线性代数习题与研究生入学考试试题精解

濮燕敏　叶家琛　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书主要内容包括两部分:第一部分是习题选解,共分 26 节,与同济大学应用数学系《线性代数》编写组编写的 3 学时《线性代数》教材的内容相对应. 第二部分是 2002—2005 年研究生入学考试(线性代数)试题精解.

本书可供大学理工科学生和研究生学习"线性代数"时参考,也可供其他读者学习"线性代数"时参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题与研究生入学考试试题精解/濮燕敏,叶家琛编著. —上海:同济大学出版社,2005.11
ISBN 7-5608-3101-X

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①濮… ②叶… Ⅲ. 线性代数—高等学校—习题 Ⅳ. O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 088343 号

线性代数习题与研究生入学考试试题精解
濮燕敏 叶家琛 编著
策 划 吴凤萍
责任编辑 兰孝仁 责任校对 杨江淮 封面设计 李志云

出 版
发 行 同济大学出版社
(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂印刷
开 本 850mm×1168mm 1/32
印 张 4.625
字 数 134000
印 数 1—4100
版 次 2005 年 11 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5608-3101-X/O·281
定 价 10.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

前　言

线性代数是大学理工科学生重要的必修基础课程之一，它的基本概念、基本理论和基本运算具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性．该课程概念多，定理多，内容抽象，很多学生在学习中普遍感到在分析问题、解决问题方面缺乏思路．同济大学应用数学系《线性代数》编写组编写的 3 学时《线性代数》一书中习题较多，而且有些习题难度较大，为此，我们特意编写了与该教材配套的习题解答书．

本书分两部分，第一部分是 3 学时《线性代数》教材中习题的选解，内容的章节安排与教材一致，共分 26 节．习题编号自成一体，并在题号后括号内表示该题在教材中的原题号．第二部分是 2002—2005 年研究生入学考试（线性代数）试题精解．

本书可供大学理工科学生和研究生学习“线性代数”时参考，也可供其他读者学习“线性代数”时参考．

笔者衷心地希望本书能够成为广大读者学习“线性代数”的很好的辅导书．由于编者水平所限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者及同行批评指正．

编　者

2005. 7

目　录

前　言
§0　预备知识 …… (1)
§1　矩阵及其运算 …… (1)
§2　分块矩阵与初等阵 …… (3)
§3　可逆矩阵 …… (5)
§4　线性方程组 …… (8)
§5　行列式的定义与性质 …… (9)
§6　n 阶行列式的计算 …… (13)
§7　伴随矩阵与 Cramer 法则 …… (22)
§8　n 维向量空间 …… (27)
§9　线性相关与线性无关 …… (29)
§10　基与维数 …… (30)
§11　空间向量 …… (34)
§12　平面与直线 …… (36)
§13　矩阵的秩 …… (42)
§14　线性方程组有解的判别定理 …… (44)
§15　线性方程组解的结构 …… (45)
§16　线性空间与子空间 …… (54)
§17　基变换与坐标变换 …… (59)
§18　线性空间的同构 …… (64)
§19　线性变换与相似矩阵 …… (66)
§20　特征值、特征向量与可对角化条件 …… (72)
§21　向量的内积与欧氏空间 …… (78)
§22　实对称矩阵及其对角化 …… (84)
§23　二次曲面及其分类 …… (87)
§24　二次型及其标准形 …… (90)
§25　正定二次型与正定阵 …… (91)

2002 **年研究生入学考试试题精解(线性代数)** …… (93)
2003 **年研究生入学考试试题精解(线性代数)** …… (104)
2004 **年研究生入学考试试题精解(线性代数)** …… (118)
2005 **年研究生入学考试试题精解(线性代数)** …… (132)
参考文献 …… (142)

§0 预备知识

0-1(原题 2) 设 $M\subset N$，证明：$M\cap N=M$，$M\cup N=N$.

证明 设 $x\in M\cap N$，则 $x\in M$ 且 $x\in N$，从而 $M\cap N\subseteq M$. 反之，设 $x\in M$，因为 $M\subset N$，所以 $x\in N$，从而 $x\in M\cap N$，故 $M\subseteq M\cap N$. 综上所述，有 $M\cap N=M$.

设 $x\in M\cup N$，则 $x\in M$ 或 $x\in N$. 又由于 $M\subset N$，所以，$x\in N$，从而 $M\cup N\subseteq N$. 反之，设 $x\in N$，由于 $M\subset N$，所以 $x\in M\cup N$，从而 $N\subseteq M\cup N$. 综上所述，有 $M\cup N=N$.

0-2(原题 4) 在 R 上定义 $\sigma(a)=\begin{cases}a & a\neq 1,\\ b & a=1\end{cases}$ 这里，$b^2=1$，σ 是不是 R 到 R 的一个映射？为什么？

解 σ 不是 R 到 R 的一个映射. 因为 $b^2=1$，从而有 $b=1$ 或 $b=-1$. 当 $a=1$ 时，a 在 σ 下的像不是惟一的.

§1 矩阵及其运算

1-1(原题 4) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就称为与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，即

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_1+x_2\\ x_3 & x_3+x_4\end{bmatrix}$$

由矩阵相等的定义可得

$$\begin{cases}x_1+x_3=x_1\\ x_2+x_4=x_1+x_2,\\ x_4=x_3+x_4\end{cases}\qquad \text{解得}\begin{cases}x_1=x_4\\ x_3=0\end{cases}$$

所以与 A 可交换的所有矩阵为 $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$，$x$，$y\in R$ 是任意常数.

1-2(原题 5) 设 A 是实对称矩阵，如果 $A^2=0$，那么，$A=0$.

证明 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 因为 A 是实对称矩阵，所以，$a_{ij}=a_{ji}$，$(i\neq j)$. 设 $A^2=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$b_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

从而 $a_{ij}=0(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$. 故 $A=0$.

1-3(原题 7) A，B 是 n 阶矩阵，证明：

(1) AB 的主对角线元素之和＝BA 的主对角线元素之和；

(2) $AB-BA\neq E$.

证明 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$AB=(c_{ij})_{n\times n}$，$BA=(d_{ij})_{n\times n}$，则

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki} \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$d_{ii}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

(1) AB 的主对角线元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki},$$

BA 的主对角线元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n}d_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{ik},$$

所以，$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}$，即 AB 的主对角线元素之和＝BA 的主对角线元素之和.

(2) 用反证法. 假设 $AB-BA=E$，则 $AB=BA+E$，从而 $\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=n+\sum_{i=1}^{n}d_{ii}$.

因 $n\neq 0$，由(1)可知这与 $\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}$ 矛盾. 所以，$AB-BA\neq E$.

1-4(原题 8) 利用等式

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算 $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$.

解

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5=\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\right)^5$$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\times3^6-7\times2^6 & 3\times2^6-2\times3^6\\35\times3^5-35\times2^5 & 15\times2^5-14\times3^5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3197 & -1266\\7385 & -2922\end{bmatrix}$$

1-5(原题 9)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，**证明：当** $n\geqslant3$ **时，恒有** $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，**并利用它计算** $\boldsymbol{A}^{100}$.

证明　当 $n=3$ 时，经直接验证可知，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^{3-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

假设 $n-1$ 时等式成立，即 $\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$$

所以，当 $n\geqslant3$ 时，恒有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{A}^{98}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{96}+2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}=\cdots=\boldsymbol{A}^2+49\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E}=50\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E}$$

$$=50\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}49&0&0\\0&49&0\\0&0&49\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{bmatrix}$$

§2　分块矩阵与初等阵

2-1(原题 1)　设 $\boldsymbol{A}$ **是** $m\times n$ **矩阵，对任意** n **维列向量** $\boldsymbol{X}$，**有** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，**证明：**$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明　令 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个分量为 1，其余分量都为 0 的 n 维列向量. 由假设知，$\boldsymbol{Ae}_i=\boldsymbol{0}$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{Ae}_1,\ \boldsymbol{Ae}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{Ae}_n)=\boldsymbol{0}.$$

2-2(原题 3)　找一个 3 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，**使它左乘矩阵** $\boldsymbol{A}$ **相当于对** $\boldsymbol{A}$ **连续施行了下述两个行初等变换：**

(1) **用**$(-b)$**乘** $\boldsymbol{A}$ **的第 1 行并加到第 3 行上去；**

(2) **再调换第 2，3 两行.**

其中，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$.

解 对矩阵 A 先施行第一种行初等变换，相当于在 A 的左端乘以初等阵 $P(1(-b),3)$；再对 A 施行第二种行初等变换，相当于在 $P(1(-b),3)A$ 的左端再乘以初等阵 $P(2,3)$，因而矩阵 Q 是初等阵 $P(1(-b),3)$ 与 $P(2,3)$ 的乘积，即

$$Q=P(2,3)P(1(-b),3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-3(原题 5) 设 $A=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{n-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$，证明：$A^k=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{n-k} \\ \boldsymbol{E}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，$A^n=\boldsymbol{E}_n$.

证明 设 e_j 是第 j 个分量为 1，其余分量都为 0 的 n 维列向量，则可证 Ae_j 是矩阵 A 的第 j 列. 将矩阵 A 按列分块，$A=(e_n,\ e_1,\ \cdots,\ e_{n-1})$，从而

$$A^2=AA=A(e_n,\ e_1,\ \cdots,\ e_{n-1})=(Ae_n,\ Ae_1,\ \cdots,\ Ae_{n-1})$$

$$=(e_{n-1},\ e_n,\ e_1,\ \cdots,\ e_{n-2})=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{n-2} \\ \boldsymbol{E}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

假设 $A^{k-1}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{n-k+1} \\ \boldsymbol{E}_{k-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$，$1\leqslant k-1<n-1$，则

$$A^k=AA^{k-1}=A\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{n-k+1} \\ \boldsymbol{E}_{k-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$=A(e_{n-k+2},\ e_{n-k+3},\ \cdots,\ e_n,\ e_1,\ \cdots,\ e_{n-k+1})$$

$$=(Ae_{n-k+2},\ Ae_{n-k+3},\ \cdots,\ Ae_n,\ Ae_1,\ \cdots,\ Ae_{n-k+1})$$

$$=(e_{n-k+1},\ e_{n-k+2},\ \cdots,\ e_{n-1},\ e_n,\ e_1,\ \cdots,\ e_{n-k})$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{n-k} \\ \boldsymbol{E}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}(1\leqslant k\leqslant n-1),$$

$$A^n=AA^{n-1}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{n-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ \boldsymbol{E}_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_n$$

2-4(原题 6) 如果 A 是对称矩阵，那么，任意对调 A 的两列及相同的两行，所得的矩阵仍为对称矩阵.

证明 设 B 是对调 A 的第 i,j 两列及第 i,j 两行后所得的矩阵，则 $B=P(i,j)AP(i,j)$. 由于 $P(i,j)$ 是对称矩阵，A 也是对称矩阵，从而

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(i,j))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(i,j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i,j)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(i,j)=\boldsymbol{B},$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 仍为对称矩阵.

§3 可逆矩阵

3-1(原题 1) 求矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{bmatrix}.$$

解 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}8&3\\5&2\end{bmatrix}$, 由于

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}5&2&1&0\\2&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&1&-2\\0&1&-2&5\end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}8&3&1&0\\5&2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&2&-3\\0&1&-5&8\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3\\-5&8\end{bmatrix}$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{bmatrix}$$

3-2(原题 2) 解矩阵方程:

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$$

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$, 则原方程为 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 可先

用行初等变换求 A^{-1}，再作矩阵乘法 BA^{-1} 来求 X. 另外，可由原方程 $XA=B$ 得到一个新的矩阵方程 $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$，由

$$(A^{\mathrm{T}},B^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}2&2&1&1&4\\1&1&-1&-1&3\\-1&0&1&3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-2&-\frac{8}{3}\\0&1&0&2&5\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

可得 $X^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2&-\frac{8}{3}\\2&5\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，从而 $X=\begin{bmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

3-3(原题 3)　利用逆矩阵解线性方程组：

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2,\\2x_1-x_2-3x_3=1,\\3x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}$$

解　系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{bmatrix}$，未知数列向量 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，常数列向量为 $b=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，则线性方程组等价于矩阵方程 $AX=b$. 因为

$$(A,\ b)=\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\2&-1&-3&1\\3&2&-5&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&-1&-3\\0&5&-2&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-1&-3\\0&0&3&9\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-1&-3\\0&0&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&0\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

所以 A 可逆，且 $X=A^{-1}b=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$.

3-4(原题 4)　设 $A^k=0$(k 为正整数)，证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$

证明　因为

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})$$
$$=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3-\cdots-\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}^k$$
$$=\boldsymbol{E},$$

所以，
$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$$

3-5(原题 5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，求矩阵的逆：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

解 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AX}_1 & \boldsymbol{AX}_2\\ \boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{BX}_3 & \boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{BX}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_2\end{bmatrix}$$

从而可得方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{E}_1 & (1)\\ \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{0} & (2)\\ \boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{BX}_3=\boldsymbol{0} & (3)\\ \boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{BX}_4=\boldsymbol{E}_2 & (4)\end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，从而由式(1)与式(2)可得 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{0}$，由式(3)与式(4)可得 $\boldsymbol{BX}_3=-\boldsymbol{CA}^{-1}$，$\boldsymbol{BX}_4=\boldsymbol{E}_2$，即 $\boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}$，$\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{B}^{-1}$.

所以 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$

3-6(原题 6) 验证矩阵等式(假设下式中出现的各量都有意义)

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

解法 1 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}]$$
$$=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}-\boldsymbol{BA}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$=\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})]^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}-\boldsymbol{BA}^{-1}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})]^{-1}$$
$$=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}-\boldsymbol{BA}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}$$
$$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}^{-1})-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}^{-1})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}$$
$$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}^{-1})[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}]$$
$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}]$$
$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}$$
$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{BB}^{-1}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}$$
$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}$$

$=\boldsymbol{E}$,

所以,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

解法 2

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}]\\&=\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}]=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\\&=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\end{aligned}$$

3-7(原题 7)　已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 皆可逆,证明:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

证明　因为

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}]\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\&=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

所以$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3-8(原题 8)　证明:如果 5 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是对调 5 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行与第 5 行得到的,那么,$\boldsymbol{B}^{-1}$是对调 $\boldsymbol{A}^{-1}$的第 3 列与第 5 列得到的.

证明　设 $\boldsymbol{B}$ 是对调 $\boldsymbol{A}$ 第 3 行与第 5 行得到的,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}(3,5)\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{P}(3,5)$是对应的初等阵. 从而 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}(3,5)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}(3,5)$,即 $\boldsymbol{B}^{-1}$是对调 $\boldsymbol{A}^{-1}$的第 3 列与第 5 列得到的.

§4　线性方程组

4-1(原题 3)　问 a,b 为何值时,线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2=3\\4x_1+7x_2+x_3=10\\x_2-x_3=b\\2x_1+3x_2+ax_3=4\end{cases}$. 有惟一解,无解,无穷多解?

解　对增广矩阵作行初等变换,有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{bmatrix}$$

当 $b-2\neq0$，即 $b\neq2$ 时，方程组无解；当 $b-2=0$ 且 $a-1\neq0$，即 $b=2$ 且 $a\neq1$ 时，方程组有惟一解；当 $b-2=0$ 且 $a-1=0$，即 $b=2$ 且 $a=1$ 时，方程组有无穷多解.

4-2（原题 4） 证明：当 $m<n$ 时，m 个方程 n 个未知数的线性方程组（不一定是齐次）有解的话，就一定有无穷多解.

证明 对 m 个方程 n 个未知数的线性方程组的增广矩阵作行初等变换，有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mm}&b_m\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}&\cdots&c_{1n}&d_1\\&c_{22}&\cdots&c_{2r}&\cdots&c_{2n}&d_2\\&&\ddots&\vdots&&\vdots&\vdots\\&&&c_{rr}&\cdots&c_{rn}&d_r\\&&&&&&d_{r+1}\end{bmatrix}$$

因为，此线性方程组有解，所以，一定有 $d_{r+1}=0$，又由 $m<n$ 可知，$r\leqslant m<n$，从而此线性方程组一定有无穷多解.

4-3（原题 5） 证明：齐次线性方程组有一个非零解时，必有无穷多解.

证明 设齐次线性方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，若它有一个非零解 $\boldsymbol{\alpha}$，则对任意常数 k，都有 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{A\alpha})=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，即 $k\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的非零解. 由常数 k 的任意性可知，此线性方程组必有无穷多解.

§5 行列式的定义与性质

5-1（原题 1） 求 $\begin{vmatrix}a&1&2&3\\b&-1&0&1\\c&0&2&3\\d&1&-1&-2\end{vmatrix}$ 的第一列元素的代数余子式，并求

出此行列式的值.

解 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&2&3\\1&-1&-2\end{vmatrix}=-1,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\1&-1&-2\end{vmatrix}=1,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\1&-1&-2\end{vmatrix}=2,$

$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\0&2&3\end{vmatrix}=2$

此行列式的值为 $D=aA_{11}+bA_{21}+cA_{31}+dA_{41}=b-a+2c+2d.$

5-2(原题 3) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1&5&7&-8\\1&1&1&1\\2&0&-9&6\\-3&4&3&7\end{vmatrix}$,**证明** $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0.$

证明

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$$
$$=\begin{vmatrix}-1&5&7&-8\\1&1&1&1\\2&0&-9&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

5-3(原题 6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,证明奇数阶反对称矩阵的行列式是零.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$,若阶数 n 是奇数,则有

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|,$$

所以有 $|\boldsymbol{A}|=0.$

5-4(原题 8) (1) 已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&7&19&0\\0&7&-2&-1&3\\8&0&4&2&11\\0&0&5&2&22\\0&0&0&3&100\end{vmatrix}=10,$ $D_1=$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 19 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 100 \end{vmatrix}$，**求** D_1 **的值.**

(2) **证明** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

解 (1) **将** D **及** D_1 **均按第** 5 **列展开，有**

$$D = 3A_{25} + 11A_{35} + 22A_{45} + 100A_{55} = 10$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 3A_{25} + 7A_{35} + 22A_{45} + 100A_{55} \\ &= 3A_{25} + 11A_{35} + 22A_{45} + 100A_{55} - 4A_{35} \\ &= 10 - 4A_{35} = -410 \end{aligned}$$

(2) **设**

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = D_1 + D_2 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1 \leftrightarrow c_2]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{c_3-c_2} \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

所以 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

5-5(原题 9) 计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，(2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$=1\times(-2)\times(-2)\times 4=16$

(2) **解法 1**

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} + x^2y^2$$

$$\xrightarrow[r_2+xr_1]{r_3-r_4}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&0&x&x\\0&0&y&y\\-x&0&0&-y\end{vmatrix}+x^2y^2=0+x^2y^2=x^2y^2$$

解法 2

$$\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\-x&-x&0&0\\1&1&1+y&1\\0&0&-y&-y\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-c_4]{c_1-c_2}\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&-x&0&0\\0&1&y&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2+xr_3}\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&0&xy&x\\0&1&y&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&0&y&1\\0&1&y&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&1&y&1\\0&0&y&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

§6 n 阶行列式的计算

6-1(原题 1) 计算

(1) $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}0&a&b&a\\a&0&a&b\\b&a&0&a\\a&b&a&0\end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix}a&b&b&b\\a&b&a&b\\a&a&b&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\16&8&2&4\\81&27&3&9\\256&64&4&16\end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix}0&a&b&c\\a&0&c&b\\b&c&0&a\\c&b&a&0\end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$；(8) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+ba & a & 0 \\ -1 & 0 & 1+cb & b \\ 0 & -1 & 0 & 1+cd \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & (1+cd)(a+ab) \\ -1 & 0 & 1+cb & b \\ 0 & -1 & 0 & 1+cd \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (1+cd)(a+ab)+ad \\ -1 & 0 & 1+cb & b \\ 0 & -1 & 0 & 1+cd \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1+cb & b \\ 0 & -1 & 0 & 1+cd \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & (1+cd)(a+ab)+ad \end{vmatrix}$

$=(1+cd)(1+ab)+ad=1+ab+cd+abcd+ad$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$

$= -x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+b & a & b & a \\ 2a+b & 0 & a & b \\ 2a+b & a & 0 & a \\ 2a+b & b & a & 0 \end{vmatrix} = (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$

$= (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & -a & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & b-a & a-b & -a \end{vmatrix}$

$= (2a+b)\begin{vmatrix} -a & a-b & b-a \\ 0 & -b & 0 \\ b-a & a-b & -a \end{vmatrix}$

