硕士研究生入学考试
数学复习与解题指南
（上册）

同 济 大 学 应 用 数 学 系
徐建平 蒋福民 范麟馨 钱伟民 编

同济大学出版社

硕士研究生入学考试
数学复习与解题指南
（上册）

同　济　大　学　应　用　数　学　系

徐建平　蒋福民　范麟馨　钱伟民　编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学复习与解题指南/徐建平编.
上海:同济大学出版社,2005.5
ISBN 7-5608-3011-0

Ⅰ.硕… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 008006 号

内容提要

本书由高等数学、线性代数和概率统计三部分组成。书中按教育部最新颁布的考研大纲对各部分的重要概念和基本定理(定理和公式)作了系统的归纳和提炼,着重讨论基本题型与解题方法,并对部分例题进行了详尽的分析和总结,以拓宽读者的思路,提高他们的分析能力。

本书从历届考题中筛选了近 700 道典型例题,选辑了 100 多道习题,并附有简答。书末录入近两年硕士入学考试数学试题及参考解答。本书可供报考硕士研究生的读者作为复习数学使用,也可作为高等院校师生的数学教学参考书。

硕士研究生入学考试
数学复习与解题指南(上册)
同济大学应用数学系
徐建平 蒋福民 范麟馨 钱伟民 编
责任编辑 李炳钊 责任校对 郁 峰 封面设计 李志云

出版发行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经销	全国各地新华书店
印刷	同济大学印刷厂印刷
开本	889mm×1194mm 1/16
印张	18.25
字数	584 000
印数	1—4100
版次	2005 年 5 月第 1 版 2005 年 5 月第 1 次印刷
书号	ISBN 7-5608-3011-0/O·267
定价	20.00.元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

前　言

随着我国高等教育事业的迅速发展，越来越多的人接受了高等教育，他们中的许多人都希望获得更高的学历，而我国四个现代化事业的蓬勃发展也需要更多更高层次的人才。正是因为个人的追求与国家的需要相一致，所以近年来报考硕士研究生的人数在逐年增加，2005年已突破100万。数学是一门重要的基础课，广大考生最关心的问题便是怎样按照考试大纲进行复习，提高复习效果，从而取得理想的考试成绩。要达到这一点，首先必须要了解考试大纲中所规定的内容，分清哪些是主要的，哪些是次要的，这些内容在深度和广度上要求达到什么程度。其次要熟悉试卷中经常出现的题型，以及一些典型的甚至比较特殊的解题方法，这样，才能通过复习，深刻理解概念，牢固掌握解题方法，并在考试中付诸实践，从而取得好成绩。

为满足考生的需要，我们认真总结了近十年来所举办的考研复习辅导班积累的经验和资料，深入研究了历年来考试题型的结构、形式和特点，按照教育部新近颁布的数学考研大纲，编写了这本书。它不仅对报考研究生的人员是一本有用的辅导材料，对正在本科阶段学习高等数学、线性代数和概率统计的学生同样也是一本有价值的参考书。这不仅因为本书的内容与所选的例题、习题与在普通高校中使用很广的由同济大学应用数学系所编写、高等教育出版社出版的《高等数学》（第五版）和《线性代数》（第四版）有很好的衔接，而且因为本书所总结的题型和解题方法对本科生学好高等数学和线性代数以及概率统计也大有裨益。

本书的编写突出一个宗旨：应试针对性强，力求使考生通过较短时间的复习，能达到考试大纲所规定的要求，并掌握一整套常用的基本解题方法。

本书由"高等数学"、"线性代数"和"概率统计"三个部分组成，具备以下几个特色：(1)吸收了历届试卷中经常出现的典型考题，并进行分析解答；(2)许多章节对基本题型和解题方法作了总结归纳，便于学生总结提高；(3)指出解题中容易出错的地方，了解命题意图或考生容易误入的"陷阱"；(4)高等数学各章均包含一定数量的习题及简答，做好这些习题，有利于提高考生解题的基本功；线性代数和概率统计最后都安排了一些综合练习题，并附有简答，旨在提高考生的综合解题能力。

本书每章开头有复习要求、基本概念和理论，目的是帮助考生掌握好各章的内容。复习要求中对理论部分的要求分“了解”和“理解”两档，理解高于了解；对运算部分的要求分“会”、“掌握”和“熟练掌握”三档。本书录入2005年硕士研究生入学考试数学试题参考答案及评分标准，供考生参考。

本书由同济大学应用数学系徐建平、蒋福民、范麟馨、钱伟民等编写，由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请同行批评指正。

编者

2005.1.28

目　　录

高等数学

高等数学

根据教育部最新颁布的全国工学硕士研究生入学数学考试大纲，高等数学在数学(试卷一)中占 60%，因此，对于每个考生来说，只有全面地、系统地复习高等数学，才能在数学考试中取得优异的成绩。

然而，高等数学知识点多，内容繁杂，要在较短时间内进行全面复习，的确不容易做到。为了对考生进行有力指导，我们在认真研究考试大纲、全面分析全国多年来的统考考题的基础上，根据编著者在辅导过程中积累的经验和资料，编写了这部分内容。

高等数学部分的主要特色是：精选和归纳了较多数量的典型例题，并作了详尽的分析和解答. 这些例题充分反映了最近几年来研究生考题的水平和动向，考生只要认真学习该部分内容，注意以微积分为主线，从根本上加强对基本概念和理论的理解，以利拓宽解题思路，通过例题和综合练习，可以提高分析问题、解决问题的能力和提高解题技巧。

第一章　函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象，极限理论是微分学与积分学的基础，因此这一章的内容相当重要．虽然在历年的试卷中以求极限而单独命题的题型所占比例不大，但在以后各章的内容中都可以揉入极限问题．因此，本章在介绍求极限的方法时，没有拘泥于课程章节的顺序，而是把后几章中有关极限的问题也归纳其中．

一、复习与考试要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式．

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．

(3) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形．

(5) 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系．

(6) 掌握极限的性质及四则运算法则．

(7) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法．

(8) 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．

(9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型．

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质．

二、基本概念与理论

1．函数

(1) 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，如果在某种对应法则下使得每个 $x \in D$，有惟一的数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$ 或者 $y = y(x)$．D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域．

(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$．如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界．如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界．

(3) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$．如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),\ (f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(减少)的．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．

(4) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．如果对于任一 $x \in D$，

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数(奇函数)．

(5) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D．如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x \in D$，有 $x \pm l \in D$，且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期．

(6) 设函数 $f: D \to f(D)$，对每个 $y \in f(D)$，有惟一的 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，于是有

$$f^{-1}(y) = x$$

其中 $f^{-1}: f(D) \to D$ 称为函数 f 的反函数.

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D) \subset D_1$，则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D$$

称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

(7) 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及其反三角函数统称基本初等函数. 由常数、基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的能用一个算式表示的函数称为初等函数.

2. 极限

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，是指对任意给定的正数 ε，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，就有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内有定义，当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 的极限为 A，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，是指对任意给定的正数 ε，存在正数 δ，当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $|x| > X_0$ 上有定义，当 x 趋于 ∞ 时，$f(x)$ 的极限为 A，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，是指对任意给定的正数 ε，存在正数 $X(X > X_0)$，当 x 满足 $|x| > X$ 时，就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(4) 如果 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左邻域内有定义，且当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 的极限为 A，就称 A 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左极限，记为

$$f(x_0^-) = A \qquad \text{或者} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

类似地有右极限 $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 的概念.

下面给出的判别极限存在的充分条件是重要的.

(5) 单调有界准则

① 若数列 $\{a_n\}$ 自某项起单调增(减)，且 a_n 有上界(下界)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；

② 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左(右)邻域内或在 $|x| > X(X > 0)$ 时，单调且有界，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ x\to -\infty}} f(x)$ ($\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ x\to +\infty}} f(x)$)存在.

(6) 夹逼准则

① 若自某项起有 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$；

② 若在某个区间内有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$(这里 $\lim$ 可以是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}$，$\lim\limits_{x\to +\infty}$，$\lim\limits_{x\to -\infty}$ 等等).

(7) 极限存在的充要条件，经常用到的有以下几个：

① $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a$，当且仅当对每一子序列 a_{n_k}，有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$；

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$，或当且仅当每一数列 $x_n \to x_0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$；

③ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$，或当且仅当每一数列 $x_n \to \infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

熟记以下极限是很有用的：

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$； ② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$； ④ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$；

⑤ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$； ⑥ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$；

⑦ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^p x = 0$； ⑧ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^p x}{x} = 0$.

(8) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 是 $\underset{(x\to\infty)}{x \to x_0}$ 时的无穷小量；若 $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} f(x) = \infty$，则称 $f(x)$ 是 $\underset{(x\to\infty)}{x \to x_0}$ 时的

无穷大量.

若 $\lim\alpha=0,\lim\beta=0$，且 $\alpha\neq0$，当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ 时，则称 β 是 α 的高阶无穷小量，记为 $\beta=o(\alpha)$；当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq0,\infty)$ 时，称 β 与 α 是同阶的无穷小量，可记为 $\beta=O(\alpha)$；当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就称 β 与 α 是等价的无穷小量，常记为 $\beta\sim\alpha$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，当且仅当 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

等价无穷小量的代换性质：若 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

因此，在极限运算中，下列是常用的等价无穷小：

当 $x\to0$ 时，有

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq0)$；$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq1)$.

3. 函数的连续性

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续，x_0 是 $f(x)$ 的连续点：

以下是等价的：

① $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续；

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 x 满足：$|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;$$

③ 当增量 $\Delta x\to0$ 时，增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是无穷小量；

④ $f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$.

(2) 有界闭区间上的连续函数的性质：

① 有界性及最大最小值可达性：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[a,b]$；且存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$；

② 介值性：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)<f(x_2)$，则对每一个介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的数 μ：$f(x_1)<\mu<f(x_2)$，必有介于 x_1 与 x_2 之间的点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$.

③ 零点存在定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

(3) 函数的间断点

若 $x=x_0$ 不是 $f(x)$ 的连续点，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 均存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 特别地，$f(x_0^+)=f(x_0^-)$ 时，x_0 是可去间断点；$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$ 时，x_0 是跳跃间断点.

若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 至少有一不存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

三、基本题型与解题方法

1. 函数

例 1-1　试求下列函数的定义域：

1) $f(x)=\lg(1-\lg x)$；　　2) $f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解　1) 要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足

$$x>0\quad\text{且}\quad1-\lg x>0,$$

即

$$0<x<10,$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,10)$.

2) 要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足

$$-1 \leqslant \frac{x}{[x]} \leqslant 1 \quad \text{且} \quad [x] \neq 0,$$

而
$$x-1<[x] \leqslant x$$

当 $x<0$ 时，$0<\frac{x}{[x]} \leqslant 1$；

当 $0 \leqslant x<1$ 时，$\frac{x}{[x]}$ 无意义；

当 $x \geqslant 1$ 时，$1 \leqslant \frac{x}{[x]}$.

最后一个不等式的等号仅当 $x \in N$ 时成立，故 $f(x)$ 定义域为$\{x \mid x<0$ 或 $x=1,2,3,\cdots\}$.

例 1-2 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解 为了求 $f(x-2)$，先求 $f(x)$，给出求 $f(x)$ 的两种方法：

方法 1
$$f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2,$$

所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2,\ f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4.$$

方法 2 令 $x=t-2$，代入得
$$f(t)=2^{t^2-4}-t+2,$$

所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2.$$

$$\begin{aligned} f(x-2) &= 2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2 \\ &= 2^{x^2-4x}-x+4. \end{aligned}$$

例 1-3 设
$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x \geqslant 0; \\ -e^x, & x<0.\end{cases} \quad \varphi(x)=\ln x.$$

(1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；(2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗？

解 (1) 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(-\infty,+\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x), & \varphi(x) \geqslant 0; \\ -e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<0.\end{cases}$$

即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x \geqslant 1; \\ -x, & 0<x<1.\end{cases}$$

从上式可看出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是$(0,+\infty)$.

(2) 由于 $f(x)$ 的值域是$(-\infty,0)$，$\varphi(x)$ 的定义域是$(0,+\infty)$，它们无公共的部分，所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

例 1-4 设
$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x|>1;\end{cases} \quad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x| \leqslant 1, \\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

求：(1) $\varphi[\varphi(x)]$；(2) $\varphi[\psi(x)]$.

解 (1) 因为当 $x \in(-\infty,+\infty)$ 时，$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$，
$$\varphi[\varphi(x)] \equiv 1, \quad x \in(-\infty,+\infty).$$

(2) 因为
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |\psi(x)| \leqslant 1, \\ 0, & |\psi(x)|>1\end{cases}$$

而仅当
$$|x|=1\text{ 时},\psi(x)=1;$$
$$|x|\neq 1\text{ 时},1<\psi(x)\leqslant 2.$$

故
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$$

易知 $\varphi[\psi(x)]$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

例 1-5　试说明 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

是一个初等函数.

解　因为 $f(x)=1-|x-1|$

$$=1-\sqrt{(x-1)^2},\quad x\in[0,2].$$

所以由初等函数的定义知 $f(x)$ 是一个初等函数.

例 1-6　求 c 的一个值,使

$$(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(a+c)=0,$$

这里 $b>a$,均为常数.

解　令 $f(x)=x\sin x$,

则 $f(x)$ 是一个偶函数,依题意即求 c 使

$$f(b+c)=f(a+c)$$

成立,$a\neq b$.

所以
$$a+c=-(b+c),\quad c=-\frac{1}{2}(a+b).$$

例 1-7　求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$;　(2) $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 3^x, & x>2.\end{cases}$

解　(1) 所给函数的定义域及值域分别是$[-\sqrt{2}/2,1]$, $[0,\sqrt{3\pi}]$. 由 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 解得

$$x=\sin\frac{1}{4}(y^2-\pi),$$

故 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数为

$$y=\sin\frac{1}{4}(x^2-\pi),\quad x\in[0,\sqrt{3\pi}].$$

(2) 当 $x<1$ 时,$y=x$.

故反函数为

$$y=x,\quad x\in(-\infty,1).$$

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^3$,

故反函数为

$$y=\sqrt[3]{x},\quad x\in[1,8].$$

当 $x>2$ 时,$y=3^x$,

故反函数为

$$y=\log_3 x,\quad x\in(9,+\infty).$$

综上所述,所求的反函数为

$$y=\begin{cases}x, & x<1;\\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 8,\\ \log_3 x, & x>9.\end{cases}$$

例 1-8 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$，

则
$$f(0)=a_0=1,\quad f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_8=1.$$

比较原等式两边 x^8 的系数得 $a_8=2^8$.

故
$$a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0-a_8=-256.$$

例 1-9 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 因为对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(x+c)=-f(x),$$

所以对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x),$$

故 $f(x)$ 是周期函数.

例 1-10 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,$$

证明 $F(x)=f(x)+x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

证 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_2>x_1$，那么由题给条件有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1,$$

而
$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<x_2-x_1,$$

所以
$$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2,$$

从而 $F(x_1)<F(x_2)$，故 $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

2. 极限

求数列与函数的极限的方法很多，我们归纳一下，有如下方法.

因为在考卷中所出现的极限题，一般是一些不定型极限，其主要形式为

$\frac{0}{0}$； $\frac{\infty}{\infty}$； $0,\infty$； $\infty\pm\infty$；$(1+0)^{\infty}$； ∞^0； 0^0 等，故

(1) 利用初等运算如因式分解，分子及分母有理化，分子和分母同除以一因子来消除不定因子；

(2) 利用单调有界数列必有极限、夹逼准则两个极限判别准则来证明极限的存在，进而求之；

(3) 利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 及$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；

(4) 利用等价无穷小的替换(这是最常用，计算效率最高的一种方法)；

(5) 利用洛必塔法则；

(6) 利用定积分的定义；

(7) 利用级数收敛的必要条件.

希望读者通过下面大量的例子从中体会这些方法.

(1) 用定义求极限

例 1-11 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-6n}{3+2n}=-3$，

证 $\left|\frac{1-6n}{3+2n}+3\right|=\frac{10}{3+2n}<\frac{5}{n}$，

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，必有

$$\left|\frac{1-6n}{3+2n}+3\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-6n}{3+2n}=-3.$$

例 1-12　用定义证明极限

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}=-4.$$

证　因为

$$\left|\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}+4\right|=\frac{3|x-2|}{|x-1|},$$

取 $\delta_1=\frac{1}{2}$**,令** $0<|x-2|<\frac{1}{2}$**,这时**

$$|x-1|=|(x-2)+1|\geqslant 1-|x-2|>\frac{1}{2},$$

从而当 $0<|x-2|<\frac{1}{2}$ **时,**

$$\frac{3|x-2|}{|x-1|}<6|x-2|$$

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$**,取** $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{\varepsilon}{6}\right\}$**,当** $0<|x-2|<\delta$ **时,必有**

$$\left|\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}+4\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}=-4.$$

例 1-13　用极限定义证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A.$$

证　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$**,存在** $N_1>0$**,当** $n>N_1$ **时,有**

$$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而当 $n>N_1$ **时,**

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-A\right|\\ \leqslant&\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}-N_1A}{n}\right|+\left|\frac{(x_{N_1+1}-A)+\cdots+(x_n-A)}{n}\right|\\ <&\frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{2n}\varepsilon\quad(M=|x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}-N_1A|)\\ <&\frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

取 $N=\max\left\{N_1,\left[\frac{2M}{2\varepsilon}\right]\right\}$**,当** $n>N$ **时,**

$$\frac{M}{n}<\frac{\varepsilon}{2},\quad |x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由当 $n > N$ 时，必有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - A\right| < \varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A.$$

小结　用极限定义证明极限，通常是把数列的项或函数与极限的差的绝对值适当放大（把表达式简化），从而求出所满足条件的 N 或 δ.

（2）**用初等运算的方法求极限**

例 1-14　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^4-4x^2+3}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+1)^{30}(9x+2)^{20}}{(6x-1)^{50}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^4-4x^2+3} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2-3)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{(x+1)(x^2-3)} = \dfrac{1}{2}$.

（2）$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+1)^{30}(9x+2)^{20}}{(6x-1)^{50}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{x}\right)^{30}\left(9+\frac{2}{x}\right)^{20}}{\left(6-\frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{4^{30}\cdot 9^{20}}{6^{50}} = \frac{2^{10}}{3^{10}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

（3）$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x^2)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{6}}+(1-x)^{\frac{1}{6}}} = \frac{3}{2}.$$

（4）**方法 1**　令 $x = \dfrac{1}{y}$.

原式$$= \lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-2\sqrt{1+y}+1}{y} = \lim_{y\to0^+}\left[\frac{\sqrt{2y+1}-1}{y}+\frac{2(1-\sqrt{1+y})}{y}\right] = 1-1 = 0.$$

方法 2　**原式**$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}[(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2-4(x+1)]}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2} = 0.$$

例 1-15　设 $x_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$.

解　$x_n = \dfrac{2-1}{2}\cdot\dfrac{3-1}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n}$，

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

例 1-16　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \dfrac{1}{2}$.

例 1-17　设 $x_n = \dfrac{2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{5^n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　$x_n = \dfrac{2+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-1/3^n}{1-1/3}}{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1-1/5^n}{1-1/5}}$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-1/3^n}{1-1/3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1-1/5^n}{1-1/5}\right)}=\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=10.$$

例 1-18　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\arctan(n!)\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)\frac{3n^2+1}{n^2-1}\right]$.

解　$|\arctan(n!)|\leqslant\frac{\pi}{2}$,

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\arctan(n!)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=0.$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1}=3,$$

故　**原式**$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2\arctan(n!)]-\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1}=-3.$

例 1-19　设 $x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,**试证数列**$\{x_n\}$**极限存在,并求此极限.**

证　**由** $x_1=10$ **及** $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ **知** $x_1>x_2$. **设对某正整数** k **有** $x_k>x_{k+1}$,**则有**

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知,对一切正整数 n,**都有** $x_n>x_{n+1}$,**即**$\{x_n\}$**为单调减少数列. 又显见** $x_n>0$,$(n=1,2,\cdots)$,**即**$\{x_n\}$**有下界,根据极限存在准则知**$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$**存在.**

再设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,**则有** $a=\sqrt{6+a}$ **成立. 从而** $a^2-a-6=0$. **解得** $a=3$, $a=-2$,**但因** $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,**所以** $a\geqslant0$,**舍去** $a=-2$,**得**$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

例 1-20　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$.

解　$\frac{1}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^6+kn}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\quad(n=1,2,\cdots,n)$,

所以
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}.$$

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)(n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}=\frac{1}{3}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)(n+1)}{6\sqrt{n^6+n}}=\frac{1}{3}$,

故
$$\text{**原式**}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}=\frac{1}{3}.$$

例 1-21　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

解　$1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n}$.

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$$

例 1-22 设 $x_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}$,求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

解 对每一个 k:$0\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n},$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{1+k}{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{1+k}{n}},$$

即
$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}\cdot\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\leqslant x_n\leqslant\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.$$

但
$$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}(n+1)(1-e^{\frac{1}{n}})=-1,\quad \lim_{n\to\infty}n(1-e^{\frac{1}{n}})=-1,$$

所以 $\lim_{n\to\infty}x_n=e-1$.

例 1-23 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$,证明$\{x_n\}$收敛.

证
$$x_{n+1}-x_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}>0\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以$\{x_n\}$单调增加.

又
$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以$\{x_n\}$有上界,故$\{x_n\}$收敛.

例 1-24 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\quad(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

解 由 $0<x_1<3$ 知 x_1 和 $3-x_1$ 均为正数,故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1)$,则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2}.$$

由数学归纳法知,对任意正整数 $n>1$ 均有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$,因而数列$\{x_n\}$有界.

又当 $n>1$ 时,

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant0,$$

因而有 $x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$,即数列$\{x_n\}$单调增加.

由单调有界数列必有极限知 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$,在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限,得

$$a=\sqrt{a(3-a)},$$

解之得 $a=\dfrac{3}{2}$，$a=0$(舍去). 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

例 1-25　证明 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

证　设 $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\ln n$,

则
$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

又
$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,$$

所以$\{x_n\}$单减,$\{y_n\}$单增. 由上题知$\{x_n\}$收敛.

例 1-26　设 $x_0=0$，$x_n=\sin\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+2)\quad(n=1,2,\cdots)$,试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证　$x_{n+1}-x_n=2\cos\left(\dfrac{x_n+x_{n-1}}{4}+1\right)\sin\dfrac{x_n-x_{n-1}}{4}$.

而
$$0<x_n=\sin\frac{1}{2}(x_{n-1}+2)<1\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以,
$$0<\frac{x_n+x_{n-1}}{4}\leqslant\frac{1}{2},$$

因而
$$\cos\left(\frac{x_n+x_{n-1}}{4}+1\right)>0,$$

又易验证
$$0<x_1-x_0<1,$$

所以
$$\sin\frac{x_1-x_0}{4}>0,$$

$$x_2-x_1>0,$$

从而
$$x_{n+1}-x_n>0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

即$\{x_n\}$单增且有上界,所以$\{x_n\}$收敛.

(3) 利用两个重要极限求极限.

例 1-27　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos5x}{x^2}$.

解　$\because\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{(3x)^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{9}{2}$,$\dfrac{1-\cos5x}{x^2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{(5x)^2}{2}}{x^2}=\dfrac{25}{2}$.

$\therefore$ 原式 $=-\dfrac{9}{2}+\dfrac{25}{2}=8$.

例 1-28　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{2x^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+e^x\sin^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解　(1) 原式$=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos2x-1)]^{\frac{1}{2x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{[1+(\cos2x-1)]^{\frac{1}{\cos2x-1}}\right\}^{\frac{(\cos2x-1)}{2x^2}}$.

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\cdot\frac{(\cos2x-1)}{2x^2}}=e.$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\mathrm{e}^x\sin^2 x)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x\sin^2 x}}\right]^{\frac{\mathrm{e}^x\sin^2 x}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^2$.

例 1-29 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}\quad(a_1,a_2,\cdots,a_n>0)$.

解 原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}nx\ln\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}nx\ln\left[\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}-1\right)+1\right]\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a_1^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+\frac{a_2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+\cdots+\frac{a_n^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right]\right\}$$

$$=\exp\{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n\}=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n.$$

(4) 综合其他方法求极限.

求极限还有其他方法,如等价无穷小的替换,以及后面的洛必塔法则,定积分的定义,级数收敛的必要条件等. 一般较复杂的极限的计算往往需要各种方法的综合. 下面的一些例子概括地说明了这些方法.

例 1-30 确定常数 a,b,c 的值,使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\quad(c\neq 0)$.

解 由于 $x\to 0$ 时,$ax-\sin x\to 0$,且极限 c 不为零,所以当 $x\to 0$ 时,$\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\to 0$,故必有 $b=0$. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c\quad(c\neq 0),$$

故必有 $a=1$,从而 $c=\dfrac{1}{2}$.

例 1-31 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

解 令 $t=x\ln x$,则 $x^x=\mathrm{e}^t$,原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}=1$.

注 本题也可用洛必塔法则求解.

例 1-32 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

解 由洛必塔法则,

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x}{\pi}\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{4}{\pi}.$$

例 1-33 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 先作代换 令 $t=\dfrac{1}{x}$. 再用洛必塔法则求极限.

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}=\exp\left\{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right\}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}.$$

例 1-34 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 由洛必塔法则,

因为
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$
所以
$$\lim_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right\}=e.$$

例 1-35　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

解法 1　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}(e^x-\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\sin x}{1}=1.$

解法 2　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=1.$

例 1-36　求$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\left[\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1\right]}=-50.$

例 1-37　设 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

则
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=A$$

解　$x_n>0$，　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

所以　$A\geqslant0$.

(1) 若 $A>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln A$，
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}&=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}\right)\\&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}\right)=\exp(\ln A)=A.\end{aligned}$$

(2) 若 $A=0$，

因为
$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant0,$$
而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A=0,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0,$$
综上所述，总有
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=A.$$

例 1-38　求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解　由洛必达法则
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}.$$

例 1-39　求正常数 a 与 b，使等式
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$$

成立.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}\cdot\dfrac{x^2}{b-\cos x}=1$,故必有 $\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$,得 $b=1$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}\cdot\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$,从而 $\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$,得 $a=4$.

例 1-40　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

解　因 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{1+\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\dfrac{2}{n}}{\dfrac{2}{n}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\tan\dfrac{2}{n}}=1$,

所以,原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4$.

例 1-41　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots+n]$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+n]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[n^2+(n-1)^2+\cdots+1]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{3}$.

例 1-42　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right]=1$,

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right]=2-1=1,$$

故原式 $=1$.

例 1-43　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}\right]$.

解　$\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}<\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$. 另一方面

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$. 所以,由夹逼定理知原式 $=\dfrac{2}{\pi}$.

例 1-44　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\,\mathrm{d}t$.

解　因$\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$,

所以,
$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}}{(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

例 1-45　求极限
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$
其中,n 是给定的自然数.

解　因为
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

所以,原式 $=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

3. 函数的连续性

例 1-46　求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

解　$f(x)$ 在$(0,2\pi)$内的间断点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$.

在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处,$f\left(\dfrac{\pi}{4}+0\right)=+\infty$,在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 处,$f\left(\dfrac{5\pi}{4}+0\right)=+\infty$,故 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$ 为第二类(或无穷)间断点;

在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处,$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$,在 $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 处,$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$,故 $x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ 为第一类(或可去)间断点.

例 1-47　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性.

解　因为若 $x\neq0$
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1;\\ 0, & |x|=1,\\ x^2, & |x|>1.\end{cases}$$
而 $f(x)$ 在$(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$上是初等函数,所以连续.
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=1,\qquad \lim_{x\to-1^+}f(x)=-1,$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=-1$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-1,\qquad \lim_{x\to1^+}f(x)=1,$$
所以,$f(x)$ 在 $x=\pm1,0$ 处间断,属第一类间断点,其中 $x=0$ 是可去间断点.

例 1-48　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$ 的连续性($x\geqslant0$).

解　若 $0\leqslant x\leqslant1/2$,

则
$$\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}\leqslant\sqrt[n]{4},$$
若 $1/2<x<2$,

则 $$2x < \sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$$
$$= 2x\sqrt[n]{2(2x)^{-n}+1+2^{-n}x^n} < 2x\sqrt[n]{3},$$

若 $2\leqslant x<+\infty$，

$$x^2 < \sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$$
$$= x^2\sqrt[n]{2x^{-2n}+2^nx^{-n}+1} < x^2\sqrt[n]{3},$$

而 $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6} = 1,$$

所以，$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1/2;\\ 2x, & 1/2<x<2;\\ x^2, & 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

而 $f(x)$ 在$[0,1/2)$，$(1/2,2)$，$(2,+\infty)$ 上是初等函数，所以连续．

又 $$\lim_{x\to 1/2^-}f(x)=1,\qquad \lim_{x\to 1/2^+}f(x)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=4,\qquad \lim_{x\to 2^+}f(x)=4,$$
$$f(2)=4.$$

所以，$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续．

注 例 1-49，1-50 共同之处在于先求 $f(x)$ 的表达式，从而对自变量 x 的变化范围加以划分，使当 $n\to\infty$ 时的极限对应于 x 的每种划分有确定的结果，然后注意函数在一点连续的条件，在分段点上的连续性加以讨论．

例 1-49 求 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并指出类型．

解 由 $\ln|x|$ 的定义域知 $x\neq 0$. 又由

$$x^2-3x+2=0$$

得 $x_1=1$，$x_2=2$.

而 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$ 上是初等函数，所以连续，故 $f(x)$ 的间断 点是 0，1，2.

$$\lim_{x\to 0}\ln|x|=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0}(x^2-3x+2)=2,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类

又 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1$，

所以，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属第一类．

如果我们补充 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义，即令 $f(1)=-1$，这时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处就连续了．$x=2$ 处，因为$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，

故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类．

例 1-50 求函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0;\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1} & x\geqslant 0\end{cases}$$

的间断点，并指出类型．

解 当 $x<0$ 时，

$$f(x)=\frac{x^3-x}{\sin\pi x}.$$

由 $\sin\pi x=0$ 解得 $x=-1,-2,-3,\cdots$.

当 $x\geqslant 0$ 时,

$$f(x)=\ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}.$$

由 $x^2-1=0$ 解得 $x=1$.

所以 $f(x)$ 在 $x=1,-1,-2,-3,\cdots$ 处间断,在分段点 $x=0$ 处可能间断,在除去以上点的其他区间上 $f(x)$ 是初等函数,故连续.

因为在 $x_0=-2,-3,\cdots$ 处

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\infty,$$

所以,$x_0=-2,-3,\cdots$ 均是 $f(x)$ 的无穷间断点,属第二类.

在 $x_0=-1$ 处,

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim_{y\to 0}\frac{(y-1)(y-2)y}{-\sin\pi y},(\text{令 }x=-1+y)=-\frac{2}{\pi}.$$

所以 $x_0=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,属第一类.

如果令 $f(-1)=-2/\pi$,则 $f(x)$ 在 $x_0=-1$ 处就连续了.

在 $x_0=0$ 处,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=-\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}\right]=-\sin 1.$$

所以,$x_0=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点,属第一类.

在 $x_0=1$ 处,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在. 所以 $x_0=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

注　分段点是否为间断点,必须从定义出发考察函数的左、右极限及函数值.

例 1-51　求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ $(t\neq x,\ \sin t\cdot\sin x>0)$,记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解　因为 $f(x)=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}$,

而

$$\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}=\lim_{t\to x}x\,\frac{\cos t/\sin t}{\cos t}=\frac{x}{\sin x},$$

故　$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}$,所以,$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类(或可去)间断点;$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的第二类(或无穷)间断点.

例 1-52　设

$$f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)},\quad x\in\left[\frac{1}{2},1\right).$$

试补充定义 $f(1)$,使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

解　令 $y=1-x$,有

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi y\sin\pi y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi^2y^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi y}{2\pi^2 y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi^2\sin\pi y}{2\pi^2}=\frac{1}{\pi}.$$

由于 $f(x)$ **在** $\left[\frac{1}{2},1\right)$ **上连续,因此定义** $f(1)=\frac{1}{\pi}$**,就可使** $f(x)$ **在** $\left[\frac{1}{2},1\right]$ **上连续.**

例 1-53　证明方程 $x^3-3x^2-9x+1=0$ **在** $(0,1)$ **内有唯一实根.**

证　令 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$,

因为
$$f(0)=1>0,\ f(1)=-10<0,$$

又 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续,所以存在** $x_1\in(0,1)$ **使**

$$f(x_1)=0.$$

若另有 $x_2\in(0,1)$ **使** $f(x_2)=0$

则
$$f(x_2)-f(x_1)=0,$$

即
$$(x_2-x_1)[(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-3(x_2-x_1)-9]=0.$$

而
$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3(x_2-x_1)-9<0$$

$$x_2=x_1,$$

故方程 $x^3-3x^2-9x+1=0$ **在** $(0,1)$ **内有唯一实根.**

例 1-54　设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续,** $x_i\in[a,b]$, $t_i>0(i=1,2,\cdots,n)$**,且** $\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=1$**,试证至少存在一点** $\zeta\in[a,b]$ **使**

$$f(\zeta)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

证　因为 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续,所以有**

$$M=\max_{x\in[a,b]}f(x),\quad m=\min_{x\in[a,b]}f(x),$$

使得对任何 $x\in[a,b]$ **都有**

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

由于 $x_i\in[a,b]$, $t_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$**,所以**

$m=\sum\limits_{i=1}^{n}mt_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}t_if(x_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}Mt_i=M$**,从而至少存在一点** $\zeta\in[a,b]$**,使**

$$f(\zeta)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

注　本题由给定条件,联想到闭区间上连续函数的性质,再用到最大值最小值定理和介值定理.

例 1-55　设 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续,且** $f(0)=f(1)$**. 证明存在** $x_0\in[0,1]$**,使** $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{4}\right)$.

证　令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{4}\right)$**,则** $F(x)$ **在** $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ **上连续.**

若对任何 $x\in\left[0,\frac{3}{4}\right]$ **都有** $F(x)\neq0$**,那么在** $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ **上必有** $F(x)>0$ **或** $F(x)<0$.

现不妨设 $F(x)>0$**,这样当** x **分别取** $0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ **时,就有**

$$f(0)-f\left(\frac{1}{4}\right)=F(0)>0,\quad f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)>0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{3}{4}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)>0, f\left(\frac{3}{4}\right)-f(1)=F\left(\frac{3}{4}\right)>0.$$

从而　$f(0)>f(1)$,

这与 $f(0)=f(1)$ 矛盾，故存 $x_0\in\left[0,\frac{3}{4}\right]$ 使 $F(x_0)=0$.

即有 $x_0\in[0,1]$ 使 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{4}\right)$.

注　本题证明中用到了数学上常用的手法，适当构造一个函数把要证的结果转化成利用介值定理（根的存在定理）来证明的问题.

例 1-56　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明至少存在一个 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，且 $\beta-\alpha=(b-a)/2$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$.

证 1　令 $F(x)=f\left(\frac{b-a}{2}+x\right)-f(x)$，则 $F(x)$ 在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上连续.

$$F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a),\quad F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

又由条件 $f(a)=f(b)$，可得 $F(a)F\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant 0$.

故至少存在一点 $x_0\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，使

$$F(x_0)=0,$$

也即有 $\alpha=x_0$，$\beta=(b-a)/2+x_0$，且 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$\beta-\alpha=(b-a)/2$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$.

证 2　同上构造 $F(x)$，利用例 1-50 的证明思想证之（略）.

注　在本题证明中，从注意到 $\beta-\alpha=(b-a)/2$ 想到构造这样的函数 $F(x)$，从要证 $f(\alpha)=f(\beta)$ 想到要证 $F(x_0)=0$.

例 1-57　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：对任何大于或等于 2 的自然数 n，至少存在一个 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，且 $\beta-\alpha=(b-a)/n$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$.

证　本题实质上可这样描述：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，

证明：对任何自然数 $n\geqslant 2$，至少存在一点 $x_0\in[a,b]$，使

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{n}\right),$$

这样，我们就可参照例 1-56 题的证法不难证得此题，这里就不再赘述了.

例 1-58　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty,$$

证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值.

证　因为 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，　$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$，

由极限定义知，对于 $M=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，存在这样的 $c,d\left(a<c<\frac{a+b}{2}<d<b\right)$，当 $a<x\leqslant c$ 或 $d\leqslant x<b$ 时，都有

$$f(x)<M.$$

又 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，所以 $f(x)$ 在 $[c,d]\subset(a,b)$ 上连续，由最大值定理知，存在 $\xi\in[c,d]$ 使 $f(\xi)\geqslant f(x)$，$\forall x\in[c,d]$，

特别有
$$f(\xi)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

下面证 $f(\xi)$ 即为 (a,b) 内的最大值，$\forall x\in(a,b)$.

1) 若 $x\in(a,c)$ 或 $x\in[d,b]$ 时，有

$$f(x)<f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant f(\xi).$$

2）若 $x \in [c,d]$ 时，有

$$f(x) \leqslant f(\xi).$$

综上所述，$f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值 $f(\xi)$.

习　题　1

1．设定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数 $f(x)$ 严格递增，且有 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$，求 $f(x)$.

2．证明：函数 $f(x)=a^x(a>0)$，若自变量 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 组成等差级数，则 $y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 组成一等比级数.

3．计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{n}\right)^n$，　$|a|<1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

4．计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^{2x}-3e^{-x}}{2e^{2x}+e^{-x}}$.

5．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k+\frac{1}{k}}}{2^n-1}$.

6．讨论函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$ 的连续区间，如有间断点，指出其类型.

7．设

$$f(x)=\begin{cases}2\cos x, & x\leqslant c,\\ ax^2+b, & x>c\end{cases}$$

其中，b,c 是已知常数，试确定 a 值，使 $f(x)$ 为连续函数.

8．证明方程 $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$，在 1 与 2，2 与 3 之间必有根.

9．设 $x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)(n=0,1,\cdots)$，$a>0$ 常数．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

10．设 $a_1=3$，$a_n=2a_{n-1}^2-1(n\geqslant 2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n a_1 a_2\cdots a_{n-1}}$.

11．证明：若曲线 $y=f(x)$ 在 R 上关于点 $A(a,y_0)$ 和直线 $x=b(b>a)$ 都对称，则函数 $f(x)$ 是 R 上的周期函数.

12．证明：若对任意 x,y 有 $f(y)-f(x)\leqslant(y-x)^2$，则对任意 $n\in N$，任意 a,b 有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2.$$

简答与提示

1．设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，

(1) 如果 $f(x_0)>x_0$，则 $f[f(x_0)]>f(x_0)\Rightarrow f\{f[f(x_0)]\}>f(x_0)$，与 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$ 矛盾.

(2) 如果 $f(x_0)<x_0$，则 $f[f(x_0)]<f(x_0)\Rightarrow f\{f[f(x_0)]\}<f(x_0)$，与 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$ 矛盾.

由(1)和(2)得 $f(x_0)=x_0$，从而 $f(x)=x$.

2. 略

3. (1) $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$；(2) $e^{\frac{1}{1-\alpha}}$；(3) $\frac{1}{4}$

4. (1) $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$；(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$；(3) 2.

5. 2.

6. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为第一类间断点.

7. $c\neq 0$ 时 $a=\frac{2\cos c-b}{c^2}$；$c=0$ 时只当 $b=2$ 有解，此时，a 可任意.

9. $\sqrt[3]{a}$.

10. 由 $a_n^2-1=2[2^n\cdot a_1a_2\cdots a_{n-1}]^2$，$a_n>1$，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{2^n\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}}\right]=2.$$

11. $\left\{\begin{array}{l} y_0=\dfrac{f(a-x)+f(a+x)}{2} \\ f(b-x)=f(b+x) \end{array}\right\}$，周期 $T=4(b-a)$.

12. $a=b$ 显然，$a=0(a<b)$，等分 $[a,b]$，分点 $a+\frac{k(b-a)}{n}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，有

$$|f(b)-f(a)|=\left|\sum\left[f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)-f\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)\right]\right|$$

可推出结论.

第二章　导数及其应用

本章的重点是导数与微分的概念、求法及其应用. 尤其是中值定理的应用,其题型较多,灵活性较大,很能检查考生的综合应用与理论推导的能力,所以,我们在此用较多的篇幅介绍基本题型与解题方法以帮助考生积累一些经验.

一、复习与考试要求

(1) 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间的关系.

(2) 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.

(3) 了解高阶导数的概念,会求简单函数的 n 阶导数.

(4) 会求分段函数的一阶、二阶导数.

(5) 会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

(6) 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理,了解并会用柯西中值定理.

(7) 理解函数的极值概念,掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,掌握函数最大值和最小值的求法及其简单应用.

(8) 会用导数判断函数图形的凹凸性,会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线,会描绘函数的图形.

(9) 掌握用洛必塔法则求未定式极限的方法.

(10) 了解曲率和曲率半径的概念,会计算曲率和曲率半径.

二、基本概念与理论

1. 导数与微分

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在,就称 $f(x)$ 在 x_0 处可导,并把该极限称作 $f(x)$ 在 x_0 处的导数,记作 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$ 或 $y'(x_0)$.

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)=y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

按左、右极限概念,相应地有

左导数:$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

右导数:$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

导数 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是左、右导数 $f'_-(x_0)$,$f'_+(x_0)$ 存在且相等.

导数 $f'(x_0)$ 存在的必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,如果函数增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\ \text{可表示成}$$

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中,数 A 与点 x_0 有关而与自变量增量 Δx 无关,$o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小量,那么称 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微分,并把 $A\Delta x$ 称作 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分,记为 $\mathrm{d}y = A\Delta x = A\mathrm{d}x$.

函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微分的充要条件是 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导,且微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$.

(3) 求导与微分的基本法则

设 u,v 均可微(a,b 是常数),则

① $(au + bv)' = au' + bv'$;　$\mathrm{d}(au + bv) = a\mathrm{d}u + b\mathrm{d}v$.　(线性)

② $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;　$\mathrm{d}(u \cdot v) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$.

③ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;　$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$.

④ 若 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 均可微,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'[\varphi(x)]\varphi'(x);$$

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$　(链式法则)

⑤ 设 $y = f(x)$ 可微,且在区间 I_x 上 $f'(x) \neq 0$,则反函数 $x = \varphi(y)$ 存在且在相应区间 I_x 上可导,并有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\Bigg|_{y=f(x)}$.

⑥ 设函数 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,其中 $x(t), y(t)$ 可导且 $x'(t) \neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)};\qquad \mathrm{d}y = \frac{y'(t)}{x'(t)}\mathrm{d}x.$$

⑦ 设 $f(x), g(x)$ 均具有 n 阶导数(a,b 是常数),则

$$[af + bg]^{(n)} = af^{(n)} + bg^{(n)};$$　(线性)

$$[f \cdot g]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \left(C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right).$$　(莱布尼兹公式)

请熟记基本初等函数的导数公式(同济大学数学教研室编. 高等数学第五版上册. 高等教育出版社出版,P. 94)及以下导数公式:

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x;(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad (a > 0);$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);\quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu - 1) \cdot \cdots \cdot (\mu - n + 1) \cdot x^{\mu - n};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

$y'(x_0)$ 表示平面曲线 $y = y(x)$ 在 (x_0, y_0) 处的切线的斜率.

若 $y = y(x)$ 表示动点在时刻 x_0 的位移,那么,$y'(x_0)$ 与 $y''(x_0)$ 分别是动点在时刻 x_0 的速度与加速度.

2. 中值定理

(1) 罗尔定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a) = f(b)$,则至少有一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 拉格朗日定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则至少有一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi) =$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(3) **柯西定理** 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且在(a,b)内 $g'(x)\neq 0$,则至少有一点 $\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

(4) **泰勒定理** 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$内有$n+1$阶导数,$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,且 $x\neq x_0$,则在 x_0 与 x 之间至少有一点ξ,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(5) **洛必塔法则** 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,若极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$),则不定式极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.(其他情况下的洛必塔法则恕不赘述)

3. 函数的性态与极值问题

(1) **单调性** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 Ⅰ 内可导,若当 $x\in$ Ⅰ 时,$f'(x)>0(<0)$,则 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 内单调递增(减).

(2) **凹凸性** 若在区间 Ⅰ 内定义的函数 $y=f(x)$ 对任意的 $x_1,x_2\in$ Ⅰ,$x_1\neq x_2$,有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,则 $y=f(x)$ 在 Ⅰ 上的图像是凹的(图 2-1(a)).

若对任意的 $x_1,x_2\in$ Ⅰ,$x_1\neq x_2$,有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,则 $y=f(x)$ 在 Ⅰ 上的图像是凸的(图 2-1(b)).

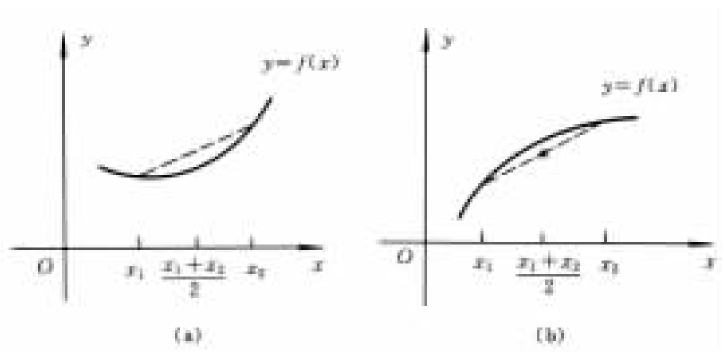

图 2-1

若 $y=f(x)$ 在(a,b)具有二阶导数,当 $f''(x)>0(<0)$ 时,则曲线$y=f(x)$是凹(凸)的;

若 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在,且 $f''(x)$ 在x_0 两侧异号,则点$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(3) **极值问题** 如果可导函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值,必有$f'(x_0)=0$($f'(x)$ 的零点称为驻点).

判别函数极值点的方法:

① 如果 x_0 是 $f(x)$ 的驻点或不可导点,那么 x_0 有可能是$f(x)$的极值点. 若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧是异号的,则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点,否则 x_0 不是极值点.

设 $\delta>0$,若$\begin{cases}f'(x)>0, & x\in(x_0-\delta,x_0);\\ f'(x)<0, & x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$ 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

若$\begin{cases}f'(x)<0, & x\in(x_0-\delta,x_0);\\ f'(x)>0, & x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$ 则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

② 如果 x_0 是 $f(x)$ 的二阶可导点,且 $f'(x_0)=0$,那么,当$f''(x_0)<0$ 时,x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;当$f''(x_0)>0$ 时,x_0 是$f(x)$ 的极小值点.

连续函数 $y=f(x)$ **在闭区间** $[a,b]$ **上最大（最小）值的求法：**

求出 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **内的所有驻点与不可导点** $x_1,x_2,\cdots,x_k$**；然后比较** $f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_k)$ **的大小，其中最大（小）的一个就是** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上的最大（小）值.**

(4) **曲线的曲率**　**设曲线的方程** $y=y(x)$ **在** x_0 **处有二阶导数，则**

$$K=\frac{|y''(x_0)|}{(1+[y'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

是曲线在点 $(x_0,y(x_0))$ **处的曲率，**$R=\dfrac{1}{K}$ **是它的曲率半径.**

(5) **曲线的渐近线**　**设曲线的方程是** $y=y(x)$，

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} y(x)=a$**，则** $y=a$ **是曲线的水平渐近线；**

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0\\(x\to x_0-0)}} y(x)=\infty$**，则** $x=x_0$ **是曲线的铅直渐近线；**

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{y(x)}{x}=a$**，且** $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[y(x)-ax]=b$**，则** $y=ax+b$ **是曲线的斜渐近线.**

三、基本题型与解题方法

1. 求导法

(1) **按定义求导**　**当函数不满足求导法则的条件时，或者分段表示的函数的分点处，必须用定义求导.**

例 2-1　**设** $f(x)$ **在** x_0 **处可导，求**

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}.$$

解　$$\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{[f(x_0+x)-f(x_0)]+[f(x_0)-f(x_0-3x)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+3\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-3x)-f(x_0)}{-3x}=f'(x_0)+3f'(x_0)=4f'(x_0).$$

注　**本题有个常见的错误做法：**

令　$$x_0-3x=t,\text{则 } x_0=t+3x,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(t+4x)-f(t)}{x}=4\lim_{x\to0}f'(t)\tag{1}$$

$$=4\lim_{x\to0}f'(x_0-3x)=4f'(x_0)\tag{2}$$

因为题目中只设 $f(x)$ **在** x_0 **处可导，没说在** x_0 **及其邻域内可导，更没假定** $f'(x)$ **在** x_0 **点处连续，所以上面做法是无根据的．在学习数学时，一定注意数学的严谨性，给了什么条件，只能用什么条件．**

例 2-2　**设** $f(x)=g(x)\sin^{\alpha}(x-x_0)\ (\alpha\geqslant1)$**，其中** $g(x)$ **在** x_0 **处连续，证明** $f(x)$ **在** x_0 **处可导．**

证　**因为** $f(x_0)=0$，

所以　$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)\sin^{\alpha}(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$=\begin{cases}g(x_0), & \alpha=1;\\ 0, & \alpha>1,\end{cases}$$

所以 $f(x)$ **在** x_0 **处可导．**

例 2-3　**设不恒为零的奇函数** $f(x)$ **在** $x=0$ **处可导，试说明** $x=0$ **为函数** $f(x)/x$ **的何种间断点．**

解 因为 $f(x)=-f(-x)$，令 $x=0$，得

$$f(0)=0,$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

所以，$f(x)/x$ 在 $x=0$ 处有极限，从而 $x=0$ 是 $f(x)/x$ 的可去间断点．

例 2-4 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)>0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$

解 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，所以

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]=f'(a),$$

且当 n 充分大时，$f\left(a+\frac{1}{n}\right)>0$，

故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}n\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right\}=\exp\left\{\frac{f'(a)}{f(a)}\right\}.$$

例 2-5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，证明 $f(x)$ 在 x_0 处也可导．

证 当 $f(x_0)\neq 0$ 时，记 $|f(x_0)|'$ 为 $|f(x)|$ 在 x_0 处的导数，因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}[|f(x)|+|f(x_0)|]$$

$$=2|f(x_0)||f(x_0)|'$$

存在，

所以，
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)+f(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{|f(x_0)|}{f(x_0)}|f(x_0)|'.$$

当 $f(x_0)=0$ 时，

因为
$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=|f(x_0)|'=A\text{ 存在},$$

又，
$$A=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|}{x-x_0}\geqslant 0,\quad A=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|}{x-x_0}\leqslant 0.$$

故 $A=0$，

从而
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=0.$$

综上所述，$f(x)$ 在 x_0 处可导，且

$$f'(x_0)=\begin{cases}|f(x_0)|'\dfrac{|f(x_0)|}{f(x_0)}, & f(x_0)\neq 0;\\ 0, & f(x_0)=0.\end{cases}$$

例 2-6　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)=f(b)$，$f'(a)f'(b)>0$. 试证在(a,b)内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=f(a)$.

证法 1　（反证法）. 因为 $f'(a)f'(b)>0$，不妨设 $f'(a)>0$ 且 $f'(b)>0$. 如果对任何 $x\in(a,b)$，都有 $f(x)\neq f(a)$，那么在(a,b)内

$$f(x)<f(a) \text{ 或 } f(x)>f(a)$$

成立

1）若有 $f(x)<f(a)$，$x\in(a,b)$，则

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,\quad x\in(a,b),$$

从而
$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0,$$

这与 $f'(a)>0$ 矛盾.

2）若有 $f(x)>f(a)=f(b)$，$x\in(a,b)$，则

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,\quad x\in(a,b),$$

从而
$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\leqslant 0,$$

这与 $f'(b)>0$ 矛盾.

综上所述，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=f(a)$. 同理可证 $f'(a)<0$ 且 $f'(b)<0$ 的情况.

证法 2　因为 $f'(a)f'(b)>0$，所以，可不妨设 $f'(a)>0$，且 $f'(b)>0$. 由于

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0,$$

所以，存在 $c\left(a<c<\dfrac{a+b}{2}\right)$使

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0$$

所以，存在 $d\left(\dfrac{a+b}{2}<d<b\right)$使

$$\frac{f(d)-f(b)}{d-b}>0 \tag{2}$$

$$f(c)>f(a)=f(b)>f(d),$$

$[c,d]\subset[a,b]$. 由 $f(x)$ 在$[a,b]$上的连续性知，$f(x)$ 在$[c,d]$上也连续，根据介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=f(a)$.

同理可证 $f'(a)<0$ 且 $f'(b)<0$ 的情况.

例 2-7　设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义，对任何 x、$y\in(-\infty,+\infty)$有

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

$f'(0)=1$. 证明当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$f'(x)=f(x)$.

解　因为对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$有

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

特取 $y=0$,则有

$$f(x)=f(x)f(0),\quad f(x)[1-f(0)]=0.$$

由 c 的任意性及 $f'(0)=1$,得

$$f(0)=1,$$

所以对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}=f(x)f'(0)=f(x).$$

例 2-8 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义,x,y 为该邻域内任意两点,且 $f(x)$ 满足条件:

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$,

(2) $f'(0)=0$.

证明:在上述邻域内 $f'(x)=1$.

证　记题给 $x=0$ 的某个邻域为 E,那么对任何 $x,y\in E$ 均有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+1,$$

所以,取 $y=0$ 时,可得

$$f(0)=-1.$$

这样,对任何 $x\in E$,必有 $\Delta x\in E$ 及 $x+\Delta x\in E$,且

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)+1-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)=1.$$

即对任何 $x\in E$ 有 $f'(x)=1$.

例 2-9 求 a,b 的值,使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3 & x\leqslant 0;\\ ax+b & x>0.\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导.

解　因为当 $x>0$ 或 $x<0$ 时,$f(x)$ 均为多项式,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上连续、可导.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则应有

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b,$$

但
$$f(0)=3,$$

所以,$b=3$.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则有

$$f'_-(0)=f'_+(0),$$

但
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-3}{x}=a,$$

所以，$a=2$.

故当 $a=2,b=3$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导.

例 2-10　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<0;\\ e^x-1, & 0\leqslant x<\ln 3;\\ 2x^2, & \ln 3\leqslant x<3.\end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

解　易知 $f(x)$ 的定义域为 $[-\pi/2,3)$，且 $f(x)$ 在 $[-\pi/2,0)$，$(0,\ln 3)$，$(\ln 3,3)$ 上均为初等函数，所以 $f(x)$ 在这些区间上是连续的，且是可导的. 因此，我们只要考虑 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 和 $x=\ln 3$ 处的情况.

在 $x=0$ 处，因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x=0.$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)=0,$$

而　$f(0)=0$，

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

在 $x=\ln 3$ 处，因为

$$\lim_{x\to \ln 3^-}f(x)=\lim_{x\to \ln 3^-}(e^x-1)=2,\quad \lim_{x\to \ln 3^+}f(x)=\lim_{x\to \ln 3^+}2x^2=2\ln^2 3,$$

所以，$f(x)$ 在 $x=\ln 3$ 处不连续，当然不可导.

例 2-11　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0$，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1,\ f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 2-12　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0;\\ (a+bx), & x\geqslant 0.\end{cases}$

试求常数 a,b 使 $f(x)$ 连续且可导.

解　因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x(1+\sqrt{1-x})}=\dfrac{1}{2}$，

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+bx)=a=f(0),$$

所以当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，从而处处连续．

又，因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2-2\sqrt{1-x}-x}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1}{4x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{4x\sqrt{1-x}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{-x}=\frac{1}{8},$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}+bx-\frac{1}{2}}{x}=b,$$

所以当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{8}$ 时，$f'(0)$ 存在，从而 $f(x)$ 处处可导．

例 2-13 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{a\ln x}{x-1}, & x>0\text{ 且 }x\neq1;\\ b, & x=1,\end{cases}$ 求 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

解 由条件 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $f(1)=b=\lim\limits_{x\to1}\frac{a\ln x}{x-1}=a\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}=a$，即 $a=b$.

因为

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{a\ln x}{x-1}-a}{x-1}=a\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=a\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2},$$

所以 $a=1$，又 $b=a$，所以 $b=1$.

例 2-14 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(a)=0$，$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x-a}, & x\neq a;\\ f'(a), & x=a,\end{cases}$ 求 $g'(x)$，并证明 $g(x)$ 的一阶导数在 $x=a$ 点处连续．

解 当 $x\neq a$ 时，$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}$，当 $x=a$ 时，

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}-f'(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{f''(a)}{2}.$$

即

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a;\\ \frac{f''(a)}{2}, & x=a.\end{cases}$$

再证 $g'(x)$ 在 $x=a$ 点处连续：

$$\lim_{x\to a}g'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2},$$

因为 $f''(x)$ 连续，所以$\lim\limits_{x\to a}g'(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(a)}{2}$，所以$\lim\limits_{x\to a}g'(x)=g'(a)$，即 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续．

例 2-15　设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上一阶可导，且 $f''(0)$ 存在，又 $f(0)=f'(0)=0$，试求函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导数．

解　$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}(x\neq 0)$，

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{f''(0)}{2},$$

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0;\\ \dfrac{f''(0)}{2}, & x=0.\end{cases}$$

例 2-16　函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义，对任意 x 都有 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，试判断在 $x=0$ 点函数 $f(x)$ 是否可导．

解　因为当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，所以

$$f(0)=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-x^2)-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1-x^2)=1,$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$0\leqslant x+1\leqslant 1$，

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)[1-(x+1)^2]=-\frac{1}{2}x(x+1)(x+2),$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\dfrac{1}{2}x(x+1)(x+2)-0}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}(x+1)(x+2)=-1,$$

$$f'_-(0)\neq f'_+(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导．

例 2-17　设 $f(x)=|\sin x|^3,x\in[-1,1]$. 证明 $x=0$ 是 $f'''(x)$ 的间断点，并判断其类型．

证　$f(x)=\begin{cases}-\sin^3 x, & x\in[-1,0);\\ \sin^3 x, & x\in[0,1],\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}-3\sin^2 x\cos x & x\in[-1,0),\\ 3\sin^2 x\cos x, & x\in(0,1],\end{cases}$$

且 $f'(0)=0$.

$$f''(x)=\begin{cases}3\sin^3 x-6\sin x\cos^2 x & x\in[-1,0),\\ -3\sin^3 x+6\sin x\cos^2 x, & x\in(0,1],\end{cases}$$

且 $f''(0)=0$.

$$f'''(x)=\begin{cases}21\sin^2x\cos x-6\cos^3x, & x\in[-1,0);\\ -21\sin^2x\cos x+6\cos^3x, & x\in(0,1].\end{cases}$$

而
$$f'''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{-3\sin^3x+6\sin x\cos^2x}{x}=6,$$

$$f'''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{3\sin^3x-6\sin x\cos^2x}{x}=-6,$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的三阶导数不存在,又

$$\lim_{x\to0^-}f'''(x)=\lim_{x\to0^-}(21\sin^2x\cos x-6\cos^3x)=-6,$$

$$\lim_{x\to0^+}f'''(x)=\lim_{x\to0^+}(-21\sin^2x\cos x+6\cos^3x)=6,$$

故 $x=0$ 是 $f'''(x)$ 的第一类间断点.

例 2-18 讨论函数 $f(x)=x|x(x-1)|$ 的可导性.

解 由 $x(x-1)\geqslant0$,得 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1$,

由 $x(x-1)<0$,得 $x\in(0,1)$.

所以,$f(x)=\begin{cases}x^3-x^2, & x\leqslant0\text{ 或 }x\geqslant1;\\ x^2-x^3, & x\in(0,1).\end{cases}$

且 $f'(x)=\begin{cases}3x^2-2x, & x<0\text{ 或 }x>1;\\ 2x-3x^2, & x\in(0,1).\end{cases}$

又 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3-x^2}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-x^3}{x}=0,$

所以,$f'(0)=0$.

而 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x^3}{x-1}=-1,\quad \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-x^2}{x-1}=1,$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

综上所述,$f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导,在 $(-\infty,1)$、$(1,+\infty)$ 上可导.

例 2-19 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

例 2-20 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1;\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant2;\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点?若有,指出这些点.

解　(1) $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1;\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8;\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$

(2) $g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内处处连续,没有间断点. $g(x)$ 的不可导点是 $x=0$ 及 $x=-1$.

(2) **按公式计算**

按公式计算导数除了按基本初等函数的求导公式外,还有对可导函数的四则运算函数的求导公式、复合函数求导的链式法则以及隐函数求导公式、反函数求导公式. 另外,还有利用复合函数、反函数求导公式导出的参数方程形式的函数求导法和利用隐函数求导公式得到的对幂指函数的对数求导法.

例 2-21　求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(t)$ 为已知的连续函数.

解　原式 $=\left[x^2\displaystyle\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x^2}tf(t)\mathrm{d}t\right]'=2x\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t.$

例 2-22　设 $y=\sin[f(x^2)]$,其中 f 具有二阶导数,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}.$

例 2-23　设$\begin{cases}x=\cos(t^2),\\ y=t\cos(t^2)-\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u\end{cases}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$,　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{2t\sin(t^2)}$,所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

例 2-24　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq 1$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　方程两边取对数,得 $\ln x+f(y)=y$,从而求得

$$y'=\frac{1}{x[1-f'(y)]},\quad y''=-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

例 2-25　设$\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^t f(u^2)\mathrm{d}u,\\ y=[f(t^2)]^2\end{cases}$,　其中 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f(u)\neq 0$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t^2)$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4tf(t^2)f'(t^2)$,所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4tf'(t^2),\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}.$$

例 2-26　设 $y=y(x)$ 由 $y=f(x+y)$ 确定,且 f'' 存在. 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　由 $y=f(x+y)$,令 $u=x+y$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).\tag{1}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(u)}{1-f'(u)}.$$

由式(1),两边再对 x 求导,有
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(u)\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+f'(u)\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\tag{2}$$

由式(2)解得
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{f''(u)\left(1+\dfrac{f'(u)}{1-f'(u)}\right)^2}{1-f'(u)}=\frac{f''(u)}{(1-f'(u))^3}.$$

例 2-27 设 $x(t)=\int_1^{t^2}u\ln u\mathrm{d}u$, $y(t)=\int_{t^2}^1u^2\ln u\mathrm{d}u$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y'(t)=-t^4\ln t^2(2t)=-2t^5\ln t^2$,

$x'(t)=t^2\ln t^2(2t)=2t^3\ln t^2$.

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-t^2.$$

例 2-28 设 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2t\mathrm{d}t$,确定 $y=y(x)(x\neq y)$. 求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 两边关于 x 求导,得
$$2-\sec^2(x-y)\left(1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\sec^2(x-y)\left(1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin^2(x-y).$$

所以
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=2\sin(x-y)\cos(x-y)\left(1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\sin2(x-y)[1-\sin^2(x-y)]\\&=\sin2(x-y)\cos^2(x-y).\end{aligned}$$

例 2-29 设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 以及 $f'[f^{-1}(x)]$,$f''[f^{-1}(x)]$ 都存在,且 $f'[f^{-1}(x)]\neq0$. 证明:
$$\frac{\mathrm{d}^2f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-f''(f^{-1}(x))}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

证 令 $x=f(y)$,则 $y=f^{-1}(x)$. 将 $x=f(y)$ 对 x 求导得
$$1=f'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f'(y)}.$$

两边再对 x 求导,得
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-f''(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{[f'(y)]^2}=-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^3}=-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

例 2-30 已知 $y=\int_1^{1+\sin t}(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{u}})\mathrm{d}u$,其中 $t=t(x)$ 是由$\begin{cases}x=\cos2v\\t=\sin v\end{cases}$所确定. 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{1+\sin t}})\cdot\cos t\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$ (1)

由 $\begin{cases}x=\cos 2v,\\ t=\sin v,\end{cases}$ **消去** v **得**

$$x=1-2t^2.$$

两边对 x **求导**　$1=-4t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，　**所以** $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{4t}$ (2)

式(2) **代入式**(1) **得**　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\cos t}{4t}(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{1+\sin t}}).$

例 2-31　**已知** $f(x)=x\sin\omega x$，**求证**：

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n(\omega^{2n}x\sin\omega x-2n\omega^{2n-1}\cos\omega x). \tag{1}$$

证　**用数学归纳法，当** $n=1$ **时**，

$$f'(x)=\sin\omega x+\omega x\cos\omega x,$$

$$f''(x)=2\omega\cos\omega x+\omega^2x\sin\omega x.$$

所以式(1) **成立**.
归纳假设 $n=k$ **成立，即**

$$f^{(2k)}(x)=(-1)^k(\omega^{2k}x\sin\omega x-2k\omega^{2k-1}\cos\omega x).$$

再当 $n=k+1$ **时**，

$$\begin{aligned}f^{(2k+1)}(x)&=(-1)^k[\omega^{2k}\sin\omega x+\omega^{2k+1}x\cos\omega x+2k\omega^{2k}\sin\omega x]\\&=(-1)^k[\omega^{2k}(2k+1)\sin\omega x+\omega^{2k+1}x\cos\omega x].\\f^{(2k+2)}(x)&=(-1)^k[\omega^{2k+1}(2k+1)\cos\omega x+\omega^{2k+1}\cos\omega x-\omega^{2k+2}x\sin\omega x]\\&=(-1)^{k+1}[\omega^{2(k+1)}x\sin\omega x-2(k+1)\omega^{2(k+1)-1}\cos\omega x].\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ **时，式**(1) **也成立，从而式**(1) **成立**.

例 2-32　**求** $\mathrm{d}^n(x^2\ln x)$，($x>0$，x **为自变量**)

解　**令** $y=x^2\ln x$，**则**

$$y'=2x\ln x+x,$$

$$y''=2\ln x+3,$$

$$y^{(3)}=\frac{2}{x}=2x^{-1},$$

$$y^{(4)}=2\cdot(-1)x^{-2},$$

$$y^{(5)}=2\cdot(-1)\cdot(-2)x^{3},$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=2\cdot(-1)(-2)\cdots[-(n-3)]x^{-(n-2)}$$

$$\mathrm{d}^n(x^2\ln x)=\begin{cases}x(2\ln x+1)\mathrm{d}x, & n=1;\\(2\ln x+3)\mathrm{d}x^2, & n=2;\\(-1)^{n-3}2\cdot(n-3)!x^{2-n}\mathrm{d}x^n, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

例 2-33 设正函数 $f(x)$ 连续，且 $\forall x \geqslant 0$，有 $f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，求 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的表达式 .

解 当 $x=0$ 时，$f(0)=\sqrt{\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t}=0.$ (1)

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{f(x)}{2\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}}=\dfrac{1}{2}.$

所以
$$f(x)=\frac{1}{2}x+C. \tag{2}$$

因为 $f(x)$ 连续，由式(1)、式(2) 可得

$$0+C=0,\text{所以 } C=0.$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x,\ x\geqslant 0.$$

例 2-34 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$，求 y'.

解 $y'=[x^{(a^a)}]'+[a^{(x^a)}]'+[a^{(a^x)}]'$

$=a^a x^{a^a-1}+(x^a)'a^{x^a}\ln a+(a^x)'a^{a^x}\ln a$

$=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a.$

例 2-35 设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3, \\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解 由 $x=3t^2+2t+3$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2,$$

由 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$，得 $y|_{t=0}=1$ 及

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{2-y}.$$

所以，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\mathrm{e}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}.$$

例 2-36 求曲线 $r=a\sin2\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的法线方程 .

解 将曲线 $r=a\sin2\theta$ 表示为

$$\begin{cases} x=a\sin2\theta\cos\theta, \\ y=a\sin2\theta\sin\theta. \end{cases}$$

则曲线的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{2a\cos2\theta\sin\theta+a\sin2\theta\cos\theta}{2a\cos2\theta\cos\theta-a\sin2\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

所以法线斜率为 1，又切点为

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}a,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}a,$$

故法线方程为

$$x-y=0.$$

例 2-37　证明曲线 $x^2-y^2=a$ 与曲线 $xy=b$ 在交点处必正交(a,b 为非零常数).

证　由

$$\begin{cases} x^2-y^2=a. \\ xy=b \end{cases}$$

知,对任意 $ab\neq 0$ 它们均相关．设(x_1,y_1)是任一个交点,则

$$\begin{cases} x_1^2-y_1^2=a, \\ x_1y_1=b, \end{cases}$$

且 $x^2-y^2=a^2$ 在此点的斜率为

$$k_1=y'_x\mid_{x=x_1}=\frac{x_1}{y_1},$$

而曲线 $xy=b$ 在此点的斜率为

$$k_2=y'_x\mid_{x=x_1}=-\frac{y_1}{x_1}.$$

故

$$k_1\cdot k_2=-1.$$

即二曲线在交点处正交.

例 2-38　一物体沿曲线为 $r=2\theta$ 的轨迹运动,如果角度 $\theta=t^2$,求 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时物体运动的速度 v、加速度 a 的大小(t 表示时间).

解　因为

$$\begin{cases} r=2\theta, \\ \theta=t^2, \end{cases}\qquad \begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases}$$

所以物体的运动方程可写为

$$\begin{cases} x=2t^2\cos t^2 \\ y=2t^2\sin t^2. \end{cases}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,取 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$,得

$$x'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-4\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}},\qquad y'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=4\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-10\pi,\qquad y''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=4-2\pi^2,$$

所以

$$v=\sqrt{2\pi^3+8\pi},$$

$$a=\sqrt{\left(x''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right)^2+\left(y''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right)^2}=2\sqrt{\pi^4+21\pi^2+4}.$$

例 2-39　设 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\ln x}$,求 y'.

解　$\ln y=\ln x(\ln\sin x-\ln x)$,

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}(\ln\sin x-\ln x)+\ln x\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}(\ln\sin x-2\ln x)-\cot x\ln x,$$

所以　$y'=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}(\ln\sin x-2\ln x)-\cot x\ln x\right].$

例 2-40　设 $x^y = y^x$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解
$$y\ln x = x\ln y,\ y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}y',$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{xy\ln y - y^2}{xy\ln x - x^2}.$$

2. 中值定理

罗尔定理以及利用它推得的拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒中值定理是一元函数微分学的重要基础之一，应用这些定理证明有关的命题和讨论函数的性态，历来是组成试卷的重要部分. 希望考生除了掌握这些定理的条件、结论以外，还要学习它们的证明方法，以便用这些定理的结论和证明方法来处理一些相关的问题. 下面把有关问题归纳成几类.

(1) 关于方程的根(函数的零点)的存在与个数.

例 2-41　设 a,b,c 为实数，求证方程 $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ 在$(0,1)$内至少有一个根.

证　令 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$，则 $f(0) = 0, f(1) = 0$，故显然 $f(x)$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件，从而存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 0$，即 $4a\xi^3 + 3b\xi^2 + 2c\xi = a + b + c$.

故原题得证.

例 2-42　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且 $f(a) = f(b) = 0$，则 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0$ 在(a,b)内有解.

证　令 $F(x) = f(x)g(x)$.

显然 $F(x)$ 在$[a,b]$上满足罗尔定理条件，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得
$$F'(\xi = 0,$$
即
$$f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0,$$
故原题得证.

例 2-43　设 $f(x)$ 可导，λ 为实数，则 $f(x)$ 的任意两个零点之间必有 $\lambda f(x) + f'(x) = 0$ 的零点.

证　设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，不妨设 $x_1 < x_2$，在例 2-50 中取 $g(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$，则
$$f'(x)\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} f(x) = 0$$
在(x_1, x_2)内有解，即 $f'(x) + \lambda f(x)$ 在(x_1, x_2)内有零点.

例 2-44　设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a) = g(b) = 0$，证明在(a,b)内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$.

证　令 $F(x) = f(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在$[a,b]$上可满足罗尔定理的条件，所以存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$，

即
$$f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$

例 2-45　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0) = 0$，k 为正整数，则存在 $\xi \in (0,1)$，使得
$$\xi f'(\xi) + kf(\xi) = f'(\xi).$$

证　在例 2-44 中取 $g(x) = (x-1)^k$，则存在 $\xi \in (0,1)$，使得
$$k(\xi - 1)^{k-1} f(\xi) + f'(\xi)(\xi - 1)^k = 0,$$
即
$$\xi f'(\xi) + kf(\xi) = f'(\xi).$$

例 2-46　设 $f(x)$ 在$[a, +\infty]$上可导，且当 $x > a$ 时，$f'(x) > k > 0$，其中 k 为常数，证明如果 $f(a) < 0$，则方程 $f(x) = 0$，在$\left[a, a - \frac{f(a)}{k}\right]$内有且仅有一个实根.

证　记 $b = a - \frac{f(a)}{k}$，显然 $b > a$，由拉格朗日定理知存 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) = -\frac{f(a)}{k}f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a),$$

所以　$f(b) > 0$.

又 $f(a) < 0$，由介值定理知 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根．又 $f'(x) > k > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内严格单调，所以 $f(x) = 0$ 在区间 $\left[a, a - \frac{f(c)}{k}\right]$ 内有且仅有一个实根．

例 2-47　讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数．

解　问题等价于讨论方程 $\ln^4 x - 4\ln x + 4x - k = 0$ 有几个不同的实根．

设 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$，则有

$$\varphi'(x) = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}.$$

不难看出，$x = 1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点．

当 $0 < x < 1$ 时，$\varphi'(x) < 0$，即 $\varphi(x)$ 单调减少；当 $x > 1$ 时，$\varphi'(x) > 0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，故 $\varphi(1) = 4 - k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值．

当 $k < 4$，即 $4 - k > 0$ 时，$\varphi(x) = 0$ 无实根，即两条曲线无交点；

当 $k = 4$，即 $4 - k = 0$ 时，$\varphi(x) = 0$ 有惟一实根，即两条曲线只有一个交点；

当 $k > 4$，即 $4 - k < 0$ 时，由于

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \to 0^+} [\ln x(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} [\ln x(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty,$$

故 $\varphi(x) = 0$ 有两个实根，分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内，即两条曲线有两个交点．

例 2-48　证明方程 $\ln x = \frac{x}{\mathrm{e}} - \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根．

证　$\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}$.

记　$F(x) = \frac{x}{\mathrm{e}} - \ln x - 2\sqrt{2}$，则　$F(\mathrm{e}) = -2\sqrt{2} < 0$，

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

故由零点定理知，$F(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$，$(\mathrm{e},+\infty)$ 内分别至少有一零点．

又当 $0 < x < \mathrm{e}$ 时，$F'(x) < 0$，$F(x)$ 单调减少．当 $\mathrm{e} < x < +\infty$ 时，$F'(x) > 0$，$F(x)$ 单调增加，所以 $F(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$，$(\mathrm{e},+\infty)$ 内分别只有一个零点，故原方程在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个实根．

例 2-49　就 k 的不同取值情况，确定方程 $x - \frac{\pi}{2}\sin x = k$ 在开区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数，并证明你的结论．

解　设 $f(x) = x - \frac{\pi}{2}\sin x$，则 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且 $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos x$. 令 $f'(x) = 0$，解得 $x_0 = \arccos \frac{2}{\pi}$，$x_0$ 为 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的惟一驻点．由于当 $x \in (0, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$，当 $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x) > 0$，所以 x_0 是 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的惟一最小值点，最小值 $y_0 = f(x_0) = x_0 - \frac{\pi}{2}\sin x_0$. 又因为 $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. 故在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内 $f(x)$ 的取值范围为 $[y_0, 0)$.

综上所述，当 $k<y_0$ 或 $k\geqslant 0$ 时，原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内没有根，当 $k=y_0$ 时，原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有惟一根 x_0；当 $y_0<k<0$ 时，原方程在 $(0,x_0)$ 和 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内各恰有一根，即原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内恰有两个不同的根．

例 2-50　方程 $x\mathrm{e}^{-x}-a=0(a>0)$ 有几个实根？

解　令 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}-a$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$．令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$．当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单调增加；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 严格单调减少，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a$，从而 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a$，于是

(1) 当 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a<0$，即 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，恒有 $f(x)<0$，所以方程 $f(x)=0$ 无实根；

(2) 当 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a>0$，即 $a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$f(1)>0$，

在 $(-\infty,1)$ 内 $f(x)$ 连续且严格单调，所以方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实根．

同理在 $(1,+\infty)$ 内，$f(x)$ 连续且严格单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$，$f(1)>0$．方程 $f(x)=0$ 也有且只有一个实根，故当 $a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程有两个不同实根．

(3) 当 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a=0$，即 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(1)=0$，又 $f(x)$ 严格单调，所以方程 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=1$．

总之方程 $x\mathrm{e}^{-x}-a=0$ 当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时无实根，当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时有一实根，当 $a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时有两个相异实根．

例 2-51　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0)=f(1)=0$．

证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$．

证　令 $F(x)=xf(x)$，在 $[0,1]$ 上，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$，$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理 $\exists c\in(0,1)F'(c)=0$．又 $F'(0)=f(0)=0$，

$$F''(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)=2f'(x)+xf''(x),x\in[0,1].$$

再对 $F'(x)$ 用罗尔中值定理：$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$．

例 2-52　设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微，且 $f(a)=A>0$，$f'(a)<0$，$f''(x)\leqslant 0(x>a)$．证明：方程 $f(x)=0$ 在 $[a,+\infty)$ 中仅有一个实根．

证　先证根的存在性．将 $f(x)$ 在 $x=a$ 处展开为一阶泰勒公式：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2,\ a<\xi<x.$$

因为 $f''(x)\leqslant 0$，$f(a)=A$，所以 $f(x)\leqslant f(a)+f'(a)(x-a)=A+f'(a)(x-a)$．

因为 $f'(a)<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(a)(x-a)=-\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故 $\exists x_1>a$，$f(x_1)<0$．

因为 $f(x)$ 在 $[a,x_1]$ 上连续，$f(a)>0$，$f(x_1)<0$，根据零点存在定理，必有 $\xi(a,x_1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 有实根．

再证根的惟一性．用反证法．假设方程 $f(x)=0$ 有两个根，即 $\xi_1<\xi_2$ 满足 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，则由 $f(x)$ 的可导性知 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理条件，所以 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $f'(\eta)=0$．又 $f'(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，由该定理有：

$$\frac{-f'(a)}{\eta-a}=\frac{f'(\eta)-f'(a)}{\eta-a}=f''(c),\ a<c<\eta,$$

因为 $f'(a)<0$，$\eta-a>0$，所以 $f''(c)>0$，这与条件 $f''(x)\leqslant 0$ 矛盾．得证．

例 2-53　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，对任意的正数 x 成立，证明在 $(0,+\infty)$ 内

至少有一点 c,使得 $f'(c)=\dfrac{1-c^2}{(1+c^2)^2}$.

证　记 $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,令 $F(x)=f(x)-g(x)$.

因为
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{1+x^2}=0,\quad 而\quad 0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2},$$

所以，　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$,

则　$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)-g(x))=0$.

同理可证 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$,而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,所以 $F(x)$ 满足例 2-49 的条件,故在 $(0,+\infty)$ 内至少有一点 c 使得 $F'(c)=0$,即

$$f'(c)=\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}.$$

例 2-54　设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上二阶可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(4)=2$,证明存在一点 $\xi\in(0,4)$,使得 $f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$.

证　首先定义一个二次函数 $y=g(x)=Ax^2+Bc+C$,使 $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g(4)=2$,得 $g(x)=-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{7}{6}x$. 显然

$g(0)=f(0)$, $g(1)=f(1)$,$g(4)=f(4)$,根据例 2-53 知,存在 $\xi\in(0,4)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$,而 $g''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$,所以,$f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$.

注 1　实际上这里仅需求出 A.

注 2　过三点 (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) 的二次抛物线方程可直接写出(拉格朗日插值多项式).

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

本题可直接代入得

$$y=\frac{1}{6}x(x-1)-\frac{1}{3}x(x-4),\text{即知 } A=-\frac{1}{6}.$$

例 2-55　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二次可导,证明存 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证 1　令 $c=\dfrac{a+b}{2}$,作过三点 $(a,f(a))$,$(c,f(c))$,$(b,f(b))$ 的抛物线

$$y=g(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a)+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}f(b)$$
$$+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c).$$

存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)=g''(\xi)$,而

$$g''(\xi)=\frac{4}{(b-a)^2}f(a)+\frac{4}{(b-a)^2}f(b)-\frac{8}{(b-a)^2}f(c)$$

所以，
$$\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)=f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b).$$

证 2　用泰勒公式．记$\frac{a+b}{2}=c$，

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{8}(b-a)^2f''(\xi_1)(\xi_1\in(a,c))$$

$$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{8}(b-a)^2f''(\xi_2)(\xi_2\in(c,b))$$

$$f(a)+f(b)=2f(c)+\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\right].$$

例 2-56　设 $f(x)$ **在**$[0,1]$ **上连续，在**$(0,1)$ **内可导，**$f(0)=0$**，当** $x>0$ **时，**$f(x)>0$**，试证对任意的正整数** k**，存在** $\xi\in(0,1)$**，满足**

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{kf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

证　令 $g(x)=[f(1-x)]^k$**，显然** $g(1)=0$. **由例** 2-52 **知存在** $\xi\in(0,1)$**，使得**

$$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0,$$

即

$$f'(\xi)[f(1-\xi)]^k-k[f(1-\xi)]^{k-1}f'(1-\xi)f(\xi)=0.$$

所以

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{kf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

例 2-57　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$.

解法 1　设 $f(x)=\arctan\frac{a}{x}$.

在区间$[n,n+1]$ **上对** $f(x)$ **用拉格朗日中值定理，存在** $c_n\in(n,n+1)$ **使得**

$$f(n+1)-f(n)=f'(c_n)(n+1-n)=-\frac{a}{c_n^2+a^2},$$

即

$$\arctan\frac{a}{n+1}-\arctan\frac{a}{n}=-\frac{a}{c_n^2+a^2},$$

所以

$$n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=n^2\frac{a}{C_n^2+a^2}.$$

又

$$\frac{n^2a}{(n+1)^2+a^2}<\frac{n^2a}{c_n^2+a^2}<\frac{n^2a}{n^2+a},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a}{(n+1)^2+a^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a}{n^2+a^2}=a,$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=a.$$

解法 2　$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan(ta)-\arctan\frac{ta}{1+t}}{t^2}\left(\frac{1}{x}=t\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{a}{1+a^2t^2}-\frac{a}{(1+t)^2+a^2t^2}}{2t}\text{（洛必塔法则）}=a$$

则
$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=a.$$

注　解法 1 是用拉格朗日中值定理，解法 2 是用洛必塔法则，解法 1 比解法 2 方便些．

例 2-58　设 $g(x)$ 处处可导，且对任意 x 有
$$|g'(x)|\leqslant g(x)\text{，又 } g(0)=0\text{，试证 } g(x)\equiv 0.$$

证　首先证明当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)\equiv 0$，任意取定 $x_0\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理知，存在 $x_1\in(0,x_0)$，使
$$g(x_0)=g(x_0)-g(0)=g'(x_1)x_0,$$
$$|g(x_0)|=|g'(x_1)|x_0\leqslant|g(x_1)|x_0.$$

同理存在 $x_2\in(0,x_1)$，使
$$|g(x_1)|\leqslant|g(x_2)|x_1<|g(x_2)|x_0,$$
即
$$|g(x_0)|\leqslant|g(x_2)|x_0^2.$$

依次类推有
$$|g(x_0)|\leqslant|g(x_n)|x_0^n.$$

记 $|g(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 M，则
$$|g(x_0)|\leqslant Mx_0^n\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

从而 $g(x_0)=0$，由 x_0 的任意性知 $g(x)\equiv 0$，$x\in[0,1)$，由 $g(x)$ 的连续性知 $g(1)=0$.

又　　令 $h(x)=g(x+1)$，则 $h(0)=g(1)=0$，

又 $|h'(x)|=|g'(x+1)|\leqslant g(x+1)=h(x)$，由 1) 知，当 $x\in[0,1]$ 时，$h(x)\equiv 0$，即当 $t\in[1,2]$ 时，$g(t)\equiv 0$. 因此我们证明了 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上恒为零，同理我们可以证明 $g(x)$ 在 $[2,3]$，$[3,4]$，…，$[n,n+1]$，… 上恒为零，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒为零，同理 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上恒为零．

注　用式 $|g(x_0)|=|g(x_0)-g(0)|=|g'(x_1)||x_0|\leqslant|g(x_1)||x_0|$；将已知 $g(0)=0$，$|g'(x)|\leqslant|g(x)|$ 与未知 $g(x)$ 联系起来，这里的关键是拉格朗日中值定理的反复使用．首先考虑 $x_0\in(0,1)$ 是因为 $x_0\in(0,1)$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_0^n=0$.

例 2-59　设当 $x\geqslant a$ 时，$|f'(x)|\leqslant g'(x)$，则对于开区间 $(a,+\infty)$ 内的任一点 x，恒有 $|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a)$ 成立．

证法 1　显然 $g'(x)\geqslant 0$.

(1) 若对于任意的 $x\in(a,+\infty)$ 均有 $g'(x)>0$，则根据柯西定理，存在 $\xi\in(a,x)$，使
$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right|=\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\frac{|f'(\xi)|}{g(\xi)}\leqslant 1,$$
故
$$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a).$$

(2) 一般情况，任给 $\varepsilon>0$，令 $G_\varepsilon(x)=g(x)+\varepsilon(x-a)$，则 $|f'(x)|\leqslant g'(x)<g'(x)+\varepsilon=G_\varepsilon'(x)$，而 $G_\varepsilon'(x)>0$，$x\in(a,+\infty)$，根据(1) 可得
$$\begin{aligned}|f(x)-f(a)|&\leqslant G_\varepsilon(x)-G_\varepsilon(a)\\&=g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a).\end{aligned}$$

上式对于任意 $x>a$，及任意的 $\varepsilon>0$ 总成立，固定 x，令 $\varepsilon\to 0^+$，则
$$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a).$$

由 x 的任意性可知，当 $x>a$ 时，恒有

$$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a).$$

证法 2　令 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$，$\psi(x)=g(x)+f(x)$，

则　$\varphi'(x)=g'(x)-f'(x)\geqslant 0.$

所以，$\varphi(x)$ 单调增，

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(a),\quad x\geqslant a,$$

即

$$g(x)-g(a)\geqslant f(x)-f(a),$$

同理考虑 $\psi(x)$ 可得

$$g(x)-g(a)\geqslant(f(x)-f(a)),$$

故

$$g(x)-g(a)\geqslant|f(x)-f(a)|,\quad x\geqslant a$$

注　任意取定 $x>a$，要证的式子 $\Rightarrow\dfrac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}\leqslant 1$，从而我们考虑柯西定理，但柯西定理要求 $g'(x)\neq 0$，所以我们首先在 $g'(x)>0$ 的特殊条件下证明结论．一般情况要利用特殊情况的结论，辅助函数 $G_\varepsilon(x)$ 的目的就在于此，要证原式也只要证明 $g(x)-g(a)>f(x)-f(a)$．且 $g(x)-g(a)>-(f(x)-f(a))$ 从而考虑 $\varphi(x)$，$\psi(x)$．

例 2-60　设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有二阶连续导数，当 h 充分小时，$f(x_0)<\dfrac{1}{2}[f(x_0+h)+f(x_0-h)]$ 恒成立，试证 $f''(x_0)\geqslant 0$．举例说明等号不能去掉．

证（反证法）　若 $f''(x_0)<0$，则由 $f''(x)$ 的连续性可知存 δ_0，使当 $|\delta|<\delta_0$．$f''(x_0+\delta)<0$，以下假定 h 充分小，并且 $|h|<\delta_0$．

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0+\delta_1)}{2!}h^2,$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\frac{f''(x_0+\delta_2)}{2!}h^2.$$

两式相加得

$$\begin{aligned}f(x_0+h)+f(x_0-h)&=2f(x_0)+\frac{h^2}{2}[f''(x_0+\delta_1)+f''(x_0+\delta_2)]\\&<2f(x_0).\end{aligned}$$

与假设矛盾，故 $f''(x_0)\geqslant 0$.

例 2-61　设 $f(x)$ 在 (a,b) 上二次可导，$\xi\in(a,b)$，是一定点，$f''(\xi)\neq 0$，求证在 (a,b) 内可找到两个值 x_1，x_2，使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证　(1) 我们先在简单、特殊情况下证明结论，即先在 $f'(\xi)=0$ 的情况下证明．

不妨假设 $f''(\xi)>0$，则 ξ 是 $f(x)$ 的严格小值点，即存在 $\delta_0>0$，当 $0<|h|\leqslant\delta_0$ 时，

$$f(\xi+h)>f(\xi).$$

若 $f(\delta_0+\xi)\geqslant f(-\delta_0+\xi)$，则根据介值定理（因为 $f(\delta_0+\xi)\geqslant f(-\delta_0+\xi)>f(\xi)$ 在 $(\xi,\xi+\delta_0]$ 内有一点 x_1 使

$$f(x_1)=f(-\delta_0+\xi),$$

记 $x_2=-\delta_0+\xi$，则 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，这时

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_2}=0=f'(\xi).$$

若 $f(\delta_0+\xi)<f(-\delta_0+\xi)$，也可以找到 $x_1,x_2,x_1\neq x_2$，使 $f(x_1)=f(x_2)$，这样

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0.$$

当 $f''(\xi)<0$ 时，同理可证．

(2) 一般情况，$f'(\xi)\neq 0$.

令 $g(x)=f(x)-f'(\xi)x$，则 $g''(\xi)=f''(\xi)\neq 0$，且 $g'(\xi)=0$，则根据(1)，存在 $x_1,x_2,x_1\neq x_2$，使得

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=g'(\xi)=0,$$

所以，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$.

注　先证 $f'(\xi)=0$ 的特殊情况再证 $f'(1)\neq 0$ 的一般情况，是个好方法．

例 2-62　设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法 1　令 $F(x)=f(x+x_2)-f(x)$，则

$$F'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=x_2f''(x+\theta x_2)<0,0<\theta<1,$$

所以 $F(x)$ 单调减少，又 $x_1>0$，故 $F(x_1)<F(0)$，即

$$f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0).$$

但 $f(0)=0$，故 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法 2　不妨设 $x_1\leqslant x_2$($x_2\leqslant x_1$ 时类似可证)，则由拉格朗日中值定理可得

$$f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1),\quad 0<\xi_1<x_1,$$

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2),\quad x_2<\xi_2<x_1+x_2.$$

又已知 $f''(x)<0$，故 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$. 比较以上两式即得

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

例 2-63　设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明 $f(x)\geqslant x$.

证　因 $f(x)$ 连续且具有一阶导数，故由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 由 $f(x)$ 的泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2,\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}.$$

因 $f''(\xi)>0$，所以 $f(x)\geqslant x$.

例 2-64　设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

证　先证明存在 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=0$. 用反证法．

若不存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$，则在(a,b)内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$，不妨设 $f(x)>0$(对 $f(x)<0$，类似可证)，则

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0,$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0.$$

从而 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$. 与已知条件矛盾．所以在(a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

再证存在 $\eta\in(a,b)$, $f''(\eta)=0$.

由 $f(a)=f(b)=f(\xi)$ 及罗尔定理,知存在 $\eta_1\in(a,\xi)$ 和 $\eta_2\in(\xi,b)$,使 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$,使 $f''(\eta)=0$.

例 2-65 设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$, $|f''(x)|\leqslant b$,其中 a,b 都是非负常数,c 是$(0,1)$ 内任意一点．

(1) 写出 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式；

(2) 证明 $|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

证 (1) $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$,其中 $\xi=c+\theta(x-c)$, $0<\theta<1$.

(2) 在以上一阶泰勒公式中,分别令 $x=0$ 和 $x=1$ 则有

$$f(0)=f(c)-f'(c)c+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2,\quad 0<\xi_1<c<1,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\ 0<c<\xi_2<1.$$

两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2],$$

于是

$$\begin{aligned}|f'(c)|&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2\\&\leqslant a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].\end{aligned}$$

又因 $c\in(0,1)$, $(1-c)^2+c^2\leqslant 1$,故 $|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

(3) 证明不等式

例 2-66 (1) 证明:若 $p>1$,则对于$[0,1]$ 内任一 x 有 $x^p+(1-x)^p\geqslant\dfrac{1}{2^{p-1}}$;

(2) 证明:当$\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ 时,方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ (1)

在$(0,1)$ 内至少有一实根．

证 (1) 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$,则

$$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}].$$

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时,$1-x>x$,从而 $f'(x)<0$.

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,$x>1-x$,从而 $f'(x)>0$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,$f'(x)=0$. 这说明当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 取最小值 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

所以　$x^p+(1-x)^p \geqslant \frac{1}{2^{p-1}}$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) 作辅助函数 $F(x)=\int_0^x (a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n)\mathrm{d}t$　　(2)

因为
$$F(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx.$$

所以　$F(0)=0$，$F(1)=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_n}{n}+\cdots+a_n=0$. 由罗尔定理，在$(0,1)$内至少有一点$\xi$，使$F'(\xi)=0$.
由式(2)知
$$F'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$0=F(\xi)=a_0\xi^n+a_n\xi^{n-1}+\cdots+a_n$$
所以式(1)在$(0,1)$内至少有一实根.

例 2-67　证明：$\sin x+\tan x>2x$，$(0<x<\frac{\pi}{2})$.

证　令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则
$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2$$
$$\geqslant \cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2\geqslant 2\sqrt{\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}-2=0. \tag{1}$$

且等号成立的条件是：
$$\cos^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad 即\ \cos^4 x=1.$$

所以　$\cos x=1$，$x=\frac{\pi}{2}$，但 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

由式(1)可知，$f'(x)>0$，此即 $f(x)$ 严格单调递增.

而 $f(0)=0$，所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$f(x)>0$，此即，$\sin x+\tan x>2x$.

例 2-68　已知 $x<0$，求证：$\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1$.

证　当 $x<0$ 时，$\ln(1-x)>0$，要证的不等式等价于
$$\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1<0. \tag{1}$$

令　$f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1$，则
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1\right)=-1+1=0.$$

而 $f'(x)=-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}>0$，故 $f(x)<f(0)=0$. 即式(1)成立，从而有
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1,\quad (x<0).$$

例 2-69　比较 π^e 与 e^π 的大小，并说明理由.

解法 1 令 $\pi=\mathrm{e}+a(a>0)$. 由于 $\dfrac{\pi^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{\pi}}=\dfrac{(\mathrm{e}+a)^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+a}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}\cdot\dfrac{(\mathrm{e}+a)^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}\left[\left(1+\dfrac{a}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{a}}\right]^{a}<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}\cdot\mathrm{e}^{a}=1$.

所以 $\mathrm{e}^{\pi}>\pi^{\mathrm{e}}$.

解法 2 要证 $\mathrm{e}^{\pi}>\pi^{\mathrm{e}}$,只要证明 $\pi>\mathrm{e}\ln\pi$,

只要证明$\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$.

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x\geqslant\mathrm{e})$,则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}<0(x>\mathrm{e})$,于是 $f(x)$ 在$[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,而 $\pi>\mathrm{e}$,

$f(\pi)=\dfrac{\ln\pi}{\pi}<f(\mathrm{e})=\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$,即 $\mathrm{e}^{\pi},\pi^{\mathrm{e}}$.

解法 3 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}-\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\displaystyle\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\int_{\mathrm{e}}^{\pi}\frac{1-\ln x}{x^{2}}\mathrm{d}x$.

但 $x\in(\mathrm{e},\pi)$ 时,$\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}<0$,

所以
$$\int_{\mathrm{e}}^{\pi}\frac{1-\ln x}{x^{2}}\mathrm{d}x<0,\text{即}\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}.$$

故
$$\mathrm{e}^{\pi}>\pi^{\mathrm{e}}.$$

例 2-70 设 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上单调下降,可微,如果当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$0<f(x)<|f'(x)|$ 成立,则当 $0<x<1$ 时,必有

$$xf(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

解 由 $0<f(x)<|f'(x)|$ 及 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上单调下降有

$$0<f(x)<|f'(x)|=-f'(x),\text{所以}\quad\frac{f'(x)}{f(x)}<-1.$$

当 $0<x<1$ 时,

$$\int_{x}^{1}\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t<\int_{x}^{1}(-1)\mathrm{d}x,\text{即}\ \ln\frac{f(x)}{f(x)}<x-1,\text{亦即}\frac{f(1)}{f(x)}<\mathrm{e}^{x-1}.\tag{1}$$

$$\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t<\int_{1}^{\frac{1}{x}}(-1)\mathrm{d}t.\ \text{即}\ \ln\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(1)}<1-\frac{1}{x},\text{亦即}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(1)}<\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}.\tag{2}$$

由式(1),式(2)得

$$\frac{f(1)}{f(x)}\cdot\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(1)}<\mathrm{e}^{x-1}\cdot\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}},\text{即}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}.$$

要证 $xf(x)>\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,只须证 $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\leqslant x^{2}$ 即可. 即须证 $x-\dfrac{1}{x}\leqslant 2\ln x$.

令 $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x,g'(x)=1+\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^{2}}{x^{2}}\geqslant 0$,所以

$$g(x)\leqslant g(1)=0(0<x<1).\ \text{即当}\ 0<x<1\ \text{时},x-\frac{1}{x}\leqslant 2\ln x.$$

从而 $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\leqslant x^{2}$,所以当 $0<x<1$ 时,

$$\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} < e^{x-\frac{1}{x}} \leqslant x^2, \quad \text{即 } xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. 函数的性态与极值

例 2-71　求 $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ 的值域.

解　显然 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 令 $x^2=t$,则可考虑

$$g(t)=e^{-t}\cos t \quad t\in[0,+\infty).$$

的值域,因为

$$g'(t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t).$$

所以,其驻点为 $t_k=k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$　$(k=0,1,2,\cdots)$,

而
$$g(t_k)=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t_k} \quad (k=0,1,2,\cdots),$$

$g(t_0),g(t_2),g(t_4)\cdots$ 为负数,其中以 $g(t_0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$ 为最小.

$g(t_1),g(t_3),g(t_5),\cdots$ 为正数,但均小于

$$g(0)=1,$$

又
$$\lim_{t\to+\infty}g(t)=0.$$

所以,$g(t)$ 在$[0,+\infty)$ 上的最大值为 $g(0)=1$,最小值为 $g(3\pi/4)=-\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}/2$,故 $g(t)$ 的值域为$[-\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}/2,1]$ 也就是 $f(x)$ 的值域为$[-\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}/2,1]$.

注　本题即求函数的最大值最小值,因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

例 2-72　设 $a>0$,求 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 的最值.

解　因为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x-a}, & x\geqslant a,\\[2mm] \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & 0\leqslant x<a,\\[2mm] \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & x<0.\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0,a$ 两点不可导,在其他点可导,

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(1+x^2)}-\dfrac{1}{(1+x-a)^2}, & x>a,\\[2mm] -\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a,\\[2mm] \dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0.\end{cases}$$

从而 $f(x)$ 仅有一个驻点 $x=a/2$,

而
$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{2+a}, \quad f(0)=f(a)=1+\frac{1}{1+a},$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,$$

故函数 $f(x)$ 的最大值为 $1+1/(1+a)$，没最小值 . $x=a/2$ 为其极小值点 .

注 注意无限区间上的连续函数不一定有最值，故要考虑在无穷远点处的变化形态 .

例 2-73 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 . 又设直线 l：$y=g(x)=f(a)+k(x-a)$ 过点 $(a,f(a))$，但不是 $y=f(x)$ 的切线，则不管正数 δ 多么小，曲线段 $y=f(x)$，$x\in(a-\delta,a+\delta)$，不能位于 l 的同一侧 .

证（反证法） 假定存在 $\delta_0>0$，使曲线段

$$y=f(x),\quad x\in(a-\delta_0,\ a+\delta_0),$$

位于 l 的同一侧，即或者(1)：位于 l 上侧

$$f(x)\geqslant g(x),\ x\in(a-\delta_0,\ a+\delta_0),$$

或者(2)，位于 l 下侧

$$f(x)\leqslant g(x),\quad x\in(a-\delta_0,\ a+\delta_0),$$

在(1) 的情况下，令 $h(x)=f(x)-g(x)$，

则
$$h(x)\geqslant 0,\quad x\in(a-\delta_0,a+\delta_0),$$

又 $h(a)=0$，所以 a 为 $h(x)$ 的极小值点 .

所以，
$$h'(a)=0,$$

$$f'(a)=g'(a)=k$$

这说明 l 为 $f(x)$ 在 $(a,f(a))$ 处的切线，矛盾，

在(2) 的情况下，同样可推出矛盾 .

综上所述，不管正数 δ 多么小，曲线段

$$y=f(x),\quad x\in(a-\delta,a+\delta)$$

不能位于 l 的同一侧 .

注 请考虑，曲线位于直线同侧时，就相切吗？曲线与直线相切时，曲线就一定位于直线的同侧吗？

例 2-74 设 $0<a<b$，求证 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

证法 考虑函数 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，

则
$$f'(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1.$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调增加，

所以
$$f'(x)>f'(1)=0,\quad x>1,$$

从而 $f(x)$ 在 $[1,+\infty]$ 上单调增加 .

$$f(x)>f(1)=0,\quad x>1.$$

取 $x=b/a$，得

$$\left(\frac{b}{a}+1\right)\ln\frac{b}{a}-2\left(\frac{b}{a}-1\right)>0,$$

即
$$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}.$$

例 2-75 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 (x_0,y_0) 处相切，且在这一点曲线 $y=f(x)$ 的曲率 k_1 比 $y=g(x)$ 的曲率 k_2 大，$f''(x_0)$，$g''(x_0)>0$. 问在 (x_0,y_0) 附近，$y=f(x)$ 是在 $y=g(x)$ 的上方还是下方？

解　显然

$$y_0 = f(x_0) = g(x_0),\ f'(x_0) = g'(x_0),$$

又
$$k_1 = \frac{|f''(x_0)|}{(1+f'^2(x_0))^{3/2}},\quad k_2 = \frac{|g''(x_0)|}{(1+g'^2(x_0))^{3/2}},$$

$$k_1 > k_2.$$

所以
$$|f''(x_0)| > |g''(x_0)|,$$

则
$$f''(x_0) > g''(x_0).$$

令
$$F(x) = f(x) - g(x),$$

则
$$F(x_0) = 0,\ F'(x_0) = 0,\ F''(x_0) > 0.$$

所以，x_0 是 $F(x)$ 的极小值点．即存在 $\delta > 0$，当 $|h| < \delta$ 时，

$$F(x_0 + h) \geqslant F(x_0) = 0$$

即
$$f(x_0 + h) \geqslant g(x_0 + h).$$

故在(x_0, y_0)附近，曲线 $y = f(x)$ 在曲线 $y = g(x)$ 的上方．

例 2-76　设 $a > 1$，$f(t) = a^t - at$ 在$(-\infty, +\infty)$内的驻点为 $t(a)$，问 a 为何值时，$t(a)$ 最小?并求出最小值．

解　由 $f'(t) = a^t \ln a - a = 0$，得惟一驻点

$$t(a) = 1 - \frac{\ln\ln a}{\ln a}.$$

考察函数 $t(a) = 1 - \dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$ 在 $a > 1$ 时的最小值．令

$$t'(a) = -\frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2} = -\frac{1 - \ln\ln a}{(a\ln a)^2} = 0,$$

得惟一驻点 $a = e^e$，当 $a > e^e$ 时，$t'(a) > 0$；当 $a < e^e$ 时，$t'(a) < 0$，因此

$$t(e^e) = 1 - \frac{1}{e}$$

为极小值，从而是最小值．

4. 在经济学中的应用

(1) 常用函数

① 需求函数：　$D = f(p)$，其中，D 为需求量，p 为价格．

② 供给函数：　$Q = q(p)$，其中，Q 为供给量．

③ 总收益函数：　$R = Dp$，其中，R 为总收益．

④ 成本函数：　$C = C(x)$，其中，x 为产量，C 为成本．

⑤ 利润函数：　$L = R(x) - C(x)$.

