.4)所表达的光波的等相面. 为此将由式(4.2.2)表达的  $\tilde{\chi}_2$  代入式(4.2.4). 由式(4.2.2)得

$$\sin \tilde{\chi}_2 = \frac{\sin\varphi_1}{n(1 - i\mathcal{K})} = \frac{\sin\varphi_1 (1 + i\mathcal{K})}{n(1 + \mathcal{K}^2)} \quad (4.2.5)$$

故有

$$\cos \tilde{\chi}_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{\chi}_2} = \sqrt{\frac{n^2 (1 + \mathcal{K}^2)^2 - (1 - \mathcal{K}^2 + 2i\mathcal{K}) \sin^2 \varphi_1}{n^2 (1 + \mathcal{K}^2)^2}} \quad (4.2.6)$$

$\cos \tilde{\chi}_2$  也是复数, 可写作

$$\cos \tilde{\chi}_2 = \rho e^{-i\delta} = \rho(\cos\delta - i\sin\delta) \quad (4.2.7)$$

则可求得

$$\frac{n^2 (1 + \mathcal{K}^2)^2 - (1 - \mathcal{K}^2) \sin^2 \varphi_1}{n^2 (1 + \mathcal{K}^2)^2} = \rho^2 \cos 2\delta \quad (4.2.8)$$

$$\frac{2\mathcal{K} \sin^2 \varphi_1}{n^2 (1 + \mathcal{K}^2)^2} = \rho^2 \sin 2\delta \quad (4.2.9)$$

以上两式将用于求出参数  $\rho$  及  $\delta$ , 由于求解复杂, 在此不予列出.

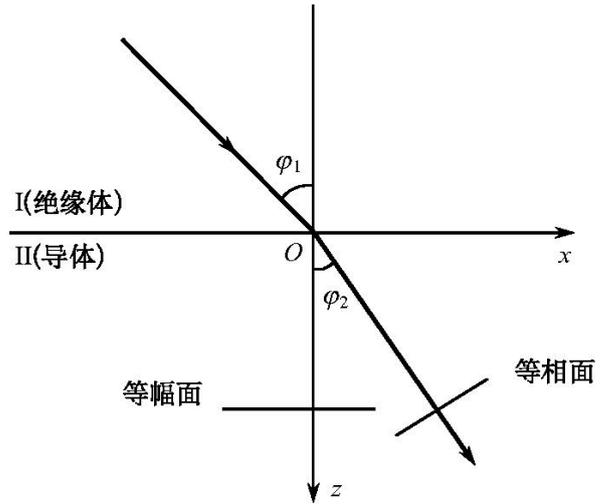


图 4.2.1 电磁波在金属界面上的折射

把式(4.2.5)及式(4.2.6)的  $\sin\tilde{\chi}_2$  和  $\cos\tilde{\chi}_2$ 、式(4.2.3)的  $\tilde{v}_2$  代入  $E_2$  的表达式(4.2.4),得

$$E_2 \approx e^{i\omega \left[ t - \frac{x \sin\varphi_1}{c} - \frac{z \rho n}{c} (\cos\delta - \mathcal{K} \sin\delta) \right]} e^{-\frac{2\pi \rho z n}{\lambda} (\sin\delta + \mathcal{K} \cos\delta)} \quad (4.2.10)$$

上式中的第一个指数项表示相位传播因子,第二个指数项表示吸收因子即振幅的衰减.

由第一指数项可以求出光波在金属中的折射角  $\varphi_2$ ,为此,可以根据这一指数项写出等相面方程

$$x \sin\varphi_1 + z \rho n (\cos\delta - \mathcal{K} \sin\delta) = \text{常数} \quad (4.2.11)$$

而等幅面方程则由第二个指数项得出,显见等幅面方程为  $z = \text{常数}$ .当然,我们也可以把等相面方程用实数折射角  $\varphi_2$  来表达

$$x \sin\varphi_2 + z \cos\varphi_2 = \text{常数} \quad (4.2.12)$$

比较式(4.2.11)与式(4.2.12)得

$$\sin\varphi_1 = A \sin\varphi_2 \quad (4.2.13)$$

$$\rho n (\cos\delta - \mathcal{K} \sin\delta) = A \cos\varphi_2 \quad (4.2.14)$$

将上两式平方后相加,便可求得比例常数

$$A = \sqrt{\sin^2\varphi_1 + \rho^2 n^2 (\cos\delta - \mathcal{K} \sin\delta)^2} \quad (4.2.15)$$

由式(4.2.13)可求出在金属中折射的实数形式折射定律

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = A = \sqrt{\sin^2\varphi_1 + \rho^2 n^2 (\cos\delta - \mathcal{K} \sin\delta)^2} = n_{\varphi_1} \quad (4.2.16)$$

上式则真正表示了光线的偏折情况, $\varphi_1$  是光从真空到金属界面的实数入射角. $\varphi_2$  是光线在金属内的实数折射角,它们的正弦值之比就是在过去理想介质界面上折射情况中的折射率  $n_{\varphi_1}$ .从式(4.2.16)可知,这一实数折射率  $n_{\varphi_1}$  依赖于入射角  $\varphi_1$ ,不同的入射角  $\varphi_1$  具有不同的折射率  $n_{\varphi_1}$ ,从而导致  $\sin\varphi_1 / \sin\varphi_2$  的比值不是常数而是一个与入射角  $\varphi_1$  有关的函数.这正是在金属中折射与在介质中折射的不同之处.

这样,金属中光波  $E_2$  的表达式(4.2.10)中第一个指数因子为

$$e^{i\omega \left[ t - \frac{x \sin\varphi_2 + z \cos\varphi_2}{v_{\varphi_1}} \right]}$$

由此可得,光波在金属中的实数速度(即相速度)为

$$v_{\varphi_1} = \frac{c}{n_{\varphi_1}} = \frac{c}{\sqrt{\sin^2\varphi_1 + \rho^2 n^2 (\cos\delta - \mathcal{K} \sin\delta)^2}} \quad (4.2.17)$$

而从光波  $E_2$  表达式(4.2.10)的第二个指数因子即衰减因子可以求得实数衰减系数

$$\mathcal{K}_{\varphi_1} = \rho(\sin \delta + \mathcal{K} \cos \delta) \quad (4.2.18)$$

最后将式(4.2.8)及式(4.2.9)联立解出的  $\rho$  及  $\delta$  代入以上各式,可以求出具有物理意义的光学参数

$$\begin{cases} n_{e_1}^2 = [n^2 - n^2 \mathcal{K}^2 + \sin^2 \varphi_1 + \sqrt{4n^4 \mathcal{K}^2 + (n^2 - n^2 \mathcal{K}^2 - \sin^2 \varphi_1)^2}] / 2 \\ \mathcal{K}_{e_1}^2 = [-n^2 + n^2 \mathcal{K}^2 + \sin^2 \varphi_1 + \sqrt{4n^4 \mathcal{K}^2 + (n^2 - n^2 \mathcal{K}^2 - \sin^2 \varphi_1)^2}] / 2 \\ v_{e_1} = c / n_{e_1} \end{cases} \quad (4.2.19)$$

可见,这时  $n_{e_1}$ 、 $\mathcal{K}_{e_1}$ 、 $v_{e_1}$  均是入射角  $\varphi_1$  的函数,当  $\varphi_1 = 0$  即正入射时,  $n_{e_1}$  趋向于  $n$ ,  $\mathcal{K}_{e_1}$  趋于  $\mathcal{K}$ ,  $v_{e_1}$  趋于  $c/n$ . 因此,人们又把“光学常数”  $n$  及  $\mathcal{K}$  称作主折射率及主吸收率.

研究者们,例如 D. Shea(1892)、R. B. Wilsey(1916)进行了大量实验来测定光学常数  $n$  和  $\mathcal{K}$ . 表 4.2.1 给出了 Shea 的测量结果,表中列出了不同的金属在  $\lambda = 640\text{nm}$ (红光)时不同入射角下的光学常数,其中  $n$ 、 $n\mathcal{K}$  是在  $\varphi_1 = 0^\circ$  时的折射率及吸收率,  $n_{10}$ 、 $n_{20}$ 、 $\dots$ 、 $n_{90}$  表示在  $\varphi_1 = 10^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $\dots$ 、 $90^\circ$  时的实数折射率  $n_{e_1}$ . 正如在表中所示的,在金属中测量结果不可能像在透明体中那样精确. 在透明介质中折射率可以测量到小数后 5 位的精确度,而在金属中,小数后第二位数已不是十分保险了. 这一方面是由于测量的困难性,另一方面是由于要测量及观察反射,要求产生一个纯的金属表面,而这几乎是不可能的. 因此不同的实验者给出的结果往往有较大的差别.

表 4.2.1 由 Shea 给出的几种金属的光学常数

金属	$n$	$n\mathcal{K}$	$n_{10}$	$n_{20}$	$n_{30}$	$n_{40}$	$n_{50}$	$n_{60}$	$n_{70}$	$n_{80}$	$n_{90}$
Fe	3.03	1.78	3.04	3.04	3.04	3.05	3.06	3.06	3.07	3.07	3.07
Pt	1.99	2.03	2.00	2.01	2.02	2.04	2.07	2.09	2.11	2.12	2.12
Cu	0.48	2.61	0.51	0.59	0.69	0.79	0.89	0.98	1.04	1.08	1.10
Au	0.35	1.79	0.39	0.49	0.61	0.72	0.83	0.92	0.99	1.03	1.05
Ag	0.26	2.16	0.31	0.43	0.56	0.69	0.80	0.90	0.97	1.01	1.03

观察上表,可以分为两部分. 第一部分包括 Fe(铁)、Pt(铂),二者均具有较大的折射率( $n > 1$ ),而  $n_{e_1}$  随角度的变化不是很大,因此在这些金属中折射现象近似地遵循惯用的折射定律.

表格的第二部分包括 Cu(铜)、Ag(银)及 Au(金),它们在零度时的折射率  $n < 1$ ,同时可以看到不同角度下  $n_{e_1}$  值的改变十分显著. 这时的折射定律就完全不一样了. 特别可以看到 Cu 相应的  $n_{e_1}$  在  $60^\circ \sim 70^\circ$  之间有  $n_{e_1} = 1$  的值; Ag 及 Au 在大角

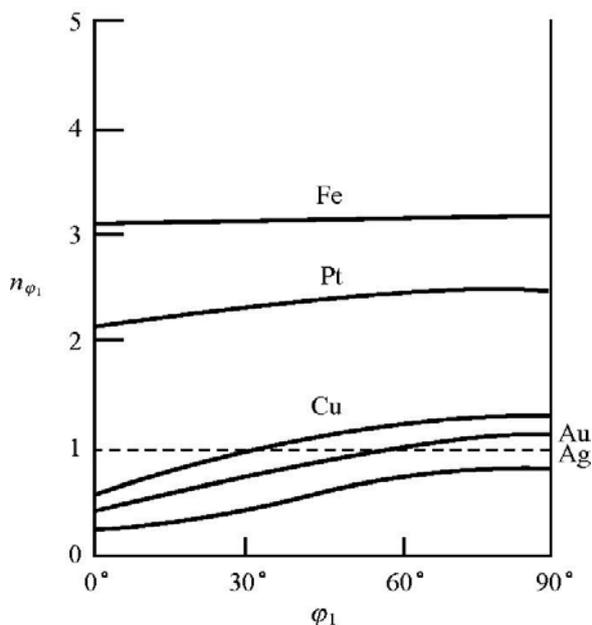


图 4.2.2 几种金属的折射率关于入射角  $\varphi_1$  的依赖关系

度时会会有一个  $n_{\varphi_1} = 1$  的值 (对 Cu 在  $62.9^\circ$ , Ag 在  $71.9^\circ$ , Au 在  $76.2^\circ$ ). 这意味着, 对一定的金属, 这一波长的光对应于某一角度入射时不被折射, 这是这一类金属所特有的一种非常奇特的性质. Shea 在实验上证实了这种特性.

图 4.2.2 给出了与表 4.2.1 相应的几种金属的  $n_{\varphi_1} - \varphi_1$  曲线.

为进一步讨论光在金属界面上折射的一些特殊性质, 我们再列出由 P. Drude (1904) 对几种金属在 D 线 ( $\lambda = 589\text{nm}$ ) 所测得的  $n$  及  $n\mathcal{K}$  值 (表 4.2.2, 即均是在垂直入射  $\varphi_1 = 0^\circ$  时的主折射率及主吸收率).

表 4.2.2 由 Drude 给出的几种金属的光学常数 ( $\lambda = 589\text{nm}$ )

金属	$n$	$n\mathcal{K}$
Ag	0.18	3.67
Au	0.37	1.82
Pt	2.06	4.26
Cu	0.64	2.62
Na	0.005 (!)	2.61
Hg	1.73	4.96
钢	2.41	3.40

**讨论** (1) 该表中列出的几种金属中都有  $n < n\mathcal{K}$ , 这意味着, 对于这些金属, 在光频时有  $\epsilon < 0$ , 这可以由式 (4.1.11) 看出, 只有当  $n > n\mathcal{K}$  时, 如表 4.2.1 中的 Fe, 才有  $\epsilon > 0$ .

(2) 表中 Na (钠) 的  $n = 0.005$ , 则由式 (4.2.19) 可知此时相速度  $v_p = 200c$ , 即光波在钠中传播的相速度是真空中光速的 200 倍! 当然, 这样求出的是相速度, 它可以超过光速, 而它并不能作为信号或能量传递的速度.

以上讨论的是在光频情况 ( $\omega = 10^{14-15} \text{Hz}$ ), 倘若在长波长电磁波 (如  $\omega = 10^{13} \text{Hz}$  以下) 或者说在满足良导体条件  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$  (良导体条件将在 4.4 节中讨论), 可把式 (4.1.16)、式 (4.1.17) 改写为

$$n = n\mathcal{K} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon\omega}} \quad (4.2.20)$$

这时把上式代入式(4.2.19)可以看到  $n_{\perp}$ 、 $\mathcal{N}_{\perp}$  几乎不随入射角而改变,即

$$\begin{aligned} n_{\perp} &= n \\ \mathcal{N}_{\perp} &= \mathcal{N} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

这意味着在良导体中透射波(或称折射波)几乎与界面垂直,不论其入射角如何改变,其透射波均在与界面垂直方向,等幅面与等相面重合.这就是低频电磁波与光频时的区别.

最后要说明的是,以上讨论的是电磁波在金属中传播.金属一般具较大的电导率 $\sigma$ ,故具有大吸收系数 $\alpha$ ,尽管透明体的吸收比金属小得多,情况与金属有较大的偏离,但以上讨论的结果在原则上仍适用于具有较小吸收(相对于金属而言)的所有有损耗介质.这可以应用于有色液体的折射率精确测量并与完纯透明体的理想情况作比较,从其出现的差别就可以得以验证.

### 4.3 复数波矢 $\mathcal{K}$

由4.1节知,对金属或有损介质,亥姆霍兹方程为

$$\Delta^2 \mathbf{E} + \mathcal{K}^2 \mathbf{E} = 0 \quad (4.3.1)$$

$\mathcal{K}$  为复数波数

$$\mathcal{K} = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

于是平面波解

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathcal{K} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.3.2)$$

$\mathcal{K}$  是复数波矢,可记为  $\mathcal{K} = \beta - i\alpha$ ,其中 $\beta$ 、 $\alpha$  是实矢量. $\mathcal{K}$  写为分量形式有

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_x &= \beta_x - i\alpha_x \\ \mathcal{K}_y &= \beta_y - i\alpha_y \\ \mathcal{K}_z &= \beta_z - i\alpha_z \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

将  $\mathcal{K} = \beta - i\alpha$  代入式(4.3.2),得到平面波解具有如下形式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \beta \cdot \mathbf{r})} \quad (4.3.4)$$

式中:第一部分  $\mathbf{E}_0 e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}}$  即为平面波的振幅,表明平面波沿 $\alpha$ 方向衰减, $\alpha$ 称为衰减常数;第二部分中的 $\beta \cdot \mathbf{r}$ 即为相位传播因子, $\beta$ 称为相位常数.

复数波矢  $\mathcal{K}$  也可直接由麦克斯韦方程组取 $\sigma \neq 0$ 时解出

$$\Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.3.5)$$

$$\Delta \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.3.6)$$

对式(4.3.5)两边取旋变,并将式(4.3.6)代入,考虑到良导体内部有 $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$ ,则得到波动方程

$$\Delta^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.3.7)$$

设此时仍有类似的平面波解

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{K}' \cdot \mathbf{r})} \quad (4.3.8)$$

代入波动方程(4.3.7),得

$$-K'^2 - i\omega\mu\sigma + \omega^2 \mu\epsilon = 0 \quad (4.3.9)$$

可见  $K'$  必为复数方能满足上面方程,记作为

$$\mathbf{K} = \beta - i\alpha$$

由此证得在有损耗情况下平面波解的波矢  $\mathbf{K}$  为复矢量.

下面讨论几点:

(1)  $\alpha$ 、 $\beta$  的大小.

由  $\mathbf{K} = \beta - i\alpha$  得

$$(\mathbf{K})^2 = |\beta|^2 - |\alpha|^2 - 2i\alpha \cdot \beta = (\mathbf{K}')^2 \quad (4.3.10)$$

而又有  $\mathbf{K} = \omega \sqrt{\tilde{\mu}\epsilon}$ , 故

$$(\mathbf{K})^2 = \omega^2 \tilde{\mu}\epsilon = \omega^2 \mu \left[ \epsilon - \frac{\mathbf{i}\sigma}{\omega} \right] \quad (4.3.11)$$

比较上两式,可得

$$\begin{cases} |\beta|^2 - |\alpha|^2 = \mu\omega^2 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{\omega}{2} \mu\sigma \end{cases} \quad (4.3.12)$$

由式(4.3.12)第2式得

$$\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = \frac{\omega\mu\sigma}{2} \quad (4.3.13)$$

考虑电磁波从空气入射到金属,由于空气中波矢  $\mathbf{K}$  为实数,可知 $\alpha_{x1} = 0$ ,而由矢量形式折射定理知  $K_x = K'_x$ ,故可得金属中 $\alpha_x$ 也必为零,且假设入射面为  $xOz$  平面, $y$ 分量无值.故可把式(4.3.13)写为

$$\alpha_z \beta_z = \frac{\omega\mu\sigma}{2} \quad (4.3.14)$$

将式(4.3.14)与式(4.3.12)第1式联立,可解得

$$\begin{aligned} \beta_z &= \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon}} + 1 \right) \right]^{1/2} \\ \alpha_z &= \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon}} - 1 \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

事实上此式可由 4.1 节中式(4.1.16)及式(4.1.17)的  $n$  及  $n'$  导出.

对于良导体,  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$ , 上式简化为

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (4.3.16)$$

(2) 穿透深度.

波的振幅衰减到原振幅的  $1/e$  时相应的传播距离定义为穿透深度, 或称集肤深度, 于是, 由

$$e^{-\alpha_z z_0} = e^{-1} \quad (4.3.17)$$

得到穿透深度为

$$z_0 = \frac{1}{\alpha_z} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (4.3.18)$$

由上式可见, 当电导率  $\sigma$ 、相对导磁率  $\mu_r$  或频率  $\omega$  增加时, 穿透深度减小. 因此良导体对光波总是不透明的, 除非是极薄的膜. 例如对于铝, 频率  $f = 60 \text{ Hz}$  时,  $z_0 = 1.1 \text{ cm}$ , 而当  $f = 3 \text{ GHz}$  时,  $z_0 = 1.6 \mu \text{ m}$ .

(3)  $\alpha$ 、 $\beta$  的方向.

一般情况下,  $\alpha$  与  $\beta$  方向不一致. 假设电磁波在空气中波矢为  $\mathbf{K}$ , 在金属中为  $\mathbf{K}' = \beta - i\alpha$ , 入射面为  $xOz$  平面. 在空气中  $\mathbf{K}$  为实矢量. 根据折射定律, 有  $K_x = K'_x$ . 由  $K_x$  是实数可知必有  $\alpha_x = 0$ , 因此,  $\alpha = \alpha_z \mathbf{k}$ , 即  $\alpha$  垂直于界面, 而  $\beta_x = K'_x = K_x$ , 即  $\beta$  有  $x$  分量, 可见  $\alpha$  与  $\beta$  不重合. 这就是说, 金属内的透射波其等幅面由  $\alpha$  决定, 它与界面平行, 而等相面由  $\beta$  决定. 一般情况下等幅面与等相面不一致, 因此在金属中的透射波是非均匀波.

对于良导体, 有  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$ , 故

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma = \frac{1}{2} \omega^2 \mu \epsilon \cdot \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg \frac{1}{2} K^2 \quad (4.3.19)$$

这里  $K = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  是空气中的波矢. 由  $K_x = \beta_x$  知必有

$$\alpha \beta_z \gg \beta_x^2 \quad (4.3.20)$$

而由  $\alpha_z \approx \beta_z = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$  可得  $\beta_z \gg \beta_x$ . 这意味着  $\beta$  几乎接近  $z$  方向, 即使入射波以一定倾角入射, 在良导体中的透射波仍几乎与界面垂直. 这也正是节 4.2 中式(4.2.21)描述的情况.

(4) 相速度.

等相面方程为  $\omega t - \beta \cdot \mathbf{r} = \text{常数}$ . 相速度大小为  $v_p = \omega/\beta$ , 方向与  $\beta$  一致. 对于

良导体,  $\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ , 故有

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (4.3.21)$$

上式表明, 当不同频率  $\omega$  的电磁波在金属或有损介质中传播时, 相速度不同, 这就是色散. 对于不良导体,  $\sigma \approx 0$ , 由式(4.3.15)得  $\beta = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$ , 因而有  $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ , 这就回到前面的无损介质的情况.

相速度的方向代表了波在金属中的偏折方向, 因此实折射角为

$$\varphi_2 = \arctan \frac{\beta_x}{\beta_z} \quad (4.3.22)$$

$\varphi_2$  可根据式(4.2.16)及式(4.2.19)求出, 从而可确定一般情况下的波矢实数  $\beta$ .

(5) 电场与磁场的关系.

由  $\Delta \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$  及  $\Delta \times \mathbf{E} = -i\mathbf{K} \times \mathbf{E}$  得

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{K} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega\mu} (\beta - i\alpha) \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (4.3.23)$$

$\mathbf{n}$  为指向导体内部的法线.

在良导体情况下, 把  $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}$  代入上式得

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{-i\frac{\pi}{4}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})} \quad (4.3.24)$$

由此可见磁场比电场落后  $\pi/4$  相位角. 且由

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left| \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{E}} \right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \gg 1 \quad (4.3.25)$$

得到在导体中

$$\left| \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{E}} \right| \gg \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (4.3.26)$$

而在介质中有

$$\left| \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{E}} \right| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (4.3.27)$$

比较上两式可知, 相对于真空或绝缘介质, 金属导体中磁场的作用远比电场要大.

## 4.4 金属作为良导体的条件

在 4.2 节中曾利用了良导体的如下条件

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1 \quad (4.4.1)$$

本节将证明上式是作为良导体的检验条件.

由麦克斯韦第三方程,假设导体内部有自由电荷密度  $\rho$ ,则  $\Delta \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$ ,而在外场作用下产生传导电流为  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ,代入上式后得

$$\Delta \cdot \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad (4.4.2)$$

上式表示:当导体内部有自由电荷时就有电流向外流动,体元内电荷密度就要减少.其变化规律遵循连续性方程  $\Delta \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .由此得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\Delta \cdot \mathbf{J} = -\frac{\sigma \rho}{\varepsilon} \quad (4.4.3)$$

解上述方程得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \quad (4.4.4)$$

式中  $\rho_0$  为  $t=0$  时的电荷密度.由上式知,当  $\rho$  减小到  $\rho_0$  的  $1/e$  值时,衰减时间为

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (4.4.5)$$

因此,只要电磁波的频率  $\omega$  足够小,或者说周期  $T$  足够大,以致导体内电荷的衰减时间比起电磁波周期来小得多,就可以认为在很短的时间内导体内部电荷衰减到零.因此,只要电磁波频率满足

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.4.6)$$

即

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1 \quad (4.4.7)$$

就可认为  $\rho(t) = 0$ ,即导体导电性能足够为良导体的要求.因此式(4.4.7)就是判别金属是否是良导体的条件.对于一般金属, $\tau$  的数量级为  $10^{-17}$  s,因此,只要  $\omega \ll 10^{17}$  Hz,都可看作是良导体.良导体内部没有自由电荷,电荷只能分布于导体表面上而形成表层电流.

## 4.5 电磁波在金属表面的反射

### 4.5.1 电磁波从空气正入射到金属表面

对无损介质,反射率公式为

$$R = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2 \quad (4.5.1)$$

对金属或有损介质,上述公式中的折射率  $n$  应代之以金属的复数折射率  $\tilde{n}$ , 得到金属表面反射率公式为

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \left| \frac{n(1 - i\mathcal{K}) - 1}{n(1 - i\mathcal{K}) + 1} \right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + \tilde{n}^2 \mathcal{K}^2}{(n + 1)^2 + \tilde{n}^2 \mathcal{K}^2} \quad (4.5.2)$$

例如,按表 4.2.2 对铜 (Cu) 在钠光 D 线时,  $n\mathcal{K} = 2.26$ ,  $n = 0.64$ , 求得  $R = 75\%$ ; 对银 (Ag),  $n\mathcal{K} = 3.67$ ,  $n = 0.18$ , 得到  $R = 95\%$ . 由上式也可大致估计, 对于那些  $n\mathcal{K} \gg n$  的金属, 如钠、银、铜、镁、金, 其正入射时反射率都较大.

对于良导体, 利用式 (4.3.24) 可以证明, 当正入射时, 反射率为

$$R = 1 - \sqrt{\frac{8\omega \epsilon_0}{\sigma}} \quad (4.5.3)$$

可见电导率越高, 反射率  $R$  越接近于 1, 测量结果证实了上式的正确性. 如利用  $\lambda = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m}$  红外线测得铜的正入射反射率  $R = 98.4\%$ , 这与用式 (4.5.3) 算的结果相符. 对于波长较长的微波或无线电波,  $R \approx 1$ , 只有极小部分能量透入导体内被吸收, 绝大多数能量被反射掉. 因此也可反过来说, 在微波或无线电波情形下, 可以把金属视为良导体, 其反射率接近于 1.

#### 4.5.2 电磁波从介质 $n_1$ 正入射到金属或有损介质 $\tilde{n}_2$

此时, 反射率可以写成如下的一般式

$$R = \left| \frac{\tilde{n}_2 - n_1}{\tilde{n}_2 + n_1} \right|^2 = \left| \frac{n_2(1 - i\mathcal{K}) - n_1}{n_2(1 - i\mathcal{K}) + n_1} \right|^2 = \frac{(n_2 - n_1)^2 + \tilde{n}_2^2 \mathcal{K}^2}{(n_2 + n_1)^2 + \tilde{n}_2^2 \mathcal{K}^2} \quad (4.5.4)$$

#### 4.5.3 电磁波从介质 $n_1$ 斜入射到金属 $\tilde{n}_2$ 上

根据菲涅耳公式, 把其中第二介质的折射率  $n_2$  用金属的复数折射率代入, 可得

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta - \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2}{n_1 \cos \theta + \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (4.5.5)$$

$$r_p = \frac{\tilde{n}_2 \cos \theta - n_1 \cos \tilde{\theta}_2}{\tilde{n}_2 \cos \theta + n_1 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (4.5.6)$$

由于  $\tilde{n}_2 = n_2(1 - ik)$  是复数, 可令

$$\tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2 = u_2 - iv_2 \quad (4.5.7)$$

也为复数, 将其代入菲涅耳公式, 对 S 波可得

$$r_s = |r_s| e^{i\delta_s} = \frac{n_1 \cos \theta - (u_2 - iv_2)}{n_1 \cos \theta + (u_2 - iv_2)} \quad (4.5.8)$$

反射率为

$$R_s = |r_s|^2 = \frac{(n_1 \cos \theta - u_2)^2 + v_2^2}{(n_1 \cos \theta + u_2)^2 + v_2^2} \quad (4.5.9)$$

幅角为

$$\tan \delta = \frac{2v_2 n_1 \cos \theta}{u_2^2 + v_2^2 - n_1^2 \cos^2 \theta} \quad (4.5.10)$$

对于 P 波有

$$\begin{aligned} r_p &= |r_p| e^{i\delta_p} = \frac{\tilde{n}_2^2 \cos \theta - n_1 (u_2 - i v_2)}{\tilde{n}_2^2 \cos \theta + n_1 (u_2 - i v_2)} \\ &= \frac{[n_2^2 (1 - \mathcal{K}^2) - i 2 n_2^2 \mathcal{K}] \cos \theta - n_1 (u_2 - i v_2)}{[n_2^2 (1 - \mathcal{K}^2) - i 2 n_2^2 \mathcal{K}] \cos \theta + n_1 (u_2 - i v_2)} \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

则反射率为

$$|r_p|^2 = \frac{[n_2^2 (1 - \mathcal{K}^2) \cos \theta - n_1 u_2]^2 + [2 n_2^2 \mathcal{K} \cos \theta - n_1 v_2]^2}{[n_2^2 (1 - \mathcal{K}^2) \cos \theta + n_1 u_2]^2 + [2 n_2^2 \mathcal{K} \cos \theta + n_1 v_2]^2} \quad (4.5.12)$$

幅角为

$$\tan \delta_p = 2 n_1 n_2^2 \cos \theta \frac{2 \mathcal{K} u_2 - (1 - \mathcal{K}^2) v_2}{n_2^4 (1 + \mathcal{K}^2)^2 \cos^2 \theta - n_1^2 (u_2^2 + v_2^2)} \quad (4.5.13)$$

式中的  $u_2$ 、 $v_2$  可通过解式(4.5.7)、式(4.1.4)及折射定律  $n_1 \sin \theta = \tilde{n}_2 \sin \tilde{\theta}$  联立方程求得。

在正入射情况下, S 光与 P 光的反射率相同, 且幅角也相同, 上述算式简化为

$$R = \frac{(n_1 - n_2)^2 + n_2^2 \mathcal{K}^2}{(n_1 + n_2)^2 + n_2^2 \mathcal{K}^2} \quad (4.5.14)$$

$$\tan \delta = \frac{2 n_1 n_2 \mathcal{K}}{n_2^2 + n_2^2 \mathcal{K}^2 - n_1^2} \quad (4.5.15)$$

根据式(4.5.9)及式(4.5.12), 可以作出金属表面反射率对于入射角的关系曲线, 图 4.5.1 示出金 (Ag) 与铜 (Cu) 的  $R-\theta$  曲线. 根据式(4.5.10)及式(4.5.13), 可以作出幅角  $\delta$  关于入射角的关系曲线, 幅角  $\delta$  就是反射波相对于入射波的相位跃变. 我们感兴趣的是 P 波与 S 波之间的反射率幅角差  $\delta_p - \delta_s$ . 图 4.5.2 示出了  $(\delta_p - \delta_s)$  对  $\theta$  的关系曲线. 对这些曲线的讨论:

(1) 金属表面反射率曲线具有与介质反射率曲线类似的形状, P 波与 S 波在入射角  $\theta = 0^\circ$  及  $90^\circ$  处重合, 但在  $\theta = 0^\circ$  时金属的  $R$  显然比介质中  $R$  在  $\theta_i = 0^\circ$  时增大. 在  $\theta = 90^\circ$  即掠入射处反射率接近为 1.

(2) 对于 S 波, 当  $\theta = 0^\circ$  时  $R$  值为极小值, 但对于 P 波, 存在一个入射角  $\theta_b$ , 在这个角度入射时 P 波有极小值  $R$ , 对应的这一入射角  $\theta_b$  称之为主入射角, 类似于介质中的布儒斯特角, 区别只是在介质中  $R_{\theta_b} = 0$ , 而在金属中  $R$  在  $\theta_b$  角处有极小值, 但不为零.

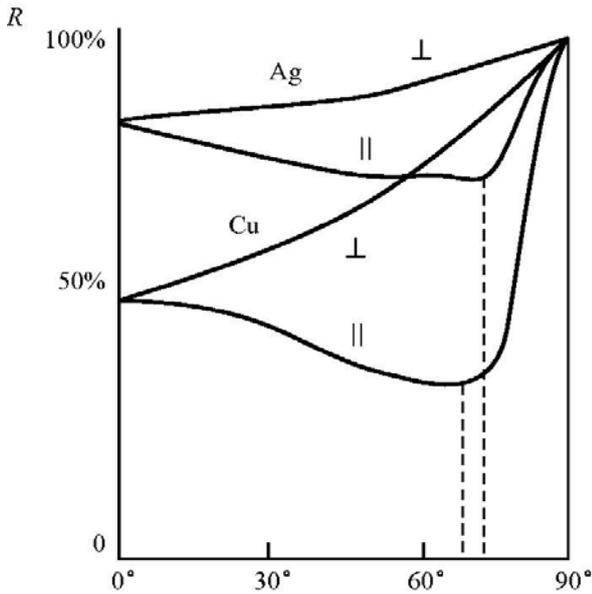


图 4.5.1 银和铜的反射率曲线

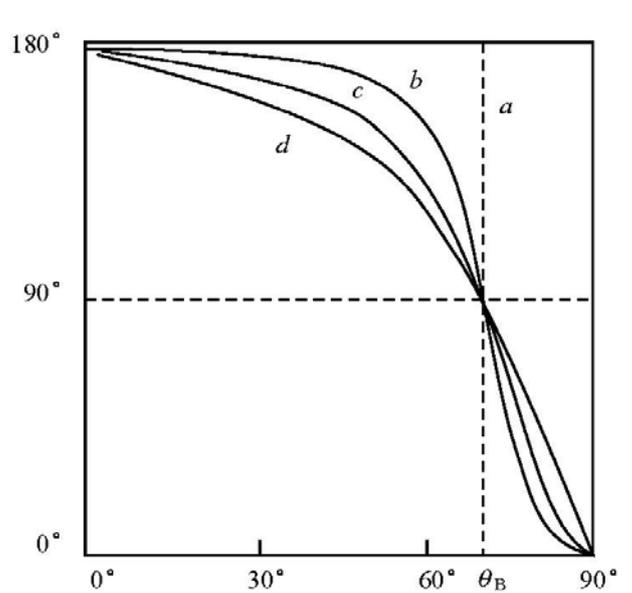


图 4.5.2 金属表面反射时的相位跃变

(3) 光波在金属表面反射后会产生相位跃变, P 分量与 S 分量的这一相位跃变是不同的, 因此反射后的 P 分量与 S 分量间将产生相位差而使反射前后的偏振特性发生变化. 金属表面反射产生的这一相位差  $\delta_p - \delta_s$  将随入射角变化而作连续变化, 而对于介质, 在不发生全反射的情况下, 这一相位差在布儒斯特角处发生突变. 图 4.5.2 中曲线 a 就是对介质给出的, 而曲线 b、c、d 为金属, 它们所相应的消光系数大小为

$$\mathcal{K}_b < \mathcal{K}_c < \mathcal{K}_d$$

即吸收从 b 到 d 渐增, 可见相位差随吸收增大而增大.

(4) 在主入射角处均有  $\delta_p - \delta_s = 90^\circ$ , 定义主方位角  $\psi$

$$\tan \psi = \frac{E'_p}{E'_s} \quad (4.5.16)$$

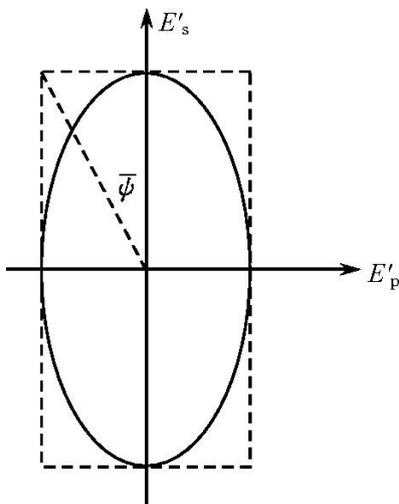


图 4.5.3 主方位角  $\psi$

假如有一与入射面成  $45^\circ$  的线偏光从主入射角入射到金属表面, 可分解为等振幅的 S 光与 P 光, 其  $E_p = E_s$ , 在金属表面反射后, 有  $\delta_p - \delta_s = 90^\circ$ , 其反射光振幅

$$E'_p = r_p E_p \quad (4.5.17)$$

$$E'_s = r_s E_s$$

因此反射后光将成为椭圆偏振光, 而主方位角  $\psi$  正是表示了这一椭圆偏光的椭圆程度, 即表示了椭圆外接长方形形状(图 4.5.3), 有

$$\tan \psi = \frac{r_p}{r_s} \quad (4.5.18)$$

## 4.6 电磁波的色散

对于金属或有损介质( $\sigma \neq 0$ ),在不同的频率下有

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon} &= \tilde{\varepsilon}(\omega) \\ \mu &= \mu(\omega) \\ \sigma &= \sigma(\omega)\end{aligned}\quad (4.6.1)$$

而由  $\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}(\omega)}$  知,折射率不仅是复数,而且与频率有关.以下几个事实就说明了这一点.

例如对纯水,以静电方法测得的静态相对介电常数为  $\varepsilon = 81$ ,这一值对频率在  $10^8$  Hz 以下的电磁波均为正确的,但当在可见光频率范围( $10^{14}$  Hz)时,  $n = 1.33$  就不再与静态的  $n(= \sqrt{\varepsilon})$  相符了.又如,银在低频时  $\sigma = 6.1 \times 10^7 \Omega \cdot \text{m}$ ,它是良导体,低频电磁波直至可见光波都是无法透射的,但当  $\omega$  增加到  $10^{15} \sim 10^{16}$  Hz 即紫外光时,  $\sigma$  迅速减小,因而银对紫外光是可以透过的.这一现象可以用极化理论作一简单说明.  $\varepsilon$  本身就描写了极化,对于静电场或缓变场,各类极化(包括电子位移极化及偶极子转向极化)均可以建立,因此  $\varepsilon$  值最大.频率逐渐升高时偶极子电矩跟不上电场的迅速变化做相应转向,因而转向极化逐渐减小,故使  $\varepsilon$  值减小.到了光频时则只有电子位移极化而根本没有了转向极化,所光  $\varepsilon_{\text{光}}$  很小,称之为光学介电常数,相应的光学折射率则应当由  $\varepsilon_{\text{光}}$  求出而不是从稳态  $\varepsilon$  求,即

$$n = \sqrt{\varepsilon_{\text{光}}}\quad (4.6.2)$$

例如,纯水在波长为 589nm 时,折射率  $n = 1.33$ .但当波长增加到 0.4cm 时,  $n = 5.3$ ,而在稳态即  $\lambda = \infty$  时,  $n = 9.03$ ,即稳态相对介电常数为  $\varepsilon_{(\text{稳态})} = n^2 = 81$ .

### 4.6.1 色散的经典理论

高频下电介质的色散经典理论是由洛伦兹首先提出的.这一理论认为,在外电场作用下介质分子极化形成偶极子,当电场作用周期性交变时,偶极子做周期性受迫振荡,即成为振子模型.利用经典力学方法解出振荡偶极子的位移解,从而求出与之有关的介质在高频电磁场下的介电常数及光学常数  $n, \alpha$ .

根据牛顿运算定律  $F = ma$ ,可得做强迫振动的偶极子其带电粒子运动方程为

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = qE - m\omega_0^2 l - m\gamma \frac{dl}{dt}\quad (4.6.3)$$

$qE$  为外电场力,  $m\omega_0^2 l$  为弹性胡克力,  $\omega_0$  为振子的固有频率,  $m\gamma \frac{dl}{dt}$  为阻尼力,  $\gamma$  为衰减系数(或阻尼系数).

当电场为时谐电场时,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ , 代入式(4.6.3), 得

$$\frac{d^2 \mathbf{l}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{l}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{l} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \quad (4.6.4)$$

这里  $q$  和  $m$  为电子的电荷量及质量.  $\mathbf{l}$  是偶极子的长度, 即电子在外场作用下的位移.  $\gamma$  为衰减系数, 是与电导率  $\sigma$  有关的量, 即发热损耗, 也就是阻尼系数. 在稀薄气体中, 可忽略原子间的作用, 作用于电子上的场就等于外场.

为求解式(4.6.4)可假设方程的解具有如下形式

$$\mathbf{l} = \mathbf{l} e^{i\omega t} \quad (4.6.5)$$

将此解代入方程(4.6.4), 得

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) \mathbf{l} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 \quad (4.6.6)$$

由此可得

$$\mathbf{l} = \frac{q\mathbf{E}_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} = \frac{(q\mathbf{E}_0/m)[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (4.6.7)$$

由电偶极子的振荡产生振荡的极化强度

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta v} = Nq\mathbf{l} = Nq\mathbf{l} e^{i\omega t} \quad (4.6.8)$$

式中  $N$  为单位体积内的分子个数. 把式(4.6.7)代入上式可得

$$\mathbf{P} = \frac{Nq^2 \mathbf{E}_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{i\omega t} \quad (4.6.9)$$

可见  $\mathbf{P}$  也是一个复数. 由式(1.5.7)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi} \mathbf{E} \quad (4.6.10)$$

及式(1.5.10)得

$$\tilde{n} = \sqrt{1 + \tilde{\chi}} = 1 + \frac{1}{2} \tilde{\chi} \quad (4.6.11)$$

求得

$$\tilde{\chi} = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \mathbf{E}} = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) \quad (4.6.12)$$

又由  $\tilde{n} = \text{Re}(\tilde{n}) - i\text{Im}(\tilde{n}) = n - i n \mathcal{K}$ , 得折射率

$$n = \text{Re}(\tilde{n}) = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (4.6.13)$$

吸收系数

$$\alpha = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{Im}(\tilde{n}) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (4.6.14)$$

复数折射率  $\tilde{n}$  的实部  $n$  表示了波的相位传播情况,虚部则表示了吸收情况.根据以上二式可画出实数折射率  $n$  及吸收系数  $\alpha$  对于频率  $\omega$  的关系曲线(图 4.6.1).由图 4.6.1 曲线可以看出:

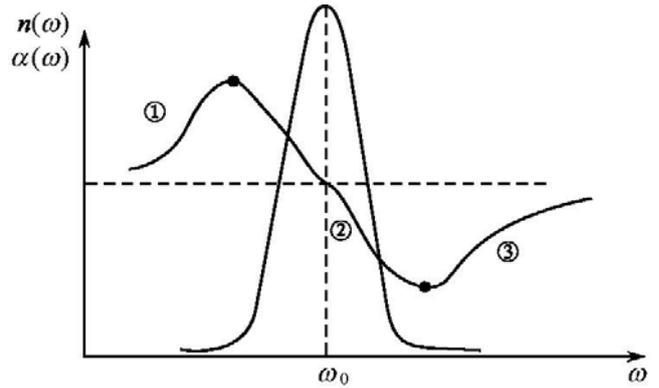


图 4.6.1 色散曲线  $n(\omega)$  及吸收曲线  $\alpha(\omega)$

(1) 在①与③部分曲线随  $\omega$  增大而上升,表示  $\omega$  增加时折射率  $n$  增大,即为正常色散区.

(2) 在①与③之间的②部分, $n$  随  $\omega$  增大而减小,为反常色散区.

(3) 在  $\omega = \omega_0$  点为共振吸收点,此处  $\alpha(\omega_0)$  具有极大值.

对于固体液体或压缩气体,考虑到周围分子在光场作用下被极化将对附近分子产生影响,分子在此影响下又将产生附加极化及附加场,综合地作用在分子上的有效场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (4.6.15)$$

这时求解振子只要将式(4.6.7)中的  $\mathbf{E}_0$  用上式中的  $\mathbf{E}$  的振幅代替,就可得到适用于固体或液体以及压缩气体的色散公式

$$\tilde{\epsilon} = 1 + \frac{a}{\omega'^2_0 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (4.6.16)$$

式中

$$a = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}$$

$$\omega'^2_0 = \omega^2_0 - \frac{a}{3} = \omega^2_0 - \frac{Nq^2}{3m\epsilon_0} \quad (4.6.17)$$

或有

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{Nq^2/m\epsilon_0}{\omega'^2_0 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (4.6.18)$$

对于稀薄气体,单位体积内分子数极少,即  $N$  极小,则式(4.6.17)中的后一项可忽略不计,于是对稀薄气体  $\omega'^2_0 = \omega^2_0$ ,则一般式(4.6.16)就化为

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{n}^2 = 1 + \frac{Nq^2/m\epsilon_0}{\omega^2_0 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (4.6.19)$$

当振子系统具有多种固有频率  $\omega_{0j}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) 时,若这些固有频率出现的概率(或权重)为  $f_j$ ,则得

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{(\omega^2_j - \omega^2 + i\gamma_j\omega)} \quad (4.6.20)$$

由  $\tilde{n} = n(1 - i\kappa)$  代入上式,按虚部实部各自相等可得

$$n^2 (1 - \mathcal{K}^2) = 1 + \frac{Nq^2}{8m} \sum_j \frac{f_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad (4.6.21)$$

$$2n^2 \mathcal{K} = \frac{Nq^2}{8m} \sum_j \frac{f_j \gamma_j \omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad (4.6.22)$$

若对于固体、液体或高压气体,当含多个固有频率时则只需将上式中的  $\omega_j$  改为  $\omega'_j$  即可.

图 4.6.2 示出了石英从红外到紫外区段的色散曲线(注意图中横坐标为  $\lambda$ ). 可以看到对应于多个固有频率的共振吸收波长.

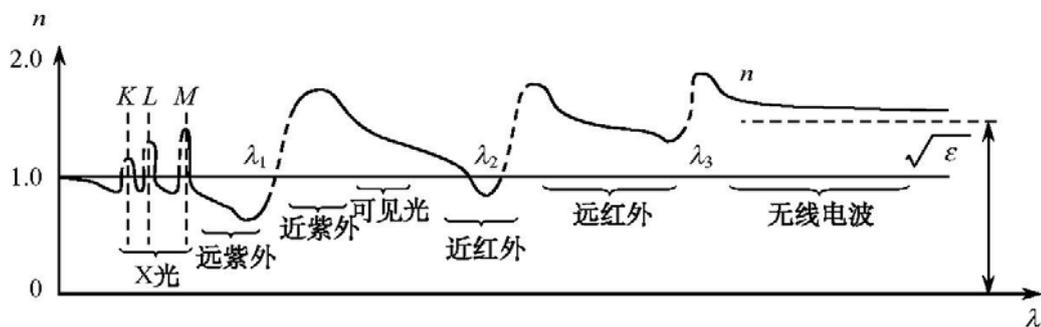


图 4.6.2 石英的全波长色散曲线  $n(\lambda)$

### 4.6.2 相速度与群速度

下面再来讨论色散曲线中不同区域的相速度和群速度. 根据 2.4 节及 2.6 节知, 相速度  $v_\phi = \frac{\omega}{K}$ , 群速度  $v_g = \frac{d\omega}{dK}$ , 对于有损介质, 由 4.3 节知, 相速度为

$$v_\phi = \omega/\beta \quad (4.6.23)$$

群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (4.6.24)$$

式中  $\beta$  为复数波矢  $\mathcal{K}$  的实部

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n \quad (4.6.25)$$

其中  $n$  为复数折射率  $\tilde{n}$  的实部. 由上式可得

$$d\beta = -\frac{2\pi n}{\lambda^2} \cdot d\lambda \quad (4.6.26)$$

式中的  $\lambda$  为真空中的波长.

把式(4.6.23)代入式(4.6.24), 得

$$v_g = \frac{d(\beta v_\phi)}{d\beta} = \beta \frac{dv_\phi}{d\beta} + v_\phi \quad (4.6.27)$$

再把式(4.6.23)、式(4.6.26)代入式(4.6.27), 得

$$v_g = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda} \quad (4.6.28)$$

对式(4.6.28)的讨论:

(1) 正常色散区 此时折射率随波长增大而减小,即  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ , 且由  $v_\phi = \frac{c}{n}$  可知在正常区内有

$$\frac{dv_\phi}{d\lambda} > 0 \quad (4.6.29)$$

因此可得

$$v_g < v_\phi \quad (4.6.30)$$

(2) 反常色散区 此时有  $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ , 故得

$$\frac{dv_\phi}{d\lambda} < 0 \quad (4.6.31)$$

由此可得

$$v_g > v_\phi \quad (4.6.32)$$

如果再观察色散曲线中反常区内  $n < 1$  的这部分曲线,则由  $v_\phi = \frac{c}{n}$  可知,在此处  $v_\phi > c$ , 即反常区内在  $n < 1$  的这部分范围内相速度大于光速. 相速度大于光速这在 4.2 节关于某些金属(如钠)中就曾有过讨论. 但现在,由于  $v_g > v_\phi$ , 可见此时群速亦大于光速. 按照一般情况,当群速有确定意义时,电磁波的能量传播速度应等于群速. 但现在,在反常色散区的范围中由于  $n(\omega)$  随  $\omega$  变化极大,也就是说色散极大,因而波包在仅仅传播极小距离时就因为色散而扩散了,不再成为其波群了,因而这时波的群速就不再具有确定的意义,这时的群速也就不再代表能量传播的速度了.

反常色散现象曾由 A. Kundt (1880) 最早在钠蒸气中观察到,实验装置如图 4.6.3. 金属钠在真空容器中被加热而上部被水冷却,形成的钠蒸气浓度从下至上

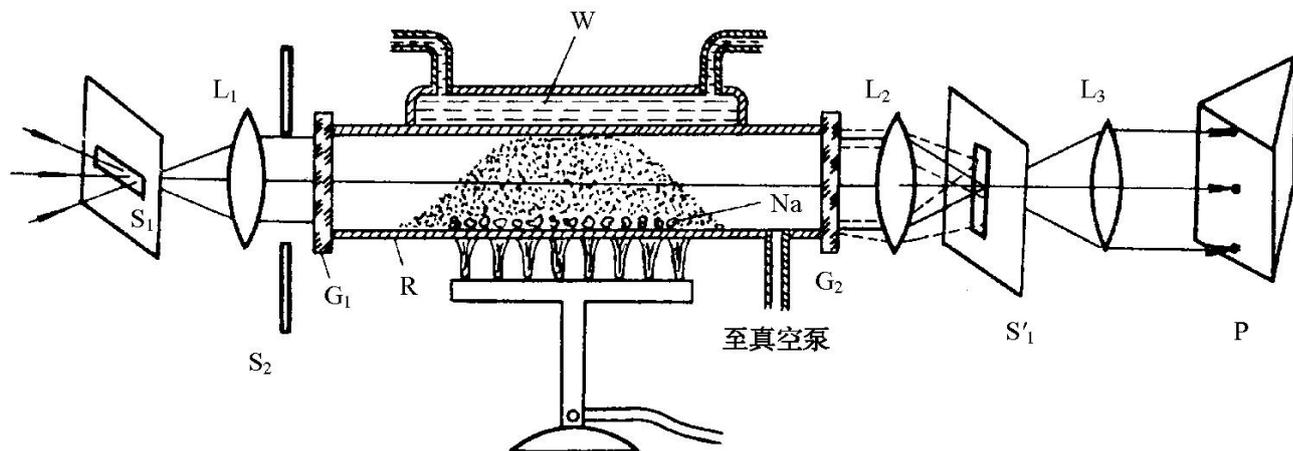


图 4.6.3 观察钠蒸气反常色散的实验装置

减小,从而形成一个“钠蒸气棱镜”,这样当白光通过狭缝入射到这一蒸气棱镜时就产生全光谱色散,利用第二个狭缝  $S_2$  及棱镜  $P$  可以在屏上看到色散曲线.图 4.6.4 给出了实验中不同的钠蒸气浓度时不同色散曲线,其横坐标是由棱镜  $P$  形成,代表了波长.从图 4.6.4(b)中可以略微看到反常色散部分.由于色散太快而使这部分曲线极陡,因而光强很弱而只能由其趋势推断.

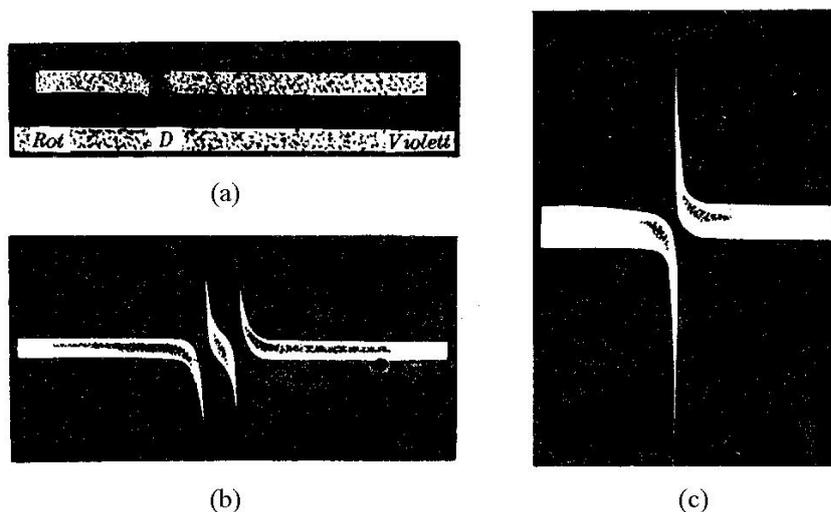


图 4.6.4 钠蒸气的反常色散  
(a) 小色散;(b) 中等色散;(c) 强色散

## 4.7 增益介质中的复数折射率 $\tilde{n}$ 、复数极化率 $\tilde{\chi}$ 、增益系数 $g$

4.6.1 节中的经典理论的偶极子模型成功地解释了物质对光的吸收和色散现象,当入射光接近振子系统的固有频率时,必然伴随着强烈的吸收,随着传播距离的增加光强会逐渐衰减,而不可能获得增强.而在某些情况下,如在激光介质中,在外界能量的泵浦下,当介质中满足了粒子数反转条件,入射光得到放大,此时的介质就是增益介质.

与有损耗的介质情况相反,当介质中有增益时,表现为复数折射率的虚部符号与有损耗介质的相反.例如,当有损耗介质中复数折射率表达式为

$$\tilde{n} = n - ikn$$

则增益介质中的复数折射率表达式为

$$\tilde{n} = n + i\gamma n$$

光波通过这类介质时,随着传播距离的增加,其光振幅不断增加.表 4.7.1 列出有损耗介质中的吸收与增益介质中的光放大的比较.

表 4.7.1 损耗介质的吸收与增益介质的光放大表达式比较

	吸收	增益
复数折射率表达式	$\tilde{n} = n - i\kappa n$	$\tilde{n} = n + i\gamma n$
光强表达式	$I = I_0 e^{-\alpha z}$	$I = I_0 e^{g z}$
系数表达式	$\alpha = -\frac{1}{I} \cdot \frac{dI}{dz} = 2 \frac{2\pi}{\lambda_0} (\kappa)$	$g = \frac{1}{I} \cdot \frac{dI}{dz} = 2 \frac{2\pi}{\lambda_0} (\gamma)$
含义	单位长度内光强的改变量(损耗)占此处光强的百分比	单位长度内光强的改变量(增益)占此处光强的百分比

类比介质吸收的情况可以知道,类似地在增益介质中,其介电常数  $\epsilon$ 、折射率  $n$ 、波矢  $k$ 、极化率  $\chi$  等,以及相应的量,如传播速度  $v$ ,均成为复数,其虚部的符号与有损耗介质表达式中的符号相反.同样地,其相应的公式,如波动方程等,其表达式中相应的量也都成为复数形式,增益部分表达的复数量符号与吸收情况下相反.

注意,虚部的正负取值视平面波表达形式取  $e^{i\omega t}$  还是  $e^{-i\omega t}$  而定.当取为  $e^{i\omega t}$  时,如 4.2 节所述,损耗介质应当为  $\tilde{n} = n - i\kappa n$ ,而此时,增益介质为  $\tilde{n} = n + i\gamma n$ .

作为具体的例子,在图 4.7.1 所示的二能级原子系统中,分布在下能级  $E_1$  和上能级  $E_2$  的原子数分别为  $N_1$  和  $N_2$ ,系统的固有频率  $\omega$  满足  $h\omega = E_2 - E_1$ .当入射光的频率满足  $\nu$  接近  $\omega$  时,光强随传输距离的变化关系为

$$I_\nu(z) = I_\nu(0) e^{g(\nu)z} \quad (4.7.1)$$

其中增益系数  $g$  为

$$g(\nu) = (N_2 - N_1) \frac{c^2}{8\pi n^2 \nu^2 t_{\text{spont}}} \xi(\nu) \quad (4.7.2)$$

式中: $n$  为介质的实数折射率; $c$  是真空中光速; $t_{\text{spont}}$  是原子在能级  $E_2$  的平均寿命; $\nu$  为激光频率, $\xi(\nu)$  为激光光强的线性函数.上式意味着,当满足粒子数反转分布时, $N_2 > N_1$ , $g > 0$ ,光强呈指数式递增,表现为增益;而当  $N_2 < N_1$  时, $g < 0$ ,光强快速衰减.从物理图像上来看,入射光与物质发生了两种作用,一是  $E_1$  能级的原子受激吸收一个光子跃迁至  $E_2$  能级,二是  $E_2$  能级的原子受激辐射出一个光子跃迁至  $E_1$  能级.当  $N_2 > N_1$  时,受激辐射的概率大于受激吸收的概率,这种情形相应于增益介质对入射光的放大作用;当  $N_2 < N_1$  时,受激辐射的概率小于受激吸收的概率,相应于处于热平衡的原子体系对光的吸收作用.

例如,对于红宝石激光晶体( $\text{Al}_2\text{O}_3$  中掺有  $\text{Cr}^{3+}$  离子)估算在谱线中心的增益常数.晶体的特性如下

$$N_2 - N_1 = 5 \times 10^{17} / \text{cm}^2$$

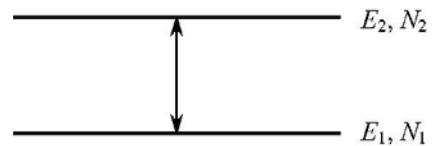


图 4.7.1 增益介质的二能级原子系统

$$\Delta \nu = 1/\xi(\nu) = 2 \times 10^{11} \text{ Hz (300K)}$$

$$t_{\text{pon}} = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\nu = 4.326 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$c/n = 1.69 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

代入式(4.7.2)计算得

$$g(\nu) = 5 \times 10^{-2} / \text{cm}$$

若取  $z = 1 \text{ cm}$ , 则有

$$\frac{I}{I_0} = e^{gz} = e^{0.05} = 1.05127$$

这意味着在跃迁中心频率处的波通过单位厘米具有上述特性的红宝石激光介质后,其强度将被放大约 5.1%.

若取  $z = 3 \text{ cm}$ , 则有

$$\frac{I}{I_0} = e^{gz} = e^{0.05 \times 3} = 1.162$$

表示通过 3cm 长的上述红宝石激光介质后,其强度将被放大约 16.2%.

增益系数  $g$  的概念并不只限于在激光放大中.在受激散射中,散射光随着其作用距离增加而不断放大,也可以用增益系数来描写.此时表现为在非线性介质中的三阶极化率  $\tilde{\chi}^{(3)}$  的虚部起主要作用,如表 7.10.1 中所示,受激散射中的三阶极化率  $\tilde{\chi}^{(3)}$  是一个负虚数.也就是说,由于  $\tilde{\chi}^{(3)}$  的虚部是负值,引起了受激散射强度随着传播方向距离增加而增加,具有增益作用.

在增益介质中的复数极化率  $\tilde{\chi}$  的表达也与损耗介质不同.其形式如同式(4.6.12)所表达的,但其虚部的符号应当与损耗介质的相反.

## 5 电磁波在金属波导中的传播

在 1.9 节中曾讨论了电磁波的能量是在场中传输的.在直流或低频电流的情况下,能量是由传输双线周围空间的电磁场传输的.在传输高频电磁波时,为避免电磁波向外辐射的损耗及对周围环境的干扰,传输线改为同轴电缆.当需要传输更高频率的电磁波时,同轴电缆的内导线中焦耳损耗及介质的热损耗更严重了,这时就用波导管代替同轴电缆,以适用于微波段传输.

所谓波导管,就是由金属做成的管子,它可以有各种截面形状.此种单连通管只能传输电磁波的能量,而不能传输直流电的功率.对于高频电磁波,由良导体的穿透深度  $Z_0 = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ ,当  $\omega$  极大,且电导率  $\sigma$  趋于无穷时,穿透深度  $Z_0$  趋于零,即高频电磁波几乎全部被金属反射,金属管壁构成了对电磁波的引导,它就是构成电磁波存在的边界条件.波导问题实质上就是电磁波在有界空间的传播问题.解这类问题的出发点就是写出泛定方程及边界条件,由此求解方程.

### 5.1 波导管中的场方程及边界条件

#### 1. 场方程

在下列假设条件下,波导管内的场方程为亥姆霍兹方程

$$\Delta^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} = 0 \quad (5.1.1)$$

(1) 波导管壁是理想导体,  $\sigma_1 = \infty$ , 因此电磁波在导体中有很强的衰减,波是在波导内的介质中传播的.

(2) 波导内介质为理想介质,  $\sigma = 0$ , 且介质为均匀的各向同性的线性介质.

(3) 传播媒介中无自由电荷,  $\rho = 0$ , 故在介质中  $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$ .

(4) 电磁波在介质中传播时无衰减.

(5) 电磁波可分解为谐波,波沿波导方向  $Z$  传播.