$= (2a+b)(-b)\begin{vmatrix} -a & b-a \\ b-a & -a \end{vmatrix}$

$= (2a+b)(-b)[a^2-(b-a)^2] = b^2(b-2a)(b+2a)$

(4) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (b-a)^3(b+a)$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 2 & 4 \\ 81 & 27 & 3 & 9 \\ 256 & 64 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2 & 2^2 \\ 3^4 & 3^3 & 3 & 3^2 \\ 4^4 & 4^3 & 4 & 4^2 \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 1 & 2 \\ 3^3 & 3^2 & 1 & 3 \\ 4^3 & 4^2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= -24\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$

$$=-24(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)=-288$$

(6)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ c_1+c_4}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} (a+b+c) & a & b & c \\ (a+b+c) & 0 & c & b \\ (a+b+c) & c & 0 & a \\ (a+b+c) & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} (a+b+c) & a & b & c \\ 0 & -a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & -b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2+c_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} (a+b+c) & a+c & b & c \\ 0 & b-a-c & c-b & b-c \\ 0 & 0 & -b & a-c \\ 0 & b-a-c & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} (a+b+c) & a+c & b & c \\ 0 & b-a-c & c-b & b-c \\ 0 & 0 & -b & a-c \\ 0 & 0 & a-c & -b \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3+c_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} (a+b+c) & a+c & b+c & c \\ 0 & b-a-c & 0 & b-c \\ 0 & 0 & a-b-c & a-c \\ 0 & 0 & a-b-c & -b \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} (a+b+c) & a+c & b+c & c \\ 0 & b-a-c & 0 & b-c \\ 0 & 0 & a-b-c & a-c \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a-b+c)(a-b-c)(a+b-c)$$

(7)
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ c_1+c_4}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & b & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & d & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_4}\begin{vmatrix} a+b+c+d & b+d & c & d \\ 0 & a-b+c-d & b-c & c-d \\ 0 & 0 & a-c & b-d \\ 0 & a-b+c-d & d-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{vmatrix} a+b+c+d & b+d & c & d \\ 0 & a-b+c-d & b-c & c-d \\ 0 & 0 & a-c & b-d \\ 0 & 0 & d-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b+c-d & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 0 & d-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(a-c)^2+(b-d)^2]$$

(8) $$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}\xrightarrow[c_1+c_3]{c_1+c_2}\begin{vmatrix} a+b & -b-c & -b \\ a+b & b+c & -a \\ -a-b & b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} a+b & -b-c & -b \\ 0 & 2(b+c) & b-a \\ 0 & 0 & a+c \end{vmatrix}=2(a+b)(b+c)(c+a)$$

6-2(原题 2) 证明

(1) $a\neq b$ **时,三对角行列式**

$$\begin{vmatrix} a+b & b & & & & \\ a & a+b & b & & & \\ & a & a+b & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & a+b & b \\ & & & & a & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

(2) $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ **时,** $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

$$(3)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdots b_n$$

$$(4)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

证明 (1) **方法 1**

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & & & \\ a & a+b & b & & & \\ & a & a+b & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & a+b & b \\ & & & & a & a+b \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 1 行展开}}$$

$$(a+b)D_{n-1} - b\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ & a+b & b & & & \\ & a & a+b & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & a+b & bx \\ & & & & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

即 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$，**从而由递推公式可得**

$$\begin{aligned} D_n - bD_{n-1} &= a(D_{n-1} - bD_{n-2}) \\ &= a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= a^{n-2}(D_2 - bD_1) \\ &= a^{n-2}[(a+b)^2 - ab - b(a+b)] \\ &= a^n \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} D_n &= a^n + b(a^{n-1} + bD_{n-2}) = a^n + ba^{n-1} + b^2 D_{n-2} \\ &= \cdots = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \end{aligned}$$

方法 2

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ a & a+b & b & & & \\ & a & a+b & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & a+b & b \\ & & & & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} b & 0 & & & & \\ a & a+b & b & & & \\ & a & a+b & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & a+b & b \\ & & & & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ 0 & a & b & & & \\ & 0 & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & a & b \\ & & & & 0 & a \end{vmatrix}+bD_{n-1}$$

$$=a^n+bD_{n-1}=a^n+b(a^{n-1}+bD_{n-2})=a^n+ba^{n-1}+b^2D_{n-2}$$

$$=\cdots=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

(2)

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\underline{\underline{\quad c_1-\frac{1}{a_1}c_2-\frac{1}{a_2}c_3-\cdots-\frac{1}{a_n}c_{n+1}\quad}}$$

$$\begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

(3) **将第 1 行乘以 -1，再分别加到第 2 行，第 3 行，…，第 $n+1$ 行，可得**

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n\end{vmatrix}$$

$$=b_1b_2\cdots b_n$$

(4) **从第 $n+1$ 列开始，依次将后一列乘以 x 加到前一列：**

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ a_0x^n+\cdots+a_n & a_0x^{n-1}+\cdots+a_{n-1} & a_0x^{n-2}+\cdots+a_{n-2} & \cdots & a_0x+a_1 & a_0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(-1)^n(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)$$

$$=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

6-3(原题 3)　设 $\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}2-x & 3 & 4\\ 0 & 4-x & -5\\ 1 & -1 & 3-x\end{bmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}(x)|$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{A}(x)|}{\mathrm{d}x}$.

解

$$|\boldsymbol{A}(x)|=\begin{vmatrix}2-x & 3 & 4\\ 0 & 4-x & -5\\ 1 & -1 & 3-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-x & 5-x & 4\\ 0 & 4-x & -5\\ 1 & 0 & 3-x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 5-x & 4+(3-x)(x-2)\\ 0 & 4-x & -5\\ 1 & 0 & 3-x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5-x & 4+(3-x)(x-2)\\ 4-x & -5\end{vmatrix}=-x^3+9x^2-17x-17$$

$$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{A}(x)|}{\mathrm{d}x}=-3x^2+18x-17$$

6-4(原题 4)　已知三维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 组成的三阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=m$,求下述三阶行列式的值:

(1) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}|$;　(2) $|\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\gamma}|$.

解　(1)

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}| &= |\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}| \\ &= |\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}| \\ &= 2|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}| \\ &= 2m\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\gamma}| &= 6|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}| \\ &= 6|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}| \\ &= 6m\end{aligned}$$

6-5(原题 5)　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵,证明 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

证明

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$$

6-6(原题 6)　设行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix}$**,求第 4 行各元素的余子式的和及代数余子式的和.**

解

$$\begin{aligned}M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} &= -A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44} \\ &= \begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-28\end{aligned}$$

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

6-7(原题 7)　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$**,矩阵** $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$**,$n$ 为正整数,求** $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{n}|$.

解　因为

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^n=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

所以

$$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=|a\boldsymbol{E}-2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}=a^2(a-2^n)$$

§7　伴随矩阵与 Cramer 法则

7-1(原题 2)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 是非零实矩阵，若 $\boldsymbol{A}_{ij}=a_{ij}$（$\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式）. 证明 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，并求 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明　因为 $\boldsymbol{A}_{ij}=a_{ij}$，所以 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 假设 $|\boldsymbol{A}|=0$，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}.$$

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(b_{ij})_{3\times3}$，则 $b_{ii}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2=0(i=1,2,3)$，从而

$$a_{i1}=a_{i2}=a_{i3}=0\qquad(i=1,2,3),$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，与 $\boldsymbol{A}$ 是非零实矩阵矛盾. 所以 $|\boldsymbol{A}|\neq0$. 于是由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 可得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^3$$

故 $|\boldsymbol{A}|=1$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

7-2(原题 3)　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，证明：

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；　(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证明　(1) 用反证法. 若 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 可逆，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$. 在等式的左、右两端同时右乘上 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，有矛盾，所以 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，显然成立；当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时，在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的左、右两端同时取行列式，有 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$，从而 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

7-3(原题 4)　由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} i & -2 & 2 \\ 3i & -5 & 7 \\ 1 & i & -2i \end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

解　(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}5=5, A_{12}=(-1)^{1+2}2=-2,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}2=-2, A_{22}=(-1)^{2+2}1=1.$$

故 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

类似地可求(2)，(3)，(4)题.

7-4(原题 5)　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，并求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

证明　因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，从而由题 7-2(2)知 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的左，右两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，从而 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$.

7-5(原题 6)　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

证明　将 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 变形得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，从而 $\boldsymbol{A}\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

将 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 变形为 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，从而

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E},$$

故 $-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$.

7-6(原题 9)　利用 Cramer 法则证明一个 n 次多项式不可能有多于 n 个互异的零点.

证明　设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 是一个 n 次非零多项式. 用反证法证明 $f(x)$ 不可能有多于 n 个互异的零点.

假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ 是 $f(x)$ 的 $n+1$ 个互异的零点，则有齐次线性方程组

$$c_0+c_1a_i+\cdots+c_na_i^n=0, \qquad i=1,2,\cdots,n+1$$

其系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是一个 $n+1$ 阶范德蒙行列式，由 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ 互异可知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故由 Cramer 法则知线性方程组只有零解 $c_0=c_1=\cdots=c_n=0$，从而这个 n 次多项式 $f(x)$ 只能是零多项式，有矛盾. 所以一个 n 次多项式不可能

有多于 n 个互异的零点.

7-7(原题 10)　利用 Cramer 法则解线性方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2, \\ bcx+cay+abz=3abc; \end{cases}$$

其中 a,b,c 两两互异.

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & ca-bc & ab-bc \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & b(a-c)+c(c-a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)[b(a-c)+c(c-a)]=(b-a)(b-c)(a-c)\neq 0$$

所以方程组有惟一解,又因为

$$D_x=\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+b^2+c^2 & b & c \\ 3abc & ca & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+c^2-ab-bc & 0 & c-b \\ 2abc-a^2c-ac^2 & 0 & ab-ca \end{vmatrix}$$

$$=a(c-b)(a-c)(a-b)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & 1 \\ a & a^2+b^2+c^2 & c \\ bc & 3abc & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b+c & 0 \\ a & b^2+c^2 & c-a \\ bc & 2abc & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & b+c & 0 \\ a & b^2+c^2 & c-a \\ bc+ab & 2abc+b^3+bc^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a-c)[2abc+b^3+bc^2-b(b+c)(c+a)]=b(a-c)(c-b)(a-b)$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b+c \\ a & b & a^2+b^2+c^2 \\ bc & ca & 3abc \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & b+c \\ a & b-a & b^2+c^2 \\ bc & ca-bc & 2abc \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & b+c \\ a & b-a & b^2+c^2 \\ bc+ac & 0 & 2abc+cb^2+c^3 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)[2abc+b^2c+c^3-(b+c)(bc+ac)]$$

$$=c(b-a)(b-c)(a-c)$$

所以

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{a(c-b)(a-c)(a-b)}{(b-a)(b-c)(a-c)}=a$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{b(a-c)(c-b)(a-b)}{(b-a)(b-c)(a-c)}=b$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{c(b-a)(b-c)(a-c)}{(b-a)(b-c)(a-c)}=c$$

7-8(原题 11)　问 λ,μ 为何值时,齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+ x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ **有非零解?**

解　系数行列式为

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}=\mu(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\mu(1-\lambda)$$

则当 $D=\mu(1-\lambda)=0$**,即** $\mu=0$ **或** $\lambda=1$ **时,原方程组有非零解.**

7-9(原题 12)　问 k **取何值时,线性方程组** $\begin{cases}x_1+ x_2+kx_3= 4\\ -x_1+kx_2+ x_3= k^2\\ x_1- x_2+2x_3=-4\end{cases}$ **有惟一解,无解,无穷多解?**

解　此方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ -1 & k & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & k+1 & k+1\\ 0 & -2 & 2-k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k+1 & k+1\\ -2 & 2-k\end{vmatrix}=(4-k)(k+1)$$

(1) **当** $D\neq0$**,即** $k\neq-1$ **且** $k\neq4$ **时此方程组有惟一解,又因为**

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 1 & k\\ k^2 & k & 1\\ -4 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1 & k\\ k^2 & k & 1\\ 0 & 0 & 2+k\end{vmatrix}=(2+k)\begin{vmatrix}4 & 1\\ k^2 & k\end{vmatrix}=(2+k)k(4-k)$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & k\\ -1 & k^2 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & k\\ 0 & k^2+4 & k+1\\ 0 & -8 & 2-k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k^2+4 & k+1\\ -8 & 2-k\end{vmatrix}$$

$$=(k^2+2k+4)(4-k)$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & k & k^2\\ 1 & -1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & k & k^2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 4\\ k & k^2\end{vmatrix}=2k(k-4)$$

所以惟一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{(2+k)k(4-k)}{(4-k)(k+1)}=\frac{(2+k)k}{k+1}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{(k^2+2k+4)(4-k)}{(4-k)(k+1)}=\frac{k^2+2k+4}{k+1}$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{2k(k-4)}{(4-k)(k+1)}=-\frac{2k}{k+1}$$

(2) 当 $k=-1$ 时,方程组化为 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=4 \\ -x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$,将此方程组的增广矩阵进行行初等变换,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

对应于第三个阶梯形矩阵的线性方程组中的第三个方程是"$0=1$",所以它对应的线性方程组无解,从而原方程组无解.

(3) 当 $k=4$ 时,方程组化为 $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=4 \\ -x_1+4x_2+x_3=16 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$,将此方程组的增广矩阵进行行初等变换,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而原方程组与 $\begin{cases} x_1+3x_3=0 \\ x_2+x_3=4 \end{cases}$ 同解,得 $\begin{cases} x_1=-3x_3 \\ x_2=4-x_3 \end{cases}$,其中 x_3 是任意常数.

7-10(原题 13) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都为 n 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=-3$,求 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|$.

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 可知,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,从而

$$|\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^{-1}|.$$

而由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可得 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$,故 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=2^{n-1}$,从而 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n\cdot 2^{n-1}\cdot|\boldsymbol{B}|^{-1}=-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

§8 n 维向量空间

8-1(原题 3) 设

$$V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R},x_1+\cdots+x_n=0\},$$

$$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R},x_1+\cdots+x_n=1\},$$

$$V_3=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R},x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

问 V_1,V_2,V_3 是否成为向量空间？为什么？

解 V_1 成为向量空间. 因为对任意

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,$$

有 $x_1+\cdots+x_n=0,y_1+\cdots+y_n=0$,所以$(x_1+y_1)+\cdots+(x_n+y_n)=0$. 从而

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,$$

且对任意 $\lambda\in\mathbf{F}$,有 $\lambda x_1+\lambda x_2+\cdots+\lambda x_n=\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0$,从而

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,$$

即 V_1 对向量的加法和数乘两种运算封闭.

类似地可验证 V_2 不构成向量空间,因为 V_2 对向量的加法和数乘运算都不封闭;V_3 构成向量空间,因为 V_3 对向量的加法和数乘运算都封闭.

8-2(原题 4) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 若能够,写出它的一种表示式:

(1) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\-5\\12\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\3\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\10\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\-1\end{pmatrix}$.

解 (1) 设有 x_1,x_2,x_3 使 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$. 则可得线性方程组:

$$\begin{bmatrix}1&5&1\\2&-5&-3\\-3&12&6\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\end{pmatrix}$$

解此线性方程组:

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 1 & 2\\ 2 & -5 & -3 & -1\\ -3 & 12 & 6 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ x_3=1\end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$（参照教材《线性代数》第 86 页例 1）.

（2）设有 x_1,x_2,x_3 使 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$. 则可得线性方程组：

$$\begin{bmatrix}-2 & 3 & -5\\ 7 & -5 & -6\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ -3\\ 7\\ 10\end{pmatrix}$$

解此线性方程组：

$$\begin{bmatrix}-2 & 3 & -5 & -8\\ 7 & -5 & -6 & -3\\ 1 & 0 & 3 & 7\\ 3 & -2 & -1 & 10\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 7 & 30\\ 0 & 0 & 4 & 49\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可知此线性方程组无解，故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示（参照教材《线性代数》第 87 页例 2）.

8-3（原题 5） 试证任一 4 维向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{pmatrix}$ 都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ 惟一地线性表示，写出这种表示法.

解 设有 x_1,x_2,x_3,x_4，使 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$. 即

$$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

解此线性方程组：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&a_1\\0&1&1&1&a_2\\0&0&1&1&a_3\\0&0&0&1&a_4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&a_1-a_2\\0&1&0&0&a_2-a_3\\0&0&1&0&a_3-a_4\\0&0&0&1&a_4\end{bmatrix}$$

得$\begin{cases}x_1=a_1-a_2\\x_2=a_2-a_3\\x_3=a_3-a_4\\x_4=a_4\end{cases}$，所以任一 4 维向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}$ 都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一地线性表示，且 $\boldsymbol{\beta}=(a_1-a_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(a_2-a_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(a_3-a_4)\boldsymbol{\alpha}_3+a_4\boldsymbol{\alpha}_4$.

§9 线性相关与线性无关

9-1（原题 3） 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性相关性.

解 设有 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 使 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+x_r(\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$，整理得$(x_1+x_r)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+(x_{r-1}+x_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$. 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}x_1+x_r=0,\\x_1+x_2=0,\\\quad\vdots\\x_{r-1}+x_r=0\end{cases}$$

此线性方程组系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

当 r 为偶数时，$D=0$，此方程组有非零解，即存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$，使

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关；当 r 为奇数时，$D=2\neq0$，方程组只有零解，即对任一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$，都有

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_1)\neq\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

9-2(原题 4) 设向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\xi}$ 必可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示.

证明 因为向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,则由教材《线性代数》第 98 页推论 9.4 可知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 仍是线性无关的. 由于 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关,从而存在一组不全为零的数 $\lambda,\lambda_1,\cdots,\lambda_k$,使 $\lambda\boldsymbol{\xi}+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$. 此时,$\lambda\neq0$. 否则,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关知,$\lambda_1=\cdots=\lambda_k=\lambda=0$,这与 $\lambda,\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 不全为零有矛盾. 于是,$\boldsymbol{\xi}=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{\lambda_k}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_k$. 即 $\boldsymbol{\xi}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示.

§10 基与维数

10-1(原题 1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量,已知 n 维基本单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 能由它们线性表示,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量,所以它们可由 n 维基本单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示,而已知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 又可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 等价,从而这两个向量组的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=n$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

10-2(原题 2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量,证明它们线性无关的充分必要条件是任意一个 n 维向量都可以由它们线性表示.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}$ 是任意一个 n 维向量,由教材《线性代数》第 102 页推论 9.9 可知,$n+1$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性相关,故存在一组不全为零的数 $k,k_1,\cdots,k_n$,使 $k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$,此时 $k\neq0$,否则,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关可知 $k=k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,与 $k,k_1,\cdots,k_n$ 不全为零有矛盾. 于是,$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_n}{k}\boldsymbol{\alpha}_n$,即任意一个 n 维向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

充分性 因为任意一个 n 维向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,从而 n 维基本单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,由第 10-1 题即得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

10-3(原题 3) 设向量组 A 与向量组 B 的秩相等,且 A 组能由 B 组线性

表示，证明 A 组与 B 组等价.

证法 1 设向量组 A 与向量组 B 的秩为 r，则可设 $\boldsymbol{A}_0=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，$\boldsymbol{B}_0=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 分别是向量组 A 与向量组 B 的最大无关组. 因为 A 组能由 B 组线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示. 于是存在 r 阶矩阵 $\boldsymbol{K}_r$ 使 $\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K}_r$，即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{K}_r$，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{K}_r\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_0\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K}_r\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_0\left(\boldsymbol{K}_r\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}\right)$ $=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，这与 $\boldsymbol{A}_0=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 线性无关矛盾. 所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{K}_r\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{K}_r$ 可逆，于是 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{K}_r^{-1}$，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，所以 B 组可由 A 组线性表示，从而 A 组与 B 组等价.

证法 2 因 A 组能由 B 组线性表示，故 A 组和 B 组合并而成的向量组 (A,B) 能由 B 组线性表示，而 B 组是 (A,B) 组的部分组，故 B 组能由 (A,B) 组线性表示，从而 B 组与 (A,B) 组等价，因此 (A,B) 组的秩也为 r. 又因为 A 组的秩为 r，故 A 组的最大无关组 A_0 含有 r 个向量，因此，A_0 组也是 (A,B) 组的最大无关组，由 A_0 组与 A 组及 (A,B) 组都等价，可得 A 组与 (A,B) 组等价，所以，A 组与 B 组等价.

10-4(原题 4) 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩相等.

证明 由已知条件可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{bmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，$\boldsymbol{K}_r=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{bmatrix}$

因为 $|\boldsymbol{K}_r|=(-1)^{r-1}(r-1)\neq 0$，所以，$\boldsymbol{K}_r$ 可逆，且由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_r$ 可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_r^{-1}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 等价，从而有相等的秩.