(2) 边际概念

① 边际成本　产量增加一个单位时所增加的总成本．

② 边际收益　多销售一个单位产品时所增加的销售总收入．

设产量为 x，总成本函数为 $C(x)$，总收益函数为 $R(x)$．总利润函数为 $L(x) = R(x) - C(x)$.

边际成本 MC 为 $C'(x)$，边际收益 MR 为 $R'(x)$，边际利润 ML 为 $L'(x) = R'(x) - C'(x)$($ML = MR - MC$).

(3) **弹性**　一个经济变量对另一个经济变量变化的反应程度.

设 x,y 为两个变量,y 对 x 的弹性:$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}(\ln x)}$.

设市场需求量为 Q,价格为 p,需求函数 $Q=Q(p)$. 需求对价格的弹性:$\frac{EQ}{Ep}=\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}(\ln Q)}{\mathrm{d}(\ln p)}$. 收益的价格的弹性:$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{pQ}\frac{\mathrm{d}(pQ)}{\mathrm{d}p}=1+\frac{p}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=1+\frac{EQ}{Ep}$.

(4) 设 x 为某产品的产量,固定成本为 C_0,边际成本 $MC=C'(x)$,则总成本函数 $C(x)=C_0+\int_0^x C'(x)\mathrm{d}x$.

设 x 为某产品的销售量,边际收益 $MR=R'(x)$,则总收益函数 $R(x)=\int_0^x R'(x)\mathrm{d}x$.

若已知某产品的总产量 Q 的变化率为 $f(t)$,即 $Q'(t)=f(t)$. 则从 t_0 到 t 期间该产品的总产量的增加值为 $\Delta Q=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$.

总产量　$$Q(t)=Q_0+\int_0^t f(t)\mathrm{d}t,\ (Q\mid_{t=t_0}=Q_0)$$

(5) 增长率:设 y 是时间 t 的函数 $y=f(t)$,则函数 $y=f(t)$ 在时间 t 的增长率定义为

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

对指数函数 $y=Art$,则其增长率为 $\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r$.

(6) 复利与贴现:设 A_0 是现有本金,r 是年利率,连续复利计算. A_t 是 t 年末的未来值.

复利公式:　$$A_t=A_0\mathrm{e}^{rt}.$$

贴现公式:　$$A_0=A_t\mathrm{e}^{-rt}.$$

例 2-77　某旅行社组团,若每团人数不超过 30 人时,飞机票每张收费 900 元. 若每团人数多于 30 人时,则每多 1 人机票每张可减少 10 元,直至每张降为 450 元. 每团乘飞机,旅行社则需付给航空公司包机费 15000 元.

(1) 写出飞机票的价格函数;

(2) 每团人数为多少时旅行社可获最大利润.

解　设 x 表示每团人数,p 表示飞机票的价格. 由 $\frac{900-450}{10}=45$,所以每团人数最多可限制为 $30+45=75$ 人.

$$p(x)=\begin{cases}900, & 1\leqslant x\leqslant 30;\\ 900-10(x-30), & 30<x\leqslant 75.\end{cases}$$

利润函数 $L=L(x)=xp-15000=\begin{cases}900x-15000, & 1\leqslant x\leqslant 30,\\ 900x-10x(x-30)-15000, & 30<x\leqslant 75.\end{cases}$

因 $L'(x)=\begin{cases}900, & 1\leqslant x\leqslant 30\\ 1200-20x, & 30<x\leqslant 75\end{cases}$. 令 $L'(x)=0$,得 $x=60$,$L''(60)=-20<0$.

故当 $x=60$ 人时,利润极大也最大,此时 $L=L_{\max}=21000$(元).

例 2-78　一商店按批发价每件 4 元购入一批商品进行零售,若定价 5 元/件,估计可卖出 200 件. 若每件售价降低 0.02 元,则可以多卖出 20 件. 问该进多少货,如何定价,可使利润最大,最大利润又为多少?

解　设 Q 为多卖出的件数,则卖出的件数为 $200+Q$,价格为 $\left(5-\frac{0.02}{20}Q\right)$. 每件利润为 $\left(5-\frac{0.02}{20}Q-4\right)=\left(1-\frac{0.02}{20}Q\right)$.

利润函数 $L(Q)=\left(1-\frac{0.02}{20}Q\right)(200+Q)=-0.001Q^2+0.8Q+200.$

$$L'(Q)=-0.002Q+0.8, \text{令 } L'(Q)=0, \text{得 } Q=400, L''(400)=-0.02<0,$$

$L_{\max}=360$，故应买进 600 件，定价为 4.6 元．

例 2-79　设总成本函数 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$，价格函数 $p=p(x)=\frac{100}{\sqrt{x}}$，求边际成本，边际收益，边际利润，收益对价格的弹性．

解　边际成本 $MC=C'(x)=3+x$. 总收益函数 $R=px=100\sqrt{x}$.

边际收益 $MR=R'(x)=\frac{500}{\sqrt{x}}$. 边际利润

$$ML=MR-MC=R'(x)-C(x)=\frac{50}{\sqrt{x}}-x-3.$$

当 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$ 时，反函数 $x=\frac{10000}{p^2}$，因此总收益函数 $R=px=\frac{10000}{p}$，收益对价格的弹性$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}$ $=\frac{p^2}{10000}\cdot\left(-\frac{10000}{p^2}\right)=-1.$

例 2-80　设某产品的需求函数 $Q=Q(p)$ 是单调减少，收益函数 $R=pQ$，当价格 $p=p_0$ 时，$Q=Q_0$，$R'(Q_0)=2$，$R'(p_0)=-150$. 需求对价格的弹性 E_p 满足 $|E_p|=\frac{3}{2}$，求 p_0 和 Q_0.

解　$Q=Q(p)$ 单减，故 $E_p<0$，所以 $E_p|_{p=p_0}=-\frac{3}{2}$，且反函数 $p=p(Q)$ 存在，

$$R=pQ=pQ(p),\ R'(p)=Q(p)+p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=Q\left(1+\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right)=Q(1+Ep).$$

由 $R=pQ=p(Q)Q$，得

$$R'(Q)=p(Q)+Qp'(Q)=p(Q)\left(1+\frac{Q}{p(Q)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}\right)=p(Q)\left(1+\frac{1}{Ep}\right).$$

故由 $R'(Q)|_{Q=Q_0}=p_0\left(1-\frac{2}{3}\right)=2$，得 $p_0=6$.

由 $R'(p)|_{p=p_0}=Q_0\left(1-\frac{3}{2}\right)=-150$，得 $Q_0=300$.

例 2-81　某厂家生产的一种产品，同时时 在两个市场销售．售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 Q_1 和 Q_2. 需求函数分别为 $Q_1=24-0.2p_1$，$Q_2=10-0.05p_2$. 总成本函数 $C=35+40(Q_1+Q_2)$，试问厂家如何确定两个市场的销售价，才能使其获得的总利润最大，且最大总利润又为多少？

解　总收益函数 $R=p_1Q_1+p_2Q_2=24p_1+10p_2-0.2p_1^2-0.05p_2^2$.

总成本函数 $C=35+40(Q_1+Q_2)=1395-8p_1-2p_2$，

总利润函数 $L=R-C=-0.2p_1^2-0.05p_2^2+32p_1+12p_2-1395$

$$=-0.2(p_1-80)^2-0.05(p_2-120)^2+605.$$

故当 $p_1=80$，$p_2=120$ 时，$L_{\max}=605$.

(Q_1，Q_2 也可计算).

注　如要求 $p_1=p_2$，则令

$$F=L+\lambda(p_1-p_2)=-0.2p_1^2-0.05p_2^2+32p_1+12p_2-1395+\lambda(p_1-p_2),$$

令 $F'_{p_1}=0$，$F'_{p_2}=0$，则可得 p_1,p_2.

例 2-82 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某商品广告，据统计有下列经验公式

$$R(\text{销售收入})=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

其中，x_1 为电台广告（万元），x_2 为报纸广告费（万元）. 现提供广告费 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

解 令 $L=R-C=R-(x_1+x_2)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$，

又，$x_1+x_2=1.5$，故

$$F=L+\lambda(x_1+x_2)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2+\lambda(x_1+x_2-1.5),$$

令 $F'_{x_1}=0$，$F'_{x_2}=0$，$F'_{\lambda}=0$ 得 $x_1=0$，$x_2=1.5$（万元）$(0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1.5)$.

故广告费用全部投入报纸广告时最好.

（如果提供的广告费不定，则令 $L'_{x_1}=0$，$L'_{x_2}=0$ 得 $x_1=0.75$，$x_2=1.25$（万元））

例 2-83 工厂生产两种产品，总成本函数为 $C=Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2+5$，两种产品的需求函数分别为 $Q_1=26-p_1$，$Q_2=10-\frac{1}{4}p_2$. 试为使利润最大，确定两种的产品的产量及最大利润.

解 $R=R_1+R=p_1Q_1+p_2Q_2=(26-Q_1)Q_1+(40-4Q_2)Q_2$，

$$L=R-C=26Q_1+40Q_2-2Q_1^2-2Q_1Q_2-5Q_2^2-5,$$

令 $L_{Q_1}=0$，$L_{Q_2}=0$ 得 $Q_1=5$，$Q_2=3$，$L_{\max}=120$.

例 2-84 某工厂的同一种产品分销两个独立市场，两个市场的需求情况不同. 设价格函数为 $p_1=60-3Q_1$，$p_2=20-2Q_2$. 总成本函数为 $C=12Q+4$，$Q=Q_1+Q_2$，为获得最大利润，求投放每个市场的产量，并确定此时每个市场的价格.

解 $R_1=p_1Q_1=60Q_1-3Q_1^2$，$R_2=p_2Q_2=20Q_2-2Q_2^2$，

$$L=R_1+R_2-C=48Q_1+Q_2-3Q_1^2-2Q_2^2-4,$$

令 $L_{Q_1}=0$，$L_{Q_2}=0$ 得 $Q_1=8$，$Q_2=2$，$p_1=36$，$p_2=16$.

例 2-85 一厂商经营两工厂，生产同一种产品且在同一市场销售，两工厂的成本函数为 $C_1=3Q_1^2+2Q_1+6$，$C_2=2Q_2^2+2Q_2+4$. 而价格函数 $p=74-6Q$，$Q=Q_1+Q_2$，为获得最大利润，试确定每个工厂的产出.

解
$$R=pQ=74-6Q^2=74(Q_1+Q_2)-6(Q_1+Q_2)^2,$$

$$L=R-(C_1+C_2)=72Q_1+72Q_2-9Q_1^2-8Q_2^2-12Q_1Q_2-10.$$

令 $L'_{Q_1}=0$，$L'_{Q_2}=0$ 得 $Q_1=2$，$Q_2=3$.

例 2-86 某商品需求函数为

$$D=10-\frac{p}{2}.$$

求 (1) 需求价格弹性函数；(2) 当 $p=3$ 时的需求价格弹性；(3) 在 $p=3$ 时，若价格上涨 1%，其总收益是增加，还是减少？它将变化百分之几？

解 (1) 按弹性定义：

$$\frac{ED}{Ep}=-\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{D}=-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{p}{10-\frac{p}{2}}=\frac{p}{20-p}.$$

(2) $p=3$ 时的需求价格弹性为

$$\left.\frac{ED}{Ep}\right|_{p=3}=\left.\frac{p}{20-p}\right|_{p=3}=\frac{3}{17}.$$

(3) 在 $p=3$ 时，$\left.\frac{ED}{Ep}\right|_{p=3}=\frac{3}{17}<1$，故当价格上涨 1% 时，其总收益增加，再求总收益增加的百分比．按题意，即求在 $p=3$ 时，总收益 R 对价格 p 的弹性．

由于总收益 $R=pD=10p-\frac{p^2}{2}$.

于是总收益的价格弹性函数为

$$\frac{ER}{Ep}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{R}=(10-p)\cdot\frac{p}{10p-\frac{p^2}{2}}$$

$$=\frac{2(10-p)}{20-p}.$$

从而在 $p=3$ 时总收益的价格弹性

$$\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=3}=\left.\frac{2(10-p)}{20-p}\right|_{p=3}\approx 0.82.$$

故在 $p=3$ 时，若价格上涨 1%，其总收益约增加 0.82%.

例 2-87　某厂每批生产 A 商品 x 台的费用为 $c(x)=5x+200$（万元），得到的收入为 $R(x)=10x-0.01x^2$（万元），问每批生产多少台，才能使利润最大？

解　设利润为 $L(x)$，则

$$L(x)=R(x)-c(x)=5x-0.01x^2-200,$$

$$L'(x)=5-0.02x.$$

令 $L'(x)=0$，　解得　$x=250$（台）。

由于 $L''(x)=-0.02<0$，所以 $L(250)=425$（万元）为极大值，也就是最大值．

因此，只要每批生产 250 台，就可以获得最大利润 425 万元．

例 2-88　某企业根据现有技术与资源条件，原计划所作投资使今年所得为 x 元，明年所得为 y 元，y 与 x 之间有如下关系式 $y=\varphi(x)$（称为转换曲线或投资机会线），设年利率为 r，每年计算复利一次，问该厂应如何调整投资，使所得现值最大？

解　设 W 表示今年可得的 x 元和明年可得的 y 元的现值，则

$$W=x+\frac{\varphi(x)}{1+r}.$$

据题意欲使 W 最大，即只要求出满足

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=0\quad \text{及}\quad \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}x^2}<0$$

的 x，就可使 W 达到最大，亦即要使

$$1+\frac{\varphi'(x)}{1+r}=0\quad \text{及}\quad \frac{\varphi''(x)}{1+r}<0.$$

由于 $1+r>0$，所以当 $\varphi''(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 为上凸函数时，可调整投资使今年所得的 x 满足 $\varphi'(x)=-(1+r)$，这时，明年所得 y 也可由 $y=\varphi(x)$ 算出．因此，经过这样的调整就可使所得现值达到最大．

习　题　2

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$f'(x_0)=A$，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{l_1}$；　　(2) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+2t)-f(x_0)}{t}$；

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+2t)-f(x_0+t)}{2t}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{\alpha}{n}\right)-f\left(x_0+\dfrac{\beta}{n}\right)\right]$.

2. 讨论：

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ x^3, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内的连续性与可导性及 $f'(x)$ 的连续性.

(2) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的一阶、二阶导数是否存在？如果存在，试求其值.

3. 若已知

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1, \text{当 } 0<x\leqslant 1;\\ x, \text{当 } x>1,\end{cases}$$

且有 $f(0)=0$，试求函数 $f(t)$.

4. 设 $f(x)$ 的定义域为所有非零实数之全体；对任何非零的实数 x,y，均有 $f(xy)=f(x)+f(y)$；且 $f'(1)$ 存在.

(1) $f'(x)$ 还在哪些点存在？

(2) $f(x)=$？

5. 已知函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$

求 $f(x)$.

6. 试求经过原点且与曲线 $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ 相切的切线方程.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\sqrt{1+\arctan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$；　　(2) $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$；

(3) $x=e^{\arcsin y}$；　　(4) $y=(1+x^2)^{\sin x}$.

8. 设函数 $y=f(x)$ 由方程

$$\begin{cases}e^x=3t^2+2t+1,\\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}$$

确定，t 为参变量，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

9. 求函数 n 阶导数的表达式：

(1) $y=x\sqrt[n]{x}$；　　(2) $y=e^{ax}\sin bx$.（b 为常数）

10. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导$(0<a<b)$，证明：在(a,b)内存在 ξ 和 η，使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

11. 求证

(1) $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$，$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ 0<p<1)$；

(2) $(a+b)^p\geqslant a^p+b^p$，$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ p>1)$.

12. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距．

13. 确定常数 a,b，使 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的三阶无穷小量．

14. 求内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，两边分别平行于坐标轴的面积最大的矩形 $(a,b>0)$.

简答与提示

1. (1) A；　(2) $2A$；　(3) $\dfrac{1}{2}A$；(4) $(\alpha-\beta)A$.

2. (1) $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ 3x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．

(2) $f'(0)=0$；　$f''(0)$ 不存在．

3. $f(t)=\begin{cases}t, & -\infty<t\leqslant 0;\\ e^t-1, & t>0.\end{cases}$

4. (1) $f(y)=f(1)+f(y)$，$\Rightarrow f(1)=0$，当 $x\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\cdot\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\frac{f'(1)}{x}.\end{aligned}$$

即　$f'(x)$ 除 $x=0$ 外处处存在．

(2) 由 $f'(x)=\dfrac{f'(1)}{x}$ 可知，$f(x)=f'(1)\ln|cx|$.

5. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

6. $y=-x$ 或 $y=-\dfrac{1}{25}x$.

7. (1) $\dfrac{x^2-1}{2(x^4+3x^2+1)\sqrt{1+\arctan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$.

(2) $-\dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

(3) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$.

(4) $(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$.

8. $\frac{1}{2}$.

9. (1) $\prod_{K=1}^{n}\left(n-\frac{2K-3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}$；（2）$(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10. **分别对** $f(x)$ **在**$[a,b]$ **上用拉格朗日中值定理,以及对** $f(x)$、$F(x)=\frac{x^2-a^2}{2}$ **用柯西中值定理即可证**.

11. **令** $f(x)=(x+b)^p-x^p-b^p$ **及** $g(x)=(1+x)^p-x^p-1$,**讨论** $f(x)$,$g(x)$ **的单调性**.

12. **由** $x\neq 0$，$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ **得**$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(u)}{uf(x)}=\frac{1}{2}$.

13. $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$.

14. **第一象限顶点**$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$,**面积** $=2ab$，

第三章　不定积分

不定积分的计算是考查考生的运算技能，虽然在历年的试题中，单独的不定积分计算题并不多，但是在定积分、重积分、线面积分与广义积分的计算及微分方程的求解中都离不开这一基本技能．因此考生应注意在完成一定数量的习题中，总结与熟悉某些规律．

一、复习与考试要求

（1）了解不定积分的概念与性质，并熟记一些基本初等函数的原函数．

（2）掌握不定积分的换元法与分部积分法及典型初等函数的不定积分的求法．

二、基本概念与理论

1．不定积分

（1）原函数：若在区间 I 内，$F'(x)=f(x)$，则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 I 内的一个原函数．

（2）不定积分：函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数

$$\{F(x)+C \mid F'(x)=f(x),\quad C\in\mathbf{R}\}$$

称作 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\quad C\in\mathbf{R}$．

2．不定积分的性质

（1）存在性：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 存在．

（2）线性：设 a,b 是两个常数，则

$$\int[af(x)+bg(x)]\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x+b\int g(x)\mathrm{d}x,\quad x\in I.$$

（3）可微性：$(\int f(x)\mathrm{d}x)'=f(x),\quad \mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x)=f(x)\mathrm{d}x,\quad x\in I.$

3．不定积分的基本计算法

（1）第一类换元法：若 $f(u)$，$\varphi'(x)$ 均连续，$f(u)$ 有原函数 $F(u)$，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } u=\varphi(x)} \int f(u)\mathrm{d}u$$

$$=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.$$

（2）第二类换元法：若 $x=\psi(t)$，$\psi'(t)$ 连续且不为零，$f[\psi(t)]\psi'(t)$ 有原函数 $F(t)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$$

$$=F(t)+C=F[\psi^{-1}(x)]+C.$$

（3）分部积分法：若 $u(x)$，$v(x)$ 均具有连续的导函数，则

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x),$$

即

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

注意　类似于概率积分 $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{e}^{\pm x^2}\mathrm{d}x$，$\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x$ 及 $\int\sqrt{\ln x}\mathrm{d}x$ 等的不定积分没有初等函数式．

请考生熟记基本积分表(同济大学数学教研室编. 高等数学第五版. 北京:高等教育出版社,2002 年,P. 186～187,共 15 式).

三、基本题型与解题方法

1. 第一类换元法

例 3-1 计算$\int \frac{x^3+x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^4)}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^4}}$

$$= -\frac{1}{4}\times 2\sqrt{1-x^4} + \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C = \frac{1}{2}(\arcsin x^2 - \sqrt{1-x^4}) + C.$$

例 3-2 计算$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

解 由于$\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{\cos^{\frac{3}{2}} x}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^{\frac{3}{2}} x} = 2\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)$,

故

$$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$$

例 3-3 求不定积分$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x} - \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C.$$

例 3-4 求不定积分$\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

解 由于 $x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x - (1-x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$,故

$$\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}(1-x) + \int (1-x)^{3/2}\mathrm{d}(1-x)$$

$$= -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + \frac{2}{5}(1-x)^{5/2}.$$

例 3-5 求不定积分$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

解 由于$\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$,

故

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C.$$

例 3-6 计算$\int (x\ln x)^p(\ln x+1)\mathrm{d}x$.

解　**由于** $\mathrm{d}(x\ \ln x)=(x\ \ln x)'\mathrm{d}x=(\ln x+1)\mathrm{d}x$，

故

$$\int(x\ \ln x)^P(\ln x+1)\mathrm{d}x=\int(x\ \ln x)^P\mathrm{d}(x\ \ln x)=\begin{cases}\dfrac{1}{P+1}(x\ \ln x)^{P+1}+C, & P\neq-1;\\ \ln(x\ \ln x)+C, & P=-1.\end{cases}$$

例 3-7　**计算** $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x$.

解法 1　**原式** $\displaystyle=\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\int\frac{x^3+1-1}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}(1+x^3)$

$$=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}(1+x^3)-\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x^3)$$

$$=\frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{2}{3}}+C.$$

解法 2　**令** $1+x^3=u^3$，**则** $x^2\mathrm{d}x=u^2\mathrm{d}u$.

原式 $\displaystyle=\int\frac{(u^3-1)u^2\mathrm{d}u}{u}=\int(u^4-u)\mathrm{d}u$

$$=\frac{u^5}{5}-\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{2}{3}}+C.$$

例 3-8　**计算** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

解法 1　**原式** $\displaystyle=\int\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=x-\int\frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$

解法 2　**原式分子分母同乘以** e^{-x}.

则

$$\textbf{原式}=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}+1)}{\mathrm{e}^{-x}+1}=-\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)+C.$$

例 3-9　**计算** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2+2\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

解　**原式** $\displaystyle=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+2)}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+2}-\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)}{1+(\mathrm{e}^x+1)^2}=\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+2)-\arctan(\mathrm{e}^x+1)+C.$$

例 3-10　**计算** $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$.

解法 1　**原式** $\displaystyle=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1+(x^2)^2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right)+C.$$

解法 2 **原式**$= \operatorname{sgn}x\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x. = \operatorname{sgn}x\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = \operatorname{sgn}x\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}.$

$$= \operatorname{sgn}x\left[x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right]+C.$$

例 3-11 **计算**$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}$.

解 **原式**$= \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int \cot x\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x}+\int \frac{1}{\tan x}\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\tan x|+C.$$

例 3-12 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$**,其中** a,b **不全为零的非负常数**.

解 **当** $a\neq 0,b\neq 0$ **时,**

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.$$

当 $a=0$, $b\neq 0$ **时,**

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\tan x+C.$$

当 $a\neq 0$, $b=0$ **时,**

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}\cot x+C.$$

例 3-13 **设** $f(x^2-1) = \ln\frac{x^2}{x^2-2}$**,且** $f[\varphi(x)] = \ln x$**,求**$\int \varphi(x)\mathrm{d}x$.

解 **因为** $f(x^2-1) = \ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$**,所以** $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

又 $f[\varphi(x)] = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$**,从而**$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x$,$\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$**,于是**

$$\int \varphi(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x = 2\ln(x-1)+x+C.$$

例 3-14 **计算**$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

解 **原式**$= \int \frac{(1-\ln x)}{x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)^2} = \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}+C = \frac{x}{x-\ln x}+C.$

解法 2 **原式**$= \int \frac{1+\ln\frac{1}{x}}{\left(x+\ln\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\ln\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{1+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\frac{1}{x} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C.$$

例 3-15　计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

解　原式$=\int\frac{\cos x}{\sqrt{2\cos^2 x+\sin^2 x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}=\arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

2. 第二类换元法

(1) **用三角函数代换或双曲函数代换消去二次根式.**

一般地，被积函数中含$\sqrt{a^2-x^2}$，**可令** $x=a\sin t$ **或**$x=a\cos t$；**被积函数中含**$\sqrt{a^2+x^2}$，**可令** $x=a\tan t$ **或** $x=a\operatorname{sh}t$；**被积函数中含**$\sqrt{x^2-a^2}$，**可令** $x=a\sec t$ **或** $x=a\operatorname{ch}t$.

例 3-16　求不定积分：

(1) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

解　(1) **令** $x=a\sec t$，**则** $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$，**这样**

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t=a\tan^2 t\mathrm{d}t,$$

故
$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=a\int\tan^2 t\mathrm{d}t=a\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$$

$$=a(\tan t-t)+C=a\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}-\arccos\frac{a}{x}\right)+C=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

(2) **令** $x=a\tan t$，**则** $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，**于是**

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{a\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{a^2\tan^2 t\cdot a\sec t}=\frac{1}{a^2}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t,$$

故
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$$

例 3-17　计算$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x$.

解　令 $x=2a\sin^2 t$，**则** $\mathrm{d}x=4a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$，**于是**

$$x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x=2a\sin^2 t\frac{\sqrt{2a}\sin t}{\sqrt{2a}\cos t}\cdot 4a\sin t\cos t\mathrm{d}t=8a^2\sin^4 t\mathrm{d}t,$$

故

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x=8a^2\int\sin^4 t\mathrm{d}t=8a^2\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int(3-4\cos 2t+\cos 4t)\mathrm{d}t=3a^2 t-2a^2\sin 2t+\frac{a^2}{4}\cos 4t+C$$

$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - 2a\ \sqrt{x(2a-x)} + \frac{a-x}{2}\ \sqrt{x(2a-x)} + C.$$

例 3-18 **计算** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

解法 1 **令** $x = \tan t$,**则** $\mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \int \tan^5 t\sec t\mathrm{d}t = \int \tan^4 t\mathrm{d}\sec t = \int (\sec^2 t - 1)^2\mathrm{d}\sec t = \frac{1}{5}\sec^5 t - \frac{2}{3}\sec^2 t + \sec t + C$$

$$= \frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\ \sqrt{1+x^2} + C.$$

解法 2 **令** $\sqrt{1+x^2} = t$, $x^2 = t^2 - 1$, $x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \int (t^2-1)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\ \sqrt{1+x^2} + C.$$

解法 3 **原式** $= \int x^4\mathrm{d}\ \sqrt{1+x^2} = x^4\ \sqrt{1+x^2} - 4\int x^3\ \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= x^4\ \sqrt{1+x^2} - 4\int x(x^2+1-1)\ \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= x^4\ \sqrt{1+x^2} - 2\int (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(1+x^2) + 2\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$= x^4\ \sqrt{1+x^2} - \frac{4}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

例 3-19 **计算** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ \sqrt{x^2-1}}$

解法 1 **令** $x = \sec t$,**则** $\mathrm{d}x = \sec t\tan t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\ |\ \tan t\ |}\mathrm{d}t = \pm\int \mathrm{d}t = |\ t\ | + C = \left|\arccos\frac{1}{x}\right| + C$$

解法 2 **令** $x = \mathrm{ch}t$, **则** $\mathrm{d}x = \mathrm{sh}t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t\mathrm{sh}t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}t} = \int \frac{\mathrm{dsh}t}{1+\mathrm{sh}^2 t} = \arctan(\mathrm{sh}t) + C$$

$$= \arctan\ \sqrt{x^2-1} + C.$$

解法 3 **令** $\sqrt{x^2-1} = t$,**则** $x^2 = 1+t^2$, $x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan\ \sqrt{x^2-1} + C.$$

解法 4 **令** $x = \frac{1}{t}$,**则** $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \mp\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \mp\arcsin t + C = \begin{cases} -\arcsin\frac{1}{x} + C, & x > 1; \\ \arcsin\frac{1}{x} + C, & x < -1. \end{cases}$$

例 3-20 **计算** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

解法 1　**原式**$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ \sqrt{1-x}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$

解法 2　**原式** $=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin(2x-1)+C.$

解法 3　**原式**$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\xlongequal{(\text{令 } x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t)}\int\mathrm{d}t=t+C=\arcsin(2x-1)+C.$

解法 4　**令**$\sqrt{\frac{x}{1-x}}=u$,

$$\text{原式}=\int\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=2\arctan u+C=2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

解法 5　**易求得被积函数**$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$**的定义域为** $0<x<1$,**则可令** $x=\sin t$.

$$\text{原式}=\int 2\mathrm{d}t=2t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

(2) **倒置换**

倒数代换适用于含有$\frac{1}{ax^n+b}$ **的积分.**

例 3-21　**计算不定积分:**

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$;　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\ \sqrt{x^2-4}}$.

解　(1) **令** $x=\frac{1}{u}$,**则** $\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$,**于是**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}=\int\frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u^6}+4\right)}\mathrm{d}u=-\int\frac{u^5}{4u^6+1}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(4u^6+1)}{4u^6+1}=-\frac{1}{24}\ln(4u^6+1)+C=-\frac{1}{24}\ln\left(\frac{4}{x^6}+1\right)+C;$$

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\ \sqrt{x^2-4}}\xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{u}}\int\frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{1-4u^2}{u^2}}}\mathrm{d}u=-\int\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-4u^2}}$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}(1-4u^2)}{\sqrt{1-4u^2}}=\frac{1}{4}\ \sqrt{1-4u^2}+C=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C.$$

例 3-22　**求**$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ \sqrt{x^2+3x-4}}$.

解　**令** $x=\frac{1}{t}$,**则** $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,**故**

$$\text{原式}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}-4}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t-4t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(t-\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{t-\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}+C=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}+C=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{8-3x}{5x}+C.$$

例 3-23　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$**,则** $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$**,故**

$$\text{原式}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t^4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}},$$

又令 $u=\sqrt{1+t^2}$**,则** $t=\sqrt{u^2-1}$**,**$\mathrm{d}t=\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}$**,故**

$$\text{原式}=-\int\frac{(u^2-1)\sqrt{u^2-1}}{u}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u=-\int(u^2-1)\mathrm{d}u=-\frac{u^3}{3}+u+C$$

$$=-\frac{\sqrt{(1+t^2)^3}}{3}+\sqrt{1+t^2}+C=-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

例 3-24　计算$\int\frac{x^9+8}{x^{10}+8x}\mathrm{d}x$.

解　原式 $=\int\frac{x^8}{x^9+8}\mathrm{d}x+8\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{10}+8x}=\frac{1}{9}\ln|x^9+8|+8\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{10}+8x}$.

而积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{10}+8x}=-\frac{1}{9\times8}\ln\left|\frac{x^9+8}{x^9}\right|+C$**(利用倒置换)**

故　　原式 $=\frac{1}{9}\ln|x^9+8|+\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x^9+8}{x^9}\right|+C.$

3. 分部积分法

分部积分公式$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ **中把** $f(x)\mathrm{d}x$ **表成** $u(x)\mathrm{d}v(x)$ **的一般原则是:**① $v(x)$ **比较容易被凑得;**② $\int v\mathrm{d}u$ **比较容易计算;**③ **被积函数中含反三角函数或对数函数因子时,宜用分部积分法并把这类因子取作** $u(x)$.

例 3-25　计算$\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解　被积函数含有反三角函数,宜用分部积分法

$$\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x=x\arctan\sqrt{x}-\int x\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})$$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{1+x-1}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C.$$

例 3-26　计算不定积分

(1) $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$；　　(2) $\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x$.

解　(1) **被积函数含有因子** $\ln^2 x$，**取其为** $u(x)$，**用分部积分法**

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x=\int\ln^2 x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^2 x}{x}+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\ln^2 x)$$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int\frac{1}{x}\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\cdot\frac{\ln x}{x}+2\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\ln x)=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}+2\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}(\ln^2 x+\ln x^2+2)+C.$$

(2) **当被积函数为三角函数与** x **的正整数幂的积时，取** x **的正整数幂的** $u(x)$，**凑三角函数为** $v(x)$，**这样反复用分部积分法可降低** x **的幂.**

$$\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\int x^2\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int x^2\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2x\cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$$

例 3-27　求不定积分 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解　$\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}=\frac{x+1-1}{(1+x)^2}\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}-\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$，

其中，积分 $\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x$ **无初等形式，而积分**

$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x$$

故

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C.$$

例 3-28　设 $f'(\mathrm{e}^x)=a\sin x+b\cos x\quad(a^2+b^2\neq 0)$，**试求** $f(x)$.

解　**先求出** $f(\mathrm{e}^x)$ **的表达式. 注意到**

$$f(\mathrm{e}^x)=\int[f(\mathrm{e}^x)]'\mathrm{d}x=\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(a\sin x+b\cos x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=a\int\sin x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+b\int\cos x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=aI_1+bI_2,$$

其中 $I_1=\int\sin x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\cos x = e^x(\sin x - \cos x) - I_1$$

故 $I_1 = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_1$；

同样可计算得 $$I_2 = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C_2$$

于是 $$f(e^x) = aI_1 + bI_2$$

$$= \frac{e^x}{2}[(a+b)\sin x + (b-a)\cos x] + C,$$

从而

$$f(x) = \frac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x) + (b-a)\cos(\ln x)] + C.$$

例 3-29 **求** $\displaystyle\int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}dx$.

解 **原式** $\displaystyle = -\int \ln(e^x+1)d(e^{-x}) = -e^{-x}\ln(e^x+1) + \int e^{-x} \cdot \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$= -e^{-x} \cdot \ln(e^x+1) + \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -e^{-x}\ln(e^x+1) - \ln(1+e^{-x}) + C$$

$$= -e^{-x}\ln(e^x+1) - \ln[e^{-x}(e^x+1)] + C$$

$$= -(e^{-x}+1) \cdot \ln(e^x+1) + x + C.$$

例 3-30 **求** $\displaystyle\int (1+x^2)^2 \cos x dx$.

解法 1 **原式** $\displaystyle = \int (1+x^2)^2 \cos x dx = \int (1+x^2)^2 d\sin x$

$$= (1+x^2)^2 \sin x + 4\int x(1+x^2) d\cos x$$

$$= (1+x^2)^2 \sin x + 4x(1+x^2)\cos x - 4\int x(1+3x^2)\cos x dx$$

$$= (1+x^2)^2 \sin x + 4x(1+x^2)\cos x - 4(1+3x^2)\sin x + 24\int x \sin x dx$$

$$= (4x^3 - 20x)\cos x + (x^4 - 10x^2 + 21)\sin x + C.$$

解法 2 **用待定系数法．设**

$$\int (1+x^2)^2 \cos x dx = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\cos$$

$$+ (x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)\sin x + C.$$

两边求导得

$$(1+x^2)^2 \cos x = [x^4 + b_3x^3 + (b_2 + 3a_3)x^2 + (b_1 + 2a_2)x$$

$$+ (b_0 + a_1)]\cos x + [(4 - a_3)x^3 + (3b_3 - a_2)x^2$$

$$+(2b_2-a_1)x+(b_1-a_0)]\sin x.$$

解得：$a_3=4, b_3=0, a_2=0, b_2=-10, a_1=-20, b_1=0, a_0=0, b_0=21.$

故　　**原式** $=(4x^3-20x)\cos x+(x^4-10x^2+21)\sin x+C.$

例 3-31　**求** $\int \dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解法 1　**原式** $=-\int \ln x\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C.$$

解法 2　**令** $x=\tan t$，**则** $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t.$

$$\textbf{原式}=\int\ln\tan t\cdot\sin t\mathrm{d}t=-\int\ln\tan t\mathrm{d}\cos t=-\cos t\ln\tan t+\int\csc t\mathrm{d}t$$

$$=-\cos t\ln\tan t-\ln|\csc t+\cot t|+C=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left[\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]+C.$$

4. 几种常见函数的积分和案例

(1) **有理函数的积分** $\int\dfrac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x.$

一般地，把有理分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **分解为多项式与部分分式（最简真分式）之和，然后逐项积分. 比如，对不定积分** $\int\dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x$，**被积有理式**

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)},$$

令真分式

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3},$$

等式右端通分后得

$$5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2),$$

右端整理后与左端比较系数得

$$A=\frac{1}{6},\qquad B=-\frac{9}{2},\qquad C=\frac{28}{3},$$

于是　$\int\dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x$

$$=\int\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{9}{2}\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+\frac{28}{3}\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x=x+\frac{1}{6}\ln x-\frac{9}{2}\ln(x-2)+\frac{28}{3}\ln(x-3)+C.$$

真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **分解为部分分式的一般形式是**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^n\cdots(x^2+px+q)^k}\qquad(p^2-4q<0)$$

$$=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$$

其中,分式$\frac{1}{(x-a)^n}$的积分是简单的;分式$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$的积分方法介绍如下:

当 $k=1$ 时,

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}$$

$$=\frac{B}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C_1$$

其中 $a=\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$.

当 $k=2,3,\cdots$(奥斯特罗格拉特斯基方法)时

令
$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x=\frac{Q(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}}+A\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q},\tag{1}$$

这里的 $Q(x)$ 是一个次数比 $(x^2+px+q)^{k-1}$ 低一次的,即 $2k-3$ 次的待定多项式,常数 A 也将待定.

在式(1)的两端对 x 求导后,通分整理并比较等式两端的系数,定出 $Q(x)$ 与 A,积分基本上完成了.

例 3-32 计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

解 $\frac{1}{(x^2+x+1)}$ 是 $k=2$ 的情形,故令

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+C\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\quad(A,B,C\text{ 待定}),$$

等式两端求导后得到

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}+\frac{C}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{(C-A)x^2+(C-2B)x+A-B+C}{(x^2+x+1)^2},$$

比较等式两端分子的系数,可得

$$A=C=\frac{2}{3},\qquad B=\frac{1}{3},$$

于是
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1.$$

(2)三角有理函数的积分$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$.

一般方法是令 $t=\tan\frac{x}{2}$，　则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，　$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$，

于是
$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$
转化为有理函数的积分.

(1) 与(2) 这两种类型的积分可以互相转化，而以上介绍的仅是一般方法，并非解题的惟一途径. 希望考生结合换元法及分部积分法灵活地处理以求得解题的速度.

例 3-33　计算 $\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解法 1　令 $t=\tan\frac{x}{2}$，　则

$$\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\arctan t)+C=2\left(\tan\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

解法 2　利用三角恒等式 $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\tan^2\frac{x}{2}$，　就有

$$\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\tan^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2\int\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=2\left(\tan\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

例 3-34　求三角线性分式的积分 $\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x$.

解　对三角线性分式的积分可采用待定系数法.

令
$$\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x=Ax+B\ln(c\sin x+d\cos x)+C,$$
等式两端对 x 求导，得

$$\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}=A+B\cdot\frac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x}=\frac{(cA-dB)\sin x+(dA+cB)\cos x}{c\sin x+d\cos x}$$

比较等式两端分子的系数，可解得

$$A=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\qquad B=\frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

于是
$$\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}x+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\ln(c\sin x+d\cos x)+C.$$

例 3-35　计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$.

解　由于 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$，

记 $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$，　则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{\mathrm{d}(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left(\tan \frac{x+\varphi}{2}\right) + C.$$

(3) **无理函数的积分** $\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$.

一般地可令 $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$ **,就转化为有理式的积分了. 而形如** $\int R(x, \sqrt{x^2+px+q})\, \mathrm{d}x$ **的积分,往往采用根式内配方,变成** $\int R(u, \sqrt{a^2 \pm u^2})\, \mathrm{d}u$ **或** $\int R(u, \sqrt{u^2-a^2})\, \mathrm{d}u$ **型,这就容易处理了.**

例 3-36　计算 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} \mathrm{d}x$.

解　先分部积分

$$\int \frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-2}} = \int \frac{x\,\mathrm{d}(e^x-2)}{\sqrt{e^x-2}} = 2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{e^x-2} = 2x\sqrt{e^x-2} - 2\int \sqrt{e^x-2}\, \mathrm{d}x,$$

其次,令 $\sqrt{e^x-2} = t$,**则** $x = \ln(t^2+2)$,**且** $\mathrm{d}x = \frac{2t}{t^2+2}\mathrm{d}t$,

于是

$$\int \sqrt{e^x-2}\, \mathrm{d}x = \int t \cdot \frac{2t}{t^2+2} \mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+2-2}{t^2+2} \mathrm{d}t$$

$$= 2t - \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = 2\sqrt{e^x-2} - \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{e^x-2}{2} + C,$$

最后得

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} \mathrm{d}x = 2x\sqrt{e^x-2} - 4\sqrt{e^x-2} + 4\sqrt{2} \arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}} + C.$$

(4) **分段函数的不定积分**

例 3-37　求不定积分

(1) $\int |x|\, \mathrm{d}x$;　　(2) $\int f(x)\mathrm{d}x$,**其中** $f(x) = \begin{cases} 1, & x<0; \\ x+1, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2x, & x>1. \end{cases}$

解　(1) **由于函数** $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x<0 \end{cases}$ **是分段表示的,故先在不同的区间内分别求它的原函数.**

$$x \geqslant 0,\quad \int |x|\, \mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$x < 0,\quad \int |x|\, \mathrm{d}x = \int -x\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + C_2.$$

因为原函数在分点 $x=0$ **处是连续的,即** $\lim\limits_{x\to 0^+}\int |x|\, \mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to 0^-}\int |x|\, \mathrm{d}x$,**就得到** $C_1 = C_2$,**记为** C,**于是**

$$\int |x|\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C, & x \geqslant 0; \\ -\frac{x^2}{2} + C, & x < 0, \end{cases}$$

即
$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x|x| + C.$$

（2）分段求积分后得

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C_1, & x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2} + x + C_2, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2 + C_3, & x > 1, \end{cases}$$

根据$\int f(x)\mathrm{d}x$在分点处的连续性，即

$$\lim_{x\to 0^-}\int f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+}\int f(x)\mathrm{d}x, \quad \lim_{x\to 1^-}\int f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to 1^+}\int f(x)\mathrm{d}x.$$

得 $C_1 = C_2$，$\dfrac{3}{2} + C_2 = 1 + C_3$，记 $C_2 = C$，故

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C, & x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2} + x + C, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2 + \dfrac{1}{2} + C, & x > 1. \end{cases}$$

例 3-38　求不定积分$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$.

解　分段函数的不定积分还可以用定积分上限函数来表示. 令 $F(x) = \int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$，则$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = F(x) + C$.

当 $x < 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-(-t)}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x}$；

当 $x \geqslant 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-t}\Big|_{x}^{0} = 2 - \mathrm{e}^{-x}$，

于是
$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = F(x) + C = \begin{cases} \mathrm{e}^{x} + C, & x < 0; \\ 2 - \mathrm{e}^{-x} + C, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

例 3-39　$\int \max(1, |x|)\mathrm{d}x$

解　设　$f(x) = \max(1, |x|)$，

则
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1; \\ 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，则必存在原函数 $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + C_1, & x < -1; \\ x + C_2, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{x^2}{2} + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

又 $F(x)$ 须处处连续，故可取 $C_1=0$，$C_2=\frac{1}{2}$，$C_3=1$.

故，
$$原式=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+C, & x<-1,\\ x+\frac{1}{2}+C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{x^2}{2}+1+C, & x>1.\end{cases}$$

例 3-40 设 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上可导，$f(1)=0$，$f'(e^x+1)=e^{3x}+2$，试求 $f(x)$.

解 令 $e^x+1=t$，则 $e^x=t-1$.

$$f'(t)=(t-1)^3+2,$$

$$f(t)=\frac{1}{4}(t-1)^4+2t+C.$$

又 $f(1)=0$，则 $C=-2$.

故
$$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4+2x-2.$$

例 3-41 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1;\\ x, & 1<x<+\infty.\end{cases}$ 求 $f(t)$ 和 $f(\ln x)$.

解 令 $\ln x=t$，

则
$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t, & 0<t<+\infty,\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}t+c, & -\infty<t\leqslant 0;\\ e^t+d, & 0<t<\infty,\end{cases}$$

由 $f(t)$ 的连续性得
$$C=1+d.$$

所以
$$f(t)=\begin{cases}t+1+d, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t+\mathrm{d}, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

$$f(\ln x)=\begin{cases}\ln x+1+d, & 0<x\leqslant 1;\\ x+d, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

例 3-42 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，若当 $x>0$ 时，有 $f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，试求 $f(x)$.

解 由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即

$$F'(x)=f(x).$$

$$F'(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)},$$

$$\int F(x)\mathrm{d}F(x)=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x.$$

$$\frac{1}{2}F^2(x)=(\arctan\sqrt{x})^2+C$$

又
$$F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\text{,所以 }C=0,$$
$$F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x},$$
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}.$$

例 3-43　设 $y=y(x)$ 是由 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数,求$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$.

解　令 $y=tx$,则 $y^2(x-y)=x^2$,可得
$$x=\frac{1}{t^2(1-t)},\quad y=\frac{1}{t(1-t)},$$
$$\text{原式}=\int\frac{-2+3t}{t}\mathrm{d}t=3t-2\ln|t|+C$$
$$=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C.$$

习　题　3

1. 求下列不定积分:

(1) $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$;　(2) $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $|a|\neq|b|$;　(4) $\int\frac{x}{x^8-1}\mathrm{d}x$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{x^n}{(a+bx)^n}\mathrm{d}x$, $b\neq0$, n 为非负整数;

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x+2\cos^2x}$;　(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16x^2+8x+5}}$;

(4) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$;　(2) $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;　(4) $\int\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

4. 求有理函数的不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^8(1+x^2)}$;　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-2x^2+1}$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^6)}$;　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

5. 求三角有理函数的不定积分:

(1) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x - 1}$.

6. **求下列无理函数的不定积分**：

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

7. **已知** $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$，**当** $0 < x < 1$ **时，求** $f(x)$.

8. **计算** $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right] dx$.

简答与提示

1. (1) $\frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$.　　(2) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$.

(3) $\frac{1}{x^2 - b^2}\left(\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b} - \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right) + C$.　　(4) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+4}\right| - \frac{1}{4}\arctan(x^2) + C$.

2. (1) **令** $u = a + bx$，$x = \frac{u-a}{b}$，$dx = \frac{du}{b}$，

$$\text{原式} = \frac{1}{b^{n+1}}\int \frac{(u-a)^n}{u^m} du \quad \text{按二次式展开再积分}.$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$.　　(3) $\frac{1}{4}\operatorname{arcsh}\left(2x + \frac{1}{2}\right) + C$.

(4) $a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$.

3. (1) $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$.　　(2) $-\frac{\arcsin x}{x} + \operatorname{sgn}x \ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right| + C$.

(3) $x\tan\frac{x}{2} + C$.　　(4) $e^x \tan\frac{x}{2} + C$.

4. (1) $-\frac{1}{9x^9} + \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \arctan x + C$.　　(2) $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) + C$.

(3) $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3}\arctan x^3 + \frac{1}{2}\arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1}\right| + C$.

(4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right| + C$.

5. (1) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sin x - \cos x) + C$.　　(2) $\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1 - \tan\frac{x}{2}\right) + C$.

6. (1) $\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| - \operatorname{sgn}(x)\arcsin\frac{1}{x} + C$.　　(2) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$.

7. $f(x) = -\ln((-x) - x^2 + C$，$(0 < x < 1)$.

8. $\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 + C$.

第四章　定积分及其应用

定积分的概念与计算、积分变限函数性质(连续性与一定条件下的可导性)、广义积分及定积分的应用,历来是考试的主要内容之一.考生除了要掌握积分计算外,还应清楚地了解积分的性质并用定积分处理一些几何与物理的应用问题.

一、复习与考试要求

(1) 理解定积分的概念.

(2) 掌握定积分的性质及定积分中值定理,掌握换元积分法与分部积分法.

(3) 理解变上限定积分定义的函数,会求它的导数,掌握牛顿-莱布尼茨公式.

(4) 了解反常(广义)积分的概念并会计算反常积分.

(5) 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面积为已知的立体体积、功、引力、压力)及函数的平均值.

二、基本概念与理论

1. 定积分

(1) 设函数 $f(x)$ 定义在区间$[a,b]$上且有界,若对$[a,b]$作任意的划分:$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)$,任取点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,作积分和式$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. 如果极限

$$\lim_{\lambda\to0}S_n=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

不依赖于$[a,b]$的分法及 ξ_i 的取法而惟一地存在,则称 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,并把极限$\lim\limits_{\lambda\to0}S_n$ 称为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分,记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充分条件

$f(x)$ 在$[a,b]$上连续或者 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点.

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的意义

① 代数意义:$f(x)$ 在$[a,b]$上的平均值是$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

② 几何意义:若 $f(x)\geqslant0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y=f(x)$,直线 $y=0$,$x=a$,$x=b$ 围成的曲边梯形的面积.

③ 物理意义:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是质点受变力 $f(x)$ 作用沿 x 轴从 a 到 b 移动所作的功.

(4) 定积分性质(假设$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 存在)

规定:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$;

① $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

② $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$;

③ 若 $f(x) \leqslant g(x), x \in [a,b]$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

推论 ⅰ) $f(x) \geqslant 0, x \in [a,b]$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$

ⅱ) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (b \geqslant a)$;

ⅲ) 若 $m \leqslant f(x) \leqslant M,\ x \in [a,b]$,则

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M.$$

④ 积分中值定理　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则至少有一点 $\xi \in (a,b)$,使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

或:设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$g(x)$ 在$[a,b]$上可积且恒不变号,则至少有一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

2. 积分学基本定理

(1) **积分上限函数的连续性定理**

若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,则积分上限函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上连续.

(2) **积分上限函数的可导性定理**

若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导,且

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x), \quad x \in [a,b].$$

(3) **牛顿-莱布尼茨公式**(N-L 公式)

若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(4) **积分变限函数的一般求导公式**

设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)$,$\psi(x)$ 均可导,则 $F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且

$$F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

3. 定积分的计算法

(1) 换元法:设函数 $x = \varphi(t)$ 把区间$[\alpha,\beta]$单调地映为区间$[a,b]$,且 $\varphi'(t)$ 连续,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 分部积分法:若函数 $u(x)$,$v(x)$ 在$[a,b]$上均有连续的导数,则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

(3) N-L 公式法(见积分学基本定理(3))

希望考生熟记以下几个等式，在应试中是很有利的：

① 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$；

② 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

③ 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x, \forall a$；

④ $\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(a-x)\mathrm{d}x$；

⑤ $\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos\alpha)\mathrm{d}x$；

⑥ $\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$；

⑦ $\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

⑧ $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

⑨ $\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n = 2m, m = 1,2,\cdots; \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1, m = 0,1,2,\cdots. \end{cases}$

4. 反常积分

(1) 无穷限的反常积分：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，取 $t > a$，如果极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则，称反常积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

类似地有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

若 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$、$\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均存在，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 无界函数的反常积分：设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点．取 $t > a$，如果极限

$$\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛．否则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散．

类似地，设函数$f(x)$在$[a,b)$上连续，点b为$f(x)$的瑕点．取$t<b$，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上除点$c(a<c<b)$外均连续，点c为$f(x)$的瑕点．且$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$，$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$均存在，则$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$存在，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

5．应用类公式

（1）面积公式

① 若平面图形由$y=f_1(x)$，$y_2=f_2(x)$，$x=a$，$x=b$围成（$f_1(x)\leqslant f_2(x)$，$a<b$），则它的面积

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x;$$

② 若平面图形的边界由极坐标方程$\rho=\rho_1(\theta)$，$\rho_2=\rho_2(\theta)$，$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$，（$\rho_1(\theta)\leqslant\rho_2(\theta)$，$\alpha<\beta$）给出，则它的面积

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

（2）弧长公式

① 设平面曲线$y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，则它的弧长

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x;$$

② 设平面曲线$\rho=\rho(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，则它的弧长

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta;$$

③ 设平面曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$T_1\leqslant t\leqslant T_2$，则它的弧长

$$s=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t.$$

（3）体积公式

① 若平面图形$0\leqslant y\leqslant f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$绕$x$轴旋转，则旋转体体积

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x;$$

② 若立体的垂直于x轴的截面面积为$A(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，则它的体积

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

（4）旋转面面积

若平面曲线$y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，绕x轴旋转，则旋转面面积

$$A=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

(5) 平面曲线的重心公式

若平面曲线 $y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$,线密度为 $\rho(x)$,则重心

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\mathrm{d}m}{M}=\frac{\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}.$$

三、基本题型与解题方法

1. 有关积分性质的例题

例 4-1　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且在 $(0,1)$ 上可微,若有 $8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$.

证　由积分中值定理可知,存在 $a\in\left[\frac{7}{8},1\right]$使得

$$f(0)=8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)\mathrm{d}x=8f(a)\cdot\left(1-\frac{7}{8}\right)=f(a).$$

又 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可微,所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上可微,由罗尔定理,存在 $\xi\in(0,a)\subset(0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$.

例 4-2　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加,且只有有限之间断点,则函数 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上(　).

(A) 连续单调;　　(B) 连续但不单调;

(C) 单调但不连续;　　(D) 既不连续又不单调.

答　(C). 用特殊值法解,令

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x+1, & x>1.\end{cases}$$

则

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{2x}, & x>1.\end{cases}$$

$F(x)$ 在 $x=1$ 不连续,从而否定(A),(B),$F(x)$ 单调递增,又否定(D),故选(C).

注　式(1)中当 $x\in[0,1]$ 时 $F'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)>0$,都是单调的,且若 $x_1\in[0,1]$,$x_2\in(1,+\infty)$,$F(x_1)=\frac{x_1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,而 $F(x_2)=\frac{x_2}{2}+1+\frac{1}{2x_2}=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)+1\geqslant 2$,故 $F(x_2)>F(x_1)$,综上即证 $F(x)$ 单调递增.

例 4-3　设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上,且对于区间 $[a,b]$ 上任意两点 x_1,x_2,有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$. 证明:

(1) 对于 (a,b) 内每一点,$f(x)$ 是连续函数;

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2$.

证　(1) 任给 $x\in(a,b)$,由题设知

$$|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|\leqslant|\Delta x|.$$

于是当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta y\to 0$,故 $f(x)$ 连续.

(2) 当 $x\geqslant a$ 时,有 $|f(x)-f(a)|\leqslant|x-a|=x-a$,即 $f(a)-(x-a)\leqslant f(x)\leqslant f(a)+(x-a)$.

两边积分，可得

$$\int_a^b[f(a)-(x-a)]\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[f(a)+(x-a)]\mathrm{d}x,$$

即

$$-\frac{(b-a)^2}{2}\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}.$$

故有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

例 4-4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$.

证 记 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，因为 $f(x)>0$，所以 $A>0$.

$$\ln\frac{f(x)}{A}=\ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{A}-1\right)\right]\leqslant\frac{f(x)}{A}-1.$$

两端积分

$$\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\ln A\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{A}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}z-1=0.$$

所以

$$\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\ln A\mathrm{d}x=\ln A=\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

例 4-5 证明：若 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，且对一切 $x\in[0,1]$ 有 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\geqslant f(x)\geqslant 0$，则 $f(x)\equiv 0$.

证 显然 $f(0)=0$，对任意 $x_0\in(0,1)$，有

$$0\leqslant f(x_0)\leqslant\int_0^{x_0}f(u)\mathrm{d}u=f(\xi_1)x_0\text{，其中 }0\leqslant\xi_1\leqslant x_0.$$

而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在最大值 M.

对于上面的 ξ_1，有 $0\leqslant f(\xi_1)\leqslant\int_0^{\xi_1}f(u)\mathrm{d}u=f(\xi_2)\cdot\xi_1$，其中 $0\leqslant\xi_2\leqslant\xi_1$，

所以

$$0\leqslant f(x_0)\leqslant f(\xi_2)\xi_1\cdot x_0\leqslant f(\xi_2)x_0^2.$$

⋮

依次进行下去，可知存在 $\xi_n\in[0,x_0]$，使得 $0\leqslant f(x_0)\leqslant f(\xi_n)x_0^n\leqslant Mx_0^n$.

当 $n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}Mx_0^n=0$，所以 $f(x_0)=0$.

又 $f(x)$ 连续，所以 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(1)=0$.

所以对一切 $x\in[0,1]$，有 $f(x)\equiv 0$.

例 4-6 求证：$f(x)=\int_0^x(t-t^2)(\sin t)^{2n}\mathrm{d}t$（$n$ 为正整数）在 $x\geqslant 0$ 上的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

证 因为 $f'(x)=(x-x^2)(\sin x)^{2n}$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$. 故对一切 $x\geqslant 0$，$f(x)\leqslant f(1)$. 而

$$f(1)=\int_0^1(t-t^2)(\sin t)^{2n}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},$$

所以，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$，从而得证.

例 4-7　设 $f(x)$ 为$[0,1]$上的非负单调非增连续函数(即当 $x<y$ 时,$f(x)\geqslant f(y)$). 利用积分中值定理证明:对于 $0<\alpha<\beta<1$,有下面的不等式成立$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

证　由题设及积分中值定理有

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_1)(\beta-\alpha)\leqslant f(\alpha)(\beta-\alpha),\ \alpha\leqslant\xi_1\leqslant\beta.$$

从而

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(\alpha)>\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

因此可得

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

又因 $0<\alpha<\beta<1$,所以 $1-\frac{\alpha}{\beta}<1$,故$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

例 4-8　设 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$,其中 $x>0$,求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解　$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 }t=\frac{1}{y}}\int_1^x\frac{\ln y}{y(1+y)}\mathrm{d}y,$

于是

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2x.$$

例 4-9　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解法 1　由于在 $0\leqslant x\leqslant1$ 有 $0\leqslant\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\leqslant x^n$,

所以

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1x^n\mathrm{d}x,$$

又

$$\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\to0\quad(n\to\infty),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=0.$$

解法 2　由积分中值定理$\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$ 知

$$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n^2}}\int_0^1x^n\mathrm{d}x\quad(0<\xi_n<1)$$

又,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1x^n\mathrm{d}x=0$,而$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n^2}}\leqslant1$,即有界,故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=0.$$

例 4-10 **求极限** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx$.

解法 1 **由积分中值定理得**

$$\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx=\frac{\xi^2}{e^{\xi^2}}\cdot 2,\quad n\leqslant\xi\leqslant n+2,$$

又
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0,$$

故 **原式** $=0$.

解法 2 **由于当** $n\leqslant x\leqslant n+2$ **时**,

$$0<\frac{x^2}{e^{x^2}}<\frac{(n+2)^2}{e^{n^2}},$$

所以
$$0<\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx<\frac{(n+2)^2}{e^{n^2}}\cdot 2.$$

又
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{e^{x^2}}=0,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx=0.$$

例 4-11 **设** $f(x)$ **在**$[A,B]$ **上连续**,$A<a<b<B$,

求证 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=f(b)-f(a)$.

证法 1 $\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)dx-\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx$.

令 $x+h=u$,**则**$\int_a^b f(x+h)dx=\int_{a+h}^{b+h}f(u)du$,

从而 $\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h}f(x)dx-\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{h}\int_b^{b+h}f(x)dx-\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)dx$.

由积分中值定理及 $f(x)$ **的连续性知**:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_b^{b+h}f(x)dx=f(b),\quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)dx=f(a).$$

故原题得证.

证法 2 **由证** 1 **可知**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{a+h}^{b+h}f(x)dx-\int_a^b f(x)dx}{h}\\&=\lim_{h\to 0}[f(b+h)-f(a+h)]\quad(\textbf{洛必塔法则})\\&=f(b)-f(a)\end{aligned}$$

例 4-12 **设** $f(x)$ **是周期为** T **的连续函数**,**证明**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

证法 1 **由** $f(x)$ **的周期性知**

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\left[\frac{x}{T}\right]T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\left[\frac{x}{T}\right]T}^x f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{x}{T}\right]\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_{\left[\frac{x}{T}\right]T}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

又
$$\frac{x}{T} - 1 < \left[\frac{x}{T}\right] \leqslant \frac{x}{T}.$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{x}{T}\right]}{x} = \frac{1}{T}.$$

而
$$\left|\int_{\left[\frac{x}{T}\right]T}^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\left[\frac{x}{T}\right]T}^{\left[\frac{x}{T}\right]T+T} |f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t,$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{\left[\frac{x}{T}\right]T}^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = 0,$$
故原式得证.

证法 2　**令** $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$,

则
$$\begin{aligned}\Phi(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{T+x} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_T^{T+x} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \Phi(x).\end{aligned}$$

$\Phi(x)$ **以** T **为周期,连续,故在** $[0,T]$ **上有界,因而在** R **上有界,从而**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right] = 0.$$

例 4-13　**任给** $0<\delta<1$**,求证**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t}{\int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t} = 0.$$

证　**由于** $\int_\delta^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t \leqslant \int_\delta^1 (1-\delta^2)^n\mathrm{d}t = (1-\delta)(1-\delta^2)^n.$

而
$$\int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\delta}{2}} (1-t^2)^n\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\delta}{2}}\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n\mathrm{d}t = \frac{\delta}{2}\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n,$$

则
$$0 \leqslant \frac{\int_\delta^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t}{\int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t} \leqslant \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\frac{\delta}{2}\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n} = \frac{2(1-\delta)}{\delta}\left[\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right]^n.$$

又
$$0 < \frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}} < 1,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right)^n = 0,$$
故原题得证.

例 4-14　**设** $f(x)$ **在** $[0,\pi]$ **上连续,试证**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi |\sin nx| f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x.$$

证　**由于** $\int_0^\pi |\sin nx| f(x)\mathrm{d}x$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin x|f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{n_k})\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x,$$

其中，$\frac{k-1}{n}\pi\leqslant\xi_{n_k}\leqslant\frac{k}{n}\pi$，这里应用了积分中值定理．

又
$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\quad(\text{令 } nx=t)$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\quad(|\sin x|\text{ 以 }\pi\text{ 为周期}),$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{n_k})\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{n_k})\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

2．用换元法和分部积分法计算定积分

例 4-15　计算$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　原式$=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

由于　$\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$是偶函数，而$\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}$是奇函数，

故
$$\text{原式}=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^1\mathrm{d}x-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

由定积分的几何意义知 $4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 应为单位圆的面积 π.

原式 $=4-\pi$.

例 4-16　计算$\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

解
$$\text{原式}=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{\ln x}\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{2\mathrm{d}\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}=2\arcsin(\sqrt{\ln x})\Big|_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{6}.$$

例 4-17　计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解　原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x$.

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-2+\sqrt{2}.$$

例 4-18　**计算** $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解　**令** $x=\sin t$.

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

例 4-19　$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$.

解　**令** $x=a\sin t$.

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,\text{令 } t=\frac{\pi}{2}-u,$$

则
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u+\cos u}\mathrm{d}u.$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

例 4-20　**计算** $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$.

解法 1　**令** $t=\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

$$\cos 2t=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}=\frac{1-\frac{a-x}{a+x}}{1+\frac{a-x}{a+x}}=\frac{x}{a}.$$

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^0 t\mathrm{d}(a\cos 2t)=at\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a}{2}.$$

解法 2　**令** $x=a\cos t$.

$$\text{原式}=a\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{t}{2}\mathrm{d}\cos t=a\cdot\frac{t}{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{a}{2}\cos t\mathrm{d}t=\frac{a}{2}.$$

解法 3　**记** $\omega(x)=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$,**分部积分得**

$$\text{原式}=x\arctan\omega(x)\Big|_0^a-\int_0^a x\frac{1}{1+\omega^2}\frac{1}{2\omega}\frac{-2a}{(a+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}.$$

例 4-21　**求连续函数** $f(x)$,**使它满足**

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x.$$

解　**令** $tx=u$,**则原式变为**

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=f(x)+x\sin x,$$

即
$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=xf(x)+x^2\sin x.$$

两边对 x **求导,得**

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x,$$

即
$$f'(x) = -2\sin x - x\cos x.$$

积分,得
$$f(x) = 2\cos x - \int x\mathrm{d}\sin x = 2\cos x - x\sin x - \cos x + C$$
$$= \cos x - x\sin x + C.$$

例 4-22 设函数 $f(x)$ 连续,且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$,求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解 令 $u=2x-t$,则 $t=2x-u$,$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$,
$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)\mathrm{d}u = 2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u.$$

于是
$$2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\arctan x^2.$$

上式两边对 x 求导,得
$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u + 2x[2f(2x)-f(x)] - [2xf(2x)\cdot 2 - xf(x)] = \frac{x}{1+x^4},$$

即
$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x}{1+x^4} + xf(x).$$

令 $x=1$,得 $$2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}.\ \text{于是} \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

例 4-23 计算 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

解法 1 令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$,得 $x=\tan^2 t$.
$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\mathrm{d}\tan^2 t = t\tan^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t\mathrm{d}t$$
$$= \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t = \pi - (\tan t - t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

解法 2 由分部积分公式得
$$\text{原式} = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^3 - \int_0^3 x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\frac{\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\mathrm{d}x$$
$$= \pi - \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}\mathrm{d}x = \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\ (\text{令}\sqrt{x}=t)$$
$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

例 4-24 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

解 $$\text{原式} = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^2 x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^2 x\mathrm{d}e^{x+\frac{1}{x}}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

例 4-25　**计算** $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}$.

解　**原式** $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}+\tan^2x}dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{1+2\tan^2x}=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

例 4-26　**计算** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$.

解　**令** $x=2t$

$$\text{原式}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2t)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)dt$$

在等式右端最后一项中令 $\frac{\pi}{2}-t=y$.

$$\text{原式}=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin y\,dy=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

例 4-27　**计算** $\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx$.

解　**令** $1-x=t$.

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{1-t}{e^{1-t}+e^t}dt=\int_0^1\frac{1}{e^t+e^{1-t}}dt-\int_0^1\frac{t}{e^t+e^{1-t}}dt$$

所以，

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{e^t+e^{1-t}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{de^t}{e^{2t}+e}=\frac{1}{2\sqrt{e}}\arctan\frac{e^t}{\sqrt{e}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

例 4-28　**计算** $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解　**令** $x=\tan t$.

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2t}\sec^2t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du\quad\left(\text{令 }u=\frac{\pi}{4}-t\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln 2-\ln(1+\tan u)]du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,du-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx,$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,du=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

例 4-29　**设在** $[-1,1]$ **上的连续函数** $f(x)$ **满足如下条件，对** $[-1,1]$ **上的任意的偶连续函数** $g(x)$**，积分** $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$**，试证：**$f(x)$ **是** $[-1,1]$ **上的奇函数 .**

证　**作变换** $x=-t$,**则**

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{-1}f(-t)g(-t)(-1)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}f(-t)g(-t)\mathrm{d}t.$$

因为 $g(-x)=g(x)$,**所以**

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(-t)g(t)\mathrm{d}t=0,$$

故
$$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x=0.$$

取 $h(x)=f(x)+f(-x)$,**则** $h(x)$ **是**$[-1,1]$ **上的偶函数,由题意有**$\int_{-1}^{1}f(x)h(x)\mathrm{d}x=0$,**从而有** $\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]h(x)\mathrm{d}x=0$,**即**

$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]^2\mathrm{d}x=0$,**从而** $f(x)+f(-x)=0$,**即** $f(-x)=-f(x)$,**因此** $f(x)$ **是**$[-1,1]$ **上的奇函数.**

例 4-30　**求**$\int_{0}^{2}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{0}^{2}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\sqrt{x}\cdot|x-1|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\sqrt{x}(x-1)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{4}{15}(2+\sqrt{2}).$$

例 4-31　**设** $f(x)$ **在**$[-a,a](a>0)$ **上连续.**

证明:$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$,**并计算**$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

证　**因** $f(x)+f(-x)$,$f(x)-f(-x)$ **分别为偶、奇函数,所以**

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\cdot 0=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

而
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1+\sin(-x)}\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x+1+\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\tan x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=2.$$

例 4-32　**若** $f(x)$ **在**$[a,b]$ **上有连续导函数**,$f(a)=f(b)=0$,**并且**$\int_{a}^{b}f^2(x)\mathrm{d}x=1$,**则**$\int_{a}^{b}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$.

证　**由分部积分法可知**

$$\int_{a}^{b}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}xf(x)\mathrm{d}(f(x))=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}xd[f^2(x)]=\frac{x}{2}f^2(x)\Big|_{a}^{b}-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b}{2}f^2(b)-\frac{a}{2}f^2(a)-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}.$$

3. 有关积分限函数的问题

例 4-33　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t\left(\sin\frac{3}{t}\right)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 可微，且已知 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=1$.

解　由积分中值定理，存在 $\xi\in[x,x+2]$，使

$$\int_x^{x+2}t\sin\left(\frac{3}{t}\right)f(t)\mathrm{d}t=2\xi\sin\left(\frac{3}{\xi}\right)f(\xi),$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t\sin\left(\frac{3}{t}\right)f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}2\xi\sin\left(\frac{3}{\xi}\right)f(\xi)=6\cdot\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}\cdot\lim_{x\to\infty}f(\xi)=6\cdot 1\cdot 1=6.$$

例 4-34　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

令 $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则有 $F'(x)=-f(x)$，所以

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=2\int_a^b[-F'(x)]\cdot F(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_a^b F(x)\mathrm{d}F(x)=-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(a)-F^2(b).$$

注意到 $F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$F(b)=0$，所以

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

例 4-35　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，又 $\varphi(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 单调递减，证明 $f(x)=0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证　令 $F(x)=\frac{1}{2}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2$，则 $F'(x)=\varphi(x)$，而 $\varphi(0)=0$.

若 $\varphi(x)$ 不恒为零，$\varphi(x)$ 又单调递减，因而 $\exists x_0>0$，使 $\varphi(x_0)<0$.

从而有 $\varphi(x)\leqslant(0)$，$\forall x\in[0,x_0]$.

所以 $F(x_0)=\int_0^{x_0}\varphi(x)\mathrm{d}x<0$，　(1)

另外 $F(x_0)=\frac{1}{2}\left[\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t\right]^2\geqslant 0$.　(2)

式(1)与式(2)矛盾，所以 $\varphi(x)\equiv 0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，从而 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 等于一个常数，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c(x\in(-\infty,+\infty))$. 两边求导，所以 $f(x)\equiv 0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

例 4-36　设函数 $s(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$. (1) 当 n 为正整数且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n<s(x)<2(n+1)$；(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{s(x)}{x}$.

解　(1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$ 且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\leqslant s(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t.$$

又 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数，在每个周期上积分值相等，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2n,\quad\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2(n+1).$$

(2) 由(1)知,当 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时,有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{s(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x \to +\infty$,由夹通准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{s(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$.

例 4-37 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l: x+y=t(t\geqslant 0)$(图 4-1). 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$.

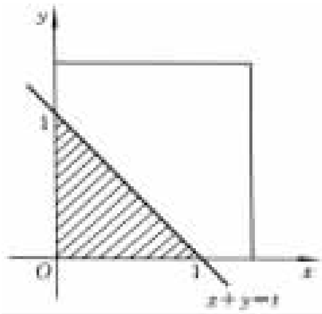

图 4-1

解 由题设知 $S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2;\\ 1, & t>2.\end{cases}$

所以,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{6}x^3$;

当 $1<x\leqslant 2$ 时, $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t+\int_1^x S(t)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{x^3}{6}+x^2-x+\frac{1}{3};$$

当 $x>2$ 时, $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 S(t)\mathrm{d}t+\int_2^x S(t)\mathrm{d}t=x-1.$

因此

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2;\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

例 4-38 设 $I(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)=x, g(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ 求 $I(x)$.

解 令 $x-t=u$,

$$I(x)=\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u.$$

当 $x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$I(x)=\int_0^x (x-u)\sin u\mathrm{d}u=-(x+\sin x)$.

当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时,$I(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-u)\sin u\mathrm{d}u=-(x+1)$.

例 4-39 设 $y=y(x)$ 由 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 u\mathrm{d}u$ 所确定,试求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 原式两边对 x 求导,

$$2-\sec^2(x-y)(1-y')=\sec^2(x-y)(1-y').$$

$$1-y'=\cos^2(x-y),$$

$$y'=\sin^2(x-y).$$

$$y''=\sin(2x-2y)(1-y')=\sin(2x-2y)\cos^2(x-y).$$

例 4-40 设 $y=y(x)$ 由 $x-\int_1^{y+x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ 所确定,试求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 由原式可知 $x=0$ 时,$y=1$.

原式两端对 x 求导得

$$1-e^{-(x+y)^2}(1+y')=0. \tag{1}$$

将 $x=0, y=1$ 代入式(1)得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e-1.$$

式(1)两端对 x 求导得

$$2(x+y)e^{-(x+y)^2}(1+y')^2-e^{-(x+y)^2}y''=0.$$

将 $x=0, y=1, y'=e-1$，代入上式得

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=2e^2.$$

例 4-41　证明恒等式：

$$\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4},\quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

证　记 $\Phi(x)=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt.$

$$\Phi'(x)=2x\sin x\cos x-2x\sin x\cos x=0.$$

则
$$\Phi(x)=C, \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

又
$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}}\arccos\sqrt{t}\,dt\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin\sqrt{t}+\arccos\sqrt{t})\,dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dt=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

故
$$\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

例 4-42　设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时连续，$f(1)=3$. 且

$$\int_1^{xy}f(t)\,dt=x\int_1^{y}f(t)\,dt+y\int_1^{x}f(t)\,dt\quad(x>0,y>0)，$$试求 $f(x)$.

解　原等式两端对 y 求导得

$$xf(xy)=xf(y)+\int_1^x f(t)\,dt.$$

令 $y=1$ 得

$$xf(x)=3x+\int_1^x f(t)\,dt.$$

上式两端对 x 求导得

$$f(x)+xf'(x)=3+f(x).$$

所以　$f'(x)=\dfrac{3}{x}$,

$$f(x)=\int\frac{3}{x}dx=3\ln x+C.$$

又 $f(1)=3$，得 $C=3$，故 $f(x)=3\ln x+3$.

例 4-43　设 $f(x)$ 连续，$f(x)\neq 0$，且对任意的实数 x, y 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，试求 $f(x)$.

解　等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 两边对 y 积分，

$$\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y=f(x)\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=Cf(x).$$

在 $\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y$ 中,令 $x+y=u$,

则
$$\int_{x+a}^{x+b} f(u)\mathrm{d}u=Cf(x).$$

由于 $f(u)$ 连续,那么等式左端是 x 的可导函数,从而右端也可导,即 $f(x)$ 可导,等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 两端对 y 求导,并令 $y=0$,得

$$f'(x)=f'(0)f(x),$$

又由于 $f'(x)=f'(x)f'(0)$,而 $f(x)\not\equiv 0$,因此 $f'(0)=1$.

由此得
$$f(x)=\mathrm{e}^{f'(0)x}.$$

例 4-44 试证 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证 因为 $f(-x)=f(x)$,即 $f(x)$ 是偶函数,所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有界.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2\mathrm{e}^{x^2}-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

因而存在 $A>0$,使得对一切 $x\in[A,+\infty)$ 有 $0<f(x)<1$,又 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上连续,故存在 $M_1>0$ 使得对一切 $x\in[0,A]$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M_1$,取 $M=\max(1,M_1)$,则对一切 $x\in[0,+\infty)$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 故原题得证.

例 4-45 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$,

(1) 证明 $f(x+\pi)=f(x)$;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值,最小值.

解 (1) 令 $u=t+\pi$,则 $|\sin t|=|\sin u|$,

故
$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x+\pi).$$

(2) 由(1)知 $f(x)$ 以 π 为周期,故只需求出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值、最小值即可.

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|.$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{\pi}{4}$,$x=\frac{3\pi}{4}$.

$$f(\pi)=f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=\sqrt{2}.$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}.$$

故最大值为 $\sqrt{2}$,最小值为 $2-\sqrt{2}$.

例 4-46 试证方程 $\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 有且只有一个实根.

证 设 $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,

那么
$$f'(x)=\sqrt{1+x^4}+\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot\sin x.$$

由于 $\sqrt{1+x^4}\geqslant 1$，等号仅在 $x=0$ 时成立，而 $0<e^{-\cos^2 x}<1$，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，则 $-1\leqslant e^{-\cos^2 x}\sin x\leqslant 1$.

又 $x=0$ 时，$\sqrt{1+x^4}+e^{-\cos^2 x}\sin x>0$，则 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 严格单调递增.

由
$$f(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}dt>0.$$

故原方程有且仅有一个实根.

4. 积分不等式

例 4-47　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微，且 $f(0)=1$，$x\geqslant 0$ 时，$f(x)>|f'(x)|$，证明：$x>0$ 时，$e^x>f(x)$.

证　由于当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)>|f'(x)|$，即 $-f(x)<f'(x)<f(x)$.

当 $t>0$ 时，$f(t)>0$，故有 $\frac{f'(t)}{f(t)}<1$，两边从 0 到 x 积分得，$\int_0^x\frac{f'(t)}{f(t)}dt<\int_0^x dt$，其中 $x>0$，注意到 $f(0)=1$，从而可得 $\ln f(x)<x$，即 $e^x>f(x)$.

例 4-48　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，而且对任何 $x\in(0,1)$，有 $|f'(x)|\leqslant M$，求证：对任何正整数 n 有 $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n}$，其中 M 是一个与 x 无关的常数.

证　由定积分的性质及积分中值定理，有

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)，其中\ \xi_i\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right],i=1,2,\cdots,n.$$

又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，所以由微分中值定理可知，存在 $\eta_i\in\left(\xi_i,\frac{i}{n}\right)$，使得 $f\left(\frac{i}{n}\right)-f(\xi_i)=f'(\eta_i)\left(\frac{i}{n}-\xi_i\right)$，$i=1,2,\cdots,n$.

因此
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|&=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right]\right|\\&=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right]\right|=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}f'(\eta_i)\left(\xi_i-\frac{i}{n}\right)\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f'(\eta_i)|\left(\frac{i}{n}-\xi_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}M\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{M}{n}.\end{aligned}$$

例 4-49　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(1) 求 $\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$；

(2) 证明 $\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right|\leqslant M-m,(a>0)$.

解　(1) 由积分中值定理和微分中值定理有

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt&=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]\\&=\lim_{a\to 0^+}f'(\xi^*)=\lim_{\xi^*\to 0^+}f'(\xi^*)=f'(0),(-2a\leqslant\xi-a<\xi^*<\xi+a\leqslant 2a).\end{aligned}$$

证　(2) $\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right|\leqslant\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}Mdt-f(x)\right|\leqslant\left|\frac{1}{2a}M\cdot 2a-m\right|=M-m.$

例 4-50　证明 $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2$.

证　令 $f(x)=e^{x^2-x}$.

$$f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1).$$

再令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

$$f(0)=1,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}},\quad f(2)=e^2,$$

所以,$f(x)$**在**$[0,2]$**上的最小值为** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$,**最大值为** $f(2)=e^2$,**故原不等式得证.**

例 4-51　设 $f(x)$**在**$[0,1]$**上有连续导数,且** $f(0)=f(1)=0$,**证明**

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^x f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

证　$f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x.$

$$f^2(x)=\left(\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}x\int_0^x f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

又因 $f(1)=0$,**故** $f(x)=\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x.$

$$f^2(x)=\left(\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_x^1 1^2\mathrm{d}x\int_x^1 f'(x)\mathrm{d}x\leqslant(1-x)\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

则
$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

例 4-52　设 $f(x)$**在**$[a,b]$**上连续,且** $f(x)\geqslant 0$,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$,**试证**

$$\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1.$$

证
$$\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\mathrm{d}x.$$

同理可证 $\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\cos^2\lambda x\mathrm{d}x,$

从而
$$\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\cos^2\lambda x\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1.$$
原题得证.

例 4-53　试证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

证法 1　只需证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant 0.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

在第二项积分中,令 $x=\frac{\pi}{2}-t.$

得
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$\geqslant 0$.　**故原式得证.**

证法 2　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{1+\xi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1+\eta^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sqrt{2}-1)\left(\frac{1}{1+\xi^2}-\frac{1}{1+\eta^2}\right),$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\leqslant\eta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

从而
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant 0.$$
故原式得证.

例 4-54　**设** $y=f(x)$ **在** $(x\geqslant 0)$ **是严格单调增的连续函数**，$f(0)=0$，$x=g(y)$ **是它的反函数.**

证：$\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y\geqslant ab$，　$(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

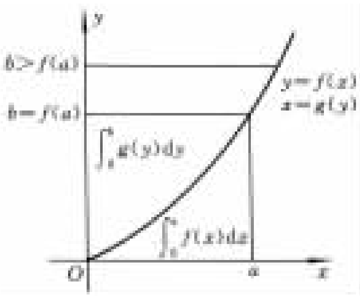

图 4-2

证　**若** $ab=0$，**结论显然成立，故设** $a>0,b>0$.

(1) **若** $b=f(a)$，**由图** 4-2，**显然有** $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y=ab$.

(2) **若** $b>f(a)$，**设** $f(a)=c$ **及** $g(c)=a$，**则** $0<c<b$，

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^c g(y)\mathrm{d}y\right]+\int_c^b g(y)\mathrm{d}y$$

$$=ac+\int_c^b g(y)\mathrm{d}y\geqslant ac+\int_c^b g(c)\mathrm{d}y$$

$$=ac+a(b-c)=ab.$$

(3) **若** $b<f(a)$，**同理可证.**

例 4-55　**设** $f(x)$ **在** $[0,2]$ **上可导**，$f(0)=f(2)=1$（**图** 4-3），$|f'(x)|\leqslant 1$，**试证** $1\leqslant\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3$.

证
$$f(x)-f(0)=f'(c_1)(x-0),\quad c_1\in(0,x).$$
$$f(x)-f(2)=f'(c_2)(x-2),\quad c_2\in(x,2).$$

又 $|f'(x)|\leqslant 1$，

则
$$1-x\leqslant f(x)=1+f'(c_2)x\leqslant 1+x,\quad x\in[0,1].$$
$$x-1\leqslant f(x)=1+f'(c_2)(x-2)\leqslant 3-x,\quad x\in[1,2].$$
$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1,$$
$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x+\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x=3.$$

例 4-56　**设** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上有连续导数**，$f(a)=0$（**图** 4-4），**试证** $\displaystyle\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\geqslant\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

证法 1　**因为** $f(x)=f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$.

所以
$$|f(x)|=|f'(c)|(x-a)\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|(x-a)$$

则
$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$$

$$=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}.$$
故原式得证.

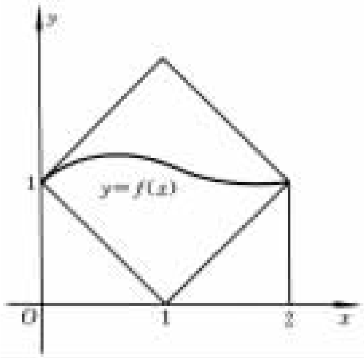

图 4-3

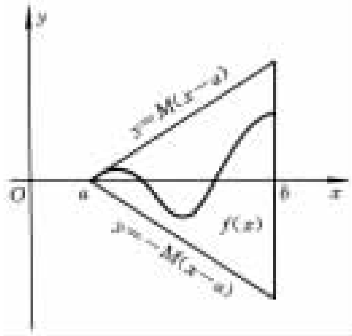

图 4-4

证法 2 $f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x.$

$$|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant(x-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\mathop{\mathrm{mnax}}_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$$

$$=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}.$$ **故原式得证.**

5. 反常积分

例 4-57 **试证** $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ **并求值.**

解 **令** $x=\frac{1}{t}.$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_{+\infty}^0\frac{-t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

所以
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

例 4-58 **证明** $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ **与** α **无关并求值.**

证
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},$$

令 $x=\frac{1}{y}.$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})}=\int_1^{+\infty}\frac{y^\alpha}{(1+y^2)(1+y^\alpha)}\mathrm{d}y.$$

所以
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

例 4-59　设 $f(x)$在$[a,+\infty]$上非负连续且单调减，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证　反证法，由 $f(x)$非负及单调减知，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，不妨设为 A，若 $A\neq 0$，则必有 $A>0$，此时必存在 $b>a$，使得 $x>b$ 时，$f(x)>\dfrac{A}{2}$.

则当 $x>b$ 时，

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^x \frac{A}{2}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{A}{2}(x-b).$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=+\infty$，与题设矛盾，故原题得证.

例 4-60　计算 $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

解法 1

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(\frac{-1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\\ &=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\Bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$，于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{t}{1+t}\Bigg|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

解法 2　因为

$$\begin{aligned}\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x &= \int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)=\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x\\ &=\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\frac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^x}-\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]+\ln 2\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^x}-x+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]+\ln 2\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right]+\ln 2=0+\ln 2=\ln 2.\end{aligned}$$

例 4-61　已知：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty} 4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数 a 的值.

解　右边$=-2\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}=-2x^2\mathrm{e}^{-2x}\big|_a^{+\infty}+4\int_a^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$=2a^2\mathrm{e}^{-2a}-[2x\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-2x}]_a^{+\infty}=2a^2\mathrm{e}^{-2a}+2a\mathrm{e}^{-2a}+\mathrm{e}^{-2a}$，

左边$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x+a}\right)^x=\mathrm{e}^{-2a}$.

于是，有 $\mathrm{e}^{-2a}=2a^2\mathrm{e}^{-2a}+2a\mathrm{e}^{-2a}+\mathrm{e}^{-2a}$，得

$$a=0\quad 或\quad a=-1.$$

6. 定积分应用

例 4-62　考虑函数 $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 问：

(1) t 取何值时，图 4-5 中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 为最小？

(2) t 取何值时，面积 $S=S_1+S_2$ 为最大？

解 $$S_1=t\sin t-\int_0^t \sin x\mathrm{d}x=t\sin t+\cos t-1,$$

$$S_2=\int_t^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t=\cos t-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t,$$

$$S=S_1+S_2=2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin t+2\cos t-1.$$

令 $S'=2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos t=0$，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内得驻点 $t=\frac{\pi}{4}$，

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1.$$

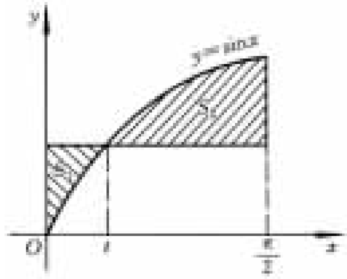

图 4-5

又 $S=S(t)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 两端点处的值为

$$S(0)=1,\quad S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1.$$

由此可见，当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，面积 $S=S_1+S_2$ 为最小；当 $t=0$ 时，面积 $S=S_1+S_2$ 为最大.

例 4-63 考虑函数 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$. 问

(1) t 取何值时，图 4-6 中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 为最小？

(2) t 取何值时，面积 $S=S_1+S_2$ 为最大？

解 $$S_1=t^3-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t^3,$$

$$S_2=\int_t^1 x^2\mathrm{d}x-(1-t)t^2=\frac{2}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3},$$

$$S=S(t)=S_1+S_2=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

令 $S'=4t^2-2t=2t(2t-1)=0$，在 $(0,1)$ 内得 $t=\frac{1}{2}$，有 $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. 又 S 在 $[0,1]$ 两端点处的值为 $S(0)=\frac{1}{3}$，$S(1)=\frac{2}{3}$. 由此可见，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$S=S_1+S_2$ 为最小；当 $t=1$ 时，$S=S_1+S_2$ 为最大.

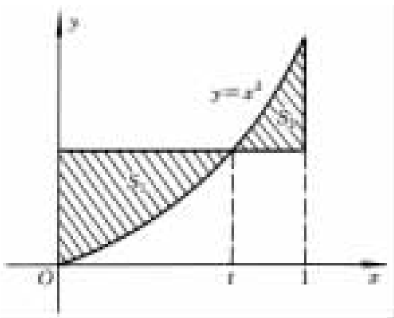

图 4-6

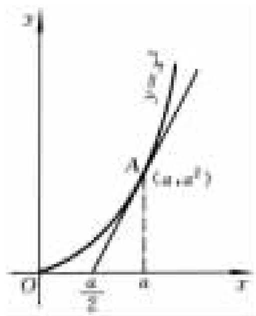

图 4-7

例 4-64 在曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 上某点 A 处作一切线（图 4-7），使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

(1) 切点 A 的坐标；

(2) 过切点 A 的切线方程；

(3) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解 设切点 A 的坐标为 (a,a^2)，则过点 A 的切线的斜率为 $y'|_{x=a}=2a$，切线方程为

$$y-a^2=2a(x-a),\quad 即\quad y=2ax-a^2.$$

切线与 x 轴的交点为 $\left(\frac{a}{2},0\right)$，曲线、$x$ 轴及切线所围图形面积为

$$S=\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}.$$

由题设 $S=\frac{1}{12}$，因此 $a=1$.

于是，切点 A 的坐标为 $(1,1)$；过切点 $(1,1)$ 的切线方程为 $y=2x-1$；旋转体的体积为

$$V=\int_0^1 \pi(x^2)^2\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1 \pi(2x-1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}.$$

例 4-65　设曲线方程为 $y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$.

(1) 把曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$、x 轴、y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周，得一旋转体，求此旋转体体积 $V(\xi)$；求满足 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a.

(2) 在此曲线上找一点，使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积为最大，并求出该面积.

解　(1) $V(\xi)=\pi\int_0^{\xi} y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\xi}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi})$，

$$\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2},\quad V(a)=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a}).$$

要 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$，即 $\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a})=\frac{\pi}{4}$，得 $a=\frac{1}{2}\ln 2$.

(2) 设切点为 $(\alpha,\mathrm{e}^{-\alpha})$，则切线方程为 $y-\mathrm{e}^{-\alpha}=-\mathrm{e}^{-\alpha}(x-\alpha)$.

令 $x=0$ 得 $y=(1+\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha}$；令 $y=0$ 得 $x=1+\alpha$. 切线与坐标轴所夹面积

$$S=\frac{1}{2}(1+\alpha)^2\mathrm{e}^{-\alpha},\quad S'=(1+\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha}-\frac{1}{2}(1+\alpha)^2\mathrm{e}^{-\alpha}=\frac{1}{2}(1+\alpha)(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha}.$$

令 $S'=0$ 得 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=-1$（其中 α_2 舍去).

由于当 $\alpha<1$ 时，$S'>0$；当 $\alpha>1$ 时，$S'<0$. 故当 $\alpha=1$ 时，面积 S 有极大值，即最大值.

所求切点为 $(1,\mathrm{e}^{-1})$，最大面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\mathrm{e}^{-1}=2\mathrm{e}^{-1}$.

例 4-66　已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线（图 4-8），求

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0)；

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S；

(3) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_a.

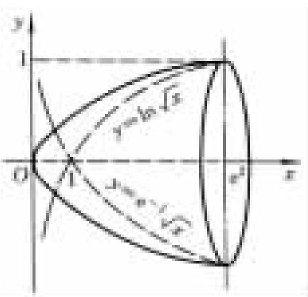

图 4-8

解　(1) 分别对 $y=a\sqrt{x}$ 和 $y=\ln\sqrt{x}$ 求导，得

$$y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}\quad 和\quad y'=\frac{1}{2x}.$$

由于两曲线在点 (x_0,y_0) 处有公切线，可见

$$\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0}\quad 得\quad x_0=\frac{1}{a^2}.$$

将 $x_0=\frac{1}{a^2}$ 分别代入两曲线方程，有

$$y_0=a\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a^2}.$$

于是

$$a=\frac{1}{\mathrm{e}},\quad x_0=\frac{1}{a^2}=\mathrm{e}^2,\quad y_0=a\sqrt{x_0}=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\sqrt{\mathrm{e}^2}=1,$$

从而切点为 $(\mathrm{e}^2,1)$.

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积（图 4-9）

$$S=\int_0^1 (e^{2y}-e^2y^2)dy=\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{1}{3}e^2y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2},$$

或
$$S=\int_0^1 \frac{1}{e}\sqrt{x}dx+\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{e}\sqrt{x}-\ln\sqrt{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{e}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{1}{e}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{e^2}-\frac{1}{2}(x\ln x-x)\Big|_1^{e^2}$$
$$=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}.$$

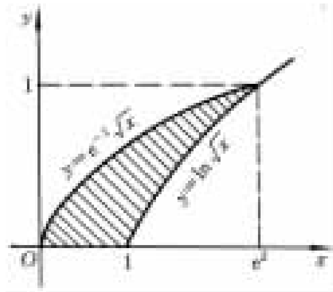

图 4-9

(3) 旋转体体积为

$$V_x=\int_0^{e^2}\pi\left(\frac{1}{e}\sqrt{x}\right)^2dx-\int_1^{e^2}\pi(\ln\sqrt{x})^2dx$$
$$=\frac{\pi x^2}{2e^2}\Big|_0^{e^2}-\frac{\pi}{4}\left[x\ln^2x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\ln x dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\pi e^2-\frac{\pi}{4}\left[4e^2-2x\ln x\Big|_1^{e^2}+2\int_1^{e^2}dx\right]=\frac{1}{2}\pi e^2-\frac{\pi}{2}x\Big|_1^{e^2}=\frac{\pi}{2}.$$

例 4-67 已知抛物线 $y=px^2+qx$(其中 $p<0,q>0$)在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

(1) 问 p 和 q 为何值时,S 达到最大值?

(2) 求出此最大值.

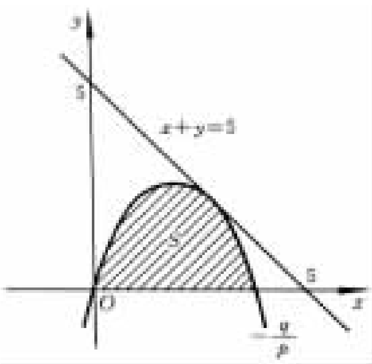

图 4-10

解 依题意知,抛物线如图 4-10 所示,求得它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1=0,\quad x_2=-\frac{q}{p}.$$

面积

$$S=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)dx=\left(\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right)\Big|_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切,故它们有惟一公共点. 由方程组

$$\begin{cases}x+y=5,\\ y=px^2+qx,\end{cases}$$

得 $px^2+(q+1)x-5=0$,其判别式必等于零,即

$$\Delta=(q+1)^2+20p=0,\quad p=-\frac{1}{20}(1+q)^2.$$

将 p 代入 S,得 $S(q)=\dfrac{200q^3}{3(q+1)^4}$. 令

$$S'(q)=\frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0,$$

得驻点 $q=3$. 当 $0<q<3$ 时,$S'(q)>0$;当 $q>3$ 时,$S'(q)<0$. 于是,当 $q=3$ 时,$S(q)$ 取极大值,即最大值. 此时,$p=-\dfrac{4}{5}$. 从而最大值 $S=\dfrac{225}{32}$.

例 4-68 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域;D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域(图 4-11),其中 $0<a<2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1;D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

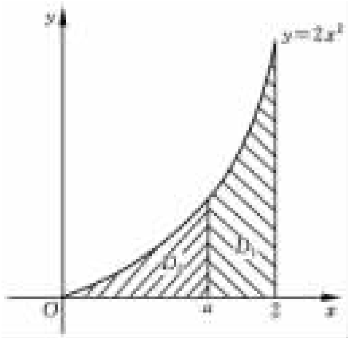

图 4-11

解　(1)
$$V_1=\pi\int_0^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5);$$
$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) 设
$$V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4.$$
由
$$V'=4\pi a^3(1-a)=0,$$
得区间$(0,2)$内的惟一驻点 $a=1$.

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $a>1$ 时，$V'<0$. 因此 $a=1$ 是极大值点即最大值点.

此时 V_1+V_2 取得最大值，等于$\frac{129}{5}\pi$.

7. 定积分在经济学中的应用

例 4-69　某产品的总成本 $C(Q)$(单位:万元)的边际成本为 $MC(Q)=1$(万元/百台)，总收入 $R(Q)$(单位:万元)的边际收入 $MR(Q)=5-Q$(单位:万元/百台)，其中 Q 为产量、固定成本为 1 万元. 问

(1) 产量等于多少时总利润 $L(Q)$为最大？

(2) 从利润最大时再生产一百台，总利润增加多少？

解　(1) 因为 $MC(Q)=1$，故 $C(Q)=\int\mathrm{d}Q=Q+C$.

又 $C(Q)|_{Q=0}=1$，得总成本函数为 $C(Q)=Q+1$.

求总收入函数

边际收入 $MR(Q)=5-Q$，
$$R(Q)=\int MR(Q)\mathrm{d}Q=\int(5-Q)\mathrm{d}Q=5Q-\frac{1}{2}Q^2+C.$$

又 $R(Q)|_{Q=0}=0$，得 $C=0$

故总收入函数为 $R(Q)=5Q-\frac{1}{2}Q^2$.

求总利润函数

设总利润记为 $L(Q)$，则
$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=5Q-\frac{1}{2}Q^2-Q-1=4Q-\frac{1}{2}Q^2-1.$$

求最大利润
$$L'(Q)=4-Q,$$
令 $L'(Q)=0$ 得 $4-Q=0$，即 $Q=4$(百台).

因本例实际问题，最大利润是存在的，而极大值点又惟一，则在 $Q=4$(百台)时，利润为最大，其值为
$$L(4)=4\times4-\frac{1}{2}\times4^2-1=7(\text{万元}).$$

(2) 从 $Q=4$ 百台增加到 $Q=5$ 百台时，总利润的增加量为
$$\int_4^5 L'(Q)\mathrm{d}Q=\int_4^5(4-Q)\mathrm{d}Q=\left(4Q-\frac{1}{2}Q^2\right)\Big|_4^5$$
$$=6.5-7=-0.5(\text{万元})$$
即从利润最大时的产量又多生产了 100 台，总利润减少了 0.5 万元.

例 4-70　现对某企业给予一笔投资 A，经测算，该企业在 T 年中可以按每年 a 元的均匀收入率获得收

入,若年利润为 γ,试求:

(1)该投资的纯收入贴现值;

(2)收回该笔投资的时间的贴现值.

解 (1)求投资纯收入的贴现值:

因收入率为 a,年利率为 γ,故投资后的 T 年中获总收入的现值为

$$y=\int_0^T a\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t=\frac{a}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma T}),$$

从而投资所获得的纯收入的贴现值为

$$R=y-A=\frac{a}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma T})-A.$$

(2)求收回投资的时间:

收回投资,即为总收入的现值等于投资,故有

$$\frac{a}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma T})=A,$$

由此解得

$$T=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{a}{a-A\gamma}.$$

即收回投资的时间为

$$T=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{a}{a-A\gamma}.$$

习 题 4

1. 用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$:

(1) $s_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$; (2) $s_n=\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$.

2. 设 $a,b>1$,证明 $ab\leqslant\mathrm{e}^{a-1}+b\ln b$.

3. 求下列定积分:

(1) $\int_{-3}^{2}\min(2,x^2)\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin\theta-\sin^3\theta}\mathrm{d}\theta$;

(3) $\int_0^{2a}x^2\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x,(a>0)$; (4) $\int_0^1\dfrac{x\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

4. 已知 $f(\pi)=2$, $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$,求 $f(0)$.

5. 如果 $\int_x^{2\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\dfrac{\pi}{6}$,求 x.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}$.

7. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t$,证明当 $x>0$ 时,有 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{x}$.

8. 设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$ 且 $f(0)=0,g(0)=2$. 求

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x.$$

9. 计算下列反常积分:

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$.

10. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,求$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

11. 求曲线$\gamma^2=a^2\cos 2\theta$分别(1)绕转轴;(2)绕$\theta=\frac{\pi}{2}$;(3)绕$\theta=\frac{\pi}{4}$旋转所得的曲面面积.

12. 求由悬链线$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$的一段弧($a\leqslant x\leqslant b$),绕Ox轴旋转所得的表面积.

13. 求底为b,高为h的均匀三角形薄板对于底边的静力矩和转动惯量($\rho=1$).

14. 求圆弧$x=a\cos\theta,y=a\sin\theta(|\theta|\leqslant\alpha<\pi)$的重心坐标.

15. 求抛物线$ax=y^2,ay=x^2(a>0)$所围面积的重心.

简答与提示

1. (1) $\frac{1}{2}$;(2) $\frac{1}{p+1}$.

2. 提示:$e^{a-1}-1=\int_0^{a-1}e^y dy$, $\int_1^b\ln x dx=b\ln b-b+1$.

3. (1) $10-\frac{8}{3}\sqrt{2}$;　(2) $\frac{4}{3}$;　(3) $\frac{5}{8}\pi a^4$;　(4) $-\frac{1}{4}\ln 2$.

4. 3.

5. ln2.

6. e.

8. $\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$.

9. -1

10. $-\frac{\pi^2}{8}$.

11. (1) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$;　(2) $2\pi\sqrt{2}a^2$;　(3) $4\pi a^2$.

12. $\frac{\pi}{4}(e^{2b}-e^{-2b}-e^{2a}+e^{-2a})+\pi(b-a)$.

13. $M=\frac{bh}{6}$, $I=\frac{bh^3}{12}$.

14. $\left(\frac{a\sin\alpha}{\alpha},0\right)$.

15. $\left(\frac{9}{20}a,\frac{9}{20}a\right)$.

第五章　空间解析几何与向量代数

本章只包含在数学(试卷一)的考试内容中。主要涉及两部分内容:向量及其运算;空间点,直线,平面和曲面之间的各种关系.

考生在复习本章时,应该加强空间想象力,熟悉空间图形的各类关系及有关公式,能根据已知条件分析题目,必要时借助于草图作出解答.

分析历年试题可发现,本章内容与切(法)平面、切(法)线的题目联系较密切,考生应加以注意.

一、复习与考试要求

(1) 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示.

(2) 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件.

(3) 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

(4) 掌握平面方程和直线方程及其求法.

(5) 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角,并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

(6) 会求点到直线以及点到平面的距离.

(7) 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

(8) 了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

(9) 了解空间曲线的参数方程和一般方程.了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求其方程.

二、基本概念与理论

1. 向量代数

(1) 既有大小又有方向的量称为向量,记作 $\boldsymbol{a}$.向量的大小称为向量的模,记作 $|\boldsymbol{a}|$.向量在几何上可用有向线段来表示.

在空间直角坐标系中,向量按基本向量的分解式为 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,向量的坐标表示式为 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 其中 a_x,a_y,a_z 分别为向量在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0=\left(\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right)$,其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模.向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$,方向余弦满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点.以 M_1 为始点,M_2 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,其模即为点 M_1 到 M_2 的距离:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(2) 向量的运算

设有向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$.

① 加(减)法:向量的加(减)法按平行四边形法则或三角形法则进行.其坐标表达式为 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$,它满足交换律、结合律.

② 数乘:$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$,其中 λ 为常数.它满足结合律、分配律.

③ 数量积:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|b|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

它满足交换律、结合律、分配律.

④ 向量积：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

它满足反交换律($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$)、结合律、分配律.

⑤ 混合积：

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$的几何意义：$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积.

(3) 向量之间的关系

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量，则

① $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z$.

② 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$：$\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

③ 向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^0=b_x\cos\alpha+b_y\cos\beta+b_z\cos\gamma$，其中 $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

④ $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$($\lambda$ 为数)$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

⑤ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

⑥ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$.

2. 空间解析几何

(1) 空间曲面方程

① 空间曲面一般方程

$$F(x,y,z)=0\quad\text{或}\quad z=f(x,y)\text{等}.$$

② 平面方程

一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$，其中$\{A,B,C\}$是平面的法向，$A^2+B^2+C^2\neq0$.

点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

三点式方程：已知平面过空间三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$，则平面方程为

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

③ 旋转曲面方程

设平面曲线 $l:\begin{cases}f(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转，则旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

④ 柱面方程

母线平行于坐标轴的柱面方程为不完全的三元方程，如$F(y,z)=0$就表示母线平行于x轴，准线为$\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$的柱面.