#### 2. 金属波导表面上的边界条件

根据 1.6.3 节的电介质与理想导体分界面上的边界条件可以导出  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0$ , 即有

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad (5.1.2)$$

由此得出结论,介质与金属波导壁交界面上电场矢量仅含法向分量,电力线垂直于

金属表面。又由边界条件  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$ , 且金属内磁场也为零, 即  $\mathbf{B}_2 = 0$ , 可得  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ , 即有

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 \quad (5.1.3)$$

这意味着在介质 1 中在交界面附近  $\mathbf{B}$  只有切向分量, 交界面上磁力线切于导体表面。

由于波导中的电流密度与其表面相切, 由边界条件  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \alpha$  知  $\mathbf{H}$  也必与金属表面相切。但由 1.6.3 节知, 理想导体与介质的交界面上  $\mathbf{H}$  可以不连续, 因此  $\mathbf{H}$  在界面上可以有切向值。这样把波导管的边界条件形象地化为上面的两条原则。

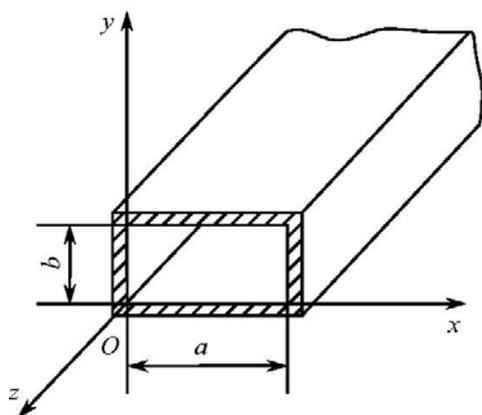


图 5.1.1 矩形金属波导管

图 5.1.1 所示的矩形金属波导, 可以按上述原则写出各边界面上的边界条件:

(1) 在  $y = 0, b$  处只有  $E_y$  分量, 即  $E_x = 0, E_z = 0$ , 且由介质中  $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$  可得

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (5.1.4)$$

(2) 在  $x = 0, a$  处界面上则有

$$\begin{cases} E_y = 0, E_z = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

综上所述, 写为一般形式的边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 & \text{电力线垂直导体表面} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{磁力线切于导体表面} \\ \text{由 } \Delta \cdot \mathbf{E} = 0 \text{ 得 } \frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 & n \text{ 为界面法线} \end{cases}$$

## 5.2 矩形波导中的电磁波

现在求解如图 5.1.1 所示的矩形波导管内的电磁波解, 也就是在上节给出的矩形波导的边界条件下求解亥姆霍兹方程。

设电磁波沿  $z$  轴方向传播, 它应具有传播因子  $e^{i(\omega t - K_z z)}$ , 因此电磁波解的电场矢量应具有如下形式

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y) e^{-iK_z z} e^{i\omega t} \quad (5.2.1)$$

将其定态解  $\mathbf{E}(x, y) e^{-iK_z z}$  代入亥姆霍兹方程得

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{E}(x, y) + (K^2 - K_z^2) \mathbf{E}(x, y) = 0 \quad (5.2.2)$$

用直角坐标下的分离变量法, 设  $u(x, y)$  为电磁场的任一直角分量, 它可以分离变量写为如下形式

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5.2.3)$$

则  $u(x, y)$  应满足式(5.2.2), 代入后可分解为相应的两个方程

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + K_x^2 X = 0 \quad (5.2.4)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + K_y^2 Y = 0 \quad (5.2.5)$$

其中,  $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K^2$ . 求解式(5.2.4)及式(5.2.5), 得到  $u(x, y)$  的通解为

$$u(x, y) = (C_1 \cos K_x x + D_1 \sin K_x x)(C_2 \cos K_y y + D_2 \sin K_y y) \quad (5.2.6)$$

式中  $C_1, D_1, C_2, D_2$  为任意常数. 对于  $u(x, y)$  所表示的具体的各  $E$  分量, 可利用边界条件对这些常数作出限制.

根据边界条件

$$\text{当 } x = 0, a \text{ 时 } E_y = E_z = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{当 } y = 0, b \text{ 时 } E_x = E_z = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

对于  $E_x$  分量, 由  $x = 0$  时  $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ , 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=0} &= (-C_1 K_x \sin K_x x + D_1 K_x \cos K_x x)(C_2 \cos K_y y + D_2 \sin K_y y) \Big|_{x=0} \\ &= D_1 K_x \cos K_x x \cdot (C_2 \cos K_y y + D_2 \sin K_y y) \Big|_{x=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

故必须使  $D_1 = 0$ . 而  $E_x$  又应满足当  $y = 0$  时  $E_x = 0$ , 即

$$\begin{aligned} E_x &= C_1 \cos K_x x \cdot (C_2 \cos K_y y + D_2 \sin K_y y) \Big|_{y=0} \\ &= C_1 \cos K_x x \cdot C_2 \cos K_y y \Big|_{y=0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

故必须使  $C_2 = 0$ . 对  $E_y, E_z$  作类似计算, 于是可得

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos K_x x \sin K_y y e^{-iK_z z} \\ E_y = A_2 \sin K_x x \cos K_y y e^{-iK_z z} \\ E_z = A_3 \sin K_x x \sin K_y y e^{-iK_z z} \end{cases} \quad (5.2.8)$$

再考虑  $x = a$  及  $y = b$  面上的边界条件, 可得  $K_x a$  及  $K_y b$  必须是  $\pi$  的整数倍, 即

$$K_x = \frac{m\pi}{a} \quad K_y = \frac{n\pi}{b} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.9)$$

式中  $n, m$  分别代表了矩形波导中沿  $a, b$  边方向上的半波的数目, 即模式的阶数.

对于式(5.2.8)代表的  $E$  还应满足条件  $\Delta \cdot E = 0$ , 由此得

$$K_x A_1 + K_y A_2 + iK_z A_3 = 0 \quad (5.2.10)$$

因此,在  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  中只有两个是独立的.这意味着,对应于一组  $(m, n)$  值,可以有两种独立的波型.而  $\mathbf{E}$  的三分量一般式求出后,  $\mathbf{H}$  的三个分量可以由

$$\mathbf{H} = \frac{i}{\omega\mu} \Delta \times \mathbf{E} \quad (5.2.11)$$

求出.

例如,对给定一组  $(m, n)$  值,若选  $A_3 = 0$ ,即  $E_z = 0$ ,则  $A_1$ 、 $A_2$  就应满足  $A_1/A_2 = -K_y/K_x$ ,由此求出一组波型的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  各分量.此时  $H_z$  必不为零.而另一组波型必有  $E_z \neq 0$ .通常选择这样两种独立的波型:

$E_z = 0$ ,即电场在传播方向  $z$  上无纵向分量,故称之为横电波(TE波,又称 H 波).

$H_z = 0$ ,即磁场在  $z$  方向无纵向分量,称之为横磁波(TM波,又称 E 波).

TE 波和 TM 波又按  $m$ 、 $n$  值不同分为  $TE_{mn}$  波和  $TM_{mn}$  波.一般情形下,在波导中可以存在这些电磁波的叠加.

因此,在工程电磁学中,往往直接由时谐电磁场的麦克斯韦方程求出  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $H_x$ 、 $H_y$  与  $E_z$ 、 $H_z$  之间的关系,再分为 TE 波( $E_z = 0$ )及 TM 波( $H_z = 0$ ),分别求出两种波型下的电磁场解.下面用此种方法详细地对矩形波导求解.

由

$$\Delta \times \mathbf{H} = i\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (5.2.12)$$

$$\Delta \times \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{H} \quad (5.2.13)$$

将式(5.2.1)表示的电场矢量及类似的磁场矢量定态解的各分量代入式(5.2.12)及式(5.2.13),展开后可得

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega \varepsilon E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} + iK_z H_y \quad (1) \\ i\omega \varepsilon E_y = -iK_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2) \\ i\omega \varepsilon E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (3) \\ -i\omega\mu H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} + iK_z E_y \quad (4) \\ -i\omega\mu H_y = -iK_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (5) \\ -i\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (6) \end{array} \right. \quad (5.2.14)$$

由式(5.2.14)的方程(1)、(5)可求得  $E_x$  和  $H_y$ ,由方程(2)、(4)求得  $E_y$  和  $H_x$ ,故得

$$\begin{cases} E_x = \frac{-i}{K^2 - K_z^2} \left[ K_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \\ E_y = \frac{-i}{K^2 - K_z^2} \left[ K_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \\ H_x = \frac{i}{K^2 - K_z^2} \left[ \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - K_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \\ H_y = \frac{-i}{K^2 - K_z^2} \left[ \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + K_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \end{cases} \quad (5.2.15)$$

上式中  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $H_x$ 、 $H_y$  只依赖于  $E_z$ 、 $H_z$ ，这样可按 TE 波  $E_z = 0$  及 TM 波  $H_z = 0$  分为两种波型来求解电磁场。

对 TE 波， $E_z = 0$ ，只要从  $H_z$  分量的亥姆霍兹方程解出  $H_z$ ，便可代入式(5.2.15)求出所有各分量。

由  $H_z$  的亥姆霍兹分量方程  $\Delta^2 H_z + K^2 H_z = 0$ ，用分离变量法求解，设解为

$$H_z(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-iK_z z}$$

代入上面的  $H_z$  亥姆霍兹分量方程得

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + K_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + K_y^2 Y = 0 \end{cases}$$

得到通解为

$$\begin{aligned} H_z(x, y) &= X(x)Y(y) \\ &= (C_1 \cos K_x x + D_1 \sin K_x x)(C_2 \cos K_y y + D_2 \sin K_y y) \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

再由边界条件：在  $x=0, a$  处， $E_y = 0$ ，且对 TE 波有  $E_z = 0$ ，代入式(5.2.15)中第 2 式，得  $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$ ；在  $y=0, b$  处， $E_x = 0$ ，且对 TE 波有  $E_z = 0$ ，代入式(5.2.15)中第 1 式，得  $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ 。按上述边界条件，并将式(5.2.16)代入这二式中，可求得  $D_1 = 0$ ， $D_2 = 0$ ，从而求得

$$H_z = H_0 \cos\left[\frac{n\pi}{a}x\right] \cos\left[\frac{m\pi}{b}y\right] e^{-iK_z z} \quad (5.2.17)$$

式中  $H_0$  为常数，即磁场的最大振幅。把上式的  $H_z$  代入式(5.2.15)，且  $E_z = 0$ ，便可得到矩形金属波导中 TE 波的各分量解

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = i \frac{\omega \mu}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ E_y = -i \frac{\omega \mu}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{n\pi}{a} \right) H_0 \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ E_z = 0 \\ H_x = i \frac{K_z}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{n\pi}{a} \right) H_0 \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ H_y = i \frac{K_z}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{m\pi}{b} \right) H_0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ H_z = H_0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \end{array} \right. \quad (5.2.18)$$

对于 TM 波,用类似的方法亦可求得各分量解

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -i \frac{K_z}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{n\pi}{a} \right) E_0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ E_y = -i \frac{K_z}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{m\pi}{b} \right) E_0 \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ E_z = E_0 \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ H_x = i \frac{\omega \varepsilon}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{m\pi}{b} \right) E_0 \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ H_y = -i \frac{\omega \varepsilon}{K^2 - K_z^2} \left( \frac{n\pi}{a} \right) E_0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{b} y \right) e^{-iK_z z} \\ H_z = 0 \end{array} \right. \quad (5.2.19)$$

式中

$$K^2 - K_z^2 = K_x^2 + K_y^2 = \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2.20)$$

由以上表达式(5.2.18)及式(5.2.19),可以对给定长宽为  $a$ 、 $b$  的矩形波导求出所有各种允许传播的波型的电磁场解.

### 1. 几点结论

(1) 矩形波导中不可能存在  $TE_{00}$  波.这是因为当  $m = n = 0$  时,代入式(5.2.18)得到所有各分量全部为零,也就无所谓电磁波存在了.

(2) 矩形波导中不可能存在  $TM_{m0}$ 、 $TM_{0n}$ 、 $TM_{00}$  波.这同样可以由  $m = 0$  或  $n = 0$  代入式(5.2.19)得出.

(3) 矩形波导中不可能存在 TEM 波.因为,由(1)与(2)知,既然  $m$  及  $n$  不可能同时为零,故  $K_x$  及  $K_y$  也不可能同时为零,即不可能使  $E_z$  及  $H_z$  同时为零.因此矩形波导中不可能传播 TEM 波.这一结论也适用于所有具有截面形状为有限

的单连通的金属波导.可以这样解释:如果此种波导内存在 TEM 波,则  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{H}$  矢量必在同一平面内,即在有限的单连通截面内.这时电力线与磁力线就不可能相互交连而形成电磁波,即这种波在单连通条件下是不可能满足麦克斯韦方程组的,因此,截面形状为有限的单连通的金属波导内不可能存在 TEM 波.

## 2. 几点讨论

### (1) 模式.

由式(5.2.9)知,  $m$ 、 $n$  只能取正整数,因此  $K_x$ 、 $K_y$  的可能取值是离散的,不同的  $m$ 、 $n$  取值及组合对应于不同的场分布结构,我们称之为不同的波型或模式,如  $\text{TE}_{mn}$ 、 $\text{TM}_{mn}$  模.

### (2) 横向振荡特性.

由式(5.2.18)、式(5.2.19)可知,  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{H}$  各分量沿横坐标  $(x, y)$  是驻波分布.而模式阶数  $m$  为正整数,表示沿波导的宽边  $a$  (在  $x$  方向)上分布的驻波的半波数,  $n$  表示沿波导的窄边  $b$  (在  $y$  方向)上分布的驻波的半波数.

### (3) 截止频率.

根据  $K_z^2 = K^2 - (K_x^2 + K_y^2)$ ,若被传输的电磁波频率高于波导内相应模式所允许的频率,即被传输波的波数  $K$  大于波导内允许值  $K_c$ ,即

$$K^2 > K_x^2 + K_y^2 = K_c^2 \quad (5.2.21)$$

则  $K_z$  为实数,考虑正向传播的波,取  $K_z$  为正值,传播因子为  $e^{-iK_z z}$ ,波导中能有  $\text{TE}_{mn}$  波传输(或  $\text{TM}_{mn}$  波传输).反之,若有

$$K^2 < K_x^2 + K_y^2 \quad (5.2.22)$$

则有  $K_z^2 < 0$ ,  $K_z$  为虚数值,考虑到物理意义取为负值,即

$$K_z = -\sqrt{K^2 - (K_x^2 + K_y^2)} = -i|K_z| \quad (5.2.23)$$

则传播因子  $e^{-iK_z z}$  变成了  $e^{-|K_z| z}$ ,这是一项衰减因子,被传输的波被衰减而无法以固定的波型传输.因此,由临界状态

$$K_z^2 = 0 \text{ 即 } K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} \quad (5.2.24)$$

可以求出相应的截止频率

$$\omega_{m,n,c} = v \cdot K = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (5.2.25)$$

相应的截止波长

$$\lambda_{m,n,c} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot v = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (5.2.26)$$

只有当电磁波频率大于截止频率,或波长小于截止波长时方能被波导传输,否则就

无法在波导内传播而被截止。

例如,对于波导  $a = 7\text{cm}$ ,  $b = 3\text{cm}$ ,相应各波型的截止波长如下:

波型	TE <sub>10</sub>	TE <sub>20</sub>	TE <sub>30</sub>	TE <sub>01</sub>	TE <sub>02</sub>	TE <sub>11</sub>	TE <sub>21</sub>
$\lambda_c/\text{cm}$	14	7	4.7	6	3	5.5	4.6

可见,当电磁波波长  $\lambda$  大于临界波长  $\lambda_{1,0,c}$ ,即大于  $14\text{cm}$  时,就根本不可能在这一波导中传播;而当  $14\text{cm} > \lambda > 7\text{cm}$  时,只可能以 TE<sub>10</sub> 波模式传播,此时得到单模传输的情形。

(4) 相速度和群速度。

由电磁波的相位因子  $(\omega t - K_z z)$  可得,波导中的电磁波沿  $z$  方向的相速度为

$$v_\phi = \frac{\omega}{K_z} = \frac{cK/n}{\sqrt{K^2 - (K_x^2 + K_y^2)}} \quad (5.2.27)$$

式中:  $n$  为波导中介质的折射率;  $K_x^2 + K_y^2 = \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2 = K_c^2$ . 式(5.2.27)又可改写为

$$v_\phi = \frac{c/n}{\sqrt{1 - \left[\frac{K_c}{K}\right]^2}} \quad (5.2.28)$$

$K_c$  为临界波数.当波导内允许传播该模时,必有  $K > K_c$ ,故  $\sqrt{1 - \left[\frac{K_c}{K}\right]^2}$  为实数,且小于 1.对于  $n=1$  的空气介质或真空,则有

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left[\frac{K_c}{K}\right]^2}} > c \quad (5.2.29)$$

因此,传输模的相速度大于光速.而群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dK_z} = \frac{d(cK/n)}{dk_z} \quad (5.2.30)$$

仍讨论当  $n=1$  时情况

$$v_g = c \frac{d}{dK_z} (\sqrt{K_z^2 + K_c^2}) = \frac{cK_z}{\sqrt{K_z^2 + K_c^2}} = \frac{c\sqrt{K^2 - K_c^2}}{\sqrt{K^2}} = c \sqrt{1 - \left[\frac{K_c}{K}\right]^2} \quad (5.2.31)$$

由于上式的根号内为小于 1 的实数,故得

$$v_g < c \quad (5.2.32)$$

也就是说,当不考虑波导内介质的色散时,传输模的群速度即电磁场的能量传播速度必小于光速。

(5) 矩形波导管内电磁场分布及管壁电流。

TE<sub>10</sub> 波是矩形波导的最低次模,它的电磁场分布比较简单,故以 TE<sub>10</sub> 模为例来讨论该波在波导管内传输时的管内电磁场分布及管壁电流。

将  $m=1, n=0$  以及  $K^2 - K_z^2 = K_x^2 + K_y^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$  代入式(5.2.18), 得到  $TE_{10}$  波电磁场各分量

$$\begin{cases} E_x = E_z = H_y = 0 \\ E_y = -i \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin\left[\frac{\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \\ H_x = \frac{iK_z a}{\pi} H_0 \sin\left[\frac{\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \\ H_z = H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \end{cases} \quad (5.2.33)$$

按此式可画出  $TE_{10}$  波电磁场分布, 如图 5.2.1 所示. 其中, 图(a)表示电场分布, 图(b)表示磁场分布. 相应的  $TE_{10}$  波电磁场分布的立体图如图 5.2.2 所示.

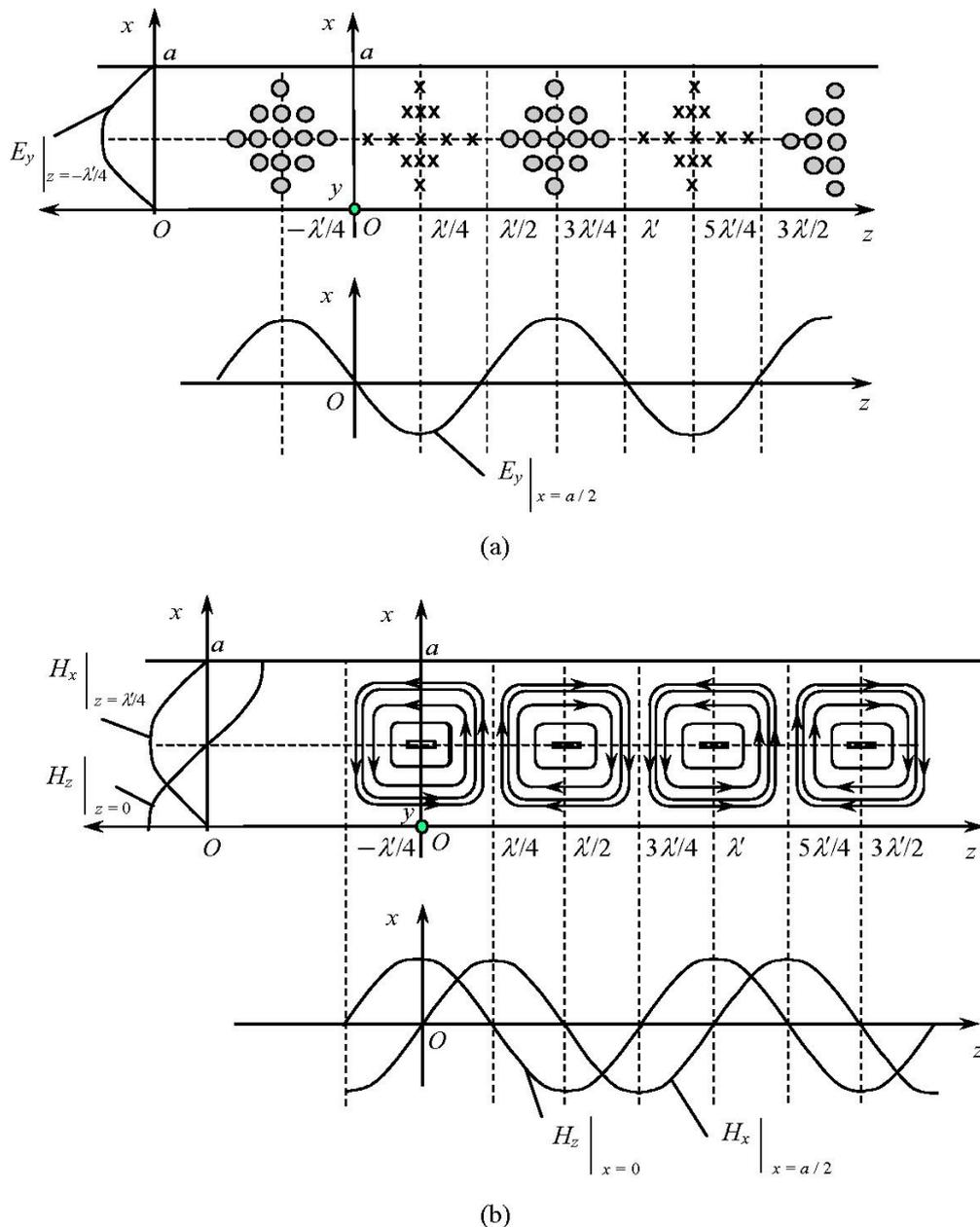


图 5.2.1  $TE_{10}$  模的电场分布(a)及磁场分布(b)

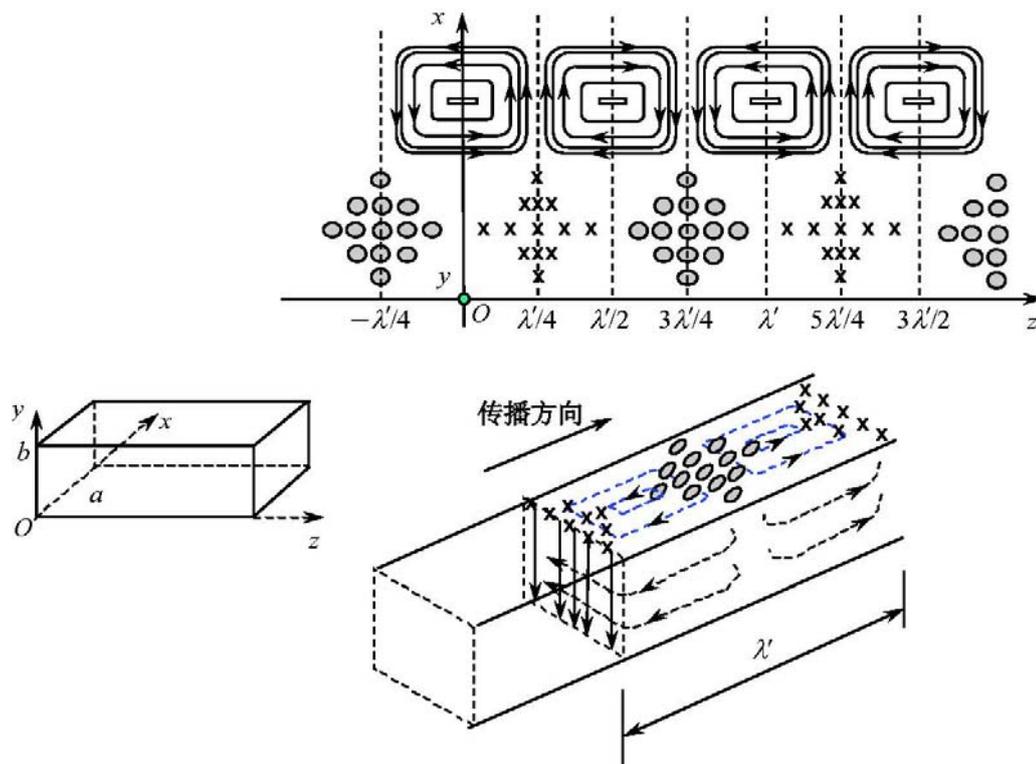


图 5.2.2 TE<sub>10</sub> 模的电磁场分布立体图

TE<sub>10</sub> 模的场分布分析的具体做法如下.

将式(5.2.33)取实部,得到各个分量的实数表达式

$$\begin{aligned}
 E_y &= \operatorname{Re} \left[ -i \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin \left[ \frac{\pi}{a} x \right] e^{-i K_z z} \right] = A \operatorname{Re} \left[ \sin \left[ \frac{\pi}{a} x \right] (-i) (\cos K_z z - i \sin K_z z) \right] \\
 &= -A \sin \left[ \frac{\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda'} z \right] \\
 H_x &= \operatorname{Re} \left[ i \frac{K_z a}{\pi} H_0 \sin \left[ \frac{\pi}{a} x \right] e^{-i K_z z} \right] = B \operatorname{Re} \left[ \sin \left[ \frac{\pi}{a} x \right] (i) (\cos K_z z - i \sin K_z z) \right] \\
 &= B \sin \left[ \frac{\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda'} z \right] \\
 H_z &= \operatorname{Re} \left[ H_0 \cos \left[ \frac{\pi}{a} x \right] e^{-i K_z z} \right] = H_0 \operatorname{Re} \left[ \cos \left[ \frac{\pi}{a} x \right] (\cos K_z z - i \sin K_z z) \right] \\
 &= H_0 \cos \left[ \frac{\pi}{a} x \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda'} z \right] \tag{5.2.34}
 \end{aligned}$$

在以上的图中和各式中记  $\lambda' = \lambda_0 / \sin \theta$ , 表示等效波长, 由  $K_x = K \cos \theta$ ,  $K_z = K \sin \theta$ ,

$K = 2\pi / \lambda_0$ , 则  $K_z = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta = 2\pi / \lambda'$ .

为讨论简化, 将常数记做  $A$  与  $B$ , 下面逐个讨论各个分量.

① 对于  $E_y(x, z)$ .

先讨论沿  $z$  轴方向的分布.取  $x = a/2$ ,由式(5.2.34)第 1 式得

$$E_y = -A \sin\left[\frac{\pi}{a}x\right] \sin K_z z \Big|_{x=a/2} = -A \sin \frac{2\pi}{\lambda'} z \quad (5.2.35)$$

当然,  $x$  也可以取为  $0 \sim a$  之间的其他值.当  $x$  取为  $0$  及  $a$  时,  $E_y$  沿着  $z$  轴处处为  $0$ .

再讨论沿  $x$  轴方向的分布.取  $z = -\lambda'/4$ ,由式(5.2.34)第 1 式得

$$E_y = -A \sin\left[\frac{\pi}{a}x\right] \sin K_z z \Big|_{z=-\lambda'/4} = A \sin \frac{\pi}{a} x \quad (5.2.36)$$

当然  $z$  也可以取为其他值.但当  $z$  取为  $0$  及  $\lambda'/2$  的整数倍时,  $E_y$  沿着  $x$  轴方向处处为  $0$ .

图 5.2.1(a)示出了  $E_y$  在  $x = a/2$  处沿  $z$  轴方向的分布,以及  $E_y$  在  $z = -\lambda'/4$  处沿  $x$  轴方向的分布.其中的俯视图中黑点表示矢量由纸面穿出指向读者,黑叉表示矢量向纸面穿入远离读者.

② 对于  $H_x(x, z)$ .

先讨论沿  $z$  轴方向的分布.取  $x = a/2$ ,由式(5.2.34)第 2 式得

$$H_x = B \sin\left[\frac{\pi}{a}x\right] \sin K_z z \Big|_{x=a/2} = B \sin \frac{2\pi}{\lambda'} z \quad (5.2.37)$$

当然  $x$  也可以取为  $0 \sim a$  之间的其他值.当  $x$  取为  $0$  及  $a$  时,则  $H_x$  沿着  $z$  轴处处为  $0$ .这也可以从图 5.2.1(b)中看出,沿着  $z$  轴在  $x$  取为  $0$  及  $a$  处,  $H$  的  $x$  分量均为  $0$ .

再讨论沿  $x$  轴方向的分布.取  $z = \lambda'/4$ ,由式(5.2.34)第 2 式得

$$H_x = B \sin\left[\frac{\pi}{a}x\right] \sin K_z z \Big|_{z=\lambda'/4} = B \sin \frac{\pi}{a} x \quad (5.2.38)$$

当然  $z$  也可以取为其他值.但当  $z$  取为  $0$  及  $\lambda'/2$  的整数倍时,则  $H_x$  沿着  $x$  轴方向处处为  $0$ .

图 5.2.1(b)示出了  $H_x$  在  $x = a/2$  处沿  $z$  轴方向的分布,  $H_x$  在  $z = \lambda'/4$  处沿  $x$  轴方向的分布,同时,图中示出  $xOz$  平面上的  $H$  磁力线分布形状.

③ 对于  $H_z(x, z)$ .

先讨论沿  $z$  轴方向的分布.取  $x = 0$ ,由式(5.2.34)第 3 式得

$$H_z = H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a}x\right] \cos K_z z \Big|_{x=0} = H_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda'}z\right] \quad (5.2.39)$$

当然  $x$  也可以取为  $0 \sim a$  之间的其他值.当  $x$  取为  $a/2$  时,  $H_z$  沿着  $z$  轴处处为  $0$ .这也可以从图 5.2.1 (b)中看出,沿着  $z$  轴在  $x$  取为  $a/2$  处,  $H$  的  $z$  分量均为  $0$ .

再讨论沿  $x$  轴方向的分布.取  $z = \lambda'/4$ ,由式(5.2.34)得

$$H_z = H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a}x\right] \cos K_z z \Big|_{z=0} = H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a}x\right] \quad (5.2.40)$$

当然  $z$  也可以取为其他值.但当  $z$  取为  $\lambda'/4$  的整数倍时,则  $H_z$  沿着  $x$  轴方向处处为  $0$ .

图 5.2.1(b)示出了  $H_z$  在  $x = 0$  处沿  $z$  轴方向的分布,以及  $H_z$  在  $z = 0$  处沿  $x$

轴方向的分布.

将以上讨论合在一起,在图 5.1.2 示出了  $TE_{10}$  波的电磁场分布的立体图.

当然,以上讨论的都是定态分布,如指  $t=0$  时刻的分布.事实上,当  $t$  改变时,这样的分布按  $e^{i\omega t}$  规律向  $z$  方向传播,也就是说,在式(5.2.33)中添加  $e^{i\omega t}$  项后,就会出现  $e^{i(\omega t - k_z z)}$  项,或  $\cos(\omega t - k_z z)$  项,因此可以看成以上的电磁场分布沿着  $z$  方向在行进传播.

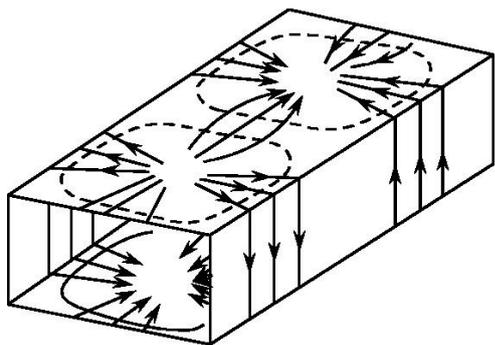


图 5.2.3  $TE_{10}$  型波波导壁上电流分布图

由式(5.2.33)求出磁场后按边界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \alpha \quad (5.2.41)$$

可得出理想导体的金属管壁上存在的传导电流分布,如图 5.2.3 所示.

为了探测波导内的电磁场分布,需要在波导管壁上开槽.这时必须注意,开的槽不能过多地妨碍波导壁上的电流的流通,否则将严重地破坏原来的场分布.由图 5.2.3 可以看出,在宽边的正中沿波的传播方向开一细槽将不会对内部的场分布有大的影响.

部的场分布有大的影响.

### (6) 矩形波导的传输功率.

无限长理想波导所传输的功率等于坡印亭矢量在波导横截面上的积分,即

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} \right] \quad (5.2.42)$$

将式(5.2.18)、式(5.2.19)表达的相应模各分量代入上式积分即可求得传输功率.仍以  $TE_{10}$  波为例把由式(5.2.33)表达的  $TE_{10}$  波电磁场各分量代入上式,并考虑到  $d\mathbf{s} = (dx dy) \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}$  为波导截面法线方向的单位矢量,即在  $z$  轴正向,则有

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x^* & 0 & H_z^* \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{s} \\ &= -E_y H_x^* dx dy \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

而

$$\begin{aligned} E_y H_x^* &= \left[ -i \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-iK_z z} \right] \left[ -i \frac{K_z a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{iK_z z} \right] \\ &= -\omega \mu K_z \left[ \frac{a H_0}{\pi} \right]^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

故有

$$P_{\Sigma} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} E_y H_x^* dx dy = \frac{1}{2} \omega \mu K_z \left[ \frac{a H_0}{\pi} \right]^2 \int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx dy$$

$$= \frac{ab}{4} \omega \mu K_z \left[ \frac{aH_0}{\pi} \right]^2 \quad (5.2.45)$$

式中  $ab$  即为波导截面积, 可见传输功率与波导横截面积成正比. 当然也与初始电磁场振幅有关, 事实上式中  $\omega \mu a H_0 / \pi$  正是由式(5.2.33)中第2式表达的电场的最大值, 而  $K_z a H_0 / \pi$  则是  $H_x$  的最大值. 因此, 式(5.2.45)可改写为

$$P_z = ab \frac{E_{ym}}{2} \cdot \frac{H_{xm}}{2} \quad (5.2.46)$$

式中

$$E_{ym} = \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \quad (5.2.47)$$

$$H_{xm} = \frac{K_z a}{\pi} H_0 \quad (5.2.48)$$

### 5.3 无穷大平板波导中的电磁波

矩形波导的一边扩展为无穷大(即  $b = \infty$ )时则成为无穷大平行平板波导(图5.3.1). 由于  $b$  为无穷大,  $y$  方向宽度无穷大, 使  $y$  方向上的限制消失, 故此方向上无边缘效应, 场在  $y$  方向上均匀, 即得对任意量均有  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ .

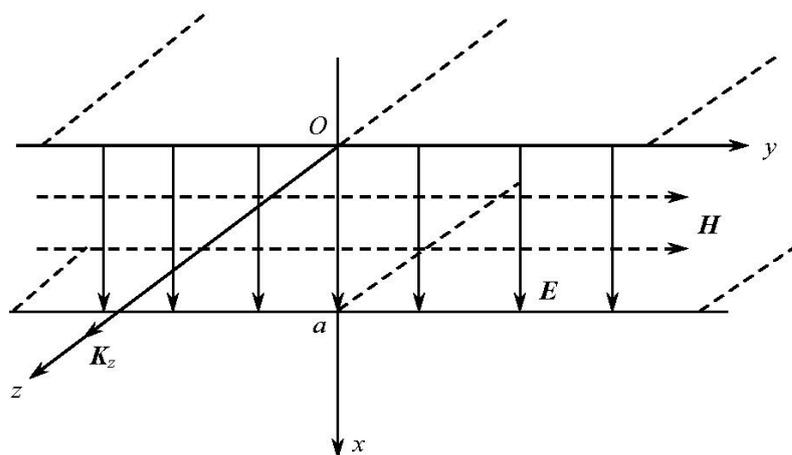


图 5.3.1 无穷大平板金属波导

平板波导的解可以从式(5.2.18)、式(5.2.19)中得到. 令  $b = \infty$ , 且由于  $y = 0$ 、 $b$  的边界限制消失, 故其中所有含  $y$  项都消失. 此时  $K^2 - K_z^2 = K_x^2$ , 且由  $\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ ,  $K^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ , 可得对 TE 波, 平板波导的电磁场分量为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_z = H_y = 0 \\ E_y = -i \frac{K}{K_x} E_0 \sin\left[\frac{n\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \\ H_x = i \frac{K}{K_x} \cdot \frac{K_z}{\omega\mu} E_0 \sin\left[\frac{n\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \\ H_z = \frac{K}{\omega\mu} E_0 \cos\left[\frac{n\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \end{array} \right. \quad (5.3.1)$$

对于 TM 波, 平板波导的电磁场分量为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y = H_x = H_z = 0 \\ E_x = \frac{-iK_z}{K^2 - K_z^2} \left[\frac{n\pi}{a}\right] E_0 \cos\left[\frac{n\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \\ E_z = E_0 \sin\left[\frac{n\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \\ H_y = \frac{-i\omega\varepsilon E_0}{K^2 - K_z^2} \left[\frac{n\pi}{a}\right] \cos\left[\frac{n\pi}{a} x\right] e^{-iK_z z} \end{array} \right. \quad (5.3.2)$$

由上式可知, 无穷大平板波导中不可能存在 TE<sub>0</sub> 模和 TM<sub>0</sub> 模 ( $m=0$ ), 否则, 所有场分量均为零.

对于 TEM 波, 在无穷大平板波导中可以存在 TEM 波. 从物理意义上可解释为此时电力线与磁力线在无穷远处交连, 从而可以满足麦克斯韦方程组, 形成电磁波. 其解可以从式(5.2.14)的一般式求出. 对于 TEM 波, 有  $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$ , 且由无穷大平板条件  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ , 得

$$H_z = \frac{1}{-i\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad (5.3.3)$$

故有

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad E_y = \text{常数}$$

又由边界条件,  $\mathbf{E}$  必须垂直于界面, 故  $\mathbf{E}$  不可能有切向分量, 即  $E_y = 0$ . 而由  $E_z = 0$ , 得

$$E_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \quad (5.3.4)$$

故有  $\frac{\partial H_y}{\partial x} = 0$ ,  $H_y = \text{常数}$ .

令  $H_y = H_0$ , 则有

$$E_x = \frac{1}{-i\omega\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{K_z}{\omega\varepsilon} H_0 \quad (5.3.5)$$

又因为对于 TEM 模  $E_y = E_z = 0$ ,  $\mathbf{E}$  只有  $E_x$  分量, 而  $\mathbf{K}$  必与  $\mathbf{E}_x$  垂直, 故  $\mathbf{K}$  必垂直于  $xOy$  平面,  $K_x = K_y = 0$ , 故有  $K_z = \sqrt{K^2 - K_x^2 - K_y^2} = K$ , 则

$$E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_0 \quad (5.3.6)$$

因此得到无穷大平板波导中的 TEM 波解为

$$\begin{cases} E_y = E_z = H_x = H_z = 0 \\ E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_0 e^{-iK_z z} = E_0 e^{-iK_z z} \\ H_y = H_0 e^{-iK_z z} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 e^{-iK_z z} \end{cases} \quad (5.3.7)$$

由此可见, 允许传播的 TEM 波只可能有一种偏振方向, 即  $\mathbf{E}$  在  $x$  方向振动 (垂直于平板界面的方向),  $\mathbf{H}$  在  $y$  方向振动 (切于平板界面)。

## 5.4 圆形规则波导中的电磁波

圆形规则波导如图 5.4.1 所示. 由于其截面是一个圆, 所以采用圆柱坐标 ( $r$ 、 $\phi$ ) 比较方便. 由于波导截面仍是有限单连通的, 所以圆波导也不可能传输 TEM 波.

圆形波导的分析方法与矩形波导一样, 先解亥姆霍兹方程, 再由理想导体的边界条件求出全部场的分量.

### 5.4.1 圆形波导中的横电波 (TE 波)

假定波向  $z$  方向传播, 对于 TE 波,  $E_z = 0$ ,  $H_z$  满足亥姆霍兹方程

$$\Delta^2 H_z + K^2 H_z = 0 \quad (5.4.1)$$

把上述方程改写为柱坐标下的亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + K^2 H_z = 0 \quad (5.4.2)$$

应用分离变量法,  $H_z$  可写为

$$H_z(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad (5.4.3)$$

把上式代入柱坐标下的亥姆霍兹方程 (5.4.2) 后分离变量可得

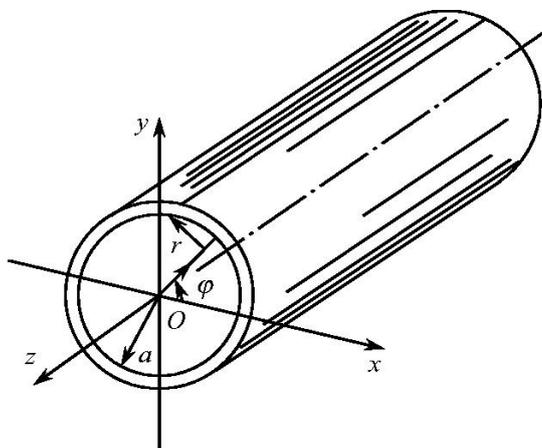


图 5.4.1 圆形金属波导

$$\begin{cases} \frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \beta^2 \\ \frac{1}{\Phi(\varphi)} \cdot \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{R(r)} \left[ r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + r^2 K_c^2 R(r) \right] = m^2 \end{cases} \quad (5.4.4)$$

式中  $K_c^2 = K_x^2 + K_y^2 = \beta^2 + \omega^2 \mu \varepsilon$ , 而根据  $K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$  可得  $K_z^2 = -\beta^2$ . 按照物理意义要求, 取  $\beta = i K_z$ .

方程(5.4.4)第1式有下列形式的解

$$Z(z) = e^{-i K_z z} \quad (5.4.5)$$

第2式的解是

$$\Phi(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{bmatrix} \quad (5.4.6)$$

但因为圆波导的轴对称性, 必须使

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi \pm 2\pi) \quad (5.4.7)$$

故  $m$  只能取整数.

第3式是贝塞尔方程, 它的解是  $m$  阶贝塞尔函数

$$R(r) = \begin{bmatrix} J_m(K_c r) \\ N_m(K_c r) \end{bmatrix} \quad (5.4.8)$$

式中:  $J_m$  为第一类贝塞尔函数;  $N_m$  为第二类贝塞尔函数. 当  $m = 0, 1, 2, 3$  时, 这两类贝塞尔函数的变化情形如图 5.4.2、图 5.4.3 所示. 因为第二类贝塞尔函数(诺伊曼函数)当  $r \rightarrow 0$  时,  $N_m(K_c r) \rightarrow \infty$ , 在包含  $r = 0$  的圆柱波导内这是不可能的, 故只能取式(5.4.8)的第一项, 即只取第一类贝塞尔函数  $J_m(K_c r)$ .

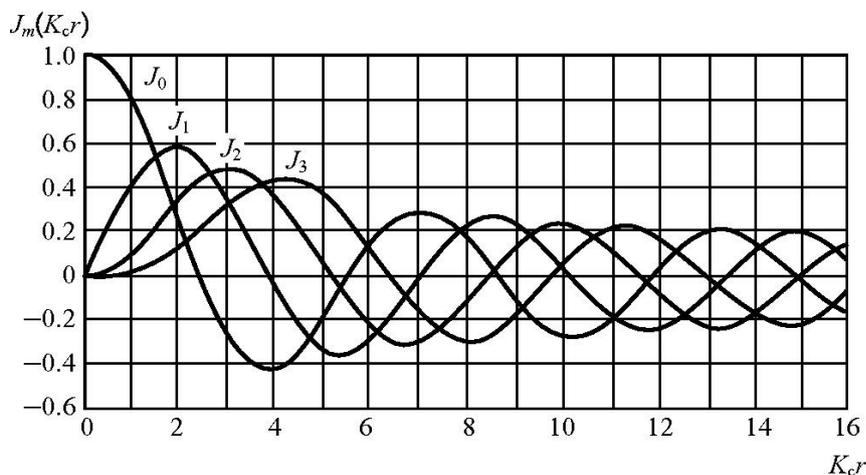
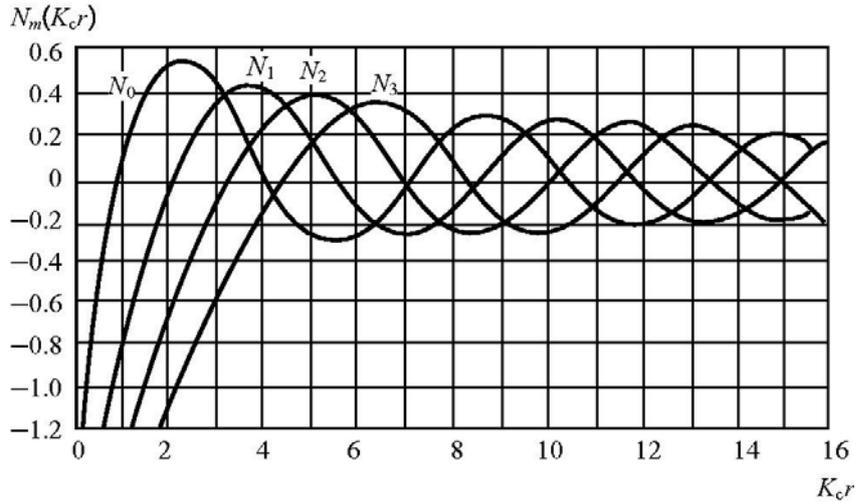


图 5.4.2 第一类贝塞尔函数  $J_m(K_c r)$  曲线

图 5.4.3 第二类贝塞尔函数  $N_m(K_c r)$  曲线

至此,式(5.4.3)表示的解  $H_z$  可写为

$$H_z = H_0 J_m(K_c r) \cos m\varphi e^{-iK_z z} \quad (5.4.9)$$

及

$$H_z = H_0 J_m(K_c r) \sin m\varphi e^{-iK_z z} \quad (5.4.10)$$

以式(5.4.9)所表示的这一套解为例,继续求解与之相应的电磁场其他各分量.类似于矩形波导的推导方法,可以把麦克斯韦方程及第二方程按柱坐标展开为分量形式,即

$$\Delta \times \mathbf{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = i\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (5.4.11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= H_r \mathbf{e}_r + H_\varphi \mathbf{e}_\varphi + H_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{E} &= E_r \mathbf{e}_r + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi + E_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (5.4.12)$$

同样,把  $\Delta \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$  也展开为分量形式,并考虑到  $\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow -iK_z$  的运算,可得

$$\left\{ \begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{K_c^2} \left[ iK_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\omega\mu}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] \\ E_\varphi &= \frac{1}{K_c^2} \left[ -iK_z \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \\ H_r &= \frac{1}{K_c^2} \left[ \frac{i\omega\varepsilon}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - iK_z \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \\ H_\varphi &= -\frac{1}{K_c^2} \left[ i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{ik_z}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \right. \quad (5.4.13)$$

式中,  $K_c^2 = K^2 - K_z^2$ . 这样, 对于 TE 波, 只要将  $E_z = 0$  及由式 (5.4.9) 或式 (5.4.10) 表示的  $H_z$  代入到以上四式中, 就可求得电磁场各分量, 其中的  $K_c$  由边界条件确定.

对于 TE 波, 边界条件为: 当  $r = a$  时,  $E_\varphi = 0$ . 由此, 再考虑到式 (5.4.13) 第 2 式, 并因为 TE 波  $E_z$  处处为零, 即  $\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = 0$ , 因此必有

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (5.4.14)$$

由式 (5.4.9) 对  $H_z$  求导后代入  $r = a$ , 可得

$$J'_m(K_c a) = 0 \quad (5.4.15)$$

式中,  $J'_m$  表示  $J_m$  关于  $r$  的一阶导数. 因此,  $K_c a$  应等于第一类贝塞尔函数一阶导数的根. 用  $u'_{mn}$  表示第  $m$  阶贝塞尔函数一阶导数的第  $n$  个根, 它们的数值可以从图 5.4.2 所示的  $J_m$  函数曲线中求得. 因为对  $m = 0$  有

$$J'_0(K_c a) = -J_1(K_c a) \quad (5.4.16)$$

一般形式为

$$J'_m(x) - \frac{mJ_m(x)}{x} = -J_{m+1}(x) \quad (5.4.17)$$

这样可以由图示曲线求出  $J_{m+1}$  的根, 再按以上公式求出  $J'_m$  的根  $u'_{mn}$ .

表 5.4.1 列出了几个  $u'_{mn}$  的数值.

表 5.4.1  $u'_{mn}$  值表

$n$	方程 $J'_m(u) = 0$ 的根, 当 $m$ 等于					
	0	1	2	3	4	5
1	3.832	1.841	3.054	4.201	5.317	6.416
2	7.016	5.332	6.705	8.015	9.282	10.520
3	10.174	8.536	9.965	11.344	12.682	13.987
4	13.324	11.706	13.170	—	—	—

由此可得

$$K_c = \frac{u'_{mn}}{a} \quad (5.4.18)$$

最后, 得到圆波导中 TE 波的电磁分量

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{i\omega\mu m}{K_c^2 r} H_0 J_m(K_c r) \sin(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ E_\varphi = \frac{i\omega\mu}{K_c} H_0 J_m(K_c r) \cos(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ E_z = 0 \\ H_r = -\frac{iK_z}{K_c} H_0 J_m(K_c r) \cos(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ H_\varphi = \frac{iK_z m}{K_c^2 r} H_0 J_m(K_c r) \sin(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ H_z = H_0 J_m(K_c r) \cos(m\varphi) e^{-iK_z z} \end{array} \right. \quad (5.4.19)$$

### 5.4.2 圆波导中 TE 波的截止波长

由  $K_z = \sqrt{K^2 - K_c^2}$  知, 只有当被传输波的波数  $K^2 > K_c^2$  (电磁波频率满足  $\omega^2 \mu \varepsilon > K_c^2$ ) 时,  $K_z$  为实数,  $e^{-iK_z z}$  才是传播因子, TE<sub>mn</sub> 波才能在波导中传播. 所以截止频率应满足

$$\omega_c \sqrt{\mu \varepsilon} = K_c = \frac{u'_{mn}}{a} \quad (5.4.20)$$

截止波长应满足

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{K_c} = \frac{2\pi a}{u'_{mn}} \quad (5.4.21)$$

由此可见, 波型不同, 截止波长就不同. 由表 5.4.1 知,  $u'_{11}$  的数值最小, 因此 TE<sub>11</sub> 波的截止波长最长,  $\lambda_c = 3.41a$ . TE<sub>11</sub> 波的电磁场分布如图 5.4.4 所示. 它可与矩形波导中的 TE<sub>01</sub> 波相互转换, 如图 5.4.5 所示.

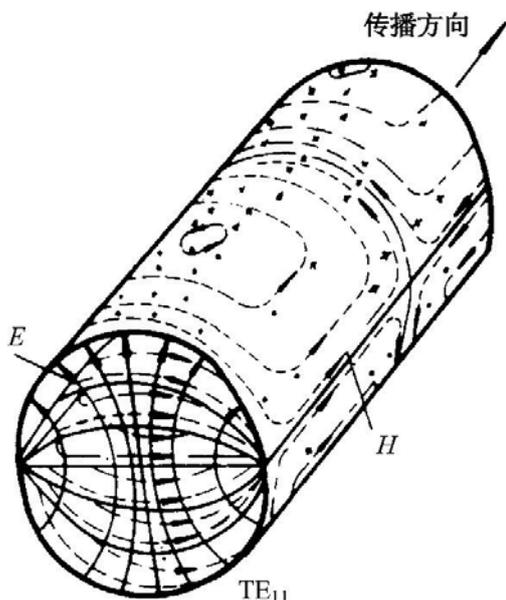


图 5.4.4 圆型金属波导中 TE<sub>11</sub> 波电磁场分布图

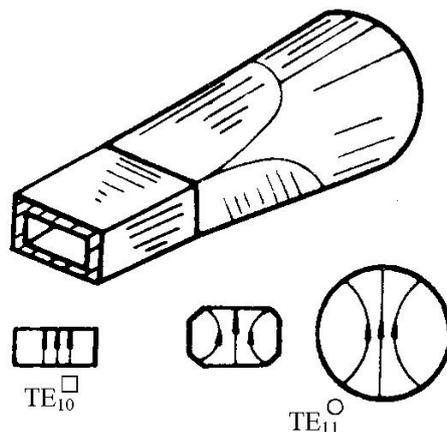


图 5.4.5 TE<sub>11</sub><sup>□</sup> 与 TE<sub>11</sub><sup>○</sup> 型波的相互转换

### 5.4.3 圆形波导中的横磁波(TM波)

对 TM 波,  $H_z = 0$ , 类似于 TE 波的分析,  $E_z$  满足亥姆霍兹分量方程, 在柱坐标系中

$$E_z = E_0 J_m(K_c r) \cos(m\varphi) e^{-iK_z z} \quad (5.4.22)$$

将式(5.4.22)代入式(5.4.13), 得到 TM 波电磁场各分量为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{-iK_z}{K_c} E_0 J'_m(K_c r) \cos(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ E_\varphi = \frac{iK_z m}{K_c^2 r} E_0 J_m(K_c r) \sin(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ E_z = E_0 J_m(K_c r) \cos(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ H_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{K_c^2} \cdot \frac{m}{r} E_0 J_m(K_c r) \sin(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ H_\varphi = -\frac{i\omega\varepsilon}{K_c^2} E_0 J'_m(K_c r) \cos(m\varphi) e^{-iK_z z} \\ H_z = 0 \end{array} \right. \quad (5.4.23)$$

式中

$$K^2 = K_z^2 + K_c^2 \text{ 或 } \omega^2 \mu \varepsilon = K_z^2 + K_c^2 \quad (5.4.24)$$

由圆波导 TM 波边界条件知,  $r = a$  时  $E_z = 0$ . 由式(5.4.23)第 3 式知  $J_m(K_c a) = 0$ , 故  $K_c a$  是  $m$  阶贝塞尔函数的根, 用  $u_{mn}$  表示第  $n$  个根, 则

$$K_c = \frac{u_{mn}}{a} \quad (5.4.25)$$

表 5.4.2 列出了  $m$  阶贝塞尔函数的若干个根值.

表 5.4.2  $U_{mn}$  值表

$n$	$J_m(u) = 0$ 方程的根, 当 $m$ 等于					
	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.379	7.586	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.760	11.065	12.339
3	8.654	10.174	11.620	13.015	14.372	
4	11.792	13.324	14.796			

### 5.4.4 圆波导中 TM 波的截止波长

由  $K_z = \sqrt{K^2 - K_c^2}$  知, 必须使  $K^2 > K_c^2$  方可使  $K_z$  成为实数, TM 波才能在波导

中传播.由临界状态

$$K_c^2 = K^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (5.4.26)$$

所得截止频率应满足

$$\omega_c \sqrt{\mu \epsilon} = K_c = \frac{u_{mn}}{a} \quad (5.4.27)$$

截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{K_c} = \frac{2\pi a}{u_{mn}} \quad (5.4.28)$$

由式(5.4.23)可见,  $m$  表示场在波导的半圆周范围内分布的驻波的半波数,  $n$  表示场在波导的半径范围内分布的驻波半波数.由表 5.4.2 可以看出,  $u_{01}$  的数值最小, 这说明  $TM_{01}$  波的截止波长最长,  $\lambda_c = 2.62a$ .不同的模式其截止波长也不同.

综上所述,圆波导中可以传输两类模式:  $TE_{mn}$  和  $TM_{mn}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$ ), 从其场分量表达式(5.4.19)及式(5.4.23)可知, 电磁场沿圆周  $\varphi$  方向呈三角函数式的驻波分布; 沿矢径  $r$  方向呈贝塞尔函数式的驻波分布.每一个模式都有自己的截止波长, 如图 5.4.6 所示.由图可知: 圆波导的优势模是  $TE_{11}$  波,  $TE_{11}$  波单模传输的波长范围是  $2.62a < \lambda < 3.41a$ ,  $TE_{01}$  与  $TM_{11}$  具有相同的截止波长, 通常称这种现象为“简并”,  $TE_{01}$  和  $TM_{11}$  为简并模式(注: 图中把  $TE_{mn}$  波用  $H_{mn}$ 、把  $TM_{mn}$  波用  $E_{mn}$  标出).

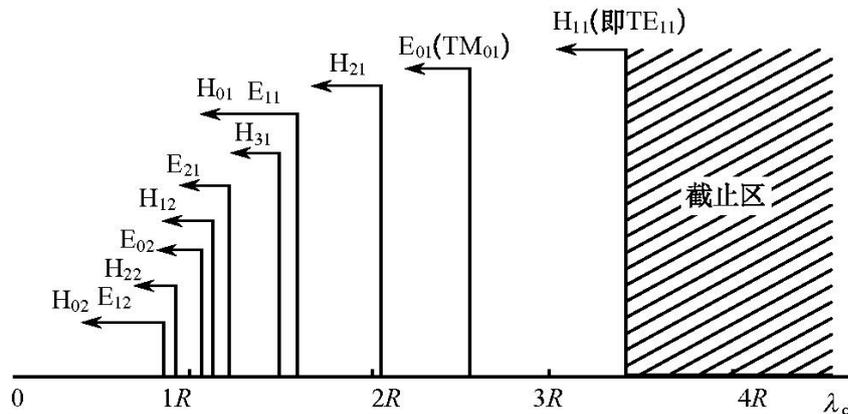


图 5.4.6 圆形金属波导的模式谱

## 6 电磁波在介质波导中的传播

光波是一种频率高达  $10^{14}$  Hz 的电磁波,利用光波作介质所传递的通信容量原则上应比微波高  $10^4 \sim 10^5$  倍.近年来激光及低损耗光纤 ( $<0.2$  dB/km) 的诞生使光纤通信迅速发展成一种极大容量、极低损耗的新的通信手段.光纤通信中的传输及耦合问题以及集成光学中元件连接问题所涉及的基础理论就是光波(电磁波)在介质波导中的传播,包括薄膜介质波导和圆形规则介质波导.

### 6.1 薄膜介质波导一般概念

图 6.1.1 表示了均匀介质薄膜波导的纵向剖面,它由三层均匀介质构成.中间层折射率为  $n_1$ ,厚度为  $h$ ,一般  $h = 1 \sim 10 \mu\text{m}$ ,另外两层折射率分别为  $n_2$  及  $n_3$ ,即衬底及覆盖层.覆盖层也可以直接是  $n_3 = 1$  的空气层.为限制光波于介质中间传导层中,应使  $n_1$  大于  $n_2$  和  $n_3$ ,一般地设定  $n_1 > n_2 > n_3$ .

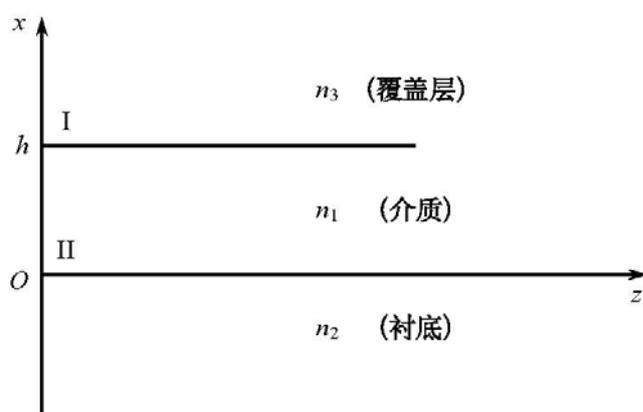


图 6.1.1 介质薄膜波导

薄膜波导的横向宽度 ( $y$  向) 一般为  $1 \sim 2\text{cm}$ ,比薄膜波导的厚度  $h$  大得多,也比光波波长大得多,因此可以认为薄膜波导是无限宽,光波在  $y$  方向上不受限制.下面我们用射线法和波动理论法来分析薄膜波导.

射线法是把波导中的波看作是均匀平面波在薄膜两个界面上全反射而形成的,故界面 I、II 上的入射角应满足临界条件

$$\sin \theta_c = \frac{n_3}{n_1} \quad (6.1.1)$$

$$\sin \theta_{1c} = \frac{n_2}{n_1} \quad (6.1.2)$$

若  $n_1 > n_3$ ,则取  $\theta_{1c}$  为波导的临界角.

波动理论法则是把薄膜波导中的波看作是满足介质平板波导边界条件的麦克斯韦方程组的解.此时,在波导的中间介质层中波以行波传输,衬底和覆盖层中则是一种倏逝波,光波能量就是由介质表面引导下在波导内传输的,此时所传输的波

称之为导行波.若当入射角小于临界角时,一部分能量由界面折射后不再回到介质  $n$  中,此时无法导行光波.这种波称为辐射波.

## 6.2 射线法分析薄膜波导

### 6.2.1 特征方程及横向谐振特性

按射线法的原则,光波在薄膜波导中向  $z$  方向传播可看作是无限大均匀平面波在界面 I 及 II 上依次反射,形成之字形传播路径.

图 6.2.1 所示薄膜波导中光的入射面为  $xOz$  平面.考察某一时刻经  $A$  反射后向下传播的平面波,其波阵面到达  $\Sigma$  ( $MC$  所示),而  $\Sigma$  面又是在前一时刻传播的平面波经  $B$  反射到达界面 I,又经  $C$  反射后的平面波波阵面.这两个波在  $\Sigma$  面上重叠会产生干涉,只有当两波相位差为  $2m\pi$  时,干涉加强,方可在波导内形成振荡,即可以在波导内存在并传播.这两个波之间的相位差可从图 6.2.1 求得

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi n}{\lambda_0} (AB + BC) + \delta + \delta_1 - \frac{2\pi n}{\lambda_0} AM \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} [2n h \sec \theta - 2n h \tan \theta \sin \theta] + \delta + \delta_1 \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2n h \cos \theta + \delta + \delta_1 \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

式中,  $\delta$ 、 $\delta_1$  是电磁波在界面 I 与 II 上作全反射时产生的相位跃变.

