MBA 联考(数学)

常考题型及其解题方法技巧归纳

毛纲源　编

华中科技大学出版社

内 容 提 要

本书根据 2006 年 MBA 联考数学考试大纲，在分析、归纳、总结历年来，特别是 2003 年以来的 MBA 联考数学试卷的题型及其解题方法技巧的基础上编写而成。本书通过大量典型的考题（含 MBA 联考数学试题）讲述了各类题型的解题思路、常用方法与技巧，因而能起到指航引路、预测未来考向的作用。

本书讲述方式是由浅入深，由易到难，分析透彻，解答详尽。本书适于自学，是复习、备考 MBA 联考数学的理想自学辅导书，也可作为 MBA 联考数学辅导班的辅导教材。

前　言

为了帮助报考工商管理硕士(Master of Business Administration,英文缩写为 MBA)的考生更好地复习、备考数学,作者对历年来、特别是 2003 年以来的 MBA 联考数学试题进行了研究,将其归纳、分类、整理。在此基础上,按照 2006 年 MBA 联考数学考试大纲的要求编写了这本《MBA 联考(数学)常考题型及其解题方法技巧归纳》。

本书有以下几个显著特点。

全书按照 MBA 联考数学考试大纲的要求分为初等数学、微积分、线性代数和概率论四部分;每部分按考试内容又分若干节;每节先将有关基本概念、基础知识总结归纳成条,然后再讲述该节的常考题型及其解题方法技巧归纳。为突出典型性,本书的绝大多数题型中都含有 MBA 联考数学试题的题型,与 2006 年考纲有关的 MBA 联考数学试题绝大多数都已收集在本书的例题或习题之中。数学试题是无限的,而题型是有限的。掌握好考纲范围内的各类常考题型及其解题思路、方法、技巧,就能以不变应万变,遇到类似题型就能很快确立思路,形成条件反射,以快速简捷的解题套路,从容应考,轻取高分,收到触类旁通的效果。掌握好这些题型及其解题思路、方法和技巧,也就使你掌握了未来的 MBA 联考数学的题型及其解题思路、方法和技巧。因而本书能起到指航引路、预测未来考向的作用。

本书特别强调对 MBA 联考数学考试大纲所划定的基本概念和基础知识的正确理解和熟练应用。

对于数学知识,MBA 联考不同于普通的研究生入学考试。它不要求考生有全面系统的数学理论知识,而是选择考生将来学习 MBA 课程所必需的数学知识和能力加以考察。因而 MBA 联考数学考察的主要是基本概念、基础知识和基本运算能力。近些年来相当一部分考生在 MBA 联考中数学失误,究其原因,恰恰是对考纲中所规定的基本概念、基础知识和基本运算能力的理解与掌握上存在欠缺。鉴于此,针对参加 MBA 联考的考生中有相当数量的考生数学基本概念比较模糊、基础知识遗忘较多、基本运算不熟练的特

点，本书例题较多且讲述方式是由浅入深，由易到难，分析透彻，解答详尽，尽量做到题精而易懂。这同时也说明本书是备考 MBA 复习数学适于自学的辅导书。

为避免常犯错误，在不少例题后加写“注意”一项，望读者细心揣摩，这有益于理解基本概念、掌握基础知识、提高运算能力。

本书还注意提高考生的快速、准确计算的能力。为激活思维，开阔思路、简化计算，对有些计算题除给出计算的通法外，还经常一题多解。

MBA 联考中的问题求解题实际上是选择题，而选择题往往有多种方法求解。用什么方法使之能以最快的速度找出答案，这就变得极为重要了。为此，本书介绍了不少作者在长期教学实践中积累的简化计算方法。“善出奇兵”，“出奇制胜”，帮助读者提高解题的准确率，且以最快的速度求出答案。

MBA 联考数学试题中也有综合应用题。求解这类题常需运用多个数学知识点。本书十分注意这类题的解题方法、技巧归纳，较好地体现了 MBA 数学考试的特点和要求。

为使考生具有较为扎实的数学基础知识，同时更好地阅读本书，特推荐一套可以指导读者全面、系统、深入复习有关数学知识的参考书，这就是作者编写的经济类数学学习指导、考研指南丛书：《经济数学（微积分）解题方法技巧归纳》、《经济数学（线性代数）解题方法技巧归纳》、《经济数学（概率论与数理统计初步）解题方法技巧归纳》。这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评，多次印刷，久销不衰。编者在撰写本书时，多处引用了这套丛书的内容和方法。如果能把这套丛书与本书结合起来学习，必将收到事半功倍的效果。这套丛书解决全面、系统复习问题，而本书则解决明确目标、抓住重点问题。

在编写本书时，编者参阅了有关书籍，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

由于编者水平有限，兼之时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请读者、专家批评指正。

毛纲源

于北京师范大学珠海分校国际金融学院

2005 年 7 月

第1篇　初等数学

1.1　绝　对　值

（一）考试内容

1. 绝对值定义和性质

定义 1.1.1　实数 a 的绝对值记作 $|a|$，其定义为

$$a=\begin{cases} a\ (a\geqslant 0), \\ -a\ (a<0)。\end{cases}$$

从上述绝对值的定义可以看出，求一个数的绝对值时，必须将绝对值符号内的式子分别就大于零、小于零和等于零的三种情况分别求之。例如求 $a-2$ 的绝对值 $|a-2|$，要考虑 $a-2$ 究竟是正数、是负数、还是零。当 $a-2>0$ 时有 $|a-2|=a-2$，当 $a-2<0$ 时有 $|a-2|=-(a-2)=2-a$，当 $a-2=0$ 时有 $|a-2|=0$，即

$$|a-2|=\begin{cases} a-2, & \text{当 } a>2 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } a=2 \text{ 时}, \\ 2-a, & \text{当 } a<2 \text{ 时}。\end{cases}$$

由上述定义易知，绝对值 $|a|$ 有下述性质。

命题 1.1.1　(1) $|a|\geqslant 0$（实数的绝对值是非负实数）；

(2) $|a|=0\Leftrightarrow a=0$（只有实数 0 的绝对值才等于 0）；

(3) $|a|=1\Leftrightarrow a=\pm 1$，即 $a=1$ 或 $a=-1$；

(4) $|a|=|-a|$（互为相反数的两实数，其绝对值相等）；

(5) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$（任意一个数的绝对值不小于自身，绝对值的相反数不大于自身）当且仅当 $a\geqslant 0$ 时后一等号成立，当且仅当 $a\leqslant 0$ 时前一等号成立；

(6) $\sqrt{a^2}=|a|$（实数平方的算术根等于这个实数的绝对值）；

(7) $\frac{|a|}{a}(a\neq 0)=\pm 1$.

2. 绝对值的几何意义

实数 a 的绝对值就是数轴上实数 a 所对应的点到原点的距离，如图 1.1.1 所示。

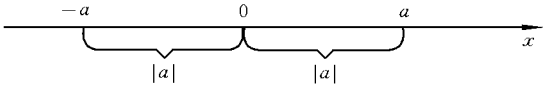


图 1.1.1

因此，适合不等式 $|x|<a\ (a>0)$ 的所有实数 x 所对应的点就是全部与原点距离小于 a 的点。同样，适合不等式 $|x|>a\ (a>0)$ 的所有实数 x 所对应的点就是全体与原点距离大于 a 的点。因而得到以下命题。

命题 1.1.2 $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a\ (a>0)$，

$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a\ (a>0)$.

3. 绝对值的运算法则

命题 1.1.3 (1) $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$（三角形不等式）；

(2) 当且仅当 $ab\geqslant 0$ 时有 $|a+b|=|a|+|b|$，$|a-b|=||a|-|b||$；

(3) 当且仅当 $ab\leqslant 0$ 时有 $||a|-|b||=|a+b|$，$|a-b|=|a|+|b|$；

(4) $|ab|=|a||b|$；

(5) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$。

4. 非负数的常用性质

命题 1.1.4 (1) 若 $\sqrt{a}$ 有意义，则 $a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$；

(2) 有限个非负数之和等于 0，则每一个非负数必等于 0；

(3) 有限个非负数之和仍为非负数。

（二）考试要求

理解绝对值定义及其几何意义，掌握其性质及其运算法则，会求解与绝对值有关的简单计算问题。

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　计算含绝对值的代数式的值

法一　利用绝对值的性质即命题 1.1.1 和运算法则即命题 1.1.3 求之。

例 1[2004 年Ⅰ1]* [1]（**条件充分性判断**）

x,y **是实数，**$|x|+|y|=|x-y|$.

(1) $x>0,y<0$；　　(2) $x<0,y>0$。

解法 1　由条件(1)**有** $x>0,y<0$，**则** $|x|+|y|=x-y$. **又** $x>y$，**故** $|x|+|y|=x-y=|x-y|$。**条件**(1)**充分。**

由条件(2)**有** $x<0,y>0$，**则** $|x|+|y|=-x+y=y-x$，**又** $y>x,y-x>0$，**故** $y-x=|y-x|$. **于是有**

$$|x|+|y|=|y-x|=|x-y|,$$

条件(2)**也充分。仅** D **入选。**

解法 2　由绝对值的运算法则，即命题 1.1.3(3)**即知条件**(1)**充分，条件**(2)**也充分。仅** D **入选。**

例 2[2001 年Ⅰ5]　**已知** $|a|=5,|b|=7,ab<0$，**则** $|a-b|$ **等于**

(A) 2。　　(B) −2。　　(C) 12。　　(D) −12.

解法 1　因 $ab<0$，**由绝对值的运算法则即命题** 1.1.3(3)**得到**

$$|a-b|=|a|+|b|=5+7=12。$$ **仅**(C)**入选。**

解法 2　因 $ab<0$，**故只有两种可能**

(1) $a=5,b=-7$，**这时** $|a-b|=|5-(-7)|=12$；

(2) $a=-5,b=7$，**这时** $|a-b|=|-5-7|=12$. **仅**(C)**入选。**

例 3　已知 $x\in[2,5]$，$|a|=5-x$，$|b|=x-2$，**则** $|b-a|$ **的取值范围是**

(A) $[-3,5]$.　(B) $[0,5]$.　(C) $[1,3]$.　(D) $[3,5]$.　(E) $[0,3]$。

解　由命题 1.1.3(1)**得到**

$$|a-b|\leqslant|a|+|b|=(5-x)+(x-2)=3,$$

$$|a-b|\geqslant||a|-|b||=|(5-x)-(x-2)|=|7-2x|\geqslant0。$$

而 $|a-b|=|b-a|$，**故** $0\leqslant|b-a|=|a-b|\leqslant3$。**仅**(E)**入选。**

---

* [2004 年Ⅰ1]**表示该例(或该习题)是** 2004 **年全国攻读工商管理硕士学位研究生入学考试数学试题第** 1 **题。下同。**

例 4(条件充分性判断) $|a-b|+|b-c|+|c-a|=2$.

(1) a,b,c 均为整数；　　(2) $|a-b|+|c-a|=1$.

解　条件(1)与条件(2)单独都不充分，但两个条件联合时却是充分的，因而仅 C 入选。事实上，因 a,b,c 都是整数，故 $|a-b|$ 及 $|c-a|$ 也都是整数。于是由 $|a-b|+|c-a|=1$ 得到

$$\begin{cases}|a-b|=0,\\|c-a|=1,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}|a-b|=1,\\|c-a|=0。\end{cases}$$

再由命题 1.1.1(2)、(3)**得到**

$$\begin{cases}a-b=0,\\c-a=\pm1,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a-b=\pm1,\\c-a=0。\end{cases}$$

解得 $c-b=\pm1$，**即** $|c-b|=1$. **因而**

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=(|a-b|+|c-a|)+|c-b|=1+1=2.$$

例 5　若 $|a|=1/2$，$|b|=1$，**则** $|a+b|$ **等于**

(A) 3/2 **或** 0。　　(B) 1/2 **或** 0。　　(C) $-1/2$。　　(D) 1/2 **或** 3/2.

解　当 $a=1/2,b=1$ **时，有** $ab>0$，**由命题** 1.1.3(2) **有**

$$|a+b|=|a|+|b|=1/2+1=3/2.$$

当 $a=-1/2,b=1$ **或** $a=1/2,b=-1$ **时，有** $ab<0$。**由命题** 1.1.3(3) **有**

$$|a+b|=||a|-|b||=|1/2-1|=|-1/2|=1/2.$$

因而 $|a+b|$ **等于** 1/2 **或** 3/2. **仅**(D) **入选**。

法二　用下述三法去掉绝对值符号求之。

1° **确定绝对值符号内式子的符号，依绝对值定义去掉绝对值符号。**

含有绝对值符号的代数式，如同实数绝对值一样，可以根据绝对值定义去掉绝对值符号。如果绝对值符号内的代数式的值是非负数，那么去掉绝对值符号后就是原来代数式的值；如果绝对值符号内的代数式是负数，那么去掉绝对值符号后就应当取原来代数式的值的相反数；如果绝对值符号内的代数式的值不是一个确定的数，或者不能断定它的符号，那么就应该根据字母取值的不同范围进行讨论。

2° **根据绝对值的几何意义去掉绝对值符号。**

3° **用平方的方法去掉绝对值符号，即当** $a\in(-\infty,+\infty)$ **时，由命题** 1.1.1(6) **有** $|a|=\sqrt{a^2}$。**因而** $|a|^2=a^2$.

例 6(条件充分性判断)　已知 $|\log_{\frac{1}{2}}x|=-\log_{\frac{1}{2}}x$ $(x>0)$，**则**

(1) $x\in(1/2,1]$；　　(2) $x\in[1,3)$。

解 由对数函数性质知，当底数 $a\in(0,1)$ 时，$x\in(0,1)$ 有 $\log_a x>0$；$x\in(1,+\infty)$ 有 $\log_a x<0$；当 $x=1$ 时，$\log_a x=0$. 因而只有当 $x\geqslant 1$ 时才有 $-\log_{\frac{1}{2}}x\geqslant 0$。于是条件(1)不充分，但条件(2)充分。仅 B 入选。

例 7[2002 年 Ⅱ 6]* [1] 已知 $t^2-3t-18\leqslant 0$，则 $|t+4|+|t-6|$ 等于

(A) $2t-2$。　(B) 10。　(C) 3。　(D) $2t+2$.

解 $y=t^2-3t-18$ 为开口向上的抛物线，由 $t^2-3t-18=(t-6)(t+3)\leqslant 0$ 得到 $-3\leqslant t\leqslant 6$. 因而当 $-3\leqslant t\leqslant 6$ 时，有 $|t+4|=t+4$，$|t-6|=-(t-6)=6-t$。于是当 $-3\leqslant t\leqslant 6$，即当 $t^2-3t-18\leqslant 0$ 时有

$$|t+4||t-6|=t+4+6-t=10.$$

仅(B)入选。

例 8 设 a,b,c 三个实数在数轴上的对应点为 A,B,C，其位置如图 1.1.2 所示，化简 $a-|a+b|+|c-a|+|c-b|$。

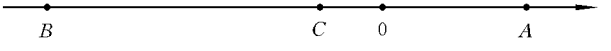


图 1.1.2

解 由图 1.1.2 所示知 $b<c<0<a$. 由绝对值的几何意义得到 $|b|>|c|$，$|b|>|a|$，$|a|>|c|$，且 $a+b<0$，$c-a<0$，$c-b>0$。因而

$$\text{原式}=a-[-(a+b)]+[-(c-a)]+(c-b)=3a.$$

题型二　求解含绝对值的方程

法一　利用非负数的性质即命题 1.1.4(2)解之。

求解含绝对值且各项为非负的方程不需去绝对值符号，只需利用命题 1.1.4(2)解之即可。

例 9[1997 年 Ⅰ 5]　设 $\sqrt{(a-60)^2}+|b+90|+(c-100)^{10}=0$，则 $a+b+c$ 的值是

(A) 0。　(B) 280。　(C) 100。　(D) -100。　(E) 无法确定。

解 由于二次根式 $\sqrt{(a-60)^2}\geqslant 0$，偶数次乘方 $(c-130)^{10}\geqslant 0$。又由于绝对值非负性质，$|b+90|\geqslant 0$，因而所给方程实质上就是有限个(三个)非负数之和等于 0，由命题 1.1.4(2)知，每一个非负数必等于 0。于是有

---

* [2002 年 Ⅱ 6]表示该例(或该习题)是 2002 年全国在职攻读工商管理硕士学位联考数学试题第 6 题。下同。

$$\sqrt{(a-60)^2}=0,\quad |b+90|=0,\quad (c-130)^{10}=0。$$

从而 $a=60,b=-90,c=130$。因此得

$$a+b+c=60-90+130=100.$$ 仅(C)入选。

例 10 实数 x,y,z 满足条件 $|x^2+4xy+5y^2|+\sqrt{z+1/2}=-2y-1$，则 $(4x-10y)^z$ 等于

(A) $\sqrt{6}/2$。　(B) $-\sqrt{2}/6$.　(C) $\sqrt{2}/6$.

(D) $-\sqrt{6}/2$。　(E) $\sqrt{6}/6$.

解 由 $|x^2+4xy+5y^2|=|x^2+4xy+4y^2+y^2|=(x+2y)^2+y^2$ 得到

$$|x^2+4xy+5y^2|+2y+1+\sqrt{z+1/2}=(x+2y)^2+y^2+2y+1+\sqrt{z+1/2}$$
$$=(x+2y)^2+(y+1)^2+\sqrt{z+1/2}=0.$$

根据非负数性质，即命题 1.1.4(2)得到

$$x+2y=0,\quad y+1=0,\quad z+1/2=0$$

解得
$$x=2,\quad y=-1,\quad z=-1/2,$$

故
$$(4x-10y)^z=\sqrt{2}/6.$$ 仅(C)入选。

例 11(条件充分性判断)　可以确定 x 和 y 的值。

(1) $\sqrt{(x-3)^2}+|y-2|=4$；　(2) $\sqrt{(x-3)^2}-|y-2|=0$.

解 当条件(1)成立时，只有一个方程不能确定 x 和 y 的值，条件(1)不充分。同样，当条件(2)成立时，只有一个方程不能确定 x,y 的值，条件(2)不充分。但当条件(1)与条件(2)联合时，得到由两个方程组成的一个方程组，可求得 x 与 y 的值。事实上，由条件(2)得到 $|y-2|=\sqrt{(x-3)^2}$，代入条件(1)有 $2|y-2|=4$，即 $|y-2|=2$，因而 $y=0,y=4$，于是 $x=1,5$. 仅 C 入选。

法二　利用绝对值性质即命题 1.1.1 求之。

例 12[2003 年 Ⅱ 21]　已知 $\left|\dfrac{5x-3}{2x+5}\right|=\dfrac{3-5x}{2x+5}$，则实数 x 的取值范围是

(A) $x<-5/2$ 或 $x\geqslant 3/5$。　(B) $-5/2\leqslant x\leqslant 3/5$.

(C) $-5/2<x\leqslant 3/5$。　(D) $-3/5\leqslant x\leqslant 5/2$.

(E) 以上结论都不正确。

解 由命题 1.1.1(1)知 $\left|\dfrac{5x-3}{2x+5}\right|\geqslant 0$，故 $\dfrac{3-5x}{2x+5}\geqslant 0$。因而

$$\begin{cases}3-5x\geqslant 0,\\ 2x+5>0,\end{cases}\qquad ①$$

或
$$\begin{cases}3-5x\leqslant 0,\\ 2x+5<0。\end{cases}\qquad ②$$

由不等式组①得到$-5/2<x\leqslant 3/5$. 由不等式组②得到 $x\geqslant 3/5, x<-5/2$。矛盾，没有解。故实数 x 的取值范围是$-5/2<x\leqslant 3/5$. 仅(C)入选。

例 13 已知 $\left|\frac{2x-1}{3}\right|=\frac{1-2x}{3}$，$x$ 的取值范围为

(A) $(-\infty,-1/2)$。 (B) $(-\infty,0)$。 (C) $(-\infty,1/2)$。

(D) $(-\infty,1)$。 (E) $(-\infty,2)$.

解 $\left|\frac{2x-1}{3}\right|=\frac{1-2x}{3}=-\frac{2x-1}{3}$，因而有 $|a|=-a$，其中 $a=\frac{2x-1}{3}$。显然这只有 $a\leqslant 0$ 时上式才成立，即有

$$(2x-1)/3\leqslant 0,\quad 2x-1\leqslant 0,\quad x\leqslant 1/2,$$

故 x 的取值范围是 $x(-\infty,1/2)$. 仅(C)入选。

例 14 设 $|x-3|+|y+4|=1$，求满足此等式的整数 x 和 y 的值。

解 因为 x 和 y 都是整数，且 $|x-3|\geqslant 0, |y+4|\geqslant 0$，$|x-3|$ 和 $|y+4|$ 都是非负整数，而和为 1 的两个非负整数只能是 0 和 1，所以

$$\begin{cases}|x-3|=1,\\ |y+4|=0,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}|x-3|=0,\\ |y+4|=1.\end{cases}$$

再利用绝对值性质即命题 1.1.1(2)、(3)得到

$$\begin{cases}x-3=\pm 1,\\ y+4=0,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x-3=0,\\ y+4=\pm 1。\end{cases}$$

解得如下四组解：

$$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=-4,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=2,\\ y_2=-4,\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=3,\\ y_3=-3,\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=3,\\ y_5=-5。\end{cases}$$

法三 利用绝对值的运算法则即命题 1.1.3 求之。

例 15 等式 $|3x-7|=|3-2x|+|x-4|$ 成立的条件是

(A) $3/2<x<4$。 (B) $3/2\leqslant x\leqslant 4$. (C) $x\geqslant 3/2$。

(D) $x\leqslant 4$。 (E) $x\leqslant 3/2$ 或 $x\geqslant 4$。

解 由三角形不等式性质，原式可化为

$$|3x-7|\leqslant|2x-3|+|x-4|,$$

即
$$|(2x-3)+(x-4)|\leqslant|2x-3|+|x-4|。$$

由绝对值的运算法则即命题 1.1.3(2)知，上式等号成立的条件是

$(2x-3)(x-4)\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 3/2$ 或 $x\geqslant 4$。仅(E)入选。

法四　利用分段求解法求之。

先找出使各绝对值等于零的分界点，且在数轴上用这些分界点划分为几个子区间，然后按照子区间的位置确定代数式中绝对值的值或其取值符号。

例 16　已知 $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-6x+9}$，**求** y **的最小值。**

解　y 为四个算术根之和，应利用命题 1.1.1(6)化为绝对值问题求之。原式可分为

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-3)^2} \\ &= |x+2|+|x-1|+|x|+|x-3|。\end{aligned}$$

先确定 y 中各绝对值的零点分别为

$$x_1=-2,\quad x_2=1,\quad x_3=0,\quad x_4=3,$$

然后将数轴即区间$(-\infty,+\infty)$分成下列区间：

$$(-\infty,-2],\quad (-2,0],\quad (0,1],\quad (1,3],\quad (3,+\infty)。$$

在各区间上讨论 y 的取值情况：

1° $x\leqslant -2$ 时，$y=-(x+2)-(x-1)-x-(x-3)=2-4x$，即 $y\geqslant 10$；

2° $-2<x\leqslant 0$ 时，$y=x+2-(x-1)-x-(x-3)=6-2x$，即 $y\geqslant 6-2\times 0=6$；

3° $0<x\leqslant 1$ 时，$y=x+2-(x-1)+x-(x-3)=6$；

4° $1<x\leqslant 3$ 时，$y=x+2+x-1+x-(x-3)=2x+4$，即 $y>2\times 1+4=6$；

5° $x\geqslant 3$ 时，$y=x+2+x-1+x+x-3=4x-2$，即 $y\geqslant 4\times 3-2=10$。

比较 y 在各区间上的取值知道：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，y 取最小值 6。

法五　利用绝对值的几何意义求之。

例 17　若 $|x-4|+|3-x|=1$，**则** x **的取值范围是**

(A) $x<3$。　(B) $x<4$。　(C) $3<x<4$.　(D) $3\leqslant x\leqslant 4$.　(E) $x\geqslant 4$.

解法 1　利用绝对值的几何意义判定之。$|x-4|+|3-x|$ 的几何意义是数轴上点 x 到点 3 的距离与点 x 到点 4 的距离之和。当点 x 在点 3 与点 4 之间(包括点 3 和点 4)移动时，这个距离之和等于 1，即 $3\leqslant x\leqslant 4$ 时有 $|x-4|+|3-x|=1$. 而点 x 在点 3 的以左或在点 4 的以右移动时，这个距离之和大于 1。仅(D)入选。

解法 2 由绝对值的运算法则即命题 1.1.3(2)有，当$(x-4)(3-x)\geqslant 0$时得到$|x-4|+|3-x|=|x-4+3-x|=|-1|=1$. 下面求出 x 满足$(x-4)(3-x)\geqslant 0$的取值范围。

由$(x-4)(3-x)\geqslant 0$得到$(x-4)(x-3)\leqslant 0$，而左端为二次多项式，且 $a=1>0$，故其解集为 $3\leqslant x\leqslant 4$。仅(D)入选。

解法 3 用分段求解法求之。分段点为 3 与 4。

(1) $x<3$ 时，已知等式化为 $4-x+3-x=1$，即 $2x=6$，$x=3$. 这与 $x<3$ 矛盾，故 $x<3$ 不正确。

(2) $3\leqslant x\leqslant 4$ 时，已知等式化为$-(x-4)-(3-x)=1$，即 $1=1$. 显然该等式成立，这说明 $3\leqslant x\leqslant 4$ 为所求的 x 的取值范围。

(3) $x>4$ 时，已知等式化为 $x-4-(3-x)=1$，得 $x=4$ 与 $x>4$ 矛盾，故 $x>4$ 也不正确。仅(D)入选。

题型三　判别含绝对值的不等式

法一　利用绝对值定义和性质判别。

例 18[2005 年Ⅰ14]**(条件充分性判断)**　实数 a，b 满足$|a|(a+b)>a|a+b|$。

(1) $a<0$；　　(2) $b>-a$.

解　由于$|a|(a+b)>a|a+b|$中左右两端均含有绝对值，条件(1)与条件(2)都不是充分条件。下面考虑这两个条件联合起来是否充分。

由 $a<0$ 得到$-a>a$，又由条件(2)有 $a+b>0$，由不等式性质得到

$$-a(b+a)>a(b+a).$$

由 $a<0$，有$-a=|a|$；由 $a+b>0$，有 $a+b=|a+b|$. 故由上式即得

$$|a|(a+b)>a|b+a|.$$

仅 C 入选。

例 19[2003 年Ⅰ3]**(条件充分性判断)**　不等式$|x-2|+|4-x|<s$ 无解

(1) $s\leqslant 2$；　　(2) $s>2$。

解法 1　因$|x-2|+|4-x|\geqslant|(x-2)+(4-x)|=2$，故当 $s\leqslant 2$ 时不等式$|x-2|+|4-x|<s$ 无解。即使 $s=2$，不等式$|x-2|+|4-x|<2$ 仍然无解。条件(1)充分，条件(2)不充分。仅 A 入选。

解法 2　设 $f(x)=|x-2|+|4-x|=|x-2|+|x-4|$，则

$$f(x)=\begin{cases}2x-6, & x\geqslant 4,\\ 2, & 2\leqslant x<4,\\ -2x+6, & x<2。\end{cases}$$

易知 $f(x)$的最小值为 2。要使 $f(x)<s$ 无解，即使函数 $f(x)$的图像无位于函数 $y=s$ 的图像下方的部分，其充要条件为 $s\leqslant 2$.

当 $s\leqslant 2$ 时满足其充要条件中的充分条件，条件(1)充分。显然条件(2)不充分。仅 A 入选。

例 20(条件充分性判断)　$a^2<b^2$ 成立。

(1) $|a|<|b|$；　　(2) $a<b$。

解　因 $|a|\geqslant 0$，$|b|\geqslant 0$，由命题 1.1.1(6)得到 $\sqrt{a^2}=|a|$，$\sqrt{b^2}=|b|$.

当条件(1)成立时，有 $\sqrt{a^2}<\sqrt{b^2}$，即 $a^2<b^2$。条件(1)充分。

当条件(2)成立时，由于 $a<b$ 不能确定 a，b 的正负号，不能由 $a<b$ 得到 $a^2<b^2$。事实上，当 $a=-5$，$b=3$ 时，有 $a<b$，但由 $a^2=25>b^2=9$ 可知 $a^2<b^2$，这时条件(2)不成立。条件(2)不充分。仅 A 入选。

法二　用绝对值运算法则即命题 1.1.3 判别之。

例 21(条件充分性判断)　$\dfrac{|a-b|}{|a|+|b|}<1$ 成立。

(1) $ab>0$；　　(2) $ab<0$。

解　条件(1)成立，即 $ab>0$ 时，由绝对值运算法则即命题 1.1.3(2)知

$$|a|+|b|=|a+b|,\qquad ①$$

$$|a-b|=||a|-|b||.\qquad ②$$

因而由式① 有 $\dfrac{|a-b|}{|a|+|b|}=\dfrac{|a-b|}{|a+b|}<1$ 成立，或由式② 也有 $\dfrac{|a-b|}{|a|+|b|}=\dfrac{||a|-|b||}{|a|+|b|}<1$ 成立。条件(1)充分。

当条件(2)成立即 $ab<0$ 时，有 $|a-b|=|a|+|b|$，因而 $\dfrac{|a-b|}{|a|+|b|}=\dfrac{|a|+|b|}{|a|+|b|}=1$。条件(2)不充分。仅 A 入选。

例 22(条件充分性判断)　已知 $|y-a|\leqslant 2$ 成立。

(1) $|2x-a|\leqslant 1$；　　(2) $|2x-y|\leqslant 1$.

解　由条件(1)与条件(2)中都含变量 x 易知此两个条件必然不是充分条件。下面考虑这两个条件联合起来是否充分。解

$$|2x-a|\leqslant 1,\qquad ①$$

$$|2x-y|\leqslant 1,\qquad ②$$

由式②得到

$$|y-2x|\leqslant 1, \qquad ③$$

则由式①与式③得到

$$|2x-a|+|y-2x|\geqslant|2x-a+y-2x|=|y-a|,$$

故 $2=1+1\geqslant|2x-a|+|2x-y|\geqslant|y-a|$，即条件(1)与条件(2)联合为充分条件. 仅 C 入选.

例 23 设 $|a+2|\leqslant 1$，$|b+2|\leqslant 2$，则正确的不等式是

(A) $|a-b|\leqslant 3$。 (B) $|a-b|\leqslant 2$。 (C) $|a-b|\leqslant 1$.

(D) $|a+b|\leqslant 7$。 (E) $|a+b|\leqslant 1$.