⑤ 二次曲面

椭球面：$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

双曲面：$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm1$.（“+”为单叶双曲面；“−”为双叶双曲面）

二次锥面：$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$

椭圆、双曲 抛物面：$\dfrac{(x-x_0)^2}{2p}\pm\dfrac{(y-y_0)^2}{2q}=z$　（p,q同号）

(2) 空间曲线方程

① 一般方程：

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

参数方程：

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\x=\omega(t)\end{cases},t\text{ 为参数.}$$

② 空间直线方程

一般方程：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

对称式(点向式)方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，$\{m,n,p\}$为直线的方向向量.

参数方程：

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=x_0+\cos\alpha\cdot t\\y=y_0+\cos\beta\cdot t\\z=z_0+\cos\gamma\cdot t\end{cases}$$

t为参数，$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为直线的方向余弦.

③ 空间曲线在坐标平面上的投影

设 l：$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{(消去 }z\text{)}}H(x,y)=0$，则曲线$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$为$l$在$xOy$面上的投影.

(3) 点、直线、平面之间的关系

① 两个平面之间的关系

设平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，其中$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$为平面$\pi_1$的法向；

平面π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，其中$\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$为平面$\pi_2$的法向.

两平面相交：$\boldsymbol{n}_1 \not\parallel \boldsymbol{n}_2$即$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$不成立.

　　垂直：$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

　　平行 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2(\lambda\neq0)\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

　　重合：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

设π_1与π_2之间的夹角为θ，则$\theta=\langle\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2}\rangle$满足

$$\cos\langle\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2}\rangle=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

② 两条直线之间的关系

设

$$\text{直线 } l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\text{直线 } l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

两直线不共面：$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)\neq 0$. 即混合积$[\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2]\neq 0$，这里$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，$\boldsymbol{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

两直线不共面但相互垂直：$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)\neq 0$，且 $\boldsymbol{S}_1\perp\boldsymbol{S}_2$ 即 $\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=0$.

两直线垂直相交：$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=0$，且 $\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=0$.

两直线平行：$\boldsymbol{S}_1/\!/\boldsymbol{S}_2$ 即 $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=0$.

两直线重合：$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2/\!/\boldsymbol{S}_1/\!/\boldsymbol{S}_2$.

l_1 与 l_2 之间的夹角可用$\langle\widehat{\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2}\rangle$来定义：

$$\cos\langle\widehat{\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2}\rangle=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

③ 平面与直线的关系

设平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$，　直线 l：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

平面 π 与直线 l 相交：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\neq 0$，这里 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面 π 的法向，$\boldsymbol{S}=(m,n,p)$为直线 l 的方向向量.

平面 π 与直线 l 垂直相交：$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{S}$ 即 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{S}=0$.

平面 π 与直线 l 平行：$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{S}$ 即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}=0$.

直线 l 在平面 π 上：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，这里 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为直线 l 上的一点.

直线 l 与平面 π 的夹角 φ，$0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sin\varphi=|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{S}_2}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{S}|}=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

④ 平面 π 外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 π_2：$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

⑤ 不在直线 l_2：$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到直线 l 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ m&n&p\\ x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\end{matrix}\right\|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

(4) 过直线 l：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的平面束方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

或 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，($\lambda,\mu$ 为参数).

注意：在第二式中不含有平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

三、基本题型与解题方法

1. 向量代数

在向量运算中要分清向量与数量的差异，正确应用运算法则，还要注意各种运算的几何意义及每种运算

的各种等价表达式. 一般说,这类题目不难,只要善于从几何和代数两方面灵活运用给定条件,就能得出结果.

例 5-1 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都是单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,试计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=1,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=1$,

由于
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0,$$
展开得
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})=-\frac{3}{2}.$$

例 5-2 已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,计算$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

解
$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})&=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.\end{aligned}$$

例 5-3 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

解 要证明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,只要证明$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$ 即可. 现在 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$,故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

例 5-4 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求一单位向量 ξ,使 $\xi\perp\boldsymbol{c}$ 且 $\xi,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

解 设 $\xi=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,根据条件$|\xi|=1$,得 $x^2+y^2+z^2=1$. 又 $\xi\perp\boldsymbol{c}$,有 $\xi\cdot\boldsymbol{c}=0$,即 $2x-2y+z=0$.

依题要求 $\xi,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面,故$[\xi,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$,即
$$\begin{vmatrix}x & y & z\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\end{vmatrix}=2x+z=0,$$

解三元一次方程组
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\2x-2y+z=0\\2x+z=0\end{cases}$$
就得
$$\xi=\pm\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right).$$

例 5-5 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

(1) 满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 的向量 $\boldsymbol{c}$ 存在吗?为什么?

(2) 若存在 $\boldsymbol{c}$,写出满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 的向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标表达式;

(3) 求出模为最小的向量 $\boldsymbol{c}$.

解 (1) 首先讨论 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是否为零,以确定 $\boldsymbol{c}$ 的存在性. 因为若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$,必有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,经验证 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,故满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 的向量 $\boldsymbol{c}$ 存在.

(2) 用待定系数法,设 $\boldsymbol{c}=(x,y,z)$,由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$,即
$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & 2\\x & y & z\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$
得
$$\begin{cases}y+z=1\\2x-z=1\\2x+y=2\end{cases},\quad\text{即}\quad\begin{cases}x=x\\y=2-2x\\z=2x-1\end{cases}$$
所以 $\boldsymbol{c}=(x,(2-2x),(2x-1))$,其中 x 可取任何实数.

(3) $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+(2-2x)^2+(2x-1)^2}=\sqrt{(3x-2)^2+1}$

当 $3x-2=0$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时，$|\boldsymbol{c}|$ 最小，此时 $|\boldsymbol{c}|=1$.

故 $|\boldsymbol{c}|$ 最小的向量是 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

例 5-6　若空间直线 l_1 经过点 A，其方向向量为 $\boldsymbol{a}$. 直线 l_2 经过 B 点，其方向向量为 $\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，求证 l_1 与 l_2 的距离为

$$d=\frac{|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}.$$

证　如图 5-1，记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，显然 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，即向量 $\boldsymbol{c}$ 与直线 l_1,l_2 垂直，于是

$$d=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\overrightarrow{AB}|=\frac{|\boldsymbol{c}\cdot\overrightarrow{AB}|}{\boldsymbol{c}}=\frac{|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}$$

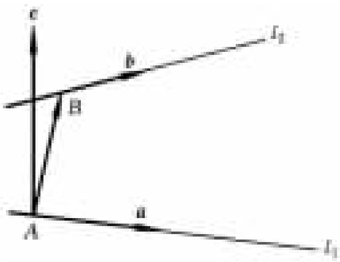

图 5-1

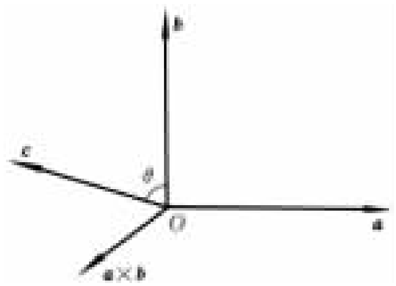

图 5-2

例 5-7　已知两非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直，且相交于点 O，今将 $\boldsymbol{b}$ 绕 $\boldsymbol{a}$ 右旋角 θ 得到向量 $\boldsymbol{c}$（图 5-2），试将 $\boldsymbol{c}$ 用给定的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 及角 θ 表示.

解　由题意知 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 确定的平面内. 而由向量的加法：

$$\boldsymbol{c}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}\boldsymbol{b}^0+\mathrm{Prj}_{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0=|\boldsymbol{c}|\cos\theta\boldsymbol{b}^0+|\boldsymbol{c}|\sin\theta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0=|\boldsymbol{b}|\cos\theta\boldsymbol{b}^0+|\boldsymbol{b}|\sin\theta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0$$

$$=|\boldsymbol{b}|\cos\theta\,\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}+|\boldsymbol{b}|\sin\theta\,\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{b}\cos\theta+\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\sin\theta.$$

例 5-8　已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3$，求 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模和它与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解　运用模与数量积的关系 $|\boldsymbol{s}|^2=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}$ 来求得结果

由于

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a},$$

现　$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=1,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2=4,\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|^2=9,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0,$$

故　$$|\boldsymbol{s}|^2=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}=1+4+9=14,$$

即　$$|\boldsymbol{s}|=\sqrt{14},$$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{14}\times 2}=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

因此　$$\theta=\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

例 5-9　已知 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求 $\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$.

解　根据题意，有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0\\7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0\end{cases}$$

解得
$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

且
$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},\quad 即\quad \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2},$$

所以
$$\cos\langle \widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\frac{1}{2},\quad 故\quad \langle \widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\frac{\pi}{3}.$$

例 5-10 设 A,B,C 三点的向径依次为 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$，证明 A,B,C 三点共线的充要条件为 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=0$.

证 因为 A,B,C 三点共线的充要条件是 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$

现
$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\quad \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_1\\&=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=0.\end{aligned}$$

从而得证.

例 5-11 以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形，用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 来表示平行四边形垂直于 $\boldsymbol{a}$ 边的高.

解 如图 5-3，设 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，但 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，

解得
$$\lambda=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2},\ 故\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}.$$

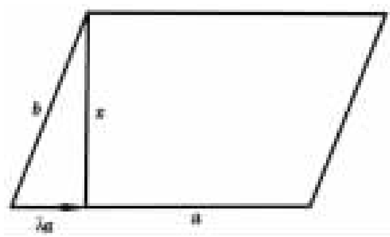

图 5-3

例 5-12 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 若 $|\boldsymbol{c}|=3$，求向量 $\boldsymbol{c}$，使得三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所构成的平行六面体的体积最大.

解 要使平行六面体的体积最大，向量 $\boldsymbol{c}$ 必须垂直于由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 构成的平行四边形，即 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共线.

现
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&4\\3&-1&-1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k},$$

故
$$\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{i}+14\lambda\boldsymbol{j}-11\lambda\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{c}|=|\lambda|\sqrt{1^2+(14)^2+(-11)^2}=\sqrt{318}|\lambda|=3,\quad 即\quad \lambda=\pm\frac{3}{\sqrt{318}},$$

从而
$$\boldsymbol{c}=\left(\pm\frac{3}{\sqrt{318}},\pm\frac{42}{\sqrt{318}},\mp\frac{33}{\sqrt{318}}\right).$$

例 5-13 已知 $\overrightarrow{OA}=(-2,3,-6)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-2,2)$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{42}$，且 $\overrightarrow{OC}$ 平分 $\angle AOB$，求 $\overrightarrow{OC}$.

解 因为 $\overrightarrow{OA}/|\overrightarrow{OA}|$、$\overrightarrow{OB}/|\overrightarrow{OB}|$ 均为单位向量，所以 $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{1}{7}(-2,3,-6)+\dfrac{1}{3}(1,-2,2)$ 是 $\angle AOB$ 的角平分线向量，依题意存在 $\lambda>0$，使

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=\lambda\overrightarrow{OC},$$

即 $\dfrac{1}{21}(1,-5,-4)=\lambda\overrightarrow{OC}$.

但 $|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{42}$，上式两端取模，得

$$\frac{1}{21}\sqrt{42}=\lambda\sqrt{42},\quad \lambda=\frac{1}{21},$$

故$\overrightarrow{OC}=(1,-5,-4)$.

例 5-14　设 $\boldsymbol{a}=(1,4,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,2)$，求 λ 使 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

解法 1　欲 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$，则应有

$$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=0,$$

即
$$\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}^2=0,\quad \lambda^2=\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{b}^2}=7,$$

故
$$\lambda_1=\sqrt{7},\quad \lambda_2=-\sqrt{7}.$$

解法 2　因为

$$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,4+\lambda,5+2\lambda),\quad \boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1-\lambda,4-\lambda,5-2\lambda),$$

欲 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$，则应有

$$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=0,$$

即$(1-\lambda^2)+(16-\lambda^2)+(25-4\lambda^2)=0$

得
$$\lambda_1=\sqrt{7},\quad \lambda_2=-\sqrt{7}.$$

注　解法 1 侧重于抽象运算，具有普遍性；解法 2 侧重于具体计算.

例 5-15　求向量 $\boldsymbol{a}=(6,-1,2)$在向量 $\boldsymbol{b}=(7,-4,4)$上的投影和投影向量.

解　$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{(6,-1,2)\cdot(7,-4,4)}{\sqrt{7^2+(-4)^2+4^2}}=6.$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

$$(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a})\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\left(\frac{14}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right).$$

例 5-16　求单位向量 $\boldsymbol{c}_0$ 使它与向量 $\boldsymbol{a}=(5,-6,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-7,10)$共面，且满足 $\boldsymbol{c}_0\perp\boldsymbol{a}$，然后再求一单位向量 $\boldsymbol{e}_0$，使 $\boldsymbol{e}_0\perp\boldsymbol{a}_0$ 且 $\boldsymbol{e}_0\perp\boldsymbol{c}_0$.

解　令 $\boldsymbol{d}$ 表示 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量，则

$$\boldsymbol{d}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}=\frac{(5,-6,1)\cdot(2,-7,10)}{5^2+(-6)^2+1^2}(5,-6,1)=(5,-6,1),$$

那么向量

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}=(2,-7,10)-(5,-6,1)=(-3,-1,9).$$

就是一个与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的向量，且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$. 将 $\boldsymbol{c}$ 单位化后，得

$$\boldsymbol{c}_0=\left(-\frac{3}{\sqrt{91}},-\frac{1}{\sqrt{91}},\frac{9}{\sqrt{91}}\right),\quad \text{或}\quad \boldsymbol{c}_0=\left(\frac{c}{\sqrt{91}},\frac{1}{\sqrt{91}},-\frac{9}{\sqrt{91}}\right).$$

所以
$$\boldsymbol{e}_0=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|}=-\frac{1}{\sqrt{5542}}(53,48,23),\quad \text{或}\quad \boldsymbol{e}_0=\frac{1}{\sqrt{5542}}(53,48,23).$$

例 5-17　设矢量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-4,5)$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$\lambda$ 为实数，试证其模最小的矢量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{b}$.

证　设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，于是$|\boldsymbol{x}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+\lambda^2|\boldsymbol{b}|^2+2\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标代入得

$$|\boldsymbol{x}|^2=3+24\lambda+50\lambda^2=50\left(\lambda+\frac{6}{25}\right)^2+\frac{3}{25}.$$

当 $\lambda=-\frac{6}{25}$时，模$|\boldsymbol{x}|$最小. 这时

$$\boldsymbol{x}=(1,-1,1)+\left(\frac{-6}{25}\right)(3,-4,5)=\left(\frac{7}{25},\frac{-1}{25},\frac{-5}{25}\right).$$

且有 $x \cdot b=0$. 故结论正确.

例 5-18 已知两个非零的不共线向量 a 和 b,

(1) 求证: $\tan <\widehat{a,b}>=\dfrac{|a\times b|}{a\cdot b}$;

(2) 向量 $a_0\times b_0/\sin <\widehat{a_0,b_0}>$ 表示什么向量(a_0,b_0 分别表示向量 a 和 b 上的单位向量);

(3) 求证: $(a\times b)^2\leqslant |a|^2\cdot |b|^2$. 等号成立的条件是什么?

证 (1) $|a\times b|=|a||b|\sin <\widehat{a,b}>$ 和 $a\cdot b=|a||b|\cos <\widehat{a,b}>$ 两式相除,得 $\tan <\widehat{a,b}>=\dfrac{|a\times b|}{a\cdot b}$.

(2) $a_0\times b_0/\sin <\widehat{a_0,b_0}>$ 表示与 a,b 都垂直的单位矢量.

(3) $(a\times b)^2=|a\times b|^2=a^2\cdot b^2\sin <\widehat{a,b}>\leqslant a^2\cdot b^2=|a|^2|b|^2$,所以结论正确.

当 $\sin^2 <\widehat{a,b}>=1$,等号成立. 即当 $a\perp b$ 时,等号成立.

例 5-19 若三向量 p,q,r 不共面,求证: $2p+3q,3q-5r,2p+5r$ 必不共面.

证 因 $[(2p+3q)(3q-5r)(2p+5r)]=[(2p+3q)\times(3q-5r)]\cdot(2p+5r)$

$$=[6(p\times q)-10(p\times r)-15(q\times r)]\cdot(2p+5r)$$

$$=12(p\times q)\cdot p-20(p\times r)\cdot p-30(q\times r)\cdot p+30(p\times q)\cdot r-50(p\times r)\cdot r-75(q\times r)\cdot r$$

$$=30(p\times q)\cdot r-30(q\times r)\cdot p$$

且 p,q,r 不共面,故有 $(p\times q)\cdot r\neq 0,(q\times r)\cdot p\neq 0$. 所以,$[(2p+3q)(3q-5r)(2p+5r)]\neq 0$,即三向量不共面.

2. 空间解析几何

平面、直线、点之间的关系是这部分内容的重点,务必做到熟记直线、平面的各类方程及表达各种位置关系的有关公式. 运用向量的运算性质来处理点、直线、平面的各种关系是解题的一个重要手段. 解题时,首先要找出主要几何关系(有时可借助于草图),建立有关的关系式,然后抓住要点进行求解.

例 5-20 设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,求此平面方程.

解 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,平面过原点及点$(6,-3,2)$,则有 $D=0$ 及

$$6A-3B+2C=0, \tag{1}$$

又平面与已知平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,则有

$$4A-B+2C=0, \tag{2}$$

联立方程(1)与方程(2) 解得
$$A=B=-\frac{2}{3}C,$$

故平面方程为
$$-\frac{2}{3}Cx-\frac{2}{3}Cy+C=0,$$

即
$$2x+2y-3z=0.$$

例 5-21 设直线 $l:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 π: $4x-2y+z-2=0$,试说明 l 与 π 的关系.

解 (说明 l 与 π 的关系,即要考察 l 与 π 是否相交,若相交则考察是否垂直相交. 若 l 与 π 不相交,则考察 l 是否在 π 上).

直线 l 的方向向量 $s=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 3 & 2\\2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-28i+14j-7k=-7(4i-2j+k)$,又 $n_\pi=\{4,-2,1\}$,可见 $n_\pi /\!/ s$,故平面 π 与直线 l 垂直相交.

例 5-22 设有直线 l_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+6}{1}$ 与 l_2: $\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$,求 l_1 与 l_2 的夹角.

解 直线 l_1 与 l_2 的夹角定义为它们的方向向量的夹角. 直线 l_1 的方向向量 $s_1=\{1,-2,1\}$,直线 l_2 的方向向量

$$s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-i-j+2k,$$

$$\cos\langle \widehat{s_1,s_2}\rangle=\frac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1||s_2|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

故它们的夹角为 $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

例 5-23　求点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解　根据题意,所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 可取为直线的方向向量,$\boldsymbol{s}=\{-1,3,1\}$ 而平面过点 $M(1,2,-1)$,所以平面方程由点法式给出

$$(-1)(x-1)+3(y-2)+1(z+1)=0,$$

即
$$x-3y-z+4=0.$$

例 5-24　已知两直线方程为 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$,$l_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$,求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

解　本题用平面束方程求解较为方便.

首先容易判定 l_1 与 l_2 不共面,设过 l_1 的平面为

π:
$$x+z-4+\lambda(y-2)=0,$$

即
$$x+\lambda y+z-(4+2\lambda)=0.$$

现 π 与 l_2 平行,则有 $\{1,\lambda,1\}\cdot\{2,1,1\}=2+\lambda+1=0$.

故　$\lambda=-3$　从而 π 的方程为 $x-3y+z+2=0$.

例 5-25　设平面过点 $P(2,3,4)$ 及 z 轴,求其方程.

解　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,由于平面过 Z 轴把 Z 轴上的点 $(0,0,0)$ 及 $(0,0,1)$ 代入方程可得 $C=D=0$. 又把点 $P(2,3,4)$ 代入 $Ax+By=0$,得 $2A+3B=0$,即 $A=-\frac{3}{2}B$,所以所求平面的方程是 $-\frac{3}{2}Bx+By=0$,即 $3x-2y=0$.

例 5-26　分别求出过直线 $l:\begin{cases} 2x-3y+4z-12=0 \\ x+4y-2z-10=0 \end{cases}$ 且垂直于各坐标面的平面方程,并求直线 l 在平面 $3x+2y+z=10$ 上的投影.

解　设过直线 l 的平面束方程为

$$2x-3y+4z-12+\lambda(x+4y-2z-10)=0,$$

经整理得
$$(2+\lambda)x-(3-4\lambda)y+(4-2\lambda)z-12-10\lambda=0,$$

则其垂直于 yOz 坐标面的平面应满足

$$\{2+\lambda,-(3-4\lambda),(4-2\lambda)\}\cdot\{1,0,0\}=0$$

即 $\lambda=-2$,所以该平面方程为 $-11y+8z+8=0$.

同理可得:垂直于 xOz 坐标面的平面为 $11x+10z-18=0$.

垂直于 xOy 坐标面的平面为 $4x+5y-32=0$.

直线 l 在平面 $3x+2y+z=10$ 上的投影可用一般方程表示. 先作出过直线 l 且垂直于平面 $3x+2y+z=10$ 的平面 π,令

$$\{2+\lambda,4\lambda-3,4-2\lambda\}\cdot\{3,2,1\}=0,$$

得 $\lambda=-\frac{4}{9}$,即 π: $14x-43y+42z-68=0$,

于是投影直线为

$$\begin{cases}14x-43y+42z-68=0\\3x+2y+z=10.\end{cases}$$

例 5-27　求通过直线 $l\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$**且与平面** $\pi: x-4y-8z+12=0$ **成**$\frac{\pi}{4}$**角的平面方程.**

解　设过直线 l 的平面束为$(x-z+4)+\lambda(x+5y+z)=0$,即

$$(1+\lambda)x+5\lambda y+(\lambda-1)z+4=0,$$

要它与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成$\frac{\pi}{4}$角,就有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|(1+\lambda)+5\lambda\cdot(-4)+(\lambda-1)\cdot(-8)|}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{(1+\lambda)^2+25\lambda^2+(\lambda-1)^2}}$$

$$=\frac{|9-27\lambda|}{9\sqrt{27\lambda^2+2}}=\frac{|1-3\lambda|}{\sqrt{27\lambda^2+2}},$$

解得 $\lambda=0,\lambda=-\frac{4}{3}$,

因此,所求平面为 $x-z+4=0$ 与 $x+20y+7z-12=0$.

注　如果平面束方程设为 $x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$,这时所作的结果只有 $x+20y+7z-12=0$,缺解 $x-z+4=0$,原因是平面束 $x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$ 中并不包括 $x-z+4=0$,而它现在恰恰也是解. 因此,读者应对平面束方程中所缺的平面进行验证,看它是不是可能的解.

例 5-28　求过点 $P(-2,0,4)$**且与两平面** $2x+y-z=0,x+3y+1=0$ **都垂直的平面方程.**

解　依题意,所求平面的法向必同时垂直于已知两平面的法向. 令 $\boldsymbol{n}=\{2,1,-1\}\times\{1,3,0\}=\{3,-1,5\}$.
得点法式方程

$$3(x+2)-(y-0)+5(z-4)=0,$$

即

$$3x-y+5z-14=0.$$

例 5-29　一直线过点 $A(2,-3,4)$**且和** y **轴垂直相交,求其方程.**

解　根据条件,直线与 y 轴垂直相交,则交点为$(0,-3,0)$,于是直线方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{2,0,4\}$
因此由对称式方程得

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

例 5-30　求过点 $A(1,0,-2)$**与平面** $\pi: 3x-y+2z+3=0$ **平行,且与直线** $l_1: \frac{x-1}{4}=\frac{3-y}{2}=\frac{z}{1}$**相交的直线** l **的方程.**

解　过 A 点作平行于平面π 的平面 π_1,过 A 点及直线 l_1 作平面 π_2,则 π_1 与 π_2 的交线即为所求直线 l.

现 π_1:

$$3(x-1)-(y-0)+2(z+2)=0,$$

即

$$3x-y+2z+1=0,$$

取

$$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{AM_1}=\{4,-2,1\}\times\{1-1,3-0,0-(-2)\}=\{-7,-8,12\}.$$

故 π_2:

$$-7(x-1)-8(y-0)+12(z+2)=0,$$

即

$$7x+8y-12z-31=0,$$

于是 l:$\begin{cases}3x-y+2z+1=0\\7x+8y-12z-31=0\end{cases}$为所求.

$\left(l\text{ 的对称式是}\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{50}=\frac{z+2}{31}\right)$.

例 5-31　过点 $M_1(7,3,5)$引方向余弦等于$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$的直线 l_1，设直线 l 过点 $M_0(2,-3,-1)$，与直线 l_1 相交且和 x 轴成$\frac{\pi}{3}$角，求直线方程 l.

解　建立直线 l_1 的方程

$$\frac{x-7}{\frac{1}{3}}=\frac{y-3}{\frac{2}{3}}=\frac{z-5}{\frac{2}{3}},\quad \text{即}\quad \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2},$$

设所求直线 l 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k},$$

l_1 与 l 共面且相交，即表示$(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}_1)\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=0$，即

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & m & n\\ 1 & 2 & 2\\ 5 & 6 & 6\end{vmatrix}=0,$$

且
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

即
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+m^2+n^2=1,$$

联立上列两式，可得 $m=n=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$，于是

$$\boldsymbol{s}=2\boldsymbol{i}\pm\sqrt{6}\boldsymbol{j}\pm\sqrt{6}\boldsymbol{k}.$$

故所求直线 l 为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}\quad \text{或}\quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-\sqrt{6}}=\frac{z+1}{-\sqrt{6}}.$$

例 5-32　求通过点 $M(2,1,3)$且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解　先作一平面 π 过点 $M(2,1,3)$且与已知直线垂直.

$$\pi:3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,\tag{1}$$

再求已知直线与该平面的交点 N，令$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=\lambda$，即

$$x=3\lambda-1,\ y=2\lambda+1,\ z=-\lambda$$

代入式(1)，得 $\lambda=\frac{3}{7}$，

故交点为 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},\frac{-3}{7})$.

以$\overrightarrow{MN}$为方向向量，直线的对称式方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{7}-2}=\frac{y-1}{\frac{13}{7}-1}=\frac{z-3}{-\frac{3}{7}-3},$$

即
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

例 5-33　直线过点 $A(-3,5,-9)$且和两直线 $l_1\begin{cases}y=3x+5\\ z=2x-3\end{cases}$，$l_2\begin{cases}y=4x-7\\ z=5x+10\end{cases}$相交，求此直线方程.

解　过 A 点及直线 l_1 作平面 π_1，过 A 点及直线 l_2 作平面 π_2，则 π_1 与 π_2 的交线即为所求直线. 故作过

l_1 的平面束：

$$2x-3-z+\lambda(3x+5-y)=0,$$

将 A 点坐标代入，得 $\lambda=0$，故 $\pi_1:2x-z-3=0$.

同样作过 l_2 的平面束：$4x-7-y+\lambda(5x+10-z)=0$，将 A 点坐标代入，得 $\lambda=6$，故 $\pi_2:34x-y-6z+53=0$，因此所求直线为

$$\begin{cases}2x-z-3=0\\34x-y-6z+53=0.\end{cases}$$

例 5-34 设直线 $l_1:\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$，$l_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$试求(1) l_1 与 l_2 之间的距离 d；(2) l_1 与 l_2 的公垂线方程.

解 (1) 取 l_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\{4,-3,1\}$. l_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=\{-2,9,2\}$，取 $P_1(9,-2,0)\in l_1$，$P_2(0,-7,2)\in l_2$，不难算出

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\{-15,-10,30\},$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{-9,-5,2\},$$

故

$$d=\frac{|(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|15\times9+10\times5+30\times2|}{\sqrt{15^2+10^2+30^2}}=7.$$

(2) 由于 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\perp\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\perp\boldsymbol{s}_2$，可作公垂线与 l_1 所在平面 π_1，取

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_1\times(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-3&1\\-15&-10&30\end{vmatrix}=\{-16,-27,-17\},$$

因 $P_1(9,-2,0)$在 π_1 上，故

π_1：
$$16x+27y+17z-90=0$$

作公垂线与 l_2 所在平面 π_2，取

$$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}_2\times(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-2&9&2\\-15&-10&30\end{vmatrix}=\{58,6,31\},$$

因点 $P_2(0,-7,2)$在 π_2 上，故

π_2：
$$58x+6y+31z-20=0.$$

π_1 与 π_2 的交线即为 l_1 与 l_2 的公垂线，其方程为

$$\begin{cases}16x+27y+17z-90=0\\58x+\ 6y+31z-20=0.\end{cases}$$

例 5-35 求点 $P_0(2,3,1)$在直线 $l:\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$上的投影.

解 过 $P_0(2,3,1)$与直线 l 垂直的平面

$$(x-2)+2(y-3)+3(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z-11=0.$$

此平面与 l 的交点即为 P_0 的投影，解$\begin{cases}x+2y+3z-11=0\\\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}\end{cases}$ 得 $P_0(-5,2,4)$.

例 5-36 求点 $P_0(3,-1,-1)$在平面 $\pi:x+2y+3z-40=0$ 上的投影.

解 过点 P_0 与 π 垂直的直线为 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. 此直线与 π 的交点即为 P_0 的投影，

解$\begin{cases}x+2y+3z-40=0\\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}\end{cases}$ 得 $P_0(6,5,8)$.

例 5-37　求过点$(0,2,4)$且与平面 $x+2z=1$ 及 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解　所求直线必与两平面交线$\begin{cases}x+2z=1\\ y-3z=2\end{cases}$平行,故不妨设所求直线为$\begin{cases}x+2z=a\\ y-3z=b\end{cases}$,直线过点$(0,2,4)$,故 $a=8,b=-10$.因此,直线方程为

$$\begin{cases}x+2z=8\\ y-3z=-10.\end{cases}$$

例 5-38　求直线 l:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

在平面 π:$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解法 1　设经过 l 且垂直于 π 的平面方程为 π_1:$A(x-1)+By+C(z-1)=0$,则由条件可知

$$A-B+2C=0,\quad A+B-C=0.$$

由此解得 $A:B:C=-1:3:2$.于是 π_1 的方程为

$$x-3y-2z+1=0.$$

从而 l_0 的方程为

$$\begin{cases}x-y+2z-1=0,\\ x-3y-2z+1=0.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x=2y,\\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1).\end{cases}$$

于是 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面方程为 $x^2+z^2=4y^2+\dfrac{1}{4}(y-1)^2$,即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

解法 2　由于直线 l 的方程可写为

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\ y+z-1=0,\end{cases}$$

所以过 l 的平面方程可设为 $x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$,即

$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

由它与平面 π 垂直,得 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0$,解得 $\lambda=-2$.
于是经过 l 且垂直于 π 的平面方程为

$$x-3y-2z+1=0.$$

从而 l_0 的方程为

$$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\ x-3y-2z+1=0.\end{cases}\quad (下同解法\ 1)$$

解法 3　l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,1,-1\}$,$\pi$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$,经过 l 且垂直于 π 的平面 π_1 的法线向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 1&1&-1\\ 1&-1&2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

又因为 π_1 经过 l,π_1 当然经过 l 上的点$(1,0,1)$,所以 π_1 的方程为

$$(x-1)-3(y-0)+2(z-1)=0,$$

即
$$x-3y-2z+1=0 \quad (\text{下同解法 } 1)$$

例 5-39 在直线方程$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{3-A}=\frac{z-2}{4+B}$中，如何选取 A 的值才能使直线平行于 xOz 平面，如何选取 A 和 B 的值才能使直线同时平行于平面 $2x+3y-2z+1=0$ 和 $x-6y+2z-3=0$.

解 要使直线平行于 xOz 平面，必须

$$\{2,3-A,4+B\}\cdot\{0,1,0\}=0,$$

即
$$3-A=0, \quad A=3.$$

要使直线同时平行于两已知平面，必须

$$\{2,3-A,4+B\}\cdot\{2,3,-2\}=0, \quad \{2,3-A,4+B\}\cdot\{1,-6,2\}=0$$

即
$$\begin{cases}3A+2B-5=0\\3A+B=4\end{cases}$$

$$A=B=1,$$

注 本题后半部分也可这样解，因为平行于两平面的直线，就平行于两平面的交线，而交线的方向向量为

$$\{2,3,-2\}\times\{1,-6,2\}=\{-6,-6,-15\},$$

故应有
$$\frac{2}{-6}=\frac{3-A}{-6}=\frac{4+B}{-15}$$

$$A=B=1.$$

例 5-40 求过原点并含直线 $l:\begin{cases}x=3-t\\y=1+2t\\z=t\end{cases}$的平面方程.

解 变换 L 的方程为一般式

$$\begin{cases}x+z-3=0,\\y-2z-1=0,\end{cases}$$

则过 L 的平面束为

$$\lambda_1(x+z-3)+\lambda_2(y-2z-1)=0.$$

把原点$(0,0,0)$代入上式得

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=-3.$$

故所求平面方程为

$$x-3y+7z=0.$$

例 5-41 已知平面方程 $\pi_1: x-2y-2z+1=0, \pi_2: 3x-4y+5=0$. 求平分 π_1 与 π_2 夹角的平面方程.

解法 1 先利用 π_1、π_2 的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=\{1,-2,-2\}, \quad \boldsymbol{n}_2=\{3,-4,0\}.$$

求未知平面的法向量. 由向量的加、减法原则知

$$\mathbf{N}_1=\frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|}+\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|}=\left\{\frac{14}{15},-\frac{22}{15},-\frac{2}{3}\right\},$$

$$\mathbf{N}_2=\frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|}-\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|}=\left\{-\frac{14}{15},\frac{22}{15},-\frac{2}{3}\right\},$$

就是要求的两个法向量，然后再求出 π_1 与 π_2 的一个交点$(-3,-1,0)$，由平面的点法式所求平面方程为

$$\{x+3,y+1,z\}\cdot \boldsymbol{N}_1=0,\quad \text{或}\quad \{x+3,y+1,z\}\cdot \boldsymbol{N}_2=0,$$

即
$$7x-11y-5z+10=0,\quad \text{或}\quad 2x-y+5z+5=0.$$

解法 2　设(x,y,z)为所求平面上的任一点，依题意它到 π_1 的距离应等于它到 π_2 的距离，即

$$\frac{|x-2y-2z+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}},$$

去掉绝对值符号，得所求平面方程为

$$7x-11y-5z+10=0,\quad \text{或}\quad 2x-y+5z+5=0.$$

例 5-42　求平行于平面 $x+y+z=100$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

解　平行于 $x+y+z=100$ 的平面方程可设为

π:
$$x+y+z+D=0.$$

因为 π 与 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切，所以

$$\left.\frac{|x+y+z+D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}=2.$$

即
$$|D|=2\sqrt{3}.$$

所以要求的平面方程为

$$x+y+z+2\sqrt{3}=0,\quad \text{或}\quad x+y+z-2\sqrt{3}=0.$$

例 5-43　求证过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$且平行于两条既不重合又不平行的直线

$$\frac{x-a_i}{l_i}=\frac{y-b_i}{m_i}=\frac{z-c_i}{n_i}$$

$(i=1,2)$的平面方程可写成下列形式

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

证　所求的平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{l_1,m_1,n_1\}\times\{l_2,m_2,n_2\}.$$

由平面的点法式方程得所求平面方程为

$$\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}\cdot \boldsymbol{n}=0,$$

即
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

例 5-44　求证过直线 $x=x_1+lt,y=y_1+mt,z=z_1+nt$ 和不在该直线上的点 $M(x_2,y_2,z_2)$的平面方程可写成下列形式.

π:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

证　因为 $M(x_2,y_2,z_2)$及(x_1,y_1,z_1)均在所求平面 π 上，所以

$$\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}\,/\!/\,\pi,$$

又
$$\{l,m,n\}\,/\!/\,\pi,$$

所以平面 π 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}\times\{l,m,n\},$$

由点法式得 π 的方程为

$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

即
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

例 5-45 求证通过两条平行直线 $x=a_i+lt,y=b_i+mt,z=c_i+nt(i=1,2)$ 的平面方程可写成下列形式

π:
$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

证 因为 (a_1,b_1,c_1) 及 (a_2,b_2,c_2) 均在所求平面 π 上,所以

$$\{a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1\}/\!/\pi,$$

又
$$\{l,m,n\}/\!/\pi,$$

则 π 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1\}\times\{l,m,n\},$$

所以 π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

例 5-46 求证过直线 $x=x_0+lt,y=y_0+mt,z=z_0+nt$ 且垂直于平面 $Ax+By+Cz+D=0$(这里直线与平面不垂直)的平面方程可以写成如下形式

π:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

证 因为所求平面 π 垂直于平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

所以 $\{A,B,C\}/\!/\pi$,又

$$\{l,m,n\}/\!/\pi,$$

故 π 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}\times\{l,m,n\},$$

但 (x_0,y_0,z_0) 在 π 上,故 π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

例 5-47 求与直线 $x-1=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+5}{-2}$ 关于原点对称的直线方程.

解 因为点 $(1,-2,-5)$ 在已知直线上,它关于原点的对称点为 $(-1,2,5)$. 又所求直线必与已知直线平行,所以与已知直线关于原点对称的直线方程为

$$x-1=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{-2}.$$

例 5-48　**求直线** $l_1:\frac{x+5}{6}=1-y=z+3$ **与直线** $l_2:\begin{cases}x+5y+z=0,\\x+y-z+4=0.\end{cases}$ **之间的最短距离** d.

解法 1　**过** l_2 **的平面方程可设为**

$$\pi:\quad x+5y+z+\lambda(x+y-z+4)=0.$$

令 $l_1/\!/\pi$**,则应有**

$$\{6,-1,1\}\cdot\{1+\lambda,5+\lambda,1-\lambda\}=0,$$

即
$$\lambda=-\frac{1}{2}.$$

这时平面方程为

$$x+9y+3z-4=0 \tag{1}$$

又$(-5,1,-3)$**是** l_1 **上的点,故这点到平面**(1)**的距离即为所求的** d**,所以**

$$d=\frac{|-5+9+3(-3)-4|}{\sqrt{(-5)^2+9^2+3^2}}=\frac{18\sqrt{115}}{23}.$$

解法 2　l_2 **的方向向量为**

$$\boldsymbol{a}_2=\{1,5,1\}\times\{1,1,-1\}=\{-6,2,-4\},$$

l_1 **的方向向量为**
$$\boldsymbol{a}_1=\{6,-1,1\},$$

$(-5,3,-3)$**是** l_1 **上的点,**$(1,-1,4)$**是** l_2 **上的一点,故所求的距离**

$$d=\frac{|\{6,-2,7\}\cdot\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|}=\frac{18\sqrt{115}}{23}.$$

例 5-49　**求直线**

$$l:\quad\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0.\end{cases}$$

在球面 $x^2+y^2+z^2-2x-2=0$ **上点**$(2,1,1)$**处的切平面上的投影方程.**

解　**球面** $x^2+y^2+z^2-2x-2=0$ **在**$(2,1,1)$**点处的切平面方程为** $\pi_1:x+y+z-4=0$.

过已知直线作一平面 π_2 **垂直于切平面,那么两平面的交线即为所求的投影.**

设

$$\pi_2:\quad Ax+By+Cz+D=0,$$

因 $\pi_1\perp\pi_2$**,故** $A+B+C=0$. **又** l **在** π_2 **上,在** l **上任取两点,例如**$(0,0,-1)$**,**$(0,1,0)$**,代入** π_2**,得**

$$-C+D=0,\quad B+D=0.$$

解得 $D=C,B=-D$.

注意到 $A+B+C=0$**,得** $A=0,B=-D,C=D$. **故**

$$\pi_2:\quad y-z-1=0.$$

因此所求投影方程为

$$\begin{cases}x+y+z-4=0\\y-z-1=0.\end{cases}$$

例 5-50　**由两相交平面外一点到这两个平面作垂线,试证它们的垂足的连线必与两平面的交线垂直.**

证法 1　**取已知两平面的交线为** z **轴,建立空间直角坐标系,则两平面方程分别为** $y=mx$ **及** $y=nx$**,设定点** $P_0(x_0,y_0,z_0)$**,由** P_0 **作第一个平面的垂线**

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{-1}=\frac{z-z_0}{0},\quad \text{或}\quad \begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0-t\\ z=z_0\end{cases}$$

代入 $y=mx$ 中,得

$$y_0-t=mx_0+m^2t,\quad t=\frac{y_0-mx_0}{1+m^2},$$

故垂足为 $M\left(\frac{x_0+my_0}{1+m^2},\frac{mx_0+m^2y_0}{1+m^2},z_0\right)$,$N\left(\frac{x_0+ny_0}{1+n^2},\frac{nx_0+n^2y_0}{1+n^2},z_0\right)$,

$$\overrightarrow{MN}=\left\{\frac{x_0+ny_0}{1+n^2}-\frac{x_0+my_0}{1+m^2},\frac{nx_0+n^2y_0}{1+n^2}-\frac{mx_0+m^2y_0}{1+m^2},0\right\}.$$

显然$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{k}=0$,即$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{Oz}$,结论正确.

证法 2　设二平面的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$,其交线方向向量为 $\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

两平面外一点 P_0 到两平面的垂足分别为 M_1,M_2,则$\overrightarrow{P_0M_1}=\lambda_1\boldsymbol{n}_1$,$\overrightarrow{P_0M_2}=\lambda_2\boldsymbol{n}_2$,$(\lambda_1,\lambda_2\neq0)$. 而

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{P_0M_2}-\overrightarrow{P_0M_1}=\lambda_2\boldsymbol{n}_2-\lambda_1\boldsymbol{n}_1.$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{s}=(\lambda_2\boldsymbol{n}_2-\lambda_1\boldsymbol{n}_1)\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)=0.$$

所以,$\overrightarrow{M_1M_2}$垂直于两平面的交线.

3. 其他

例 5-51　求椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与抛物柱面 $z=2-x^2$ 的交线关于 xOy 面的投影柱面和在 xOy 面上的投影曲线方程.

解　由$\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=2-x^2\end{cases}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=1$ 即为投影柱面方程,则$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$为在 xOy 面上的投影曲线方程.

例 5-52　已知点 $A(1,0,0)$与点 $B(0,1,1)$,直线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S,求由 S 及两平面 $z=0$,$z=1$ 所围的立体体积.

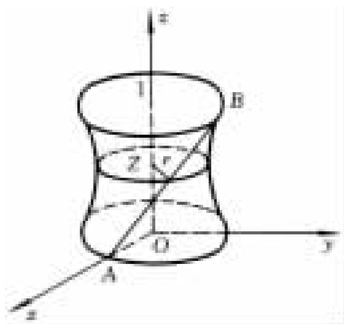

图 5-4

解　直线 AB 的方程为$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-0}{1-0}$,即

$$\begin{cases}x=1-z\\ y=z,\end{cases}$$

在 z 轴上截距为 z 的水平面截此旋转体所得截面为一个圆(图 5-4),圆的半径 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1-z)^2+z^2}=\sqrt{1-2z+2z^2}$. 因此它的面积为 $A(z)=\pi(1-2z+2z^2)$,于是

$$V=\pi\int_0^1(1-2z+2z^2)\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi.$$

例 5-53　求顶点在 $M_0(3,-2,-1)$,准线方程为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x-y+z=0\end{cases}$的锥面方程.

解　设 $M(x_0,y_0,z_0)$是准线上的任一点,则直线

l:
$$\frac{x-3}{x_0-3}=\frac{y+2}{y_0+2}=\frac{z+1}{z_0+1}$$

在所求锥面上,变换 l 方程的形式为

$$x_0=3+(x-3),\quad y_0=-2+t(y+2),\quad z_0=-1+t(z+1).$$

将(x_0,y_0,z_0)代入准线方程得

$$[3+t(x-3)]^2+[-2+t(y+2)]^2+[-1+t(z+1)]^2=1,$$

$$3+t(x-3)-[-2+t(y+2)]+[-1+t(z+1)]=0.$$

消去参数 t,得锥面方程

$$5x^2+13y^2+37z^2+14xy+10xz-18yz+8x-8y+8z-16=0.$$

例 5-54　设从椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的中心出发,沿方向余弦为 λ,μ,ν 的方向到椭球面上的一点的距离是 r,证明

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}.$$

证　过椭球中心且平行于方向$\{\lambda,\mu,\nu\}$的直线为

$x=\lambda t,\quad y=\mu t,\quad z=\nu t.$

将它代入已知椭球方程得

$$\left(\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}\right)t^2=1$$

因为 λ,μ,ν 为方向余弦,所以

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1.$$

又设 t_0 为已知条件中椭球面上那点所对应的参数. 所以

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{(\lambda t_0)^2+(\mu t_0)^2+(\nu t_0)^2}$$

$$=\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t_0^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}.$$

习　题　5

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{2}{3}\pi$,求 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 及$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$.

2. 求以向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$ 为边的三角形的面积,其中$|\boldsymbol{m}|=5,|\boldsymbol{n}|=3,(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\frac{\pi}{6}$.

3. 设$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=3$ 试求$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

4. 求过点$(2,0,-1)$且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

5. 求直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$和平面 $x-y-z+1=0$ 间的夹角 φ.

6. 设一平面在三坐标轴上的截点分别为 a,b,c(均为非零常数),试求该平面到原点的距离.

7. 求过两点 $M_1(8,-3,1)$和 $M_2(4,7,2)$,且垂直于平面 $3x+5y-7z-71=0$ 的平面方程.

8. 求过直线$\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$且垂直于平面 $x+y-z+15=0$ 的平面方程.

9. 设有直线 l:$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{1}$及点 $A(1,2,1)$,在 l 上求一点 P,使$|AP|$的长度为最短.

10. 求过一点$(-1,2,-3)$且平行于平面 $6x-2y-3z+1=0$ 又与直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$相交的直线方程.

11. 确定 λ,使直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$垂直于平面 π_1:$3x+6y+3z+25=0$ 并求该直线在平面 π_2:$x-y+z-2=0$ 上的投影方程.

12. 在一切过直线$\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x+y+z=0\end{cases}$的平面中求出与原点的距离最大的平面.

简答与提示

1. $\mathrm{Prj}_{a}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1.$

$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$

2. 设三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，现 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$

所以
$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{5}{2}|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}|$$
$$=\frac{5}{2}|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|\sin\langle\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}\rangle=\frac{5}{2}\cdot3\cdot5\sin\frac{\pi}{6}=\frac{75}{4}.$$

3. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2=2^2\cdot3^2=36.$

4. 直线方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=\{-16,14,11\}$. 现所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}$，故平面方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$ 即 $16x-14y-11z-65=0$.

5. $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=\{2,4,-2\}=2\{1,2,-1\}$，$\boldsymbol{n}=\{1,-1,-1\}$，$\sin\varphi=\dfrac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=0$，所以 $\varphi=0$.

6. 平面的截距式方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，或 $bcx+acy+abz-abc=0$，由点到平面的距离公式 $d=\dfrac{|abc|}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}$.

7. $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-4,10,1\}$，取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\overrightarrow{M_1M_2}=\{3,5,-7\}\times\{-4,10,1\}=\{75,25,50\}$. 故平面方程为 $75(x-8)+25(y+3)+50(z-1)=0$，化简得 $3x+y+2z-23=0$.

8. 设 (x,y,z) 在所求平面上，则 $\{x+5,y-2,z+0\}$，$\{3,1,4\}$，$\{1,1,-1\}$ 共面，即 $\begin{vmatrix}x+5&y-2&z-0\\3&1&4\\1&1&-1\end{vmatrix}=0$，整理得 $5x-7y-2z+39=0$.

9. 设 $P:\begin{cases}x=3-2t\\y=4+2t\\z=4+t\end{cases}$，$\overrightarrow{AP}=\{2-2t,2+2t,3+t\}$，于是 $|\overrightarrow{AP}|^2=(3t+1)^2+16$，这样 $|\overrightarrow{AP}|$ 最小值为 4.

10. 设所求直线方程为 $\dfrac{x+1}{m}=\dfrac{y-2}{n}=\dfrac{z+3}{p}$. 由于所求直线与已知直线相交，故它们共面，这样
$$\begin{vmatrix}-1-1&2-(-1)&-3-3\\3&2&-5\\m&n&p\end{vmatrix}=0.$$
又，所求直线与已知平面平行，即有 $6m-2n-3p=0$，联立上述方程，可得 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}=\{2,-3,6\}$.

11. 由 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{\lambda}{3}$ 得 $\lambda=1$，作过直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 且垂直于 π_2 的平面方程

$$\pi:\quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $x-z=0$，所以所求投影方程为 $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

12. 设 $x+y+z+1+\lambda(2x+y+z)=0$

即
$$(1+2\lambda)x+(1+\lambda)y+(1+\lambda)z+1=0$$

现要 $d^2=\dfrac{1}{(1+2\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2}$ 最大，即使 $(1+2\lambda)^2+2(1+\lambda)^2$ 最小. 由上式 $=6(\lambda+\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{1}{3}$，

所以，$\lambda=-\dfrac{2}{3}$ 时，
$$x-y-z+3=0.$$

第六章　多元函数微分学及其应用

多元函数微分学及其应用对报考不同专业的考生都有不同程度的要求.本章也是学习多元函数积分学的重要基础之一.用对比和分析的方法与一元函数微分学中相应概念和理论联系起来复习,既有助于理解和掌握多元函数微分学的概念、定理、公式等,也有助于复习巩固一元函数微分学中的相应知识.

一、复习与考试要求

(1) 理解多元函数的概念.

(2) 了解二元函数的极限与连续性的概念及有界闭区域上连续函数的性质.

(3) 理解偏导数和全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件.

(4) 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算法.

(5) 掌握复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

(6) 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.

(7) 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它的方程.

(8) 了解二元函数的二阶泰勒公式.

(9) 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值并会解决一些简单的应用问题.

二、基本概念与理论

1. 多元函数的基本概念

(1) 函数:设 D 是平面上的一个点集.若对于每个点 $P(x,y)\in D$,变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应,则称 z 是变量 x,y 的二元函数,记作 $z=f(x,y)$.

(2) 极限:设函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域) D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点.若对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)\in D$,都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$.

(3) 连续:设函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域) D 内有定义,$P(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点且 $P_0\in D$.若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

2. 有界闭区域上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理:在有界闭区域 D 上多元连续函数,在 D 上一定有最大值和最小值.

(2) 介值定理:在有界闭区域 D 上多元连续函数,若在 D 上取得两个不同的函数值,则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

3. 二元函数的连续、偏导数、全微分等的相互关系

$$\text{一阶偏导数连续}\Rightarrow\text{函数可微}\Rightarrow\begin{cases}\text{函数连续;}\\ \text{偏导数存在;}\\ \text{方向导数存在}\end{cases}$$

4. 复合函数求导的链式法则

若函数 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处有偏导数,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 有连续偏导数,则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

在点(x,y)关于 x 与 y 有偏导数，计算公式如下：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

5. 隐函数求导公式

若函数 $F(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数且 $F(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)\neq0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在 x_0 的某一邻域内能惟一确定一个单值可导且具有连续导数的函数$y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有计算公式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}(F_y\neq0).$$

类似地，当方程 $F(x,y,z)=0$ 能确定隐函数 $z=z(x,y)$，则有计算公式如下：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\quad (F_z\neq0).$$

6. 空间曲线的切线与法平面方程

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$，其中 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$都是 t 的可导函数，又，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲线 Γ 上的一点，其对应的参数值为 t_0，且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不同时为零，则在 M_0 处

切线方程为
$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$

7. 曲面的切平面与法线方程

设曲面 $\sum$ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，其中 $F(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)有不全为 0 的偏导数，则在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处，切平面方程为 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$

法线方程为$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y,_0z_0)}.$

8. 二元函数取得极值的必要条件和充分条件

(1) 必要条件：设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则它在该点的偏导数均为零，即

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

(2) 充分条件：设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内连续，且有一阶和二阶连续偏导数，又，$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，记

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下：

① $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时，有极大值，当 $A>0$ 时，有极小值；

② $AC-B^2<0$ 时没有极值；

③ $AC-B^2=0$ 时是否有极值，还需另作讨论.

9. 条件极值(拉格朗日乘数法)

设 $f(x,y),\varphi(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内都有连续偏导数，且 $\varphi_y(x_0,y_0)\neq0$，引进辅助函数：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 为某一常数，解联立方程组

$$\begin{cases}f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0\\ \varphi(x,y)=0,\end{cases}$$

则(x_0,y_0)是函数 $z=f(x,y)$在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

10. 全微分及全微分存在的必要条件和充分条件

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，则它的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，由下式给出：

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

(1) 必要条件：若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则函数在该点的各偏导数一定存在；

(2) 充分条件：若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，则函数在该点的全微分存在.

11. 二阶混合偏导数次序可交换的条件

若函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续，则在 D 内 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$.

12. 方向导数与梯度

(1) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 是可微分的，则函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

其中 φ 为 x 轴正向到方向 l 的转角.

类似地，可微函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处沿方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦.

(2) 设函数在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $(x,y)\in D$，定义一个向量 $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$，称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的梯度，记作 $\mathrm{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$.

类似地，函数 $u=f(x,y,z)$ 的梯度为

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

三、基本题型与解题方法

1. 函数定义域

例 6-1 求下列函数的定义域：

(1) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2-1}$；　　(2) $f(x,y)=\ln(xy)$；

(3) $f(x,y,z)=\sqrt{y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2-z^2)$；　　(4) $f(x,y,z)=\arcsin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解 (1) $4x^2+y^2\leqslant1$，椭圆 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2\leqslant1$ 内部与边界.

(2) $xy>0$，即 $x>0$，且 $y>0$ 与 $x<0,y<0$.

(3) $|y|\geqslant1$ 且 $x^2+y^2+z^2<4$.

(4) 由于 $\arcsin u$ 的定义域为 $|u|\leqslant1$，而 $|x^2-y^2|\leqslant x^2+y^2$，所以定义域为 $x^2+y^2\neq0$.

例 6-2 已知 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，试求 $f(x,y)$.

解 由于 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=\frac{x-y}{x+y}(x+y)^2=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}(x+y)^2$，$\frac{y}{x}\neq-1$，$\frac{y}{x}=-1$ 时 $x^2-y^2=0$.

所以

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-y}{1+y}x^2, & y\neq-1;\\ 0, & y=-1.\end{cases}$$

2. 二重极限

例 6-3　求极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt[3]{x}+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

解　(1) **原式**$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\sqrt[3]{x}\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}\right)=0+0=0.$

(2) **原式**$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\dfrac{x^2}{|x|+|y|}+\dfrac{y^2}{|x|+|y|}\right)=0+0=0.$

注　**题**(1)**的关键在于充分利用无穷小量与有界量之积为无穷小量.**

例 6-4　求极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}$.

解　(1) **原式**$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\dfrac{x^4}{x^2+y^2}+\dfrac{y^4}{x^2+y^2}\right)=0+0=0.$

(2) **原式**$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=\mathrm{e}^0=1.$

(3) **由于**$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)=0$，**则**

$$\text{原式}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)=0\cdot0=0.$$

(4) **当** $x\to0,y\to0$ **时**，$x^2+y^2\to0$，$\sqrt{1+x^2+y^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

$$\text{原式}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{|x|+|y|}=0.$$

注　**计算多元函数极限时，经常利用一元函数极限的计算方法. 如题**(1)**中利用** $x^4+y^4\to0$ **时**，$\sin(x^4+y^4)\sim x^4+y^4$，**题**(4)**中利用** $x^2+y^2\to0$ **时**，$\sqrt{1+x^2+y^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

例 6-5　下列极限是否存在？若存在，求极限值.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$　$(x+y\neq0)$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$.

解　(1) **令** $y=x$，

$$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y=x}}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}=\lim\limits_{x\to\infty}2x^2=\infty.$$

所以原式极限不存在.

(2) **令** $y=-x+x^3$，

$$\text{原式}=\lim\limits_{x\to0}(1-x^2+x^4)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1-x^2+x^4)^{\frac{1}{x^4-x^2}}\right]^{\frac{x^4-x^2}{x^3}}$$

$\lim\limits_{x\to0}(1-x^2+x^4)^{\frac{1}{x^4-x^2}}=\mathrm{e}$. **而**$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-x^2}{x^3}$**不存在，所以，原式极限不存在.**

(3) 当(x,y)沿 $y=x$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1.$$

当(x,y)沿 $y=2x$ 趋于零时,

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{2x^4}{4x^4+x^2}=0,$$

所以原式极限不存在.

(4) 当(x,y)沿 $y=kx$ 趋于零时,

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^4+3k^2x^4+2k^3x^4}{(1+k^2)^2x^4}=\frac{1+3k^2+2k^3}{(1+k^2)^2}$$

与 k 有关,则原式极限不存在.

3. 函数的连续、可导与可微性

例 6-6 设 $z=z(x,y)$定义在全平面上,

(1) 若$\frac{\partial z}{\partial x}\equiv0$,试证 $z=f(y)$; (2) 若$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv0$,试证 $z=f(x)+g(y)$.

证 (1) 令 $f(y)=z(0,y_0)$,

任意固定 y_0,记 $h(x)=z(x,y_0)$,则 $h'(x)=\frac{\partial z(x,y_0)}{\partial x}\equiv0$,所以 $h(x)=C$.

从而
$$z(x,y_0)=h(x)=h(0)=z(0,y_0)=f(y_0).$$

由 y_0 的任意性,知 $z=z(x,y)=f(y)$.

(2) 因为$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv0$,由(1)知$\frac{\partial z}{\partial y}=g_1(y)$,令 $z(x,0)=f(x)$,任意固定 x_0,考虑 $k(y)=z(x_0,y)$,则

$$k'(y)=\frac{\partial z(x_0,y)}{\partial y}=g_1(y),$$

所以
$$k(y)=\int_0^y g_1(t)\mathrm{d}t+k(0).$$

记 $\int_0^y g_1(t)\mathrm{d}t=g(y)$,则上式就是

$$z(x_0,y)=g(y)+z(x_0,0)=g(y)+f(x_0).$$

由 x_0 的任意性知 $z(x,y)=g(y)+f(x)$.

例 6-7 证明方程 $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 的解为 $u=f(x^2-y^2)$,其中 f 为任一可微函数.

证 令 $v=x^2-y^2$,$w=xy$,则将 $u=u(x,y)$看成是$(x,y)\to(v,w)\to u$ 的复合函数,这时

$$0=y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=y\left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+x\left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial w}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial w}=0.$$

所以,u 仅与 v 有关,

$$u=f(x^2-y^2).$$

例 6-8 设 $u=f(x,y)$是可微函数

(1) 如果 $u=f(x,y)$满足方程 $x=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$,试证 $f(x,y)$在极坐标系里只与 θ 有关;

(2) 如果 $u=f(x,y)$满足$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}$,试证 $f(x,y)$在极坐标系里只是 r 的函数.

证　(1)
$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$
$$u=f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0.$$

则 u 在极坐标系下只有 θ 有关，与 r 无关.

(2) 证明与上类似，略.

例 6-9　设 $f(x,y)$在区域 D 内可微，且$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内，试证
$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$$
其中$|AB|$表示线段 AB 的长度.

证　作辅助函数
$$\varphi(t)=f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)),$$
显然 $\varphi(t)$在$[0,1]$上可导，根据拉格朗日定理，存在 $c\in(0,1)$，使得
$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}(y_2-y_1).$$
其中
$$(\xi,\eta)=(x_1+c(x_2-x_1),y_1+c(y_2-y_1)).$$
又
$$\varphi(1)=f(x_2,y_2),\quad \varphi(0)=f(x_1,y_1),$$
所以
$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|&=\left|\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}(x_2-x_1)-\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}(y_2-y_1)\right|\\&\leqslant\left[\left(\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\cdot[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}\\&\leqslant M|AB|.\end{aligned}$$

例 6-10　设 $z=f(x,y)$二次可微，且$\frac{\partial f}{\partial y}\neq0$，试证对任意的常数 C，$f(x,y)=C$ 为一直线的充要条件是
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

证　由 $f(x,y)=C$ 决定了隐函数 $y=y(x)$，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f'_x}{f'_y}$，则
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(-f'_{xx}-f'_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f'_y+\left(f'_{yx}+f'_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f'_x}{f'^2_y}=-\frac{f'_{xx}f'^2_y-2f'_{xy}f'_xf'_y+f'_{gy}f'^2_x}{f'^3_y}.$$

因此 $y=y(x)$，即 $f(x,y)=C$ 为直线的充要条件是$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0$，由刚才推导的式子即得
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2=0.$$

例 6-11　$\varphi(x,y)$连续，$\psi(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，研究 $\psi(x,y)$在原点的可微性.

解
$$\begin{aligned}\psi'_x(0,0)&=\lim_{x\to0}\frac{\psi(x,0)-\psi(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}\\&=\begin{cases}\varphi(0,0), & x\to0^+;\\-\varphi(0,0), & x\to0^-.\end{cases}\end{aligned}$$

同理 $$\lim_{y\to 0}\frac{\psi(0,y)-\psi(0,0)}{y}=\begin{cases}\varphi(0,0), & y\to 0^+;\\ -\varphi(0,0), & y\to 0^-.\end{cases}$$

从而可知 $\varphi(0,0)\neq 0$ 时，$\psi(x,y)$ 在原点不可导，故不可微.

若 $\varphi(0,0)=0$，则 $\psi'_x(0,0)=\psi'_y(0,0)=0$，且

$$\left|\frac{\psi(x,y)-\psi(0,0)-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{\psi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|\varphi(x,y)|$$

$$\leqslant 2|\varphi(x,y)|\to 0\quad(\text{当}(x,y)\to(0,0)),$$

故 $\psi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

例 6-12 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，且有一阶偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$. 问 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？说明理由.

证 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，显然 $f(x,y)$ 连续，而当 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\to 0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 也连续.

又当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，显然有一阶偏导数：

$$f'_x(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f'_y(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

而 $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$，但当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\frac{\Delta f-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{2(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

它不随 $\rho\to 0$ 而趋于 0，故函数在 $(0,0)$ 处不可微.

例 6-13 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

试问：(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？为什么？(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微？为什么？

解 (1) 因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$. 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(2) $$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\quad f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

$$\Delta f=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2].$$

当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\frac{\Delta f-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin 2(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

例 6-14　设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，问

(1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件，偏导数 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 存在；

(2) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

解　(1)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\varphi(x,0)-0}{x}=\varphi(0,0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}[-\varphi(x,0)]=-\varphi(0,0),$$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{y\varphi(0,y)}{y}=\varphi(0,0),$$

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0^-}[-\varphi(0,y)]=-\varphi(0,0).$$

容易看出，若 $\varphi(0,0)=0$，则偏导数 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 存在且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

(2)
$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y),$$

显然
$$\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant 2,$$

故若 $\varphi(0,0)=0$，当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho\to 0$ 时，有

$$\frac{\Delta f-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0.$$

所以当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

例 6-15　研究函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的可微性与偏导数的连续性.

解　(1) 先求函数 $f(x,y)$ 的偏导数：

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

同理，有

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(2) 再证明 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

当点 (x,y) 沿着 x 轴（即 $y=0$）趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f'_x(x,y)=\lim_{x\to 0}f'_x(x,0)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right),$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$，而当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 的极限不存在，所以当 $x\to 0$ 时，$f'_x(x,0)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 的极限不存在，于是当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f'_x(x,y)$ 的极限不存在，从而可知 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

(3) 最后证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

事实上，$z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的全增量

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0=\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2},$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

取 $\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}$是比 ρ 高阶的无穷小(当 $\rho\to 0$ 时),记为 $\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}=O(\rho)$. 所以

$$\Delta z=0\Delta x+0\Delta y+O(\rho).$$

根据全微分的定义,函数 $z=f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

本题说明,偏导数 $f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$存在且连续并非函数 $f(x,y)$可微的必要条件.

4. 偏导计算

例 6-16 设 f,g 为连续可微函数

$$u=f(x,xy),\quad v=g(x+xy),$$

求$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$.

解 设 $w=xy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial w},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g',\quad \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial w}\right).$$

例 6-17 设 $z=f(u,x,y)$,$u=xe^y$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\frac{\partial u}{\partial x}+f'_x=f'_u\cdot e^y+f'_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f''_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{uy}\right)e^y+f'_u\cdot e^y+f''_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{xy}$$

$$=f''_{uu}\cdot xe^{2y}+f''_{uy}e^y+f'_u\cdot e^y+f''_{xu}xe^y+f''_{xy}.$$

例 6-18 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中函数 $f(t)$二阶可导,$g(u,v)$具有连续二阶偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_u+yg_v,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{uv}+xyg_{vv}+g_v.$$

例 6-19 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin yf'_1+2xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}e^{2x}\sin y\cos y+2e^x(y\sin y+x\cos y)f''_{12}+4xyf''_{22}+f'_1e^x\cos y.$$

例 6-20 设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$,$f$ 具有连续二阶偏导数,求$\frac{\partial z}{\partial y}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^4f'_1+x^2f'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left[xf''_{11}+\frac{1}{x}f''_{12}\right]+x^2\left[xf''_{21}+\frac{1}{x}f''_{22}\right]=x^5f''_{11}+2x^3f''_{12}+xf''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f'_1+x^4\left[yf''_{11}-\frac{y}{x^2}f''_{12}\right]+2xf'_2+x^2\left[yf''_{21}-\frac{y}{x^2}f''_{22}\right]=4x^3f'_1+2xf'_2+x^4yf''_{11}-yf''_{22}.$$

例 6-21 设方程 $z+xy=f(xz,yz)$ 确定可微函数 $z=z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 在 $z+xy=f(xz,yz)$ 两边同时对 x 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+y=f_1'\left(z+x\frac{\partial z}{\partial y}\right)+f_2'y\frac{\partial z}{\partial x}$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'z-y}{1-f_1'x-f_2'y}.$$

例 6-22 设 $u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，$F(s,t)$ 有连续的一阶偏导数，且满足 $F(u_x',u_y')=0$，$(F_s')^2+(F_t')^2\neq 0$.

证明：$u_{xx}''\cdot u_{yy}''-(u_{xy}'')^2=0$.

证 令 $u_x'=s,u_y'=t$.

由 $F(u_x',u_y')=0$，可知 $\begin{cases}F_x'(u_x',u_y')=0\\F_y'(u_x',u_y')=0\end{cases}$

即
$$\begin{cases}F_s'u_{xx}''+F_t'u_{yx}''=0,\\F_s'u_{xy}''+F_t'u_{yy}''=0.\end{cases}$$

即有
$$F_s'\cdot F_t'\cdot u_{xx}''u_{yy}''=F_t'F_s'(u_{xy}'')^2$$

所以
$$u_{xx}''u_{yy}''-(u_{xy}'')^2=0.$$

例 6-23 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f',\\F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}-xf'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf',\\F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-F_x.\end{cases}$$

由此解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{(f+xf')F_y-xf'F_x}{F_y+xf'F_z}\quad(F_y+xf'F_z\neq 0).$$

例 6-24 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，易见$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$.

由
$$2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\cdot\varphi_2'+\varphi_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\cdot\varphi_2'),$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cos x-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\cdot\varphi_2').$$

例 6-25 设变换$\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$可把方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a.

解法 1

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程，经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

依题意 a 应满足

$$6+a-a^2=0\quad 且\quad 10+5a\neq 0,$$

解之得 $a=3$.

解法 2 将 z 视为以 x,y 为中间变量的 u,v 的二元复合函数，由题设可解得

$$x=\frac{au+2v}{a+2},\quad y=\frac{-u+v}{a+2}.$$

从而

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{a}{a+2},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{a}{a+2},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{a+2},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{a+2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{a+2}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{a}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{1}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{2a}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-2}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

依题意

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad 即\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

代入前式，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2a-6}{(a+2)^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-3}{(a+2)^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

令$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，得 $a-3=0$，$a+2\neq 0$. 故 $a=3$.

例 6-26 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

解　(1) 由梯度的几何意义知，$h(x,y)$在点 $M(x_0,y_0)$处沿梯度

$$\operatorname{grad}h(x,y)|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)'_1 i+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大. 方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，由题意，只需求 $f(x,y)$在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点.

令 $L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$，则

$$\begin{cases}L'_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0, & (1)\\ L'_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0, & (2)\\ L'_\lambda=75-x^2-y^2+xy=0. & (3)\end{cases}$$

式(1)与式(2)相加可得$(x+y)(2-\lambda)=0$，从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$.

若 $\lambda=2$，则由式(1)得 $y=x$，再由式(3)得 $x=\pm5\sqrt{3}$，$y=\pm5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$，则由式(3)得 $x=\pm5$，$y=\mp5$.

于是得到 4 个可能的极值点

$$M_1(5,-5),\quad M_2(-5,5),\quad M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),\quad M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

由于 $f(M_1)=f(M_2)=450$，$f(M_3)=f(M_4)=150$.

故 $M_1(5,-5)$或 $M(-5,5)$可作为攀登的起点.

例 6-27　求函数 $f(x,y)=\ln\left(ce^{-x}+\dfrac{x^2}{y}\right)$分别沿方向 $\boldsymbol{l}_1=\{1,0\}$，$\boldsymbol{l}_2=\{0,1\}$及 $\boldsymbol{l}_3=a\boldsymbol{l}_1+b\boldsymbol{l}_2$ 的方向导数，其中 a,b 为正实数，$y>0$.

解　$\boldsymbol{l}_1=\{1,0\}$的方向余弦为 $\cos\alpha=1$，$\cos\beta=0$，故

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-e^{-x}+\dfrac{2x}{y}}{e^{-x}+\dfrac{x^2}{y}}=\frac{2x-ye^{-x}}{x^2+ye^{-x}}.$$

$\boldsymbol{l}_2=\{0,1\}$的方向余弦为 $\cos\alpha=0$，$\cos\beta=1$，故

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-\dfrac{x^2}{y^2}}{e^{-x}+\dfrac{x^2}{y}}=\frac{-x^2}{y^2e^{-x}+yx^2}.$$

$\boldsymbol{l}_3=a\boldsymbol{l}_1+b\boldsymbol{l}_2=\{a,b\}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

故
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}_3}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\,\frac{2x-ye^{-x}}{x^2+ye^{-x}}-b\,\frac{x^2}{y^2e^{-x}+yx^2}\right).$$

例 6-28　求函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在点 $M(1,2,-2)$处沿曲线 $x=t$，$y=2t^2$，$z=-2t^4$ 在该点的切线方向上的导函数.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

在点 $M(1,2,-2)$处它们的值分别为$\dfrac{8}{27}$，$-\dfrac{2}{27}$，$\dfrac{2}{27}$.

又曲线在该点处的切线的方向余弦分别为$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{4}{9}$，$-\dfrac{8}{9}$. 于是，所求的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{8}{27}\ \frac{1}{9}+\left(-\frac{2}{27}\right)\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{16}{243}.$$

例 6-29 如果 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$存在，且在点(x_0,y_0)，$f(x,y)$的各方向导数均存在，又 $D_lf=f'_x\cos\alpha+f'_y\sin\alpha$，问 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处是否可微？

解 不一定，如在点$(0,0)$处考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y=x^2,x>0;\\ 0, & y\neq x^2\ \text{或}\ x\leqslant 0,\end{cases}$$

有

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$$

而沿曲线 $y=x^2(x>0)$，有

$$\frac{\Delta z}{\rho}=\frac{1}{\rho}\not\to 0,\quad(\text{当}\ \rho\to 0\ \text{时}).$$

5. 全微分

例 6-30 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $\mathrm{d}z$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

例 6-31 设 $z=f(x,y)$是由方程 $z-y-x+x\mathrm{e}^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$.

解 将方程两端取微分得

$$\mathrm{d}z-\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{z-y-x}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{z-y-x}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)=0.$$

整理后得

$$(1+x\mathrm{e}^{z-y-x})\mathrm{d}z=(1+x\mathrm{e}^{z-y-x}-\mathrm{e}^{z-y-x})\mathrm{d}x+(1+x\mathrm{e}^{z-y-x})\mathrm{d}y,$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{1+(x-1)\mathrm{e}^{z-y-x}}{1+x\mathrm{e}^{z-y-x}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$

例 6-32 设函数 $u=f(x,y,z)$有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$由方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$.

解法 1 设 $F(x,y,z)=x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y-z\mathrm{e}^z$，则

$$F'_x=(x+1)\mathrm{e}^x,\quad F'_y=-(y+1)\mathrm{e}^y,\quad F'_z=-(z+1)\mathrm{e}^z.$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}.$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x+f'_z\ \frac{\partial z}{\partial x}=f'_x+f'_z\ \frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y+f'_z\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y-f'_z\ \frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}.$$

所以

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(f_x'+f_z'\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\right)\mathrm{d}x+\left(f_y'-f_z'\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\right)\mathrm{d}y.$$

解法 2　在 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 两边微分，得

$$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\mathrm{e}^y\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}^z\mathrm{d}z+z\mathrm{e}^z\mathrm{d}z,$$

故

$$\mathrm{d}z=\frac{(1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y}{(1+z)\mathrm{e}^z}.$$

由 $u=f(x,y,z)$，得

$$\mathrm{d}u=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y+f_z'\mathrm{d}z,$$

故

$$\mathrm{d}u=\left(f_x'+f_z'\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\right)\mathrm{d}x+\left(f_y'-f_z'+\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\right)\mathrm{d}y.$$

例 6-33　设 $u+v=x+y,\dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y}$，求 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$.

解　将原式改写为 $\begin{cases}u+v=x+y,\\ y\sin u=x\sin v,\end{cases}$ 微分得

$$\begin{cases}\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y & (1)\\ \sin u\mathrm{d}y+y\cos u\mathrm{d}u=\sin v\mathrm{d}x+x\cos v\mathrm{d}v & (2)\end{cases}$$

联立式(1)与式(2)求解，得

$$\mathrm{d}u=\frac{(\sin v+x\cos v)\mathrm{d}x-(\sin u-x\cos v)\mathrm{d}y}{x\cos v+y\cos u},$$

$$\mathrm{d}v=\frac{(y\cos u-\sin v)\mathrm{d}x+(\sin u-y\cos v)\mathrm{d}y}{x\cos v+y\cos u}.$$

6. 多元函数的几何应用

例 6-34　试证锥面上任一点处的切平面通过其顶点.

证　设锥面为 Σ，其顶点为 $P_0(a,b,c)$，任意取定 Σ 上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，$((x_0,y_0,z_0)\neq(a,b,c))$. 由于连接 P_0P 的直线 l 仍在 Σ 上，故 Σ 在 P 点的切平面必包含 l 在内，因此 P_0 点在切平面上.

例 6-35　设 $F(u,v)$ 可微，试证曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任一点处的切平面都通过定点.

证法 1　首先说明曲面是以 $P_0(a,b,c)$ 为顶点的锥面，任取曲面上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则连接 PP_0 点的直线 l 的方程为

$$\begin{cases}x=a+t(x_0-a)\\ y=b+t(y_0-b)\\ z=c+t(z_0-c)\end{cases}$$

当 $t\neq0$ 时，

$$F\left(\frac{a+t(x_0-a)-a}{c+t(z_0-c)-c}\ \frac{b+t(y_0-b)-b}{c+t(z_0-c)-c}\right)=F\left(\frac{x_0-a}{z_0-c}\ \frac{y_0-b}{z_0-c}\right)=0$$

l 上的点(除 $P_0(a,b,c)$ 外)都在曲面上，所以曲面是以 (a,b,c) 为顶点的锥面，可知曲面上任一点处的切平面都通过其顶点 (a,b,c).

证法 2　任取曲面上的一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，该点处的切平面为((x,y,z) 是切平面上的点)

$$F_1'\frac{x-x_0}{z_0-c}+F_2'\frac{y-y_0}{z_0-c}-\left(F_1'\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}+F_2'\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}\right)(z-z_0)=0.$$

以 $x=a,y=b,z=c$ 代入满足方程，故点 (a,b,c) 在此切平面上.

例 6-36 设 $F(u,v)$可微,试证曲面 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 上各点的法线总垂直于常向量,并指出此曲面的特征.

证 令 $f(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$,则曲面上一点(x,y,z)处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为 $\left\{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}\right\}=\{cF_1',cF_2',-aF_1'-bF_2'\}$

$$\boldsymbol{n}\cdot\{a,b,c\}=acF_1'+bcF_2'-caF_1'-cbF_2'=0,$$

即任一点的法向量垂直于常向量$\{a,b,c\}$.

任取曲面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则过该点的直线 l

$$\begin{cases} cx-az=cx_0-az_0 \\ cy-bz=cy_0-bz_0 \end{cases}$$

在曲面上,而直线 l 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

说明曲面是母线平行于$\{a,b,c\}$的柱面.

例 6-37 在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上求一条过点$(a,0,0)$的曲线,使它与柱面的任一母线的夹角为常数.

解 将柱面方程写成$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$

设柱面上曲线的方程为$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=z(\theta),(z(\theta)=0). \end{cases}$

则过任一点处的切向量为$\{-a\sin\theta,a\cos\theta,z'(\theta)\}$,柱面的母线方向为$\{0,0,1\}$,按题意

$$\frac{\{-a\sin\theta,a\cos\theta,z'(\theta)\}\cdot\{0,0,1\}}{\sqrt{a^2+z'^2(\theta)}}=\text{常数}=\cos\alpha \quad (0<\alpha<\pi).$$

即

$$z'(\theta)=\cos\alpha\sqrt{a^2+z'^2(\theta)}$$

$$z'(\theta)=\pm\cot\alpha\cdot a$$

$$z(\theta)=\pm\cot\alpha\cdot a\cdot\theta+c$$

当 $\theta=0$ 时,$z(\theta)=0$,

所以 $z(\theta)=\pm\cot\alpha\cdot a\cdot\theta$

记 $a\cdot\cot\alpha=b$

则曲线方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \quad -\infty<\theta<+\infty. \\ z=\pm b\theta, \end{cases}$$

例 6-38 已知两不相交平面闭曲线 $T_1:f(x,y)=0$;$T_2:\varphi(x,y)=0$,又 $A(\alpha,\beta)$,$B(\xi,\eta)$分别是 T_1,T_2 上的点,试证如果这两点是这两曲线上相距最近或最远的点,则下列关系式成立

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x'(\alpha,\beta)}{f_y'(\alpha,\beta)}=\frac{\varphi_x'(\xi,\eta)}{\varphi_y'(\xi,\eta)}.$$

证 根据$\overrightarrow{AB}$与 T_2 在 B 点的切向量垂直,则

$$\{\xi-\alpha,\eta-\beta\}\cdot\left\{1,-\frac{\varphi_x'(\xi,\eta)}{\varphi_y'(\xi,\eta)}\right\}=0,$$

所以

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\varphi_x'(\xi,\eta)}{\varphi_y'(\xi,\eta)},$$

同理

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f'_x(\alpha,\beta)}{f'_y(\alpha,\beta)}.$$

7. 多元函数的极值及应用

例 6-39　设函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 及其邻域连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=A<0$，讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处是否有极值，如果有是极大还是极小？

解　式中的分母可写成

$$x^2-x\sin y+\sin^2 y=\left(x-\frac{1}{2}\sin y\right)^2+\frac{3}{4}\sin^2 y,$$

所以分母总是大于零（在 $(0,0)$ 的充分小的去心邻域）.

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=A<0$，所以存在 $\delta>0$，当 $0<x^2+y^2<\sigma$ 时，

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}<0,$$

且

$$x^2+1-x\sin y-\cos^2 y>0.$$

这时 $f(x,y)-f(0,0)<0$，说明 $O(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

例 6-40　求函数 $z=x^2+y^2$ 在 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9$ 上的最大值与最小值.

解法 1　先求 $z=x^2+y^2$ 在圆内 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2<9$ 的驻点：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y=0$，$(0,0)$ 是驻点，$z(0,0)=0$，显然这是最小值点，最大值必在圆周上达到.

再求 $z=x^2+y^2$ 在圆周上的最大值，圆周方程可写成

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}+3\cos t\\ y=\sqrt{2}+3\sin t\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

代入 $z=x^2+y^2$ 得

$$z=(\sqrt{2}+3\cos t)^2+(\sqrt{2}+3\sin t)^2=13+6\sqrt{2}(\sin t+\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=6\sqrt{2}(-\sin t+\cos t).$$

驻点 $t=\frac{\pi}{4}$，$t=\frac{5\pi}{4}$.

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，$z=25$；当 $t=\frac{5\pi}{4}$ 时 $z=1$；端点处，当 $t=0$ 时，$z=13+6\sqrt{2}<25$，当 $t=2\pi$ 时，$z=13+6\sqrt{2}<25$.

所以 z 在圆周上的最大值（也就是 z 在圆盘上的最大值）为 25，最大值点为 $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$，最小值点为 $(0,0)$，最小值为 0.

解法 2　显然最小值 0 在 $(0,0)$ 点取得（$(0,0)$ 点在圆盘内），而连接 $(0,0)$ 点与 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 点的直线与 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$ 在第一象限的交点就是最大值点，可解出交点坐标为 $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$，$z\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)=25$.

注　解法 2 完全是从几何意义出发的.

例 6-41　设 T：$x=x(t)$，$y=y(t)$ $(a<t<b)$ 是区域 D 内的一条光滑曲线，$f(x,y)$ 是定义在 D 上的可微函数，若将 $f(x,y)$ 限制在 T 上（即只让点 (x,y) 在曲线 T 上变动），而点 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在 T 内的最大值或最小值点，试证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的梯度矢量与 T 在该点处的切向量垂直.

证　设点 (x_0,y_0) 对应的参数为 t_0，考虑函数 $\varphi(t)=f(x(t),y(t))$，$a<t<b$. 由题意 t_0 是 $\varphi(t)$ 的最大值

或最小值点，从而 $\varphi'(t_0)=0$，即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))\cdot x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))\cdot y'(t_0)=0,$$

注意到 $x(t_0)=x_0,y(t_0)=y_0$，$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}$ 是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的梯度，$\{x'(t_0),y'(t_0)\}$ 是 T 在 (x_0,y_0) 点的切向量，从而得出结论：$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的梯度与 T 在 (x_0,y_0) 点处的切线垂直.

例 6-42 设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数为 $Q=2x_1^\alpha x_2^\beta$，其中 α,β 为正常数，且 $\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两要素各投入多少可以使得投入总费用最小？

解法 1 需要在产出量 $2x_1^\alpha x_2^\beta=12$ 的条件下，求总费用 $p_1x_1+p_2x_2$ 的最小值. 为此作拉格朗日函数

$$F(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(12-2x_1^\alpha x_2^\beta).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=p_1-2\lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=p_2-2\lambda\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=12-2x_1^\alpha x_2^\beta=0. & (3)\end{cases}$$

由式(1)和式(2)，得

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\beta x_1}{\alpha x_2},\quad x_1=\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}x_2.$$

将 x_1 代入式(3)，得

$$x_2=6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^\alpha,\quad x_1=6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^\beta.$$

因驻点惟一，且实际问题存在最小值，故计算结果说明 $x_1=6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^\beta$，$x_2=6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^\alpha$ 时，投入总费用最小.

解法 2 需要在产出量 $2x_1^\alpha x_2^\beta=12$，即 $x_1^\alpha x_2^\beta=6$ 的条件下，求总费用 $p_1x_1+p_2x_2$ 的最小值. 可用关于两个正数的推广的算术-几何平均不等式求解.

如果 a,b,α,β 均为正整数，且 $\alpha+\beta=1$，则有

$$a^\alpha b^\beta\leqslant\alpha a+\beta b, \tag{1}$$

其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立. 在式(1)中取 $a=\frac{p_1}{\alpha}x_1$，$b=\frac{p_2}{\beta}x_2$，则有

$$p_1x_1+p_2x_2=\alpha\left(\frac{p_1}{\alpha}x_1\right)+\beta\left(\frac{p_2}{\beta}x_2\right)\geqslant\left(\frac{p_1}{\alpha}x_1\right)^\alpha\left(\frac{p_2}{\beta}x_2\right)^\beta=6\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{p_2}{\beta}\right)^\beta,$$

其中等号当且仅当 $\frac{p_1}{\alpha}x_1=\frac{p_2}{\beta}x_2$ 时成立. 结合 $x_1^\alpha x_2^\beta=6$ 知当 $x_1=6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^\beta$，$x_2=\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^\alpha$ 时 $p_1x_1+p_2x_2$ 取最小值 $6\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{p_2}{\beta}\right)^\beta$，即投入总费用最小.

在式(1)中令 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$，则有

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}(a+b), \tag{2}$$

故式(1)称为关于正数 a,b 的推广的算术-几何平均不等式. 下面给出式(1)的证明.

考虑函数 $f(x)=x^\alpha-\alpha x(x>0,0<\alpha<1)$，则

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha(x^{\alpha-1}-1).$$

$x=1$ 是 $f(x)$ 的惟一的驻点. 并且当 $0<x<1$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>1$ 时 $f'(x)<0$，故 $f(1)$ 为 $f(x)$ 的最大值. 所以 $f(x)\leqslant f(1)=1-\alpha$，即

$$x^{\alpha}-\alpha x\leqslant 1-\alpha, \tag{3}$$

其中等号当且仅当 $x=1$ 时成立. 在式(3)中令 $1-\alpha=\beta$，$x=\dfrac{a}{b}(a,b>0)$，则 $\alpha+\beta=1$，且

$$a^{\alpha}b^{\beta}\leqslant \alpha a+\beta b,$$

其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

例 6-43　在直线 $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ 位于第一象限的那一部分上求一点，使该点横坐标的余弦与纵坐标的余弦的乘积最大，并求出此最大值.

解法 1　令 $f(x,y)=\cos x\cos y$，而 $x+y=\dfrac{\pi}{2}$，则

$$f(x,y)=\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f(x,y)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{2}$，横坐标 $y=\dfrac{\pi}{2}-x=\dfrac{\pi}{4}$.

解法 2　用拉格朗日乘数法

设 $L(x,y,\lambda)=\cos x\cos y+\lambda\left(x+y-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

令 $L'_x=L'_y=L'_\lambda=0$，得

$$\begin{cases}-\sin x\cos y+\lambda=0,\\ -\cos x\sin y+\lambda=0,\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

解得　$x=y=\dfrac{\pi}{4}$，$\lambda=\dfrac{1}{2}$.

故 $f(x,y)$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的横坐标的余弦与纵坐标的余弦的乘积最大，且最大值为 $\dfrac{1}{2}$.

例 6-44　求两曲面 $x+2y=1$ 和 $x^2+2y^2+z^2=1$ 的交线上距原点最近的点.

解法 1　化为无条件极值问题.

设 (x,y,z) 为交线上的一点，则 p 到原点的距离的平方为

$$x^2+y^2+z^2=1-y^2=f(y)\quad(\text{因 } x^2+y^2=1-2y^2)$$

令 $f'_y=2y=0$，得 $y=0$，由此得 $x=1$，$z=0$.

即交线上距离最近的点为 $(1,0,0)$.

解法 2　用拉格朗日乘数法

设 $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+2y-1)+\lambda_2(x^2+2y^2+z^2-1)$.

令 $L'_x=L'_y=L'_z=L'_{\lambda_1}=L'_{\lambda_2}=0$，得

$$\begin{cases}2x+\lambda_1+2x\lambda_2=0,\\ 2y+2\lambda_1+4y\lambda_2=0,\\ 2z+2z\lambda=0,\\ x+2y=1,\\ x^2+2y^2+z^2-1=0.\end{cases}$$

解得　$x=1$，$y=0$，$z=0$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，

故交线上距原点最近的点为 $(1,0,0)$.

例 6-45　在曲面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1(x>0,y>0,z>0)$ 上求一点，使过该点的切平面在三个坐标轴上的截

距平方和最小.

解 在曲面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1,(x>0,y>0,z>0)$ 上任取一点 (x_0,y_0,z_0)，过该点的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0)=0.$$

该切平面在三个坐标轴上的截距分别为

$$\frac{\frac{z_0^2}{2}+2y_0^2+2x_0^2}{2x_0},\quad \frac{\frac{z_0^2}{2}+2y_0^2+2x_0^2}{2y_0},\quad \frac{\frac{z_0^2}{2}+2y_0^2+2x_0^2}{\frac{z_0^2}{2}}.$$

也即为
$$\frac{1}{x_0},\quad \frac{1}{y_0},\quad \frac{4}{z_0}.$$

令 $f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}$，原问题即求在限制条件 $x_0^2+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}=1,(x_0>0,y_0>0,z_0>0)$ 下的使 $f(x_0,y_0,z_0)$ 取得最小值的 (x_0,y_0,z_0). 为此，作拉格朗日函数

$$L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}+\lambda\left(x_0^2+y_0^2+\frac{z^2}{4}-1\right).$$

令 $L'_{x_0}=L'_{y_0}=L'_{z_0}=L'_\lambda=0$，得

$$\begin{cases}-\dfrac{2}{x_0^3}+2\lambda x_0=0,\\ -\dfrac{2}{y_0^3}+2\lambda y_0=0,\\ -\dfrac{32}{z_0^3}+\dfrac{\lambda}{2}z_0=0,\\ z_0^2+y_0^2+\dfrac{z_0^2}{4}-1=0.\end{cases}$$

习　题　6

1. 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

偏导数存在性.

2. 确定下列函数定义域：

(1) $z=\sqrt{y}\arcsin\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{y}+\sqrt{x}\arccos\frac{y^2}{2ax}(a>0)$；　(2) $z=\ln[x\ln(y-x)]$；

(3) $z=\arcsin(x-y^2)+\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$.

3. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$；　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to1}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

4. 设 $z=f[x\varphi(y),x-y]$，其中，f 具有连续的二阶偏导数，φ 具有二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

5. 设函数 $u=f(r)$ 满足方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

求 $f(r)$ 的表达式，其中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

6. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 给出，其中 f 可微，求证

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

7. 求曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$$

在点 $M(-1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

8. 设 $f(x,y)$ 可微，证明 $f(x,y)=C$ 是微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

的解的充要条件是：$P\frac{\partial f}{\partial y}=Q\frac{\partial f}{\partial x}$.

9. 过直线

$$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$$

作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求其方程.

10. 设曲线 L 的方程是 $\varphi(x,y)=0$，φ 有一阶连续偏导数，P 是曲线外一点，PQ 是 P 到曲线的最短距离（Q 在 L 上），求证 PQ 就是曲线 L 的法线.

11. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，$g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且 $g(x_0,y_0)=0$，试证 $f(x,y)g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处可微.

12. 在平面上求一点，使它到 n 个定点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的距离之平方和最小.

简答与提示

1. $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)$ 不存在.

2. (1) $\begin{cases}0<x<2ax,\\\sqrt{2ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax};\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x>0,\\y-x>1\end{cases}$　或　$\begin{cases}x<0\\0<y-x<1;\end{cases}$

(3) $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\leqslant 1$，$y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1$.

3. (1) 0；　(2) 0；　(3) e.

4. $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1x\varphi'(y)-f'_2$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{11}x\varphi'\varphi+f''_{12}(x\varphi'-\varphi)-f''_{22}+f'_1\varphi'$.

5. $f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$.

7. 切线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$x-z=0.$$

9. $9x+y-z-27=0$　或　$9x+17y-17z+27=0$.

10. 提示：只须证 PQ 垂直于 L 在点 Q 处的切线.

12. $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right)$.

第七章　重积分

多元函数积分学包括重积分、曲线积分和曲面积分. 二重积分不仅是学习三重积分的基础，同时也是学习曲线积分和曲面积分的重要基础，可以说二重积分是学习多元函数积分的关键环节.

一、复习与考试要求

(1) 理解二重积分、三重积分的概念，了解重积分的性质，了解二重积分的中值定理。

(2) 掌握二重积分(直角坐标、极坐标)的计算方法，会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标)。

(3) 会用重积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、质量、重心、转动惯量、引力等)。

二、基本概念与理论

1. 二重积分的计算方法

设 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续

(1) 若积分区域 D 由直角坐标系中的不等式

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

给出，其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 若积分区域 D 由直角坐标系中的不等式

$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant \mathrm{d}$$

给出，其中 $\psi_1(y)$，$\psi_2(y)$在$[c,\mathrm{d}]$上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 若积分区域 D 由极坐标系中的不等式

$$\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

给出，其中 $\varphi_1(\theta)$，$\varphi_2(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

2. 二重积分的应用

(1) 曲面的面积计算法：设曲面$\sum$是由方程 $z=f(x,y)$给出，$\sum$在 xOy 平面上的投影区域为 D，函数 $f(x,y)$在 D 上具有连续偏导数，则曲面$\sum$的面积 $A=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 物理上的应用.

①质量：设 $\rho(x,y)$是平面薄片 D 在点(x,y)处的密度，则平面薄片 D 的质量 $M=\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$；

② 静力矩：设平面薄片 D 的面密度为 $\rho(x,y)$，则 D 对 x 轴、y 轴的静力矩分别为 $M_x=\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$；$M_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$

③ **重心(形心)：设平面薄片 D 的重心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$，则**

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

特别地，当 $\rho(x,y)$是常数时，$(\bar{x},\bar{y})$是 D 的形心坐标；

④ **转动惯量：设 $\rho(x,y)$为平面薄片 D 的面密度，则 D 对 x 轴、y 轴的转动惯量分别为**

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

3. 三重积分的计算法

设 $f(x,y,z)$在有界闭区域 Ω 上连续

(1) **利用直角坐标**

若积分区域 Ω 由不等式

$$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

给出，其中 $z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$在投影区域 D 上连续，$y_1(x)$，$y_2(x)$在区间$[a,b]$上连续，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) **利用柱面坐标**

柱面坐标与直角坐标的相互关系

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & 0\leqslant\rho\leqslant+\infty \\ y=\rho\sin\theta & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ z=z & -\infty<z<+\infty \end{cases}$$

体积元素 $\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，当积分区域 Ω 由不等式

$$z_1(\rho,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(\rho,\theta),\quad x_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

给出时，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

(3) **利用球面坐标**

球面坐标与直角坐标的相互关系

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\rho<+\infty \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ z=\rho\cos\varphi, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

体积元素 $\mathrm{d}v=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$. 当积分区域 Ω 由不等式

$$\rho_1(\theta,\varphi)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta,\varphi),\quad \varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

给出时，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho.$$

4. 三重积分的应用

设 $\rho(x,y,z)$是空间物体在(x,y,z)处的密度，物体所围空间闭区域为 Ω，则

(1) **物体的质量**

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

（2）**对坐标面的静力矩**

$$M_{yOz}=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)x\mathrm{d}v,\quad M_{zOx}=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)y\mathrm{d}v,\quad M_{xOy}=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)z\mathrm{d}v.$$

（3）**重心坐标**

$$\bar{x}=\frac{M_{yOz}}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_{xOz}}{M},\quad \bar{z}=\frac{M_{xOy}}{M}.$$

（4）**转动惯量**

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)(y^2+z^2)\mathrm{d}v,\quad I_y=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+z^2)\mathrm{d}v,\quad I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}v.$$

三、基本题型与解题方法

1. 多元重积分概念、基本性质

例 7-1 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续正值函数，且单调减，证明

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

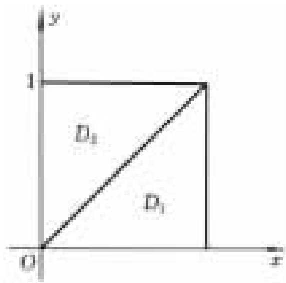

图 7-1

证法 1 即要证

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y-\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$$

或
$$\iint\limits_{D}xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0,$$

其中 D 如图 7-1 中的正方形 $D=D_1+D_2$，而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2}xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

则
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\iint\limits_{D_2}xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0.\end{aligned}$$

这里由于 $f(x)$ 单调减，所以 $(x-y)[f(x)-f(y)]<0$.

证法 2
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D}yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0,\end{aligned}$$

这里由于 $f(x)$ 单调减，所以 $(x-y)[f(x)-f(y)]<0$.

例 7-2　**证明不等式** $\frac{61}{165}\pi\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{2}{5}\pi$.

证　**由于** $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_0^1\rho\sin\rho^3\,\mathrm{d}\rho$,**因此将问题化为估计定积分** $\int_0^1\rho\sin\rho^3\,\mathrm{d}\rho$. **从答案分析拟用不等式来估计** $\sin\rho^3$,**我们知道,对任意正实数** t **有**:$t-\frac{t^3}{3!}\leqslant\sin t\leqslant t$,**于是**

$$\rho^3-\frac{\rho^9}{3!}\leqslant\sin\rho^3\leqslant\rho^3,$$

$$\int_0^1\rho\sin\rho^3\,\mathrm{d}\rho\leqslant\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{5},$$

$$\int_0^1\rho\sin\rho^3\,\mathrm{d}\rho\geqslant\int_0^1\left(\rho^4-\frac{\rho^{10}}{6}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{61}{330},$$

所以

$$\frac{61}{165}\pi\leqslant 2\pi\int_0^1\rho\sin\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{2}{5}\pi.$$

注　**本题所用不等式来自正弦函数的幂级数展开式.**

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots.$$

如被积函数可展开为交错级数,则容易得到积分的一系列不足近似值和过剩近似值. 而由交错级数收敛的莱布尼茨法则,不难做出近似积分值的误差估计.

例 7-3　**证明不等式** $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2<\frac{16}{25}$.

证　**记** $I=\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

由

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\cdots<1-x^2+\frac{x^4}{2!},$$

得

$$I<\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{23}{30}<\frac{24}{30}=\frac{4}{5}.$$

所以 $I^2\leqslant\frac{16}{25}$,**右边不等式得证.**

$$2I=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$(2I)^2=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y>\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_0^1 r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r=\pi(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

所以 $I^2>\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-1})$**左边不等式也得证.**

注　**从这几个例题中要学会将定积分的乘积化为重积分解决问题的方法.**

例 7-4　**设** $f(x,y)$ **在区域** D **上有二阶连续偏导数,试用重积分的方法证明在** D **内恒有** $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

证　**设** $(x_0,y_0)\in D$ **是任一点,作此点的一个正方形邻域** $\Omega=\{(x,y)\mid x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta,y_0-\delta\leqslant y\leqslant y_0+\delta\}$,**使** $\Omega\subset D$,**则** $f(x,y)$ **在** Ω **上有二阶连续偏导数. 考虑积分**

$$\begin{aligned}I_1&=\iint\limits_{\Omega}f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\mathrm{d}x\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\partial f_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f_x(x,y_0+\delta)-f_x(x,y_0-\delta)]\,\mathrm{d}x\\&=f(x_0+\delta,y_0+\delta)-f(x_0-\delta,y_0+\delta)-f(x_0+\delta,y_0-\delta)+f(x-\delta,y-\delta);\end{aligned}$$

$$I_2=\iint\limits_{\Omega} f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\mathrm{d}y\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\partial f_y}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=f(x_0+\delta,y_0+\delta)-f(x_0-\delta,y_0+\delta)-f(x_0+\delta,y_0-\delta)+f(x_0-\delta,y_0-\delta)$$

所以 $I_1=I_2$，利用积分中值定理知，存在$(x_1,y_1)\in\Omega$ 及$(x_2,y_2)\in\Omega$，使

$$f''_{xy}(x_1,y_1)4\delta^2=f''_{yx}(x_2,y_2)4\delta^2$$

约去 $4\delta^2$ 并令 $\delta\to O^+$，则由二阶偏导数的连续性知，$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

由(x_0,y_0)的任意性知本题得证.

例 7-5 选择题：

(1) 设有空间区域

$$\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0;\quad 及\quad \Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,$$

则 ( )

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$； (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$；

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$； (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$.

解 Ω_1 关于 xOz 面、yOz 面对称，且 $f(x,y,z)=z$ 关于 x,y 均为偶函数，故选 C.

(2) 设 D 是 xOy 平面上以$(1,1)$，$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 ( )

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (B) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (D) 0.

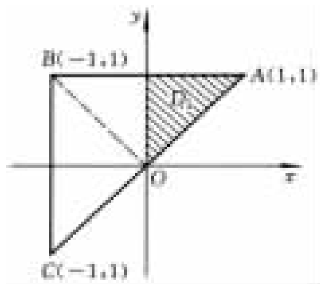

图 7-2

解 由图 7-2，连 OB 再利用二重积分对称性便可知结论，故选 A.

(3) 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有 ( ).

(A) $\iint\limits_{S} x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$； (B) $\iint\limits_{S} y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$；

(C) $\iint\limits_{S} z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$； (D) $\iint\limits_{S} xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

解 曲面 S 关于 yOz、zOx 平面均对称，x,y 分别关于 x,y 为奇函数，故 $\iint\limits_{S} x\mathrm{d}S=\iint\limits_{S} y\mathrm{d}S=\iint\limits_{S} xyz\mathrm{d}S=0$.

但 $\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S>0$，$\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S>0$，故只能选 C. 或通过验算知 C 正确.

例 7-6 设 $f(u)$具有连续的导函数，且 $\lim\limits_{u\to+\infty} f'(u)=A>0$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$(R>0)$.

(1) 证明：$\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=+\infty$；

(2) 求 $I_R=\iint\limits_{D} f'(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；$\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{I_R}{R^2}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{u\to+\infty} f'(u)=A>0$，$A>\dfrac{A}{2}$.

所以由局部保号性知，$\exists M>0$，使当 $u>M$ 时，$f'(u)>\dfrac{A}{2}$.

故由微分中值公式知，当 $u>M$ 时，$f(u)=f(M)+f'(\xi)(u-M)>f(M)+\dfrac{A}{2}(u-M)$，其中 $M<\xi<u$.

所以 $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=+\infty$.

（2）令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 则 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

$$I_R=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant R\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} f'(\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}[f(R^2)-f(0)]=\frac{\pi}{4}[f(R^2)-f(0)].$$

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{I_R}{R^2}=\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{f(R^2)-f(0)}{R^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{R\to+\infty}\frac{2Rf'(R^2)}{2R}=\frac{\pi}{4}A.$$

例 7-7　若 $f(x,y)$ 在矩形 $G:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上有定义，且积分 $I_1=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 与 $I_2=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 都存在，则(　).

(A) $I_1=I_2$；　(B) $I_1\neq I_2$；　(C) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在；　(D) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 可能不存在.

解

$$\text{如 } f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2}, & \text{当}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\neq 0,\\ 0, & x=y=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

显然在 $G:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上有定义，且 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=0$，但 $f(x,y)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in G$ 无界，所以 $f(x,y)$ 在 G 上不可积，故选 D.

例 7-8　设 $f(x,y)$ 在 $D=\{0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上有四阶连续的偏导数，$f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，且 $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\leqslant 3$，试证明 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\dfrac{1}{48}$.

证　考虑辅助函数 $g(x,y)=xy(1-x)(1-y)$，则 $\dfrac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}=4$.

$$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{36}.$$

而

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y\int_0^1 x(1-x)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y\left[x(1-x)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\bigg|_0^1-\int_0^1(1-2x)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\mathrm{d}x\right]\\&=-\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y\left[(1-2x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_0^1+2\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}x\right]\\&=-2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(1-2y)\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=4\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|&=\frac{1}{4}\left|\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}\sigma\right|\\&\leqslant\frac{3}{4}\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

2. 二重积分计算

（1）**直角坐标**

例 7-9 设 $f(x,y)$在 D 上连续,D 由不等式$\sqrt{x}\leqslant y\leqslant x, y\leqslant 2$ 所确定,试将二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为直角坐标下的两种不同次序的累次积分.