10-5(原题 5)　设向量组 $A:\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$, $B:\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$, $C:\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$,证明:

(1) 秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}\leqslant$秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$;

(2) 秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}\leqslant$秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}+$秩$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$.

证明　(1) 因向量组 $A:\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$是向量组 $C:\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$的部分组,所以 A 组可由 C 组线性表示,于是由教材《线性代数》第 109 页推论 10.5 可知,秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}\leqslant$秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$.

(2) 设秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}=p$,秩$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}=q$,$A$ 组和 B 组的最大无关组分别为$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p}\}$和$\{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_q}\}$,则秩$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p},\boldsymbol{\beta}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_q}\}\leqslant p+q$(向量组的秩不会超过向量组所含向量的个数). 向量组 $A:\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$可由向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p}\}$线性表示,从而可由向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p},\boldsymbol{\beta}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_q}\}$线性表示;向量组 $B:\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$可由向量组$\{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_q}\}$线性表示,从而可由向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p},\boldsymbol{\beta}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_q}\}$线性表示. 故 C 组:$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$可由向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p},\boldsymbol{\beta}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_q}\}$线性表示.

所以有秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}\leqslant$秩$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p},\boldsymbol{\beta}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_q}\}\leqslant p+q$.

即秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}\leqslant$秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}+$秩$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$.

10-6(原题 6)　设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{bmatrix},$$

验证:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,并利用这个基线性表示 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$.

证明　要证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,只要验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$等价即可. 显然,$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示. 因为 $\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2$,所以矩阵 $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$可逆,于是有$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}$,即 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$

可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 所以,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 等价,因而是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

设有矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\end{bmatrix}$ 满足$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\end{bmatrix}$,解此矩阵方程:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 0 & -4 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$,即 $\boldsymbol{\beta}_1=-\frac{5}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{5}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{5}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$.

10-7(原题 7)　由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 张成的向量空间记为 V_1,由 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 张成的向量空间记为 V_2,试证:$V_1=V_2$.

证明　等价的向量组张成相等的向量空间,所以要证 $V_1=V_2$,只需证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价即可.

方法 1　设$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$,解此矩阵方程:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$,从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示. 又因为

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，所以，矩阵 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ 可逆，从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示. 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 等价.

方法 2

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

所以 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 等价，即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 等价.

10-8（原题 8） 已知向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$，如果各向量组的秩分别是 $\mathrm{rank}(\mathrm{Ⅰ}) = 3$，$\mathrm{rank}(\mathrm{Ⅱ}) = 4$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩是 4.

证明 因为 $\mathrm{rank}(\mathrm{Ⅱ}) = 4$，所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 因为 $\mathrm{rank}(\mathrm{Ⅰ}) = 3$，所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3, k_4，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4 = 0$. 此时，$k_4 \neq 0$，否则，由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可得 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，与 k_1, k_2, k_3, k_4 不全为零矛盾. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，因而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表示. 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩是 4.

§ 11 空间向量

11-1（原题 4） 已知两点 $A(3,0,2)$，$B(2,-2,0)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向余弦.

解 由于

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

所以 $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$，$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦依次为

$$\cos \widehat{\boldsymbol{i}, \overrightarrow{AB}} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}, \cos \widehat{\boldsymbol{j}, \overrightarrow{AB}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}, \cos \widehat{\boldsymbol{k}, \overrightarrow{AB}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

11-2(原题 5)　求平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}$ 的单位向量.

解　与 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行的单位向量为

$$\boldsymbol{\beta}=\pm\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}=\pm\frac{1}{\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}}\boldsymbol{\alpha}=\pm\frac{1}{9}\boldsymbol{\alpha}=\pm\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}$$

11-3(原题 7)　已知三角形的三个顶点是 $A(2,5,-1)$, $B(0,3,2)$, $C(7,0,4)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解　由于向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的外积 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 的长度等于以 AB 和 AC 为邻边的平行四边形的面积, 所以, $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$. 而

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}5\\-5\\5\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-2&-2&3\\5&-5&5\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}5\\25\\20\end{pmatrix},$$

故

$$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+25^2+20^2}=\frac{5}{2}\sqrt{42}$$

11-4(原题 8)　已知四面体的四个顶点分别是 $A(0,0,0)$, $B(0,3,2)$, $C(7,0,4)$, $D(6,0,-3)$, 试求四面体 $ABCD$ 的体积.

解　四面体 $ABCD$ 的体积是以向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为相邻的棱的平行六面体的体积的 $\frac{1}{6}$. 而

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}7\\0\\4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix},$$

且以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为相邻的棱的平行六面体的体积为

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}0&7&6\\3&0&0\\2&4&-3\end{vmatrix}=135,$$

故四面体 $ABCD$ 的体积为 $22\frac{1}{2}$.

11-5(原题 10)　已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_a\\y_a\\z_a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}$，利用行列式的性质证明

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

证明

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\begin{vmatrix}x_a&x_b&x_c\\y_a&y_b&y_c\\z_a&z_b&z_c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x_b&x_a&x_c\\y_b&y_a&y_c\\z_b&z_a&z_c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_b&x_c&x_a\\y_b&y_c&y_a\\z_b&z_c&z_a\end{vmatrix}(=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}))$$

$$=-\begin{vmatrix}x_c&x_b&x_a\\y_c&y_b&y_a\\z_c&z_b&z_a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_c&x_a&x_b\\y_c&y_a&y_b\\z_c&z_a&z_b\end{vmatrix}=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

§12　平面与直线

12-1(原题 1)　求满足下列条件的平面方程：

(1)(原题(1))过点$(3,0,-1)$且与向量$\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}$正交的平面；

(2)(原题(4))经过直线$\begin{cases}x-2z+1=0\\y-z-5=0\end{cases}$，与点$(1,3,2)$的平面；

(3)(原题(6))过点$(-1,0,2)$且与平面 $x-y=1$ 和 $2x+3y-4z-7=0$ 都正交的平面.

解　(1) 所求的平面与向量$\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}$正交，则该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量$\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}$平行. 若取 $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}$，则该平面的点法式方程为

$$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0,\quad \text{即}\quad 3x-7y+5z-4=0.$$

(2) 取直线上一点 $A(-1,5,0)$，因为点 $B(1,3,2)$ 与已知直线均在所求平面上，故该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量$\overrightarrow{AB}$及直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 均正交，从而可取平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为$\overrightarrow{AB}$与 $\boldsymbol{s}$ 的向量积$\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}$. 因为

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-2&2\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix},$$

于是，所求平面的点法式方程为 $-4(x-1)+2(y-3)+6(z-2)=0$，即 $2x-y-3z+7=0$.

(3) 平面 $x-y=1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，平面 $2x+3y-4z-7=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 均正交，从而可取所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&0\\2&3&-4\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix},$$

从而所求平面的方程为

$$4(x+1)+4(y-0)+5(z-2)=0,\quad \text{即}\quad 4x+4y+5z-6=0.$$

12-2(原题 2)　求满足下列条件的直线方程：

(1) (原题(1))过点(5,6,0)且平行与直线 $\begin{cases}9x-y-1=0\\2x-z+5=0\end{cases}$ 的直线；

(2) (原题(4))过点(1,0,1)且与直线 $\begin{cases}x-3z-2=0\\y-2z=0\end{cases}$ 垂直相交的直线；

(3) (原题(5))过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都平行的直线；

(4) (原题(6))过点(−1,0,4)，与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线.

解　(1) 因为所求直线与已知直线平行，所以所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 可取为已知直线的方向向量，即 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\9&-1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\2\end{pmatrix}$，从而所求直线的方

程为$\frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{9}=\frac{z}{2}$.

(2) **方法 1** 可参照教材《线性代数》第 142 页例 8.

方法 2 先求经过点 $A(1,0,1)$且与已知直线正交的平面Ⅰ. 平面Ⅰ的法向量恰好是已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,因此,平面Ⅰ的方程为:$3(x-1)+2(y-0)+(z-1)=0$,即 $3x+2y+z-4=0$.

再求过点 $A(1,0,1)$和直线 $\begin{cases} x-3z-2=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ 且与平面Ⅰ正交的平面Ⅱ. 取已知直线上一点 $B(2,0,0)$,则平面Ⅱ的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量$\overrightarrow{AB}$及已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 均正交,从而可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}$. 而$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,故

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

于是,平面Ⅱ的方程为:

$$2(x-1)-4(y-0)+2(z-1)=0, \quad \text{即} \quad x-2y+z-2=0.$$

所求的直线就是平面Ⅰ与平面Ⅱ的交线 $\begin{cases} 3x+2y+z-4=0 \\ x-2y+z-2=0 \end{cases}$,化为点向式方程,即为$\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{4}$.

(3) 因为所求直线与两个已知平面都平行,故直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与这两个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$ 均正交,从而可取直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以,直线的方程为$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

(4) 过点 $A(-1,0,4)$且与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行的平面方程为

$$3(x+1)-4(y-0)+(z-4)=0, \quad \text{即} \quad 3x-4y+z-1=0.$$

因为直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$与平面 $3x-4y+z-10=0$ 相交,所以,该直线也与平面 $3x-4y+z-1=0$ 相交,且交点坐标为 $B(15,19,32)$. 因点 $A(-1,0,4)$

与点 $B(15,19,32)$ 都在平面 $3x-4y+z-1=0$ 上，故 A,B 两点所在的直线既与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交，从而为所求直线. 而所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}16\\19\\28\end{pmatrix}$，所以，直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

12-3（原题 3） 求下列平面与平面，直线与平面，直线与直线之间的夹角：

（1）（原题(1)）平面 $4x-3y+5z-8=0$ 与平面 $2x+3y-z-4=0$.

（2）（原题(3)）直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$.

（3）（原题(4)）直线 $\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$.

解 （1）两个平面的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1=\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{n}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$，由平面与平面的夹角公式可得

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{\|\boldsymbol{n}_1\|\,\|\boldsymbol{n}_2\|}=\frac{|4\times2-3\times3-5\times1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}\,\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{6}{10\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{35}$$

从而夹角 $\varphi=\arccos\frac{3\sqrt{7}}{35}$.

（2）平面的法向量是 $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

由直线与平面的夹角公式可得

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{s}\|\,\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{|2\times1+4\times(-1)+(-2)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\,\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0$$

从而直线与平面的夹角 $\varphi=0$.

（3）两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\5&-3&3\\3&-2&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&-1\\3&8&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-5\\10\end{pmatrix},$$

由直线与直线的夹角公式可得

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{\|\boldsymbol{s}_1\|\,\|\boldsymbol{s}_2\|}=\frac{|3\times10+4\times(-5)+(-1)\times10|}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}\sqrt{10^2+(-5)^2+10^2}}=0$$

从而直线与平面的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

12-4(原题 5)　在 z 轴上求出与两平面 $12x+9y+20z-19=0$ 和 $16x-12y+15z-9=0$ 等距离的点.

解　设 z 轴上到两平面等距离的点为 $(0,0,z)$,则由点到平面的距离公式可得

$$\frac{|12\times0+9\times0+20z-19|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}}=\frac{|16\times0+(-12)\times0+15z-9|}{\sqrt{16^2+(-12)^2+15^2}}$$

解此方程,得 $z_1=2,z_2=\frac{4}{5}$,即所求的点为 $(0,0,2)$ 或 $\left(0,0,\frac{4}{5}\right)$.

12-5(原题 7)　求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影(即过点 $(-1,2,0)$ 与平面 $x+2y-z+1=0$ 正交的直线与平面 $x+2y-z+1=0$ 的交点).

解　过点 $(-1,2,0)$ 且与平面 $x+2y-z+1=0$ 正交的直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与平面 $x+2y-z+1=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 平行,故可取方向向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

从而直线方程为 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$. 求直线与平面的交点坐标:

$\begin{cases}x+2y-z+1=0\\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}\end{cases}$ 解得投影点为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

12-6(原题 8)　求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程(即过已知直线且与已知平面正交的平面与已知平面的交线).

解　只要求出过已知直线且与已知平面正交的平面 π. 已知直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-4&1\\3&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}9\\7\\10\end{pmatrix}$$

已知平面的法向量是 $\boldsymbol{n}_1=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$，因平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与方向向量 $\boldsymbol{s}$ 及法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 均正交，故可取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\9&7&10\\4&-1&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}17\\31\\-37\end{pmatrix}$，再取已知直线上的一点$(9,6,6)$，则平面 π 的方程为

$$17(x-9)+31(y-6)-37(z-6)=0$$

即

$$17x+31y-37z-117=0$$

从而已知直线在已知平面上的投影直线方程为

$$\begin{cases}4x-y+z-1=0\\17x+31y-37z-117=0\end{cases}$$

12-7（原题 10）　已知空间直线

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\text{ 和 }l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

既不相交又不共面（即 l_1 与 l_2 是异面直线），试证明直线 l_1 与 l_2 之间的距离 h 为

$$h=\left|\frac{\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\m_1&n_1&p_1\\m_2&n_2&p_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}n_1&n_2\\p_1&p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}p_1&p_2\\m_1&m_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1&m_2\\n_1&n_2\end{vmatrix}^2}}\right|$$

证明　直线 l_1 上有一固定点 $M(x_1,y_1,z_1)$，直线 l_2 上有一固定点 $N(x_2,y_2,z_2)$，且直线 l_1 与 l_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{s}_1=\begin{pmatrix}m_1\\n_1\\p_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{s}_2=\begin{pmatrix}m_2\\n_2\\p_2\end{pmatrix}$，则向量 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 的混合积 $(\overrightarrow{MN},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)$ 的绝对值是以这三个向量为相邻的棱的平行六面体的体积，且这个平行六面体的高即为 l_1 与 l_2 之间的距离 h. 底面面积即为 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 外积的模，于是，$|(\overrightarrow{MN},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)|=|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|h$，从而

$$h=\frac{|(\overrightarrow{MN},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}=\left|\frac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}\right|$$

$$=\left|\frac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}n_1 & n_2\\ p_1 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}p_1 & p_2\\ m_1 & m_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1 & m_2\\ n_1 & n_2\end{vmatrix}^2}}\right|$$

§13 矩阵的秩

13-1(原题 1) 求向量组的秩和它的一个最大线性无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ 3 & 2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$,对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换:

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\ r_2-2r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_4+r_1}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 5 & -5 & 10\\ 0 & 5 & -5 & 10\\ 0 & 3 & -1 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{5}]{\substack{r_3\leftrightarrow r_4\\ r_4-r_2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{B}$ 是一个阶梯型矩阵，所以，$R(\boldsymbol{A})=3=$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的个数，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，且由教材《线性代数》第 149 页定理 13.4 可知它的一个最大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

13-2（原题 6） 选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，其秩 $r<n$，那么，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中

(a) 必有 r 个行向量线性无关；

(b) 任意 r 个行向量线性无关；

(c) 任意 r 个行向量构成一个极大线性无关组；

(d) 任意一个行向量可由其他 r 个向量线性表示.

解 选(a). 由 $\boldsymbol{A}$ 的秩的定义可知，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩也为 r，从而由向量组的秩的定义可知，行向量组中必有 r 个向量线性无关.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 中

(a) 必有一列元素全为零；

(b) 必有两列元素对应成比例；

(c) 必有一个列向量是其余列向量的线性组合；

(d) 任意一个列向量是其余列向量的线性组合.

解 选(c). $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，而 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 3$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也小于或等于 3. 于是，$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关，所以，必有一个列向量是其余列向量的线性组合.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵($n\geqslant 3$)，且 $R(\boldsymbol{A})=n-2$，则

(a) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关；

(b) $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$；

(c) $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $R(\boldsymbol{A}^{-1})=n-2$；

(d) $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-2$ 阶子式不等于零.

解 选(b). 因 $R(\boldsymbol{A})=n-2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性相关，且 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-2$ 阶子式不等于零，但所有的 $n-1$ 阶子式全为零. 设 $\boldsymbol{A}^*=(B_{ij})_{n\times n}$，则 $(B_{ij})=(-1)^{i+j}M_{ji}(1\leqslant i,j\leqslant n)$，其中，$M_{ji}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中 (j,i) 元的余子式，也是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶子式，从而 $\boldsymbol{B}_{ij}=0(1\leqslant i,j\leqslant n)$，所以，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$.

13-3（原题 7） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，又 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

证 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，所以 $R(\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{B})$. 又因为 $R(\boldsymbol{E})=n$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数为 n，所以，$n=R(\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{B})\leqslant n$，从而 $R(\boldsymbol{B})=n=$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数，故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

§14 线性方程组有解的判别定理

14-1(原题 1) 对线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$,讨论 λ 取何值时方程组无解,有惟一解,有无穷多解?

解 由克莱姆法则可知,当方程组的系数行列式不为零时,方程组有惟一解.此方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

当 $D=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\neq 0$,即 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时,方程组有惟一解.

当 $\lambda=1$ 时,对原方程组的增广矩阵进行行初等变换,有

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

增广矩阵的秩=系数矩阵的秩<未知数个数,故方程组有无穷多解,解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in R$$

当 $\lambda=-2$ 时,对原方程组的增广矩阵进行行初等变换,有

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

增广矩阵的秩与系数矩阵的秩不等,故原方程组无解.

14-2(原题 5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,$R(\boldsymbol{B})=n$,证明:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证法 1 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,将 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,则有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{0}$,$j=1,2,\cdots,n$. 从而 $\boldsymbol{\beta}_j$,$j=1,2,\cdots,n$ 是线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解

向量. 又因为 $R(\boldsymbol{B})=n$,且 $R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{B})$,所以,$R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=n$,从而线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,即 $\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{0}$,$j=1,2,\cdots,n$,所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证法 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$,则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 得

$$a_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+a_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

因为 $R(\boldsymbol{B})=n$,所以,$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$ 线性无关,从而 $a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0(i=1,2,\cdots,n)$,于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

§15 线性方程组解的结构

15-1(原题 1) 求下列齐次线性方程组的解:

(1)(原题(1))
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

(2)(原题(3))
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$$

解 (1) 对系数矩阵作行初等变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A})=3<4$,基础解系由 1 个线性无关的解向量构成. 由于原方程组与
$$\begin{cases} x_1=\frac{4}{3}x_4 \\ x_2=-3x_4 \\ x_3=\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$
同解,取 $x_4=3$ 代入上述方程组,得原方程组的一个基础解系

$\xi=\begin{pmatrix}4\\-9\\4\\3\end{pmatrix}$，它的通解为 $\boldsymbol{X}=k\xi$，$k\in R$.

(2) 对系数矩阵作行初等变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1&5\\3&1&2&-7\\4&1&-3&6\\1&-2&4&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&4&-7\\0&5&1&4\\0&7&-9&19\\0&0&1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&4&-7\\0&5&0&-1\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A})=4=$未知数的个数，故原方程组只有零解.

15-2(原题 2)　求下列非齐次线性方程组的解：

(1)(原题(1))$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2,\\3x_1-x_2+2x_3=10,\\11x_1+3x_2=8\end{cases}$

(2)(原题(4))$\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\3x-2y+z-3w=4,\\x+4y-3z+5w=-2\end{cases}$

解　(1)对增广矩阵作行初等变换

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-30&33&96\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{bmatrix}$$

$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$，而 $R(\boldsymbol{A})=2$，故原方程组无解.

(2) 对增广矩阵作行初等变换

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&7&-5&9&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{6}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是，原方程组与方程组

$$\begin{cases}x=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}w\\y=-\frac{5}{7}+\frac{5}{7}z-\frac{9}{7}w\end{cases}\tag{15-1}$$

同解，且原方程组的导出组与方程组 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{7}z+\dfrac{1}{7}w \\ y=\dfrac{5}{7}z-\dfrac{9}{7}w \end{cases}$ 同解. 分别取 $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$，代入上述方程组，得到原方程组的导出组的一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

再令 $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，并代入与原方程组同解的方程组(15-1)中，得到原方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，从而原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,\quad k_1,k_2\in R.$$

15-3(原题 3)　设四元线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，求该方程组的通解.

解　设此线性方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，因为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，而未知数的个数等于 4，所以，它的导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中线性无关的解向量个数为 4−3=1. 又因为

$$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3))=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\eta}_1)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

故可取 $2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 为导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，于是，原方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\qquad k\in R$$

15-4(原题 4)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,证明:$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明　设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{A\beta}_j=\boldsymbol{0}$,$j=1,2,\cdots,n$,即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 均是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.于是由教材《线性代数》第 163 页定理 15.1 知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=R(\boldsymbol{B})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$,所以,$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

15-5(原题 5)　设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解,$\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系,证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 线性无关.