解法 1 根据绝对值的运算法则 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$ 得到

$|a-b|=|(a+2)-(b+2)|\leqslant|a+2|+|b+2|\leqslant 1+2=3$。仅(A)入选。

解法 2 由 $|a+2|\leqslant 1$ 利用绝对值的几何意义或去绝对值的方法易得到

$$-3\leqslant a\leqslant -1. \qquad ①$$

同理，由 $|b+2|\leqslant 2$ 得到

$$-4\leqslant b\leqslant 0。 \qquad ②$$

式①与式②为同向不等式，不能相减，从而得到 $a-b$. 为此将式②化为

$$0\leqslant -b\leqslant 4, \qquad ③$$

而式①与式③为同向不等式，可以相加，从而得到

$$-3\leqslant a-b\leqslant 3 \quad 即 \quad |a-b|\leqslant 3.$$ 仅(A)入选。

习 题 1.1

(一) 问题求解

1. 已知 $1<x<2$，$\dfrac{|x-2|}{x-2}-\dfrac{|x-1|}{1-x}$ 的值等于

(A) 1。 (B) 2。 (C) 3。 (D) 0。 (E) -1。

2. 已知 $1<x<2$，$|x-1|+\sqrt{x(x-4)+4}$ 的值等于

(A) 2。 (B) 3。 (C) 4。 (D) 1。 (E) 6。

3. 已知 $|a|=1$，$|b|=2$，$|a-b|$ 的值为

(A) 1 或 3。 (B) 2 或 4。 (C) 3 或 5。

(D) 4 或 6。 (E) 5 或 7。

4. 已知 $|a|=5$，$|b|=7$，且 $ab<0$，$|a+b|$ 的值为

(A) 1。 (B) 2。 (C) 3。 (D) 4。 (E) 5。

5. 方程 $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{2x-4}+1=0$ 的根为

(A) 1;2。　　(B) 2;3。　　(C) 3;4。

(D) 4;5$-\sqrt{5}$。　　(E) 4;5$+\sqrt{5}$.

6. 若 $\sqrt{(x-2)^2}+|y-3|=0$,则 $|1/x^2-1/y-x^y|$ 的值是

(A) 14。　　(B) 97/12。　　(C) 95/12。

(D) 9。　　(E) 12。

7. 已知 $|(x+1)/3|=2$,x 的值为

(A) 1 **或** 2。　　(B) 2 **或** 3。　　(C) 3 **或** 4。

(D) 5 **或** 6。　　(E) 5 **或** -7.

8. $|2x-11|=|x-3|+|x-8|$ **成立的条件是**

(A) $x\in(1,2)$。　　(B) $x\in(3,4)$。　　(C) $x\geqslant 5$ **或** $x\geqslant 8$.

(D) $x\in(6,7)$。　　(E) $x\leqslant 3$ **或** $x\geqslant 8$。

9. 若关于 x 的不等式 $|3-x|+|x-2|<a$ 的解集是空集$\varnothing$,则实数 a 的取值范围是

(A) $a<1$。　　(B) $a\leqslant 1$。　　(C) $a>1$。

(D) $a\geqslant 1$。　　(E) $a\neq 1$.

10. 等式 $|2m-7|=|m-2|+|m-5|$ 成立,则实数 m 的取值范围是

(A) $2\leqslant m\leqslant 5$。　　(B) $m\leqslant -2$ **或** $m\geqslant 5$。　　(C) $-2<m<5$。

(D) $m\leqslant 2$ **或** $m\geqslant 5$。　　(E) $m\leqslant -5$ **或** $m\geqslant -2$.

11. 已知 $|x-y+1|+(2x-y)^2=0$,则 $\log_y x=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 0.

(二) 条件充分性判断

1. [2003 **年** Ⅱ 3]**可以确定** $\dfrac{|x+y|}{x-y}=2$。

(1) $x/y=3$;　　(2) $x/y=1/3$.

2. 设 x,y 为实数,可确定 $3x-2y$ 的值为 1。

(1) $x+2y=1$;　　(2) $(x-y-1)^4+|2x+y+4|=0$.

3. 不等式 $|a-b|\leqslant 3$ 恒能成立。

(1) $|a+2|\leqslant 1$ **且** $|b+2|\leqslant 2$;　　(2) $|a-2|\leqslant 2$ **且** $|b-2|\leqslant 1$.

4. 若 a,$b\in\mathbf{R}$,则 $|a-b|=|a|+|b|$ 成立。

(1) $ab\geqslant 0$;　　(2) $ab\leqslant 0$。

5. $|a|/a-|b|/b=-2$ **成立**。

(1) $a<0$；　　(2) $b>0$。

6. $|x|$**的值可以求得。**

(1) $x=-x$；　　(2) $x^2=4$.

7. 方程 $f(x)=1$ **有且仅有一个实根。**

(1) $f(x)=|x-1|$；　　(2) $f(x)=|x-1|+1$.

1.2　比和比例

（一）考试内容

1. 比的定义

两数 a **与** b **相除称为** a **与** b **的比，记作** $a:b$，**即** $a\div b=\frac{a}{b}$，**称** a **为比的前项，**b **为比的后项。若** a **除以** b **的商为** k，**即** $\frac{a}{b}=k$ **则称** k **为** $a:b$ **的比值。**

2. 比的基本性质

命题 1.2.1　(1) $a:b=k\Leftrightarrow a=kb$；

(2) $a:b=(ac):(bc)\ (c\neq 0)$，

$a:b:c=(ad):(bd):(cd)\ (d\neq 0)$。

在实际应用时，常将比表示为百分数。一般称以百分数形式表示的比值为百分比（或百分率）。若 $a:b=k\%$，**则其含义是** a **为** b **的** $k\%$，**即** $a=b\cdot k\%$。

3. 比例的定义

如果两个比 $a:b$ **和** $c:d$ **的比值相等，就称** a,b,c,d **成比例，记作**

$$a:b=c:d \quad \text{或} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

其中 a,d **称为比例的外项，**b,c **称为比例的内项.** $a:b=b:c$ **时，称** b **为** a **和** c **的比例中项，当** a,b,c **均为正数时，称** b **为** a **和** c **的几何平均值。**

定义 1.2.1　**若** $y:x=k_1$ **或** $y=k_1x$，**其中** k_1 **为非零常数，称为比例系数，称变量** x **与** y **成正比例；若** $y=k_2/x$，**其中非零常数** k_2 **为比例常数，称变量** x **与** y **成反比例。**

4. 比例有下述基本性质

定理 1.2.1　如果 $a:b=c:d$,**则**

(1) $ad=bc$(**基本定理**)(**即两外项的积等于两内项的积**);

(2) $a:c=b:d$, $d:b=c:a$, $d:c=b:a$, $b:a=d:c$(**更比定理**)(**两内项或两外项可调换位置,两外项与两内项同时可调换位置,内项与外项可同时调换位置**);

(3) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ (**合比定理**);

(4) $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$ (**分比定理**);

(5) $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}\left(\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\neq 1\right)$ (**合分比定理**);

(6) **如果** $a:a_1=b:b_1=c:c_1$,**则**

$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}(a_1+b_1+c_1\neq 0)$$(**等比定理**)。

(二)考试要求

理解比和比例的概念,掌握比例的基本性质,能正确求解与比例有关的实际应用题。

(三)常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　求解与两个量成比例的有关问题

类型(一)　求解与两个量成正(反)比例的有关问题。

成正比例的两个量可按它们的比值相等的关系列出方程求解。

对成反比例的两个量,列方程时只需把其中一个比上、下反过来写。

一般地说,成比例的有关问题还可设出其比例系数求解。

例 1　设 a,b,c,d **均为正数,且** $a:b=c:d$,**则** $\sqrt{a^2+b^2}/\sqrt{c^2+d^2}=$

(A) $\dfrac{a}{d}$.　　(B) $\dfrac{b}{d}$.　　(C) $\dfrac{a}{b}$.　　(D) $\dfrac{a+c}{b+d}$.　　(E) $\dfrac{b}{c}$.

解　$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\dfrac{a\sqrt{1+(b/a)^2}}{c\sqrt{1+(d/c)^2}}$,**因** $a:b=c:d$,**由更比定理即定理** 1.2.1(2)**得到**

$$b:a=d:c \quad \text{且} \quad a:c=b:d.$$

故 $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$。仅(B)入选。

例 2 已知$\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$,那么$\dfrac{3x+2y}{3x-2y}$的值是

(A) 19. (B) -19. (C) 6. (D) -6. (E) 以上结论都不正确.

解法 1 由$\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$得到$\dfrac{3}{2}\times\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{10}$。利用合分比定理得到

$$\frac{3x+2y}{3x-2y}=\frac{10+9}{9-10}=-19.$$

仅(B)入选。

解法 2 利用比例系数求之,设$\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}=k$,即$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=k$,则 $x=3k$,$y=5k$,因而

$$\frac{3x+2y}{3x-2y}=\frac{9k+10k}{9k-10k}=\frac{19k}{(-1)k}=-19。$$

仅(B)入选。

解法 3 由$\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$得到 $x=\dfrac{3}{5}y$,则

$$\frac{3x+2y}{3x-2y}=\frac{3\times(3y/5)+2y}{3\times(3/5)y-2y}=-19。$$

仅(B)入选。

例 3[1998 年Ⅰ2] 制鞋厂本月计划生产旅游鞋 5000 双,结果 12 天就完成了计划的 45%,照这样的进度,这个月(按 30 天计划)旅游鞋的产量将为

(A) 5625 双. (B) 5650 双. (C) 5700 双.

(D) 5750 双. (E) 5800 双.

解法 1 先由生产天数与鞋产量成正比例关系直接算出 30 天完成计划的百分之几,设为 $x\%$,则$\dfrac{12}{30}=\dfrac{45\%}{x\%}$。解得

$$x=\frac{4.5}{4}=1.125,$$

即这个月(到 30 号)完成旅游鞋的产量为计划的 1.125%,即为 $5000\times 1.125\%=5625$(双)。仅(A)入选。

解法 2 因鞋的产量与时间(天数)成正比,已知 12 天完成 $5000\times 0.45=2250$(双),设 30 天完成鞋的产量为 x,则$\dfrac{2250}{12}=\dfrac{x}{30}$。解得

$$x=5625(双)。$$

仅(A)入选。

例 4 有一篇墙报稿。若抄成 12 行,则每行 12 个字,现要求减少 4 行,

这样每行应抄的字数为

(A) 16.　(B) 15.　(C) 14.　(D) 17.　(E) 18.

解　同一篇墙报稿抄成的行数少，每行的字数便多，成反比例关系。设每行应抄 x 个字，由题意列方程得到

$$\frac{12}{12-4}=\frac{x}{12}.$$

其中方程左边的分式是“第一对”同单位的量(行数)的比，而右边的分式是“第二对”同单位的量(指标)的比，但要上下反过来写，这是成反比例的量的方程的写法。解得 $x=18$，即每行应抄 18 个字。仅(E)入选。

例 5　已知 $y=y_1-y_2$，且 y_1 与 $\frac{1}{2x^2}$ 成反比例，与 $\frac{3}{x+2}$ 成正比例。当 $x=0$ 时，$y=-3$；又当 $x=1$ 时，$y=1$. 那么 y 的 x 的表达式是

(A) $y=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{x+2}$。　(B) $y=3x^2-\frac{6}{x+2}$。　(C) $y=3x^2+\frac{6}{x+2}$。

(D) $y=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{x+2}$。　(E) $y=-3x^2-\frac{3}{x+2}$.

解　依题意有 $y_1=k_1\Big/\left(\frac{1}{2x^2}\right)=2k_1x^2$，$y_2=\frac{3k_2}{x+2}$，所以 $y=2k_1x^2-\frac{3k_2}{x+2}$。

将 $x=0$，$y=-3$；$x=1$，$y=1$ 代入上式得到

$$-3=2k_1\times 0-3k_2/2,\quad 1=2k_1-k_2。$$

解得 $k_1=3/2$，$k_2=2$. 于是所求函数为 $y=3x^2-6/(x+2)$. 仅(B)入选。

例 6　已知反比例函数图像与直线 $y=-x+8$ 相交于点 P，点 P 到原点的距离为 $2\sqrt{10}$，则反比例函数的表示式为

(A) $y=\frac{12}{x}$。　(B) $y=\frac{10}{x}$.　(C) $y=\frac{9}{x}$.

(D) $y=\frac{8}{x}$.　(E) 以上结论都不正确。

解　设反比例函数的表示式为 $y=k/x$，点 P 的坐标为 (a,b)。因直线 $y=-x+8$ 与双曲线 $y=k/x$ 相交于点 P，故点 P 既在双曲线上，又在直线上，所以 $b=k/a$，$b=-a+8$. 又因 $OP=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{10}$，所以 $a^2+b^2=40$，即 $(a+b)^2-2ab=40$. 而 $ab=k$，$a+b=8$，于是 $8^2-2k=40$，故 $k=12$，即反比例函数为 $y=12/x$.

注意 例 6 用 a,b 两数的和及其积巧解得到 k 的值，而没有必要求出 a，b 的值。

类型(二) 求解与三个(或四个)量成比例的量的有关问题。

这类问题常给出三个量或四个量两两成比例的条件。此类问题常有两种解法。

一是利用等比定理即定理 1.2.1(6)求之。为此需先将两个量之间的比例关系利用性质即命题 1.2.1 化成三个量或四个量的连比关系。

另一解法是写成连比后，设出并算出比例系数，利用比例系数求之。

例 7[2002 年Ⅱ8] 若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$，则 k 的值为

(A) 1。 (B) 1 或 -2。 (C) -1 或 2。 (D) -2.

解 由等比定理即定理 1.2.1(6)得到

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a+b-c+a-b+c-a+b+c}{a+b+c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1=k。仅(A)入选。$$

例 8[2001 年Ⅰ3] 一公司向银行借款 34 万元，欲按 $1/2:1/3:1/9$ 的比例分配给下属甲、乙、丙三车间进行技术改造，则甲车间应得

(A) 4 万元。 (B) 8 万元。 (C) 12 万元。 (D) 18 万元。

解法 1 设甲、乙、丙三车间应得 x,y,z 万元，由题意有

$$\frac{x}{1/2}=\frac{y}{1/3}=\frac{z}{1/9},\quad 即\quad \frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z}{2}。$$

利用定理 1.2.1(6)等比定理得到

$$\frac{x+y+z}{9+6+2}=\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z}{2},\quad 即\quad \frac{34}{17}=\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z}{2},$$

故 $x=9\times 2=18$(万元)，即甲车间应得 18 万元。仅(D)入选。

解法 2 由题意，甲车间应得

$$34\times\frac{1/2}{1/2+1/3+1/9}=34\times\frac{1/2}{17/18}=2\times 18\times\frac{1}{2}=18(万元)。仅(D)入选。$$

解法 3 由 $1/2:1/3:1/9=9:6:2$，甲车间应得

$$\frac{9}{9+6+2}\times 34=18(万元)。仅(D)入选。$$

例 9[2003 年Ⅰ1](条件充分性判断) 某公司得到一笔贷款共 68 万元，用于下属三个工厂的设备改造，结果甲、乙、丙三个车间按比例分别得到 36

万元、24 万元和 8 万元。

(1) 甲、乙、丙三个工厂按 1/2∶1/3∶1/9 的比例分配贷款；

(2) 甲、乙、丙三个工厂按 9∶6∶2 的比例分配贷款。

解法 1 设甲、乙、丙三个工厂分别得到货款为 x,y,z 万元，则 $x+y+z=68$(万元)。当条件(1)成立时，有

$$\frac{x}{1/2}=\frac{y}{1/3}=\frac{z}{1/9}, \qquad ①$$

利用比的性质有

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z}{2}, \qquad ②$$

再由等比定理有

$$\frac{x+y+z}{9+6+2}=\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z}{2},$$

即
$$4=\frac{68}{17}=\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z}{2},$$

故
$$x=9\times 4=36,\quad y=24,\quad z=8.$$

因而条件(1)充分。由上述连比即知条件(2)也充分。仅 D 入选。

解法 2 使用比例系数法求之。设 x,y,z 的含义同解法 1，且

$$\frac{x}{1/2}=\frac{y}{1/3}=\frac{z}{1/9}=k,$$

则 $x=\frac{k}{2}$，$y=\frac{-k}{3}$，$z=\frac{k}{9}$。于是有

$$x+y+z=68=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)k,$$

即
$$k=\frac{68\times 54}{51}=\frac{4\times 54}{3}=4\times 18,$$

故 $x=k/2=4\times 18/2=36$，$y=k/3=4\times 18/3=24$，$z=k/9=4\times 18/9=8$.

条件(1)充分。由解法 1 中式①与式②等价知道，条件(2)也充分。仅 D 入选。

解法 3 上例也可如下简解：因为

$$36∶24∶8=9∶6∶2=9/18∶6/18∶2/18=1/2∶1/3∶1/9,$$

故条件(1)与条件(2)均为充分条件。仅 D 入选。

题型二 求解与比例有关的实际应用题

这类应用题一般利用题设的比例关系建立方程解之。

为正确建立方程首先要准确理解有关比例的下列术语：

A 比 B 多(小)$r\%$，其含义是 $A=(1+r\%)B(A=(1-r\%)B)$. 因而这里多 $r\%$ 是 B 的 $r\%$，即 B 为 $r\%$ 的标准量。

A 是 B 的 $r\%$，即 $A=B\cdot r\%$，或 $B=A\div r\%$.

A 增加到 B 的 r 倍，即 $A=Br$.

其次还必须明确所给(或所求)的比是谁与谁的比，即是哪两个量的比值。

类型(一)　求解与比(或与倍数)有关的实际应用题.

例 10[2001 年Ⅱ2]　健身房中，某个周末下午 3:00，参加健身的男士与女士人数之比为 3∶4；下午 5:00，男士中有 25%，女士中有 50%离开了健身房。此时留在健身房内的男士与女士人数之比是

(A) 10∶9。　　(B) 9∶8。　　(C) 8∶9。　　(D) 9∶10。

解　仅(B)入选。设下午 3:00 时男士与女士健身的人数分别为 x 与 y，则 $x:y=3:4$。下午 5:00 时留在健身房的男士人数为 $75\%\cdot x$，女士人数为 $50\%\cdot y$，其人数之比为

$$\frac{75\%x}{50\%y}=\frac{75x}{50y}=\frac{75}{50}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8}=9:8。$$

例 11[2001 年Ⅱ6]　用一笔钱的 5/8 购买甲商品，再以所余金额的 2/5 购买乙商品，最后余 900 元，这笔钱的总额是

(A) 2400 元。　　(B) 3600 元。　　(C) 4000 元。　　(D) 4500 元。

解　设此笔钱的总额为 a，则购买甲商品后所余金额为 $\frac{3}{8}a$，再用所余金额的 $\frac{2}{5}$，即用 $\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}a$ 金额购买乙商品，则最后所余金额为 $\frac{3}{8}a$ 的 $\frac{3}{5}$ 即为 $\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}a$。此金额恰为 900 元。于是有

$$(3/5)\times(3/8)a=900,$$

则　　$a=4000$(元)。仅(C)入选。

例 12[1997 年Ⅰ3]　某投资者以 2 万元购买甲、乙两种股票，甲股票的价格为 8 元/股，乙股票的价格为 4 元/股，它们的投资额之比是 4∶1，在甲、乙股票价格分别为 10 元/股和 3 元/股时，该投资者全部抛出这两种股票，他共获利

(A) 3000 元。　　(B) 3889 元。　　(C) 4000 元。

(D) 2889 元。　　(E) 5000 元。

解　期初 2 万元投资于甲和乙两种股票，比例为 4∶1，则投资于甲、乙两种股票的股数分别为

$$\frac{4}{5}\times\frac{20000}{8}=2000,\quad \frac{1}{5}\times\frac{20000}{4}=1000。$$

期末卖出所有股票时，甲股票每股盈利 2 元，乙股票每股亏损 1 元，于是他共获利

$$2\times2000-1\times1000=3000(元)。仅(A)入选。$$

例 13[2003 年Ⅰ19]　所得税是工资加奖金总和的 30%，如果一个人的所得税为 6810 元，奖金为 3200 元，则他的工资为

(A) 12000 元。　　(B) 15900 元。　　(C) 19500 元。

(D) 25900 元。　　(E) 62000 元。

解法 1　设他的工资为 x。由题设有 $6810=(x+3200)\times30\%$，解得 $x=19500$ 元。仅(C)入选。

解法 2　$6810\div30\%$ 为他的工资加奖金的总和，又已知其奖金为 3200 元，于是其工资为

$$6810\div30\%-3200=19500(元)。仅(C)入选。$$

例 14[2002 年Ⅱ3]　商店出售两套礼盒，均以 210 元售出，按进价计算，其中一套盈利 25%，而另一套亏损 25%，结果商品

(A) 不赔不赚.　(B) 赚了 24 元.　(C) 亏了 28 元.　(D) 亏了 24 元.

解　设进价为 x，由题设有 $x+25\%x=210$，即

$$x=\frac{210}{1+25\%}=210\times\frac{100}{125}<210(元),$$

故第一套礼盒盈利 $210-x=210-\frac{120}{1+25\%}=42$(元).

而另一套礼盒由题意有

$$x-25\%x=210\quad 即\quad x=210\times\frac{1}{1-25\%}=210\times\frac{100}{75}>210(元),$$

因而收益(210 元)比进价还少，商店亏损

$$\frac{210}{1-25\%}-210=210\left(\frac{100}{75}-1\right)=210\times\frac{25}{75}=210\times\frac{1}{3}=70(元),$$

结果商店亏损 $70-24=28$ 元。仅(C)入选。

类型(二)　求某量变化的百分比。

MBA 联考数学试题中每年都会出现与百分比有关的应用题。这对一部分考生来说相对较难。原因是标准量的确认较难，题中百分比的准标量不明确，或同一问题中不同百分比各自有不同的标准量，使应试者难以辨认和判别。因此应注意理解和掌握下述解题方法：

1° 求标准量用百分比去除；

2° 求部分量用百分比去乘；

3° 求增加了一个百分比的量用“1＋百分比”去乘（或用（1＋百分比）去除）；

4° 求减少一个百分比的量用（1－百分比）去乘（或用（1－百分比）去除）。

用文字可表述为：求标准量用除，求部分量用乘；求增长了的量用“一加”去乘（除），求减缩了的量用“一减”去乘（除）。

例 15［2001 年Ⅱ5］ 商店某种服装换季降价，原来可买 8 件的钱现在可买 13 件，问这种服装价格下降的百分比是

（A）36.5%。　　（B）38.5%。　　（C）40%。　　（D）42%。

解 设原价为 P_1，现价为 P_2，则 $8P_1=13P_2$，即

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{8}{13}。$$

利用定理 1.2.1(4)即分比定理得到

$$\frac{P_2-P_1}{P_1}=\frac{8-13}{13}=-\frac{5}{13}。$$

服装价格下降的百分比为 $\left|\frac{P_2-P_1}{P_1}\right|$，即

$5/13=0.385=38.5\%$。仅(B)入选。

注意 例 15 假设了原价为 P_1，现价为 P_2，但在解题过程中并不需要求出 P_1 和 P_2 的值是多少。这种“设而不求”的方法是解题中常用方法。

例 16［1999 年Ⅱ1］ 容器内装满铁质或木质的黑球与白球，其中 30% 是黑球，60% 的白球是铁质的，则容器中木质白球的百分比是

（A）28%。　　（B）30%。　　（C）40%。　　（D）42%。　　（E）70%。

解 因容器中 30% 是黑球，故 $1-30\%=70\%$ 的球是白球，而白球中 60% 是铁质的，因而铁质白球占容器比例为 $(1-0.3)\times 0.6=0.42=42\%$。因容器中白球的比例为 0.7，故其中木质白球比例为

$0.7-0.42=0.28=28\%$。仅(A)入选。

例 17[2005 年Ⅰ1] 甲、乙两个储煤仓库的库存煤量之比为 10∶7，要使这两仓库的库存煤量相等，甲仓库需向乙仓库搬入的煤量占甲仓库库存煤量的

(A) 10%。 (B) 15%。 (C) 20%。 (D) 25%。 (E) 30%。

解 设甲、乙两个储煤仓库的库存煤量为 1，则甲仓库所占库存煤量为 10/17，乙仓库所占库存煤量为 3/17。设甲仓库需向乙仓库搬入的煤量为 $x/17$，则由题意有

$$\frac{10}{17}-\frac{x}{10}=\frac{7}{10}+\frac{x}{10} \quad \text{即} \quad x=\frac{3}{2}=1.5。$$

于是甲仓库需向乙仓库搬入的煤量 $x/17=1.5/17$ 占甲仓库库存煤量的 $\frac{1.5/17}{10/17}=\frac{1.5}{10}=0.15$，即 15%。仅(B)入选。

例 18[2004 年Ⅰ18] 某工厂生产某种定型产品，一月份每件产品销售的利润是出厂价的 25%(假设：利润等于出厂价减去成本)。若二月份每件产品的出厂价降低 10%，成本不变，销售件数比一月份增加 80%，那么二月份的销售总利润比一月份的销售总利润增长

(A) 6%。 (B) 8%。 (C) 15.5%。

(D) 25.5%。 (E) 以上结论都不正确。

解 设一月份每件产品的成本为 C，出厂价为 P，销售件数为 Q，则一月份的销售利润为

$$L_1=PQ-CQ=(P-C)Q。 \qquad ①$$

二月份每件产品的成本为 C，出厂价为 $(1-10\%)P=0.9P$，销售件数为 $(1+80\%)Q=1.8Q$，则二月份的销售利润为

$$L_2=1.8Q\times 0.9P-1.8QC=(0.9P-C)\times 1.8Q。$$

二月份比一月份销售总利润增长了

$$L_2-L_1=(0.9P-C)\times 1.8Q-(P-C)Q,$$

二月份比一月份销售总利润增长率为

$$\frac{L_2-L_1}{L_1}=\frac{(0.9P-C)\times 1.8Q-(P-C)Q}{(P-C)Q}=\frac{(0.9P-C)\times 1.8}{P-C}-1。 \qquad ②$$

因一月份每件产品销售的利润是出厂价的 25%，在式①中令 $Q=1$，$L_1=0.25P$ 得到 $0.25P=P-C$，即 $C=0.75P$。将其代入式②有

$$\frac{(0.9P-0.75P)\times 1.8}{P-0.75P}-1=\frac{(0.15\times 1.8)P}{0.25P}-1=\frac{0.27}{0.25}=1.08-1=0.08,$$

即二月份的销售总利润比一月份增长 8%。仅(B)入选。

例 19(条件充分性判断)　商店换季大甩卖,某种上衣价格下降 60%.

(1) 原来买 2 件的钱现在可以买 5 件;

(2) 原来的价格是现在价格的 2.5 倍。

解　设某种上衣原价为 P,现价为 x。

当条件(1)成立时,有 $2P=5x$,则 $x=(2/5)P=0.4P=(1-60\%)P$,这说明上衣价格下降 60%.条件(1)充分。

当条件(2)成立时,有 $P=2.5x=(5/2)x$,故

$$x=2P/5=0.4P=(1-60\%)P。$$

这也说明上衣价格下降 60%。仅 D 入选。

例 20(条件充分性判断)　某商品销售额增加的百分比确定。

(1) 某商品销售量增加了 500 件;

(2) 某商品打八折,使销售量增加了 60%。

解　条件(1)成立时,只给出销售量增加数量,无法确定原销售量与现销售量的关系,因而求不出商品销售额增加的百分比。条件(1)不充分。

当条件(2)成立时,设原单价为 P,原销售量为 Q,则原销售额为 PQ。由于条件(2)成立,现单价为 $0.8P$,而销售量为 $1.6Q$,销售额为 $0.8P\times1.6Q=1.28PQ$。于是销售额增加,即

$$1.28PQ-PQ=0.28PQ,$$

销售额增长率为 28%,销售额增加的百分比确定。条件(2)充分。仅 B 入选。

注意　求比值问题,必须知道这个比是谁与谁的比,例 20 是确定销售额增加的百分比,那就必须考虑原销售额是多少,现销售额是多少,才能求得销售额增加了多少。

例 21[2003 年 Ⅱ 1](条件充分性判断)　某城区 2001 年绿地面积较上年增加了 20%,人口却负增长,结果人均绿地面积比上年增长了 21%。

(1) 2001 年人口较上年下降了 8.26‰;

(2) 2001 年人口较上年下降了 10‰。

解　设 2000 年绿地面积为 a,人口数为 b,则人均绿地面积为 a/b,2001 年绿地面积为 $(1+20\%)a=1.2a$。

当条件(1)满足时,2001 年人口数为 $(1-0.826\%)b$,人均绿地面积为

$$\frac{1.2a}{(1-0.826\%)b}=\frac{1.2a}{(1-0.00826)b}=\frac{1.2a}{0.99174b}。$$

2001 年人均绿地面积增长了$\frac{1.2a}{0.99174b}-\frac{a}{b}$，2001 年人均绿地面积增长率为

$$\left(\frac{1.2a}{0.99174b}-\frac{a}{b}\right)\Big/\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1.2}{0.99174}-1=20.999\%\approx21\%.$$

条件(1)充分。

当条件(2)满足时，2001 年人口数为$(1-1\%)b=0.99b$，人均绿地面积为$\frac{1.2a}{0.99b}$.

2001 年人均绿地面积增长了$\frac{1.2a}{0.99b}-\frac{a}{b}$，2001 年人均绿地面积增长率为

$$\left(\frac{1.2a}{0.99b}-\frac{a}{b}\right)\Big/\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1.2}{0.99}-1=21.212\%。$$

条件(2)不充分。仅 A 入选。

类型(三)　已知某量经历两次幅度不同的比例变换，求其变化后的值。

不同比例的变换常用百分比表达，因而此题型也是解百分数的应用题。尤其是在同一问题中不同的百分比各自有不同的标准量时，求解时一定要准确找到不同百分比的标准量。一个数量为 a 的量增加 $x\%$，该量变为

$$a+a\cdot x\%=a(1+x\%),$$

如果再减少 $y\%$(或增加 $y\%$)，这时标准量为 $a(1+x\%)$。于是实际变化结果为

$$a(1+x\%)-a(1+x\%)y\%=a(1+x\%)(1-y\%),$$

或
$$a(1+x\%)+a(1+x\%)y\%=a(1+x\%)(1+y\%).$$

命题 1.2.2　一个原值为 a 的量经比例分别为 $x\%$，$y\%$的两次不同的变化，其值变为

$$a(1\pm x\%)(1\pm y\%).$$

该量最终变化结果是增加还是减少，增加或减少多少，取决于变化前后两量之差

$$a-a(1+x\%)(1-y\%)=a[(1-(1+x\%)(1-y\%)]$$

或
$$a-a(1+x\%)(1-y\%)=a[1-(1+x\%)(1+y\%)]$$

的正负号及其绝对值的大小。

命题 1.2.3　设某量的原值为 a，在增加(或减少)$x\%$后，要保持其原值

不变，则应再减少（或增加）幅度为$\frac{x\%}{1+x\%}$（或$\frac{x\%}{1-x\%}$）.