解 (1) 先画出积分域;(2) 投影.设先对 x 积分,即将 D 在 y 轴上投影,得 $1\leqslant y\leqslant 2$,(图 7-3);(3) 发射;对固定的 $y\in(1,2)$自左向右作射线,从 $x=y$ 的边界进入 D,从 $x=y^2$ 出,即 $y\leqslant x\leqslant y^2$,于是得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

如果我们先对 y 积分,那么(2) 投影应将 D 在 x 轴上投影,得区间$[1,4]$;(3) 发射.应固定 $x\in(1,4)$,由下向上作射线,由图 7-3 我们发现 $x\in(1,2)$时,射线从 $y=\sqrt{x}$进入 D,从 $y=x$ 出;$x\in(2,4)$时,从 $y=\sqrt{x}$进,从 $y=2$ 出.故

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

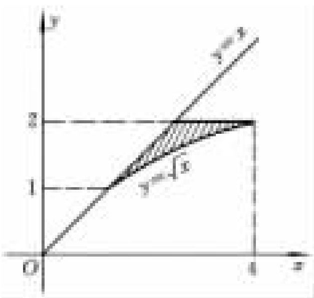

图 7-3

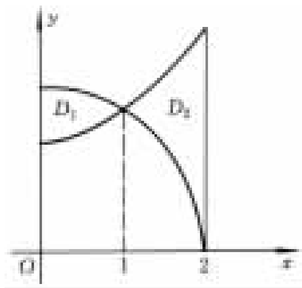

图 7-4

例 7-10 更换累次积分的次序:$I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 先画积分域,将已知的累次积分化为二重积分,从图 7-4 看出要化累次积分为二重积分得先分已知的二次积分为两部分.

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2+x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y^2-2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt3}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$-\int_0^{\sqrt3}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y^2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{\sqrt3}^{\sqrt6}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y^2-2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 7-11 交换积分顺序(如不加说明我们总设被积函数在其积分域上连续)$I=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{3-x}^{\sqrt{2x-1}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 先画积分域如图 7-5.从图中看出,当 $x\in[1,4-\sqrt6]$时,$\sqrt{2x-1}\leqslant 3-x$;当 $x\in[4-\sqrt6,2]$时,$3-x\leqslant\sqrt{2x-1}$.所以要将 I 化为二重积分,首先要将 I 分为两部分:

$$I=-\int_1^{4-\sqrt6}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-1}}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{4-\sqrt6}^{2}\mathrm{d}x\int_{3-x}^{\sqrt{2x-1}}f(x,y)\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_1^{\sqrt6-1}\mathrm{d}y\left[-\int_1^{\frac{y^2+1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{3-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]+\int_{\sqrt6-1}^{2}\mathrm{d}y\left[-\int_1^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x\right]+\int_{\sqrt6-1}^{\sqrt3}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^3+1}{2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_1^{\sqrt6-1}\mathrm{d}y\int_1^{\frac{y^2+1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{\sqrt6-1}^{2}\mathrm{d}y\int_1^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_1^{\sqrt6-1}\mathrm{d}y\int_{3-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt6-1}^{\sqrt3}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2+1}{2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

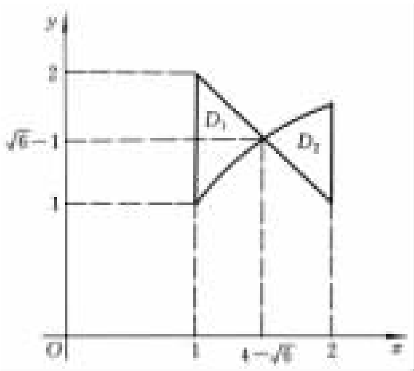

图 7-5

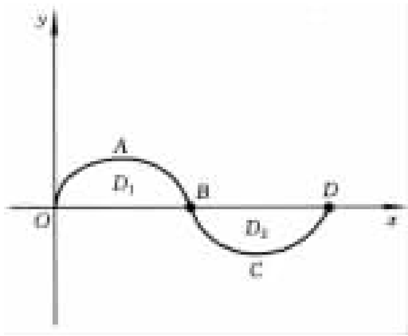

图 7-6

例 7-12　交换积分顺序：$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解　如图 7-6 **像上两个例子一样，先将二次积分写为**

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

注　$y=\sin x$ **的反函数不能都写为** $x=\arcsin y$，**这样写要求** $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. **如图** 7-6 **中弧**$\overset{\frown}{OA}$**中** x **在主值区间，而弧**$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$**的** x **不在主值范围之内，故用诱导公式** $y=\sin x=\sin(\pi-x)$，**写成反三角式如旁注一样；对弧**$\overset{\frown}{CD}$，**则用诱导公式**：$y=\sin x=\sin(x-2\pi)$，$x-2\pi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，**即在主值区间，则** $x-2\pi=\arcsin y$，**即**

$$x=2\pi+\arcsin y.$$

例 7-13　计算积分 $I=\iint_D(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **其中**，D **为**$|x|+|y|\leqslant 1$.

解　由对称性知

$$I=4\iint_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(D_1:x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0)=8\iint_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}.$$

注　如上例，D_1 **的形心** $\bar{x}=\frac{1}{3}=\dfrac{\iint_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}}$，$\iint_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$**所以** $I=\frac{4}{3}$.

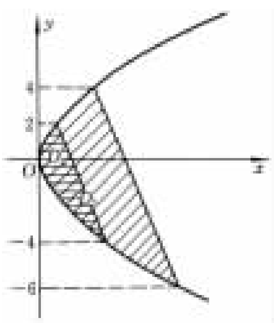

图 7-7

例 7-14　计算积分$\iint_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$，$D$ **是由** $y^2=2x$，$x+y=4$，$x+y=12$ **所围成的区域.**

解　如图 7-7 **知**

$$\iint_D=\iint_{D_1}-\iint_{D_2},$$

而

$$\iint_{D_2}(x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-6}^{4}\mathrm{d}y\int_{y^2/2}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-6}^{4}\left[12^2-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)^2\right]dy$$

$$=720-\frac{1}{2}\int_{-6}^{4}\left(\frac{y^4}{4}+y^3+y^2\right)dy,$$

$$\iint_{D_1}(x+y)d\sigma=\frac{1}{2}\int_{-4}^{2}\left[16-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)^2\right]dy$$

$$=48-\frac{1}{2}\int_{-4}^{2}\left(\frac{y^4}{4}+y^3+y^2\right)dy$$

所以 $$\iint_D(x+y)d\sigma=672-\frac{1}{2}\left[\frac{4^5+6^5}{20}+\frac{4^4-6^4}{4}+\frac{4^3+6^3}{3}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{2^5+4^5}{20}+\frac{2^4-4^4}{4}+\frac{2^3+4^3}{3}\right]$$

$$=672-\frac{1}{2}\left[\frac{2^5(3^5-1)}{20}+\frac{2.4^4-6^4-2^4}{4}+\frac{6^3-2^3}{3}\right]$$

$$=772-\frac{968}{5}-\frac{104}{3}=543\frac{11}{15}.$$

读者可以看出我们不急于将积分$\int_{-6}^{4}\left(\frac{y^4}{4}+y^3+y^2\right)dy$**及类似的一个算出来，主要是它们还要相减，消去一些项后再算要简单些.**

例 7-15　计算$\iint_D xy\,dxdy$**，其中**D**是由曲线**$xy=1$，$x+y=\frac{5}{2}$**所围成的区域.**

解　如图 7-8**，先求交点的横坐标，设** x，y **为某二次方程的根，则两根之积为** 1**，和为**$\frac{5}{2}$**，故方程是** $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$**，得** $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$**，所以**

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\,dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}y\,dy=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[x\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-\frac{1}{x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{25}{4}x-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right]dx=1\frac{37}{128}-\ln 2.$$

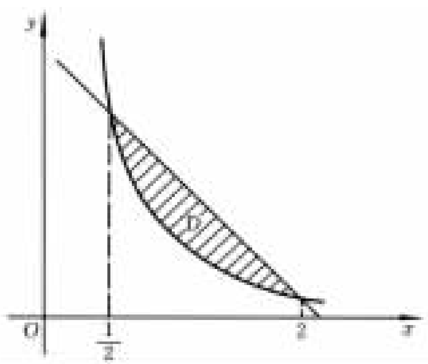

图 7-8

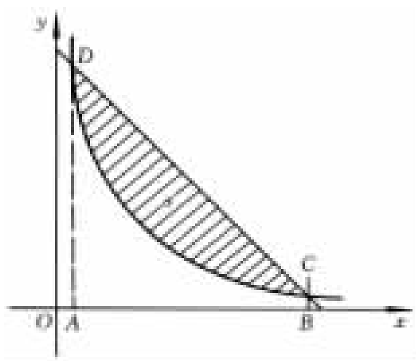

图 7-9

例 7-16　计算由曲线 $xy=a^2$，$x+y=\frac{5}{2}a(a>0)$**，所围成图形的面积.**

解法 1　用二重积分算，如图 7-9**，记所围图形为** σ**，面积为** S**，则**

$$S=\iint_{(\sigma)}dxdy$$

化为累次积分，先求图形 σ **在** Ox **轴上的投影区间**$[x_1,x_2]$**，这里** x_1 **及** x_2 **是二次方程**

$$x^2-\frac{5a}{2}x+a^2=0$$

的两个根. 易知 $x_1=\frac{a}{2}$, $x_2=2a$ 于是, $S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\mathrm{d}x\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x}\mathrm{d}y=\left(\frac{15}{8}-\ln4\right)a^2$.

解法 2　用定积分计算, S 等于梯形 $ABCD$ 的面积 S_1, 减去以 $\widehat{DC}$ 为顶的曲边梯形 $ABCD$ 的面积 S_2:

$$S_1=\frac{1}{2}\left(2a+\frac{a}{2}\right)\left(2a-\frac{a}{2}\right)=\frac{15}{8}a^2,$$

$$S_2=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\frac{a^2}{x}\mathrm{d}x=a^2\ln4.$$

$$S=\left(\frac{15}{8}-\ln4\right)a^2.$$

例 7-17　计算 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解法 1　由对称性知(图 7-10)

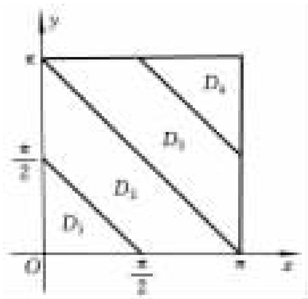

图 7-10

$$\iint\limits_{D_1}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_4}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{D_2}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

原式 $=2\left[\int\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int\limits_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$

$$=2\left[2\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1+D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=2\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=2\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\right]=2\pi.$$

解法 2　作变换 $\begin{cases}x=t,\\x+y=u\end{cases}$ 则 $J=1$

$$\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2},$$

$$-\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}t\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos u\mathrm{d}u\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi.$$

例 7-18　计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\operatorname{sgn}x$ 为符号函数.

解　参阅图 7-11,

$$I=\iint\limits_{D_4}\mathrm{d}\sigma-2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\mathrm{d}\sigma-4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=4\pi-8\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=4\pi-8\int_0^1\left[\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2+x^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi+8\ln(1+\sqrt{3})-4\ln2.$$

例 7-19　计算二次积分 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

解　由所给二次积分作出区域 D 的图形(图 7-12), 再由 D 换成先对 y 后对 x 的二次积分.

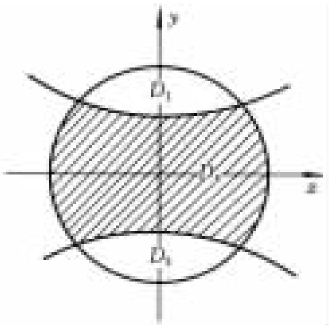

图 7-11

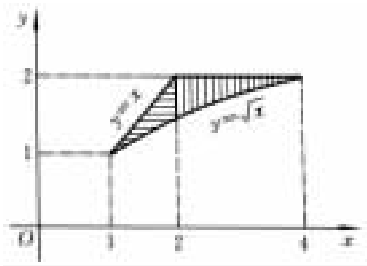

图 7-12

$$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}y\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).$$

例 7-20　计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x.$

解　区域 D **如图** 7-13 **阴影部分**.

$$\text{原式}=\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}.$$

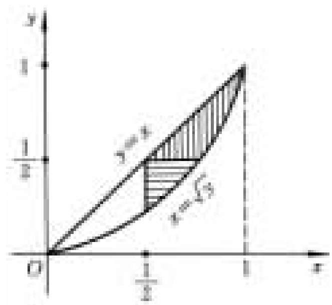

图 7-13

例 7-21　设函数 $f(x)$ **在区间** $[0,1]$ **上连续,并设** $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$,**求** $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y.$

解法 1　更换积分次序,可得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y,$$

$$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y,$$

所以

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2.$$

解法 2　记函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,**则** $F(0)=0,F(1)=A$,**且** $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$. **于是**

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}F(y)=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]\mathrm{d}x$$

$$=A^2-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)=A^2-\frac{1}{2}[F^2(1)-F^2(0)]=\frac{1}{2}A^2.$$

(2) **极坐标及其他**

在极坐标下化重积分为先对 r **后对** θ **的二次积分定限时,我们用投影、发射的说法,投影是找** θ **的变化**

范围.令极轴沿逆时针方向转动,看 θ 角为何值时极轴与积分域开始接触,当 θ 为何值时离去;发射是固定 θ 找 r 的变化范围.由于 $r\geqslant 0$ 故发射时出发点总是极点.

例 7-22　在极坐标下把二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为两种不同次序的累次积分,其中区域 D 由 $Rx\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$ 所确定,$f(x,y)$ 在 D 上连续.

解　(1) 画域:如图 7-14(a),$D_1+D_2+D_3=D$;(2) 投影:一般先对 ρ 积分再对 θ 积分.从图上看出 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$;(3) 发射:发现要分开积分,在 D_1+D_2 上即当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,ρ 从 $\rho=R\cos\theta$ 进入积分域,从 $\rho=R$ 出;在 D_3 上即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时,$\rho=0$ 即进入 D_3,$\rho=R$ 时出,故

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{R\cos\theta}^{R}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\rho.$$

若先对 θ 积分,再对 ρ 积分,则也是投影,即找 ρ 的范围 $0\leqslant\rho\leqslant R$.这时,发射是固定 $\rho\in(O,R)$.作圆弧按逆时针转,如本题,在 D_1,弧从 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 入,$\theta=-\arccos\frac{\rho}{R}$ 出;在 D_2,从 $\theta=\arccos\frac{\rho}{R}$ 入;从 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 出;在 D_3,$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$,所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=&\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos\frac{\rho}{R}}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_{\arccos\frac{\rho}{R}}^{\frac{\pi}{2}}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&+\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta\qquad(1)\end{aligned}$$

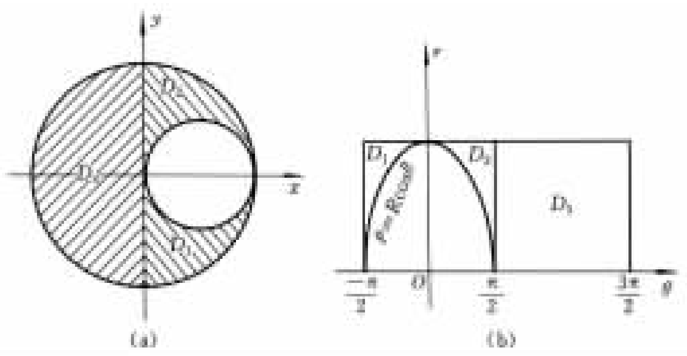

图 7-14

注　在极坐标下,先对 θ,后对 ρ 的积分定限较困难.因此,介绍另一种方法:在定好了先对 ρ,后对 θ 的累次积分后,可将(ρ,θ)视为直角坐标.按直角坐标交换次序即可,如图 7-14(b)是按二次积分式(1)画出的在(θ,ρ)直角坐标下的图形.由此得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_{-\pi/2}^{-\arccos\frac{\rho}{R}}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_{\arccos\frac{\rho}{R}}^{\frac{3\pi}{2}}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

避开了极坐标的定限方法.

例 7-23　计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解法 1　用极坐标作(图 7-15)

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{(\sin\theta+\cos\theta)}r^2(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+2\sin 2\theta+\sin^2 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

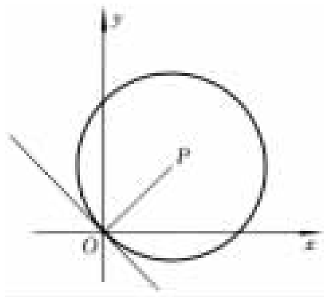

图 7-15

解法 2　作变换：$x=u+\frac{1}{2}, y=v+\frac{1}{2}$，则

$$I=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}}(1+u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}$$

解法 3　本题一个简单解法是：由 x,y 的对称性知

$$I=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而均匀圆板 $x^2+y^2\leqslant x+y$ 的质心为圆心 P：$\bar{x}=\frac{1}{2}$，$\bar{y}=\frac{1}{2}$（图 7-18），但 $\bar{x}=\frac{1}{2}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}\pi}$，所以，$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$，从而 $I=\frac{\pi}{2}$.

注　解法 1 是最平凡的，但计算麻烦了些. 解法 2 则是坐标平移，平移不影响面积的变化，故 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. 解法 3 是反过来将求重心的公式用来计算重积分.

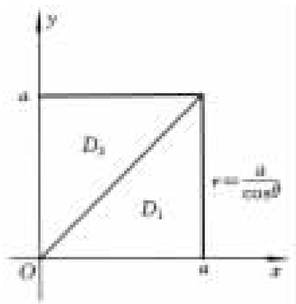

图 7-16

例 7-24　计算积分 $I=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}$，其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant a$；$0\leqslant y\leqslant a$.

解　用极坐标计算，如图 7-16 所示.

$$\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=2\iint\limits_{D_1}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{a}-\frac{\cos\theta}{a\sqrt{2-\sin^2\theta}}\right]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6a}.$$

3. 三重积分的计算

(1) 直角坐标

例 7-25　将三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为先对 y，再对 x，最后对 z 的三次积分. 其中 Ω 是由 $x+y+z=1$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 和 $z=1$ 所围成的闭区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续.

解　本题如先对 z 积分，容易定限

$$I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-x-y}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{1-x-y}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

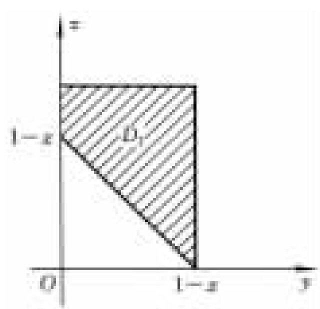

图 7-17

然后交换积分次序，先看二次积分（图 7-17）

$$\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{1-x-y}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_1}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_{1-x-z}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_{1-x}^1\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y,$$

所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_{1-x-z}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x\int_{1-x-z}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_{1-z}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

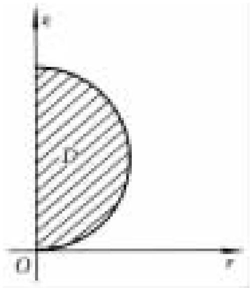

图 7-18

例 7-26　求均匀球体 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$(**体密度为** 1)**绕** Oz **轴的转动惯量**(**图** 7-18).

解法 1　即求 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

试用球坐标来计算,但不直接套用公式,先从直角坐标化起:

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}}r^3\mathrm{d}z.$$

用极坐标算 $\int_0^1\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}}r^3\mathrm{d}z$,**设** $\begin{cases}r=\rho\sin\varphi\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$

则
$$\int_0^1\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}}r^3\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho,$$

所以
$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{2^6\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{-2^6\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5\varphi-\cos^7\varphi)d\cos\varphi=\frac{2^6\pi}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)=\frac{8}{15}\pi.$$

解法 2　用"先二后一"的方法:

$$\iiint\limits_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z-z^2}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^2(4z^2-4z^3+z^4)\mathrm{d}z=\frac{8}{15}\pi.$$

例 7-27　计算积分 $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

解法 1　由对称性知: $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}y\mathrm{d}v=0,$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi$$

所以
$$I=\frac{4c}{3}\pi.$$

解法 2　用先二后一的方法:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}z\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^2-z^3)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi$$

所以
$$I=\frac{4c}{3}\pi.$$

解法 3　$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ **的形心在**(0,0,1),**所以** $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}z\mathrm{d}v=V=\frac{4}{3}\pi$,**其中** V **是单位球体的体积,所以**,$I=\frac{4c}{3}\pi.$

例 7-28　设 A **为半径为** R **的球内一定点,过** A **作球面任一点** Q **处的切平面作垂线,垂足为** P. **当** Q **在**

球面上变动时，P 点轨迹形成一封闭曲面．求此曲面所围立体的体积，又问点 A 沿什么方向变化时，这个体积变化率最大？最大变化率等于什么？

解法 1 如图 7-19 以 A 为极点，作球坐标系，则 P 点的轨迹方程为 $\rho=R-a\cos\varphi$. 这样所求体积为

$$v=\iiint_v \mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R-a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(R-a\cos\varphi)^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{3}R(R^2+a^2).$$

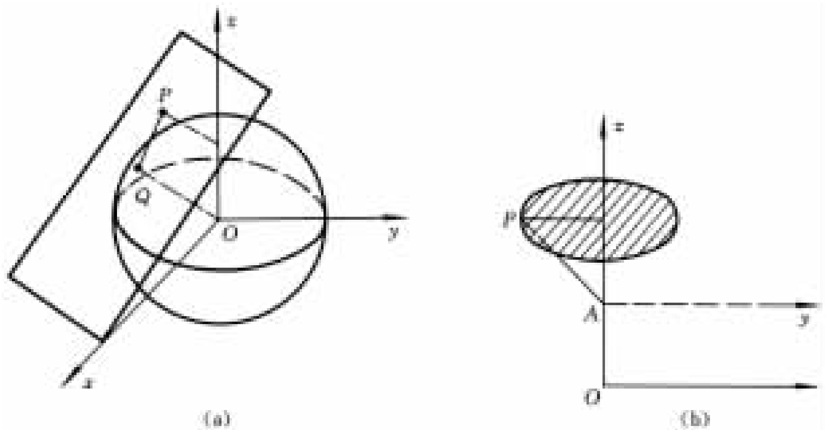

图 7-19

解法 2 我们也可以用定积分求旋转体体积的方法来解本题（图 7-19(b)），即以 A 为原点，这时垂直于 A 的断面半径为

$$y=(R-a\cos\theta)\sin\theta,$$

而

$$\mathrm{d}z=-d(R-a\cos\theta)\cos\theta=(R\sin\theta-a\sin2\theta)\mathrm{d}\theta,$$

所以，

$$V=\pi\int_0^{\pi}(R^2+a^2\cos^2\theta-2aR\cos\theta)\sin^3\theta(R-2a\cos\theta)\mathrm{d}\theta,\quad (\text{令 }\cos\theta=t)$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(R^2+a^2t^2-2aRt)(R-2at)(1-t^2)\mathrm{d}t\quad (t=\cos\theta)$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}[R(R^2+a^2t^2)(1-t^2)+4a^2Rt^2(1-t)]\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\left[\frac{2}{3}R^3+\frac{2}{3}Ra^2\right]=\frac{4\pi}{3}R(R^2+a^2).$$

当 A 点移动时，函数 $v(a)=\frac{4\pi}{3}R(R^2+a^2)$ 的等位面是 $a=$ 常数的球面，故变化率最大是沿等位面的法向（即半径方向）指向 $V(a)$ 增加的一面．最大变化率即

$$V'(a)=\frac{8\pi}{3}Ra.$$

(2) **柱面坐标和球面坐标**

例 7-29 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域．

解 利用球面坐标计算

$$\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\sin\varphi\cos\theta\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\sin\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=0,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

所以 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}$.

注　**由** Ω **关于** yOz **坐标面对称,直接可知** $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v=0$.

例 7-30　**计算三重积分** $\iiint\limits_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,**其中** Ω **是曲面** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **与** $z=x^2+y^2$ **围成的有界区域.**

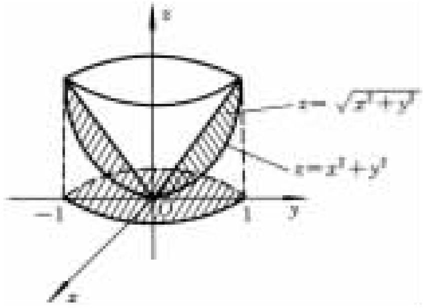

图 7-20

解　**如图** 7-20 **所示** Ω **在** xy **平面上的投影.**

$$D:x^2+y^2\leqslant 1,$$

所以
$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D}[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant 1}]{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r-r^2)\cdot r^2\cos^2\theta\cdot r\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^5-r^6)\mathrm{d}r$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)=\frac{\pi}{42}.$$

例 7-31　**求** $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\iiint\limits_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,**其中** $\Omega_t=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$,

解　**作球坐标变换** $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$.

则
$$\iiint\limits_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t\sin r^3\cdot r^2\cdot\sin\varphi\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2\sin r^3\mathrm{d}r,$$

所以所求极限
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t r^2\sin r^3\mathrm{d}r}{t^6}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi t^2\sin t^3}{6t^5}=\frac{2}{3}\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t^3}{t^3}=\frac{2}{3}\pi.$$

例 7-32　**设**(V)**是由球** $B:x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$**与锥面:以** z **轴为轴,以坐标原点为顶点,顶角为** 2α,**所围成的立体,求**(V)**的体积** V.

解　**令** $x=r\cos\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$,**则**

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\quad 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi.$$

所以
$$V=\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\alpha}\frac{1}{3}\cdot 8a^3\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{16}{3}\pi a^3\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\pi}{3}a^3(-\cos^4\varphi)\Big|_0^{\alpha}=\frac{4\pi}{3}a^3(1-\cos^4\alpha).$$

例 7-33　**求** $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,**其中** f **在**$[0,1]$**上连续** $f(0)=0,f'(0)=1$.

解　**利用球坐标变换,得**

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)\cdot r^2\cdot\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^t f(x)\cdot r^2\,\mathrm{d}r.$$

再由洛必塔法则得

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t f(x)\cdot r^2\,\mathrm{d}r}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi t^2 f(t)}{4t^3}=\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$$

$$=\pi f'(0)=\pi.$$

例 7-34 求曲面$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{5}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{5}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{5}}=1$所围空间区域的体积 V.

解 令 $u=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{5}}, v=\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{5}}, w=\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{5}}$，则

$$V=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} 125abc(uvw)^4\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

令$\begin{cases} u=ar\sin\varphi\cos\theta, \\ v=br\sin\varphi\sin\theta, \\ w=cr\cos\varphi \end{cases}$ 则 $0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$

$$V=125abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin^4\varphi\cos^4\theta\cdot r^4\sin^4\varphi\sin^4\theta\cdot r^4\cos^4\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=125abc\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\cos^4\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^9\varphi\cos^4\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^{14}\mathrm{d}r$$

$$=125abc\cdot\frac{1}{32}\int_0^{2\pi}(\sin 2\theta)^4\mathrm{d}(2\theta)\left[-\int_0^{\pi}(\cos^4\varphi-2\cos^6\varphi+\cos^5\varphi)d\cos\varphi\cdot\frac{1}{15}\right]$$

$$=\frac{25}{96}abc\left[\frac{3}{8}(2\theta)-\frac{1}{4}\sin 4\theta+\frac{1}{32}\sin 8\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\left\{-\left(\frac{1}{5}\cos^5\varphi-\frac{2}{7}\cos^7\varphi+\frac{1}{9}\cos^9\varphi\right)\right\}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{5}{504}abc\pi.$$

例 7-35 (1) 若 f 为连续函数，证明：

$$\iiint_V f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z,\quad \text{其中 } V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1;$$

(2) 若 f 连续，证明：

$$\iiint_V f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1 f(ku)(1-u^2)\mathrm{d}u,\quad \text{其中 } V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1, k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

证 (1) 采用柱面坐标，得

$$\iiint_V f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z^2} f(z)r\mathrm{d}r=\int_{-1}^1 2\pi\frac{(1-z^2)}{2}f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z.$$

(2) 作正交变换$\begin{cases} u=\frac{1}{k}(ax+by+cz), \\ v=a_1x+b_1y+c_1z, \\ w=a_2x+b_2y+c_2z \end{cases}$ 其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

则由正交变换的特性知 V 变成 $V': u^2+v^2+w^2\leqslant 1$，且$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=1$.

所以 $$\iiint_V f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V f(ku)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\xlongequal{\text{由}(1)}\pi\int_{-1}^1 f(ku)(1-u^2)\mathrm{d}u.$$

例 7-36　求三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} e^{|z|}\,dv$ 的值.

解　令 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$ 则 $0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

$$\iiint\limits_V e^{|z|}\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r|\cos\varphi|}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 e^{r\cos\varphi}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 e^{r\cos\varphi}\sin\varphi d\varphi = 4\pi\int_0^1 (e^r-1)r dr = 2\pi.$$

4. 重积分应用

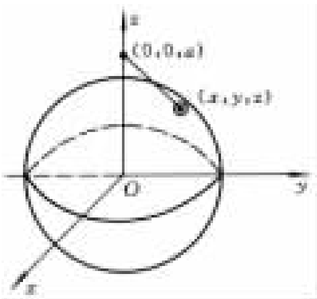

图 7-21

例 7-37　求半径为 R，体密度为 1 的均匀球体对空间一单位质点的引力.

解　取坐标系如图 7-21，球心为原点，单位质点 M 在 z 轴上坐标为 $(0,0,a)$，设任一点 (x,y,z) 在球内，dv 是含 (x,y,z) 的一体积微分，视 dv 为一质点，因 $\boldsymbol{F}$ 表示所求的力. $\boldsymbol{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$，由对称性可知 $F_x=F_y=0$，以 $d\boldsymbol{F}$ 表示 dv 对 M 的引力，则由万有引力定律知

$$|d\boldsymbol{F}|=\frac{G dv}{r^2}.$$

其中 G 是引力常数，$\boldsymbol{r}=\{x,y,z-a\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

所以，$dF_z=\dfrac{G(z-a)}{r^3}dv$,

$$F_z = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{G(z-a)}{r^3}dv = G\int_{-R}^{R}(z-a)dz \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2})^3}$$

$$=2\pi G\int_{-R}^{R}\left[\frac{z-a}{|z-a|}-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+a^2-2az}}\right]dz$$

$$=2\pi G\left\{|R-a|-|R+a|+\int_{R+a}^{|R-a|}\frac{R^2-a^2-u^2}{a^2}du\right\}\quad (\text{积分中令 } u=\sqrt{R^2+a^2-2az})$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{4\pi GR^3}{3a^2}, & a>R; \\ -\dfrac{4\pi}{3}Ga, & a\leqslant R. \end{cases}$$

例 7-38　在均匀半球下接一个与之半径相同的均匀圆柱体，要使其重心在球心处，求圆柱半径与其高之比.

解　设球的体密度为 ρ_1，柱的体密度为 ρ_2，并取定坐标系如图 7-22，球半径为 R，柱高为 h，

则
$$\rho_1\iiint\limits_{V_1} z dv+\rho_2\iiint\limits_{V_2} z dv=0,$$

而
$$\iiint\limits_{V_1} z dv=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} dxdy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z dz=\frac{\pi}{4}R^4,$$

$$\iiint\limits_{V_2} z dv=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} dxdy\int_{-h}^{0} z dz=-\frac{h^2}{2}\cdot\pi R^2,$$

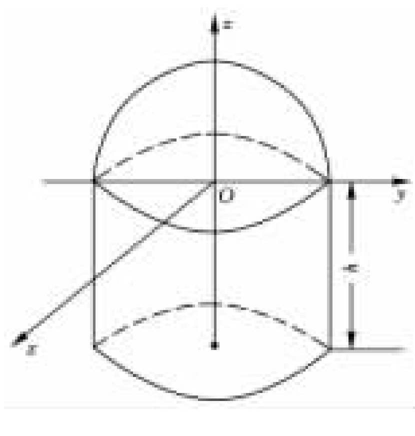

图 7-22

所以，$\frac{\pi}{4}\rho_1 R^4=\frac{\pi}{2}\rho_2 R^2 h^2$，$\frac{R}{h}=\sqrt{\frac{2\rho_2}{\rho_1}}$.

例 7-39 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)(图 7-23)，求球体的重心位置.

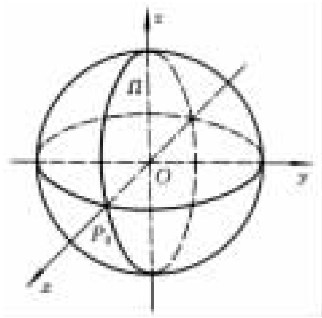

图 7-23

解法 1 记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为原点 O，射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系，则点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$，球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得

$$\bar{y}=0,\quad \bar{z}=0,\quad \bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\cdot k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}.$$

而
$$\iiint\limits_{\Omega}[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}v$$
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}x[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}v=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-\frac{8}{15}\pi R^6,$$

故 $\bar{x}=-\frac{R}{4}$. 因此，球体 Ω 的重心位置为 $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

解法 2 设所考虑的球体为 Ω、球心为 O，以定点 P_0 为原点，射线 P_0O 为正 z 轴建立直角坐标系，则球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=2Rz.$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=0,\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}kz(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

而
$$\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6,$$

故 $\bar{z}=\frac{5}{4}R$. 因此，球体 Ω 的重心位置为 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

例 7-40 三个有相同半径 a 的正圆柱，其对称轴两两正交，求它们相贯所得立体的体积和表面积.

解 设选如图 7-24 的坐标系后，三个柱面的方程分别为：$x^2+y^2=a^2$；$y^2+z^2=a^2$；$z^2+x^2=a^2$. 图中是相贯部分在第一卦限的草图，与上题类似只要求所求体积的 $\frac{1}{16}$，即

$$\frac{V}{16}=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_1+D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z.$$

$$\iint\limits_{D_1}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}}a^3,$$

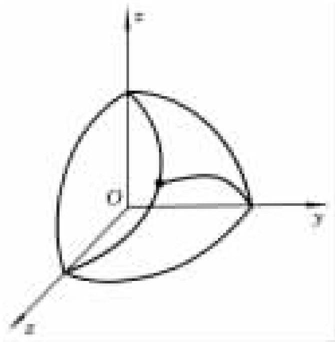

图 7-24

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y=\frac{4\sqrt{2}-5}{6\sqrt{2}}a^3,$$

$$V=8(2-\sqrt{2})a^3.$$

注意图 7-24 所示在求表面积时,第一卦限中有三块一样的表面部分,所以,

$$\frac{S}{24}=\iint\limits_{D}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y+\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2}}=(2-\sqrt{2})a^2.$$

$S=24(2-\sqrt{2})a^2.$

例 7-41　设半径为 R 的球面 $\sum$ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上,问当 R 取何值时,球面 $\sum$ 在定球面内部的那部分的面积最大?

解　设球面 $\sum$ 的方程为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$. 两球面的交线在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),\\ z=0.\end{cases}$$

记投影曲线所围平面区域为 D_{xy}. 球面 $\sum$ 在定球面内的部分的方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

这部分球面的面积

$$S(R)=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{rR\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}.$$

$$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a},\quad S''(R)=4\pi-\frac{6\pi R}{a}.$$

令 $S'(R)=0$,**得驻点** $R_1=0$(**舍去**),$R_2=\frac{4}{3}a$.

$$S''\left(\frac{4}{3}a\right)=-4\pi<0,$$

故当 $R=\frac{4}{3}a$ **时,球面 $\sum$ 在定球面的部分的面积最大.**

例 7-42　求 $y^2+z^2=px$ 和 $x=h$ 所围成立体的形心($p,h>0$).

解　由对称性知形心坐标为($\bar{x},0,0$),先求静矩:

$$I=\iiint\limits_{V}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h\mathrm{d}x\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant px}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=p\pi\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x=\frac{p\pi}{3}h^3,$$

再求体积:

$$V=\iiint\limits_{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi p\int_0^h x\mathrm{d}x=\frac{p\pi}{2}h^2$$

所以
$$\bar{x}=\frac{2}{3}h,$$

则形心的坐标为$\left(\frac{2}{3}h,0,0\right)$.

例 7-43 设均匀物体由曲面 $z=x^2+y^2$,$z=1$ 和 $z=2$ 围成,求其重心的坐标.

解 由对称性知重心为$(0,0,\bar{z})$,

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V},$$

而

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_1^2 z^2\,\mathrm{d}z=\frac{7}{3}\pi$$

$$V=\iiint\limits_V\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_1^2 z\,\mathrm{d}z=\frac{3}{2}\pi$$

所以

$$\bar{z}=\frac{14}{9}.$$

即重心为

$$\left(0,0,\frac{14}{9}\right).$$

例 7-44 设闭区域 D:$x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0$. $f(x,y)$为 D 上的连续函数(图 7-25),且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

求 $f(x,y)$.

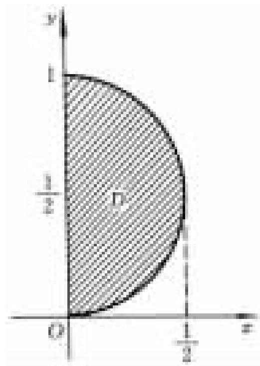

图 7-25

解 设$\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$,在已知等式两边求区域 D 上的二重积分,有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8A}{\pi}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A.$$

所以

$$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

故

$$A=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

于是

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

例 7-45 求椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2\leqslant 1$ 的面积(其中,$A>0$,$\Delta=AC-B^2>0$).

解法 1

$$S=\iint\limits_{Ax^2+2Bxy+Cy^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=A\left(x+\frac{B}{A}y\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}y^2$$

作变换：$u=\sqrt{A}x+\frac{B}{\sqrt{A}}y$，$v=\sqrt{\frac{AC-B^2}{A}}y$.

则
$$J^{-1}=\begin{vmatrix}\sqrt{A} & \frac{B}{\sqrt{A}}\\ 0 & \sqrt{\frac{AC-B^2}{A}}\end{vmatrix}=\sqrt{\Delta},$$

所以
$$S=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

解法 2　我们用条件极值的方法来作. 为此，求此椭圆的长、短半轴，即求原点到椭圆的最大、最小距离. 设目标函数为 x^2+y^2——距离的平方. 用拉格朗日乘数法：

设
$$L=x^2+y^2+\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)$$

令
$$\frac{1}{2}L_x=x+\lambda(Ax+By)=0 \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}L_y=y+\lambda(Bx+Cy)=0 \tag{2}$$

式(1)×x＋式(2)×y 得$(x^2+y^2)+\lambda=0$
$$x^2+y^2=-\lambda$$

这表示$-\lambda$ 即是要求的极值，将式(1)、式(2)改写为
$$\begin{cases}(1+A\lambda)x+By=0\\ \lambda Bx+(1+C\lambda)y=0\end{cases}$$

这是关于 x,y 的线性齐次方程组，由条件知$(x,y)\neq(0,0)$，即有非零解，得
$$\begin{vmatrix}1+A\lambda & B\lambda\\ \lambda B & 1+C\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即$(AC-B^2)\lambda^2+(A+C)\lambda+1=0$，

此方程的两个负实根正是$-(x^2+y^2)$的最大与最小值. 所以 $\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{\Delta}$为长短半轴平方积，则椭圆的面积为
$$\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

习　题　7

1. 将二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 按两种次序化为二次积分，其中 D 为环域 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2(0<a<b)$.

2. 计算 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

3. 判断积分
$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
的符号.

4. 变更下列二次积分次序
$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

5. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y^2=x$ 与 $y=x$ 所围区域；

(2) $\iint\limits_D |x^2-y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 与 $y=1$ 所围区域；

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant Ry$.

6. 计算 $\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由坐标轴与曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 所围成.

7. 改变积分次序 $I=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$，$\theta,\rho$ 为极坐标变量.

8. 计算下列三重分：

(1) $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$，$x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$ 的公共部分；

(2) $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成的空间区域.

9. 证明：当自然数 m,n 中至少有一个为奇数时，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

10. 证明 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1 (1-u)^2 f(u)\mathrm{d}u$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，试证明 $\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3$.

12. 设 $f(t)$ 为连续函数，$F(t)=\iiint\limits_\Omega[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$，$\Omega$ 为：$0\leqslant z\leqslant l_1$　$x^2+y^2\leqslant t^2$，求 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

简答与提示

1. $$\int_{-b}^{-a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\left[\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right]$$
$$+\int_a^b\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. $4\pi^{-3}(\pi+2)$.

3. $I<0$.

4. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

5. (1) $1-\sin 1$；　(2) $\frac{11}{30}$；　(3) $\frac{1}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

6. 作变换 $x=a\rho^2\cos^4\theta$，$y=b\rho^2\sin^4\theta$，$J=8ab\rho^3\sin^3\theta\cos^3\theta$，$I=\frac{2}{21}ab$.

7. $I=\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{2\sqrt{2}}^4\mathrm{d}\rho\int_{\arccos\frac{2}{\rho}}^{\frac{\pi}{3}} f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta$.

8. (1) $\frac{59}{480}\pi a^5$；　(2) $\frac{\pi}{20}$.

9. 提示：利用奇函数在对称区间上积分等于 0.

10. 提示：采用柱面坐标系，先计算对 x,y 的二重积分，再对 z 积分.

11. 令 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，利用 $F'(u)=f(u)$，再利用牛顿-莱布尼茨公式.

12. $F(t)=2\pi ht\left[\frac{h^2}{3}+f(t^2)\right]$，　$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\pi h\left[\frac{h^2}{3}+f(0)\right]$.

第八章　曲线积分与曲面积分

曲线积分与曲面积分是多元函数积分学的主要组成部分之一. 曲线、曲面积分或应用格林公式、高斯公式、斯托克斯公式的试题在数学(试卷一)中占有较高的比例,因此,熟练掌握这部分内容对报考工科硕士研究生是至关重要的.

一、复习与考试要求

(1) 理解两类曲线积分的概念,了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.

(2) 掌握计算两类曲线积分的方法.

(3) 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件,会求全微分的原函数.

(4) 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系,掌握两类曲面积分的计算方法,了解高斯公式、斯托克斯公式,会用高斯公式计算曲面积分.

(5) 了解散度与旋度的概念,并会计算.

(6) 应用曲线积分和曲面积分求一些几何量与物理量(弧长、质量、重心、转动惯量、引力、功及流量等).

二、基本概念与理论

1. 两类曲线积分的概念

两类曲线积分的定义可查阅教科书,这里只对其物理和几何意义稍作说明.

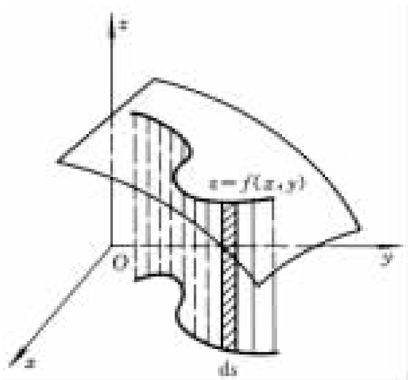

图 8-1

(1) 对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 可以视为以 $f(x,y)$ 为线密度的曲线形构件 L 的质量 M,也可看作是一个柱面的面积,这个柱面以 L 为准线,以平行于 z 轴的直线为母线,且在 (x,y) 处母线高度为 $f(x,y)$,如图 8-1 所示.

(2) 对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 可以视为质点在变力 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 作用下沿曲线 L 从起点到终点移动过程中变力所作的功 W. 即

$$W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. 两类曲线积分的计算法

对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 和对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 均可按不同形式的曲线方程,通过所谓“三替换”步骤化为定积分.

设光滑曲线 L 由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 给出,其中 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,且 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 连续而不同时为 0,则 $f(x,y)$ 中的 x,y 分别用 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 替换;$\mathrm{d}s$ 用 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$ 替换;L 用 t 的区间 $[\alpha,\beta]$ 替换,即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

并注意,公式中定积分下限 α 小于上限 β.

类似地,当 L 为有向曲线时,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t.$$

注意下限、上限分别为对应于有向曲线弧起点、终点的参数值 α,β.

若 L 由方程 $y=\psi(x)$, $(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出,则对弧长的曲线积分化为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

对坐标的曲线积分化为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\{P(x,\psi(x))+Q(x,\psi(x))\psi'(x)\}\mathrm{d}x,$$

其中下限 a、上限 b 分别对应于有向曲线弧的起点、终点的 x 值.

对于分段光滑的曲线 L,以上积分可分段计算后相加.

3. 格林公式

设(1) 闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 所围成;

(2) 函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数. 则 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,其中 L 是 D 的整个正向边界曲线(L 是 D 的正向边界是指 D 恒在 L 走向的左侧).

4. 曲线积分与路径无关的等价条件

设(1) 开区域 G 是单连通域;

(2) 函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数. 则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关,等价于以下三个条件中的任何一个:

① $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$在 G 内恒成立;

② 沿 G 内任一闭路 C 上的积分为零,即$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$;

③ 在 G 内存在二元函数 $u(x,y)$,使 $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

5. 两类曲面积分的计算法

(1) 设曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 给出,Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy},$z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数,被积函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,则有对面积的曲面积分的计算公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即通过所谓"三替换"把曲面积分化为二重积分:D_{xy} 替换 Σ;$z(x,y)$ 替换被积函数中 z;$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 替换 $\mathrm{d}S$. 当 Σ 由方程$x=x(y,z)$或由 $y=y(z,y)$ 给出时,有类似计算公式如下:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

(2) 设 Σ 是由方程 $z=z(x,y)$ 所给曲面上侧,Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy},函数 $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数,被积函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,则有对坐标的曲面积分的计算公式

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当 Σ 取下侧时,则有

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

对 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 与 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 有类似的计算公式.

6. 高斯公式

设函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在由分片光滑的闭曲面 Σ 所围的空间闭区域 Ω 上具有一阶连续偏导数,则有

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v,$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面的外侧.

7. 斯托克斯公式

设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向与Σ的侧符合右手法侧，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在包含曲面Σ在内的空间区域内具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

8. 散度与旋度

在空间直角坐标系里，设有向量场

$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则数量$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$称为向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)$在点$(x,y,z)$处的散度，记为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

向量$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$ 称为向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)$在点(x,y,z)处的旋度，记为$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

三、基本题型与解题方法

1. 对弧长的曲线积分

例 8-1　设l为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为$a$，计算$\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$.

解　因为l是关于y轴对称的，且$2xy$是关于变量x的奇函数，所以$\oint_l 2xy\mathrm{d}s=0$. 又因为在l上有$3x^2+4y^2=12$，所以

$$\text{原积分}=\oint_l 2xy\mathrm{d}s+\oint_l(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=0+\oint_l 12\mathrm{d}s=12a.$$

$\oint_l 2xy\mathrm{d}s=0$ 也可由下法得到：以 l_1、l_2 分别表示上、下半椭圆，则它们的方程分别为 l_1：$y=\frac{1}{2}\sqrt{12-3x^2}$和$l_2$：$y=-\frac{1}{2}\sqrt{12-3x^2}$，故

$$\begin{aligned}\oint_l 2xy\mathrm{d}s&=\int_{l_1}2xy\mathrm{d}s+\int_{l_2}2xy\mathrm{d}s\\&=\int_{-2}^{2}x\sqrt{12-3x^2}\sqrt{\frac{16-x^2}{4(4-x^2)}}\mathrm{d}x-\int_{-2}^{2}x\sqrt{12-3x^2}\sqrt{\frac{16-x^2}{4(4-x^2)}}\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

例 8-2　求八分之一的球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$的边界曲线的重心，设曲线的线密度$\rho=1$.

解　边界曲线如图 8-2 所示. 曲线在xOy，yOz，zOx坐标平面内弧段分别为L_1，L_2，L_3，则曲线的质量为

$$m=\int_{L_1+L_2+L_3}\mathrm{d}s=3\cdot\frac{2\pi R}{4}=\frac{3}{2}\pi R.$$

设曲线重心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_{L_1+L_2+L_3}x\mathrm{d}s=\frac{1}{m}\left(\int_{L_1}x\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\mathrm{d}s+\int_{L_3}x\mathrm{d}s\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(\int_{L_1}x\mathrm{d}s+0+\int_{L_3}x\mathrm{d}s\right)=\frac{2}{m}\int_{L_1}x\mathrm{d}s=\frac{2}{m}\int_0^R\frac{Rx\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$=\frac{2R^2}{m}=\frac{4R}{3\pi}.$$

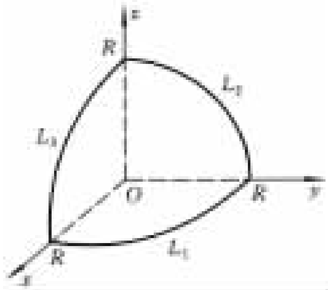

图 8-2

由对称性知 $$\bar{y}=\bar{z}=\bar{x}=\frac{4R}{3\pi},$$

即所求重心为$\left(\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi}\right)$.

例 8-3 计算$\int_c y^2\mathrm{d}s$，c 是摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一拱.

解 $$x^2+y^2=a^2[(1-\cos t)^2+\sin^2 t]=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

所以，$\mathrm{d}s=2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$，

$$\int_c y^2\mathrm{d}s=2a^3\int_0^{2\pi}4\sin^5\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u$$

$$=32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{256}{15}a^3.$$

例 8-4 计算$\int_c(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$，$c$ 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$一周.

解 c 的参数方程为 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

所以 $$x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}=(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2-2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{3}}-2a^{\frac{4}{3}}\cos^2 t\sin^2 t,$$

$$x^2+y^2=9a^2\sin^2 t+\cos^2 t.$$

由对称性，只要求出 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$一段弧上积分的 4 倍，即

$$\int_c(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^{\frac{7}{3}}(1-2\sin^2 t\cos^2 t)\sin t\cos t\mathrm{d}t=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\frac{7}{3}}\left(1-\frac{\sin^2 2t}{2}\right)\sin 2t\mathrm{d}2t$$

$$=6a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin^2 u}{2}\right)\sin u\mathrm{d}u=3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 u)\sin u\mathrm{d}u=4a^{\frac{7}{3}}.$$

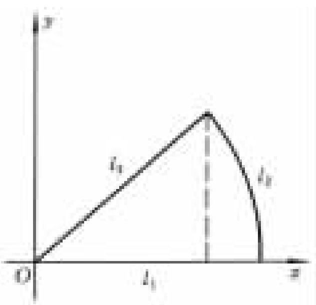

图 8-3

例 8-5 计算$\int_c \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，$c$ 是由 $\rho=a$，$\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{4}$所围平面域的边界. 这里(ρ,θ)是极坐标.

解 如图 8-3，$\int_c=\int_{l_1}+\int_{l_2}+\int_{l_3}$，$l_1$：$y=0$，$x=x$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$.

$$\int_{l_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1.$$

$$l_3:y=x,x=x.$$

所以 $$\mathrm{d}x=\sqrt{1+1}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\mathrm{d}x,\quad\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}x.$$

$$\int_{l_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} d\sqrt{2}x = e^a - 1.$$

在 l_2 上，$x=a\cos t, y=a\sin t, \sqrt{x^2+y^2}=a.$

$$\int_{l_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = e^a \frac{\pi a}{4},$$

故
$$\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \left(\frac{\pi}{4}a+2\right)e^a - 2.$$

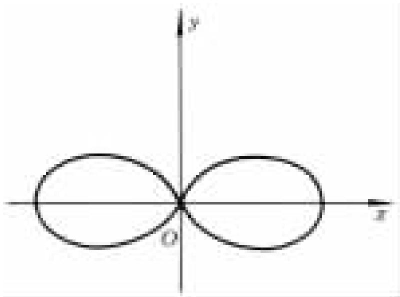

图 8-4

例 8-6　求 $I=\int_c |y| ds$，c **是双纽线** $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ **的一周** $(a>0)$.

解　双纽线（**图** 8-4）**的极坐标方程为** $\rho^2=a^2\cos 2\theta$，**所以**，$2\rho\rho'=-2a^2\sin 2\theta$，$(\rho')^2=\dfrac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$.

$$(ds)^2=[(\rho')^2+\rho^2](d\theta)^2=\frac{a^2(d\theta)^2}{\cos 2\theta}.$$

由对称性知只要计算相应于 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ **一段上积分的** 4 **倍，故**

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$

例 8-7　计算空间曲线 $x=e^{-t}\cos t, y=e^{-t}\sin t, z=e^{-t}(0<t<+\infty)$ **的弧长**.

解　设弧长为 L，**弧为** c.

则
$$L=\int_c ds.$$

$$x'=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t,\quad y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t,\quad z'=-e^{-t}.$$

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2=3e^{-2t}.$$

$$ds=\sqrt{3}e^{-t}dt.$$

$$L=\sqrt{3}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=\sqrt{3}.$$

例 8-8　计算曲线 $(x-y)^2=a(x+y), x^2-y^2=\dfrac{9z^2}{8}$，**从** $O(0,0,0)$ **到** $A(x_0,y_0,z_0)$ **一段的弧长** $(a>0)$.

解　由曲线方程（**联立的**）**可知** $x>0$ **及关于** z **的对称性，不妨设** $z>0$. **为了找参数方便，将曲线的联立方程化一化，并令** $z=\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{3}t^{\frac{3}{2}}$，**得**

$$x-y=\frac{1}{2}3^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}t,$$

$$x+y=a^{-\frac{1}{3}}t^2,\quad \left(0<t<\frac{(3z_0)^{\frac{2}{3}}}{2}\right).$$

由于
$$2[(x')^2+(y')^2]=a^{\frac{2}{3}}+4a^{-\frac{2}{3}}t^2,\quad 2(z')^2=4t.$$

所以，$(x')^2+(y')^2+(z')^2=\dfrac{(a^{\frac{1}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}t)^2}{2}$.

令 $t_0=\frac{(3z_0)^{\frac{2}{3}}}{2}$，那么所求弧长

$$L=\int_c \mathrm{d}s=\int_0^{t_0}\frac{a^{\frac{1}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}(a^{\frac{1}{3}}t_0+a^{-\frac{1}{3}}t_0^2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{a^{\frac{1}{3}}(3z_0)^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{(3z_0)^{\frac{4}{3}}}{4a^{\frac{1}{3}}}\right].$$

注 当空间曲线用二曲面的交线给出时，可以任选一个变量为参数，但为了计算简便，选作变换，使 $(\mathrm{d}s)^2$ 容易计算为好. 化简初等方程的技巧在这里显示出重要性.

例 8-9 计算 $\int_c x^2\mathrm{d}s$，c 为由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y+z=0$ 所表示的圆的一周.

解法 1 先找 c 的一个较易积分的参数方程. 为此，于其方程中消去 z 得

$$x^2+xy+y^2=\frac{R^2}{2},$$

或

$$\frac{3x^2}{4}+\left(y+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{R^2}{2}.$$

令 $x=\frac{\sqrt{2}R\cos t}{\sqrt{3}}$，$y+\frac{x}{2}=\frac{R\sin t}{\sqrt{2}}$.

则

$$x'=-\sqrt{\frac{2}{3}}R\sin t,$$

$$y'=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t-\frac{x}{2}=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}R\sin t,$$

$$z'=-x'-y'.$$

所以，$[(x')^2+(y')^2+(z')^2]=2[(x')^2+(y')^2+x'y']=R^2$.

$$\int_c x^2\mathrm{d}s=R\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^2\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}R^3.$$

解法 2 由 x,y,z 变元间对称性知

$$\int_c x^2\mathrm{d}s=\int_c y^2\mathrm{d}s=\int_c z^2\mathrm{d}s,$$

所以，$\int_c x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_c(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{R^2}{3}\int_c\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}R^3$.

例 8-10 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的弧段($0\leqslant t\leqslant\pi$)的形心.

解

$$x'=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2},\quad y'=a\sin t=2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

$$(x')^2+(y')^2=4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

所以 $t\in[0,\pi]$ 的一段弧长为

$$L=\int_0^{\pi}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a.$$

$$M_y=\int_c x\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{16}{3}a^2.$$

$$M_x=\int_c y\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}2a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{16}{3}a^2,$$

故重心坐标为$\left(\frac{4a}{3},\frac{4a}{3}\right)$.

例 8-11　计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2, x>0, y>0, z>0$ 的边界线的形心坐标.

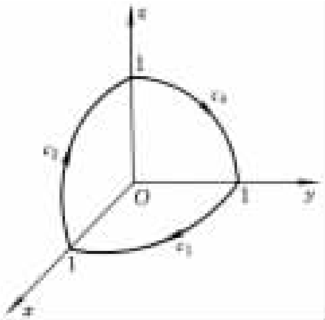

图 8-5

解　如图 8-5 由对称性知，重心为$(\bar{x},\bar{x},\bar{x})$，边界的周长为$\frac{3\pi a}{2}$.

$$\int_c x\,\mathrm{d}s=\int_{c_1}+\int_{c_2}+\int_{c_3}$$

在 c_1 上

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2.\\ z=0\end{cases}$$

$$\mathrm{d}s=a\mathrm{d}t\quad(x=a\cos t, y=a\sin t),$$

所以

$$\int_{c_1}x\,\mathrm{d}s=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=a^2.$$

而

$$\int_{c_1}x\mathrm{d}s=\int_{c_2}x\mathrm{d}s,\quad \int_{c_3}x\mathrm{d}s=0,$$

故

$$\int_c x\,\mathrm{d}s=2a^2,$$

所以重心坐标为$\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$.

例 8-12　计算曲线积分$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 是

(1) 螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$与平面 $x+z=1$ 的交线.

解　(1) 由螺旋线的参数方程，有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\mathrm{d}t=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t$$

故

$$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2t+a^2\sin^2t+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

(2) 曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}\\ x+z=1.\end{cases}$$

方法 1　以 x 作参数，则 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x\\ y=\pm\sqrt{2}\sqrt{2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}, & -\sqrt{2}+\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{2}\\ z=1-x.\end{cases}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-2x}{y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1$$

故

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x.$$

由于用 $-y$ 代替 y 时，被积函数与曲线 Γ 的方程都不变，因此得到

$$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=2\int_{-\sqrt{2}+\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}\frac{9}{2}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{-\sqrt{2}+\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}\frac{9}{2}\frac{2}{\sqrt{4-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}\left[\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=18\pi$$

方法 2　由于曲线 Γ 的方程可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1 & (1)\\ z+x=1 & (2)\end{cases}$$

引入广义极坐标:$x-\frac{1}{2}=\sqrt{2}\cos\theta$, $y=2\sin\theta$. **式**(1)**化为** $r=1$,**从而得曲线** Γ **的参数方程为**

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\\ y=2\sin\theta & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ z=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta,\end{cases}$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta.$$

于是

$$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}\cdot 2\mathrm{d}\theta=18\pi.$$

方法 3　曲线 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ **被平面** $x+z=1$ **所割出的半径为** 2 **的圆周,从而它的周长为** 4π,**于是**

$$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{9}{2}\int_\Gamma\mathrm{d}s=\frac{9}{2}\cdot 4\pi=18\pi.$$

例 8-13　计算 $\int_c\sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$,**其中** c **为** $x^2+y^2+z^2=a^2$ **与** $y=x$ **的交线**.

解法 1　c **为空间一圆周,其在** xOz **平面上的投影为一椭圆周** $2x^2+z^2=a^2$,**即**

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

将椭圆改为参数式,得

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta\\ z=a\sin\theta.\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

由于 $y=x$,**故** c **的参数式方程为**

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta\\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta\\ z=a\sin\theta.\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\frac{a^2}{2}\sin^2\theta+\frac{a^2}{2}\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\int_c\sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s=a\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi a^2.$$

解法 2　以 x **为参数,则** c **在平面** $z=0$ **上下两部分分别可表达为参数式**

$$c_1:\begin{cases}x=x\\ y=x\\ z=\sqrt{a-2x^2}.\end{cases}\quad\left(|x|\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\quad 及\quad c_2:\begin{cases}x=x\\ y=x\\ z=-\sqrt{a-2x^2}.\end{cases}$$

考虑到对称性，有 $\int_c=\int_{c_1}+\int_{c_2}=2\int_{c_1}$，故

$$\int_c\sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s=2\sqrt{2}a\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-2x^2}}=2\pi a^2.$$

例 8-14　计算 $\int_c x^2\mathrm{d}s$，其中 c 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.

解　利用对称性，$\int_c x^2\mathrm{d}s=\int_c y^2\mathrm{d}s=\int_c z^2\mathrm{d}s$，由此有

$$\int_c x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_c(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_c\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}a^3.$$

2. 对坐标的曲线积分

例 8-15　计算 $\int_c(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 c 为曲线 $y=1-|1-x|$ 从对应于 $x=0$ 的点到 $x=2$ 的点.

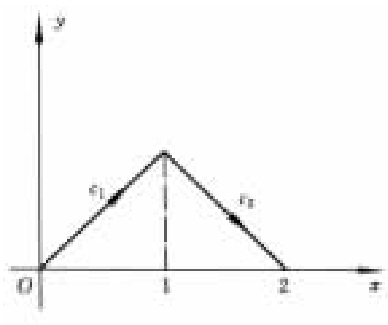

图 8-6

解　由图 8-6 有

$$\int_c=\int_{c_1}+\int_{c_2}=\int_{c_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

在 c_2 上 $y=2-x, \mathrm{d}x=-\mathrm{d}y$.

所以 $\int_{c_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=-2\int_1^0 y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$.

所以 $\int_c(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$.

例 8-16　计算 $\int_c(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 c 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 按 t 增加方向的一拱.

解　$\int_c 2a\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi a}2a\mathrm{d}x=4\pi a^2.$

$$y\mathrm{d}x=a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=a^2(1+\cos^2 t-2\cos t)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_c(-y)\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos^2 t-2\cos t)\mathrm{d}t=-3\pi a^2.$$

$$x\mathrm{d}y=a^2(t-\sin t)\sin t\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_c x\mathrm{d}y=a^2\left(\int_0^{2\pi}+\sin t\mathrm{d}t-\pi\right)=-3\pi a^2.$$

$$\int_c(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=-2\pi a^2.$$

例 8-17　计算 $\int_c y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，$c$ 为按参数增加方向前进的螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解　$y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=(-a^2\sin^2 t+abt\cos t+ab\cos t)\mathrm{d}t,$

$$\int_c y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t+abt\cos t+ab\cos t)\mathrm{d}t=-a^2\pi.$$

例 8-18 计算$\int_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，$c$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax(z\geqslant 0,a>0)$ 的交线(图 8-7). 从 Ox 正向看过去为逆时针方向.

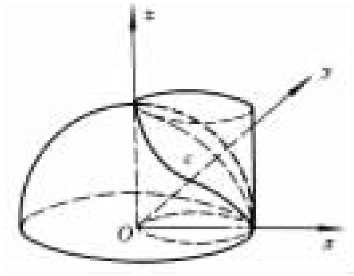

图 8-7

解 c 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos t,\\ y=\dfrac{a}{2}\sin t,\\ z=a\sin\dfrac{t}{2},\end{cases}$$

t 从 0 到 2π. $y^2\mathrm{d}x=-\dfrac{a^3}{8}\sin^3t\mathrm{d}t$，$z^2\mathrm{d}y=\dfrac{a^3}{4}(1-\cos t)\cos t\mathrm{d}t$，$x^2\mathrm{d}z=\dfrac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t$，

所以，
$$\int_c y^2\mathrm{d}x=0,\quad \int_c z^2\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}a^3,\ \int_c x^2\mathrm{d}z=0.$$

$$\int_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{4}a^3.$$

例 8-19 计算$\int_c(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$c$ 为球面三角形 $x^2+y^2+z^2=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 的边界线. 沿它的正向前进时,球面三角形总在右方.

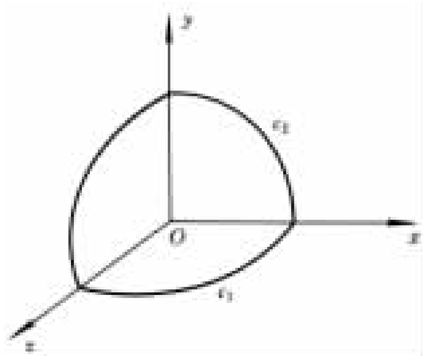

图 8-8

解 由对称性,只要计算在 c_1 上积分的三倍(图 8-8). c_1 的方程为

$$x^2+y^2=1,\ z=0,$$

则参数方程为

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ (t\text{ 从}\frac{\pi}{2}\text{ 到 }0).$$

$$y^2\mathrm{d}x=-\sin^3t\mathrm{d}t,\ -x^2\mathrm{d}y=-\cos^3t\mathrm{d}t.$$

$$\int_c=3\int_{c_1}=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3t+\cos^3t)\mathrm{d}t=4.$$

例 8-20 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在曲线 L 上连续,l 为 L 的长度,$M=\max\limits_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$,证明

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant lM.$$

再利用上面的不等式估计积分

$$I_R=\oint_{C_R}\frac{(y-1)\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2},$$

其中,C_R 为圆周$(x+1)^2+(y-1)^2=R^2$ 的正向,并求$\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|$.

解 应用两类曲线积分的关系式

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s,$$

其中,$\cos\alpha,\sin\alpha$ 为 L 上一点(x,y) 处切线的方向余弦. 由曲线积分性质有

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_L|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\mathrm{d}s.$$

又
$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$0 \leqslant (P\sin\alpha - Q\cos\alpha)^2 = P^2\sin^2\alpha + Q^2\cos^2\alpha - 2PQ\cos\alpha\sin\alpha$$

即
$$2PQ\sin\alpha\cos\alpha \leqslant P^2\sin^2\alpha + Q^2\cos^2\alpha$$

于是
$$(P\cos\alpha + Q\sin\alpha)^2 \leqslant P^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + Q^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = P^2 + Q^2.$$

从而
$$|P\cos\alpha + Q\sin\alpha| \leqslant \sqrt{P^2+Q^2} \leqslant M,$$

故
$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| \leqslant M\int_L \mathrm{d}s = Ml.$$

又在 I_R 中，

$$P^2 + Q^2 = \frac{(x+1)^2+(y-1)^2}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^4} = \frac{R^2}{R^8} = \frac{1}{R^6}.$$

即 $\dfrac{1}{R^3} = M$，故

$$|I_R| = \left|\oint_{C_R} \frac{(y-1)\mathrm{d}x + (x+1)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{R^3}\cdot 2\pi R = \frac{2\pi}{R^2},$$

从而

$$\lim_{R\to+\infty}|I_R| \leqslant \lim_{R\to+\infty}\frac{2\pi}{R^2} = 0,$$

故 $\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R| = 0.$

例 8-21　计算 $\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中，(1) L 为圆周 $x^2+y^2-2y=0$ 的正向；(2) L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向 .

解　(1) L 为圆周 $x^2+(y-1)^2=1$，不包含点(1,0).

$$P = \frac{y}{(x-1)^2+y^2},\ Q = \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

故

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x + (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(2) L 为椭圆 $(x-1)^2 + \dfrac{1}{4}y^2 = 1$ 包含点(1,0)，以(1,0)为圆心，半径为充分小正数 δ 作圆周 C_δ，使 C_δ 含于 L 内，并取 C_δ 为顺时针方向，设 D' 为 L 与 C_δ 所围区域，则由格林公式，得

$$\int_{L+C_\delta} \frac{y\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2} = \iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

用 C_δ^- 表示与 C_δ 反向的圆周，并设 $x = 1+\delta\cos\theta, y = \delta\sin\theta$，则

$$I = \int_L \frac{y\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2} = -\int_{C_\delta} \frac{y\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$$
$$= \int_{C_\delta} \frac{y\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\delta^2\sin^2\theta - \delta^2\cos^2\theta}{\delta^2}\mathrm{d}\theta$$
$$= -2\pi.$$

例 8-22　计算 $\oint_{c^+} \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{[(\alpha x+\beta y)^2 + (\gamma x+\delta y)^2]^n}(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$，其中，$c$ 为椭圆 $(\alpha x+\beta y)^2$

$+(\gamma x+\delta y)^2=1$.

解 由于$(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$,故可引入参数 t,设

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y=\cos t,\\ \gamma x+\delta y=\sin t.\end{cases}\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

又因 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. 故令$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma=\dfrac{1}{A}$,于是,

$$\begin{cases}x=A(\delta\cos t-\beta\sin t),\\ y=A(\alpha\sin t-\gamma\cos t).\end{cases}$$

代入积分,得

$$\oint_{c^+}=\int_0^{2\pi}A(\delta\cos t-\beta\sin t)\mathrm{d}A(\alpha\sin t-\gamma\cos t)-A(\alpha\sin t-\gamma\cos t)\mathrm{d}A(\delta\cos t-\beta\sin t).$$

其中一些项的积分为零,故得

$$\oint_{c^+}=\int_0^{2\pi}A^2[\alpha\delta\cos^2 t-\beta\gamma\sin^2 t+\alpha\delta\sin^2 t-\beta\gamma\cos^2 t]\mathrm{d}t$$

$$=A^2\int_0^{2\pi}(\alpha\delta-\beta\gamma)\mathrm{d}t=2\pi A.$$

例 8-25 计算 $I=\oint_c\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{y-4}{(x-3)^2+(y-4)^2}\right)\mathrm{d}x-\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{x-3}{(x-3)^2+(y-4)^2}\right)\mathrm{d}y$,其中,$c$ 为以点 $A(5,6)$、$B(5,-6)$、$C(-5,-6)$、$D(-5,6)$ 为顶点的矩形(方向为顺时针方向).

解
$$I=\oint_{c^-}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\oint_{c^-}\frac{(y-4)\mathrm{d}x-(x-3)\mathrm{d}y}{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

$$=\oint_{c^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\oint_{c^+}\frac{(x-3)\mathrm{d}y-(y-4)\mathrm{d}x}{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

$$=\oint_{x^2+y^2=1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\oint_{(x-3)^2+(y-4)^2=1}\frac{(x-3)\mathrm{d}y-(y-4)\mathrm{d}x}{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

$$=2\pi+2\pi=4\pi.$$

注 不能从题中条件立即得出判断$\oint_a=0$. 因为被积函数在其所围的区域内有两个“洞”(即不连续点)$(0,0)$ 与$(3,4)$,但积分理论告诉我们:绕包含这两个洞在内的任一闭曲线,其线积分值均相等. 为此据被积函数的形状选择最方便的积分路线,即两个积分进行计算.

例 8-26 计算沿空间曲线的第二型曲线积分$\int_c xyz\mathrm{d}z$,其中,c 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相关的圆,其方向沿曲线依次经过 1,2,7,8 卦限.

解 把圆周 c 分为两段弧,其中

$$c_1:\begin{cases}x=\sqrt{1-2z^2},\\ y=z,\\ z=z.\end{cases}\qquad\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant z\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$c_2:\begin{cases}x=-\sqrt{1-2z^2},\\ y=z,\\ z=z,\end{cases}\qquad\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant z\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

因而
$$\int_c xyz\mathrm{d}z=\int_{c_1}xyz\mathrm{d}z+\int_{c_2}xyz\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z^2\sqrt{1-2z^2}\mathrm{d}z+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}-z^2\sqrt{1-2z^2}\mathrm{d}z$$

$$= 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} z^2\ \sqrt{1-2z^2}\,\mathrm{d}z = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} z^2\sqrt{\frac{1}{2}-z^2}\,\mathrm{d}z,$$

查积分表得

$$\int_c xyz\,\mathrm{d}z = 4\sqrt{2}\left[\frac{z}{8}\left(2z^2-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-z^2}+\frac{\frac{1}{4}}{8}\arcsin\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

注　该题也可用 c 的参数方程 $x=\cos\theta, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 进行计算．

例 8-25　计算 $\int_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，式中，$c$ 为维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax(z\geqslant 0, a>0)$，若从 x 轴的正方向$(x>a)$看去，此曲线是沿逆时针方向进行的．

解　柱面方程 $x^2+y^2=ax$，可改写为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，若令 $x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t$，$y=\frac{a}{2}\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$
$$=\sqrt{a^2-\left[\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}+\frac{a^2\sin^2 t}{4}\right]}=a\sin\frac{t}{2}.$$

从而，曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+\cos t)}{2},\quad y=\frac{a\sin t}{2},\quad z=a\sin\frac{t}{2}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

故
$$\int_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3\sin^3 t}{8}+\frac{a^3\sin^2\frac{t}{2}\cos t}{2}+\frac{a^3\cos^3\frac{t}{2}}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{8}(1-\cos t)\mathrm{d}(\cos t)+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\cos t\,\mathrm{d}t+a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}\left(\sin\frac{t}{2}\right)$$
$$=\frac{a^3}{8}\left[\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi}+\frac{a^3}{4}\left[\sin t-\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$+a^3\left[\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-\frac{\pi}{4}a^3.$$

例 8-26　计算 $\oint_c(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，$c$ 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx$，$x^2+y^2=2ax(0<a<R, z>0)$，且 c 按如此方向进行，使它在球的外表面上所围成的小区域 D 在其左方．

解　若空间曲线方程是由两个曲面方程联立的形式给出时，一般先将其化为参数方程，再进行计算．

因此，由 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 及 $x^2+y^2=2ax$ 消去 y，得 $z=\sqrt{2(R-a)x}$，用柱面坐标中 θ 作参数，因 $x^2+y^2=2ax$，柱面坐标方程为 $=2a\cos\theta$，故曲线 c 的参数方程为

$$x=\cos\theta=2a\cos^2\theta,$$
$$y=\sin\theta=2a\cos\theta\sin\theta=a\sin 2\theta,$$
$$z=\sqrt{2(R-a)2a\cos^2\theta}=2\sqrt{a(R-a)}\cos\theta.$$

于是
$$\mathrm{d}x=-4a\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}y=2a\cos 2\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z=-2\sqrt{a(R-a)}\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

所以
$$I=\oint_c(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2\sin^2 2\theta+4(R-a)a\cos^2\theta](-4a\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[4a(R-a)\cos^2\theta+4a^2\cos^4\theta]\cdot 2a\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[4a^2\cos^4\theta+a^2\sin^2 2\theta](-2\sqrt{a(R-a)})\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

上式第一、三两个积分的被积函数为奇函数，故第一、三两个积分值为 0，**第二个积分的被积函数为偶函数．因此**

$$I=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(R-a)\cos^2\theta+a\cos^4\theta](2\cos^2\theta-1)\mathrm{d}\theta$$

$$=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-(R-a)\cos^2\theta+(2R-3a)\cos^4\theta+2a\cos^6\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=16a^2\left[-(R-a)\cdot\frac{\pi}{4}+(2R-3a)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2a\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=16a^2\pi\left[-\frac{R}{4}+\frac{a}{4}+\frac{2}{8}R-\frac{9}{16}a+\frac{15}{48}a\right]=2a^2R\pi.$$

例 8-27　计算积分$\int_c(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，**其中** c **是沿螺线** $x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi,z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ **从点** $A(a,0,0)$ **至点** $B(a,0,h)$ **的一段弧** $\widehat{AmB}$.

解法 1　直接计算

$$\int_c(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\left(a^2\cos^2\varphi-\frac{ah}{2\pi}\varphi\sin\varphi\right)(-a\sin\varphi)+(a^2\sin^2\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{ah}{2\pi}\varphi\cos\varphi\right)(a\cos\varphi)+\left(\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi^2-a^2\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\frac{h}{2\pi}\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[a^3\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)-\frac{a^2h}{2\pi}\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)+\frac{h^3}{8\pi^3}\varphi^2\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi-\frac{a^2h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi+\frac{h^3}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\varphi^2\mathrm{d}\varphi$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

下面分别求 I_1,I_2,I_3.

$$I_1=a^3\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi=0.$$

$$I_2=-\frac{a^2h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\mathrm{d}\varphi=-\frac{a^2h}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\varphi\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$=-\frac{a^2h}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi\mathrm{d}\sin 2\varphi-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\varphi\mathrm{d}\cos 2\varphi\right]$$

$$=-\frac{a^2h}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(\varphi\sin 2\varphi\mid_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi)-\frac{1}{4}(\varphi\cos 2\varphi)\mid_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi\right]=0.$$

$$I_3=\frac{h^3}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\varphi^2\mathrm{d}\varphi=\frac{h^3}{8\pi^3}\cdot\frac{1}{3}\varphi^3\Big|_0^{2\pi}=\frac{h^3}{3}.$$

故
$$\int_c(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\frac{h^3}{3}.$$

解法 2　以直线段 BA 接于曲线$\widehat{AmB}$，形成封闭曲线，并利用斯托克斯公式计算. 因直线段 AB 所在的直线的参数方程是 $x=a, y=0, z=t$，故

$$\int_{\widehat{AmB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\widehat{AmBA}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$-\int_{\overline{BA}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial(z^2-xy)}{\partial y}-\frac{\partial(y^2-xz)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left[\frac{\partial(x^2-yz)}{\partial z}-\frac{\partial(z^2-xy)}{\partial x}\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+\left[\frac{\partial(y^2-xz)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2-yz)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_A^0 t^2\mathrm{d}t$$

$$=0-\frac{1}{3}t^3\Big|_h^0=\frac{h^3}{3}.$$

注　其中 Ω 是$\widehat{AmB}$ 和$\overline{BA}$ 所围成的光滑曲面.

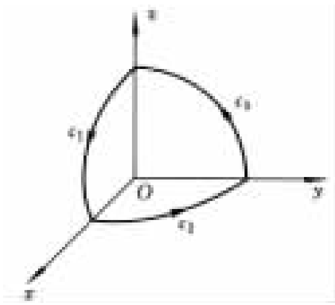

图 8-9

例 8-28　计算沿空间曲线的第二型曲线积分$\int_c(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中，$c$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界曲线，其方向按曲线依次经过 xOy 平面部分，yOz 平面部分和 zOx 平面部分.

解　把 c 分为三部分(图 8-9)

$$c_1:\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=0,\\ z=\sin\theta.\end{cases}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$c_2:\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\\ z=0.\end{cases}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$c_3:\begin{cases}x=0,\\ y=\cos\theta,\\ z=\sin\theta.\end{cases}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

因而

$$\int_{c_1}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^3\theta+(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\cdot 0+(\cos^2\theta-0)\cdot\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^3\theta+\cos^3\theta]\mathrm{d}\theta=-\frac{4}{3},$$

$$\int_{c_2}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\sin^3\theta-\cos^2\theta\cdot\cos\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^3\theta+\cos^3\theta]\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{4}{3},$$

$$\int_{c_3}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdot 0+(\sin^2\theta-0)\cdot(-\sin\theta)+(-\cos^2\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{4}{3},$$

故 $$\int_c(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z=\int_{c_1}+\int_{c_2}+\int_{c_3}=-4.$$

例 8-29　质点 P **沿着以** AB **为直径的半圆周,从点** $A(1,2)$ **运动到点** $B(3,4)$ **的过程中受变力** $\boldsymbol{F}$ **作用(图** 8-10),$\boldsymbol{F}$ **的大小等于点** P **与原点** O **之间的距离,其方向垂直于线段** OP,**且与** y **轴正向的夹角小于** $\frac{\pi}{2}$. **求变力** $\boldsymbol{F}$ **对质点** P **所作的功**.

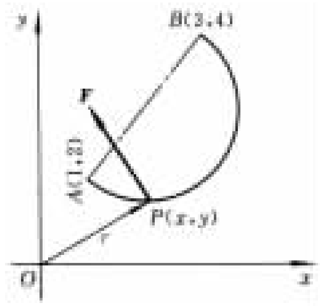

图 8-10

解　按题意,变力

$$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}.$$

圆弧 $\widehat{AB}$ **的参数方程是**

$$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}\quad -\frac{3}{4}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

变力 $\boldsymbol{F}$ **所作的功**

$$W=\int_{\widehat{AB}}-y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta=2(\pi-1).$$

例 8-30　在过点 $O(0,0)$ **和** $A(\pi,0)$ **的曲线族** $y=a\sin x(a>0)$ **中,求一条曲线** L,**使沿该曲线从** O **到** A **的积分** $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ **的值最小**.

解　$I(a)=\int_0^{\pi}[1+a^3\sin^3x+(2x+a\sin x)a\cos x]\mathrm{d}x=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3.$

令 $I'(a)=4(a^2-1)=0$,**得** $a=1$($a=-1$ **舍去**),**且** $a=1$ **是** $I(a)$ **在**$(0,+\infty)$ **内的惟一驻点**.
又由于 $I''(1)=8>0$,**所以** $I(a)$ **在** $a=1$ **处取到最小值**. **因此所求曲线是**

$$y=\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

例 8-33　在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ **的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面** $\frac{x_2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **上第一卦限的点** $M(\xi,\eta,\zeta)$,**问** ξ,η,ζ **取何值时,力** $\boldsymbol{F}$ **所作的功** W **最大?并求出** W **的最大值**.

解　直线段 OM:$x=\xi t$, $y=\eta t$, $z=\zeta t$, t **从** 0 **到** 1,**功** W **为**

$$W=\int_{\overline{OM}}yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta.$$

下面求 $W=\xi\eta\zeta$ **在条件** $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1(\xi\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0,\ \zeta\geqslant 0)$ **下的最大值**.

令 $$F(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}\right).$$

由 $$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\xi}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial\eta}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial\zeta}=0,\end{cases}$$ **得** $$\begin{aligned}\eta\zeta&=\frac{2\lambda}{a^2}\xi,\\ \xi\zeta&=\frac{2\lambda}{b^2}\eta,\\ \xi\eta&=\frac{2\lambda}{c^2}\zeta,\end{aligned}$$

从而$\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}$,即得$\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}$. 于是得

$$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\ \eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\ \zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

由问题的实际意义知

$$W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc.$$

3. 对面积的曲面积分

例 8-31　计算$\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S$,$S$是半球面$x^2+y^2+z^2=a^2$,$z\geqslant 0(a>0)$.

解　由对称性知

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S=0,$$

只要计算$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$. 因为$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

$$z_x'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y'=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以,

$$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}s=a\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3,$$

故

$$\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S=\pi a^3.$$

例 8-32　计算$\iint\limits_S|xyz|\,\mathrm{d}S$,$S$是$z=x^2+y^2$被平面$z=1$所割下的有限部分.

解　由对称性,只要算$x>0$,$y>0$的部分,

所以

$$I=\iint\limits_S|xyz|\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}xyz\,\mathrm{d}S,$$

由$z=x^2+y^2$,得

$$z_x'=2x,\ z_y'=2y,\ \mathrm{d}S=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\sin\theta\cos\theta\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=\int_0^1 r_4\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r^2$$

$$=\int_0^1 u^2\sqrt{1+4u}\,\mathrm{d}u\qquad(\text{令 } r^2=u)$$

$$=\frac{1}{23}\int_1^{\sqrt{5}}(t^4-2t^2+1)t^2\,\mathrm{d}t\quad(\text{令 }\sqrt{1+4u}=t)$$

$$=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

例 8-33　计算$\iint\limits_S\dfrac{\mathrm{d}S}{\rho}$,$S$是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,$\rho$为椭球中心到切平面的距离.

解　设(x,y,z)是椭球面上一点,则切平面方程是

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0,$$

(X,Y,Z) 是平面上的动点，

所以，$\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$.

设 S 在 xOy 上投影是 $D: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$. 由对称性，只要算上半面上积分的 2 倍，这时

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

所以，$\mathrm{d}S = \dfrac{c^2}{z}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{\rho} &= 2c^2\iint_D\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \frac{2c^2x^2}{a^4z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \frac{2c^2y^2}{b^4z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \frac{2z}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{2ab}{c}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{1-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{4\pi abc}{3c^2},$$

由对称性知

$$I_1 = \frac{4\pi abc}{3a^2},\quad I_2 = \frac{4\pi abc}{3b^2},$$

$$I = \frac{4\pi abc}{3a^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

例 8-34 求面密度为 1 的均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0$ 对 Oz 轴的转动惯量.

解法 1 因为

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ \mathrm{d}S = \frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以，

$$\begin{aligned}
J &= \iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} a\frac{x^2+y^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r = 2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t \quad (\text{令 } r = a\sin t) \\
&= \frac{4}{3}\pi a^4 = \frac{Ma^2}{3}(M\ \text{为半球面的质量}).
\end{aligned}$$

解法 2 它是全球面绕 Oz 轴转动惯量的一半，而

$$\begin{aligned}
\oiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S &= \frac{2}{3}\oiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S \\
&= \frac{2}{3}a^2\oiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}\mathrm{d}S = \frac{8}{3}\pi a^4,
\end{aligned}$$

所以，$J = \dfrac{4}{3}\pi a^4 = \dfrac{M}{3}a^2$ （M 是质量).

例 8-35 求 $F(t) = \oiint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1, \\ 0, & x^2+y^2+z^2>1. \end{cases}$$

解　当 $|t| \geqslant \sqrt{3}$ 时，平面 $x+y+z=t$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切或不相交，这时总有

$$\oiint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 0.$$

故考虑 $|t| < \sqrt{3}$ 的情况，此时

$f(x,y,z)=1-\rho^2$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$，与平面 $x+y+z=t$ 所交成的圆域上的任一点 (x,y,z) 到原点的距离．积分域就是此圆域，此圆域到原点的距离为 $\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}$．由对称性，可以将此坐标系作一旋转，使平面 $x+y+z=t$ 上的积分域旋转到 $z=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$ 这一平面上．

则
$$\begin{aligned}F(t) &= \iint_{z=\frac{t}{\sqrt{3}}} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1-\frac{t^2}{3}} \left(1-\frac{t^2}{3}-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2 - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}} r^3\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.\end{aligned}$$

所以，
$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & |t| < \sqrt{3}, \\ 0, & |t| \geqslant \sqrt{3}.\end{cases}$$

例 8-36　求面密度为 1 的均匀锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0 \quad (0 \leqslant z \leqslant b)$ 对直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-b}{0}$ 的转动惯量．

解　空间任一点 (x,y,z) 到此直线距离的平方为

$$d^2 = y^2+(z-b)^2,$$

而 S 为锥面 $z=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant b)$，

所以
$$\begin{aligned}J &= \iint_S [y^2+(z-b)^2]\mathrm{d}S \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}[y^2+(z-b)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left[\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\left(\frac{b}{a}r-b\right)^2\mathrm{d}r\right] \\ &= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{12}(3a^2+2b^2)a\pi.\end{aligned}$$

例 8-37　求半径为 R 的均匀球面（设面密度为 1）对空间一单位质点的引力．

解　在球面上的任取一点 (x,y,z) 和含此点的面积微元 $\mathrm{d}S$（取定坐标系如图 8-11 所示，定点在 $(0,0,a)$ 处．

则
$$|\mathrm{d}F| = \frac{G\mathrm{d}S}{r^2}$$

$\mathrm{d}F$ 的三个分量为

$$\mathrm{d}F_x = \frac{Gx\mathrm{d}S}{r^3},\quad \mathrm{d}F_y = \frac{Gy\mathrm{d}S}{r^3},\quad \mathrm{d}F_z = \frac{G(z-a)\mathrm{d}S}{r^3},$$

所求力
$$F=\{F_x,\ F_y,\ F_z\}.$$

则由对称性知

$$F_x = F_y = 0,$$

而
$$F_z = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{G(z-a)}{r^3}\mathrm{d}S,$$

球面参数方程为

$$x = R\cos\theta\sin\varphi,\quad y = R\sin\theta\sin\varphi,\quad z = R\cos\varphi,$$

所以，
$$\mathrm{d}S = R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

故
$$F_z = G\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\varphi(R\cos\varphi - a)}{(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi GR^2\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\varphi - a)\sin\varphi}{(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi.$$

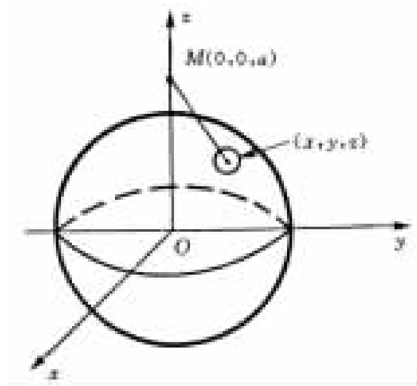

图 8-11

令
$$a^2+R^2-2aR\cos\varphi = t^2,$$

则
$$F_z = \frac{GR\pi}{a^2}\int_{|a-R|}^{a+R}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} 0, & a < R, \\ -\dfrac{4\pi R^2 G}{a^2}, & a > R. \end{cases}$$

所以，
$$\boldsymbol{F} = \begin{cases} \{0,0,0\} & a < R, \\ \left\{0,0,-\dfrac{4\pi R^2 G}{a^2}\right\}, & a > R. \end{cases}$$

此结果表明：当质点在球内，引力为零；当质点在球外，引力如同球面的质量集中于球心时对该点的引力．读者不难仿此得到当 $a > R$ 的情况．

4. 对坐标的曲面积分

例 8-38 计算曲面积分$\iint\limits_S (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为有向曲面 $z = x^2+y^2 (0 \leqslant z \leqslant 1)$，其法向量与 z 轴正向夹角为锐角．

解法 1 以 S_1 表示法向量指向 z 轴负向的有向平面 $z = 1(x^2+y^2 \leqslant 1)$，$D$ 为 S_1 在 xOy 平面上的投影区域，则

$$\iint\limits_{S_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D - \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi.$$

设 Ω 表示由 S 和 S_1 所围成的空间区域，则由高斯公式知

$$\oiint\limits_{S+S_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint\limits_{\Omega}(2+1)\mathrm{d}v = -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z$$

$$= -6\pi\int_0^1 (r-r^3)\mathrm{d}r = -6\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}\pi.$$

因此
$$\iint\limits_S (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{3}{2}\pi - (-\pi) = -\frac{1}{2}\pi.$$

解法 2 设 D_{yz}，D_{xy} 分别表示 S 在 yOz 平面，xOy 平面上的投影区域，则

$$\iint\limits_S (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(2\sqrt{z-y^2}+z)(-\mathrm{d}y\mathrm{d}z)+\iint\limits_{D_{yz}}(-2\sqrt{z-y^2}+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\int_0^1(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{y=\sin t}\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\iint\limits_{S}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

例 8-39　计算$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Sigma$ **是椭球面**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **上** $x\geqslant 0$ **的部分．取椭球面外侧为正侧．**

解　因为 $x\geqslant 0$，**故** Σ **的方程为** $x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$，$\Sigma$ **在** yOz **平面上的投影区域** D **为**

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\\ x=0.\end{cases}$$

从而

$$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=a^3\iint\limits_{D}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

令 $y=br\cos\theta,z=cr\sin\theta$，**则** $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=bcr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，**故**

$$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=a^3\iint\limits_{D}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}bcr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}r\mathrm{d}r=\frac{2}{5}\pi a^3bc.$$

例 8-40　计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$，$\Sigma$ **为椭球面**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **的外表面．**

解　令 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，**其中** Σ_1 **为上半椭球面** $z_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ **的上侧，**Σ_2 **为下半椭球面** $z_2=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ **的下侧．**

Σ **在** xOy **平面上的投影区域为** $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，**从而**

$$\iint\limits_{\Sigma}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z_2}=2\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$=2\iint\limits_{D}\frac{abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi ab}{c},$$

同理可得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\frac{4\pi bc}{a},\ \iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{y}=\frac{4\pi ac}{b}.$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right).$$

例 8-41 **计算**$\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\Sigma$ **是圆柱面** $x^2+y^2=R^2$、**平面** $x=0$，$y=0$，$z=0$ **及** $z=h$ **所围在第一卦限中的一块立体的表面外侧**.

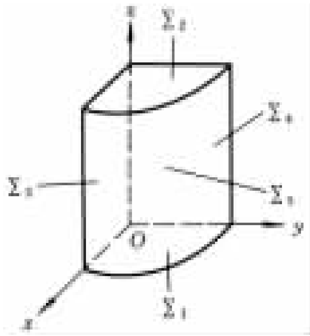

图 8-12

解 　如图 8-12 所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5$，**其中**，

$$\Sigma_1: z=0;\ \Sigma_2: z=h;\ \Sigma_3: y=0;\ \Sigma_4: x=0;$$

$$\Sigma_5: x^2+y^2=R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$$

$$\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}} y\cdot 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}} hy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{h}{3}R^3,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_4} zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_5} zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\iint\limits_{D_{yz}} z\cdot 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{yz}} z\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^R\mathrm{d}y\int_0^h z\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{8}R^2h^2,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma_3} xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_5} xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D_{xz}} x\cdot 0\mathrm{d}z\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{h}{3}R^3.$$

故

$$\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x=hR^2\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi h}{8}\right).$$

例 8-42 **计算**$\oiint\limits_{\Sigma} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ **是由圆柱面** $x^2+y^2=ax$ **与平面** $z=h_1$，$z=h_2(h_2>h_1>0)$ **所围成的立体表面的外侧**.

解 　$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$，**其中** Σ_1 **为圆柱面** $x^2+y^2=ax$ **的外侧**，Σ_2 **为平面** $z=h_2$ **的上侧**，Σ_3 **为平面** $z=h_1$ **的下侧**.

Σ_1 **在** xOy **平面上的投影为圆周** $x^2+y^2=ax$，**故**

$$\iint\limits_{\Sigma_1} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

而 Σ_2，Σ_3 **在** xOy **平面上的投影区域为** $D: x^2+y^2\leqslant ax$，**所以**

$$\iint\limits_{\Sigma_2} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=h_2\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=h_2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=h_2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{2}{3}a^3h_2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{9}h_2(3\pi-4)a^3.$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma_3} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-h_1\iint_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{9}h_2(3\pi-4)a^3.$$

所以
$$\oiint_{\Sigma} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{\Sigma_2} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_3} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{9}(h_2-h_1)(3\pi-4)a^3.$$

例 8-43　已知 $f(x),g(y),h(z)$ **为连续函数,计算**

$$\iint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ **其中**

$\sum$ **为平行六面体** $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$ **的外表面**.

解　先计算 $\iint_{\Sigma} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\sum$ **是由** $\sum_1,\sum_2,\sum_3,\sum_4,\sum_5,\sum_6$ **六个平面所围成的**.

$\sum_1: x=0$ **取后侧**；$\sum_2: x=a$ **取前侧**；$\sum_3: y=0$ **取左侧**；

$\sum_4: y=a$ **取右侧**；$\sum_5: z=0$ **取下侧**；$\sum_6: z=a$ **取上侧**.

由于 $\sum_1,\sum_2,\ \sum_3,\sum_4$ **在** xOy **平面上的投影区域是一线段,故**

$$\iint_{\Sigma_1} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_3} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_4} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又
$$\iint_{\Sigma_5} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-h(0)\iint_{\substack{0\leqslant z\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-abh(0),$$

$$\iint_{\Sigma_6} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=h(0)\iint_{\substack{0\leqslant z\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abh(c).$$

故
$$\iint_{\Sigma} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=[h(c)-h(0)]ab.$$

同理可得
$$\iint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=[f(a)-f(0)]bc,$$

$$\iint_{\Sigma} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=[g(b)-g(0)]ac.$$

所以
$$\iint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

5. 格林公式、高斯公式、斯托克斯公式及其他

例 8-44　求 $I=\iint_{D} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ **为球面**

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ **的上半部分之上侧**.

解法 1　利用高斯公式．补 $z=c$ **的圆** $S_1:(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$ **的下侧,所以,**

$$I=\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_1}=3\iiint_{V}\mathrm{d}v+\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3+c\pi R^2.$$

解法 2　直接计算

$$\oiint_S z\,dxdy = \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} [c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]dxdy$$

$$= c\pi R^2 + \iiint_{u^2+v^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-u^2-v^2}dudv = c\pi R^2 + \frac{2}{3}\pi R^3.$$

$$\oiint_S x\,dydz = \iint_{\substack{(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2\\ c\leqslant x}} [a+\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}]dydz$$

$$- \iint_{\substack{(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2\\ c\leqslant x}} [a-\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}]dydz$$

$$= 2\iint_{\substack{u^2+v^2\leqslant R^2\\ 0\leqslant v}} \sqrt{R^2-u^2-v^2}dudv = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

同理，
$$\iint_S y\,dzdx = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以，$I = c\pi R^2 + 2\pi R^3$.

例 8-45 求 $I=\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$，$S$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外表面.

解 用高斯公式，补一个 $S_1: z=h,\ x^2+y^2\leqslant h^2$，

则
$$I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = 0 - \iint_{x^2-y^2\leqslant h^2} (x-y)dxdy = 0.$$

例 8-46 求 $I=\oiint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，$S$ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外表面.

解 用高斯公式得

$$I = 2\iiint_V (x+y+z)dv,$$

这里 $(v): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$.

而积分 $\iiint_V x\,dv$ 是静矩，我们知道球的形心即球心

$$\bar{x}=a,\quad \bar{y}=b,\quad \bar{z}=c,$$

所以，
$$\frac{\iiint_V x\,dv}{\frac{4\pi R^3}{3}} = a,\quad \text{即}\quad \iiint_V x\,dv = \frac{4\pi R^3}{3}a,$$

所以，
$$I = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c).$$

例 8-47 计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma (x^3+az^2)dydz + (y^3+ax^2)dzdx + (z^3+ay^2)dxdy,$$

其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 记 S 为平面 $z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 的下侧，Ω 为 Σ 与 S 所围成的空间区域.

$$I = \oiint_{\Sigma+S} (x^3+az^2)dydz + (y^3+ax^2)dzdx + (z^3+ay^2)dxdy$$

$$-\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}a\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5.$$

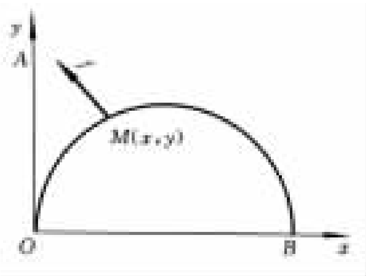

图 8-13

例 8-48　设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$（$k>0$ 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离），质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

解　由图 8-13，

$$\overrightarrow{MA}=\{0-x,1-y\},r=|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{x^2+(1-y)^2}.$$

引力 f 的方向与 $\overrightarrow{MA}$ 一致，故

$$\boldsymbol{f}=\frac{k}{r^3}\{-x,1-y\}.$$

从而，引力所作的功

$$W=\int_{\widehat{BO}}\frac{k}{r^3}[-x\mathrm{d}x+(1-y)\mathrm{d}y]=k\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

注　因线积分与路径无关，故取沿 $\widehat{BO}$ 积分得出结果.

例 8-49　设曲线积分 $\int_C xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中，$\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

解　由 $P(x,y)=xy^2$，$Q(x,y)=y\varphi(x)$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，得

$$2xy=y\varphi'(x),\quad \varphi(x)=x^2+C.$$

再由 $\varphi(0)=0$，得 $C=0$，故 $\varphi(x)=x^2$. 所以

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y.$$

沿直线 $y=x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 积分，得

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

例 8-50　设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分

$$\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

与路径无关，并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解　由曲线积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x.$$

于是,$Q(x,y)=x^2+C(y)$,其中,$C(y)$ 为待定函数.

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t[1^2+C(y)]\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y.$$

由题设知 $t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y$. 两边对 t 求导,得

$$2t=1+C(t),\quad C(t)=2t-1.$$

从而 $C(y)=2y-1$,所以 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

例 8-51 设空间区域 Ω 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成,其中,a 为正常数.记 Ω 表面的外侧为 S,Ω 的体积为 V,证明:

$$\oiint_S x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(1+xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=V.$$

证 由高斯公式知

$$\oiint_S x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(1+xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_S(1+2xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=V+2\iiint_\Omega xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

因 Ω 关于 xOz 坐标面对称,xyz 是域 Ω 上关于 y 的奇函数,故有

$$\iiint_\Omega xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

所以,等式成立

例 8-52 求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中,$a,b$ 为正的常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解法 1 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1,

$$I=\int_{L\cup L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$$

$$-\int_{L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y.$$

由格林公式,前一积分

$$I_1=\iint_D(b-a)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

其中,D 为 $L\cup L_1$ 所围成的半圆域.直接计算后一积分可得

$$I_2=\int_0^{2a}(-bx)\mathrm{d}x=-2a^2b.$$

从而

$$I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.$$

解法 2 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$

$$=\int_L \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y-\int_L b(x+y)\mathrm{d}x+ax\mathrm{d}y.$$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = e^x \sin y \Big|_{(2a,0)}^{(0,0)} = 0.$$

对后一积分，取 L 的参数方程：$\begin{cases} x = a + a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ t 从 0 到 π，得

$$\int_L b(x+y)dx + ax dy = \int_0^{\pi} (-a^2 b\sin t - a^2 b\sin t\cos t - a^2 b\sin^2 t + a^3 \cos t + a^3 \cos^2 t) dt$$

$$= -2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3,$$

从而
$$I = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3.$$

例 8-53　设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S x f(x) dydz - xy f(x) dzdx - e^{2x} z dxdy = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. 求 $f(x)$.

解　由题设和高斯公式得

$$0 = \oiint_S x f(x) dydz - xy f(x) dzdx - e^{2x} z dxdy$$

$$= \pm \iiint_V (x f'(x) + f(x) - x f(x) - e^{2x}) dv,$$

其中，V 为 S 围成的有界闭区域，当有向曲面 S 的法向量指向外侧时，取“+”号，当有向曲面 S 的法向量指向内侧时，取“−”号．由 S 的任意性，知

$$x f'(x) + f(x) - x f(x) - e^{2x} = 0,\ x > 0,$$

即
$$f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) f(x) = \frac{1}{x} e^{2x},\ x > 0.$$

按一阶线性非齐次微分方程通解公式，有

$$f(x) = e^{\int \left(1-\frac{1}{x}\right) dx} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\int \left(1-\frac{1}{x}\right) dx} dx + C\right]$$

$$= \frac{e^x}{x}\left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot x e^{-x} dx + C\right] = \frac{e^x}{x}(e^x + C).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{e^{2x} + Ce^x}{x}\right] = 1$，故必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{2x} + Ce^x) = 0$，从而 $C = -1$.

于是
$$f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1).$$

例 8-54　计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向．

解　记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影，由斯托克斯公式得

$$I = \iint_S (-2y - 4z) dydz + (-2z - 6x) dzdx + (-2x - 2y) dxdy$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z) dS = -2\iint_D (x - y + 6) dxdy = -12\iint_D dxdy = -24.$$

例 8-55 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y.$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值 .

(1) **证** 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2 f(x,y)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\right\}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 I 与路径无关 .