证明　(1) 设有常数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使

$$k\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\zeta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}\tag{15-2}$$

从而

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\eta}^*)+\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\zeta}_1)+\cdots+\boldsymbol{A}(k_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r})=\boldsymbol{0}\tag{15-3}$$

因为 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解,$\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,所以有 $\boldsymbol{A\eta}^*=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\zeta}_i=\boldsymbol{0}$,$i=1,2,\cdots,n-r$,且 $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 线性无关.于是,由式(15-3)可得 $k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$,从而 $k=0$,代入式(15-2),有 $k_1\boldsymbol{\zeta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$,由 $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 线性无关可知:$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$,所以,$\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 设有常数 $\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-r}$,使 $\lambda\boldsymbol{\eta}^*+\lambda_1(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_1)+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_{n-r})=\boldsymbol{0}$,即$(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+\lambda_1\boldsymbol{\zeta}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$.由第(1)题知 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 线性无关,从而 $\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0,\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$,所以,$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$,即向量组 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 线性无关.

15-6(原题 6)　设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的 s 个解,$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为实数,满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$,证明:$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是它的解.

证明　因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的 s 个解,且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$,所以

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)=k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\eta}_s\\&=k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\beta}+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

15-7(原题 7)　设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵的秩为 r,$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解,试证:它的任一解都可表示为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$,其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证明　对任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r+1}$,若满足 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$,首先由第 15-6 题知,$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.其次,令 $\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$,$i=1,2,\cdots,n-r$,易证 $\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n-r)$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.因而方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解 $\boldsymbol{X}$ 可表示成

$$\boldsymbol{X}=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\text{其中},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-r}(\text{是常数})$$

即

$$\boldsymbol{X}=\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\lambda\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

令 $k_1=\lambda_1,k_2=\lambda_2,\cdots,k_{n-r}=\lambda_{n-r},k_{n-r+1}=1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r}$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解都可表示为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中,$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

15-8(原题 8)　选择题

(1) 要使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,只要系数矩阵为(　　)

(a) $(-2,1,1)$;　　(b) $\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$;　　(d) $\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$.

解　选(a).令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$,因 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量(或 $\boldsymbol{A}$ 的行向量)应是线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解.解方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系为:$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$,所以若取 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\eta}_1$,从而 $\boldsymbol{A}=(-2,1,1)$.

(2) 设 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{0}$,则(　　)

(a) $t=6$ 时，$R(\boldsymbol{P})=1$；　　(b) $t=6$ 时，$R(\boldsymbol{P})=2$；

(c) $t\neq 6$ 时，$R(\boldsymbol{P})=1$；　　(d) $t\neq 6$ 时，$R(\boldsymbol{P})=2$.

解　选(c)．因为 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{0}$，故由 15-4 可得 $R(\boldsymbol{P})+R(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$，对 $\boldsymbol{Q}$ 作行初等变换：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&t-6\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以，当 $t\neq 6$ 时，$R(\boldsymbol{Q})=2$，从而 $R(\boldsymbol{P})\leqslant 3-R(\boldsymbol{Q})=3-2=1$．又由 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵可知 $R(\boldsymbol{P})\geqslant 1$，所以，$t\neq 6$ 时，$R(\boldsymbol{P})=1$.

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩(　　)

(a) 必有一个等于零；　　(b) 都小于 n；

(c) 一个小于 n，一个等于 n；　　(d) 都等于 n.

解　选(b)．由已知条件可得 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，$R(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，且 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩都要小于 n.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=m<n$，$\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位阵，则(　　)

(a) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关；

(b) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 阶子式不等于零；

(c) $\boldsymbol{A}$ 通过行初等变换必可化成$(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{0})$的形式；

(d) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 必有无穷多个解.

解　选(d)．在方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 中未知数的个数恰好是 n 个，而已知 $R(\boldsymbol{A})=m<n$，故非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 必有无穷多个解，所以选(d)．选项(a)与(b)错在“任意”上．$\boldsymbol{A}$ 中必有 m 个线性无关的列向量，但不是任意 m 个列向量都是线性无关的，$\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 m 阶子式不等于零，而 $\boldsymbol{A}$ 通过行初等变换只能化成$(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{B})$的形式，其中 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $m\times(n-m)$矩阵.

15-9(原题 9)　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$．求线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 的解.

解　因为 $a_i\neq a_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，所以 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0$，从而由克莱姆法则知线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有惟一解，且惟一解为 $x_j=$

$\frac{|\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}|}{|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|}(j=1,2,\cdots,n)$，其中$|\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}|$是将行列式$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$中的第$j$列由$\boldsymbol{B}$代替后得到的行列式. 而$|\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，$|\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}_3^{\mathrm{T}}|=\cdots|\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}|=0$，所以惟一解为

$$x_1=1,x_2=x_3=\cdots=x_n=0,\text{即 } \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

15-10（原题 10） 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也是齐次线性方程组的一个基础解系.

证明 设$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，则易知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解. 要证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是齐次线性方程组的一个基础解系，只要证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关即可. 因为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

而$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，故$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$可逆，从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

所以，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等价. 由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的秩是 3，于是，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的秩也是 3，从而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

15-11（原题 11） 设四元齐次线性方程组（Ⅰ）为$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，

又设某齐次线性方程组（Ⅱ）的通解为$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$

（1）求齐次线性方程组（Ⅰ）的基础解系；

（2）问齐次线性方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）有没有非零公共解？如果有，求出所有的非零公共解；否则，说明理由.

解 (1) 对齐次线性方程组(Ⅰ)的系数矩阵作行初等变换：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

则原方程组与 $\begin{cases}x_1=-x_4\\ x_2=x_4\end{cases}$ 同解. 分别取 $\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ 代入上述方程组，得原方程组的一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

(2) 由(1)知齐次线性方程组(Ⅰ)的通解为 $\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2$. 令

$$k_1\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

解此线性方程组得其基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 所以，齐次线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)有非零公共解，所有的非零公共解为 $k\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},k\in R.$

15-12(原题 12) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\\ 5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ a+2\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\\ a+8\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ b+3\\ 5\end{pmatrix}.$$

(1) 问 a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？

(2) 问 a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一地线性表示？并写出此表示式.

解 设有常数 x_1,x_2,x_3,x_4，使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix},$$

对此线性方程组的增广矩阵作行初等变换：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix},$$

从而可知：

(1) 当 $a+1=0, b\neq 0$，即 $a=-1, b\neq 0$ 时，此方程组无解，因而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

(2) 当 $a+1\neq 0$ 即 $a\neq -1$ 时，此方程组有惟一解，且这个惟一解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{2b}{a+1}\\[2mm] x_2=\dfrac{a+1+b}{a+1}\\[2mm] x_3=\dfrac{b}{a+1}\\ x_4=0\end{cases}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一地线性表示，且表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+1+b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3$$

15-13(原题 13)　设线性方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$

(1) 证明：当 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等时，方程组无解；

(2) 设 $a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k, k\neq 0$，且已知 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是该线性方程组的两个解，求其通解.

(1) 证明：当 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等时，该线性方程组增广矩阵的行列式

$$|\widetilde{\boldsymbol{A}}|=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3\\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3\\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(a_i-a_j)\neq 0,$$

从而 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=4$. 但是，系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 3$，因而方程组无解.

(2) **解** 当 $a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k, k\neq 0$ 时，将该线性方程组的系数矩阵作行初等变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2\\ 1 & a_2 & a_2^2\\ 1 & a_3 & a_3^2\\ 1 & a_4 & a_4^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k & k^2\\ 1 & -k & (-k)^2\\ 1 & k & k^2\\ 1 & -k & (-k)^2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & k & k^2\\ 0 & 2k & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此可知 $R(\boldsymbol{A})=2$，从而该方程组的导出组的基础解系由 1 个向量组成. 又因为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是该线性方程组的两个解，所以，它的导出组的基础解系可取为

$$\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix},$$

于是，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix},\ k\in R.$$

15-14(原题 14) 讨论下述平面组的位置关系：

(1) $\begin{cases}y+2z=1\\ x+y+4z=0\\ 2x-y=1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+2y+4z-2=0\\ 3x-y+5z-1=0\\ 2x+y+5z=0\end{cases}$ (3) $\begin{cases}5x-y+3z-3=0\\ x-5y+3z-3=0\\ x-y+z-1=0\end{cases}$

解 (1) 对此方程组的增广矩阵作行初等变换：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -8 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 4\end{bmatrix},$$

由此可知 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$，从而该方程组有惟一解，即这三个平面相交于一点.

用类似的方法可知，方程组(2)无解，因而三个平面两两相交；方程组(3)有无穷多解，因而三个平面相交于一条直线.

§16 线性空间与子空间

16-1(原题 1) 验证

(1) 2 阶矩阵的全体所成的集合 S_1

(2) 主对角线元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体所成的集合 S_2

(3) 2 阶对称矩阵的全体所成的集合 S_3

对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间.

证明 (1) 设

$$S_1=\left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\mid a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in R\right\},$$

则 S_1 对矩阵的加法和数乘运算是封闭的. 另外,S_1 中有零元素 $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$;$S_1$ 中任一元素 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ 有负元素 $\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{bmatrix}$;由矩阵加法和数乘运算的运算规律可知,$S_1$ 也满足教材《线性代数》第 174 页定义 16.1 中的第(1),(2),(5),(6),(7),(8)条运算规律,因此 S_1 对矩阵的加法和数乘运算构成线性空间.

同样,可以验证 S_2 和 S_3 对矩阵的加法和数乘运算也构成线性空间.

16-2(原题 2) 与 z 轴不平行的全体空间向量关于空间向量的加法和数乘运算是否构成线性空间?为什么?

解 设与 z 轴不平行的全体空间向量构成的集合为 S. 由空间向量的加法运算性质可知,只有零向量才能作为零元素. 但零向量不在集合 S 中,所以 S 不构成线性空间.

16-3(原题 3) 在线性空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,分量满足下列条件的向量全体是否构成 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间?

$$V_1=\left\{\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R,x_1+x_2+\cdots+x_n=1\right\},$$

$$V_2=\left\{\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R,x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\},$$

$$V_3=\left\{\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R,x_1=x_2=\cdots=x_n\right\}$$

解 要验证 V_1,V_2,V_3 是否构成 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间，只需验证 V_1,V_2,V_3 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义的加法和数乘运算是否封闭即可.

对任意 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in V_1$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in V_1$，

有 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，$y_1+y_2+\cdots+y_n=1$.

但

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)\\&=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)=2,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\notin V_1$. 此外，对任意 $k\in\boldsymbol{R}$，当 $k\neq1$ 时，

$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)=k\neq1,$$

从而 $k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\\\vdots\\kx_n\end{pmatrix}\notin V_1$. 所以 V_1 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义的加法和数乘运算不封闭，从而不是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间.

对任意 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in V_2$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in V_2$，

有 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，$y_1+y_2+\cdots+y_n=0$，

从而

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)\\&=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)=0,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\in V_2$. 此外，对任意 $k\in\boldsymbol{R}$，

$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0,$$

所以 $k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}\in V_2$. 所以 V_2 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义的加法和数乘运算封闭，从而是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间.

同样，可以验证，V_3 也是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间.

16-4(原题 4)　验证下述集合关于所规定的运算是否构成实数域上线性空间：

(1) $V=\{(a,b)\mid a,b\in\boldsymbol{R}\}$，定义加法和数乘为

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\cdot(a,b)=\left(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)$$

(2) 全体正实数所成的集合 $\boldsymbol{R}^+$，定义加法和数乘为

$$a\oplus b=ab,\quad k\cdot a=a^k$$

解　(1) 显然，V 对所定义的加法和数乘运算是封闭的. 另外，对任意 $(a_1,b_1)\in V,(a_2,b_2)\in V,(a_3,b_3)\in V$，

① $(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$，

$(a_2,b_2)\oplus(a_1,b_1)=(a_2+a_1,b_2+b_1+a_2a_1)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$，

所以 $(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_2,b_2)\oplus(a_1,b_1)$；

② $((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))\oplus(a_3,b_3)$

$=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\oplus(a_3,b_3)$

$=(a_1+a_2+a_3,(b_1+b_2+a_1a_2)+b_3+(a_1+a_2)a_3)$

$=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)$，

$(a_1,b_1)\oplus((a_2,b_2)\oplus(a_3,b_3))$

$=(a_1,b_1)\oplus(a_2+a_3,b_2+b_3+a_2a_3)$

$=(a_1+a_2+a_3,b_1+(b_2+b_3+a_2a_3)+a_1(a_2+a_3))$

$=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)$，

所以 $((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))\oplus(a_3,b_3)=(a_1,b_1)\oplus((a_2,b_2)\oplus(a_3,b_3))$；

③ 在 V 中存在零元素 $(0,0)$，对 V 中任一元素 (a,b)，都有 $(0,0)\oplus(a,b)=(a,b)$；

④ 对 V 中任一元素 (a,b)，在 V 中都有 (a,b) 的负元素 $(-a,a^2-b)$，使得 $(a,b)\oplus(-a,a^2-b)=(0,0)$；

⑤ 对 V 中任一元素 (a,b)，$1\cdot(a,b)=\left(1a,1b+\frac{1(1-1)}{2}a^2\right)=(a,b)$；

⑥ **对** V **中任一元素** (a,b) **及任意** $k,l\in\boldsymbol{R}$,

$$\begin{aligned}k\cdot(l\cdot(a,b))&=k\cdot\left(la,lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right)\\&=\left(kla,k\left(lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right)+\frac{k(k-1)}{2}(la)^2\right)\\&=\left(kla,klb+\frac{(kl-1)}{2}kla^2\right)\\&=kl\cdot(a,b);\end{aligned}$$

⑦ **对** V **中任一元素** (a,b) **及任意** $k,l\in\boldsymbol{R}$,

$$\begin{aligned}(k+l)\cdot(a,b)&=\left((k+l)a,(k+l)b+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right)\\&=\left(ka+la,kb+lb+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\cdot(a,b)\oplus l\cdot(a,b)&=\left(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)\oplus\left(la,lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right.\\&=\left(ka+la,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2+lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2+(ka)(la)\right)\\&=\left(ka+la,kb+lb+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right),\end{aligned}$$

所以 $(k+l)\cdot(a,b)=k\cdot(a,b)\oplus l\cdot(a,b)$;

⑧ **对任意** $(a_1,b_1)\in V,(a_2,b_2)\in V$ **及任意** $k\in\boldsymbol{R}$,

$$\begin{aligned}k\cdot((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))&=k\cdot(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\\&=\left(ka_1+ka_2,kb_1+kb_2+ka_1a_2+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2\right)\\&=\left(ka_1+ka_2,kb_1+kb_2+k^2a_1a_2+\frac{k(k-1)}{2}(a_1^2+a_2^2)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\cdot(a_1,b_1)\oplus k\cdot(a_2,b_2)&=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)\oplus\left(ka_2,kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2\right)\\&=\left(ka_1+ka_2,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2+kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2\right.\\&\quad\left.+(ka_1)(ka_2)\right)\\&=\left(ka_1+ka_2,kb_1+kb_2+k^2a_1a_2+\frac{k(k-1)}{2}(a_1^2+a_2^2)\right),\end{aligned}$$

所以 $k\cdot((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))=k\cdot(a_1,b_1)\oplus k\cdot(a_2,b_2)$.

由以上的验证可知,V **关于定义的加法和数乘运算确实构成实数域上的线性空间.**

(2) **显然,**$\boldsymbol{R}^+$ **对于定义的加法和数乘运算是封闭的. 另外,对任意** a,b,c

$\in \boldsymbol{R}^+$，以及任意 $k, l \in \boldsymbol{R}$，

① $a \oplus b = ab, b \oplus a = ba = ab$，所以 $a \oplus b = b \oplus a$；

② $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = abc$，

$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (bc) = a(bc) = abc$，

所以 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$；

③ 在 $\boldsymbol{R}^+$ 中存在零元素 1，对于 $\boldsymbol{R}^+$ 中任一元素 a，都有 $1 \oplus a = 1a = a$；

④ 对 $\boldsymbol{R}^+$ 中的任一元素 a，在 $\boldsymbol{R}^+$ 中都有 a 的负元素 $\frac{1}{a}$，使得 $a \oplus \frac{1}{a} = a \frac{1}{a} = 1$（这里 1 是指零元素）；

⑤ $1 \cdot a = a^1 = a$（这里的 1 是常数 1，不是指 $\boldsymbol{R}^+$ 中的零元素）；

⑥ $k \cdot (l \cdot a) = k \cdot a^l = (a^l)^k = a^{kl} = (kl) \cdot a$；

⑦ $(k+l) \cdot a = a^{k+l} = a^k a^l = a^k \oplus a^l = k \cdot a \oplus l \cdot a$；

⑧ $k \cdot (a \oplus b) = k \cdot (ab) = (ab)^k = a^k b^k = a^k \oplus b^k = k \cdot a \oplus k \cdot b$.

所以 $\boldsymbol{R}^+$ 对所定义的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

16-5（原题 5） 设 V 是数域 $\boldsymbol{F}$ 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 中一组向量，集合

$$W = \{ \sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i \mid k_i \in \boldsymbol{F}, i = 1, 2, \cdots, r \}$$

证明 W 是 V 的一个线性子空间.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i \in W$，$\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i \in W$，则 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$，从而 $W \subseteq V$，故 W 是 V 的非空子集，此外

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{r} (k_i + \lambda_i) \boldsymbol{\alpha}_i \in W$$

$$t\boldsymbol{\alpha} = t \sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{r} (tk_i) \boldsymbol{\alpha}_i \in W$$

所以 W 是 V 的一个线性子空间.

§ 17 基变换与坐标变换

17-1（原题 1） 试写出 § 16 习题中第一题各线性空间 S_1, S_2, S_3 的一个基.

解 S_1 的基为：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

S_2 的基为：$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，

S_3 的基为：$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

17-2(原题 2)　设 W 是 n 维线性空间 V 的一个子空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 W 的一个基，证明：V 中存在元素 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 成为 V 的一个基.

证明　对维数差 $n-r$ 作归纳法. 当 $n-r=0$ 时显然成立. 假定 $n-r=k$ 时成立，考虑 $n-r=k+1$ 时的情形. 既然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 还不是 V 的一组基，它又是线性无关的，那么 V 中必定还有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示. 把 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 添加进去，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 必定是线性无关的. 否则，$\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，产生矛盾. 于是子空间 $V(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1})$ 是 $r+1$ 维. 因为 $n-(r+1)=(n-r)-1=k+1-1=k$，由归纳假设，$V(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1})$ 的基可扩充为 V 的基. 从而得证.

17-3(原题 3)　在 R^3 中求向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ 下的坐标.

解　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

即
$$\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

解此线性方程组

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}1&6&3&3\\3&3&1&7\\5&2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&33\\0&1&0&-82\\0&0&1&154\end{bmatrix}$$

所以 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(33,-82,154)^{\mathrm{T}}$.

17-4(原题 4)　在 R^3 中取两个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix},$$

试求坐标变换公式.

解　设 R^3 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$. 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个

基，且$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{B}$，其中

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}$，于是$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，从而得到坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

用矩阵的行初等变换求出 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}3&5&1&1&2&3\\1&2&1&2&3&7\\4&1&-6&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&13&19&\frac{181}{4}\\0&1&0&-9&-13&-\frac{63}{2}\\0&0&1&7&10&\frac{99}{4}\end{bmatrix}$$

即得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}13&19&\frac{181}{4}\\-9&-13&-\frac{63}{2}\\7&10&\frac{99}{4}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

或者是得到坐标变换公式 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

用矩阵的行初等变换求出 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&-27&-71&-41\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{bmatrix}$$

即得
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

17-5(原题 6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一个基，证明向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 V 的一个基，并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵.

证明 要证明 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 V 的一个基，只要证明 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 与基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 等价即可. 首先 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，这是因为
$$(2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{bmatrix}$$
设 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{bmatrix}$，由 $|\boldsymbol{P}| = (-1)^{n-1} n! \neq 0$ 可知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，从而有
$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{P}^{-1}$$
即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 也可由 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，所以 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 与基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 等价，且矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就是从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵.

17-6(原题 7) 在线性空间 $\boldsymbol{F}_3[x]$ 中

(1) 求由基(Ⅰ)：$1, x, x^2, x^3$ 到基(Ⅱ)：$1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(2) 已知 $g(x)$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$，$f(x)$ 在基(Ⅱ)下的坐标为 $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$，求 $f(x)+g(x)$ 分别在基(Ⅰ)，基(Ⅱ)下的坐标.