事实上易验证有

$$a(1+x\%)\left(1-\frac{x\%}{1+x\%}\right)=a(1+x\%)\frac{1}{1+x\%}=a$$

或

$$a(1-x\%)\left(1+\frac{x\%}{1-x\%}\right)=a(1-x\%)\frac{1}{1-x\%}=a.$$

例 22[1999 年Ⅱ4] 某商店将每套服装按原价提高 50%后，再作七折“优惠”的广告宣传。这样每售出一套服装可获利 625 元。已知每套服装的成本是 2000 元。该店按“优惠”价售出一套服装比按原价售出

(A) 多赚 100 元。 (B) 少赚 100 元。 (C) 多赚 125 元。

(D) 少赚 125 元。 (E) 多赚 155 元。

解法 1 设原售价为 P，则售价 P 经两次变换后由命题 1.2.2 得到

$$P(1+50\%)(1-30\%)-2000=625.$$

解得 $P=2500$ 元。由 $2625-2500=125$(元)，知该店按“优惠”价售出比按原价售出多赚 125 元。仅(C)入选。

解法 2 依题意，服装的优惠价为 $2000+625=2625$(元)，此优惠价是按原价提高 50%，再作七折“优惠”得到的。因而原价是

$$2625\div 70\%\div(1+50\%)=2500(\text{元}).$$

于是多赚 $2625-2500=125$(元)。仅(C)入选。

例 23 某种商品打九折出售，销售额增加了 20%，此时，销售量实际增加百分数是销售额增加百分数的

(A) 1.4 倍。 (B) 1.5 倍。 (C) 1.6 倍。 (D) 1.67 倍。

解 设销售价为 P，销量为 Q，销售增加 $x\%$，则这时销售额为

$$P(1-0.1)\times Q(1+x\%)=0.9PQ(1+x\%)。 \qquad ①$$

另一方面，此销售额还可由销售额 PQ 增加了 20%来表示，即为

$$PQ+PQ\times 20\%=PQ\times 120\%。 \qquad ②$$

于是由式①、②得到

$$0.9PQ(1+x\%)=1.2PQ,\quad \text{即}\quad 1+x\%=0.4/0.3=4/3。$$

解得 $x\%=1/3=0.333=33.3\%$，$33.3\%\div 20\%=1.67$，

即销售量实际增加百分数是销售额增加百分数的 1.67 倍。仅(D)入选。

例 24[1998Ⅰ1] 一种货币贬值 15%，一年后需增值百分之几才能保持

原币值？

(A)15%。　　(B)15.25%。　　(C)16.78%。

(D) 17.17%。　　(E)17.65%。

解法 1　由题意易知，所求的百分比是以贬值后的币值为标准量的，如设原币值为 a，则此标准量为 $a(1-15\%)$. 再设需增值 $x\%$，由命题 1.2.2 应有

$$a(1-15\%)(1+x\%)=a$$

解得　　$x\%=15/85\approx 17.65\%$。仅(E)入选。

解法 2　由命题 1.2.3 即知应增值

$$\frac{x\%}{1-x\%}=\frac{15\%}{1-15\%}=\frac{15}{85}\approx 17.65\%。仅(E)入选.$$

例 25　某商品在第一次降价 10%的基础上，第二次又降价 5%，若第二次降阶后恢复到原来的价格，则价格上涨的百分比为

(A)15%。　(B)16%。　(C)17%。　(D)14%。　(E)13%。

解　设某商品的原价为 P，由题意有

$$P(1-10\%)(1-5\%)(1+x\%)=P,$$

即　　$90\times 95(100+x)=100000,$

故　　$x=14500/855\approx 16.9\approx 17,$

即价格上涨 17%，即可恢复到原来的价格。仅(C)入选。

习　题　1.2

(一) 问题求解

1.[1997 年Ⅰ1]　某厂生产流水线，若每 15 秒可出产品 4 件，则 1 小时流水线可出产品

(A) 480 件.　　(B) 540 件.　　(C) 720 件.

(D) 960 件.　　(E) 1080 件.

2.[1994 年Ⅰ1]　一批图书放在两个书柜中，其中第一柜占 55%，若从第一柜中取出 15 本放入第二柜内，则两书柜的书各占这批图书的 50%，这批图书共有_____本。

3.[1998 年Ⅱ2]　商店本月的计划销售额为 20 万元，由于开展了促销

活动，上半月完成了计划的 60%，若全月要超额完成计划的 25%，则下月应完成销售额

(A) 12 万元。　(B) 13 万元。　(C) 14 万元。

(D) 15 万元。　(E) 16 万元。

4. [2004 Ⅰ 16] 装配一台机器需要甲、乙、丙三种部件各一件，库中存有这三种部件共 270 件。分别用甲、乙、丙库存件数的 3/5，3/4，2/3 装配了若干台机器，那么库中原来存有甲种部件

(A) 80 件。　(B) 90 件。　(C) 100 件。

(D) 110 件。　(E) 以上结论都不正确。

5. 设 $f_1(x)$为正比例函数，$f_2(x)$为反比例函数，且 $f_1(1)/f_2(1)=3$，$f_1(2)-3f_2(2)=3$，则 $f_2(x)=$

(A) $3/(2x)$。　(B) $2/(3x)$。　(C) $3/(4x)$。

(D) $4/(3x)$.　(E) $1/(3x)$.

6. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，且 $x=1$ 时 $y=4$，$x=2$ 时 $y=5$，则 $x=4$ 时 y 的值为

(A) 6。　(B) 7。　(C) 8。　(D) 17/2。　(E) 以上结论都不正确。

7. 已知甲、乙身高比为 27∶25，甲比乙高 10 厘米，则乙的身高为

(A) 115 厘米.　(B) 125 厘米.　(C) 135 厘米.

(D) 145 厘米.　(E) 无法确定.

8. [1997 年 Ⅱ 2] 某地连续举办三场国际商业足球比赛，第二场观众比第一场减少 80%，第三场观众比第二场减少 50%，若第三场观众仅有 2500 人，则第一场观众有

(A) 15000 人。　(B) 20000 人。　(C) 22500 人。

(D) 25000 人。　(E) 27500 人。

9. [2002 年 Ⅰ 5] 设 $1/x∶1/y∶1/z=4∶5∶6$，则使 $x+y+z=74$ 成立的 y 值是

(A) 24。　(B) 36。　(C) 74/3。　(D) 37/2.

10. 某天甲、乙、丙三位售货员共售出糖果 90 盒，甲售出的是乙、丙售出的和，又已知乙、丙售出量之比为 2∶3，则乙售出糖果盒数为

(A) 9。　(B) 18。　(C) 27。　(D) 36。　(E) 45。

11. [1997 年 Ⅱ 1] 某人以 1000 元购买 A,B,C 三种商品，且所用金额之比是 1∶1.5∶2.5，则他购买 A,B,C 三种商品的金额(单位：元)依次是

(A) 100,300,600。　　(B) 150,225,400。　　(C) 150,300,550。

(D) 200,300,500。　　(E) 200,250,550。

12. 某单位将一批电脑分发给三个部门,已知部门一比部门二多分到50%,部门三与部门一所分电脑之比为 17∶10,部门三比部门二多分到 31台,则部门三分到电脑

(A) 32 台。(B) 43 台。(C) 45 台。(D) 51 台。

13. [2000 年 Ⅱ 1] **某单位有男职工 420 人,男职工人数是女职工人数的 $1\frac{1}{3}$ 倍,工龄 20 年以上者占全体职工人数的 20%,工龄 10～20 年者是工龄 10 年以下者人数的一半,工龄在 10 年以下者人数是**

(A) 250.　(B) 275.　(C) 392.　(D) 401.

14. [1997 年 Ⅰ 4] **甲仓存粮 30 吨,乙仓存粮 40 吨,要再往甲仓和乙仓共运去粮食 80 吨,使甲仓粮食是乙仓粮食数量的 1.5 倍,应运往乙仓的粮食是**

(A) 15 吨。(B) 20 吨。(C) 25 吨。(D) 30 吨。(E) 35 吨。

15. [1997 年 Ⅱ 5] **某商品打九折会使销售量增加 25%,则这一折扣会使销售额增加的百分比是**

(A)18%。(B)10%。(C)8%。(D)5%。(E)2%。

16. 长虹彩电的制造成本为 n,制造商以高出成本 5%的价格卖给零售商,零售商又以高出 15%的价格卖给顾客,那么,顾客买一台长虹彩电需花的钱为

(A) $1.2075n$。　　(B) $1.2000n$。　　(C) $1.1100n$。

(D) $1.3210n$。　　(D) **以上结论都不正确**。

17. 某人用 35 万元资金投资股票市场,第一季度账面资金增加了 25%,第二季度结账时,账面资金比最初投入资金增加 5 万元,则第二季度资金与第一季度相比

(A) **增加** 8.57%。　　(B) **增加** 9.57%。

(C) **减少** 8.57%。　　(D) **减少** 9.57%。

18. 某商品单价上调 10%后,再降回原价,下降的百分比是

(A) 10%。　　(B) 11%。　　(C) 12%。

(D) 9%。　　(E) **以上结论都不正确**。

19. 某企业计划在两年内将产值增加了 20%,但第一年产值比上一年反

而下降5%，那么要达到预期目标，第二年产值要比第一年增加幅度为

(A) 26.3%。(B) 30.3%。(C) 35.3%。(D) 25%。

20. [1988年Ⅱ1] 某种商品降价20%后，若欲恢复原价，应提价

(A)20%。 (B)25%。 (C)22%。 (D)15%。 (E)24%。

21. 收割某块麦地，甲队完成45%面积的收割任务后，又由乙队完成余下面积40%，再由丙队完成剩余面积的2/3，还有22亩(1亩≈666.6平方米)地没有收割，则这块地的面积是

(A) 300亩。(B) 200亩。(C) 150亩。(D) 440亩。

22. [1998年Ⅱ4] 采矿场有数千吨矿石要运走，运矿石汽车7天可运走全部的35%，照此进度，余下的矿石都运走还需

(A) 13天。(B) 12天。(C) 11天。(D) 10天。(E) 9天。

23. [2003年Ⅱ19] 某培训班有学员96人，其中男生占全班人数的7/12，女生中有15%是30岁和30岁以上的，则女生中不到30岁的人数是

(A) 30。 (B) 31。 (C) 32。 (D) 33。 (E) 34。

24. [2001年Ⅰ2] 两地相距351千米，汽车已行驶了全程的1/9，试问再行驶多少千米，剩下的路程是已行驶的路程的5倍？答案是

(A) 19.5千米。 (B) 21千米。 (C) 21.5千米。 (D) 22千米。

25. [2003年Ⅱ20] 某工厂人员由技术人员、行政人员和工人组成，共有男职工420人，是女职工的$1\frac{1}{3}$倍，其中行政人员占全体职工的20%，技术人员比工人少1/25，那么该工厂有工人

(A) 200人。(B) 250人。(C) 300人。(D) 350人。(E) 400人。

26. 某车间生产数码相机。若每天生产240台相机，25天才能完成这笔订单。当完成了计划的40%后，引进了新的设备和工艺，每天比原计划多生产25%，于是，完成任务的时间比原计划可提前

(A) 5天. (B) 3天. (C) 4天. (D) 6天. (E) 8天.

27. [2001年Ⅰ1] 一商店把某商品按标价的九折售出，仍可获利20%，若该商品的进价为每件21元，则该商品每件的标价为

(A) 26元。(B) 28元。(C) 30元。(D) 32元。

28. 陈先生卖了两套公寓，每套售价100万元，其中A套亏本20%，B套赚20%，那么，陈先生

(A) 赚 8 万元。　　(B) 赔 8 万元。　　(C) 赚 25/3 万元。

(D) 赔 25/3 万元。　　(E) 不赚也不赔。

29. 某商品的销售量对于进货量的百分比与销售价格成反比例。已知销售单价为 8 元时可售出进货量的 80%，又销售价格与进货价格成正比例。已知进价为 5 元，销售价格为 8 元，在以上的比例系数不变的情况下，当进货价格为 6 元时，可售出进货量的百分比为

(A)78%。　(B)76%。　(C)74%。　(D)70%。　(E)67%。

30. [1999 年Ⅱ2]　甲、乙、丙三名工人加工完成一批零件。甲完成了总件数的 34%，乙、丙两人完成的件数之比是 6∶5，已知丙完成 45 件，则甲完成了

(A) 48 件。(B) 51 件。　(C) 60 件。　(D) 63 件。　(E) 132 件。

31. [2002 年Ⅰ4]　某厂生产的一批产品，经检验，优等品与二等品的比是 5∶2，二等品与次品的比是 5∶1，则该批产品的合格率(合格品包括优等品与二等品)为

(A) 92%。　(B) 92.3%。　(C) 94.6%。　(D) 96%。

32. 周小姐的周薪增加了 8%，即增加了 40 元，则周小姐现在的周薪是

(A) 500 元。　(B) 510 元。　(C) 520 元。

(D) 530 元。　(E) 540 元。

(二) 条件充分性判断

1. 某次会议，每个与会者均可免费领到一个背包或一只手表，但不能二者都领，领到手表的人数可以确定。

(1) 在该会议期间，有 40%的人领到背包；

(2) 在该会议期间，共分发手表和背包 200 份。

2. 已知 $1/x:1/y:1/z=4:5:6$，则 $x+y+z$ 的值可求出。

(1) $x=30$；　(2) $x-y=6$.

3. 设 a,b,c 均为正数，$a^2+b^2+c^2$ 的值为 261。

(1) $a:b:c=2:3:4$；　(2) $a+b+c=27$。

4. 现有 180 名学生参加考试，成绩分为甲、乙、丙、丁四等。A、B、C、D 分别为取得甲、乙、丙、丁成绩的人数，则 $A:B:C:D=2:4:3:1$。

(1) $A=36$；　(2) $(A+B):C:D=6:3:1$.

5. 可以确定某种上衣上涨的百分比。

(1) 每件上衣涨价 0.5 元；(2) 每件上衣上涨 7 元。

1.3 算术平均值和几何平均值

（一）考试内容

1. 算术平均值和几何平均值的定义

定义 1.3.1 （1）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个数，n 为自然数，且 $n>1$，称 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值。

（2）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个非负数，n 为自然数，且 $n>1$，称 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何平均值。

（3）$n=2$ 时，$x_1, x_2 (>0)$ 的几何平均值 $\sqrt{x_1 x_2}$ 称为 x_1 与 x_2 的比例中项，即 $x_1 : \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1 x_2} : x_2$.

2. 算术平均值与几何平均值的关系

定理 1.3.1 对于任意 n 个非负的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

上述不等式简称为 n 个非负数的算几不等式。

对于上述定理要注意四点：(1) 各项均为正数；(2) 各项和或各项积均为定值；(3) 仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时才能取等号；(4) 左端分母中的 n 就是右端的开方数。

（二）考试要求

记住算术平均值和几何平均值的定义和计算公式及其关系，会计算这两个平均值，会利用它们的关系判别不等式，求函数的最值。

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一 求与平均值有关的参数值

一般用定义 1.3.1 求之。

例 1[1997 年 Ⅱ 6] x_1, x_2 是方程 $6x^2-7x+a=0$ 的两个实根。若 $1/x_1$ 和 $1/x_2$ 的几何平均值是$\sqrt{3}$,则 a 的值是

(A) 2。 (B) 3。 (C) 4。 (D) -2。 (E) -3。

解 由几何平均值定义有 $\sqrt{(1/x_1)(1/x_2)}=\sqrt{3}$,即 $1/x_1 \cdot 1/x_2=3$,亦即 $x_1x_2=1/3$.

又由韦达定理知 $x_1x_2=a/6$。因而 $a/6=1/3$,即 $a=2$。仅(A)入选。

例 2 已知 $x>0, y>0$;x, y 的算术平均值为 6,$1/x+1/y=4$,则 x, y 的比例中项为

(A) 24。 (B) 12。 (C) $\sqrt{12}$。 (D) $\sqrt{3}$。 (E) $3\sqrt{2}$。

解 由题设有$(x+y)/2=6$,即 $x+y=12$。又有 $1/x+1/y=4$,即$(x+y)/(xy)=4$,故 $xy=3$,所以 x, y 的比例中项为 $\sqrt{xy}=\sqrt{3}$。仅(D)入选。

例 3 已知 a, b, c 是三个正整数,且 $a>b>c$。若 a, b, c 的算术平均值是 $14/3$,几何平均值是 4,且 b, c 之积恰为 a,则 a, b, c 的值依次为

(A) 6,5,3。 (B) 12,6,2。 (C) 4,2,8。 (D) 8,2,4。 (E) 8,4,2。

解法 1 用验算排错法求之。因 a, b, c 的值要满足 $a>b>c$,因而(C)、(D)不能入选。又因$(a+b+c)/3=14/3$,即 $a+b+c=14$,故(B) 也不能入选。又因 $bc=a$,故(A) 不能入选。仅(E)入选。

解法 2 根据题设有

$$a+b+c=14, \qquad ①$$

$$\sqrt[3]{abc}=4, \qquad ②$$

$$a=bc。 \qquad ③$$

由式②有

$$abc=4^3=2^4。 \qquad ④$$

将式③代入式④有 $a^2=2^6$,故 $a=\pm 2^3$。因 $a>0$,故 $a=8$,将其代入式①、式③得到 $b+c=6, bc=8$,则方程

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)=0,$$

得到

$$b=4, c=2 \quad 或 \quad b=2, c=4。$$

但因 $a>b>c$,故 $a=8, b=4, c=2$。仅(E)入选。

例 4 已知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何平均值为 3,而前 $n-1$ 个数的几何平均值为 2,则 $x_n=$

(A) $\frac{3}{2}$。 (B) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$。 (C) $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$。 (D) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n$。 (E) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$。

解 由题设有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n}=3,\quad \sqrt[n-1]{x_1\cdots x_{n-1}}=2。$$

因而

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n=3^n, \tag{①}$$

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}=2^{n-1}。 \tag{②}$$

①÷②得到 $x_n=3^n/2^{n-1}=2\times 3^n/2^n=2(3/2)^n$。仅(C)入选。

例 5(条件充分性判断) $x>0,y>0$,x 与 y 的算术平均值为 6,x,y 可求。

(1) $1/x+1/z=4$; (2) y,z 的比例中项之一是 $2\sqrt{35}/7$。

解 因条件(1)、(2)中除 x,y 之外还含有第三个未知数,故条件(1)、(2)单独都不充分。但如果将其联合起来,且由题干中的已知条件联立得

$$\frac{x+y}{2}=6, \tag{①}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=4, \tag{②}$$

$$\sqrt{yz}=2\sqrt{35}/7,\quad 即\quad yz=20/7。 \tag{③}$$

将式①、②、③联立解之得 $x=2,y=10,z=2/7$,故条件(1)与条件(2)联合起来充分。仅 C 入选。

例 6(条件充分性判断) 三个自然数 a,b,c 的几何平均值是 $\sqrt{30}$。

(1) $ab=6$; (2) $ac=10$, $bc=15$.

解 当条件(1)成立或条件(2)成立时无法求出 a,b,c 的值,因而条件(1),条件(2)都不充分。但当条件(1)与条件(2)联合起来后,由条件(2)得到 $ac=10,bc=15$。因而

$$\frac{ac}{bc}=\frac{10}{15},\quad 即\quad \frac{a}{b}=\frac{2}{3},$$

故 $3a=2b$。因而 $3a\cdot a=2b\cdot a$。再由条件(1)即 $ab=6$ 得到 $3a^2=12$,即 $a^2=4$,因 $a>0$,故 $a=2$。于是 $b=3,c=5$。则 a,b,c 的几何平均值为

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{2\times 3\times 5}=\sqrt[3]{30}。$$

仅 C 入选。

例 7(条件充分性判断) $a=b=c$ 成立。

(1) b 是 a，c 的算术平均值；　(2) b 是 a，c 的几何平均值。

解　条件(1)、(2)单独成立时由于不能确定 a,b,c，它们均不充分，但当条件(1)与条件(2)联合起来后，有 $(b+c)/2=a=\sqrt{bc}$，即

$$b+c=2\sqrt{bc}。$$

又因 b 是 a，c 的几何平均值，故 $a>0$，$c>0$，因而 $b>0$。于是由 $b+c=2\sqrt{bc}$ 得到

$$(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2=2\sqrt{bc},\quad 即\quad (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=0.$$

故 $\sqrt{b}=\sqrt{c}=0$，即 $b=c$. 因而 $a=(b+c)/2=b$. 于是有 $a=b=c$. 仅 C 入选。

题型二　判别不等式

常用定理 1.3.1 **判别之**。

例 8[1999 年 Ⅰ 6]　设 x,y,α 都是实数，且 $x^2+y^2=2$，则

(A) $|x\sin\alpha+y\cos\alpha|>2$。　(B) $|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 2$。

(C) $|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 3/2$。　(D) $|x\sin\alpha+y\cos\alpha|>3/2$。

(E) $|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 2\sqrt{2}$。

解　仅(C)入选。利用两个非负数的算术平均数不小于其几何平均数即定理 1.3.1 求之。

$$\begin{aligned}&|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\\&\leqslant|x\sin\alpha|+|y\cos\alpha|=|x||\sin\alpha|+|y||\cos\alpha|\\&=\sqrt{|x|^2|\sin^2\alpha|}+\sqrt{|y|^2|\cos^2\alpha|}\leqslant\frac{x^2+\sin^2\alpha}{2}+\frac{y^2+\cos^2\alpha}{2}\\&=\frac{x^2+y^2+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

例 9　设正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

(A) 等于 3。　(B) 小于 3。　(C) 小于 8。

(D) 不小于 9。　(E) 不大于 9.

解　因 a,b,c 为正数，故由定理 1.3.1 有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}},$$

又因 $\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{a+b+c}{3}$，$a+b+c=1$，故 $\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{1}{3}$。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant\frac{3}{1/3}=9.$$ 仅(D)入选。

例 10 已知一个班级的考试成绩为：男生平均成绩为 90 分，女生平均成绩为 81 分，全班平均成绩为 84 分。如果 b 为男生人数，g 为女生人数，则下式中一定正确的是

(A) $b>g$。 (B) $b=g$。 (C) $b<g$。 (D) $b\leqslant g$。 (E) $b\geqslant g$。

解 由题意，通过全班的总成绩的两种表示方式 $90b+81g$ 与 $84(b+g)$ 可建立 b 与 g 的关系式 $90b+81g=84b+84g$，即 $6b=3g$ 或 $g=2b$. 由于 $g>0, b>0$，因而 $g>b$。仅(C)入选。

题型三 利用平均值求函数的最大值、最小值

常利用平均值定义 1.3.1 及定理 1.3.1 求之。

例 11 已知 $\lg x+\lg y=2$，则 $1/x+1/y$ 的最小值为

(A) 3/4。 (B) 2/5. (C) 1/5。 (D) 5/6. (E) 1。

解 由已知条件得 $xy=10^2=100$. 又由定理 1.3.1 得到

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\times 10=20.$$

即 $x+y$ 的最小值为 20，因而

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{100}\geqslant\frac{20}{100}=\frac{1}{5},$$

即 $1/x+1/y$ 的最小值为 1/5。仅(C)入选。

例 12 设 $2\leqslant x\leqslant 10$，且 $y, 2(y-1), 3(y-2)$ 的算术平均值为 x，则 y 可得最大值为

(A) 19/3。 (B) 14/3. (C) 11/3. (D) 8/3. (E) 5/3.

解 由题设，利用定义 1.3.1(1)得到

$$y+2(y-1)+3(y-2)=3x,$$

即 $$6y-8=3x,\quad y=(3x+8)/6\leqslant(3\times 10+8)/6=19/3,$$

故 y 可取得最大值 19/3. 仅(A)入选。

例 13(条件充分性判断) 设 x, y 为实数，可确定 3^x+9^y 的最小值是 6。

(1) 点 (x, y) 只在直线 $x+2y=2$ 上移动；

(2) 点 (x, y) 只在直线 $x+2y=0$ 上移动。

解 当条件(1)成立时，有 $y=(2-x)/2$，于是

$$3^x+9^y=3^x+3^{(2-x)}.$$

利用定理 1.3.1 即几何平均值与算术平均值的关系得到

$$3^x+9^y=3^x+3^{(2-x)}\geqslant 2\sqrt{3^x\times 3^{(2-x)}}=6。$$

当且仅当 $3^x=9^y$ 时 3^x+9^y 取得最小值 6，由

$$3^x=9^y=3^{2(2-x)/2}=3^{2-x},$$

得到 $$x=2-x,\quad 即\quad x=1。$$

因而 $y=(2-x)/2=1/2$，即当 $x=1$，$y=1/2$ 时，3^x+2^y 取得最小值。条件(1)充分。

当条件(2)成立时，有

$$y=x/2,\quad 3^x+9^y=3^x+(3^2)^{x/2}=2\times 3^x\geqslant 0,$$

且当 $x\to-\infty$ 时，$$\lim_{x\to-\infty}(3^x+9^y)=2\lim_{x\to-\infty}3^x=0。$$

因而这时 3^x+9^y 没有最小值。条件(2)不充分。仅 A 入选。

例 14（条件充分性判断） 函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $1/2$.

(1) $f(x)=|x-2/5|+|1/10+x|$；

(2) $f(x)=x+1/(54x^2)(x>0)$。

解 当条件(1)成立时，有

$$f(x)\geqslant|2/5-x|+|1/10+x|,$$

当且仅当 $(2/5-x)(1/10+x)\geqslant 0$ 时，有

$$f(x)\geqslant|2/5-x|+|1/10+x|=|2/5-x+1/10+x|=1/2。$$

由等号成立的充分条件 $(2/5-x)(1/10+x)=0$ 可得

$$x=2/5\quad 或\quad x=-1/10。$$

这时，有 $y=f(x)\geqslant 1/2$，即 $y_{\min}=1/2$.

由条件(2)有 $$f(x)=x+\frac{1}{54x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{54x^2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{54x^2}}=\frac{1}{2}。$$

当且仅当 $x/2=x/2=1/(54x^2)$ 即 $x=1/3$ 时，$y_{\min}=1/2$. 因而条件(1)与条件(2)均为充分条件。仅 D 入选。

题型四 求解与平均值有关的实际应用题

例 15[2001 年 Ⅰ 4] 某班同学在一次测验中，平均成绩为 75 分，其中男同学人数比女同学人数多 80%，而女同学平均成绩比男同学高 20%，则女同学的平均成绩为

(A) 83 分。 (B) 84 分。 (C) 85 分。 (D) 86 分。

解 设女同学人数为 x，则男同学人数为 $(1+80\%)x$，又设男同学平均成绩为 y，则女同学平均成绩为 $(1+20\%)y$，由

$$\frac{(1+80\%)xy+x(1+20\%)y}{x+(1+80\%)x}=75$$

解得 $y=70$，故女同学平均成绩为$(1+20\%)\times 70=84$(分)。仅(B)入选。

例 16[2002 年 Ⅱ 4]　甲、乙两组射手打靶，乙组平均成绩为 171.6 环，比甲组平均成绩高出 30%，而甲组人数比乙组人数多 20%，而甲、乙两组射手的总平均成绩是

(A) 140 环。　(B) 145.5 环。　(C) 150 环。　(D) 158.5 环。

解　为求出甲、乙两组射手的总平均成绩，先必须求出两组的人数及两组的平均成绩。为此设乙组人数为 x，则甲组人数为 $1.2x$. 由题意知，设甲组平均成绩为 y，则

$$y+y\times 30\%=171.6,\quad \text{即}\quad y=\frac{171.6}{1+30\%}=132。$$

则甲、乙两组选手的总平均成绩为

$$\frac{171.6x+132\times 1.2x}{x+1.2x}=150(\text{环})。仅(C)入选。$$

例 17(条件充分性判断)　英语期末考试全班平均分可以确定。

(1) 16 名男生的英语总分是 1263 分，12 名女生的英语总分是 1137 分；

(2) 男生英语平均分为 76.4 分，女生英语平均分为 86.6 分。

解　当条件(1)成立时，得到全班学生人数为 $16+12=28$。总成绩$1263+1137=2400$(分)。于是全班平均分为 $2400/28=86.9$(分)。条件(1)充分。但当条件(2)成立时，只知男生的平均分和女生的平均分，而不知男生人数与女生人数，故不能求得全班平均分。条件(2)不充分。仅 A 入选。

注意　当条件(2)成立时，易犯下列错误：把两个平均分相加除以 2 即得全班平均分数，因而条件(2)也充分。

例 18[1998 年 Ⅱ 3]　以一笔钱买 A 型彩色电视机，若买 5 台余 2500 元，若买 6 台则尚缺 4000 元。今以这笔钱购买 B 型彩电，正好可购买 7 台，则 B 型彩电每台的售价是

(A) 4000 元。　(B) 4500 元。　(C) 5000 元。　(D) 5500 元。

解　由题意易知，A 型彩电单价是 $2500+4000=6500$(元)，这笔钱共为 $6500\times 5+2500=35000$(元)，则 B 型彩电的单价为 $35000\div 7=5000$(元)。仅(C)入选。

例 19　某班同学在一次测验中，全班平均分为 75 分，女生的平均成绩却高达 84 分，这比男生的平均成绩高 20%。(1)已知男生共有 27 人，求全班人数；(2)男生比女生多 80%，女生得分之和为 1260 分，求全班人数。

解 (1)由题设知男生的平均成绩为

$$\frac{84}{1+20\%}=\frac{84\times 100}{120}=70(\text{分})。$$

设女生人数为 x,则 $x\times 84+27\times 70=(x+27)\times 75$。

解得 $x=15$。因而全班人数为 $27+15=42$(人)。

(2)由 $1260\div 84=15$ 知,全班女生人数为 15,因而男生人数为

$$15(1+80\%)=27(\text{人}),$$

故全班人数为 $27+15=42$(人)。

习 题 1.3

(一) 问题求解

1. [2003 年 Ⅰ 20]车间共有 40 人,某次技术操作考试的平均成绩为 80 分,其中男工平均成绩为 83 分,女工平均成绩为 78 分,该车间有女工

(A) 16 人。 (B) 18 人。 (C) 20 人。 (D) 24 人。 (E) 28 人。

2. 某班学生 45 人,期末考试班平均成绩为 90 分,85 分以上(含 85 分)学生的平均成绩是 95 分,不足 85 分学生的平均成绩是 80 分,则 85 分以上的学生人数是

(A) 30。 (B) 28。 (C) 32。 (D) 35。 (E) 以上结论都不正确。

3. 设 a,b,c 都是正数,则必有 $(a+b+c)(1/a+1/b+1/c)$

(A) <9。 (B) $=9$。 (C) $\geqslant 9$。 (D) >9。 (E) $\leqslant 9$。

(二) 条件充分性判断

1. 设 $a>0,b>0$,则 a,b 的比例中是 $2\sqrt{2}$。

(1) a,b 的算术平均值为 8; (2) $1/a+1/b=2$.