(2) **解法 1** 由于 I 与路径无关，故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 (c,d) 的折线段，所以

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2 f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2 f(cy)-1]\mathrm{d}y\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 $ab=cd$ 时，$\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=0$，由此得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

解法 2 $I=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y$，

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y=\int_L f(xy)\mathrm{d}(xy)=F(cd)-F(ab).$$

所以当 $ab=cd$ 时，$F(cd)-F(ab)=0$，由此得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

例 8-56 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界 . 试证：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

证法 1 (1) 左边 $=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$，

右边 $=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$，

所以

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(2) 由于 $\mathrm{e}^{\sin x}-\mathrm{e}^{-\sin x}\geqslant 2$，故由(1) 得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2.$$

证法 2 (1) 根据格林公式，得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma.$$

因为 D 关于 $y = x$ 对称，所以

$$\iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

故$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$

（2）由（1）知

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma.$$

$$= \iint_D (\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint_D 2\mathrm{d}\sigma = 2\pi^2.$$

例 8-57　设物体 V（表面 S 光滑）沉浸在液体中，试从帕斯卡定律出发，证明阿基米德定律．

证　帕斯卡原理是说：物体浸入液体中表面各点所受的压力 $p = \rho h$，h 是此点距液体表面的深度，ρ 是液体的密度，设选择坐标系如图 8-14，则物体表面各点的压力为 $p = \rho z$，物体表面所受总压力为

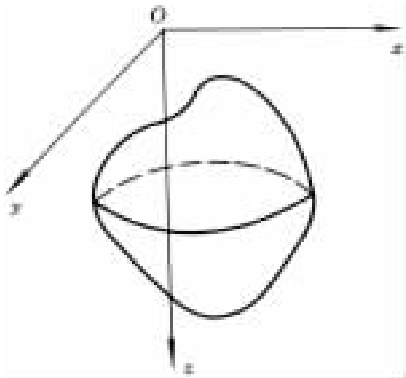

图 8-14

$$F = -\rho\oiint_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\rho\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= -\rho V = -W,$$

其中，V 即物体的体积，也就是它排开液体的体积，W 是被排开液体的重量．阿基米德原理：沉浸在液体中的物体受到的浮力等于该物体所排除液体的重量．注：如物体不是全部浸入水中，此定律仍成立，不过此时要加上一个平面域：$z = 0$ 与 V 相交部分 S_2，但在 S_2 上$\iint_{S_2} z\mathrm{d}S = 0$，故仍有

$$\iint_{S_2} z\mathrm{d}S = \iint_{S_1+S_2} z\mathrm{d}S = \rho V_1 = W.$$

故阿基米德原理仍成立．

例 8-58　设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且对任意实数 x_0，y_0 和 R 皆有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

L 是半圆 $y = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$，试证明：

$$P(x,y) \equiv 0,\quad Q'_x \equiv 0.$$

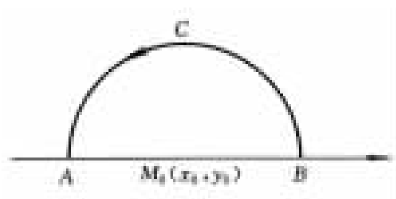

图 8-15

证　如图 8-15，(x_0,y_0) 是平面上任一点，只要证明 $P(x_0,y_0) = 0$，$\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$ 即可，作半圆 $y = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$，则由题设

$$\int_{\overset{\frown}{ACB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0,$$

所以，
$$\oint_{ABCA} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由积分中值定理得

$$P(\xi_1,y_0)\cdot 2R=\frac{\pi}{2}R^2(Q_x-P_y)\Big|_{(\xi,\eta)}，其中\ \xi_1\in[x_0-R,x_0+R]；$$

$(\xi,\eta)\in D$，约去 R，并令 $R\to 0$，得 $P(x_0,y_0)=0$，即 $P(x,y)\equiv 0$，所以，$(Q_x-P_y)|_{(x_0,y_0)}=0$，即 $Q_x=0$，从而 $Q_x\equiv 0$.

例 8-59 计算

$$\oint_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z,$$

其中，c 为曲线 $x^2+y^2+z^2=R^2,x^2+y^2=Rx,(R>0,\ z\geqslant 0)$. 从 Ox 轴的正方向看时，曲线是依顺时针方向进行的．

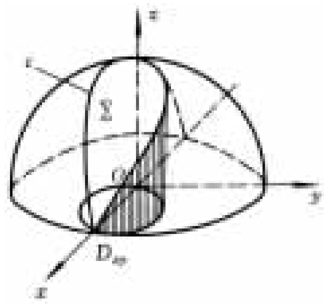

图 8-16

解法 1 设 $\sum$ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧被 c 包围的部分（图 8-16），应用斯托克斯公式，注意到曲线 c 的方向与公式中所要求的方向相反，故在曲面积分前面要加一负号，即

$$\oint_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$$

$$=-\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=2\iint_\Sigma(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_\Sigma\left(\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\left(\sqrt{R^2-y^2-z^2}\cdot\frac{x}{R}+\frac{xy}{R}+\frac{y}{R}\ \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\left(x+\frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\left[r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}\right]r\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi R^3.$$

解法 2 图及符号规定如下，应用斯托克斯公式，得

$$\oint_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=2\iint_\Sigma(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

由于 $\sum$ 关于平面 $y=0$ 对称，所以 $\iint_\Sigma x\cos\beta\mathrm{d}S=0$. 又在 $\sum$ 上，$\cos\alpha=\dfrac{x}{R}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{R}$，所以

$$z\cos\alpha=z\cdot\frac{x}{R}=x\cdot\frac{z}{R}=x\cos\gamma.$$

于是有

$$\oint_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=2\iint_\Sigma(x+y)\cos\gamma\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_{D_{xy}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}r(\cos\theta+\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + \sin\theta)\cos^3\theta d\theta = \frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{4}R^3.$$

其中因 $\sin\theta \cdot \cos^3\theta$ 为奇函数，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3 d\theta = 0$.

例 8-60　计算 $\int_c (f(y)e^x - 3y)dx + (f'(y)e^x - 3)dy$ 的值，其中，c 为连接 $A(2,3)$、$B(4,1)$ 的任意路线 $\widehat{AmB}$，且它与直线段 AB 围成的面积为 5.

解法 1　$\int_c (f(y)e^x - 3y)dx + (f'(y)e^x - 3)dy$

$$= \oint_{\widehat{AmB}}(f(y)e^x - 3y)dx + (f'(y)e^x - 3)dy$$

$$- \int_{BA}(f(y)e^x - 3y)dx + (f'(y)e^x - 3)dy$$

$$= \pm\iint_D\left[\frac{\partial(f'(y)e^x - 3)}{\partial x} - \frac{\partial(f(y)e^x - 3y)}{\partial y}\right]dxdy + \int_{AB}(f(y)e^x - 3y)dx + (f'(y)e^x - 3)dy$$

$$= \pm\iint_D[f'(y)e^x - f'(y)e^x + 3]dxdy + \int_2^4[f(-x+5)e^x - 3(-x+5)$$

$$+ (f'(-x+5)e^x - 3)(-1)]dx$$

$$= \pm\iint_D 3dxdy + \int_2^4[3(x-4) + f(-x+5)e^x - f'(-x+5)]dx$$

$$= \pm 3\sigma + 3\int_2^4(x-4)dx + \int_2^4 f(-x+5)de^x - \int_2^4 f'(-x+5)dx$$

$$= \pm 15 + 3\left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_2^4 + \int_2^4 f'(-x+5)dx$$

$$= \pm 15 - 6 + f(1)e^4 - f(3)e^2$$

$$= \begin{cases} 9 + e^2[f(1)e^2 - f(3)], & \text{当}\widehat{AmB}\text{ 在 } AB \text{ 的下方时；} \\ -21 + e^2[f(1)e^2 - f(3)], & \text{当}\widehat{AmB}\text{ 在 } AB \text{ 的上方时 .} \end{cases}$$

（其中当曲线在直线段 AB 上方时，取负号；在下方时，取正号，直线 AB 的方程为 $y = -x + 5$. 而 σ 是闭曲线 $\widehat{AmBA}$ 所围区域的面积，$\sigma = 5$）

解法 2　$\int_c [f(y)e^x - 3y]dx + [f'(y)e^x - 3]dy$

$$= \int_{\widehat{AmB}}[f(y)e^x - 3y]dx + [f'(y)e^x - 3x]dy + \int_{\widehat{AmB}}(3x-3)dy$$

$$= \int_3^1[f'(y)e^2 - 6]dy + \int_2^4[f(1)e^x - 3]dx + \oint_{\widehat{AmBA}}(3x-3)dy - \int_{BA}(3x-3)dy$$

$$= [f(y)e^2 - 6y]_3^1 + [f(1)e^x - 3x]_2^4 \pm \iint_D\frac{\partial(3x-3)}{\partial x}dxdy + 3\int_{AB}(x-1)dy^{[注]}$$

$$= f(1)e^2 - f(3)e^2 - 6 + 18 + f(1)e^4 - f(1)e^2 - 12 + 6 \pm 3\iint_D dxdy + 3\int_2^4(x-1)(-1)dx$$

$$= f(1)e^4 - f(3)e^2 + 6 \pm 3\times 5 - \frac{3}{2}[(x-1)^2]_2^4$$

$$= \pm 15 + 6 + e^2[f(1)e^2 - f(3)] - 12$$

$$= \begin{cases} 9 + e^2[f(1)e^2 - f(3)], & \text{当}\widehat{AmB}\text{ 在}\overline{AB}\text{ 的下方时；} \\ -21 + e^2[f(1)e^2 - f(3)], & \text{当} AmB \text{ 在}\widehat{AB}\text{ 的上方时 .} \end{cases}$$

注 该式中的第三个积分应用格林公式转化为二重积分，当曲线$\widehat{AmB}$在直线段AB的下方时，闭曲线$AmBA$为正向，取正号；反之，在上方时，为负向，取负号.

例 8-61 计算曲线积分 $I=\int_c[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$，式中，$\varphi(y)$和$\varphi'(y)$为连续函数，其中$c$是连接点$A(x_1,y_1)$与点$B(x_2,y_2)$的任意逐段光滑的弧$\widehat{AnB}$，且与直线段$AB$围成的图形$AnBA$有定面积$S$(如图 8-17).

解 $I+\int_{BA}=\iint\limits_S\{[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ms.$

又，直线段AB的方程为

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1,$$

所以
$$\begin{aligned}\int_{BA}&=\int_{x_2}^{x_1}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_1}[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\mathrm{d}x\\&=[\varphi(y)\mathrm{e}^x]_{x_2}^{x_1}-\int_{x_2}^{x_1}\varphi'(y)\mathrm{e}^x\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\mathrm{d}x-m\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{(x-x_1)^2}{2}+y_1x\right]_{x_2}^{x_1}\\&\quad+\int_{x_2}^{x_1}\varphi'(y)\mathrm{e}^x\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]\mathrm{d}x-m\left[x\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right]_{x_2}^{x_1}\\&=\varphi(y_1)\mathrm{e}^{x_1}-\varphi(y_2)\mathrm{e}^{x_2}+\frac{1}{2}m(x_2-x_1)(y_2-y_1)-my_1(x_1-x_2)+m(y_2-y_1)\\&=\varphi(y_1)\mathrm{e}^{x_1}-\varphi(y_2)\mathrm{e}^{x_2}+\frac{1}{2}m(x_2-x_1)(y_2+y_1)+m(y_2-y_1).\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}I&=ms-\int_{BA}\\&=ms+\varphi(y_2)\mathrm{e}^{x_2}-\varphi(y_1)\mathrm{e}^{x_1}+\frac{m}{2}(x_1-x_2)(y_2+y_1)+m(y_1-y_2).\end{aligned}$$

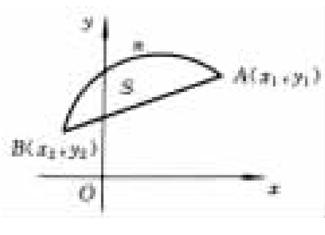

图 8-17

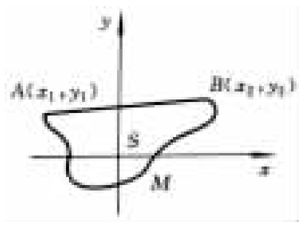

图 8-18

解法 2 令 $P(x,y)=\varphi(y)\mathrm{e}^x-my$，$Q(x,y)=\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=m.$$

积分路线如图 8-18 所示，加上从B到A的直线段上的积分，利用格林公式即得

$$\begin{aligned}I&=\int_{AMBA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{BA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{AB}\varphi(y)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y-m\int_{AB}y\mathrm{d}x\\&=m\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{AB}\mathrm{d}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]-m\int_{x_1}^{x_2}\left[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)\right]\mathrm{d}x\\&=m\cdot s+[\varphi(y_2)\mathrm{e}^{x_2}-my_z]-(\varphi(y_1)\mathrm{e}^{x_1}-my_1)-my_1(x_2-x_1)+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\end{aligned}$$

$$= m \cdot s + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_2)e^{x_1} + m(y_1 - y_2) - \frac{1}{2}m(x_2 - x_1)(y_1 + y_2).$$

例 8-62　确定参数 λ 的值，使得在不经过直线 $y = 0$ 的区域上，曲线积分 $I = \int_L \frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}dx - \frac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}dy$ 与路径无关，并求当 L 为从 $A(1,1)$ 到 $B(0,2)$ 时 I 的值．

解　$P = \frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}$，　$Q = \frac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}(2\lambda y^2 - x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}(x^2 + y^2 + \lambda x^2),$$

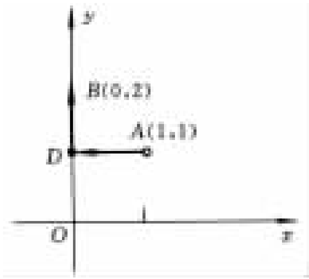

图 8-19

要使曲线积分 I 与路径无关，需 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$(2\lambda - 1)y^2 - x^2 = -2(\lambda+1)x^2 - 2y^2,$$

或
$$(2\lambda+1)y^2 + (2\lambda+1)x^2 = 0,$$

因 $y \neq 0$，所以 $\lambda = -\frac{1}{2}$.

当 L 为从 $A(1,1)$ 到 $B(0,2)$ 时，选路径 $\overline{AD} + \overline{DB}$（图 8-19），

$$I = \int_1^0 x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx + \int_1^2 0dx = 1 - \sqrt{2}$$

例 8-63　证明：若 $f(u)$ 为连续函数，且 L 为逐段光滑的闭曲线，则

$$\oint_L f(x^2+y^2)[xdx + ydy] = 0.$$

证　这里假定 $f(u)$ 连续，并不可微，不能利用充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 但因 $f(u)$ 连续，故可积，令 $F(u) = \frac{1}{2}\int_0^u f(t)\cdot dt$ 并令 $u = x^2 + y^2$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f(u)\cdot x = f(x^2+y^2)\cdot x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f(u)\cdot y = f(x^2+y^2)\cdot y.$$

故
$$dF = f(x^2+y^2)(xdx + ydy)$$

由等价条件 ② 可知

$$\oint_L f(x^2+y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

例 8-64　已知 $f(0) = -1$，试确定可微函数 $f(x)$ 使曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}[\tan x - f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}dx + f(x)dy$ 与路径无关，并求积分值．

解　$P(x,y) = [\tan x - f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}$　$Q(x,y) = f(x)$，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = [\tan x - f(x)]\frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = f'(x).$$

即
$$f'(x) = [\tan x - f(x)]\frac{1}{\cos^2 x},\quad f'(x) + \frac{f(x)}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

这是一阶线性非齐次方程．于是

$$f(x)=\exp\left(-\int\frac{1}{\cos^2x}dx\right)\left[\int\frac{\tan x}{\cos^2x}\cdot\exp\left(\int\frac{1}{\cos^2x}dx\right)dx+C\right]=\mathrm{tg}x-1+c\exp(-\tan x),$$

因为 $f(0)=-1,-1=-1+c,c=0$. 故 $f(x)=\tan x-1$,从而曲线积分

$$\begin{aligned}&\int_{(0,0)}^{(1,1)}[\tan x-f(x)]\frac{y}{\cos^2x}dx+f(x)dy\\&=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{y}{\cos^2x}dx+(\tan x-1)dy\\&=\int_0^1 0dx+\int_0^1(\tan1-1)dy=\tan1-1.\end{aligned}$$

习　题　8

1. 计算曲线积分$\int_L y\,ds$，L 是摆线，$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的一拱($a>0$).

2. 计算曲线积分$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds$,$L$ 为圆 $x^2+y^2-ax=0(a>0)$.

3. 计算曲线积分：

(1) $\oint_L(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$,其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

(2) $\oint_\Gamma x\,ds$,其中 Γ 为空间圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$,$x+y+z=0$.

4. 计算曲线积分 $I=\int_L x\,dx+y\,dy+(x+y-1)dz$,$L$ 是由点(1,1,1) 至点(2,3,4) 的直线段．

5. 计算曲线积分：

(1) $\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$，其中 L 为不过原点的简单闭曲线；

(2) $\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$,$\Gamma$ 为球面上($x^2+y^2+z^2=a^2$) 的三角形($x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$) 围线正向．

6. 计算曲线积分：$I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$,其中 L 是曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 按 x 增大方向．

7. 利用格林公式计算曲线积分：

(1) $\oint_L e^{-(x^2+y^2)}(\cos2xy\,dx+\sin2xy\,dy)$,$L$ 为圆 $x^2+y^2=a^2$ 的顺时针方向；

(2) $\int_L\frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx+\left[4x+2y\ln\left(x+\sqrt{R^2+x^2}\right)\right]dy$，其中 L 是沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 由点 $A(R,0)$ 依逆时针方向到点 $B(-R,0)$ 的半圆．

8. 确定 λ 的值，使曲线积分$\int_A^B(x^4+4xy^\lambda)dx+(6x^{\lambda-1}-y-5y^4)dy$ 与路径无关，并求当 A,B 分别为(0,0),(1,2) 时曲线积分的值．

9. 计算曲面积分：$I=\iint_\Sigma(x+y+z)ds$,其中，Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant0)$.

10. 计算曲面积分：$I=\iint_\Sigma(x+y+z)ds$，Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,而

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & \text{当 } z\geqslant\sqrt{x^2+y^2};\\ 0, & \text{当 } z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

11. **计算曲面积分**：$I=\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}s$，**其中**，$\Sigma$ **为** $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$.

12. **计算曲面积分**：$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中，曲面 Σ **为球面** $x^2+y^2+z^2=1$ **界于** $x^2+y^2-x\leqslant 0,z\geqslant 0$ **内部分（外侧面）.**

13. **计算曲面积分**：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}s$，**其中**，$\Sigma$ **为圆锥面** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **被曲面** $x^2+y^2=2ax$ **所割下的部分**；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$\Sigma$ **为球面** $x^2+y^2+z^2=1$ **上满足** $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ **部分的外侧**；

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\dfrac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\dfrac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**

$$r=\sqrt{x^2+y^2+zf^2},\ \Sigma \text{ 为球面 } x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ 的外侧}.$$

14. **利用高斯公式计算曲面积分**：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\dfrac{1}{z}f\left(\dfrac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\dfrac{1}{y}f\left(\dfrac{y}{x}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

其中，$f(u)$ **具有连续导数**，Σ **为** $x>0$ **的锥面** $y^2+z^2-x^2=1$ **与球面** $x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$ **所围立体表面外侧**；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}4zx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中**，$\Sigma$ **为** $z=a^y(0\leqslant y\leqslant z)$，$a>0$，$a\neq 1$ **绕** z **轴旋转所成曲面的下侧.**

15. **利用斯托克斯公式计算曲线积分**

$$\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z,$$

Γ **为圆周** $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$，**若从** Ox **轴的正向看去，这圆周是依逆时针方向进行的.**

16. **设** f **为连续函数，证明曲线积分**：

$\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$ **与路径无关，并将其化为定积分.**

17. **验证曲线积分** $\displaystyle\int_{(-1,0,1)}^{\left(1,2,\frac{\pi}{3}\right)}2x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+(\cos z-x^2\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y-y\sin z\mathrm{d}z$ **与路径无关，并求其值.**

简答与提示

1. $\dfrac{32}{3}a^2$.

2. $2a^2$.

3. (1) $4a^{\frac{7}{3}}$；　(2) $\dfrac{2}{3}\pi a^3$（**将** x **作为参数**，$y=y(x)$，$z=z(x)$）.

4. 13.

5. (1) L **不包含坐标原点为** 0，L **包含原点为** 2π；(2) -4.

6. $-\dfrac{4}{9}+\dfrac{\pi^2}{2}$.

7. (1) 0；(2) $\dfrac{1}{3}$.

8. $\lambda=3,-\dfrac{79}{5}$.

9. πa^3.

10. $\dfrac{\pi a^4}{6}(8-5\sqrt{2})$.

11. $\dfrac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

12. $\dfrac{38}{105}+\dfrac{5}{32}\pi$.

13. (1) $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$；　(2) $\dfrac{2}{15}$；　(3) 4π.

14. (1) $\dfrac{186}{5}\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$；(2) $2\pi a^2\left[2a^2-\dfrac{2}{\ln a}+\dfrac{1}{(\ln a)^2}\right]-2(1-a^4)\pi$.

15. $-\sqrt{3}\pi a^2$.

16. **令** $F(x,y,z)=\int_0^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} uf(u)\mathrm{d}u$,

$$I=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\mathrm{d}u.$$

17. **利用斯托克斯公式**. e^{-2}.

第九章　无穷级数

本章只包含在数学(试卷一)、数学(试卷三)的考试内容中。主要涉及5个方面:(1)判别数项级数的收敛性;(2)求幂级数的收敛域,收敛区间及和函数;(3)求某些数项级数的和;(4)将函数展开成幂级数;(5)求函数的傅立叶级数及讨论傅立叶级数的和(其中数学(试卷三)对(5)不作要求).

考生在复习本章时,要注意掌握基本方法、基本公式、一些常用的审敛法,常用函数的展开式务必熟记.

一、复习与考试要求

(1) 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念,掌握级数的基本性质及收敛的必要性.

(2) 掌握几何级数与 p 级数的收敛性.

(3) 会用正项级数的比较审敛法和根值审敛法,掌握正项级数的比值审敛法.

(4) 会用交错级数的莱布尼茨定理.

(5) 了解无穷级数绝对收敛与条件收敛的概念,以及绝对收敛与条件收敛的关系.

(6) 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.

(7) 掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

(8) 了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质,会求一些幂级数在收敛区间内的和函数,并会由此求出某些数项级数的和.

(9) 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

(10) 掌握 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林展开式,会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数.

(11) 了解傅立叶级数的概念和函数展开为傅立叶级数的狄利克雷定理,会将定义在 $[-l,l]$ 上的函数展开为傅立叶级数,会将定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数,会写出傅立叶级数的和的表达式.

二、基本概念与理论

1. 无穷级数

(1) 数列 $u_n(n=1,2\cdots)$ 的各项依次相加的表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为无穷级数. 第 n 项 u_n 叫做级数的一般项或通项,前 n 项之和 $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$(存在),则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和为 s,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $r_n=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i$ 称之为级数的余项,且 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

(2) 级数的基本性质

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\mathrm{s}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=k\mathrm{s}=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$($k$ 为常数).

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\mathrm{s},\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=T$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\mathrm{s}\pm T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

③ 收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原级数的和.

④ 在级数中改变有限项,不影响其收敛性.

⑤ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则一般项 $u_n\to 0(n\to\infty)$,(反之不然).

(3) 柯西收敛准则*

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是:$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,对任意的自然数 p,恒有 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

(4) 常用的典型级数

① 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$：当 $|q|<1$ 时，级数收敛于$\dfrac{a}{1-q}$；当 $|q|\geqslant 1$ 时，级数发散.

② p- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}(p>0)$：当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数发散($p=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 为调和级数).

(5) 正项级数审敛法

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 $u_n\geqslant 0$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

① 正项级数收敛准则：正项级数收敛的充要条件是其部分和有界.

② 比较审敛法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，其中对某一个 $N>0$，当 $n>N$ 时，$0\leqslant u_n\leqslant Cv_n$($C$ 为常数).

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

③ 比较审敛法的极限形式：如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l(v_n\neq 0)$，则当 $0<l<+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时敛散.

当 $l=0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

④ 比值审敛法(达朗贝尔判别法)：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，当$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q<1$ 时$(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，当$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ 时$(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

⑤ 比值审敛法的极限形式：对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则：(a) 当 $l<1$ 时，级数收敛；(b) 当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时，级数发散；(c) 当 $l=1$ 时，此审敛法失效.

⑥ 根值审敛法(柯西判别法)：对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1(n=1,2,\cdots)$，则级数收敛，若 $\sqrt[n]{u_n}>1(n=1,2\cdots)$，则级数发散.

⑦ 根值审敛法的极限形式：对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则 当 $l<1$ 时，级数收敛，当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时，级数发散，当 $l=1$ 时，此审敛法失效.

(6) 任意项级数的审敛法

① 如果一个级数的各项正负交替出现，即可写作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0)$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0)$ 时，称之为交错级数.

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛，这时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

③ 莱布尼茨判别法：如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0)$ 满足：(a) $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2\cdots)$；(b) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛，且余项 $|r_n|\leqslant|u_{n+1}|(n=1,2\cdots)$.

④ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$，(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l$)，则当 $l<1$ 时级数绝对收敛；当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时，级数发散；当 $l=1$ 时，需进一步判定.

2. 幂级数

(1) 设在区间 I 上定义一个函数列 $u_n(x)$，$n=1,2,\cdots$，式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 称为定义在 I 上的函数项级数.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，称 x_0 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点，收敛点的全体称为收敛域. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，称 x_0 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点，发散点的全体称为发散域. 若对收敛域中任一 x，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于$s(x)$，则称 $s(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数，记 $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. 若 x 为收敛域中的点，则有$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$. 记 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$，$r_n(x)$ 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的余项，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为幂级数，作代换 $t=x-x_0$ 就可把它化为简单形式的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$，故一般只讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时收敛，则适合 $|x|<|x_0|$ 的一切 x，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛，如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0$ 时发散，则适合 $|x|>|x_0|$ 的一切 x，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散.

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在某些点收敛，在某些点发散，则必存在惟一的正数 R，使当 $|x|<R$ 时，级数绝对收敛，当 $|x|>R$ 时，级数发散，这个 R 称为幂级数的收敛半径，$(-R,R)$ 为收敛区间，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域是下列四个区间之一：$(-R,R)$，$[-R,R)$，$(-R,R]$，$[R,R]$.

(2) 性质

① 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数在其收敛区间内连续.

② 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在其收敛区间内可以逐项微分和逐项积分，即

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1},$$

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

逐项微分，逐项积分所得到的幂级数和原幂级数具有相同的收敛半径，在区间端点 $|x|=R$ 处的收敛性需给予重新讨论.

(3) 收敛半径的求法

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$），其中 a_n,a_{n+1} 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的相邻两项的系数，如果 ①$\rho\neq 0$，则 $R=\dfrac{1}{\rho}$；②$\rho=0$，则 $R=+\infty$；③$\rho=+\infty$，则 $R=0$.

(4) 函数展开成幂级数

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有各阶导数，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数，特别当 $x_0=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}_{(0)}}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\to 0(n\to\infty)$（其中 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，$0<\theta<1$）.

(5) 常用函数幂级数展开式

① $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$.

② $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$.

③ $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$.

④ $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots,(-1<x\leqslant 1)$.

⑤ $(1+x)^\mu=1+\mu x+\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\cdots,(-1<x<1)$.

3. 傅立叶级数

(1) 狄利克雷收敛定理　设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，如果它满足狄利克雷条件，即在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点并且至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 可展开成傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots.$

并且(a) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时,级数收敛于 $f(x)$;

(b) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时,级数收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数即 $f(x)=f(-x)$ 时,则

$$b_n=0, n=1,2,\cdots,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots.$$

这时,级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$ 成为余弦级数.

当 $f(x)$ 为奇函数,即 $f(x)=-f(-x)$ 时,则

$$a_n=0, n=0,1,2,\cdots,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots.$$

这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ 成为正弦级数.

(3) 若 $f(x)$ 仅在 $(-l,l)$ 上有定义,且满足狄利克雷条件,则可将 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 外,作周期延拓为以 $2l$ 为周期的函数 $F(x)$,将 $F(x)$ 展开成傅立叶级数,再限制 x 在 $(-l,l)$ 内,由于在 $(-l,l)$ 里 $F(x)=f(x)$,因此就可得到 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内的傅立叶展开式.

若 $f(x)$ 仅在 $(0,l)$ 上有定义,且满足狄利克雷条件,则可将 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 作奇延拓或偶延拓,然后再在 $(-l,l)$ 外作周期延拓为以 $2l$ 为周期的函数 $F(x)$,将 $F(x)$ 展开成傅立叶级数,再限制 x 在 $(0,l)$ 上,此时 $F(x)=f(x)$,因此,就可得到 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内的傅立叶展开式. 若在 $(-l,0)$ 内是作的奇延拓,则得到的 $F(x)$ 为奇函数,这时傅立叶级数为正弦级数,若在 $(-l,0)$ 内是作偶延拓,则得到的傅立叶级数为余弦级数.

三、基本题型与解题方法

1. 判别数项级数的收敛性

对此类题目,首先应该考察该级数是否为正项级数,如果是,则可按正项级数的审敛法进行审敛,先观察其一般项 u_n 是否以零为极限,如果不是,则级数一定发散,如果是,则可用比值或根值审敛法进行判断,当比值或根值审敛法失效时,用比较审敛法进行判别,如果还不行,可考虑用定义判定.

如果级数为任意项级数,则可以用正项级数的审敛法来判别 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的敛散性,若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,则再考察它是否为条件收敛,如果是交错级数,则用莱布尼茨定理判别.

除了要熟记有关审敛法,还应该记住一些常用级数,比如几何级数,p- 级数的敛散性等.

例 9-1 判别下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n,(x\geqslant 0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s}$(其中 $s>0,\alpha>0$ 为常数); (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$; (6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

解 (1) 注意到 $(\ln n)^{\ln n}=\mathrm{e}^{\ln\ln n^{\ln n}}=\mathrm{e}^{\ln n\cdot\ln\ln n}=n^{\ln\ln n}$,

当 n 充分大时,有 $\ln\ln n>2$,所以 $(\ln n)^{\ln n}>n^2$,即

$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$，由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法证得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛；

本题也可这样解：当 n 充分大时，$\ln n > e^2$，故

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{e^{2\ln n}} = \frac{1}{n^2},$$

由比较判别法得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛．

（2）利用比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e},$$

故，当 $0 \leqslant x \leqslant e$ 时，级数收敛；

当 $x > e$ 时，级数发散；

当 $x = e$ 时，比值审敛法失效，注意到这时

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

而
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e，即\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$ 发散，故当 $0 \leqslant x < e$ 时，原级数收敛；当 $x \geqslant e$ 时，原级数发散．

（3）利用根值审敛法

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{n^s}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{(\sqrt[n]{n})^s} = \alpha,$$

故　当 $\alpha < 1$ 时，级数收敛；

当 $\alpha > 1$ 时，级数发散；

当 $\alpha = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 是 p- 级数；

当 $s > 1$ 时，级数收敛；

当 $s \leqslant 1$ 时，级数发散；.

（4）利用根值判别法

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{3+(-1)^n} = \frac{1}{3} < 1,$$

故级数收敛．

（5）由于比值法与根值法对本题均失效，因此，考虑用比较判别法．但比较级数怎么取，先看看 $u_n = \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$ 趋于零的情形．当 n 充分大时，$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right) \approx -\frac{\ln n}{n}$，得

$$u_n = e^{n\left(\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)\right)} \approx e^{n\cdot\left(-\frac{\ln n}{n}\right)} = \frac{1}{n},$$

于是启发我们用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作为比较级数.

考虑 $x_n = \frac{\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$，取对数

$$\ln x_n = \ln n + n\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right),$$

注意到$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ 及

$$\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left[\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right],$$

所以 $\ln x_n = \ln n + n\left[-\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left[\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right]\right] = -\frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \to 0(n\to\infty)$，

即 $x_n \to 1,(n\to\infty)$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$ 发散．

（6）由 $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < n\ln n$ 即$\frac{1}{\ln n!} > \frac{1}{n\ln n}$ 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$发散．

（7）利用根值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n} = 0 < 1$$

（这里$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n} = 0$）故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

例 9-2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2(a_n > 0)$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛.

证　由于$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 均收敛，故

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$也收敛，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛．

例 9-3　若$\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2n\cdot\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n) = 1(a_n \geqslant 0)$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证　因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}} = 1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 同时敛散，

利用
$$2n\sin\frac{1}{n} = \frac{2\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 2(n\to\infty),$$

故当 n 充分大后，$2n\sin\frac{1}{n} > \frac{3}{2}$，于是$\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{3/2}}$（当 n 充分大时）. 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} \text{ 收敛，}\quad \text{故 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} \text{ 收敛，}\quad \text{从而 } \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ 收敛.}$$

思考问题：如果 $a_n \geqslant 0$ 的条件删去，是否仍可得出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的结论？

例 9-4　设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，

（1）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值；（2）试证：对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛．

解　（1）显然 $a_n > 0$，$(n = 1,2,\cdots)$

$$\frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1 + \tan^2 x)\,dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\mathrm{d}x \xlongequal{\tan x=t} \frac{1}{n}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 收敛．

又
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\ s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(a_k+a_{k+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}s_n=1.$$

（2）因为
$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x \xlongequal{\tan x=t} \int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1},$$

所以
$$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda n+1}<\frac{1}{n^{\lambda+1}},$$

由 $\lambda+1>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛．

例 9-5　从点 $P_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$，再从 Q_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于 P_2；然后又从 P_2 作 x 轴的垂线，交抛物线于 Q_2，依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;\cdots;P_n,Q_n;\cdots$.

（1）求$\overline{OP_n}$；

（2）求级数$\overline{O_1P_1}+\overline{O_2P_2}+\cdots+\overline{O_nP_n}+\cdots$ 的和，其中，$n(n\geqslant 1)$ 为自然数，而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 M_1 与 M_2 之间的距离．

解　（1）由于 $y'=(x^2)'=2x$，故对于任意 $a(0<a\leqslant 1)$，抛物线 $y=x^2$ 在点$(a,a)^2$ 处的切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$. 令 $y=0$ 得该切线与 x 轴交点为$\left(\frac{a}{2},0\right)$，故由$\overline{OP_1}=1$ 可知

$$\overline{OP_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}=\frac{1}{2},\ \overline{OP_3}=\frac{1}{2}\overline{OP_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2},\cdots\overline{OP_n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

（2）由于$\overline{O_nP_n}=(\overline{OP_n})^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{O_nP_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{3}.$

例 9-6　设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

（1）求这两条抛物线所围成平面图形的面积 S_n；（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和．

解　（1）由于 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 与 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，因图形关于 y 轴对称，所以

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)}-x^2\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)\ \sqrt{n(n+1)}}.$$

（2）因$\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{4}{3}.$$

例 9-7　设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

解　由 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

令 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1}$,则其收敛半径 $R = 1$,在$(-1,1)$ 内有

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.\text{ 于是}$$

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln|1-x|.$$

令 $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1,1)$,则 $s\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = -\ln\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$.

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x\cos x\mathrm{d}x = \ln(2+\sqrt{2}).$$

例 9-8 判别级数$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots$ 的敛散性.

解法 1 级数 $u_n = \sqrt{2-v_n}$, 其中 $v_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{层}}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一正项级数,由于$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$, $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$,

$$U_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{2+v_n}}.$$

由比值判别法得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+v_n}}}{\sqrt{2-v_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-(2+v_n)}}{\sqrt{2-v_n}\sqrt{2+\sqrt{2+v_n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+v_n}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

所以原级数收敛.

解法 2 由于$\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{2}$.

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2-2\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\right)} = \sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{8}\right)} = 2\sin\frac{\pi}{2^3}.$$

$$2+\sqrt{2} = 2+2\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(1+2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\right) = 4\cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}} = 2\sin\frac{\pi}{2^4}.$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由比值判别法得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1,$$

所以原级数收敛.

例 9-9　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$ 的敛散性．

解

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{-n-1-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}}=2^{-1-(-1)^{n+1}+(-1)^n}$$

$$=\begin{cases}2, & n\text{ 为偶数;}\\ \dfrac{1}{8}, & n\text{ 为奇数.}\end{cases}$$

故比值判别法不适用．

用根值法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{-n-(-1)^n}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

所以原级数收敛．

例 9-10　已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

解　为了利用已知条件，由题给级数的形式求其和必须将其分解成分母为单项的形式．由待定系数法得

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{n}+\frac{\frac{1}{4}}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{n+2}+\frac{\frac{1}{4}}{(n+2)^2}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{(n+2)^2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}.$$

例 9-11　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arntan}\,\dfrac{1}{2n^2}$ 之和．

解　因为

$$\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n(n-1)}{n(n+1)}}=\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{(n-1)+1}.$$

所以，$s_n=\arctan\dfrac{n}{n+1}\to\dfrac{\pi}{4}$.

例 9-12　判定下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$，$(a>0)$.

解　(1) **方法 1**　当 $n\geqslant 3$ 时，$1<\sqrt[n]{\ln n}\leqslant\sqrt[n]{n}\to 1$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}=1\neq 0$，故原级数发散.

方法2　因为$\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}\geqslant\dfrac{1}{\ln n}\geqslant\dfrac{1}{n}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,则$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$发散.

(2) 因为
$$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}\leqslant\frac{n(n!)}{(2n)!}$$
$$=\frac{1}{2(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}\leqslant\frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$收敛,则原级数收敛.

(3) 因为$\dfrac{1}{(\ln\ln)\ln^n}=\dfrac{1}{n^{\ln(\ln\ln n)}}<\dfrac{1}{n^2}$，当$n$充分大(即$n>e^{e^{e^2}}$)时成立.而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,故原级数收敛.

(4) 因为$\dfrac{1}{\ln(n!)}=\dfrac{1}{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}>\dfrac{1}{n\ln n}$,

因为$\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$发散到$+\infty$,
$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln k}>\int_2^n\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,$$

所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$的部分和无界,故原级数发散.

(5) 方法1　由于当$-1<x<+\infty$,$x\neq 0$时,
$$\ln(1+x)<x$$

因此,
$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

同时,
$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1},$$

于是有
$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

又,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$收敛,则原级数收敛.

方法2　由泰勒公式可知
$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

从而
$$\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

又,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$收敛,则原级数收敛.

(6) 方法1　当$a=1$时,原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$显然发散.

当$0<a<1$时,$\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}<a^n$,则原级数收敛.

当$a>1$时,
$$\frac{a^n}{1+a^{2n}}=\frac{1}{\dfrac{1}{a^n}+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

则原级数收敛.

方法2　当$a=1$时,原级数显然发散.

当 $0<a<1$ 时，　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt[n]{1+a^{2n}}}=a<1$，

当 $a>1$ 时，　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\Big/\left[1+\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2n}\right]}=\dfrac{1}{a}<1.$

则 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时，原级数收敛．

例 9-13　讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x(\alpha>-1)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^n\arctan x\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为 $0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}.$

又，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，则原级数收敛．

(2) 因为

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{(\alpha+1)\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$$

又
$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1},$$

则原级数与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$ 同敛散，故原级数在 $\alpha>0$ 时收敛，在 $-1<\alpha\leqslant 0$ 时发散．

(3) 因为

$$\int_0^1 x^n\arctan x\mathrm{dx}=\frac{1}{n+1}\int_0^1\arctan x\mathrm{d}(x^{n+1})=\frac{\pi}{4(n+1)}-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

又
$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+2},$$

则
$$0<\int_0^1 x^n\arctan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4(n+1)}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

故原级数发散．

例 9-14　讨论下列级数的敛散性，如果收敛，则指出其是条件收敛还是绝对收敛．

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n^2}\right)^n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$，(常数 $\alpha>0$)；

(3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，其中 α 为常数；

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$；　(6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$.

解　(1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=1\neq 0$，一般项不趋于零，故级数发散．

(2) 这是交错级数，注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\dfrac{\alpha}{2n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2n}}{2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^2}=1$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\left(\dfrac{\alpha}{2n}\right)^2$ 也收敛，这样，由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2n}$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$ 绝对收敛.

(3) 这是交错级数，注意到 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$，由 $\dfrac{\ln n}{n}\geqslant\dfrac{1}{n}(n\geqslant 3)$，而 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$ 不会绝对收敛. 又由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，$u_n=\dfrac{\ln n}{n}\to 0(n\to\infty)$，考虑 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x\geqslant 3)$，故 y 单调减少，因此 $u_n=\dfrac{\ln n}{n}$ 单凋减少 $(u_n\geqslant u_{n+1})$，由莱布尼茨判别法得原级数条件收敛；

(4) 由 $\left|\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ 绝对收敛. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(p=\dfrac{1}{2}<1\right)$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 发散，(否则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 收敛，矛盾).

(5) 虽然该级数是交错级数，但由于 u_n 不是单调数列，故不能使用莱布尼茨定理判别.

考虑
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{[\sqrt{n}+(-1)^n][\sqrt{n}-(-1)^n]}$$
$$=\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1},$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛(可用莱布尼茨定理判别)，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散，故原级数发散.

(6) 由于 $\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\dfrac{1}{\ln n}$，当 $n>2$ 时，$\sin\dfrac{1}{\ln n}>0$，故级数为交错级数.

对于 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\sin\dfrac{1}{\ln n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{\ln n}}{\dfrac{1}{\ln n}}=1$，$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ 发散，

所以原级数不会绝对收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)=0$，且考虑 $f(x)=\sin\dfrac{1}{\ln x}$，$f'(x)=\cos\dfrac{1}{\ln x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)<0(x>2)$，故 $f(x)$ 单调减少，即 $u_n=\sin\dfrac{1}{\ln n}$ 单调减少趋于零，由莱布尼茨定理，得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$ 条件收敛.

例 9-15 设数列 $na_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证 由数列 $na_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛，不妨设 $S_n=na_n$ 作为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列，由 $s_1=a_1$，得 $u_1=a_1$，由 $s_2=2a_2$，得 $u_2=s_2-s_1=2a_2-a_1$，由 $s_3=3a_3$，得 $u_3=s_3-s_2=3a_3-2a_2$，…，由 $s_n=na_n$，得
$$u_n=na_n-(n-1)a_{n-1}.$$

现在数列 $S_n=na_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[na_n-(n-1)a_{n-1}]$ 也收敛，又按题意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛. 因此，由 $[na_n-(n-1)a_{n-1}-n(a_n-a_{n-1})]=a_{n-1}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n-1}$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

例 9-16 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}{\ln n}=q(a_n>0)$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，当 $q>1$ 时，收敛；当 $q<1$ 时发散.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}{\ln n}=q$，根据极限定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}{\ln n}-q\right|<\varepsilon$ 即 $q-\varepsilon<\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}{\ln n}<q+\varepsilon$.

当 $q>1$ 时，选择适当小的 ε，使 $q-\varepsilon=\alpha>1$，则 $\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)>\alpha\ln n=\ln n^{\alpha}$，即 $a_n<\dfrac{1}{n^{\alpha}}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}(\alpha>1)$

收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

当 $q<1$ 时,选择适当小的 ε,使 $q+\varepsilon=\beta\leqslant 1$,则 $\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}{\ln n}<\beta\leqslant 1$,即 $a_n>\dfrac{1}{n^{\beta}}$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\beta}}$ 发散($\beta\leqslant 1$),故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 9-17　设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,常数 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛.

证　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\tan\dfrac{\lambda}{n}a_{2n}}{a_{2n}}=\lambda$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\tan\dfrac{\lambda}{n}a_{2n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 同敛散,由于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,故其部分和数列有界,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 的部分和数列也有界,因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 必收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\tan\dfrac{\lambda}{n}a_{2n}$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛.

例 9-18　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,可得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故 $f(0)=0$,

现在 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,故 $\exists M>0$,使得在此邻域内成立 $|f''(x)|\leqslant M$,

根据泰勒中值定理,在此邻域内

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-0)^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\qquad(\xi=\theta x,0<\theta<1).$$

因此,$|f(x)|=\dfrac{1}{2}|f''(\xi)|x^2\leqslant\dfrac{M}{2}x^2$,这样 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\leqslant\dfrac{M}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 也收敛,这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

例 9-19　设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛?并说明理由.

解　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

因为,正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,记此极限值为 a,则 $a\geqslant 0$,若 $a=0$,则由莱布尼茨定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛,与题设矛盾,故 $a>0$.于是

$$\frac{1}{a_n+1}<\frac{1}{a+1}<1,\ \text{从而}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{a+1}\right)^n.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^n$ 是公比为 $\dfrac{1}{a+1}<1$ 的几何级数,故收敛.因此由比较判别法知原级数收敛.

例 9-20　设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的收敛性.

解　已知级数前 n 项部分和为

$$\begin{aligned}s_n&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{u_1}$，因而原级数收敛．

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{u_n}+\frac{n}{n+1}\frac{n+1}{u_n}\right|=2$知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|$发散，故原级数条件收敛．

例 9-21 讨论级数$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots$的敛散性．

解法 1 当$\alpha=1$时，原级数为$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$，该级数收敛．

当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散，原级数为此两级数之差，故是发散的．

当$\alpha<1$时，考虑原级数加括号后的级数

$$1-\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^\alpha}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n-1}\right)+\cdots,$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n-1}}{\left(\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{(2n)^\alpha}{2n-1}\right]=1,$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n-1}\right)$发散，故原级数发散．

解法 2 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^\alpha}\right)+\cdots$

前一级数收敛，后一个级数当$\alpha>1$时，$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots$收敛．而$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$发散，故原级数发散；当$\alpha<1$时，

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^\alpha}<0,$$

而$\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)$发散，则原级数发散．

例 9-22 试研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{a}{1+a^n}(a>0)$是绝对收敛、条件收敛还是发散．

解 先考虑其绝对值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}$.

当$a>1$时，$\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}<\frac{a}{a^n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}$收敛，则原级数绝对收敛．

当$a\leqslant 1$时，$\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}>\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{2}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}$发散．此时令

$$f(x)=x(1+a^x)$$

则$f'(x)=1+a^x+xa^x\ln a$，从而当x充分大时，$f'(x)>0$，$f(x)$单增，那么n充分大时，$\frac{a}{n(1+a^n)}$单调减且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n(1+a^n)}=0$，故原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{a}{1+a^n}$收敛，即原级数条件收敛．

例 9-23 试研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n n^P}$是绝对收敛、条件收敛，还是发散？

解 先考虑绝对值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a^n n^p}\right|$.

由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n n^p}{a^{n+1}(n+1)^p}\right|=\frac{1}{|a|},$$
则当 $|a|>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{1}{a^n n^p}\right|$ 收敛,即原级数绝对收敛.

当 $0<|a|<1$ 时,$\dfrac{1}{|a|}>1$,由上面极限式可知当 n 充分大时,$|a_{n+1}|>|a_n|$,这时 $a_n\not\to 0$,原级数发散.

当 $|a|=1$ 时,需再讨论.

当 $a=1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^P}$,则 $P>1$ 时收敛,$P\leqslant 1$ 时发散;

当 $a=-1$ 时,原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^P}$,当 $P>1$ 时,原级数绝对收敛,$0<P\leqslant 1$ 时,原级数条件收敛;$P\leqslant 0$ 时,原级数发散.

例 9-24　证明:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+\cdots+a_n)$ 必绝对收敛.

证　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,记 $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

则
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}|a_1+a_2+\cdots+a_n|=|s|<+\infty.$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 敛散性相同,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)|$ 收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 绝对收敛.

例 9-25　试求级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}(n\geqslant 3)$ 的绝对收敛、条件收敛和发散的区域.

解　设 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}(n\geqslant 3)$.

显然,当 $x\leqslant 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,所以级数发散.

当 $x>0$ 时,由于 $\dfrac{1}{(n^2-3n+2)^x}\geqslant\dfrac{1}{n^{2x}}$,且当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2x}}$ 收敛. 当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2x}}$ 发散.
又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\dfrac{1}{n^{2x}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n^2-3n+2)^x}}{\dfrac{1}{(n^2)^x}}=1,$$

根据比较法知:

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,$\sum\limits_{n=3}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$ 绝对收敛;

当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$\sum\limits_{n=3}^{\infty}|u_n|$ 发散,但交错级数
$$\sum_{n=3}^{\infty}u_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$$
是莱布尼茨型级数,故它收敛,因此原级数条件收敛.

于是得
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}\begin{cases}\text{发散}, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时};\\ \text{绝对收敛}, & \text{当 } x>\dfrac{1}{2} \text{ 时};\\ \text{条件收敛}, & \text{当 } 0<x\leqslant\dfrac{1}{2} \text{ 时}.\end{cases}$$

即原级数的发散域为$(-\infty,0]$，收敛域有$(0,+\infty)$且$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$为绝对收敛域，$\left(0,\frac{1}{2}\right]$为条件收敛域．

2．求幂级数的收敛区间及其和函数，求某些数项级数的和

（1）求幂级数的收敛区间，首先要求出它的收敛半径，然后讨论它在收敛区间端点的敛散性．如果不是形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的标准型幂级数，可考虑作变换化为标准型幂级数，再进行处理，假如幂级数是缺项的，可直接用比值法（或根值法）即利用极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$）来讨论，对于非幂级数的函数项级数的收敛域，也按同样方法处理．

（2）幂级数在收敛区间内求和函数时，要注意：虽然对幂级数逐项求导，逐项积分后不改变其收敛半径，但是收敛区间的端点处的敛散性可能改变，需重新加以讨论．幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(|x|<1)$必须牢记，它很重要．

（3）在求某些数项级数的和时，一般先设出相应的幂级数，求出其和函数，再令自变量取特殊值后获得该数项级数之和．

例 9-26　求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n$的收敛区间．

解　由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}/\sqrt{n+1}}{3^n/\sqrt{n}}=3$得收敛半径$R=\frac{1}{3}$．

（1）当$x=-\frac{1}{3}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$是交错项级数，由莱布尼茨定理知级数收敛．

（2）当$x=\frac{1}{3}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$是$p$-级数，$p=\frac{1}{2}<1$，故级数发散．因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n$的收敛区间为$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$．

例 9-27　求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^nx^{2n-1}$的收敛区间．

解　本题的幂级数是缺项的幂级数，故直接用比值法进行讨论．由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|x|^{2n+1}}{2^n|x|^{2n-1}}=2|x|^2$，因此，当$2|x|^2<1$，即$|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$时，级数绝对收敛；

当$|x|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$|u_n(x)|=2^n|x|^{2n-1}\geqslant2^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\sqrt{2}$．

这说明当$|x|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$时，级数的一般项不趋于零，故级数发散．所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^nx^{2n-1}$的收敛区间为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．

例 9-28　求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$的收敛区间．

解　设$t=x-3$，则幂级数可化为标准形式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n3^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot3^n}}=\frac{1}{3},$$

故收敛半径$R=3$，当$t=3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散；当$t=-3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$为交错级数，由莱布尼茨定理得其收敛，这样当$-3\leqslant t<3$，即$-3\leqslant x-3<3$，亦即$0\leqslant x<6$时，原幂级数收敛．

例 9-29　求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}x^n$（$p$ 为常数）的收敛区间.

解　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p\ln(1+n)}}{\frac{1}{n^p\ln n}}=1$，故收敛半径 $R=1$，下面讨论 $|x|=1$ 时，级数的敛散性.

当 $p<0$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-p}}{\ln n}=\infty$，此时 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln n}$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$ 均发散，故收敛区间为 $(-1,1)$；

当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$ 发散，故收敛区间为 $[-1,1)$；

当 $p>1$ 时，注意到 $\frac{1}{n^p\ln n}<\frac{1}{n^p}$，$(n\geqslant 2)$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln n}$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$ 均收敛，因此收敛区间为 $[-1,1]$.

例 9-30　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛区间.

解　可先令 $t=\frac{1-x}{1+x}$，讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}$ 的收敛区间.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2n+1}}\right|=1$，故收敛半径为 $R=1$.

当 $t=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散；当 $t=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛.

因此，当 $-1\leqslant t<1$，即 $-1\leqslant\frac{1-x}{1+x}<1$，亦即 $x>0$ 时，原级数收敛，从而所求收敛域为 $(0,+\infty)$.

例 9-31　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛区间.

解　先令 $t=x+1$，讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$ 的收敛区间，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}\right|=3$，故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$，当 $t=-\frac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 收敛.

当 $t=\frac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 发散. 这样，由 $-\frac{1}{3}\leqslant t<\frac{1}{3}$，即 $-\frac{1}{3}\leqslant x+1<\frac{1}{3}$，亦即 $-\frac{4}{3}\leqslant x<-\frac{2}{3}$，因此，原级数的收敛区间为 $\left[-\frac{4}{3},\frac{-2}{3}\right)$.

例 9-32　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并求其和函数.

解　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$，故收敛半径 $R=1$，

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛，故收敛区间为$[-1,1)$；当 $x\in[-1,1)$ 时，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，在$(-1,1)$ 内逐次求导.

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1},$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$，故 $S'(x)=\frac{1}{1-x}$.

等式两端积分：

$$\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x),$$

由于 $S(0)=0$，故 $S(x)=-\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$.

例 9-33 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛区间，并求其和函数.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{2n+1}\right|=1$，故收敛半径 $R=1$，当 $|x|=1$ 时，级数的一般项不趋于零，故级数发散，这样幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$，由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2nx^n=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，可设 $A(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，逐项积分

$$\int_0^x A(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^x x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

等式两端对 x 求导：

$$A(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

这样，

$$\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=\frac{2x}{(1-x)^2},$$

又，

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},(|x|<1),$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},(|x|<1).$$

例 9-34 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$ 的收敛区间，并求其和函数.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}}\right|=\frac{1}{2}$，故收敛半径 $R=2$.

当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散；

当 $x=-2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛，故收敛区间为$[-2,2)$；

当 $x\in[-2,2)$ 时，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot x^{n-1}$；

当 $x\neq 0$ 时，$xS(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$，

逐次求导：

$$(xS(x))'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},$$

两端积分： $\int_0^x (xS(x))'\mathrm{d}x = xS(x) = \int_0^x \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x = \ln 2 - \ln(2-x) = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$，

故 $$S(x) = \frac{-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

当 $x=0$ 时，显然 $S(0)=\frac{1}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1} = \begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0; \\ -\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}, & -2\leqslant x<0 \text{ 或 } 0<x<2.\end{cases}$$

例 9-35　求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 在其收敛域 $|x|<1$ 中的和函数.

解　当 $|x|<1$ 时，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]x^n$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，及当 $x\neq 0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{x}(-x-\ln(1-x)),$$

故 $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n = \frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}(-x-\ln(1-x))$$

$$= \frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), x\neq 0.$$

又，$S(0)=0$，这样

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n = \begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\neq 0; \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

例 9-36　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{\frac{n}{2}}x^{3n-1}$ 的收敛区间及和函数.

解　所讨论的幂级数有缺项，故直接用比值法来讨论其收敛区间.

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \sqrt{2}\,|x^3|$$，当$\sqrt{2}\,|x^3|<1$，即 $|x|<\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ 时，级数收敛；

当 $|x|\geqslant\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ 时，级数一般项不趋于零，故级数发散，这样其收敛区间为 $\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}},\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$.

当 $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}},\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$ 时，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n2^{\frac{n}{2}}x^{3n-1}$，逐项积分：

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n}\cdot 2^{\frac{n}{2}}x^{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}x^3)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}x^3}{1-\sqrt{2}x^3},$$

等式两端求导： $$S(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{x^3}{1-\sqrt{2}x^3}\right)' = \frac{\sqrt{2}x^2}{(1-\sqrt{2}x^3)^2}.$$

例 9-37　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ 的收敛区间及和函数.

解　由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 0$，故收敛半径 $R=+\infty$，即收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n}{(2n-1)!}x^{2n-1}$，逐项积分：

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x\sin x,$$

等式两边求导得

$$S(x)=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x,x\in(-\infty,+\infty).$$

注　从例 9-37 可以看到在求幂级数的和函数时有时也会用到某些基本初等函数的幂级数展开式.

例 9-38　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛域及在收敛区间内的和函数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$.

解　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2}{n^2}\right|=1$，故收敛半径为 $R=1$，当 $|x|\geqslant 1$ 时，级数一般项不趋于零，故级数发散，因此级数收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，逐项积分：

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

又，
$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

故
$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

等式两边求导：

$$S(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

在级数中取 $x=-\dfrac{1}{2}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{4}{27}.$$

例 9-39　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解　级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 可认为是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时的值，因此可以先求出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 的和函数 $s(x)$，然后计算 $s\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 得解.

对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，故收敛半径 $R=1$，即当 $|x|<1$ 时，级数收敛.

当 $|x|<1$ 时，设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[(n^2-n)x^n+x^n]$，由

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

而
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n&=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2(\sum_{n=2}^{\infty}x^n)''\\&=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x^2}{(1-x)^3}(|x|<1),\end{aligned}$$

因此
$$s(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{2x^2}{(1-x)^3},(|x|<1).$$

这样
$$s\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{22}{27},$$

即
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{22}{27}.$$

例 9-40　**求级数** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ **的和.**

解　同上题一样,先考虑 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$ 的和函数,首先可知当 $|x|<1$ 时,级数收敛;

设 $|x|<1$ 时,$s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$,

考虑
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$
$$=x\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}\mathrm{d}x=x\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-x\ln(1-x),$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{x^2}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\left[-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)\right]$$
$$=-\frac{x}{2}-1-\frac{\ln(1-x)}{x},(x\neq 0)$$

于是
$$s(x)=\frac{1}{2}\left[-x\ln(1-x)+\frac{x}{2}+1+\frac{\ln(1-x)}{x}\right]$$
$$=\frac{2+x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x),(|x|<1,\text{且 }x\neq 0).$$

因此,
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\ln\frac{1}{2}=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

例 9-41　**求下列级数的和:**

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

解　(1) 直接利用级数的收敛定义求和.

由于
$$u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

于是
$$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

这样
$$s=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2},\text{故}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$$

(2) 由于
$$u_n=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!},$$

于是
$$s_n=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!},$$

这样,$s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=1$ 即为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

例 9-42　**已知级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$,**求级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **的和.**

解　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的部分和为 A_n,则 $A_{2n}=a_1-a_2+a_3+\cdots+(-1)^{2n-1}a_{2n}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 的部分和为 B_n,则 $B_n=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$,

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 s_n，则 $s_{2n}+A_{2n}=2B_n$，即

$$s_{2n}=2B_n-A_{2n},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\lim_{n\to\infty}(2B_n-A_{2n})=2\lim_{n\to\infty}B_n-\lim_{n\to\infty}A_{2n}=2\times5-2=8,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=8$.

例 9-43 已知 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x \quad (n\text{ 为正整数}),$$

且 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

解 由已知条件可见

$$f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x,$$

其通解为

$$f_n(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right).$$

由条件 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，得 $C=0$，故 $f_n(x)=\dfrac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为$[-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

$$s(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x).$$

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-\mathrm{e}^{-1}\ln2$.

于是，当 $-1\leqslant x<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-\mathrm{e}^x\ln(1-x)$.

例 9-44 求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

解 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{2n-1}=-\dfrac{x}{1+x^2}$.

上式两边从 0 到 x 积分，得

$$f(x)-f(0)=-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

由 $f(0)=1$，得

$$f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\quad(|x|<1).$$

令 $f'(x)=0$，求得惟一驻点 $x=0$. 由于

$$f''(x)=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ f''(0)=-1<0,$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 $f(0)=1$.

例 9-45 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{-\sqrt{n}}}{n}\left(\dfrac{3+2x}{3-x}\right)^n$ 的收敛域.

解　令 $\frac{3+2x}{3-x}=y$，则原级数变为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}y^n$，于是收敛半径 $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}\cdot\frac{n+1}{2^{-\sqrt{n+1}}}\right)=1$ 当 $y=\pm1$ 时幂级数变为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}$，这是收敛级数．因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}2^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}=0$，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 同收敛．

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}y^n$ 的收敛域为闭区间$[-1,1]$．因而由

$$-1\leqslant\frac{3+2x}{3-x}\leqslant1,$$

解得 $-6\leqslant x\leqslant0$，所以原级数的收敛域为$[-6,0]$．

例 9-46　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$ 的和函数，$(|x|<1)$．

解
$$\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{(x^{2^n}+1)-1}{(x^{2^n}+1)(x^{2^n}-1)}=\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1},$$

$$s_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{N+1}}-1},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\lim_{N\to\infty}s_N=\frac{1}{x-1}+1=\frac{x}{x-1}.$$

例 9-47　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的收敛域和和函数．

解法 1　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{n^2+1}\right|=0$

所以收敛半径 $R=+\infty$，即收敛域为$(-\infty,+\infty)$．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{x}{2}=t}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right]t^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n.$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

$$=t^2\cdot e^t+t\cdot e^t+e^t=(t^2+t+1)e^t,\ (-\infty<t<+\infty).$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}},\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

解法 2　收敛域同上．已知

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\qquad(-\infty,+\infty)$$

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n.$$

于是
$$xe^{\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{n+1},$$

$$(xe^{\frac{x}{2}})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}x^n,$$

$$(x^2e^{\frac{x}{2}})''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2^n n!}x^n,\quad(-\infty,+\infty)$$

因为
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2^n\cdot n!}-3\cdot\frac{n+1}{2^n\cdot n!}+2\cdot\frac{1}{2^n\cdot n!}\right]x^n$$

$$=(x^2e^{\frac{x}{2}})''-3(xe^{\frac{x}{2}})'+2e^{\frac{x}{2}}.$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}},\quad(-\infty,+\infty).$$

例 9-48　求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}(a>0,\ b>0)$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{b^{\sqrt{n}}}(b>0)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}x^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{n}(x-1)^n$.

解　(1) **不妨设** $\max(a,b)=a$,**则**

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=a.$$

在 $x=a$ **处,由于**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\neq0,$$

则原级数在 $x=a$ **处发散,同理可知原级数在** $x=-a$ **处也发散．故原级数收敛域为** $|x|<\max(a,b)$.

(2) $R=\lim\limits_{n\to\infty}(b^{\sqrt{n}})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1.$

当 $x=\pm1$ **时,级数变成** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{b^{\sqrt{n}}}$.

① **若** $0<b\leqslant1$,**由于这时** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\pm1)^n}{b^{\sqrt{n}}}\neq0$,**则级数发散**．

② **若** $b>1$ **时,考虑绝对值级数** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{b^{\sqrt{n}}}$,

由于 $\frac{2\log_b n}{\sqrt{n}}=0$,**从而** n **充分大时有** $2\log_b n<\sqrt{n}$,**则**

$$\frac{1}{b^{\sqrt{n}}}<\frac{1}{b^{2\log_b n}}=\frac{1}{n^2}.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^{\sqrt{n}}}$ **收敛,综上所述当** $0<b\leqslant1$ **时,原幂级数的收敛域为** $(-1,1)$,**当** $b>1$ **时,原幂级数的收敛域为** $[-1,1]$.

(3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1,$

或
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}},$$
$$=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{1+1+\cdots+1}}\leqslant\sqrt[n]{a_n}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}}=1,$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

则 $R=1$.

在 $x=-1$ 处,原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$,由于$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 单调减少趋于零,则原级数在 $x=-1$ 处收敛.

在 $x=1$ 处,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$,

又
$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{1}{1+1+\cdots+1}=\frac{1}{n},$$

则原级数在 $x=1$ 处发散,故原幂级数的收敛域为 $-1\leqslant x<1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{2^n+(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=2.$

$$R=\frac{1}{2},$$

在 $x-1=\dfrac{1}{2}$ 处,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

又
$$\frac{2^n+(-1)^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n2^n},$$

显然,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$ 都收敛,则原幂级数在 $x-1=-\dfrac{1}{2}$ 收敛.

在 $x-1=\dfrac{1}{2}$ 处,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
$$\frac{2^n+(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{n}-\frac{(-1)^n}{n2^n}.$$

又,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n2^n}$ 收敛,则原幂级数在 $x-1=\dfrac{1}{2}$ 处发散.

则收敛域为 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x-1<\dfrac{1}{2}$,即 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{3}{2}$.

例 9-49　试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)$,其中 $a>1$.

解　考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$,

则
$$s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\ -1<x<1.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)=s\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}}{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}.$$

3. 将函数展开成幂级数

将函数展开成幂级数一般有两种方法——直接展开法和间接展开法. 直接展开法的基本步骤为:① 求出函数 $f(x)$ 的各阶导数 $f^{(n)}(x)$ 及其在 $x=0$ 处的值 $f^{(n)}(0)$,写出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 的表达式并求出它的收敛半径 R;② 考察 $x\in(-R,R)$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)$ 是否为零,如果为零,则所写出的幂级数就是 $f(x)$ 的幂级数展开式. 间接展开法就不必求 $f(x)$ 的各阶导数及讨论余项 $R(x)$,因此较为便捷. 它主要是利用常用函数的展开式,通过逐项求导、逐项积分和四则运算等变换而得出结果. 因此,解题时尽量使用间接展开法,考生可以从下面的例子中熟悉各种函数间接展开的步骤.

例 9-50　将下列函数展开成 x 的幂级数(麦克劳林级数)

(1) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;　　(2) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

(3) $\arctan x^2$;　　(4) $(x+1)[\ln(x+1)-1]$;

(5) $\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$;　　(6) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$.

解　(1) **由于** $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}$　$(-\infty<x<+\infty)$

故
$$\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad(-\infty<x<+\infty).$$

(2) **有理分式的间接展开必须先把它分解成部分分式,然后对最简分式逐一展开后合并.**
$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-x},$$

其中
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(|x|<1),$$
$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n(|x|<2),$$

故
$$\frac{1}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,(|x|<1).$$

(3) **由于** $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n(|x|<1)$,

故
$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}(|x|<1),$$

这样
$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

因此
$$\arctan x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1},(|x|\leqslant 1).$$

注　**上述级数在 $x=\pm1$ 时是收敛的,$\arctan x^2$ 在 $x=\pm1$ 处有定义且连续,故展开式对 $x=\pm1$ 也是成立的.**

(4) **因为** $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $(-1<x\leqslant 1)$,

所以 $$(x+1)[\ln(1+x)-1]=(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}-(x+1)=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

当 $x=\pm 1$ 时，左端级数均收敛，但左端函数在 $x=-1$ 时无定义，这样展开式成立的区间仍为 $(-1,1]$.

(5) 注意到 $f(x)=\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$ 的导数 $f'(x)=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^4}$

由 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(|x|<1)$，

故 $$f'(x)=\frac{x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{4n+1}}x^{4n+1}\quad |x|<2,$$

这样 $$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{4n+1}}x^{4n+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{4n+1}}\cdot\frac{1}{(4n+2)}x^{4n+2},$$

由 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，故 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{4n+2}(2n+1)}x^{4n+2}(|x|<2)$.

(6) $$f'(x)=\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\right)'=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}(|x|<1),$$

故 $$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=0+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},(|x|<1).$$

例 9-51 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ 在点 $x=1$ 处展开成幂级数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}$.

解 $$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2-(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},$$

由 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1$，可得展开式成立的区间为 $(-1,3)$.

令 $x=0$，则得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{3-x}\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{3}$.

例 9-52 将 $f(x)=\cos x$ 展开 $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

解 注意到 $$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

由 $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty).$$

得 $$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+(-1)^n}{2}}\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right],x\in(-\infty,+\infty).$$

例 9-53 将函数 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{4}}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n,$$

由$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{4}\right|<1\\ \left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1\end{cases}$得到$-1<x<3$,故展开式成立的区间为$-1<x<3$.

例 9-54 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数,并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

解 因为

$$f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 4^n x^{2n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

又,$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$,所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n t^{2n}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

因为级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$收敛,函数$f(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$处连续,所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

令$x=\dfrac{1}{2}$,得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\right].$$

再由$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

例 9-55 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

试将$f(x)$展开成x的幂级数,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和.

解 因$\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $x\in(-1,1)$,故

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan t)'\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

$x\in[-1,1]$. 于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad x \in [-1,1],$$

因此
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

例 9-56　将函数 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$ 展开为 x 的幂级数 .

解　先将函数化简 . 由于

$$f(x) = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} = \frac{1-x}{1-x^8},$$

已知

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (-1,1).$$

故得

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)(1+x^8+x^{16}+\cdots+x^{8n}+\cdots) \\ &= 1-x+x^8-x^9+x^{16}-x^{17}+\cdots+x^{8n}-x^{8n+1}+\cdots,(-1,1). \end{aligned}$$

例 9-57　求函数 $f(x) = e^x \cos x$ 展开为 x 的幂级数 .

解　用直接展开法 .

$$f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) = \sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f''(x) = \sqrt{2} e^x \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] = (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\cdots$$

由数学归纳法可证得

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

于是得

$$f(0) = 1,\ f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}, \quad n = 1,2,\cdots$$

故得

$$e^x \cos x = 1 + \left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)x + \frac{(\sqrt{2})^2}{2!}\cos\frac{2\pi}{4}x^2 + \cdots + \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}x^n + \cdots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

即
$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos\dfrac{n\pi}{4}}{n!} x^n, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

例 9-58　将 $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ 展开为 x 为幂级数 .

解法 1　$f(x) = \dfrac{2-(1-x)}{(1-x)^3} = \dfrac{2}{(1-x)^3} - \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

由于
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

而
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (|x| < 1)$$

所以
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

故 $$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1},\quad (|x|<1).$$

解法 2 由$(1+x)^{\alpha}$的展开式知

$$\frac{1}{(1-x)^3}=(1-x)^{-3}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-x)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=(1+x)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}.$$

其 $$x^{n-1}\text{ 项的系数为}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=n^2.$$

则 $$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1},\ |x|<1.$$

例 9-59 求$\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$在 $x_0=0$ 处的幂级数,并求其收敛半径.

解 $$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=1-\frac{3}{2}(-x^2)+\frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2+\cdots+\frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}x^{2n},$$

再求收敛半径,令 $a_n=\dfrac{(2n+1)!!}{n!}\cdot\dfrac{1}{2^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!!}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{n!2^n}{(2n+1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}\cdot\frac{1}{2}=1,$$

即 $|x^2|<1$,

所以 $|x|<1$,故级数收敛半径为 1.

例 9-60 将 $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解法 1 由于$\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$,

那么 $$f(x)=\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)',$$

而 $$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2nx^{2n-1},$$

则 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n},\quad |x|<1.$$

解法 2 由$(1+x)^{\alpha}$展开式知

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}=(1+x^2)^{-2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(x^2)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n},$$

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n}, \quad |x| < 1.$$

解法 3　$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n}, \quad |x| < 1.$$

解法 4　利用待定系数法.

设
$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

则
$$x^2 = (1+x^2)^2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right) = (1+2x^2+x^4)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$$

$$= a_0 + a_1x + (2a_0+a_2)x^2 + a_3x^3 + (a_0+2a_2+a_4)x^4 + \cdots$$

$$+ a_{2m-1}x^{2m-1} + (a_{2m-4}+2a_{2m-2}+a_{2m})x^{2m} + \cdots$$

易得　$a_0 = 0$，$a_{2m-1} = 0$，$a_2 = 1$，$a_4 = -2$，$\cdots$，$a_{2m} = (-1)^{m+1}m$，

故
$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n}, \quad |x| < 1.$$

例 9-61　设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f^{(n)}(0)$，$(n = 1,2,\cdots)$.

解　由于 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\cdots(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$，$(-\infty < x < +\infty)$

所以
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (x \neq 0).$$

又当 $x = 0$ 时，上式中的幂级数和为 1，则

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

故
$$f^{(2m-1)}(0) = 0.$$

$$f^{(2m)}(0) = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}, \quad m = 1,2,\cdots.$$

4. 求函数傅立叶级数，并讨论其和函数

这部分的题目，解法是比较固定的，首先是求出 $f(x)$ 的傅立叶系数并写出傅立叶级数，然后根据狄利克雷定理讨论其和函数，要记住求傅立叶系数的公式及狄利克雷定理的内容，在解题时还要注意函数的定义域是否需要延拓、函数的奇偶性、函数的周期等.

例 9-62　设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在 $(-1,1]$ 上的定义为 $f(x) = \begin{cases} 2, -1 < x \leqslant 0 \\ x^3, 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$，试问 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x = -1$ 处收敛于何值？

解　本题的目的是讨论傅立叶级数的和函数的值，主要依据是狄利克雷收敛定理，因此不必去计算 $f(x)$ 的傅立叶系数. 可以先作函数的图形(图 9-1)，根据函数在 $x = -1$ 处连续与否的情况，获得其傅立叶级数的和函数的值，从图中可以看到 $x = -1$ 为函数间断点，根据收敛定理和其傅立叶级数在 $x = -1$ 处收敛于
$\dfrac{1}{2}[f(-1-0) + f(-1+0)] = \dfrac{1}{2}[1+2] = \dfrac{3}{2}$.

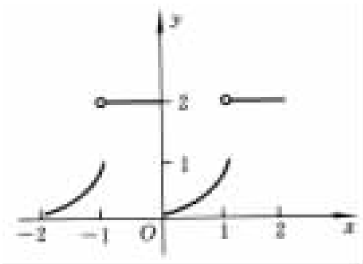

图 9-1

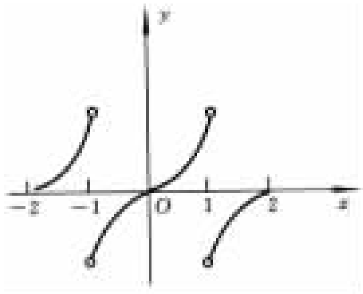

图 9-2

例 9-63 设函数 $f(x)=x^2, 0\leqslant x<1$，而 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, (-\infty<x<+\infty)$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\cdot\sin n\pi x\,\mathrm{d}x, (n=1,2,\cdots)$，求 $s\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

解 从 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，可以看出该级数是正弦级数. 因此它是将 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,0)$ 内作奇延拓，然后在 $[-1,1]$ 外作周期延拓后所得的函数 $F(x)$ 的傅立叶级数. 为此，作出 $F(x)$ 的图形(图 9-2). 可以看到 $x=-\dfrac{1}{2}$ 为 $F(x)$ 的连续点，这样

$$s\left(-\frac{1}{2}\right)=F\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

例 9-64 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅立叶级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，求傅立叶系数 b_3.

解 利用公式，可得

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}.$$

例 9-65 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅立叶级数.

解 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 外作周期延拓，注意到 $f(x)=\pi^2-x^2$ 为偶函数，因此 $b_n=0$，$(n=1,2,\cdots)$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^n}{n^2},(n=1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是连续的，并且 $f(-\pi)=f(\pi)$，因此在区域 $[-\pi,\pi]$ 上有

$$f(x)=\pi^2-x^2=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

例 9-66 在区间 $[0,2]$ 上将函数 $f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x<1;\\2-x,1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 展开为余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

解 首先将 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上作偶延拓，然后在 $[-2,2]$ 外作周期延拓.

由
$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=1,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2m+1; \\ \dfrac{1}{m^2\pi^2}(2\cdot(-1)^m-2), & n=2m,\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

而
$$\frac{1}{m^2\pi^2}(2\cdot(-1)^m-2)=\begin{cases}0, & m=2k; \\ \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} & m=2k-1,\end{cases}(k=1,2,\cdots)$$

注意到延拓后的函数处处连续,故

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi}{2}x$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\qquad(x\in[0,2]).$$

令 $x=0$,得
$$f(0)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=0,$$

故
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}$ 均收敛,因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

于是得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例 9-67　求函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,2\pi]$上的傅立叶级数,并求(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$;(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

解　首先将 $f(x)$ 在$[0,2\pi]$外作周期延拓,注意到周期函数定积分的性质$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$,其中,$a$ 为任意常数,T 为$f(x)$ 的周期,可得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2},n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\pi^2,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{4\pi}{n},n=1,2,\cdots$$

注意到 $f(x)$ 延拓后的函数 $F(x)$ 在$(0,2\pi)$内是连续的且等于 $f(x)$,而在 $x=0$ 及 $x=2\pi$ 处是间断的,由$\dfrac{1}{2}[f(0+0)+f(2\pi-0)]=2\pi^2$ 得

$$\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,2\pi); \\ 2\pi^2, & x=0,2\pi,\end{cases}$$

于是,令 $x=0$,则有 $2\pi^2=\dfrac{4}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}$,故

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

令 $x=\pi$,则有 $\pi^2=\dfrac{4}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^n}{n^2}$,

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

例 9-68 设在区间$[-\pi,\pi]$上的 $f(x)$ 为偶函数，且$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，证明在 $f(x)$ 的余弦展开式中系数 $a_{2n}=0,n=0,1,2,\cdots$.

解 从 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$可以看出 $f(x)$ 的图形在$[0,\pi]$内以点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$为中心对称，因此

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x\right],$$

记 $$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x,I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}xm,$$

在 I_1 中，令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\,\mathrm{d}t,$$

在 I_2 中，令 $t=x-\frac{\pi}{2}$，则

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(n\pi+2nt)\,\mathrm{d}t.$$

注意到条件

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\text{及 }\cos(n\pi-2nt)=\cos(n\pi+2nt),$$

因此，$I_1+I_2=0$，故 $a_{2n}=0,n=0,1,2,\cdots$.

例 9-69 怎样才能将在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可积函数 $f(x)$ 延拓到区间$(-\pi,\pi)$上，使其傅立叶级数形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$？

解 由于级数形式中只有正弦项，故应该有 $f(x)=-f(-x)$，又，由于 $\sin 2nx$ 项不出现，故应有 $b_{2n}=0,n=1,2,\cdots$,

又 $$b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x\right],$$

在第二个式子中，令 $x=\pi-t$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\pi-t)\sin 2n(\pi-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-t)\sin 2nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x,$$

这样 $$b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(f(x)-f(\pi-x)]\sin 2nx\,\mathrm{d}x,$$

若取 $f(x)=f(\pi-x),0\leqslant x\leqslant\pi$，则有 $b_{2n}=0$. 故当 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(\pi-x),f(x)=-f(-x)$ 时，就可得到形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$ 的傅立叶级数.

$f(x)$ 延拓到区间$(-\pi,\pi)$后的 $F(x)$ 的形式为

$$F(x)=\begin{cases}-f(x-\pi), & -\pi<x\leqslant-\dfrac{\pi}{2};\\ -f(-x), & -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant 0;\\ f(x), & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ f(\pi-x), & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

例 9-70　**将函数** $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ **展开成以** 2 **为周期的傅里叶级数，并由此求级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **的和．**

解　**由于** $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ **是偶函数，所以**

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

因所给函数在区间$[-1,1]$ **上满足收敛定理的条件，故**

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

当 $x=0$ **时，**$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$**，从而** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例 9-71　**将函数** $f(x)=\arcsin^2(\sin x)$ **在**$[-\pi,\pi]$ **上展开为傅里叶级数．**

解　**函数** $f(x)=\arcsin^2(\sin x)$ **是以** 2π **为周期的偶函数．当** $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ **时，**$\arcsin(\sin x)=x$**，所以，**$\arcsin^2(\sin x)=x^2$**．当**$\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$ **时，**$\arcsin(\sin x)=\pi-x$**，所以** $\arcsin^2(\sin x)=(\pi-x)^2$**，因此得**

$$f(x)=\begin{cases}(\pi+x)^2, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2};\\ x^2, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ (\pi-x)^2, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

从而　$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^2\cos nx\mathrm{d}x\right]=\frac{2}{\pi}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}[1+(-1)^n]\left[\frac{\pi^2}{4n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}0, & n\ \text{为奇数};\\ \dfrac{4\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}, & n\ \text{为偶数}.\end{cases}$$

所以 $$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{(2n)^2} \cos 2nx = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 2nx,$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(x)$ 连续，从而

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 2nx, \quad [-\pi, \pi].$$

例 9-72 将函数 $f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$ 在 $[0, 2\pi]$ 上展开成傅里叶级数，并由此推证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

解 $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = 0, \ n = 1, 2, \cdots.$$

于是 $$f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

由于 $f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$ 连续，帕塞伐尔等式成立.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

由 $$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^4 dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^5 \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi^4}{40}.$$

所以就有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{40}.$$

即得 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

5. 级数在经济学中的应用

(1) 复利

例 9-73 设有 1 万元储蓄存款，年利率为 r，按复利计息，n 年后取出存款. 记 s_i 为第 i 年的利息. k_i 为第 i 年末的储蓄本金(s_i, k_i 均以万元为单位)，则有

$$k_i = (1 + r)^i, \quad s_i = r(1 + r_i)^{i-1}.$$

证 先采用数学归纳法来证明 k_i 和 s_i 的关系，当 $i = 1$ 时，显然有 $k_1 = (1 + r)' = 1 + r$, $s_1 = r(1 + r)^{1-1} = r$，设 $i = l$ 成立，即设

$$k_l = (1 + r)^l \quad (k_l \text{ 为第 } l \text{ 年末储蓄本金}),$$
$$s_l = r(1 + r)^{l-1} \quad (s_l \text{ 为第 } l \text{ 年的利息}).$$

则当 $i = l + 1$ 时，因为第 $l + 1$ 年的利息等于第 l 年储蓄本金，乘以年利率，而第 $l + 1$ 年末的储蓄本金等于第 l 年末的储蓄本金与第 $l + 1$ 年的利息之和，因此

$$s_{l+1} = rk_l = r(1 + r)^l = r(1 + r)^{(l+1)-1},$$

$$k_{l+1} = k_l + s_{l+1} = (1 + r)^l + r(1 + r)^l = (1 + r)^{l+1}.$$

因此上述关于 k_i 和 s_i 的公式对 $i = l + 1$ 也成立，从而完成了对这两个公式的归纳法证明.

(2) 资本现值

若年利率为 r，则一笔资金在 k 年后可得到的收入 b_k 的现值为 $\left(\frac{1}{1 + r}\right)^k b_k$. 为方便起见，记 $\rho = \frac{1}{1 + r}$，若有一笔资金在 n 年中逐年可得收入 $b_k (k = 1, 2, \cdots, n)$，则该笔资金的现值为

$$k_n=\sum_{k=1}^{n}\rho^k b_k.$$

如每年收入为常数 b，则 k_n 可表示为

$$\begin{aligned}k_n&=b\sum_{k=1}^{n}\rho^k=b(\rho+\rho^2+\cdots+\rho^n)\\&=b\frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}=b\frac{1-\rho^n}{\dfrac{1}{\rho}-1}=b\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{1+r}\right)^n}{1+r-1}\\&=b\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，取极限得 $k=\lim\limits_{n\to\infty}k_n=\dfrac{b}{r}$.

如收入逐年均匀增加，即 $b_k=a+bk$，则

$$k_n=\sum_{k=1}^{n}b_k\rho^k=a\sum_{k=1}^{n}\rho^k+b\sum_{k=1}^{n}k\rho^k.$$

第一个和式已求得；对第二个和式，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\rho^k&=\rho\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}\rho^k\right)=\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}\right)\\&=\frac{\rho-(n+1)\rho^{n+1}+n\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}k_n&=a\rho\frac{1-\rho^n}{1-\rho}+b\frac{\rho-(n+1)\rho^{n+1}+n\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2}\\&=a\frac{(1+r)^u-1}{r(1+r)^n}+b\frac{n-(n+1)(1+r)+(1+r)^{n+1}}{r^2(1+r)^n},\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，取极限得

$$k=\lim_{n\to\infty}k_n=\frac{a}{r}+\frac{b(1+r)}{r^2}.$$

如收入逐年以常年增长率 h 递增：$b_k=b(1+h)^k$，则有

$$k_n=\sum_{k=1}^{n}b_k\rho^k=b\sum_{k=1}^{n}\rho^k(1+h)^k=b\sum_{k=1}^{n}[\rho(1+h)]^k.$$

当 $r\neq h$ 时，由于

$$k_n=b\frac{\rho(1+h)[1-\rho^n(1+h)^n]}{1-\rho(1+h)}=b(1+h)\frac{1-\left(\dfrac{1+h}{1+r}\right)^n}{r-h},$$

所以当 $r<h$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\rho^k$ 发散；当 $r>h$ 时，取极限得

$$k=\lim_{n\to\infty}k_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\rho^k=\frac{b(1+h)}{r-h}.$$

而当 $r=h$ 时，由 $\rho^kb_k=\dfrac{1}{(1+r)^k}\cdot b(1+r)^k=b$，得

$$k_n=\sum_{k=1}^{n}\rho^kb_k=nb,$$

即逐年收入的现值均为常值 b，因而级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\rho^k$ 发散.

例 9-74　某人投资 10 万元，按年利率 5% 用连续复利计算，问：经过多少时间能增值为 20 万元？

解　由本利和公式可知

$$20 = 10e^{0.05t}.$$

由此得

$$t = 20\ln 2 \approx 13.863(\text{年}).$$

即需经过近 14 年,他的本金才能翻一番.

例 9-75　房屋抵押贷款万元贷款的月还款额计算.

现行的住房抵押贷款的做法是,购房人先支付房价的一部分,通常为 30%,其余部分用所购住房作为抵押向银行贷款,贷款采取每月等额还款的办法. 还贷期越长,利息越高,等额贷款每月的还款额越高. 通常银行公布一张表格,通告不同还款的期限、贷款的利率和贷款 1 万元的月还款额. 例如,在某一时期银行公布的居民购房抵押贷款 1 万元月等额还款数如表 9-1 所示,这张表格中的月还款数是如何计算出来的呢?

解　设还款期限为 n(月),月利率为 r,每月还款额为 A,那么,1 万元应等于每月末投资额为 A,利率为 r,投资 n 期的年金的现值. 因此由

$$A = \frac{pr}{1-(1+r)^{-n}},$$

得

$$A = \frac{10\,000 \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

以还贷期 10 年为例,可知 $n = 120, r = 0.00975$,得

$$A = \frac{10\,000 \times 0.00975}{1-1.00975^{-120}} \approx 141.742(\text{元}).$$

即还贷期为 10 年每月的还款额为 141.742 元. 类似地,可以计算其他不同还贷期的月还款额.

表 9-1

年　　数	月利率(‰)	月还款数(元)
1	7.65	875.35
2	8.025	459.74
3	8.4	323.05
4	8.77	256.18
5	9.15	217.32
6	9.27	190.98
7	9.39	172.64
8	9.51	159.32
9	9.63	149.35
10	9.75	141.74
11	9.87	135.86
12	9.99	131.27
13	10.11	127.68
14	10.23	124.89
15	10.35	122.73

习　题　9

1. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$，试证 $s_n=\arctan\dfrac{n}{n+1}$，并求此级数之和.

2. 求正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 的和.

3. 判别下列正项级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}\left(\dfrac{19}{9}\right)^{n-1}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{5/4}}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$，$(a>0,b>0)$.

4. 判别下列级数的敛散性. 若收敛，则指出是条件收敛还是绝对收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+a)^k}$，其中，$a>0,k>0$；　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}\ln\ln n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

5. 求下列幂级数的收敛区间及其和函数

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot nx^{n-1}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n+1}$.

6. 将下列函数展开成 x 的幂级数

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$；　(2) $f(x)=\arcsin x$.

7. (1) 设 $f(x)=1-x$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$，将 $f(x)$ 展开成正弦级数；
(2) 设 $f(x)=x^2$，$x\in[0,\pi]$，将 $f(x)$ 展开成以 π 为周期的傅立叶级数.

8. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}=0$，($a>1$ 为常数).

简答与提示

1. 利用 $\arctan x+\arctan y=\tan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 及数学归纳法证明

$$s_n=\arctan\frac{n}{n+1}，令\lim_{n\to\infty}s_n=\arctan 1=\frac{\pi}{4}，即 s=\frac{\pi}{4}.$$

2. 由 $\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5n-4}-\dfrac{1}{5n+1}\right)$，

$$s_n=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right),$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{1}{5}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\dfrac{1}{5}$.

3. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot n^{n-1}}{(n+1)^n}\cdot\dfrac{19}{9}=\dfrac{19}{9}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{19}{9e}<1$，所以原级数收敛 .

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\dfrac{2}{5}<1$,所以原级数收敛.

(3) 解法 1　　由$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{n}}-2\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{n}}-2\arctan\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{2}{n^{3/2}}}=\frac{1}{3},$$

又,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,所以级数收敛.

解法 2　　$0<\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛,所以级数收敛.

(4) 根据$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^r}=0,(r>0)$,

考虑
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{9}{8}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{8}}}=0,$$

又,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$ 收敛,故原级数收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1}=\dfrac{a}{b}$,当 $a<b$ 时,级数收敛,当 $a>b$ 时级数发散;

当 $a=b$ 时,$u_n\equiv1$(一般项不趋于零),所以级数发散.

4. (1) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+a)^k}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+a)^k}$,知当 $k>1$ 时,级数绝对收敛.

当 $0<k\leqslant1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+a)^k}$ 发散,但原级数是交错级数,根据莱布尼茨定理知级数收敛,故当 $k>1$ 时,级数绝对收敛,当 $k\leqslant1$ 时,级数条件收敛.

(2) 由$\dfrac{1}{n}\ln\ln n>\dfrac{1}{n}$,($n>$ 充分大的正整数),$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,所以原级数不会绝对收敛. 又 $u_n\to0(n\to\infty)$ 且 $u_{n+1}<u_n$,故由莱布尼茨定理知原级数收敛,所以级数条件收敛.

(在讨论 u_n 的单调性时,可利用 $y=\dfrac{1}{x}\ln\ln x$ 的单调性,先证当 x 大于充分大的 x_0 时有 $y'<0$);

(3) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{x}},(x>0)$,由 $f'(x)<0(x>0)$ 故 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调减少. 因此有

$$u_{n+1}=f(n+1)<f(n)=u_n.$$

又,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,由莱布尼茨定理知级数收敛,又,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$(利用$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$),$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散. 所以原级数条件收敛.

5. (1) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=1,R=1$,当 $|x|=1$ 时,级数一般项不趋于零,故级数收敛域为$(-1,1)$.

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$，则

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=x\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{x}{1+x}.$$

故
$$s(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2},x\in(-1,1).$$

（2）显然，收敛域为$[-1,1]$，设其和函数为 $s(x)$，则

$$s''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2},$$

因而

$$s'(x)-s'(0)=\int_0^x s''(x)\mathrm{d}x=2\arctan x,$$

$s'(0)=0$，所以

$$s(x)-s(o)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=2x\arctan x-\ln(1+x^2),$$

$s(0)=0$，所以

$$s(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2),x\in[-1,1].$$

（3）由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=0$，故 $R=+\infty$，故收敛域为$(-\infty,+\infty)$，设其和函数为 $s(x)$，则

$$s(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}\right)'$$

$$=x\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right)'=x(xe^{x^2})'$$

$$=xe^{x^2}(1+2x^2),x\in(-\infty,+\infty).$$

6.（1）
$$f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n,x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

（2）由 $y'=(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，以及

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,x\in(-1,1].$$

故
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},x\in(-1,1).$$

因此
$$y=\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},x\in(-1,1).$$

可以证明，当 $x=\pm1$ 时，上述级数也是收敛的.

7.（1）将 $f(x)$ 在$[-1,1)$ 内作奇延拓，然后在$(-1,1)$ 外作周期延拓，使其满足狄利克雷定理条件.

$$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots;$$

$$b_n = 2\int_0^1 (1-x)\sin n\pi x\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}, n = 1,2,\cdots;$$

于是
$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n} = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ f(x), & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

(2) 由 $2l = \pi, l = \frac{\pi}{2}$，将函数在$(0,\pi)$外作周期延拓，使其满足狄利克雷定理条件：

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos 2nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2},\quad n = 1,2,\cdots;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin 2nx\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{n},\quad n = 1,2\cdots.$$

这样
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \frac{\pi}{n}\sin 2nx\right) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{2}, & x = 0,\pi; \\ f(x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

8. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$ 的收敛性.

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$，知级数收敛，由收敛级数的必要条件，得 $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0$.

第十章　微分方程及其应用

常微分方程是历年必考的内容. 主要涉及三方面内容:(1) 以一阶线性微分方程为重点的包括齐次方程、贝努利方程、可降阶的高阶方程的求解;(2) 以二阶常系数线性方程的求解为重点的包括二阶线性方程解的结构的各类问题;(3) 建立和求解由几何问题和简单的物理问题导出的微分方程初值问题,报考不同专业的考生有不同的要求.

考生在复习本章时,可以按照以上三大块进行. 首先要学会判别方程的类型,以选择适当的解题方法,仔细计算并注意定解条件.

一、复习与考试要求

(1) 了解微分方程及其解、通解、初始条件和特解等概念.

(2) 掌握变量可分离的方程及一阶线性方程的解法.

(3) 会解齐次方程、伯努利方程和全微分方程,会用简单的变量代换解某些微分方程.

(4) 会用降阶法解下列方程:$y^{(n)}=f(x)$,$y''=f(x,y')$ 和 $y''=f(y,y')$.

(5) 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理.

(6) 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法,并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

(7) 会求自由项为多项式,指数函数,正弦函数,余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解和通解.

(8) 会解欧拉方程.

(9) 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

二、基本概念与理论

1. 微分方程

凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程称为微分方程. n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0.$$

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数叫做微分方程的阶. 能使微分方程成为恒等式的函数,称为微分方程的解. 如果微分方程的解中含有任意常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,此解称为方程的通解. 确定了通解中的任意常数后,得到的微分方程的解就是特解.

用来确定 n 阶方程通解的任意常数的 n 个条件,例如,$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{n-1}(x_0)=y_{n-1}$ 称之为定解条件或初始条件.

带有定解条件的微分方程称为初值问题或柯西问题.

微分方程的特解的图形叫做微分方程的积分曲线.

2. 一阶微分方程

(1) 可分离变量的微分方程:如果一个一阶微分方程能写成 $M(y)\mathrm{d}y=N(x)\mathrm{d}x$,则方程称为可分离变量的微分方程. 通常可用两边积分的方法求解.

(2) 齐次方程:方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$,其中,$f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,称为齐次方程,它可以通过代换转化为可分离变量的微分方程. 即令 $u=\dfrac{y}{x}$,也就是 $y=ux$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,这样方程化为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$,即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

(3) 对于线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 有通解公式

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx),$$

特别对柯西问题
$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

有特解公式

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx).$$

(4) **贝努利方程**,$y' + p(x)y = q(x)y^n$,(**实数** $n \neq 0,1$)

令 $z = y^{1-n}$,**方程化为一阶线性方程**:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

(5) **对于微分方程** $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (1)

如果存在 $u = u(x,y)$ **使** $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,**则称方程**(1) **为全微分方程. 若在某单连通区域内** $P(x,y),Q(x,y)$ **具有一阶连续偏导数且** $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$,**方程**(1) **是全微分方程. 这时** $u = u(x,y)$ **可由下列公式给出**:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

(6) **可降阶的高阶微分方程**

① $y^{(n)} = f(x)$ **型:这类方程只要逐次积分就可得到通解.**

② $y'' = f(x,y')$ **型:这类方程的特征是不显含未知函数** y,**可令** $y' = p, y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$,**这样,方程就可以化为** $\dfrac{dp}{dx} = f(x,p)$,**通过求解可得** $p = \varphi(x,C_1)$,**再积分得**

$$y = \int \varphi(x,C_1)dx + C_2.$$

③ $y'' = f(y,y')$ **型:这类方程的特征是不显含** x,**可令** $y' = p, y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$,**这样方程就可化为** $p\dfrac{dp}{dy} = f(y,p)$ **通过求解得** $p = \varphi(y,C_1)$,**然后得** $\displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = x + C_2$.

3. 二阶微分方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ **称为二阶线性微分方程,当** $f(x) = 0$ **时,称为齐次方程,否则称为非齐次方程.**

(1) **解的结构**(**以下性质可推广到任意高阶的线性方程**)

① **如果** y_1, y_2 **是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ **的解,则** $y = C_1y_1 + C_2y_2$ **也是它的解,其中**,C_1, C_2 **为任意常数.**

② **如果** y_1, y_2 **是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ **的两个线性无关的特解,则** $y = C_1y_1 + C_2y_2$(C_1,C_2 **为任意常数**) **就是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ **的通解.**

③ **设** y^* **是二阶非齐次线性方程**

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ **的特解**,Y **是相应齐次方程的通解,则** $y = Y + y^*$ **是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ **的通解.**

④ **若** y_i^* $(i = 1,2,\cdots,n)$ **是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$ **的特解,则** $y^* = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*$ **是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ **的特解**(**叠加原理**).

(2) **对于二阶常系数齐次线性微分方程** $y'' + py' + qy = 0$,$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ **称之为对应的特征方程,根据特征方程的两个根的不同情形,可得出** $y'' + py' + q = 0$ **的通解.**

当 λ_1, λ_2 **为不相等的实根时**,$Y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$,

当 $\lambda_1 = \lambda_2$ **为相等的实根时**,$Y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_1 x}$,

当 λ_1, λ_2 为一对共轭复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 时，$Y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

(3) n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

对应特征方程为 $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$

根据特征方程的根，可以写出其对应的微分方程的解(表 10-1).

表 10-1

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项 $C\mathrm{e}^{rx}$
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	给出两项 $\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项 $\mathrm{e}^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	给出 $2k$ 项 $\mathrm{e}^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})\cos\beta x$ $+ (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1} \sin\beta x)$

(4) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解 y^* 的求法.

当 $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$ 时(其中，λ 为实数，$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$)，则 $y^* = x^k Q_m(x) \mathrm{e}^{\lambda x}$，其中，$Q_m(x)$ 为与 $P_m(x)$ 同次的多项式，其系数待定，当 λ 不是特征根时，k 取零，λ 是特征根时，k 取其重数.

当 $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 时(其中，$P_l(x)$，$P_n(x)$ 分别为 l 次，n 次多项式)则

$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)} \cos\omega x + R_m^{(2)} \sin\omega x]$，其中 $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 为 m 次多项式. $m = \max\{l, n\}$，当 $\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ 不是特征根时，k 取零，当 $\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ 是特征根时，k 取其重数.

(5) 欧拉方程：$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$，其中，$p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为常数.

作 $x = \mathrm{e}^t$，即 $t = \ln x$，记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则有 $x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$，把它代入欧拉方程后，即可将方程化为常系数线性方程，通过求解，再作 $t = \ln x$ 即得原方程的解.

4. 应用微分方程解决几何、物理问题

微分方程解决物理问题主要涉及到牛顿第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 等.

微分方程在几何上的应用，其关键是依题意建立方程. 这类问题经常涉及的内容为切线、法线的斜率，它们在坐标轴上的截距，图形的面积，曲线的弧微分等.

三、基本题型与解题方法

1. 一阶线性微分方程

考生在解题时首先要注意判别方程的类型. 如果方程本身或经过整理可化为一阶线性微分方程的形式 $y' + p(x)y = q(x)$，则可直接利用公式解题，对于一般形式 $y' = f(x, y)$ 可先判断它是否是可分离变量的方程或者是齐次方程或全微分方程。如果方程中出现 y^n 项，则判别一下它是否为贝努利方程，这样，选择适当的办法就可解题. 注意有时不妨视 x 为因变量，而视 y 为自变量，也许可把方程整理为线性方程，即$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + p(y)x = q(y)$ 的形式. 如果是求特解，则不要忘记最后利用初始条件确定通解中的任意常数.

作变量代换简化方程也是解方程的一种方法，选择怎样的变换需根据方程的特点而定，考生在平时练习时要注意积累经验.

例 10-1　求下列微分方程的特解或通解：

(1) $xy'+y=xe^x, y(1)=1$；

(2) $x\dfrac{dy}{dx}=x-y$，$y(\sqrt{2})=0$；

(3) $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$；$y(0)=1$；

(4) $x\ln x dy+(y-\ln x)dx=0$；

(5) $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$；

(6) 求 $\begin{cases} y'+y=Q(x) \\ y(0)=0 \end{cases}$ 的连续解，其中 $Q(x)=\begin{cases} 2, 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 0, x>1. \end{cases}$

解 (1) 先将方程化为线性方程标准形，再求解.

将原方程变形为

$$y'+\frac{1}{x}y=e^x,$$

利用公式得

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int e^x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}[(x-1)e^x+C],$$

现由 $y(1)=1$，得 $C=1$，故方程的特解为 $y=\dfrac{1}{x}[(x-1)e^x+1]$.

(2) 先将方程化为线性方程标准形式：

$$y'+\frac{1}{x}y=1,$$

于是利用公式得

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int 1\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)=\frac{1}{2}x+\frac{C}{x},$$

由 $y(\sqrt{2})=0$，得 $C=-1$. 故 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}$ 为所求.

(3) 先将方程化为线性方程标准形式

$$y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1},$$

利用公式得

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

$$=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left(C+\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx\right)=\frac{1}{x^2-1}(C+\sin x),$$

由 $y(0)=1$，得 $C=-1$，故 $y=\dfrac{1}{x^2-1}(\sin x-1)$.

注 本题的方程实际上是全微分方程，可用“凑微分”方法求解，由

$$(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=(x^2dy+ydx^2)-dy-d\sin x$$

$$=d(x^2y-y-\sin x)=0,$$

故 $x^2y-y-\sin x=C$ 即为通解，再由 $y(0)=1$，得 $C=-1$，于是 $x^2y-y-\sin x+1=0$ 是柯西问题的解.

(4) 方程可化为线性方程标准形式:

$$y'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x},$$

于是

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left(\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}dx+C\right)=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right).$$

(5) 若将 x 视为未知函数,则方程为线性的,化原方程为$\frac{dx}{dy}=\cos y\cdot x+\sin 2y$,即

$$\frac{dx}{dy}-\cos y\cdot x=\sin 2y,$$

利用公式

$$x=e^{\int\cos y dy}\left(C+\int\sin 2y e^{-\int\cos y dy}dy\right)$$

$$=e^{\sin y}\left(C+\int\sin 2y e^{-\sin y}dy\right)=e^{\sin y}\left(C-2\sin y e^{-\sin y}-2e^{-\sin y}\right)$$

$$=Ce^{\sin y}-2\sin y-2;$$

(6) 利用公式

$$y=e^{-\int dx}\left(C+\int Q(x)e^{\int dx}dx\right)$$

$$=\begin{cases}e^{-x}(C_1+2e^x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ C_2e^{-x}, & x>1.\end{cases}$$

由 $y(0)=0$,得 $C_1=-2$,又 y 连续,因此 $C_2=2(e-1)$,故

$$y=\begin{cases}2(1-e^{-x}), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2(e-1)e^{-x}, & x>1.\end{cases}$$

例 10-2　求方程 $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$ 的通解.

解　将方程化为$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=2\sqrt{\frac{y}{x}}$,可以看出这是齐次方程,令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,由$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$ 得

$$x\frac{du}{dx}+u+u=2\sqrt{u},$$

即

$$x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}-2u,$$

经分离变量,有$\frac{du}{\sqrt{u}-u}=2\frac{dx}{x}$,积分得

$$-\ln(1-\sqrt{u})=\ln x+C_1,$$

即　$x-\sqrt{xy}=C$,　　其中,$C=e^{-C_1}$.

例 10-3　求方程 $y'\sec^2 y+\frac{x}{1+x^2}\tan y=x$ 满足 $y(0)=0$ 的解.

解　这是一阶非线性方程,由于$(\tan y)'=\sec^2 y\cdot y'$,可作代换 $Z=\tan y$,于是方程化为

$$Z'+\frac{x}{1+x^2}Z=x$$

利用公式

$$Z=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)=e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}\left(C+\int xe^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}dx\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C+\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\right)=\frac{1}{3}(1+x^2)+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}},$$

由 $y(0)=0$，得 $C=-\frac{1}{3}$，故问题的解是 $\tan y=\frac{1}{3}(1+x^2-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$.

例 10-4 (1) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})\mathrm{d}t+\ln 2\text{，求 } f(x)\text{；}$$

(2) 已知 $f(x)$ 可微，且满足 $\int_1^x\frac{f(t)}{t^3f(t)+t}\mathrm{d}t=f(x)-1$，求 $f(x)$.

解 (1) 本方程中含有未知函数的积分，通常称为积分方程，对这类积分方程可通过两端求导，将原方程化为微分方程的初值问题而求解.

方程两端对 x 求导，得 $f'(x)=2f(x)$，且 $f(0)=\ln 2$.

分离变量并积分得 $f(x)=Ce^{2x}$，代入 $f(0)=\ln 2$，得 $C=\ln 2$，故 $f(x)=\ln 2\cdot e^{2x}$ 为所求.

(2) 等式两边求导得 $\frac{f(x)}{x^3f(x)+x}=f'(x)$，且 $f(1)=1$.

现在这个方程既不是线性方程或齐次方程，也无法分离变量，但注意其特点，不妨记 $y=f(x)$，并把 y 视为自变量，而 x 为未知函数，这样方程可写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=x^3$，这是贝努利方程，令 $z=x^{-2}$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}z=-2,$$

解得
$$z=e^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}(C+\int-2e^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=\frac{1}{y^2}(C+\frac{2}{3}y^3),$$

即
$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}(C-\frac{2}{3}y^3),$$

亦即
$$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{2}{3}f^3(x)=C\text{，由 } f(1)=1 \text{ 得 } C=\frac{5}{3},$$

故所求 $f(x)$ 是 $\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{2}{3}f^3(x)=\frac{5}{3}$ 确定的隐函数.