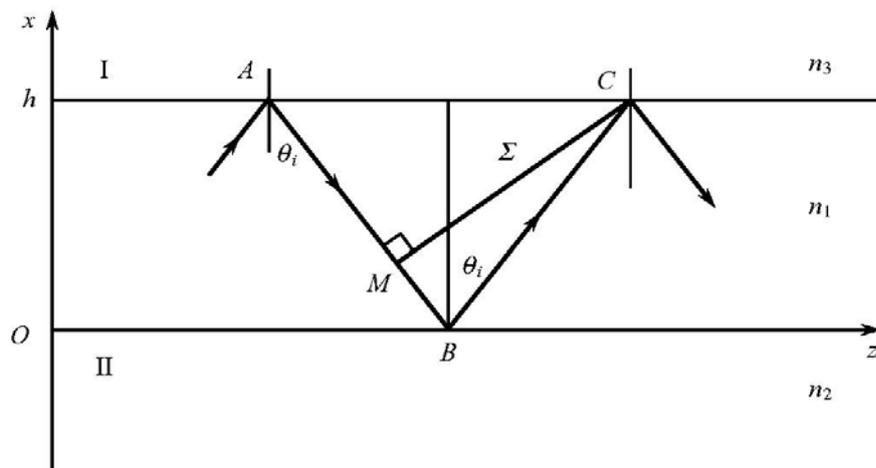


图 6.2.1 射线法分析薄膜波导

对 S 波

$$\tan \frac{\delta_s}{2} = - \frac{\left[ \sin^2 \theta - \left( \frac{n_3}{n_1} \right)^2 \right]^{1/2}}{\cos \theta} \quad (6.2.2)$$

$$\tan \frac{\delta_{IS}}{2} = - \frac{\left[ \sin^2 \theta - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]^{1/2}}{\cos \theta} \quad (6.2.3)$$

对 P 波

$$\tan \frac{\delta_P}{2} = - \left( \frac{n_1}{n_3} \right)^2 \frac{\left[ \sin^2 \theta - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]^{1/2}}{\cos \theta} \quad (6.2.4)$$

$$\tan \frac{\delta_{IP}}{2} = - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{\left[ \sin^2 \theta - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]^{1/2}}{\cos \theta} \quad (6.2.5)$$

当满足干涉加强条件时,  $\delta = 2m\pi$ , 故由式(6.2.1)可得

$$2n h K_0 \cos \theta + \delta + \delta_i = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.2.6)$$

式中:  $K_0$  是传输光波在真空中的波数;  $n$  是介质波导的中间层折射率;  $\theta$  为波导内的入射角. 式(6.2.6)称为薄膜波导的特征方程, 或叫作薄膜波导的色散方程. 下面来讨论这一方程的几点特征:

(1) 特征方程中  $2n_1 h K_0 \cos \theta = 2K_x h$ , 表示了电磁波在横跨薄膜(即沿  $x$  方向)时的相位差.  $\delta$ 、 $\delta_i$  是波在界面上的相位跃变, 因此, 特征方程(6.2.6)表示了由波导中某点出发沿波导横向往复一次回到原处, 总的相位变化应是  $2\pi$  的整数倍. 这使原来的波加强, 即相当于波在波导的横向谐振, 因而称为波导的横向谐振条件. 不仅薄膜波导, 任意波导都具横向谐振特征. 若与金属波导相比较, 金属波导也具有这一横向谐振特征, 其区别仅是金属波导中无界面相位跃变这两项, 故在金属波导中形成横向驻波.

(2) 波导中含三种色散.

**材料色散** 指波导介质材料本身的色散, 即当折射率随入射光波波长变化而不同所带来的色散. 在光通信中, 当所用材料色散较小时, 此种色散不必在此考虑.

**模式色散** 在多模介质波导中, 一个信号同时激发不同的模式, 即使是同一频率(即同一波长), 各模式的群速度也是不同的, 它所引起的色散叫模式色散. 在色散方程(6.2.6)中, 对应于同一波长, 不同的  $m$  将有不同的  $\theta_i$  值.

**波导色散** 为满足特征方程, 对同一个  $m$  值即同一个波导模, 不同的波长对应于不同的  $\theta$  角. 这就是说, 对于不同波长的光, 即使没有材料色散存在, 但由于波导的谐振条件的要求, 波在波导内经过一段距离传输后, 将因为  $\theta$  角不同而具有不同的相位、出射角及出射波导的时间, 因此将引起信号失真. 这种色散称为波导色散, 因此, 特征方程又称为色散方程.

## 6.2.2 导波的模式

由特征方程可对给定波导及工作波长对某一个  $m$  求出形成导波的  $\theta_i$  值. 特征

方程中的  $m$  可取不同的值, 相应于不同的  $\theta$ , 确定一个  $m$  值, 与此相应的  $\theta$  角入射的平面波形成一个导波模式. 当  $\mathbf{E}$  矢量或  $\mathbf{H}$  矢量垂直入射面作振动, 即  $E_z = 0$  或  $H_z = 0$  时, 分别得到 TE 模或 TM 模. 当  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  时, 分别可得  $TE_0$ 、 $TE_1$ 、 $TE_2$ 、 $\dots$ 、 $TM_0$ 、 $TM_1$ 、 $TM_2$ 、 $\dots$  模,  $m$  表明各模式的阶数, 称为波指数.

当  $m = 0$  时,  $n_1 h K_0 \cos\theta = K_x h < \pi$ , 即其场沿  $x$  方向变化不足半个驻波.

当  $m = 1$  时,  $\pi < K_x h < 2\pi$ , 其场沿  $x$  方向变化不足两个“半驻波”.  $m$  越大, 导波的模次越高,  $m$  表示了导波场沿  $x$  方向(薄膜横向)出现的完整半驻波个数.

由特征方程还可以看出, 在其他条件不变的情况下, 当  $m$  增加时,  $\theta$  减小. 这表明高次模是由入射角  $\theta$  较小的平面波构成的. 当  $\theta$  较小时, 平面波的射线倾斜比较严重, 其横向相位常数  $K_x$  大, 驻波密集. 导波模式的横向相位常数  $K_x = n_1 K_0 \cos\theta$ , 导波模式的轴向相位常数  $K_z = n_1 K_0 \sin\theta$ . 对于给定的波导和工作波长, 模次越高,  $\theta$  越小, 因而  $K_z$  越小. 在电磁场解法中将把  $K_z$  记为  $\beta$ . 所有模式中,  $TE_0$  及  $TM_0$  模次最低, 故  $\beta$  最大.

### 6.2.3 波导的截止波长

在射线法中, 截止波长可直接由全反射的临界角求得. 按假定  $n_1 > n_2 > n_3$ , 临界角由下面衬底的折射率  $n_3$  决定

$$\sin\theta_{ic} = \frac{n_3}{n_1} \quad (6.2.7)$$

当处于临界状态时, 界面 II 上的相位跃变  $\delta_i = 0$  (可由式(6.2.7)代入式(6.2.3)及式(6.2.5)得到), 即刚刚发生全反射时的临界状态的入射角  $\theta = \theta_{ic} = \arcsin\left[\frac{n_3}{n_1}\right]$ , 将此代入式(6.2.2)可得: 对 S 波

$$\delta = 2\arctan\left[-\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}}\right] \quad (6.2.8)$$

此时利用式(6.2.7), 有

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2} \quad (6.2.9)$$

同样, 应用式(6.2.9)于色散方程, 并把式(6.2.8)的  $\delta$  以及  $\delta_i = 0$  代入之, 可得

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} h n_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2} - 2\arctan\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} = 2m\pi \quad (6.2.10)$$

由上式可求得不同模式下的截止波长  $\lambda_c$ .

对  $TE_0$  模,  $m = 0$ , 得

$$\lambda_{c|m=0} = \frac{2\pi h \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\arctan \sqrt{\frac{n_2^2 - n_b^2}{n_1^2 - n_2^2}}} \quad (6.2.11)$$

当  $m \neq 0$  时

$$\lambda_{c|m} = \frac{2\pi h \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\arctan \sqrt{\frac{n_2^2 - n_b^2}{n_1^2 - n_2^2}} + m\pi} < \lambda_{c|m=0} \quad (6.2.12)$$

由此可见,高阶模的临界波长更小些.对传输工作波长的几种情况讨论如下:

- (1)  $\lambda > \lambda_{c|m=0}$ , 此光波大于 0 阶的临界波长,此波不能在波导内传播.
- (2)  $\lambda_{c|m=1} < \lambda < \lambda_{c|m=0}$ , 此时只有  $m=0$  的零阶模可以传输,即单模运行.
- (3)  $\lambda < \lambda_{c|m}$ , 这样的光波对  $m$  及  $m=0$  阶模均可被传输,发生多模传输.

还需特别指出,对于对称薄膜波导  $n_2 = n_b$ ,由式(6.2.11)可见,  $\lambda_{c|m=0} \rightarrow \infty$ ,这说明对称波导没有截止波长,任何波长的波均可在对称波导内传播.这时特征方程变成

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot h \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2m\pi \quad (6.2.13)$$

由此可算出对波长为  $\lambda_0$  的光波,该波导内所允许传播的模式个数为

$$m = \frac{2h}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (6.2.14)$$

以上几节只讨论了一些变化规律,对于确定的解,则要对给定的波导介质(包括  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_b$  的值)、厚度  $h$ 、入射波长及给定阶数  $m$ ,从特征方程解出  $\theta$  值,从而就可确定  $K_x$  及  $\beta$  值.特征方程是一个超越方程,后面将用图解法求解.

虽然射线法讨论薄膜波导物理概念清楚易懂,获得了有价值的结论,这些结论不仅适用于薄膜波导,对认识其他形式的介质波导也是很有价值的.但对更详细的场分布、传输功率、场方程等问题就无法解决.因此,必须要用另一种方法——应用电磁场理论——来求电磁波在介质波导这样一种特殊边界条件下的波动方程解,在此基础上再去分析传播模的特性.

### 6.3 用电磁理论求解薄膜介质波导

用电磁理论分析薄膜介质波导,就是求满足边界条件时麦克斯韦方程的解,在定态条件下就是求解亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \Delta^2 \mathbf{H} + K^2 \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

在此基础上再分析其特性.

### 6.3.1 薄膜波导中的 TE 波和 TM 波

类似于金属波导,在介质波导中的波型也可以存在 TE 波和 TM 波.按照定义,TE 波的  $\mathbf{E}$  矢量在波导的横截面上,在传播方向( $z$  方向)上只有磁场分量.而 TM 波的  $\mathbf{H}$  矢量在波导的横截面上,在传播方向上只有电场分量.可以认为,薄膜中的 TE 波是由垂直偏振的平面波即 S 波在薄膜边界上反射而成(图 6.3.1(a)),而 TM 波是由  $\mathbf{E}$  为水平偏振(在入射面内振动)的平面波即 P 波在边界上反射而成(图 6.3.1(b)).对于 TE 波,其电场只有  $E_y$  分量( $E_z = 0$ ),磁场包括了  $H_x$ 、 $H_z$  分量.而 TM 波其磁场只有  $H_y$  分量( $H_z = 0$ ),而电场包括了  $E_x$ 、 $E_z$  分量.

同样,类似于金属波导的讨论,可以由时谐电磁场的麦克斯韦第一、二方程

$$\Delta \times \mathbf{H} = i\omega \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\Delta \times \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mathbf{H}$$

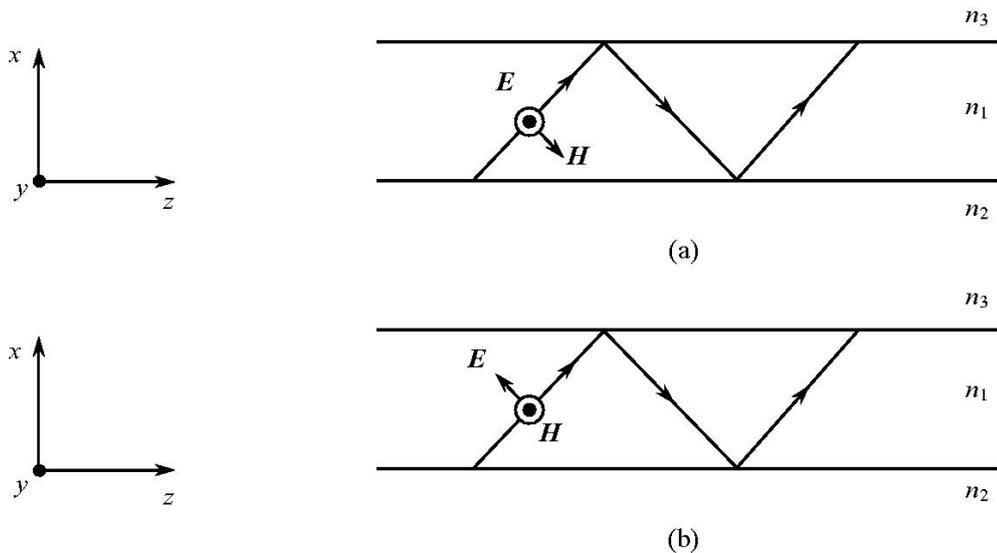


图 6.3.1 TE 波和 TM 波的形成

(a) TE 波;(b) TM 波

对于所讨论的各向同性的均匀介质, $\varepsilon$ 、 $\mu_0$  都是标量,把  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  用直角坐标下的三分量代入后展开,可得到式(5.2.14)的一般式.

针对现在所讨论的无穷大平板介质波导,考虑到  $y$  方向无限大,场在该方向不受限制,因而可得  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ;又考虑到光是沿  $z$  向传输,沿该方向场的变化可用一个传输因子  $e^{-iK_z z}$  来表示.为了普适地讨论电磁波在三层介质中的情况,记  $\beta$  为  $K_z$ 、 $K'_z$ 、 $K''_z$ ,表示实波矢的  $z$  分量.由此得到导波的传播因子  $e^{-\beta z}$ ,因而有  $\frac{\partial}{\partial z} =$

$-\beta$ , 式中  $\beta$  是  $z$  方向的相位常数. 将上述关系代入式(5.2.14), 可得到 6 个标量方程. 这 6 个标量方程又可分为两组, 一组只含  $E_y$ 、 $H_x$ 、 $H_z$  三个分量, 另一组只含  $H_y$ 、 $E_x$ 、 $E_z$  三个分量, 即

$$\begin{cases} \beta E_y = -\omega\mu_0 H_x \\ \frac{dE_y}{dx} = -i\omega\mu_0 H_z \\ i\beta H_x + \frac{dH_z}{dx} = -i\omega\epsilon E_y \end{cases} \quad (6.3.2)$$

$$\begin{cases} \beta H_y = \omega\epsilon E_x \\ \frac{dH_y}{dx} = i\omega\epsilon E_z \\ i\beta E_x + \frac{dE_z}{dx} = i\omega\mu_0 H_y \end{cases} \quad (6.3.3)$$

这两组方程是完全独立的, 可分别求解, 得出两组独立的解. 第一组方程中电场矢量只包含了  $E_y$  分量, 因而解得的是 TE 模; 第二组方程的磁场矢量只包含了  $H_y$  分量, 因而解出的是 TM 模. 对于 TE 模, 求出  $E_y$  分量后, 可由式(6.3.2)的第 1 式及第 2 式中求出  $H_x$  及  $H_z$  分量, 即

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \\ H_z = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{dE_y}{dx} \end{cases} \quad (6.3.4)$$

对于 TM 模, 则求出了  $H_y$  后可由式(6.3.3)的第 1、2 式求出  $E_x$  及  $E_z$  分量.

$$\begin{cases} E_x = \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_y \\ E_z = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{dH_y}{dx} \end{cases} \quad (6.3.5)$$

因此, 求解薄膜介质波导问题归结为求 TE 模的  $E_y$  分量及 TM 模的  $H_y$  分量.

### 6.3.2 波导的场方程及其解

#### 1. TE 波

对 TE 波应先求出  $E_y$ , 由 TE 波的振动在波导的横截面上, 即仅具  $E_y$  分量, 并考虑到在  $z$  方向的传播, 具有传播因子  $e^{-i\beta z}$ , 可写出其电场矢量为

$$\mathbf{E} = E_y(x) e^{-i\beta z} \mathbf{j} \quad (6.3.6)$$

式中  $\mathbf{j}$  为  $y$  方向单位矢量. 将其代入式(6.3.1)可得

$$\frac{\partial^2 E_y(x)}{\partial x^2} - \beta^2 E_y(x) + K_i^2 E_y(x) = 0 \quad (6.3.7)$$

式中角标  $i=1,2,3$ , 表示对应于介质波导的三层介质, 其对应的折射率分别为  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ ,  $K_i$  为不同介质中的波数, 它们的关系可表示为

$$K_i^2 = n_i^2 K_0^2 \quad (6.3.8)$$

于是可写出在三层介质中的亥姆霍兹方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (n_1^2 K_0^2 - \beta^2) E_y(x) = 0 & 0 \leq x \leq h, \text{在中间层 } n_1 \\ \frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (n_2^2 K_0^2 - \beta^2) E_y(x) = 0 & x \leq 0, \text{在衬底层 } n_2 \\ \frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (n_3^2 K_0^2 - \beta^2) E_y(x) = 0 & x \geq h, \text{在覆盖层 } n_3 \end{cases} \quad (6.3.9)$$

按前面的分析我们已知, 导波在  $z$  方向按  $e^{-i\beta z}$  传播. 而在横向, 其振幅应可预见: 在中间薄膜层是驻波解, 可用余弦函数表示; 在衬底及覆盖层是倏逝波, 应是衰减解, 用指数函数表示为  $E = E_y(x)e^{-i\beta z}$ . 于是有

$$E_y(x) = \begin{cases} A_1 \cos(K_{1x} x - \varphi) & 0 \leq x \leq h, \text{折射率为 } n_1 \\ A_2 e^{K'_{2x} x} & x \leq 0, \text{折射率为 } n_2 \\ A_3 e^{-K'_{3x}(x-h)} & x \geq h, \text{折射率为 } n_3 \end{cases} \quad (6.3.10)$$

将上式各区域中  $E_y$  的表达式代入对应的各亥姆霍兹方程(6.3.9), 可得

$$\begin{cases} K_{1x}^2 = K_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ K'_{2x}{}^2 = \beta^2 - K_0^2 n_2^2 \\ K'_{3x}{}^2 = \beta^2 - K_0^2 n_3^2 \end{cases} \quad (6.3.11)$$

由于  $K_{1x}$ 、 $K'_{2x}$ 、 $K'_{3x}$  都必须为正实数, 这就限定

$$K_0 n_3 < K_0 n_2 < \beta < K_0 n_1$$

这与用射线得出的结果是一致的. 射线法中由  $0 < \sin\theta < 1$  及  $\beta = K_0 n_1 \sin\theta$ , 得  $\beta < K_0 n_1$ , 由  $\theta \geq \theta_c$  ( $\theta_c$  为临界角),  $\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ , 可得

$$K_0 n_3 < K_0 n_2 < \beta < K_0 n_1 \quad (\text{此处约定 } n_3 < n_2 < n_1)$$

下面再利用边界条件进一步求解式(6.3.10)中的常数  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ . 薄膜波导的边界条件为: 在  $x=0$ 、 $h$  处, 切向分量  $E_y$  连续, 切向分量  $H_z$  也连续, 由此得  $\frac{\partial E_y}{\partial x}$  也连续.

将此边界条件用式(6.3.10)中的场方程解代入, 可得:

在  $x=0$  处,  $E_{1y} = E_{2y}$ , 即

$$A_1 \cos(-\varphi) = A_2 \quad (6.3.12)$$

在  $x=0$  处,  $\frac{\partial E_y}{\partial x}$  连续, 即

$$A_2 K'_{2x} e^{K'_{2x} x} |_{x=0} = -A_1 K_{1x} \sin(K_{1x} x - \varphi) |_{x=0}$$

得

$$A_2 K'_{2x} = A_1 K_{1x} \sin\varphi \quad (6.3.13)$$

在  $x=h$  处,  $E_y$  连续, 即

$$A_3 = A_1 \cos(K_{1x} h - \varphi) \quad (6.3.14)$$

在  $x=h$  处,  $\frac{\partial E_y}{\partial x}$  连续, 即

$$A_3 K'_{3x} = A_1 K_{1x} \sin(K_{1x} h - \varphi) \quad (6.3.15)$$

这样, 从式(6.3.11)到式(6.3.15)整理后可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^2 = K_0^2 n_1^2 - K_{1x}^2 \quad (6.3.16a) \\ K'_{2x}{}^2 = (n_1^2 - n_2^2) K_0^2 - K_{1x}^2 \quad (6.3.16b) \\ K'_{3x}{}^2 = (n_1^2 - n_3^2) K_0^2 - K_{1x}^2 \quad (6.3.16c) \\ \tan\varphi = \frac{K'_{2x}}{K_{1x}} = \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} \quad (6.3.16d) \\ A_2 = A_1 \cos\varphi = A_1 \frac{K_{1x}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2} K_0} \quad (6.3.16e) \\ A_3 = A_1 \cos(K_{1x} h - \varphi) = A_1 \frac{K_{1x}}{\sqrt{n_1^2 - n_3^2} K_0} \quad (6.3.16f) \end{array} \right.$$

因此, 只要求出  $K_{1x}$  就可求出其他各量. 式(6.3.16e)、式(6.3.16f)仅表示了  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  之间的相对大小, 其中  $A_1$  可以由输入波导的导波功率确定, 是一常数.

而  $K_{1x}$  则可由式(6.3.15)除以式(6.3.14)求出

$$\tan(K_{1x} h - \varphi) = \frac{K'_{3x}}{K_{1x}} \quad (6.3.17)$$

由于三角函数的周期性, 上式可写为

$$K_{1x} h - \varphi - m\pi = \arctan \frac{K'_{3x}}{K_{1x}} \quad (6.3.18)$$

利用式(6.3.16c)又可将上式改写为

$$K_{1x} h - \varphi - m\pi = \arctan \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_3^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} \quad (6.3.19)$$

其中  $\varphi$  又由式(6.3.16d)求出, 这样式(6.3.19)可改写成

$$K_{1x} h - \arctan \frac{\sqrt{(n^2 - n_2^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} - \arctan \frac{\sqrt{(n^2 - n_3^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} = m\pi \quad (6.3.20)$$

参照 S 波在 I、II 界面上全反射相位跃变的式(6.2.2)、式(6.2.3),并考虑到  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  及  $K_0 n_i \cos \theta = K_{1x}$ ,可知式(6.3.20)左边的后二项正是 S 波的相位跃变之半,即  $-\frac{\delta_1}{2}$  及  $-\frac{\delta_2}{2}$ ,因此式(6.3.20)可写为

$$K_{1x} h + \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2} = m\pi$$

或

$$2n h K_0 \cos \theta + \delta_1 + \delta_2 = 2m\pi \quad (6.3.21)$$

这就是式(6.2.6)表示的薄膜波导特征方程。

由式(6.3.21)或式(6.3.20)表示的特征方程中对给定的  $m$  阶模可求出相应的  $K_{1xm}$ ,角标  $m$  表示相应于第  $m$  阶模的  $K_{1x}$ ,以下简记为  $K_{1x}$ ,求出了  $K_{1x}$  后代入式(6.3.16)联立方程,就可完全解出代表波导在三层介质中解的各个参数  $\varphi_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $K_{1x}$ 、 $K'_{2x}$ 、 $K'_{3x}$ 、 $\beta$ ,这样就得到了形如式(6.3.10)所代表的 TE 波的解了。当然,要从特征方程(6.3.20)中解出  $K_{1x}$  并不是一件容易的事,因为这是一个超越方程,在 6.3.3 节中将介绍这一超越方程的图解法。

## 2. TM 波

对于 TM 波,应先求出  $H_y$ . TM 模的电磁分量为  $H_y$ 、 $E_z$ 、 $E_x$ ,其做法完全类似于 TE 波求解.写出磁场矢量为

$$\mathbf{H} = H_y(x) e^{-\beta z} \mathbf{j} \quad (6.3.22)$$

代入由式(6.3.1)表达的亥姆霍兹方程,得

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} + (K_0^2 n_i^2 - \beta^2) H_y = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.3.23)$$

依照 TE 模推导,设  $H_y$  在三层介质中具有如下不同形式,即  $H_y$  的解为

$$H_y(x) = \begin{cases} B_1 \cos(K_{1x} x - \varphi) & 0 \leq x \leq h, \text{ 折射率为 } n \\ B_2 e^{K'_{2x} x} & x < 0, \text{ 折射率为 } n_2 \\ B_3 e^{-K'_{3x}(x-h)} & x > h, \text{ 折射率为 } n_3 \end{cases} \quad (6.3.24)$$

将上式代入式(6.3.23)得到与式(6.3.11)相同的系。考虑到薄膜波导的边界条件:在上、下界面上  $H_y$  及  $E_z$  连续,在下界面  $x=0$  处  $B_1 \cos(-\varphi) = B_2$ ,以及  $x=0$

处  $E_z \propto \frac{1}{\omega \epsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x}$ ,即  $\frac{1}{\omega \epsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x}$  连续,得

$$\frac{1}{\varepsilon} B_2 K'_{2x} e^{K'_{2x} x} |_{x=0} = \frac{-1}{\varepsilon} B_1 K_{1x} \sin(K_{1x} x - \varphi) |_{x=0}$$

即

$$\varepsilon B_2 K'_{2x} = \varepsilon B_1 K_{1x} \sin\varphi$$

在上界面  $x = h$  处,  $B_3 = B_1 \cos(K_{1x} h - \varphi)$ , 且在  $x = h$  处有  $\frac{\partial H_y}{\varepsilon \partial x}$  连续, 得

$$\varepsilon B_3 K'_{3x} = \varepsilon B_1 K_{1x} \sin(K_{1x} h - \varphi)$$

以下推导完全类似于 TE 波, 导出的  $H_y$  表达式及场分布与 TE 模形式相同, 其特征方程也有相同的形式

$$K_{1x} h + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta_1}{2} = n\pi$$

只不过式中  $\delta$  与  $\delta_1$  表达式应当取作 P 波的全反射时的相位跃变表达式(6.2.4)及式(6.2.5). 因此, 波指数相同的 TE 和 TM 模的  $K_{1x}$  是不同的, 从而求解出的波参数也不同.

另外, 从 TE 波(或 TM 波)求解过程中也可以看出, 式(6.3.10)中的  $\varphi$  正是界面 II 上的相位跃变半角  $\frac{\delta_1}{2}$ , 它是决定场分布极大值位置的参量.

### 6.3.3 图解法求解特征方程

对于由式(6.3.21)表达的特征方程, 只能通过图解法或数值法求解, 本节将介绍图解法求解这一超越方程.

特征方程(色散方程)

$$2 \frac{2\pi}{\lambda_0} n h \cos\theta + \delta + \delta_1 = 2n\pi \quad (6.3.25)$$

以 TE 模为例, 上式可改写为

$$K_{1x} h - \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2}}{\cos\theta} - \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_c}{n}\right)^2}}{\cos\theta} = n\pi \quad (6.3.26)$$

式中  $n$  为中间层折射率,  $n_c$  及  $n_0$  分别为基底及覆盖层折射率. 利用三角公式

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

把式(6.3.26)移项后两边取正切函数, 可得

$$\tan(K_{1x} h) = \frac{\left[ \sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2} + \sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_c}{n}\right)^2} \right] / \cos\theta}{1 - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2}}{\cos\theta} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_c}{n}\right)^2}}{\cos\theta}} \quad (6.3.27)$$

为将上式右端化为  $K_{1x}h$  的函数  $F(K_{1x}h)$ , 可以利用以下关系式

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{K_{1x}}{K_0 \cdot n} \\ \sin^2 \theta &= 1 - \left[ \frac{K_{1x}}{K_0 n} \right]^2 \\ \sqrt{\sin^2 \theta - \left[ \frac{n_0}{n} \right]^2} &= \sqrt{\frac{K_0^2 n^2 - K_{1x}^2 - n_0^2 K_0^2}{K_0^2 n^2}}\end{aligned}$$

将以上各式代入式(6.3.27)右端, 得

$$\begin{aligned}F(K_{1x}h) &= \\ (K_{1x}h) &\frac{[(n^2 - n_0^2)(K_0 h)^2 - (K_{1x}h)^2]^{1/2} + [(n^2 - n_0^2)(K_0 h)^2 - (K_{1x}h)^2]^{1/2}}{(K_{1x}h)^2 - [(n^2 - n_0^2)(K_0 h)^2 - (K_{1x}h)^2]^{1/2} [(n^2 - n_0^2)(K_0 h)^2 - (K_{1x}h)^2]^{1/2}}\end{aligned}\quad (6.3.28)$$

因此, 特征方程(6.3.26)的解就是由  $\tan(K_{1x}h)$  与  $F(K_{1x}h)$  的交点, 即图 6.3.2 中实线( $\tan(K_{1x}h)$ )与虚线( $F(K_{1x}h)$ )的交点. 由此用图解法求出这一超越方程的解.

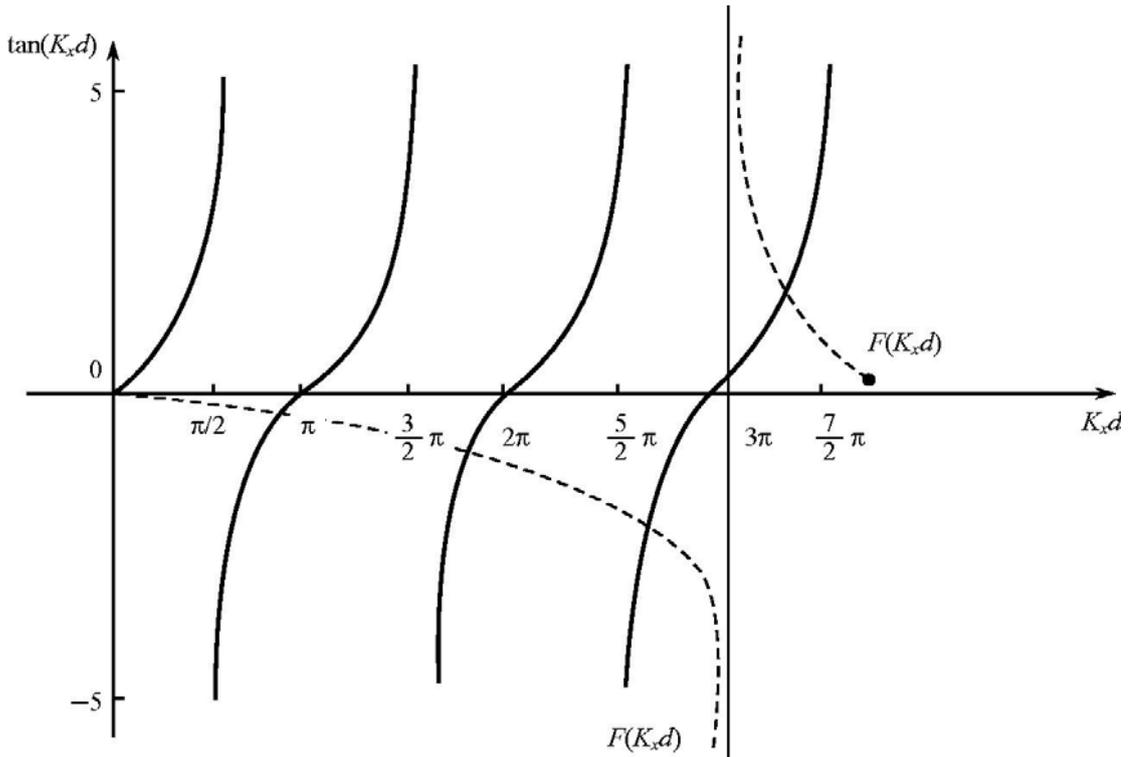


图 6.3.2 特征方程(6.3.26)的图解法

图 6.3.2 中, 从左到右各交点(原点除外)相应于  $m = 0, 1, 2, \dots$  各阶模的解, 从这些交点的横坐标确定出  $K_{1x,m}h$  的值, 若薄膜厚度  $h$  已知, 则通过

$$\beta_m^2 + K_{1x,m}^2 = K_0^2 n^2 \quad (6.3.29)$$

求得 TE<sub>m</sub> 模的传播常数  $\beta_m$ .

### 6.3.4 截止波长

导波的截止波长也可从电磁场解法中导出.从射线法观点看,出现衬底辐射模的标志是  $\theta = \theta_{11}$ ,而从电磁理论的观点看,出现衬底辐射模意味着  $K'_{2x}$  为虚数,此时  $E_{2y}$  由原来的振幅沿  $x$  方向衰减的倏逝波变为由  $e^{iK_{2x}x}$  代表的辐射波,即在  $n_2$  介质中有向  $x$  方向传播的行波存在,这时能量从  $n_2$  泄漏,此波便无法在薄膜波导中传播,因此  $K'_{2x} = 0$  就是确定截止波长的条件.由

$$K'_{2x} = \beta^2 - K_0^2 n_2^2 = 0 \quad (6.3.30)$$

得

$$\beta^2 = K_0^2 n_2^2 = K_1^2 \quad (6.3.31)$$

可见,截止时传播常数  $\beta$  等于介质 2 中的波数.于是有

$$K_{1x} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} K_0 \quad (6.3.32)$$

将此关系代入式(6.2.2)、式(6.2.3),得

$$\delta_s = 2 \arctan \frac{-\sqrt{(n_1^2 - n_3^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} = 2 \arctan \left[ -\sqrt{\frac{n_1^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} \right] \quad (6.3.33)$$

$$\delta_{is} = 2 \arctan \frac{-\sqrt{(n_1^2 - n_2^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} = 0 \quad (6.3.34)$$

将此二式代入特征方程,并考虑到  $K_0 = 2\pi/\lambda_c$ ,可得截止波长

$$\lambda_c = \frac{2\pi h \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1\pi + \arctan \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2}}} \quad (6.3.35)$$

这与用射线法求出的结果式(6.2.12)完全一致.以上讨论是以 TE 模为例.而对于 TM 模可作类似讨论,只需将式(6.3.32)代入到式(6.2.4)及式(6.2.5)求出  $\delta_p$  及  $\delta_{ip}$  后再作类似运算即可.

## 6.4 介质薄膜波导中的场分布

以 TE 波为例,薄膜波导中 TE 波的  $E_y$  分量为

$$E_y = e^{-iK_z z} \cdot \begin{cases} A_1 \cos(K_{1x} x - \varphi) & 0 \leq x \leq h \\ A_2 e^{K'_{2x} x} & x \leq 0 \\ A_3 e^{-K'_{3x}(x-h)} & x \geq h \end{cases} \quad (6.4.1)$$

以及薄膜波导中的特征方程

$$K_{1x} = \frac{n_1\pi - \frac{\delta_s}{2} - \frac{\delta_i}{2}}{h} \quad (6.4.2)$$

$\delta$ 、 $\delta_1$ 可由式(6.2.2)、式(6.2.3)求得,它们是小于零的数.

对于  $TE_0$  模

$$K_{1x} = -\frac{\frac{\delta}{2} + \frac{\delta_1}{2}}{h} \quad (6.4.3)$$

且由式(6.2.2)、式(6.2.3)知  $\left| \frac{\delta}{2} + \frac{\delta_1}{2} \right| < \pi$ , 可见,横跨薄膜的相位变化  $K_{1x}h$  小于  $\pi$ , 即场沿  $x$  方向的变化不足半个驻波.

把式(6.4.3)的  $K_{1x}$ 代入式(6.4.1)第1式,得

$$E_y \propto \cos\left[-\frac{\frac{\delta}{2} + \frac{\delta_1}{2}}{h} \cdot x - \varphi\right] \quad (6.4.4)$$

按边界条件:

(1)  $x=0$  处

$$E_y \propto \cos\varphi = \cos\left[\frac{-\delta_1}{2}\right] \quad (6.4.4a)$$

(2)  $x=h$  处

$$E_y \propto \cos\frac{\delta}{2} \quad (6.4.4b)$$

(3) 中间层中,场变化极大值在  $x_m$  处,即满足

$$-x_m \frac{\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2}}{h} - \varphi = 0$$

故有

$$x_m = -\frac{\varphi h}{\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2}} = \frac{\frac{\delta_1}{2}}{\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2}} \cdot h \quad (6.4.5)$$

且由  $n_1 > n_2 > n_3$ , 可知在界面 I 上的相位移  $\delta$  大于下界面的相移  $\delta_1$ , 即  $\delta/2 > \delta_1/2$ , 代入式(6.4.5)可知

$$x_m < h/2 \quad (6.4.6)$$

这意味着场分布的极大值(波腹)偏向衬底.

(4) 由  $K'_{2x} = \sqrt{(n_1 - n_2^2) K_0^2 - K_{1x}^2}$  及  $K'_{3x} = \sqrt{(n_2 - n_3^2) K_0^2 - K_{1x}^2}$ , 且  $n_2 > n_3$ , 可知

$$K'_{2x} < K'_{3x} \quad (6.4.7)$$

这表示场在覆盖层中衰减得比在下衬底中快.

由以上四点,可以画出  $TE_0$  模在波导截面上场分布情况,如图 6.4.1(a)所示.

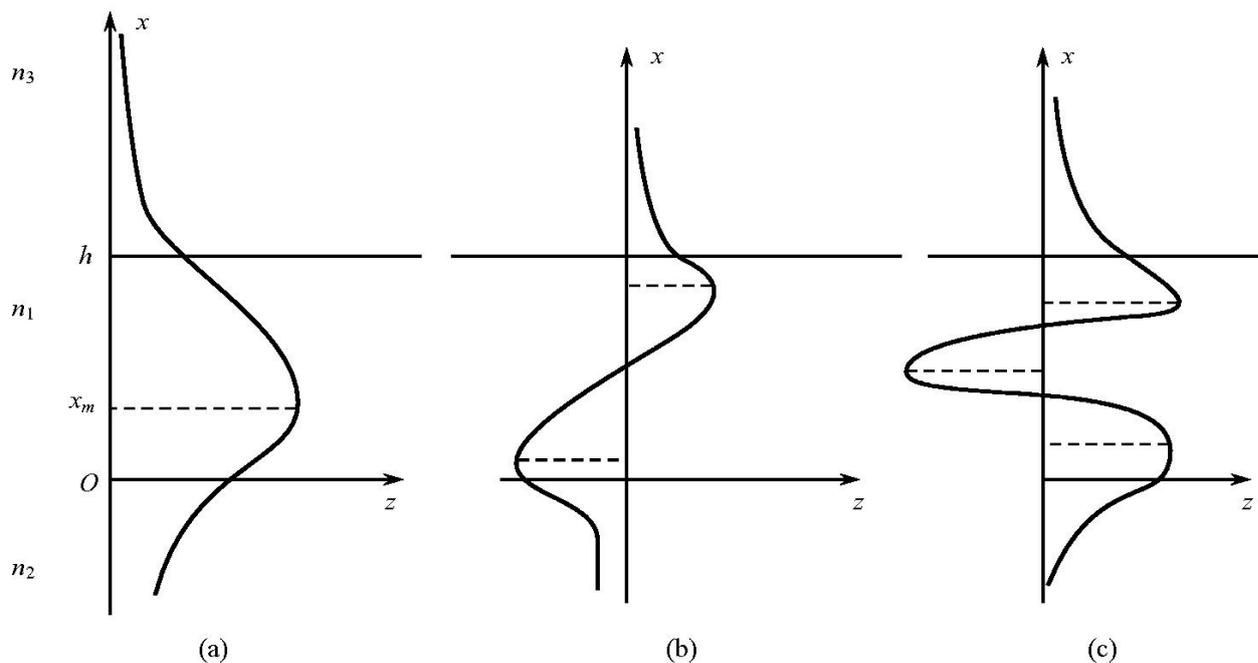


图 6.4.1 薄膜波导中低阶模式的场分布

(a) TE<sub>0</sub>; (b) TE<sub>1</sub>; (c) TE<sub>2</sub>

类似地还可以导出 TE<sub>1</sub>、TE<sub>2</sub>、… 模场分布特征, 如对 TE<sub>m</sub> 波, 中间层场在 x 向变化不足两个“半驻波”, 阶数 m 越大, 在覆盖层及衬底中振幅衰减越缓慢, 即能量在 n<sub>3</sub> 和 n<sub>2</sub> 二介质中延伸部分越多, 能量越分散.

### 6.5 介质平板波导的传输功率

导波的传输功率就是通过波导横截面的功率. 由于薄膜波导在 y 方向是无限宽, 故只计算在 y 方向上单位宽度上传输的功率, 即计算宽度为 1, 高度 (x 方向上) 为  $-\infty \rightarrow +\infty$  的条形面积上传输的功率.

类似于金属波导中的求法, 传输的功率等于  $\langle \mathcal{S} \rangle$  在要求的截面上的积分, 即

$$P_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \langle \mathcal{S} \rangle d\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\sigma \quad (6.5.1)$$

对于 TE 波, 且考虑到单位宽度的条形面积  $\Sigma$ , 则得

$$P_{\Sigma} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} E_y H_x^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{2\omega\mu_0} |E_y|^2 dx \quad (6.5.2)$$

把  $E_y$  在 x 上分布的式 (6.4.1) 代入上式, 进行分段积分, 得

$$\begin{aligned} P_{\Sigma} &= \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \left[ \int_0^h A_1^2 \cos^2 (K_1 x - \varphi) dx + \int_{-\infty}^0 A_2^2 e^{2K'_{2x} x} dx + \int_h^{\infty} A_3^2 e^{-2K'_{3x}(x-h)} dx \right] \\ &= \frac{\beta}{4\omega\mu_0} \cdot A_1^2 \cdot \left[ h + \frac{1}{K'_{2x}} + \frac{1}{K'_{3x}} \right] \\ &= \mathcal{S} \cdot h_e \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

其中

$$\bar{S} = \frac{\beta}{4\omega\mu_0} A_i^2 \quad (6.5.4)$$

$$h_e = h + \frac{1}{K'_{2x}} + \frac{1}{K'_{3x}} \quad (6.5.5)$$

$\bar{S}$  是单位宽度的波导传输的平均功率密度,  $h_e$  即为等效厚度. 由式(6.4.1)中的第 2、3 式可知,  $\frac{1}{K'_{2x}}$  和  $\frac{1}{K'_{3x}}$  表示  $E_y$  衰减到  $e^{-1}$  处的深度, 这一深度正是全反射中的倏逝波的穿透深度  $z_m$  (见式(3.2.14)). 因此, 式(6.5.3)表示的传输功率可以看作是在厚度为  $h_e$  的平板波导中以平均功率密度  $\bar{S}$  传输. 而  $x$  方向上实际传输功率是变化的, 在波腹处传输的功率密度极大值为  $\left[ \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right] A_i^2$ .

对于 TM 波, 利用

$$\tan \frac{\delta}{2} = - \left( \frac{n}{n_b} \right)^2 \frac{\sqrt{(n_i^2 - n_b^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} \quad (6.5.6)$$

$$\tan \frac{\delta_{II}}{2} = - \left( \frac{n}{n_b} \right)^2 \frac{\sqrt{(n_i^2 - n_b^2) K_0^2 - K_{1x}^2}}{K_{1x}} \quad (6.5.7)$$

可求得单位宽度的介质薄膜波导传输功率

$$P_{\Sigma(\text{TM})} = \frac{\beta}{4\omega\epsilon} H_i^2 h_e \quad (6.5.8)$$

其中

$$h_e = h + \frac{1}{K'_{2x}} + \frac{1}{K'_{3x}} \quad (6.5.9)$$

上式在形式上与 TE 波类似, 但要注意的是, 其中的等效厚度  $h_e$  与 TE 波中的值不同, 这是因为对于 TE 波与 TM 波,  $\delta$  与  $\delta_{II}$  的数值不同, 从而由特征方程对同一个  $m$  值及  $K_0$  值将有不同的  $\theta_i$  值, 这是使  $K_{1x}$ 、 $K'_{2x}$ 、 $K'_{3x}$  的值对于 P 波与 S 波均不同而造成的.

同样我们也可以证明, 等效厚度中的  $1/K'_{2x}$  和  $1/K'_{3x}$  就是在全反射中用古斯-汉森位移所求出来的倏逝波穿透深度. 证明如下:

如图 6.5.1 所示, 按式(3.3.6), 光束在全反射后的侧向位移  $\Delta = -\frac{\partial \delta}{\partial \beta}$ .

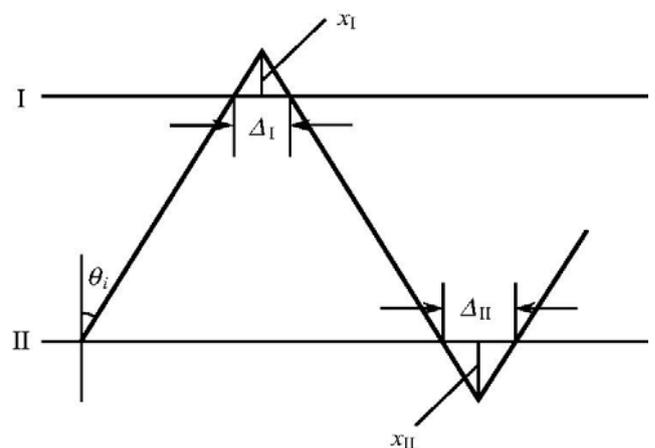


图 6.5.1 介质平板波导中的古斯-汉森位移及穿透深度

观察下表面 II, 则有

$$\Delta_{II} = - \frac{\partial \delta_I}{\partial \beta} \quad (6.5.10)$$

把式(6.3.16a)代入式(6.3.34)求得  $\frac{\delta_I}{2}$ , 并对  $\beta$  求导得

$$\frac{\partial \frac{\delta_I}{2}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \arctan \left[ - \frac{\beta^2 - K_0^2 n_2^2}{\sqrt{K_0^2 n_1^2 - \beta^2}} \right] \right] = - \frac{\tan \theta}{K'_{2x}} = \frac{-\Delta_{II}}{2} \quad (6.5.11)$$

由图 6.5.1 几何关系知

$$\tan \theta = \frac{\Delta_{II}}{2 x_{II}} \quad (6.5.12)$$

由式(6.5.11)、式(6.5.12)可得

$$x_{II} = \frac{\Delta_{II}}{2 \tan \theta} = \frac{1}{K'_{2x}} \quad (6.5.13)$$

同样可得

$$x_I = \frac{1}{K'_{3x}} \quad (6.5.14)$$

$x_I$ 、 $x_{II}$  就是倏逝波在介质  $n_b$  与  $n_2$  中的穿透深度.

## 6.6 圆形介质波导(光纤)的一般概念

光纤实质上是一种圆形介质波导, 按照其芯内介质结构, 可分为均匀光纤及非均匀光纤, 图 6.6.1 示出了两种光纤剖面, 其芯径为  $2a$ , 包层直径为  $2b$ . 图(a)表示均匀光纤, 其芯子与包层中折射率分别呈均匀分布, 而在交界面上折射率为一突

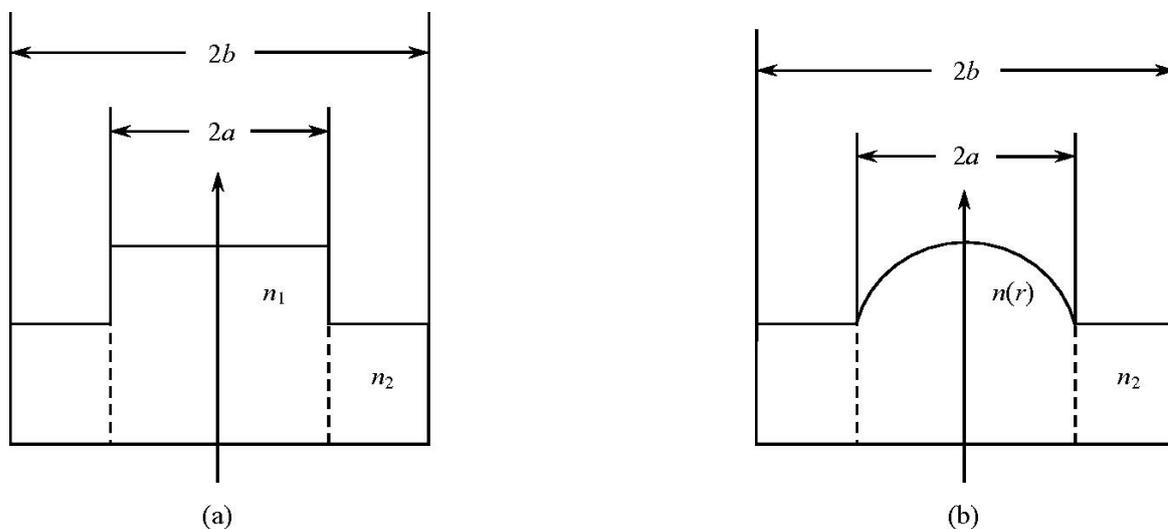


图 6.6.1 两种光纤的剖面折射率分布  
(a) 均匀光纤; (b) 非均匀光纤

变,故均匀光纤又称作为阶跃型光纤.图(b)表示非均匀光纤,其芯内折射率呈指数分布,而包层中折射率为均匀分布,故非均匀光纤又被称为渐变型折射指数光纤.

对均匀光纤,先从射线概念对光在光纤中传输做一形象描述.

在均匀光纤中可以存在两种光射线;

子午光线——光线处在过光纤轴线的子午面内.

孤矢光线——不通过光纤轴的光线.

对于子午光线,入射角(指光纤内光线与界面法线夹角) $\theta$  应满足全反射条件

$$\theta > \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (6.6.1)$$

此时方可在光纤中传播.式中, $n_1$  为芯内折射率, $n_2$  为包层折射率, $n_1 > n_2$ .

芯子和包层折射率之差直接影响到光纤的性能.引入几个常用概念:

(1) 相对折射率指数差  $\Delta$ .

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (6.6.2)$$

对于  $n_1$  与  $n_2$  相差极小的光纤, $\Delta$  可近似为

$$\Delta \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (6.6.3)$$

这种光纤称为弱导波光纤.

(2) 数值孔径  $NA$ .

数值孔径是描写允许进入光纤芯内形成导波的光线范围参数,如图 6.6.2 所示.设光线以与光轴成  $\theta$  角度方向从光纤端面入射,设光纤外的环境折射率为  $n_0$ ,定义数值孔径为

$$NA = n_0 \sin \theta \quad (6.6.4)$$

表示为最大允许的入射角范围,此时入射的光处于光纤内壁全反射临界状态,在此光锥之内的所有光线均可在光纤内传播,反之,入射到光纤内的光就会从  $n_1$  与  $n_2$  介质的界面上折射到包皮中而逃逸.

由全反射的临界条件

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (6.6.5)$$

以及在入射端面处的折射定律

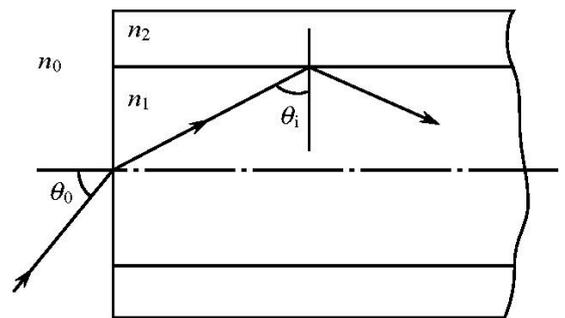


图 6.6.2 光纤的数值孔径  $NA = n_0 \sin \theta$

$$n_0 \sin \theta = n \sin(90^\circ - \theta)$$

运用三角公式,并把式(6.6.5)代入,得

$$NA = n_0 \sin \theta = n \cos \theta = n \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2} = n \sqrt{2\Delta} \quad (6.6.6)$$

一般地,环境为空气,  $n_0 = 1$ , 故有

$$NA = \sin \theta = n \sqrt{2\Delta} \quad (6.6.7)$$

$\theta$  表示能够进入光纤内传输的射线的最大入射角,或者说是光纤芯子所能捕捉到的射线的最大入射角.  $n_0$  与  $n$  差别越大,  $\Delta$  值越大,相应的数值孔径越大,所谓的“捕捉能力”就越强.例如对于  $NA = 0.07$  的石英光纤,相应的  $\theta = 4^\circ$ .

除了上面所述的普通光纤外,另一类光纤为激活光纤.这是用激光激活晶体或玻璃拉成的,如 Nd:YAG 光纤、Nd:Glass 玻璃光纤,它主要是用作光纤激光器.这类光纤激光器,或者更普遍地包括半导体激光器(平板薄膜波导)及波导激光器,其波导模式及理论基础也是本章前述的平板波导及圆形介质波导的电磁理论.

## 6.7 圆形介质波导的电磁理论解法

圆形介质波导中光波电磁矢量的严格解则仍是按照电磁场理论,求解满足均匀圆形介质波导边界条件的麦克斯韦方程组(或亥姆霍兹方程).同样,由于光纤(圆形介质波导)的柱对称性,宜采用柱坐标  $(r, \varphi, z)$ . 其解的方法完全类似于第5章中的圆形金属波导的解法,把亥姆霍兹方程写为柱坐标下的形式(式(5.4.2)),只是在介质波导中,相应于芯子与包层其折射率分别为  $n_1$ 、 $n_2$ , 得到与之对应的方程.方程在芯子与包层中同时有解.具体解法如下:

由麦克斯韦方程组第1、2式导出的柱坐标下  $E_r$ 、 $E_\varphi$ 、 $H_r$ 、 $H_\varphi$  与  $E_z$ 、 $H_z$  之间的关系式(5.4.13)可知,首先求出  $z$  向场分量  $E_z$ 、 $H_z$ , 就可利用式(5.4.13)求出全部电磁分量.  $z$  向场分量亥姆霍兹方程为

$$\begin{aligned} \Delta^2 E_z + K_0^2 n^2 E_z &= 0 \\ \Delta^2 H_z + K_0^2 n^2 H_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

对圆柱坐标系亥姆霍兹方程则为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + K_0^2 n^2 E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + K_0^2 n^2 H_z = 0 \end{cases} \quad (6.7.2)$$

在芯子与包层中  $n$  是不同的,将  $n_1$ 、 $n_2$  分别代替上式中的  $n$ , 就可以得到芯子与包层中的对应方程.解此方程使满足光纤的边界条件,即得到  $E_z$ 、 $H_z$  的场方程.解方

程(6.7.2)仍应用分离变量法,以  $E_z$  为例,  $E_z$  可写为

$$E_z = R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (6.7.3)$$

代入式(6.7.2)后可得到类似于第5章中式(5.4.4)的三个方程,其中关于  $z$  的方程解具有传播因子形式

$$Z(z) = e^{-\beta z} \quad (6.7.4)$$

关于  $\varphi$  的方程解具有沿圆周方向驻波状态的变化形式

$$\Phi(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{bmatrix} \quad (6.7.5)$$

关于  $r$  的方程在芯子与包层中分别为

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + [(K_0^2 n_1^2 - \beta^2) r^2 - m^2] R(r) = 0 & r \leq a \\ r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + [(K_0^2 n_2^2 - \beta^2) r^2 - m^2] R(r) = 0 & r \geq a \end{cases} \quad (6.7.6)$$

按照5.1节中讨论的第一类贝塞尔函数  $J_m(K_c r)$  与第二类贝塞尔函数  $N_m(K_c r)$  的特性,并考虑到光波在芯子与包层中的物理表现,可知在芯子中电磁场应当有驻波解,即在  $r \rightarrow 0$  时取值应有限.故在芯子中  $R(r)$  应取第一类贝塞尔函数;而在包层中场随  $r$  增加而单调减少,是衰减解,没有振荡起伏,因而取  $R(r)$  为第二类修正贝塞尔函数  $K_m(K_c r)$ . 第二类修正贝塞尔函数定义如下

$$K_m(K_c r) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} [J_m(iK_c r) + iN_m(iK_c r)] \quad (6.7.7)$$

$K_m$  的渐近表达式为

$$\lim_{K_c r \rightarrow \infty} K_m(K_c r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2K_c r}} e^{-K_c r} \quad (6.7.8)$$

由上式可知,当  $r \rightarrow \infty$  时,  $K_m(K_c r) \rightarrow 0$ . 这一结果符合光纤包层中当  $r \rightarrow \infty$  时场应当衰减至零的物理意义,因此取  $K_m(K_c r)$  作为  $R(r)$  在包层中的解. 于是

$$R(r) = \begin{cases} J_m(\sqrt{K_0^2 n_1^2 - \beta^2} \cdot r) & r \leq a \\ K_m(\sqrt{\beta^2 - K_0^2 n_2^2} \cdot r) & r \geq a \end{cases} \quad (6.7.9)$$

图6.7.1示出了  $J_m(K_c r)$  及  $K_m(K_c r)$  的函数曲线.

为简化计算,引入新的参量

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sqrt{K_0^2 n_1^2 - \beta^2} \\ w &= a \sqrt{\beta^2 - K_0^2 n_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.7.10)$$

$u$  为导波的径向归一化相位常数,  $w$  为导波的径向归一化衰减常数,则式(6.7.9)可写为

$$R(r) = \begin{cases} J_m\left[\frac{u}{a}r\right] & r \leq a \\ K_m\left[\frac{w}{a}r\right] & r \geq a \end{cases} \quad (6.7.11)$$

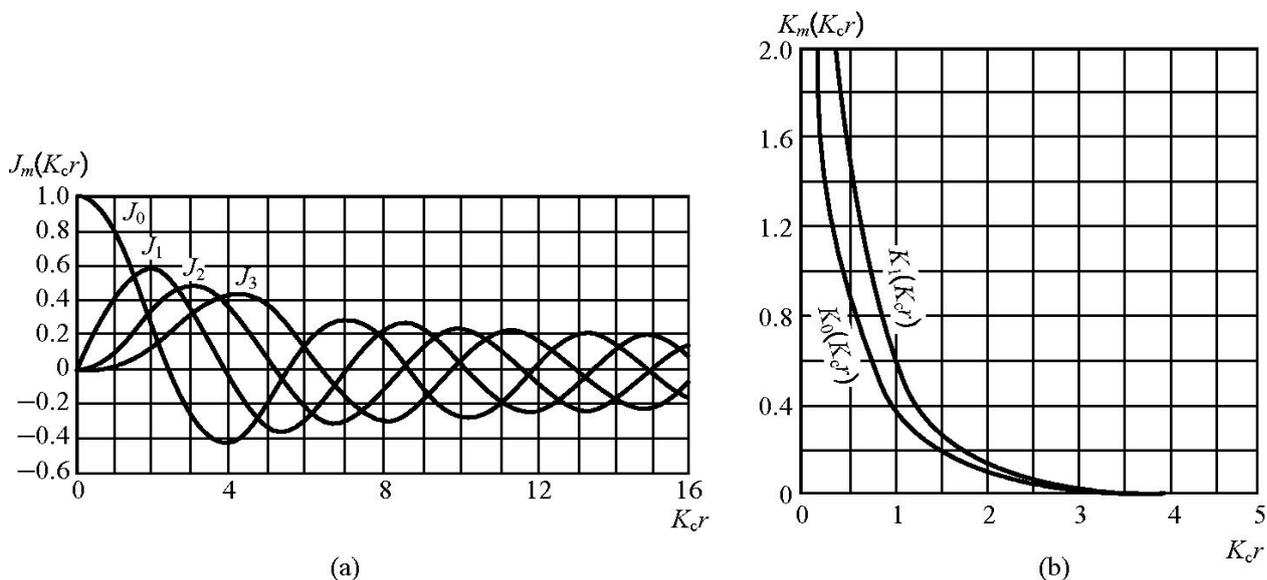


图 6.7.1  $J_m(K_c r)$  曲线与  $K_m(K_c r)$  曲线

综合式(6.7.4)、式(6.7.5)及式(6.7.11), 光纤中的  $E_z$  可表示为

$$E_z = e^{-i\beta z} \sin m\varphi \begin{cases} A_1 J_m\left[\frac{u}{a}r\right] & r \leq a \\ A_2 K_m\left[\frac{w}{a}r\right] & r \geq a \end{cases} \quad (6.7.12)$$

$$E_z = e^{-i\beta z} \cos m\varphi \begin{cases} A_1 J_m\left[\frac{u}{a}r\right] & r \leq a \\ A_2 K_m\left[\frac{w}{a}r\right] & r \geq a \end{cases} \quad (6.7.13)$$

下面以讨论第一套解(6.7.12)为例继续解电磁场. 为表达方便且应用方便, 把  $A_1$  改写为

$$A_1 = \frac{A}{J_m(u)} \quad (6.7.14)$$

根据光纤的边界条件, 在  $r = a$  处电场切向分量连续, 即  $E_{z1} = E_{z2}$ , 此处  $E_{z1}$ 、 $E_{z2}$  分别表示在光纤芯子和包层中的电场  $z$  分量. 将式(6.7.12)、式(6.7.14)代入上述边界条件可得

$$A_2 = \frac{A}{K_m(w)} \quad (6.7.15)$$

将式(6.7.14)及式(6.7.15)代入式(6.7.12),可得电场矢量  $z$  分量的表达式

$$E_z = Ae^{-i\beta z} \sin m\varphi \begin{cases} \frac{J_m\left(\frac{u}{a}r\right)}{J_m(u)} & r \leq a \\ \frac{K_m\left(\frac{w}{a}r\right)}{K_m(w)} & r \geq a \end{cases} \quad (6.7.16)$$

同样,可得到磁场矢量的  $z$  分量  $H_z$  的表达式

$$H_z = Be^{-i\beta z} \cos m\varphi \begin{cases} \frac{J_m\left(\frac{u}{a}r\right)}{J_m(u)} & r \leq a \\ \frac{K_m\left(\frac{w}{a}r\right)}{K_m(w)} & r \geq a \end{cases} \quad (6.7.17)$$

在导出  $H_z$  时用了  $r = a$  处  $H_{z1} = H_{z2}$  的边界条件.这里只给出了  $E_z$  采用  $\sin m\varphi$ ,  $H_z$  采用  $\cos m\varphi$  表示的一套解.当然还存在着  $E_z$  用  $\cos m\varphi$  表示,  $H_z$  用  $\sin m\varphi$  表示的另一套解.但这两套解特性相似,只讨论其中的一套即可.