2. 可确定有 20 名学生的一个班级英语的平均成绩(百分制)

(1) 最低分为 60 分,最高分为 85 分;

(2) 8 名女生的平均成绩为 70 分,男生的平均成绩为 80 分。

1.4 一元一次方程和一元二次方程

（一）考试内容

1. 一元一次方程及其解法

含有未知数的等式称为方程；能使方程左右两边的值相等的未知数的值，称为方程的根（或解）；求方程解的过程称为解方程。

只含一个未知数，且未知数的最高次数为一次的方程称为一元一次方程，其一般形式（最简形式）为 $ax=b$（$a\neq0$）。

把所给一元一次方程化为上述一般形式，再解出 x 即可。

一般说来，形如 $ax=b$ 的方程（注意 $a=0$ 时，该方程不是一元一次方程）的解法有三种情况。

当 $a\neq0$ 时，其解为 $x=b/a$；当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，方程的解为任意实数；当 $a=0$，而 $b\neq0$ 时，方程无解。

2. 一元二次方程及其解法

只含一个未知数，且未知数的最高次数为二次的方程称为一元二次方程，其一般形式（标准形式）为

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)。$$

其解法常用的有下述三种方法：

1° 因式分解法。常用十字相乘法等方法将方程化为两个一次因式之积等于零的形式 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$. 由此解得其解 $x=x_1$ 或 $x=x_2$。

2° 配方法。将方程左边配成一个完全平方的形式

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}。$$

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，在上方程两边开平方得到

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

其解为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

其中 b^2-4ac 称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式。习惯上记作 $\Delta=b^2-4ac$.

3° 把上面所得结果

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

作为公式使用，将方程系数代入上式直接求解。

3. 一元二次方程的根与系数的关系

定理 1.4.1（韦达定理） (1)x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的两个根的充分必要条件是

$$x_1+x_2=-b/a,\quad x_1x_2=c/a.$$

(2) x_1, x_2, x_3 是一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$的三个根的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-b/a, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c/a, \\ x_1x_2x_3=-d/a. \end{cases}$$

4. 二元一次方程组及其解法

由含有相同的两个未知数的两个一次方程所组成的方程组称为二元一次方程组，其一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & ① \\ a_1x+b_2y=c_2. & ② \end{cases}$$

（其中 a_1, b_1 不同时为零，且 a_2, b_2 不同时为零.）

这两个二元一次方程的公共解就是这个二元一次方程组的解。

其解法常用下述两种方法。

1° 加减消元法。①$\times b_2$ −②$\times b_1$ 消去 y（也可消去 x）得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2. \qquad ③$$

从所得的一元一次方程③中解出 x，再将 x 的值代入方程①（或②），求出 y 的值，从而得到方程组的解。

2° 代入消元法. 由方程①（或②）得到

$$y=(c_1-a_1x)/b_1 \quad (b_1\neq 0), \qquad ④$$

将其代入方程②，消去 y，得到关于 x 的一元一次方程。解之即得 x 的值，再将此解值代入式④即得 y 的解值。

除上述两种常用的方法外，对方程个数与未知个数相等的二（三）元一次方程组还可用线性代数中克莱姆法则求解。

5. 指数方程、对数方程及其解法

指数方程、对数方程及其解法详见本节题型四。

（二）考试要求

掌握各类方程（一元一次方程（组）、一元二次方程（组）、指数方程和对数方程）的解法及一元二次方程根与系数的关系（即韦达定理）。会解一元一次方程及一元二次方程的简单实际应用题。

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　已知一元二次方程，求其根的代数式的值

求解此类题型不需求解方法，只需应用韦达定理即定理 1.4.1。

类型（一）　已知一元二次方程，求其根的对称式的值。

一个代数式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果把其中任意两个变元的位置对调，而代数式不变，那么这样的代数式叫做关于这些变元的对称式。例如 $\alpha^2+\beta^2$，$1/\alpha+1/\beta$，都是关于 α,β 的对称式，$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2$ 是关于 a,b,c 的对称式。

已知一元二次方程，求其根 α,β 的对称式的值不需解方程，只需应用一元二次方程根与系数的关系求之。为此，应首先把所给对称的代数式表示为关于 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha\beta$ 这两个基本式子的函数形式，然后将 $\alpha+\beta,\alpha\beta$ 的值代入即可求出 α,β 的对称式的值。

例 1[2002 年Ⅰ7]　已知方程 $3x^2+5x+1=0$ 的两个根为 α,β，则 $\sqrt{\beta/\alpha}+\sqrt{\alpha/\beta}$ 等于

（A）$-5\sqrt{3}/3$。　（B）$5\sqrt{3}/3$。　（C）$\sqrt{3}/5$.　（D）$-\sqrt{3}/5$.

解　由根与系数的关系得到 $\alpha+\beta=-5/3,\alpha\beta=1/3$，则

$$\begin{aligned}(\sqrt{\beta/\alpha}+\sqrt{\alpha/\beta})^2 &=\beta/\alpha+\alpha/\beta+2=(\beta^2+\alpha^2)/\alpha\beta+2\\ &=[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]/(\alpha\beta)+2=(\alpha+\beta)^2/(\alpha\beta)=25/3.\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\sqrt{\beta/\alpha}+\sqrt{\alpha/\beta}&=\sqrt{(\sqrt{\beta/\alpha}+\sqrt{\alpha/\beta})^2}=\sqrt{25/3}\\ &=5/\sqrt{3}=5\sqrt{3}/3。\text{仅(B)入选。}\end{aligned}$$

注意　（1）为利用根与系数的关系，常先将两根的代数式的表达式进行运算（例如将其平方），使之出现两根之和或其乘积的形式。

（2）对于 $\alpha^2+\beta^2$ 常化为 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

（3）还可求类似的代数式 $\alpha^2-\beta^2,(\alpha-\beta)^2,1/\alpha^3\pm1/\beta^3$ 的值，等等。

例 2[2000 年Ⅰ5] **已知方程** $x^3+2x^2-5x-6=0$ **的根为** $x_1=-1, x_2, x_3$。**则** $1/x_2+1/x_3=$

(A) 1/6。　(B) 1/5。　(C) 1/4。　(D) 1/3。　(E) 1/8。

解法 1　用因式分解法将所给方程化为三个一次因式的乘积，得到

$$x^3+2x^2-5x-6=x^3+x^2+x^2-5x-6=x^2(x+1)+(x-6)(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2+x-6)=(x+1)(x+3)(x-2)=0.$$

因而 $x+1=0, x+3=0, x-2=0$，**故原方程的根为** $x_1=-1, x_2=-3, x_3=2$.

所以　$\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_2+x_3}{x_2x_3}=\dfrac{-3+2}{-6}=\dfrac{1}{6}$。**仅**(A)**入选**。

解法 2　利用三次方程的韦达定理解之。由该定理得到

$$\begin{cases}-1+x_2+x_3=-2,\\(-1)\cdot x_2\cdot x_3=+6,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_2+x_3=-1,\\x_2x_3=-6.\end{cases}$$

因而　$\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_2+x_3}{x_2x_3}=\dfrac{-1}{-6}=\dfrac{1}{6}$。**仅**(A)**入选**。

例 3(**条件充分性判断**)　**已知** y_1, y_2 **是关于** y **的方程** $y^2+(2-b)y+b/4=0$ **的两个实根，**$\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}$**的值是已知的。**

(1)**关于** x **的方程** $x^2+bx+m=0$ **有两个相等实根；**

(2)$2m^2-9mb+4b^2=0$ **且** $b\neq 2m, b\neq 0$.

解　给出的条件(1)**与**(2)**由于都不可能确定** b **的值，从而求不出** y_1 **与** y_2 **的值。它们不能分别作为充分条件，但由于条件**(1)**与**(2)**中都分别包含一个** m **与** b **的等量关系，利用此关系可望求出** b **的值。于是条件**(1)**与**(2)**联合起来必可求出** b **值。事实上由条件**(2)**有**

$$(2m-b)(m-4b)=0,$$

且 $b\neq 2m$，**故** $m=4b$. **将其代入条件**(1)**有：**$x^2+bx+4b=0$ **有两相等实根，故**

$$\Delta=b^2-16b=0,$$

则　$b=16$　**或**　$b=0$(**舍去**)，

原方程化为 $y^2-14y+4=0$，**利用韦达定理得到**

$$y_1+y_2=14,\quad y_1y_2=4.$$

故　$\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}=\sqrt{(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})^2}=\sqrt{y_1+y_2+2\sqrt{y_1y_2}}$

$$=\sqrt{14+4}=3\sqrt{2}.$$ **仅** C **入选。**

类型(二)　已知一元二次方程，求其根的代数式的值。

此类题型除利用韦达定理外，还需利用其他条件求之。

例 4[1998 年Ⅱ6] 若方程 $x^2+px+37=0$ 恰有两个正整数解 x_1 与 x_2，则 $\dfrac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$ 的值是

(A) -2。　(B) -1。　(C) $-1/2$.　(D) 1。　(E) 2。

解 由 $x_1x_2=37$ 及 x_1,x_2 为正整数得到 $x_1=1,x_2=37$。由韦达定理得 $p=-(x_1+x_2)=-38$，因而

$$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}=\frac{x_1x_2+x_1+x_2+1}{p}=\frac{37+38+1}{-38}=-2.$$

仅(A)入选。

例 5 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的两个实根。据此求出的 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值是

(A) 16。　(B) 19。　(C) 14/3。　(D) 18。　(E) 2。

解 1° 先由方程有两实根的判别式条件求出参数 k 的约束条件，即 k 的定义域

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\\&=-3k^2-16k-16=(-3k-4)(k+4)\geqslant 0\end{aligned}$$

解 $\begin{cases}-3k-4\geqslant 0,\\ k+4\geqslant 0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}-3k-4\leqslant 0,\\ k+4\leqslant 0。\end{cases}$ 前者的解为 $-4\leqslant k\leqslant -\dfrac{4}{3}$，后者无解。因而 k 的定义域为 $[-4,-4/3]$.

2° 将 $x_1^2+x_2^2$ 化成两根之和及积的函数，从而化成 k 的函数，即

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)\\&=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19=f(k)。\end{aligned}$$

3° 显然 $f(k)$ 为 k 的单调减少函数，故只有当 k 取最小值时，$f(k)$ 才取最大值。因而 $k=-4$ 时，$f(k)$ 的最大值为

$$f(k)|_{k=-4}=-(-4+5)^2+19=18,$$

即 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值为 18。仅(D)入选。

题型二　已知一元二次方程两根的某些关系，确定该方程

类型(一)　已知两根对称式的值，确定该方程。

为确定该方程的系数和常数只需将两根的对称式化成两根之和与之积的函数，然后用韦达定理求之。

例 6[1999 年Ⅱ7] 设方程 $3x^2-8x+a=0$ 的两个实根为 x_1,x_2，若 $1/x_1+1/x_2$ 的算术平均值为 2，则 a 的值是

(A) -2。　(B) -1。　(C) 1。　(D) $1/2$。　(E) 2。

解　由韦达定理有 $x_1+x_2=8/3, x_1x_2=a/3$. 又由题设有

$$\frac{1/x_1+1/x_2}{2}=2,\quad \text{即}\quad \frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}=\frac{8/3}{2\times(a/3)}=2,$$

故 $a=2$. 仅(E)入选。

例 7　求作一个以两个正数 α 和 β 为根的一元二次方程，且必使 α 和 β 适合下面两个关系式：

$$\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\frac{31}{43},\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{7}{2}.$$

解　为求出所求方程，只需求出其系数和常数，即求出 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 的值。为此将所给的两个等式左端化成 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 的函数，即

$$\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}=\frac{31}{43},$$

亦即　$$12(\alpha+\beta)^2-98\alpha\beta=0,\qquad ①$$

得　$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{2},\quad \text{即}\quad 2(\alpha+\beta)=7\alpha\beta。\qquad ②$$

由式①与式②得到

$$12(\alpha+\beta)^2-28(\alpha+\beta)=0,\quad \text{即}\quad 4(\alpha+\beta)[3(\alpha+\beta)-7]=0,$$

因 $\alpha+\beta\neq0$，故　$3(\alpha+\beta)-7=0$,　$\alpha+\beta=7/3$,　$\alpha\beta=2/3$.

所以所求的一元二次方程是 $3x^2-7x+2=0$。

类型(二)　已知两根代数式的值，确定该方程。

此类题除利用韦达定理外，还需利用其他条件才能确定其系数和常数。

例 8[2003 年 Ⅰ 2](条件充分性判断)　一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根之差的绝对值为 4。

(1) $b=4, c=0$;　(2) $b^2-4c=16$.

解　设方程的两根为 x_1, x_2，利用韦达定理，得到

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{b^2-4c}。$$

将条件(1)代入，有 $|x_1-x_2|=4$；将条件(2)代入，也有 $|x_1-x_2|=4$. 因而条件(1)与(2)都充分。仅 D 入选。

例 9(条件充分性判断)　已知 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，且 $x_1^4+3x_2=5$(其中 a, b, c 为常数且 $a\neq0$)。

(1)常数 $a=1, b=-1$;　(2)$b=c$.

解　当条件(1)成立时，因条件(1)没有给出 c 的值，求不出 x_1, x_2，故不

充分。而条件(2)只给出 $b=c$,无具体数值也求不出 x_1,x_2,从而求不出 $x_1^4+3x_2$ 的值。但如将条件(1)与(2)联合起来,则 $a=1$,且 $b=c=-1$,这时原方程化为 $x^2-x-1=0$,且有 $x_1^2=x_1+1$. 代入所给的等式得到

$$x_1^4+3x_2=(x_1^2)^2+3x_2=(x_1+1)^2+3x_2=x_1^2+2x_1+1+3x_2$$
$$=(x_1^2-x_1-1)+3(x_1+x_2)+2=0+3\times1+2=5.$$

故条件(1)与(2)联合起来充分。仅 C 入选。

类型(三) 已知两根的代数式(对称式)的最大(小)值,确定该方程。

求解此类问题常分以下三步进行:

1° 先根据方程有两实根列出判别式即方程中常数 k 所满足的约束条件,此条件也可看成 k 的定义域;

2° 将两根的代数式利用韦达定理化成 k 的函数 $f(k)$;

3° 观察 $f(k)$ 是增函数还是减函数,以及 k 取何值时,$f(k)$ 等于已给出的最大(小)值,此 k 值即为所求。

例 10(条件充分性判断) 关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ 的两个实根的平方和有最小值 9。

(1)整数 $m=-1$; (2)整数 $m=1$.

解 设方程两根为 x_1,$x_2\in\mathbf{R}$,则

$$x_1+x_2=-(m-2),\quad x_1x_2=-(m+3),$$

且 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-2)^2+2(m+3)=(m-1)^2+9$,

当且仅当 $m=1$ 时,两实根的平方和有最小值 9,因而条件(2)充分,而条件(1)不充分。仅 B 入选。

例 11(条件充分性判断) 设 α,β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+a(k+b)x+k^2+b=0$ (a,b,k 均为实数)的两个实根,$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值为 18。

(1) $a=3$ 且 $b=2$; (2) $a<b$,a,b 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两个根。

解 因 $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)=0$,其根为 $a=2<b=3$,这与条件(1)矛盾,故条件(1)与(2)最多只可能有一个成立,即为充分条件。

由条件(2)有 $a=2$,$b=3$,代入原方程得到 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$,由韦达定理得到

$$\alpha+\beta=-2(k+3),\quad \alpha\beta=k^2+3,$$

则 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2=2(k+7)^2-54. \quad ①$$

由于 k 的取值要受方程有两个实根的制约，k 应满足判别式

$$\Delta=4(k+3)^2-4(k^2+3)\geqslant 0。$$

解得 $k\geqslant -1$.

显然 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=2(k+7)^2-54$ 为 k 的单调增加函数，故当 k 取最小值 -1 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 取最小值。易求得当 $k=-1$ 时，

$$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=18,$$

即

$$[(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2]|_{\min}=18.$$

因而条件(2)充分，条件(1)不充分。仅 B 入选。

注意　不能仅由式①确定 $k=-7$ 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 取最小值 -54。这是因为 k 要受方程有两实根的制约。

类型(四)　已知方程两根的关系，求该方程。

例 12　已知方程 $x^2+mx+n=0$ 的两根的积比两根的和大 5，并且根的平方和等于 25，则 m，n 分别等于

(A) 5，0。　(B) 5，0 或 -7，12。　(C) -7，12。　(D) 0，5 或 12，-7。

解　设方程两根为 x_1，x_2，则

$$x_1x_2-(x_1+x_2)=n+m=5,\quad 即\quad n=5-m,\qquad ①$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2n=25.\qquad ②$$

将式①代入式②得到

$$m^2+2m-35=(m+7)(m-5)=0.$$

因而 $m=5$，或 $m=-7$，于是 m，n 分别可等于

$$m=5,n=0\quad 或\quad m=-7,n=12.$$ 仅(B)入选。

例 13　已知方程 $2x^2-6x+3=0$ 的两个根是 a 和 d，并且 a，b，c，d 四个数成等差数列，求作以 b 和 c 为根的一元二次方程。

解　方程 $2x^2-6x+3=0$ 的两根易求得为

$$a=(3-\sqrt{3})/2,\quad d=(3+\sqrt{3})/2.$$

又设 a，b，c，d 四个数所成等差数列的公差是 m，则

$$d=a+3m,\quad 即\quad (3+\sqrt{3})/2=(3-\sqrt{3})/2+3m,$$

解得 $m=\sqrt{3}/3$。于是

$$b=a+m=(3-\sqrt{3})/2+\sqrt{3}/3=3/2-\sqrt{3}/6,$$

$$c=b+m=(3/2-\sqrt{3}/6)+\sqrt{3}/3=3/2+\sqrt{3}/6.$$

由此可得　$b+c=3$，　$bc=(3/2-\sqrt{3}/6)(3/2+\sqrt{3}/6)=13/6$。

于是所求方程是　　$6x^2-18x+13=0$.

题型三　已知一元二次方程根的性质，求方程中参数的取值范围

已知方程$ax^2+bx+c=0$的根的性质常用根的判别式$\Delta=b^2-4ac$及其求根公式，求其参数的取值范围。

命题 1.4.1　(1) 当$\Delta=b^2-4ac>0$时该方程有两个不同的实根，即

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 当$\Delta=b^2-4ac=0$时该方程有两个相等实根，其表示式为$x=\frac{-b}{2a}$.

(3) 当$\Delta=b^2-4ac<0$时该方程无实根。

(4) 上述(1)，(2)，(3)的逆命题也成立。

由命题 1.4.1(4)知，一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ (a,b,c为实数，且$a\neq0$)如果有两个不相同的实根，那么$\Delta=b^2-4ac>0$；如果有两个相同的实根，那么$\Delta=b^2-4ac=0$；如果没有实根，那么$\Delta=b^2-4ac<0$。

例 14[2001 年Ⅰ6]　已知关于x的一元二次方程$k^2x^2-(2k+1)x+1=0$有两个相异实根，则k的取值范围为

(A) $k>1/4$。　　(B) $k\geqslant1/4$.

(C) $k>-1/4$且$k\neq0$。　　(D) $k\geqslant1/4$且$k\neq0$。

解　因二次方程有两个相异实根，由命题 1.4.1(4)知其判别式

$$\Delta=b^2-4ac=(2k+1)^2-4k^2\cdot1>0,\quad 即\quad k>-1/4。$$

为保证所给方程为二次方程，应有$k^2\neq0$，即$k\neq0$，故k的取值范围为$k>-1/4$，且$k\neq0$。仅(C)入选。

例 15[2004 年Ⅰ2](条件充分性判断)　x_1,x_2是方程$x^2-2(k+1)x+k^2+2=0$的两个实根。

(1) $k>1/2$；　　(2) $k=1/2$.

解　原方程的判别式$\Delta=b^2-4ac=4(k+1)^2-4(k^2+2)=4(2k-1)$. 当条件(1)成立即$k>1/2$时得$2k-1>2\times(1/2)-1=0$，因而$\Delta>0$。于是由命题 1.4.1(1)知方程有两个实根。条件(1)充分。当条件(2)成立时有$k=1/2$，则$2k-1=0$，因而$\Delta=0$，由命题 1.4.1(2)知方程有两相等实根，条件(2)也充分。仅 D 入选。

注意　x_1,x_2为实根，在解题中未用到。该题的题干最好改为“方程$x^2-2(k+1)x+k^2+2=0$有两个实根”。

例 16[1998 年Ⅰ7] **要使方程** $3x^2+(m-5)x+m^2-m-2=0$ **的两个实根满足** $0<x_1<1$ **和** $1<x_2<2$**,实数** m **的取值范围应是**

(A) $-2<m<-1$。　(B) $-4<m<-1$。　(C) $-4<m<-2$。

(D) $(-1-\sqrt{65})/2<m<-1$。

(E) $-3<m<1$.

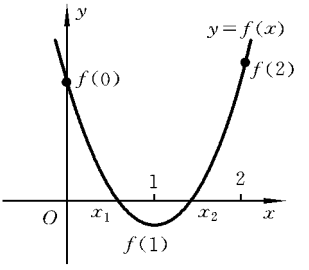


图 1.4.1

解　令 $f(x)=3x^2+(m-5)x+m^2-m-2$**,则** $f(x)$**在**$[0,1]$**与**$[1,2]$**上连续,其图像(见图** 1.4.1**)是开口向上的抛物线,在**$[0,1]$**与**$[1,2]$**上分别单调下降和单调上升,且与** x **轴交于点**$(x_1,0),(x_2,0)$**。由其图像易知** $f(0)>0, f(x_1)=0, f(1)<0, f(1)<0, f(x_2)=0, f(2)>0$**,于是有如下的不等式组:**

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)<0, \\ f(2)>0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} m^2-m-2=(m-2)(m+1)>0, \\ m^2-4=(m-2)(m+2)<0, \\ m^2+m=m(m+1)>0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} m<-1 \text{ 或 } m>2, \\ -2<m<2, \\ m<-1 \text{ 或 } m>0。 \end{cases}$ **又解** $\begin{cases} m<-1, \\ -2<m<2, \\ m<-1 \end{cases}$ **得** $-2<m<-1$**;解** $\begin{cases} m>2, \\ -2<m<2, \\ m<-1 \end{cases}$

无解,故所求的公共解为 $-2<m<-1$**。仅**(A)**入选。**

例 17[2005 年Ⅰ13]**(条件充分性判断)　方程** $4x^2+(a-2)x+a-5=0$ **有两个不等的负实根。**

(1) $a<6$;　　(2) $a>5$。

解　判别式 $\Delta=(a-2)^2-4\times4(a-5)=(a-2)^2-16(a-5)$**。为使方程有两个不等的实根,必有** $\Delta>0$**,即**

$$(a-2)^2-16(a-5)=a^2-20a+84=(a-14)(a-6)>0。$$

又因 $a^2-20a+84$ **为开口向上的抛物线,为使其大于零,**a **的取值必在** $a^2-20a+84=0$ **的两根之外,故** $a>14$ **或** $a<6$。

为使其两根都为负实根,两根之和 $x_1+x_2<0$**,且两根之积** $x_1x_2>0$**。于是又得到**

$$x_1+x_2=-(a-2)/4<0, \quad \text{即} \quad a>2。$$

$$x_1x_2=(a-5)/4>0, \quad \text{即} \quad a>5。$$

于是由 $a>14, a>2, a>5$ 得到 $a>14$；由 $a<6, a>2, a>5$ 得到 $5<a<6$. 当条件(1)与条件(2)同时成立时有 $5<a<6$. 仅 C 入选。

例 18(条件充分性判断)　要使两个关于 x 的二次方程 $x^2+ax+c=0$ 和 $x^2+bx+d=0$ 至少有一个方程有实根。

(1) $ab=2(c+d)$；　　(2) $ab=-2(c+d)$.

解　为证上述两个方程中至少有一个方程有实根，只需证明两方程的判别式 Δ_1 与 Δ_2 满足

$$\Delta_1+\Delta_2\geqslant 0。$$

事实上，$\Delta_1=a^2-4c, \Delta_2=b^2-4d$，因而如条件(1)成立，即 $ab=2(c+d)$ 成立，则

$$\Delta_1+\Delta_2=a^2+b^2-4(c+d)=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0。$$

因而 Δ_1, Δ_2 中至少有一个取非负值，故两个已知方程中至少有一个有实根，所以条件(1)充分。

同法可证条件(2)也充分。仅 D 入选。

例 19[2000 年 Ⅱ 27]　求 a 的范围，使 $f(x)=x^3+3ax^2-xa-1$ 无极大值的同时又无极小值。

解　$f(x)$ 既无极大值又无极小值，说明 $f'(x)=3x^2+bax-a$ 无相异实根，由命题 1.4.1(4)知其判别式

$$\Delta=(6a^2)-4\times 3\times(-a)=36a^2+12a=12a(3a+1)\leqslant 0.$$

而 $3a^2+a$ 为开口向上的抛物线，使 $a(3a+1)\leqslant 0$ 的 a 的取值范围应在其两根之间，故 $-1/3\leqslant a\leqslant 0$. 于是当 $-1/3\leqslant a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 无极大值的同时又无极小值.

题型四　求解对数方程和指数方程

在指数里含有未知数的方程称为指数方程，在对数符号后面含有未知数的方程叫做对数方程。

指数方程与对数方程属于超越方程，所谓超越方程是指含有对未知数的超越运算(例如指数、对数、三角函数、反三角函数等运算)的方程。它无一般的代数解法规律。应着重掌握形如

$$a^{f(x)}=a^{\varphi(x)},\quad a^{2x}+b\cdot a^x+c=0,$$

$$\log_a f(x)=\log_a \varphi(x),\quad (\log_a x)^2+b\log_a x+c=0$$

(其中 $a>0, a\neq 1$)的方程的解法。

为将超越方程化成一元二次方程，除常作变量代换外，还要注意对数的换底公式及其推论的应用。换底公式为

$$\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a}\quad(a>0,a\neq1,c>0,c\neq1,N>0)。\tag{1.4.1}$$

由换底公式可得下述几个推论：

$$\log_a b\log_b a=1,$$

即

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\quad(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1)。\tag{1.4.2}$$

$$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b,$$

特别有

$$\log_{a^n} b^n=\log_a b。\tag{1.4.3}$$

上述性质在对数运算中是常用的。

解上述方程时，应设法把它们化为代数方程，变形过程中涉及指数、对数运算，可能会使方程中表示未知数的字母的取值范围扩大或缩小，因而导致增根或失根，应对所求的根进行检验。

此外，还应理解指数式 $a^b=d$ 与对数式 $b=\log_a d$ 的关系。这两式所表示的 a,b,d 三个量之间的关系是一致的，它们是同一关系的两种不同的表达形式，因而可以互相转化。事实上由 $a^b=d$（这里 $a>0,a\neq1$，因而 $d>0$）即可得到 $b=\log_a d$. 反之亦然。于是有

$$a^{\log_a d}=d=a^b\quad(a>0,a\neq1,d>0)。\tag{1.4.4}$$

以 10 为底的对数，叫做常用对数，并简记作 $\lg d$，即 $\log_{10} d=\lg d$。以无理数 e 为底的对数叫做自然对数，$\log_e x$ 通常写作 $\ln x$. 有

$$e^{\ln d}=d.\tag{1.4.5}$$

求解对数方程时应先充分利用下述对数性质和运算法则化简方程。

命题 1.4.2 设 $a>0,a\neq1$，则

(1) 零和负数没有对数；　(2) 1 的对数是零，即 $\log_a 1=0$；

(3) 底的对数是 1，即 $\log_a a=1$；(4) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y\ (x>0,y>0)$；

(5) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y\ (x>0,y>0)$；

(6) $\log_a x^n=n\log_a x\ (x>0)$；(7) $\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x\ (x>0)$。

从上述法则中可以看到，对数可把乘、除运算转化为加、减运算，可把乘方和开方运算转化为乘法或除法运算。

类型(一)　求解对数方程。

例 20　求解对数方程 $\log_x 25-3\log_{25} x+\log_{\frac{1}{5}}5=1$.