例 10-5 (1) 求微分方程 $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ 的通解；

(2) 求方程 $y'+\sin y+x\cos y+x=0$ 的通解.

解 (1) 本题的技巧只在初等变形.

由于
$$y'=\sin\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}=2\cos\frac{x}{2}\sin(-\frac{y}{2})=-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2},$$

可分离变量：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\sin\frac{y}{2}}=-2\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x,$$

两边积分得
$$\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=-2\sin\frac{x}{2}+C.$$

(2) 利用三角恒等式，对方程作初等变形：

$$y'+2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}+x\cdot 2\cos^2\frac{y}{2}=0,$$

即
$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{y}{2}y'+\tan\frac{y}{2}+x=0,$$

令 $u=\tan\frac{y}{2}$，则方程为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=-x$，这是一阶线性方程，利用公式

$$u=e^{-\int\mathrm{d}x}(C-\int xe^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)=e^{-x}(C-xe^x+e^x)=-x+1+Ce^{-x},$$

即
$$\tan\frac{y}{2}=-x+1+Ce^{-x}.$$

例 10-6　设 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，这里 f 可导，且 $f'(0)=2$，求 $f(x)$.

解　必须根据上述等式导出相应的微分方程，然后求解.

令 $y=0$，　$f(x)=\dfrac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)}$.

经整理得 $f(0)[1+f^2(x)]=0$，即 $f(0)=0$.

固定 x，在等式两边关于 y 求导：

$$f'(x+y)=\frac{f'(y)[1-f(x)f(y)]-[f(x)+f(y)][-f(x)f'(y)]}{(1-f(x)f(y))^2},$$

令 $y=0$，得

$$f'(x)=[1+f^2(x)]f'(0)=2[1+f^2(x)],$$

于是问题转化为求解
$$\begin{cases}f(x)'=2(1+f(x)^2)\\ f(0)=0\end{cases}$$

方程分离变量得
$$\arctan f(x)=2x+C,$$

由 $f(0)=0$，得 $C=0$，故 $f(x)=\tan 2x$ 为所求.

例 10-7　求方程 $\dfrac{dx}{dt}=-t+\sqrt{t^2+2x}$ 的通解.

解　解这类方程一般先作变换，令 $t^2+2x=u$，则 $2t+2\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{du}{dt}$，原方程就化为

$$\frac{du}{dt}=2\sqrt{u},$$

分离变量为 $\dfrac{du}{2\sqrt{u}}=dt$，并积分，得 $\sqrt{u}=t+C$，即 $\sqrt{t^2+2x}=t+C$，或 $x=Ct+\dfrac{C^2}{2}$.

例 10-8　(1) 求 $\dfrac{dy}{dx}=(x-y)^2$ 的通解；

(2) 求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通解.

解　(1) 可令 $u=x-y$，将原方程化为可分离变量的形式.

由 $\dfrac{du}{dx}=1-\dfrac{dy}{dx}=1-u^2$，即 $\dfrac{du}{1-u^2}=dx$，得

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|=x+C,$$

将 $u=x-y$ 代回，得 $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x-y}{1-x+y}\right|=x+C$.

注　一般地，若 $y'=f(ax+by+C)$，可令 $u=ax+by+C$ 求解.

(2) 本题不是线性方程，需经代换化为线性方程. 首先原方程化为

$$y^2\frac{dy}{dx}=x^3+\frac{1}{x}y^3,$$

令 $Z=y^3$　得 $\dfrac{dZ}{dx}-\dfrac{3Z}{x}=3x^3$，于是

$$Z=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left[C+\int 3x^3e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx\right]=x^3[3x+C],$$

即 $$y^3=x^3(3x+C).$$

例 10-9　求微分方程$(x^2+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=0$ **的通解.**

解　先判别此方程是否为全微分方程

令 $$P(x,y)=x^2+y,\qquad Q(x,y)=x-2y,$$

则有$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$，故存在 $u=u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=(x^2+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y$，由

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y(\text{取 } x_0=0,y_0=0)$$

$$=\int_0^x(x^2+y)\mathrm{d}x+\int_0^y(0-2y)\mathrm{d}y=\frac{x^3}{3}+xy-y^2,$$

故方程解为 $$\frac{x^3}{3}+xy-y^2=C.$$

例 10-10　求 $2x(ye^{x^2}-1)\mathrm{d}x+e^{x^2}\mathrm{d}y=0$ **的通解.**

解　对全微分方程，有时可通过"凑微分"的方法，很快得出解，原方程化为

$$(ye^{x^2}-1)\mathrm{d}x^2+e^{x^2}\mathrm{d}y=0,$$

即 $$\mathrm{d}(ye^{x^2})-\mathrm{d}x^2=0,$$

从而 $$ye^{x^2}-x^2=C.$$

例 10-11　求解下列方程

(1) $(y-x\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$；

(2) $(xy+\sqrt{1-x^2y^2})\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$.

解　(1) 经整理得 $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=x\mathrm{d}x$，

可化为 $$\frac{-\mathrm{d}(\frac{y}{x})}{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}=\mathrm{d}x,$$

得解 $$-\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right|=x+C;$$

(2) 经整理得 $$\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-(xy)^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

得解 $$\arcsin(xy)+\ln|x|=C.$$

例 10-12　求 $x+yy'=f(x)g(\sqrt{x^2+y^2})$ **的通解，并利用此结果求** $x+yy'=\tan x\cdot(\sqrt{x^2+y^2}-1)$ **的通解.**

解　先作变换 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，由于 $\mathrm{d}u=\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，即

$$u\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y,$$

原方程可化为 $$u\mathrm{d}u=f(x)g(u)\mathrm{d}x,$$

分离变量后积分得 $$\int\frac{u\mathrm{d}u}{g(u)}=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

于是通解为 $$\int\frac{u\mathrm{d}u}{g(u)}-\int f(x)\mathrm{d}x=C,$$

其中
$$u=\sqrt{x^2+y^2},$$
现在
$$f(x)=\tan x, g(\sqrt{x^2+y^2})=\sqrt{x^2+y^2}-1,$$
即
$$g(u)=u-1,$$
于是
$$\int\frac{u}{u-1}\mathrm{d}u-\int\tan x\mathrm{d}x=u+\ln|u-1|+\ln|\cos x|=C,$$
即
$$\sqrt{x^2+y^2}+\ln\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|+\ln|\cos x|=C.$$

2.　高阶微分方程

高阶微分方程主要可分为以下几类：(1) 可降阶的高阶方程，对于这类方程其解法还是比较固定的，只要按照具体的解法求解就可以了；(2) 二阶常系数线性微分方程，即形如 $y''+py'+qy=f(x)$ 的形式，这是重点内容，务必注意．对于三阶或更高阶常系数线性方程的解法基本上与二阶时相同．本章中的关于线性方程的解的结构，考生也应重视．

例 10-13　求解下列方程的通解：

(1) $y''=1+y'^2$；　　　(2) $y''=\dfrac{2y-1}{y^2+1}y'^2$.

解　本例都是可降阶的高阶方程，要根据每个方程的特点，以选择适当的代换．

(1) 方程右端不显含 y，作代换 $y'=p, y''=p'$，这样方程化为
$$p'=1+p^2,\text{即}\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\mathrm{d}x.$$
解得　$\arctan p=x+C_1$，　　　即 $p=\tan(x+C_1)$.

于是
$$y=\int\tan(x+C_1)\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2.$$

(2) 方程右端不显含 x，作代换 $y'=p, y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为
$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{2y-1}{y^2+1}p^2,$$
当 $p=0$ 时，$y=C$ 是原方程的解；

当 $p\neq 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2y-1}{y^2+1}\mathrm{d}y$，

积分得
$$\ln|p|=\ln|1+y^2|-\arctan y+C_1,$$
即
$$p=C_1(1+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan y},$$
亦即
$$\frac{\mathrm{e}^{\arctan y}}{1+y^2}\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x.$$
积分得
$$\mathrm{e}^{\arctan y}=C_1x+C_2.$$

例 10-14　求解初值问题 $\begin{cases}yy''-2yy'\ln y=y'^2\\ y(0)=y'(0)=1.\end{cases}$

解　方程为可降阶的高阶方程，属 $y''=f(y,y')$ 型，可作 $y'=p, y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程可化为
$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2yp\ln y=p^2,$$
由初值知 $p\neq 0$，于是方程化为
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}p=2\ln y,$$

利用公式得

$$p=e^{\int\frac{1}{y}dy}(C_1+\int_2 \ln y e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy)$$

$$=y(C_1+\int 2\ln y\cdot\frac{1}{y}dy)=y(\ln^2 y+C_1),$$

由 $y(0)=y'(0)=1$,得 $C_1=1$,于是 $p=y(\ln^2 y+1)$,即

$$\frac{dy}{y(\ln^2 y+1)}=dx,$$

积分得

$$\arctan \ln y=x+C_2,$$

由 $y(0)=1$,得 $C_2=0$,故 $\arctan\ln y=x$,即 $\ln y=\tan x$.

例 10-15 求下列方程的通解:

(1) $y''+2y'-3y=e^{-3x}$;　　(2) $y''-y=e^x+1$;

(3) $y''+2y'+2y=x+3$;　　(4) $y''+2y'+y=xe^x$;

(5) $y''+4y'+4y=e^{ax}$(a 为实数).

解 (1) 对应的齐次方程的特征方程 $\lambda^2+2\lambda-3=0$ 的根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-3$,故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$,设原方程的一个特解 $y^*=Axe^{-3x}$,代入原方程得 $A=-\frac{1}{4}$,则原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{4}xe^{-3x}$.

(2) 对应齐次方程的特征方程 $\lambda^2-1=0$ 的根 $\lambda_{1,2}=\pm1$,故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$,设原方程的一个特解为 $y^*=Axe^x+B$,代入原方程得 $A=\frac{1}{2},B=-1$,则原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x-1$.

(3) 对应的特征方程 $\lambda^2+2\lambda+2=0$ 的根为 $\lambda_{1,2}=-1\pm i$,故对应齐次方程的通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$,设原方程的一个特解为 $y^*=Ax+B$,代入原方程得 $A=\frac{1}{2},B=1$,则原方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}x+1;$$

(4) 对应的特征方程 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ 的根 $\lambda_{1,2}=-1$,故对应齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{-x}$,设原方程的一个特解为 $y^*=(ax+b)e^x$ 代入原方程得 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$,故原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x.$$

(5) 对应的特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 的根 $\lambda_{1,2}=-2$,故对应的齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$,当 $a\neq-2$ 时,可设原方程的一个特解为 $y^*=Ae^{ax}$,代入原方程,得 $A=\frac{1}{(a+2)^2}$,因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}.$$

当 $a=-2$ 时,可设原方程的一个特解为 $y^*=Ax^2e^{-2x}$,代入原方程,得 $A=\frac{1}{2}$,因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}.$$

例 10-16 求解方程 $y''+y=\sin x-2e^{-x}$ 的通解.

解 对应的特征方程为 $\lambda^2+1=0$,其特征根 $\lambda_{1,2}=\pm i$,故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

非齐次方程的特解可设为 $y^* = x(A\cos x + B\sin x) + Ce^{-x}$，
代入原方程，比较系数得 $A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = -1$，所以

$$y^* = -\frac{1}{2}x\cos x - e^{-x},$$

故原方程通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - e^{-x}.$$

例 10-17　求方程 $y'' + 4y' + 5y = 8\cos x$ 在 $(-\infty, 0)$ 内有界的特解.

解　对应的特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$，其特征根为 $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$，故对应齐次方程的通解为

$$Y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

设非齐次方程的一个特解为 $y^* = A\sin x + B\cos x$，代入原方程，比较系数得 $A = B = 1$，故 $y^* = \sin x + \cos x$，原方程的通解为

$$y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \sin x + \cos x.$$

要使 $y(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内有界，必须使 $C_1 = C_2 = 0$，因而 $y = \sin x + \cos x$ 是问题的解.

例 10-18　求微分方程 $y'' + 4y = 2x^2$ 在原点处与 $y = x$ 相切的特解.

解　根据题意，可得定解条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$，对应微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0$，其根为 $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ 相应齐次方程的通解为 $Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$，设非齐次方程的一个特解为 $y^* = ax^2 + bx + c$，代入原方程得 $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -\frac{1}{4}$，即

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4},$$

故原方程通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4},$$

由定解条件得

$$C_1 = \frac{1}{4},\ C_2 = \frac{1}{2},$$

因此，所求解为

$$y = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}.$$

例 10-19　(1) 求 $y^{(4)} - 2y''' + y'' + 18y' - 90y = 0$ 的通解；
(2) 求方程 $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 - 1$ 的通解.

解　(1) 对应特征方程为 $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 18\lambda - 90 = 0$，即

$$(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 2\lambda + 10) = 0,$$

其根

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1 + 3i, \lambda_4 = 1 - 3i$$

因此，通解为

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^x\cos 3x + C_4e^x\sin 3x;$$

(2) 对应特征方程为 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$，其根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，所以对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{2x}$.

设非齐次方程的特解为 $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)$，代入原方程，比较系数得 $A = \frac{1}{12}, B = \frac{1}{4}, C = \frac{1}{8}$，所以

$$y^* = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x,$$

原方程的通解为

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{2x} + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x.$$

例 10-20 若 $y'' + 2my' + n^2 y = 0, y(0) = a, y'(0) = b$. 求$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$（其中，$a, b, m, n$ 为常数，$m > n > 0$）.

解 原方程对应的特征方程为 $\lambda^2 + 2m\lambda + n^2 = 0$，其根为$\lambda_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - n^2}$（这里 $\lambda_{1,2} < 0$），原方程通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$，根据定解条件有

$$C_1 + C_2 = a, \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = b.$$

故

$$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x})\mathrm{d}x = -\left(\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}[(\lambda_1 + \lambda_2)(C_1 + C_2) - (\lambda_2 C_1 + \lambda_2 C_2)]$$

$$= -\frac{1}{n^2}[-2ma - b] = \frac{1}{n^2}[2ma + b].$$

例 10-21 (1) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$，并知

$$[xy(x + y) - f(x)y]\mathrm{d}x + [f'(x) + x^2 y]\mathrm{d}y = 0$$

为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解；

(2) 求满足 $f(0) = -1, f'(0) = 1$ 的具有二阶连续导数的函数 $f(x)$，使 $f(x)y\mathrm{d}x + [\frac{3}{2}\sin 2x - f'(x)]\mathrm{d}y = 0$ 是全微分方程，并求此全微分方程的积分曲线中经过$(\pi, 1)$ 的一条积分曲线.

解 (1) 依条件，应有$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，得 $f''(x) + f(x) = x^2$，解该方程可得 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2$，由 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 得 $C_1 = 2, C_2 = 1$，故 $f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$
于是原方程为

$$[xy^2 - (2\cos x + \sin x)y + 2y]\mathrm{d}x$$
$$+ [-2\sin x + \cos x + 2x + x^2 y]\mathrm{d}y = 0$$

其通解为

$$-2y\sin x + y\cos x + 2xy + \frac{1}{2}x^2 y^2 = C;$$

(2) 由于 $f(x)y\mathrm{d}x + [\frac{3}{2}\sin 2x - f'(x)]\mathrm{d}y = 0$ 是全微分方程，则由$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 得

$$3\cos 2x - f''(x) = f(x),$$

即
$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 3\cos 2x \\ f(0) = -1, f'(0) = 1. \end{cases}$$

可解得通解

$$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos 2x,$$

由定解条件得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，所以 $f(x) = \sin x - \cos 2x$，因此，相应的全微分方程为

$$(\sin x - \cos 2x)y\mathrm{d}x + \left[\frac{3}{2}\sin 2x - \cos x - 2\sin 2x\right]\mathrm{d}y = 0,$$

即
$$\mathrm{d}\left[y\cos x + \frac{1}{2}y\sin 2x\right] = 0,$$

通解为 $$y\left(\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=C,$$

由 $y(\pi)=1$ 得 $C=-1$.

于是所求积分曲线为 $y(\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)+1=0$.

例 10-22　设 $\varphi(x)$ 为二阶可导的函数,且

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u,\text{求 }\varphi(x).$$

解　首先要导出相应的微分方程与初值条件,等式两边求导得

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=(\mathrm{e}^x)'-\left[x\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u-\int_0^x u\varphi(u)\mathrm{d}u\right]'\\&=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u-x\varphi(x)+x\varphi(x)\\&=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}\tag{1}$$

再求导得 $$\varphi''(x)=\mathrm{e}^x-\varphi(x),$$

即 $$\varphi''(x)+\varphi(x)=\mathrm{e}^x,\tag{2}$$

又从原积分方程与方程(1) 可得　$\varphi(0)=1,\varphi'(0)=1$.

由特征方程 $\lambda^2+1=0$ 得特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$,

于是对应的齐次方程的通解为 $\Phi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

设非齐次方程的特解为 $\varphi^*(x)=A\mathrm{e}^x$,代入方程(2) 得 $A=\frac{1}{2}$,于是方程(2) 的通解为 $\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$,由定解条件得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$,故 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x)$.

例 10-23　求 $4xy''+2(1-\sqrt{x})y'-6y=\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}$ 的通解.

解　这个方程可通过变换化为线性常系数方程.

令 $\sqrt{x}=u$,则 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{4u^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-\frac{1}{4u^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u},$$

代入原方程,可得 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}-6y=\mathrm{e}^{3u},$$

其通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{3u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}+\frac{1}{5}u\mathrm{e}^{3u}.$$

将 $u=\sqrt{x}$ 代回,得

$$y=C_1\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}+C_2\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}+\frac{1}{5}\sqrt{x}\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}.$$

例 10-24　求 $y''+(x\mathrm{e}^{2y})y'^3=0$ 的通解.

解　注意到 $y'_x=\frac{1}{x'_y}$,　$y''_{xx}=\frac{-x''_{yy}}{x'^3_y}$ 即可将方程化为线性常系数方程.

经整理可得 $x''-x=\mathrm{e}^{2y}$,求解得通解

$$x=C_1\mathrm{e}^y+C_2\mathrm{e}^{-y}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2y}.$$

例 10-25 求 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解.

解 这是欧拉方程,作 $x = e^t$(即 $t = \ln x$),

由 $$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y, D = \frac{d}{dt},$$

原方程化为 $$D^3y - 2D^2y - 3Dy = 3e^{2t},$$

即 $$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 3e^{2t},$$

可以解得 $$y = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{3t} + \frac{1}{2}e^{2t},$$

将 $x = e^t$ 代回,有

$$y = C_1 + C_2\frac{1}{x} + C_3x^3 + \frac{x^2}{2}.$$

3. 微分方程的应用

根据给定条件建立微分方程,然后求解. 这类题目可分为几何问题和简单的物理问题两大类,对于几何问题主要是考察问题所指出的各种几何关系,再运用切线、法线、截距、两点间的距离、曲率等概念,特别是它们与导数的关系建立方程,并进行求解,而简单的物理问题主要是运用牛顿第二定律 $F = ma$ 等来建立方程,然后求解.

例 10-26 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内,L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,记交点为 A,已知 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$ 且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,求 L 的方程.

解 设 M 的坐标为 (x,y),则切线 MA 的方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

令 $X = 0$,则 $Y = y - xy'$,故点 A 的坐标为 $(0, y - xy')$,由 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$,则有

$$|y - xy'| = \sqrt{(x-0)^2 + (y - y + xy')^2},$$

化简后得 $$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -x,$$

令 $z = y^2$,则方程化为 $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -x$,求解得

$$z = e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(C - \int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right) = x(C - x),$$

即 $y^2 = x(C-x)$,由于 $y > 0$,故 $y = \sqrt{x(C-x)}$

因 L 过 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,故由 $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ 得 $C = 3$,

所以 L 的方程为 $y = \sqrt{3x - x^2}$, $(0 < x < 3)$.

例 10-27 设对任意 $x > 0$,曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 曲线 $y = f(x)$ 上的点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

令 $X = 0$ 得截距 $Y = f(x) - xf'(x)$. 根据题意,有

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(x) - xf'(x),$$

即 $$\int_0^x f(t)dt = x[f(x) - xf'(x)],$$

上式两边对 x 求导得

$$f(x)=f(x)-xf'(x)+x[f'(x)-f'(x)-xf''(x)],$$

整理得　$xf''(x)+f'(x)=0$，　即　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xf'(x))=0$，

得 $f(x)=C_1\ln x+C_2$　　(C_1,C_2 为任意常数).

例 10-28　在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $p(x,y)$ 处的曲率等于曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 为法线与 x 轴的交点)，且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

解　曲线 $y=y(x)$ 在 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=\frac{-1}{y'}(X-x),\qquad (y'\neq 0)$$

它与 x 轴的交点是 $Q(x+yy',0)$，从而法线段 PQ 的长度是

$$\sqrt{(yy')^2+y^2}=y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},(y>0)$$

根据题意，得

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

由曲线向上凹知 $y''>0$，

故得
$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即
$$yy''=1+y'^2,$$

令 $y'=p,y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 代入方程可得

$$\frac{p}{1+p^2}\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

又因曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行，即 $y(1)=1$，及 $y'(1)=0$ 得 $y=\sqrt{1+p^2}$，即 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$，由 $y(1)=1$ 得

$$y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}).$$

例 10-29　已知曲线 $y=f(x)$ 过原点且其上任一点 (x,y) 处的切线的斜率为 $2x(y+1)$，求该曲线函数.

解　根据题意，有 $\begin{cases}y'=2x(y+1)\\ y(0)=0\end{cases}$，

方程分离变量，积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\int 2x\mathrm{d}x,\quad 即\quad \ln|y+1|=x^2+C,$$

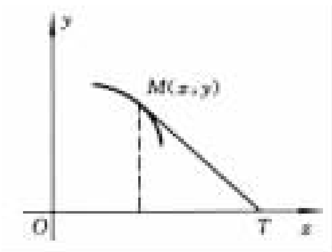

图 10-1

亦即
$$y=C\mathrm{e}^{x^2}-1,$$

代入 $y(0)=0$，得 $C=1$，故

$$y=\mathrm{e}^{x^2}-1.$$

例 10-30　求一曲线族的方程，它在任一点处的切线 MT 从切点 M 到与 x 轴的交点 T 的长度等于它在 x 轴上的截距 OT.

解　见图 10-1，设 M 点的坐标为 (x,y)，则 T 点的坐标为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$，这样，

$$|MT|^2=\left[\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}\right]^2$$

而 $|OT|^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2$，

依题意有
$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2(1+y'^2)=(x-\frac{y}{y'})^2,$$

整理得
$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2},$$

这是齐次方程，可解得 $x^2+y^2=Cy$.

例 10-31 试求曲线 $y=f(x)$，使其切线倾角 α 满足 $\cos 2\alpha=x$.

解 由三角恒等式 $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$， 从 $\cos 2\alpha=x$，可得$1-\tan^2\alpha=(1+\tan^2\alpha)\cdot x$，由于 $y'=\tan\alpha$，故 $1-y'^2=(1+y'^2)x$，

整理得 $y'^2=\frac{1-x}{1+x}$，即 $y'=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，

于是
$$y=\pm 2\left(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)+C.$$

例 10-32 设过曲线上任一点 $M(x,y)$ 的切线 MT，与坐标原点到此点的连线 OM 相交成定角 ω，求曲线方程.

解 据图 10-2，知

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\tan\theta=\frac{y}{x},$$

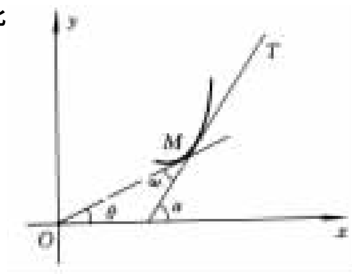

图 10-2

若 $\omega=\frac{\pi}{2}$，则 $MT\perp OM$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{y}{x}=-1,$$

即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$，可得 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$，

故曲线方程为
$$x^2+y^2=C,$$

若 $\omega\neq\frac{\pi}{2}$，不妨设 $\tan\omega=\frac{1}{a}(a\neq 0)$，由 $\alpha=\omega+\theta$，得

$$\tan\alpha=\tan(\omega+\theta)=\frac{\tan\omega+\tan\theta}{1-\tan\omega\tan\theta},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{y}{x}}{1-\frac{1}{a}\cdot\frac{y}{x}}=\frac{x+ay}{ax-y},$$

这是齐次方程，可解得

$$\ln(x^2+y^2)-2a\arctan\frac{y}{x}=C.$$

例 10-33 一曲线通过点(2,3)，在该曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为Q，且线段 PQ 恰被 y 轴平分，求此曲线方程.

解 设所求曲线为 $y=f(x)$，则它在 $P(x,y)$ 处的法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$，它在 x 轴上的截距为 $x+yy'$，由已知条件得

$$\frac{x+yy'+x}{2}=0,$$

即　$2x+yy'=0$，满足 $y(2)=3$，

分离变量，积分得　$$2x^2+y^2=C.$$

确定系数 $C=17$，所求曲线方程为 $2x^2+y^2=17$.

例 10-34　一条位于第一象限内的曲线段通过原点及 $(1,1)$ 点，在其上任取一点，过该点作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴和曲线所围成图形绕 x 轴旋转所得立体体积为 V_1，另一条平行线与 y 轴和曲线所围成的图形绕 x 轴旋转所成的立体体积为 V_2，若 $V_1=V_2$ 求此曲线方程.

解　设所求曲线方程为 $y=f(x)$，并且由已知条件可得

$$\pi\int_0^x y^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi y^2 x,$$

方程两边求导，有 $\pi y^2=\frac{\pi}{2}(2xyy'+y^2)$，并经整理，得

$$y'=\frac{y}{2x},$$

分离变量后积分得　$$y^2=Cx,$$

由 $y(1)=1$ 得 $C=1$，故所求曲线 $y=\sqrt{x}$.

例 10-35　假定某一海湾的海岸线呈直角形，海水的流线为双曲线 $xy=C$（其中，C 为常数），一条船在海湾内行驶，船身保持和水流成 $30°$ 角，并指向海岸（图 10-3），问此船行驶的路线如何？

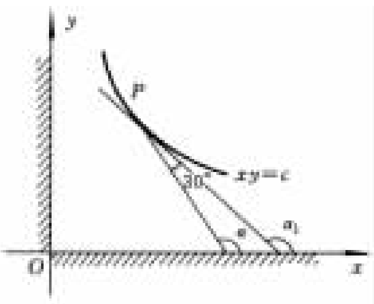

图 10-3

解　设船行驶的航线为 $y=f(x)$，航线与水流线在点 P 的切线与 x 轴的交角分别为 α,α_1，则 $\alpha_1=\alpha+\frac{\pi}{6}$，

由 $xy=C$ 得 $\tan\alpha_1=-\frac{y}{x}$，而 $\tan\alpha=y'$，

由　$$\tan\alpha=\tan\left(\alpha_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\alpha_1-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\alpha_1\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{-\frac{y}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}},$$

得　$$y'=\frac{\sqrt{3}y+x}{y-\sqrt{3}x},$$

这是齐次方程，解得航线 $y^2-2\sqrt{3}xy-x^2=C$.

例 10-36　位于坐标原点的我舰向位于 Ox 轴上 $A(1,0)$ 点处的敌舰发射导弹，导弹始终对准敌舰，设敌舰以最大速度 v_0（$v_0=$ 常数）沿平行于 Oy 轴的直线行驶，又设导弹的速率为 $5v_0$，求导弹航行的曲线方程. 当敌舰航行多远时，它将被导弹击中？

解　如图 10-4 所示，经过时间 t，导弹处于点 $P(x,y)$，此时敌舰处于点 $Q(1,v_0t)$，设导弹的轨迹为 $y=f(x)$，则

$$y'=\frac{v_0t-y}{1-x}\quad (*)$$

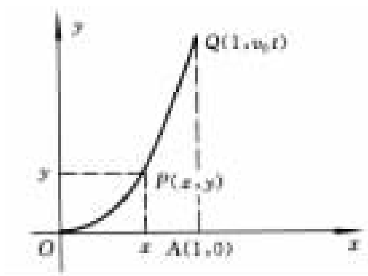

图 10-4

又根据题意，$\widehat{OP}$ 弧长为 $|AQ|$ 之五倍，即

$$\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=5v_0t,$$

由式（*）得 $v_0t=(1-x)y'+y$，

于是有　$$(1-x)y'+y=\frac{1}{5}\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

方程两边求导并整理得

$$(1-x)y''=\frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2},$$

这是不显含 y 的可降阶的方程，令 $y'=p$，方程化为

$$(1-x)p'=\frac{1}{5}\sqrt{1+p^2},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{5(1-x)},$$积分得

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=-\frac{1}{5}\ln(1-x)+C_1,$$

即 $$y'+\sqrt{1+y'^2}=\frac{C_2}{\sqrt{1-x}},$$

由 $y'(0)=0$ 得 $C_1=1$，故

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\tag{3}$$

等式两端取倒数，并分母有理化

得 $$\sqrt{1+y'^2}-y'=\sqrt[5]{1-x},\tag{4}$$

式(3)减式(4)得 $$y'=\frac{1}{2\sqrt[5]{1-x}}-\frac{1}{2}\sqrt[5]{1-x},$$

从而

$$y=-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+C_2,$$

由 $y(0)=0$，得 $C_2=\frac{5}{24}$，

所以导弹的轨迹为

$$y=-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\frac{5}{24}.$$

当 $x=1$ 时，$y=\frac{5}{24}$，即当敌舰航行到 $(1,\frac{5}{24})$ 时将被导弹击中.

例 10-37 一质量为 m 的物体，在某种介质中由静止自由下落，假设介质的阻力与运动速度成正比，试求物体运动的规律.

解 根据题意，建立定解问题（由 $F=ma$）

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ x(0)=0, \qquad x'(0)=0, \end{cases}$$

解常系数线性方程得 $$x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t,$$

由定解条件得 $$C_1=-\frac{m^2}{k^2}g, \qquad C_2=\frac{m^2}{k^2}g,$$

所以 $x=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1)$.

例 10-38 一链条悬挂在钉子上，起动时一端离开钉子 8m，另一端离开钉子 12m，求链条全部滑过钉子所需时间（不计摩擦力，且 g 取为 10m/s）.

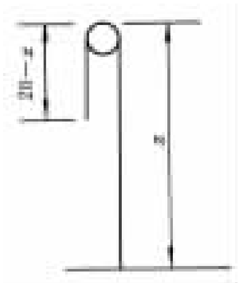

图 10-5

解　如图 10-5，假设链条下滑的一端在时刻 t 离钉子距离为 x，则根据牛顿第二定律有

$$20\rho\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}=(\rho x-(20-x)\rho)g=2\rho g x-20\rho g,$$

整理得

$$\begin{cases}x''-x+10=0, & (\text{取 } g=10)\\ x(0)=12, x'(0)=0,\end{cases}$$

解方程得　$$x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+10,$$

由初始条件得 $C_1=C_2=1$，故 $x=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}+10.$

当 $x=20$ 时，链条全部滑过钉子，这时

$$10=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}=2\mathrm{ch}t.$$

即　$\mathrm{ch}t=5$ 或

$$t=\mathrm{arcch}5=\ln(5+\sqrt{5^2-1})=\ln(5+2\sqrt{6}).$$

例 10-39　质量为 $M=1\mathrm{kg}$ 的物体，从水面上方为 $H=0.1\mathrm{m}$ 的地方自由落下（不计空气阻力），恰好落到水面上质量为 $m=0.4\mathrm{kg}$ 的物体上，且结合为一体在水中下沉，该结合体下沉的阻力与速度成正比，比值为 0.7，试建立该结合体在水中下沉的距离与时间的函数关系（g 取9.8）.

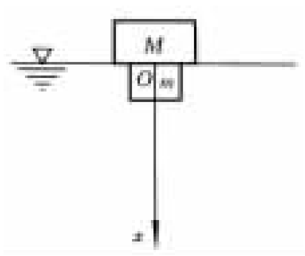

图 10-6

解　建立坐标，如图 10-6. 根据牛顿第二定律，有

$$(M+m)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=(M+m)g-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

即　$$1.4\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}=1.4g-0.7\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

经整理

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+0.5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9.8,$$

显然 $x(0)=0$，现在要求 $x'(0)=v_0$，

物体 M 在水面上方 0.1m 处的下落速度 $v_1=\sqrt{2gH}=\sqrt{1.96}=1.4\mathrm{m/s}$，由动量守恒 $Mv_1=(M+m)v_0$ 得

$$v_0=\frac{M}{(M+m)}v_1=1\mathrm{m/s},$$

现在得定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+0.5\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9.8,\\ x(0)=0,\quad x'(0)=1,\end{cases}$$

解得　$$x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+19.6t.$$

由初值确定系数　$$C_1=-37.2,\quad C_2=37.2$$

所以　$$x=19.6t-37.2(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}).$$

例 10-40　有一水槽，在时刻 t，每单位时间流入的水量为 $g(t)$ 且在时刻 t，每单位时间流出的水量与该时刻的贮水量成正比，其比例系数为 a（a 为系数），试建立贮水量 $y(t)$ 所满足的微分方程.

解　在 $(t,t+\Delta t)$ 时间内，$y(t)$ 的增量 Δy 等于 Δt 时间内流入的水量减去流出的水量，

故
$$y(t+\Delta t)-y(t)=g(t)\Delta t-ay(t)\Delta t,$$
即
$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=g(t)-ay(t),$$
令 $\Delta t\to 0$ 得 $\quad y'(t)=g(t)-ay(t)$,

即
$$y'(t)+ay(t)=g(t).$$

例 10-41 设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线,其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$,由此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方向为 $y=x+1$,求该曲线的方程,并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

解 因曲线向上凸,故 $y''<0$,由题设,有
$$\frac{-y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\quad 即\quad \frac{y''}{1+y'^2}=-1.$$

令 $p=y'$,则 $p'=y''$,从而上述方程化为 $\frac{p'}{1+p^2}=-1$.

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\mathrm{d}x,$$
解之得
$$\arctan p=C_1-x.$$

因为 $y=y(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$,所以 $p|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$. 代入上式得 $C_1=\frac{\pi}{4}$,故 $y'=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

积分后得
$$y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2.$$
因为曲线过点 $(0,1)$,所以 $y|_{x=0}=1$,代入上式得 $C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$,故所求曲线的方程为
$$y=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1+\frac{1}{2}\ln 2,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right).$$

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\leqslant 1$,且当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$,所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时函数取得极大值 $y=1+\frac{1}{2}\ln 2$.

例 10-42 求初值问题 $\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0\quad(x>0),\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

解 原方程可化为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$
令 $y=xu$,得
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\sqrt{1+u^2},\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$
解得
$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln(Cx),$$
其中,$C>0$ 为任意常数,从而
$$u+\sqrt{1+u^2}=Cx,\quad 即\quad \frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx,$$

亦即
$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$$
将 $y|_{x=1}=0$ 代入，得 $C=1$，故初值问题的解为
$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2,$$
化简得
$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}.$$

例 10-43　某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标. 为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内？（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的.）

解　设从 2000 年初（令此时 $t=0$）开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m，浓度为 $\frac{m}{V}$，则在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，排入湖泊中 A 的量为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t$，流出湖泊的水中 A 的量为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}\mathrm{d}t=\frac{m}{3}\mathrm{d}t$，因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量
$$\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t.$$
由分离变量法解得 $m=\frac{m_0}{2}-C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}$，代入初始条件 $m|_{t=0}=5m_0$，得 $C=-\frac{9}{2}m_0$. 于是
$$m=\frac{m_0}{2}(1+9\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}).$$
令 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$，即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

例 10-44　函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式
$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0,$$
(1) 求导数 $f'(x)$；(2) 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，成立不等式：$\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

解　(1) 由题设知 $(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，上式两边对 x 求导，得
$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x).$$
设 $u=f'(x)$，则有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{x+2}{x+1}u$，解之得 $f'(x)=u=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

由 $f(0)=1$ 及 $f'(0)+f(0)=0$，知 $f'(0)=-1$，从而 $C=-1$，因此 $f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

(2) **证法 1**　当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调减少，又 $f(0)=1$，所以 $f(x)\leqslant f(0)=1$.

设 $\varphi(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}$，则 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(x)=f'(x)+\mathrm{e}^{-x}=\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{-x}$. 当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，因而
$$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0,\quad \text{即有}\quad f(x)\geqslant \mathrm{e}^{-x}.$$
综上所述，当 $x\geqslant 0$ 时，成立不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

证法 2　由于 $\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(0)=f(x)-1$，所以　$f(x)=1-\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t$.

注意到当 $x\geqslant 0$ 时，$0\leqslant\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-x}$，因而 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

例 10-45 设有一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为 cm，时间单位为 h)，已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问高度为 130(cm)的雪堆全部融化需多少小时？

解 记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}[h^2(t)+16r^2]^{\frac{1}{2}}r\mathrm{d}r=\frac{13\pi h^2(t)}{12}.$$

由题意知 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$，所以 $\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{13}{10}$，因此 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$.

由 $h(0)=130$ 得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$. 令 $h(t)\to 0$ 得 $t=100(\mathrm{h})$.

因此高度为 130cm 的雪堆全部融化所需时间为 100h.

例 10-46 设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x,$$

求 $f(x)$.

解 等式两边对 x 求导，得

$$g[f(x)]f'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}x.$$

而 $g[f(x)]=x$，故

$$xf'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x.$$

当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$，积分得 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故由 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[(x+1)\mathrm{e}^x+C]=0$ 得 $C=-1$. 因此

$$f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-1.$$

例 10-47 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程；

(2) 设 L 是位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

解 (1) 设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 令 $X=0$，则得该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由题设知 $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$，令 $u=\frac{y}{x}$，则此方程可化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$，解之得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

由 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，知 $C=\frac{1}{2}$. 于是 L 方程为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2},\quad 即\quad y=\frac{1}{4}-x^2.$$

(2) 设第一象限内曲线 $y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

即
$$Y=-2xX+x^2+\frac{1}{4}\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

它与 x 轴及 y 轴的交点分别为 $\left(\dfrac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0\right)$ 与 $\left(0,x^2+\dfrac{1}{4}\right)$. 所求面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

对 x 求导,得
$$S'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{x^2}$$
$$=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right).$$

令 $S'(x)=0$,解得　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时,$S'(x)<0$;$x>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时,$S'(x)>0$,因而 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$内的惟一极小值点,即最小值点. 于是所求切线为

$$Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4},$$

即
$$Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}.$$

例 10-48　一个半球体状的雪堆,其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比,比例常 $K>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状,已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 $3h$ 内,融化了其体积的 $\dfrac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时?

解法 1　设雪堆在时刻 t 的体积 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$,侧面积 $S=2\pi r^2$,由题设知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-KS=-2\pi Kr^2,$$

于是　$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-K.$

积分得　$r=-Kt+C$. 由 $r\big|_{t=0}=r_0$,有 $r=r_0-Kt$.

又 $V\big|_{t=3}=\dfrac{1}{8}V\big|_{t=0}$,即 $\dfrac{2}{3}\pi(r_0-3K)^3=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{3}\pi r_0^3$. 这样 $K=\dfrac{1}{6}r_0$,从而

$$r=r_0-\frac{1}{6}r_0t.$$

因雪球全部融化时 $r=0$,故得 $t=6$,即雪球全部融化需 6h.

解法 2　设雪堆在时刻 t 的体积 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$,侧面积 $S=2\pi r^2$,从而 $S=\sqrt[3]{18\pi V^2}$.

由题设知
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-KS=-\sqrt[3]{18\pi V^2}K,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt[3]{V^2}}=-\sqrt[3]{18\pi}K\mathrm{d}t,$$

积分得
$$3\sqrt[3]{V}=-\sqrt[3]{18\pi}Kt+C.$$

设 $V|_{t=0}=V_0$，得 $C=3\sqrt[3]{V_0}$，故有 $3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}-\sqrt[3]{18\pi}Kt$.

又由 $V|_{t=3}=\frac{1}{8}V_0$ 得 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{V_0}=3\sqrt[3]{V_0}=3\sqrt[3]{18\pi}K$，

从而 $K=\frac{\sqrt[3]{V_0}}{2\sqrt[3]{18\pi}}$，故 $3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{V_0}t$.

令 $V=0$，得 $t=6$，即雪堆全部融化需 6h.

例 10-49 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=y(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解 (1) 由反函数导数公式知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$，即

$$y'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=1.$$

上式两端关于 x 求导，得 $y''\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(y')^2=0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}y''}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原微分方程，得

$$y''-y=\sin x. \tag{*}$$

(2) 方程(*)所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

设方程(*)的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入方程(*)，求得 $A=0$，$B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1$，$C_2=-1$，故所求初值问题的解为

$$y(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

例 10-50 设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

解 (1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中，(X,Y) 为法线上任意一点的坐标. 令 $X=0$，则

$$Y = y + \frac{x}{y'},$$

故 Q 点坐标为 $\left(0, y + \frac{x}{y'}\right)$. 由题设知

$$y + y + \frac{x}{y'} = 0, \quad 即 \quad 2y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x = 0.$$

积分,得

$$x^2 + 2y^2 = C \quad (C 为任意常数).$$

由 $y\big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$ 知 $C = 1$,故曲线 $y = f(x)$ 的方程为

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

(2) 曲线 $y = \sin x$ 在$[0,\pi]$上的弧长为

$$l = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

曲线 $y = f(x)$ 的参数方程为$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \end{cases}$故

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

令 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$,则

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1+\cos^2 t}(-\mathrm{d}t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}t.$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}l.$$

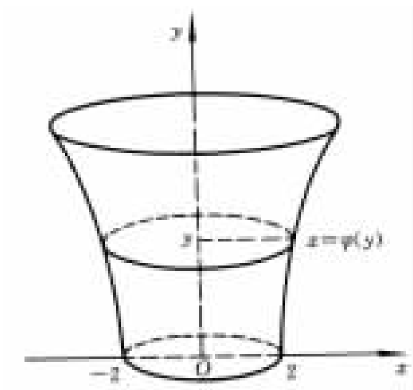

图 10-7

例 10-51　有一平底容器,其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y)(y \geqslant 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(图 10-7),容器的底面圆的半径为 2m. 根据设计要求,当以 $3\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率向容器内注入液体时,液面的面积将以 $\pi\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前,容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积,写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

解　(1) 设在 t 时刻,液面的高度为 y,则由题设知此时液面的面积为 $\pi\varphi^2(y) = 4\pi + \pi t$,从而 $t = \varphi^2(y) - 4$.

(2) 液面的高度为 y 时,液体的体积为

$$\pi\int_0^y \varphi^2(u)\,\mathrm{d}u = 3t = 3\varphi^2(y) - 12.$$

上式两边对 y 求导,得

$$\pi\varphi^2(y) = 6\varphi(y)\varphi'(y), \quad 即 \quad \pi\varphi(y) = 6\varphi'(y).$$

解此微分方程,得

$$\varphi(y) = C\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}, \quad 其中, C 为任意常数,$$

由 $\varphi(0) = 2$ 知 $C = 2$,故所求的曲线方程为

$$x = 2e^{\frac{\pi}{6}y}.$$

例 10-52 假设:(1) 函数 $y=f(x)(0\leqslant x<+\infty)$ 满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\leqslant f(x)\leqslant e^x-1$;(2) 平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=e^x-1$ 分别相交于点 P_1 和 P_2;(3) 曲线 $y=f(x)$、直线 MN 与 x 轴所围封闭图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度. 求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

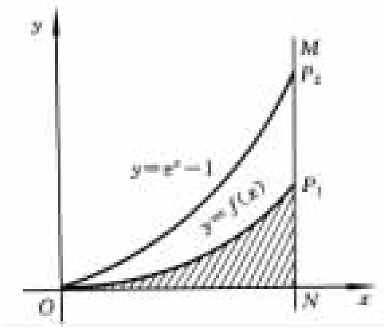

图 10-8

解 由题设可得示意图如图 10-8:

由图可知 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = e^x-1-f(x)$.

两端求导,得 $f(x)=e^x-f'(x)$,即

$$f'(x)+f(x)=e^x.$$

由一阶线性方程求解公式,得

$$f(x)=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-x}\left[\int e^x\cdot e^x\mathrm{d}x+C\right]=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x.$$

由 $f(0)=0$,得 $C=-\frac{1}{2}$. 因此,所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$$

例 10-53 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续,$f(1)=\frac{5}{2}$,且对所有 $x,t\in(0,+\infty)$,满足条件

$$\int_1^{xt}f(u)\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u,$$

求 $f(x)$.

解 由题意可知,等式的每一项都是 x 的可导函数. 于是等式两边对 x 求导,得

$$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u. \qquad (1)$$

由式(1)中,令 $x=1$,由 $f(1)=\frac{5}{2}$,得

$$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u, \qquad (2)$$

则 $f(t)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的可导函数. 式(2)两边对 t 求导,得

$$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t),\quad 即\quad f'(t)=\frac{5}{2t}.$$

上式两边求积分,得 $\quad f(t)=\frac{5}{2}\ln t+c.$

由 $f(1)=\frac{5}{2}$,得 $c=\frac{5}{2}$. 于是 $\quad f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1).$

例 10-54 设 $F(x)=f(x)g(x)$,其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x),\quad 且\ f(0)=0,f(x)+g(x)=2e^x.$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程; (2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

解 (1) 由

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)\\&=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)=(2e^x)^2-2F(x),\end{aligned}$$

可见 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为

$$F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}.$$

(2) $F(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left[\int 4\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-2x}\left[\int 4\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-2x}.$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式,得 $C=-1$. 于是

$$F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}.$$

例 10-55　设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1)$,$B(1,0)$ 的一段连续曲线,$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点,点 C 为 M 在 x 轴上的投影,O 为坐标原点. 若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积(图 10-9)之和为 $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$,求 $f(x)$ 的表达式.

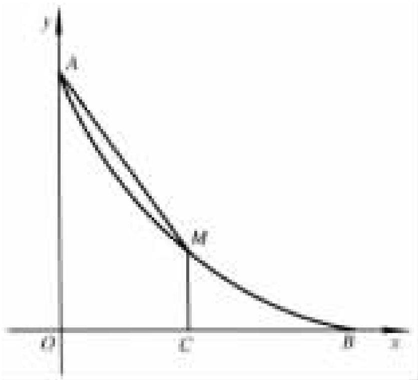

图 10-9

解　根据题意,有

$$\frac{x}{2}[1+f(x)]+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}.$$

两边关于 x 求导,得

$$\frac{1}{2}[1+f(x)]+\frac{1}{2}xf'(x)-f(x)=\frac{1}{2}x^2.$$

当 $x\neq 0$ 时,得

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{x^2-1}{x}.$$

故

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x^2-1}{x}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{\ln x}\left[\int\frac{x^2-1}{x}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left(\int\frac{x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x+C\right)\\&=x\left(x+\frac{1}{x}+C\right)=x^2+1+Cx.\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,$f(0)=1$.

由于 $x=1$ 时,$f(1)=0$,故有 $2+C=0$,从而 $C=-2$. 所以

$$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2.$$

例 10-56　设某商品的需求价格 $e=-k$(k 为常数),求该商品的需求函数 $D=f(p)$.

解　根据需求价格弹性的定义,

$$e=\frac{P}{D}\cdot\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P}$$

得微分方程 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P}\cdot\frac{P}{D}=-k$. 分离变量

$$\frac{\mathrm{d}D}{D}=-k\frac{\mathrm{d}P}{P}$$

两边积分 $\ln D=-k\ln P+\ln C$,因此

$$D=C\mathrm{e}^{-k\ln P}.$$

例 10-57　已知某厂的纯利润 L 对广告费 x 的变化率 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ 与常数 A 和纯利润 L 之差成正比. 当 $x=0$ 时,$L=L_0$. 试求纯利润 L 与广告费 x 之间的函数关系.

解 由题意列出方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=k(A-L) \quad (k\ \text{为常数}),\\ L\big|_{x=0}=L_0,\end{cases}$$

分离变量$\dfrac{\mathrm{d}L}{A-L}=k\mathrm{d}x$,两边积分

$$-\ln(A-L)=kx+\ln C_1,$$

$$A-L=C\mathrm{e}^{-kx} \quad \left(\text{其中 } C=\frac{1}{C_1}\right),$$

$$L=A-C\mathrm{e}^{-kx}.$$

由初始条件$L\big|_{x=0}=L_0$,解得 $C=A-L_0$,所以纯利润与广告费的函数为

$$L=A-(A-L_0)\mathrm{e}^{-kx}.$$

例 10-58(市场动态均衡价格) 设某商品的市场价格 $P=P(t)$ 随时间 t 变动,其需求函数为

$$D_d=b-ap \quad (a,b>0),$$

供给函数为

$$D_s=-d+cp \quad (c,d>0).$$

又设价格 P 随时间 t 的变化率与超额需求(D_d-D_s)成正比,求价格函数 $P=P(t)$.

解 据题意,$P(t)$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=A(D_d-D_s)=-A(a+c)P+A(b+d),\\ P\big|_{t=0}=P(0).\end{cases}$$

解得

$$P=\mathrm{e}^{-\int A(a+c)\mathrm{d}t}\left[\int A(b+d)\mathrm{e}^{\int A(a+c)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right]$$

$$=\frac{b+d}{a+c}+C_1\mathrm{e}^{-A(a+c)t}.$$

由初始条件$P\big|_{t=0}=P(0)$,得 $C_1=P(0)-\dfrac{b+d}{a+c}$,从而

$$P=\left(P(0)-\frac{b+d}{a+c}\right)\mathrm{e}^{-A(a+c)t}+\frac{b+d}{a+c}.$$

由上式,当 $t\to+\infty$ 时,$P(t)\to\dfrac{b+d}{a+c}$,称$\dfrac{b+d}{a+c}$为均衡价格.

附 差分方程简介

设函数 $y_x=f(x)$,当 x 取 $0,1,2,\cdots$ 时,函数值可以排成一数列 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_x\cdots$,其差 $y_{x+1}-y_x$ 称为函数 y_x 的差分. 记作 Δy_x,即 $\Delta y_x=y_{x+1}-y_x$,也称为一阶差分,而 $\Delta^2 y_x=\Delta(\Delta y_x)=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$ 称为二阶差分. 同样可以推得 $\Delta^n y_x$ 等 n 阶差分的表达式. 二阶以及二阶以上的差分称为高阶差分. 差分具有下列性质:

① $\Delta(\alpha y_x+\beta z_x)=\alpha\Delta y_x+\beta\Delta z_x$,其中,$\alpha,\beta$ 为常数;

② $\Delta(y_x z_x)=y_{x+1}\Delta z_x+z_x\Delta y_x$;

③ $\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right)=\dfrac{z_x\Delta y_x-y_x\Delta z_x}{z_x z_{x+1}}$.

含有未知函数差分或表示未知函数几个时期值的符号的方程称为差分方程. 如 $F(x,y_x,y_{x+1},y_{x+2},\cdots,y_{x+n})=0$ 或 $H(x,y_x,\Delta y_x,\cdots,\Delta^n y_x)=0$ 等,均为差分方程. 方程中含未知函数下标的最大值与最小值的差数称为差分方程的阶. 如果一个函数代入差分方程后,使方程成为恒等式,则称此函数为该差分方程的解. 满足定解条件的解称为特解. 如果差分方程的解中含有相互独立的任意常数的个数与方程的阶数相同,则称它为差分方程的通解. 如果 $y_x^{(i)}$ 是常系数线性非齐次差分方程 $L[x,y_x,y_{x+1},\cdots,y_{x+n}]=f_i^{(x)}(i=1,2,\cdots)$ 的特解,则 $y_x=\sum\limits_{i=1}^{n}y_x^{(i)}$ 必是常系数线性非齐次差分方程 $L[x,y_x,y_{x+1},\cdots,y_{x+1}]=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)$ 的特解.

(一) 一阶常系数线性差分方程

形如 $y_{x+1}-ay_x=f(x)$(其中,a 为非零常数) 的方程称为一阶常系数线性差分方程, 其通解为 $y_x=Y_x+y_x^*$,其中,$Y_x=Aa^x$(其中 A 为任意常数) 为对应齐次方程 $y_{x+1}-ay_x=0$ 的通解. y_x^* 为非齐次方程 $y_{x+1}-ay_x=f(x)$ 的一个特解. 当 $f(x)$ 为某些特殊形式的函数时,y_x^* 具有下列形式的解:

(1) $f(x)=c$(c 为常数)

当 $a\neq 1$ 时,$y_x^*=\dfrac{c}{1-a}$;　当 $a=1$ 时,$y_x^*=cx$.

(2) $f(x)=cb^x$(其中,$c,b\neq 1$,均为常数)

当 $b\neq a$ 时,$y_x^*=\dfrac{c}{b-a}b^x$;当 $b=a$ 时,$y_x^*=cxb^x$.

(3) $f(x)=cx^n$(其中,c 为常数)

$y_x^*=x^s(B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n)$,其中 $B_0,B_1,\cdots,B_n$ 为待定系数,当 $a\neq 1$ 时,取 $s=0$,当 $a=1$ 时,取 $s=1$. 将 y_x^* 代入方程 $y_{x+1}-ay_x=cx^n$. 比较两端 x 的同次项的系数,确定 $B_0,B_1,\cdots,B_n$,从而得到特解 y_x^*.

(二) 二阶常系数线性差分方程

形如 $y_{x+2}+py_{x+1}+qy_x=f(x)$(其中,$p,q$ 为非零常数) 的方程,当 $f(x)=0$ 时,称为齐次方程,否则为非齐次方程. 其通解为 $y_x=Y_x+y_x^*$,其中 Y_x 为相应齐次方程 $y_{x+2}+py_{x+1}+qy_x=0$ 的通解. y_x^* 为非齐次方程 $y_{x+2}+py_{x+1}+qy_x=f(x)$ 的一个特解. 如果 $y_x^{(1)},y_x^{(2)}$ 是二阶齐次常系数线性差分方程 $y_{x+2}+py_{x+1}+qy_x=0$ 的两个线性无关的特解,则 $Y_x=A_1y_x^{(1)}+A_2y_x^{(2)}$ 就是该方程的通解(其中 A_1,A_2 为任意常数).

1. $y_{x+2}+py_{x+1}+qy_x=0$ 的通解

考虑对应的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的特征根 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

(1) 当 λ_1,λ_2 为两个不相等的实根时,$Y_x=A_1\lambda_1^x+A_2\lambda_2^x$.

(2) 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 为相等的实根时,$Y_x=(A_1+A_2x)\lambda^x$.

(3) 当 λ_1,λ_2 为一对共轭复根 $\alpha\pm \mathrm{i}\beta$ 时,$Y_x=r^x(A_1\cos\theta x+A_2\sin\theta x)$(其中,$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,$\tan\theta=\dfrac{\beta}{\alpha}$).

2. $y_{x+2}+py_{x+1}+qy_x=f(x)$ 的特解

当 $f(x)$ 取某些特殊形式的函数时,方程特解 y_x^* 具有下列形式:

(1) $f(x)=c$ (c 为常数)

当 $1+p+q\neq 0$ 时,$y_x^*=\dfrac{c}{1+p+q}$;当 $1+p+q=0$ 但 $p\neq -2$ 时,$y_x^*=\dfrac{cx}{2+p}$;当 $1+p+q=0$ 且 $p=-2$ 时,$y_x^*=\dfrac{1}{2}cx^2$.

(2) $f(x)=ca^x$(其中,$c,a\neq 1$,均是常数)

$y_x^*=x^s(B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n)$(其中,$B_0,B_1,\cdots,B_n$ 为待定系数). 当 $1+p+q\neq 0$ 时,取 $s=0$;当 $1+p+q=0$,但 $p\neq -2$ 时,取 $s=1$;当 $1+p+q=0$ 且 $p=-2$,取 $s=2$. 将 y_x^* 代入方程 $y_{x+2}+py_{x+1}+qy_x=f(x)$,比较两端 x 的同次项的系数,确定 $B_0,B_1,\cdots,B_n$,从而得到特解 y_x^*.

(三) 几个简单的例题

例 1　求解下列一阶常系数线性差分方程:

（1）$2y_{x+1}+10y_x-5x=0$；　　（2）$\begin{cases} y_{x+1}+y_x=2^x \\ y_0=2. \end{cases}$

解　（1）将方程化为 $y_{x+1}+5y_x=\dfrac{5}{2}x$，对应齐次方程的通解为 $Y_x=A(-5)^x$. 现 $a=-5\neq 1$，设 $y_x^*=B_0+B_1x$ 代入原方程，比较系数得 $B_0=-\dfrac{5}{72}$，$B_1=\dfrac{5}{12}$，故原方程的一个特解

$$y_x^*=\frac{5}{12}\left(x-\frac{1}{6}\right).$$

原方程的通解为

$$y_x=A(-5)^x+\frac{5}{12}\left(x-\frac{1}{6}\right).$$

（2）现 $a=-1$，$b=2$，$c=1$，对应齐次方程的通解为 $Y_x=A(-1)^x$，设原方程的一个特解

$$y_x^*=\frac{1}{3}\times 2^x.$$

则原方程的通解为

$$y_x=Y_x+y_x^x=A(-1)^x+\frac{1}{3}\times 2^x,$$

又 $y_0=1$ 代入通解得 $A=\dfrac{5}{3}$. 故定解问题的解为

$$y_x=\frac{5}{3}(-1)^x+\frac{1}{3}\times 2^x.$$

例 2　在农业生产中，种植先于产出及产品出售一个适当的时期，t 时期该产品的价格 p_t 决定着生产者在下一时期愿意提供市场的产量 S_{t+1}，p_t 还决定着本期该产品的需求量 D_t，已知 $D_t=a-bp_t$，$S_t=-c+dp_{t-1}$（其中 a,b,c,d 均为正数）. 求价格随时间变动的规律.

解　假定在每一个时期中价格总是确定在市场售清的水平下，即 $S_t=D_t$. 因此，有

$$-c+dp_{t-1}=a-bp_t$$

即　$bp_t+\mathrm{d}P_{t-1}=a+c$，　亦即　$p_t+\dfrac{d}{b}p_{t-1}=\dfrac{a+c}{b}$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{b}\neq -1$，故问题的通解为 $p_t=\dfrac{a+c}{b+d}+A\left(-\dfrac{d}{b}\right)^t$.

当 $t=0$ 时，$p_t=p_0$（初始价格），代入通解，得 $A=p_0-\dfrac{a+c}{b+d}$，这样，满足 $p_t\big|_{t=0}=p_0$ 的特解为

$$p_t=\frac{a+c}{b+d}+\left(p_0-\frac{a+c}{b+d}\right)\cdot\left(-\frac{d}{b}\right)^t.$$

例 3　求差分方程 $y_{x+2}+3y_{x+1}-4y_x=x$ 的通解.

解　考虑对应齐次方程的特征方程 $\lambda^2+3\lambda-4=0$，其特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-4$. 故对应齐次方程的通解为

$$Y_x=A_1+A_2(-4)^x.$$

设原方程的一个特解为 $y_x^*=x(B_0+B_1x)$（现 $1+a+b=0$，但 $a\neq -2$）代入原方程，比较系数，得 $B_0=-\dfrac{7}{50}$，$B_1=\dfrac{1}{10}$. 故

$$y_x^*=x\left(-\frac{7}{50}+\frac{x}{10}\right),$$

原方程的通解为

$$y_x = A_1 + A_2(-4)^x + x\left(-\frac{7}{50} + \frac{x}{10}\right).$$

习　题　10

1. 求微分方程 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 0$ 的通解.

2. 求微分方程 $xy' + y - \mathrm{e}^x = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1} = \mathrm{e}$ 的特解.

3. 求微分方程 $xy' + y - xy^3 = 0$ 的通解.

4. 求微分方程 $y^2\mathrm{d}x = (x + y^2 \mathrm{e}^{y-\frac{1}{y}})\mathrm{d}y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 1$ 的特解.

5. 求微分方程 $x(\mathrm{e}^y - y') = 2$ 的通解.

6. 设可微函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x),g'(x) = f(x)$，且 $f(0) = 0,g(x) \neq 0$. 又设 $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$，试导出 $\varphi(x)$ 所满足的微分方程并求出 $\varphi(x)$.

7. 设 $f(x)$ 满足方程 $f'(x) + xf'(-x) = x$，求 $f(x)$.

8. 求解微分方程初值问题 $\begin{cases} y'' = y'y. \\ y\big|_{x=0} = 0, y'\big|_{x=0} = 2. \end{cases}$

9. 已知 y_1,y_2,y_3 线性无关，且都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，试写出该非齐次方程的通解.

10. 设二阶常系数线性微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma \mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y = \mathrm{e}^{2x} + (1+x)\mathrm{e}^x$，试确定常数 α，β,γ，并求该方程的通解.

11. 求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

12. 求微分方程 $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}(x+1)$ 的通解.

13. 求微分方程 $y'' - 4y' + 5y = 2\mathrm{e}^{2x}\sin x$ 的通解.

14. 求微分方程 $y^{(4)} - y = 0$ 的通解.

15. 求微分方程 $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 - 1$ 的通解.

16. 设二阶可微函数 $f(x)$ 满足

$$\int_0^x (x+1-t)f'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x + x^2 - f(x)，求 f(x).$$

17. 设 $\int_l [f'(x) + 2f(x) + \mathrm{e}^x]y\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，又 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 试计算：

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} [f'(x) + 2f(x) + \mathrm{e}^x]y\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y.$$

18. 求曲线族 $x^2 + y^2 = 2ax$ 的正交曲线族的方程.

19. 设有连接点 $(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 OP 所围图形的面积为 x^2，求曲线 $\overset{\frown}{OP}$ 的方程.

20. 火车沿水平直线轨道运动，设火车质量为 p，机车牵引力为 F，阻力为 $a+bv$，其中 a,b 为常数，$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 为火车的速度，火车是由静止状态开始运动，求火车的运动规律 $S = s(t)$.

简答与提示

1. 方程整理得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{x} = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$，由公式

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)=x\left(C-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right).$$

2．方程整理得 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x}$，由公式

$$y=\frac{1}{x}(e^x+C),$$

由 $y\big|_{x=1}=e$ 得 $C=0$，所以特解 $y=\frac{1}{x}e^x$.

3．方程整理得 $y'+\frac{1}{x}y=y^3$，令 $z=y^{-2}$　则方程化为$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-2$，由公式

$$Z=x^2\left(\frac{2}{x}+C\right),$$

即
$$y^2=\frac{1}{Cx^2+2x}.$$

4．可视 x 为未知函数，这样$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y^2}x=e^{y-\frac{1}{y}}$，由公式

$$x=e^{-\frac{1}{y}}(C+e^y),$$

由 $y\big|_{x=0}=1$，得 $C=-e$，所以 $x=e^{-\frac{1}{y}}(e^y-e)$.

5．令 $u=e^{-y}$，则$\frac{du}{dx}=-e^{-y}\frac{dy}{dx}$，于是方程化为

$$\frac{du}{dx}-\frac{2}{x}u=-1,$$

由公式得

$$u=x^2\left(\frac{1}{x}+C\right),$$

即
$$e^{-y}=Cx^2+x.$$

6．可导出 $\begin{cases}\varphi'(x)=1-\varphi^2(x),\\ \varphi(x)\big|_{x=0}=0,\end{cases}$ 求解得 $\varphi(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\operatorname{th}x$.

7．可先导出微分方程 $f'(x)(1+x^2)=x(x+1)$，即 $f'(x)=\frac{x^2+x}{1+x^2}$，两边积分得

$$f(x)=x-\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

8．这是不显含 x 的可降阶的微分方程，令 $y'=p,y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为 $p\frac{dp}{dy}=py$，由初值知 $p>0$，故$\frac{dp}{dy}=y$，所以 $p=\frac{1}{2}y^2+C_1$，由$p\big|_{y=0}=2$，得 $C_1=2$.

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}y^2+2$，得 $\arctan\frac{y}{2}=x+C_2$，由$y\big|_{x=0}=0$ 得 $C_2=0$. 所以 $y=2\tan x$.

9．由 y_1-y_3,y_2-y_3 均是对应齐次方程的解，且它们线性无关，故对应齐次方程的通解为 $y=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$（$C_1$、$C_2$ 为任意常数），又 y_3 是原方程的一个特解，故原方程的通解为

$$y=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3.$$

10．将所给特解写成 $y=e^{2x}+e^x+xe^x$，知 e^{2x}，e^x 是对应齐次方程的两个线性无关的特解，从而其特征方程的根应为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，故特征方程应为$(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^2-3\lambda+2=0$，于是 $\alpha=-3,\beta=2$.

现将 $y^* = xe^x$ 代入原方程得 $\gamma = -1$，故原方程的通解应为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^x.$$

11. 由对应特征方程的根 $\lambda_{1,2} = \pm i$ 知其对应齐次方程的通解为 $C_1\cos x + C_2\sin x$，设原方程的一个特解为 $y^* = Ax + B + Ex\cos x + Dx\sin x$，代入原方程得 $A = 1, B = 0, E = 0, D = \frac{1}{2}$，从而 $y^* = x + \frac{x}{2}\sin x$，故原方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x + \frac{x}{2}\sin x.$$

12. 由对应特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ 的根，$\lambda_{1,2} = 3$ 知对应齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$，设原方程的一个特解 $y^* = x^2(Ax + B)e^{3x}$ 代入原方程得 $A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{2}$，故

$$y^* = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x + 1\right)e^{3x}.$$

从而原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x + 1\right)e^{3x}.$$

13. 由对应特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ 的根 $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ 知对应齐次方程的通解 $Y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$，设原方程的一个特解 $y^* = xe^{2x}[a\cos x + b\sin x]$ 代入原方程得 $a = -1, b = 0$，故

$$y^* = -xe^{2x}\cos x,$$

从而原方程的通解为

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) - xe^{2x}\cos x.$$

14. 方程的特征方程为 $\lambda^4 - 1 = 0$，其特征根是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$，从而原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

15. 方程所对应的特征方程为 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$，其特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，从而对应的齐次方程与通解为

$$Y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{2x},$$

设原方程的一个特解为 $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)$ 代入原方程得 $A = \frac{1}{12}, B = \frac{1}{4}, C = \frac{1}{8}$，故原方程的通解为

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{2x} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8}.$$

16. 首先导出微分方程定解问题

$$\begin{cases} f''(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x \\ f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

可解得
$$f(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + 2x + \frac{1}{3}e^x,$$

确定系数
$$C_1 = \frac{11}{3}, \quad C_2 = -3,$$

所以 $$f(x)=\frac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+2x-3+\frac{1}{3}e^{x}.$$

17. 首先由$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$得

$$\begin{cases}f''(x)-f'(x)-2f(x)=e^{x}.\\ f(0)=0,\quad f'(0)=1,\end{cases}$$

可解得 $$f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{x},$$

确定系数 $$C_1=\frac{2}{3},\quad C_2=-\frac{1}{6},$$

所以 $$f(x)=\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{1}{6}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{x},$$

于是 $$\int_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{4}{3}e^{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{6e}.$$

18. 所求的正交曲线族的微分方程为 $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

这是齐次方程可令 $y=ux$,解之得 $x^2+y^2=Cy.$

19. 根据题意可得$\displaystyle\int_0^x y\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy=x^2$, $(x>0)$

两边求导得 $$y'-\frac{1}{x}y=-4\text{ 及 }y\big|_{x=1}=1,$$

可得解 $$y=\begin{cases}x(1-4\ln x), & x>0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

20. 由牛顿第二定律可得 $p\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=F-\left(a+b\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right),$

即 $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{b}{p}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{F-a}{p},\\ S(0)=0,\quad S'(0)=0,\end{cases}$$

故 $$S=\frac{F-a}{b}\left(t+\frac{p}{b}e^{-\frac{p}{b}t}-\frac{p}{b}\right).$$

因为

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]$$

$$=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0,$$

所以,方程组(2)有惟一解.即方程组(1)有惟一解,即三直线交于一点.

例 4-33 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是三元线性方程组 $AX=\beta$ 的三个线性无关解,$R(A)=1$,则不正确的结论是 ( )

(A) $AX=\beta$ 的通解是 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$,其中,$k_1,k_2,k_3$ 是满足 $k_1+k_2+k_3=1$ 的任何数;

(B) $AX=0$ 的通解是 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$,其中 k_1,k_2,k_3 是满足 $k_1+k_2+k_3=0$ 的任何数;

(C) $\xi_1,\xi_2-\xi_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系;

(D) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

解 选(C).因为 ξ_1 不是 $AX=0$ 的解.故 $\xi_1,\xi_2-\xi_3$ 不是 $AX=0$ 的基础解系.

(A) 正确 因为 $k_1+k_2+k_3=1$,故 $k_3=1-k_1-k_2$,则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_1(\xi_1-\xi_3)+k_2(\xi_2-\xi_3)+\xi_3$. $\xi_1-\xi_3$ 与 $\xi_2-\xi_3$ 都是 $AX=0$ 的解,且线性无关,所以(A)正确.

(B) 正确 因为 $k_1+k_2+k_3=0$,故 $k_3=-k_1-k_2$,则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_1(\xi_1-\xi_3)+k_2(\xi_2-\xi_3)$,而 $\xi_1-\xi_3,\xi_2-\xi_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

(D) 正确 因为 $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3$ 都是 $AX=0$ 的解.且线性无关,又因 $R(A)=1,n=3$,故它们是 $AX=0$ 的基础解系.

例 2-34 设 B 是秩为 2 的 5×4 型矩阵.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\-1\\-8\\9\end{pmatrix}$$

其齐次线性方程组 $BX=0$ 的三个解向量.求 $BX=0$ 的解空间的一个标准正交基.

解 已知 $R(B)=2$,未知量个数 $n=4$.故 $BX=0$ 的基础解系有 $4-2=2$ 个线性无关解向量.

现先求出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大无关组:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&5\\1&1&-1\\2&4&-8\\3&-1&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大无关组,是 $BX=0$ 的基础解系.再用 Schmidt 正交化方法:

令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\\-2\end{pmatrix}.$$

再单位化:令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}\\\frac{1}{\sqrt{15}}\\\frac{2}{\sqrt{15}}\\\frac{3}{\sqrt{15}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{39}}\\\frac{1}{\sqrt{39}}\\\frac{5}{\sqrt{39}}\\\frac{-3}{\sqrt{39}}\end{pmatrix}$$

则 γ_1,γ_2 就是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

例 4-35　设线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\cdot\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{b}_{n\times 1}$. 若 $R(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}\begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}$，试证：这个方程组有解.

证　记$(\bar{\boldsymbol{A}})=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{A}} & \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}.$$

显然有
$$R(\bar{\boldsymbol{A}})\leqslant R(\boldsymbol{C})\text{，以及 }R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\bar{\boldsymbol{A}})$$
则有
$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\bar{\boldsymbol{A}})\leqslant R(\boldsymbol{C})$$
现已知
$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{C})$$
故
$$R(\boldsymbol{A})=R(\bar{\boldsymbol{A}}),$$
即方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解.

例 4-36　已知

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{的行向量是方程组：}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}\text{的解向量，试问：}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ 的 4 个行向量是否构成齐次方程组的基础解系；

(2) 若不是，不用解方程组的方法. 求一个基础解系.

解　(1) 先求 $R(\boldsymbol{B})$. 用初等变换化为阶梯型，易知 $R(\boldsymbol{B})=3$，故知 $\boldsymbol{B}$ 的四个行向量线性相关，它们不能作为齐次方程组的基础解系.

(2) 设此齐次方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，容易算得 $R(\boldsymbol{A})=2$，故知基础解系中有 $n-r=5-2=3$ 个线性无关解.

可验证 $\boldsymbol{B}$ 的第一，第二，第四行这三个向量线性无关. 它们可作为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

例 4-37　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times s$ 型矩阵. 证明：存在 $s\times p$ 型矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个列向量是线性相关的.

证　“$\Rightarrow$”

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{AB}_i=\boldsymbol{0}$，$i=1,\cdots,p$

这里 $\boldsymbol{B}_i$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列. 由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，知必有 $\boldsymbol{B}_j\neq\boldsymbol{0}$. 即知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $R(\boldsymbol{A})<s$，即 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个列向量线性相关.

“$\Leftarrow$”

$\boldsymbol{A}$ 的 s 个列向量线性相关，可知 $R(\boldsymbol{A})<s$. 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，选择 p 个非零解，记为 $\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_p$，把它们排成矩阵 $\boldsymbol{B}$，即得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

四、小　结

(1) 线性方程组这一部分主要是两个大定理：①线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解判别定理. 即看 $R(\boldsymbol{A})\overset{?}{=}R(\bar{\boldsymbol{A}})$. ②齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数 $\dim(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{A}))=n-R(\boldsymbol{A})$.

一般说，讨论解的情况，总从 $R(\boldsymbol{A})\overset{?}{=}R(\bar{\boldsymbol{A}})$ 去考虑. 若涉及解的结构. 总应考虑 $\dim(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{A}))=n-R(\boldsymbol{A})$ 以及相关的一些性质.

(2) 在论证 $R(\boldsymbol{A})\overset{?}{=}R(\bar{\boldsymbol{A}})$ 时，一个常用的有效的方法是把增广矩阵 $\bar{A}$ 经过初等行变换化到阶梯型. 然后在阶梯型便可看清 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\bar{\boldsymbol{A}})$ 的关系. 同时，在求解线性方程组时，也要用到这个方法. 因此，把矩阵经过初等行变换化到阶梯型是这一部分的重要的基本功，必须掌握得很好，特别是对带有参数的矩阵化为阶梯型不太容易做对，要重视.

第五章　矩阵的特征值与特征向量

矩阵的特征值与特征向量问题不仅是线性代数中的重要内容，也是历年硕士研究生入学考试的重点.显含或隐含的特征值和特征向量问题层出不穷.

一、复习与考试要求

(1) 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质.

(2) 了解相似矩阵的概念、性质，矩阵可对角化的条件以及实对称阵相似于对角阵的理论.

(3) 熟练掌握求矩阵特征值和特征向量的方法.

(4) 熟练掌握实对称阵正交相似于对角阵的方法.

二、基本概念与理论

1. 矩阵的对角化

矩阵 $\boldsymbol{A}$，若能相似变换到对角阵，就称 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，否则，就称 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

2. 相似矩阵

若存在可逆阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 这里，A,B 皆为 n 阶方阵.

3. 相似矩阵的性质

(1) 相似矩阵有相同的行列式.

(2) 相似矩阵有相同的可逆性，且可逆时，它们的逆矩阵也相似.

(3) 相似矩阵有相同的秩.

(4) 相似矩阵有相同的特征多项式.

(5) 相似矩阵有相同的特征值.

(6) 相似矩阵有相同的迹.(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，即为 $\mathrm{t}_r(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$).

(7) 若 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}^k$，($k\in\boldsymbol{Z}^+$).

(8) 若 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $f(\boldsymbol{B})$ 也相似.

(9) 若 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 也相似.

4. 特征值与特征向量

(1) 定义　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\lambda\in$ 数域 $\boldsymbol{F}$，非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则称数 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量.

① 由定义可知，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，则 $k\boldsymbol{\alpha}$ ($k\neq 0,k\in F$) 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量.

② 特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是属于某个特征值的，它不能同时分属于两个不同的特征值.

(2) 定理　数域 $\boldsymbol{F}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

这是因为

$$\boldsymbol{A}\text{ 可以对角化}\Leftrightarrow\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

式中 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$. $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个线性无关的特征向量. $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

（3）求特征值 λ 与特征向量 α.

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow (\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

$$\overset{\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}}{\Leftrightarrow} |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0.$$

因此,特征值就是特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的根. 属于某个特征值 λ_0 的特征向量,就是求解齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

（4）判断 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否有 n 个线性无关的特征向量?

① 定理:$\boldsymbol{A}$ 的不同特征值所对应的特征向量是线性无关的.

② 推论 1:若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化.

③ 推论 2:若特征值 λ_i 对应 s 个线性无关的特征向量,特征值 λ_j 对应 t 个线性无关的特征向量,则这 $s+t$ 个特征向量还是线性无关的.

要注意,这里的定理和推论都只是充分条件,而不是充要条件.

5. 实对称矩阵必可对角化

（1）实对称阵的性质:

① 实对称阵的特征值全是实数;

② 实对称阵的不同特征值对应的特征向量是正交的.

（2）定理:对于实对称阵 $\boldsymbol{A}$,必存在正交阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{D}$. 这里 $\boldsymbol{D}$ 为对角阵.

（3）施密特正交化方法:把一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,通过下列公式化为一组与之等价的正交的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$.

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \beta_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\dfrac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\cdots-\dfrac{(\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r)}{(\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1})}\cdot\boldsymbol{\beta}_{r-1}.\end{cases}$$

6. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与特征值的关系

（1）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=t_r(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

（2）$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

（3）若可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$,$\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\dfrac{1}{\lambda}\cdot|\boldsymbol{A}|$.

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,则 $\boldsymbol{A}^n$ 有特征值 λ^n.

（5）实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是实数.

（6）实反对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是零或纯虚数.

（7）正交阵的特征值的模必为 1.

（8）正定阵的特征值全大于零.

（9）上(下)三角阵的特征值即为其对角线元素.

三、基本题型与解题方法

例 5-1　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

分析 这是最基本的特征值问题,只需按定义求解即可.

解 $|A-\lambda E|=\begin{bmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{bmatrix}=\cdots=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$,

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $x_1=-1$ 时,解齐次线性方程组 $(A+E)X=0$,由

$$A+E=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$,

所以对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1(k\neq 0)$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时,解齐次线性方程组 $(A-2E)X=\mathbf{0}$. 由

$$A-2E=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$,

所以对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3(k_2,k_3\text{ 不同时为 }0),$$

因为 A 有三个线性无关的特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3,所以 A 可以对角化.

例 5-2 求证 A 为奇异矩阵的充要条件为 0 是 A 的一个特征值.

分析 有关特征值的证明题基本上都是与特征值定义表达式 $AX=\lambda X(X\neq\mathbf{0})$ 分不开的. 当 $\lambda=0$ 时,得 $AX=\mathbf{0}$,问题便转化为讨论齐次线性方程组有非零解的条件.

证 必要性 设 A 奇异,则 $AX=0$ 有非零解 X 即

$$AX=0X$$

从而 0 是 A 的特征值.

充分性 设 0 是 A 的一个特征值,则有 $\xi\neq 0$,使 $A\xi=0,\xi\neq\mathbf{0}$,即 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解,从而 A 是奇异的.

本题更为简单的证明方法是 A 奇异$\Leftrightarrow|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0\Leftrightarrow\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中至少有一个特征值 $\lambda_i=0$.

例 5-3 若 $\lambda\neq 0$ 是 AB 的特征值,则 λ 必是 BA 的特征值.(A,B 可以是奇异阵,也可以是长方矩阵).

分析 若 λ 是 AB 的特征值,则由定义必存在特征向量 $\xi(\xi\neq\mathbf{0})$,使 $AB\xi=\lambda\xi$,要证 λ 也是 BA 的特征值,则需证明存在向量 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$,使 $BA\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$,(未必 $\xi=\boldsymbol{\eta}$). 由此可见将 $AB\xi=\lambda\xi$ 两边左乘 B 才能过渡到 $BA\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$,这时有 $\boldsymbol{\eta}=B\xi$,剩下的问题是要证 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$,这时要用条件 $\lambda\neq 0$.

证 因为 λ 是 AB 的特征值,所以存在列向量 $\xi\neq\mathbf{0}$,使

$$AB\xi=\lambda\xi,$$

上式两边左乘 B 得

$$BAB\xi=\lambda B\xi,$$

令 $\boldsymbol{\eta}=B\xi$. 这时 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$. 否则有 $\lambda\xi=AB\xi=\mathbf{0}$,而 $\xi\neq\mathbf{0}$,则得到 $\lambda=0$,这与已知条件矛盾,故 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$,这表明

$$BA\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$$

成立,所以 λ 也是 BA 的特征值.

例 5-4 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 与 y;

(2) 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆阵 P .

分析　这是 1988 年数学(试卷一)的 8 分题. 由于 A 已经相似于对角阵 B,所以实际上已给出了 A 的两个特征值,这样就避免了需解三次方程来求特征值的困难,而将考试目的转向了其他方向:利用相似的概念求参数 x,y 以及求 A 的特征向量.

解

(1) 因为 A 和 B 相似,所以有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|,$$

可以得到　$(2-\lambda)(x^2-x\lambda-1)=(2-\lambda)(\lambda-y)(\lambda+1)$,

比较等式两端的系数,得 $x=0,y=1$.

(2) 由(1)知矩阵 A 的特征值为 $2,1,-1$.

当 $\lambda_1=2$ 时,由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0,$$

解得　$\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,这是对应于 $\lambda_1=2$ 的一个特征向量.

当 $\lambda_2=1$ 时,由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得对应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量 $\xi_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=-1$ 时,由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得对应于 $\lambda_3=-1$ 的一个特征向量 $\xi_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

因为 A 的特征值互不相同,所以对应的特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.(进一步,由于 A 是实对称阵,故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 两两正交),从而矩阵 P 可逆且满足　$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

例 5-5　设三阶实对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$,对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,求 A.

分析　这是 1995 年数学(试卷一)的 7 分题. 因为要求的三阶方阵 A 是实对称的,所以 A 一定有三个两两正交的单位特征向量. 只要求出这三个特征向量,再由给出的特征值即可求出 A. 从已给出的 $\xi_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 出发,可以求出与 ξ_1 正交的对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个互相正交的特征向量 $\xi_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\xi_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$(这可通过解线性方程组$(0,1,1)(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$ 得出).

解　从上面的分析已经得到了 A 的三个互相正交的特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3,再将它们单位化,故取

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.
所以得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

例 5-6　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交的对称正定阵,求证 $\boldsymbol{A}$ 必为单位矩阵.

分析　由 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵的条件,可以断言 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角阵,且对角线元素全为实数. 再由正定阵的条件得出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数. 加上 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵的条件,最后证明出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1,即 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于单位阵,从而 $\boldsymbol{A}$ 是单位阵.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数. 又 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数. 设有非零列向量 $\boldsymbol{X}$
使

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X},$$

由　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,得到 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$. 从 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{AX}=\lambda^2\boldsymbol{X}$,$\lambda^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$,故 $\lambda^2=1$,从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1.

由 $\boldsymbol{A}$ 对称,则存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{E}$,所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

例 5-7　设　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$,**求 $\boldsymbol{A}^9$.**

分析　本题看上去似乎与特征值无关,但若硬求 $\boldsymbol{A}^9$,计算量必然很大. 这类问题的一般解法是先将 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形 $\boldsymbol{\Lambda}$,再求 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,这样得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,$\boldsymbol{A}^9=\boldsymbol{P\Lambda}^9\boldsymbol{P}^{-1}$.

解法 1　先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$,$\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 解出对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$$

当 $\lambda_3=-1$ 时,由$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 解出对应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\text{得}\quad\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

这时有　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Lambda P}$

$$\boldsymbol{A}^9=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^9\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}^9\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_2\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&-\boldsymbol{A}_2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_2\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^2&\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_2\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

其中
$$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

解法 2　因为 $A^2=E$，所以 $A^9=A$.

评注　这是试探法，先求 A^2,A^3，再从中找规律. 这种方法只在少数特殊情形才可以用得上.

例 5-8　已知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $a=(a_{ij})$ 的 n 个特征值，试证 $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}a_{ji}$.

分析　本题初一看很难找到思路，但从特征值定义的表达式 $AX=\lambda X(X\neq 0)$，易得 $A^2X=\lambda^2X$，这表明如果 λ 是 A 的特征值，则 λ^2 是 A^2 的特征值，另外 $A=(a_{ij})$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 与 A 的元素有以下关系，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$ 这两件事启发我们只要证明 $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}a_{ji}$ 就是 A^2 的对角元素之和即可完成本题的证明.

证　因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，所以 $\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是 A^2 的 n 个特征值.

又因为 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}=\mathrm{tr}(A)$，

所以
$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=\mathrm{tr}(A^2),$$

而
$$\mathrm{tr}(A^2)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}a_{ji}.$$

例 5-9　A 是实反对称阵. 证明：

(1) A 的特征值只能是零或纯虚数；

(2) $|E-A|\neq 0$，　$|E+A|\neq 0$.

证　(1)设 $AX=\lambda X$，λ 可能复数，X 也可能是复向量. 两边共轭转置：$\bar{X}^{\mathrm T}\bar{A}^{\mathrm T}=\bar{\lambda}\bar{X}^{\mathrm T}$，由于 $\bar{A}=A$，$A^{\mathrm T}=-A$，故上式即为 $-\bar{X}^{\mathrm T}A=\bar{\lambda}\bar{X}^{\mathrm T}$，两边右乘 X，得 $-\lambda\bar{X}^{\mathrm T}X=\bar{\lambda}\bar{X}^{\mathrm T}X$，

即
$$(\lambda+\bar{\lambda})\bar{X}^{\mathrm T}X=0,$$

记　$X=\begin{pmatrix}X_1\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}$，其中，$X_i$ 均为复数，则 $\bar{X}^{\mathrm T}X=\sum\limits_{i=1}^n|X_i|^2\neq 0$，

所以　$(\lambda+\bar{\lambda})=0$，即 $\lambda=0$. 或 λ 是纯虚数.

(2) 若 $|E-A|=0\Rightarrow 1$ 是 A 的特征值. 这与(1)所证结果矛盾. 同样，若 $|E+A|=0\Rightarrow -1$ 是 A 的特征值. 也与题设矛盾.

例 5-10　A 是正交阵，则 A 的特征值的模必为 1.

证　设 $AX=\lambda X$，λ 与 X 都可能是复的. 两边共轭转置
$$\bar{X}^{\mathrm T}A^{\mathrm T}=\bar{\lambda}\bar{X}^{\mathrm T}$$

两边右乘 AX
$$\bar{X}^{\mathrm T}A^{\mathrm T}AX=\bar{\lambda}\bar{X}^{\mathrm T}AX$$

即
$$\bar{X}^{\mathrm T}X=\lambda\bar{\lambda}\bar{X}^{\mathrm T}X$$

即有
$$(1-\lambda\bar{\lambda})\bar{X}^{\mathrm T}X=0$$

由于 $\bar{X}^{\mathrm T}X\neq 0$，故 $1-\lambda\bar{\lambda}=0\Rightarrow|\lambda|^2=1\Rightarrow|\lambda|=1$.

评注　① 对于抽象矩阵讨论特征值，经常中从定义式 $AX=\lambda X$ 去考虑. 除了实对称阵(以及正定阵)，这里 λ 都有可能是复数.

② 在论证过程中，在等式两边同作一种运算. 对于复向量，常先考虑作共轭转置，然后运算. 在例 5-9 中，两边右乘 X；在例 5-10 题中，两边右乘了 AX，这要视题目的条件不同而用不同的运算.

例 5-11　设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似，E 为 n 阶单位阵. 则　　(　　)

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$；

(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量；

(C) A 与 B 都相似于一个对角矩阵；

(D) 对任意常数 t，$tE-A$ 与 $tE-B$ 相似.

解　选(D).

(A)，(B)，(C)结论都明显不对.

由 $U^{-1}AU=B\Rightarrow U^{-1}(tE-A)U=U^{-1}tEU-U^{-1}AU=tE-B$. 所以，$tE-A$ 与 $tE-B$ 相似.

例 5-12 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶下三角阵，且 $a_{11}=\cdots=a_{nn}=a$ 且至少有一元素 $a_{ij}\neq 0(i>j)$，则 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

证 （反证法）不妨设 $a_{n1}=b\neq 0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ b & & & a \end{pmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，则存在可逆阵 $\boldsymbol{U}$，使

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}，即有\ \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{-1}$$

记 $\boldsymbol{U}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，即有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ b & & & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n).$$

注意 等号右端的分块矩阵的乘法不能运算，但数量阵与任何矩阵乘法可交换.

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

可得 $a\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+b\cdot\boldsymbol{\alpha}_n=a\cdot\boldsymbol{\alpha}_1,\Rightarrow b\cdot\boldsymbol{\alpha}_n=0,\Rightarrow b=0$. 与已知矛盾.

例 5-13 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，求 x,y.

解 相似矩阵有相同的迹：$2+x=1+y$.（1）相似矩阵有相同的行列式：$|A|=|B|$.（2）相似矩阵有相同的特征值，故 -4 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因此有 $|-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

在上述三式中，只要任选 2 个. 就可解出 x 和 y.

$$x=4,y=5.$$

例 5-14 用观察法判断：

（1）矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 能否对角化？

（2）矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征值（四选一）；

（3）矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的 4 个特征值.

其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{E}_3$ 为三阶单位阵，$\boldsymbol{\beta}$ 为三维实列向量.）

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

① 1,0,1. ② 1,1,2.
③ -1,1,2. ④ -1,1,1.

$$H=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\3&6&9&12\\4&8&12&16\end{pmatrix}.$$

解　A 可以.因三阶矩阵有 3 个不同的特征值.

B 不可以,理由见例 5-15.

C 可以,因为 C 是实对称矩阵.

G 选③.

H 的 4 个特征值是:30,0,0,0.因为 H 是实对称,必可相似变换到对角阵,又因 H 的秩为 1,故对角阵的对角线元素只有一个是非零的,其余 3 个为零.又 4 个特征值之和应等于 H 的迹,故这个非零的特征值为 30.

例 5-15　设二阶实矩阵 A,$|A|<0$,试证:A 必可对角化.

证　$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2<0$.

由于复根出现必成对共轭,故 λ_1 与 λ_2 必为实根,且 $\lambda_1\neq\lambda_2$.二阶矩阵为 2 个不同特征值,因此必可对角化.

例 5-16　设 A 是 n 阶矩阵.证明:

(1) 当 n 是偶数,且 $|A|<0$ 时,A 既有正特征值,又有负特征值;

(2) 当 n 是奇数,且 $|A|>0$ 时,A 必有正特征值.当 n 是奇数;且 $|A|<0$ 时,A 必有负特征值.

证　(1) $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n<0$,当 n 是偶数时,特征值不可能全是复根.由 $|A|<0$,可知:在 n 个特征值中,于少有 2 个(或 4 个,6 个,…)实根,它们相乘小于零,则必有正的特征值和负的特征值.

(2) 类似(1)的讨论,可证.

例 5-17　已知三阶矩阵 A 的特征值为 1,−1,2,设 $B=A^3-5A^2$.试求:

(1) B 的特征值及其相似对角阵;

(2) 计算 $|B|$ 及 $|A-5E|$.

解　(1) 因为三阶矩阵 A 有三个单特征值,故 A 必可对角化,即有

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix},\text{也即 } A=U\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}U^{-1},$$

则

$$\begin{aligned}B=A^3-5A^2&=U\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&8\end{pmatrix}U^{-1}-U\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&20\end{pmatrix}U^{-1}\\&=U\begin{pmatrix}-4&&\\&-6&\\&&-12\end{pmatrix}U^{-1},\end{aligned}$$

即　$U^{-1}BU=\begin{pmatrix}-4&&\\&-6&\\&&-12\end{pmatrix}$,知 B 的特征值为 −4,−6,−12.

(2)
$$|B|=-4\cdot(-6)\cdot(-12)=-288.$$

又
$$|B|=|A^2||A-5E|=|A|^2\cdot|A-5E|,$$

所以
$$|A-5E|=-\frac{288}{4}=-72.$$

评注　一旦判断出 A 可以对角化,马上就写出 $U^{-1}AU=D$(D 为对角阵).这样,可以把 A 表示为:$A=UDU^{-1}$.再据题目的条件进行运算或论证.

例 5-18 若 A 为幂零阵(即 $A\neq 0$,但 $A^k=0,k\in Z^+$)证明:

(1) A 的特征值全为零;

(2) $|E+A|=1$;

(3) A 不能对角化.

证 (1) 设 $AX=\lambda X$,则 $A^kX=\lambda^kX$.

由 $A^k=0,\Rightarrow\lambda^kX=0,\Rightarrow\lambda^k=0,\Rightarrow\lambda=0$.

(2) $\lambda E-A\Leftrightarrow(\lambda+1)E-(E+A)$.

上面的这个恒等表述表明:

λ 是 A 的特征值$\Leftrightarrow\lambda+1$ 是 $E+A$ 的特征值. 由(1)知,A 的特征值全是零. 则 $E+A$ 的特征值全是 1,则 $|E+A|=\lambda_1\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=1\times1\times\cdots\times1=1$.

(3) (反证)若 A 可以对角化. 则 $U^{-1}AU=D$. 由于 A 的特征值全是零,故这里 $D=0$. 则有 $A=0$. 这与已知 $A\neq 0$ 矛盾.

评注 (1) 第(2)题中,建立了 A 与 $E+A$ 这两个矩阵的一个恒等表述关系,从而建立了 A 与 $E+A$ 之间特征值的相互关系. 这种方法对于 A 与 $kE+A$ 都是适用的. 在求解某些题目时,是有用的. 但要注意,并不是任何两个矩阵之间都可建立这种关系的.

不妨可以思考一下:若 A 的特征值全是 2,B 的特征值全是 -1,能否断言 $A+B$ 的特征值全是 1?

(2) 用第(2)题的方法也可以证明:若$(E+A)=0$ $(m\in Z^+)$,则 A 可逆.

例 5-19 设 A 是 n 阶方阵,$\lambda=2,4,6,\cdots,2n$ 是 A 的 n 个特征值,求 $|A-3E|$.

解法 1 由条件知 A 必可对角化,则

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix},\quad 即\quad A=U\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}U^{-1},$$

则

$$|A-3E|=\left|U\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}U^{-1}-3UU^{-1}\right|=|U|\cdot\left|\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&&&\\&3&&\\&&\ddots&\\&&&3\end{pmatrix}\right||U^{-1}|$$

$$=\begin{vmatrix}-1&&&&\\&1&&&\\&&3&&\\&&&\ddots&\\&&&&2n-3\end{vmatrix}=-1\times1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3).$$

解法 2 由于 $\lambda E-A\Leftrightarrow(\lambda-3)E-(A-3E)$已知:$\lambda$ 是 A 的特征值$\Leftrightarrow\lambda-3$ 是 $A-3E$ 的特征值. 所以 $A-3E$ 的 n 个特征值为 $-1,1,3,\cdots,(2n-3)$. 即有 $|A-3E|=-1\times1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)$.

例 5-20 设

$$A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix},求|A^{2k}|与 A^{2k}.$$

解 把矩阵 A 表为分块矩阵形式.

$$A=\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix},其中 B=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}.$$

$$|\boldsymbol{A}^{2k}|=|\boldsymbol{A}|^{2k}=(|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|)^{2k}=(-25\times 4)^{2k}=100^{2k}.$$

$$\boldsymbol{A}^{2k}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{2k} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{2k}\end{pmatrix}\quad 其中$$

$$\boldsymbol{B}^{2k}=(\boldsymbol{B}^2)^k=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}25^k & 0\\ 0 & 25^k\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{C}^{2k}=\left(2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{2k}=2^{2k}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^k & k\cdot 4^{k+1}\\ 0 & 4^k\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{2k}=\begin{pmatrix}25^k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 25^k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4^k & k\cdot 4^{k+1}\\ 0 & 0 & 0 & 4^k\end{pmatrix}.$$

评注　在计算 $\boldsymbol{C}^{2k}$ 的时候，用到了结论：$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & n\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 这当然也可临时递推.

在计算 $\boldsymbol{B}^{2k}$ 时，由于 $\boldsymbol{B}^{2k}=(\boldsymbol{B}^2)^k$，而 $\boldsymbol{B}^2$ 正好是对角阵，使计算简化了，否则，还要考虑 $\boldsymbol{B}$ 能否对角化（求特征值，特征向量）. 若可以，则可计算 $\boldsymbol{B}$ 的高次幂.

例 5-21　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix},\quad |\boldsymbol{A}|=-1.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解　$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$

即

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}，即 -\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$$

即

$$\lambda_0\cdot\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1 & (1)\\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2)\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3)\end{cases}$$

式(1)—式(3)：　$\Rightarrow\quad \lambda_0=1$

代入式(2)　$\Rightarrow\quad b=-3$

代入式(1)　$\Rightarrow\quad a=c$

又由 $|A|=-1$，可解出 $a=2$，

所以，$a=c=2$，$b=-3$，$\lambda_0=1$.

评注　和 $\boldsymbol{A}^*$ 有关的最基本的关系式就是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

例 5-22　已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与三维列向量 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^2$ 线性无关，且满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$.

(1) 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^2)$，求三阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(2) 计算 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解　(1) 设

$$B=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}.$$

由 $A=PBP^{-1}\Rightarrow AP=PB$

即

$$A(X,AX,A^2X)=(X,AX,A^2X)\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

得

$$AX=a_1X+b_1AX+c_1A^2X$$
$$A^2X=a_2X+b_2AX+c_2A^2X$$
$$A^3X=3AX-2A^2X=a_3X+b_3AX+c_3A^2X$$

利用 X,AX,A^2X 线性无关，可由上面三式解出：

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

（2）由 $A=PBP^{-1}$，知 A 与 B 相似，则 $A+E$ 与 $B+E$ 也相似，则

$$|A+E|=|B+E|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

例 5-23 设三阶实对称阵 A 的特征值是 1，2，3. 矩阵 A 属于特征值 1，2 的特征向量分别是：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}.$$

（1）求 A 的属于特征值 3 的特征向量；

（2）求矩阵 A.

解 （1）设 A 的属于特征值 3 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$. 则因为 A 实对称，故属于不同特征值的特征向量必正交，则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=-X_1-X_2+X_3=0\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=X_1-2X_2-X_3=0\end{cases}\tag{1}$$

方程组(1)的基础解系可解得为 $\xi=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

所以，属于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=k\cdot(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意非零常数.

（2）若记

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}，即\ A=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}.$$

由 P 可求得 P^{-1}：

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}，则\ A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}.$$

例 5-24　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix},$$

已知 A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=\alpha$ 是 A 的二重特征值. 试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解　因三阶矩阵 A 有三个线性无关的特征向量，故必可对角化. 又已知 $\lambda=2$ 是二重特征值，故对应于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有 2 个，因此在 $(2E-A)X=0$ 中，秩 $(2E-A)=1$.

$$(2E-A)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由上式右端矩阵秩为 1，可知 $x=2, y=-2$.
所以，

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix},$$

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解 $(2E-A)X=0$，得到对应的特征向量为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$；对于 $\lambda_3=6$，解 $(6E-A)X=0$，得到对应的特征向量为

$$\alpha_3=(1,-2,3)^T.$$

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

评注　在矩阵对角化问题中，若可以对角化，则特征根 λ_0 的重数（也称代数重数）必与求解 $(\lambda_0E-A)X=0$ 的基础解系中线性无关向量的个数（也称几何重数）相同. 而在线性方程组理论中知道：此基础解系中线性无关向量的个数（即解空间的维数）等于 $n-R(\lambda_0E-A)$.

例 5-25　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，向量 $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，

已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不惟一，试求：

(1) a 的值；

(2) 正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角阵.

解　(1) 把增广阵作初等行变换

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{pmatrix},$$

由于方程组有解但不惟一，故 $R(A)=R(A,\beta)<3$，所以 $a=-2$.

(2) 由(1)，把 $a=-2$ 代入 A 中，计算 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$. 知特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-3$，$\lambda_3=0$，并分别求出它们所对应的特征向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 实对称，故它们已正交，只需单位化：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，**即有** $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

例 5-26

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ **可逆，向量** $\boldsymbol{\alpha}=(1,b,1)^{\mathrm{T}}$ **是矩阵** $\boldsymbol{A}^*$ **的一个特征向量，**λ **是** $\boldsymbol{\alpha}$ **对应的特征值，其中** $\boldsymbol{A}^*$ **是** $\boldsymbol{A}$ **的伴随阵. 试求：**a,b **和** λ **的值.**

解　由 $\boldsymbol{A}$ **可逆**$\Rightarrow\boldsymbol{A}^*$ **可逆**$\Rightarrow\lambda\neq0$.

又由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A\alpha}$

$$\Rightarrow\boldsymbol{A\alpha}=\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases}3+b=\dfrac{|A|}{\lambda} & (1)\\ 2+2b=\dfrac{|A|}{\lambda}\cdot b & (2)\\ a+b+1=\dfrac{|A|}{\lambda} & (3)\end{cases}$$

由式(1)，**式**(3)　$\Rightarrow a=2$；

由式(1)，**式**(2)　$\Rightarrow b=1$ **或** -2.

又由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{vmatrix}=3a-2=4,$$

故由式(1)**得**

$$\lambda=\frac{|\boldsymbol{A}|}{3+b}=\frac{4}{3+b}.$$

所以，当 $b=1$ **时，**$\lambda=1$；

　当 $b=-2$ **时，**$\lambda=4$.

例 5-27

已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ **是矩阵** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$

的一个特征向量.

(1) **试确定参数** a,b **及特征向量** ξ **所对应的特征值** λ.

(2) **问** $\boldsymbol{A}$ **能否对角化？说明理由.**

解　(1) $\boldsymbol{A}\xi=\lambda\xi$，即 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\xi=\boldsymbol{0}$.

即
$$\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&a-\lambda&3\\-1&b&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases}(2-\lambda)-1-2=0\\5+(a-\lambda)-3=0\\-1+b+(2+\lambda)=0,\end{cases}\quad \text{解出}\begin{cases}\lambda=-1\\a=-3\\b=0.\end{cases}$$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-(\lambda+1)^3$，$\lambda=-1$ **是三重根. 求解** $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ **的基础解系，由于**

$$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $R(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，**即知** $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ **的基础解系中只有一个线性无关的特征向量，因此，**$\boldsymbol{A}$ **不能对角化.**

例 5-28　**设矩阵**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

(1) **已知** $\boldsymbol{A}$ **的一个特征值为** 3，**试求** y；

(2) **求矩阵** $\boldsymbol{P}$，**使** $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ **为对角矩阵.**

解　(1)

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda-y&-1\\0&0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda^2-1)\cdot[\lambda^2-(y+2)\lambda+(2y-1)]=0,$$

令 $\lambda=3$ **代入上式，得** $y=2$. **则**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

(2) **由于** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，**故** $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$，**而**

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix},$$

由式(1)了解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1,\lambda_4=3$. 则 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=9$.
分别求出 $\boldsymbol{A}^2$ 的对应于特征值的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

它们已经正交，只需再单位化：

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}.$$

评注 实对称阵必可正交相似变换到对角阵，而正交相似变换正好是合同变换(即 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$).

例 5-29 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}.$$

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\\ t_r(\boldsymbol{A})=t_r(\boldsymbol{B})\end{cases}\quad 即\begin{cases}6a-6=4b\\5+a=4+b\end{cases}\quad 解出\begin{cases}a=5\\b=6.\end{cases}$$

(2) 对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，求解 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=6$，求解 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，得

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\text{则令 }\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

就有
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}.$$

例 5-30　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}.$$

求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵，并计算 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$.

解

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2).$$

特征值
$$\lambda_1=\lambda_2=a+1,\quad \lambda_3=a-2.$$

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，求解 $((a+1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，得两个线性无关的特征向量.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

对应于 $\lambda_3=a-2$，求解 $((a-2)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，求得特征向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

则令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

可有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\0&a+1&0\\0&0&a-2\end{pmatrix}.$$

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\left|\boldsymbol{P}\cdot\begin{pmatrix}a+1&0&0\\0&a+1&0\\0&0&a-2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\right|=|\boldsymbol{P}|\cdot\left|\begin{pmatrix}a+1&0&0\\0&a+1&0\\0&0&a-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|\cdot|\boldsymbol{P}^{-1}|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a-3\end{pmatrix}\right|=a^2(a-3).$$

评注　注意矩阵中带有参数的特征值的求解过程，以及求相应的特征向量的过程.