求出了  $E_z$  及  $H_z$  的表达式,其他的几个场分量可以利用式(5.4.13)表示的关系求出.只需把式(6.7.16)、式(6.7.17)这一套解的  $E_z$ 、 $H_z$  代入式(5.4.13),就可得到在芯子与包层中的电场和磁场的另四个分量  $E_{r1}$ 、 $E_{\varphi1}$ 、 $H_{r1}$ 、 $H_{\varphi1}$  及  $E_{r2}$ 、 $E_{\varphi2}$ 、 $H_{r2}$ 、 $H_{\varphi2}$ ,而若把相应的另一套  $E_z$ 、 $H_z$  的解代入式(5.4.13),则可得到与之相应的另一套电磁场完整解.下面给出一组与式(6.7.16)、式(6.7.17)相应的完整解的另8个电磁场分量表达式

$$\begin{cases} E_{\varphi1} = -i \left[ \frac{a}{u} \right]^2 \left[ \frac{\beta mA}{r} \cdot \frac{J_m\left(\frac{u}{a}r\right)}{J_m(u)} - \frac{\omega\mu_0 Bu}{a} \cdot \frac{J'_m\left(\frac{u}{a}r\right)}{J_m(u)} \right] \cos m\varphi \\ E_{\varphi2} = i \left[ \frac{a}{w} \right]^2 \left[ \frac{\beta mA}{r} \cdot \frac{K_m\left(\frac{w}{a}r\right)}{K_m(w)} - \frac{\omega\mu_0 Bw}{a} \cdot \frac{K'_m\left(\frac{w}{a}r\right)}{K_m(w)} \right] \cos m\varphi \\ E_{r1} = -i \left[ \frac{a}{u} \right]^2 \left[ -\frac{\omega\mu_0 mB}{r} \cdot \frac{J_m\left(\frac{u}{a}r\right)}{J_m(u)} + \frac{\beta Au}{a} \cdot \frac{J'_m\left(\frac{u}{a}r\right)}{J_m(u)} \right] \sin m\varphi \\ E_{r2} = i \left[ \frac{a}{w} \right]^2 \left[ -\frac{\omega\mu_0 mB}{r} \cdot \frac{K_m\left(\frac{w}{a}r\right)}{K_m(w)} - \frac{\beta Aw}{a} \cdot \frac{K'_m\left(\frac{w}{a}r\right)}{K_m(w)} \right] \sin m\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 H_{\varphi 1} = -i \left( \frac{a}{u} \right)^2 \left[ -\frac{\beta m B}{r} \cdot \frac{J_m \left( \frac{u}{a} r \right)}{J_m(u)} + \frac{\omega \varepsilon_0 n_1^2 A u}{a} \cdot \frac{J'_m \left( \frac{u}{a} r \right)}{J_m(u)} \right] \sin m\varphi \\
 H_{\varphi 2} = i \left( \frac{a}{w} \right)^2 \left[ -\frac{\beta m B}{r} \cdot \frac{K_m \left( \frac{w}{a} r \right)}{K_m(w)} + \frac{\omega \varepsilon_0 n_2^2 A w}{a} \cdot \frac{K'_m \left( \frac{w}{a} r \right)}{K_m(w)} \right] \sin m\varphi \\
 H_{r 1} = -i \left( \frac{a}{u} \right)^2 \left[ -\frac{\omega \varepsilon_0 n_1^2 m A}{r} \cdot \frac{J_m \left( \frac{u}{a} r \right)}{J_m(u)} + \frac{\beta B u}{a} \cdot \frac{J'_m \left( \frac{u}{a} r \right)}{J_m(u)} \right] \cos m\varphi \\
 H_{r 2} = i \left( \frac{a}{w} \right)^2 \left[ -\frac{\omega \varepsilon_0 n_2^2 m A}{r} \cdot \frac{K_m \left( \frac{w}{a} r \right)}{K_m(w)} + \frac{\beta B w}{a} \cdot \frac{K'_m \left( \frac{w}{a} r \right)}{K_m(w)} \right] \cos m\varphi
 \end{cases} \quad (6.7.18)$$

为了书写方便,在上式中省略了  $e^{-i\beta z}$  这一公共因子.

形成导波时,要求  $u, w$  为正实数,因而有

$$w^2 > 0 \quad u^2 > 0 \quad (6.7.19)$$

由此得

$$n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0 \quad (6.7.20)$$

这就是说,导波的相位常数  $\beta$  是介于纤芯材料和包层材料中平面波的波数之间的.

必须强调的是,导波的  $\beta$  必定大于  $n_2 K_0$ . 这意味着,当  $\beta < n_2 K_0$  时,波在包层中将出现振荡解而形成辐射模,使导波截止. 因此

$$\beta = n_2 K_0 \quad (6.7.21)$$

是导波截止的临界状态,此时参数  $w = 0$ , 引入参数  $V$ , 令

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} K_0 a = \sqrt{2\Delta} n_1 K_0 a \quad (6.7.22)$$

临界状态时有

$$u = V \quad (6.7.23)$$

$V$  叫作光纤的归一化频率. 它概括了光纤的结构  $(a, \Delta, n)$  及工作波长 (包含在  $K_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  中), 是一个重要的综合性参数, 光纤的许多特性均与光纤归一化频率  $V$  有关.

以上讨论的是用电磁理论对圆形介质波导作严格的矢量解.

## 6.8 矢量解的特征方程

在介质波导严格的矢量解式(6.7.16)~式(6.7.18)中,包含了参数  $u, w, \beta$ , 这

三个参数可以利用式(6.7.10)的两个方程以及从边界条件中得出的特征方程来确定.下面将从光纤的边界条件求特征方程.

光纤的边界条件是:在纤芯的边界上,电场和磁场的切向分量连续,即在  $r = a$  处有

$$\begin{cases} E_{\phi_1} = E_{\phi_2} & (1) \\ H_{\phi_1} = H_{\phi_2} & (2) \\ E_{z_1} = E_{z_2} & (3) \\ H_{z_1} = H_{z_2} & (4) \end{cases} \quad (6.8.1)$$

把前面求出的场分量表达式代入式(6.8.1)的(1),得

$$\omega \mu_0 B \left[ \frac{1}{u} \cdot \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} \cdot \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] = \beta m A \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (6.8.2)$$

把场分量代入式(6.8.1)的(2),得

$$\omega \epsilon_0 A \left[ \frac{n_1^2}{u} \cdot \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{n_2^2}{w} \cdot \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] = \beta m B \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (6.8.3)$$

把式(6.8.2)与式(6.8.3)相乘,得

$$\begin{aligned} \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \left[ \frac{1}{u} \cdot \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} \cdot \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] \left[ \frac{n_1^2}{u} \cdot \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{n_2^2}{w} \cdot \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] \\ = \beta^2 m^2 \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (6.8.4)$$

根据式(6.7.10),将上式中的 $\beta$ 消去并加以整理,得

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{u} \cdot \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} \cdot \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] \left[ \frac{n_1^2}{n_2^2 u} \cdot \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} \cdot \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] \\ = m^2 \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \left[ \frac{n_1^2}{n_2^2 u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

上式包含了  $u$  和  $w$  两个未知量,但由式(6.7.22)知

$$w^2 = V^2 - u^2 = (n_1^2 - n_2^2) k_0^2 a^2 - u^2 \quad (6.8.6)$$

可知式(6.8.5)可看作仅包含一个未知量  $u$ (或  $w$ )的方程,这一方程就是光纤中导波的特征方程.讨论光纤中导波的模式及其特性,都要以此为依据.特征方程是超越方程,一般只能以数值解法来求解.

对于通信中常用的弱光纤,即  $\frac{n_1}{n_2} \rightarrow 1$ ,芯与包层折射率相差极小,可近似地认为

$\frac{n_1}{n_2} = 1$ ,把式(6.8.5)表示的特征方程变换形式,引入以下符号

$$\begin{cases} J = \frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} \\ K = \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \end{cases} \quad (6.8.7)$$

得

$$J + K = \pm m \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (6.8.8)$$

再将  $J$ 、 $K$  还原得

$$\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} = \pm m \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (6.8.9)$$

这就是弱导光纤的近似特征方程。上式具有两组解，当方程右端取正号时得一组解，取负号时得另一组解。

## 6.9 矢量解的模式分类及特征方程

### 6.9.1 TE 模及 TM 模

根据光纤矢量解表达式(6.7.16)知,对于 TE 模,必有  $E_z = 0$ ,因此有常数  $A = 0$ ,代入式(6.8.3)得

$$\beta m B \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] = 0$$

式中  $\left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]$  不能等于零,相位常数  $\beta$  及常数  $B$  均不可能为零,因此只能使  $m = 0$ ,这样就得出结论,光纤中的 TE 波只能在  $m = 0$  的情况下才能存在。同样,可以证明光纤中的 TM 波也只能在  $m = 0$  的情况下才能存在。这就是说,光纤中只存在  $m = 0$  的 TE 波和 TM 波。

在特征方程(6.8.9)中令  $m = 0$ ,就可得到 TE 波和 TM 波的特征方程

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} = - \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} \quad (6.9.1)$$

利用贝塞尔函数的递推公式

$$\begin{aligned} J'_0(u) &= -J_1(u) \\ K'_0(w) &= -K_1(w) \end{aligned}$$

可把上式变换为

$$\frac{-J_1(u)}{uJ_0(u)} = \frac{K_1(w)}{wK_0(w)} \quad (6.9.2)$$

这就是 TE 波和 TM 波共同的特征方程。

### 6.9.2 EH 模及 HE 模

当  $m \neq 0$  时,不能出现 TE 模和 TM 模,而只能是  $E_z$ 、 $H_z$  同时共存,其中  $E_z$  所占的分量大时即为 EH 模,反之为 HE 模.

EH 模的特征方程为

$$\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} = m \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (6.9.3)$$

HE 模的特征方程为

$$\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} = -m \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (6.9.4)$$

应用贝塞尔函数递推公式

$$J'_m(u) = \frac{m}{u} J_m(u) - J_{m+1}(u) = -\frac{m}{u} J_m(u) + J_{m-1}(u)$$

$$K'_m(w) = \frac{m}{w} K_m(w) - K_{m+1}(w) = -\frac{m}{w} K_m(w) + K_{m-1}(w)$$

简化后的特征方程为

$$\text{EH 模} \quad \frac{-J_{m+1}(u)}{uJ_m(u)} = \frac{K_{m+1}(w)}{wK_m(w)} \quad (6.9.5)$$

$$\text{HE 模} \quad \frac{J_{m-1}(u)}{uJ_m(u)} = \frac{K_{m-1}(w)}{wK_m(w)} \quad (6.9.6)$$

综上所述,在光纤中可存在四种类型的模式:TE 模、TM 模、EH 模、HE 模. TE 模、TM 模只在  $m=0$  时存在,而 EH 模、HE 模在  $m>0$  时存在.它们的特征方程分别如式(6.9.2)、式(6.9.5)及式(6.9.6)所示.同样,利用式(6.8.6)可把以上各模式的特征方程化为仅含一个未知量  $u$ (或  $w$ )的方程.在给定工作波长情况下,对应于一个  $m$ ,贝塞尔函数会有一系列解,求出的每一个  $u$  值的解就对应着一个模式.例如,对于 EH 模,对应一个  $m$  的贝塞尔函数第  $n$  个根所相应的  $u$  值解就代表了  $\text{EH}_{m_n}$  模.因此,若光纤归一化频率  $V$  足够大时,光纤中可存在一系列的 TE 模、TM 模和一系列的 EH 模、HE 模.下节将结合导波的截止条件对各种矢量模的特性作一详细分析.

## 6.10 矢量模的特性

矢量模的特性用三个特征参数  $u$ 、 $w$ 、 $\beta$  来描述.由式(6.7.10)表达的意义可知: $u$  表示导波场在纤芯( $n_1$ )内的横向分布; $w$  则表示了导波场在包皮( $n_2$ )中的横向分布; $\beta$  是轴向相位常数,表明了导波的轴向传输特性.三者之间的关系就是由

式(6.7.10)的两个方程以及特征方程来确定的.由特征方程确定了  $u$ (或  $w$ )后,再利用式(6.7.10)便可求出  $w$ (或  $u$ )及  $\beta$ ,从而得到完整的矢量解.下面集中讨论  $u$  参数.

### 6.10.1 导波的截止条件

类似于薄膜介质波导中对截止条件的讨论,当外包层中出现辐射模时即为导波截止条件.在导波存在时,场在纤芯外的包层中是衰减解,即  $w^2 > 0$ (见式(6.7.19)).当  $w^2 < 0$  时,包层中为振荡解,即出现辐射模,芯内电磁场能量会不断地从包层径向向外辐射,最终导致芯内无法存在振荡解而截止.因此,  $w = 0$  即为临界状态,此时的  $w$  记为  $w_c$ ,表示导波截止条件,即  $w_c = 0$ ,与之对应的径向归一化相位常数为  $u_c$ ,归一化频率为  $V_c$ ,由式(6.7.22)得

$$V_c^2 = u_c^2 + w_c^2 = u_c^2 \quad (6.10.1)$$

或

$$V_c = u_c \quad (6.10.2)$$

根据特征方程求出  $u_c$ ,便可决定  $V_c$ ,从而决定各模式相应的截止频率.

### 6.10.2 近截止时的模式分类、各模式的截止条件及归一化截止频率 $V_c$

根据第二类修正贝塞尔函数特性知,在  $w \rightarrow 0$  时的近截止情况下,  $K_m(w)$  的近似式为

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{在 } m = 0 \text{ 时} & K_0(w) = \ln \frac{2}{w} \rightarrow \infty \\ \text{在 } m \neq 0 \text{ 时} & K_m(w) = \frac{1}{2} (m-1)! \left[ \frac{2}{w} \right]^m \\ \text{在 } m = 1 \text{ 时} & K_1(w) = \frac{1}{w} \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (6.10.3)$$

下面对各种模式求截止条件,并讨论模式分类.

#### 1. TE、TM 模

根据 TE、TM 模的特征方程式(6.9.2),把近截止时的  $K_m(w)$  的近似式(6.10.3)第 1、3 式代入,并对  $w \rightarrow 0$  时运用洛必达法则得

$$\frac{-J_1(u)}{uJ_0(u)} = \frac{K_1(w)}{wK_0(w)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{w^2}}{\ln \frac{2}{w}} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w^2} = \infty$$

从而得

$$J_0(u_c) = 0 \quad (6.10.4)$$

这就是 TE、TM 模截止状态下的特征方程。 $u_c$  的解就是零阶贝塞尔函数的根，它可以从表 5.2 查出。如果用  $\mu_{0n}$  表示贝塞尔函数的第  $n$  个根，则可写为

$$u_c = \mu_{0n} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$$

各值对应于  $n=1, 2, 3, \dots$ 。

所以，当  $m=0$  时，求出一系列  $u_c$  值，每个  $u_c$  值对应于一定的场分布及轴向相位常数  $\beta$ ，就决定了一个 TE 模和一个 TM 模。例如，当

$$\begin{aligned} u_c = 2.405 \text{ 时, 得 TE}_{01}、\text{TM}_{01} \text{ 模} \\ u_c = 5.520 \text{ 时, 得 TE}_{02}、\text{TM}_{02} \text{ 模} \end{aligned} \quad (6.10.5)$$

$m=0$  对应着一族 TE 模和一族 TM 模，它们可记为  $\text{TE}_{0n}$ 、 $\text{TM}_{0n}$  模，下标“0”是指贝塞尔函数的阶数，“ $n$ ”表示第几个根，即零阶贝塞尔函数根的序号。

由截止条件下的  $u_c$  值，就可以由式 (6.10.2) 求得各种模式的截止条件，即截止时光纤的归一化频率

$$\begin{aligned} V_c &= u_c = \mu_{0n} \\ \text{TE}_{01}、\text{TM}_{01} \text{ 模} \quad V_c &= 2.405 \\ \text{TE}_{02}、\text{TM}_{02} \text{ 模} \quad V_c &= 5.520 \\ \text{TE}_{03}、\text{TM}_{03} \text{ 模} \quad V_c &= 8.654 \end{aligned} \quad (6.10.6)$$

当实际的光纤归一化频率  $V$  大于归一化截止频率  $V_c$ ，即当  $V > V_c$  时，此模可以在该光纤中导行。因此归纳为如下条件

$$\begin{aligned} \text{导行条件} \quad V &> V_c \\ \text{截止条件} \quad V &< V_c \\ \text{临界条件} \quad V &= V_c \end{aligned}$$

注意：所有标号相同的 TE 模和 TM 模具有相同的  $u_c$  值，它们是相互简并的。在所有 TE、TM 模中， $\text{TE}_{01}$  模及  $\text{TM}_{01}$  模的归一化截止频率最低，为  $V_{c,01} = 2.405$ 。

## 2. EH 模

根据 EH 模的特征方程式 (6.9.5)，把近截止时  $K_m(w)$  的近似式 (6.10.3) 代入，得到

$$\frac{-J_{m+1}(u_c)}{u_c J_m(u_c)} = \infty$$

于是有

$$J_m(u_c) = 0 \quad (6.10.7)$$

这就是 EH 模截止状态下的特征方程。从中解出  $u_c = \mu_{mn}$ ，式中  $\mu_{mn}$  是  $m$  阶贝塞尔

函数的第  $n$  个根(这里  $m \geq 1$ ). 对每一个  $m, n$  的组合, 可得到一个相应的 EH 模, 记作  $\text{EH}_{mn}$  模. 例如, 当  $m = 1$  时, 得到一族  $\text{EH}_{1n}$  模, 其  $u_c$  为一系列值

$$u_c = u_{1n} = 3.832, 7.016, 10.173, \dots$$

每个  $u_c$  值对应一个模式, 即对应一个截止条件

$$\begin{aligned} \text{EH}_{11} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 3.832 \\ \text{EH}_{12} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 7.016 \\ \text{EH}_{13} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 10.173 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.10.8}$$

当  $m = 2$  时得到一族  $\text{EH}_{2n}$  模, 其  $u_c$  值为二阶贝塞尔函数的根

$$u_c = \mu_{2n} = 5.136, 8.417, 11.620, \dots$$

每个  $u_c$  值对应一个模式, 即对应一个归一化截止频率

$$\begin{aligned} \text{EH}_{21} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 5.136 \\ \text{EH}_{22} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 8.417 \\ \text{EH}_{23} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 11.620 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.10.9}$$

其他依次类推.

在所有的  $\text{EH}_{mn}$  模中,  $\text{EH}_{11}$  模的归一化截止频率最低, 为  $V_c = u_c = 3.832$ .

### 3. HE 模

根据 HE 模的特征方程(6.9.6), 把近截止时  $K_m(w)$  的近似式(6.10.3)代入, 得

$$\frac{J_{m-1}(u_c)}{u_c J_m(u_c)} = \frac{K_{m-1}(w_c)}{w_c K_m(w_c)} = \frac{1}{2(m-1)}$$

下面对  $m = 1$  及  $m > 1$  两种情况分别讨论.

当  $m = 1$  时, 截止状态的特征方程为

$$\frac{J_0(u_c)}{u_c J_1(u_c)} = \infty$$

于是

$$u_c J_1(u_c) = 0 \tag{6.10.10}$$

得到  $u_c = 0$  及  $J_1(u_c) = 0$ , 其解为

$$u_c = \mu_{1, n-1} = 0, 3.832, 7.016, 10.173, \dots$$

$n$  由 1 算起. 注意, 这里的  $u_c = \mu_{10} = 0$  可以作为第一个根, 这与前面讨论的 TE、TM、EH 模情况不同. 这是因为  $u_c = 0$  仍能使 HE 模截止时的特征方程得到满足, 而对于 TE、TM、EH 模的特征方程,  $u_c = 0$  就没有意义, 故使  $u_c = 0$  不能成为它们

的根.

每一个  $u_c = \mu_{l, n-1}$  的值对应一个模式, 即对应一个归一化截止频率, 得到一族  $HE_{l, n}$  模如下:

$$\begin{aligned} HE_{11} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = \mu_{10} = 0 \\ HE_{12} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = \mu_{11} = 3.832 \\ HE_{13} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = \mu_{12} = 7.016 \end{aligned} \quad (6.10.11)$$

讨论以上各模式:

(1)  $HE_{11}$  模的归一化截止频率为  $V_c = 0$ , 这就是说  $HE_{11}$  模没有截止现象, 所有频率(或波长)的光波均可在光纤中以  $HE_{11}$  模式传输. 如果适当设计光纤结构, 使  $HE_{11}$  模以外的高次模都被截止, 便可得到单模传输, 这种光纤就叫作单模光纤.

(2)  $HE_{1, n+1}$  与  $EH_{1n}$  模具有相同的归一化截止频率, 它们在截止时是互相简并的.

当  $m > 1$  时, 讨论 HE 模. 利用贝塞尔函数递推公式:

$$2mJ_m(u) = uJ_{m-1}(u) + uJ_{m+1}(u)$$

把式中阶数降 1, 递推公式成为

$$2(m-1)J_{m-1}(u) = uJ_{m-2}(u) + uJ_m(u)$$

将其代入 HE 模的特征方程(6.9.6)式, 经整理得

$$\frac{J_{m-2}(u_c)}{J_m(u_c)} = 0$$

从而得到

$$J_{m-2}(u_c) = 0 \quad (6.10.12)$$

上式的解为  $m-2$  阶贝塞尔函数的根, 即

$$V_c = u_c = \mu_{m-2, n}$$

当  $m=2$  时,  $V_c = u_c = \mu_{0n} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$

$$\begin{aligned} HE_{21} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 2.405 \\ HE_{22} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 5.520 \\ HE_{23} \text{ 模} \quad V_c &= u_c = 8.654 \end{aligned} \quad (6.10.13)$$

⋮

比较式(6.10.13)与式(6.10.6)可知,  $HE_{2n}$  模在截止时与  $TE_{0n}$ 、 $TM_{0n}$  模简并.

当  $m=3$  时, 得到  $HE_{3n}$  模, 其  $V_c = u_c = \mu_{1n} = 3.832, 7.016, 10.173, \dots$ , 它与  $EH_{1n}$  模及  $HE_{1, n+1}$  模在截止时简并.

当  $m > 3$  时,  $EH_{mn}$  模与  $HE_{m+2, n}$  模在截止时简并.

### 6.10.3 光纤中单模传输的条件

从上节讨论的各种模式及其归一化条件中, 比较各模式归一化截止频率可见,

HE<sub>11</sub> 模归一化截止频率最低,其次为 TE<sub>01</sub>、TM<sub>01</sub> 和 HE<sub>21</sub> 模,即

$$\begin{aligned} \text{HE}_{11} \text{ 模} & \quad V_c = 0 \\ \text{TE}_{01}、\text{TM}_{01}、\text{HE}_{21} \text{ 模} & \quad V_c = 2.405 \\ \text{EH}_{11}、\text{HE}_{12}、\text{HE}_{31} \text{ 模} & \quad V_c = 3.832 \\ \text{EH}_{21}、\text{HE}_{41} \text{ 模} & \quad V_c = 5.136 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

要保证光纤中只传输 HE<sub>11</sub> 单一模式,必须满足下列条件

$$V_c(\text{HE}_{11} \text{ 模}) < V < V_c(\text{TE}_{01} \text{ 模})$$

即

$$0 < V < 2.405 \quad (6.10.14)$$

式中  $V$  即为所用光纤的归一化频率,这是光纤固有的值,  $V = \sqrt{2\Delta} a K_0 n_1$ , 它是由光纤的芯及包层的折射率  $n_1$ 、 $n_2$  和光纤内芯径  $a$  以及工作波长  $\lambda_0$  所决定的. 根据式(6.10.14)来选择光纤的材料及尺寸,从而达到单模光纤的需要. 要注意的是,要使光纤参数  $V < 2.405$  是不太容易的,因为光波波长  $\lambda_0$  很小,  $K_0$  值很大,这就要求光纤有很小的芯径  $a$ . 但  $a$  过小势必使制作耦合连接等方面带来许多困难. 如果使光纤的相对折射率指数差  $\Delta$  做得极小,也可达到使  $V$  值较小的目的,这时可允许有较大的芯径. 因此,制作单模光纤时常采用弱导波光纤.

#### 6.10.4 远离截止时导波的参数 $u$

光纤中导波的径向归一化相位参数  $u$  值是随着被传输模的频率而变化的. 6.10.2 节中讨论的是在近截止情况下的传输模式,所得的  $u_c$  值只适用于导波截止时的情况,此时  $w = 0$ . 当  $w > 0$  时,场在外包层是衰减的,产生导波. 当  $w \gg 0$  时,即渐渐远离截止条件,此时  $w$  值越来越大,意味着包层中的径向衰减越来越快,导波中的能量越来越集中在芯子中. 而  $w$  增大意味着光纤归一化频率  $V$  增大. 当  $V$  和  $w$  足够大时,导波能量除靠近截止的几个高次模  $i$  外,基本集中在光纤芯子当中. 这种状态称为远离截止的状态. 现在讨论  $V \rightarrow \infty$  的极限情况.

由  $V = \sqrt{2\Delta} n_1 2\pi \frac{a}{\lambda_0}$ , 故有  $V \rightarrow \infty$  时必有比值  $\frac{a}{\lambda_0} \rightarrow \infty$ , 相当于芯径扩展为无穷,光波在折射率为  $n_1$  的无限大空间中传播,其传播的相位常数  $\beta \rightarrow K_0 n_1$ , 此时有

$$w = \sqrt{\beta^2 - K_0^2 n_2^2} a = \sqrt{K_0^2 n_1^2 - K_0^2 n_2^2} a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \cdot 2\pi \frac{a}{\lambda_0} \rightarrow \infty \quad (6.10.15)$$

第二类修正贝塞尔函数  $K_m(w)$  可采用大宗量情况 ( $w \rightarrow \infty$ ) 下的近似式(6.7.8)

$$K_m(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} e^{-w} \quad (6.10.16)$$

上式对  $m=0$  及  $m>0$  都适用. 类似于讨论截止区附近的情况, 把上式代入各种模式的特征方程中, 得到相应模式在远离截止时的特征方程, 便可由此求出解  $u$  的值.

### 1. TE 模及 TM 模

由 6.9 节讨论知, 光纤中只存在  $m=0$  的 TE 波和 TM 波, 因此, 讨论的是  $TE_{0n}$ 、 $TM_{0n}$  模. 把式 (6.10.16) 代入 TE 模及 TM 模的特征方程 (6.9.2), 并考虑到远离截止时有  $w \rightarrow \infty$ , 得

$$\frac{-J_1(u)}{uJ_0(u)} = \frac{K_1(w)}{wK_0(w)} = \frac{1}{w} = 0$$

从而得  $J_1(u) = 0$ . 式中的解  $u$  是一阶贝塞尔函数的根

$$u = \mu_{1n} = 3.832, 7.016, 10.173, \dots$$

以上各值分别为  $TE_{01}$ 、 $TM_{01}$  模,  $TE_{02}$ 、 $TM_{02}$  模,  $TE_{03}$ 、 $TM_{03}$  模... 远离截止时的  $u$  值. 与 6.10.2 节中截止情况下的  $u$  值 (即  $u_c$  值) 联系起来可以看出,  $TE_{0n}$ 、 $TM_{0n}$  模在截止时  $u$  值是零阶贝塞尔函数的根. 因此, 从截止到远离截止, 光纤传输的每一种模 ( $w > 0$  的模) 所对应的  $u$  值必介于零阶贝塞尔函数的第  $n$  个根与一阶贝塞尔函数的第  $n$  个根之间. 图 6.10.1 中标出了  $TE_{0n}$  及  $TM_{0n}$  模的  $u$  值变化范围.

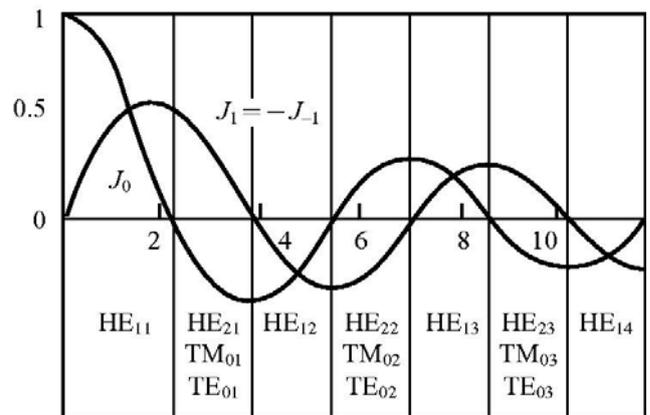


图 6.10.1  $n$  个低阶模  $u$  值变化范围

### 2. $EH_{mn}$ 模

把式 (6.10.16) 代入 EH 模的特征方程式 (6.9.5), 并使  $w \rightarrow \infty$ , 得到 EH 模在远离截止时的特征方程

$$J_{m+1}(u) = 0$$

上式的解  $u$  是  $m+1$  阶贝塞尔函数的根, 可写为  $u = \mu_{m+1,n}$ , 与截止情况联系起来考虑可知,  $EH_{mn}$  模的  $u$  值是在  $\mu_{mn}$  和  $\mu_{m+1,n}$  之间变化, 其变化范围部分地也示于图 6.10.1 中. 这表明, 从截止到远离截止, 对应于不同的频率, 光纤传输的 EH 模每一种模式所对应的  $u$  值必介于  $m$  阶贝塞尔函数的第  $n$  个根与第  $m+1$  阶贝塞尔函

数的第  $n$  个根之间.

### 3. $HE_{mn}$ 模

同样地可求得远离截止时  $HE_{mn}$  模的特征方程为

$$J_{m-1}(u) = 0$$

$u$  值是  $m - 1$  阶贝塞尔函数的根,可写作

$$u = \mu_{m-1, n}$$

与截止情况联系起来考虑可知,当  $m = 1$  时,  $HE_{mn}$  的  $u$  值在  $\mu_{1, n-1}$  与  $\mu_{0n}$  范围内变化,当  $m > 1$  时,  $u$  值在  $\mu_{m-2, n}$  与  $\mu_{m-1, n}$  范围内变化. 如对于  $HE_{1n}$  模, 远离截止时  $u$  值为  $u = \mu_{0n}$ , 而在截止时  $u_c$  值为  $\mu_{1, n-1}$ . 故对从  $w = 0$  到  $w \rightarrow \infty$ ,  $u$  值在  $\mu_{1, n-1} \rightarrow \mu_{0n}$  范围变化.

综合以上各节分析的各种情况,把结论列于表 6.10.1 中,从而清楚地表述了各种模式在截止区、远离截止区以及其间各种情况的  $u$  值及变化范围.

表 6.10.1 均匀光纤中各模式  $u$  值的变化范围

模式名称		$TE_{0n}$ $TM_{0n}$	$EH_{mn}$	$HE_{mn}$	
				$m = 1$	$m > 1$
$u$ 值	截止	$\mu_{0n}$	$\mu_m$	$\mu_{1, n-1}$	$\mu_{m-2, n}$
	远离截止	$\mu_{1n}$	$\mu_{m-1, n}$	$\mu_{0n}$	$\mu_{m-1, n}$

## 6.11 非均匀光纤

非均匀光纤芯子中折射率沿半径  $r$  方向是变化的,且包层中的折射率一般是均匀的.采用非均匀光纤的目的是减小光纤的模式色散,当折射率变化规律取得合理,就有可能使全部射线以同样的轴向速度在光纤中传输,从而消除了模式色散.这种光纤叫自聚焦光纤.

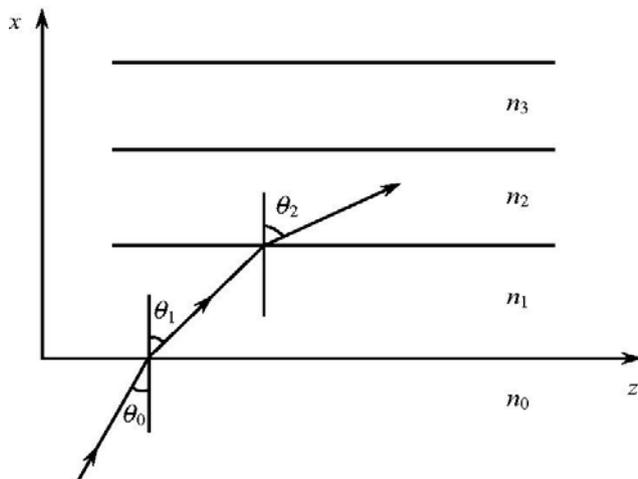


图 6.11.1 光线在多层介质中的折射

这种光纤叫自聚焦光纤.

### 6.11.1 非均匀光纤中子午射线轨迹方程

如图 6.11.1 所示的多层介质,各层的折射率为  $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ , 一条射线以入射角  $\theta$  射到介质  $n_0$  与  $n_1$  的交界面上,发生折射,继续进入不同的介质层中.按折射定律可得

$$n \sin \theta = n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta = \dots \quad (6.11.1)$$

当层厚趋于极小时,即折射率沿  $x$  方向连续变化时,有

$$n(x) \sin \theta(x) = n_0 \sin \theta \quad (6.11.2)$$

这时光线轨迹是一条光滑曲线.取一段小弧  $ds$ ,则有  $(ds)^2 = (dz)^2 + (dx)^2$ ,  $\frac{dz}{ds} = \sin \theta$ . 由此得

$$\left[ \frac{ds}{dz} \right]^2 = 1 + \left[ \frac{dx}{dz} \right]^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta(x)}$$

上式中利用了关系

$$\left[ \frac{dx}{dz} \right]^2 = \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \quad (6.11.3)$$

对式(6.11.3)求导并利用式(6.11.2),可得

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{dx}{dz} \right]^2 = \frac{d}{dz} \left[ \frac{n^2(x)}{n_0^2 \sin^2 \theta} - 1 \right] \quad (6.11.4)$$

将上式展开,可得

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{d}{dx} [n(x)]^2 \quad (6.11.5)$$

这就是光线在非均匀介质中的轨迹方程.当介质中的折射率  $n(x)$  已知时,便可由此方程求出  $x$  与  $z$  之间的关系,即光线的轨迹.对于非均匀光纤,其折射率分布为轴对称.当已知其折射率分布  $n(r)$  及光线在光轴处的入射角  $\theta$  时,按式(6.11.5)就可求出子午面上的光线轨迹方程.

例如,对于均匀介质,  $n(x) = \text{常数}$ ,其轨迹方程为  $\frac{d^2 x}{dz^2} = 0$ ,由此得  $x = Az + B$ ,这是一个直线方程,即光在均匀介质中的传播轨迹是直线.

又如当折射率按抛物函数分布时

$$n^2(x) = n_0^2 - n_2 x^2 \quad (6.11.6)$$

代入式(6.11.5),得

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \theta} (-2n_2 x)$$

解上述方程可得光线轨迹为

$$x = A \sin \left[ \frac{\sqrt{n_2}}{n_0 \sin \theta} \cdot z + \varphi_0 \right] \quad (6.11.7)$$

由上式知,当  $(\sqrt{n_2}/n_0 \sin \theta) z + \varphi_0 = m\pi$  时  $x = 0$ ,因此,当光线束中各光线的入射角  $\theta$  不同时,相应于  $x = 0$  点的  $z$  值亦不同,这意味着这些光线与光轴的交点位于

不同的位置,也就是说光线并不能在这种变折射率光纤中自聚焦.

对于自聚焦光纤,则具有如下折射率分布

$$n(r) = n(0) \operatorname{sech} Ar = \frac{n(0)}{\cosh Ar} \tag{6.11.8}$$

这里双曲余弦函数  $\cosh Ar = (e^{Ar} + e^{-Ar})/2$ .

当  $r=0$  时,光轴处的折射率为  $n_0$ ,即  $n(0) = n_0$ .由式(6.11.3)可得

$$\left[ \frac{dr}{dz} \right]^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 = \frac{n^2(r) - n_0^2 \sin^2 \theta}{n_0^2 \sin^2 \theta}$$

从而求得

$$dz = \frac{n_0 \sin \theta}{\sqrt{n^2(r) - n_0^2 \sin^2 \theta}} dr \tag{6.11.9}$$

将式(6.11.8)表示的  $n(r)$ 分布代入式(6.11.9)并积分,得

$$z = \frac{1}{A} \arcsin \left[ \frac{n_0 \sin \theta \sinh(Ar)}{\sqrt{n^2(0) - n_0^2 \sin^2 \theta}} \right] + c \tag{6.11.10}$$

这里,  $\sinh Ar = (e^{Ar} - e^{-Ar})/2$ .由于当  $r=0$  时  $\sinh Ar$  值恒等于零,因此,对于  $r=0$  的  $z = \frac{1}{A} \arcsin 0 + c = \frac{1}{A} m\pi + c$ ,此值不依赖于入射角  $\theta$ ,即  $z$  每隔  $\pi/A$  距离,就出现光线与  $z$  轴相交于  $r=0$  的会聚点,因此这种光纤能准确地自聚焦,称之为自聚焦光纤.除了能自聚焦这一优点之外,这类光纤中光的正弦传播路径比阶跃型光纤中的锯齿形路径要短,且没有界面上的损耗,故渐变型光纤的透过率要比阶跃型光纤高得多.图 6.11.2 示出了自聚焦光纤子午面内的光线轨迹.

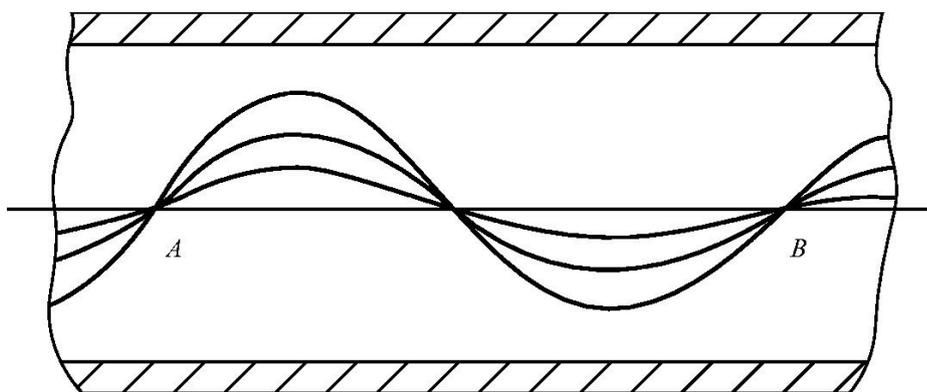


图 6.11.2 自聚焦光纤子午面内的光线轨迹

### 6.11.2 非均匀光纤的标量解法

在非均匀光纤中,由于  $n(r)$  是  $r$  的函数,故用电磁理论求解变得十分困难,目前只对平方律分布折射率的光纤有标量近似解.用标量近似法分析光纤有两种方

法,即应用直角坐标系或柱坐标系.为简单起见,我们应用直角坐标系对子午面  $x-z$  平面求解,在另一子午面  $y-z$  中解法全同,由此求得  $E(r)$ .

平方型折射率指数分布为

$$n(r) = \begin{cases} n(0) \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2} & r \leq a \\ n(a) & r \geq a \end{cases} \quad (6.11.11)$$

现作一近似,设  $r \geq a$  处仍按平方律变化,这种近似在远离截止频率时是可以的,因为此时能量集中在光纤芯子中.因此,只要讨论  $n(x) = n(0) \left[ 1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right]^{1/2}$  的情况即可.其中  $x_0^2 = a^2 / 2\Delta$ ,取  $x$  是因为下面我们转为讨论一维的子午面上的情形.

由非均匀介质中的波动方程

$$\Delta^2 \mathbf{E} + \Delta \left[ \mathbf{E} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right] = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.11.12)$$

由于  $\varepsilon$  是  $r$  的缓变函数,在近似解中,假设  $\Delta \varepsilon = 0$ ,故在非均匀介质中电磁场仍满足亥姆霍兹方程,且  $\mathbf{E}$  在  $z$  方向传播,具有  $e^{-iK_z z}$  的传播因子.假设对于 TE 波,  $\mathbf{E}$  只具有  $E_y$  分量,则由亥姆霍兹分量方程  $\Delta^2 E_y + K_0^2 n^2 E_y = 0$  得

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (K_0^2 n^2 - K_z^2) E_y = 0$$

把  $n(x)$  代入上式可得

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \left[ K_0^2 n^2(0) \left( 1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right) - K_z^2 \right] E_y = 0 \quad (6.11.13)$$

将此方程作一变换,令

$$X = \left[ \frac{K_0^2 n^2(0)}{x_0^2} \right]^{1/4} x = \frac{x}{s} \quad (6.11.14)$$

其中

$$s = \left[ \frac{K_0^2 n^2(0)}{x_0^2} \right]^{-1/4} \quad (6.11.15)$$

以及变换

$$(K_0^2 n^2 - K_z^2) s^2 = 2m + 1 \quad (6.11.16)$$

则方程(6.11.13)变为

$$\frac{d^2 E_y}{dX^2} + [(2m + 1) - X^2] E_y = 0 \quad (6.11.17)$$

这是标准的 Weber 方程形式,它的解为

$$E_y = C_m e^{-\frac{X^2}{2}} H_m(X) \quad (6.11.18)$$

其中厄米多项式

$$H_m(X) = (-1)^m e^{X^2} \frac{d^m}{dX^m} (e^{-X^2}) \quad (6.11.19)$$

将  $X$  代回式(6.11.18)可得场分量  $E_y$  表达式

$$E_y(x) = C_m e^{-\frac{1}{2} \frac{K_0 n^2(0)}{x_0^2} x^2} \cdot H_m \left[ \left[ \frac{K_0^2 n^2(0)}{x_0^2} \right]^{1/4} \cdot x \right] \quad (6.11.20)$$

把  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  分别代入上式, 又由厄米函数值可求出相应于各  $m$  的  $E_y(x)$

$$m = 0 \quad H_0(X) = 1 \quad E_y(x) = C_0 e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (高斯函数)}$$

$$m = 1 \quad H_1(X) = 2X \quad E_y(x) = C_1 2Xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$m = 2 \quad H_2(X) = 4X^2 - 2 \quad E_y(x) = C_2 (4X^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

类似地可以求出  $E_y(y)$  的表达式, 它具有与  $E_y(x)$  的式(6.11.20)完全类似的函数形式, 仅仅把式中变量  $x$  改为  $y$  即可. 把式中的  $x_0$  及  $X$  复原, 综合  $E_y(x)$  及  $E_y(y)$  可得在平方律型折射率光纤中的场分布表达式为

$$E_y(r) = C_{mn} e^{-\frac{\sqrt{2\Delta} K_0 n(0)}{2a} r^2} H_m \left[ \left[ \frac{2\Delta K_0^2 n^2(0)}{a^2} \right]^{1/4} x \right] H_n \left[ \left[ \frac{2\Delta K_0^2 n^2(0)}{a^2} \right]^{1/4} y \right] \quad (6.11.21)$$

式中  $C_{mn}$  是与  $m, n$  有关的常数, 给定阶数  $m, n$ , 便可求出相应模式的场分布.

以上所作的讨论是对  $E_y$  分量的. 事实上, 对其他任何分量, 其做法完全一样的. 因此可以把式(6.11.21)看作是任一场分量的解的表达式. 最简单的情况为  $m = 0, n = 0$ , 所得的模式称之为  $LP_{00}$  模. 选择合适的光纤参数, 使得光纤中只传输  $LP_{00}$  模这一种模式, 即为单模光纤. 将  $m = 0, n = 0$  代入式(6.11.21), 可得  $LP_{00}$  模场的表示式

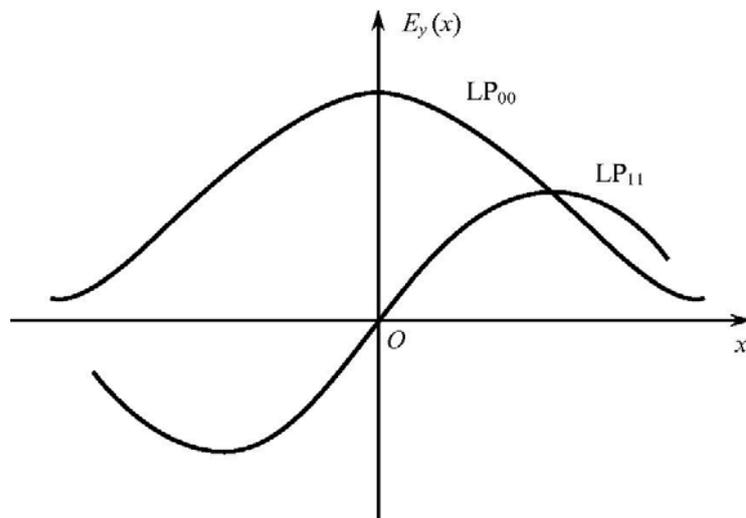


图 6.11.3 平方律型折射率光纤中的  $LP_{00}$ 、 $LP_{11}$  模场分布

$$E_i = C_{00} e^{-\frac{\sqrt{2\Delta} k_0 n(0)}{2a} \cdot r^2} \quad (6.11.22)$$

这是一个高斯函数,其分布情况如图 6.11.3 所示.

上面所提到的 LP 模是线极化波的意思,它表示当入射光线几乎与光纤轴平行而行进时,即在弱导波光纤中可近似地认为光的电场矢量及磁场矢量几乎在垂轴的横截面上,且其横向场的极化方向在传播过程中基本保持不变.这样的波极为接近 TEM 波,我们称这种模式为标量模.在均匀光纤及非均匀光纤的近似解法中都采用了标量解法从而得到  $LP_{mn}$  模.有关这两种光纤的标量解法在此不再详述.

# 7 电磁波在晶体中的传播

## 7.1 晶体基础

### 7.1.1 晶体的结构对称性

固体介质可按其内部结构分为晶体和非晶体两大类.晶体是指内在结构有序的固体,即指其某一微观结构宏观地重复.因此,表现在外形上,晶体是有规则的.晶体的方位有着某种对称的配置.由于其结构重复性的要求,尽管晶体的内部成分(原子、离子、原子团或分子)可能千差万别,但其宏观上只可能存在某几种特定的对称类型,即七大晶系:立方、四方、三方、六方、正交、单斜、三斜.这些对称性是通过一定的对称操作完成的,由这些不同对称操作形成组合形式,使所有晶体在宏观上仅存在 32 种对称类型,即 32 种点群.

由于结构上的对称性,晶体具有物理性质的对称性.所谓物理性质的对称性,可以这样来理解:设想我们对某种晶体沿某个参考轴测得某种物理性质(如介电常数、弹性系数、折射率或吸收率等),然后把设想的某种对称要素作用于晶体.再在上述方向上重新测量此物理量,如果两次测量结果完全相同,则所测的物理性质具有设想的对称性.当然,这一设想的对称性不论是作用在晶体上(测量方向不变,晶体位置按对称性改变)还是作用在被测物理量上(晶体不动,测量方向按对称性改变),其效果是一样的.对称操作包括以下几点:

(1) 纯旋转对称操作.指通过晶体中心旋转 $\alpha$ 角度后与其自身重合,如果把转角记为 $\frac{360^\circ}{n}$ ,则这个对称元素称为 $n$ 次旋转对称轴.由于晶体无限重复性要求,旋转轴不可能是任意次的,只可能有 $n=1,2,3,4,6$ 的五种转轴.

(2) 镜面反映对称操作.指通过晶体中某一个假想平面,晶体作镜像反映后与自身重合,记为 $m$ .

(3) 中心反映对称操作.指晶体中任一点在它与其中心连线延长线上等距离的点周围情况完全相同,即中心点为对称中心.

(4) 晶体绕某个轴旋转 $\alpha$ 角再作中心反映操作后得到复原的变换称为旋轴倒反变换.对应的对称元素称为旋轴倒反轴,记为 $\bar{n}$ .当然由晶体对称性要求, $\bar{n}$ 也只可能有五种,即 $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$ .而实际上,1次倒翻轴 $\bar{1}$ 等效于对称中心,2次倒反轴等效于对称面,3次倒反轴等效于3次转轴加一个对称中心,6次倒反轴等效于3次转轴加一个垂直于该轴的对称面.这四个都不是独立的对称操作,只有 $\bar{4}$ 是独立

的对称操作.因此晶体宏观对称性中只有 8 种基本的对称要素:1、2、3、4、6、 $\bar{1}$ 、 $m$ 、 $\bar{4}$ .

这些对称元素可以组合起来,形成了共为 32 种不同形式的晶体类型,又称 32 个点群.例如,NaCl 晶体属立方晶系,它具有 3 个 4 次轴,4 个 3 次轴和 6 个 2 次轴,属 432 晶类.

以上所述的晶体的各种对称操作可以用如下的矩阵描述,并用图示给出当坐标固定不动,对一个点作各种操作时的坐标变换过程.

1) 旋转轴对称.晶格绕轴转  $2\pi/n$  后,能够得到与原来相同的图形.有 1、2、3、4、6 次转轴,如  $2_z$  表示绕  $z$  轴转  $2\pi/2$  度. $2_z$  操作如图 7.1.1 所示.

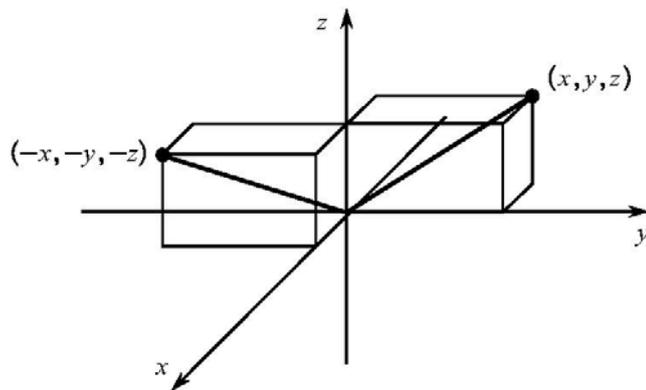


图 7.1.1 旋转轴对称  $2_z$  操作

这种旋转轴对称  $2_z$  操作也可用矩阵表示

$$2_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) 中心对称  $\bar{1}$ . 以原点为中心作对称操作.中心对称操作  $\bar{1}$  如图 7.1.2 所示.

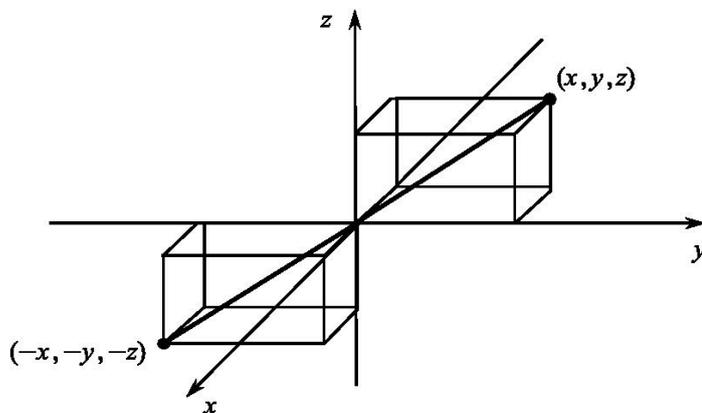


图 7.1.2 中心对称操作

中心对称  $\bar{1}$  的矩阵表示

$$\bar{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) 旋转反演轴. 绕轴旋转后以该轴上某一点做中心反演, 旋转可以是 1、2、3、4、6 次转轴, 绕轴做几度旋转后, 再做中心反演. 例如,  $\bar{4}_2$  表示绕  $z$  轴转  $2\pi/4$  弧度旋转, 再做中心对称.  $\bar{4}_2$  操作如图 7.1.3 所示.  $\bar{4}_2$  旋转反演操作的矩阵表示

$$\bar{4}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

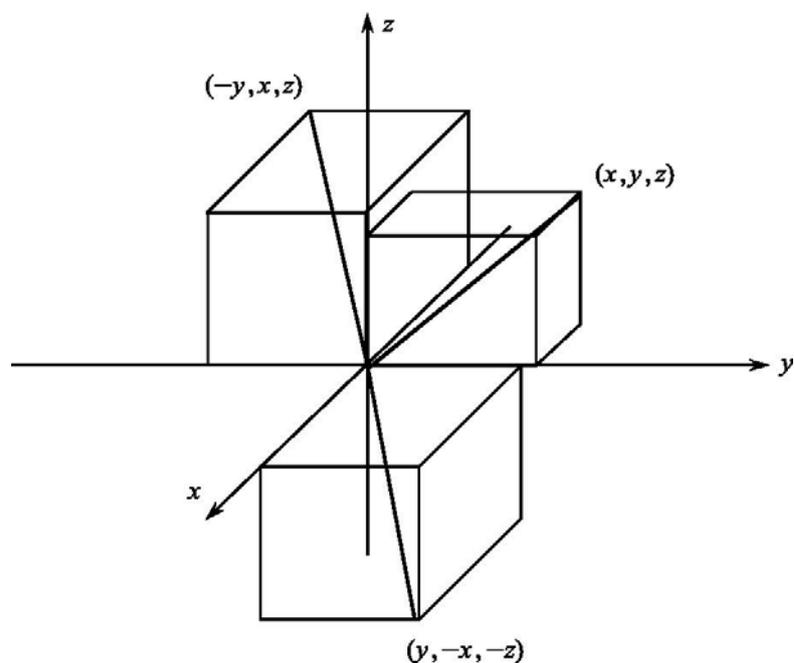


图 7.1.3 旋转反演操作

例如,  $(x, y, z)$  点进行了以上变换后成为  $(x', y', z')$ , 可以表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$$

4) 镜面对称操作  $m$ . 晶格以某一平面为镜面得到与原来相同的图形例如,  $m_y$  表示以  $xz$  平面为镜面做镜面对称.  $m_y$  的操作如图 7.1.4 所示.

$m_y$  的镜面对称操作的矩阵表示

$$m_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上操作也可以对所加电场进行,也就是说,晶体不动(即点不动),而坐标进行以上操作变换.例如对  $\bar{4}_2$  类晶体,具有  $[\bar{4}]_z$  对称,可以将坐标系做对称变换,新老坐标的关系可写为

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x, \\ z' &= -z, \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

因此,坐标绕  $z$  轴的四度象转轴的对称变换矩阵为

$$[\bar{4}]_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

坐标绕  $z$  轴的四度象转轴的对称变换如图 7.1.5 所示,先绕  $z$  轴转  $90^\circ$ ,再以原点作中心对称操作.

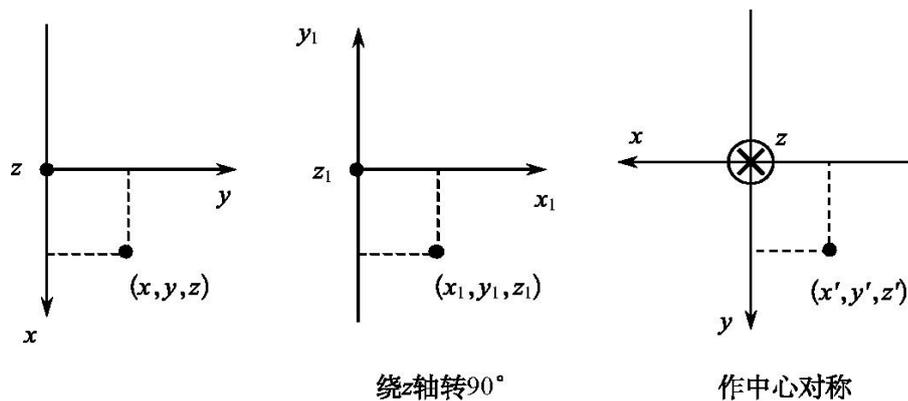


图 7.1.5 坐标绕  $z$  轴的四度象转轴的对称变换

几种对称操作的两种不同表达方式见表 7.1.1,晶体的 7 大晶系特点及结构如表 7.1.2 所示.其中的基矢  $a$ 、 $b$ 、 $c$  以及与坐标轴夹角如图 7.1.6 所示.

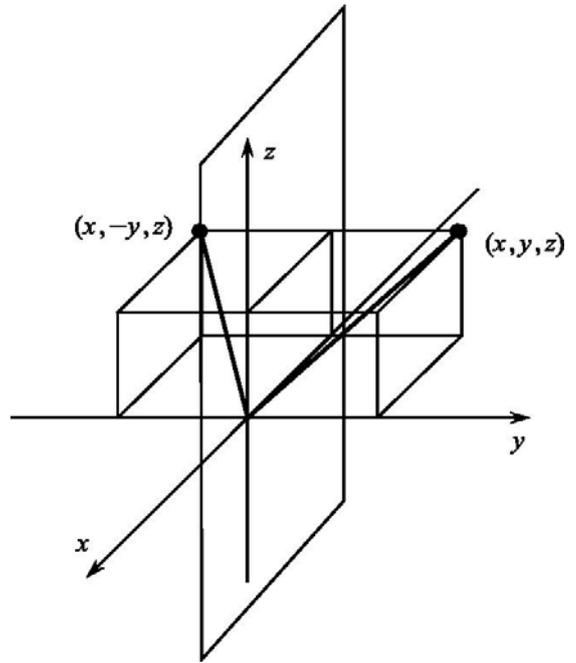
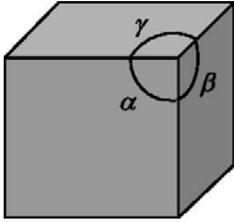
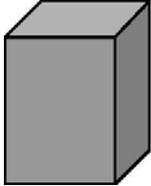
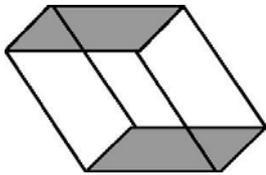
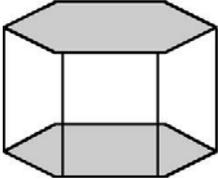
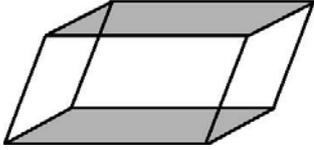
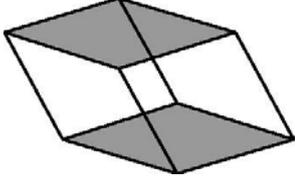


图 7.1.4 镜面对称操作

表 7.1.1 几种对称操作的两种不同表达方式

	坐标(电场)转动,点(晶体)不动 变换矩阵 $T$	坐标(电场)转动,点(晶体)不动 变换矩阵 $T^{-1} = T^*$
一次转轴	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	同左
中心对称(反演)	$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	同左
$x$ 方向 2 次转轴	$2_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	同左
$y$ 方向 2 次转轴	$2_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	同左
$xz$ 面镜面反射	$m_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	同左
$z$ 方向 4 次转轴	$4_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$4_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
旋转反演: $z$ 方向 4 次转轴, 再作坐标反演(中心对称)	$\bar{4}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\bar{4}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
一般式:当绕 $z$ 轴转 $\alpha$ 角时	$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

表 7.1.2 晶体的 7 大晶系特点及结构

晶系名称	结构图形	介电常数矩阵	结构特点
立方		$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{pmatrix}$	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
四方 (正方)		$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
三方 (三角)		$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$
六方 (六角)		$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$a = b \neq c$ $\gamma = 120^\circ$ $\alpha = \beta$
正交		$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
斜交 (单斜)		$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{31} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$
三斜		$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$

### 7.1.2 介电张量

有些物理量在各向异性介质(晶体)中,一般需要 9 个或更多的分量才能表达清楚.如晶体中的介电常数  $\epsilon$ ,它反映了晶体中电极化与电场的关系.在各向同性介质中, $\epsilon$ 是标量,故由

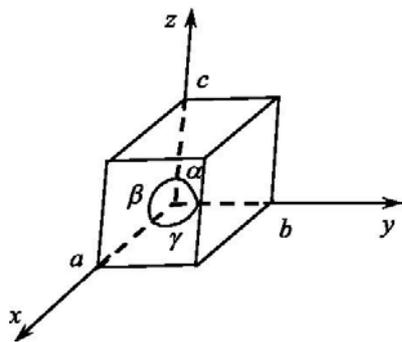


图 7.1.6 晶体结构参数示意图

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

可见,  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  具有相同的方向.

但在各向异性介质中,  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  方向往往不一致, 实验表明  $\mathbf{D}$  的任一分量  $D_i$  都与电场  $\mathbf{E}$  的三个分量  $E_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 有关, 且其贡献各不相同, 可写为

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (7.1.1)$$

或写成

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7.1.2)$$

其中两个下标分别表示分量  $\epsilon_{ij}$  所在的行和列, 这个以 9 个数表示的介电常数就是二阶张量. 而标量、矢量则分别为零阶、一阶张量.

三阶和三阶以上的张量为高阶张量, 如在非线性光学中的极化强度  $\mathbf{P}$  与电场  $\mathbf{E}$  的关系可写为

$$\mathbf{P} = \epsilon \chi^{(1)} \mathbf{E} + \epsilon \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \epsilon \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$$

式中  $\chi^{(1)}$  为二阶张量, 表示线性极化, 而  $\chi^{(2)}$  为三阶张量,  $\chi^{(3)}$  为四阶张量..., 它们可分别表示为  $\chi_{ij}^{(1)}, \chi_{ijk}^{(2)}, \chi_{ijkl}^{(3)}, \dots$ . 三阶张量则包括了共 27 个元, 以 3 个下标表示, 由  $\epsilon \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E}$  表示的这一项二次非线性极化, 可写为

$$P_i = \epsilon \sum_{j,k=1}^3 \chi_{ijk} E_j E_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (7.1.3)$$

本章的前 6 节将着重讨论晶体的线性光学性质, 从第 7 节起将对晶体中的非线性极化以及非线性光学效应的电磁理论基础作介绍.