解　利用对数换底公式(1.4.3)**有** $\log_{\sqrt{x}}5=\log_{(\sqrt{x})^2}5^2=\log_x 25$。**利用式**(1.4.2)**有** $\log_x 25=1/\log_{25}x$.**于是原方程可化为**

$$1/\log_{25}x-3\log_{25}x+1/\log_x 25-1=0。$$

令 $t=\log_{25}x$,**则**

$$2/t-3t-1=3t^2+t-2=(3t-2)(t+1)=0,$$

故 $t_1=2/3,t_2=-1$,**即** $\log_{25}x=2/3$,**或** $\log_{25}x=-1$。**因而原方程的解为**

$$x_1=(25)^{2/3}=5\sqrt[3]{5},\quad x_2=1/25.$$

例 21(**条件充分性判断**)　**已知方程中未知数是** x,a **为待定常数。**

$$\log_x 9-3\log_9 x+\log_{\sqrt{x}}3=a$$

的两个解是 $x_1=3\sqrt[3]{3},x_2=1/9$ ($x>0$,**且** $x\neq 1$)。

(1) **常数** a **的值为** 1。　　(2) **常数** a **的值为** 2。

解　利用式(1.4.3)**有** $\log_{\sqrt{x}}3=\log_{(\sqrt{x})^2}3^2=\log_x 9$。**于是当** $a=1$ **时,原方程可化为**

$$\begin{aligned}\log_x 3^2-3\log_{3^2}(\sqrt{x})^2+\log_x 9&=\log_x 3^2-3\log_{3}\sqrt{x}+\log_x 3^2\\&=4\log_x 3-(3/2)\log_3 x=a=1.\end{aligned}$$

即

$$8\log_x 3-3\log_3 x-1=0,$$

$$8/\log_3 x-3\log_3 x-1=0,$$

于是 $3\log_3^2 x+2\log_3 x-8=0$.**设** $\log_3 x=y$,**则**

$$3y^2+2y-8=(3y-4)(y+2)=0。$$

解得 $y=\log_3 x=4/3$,**或** $y=\log_3 x=-2$,**故**

$$x_1=3^{4/3}=3\sqrt[3]{3},\quad x_2=3^{-2}=1/9.$$

因此条件(1)**充分。当** $a=2$ **时,原方程可化为** $3\log_3 x+4\log_3 x-10=0$,**此方程虽有两个实数解,但与** x_1,x_2 **不相等。因此条件**(2)**不充分。仅** A **入选。**

类型(**二**)　**求解指数方程。**

求解指数方程时,应首先考察各个底数是否有乘幂关系,如果有,可用变量代换或化为同一底数的指数方程解之。如果没有,可先在方程两端取对数,化为代数方程解之。

例 22[2000 **年** Ⅰ 26]　**解方程** $4^{x-\frac{1}{2}}+2^x=1$。

解　因 $4=2^2$,**故可用变量代换** $u=2^x$,**将原方程化为** $u^2/2+u-1=0$,**易求得其根为** $u_1=-1+\sqrt{3},u_2=-1-\sqrt{3}$(**舍去**),**则**

$$2^x=-1+\sqrt{3},\quad x=\log_2(\sqrt{3}-1).$$

例 23[2001 年Ⅰ10] **若** $2,2^x-1,2^x+3$ **成等比数列，则** $x=$

(A) $\log_2 5$。　(B) $\log_2 6$。　(C) $\log_2 7$。　(D) $\log_2 8$。

解　由题设有$(2^x-1)^2=2\times(2^x+3)$，**即** $2^{2x}-4\times 2^x-5=0$. **令** $2^x=t$，**则**$t^2-4t-5=(t-5)(t+1)=0$，**故**

$$t_1=5,\ t_2=-1,\quad \text{即}\quad 2^x=5,\ 2^x=-1(\text{舍去}),$$

故 $x=\log_2 5$。**仅**(A)**入选**。

例 24　指数方程 $6^{2x+4}=3^{3x}\times 2^{x+8}$ **的解是**

(A) $x=4$。　(B) $x=-2$。　(C) $x=\pm 4$。　(D) $x=\pm 2$。

(E) **方程无实数解。**

解

$$6^{2x+4}=2^{2x+4}\times 3^{2x+4}=3^{3x}\times 2^{x+8},$$

即 $2^{x-4}=3^{x-4}$，**底数** 2 **与** 3 **之间没有乘幂关系，两端取对数得到**

$$(x-4)\ln 2=(x-4)\ln 3,\quad \text{即}\quad (x-4)(\ln 3-\ln 2)=0,$$

故 $x-4=0$，**即** $x=4$。**仅**(A)**入选**。

下面是列方程解实际应用题的几种常见题型。解这类题型的方法和步骤是：

1° **理解题意。分析题中所给的关系，明确已知量和未知量，找出彼此间的数量关系。**

2° **设出未知数。可采用直接设元法和间接设元法。所谓直接设元法就是所求的是什么，就设未知数代表什么；有几个所求的量，就设几个未知数。但有时也采用间接设元法。根据题设条件设出和几个未知量都有密切关系的某个(些)量，作为基本未知数列出方程。这样可使方程(组)或解题简便。**

3° **列方程。这是求解应用题的关键一步。常从已知条件中找出题中各量之间相等的关系(常称为等量关系)，然后把相等关系中的各量代之以未知数的表示式就得到了方程。**

4° **解所列的方程或方程组。**

5° **检验。检验所得结果是否是原方程(组)的解，是否合乎题意。**

6° **对原问题作出答案。**

题型五　求解一元一次方程的实际应用题

例 25[2002 年Ⅰ1] **一批奖金发给甲、乙、丙、丁四人，其中** 1/5 **发给甲、**1/3 **发给乙，发给丙的奖金正好是甲、乙奖金之差的** 3 **倍。已知发给丁的奖金为** 200 **元，则这批奖金数为**

(A) 1500 **元。**　(B) 2000 **元。**　(C) 2500 **元。**　(D) 3000 **元。**

解 设这批奖金数为 x 元，则甲、乙、丙、丁的奖金数分别为 $x/5$，$x/3$，$3(x/3-x/5)$，200，其和应等于 x，故有

$$x/5+x/3+3(x/3-x/5)-200=x.$$

即 $$3x+5x+6x+3000=15x,$$

解得 $$x=3000(\text{元}).$$ 仅(D)入选。

例 26[2000 年Ⅱ4] 菜园里的菜获得丰收，收到 3/8 时，装满 4 筐还多 24 斤(1 斤＝500 克)，其余部分收完后刚好又装满了 8 筐，菜园共收获了白菜

(A) 381 斤. (B) 382 斤. (C) 383 斤. (D) 384 斤.

解 设共收白菜 x 斤。利用每筐装白菜的斤数相等，得到

$$\frac{(3/8)x-24}{4}=\frac{(5/8)x}{8},$$

解得 $$x=384(\text{斤}).$$ 仅(D)入选。

例 27[1997 年Ⅱ3] 用一根绳子量井深，若将绳子折成三折来量，井外余绳 4 尺(1 尺＝$\frac{1}{3}$米)，若折成四折来量，井外余绳 1 尺，则井深是

(A) 6 尺。 (B) 7 尺。 (C) 8 尺。 (D) 9 尺。 (E) 12 尺。

解法 1 由题意易知，绳子比井深长得多，应根据两次量井深时，绳子的长不变来列方程。

设井深为 x，第一次量井深时绳长的表示式为 $3(x+4)$，第二次量井深时，绳长的表示式应为 $4(x+1)$。由绳长相等得到

$$3(x+4)=4(x+1),$$

解得 $$x=8(\text{尺}).$$ 仅(C)入选。

解法 2 也可根据井深相等来列方程。x 的含义同解法 1，由题意和两次测量井深，井深应相等。因而有 $x/3-4=x/4-1$，即 $x=36$(尺)。于是井深为

$$x/3-4=36/3-4=12-4=8(\text{尺}).$$

或 $$x/4-1=36/4-1=9-1=8(\text{尺}).$$ 仅(C)入选。

例 28[2000 年Ⅰ3] 一本书有三篇文章，第一篇的页数分别是第二篇页数和第三篇页数的 2 倍和 3 倍。已知第三篇比第二篇少 10 页，则这本书共有

(A) 100 页。　(B) 105 页。　(C) 110 页。　(D) 120 页。

解　设第三篇文章的页数为 x，则第二篇的页数为 $x+10$. 由题意得到第一篇的页数为 $2(x+10)$ 或为 $3x$，因而有

$$2(x+10)=3x,\quad \text{即}\quad x=20(\text{页}).$$

因而第二篇的页数 $x+10=30$，第一篇的页数为

$$2(x+10)=2(20+10)=60(\text{页}),$$

这本书共有　$20+30+60=110(\text{页})$。仅(C)入选。

题型六　求解工程问题的实际应用题

该应用题型的基本等量关系是

工作总量＝工作效率×工作时间，

即　工作时间＝工作总量÷单位时间完成的工作量。

也可依工作量的关系列出方程，求解。

在工程问题中常遇到多人(多队)参加的工程的计算问题。这时要求出各人(各队)单独完成某项工程的效率(每天完成的工程量)以及以某种方式多人(多队)合作完成同一工程的效率。要找出这些效率之间的关系。一般来说，如果对同一工程，甲的效率为 A，乙的效率为 B，则甲、乙同时完成该工程的效率为 $A+B$；如果甲、乙单独完成某工程所需时间分别为 T_1，T_2，则甲、乙合作，完成该工程所需时间为 $\dfrac{1}{1/T_1+1/T_2}$，这里由于该工程的总工作量不具体，假设该工程的总工作量为 1。

求解有多人(多队)参加的工程问题，要注意上述两种特殊关系的应用。

例 29[1999 年 Ⅰ 2]　一项工程由甲、乙两队合作 30 天可以完成，甲队单独做 24 天后，乙队加入，两队合作 10 天后，甲队调走，乙队继续做了 17 天才完成。若这项工程由甲队单独做，需要

(A) 60 天。　(B) 70 天。　(C) 80 天。　(D) 90 天。　(E) 100 天。

解　设甲、乙两队单独完成该工程的天数分别为 x，y。又设该工程的总工作量为 1，则

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{30},\\[2ex] \dfrac{24}{x}+\dfrac{10}{y}+\dfrac{10}{x}+\dfrac{17}{y}=1,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{30}, & ①\\[2ex] \dfrac{34}{x}+\dfrac{27}{y}=1. & ②\end{cases}$$

下用加减消元法求解。

②－27×①得 $7\times(1/x)=0.1$，即 $x=70$(天)，即若由甲队单独做，需要

70 天才能完成。

注意 例 28 设工程的总工作量为 1，这是为了计算简便。事实上也可设总工作量为“2”、“3”，或者其他任何一个数。

例 30 某车间生产一批零件原计划 10 天完成，加工时采用新的技术，提前 3 天完成任务。又知原计划每天生产零件数比采用新技术后每天生产的零件的 3/4 还少 4 个，则原计划每天生产零件数比采用新技术生产的零件数少

(A) 4 个。　(B) 3 个。　(C) 2 个。　(D) 6 个。

解 利用“提前 3 天完成任务”列出等式，为此设采用新技术后每天生产零件数为 x 个，则原计划每天生产的零件数为 $(3/4)x-4$。又设该车间的整个生产任务为 1，则

$$\frac{1}{(3/4)x-4}-\frac{1}{x}=3。\text{解得}\quad x=8.$$

因而原计划每天生产 $(3/4)\times 8-4=2$ 个零件，较采用新技术生产的零件数 8 少 6 个。仅(D)入选。

例 31 甲、乙两个工程队需铺设一段地下管道，如果甲单独干 10 天，将正好完成铺设任务的一半；现在两队合作从两端同时相向施工，共用 12 天完成任务。如果由甲完成一半后，(1)由乙单独完成剩余任务，共需多少天完成？(2)由甲、乙合作完成剩余任务，需多少天完成？

解 假设该项任务的总工作量为 1，又设甲、乙两个工程队单独完成铺设任务的天数分别为 x，y，由题意有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}10=\dfrac{1}{2},\\[2ex] \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)12=1,\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}x=20,\\ y=30,\end{cases}$$

即铺设任务如果单独由甲、乙两队完成分别需 20 天，30 天完成。

(1) 乙单独完成剩余任务，设完成的天数为 S，则

$$\frac{1}{30}S=\frac{1}{2},\quad \text{即}\quad S=15,$$

即乙单独完成剩余任务共需 15 天。

(2)**解法 1** 由甲、乙合作完成剩余任务，设完成的天数为 t，则

$$\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)t=\frac{1}{2}\quad \text{解得}\quad t=6。$$

再加上甲已单独干了 10 天，完成铺设任务一半，故这项任务共需 10＋6＝16（天）完成。

（2）**解法 2**　因已知甲单独干需 10 天正好完成铺设任务的一半，由（1）又知乙单独干需 15 天完成。于是甲、乙完成剩余任务的效率分别为 1/10，1/15，因而由甲、乙合作完成剩余任务共需

$$\frac{1}{1/10+1/15}=\frac{30}{3+2}=6(\text{天})。$$

加上甲已单独干了 10 天，这项任务共需 10＋6＝16（天）完成。

例 32　甲、乙、丙三人完成某件工作，甲单独做，完成工作所用时间是乙、丙两人合作所需时间的 4 倍，乙单独完成工作所用的时间是甲、丙两人合作所需时间的 3 倍，则丙单独完成工作所需时间是甲、乙两人合作所需时间的

（A）2 倍.　（B）5/3 倍.　（C）7/12 倍.　（D）9/11 倍.　（E）11/7 倍.

解　因总工作量没有具体给定，为方便计设其为 1。若某人完成总工作量的天数为 m，则其日工作量为 $1/m$。

又设甲、乙、丙单独完成工作所需时间分别为 x,y,z，再设丙单独完成工作所需时间是甲、乙合作所需时间的 a 倍，下面建立方程组求出 a 值。由题设有

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z},\\[2mm]\dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z},\\[2mm]\dfrac{a}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}4=x\cdot\dfrac{y+z}{yz},&①\\[2mm]3=y\cdot\dfrac{z+x}{zx},&②\\[2mm]a=z\cdot\dfrac{x+y}{xy},&③\end{cases}$$

①×②×③得到

$$12a=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\frac{2xyz+x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+zx^2}{xyz}$$

$$=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right)=2+4+3+a,$$

故 $a=9/11$。仅（D）入选。

题型七　求解行程问题的实际应用题

有关行程问题的实际应用题实质上都是路程、速度与时间的关系问题。与速度有关的一类问题要利用下述速度 v，距离 s，时间 t 三者的关系解之：

$$v=s/t,\quad s=vt,\quad t=s/v。$$

还要注意在实际试题中常出现的几个关系：若两物体相向而行，则相对

速度为两速度之和；若两物体同向而行，则相对速度为两速度之差。

同一时间行走路程与两者的速度成正比例关系。

命题 1.4.3 设甲、乙两人同时相向出发，且在途中相遇，则

(1)甲行走路程＋乙行走路程＝全程；

(2)甲所用时间＝乙所用时间；

(3)相向行程速度＝甲行走速度＋乙行走速度。

例 33[2001 年Ⅱ1] 从甲地到乙地，水路比公路近 40 千米。上午 10：00，一艘轮船从甲地驶往乙地，下午 1：00，一辆汽车从甲地开往乙地，最后船、车同时到达乙地。若汽车的速度是每小时 40 千米，轮船的速度是汽车的 3/5，则甲、乙两地的公路长为

(A) 320 千米。 (B) 300 千米。 (C) 280 千米。 (D) 260 千米。

解 设甲、乙两地公路长为 x，则水路长为 $x-40$。依题意，利用 $t=s/v$ 得到

$$\frac{x}{40}+3=\frac{x-40}{40\times(3/5)}=\frac{x-40}{24},\quad \text{即}\quad \frac{x}{24}-\frac{x}{40}=3+\frac{40}{24},$$

亦即
$$\frac{5x}{120}-\frac{3x}{120}=\frac{360+200}{120},\quad 2x=560,x=280。$$

于是甲、乙两地的公路长为 280 千米。仅(C)入选。

例 34[1998 年Ⅰ3] 甲、乙两汽车从相距 695 千米的两地出发相向而行，乙汽车比甲汽车迟 2 小时出发，甲汽车每小时行驶 55 千米。若乙汽车出发 5 小时后，与甲汽车相遇，则乙汽车每小时行驶

(A) 55 千米。 (B) 58 千米。 (C) 60 千米。

(D) 62 千米。 (E) 65 千米。

解 由命题 1.4.3(1)知甲汽车行驶路程＋乙汽车行驶路程＝甲、乙两汽车相距全程。设乙汽车每小时行驶的距离为 x，视甲、乙两汽车同时相向出发，则甲汽车共行驶 7 小时，乙汽车共行驶 5 小时，它们相遇，于是由上述等量关系得到

$$7\times55+5\times x=695。$$

解得
$$x=62(\text{千米}).\text{仅(D)入选。}$$

例 35[2004 年Ⅱ1] 甲、乙两人同时从同一地点出发相背而行，1 小时后他们分别到达各自的终点 A 和 B。若从原地出发，互换彼此的目的地，则甲在乙到达 A 之后 35 分钟到达 B。甲的速度和乙的速度之比是

(A) 3∶5。　　(B) 4∶3。　　(C) 4∶5。　　(D) 3∶4。

(E) 以上结论都不正确。

解　设甲、乙的速度分别为 x 与 y。由题设知原地至终点 A 的距离为 $1\cdot x=x$，原地至终点 B 的距离为 $1\cdot y=y$。

又设乙从原地出发到达其目的地 A 的时间为 t，则甲从原地出发到达其目的地 B 的时间应为 $t+35/60$，又乙在时间 t 内所走过的距离为 ty，因而有

$$ty=x。\qquad①$$

甲在时间 $(t+35/60)$ 内所走过的距离为 $(t+35/60)x$，因而有

$$(t+35/60)x=y.\qquad②$$

将式①与式②的左、右两端分别相乘得到

$$(t+35/60)x\cdot ty=xy,$$

即　　$(t+35/60)t=1$　或　$t^2+(7/12)t=1$，

亦即　　$(2t^2+7t-12)=(3t+4)(4t-3)=0$，

故 $t=3/4$。即 $x/y=3/4$，所以甲、乙的速度之比为 3∶4。仅(D)入选。

例 36[2005 年Ⅰ2]　一支队伍排成长度为 800 米的队列行军，速度为 80 米/分。在队首的通信员以 3 倍于行军的速度跑步到队尾，花 1 分钟传达首长命令后，立即以同样的速度跑回到队首。在这往返过程中通信员所花费的时间为

(A) 6.5 分钟。　　(B) 7.5 分钟。　　(C) 8 分钟。

(D) 8.5 分钟。　　(E) 10 分钟。

解　队列行军与通信员相向而行时，相对速度为队列行军的速度 $v_1=80$ 米/分，与通信员的速度 $v_2=3v_1=3\times80=240$(米/分)之和，即

$$v_1+v_2=240+80=320(\text{米/分})。$$

因而队列行军时，通信员从队尾跑至队首所花费时间为

$$t_1=\frac{800}{v_1+v_2}=\frac{800}{240+80}=\frac{80}{32}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5(\text{分})。$$

通信员传达命令所费时间为 $t_2=1$(分)。传达完毕后，通信员与队列同向而行，其相对速度为两速之差

$$v_3=v_2-v_1=240-80=160(\text{米/分})。$$

因而通信员从队尾跑至队首时，所费时间为

$$t_3=\frac{800}{v_3}=\frac{800}{240-80}=\frac{800}{160}=\frac{10}{2}=5(\text{分}),$$

于是在这往返的过程中通信员所花费时间为

$$t=t_1+t_2+t_3=2.5+1+5=8.5(\text{分})。仅(\text{D})入选。$$

题型八　求解航运问题的实际应用题

求解这类题型需利用下述等量关系：

顺水速度＝静水速度＋水流速度；逆水速度＝静水速度－水流速度。

例 37　一汽艇顺流下行 63 千米到达目的地，然后逆流上行，共航行 5 小时 20 分钟，已知水流速度是 3 千米/时，汽艇在静水中的速度为

(A) 24 千米/时。　(B) 26 千米/时。　(C) 20 千米/时。

(D) 18 千米/时。　(E) 30 千米/时。

解　设汽艇在静水中每小时行驶的距离为 x，则在顺水中时速为 $x+3$，在逆水中时速为 $x-3$。由航行 63 千米所用时间之和为 $5\frac{1}{3}$ 小时得到

$$\frac{63}{x+3}+\frac{63}{x-3}=\frac{16}{3},$$

化简得到

$$16x^2-378x-144=0。$$

用十字相乘法 $\begin{matrix}8 & 3\\ 2 & -48\end{matrix}$ 得到

$$(8x+3)(2x-48)=0,$$

解得

$$x_1=-3/8(\text{舍去}),\quad x_2=24。$$

即汽艇在静水中的速度为 24 千米/时。仅(A)入选。

例 38　一艘船往返于 A，B 两个港口，往返路径不同。由 A 到 B 顺水行驶 60 千米，逆水行驶 40 千米；由 B 到 A 顺水行驶 30 千米，逆水行驶 60 千米，如果往返时间相同，为 8 小时，船速和水的流速保持不变，则水的流速为

(A) 2.5 千米/时。　(B) 5 千米/时。　(C) 7.5 千米/时。

(D) 10 千米/时。　(E) 10.5 千米/时。

解　设水流速度为 x，船速为 y，则顺水速度为 $x+y$，逆水速度为 $y-x$。由题意有

$$\frac{60}{x+y}+\frac{40}{y-x}=8,\qquad ①$$

$$\frac{60}{y-x}+\frac{30}{x+y}=8,\qquad ②$$

即

$$60(y-x)+40(y+x)=8(y^2-x^2),\qquad ③$$

$$60(y+x)+30(y-x)=8(y^2-x^2).\qquad ④$$

④×2－③得到　　$80(y+x)=8(y^2-x^2)$，即 $y-x=10$　　④

将式④代入式②得到　　$x+y=15$。　　⑤

再将式④加上式⑤得到 $y=12.5$（千米/时），将其代入式④即得 $x=2.5$（千米/时）．仅(A)入选。

题型九　求解复利问题的实际应用题

复利问题是指在给定核算周期内，自一个周期后，将新增利息并入本金后重新开始新的周期的增值过程。

若各个周期的利率都为 r，初始资金为 A_0（本金），则在 n 个周期后，资金总量为

A_n＝本金(1＋周利率)周数$=A_0(1+r)^n$＝经过 n 周后的本利和。

事实上第一个周期末的本利和为 $A_1=A_0+A_0r=A_0(1+r)$.

第二个周期末的本利和为 $A_2=A_0(1+r)+A_0(1+r)r=A_0(1+r)^2$。

第 n 个周期末的本利和为

$$A_n=A_0(1+r)^{n-1}+A_0(1+r)^{n-1}r=A_0(1+r)^n. \tag{1.4.6}$$

式(1.4.6)是计算复利问题的常用公式。

若第 i 个周期的利率为 r_i $(i=1,2,\cdots,n)$，初始资金为 A_0（本金），则在 n 个周期后资金总量为

$$A_n=A_0(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)=A_0\prod_{i=1}^{n}(1+r_i). \tag{1.4.7}$$

上述公式可推广到与其类似的产量增长率、疾病下降率（“负”增长率）等的计算。仿照式(1.4.6)得到

原产量(1＋每年增产率)$^{\text{年数}n}$＝经过 n 年后的产量.

原价格(1－每次降价率)$^{\text{次数}n}$＝经过 n 次降价后的价格.

原销售量(1＋每月增长率)$^{\text{月数}n}$＝经过 n 个月增长后的销售量。

值得注意的是对“负”增长率（如降低率、减少率等）前面应取“－”号。

若称 A_0 为现在值，A_n 为未来值，式(1.4.6)是已知现在值求未来值的公式，即为复利问题。与此相反．若已知未来值 A_n，求现在值 A_0，则称贴现问题，这时利率 r 称为贴现率（负增长率）。将复利式(1.4.6)中的 A_0 解出来即得贴现率为 r 的贴现公式：

$$A_0=\frac{A_n}{(1+r)^n}, \tag{1.4.8}$$

即 n 个周期后的资金按现值计算的公式。

例 39[1997 年Ⅱ4]　银行的一年期定期存款利率是 10%，某人于 1991

年 1 月 1 日存入 10000 元，1994 年 1 月 1 日取出，若按复利计算，他取出时所得的本金和利息共计是

(A) 10300 元。　　(B) 10303 元。　　(C) 13000 元。

(D) 13310 元。　　(E) 14641 元。

解　一年期定期存款，其含义就是每年计息一次，则于 1992 年 1 月 1 日的本利和是

$$y_1^{(1)}=A_0+A_0r=A_0(1+r)=10000+10000\times 10\%=10000(1+10\%);$$

1993 年 1 月 1 日的本利和是

$$y_1^{(2)}=A_0(1+r)+A_0(1+r)r=A_0(1+r)^2=10000(1+10\%)^2;$$

1994 年 1 月 1 日取出，其本利和共计为

$$y_1^{(3)}=A_0(1+r)^2+A_0(1+r)^2r=A_0(1+r)^3,$$

$$=10000(1+10\%)^3=10000(1\times 1)^3=13310 \text{ 元。仅(D)入选。}$$

例 40　某工厂去年 12 月份的产量是去年元月份产量的 a 倍，则该厂去年月产量的平均增长率为(其中 a 为正的有理数)

(A) $\sqrt[12]{a}$。　　(B) $\sqrt[12]{a}-1$。　　(C) $\sqrt[11]{a}$。

(D) $\sqrt[11]{a}-1$。　　(E) $\sqrt[12]{a}+1$。

解　设元月份产量为 b，月平均增长率为 $r\%$，则 12 月份产量为 ab，依题意

有　　$$b(1+r\%)^{11}=ab,\quad \text{即}\quad (1+r\%)^{11}=a,$$

故 $r\%=\sqrt[11]{a}-1$。仅(D)入选。

例 41　某工厂生产总值月平均增长率为 r，则年平均增长率为

(A) $(1+r)^{12}-1$。　　(B) $(1+r)^{11}-1$。　　(C) $(1+r)^{12}$。

(D) $(1+r)^{11}$。　　(E) $(1+r)^{11}+1$。

解　设该工厂生产总值为 A_0，则第一个月生产总值为 $A_0(1+r)$，第二个月生产总值为

$$A_0(1+r)(1+r)=A_0(1+r)^2,$$

依此类推，第十二个月生产总值为 $A_0(1+r)^{12}$。于是年生产总值增长了 $A_0(1+r)^{12}-A_0$。年平均增长率为

$$\frac{A_0(1+r)^{12}-A_0}{A_0}=(1+r)^{12}-1。\text{仅(A)入选。}$$

例 42　某公司以 500 万元资金投入某种新产品的生产。在第一年获得一定的利润。若这 500 万资金加上第一年的利润再投资，在第二年共得利润

52.5 万元，而第二年的利润率比第一年多 5%，求第一年的利润率是多少？

解 设第一年的利润率为 x，则第一年的本利和为 $500(1+x)$. 以 $500(1+x)$ 为本金，第二年获得利润为 $500(1+x)(x+0.05)$。又依题意，在第二年获得利润 52.5 万元，于是

$$500(1+x)(x+0.05)=52.5。$$

化简得
$$x^2+1.05x-0.055=0.$$

于是用十字相乘法 $\begin{array}{ccc} 1 & \times & 1.1 \\ 1 & & -0.05 \end{array}$ 得到

$$x^2+1.05x-0.055=(x+1.1)(x-0.05),$$

故
$$x_1=-1.1(\text{舍去}),\quad x_2=0.05。$$

或直接利用求根公式计算得到

$$x=\frac{-1.05\pm\sqrt{(1.05)^2-4\times1\times(-0.055)}}{2}$$

$$=\frac{-1.05\pm\sqrt{1.3225}}{2}=\frac{-1.05\pm1.15}{2}.$$

$$x_1=(-1.05-1.15)/2=-1.1,\quad x_2=(-1.05+1.15)/2=0.05.$$

即第 1 年的利润率为 5%。

例 43 某企业 1993 年人均税利达到 2 万元，1994 年该企业人均税利比 1993 年增长 10%，1995 年又比 1994 年增长 15%。问该企业 1995 年人均税利比 1993 年增长了多少？

解 由题意知，$A_0=2$(万元)，$r_1=10\%$，该企业 1994 年人均利税为

$$A_0(1+r_1)=2(1+10\%)。$$

该企业 1995 年人均税利较 1994 年增长了 $r_2=15\%$，则 1995 年的人均利税由式(1.4.7)得到

$$A_0(1+r_1)(1+r_2)=2(1+10\%)(1+15\%)=2.265(\text{万元})。$$

它比 1993 年增长了
$$\frac{2.265-2}{2}=13.25\%。$$

例 44 某工厂现有资金为 a(万元，$a>100$)。每年资金递增 20%，该工厂每年年底要将当年增加资金的 30%捐给希望工程。计划在时间 m(年，$m\in\mathbf{N}$)后该厂资金要翻一番，则 m 的最小值为_____。

解 显然有 $A_0=a$，$r=0.2$，则第 n 年后该厂应有资金为

$$\overline{A}_n=A_{n-1}(1+r)=A_{n-1}(1+0.2).$$

将当年增加的资金 rA_{n-1} 的 30% 即 $0.3\times0.2A_{n-1}$ 捐赠给希望工程后，该厂实有资金为

$$A_n=A_{n-1}(1+0.2)-0.3\times0.2A_{n-1}=1.14A_{n-1}.$$

因而
$$A_n=1.14A_{n-1}=1.14\times1.14A_{n-2}=(1.14)^2A_{n-2}=\cdots$$
$$=(1.14)^nA_0=(1.14)^na。$$

若要求 $A_m\geqslant2A_0=2a$，即

$$(1.14)^ma\geqslant2a.\ (1.14)^m\geqslant2,\quad m\ln1.14\geqslant\ln2.$$

从而得到
$$m\geqslant\frac{\ln2}{\ln1.14}。$$

满足条件的最小值为 $\left[\frac{\ln2}{\ln1.14}\right]+1$，其中 $\left[\frac{\ln2}{\ln1.14}\right]$ 表示 $\frac{\ln2}{\ln1.14}$ 的整数部分。

题型十　求解与浓度有关的化学应用题

求解与浓度有关的化学应用题常用两种方法列方程。

一是已知浓度（或浓度不变）时，可用下述定义列方程：

$$\text{浓度}=\frac{\text{溶质量}}{\text{溶质量}+\text{溶剂量}}=\frac{\text{溶质量}}{\text{溶液量}};$$

二是稀释溶液（浓度变化）时，要利用稀释前后溶质量不变列方程，有时也可利用反比例关系列方程。这是因为在溶质量不变的条件下，浓度大的，溶液量少，浓度小的溶液量多。

例 45　有盐水若干，加入一定量水后，盐水浓度降到 3%，又加入同样多的水后，盐水浓度又降到 2%。问如果再加入同样多的水后，盐水浓度降到

(A)1%。　(B)1.2%。　(C)1.5%。　(D)1.7%。

(E) 以上结论都不正确。

解　设原盐水 y，其中含盐 x，每次加水 z，则

$$\frac{x}{y+z}=3\%,\quad\frac{x}{y+2z}=2\%,$$

利用更比定理即定理 1.2.1(2) 得到

$$\frac{y+z}{x}=\frac{100}{3},\quad\text{即}\quad\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{100}{3},\qquad①$$

$$\frac{y+2z}{x}=\frac{100}{2},\quad\text{即}\quad\frac{y}{x}+2\frac{z}{x}=\frac{100}{2},\qquad②$$

②－①有 $\frac{z}{x}=\frac{100}{6}$，代入式①有 $\frac{y}{x}=\frac{100}{6}$。于是

$$\frac{y+3z}{x}=\frac{y}{x}+3\ \frac{z}{x}=\frac{100}{6}+3\times\frac{100}{6}=\frac{200}{3}.$$

因而 $$\frac{x}{y+3z}=\frac{3}{200}=1.5\%。$$ 仅(C)入选。

例 46 有 25%的杀虫剂 4 斤(1 斤=0.5 千克),问需加水多少斤才能稀释成 0.1%的溶液。

解法 1 设加水 x,则稀释后的溶液总质量为$(x+4)$,若要求浓度为 0.1%,则杀虫剂占$(x+4)0.1\%$。

因加水(溶剂)不会使溶质增加或减少,只是改变溶液的浓度,故上述杀虫剂的量应与未加水前的浓度中的杀虫剂的量相等,这样便列出方程

$$(x+4)0.1\%=4\times25\%。$$

解得 $x=996$(斤),即需加水 996 斤。

解法 2 设 0.1%的溶液为 x 斤,按反比例关系可列方程

$$\frac{25\%}{0.1\%}=\frac{x}{4},$$

解得 $$x=1000(斤)。$$

这 1000 斤是浓度为 0.1%的溶液重量它是由原来的溶质杀虫剂 4 斤加水而成,因而需加水 $1000-4=996$(斤)。

例 47 A 是一种油箱冷却剂,现散热箱中有 4 升浓度为 20%的 A 溶液,汽车在行驶中,散热箱中水蒸发了 2 升,要想溶液 A 的浓度恢复到 20%,问需加入多少升浓度为 10%的 A 溶液(假设散热箱容积足够大)?