例 5-31　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}.$$

求 $B+2E$ 的特征值与特征向量.

解　由 A 可求得 A^*,由 P 可求得 P^{-1}:

$$A^*=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

则

$$B=P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix},\quad B+2E=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda E-(B+2E)|=(\lambda-9)^2(\lambda-3).$$

对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=9$,求解 $(9E-(B+2E))X=\mathbf{0}$ 的基础解系. 求得特征向量为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

故对应于特征值 9 的全部特征向量为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$. 其中,k_1,k_2 是任意的不全为零的常数.

对应于特征值 $\lambda_3=3$,求解 $(3E-(B+2E))X=\mathbf{0}$ 的基础解系. 求得特征向量为

$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,则对应于特征值 3 的全部特征向量为 $k_3\eta_3$. k_3 为任意的非零常数.

例 5-32　设

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(a_1\ a_2\cdots\ a_n),\quad a_i\in\mathbf{R},\quad a_1\neq0.$$

求 A 的特征值与特征向量.

解　记 $A=\alpha\alpha^{\mathrm T}$. $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$. 易知 A 是实对称.

$A^2=\alpha\alpha^{\mathrm T}\alpha\alpha^{\mathrm T}=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\alpha^{\mathrm T}=K\cdot\alpha\alpha^{\mathrm T}=K\cdot A$. 这里 $K=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.

设 $AX=\lambda X$,$\Rightarrow A^2X=\lambda^2X\Rightarrow KAX=\lambda^2X\Rightarrow K\lambda X=\lambda^2X\Rightarrow(K\lambda-\lambda^2)X=\mathbf{0}\Rightarrow(K\lambda-\lambda^2)=0$.　$\Rightarrow\lambda=0$ 或 $\lambda=K$.

由于 $R(A)=1$,A 实对称必可对角化,故知 $\lambda_1=K$,$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

再求特征向量. 对于 $\lambda_1=K=\alpha^{\mathrm T}\alpha$,$AX=\lambda_1X$. 即 $\alpha\alpha^{\mathrm T}X=\alpha^{\mathrm T}\alpha X$,可见取 $X=\alpha$ 等式即成立,即属于特征值 λ_1 的特征向量为

$$P_1=\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}.$$

对应于特征值 $\lambda=0$,$AX=O\cdot X=O$.

$$A\xrightarrow{\text{行}}\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

即求解 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ 的基础解系. 可得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-a_2\\a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}-a_3\\0\\a_1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots\quad \boldsymbol{P}_n=\begin{pmatrix}-a_n\\0\\0\\\vdots\\a_1\end{pmatrix}.$$

例 5-33　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶方阵. 证明:$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

证　设 $\boldsymbol{ABX}=\lambda\boldsymbol{X}$. λ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值. 若 $\lambda=0.\Rightarrow|\boldsymbol{AB}|=0.\Rightarrow|\boldsymbol{BA}|=0.\Rightarrow\lambda=0$ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

若 $\lambda\neq0$,则 $\boldsymbol{BX}\neq\boldsymbol{O}$,在 $\boldsymbol{ABX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 等式两边左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$,得 $\boldsymbol{BABX}=\lambda\boldsymbol{BX}$,$\Rightarrow\lambda$ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

评注　有本题的结论,就可以证明:若 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 可逆,则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$ 也可逆.

例 5-34　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称阵. 试证:存在正交阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的全部特征值.

证　必要性:若存在正交阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{B}$,则

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|&=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}|=|\lambda\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}|\\&=|\boldsymbol{T}^{-1}|\cdot|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{T}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的全部特征值.

充分性:若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 又 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 皆为实对称,故存在正交阵 $\boldsymbol{T}_1$ 与 $\boldsymbol{T}_2$,使

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{AT}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{BT}_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

即有　$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{AT}_1=\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{BT}_2\quad\Rightarrow\quad(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2^{-1})=\boldsymbol{B}.$

即　$$(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2^{-1})=\boldsymbol{B}.$$

由于正交阵的逆阵还是正交阵,正交阵与正交阵相乘还是正交阵,故 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2^{-1}$ 也为正交阵.

例 5-35　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称阵,λ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的一个非实特征值,$\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的对应于 λ 的特征向量. 证明:$\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$.

证　设 $\boldsymbol{ABX}=\lambda\boldsymbol{X}$,$\lambda$ 是复数,$\boldsymbol{X}$ 是复向量. 上式两边共轭转置得 $\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BA}=\bar{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$.

再在等式两边右乘 BX 得　$\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BABX}=\bar{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}.$

即　$$\lambda\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}=\bar{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}.$$

即　$$(\lambda-\bar{\lambda})\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}=0.$$

由于 λ 非实,故 $\lambda-\bar{\lambda}\neq0$,$\Rightarrow\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}=0$.

例 5-36　设有 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$. $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$,$|\boldsymbol{A}|<0$. 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位阵. 求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

解　$|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=(-1)^4\cdot|-3\boldsymbol{E}-A|=|-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 可知 $\lambda=-3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

由 $|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|2\boldsymbol{E}|=2^4=16\quad\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=4$ 或 -4. 又因已知 $|\boldsymbol{A}|<0$,故 $|\boldsymbol{A}|=-4$.

由 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 -3,$\boldsymbol{A}$ 可逆(因 $|\boldsymbol{A}|\neq0$). 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $-\dfrac{1}{3}$.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=-\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^*\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha},$$

所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}$,即 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\dfrac{4}{3}$.

例 5-37　已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,试证:存在正交阵 $\boldsymbol{T}$,使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&0\\0&0\end{pmatrix},$$

其中，E_r 是 r 阶单位阵，$r=R(\boldsymbol{A})$.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 实对称，故存在正交阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i(i=1,\cdots,n)\text{是 }\boldsymbol{A}\text{ 的 }n\text{ 个特征值，则有}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1},\quad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}.$$

由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，可得 $\lambda_i^2=\lambda_i$，$(i=1,\cdots,n)$.

即 $\lambda_i=0$ 或 1. 由于 $R(\boldsymbol{A})=$对角阵中非零元素的个数，故知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有 r 个 1，$n-r$ 个零，故

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

证法 2 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}\Rightarrow(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{X}=0,\Rightarrow\lambda=0$ 或 1.

因 $\boldsymbol{A}$ 实对称，故必可正交相似变换到对角阵，对角阵的对角线元素即为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. $\boldsymbol{A}$ 的秩，即为特征值 1 的个数. 已知 $R(\boldsymbol{A})=r$，故

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 5-38 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵$(n>1)$. $R(\boldsymbol{A})=1$. 试证：$\boldsymbol{A}$ 可以对角化$\Leftrightarrow t_r(\boldsymbol{A})\neq 0$.

证 因 $R(\boldsymbol{A})=1$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 有特征值 0. 且对应于特征值 0 的特征向量是求解 $(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 由于 $R(\boldsymbol{A})=1$，可知基础解系中线性无关的特征向量的个数为 $n-1$ 个. 即知特征值 0 的重数$\geqslant n-1$.

当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 重 0 特征值时，此时 $t_r(\boldsymbol{A})=0$，但线性无关特征向量只有 $n-1$ 个，此时 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

当 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-1$ 重 0 特征值时，则另有一个特征值不等于 0，此非零特征值即为 $t_r(\boldsymbol{A})$. 特征值 $t_r(\boldsymbol{A})$ 对应一个特征向量. 此时，线性无关的特征向量总共有 $(n-1)+1=n$ 个. 因此 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

例 5-39 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计. 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ 的关系式，并写成矩阵形成：$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$；

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\end{cases}$

化简得

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{9}{10}x_n+\dfrac{2}{5}y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{1}{10}x_n+\dfrac{3}{5}y_n \end{cases}$$

即 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$，于是 $A=\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

（2）令 $P=(\eta_1,\eta_2)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $|P|=5\neq 0$，

知 η_1,η_2 线性无关.

因 $A\eta_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\eta_1$ 故 η_1 为 A 的特征向量，且对应的特征值 $\lambda_1=1$.

固 $A\eta_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\eta_2$，知 η_2 为 A 的特征向量，且对应的特征值为 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

（3）$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^2\cdot\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，　有　$A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$

于是　$A^n=P\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1}$，　又　$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

故
$$\begin{aligned} A^n &=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A^n\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 8-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

四、小　结

（1）特征值与特征向量问题经常与线性方程组的理论，与向量组的线性相关性，与下一章的二次型等内容有联系. 这里，首先是求解特征值与特征向量是基本功，必须熟炼掌握.

（2）特征值与矩阵 A 的关系中，尤以（1）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{f}_{\mathrm{t}}(A)$；（2）$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$ 更为重要. 另外，一些矩阵与特征值之间的关系也应熟悉.

（3）相似矩阵的性质应熟悉.

（4）矩阵能否对角化，是本章核心内容.“代数重数≥几何重数”. 这个结论，我们没有证明，但读者应该知道，当取得等号时，就可以对角化（对每个特征值皆如此），否则就不能对角化.

（5）**实对称阵的性质和定理也是重要的,这与下一章二次型有很大关系.**

（6）**这一章中有些是充分必要的结论,有些仅是充分而不必要,有些是必要而不充分,这些内容在复习时,要注意多思考.**

第六章　二次型

二次型问题实质上是实对称阵的对角化和实对称阵的特征值问题的延伸. 所涉及的主要问题是二次型化标准形及实对称阵的正定性及判别法.

一、复习与考试要求

(1) 熟悉二次型的定义及其矩阵表示,了解二次型的秩.

(2) 了解二次型和矩阵的正定性及其判别法.

(3) 掌握用正交变换化二次型为标准形.

二、基本概念与理论

1. 二次型

含 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

称为二次型,当 a_{ij} 为实数时,f 称为实二次型.

2. 二次型的矩阵及秩

在二次型的表达式中取 $a_{ij}=a_{ji}$,则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩也称为二次型 f 的秩.

3. 正(负)定矩阵

若对任何列向量 $\boldsymbol{X}\neq 0$,有

$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0(<0)$,则称 f 为正定(负定)二次型,相应地称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定(负定)矩阵.

$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\geqslant 0(\leqslant 0)$,则称 f 为半正定(半负定)二次型,$\boldsymbol{A}$ 为半正定(半负定)矩阵.

4. 二次型 f 化为标准形的方法

(1) 对二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 存在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,化二次型 f 为标准形

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APY}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}.$$

5. 正定二次型的判别法

二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 是正定的充要条件是下列条件之一成立:

① 对称阵 A 的特征值全大于零；

② 对称阵 A 的各阶顺序主子式全大于零，即

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,|\boldsymbol{A}|>0.$$

6. 负定二次型的判别法

二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是负定的充要条件是下列条件之一成立：

①对称阵 A 的特征值全小于零；

②对称阵 A 的各阶顺序主要式中，奇数阶的全小于零，偶数阶全大于零.

③二次型——$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 是正定的二次型.

三、基本题型与解题方法

例 6-1 求一个正交变换，化二次型

$$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准形.

分析 这是 1990 年数学(试卷一)的 8 分题. 是一种最基本的常规计算题型，它的解题步骤如下：

(1) 写出二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$，从而得矩阵表达形式 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，注意平方项系数 a_{ii} 为 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素，非平方项系数的一半作为 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij}，另一半作为 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ji}，这样得对称阵 $\boldsymbol{A}$.

(2) 求二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

(3) 将特征向量正交规范化，写出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及正交变换；

(4) 写出二次型的标准形.

解 (1) 写出 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix},\text{从而 } f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}.$$

(2) 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-\lambda((1-\lambda)(8-\lambda)-8)=0$，

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=0$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$ 得两个线性无关的向量 $\xi_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$. 为得到两个正交的特征向量，将 $\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}$ 化简得到的非零行向量 $(1,-2,2)$ 和 $\xi_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 合在一起作系数阵，解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=0$$

得

$$\xi_2=(-2,4,5)^{\mathrm{T}}$$

对于 $\lambda_3=9$，解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得到

$$\xi_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}.$$

(3) 将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\xi_1/\|\xi_1\|=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\xi_2/\|\xi_2\|=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,4,5)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\xi_3/\|\xi_3\|=\frac{1}{3}(1,-2,2)^{\mathrm{T}},$$

以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为列向量，构成正交阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

再写出正交变换 $X=PY$.

(4) 写出二次型的标准形

$$f=X^{\mathrm{T}}AX\xlongequal{X=PY}9y_3^2$$

例 6-2　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3.$$

问 λ 取何值时,该二次型是正定的？

分析　这类问题可用正定阵的判别法来确定参数 λ 的范围,应用正定阵的充要条件是它的各阶主子式大于零即可求出 λ 的取值范围.

解　二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1\\ \lambda & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix},$$

$$A>0\quad\Leftrightarrow\quad |A_1|=1>0,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & 1,\end{vmatrix}=1-\lambda^2>0,\qquad 得\quad -1<\lambda<1,$$

$$|A_3|=4\lambda-5\lambda^2>0,\qquad 得\quad \begin{cases}\lambda>0\\ \lambda<\frac{4}{5}.\end{cases}$$

所以,要使所给二次型正定,其充要条件是 $0<\lambda<\frac{4}{5}$.

例 6-3　设 A,B 都是 n 阶正定对称阵,求证 $A+B,A^{-1}+B^{-1}$ 也都是对称正定阵.

分析　要证 $A+B$ 正定,必须用定义,要证 A^{-1},B^{-1} 正定则要用到 A 正定的充要条件是其特征值全大于零.

证　因为 A 正定,B 正定,所以对任意 n 维非零列向量 X,有

$$X^{\mathrm{T}}AX>0,\quad X^{\mathrm{T}}BX>0,$$

故得

$$X^{\mathrm{T}}(A+B)X=X^{\mathrm{T}}AX+X^{\mathrm{T}}BX>0,$$

此即表明 $A+B$ 正定.

设 λ 是 A 的特征值,则有非零列向量 X 使

$$AX=\lambda X,$$

因为 A 正定,所以 A 可逆,$\lambda>0$. 从而

$$A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X,$$

因此,$\frac{1}{\lambda}$是 A^{-1} 的特征值,且$\frac{1}{\lambda}>0$,故 A^{-1} 正定,同理 B^{-1} 也正定. 由前面得到的结果,则得 $A^{-1}+B^{-1}$ 正定.

例 6-4　求证 n 阶对称阵 A 正定的充要条件是

(1) 存在可逆阵,使 $A=QQ^{\mathrm{T}}$;

(2) 存在正定阵 S,使 $A=S^2$.

分析　对称正定阵的一个优良特性是可以对角化,而且正交相似的对角阵的对角线元素全大于零,从而可将此对角阵分解成一个正定对角阵的平方,再分别求出 Q 和 S .

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值,因为 A 正定,故 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$,且存在正交阵 P 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}'\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

则得 $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{T}}.$$

另外,A 可以表达成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

令 $$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

则得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^2$,且 S 正定.

例 6-5 已知方程 $5x^2+5y^2+cz^2-2xy+6xz-6yz=1$ 的图形是一个二次柱面,求常数 c,确定柱面的类型,并求柱面母线的方向向量.

分析 本例把二次型与解析几何相结合,超出考试大纲的要求,但二次型的几何意义,考生也应该有所了解,且设计线性代数与高等数学相结合的综合题,很可能是今后考试命题的一种趋势.

方程左端的二次型记为

$$f(x,y,z)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX},\boldsymbol{X}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$$

经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,二次型化为

$$f=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APY}=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3\omega^2,(\boldsymbol{Y}=(u,v,w)^{\mathrm{T}})$$

由 $f=1$ 的图形为二次柱面,知 λ_i 中必有一个为 0,无妨设 $\lambda_3=0$,则柱面母线方向即为 w 轴的方向,亦即对应 $\lambda_3=0$ 的特征向量方向.

解 方程左端二次型对应的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}$$

由 A 的一个特征值为 0，知 $|A|=0$，求得 $c=3$.

由　$AX=0$ 解得特征向量 $p=(-1,1,2)^T$，即为柱面母线的方向向量.

$$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-1&5&-3\\0&2&-1\\0&0&c-3\end{bmatrix},$$

因 $R(A)=2$，解得 $c=3$.

这时，$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{bmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$，

故所求特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

由上述特征值可知　$f(X)=1$ 所表示的二次曲面是椭圆柱面

$$4u^2+9v^2=1.$$

例 6-6　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$.

(1) 试用配方法化二次型为标准形，并求变换矩阵；

(2) 试用正交变换化二次型为标准形，并求变换矩阵；

(3) 写出二次型的规范形，并求变换矩阵.

解　(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3=(x_1^2+2x_1x_3+x_3^2)-2x_2^2=(x_1+x_3)^2-2x_2^2$，
令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_3\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}\quad\text{及解出}\quad\begin{cases}x_1=y_1-y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_3,\end{cases}$$

即 $f(x)$ 在 $X=Py$ 后化为 $f(y)=y_1^2-2y_2^2$，其中

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2) 二次型 $f(x)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-2)(\lambda+2).$$

求出对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量：$\alpha_1=(1,0,1)^T$；对应于 $\lambda_2=-2$ 的特征向量：$\alpha_2=(0,1,0)^T$，对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量：$\alpha_3=(1,0,-1)^T$.

上述向量已经正交，只需单位化：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{TY}$,则 $f(x)$ 在变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{TY}$ 下,化为标准形 $f(Y)=2y_1^2-2y_2^2$.

(3) 若由(2)往下做,再令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{RZ}$,这里,

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $$f(Z)=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AT})\boldsymbol{R})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{Z}=z_1^2-z_2^2.$$

即为规范形,此时所用的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 1 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

若由(1)往下做,则可再令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{HZ}$,这里,

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $$f(Z)=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{H})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{Z}=z_1^2-z_2^2.$$ 即得规范形.

这时,所用的变换矩阵为

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 6-7 已知二次曲面方程:$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$,可经过正交变换.

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\zeta}\end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程:$\boldsymbol{\eta}^2+4\zeta^2=4$. 求 a,b 的值和正交阵 $\boldsymbol{P}$.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

则由相似矩阵性质：$2+a=5,\Rightarrow a=3$.

又由$|A|=0$,可解得 $b=1$.

再求属于特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ 的特征向量,并单位化,得

$$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

则 $P=(P_1,P_2,P_3)$即为所求的正交阵.

例 6-8　试证：

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad 与\quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

在实数域不是合同的,在复数域是合同的.

证　若合同,即存在可逆阵 P,使

$$P^{\mathrm{T}}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot P=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

两边取行列式,得$|P|^2=-1$.这在实数域是不可能的.而在复数域,可有

$$\begin{pmatrix}i&0\\0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

即$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$是合同的.

例 6-9　证明：

$$A=\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}\quad 与\quad B=\begin{pmatrix}a_2&0&0\\0&a_3&0\\0&0&a_1\end{pmatrix}是合同的.$$

证
$$P(1,2)\cdot P(1,3)\cdot A\cdot P(1,3)\cdot P(1,2)=B$$

而
$$P(1,2)\cdot P(1,3)=(P(1,3)\cdot P(1,2))^{\mathrm{T}},$$

记 $P=P(1,3)\cdot P(1,2)$,即有 $P^{\mathrm{T}}AP=B$.

而 P 是两个初等阵的乘积,故还是可逆阵.因此 A 与 B 合同.

例 6-10　设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $x=PY$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$.其中,$x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 都是三维列向量,P 是三阶正交矩阵.试求常数 α,β.

解　变换前后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

由于 P 是正交阵，故 $P^{T}AP=B$ 即 $P^{-1}AP=B$，即 A 与 B 相似，故 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，展开即为

$$\lambda^3-3\lambda^2+(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda+(\alpha-\beta)^2\equiv\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda.$$

比较两端同次幂的系数，得 $\alpha=\beta=O$.

评注　注意二次型的矩阵变换，多为合同变换，而正交矩阵 $P^{T}=P^{-1}$，故也正是相似变换，可用相似矩阵的一些性质.

例 6-11　若 $f(x)=x^{T}Ax$ 经过可逆变换 $x=Py$ 后，化为 $f(Py)=y^{T}(P^{T}AP)y$，则在二次型 $f(x)$ 与 $f(Py)$ 中，只要有一个是正定二次型，则另一个也是正定二次型.

证　设 $f(x)$ 正定，往证 $f(Py)$ 也正定. 即证 $P^{T}AP$ 正定.

$$\forall\quad Z\neq O,\quad Z^{T}(P^{T}AP)Z=(PZ)^{T}A(PZ).$$

由于 P 可逆，故 PZ 还是任给的非零向量. 由 A 正定，故 $(PZ)^{T}A(PZ)>0$，即得 $P^{T}AP$ 正定. 即 $f(Py)$ 正定.

由于上述变换是可逆变换，故也有 $Y=P^{-1}X$. 故上述证明过程可逆. 证毕.

评注　从矩阵角度说，本题即证明了：合同变换保持矩阵的正定性不变.

例 6-12　正定阵 A 的等价说法：

(1) 对于实对称阵 A，$\forall X\neq 0$，恒有 $X^{T}AX>0$.

(2) 实对称阵 A 的所有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 全大于零.

(3) A 与 E 合同；

(4) 存在可逆阵 U，使 $A=U^{T}U$.

证　"(1)⇒(2)"：已知 $f(x)=X^{T}AX>0$，由 A 实对称，故存在正交阵 Q，使经过 $X=QY$ 后，

$$f(Qy)=Y^{T}(Q^{T}AQ)Y=Y^{T}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

由例 6-11 知，$f(Qy)$ 正定. 而 $f(Qy)$ 正定的充分必要条件是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 全大于零. 这里的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值.

$$(2)\Rightarrow(3):\quad f(x)=X^{T}AX\xrightarrow[Q\text{ 正交}]{X=QY}f(Qy)=Y^{T}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Y,$$

再令 $Y=PZ$，其中 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}$. 则得

$f(QPZ)=Z^{T}EZ$，其中的矩阵变换即 $P^{T}(Q^{T}AQ)P=E$.

即 A 与 E 合同.

(3)⇒(4)：已知存在可逆阵 P，$P^{T}AP=E$，则有 $A=(P^{T})^{-1}P^{-1}=(P^{-1})^{T}P^{-1}=U^{T}U$. 这里 $U=P^{-1}$ 是可逆阵.

(4)⇒(1)：　已知 $A=U^{T}U$. U 可逆.

$\forall X\neq 0$，$X^{T}AX=X^{T}U^{T}UX=(UX)^{T}(UX)>0$. 即 A 正定.

例 6-13　若 A，B 都是正定阵，则 $A+B$ 也是正定阵.

证　$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}=A+B$ 故对称.

$\forall X\neq 0$，　$X^{T}(A+B)X=X^{T}AX+X^{T}BX>0$.

所以，$A+B$ 是正定阵.

评注　若已知正定阵，则它必是实对称. 若要证矩阵是正定阵. 则应先证对称.

例 6-14　若 A 是正定阵，则 A^{-1}，A^{*}，A^{n} 皆为正定阵.

证　$(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}=A^{-1}$，故 A^{-1} 对称.

设 A 的特征值λ，则由 A 正定. 知 $\lambda>0$. 而 A^{-1}的特征值为$\frac{1}{\lambda}$. 则可知 A^{-1}的特征值也全大于零. 故 A^{-1}正定.

A^{*}，A^{n} 的正定性类似可证.

例 6-15　若 A 是正定阵，则 $a_{ii}>0$，$(i=1,\cdots,n)$.

证　因 A 正定，故 $A=U^{\mathrm{T}}U$.（U 为可逆阵）. 而 $U^{\mathrm{T}}U$ 的对角线元素正是 U 的每一列元素的平方和. 由于 U 可逆，故每一列皆非零向量，故平方和必大于零.

例 6-16　若 A，B 都是正定阵，且 $AB=BA$，则 $A\cdot B$ 也是正定阵.

证　$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=BA=AB$，故 $A\cdot B$ 对称.

由 A 正定，$\Rightarrow A=P^{\mathrm{T}}P$. P 为可逆阵，同理 $B=Q^{\mathrm{T}}Q$，Q 可逆. 故 $AB=P^{T}PQ^{\mathrm{T}}Q$.

再作相似变换：$Q(AB)Q^{-1}=QP^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}QQ^{-1}$

$$=QP^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}=(PQ^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(PQ^{\mathrm{T}}).$$

即等号右端是正定阵. 即 $A\cdot B$ 与此正定阵相似. 从而有相同的特征值，从而知 $A\cdot B$ 的特征值全大于零. 因此 $A\cdot B$ 正定.

例 6-17　证明：二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 在 $\|X\|=1$ 时的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

证　因 A 实对称，故必存在正交阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，这里 λ_i 是 A 的特征值，且全为实数.

$$f=X^{\mathrm{T}}AX=X^{\mathrm{T}}QQ^{\mathrm{T}}AQQ^{\mathrm{T}}X=(Q^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}AQ)(Q^{T}X)$$

记向量 $y=Q^{\mathrm{T}}X$，则由于正交变换是保模变换，故知 $\|y\|=\|x\|=1$，则

$$f=y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

$$\leqslant\lambda_{\max}(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_{\max}\cdot\|y\|=\lambda_{\max}.$$

设 $\lambda_{\max}=\lambda_i$，只要取 $Y_0=(0\cdots1\cdots0)^{\mathrm{T}}$，此时

$$Y_0=Q^{\mathrm{T}}X_0\text{，即 }X_0=QY_0\text{，且有 }\|X_0\|=1.\text{ 则}$$

$$f(X_0)=X_0^{\mathrm{T}}AX_0=(QY_0)^{\mathrm{T}}A(QY_0)=Y_0^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQY_0$$

$$=(0,\cdots,\underset{j}{1},\cdots,0)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_j.$$

评注　证最大值，一般分为两步：第一步先证“$\leqslant$”；第二步再证可以取到等号. 与本题相仿，可以证明：二次型 f 在 n 维向量空间的单位球面上的最小值是二次型矩阵 A 的最小特征值.

例 6-18　A 实对称，试证：t 充分大后，$tE+A$ 是正定阵.

证　$(tE+A)^{\mathrm{T}}=tE+A^{\mathrm{T}}=tE+A$，对称. 因 A 实对称，故 A 的特征值全是实数，则由

$$\lambda E-A\Leftrightarrow(\lambda+t)E-(tE+A)$$

可知：λ 是 A 的特征值$\Leftrightarrow\lambda+t$ 是 $tE+A$ 的特征值. 当 t 充分大后，由于 λ 是实数，故可使 $\lambda+t>0$，即 t 充分大后，$tE+A$ 的特征值全大于零，故 $tE+A$ 正定.

例 6-19　若 A 实对称，$A^3-A^2+2A=2E$，证明，A 正定.

证　设 $AX=\lambda X$.

$$(A^3-A^2+2A)X=2X$$

$$\Rightarrow\quad(\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2)X=0$$

$$\Rightarrow\quad\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2=0$$

$\Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda^2+2)=0$

$\Rightarrow \quad \lambda=1$,($\lambda^2+2\neq 0$. 因 λ 是实数)

$\Rightarrow$ A 的特征值大于零,故 A 正定.

例 6-20 证明:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{是正定阵.}$$

证 A 对称显然. 记 $|A|=D_n$.

则
$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1}-D_{n-2}=2(2D_{n-2}-D_{n-3})-D_{n-2} \\ &= 3D_{n-2}-2D_{n-3}=3(2D_{n-3}-D_{n-4})-2D_{n-3} \\ &= 4D_{n-3}-3D_{n-4}=\cdots=(n-1)D_2-(n-2)D_1 \\ &= (n-1)\cdot 3-(n-2)\cdot 2=n+1. \end{aligned}$$

可知 A 的所有顺序主子式全大于零. 故 A 正定.

评注 矩阵 A 正定,等价说法有好几种,有的按定义论证方便,有的用特征值论证方便,有的用所有顺序主子式大于零论证方便.

例 6-21 若 A 为 n 阶实对称阵,且 $|A|<0$. 试证:必存在 $0\neq x\in R^n$,使 $X^TAX<0$.

证 因 A 实对称,故必存在正交阵 Q,使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$ $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$是 A 的特征值,且均为实数.

由于 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n<0$,知 λ_i 中必有负数,不妨设 $\lambda_1<0$,则可令 $Y_0=(1,0,\cdots,0)^T$,可有

$$Y_0^TQ^TAQY_0=(1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\lambda_1<0,$$

则只要取 $X=QY_0$ 即为所求.

例 6-22 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$正定. 证明:$\forall\, i\neq j$,都有 $|a_{ij}|<|a_{ii}\cdot a_{jj}|^{\frac{1}{2}}$.

证 把 A 的第 i 行换到第一行,第 j 行换到第二行,并把 A 的第 i 列换到第一列,第 j 列换到第二列,即

$$P(2,j)P(1,i)AP(1,i)P(2,j)=B,$$

即
$$(P(1,i)P(2,j))^TA(P(1,i)P(2,j))=B.$$

即有 A 与 B 合同. 由于合同变换保持正定性不变,知 B 正定. 则 B 的二阶顺 序主子式大于零. 即

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix}>0. \quad \text{即} |a_{ij}|<|a_{ii}\quad a_{jj}|^{\frac{1}{2}}.$$

例 6-23 设 A,B 是两个 n 阶实对称阵,且 B 正定. 试证:存在一个 n 阶可逆阵 C,使 C^TAC 与 C^TBC 同时成为对角阵.

证 因 B 正定,所以,B 与 E 合同,即存在可逆阵 P,使 $P^TBP=E$. 而 P^TAP 仍为实对称,则存在正交阵 Q,使 $Q^T(P^TAP)Q=D$.(D 为对角阵). 而 $Q^T(P^TBP)Q=Q^TEQ=E$.

则可令 $C=PQ$. 是可逆阵,有

$C^TAC=D$,$C^TBC=E$. 皆为对角阵.

评注 有两个矩阵 A,B,先从条件强的 B 开始考虑.

例 6-24 设 A,B 均为 n 阶实对称阵,且 A 为正定阵. 试证:$A\cdot B$ 的特证值都是实数.

证　因 A 正定，故 $A=U^{T}U$，U 为可逆阵.

$$\begin{aligned}|\lambda E-AB|&=|\lambda E-U^{T}UB|=|\lambda E-U^{T}UBU^{T}(U^{T})^{-1}|\\&=|\lambda U^{T}(U^{T})^{-1}-U^{T}(UBU^{T})(U^{T})^{-1}|=|U^{T}|\cdot|\lambda E-UBU^{T}||(U^{T})^{-1}|\\&=|\lambda E-UBU^{T}|.\end{aligned}$$

由于 B 实对称，$\Rightarrow UBU^{T}$ 仍为实对称，故 UBU^{T} 的特征值皆为实数. 上式表明：$A\cdot B$ 与 UBU^{T} 有相同的特征多项式，即有相同的特征值. 故 $A\cdot B$ 的特征值都是实数.

例 6-25　设 A 为 m 阶实对称阵，且 A 正定. B 为 $m\times n$ 矩阵. 试证：$B^{T}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩等于 n.

证　“必要性”. 设 A 与 $B^{T}AB$ 是正定阵. 故 $\forall(0\neq x)\in R^{n}$，恒有 $X^{T}(B^{T}AB)X>0$，即

$$X^{T}(B^{T}AB)X=(BX)^{T}A(BX)>0.$$

由于 A 正定，欲使上不等式成立，必须 $BX\neq 0$.（当 $X\neq 0$ 时）. 也即线性方程组 $BX=0$ 只有零解，即知 $R(B)=n$.

“充分性”设 $R(B)=n$，则 $BX=O$ 只有零解，即 $\forall X\neq O$，$BX\neq O$. 则由 A 正定可知，$\forall X\neq O$，恒有 $(BX)^{T}A(BX)>O$，即 $X^{T}(B^{T}AB)X>O$，即 $B^{T}AB$ 正定.

$(B^{T}AB)^{T}=B^{T}AB$　对称显然.

评注　$R(B)=n \quad\Leftrightarrow\quad BX=O$ 只有零解

$\quad\quad\quad\quad\quad\Leftrightarrow\quad \forall X\neq O, BX\neq 0$.

例 6-26　设 A 为三阶实对称阵，且满足条件：

$A^{2}+2A=O$，　$R(A)=2$.

（1）求 A 的全部特征值；

（2）当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定阵.

解　（1）设 $AX=\lambda X$，则 $A^{2}X=\lambda^{2}X$

$$(A^{2}+2A)X=(\lambda^{2}+2\lambda)X=O.$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=0,\quad \lambda=-2.$$

由于 A 实对称，必可对角化，对角线上的元素即为 A 的特征值. 又已知 $R(A)=2$，故知

$$\lambda_{1}=\lambda_{2}=-2,\quad \lambda_{3}=0.$$

（2）$\lambda E-A \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda+k)E-(A+kE)$，

即 λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda+k$ 是 $A+kE$ 的特征值. 即知 $A+kE$ 的特征值为 $k-2, k-2, k$.

由此可知，当 $k>2$ 时，$A+kE$ 的特征值全大于零. 即正定.

例 6-27　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

知阵 $B=(kE+A)^{2}$，其中，k 为实数. E 为单位阵. 求对角阵 Λ，使 B 与 Λ 相似. 并求 k 为何值时，B 为正定阵.

解法 1　$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-2)^{2}$.

知 A 的特征值为 $\lambda_{1}=\lambda_{2}=2, \lambda_{3}=0$.

由 A 实对称，故存在正交阵 P，使

$$P^{T}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}=D,\quad 即有\ A=PDP^{T},$$

则

$$\begin{aligned}B&=(kE+A)^{2}=(kPP^{T}+PDP^{T})^{2}\\&=(kPP^{T}+PDP^{T})\cdot(kPP^{T}+PDP^{T})=P(kE+D)^{2}P^{T}\\&=P\cdot\begin{pmatrix}(k+2)^{2}&0&0\\0&(k+2)^{2}&0\\0&0&k^{2}\end{pmatrix}P^{T}.\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix},$$

只要 $k\neq-2$，且 $k\neq0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的特征值全为正数，这时 $\boldsymbol{B}$ 正定.

解法 2 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，$R(\boldsymbol{A})=2$ 是显然的.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和皆为 2，知 A 有特征值 2. 又因 $R(\boldsymbol{A})=2$，知 A 有特征值 0. 又 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化，对角阵的对角线元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因此，对角线上另一个元素也是 2，这可从 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{t}_r(\boldsymbol{A})=4$ 中求得.

因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，2，0. $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $k+2$，$k+2$，k. $(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 的特征值为$(k+2)^2$，$(k+2)^2$，k^2.

由于 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 对称. $(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 也是实对称，因此，$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 必可对角化. 而对角阵即为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}.$$

当 $k\neq-2$，且 $k\neq0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于零，即 B 正定.

例 6-28 设有 n 元实二次型：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

其中，$a_i(i=1,\cdots,n)$为实数. 试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型.

解 由题设知，对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant0$，其中，等号成立当且仅当

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0\\ x_2+a_2x_3=0\\ \vdots\\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0\\ x_n+a_nx_1=0\end{cases}\tag{1}$$

方程组(1)仅有零解的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}\cdot a_1a_2\cdots a_n\neq0,$$

因此，当 $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq0$ 时，对于任意的不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，即当 $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定二次型.

例 6-29 设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots\boldsymbol{v}_n$ 是 n 个两两正交的 n 维单位列向量，σ 是实数，n 阶矩阵 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵；

(2) 证明 $\boldsymbol{v}_1$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的特征向量，并求相应特征值；

(3) 证明 $\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\cdots\boldsymbol{v}_n$ 也是 $\boldsymbol{H}$ 的特征向量，并求相应特征值；

(4) σ 为何值时，$\boldsymbol{H}$ 是正交阵；

(5) σ 在何范围内，$\boldsymbol{H}$ 是正定阵；

(6) σ 在何范围内，$\boldsymbol{H}$ 是可逆阵；

(7) 若 $\boldsymbol{H}$ 可逆，且 $\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}$($\mu$ 为实数)，求 μ 与 σ 应满足的关系式.

证　(1) $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$，即 $\boldsymbol{H}$ 对称.

(2) $\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_1=(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_1-\sigma\boldsymbol{v}_1=(1-\sigma)\boldsymbol{v}_1$. 且 $\lambda_1=1-\sigma$.

(3) $\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_2=(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2-0=\boldsymbol{v}_2$，知 $\lambda_2=1$. 类似可证 $\boldsymbol{v}_3,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是特征向量，且 $\lambda_3=\cdots=\lambda_n=1$.

(4) $$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}&=(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-2\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}+\sigma^2\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-(2\sigma-\sigma^2)\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

当 $2\sigma-\sigma^2=0$ 时，即 $\sigma=0$ 或 $\sigma=2$ 时，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 为正交阵.

(5) 由(2)，(3)可知，当 $\sigma<1$ 时，$\boldsymbol{H}$ 的所有特征值全大于零，$\boldsymbol{H}$ 正定 。

(6) 由(2)，(3)可知，当 $\sigma\neq1$ 时，所有特征值不等于零，$\boldsymbol{H}$ 可逆.

(7) $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^{-1}=(\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-\sigma\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}-\mu\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}+\sigma\cdot\mu\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}$，

应有 $-\sigma-\mu+\sigma\mu=0$，即 $\mu=\dfrac{\sigma}{\sigma-1}$，$(\sigma\neq1)$.

例 6-30　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 a，$\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 b，试证：

(1) $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 的特征值全大于零；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 $a+b$.

证　(1) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\Leftrightarrow(\lambda-a)\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})$

即 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\Leftrightarrow\lambda-a$ 是 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 的特征值. 现已知 $\lambda>a$，故 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 的特征值 $\lambda-a>0$.

(2) 同理可证：$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 的特征值全大于零. 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称阵，知 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 均为实对称阵，它们的特征值又全大于零，故 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 均为正定阵. 所以，$\forall\boldsymbol{X}\neq0$，

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}))\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}>0.$$

所以，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 是正定阵.（显然它也是对称阵）.

(3) $\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\Leftrightarrow(\lambda-(a+b))\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E})$

即 λ 是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\Leftrightarrow\lambda-(a+b)$ 是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 的特征值. 由(2)知，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 是正定阵，故 $\lambda-(a+b)>0$. 即 $\lambda>a+b$，所以，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 $a+b$.

例 6-31　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵 ，$R(\boldsymbol{A})=n$，A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$)二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}X_iX_j.$$

(1) 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(x)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

(2) 二次型 $g(x)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(x)$ 的规范形是否相同？说明理由.

解　(1) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

由 $R(\boldsymbol{A})=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\boldsymbol{A}^*$，又 $\boldsymbol{A}$ 实对称，$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称. 因此，$f(x)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) $g(x)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，　$f(x)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$，

由于 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}$，所以，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同. 于是 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的规范形.

四、小　结

本章的中心问题有两类：

(1) 二次型化标准形. 用正交变换化二次型为标准形与上一章的对称阵正交相似于对角阵是同一个问

题，而以两种形式出现．需要注意的是特征多项式有重根的情形，所求的的特征向量可能不一定正交，这时一定要先正交规范化．

（2）正定矩阵，常用的正定阵的充要条件是：① 其特征值全大于零；② 各阶顺序主子式全大于零．

综合练习题

1．求证 $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^2+b^2)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

2．求证 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

3．已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-4$，又设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}$，求：

（1）矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值及其相似对角阵；

（2）$|\boldsymbol{B}|$ 及 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|$．

4．（1989 年数学（试卷一）的 3 分题）设 A 是四阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 中　（　）

（A）必有一列元素全为 0；

（B）必有两列元素对应成比例；

（C）必有一列向量是其余各列向量的线性组合；

（D）任一列向量是其他各列向量的线性组合．

5．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，试计算 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{E})$

6．设 $\boldsymbol{A}^k=0$（k 为正整数），证明

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$$

7．设 m 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，记

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m,$$

$f(\boldsymbol{A})$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式．

（1）设 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，求证 $\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{bmatrix} \lambda_1{}^k & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^k \end{bmatrix}$，$f(\boldsymbol{\Lambda})=\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}$；

（2）设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，求证 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$．

8．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq0$）线性相关的充分必要条件是至少有一个 α_i（$1\leqslant i\leqslant S$）可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表示．

9．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的向量，$\boldsymbol{\beta}_i=\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j$，$i=1,2,\cdots,r$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}\neq0.$$

10．当把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 加于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 后，向量组的秩不变，那么向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示．

11．非零有序向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$，若任何一个向量都不能被它前面所有的向量线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,$

$\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

12. 求下述线性方程组的通解

$$\begin{cases}(n-1)x_1=x_2+x_3+\cdots+x_n\\(n-1)x_2=x_1+x_3+\cdots+x_n\\\cdots\\(n-1)x_n=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\end{cases}$$

13. 当 λ 取何值时,线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda\end{cases}$$

有解？在有解时,求出所有解.

14. 当 a,b,c 满足什么条件时,线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=a\\x_1-2x_2+x_3=b\\x_1+x_2-2x_3=c\end{cases}$$

有解？在有解时,求出所有解.

15. 设 $x_1-x_2=a_1,x_2-x_3=a_2,\cdots,x_5-x_1=a_5$,求证此方程组有解的充要条件为 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$,在有解的情况下,求出它的一组解.

16. 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=A$,称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等阵,求证幂等阵的特征值只能是 0 和 1.

17. 设 λ 是正交阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,问 $1/\lambda$ 是不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值？为什么？

18. (1) 正交阵如果有实特征值,则它们只能是 1 和 -1.

(2) 正交阵不同的实特征值所对应的特征向量必定正交.

19. 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量,问 λ 是不是方阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值？为什么？$\boldsymbol{X}$ 是不是 $\boldsymbol{A}^{t}$ 的对应于 λ 的特征向量？

20. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 a,则 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{X}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 a 的特征向量.

21. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(ax_1+bx_2+cx_3)^2$ 的矩阵形式,并求出二次型的对称阵的特征值.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,$|\boldsymbol{A}|=-1$,则 -1 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

简答与提示

3. (1) $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $3,8,8$,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\mathrm{diag}\{3,8,8\}$;

(2) $|\boldsymbol{B}|=192$;　$|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|=-108$.

4. (C).

5. $\begin{bmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{bmatrix}$.

6. 在 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 等式两边同乘 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.

7. (1) $f(\boldsymbol{\Lambda})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+a_2\boldsymbol{\Lambda}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{\Lambda}^m$

$$=\begin{bmatrix}a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_m\lambda_1{}^m&0\\0&a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_m\lambda_1{}^m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(\lambda_1)&0\\0&f(\lambda_2)\end{bmatrix}.$$

(2) $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$

$=a_0\boldsymbol{PP}^{-1}+a_1\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}+a_2\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{P\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1}$

$=\boldsymbol{P}(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+\cdots a_m\boldsymbol{\Lambda}^m)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}f(\Lambda)\boldsymbol{P}^{-1}$.

8. 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，从 $k_s=0$ 同前讨论，直到某个 $k_i\neq 0$ 为止.

9. 必要性 $r\geqslant R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\geqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r$. 得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

充分性 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示.

从而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$，得出 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 的极大线性无关组，从而这两组向量等价. 得 $R(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir})=R(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir},\boldsymbol{\alpha})$ 得出 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示.

11. 设有一组数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=0$. 从 $\lambda_k\neq 0$ 开始向前推至 $\lambda_1\neq 0$，导出矛盾.

12. $\boldsymbol{X}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$

13. $\lambda=5$ 时有解. 通解为 $\boldsymbol{X}=C_1\begin{bmatrix}-1\\3\\5\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-6\\7\\0\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\\0\\0\end{bmatrix}$.

14. $a+b+c=0$ 时有解. 通解为

$$\boldsymbol{X}=C\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(2c-b)\\\frac{1}{3}(c-b)\\0\end{bmatrix}.$$

15. 必要性. 设 $x_1,\cdots,x_5$ 是解. 得出 $(x_1-x_2)+\cdots+(x_5-x_1)=\sum_{i=1}^{5}a_i=0$；

充分性. 由 $\sum_{i=1}^{5}a_i=0$，得系数阵与增广阵秩相等，通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_5\end{bmatrix}=x_5\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_1+\cdots+a_4\\a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{bmatrix}.$$

16. 由 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\lambda^2\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$，又 $\boldsymbol{X}\neq 0$，得出 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

17. 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，再由 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 得 $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$. 从而 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值，又 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 得 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

18. (1) 由 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$x\neq 0$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，从而 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，若 λ 是实数，则 $\lambda=\pm 1$；

(2) 由 $\boldsymbol{AX}_1=\lambda_1\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{AX}_2=\lambda_2\boldsymbol{X}_2$ 得 $\lambda_1\lambda_2\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2$ 由 $\lambda_1\neq\lambda_2$，且 $\lambda_i=\pm 1$，得 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 正交.

19. 由 18 题已得若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值. 但 $\boldsymbol{X}$ 未必是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量，例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\4&0\end{bmatrix}$；$\lambda_1=2$，$\boldsymbol{X}_1(1,2)^{\mathrm{T}}$；$\lambda_2=-2$，$\boldsymbol{X}_2=(1,-2)^{\mathrm{T}}$，但 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1\neq 2\boldsymbol{X}_1$.

20. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\\vdots\\a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=a\boldsymbol{X}$. 结论成立.

21. $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

概率统计

概率统计是数学(试卷一、试卷三和试卷四)考试的内容之一.按照考试大纲中试卷结构的要求,“概率论与数理统计”在试卷一中约占 20%,在试卷三和试卷四中约占 25%.

根据考试大纲所规定的范围,把概率论分成五章加以叙述,即随机事件和概率,随机变量及其(概率)分布,二维随机变量及其(概率)分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理;把数理统计分成三章加以叙述,即数理统计的基本概念,参数估计,假设检验。还单列了综合能力训练一章以提高考生综合运用概率统计知识的能力。在每一章中选讲了一些典型的例题,并在求解之后作了若干分析. 这些例题大部分取材于历年试题.

概率统计考试大纲的内容虽然庞杂,但究其实质,无非是六类问题:概率论中求概率、求分布和求数字特征、数理统计中求点估计、求区间估计与求检验的拒绝域,为此,最后有针对性地给出一些习题.从形式上看,这些习题未必与试题雷同,但内容是与试题紧扣的,认真完成这些习题,将有助于提高考生的应试能力.

第一章　随机事件和概率

随机事件及其概率是概率论中最基本的概念.

一、复习与考试要求

(1) 理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握事件之间的关系与运算.

(2) 了解概率的定义,掌握概率的基本性质与应用这些性质进行概率计算.

(3) 理解条件概率的概念,掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式以及应用这些公式进行概率计算.

(4) 理解事件的独立性概念,掌握应用事件独立性进行概率计算.

(5) 掌握伯努利概型及其二项概率.

二、基本概念与理论

1. 随机试验与样本空间

具有下列三个特性的试验称为随机试验(简称试验):

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先明确知道试验的所有可能结果(称所有可能结果所组成的集合为试验的样本空间).

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 随机事件

在随机试验中,把在一次试验中可能出现也可能不出现,而在大量重复试验中具有某种规律性的事情称为随机事件(简称事件). 通常把必然事件(记作 Ω)与不可能的事件(记作 $\varnothing$)看作特殊的随机事件.

事件之间有下列关系:

(1) 包含　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,那么称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2) 相等　如果 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,那么,称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

(3) 互不相容　如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,那么称事件 A 与 B 互不相容(或互斥),记作 $AB=\varnothing$.

事件之间有下列运算:

(1) 和事件　"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"是一个事件,称这个事件为事件 A 与事件 B 的和事件,记作 $A\cup B$.

和事件可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生". 而 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生".

(2) 积事件　"事件 A 与事件 B 同时发生"是一个事件,称这个事件为事件 A 与事件 B 的积事件,记作 $A\cap B$(或 AB).

积事件可推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) 对立事件　"事件 A 不发生"是一个事件,称这个事件为事件 A 的对立事件(或逆事件),记作 $\overline{A}$.

(4) 差事件　"事件 A 发生且事件 B 不发生"是一个事件,称这个事件为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A-B$(或 $A\overline{B}$).

事件之间的运算满足下述定律:

（ⅰ）交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

（ⅱ）结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（ⅲ）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

（ⅳ）德摩根法则　$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

3. 概率的定义

直观上说，概率是随机事件发生的可能性大小的度量. 记事件 A 发生的概率为 $P(A)$.

（1）古典概率的定义

如果随机试验的样本空间是一个有限集，而且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性，那么，规定事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含元素的个数}}{\text{样本空间中所含元素的个数}}.$$

（2）几何概率的定义

如果随机试验的样本空间是一个区域（例如直线上的区间、平面或空间中的区域），而且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性，那么，规定事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的长度（或面积、体积）}}{\text{样本空间的长度（或面积、体积）}}$$

（3）概率的统计定义

在进行大量重复试验时，随机事件发生的频率具有稳定性。规定事件 A 发生的频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率，即 $P(A)=p$.

（4）概率的公理化定义

给定一个随机试验. 对于任意一个随机事件 A，规定一个实数，记作 $P(A)$. 如果函数 P 满足下列三条公理，就称 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

公理 1　（非负性）对任意一个事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

公理 2　（规范性）$P(\Omega)=1$；

公理 3　（可列可加性）如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

上述三条公理蕴含了

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,$$

$$P(\varnothing)=0.$$

（5）条件概率

设 A 与 B 是两个事件. 在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$，当 $P(B)>0$ 时，规定

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

在同一条件下的条件概率具有概率的一切性质. 例如 $P(\Omega|B)=1$，$P(\phi|B)=0$，$0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$ 等.

4. 概率的计算公式

（1）求逆公式　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

（2）加法公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. 如果 A 与 B 互不相容，那么

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

一般地，如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，那么，

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3) **求差公式**　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 如果 $A\supset B$,那么 $P(A)\geqslant P(B)$,且

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

(4) **乘法公式**　$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$. 如果 A 与 B 相互独立,那么,$P(AB)=P(A)P(B)$. 一般地,如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,那么

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

(5) **全概率公式**　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组(即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$),且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,那么

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i).$$

(6) **贝叶斯公式**　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,那么,当 $P(B)>0$ 时,

$$P(A_k|B)=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)}=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)},k=1,2,\cdots,n$$

5. 随机事件的相互独立性

如果事件 A 与 B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

那么,称事件 A 与 B 相互独立.

定理　如果 $P(A)>0$(或 $P(B)>0$),那么,事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$(或 $P(A|B)=P(A)$).

这个定理表明:事件 A 与 B 相互独立的直观意义是"事件 A 与 B 发生与否互不影响".

定理　下列四个命题是等价的:

(1) 事件 A 与 B 相互独立;

(2) 事件 A 与 $\overline{B}$ 相互独立;

(3) 事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立;

(4) 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

事件的相互独立性这一概念可以推广到多个随机事件上:如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 满足

$$P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}),$$

其中 $k=2,\cdots,n,i_1,i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中任意 k 个不同的数,那么,称事件 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立. 注意,这里实际上包含了 2^n-n-1 个等式.

6. 伯努利概型与二项概率

一次试验中,事件 A 发生的概率 $P(A)=p,(0<p<1)$,独立重复地作 n 次试验,在这 n 次试验中 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n,$$

称这组概率为二项概率.

三、例题分析

例 1-1　已知 $P(A)=0.4,P(B)=0.3,P(A\cup B)=0.6$,求 $P(A\overline{B})$.

解　由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6$,可得 $P(AB)=0.1$,因此

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3.$$

分析　本题中事件 A 与 B 不具有特殊的关系,因此,计算 $P(A-B)$ 时要使用不附加前提的公式. 仔细观察求解过程,可以发现条件"$P(A)=0.4$"是多余的,因为由加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 可知

$$P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B),$$

因此 $$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$$

本题是 1990 年试题. 添加多余条件的后果是降低了难度.

例 1-2　设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件：$ABC=\phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，求 $P(A)$.

解　由加法公式可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),\end{aligned}$$

由 A,B,C 两两相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)$ 得

$$P(AB)=P(A)P(B)=(P(A))^2,P(AC)=(P(A))^2.$$

$$P(BC)=(P(A))^2$$

$$P(A\cup B\cup C)=3P(A)-3(P(A))^2$$

记 $P(A)=x$，则

$$\frac{9}{16}=3x-3x^2$$

解得 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}$，由题意 $P(A)<\frac{1}{2}$，故应取 $x=\frac{1}{4}$ 即 $P(A)=\frac{1}{4}$.

分析　本题中 $P(A\cup B\cup C)$ 的计算公式是解题的关键，由于 A,B,C 只是两两相互独立，因此 A,B,C 并不相互独立. 建立方程求解也是求概率常用的技巧.

本题是 1999 年试题.

例 1-3　已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，$P(B|\overline{A})=0.2$，求 $P(A|B)$.

解　由于

$$P(\overline{A}B)=P(B|\overline{A})P(\overline{A})=0.2\times 0.4=0.08$$

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB),$$

因此 $$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.8-0.08=0.72,$$

从而

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.72}{0.8}=0.9.$$

分析　在事件 A 与 B 不具有特殊关系时，先设法求出 $P(AB)$，这是解题的关键.

例 1-4　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，求事件 A,B,C 全不发生的概率.

解　由德摩根法则及求逆公式，事件 A,B,C 全不发生的概率

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C),$$

再由 $$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

及 $ABC\subset AB$ 推得

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0.$$

即 $P(ABC)=0$，因此

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+0=\frac{5}{12},$$

从而

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}.$$

分析　本题表面上看缺条件"$P(ABC)$的值"，但利用概率的性质可以推得 $P(ABC)=0$. 这种方法不能误用，它只能用在概率为 0 的事件上. 这里选用了 AB，而不是 BC 与 CA，虽然 ABC 同样是它们的一个子集.

本题是 1992 年试题. 细心的读者也许会发现：本题所给的已知条件中数据是有矛盾的. 因为一方面由 $AC\subset C$，$BC\subset C$. 推得 $(AC\cup BC)\subset C$，从而应有

$$P(AC\cup BC)\leqslant P(C)=\frac{1}{4};$$

另一方面，由加法公式推得

$$P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-0=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}.$$

考生不必理会这些问题，因为本题的目的是检查考生是否掌握前述技巧。

例 1-5　设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，已知 A 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，求事件 A 在一次试验中出现的概率.

解　设事件 A 在一次试验中出现的概率为 P. 三次独立试验中，“A 至少出现一次”的逆事件为“A 出现 0 次”由求逆公式得到，“A 出现 0 次”的概率为 $1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27}$；另一方面，由二项概率

$$P_3(0)=\binom{3}{0}p^0(1-p)^{3-0}=(1-p)^3$$

因此，由 $(1-p)^3=\frac{8}{27}$ 得到 $p=\frac{1}{3}$.

分析　本题使用了两个技巧：一是把事件转化成其逆事件，因为直接讨论将导致复杂的计算；二是建立方程求解，这个技巧已在例 1-2 中用过。上述两个技巧在概率论中是很有用的.

例 1-6　随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内扔一个点，点落在半圆内任何区域内的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

解　设事件 A 为“原点与投点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$”. 样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$，$\Omega$ 的面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$；$A=\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,y<x\}$，$A$ 由 $\frac{1}{4}$ 个圆与一等腰直角三角形组成，A 的面积为 $S_A=\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2$，由几何概率计算公式得到

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

分析　题目中“随机地”表示试验结果的出现具有等可能性，“点落在半圆内任何区域内的概率与区域的面积成正比”重复强调了试验结果等可能性出现，且暗示需用二维情形下的几何概率公式. 解决本题涉及计算区域的面积.

例 1-7　假设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$.

(1) 若 A 与 B 互不相容，求 $P(B)$；

(2) 若 A 与 B 相互独立，求 $P(B)$；

解　(1) 由于 $AB=\phi$，因此

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B),$$
$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3.$$

(2) 由加法公式和 A，B 相互独立得到

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B).$$

因此

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.7-0.4}{1-0.4}=0.5.$$

分析　解本题要求分清两个事件互不相容和相互独立之间的差别. A，B 互不相容是指 A，B 不能同时发

生. 而 A,B 相互独立则是表示 $P(AB)=P(A)P(B)$. 这类题目在历年考试中很常见. 注意由 $P(AB)=0$ 无法推出 $AB=\phi$.

本题是 1988 年试题.

例 1-8 对于任意两事件 A 和 B,

(A) 若 $AB\neq\phi$,则 A,B 一定独立;

(B) 若 $AB\neq\phi$,则 A,B 有可能独立;

(C) 若 $AB=\phi$,则 A,B 一定独立;

(D) 若 $AB=\phi$,则 A,B 一定不独立.

应是(B).

分析 本题也是区分互不相容和相互独立这两个概念的题,这二者之间无因果关系,试举一例如下. 设 X 服从 $N(0,1)$,若记 $A=\{X\geqslant 1\}$,$B=\{X\leqslant 2\}$,则 $P(AB)=P(1\leqslant X\leqslant 2)=\Phi(2)-\Phi(1)$,$P(A)=1-\Phi(1)$,$P(B)=\Phi(2)$,由此推出 $AB\neq\phi$,且 A,B 不相互独立,即(A)不成立. 若取 $A=\{X=1\}$,$B=\{X\geqslant 1\}$,则 $P(AB)=P(X=1)=0$,$P(A)=0$,$P(B)=1-\Phi(1)\neq 0$,由于 $P(AB)=P(A)P(B)=0$,故 A,B 相互独立且 $AB\neq\phi$,即(B)成立. 考生可自行验证;若取 $A=\{X\geqslant 1\}$,$B=\{X<1\}$时,$AB=\phi$,A,B 不相互独立,即(C)不成立. 若取 $A=\{X=1\}$,$B=\{X=2\}$时,$AB=\phi$ 且 A,B 相互独立,即(D)不成立.

本题是 2003 年试题.

例 1-9 在区间(0,1)中随机地取出两个数,求两数之和小于 1.2 的概率.

解 设 x,y 为区间(0,1)中随机地取出的两个数,事件 A 表示"$x+y<1.2$". 样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$,$\Omega$ 的面积为 1;$A=\{(x,y)\mid (x,y)\in\Omega,x+y<1.2\}$,$A$ 由 Ω 扣除一个等腰直角三角形组成,A 的面积为 $1-\frac{1}{2}\times 0.8^2=0.68$. 由几何概率计算公式得到

$$P(A)=\frac{0.68}{1}=0.68$$

分析 本题的难点是把所求问题归结为一个几何概率问题. 读者若有困难,不妨把它理解成这样一个问题:"X 与 Y 相互独立,且 X,Y 服从区间(0,1)上的均匀分布,求 $P(X+Y<1.2)$"。遗憾的是题目中没有明确给出"独立性"这一条件,而代之以概念比较模糊的字眼"随机地". 在本题中,"随机地"除了表示试验结果出现具有等可能性外,还表示取出的两个数相互独立. 本题是 1988 年试题.

例 1－10 有三个箱子,第一个箱子有四个黑球和一个白球,第二个箱子有三个黑球和三个白球,第三个箱子有三个黑球和五个白球. 现随机地取出一个箱子,再从这个箱子中取出一个球.

(1) 求取出的这个球是白球的概率;

(2) 已知取出的是白球,求此球属于第二个箱子的概率.

解 设 A_i 表示"取出第 i 个箱子",$i=1,2,3$.

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}.$$

设 B 表示"取出的这个球是白球",

$$P(B|A_1)=\frac{1}{5},P(B|A_2)=\frac{3}{6},P(B|A_3)=\frac{5}{8}.$$

(1) 由全概率公式得到

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{53}{120}.$$

(2) 由贝叶斯公式得到

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}}{\frac{53}{120}}=\frac{20}{53}.$$

分析 本题是 1987 年试题. 本题是考查全概率公式与贝叶斯公式的典型试题. 识别用全概率公式的方

法是：随机试验分成两个阶段，且第一阶段的试验结果不明确给出，而最终结果是已知的，现在要追究最终试验结果是第一阶段的哪一个试验结果所造成的. 在复习时，要有意识地把这两类问题联系起来.

例 1-11　甲、乙两人对同一目标进行射击，命中率分别为 0.6，0.5. 在下列两种情形下，分别求事件“已知目标被命中，它是甲射中”的概率.

(1) 在甲、乙两人中随机地挑选一人，由他射击一次；

(2) 甲、乙两个独立地各射击一次.

解　(1) 设事件 A_1 表示“甲射击”，事件 A_2 表示“乙射击”，$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$.

设 B 表示“命中目标”，

$$P(B|A_1)=0.6,\ P(B|A_2)=0.5,$$

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(B|A_i)P(A_i)=0.6\times\frac{1}{2}+0.5\times\frac{1}{2}=0.55;$$

由贝叶斯公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.6\times\frac{1}{2}}{0.55}=\frac{6}{11}.$$

(2) 设事件 A 表示“甲射中”，事件 B 表示“乙射中”，$A\cup B$ 表示“命中目标”，所求概率为

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}.$$

由于 A,B 相互独立，因此

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=0.6+0.5-0.6\times0.5=0.8.\end{aligned}$$

由此得到

$$P(A|A\cup B)=\frac{0.6}{0.8}=0.75.$$

分析　两种不同的试验导致不同的结果. 弄清随机试验的全过程是正确解题的前提. 在(2)中也可以用求逆公式

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})\\&=1-(1-P(A))(1-P(B))=1-0.4\times0.5=0.8.\end{aligned}$$

这种方法对多个射手射击的情形特别有效. 一般地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\cdots(1-P(A_n)).$$

例 1-12　袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回. 求第二个人取得黄球的概率.

解　设 A_i 表示“第 i 个人取得黄球”，$i=1,2$.

$$P(A_1)=\frac{20}{50},\quad P(\bar{A}_1)=\frac{30}{50};$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{19}{49},\quad P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{20}{49},$$

由全概率公式得到

$$P(A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=\frac{19}{49}\times\frac{20}{50}+\frac{20}{49}\times\frac{30}{50}=0.4$$

分析　本题是 1997 年试题. 类似的试题也曾出现在 1993 年的试卷上. 题目本意是考查全概率公式. 由于这类题目在日常生活中的原型即是“抓阄”，因此有经验的读者应该不假思索地知道：先取与后取的概率是相等的，这对处理填空(或选择)题更具有特殊的意义.

四、小　结

本章的重点是概率计算.一要熟练常握各种概率计算公式,特别要注意在事件满足一定关系(包含、互斥、独立)时计算公式的异同之处;二要学会将普通语言表达的随机事件翻译成数学符号(包括事件运算符号),以便运用公式进行计算.

第二章　随机变量及其分布

随机变量是概率论中最重要的概念,本章主要讨论随机变量的(概率)分布.

一、复习与考试要求

(1) 理解随机变量的概念.

(2) 理解随机变量分布函数的概念及性质,理解离散型随机变量的分布律及其性质,理解连续型随机变量的概率密度及其性质,会应用概率分布计算有关事件的概率.

(3) 掌握二项分布、泊松分布、正态分布、均匀分布和指数分布.

(4) 会求简单随机变量函数的概率分布 。

二、基本概念与理论

1. 随机变量

在随机试验中,如果存在一个变量,它依试验结果的改变而取不同的实数值,那么,称这个变量为(一维)随机变量.

在随机试验进行之前无法确定随机变量的确切取值,随机变量取各个可能实数值的概率是概率论研究的重点. 即概率论主要研究随机变量取值的统计规律. 这种统计规律称为随机变量的分布.

随机事件可以通过随机变量来表示,例如$\{a<X\leqslant b\}$,$\{a\leqslant X<b\}$,…相应的概率表示为 $P(a<X\leqslant b)$,$P(a\leqslant X<b)$,…其中$-\infty<a\leqslant b<\infty$.

2. 分布函数

随机变量的分布可以用其分布函数来表示. 随机变量 X 的分布函数规定为

$$F(x)=P(X\leqslant x),-\infty<x<\infty.$$

分布函数具有以下性质:

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

(3) 单调非减　当 $x_1<x_2$ 时,$F(x_1)\leqslant F(x_2)$;

(4) 右连续　$\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

由已知的分布函数可以算出概率:

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a),\quad P(X=a)=F(a)-F(a^-).$$

其中　$F(a^-)=\lim\limits_{x\to a^-}F(x)$.

3. 离散型随机变量及其分布律

如果随机变量 X 仅可能取有限个或可列无限个值,那么称 X 为离散型随机变量.

离散型随机变量 X 的分布可以用下列分布律来表示

$$P(X=a_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

其中　$\sum\limits_i p_i=1$,　$p_i>0$,　$i=1,2,\cdots$.

由已知的分布律可以算得概率

$$P(x\in I)=\sum_{i=a_i\in I}p_i,$$

其中,I 是实数轴上的一个集合.

离散型随机变量的分布函数是非降的阶梯函数,它在 a_i 处的跳跃度为 $p_i=F(a_i)-F(a_i^-)$,$i=1,2,\cdots$.

下面给出常用的离散型随机变量的分布.

(1) 二项分布 $B(n,p)$,它的分布律为

$$p(X=i)=\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i},i=0,1,\cdots,n$$

其中,$0<p<1$. 当 $n=1$ 时,$B(1,p)$称为 0-1 分布,它的分布律简化成

$$P(X=0)=1-p,P(X=1)=p.$$

(2) 泊松分布 $P(\lambda)$,它的分布律为

$$P(X=i)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i\,!},\quad i=0,1,2,\cdots,$$

其中,$\lambda>0$.

(3) 均匀分布,它的分布律为

$$P(X=a_i)=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n.$$

4. 连续型随机变量及其密度函数

如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$可以表示成

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,-\infty<x<\infty$$

那么,称 X 为连续型随机变量,其中,函数 $f(x)$称为 X 的(概率)密度函数,它必须满足.

(1) $f(x)\geqslant 0,-\infty<x<\infty$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

密度函数刻画了连续型随机变量的分布,因为由已知的密度函数可以算得概率:

$$P(a<X\leqslant b)=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

连续型随机变量具有下列性质:

(1) 分布函数 $F(x)$是连续函数;

(2) 对任意一个实数 c,$P(X=c)=0$;

(3) 在 $f(x)$的连续点处,$F'(x)=f(x)$.

下面给出常用的连续型随机变量的分布:

(1) 均匀分布 $R(a,b)$,它的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & \text{其余},\end{cases}$$

其中,$-\infty<a<b<\infty$,分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b;\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

(2) 指数分布 $E(\lambda)$,它的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & \text{其余},\end{cases}$$

其中,$\lambda>0$;分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,它的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty,$$

其中，$-\infty<\mu<\infty,\sigma^2>0$，称 $N(0,1)$ 为标准正态分布，它的分布函数记作 $\Phi(x)$. $\Phi(x)$ 具有下列性质：

(1) $\Phi(0)=\frac{1}{2}$；

(2) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么，X 的分布函数为

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(a<X\leqslant b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

5. 随机变量函数的分布

设 X 是随机变量，$g(x)$ 是一个已知函数，$Y=g(X)$ 是随机变量 X 的函数，它也是一个随机变量. 现要在已知 X 的分布的前提下求出 $Y=g(X)$ 的分布.

(1) 离散型　如果 X 的分布律为

$$P(X=a_i)=p_i,i=1,2,\cdots$$

那么，$Y=g(X)$ 的分布律为

$$P(Y=g(a_i))=p_i,i=1,2,\cdots$$

但要注意：与取相同 $g(a_i)$ 值对应的那些概率应合并相加.

(2) 连续型　要求出 $Y=g(X)$ 的密度函数可以先求其分布函数. 如果 X 的密度函数为 $f(x)$，那么，$Y=g(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y)=P(X\in I_y)=\int_{I_y}f(x)\mathrm{d}x,$$

其中，$\{X\in I_y\}$ 是与 $\{g(X)\leqslant y\}$ 相等的随机事件，而 $I_y=\{x\mid g(x)\leqslant y\}$ 是实数轴上的一个集合(通常 I_y 是一个区间或若干个区间的并集).

定理　如果 $y=g(x)$ 是单调函数，且具有一阶连续导数，$y=g(x)$ 的反函数为 $x=h(y)$，那么，当 X 的密度函数为 $f(x)$ 时，$Y=g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=f(h(y))\cdot|h'(y)|.$$

定理　如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么，当 $k\neq0$ 时，$Y=kX+b\sim N(k\mu+b,k^2\sigma^2)$. 特别地，$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

三、例题分析

例 2-1　设 X 与 Y 是两个随机变量，且 $P(X\geqslant0,Y\geqslant0)=\frac{3}{7}$，$P(X\geqslant0)=P(Y\geqslant0)=\frac{4}{7}$，求 $P(\max(X,Y)\geqslant0)$.

解　事件 $\{\max(X,Y)\geqslant0\}=\{X\geqslant0\}\cup\{Y\geqslant0\}$. 由加法公式

$$\begin{aligned}P\{\max(X,Y)\geqslant0\}&=P(\{X\geqslant0\}\cup\{Y\geqslant0\})=P(X\geqslant0)+P(Y\geqslant0)-P(\{X\geqslant0\}\cap\{Y\geqslant0\})\\&=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

分析　从形式上看，本题涉及二维随机向量，但实质上仍是第一章的概率计算，只是随机事件通过随机变量来表示. 本题等价于“已知 $P(A)=P(B)=\frac{4}{7}$，$P(AB)=\frac{3}{7}$，求 $P(A\cup B)$”. 本题的另一难点是分解随机事件 $\{\max(X,Y)\geqslant0\}$. 一般地，对任意一个常数 c，

$$\{\max(X,Y)\geqslant c\}=\{X\geqslant c\}\cup\{Y\geqslant c\};$$

$$\{\max(X,Y)\leqslant c\}=\{X\leqslant c\}\cap\{Y\leqslant c\};$$

$$\{\min(X,Y)\geqslant c\}=\{X\geqslant c\}\cap\{Y\geqslant c\};$$

$$\{\min(X,Y)\leqslant c\}=\{X\leqslant c\}\cup\{Y\leqslant c\}.$$

这些分解公式在第三章求 $\max(X,Y)$ 与 $\min(X,Y)$ 分布时也很有用. 本题是 1995 年试题.

例 2-2 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 求 μ.

解 由题意

$$P(16-4X<0)=\frac{1}{2},$$

而 $P(16-4X<0)=P(X>4)=1-P(X\leqslant 4)=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$,

因此

$$\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2},$$

由 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$, 知

$$\frac{4-\mu}{\sigma}=0,$$

即 $\mu=4$.

分析 本题是 2002 年试题. 初看似乎 σ 未知时无法求出 μ. 但本题巧妙地给出恰当的数据, 使得问题通过使用 $\Phi(0)=0.5$ 而得到解决. 遇到这类问题, 不必考虑条件是否足够充分, 只要正确使用正态分布的概率计算公式, 问题总会迎刃而解.

例 2-3 在下列两种情形下, 求方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的概率, 其中, X 是随机变量.

(1) X 服从 $\{1,2,\cdots,6\}$ 上的均匀分布;

(2) X 服从区间 $[1,6]$ 上的均匀分布.

解 方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实根的充分必要条件是 $X^2-4\geqslant 0$. 于是, 所求概率可表示成 $P(X^2-4\geqslant 0)=P(X\leqslant -2)+P(X\geqslant 2)$.

(1) $P(X\leqslant -2)=0$,

$$P(X\geqslant 2)=\sum_{i=2}^{6}P(X=i)=\sum_{i=2}^{6}\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

因此所求概率为 $\frac{5}{6}$;

(2) $P(X\leqslant -2)=\int_{-\infty}^{-2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-2}0\mathrm{d}x=0$,

$$P(X\geqslant 2)=\int_{2}^{6}\frac{1}{5}\mathrm{d}x+\int_{6}^{\infty}0\mathrm{d}x=\frac{4}{5},$$

因此所求概率为 $\frac{4}{5}$.

分析 在(1)中用到了离散型均匀分布的分布律

$$P(X=i)=\frac{1}{6},\ i=1,2,\cdots,6;$$

在(2)中用到了连续型均匀分布的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 1\leqslant x\leqslant 6;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

在概率论中, 被积函数常常是分段函数, 因此计算积分时要仔细.

例 2-4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & \text{若 } x\in[0,1];\\ \frac{2}{9}, & \text{若 } x\in[3,6];\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

若 k 使得 $P(X\geqslant k)=\dfrac{2}{3}$，求 k 的取值范围.

解　由 $P(X\geqslant k)=1-P(X<k)=\dfrac{2}{3}$，得到

$$P(X<k)=\frac{1}{3}.$$

而 $P(X<k)=\int_{-\infty}^{k}f(x)\mathrm{d}x$，

当 $k\leqslant 0$ 时，$P(X<k)=\int_{-\infty}^{k}0\mathrm{d}x=0$；

当 $0<k\leqslant 1$ 时，$P(X<k)=\int_{0}^{k}\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x=\dfrac{k}{3}$；

当 $1<k<3$ 时，$P(X<k)=\int_{0}^{1}\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_{1}^{k}0\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$；

当 $3\leqslant k\leqslant 6$ 时，$P(X<k)=\int_{0}^{1}\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}0\mathrm{d}x+\int_{3}^{k}\dfrac{2}{9}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}(k-3)\geqslant\dfrac{1}{3}$，

因此，当 $k\in[1,3]$时，$P(X<k)=\dfrac{1}{3}$. 即 k 的取值范围为$[1,3]$.

分析　本题是 2000 年试题. 实质上本题是考分布函数的计算，由于密度函数 $f(x)$是一个分段函数，因此，要讨论分布函数在各段上的取值.

例 2-5 选择题　设随机随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min(X,2)$的分布函数　（　）

(A) 是连续函数；

(B) 至少有两个间断点；

(C) 是阶梯函数；

(D) 恰好有一个间断点.

解　应选(D).

分析　这是 1999 年的试题. 本题与例 2-4 一样也是考查分布函数的计算，只是 $Y=\min(X,2)$是 X 的函数，由例 2-1 的分析可知：

$$\overline{\{Y\leqslant y\}}=\{Y>y\}=\{\min(X,2)>y\}=\{X>y\}\cap\{2>y\}.$$

因此，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=1-P(Y>y)=1-P(\{X>y\}\cap\{2>y\}).$$

当 $y\geqslant 2$ 时，

$$F_Y(y)=1-P(\phi)=1;$$

当 $y<2$ 时，由 $Y\sim E(\lambda)$容易算出

$$F_Y(y)=1-P(X>y)=P(X\leqslant y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0<y<2;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

即 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0;\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0<y<2;\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

$y=2$ 是 $F_Y(y)$的惟一间断点. 故选(D).

例 2-6　已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<\infty.$$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

解　$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t.$

当 $x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x};$$

当 $x\geqslant 0$ **时，**

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)=1-\frac{1}{2}e^{-x}.$$

于是，

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

分析　本题考查分布函数的定义及其计算，除了积分计算要注意绝对值符号外，下面提出三个问题.

(1) **分布函数最终要用一个分段函数来完整表达；**

(2) **当** $x\geqslant 0$ **时，也可以用求逆公式来计算：**

$$F(x)=P(X\leqslant x)=1-P(X>x)=1-\int_{x}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt=1-\int_{x}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x};$$

(3) **题目中的** $f(x)$ **可以改成**

$$\varphi(x)=ke^{-|x|},\quad -\infty<x<\infty,$$

利用 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$ **可以求得** $k=\frac{1}{2}$**，因为**

$$k=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}dx}=\frac{1}{2\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx}=\frac{1}{2}.$$

例 2-7　已知 X **的分布律为**

X	-1	0	1	2
P_r	0.1	0.2	0.3	0.4

求 $Y=2X^2-1$ **的分布律与分布函数.**

解　X **的取值范围为** $\{-1,0,1,2\}$，$Y=2X^2-1$ **的取值范围为** $\{1,-1,7\}$**，且**

$$P(Y=1)=P(X=1)+P(X=-1)=0.3+0.1=0.4,$$

$$P(Y=-1)=P(X=0)=0.2,$$

$$P(Y=7)=P(X=2)=0.4.$$

因此，Y **的分布律为**

Y	-1	1	7
P_r	0.2	0.4	0.4

Y **的分布函数为**

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1;\\ 0.2, & -1\leqslant y<1;\\ 0.2+0.4, & 1\leqslant y<7;\\ 0.2+0.4+0.4, & y\geqslant 7.\end{cases}=\begin{cases}0, & y<-1;\\ 0.2, & -1\leqslant y<1;\\ 0.6, & 1\leqslant y<7;\\ 1, & y\geqslant 7.\end{cases}$$

分析　求离散型随机变量函数的分布律的关键是求出 $x=a_i$ **时** $g(x)$ **的函数值** $g(a_i)$. **在本题中，**$g(x)=2x^2-1$**，当** $x=-1,0,1,2$ **时，**$g(-1)=g(1)=1$，$g(0)=-1$，$g(2)=7$. **需要注意的是，事件** $\{Y=1\}=\{X=-1\}\cup\{X=1\}$. **在求分布律时，**$P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)$. **在求分布函数值时，按自变量** y **取值从**

小到大排列，相应的概率累计相加.

例 2-8　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<\infty.$$

求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

解　$y=1-\sqrt[3]{X}$ 是单调函数，且反函数为 $x=(1-y)^3$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=3(1-y)^2$. 于是

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+(1-y)^6)}\cdot 3(1-y)^2=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6},\quad -\infty<y<\infty.$$

分析　本题使用公式求解，十分方便，但在使用公式时，一定要看清条件——$y=g(x)$ 是单调函数. 下面用一般的先求分布函数的方法求解：

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(1-\sqrt[3]{X}\leqslant y)=P(X\geqslant(1-y)^3)=\int_{(1-y)^3}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x,$$

求导得到

$$f_Y(y)=-3(1-y)^2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\pi(1+(1-y)^6)}=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6},\quad -\infty<y<\infty.$$

例 2-9　设随机变量 $X\sim R(0,2)$，求随机变量 $Y=X^2$ 的分布函数与密度函数.

解　X 的取值范围为 $(0,2)$，$Y=X^2$ 的取值范围为 $(0,4)$. 由于 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

因此，当 $0<y<4$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{y}}{2}.$$

从而 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \frac{\sqrt{y}}{2}, & 0\leqslant y<4;\\ 1, & y\geqslant 4.\end{cases}$$

Y 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

分析　本题若只需求密度函数，也可以仿照上题用公式直接求解，因为 $y=x^2(0<x<2)$ 依然是一个单调函数. 它的反函数是 $x=\sqrt{y}(0<y<4)$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$，于是，当 $0<y<4$ 时，有

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

例 2-10　设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2+1$ 的分布函数与密度函数.

解　X 的取值范围为 $(-1,1)$，Y 的取值范围为 $[1,2)$. 当 $1\leqslant y<2$ 时，有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2+1\leqslant y)=P(-\sqrt{y-1}\leqslant X\leqslant \sqrt{1-y})=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}(1-|x|)\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^{\sqrt{y-1}}(1-x)\mathrm{d}x=1-(1-\sqrt{y-1})^2.$$

从而，Y 的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1;\\ 1-(1-\sqrt{y-1})^2, & 1\leqslant y<2;\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2;\\ 0, & \text{其 余}.\end{cases}$$

分析　本题中 $y=x^2+1(-1<x<1)$ 不是单调函数，不能直接用公式求解. 这个例子表明，先考虑随机变量的取值范围，然后在此范围内求分布函数值可以简化运算. 至于取值范围之外的分布函数值，可以由分布函数的性质决定其为 0 或 1.

例 2-11　假设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

现在对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数. 试求随机变量 V_n 的概率分布.

解　$p=P\{X\leqslant 0.1\}=\int_{-\infty}^{0.1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{0.1}2x\mathrm{d}x=0.01.$

V_n **服从参数为** (n,p) **的二项分布：**

$$P(V_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}\times 0.01^k\times 0.99^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

分析　本题是 1994 年的试题. 解本题要求对二项分布的直观背景有深入的了解. 这题中 X 的作用在于定义事件 $A=\{X\leqslant 0.1\}$，这样 V_n 表示在 n 重伯努利试验中 A 出现的次数，因此，$V_n\sim B(n,p)$，其中 $p=P(A)=P(X\leqslant 0.1)$.

例 2-12　假设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件 $\{-1<x<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求

(1) X **的分布函数** $F(x)=P\{X\leqslant x\}$；(2) X **取负值的概率** p.

解　(1) **由于 X 的取值范围为 $[-1,1]$，因此，**

$$x<-1\ \text{时},F(x)=0;$$
$$x\geqslant 1\ \text{时},F(x)=P(X\leqslant 1)=1;$$

以下考虑 $-1\leqslant x<1$ 时的情形.

$x=-1$ **时**，$F(x)=P(X=-1)=\frac{1}{8}$；

由于

$$1=P(|X|\leqslant 1)=P(X=-1)+P(-1<X<1)+P(X=1)=\frac{1}{8}+P(-1<X<1)+\frac{1}{4},$$

从而

$$P(-1<X<1)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}。$$

由题意，在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 服从区间 $(-1,1)$ 上的均匀分布，即对于 $-1<x<1$，有

$$P\{-1<X\leqslant x \mid -1<X<1\}=\frac{1}{2}(x+1).$$

即

$$P\{-1<X\leqslant x,-1<X<1\}=P\{-1<X<1\}\frac{1}{2}(x+1),$$

从而

$$P\{-1<X\leqslant x\}=P\{-1<X<1\}\frac{1}{2}(x+1)=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}(x+1)=\frac{5}{16}(x+1).$$

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X\leqslant -1)+P(-1<X\leqslant x)=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}(x+1)=\frac{5x+7}{16}.$$

综上，有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

分析　本题是 1997 年试题. 本题中 X 既不是连续型随机变量也不是离散型随机变量. 对这类随机变量求分布函数就不能简单套用离散型随机变量和连续型随机变量的分布函数的求法，而需要从题目条件中找到突破口. 本题中“在条件$\{-1<X<1\}$下，X 服从$(-1,1)$上的均匀分布”就是一个突破口，由此可算出$-1<x<1$ 时 $P(-1<X\leqslant x)$的值.

四、小　结

本章重点要掌握两种方法：一是承接第一章，会计算用随机变量表示的随机事件的概率；二是会求随机变量函数的分布，特别是应该掌握先求分布函数的方法，这一方法在第三章中还要经常使用.

第三章　二维随机变量及其分布

在随机试验中，如果存在二维变量(X,Y)，它依试验结果的改变而取不同的向量值，那么称(X,Y)为二维随机变量(或随机向量). 本章主要讨论二维随机变量取值的统计规律，即二维随机变量的(概率)分布.

随机事件可以通过二维随机变量来表示，例如$\{(X,Y)\in D\}$，其中，D是二维平面上的某个区域，相应的概率表示为$P((X,Y)\in D)$. 有时候，随机事件$\{(X,Y)\in D\}$通过一个或若干个不等式来表示.

一、复习与考试要求

(1) 了解二维随机变量的概念.

(2) 了解二维随机变量的联合分布函数及其性质、二维离散型随机变量的联合分布律及其性质和二维连续型随机变量的联合概率密度及其性质，并会用它们计算有关事件的概率.

(3) 了解二维随机变量的边缘分布和条件分布.

(4) 理解随机变量独立性的概念，掌握应用随机变量的独立性进行概率计算.

(5) 会求两个独立随机变量的简单函数的分布.

二、基本概念与理论

1. 联合分布函数与边缘分布函数

二维随机变量的分布可以用其联合分布函数来表示. 随机变量X与Y的联合分布函数规定为二元函数

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y),\quad -\infty<x,y<\infty.$$

联合分布函数具有以下性质：

(1) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$；

(2) $F(-\infty,-\infty)=F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$，

$F(\infty,\infty)=1$；

(3) 固定一个自变量时，对于另一个自变量单调非减；

(4) 固定一个自变量时，对于另一个自变量右连续.

由已知的联合分布函数可以算得概率：

$$P(x_1<X\leqslant x_2,\quad y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1).$$

设X与Y的联合分布函数为$F(x,y)$，分别称

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=F(x,\infty),\quad -\infty<x<\infty,$$

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=F(\infty,y),\quad -\infty<y<\infty.$$

为X,Y的边缘分布函数.

2. 离散型二维随机变量及其分布律

如果二维随机变量(X,Y)仅可能取有限个或可列无限个值，那么称(X,Y)为离散型二维随机变量.

离散型二维随机变量(X,Y)的分布可以用下列联合分布律来表示：

$$P(X=a_i,Y=b_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

其中

$$\sum_i\sum_j p_{ij}=1,\quad p_{ij}\geqslant 0,\quad i,j=1,2,\cdots.$$

由已知的联合分布律可以算得概率：

$$P((X,Y)\in D)=\sum_{(i,j):(a_i,b_j)\in D}\sum p_{ij}$$

其中，D是二维平面上的一个集合

X的边缘分布律是

$$P(X=a_i)=p_{i\cdot},\quad i=1,2,\cdots.$$

其中，$0<p_{i\cdot}=\sum\limits_j p_{ij}, i=1,2,\cdots$；$Y$ 的边缘分布律是

$$P(Y=b_j)=p_{\cdot j},\quad j=1,2,\cdots.$$

其中，$0<p_{\cdot j}=\sum\limits_i p_{ij},\quad j=1,2,\cdots$.

3. 连续型二维随机变量及其分布律

如果 X 与 Y 的联合分布函数 $F(x,y)$ 可以表示成

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad -\infty<x,y<\infty,$$

那么称 (X,Y) 为连续型二维随机变量，其中，二元函数 $f(x,y)$ 称为 X 与 Y 的联合（概率）密度函数，它必须满足

(1) $f(x,y)\geqslant 0, -\infty<x,y<\infty$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

联合密度函数刻画了连续型二维随机变量的分布，因为由已知的联合密度函数可以算得概率

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

二维连续型随机变量具有下列性质：

(1) 对任意一条平面曲线 L，$P((X,Y)\in L)=0$；

(2) 在 $f(x,y)$ 的连续点处，$\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=f(x,y)$.

X 的边缘密度函数是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad -\infty<x<\infty;$$

Y 的边缘密度函数是

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,\quad -\infty<y<\infty.$$

下面给出常用的连续型二维随机变量的分布：

(1) 均匀分布　如果 (X,Y) 在二维平面上某个区域 G 中服从均匀分布，那么它的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{G\text{ 的面积}}, & (x,y)\in G;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

(2) 二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2\sigma_2^2,\rho)$，它的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\rho\cdot\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right]\right\},\quad -\infty<x,y<\infty,$$

其中　$-\infty<\mu_1,\mu_2<\infty,\sigma_1^2,\quad \sigma_2^2>0,\quad |\rho|<1$.

定理　如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，那么 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

4. 随机变量的相互独立性

给定二维随机变量 (X,Y). 如果 X 与 Y 的联合分布函数等于 X，Y 的边缘分布函数之积，即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\text{，对一切}-\infty<x,y<\infty,$$

那么称随机变量 X 与 Y 相互独立. 随机变量 X 与 Y 相互独立的直观意义是"X 与 Y 各自的取值互不影响"，因为对实数轴上任意两个集合 I_1，I_2，总有

$$P(X\in I_1,Y\in I_2)=P(X\in I_1)P(Y\in I_2).$$

当 (X,Y) 为离散型二维随机变量时，X 与 Y 相互独立的充分必要条件为

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}\text{，对一切 } i,j=1,2,\cdots.$$

当 (X,Y) 为连续型二维随机变量时，X 与 Y 相互独立的充分必要条件为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\text{，至少在一切连续点处成立.}$$

一般地，由 X 与 Y 的边缘分布不能惟一确定它们的联合分布. 但是，当 X 与 Y 相互独立时，由 X 与 Y 的边缘分布惟一确定了 X 与 Y 的联合分布.

定理 如果$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，那么 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

定理 如果 X 与 Y 相互独立，那么 $g(X)$与 $h(Y)$相互独立.

5. 条件分布

给定二维随机变量(X,Y)当已知 Y 取值 y 时，X 仍是随机变量。这时，X 的分布会受到 $Y=y$ 的影响。X 在 $Y=y$ 的条件下的分布称为 X 的条件分布。类似地有 Y 在 $X=x$ 的条件下的条件分布.

当(X,Y)为离散型二维随机变量时，X 在给定 $Y=b_j$ 的条件下的条件分布律为

$X\mid Y=b_j$	a_1	a_2	$\cdots$
P_r	$\dfrac{p_{1j}}{p_{\cdot j}}$	$\dfrac{p_{2j}}{p_{\cdot j}}$	$\cdots$

$j=1,2,\cdots$；Y 在给定 $X=a_i$ 的条件下的条件分布律为

$Y\mid X=a_i$	b_1	b_2	$\cdots$
P_r	$\dfrac{p_{i1}}{p_{i\cdot}}$	$\dfrac{p_{i2}}{p_{i\cdot}}$	$\cdots$

当(X,Y)为连续型二维随机变量时，X 在给定 $Y=y$ 的条件下的条件(概率)密度函数为

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad -\infty<x<\infty,$$

其中，$f_Y(y)>0$；Y 在给定 $X=x$ 的条件下的条件(概率)密度函数为

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},-\infty<y<\infty,$$

其中，$f_X(x)>0$.

当 X 与 Y 相互独立时，X(或 Y)的一切条件分布都与其边缘分布相同.

6. 两个独立随机变量的简单函数的分布

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$g(x,y)$是一个已知的简单函数，$Z=g(X,Y)$是随机变量 X 与 Y 的函数，它也是一个随机变量. 如何在已知 X,Y 的分布的前提下求出 Z 的分布？

(1) **离散型** 如果 X 的分布律为

$$P(X=a_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

Y 的分布律为

$$P(Y=b_j)=q_j,\quad j=1,2,\cdots,$$

那么 $Z=g(X,Y)$的分布律为

$$P(Z=g(a_i,b_j))=p_iq_j,\quad i,j=1,2,\cdots.$$

但要注意，与取相同 $g(a_i,b_j)$值对应的那些概率应合并相加.

(2) **连续型** 要求 $Z=g(X,Y)$的密度函数可以先求其分布函数. 如果 X 的密度函数为 $f_X(x)$，Y 的密度函数为 $f_Y(y)$，那么$Z=g(X,Y)$的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(g(X,Y)\leqslant z)=P((X,Y)\in D_z)=\iint_{D_z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，$\{(X,Y)\in D_z\}$是与$\{g(X,Y)\leqslant z\}$相等的随机事件，而$D_z=\{(x,y)\mid g(x,y)\leqslant z\}$是二维平面上的某个集合(通常是一个区域或若干区域的并集).

定理(卷积公式) 当 X 与 Y 相互独立时，$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x.\ (\text{或 } f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y)$$

定理(分布的可加性) 设 X 与 Y 相互独立

(1) 当 $X\sim B(m,p)$，$Y\sim B(n,p)$时，$X+Y\sim B(m+n,p)$；

(2) 当 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$时，$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；

(3) 当 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$时，$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，更一般地，

$$kX+lY+b\sim N(k\mu_1+l\mu_2+b,\ k^2\sigma_1^2+l^2\sigma_2^2),$$

其中，k,l 不同时为 0.

设 X 与 Y 相互独立，X 的分布函数为 $F_X(x)$，Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，那么，$U=\max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u),$$

$V=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_V(v)=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v)).$$

通过求导，可以求得 U,V 的密度函数.

三、例题分析

例 3-1　设随机变量 X 与 Y 相互独立. 在下列两种情况下，求方程 $t^2+2Xt+Y=0$ 有不同的实根、有相同实根与无实根的概率.

(1) $X\sim B(1,\frac{1}{2})$，$Y\sim B(1,\frac{1}{3})$；

(2) $X\sim R(-1,1)$，$Y\sim R(0,1)$.

解　方程 $t^2+2Xt+Y=0$ 的判别式 $\Delta=4(X^2-Y)$

(1) 所给方程有不同实根的概率为

$$P(\Delta>0)=P(X^2>Y)=P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3};$$

有相同实根的概率为

$$\begin{aligned}P(\Delta=0)&=P(X^2=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)\\&=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2};\end{aligned}$$

无实根的概率为

$$P(\Delta<0)=P(X^2<Y)=P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 所给方程有不同实根的概率为

$$P(\Delta>0)=P(X^2>Y)=\iint_{x^2>y}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\times1\mathrm{d}y=\frac{1}{3};$$

有相同实根的概率为

$$P(\Delta=0)=P(X^2=Y)=0;$$

无实根的概率为

$$P(\Delta<0)=1-P(\Delta>0)-P(\Delta=0)=\frac{2}{3}.$$

分析　对于 $P(X^2=Y)$，离散型与连续型二维随机变量的性质是不一样的. $P(X^2=Y)=P((X,Y)\in L)$，L 是抛物线 $y=x^2$ 在 $[-1,1]$ 之间的一段曲线弧，因此当 (X,Y) 是连续型二维随机变量时，这个概率永远是 0，另外，在(2)中，运用了求逆公式以简化运算. 这个方法也可以用在(1)中. 例如，求得了 $P(\Delta>0)=\frac{1}{3}$，$P(\Delta<0)=\frac{1}{6}$ 之后，立即可推得 $P(\Delta=0)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

例 3-2　设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)\mid 0<x<1,|y|<x\}$ 内服从均匀分布，求 X 与 Y 的边缘密度函数及条件密度函数.

解　G 的面积为 1，X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x;\\0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

X 的取值范围为 $(0,1)$. 当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-x}^{x} 1\mathrm{d}y=2x.$$

因此,X 的边缘密度函数是

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

Y 的取值范围为$(-1,1)$，当 $0<|y|<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{|y|}^{1} 1\mathrm{d}x=1-|y|.$$

因此,Y 的边缘密度函数是

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

在 $Y=y$ 的条件下,当 $y\notin(-1,1)$时,$f_Y(y)=0$,X 的条件分布不存在;当 $y\in(-1,1)$时,$f_Y(y)=1-|y|$,X 的条件密度函数为

$$f(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

在 $X=x$ 的条件下,当 $x\notin(0,1)$时,$f_X(x)=0$,X 的条件分布不存在;当 $x\in(0,1)$时,$f_X(x)=2x$,Y 的条件密度函数为

$$f(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & -x<y<x;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

分析　求边缘密度函数的公式貌似简单,但很容易出错,因为 $f(x,y)$常常是二元分段函数. 本例用先求随机变量取值范围的方法. 随机变量 X(或 Y)的取值范围是区域 G 在 x 轴(或 y 轴)上的投影. 在取值范围之外,密度函数值是 0.

条件密度函数是概率论中的一个难点,但不是重点. 求条件密度函数的公式很简单,但要认清自变量,$f(x|y)$与 $f(y|x)$都不是二元函数,而是一元函数,自变量分别为 x 与 y,另一个变量在所给定的条件下要视作一个常量. 这相当于高等数学中,当二元函数一个自变量固定时,它只是另一个变量的一元函数. 另外,随着所给条件的变化,条件密度函数也不同. 例如,在本题中,$f(x|\frac{1}{2})$与 $f(x|\frac{1}{3})$便是不同的条件密度函数,因为它们所给条件分别是“$Y=\frac{1}{2}$”与“$Y=\frac{1}{3}$”. 读者不妨作为练习进行计算.

例 3-3　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<\infty.$$

问 X 与$|X|$是否相互独立?为什么?

解　X 与$|X|$不独立,其理由如下:

$$P(X>1)=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

$$P(|X|>1)=P(X>1)+P(X<-1)=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

$$P(X>1,|X|>1)=P(X>1)=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

易见
$$P(X>1,|X|>1)\neq P(X>1)P(|X|>1).$$

分析　本题的难点在于事先不知道结论. 但从随机变量相互独立性的直观意义上去理解,X 与$|X|$的取值是有关系的,因此它们一般不会相互独立. 另外,说明 X 与$|X|$不相互独立容易进入一个误区,即去证

明 X 与 $|X|$ 的联合密度函数不等于 X 与 $|X|$ 的边缘密度函数之积. 在本题中,这种解题方法将带来较繁的计算. 本题是 1993 年试题,说明理由部分仅占 1 分.

例 3-4　设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(0,1)$,求 $Z=2X-Y+3$ 的密度函数.

解　由所给条件,按正态分布的可加性定理

$$Z\sim N(2\times 1-1\times 0+3,2^2\times 2+(-1)^2\times 1)=N(5,9),$$

因此,Z 的密度函数是

$$f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(z-5)^2}{18}\right\},\quad -\infty<z<\infty.$$

分析　本题是 1989 年试题. 它虽然是考查二维随机变量的简单函数的分布,但由于仅涉及两个正态分布,因此可以直接用可加性定理得到.

例 3-5　设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$Y\sim R(-\pi,\pi)$,试求 $Z=X+Y$ 的密度函数(计算结果用 $N(0,1)$ 的分布函数 Φ 表示,其中,$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$).

解　X 的密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad -\infty<x<\infty,$$

Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi<y<\pi;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

按卷积公式,$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}f_X(z-y)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{[y-(z-\mu)]^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi-(z-\mu)}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi-(z-\mu)}{\sigma}\right)\right],\quad -\infty<z<\infty.\end{aligned}$$

分析　上述计算最后一步中利用概率来计算积分. 当随机变量 $U\sim N(z-\mu,\sigma^2)$时,则

$$P(-\pi<U<\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f_U(u)\mathrm{d}u=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{[u-(z-\mu)]^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}u,$$

另一方面,按照正态分布的概率计算公式,有

$$P(-\pi<U<\pi)=\Phi\left(\frac{\pi-(z-\mu)}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi-(z-\mu)}{\sigma}\right).$$

使用卷积公式要仔细,因为 $f_X(x)$,$f_Y(y)$常常是分段函数,这样便会涉及分段函数的复合. 在上述求解过程中,没有采用另一个公式 $f_X(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$,就是为了避开 $f_Y(z-x)$.

例 3-6　设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,\quad y>0;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

解　Z 的取值范围为$(0,\infty)$　当 $z>0$ 时,

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+2Y\leqslant z)$$

$$=\iint_{x+2y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(z-x)} 2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^z \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{x-z})\mathrm{d}x=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}x$$
$$=1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}.$$

于是，Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}, & z>0;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

分析　这类题目还是要注意被积函数 $f(x,y)$ 是二元分段函数．正确写出二次积分式是解题的关键，由 $Z=X+2Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$，通过求导便可得到 Z 的密度函数：

$$f_Z(z)=\begin{cases}z\mathrm{e}^{-z}, & z>0;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

本题是 1991 年试题．实际上本题中的 X 与 Y 是相互独立，且 $X\sim E(1)$，$Y\sim E(2)$．读者不妨作为练习加以证明．

例 3-7　设随机变量 X 与 Y 相互独立，其密度函数分别是

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其　余},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的密度函数．

解　X **与** Y **的联合密度函数为**

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<1,y>0;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

Z **的取值范围为** $(0,\infty)$．**当** $z>0$ **时，有**

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(2X+Y\leqslant z)=\iint_{2x+y\leqslant z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.=\iint_{D_z}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，$D_z=\{(x,y)\mid 2x+y\leqslant z,0<x<1,y>0\}$．

当 $0<z<2$ **时**，$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{z}{2}}(1-\mathrm{e}^{2x-z})\mathrm{d}x=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}-\frac{1}{2}$，

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z});$$

当 $z>2$ **时**，$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{2x-z})\mathrm{d}x=1-\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\mathrm{e}^{-z}$，

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{-z}.$$

因此，Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z}), & 0<z<2;\\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{-z}, & z>2;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

分析　本题采用先求分布函数的方法．在求解过程中，把 $z>0$ 分成两个部分：$0<z<2$ 与 $z>2$，这是因为在两种情形下积分区域 D_z 的形状不同，前者是三角形，后者是梯形．在 $z=2$ 处不必特别关注，因为由分布函数的性质——$F_Z(z)$ 连续，立即可以得出它的值，而对密度函数而言，不妨让该处值为 0．

例 3-8　设随机变量 X 与 Y 相互独立．

(1) $X\sim B(1,\frac{1}{2})$，$Y\sim B(1,\frac{1}{2})$，**求** $U=\max(X,Y)$ **的分布律；**

(2) $X\sim E(\lambda_1)$，$Y\sim E(\lambda_2)$，求 $V=\min(X,Y)$ 的分布函数与密度函数.

解　(1) X 与 Y 的取值范围都是 $\{0,1\}$，因此 $U=\max(X,Y)$ 的取值范围也是 $\{0,1\}$，U 的分布律为

$$P(U=0)=P(\max(X,Y)=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$
$$P(U=1)=1-P(U=0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

(2) X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_2 y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

因此，$V=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_V(v)=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))=\begin{cases}1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)v}, & v>0;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

V 的密度函数为

$$f_V(v)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)v}, & v>0;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

分析　本题是 1994 年试题. 同样是求最大(小)值的分布，本题对离散型与连续型二维随机变量采用了不同的方法. 如果对(1)采用先求分布函数的方法，将导致易犯错误的分段函数运算. 顺便指出，$U\sim B\left(1,\frac{3}{4}\right)$，$V\sim E(\lambda_1+\lambda_2)$.

例 3-9　设 X,Y 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知 X 的分布律为 $P(X=i)=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$. 令 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$. 试求：

(1) (U,V) 的分布律；

(2) U 与 V 的边缘分布律；

(3) 给定 $V=2$ 时 U 的条件分布律与给定 $U=3$ 时 V 的条件分布律.

解　(1) X 与 Y 的取值范围都是 $\{1,2,3\}$，因此，U 与 V 的取值范围也都是 $\{1,2,3]$，(U,V) 的分布律为

U \ V	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

这里，九个概率分别计算如下：

$$P(U=i,V=i)=P(X=i,Y=i)=P(X=i)P(Y=i)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9},i=1,2,3.$$

当 $i<j$ 时，$\{U=i,V=j\}=\phi$，因此，$P(U=i,V=j)=0$.

当 $i>j$ 时，$\{U=i,V=j\}=\{X=i,Y=j\}\cup\{X=j,Y=i\}$，因此，

$$P(U=i,V=j)=P(X=i,Y=j)+P(X=j,Y=i)=P(X=i)P(Y=j)+P(X=j)P(Y=i)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}.$$

（2）U 的边缘分布律为

U	1	2	3
P_r	$\frac{1}{9}+0+0=\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+0=\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

V 的边缘分布律为

V	1	2	3
P_r	$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$	$0+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}$	$0+0+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$

（3）给定 $V=2$ 时 U 的条件分布律为

$U\|V=2$	1	2	3
P_r	$\frac{0}{3/9}=0$	$\frac{1/9}{3/9}=\frac{1}{3}$	$\frac{2/9}{3/9}=\frac{2}{3}$

给定 $U=3$ 时 V 的条件分布律为

$V\|U=3$	1	2	3
P_r	$\frac{2/9}{5/9}=\frac{2}{5}$	$\frac{2/9}{5/9}=\frac{2}{5}$	$\frac{1/9}{5/9}=\frac{1}{5}$

分析 本题(1)是 1996 年试题，解决本题所用的方法仅仅是基本要求的综合运用. 望读者仔细体会。在(2) 中，由(1) 得到的联合分布律推出边缘分布律，也可以仿照例 3-8(1)，直接由(X,Y)的分布律推出 U，V 的分布律.

例 3-10（选择题） 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$和 $F_2(x)$，则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度；

(B) $f_1(x)f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度；

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数；

(D) $F_1(x)F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数.

解 应选(D).