解 (1)

$$1=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

类似地

$$1+x=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad 1+x+x^2=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$1+x+x^2+x^3=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

即 $(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)=(1,x,x^2,x^3)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,

所以求由基(Ⅰ):$1,x,x^2,x^3$ **到基**(Ⅱ):$1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ **的过渡矩阵**

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) **由已知条件可得**:$g(x)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}=1-2x^2+5x^3$,

$$f(x)=(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\begin{pmatrix}7\\0\\8\\2\end{pmatrix}=17+10x+10x^2+2x^3,$$

于是 $f(x)+g(x)=18+10x+8x^2+7x^3=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}18\\10\\8\\7\end{pmatrix}$,

即 $f(x)+g(x)$**在基(Ⅰ)的坐标是** $\begin{pmatrix}18\\10\\8\\7\end{pmatrix}$.

设 $f(x)+g(x)$**在基(Ⅱ)的坐标是** $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$,

则 $(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}18\\10\\8\\7\end{pmatrix}$,

从而 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}18\\10\\8\\7\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}18\\10\\8\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\1\\7\end{pmatrix}$.

17-7(原题 8) **设 W 是线性空间 V 的一个子空间,证明:若 W 的维数等于 V 的维数,则 $W=V$.**

证明 **设 W 的一个基是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,$V$ 的一个基是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,A 代表向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,B 代表向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,由 W 的维数等于 V 的维数知向量组 A 的秩等于向量组 B 的秩.**

因 $W\subseteq V$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$,从而 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{K}$.故由习题 10-3 知向量组 A 与向量组 B 等价.而 $W=W(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$V=V(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,所以 $W=V$.

§18 线性空间的同构

18-1(原题 1) **证明教材《线性代数》第 196 页性质(4):同构的线性空间**

的维数相等，反过来，维数相等的线性空间同构.

证明 先证前一部分：设线性空间 V_1 与 V_2 同构，要证明 V_1 与 V_2 的维数相等.

设 V_1 的维数为 m，V_1 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，因为 V_1 与 V_2 同构，所以存在一个由 V_1 到 V_2 的同构映射 σ，V_1 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 在这个同构映射下的像 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$ 也是线性无关的. 否则，若 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$ 线性相关，则由同构映射的性质可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也是线性相关的，有矛盾.

对 V_2 中的任一向量 $\boldsymbol{\beta}$，由于同构映射是 $1-1$ 映射，所以一定存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$. 而 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$（$k_1,\cdots,k_m$ 是一组常数），于是

$$\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_m\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m),$$

即 V_2 中任一向量均可由 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$ 线性表示，故 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$ 是 V_2 的一组基. 从而 V_1 的维数与 V_2 的维数均等于 m.

再证另外一部分：设 V_1 的维数与 V_2 的维数均等于 m，则由教材《线性代数》第 195 页定理 18.1 可知 V_1 与 $\boldsymbol{F}^m$ 同构，V_2 与 $\boldsymbol{F}^m$ 同构，再由同构的对称性及传递性（见习题 18-2）可知 V_1 与 V_2 同构.

18-2（原题 2） 证明数域 $\boldsymbol{F}$ 上线性空间之间的同构关系是一个等价关系.

证明 （1）因为任一线性空间 V 到自身的恒等映射显然是一同构映射，所以同构关系具有反身性.

（2）设 σ 是线性空间 V_1 到 V_2 的同构映射，显然逆映射 σ^{-1} 是 V_2 到 V_1 的一个一一映射. 另外，设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 V_2 中任意两个向量，于是

$$\sigma\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\sigma\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma\sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})=\sigma(\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})),$$

两边用 σ^{-1} 作用，得

$$\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})$$

并且

$$\sigma\sigma^{-1}(k\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha}=k\sigma\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}))=\sigma(k\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})),$$

两边用 σ^{-1} 作用，得

$$\sigma^{-1}(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}).$$

所以 σ^{-1} 是 V_2 到 V_1 的同构映射，于是可知，当 V_1 与 V_2 同构时，V_2 与 V_1 同构，即同构关系具有对称性.

（3）设线性空间 V_1 与 V_2 同构，V_2 与 V_3 同构，则存在 V_1 到 V_2 的同构映射 σ 和 V_2 到 V_3 的同构映射 τ，显然 $\tau\sigma$ 是 V_1 到 V_3 的一个一一映射. 另外，对 V_1 中任意的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 及任意常数 k，有

$$\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\tau(\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau\sigma(\boldsymbol{\beta}),$$

$$\tau\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=\tau(k\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=k\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以 $\tau\sigma$ 也是 V_1 到 V_3 的同构映射，于是 V_1 与 V_3 同构，从而同构关系具有传递性.

由以上讨论可知，数域 F 上线性空间之间的同构关系是一个等价关系.

18-3(原题 3)　证明实数域作为它自身上的线性空间与教材《线性代数》第 180 页题 4(2)中的线性空间同构(提示：证明由 $a\mapsto 2^a$ 定义的映射 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+$ 是线性空间的同构).

证明　设线性空间 $\boldsymbol{R}$ 到线性空间 $\boldsymbol{R}^+$ 的映射为：$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+$，$a\mapsto 2^a$. 首先，对任意的 $a,b\in R$ 且 $a\neq b$，有 $f(a)=2^a$，$f(b)=2^b$，$2^a\neq 2^b$，故 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+$ 是单射. 对任意 $b\in\boldsymbol{R}^+$，存在实数 $a=\dfrac{\ln b}{\ln 2}\in\boldsymbol{R}$，使 $b=2^a=f(a)$，从而 f 也是满射. 所以 f 是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}^+$ 的一一映射. 其次，对任意的 $a,b\in\boldsymbol{R}$，$f(a+b)=2^{a+b}=2^a2^b=2^a\oplus 2^b=f(a)\oplus f(b)$($\oplus$为 $\boldsymbol{R}$ 中定义的加法). 对任意的 $a\in\boldsymbol{R}$，$k\in\boldsymbol{R}$，$f(ka)=2^{ka}=(2^a)^k=k\cdot 2^a=k\cdot f(a)$($\cdot$为 $\boldsymbol{R}^+$ 中定义的数乘运算). 所以 f 是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}^+$ 的同构映射，即 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{R}^+$ 作为线性空间是同构的.

§19　线性变换与相似矩阵

19-1(原题 1)　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是向量空间 V 中的一个固定向量，试判别下列变换是否为线性变换：

(1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$，$\forall\,\boldsymbol{\beta}\in V$；　(2) $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$，$\forall\,\boldsymbol{\beta}\in V$.

解　(1) $\mathscr{A}$ 不是线性变换，这是因为对任意的 $\boldsymbol{\beta},\gamma\in V$，$k\in F$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}+\gamma)=(\boldsymbol{\beta}+\gamma)+\boldsymbol{\alpha}$，$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\alpha}$，而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})+\mathscr{A}(\gamma)=(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+(\gamma+\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta}+\gamma)+2\boldsymbol{\alpha}$，$k\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}+\gamma)\neq\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})+\mathscr{A}(\gamma)$，$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\beta})\neq k\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$.

(2) $\mathscr{A}$ 也不是线性变换. 这是因为对任意 $\boldsymbol{\beta},\gamma\in V$，$k\in F$，

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}+\gamma)=\boldsymbol{\alpha}\neq\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})+\mathscr{A}(\gamma)=2\boldsymbol{\alpha},$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\neq k\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}.$$

19-2(原题 2)　在 R^3 中如下定义了两个变换：

$$(1)\ \mathscr{A}_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^2\\x_2+x_3\\x_3^2\end{pmatrix},\quad (2)\ \mathscr{A}_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\2x_1\end{pmatrix}.$$

试问 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ 是否为 $\boldsymbol{R}^3$ 上的线性变换？

解　(1) $\mathscr{A}_1$ 不是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的线性变换. 这是因为对任意

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3,\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3,k\in\boldsymbol{R}$$

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_1\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x_1+y_1)^2\\(x_2+y_2)+(x_3+y_3)\\(x_3+y_3)^2\end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A}_1(k\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}_1\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2x_1^2\\k(x_2+x_3)\\k^2x_3^2\end{pmatrix}$$

而

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\mathscr{A}_1\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1^2\\x_2+x_3\\x_3^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1^2\\y_2+y_3\\y_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^2+y_1^2\\x_2+x_3+y_2+y_3\\x_3^2+y_3^2\end{pmatrix}$$

$$k\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_1^2\\x_2+x_3\\x_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_1^2\\k(x_2+x_3)\\kx_3^2\end{pmatrix}$$

即 $$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\neq\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\beta})\ \mathscr{A}_1(k\boldsymbol{\alpha})\neq k\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})$$

(2) **首先** $\mathscr{A}_2$ **是** $\boldsymbol{R}^3$ **到** $\boldsymbol{R}^3$ **的映射,即对任一** $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$**,存在惟一的**

$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\2x_1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ **与** $\boldsymbol{\alpha}$ **对应.**

其次,对任意 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3,\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3,k\in\boldsymbol{R}$

$$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_2\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\\(x_2+y_2)+(x_3+y_3)\\2(x_1+y_1)\end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A}_2(k\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}_2\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2kx_1-kx_2\\k(x_2+x_3)\\2kx_1\end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\mathscr{A}_2\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\2x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y_1-y_2\\y_2+y_3\\2y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\\x_2+x_3+y_2+y_3\\2(x_1+y_1)\end{pmatrix}$$

$$k\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\2x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2kx_1-kx_2\\k(x_2+x_3)\\2kx_1\end{pmatrix}$$

于是 $\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\beta})$，$\mathscr{A}_2(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})$，所以 $\mathscr{A}_2$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 到 $\boldsymbol{R}^3$ 的线性变换.

19-3(原题 3)　设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\neq\boldsymbol{0}$，但 $\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$. 求证 $\mathscr{A}$ 在 V 的某个基下的矩阵是 $\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$（提示：证明 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 为 V 的一个基）.

证明　首先证明 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 为 V 的一个基. 因为 V 是 n 维线性空间，所以要证明 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 是 V 的一个基，只要证明 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关即可. 用反证法. 设 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}\in F$，使得 $k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$. 设 k_i 是第一个不等于零的系数，即 $k_0=k_1=k_{i-1}=0,k_i\neq0$，则

$$k_i\mathscr{A}^i(\boldsymbol{\alpha})+k_{i+1}\mathscr{A}^{i+1}(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$$

两边施以变换 $\mathscr{A}^{n-i-1}$，得

$$k_i\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})+k_{i+1}\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{2n-i-2}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$$

由于 $\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$，从而 $k_i\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$，但 $\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_i=0$. 与假设矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关，从而可作为 n 维线性空间 V 的一组基. 又因为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$，$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha})$，$\cdots$，$\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-2}(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$，$\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$. 所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

19-4(原题 4)　求 R^3 上线性变换 $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的过渡矩阵.

解　因为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_3$, $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = \mathscr{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = \mathscr{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_2$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19-5(原题 6)　R^3 上线性变换 $\mathscr{A}$ 定义如下：

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.

解　因为 $|\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ 所以 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 也是 R^3 中的一组基，且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵. 由已知条件，

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}$，**所以**

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)&=\mathscr{A}((\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\boldsymbol{P}^{-1})=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3))\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}&-\frac{3}{7}&\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}&\frac{6}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{bmatrix}\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}$ **在基** $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ **下的矩阵为** $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{bmatrix}$.

19-6(原题 7)　已知 R^3 **上线性变换** $\mathscr{A}$ **在基** $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$ $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **下的矩阵是** $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，**求线性变换** $\mathscr{A}$ **在基** $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$ $\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **下的矩阵.**

解　由已知条件得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，

因为 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，所以

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)&=\mathscr{A}((\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\boldsymbol{P}^{-1})\\&=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3))\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

19-7（原题 8） 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}$，其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & a & b & c\\ 0 & 1 & a & b\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{99}$.

解 因为 $|\boldsymbol{B}=1|$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆，从而由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}$ 可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BCB}^{-1}$，于是 $\boldsymbol{A}^{99}=(\boldsymbol{BCB}^{-1})^{99}=\boldsymbol{BC}^{99}\boldsymbol{B}^{-1}$，而 $\boldsymbol{C}^3=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}^{99}=\boldsymbol{BC}^{99}\ \boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B0B}^{-1}=\boldsymbol{0}$.

19-8（原题 9） 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{D}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$，求 $|\boldsymbol{D}+2\boldsymbol{E}|$.

解 因为矩阵 D 相似于矩阵 Q，所以存在可逆矩阵 P，使 $D=P^{-1}QP$，从而 $|D+2E|=|P^{-1}QP+2E|=|P^{-1}(Q+2E)P|=|P^{-1}||Q+2E||P|=|Q+2E|=360$.

19-9(原题 10) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，证明：如果 $\mathscr{A}$ 在 V 的任意一个基下的矩阵都相同，那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

证明 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{X}$ 为任一 n 阶可逆矩阵，令 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也是 V 的一个基. 因而 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，也就是 $\boldsymbol{A}$ 与一切 n 阶可逆矩阵可交换，所以 $\boldsymbol{A}$ 是数乘矩阵，从而 $\mathscr{A}$ 是一个数乘变换.

§ 20 特征值、特征向量与可对角化条件

20-1(原题 2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 因为 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{bmatrix}$$

20-2(原题 3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix}$，问 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可否对角化？如果可以对角化，求出可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解 由于 $\Delta_A(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\4&\lambda+1&0\\-4&8&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)$，所

以 A 的全部特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

对于 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(E-A)X=0$，由

$$E-A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ -4 & 8 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{20}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可知 $(E-A)X=0$ 的基础解系由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 20\end{pmatrix}$ 组成，所以 A 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 20\end{pmatrix}$，$k$ 为任意非零复数. $\lambda_1=1$ 的代数重数为 2，而几何重数为 1，所以 A 不可对角化.

$\Delta_B(\lambda)=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-7)$，所以 B 的全部特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=7$. 2 阶矩阵 B 有 2 个互不相同的特征值，故 B 可对角化.

对于 $\lambda_1=-2$，解齐次线性方程组 $(-2E-B)X=0$，得其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-4\\ 5\end{pmatrix}$，从而 B 的属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-4\\ 5\end{pmatrix}$，$k_1\in C$，对于 $\lambda_2=7$，解齐次线性方程组 $(7E-B)X=0$，得其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，从而 B 的属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，$k_2\in C$，令 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}$，则 P 可逆，且 $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}$.

20-3（原题 4）　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$，求(1) A^{10}，(2) A^{10} 的特征值和特征向量.

解　(1) $\Delta_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ 0 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$，所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda=-5$，从而三阶矩阵 A 可对角化.

对于 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(E-A)X=0$，得到属于特征值 $\lambda_1=1$ 的

线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，对于 $\lambda_2=5$，解齐次线性方程组$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到属于特征值 $\lambda_2=5$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，对于 $\lambda_3=-5$，解齐次线性方程组$(-5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到属于特征值 $\lambda_3=-5$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$. 从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{bmatrix}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5^{10}&0\\0&0&(-5)^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&5^{10}-1\\0&5^{10}&0\\0&0&5^{10}\end{bmatrix}$$

(2) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，易证 $\boldsymbol{A}^{10}$ 的特征值是 λ^{10}，而 $\boldsymbol{A}^{10}$ 的属于 λ^{10} 的特征向量仍是 $\boldsymbol{\alpha}$. 因此由(1)可知，$\boldsymbol{A}^{10}$ 的特征值分别是 $1,5^{10},5^{10}$，且 $\boldsymbol{A}^{10}$ 的属于特征值 1 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，属于特征值 5^{10} 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

20-4(原题 5)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 和 1.

证明　设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}^2$ 的属于特征值 λ^2 的特征向量. 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 可得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$,从而 $\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,$(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,由于特征向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $(\lambda^2-\lambda)=0$,于是 λ 的取值只能是 0 和 1.

20-5(原题 6)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,如果存在正整数 k 使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,那么,$\boldsymbol{A}$ 称为幂零矩阵. 证明 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零. 如果进一步假设 $\boldsymbol{A}$ 是非零的幂零矩阵,证明 $\boldsymbol{A}$ 一定不可以对角化.

证明　设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,$\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量,由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 可得:$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\lambda^k\boldsymbol{\alpha}$,所以 $\lambda^k=0$,从而 $\lambda=0$. 进一步,若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,假设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角阵,则存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{bmatrix}$,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,有矛盾,证毕.

20-6(原题 7)　求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$ 的特征值.

解　$\Delta_A(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^n-1$(按第一列展开),所以 $\lambda^n=1$,从而 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $\lambda_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$,$k=1,2,\cdots,n$.

20-7(原题 8)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,证明 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$.

证法 1:由 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\ \lambda\boldsymbol{E} & \lambda\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 两边取行列式得:

$$\lambda^n\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\lambda^n(-1)^n|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| \tag{20-1}$$

同理,由 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}\\ \lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$ 得:

$$\lambda^n\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\lambda^n(-1)^n|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}| \tag{20-2}$$

比较式 20-1,式 20-2 即得$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|$，从而 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值,又因为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$等于 $\boldsymbol{AB}$ 所有特征值之和,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$等于 $\boldsymbol{BA}$ 所有特征值之和,所以 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$.

证法 2：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$等于 $\boldsymbol{AB}$ 主对角元素之和,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$等于 $\boldsymbol{BA}$ 主对角元素之和,可参考习题 1-3(1)的证明.

20-8(原题 9) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 n 阶矩阵 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 的特征向量，这里 a,b 是任意复数.

证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量,是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 μ 的特征向量,即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{B\alpha}=\mu\boldsymbol{\alpha}$，则

$$(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{A\alpha}+b\boldsymbol{B\alpha}=a\lambda\boldsymbol{\alpha}+b\mu\boldsymbol{\alpha}=(a\lambda+b\mu)\boldsymbol{\alpha}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $a\lambda+b\mu$ 的特征向量.

20-9(原题 10) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \alpha & \beta\\ \alpha & 1 & 1\\ \beta & 1 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 相似，求 α,β.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有相同的特征值 0,1,2,

于是$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & \alpha & \beta\\ \alpha & 1 & 1\\ \beta & 1 & 1\end{vmatrix}=(\beta-\alpha)(\alpha-\beta)=0\times1\times2=0$，从而 $\alpha=\beta$.

又由 $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -\alpha & -\alpha\\ -\alpha & \lambda-1 & -1\\ -\alpha & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-3\lambda+2-2\alpha^2)$可知,$\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 是方程 $\lambda^2-3\lambda+2-2\alpha^2=0$ 的根，将 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$ 代入此方程得 $\alpha=0$，所以 $\alpha=\beta=0$.

20-10(原题 11) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & a & 3\end{bmatrix}(a>0)$，求参数 a 与可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

解 由题设可知 $\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1,2,5. 由$|\boldsymbol{A}|=$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} = 2(9-a^2) = 1\times 2\times 5$ 得 $a=2$.

对于 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，对于 $\lambda_2=2$，解齐次线性方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，对于 $\lambda_3=5$，解齐次线性方程组$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$|\boldsymbol{P}|=2\neq 0$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

20-11(原题 12) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似，求

(1) x 与 y；(2) 一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 的可逆阵 $\boldsymbol{P}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，于是有 $\begin{cases} 2+x=1+y \\ -2=-2y \end{cases}$ 解此方程组得 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $2,1,-1$，类似于第 20-10 题可求得 $\boldsymbol{P}$.

对于 $\lambda_1=2$，解齐次线性方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，对于 $\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，对于 $\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

§21 向量的内积与欧氏空间

21-1(原题 1) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,以下哪些代数运算(,)定义了 R^3 上的一个内积?

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+2x_2y_3-2x_3y_2$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-2x_2y_3-2x_3y_2$;

(3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_2y_3-x_3y_2$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-\frac{1}{2}x_2y_3-\frac{1}{2}x_3y_2$;

(5) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_3^2y_3^2$.

解 要验证上述代数运算(,)是否定义了 R^3 上的一个内积,只要验证这些代数运算是否满足教材《线性代数》第 234 页定义 21.1 中的 3 条性质即可.对于(1)中定义的代数运算,因为 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3+2y_2x_3-2y_3x_2=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+2x_3y_2-2x_2y_3\neq(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,故(1)中定义的代数运算不是 R^3 上的一个内积.类似地可验证(2)与(3)中的定义的代数运算都不满足定义 21.1 中的第 3 条性质,(5)中定义的代数运算不满足定义 21.1 中的第 2 条性质,故它们都不是 R^3 上的一个内积,只有(4)中定义的代数运算才是 R^3 上的一个内积.

21-2(原题 2) 证明对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$.