解 设需加入浓度为 10%的 A 溶液的量为 x。加入 A 溶液后,该散热箱含有溶质

$$4\times20\%(原来的)+x\times10\%(后加的)。$$

这时箱中溶液量为$(4-2)+x$(升)。根据浓度=溶质量/溶液量,得到

$$\frac{4\times20\%+x\times10\%}{(4-2)+x}=20\%。$$

整理得一元一次方程 $80+10x=40+20x$. 解之得到 $x=4$ 升。

习 题 1.4

(一) 问题求解

1. [1997 年 Ⅰ 2] 若 $x^2+bx+1=0$ 的两个根为 x_1 和 x_2,且 $1/x_1+1/x_2$

$=5$，则 b 的值是

(A) -10。　(B) -5。　(C) 3。　(D) 5。　(E) 10。

2. [2001 年 Ⅱ 4] 已知方程 $3x^2+px+5=0$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $1/x_1+1/x_2=2$，则 p 等于

(A) 10。　(B) -6。　(C) 6。　(D) -10。

3. [2000 年 Ⅱ 5] 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长，且 $a=c=1$. 若 $(b-x)^2-4(a-x)(c-x)=0$ 有相同实根，则 $\triangle ABC$ 为

(A) 等边三角形。　(B) 等腰三角形。

(C) 直角三角形。　(D) 钝角三角形。

4. [2002 年 Ⅱ 7] 设方程 $3x^2+mx+5=0$ 的两个实根 x_1, x_2 满足 $1/x_1+1/x_2=1$，则 m 的值为

(A) 5。　(B) -5。　(C) 3。　(D) -3。

5. [2002 年 Ⅰ 6] 已知关于 x 的方程 $x^2-6x+(a-2)|x-3|+9-2a=0$ 有两个不同的实数根，则系数 a 的取值范围是

(A) $a=2$ 或 $a>0$。　(B) $a<0$。

(C) $a>0$ 或 $a=-2$。　(D) $a=-2$.

6. 设方程 $x^2-3x-4=0$。下列方程中其根是原方程的各根的三次方的方程是

(A) $x^2-53x-54=0$。　(B) $x^2-65x-64=0$。

(C) $x^2-63x-64=0$。　(D) $x^2-63x-54=0$.

7. 已知函数 $y=(mx^2+4\sqrt{3}x+n)/(x^2+1)$ 的最大值为 7，最小值为 -1，则 m, n 的值为

(A) 2,3。　(B) 3,4。　(C) 4,5。　(D) 5,1。　(E) 6,4。

8. 方程 $(4/9)^x(27/8)^{x-1}=2/3$ 的解是 $x=$

(A) 1。　(B) 2。　(C) 3。　(D) 4。　(E) 5。

9. 方程 $5^{x+1}=3^{x^2-1}$ 的解是 $x=$

(A) $\log_3 15$。　(B) $\log_3 16$。　(C) $\log_3 18$。　(D) $\log_3 20$　(E) $\log_3 21$。

10. 方程 $\lg(x-1)+\lg(x-2)=\lg(x+2)$ 的解是 $x=$

(A) 1。　(B) 2。　(C) 3。　(D) 4。　(E) 5。

11. [2001 年 Ⅱ 10] 已知 $\sqrt{x^3+2x^2}=-x\sqrt{x+2}$，则 x 的取值范围是

(A) $x<0$。　(B) $x\geqslant -2$。(C) $-2\leqslant x\leqslant 0$。　(D) $-2<x<0$。

12.[1997 年Ⅱ 12]　一抛物线的顶点在点(2,0),并以 x 轴为对称轴,开口向左,且过点(1,2),则该抛物线方程是

(A) $y^2=2x+2$。　(B) $x^2=y-1$。　(C) $y^2-8=-4x$.

(D) $2x^2=y+2$.　(E) $y^2=4x-8$.

13. 已知方程 $x^2-2x+\lg(a^2-2a)$有一个正根和一个负根,则 a 的取值范围是

(A) $0<a\leqslant 2$;　(B) $2<a<1+\sqrt{2}$。　(C) $a\geqslant 1+\sqrt{2}$.

(D) $a\geqslant 3$。　(E) $3<a<3+\sqrt{2}$.

14.[2000 年Ⅰ 4]　一轮船发生漏水事故,当进水 600 桶时,两部抽水机开始排水,甲机每分钟能排水 20 桶,乙机每分钟能排水 16 桶,经 50 分钟刚好将水全部排完,每分钟漏进的水有

(A) 12 桶。　(B) 18 桶。　(C) 24 桶。　(D) 30 桶。

15.[2000 年Ⅱ 3]　车间工会为职工买来足球、排球和篮球共 94 个,按人数计算平均每 3 人一只足球,每 4 人一只排球,每 5 人一只篮球。该车间共有职工

(A) 110 人。　(B) 115 人。　(C) 120 人。　(D) 125 人。

16. 夜 10 点盗窃嫌疑犯窃取一汽车后以 120 千米/时的速度逃窜。45 分钟后当地公安局接到报案,武警立即开车以 140 千米/时的速度按原路追赶,则武警追上该盗窃嫌疑犯时恰为

(A) 夜 12 点半。　(B) 凌晨 3 点 15 分。　(C) 凌晨 5 点。

(D) 夜 12 点。　(E) 以上结论都不正确。

17.[2000 年Ⅰ 1]商店委托搬运队运送 500 只瓷花瓶。双方商定每只花瓶运费 0.5 元,若搬运中打破一只,则不但不计运费,还要从运费中扣除 2 元。已知搬运队共收到 240 元,试问搬运中打破花瓶

(A) 3 只。　(B) 4 只。　(C) 5 只。　(D) 6 只。

18.[2002 年Ⅰ 2]　公司有职工 50 人,理论知识考核平均成绩为 81 分。按成绩将职工分为优秀与非优秀两类。优秀职工的平均成绩为 90 分,非优秀职工的平均成绩是 75 分,则非优秀职工人数为

(A) 30。　(B) 25。　(C) 20。　(D) 无法确定。

19.[2002 年Ⅱ 1]有大小两种货车,2 辆大车与 3 辆小车可以运货 15.5

吨，5 辆大车与 6 辆小车可以运货 35 吨，则 3 辆大车与 5 辆小车可以运货

（A）20.5 吨。（B）22.5 吨。（C）24.5 吨。（D）26.5 吨。

20.［2001 年Ⅱ3］ 有 A、B 两种型号联合收割机，在第一个工作日，9 部 A 型机与 3 部 B 型机共收割小麦 189 公顷；在第二个工作日，5 部 A 型机与 6 部 B 型机共收割小麦 196 公顷。A、B 两种联合收割机一个工作日内收割小麦的公顷数分别是

（A）14，21。（B）21，14。（C）15，18。（D）18，15。

21.［1998 年Ⅱ5］ 在有上下行的轨道上，两列火车相向开来。若甲车长 187 米，每秒行驶 25 米，乙车长 173 米，每秒行驶 20 米，则从两车头相遇到两车尾离开，需要

（A）12 秒。（B）11 秒。（C）10 秒。（D）9 秒。 8 秒。

22.［2001 年Ⅰ7］ 某人下午 3：00 出门赴约，若他每分钟走 60 米，会迟到 5 分钟，若他每分钟走 75 米，会提前 4 分钟到达。所定的约会时间是下午

（A）3：50。（B）3：40。（C）3：35。（D）3：30。

23.［1999 年Ⅱ3］ 一列火车长 75 米，通过 525 米长的桥梁需要 40 秒。若以同样的速度穿过 300 米的隧道，则需要

（A）20 秒。（B）约 23 秒。（C）25 秒。

（D）约 27 秒。（E）约 28 秒。

24.［1998 年Ⅰ4］ 一批货物要运进仓库，由甲、乙两队合运 9 小时，可运进全部货物的 50%，乙队则要 30 小时才能运完。又知甲队每小时可运进 3 吨，则这批货物共有

（A）135 吨。（B）140 吨。（C）145 吨。（D）150 吨。（E）155 吨。

25.［2004 年Ⅰ17］ 快慢两列车的长度分别为 160 米和 120 米，它们相向行驶在平行轨道上。若坐在慢车上的人见到整列快车驶过的时间是 4 秒，那么坐在快车上的人见整列慢车驶过的时间是

（A）3 秒。（B）4 秒。（C）5 秒。（D）6 秒。

（E）以上结论都不正确。

26.［1999 年Ⅱ5］ 已知方程 $x^2-6x+8=0$ 有两相异实根。下列方程中仅有一根在已知方程两根之间的方程是

（A）$x^2+6x-9=0$。（B）$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$。

（C）$x^2-4x+2=0$。（D）$x^2-5x+7=0$。（E）$x^2-6x+5=0$。

27. 一辆汽车从 A 地出发，按某速度行驶可在预定时间内到达 B 地。但在距 B 地 180 千米处意外受阻 30 分钟，因此继续行驶时，车速每小时必须增加 5 千米，才能准时到达 B 地，则汽车后来速度是

(A) 40 千米/时。　(B) 45 千米/时。　(C) 50 千米/时。

(D) 55 千米/时。　(E) 以上结论都不正确。

28. 某人在与轻轨铁路平行的公路上以匀速驾驶摩托车，他发现每过 12 分钟有一列轻轨车超过他，同时每隔 4 分钟必有一列轻轨迎面驶来。设起点站与终点站发车时间固定，且列车均速行驶，则发车间隔是

(A) 6 分钟. (B) 7 分钟. (C) 8 分钟. (D) 9 分钟. (E) 10 分钟.

29. 一容器盛纯酒精 10 升，每一次倒出若干升后用水加满，第二次倒出同样多的升数，再用水加满。此时容器中的酒精浓度是 36%，则每次倒出溶液

(A) 3 升。　(B) 4 升。　(C) 5 升。　(D) 2.8 升。　(E) 4.6 升。

30. 某工程甲单独做 12 天完成，乙单独做 15 天完成，丙单独做 18 天完成。现甲和乙合做 3 天后，丙再参加，问 3 人合做完成的天数还需要

(A) 3 天。　(B) 4 天。　(C) 99/37 天。(D) 5 天。　(E) 6 天。

31. [2004 年 Ⅱ 2] 某单位有职工 40 人，其中参加计算机考核的有 31 人，参加外语考核的有 20 人，有 8 人没有参加任何一种考核，则同时参加两项考核的职工有

(A) 10 人。　(B) 13 人。　(C) 15 人。　(D) 19 人。

(E) 以上结论都不正确。

32. [2000 年 Ⅱ 2] 甲、乙两机床 4 小时共生产某种零件 360 个。现在两机床同时生产这种零件，在相同时间内，甲机床生产了 1225 个，乙机床生产了 1025 个，甲机床每小时生产零件

(A) 49 个。　(B) 50 个。　(C) 51 个。　(D) 52 个。

33. [2000 年 Ⅰ 2] 购买商品 A、B、C，第一次各买 2 件，共 11.40 元；第二次购买 A 商品 4 件，B 商品 3 件，C 商品 2 件，共 14.8 元；第三次购买 A 商品 5 件，B 商品 4 件，C 商品 2 件，共 17.50 元。则每件 A 商品的价格是

(A) 0.70 元。(B) 0.75 元。(C) 0.80 元。(D) 0.85 元。

34. 某工厂去年总产值为 a，计划今后五年内，每年比上一年增长 10%，这一计划的最后一年该厂的总产值是

(A) 1.1^4a。 (B) 1.1^5a。 (C) 1.1^6a。 (D) $(1+1.1^5)a$.

(二) 条件充分性判断

1. 一个一元二次方程有两个实根 α,β,且已知 $\sqrt{\beta/\alpha}+\sqrt{\alpha/\beta}$ 的值是 $5\sqrt{3}/3$.

(1) 已知方程是 $3x^2-5x+1=0$; **(2) 已知方程是 $3x^2+5x+1=0$。**

2. 方程 $ax^2+(2a-1)x+(a-3)=0$ 有两个不相等的实数根。

(1) $a<3$; (2) $a\geqslant 2$.

3. 已知关于 x 的方程 $3x^2+px+5=0$,可求 p 的值。

(1) 已知该方程有一根为 $x=-1$;

(2) 设该方程的两根为 x_1,x_2,且 $1/x_1+1/x_2=2$.

4. 已知 a,b,c 是三角形的三条边长,方程 $mx^2+nx+c^2=0$ 没有实根。

(1) $m=b^2,n=b^2+c^2-a^2$; (2) $m=a^2,n=a^2+c^2-b^2$.

5. 方程 $4x^2-4(m-1)x+m^2=7$ 的两根之差的绝对值大于 2。

(1) $1<m<2$; (2) $-5<m<-2$.

6. 实数 k 的取值范围是 $(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$。

(1) 关于 x 的方程 $kx+2=5x+k$ 的根为非负实数;

(2) 抛物线 $y^2=x^2-2kx+(7k-10)$ 位于 x 轴上方。

7. 王先生购买甲、乙两种股票各若干股,其中买甲股票的股权多。

(1) 甲股票每股 8 元,乙股票每股 10 元;

(2) 当甲股票上扬 10%、乙股票下跌 8% 时,王先生将这种股票全部抛出后获利。

8. A、B 两地相距 s,甲、乙两人同时分别从 A、B 两地出发,甲每小时走的距离与乙每小时走的距离之比是 3∶2。

(1) 甲、乙相向而行,两人在途中相遇时,甲与乙走的距离之比为 3∶2;

(2) 甲、乙同向而行,甲追上乙时,乙走的距离为 $2s$。

(三) 解答题

1. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2-2(m-1)x-4=0$ $(m\neq 0)$ 的两个实根,一个比 1 大,一个比 1 小,求 m 的取值范围。

2. [1999 年 Ⅰ 22] **在等腰三角形 ABC 中,$AB=AC$,$BC=2\sqrt{2}/3$,且 AB,AC 的长分别是方程 $x^2-\sqrt{2}mx+(3m-1)/4=0$ 的两个根,求 $\triangle ABC$ 的面积。**

3. 若 x_1, x_2 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个根，求下列各式的值：

（1）$x_1^2+x_2^2$；　（2）$|x_1-x_2|$；　（3）$x_2/x_1+x_1/x_2$；　（4）$x_1^3+x_2^3$.

4. 甲、乙两汽车从 A、B 两处相向而行，甲车速度是乙车速度的 $11/9$，若甲出发 1 小时后乙再出发，则经 6 小时后，甲、乙两车在途中相遇。若甲、乙两车同时出发，经过 6 小时 30 分钟，它们都未相遇，且相距 5 千米。问甲、乙两车速度各为多少千米/时？A、B 两地相距多少千米？

5. 小麦需用浓度为 20%的盐水浸种，现有浓度为 25%的盐水 50 斤（1 斤＝0.5 千克），问加水多少斤才能稀释成 20%的盐水？

6. 某生产队从前年开始水稻逐年增产 20%，到今年亩（1 亩≈666.6 平方米）产 1800 斤。问前年水稻亩产是多少？

7. 某企业在今年初贷款额为 a，年利率为 r。从今年年末开始，每年偿还一定金额，预计 5 年内还清，则每年偿还金额为多少？

8. 解方程 $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}}\cdot \log_3 x=1$.

9.［2002 年Ⅱ5］　A、B 两地相距 15 千米，甲中午 12 时从 A 地出发，步行前往 B 地。20 分钟后乙从 B 地出发骑车前往 A 地，到达 A 地后乙停留 40 分钟后骑车从原路返回。结果甲、乙同时到达 B 地，若乙骑车比甲步行每小时快 10 千米，则两人同时到达 B 地的时间是下午几点钟？

1.5　一元一次不等式、一元二次不等式

（一）考试内容

1. 不等式及不等式的解

把“$>$”、“$<$”、“$\leqslant$”、“$\geqslant$”、“$\neq$”叫做不等号。用不等号连接的数学式称为不等式。

在含有未知数的不等式中能使不等式成立的未知数的取值范围，称为不等式的解集，简称为不等式的解。

因带等号的不等式（即带$\geqslant$或$\leqslant$）只需在不带等号的不等式的解集中增加两个解即可，下面只对不带等号的不等式叙述。

2. 不等式的基本性质(详见本节题型一)

3. 一元一次不等式组及其解法

一元一次不等式 $ax>b$ 或 $ax<b$ $(a\neq 0)$的解可由不等式的基本性质直接求出。

几个含有同一个未知数的一元一次不等式所组成的不等式组,叫做一元一次不等式组,不等式组中各个不等式解集的交集就是该不等式组的解集(不等式组的解集可能是空集)。因而一元一次不等式组的解法是:先分别求出不等式组中每一个不等式的解,再求出这些解的公共部分(解集的交集),就得到该不等式组的解集。

若一个不等式(组)的解集是 $a<x\leqslant b$,则可记作$\{x|a<x\leqslant b\}$或$(a,b]$。

4. 一元二次不等式及其解法

$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$称为一元二次不等式。其解法有因式分解法、配方法、公式法和图像法,其中图像法就是利用二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像求解不等式。这是很常用的方法。因而是极为重要的一种方法(详见本节题型三)。

(二)考试要求

掌握不等式的基本性质,会求解一元一次不等式,一元二次不等式及其简单的不等式组。

(三)常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　利用不等式性质判别不等式

不等式问题主要是求解不等式(组)及判别不等式两大类。但是不论求解哪一类问题都离不开利用不等式的基本性质。因此不等式的下述基本性质必须透彻理解,熟练掌握。

命题 1.5.1(不等式的基本性质)

(1) 如 $a>b$,则 $b<a$.

(2) 如 $a>b,b>c$,则 $a>c$.

(3) 如 $a>b$,则 $a+c>a+c$,其中 c 为任一实数.

(不等式两边都加上同一个实数,所得不等式与原不等式同向.)

(4) 如 $a>b$,且 $c>d$,则 $a+c>b+d$.

（两个或几个同向不等式可以相加，所得不等式与原不等式同向，但不能相减.）

(5) 如 $a>b,c<d$，则 $a-c>b-d$.

（两个异向不等式可以相减，但不能相加.）

(6) 如 $a>b,c>0$，则 $ac>bc$；如 $a>b,c<0$，则 $ac<bc$.

(7) 如 $a>b>0,c>d>0$，则 $ac>bd$.

（两个或几个两边都是正数的同向不等式可分别相乘，所得不等式与原不等式同向。但不能分别相除.）

(8) 如 $a>b>0$，则 $a^n>b^n$（n 为正整数，且 $n>1$）.

(9) 如 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n 为正整数，且 $n>1$）。

（(8)、(9)两条可推广为：如 $a>b>0$，则 $a^t>b^t$ （$t\in(0,+\infty)$）.）

(10) 如 $a>b,c<d,a,b,c,d$ 都是正数，则 $a/c>b/d$.

（两个两边都是正数的异向不等式可分别相除，但不能相乘。）

上述不等式的基本性质有几个性质和等式的性质相似，易记住；有几个性质却和等式的性质不同，应特别加以注意。总的来说应注意下述两点：

第一，在后五个基本性质中，要注意 a,b,c,d 均为正数的条件。许多运算错误往往都是忽略了这个条件所引起的。

第二，在不等式两边分别相加、相减、相乘或相除时，必须注意只有两个同向不等式方可以相加或相乘，只有两个异向不等式方可以相减或相除，且在相乘或相除时，还必须有“a,b,c,d 都是正数”这个条件。

例 1 下列各题中正确的是

(A) 如果 $a>b$，则 $a^n>b^n$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

(B) 如果 $a>b,c>d$，则 $a-c>b-d$。

(C) 如果 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，则 $a<b$。

(D) 如果 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$。

(E) 如果 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

解 由命题 1.5.1(8)、(9)知(A) 不一定成立。由命题 1.5.1(4)知(B) 也不一定成立。由命题 1.5.1(7)知(D) 也不正确。

令 $a=2,b=-3$，有 $a>b$，但

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}>\frac{1}{b}=-\frac{1}{3}。$$

(E) 也不成立。

因 $c^2>0$，由 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$ 及命题 1.6.1(6)知有

$$c^2\cdot\frac{a}{c^2}<c^2\ \frac{b}{c^2}\quad 即\quad a<b。仅(C)入选。$$

例 2[2001 年Ⅱ8] 若 $a>b>0,k>0$，则下列不等式中成立的是

(A) $-b/a<-(b+k)/(a+k)$。　　(B) $a/b>(a-k)/(b-k)$。

(C) $-b/a>-(b+k)/(a+k)$。　　(D) $a/b<(a-k)/(b-k)$。

解 因 $a>b>0,k>0$，由命题 1.5.1(6)知 $ak>bk$。又因命题 1.5.1(2)有

$$ak+ab>bk+ab\quad 即\quad a(k+b)>b(a+k).$$

因而 $b/a<(b+k)/(a+k),-b/a>-(b+k)/(a+k)$。仅(C)入选。

例 3[2004 年Ⅱ14](条件充分性判断) $\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$。

(1) $0<c<a<b$；　　(2) $0<a<b<c$。

解 当条件(1)成立时，$a>c>0$，因而 $a+b>c+b>0,0<\frac{1}{a+b}<\frac{1}{c+b}$，又 $a>c>0$。于是由命题 1.5.1(7)得到

$$\frac{1}{a+b}\cdot c<\frac{1}{c+b}\cdot a\quad 即\quad \frac{c}{a+b}<\frac{a}{c+b}。$$

同法可证当条件(1)成立时，有 $\frac{a}{c+b}<\frac{b}{c+a}$。于是有

$$\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}。条件(1)充分。$$

当条件(2)成立时 $0<a<b$，故 $0<c+a<b+c,0<\frac{1}{b+c}<\frac{1}{a+c}$，又 $0<a<b$，由命题 1.5.1(7)有

$$\frac{1}{b+c}\cdot a<\frac{1}{a+c}\cdot b\quad 即\quad \frac{a}{b+c}<\frac{b}{a+c}。$$

同法可证当条件(2)成立时，有 $\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}$。于是有

$$\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{a+c}。条件(2)充分。仅(D)入选。$$

例 4(条件充分性判断) a,b,c,d 均为正数，有 $a/c>b/d$。

(1) $a>b$；　　(2) $d>c$.

解 条件(1)与条件(2)单独成立时，均不充分，例 $a=5,b=2$ 时，有 $a>$

b，但当 $c=6, d=2$，$a/c>b/d$ 就不成立，原因是两个都是正数的同向不等式不能分别相除。

将条件(1)与条件(2)联合起来后得到的两个都是正数的同向不等式。将 $d>c$ 改写为 $c<d$。于是将两个都是正数的异向不等式相除，由不等式性质，即命题 1.5.1(10)得到 $a/c>b/d$。仅(C)入选。

例 5[条件充分性判断] 设 a, b, c, d, e 均为实数，$d-ac<e-bc$。

(1) $a>b, c>d$；　　(2) $c>0$。

解 条件(1)与条件(2)单独成立时，都不充分。但当两条件联合在一起时，由不等式性质即命题 1.5.1(6)可知：由 $a>b, c>0$ 得到 $ac>bc$，即 $-ac<-bc$。又由 $e>d$ 及不等式性质即命题 1.5.1(4)得到 $e-bc<d-ac$。因而条件(1)与条件(2)联合时充分。仅 C 入选。

例 6 已知 a, b, m, n 均为正数，且 $a>b$.

(1)证明 $1>\dfrac{b+m}{a+m}>\dfrac{b}{a}$；

(2)将 $\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}, \dfrac{b+m}{a+m}, \dfrac{a+n}{b+n}$ 按从大到小顺序，从左到右排列。

解 (1) 因 $a>b$，且 $m>0$，由命题 1.5.1(6)有 $ma>mb$，再由命题 1.5.1(3)有 $ma+ab>mb+ab$ 即 $a(b+m)>b(a+m)$。又因 a, b, m 均为正数，故

$$a(a+m)>0。$$

因而

$$1/[a(a+m)]>0。$$

于是由命题 1.5.1(6)有

$$\frac{a(b+m)}{a(a+m)}>\frac{b(a+m)}{a(a+m)}, \quad 即 \quad \frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}。$$

因 $a>b>0$，故 $a+m>b+m>0$(因 $m>0$)，所以 $\dfrac{b+m}{a+m}<1$，因而

$$1>\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}。$$

(2)因 $a>b>0$，且 n 为正数，由(1)得到

$$1>\frac{b+n}{a+n}>\frac{b}{a},$$

因而

$$1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{b}{a}。$$

再利用(1)结果，得到

$$\frac{a}{b}>\frac{a+n}{b+n}>1>\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}。$$

题型二　求解一元一次不等式组

应十分熟练地掌握一次不等式组的解法。这是因为在解二次不等式或高次不等式的时候常归结为解一次不等式组，一次不等式组的解法是：先把这个不等式组里的每一个不等式的解集都求出来，然后再找出这些解集的公共部分（交集）。这就得到整个不等式组的解集。常利用数轴作出不等式解的图像找出各个不等式解集的公共部分，从而直观地求出不等式组的解集。

例 7　分别解下列不等式组：

$$(1)\begin{cases}4+2x>7x+3, & ①\\ 3x+6>4x+5, & ②\\ 2x-3<3x-5, & ③\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}3+x<4+2x, & ④\\ 5x-3\leqslant 4x-1, & ⑤\\ 7+2x>6+3x。 & ⑥\end{cases}$$

解　(1) 易求得不等式①、②、③的解分别是 $x<1/5$，$x<1$，$x>2$。显然不等式②与③没有公共解，因而原不等式组无解。从图 1.5.1(a)中可以看到它们没有公共部分，所以原不等式组无解。

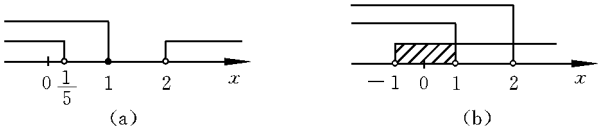


图 1.5.1

(2) 这三个不等式的解分别是 $x>-1$，$x\leqslant 2$ 和 $x<1$。从图 1.5.1(b)易看出它们的公部分是 $-1<x<1$，所以原不等式组的解是 $-1<x<1$.

注意　用数轴表示不等式的解集时，开区间的端点用“。”来标记，闭区间的端点用“·”来标记。如图 1.5.1 所示。

例 8　解不等式组 $\begin{cases}a(x-2)>x-3, & ①\\ 9(a+1)x>9ax+8。 & ②\end{cases}$

解　化原不等式组为同解不等式组

$$\begin{cases}(a-1)x>2a-3,\\ 9x>8。\end{cases}$$

1. 当 $a>1$ 时，得其解为 $\begin{cases}x>(2a-3)/(a-1),\\ x>8/9。\end{cases}$ 因 $\dfrac{2a-3}{a-1}-\dfrac{8}{9}=\dfrac{10a-19}{9(a-1)}$，

(1) 当 $\dfrac{10a-19}{9(a-1)}>0$ 时得 $a>\dfrac{19}{10}$，故当 $a>\dfrac{19}{10}$ 时，有 $\dfrac{2a-3}{a-1}>\dfrac{8}{9}$，所以原不

等式组的解为 $x>\dfrac{2a-3}{a-1}$。

(2) 当 $\dfrac{10a-19}{9(a-1)}<0$ 时得 $a<\dfrac{19}{10}$，故当 $1<a<\dfrac{19}{10}$ 时，有 $\dfrac{2a-3}{a-1}-\dfrac{8}{9}<0$，即 $\dfrac{8}{9}>\dfrac{2a-3}{a-1}$，所以原不等式的解为 $x>\dfrac{8}{9}$.

(3) 当 $\dfrac{10a-19}{9(a-1)}=0$ 时得 $a=\dfrac{19}{10}$，这时 $\dfrac{2a-3}{a-1}=\dfrac{8}{9}$，因而当 $a=\dfrac{19}{10}$ 时，原不等式组的解为 $x>\dfrac{8}{9}$。

2. 当 $a=1$ 时，原不等式组的解为 $x>8/9$.

3. 当 $a<1$ 时，得 $\begin{cases}x<(2a-3)/(a-1),\\ x>8/9.\end{cases}$

而
$$\frac{2a-3}{a-1}-\frac{8}{9}=\frac{10a-19}{9(a-1)}>0,$$

故
$$\frac{8}{9}<x<\frac{2a-3}{a-1}。$$

综上所述原不等式组的解为
$$\begin{cases}\text{当 } a>\dfrac{19}{10}\text{ 时，}x>\dfrac{2a-3}{a-1},\\ \text{当 } 1\leqslant a\leqslant\dfrac{19}{10}\text{ 时，}x>\dfrac{8}{9},\\ \text{当 } a<1\text{ 时，}\dfrac{8}{9}<x<\dfrac{2a-3}{a-1}.\end{cases}$$

注意 未知数的系数为文字，且无法确定其正、负号，在除以该系数时，要分情况讨论。

题型三 求解一元二次不等式(组)

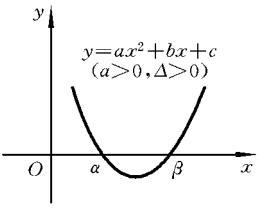
一元二次不等式的解集其主要求法是利用二次函数的图像求之。

命题 1.5.2 1. 若 $ax^2+bx+c=0$ 有两不同实根 α,β $(\alpha<\beta)$，即若 $\Delta=b^2-4ac>0$，且

(1) $a>0$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$(见图 1.5.2(a))，$ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\alpha<x<\beta$(见图 1.5.2(a))。

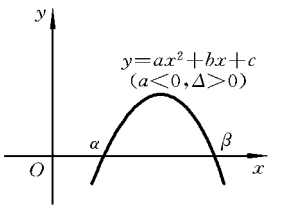
(2) $a<0$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\alpha<x<\beta$(见图 1.5.2(b))，$ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$(见图 1.5.2(b))。

2. 若 $ax^2+bx+c=0$ 有二相等实根 $\alpha=\beta$，即若判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$，且



$a>0$，y 有两个不同实根 α,β

(a)

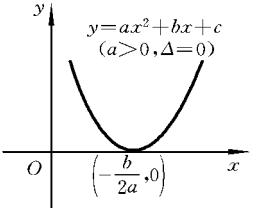


$a<0$，y 有两个不同实根 α,β

(b)

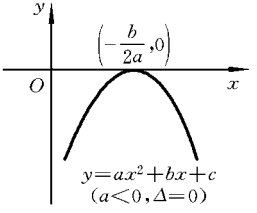
图 1.5.2

(1) $a>0$，**则** $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>0$ **的解集为** $x\neq -b/(2a)$**的一切实数(见图** 1.5.3(a))，**而** $ax^2+bx+c<0$ **的解集为空集(见图** 1.5.3(a))。



$a>0$，y 有两个相同实根 $\alpha=\beta$

(a)



$a<0$，y 有两个相同实根 $\alpha=\beta$

(b)

图 1.5.3

(2) $a<0$，**则** $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>0$ **的解集为空集(见图** 1.5.3(b))，$ax^2+bx+c<0$ **的解集为** $x\neq -b/(2a)$**的一切实数(见图** 1.5.3(b)).