晶体中的线性光学性质只与二阶介电张量 ( $\epsilon_{ij}$ ) 有关. 一般的二阶张量共有 9 个分量, 但是可以证明, 对于任何物质, 介电张量必定是对称的. 所谓对称张量, 是指下标中有两个或多个下标交换位置而张量的分量值保持不变. 因此二阶介电张量, 其独立分量数就由 9 个减至 6 个. 下面将从麦克斯韦方程组及能量守恒定律出发来证明介电张量的对称性.

设对于一般物质, 其物质方程(7.1.1)可写为如下形式

$$D_k = \sum_l \epsilon_{kl} E_l \quad (7.1.4)$$

或

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{1l} E_l \\ D_2 = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{2l} E_l \\ D_3 = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{3l} E_l \end{array} \right. \quad (7.1.5)$$

在一些书上,常把式(7.1.5)中求和号省去,即采用形式张量记号法

$$D_k = \varepsilon_{kl} E_l \quad (7.1.6)$$

式中右边求积时两处出现的  $l$  应理解为对所有  $l$  求和.

假定在第 1 章中的电能密度  $w_e$ 、磁能密度  $w_m$  以及坡印亭矢量(能流密度)  $\mathbf{S}$  的表达式统统有效

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} E_k \varepsilon_{kl} E_l \quad (7.1.7)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (7.1.8)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (7.1.9)$$

上式中假设了介质的磁导率  $\mu$  为常数.当然也有磁晶体,但因为磁化对于光学现象(快速振荡)的影响很小,所以在此可以把磁各向异性忽略.如果非线性极化涉及低速振荡的电磁场时,则磁各向异性应考虑在内.

据麦克斯韦第一、第二方程

$$\Delta \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\Delta \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

在介质中,设  $\mathbf{J} = 0$ ,把第二式点乘  $\mathbf{E}$ ,减去第一式点乘  $\mathbf{H}$ ,得

$$(\Delta \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - (\Delta \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

或改写为如下形式

$$-\Delta \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad (7.1.10)$$

式中用矢量上的黑点表示对时间的一阶导数.

把式(7.1.5)表示的  $\mathbf{D}$  对  $\mathbf{E}$  的关系代入上式,得

$$-\Delta \cdot \mathbf{S} = \sum_{k,l} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\mu H^2) \quad (7.1.11)$$

上式左端为坡印亭矢量的散度,表示单位体积内电磁场能量的变化率,而等式右端

的第二项表示磁能的变化率.从能量守恒定律出发,应当使等式右端第一项成为单位体积内电场能的变化率.但是,从式(7.1.7)求出的单位体积的电场能变化率应当为

$$\frac{dw_e}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} (E_k \varepsilon_{kl} E_l + E_l \varepsilon_{kl} E_k) \quad (7.1.12)$$

将上式与式(7.1.11)右端第一项比较,可见它们并不相等,式(7.1.11)右端第一项不是电能密度,把这一项作如下的变化

$$\sum_{k,l} E_k \varepsilon_{kl} E_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \varepsilon_{kl} (E_k E_l + E_l E_k) + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \varepsilon_{kl} (E_k E_l - E_l E_k) \quad (7.1.13)$$

若使上式中右端第二项等于零,即

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} \varepsilon_{kl} (E_k E_l - E_l E_k) = 0 \quad (7.1.14)$$

那么式(7.1.11)的右端第一项即与  $w_e$  相等.由于  $k$  和  $l$  都是傀标, $k$  和  $l$  都遍取 1、2、3 同样的值(即代表了  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分量),因此在式(7.1.14)中的第二项中交换  $k$  和  $l$  时表达式不变,即变成如下形式

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} (\varepsilon_{kl} E_k E_l - \varepsilon_{lk} E_l E_k) = 0$$

或写为

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} [(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{lk}) E_k E_l] = 0 \quad (7.1.15)$$

不论场  $\mathbf{E}$  取何值,即不论  $E_k$ 、 $E_l$  取任何数值,等式(7.1.15)都必须成立.因此只可能有

$$\varepsilon_{li} = \varepsilon_{kl} \quad (7.1.16)$$

这意味着,不论是具有对称性的晶体介质,或者是不具有对称性的其他介质,其介电张量必定是对称的.它只有 6 个而不是 9 个独立分量.这一对称性质是能量守恒定律的要求.

因此,介电张量共具有 6 个独立参数

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

这是一个对称阵,可以通过对角化将其化为对角阵

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon \end{bmatrix}$$

它们代表了三个不同轴向的不同的物理性质.

对于双轴晶体:  $\epsilon \neq \epsilon \neq \epsilon$ .

对于单轴晶体:  $\epsilon = \epsilon \neq \epsilon$ .

对于立方晶体,即各向同性:  $\epsilon = \epsilon = \epsilon$ .

## 7.2 晶体中光波的结构

光波是一种电磁波,无论解决线性或非线性问题,光在晶体中的传播过程仍是从麦克斯韦方程及物质方程出发.对于晶体,一般地有  $\mu_r = 1$  及  $\sigma = 0$ ,因此晶体的光学性质完全由  $\epsilon$  所确定,而此时  $\epsilon$  则为二阶张量,物质方程成为

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & & \\ & \epsilon & \\ & & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (7.2.1)$$

### 7.2.1 晶体中光波的 $E$ 、 $D$ 、 $H$ 、 $K$ 和 $S$ 的关系

设晶体中的单色平面波为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \quad (7.2.2)$$

对这种时谐场,有  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$ ,  $\Delta \rightarrow -i\mathbf{K}$ ,  $\Delta \times \rightarrow -i\mathbf{K} \times$ , 而晶体中的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \Delta \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & (1) \\ \Delta \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & (2) \\ \Delta \cdot \mathbf{D} = 0 & (3) \\ \Delta \cdot \mathbf{H} = 0 & (4) \end{cases} \quad (7.2.3)$$

由(1)可得

$$-i\mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\mu_0 (i\omega) \mathbf{H}$$

由(2)可得

$$-i\mathbf{K} \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D}$$

整理后可得

$$\frac{1}{\omega} \mathbf{K} \times \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7.2.4)$$

$$\frac{1}{\omega} \mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\mathbf{D} \quad (7.2.5)$$

以及坡印亭矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (7.2.6)$$

按此三个关系式画出  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$  间相互关系如图 7.2.1. 综合式(7.2.4)~式(7.2.6), 可得出关于晶体中光波结构的重要结论:

- (1)  $\mathbf{H} \perp \mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$ , 且  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$  均位于与  $\mathbf{H}$  垂直的同一平面内.
- (2)  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{K}$  组成右手螺旋正交系统,  $\mathbf{K}$  是等相面波法线, 因此光波的振动矢量是  $\mathbf{D}$ .
- (3)  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{S}$  组成另一组右手螺旋正交系统. 垂直于能流方向  $\mathbf{S}$  的矢量是  $\mathbf{E}$ .
- (4) 由于晶体中  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  的方向一般不同, 故  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{S}$  亦不同向.  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  的夹角与  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{S}$  的夹角相等, 称为离散角  $\alpha$ .

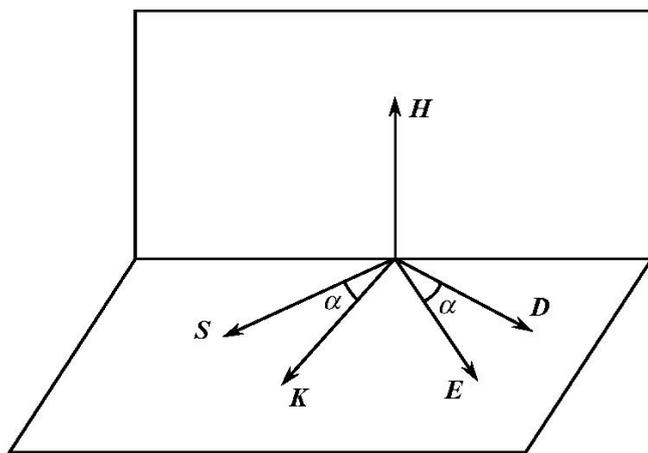


图 7.2.1 晶体中光波的各电磁矢量间相对空间关系

波矢量  $\mathbf{K}$  的方向代表了等相面传播的方向, 即光波波阵面的传播方向, 故称光波法线方向. 等相面传播的速度即为相速度  $v_{\phi}$ , 它可表示为

$$\mathbf{v}_{\phi} = v_{\phi} \cdot \mathbf{K}_0 = \frac{c}{n} \cdot \mathbf{K}_0 \quad (7.2.7)$$

$\mathbf{K}_0$  为  $\mathbf{K}$  方向上的单位矢量.

坡印亭矢量  $\mathbf{S}$  的方向代表了等能面传播的方向, 即光能量传递的方向, 称之为光波射线方向. 根据能流密度矢量  $\mathbf{S}$  的物理意义, 可以类似地定义光波射线速度  $\mathbf{v}_s$ , 它可表示为

$$\mathbf{v}_s = v_s \cdot \mathbf{t} = \frac{\mathbf{S}}{w} = \frac{\perp \mathbf{S} \perp}{w} \cdot \mathbf{t} \quad (7.2.8)$$

$\mathbf{t}$  为  $\mathbf{S}$  方向的单位矢量. 光波射线速度大小等于功率密度  $S$  除以能量密度, 而方向就是坡印亭矢量的方向.

可以证明波射线速度  $v_s$  大小与相速度  $v_\phi$  的大小有如下关系

$$v_\phi = v_s \cos \alpha \quad (7.2.9)$$

证明 由

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E} \cdot \left[ -\frac{\mathbf{K} \times \mathbf{H}}{\omega} \right] + \mathbf{B} \cdot \left[ \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{E}}{\mu_0 \omega} \right] \right] \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

利用矢量公式  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  可把式(7.2.10)改写为

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2\omega} \left[ (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{K} + \frac{(-\mathbf{B} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{K}}{\mu_0} \right] \\ &= \frac{|\mathbf{K}|}{\omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{K}_0 = \frac{1}{v_\phi} \mathbf{S} \cdot \mathbf{K}_0 \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

由  $v_s = \mathbf{S}/w$  可得

$$v_\phi = v_s \cos \alpha \quad (7.2.12)$$

类似于折射率  $n = c/v_\phi$ , 我们定义射线折射率  $n_s$  为

$$n_s = c/v_s = n \cos \alpha \quad (7.2.13)$$

### 7.2.2 菲涅耳波法线方程及波射线方程

根据以上求得的晶体中光波各矢量间关系, 可以求出波法线(或波射线)方程, 即当已知晶体特征张量  $[\epsilon_j]$  时, 若给定波法线矢量  $\mathbf{K}$ (或坡印亭矢量  $\mathbf{S}$ ) 时, 求出光波在晶体中的传播方向  $\mathbf{K}_0(t)$ 、偏振态  $\mathbf{E}$ 、( $\mathbf{E}_s$ )、折射率  $n(n_s)$ 、相速  $v_\phi$  (光线速度  $v_s$ )。

用  $\mathbf{K}$  乘以式(7.2.4), 并用式(7.2.5)代入消去  $\mathbf{H}$ , 得

$$\mathbf{D} = -\frac{\bar{n}^2}{\mu_0 c^2} \mathbf{K}_0 \times (\mathbf{K}_0 \times \mathbf{E}) \quad (7.2.14)$$

这里  $\mathbf{K}_0$  是  $\mathbf{K}$  的单位矢量. 利用矢量公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

式(7.2.14)可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \bar{n}^2 [\mathbf{E} - \mathbf{K}_0 (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E})] \\ &= \epsilon_0 \bar{n}^2 \left[ \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon} - \mathbf{K}_0 (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E}) \right] \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

这就是晶体光学第一基本方程.

式(7.2.15)可改写为

$$\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \bar{n}^2} - \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon} = -\mathbf{K}_0 (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E}) \quad (7.2.16)$$

或

$$\mathbf{D} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{K}_0 (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E})}{\frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{n^2}} \quad (7.2.17)$$

写为分量形式

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} K_{01} \\ K_{02} \\ K_{03} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

则式(7.2.17)可写为分量形式

$$\begin{cases} D_1 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} K_{01} (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E})}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{n^2}} \\ D_2 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} K_{02} (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E})}{\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{n^2}} \\ D_3 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} K_{03} (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E})}{\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{n^2}} \end{cases} \quad (7.2.18)$$

由于  $\mathbf{K}_0 \perp \mathbf{D}$ , 则  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{K}_0 = 0$ , 即  $D_1 K_{01} + D_2 K_{02} + D_3 K_{03} = 0$ , 把式(7.2.18)中三式分别与  $\mathbf{K}_0$  三分量乘积并相加, 可得

$$\frac{K_{01}^2}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{n^2}} + \frac{K_{02}^2}{\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{K_{03}^2}{\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{n^2}} = 0 \quad (7.2.19)$$

或写成

$$\frac{K_{01}^2}{\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{K_{02}^2}{\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{K_{03}^2}{\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n^2}} = 0 \quad (7.2.20)$$

这就是菲涅耳波法线方程. 这里

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}, \quad n_3 = \sqrt{\varepsilon_3} \quad (7.2.21)$$

是给定晶体的三个主折射率. 这样, 当给定一个波法线方向  $\mathbf{K}_0$  ( $K_{01}$ ,  $K_{02}$ ,  $K_{03}$ ) 时, 就可以由菲涅耳波法线方程求出这一方向的光波在该方向上的折射率  $n$ . 当然, 这是一个四次方程, 可以预料,  $n$  必有多个值. 求  $n$  的方法也即求解菲涅耳波法线方程的方法如下.

通分式(7.2.20), 得

$$\begin{aligned} & (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2)n^2 K_{01}^2 + (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_3^2)n^2 K_{02}^2 \\ & + (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2)n^2 K_{03}^2 = 0 \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

把已知的  $K_{01}$ 、 $K_{02}$ 、 $K_{03}$  值代入上式,就可求得两个不相等的实根  $(n')^2$  和  $(n'')^2$ ,由此解得两个有物理意义的不相等的实根  $n'$  和  $n''$ 。

例如有一特殊波法线,其方向沿  $x_1$  轴,即  $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$ ,把  $K_{01} = 1$ ,  $K_{02} = K_{03} = 0$  代入式(7.2.22),得

$$(n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2)n^2 = 0$$

可求得

$$n' = \pm n_2 \quad \text{负值不合,舍去}$$

$$n'' = \pm n_3 \quad \text{负值不合,舍去}$$

由此解得光波  $\mathbf{K}(k, 0, 0)$  入射晶体时,可以有两个不同值的折射率,即意味着有两个不同的光波相速度.与这两个折射率所对应的两个偏振方向,可以将这两个折射率值  $n'$  与  $n''$  分别代入式(7.2.18),就可求出相应的两个  $\mathbf{D}$  矢量的振动方向  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{D}'$ 。

上例中将  $n' = n_2$  代入式(7.2.18)三个式中,可得

$$D_1 = 0 \quad (\text{因为 } \mathbf{D} \perp \mathbf{K}, \mathbf{K} \text{ 为 } (k, 0, 0))$$

$$D_3 = 0 \quad (\text{因为 } K_{03} = 0)$$

$$D_2 \text{ 则为有限值}$$

因此,  $\mathbf{D}$  方向为平行于  $x_2$  轴(即  $y$  轴)。

再把  $n'' = n_3$  代入式(7.2.18),可得出  $\mathbf{D}$  方向平行于  $x_3$  轴( $z$  轴)。对应于一个波法线方向  $\mathbf{K}$ ,有两个相互垂直的电振动矢量方向  $\mathbf{D}$  及  $\mathbf{D}'$ ,它们在晶体中以不同的相速度  $\frac{c}{n'}$  及  $\frac{c}{n''}$  传播.以上当然是对一个特殊的入射方向所作的求解,对于一般情况也可以如此求解.可以证明在一般情况下有如下几点结论:

(1) 晶体中给定一个波法线方向  $\mathbf{K}$ ,只允许有两个特殊的线偏振光传播,它们的电振动矢量相互垂直,即  $\mathbf{D} \perp \mathbf{D}'$ ,且  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{D}' \perp \mathbf{K}$ 。

(2) 这两个线偏光在晶体中传播速度不同,即相应的折射率不同,为  $n'$ 、 $n''$ 。

(3) 对应于同一个  $\mathbf{K}$  方向,与  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{D}'$  相应的  $\mathbf{E}$  矢量方向也不相同,为  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{E}'$ ,与之对应的  $\mathbf{S}$  与  $\mathbf{S}''$  也不同向。

按以上三点结论,并考虑到  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{S}$  各组成正交右手螺旋系统,以及一般地  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{D}'$  有离散角  $\alpha'$ 、 $\mathbf{E}'$  与  $\mathbf{D}$  有离散角  $\alpha''$ ,可以画出晶体中两线偏振光的  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$  之间的关系,如图 7.2.2。

既然一个波法线方向对应于两个  $\mathbf{S}$  方向,那么用另一句话说,给定一个光波射线方向  $\mathbf{S}$ ,同样可求出与之对应的两个波法线方向.在这两个方向上允许两种偏振的单色平面波传播,这就是用菲涅耳射线方程求解晶体光学的出发点。

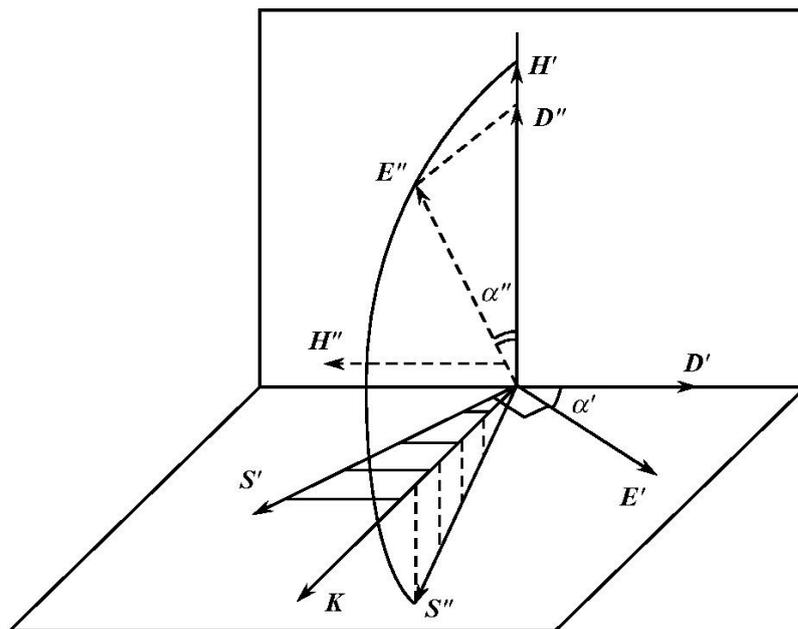


图 7.2.2 晶体中两个相互垂直的偏振光的各电磁矢量间相对空间关系

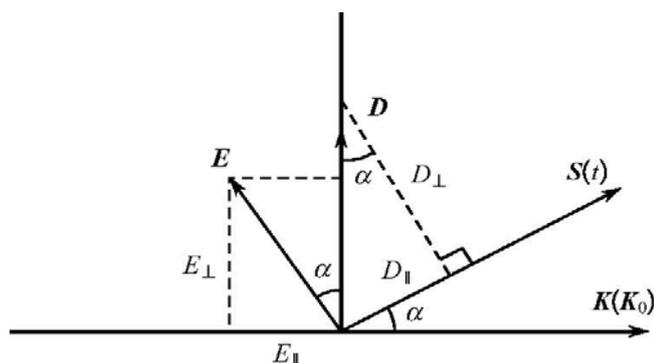


图 7.2.3  $E_{\parallel}$ 、 $E_{\perp}$ 、 $D_{\parallel}$ 、 $D_{\perp}$  与  $E$ 、 $D$ 、 $K$ 、 $S$  之间的关系

由晶体光学第一基本方程(7.2.15),  $D = \epsilon n^2 [E - K_0 (K_0 \cdot E)]$ , 由图 7.2.3 可知  $K_0 (K_0 \cdot E) = E_{\parallel}$ , 而  $[E - E_{\parallel}] = E_{\perp}$ . 因此, 上述方程又可改写为

$$D = \epsilon n^2 E_{\perp} \tag{7.2.23}$$

即

$$|D| = \epsilon n^2 |E| \cos\alpha$$

而  $D_{\perp}$  分量如图所示, 且

$$|D_{\perp}| = |D| \cos\alpha = \epsilon n^2 \cos^2\alpha |E|$$

或写作

$$D_{\perp} = \epsilon n^2 E \tag{7.2.24}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 n_s^2} \mathbf{D}_\perp \quad (7.2.25)$$

同样,利用图中  $\mathbf{D}$  分量的关系有

$$t(\mathbf{t} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{D}_\parallel \quad (7.2.26)$$

$$\mathbf{D} - t(\mathbf{t} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{D}_\perp \quad (7.2.27)$$

可将式(7.2.25)改写为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 n_s^2} [\mathbf{D} - t(\mathbf{t} \cdot \mathbf{D})] \quad (7.2.28)$$

这就是晶体光学第二基本方程.

类似于式(7.2.14)到式(7.2.20)的推导过程,可以导出菲涅耳波射线方程.

当然,由式(7.2.23)与式(7.2.25)可以看出这两个方程完全是对偶的;同样,晶体光学的第一基本方程(7.2.15)与第二基本方程(7.2.28)也完全是对偶的,只要注意到它们之间的对偶原则

$$\begin{aligned} \mathbf{K} - \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{K}_0, t, \quad c, \mu, v^0, n, \epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3 \\ \mathbf{S} - \mathbf{D}, \mathbf{E}, -t, -\mathbf{K}_0, \frac{1}{c}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{v_s}, \frac{1}{n_s}, \frac{1}{\epsilon_1}, \frac{1}{\epsilon_2}, \frac{1}{\epsilon_3} \end{aligned}$$

也可直接由菲涅耳波法线方程(7.2.20)写出菲涅耳波射线方程

$$\frac{\hat{t}_1^2}{n_1^2 - n_s^2} + \frac{\hat{t}_2^2}{n_2^2 - n_s^2} + \frac{\hat{t}_3^2}{n_3^2 - n_s^2} = 0 \quad (7.2.29)$$

波射线方程解法则完全与前面解波法线方程时一样.可以得到如下结论:

(1) 对于一个给定的波射线方向  $\mathbf{t}$ ,有两个光射线折射率  $n'_s$  和  $n''_s$ .与之相应的两个光射线速度分别为  $v'_s$  和  $v''_s$ .

(2) 沿给定的波射线方向  $\mathbf{t}$ ,只有两个特许的线偏振电磁波在晶体中传播,它们的电振动矢量  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{E}'$  相互垂直.

(3) 对应于一个  $\mathbf{S}$ (即  $\mathbf{t}$ )方向,与  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}'$  相对应的  $\mathbf{D}$  矢量也具两个方向,即  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{D}'$ ,相应于这两个  $\mathbf{D}$  矢量有两个不同方向的波法线矢量  $\mathbf{K}$  及  $\mathbf{K}'$ .

## 7.3 电磁波在不同晶系的晶体中的传播

本节将从菲涅耳方程求解出发,讨论光在各类晶体中的传播情况.

### 7.3.1 高级晶族(立方晶系)晶体

立方晶系的介电张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (7.3.1)$$

即张量中三个主分量相等,故有  $n_1 = n_2 = n_3 = n_0$ , 其中  $n_0$  满足

$$\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon n_0^2 \quad (7.3.2)$$

将此式代入菲涅耳波法线方程(7.2.20), 可得  $(n^2 - n_0^2)^2 = 0$ , 解此式得

$$n' = n'' = n_0 \quad (7.3.3)$$

式(7.3.3)说明, 在立方晶体中, 沿任何方向入射的光波其折射率均相等. 同时可求得

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (7.3.4)$$

因此, 对立方晶体有  $\mathbf{D} // \mathbf{E}, \mathbf{S} // \mathbf{K}$ . 这就是说, 在立方晶系晶体中传播的光波如同在各向同性介质中传播一样. 高级晶族(立方晶系)晶体常被称为光学各向同性体.

### 7.3.2 中级晶族(三方、四方、六方晶系)晶体

#### 1. 求解 $n'$ 、 $n''$

中级晶族晶体的介电张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon n_0^2 & & \\ & \varepsilon n_e^2 & \\ & & \varepsilon n_0^2 \end{bmatrix}$$

令  $n_1 = n_2 = n_0, n_3 = n_e$ , 且  $n_0 \neq n_e$ , 选取主轴  $x_3$  为高次对称轴, 而晶体的主轴  $x_1, x_2$  是由晶体结构决定的. 由于此时  $\varepsilon = \varepsilon$ , 介电常数张量有旋转对称性, 光波法线  $\mathbf{K}$  绕  $z$  轴以定角旋转时其光学特性是等同的.

因此, 使光波法线  $\mathbf{K}$  在  $x_2 x_3$  平面内, 这在中级晶体中是不失一般性的, 则得

$$\mathbf{K}_0 = (0, \sin \theta, \cos \theta) \quad (7.3.5)$$

将上式的  $\mathbf{K}_0$  三个分量代入式(7.2.22), 可得

$$(n^2 - n_0^2)[n_0^2 n_e^2 - n^2(n_0^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta)] = 0 \quad (7.3.6)$$

由此解得两个有物理意义的正实根

$$\begin{cases} n' = n_0 \\ n'' = \sqrt{\frac{n_0^2 n_e^2}{n_0^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \end{cases} \quad (7.3.7)$$

上式说明, 在中级晶族晶体中, 对于给定的波法线方向  $\mathbf{K}_0$ , 存在两种光波, 它们的折射率不同. 一种光波的折射率为  $n' = n_0$ , 它不受入射光波法线方向的影响, 即寻

常光.另一种光波的折射率  $n' = n_e(\theta)$  是随入射光  $\mathbf{K}_0$  方向而变,即为  $\theta$  角的函数.这里  $\theta$  角是  $\mathbf{K}_0$  与  $x_3$  轴的锐角夹角,其大小由式(7.3.7)的第二式所定.特别地,当  $\theta = 0^\circ$  时,即  $\mathbf{K}_0$  沿  $x_3$  主轴方向入射,则  $n' = n_o$ ,也即  $n' = n'' = n_o$ ,此时无双折射现象. $x_3$  就是晶体的光轴.当  $\theta = 90^\circ$  时, $n' = n_e$ , $n'' = n_o$ .当  $\theta$  为其他任意角时, $n'$  介于  $n_o$  与  $n_e$  之间,与之相应的光线即为非常光,或 e 光.

## 2. o 光与 e 光的偏振方向

晶体光学第一方程(7.2.15)可改写为关于  $\mathbf{E}$  的分量方程

$$n_i^2 E_i = n^2 [E_i - K_{0i}(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E})] \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.3.8)$$

整理后可得

$$\begin{cases} [n_1^2 - n^2(1 - K_{01}^2)]E_1 + n^2 K_{01} K_{02} E_2 + n^2 K_{01} K_{03} E_3 = 0 \\ n^2 K_{02} K_{01} E_1 + [n_2^2 - n^2(1 - K_{02}^2)]E_2 + n^2 K_{02} K_{03} E_3 = 0 \\ n^2 K_{03} K_{01} E_1 + n^2 K_{03} K_{02} E_2 + [n_3^2 - n^2(1 - K_{03}^2)]E_3 = 0 \end{cases} \quad (7.3.9)$$

任取  $\mathbf{K}(K_{01}, K_{02}, K_{03}) = K_0(0, \sin\theta, \cos\theta)$ ,并将  $n_1 = n_2 = n_o$ , $n_3 = n_e$  代入式(7.3.9),并由此式讨论 o 光与 e 光的偏振态:

(1) o 光, $n' = n_o$ ,代入式(7.3.9)中的  $n$  中,得

$$\begin{cases} (n_o^2 - n_o^2)E_1 = 0 \\ (n_o^2 - n_o^2 \cos^2 \theta)E_2 + n_o^2 \sin\theta \cos\theta E_3 = 0 \\ n_o^2 \sin\theta \cos\theta E_2 + (n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \theta)E_3 = 0 \end{cases} \quad (7.3.10)$$

在一般情形下, $\theta \neq 0$ , $\theta \neq 90^\circ$ ,且  $n_o \neq n_e$ ,则上式中第二、三两式的系数行列式不等于零,故只有  $E_2 = E_3 = 0$ ,再由第一式知,要使  $\mathbf{E}(E_1, E_2, E_3)$  为非零解,只有使  $E_1 \neq 0$ ,即  $E_1 = E$ ,故得

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(E, 0, 0) \quad (7.3.11)$$

与  $\mathbf{K}_0$  点乘可知  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}_0 = 0$ ,即此时  $\mathbf{E} \perp \mathbf{K}_0$ ,把这个与  $n'$  (o 光)相应的  $\mathbf{E}$  矢量记为  $\mathbf{E}'$ .由  $\mathbf{D} = [\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{E}$ ,知

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} n_o^2 & & \\ & \boldsymbol{\varepsilon} n_o^2 & \\ & & \boldsymbol{\varepsilon} n_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7.3.12)$$

将式(7.3.11)代入上式,可得

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} n_o^2 E, 0, 0) \quad (7.3.13)$$

由此得出结论:寻常光(o 光)是线偏振光,其  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{D}$ ,因此  $\mathbf{K} \parallel \mathbf{S}$ ,波法线与波射线方向一致, $\mathbf{E}$  垂直于主截面(由  $\mathbf{K}$  与光轴  $x_3$  组成的平面),它的折射率为  $n_o$ .这

些特性与光在各向同性的介质中表现完全一样,因此又叫寻常光.

(2) e 光,有

$$n'' = n_e(\theta) = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}$$

将此值代入式(7.3.9)的  $n$  中,得

$$\begin{cases} (n_o^2 - n''^2) E'_1 = 0 \\ (n_o^2 - n''^2 \cos^2 \theta) E'_2 + n''^2 \sin \theta \cos \theta E'_3 = 0 \\ n''^2 \cos \theta \sin \theta E''_2 + (n_e^2 - n''^2 \sin^2 \theta) E'_3 = 0 \end{cases} \quad (7.3.14)$$

由上式第一式,由于  $n_o^2 \neq n''^2$ ,故必有

$$E'_1 = 0$$

而式(7.3.14)中第二、三式的系数行列式为零,故  $E'_2$ 、 $E'_3$  必有非零解.可以解得有如下关系

$$\frac{E'_2}{E'_3} = -\frac{n_e^2 \cos \theta}{n_o^2 \sin \theta} \quad (7.3.15)$$

或写出  $\mathbf{E}$  矢量各分量

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(0, -An_e^2 \cos \theta, An_o^2 \sin \theta) \quad (7.3.16)$$

其中  $A$  为任一常数.可见  $\mathbf{E}'$  位于  $x_2 x_3$  平面上.

而由  $D'_i = \varepsilon E''_i$ ,  $i=1,2,3$ ,可得

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D}'(0, -A\varepsilon_o n_o^2 n_e^2 \cos \theta, A\varepsilon_o n_o^2 n_e^2 \sin \theta)$$

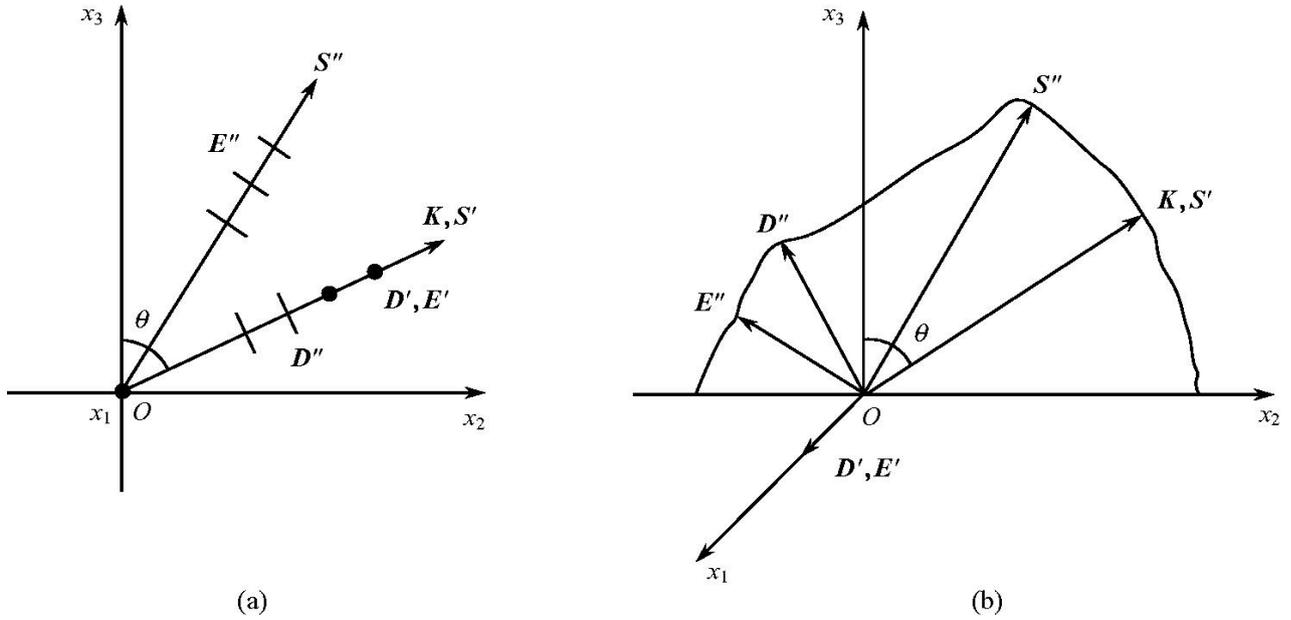
由此得出结论:e 光  $\mathbf{D}$  矢量与  $\mathbf{E}$  矢量均位于同一平面  $x_2 x_3$  平面内.但因为  $n_o \neq n_e$ ,可知  $\mathbf{D}'$  与  $\mathbf{E}'$  不平行.由此可知  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{S}'$  也不平行,其夹角为离散角  $\alpha$ .相应的折射率为  $n''(\theta)$ ,这就是非常光线.

综上所述,对 o 光 e 光的各矢量间关系可用图 7.3.1 表示.

讨论几种特殊情况:

(1)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0(0, K_{0y}, 0)$ , 光沿  $x_2$  轴入射.代入式(7.3.16)可知  $\mathbf{E}' = (0, 0, E'_3)$ . 同样有  $\mathbf{D}' = (0, 0, D'_3)$ , 可见  $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{D}'$ , 且  $n'' = n_e$ ,  $\mathbf{K} \parallel \mathbf{S}'$ , 而对 o 光,  $n' = n_o$ ,  $\mathbf{K} \parallel \mathbf{S}$ , 这时光波经过晶体后  $\mathbf{K} \parallel \mathbf{S} \parallel \mathbf{S}'$ , 波法线与波射线方向一致,但传播的速度则不相等,对于负轴晶,  $n_e < n_o$ , 即  $v_e > v_o$ , 正轴晶与之相反.这就是常用的波片的情况.

(2)  $\theta = 0^\circ$ ,  $\mathbf{K}_0 = (0, 0, 1)$ , 光沿  $x_3$  轴入射.此时  $n' = n'' = n_o$ , 代入式(7.3.9)后得

图 7.3.1 中级晶体中共波法线  $\mathbf{K}$  的两个光波各矢量间的关系

$$\begin{cases} (n_o^2 - n_e^2) E_1 = 0 \\ (n_o^2 - n_e^2) E_2 = 0 \\ n_e^2 E_3 = 0 \end{cases}$$

求得

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(E_1, E_2, 0)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(n_o^2 E_1, n_o^2 E_2, 0)$$

可见此时,  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K} \parallel \mathbf{S}$ , 光波在晶体中不再分为二束, 即  $\mathbf{S}$  与  $\mathbf{S}'$  不分, 且它们的折射率相等, 也就是说, 当光沿这一特殊方向 ( $x_3$ ) 传播时, 晶体中的光并不分为两束线偏振光, 而仍是一束振动方向任意的 (但要求  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{K} = 0$ )、相应的折射率为  $n_o$  的光波. 这与各向同性介质中的光波并无区别. 由此可见,  $x_3$  轴 (即中级晶族中唯一的高次轴) 是一个特殊的方向, 光波法线与该轴平行时, 晶体中的光波不产生双折射现象, 这一唯一的高次轴称为光轴. 中级晶体中只有一个光轴, 故中级晶体又称单轴晶.

(3) 离散角  $\alpha$ .

离散角  $\alpha$  即为 e 光光波法线与光波射线的夹角.

如图 7.3.2 所示设  $\mathbf{E}'$  的分量为  $(0, E'_2, E'_3)$ , 则有

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{E'_3}{-E'_2} = \frac{A n_o^2 \sin \theta}{A n_e^2 \cos \theta} \\ &= \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

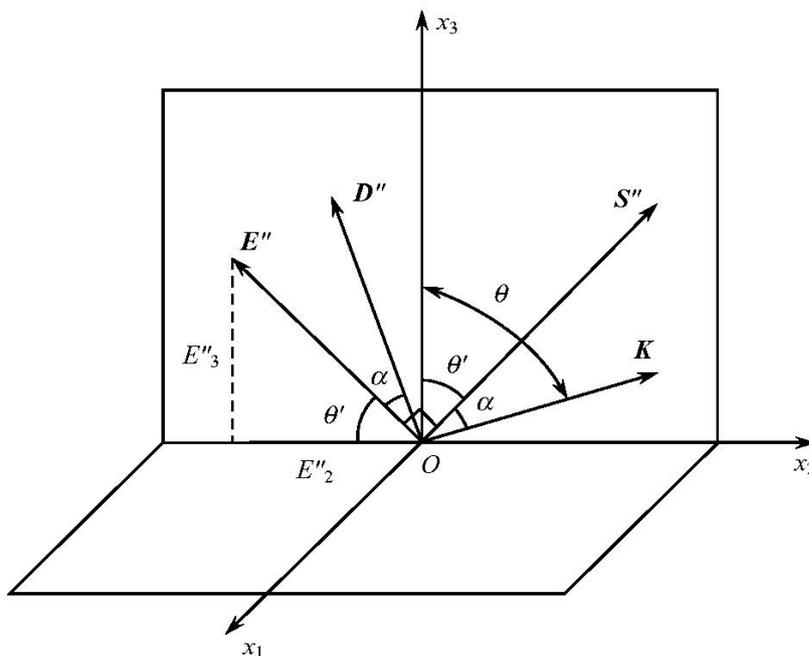


图 7.3.2 离散角  $\alpha = \theta - \theta'$  的求法

离散角

$$\alpha = \theta - \theta' \tag{7.3.18}$$

因此有

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \tan(\theta - \theta') = \frac{\tan\theta - \tan\theta'}{1 + \tan\theta \tan\theta'} \\ &= \frac{\left[1 - \frac{n_0^2}{n_e^2}\right] \tan\theta}{1 + \frac{n_0^2}{n_e^2} \tan^2\theta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n_e^2 - n_0^2}{n_0^2 \sin^2\theta + n_e^2 \cos^2\theta} \sin 2\theta \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

对于正单轴晶,  $n_e > n_0$ , 由式(7.3.17)知  $\tan\theta' < \tan\theta$ , 且规定  $\theta$  及  $\theta'$  均在  $0 \sim \frac{\pi}{2}$  之间, 故有  $\theta' < \theta$ , 由此得出  $\alpha = \theta - \theta' > 0$ . 因此, 对正单轴晶 e 光的波射线比光波法线更靠近光轴  $x_3$ . 同理, 负单轴晶则光波射线比光波法线更远离光轴  $x_3$ . 可以证明, 当  $K$  满足方向  $\tan\theta = \frac{n_e}{n_0}$  时, 具有最大的离散角, 而当  $\theta = 0^\circ$  或  $90^\circ$  时, 由式(7.3.18)知,  $\alpha = 0$ , 这时  $K, S, S'$  同方向无离散.

### 7.3.3 低级晶族(正交、单斜、三斜晶系)晶体

低级晶族的介电张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$\varepsilon \neq \varepsilon \neq \varepsilon$ , 即  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ , 有三个独立的主折射率, 这类晶体称为双轴晶. 这类晶体的解析法求解过程在此从略, 其光学特性将在后面的图解法中作简单介绍.

## 7.4 晶体宏观光学性质的几何表示

### 7.4.1 晶体的光学示性面

用解析法求出的光在晶体中传播规律可以用几何图形来表示, 称之为“光学示性面”, 由这些示性面可以直观地看出光波矢量在晶体中的特征与相互间关系. 为了明确系统地对所有的示性曲面作一统观, 先将其列于表 7.4.1 中, 然后作逐一的分析.

表 7.4.1 晶体的光学示性曲面

	折射率椭球 (光率体) (波法线椭球)	折射率曲面 (波矢面)	波法线面 (相速度面)	光线面	菲涅耳椭球 (光线椭球)	相速卵形面
方程	$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{n_i^2} = 1$	$\sum_{i=1}^3 \frac{K_{0i}^2}{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_i^2}} = 0$	$\sum_{i=1}^3 \frac{K_{0i}^2}{v_\Phi^2 - v_i^2} = 0$	$\sum_{i=1}^3 \frac{t_i^2}{\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{v_i^2}} = 0$	$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\frac{1}{n_i^2}} = 1$	$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\frac{1}{n_i^2}} = 1$
矢径方向*	$\mathbf{D}(\mathbf{d})$	$\mathbf{K}(\mathbf{K}_0)$	$\mathbf{K}(\mathbf{K}_0)$	$\mathbf{S}(\mathbf{t})$	$\mathbf{E}(\mathbf{e})$	$\mathbf{D}(\mathbf{d})$
矢径长度	$n$	$n$	$v_\Phi (n^{-1})$	$v_s$	$v_s$	$v_\Phi$
记号	$(\mathbf{d}, n)$	$(\mathbf{K}_0, n)$	$(\mathbf{K}_0, v_\Phi)$	$(\mathbf{t}, v_s)$	$(\mathbf{e}, v_s)$	$(\mathbf{d}, v_\Phi)$
曲面结构特点	单层	双层	双层	双层	单层	单层

\*  $(\mathbf{d})$ 、 $(\mathbf{k}_0)$ 、 $(\mathbf{t})$ 、 $(\mathbf{e})$  表示  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{E}$  的单位矢量.

### 7.4.2 折射率椭球

这是最常用的光学示性曲面, 在主轴坐标系中其方程为

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (7.4.1)$$

此曲面表示的意义为:

(1) 由椭球中心出发的每一个矢径方向代表了光波的  $\mathbf{D}$  矢量的一个振动

方向.

(2) 这时的矢径长度代表了相应于该矢径方向偏振的  $\mathbf{D}$  矢量方向的光波折射率, 如与  $\mathbf{D}$  相应的  $n'$  大小.

(3)  $\mathbf{E}$  矢量方向是在与相应的  $\mathbf{D}$  矢量端点处的椭球法线的方向 (图 7.4.1).

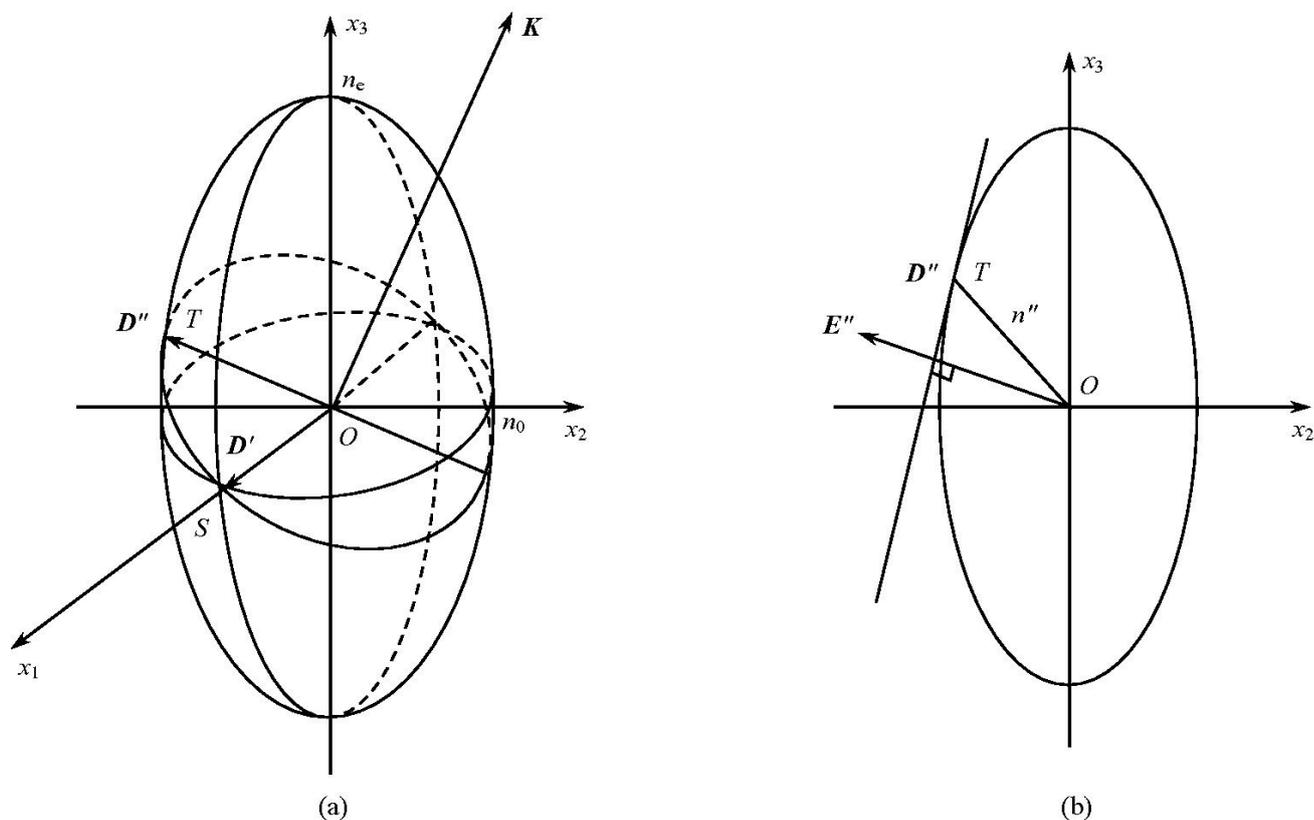


图 7.4.1 折射率椭球(a)及其  $x_2 O x_3$  截面图(b)

该曲面具有两个重要性质:

(1) 给定某一个波法线方向  $\mathbf{K}$ , 过椭球中心  $O$  作  $\mathbf{K}$  的垂面, 截椭球为一椭圆截面. 该椭圆的长、短轴分别为  $r_a(\mathbf{K})$ 、 $r_b(\mathbf{K})$ , 它们的方向即表示了相应于给定  $\mathbf{K}$  所允许存在的两个偏振光波的两个偏振方向  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{D}'$ . 这两个方向相互垂直.

(2) 该椭圆截面线的长、短轴长度即这两个相互垂直的矢径长度  $r_a$  及  $r_b$  正是相应于这两个偏振方向  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{D}'$  光波的折射率大小.

性质(1)可利用解析法证明如下:

由

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 [\epsilon]}$$

将其代入电磁波能量表达式中, 且考虑到当晶体中不存在吸收等损耗时, 该能量密度保持为常数恒定, 故有

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[ \frac{D_1^2}{\epsilon_1} + \frac{D_2^2}{\epsilon_2} + \frac{D_3^2}{\epsilon_3} \right] = C \quad (7.4.2)$$

由此可得

$$\frac{D_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{D_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{D_3^2}{\varepsilon_3} = A \quad (7.4.3)$$

将此方程作变换  $x_1 = D_1 / \sqrt{A}$ ,  $x_2 = D_2 / \sqrt{A}$ ,  $x_3 = D_3 / \sqrt{A}$ , 即得

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (7.4.4)$$

这正是式(7.4.1)表示的椭球方程, 椭球面上任一点  $(x_1, x_2, x_3)$  的矢径  $\mathbf{r}$ , 即为  $\mathbf{D} \left[ \frac{D_1}{\sqrt{A}}, \frac{D_2}{\sqrt{A}}, \frac{D_3}{\sqrt{A}} \right]$  的矢量方向, 因此  $\mathbf{D}$  方向平行于  $\mathbf{r}$ , 也就证明了折射率椭球的矢径方向代表了  $\mathbf{D}$  矢量方向. 且  $|\mathbf{r}| = n$ , 即矢径长度代表了具有这一  $\mathbf{D}$  矢量的光波的折射率(图 7.4.1).

过球心作  $\mathbf{K}$  的垂面与折射率椭球交一椭圆. 可以证明, 其长轴长度  $OT$  正等于由式(7.3.7)第二式表示的 e 光的折射率  $n'(\theta)$ , 短轴长度  $OS$  则是 o 光的折射率  $n'$ . 这样就证明了上面所说的第二个性质.

下面根据单轴晶、双轴晶的折射率椭球方程来讨论在这两种晶体中光传播的情况:

### 1. 单轴晶

对于单轴晶,  $n_1 = n_2 = n_o$ ,  $n_3 = n_e$ , 代入式(7.4.1)可得单轴晶的折射率椭球方程为

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1 \quad (7.4.5)$$

几点讨论:

(1) 这是一个旋转椭球,  $x_3$  轴为旋转对称轴, 即光轴. 由于其旋转对称性, 故  $x_1$ 、 $x_2$  轴可以任取, 光沿  $x_3$  方向传播时, 按曲面性质, 过椭球中心作一垂直于  $\mathbf{K}$  (即  $x_3$  轴)切面, 则交椭球为一圆, 因此无所谓长短轴, 这就是 7.3 节中讨论的中级晶族晶体光沿光轴入射时的特殊情况, 这时光波不产生双折射现象, 任意振动方向的光均可在此方向传播, 其折射率相等, 为  $n_o$ .

(2) 光沿在  $x_1 x_2$  平面上的任一方向在晶体中传播, 即  $\mathbf{K} \perp x_3$  轴, 此时的截交线为椭圆, 长轴为  $n_e$ , 短轴为  $n_o$  (负晶体则长短相反), 这表示沿此方向传播的光只可能存在两个偏振方向  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{D}'$ , 它们相互垂直, 分别在  $x_3$  轴方向及在  $x_1 x_2$  平面上与  $\mathbf{K}$  垂直的方向上, 相应的折射率为  $n_e$  及  $n_o$ .

(3) 光沿任意方向入射,  $\mathbf{K}$  与  $x_3$  轴成  $\theta$  角度时, 过  $O$  作  $\mathbf{K}$  的垂面交椭球为一椭圆, 短轴方向为  $\mathbf{D}$  方向, 相应  $n' = n_o$ , 长轴方向为  $\mathbf{D}'$  方向, 相应的折射率  $n'$  即为截交椭圆长轴长度. 对于负单轴晶,  $n_o > n_e$ , 则椭圆的长轴为  $n_o$ , 短轴为  $n_e$ .

## 2. 双轴晶

双轴晶的折射率椭球为

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (7.4.6)$$

设定  $n_1 < n_2 < n_3$ , 则可以对任意给定的光波法线方向  $\mathbf{K}$ , 按上述方法做截交椭圆, 求出晶体内相应的两个偏振光振动方向及折射率.

几点讨论:

(1) 第一类光轴  $C_1$  和  $C_2$ .

考虑由  $x_1 x_3$  组成的截面, 它与折射率椭球的截交线方程(令  $x_2 = 0$ )为

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (7.4.7)$$

如图 7.4.2 所示. 由于约定  $n_1 < n_2 < n_3$ , 因此在  $x_1$  轴与  $x_3$  轴之间总可以找到一矢径  $\mathbf{r}_0$ , 其长度正好等于  $n_2$ , 这个  $\mathbf{r}_0$  相应于一个矢量  $\mathbf{D}'$ , 与之相应的  $\mathbf{K}$  矢量可由通过  $O$  点作  $\mathbf{r}_0$  垂线求得(可证明, 若按作图法过  $O$  点作  $\mathbf{K}$  的垂面, 则它与折射率椭球的截交线是一个半径为  $n_2$  的圆). 因此, 当光波沿这个  $\mathbf{K}$  方向传播时晶体中两个线偏振光的折射率相等, 即  $n' = n'' = n_2$ , 这有点类似于单轴晶中光沿光轴  $x_3$  传播时  $n' = n'' = n_o$  的情形.

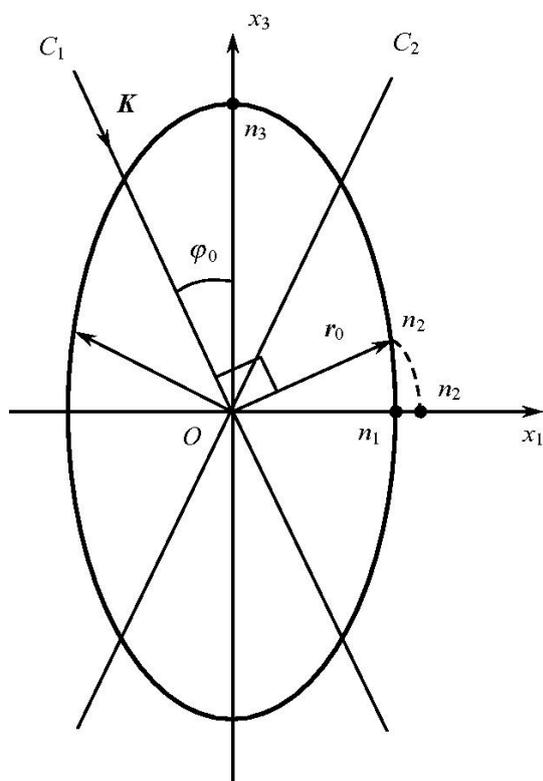


图 7.4.2 折射率椭球中的第一类光轴  $C_1$  和  $C_2$

由此方法确定的  $\mathbf{K}$  方向  $C_1$  及相应的对称方向上的  $C_2$  方向, 称之为双轴晶的第一类光轴  $C_1$  和  $C_2$ .

(2) 正双轴晶与负双轴晶.

正双轴晶:  $n_2$  比较接近  $n_1$ , 即  $n_3 - n_2 > n_2 - n_1$ , 故  $\mathbf{r}_0$  矢量更靠近  $x_1$  轴,  $\varphi_0 < 45^\circ$ , 故第一类光轴  $C_1$ 、 $C_2$  更靠近  $x_3$  轴.

负双轴晶:  $n_2$  比较接近  $n_3$ , 则  $n_3 - n_2 < n_2 - n_1$ ,  $\mathbf{r}_0$  矢量靠近  $x_3$  轴,  $\varphi_0 > 45^\circ$ ,  $C_1$ 、 $C_2$  靠近  $x_1$  轴.

(3) 光轴角  $2\Omega$ .

光轴角  $2\Omega$  定义为双轴晶两个第一类光轴间所夹的锐角.

正双轴晶:  $x_3$  轴是光轴角的锐角等分线, 即有  $2\Omega_{\text{正}} = 2\varphi_0$ , 可以证明

$$\tan\Omega_{\text{正}} = \frac{n_3}{n_1} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_3^2 - n_2^2}} \quad (7.4.8)$$

负双轴晶:  $x_1$  轴是光轴角的锐角等分线, 则有  $2\Omega_{\text{负}} = \pi - 2\varphi_0$ , 故有

$$\tan\Omega_{\text{负}} = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right] = \frac{n_b}{n_c} \sqrt{\frac{n_b^2 - n_c^2}{n_c^2 - n_a^2}} \quad (7.4.9)$$

(4) 双轴晶中的光波都是非常光.

当光沿光轴方向传播时, 虽然只有一个折射率  $n$ , 但是它对应于无数个振动方向互不相同而它们相应的  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{S}$  均不重合的线偏振光. 只有当  $\mathbf{K}$  沿主轴  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  之一时,  $\mathbf{K}_0$  与  $\mathbf{t}$  方向才一致. 可以在任何方向传播且具有同样折射率的偏振光在双轴晶中是不存在的. 因此, 不可能像单轴晶那样有一个寻常光存在. 关于双轴晶的这一性质以及双轴晶中光沿着光轴传播的表现, 将在本节的最后作详细的讨论.

### 7.4.3 折射率曲面(波矢面)

折射率曲面的方程就是菲涅耳方程

$$\frac{K_{01}^2}{\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{K_{02}^2}{\frac{1}{n_b^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{K_{03}^2}{\frac{1}{n_c^2} - \frac{1}{n^2}} = 0 \quad (7.4.10)$$

由表 7.4.1 知, 这里一个双层曲面, 矢径为  $\mathbf{K}_0$ , 矢径长度为  $n$ , 由于方程(7.4.10)是一个四次方程, 故  $n$  具有四个根, 符合物理意义的正实根有两个. 即给定一个波法线方向  $\mathbf{K}$ , 相应的矢径长度有两个值  $n'$  及  $n''$ , 这表示了该方向传播光波的两个折射率.

设矢径为  $\mathbf{r}$ , 则  $\mathbf{r} = n\mathbf{K}_0$ , 即矢径长度为  $|\mathbf{r}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = n$ , 写为分量形式  $\mathbf{r} = nK_{01}\mathbf{i} + nK_{02}\mathbf{j} + nK_{03}\mathbf{k}$ , 即得矢径各分量为

$$x_1 = nK_{01}, \quad x_2 = nK_{02}, \quad x_3 = nK_{03}$$

把这些关系代入式(7.4.10), 展开后可得

$$\begin{aligned} & (n_a^2 x_1^2 + n_b^2 x_2^2 + n_c^2 x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - [n_a^2(n_b^2 + n_c^2)x_1^2 \\ & + n_b^2(n_c^2 + n_a^2)x_2^2 + n_c^2(n_a^2 + n_b^2)x_3^2] + n_a^2 n_b^2 n_c^2 = 0 \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

根据这一四次曲面方程, 分别讨论各类晶体的折射率曲面的形式及特点:

(1) 高级晶族晶体.

由高级晶族晶体  $n = n_2 = n_3 = n_0$ , 式(7.4.11)变为

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n_0^2 \quad (7.4.12)$$

所以高级晶族晶体折射率曲面是一个半径为  $n_0$  的球面. 这表明, 不论光波法线在哪个方向, 对任何振动方向的光折射率均为  $n_0$ , 因此其表现是光学各向同性的.

(2) 中级晶族晶体(单轴晶).

这类晶体有  $n = n_2 = n_0$ ,  $n_3 = n_e$ , 代入式(7.4.11)得

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - n_o^2)[n_o^2(x_1^2 + x_2^2) + n_e^2 x_3^2 - n_o^2 n_e^2] = 0 \quad (7.4.13)$$

上式等效于两个方程

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n_o^2 & \text{球面} \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{n_e^2} + \frac{x_3^2}{n_o^2} = 1 & \text{椭球面} \end{cases} \quad (7.4.14)$$

上式第一式是一个球面,半径为  $n_o$ ,说明在单轴晶中沿任一方向传播的两个光波中,总有一个波的折射率与  $\mathbf{K}$  方向无关,值为  $n_o$ ,这就是寻常光(o光).

式(7.4.14)中的第二式是一个长短半轴分别为  $n_o$  和  $n_e$  的旋轴椭球面.不同的  $\mathbf{K}_o$  方向,矢径长度不等.说明另一个光波的折射率与波法线方向  $\mathbf{K}_o$  有关,这就是非常光线(e光).e光的折射率曲面是以  $x_3$  轴为旋转轴的椭球.与折射率椭球不同的是,折射率曲面在  $x_3$  方向的半径为  $n_o$ ,而在  $x_1, x_2$  方向上半径为  $n_e$ .

图 7.4.3 与图 7.4.4 分别示出了正负单轴晶的折射率曲面  $x_2 x_3, x_1 x_2$  截面图.

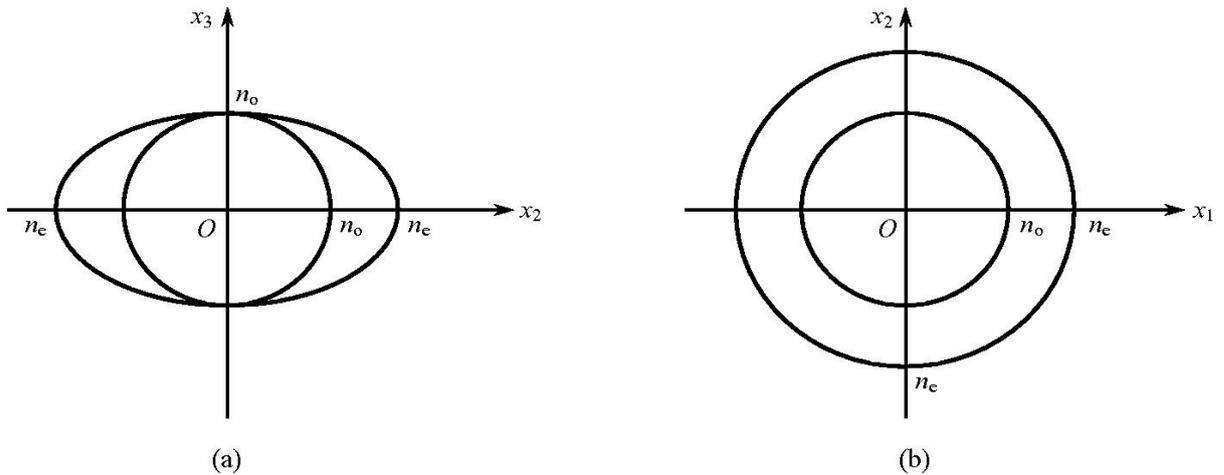


图 7.4.3 正单轴晶的折射率曲面截面图

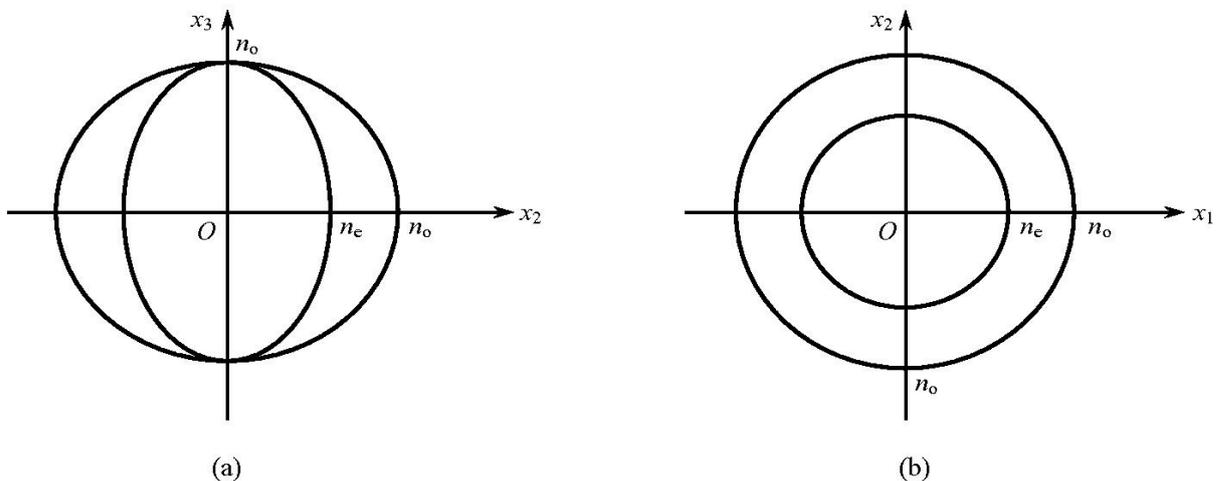


图 7.4.4 负单轴晶的折射率曲面截面图

对于正单轴晶,  $n_o < n_e$ , 由式(7.4.14)知, 球面内接于椭球面, 两球面在  $x_3$  轴处接顶,  $x_3$  上长度为  $n_o$ . 在  $x_2 x_3$  截面上则为一个半径为  $n_o$  的圆内接于一个长短轴分别为  $n_e$  和  $n_o$  的椭圆, 如图 7.4.3(a) 所示. 在  $x_1 x_2$  截面上, 旋转椭球的截线是半径为  $n_e$  的圆, 而球面的交线为半径为  $n_o$  的圆, 如图 7.4.3(b) 所示.