证明 对于任意 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in R^n$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in R^n$,定义 R^n 上的一个内积为

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}|a_1|\\|a_2|\\\vdots\\|a_n|\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^n$，则

$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，$||\boldsymbol{\alpha}||=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$，$||\boldsymbol{\beta}||=\sqrt{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}=\sqrt{n}$.

由柯西-布涅雅柯夫斯基不等式有$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}.$$

21-3（原题 3） 在 $\boldsymbol{R}^4$ 中求出向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角$\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$.

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

解 (1) 因为 $\cos\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\sqrt{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}}=\dfrac{0}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\sqrt{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}}=0$，所以$\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 因为 $\cos\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\sqrt{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}}=\dfrac{3}{\sqrt{7}\sqrt{11}}=\dfrac{3}{\sqrt{77}}$，所以$\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}=\arccos\dfrac{3\sqrt{77}}{77}$.

21-4（原题 4） 证明在欧氏空间 V 中，对于任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，都有

(1) $||\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}||^2+||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||^2=2||\boldsymbol{\alpha}||^2+2||\boldsymbol{\beta}||^2$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\dfrac{1}{4}||\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}||^2-\dfrac{1}{4}||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||^2$；

(3) $||\boldsymbol{\alpha}||-||\boldsymbol{\beta}||\leqslant||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||$.

证明 (1) 因为 $||\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}||^2=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=||\boldsymbol{\alpha}||^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+||\boldsymbol{\beta}||^2$，$||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||^2=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=||\boldsymbol{\alpha}||^2-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+||\boldsymbol{\beta}||^2$，

所以，$||\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}||^2+||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||^2=2||\boldsymbol{\alpha}||^2+2||\boldsymbol{\beta}||^2$.

(2) 由(1)可知，$||\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}||^2-||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||^2=(||\boldsymbol{\alpha}||^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+||\boldsymbol{\beta}||^2)-(||\boldsymbol{\alpha}||^2-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+||\boldsymbol{\beta}||^2)=4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，

所以，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\dfrac{1}{4}||\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}||^2-\dfrac{1}{4}||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||^2$.

(3) 由柯西-布涅雅柯夫斯基不等式有$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leqslant ||\boldsymbol{\alpha}|| \cdot ||\boldsymbol{\beta}||$,等式成立,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 于是

$$||\boldsymbol{\alpha}||^2+||\boldsymbol{\beta}||^2-2||\boldsymbol{\alpha}||||\boldsymbol{\beta}|| \leqslant ||\boldsymbol{\alpha}||^2+||\boldsymbol{\beta}||^2-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

$$(||\boldsymbol{\alpha}||-||\boldsymbol{\beta}||)^2 \leqslant (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||^2$$

所以,$||\boldsymbol{\alpha}||-||\boldsymbol{\beta}|| \leqslant |||\boldsymbol{\alpha}||-||\boldsymbol{\beta}||| \leqslant ||\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}||$.

21-5(原题 5) 设 V 为欧氏空间,证明:

(1) 对任意的 $v\in V$,必有$(\mathbf{0},v)=0$;

(2) 对任意的 $v\in V$,$(\boldsymbol{\alpha},v)=0$,必有 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

(3) 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当$(\boldsymbol{\alpha},v)=(\boldsymbol{\beta},v)$对所有的 $v\in V$ 成立.

证明 (1) 反证法. 假设对任意的 $v\in V$,$(\mathbf{0},v)\neq 0$,则存在非零常数 a,使$(\mathbf{0},v)=a$,由柯西-布涅雅柯夫斯基不等式有$|(\mathbf{0},v)| \leqslant ||\mathbf{0}|| \cdot ||v||=0$,即$|a| \leqslant 0$,有矛盾. 故对任意的 $v\in V$,必有$(\mathbf{0},v)=0$.

(2) 因为对任意的 $v\in V$ 都有$(\boldsymbol{\alpha},v)=0$,所以$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 从而 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,则$(\boldsymbol{\alpha},v)=(\boldsymbol{\beta},v)$对所有的 $v\in V$ 成立. 反之,若对所有的 $v\in V$,$(\boldsymbol{\alpha},v)=(\boldsymbol{\beta},v)$成立,则对所有的 $v\in V$,$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},v)=0$ 也成立. 由(2)可知 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

21-6(原题 6) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 V 中的一个基,$\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中任意一个向量,如果 $\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$都正交,那么 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基,而 $\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中任意一个向量,所以存在一组常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$,又由 $\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$都正交可得

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0$$

所以 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

20-7(原题 7) 在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^4$ 中求一个单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$,使它与

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$

都正交.

解 取 $\boldsymbol{R}^4$ 中的一个内积为$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$,其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{R}^4$ 中任意两个向量. 设向量 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都正交,即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=0$,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=0$,$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=0$,从而 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的一个非零解向量. 解此线性方程组得它的基础解系为

$\xi=\begin{pmatrix}4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$，取 $\eta=\xi$，则 $\varepsilon=\dfrac{\eta}{||\eta||}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$ 为所求的单位向量.

21-8(原题 8)　已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，求一个 4 阶正交阵 T，它以 α_1,α_2 为它的两个列向量.

解　设正交阵 $T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 两两正交，且 $||\alpha_3||=1$，$||\alpha_4||=1$. 因此 α_3,α_4 应该满足线性方程组 $\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}X=0$. 解此线性方程组，得它的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\5\\0\\4\end{pmatrix}$ 将 ξ_1,ξ_2 正交化得：$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\4\end{pmatrix}$，于是可取 $\alpha_3=\dfrac{\eta_1}{||\eta_1||}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\dfrac{\eta_2}{||\eta_2||}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$. 此时得

$$T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2&0\\-2&0&1&2\\0&2&2&-1\\2&1&0&2\end{bmatrix}$$

21-9(原题 10)　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 4 维欧氏空间 R^4 中一个标准正交基，$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_4$，$\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$，$\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 张成的子空间 $V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基.

解 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，易证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 本身是线性无关的，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $V(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一个基. 要求 $V(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一个标准正交基，只要将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 标准正交化即可. 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{||\boldsymbol{\beta}_1||}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{||\boldsymbol{\beta}_2||}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{||\boldsymbol{\beta}_3||}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

21-10（原题 11） 求齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\x_1+x_2-x_3+x_5=0\end{cases}$ 的解空间的一个标准正交基.

解 对齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&1&-4\\0&1&-1&-1&5\end{bmatrix}$$

得此齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 正交化得：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\ -\frac{6}{5}\\ \frac{6}{5}\\ \frac{13}{5}\\ 1\end{pmatrix},$$

取 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{||\boldsymbol{\alpha}_1||}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{||\boldsymbol{\alpha}_2||}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{||\boldsymbol{\alpha}_3||}$

$$=\frac{\sqrt{315}}{315}\begin{pmatrix}7\\-6\\6\\13\\5\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ **即为线性方程组的解空间的一个标准正交基.**

21-11(原题 12) **证明:实的上三角矩阵是正交阵时,它一定是对角阵,并且对角线上元素为** 1 **或**-1.

证明　设 $\boldsymbol{A}$ **是一个实上三角矩阵,且为正交阵,即有** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$. **但由于上三角矩阵的转置矩阵** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **为下三角矩阵,而其逆矩阵** $\boldsymbol{A}^{-1}$ **仍是上三角矩阵. 故** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **既是上三角又是下三角矩阵,从而** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **必为对角阵. 因此** $\boldsymbol{A}$ **为对角阵.**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_n\end{bmatrix}$，**由于** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,**故得** $a_i^2=1,i=1,2,\cdots,n$　**从而** a_i

$=\pm 1$. 即 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上元素为 1 或 -1.

21-12(原题 13)　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个实矩阵,证明:$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

证明　由于 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, 因此只要证明 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

设有方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,显然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解;反之, 设 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)$, 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0$ 是实矩阵,得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,从而方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 W_1, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 W_2, 则 W_1 的维数等于 $n-R(\boldsymbol{A})$, W_2 的维数等于 $n-R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$. 由 $W_1=W_2$ 可得 $n-R(\boldsymbol{A})=n-R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

§ 22　实对称矩阵及其对角化

21-1(原题 2)　设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&x&1\\-4&-2&1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$ 相似,求

(1)　x 与 y;

(2)　求正交阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解　(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\Lambda}|$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda})$,于是有 $\begin{cases}2+x=1+y\\3x+8=4y\end{cases}$. 解此方程组得 $\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似可知,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=5$, $\lambda_3=-4$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=5$, 解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, 得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化得:$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=-4$, 解齐次线性方程组 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, 得到线性无关的特

征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化得：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{||\boldsymbol{\alpha}_1||}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{||\boldsymbol{\alpha}_2||}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{||\boldsymbol{\xi}_3||}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&2&1\\-2&1&2\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$.

22-2（原题 3） 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,1,1，与特征值 2 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，所以特征值 $\lambda=1$ 的几何重数等于它的代数重数，都等于 2，即属于特征值 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量有两个，且它们都与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交. 设属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的分量都应当满足方程 $x_1+x_2+x_3=0$. 解此方程得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化，令 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{||\boldsymbol{\alpha}_1||}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{||\boldsymbol{\alpha}_2||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{||\boldsymbol{\xi}_3||}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=$

$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$.

22-3(原题 4)　证明反对称(即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$)的实矩阵的特征值是零或纯虚数.

证明　设 $\lambda\in C$ 是反对称的实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in C^n$, 且 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,则有 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\boldsymbol{A\alpha}}=\overline{\lambda\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}$,

$$(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\overline{\boldsymbol{\alpha}}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\alpha}})=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}$$

而

$$(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=(\lambda\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$$

上面两式相减得:$(\lambda+\overline{\lambda})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=0$,而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^2\neq0$,从而 $\lambda+\overline{\lambda}=0$,即 $\lambda=-\overline{\lambda}$, 故 $\lambda=0$ 或 λ 为纯虚数.

22-4(原题 5)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$(这时称 $\boldsymbol{A}$ 为幂么阵),证明存在正交阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{bmatrix}$.

证明　由教材《线性代数》第 246 页定理 22.4 可知,存在正交阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$,可得

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\begin{bmatrix}\lambda_1^2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$$

所以 $\lambda_i^2=1,i=1,2,\cdots,n\Rightarrow\lambda_i=\pm1$. 再对正交阵 $\boldsymbol{P}$ 作适当的列交换,即可

得到正交阵 T，使得 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1\end{bmatrix}$.

§23 二次曲面及其分类

23-1(原题 2) 求 ZOX 坐标平面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 X 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解 $z^2=5x$ 绕 X 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程为 $y^2+z^2=5x$.

23-2(原题 3) 求 XOY 坐标平面上的双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 分别绕 X 轴及 Y 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 X 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程为：

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2+z^2}{4}=1$，即 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$.

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 Y 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程为：$\frac{x^2+z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$，即 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

23-3(原题 8) 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax$ $(a>0)$ 的公共部分在 XOY 与 ZOX 坐标平面上的投影.

解 上半球与圆柱体的公共部分即为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 所围成的立体部分. 而上半球面与圆柱面的交线 C 是 $\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\\ x^2+y^2=ax\end{cases}$，它在 XOY 与 ZOX 坐标平面上的投影分别是

$$C_1:\begin{cases}x^2+y^2=ax\\ z=0\end{cases},\qquad C_2:\begin{cases}z=\sqrt{a^2-ax}\\ y=0\end{cases}$$

所以，所求立体在 XOY 与 ZOX 坐标平面上的投影分别是 XOY 与 ZOX 坐标平面上曲线 C_1 和 C_2 所围的部分：$x^2+y^2\leqslant ax$ 及 $ax+z^2\leqslant a^2(x\geqslant$

$0, z \geqslant 0$).

23-4(原题 10)　分别求母线平行于 X 轴及 Y 轴并经过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解　曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 在 YOZ 坐标平面上的投影为 C_1: $\begin{cases} 3y^2-z^2=16 \\ x=0 \end{cases}$，从而母线平行于 X 轴且过已知曲线的柱面方程为: $3y^2-z^2=16$.

已知曲线在 ZOX 坐标平面上的投影为 C_2: $\begin{cases} 3x^2+2z^2=16 \\ y=0 \end{cases}$，从而母线平行于 Y 轴且过已知曲线的柱面方程为: $3x^2+2z^2=16$.

23-5(原题 13)　试用本节所述的方法分类平面上的二次曲线.

解　在平面直角坐标系 $O\text{-}XY$ 下，平面上的二次曲线的一般方程为:

$$f(x,y)=ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0 \tag{23-1}$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$，则式(23-1)可写成矩阵方程的形式:

$$f(x,y)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+f=0 \tag{23-2}$$

对于实二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax^2+by^2+2cxy$，可经过正交的变量替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}_1$ 化成标准型 $\lambda_2 x_1^2+\lambda_2 y_1^2$，其中系数 λ_1, λ_2 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ 要求所涉及到的正交阵 $\boldsymbol{T}$ 的行列式为 1. 式(23-2)可化为:

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\boldsymbol{X}_1+2(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T})\boldsymbol{X}_1+f=0 \tag{23-3}$$

进一步记$(b_1, b_2)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$，则式(23-3)可改写为

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+2b_1 x_1+2b_2 y_1+f=0 \tag{23-4}$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})$, $R(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})$ 就是不为零的特征值 $\lambda_i (i=1,2)$ 的个数. 可以根据 $R(\boldsymbol{A})$ 把平面上的二次曲线进行分类.

(1) $R(\boldsymbol{A})=2$ 时，$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$，通过直角坐标系的平移 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} -\dfrac{b_1}{\lambda_1} \\ -\dfrac{b_2}{\lambda_2} \end{pmatrix}$，将式(23-4)化为: $\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+r=0$，其中

$$r=f-\frac{b_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_2^2}{\lambda_2}$$

① 当 $r=0$ 时，如果 λ_1,λ_2 同号，二次曲线(23-1)退化为一点$(0,0)$. 如果 λ_1,λ_2 异号，它表示两条直线 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}x$.

② 当 $r\neq 0$ 时，按 λ_1,λ_2 和 r 的符号分以下三种情况：

(a) 当 λ_1,λ_2 都与 r 异号，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，它是一个椭圆；

(b) 当 λ_1,λ_2 都与 r 异号，且 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，它是一个圆；

(c) 当 λ_1,λ_2 中任一个与 r 同号，它是一条双曲线.

(2) $R(\boldsymbol{A})=1$ 时，设 $\lambda_2=0$，式(23-4)化为

$$\lambda_1 x_1^2+2b_1x_1+2b_2y_2+f=0 \tag{23-5}$$

通过直角坐标系的平移 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-\dfrac{b_1}{\lambda_1}\\0\end{pmatrix}$，将式(23-5)化为：

$$\lambda_1 x_2^2+2b_2y_2+t=0 \tag{23-6}$$

式(23-6)中，$t=f-\dfrac{b_1^2}{\lambda_1}$.

① 当 $b_2=t=0$ 时，表示直线 $x=0$；

② 当 $b_2=0$，$t\neq 0$ 且 t 与 λ_1 异号时，表示两条平行直线 $x=\pm\sqrt{\dfrac{-t}{\lambda_2}}$；

③ 当 $b_2\neq 0$ 时，进一步作直角坐标系的平移 $\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_3+\boldsymbol{G}$，其中 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{t}{2b_2}\end{pmatrix}$，将式(23-6)化为：$\lambda_1x_3^2+2b_2y_3=0$，从而表示为抛物线.

23-6(原题(14)　用直角坐标变换化简下列二次曲线方程并判别其类型：

(1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$，

(2) $3x^2-4xy+3y^2-7\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+5=0$，

(3) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0$，

(4) $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$.

解　(1) 由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$，它的特征多项式为 $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^2-10\lambda+9=(\lambda-1)(\lambda-9)$，

对应特征值 $1,9$ 的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，于是有直角

坐标系的旋转变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ 把二次曲线方程化简为 $x_1^2+9y_1^2-18\sqrt{2}y_1+9=0$，再通过直角坐标系的平移变换 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ 把二次曲线方程进一步化简为：$x_2^2+9y_2^2-9=0$. 易见这是椭圆.

类似地可简化(2),(3),(4)中所示曲线方程并判别其类型.

§24 二次型及其标准形

24-1(原题 4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同.

24-2(原题 5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交的变量替换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$.

解 这个二次型对应的矩阵与它的标准形对应的矩阵分别为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

并且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的行列式相等，即 $|\boldsymbol{A}|=2(9-a^2)=|\boldsymbol{\Lambda}|=10$，从而 $a=2$. 另外 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有相同的特征值 1,2,5.

$\boldsymbol{A}$ 对应特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是属于 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量；

对于 $\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_3=5$，解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已经是两两正交的，再将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$ 于是正交阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\text{ 使 }\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

24-3（原题 7） 证明：二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 在 $||\boldsymbol{X}||=1$ 时的最大值是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

证明 设存在正交阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{B}$. 假设 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，作正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$，则

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

而 $$\lambda_1\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\leqslant\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$

故

$$\lambda_1\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

$||\boldsymbol{X}||=1$ 即 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$，因此

$$\lambda_1\leqslant\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant\lambda_n$$

即证.

24-4（原题 8） 证明二次型 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 的秩为 2 的充分必要条件是 $b^2-4ac\neq0$.

证明

$$f(x,y)=(x,y)\begin{bmatrix}a&\frac{b}{2}\\\frac{b}{2}&c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ 的秩为 $2\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0\Leftrightarrow b^2-4ac\neq0.$

§25 正定二次型与正定阵

25-1（原题 2） t 取什么值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

解 该二次型对应矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{bmatrix}$，要使二次型为正定二次

型，必有

$$a_{11}=1>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0,|\boldsymbol{A}|=(-t)(5t+4)>0.$$

所以由 $\begin{cases}1-t^2>0\\(-t)(5t+4)>0\end{cases}$ 可得 $-\frac{4}{5}<t<0$.

25-2（原题 3） 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，那么

（1）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定阵；

（2）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值均大于零.

（1）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$，也全大于零，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定阵.

（2）设 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 的所有特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$，所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1$.

25-3（原题 4） 已知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定阵.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定阵，所以对所有不全为零的 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}>\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定阵.

25-4（原题 5） 设 $\boldsymbol{U}$ 是可逆阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，证明二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定型.

证明 因为 $\boldsymbol{U}$ 是可逆阵，所以任取 $\boldsymbol{X}\in R^n,\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 就有 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$ 的二次型在 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 处的值为

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}\boldsymbol{X})=||\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}||^2>0$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型是正定的.

25-5（原题 6） 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵，那么存在可逆阵 $\boldsymbol{U}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，根据对称阵可对角化的原理，必存在正交阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，故 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 记对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}_1=diag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$，则 $\boldsymbol{\Lambda}_1^2=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}_1)(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}_1)^{\mathrm{T}}$$

记 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}_1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{U}$ 是可逆的，且由上式可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

2002 年研究生入学考试试题精解
（线性代数）

数学一

1. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$_____.

答　$a=2$.

解析　二次型的特征值为 $6,0,0$，二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}$. 因为特征值 0 的重数为 2，且 A 可对角化，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解向量. 所以 $R(\boldsymbol{A})=1$. 因而观察可知，$a=2$.

2. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$。如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解法 1　令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则由 $\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$

得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，整理后得：

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，可知

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0\\-x_1+x_3=0\\x_4-1=0\end{cases}$$

解此方程组得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

解法 2　因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关和 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，因

此 $AX=0$ 的基础解系中只包含一个向量.

由 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$ 可知，$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个解，所以通解为 $X=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

再由

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

可知，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的一个特解，于是 $AX=\beta$ 的通解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

3. 设 A,B 为同阶方阵，

(1) 如果 A,B 相似，试证 A,B 的特征多项式相等；

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立；

(3) 当 A,B 均为实对称矩阵时，试证(1)的逆命题成立.

证明：(1) 若 A,B 相似，则存在可逆矩阵 P. 使 $P^{-1}AP=B$，故

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}\lambda EP-P^{-1}AP|\\&=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|\\&=|P^{-1}||P||\lambda E-A|=|\lambda E-A|\end{aligned}$$

(2) 令 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，则

$$|\lambda E-A|=\lambda^2=|\lambda E-B|$$

但 A,B 不相似. 否则，存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B=0$，从而 $A=P0P^{-1}=0$，

有矛盾.

(3) 由 A,B 均为实对称矩阵知,A,B 均相似于对角阵. 若 A,B 的特征多项式相等,记特征多项式的根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有:

A 相似于 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$,$B$ 也相似于 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$,

即存在可逆矩阵 P,Q 使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=Q^{-1}BQ$ 于是

$$(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})=B.$$

由 PQ^{-1} 为可逆矩阵知,A 与 B 相似.