3. **若** $ax^2+bx+c=0$ **没有实根，即若判别式** $\Delta=b^2-4ac<0$，**且**

(1) **若** $a>0$，**则** $ax^2+bx+c>0$ **的解集为一切实数(见图** 1.5.4(a))，$ax^2+bx+c<0$ **无解(见图** 1.5.4(a))。

(2) **若** $a<0$，**则** $ax^2+bx+c>0$ **无解(见图** 1.5.4(b))，$ax^2+bx+c<0$ **的解集为一切实数(见图** 1.5.4(b))。

从图 1.5.2 **至** 1.5.4 **中易看到：**

1° **当** y **有两个不同实根** α,β $(\alpha<\beta)$**时，**y **的值有时为正，有时为负；而如果** $\alpha<x<\beta$，**则** y **与** a **异号；如果** $x<\alpha$ **或** $x>\beta$(**就是** $x\in(-\infty,\alpha)$ **或** $x\in$

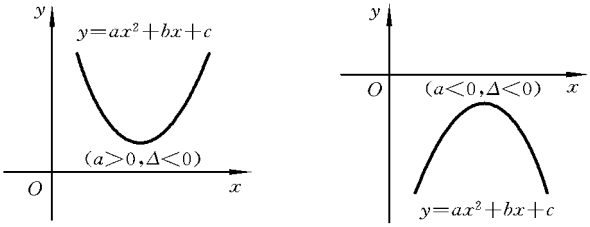


图 1.5.4

$(\beta,+\infty)$),则 y 与 a 同号。因此如果 $a>0$,则 $y>0$ 的解为$(-\infty,\alpha)$和$(\beta,+\infty)$,而如果 $a>0$,则 $y<0$ 的解就是(α,β);如果 $a<0$,则 $y>0$ 的解是(α,β);如果 $a<0$,则 $y<0$ 的解为$(-\infty,\alpha)$和$(\beta,+\infty)$。如果 $x=\alpha$ 或 $x=\beta$,则 $y=0$。

2° 当 y 有两相同实根 $\alpha=\beta$ 时,除 $x=\alpha=\beta$ 以外,对于 x 的任何值,y 与 a 总是同号。因此如果 $a>0$,不等式 $y>0$ 除 $x=\alpha=\beta$ 外的任何值都成立。而不等式 $y<0$ 无解。如果 $a<0$,不等式 $y>0$ 无解,而不等式 $y<0$ 的解是$(-\infty,\alpha)$和$(\alpha,+\infty)$.

3° 当 y 没有实根时,y 与 a 总同号,因此,如果 $a>0$,不等式 $y>0$ 的解为$(-\infty,+\infty)$,而不等式 $y<0$ 无解;如果 $a<0$ 不等式 $y>0$ 无解,而不等式 $y<0$ 的解为$(-\infty,+\infty)$.

如果对二次三项式 $ax^2+bx=c$ 的图像很熟悉,上述结果是很容易记住的。这些结果很重要也应记住。为方便计将上述结果制成下述表格(见表 1.5.1)。

表 1.5.1

	方程 $y=ax^2+bx+c=0$ 的解的情况	不等式 $y\neq 0$ 的解集区间

y 与 a 同号（$a>0, y>0$ 或 $a<0, y<0$）	$\Delta=b^2-4ac<0$，方程无实根	(1) $x\in(-\infty,+\infty)$，无穷区间
	$\Delta=b^2-4ac=0$，方程有相等实根 $\alpha=\beta$	(2) $x\in(-\infty,+\infty)$，$x\neq\alpha,\beta$，无穷区间
	$\Delta=b^2-4ac>0$，方程有相异实根 $\alpha<\beta$	(3) $x<\alpha$ 或 $x>\beta$，无穷区间
y 与 a 异号（$a>0, y<0$，或 $a<0, y>0$）	$\Delta=b^2-4ac<0$，方程无实根	(4) 无解，空集
	$\Delta=b^2-4ac=0$，方程有相等实根 $\alpha=\beta$	(5) 无解，空集
	$\Delta=b^2-4ac>0$，方程有相异实根 $\alpha<\beta$	(6) $x\in(\alpha,\beta)$，有限区间

命题 1.5.3 $y=ax^2+bx+c$ 与 a 同号，$y\neq0$ 的解集为无穷区间，y 与 a 异号，$y\neq0$ 的解集为有限区间（空集看成特殊的有限区间）。

例 9[2005 年 Ⅰ 3] 满足不等式 $(x+4)(x+6)+3>0$ 的所有实数 x 的集合是

(A) $[4,+\infty)$。 (B) $(4,+\infty)$。 (C) $(-\infty,-2]$。

(D) $[-\infty,-1)$。 (E) $(-\infty,+\infty)$。

解 注意到 $y=(x+6)(x+4)+3>0$，且 $a=1>0$ 即 y 与 a 同号，又 $y=x^2+10x+27$ 的判别式 $\Delta=100-4\times1\times27<0$ 即 $y=0$ 无解，由命题 1.5.3 或由表 1.5.1(1) 即知 $y>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$。仅(E)入选。

例 10[1999 年 Ⅱ 6] 不等式 $(x^4-4)-(x^2-2)\geqslant0$ 的集合是

(A) $x\geqslant\sqrt{2}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{2}$。 (B) $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$。

(C) $x<-\sqrt{3}$ 或 $x>\sqrt{3}$。 (D) $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$。 (E) 空集。

解 本例是求解特殊的高次不等式，先用因式分解及不等式的有关性质转化为同解的低次不等式求解。

因 $(x^4-4)-(x^2-2)=(x^2-2)(x^2+2)-(x^2-2)=(x^2-2)(x^2+1)$，故 $(x^4-4)-(x^2-2)>0$ 等价于 $(x^2-2)(x^2+1)>0$，而 $x^2+1\geqslant1$，所以归结为求 $x^2-2>0$ 的解集。因而可由对应的一元二次方程 $x^2-2=0$ 的根直接求出不等式的解集，显然由 $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$ 知其两根为 $x_1=$

$-\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2}$。又 $y=x^2-2>0$，且 $a=1>0$ 即 y 与 a 同号，由命题 1.5.3 即表 1.5.1(3)知其解集在这两根之外，即 $x\leqslant-\sqrt{2}$ 或 $x\geqslant\sqrt{2}$。仅(A)入选。

例 11 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|\alpha<x<\beta\}$，其中 $0<\alpha<\beta$，求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集。

解 由 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|\alpha<x<\beta\}$ 知 $a<0$，且 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 α，β，由韦达定理有 $\alpha+\beta=-b/a$，而 $0<\alpha<\beta$，故 $-b/a>0$，因而 $b>0$。$\alpha\beta=c/a>0$，而 $a<0$，故 $c<0$。

因 $\Delta=b^2-4ac>0$，故可设 $cx^2+bx+a=0$ 的两根为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$。由韦达定理得到

$$x_1+x_2=-\frac{b}{c}=-\frac{b/a}{c/a}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>0, \tag{①}$$

$$x_1x_2=\frac{a}{c}=\frac{1}{c/a}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}>0。 \tag{②}$$

由式①与式②知，$x_1=1/\beta$，$x_2=1/\alpha$.

因 $y=cx^2+bx+a<0$ 与 c $(c<0)$同号，且 $y=cx^2+bx+a=0$ 有两相异实根，由命题 1.5.3 即表 1.5.1(3)知，$cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $x<x_1=1/\beta$，或 $x>x_2=1/\alpha$，即 $\{x|x<1/\beta$ 或 $x>1/\alpha\}$。

例 12 解不等式组 $\begin{cases}x^2-6x-16<0,\\x^2-8x+12>0。\end{cases}$

解 先求第一个一元二次不等式的解集。显然 $a=1>0$，又 $x^2-6x-16=(x-8)(x+2)=0$ 有两个实根 $x_1=-2$，$x_2=8$，因而该不等式的解集为

$$-2<x<8。 \tag{①}$$

再求第二个一元二次不等式的解集。显然 $a=1>0$，又 $x^2-8x+12=(x-6)(x-2)=0$ 有两个实根 $x_1=2$，$x_2=6$，故该不等式的解集为

$$x<2 \quad 或 \quad x>6。 \tag{②}$$

对不等式①与②求交集分别得到 $-2<x<2$，$6<x<8$.

将这两个不等式的解集的图像画出来，如图 1.5.5 所示。从图可以看到它们的公共部分是 $-2<x<2$ 和 $6<x<8$。因此原不等式组的解集是 $-2<x<2$ 和 $6<x<8$。

题型四 求解含绝对值的不等式

法一 去掉绝对值符号，转化为不含绝对值的不等式(组)求之。

解含有绝对值符号的不等式与解含有绝对值符号的方程相类似，基本思

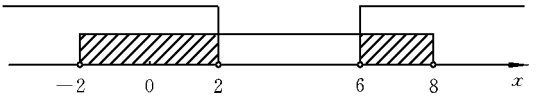


图 1.5.5

想是设法去掉绝对值符号，将其化为不含绝对值符号的一般不等式去解。常用的化法有下述几种：

1° $|f(x)|<a\ (a>0)\Leftrightarrow -a<f(x)<a$；

2° $|f(x)|>a\ (a>0)\Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$；

3° $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ 即 $(|f(x)|)^2=f^2(x)$；

4° $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\geqslant 0, \\ -f(x), & f(x)<0. \end{cases}$

例 13（条件充分性判断） 要使 $|x+1|\leqslant 3$ 成立。

(1) $|x|\leqslant 2$；　　(2) $|x-1|\leqslant 2$.

解 (1) 由 $|x|\leqslant 2$ 有 $-2\leqslant x\leqslant 2$，$-1\leqslant x+1\leqslant 3$，故 $-3\leqslant -1\leqslant x+1\leqslant 3$，有 $|x+1|\leqslant 3$. 条件(1)充分。

(2) 由 $|x-1|\leqslant 2$ 有 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$，$0\leqslant x+1\leqslant 4$，当 $0\leqslant x+1\leqslant 4$ 成立时，$|x+1|\leqslant 3$ 不成立，故条件(2)不充分。仅 A 入选。

例 14 不等式 $|-x^2+2x-4|-|2x+1|<0$ 的解集为

(A) $-1<x<2$。　　(B) $-2<x<-3$。　　(C) $1<x<3$.

(D) $4<x<5$.　　(E) 以上结论都不正确。

解 因二次三项式 $-x^2+2x-4$ 的首项系数 $a=-1<0$ 且其判别式 $\Delta=4-16<0$，故 $-x^2+2x-4$ 恒为负，有

$$|-x^2+2x-4|=-(-x^2+2x-4)=x^2-2x+4。$$

解原不等式归结为解 $x^2-2x+4-|2x+1|<0$。可分解为下述两个不等式组解之：

(1) $\begin{cases} 2x+1\geqslant 0, \\ x^2-2x+4-(2x+1)<0, \end{cases}$ 其解为 $1<x<3$；

(2) $\begin{cases} 2x+1<0, \\ x^2-2x+4+(2x+1)<0, \end{cases}$ 无解。

原不等式的解集为 $1<x<3$。仅(C)入选。

法二　用分段求解法求之。

此法常用于求解含两个或多个绝对值符号的代数不等式，其步骤与方法是：

先求出使各个绝对值等于零的变量的值，然后用这些值（数轴上的点）将数轴分成若干个子区间，再令变量分别在这些子区间内取值，并求出不等式的解。最后对这些解集求出其并，即得所求的不等式的解集。

使用此法时，注意不要丢掉分点的值。

例 15 满足不等式 $|x+1|-|2x-3|<0$ 的 x 取值的范围是

(A) $(-2/3,4)$。　(B) $(2/3,4)$。　(C) $(-\infty,4)$.

(D) $(-\infty,-2/3)\cup(4,+\infty)$。　(E) $(-\infty,2/3)\cup(4,+\infty)$。

解法 1 用分段求解法求之。令 $|x+1|=0$，$|2x-3|=0$ 分别得 $x=-1$，$x=3/2$。

(1) 当 $x<-1$ 时，原不等式化为 $-(x+1)-[-(2x-3)]=x-4<0$，即 $x<4$ 与 $x<-1$ 求交得原不等式的解集为 $x<-1$.

(2) 当 $-1\leqslant x<3/2$ 时，原不等式化为 $x+1-[-(2x-3)]=3x-2<0$，即 $x<2/3$ 与 $-1\leqslant x<3/2$ 求交得到原不等式的解集为 $-1\leqslant x<2/3$.

(3) 当 $3/2\leqslant x$ 时，原不等式化为 $x>4$ 与 $3/2\leqslant x$，求交得到原不等式的解集为 $x>4$.

综上得到原不等式的解集为上述各个解集的并集，即

$$[-\infty,-1)\cup[-1,2/3)\cup(4,+\infty)=(-\infty,2/3)\cup(4,+\infty)。$$

仅(E)入选。

解法 2 利用不等式的性质求之。因 $|2x-3|>|x+1|>0$，由命题 1.5.1(8)得到 $(2x-3)^2>(x+1)^2$，即

$$3x^2-14x+8=(3x-2)(x-4)>0,$$

故原不等式的解集为 $4<x$ 或 $x<2/3$。仅(E)入选。

解法 3 原不等式可化为 $|x+1|<|2x-3|$，令 $a=|2x-3|>0$，则

$$-|2x-3|<x+1<|2x-3|。$$

归结为解下列不等式组：

$$\begin{cases} x+1<|2x-3|, & ① \\ x+1>-|2x-3|。 & ② \end{cases}$$

由不等式①得到 $2x-3>x+1$ 或 $-(2x-3)>x+1$，即 $x>4$ 或 $x<2/3$。

由不等式②得 $|2x-3|>-(x+1)$，于是有

$$2x-3>-(x+1) \quad 或 \quad -(2x-3)>-(x+1).$$

解得　　$x>2/3$　或　$x<4$。

$x>4$ 与 $x>2/3$ 求交得 $x>4$，$x>4$ 与 $x<4$ 求交得空集，$x<2/3$ 与 $x>2/3$求交得空集，$x<2/3$ 与 $x<4$ 求交得 $x<2/3$。

$x>4$ 与 $x<2/3$ 求并得到原不等式的解集为 $x>4$ 或 $x<2/3$ 即 $(-\infty,2/3)\cup(4,+\infty)$。仅(E)入选。

题型五　求解一元高次不等式

含有一个未知数且未知数的最高次数高于二次的不等式叫做一元高次不等式。可用下述数轴标根法求其解集。

一元 n 次多项式在实数范围内能分解为几不互不相同的一次因式的积，不妨设

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

其中 $x_1>x_2>\cdots>x_n$. 为方便起见，设 $a_n>0$，易知当 $x>x_1$ 时，所有因式皆为正，故积为正，因而 $y>0$。当 $x_1>x>x_2>\cdots>x_n$ 时，有一个负因式，其他因式皆为正，故积为负，$y<0$。依此类推，不妨作一示意图，如图 1.5.6 所示。可见，右起第一区间为正，其余区间负、正交替出现。于是 x 轴上方各区间 $(x_1,+\infty),(x_3,x_2),\cdots$即为

$$y=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0\ (a_n>0)$$

的解集，x 轴下方的各区间$(x_2,x_1),(x_4,x_3),\cdots$即为

$$y=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)<0\ (a_n>0)$$

的解集。

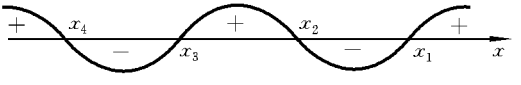


图 1.5.6

由于 y 在各区间上的符号正、负或负、正交替出现，用上述数轴标根法求 $y>0$ 或 $y<0$ 的解集只需考察在最右端区间或最左端区间上 y 的符号就行了。在考察 y 的符号之前应注意考察 y 的因式中能否去掉一些因式而不影响求 $y>0$ 或 $y<0$ 的解集，从而能简化计算。下述情况可以去掉 y 的一些因式而不影响求出其解集：

1° y 有相同因式，例如有因式$(x-x_i)^m$. 若 m 为奇数，可去掉指数 m，保留一个因式；若 m 为偶数，则可去掉因式$(x-x_i)^m$。

2° y 的分解中如含有不能分解为一次因式的二次因式 $a_1x^2+b_1x+c_1$ 时，如果 $a_1>0$，且其判别式 $\Delta=b_1^2-4a_1c_1<0$，则 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 的解集为所有实数，即 $a_1x^2+b_1x+c_1$ 恒为正。于是可在因式中去掉这个二次因式不影响 y 的解集。如果 $a_1<0$，且 $\Delta=b_1^2-4a_1c_1<0$，则 $a_1x^2+b_1x+c_1<0$，因而如果要去掉这个因式应把原不等式乘以 -1. 这样就得到与原不等式同解的不等式。

这样利用二次三项式的性质可简化含二次因式的高次不等式的求解。

例 16[2001 年 Ⅰ 8] 设 $0<x<1$，则不等式 $\dfrac{3x^2-1}{x^2-1}>1$ 的解集是

(A) $0<x<1/\sqrt{2}$。　　(B) $1/\sqrt{2}<x<1$.

(C) $0<x<\sqrt{2/3}$。　　(D) $\sqrt{2/3}<x<1$.

解法 1 用数轴标根法求之。原不等式与 $\dfrac{3x^2-1}{x^2-1}-1>0$ 即与 $\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$ 同解。因 $0<x<1$，$x^2-1<0$，但 $(x^2-1)^2>0$。方程两边同乘 $(x^2-1)^2$ 得到同解不等式 $(2x^2-1)(x^2-1)>0$，即

$$\begin{aligned} y&=(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)(x-1)(x+1)\\ &=(x-1/\sqrt{2})(x+1/\sqrt{2})(x-1)(x+1)/2>0。\end{aligned}$$

如图 1.5.7 所示，以 $x=-1,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1$ 为分界点，将数轴分为五个子区间。显然当 $x>1$ 时在右起第一区间 $y>0$，而 y 在其他子区间的符号依次负、正交替出现。因而原不等式解集为 x 轴的上方区间的并集，即

$$(-\infty,-1]\cup[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]\cup[1,+\infty].$$

于是所求的原不等式的解集为 $0<x<1/\sqrt{2}$（因 $0<x<1$）. 仅(A)入选。

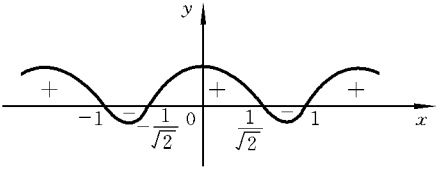


图 1.5.7

解法 2 由 $0<x<1$ 知 $x^2-1<0$，因而 $3x^2-2<x^2-1$ 即 $2x^2<1$. $|x|\leqslant 1\sqrt{2}$，$-1\sqrt{2}<x<1\sqrt{2}$. 因 $0<x<1$，故 $0<x<1/\sqrt{2}$. 仅(A)入选.

例 17 解不等式 $(x+3)(x+1)^2(x-2)^3(x-4)>0$.

解 易看出，当 $x\neq -1$ 时 $(x+1)^2$ 恒为正值，它不影响原不等式左端的符号变化，而 $x=-1$ 又不是原不等式的解。因此在求不等式解时，可以不考虑 $(x+1)^2$。另外，$(x-2)^3$ 与 $(x-2)$ 的符号相同，因此 $(x-2)^3$ 对原不等式左端符号影响和 $(x-2)$ 完全相同，所以原不等式与 $(x+3)(x-2)(x-4)>0$ 同解。下用数轴标根法求之。

先将其根 $-3,2,4$，分别标在数轴上，由图 1.5.8 即知原不等式

$$(x+3)(x+1)^2(x-2)^3(x-4)>0$$

的解为 $\quad 4<x<+\infty \quad$ 或 $\quad -3<x<2,$

即原不等式的解集为 $(-3,2)\cup(4,+\infty)$.

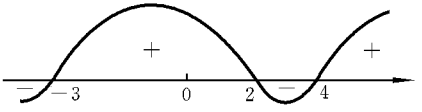


图 1.5.8

例 18 不等式 $(4x^2+12x+9)(x^2-x-2)>0$ 的解集为

(A) $x<-2$ 或 $x>3$。 (B) $x<-3$ 或 $x>4$。 (C) $x<-4$ 或 $x>5$。

(D) $x<-1$ 或 $x>2$。 (E) $x<0$ 或 $x>1$。

解 这是一个含二次因式的高次不等式组。左边的二次因式 $4x^2+12x+9$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times4\times9<0$，因而这个二次三项式没有实根，它的值与首项系数 $a=4$ 同号即其值恒为正。于是原不等式与不等式

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0$$

同解。显然同解不等式的解集为 $x<-1$ 或 $x>2$，即原不等式的解集为 $x<-1$ 或 $x>2$。仅(D)入选。

题型六 求解无理不等式

根号内含未知数的不等式称为无理不等式。

解无理不等式，首先要考虑无理式中 x 的允许值范围。可先根据根号内的代数式必须不小于零这一点求出，然后把不等式两端平方(去掉根号)逐步化简求其解。但在两端平方时又必须先考察两端的取值符号，只有两端同为正(或负)才能平方(参阅命题 1.5.1(8))。

常见的无理不等式有下述两类：

$$1^\circ\ \sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\ g(x)\geqslant0,\\ f(x)>g^2(x),\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\ g(x)<0;\end{cases}$$

$$2^\circ\ \sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^2(x)。\end{cases}$$

无理不等式的解法，在使根式有意义的前提下，常将根式去掉，化为不含根式的等价不等式，然后求解。

例 19　不等式 $x-10>2\sqrt{x+5}$。

解　转化为不等式组求解，即

$$x-10>2\sqrt{x+5}\Leftrightarrow\begin{cases}x-10>0,\\ x+5\geqslant 0,\\ (x-10)^2>4(x+5),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>10, & ①\\ x\geqslant -5, & ②\\ x>20, & ③\\ \text{或 } x<4。 & ④\end{cases}$$

将式①、式②及式③求交得 $x>20$；**将式①、式②及式④求交为空集，故原不等式的解集为** $x>20$。

例 20　解不等式 $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}>4$.

解　将所给的不等式转化为含绝对值的不等式解之。事实上，原不等式与 $|x-1|+|x-3|>4$ **同解。后者可分成四个不等式组求解，即**

$$(1)\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3\geqslant 0,\\ (x-1)+(x-3)>4;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3<0,\\ (x-1)-(x-3)>4;\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}x-1<0,\\ x-3\geqslant 0,\\ -(x-1)+(x-3)>4;\end{cases}\qquad(4)\begin{cases}x-1<0,\\ x-3<0,\\ -(x-1)-(x-3)>4。\end{cases}$$

易求得以上不等式组的解集依次为 $x>4$，**无解，无解，**$x<0$，**故原不等式的解集为** $x<0$ **或** $x>4$.

例 21　解不等式 $\sqrt{x^2-3x+2}-3-x>0$.

解　先求出根号内的代数式中的 x **的容许值。由** $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)\geqslant 0$ **得到**

$$x\geqslant 2\quad\text{或}\quad x\leqslant 1。\qquad①$$

把原不等式改成 $\sqrt{x^2-3x+2}>3+x$. **下面分两种情况求出其解集。**

1° $3+x>0$ **即** $x>-3$。**于是原不等式两端均为正数，两端平方得到** $x^2-3x+2>9+x^2+6x$ **即** $x<-7/9$。**因而**

$$-3<x<-7/9。 \qquad ②$$

将式②与式①中 $x\geqslant 2$ 求交得空集，式②与式①中 $x\leqslant 1$ 求交即为 $-3<x<-7/9$。这是原不等式的部分解集。

2° $3+x\leqslant 0$ 即 $x\leqslant -3$ 时满足原不等式，因而 $x\leqslant -3$ 是其解。它与式①中 $x\geqslant 2$ 求交得空集，与 $x\leqslant 1$ 求交得 $x\leqslant -3$。因而 $x\leqslant -3$ 也是原不等式的另一部分解集。

1°与 2°中解集的并 $(-\infty,-3]\cup(-3,-7/9)=(-\infty,-7/9)$，即 $x<-7/9$ 为原不等式的解集。

例 22 解不等式 $\sqrt{x^2+4x}>2-\sqrt{16-x^2}$。

解 先求 x 的允许值范围。由

$$\begin{cases} x^2+4x=x(x+4)\geqslant 0, \\ 16-x^2\geqslant 0 \end{cases}$$

得

$$0\leqslant x\leqslant 4。 \qquad ①$$

然后再分两种情况求出原不等式的解集。

1° 若原不等式右端为非正数，即

$$\sqrt{16-x^2}\geqslant 2, \qquad ②$$

在 $0\leqslant x\leqslant 4$ 条件下，将式②的两端平方得 $x^2\leqslant 12$ 即

$$|x|\leqslant 2\sqrt{3}, \qquad ③$$

将式③与式①求交得原不等式的部分解集

$$0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{3}。 \qquad ④$$

2° 若原不等式右端为正数，即 $\sqrt{16-x^2}<2$. 在 $0\leqslant x\leqslant 4$ 的条件下两端平方得到 $x^2>12$ 即 $|x|>2\sqrt{3}$ 与式①求交得到原不等式组的另一部分解为

$$2\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 4。 \qquad ⑤$$

求出式④与式⑤的并 $[0,2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},4]=[0,4]$，即为原不等式组的解集。

注意 上例的不等式中含两个根号，如按通常去根号的解法在 $\begin{cases} x^2+4x\geqslant 0, \\ 16-x^2\geqslant 10, \end{cases}$ 即 $0\leqslant x\leqslant 4$ 的条件限制下需连续平方两次才能去掉根号，这时出现四次不等式，不易求其解。

题型七 求解对数不等式

在使对数有定义的前提下，利用对数函数的单调性或用换元法，可将对数不等式转化为代数不等式求解。关键是正确应用对数运算法则及对数函数的下述单调性：

若 $a>1$，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$；

若 $0<a<1$，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow 0<f(x)<g(x)$.

例 23 不等式 $\log_{x+7}25>2$ 的解集为

(A) $3<x<4$。 (B) $5<x<6$。 (C) $4<x<5$。

(D) $-6<x<-2$。 (E) $-7<x<-3$.

解 由 $\log_{x+7}25>2=\log_{x+7}(x+7)^2$ 得到

$$\begin{cases}x+7>1,\\25>(x+7)^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-6,\\-12<x<-2,\end{cases}$$ 其解集为 $-6<x<-2$.

$$\begin{cases}0<x+7<1,\\25<(x+7)^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7<x<-6,\\x<-12 \text{ 或 } x>-2,\end{cases}$$ 无解。

故原不等式的解集为 $-6<x<-2$. 仅(D)入选。

例 24 求解不等式 $|\log_2 x|+|\log_2(2-x)|\geqslant 1$.

解 因不等式中含两个绝对值符号，为去掉它们需分段讨论。

当 $0<x<1$ 时

$$|\log_2 x|=-\log_2 x,\quad |\log_2(2-x)|=\log_2(2-x)。$$

原不等式化为 $-\log_2 x+\log_2(2-x)=\log_2(2/x-1)\geqslant 1=\log_2 2$，

或由 $2^{\log_2(2/x-1)}\geqslant 2^1$ 知，有 $2/x-1\geqslant 2$，即 $x\leqslant 2/3$。

因而原不等式的解集为 $0<x<1$ 与 $x\leqslant 2/3$ 的交集 $0<x\leqslant 2/3$。

当 $1<x<2$ 时原不等式化为

$$\log_2 x-\log_2(2-x)=\log_2[x/(2-x)]\geqslant 1=\log_2 2,$$

或由 $2^{\log_2[x/(2-x)]}\geqslant 2^1$ 知 $\dfrac{x}{2-x}\geqslant 2$，即 $x\geqslant\dfrac{4}{3}$ 与 $1<x<2$ 求交得到 $\dfrac{4}{3}\leqslant x<2$.

于是原不等式的解集为 $0<x\leqslant 2/3$ 或 $4/3\leqslant x<2$.

例 25 已知 $x=9/4$ 时，不等式 $\log_a(x^2-x-2)>\log_a(-x^2+3x+3)$ 成立，这个不等式的所有解为

(A) $1<x<2$。 (B) $3<x<4$。 (C) $5<x<6$。

(D) $2<x<5/2$。 (E) $4<x<5$.

解 先利用 $x=9/4$ 为已知不等式的解，求出对数的底数 a 的取值范围，然后再求出所有解。

当 $x=9/4$ 时，$x^2-x-2=13/16$，$-x^2+2x+3=39/16$，因 $x=9/4$ 是已知不等式的解，故 $\log_a(13/16)>\log_a(39/16)$，而 $13/16<39/16$，故 $0<a<1$. 因而

由 $\log_a(x^2-x-2)>\log_a(-x^2+3x+3)\ (0<a<1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2<-x^2+3x+3,\\ x^2-x-2>0,\\ -x^2+3x+3>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<5/2, & ①\\ x>2\ ②\text{或}\ x<-1, & ③\\ -1<x<3. & ④\end{cases}$$

求不等式①、②、④的交得到 $2<x<5/2$；求不等式①、③、④的交为空集，因而原不等式的解集为 $2<x<5/2$。仅(D)入选。

题型八　求解指数不等式

利用指数函数的单调性

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x), & \text{若 } a>1,\\ f(x)<g(x), & \text{若 } 0<a<1\end{cases}$$

或用换元法将指数不等式化为代数不等式解之。

另外，在 $f(x)>0$ 的条件下，形如 $f(x)^{g(x)}>1$ 或 $f(x)^{g(x)}<1$ 的不等式可化为下述不等式组解之：

$$\begin{cases}f(x)>1,\\ g(x)>0,\end{cases}\text{和}\begin{cases}0<f(x)<1,\\ g(x)<0;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(x)>1,\\ g(x)<0,\end{cases}\text{和}\begin{cases}0<f(x)<1,\\ g(x)>0。\end{cases}$$

例 26　不等式 $2^{2x^2-3x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x-5}$ 的解集为

(A) $(-1,1)$。　(B) $(0,2)$。　(C) $(1,3)$。

(D) $(-1,4/3)$。　(E) 以上结论都不正确。

解　原不等式即为 $2^{2x^2-3x+1}<2^{-(x^2+2x-5)}$ 由指数函数的单调性得到

$2x^2-3x+1<-(x^2+2x-5)$　即　$3x^2-x-4=(x+1)(3x-4)<0$，

故其解集为 $-1<x<4/3$，即 $(-1,4/3)$。仅(D)入选。

例 27　满足不等式 $|x|^{x^2-2x}<1$ 的一切实数值是

(A) $(-2,-1)\cup(0,2)$。　(B) $(0,2)$。　(C) $(-1,2)$.