对于负单轴晶,  $n_o > n_e$ , 此时 o 光的球面大, 它把 e 光的旋转椭球包在里面, 而在  $x_3$  轴上接顶, 接顶处矢径长度为  $n_o$ , 如图 7.4.4 所示.

当光波在与  $x_3$  轴夹角为  $\theta$  的任意方向传播时,  $\mathbf{K}$  方向与折射率曲面相交两点, 得到一个长度为  $n_o$  的矢径, 代表了 o 光的折射率  $n_o$ , 另一个矢径长度为

$$n'_e(\theta) = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{(n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta)}} \quad (7.4.15)$$

代表了另一个偏振光 e 光的折射率.

### (3) 低级晶族晶体(双轴晶).

此类晶体  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ , 设  $n_1 < n_2 < n_3$ , 则这类晶体的折射率曲面是一个复杂的双层面, 即由式(7.4.11)所确定的  $n$  的四次曲面. 下面分别从三个主截面上的截交线来讨论曲面的特点:

$x_2 x_3$  截面: 在式(7.4.11)中令  $x_1 = 0$ , 得截交线方程为

$$(x_2^2 - x_3^2 - n_1^2) \left[ \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} - 1 \right] = 0 \quad (7.4.16)$$

半径为  $n_1$  的圆  $a = n_3, b = n_2$  的椭圆

交线为两个互不相接的圆与椭圆, 如图 7.4.5 所示.

$x_3 x_1$  面: 令式(7.4.11)中  $x_2 = 0$ , 得截交线方程为

$$(x_3^2 + x_1^2 - n_2^2) \left[ \frac{x_3^2}{n_1^2} + \frac{x_1^2}{n_3^2} - 1 \right] = 0 \quad (7.4.17)$$

截交线为一个半径为  $n_2$  的圆及一个长短轴为  $n_3$  与  $n_1$  的椭圆(图 7.4.6), 两条曲线

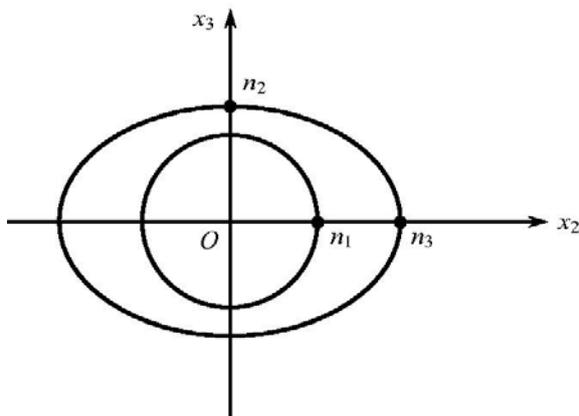


图 7.4.5 双轴晶的折射率曲面  $x_2 x_3$  截面图

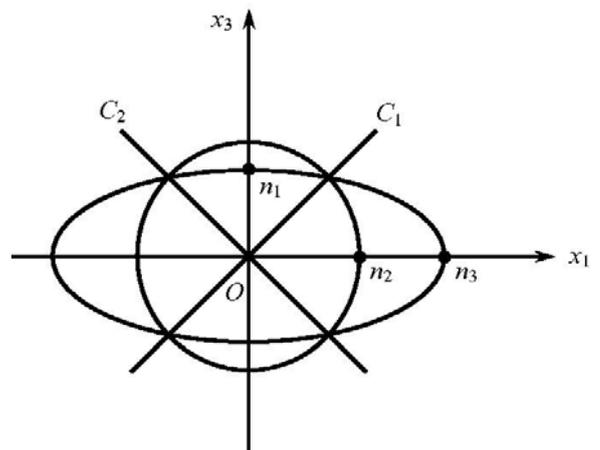


图 7.4.6 双轴晶折射率  $x_1 x_3$  截面图及第一类光轴  $C_1$  和  $C_2$

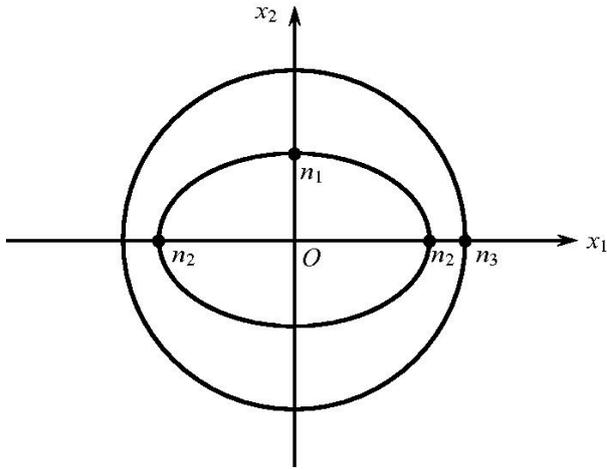


图 7.4.7 双轴晶的折射率曲面  $x_1 x_2$  截面图

相交四个点, 两两连接并通过球心, 所得  $G_1$ 、 $G_2$  即为第一类光轴.

$x_1 x_2$  截面: 令式 (7.4.11) 中  $x_3 = 0$ , 得截交线方程为

$$(x_1^2 + x_2^2 - n_b^2) \left[ \frac{x_1^2}{n^2} + \frac{x_2^2}{n^2} - 1 \right] = 0 \quad (7.4.18)$$

得到一个半径为  $n_b$  的大圆套在一个长短轴为  $n_2$  及  $n_1$  的椭圆外面(图 7.4.7).

将上面三个截面图拼在一起, 得如

图 7.4.8 所示的 1/8 象限的双轴晶折射

率曲面. 这是一个十分复杂的曲面. 整个曲面为内外两层, 外层类似于一个在  $x_3$  方向压扁的椭球, 但在  $x_1 x_3$  截面的四个象限中有四个近似圆形的“颊窝”. 它的内层则类似于一个在  $x_1$  方向拉长的椭球, 在与外层四个颊窝相对的内层曲面上有四个突出的角与外层窝底相接, 通过球心  $O$  将四个接点两两相连, 可得两条直线, 这两条直线的方向就是第一类光轴  $G_1$  和  $G_2$ .

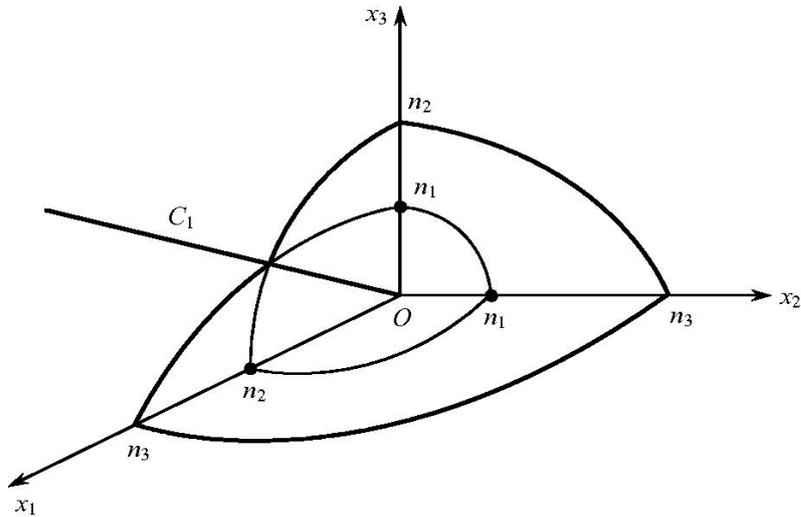


图 7.4.8 双轴晶折射率曲面(1/8 象限)

可以证明, 折射率曲面(波矢面)在任一矢径末端处的法线方向, 即为与该矢径所代表的波法线方向  $\mathbf{K}$  相应的波射线方向  $\mathbf{S}$ . 由于折射率曲面是双层曲面, 所以当  $\mathbf{K}$  为任意方向时, 两个曲面相应于同一矢径  $\mathbf{K}$  端点处的切面是不重合的, 两个不同切面的法线方向亦不重合, 它们分别相应于两个相互垂直的电振动的波射线方向  $\mathbf{S}$  及  $\mathbf{S}'$ . 下面来证明折射率曲面矢径末端的法线方向即为相应的波射线方向  $\mathbf{S}$ .

由晶体光学第一基本方程 (7.2.15), 有  $\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 [\mathbf{E} - \mathbf{K}_0 \cdot (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E})]$ , 将

$\mathbf{r} = n\mathbf{K}_0$  代入, 则有

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} = \mathbf{r}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \quad (7.4.19)$$

设  $\mathbf{E}$  变化一个小量  $\delta\mathbf{E}$ , 相应地  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{r}$  变化  $\delta\mathbf{D}$  及  $\delta\mathbf{r}$ , 而  $\delta\mathbf{r}$  在波矢面上. 将上式微分

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \delta\mathbf{D} &= 2(\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}) \mathbf{E} + \mathbf{r}^2 \delta\mathbf{E} - \delta\mathbf{r}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad - \mathbf{r}(\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

在上式两边同乘  $\mathbf{E}$ , 并考虑到

$$\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} = \varepsilon E_1 \delta E_1 + \varepsilon E_2 \delta E_2 + \varepsilon E_3 \delta E_3 = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}$$

则式(7.4.20)变成

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E} \cdot [\mathbf{r}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})] + 2\delta\mathbf{r} \cdot [\mathbf{rE}^2 - \mathbf{E}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})]$$

由式(7.4.19)得

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} + 2\delta\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{E} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}]$$

上式意味着等号右端第二项必须等于零, 即

$$\delta\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{E} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}] = 0$$

由  $\mathbf{r} = n\mathbf{K}_0$  得

$$\delta\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{E} \times \mathbf{K}_0) \times \mathbf{E}] = 0$$

因为  $\mathbf{E} \times \mathbf{K}_0$  必垂直于  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{K}_0$ , 因此,  $(\mathbf{E} \times \mathbf{K}_0) \times \mathbf{E}$  与  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{K}_0$  共面, 且垂直于  $\mathbf{E}$ . 由晶体中的光波矢量关系可知,  $(\mathbf{E} \times \mathbf{K}_0) \times \mathbf{E}$  也必然平行于坡印亭矢量  $\mathbf{S}$ , 即平行于光射线方向  $\mathbf{S}$ . 因此, 上式就变成了  $\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$ , 故有  $\delta\mathbf{r} \perp \mathbf{S}$ . 而  $\delta\mathbf{r}$  又是在波矢面的曲面上, 可见  $\mathbf{S}$  必定是曲面的法线. 从而得证.

利用波矢面的这一特性, 可以用作图法直接从波矢面求出与已知波矢  $\mathbf{K}$  相应的光波射线方向  $\mathbf{S}$ .

#### 7.4.4 波法线面(相速度曲面)

由表 7.4.1 知, 波法线面也是一个双层曲面, 其矢径方向就是波法线矢量的方向  $\mathbf{K}_0$ , 矢径长度为相速度  $v_\Phi$ , 或由  $n = c/v_\Phi$ , 可知矢径长度为  $n^{-1}$ . 因此波法线面表示了由晶体中某点发出的光, 在单位时间内所到达的面, 即等相面, 可见, 除了高级晶族晶体外, 一般地在晶体中单色点光源发出的等相面不再是球面, 而是一个复杂的双层曲面.

将  $x_1 = |\mathbf{r}| K_{01}$ ,  $x_2 = |\mathbf{r}| K_{02}$ ,  $x_3 = |\mathbf{r}| K_{03}$  及  $|\mathbf{r}| = n^{-1}$  代入波法线面方程

$$\frac{K_{01}^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{K_{02}^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_2^2}} + \frac{K_{03}^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_3^2}} = 0 \quad (7.4.21)$$

得

$$\begin{aligned} & n_1^2 n_2^2 n_3^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 - [n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) x_1^2 + n_2^2 (n_3^2 + n_1^2) x_2^2 + n_3^2 (n_1^2 + n_2^2) x_3^2] \\ & \times (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (n_1^2 x_1^2 + n_2^2 x_2^2 + n_3^2 x_3^2) = 0 \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

分别写出三个主截面上的交线：

$x_2 x_3$  截面 ( $x_1 = 0$ )

$$[n_1^2 (x_2^2 + x_3^2) - 1][n_2^2 n_3^2 (x_2^2 + x_3^2)^2 - (n_2^2 x_2^2 + n_3^2 x_3^2)] = 0 \quad (7.4.23)$$

第一个中括号内表示半径为  $\frac{1}{n_1}$  的圆,第二个中括号内表示一个四次卵形线.

$x_3 x_1$  截面 ( $x_2 = 0$ )

$$[n_2^2 (x_3^2 + x_1^2) - 1][n_3^2 n_1^2 (x_3^2 + x_1^2)^2 - (n_3^2 x_3^2 + n_1^2 x_1^2)] = 0 \quad (7.4.24)$$

$x_1 x_2$  截面 ( $x_3 = 0$ )

$$[n_3^2 (x_1^2 + x_2^2) - 1][n_1^2 n_2^2 (x_1^2 + x_2^2)^2 - (n_1^2 x_1^2 + n_2^2 x_2^2)] = 0 \quad (7.4.25)$$

按以上三个主截面方程,对双轴晶作三个截面图,如图 7.4.9 所示.同样,可由三个截面图合为立体图并得到第一类光轴  $C_1$ 、 $C_2$ .对单轴晶的分析,则只需令  $n_1 = n_2 = n_b$ 、 $n_3 = n_c$ ,便可得出类似的三个截面图,在此不再赘述.

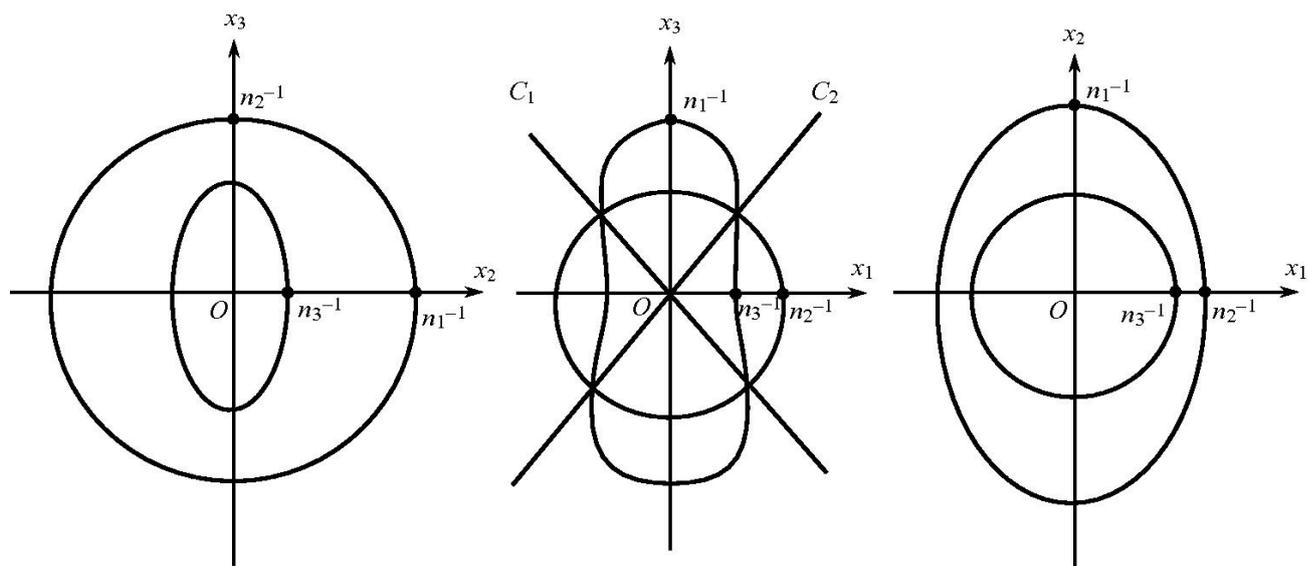


图 7.4.9 双轴晶的波法线面(相速度面)的三个截面图

## 7.4.5 光线面(光波射线面)

光线面矢径方向即为光射线方向  $\mathbf{S}$ (或  $\mathbf{t}$ ), 其长度为  $|\mathbf{r}| = \frac{1}{n_s} = v_s/c$ , 等于光射线速度. 光线面本质上就是晶体中一个单色点光源的等能面, 或称波面. 显然对于 o 光与 e 光, 在某个方向上光射线速度一般是不相等的, 因此光线面应该是一个双层曲面, 或者说, 对于 e 光与 o 光它们的等能面是不同的.

主轴坐标系下光线面的方程为

$$\frac{\frac{t_1^2}{v_s^2} - \frac{1}{v_1^2}}{\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{\frac{t_2^2}{v_s^2} - \frac{1}{v_2^2}}{\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{v_2^2}} + \frac{\frac{t_3^2}{v_s^2} - \frac{1}{v_3^2}}{\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{v_3^2}} = 0 \quad (7.4.26)$$

利用  $x_1 = |\mathbf{r}| t_1$ ,  $x_2 = |\mathbf{r}| t_2$ ,  $x_3 = |\mathbf{r}| t_3$ ,  $v_i = \frac{c}{n_i}$ , 把式(7.4.26)改写为

$$\begin{aligned} & (n_2^2 n_3^2 x_1^2 + n_3^2 n_1^2 x_2^2 + n_1^2 n_2^2 x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ & - [(n_2^2 + n_3^2)x_1^2 + (n_3^2 + n_1^2)x_2^2 + (n_1^2 + n_2^2)x_3^2] + 1 = 0 \end{aligned} \quad (7.4.27)$$

类似前边的讨论方法, 可以对单轴晶、双轴晶的光线面特征进行讨论, 此处不再赘述. 需要说明的是, 由于现在是光射线面, 对于双轴晶在  $x_1 x_3$  截面上两条截交线的四个交点, 两两连接并通过球心, 得到两条直线 ( $L_1$ 、 $L_2$ ), 在这两个方向上, 两个光波的光射线速度  $v_s$  相等, 称这两个直线  $L_1$ 、 $L_2$  的方向为第二类光轴(图 7.4.10).

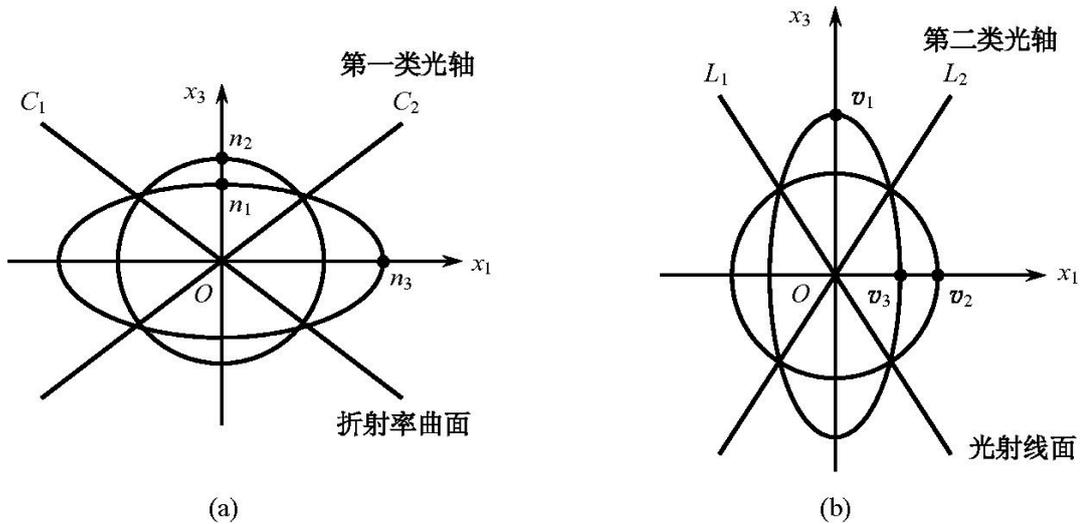


图 7.4.10 (a) 双轴晶的折射率曲面  $x_1 x_3$  截面及第一类光轴  $C_1$  和  $C_2$  和  
(b) 光射线面  $x_1 x_3$  截面及第二类光轴  $L_1$  和  $L_2$

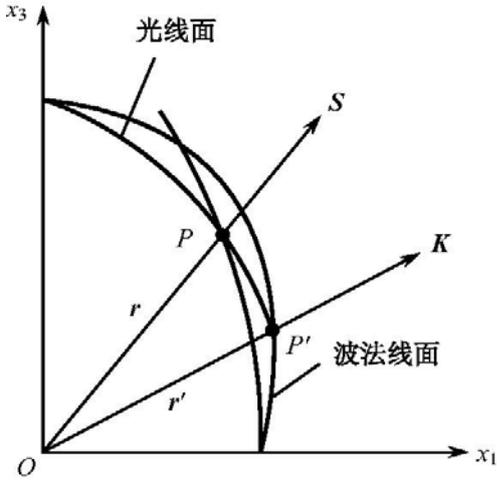


图 7.4.11 波法线面是波射线面的垂足面

光线面与波法线面的关系如图 7.4.11 所示,光线面的矢径

$$r = v_s t \quad (7.4.28)$$

波法线面的矢径

$$r' = v_\Phi K_0 \quad (7.4.29)$$

光线速度与相速度间的关系

$$v_\Phi = v_s \cos \alpha \quad (7.4.30)$$

式中  $\alpha$  为离散角.由式(7.4.30)可知,波法线面是波射线面的垂足面.从射线面上任一点作射线面的切面,再由  $O$  点向切面引垂线交于  $P'$ ,  $OP'$  就是与光线方向  $OP$  相应的波法线方向,

而  $OP'$  正是法线面的矢径,满足关系

$$OP' = v_\Phi = v_s \cos \alpha$$

光线面实际上就是我们常说的波面(或波阵面).设想在各向异性晶体中把一个单色点光源引入到  $O$  点,则光波向各方向传播时其能量正是按光线速度传播,得到的光线面就是实际波面.而实际上这个面也正是代表了由  $O$  点光源发出的光波的等相位面形成的包络面,或者说是等相位点的轨迹.这一点可以由图 7.4.11 所示的关系中看出.

若是在色散介质中,当光波具一定线宽时,则能量传播速度由群速度决定,它往往比相速度小.这时相应的波阵面(光线面)就比上述单色光无色散时的曲面稍小些.

### 7.4.6 几个曲面表象中的 $E$ 、 $D$ 、 $K$ 、 $S$ 作图法

综合前几节所述,本节将几个主要的曲面表象中  $E$ 、 $D$ 、 $K$ 、 $S$  之间的关系及作图法求它们的相互位置作一归纳.

#### 1. 折射率椭球(图 7.4.12)

矢径方向  $D$ ,长度  $n$ ,关系为  $r = nD/|D|$ ;  
 $E$  的方向为  $D$  矢量矢径顶点处的法线;  
 $E \perp D$  矢径端点处于曲面的切面(图中为垂直于切线  $MM'$ );

波法线  $K$  垂直于波射线  $S$  与曲面的交点处的切面(图中垂直于切线  $NN'$ ).

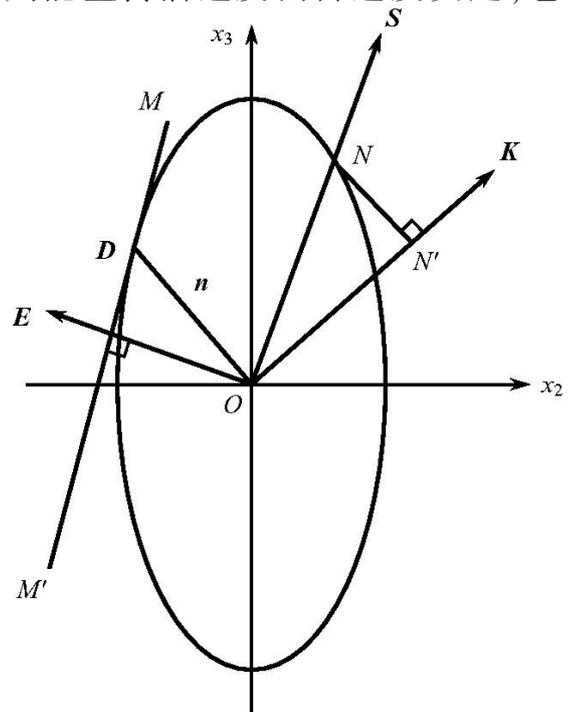


图 7.4.12 折射率椭球中  $E$ 、 $D$ 、 $K$ 、 $S$  之间的关系

## 2. 折射率曲面(波矢面)

矢径方向  $\mathbf{K}$ , 长度  $n$ , 关系为  $\mathbf{r} = n\mathbf{K}/|\mathbf{K}|$ .

o 光的波法线方向  $\mathbf{K}_o$  与光射线方向  $\mathbf{S}_o$  重合, 即为  $\mathbf{K}$ .

e 光的光射线方向  $\mathbf{S}_e$  为波法线  $\mathbf{K}$  矢径在 e 光波矢面端点处的切面的法线, 如图 7.4.13 所示, 图中为垂直于切线  $AA'$ .

## 3. 波法线面(相速度曲面)

矢径方向  $\mathbf{K}$ , 长度  $v_\omega$  (或  $n^{-1}$ ), 关系为  $\mathbf{r} = \frac{1}{n}\mathbf{K}/|\mathbf{K}|$ .

o 光的波法线  $\mathbf{K}_o$  与光射线方向  $\mathbf{S}_o$  重合.

e 光的光射线方向求法为从 e 光波法线面任一矢径端点作波法线面的垂线与光线面相交, 得到相应的光射线矢径端点  $M$ , 连接  $OM$  即为光射线方向  $\mathbf{S}_e$ .

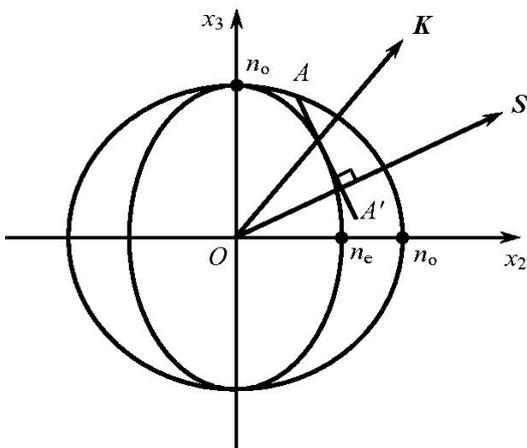
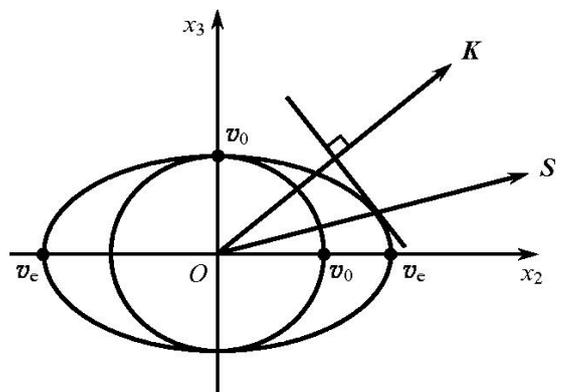
## 4. 光线面(波面)(图 7.4.14)

矢径方向  $\mathbf{S}$ , 长度  $v_s$  ( $n_s^{-1}$ ), 关系为  $\mathbf{r} = \frac{1}{n_s}\mathbf{S}/|\mathbf{S}|$ .

o 光的波法线  $\mathbf{K}_o$  与光射线方向  $\mathbf{S}$  重合.

e 光的波法线方向求法为从 e 光光线面任一矢径端点作光线面的切面, 由 o 点引作切面的垂线即为 e 光波法线方向  $\mathbf{K}_e$ .

以上几种作用方法将是以下讨论的光波在晶体表面的折反射作图法求解的基础, 根据光波入射到晶体界面或内部时的具体条件, 选择合适的曲面, 以求出光波在晶体表面或内部折反射时的表现.

图 7.4.13 折射率曲面及  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{S}$  的关系图 7.4.14 光线面中的  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{S}$  之间的关系

## 7.5 光波在晶体表面的折射和反射

前几节讨论了光波在晶体中传播时的特征以及各矢量之间的关系,而并未涉及光在经过晶体表面的折射或在晶体内反射的情况.在处理这类问题时,既要考虑到界面上的折、反射定理,又要讨论在折、反射后在晶体内传播的情况.

在 3.1.1 节中介绍的矢量形式的折反射定理(式(3.1.9)及式(3.1.10)),在晶体中也同样适用.而以矢量形式的折、反射定理为基础的图解法求解折、反射过程,则表现在晶体光学中的两个特点:

(1) 矢量形式折、反射定理

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{K}' - \mathbf{K}) = 0 & \text{反射} \\ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{K}'' - \mathbf{K}) = 0 & \text{折射} \end{cases} \quad (7.5.1)$$

式中所涉及的是波法线矢量  $\mathbf{K}$ ,因此用作图法所作的应是波矢面(折射率曲面).

(2) 由于在晶体中存在着 o 光与 e 光两种光波,其传播特性一般不相同,故在涉及晶体内的传播时,波法线矢量均相应为两个不同的方向,折射率曲面也为两个不同的面.

### 7.5.1 斯涅耳作图法

斯涅耳作图法如图 7.5.1 所示,假定光波沿  $\mathbf{K}$  方向从各向同性介质射向晶体表面.以晶体表面上一点  $O$  为原点,在晶体内分别画出光波在入射介质中的波矢

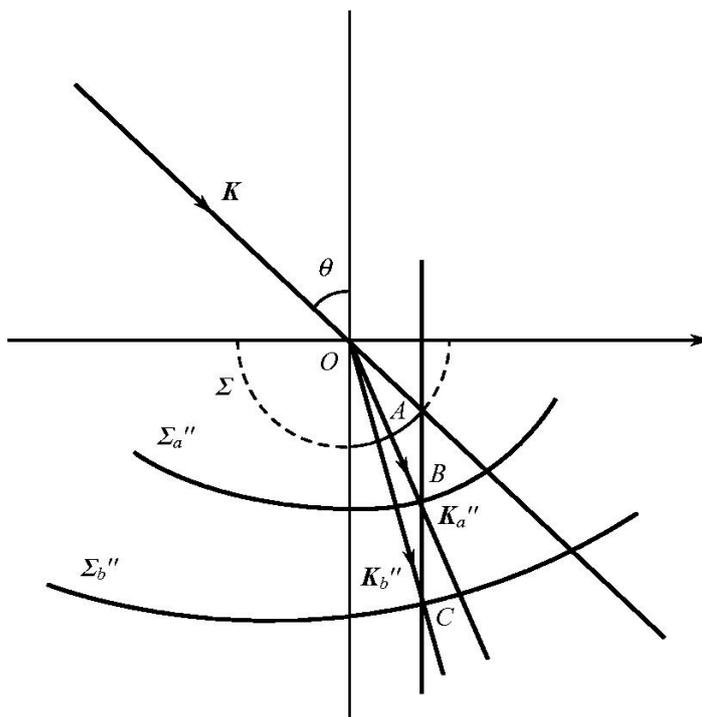


图 7.5.1 斯涅耳作图法求光波在晶体界面上的折射

面  $\Sigma$  (它是一个单层面) 和光波在晶体中的波矢面  $\Sigma''_a$  及  $\Sigma''_b$  (双层面), 图中画出的为波矢面在入射面上的截交线. 将入射光线自  $O$  点延长与  $\Sigma$  交于  $A$  点, 过  $A$  点作晶体表面的垂线, 与晶体的波矢面  $\Sigma''_a$  及  $\Sigma''_b$  交于  $B$  点和  $C$  点, 则  $OB$  和  $OC$  就是所求的两个折射光波的波矢量  $K''_a$  及  $K''_b$ . 显见,  $K''_a$  与  $K''_b$  均满足矢量形式的折射定律

$$r \cdot (K''_a - K) = 0 \text{ 及 } r \cdot (K''_b - K) = 0$$

应当注意的是, 当入射角  $\theta$  改变时, 折射角  $\theta_a$  及  $\theta_b$  也发生改变, 一般情况下,  $\sin\theta/\sin\theta_a$  及  $\sin\theta/\sin\theta_b$  也随之改变而并非常量, 因此不能像各向同性介质中一样用一个常数折射率来记这一比例常数. 对于双轴晶, 此时晶体中的折射光均为非常光. 若对于单轴晶, 则其中有一条折射光遵循  $n = \sin\theta/\sin\theta'$  为恒量, 即为寻常光.

当然, 在一般情况下是很难作出在入射面上的波矢面截交线  $\Sigma''_a$ 、 $\Sigma''_b$  的, 只有在单轴晶或是在双轴晶的一些特殊截面上才可比较容易地作出交线, 这时, 应用斯涅耳作图法求折射后的波法线方向才是方便的.

利用斯涅耳作图法求解晶体中的反射情况也是同样适用的. 这时利用的是矢量形式的反射定律, 而作的波矢面截交线  $\Sigma$ 、 $\Sigma'_a$ 、 $\Sigma'_b$  则应当是与反射前、后相应的晶体折射率曲面与入射面截交线.

以下为两个实际例子:

**实例 1** 如图 7.5.2 所示, 一块正晶体 ( $n_o < n_e$ ) 置于空气中, 光轴如图所示位于纸面上. 线偏振光  $A$  与  $B$  垂直入射到晶体上. 用图解法求出  $A$ 、 $B$  偏振光在晶体内部以及出射到空气中所相应的  $E$ 、 $D$ 、 $K$ 、 $S$  矢量方向及光出射点.

对于  $A$  光, 为寻常光, 垂直晶体表面入射后按原方向传播, 垂直于后表面出射.  $E_{A'}$ 、 $D_{A'}$ 、 $K_{A'}$ 、 $S_{A'}$ 、 $E_{A''}$ 、 $D_{A''}$  均按正常光处理, 如图 7.5.2 所示.

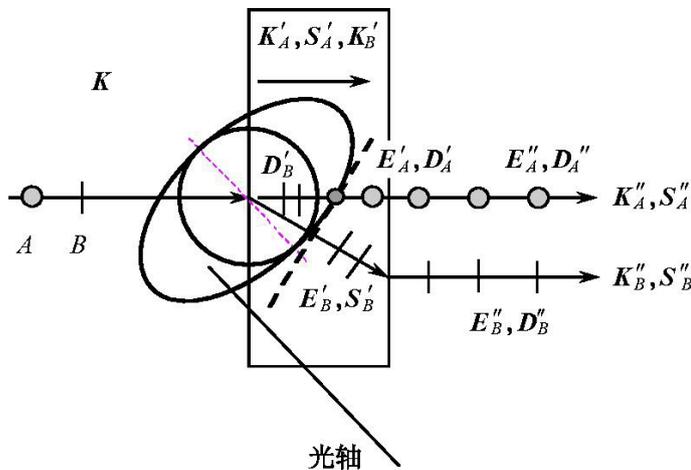


图 7.5.2 实例 1 示意图

对于  $B$  光,为非常光,由于垂直于晶体表面入射,其透射光波矢  $\mathbf{K}_B'$  仍按原方向传播,垂直地入射到后表面.同样地,由于  $\mathbf{K}_B'$  垂直于晶体后表面入射,其透射光波矢  $\mathbf{K}_B''$  仍按原方向传播,垂直地从后表面出射到空气中.关于波矢  $\mathbf{K}$ ,  $A$  光与  $B$  光是完全一致的,而  $\mathbf{D}_B$  始终与  $\mathbf{K}_B$  垂直,如图 7.5.2 所示.要注意的是  $\mathbf{S}_B$  矢量.在晶体内部,由于晶体的双折射特性,可以用图解法求出其方向.具体做法如下:画出晶体的折射率曲面,为双层面.它与纸面的截交线为圆和椭圆.其中圆为  $o$  光的折射率曲面截交线,椭圆为  $e$  光的截交线.由于是正晶体,它们在椭圆的短轴方向相切.过入射光  $\mathbf{K}$  方向延长线与椭圆的交点作椭圆的切线,过椭圆中心向切线引垂线,这个垂线的方向就是  $e$  光的坡印亭矢量  $\mathbf{S}_B'$  的方向,它代表了  $B$  光的能量传播方向.假如以窄光束入射,那么  $B$  光束的能量出射点就应当在  $\mathbf{S}_B'$  方向与后表面的交点上.而在后表面上的折射,仍应当由  $B$  光的波矢  $\mathbf{K}_B'$  来决定.由于  $\mathbf{K}_B'$  垂直于后表面,因此  $B$  光将无折射地透射,即在空气中的波矢方向仍然垂直于后表面.由于空气的各向同性, $B$  光的  $\mathbf{S}_B''$  矢量在空气中必然与  $\mathbf{K}_B''$  相同,而  $\mathbf{D}_B''$  始终与  $\mathbf{K}_B''$  垂直.由于空气中的  $\mathbf{K}$  矢量与  $\mathbf{S}$  矢量同方向,则  $B$  光出射后的  $\mathbf{E}_B''$  与  $\mathbf{D}_B''$  也同方向,而在晶体内部的  $\mathbf{E}_B'$ 、 $\mathbf{D}_B'$  则分别与  $B$  光在晶体内的  $\mathbf{S}_B'$ 、 $\mathbf{K}_B'$  垂直.由此得到了各个矢量的方向,见图 7.5.2 中.

**实例 2** 如图 7.5.3 所示,两块相同的负晶体 ( $n_o > n_e$ ) 贴合在一起,置于空气中,两块晶体的光轴相互垂直,位于纸面上.线偏振光  $A$  与  $B$  垂直入射到晶体上.用图解法求出  $A$ 、 $B$  偏振光在晶体内部以及出射到空气中所相应的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$  矢量方向及光出射点.

对于  $A$  光,为寻常光,垂直晶体表面入射后按原方向传播,尽管两块晶体的光轴方向不同,但对于  $A$  光而言,其折射率是相同的.因此,按原方向通过两块晶体的交界面后,垂直入射到后表面,并垂直出射.相应的  $\mathbf{E}_A'$ 、 $\mathbf{D}_A'$ 、 $\mathbf{K}_A'$ 、 $\mathbf{S}_A'$ 、 $\mathbf{E}_A''$ 、 $\mathbf{D}_A''$

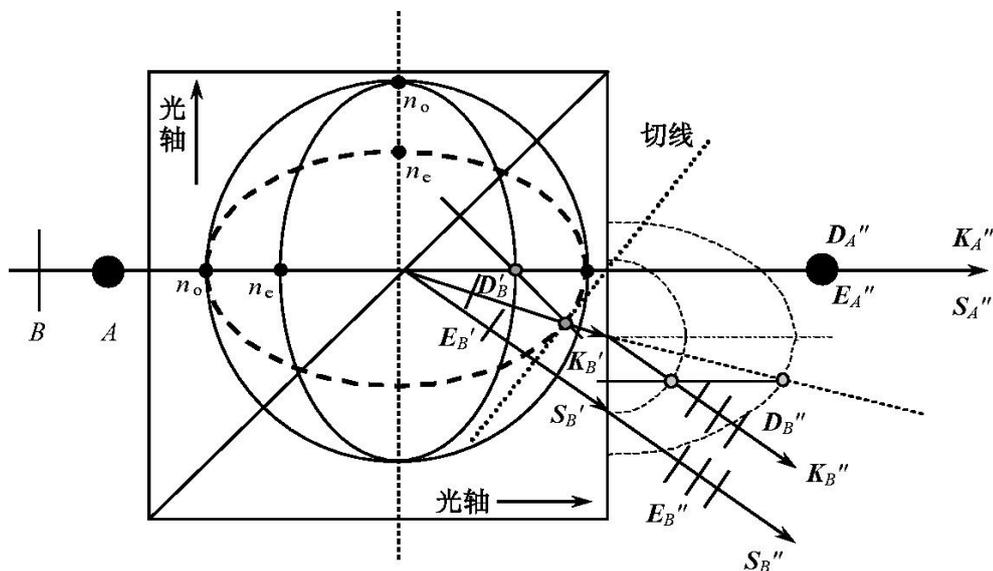


图 7.5.3 实例 2 示意图

均按正常光处理,如图 7.5.3 所示.

对于  $B$  光,为非常光,在前半块晶体中,由于垂直于晶体表面入射,且光轴与入射光波矢也垂直,其透射光波矢  $\mathbf{K}$  以及坡印亭矢量  $\mathbf{S}$  仍然按原方向传播,如图 7.5.3 所示.

入射到界面上时波矢与界面成  $45^\circ$  角.利用折射率曲面,用图解法求出  $e$  光的折射过程.具体做法如下:分别画出两块晶体的折射率曲面,它们均为双层面.它与纸面的截交线为圆和椭圆.圆为  $o$  光的折射率曲面截交线,椭圆为  $e$  光的截交线.第一块晶体中的截交线为如图所示的实线的圆与椭圆.由于是负晶体,它们在第一块晶体的光轴方向上即椭圆的长轴方向相切;而第二块晶体中  $e$  光的截交线为如图所示的虚线的椭圆.它与  $o$  光的截交线即仍为实线圆在椭圆的长轴方向相切.

过入射光  $\mathbf{K}$  方向延长线与实线椭圆的交点作晶体界面的垂线,交虚线椭圆于一点.连接圆心与交点,这个方向就是  $e$  光的  $\mathbf{K}_B'$  方向;而  $\mathbf{D}_B'$  则与  $\mathbf{K}_B'$  垂直.

过焦点作虚线椭圆的切线,由圆心向切线引垂线,这个垂线的方向就是  $e$  光的坡印亭矢量  $\mathbf{S}_B'$  的方向. $\mathbf{E}_B''$  与  $\mathbf{S}_B'$  垂直.

同样地,传播到后界面上可以用图解法求出出射后的  $B$  光各个矢量.要注意的是,在求解出射波矢方向时仍用折射率曲面,但出射点则在  $\mathbf{S}_B'$  与后界面的交点处.出射后的  $B$  光的  $\mathbf{S}_B''$  矢量在空气中必然与  $\mathbf{K}_B''$  相同.由此得到了各个矢量的方向,见图 7.5.3.

在以上分析中, $\mathbf{K}$  矢量只是一个方向, $\mathbf{S}$  矢量也是一个方向,但代表了能量传播的方向.假如以窄光束入射,那么  $B$  光束的能量出射点就应当在  $\mathbf{S}_B''$  方向于与后表面的交点上.

### 7.5.2 惠更斯作图法求光射线方向

由于所求的是光射线的表现,因此在用作图法求解时应当选用光线面式(7.4.26),或写为

$$\frac{\tilde{t}_1^2}{n_s^2 - n_1^2} + \frac{\tilde{t}_2^2}{n_s^2 - n_2^2} + \frac{\tilde{t}_3^2}{n_s^2 - n_3^2} = 0 \quad (7.5.2)$$

各主截面上的椭圆交线方程可由式(7.4.27)求得并画出.

以单轴晶光线一般斜入射情况为例,如图 7.5.4 给定光轴在纸面上.设晶体主折射率  $n_o > n_e$  (负单轴晶),则可作出晶体内光射线面在主截面上的交线,即  $o$  光与  $e$  光的波面截交线.对  $o$  光波面为球面,图中以  $A$  为圆心,以

$$r = \frac{A'O' \cdot n_1}{n} \quad (7.5.3)$$

为半径作圆.此处  $A'O'$  由作图时取的光束宽度及入射角  $\theta$  而定. $n$  为入射介质的折射率, $n_o$  为晶体中的主折射率.



将上式展开,并作变换

$$A = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{R^2} \quad (7.5.6)$$

$$B = 2 \sin \varphi \cos \varphi \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right] \quad (7.5.7)$$

$$C = \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{R^2} \quad (7.5.8)$$

则式(7.5.5)可写为

$$Ax^2 - Bxy + Cy^2 = 1 \quad (7.5.9)$$

然后再写出过  $O$  点作椭圆切线的切线方程.

先看由式(7.5.9)表示的椭圆上任一点  $(x, y)$  的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Ax - By}{Bx - 2Cy} \quad (7.5.10)$$

而  $O$  点斜率为  $M$  的直线方程为

$$y = Mx + l \quad (7.5.11)$$

其中  $l = AO$ , 而切点  $(x_e, y_e)$  上的斜率应满足式(7.5.10).

将式(7.5.10)与式(7.5.11)联立,即可求得过  $O$  点向椭圆所引切线的斜率

$$M = \frac{B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)(1 - Cl^2)}}{2C} = \frac{2Ax_e - By_e}{Bx_e - 2Cy_e} \quad (7.5.12)$$

这样可得  $e$  光线折射角  $\theta_e$  为

$$\tan \theta_e = \frac{y_e}{x_e} = \frac{BM - 2A}{2CM - B} \quad (7.5.13)$$

把式(7.5.12)代入上式,  $M$  的正负号视切线斜率正负而定,并把由式(7.5.6)~式(7.5.7)作的变换再代回上式,最后可求得

$$\tan \theta_e = \frac{(\bar{n}_o^2 - \bar{n}_e^2) \sin 2\varphi + 2\bar{n}_o \bar{n}_e \frac{\bar{n} \sin \theta}{(\bar{n}_o^2 \sin^2 \varphi + \bar{n}_e^2 \cos^2 \varphi - \bar{n}^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}}{2(\bar{n}_o^2 \sin^2 \varphi + \bar{n}_e^2 \cos^2 \varphi)} \quad (7.5.14)$$

## 7.6 双轴晶中的内锥折射和外锥折射

### 7.6.1 内锥折射

由晶体的折射率椭球可求得双轴晶中第一类光轴  $G_1$ 、 $G_2$  的方向.当光在晶体中的波法线方向与第一类光轴一致时,与这一波法线方向相应的各个偏振方向的

光波折射率相等,因为此时过  $O$  点作  $C_1$  或  $C_2$  垂面与椭球截交线是半径为  $n_2$  的圆(图 7.6.1).但是这些不同振动方向的偏振光在晶体中的  $D$  矢量与  $E$  矢量方向不同,即  $K$  矢量与  $S$  矢量不同向,例如位于  $x_1 x_3$  面上的  $D_{\parallel} \perp K$ ,过  $B$  点作折射率椭球的切面,由  $O$  点向切面引垂线得  $OF$ ,则  $OF$  就是相应的  $E_{\parallel}$  方向.再作  $OF$  的垂线即得  $S_{\parallel}$  的方向.一般地  $K$  与  $S$  均不同向,只有当  $D = D(0, D_2, 0)$ ,即  $D$  在  $x_2$  方向(记作  $D_{\perp}$ )时,由

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & & \\ & \epsilon & \\ & & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

可知,  $E_{\perp} = E(0, E_2, 0)$ ,即  $E_{\perp} \parallel D_{\perp}$ ,亦有  $K_{\perp} \parallel S_{\perp}$ .所有各种振动方向的偏振光具有相同的  $K$ ,而其相应的  $S$  矢量组成了一个斜锥面,顶点为  $O$ ,锥线与切面  $A_2 M_2$  的交点组成了一个圆.图 7.6.2 示出了双轴晶内光线面(双层)与波法线面(双层),其中两个面的球面是重合的.光轴  $G$  由波法线面的交点  $A_2$  与  $O$  连线而成,由  $A_2$  点向光线面作切面得到  $M_2$  点.这样就得到了这一光锥,锥面上的每条光射线均相

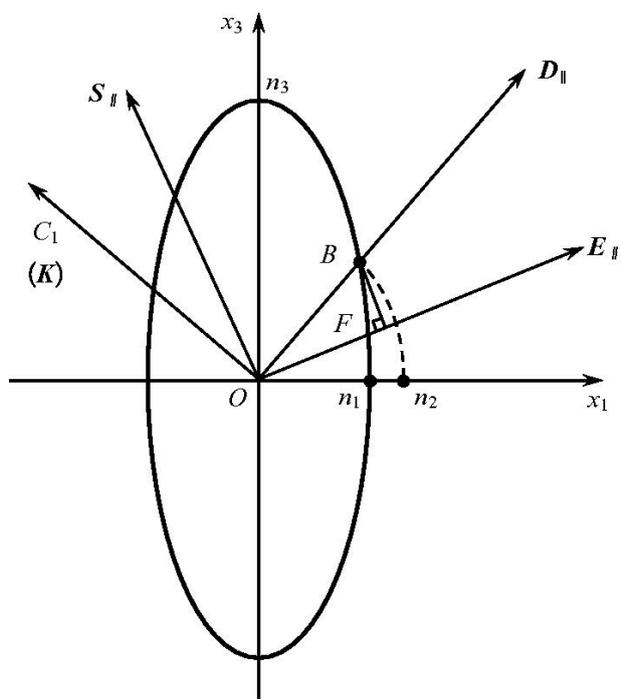


图 7.6.1 双轴晶折射率椭球  $x_1 x_3$  截面,沿第一类光轴  $C_1$  入射的光相应的  $K$ 、 $E_{\parallel}$ 、 $D_{\parallel}$ 、 $S_{\parallel}$  之间的关系

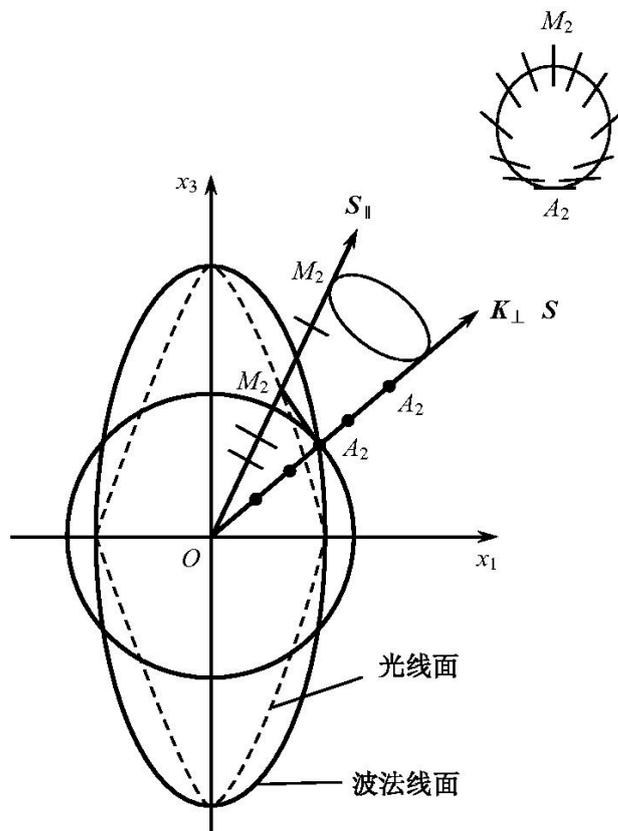


图 7.6.2 双轴晶内的波法线面光线面及光线锥和相应的偏振方向

应有各自的偏振方向.图 7.6.2 右上角上示出了切面与锥面截交所得的圆,这一切面正是等相面,与各光射线方向相应的偏振方向示于这一截圆上.当细光束入射到晶片中时,可以看到在晶体内形成一个圆锥形光束而出射晶片之后形成圆筒形光束,其截面为环状亮域.这就是著名的内锥折射.

图 7.6.3 示出了用实验观察内锥折射的示意图.用两个可移动的小孔限制入射到晶片上光束的方向,使得垂直于入射面振动的那支光的射线方向  $S_{\perp}$  在晶体内正好与第一类光轴  $C_1$  或  $C_2$  平行时,从而就可以在出射晶片后看到环状光束截面.

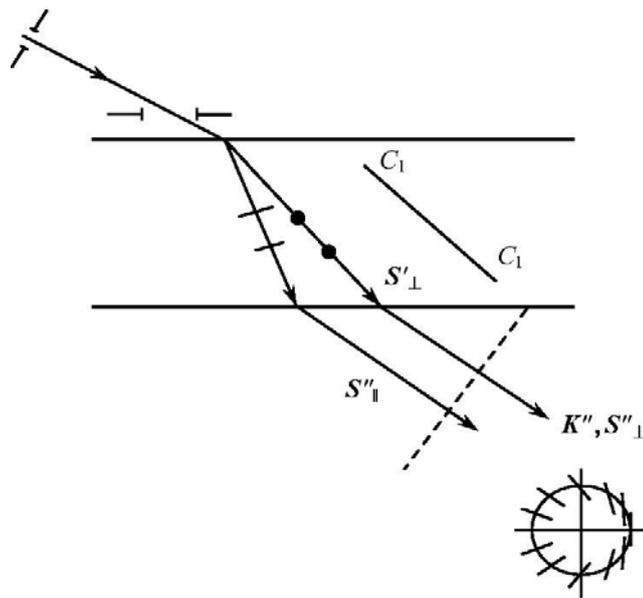


图 7.6.3 双轴晶中的内锥折射

### 7.6.2 外锥折射

若使自然光的光射线(坡印亭矢量)沿晶体中的第二类光轴在晶体内传播,则这些不同方向振动的偏振光具有相同的光线折射率  $n_s$ ,即具有相同的光射线传播速度  $v_s$  及射线的能流方向  $S$ ,但与每一个偏振方向相应的波法线矢量则各不相同,其中只有在  $x_2$  方向振动光的  $E_{\perp}$  与  $D_{\perp}$  重合,即  $S_{\perp}$  与  $K_{\perp}$  重合,即沿  $OM_2$  方向.而在  $x_1 x_3$  面内的振动方向  $D_{\parallel}$  与  $E_{\parallel}$  不重合,与之相应的  $K_{\parallel}$  在  $ON_2$  方向.其他各偏振方向的光其相应的  $K$  矢量则落在以  $O$  为顶点的斜锥内,锥面上每一条光线都有一个各自的偏振方向,如图 7.6.4 右上角所示,这就是外锥折射.

图 7.6.5 示出了实现外锥折射的实验示意图.实验中为了使所有不同偏振的光在晶体内有同一个射线方向( $S$ ),必然相应地在空气中以及在晶体内均形成一个光锥,即在入射到晶体下表面上的各偏振光的  $K$  矢量具有不同的方向,经折射后射在空气中时  $K'$  与  $S'$  同方向,故  $K'$  与  $S'$  均成为一个锥状射线束,这就是外锥折射.

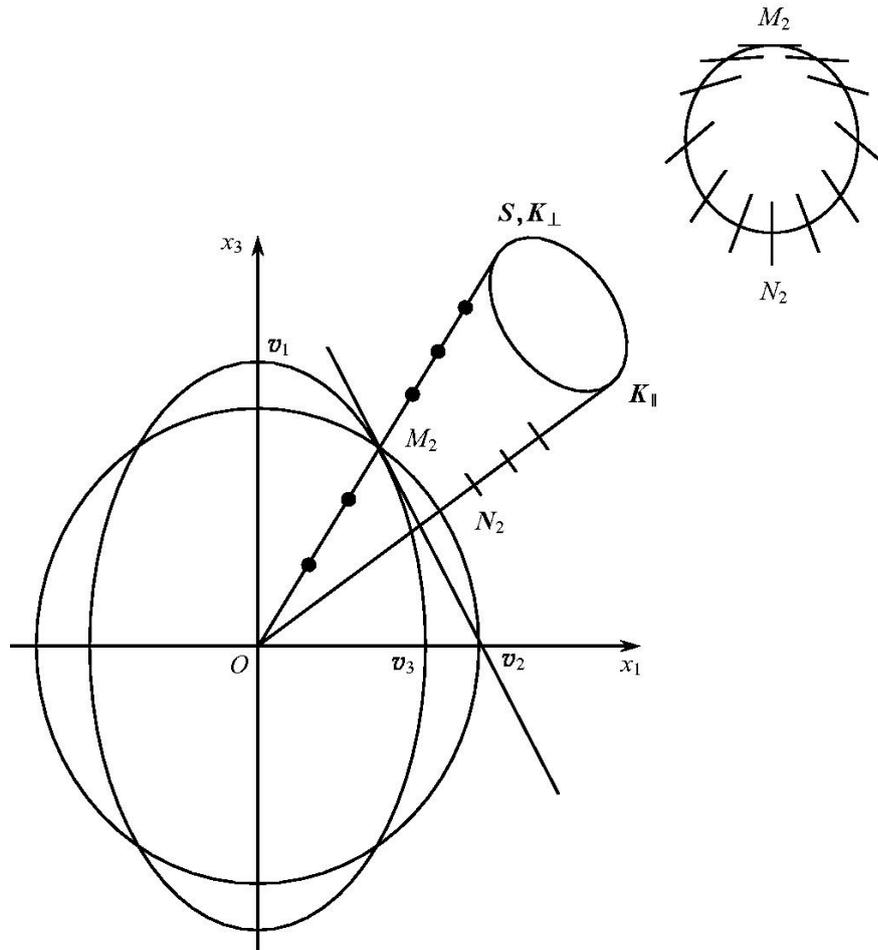


图 7.6.4 双轴晶内的光线面及光线锥与相应的偏振方向

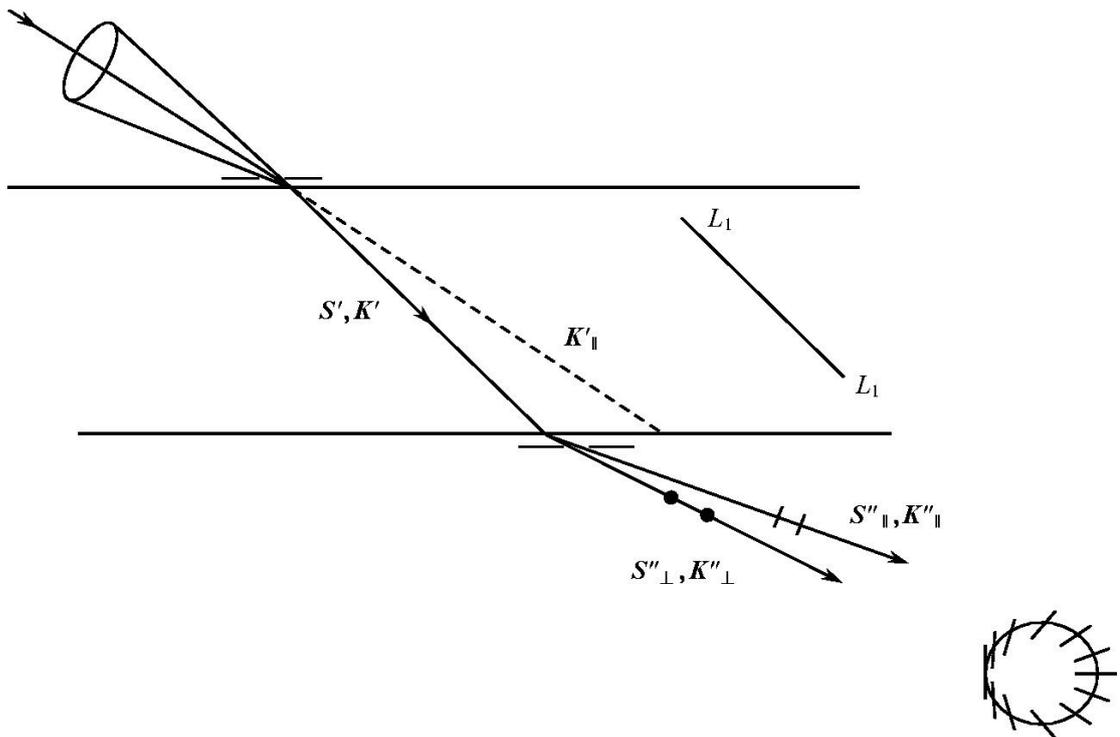


图 7.6.5 双轴晶中的外锥折射

## 7.7 晶体中的非线性效应

本章前 6 节所讨论的都是晶体中的线性光学效应及其性质.这是在光场(电磁场)较弱时的情况,也就是在经典光学中(或称 linear optic)的一般表现.本节起将对介质中的非线性光学效应,或更一般地,对介质中的非线性效应作一讨论.

### 7.7.1 非线性效应的一般描述

前面所有讨论均为一般情况,即光场(电磁场)场强较弱,介质的极化强度  $\mathbf{P}$  仅与光场  $\mathbf{E}$  成线性关系的情况.自从激光出现以来,其极高的强度使得由  $\mathbf{E}$  引起的极化  $\mathbf{P}$  不仅含线性项,而且其高次项也变得显著起来.特别对于某些介质,这一现象更为明显(称之为非线性介质).原则上讲,所有的介质均可能出现非线性效应,只要所加的  $\mathbf{E}$  足够强.