分析 本题是 2002 年试题. 解本题要求对分布函数和密度函数的性质十分熟悉. 由于 $\int_{-\infty}^{\infty}(f_1(x)+f_2(x))\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=2$，因此，(A)不成立. 至于(B)，若取 $X_1\sim R(0,1)$，$X_2\sim R(1,2)$时，$f_1(x)f_2(x)\equiv 0$，因此 $\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x=0$. 从而(B)不成立. 由于 $F_1(+\infty)=1$，$F_2(+\infty)=1$，故 $F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2$，因而(C)不成立，(D)是正确的，实际上 $F_1(x)F_2(x)$是 $\max(X_1,X_2)$的分布函数.

例 3-11 设随机变量 X 与 Y 相互独立，下面列出了二维随机变量(X,Y)的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

解

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

分析　本题是1999年试题.解本题要求对联合分布律和边缘分布律的概念十分熟悉.先由$P\{X=x_1,Y=y_1\}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$,解出$P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$.由$X,Y$相互独立得到$P\{X=x_1,Y=y\}=p_{11}=p_{1\cdot}p_{\cdot 1}$,因此

$$P\{X=x_1\}=p_{1\cdot}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{4}.$$

同样由独立性可得　$P\{X=x_2\}=p_{2\cdot}=\frac{p_{21}}{p_{\cdot 1}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4}.$

$$P\{Y=y_2\}=p_{\cdot 2}=\frac{p_{12}}{p_{1\cdot}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

$$P\{Y=y_3\}=1-P\{Y=y_1\}-P\{Y=y_2\}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

$$P\{X=x_2,Y=y_2\}=p_{22}=p_{2\cdot}p_{\cdot 2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$

$$P\{X=x_2,Y=y_3\}=p_{23}=p_{2\cdot}p_{\cdot 3}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.$$

例 3-12　设随机变量$X_i(i=1,2)$的分布律为

X_i	-1	0	1
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

且满足$P\{X_1X_2=0\}=1$,求$P\{X_1=X_2\}$.

解　设(X_1,X_2)的联合分布律为

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}

由于$P\{X_1X_2=0\}=1$,因此

$$P\{X_1X_2=0\}=p_{12}+p_{22}+p_{32}+p_{21}+p_{23}=1$$

另一方面　$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}p_{ij}=1$.因此

$$p_{11}=p_{13}=p_{31}=p_{33}=0.$$

即(X_1,X_2)的联合分布律为

X_1 \ X_2	-1	0	1
-1	0	p_{12}	0
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
1	0	p_{32}	0

由于已知 $X_i(i=1,2)$ 的边缘分布律，因此，有

$$p_{21}=P\{X_2=-1\}=\frac{1}{4},\ p_{23}=P\{X_2=1\}=\frac{1}{4};$$

$$p_{12}=P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4},\ p_{32}=P\{X_1=1\}=\frac{1}{4}.$$

因而

$$p_{22}=1-p_{12}-p_{21}-p_{23}-p_{32}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$$

从而

$$P\{X_1=X_2\}=p_{11}+p_{22}+p_{33}=0+0+0=0.$$

分析 本题是 1999 年的考题. 本题中 X_1,X_2 并不相互独立，此时，一般的教材都强调由边缘分布律得不出联合分布律，但适当补充条件后，可以由边缘分布律推出联合分布律. 本例中通过添加条件 $P\{X_1X_2=0\}=1$，使得 $p_{11}=p_{13}=p_{31}=p_{33}=0$，从而使得未知量个数由 9 个减少至 5 个. 再结合边缘分布律求出联合分布律.

四、小　结

本章重点是求分布——联合分布、边缘分布（条件分布）与二维随机变量简单函数的分布，即使是讨论独立性，也离不开关于分布的讨论. 当然，求分布还是建立在求概率的基础上. 另外，对正态分布要给予足够的重视，因为它具有一些特殊的性质，运用这些性质可以简化计算.

第四章　随机变量的数字特征

随机变量的分布一般不易得到,退而求其次,本章讨论随机变量的数字特征.

一、复习与考试要求

(1) 理解数学期望和方差的概念,掌握它们的性质与计算.

(2) 掌握二项分布、泊松分布和正态分布的数学期望和方差,了解均匀分布和指数分布的数学期望和方差.

(3) 会计算随机变量函数的数学期望.

(4) 了解矩、协方差和相关系数的概念和性质,并会计算.

二、基本概念与理论

1. 数学期望

设 X 是离散型随机变量,X 的分布律为

$$P(X=a_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

如果级数 $\sum\limits_i a_i p_i$ 绝对收敛①,那么,规定 X 的数学期望(或均值)为

$$E(X)=\sum_i a_i p_i;$$

规定随机变量函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E[g(X)]=\sum_i g(a_i)p_i.$$

设 X 是连续型随机变量,X 的密度函数为 $f(x)$. 规定 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x;$$

规定随机变量函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量,X 与 Y 的联合分布律为

$$P(X=a_i,Y=b_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

规定二维随机变量的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(a_i,b_j)p_{ij}.$$

特殊地

$$E(X)=\sum_i\sum_j a_i p_{ij}=\sum_i a_i p_{i\cdot},\ E(Y)=\sum_i\sum_j b_i p_{ij}=\sum_i b_i p_{\cdot j}.$$

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量,X 与 Y 的联合密度函数为 $f(x,y)$,规定二维随机变量的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

① 如果级数不绝对收敛,那么就认为 X 的数学期望不存在. 以下类似的情形(包括连续型情形下的广义积分)不再一一指明.

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特殊地

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\mathrm{d}x,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty} y\,f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

数学期望具有下列性质:

(1) $E(c)=c$ (c 是常数);

(2) $E(kX+b)=kE(X)+b$(k,b 是常数);

(3) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$;

(4) 如果 X 与 Y 相互独立,那么 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

2. 方差与标准差

随机变量 X 的函数 $g(X)=[X-E(X)]^2$ 的数学期望称为随机变量 X 的方差,记作 $D(X)$,即

$$D(X)=E([X-E(X)]^2).$$

计算方差常用下列公式:

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

方差具有下列性质:

(1) $D(c)=0$ (c 是常数);

(2) $D(kX+b)=k^2D(X)$ (k,b 是常数);

(3) 如果 X 与 Y 相互独立,那么,$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

方差 $D(X)$的算术平方根 $\sqrt{D(X)}$称为随机变量 X 的标准差.

3. 协方差

设(X,Y)为二维随机变量,称

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])$$

为随机变量 X 与 Y 的协方差. 计算协方差常用下列公式:

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

当 $X=Y$ 时,$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(X,X)$表示 $D(X)$.

协方差具有下列性质:

(1) $\mathrm{cov}(X,c)=0$ (c 是常数);

(2) $\mathrm{cov}(kX,lY)=kl\,\mathrm{cov}(X,Y)$ (k,l 是常数);

(3) $\mathrm{cov}(X,Y\pm Z)=\mathrm{cov}(X,Y)\pm\mathrm{cov}(X,Z)$.

4. 相关系数

设(X,Y)为二维随机变量,称

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

为随机变量 X 与 Y 的相关系数. 相关系数 $\rho(X,Y)$反映了随机变量 X 与 Y 之间线性联系的紧密程度. 当 $\rho(X,Y)=0$ 时,称 X 与 Y 不相关.

相关系数具有下列性质:

(1) $|\rho(X,Y)|\leqslant 1$;

(2) $|\rho(X,Y)|=1$ 的充分必要条件是 X 与 Y 之间存在线性关系的概率为 1.

定理 下列 5 个命题是等价的:

(1) $\rho(X,Y)=0$;

(2) $\mathrm{cov}(X,Y)=0$;

(3) $E(XY)=E(X)E(Y)$;

(4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;

(5) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

定理　如果随机变量 X 与 Y 相互独立，那么 X 与 Y 不相关.

定理　如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，那么 X 与 Y 相互独立等价于 X 与 Y 不相关.

利用协方差或相关系数可以计算

$$\begin{aligned}D(X\pm Y)&=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)\\&=D(X)+D(Y)\pm 2\rho(X,Y)\sqrt{D(X)D(Y)}.\end{aligned}$$

5. 常用分布的数字特征

(1) 当 $X\sim B(n,p)$ 时，

$$E(X)=np,\qquad D(X)=np(1-p).$$

(2) 当 $X\sim P(\lambda)$ 时，

$$E(X)=\lambda,\qquad D(X)=\lambda.$$

(3) 当 $X\sim R(a,b)$ 时，

$$E(X)=\frac{1}{2}(a+b),\qquad D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

(4) 当 $X\sim E(\lambda)$ 时，

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

(5) 当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，

$$E(X)=\mu,\qquad D(X)=\sigma^2.$$

(6) 当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 时，

$$E(X)=\mu_1,\qquad D(X)=\sigma_1^2.$$

$$E(Y)=\mu_2,\qquad D(Y)=\sigma_2^2.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2,\qquad \rho(X,Y)=\rho.$$

6. 矩

设 X 是随机变量，称 $E(X^k)$ 为随机变量 X 的 k 阶原点矩；称 $E([X-E(X)]^k)$ 为随机变量 X 的 k 阶中心矩.

设 (X,Y) 是二维随机变量，称 $E(X^kY^l)$ 为随机变量 X 与 Y 的 (k,l) 阶联合原点矩；称 $E([X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l)$ 为随机变量 X 与 Y 的 (k,l) 阶联合中心矩.

数学期望是一阶原点矩；方差是二阶中心矩；协方差是 $(1,1)$ 阶联合中心矩.

三、例题分析

例 4-1　已知 $X\sim P(2)$，即

$$P(X=k)=\mathrm{e}^{-2}\frac{2^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

求随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)$.

解　由 $X\sim P(2)$ 推知 $E(X)=2$. 于是，

$$E(Z)=E(3X-2)=3E(X)-2=3\times 2-2=4.$$

分析　如果不知道泊松分布的数学期望，那就只好先求级数的和：

$$E(X)=\mathrm{e}^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{2^k}{k!}=\mathrm{e}^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(k-1)!}=2\mathrm{e}^{-2}\sum_{k-1=0}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}=2.$$

例 4-2　已知 $X\sim E(1)$，求 $E(X+\mathrm{e}^{-2X})$

解　由 $X\sim E(1)$ 推知 $E(X)=1$，且

$$E(\mathrm{e}^{-2X})=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

因此,

$$E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

分析 本题切忌错用公式

$$E(X+e^{-2X})=E(X)+e^{-2E(X)}.$$

因为 e^{-2X} 不是 X 的线性函数,所以上式不成立.

例 4-3 已知连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},\quad -\infty<x<\infty,$$

求 $E(X)$ 与 $D(X)$.

解 由于

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2\times\frac{1}{2}}\right\}$$

是 $N(1,\frac{1}{2})$ 的密度函数,因此

$$E(X)=1,\qquad D(X)=\frac{1}{2}.$$

分析 本题是 1987 年试题. 解决本题的关键是要善于识别常用分布的密度函数. 不然的话,直接计算将会带来较大的工作量. 本题中的 $f(x)$ 也可以改成

$$\varphi(x)=ke^{-x^2+2x},\quad -\infty<x<\infty.$$

最终结果不变. 理由请参阅例 2-3 的分析.

例 4-4 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,求 $E(X^2)$.

解 由题意得到 $X\sim B(10,0.4)$,于是

$E(X)=10\times0.4=4$,

$D(X)=10\times0.4\times(1-0.4)=2.4$.

由 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

推得 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=2.4+4^2=18.4$

分析 本题是 1995 年试题,它考查了两个内容. 一是由题意归结出随机变量 X 的分布,二是灵活应用方差计算公式,如果直接求解,那么

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{10}k^2\binom{10}{k}0.4^k(1-0.4)^{10-k}$$

的计算是较繁的.

例 4-5 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)\}|0<x<1,|y|<x\}$ 内服从均匀分布,求随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

解 由方差的性质得到

$$D(Z)=D(2X+1)=4D(X).$$

在例 3-2 中已经求得 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

于是,

$$E(X)=\int_0^1 x\times 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\times 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

因此，$D(Z)=4\times\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$.

分析　尽管本题给出的是二维随机变量，但在求 X 的数学期望与方差时可以从 X 的边缘密度函数出发，而不必从 X 与 Y 的联合密度函数开始. 一般情形下，采用边缘密度函数较方便.

例 4-6　已知 $X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$，$\rho(X,Y)=-\frac{1}{2}$. 设随机变量 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1) 求 $E(Z)$与 $D(Z)$；

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 $\rho(X,Z)$.

解　(1) 由数学期望与方差的性质得到

$$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}D(Z)&=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\mathrm{cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)\\&=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{9}\times 3^2+\frac{1}{4}\times 4^2+\frac{1}{3}\rho(X,Y)\sqrt{D(X)D(Y)}\\&=1+4+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\times 4=3.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Z)&=\mathrm{cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}\mathrm{cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho(X,Y)\sqrt{D(X)D(Y)}\\&=\frac{1}{3}\times 3^2+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=0.\end{aligned}$$

因此 $\rho(X,Z)=0$.

分析　本题是 1994 年试题. 主要考查方差、协方差与相关系数的性质. 即使 $X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$，$\rho(X,Y)=0$，但不能由此推出 X 与 Y 相互独立，因为(X,Z)未必一定服从二维正态分布. 这方面内容的深入讨论超出了考试大纲与教学大纲的要求. 当然，如果添上条件“已知(X,Y)服从二维正态分布”，那么由$\rho(X,Y)=0$，立刻推得 X 与 Z 相互独立，因为这时(X,Z)必定服从二维正态分布.

例 4-7　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<\infty.$$

(1) 求 $E(X)$与 $D(X)$；

(2) 求 X 与$|X|$的协方差 $\mathrm{cov}(X,|X|)$，并问 X 与$|X|$是否不相关？

解　(1) 广义积分$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$ 绝对收敛，因此

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-|x|}dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2;$$

(2) 应用协方差计算公式

$$\operatorname{cov}(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)\cdot E(|X|),$$

由于随机变量 X 的函数 $g(X)=X\cdot|X|$ 的数学期望

$$E(X\cdot|X|)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot|x|\times\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0,$$

因此

$$\operatorname{cov}(X,|X|)=0-0\times E(|X|)=0.$$

因此推得 $\rho(X,|X|)=0$，即 X 与 $|X|$ 不相关.

分析 在例 3-3 中曾经说明了 X 与 $|X|$ 不相互独立. 在本题计算积分时，多次用到奇(偶)函数在对称区间上积分的性质. 但要注意，现在是广义积分，遇到奇函数时特别要当心. 严格地说，在(2)中计算 $\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot|x|\times\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$ 时也应先说明它绝对收敛.

例 4-8 一零件的横截面是圆，对截面直径进行测量，设其直径服从区间$[0,2]$上的均匀分布，求截面面积的数学期望与方差.

解 设截面直径为 X，$X\sim R(0,2)$，即 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 0, & \text{其　余}.\end{cases}$$

设横截面面积为 Y，$Y=\frac{\pi}{4}X^2$. 易见，

$$E(Y)=E\left(\frac{\pi}{4}X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{4}x^2f_X(x)dx=\int_0^2\frac{\pi}{4}x^2\times\frac{1}{2}dx=\frac{\pi}{3}.$$

另外，
$$E(Y^2)=E\left(\frac{\pi^2}{16}X^4\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi^2}{16}x^4f_X(x)dx=\int_0^2\frac{\pi^2}{16}x^4\times\frac{1}{2}dx=\frac{\pi^2}{5},$$

因此
$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{\pi^2}{5}-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2=\frac{4}{45}\pi^2.$$

分析 本题以应用题的形式出现，要求首先建立随机变量之间的函数关系. 此题本质上提出了如何求随机变量的函数$Y=g(X)$的方差？

由上述求解过程可以看出，一般地，有

$$D[g(X)]=D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E[g^2(X)]-(E[g(X)])^2.$$

本题是 1987 年备用试题.

例 4-9 设 X 与 Y 是相互独立且均服从 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的随机变量，求(1)$E(|X-Y|)$，(2) $D(|X-Y|)$.

解 记 $U=X-Y$. 由所给条件，按正态分布的可加性定理，有

$$U\sim N\left(0-0,\frac{1}{2}+(-1)^2\times\frac{1}{2}\right),$$

即

$$U\sim N(0,1).$$

于是

$$E(|X-Y|)=E(|U|)=\int_{-\infty}^{\infty}|u|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=2\int_0^{\infty}u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|X-Y|^2)=EU^2=D(U)+(EU)^2=1,$$

因此

$$D(|X-Y|)=E(|X-Y|^2)-(E(|X-Y|))^2=1-\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2=1-\frac{2}{\pi}.$$

分析　本题(1)是 1996 年试题. 本题(2)是 1998 年试题. 本题所用的技巧在例 3-4 中已经有所体现,关键是引进一个中间随机变量 U,一般它是独立正态随机变量的线性函数. 如果直接用求 $E(g(X,Y))$ 的公式来求解本题,计算便会相当繁琐.

例 4-10　设随机变量 X 的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & 0\leqslant x\leqslant \pi;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y^2 的数学期望.

解　由于

$$P\left(X>\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

因此

$$Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$$

因此,$EY=4\times\frac{1}{2}=2$, $D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$,于是

$$E(Y^2)=D(Y)+(E(Y))^2=1+2^2=5.$$

分析　本题是 2002 年试题. 利用二项概率使其成为求常用分布的数学特征问题. 这种综合运用概率知识的能力是考生必须具备的.

例 4-11　设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松(Poisson)分布,且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$,求 λ.

解　由于 X 服从 $P(\lambda)$,因此

$$EX=D(X)=\lambda, E(X^2)=D(X)+(EX)^2=\lambda+\lambda^2.$$

从而

$$E[(X-1)(X-2)]=E[X^2-3X+2]=EX^2-3EX+2=\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1,$$

即
$$(\lambda-1)^2=\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

由此得

$$\lambda=1.$$

分析　本题是 1999 年试题. 解本题的关键是理解数字特征 $E[(X-1)(X-2)]$ 是参数 λ 的函数,可记这个函数为 $h(\lambda)$. 由方程 $h(\lambda)=1$ 解出 λ. 一般地,若随机变量 X 的密度函数(或分布律)为 $f(x;\theta)$,其中,θ 为参数,那么,由条件 $Eg(X)=0$ 可建立方程

$$u(\theta)\equiv Eg(x)=0,$$

即
$$u(\theta)=0.$$

解此方程可得到 θ.

本题中 $g(x)=(X-1)(X-2)-1$, $\theta=\lambda$, $u(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1$,由 $u(\lambda)=0$ 解出 $\lambda=1$.

例 4-12　一商店经销某种商品,每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量,且都服从区间[10,20]上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1 000 元;若需求量超过了进货量,

商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元，试计算此商店经销该种商品每周所得到利润的期望值.

解 记 Z 表示商店一周所得的利润(单位:元). 由题意

$$Z=\begin{cases}1000Y, & Y\leqslant X\\ 1000X+500(Y-X), & Y>X\end{cases}$$

由于 X 与 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}, & 10\leqslant x\leqslant 20 \text{ 且 } 10\leqslant y\leqslant 20;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

由 Z 的表达式可知，Z 是 X,Y 的函数，即 $Z=g(X,Y)$. 从而，

$$\begin{aligned}EZ&=Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{\{y\leqslant x\}}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\{y>x\}}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{\{y\leqslant x\}}1\,000y\,f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\{y>x\}}(500(y-x)+1\,000x)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{y}^{20}1\,000y\cdot\frac{1}{100}\mathrm{d}x+\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{10}^{y}500(x+y)\frac{1}{100}\mathrm{d}x\\
&=10\int_{10}^{20}y(20-y)\mathrm{d}y+5\int_{10}^{20}\left(\frac{3}{2}y^2-10y-50\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{20\,000}{3}+5\times 1\,500\approx 14\,166.7(\text{元}).\end{aligned}$$

分析 本题是 1998 年试题. 随机变量的数字特征在经济学和管理科学中有许多应用. 如本例中的利润的期望值(也称为期望利润)，投资学中的平均收益用收益的期望表示，投资的风险则用方差来度量等. 本例中一周的利润是一个随机变量 Z，Z 可用进货量 X 和需求量 Y 表示，只是这种表示式是一个分段的函数，这样求 EZ 就转化为对 X,Y 的函数 $g(X,Y)$ 求期望. $Eg(X,Y)$ 的计算公式为：若 (X,Y) 为二维连续型随机变量，(X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$，则 $Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 若 (X,Y) 为二维离散型随机变量，X 与 Y 的联合分布律为

$$P(X=a_i,Y=b_j)=p_{ij},i,j=1,2,\cdots.$$

则
$$Eg(X,Y)=\sum_i\sum_j g(a_i,b_j)p_{ij}.$$

利用上述公式可容易算出协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(x)E(y)$，事实上只需分别取 $g(X,Y)$ 为 XY，X 和 Y 即可. 读者可做下面的习题来练习并熟悉计算方法：

设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

求 $\mathrm{cov}(X,Y)$ 和 $\mathrm{cov}(X^2,Y^2)$.(这是 2002 年试题)答案：0，-0.02.

四、小　结

本章重点是求随机变量的数字特征．一般有两条途径：一是利用分布律（或密度函数）直接计算，二是利用性质来计算．不论采用哪一种方法，熟记常用分布的数字特征是有益的．

第五章　大数定律和中心极限定理

大数定律和中心极限定理属于随机变量序列的极限性质，它们涉及的理论较深.

一、复习与考试要求

(1) **了解切比雪夫不等式.**

(2) **了解切比雪夫大数定律和伯努利大数定律.**

(3) **了解独立同分布的中心极限定理和棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理。**

二、基本概念与理论

1. 切比雪夫不等式

设 X **是随机变量，对任意一个** $\varepsilon>0$**，有**

$$P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.\left(\text{或 } P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geqslant1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\right)$$

切比雪夫不等式的直观意义是，不论 X **服从何种分布，**X **取值于** $E(X)$ **的** ε **的邻域内的概率不小于** $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

2. 大数定律

(1) **切比雪夫大数定律**　**设** $X_1,X_2,\cdots$ **是一列两两不相关的随机变量，**$E(X_i)=\mu_i$，$D(X_i)=\sigma_i^2$**，且存在常数** c**，使得** $\sigma_i^2\leqslant c$，$i=1,2,\cdots$**，那么，对任意一个** $\varepsilon>0$**，有**

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right|<\varepsilon\right)=1.$$

(2) **伯努利大数定律**　**设随机变量** $Y_n\sim B(n,p)$**，那么，对任意一个** $\varepsilon>0$**，有**

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{Y_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

伯努利大数定律的直观意义是，在大量独立重复试验中可以用某个事件 A **发生的频率来近似每次试验中事件** A **发生的概率.**

3. 中心极限定理

(1) **独立同分布情形下的中心极限定理**　**设** $X_1,X_2,\cdots$ **是一列独立同分布的随机变量，**$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots$**，那么，对任意一个实数** x**，有**

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right)=\Phi(x).$$

这个定理的直观意义是，当 n **足够大时，可以近似地认为** $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$. **这个定理也称为列维-林德贝格**(Levy-Lindberg)**中心极限定理.**

(2) **棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理**　**设随机变量** $Y_n\sim B(n,p)$**，那么，对任意一个实数** x**，有**

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right)=\Phi(x).$$

4. 二项概率的近似计算

(1) **当** n **足够大且** p **较小时，二项概率**

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}.$$

其中，$\lambda=np$.

(2) 当 n 足够大时，有

$$\sum_{i=0}^{k}P_n(i)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\approx\Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

5. 依概率收敛性

设 $Y_1,Y_2,\cdots$ 是一个随机变量序列，a 是一个常数. 如果对任意一个 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(|Y_n-a|\geqslant\varepsilon)=0,(\text{或}\lim_{n\to\infty}P(|Y_n-a|<\varepsilon)=1).$$

那么称这个随机变量序列 $Y_1,Y_2,\cdots$ 依概率收敛于 a，记作 $Y_n\xrightarrow{P}a$.

切比雪夫大数定律表明 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\xrightarrow{P}0$；伯努利大数定理表明 $\frac{Y_n}{n}\xrightarrow{P}p$，这里 $Y_n\sim B(n,P)$.

当 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量时，有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu,$$

其中，$\mu=E(X_i),i=1,2,\cdots$.

三、例题分析

例 5-1　设连续型随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=a$ 和方差 $D(X)=\sigma^2$. 求证，对任意的正数 ε，有

$$P(|X-a|<\varepsilon)\geqslant1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

证　设 X 的密度函数为 $f(x)$. 由于在集合 $\{x\,|\,|x-a|\geqslant\varepsilon\}$ 上 $\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}\geqslant1$，因此

$$\begin{aligned}P(|X-a|\geqslant\varepsilon)&=\int_{|x-a|\geqslant\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{|x-a|\geqslant\varepsilon}\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{|x-a|\geqslant\varepsilon}\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{|x-a|<\varepsilon}\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot D(X)=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

从而由求逆公式推得

$$P(|X-a|<\varepsilon)=1-P(|X-a|\geqslant\varepsilon)\geqslant1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

分析　本题要求证明切比雪夫不等式，必须写出证明过程. 需要用到的技巧必须记住. 本题是 1988 年备用试题.

例 5-2　某人要测量甲、乙两地之间的距离，限于测量工具，他把总距离分成 1200 段进行测量，每段测量误差(单位：cm)相互独立，且都服从区间$(-0.5,0.5)$上的均匀分布. 试求总距离测量误差的绝对值不超过 20cm 的概率(已知 $\Phi(2)=0.95$).

解　设第 i 段测量误差为 X_i，$X_i\sim R(-0.5,0.5)$，

$$E(X_i)=0,\quad D(X_i)=\frac{1}{12},$$

$i=1,\cdots,1200$. 由独立同分布情形下的中心极限定理推得,可以近似地认为 $\sum_{i=1}^{1200}X_i\sim N\left(1200\times 0,1200\times\frac{1}{12}\right)=N(0,100)$. 于是,所求概率为

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right|\leqslant 20\right)=P\left(-20\leqslant\sum_{i=1}^{1200}X_i\leqslant 20\right)=\Phi\left(\frac{20-0}{10}\right)-\Phi\left(\frac{-20-0}{10}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-[1-\Phi(2)]=2\Phi(2)-1=2\times 0.95-1=0.90.$$

分析 本题的难点在于构造适当的随机变量. 这里要避免犯一种错误:设每段测量误差为 X,总误差为 $1\,200X$. 这种错误在于假定每段测量误差全相等. 这是不符合实际情况的,也与题目中的相互独立性违背.

例 5-3 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 与方差 $D(X)=\sigma^2$. 对任意一个正常数 $k>1$,求证:

$$P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

证 在切比雪夫不等式中,令 $\varepsilon=k\sigma$ 便得

$$P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}=\frac{1}{k^2}.$$

分析 本题是切比雪夫不等式的简单应用. 当 $k\leqslant 1$ 时,$P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2}$ 总是成立的,因为 $\frac{1}{k^2}\geqslant 1$. 这表明切比雪夫不等式只是给出了概率的上界,不能把它当作一个近似计算公式.

例 5-4 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量. 已知 $E(X^k)=\alpha_k$,$k=1,2,3,4$. 试证,当 n 充分大时,随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似地服从正态分布,并指出其分布参数.

证 记 $Y_i=X_i^2$,$i=1,\cdots,n$.

$$E(Y_i)=E(X_i^2)=\alpha_2,$$

$$D(Y_i)=E(Y_i^2)-[D(Y_i)]^2=E(X_i^4)-\alpha_2^2=\alpha_4-\alpha_2^2.$$

$Y_1,\cdots,Y_n$ 是独立同分布的随机变量. 由独立同分布情形下的中心极限定理推得 $nZ=\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ 近似地服从正态分布 $N(n\alpha_2,n(\alpha_4-\alpha_2^2))$,从而 Z 近似地服从正态分布 $N(\alpha_2,\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2))$.

例 5-5 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2,方差分别为 1 和 4,而相关系数为 0.5,试根据切比雪夫不等式给出 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}$ 的上界.

解 记 $U=X-Y$,则

$$EU=EX-EY=2-2=0,$$

$$D(U)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{cov}(X,Y)=D(X)+D(Y)-2\rho(X,Y)\sqrt{D(X)D(Y)}$$

$$=1+4-2\times 0.5\times\sqrt{1\times 4}=5-2=3.$$

从而,由切比雪夫不等式并注意到 $U-EU=U$,

$$P\{|X-Y|\geqslant 6\}=P\{|U|\geqslant 6\}\leqslant\frac{D(U)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

分析 本题是 2001 年试题. 解本题用的技巧仍是引入中间随机变量. 本题中引入 $U=X-Y$,然后对随机变量 U 用切比雪夫不等式就得到所要的上界.

例 5-6 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则当 $n\to\infty$ 时,$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于__________.

解 本题是填空题. 应填“$\frac{1}{2}$”.

分析 本题是 2003 年试题. 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立且服从相同分布的随机变量序列,因此,$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也是独立同分布的随机变量序列,从而由切比雪夫大数定律知 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \xrightarrow{P} EX_1^2$. 由题设 $X_1\sim E(2)$,因此

$$EX_1=\frac{1}{2},D(X_1)=\frac{1}{4}.$$

$$E(X_1^2)=D(X_1)+(EX_1)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

因而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于$\frac{1}{2}$.

例 5-7 一生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重 50kg,标准差为 5kg. 若用最大载重量为 5t 的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于 0.977.($\Phi(2)=0.977$,其中,$\Phi(x)$是标准正态分布函数.)

解 设最多装 n 箱. $X_i(i=1,2,\cdots,n)$为第 i 箱的重量. 由题意 $EX_i=50$, $\sqrt{D(X_i)}=5$. $i=1,2,\cdots,n$. 并视 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且服从相同的分布. 货物的总重量为 $X_1+\cdots+X_n$,不超载即指“$X_1+\cdots X_n\leqslant 5\,000$”. 由题意,要求满足

$$P\{X_1+\cdots+X_n\leqslant 5\,000)>0.977.$$

由列维-林德贝格中心极限定理

$$P\{X_1+\cdots+X_n\leqslant 5\,000\}=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-nX50}{\sqrt{n}\,5}\leqslant\frac{5\,000-50n}{5\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2),$$

由此得到

$$\frac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}>2.$$

即

$$10n+2\sqrt{n}-1\,000<0,$$

记$\sqrt{n}=x$,解方式程 $10x^2+2x-1\,000=0$ 得两个根

$$x_1=\frac{-2+2\sqrt{10\,001}}{2\times 10}\approx 9.9,\ x_2=\frac{-2-2\sqrt{10\,001}}{2\times 10}\approx -10.1.$$

而使 $10x^2+2x-1\,000<0$,x 满足$-10.1<x<9.9$. 注意到 $x>0$,因此,只需 $x=\sqrt{n}<9.9$. 即 $n<98.01$取 $n=98$ 即可. 即最多可以装 98 箱.

分析 本题是 2001 年试题. 本题中没有指明各箱重量相互独立且服从相同分布. 遇到这类题时只能作上述假设,否则无法用中心极限定理解题. 中心极限定理的应用也是经常考的知识点. 这些题涉及范围很广,例如电力的分配,电话线的配制安排等. 考生对此应加以熟悉.

四、小 结

本章的理论性较强. 大数定律和中心极限定理的应用是要重点掌握的内容,对切比雪夫不等式也要有一定的了解. 这些年对这方面内容的要求有所提高,因此读者还须认真对待.

第六章　数理统计的基本概念

本章内容既是由概率论向数理统计过渡的桥梁,也是今后讨论统计推断(估计与检验)的必要准备.

一、复习与考试要求

(1) 理解总体、个体、简单随机样本和统计量的概念,掌握样本均值、样本方差及样本矩的计算.
(2) 了解 χ^2 分布、t 分布和 F 分布的定义及性质,了解分位数的概念并会查表计算.
(3) 了解正态总体的某些常用统计量的分布.

二、基本概念与理论

1. 总体与样本

研究对象的某个数值指标的全体称为总体;从总体中抽取若干个成员,称这些成员为样本,称成员个数为样本大小(或样本容量)。

设总体 X 是具有未知的分布函数 $F(x)$(或未知的分布律,或未知的密度函数)的随机变量,一般有下列两种情形:

(1) X 的分布类型已知,但含有若干个未知参数;

(2) X 的分布类型未知.

简单随机样本(以下简称样本)$(X_1,\cdots,X_n)$是一个 n 维随机变量,它表示 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量,且每一个 X_i 的分布都与总体 X 的分布相同,$i=1,\cdots,n$. 在抽样后,记样本观测值为$(x_1,\cdots,x_n)$. 在实际问题中,$(x_1,\cdots,x_n)$即是数据.

在区间估计与假设检验中,只讨论正态总体,即已知总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 正态总体有以下三种类型:

(1) μ 未知,但 σ^2 已知;

(2) σ^2 未知,但 μ 已知;

(3) μ 与 σ^2 均未知.

2. 统计量

样本$(X_1,\cdots,X_n)$的函数称为统计量,要求它不直接包含总体分布中任何未知参数。在抽样前,统计量是一个随机变量;在抽样后,统计量的观测值是一个可以由数据算得的实数.

样本均值定义为 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$;样本方差定义为 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,称 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ 为样本标准差. 记 $S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$,$S_n=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-X)^2}$. 这些都是常用统计量.

对任意一个正整数 k,称

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^k$$

为样本的 k 阶原点矩;称

$$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$$

为样本的 k 阶中心矩,这些都是统计量.

3. 统计量的数字特征

设$(X_1,\cdots,X_n)$是取自总体 X 的一个样本,$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$. 那么,有

(1) $E(\overline{X})=\mu,D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$;

(2) $E(S^2)=\sigma^2$， $E(S_n^2)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$.

4. χ^2 分布、t 分布与 F 分布

(1) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量，且都服从 $N(0,1)$，那么，$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布 $\chi^2(n)$，且

$$E(\chi^2)=n,\quad D(\chi^2)=2n.$$

当 $\chi_1^2\sim\chi^2(m)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n)$，且 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立时，有

$$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(m+n).$$

$\chi^2(n)$分布的 p 分位数记作 $\chi_p^2(n)$. 它表示：当 $\chi^2\sim\chi^2(n)$时，有

$$P(\chi^2\leqslant\chi_p^2(n))=p.$$

$\chi_p^2(n)$的值可以查表得到.

(2) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，那么，$T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为 n 的 t 分布 $t(n)$.

$t(n)$分布的 p 分位数记作 $t_p(n)$. 它表示：当 $T\sim t(n)$时，有

$$P(T\leqslant t_p(n))=p.$$

$t_p(n)$的值可以查表得到，它满足关系式

$$t_p(n)=-t_{1-p}(n).$$

(3) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，那么，$F=\dfrac{X/m}{Y/n}$服从自由度为(m,n)的 F 分布 $F(m,n)$.

$F(m,n)$分布的 p 分位数记作 $F_p(m,n)$. 它表示：当$F\sim F(m,n)$时，有

$$P(F\leqslant F_p(m,n))=p.$$

$F_p(m,n)$的值可以查表得到，它满足关系式

$$F_p(m,n)=\frac{1}{F_{1-p}(n,m)}.$$

(4) $N(0,1)$分布的 p 分位数记作 u_p. 它表示：当 $X\sim N(0,1)$时，有

$$P(X\leqslant u_p)=\Phi(u_p)=p,$$

即 $u_p=\Phi^{-1}(p)$. u_p 的值可以查表得到，它满足关系式

$$u_p=-u_{1-p}.$$

5. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布

设总体 X 是一个连续型随机变量，密度函数为 $f(x)$. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合密度函数为

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i).$$

设总体 X 是一个离散型随机变量，分布律为 $P(X=a_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots$. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布律为

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i),\quad x_i\in\{a_1,a_2,\cdots\}.$$

6. 正态总体下常用统计量的分布

定理　设$(X_1,\cdots,X_n)$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的一个样本. 那么，有

(1) $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$；

(2) $\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；

(3) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

(4) $\overline{X}$ 与 S^2（或 S_n^2）相互独立；

(5) $\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sim t(n-1)$.

定理 设$(X_1,\cdots,X_m)$是取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$的一个样本，$(Y_1,\cdots,Y_n)$是取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$的一个样本. 那么，有

(1) $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$；

(2) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m\sigma_1^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n\sigma_2^2}\sim F(m,n)$；

(3) $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$；

(4) 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，有

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2),$$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{1}{(m+n-2)}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]}$；(3)成为

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(m-1,n-1).$$

其中 $S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$，$\overline{X}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$.

三、例题分析

例 6-1 已知数据 $x_1,\cdots,x_n$ 满足$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=b$. 试求 $\bar{x}$，s^2，s_n^2.

解 由所给条件得到 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{a}{n}$；另外，由

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2=b-\frac{a^2}{n}$$

推得 $s_n^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\dfrac{1}{n^2}(nb-a^2)$，$s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\dfrac{1}{n(n-1)}(nb-a^2)$.

分析 本题的意义在于：可以利用中间数据算得常用统计量的观测值. 这些公式在数据计算题中常常很有用。

例 6-2 设 $X_1,\cdots,X_8$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，其中 $\mu=1$，σ^2 未知. 在$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 8}X_i$，$\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-\mu)^2$，$k\overline{X}+b$($k$，$b$ 为已知常数)，$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-1)^2$ 中，哪个不是统计量？

解 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-1)^2$ 不是统计量，因为它包含未知参数 σ^2.

例 6-3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$的一个样本. 试求样本二阶原点矩 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望与方差.

解 由数学期望与方差的性质推得

$$E(A_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X^2)=E(X^2),$$

$$D(A_2)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i^2)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X^2)=\frac{1}{n}D(X^2).$$

因为 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$\frac{X}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以$\frac{X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$. 由此推得

$$E\left(\frac{X^2}{\sigma^2}\right)=1,\quad D\left(\frac{X^2}{\sigma^2}\right)=2,$$

即

$$E(X^2)=\sigma^2,\quad D(X^2)=2\sigma^4.$$

从而

$$E(A_2)=\sigma^2,\quad D(A_2)=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

分析 一般要求 A_2 的方差涉及四阶矩. 但是，在正态分布情形下，可以利用 χ^2 分布的方差来回避四阶矩的计算.

例 6-4 设 $X_1,\cdots,X_6$ 是取自正态总体 $N(1,\sigma^2)$的一个样本. 已知 $P(\overline{X}>1,S<c\sigma)=p$. 试用分位数表示常数 c，其中 $0<p<0.5$.

解 由 $\overline{X}$ 与 S 的相互独立性推得

$$p=P(\overline{X}>1,\quad S<c\sigma)=P(\overline{X}>1)P(S<c\sigma).$$

由 $\overline{X}\sim N\left(1,\frac{\sigma^2}{6}\right)$知道

$$P(\overline{X}>1)=1-P(\overline{X}\leqslant 1)=1-\Phi\left(\frac{1-1}{\sigma/\sqrt{6}}\right)$$

$$=1-\Phi(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

从而，$P(S<c\sigma)=2p$. 另一方面，由$\frac{5S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)$推得

$$P(S<c\sigma)=P(S^2<c^2\sigma^2)=P(5S^2<5c^2\sigma^2)=P\left(\frac{5S^2}{\sigma^2}<5c^2\right)=2p,$$

因此，$5c^2=\chi^2_{2p}(5)$，即 $c=\sqrt{\frac{1}{5}\ \chi^2_{2p}(5)}$.

分析 本题的关键是利用 $\overline{X}$ 与 S^2 的相互独立性.

例 6-5 设随机变量 $T\sim t(n)$. 试证 $T^2\sim F(1,n)$.

证 由 T 分布的定义知道，$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$，其中，X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，现在

$$T^2=\frac{X^2}{Y/n}=\frac{X^2/1}{Y/n},$$

其中，X^2 与 Y 相互独立，$Y\sim\chi^2(n)$，由 χ^2 分布的定义推得$X^2\sim\chi^2(1)$，于是，由 F 分布的定义得到 $T^2\sim F(1,n)$.

分析 服从 $N(0,1)$的随机变量的平方服从 $\chi^2(1)$分布. 这相当于 χ^2 分布定义中取 $n=1$. 这一事实我们在例 6-3 中已经使用过一次了.

例 6-6 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$的一个样本，试问，当 c 取何值时，随机变量 $Y=c$

$\cdot\ (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$ 服从 χ^2 分布？指出这个 χ^2 分布的自由度.

解 由正态分布的可加性定理知道，$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, n\sigma^2)$，即 $\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,1)$，于是，有

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n\sigma^2}\ (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 \sim \chi^2(1),$$

这表明 $c=\frac{1}{n\sigma^2}$，且自由度为 1.

例 6-7 （选择题）设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$，$Y=\frac{1}{x^2}$，则 （　）

(A) $Y\sim\chi^2(n)$；　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$；

(C) $Y\sim F(n,1)$；　　(D) $Y\sim F(1,n)$.

解 应选(C).

分析 本题是 2003 年试题. 解本题的关键是要对 χ^2 分布、t 分布和 F 分布的定义十分熟悉. 由于 $X\sim t(n)$，因此 $X=\frac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中，U,V 相互独立且 $U\sim N(0,1)$，$V\sim\chi^2(n)$. 从而 $Y=\frac{1}{X^2}=\frac{V/n}{U^2}$，而由于 U,V 独立，且 $U^2\sim\chi^2(1)$，由 F 分布的定义得到 $Y\sim F(n,1)$.

例 6-8 设 $X_1,X_2,\cdots;X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6),\ Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,\ Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}.$$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

证 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，由于

$$Y_1-Y_2=\frac{1}{6}X_1+\cdots+\frac{1}{6}X_6-\frac{1}{3}X_7-\frac{1}{3}X_8-\frac{1}{3}X_9$$

即 Y_1-Y_2 是 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 的线性组合，因此 Y_1-Y_2 服从正态分布. 又因为 Y_1 与 Y_2 相互独立，所以

$$E(Y_1-Y_2)=EY_1-EY_2=\mu-\mu=0,$$

$$D(Y_1-Y_2)=D(Y_1)+D(Y_2)=\frac{1}{6}\sigma^2+\frac{1}{3}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2.$$

从而

$$\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}\sim N(0,1).$$

由 S^2 的定义可知：S^2 是由 X_7,X_8,X_9 建立的样本方差. 由正态总体的定理可知：$\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$且 S^2 与 Y_2 相互独立. 再由 Y_1 是 $X_1,\cdots,X_6$ 的函数，S^2 是 X_7,X_8,X_9 的函数，所以有 S^2 与 Y_1 相互独立. 从而，S^2 与 Y_1-Y_2 相互独立. 由 t 分布的定义

$$Z=\frac{\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{2S^2}{\sigma^2}}{2}}}\sim t(2).$$

分析 本题是 1999 年试题. 解本题的关键是要对正态总体下常用统计量的分布十分熟悉，并能灵活运用.

例 6-9 （选择题）设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则（　）

(A) $X+Y$ 服从正态分布；　　(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布； (D) X^2/Y^2 服从 F 分布.

解 应选(C).

分析 本题是 2002 年试题. 由题意，$X^2\sim\chi^2(1)$，$Y^2\sim\chi^2(1)$. 由于 X,Y 并不一定相互独立，因此(A)，(B)，(D)均不一定成立，例如取 $Y=-X$，那么，$X+Y=0$，$X^2+Y^2=2X^2$，$X^2/Y^2=1$，此时(A)，(B)和(D)均不成立.

例 6-10 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$的简单样本，$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$，则当 a,b 取何值时 X 服从 χ^2 分布？并指出其自由度.

解 由于 X_1-2X_2，$3X_3-4X_4$ 均服从正态分布，且

$$E(X_1-2X_2)=0,D(X_1-2X_2)=D(X_1)+4D(X_2)=5\times 2^2=20.$$

$$E(3X_3-4X_4)=0,D(3X_3-4X_4)=9D(X_3)+16D(X_4)=25\times 2^2=100.$$

由此得

$$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1),\ \frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)$$

由 X_1-2X_2 与 $3X_3-4X_4$ 相互独立，所以，由 χ^2 分布定义

$$\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}\sim\chi^2(2).$$

从而，当 $a=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{100}$时 $X\sim\chi^2(2)$.

分析 本题是 1998 年试题. 本题的解法与例 6-6 是一样的.

例 6-11 从正态总体 $N(3.4,6^2)$中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间$(1.4,5.4)$内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大？

解 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $N(3.4,6^2)$的样本，样本均值为 $\overline{X}$. 由于$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-3.4)}{6}\sim N(0,1)$，因此

$$P(1.4<\overline{X}<5.4)=P\left(-\frac{2\sqrt{n}}{6}<\sqrt{n}\frac{(\overline{X}-3.4)}{6}<\frac{2\sqrt{n}}{6}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{6}\right)-\Phi\left(-\frac{2\sqrt{n}}{6}\right)=2\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{6}\right)-1.$$

由题意

$$2\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{6}\right)-1\geqslant 0.95,$$

即

$$\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{6}\right)\geqslant 0.975.$$

由于 $\Phi(1.96)=0.975$，所以

$$\frac{2\sqrt{n}}{6}\geqslant 1.96.$$

解得 $n\geqslant 34.57$，所以，n 至少应取 35.

分析 本题是 1998 年试题. 本题中样本容量 n 为正整数，因此，最后答案应取满足条件 $n\geqslant 34.57$ 的最小整数，即取 n 为 35.

四、小 结

在本章中，数理统计的名词仅仅是表象，实质仍是概率论中随机变量的分布与数字特征. “设 X_1,X_2，

$\cdots, X_n$ **是取自某个总体的一个样本”蕴含了“**$X_1, \cdots, X_n$ **是独立同(总体)分布的随机变量”,由此推得** $E(X_i)=E(X), D(X_i)=D(X), i=1,2,\cdots,n$. **对正态总体下常用统计量的分布的有关结论在以后的内容中常会出现,读者应熟练掌握这些结论.**

第七章　参数估计

参数估计就是利用样本来估计总体分布中的未知参数.参数估计有两种形式:点估计(用某个实数作估计)与区间估计(用某个区间作估计).

一、复习与考试要求

(1) 理解点估计的概念.
(2) 掌握矩估计法(一阶、二阶)和极大似然估计法.
(3) 了解估计量的评选标准(无偏性、有效性和一致性).
(4) 理解区间估计的概念.
(5) 会求单个正态总体的均值和方差的置信区间.
(6) 会求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间.

二、基本概念与理论

1. 点估计的统计意义

假定要利用样本 $X_1,\cdots,X_n$ 来估计总体分布中的未知参数 θ.要求 θ 的点估计为 $\hat{\theta}$,即是构造一个统计量 $h(X_1,\cdots,X_n)=\hat{\theta}$,称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量.在抽样后,称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计值.两者都可以简称为 θ 的估计.

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量,那么 $g(\hat{\theta})$便是 $g(\theta)$的估计量.

2. 矩估计法与极大似然估计法

(1) 矩估计量　设总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)=\alpha_k,k=1,2,\cdots$.如果未知参数 $\theta=\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$,那么 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\varphi(A_1,\cdots,A_m)$,其中 $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$ 是样本的 k 阶原点矩.只要掌握 $m=1,2$ 的情形.

定理　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$,其中,μ 与 σ^2 均未知,那么,$\overline{X}$ 是 μ 的矩估计量,S_n^2 是 σ^2 的矩估计量,S_n 是 σ 的矩估计量.

(2) 极大似然估计量　设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合密度函数(或联合分布律)为 $f^*(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$,其中 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 是总体分布的 k 个未知参数.记

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=f^*(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

并称它为似然函数.$(\theta_1,\cdots,\theta_k)$的极大似然估计量$(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k)$满足

$$L(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k)=\max_{(\theta_1,\cdots,\theta_k)}L(\theta_1,\cdots,\theta_k).$$

只要掌握 $k=1,2$ 的情形.

求极大似然估计量的常用方法是求解似然方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=0\\ \cdots\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_k}\ln L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=0.\end{cases}$$

上述方程组的解是样本$(x_1,\cdots,x_n)$的函数,即得 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的极大似然估计量.

3. 估计量的评选标准

(1) 无偏性　$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量的充分必要条件为

$$E(\hat{\theta})=\theta.$$

定理 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$. 那么，$\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量，S^2 是 σ^2 的无偏估计量；一般地 S_n^2 不是 σ^2 的无偏估计量，S_n 与 S 不是 σ 的无偏估计量.

(2) **有效性** 如果 $\hat{\theta}^*$ 与 $\hat{\theta}$ 都是 θ 的无偏估计量，且

$$D(\hat{\theta}^*)<D(\hat{\theta}),$$

那么称 $\hat{\theta}^*$ 比 $\hat{\theta}$ 有效.

(3) **一致性(相合性)** 如果 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，且

$$\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta,\quad n\to\infty,$$

那么称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致(或相合)估计量.

定理 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$. 那么，$\overline{X}$ 是 μ 的一致估计量；S^2 与 S_n^2 都是 σ^2 的一致估计量；S 与 S_n 都是 σ 的一致估计量.

定理 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量. 那么，当 $D(\hat{\theta})\to 0$ 时，$\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计量.

4. 区间估计的统计意义

假定要利用样本 $X_1,\cdots,X_n$ 来估计总体分布中的未知参数 θ. 要求 θ 的区间估计为 $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$，即是构造两个统计量 $h_1(X_1,\cdots,X_n)=\underline{\theta}$，$h_2(X_1,\cdots,X_n)=\overline{\theta}$.

置信区间是区间估计的一种常用形式. 置信水平(或置信度) $1-\alpha$ 下的置信区间 $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ 必定满足

$$P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta})\geqslant 1-\alpha$$

其中，$\underline{\theta}$ 称为置信下限，$\overline{\theta}$ 称为置信上限.

在置信水平 $1-\alpha$ 下求未知参数 θ 的置信区间的一般步骤如下：

(1) 求出未知参数 θ 的一个较优的点估计 $\hat{\theta}$. 我们建议尽可能使用 θ 的极大似然估计；

(2) 以 $\hat{\theta}$ 为基础，构造一个随机变量

$$J=J(X_1,\cdots,X_n;\theta),$$

它必须包含，也只能包含所要估计的未知参数 θ. 要求 J 的分位数能通过查表或计算得到具体数值；

(3) 设 J 的 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数为 a，$1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数为 b，即

$$P(a\leqslant J\leqslant b)=1-\alpha;$$

(4) 把不等式"$a\leqslant J\leqslant b$"作等价变形，使它成为"$\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta}$"，这个 $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ 便为所求的置信区间.

如果在置信水平 $1-\alpha$ 下 θ 的置信区间为 $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$，那么，当 $g(\theta)$ 是 θ 的单调增加函数时，$[g(\underline{\theta}),g(\overline{\theta})]$ 便是在置信水平 $1-\alpha$ 下 $g(\theta)$ 的置信区间.

5. 单个正态总体

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本；取置信水平为 $1-\alpha$.

(1) 当 σ^2 已知时，μ 的置信区间的置信上、下限分别是

$$\overline{X}\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

(2) 当 μ 已知时，σ^2 的置信区间是

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right].$$

(3) **当 μ 与 σ^2 均未知时，μ 的置信区间的置信上、下限分别是**

$$\overline{X}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}};$$

σ^2 **的置信区间是**

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].$$

6. 两个正态总体

设 $X_1,\cdots,X_m$ 是取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一个样本，$Y_1,\cdots,Y_n$ 是取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一个样本；取置信水平为 $1-\alpha$.

(1) **当 σ_1^2,σ_2^2 已知时，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间的置信上、下限分别是**

$$(\overline{X}-\overline{Y})\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}};$$

(2) **当 σ_1,σ_2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，$\mu_1-\mu_2$ 的置信上、下限分别是**

$$(\overline{X}-\overline{Y})\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}};$$

(3) **当 μ_1,μ_2 已知时，$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间是**

$$\left[\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)},\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)}\right];$$

(4) **当 μ_1,μ_2 均未知时，$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间是**

$$\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\quad \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right].$$

三、例题分析

例 7-1　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本. 在正态总体的三种类型下，分别求出未知参数 μ,σ^2 的矩估计量与极大似然估计量，并讨论它们的无偏性.

解　由前述定理知道，在正态总体的三种类型下，μ 的矩估计量都是 $\overline{X}$，且是无偏估计量；当 μ 未知时，σ^2 的矩估计量是 S_n^2，且不是无偏估计量.

样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合密度函数

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\right]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}.$$

当 μ 未知但 σ^2 已知时，似然函数

$$L(\mu)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\},$$

$$\ln L(\mu)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

由似然方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\ln L(\mu)=0$ 解出 $\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$. 因此，$\mu$ 的极大似然估计量 $\hat{\mu}=\overline{X}$，且是 μ 的无偏估计量. 当 σ^2

未知但 μ 已知时，似然函数

$$L(\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\},$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

由似然方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma^2}\ln L(\sigma^2)=0$ 解出 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$. 因此，$\sigma^2$ 的极大似然估计量

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

由于

$$\begin{aligned}E(\hat{\sigma}^2)&=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{1}{n}\cdot n\sigma^2=\sigma^2,\end{aligned}$$

因此，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu^2)$ 是 σ^2 的无偏估计量. 当 μ 与 σ^2 均未知时，似然函数

$$L(\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

由似然方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2)=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0\end{cases}$$

解出 $\mu=\bar{x}$，$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$. 因此，$\mu$ 的极大似然估计量 $\hat{\mu}=\overline{X}$，且是 μ 的无偏估计量；σ^2 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}^2=S_n^2$，且不是 σ^2 的无偏估计量.

分析 本题的结论要熟记，它们是讨论置信区间与假设检验的基础. 另外，三种不同类型下的似然函数的本质区别在于自变量的不同，应当加以注意.

例 7-2 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$X\sim B(1,p)$，其中 p 未知. 试求 p 的矩估计量与极大似然估计量，并讨论它们的无偏性.

解 由于 $E(X)=p$，因此 p 的矩估计量是 $\overline{X}$，且是 p 的无偏估计量.

总体 $X\sim B(1,p)$，它的分布律可以表达成

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1.$$

似然函数

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left[p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right]=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p).$$

由似然方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=0$ 解出 $p=\bar{x}$. 因此，p 的极大似然估计量仍是 $\overline{X}$，且是 p 的无偏估计量.

分析 本题以解析形式写出 $B(1,p)$ 的分布律，这是求极大似然估计量的关键.

例 7-3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

其中 θ 未知. 试求 θ 的矩估计量与极大似然估计量.

解　由于

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^\theta \mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

因此,从方程

$$\overline{X}=\frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}$$

解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

$0<x_i<1, i=1,\cdots,n$ 时,似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n[(\theta+1)x_i{}^\theta]=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^n x_i)^\theta,$$

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

由似然方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=0$ 解出 $\theta=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^n \ln x_i}$. 因此,$\theta$ 的极大似然估计量是 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^n \ln X_i}$.

分析　本题是 1997 年试题. 由于这是第一次出现数理统计试题,因此考查的要求较低,没有涉及无偏性之类的概念.

例 7-4　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,$X\sim P(\lambda)$,其中 λ 未知. 试证:

(1) 当常数 $c_1,\cdots,c_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^n c_i=1$ 时,$\sum\limits_{i=1}^n c_iX_i$ 是 λ 的无偏估计量;

(2) 在 λ 的所有形如 $\sum\limits_{i=1}^n c_iX_i$ 的无偏估计量中,$\overline{X}$ 的方差最小(即 $\overline{X}$ 最有效),并求出最小值 $D(\overline{X})$.

证　(1) 由于 $\sum\limits_{i=1}^n c_i=1$,$E(X)=\lambda$,因此

$$E(\sum_{i=1}^n c_iX_i)=\sum_{i=1}^n c_iE(X_i)=\sum_{i=1}^n c_i\lambda=\lambda,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^n c_iX_i$ 是 λ 的无偏估计量;

(2) 由于 $D(X)=\lambda$,因此

$$D(\sum_{i=1}^n c_iX_i)=\sum_{i=1}^n c_i^2D(X_i)=\sum_{i=1}^n c_i^2\lambda.$$

用高等数学中的拉格朗日乘数法可以得到:在约束条件 $\sum\limits_{i=1}^n c_i=1$ 下,n 元函数

$$f(c_1,\cdots,c_n)=\sum_{i=1}^n c_i^2$$

在 $c_1=\cdots=c_n=\dfrac{1}{n}$ 时达到最小值. 这表明 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}X_1+\cdots+\dfrac{1}{n}X_n$ 的方差最小,且 $D(\overline{X})=\dfrac{\lambda}{n}$.

分析　比较无偏估计量的有效性等价于找出方差最小. 有时候,这类问题与高等数学中求最小值可以联系起来.

例 7-5　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,$X\sim R(0,\theta)$,其中 θ 未知,$\theta>0$. 试求 θ 的矩估计量与极大似然估计量,并讨论它们的无偏性与一致性.

解　由于

$$E(X)=\int_0^\theta x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}.$$

因此，从方程

$$\overline{X}=\frac{\hat{\theta}}{2}$$

解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$. 由 $E(\hat{\theta})=2E(\overline{X})=2\times\frac{\theta}{2}=\theta$ 知道，$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量. 由

$$D(\hat{\theta})=4D(\overline{X})=4\ \frac{1}{n}D(X)=\frac{4}{n}\cdot\frac{(\theta-0)^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}\to 0$$

知道，$\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计量。

似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^{-n}, & 0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\theta;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

一方面 θ 越小，$L(\theta)$ 越大；另一方面，θ 不能太小，它要满足 $\theta\geqslant x_i$，$i=1,\cdots,n$. 因此，当 $\theta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$ 时，$L(\theta)$ 达最大值，即 θ 的极大似然估计量是 $\hat{\theta}^*=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$.

当 $0<x<\theta$ 时，总体 X 的分布函数 $f(x)=\frac{x}{\theta}$. 由第三章给出的随机变量函数的分布知道，$\hat{\theta}^*=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 的分布函数

$$F_{\hat{\theta}^*}(u)=\begin{cases}0, & u<0;\\ \frac{u^n}{\theta^n}, & 0\leqslant u<\theta;\\ 1, & u\geqslant\theta.\end{cases}$$

于是，$\hat{\theta}^*$ 的密度函数

$$f_{\hat{\theta}^*}(u)=\begin{cases}\frac{nu^{n-1}}{\theta^n}, & 0<u<\theta;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

由此算得

$$E(\hat{\theta}^*)=\int_{-\infty}^{\infty}uf_{\hat{\theta}^*}(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\theta}u\cdot\frac{nu^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}u=\int_0^{\theta}\frac{n}{\theta^n}\cdot u^n\,\mathrm{d}u=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta,$$

这表明 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}^*$ 不是 θ 的无偏估计量. 另外，

$$D(\hat{\theta}^*)=E(\hat{\theta}^{*2})-[E(\hat{\theta}^*)]^2=\int_0^{\theta}u^2\ \frac{nu^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}u-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2$$

$$=\frac{n}{n+2}\ \theta^2-\frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2.$$

现在来证明 $\hat{\theta}^*$ 是 θ 的一致估计量，即证明 $\hat{\theta}^*\xrightarrow{P}\theta$. 由 $E(\hat{\theta}^*)=\frac{n}{n+1}\theta$ 知道，$\frac{n+1}{n}\hat{\theta}^*$ 是 θ 的无偏估计量，且

$$D\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}^*\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}D(\hat{\theta}^*)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}\to 0,$$

这表明 $\frac{n+1}{n}\hat{\theta}^*\xrightarrow{P}\theta$. 由 $\frac{n+1}{n}\to 1$ 推得 $\hat{\theta}^*\xrightarrow{P}\theta$.

分析 本题中极大似然估计量的部分有一定的难度，其方法也有一定的特殊性. 读者若感困难较大，不必纠缠于此.

例 7-6 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中获取四个数据 x_1,x_2,x_3,x_4，其中，μ 与 σ^2 均未知。已知

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 24, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 147.$$

在置信水平 90% 下，试求 μ 与 σ 的置信区间.

解　本题中 $n=4$，$\alpha=0.10$. 由例 6-1 所得公式算得

$$\bar{x}=\frac{1}{4}\times 24=6, \quad \sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=147-\frac{1}{4}\times 24^2=3,$$

$$S^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=1, \quad S=1.$$

于是，μ 的 90% 置信区间的上、下限分别为

$$\bar{x}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=6\pm t_{0.95}(3)\frac{1}{\sqrt{4}}=6\pm\frac{1}{2}t_{0.95}(3)=6\pm\frac{1}{2}\times 2.3534.$$

由此算出 μ 的 90% 双侧置信区间为 $[4.8233, 7.1767]$. 另外，由 σ^2 的 90% 置信区间 $[3/\chi^2_{0.95}(3),\ 3/\chi^2_{0.05}(3)]$ 推得 σ 的 90% 置信区间为

$$\left[\sqrt{\frac{3}{\chi^2_{0.95}(3)}},\ \sqrt{\frac{3}{\chi^2_{0.05}(3)}}\right]=\left[\sqrt{\frac{3}{6.815}},\ \sqrt{\frac{3}{0.352}}\right]=[0.66,\ 2.92]$$

分析　数理统计问题可以分成抽样前和抽样后两大类，本题属于后者，即样本通过具体数据来表达. 解这类题目的特点是用数据（抽样前）代公式作具体计算.

例 7-7　设 $X_1,\cdots,X_{2n}$ 是取自正态总体 $N(\mu_1, 18)$ 的一个样本，$Y_1,\cdots,Y_n$ 是取自正态总体 $N(\mu_2, 16)$ 的一个样本. 要使 $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 置信区间长度不超过 l，问 n 至少要取多大？

解　本题中 $m=2n$，$\alpha=0.05$. $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 置信区间的上、下限分别是

$$(\overline{X}-\overline{Y})\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}=(\overline{X}-\overline{Y})\pm u_{0.975}\sqrt{\frac{18}{2n}+\frac{16}{n}}$$

由置信区间的长度

$$\overline{\theta}-\underline{\theta}=2u_{0.975}\sqrt{\frac{18}{2n}+\frac{16}{n}}=\frac{10}{\sqrt{n}}u_{0.975}\leqslant l$$

解得 $n\geqslant\frac{100}{l^2}u_{0.975}^2$（取最小整数）.

分析　置信区间的长度是一个很有意义的概念. 从直观上看，长度太大的置信区间是没有意义的.

例 7-8　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中，μ 与 σ^2 均未知，给定置信水平 $1-\alpha$.

(1) 试求 $\underline{\mu}$，使得 $P(\mu\geqslant\underline{\mu})=1-\alpha$；

(2) 试求统计量 $\overline{\sigma^2}$，使得 $P(\sigma^2\leqslant\overline{\sigma^2})=1-\alpha$.

解　仿照求置信区间的一般步骤求解.

(1) μ 的极大似然估计是 $\overline{X}$，构造随机变量

$$J=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sim t(n-1).$$

由

$$P(J\leqslant t_{1-\alpha}(n-1))=P\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S}\leqslant t_{1-\alpha}(n-1)\right)=1-\alpha$$

得到

$$P\left(\mu\geqslant\overline{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha,$$

即所求的 $\underline{\mu}=\overline{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$.

（2）σ^2 的极大似然估计是 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 构造随机变量：

$$J=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

由
$$P(J\geqslant\chi_\alpha^2(n-1))=P\left(\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\geqslant\chi_\alpha^2(n-1)\right)=1-\alpha$$

得到

$$P\left(\sigma^2\leqslant\frac{nS_n^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}\right)=1-\alpha,$$

即所求的$\overline{\sigma^2}=nS_n^2/\chi_\alpha^2(n-1)$.

分析 本题是两种特殊类型的置信区间：$[\underline{\theta},+\infty)$与$(-\infty,\overline{\theta}]$. 但解题方法基本不变，仅在确定分位数时要注意区别.

例 7-9 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x); & 0<x<\theta;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

解 （1）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$.

由此得到

$$\theta=2E(X).$$

所以 θ 的矩估计量为
$$\hat{\theta}=2\overline{X}.$$

（2）由于

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{6\theta^2}{20}.$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{6\theta^2}{20}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{20},$$

所以，$\hat{\theta}$ 的方差为

$$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}.$$

分析 本题是 1999 年试题. 通常参数的矩估计量并不惟一. 如本题中 $\theta^2=\frac{10}{3}E(X^2)$，所以 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{10}{3}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)}$ 也是 θ 的一个矩估计量. 一般情况下先考虑从 EX 的表达式建立 θ 的矩估计量.

例 7-10 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

其中，$\theta>0$ 为未知参数. 又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

解 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^n\mathrm{e}^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i>\theta,i=1,\cdots,n;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2^n e^{-2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot e^{2n\theta}, & x_{(1)}>\theta; \\ 0, & \text{其余}. \end{cases}$$

这里 $x_{(1)}=\min(x_1,\cdots,x_n)$.

要使 $L(\theta)$ 达到最大，应在条件“$x_{(1)}>\theta$”下使 θ 尽可能大. 因此，当 $\hat{\theta}=x_{(1)}$ 时 $L(\hat{\theta})=\sup\limits_{\theta}L(\theta)$. 即 $x_{(1)}$ 是 θ 的最大似然估计值.

分析　本题是 2000 年试题. 由于 $L(\theta)$ 在 $\theta=x_{(1)}$ 处不连续，因此不能对 $L(\theta)$ 求导. 本题中求 θ 的极大似然估计的方法与例 7-5 中的方法类似.

例 7-11　设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p_r	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中，$\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值：

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解　由于 $EX=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)$
$=3-4\theta$,

因此，由 $\theta=\dfrac{1}{4}(3-EX)$ 得到 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\overline{X})$$

θ 的矩估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\bar{x})=\frac{1}{4}\left[3-\frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3)\right]=\frac{1}{4}.$$

再求 θ 的最大似然估计值. 先写出似然函数

$$\begin{aligned} L(\theta)&=P(X_1=3,X_2=1,X_3=3,X_4=0,X_5=3,X_6=1,X_7=2,X_8=3) \\ &=P(X_1=3)P(X_2=1)P(X_3=3)P(X_4=0)P(X_5=3)P(X_6=1)\cdot P(X_7=2)P(X_8=3) \\ &=(1-2\theta)^4\cdot(2\theta(1-\theta))^2\cdot(\theta^2)\cdot\theta^2=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4. \end{aligned}$$

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得　$\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$.

由于 $\theta=\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}$，因此，取 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$，即 θ 的极大似然估计值为 $\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

分析　本题是 2002 年试题. 本题中求极大似然估计值部分很有新意. 本题的关键在于写出似然函数. 在写出似然函数过程中用到了独立性和同分布性，即样本为简单随机样本. $L(\theta)=P(X_1=3)P(X_2=1)P(X_3=3)P(X_4=0)\cdot P(X_5=3)P(X_6=1)\cdot P(X_7=2)P(X_8=3)=(P(X=3))^4\cdot(P(X=1))^2\cdot P(X=0)\cdot P(X=2)=(1-2\theta)^4(2\theta(1-\theta))^2\cdot\theta^2\cdot\theta^2$. 通过解本题读者对最大似然估计方法的原理一定有了进一步的了解.

例 7-12　设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta; \\ 0, & x\leqslant\theta. \end{cases}$$

其中，$\theta>0$ 是未知参数，从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

解 (1) $x\leqslant\theta$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$；

$$x>\theta \text{ 时}, F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{\theta}^{x}2\mathrm{e}^{-2(t-\theta)}\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}.$$

即
$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

(2)
$$\begin{aligned}F_{\hat{\theta}}(x)&=P(\hat{\theta}\leqslant x)=P(X_{(1)}\leqslant x)\\&=1-P(X_{(1)}>x)=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}\\&=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}=1-(1-F(x))^n\\&=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}\end{aligned}$$

(3) $\hat{\theta}$ 的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=F'_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

$$E\hat{\theta}=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}2nx\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+\frac{1}{2n}\neq 0.$$

因此，$\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量. 即 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

分析 本题是 2003 年试题. 由例 7-10 可知 $\hat{\theta}=X_{(1)}$ 是 θ 的最大似然估计量. 本题表明：θ 的最大似然估计量不是 θ 的无偏估计量. 但 $\hat{\theta}$ 经修正后可以成为 θ 的无偏估计量. 只需记 $\hat{\theta}^*=X_{(1)}-\dfrac{1}{2n}$，则 $\hat{\theta}^*$ 是 θ 的无偏估计量. 一般地，若 $E\hat{\theta}=a\theta+b(a\neq 0,a,b$ 为常数$)$，则 $\hat{\theta}^*=\dfrac{\hat{\theta}-b}{a}$ 是 θ 的无偏估计量.

例 7-13 假设 0.50，1.25，0.80，2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(1) 求 X 的数学期望 EX（记 EX 为 b）；

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 由于 $Y=\ln X$，因此，$\ln 0.50,\ln 1.25,\ln 0.8,\ln 2.00$ 可视为取自总体 Y 的样本值，而 $r\sim N(\mu,1)$，从而 $\bar{y}=\dfrac{1}{4}(\ln 0.50+\ln 1.25+\ln 0.80+\ln 2.00)=0$

$$\begin{aligned}(1)\ EX&=E\mathrm{e}^{Y}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{y}f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2-(2+2\mu)y+\mu^2}{2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1+2\mu}{2}}\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\mu}.\end{aligned}$$

这里用到 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}$ 是对应于正态分布 $N(\mu+1,1)$ 的密度函数，所以它在$(-\infty,+\infty)$上积分为 1.

（2）由于 $Y\sim N(\mu,1)$，故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间的上、下限为

$$\bar{y}\pm\frac{1}{\sqrt{n}}u_{0.975}=0\pm\frac{1}{\sqrt{4}}\times 1.96=\pm 0.98,$$

所以 μ 的置信区间为$[-0.98,0.98]$.

（3）由于 $e^{\frac{1}{2}+\mu}\mu$ 的严格单增函数，所以

$$P\left(\bar{Y}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\leqslant\mu\leqslant\bar{Y}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=P\left(e^{\frac{1}{2}+\bar{Y}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\leqslant e^{\frac{1}{2}+\mu}\leqslant e^{\frac{1}{2}+\bar{Y}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)=1-\alpha.$$

从而 $b=e^{\frac{1}{2}+\mu}$的置信度为 0.95 的置信区间为

$$[e^{\frac{1}{2}-0.98},e^{\frac{1}{2}+0.98}]=[e^{-0.48},e^{1.48}]=[0.6188,4.3929].$$

分析　本题是 2000 年试题. 本题涉及两个总体间的变换.

四、小　结

本章是数理统计部分的重点，读者尤其要熟练地掌握求点估计的两种方法以及讨论所求出的点估计的无偏性. 对正态总体参数的置信区间的求法也应熟练地掌握.

第八章　假设检验

假设检验就是利用样本来检验关于总体分布的某个假设.假设有两种形式:涉及总体分布中的未知参数与未知的总体分布本身.读者应主要掌握正态总体分布中的未知参数的假设检验方法.

一、复习与考试要求

(1) 理解显著性检验的基本思想,掌握假设检验的基本步骤,了解假设检验可能产生的两类错误.

(2) 了解单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验.

二、基本概念与理论

1. 假设检验的统计意义

样本$(X_1,\cdots,X_n)$的取值范围称为样本空间.对于取自正态总体的样本,样本空间是 n 维欧氏空间 R^n.

原假设(或零假设)H_0 是针对未知总体分布的某个陈述.它可以是关于总体分布中的未知参数的某个陈述,例如 $\theta=\theta_0$;也可以是关于未知的总体分布本身的某个陈述,例如总体 X 服从正态分布.备择假设(或对立假设)H_1 常常是原假设 H_0 的否定命题.

求解一个假设检验问题,其结果分成两种类型.

(1) 抽样前　求出一个拒绝域 W_1.它是样本空间的一个子集,通常用一个或两个不等式来表示.拒绝域 W_1 的含义是:当$(x_1,\cdots,x_n)\in W_1$ 时拒绝 H_0(即认为命题 H_0 不成立);当$(x_1,\cdots,x_n)\notin W_1$ 时接受 H_0(即可以认为命题 H_0 成立).

(2) 抽样后　在求出拒绝域 W_1 的基础上,用数据检查样本是否落在 W_1 中,以得出最终结论究竟是"拒绝 H_0"还是"接受 H_0".

2. 假设检验的两类错误

利用样本 $X_1,\cdots,X_n$ 检验原假设 H_0 是否成立最终会面临犯两类错误的风险,具体内容见表 8-1:

表 8-1

检验带来的后果		根据样本观测值所得的结论:当$(x_1,\cdots,x_n)\notin W_1$ 接受 H_0	根据样本观测值所得的结论:当$(x_1,\cdots,x_n)\in W_1$ 拒绝 H_0
总体分布的实际情况(未知)	H_0 成立	判断正确	犯第Ⅰ类错误
	H_0 不成立	犯第Ⅱ类错误	判断正确

3. 显著性检验的统计思想

显著性检验要求控制犯第Ⅰ类错误的概率不超过显著性水平 α,即要求所求出的拒绝域 W_1 满足:

$$P((X_1,\cdots,X_n)\in W_1)\leqslant\alpha,\quad 当\ H_0\ 成立时.$$

"拒绝 H_0"也称为"有显著性结果";"接受 H_0"也称为"无显著性结果".

在显著性水平 α 下求拒绝域 W_1 的一般步骤如下:

(1) 求出 H_0 所涉及的未知参数 θ 的一个较优的点估计 $\hat{\theta}$.我们建议尽可能使用 θ 的极大似然估计;

(2) 以 $\hat{\theta}$ 为基础,构造一个检验统计量

$$T=t(X_1,\cdots,X_n).$$

要求当 H_0 成立($\theta=\theta_0$)时 T 的分布已知,从而 T 的分位数(称为临界值)能通过查表或计算得到具体数值;

(3) 利用检验统计量 T 与临界值构造一个或两个不等式,以确定拒绝域 W_1 的形状,W_1 应满足显著性水平 α 的要求.

4. 单个正态总体

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本;取显著性水平为 α.

(1) $H_0: \mu=\mu_0 \quad (H_1: \mu\neq\mu_0)$

当 σ^2 已知时,拒绝域

$$W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\,|u|=\sqrt{n}\,\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}>u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

称它为 u 检验法;

当 σ^2 未知时,拒绝域

$$W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\,|t|=\sqrt{n}\,\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{S}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\},$$

称它为 t 检验法;

(2) $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2 \quad (H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2)$

当 μ 已知时,拒绝域

$$W_1=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\text{ 或 }\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\},$$

其中 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$;

当 μ 未知时,拒绝域

$$W_1=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{ 或 }\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\},$$

其中 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\dfrac{ns_n^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$. 这两个检验都称为 χ^2 检验法.

5. 两个正态总体

设 $X_1,\cdots,X_m$ 是取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一个样本,$Y_1\cdots,Y_n$ 是取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一个样本;取显著性水平为 α.

(1) $H_0: \mu_1=\mu_2 \quad (H_1: \mu_1\neq\mu_2)$

当 σ_1^2,σ_2^2 已知时,拒绝域

$$W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)\,\middle|\,|u|=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}>u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

称它为 u 检验法;

当 σ_1^2,σ_2^2 未知,但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时,拒绝域

$$W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)\,\middle|\,|t|=\frac{|\bar{x}+\bar{y}|}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\},$$

称它为 t 检验法.

(2) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2 (H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2)$

当 μ_1,μ_2 已知时,拒绝域

$$W_1=\{(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)\,|\,f<F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)\text{ 或 }f>F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)\},$$

其中 $f=n\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2/m\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2$;

当 μ_1,μ_2 均未知时,拒绝域

$$W_1=\{(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)\,|\,f<F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\text{ 或 }f>F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\},$$

其中，$f=s_1^2/s_2^2$，这两个检验都称为 F 检验法.

三、例题分析

例 8-1 在假设检验问题中，在样本观测值的基础上试判断：

(1) 如果最终结果是拒绝原假设 H_0，可能犯何类错误？

(2) 如果最终结果是接受原假设 H_0，可能犯何类错误？

解 (1) 当实际情况为 H_0 成立时，要犯第Ⅰ类错误；当实际情况为 H_0 不成立时，判断正确，即不犯错误.

(2) 当实际情况为 H_0 成立时，判断正确，即不犯错误；当实际情况为 H_0 不成立时，要犯第Ⅱ类错误.

分析 显著性检验仅仅控制了犯第Ⅰ类错误的概率不超过显著性水平 α，因而检验结果为“拒绝 H_0”时比较可靠. 当检验结果为“接受 H_0”时，由于不知道犯第Ⅱ类错误的概率究竟有多大，因此结论很不可信.

例 8-2 从两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中分别抽取样本 $(X_1,\cdots,X_m)$，$(Y_1,\cdots,Y_n)$，其中，μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2 均未知. 假定 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$. 在显著性水平 α 下，要检验

$$H_0: \mu_1=\mu_2+\delta \quad (H_1: \mu_1\neq\mu_2+\delta),$$

其中，δ 是已知常数. 试求拒绝域 W_1.

解 记 $\theta=\mu_1-\mu_2$. 现在要检验

$$H_0: \theta=\delta \quad (H_1: \theta\neq\delta).$$

θ 的极大似然估计是 $\overline{X}-\overline{Y}$. 构造检验统计量

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

当 H_0 成立时，$T\sim t(m+n-2)$. 因此拒绝域

$$W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)\,\middle|\,|t|=\frac{|(\bar{x}-\bar{y})-\delta|}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}.$$

分析 本题中取 $\delta=0$ 便得检验 $H_0: \mu_1=\mu_2$ 的拒绝域. 类似地，在取消本题关于“等方差”的假定时，在显著性水平 α 下，检验

$$H_0: \sigma_1^2=\delta\sigma_2^2 \quad (H_1: \sigma_1^2\neq\delta\sigma_2^2)$$

的拒绝域为

$$W_1=\{(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)\mid f<F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$$
$$\text{或 } f>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\},$$

其中，$f=\delta\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$.

例 8-3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中，μ 与 σ^2 均未知，在显著性水平 α 下，试求下列两个假设检验问题的拒绝域.

(1) $H_0: \mu=\mu_0 \quad (H_1: \mu>\mu_0)$；

(2) $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2 \quad (H_1: \sigma^2<\sigma_0^2)$.

解 仿照求显著性检验的拒绝域的一般步骤求解.

(1) μ 的极大似然估计是 $\overline{X}$. 构造检验统计量

$$T=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}$$

当 H_0 成立时，$T\sim t(n-1)$，由

$$P(T>t_{1-\alpha}(n-1))=\alpha$$

推得拒绝域

$$W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\mid t=\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}>t_{1-\alpha}(n-1)\right\};$$

(2) σ^2 的极大似然估计是 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 构造检验统计量

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

当 H_0 成立时, $\chi^2\sim\chi^2(n-1)$. 由

$$P(\chi^2<\chi_\alpha^2(n-1))=\alpha$$

推得拒绝域

$$W_1=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\chi^2<\chi_\alpha^2(n-1)\},$$

其中 $\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2}=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$.

分析　要注意本题中拒绝域的形状(从而临界值)已有改变,这是因为备择假设 H_1 有了变动。另外,如果本题中原假设 H_0 改成"$\mu\leqslant\mu_0,\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$",那么拒绝域仍保持不变.

例 8-4　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,4)$的一个样本. 在显著性水平 α 下检验

$$H_0:\mu=0\quad(H_1:\mu\neq0),$$

我们取拒绝域 $W_1=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\sqrt{n}\,\frac{|\bar{x}|}{2}>u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$. 当实际情况为 $\mu=1$(即总体 $X\sim N(1,4)$)时,试求犯第Ⅱ类错误的概率.

解　当实际情况为 H_0 不成立,而最终结果为接受 H_0 时要犯第Ⅱ类错误,其概率为 $P((X_1,\cdots,X_n)\notin W_1)$. 现在实际情况 $\mu=1$,表示 H_0 不成立. 当 $X\sim N(1,4)$时, $\overline{X}\sim N\left(1,\frac{4}{n}\right)$. 由正态分布的概率计算公式得到,犯第Ⅱ类错误的概率为

$$P((X_1,\cdots,X_n)\notin W_1)=P\left(\sqrt{n}\,\frac{|\overline{X}|}{2}\leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=P\left(-\frac{2u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\leqslant\overline{X}\leqslant\frac{2u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\frac{2u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{2/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{-\frac{2u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{2/\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$=\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right]-\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

分析　犯第Ⅱ类错误的概率一般不易计算. 本题目的是让读者通过一个具体例子来加深对显著性检验的理解,因为在显著性检验中我们没有考虑犯第Ⅱ类错误的概率. 例如,在本题中,取 $n=4,\alpha=0.05$. 通过查表知道, $u_{0.975}=1.96$,犯第Ⅱ类错误的概率为

$$\Phi(1+1.96)-\Phi(1-1.96)=\Phi(2.96)-\Phi(-0.96)=0.9985-0.1685=0.83.$$

这表明尽管犯第Ⅰ类错误的概率不超过 5%,但犯第Ⅱ类错误的概率高达 83%.

例 8-5　设某次考试的考生成绩服从正态分布,从中随机地抽取 36 位考生的成绩,算得平均成绩为 66.5 分,标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

解　设这次考试考生的成绩为 X, $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 其中, μ,σ^2 均未知. 现要在显著性水平 0.05 下,检验假设:

$$H_0: \mu=70, \ (H_1: \mu\neq 70).$$

$$|t|=\sqrt{n}\frac{|\bar{x}-70|}{s}=\sqrt{36}\frac{|66.5-70|}{15}=1.4,$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(35)=2.0301.$$

由于$|t|=1.4<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=2.0301$,因此,拒绝域条件不成立.从而,在显著性水平 0.05 下,可以认为这次考试考生的平均成绩为 70 分.

分析　本题是 1998 年试题.考生只要能记住拒绝域条件,会代公式来判断拒绝域条件是否成立即可.

四、小　结

假设检验虽然也是数理统计的一个重要内容,但在本科阶段的教学中要求较弱.考生除了记住各种拒绝域的公式外,只需对假设检验的基本概念有一般性的了解.

第九章　综合能力训练

随着概率统计知识的普及，现在对考生综合运用概率统计知识的能力的要求越来越高. 综合运用概率统计知识的能力主要体现在以下几个方面：

(1) 综合运用概率论知识的能力；

(2) 综合运用统计知识的能力；

(3) 综合运用概率论和数理统计知识的能力；

(4) 综合运用概率统计、线性代数和高等数学的能力.

本章结合一些例题来说明如何提高综合能力，希望对读者有所启发和帮助.

一、例题分析

例 9-1　已知随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，并记事件 $A=\{X\geqslant 2\}$，$B=\{X<1\}$. 求 $P(A\cup B)$，$P(A-B)$，$P(B|\overline{A})$.

解　由于 $X\sim P(1)$，因此

$$P(A)=P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}=1-2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.26,$$

$$P(B)=P(X<1)=P(X=0)=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.37.$$

又由于 $AB=\phi$，即 A,B 互不相容，因而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.26+0.37=0.63,$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)=0.26,$$

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(X\leqslant 1,X<1)}{1-P(A)}=\frac{P(X<1)}{1-P(A)}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-(1-2\mathrm{e}^{-1})}=\frac{1}{2}.$$

分析　本题主要考虑综合运用概率论知识的能力. 通过随机变量 X 定义的两个随机事件 A,B 的概率要考生利用 X 的分布来求出，同时要判断出 A,B 互不相容和 $\overline{A}\supset B$. 例 2-1 与本题有些相似之处，可谓异曲同工.

例 9-2　设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的人数，求：

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

解　(1) 记 $Z_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 位乘客中途下车；}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 位乘客中途不下车.}\end{cases}$

则　$Y=Z_1+Z_2+\cdots+Z_X$. 由题意，$Z_1,Z_2,\cdots$ 相互独立且服从相同的分布，$Z_i\sim B(1,p)$，$i=1,2\cdots$

$$\begin{aligned}P(Y=m|X=n)&=P(Z_1+Z_2+\cdots+Z_X=m|X=n)=P(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=m|X=n)\\&=P(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=m).\end{aligned}$$

由二项分布的可加性定理得到 $Z_1+Z_2+\cdots+Z_n\sim B(n,p)$. 因此

$$P(Y=m|X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},m=0,1,2,\cdots,n.$$

(2) 对于 $m=0,1,2,\cdots,n$，有

$$P(X=n,Y=m)=P(Y=m|X=n)P(X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

分析　本题是 2001 年试题. 题目中“中途下车与否相互独立”的含义比较模糊，事实上是指各位乘客中

途下车与否相互独立且各位乘客中途下车与否与起点站上客人数 X 相互独立,即 $Z_1,Z_2,\cdots$ 相互独立,且 X,$Z_1,Z_2,\cdots$,相互独立. 在解题过程中 $P(Z_1+\cdots+Z_n=m|X=n)=P(Z_1+\cdots+Z_n=m)$,用到了"$Z_1+\cdots Z_n$ 与 X 相互独立". 生活经验表明:若起点站上客人数太多,有些人不得不考虑中途下车. 但遗憾的是题目中没有写清楚,而用了比较模糊的说法. 考生对此可以不加理会,毕竟本题只是考查考生综合运用概率论知识的能力.

例 9-3 已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中,甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求:

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解 (1) 记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是次品;}\\ 0, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是合格品.}\end{cases},i=1,2,3$$

由例 1-12 可知,X_1,X_2,X_3 服从相同的分布. X_1 的概率分布律为

X_1	0	1
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,乙箱中次品数为

$$X=X_1+X_2+X_3$$

$$EX=EX_1+EX_2+EX_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

(2) 设 A 表示事件"从乙箱中任取一件产品是次品",由于 $\{X=0\}$,$\{X=1\}$,$\{X=2\}$ 和 $\{X=3\}$ 构成完全事件组,因此,由全概率公式

$$P(A)=\sum_{R=0}^{3}P(A|X=k)P(X=k)=\sum_{k=0}^{3}\frac{k}{6}P(X=k)=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}kP(X=k)$$

$$=\frac{1}{6}EX=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.$$

分析 本题是 2003 年试题. 在 $P(A)$ 的计算中巧妙地利用了(1)中已求得的 EX. 当然,本题也可以用常规的方法求解. 先确定 X 的可能取值为 0,1,2,3. 求出 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{C_3^k C_3^{3-k}}{C_6^3},k=0,1,2,3.$$

即算出分布律

X	0	1	2	3
$P_{r.}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此

$$EX=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}.$$

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P(X=k)P(A|X=k)=\frac{1}{20}\times0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}.$$

例 9-4 假设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且同分布 $P(X_i=0)=0.6$,$P(X_i=1)=0.4$,$i=1,2,3,4$. 求行列式 $X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}$ 的概率分布.

解　记 $Y_1=X_1X_4, Y_2=X_2X_3$，则

$$X=Y_1-Y_2.$$

由于 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布，因此，Y_1 与 Y_2 也独立同分布. Y_1 可能取值为 0,1.

$$P(Y_1=1)=P(X_1=1,X_4=1)=P(X_1=1)P(X_4=1)=0.4\times0.4=0.16,$$

$$P(Y_1=0)=1-P(Y_1=1)=1-0.16=0.84.$$

$X=Y_1-Y_2$ 可能取值为 0,1,−1

$$P(X=-1)=P(Y_1=0,Y_2=1)=P(Y_1=0)P(Y_2=1)=0.84\times0.16=0.1344,$$

$$P(X=1)=P(Y_1=1,Y_2=0)=P(Y_1=1)P(Y_2=0)=0.16\times0.84=0.1344.$$

$$P(X=0)=1-P(X=-1)-P(X=1)=1-2\times0.1344=0.7312.$$

于是 X 的概率分布律为

X	−1	0	1
p_r.	0.1344	0.7312	0.1344

分析　本题是 1994 年试题. 本题要求考生能综合运用概率统计和线性代数的知识. 其中 $Y_1=X_1X_4$ 与 $Y_2=X_2X_3$ 独立同分布是解题的关键.

例 9-5　设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n,n\geqslant2)$ 独立同分布，$EX_{ij}=2$，求行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n}\\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn}\end{vmatrix}$$

的数学期望 EY.

解　由 n 阶行列式的定义

$$Y=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}X_{1i_1}X_{2i_2}\cdot\cdots\cdot X_{ni_n}，\text{其中 } S_n=\{\text{所有 } n \text{ 元排列}\}.$$

因此

$$\begin{aligned}EY&=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}E(X_{1i_1}X_{2i_2}\cdot\cdots\cdot X_{ni_n})\\&=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}EX_{1i_1}EX_{2i_2}\cdot\cdots\cdot EX_{ni_n}\\&=\begin{vmatrix} EX_{11} & EX_{12} & \cdots & EX_{1n}\\ EX_{21} & EX_{22} & \cdots & EX_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ EX_{n1} & EX_{n2} & \cdots & EX_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

分析　本题是 1999 年考题. 本题考查考生综合运用线性代数和概率论知识的能力. 其中，$E(X_{i_1}\cdot\cdots\cdot X_{i_n})=EX_{i_1}\cdot\cdots\cdot EX_{i_n}$ 用到 $X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_n}$ 相互独立.

例 9-6　设随机变量 X 在区间$[-1,2]$上服从均匀分布；随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & \text{若 } X>0;\\ 0, & \text{若 } X=0;\\ -1, & \text{若 } X<0.\end{cases}$$

求 Y 的方差 $D(Y)$.

解　先求出 Y 的分布律. 注意到$\{Y=1\}=\{X>0\}$而 $X\sim R[-1,2]$，X 的密度函数 $f(x)=$

$\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$因此 $P(Y=1)=P(X>0)=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，

$$P(Y=0)=P(X=0)=0,$$

$$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

由此得到 Y 的分布律为

Y	-1	1
$p_r.$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$EY=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

$$EY^2=(-1)^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=1.$$

从而
$$D(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}.$$

分析 本题是 2000 年试题. 本题中 X 是连续型随机变量，Y 是离散型随机变量. Y 由 X 所定义，因此 Y 的分布律可由 X 的分布求得. 本题仍是考查考生综合运用概率论知识的能力.

例 9-7 假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，试求在 100 次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α，并利用泊松分布求出 α 的近似值.（要求小数点后取两位有效数字）.

附表

λ	1	2	3	4	5	6	…
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	…

解 先求出

$$p=P(|X|>19.6)=P\left(\frac{|X|}{10}>1.96\right)=2(1-\Phi(1.96))=2\times0.025=0.05.$$

记 Y 表示在 100 次重复测量中测量误差的绝对值超过 19.6 的次数，则 $Y\sim B(100,p)$.

因此

$$\begin{aligned}\alpha&=P(Y\geqslant3)=1-P(Y=0)-P(r=1)-P(r=2)\\&=1-0.95^{100}-100\times0.05\times0.95^{99}-\frac{100\times99}{2}\times0.05^2\times0.95^{98}\end{aligned}$$

由泊松定理，Y 近似服从参数为 $\lambda=np=100\times0.05=5$ 的泊松分布

$$\begin{aligned}\alpha&=1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)\\&\approx1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}-\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}=1-e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)\\&=1-e^{-5}(1+5+12.5)=1-0.007\times18.5\approx0.87.\end{aligned}$$

分析 本题是 1992 年试题. 在本题中出现了三个常用分布. 且二项分布中的参数 p 由 X 的分布算出. 这些都要求考生具有一定的综合能力.

例 9-8 设随机变量 X 和 Y 同分布，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2;\\ 0,\text{其余}.\end{cases}$$

(1) 已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ 求常数 a；

(2) 求$\frac{1}{X^2}$的数学期望.

解 (1) 由于 X,Y 同分布,因此,$P(A)=P(B)$. 又由于 A,B 独立,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(A)-P(A)P(B)=2P(A)-(P(A))^2.$$

由条件知

$$2P(A)-(P(A))^2=\frac{3}{4},$$

即
$$4(P(A))^2-8P(A)+3=0,$$

解得

$$P(A)=\frac{1}{2}\text{或 }P(A)=\frac{3}{2}.$$

由于 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$,因此取 $P(A)=\frac{1}{2}$.

$$P(A)=P(X>a)=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^2\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=1-\frac{1}{8}a^3.$$

所以

$$1-\frac{1}{8}a^3=\frac{1}{2},$$

由此解得
$$a=\sqrt[3]{4}.$$

(2) $E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\times 2=\frac{3}{4}.$

分析 本题是 1993 年试题. 本题考查的知识点有:事件的独立性、概率的加法公式、概率的性质($0\leqslant P(A)\leqslant 1$)、连续型随机变量的密度函数的应用和数学期望的计算. 只有能够综合运用学过的知识,才能取得理想的成绩.

例 9-9 假设由自动线加工的某种零件的内径 X(μm)服从正态分布 $N(\mu,1)$,内径小于 10 或大于 12 为不合格品,其余为合格品. 销售每件合格品获利,销售每件不合格品亏损,已知销售利润 T(单位:百元)与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T=\begin{cases}-1, & \text{若 } X<10;\\ 20, & \text{若 } 10\leqslant X\leqslant 12;\\ -5, & \text{若 } X>12.\end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时,销售一个零件的平均利润最大?

解 T 可能取值为 $-1,20,-5$,因此,T 为离散型随机变量,以下求 T 的分布律:

$$P(T=-1)=P(X<10)=P(X-\mu<10-\mu)=\Phi(10-\mu),$$

$$P(T=20)=P(10\leqslant X\leqslant 12)=P(10-\mu\leqslant X-\mu\leqslant 12-\mu)=\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu),$$

$$P(T=-5)=P(X>12)=1-\Phi(12-\mu).$$

所以

$$\begin{aligned}E(T)&=(-1)\times\Phi(10-\mu)+20\times(\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu))+(-5)\times(1-\Phi(12-\mu))\\&=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5.\end{aligned}$$

ET 是 μ 的函数,为使 ET 最大,令$\frac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}\mu}=0$. 即

$$\frac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)=0.$$

其中 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 是 $N(0,1)$的密度函数.

从而

$$25\mathrm{e}^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=21\mathrm{e}^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}},$$

$$\ln25-\frac{(12-\mu)^2}{2}=\ln21-\frac{(10-\mu)^2}{2}.$$

由此解得

$$\mu=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx10.9.$$

所以当取 $\mu=10.9\mu m$ 时，平均利润最大.

分析 本题是 1994 年试题. 本题考查考生综合运用高等数学知识和概率论知识的能力.

例 9-10 假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & \text{若 } X\leqslant Y;\\ 1, & \text{若 } X>Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & \text{若 } X\leqslant 2Y;\\ 1, & \text{若 } X>2Y.\end{cases}$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布；

(2) 求 U 和 V 的相关系数 r.

解 (1) U 可能取值为 0,1,V 可能取值也是 0,1. 因此,(U,V) 是二维离散型随机变量，可知取值 $(0,0)$,$(0,1)$,$(1,0)$ 和 $(1,1)$.

$$P(U=0,V=0)=P(X\leqslant Y,X\leqslant 2Y)=P(X\leqslant Y)=\iint\limits_{\{x\leqslant y\}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{4}.$$

这里用到 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ 且 } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\leqslant Y,X>2Y)=\iint\limits_{\left\{\substack{x<y\\ x>2y}\right\}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

$$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\leqslant 2Y)=\iint\limits_{\{y<x\leqslant 2y\}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2y}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

$$P(U=1,V=1)=1-\frac{1}{4}-0-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

因此,(U,V) 的联合分布律为

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(2) U,V 的边缘分布律分别为

U	0	1
$p_{r.}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

V	0	1
$p_{r.}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$EU=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4},\ EU^2=O^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4},$$

$$EV=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},EV^2=O^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$EUV=0\times0\times\frac{1}{4}+0\times1\times0+1\times0\times\frac{1}{4}+1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{cov}(U,V)=EUV-EUEV=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$D(U)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{16},D(V)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$

因此,U 和 V 的相关系数为

$$r=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

分析　本题是 1999 年试题. 本题中(X,Y)是二维连续型随机变量. 而由(X,Y)定义的(U,V)是二维离散型随机变量. 由(X,Y)的联合密度函数来求(U,V)的联合分布律,这类题目在教材中较少出现. 但这类题目应引起读者的重视. 读者可自行练习下面的习题(此题是 1997 年的试题):

假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布,随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & 若\ Y\leqslant k;\\ 1, & 若\ Y>k.\end{cases}\quad (k=1,2)$$

(1) 求 X_1 和 X_2 的联合概率分布;

(2) 求 $E(X_1+X_2)$.

答案:

(1)

X_2 \ X_1	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

(2) $e^{-1}+e^{-2}$

例 9-11　设随机变量 X 与 Y 独立,其中,X 的概率分布律为

X	1	2
$p_{r.}$	0.3	0.7

而 Y 的概率密度为 $f(y)$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

解　先求 U 的分布函数. 记 Y 的分布函数为 $F(y)$,则 U 的分布函数为

$$G(u)=P(U\leqslant u)=P(X+Y\leqslant u),$$

由于 X 可能取值为 1 和 2,因此,$\{X=1\}$和$\{X=2\}$是完全事件组. 由全概率公式

$$\begin{aligned}G(u)&=P\{X+Y\leqslant u|X=1\}P(X=1)+P\{X+Y\leqslant u|X=2\}P(X=2)\\&=P\{Y\leqslant u-1|X=1\}\times 0.3+P\{Y\leqslant u-2|X=2\}\times 0.7,\end{aligned}$$

由于 X 与 Y 相互独立,因而

$$G(u)=0.3P(Y\leqslant u-1)+0.7P(Y\leqslant u-2)=0.3F(u-1)+0.7F(u-2).$$

U 的密度函数为

$$g(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}G(u)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2).$$

分析　本题是 2003 年试题. 在本题中 X 是离散型随机变量,Y 是连续型随机变量,$U=X+Y$ 是连续型

随机变量.由 X 的概率分布和 Y 的密度函数可求出 U 的密度函数.

例 9-12 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本,其中 σ^2 未知,$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^2\ (n\geqslant 2)$

(1) 证明:s^2 和 $\hat{\sigma}^2$ 均是 σ^2 的无偏估计量;

(2) s^2 与 $\hat{\sigma}^2$ 哪个更有效?

(3) 证明:s^2 与 $\hat{\sigma}^2$ 均是 σ^2 的相合估计量.

证 (1) $Es^2=D(X)=\sigma^2$

$$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=EX_1^2=\sigma^2,$$

因此,s^2 和 $\hat{\sigma}^2$ 均是 σ^2 的无偏估计量.

(2) 由于$\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\sim\chi^2(n-1)$,因此

$$D(s^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{\sigma^2}s^2\right)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}s^2\right)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n-1}\sigma^4,$$

由于$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$,因此

$$D(\hat{\sigma}^2)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2}{n}\sigma^4.$$

由于 $D(\hat{\sigma}^2)<D(s^2)$,因此,$\hat{\sigma}^2$ 比 s^2 更有效.

(3) 对任意 $\varepsilon>0$,由切比雪夫不等式

$$0\leqslant P(|s^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(s^2)}{\varepsilon^2}=\frac{2}{(n-1)}\frac{\sigma^4}{\varepsilon^2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|s^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon)=0$,即 s^2 是 σ^2 的相合估计.

$$0\leqslant P(|\hat{\sigma}^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(\hat{\sigma}^2)}{\varepsilon^2}=\frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\sigma}^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon)=0$ 即 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的相合估计.

分析 本题在 $D(s^2)$和 $D(\hat{\sigma}^2)$的计算中利用了正态总体下常用统计量分布的结果.本题是考查考生综合运用数理统计知识的能力.不用这些常用结果则计算十分繁琐.

例 9-13 设 A,B 是两个随机事件;随机变量

$$X=\begin{cases}1, & 若\ A\ 出现;\\ 0, & 若\ A\ 不出现.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & 若\ B\ 出现;\\ 0, & 若\ B\ 不出现.\end{cases}$$

证明下列三个命题等价:

(1) 随机变量 X,Y 不相关;

(2) 随机变量 X,Y 独立;

(3) 随机事件 A,B 相互独立.

证 由 X,Y 的定义得到

$P(X=1)=P(A),P(X=0)=1-P(A)$,

$P(Y=1)=P(B),P(Y=0)=1-P(B)$,

$P(X=1,Y=1)=P(AB),P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B}),P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B}),P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)$.

由此得到(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$P(\bar{A}\bar{B})$	$P(\bar{A}B)$
1	$P(A\bar{B})$	$P(AB)$

X 和 Y 的边缘分布律分别为

X	0	1
$p_{r.}$	$1-P(A)$	$P(A)$

Y	0	1
$p_{r.}$	$1-P(B)$	$P(B)$

先证:(1)与(3)等价.

$E(XY)=0\times 0\times P(\bar{A}\bar{B})+0\times 1\times P(\bar{A}B)+1\times 0\times P(A\bar{B}+1\times 1\times P(AB)$

$\qquad=P(AB)$,

$EX=P(A),EY=P(B)$

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=P(AB)-P(A)P(B)$.

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ 的充要充件是 $P(AB)=P(A)P(B)$,即 A,B 相互独立.

再证(2)与(3)等价.

若 X 与 Y 独立,则 $P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$即 $P(AB)=P(A)P(B)$,因而 A,B 相互独立.

若 A,B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)$,且 $\bar{A},B$ 独立,$\bar{B},A$ 独立,$\bar{A},\bar{B}$ 独立,所以

$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=(1-P(A))P(B)=P(X=0)P(Y=1)$,

$P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P(A)(1-P(B)=P(X=1)P(Y=0)$,

$P(X=0,Y=0)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=P(X=0)P(Y=0)$,

$P(X=1,Y=1)=P(AB)=P(A)P(B)=P(X=1)P(Y=1)$.

因此,X 与 Y 相互独立.

分析　本题中 X,Y 分别由随机事件 A,B 定义,因此,X 与 Y 的分布律可由 $P(A),P(B)$定出,而(X,Y)的联合分布律由 $P(\bar{A}\bar{B}),P(\bar{A}B),P(A\bar{B})$和 $P(AB)$定出. 当 X 与 Y 独立时,(X,Y)的联合分布律也可由 $P(A),P(B)$定出.

例 9-14　对于任意两个事件 A 和 B,$0<P(A)<1,0<P(B)<1$.

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$

称作事件 A 和 B 的相关系数.

(1) 证明:事件 A 和 B 独立的充分必要条件是其相关系数等于零;

(2) 利用随机变量相关系数的基本性质,证明:$|\rho|\leqslant 1$.

证　(1) 由于 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$,所以

$\rho=0$ 的充要条件为 $P(AB)=P(A)P(B)$,即 $\rho=0$ 的充要条件是 A,B 相互独立.

(2) 引入随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 出现;}\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不出现.}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 出现;}\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不出现.}\end{cases}$$

由例 9-13 可知,$\operatorname{cov}(X,Y)=P(AB)-P(A)P(B)$,

$$X\sim B(1,P(A)),\ Y\sim B(1,P(B)),$$

从而

$$D(X)=P(A)(1-P(A))=P(A)P(\bar{A}),$$
$$D(Y)=P(B)(1-P(B))=P(B)P(\bar{B}).$$

所以(X,Y)的相关系数

$$\rho(X,Y)=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\bar{A}P(B)P(\bar{B})}}=\rho.$$

由相关系数的性质有

$$|\rho| = |\rho(X,Y)| \leqslant |.$$

分析　本题是 2003 年试题. 本题(2)的证明中引入随机变量 X,Y 的做法对读者来说有一定的难度. 但如果做过例 9-13 后,也许会比较容易想到.

二、小　结

概率统计的综合题的解法灵活多变,但要做到应付自如、得心应手离不开对基本知识的理解和掌握. 读者应着重把握概率论知识的理解和应用. 综合题主要考查考生对概率论的相关知识点的灵活运用. 由于课时的关系,对统计部分的要求相对较低.