数学二

1. 矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

答　非零特征值是 4.

解析　$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{bmatrix}=\lambda^2(\lambda-4)$

所以非零特征值是 4.

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则对于任意常数 k,必有(　　)

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关;　　(b) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关;

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关;　　(d) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关.

答　选(a)

解析　向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使

$$\beta_1=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3 \tag{1}$$

设有一组数 k_1,k_2,k_3,k_4,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\beta_1+k\beta_2)=0 \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)得:

$$(k_1+k_4\lambda_1)\alpha_1+(k_2+k_4\lambda_2)\alpha_2+(k_3+k_4\lambda_3)\alpha_3+k_4k\beta_2=0$$

则 k_1,k_2,k_3,k_4 的取值要取决于 k. 当 $k\neq0$ 时,必有 $k_4=0$. 因为若 $k_4\neq0$,则有

$$k_4k\beta_2=-(k_1+k_4\lambda_1)\alpha_1-(k_2+k_4\lambda_2)\alpha_2-(k_3+k_4\lambda_3)\alpha_3$$

从而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，与已知矛盾. 当 $k\neq 0,k_4=0$ 时，有 $k_1=k_2=k_3=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. 若 $k=0$，则 k_1,k_2,k_3,k_4 可任意取值，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关. 因此选项(c)，(d)可排除.

对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，易证选项(b)线性无关，故选(a).

3. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位阵.

(1) 证明：矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，从而 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}$，或 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$. 故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$.

(2) 由(1)知 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}+8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$，而

$$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

4. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 见数学一中题 2.

数学三

1. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$. 已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $a=$_____.

答 $a=-1$.

解析 $A\alpha=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}$,

因为 $A\alpha$ 与 α 线性相关,所以 $\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ 的分量之间对应成比例,从而有 $a=-1$.

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,则线性方程组$(AB)X=0$(　　)

(a) 当 $n>m$ 时仅有零解;　　(b) 当 $n>m$ 时必有非零解;

(c) 当 $m>n$ 时仅有零解;　　(d) 当 $m>n$ 时必有非零解.

答　选(d).

解析　因为 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,所以当 $m>n$ 时,$BX=0$ 必有非零解,从而$(AB)X=0$ 必有非零解.

3. 设 A 是 n 阶实对称矩阵,P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量,则矩阵$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是(　　).

(a) $P^{-1}\alpha$,　　(b) $P^{\mathrm{T}}\alpha$,　　(c) $P\alpha$,　　(d) $(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$.

答　选(b).

解析　因为

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}\alpha)&=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}\alpha)=P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1}(P^{\mathrm{T}}\alpha)\\&=P^{\mathrm{T}}A\alpha=\lambda(P^{\mathrm{T}}\alpha)\end{aligned}$$

所以矩阵$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 $P^{\mathrm{T}}\alpha$.

4. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

其中 $a\neq0,b\neq0,n\geqslant2$. 试讨论 a,b 为何值时,方程组仅有零解、有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出全部解,并用基础解系表示全部解.

解　方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

(1) 当 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时，方程组仅有零解.

(2) 当 $a=b$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

原方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

方程组的全部解是

$$\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\text{为任意常数})$$

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (1-n) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & (1-n) & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1-n) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (1-n) \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_n, \\ x_2 = x_n, \\ \cdots\cdots, \\ x_{n-1} = x_n \end{cases}$$

其基础解系为：$\boldsymbol{\beta}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

方程组的全部解为：$\boldsymbol{X}=c\boldsymbol{\beta}$($c$ 为任意常数).

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

解法 1 （1）设 λ 为 A 的任意一个特征值，对应的特征向量为 α，则

$$A\alpha=\lambda\alpha,\ (\alpha\neq 0)$$

$$A^2\alpha=\lambda^2\alpha$$

于是 $(A^2+2A)\alpha=(\lambda^2+2\lambda)\alpha$.

由条件 $A^2+2A=0$ 推知 $(\lambda^2+2\lambda)\alpha=0$. 又由于 $\alpha\neq 0$，故有 $\lambda^2+2\lambda=0$，解得：$\lambda=-2$，$\lambda=0$.

因为实对称矩阵 A 必可对角化，且 $R(A)=2$，所以

$$A\sim\begin{bmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{bmatrix}=\Lambda.$$

因此，矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=0$.

（2）矩阵 $A+kE$ 仍为实对称矩阵，由（1）知，$A+kE$ 的全部特征值为：

$$-2+k,\quad -2+k,\quad k$$

于是，当 $k>2$ 时矩阵 $A+kE$ 的全部特征值大于零. 因此，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵.

解法 2 （1）同解法 1.

（2）实对称矩阵必可对角化，故存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda,$$

$$A=P\Lambda P^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}A+kE&=P\Lambda P^{-1}+kPP^{-1}\\&=P(\Lambda+kE)P^{-1},\end{aligned}$$

所以 $$A+kE\sim\Lambda+kE.$$

而

$$\Lambda+kE=\begin{bmatrix}k-2 & & \\ & k-2 & \\ & & k\end{bmatrix}.$$

$\Lambda+kE$ 为正定矩阵，只需其顺序主子式均大于零，即 k 需满足

$$k-2>0,(k-2)^2>0,(k-2)^2k>0$$

因此，当 $k>2$ 时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵.

数学四

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$B=A^2-3A+2E$，则 $B^{-1}=$_____.

答 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$.

解析 因为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$$

所以

$$\boldsymbol{B}^{-1}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]^{-1}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$ 线性无关，则 a,b,c 必满足关系式_____.

答 a,b,c 必满足关系式 $abc\neq 0$.

解析 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$ 线性无关$\Leftrightarrow$以这三个向量为行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 0 & c\\ b & c & 0\\ 0 & a & b\end{bmatrix}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=3\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 所以由 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 可得 $abc\neq 0$.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对应的伴随矩阵. 分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^*=$(　　).

(a) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$　　(d) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$

答 选(d).

解析 出现伴随矩阵应想到等式：$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E},\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$(其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵).

设 $\boldsymbol{C}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}$，且 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$ 则有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$$

解得：

$$\boldsymbol{X}_1=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{0},\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{0},\boldsymbol{X}_4=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*$$

从而
$$\boldsymbol{C}^*=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$$

4. 设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$且已知另一四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

解法 1

(1) 对方程组(Ⅰ)的系数矩阵行初等变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

得方程组(Ⅰ)的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=5x_3-3x_4\\ x_2=-3x_3+2x_4\end{cases}$$

由此可得方程组(Ⅰ)的一个基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$

(2) 由题设条件,方程组(Ⅱ)的全部解为:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2k_1-k_2\\ -k_1+2k_2\\ (a+2)k_1+4k_2\\ k_1+(a+8)k_2\end{pmatrix}\tag{3}$$

其中 k_1,k_2 为任意常数,将上式代入方程组(Ⅰ),得

$$\begin{cases}(a+1)k_1=0\\ (a+1)k_1-(a+1)k_2=0\end{cases}\tag{4}$$

要使方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解,只需关于 k_1,k_2 的方程组(4)有非零解.因为$\begin{vmatrix}a+1 & 0\\ a+1 & -(a+1)\end{vmatrix}=-(a+1)^2$,所以:当 $a\neq-1$ 时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)无非零公共解;当 $a=-1$ 时,方程组(4)有非零解,且 k_1,k_2 为不全为零的任意常数.此时,由式(3)可得方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的全部非零公共解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

其中，k_1，k_2 为不全为零的任意常数.

解法 2

(1) 对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作行初等变换，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得方程组(Ⅰ)的同解方程组

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 3x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

由此可得方程组(Ⅰ)的一个基础解系为：$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = (0,1,3,5)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解为 $\boldsymbol{\eta}$，则存在常数 k_1，k_2，k_3，k_4，使得 $\boldsymbol{\eta} = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = k_3\boldsymbol{\alpha}_1 + k_4\boldsymbol{\alpha}_2$，由此得线性方程组(Ⅲ)

$$\begin{cases} -k_1 + 2k_3 - k_4 = 0 \\ -k_2 - k_3 + 2k_4 = 0 \\ -2k_1 - 3k_2 + (a+2)k_3 + 4k_4 = 0 \\ -3k_1 - 5k_2 + k_3 + (a+8)k_4 = 0 \end{cases}$$

对方程组(Ⅲ)的系数矩阵作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & a+2 & 4 \\ -3 & -5 & 1 & a+8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

由此可知，当 $a \neq -1$ 时，方程组(Ⅲ)仅有零解，故方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)无非零公共解；

当 $a = -1$ 时，方程组(Ⅲ)的同解方程组为：

$$\begin{cases} k_1 = 2k_3 - k_4 \\ k_2 = -k_3 + 2k_4 \end{cases}$$

令 $k_3 = c_1$，$k_4 = c_2$，得方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的全部非零公共解为：

$$\boldsymbol{\eta} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$，其中 c_1，c_2 为不全为零的任意常数.

5. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵，并计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$ 的值.

解　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{bmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$$

由此得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，可得对应的两个线性无关的特征向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 $\lambda_3=a-2$，可得对应的特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}^{-1}|$$

$$=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}=a^2(a-3)$$

2003 年研究生入学考试试题精解
（线性代数）

数学一

1. 从 R^2 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为_____.

答　过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}$.

解析　设 $\boldsymbol{M}$ 为过渡矩阵，由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{M}$ 可得：

$$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

2. 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则（　　）.

(a) 当 $r<s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关.

(b) 当 $r>s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关.

(c) 当 $r<s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.

(d) 当 $r>s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.

答　选(d).

解析　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，故存在 $s\times r$ 阶系数矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{K}$.

当 $r>s$ 时，$\boldsymbol{KX}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解，从而 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{KX}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解. 由此得 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 必线性相关. 故选(d).

3. 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

(1) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$；

(2) 若秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，则秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$；

(4) 若秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

以上命题中正确的是：

(a) (1),(2);　　(b) (1),(3);　　(c) (2),(4);　　(d) (3),(4).

答　选(b).

解析　若 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，显然有 $R(A)=R(B)$，但反之不一定成立. 故命题(3)正确，命题(4)不正确. 因此只能选(b).

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}A^{*}P$，求 $B+2E$ 的特征值和特征向量. 其中 A^{*} 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

解法 1　经计算可得：

$$A^{*}=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$B=P^{-1}A^{*}P=\begin{bmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{bmatrix}$$

从而

$$B+2E=\begin{bmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-(B+2E)|=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&0\\2&\lambda-7&4\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-9)^{2}(\lambda-3)$$

故 $B+2E$ 的特征值为 $9,9,3$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 时，对应的线性无关的特征向量可取为：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于特征值 9 的全部特征向量为：

$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数.

当 $\lambda_3=3$ 时，对应的一个特征向量为：

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于特征值 3 的全部特征向量为：

$k_3\boldsymbol{\eta}_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_3 是不为零的任意常数.

解法 2 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}$，即 $\boldsymbol{A\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$. 由于 $|\boldsymbol{A}|=7\neq0$，所以 $\lambda\neq0$.

又因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\eta}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\eta}$. 于是有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta})=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}),$$

$$(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}.$$

因此，$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$ 为 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}$. 由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，对应的线性无关的特征向量可取为：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

当 $\lambda_3=7$ 时，对应的一个特征向量为：

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，得：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

因此，$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的三个特征值分别为 9，9，3.

对应于特征值 9 的全部特征向量为：

$k_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数；

对应于特征值 3 的全部特征向量为：

$k_3\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_3 是不为零的任意常数.

5. 已知平面上三条不同直线的方程分别为：

$l_1:ax+2by+3c=0$，

$l_2:bx+2cy+3a=0$，

$l_3:cx+2ay+3b=0$.

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

证法 1　必要性：设三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b\end{cases}\tag{5}$$

有惟一解，故系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{bmatrix}$ 的秩均为 2，于是 $|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$. 由于

$$\begin{aligned}|\overline{\boldsymbol{A}}|&=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}\\&=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]\\&=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\end{aligned}$$

但 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$，故 $a+b+c=0$.

充分性：由 $a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$，故秩$(\overline{\boldsymbol{A}})<3$. 由于

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a&2b\\b&2c\end{vmatrix}&=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]\\&=-2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\neq0,\end{aligned}$$

故秩$(\boldsymbol{A})=2$. 于是：秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=2$. 因此方程组(5)有惟一解，即三直线 l_1，

l_2，l_3 交于一点.

证法 2 必要性：设三直线交于一点(x_0, y_0)，则 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{bmatrix}$. 于是$|\boldsymbol{A}|=0$. 而

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} \\
&= -6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc] \\
&= -3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],
\end{aligned}
$$

但$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \neq 0$，故 $a+b+c=0$.

充分性：考虑线性方程组

$$
\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b \end{cases} \tag{6}
$$

将方程组(6)的三个方程相加，并由 $a+b+c=0$ 可知，方程组(6)等价于方程组

$$
\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a \end{cases} \tag{7}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} &= 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2] \\
&= -[a^2+b^2+(a+b)^2] \neq 0,
\end{aligned}
$$

故方程组(7)有惟一解，所以方程组(6)有惟一解，即三直线 l_1，l_2，l_3 交于一点.

数学二

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置. 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$_____.

答 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$.

解析　因为

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1,-1,1)$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3$$

2. **设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.**

答　$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{2}$.

解析　由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 可得：$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$. 而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=18\neq0$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，从而有

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},$$

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}|=1,$$

即

$$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|}=\frac{1}{2}$$

3. **设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则有（　　）.**

(a) **当 $r<s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关.**

(b) **当 $r>s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关.**

(c) **当 $r<s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.**

(d) **当 $r>s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.**

答　选(d).

解析　见数学一中题 2.

4. **若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，试确定常数 a 的值；并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.**

解　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为：

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

由于 A 相似于对角矩阵 Λ，故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有两个线性无关的特征向量，因此矩阵 $6E-A$ 的秩应为 1. 从而由

$$6E-A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $a=0$. 于是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为：

$$\zeta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \zeta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-2$ 时，

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$ 得对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量 $\zeta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$. 令 $P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 P 可逆，并有 $P^{-1}AP=\Lambda$.

5. 已知平面上三条不同直线的方程分别为：

$l_1:ax+2by+3c=0$，

$l_2:bx+2cy+3a=0$，

$l_3:cx+2ay+3b=0$.

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

证明　见数学一中题 5.

数学三

1. 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，$a<0$；$E$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵

$$A=E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}},\quad B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^{\mathrm{T}},$$

其中 A 的逆矩阵为 B，则 $a=$_____.

答　$a=-1$.

解析　因为 A 的逆矩阵为 B，$a<0$，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)\begin{pmatrix}a\\0\\\vdots\\0\\a\end{pmatrix}$ 所以有：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{E}+\Big(\frac{1}{a}-1\Big)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{E}+\Big(\frac{1}{a}-1-2a\Big)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a}-1-2a=0\Rightarrow a=-1$$

2. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有（　　）.

(a) $a=b$ 或 $a+2b=0$，　　(b) $a=b$ 或 $a+2b\neq0$，

(c) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$，　　(d) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq0$

答　选(c).

解析　因为 A 的伴随矩阵的秩等于 1，所以 A 的秩等于 2，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 可得 $a=b$ 或 $a+2b=0$. 但当 $a=b$ 时，A 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}=0$，从而 $\boldsymbol{A}^{*}=0$ 的秩为 0，与已知条件矛盾. 故只能选(c).

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量，下列结论不正确的是（　　）.

(a) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(b) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$.

(c) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(d) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

答　选(b).

解析　此题是考查向量组线性相关性的概念. 选项(b)错误，因为按照定义，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关是指存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+$

$\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$，并非对任意不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$ 成立. 例如，取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，则 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，但 $3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$.

4. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(1) 方程组仅有零解；

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

解　方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

(1) 当 $b\neq0$ 且 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$ 时，秩$(A)=n$，方程组仅有零解.

(2) 当 $b=0$ 时，原方程组的同解方程组为

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$$

由 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$ 可知，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为零. 不妨设 $a_1\neq0$，得原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\cdots,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}.$$

当 $b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 时，有 $b\neq0$，原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} a_1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2=x_1,x_3=x_1,\cdots,x_n=x_1.$$

原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

5. **设二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0),$$

其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12.

(1) **求 a,b 的值;**

(2) **利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.**

解法 1 (1) **二次型 f 的矩阵为** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为** $\lambda_i\ (i=1,2,3)$. **由题设,有**

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12$$

解得 $$a=1,\quad b=2.$$

(2) **由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式**

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$, **解齐次线性方程组** $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, **得其基础解系**

$$\boldsymbol{\xi}_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_3=-3$, **解齐次线性方程组** $(-3E-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, **得基础解系**

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$$

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已是正交向量组，为得到规范正交向量组，只需将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，由此得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

则 Q 为正交阵. 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下，有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

解法 2 (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -b\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -b & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-(a-2)\lambda-(2a+b^2)]$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$，则 $\lambda_1=2,\lambda_2+\lambda_3=a-2,\lambda_2\lambda_3=-(2a+b^2)$. 由题设得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+(a-2)=1,$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2(2a+b^2)=-12$$

解得 $a=1,\quad b=2.$

(2) 同解法 1.

数学四

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为三阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵. 已知 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$_____.

答 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

解析 因为$(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}$可逆,所以有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\Rightarrow\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})^{-1}\\&\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$,$a<0$;$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $a=$_____.

答 $a=-1$.

解析 见数学三中题 1.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,则秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$与秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$之和等于(　　).

(a) 2　　(b) 3　　(c) 4　　(d) 5

答 选(c).

解析 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 从而有:

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}$$

因而

$$R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=R[\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}]=R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=3$$

$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R[\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}]=R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=1$$

$$R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=3+1=4$$

4. 设有向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$和向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$. 试问:当 a 为何值时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价?当 a 为何值时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不

等价？

解　作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{bmatrix}$$

(1) 当 $a\neq-1$ 时，有行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=a+1\neq0$，秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，故线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 均有惟一解. 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示.

同样，行列式 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=6\neq0$，秩 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组(Ⅱ)线性表示. 因此向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(2) 当 $a=-1$ 时，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&0&-2&0&-2\end{bmatrix}$$

由于秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)$，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$ 无解，故向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 因此，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 可逆，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量，λ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 试求 a,b 和 λ 的值.

解　矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 于是 $\lambda\neq0,|\boldsymbol{A}|\neq0$，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.

两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$$

即

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$$

由此，得方程组

$$\begin{cases} 3+b=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}, & (8) \\ 2+2b=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}b, & (9) \\ a+b+1=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}, & (10) \end{cases}$$

由式(8),(9)**解得** $b=1$ **或** $b=-2$;**由式**(8),(10)**解得** $a=2$. **由于**

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=3a-2=4$$

根据式(8)**知,特征向量** $\boldsymbol{\alpha}$ **所对应的特征值** $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{3+b}=\dfrac{4}{3+b}$.

所以,当 $b=1$ **时,**$\lambda=1$;**当** $b=-2$ **时,**$\lambda=4$.

2004 年研究生入学考试试题精解
（线性代数）

数学一

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

答　$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$.

解析　因为 $|\boldsymbol{A}|=3\neq0$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=1\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=3\boldsymbol{A}^{-1}$，且 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，可得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}(3\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$. 于是 $|\boldsymbol{B}|=\left|\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}\right|=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|}3=\dfrac{1}{9}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 为（　　）

(a) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，　(b) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，

(c) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，　(d) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

答　选(d).

解析　将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以初等阵 $\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得 $\boldsymbol{B}$；再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，相当于在 $\boldsymbol{B}$ 的右边乘以初等阵 $\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得 $\boldsymbol{C}$. 于是满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的任意两个非零矩阵，则必有(　　)

(a) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(b) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(c) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(d) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

答　选(a).

解析　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $p\times n$ 阶非零矩阵. 将 $\boldsymbol{B}$ 按列分块 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$. 则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{A\beta}_j=\boldsymbol{0}$，$j=1,2,\cdots,n$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 不全为零向量，从而齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. 将 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 按列分块 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}$，$j=1,2,\cdots,m$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 不全为零向量，从而齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组线性相关.

4. 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0.\end{cases}\quad(n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时，方程组仅有非零解，并求出其通解.