非线性效应的理论基础是非线性极化及非线性介质中的麦克斯韦方程组.由于介质中存在的高阶非线性极化,使得从麦克斯韦方程组导出的波动方程带有非线性极化项,由此产生了新的电磁波辐射.

由麦克斯韦方程组一般形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Delta \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \Delta \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \Delta \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (7.7.1)$$

以及描写电磁场对介质作用的本构方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (7.7.2)$$

当光场(或更一般的电磁场)足够强时,介质中由此产生的极化  $\mathbf{P}$  将包括线性极化项  $\mathbf{P}_L$  及不可忽略的高次极化  $\mathbf{P}_{NL}$  (非线性极化),即

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} \quad (7.7.3)$$

此时的电位移矢量可写为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} \quad (7.7.4)$$

将上述物质方程代入麦克斯韦方程组,并将方程组第一式两边取旋度,并把第二方程代入,就可以导出一组包含波场强高次项,即包含非线性极化项的非线性电磁波动方程组,其中的电场矢量波动方程为

$$\Delta \times \Delta \times \mathbf{E} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (7.7.5)$$

上式就是具有非线性极化时的波动方程一般式.另一个关于磁矢量的波动方程不在此列出.

若介质中无自由电荷及传导电流,即  $\rho = 0$ ,则有  $\Delta \cdot \mathbf{D} = 0$ .将式(7.7.4)代入上式,得

$$\Delta \cdot (\epsilon \mathbf{E} + \epsilon \chi \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL}) = 0 \quad (7.7.6)$$

注意到介质或晶体虽具有各向异性特性,但却是处处均匀的,也就是说,上式中的电极化率  $\chi$  及非线性极化  $\mathbf{P}_{NL}$  均不是  $\mathbf{r}$  的函数,因此由式(7.7.6)可得到对于无自由电荷及传导电流时  $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$ ,对于有非线性极化时仍成立.在这种情况下,式(7.7.5)成为如下形式

$$\Delta^2 \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_L}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (7.7.7)$$

式(7.7.5)、式(7.7.7)就是具有非线性极化的波动方程.所有各类非线性光学效应都将从波动方程出发进行讨论.

波动方程描写了如何从非线性极化激发出新电磁波,这仅仅是光学非线性效应的一半,另一半则是这一非线性极化是如何产生的.

介质在弱光强(电磁场)作用下,极化过程与电场振幅成线性关系.但是在强光场(电磁场)作用下,极化过程并非与电场振幅成线性关系.一般地,可以把极化  $\mathbf{P}$  写为  $\mathbf{E}$  的幂级数形式,即

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \epsilon \mathbf{K}(\mathbf{E}) = \epsilon (\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots) \quad (7.7.8)$$

式中的  $\mathbf{E}$  表示作用在介质中的总电场.通常地,  $\mathbf{E}$  可以是具有不同频率、不同偏振态、不同波矢  $\mathbf{K}$  的许多不同电场 ( $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3 \dots$ ) 的总和,即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots \quad (7.7.9)$$

更一般的情况,  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \dots$ , 甚至可以是高频的光场或低频的交变电场,如电光效应就是属于这种情况.因此,式(7.7.8)中的  $\mathbf{E}$  包括了许多项,而  $\mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3 \dots$  则包含了更多项,故在非线性极化的高次项中会出现各个不同电矢量的交叉项,从而使极化  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  的展开式中包括了各种可能的频率及波矢.这就是形成各种非线性现象的原因.至于介质中究竟出现何种非线性现象,还要取决于相位匹配条件以及介质的光学特性.

### 7.7.2 非线性极化及经典振子模型

光在介质中传播可以用两个参数表示,即折射率  $n(\omega)$  及吸收系数  $\alpha(\omega)$ . 在弱光(即线性光学)情况下,  $n, \alpha$  与入射光强度无关,是常数. 这时,反射、折射、传播速度及衰减是不随入射光强而改变的,并且由此得到了两个最基本的原则,这是我们在处理一般的光学问题时所常常碰到的.

(1) 叠加原理,或称不同光波的互不影响叠加. 这一原理说,光波可以相互没有影响而互不干扰地叠加在一起,即一个光波传播时与那里有否第二个光波存在无关,各自传播.

(2) 频率不变原理.

认为光与物质相互作用时不会产生新频率的光,因此,光在介质中或介质外频率不变.

这两个原则仅仅在弱光强时成立,即普通光源发出的光都可以认为是弱光,都符合这一原则. 当光强极高时,如激光出现之后,这两个原则就都不适用了.

事实上,在经典光学中的弱光下,这两个原则已发现也有不适用的情况. 如拉曼效应产生的频率改变、克尔效应及法拉第效应中观察到的电、磁场对光的影响. 这时涉及的电场是稳态的或低频的. 可以认为式(7.7.9)中的  $\mathbf{E}$  包括了高频光场与低频的电场,由于它的非线性效应不仅仅是对光场,而包含了低频电场,故更一般地把这些效应视为非线性效应而不将之称为非线性光学效应.

这些效应早就被知晓了,这是因为在低频范围内早就有办法产生足够强的功率(或即低频电场矢量  $\mathbf{E}$ ),从而使非线性项比较强而成为可观察到的. 而在光学范围内,即总电场  $\mathbf{E}$  只包括各种光频的光场  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3 \dots$  而不包括低频电场、磁场,光频  $\omega$  极高,产生足够强的  $E(\omega)$  就有困难了. 因此,光场对物质的影响在理论上早在 1930 年就被提出了,而在实验上直到 1960 年发明了第一台激光器之后,在 1961 年才实现. 之后,一系列各种各样的非线性光学效应被不断发现,在 7.10 节中将对其作一概括的介绍. 下面主要讨论非线性极化的振子模型及理论.

### 7.7.3 非线性极化理论

#### 1. 光在透明介质中的传播

经典的光传播模型——光场  $\mathbf{E}$  作用在弹性束缚电子上的电场力为

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}$$

当光场不强时,即在经典理论适合的范围中,在这一力作用下,介质中偶极子中较轻的电子相对于较重的原子核以光频( $10^{14}$  Hz)作简谐振荡. 这是一个振荡偶极子,它的偶极矩为

$$\mathbf{p} = e\mathbf{x}$$

介质中单位体积内偶极矩总和,即极化强度为

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i e_i \mathbf{x}_i}{V}$$

在最简单的情况即线性光学的情况下,极化强度与激发电场  $\mathbf{E}$  成正比,即线性关系

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (7.7.10)$$

式中:介电常数  $\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ;电极化率  $\chi$  为无量纲的物质常数,最简单情况下是标量,各向异性介质中为张量;电场强度  $\mathbf{E}$  的量纲为  $[\text{V/m}]$ ;极化强度  $\mathbf{P}$  量纲为  $[\text{C/m}^2]$ 。

电极化率  $\chi$  在各向异性介质中为张量,表示了激发电场的方向与被激发出来的极化强度的方向不一致.振荡的电偶极子就是产生新电场(电磁波)的辐射源,即赫兹偶极子.它与激发电场具有相同的频率.但由于弹性束缚电子的惯性而在相位上有一个滞后.激发电场和电偶极子辐射的电场重叠在一起,产生一个电场,它相对于原始场总有一个位相滞后.这一位相滞后在宏观上表现为光通过介质时光速的显著改变,并通过折射率  $n$  及极化率  $\chi$  表示出来.

综上所述,光在线性光学范围内传播可作如下描述:光波  $\mathbf{E}$  通过介质传播,激发出一个极化波  $\mathbf{P}$ ,其频率与光波相同,极化波  $\mathbf{P}$  又辐射出一个相同频率的光波.

## 2. 电子的特征线

上述表达的光传播的一个前提是:振子中电子为弹性束缚电子,即电子回到中心位置的回复力是与其偏离  $d$  成正比的,即满足弹性振荡条件,所受的力为胡克力.换句话说,束缚电子处于抛物线势中,即势  $U$  正比于  $d^2$ ,成二次(抛物线)关系,此时方有回复力  $F \propto d$ .

电子的偏移  $d$  与电场  $\mathbf{E}$  的关系可以通过电子特征线来表示.显然,弹性束缚电子的特征线是一条直线(图 7.7.1).

事实上,弹性束缚电子的模型仅仅是对实际状况的一种近似.图 7.7.2 表示理想的抛物势(即弹性束缚电子所具的势)与实际势之间的差异.当振子的振动能量高时,即在强光场激发时,这种差异就相当显著.假如当振子振动能量超过束缚能  $E_b$  时,电子甚至可以脱离束缚而成为自由电子,这就是我们熟知的光电效应.这一现象在实际势曲线中可清楚地体现出来,而若以理想的抛物势曲线描写,则仍认为这时做简谐振动.可见,作高能振动时抛物势已不再能正确描写实际振子的势了.

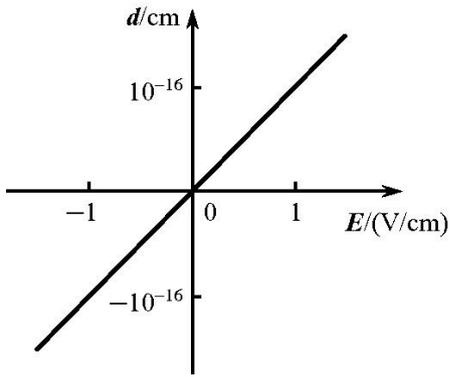


图 7.7.1 弹性束缚电子的特征线

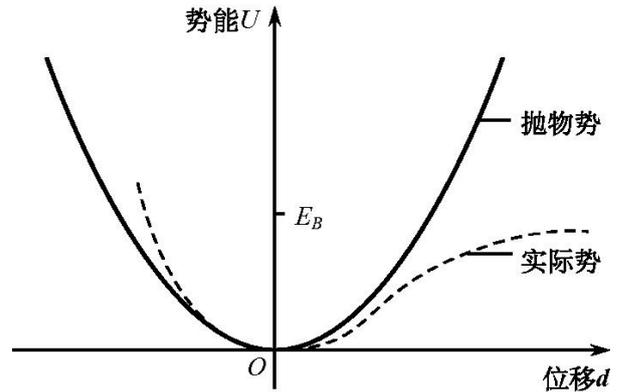


图 7.7.2 抛物势与实际势

与实际势相应的电子特征线不再是直线,而是弯曲的(图 7.7.3),这与机械弹簧振子在强激发力时情况相同,当强激发力超出胡克范围时,位移  $d$  与回复力不再成线性关系。

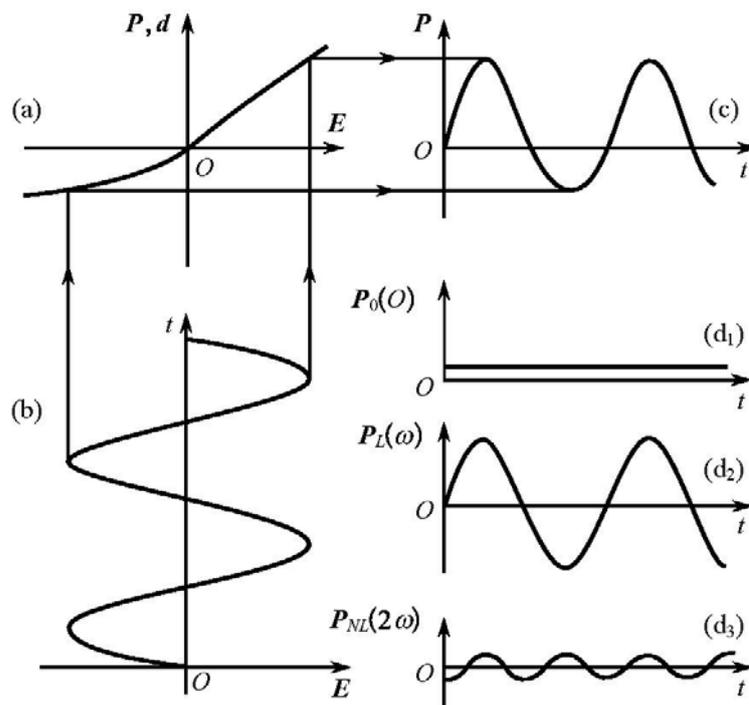


图 7.7.3 非线性极化及高次谐波

对于普通光源,典型场强值  $|E| \approx 1 \text{ V/cm}$ ,这时相应于电子运动位移量  $|d| \approx 10^{-16} \text{ cm}$ ,这一数值相对于原子大小  $10^{-8} \text{ cm}$  线度来说是一个极小的量.因此,对普通光源,电子特征线是直线,弹性束缚电子模型完全适用。

对于强光源,如激光光源,电子的位移  $d$  可以为极大的,变得不可忽略了,以致使电子特征线弯曲。

### 3. 高场强时的极化

由于电子特征线的弯曲,电子在正弦外场激发下产生非简谐振动,这就是说移动量  $\mathbf{d}$  或极化强度  $\mathbf{P}$  中就含有高阶谐波成分.图 7.7.3 示出了由正弦电场  $\mathbf{E}$  在非直线部分的电子特征线下激发出非正弦的  $\mathbf{P}$ ,从而可以把非简谐的  $\mathbf{P}$  分解为直流分量  $\mathbf{P}_0(0)$ 、一阶(正弦)谐波  $\mathbf{P}_L(\omega)$ 、二次谐波  $\mathbf{P}_{NL}(2\omega)$ 、 $\dots$ .这时,  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$  这一线性表示式就不再适用,现在的  $\mathbf{P}$  是  $\mathbf{E}$  的一个复杂表示式,可写为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi(\mathbf{E}) \mathbf{E}$$

其中  $\chi = \chi(\mathbf{E})$  可以用泰勒级数展开,近似地可写为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots) \quad (7.7.11)$$

一般情况下,磁场也可以对极化产生影响,这时上式变为更一般地含  $\mathbf{H}$  项或  $\mathbf{EH}$  项的复杂情况,如在 7.9 节中将要提到的法拉第旋光效应.有关这类复杂情况,在此就不再作详细讨论.在固体中,一般  $\chi$  具如下数量级

$$\chi \approx 1, \quad \chi^{(1)} \approx 10^{-10} \text{ cm/V}, \quad \chi^{(2)} \approx 10^{-17} \text{ cm}^2/\text{V}$$

### 4. 高次非线性现象,高阶极化张量

正如前面所述,介质的感生极化与激发电场的强度并非成线性关系,而可以用泰勒级数展开来表示,写为矢量形式一般式即为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots \quad (7.7.12)$$

其中,  $\chi^{(1)}$ 、 $\chi^{(2)}$ 、 $\chi^{(3)}$ 、 $\dots$  分别为二阶、三阶、四阶、 $\dots$  张量.  $\mathbf{P}$  为极化强度矢量,写为分量形式

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \quad (7.7.13)$$

$\mathbf{E}$  应当表示介质中所有存在的电场之和

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^n \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n \quad (7.7.14)$$

注意,以上角标 1, 2, 3,  $\dots$ ,  $n$  表示第 1 个、第 2 个、 $\dots$ 、第  $n$  个电场,而并非指分量.

合电场  $\mathbf{E}$  又可用三个分量表示为

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad (7.7.15)$$

因此,式(7.7.12)可以用矢量的分量形式及张量的分量形式表示为

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j + 2\chi_{ijk} E_j E_k + 4\chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \quad (7.7.16)$$

取式中  $i = x, y, z; j = x, y, z; h = x, y, z; l = x, y, z, \dots$ .  $\chi_{ij}$  是线性极化率,或一阶极化率,它是二阶张量; $\chi_{ijk}$ 、 $\chi_{ijkl}$ 、 $\dots$  分别为二阶、三阶、 $\dots$  非线性极化率,它们是三阶、四阶张量.

注意到上式系数的取法. 第一项把  $\mathfrak{s}$  放在外面, 而第二、三项把  $\mathfrak{s}$  包括在了  $\chi_{ijk}$ 、 $\chi_{ijkl}$  中. 这种做法完全是为了与目前国际上通用的有关极化率常数表格中给出的参数一致而采用的. 而在前面诸如式(7.7.12)中所表示的则是原理性的一般式. 由于高次极化公式过于复杂, 故在式(7.7.16)中的写法上为简洁而采用了形式张量记号法并省去了求和号  $\sum$ , 式中右边对重复下标求和.

假定系统是无损耗的, 即介质为无色散的, 此时响应是瞬时的, 可以证明系数  $\chi_{ij}$ 、 $\chi_{ijk}$ 、 $\chi_{ijkl}$ 、 $\dots$  的下标作重新排列时不变, 即值与下标排列次序无关, 例如:  $\chi_{1231} = \chi_{2113} = \dots$ .

再考虑到  $\mathbf{E} = \sum_{n=1}^n \mathbf{E}_n$  为  $n$  个电场的合电场, 讨论其分量形式的极化强度以及由此激发新的辐射光波.

作为一般性方法, 先考虑二阶非线性效应. 设有两个光场, 分别具有频率  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  及波矢  $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{K}_2$ , 这两电场分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_1(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + C \cdot C \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{A}_1(\omega_1) e^{i(\omega_1 t - \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r})} + C \cdot C \end{aligned} \quad (7.7.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_2(\omega_2) e^{i\omega_2 t} + C \cdot C \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{A}_2(\omega_2) e^{i(\omega_2 t - \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} + C \cdot C \end{aligned} \quad (7.7.18)$$

入射到介质中. 两电场用分量复数形式表示为

$$\begin{aligned} E_{1j}^{\omega_1}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} E_{j1}^{\omega_1}(\mathbf{r}) e^{i\omega_1 t} + C \cdot C \\ E_{2k}^{\omega_2}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} E_{k2}^{\omega_2}(\mathbf{r}) e^{i\omega_2 t} + C \cdot C \end{aligned} \quad (7.7.19)$$

入射到介质中的总电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1^{\omega_1} + \mathbf{E}_2^{\omega_2} \quad (7.7.20)$$

我们现在只关心二次非线性效应. 将上式表示的总电场代入式(7.7.12)中的二次极化项, 或用式(7.7.16)的分量形式表示, 考虑其二次极化项为

$$\begin{aligned} P_i &= 2 d_{ijk} E_j E_k = 2 d_{ijk} \left[ \frac{1}{2} E_{j1}^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} E_{j2}^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + C \cdot C \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{2} E_{k1}^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} E_{k2}^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + C \cdot C \right] \end{aligned}$$

$$= 2 d_{ijk} \left[ \frac{1}{4} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_1} e^{i2\omega_1 t} + \frac{1}{4} E_j^{\omega_2} E_k^{\omega_1} e^{i(\omega_2 + \omega_1) t} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (E_j^{\omega_1})^* E_k^{\omega_1} e^{i(\omega_1 - \omega_1) t} + \frac{1}{4} (E_j^{\omega_2})^* E_k^{\omega_1} e^{i(\omega_1 - \omega_2) t} + \dots \right] \quad (7.7.21)$$

上式总共包括了直流、 $\omega_1^2$ 、 $\omega_2^2$ 、 $\omega_1 + \omega_2$ 、 $\omega_1 - \omega_2$  等各种可能的极化项。若给以某一特定的相位匹配条件,使其中的某一项二次极化占优势,就可实现这一特定的二次非线性效应。

以和频( $\omega_1 + \omega_2$ )与差频( $\omega_1 - \omega_2$ )效应为例。对于和频,有

$$P_i^{\omega_1 + \omega_2} = \frac{1}{2} [ d_{ijk} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + d_{ijk} E_j^{\omega_2} E_k^{\omega_1} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + C \cdot C ] \quad (7.7.22)$$

把上式右端第二项下标交换,并不改变结果

$$P_i^{\omega_1 + \omega_2} = \frac{1}{2} [ d_{ijk} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + d_{ikj} E_k^{\omega_2} E_j^{\omega_1} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + C \cdot C ]$$

考虑到  $d_{ijk} = d_{ikj}$ ,把第二项的  $d_{ikj}$  改写为  $d_{ijk}$ ,则有

$$P_i^{\omega_1 + \omega_2}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [ d_{ijk} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} \\ + d_{ijk} E_k^{\omega_2} E_j^{\omega_1} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + C \cdot C ] \\ = d_{ijk} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + C \cdot C \\ = \frac{1}{2} P_i^{\omega_1 + \omega_2}(\mathbf{r}) e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + C \cdot C \quad (7.7.23)$$

式中

$$P_i^{\omega_1 + \omega_2}(\mathbf{r}) = 2 d_{ijk} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2}$$

为极化矢量分量的复振幅。

令  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ,这意味着由于和频效应在产生的非线性极化项中具有  $\omega_3$  的频率,得

$$P_i^{\omega_3} = P_i^{\omega_1 + \omega_2}(\mathbf{r}) = 2 d_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2}$$

类似地得到由差频产生的非线性极化

$$P_i^{\omega_3 = \omega_1 - \omega_2}(\mathbf{r}) = 2 d_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, -\omega_2) E_j^{\omega_1} (E_k^{\omega_2})^*$$

完整的表达式为

$$\begin{aligned} \text{和频} \quad P_i^{\omega_3 = \omega_1 + \omega_2}(\mathbf{r}, t) &= d_{ijk} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} + C \cdot C \\ \text{差频} \quad P_i^{\omega_3 = \omega_1 - \omega_2}(\mathbf{r}, t) &= d_{ijk} E_j^{\omega_1} (E_k^{\omega_2})^* e^{i(\omega_1 - \omega_2) t} - C \cdot C \end{aligned}$$

对于和频后,由  $P_i^{\omega_3 = \omega_1 + \omega_2}$  极化所激发的新辐射波为

$$E_i^{\omega_3}(\mathbf{r}, t) \propto d_{ijk} A_j(\omega_1) A_k(\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2) t} \cdot e^{-i(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \cdot \mathbf{r}} + C \cdot C \quad (7.7.24)$$

当满足相应匹配关系

$$\begin{cases} \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \\ \mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \end{cases} \quad (7.7.25)$$

和频场各分量间相位是相干累加的,无动量损失,才有可能新产生的波场在传输过程中不断加强,从而辐射出具有频率为  $\omega_1 + \omega_2$  的新光波,若不符合  $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$  条件,在  $\mathbf{K}_1$ 、 $\mathbf{K}_2$  原激发波的传播过程中与被激发波在  $\mathbf{K}_3$  方向传播时有相位相消,动量损失,就不可能使新产生的波不断增长而辐射.这就是非线性光学中的一个极其重要的相位匹配问题.

由于  $K = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(\omega)$ ,介质的折射率是频率的函数,因此,要满足

$$\mathbf{K}_3(\omega_3) = \mathbf{K}_1(\omega_1) + \mathbf{K}_2(\omega_2) \quad (7.7.26)$$

并不容易.下面以倍频效应为例说明相位匹配的实现.

#### 7.7.4 非线性效应中的相位匹配

本节以倍频效应为例说明如何实现相位匹配.当入射光为仅包含频率为  $\omega_1$  的强光时,出现极化项  $d_{ijk} E_j E_k e^{i2\omega_1 t}$ ,即出现了频率为原入射光波频率 2 倍的二次极化波  $P(\omega_2 = 2\omega_1)$ ,这些极化波要发射与之同频率的电磁波(光波),即二次谐波倍频光波.

极化波  $\mathbf{P}$  的传播速度与基频激发光波  $\mathbf{E}_1(\omega_1)$  传播速度是相同的,因为基频光传播到哪里,哪里就产生极化波.

但由极化波激发的倍频光波  $\mathbf{E}(2\omega_1)$  与基波  $\mathbf{E}(\omega_1)$  传播速度常常是不同的,因为在正常色散时,有  $n(2\omega) > n(\omega)$ ,所以倍频光波  $\mathbf{E}^{2\omega}$  传播得比基波  $\mathbf{E}^\omega$  慢.因此,由前一时刻激发的  $\mathbf{E}^\omega$  在传播过程中又会与后面由后一时刻  $\mathbf{E}^\omega$  激发的  $\mathbf{E}^{2\omega}$  相互干涉.只有当不同时刻不同部位发射的二次谐波相位完全一致时,才能产生相长干涉,使二次谐波不断增长.若相位不一致,如  $\delta = \pi$ ,则晶体中这两个不同部位的二次谐波正好相互抵消,就不会有任何二次谐波输出.因此,要想得到较强的二次谐波,就要求  $\mathbf{E}^\omega$  与  $\mathbf{E}^{2\omega}$  光在介质(晶体)中具有相同的传播速度,即

$$v(\omega_1) = v(2\omega_1) \quad (7.7.27)$$

也就是要求

$$n(\omega_1) = n(2\omega_1) \quad (7.7.28)$$

这是由动量守恒定理的要求所得到的.由动量守恒要求

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1 = 0 \quad (7.7.29)$$

才没有动量损失.这时有

$$\mathbf{K}_2 = 2\mathbf{K}_1 \quad (7.7.30)$$

而由一般式

$$\mathbf{K} = \frac{n(\omega)\omega}{C} \mathbf{K}_0$$

当  $\mathbf{K} = 2\mathbf{K}_1$  时,有

$$\frac{n_2(\omega_2)\omega_2}{C} = \frac{2n_1(\omega_1)\omega_1}{C}$$

故得到

$$n_2(\omega_2) = n_1(\omega_1)$$

或写为

$$n_2(2\omega_1) = n_1(\omega_1) \quad (7.7.31)$$

这就是说,当满足

$$\begin{cases} \omega_2 = 2\omega_1 \\ \mathbf{K} = 2\mathbf{K}_1 \end{cases} \quad (7.7.32)$$

即满足相位匹配条件,倍频光与基频光在晶体内传播速度相等,从而使各处发出的二次谐波具有相同的相位,相互加强,最终实现倍频输出.

实现上述相位匹配条件的方法有两种:方向匹配与温度匹配.此处仅对方向匹配作一简单介绍.

利用折射率曲面来研究相位匹配是十分方便和明了的.正如在 7.4.3 节中所述,折射率曲面是双层曲面,对于 o 光为球面,对 e 光可以是旋转椭球(单轴晶)或一般的四次曲面(双轴晶).以单轴晶为例,有两种方向匹配型式.

### 1. I 型匹配(平行式位相匹配)

图 7.7.4(a)与(b)示出了正单轴晶与负单轴晶中频率为  $\omega_1$  及  $2\omega_1$  的折射率曲面.图中粗实线所示的球面是 o 光的折射率曲面,其中频率为  $2\omega_1$  的球面半径大于频率为  $\omega_1$  的球面半径.细实线所示的椭球面则是 e 光的折射率曲面.从图(a)中可以看出,对  $\omega_1$  的 e 光折射率曲面与对  $2\omega_1$  的 o 光折射率面(球面)有一交点.这意味着,在这个方向上必有

$$n_o^e(\omega_1) = n_o^o(2\omega_1)$$

这就是说,使基频光沿 PM 方向入射,并使其偏振方向在入射面上(e 光),则在此方向上可以激发出不断加强的倍频光  $E(2\omega_1)$ ,其偏振方向垂直入射面(o 光),写出动量守恒定律为

$$\Delta \mathbf{K} = 2\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_o = 0$$

这类相位匹配又称(eeo)型相位匹配.这是在正晶体中的匹配方式.

从图 7.7.4(b)中可以看出,对于负单轴晶也可找到 PM 方向(位相匹配方

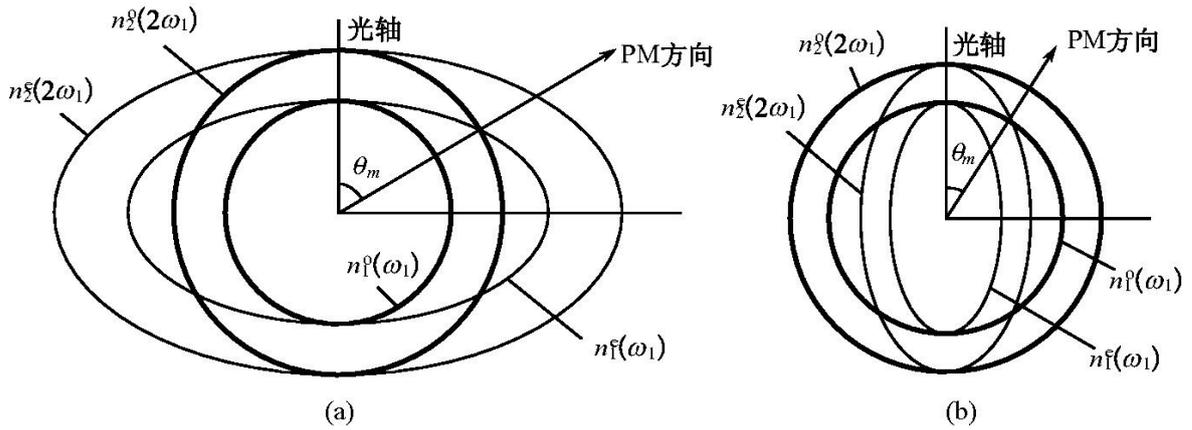


图 7.7.4 倍频效应中的 I 型相位匹配

(a) 正单轴晶; (b) 负单轴晶

向),它是从球心指向对  $\omega_1$  的 o 光折射率曲面(球面)与对  $2\omega_1$  的 e 光折射率曲面(椭球面)的交点方向,故基频光为 o 光,倍频光为 e 光,这类匹配是对于负单轴晶的,称为(ooe)型相位匹配,其动量守恒式为

$$\Delta \mathbf{K} = 2\mathbf{K}_o - \mathbf{K}_e = 0$$

2. II 型匹配(正交式位相匹配)

这类匹配型式满足的动量守恒式为

正单轴晶  $\Delta \mathbf{K} = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_o) - \mathbf{K}_o = 0$

负单轴晶  $\Delta \mathbf{K} = (\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_e) - \mathbf{K}_e = 0$

其相应的折射率曲面分别示于图 7.7.5(a)与(b)中.由这一动量守恒式导出的相位

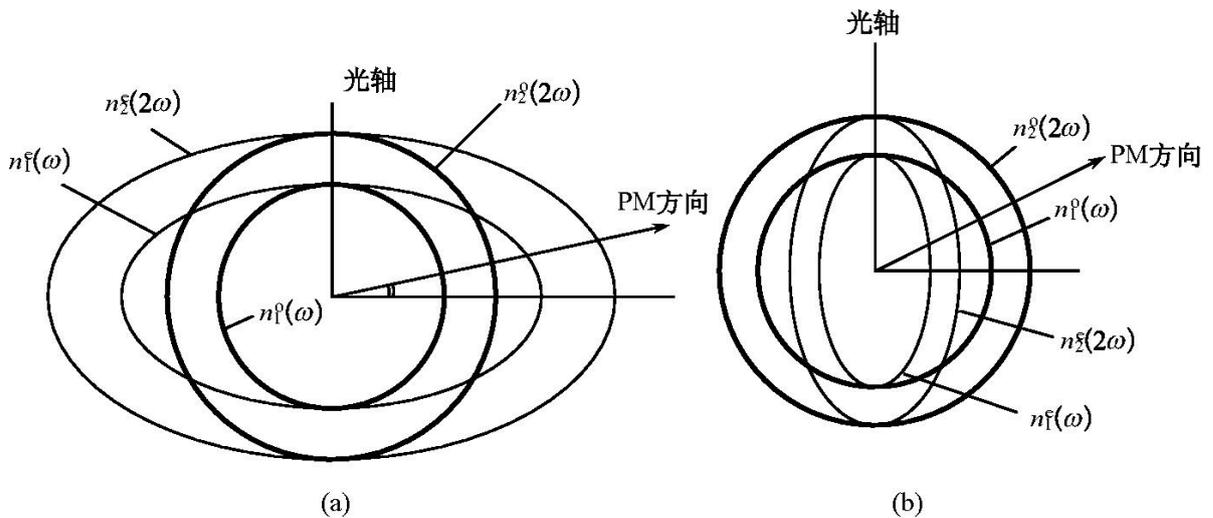


图 7.7.5 倍频效应中的 II 型相位匹配

(a) 正单轴晶; (b) 负单轴晶

匹配条件为

$$\text{正单轴晶} \quad n_i^c + n_i^o = 2n_i^o \quad (\text{eoo}) \text{ 型}$$

$$\text{负单轴晶} \quad n_i^o + n_i^c = 2n_i^c \quad (\text{ooe}) \text{ 型}$$

这样就可求出满足相位匹配条件的晶体中某一特殊方向(即 PM 方向).

双轴晶中也存在 I 型与 II 型匹配方式,在此就不再作详细讨论

## 7.8 电光效应

### 7.8.1 电光效应的一般描述

电光效应是指晶体在低频外电场及光场作用下,其折射率发生改变的一种效应.电光效应就其本质而言,也属于一种非线性效应.激发非线性极化的合电场中包括高频光场  $E(\omega)$ 、低频电场  $E(\Omega)$ ,即式(7.7.12)中的总电场

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega) + \mathbf{E}(\Omega)$$

由于光场频率  $\omega$  远大于外加低频电场频率  $\Omega$ ,故可视为  $\Omega \approx 0$ ,光场与外加电场耦合后产生的光辐射频率不变.按前一节所述方法,把合电场代入极化式(7.7.12).由于低频电场足够强,非线性极化项中仅考虑  $\mathbf{E}(\omega)$  与  $\mathbf{E}(\Omega)$  相互作用的交叉项,这时可写出物质方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega) &= \mathbf{D}_L + \mathbf{P}_{NL} \\ &= \varepsilon^o(\omega) \mathbf{E}(\omega) + \alpha \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}(\Omega) + \beta \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}^2(\Omega) + \dots \\ &= \mathbf{E}(\omega) [\varepsilon^o(\omega) + \alpha \mathbf{E}(\Omega) + \beta \mathbf{E}^2(\Omega) + \dots] \\ &= \mathbf{E}(\omega) [\varepsilon^o(\omega) + \Delta \varepsilon(\omega)] \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

式中,  $\varepsilon^o(\omega) = \varepsilon^o(\omega)$  为未施加外电场时的光频介电常数.施加外电场后的晶体的介电常数为

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon^o(\omega) + \Delta \varepsilon(\omega) \\ &= \varepsilon^o(\omega) + \alpha \mathbf{E}(\Omega) + \beta \mathbf{E}^2(\Omega) + \dots \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

对于非磁性材料,有

$$n^2(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \quad (7.8.3)$$

因此,介电常数  $\varepsilon(\omega)$  在式(7.8.2)中的高次项

$$\Delta \varepsilon(\omega) = \alpha \mathbf{E}(\Omega) + \beta \mathbf{E}^2(\Omega) + \dots \quad (7.8.4)$$

就表示了低频外电场  $\mathbf{E}(\Omega)$  对加电场后的光频介电常数  $\varepsilon(\omega)$  的贡献.换句话说,由于低频电场的加入,使晶体的折射率发生了变化.由式(7.8.2)知,  $\varepsilon(\omega)$  是  $\mathbf{E}(\Omega)$  的

幂级数,因此,加外电场后晶体的折射率  $n$  也可以展开为外电场  $\mathbf{E}(\Omega)$  的幂级数,即

$$\begin{aligned} n &= n^0 + \Delta n(\omega) \\ &= n^0 + a\mathbf{E}(\Omega) + b\mathbf{E}^2(\Omega) + \dots \end{aligned} \quad (7.8.5)$$

式中,  $n^0$  表示未加外电场之前的晶体折射率,当然由于晶体的各向异性.在式(7.8.2)中的介电常数  $\varepsilon(\omega)$ 、 $\varepsilon^0(\omega)$  及改变量  $\Delta\varepsilon(\omega)$  也都是张量.后面将用张量的分量形式进行讨论.这种由外加电场引起的介质折射率变化的现象,称电光效应.式中  $a$  为一次(线性)电光系数,  $a\mathbf{E}(\Omega)$  项为线性电光效应.  $b$  为二次电光系数,  $b\mathbf{E}^2(\Omega)$  项为二次电光效应……可见,一次电光效应(线性电光效应)实质上是由二次非线性极化引起的,它是二阶非线性光学效应的特殊情形.而二次电光效应则是一种三阶非线性光学效应…….

若用介电隔离张量  $\beta$  来表示,即

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_j} \quad (7.8.6)$$

若式中  $i, j = x, y, z$ , 或用  $i, j = 1, 2, 3$  表示  $x, y, z$  分量标,则式(7.8.2)可表示为

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \beta_{ij}^0 + \sum_{k=1}^3 \gamma_{ijk} E_k + \sum_{k,l=1}^3 h_{ijkl} E_k E_l + \dots \\ &= \beta_{ij}^0 + \Delta\beta_{ij} \end{aligned} \quad (7.8.7)$$

式中:  $\Delta\beta_{ij}$  是外加电场对介电隔离张量的贡献;  $\gamma_{ijk}$  为线性电光系数或泡克耳斯(Pockels)系数;  $h_{ijkl}$  为二次电光系数或克尔(Kern)系数.

### 7.8.2 线性电光效应(Pockels-effect)

由式(7.8.7),线性电光效应的方程可表示为

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}^0 + \sum_{k=1}^3 \gamma_{ijk} E_k \quad (7.8.8)$$

这意味着,在外加电场  $\mathbf{E}(\Omega)$  之前,晶体的折射率椭球为

$$\beta_1^0 x_1^2 + \beta_2^0 x_2^2 + \beta_3^0 x_3^2 = 1 \quad (7.8.9)$$

加了外加电场后,由于线性电光效应,介质的折射率即介电隔离张量发生了变化,也即晶体的折射率椭球发生了变化,可用一般二次齐式来表示

$$\sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij} x_i x_j = 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7.8.10)$$

或写为

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \quad (7.8.11)$$

其介电隔离张量的变化量可由式(7.8.8)求出

$$\Delta\beta_{ij} = \beta_{ij} - \beta_{ij}^0 = \sum_{k=1}^3 \gamma_{ijk} E_k \quad (7.8.12)$$

为便于运算,也可记为

$$\begin{pmatrix} \Delta\beta_{11} & \Delta\beta_{12} & \Delta\beta_{13} \\ \Delta\beta_{21} & \Delta\beta_{22} & \Delta\beta_{23} \\ \Delta\beta_{31} & \Delta\beta_{32} & \Delta\beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{111} & \gamma_{112} & \gamma_{113} \\ \gamma_{121} & \gamma_{122} & \gamma_{123} \\ \gamma_{131} & \gamma_{132} & \gamma_{133} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{211} & \gamma_{212} & \gamma_{213} \\ \gamma_{221} & \gamma_{222} & \gamma_{223} \\ \gamma_{231} & \gamma_{232} & \gamma_{233} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (7.8.13)$$

即

$$\begin{cases} \Delta\beta_{11} = \sum_{k=1}^3 \gamma_{11k} E_k = \gamma_{111} E_1 + \gamma_{112} E_2 + \gamma_{113} E_3 \\ \Delta\beta_{12} = \sum_{k=1}^3 \gamma_{12k} E_k = \gamma_{121} E_1 + \gamma_{122} E_2 + \gamma_{123} E_3 \\ \dots\dots\dots \\ \Delta\beta_{33} = \sum_{k=1}^3 \gamma_{33k} E_k = \gamma_{331} E_1 + \gamma_{332} E_2 + \gamma_{333} E_3 \end{cases} \quad (7.8.14)$$

由于晶体的对称性,则 $\Delta\beta_{ij}$ 必定为对称张量,故 $[\beta_{ij}]$ 中的9个元只有6个为独立的,因而 $[\gamma_{ijk}]$ 的27个元也因对称性而减至18个元.将其简记为

$$[\Delta\beta_{ij}] = \begin{pmatrix} \Delta\beta_{11} & \Delta\beta_{12} & \Delta\beta_{13} \\ \Delta\beta_{12} & \Delta\beta_{22} & \Delta\beta_{23} \\ \Delta\beta_{13} & \Delta\beta_{23} & \Delta\beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\beta_1 & \Delta\beta_6 & \Delta\beta_5 \\ \Delta\beta_6 & \Delta\beta_2 & \Delta\beta_4 \\ \Delta\beta_5 & \Delta\beta_4 & \Delta\beta_3 \end{pmatrix} \quad (7.8.15)$$

及

$$[\gamma_{mk}] = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} \end{pmatrix} \quad (7.8.16)$$

式(7.8.15)的标记约定也适用于 $[\beta_{ij}]$ 张量简记为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ 的形式.这样,由式(7.8.14)表示的线性电光效应可写为

$$\begin{bmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \Delta\beta_3 \\ \Delta\beta_4 \\ \Delta\beta_5 \\ \Delta\beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \Delta\beta_3 \\ \Delta\beta_4 \\ \Delta\beta_5 \\ \Delta\beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7.8.17)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta\beta_1 = \beta_{11} - \beta_{11}^0 = \beta_1 - \beta_1^0 = \gamma_{11} E_1 + \gamma_{12} E_2 + \gamma_{13} E_3 \\ \Delta\beta_2 = \beta_{22} - \beta_{22}^0 = \beta_2 - \beta_2^0 = \gamma_{21} E_1 + \gamma_{22} E_2 + \gamma_{23} E_3 \\ \Delta\beta_3 = \beta_{33} - \beta_{33}^0 = \beta_3 - \beta_3^0 = \gamma_{31} E_1 + \gamma_{32} E_2 + \gamma_{33} E_3 \\ \Delta\beta_4 = \beta_{23} - 0 = \beta_4 = \gamma_{41} E_1 + \gamma_{42} E_2 + \gamma_{43} E_3 \\ \Delta\beta_5 = \beta_{13} - 0 = \beta_5 = \gamma_{51} E_1 + \gamma_{52} E_2 + \gamma_{53} E_3 \\ \Delta\beta_6 = \beta_{12} - 0 = \beta_6 = \gamma_{61} E_1 + \gamma_{62} E_2 + \gamma_{63} E_3 \end{cases} \quad (7.8.18)$$

这样,当已知晶体在加电场之前的折射率椭球式(7.8.9),即已知 $\beta_1^0, \beta_2^0, \beta_3^0$ 时,便可由上式求得加电场后由于电光效应而产生的新的折射率椭球式(7.8.10),且 $\beta_{ij}$ 的对称性及式(7.8.15)的约定,可写出加电场后折射率椭球为

$$\beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \beta_3 x_3^2 + 2\beta_4 x_2 x_3 + 2\beta_5 x_3 x_1 + 2\beta_6 x_1 x_2 = 1 \quad (7.8.19)$$

各种晶体的电光矩阵 $[\gamma_{mk}]$ 可以从相应的手册上查出.式(7.8.19)意味着,外加电场通过电光效应使晶体折射率椭球的长、短轴的大小及取向发生变化.利用这些变化,可以实现光开关、相位及强度调制、光偏转等.

### 7.8.3 $\bar{4}2m$ 类晶体的线性电光效应

$\bar{4}2m$ 类晶体是单轴晶,主折射率为 $n_o$ 和 $n_e$ ,其折射率椭球是以光轴( $x_3$ )为旋转轴的旋转椭球,即

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1 \quad (7.8.20)$$

或写为

$$\beta_1^0 (x_1^2 + x_2^2) + \beta_3^0 x_3^2 = 1 \quad (7.8.21)$$

$$\beta_1^0 = \beta_2^0 = \frac{1}{n_o^2}, \quad \beta_3^0 = \frac{1}{n_e^2} \quad (7.8.22)$$

按式(7.8.6)定义的 $\beta$ 与此处的 $\beta$ 有一比例系数 $n_0$ 的差别,在以下均作此理解.  
 $\bar{4}2m$ 类晶体的电光系数矩阵可由表查出,仅含两个独立的元 $\gamma_{41}$ 、 $\gamma_{63}$ ,当施加任意电场 $\mathbf{E}(E_1, E_2, E_3)$ 时,该类晶体的线性电光效应可表达为

$$\begin{bmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \Delta\beta_3 \\ \Delta\beta_4 \\ \Delta\beta_5 \\ \Delta\beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 - \beta_1^0 \\ \beta_2 - \beta_2^0 \\ \beta_3 - \beta_3^0 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{41} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7.8.23)$$

因此可以求出

$$\begin{aligned} \Delta\beta_1 &= \beta_1 - \beta_1^0 = 0, & \beta_1 &= \beta_1^0 = \frac{1}{n_o^2} \\ \Delta\beta_2 &= \beta_2 - \beta_2^0 = 0, & \beta_2 &= \beta_2^0 = \frac{1}{n_o^2} \\ \Delta\beta_3 &= \beta_3 - \beta_3^0 = 0, & \beta_3 &= \beta_3^0 = \frac{1}{n_e^2} \\ \Delta\beta_4 &= \beta_4 = \gamma_{41} E_1 \\ \Delta\beta_5 &= \beta_5 = \gamma_{41} E_2 \\ \Delta\beta_6 &= \beta_6 = \gamma_{63} E_3 \end{aligned} \quad (7.8.24)$$

将 $\beta_1, \dots, \beta_6$ 值代入式(7.8.19),可得施加任意电场 $\mathbf{E}$ 后, $\bar{4}2m$ 类晶体折射率椭球方程为

$$\beta_1^0 (x_1^2 + x_2^2) + \beta_3^0 x_3^2 + 2\gamma_{41} (E_1 x_2 x_3 + E_2 x_3 x_1) + 2\gamma_{63} E_3 x_1 x_2 = 1 \quad (7.8.25)$$

可见,折射率椭球由原来的式(7.8.20)表示的正旋转椭球变为三轴椭球,且三个椭球轴与晶体的主轴有了倾斜角,即变为双轴晶.

式(7.8.25)表明, $\bar{4}2m$ 类晶体电光效应与 $\gamma_{41}$ 与 $\gamma_{63}$ 有关.当外加电场 $\mathbf{E}$ 仅有 $E_3$ 分量时,电光效应与 $\gamma_{63}$ 有关,当 $\mathbf{E}$ 仅有 $E_1$ 或 $E_2$ 分量时则电光效应与 $\gamma_{41}$ 有关.一般从晶体切割方式及运用方式分为两种,即电场加在光轴( $x_3$ )方向及电场垂直 $x_3$ 方向.而电场确定后,按其通光方向又可分为二类:纵向电光效应——通光方向与电场一致;横向电光效应——通光方向与电场垂直.

### 1. $\gamma_{63}$ 纵向电光效应

由式(7.8.23)知,要利用 $\gamma_{63}$ 而消除 $\gamma_{41}$ 的影响,应使 $E_1 = E_2 = 0, E_3 \neq 0$ ,即电

场沿  $x_3$  (光轴) 方向施加, 此时折射率椭球方程(7.8.25)变为

$$\beta_1^0 (x_1^2 + x_2^2) + \beta_3^0 x_3^2 + 2\gamma_{63} E_3 x_1 x_2 = 1 \quad (7.8.26)$$

与加电场之前的折射率椭球相比, 这是一个变了形且歪斜了的三轴椭球, 新椭球的三个主轴的长短及方向可以通过主轴化的方法求得. 即对  $(\beta_{ij})$  矩阵进行对角化

$$(\beta_{ij}) = \begin{bmatrix} \beta_1^0 & \gamma_{63} E_3 & 0 \\ \gamma_{63} E_3 & \beta_1^0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^0 \end{bmatrix} \quad (7.8.27)$$

因而其特征方程为

$$\begin{bmatrix} \beta_1^0 - \lambda & \gamma_{63} E_3 & 0 \\ \gamma_{63} E_3 & \beta_1^0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^0 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (7.8.28)$$

由此解得三个特征值为

$$\begin{cases} \lambda' = \beta'_1 = \beta_1^0 + \gamma_{63} E_3 \\ \lambda'' = \beta'_2 = \beta_1^0 - \gamma_{63} E_3 \\ \lambda''' = \beta'_3 = \beta_3^0 \end{cases} \quad (7.8.29)$$

设  $x'_1, x'_2, x'_3$  为新椭球的三个主轴, 则在以  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  为坐标轴的新坐标系中, 该椭球方程即为  $\lambda' x'^2_1 + \lambda'' x'^2_2 + \lambda''' x'^2_3 = 1$ , 即

$$(\beta_1^0 + \gamma_{63} E_3) x'^2_1 + (\beta_1^0 - \gamma_{63} E_3) x'^2_2 + \beta_3^0 x'^2_3 = 1 \quad (7.8.30)$$

这一椭球的三个主轴的方位可以通过求与三个特征值  $\lambda', \lambda'', \lambda'''$  相应的三个特征向量得到, 例如, 对于  $\lambda'$  的特征方程为

$$\begin{bmatrix} \beta_1^0 - \lambda' & \gamma_{63} E_3 & 0 \\ \gamma_{63} E_3 & \beta_1^0 - \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^0 - \lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (7.8.31)$$

由上述方程求得三个联立方程, 即可解出  $x'_1 = x'_2, x'_3 = 0$ . 再将其归一化后可得

特征向量为  $\left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right]$ , 这表示新坐标系的  $x'_1$  轴位于原坐标系的  $x_1$  轴和  $x_2$  轴

分角线上. 同样, 可求出对应对  $\lambda''$  的特征向量为  $\left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right]$ , 即  $x'_2$  轴位于  $-x_1$

轴和  $x_2$  轴的分角线上, 而对  $\lambda'''$ , 求出特征向量为  $(0, 0, 1)$ , 它表示  $x'_3$  轴与  $x_3$  轴重合. 由此得出结论, 新坐标系绕  $x_3$  轴逆时针转过  $45^\circ$  (图 7.8.1).

新椭球的长短轴可直接由式(7.8.30)求出

$$\beta'_1 = \beta_1^0 + \gamma_{63} E_3 = \frac{1}{n_0^2} + \gamma_{63} E_3 \quad (7.8.32)$$

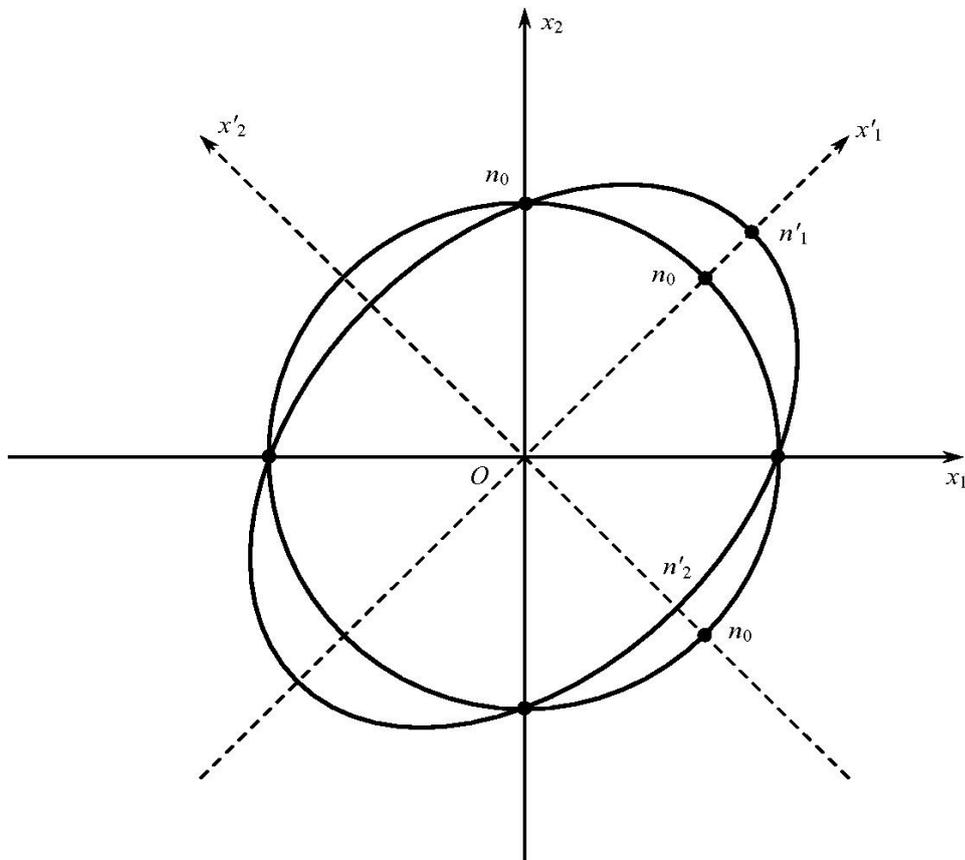


图 7.8.1 折射率椭球的主轴化

而

$$\beta'_{11} = \frac{1}{(n'_1)^2} = \frac{1}{n_0^2} + \gamma_{63} E_3 \tag{7.8.33}$$

故得

$$n'^2_1 = \frac{n_0^2}{1 + n_0^2 \gamma_{63} E_3} \tag{7.8.34}$$

由于  $\gamma_{63} \ll 1$ , 利用级数展开式, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}x^2 + \dots \tag{7.8.35}$$

可求得

$$n'_1 = \frac{n_0}{\sqrt{1 + n_0^2 \gamma_{63} E_3}} \approx n_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} n_0^2 \gamma_{63} E_3 \right] \tag{7.8.36}$$

同理可求得  $n'_2$ . 由此可得

$$\left. \begin{aligned} \Delta n &= n'_1 - n_0 = -\frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{63} E_3 \\ \Delta n &= n'_2 - n_0 = \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{63} E_3 \\ n'_3 &= n_0 = n_e \end{aligned} \right\} \quad (7.8.37)$$

当纵向运用时,通光方向与电场方向平行,即平行于  $x_3$ ,加电场后,振动方向在  $x'_1$  及  $x'_2$  的两束偏振光折射率分别为  $n'_1$  及  $n'_2$ .设晶体  $x_3$  方向厚度为  $d$ ,则光通过晶片后产生的相位差为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda} (n'_2 - n'_1) \cdot d \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 \gamma_{63} E_3 d \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 \gamma_{63} V_3 \end{aligned} \quad (7.8.38)$$

式中  $\lambda$  为真空中的光波长;  $V_3 = E_3 d$  为加在晶体光轴 ( $x_3$ ) 方向上的电压.可见,由  $E_3$  引起的位相差上只与加在晶体上电压  $V_3$  有关,而与晶体厚度无关.

若使引起的相位差  $\Gamma = \pi$ ,这时所需加的电压称半波电压 ( $V_\pi$  或  $V_{\lambda/2}$ ),由式(7.8.38)可得

$$V_\pi = \lambda / (2 n_0^3 \gamma_{63}) \quad (7.8.39)$$

如图 7.8.2,使入射光偏振方向  $D$  在  $x_2$  方向,可分解为与  $x'_1$ 、 $x'_2$  平行的两个振动方向,通过晶片后相差  $\Gamma = \pi$ ,即这两个相互垂直又有  $\pi$  相位差的偏振光,合成后仍

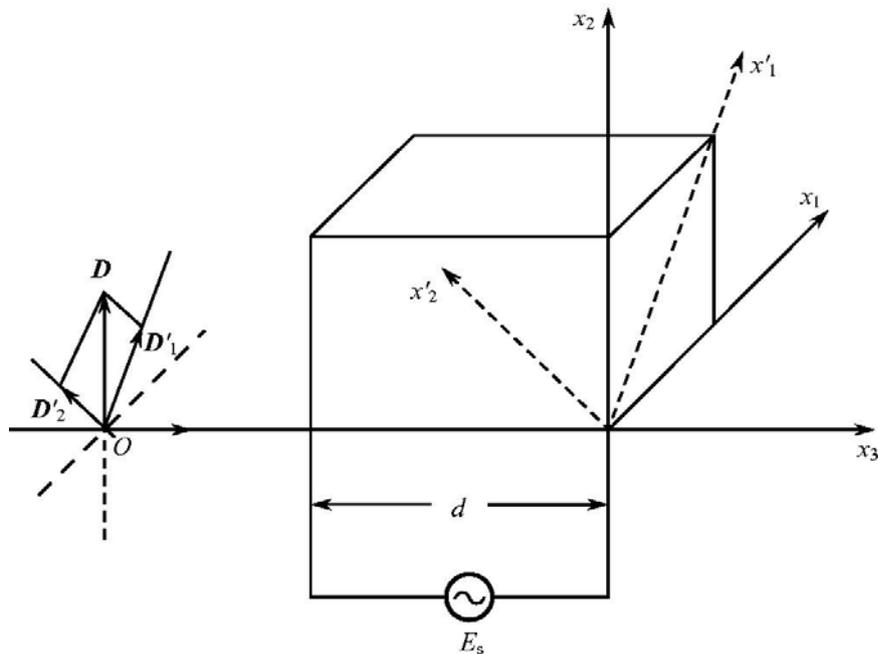


图 7.8.2 电光晶体的  $\gamma_{63}$  纵向运用

为偏振光,但偏振方向转过了  $90^\circ$ ,在  $x_1$  方向.若在泡克耳斯盒后面再安放检偏器,就可控制出射光的光强.

如对 KDP 晶体,  $\gamma_{63} = -10.5 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,  $\gamma_{41} = 8.6 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,  $n_0 = 1.49$ ,  $n_e = 1.46$ ,可以算得  $\gamma_{63}$  纵向运用时  $V_\pi \approx 15\text{kV}$ .

对  $\text{KD}^* \text{P}$  晶体,  $\gamma_{63} = -26.4 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,  $\gamma_{41} = 8.8 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,  $n_0 = 1.49$ ,  $n_e = 1.46$ .可算得  $\gamma_{63}$  纵向运用时的半波电压  $V_\pi \approx 5600\text{V}$ .

### 2. $\gamma_{63}$ 横向电光效应

当  $\gamma_{63}$  横向运用时,晶体按图 7.8.3 所示切割,电场加在  $x_3$  方向,而光束则从垂直于  $x_3$  轴方向入射,一般地使  $\mathbf{D}$  与  $x_3$  成  $45^\circ$ ,  $\mathbf{D}$  可分解为  $x'_2$  及  $x_3$  方向分量,则通过长度为  $l$  的晶体后,  $\mathbf{D}'_2$  方向振动的光与  $\mathbf{D}'_3$  方向振动的光产生相位差(式 (7.8.38))为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda} (n'_2 - n'_3) l \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{1}{2} \gamma_{63} n_0^3 E_3 + n_0 - n_e \right] l \\ &= \frac{2\pi l}{\lambda} (n_0 - n_e) + \frac{\pi l}{\lambda d} \gamma_{63} n_0^3 V_3 \end{aligned}$$

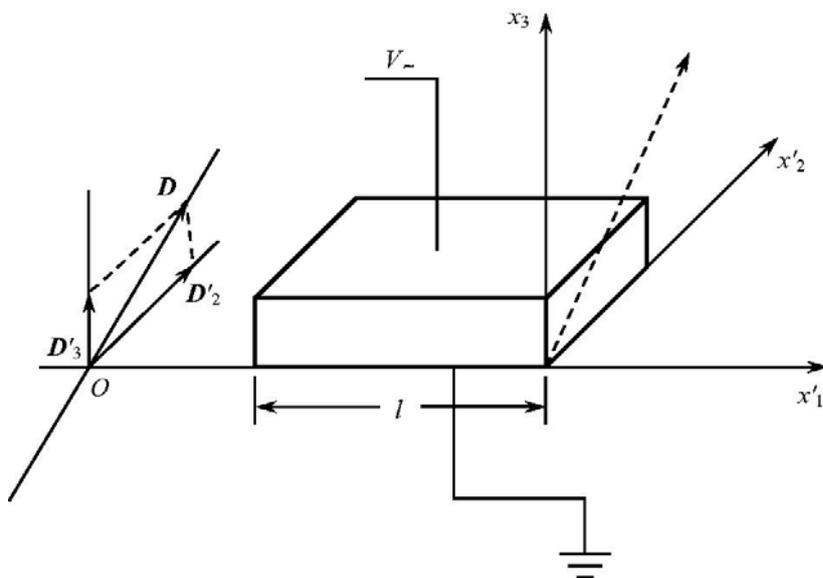


图 7.8.3 电光晶体的  $\gamma_{63}$  横向运用

式中:第一项是一个与外加电压无关,仅与晶体  $n_0$ 、 $n_e$  有关的常数项,但  $n_0$  与  $n_e$  则随环境温度而变化,且这一变化较大,因此在实用中常采用两块等长但取向及电场方向不同的晶体来实现温度补偿;第二项与  $\frac{l}{d}$  有关,称之为纵横比.可见若使纵横

比增加,可以使半波电压减少.

### 3. $\gamma_{41}$ 电光效应

要产生  $\gamma_{41}$  电光效应,应使电场垂直于  $x_3$ . 例如,使电场加在  $x_2$  方向 ( $E = E_2$ ), 则式(7.8.25)的加电场后折射率椭球方程变为

$$\beta_1^0 (x_1^2 + x_2^2) + \beta_3^0 x_3^2 + 2\gamma_{41} E_2 x_1 x_3 = 0 \quad (7.8.40)$$

同样,利用主轴化求得新折射率椭球的  $[\beta'_{ij}]$  主值为

$$\begin{cases} \beta'_{11} = \beta_1^0 + \frac{\gamma_{41}^2 E_2^2}{\beta_1^0 - \beta_3^0} \\ \beta'_{22} = \beta_1^0 \\ \beta'_{33} = \beta_3^0 - \frac{\gamma_{41}^2 E_2^2}{\beta_1^0 - \beta_3^0} \end{cases} \quad (7.8.41)$$

于是相应的主折射率为

$$\begin{cases} n'_1 = n_o + \frac{1}{2} \cdot \frac{n_o^5 n_e^2}{n_o^2 - n_e^2} (\gamma_{41} E_2)^2 \\ n'_2 = n_o \\ n'_3 = n_e - \frac{1}{2} \cdot \frac{n_o^2 n_e^5}{n_o^2 - n_e^2} (\gamma_{41} E_2)^2 \end{cases} \quad (7.8.42)$$

若通光方向取  $x_2$ , 即纵向运用,可得光通过晶体后两束光产生相位差为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda} (n'_1 - n'_3) \cdot d \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d + \frac{\pi}{\lambda} \gamma_{41}^2 \frac{n_o^2 n_e^2 (n_o^3 + n_e^3)}{n_o^2 - n_e^2} \cdot \frac{V_2^2}{d} \end{aligned} \quad (7.8.43)$$

由于几乎所有晶体的  $\gamma_{41}$  均很小,其平方项更小,故  $\gamma_{41}$  的纵向电光效应极小,这种运用实用价值不大.