解法 1　对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\&\cdots&&&\\n&n&n&\cdots&n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2a&a&0&\cdots&0\\&\cdots&&&\\-na&0&0&\cdots&a\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

当 $a=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1<n$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}$，其中，$k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数. 当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

可知 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，$R(\boldsymbol{A})=n-1<n$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\vdots\\ -nx_1+x_n=0\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$$

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\eta}，\text{其中 } k \text{ 为任意常数}.$$

解法 2 方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ & \cdots & & & \\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=\left(a+\frac{n(n+1)}{2}\right)a^{n-1}.$$

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，即 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ & \cdots & & & \\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}，\text{其中 } k_1,\cdots,k_{n-1} \text{ 为任意常数}.$$

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ & \cdots & & & \\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots & & & \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots & & & \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots & & & \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\vdots\\ -nx_1+x_n=0\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\eta}，\text{其中 } k \text{ 为任意常数}.$$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2-\lambda & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ -1 & -a-1 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,6$，矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}$ 的秩为 1，故特征值 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$.

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,4,4$，矩阵 $4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}$ 的秩为 2，故特征值 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

数学二

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

答　$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{9}$.

解析　见数学一中题 1.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　)

(a) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，　(b) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，

(c) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，　(d) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

答　选(d).

解析　见数学一中题 2.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的任意两个非零矩阵，则必有(　　)

(a) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(b) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(c) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(d) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

答　选(a).

解析　见数学一中题 3.

4. **设有齐次线性方程组**

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0\end{cases}$$

试问 a **取何值时，方程组仅有非零解，并求出其通解.**

解法 1　对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ **作初等行变换，有**

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ -2a & a & 0 & 0\\ -3a & 0 & a & 0\\ -4a & 0 & 0 & a\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

当 $a=0$ **时，**$R(\boldsymbol{A})=1<4$**，故方程组有非零解，其同解方程组为**

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$**，其中，**$k_1,k_2,k_3$ **为任意常数.**

当 $a\neq 0$ **时，对矩阵** $\boldsymbol{B}$ **作初等行变换，有**

$$\boldsymbol{B}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+10 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可知 $a=-10$ **时，**$R(\boldsymbol{B})=3<4$**，故方程组也有非零解，其同解方程组为**

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ -4x_1+x_4=0\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\eta}$，其中 k 为任意常数.

解法 2　方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3.$$

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，即 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\cdots,$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

当 $a=-10$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-9 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -8 & 2 & 2\\ 3 & 3 & -7 & 3\\ 4 & 4 & 4 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-9 & 1 & 1 & 1\\ 20 & -10 & 0 & 0\\ 30 & 0 & -10 & 0\\ 40 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}-9 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_2=2x_1,\\ x_3=3x_1,\\ x_4=4x_1,\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\eta}$，其中 k 为任意常数.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解　见数学一中题 5.

数学三

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为_____.

答　秩为 2.

解析

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2\\&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3\\&=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 又由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

可知 $R(\boldsymbol{A})=2$，因此该二次型的秩也是 2.

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有

(a) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$.　(b) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(c) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　(d) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

答　选(d).

解析　因为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，所以存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$，于是 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{PBQ}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{Q}|$. 又由矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 可逆知 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$，$|\boldsymbol{Q}|\neq 0$，从而当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时必有 $|\boldsymbol{B}|=0$. 故选(d).

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程

组 $AX=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系：

(a) 不存在. (b) 仅含一个非零解向量.

(c) 含有两个线性无关的解向量. (d) 含有三个线性无关的解向量.

答 选(b).

解析 首先，由 A 的伴随矩阵 $A^{*}\neq 0$ 可知 $R(A)\geqslant n-1$. 其次，由于 ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的互不相等的解，从而对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\xi_1-\xi_2$，$\xi_1-\xi_3$ 等，于是 $R(A)<n$. 由这两个不等式可得 $R(A)=n-1$，因此齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系所含的非零解向量的个数为 $n-R(A)=1$. 故选(b).

4. 设 $\alpha_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$. 试讨论当 a，b 为何值时，

(1) β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示；

(2) β 可由 α_1，α_2，α_3 惟一地线性表示，并求出表示式；

(3) β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，但表示式不惟一，并求出表示式.

解 设有数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta. \tag{11}$$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，对矩阵 (A,β) 施以行初等变换，有

$$(A,\beta)=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & a+2 & -b-2 & 3\\ 0 & -3a & a+2b & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & a-b & 0\end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a=0$，b 为任意常数时，有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -b & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

可知 $R(A)\neq R(A,\beta)$. 故方程组(11)无解，β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示.

(2) 当 $a\neq 0$，且 $a\neq b$ 时，$R(A)=R(A,\beta)=3$，故方程组(11)有惟一解

$$k_1=1-\frac{1}{a},\quad k_2=\frac{1}{a},\quad k_3=0,$$

则 β 可由 α_1，α_2，α_3 惟一地线性表示，其表示式为

$$\beta=\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2.$$

(3) 当 $a=b\neq 0$ 时，对 (A,β) 施以初等行变换，有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1-\dfrac{1}{a}\\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

可知 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$，故方程组(1)有无穷多解，其全部解为

$k_1=1-\dfrac{1}{a}$，$k_2=\left(\dfrac{1}{a}+c\right)$，$k_3=c$，其中 c 为任意常数.

$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不惟一，其表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\frac{1}{a}+c\right)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3.$$

5. 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

(2) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

解　(1) ① 当 $b\neq 0$ 时，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=(1-b)$.

对于 $\lambda_1=1+(n-1)b$，设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1$，则

$$\begin{bmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1=[1+(n-1)b]\boldsymbol{\xi}_1,$$

解得 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，所以全部特征向量为

$k\boldsymbol{\xi}_1=k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$　(k 为任意非零常数).

对于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=(1-b)$，解齐次线性方程组 $[(1-b)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由

$$(1-b)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

$\cdots \quad \cdots$

$$\boldsymbol{\xi}_n=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}.$$

故全部特征向量为

$k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3+\cdots+k_n\boldsymbol{\xi}_n$ （$k_2,\cdots,k_n$ **是不全为零的常数**）.

② **当** $b=0$ **时，特征值** $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$，**任意非零列向量均为特征向量.**

（2）① **当** $b\neq 0$ **时，**$\boldsymbol{A}$ **有** n **个线性无关的特征向量，另** $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$，**则**

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{1+(n-1)b,1-b,\cdots,1-b\}.$$

② **当** $b=0$ **时，**$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，**对任意可逆矩阵** $\boldsymbol{P}$ **均有**

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}.$$

注：$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ **也可由求解齐次线性方程组**$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ **得出.**

数学四

1. **设** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，**其中** $\boldsymbol{P}$ **为三阶可逆矩阵，则** $\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=$_____.

答 $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

解析 **因为** $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，**且** $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，**所以**

$$\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2004}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^4)^{501}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2$$

$$=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

2. **设** $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ **是实正交矩阵，且** $a_{11}=1$，$\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，**则线性方程组** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **的解是**_____.

答 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

解析 **由于** $\boldsymbol{A}$ **是实正交矩阵，从而** $\boldsymbol{A}$ **可逆，于是**

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=(1,a_{12},a_{13})^{\mathrm{T}}.$$

又由 $\boldsymbol{A}$ **的行向量是单位向量可得** $1^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1$，**于是** $a_{12}=a_{13}=0$，**从而** $\boldsymbol{X}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有

(a) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$.　(b) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(c) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　(d) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

答　选(d).

解析　见数学三中题 2.

4. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1, \end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解. 试求

(1) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

(2) 该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解　将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$. 对方程组的增广矩阵施以初等行变换，得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

因 $R(\overline{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=3<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因 $R(\overline{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=2<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

(2) 当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时,由于 $x_2=x_3$,即

$$-\frac{1}{2}+k=\frac{1}{2}-k.$$

解得 $k=\frac{1}{2}$,方程组的解为

$$\boldsymbol{\xi}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,由于 $x_2=x_3$,即

$$1-3k_1-2k_2=k_1.$$

解得 $k_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k_2$,故全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)^{\mathrm{T}}+k_2\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_2 为任意常数.

注:在题(2)中,当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,解得 $k_2=\frac{1}{2}-2k_1$ 时,全部解也可以表示为

$$\boldsymbol{\xi}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}+k_1(3,1,1,-4)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1 为任意常数.

5. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 因为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个.由题设可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量.

由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 可知,$|\boldsymbol{A}|=0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值 $\lambda_3=0$.

设 $\lambda_3=0$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,则有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$,$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$,即

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

解得此方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.即 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $c\boldsymbol{\alpha}=c(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$($c$ 为不为零的任意常数).

(2) 令矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$.

又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}.$$

2005 年研究生入学考试试题精解
（线性代数）

数学一

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，　$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$.

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

答　$|\boldsymbol{B}|=2$.

解析

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal{c_2-c_1} |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal{c_3-3c_2} |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1| \\
&\xlongequal{c_1-c_3} |\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1| \\
&\xlongequal{c_2-c_1} |\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1| \\
&\xlongequal{c_1-\frac{1}{2}c_2} |\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=2|\boldsymbol{A}|=2
\end{aligned}
$$

2. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(a) $\lambda_1\neq 0$.　　(b) $\lambda_2\neq 0$.　　(c) $\lambda_1=0$.　　(d) $\lambda_2=0$.

答　选(b).

解析　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，若 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，则必有 $\lambda_2\neq 0$. 否则，$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是线性相关的，有矛盾. 反之，若 $\lambda_2\neq 0$，设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=0$，有 $(k_1+k_2\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=0$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是属于不同特征值的特征向量知 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以有 $k_1+k_2\lambda_1=0$ 且 $k_2\lambda_2=0$. 由 $\lambda_2\neq 0$ 即知 $k_1=k_2=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 综上所述，即知本题应选(b).

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

(a) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(b) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B^*.

(c) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-B^*$.

(d) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-B^*$.

答　选(c).

解析　由已知得 $B=P(1,2)A$,其中 $P(1,2)$ 是交换 n 阶单位阵 E 的第 1 行与第 2 行得到的初等阵,且 $|P(1,2)|=-|E|=-1$. 于是

$$B^*=|B|\cdot B^{-1}=|P(1,2)A|(P(1,2)A)^{-1}=|P(1,2)|\cdot|A|\cdot A^{-1}\cdot P(1,2)$$

$$=-|A|\cdot\frac{1}{|A|}\cdot A^*\cdot P(1,2)=-A^*\cdot P(1,2),$$

即:矩阵 $-B^*$ 是交换矩阵 A^* 的第 1 列与第 2 列得到的.

4. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求正交变换 $X=QY$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(Ⅲ) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

答　(Ⅰ) 由于二次型 f 的秩为 2,对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 的秩为 2,所以有 $\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=-4a=0$,得 $a=0$.

(Ⅱ) 当 $a=0$ 时,$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\lambda$,可知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

A 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的线性无关的特征向量为:$\eta_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\eta_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

A 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 的线性无关的特征向量为:$\eta_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

易见 η_1,η_2,η_3 两两正交. 将 η_1,η_2,η_3 单位化得 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$e_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,$e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,取 $Q=(e_1,e_2,e_3)$,则 Q 为正交矩阵.

令 $X=QY$,得 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=2y_1^2+2y_2^2$.

(Ⅲ) 解法 1　在正交变换 $X=QY$ 下 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 化成 $2y_1^2+2y_2^2=0$,解之得 $y_1=y_2=0$,从而

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}0\\0\\y_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}0\\0\\y_3\end{pmatrix}=y_3\boldsymbol{e}_3=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

解法 2 由于 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$,所以

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$$

其通解为 $\boldsymbol{X}=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

5. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$,又由 a,b,c 不全为零,可知 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$.

当 $k\neq 9$ 时,$R(\boldsymbol{B})=2$,于是 $R(\boldsymbol{A})=1$;

当 $k=9$ 时,$R(\boldsymbol{B})=1$,于是 $R(\boldsymbol{A})=1$ 或 $R(\boldsymbol{A})=2$.

对于 $k\neq 9$,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=(3,6,k)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,于是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

对于 $k=9$ 分别就 $R(\boldsymbol{A})=2$ 和 $R(\boldsymbol{A})=1$ 进行讨论.

如果 $R(\boldsymbol{A})=2$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由一个向量构成,又因为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=c_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,其中 c_1 为任意常数.

如果 $R(\boldsymbol{A})=2$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个向量构成,又因为 $\boldsymbol{A}$ 的第一行为 (a,b,c),且 a,b,c 不全为零,所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 等价于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$. 不妨设 $a\neq 0$. $\boldsymbol{\eta}_1=(-b,a,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=(-c,0,a)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解,故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

数学二

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，　$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$.

如果$|\boldsymbol{A}|=1$，那么$|\boldsymbol{B}|=$_____.

答　$|\boldsymbol{B}|=2$.

解析　见数学一中题 1.

2. 设λ_1,λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是

(a) $\lambda_1\neq 0$.　(b) $\lambda_2\neq 0$.　(c) $\lambda_1=0$.　(d) $\lambda_2=0$.

答　选(b).

解析　见数学一中题 2.

3. 设$\boldsymbol{A}$为$n(n\geqslant 2)$阶可逆矩阵，交换$\boldsymbol{A}$的第 1 行与第 2 行得矩阵$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的伴随矩阵，则

(a) 交换$\boldsymbol{A}^*$的第 1 列与第 2 列得矩阵$\boldsymbol{B}^*$.

(b) 交换$\boldsymbol{A}^*$的第 1 行与第 2 行得矩阵$\boldsymbol{B}^*$.

(c) 交换$\boldsymbol{A}^*$的第 1 列与第 2 列得矩阵$-\boldsymbol{B}^*$.

(d) 交换$\boldsymbol{A}^*$的第 1 行与第 2 行得矩阵$-\boldsymbol{B}^*$.

答　选(c).

解析　见数学一中题 3.

4. 确定常数a，使向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$线性表示，但向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

解法 1　记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，由于$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，故$R(\boldsymbol{A})<3$，从而$|\boldsymbol{A}|=-(a-1)^2(a+2)=0$，所以$a=1$或$a=-2$.

当$a=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，但$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，所以$a=1$符合题意.

当$a=-2$时，由于

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&-6&0&3&-3\\0&0&0&0&-3&3\end{bmatrix},$$

考虑线性方程组$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_2$，因为秩$R(\boldsymbol{B})=2$，秩$R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha}_2)=3$，所以方程组$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_2$无解，即$\boldsymbol{\alpha}_2$不能由$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，与题设矛盾. 因此$a=1$.

解法 2 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$施行初等行变换：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&0&4+2a&3a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&-(a-1)(a+2)&0&3a+6&4a+2\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $R(\boldsymbol{A})<3$，因此 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-2&-2\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-2&-2\\0&0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0&-3\end{bmatrix},$$

考虑线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}_2$. 由于 $R(\boldsymbol{A})=1$，秩 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_2)=2$，故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}_2$ 无解，所以 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 另一方面，由于 $|\boldsymbol{B}|=-9\neq0$，故 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 有惟一解，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&1&-2&1&-2&-2\\1&-2&1&1&-2&-2\\-2&1&1&-2&4&-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&-2&-2\\0&-3&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-6\end{bmatrix},$$

考虑线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_2$.

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}1&-2&-2&1\\1&-2&-2&-2\\-2&4&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&1\\0&0&0&-3\\0&0&-6&0\end{bmatrix},$$

由于秩 $R(\boldsymbol{B})=2$，秩 $R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha}_2)=3$，故方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 无解，即 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，与题设矛盾. 因此 $a=1$.

5. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解　见数学一中题 5.

数学三

1. **设行向量组**$(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$**线性相关，且** $a\neq1$**，则** $a=$_____.

答　$a=\frac{1}{2}$.

解析　**由行向量组**$(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$**线性相关可得**

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-a&a\\0&1&1&-1\\0&0&2a-1&2-2a\\0&0&0&a-1\end{vmatrix}=(2a-1)(a-1)=0$$

从而 $a=\frac{1}{2}$**或** $a=1$**. 又已知** $a\neq1$**，故只有** $a=\frac{1}{2}$.

2. **设矩阵** $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ **满足** $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$**，其中** $\boldsymbol{A}^*$ **为** $\boldsymbol{A}$ **的伴随矩阵，**$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **为** $\boldsymbol{A}$ **的转置矩阵. 若** a_{11},a_{12},a_{13} **为三个相等的正数，则** a_{11} **为**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(b) 3.　　(c) $\frac{1}{3}$.　　(d) $\sqrt{3}$.

解　选(a).

解析　**由** $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **可得，**$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$**，于是** $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|$**，即** $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^3$**，从而** $|\boldsymbol{A}|=0$ **或** $|\boldsymbol{A}|=1$**. 若** $|\boldsymbol{A}|=0$ **则由** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ **可得，**$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=0$**，从而** $a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$**，与已知** a_{11},a_{12},a_{13} **为正数矛盾，所以只可能** $|\boldsymbol{A}|=1$**. 再次由** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ **可得** $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=|\boldsymbol{A}|$**，即** $3a_{11}^2=1$**，故** $a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. **设** λ_1,λ_2 **是矩阵** $\boldsymbol{A}$ **的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$**，则** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$**线性无关的充分必要条件是**

(a) $\lambda_1=0$.　　(b) $\lambda_2=0$.　　(c) $\lambda_1\neq0$.　　(d) $\lambda_2\neq0$.

答　选(d).

解析　**见数学一中题** 2.

4. **已知齐次线性方程组**

$$(\mathrm{i})\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0,\end{cases}$$

$$(\text{ⅱ})\begin{cases} x_1+ bx_2+ cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0, \end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

解　方程组(ⅱ)的未知量个数大于方程的个数，故方程组(ⅱ)有无穷多个解. 因为方程组(ⅰ)与(ⅱ)同解，所以方程组(ⅰ)的系数矩阵的秩小于 3.

对方程组(ⅰ)的系数矩阵施以行初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix},$$

从而 $a=2$.

此时，方程组(ⅰ)的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(ⅰ)的一个基础解系.

将 $x_1=-1,x_2=-1,x_3=1$ 代入方程组(ⅱ)可得 $b=1,c=2$ 或 $b=0,c=1$.

当 $b=1,c=2$ 时，对方程组(ⅱ)的系数矩阵施以行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

故方程组(ⅰ)与(ⅱ)同解.

当 $b=0,c=1$ 时，方程组(ⅱ)的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故方程组(ⅰ)与(ⅱ)的解不相同.

综上所述，当 $a=2,b=1,c=2$ 时，方程组(ⅰ)与(ⅱ)同解.

5. 设 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(Ⅰ) 计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}$；

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

解 （Ⅰ）因 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}.$$

（Ⅱ）矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵.

由（Ⅰ）的结果可知，矩阵 $\boldsymbol{D}$ 合同于矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$. 又 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵，可知矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为正定矩阵.

因矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为对称矩阵，故 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为对称矩阵. 对 $\boldsymbol{X}=\underbrace{(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}}_{m}$ 及任意的 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，有 $[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}>0$，即 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}>0$. 故 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为正定矩阵.

数学四

1. 设行向量组$(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$线性相关，且 $a\neq1$，则 $a=$_____.

答 $a=\dfrac{1}{2}$.

解析 见数学三中题 1.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记三阶矩阵

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，　$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$.

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

答 $|\boldsymbol{B}|=2$.

解析 见数学一中题 1.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为

(a) $\boldsymbol{E}$.　　(b) $-\boldsymbol{E}$.　　(c) $\boldsymbol{A}$.　　(d) $-\boldsymbol{A}$.

答 选(a).

解析 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，可得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，可得 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$. 于是 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 所以 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 故选(a).

4. 已知齐次线性方程组

(ⅰ) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \end{cases}$

(ⅱ) $\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0, \end{cases}$

同解，求 a,b,c 的值.

解　见数学三中题 4.

5. 设 A 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad A\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad A\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(Ⅰ) 求矩阵 B，使得 $A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)B$；

(Ⅱ) 求矩阵 A 的特征值；

(Ⅲ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解　(Ⅰ) 由题设条件，有 $A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$，可知 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$.

(Ⅱ) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量，可知矩阵 $C=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，所以 $C^{-1}AC=B$，即矩阵 A 与 B 相似. 由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值. 由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

得矩阵 B 的特征值，也即矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

(Ⅲ) 对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(E-B)X=0$，得基础解系 $\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$；

对应于特征值 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组 $(4E-B)X=0$，得基础解系 $\xi_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令矩阵 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$.

因 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=(CQ)^{-1}A(CQ)$，记矩阵

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),$$

故 P 即为所求的可逆矩阵.

参 考 文 献

1. 同济大学应用数学系《线性代数》编写组编. 线性代数. 第 2 版. 上海:同济大学出版社,2003
2. 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编. 高等代数. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,1988
3. 刘昌堃,叶世源,叶家琛,陈承东编. 高等代数. 上海:同济大学出版社,1995
4. 同济大学数学教研室编. 线性代数. 北京:高等教育出版社,1991