若通光方向取  $x_3$ , 即横向运用,由式(7.8.40)令  $x_3 = 0$ , 得到垂直于  $x_3$  的椭球截面为

$$\beta_1^0 (x_1^2 + x_2^2) = 1 \quad (7.8.44)$$

这是一个半径为  $n_o$  的圆,与电光系数无关,因此不可能出现电光效应.

一般地选取沿与  $x_1$  和  $x_3$  轴成  $45^\circ$  角的方向通光,这种运用比较复杂,在此不作介绍.

总结解线性电光效应问题可按如下步骤进行:

- (1) 查出晶体电光系数矩阵,按所加电场方向写出折射率椭球方程.
- (2) 将加电场后折射率椭球的介电隔离张量  $(\beta_{ij})$  主轴化为  $(\beta'_{ij})$ , 求得主折射

率  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$  的大小及方向.

(3) 按给定的通光方向求出两个偏振光的相位差.

(4) 讨论加电场后晶体的光学性质.

#### 7.8.4 电光效应的应用

由式(7.8.5)知,晶体上加上电压时其折射率将发生变化,产生电光效应.这种变化虽然很小,但足以改变光在晶体中传播的许多特性.因此可以通过外场来控制光的传播方向、位相、强度、偏振态等.电光效应的主要应用包括调制、开关、偏转等,这在现代光学技术和信息技术中有着广泛的应用.

##### 1. 振幅调制或强度调制

以  $\text{KD}^* \text{P}$  晶体  $\gamma_{63}$  纵向应用为例,如图 7.8.4 所示.当偏振光  $D$  通过晶体后,由式(7.8.38)知两支偏振光  $D$  及  $D'$  产生的相位差为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda} (n_2' - n_1') d \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 \gamma_{63} V_3 \end{aligned} \quad (7.8.45)$$

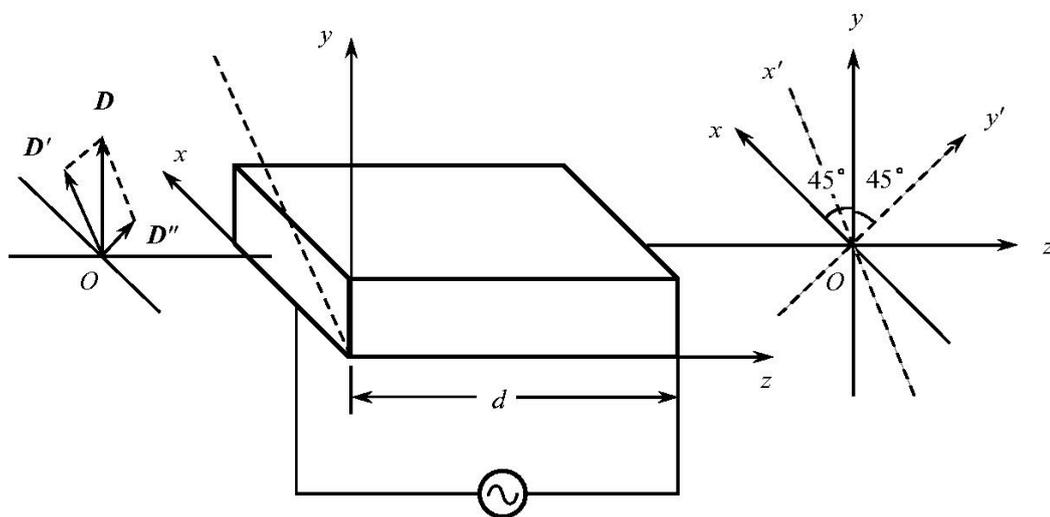


图 7.8.4  $\text{KD}^* \text{P}$  晶体  $\gamma_{63}$  纵向运用作振幅调制

若外加电压  $V_3$  随时间作正弦变化:

$$V_3(t) = V_m \sin(\omega_m t) \quad (7.8.46)$$

则式(7.8.45)变为

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n_0^2 \gamma_{63} V_m \sin(\omega_m t) \quad (7.8.47)$$

将式(7.8.39)代入上式,得

$$\Gamma = \frac{\pi}{V_{\pi}} V_m \sin(\omega_m t) = \Gamma_m \sin(\omega_m t) \quad (7.8.48)$$

式中,  $\Gamma_m = \frac{\pi}{V_{\pi}} V_m$ . 这样两支偏振光的相位差受到正弦调制. 如果在晶体后面安放一检偏器, 检偏方向为  $x$  方向, 可以证明透过光强为

$$I_t = I_0 \sin^2 \frac{\Gamma}{2} \quad (7.8.49)$$

从而透过光强也受到调制.

为了使调制失真减少, 往往人为地用插入波片或预置电压的方法引入一个“直流”附加相位而使其工作在线性区域(图 7.8.5). 因此, 式(7.8.49)中的  $\Gamma$  包含了直流附加相位及交流调制项

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (7.8.50)$$

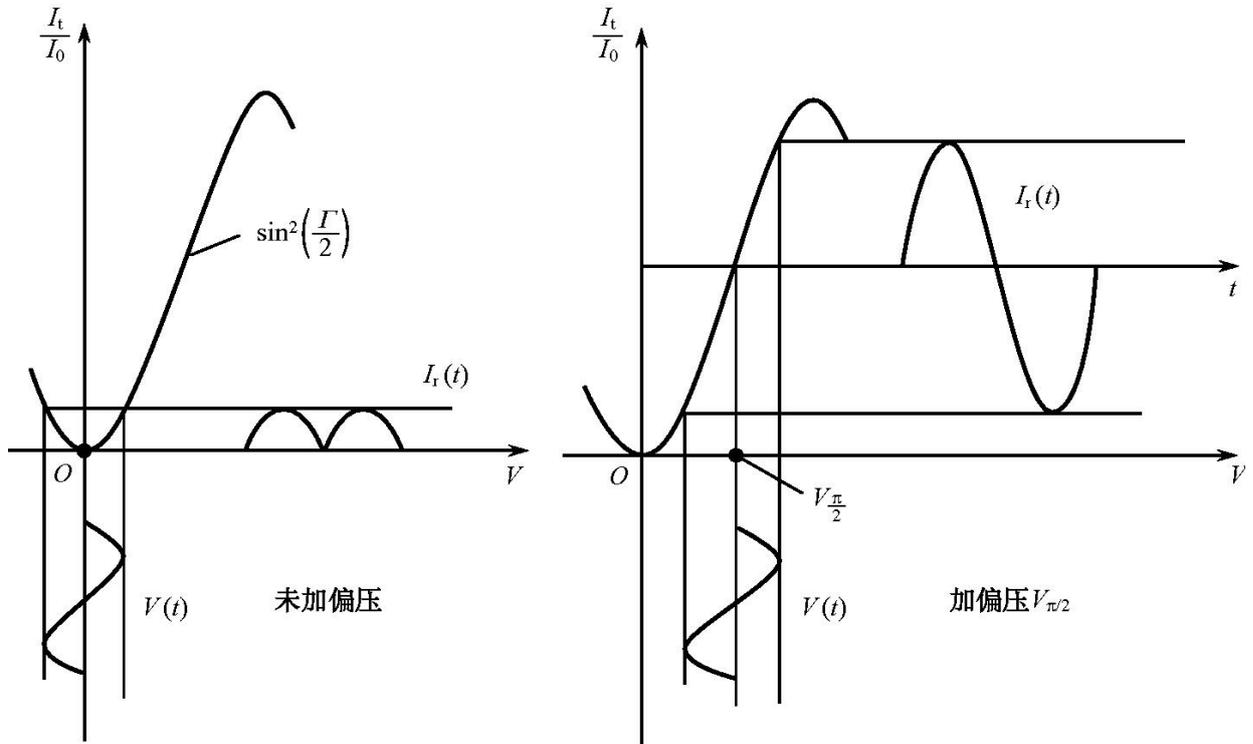


图 7.8.5 振幅调制的偏置电压

式中:  $\Gamma_0$  为自然双折射引起的相位差;  $\Gamma_1$  为人为预置相位差;  $\Gamma_2$  按式(7.8.48)计算所得. 一般使  $\Gamma_0 + \Gamma_1 = \frac{\pi}{2}$ , 则得

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{I_0} &= \sin^2 \frac{\Gamma}{2} = \sin^2 \left[ \frac{\Gamma_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin \Gamma_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + \sin \left[ \frac{\pi V_m}{V_\pi} \sin(\omega_m t) \right] \right] \quad (7.8.51)$$

讨论:

当  $\Gamma_m = \frac{\pi V_m}{V_\pi} \ll 1$  (即  $V_m \ll V_\pi$ ) 时

$$\sin \left[ \frac{\pi V_m}{V_\pi} \sin(\omega_m t) \right] \approx \frac{\pi V_m}{V_\pi} \sin(\omega_m t) \quad (7.8.52)$$

将此式代入式(7.8.51),得

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\pi V_m}{V_\pi} \sin(\omega_m t) \right] \quad (7.8.53)$$

可见,输出光强仍为正弦变化,与调制电压信号变化规律相同,这时为不失真情况.

当  $\Gamma_m$  不太小时

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{I_0} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin[\Gamma_m \sin(\omega_m t)] \\ &= \frac{1}{2} + J_1(\Gamma_m) \sin(\omega_m t) + J_3(\Gamma_m) \sin(3\omega_m t) + \dots \end{aligned} \quad (7.8.54)$$

这意味着当控制电压作正弦变化时,输出的光强除了有基频变化外,还有高次谐波而产生失真.其失真程度可以用各次谐波分量前系数(即权)与基波分量之比来衡量,即  $\frac{J_m(\Gamma_m)}{J_1(\Gamma_m)}$ . 基频信号的调制指数定义为

$$\begin{aligned} P_M &= 2 J_1(\Gamma_m) \\ &= 2 J_1 \left[ \pi \frac{V_m}{V_\pi} \right] \end{aligned} \quad (7.8.55)$$

$P_M$  意味着基频信号振幅与背景(直流)信号振幅  $\frac{I_0}{2}$  之比.例如,当  $P_M = 75\%$  时,可求出相应的  $V_m$ ,由此求得

$$\frac{J_3 \left[ \pi \frac{V_m}{V_\pi} \right]}{J_1 \left[ \pi \frac{V_m}{V_\pi} \right]} \approx 3\%$$

可见失真是很小的.

## 2. 偏振态调制

由前面的讨论可得出结论, $D$  与  $D'$  相位差为

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 \gamma_{63} V_m \sin(\omega_m t) \quad (7.8.56)$$

若不安置检偏器,则  $D$  与  $D'$  光振动合成后所得的偏振态与它们间相位差有关,偏振态与相位差的关系可参看本书第 2 章的图 2.8.6,由此得到了偏振态的调制.而在晶体内部看,若某一时刻  $t$ ,不同的  $z$  处亦具有不同的偏振态.而在出射晶体之后,则每一时刻对应于一种偏振态.

### 3. 相位调制

仍以  $KD^*P$  为例,若使入射光偏振方向落在  $x'$ ,  $\gamma_{63}$  纵向运用,则经过晶体时的折射率差为

$$\Delta n_{x'} = -\frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{63} E_3 \quad (7.8.57)$$

则输出光场为

$$\begin{aligned} E_{\text{光}} &= A \cos \left[ \omega_c t - \frac{2\pi}{\lambda} n d \right] \\ &= A \cos \left[ \omega_c t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 + \Delta n_{x'}) d \right] \end{aligned} \quad (7.8.58)$$

(1) 设所加电场为正弦变化,即

$$E_3 = E_0 \sin(\omega_m t) \text{ 或 } V_3 = V_0 \sin(\omega_m t) = E_3 d$$

则得输出光强为

$$E_{\text{光}} = A \cos \left[ \omega_c t + \delta \sin(\omega_m t) - \frac{2\pi}{\lambda} n_0 d \right] \quad (2.8.59)$$

其中

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 \gamma_{63} E_0 d \quad (7.8.60)$$

为相位调制指数,由此可得相位的调制.

利用三角分式展开及贝塞尔函数恒等式

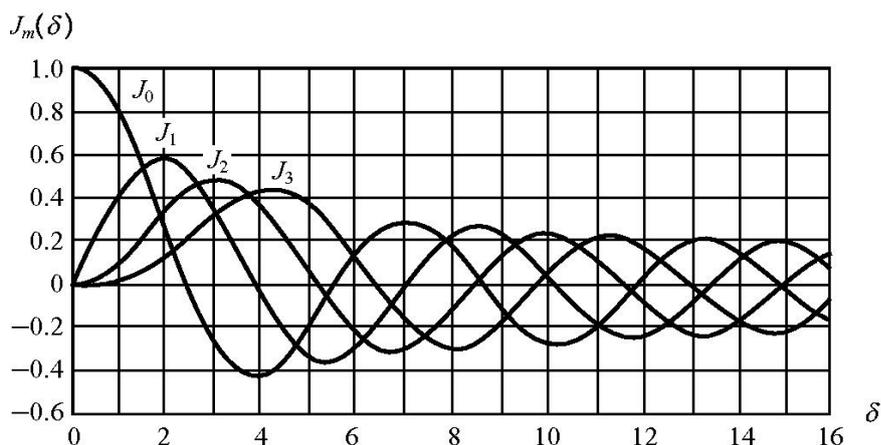
$$\cos(\delta \sin \omega_m t) = J_0(\delta) + 2J_2(\delta) \cos 2\omega_m t + 2J_4(\delta) \cos 4\omega_m t + \dots$$

$$\sin(\delta \sin \omega_m t) = 2J_1(\delta) \sin \omega_m t + 2J_3(\delta) \sin 3\omega_m t + \dots$$

略去常相位因子,得

$$\begin{aligned} E_{\text{光}} &= A \left[ J_0(\delta) \cos \omega_c t + J_1(\delta) \cos(\omega_c + \omega_m) t - J_1(\delta) \cos(\omega_c - \omega_m) \right. \\ &\quad \left. + J_2(\delta) \cos(\omega_c + 2\omega_m) t + J_2(\delta) \cos(\omega_c - 2\omega_m) + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.8.61)$$

这样,由于相位调制,使光频从原来单一频率  $\omega_c$  变到了含有多种频率  $\omega_c \pm \omega_m$ 、 $\omega_c \pm 2\omega_m$ 、 $\dots$  的非单色光.各种频率分量的振幅则由  $J_m(\delta)$  决定.适当选择相位调制指数  $\delta$ ,就能得到各频率分量的不同分布,如图 7.8.6 所示.反之,若测出各种频率分量的振幅大小,就可以求得  $\delta$ ,从而由式 (7.8.60) 算出  $\gamma_{63}$  电光系数.这是测量电光系数的一个重要方法.

图 7.8.6 第一类贝塞尔函数  $J_m(\delta)$  曲线

(2) 设所加电场为线性.

$$V(t) = V_0 + \alpha_V t \quad (7.8.62)$$

仍讨论  $\text{KD}^* \text{P}$  晶体  $\gamma_{63}$  纵向运用, 此时式(7.8.57)变为

$$\Delta n'_x = -\frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{63} \frac{V(t)}{d} \quad (7.8.63)$$

由此产生相位差为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\pi}{V_\pi} \cdot V(t) = \frac{\pi}{V_\pi} (V_0 + \alpha_V t) \\ &= \Gamma_0 + \alpha t \end{aligned} \quad (7.8.64)$$

其中  $\Gamma_0 = \frac{\pi V_0}{V_\pi}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{V_\pi} \alpha_V$ , 由此可写出输出光波表达式

$$\begin{aligned} E_{\text{光}} &= A \cos(\omega_c t - \Gamma_0 - \alpha t) \\ &= A \cos[(\omega_c - \alpha) t - \Gamma_0] \end{aligned} \quad (7.8.65)$$

可见输出光的频率变为  $\omega_c - \alpha$ .

(3) 设所加电压是  $t^2$  的函数.

$$V(t) = V_0 + \alpha_V t^2 \quad (7.8.66)$$

则有

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\pi}{V_\pi} V(t) = \frac{\pi}{V_\pi} (V_0 + \alpha_V t^2) \\ &= \Gamma_0 + \alpha t^2 \end{aligned} \quad (7.8.67)$$

输出光波为

$$\begin{aligned} E_{\text{光}} &= A \cos(\omega_c t - \Gamma_0 - \alpha t^2) = A \cos[(\omega_c - \alpha t) \cdot t - \Gamma_0] \\ &= A \cos[\omega t - \Gamma_0] \end{aligned} \quad (7.8.68)$$

瞬时频率  $\omega = \omega_0 - \alpha t$ , 可见输出光波的频率随时间而改变, 这种现象叫做啁啾.

#### 4. 电光开关

电光开关是利用晶体的电光效应实现透射光状态阶跃式变化, 即实现开与关两种状态. 它是电光调制的一个特殊情形. 它在激光技术中有极大的应用, 如实现激光腔调  $Q$ 、锁模激光序列的单个脉冲选通等.

以  $\text{KD}^* \text{P}$  晶体  $\gamma_{63}$  纵向运用为例, 由式(7.8.39)知半波电压为

$$V_{\pi} = \frac{\lambda}{2n^3\gamma_{63}} \quad (7.8.69)$$

在晶体沿  $x_3$  轴施加此电压时, 垂直于晶体表面入射的线偏光  $D$  仍沿  $x_3$  传播, 产生的  $o$  光及  $e$  光之间产生  $\pi$  相位差, 出射后仍为线偏振光, 但振动面转过了  $90^\circ$ . 若在晶体后放置检偏器, 且其透过方向与出射光振动方向一致, 则透过光强为极大, 这种安置称为加压式开关. 反之, 则为退压式开关.

当用于激光腔内作电光  $Q$  开关时, 如图 7.8.7, 一般地在电光晶体中加  $\frac{\lambda}{4}$  电压, 使电光晶体起到  $\frac{1}{4}$  波片作用. 当线偏光通过晶体后产生  $\frac{\pi}{2}$  相位差, 或者说成为圆偏振光, 而再次返回经过晶体后, 又产生  $\frac{\pi}{2}$  相位差, 则成为线偏光而振动面转过  $90^\circ$ , 布儒斯特窗片既起了起偏又起了检偏作用, 使得加电压时返回的偏振光无法通过检偏而被反射出腔外, 这时腔内  $Q$  值极低, 当电光开关上的  $\frac{\lambda}{4}$  电压撤去时, 返回偏振光振动方向不变, 全部通过检偏而使  $Q$  值跃到最大值, 实现  $Q$  开关作用, 这时为退压式.

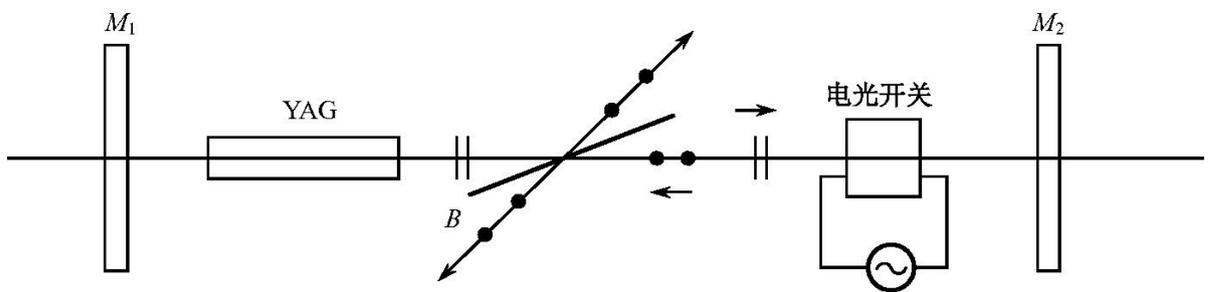


图 7.8.7 激光器中的电光调  $Q$

#### 5. 电光偏转(方向调制)

##### (1) 连续偏转.

当介质在与光传播的垂直方向上有折射率梯度时, 入射的光束将发生偏折. 如

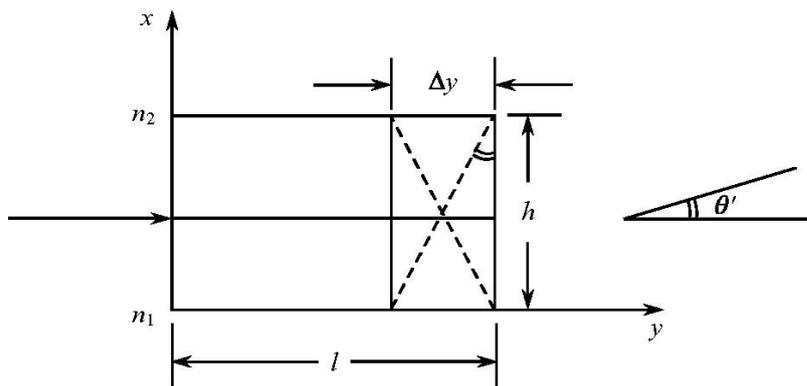


图 7.8.8 电光晶体中的连续偏转

图 7.8.8 介质沿  $x$  方向有折射率梯度, 设在一薄层中, 折射率差为  $n_2 - n_1$ , 若  $n_1 < n_2$ , 则光通过后产生的偏角为

$$\theta \approx \frac{\Delta y}{h} \quad (7.8.70)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{c}{n} \left[ \frac{l}{c} (n_2 - n_1) \right] \\ &= l \frac{\Delta n}{n} \end{aligned} \quad (7.8.71)$$

当折射率为连续变化时, 则有

$$\theta = \tan \theta = \frac{\Delta y}{h} = \frac{l}{n} \cdot \frac{dn}{dx} \quad (7.8.72)$$

考虑到在出射面上的折射, 可得出射后的偏转角为

$$\begin{aligned} n \sin \theta &= n' \sin \theta' \\ \theta' &\approx n \theta = l \frac{dn}{dx} \end{aligned} \quad (7.8.73)$$

将两块劈形 KDP 晶体按图 7.8.9 安置,  $\gamma_{63}$  横向运用.

在前一块晶体中, 偏振方向在  $x'$  的光在晶体中的折射率由式(7.8.36)得

$$n_A = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{63} E_3 \quad (7.8.74)$$

后一块晶体中(上半块), 偏振方向为  $y'$ , 在晶体中折射率则为

$$n_B = n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{63} E_3 \quad (7.8.75)$$

因此

$$\Delta n = n_A - n_B = - n_0^3 \gamma_{63} E_3 \quad (7.8.76)$$

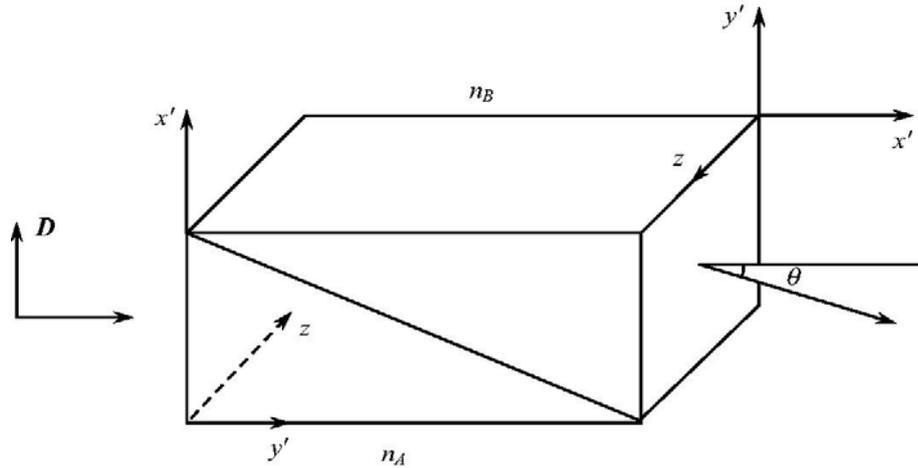


图 7.8.9 两块劈形晶体中的电光偏转

按式(7.8.73)可求得出射后的偏折角为

$$\begin{aligned} \theta &= l \frac{dn}{dx} = l \cdot \frac{-n^3 \gamma_{63} E_3}{h} \\ &= \frac{-l}{hd} \cdot n^3 \gamma_{63} V_3 \end{aligned} \quad (7.8.77)$$

若使  $V_3$  连续变化,则得连续变化的偏折角  $\theta$ .

如果将多块晶体做成棱镜状按图 7.8.10 连接在一起,且使每块的光轴按图 7.8.10 所示交叉地交换安置,则可使偏折连续地进行而得到较大的偏折角.

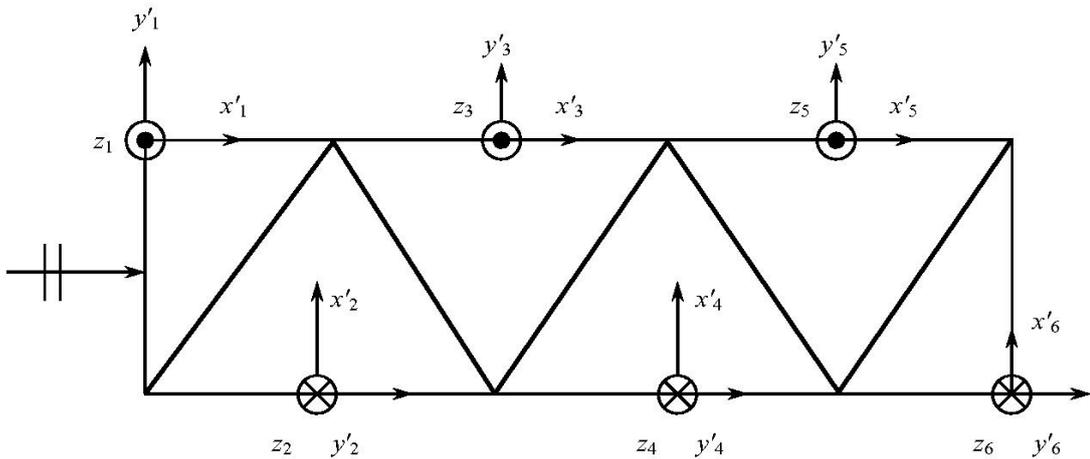


图 7.8.10 多块晶体中的电光偏转

## (2) 数字式偏转.

最简单的数字式偏转如图 7.8.11 所示,电光晶体纵向运用.设入射光偏振方向在  $y$  方向,当电光晶体上加  $V_{\lambda/2}$  电压时,电光晶体相当于一个  $1/2$  波片,  $E_y$  偏振方向转过  $90^\circ$ ,在  $x$  方向.若在电光晶体后放一双折射晶体,则  $E_y$  或  $E_x$  方向振动

则在双折射晶体中有不同的能量传播方向,这样,加  $V_{\lambda/2}$  或不加  $V_{\lambda/2}$  就得到了两种出射光线,形成 1 或 0 的信号输出.

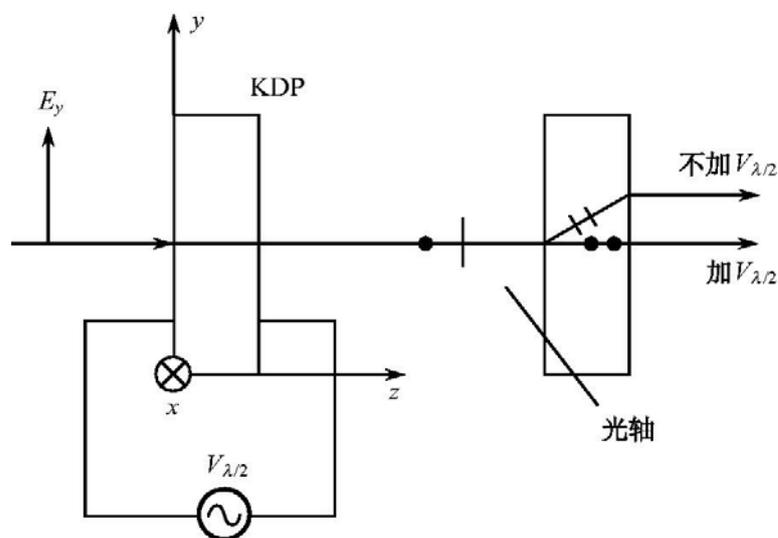


图 7.8.11 KDP 晶体用于数字式电光偏转

几个这种器件组合,便可形成多级的数字偏转,这在光学信息处理中有很大的前途.

## 7.9 介质中的磁光效应

根据 7.7 节所述,磁场也可以对介质的极化产生影响.在极化的高次项中包含了光场  $\mathbf{E}$  与磁场  $\mathbf{H}$  的耦合项,从而产生高次极化项.因此,在强磁场的作用下,介质也会产生光学各向异性等现象,称之为磁光效应.磁光效应的表现形式有多种,法拉第旋光效应(或称磁致旋光效应)就是其中之一.由于法拉第效应在现代光学及激光技术中的重要应用,本节将对此作深入讨论.法拉第效应可产生在晶体或一般介质中.

### 7.9.1 法拉第旋光效应的一般描述

19 世纪中叶, M. 法拉第为了证实光是电磁波,设想外加磁场可以对光产生影响而设计了一个实验,观察到了这一磁致旋光效应(图 7.9.1).

法拉第效应是透明材料的一种性质:当材料放在磁场中时,沿磁场方向传播的光在通过介质后会发生偏振面旋转,而且旋转角度与磁场的强度及传播距离成正比,即

$$\theta = VB l \quad (7.9.1)$$

式中,  $V$  为韦尔代(Verdet)常数;  $B$  为磁感应强度(韦伯/米<sup>2</sup>, 即  $\text{Wb}/\text{m}^2$  或用高斯

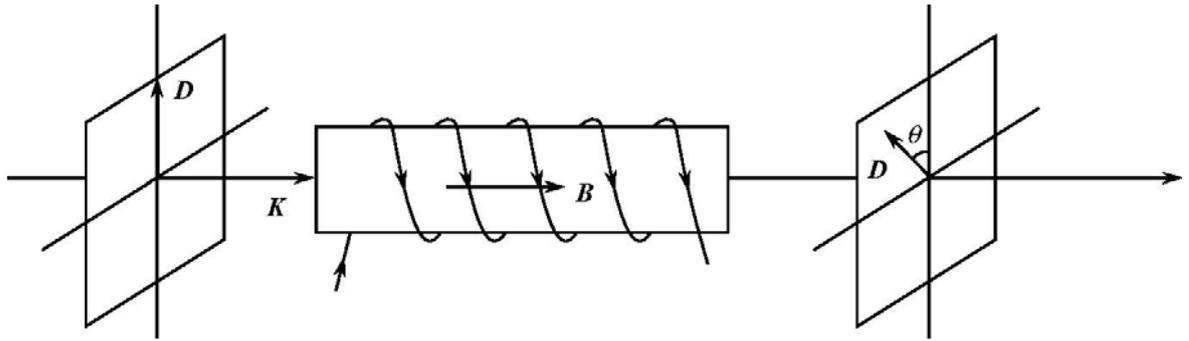


图 7.9.1 法拉第旋光效应

(G)表示,  $1\text{G} = 10^{-4}\text{Wb}/\text{m}^2$ ).表 7.9.1 列出了几种材料的韦尔代常数.

表 7.9.1  $\lambda = 586.3\text{nm}$  时的韦尔代常数

材料	$T/^\circ\text{C}$	$V/((^\circ)/\text{G} \cdot \text{mm})$
水	20	$2.18 \times 10^{-5}$
氟石		$1.5 \times 10^{-6}$
金刚石		$2.0 \times 10^{-5}$
冕牌玻璃		$2.68 \times 10^{-5}$
火石玻璃	18	$5.28 \times 10^{-5}$
二硫化碳 ( $\text{CS}_2$ )	20	$7.05 \times 10^{-5}$
磷	33	$2.21 \times 10^{-4}$
氯化钠		$6.0 \times 10^{-5}$

磁场可以由永久磁铁产生,也可以由通电螺线管产生.当用通电螺线管产生时,磁感强度  $B$  可表示为

$$B = \mu_0 \mu_r m I \quad (7.9.2)$$

式中  $m$  为螺线管单位长度上的线圈匝数,  $I$  为电流强度 (A). 由此得到偏振面旋转角度

$$\theta = V \mu_0 \mu_r m I l = V' \cdot m I l \quad (7.9.3)$$

式中  $V' = V \mu_0 \mu_r$ , 某些书上将此  $V'$  也称为韦尔代常数, 这时  $V'$  的单位为  $(^\circ)/\text{A}$ . 表 7.9.2 列出了某些材料的  $V'$  值.

表 7.9.2 几种材料的韦尔代常数  $V'$  值

材料	$V'/(^\circ)/\text{A}$	材料	$V'/(^\circ)/\text{A}$
水	0.0163	苯 $\text{C}_6\text{H}_6$	0.0380
水晶	0.0209	$\text{CO}_2$	$0.1083 \times 10^{-4}$
氯化钠	0.0467	氧气	$0.0702 \times 10^{-4}$
$\text{CS}_2$	0.0529	氢气	$0.0675 \times 10^{-4}$

对法拉第效应的一般描述,可以从外磁场对偶极子的带电粒子的简谐运动的影响来进行分析.在光场  $\mathbf{E}$  的作用下,介质中产生极化,偶极子的正负电荷中心做简谐振动.当外加一个磁场时,运动电荷将受到洛伦兹力( $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ )的作用,由磁场  $\mathbf{B}$  产生的磁场力  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  使振荡偶极子的运动改变方向.这时的物质方程成为

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + i\omega\gamma\mathbf{B} \times \mathbf{E} \quad (7.9.4)$$

其中等式右边第二项就是由磁场造成的影响,从而使振子按  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B} \times \mathbf{E}$  合成的方向做振动,因子  $i$  是由于速度与电场之间有  $\frac{\pi}{2}$  的相位滞后造成的.这一合成后新的振荡偶极子使辐射出来的光场振动  $\mathbf{E}$  相对于入射光  $\mathbf{E}$  转过了一个角度.这就是法拉第效应的一般描述.

磁致旋光的方向与磁场方向有关,而与光传播方向无关.绝大多数物质的磁旋光方向都是右旋的,即顺着磁场  $\mathbf{B}$  观察时,光的偏振方向顺时针旋转.这种物质叫正旋体,其韦尔代常数为正值.但是也有一些物质是负旋体.

### 7.9.2 法拉第旋光效应的经典理论模型

按照经典的振荡偶极子理论,对法拉第效应作如下分析:如图 7.9.2 所示,在

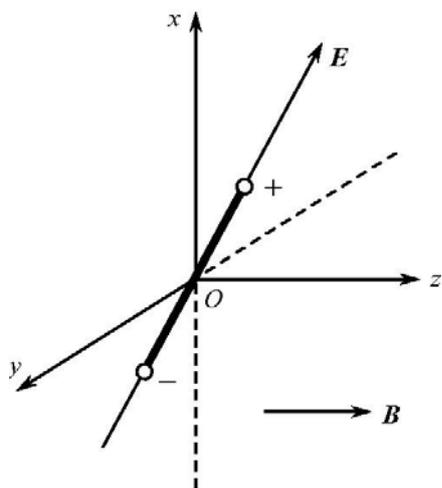


图 7.9.2  $xy$  平面的电场  $\mathbf{E}$  及  $z$  方向上的磁场  $\mathbf{B}$  对介质中的偶极子的作用

$xy$  平面上偏振的光  $\mathbf{E}$  沿  $z$  轴入射到介质中,并在介质中沿  $z$  方向加强磁场  $\mathbf{B}(0, 0, B_z)$ .偶极子的正负电荷中心将受洛伦兹力(即电场力与磁场力)的作用做简谐振荡.此时谐振子的振荡方程完全类似于色散经典理论中的偶极子振荡方程(4.6.3),只是外力部分除了有电场力  $q\mathbf{E}$  外,还增加了磁场对运动电荷的作用力( $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ );设偶极子振荡的位移为  $\mathbf{l}$ ,得到有外磁场时的偶极子振荡方程

$$m \frac{d^2 \mathbf{l}}{dt^2} = q \left[ \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} \right] + q\mathbf{E} - m\omega_0^2 \mathbf{l} - m\gamma \frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad (7.9.5)$$

若略去阻尼项  $m\gamma \frac{d\mathbf{l}}{dt}$ ,并为简化书写用字母上加一点

来代替对  $t$  的导数,上式可改写为

$$m\dot{\mathbf{l}} + m\omega_0^2 \mathbf{l} = q \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + q\mathbf{E} \quad (7.9.6)$$

设磁场加在  $z$  方向,  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  光在  $xy$  平面某个方向偏振, 有

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0) = E_{0x} e^{i\omega t} \mathbf{i} + E_{0y} e^{i\omega t} \mathbf{j}$$

偶极子电荷运动速度  $\mathbf{v} = \left[ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right]$ . 将以上关系代入式(7.6.5)得

$$m\dot{\mathbf{l}} + m\omega_0^2 \mathbf{l} = q(\dot{y}B_z \mathbf{i} - \dot{x}B_z \mathbf{j} + E_{0x} e^{i\omega t} \mathbf{i} + E_{0y} e^{i\omega t} \mathbf{j}) \quad (7.9.7)$$

按矢量各分量相等, 得到以下两个方程

$$m\dot{x} + m\omega_0^2 x - qyB_z - qE_{0x} e^{i\omega t} = 0 \quad (1)$$

$$m\dot{y} + m\omega_0^2 y + qxB_z - qE_{0y} e^{i\omega t} = 0 \quad (2) \quad (7.9.8)$$

将式(7.9.8)的第(2)式乘上  $i$  与第一式相加, 将式(7.9.8)的第(2)式乘上  $i$  与第一式相减, 并令

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \end{cases} \quad \begin{cases} E_{0+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{0x} + iE_{0y}) \\ E_{0-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{0x} - iE_{0y}) \end{cases} \quad (7.9.9)$$

得到以下两式

$$\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi + \frac{qB_z}{m} \dot{\xi} = \frac{q}{m} E_{0+} e^{i\omega t}$$

$$\dot{\eta} + \omega_0^2 \eta - \frac{qB_z}{m} \dot{\eta} = \frac{q}{m} E_{0-} e^{i\omega t}$$

或写为

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{iqB_z}{m} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = \frac{qE_{0+}}{m} e^{i\omega t} \quad (1) \quad (7.9.10)$$

$$\frac{d\eta}{dt} - \frac{iqB_z}{m} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2 \eta = \frac{qE_{0-}}{m} e^{i\omega t} \quad (2)$$

为区别两个方程, 分别把第(1)式的  $\omega$  记作  $\omega_1$ , 把第(2)式中的  $\omega$  记作  $\omega_2$ , 再来讨论这两个振动方程的解.

这是两个受迫振动方程, 可分别求出其解为

$$\begin{aligned} \xi &= b_+ e^{i(\omega_1 t + \delta_+)} \\ \eta &= b_- e^{i(\omega_2 t + \delta_-)} \end{aligned} \quad (7.9.11)$$

其中

$$\begin{aligned} b_+ &= \frac{qE_{0+}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left[ \frac{iqB_z}{m} \right]^2 \omega_1^2}} \\ \delta_+ &= \arctan \left[ \frac{iqB_z \omega / m}{(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \right] \end{aligned}$$

$$b = \frac{qE_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left[ i \frac{qB_z}{m} \right]^2 \omega^2}}$$

$$\delta = \arctan \left[ \frac{-iqB_z \omega / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]$$

我们并不关心这一解的形式,而是关心它所带来的结果.把解 $\xi$ 、 $\eta$ 代回原方程(7.9.10)的(1)(2)式中,观察解中相应的 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 与 $\omega_0$ 之间的偏移.例如,把 $\xi$ 代回式(7.9.10)(1)中,得

$$-\omega_1^2 \xi + i \left[ i \frac{\omega_1 q B_z}{m} \xi \right] + \omega_0^2 \xi = \frac{q}{m} E_{0+} e^{i\omega_1 t}$$

或写为

$$\omega_1^2 + \frac{qB_z}{m} \omega_1 = \omega_0^2 - \frac{qE_{0+}}{m\xi} e^{i\omega_1 t}$$

将 $\xi$ 用式(7.9.11)的参数代入,并考虑到 $\omega_1$ 极为接近 $\omega_0$ 的情况,得

$$\omega_1^2 + \frac{qB_z}{m} \omega_1 = \omega_0^2 - \frac{m}{qB_z \omega_1} e^{-i\delta}$$

假设 $\omega_0^2 \gg \frac{qB_z}{m}$ ,则有

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{qB_z}{m} \omega_1} = \omega_0 \left[ 1 - \frac{qB_z}{2m} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_0^2} + \dots \right]$$

取上式级数展开的头两项,得

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{qB_z}{2m} = \omega_0 - \Delta\omega \quad \text{右旋} \quad (7.9.12)$$

类似地得

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{qB_z}{2m} = \omega_0 + \Delta\omega \quad \text{左旋} \quad (7.9.13)$$

再观察式(7.9.9)所作的变换,可知这相当于在2.8.4节中描述的两个线偏振合成为圆偏振的情况,即把 $e^{i\omega t}$ 考虑进去, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$ 就相当于右旋的圆振动, $\eta =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy)$ 就相当于左旋圆振动.由式(7.9.12)可知,右旋圆偏光的光频比原来的线偏光小 $qB_z/2m$ ;而左旋圆偏光则增加了微小量 $\Delta\omega$ .这一频率的小量改变是由于外磁场对运动电荷作用力而引起的.

因此,对左、右旋圆偏振光的折射率也将发生微小的改变.这一微小改变显然可以从未加磁场时的色散曲线求出

$$n_r = n + \delta_n = n + \frac{dn}{d\omega} \cdot \Delta\omega$$

$$n_L = n - \delta_n = n - \frac{dn}{d\omega} \cdot \Delta\omega$$
(7.9.14)

$$\Delta n = n_r - n_L = 2\Delta\omega \frac{dn}{d\omega}$$
(7.9.15)

图 7.9.3 示出了以上式子表示的关系,图(a)为未加磁场时以及加磁场后的右旋、左旋偏振光的共振吸收曲线,图(b)为色散曲线,其中实线就是由不存在外磁场时的偶极子有阻尼受迫振荡方程求得的色散曲线.当存在外磁场时,线偏振分解为右、左旋圆偏光,它们的频率分别为  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$  及  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ ,由有磁场时的阻尼受迫振荡方程求得的色散曲线如虚线所示,相对于  $n$ ,其极大值有一个平移.因此,对右旋圆偏振光( $\omega = \omega_1$ ),其折射率为  $n_r$ ;对左旋圆偏振光( $\omega = \omega_2$ ),其折射率为  $n_L$ .利用 2.8.4 节中的琼斯矢量,这两种波的位移矢量振幅为

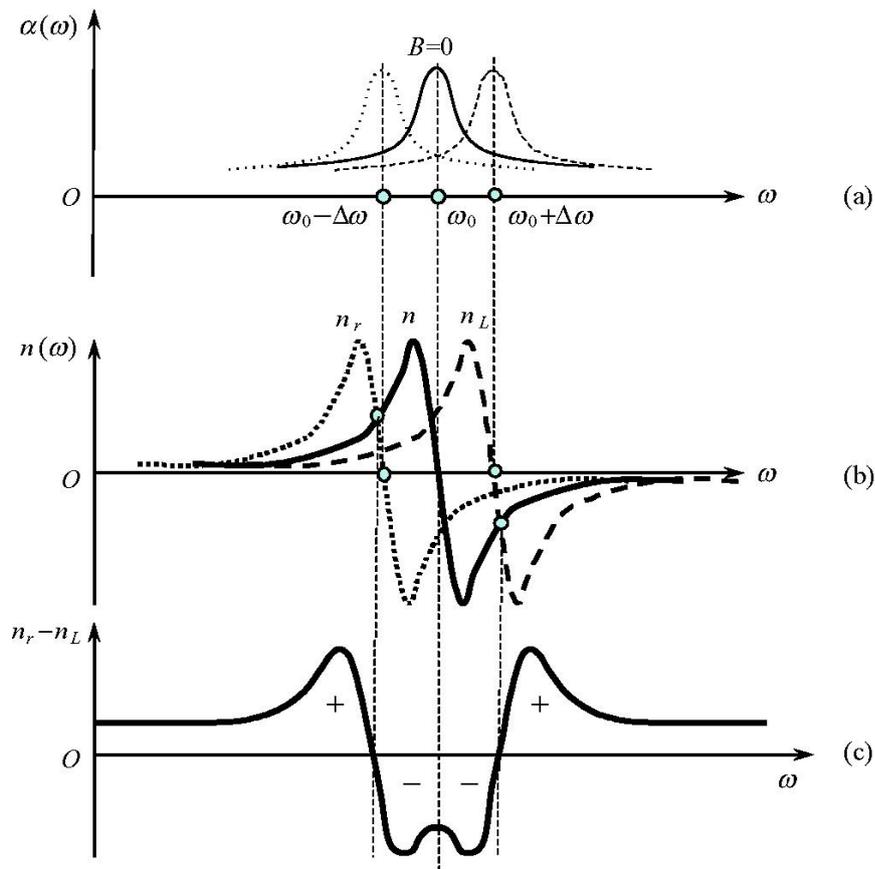


图 7.9.3 未加磁场时的色散曲线  $n(\omega)$  及加磁场时左、右旋偏振光的色散曲线  $n_L(\omega)$  及  $n_r(\omega)$

(a) 未加磁场时,以及加磁场时的右旋、左旋偏振光的共振吸收曲线  $\alpha(\omega)$ ; (b) 未加磁场时的色散曲线  $n(\omega)$ , 以及加磁场时的右旋、左旋偏振光的色散曲线  $n_r(\omega)$  及  $n_L(\omega)$ ;

(c) 右旋、左旋偏振光的色散曲线之差,表示了  $n_r - n_L$  随光频  $\omega$  的变化关系

$$\left. \begin{array}{l} \text{右旋} \quad \hat{R}e^{i\left[\omega\left(t - \frac{zn_r}{c}\right)\right]} \\ \text{左旋} \quad \hat{L}e^{i\left[\omega\left(t - \frac{zn_l}{c}\right)\right]} \end{array} \right\} \quad (7.9.16)$$

**注意** 上式中左、右旋光的频率仍记为  $\omega$ , 这是因为  $\Delta\omega$  极小, 仅考虑它对折射率(即对波传播的位相)的影响, 而在频率上仍可用其平均频率值来表示. 式中  $\hat{R}$  及  $\hat{L}$  分别是右、左旋圆偏振光的琼斯矢量(见式(2.8.41)及式(2.8.42)).

若振幅为  $D_0$  沿  $x$  方向偏振的光在  $z=0$  处进入介质, 由式(2.8.58)知  $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{R} + \hat{L})$ , 它将由振幅为  $D_0/\sqrt{2}$  的右旋和左旋圆偏振光之和来表示. 在介质内在磁场影响下, 两者具有不同的频率即不同的折射率  $n_r$  及  $n_l$ , 经过距离  $z$  之后, 两波之和成为

$$\frac{D_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \left[ \hat{R} e^{-i\omega z n_r / c} + \hat{L} e^{-i\omega z n_l / c} \right] \quad (7.9.17)$$

再利用

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{Y}) \\ \hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{Y}) \end{array} \right. \quad (7.9.18)$$

式(7.9.17)改可写为

$$D_0 \hat{P} e^{i\left\{\omega\left[t - \frac{z(n_r + n_l)}{2c}\right]\right\}} \quad (7.9.19)$$

其中

$$\hat{P} = \hat{X} \cos\left[\frac{\omega(n_l - n_r)}{2c}z\right] + \hat{Y} \sin\left[\frac{\omega(n_l - n_r)}{2c}z\right] \quad (7.9.20)$$

合成波的偏振正是由上式  $\hat{P}$  来表示的, 它是一个线偏振波, 当顺着磁场方向看时偏振面以顺时针从  $x$  轴转过一个角度  $\theta = \omega z(n_r - n_l)/2c$ , 或写为一般式

$$\theta = \frac{\pi l}{\lambda} \Delta n \quad (7.9.21)$$

式中:  $l$  即为光波通过加磁场介质(在磁场方向上)的长度;  $\Delta n = n_r - n_l = 2\Delta\omega \frac{dn}{d\omega}$ .

由式(7.9.12)知,  $\Delta\omega = \frac{qB_z}{2m}$ , 并考虑到  $d\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$ . 将这些关系代入式(7.9.21), 得

$$\theta = \frac{\pi l}{\lambda} \cdot 2\Delta\omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{q}{2m} \cdot \frac{\lambda}{c} B_z l \frac{dn}{d\lambda} \quad (7.9.22)$$

式中:  $q/m$  正是电子的荷质比;  $q$  为电子的电量, 即  $q = -e$ ;  $m$  为电子质量;  $\frac{dn}{d\lambda}$  为介

质材料的色散.

图 7.9.3(c) 示出了右旋与左旋偏振光的色散曲线之差, 表示  $\Delta n = n_r - n_l$  随光频  $\omega$  的变化关系, 它是由图 7.9.3(b) 中的右旋、左旋偏振光的色散曲线之差得到的. 从图中可以看出, 在  $\omega_0 - \Delta\omega$  与  $\omega_0 + \Delta\omega$  以外的范围内,  $n_r - n_l > 0$ , 因此旋光角  $\theta > 0$ . 在反常色散区, 即  $\omega_0 - \Delta\omega$  与  $\omega_0 + \Delta\omega$  之间的范围内,  $n_r - n_l < 0$ , 因此旋光角  $\theta < 0$ ; 事实上, 反常色散区是非常窄的, 大多数旋光介质都应用在正常色散区吸收峰附近, 因为在  $\omega_0 - \Delta\omega$  与  $\omega_0 + \Delta\omega$  点上的  $\Delta n$  值最大, 在其附近小范围内  $\Delta n$  的值也很大, 由式(7.9.21)可知, 应用在正常色散区吸收峰附近的这个范围上可以获得较大的旋光角.

与旋光物质不同, 法拉第旋光效应的偏振面旋转方向与光的行进方向无关, 因为旋转是由磁场造成的, 不论  $\mathbf{K}$  在什么方向, 同一个偏振方向的线偏光分散为两个圆偏光, 在磁场作用下造成的  $\omega$  变化, 以致  $n$  值变化都完全相同, 合成后旋转角度方向是一致的. 因此, 按原来路程反射回来再次通过磁场中同一介质时, 旋转增加一倍. 如果是旋光介质, 则旋转方向与传播方向有固定的关系, 因此若光束按原来路程反射回来再次通过同一旋光介质, 则净旋转为零. 这是磁致旋光与天然旋光介质的一个重要的区别.

从宏观角度分析, 可简单地认为, 振子的直线振动分解为电子(带电粒子)做右、左旋的圆周运动, 而磁场对电子的作用力与其运动方向垂直, 其中一个是指向圆心, 增加了其向心力, 使圆周运动角速度加大, 另一个则背离圆心而削弱了向心力, 使圆周运动角速度减小, 这样两个圆周运动的合成成为一个直线振动, 但振动方向偏离原振动方向一个角度  $\alpha$ .

用光矢量末端运动轨迹表示, 如图 7.9.4 所示, 如有一偏振光垂直纸面向我们传播, 其偏振方向为  $AA$ , 它可以分解为左旋和右旋偏振光, 它们的电矢量振幅相

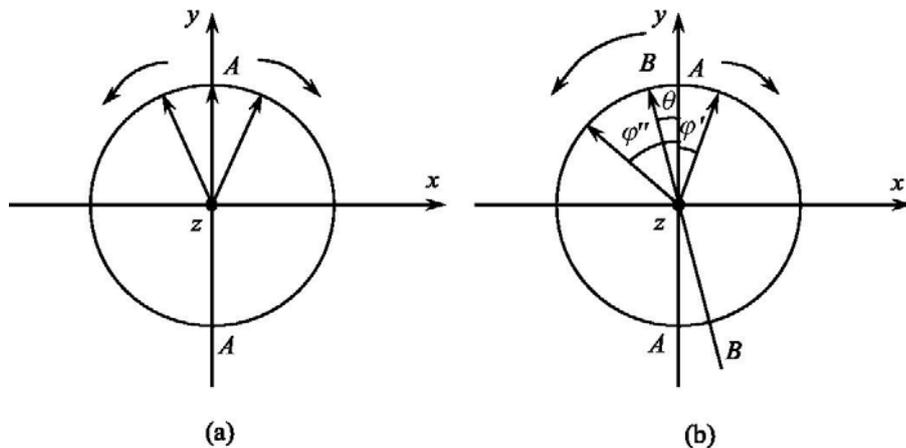


图 7.9.4 法拉第磁致旋光效应的解释

(a) 未加磁场时,  $AA$  方向的线偏振光分散为左、右旋圆偏光;

(b) 加磁场后导致左右旋偏振光的  $\omega$  不同, 合成线偏光后有角度偏转  $\theta$

等.当介质中未加磁场时,它们以相同的角速度  $\omega$  沿同一圆周以相反方向做匀速圆周运动,并且两圆偏振光的电矢量相对于  $AA$  是对称的(图 7.9.4).

当介质上沿光传播方向加上强磁场后,讨论进入介质中厚度为  $l$  的一点.加上磁场后,右旋和左旋偏振光的电矢量末端沿同一圆周但分别以  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$  及  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$  以相反方向做匀速圆周运动.显然右旋圆偏光端点运动角速比左旋慢,如当通过介质内磁场  $l$  长度后,左旋光转过角度  $\varphi''$  (逆时针)比右旋光转过角度  $\varphi'$  (顺时针)要大,两者合成线偏振后的偏振方向就不再在  $AA$  上,而是转过一个  $\theta$  角,落在  $BB$  方向上振动,由图可知

$$\theta = \frac{\varphi' - \varphi''}{2} = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot l(n_l - n_r) \quad (7.9.23)$$

注意到磁场  $B$  是在  $z$  方向,当顺着磁场看时,即对着  $-z$  方向看, $\theta$  角就是顺时针方向,这正是 7.9.1 节中定义的正旋光性的情况.

### 7.9.3 法拉第旋光效应的应用

法拉第旋光效应在现代光学中的一个重要应用就是作为光隔离器.

在高功率固体激光放大系统中以及非线性光学实验中,如做受激散射的实验,为了不使后向返回的光耦合到激光振荡器中产生有害的振荡,避免过高的功率密度损伤激光介质,必须采用光学隔离器,利用法拉第效应制成的法拉第旋光盒 (Faraday rotator) 就可以达到光隔离的目的,如图 7.9.5 所示.

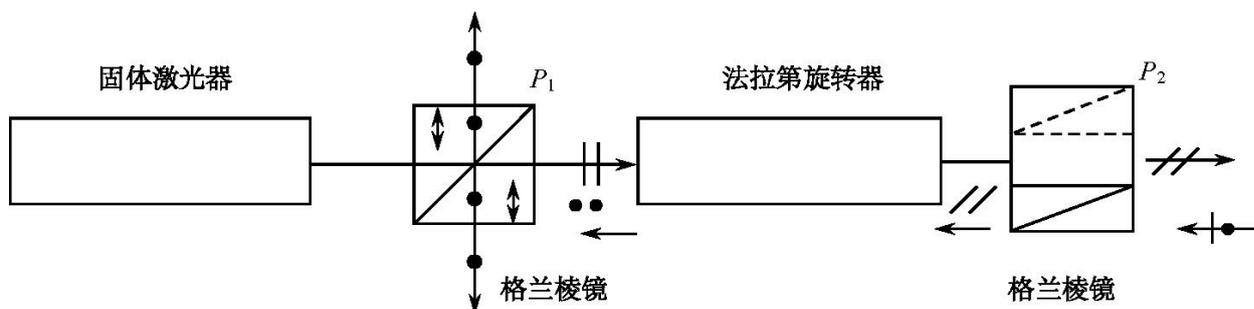


图 7.9.5 法拉第效应的应用——光隔离器

选择合适的材料( $V$  常数)、外磁场强度及作用长度  $l$ ,使从左向右通过法拉第盒的线偏振光,在通过后偏振面旋转  $45^\circ$ .第二个偏振棱镜安置成与第一个偏振棱镜在旋光方向转过  $45^\circ$ ,这样,从法拉第盒出射的线偏光全部能通过  $P_2$ .这束光不论以何种形式返回时,如由后级放大器向后向辐射的光、由受激散射产生的后向散射光……也不论其后向行进光偏振态有何改变,当其再次通过  $P_2$  后向左行进的光偏振面与向右行进的一致,再次通过法拉第盒,使偏振面继续以同一旋向再旋转  $45^\circ$ ,恰恰与  $P_1$  的通光偏振方向垂直,从而被  $P_1$  所拦截,达到了光隔离的目的.

## 7.10 其他的非线性光学效应

正是由于极化包含了各个次方、各种可能的电场、磁场组合影响,导致了各种不同类型的非线性效应.因此,非线性光学包含的内容是十分丰富多彩的.它一方面包含了由于激光出现后而揭示出来的强光效应以及在现代光学中的各种应用,另一方面又从这些效应及应用中大大丰富了光学理论以及电磁理论.因此,非线性光学已成为现代光学中的一个重要分支.

表 7.10.1 二阶、三阶非线性效应一览

二阶非线性效应	$\chi^{(2)}$	极化 $P^{(2)}$
倍频 (1961 年)	实数	$P^{(2)}(2\omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2(\omega)$
线性电光效应 (1893 年)	实数	$P^{(2)}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_1(0) E_2(\omega)$
线性斯塔克效应	虚数	
参量放大 (1962 年)	实数	$P^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_1(\omega_1) E_2(\omega_2)$
法拉第效应 (1845 年)	复数	$P^{(2)}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_1(\omega) \cdot H_2(0)$
三波混频 (1976 年)	实数	$P^{(2)}(\omega_1 - \omega_2) = \epsilon_0 \cdot \chi^{(2)} E_1(\omega_1) E_2^*(\omega_2)$
三阶非线性效应	$\chi^{(3)}$	极化 $P^{(3)}$
三倍频 (1962 年)	实数	$P^{(3)}(3\omega) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3(\omega)$
自聚焦 (1964 年)、热效应	实数	$P^{(3)}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E(\omega) \langle E^2(\omega) \rangle$
可饱和吸收	负虚数	
可饱和放大		
双光子吸收 (1961 年)	正虚数	
平方斯塔克效应	虚数	$P^{(3)}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E_1(\omega) E_2^2(0)$
直流克尔效应	实数	
外场中的倍频 (1962 年)	实数	$P^{(3)}(2\omega) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E_1^2(\omega) E_2(0)$
	实数	$P^{(3)}(2\omega) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E_1^2(\omega) H_2(0)$
受激拉曼、布里渊、瑞利散射 (1962 年/1964 年)	负虚数	$P^{(3)}(\omega \pm \Omega) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E_1(\omega \pm \Omega) E_2^2(\omega)$
四波混频 (1977 年)	实数	$P^{(3)}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E_1(\omega_1) E_2(\omega_2) E_3^*(\omega)$
瞬态交流克尔效应		

本书不准备对这些非线性效应作详细介绍,而是把一些主要的二阶、三阶非线性效应归纳成表 7.10.1,使这些效应的主要特点一目了然.表中的电极化率  $\chi^{(2)}$  或  $\chi^{(3)}$  为实数,表示该效应为弹性光效应,没有吸收,没有能量损耗,也没有能量转换

为非光能;虚数电极化率表示非弹性过程,如受激布里渊散射是一种非弹性散射,散射光与入射光有频率差,能量一部分转换为声子的能量.对于受激布里渊散射, $\chi^{(3)}$ 为负虚数,表示受激散射光的增益效果,如4.7节所述,由于三阶非线性效应,散射光随着散射方向传播距离的增加而不断增强(注:表7.10.1中所表明的 $\chi$ 的正、负均是针对 $E = E_0 e^{-i\omega t}$ 的表达形式而言的).

## 参 考 文 献

- 毕德显. 1985. 电磁场理论. 北京: 电子工业出版社
- 范琦康, 吴存恺, 毛少卿. 1989. 非线性光学. 南京: 江苏科学技术出版社, 电子工业出版社
- 郭硕鸿. 1987. 电动力学. 北京: 科学出版社
- 蒋民华. 1981. 晶体物理. 济南: 山东科学技术出版社
- 龙槐生, 张仲先, 谈恒英. 1989. 光的偏振及其应用. 北京: 机械工业出版社
- 曲林杰, 廖延彪, 李昱, 张庆瑞. 1980. 物理光学. 北京: 国防工业出版社
- 孙柏忠. 1989. 物理光学. 武汉: 华中理工大学出版社
- 王玉仑, 郭文彦. 1985. 电磁场理论. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社
- 魏光辉, 朱宝亮. 1988. 激光束光学. 北京: 北京工业学院出版社
- 吴彝尊, 蒋佩璇, 李玲. 1987. 光纤通讯基础. 北京: 人民邮电出版社
- 肖定全, 王民. 1989. 晶体物理学. 成都: 四川大学出版社
- 徐森祿, 凌世德, Loulergue. 1990. 光波导及其应用, 杭州: 浙江大学出版社
- A 亚里夫, P 叶. 1991. 晶体中的光波. 北京: 科学出版社
- Bergmann, Schaefer, Optik. 1987. Walter de Gruyter, Berlin, New York
- D 马库塞. 1987. 传输光学. 程希望译. 北京: 人民邮电出版社
- Francis A Jenkins, Harvey E White. 1976. Fundamentals of Optics. International Student Edition. 4th Edition
- M 玻恩, E 沃耳夫. 1987. 光学原理(上、下册). 北京: 科学出版社
- P 劳兰, D R 考森. 1970. 电磁场与电磁波. 陈成钧译. 北京: 人民教育出版社