(D) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$。　(E) $(-1,0)\cup(1,2)$.

解　原不等式在 $x=0$ 时无意义。在 $x\neq0$ 时，原不等式等价于下列两个不等式组：

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}|x|>1,\\ x^2-2x<0;\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}0<|x|<1,\\ x^2-2x>0。\end{cases}$$

解不等式组(Ⅰ)得其解集为 $1<x<2$,解不等式组(Ⅱ)得其解集为 $-1<x<0$,故原不等式的解集为两个解集之并,即 $(-1,0)\cup(1,2)$。

例 28 不等式 $a^{\sqrt{2x^2-3x+1}}<a^{2x+1}$ $(0<a<1)$ 的解集为

(A) $x>0$。 (B) $x>1$。 (C) $x<-1$。 (D) $x<0$。 (E) $x>2$。

解 $0<a<1$ 时,a^x 单调减少,因而有 $\sqrt{2x^2-3x+1}>2x+1$.

该不等式与下述两个不等式组同解:

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}2x^2-3x+1\geqslant 0,\\ 2x+1\geqslant 0,\\ 2x^2-3x+1>(2x+1)^2;\end{cases}\qquad (\text{Ⅱ})\begin{cases}2x^2-3x+1\geqslant 0,\\ 2x+1<0。\end{cases}$$

解不等式组(Ⅰ)得到 $x\leqslant 1/2$ 或 $x\geqslant 1$,$x\geqslant -1/2$,$-7/2<x<0$。因 $x\leqslant 1/2$,$x\geqslant -1/2$,$-7/2<x<0$ 的交集为 $-1/2<x<0$,$x\geqslant 1$,$x\geqslant -1/2$,$-7/2<x<0$ 的交集为空集,故不等式组(Ⅰ)的解集为 $-1/2\leqslant x\leqslant 0$。

解不等式组(Ⅱ)得到 $x\leqslant 1/2$ 或 $x\geqslant 1$,$x<-1/2$。因 $x<-1/2$,$x\leqslant 1/2$ 的交集为 $x<-1/2$,$x\geqslant 1$,$x<-1/2$ 的交集为空集,故不等式组(Ⅱ)的解集为 $x<-1/2$。于是所求不等式的解集为 $-1/2\leqslant x\leqslant 0$ 与 $x<-1/2$ 的并集,即为

$$-1/2\leqslant x<0 \quad \text{或} \quad x<-1/2,$$

亦即为 $x<0$。仅(D)入选。

题型九 已知 ax^2+bx+c 的取值情况,求其待定常数

求解这类题型时应先熟悉表 1.5.1 中所列出的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的取值情况($y>0$ 或 $y<0$)与首项系数 a、判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 及解集之间的关系。如有必要,应根据已知条件再列出不等式(或等式)解之。

例 29[2000 年Ⅱ8] 已知 $-2x^2+5x+c\geqslant 0$ 的解为 $-1/2\leqslant x\leqslant 3$,则 c 为

(A) 1/3。 (B) 3。 (C) $-1/3$。 (D) -3.

解 注意到不等式左端二次三项式的首项系数 $a=-2<0$,又不等号为 $\geqslant$ 且右端为 0,两者符号相反,因而所给不等式的解集为一元二次方程 $-2x^2+5x+c=0$ 两根 x_1,x_2 所构成的区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$。由题设有 $-1/2\leqslant x\leqslant 3$,因而 $x_1=-1/2$,$x_2=3$。再由韦达定理有 $-c/2=x_1x_2=(-1/2)\times 3=-3/2$,即 $c=3$. 仅(B)入选。

例 30[2003 年Ⅱ2](条件充分性判断) 不等式 $(k+3)x^2-2(k+3)x+k-1<0$,对 x 的任意值都成立。

(1) $k=0$;　　(2) $k=-3$.

解　(1) 当 $k=0$ 时,原不等式左边化为 $3x^2-6x-1$,欲使 $3x^2-6x-1<0$,因 $a=3>0$,只能 $\alpha<x<\beta$,不可能对 x 的任意值成立。条件(1)不充分。

(2) $k=-3$ 时原不等式化为 $-3-1=-4<0$,这对 x 的任意值都成立。条件(2)充分。仅 B 入选。

注意　因当 $a=k+3<0$,即 $k<-3$ 另可推出方程 $(k+3)x^2-2(k+3)x+(k-1)=0$ 的判别式为

$$\Delta=4(k+3)^2-4(k+3)(k-1)=16(k+3)<0,$$

由表 1.5.1 中(1)知道题干结论成立。因而 $k<-3$ 为例 30 的另一充分条件。

例 31　当 m 取哪些数值时,二次三项式

$$f(x)=(m^2+4m-5)x^2-2(m+1)x+3$$

的值总是正的?

解　要二次三项式 $f(x)$ 的值总是正的,由表 1.5.1 中(1)或其图像知,$f(x)=0$ 没有实根,即其判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$,同时其首项系数 $a=m^2+4m-5>0$。于是问题归结为求解下列不等式组:

$$\begin{cases} b^2-4ac=4(m+1)^2-4(m^2+4m-5)\times 3<0, \\ a=m^2+4m-5>0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases}(m+1)^2-3(m^2+4m-5)<0,\\ m^2+4m-5>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-m^2-5m+8<0,\\ m^2+4m-5>0。\end{cases}$

第一个不等式的解为 $m<\alpha=(-5-\sqrt{57})/2$ 或 $m>\beta=(-5+\sqrt{57})/2$,第二个不等式的解为 $m<-5$ 或 $m>1$。将这两个不等式的解分别求出,其公共部分得到该不等式组所求的解为 $m<(-5-\sqrt{57})/2$ 和 $m>(-5+\sqrt{57})/2$ (见图 1.5.9)。

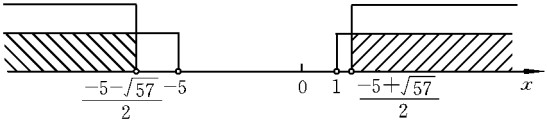


图 1.5.9

例 32(条件充分性判断)　不等式 $\dfrac{2x^2+\lg m^{2x+1}}{4x^2+6x+3}<1$ 对于 x 取一切实数

都成立。

(1) $10<m<100$；　　(2) $100<m<1000$.

解　(1) 先检验条件(1)是否充分。注意到二次三项式 $4x^2+6x+3$ 的首项系数 $a=4>0$，且其判别式

$$\Delta=b^2-4ac=36-4\times4\times3<0,$$

故对任意 x 有 $4x^2+6x+3>0$。于是原不等式可化为

$$2x^2+\lg m^{2x+1}<4x^2+6x+3 \quad \text{即} \quad 2x^2+2(3-\lg m)x+3-\lg m>0。 \quad ①$$

归结检验在条件(1)下不等式对 x 取一切实数成立。因其首项系数 $a=2>0$，只需检验其判别式

$$\Delta=b^2-4ac=4(3-\lg m)^2-4\times2(3-\lg m)=4(\lg m-3)(\lg m-1)<0。$$

事实上，由 $10<m<100$ 得到

$$\lg10<\lg m<\lg100, \quad \text{即} \quad 1<\lg m<2.$$

因 $\lg m-1>0$，$\lg m-2<0$，故 $\lg m-3<0$。于是

$$\Delta=4(\lg m-3)(\lg m-1)<0,$$

所以不等式①对任意实数 x 都成立，因而原不等式对任意实数成立。条件(1)充分。

由条件(2)可得 $2<\lg m<3$，因而 $\lg m-2>0$，于是有 $\lg m-1>0$。又 $\lg m-3<0$，于是不等式①的判别式 $\Delta<0$，故条件(2)也充分。仅 D 入选。

题型十　利用不等式求函数的定义域、值域和最值

求函数的定义域、值域及其最值等问题常与求解不等式问题有联系，下面举例说明利用不等式如何求函数的定义域、值域和最值。求时应注意有关知识的综合运用。

类型(一)　利用不等式，求函数的定义域。

例 33[1997 年Ⅰ18]　$f(x)=\sqrt{x-x^2}$ 的定义域是

(A) $(-\infty,1]$。　　(B) $(-\infty,0),(1,+\infty)$。　　(C) $(0,1)$。

(D) $(-\infty,0]$。　　(E) $[0,1]$。

解　由 $x-x^2=x(1-x)\geqslant0$ 得到

$$\begin{cases}x\geqslant0,\\1-x\geqslant0,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}x\leqslant0,\\1-x\leqslant0。\end{cases}$$

前一不等式组的解为 $0\leqslant x\leqslant1$，后一不等式组无解，故 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$。仅(E)入选。

例 34　函数 $y=\sqrt{\lg[(5x-x^2)/4]}$ 的定义域为

(A) $[2,5]$。 (B) $[3,6]$。 (C) $(3,7)$。 (D) $(4,9)$。 (E) $[1,4]$。

解 $\begin{cases}\lg[(5x-x^2)/4]\geqslant 0,\\(5x-x^2)/4>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5x-x^2)/4\geqslant 1,\\x(5-x)>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)(x-1)\leqslant 0,\\x(5-x)>0。\end{cases}$

由$(x-4)(x-1)\leqslant 0$得$1\leqslant x\leqslant 4$，由$x(5-x)>0$得$0<x<5$。求$1\leqslant x\leqslant 4$与$0<x<5$的交集即得所求的定义域为$1\leqslant x\leqslant 4$。仅(E)入选。

类型(二) 求函数的值域。

例 35 函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$的值域为

(A) $(0,+\infty)$。 (B) $[1,7/3]$。 (C) $(1,7/3]$。

(D) $(7/3,+\infty)$。 (E) 以上结论都不正确。

解 因二次三项式x^2+x+1的首项系数$a=1>0$，且$\Delta=b^2-4ac<0$，故对任意x有$x^2+x+1>0$，所以$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

因 $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$去分母后得到

$$(y-1)x^2+(y-1)x+y-2=0,\qquad ①$$

当$y=1$时方程化为$0\cdot x=1$，矛盾，这与$x\in\mathbf{R}$不符，故$y\neq 1$. 因方程①有实根，故$\Delta=(y-1)^2-4(y-1)(y-2)\geqslant 0$，即

$$(y-1)(3y-7)\leqslant 0,$$

故$1\leqslant y\leqslant 7/3$，因$y\neq 1$，所以$1<y\leqslant 7/3$. 仅(C)入选。

类型(三) 求函数的最值。

例 36[1998 年Ⅰ6] 设实数x,y适合等式$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，则$x+y$的最大值为

(A) $\sqrt{3}/2$。 (B) $2\sqrt{3}/3$。 (C) $2\sqrt{3}$。

(D) $3\sqrt{2}$。 (E) $3\sqrt{3}$。

解 注意到已知等式中已出现$x+y$项，对该式整理，利用不等式性质求其最大值。

$$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=(x-2y)^2+\sqrt{3}(x+y)-6,$$

即
$$x+y=[6-(x-2y)^2]/\sqrt{3}。$$

由于$(x-2y)^2\geqslant 0$，有$6-(x-2y)^2\leqslant 6$，于是

$$x+y\leqslant 6/\sqrt{3}=2\sqrt{3}.\text{ 仅(C)入选。}$$

例 37(条件充分性判断) 函数$y=f(x)$的最小值为$1/2$.

(1) $f(x)=|x-2/5|+|1/10+x|$；　(2) $f(x)=x+1/(54x^2)$ $(x>0)$.

解　由条件(1)有

$$f(x)=(2/5-x)+|1/10+x|\geqslant(2/5-x)+(1/10+x)=1/2,$$

当且仅当$(2/5-x)(1/10+x)\geqslant 0$时等号成立。取等号的一个充分条件是

$$(2/5-x)(1/10+x)=0.$$

解得　　$x=2/5$　或　$x=-1/10$.

故当 $x=2/5$ 或 $x=-1/10$ 时，$y_{\min}=1/2$。条件(1)充分。由条件(2)有

$$f(x)=x+\frac{1}{54x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{54x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{54x^2}}=\frac{1}{2}.$$

条件(2)也充分。仅 D 入选。

例 38　某商场出售一种商品，每天可卖 200 件，每件可获利润 60 元。根据市场预测，一件商品，每降低 20 元，则每天可多卖出 100 件。为获取最大利润，每件商品应降价

(A) 8 元。　(B) 9 元。　(C) 10 元。　(D) 12 元。　(E) 15 元。

解　设每件应降价 x，为求出降价后的利润 $L(x)$ 的表达式，应先求出降价后商品销售的件数 y. 再加上降价前所销售的 200 件，就得到降低后每日销售的件数为 $y+200$.

因商品售出的增加量与售价的降低量成比例，故

$$\frac{100}{20}=\frac{y}{x},\quad 即\quad y=\frac{100x}{20}。$$

降价 x 后，每件商品的利润应降为 $60-x$。因而其利润函数为

$$L(x)=(60-x)(200+y)=(60-x)\left(200+\frac{100x}{20}\right)$$

$$=(60-x)(200+5x),$$

即　　$L(x)=-5x^2+100x+12000=-5(x-10)^2+12500\leqslant 12500$。

所以当 $x=10$ 即每件降价 10 元时可获最大利润. 仅(C)入选。

习　题　1.5

(一) 问题求解

1. 若 $a>b$，$1/a>1/b$，则

(A) $a>0>b$.　(B) $a>b>0$.　(C) $0>a>b$.　(D) $|a|>|b|$.

2. 下列结论成立的是：

(A) **若** $a>b$，**则** $ac^2>bc^2$.　(B) **若** $a>b$，$c>d$，**则必有** $a/d<b/c$。

(C) **若** $a<b<0$，**则** $a^3<b^3$.　(D) **若** $0>a>b$，**则** $1/(b-a)>1/b$.

3. [2002 **年** Ⅱ 10]　**不等式** $4+5x^2>x$ **的解集是**

(A) **全体实数**。　(B) $(5,-1)$。　(C) $(-4,2)$。　(D) **空集**。

4. [1998 **年** Ⅰ 5]　**一元二次不等式** $3x^2-4ax+a^2<0$ $(a<0)$**的解集是**

(A) $a/3<x<a$。　(B) $x>a$ **或** $x<a/3$。　(C) $a<x<a/3$.

(D) $x>a/3$ **或** $x<a$。　(E) $a<x<3a$.

5. 不等式组 $\begin{cases}2x-1<0,\\(2x-1)/3>x-2,\\x(4x+1)+13\geqslant(2x-1)^2\end{cases}$ **的解集是**

(A) $-1/2\leqslant x\leqslant 1$。　(B) $-12/5<x<1/2$。

(C) $-12/5\leqslant x\leqslant 1/2$.　(D) $-12/5\leqslant x<1/2$.

(E) **以上结论都不正确**。

6. 已知函数 $f(x)=\lg[x^2+(k+2)x+5/4]$**的定义域为全体实数，实数** k **的取值范围是**

(A) $-2<k<2$。　(B) $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$。

(C) $x>-2+\sqrt{5}$.　(D) $x<-2-\sqrt{5}$。

(E) $-2-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}-2$.

7. 设 $x\in\mathbf{R}$，**不等式** $(3x^2+2x+2)/(x^2+x+1)>k$ **恒成立，则正数** k **的取值范围是**

(A) $k<2$。　(B) $k>2$。　(C) $1<k<2$。

(D) $k<1$ **或** $k>1$.　(E) $0<k<2$.

8. 不等式 $(x^2-4x+3)/(x+4)\leqslant 0$ **的解集是**

(A) $(-\infty,-4)\cup[1,3]$。　(B) $(-\infty,-4]\cup(1,3)$。

(C) $(-4,3)$。　(D) $(-\infty,3)$。　(E) $(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$。

9. 不等式 $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3$ **的解集是**

(A) $x<-3$ **或** $x>-2$。　(B) $x<-4$ **或** $x>-3$。

(C) $x<-2$ **或** $x>-1$。　(D) $x<1$ **或** $x>2$。

(E) **以上结果都不正确**。

10. 不等式 $|x^2-3x-4|<x+1$ **的解集是**

(A) $1<x<2$。　(B) $2<x<3$。　(C) $3<x<4$.

(D) $4<x<5$。　(E) **以上结论都不正确**。

11. 若 $a>0$,使不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在实数集 R 上的解集非空,则 a 的取值范围是

(A) $0<a<1$。　(B) $a=1$。　(C) $a>1$。　(D) $a\geqslant 1$。

12. 不等式 $\|x+1|-|x-1\|<1$ 的解集是

(A) $-1<x<-2$。　(B) $1<x<2$。　(C) $3<x<4$.

(D) $x>-1/2$。　(E) $-1/2<x<1/2$.

13. 已知不等式 $a-1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant a$ 在 $1/4\leqslant x\leqslant 1/2$ 时成立,则 a 的取值为

(A) $1/2$。　(B) $1/4$.　(C) -2。　(D) 2.

14. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3,\\ x^2-9, & 3<|x|<4\end{cases}$ 的定义域是

(A) $[-3,4)$。　(B) $(-3,4)$。　(C) $[-4,4)$。　(D) $(-4,4)$.

15. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\lg(3+2x-x^2)}$ 的定义域是

(A) $[2,3)$。　(B) $(2,3)$。　(C) $[2,1+\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},3)$。

(D) $(2,1+\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},3)$。　(E) **以上结论都不正确**。

(二) 条件充分性判断

1. 设 a,b 为实数,n 为大于 1 的整数,必有 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

(1) a,b **均为正数**;　(2) $a>b$.

2. 不等式 $x^2-4x+3<0$ 成立。

(1) $x-|y-2|=5$;　(2) $x=2$.

3. $|x^2-5x|<6$ 能够成立。

(1) $x>3$;　(2) $x<5$.

4. 不等式 $|x-3|+|x-4|<a$ 的解集不是空集。

(1) $a<1/2$;　(2) $a>1$.

5. 不等 $|a-b|\leqslant 3$ 恒能成立。

(1) $|a+2|\leqslant 1$ **且** $|b+2|\leqslant 2$;　(2) $|a-2|\leqslant 2$ **且** $|b-2|\leqslant 1$。

6. 不等式 $mx^2-2mx+(2m-3)<0$ 的解集是空集。

(1) $m<3$ ($m\in\mathbf{R}$);　(2) $m\geqslant 3$ ($m\in\mathbf{R}$)。

7. 使 $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq 0)$**恒成立。**

(1) $b^2-4ac>0$；　　(2) $a>0$ **且** $b^2-4ac<0$。

8. 要使 $1<k<2$ **成立。**

(1) **关于** x **的方程** $x^2-2(k-1)x+(k-1)=0$ **无实根；**

(2) **不等式组** $\begin{cases}2x^2+x-10<0,\\ 2x^2+(5+2k)x+5k<0\end{cases}$ **的整数解只有** -2.

9. 二次三项式 $kx^2-(k-8)x+1$ **对一切实数** x **均为正值(其中** $k\in\mathbf{R}$**,且** $k\neq 0$)。

(1) $k=5$；　　(2) $4<k<8$.

10. 函数 $f(x)$**的最小值为** $1/2$.

(1) $f(x)=|x-5/12|+|x+1/12|$；(2) $f(x)=(x^2-1/16)/|x-1/4|$.

(三) 解答题

1. 求解下列高次不等式：

(1) $(1-x)(x^2+6x+8)<0$；　　(2) $(x^3+1)(x^2+2x-3)\geqslant 0$。

2. 解不等式 $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$.

3. 解不等式 $x>\sqrt{2x+24}$.

4. 解不等式 $\lg(10^x-1)\log_{0.1}(10^{x+1}-1)>-6$.

5. 求函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$**的值域。**

1.6　等差数列和等比数列

(一) 考试内容

1. 数列的基本概念

1) 数列定义

按一定次序排列的一列数称为数列,数列中的每一个数都叫做这个数列的项.

数列的表达形式为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$**,或简记作** $\{a_n\}$**,其中** n **是以** $n=1$

开始取的自然数.

2) 数列的通项及通项公式

数列$\{a_n\}$中的第 n 项 a_n 叫做数列的通项. 如果通项 a_n 与 n 之间的函数关系可用一个公式来表示,这个公式就叫做这个数列的通项公式. 例如数列 $2,5,10,17,26,\cdots$ 的通项公式为

$$a_n=n^2+1.$$

但不是每一个数列都一定有通项公式,正如每个函数不一定都有解析表达式一样.

3) 数列前 n 项和

已知数列$\{a_n\}$,其前 n 项和记作 S_n,即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

4) a_n 与 S_n 的关系

已知数列$\{a_n\}$的通项 a_n 可求出数列前 n 项和 S_n. 反之,若已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n,能不能求出通项公式 a_n 呢?

因

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n\geqslant 1), \tag{①}$$

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\ (n\geqslant 2), \tag{②}$$

在式①与式②的共同定义域 $n\geqslant 2$ 的条件下,①$-$②得到 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$. 但 $n=1$ 时由式①得 $a_1=S_1$,故

$$a_n=\begin{cases} S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2. \end{cases} \tag{1.6.1}$$

这是 a_n 与 S_n 之间的关系式. 值得注意的是,$a_n=S_n-S_{n-1}$ 并不是对一切自然数 n 都成立,而仅限于 $n\geqslant 2$ 的一切自然数恒成立. 因为当 $n=1$ 时 S_1-S_0 无意义,因此已知数列$\{a_n\}$前 n 项和 S_n 求 a_n 时,要分 $n=1$ 与 $n\geqslant 2$ 两种情况讨论.

2. 等差数列

定义 1.6.1 如果一个数列从第 2 项起,每一项与它前一项的差等于同一个常数,这个数列称为等差数列. 这个常数称为这个等差数列的公差,记作 d,即

$$\{a_n\}\text{是等差数列}\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d(\text{常数}),$$

对任意自然数 n 成立,其中 d 称为$\{a_n\}$的公差.

1) 通项公式

设$\{a_n\}$为等差数列,d 为公差,首项为 a_1,则其通项为

$$a_n=a_1+(n-1)d \quad \text{或} \quad a_n=dn+(a_1-d)=kn+b. \tag{1.6.2}$$

由式(1.6.2)知,等差数列$\{a_n\}$的通项是关于n的一次函数,且一次项系数为其公差,一次项系数与常数项之和为其首项.

上述结论的逆也成立,即有命题1.6.1。

命题1.6.1 如某数列的通项为n的一次函数$a_n=kn+b$,则此数列必为等差数列,且其公差为n的一次项系数k,其首项为该一次项系数与其系数之和$k+b$.

由式(1.6.2)及命题1.6.1即可得到下述定理。

定理1.6.1 数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是,对于$n\in\mathbf{N}$,满足

$$a_n=a_1+(n-1)d=nd+(a_1-d)=kn+b.$$

此外,等差数列$\{a_n\}$的通项公式还可表示为

$$a_n=a_m+(n-m)d. \tag{1.6.3}$$

2) 等差数列$\{a_n\}$的前n项和

常用的有下述三种表示式:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}\text{(已知首项}a_1\text{和末项}a_n\text{,计算其和的公式)}. \tag{1.6.4}$$

当n为奇数时,第$(n+1)/2$项$a_{(n+1)/2}$距首项a_1与末项a_n等远,故$2a_{(n+1)/2}=a_1+a_n$,即$(a_1+a_n)/2=a_{(n+1)/2}$,式(1.6.4)化为

$$S_n=na_{(n+1)/2} \quad (n\text{为奇数},n\in\mathbf{N}). \tag{1.6.5}$$

($a_{(n+1)/2}$可看做是等差数列$\{a_n\}$前n项(奇数)项之和的中值.)

将$a_n=a_1+(n-1)d$代入式(1.6.4)得到

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n[2a_1+(n-1)]d}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n。 \tag{1.6.6}$$

(已知首项a_1及公差d计算其和的公式.)

由式(1.6.6)知,当$\{a_n\}$为等差数列时,其前n项和的表示式为n的不含常数的二次函数.其逆也成立,即有以下定理。

定理1.6.2 数列$\{a_n\}$是等差数列的充要条件是其前n项和为n的不含常数的二次函数$S_n=An^2+Bn$ $(A\neq0)$,且n^2项的系数A为半公差,二次函数的系数之和$A+B$为其首项.

定理1.6.3 数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=An^2+Bn+C$ $(A\neq0,C\neq0)$,则该数列$\{a_n\}$从第2项起才是等差数列.

3）等差数列的常用性质

用下述命题表述之.

命题 1.6.2　设$\{a_n\}$为等差数列，则

（1）距首末等远的两项和均相等，即

$$a_1+a_n=a_1+a_{n-1}=\cdots=a_k+a_{n-k+1}。$$

（两项下角码之和只要是 $n+1$，则这两项距首项 a_1、末项 a_n 必等远。）

（2）距任一项 a_k（$k\neq1$，即第 1 项除外）前后等远的两项之和相等，且都等于 a_k 的 2 倍，即

$$2a_k=a_{k-1}+a_{k+1}=a_{k-2}+a_{k+2}=\cdots=a_{k-m}+a_{k+m}。$$

（两项下角码之和为 $2k$ 时，这两项距 a_k 前后等远。）

（3）若 $m+n=p+q$（$m,n,p,q\in\mathbf{N}$），则 $a_m+a_n=a_p+a_q$.

特别有　　$2a_m=a_{m-n}+a_{m+n}$.

4）等差数列中项公式

如果 a,A,b 成等差数列，则 A 叫做 a 与 b 的等差中项，且 $A=(a+b)/2$.

3. 等比数列

定义 1.6.2　如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比等于同一个不等于零的常数，这个数列就称为等比数列. 这个常数称为这个等比数列的公比，记作 q，即

$$\{a_n\}\text{是等比数列}\Leftrightarrow a_{n+1}/a_n=q(\text{常数，不等于零}),$$

q 是等比数列$\{a_n\}$的公比.

1）通项公式

$$a_n=a_1q^{n-1}(n\in\mathbf{N})\quad\text{或}\quad a_n=a_mq^{n-m}.\tag{1.6.7}$$

定理 1.6.4　数列$\{a_n\}$成等比数列的充要条件是，对于任意 $n\in\mathbf{N}$，满足 $a_n=a_1q^{n-1}$.

2）等比中项

若 a,G,b 三数成等比数列，则 G 称为 a,b 的等比中项，且有 $G^2=ab$，即 $G=\pm\sqrt{ab}$.

3）前 n 项和的计算公式

由下述命题表述之.

命题 1.6.3　设$\{a_n\}$为等比数列，首项为 a_1，公比为 q，前 n 项之和为 $S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-1}$（注意第 n 项为 $a_n=a_1q^{n-1}$，不是 a_1q^n，而 a_1q^n 是$\{a_n\}$

的第 $n+1$ 项，即 $a_{n+1}=a_1q^n$）.

1° 当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；

2° $q\neq1$ 时，有

$$S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}. \tag{1.6.8}$$

3° $|q|<1$，且 $n\to\infty$ 时，有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{a_1}{1-q}. \tag{1.6.9}$$

值得注意的是，不要将式(1.6.8)与式(1.6.9)相混淆.

5）等比数列的常用性质

用下述命题表述之。

命题 1.6.4 设 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为 q，则

1° 距首末等远两项之积均相等，即

$$a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-1}=a_ka_{n-k+1}.$$

（两项下角码之和为 $n+1$，则这两项距首项 a_1 和末项 a_n 必等远。）

2° 当 $k\neq1$ 时距 a_k 前后等远的两项之积相等，都等于 a_k 的平方，即

$$a_k^2=a_{k-1}a_{k+1}=a_{k+2}a_{k+2}=\cdots。$$

（两项下角码之和为 $2k$，这两项距 a_k 前后等远。）

3° 若 $m+n=p+q$（$m,n,p,q\in\mathbf{N}$），则 $a_ma_n=a_pa_q$.

特别有 $$a_m^2=a_{m-n}a_{m+n}.$$

（二）考试要求

理解等差数列、等比数列的概念掌握其通项公式、前 n 项和的公式及其应用，掌握等差数列、等比数列性质，并能利用公式和性质进行相关运算.

数列是联考必考的内容，近几年来对这部分的考查逐渐由考查定义、概念向考查性质及其综合应用演变. 这向考生提出了更高的要求。由于这部分内容规律性与综合性较强，与其他各部分知识联系紧密，这就要求考生一定要重视这部分知识的复习。它既是重点，又是难点，要适当多花一点时间和精力，以求真正掌握，达到融会贯通、灵活应用的程度.

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一 判别数列为等差数列或等比数列

法一　用定义法求之。

依据等差数列的定义 1.6.1，对于任意自然数 n，只需验证 $a_{n+1}-a_n$ 恒为同一常数，或对于 $n\geqslant 2$ 的任意自然数验证 a_n-a_{n-1} 为同一常数。这里 $n\geqslant 2$ 这个条件不能缺，因为数列 $\{a_n\}$ 中的 n 是以 $n=1$ 开始取的自然数.

依据等比数列的定义 1.6.2 知，只需验证 $a_{n+1}/a_n=q$（q 为不等于零的常数，$n\in\mathbf{N}$），即可判定该数列为等比数列.

解题时要注意等比数列中任意一项都不是零的条件，因此常数列是等差数列但只有非零常数列才是等比数列.

例 1　已知数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1=1$，$S_{n+1}=4a_n+2$.

（1）若 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，则数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）若 $c_n=a_n/2^n$，则数列 $\{c_n\}$ 是等差数列.

解　（1）为判别 $\{b_n\}$ 为等比数列，只需说明 $q=b_{n+1}/b_n$ 为同一常数. 事实上，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(4a_n+2)-(4a_{n-1}+2)=4a_n-4a_{n-1},$$

则当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$b_n=a_{n+1}-2a_n=4a_n-4a_{n-1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})=2b_{n-1}\quad\text{即}\quad b_n/b_{n-1}=2=q.$$

又因
$$\begin{aligned}b_1&=a_2-2a_1=(S_2-a_1)-2a_1=S_2-3a_1\\&=(4a_1+2)-3a_1=a_1+2=1+2=3,\end{aligned}$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项、公比为 $q=2$ 的等比数列.

（2）利用(1)中结果有 $b_n=a_{n+1}-2a_n=3\times 2^{n-1}$，则

$$c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}(a_{n+1}-2a_n)=\frac{b_n}{2^{n+1}}=\frac{3\times 2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{4},$$

故 $\{c_n\}$ 是以公差 $d=3/4$ 的等差数列.

例 2　设 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\{\ln|a_n|\}$（且 $|a_n|\neq 0$）为等差数列.

解　因 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q，则

$$a_n/a_{n-1}=q\quad(n\geqslant 2).$$

两边取绝对值后再取对数，得到

$$\ln|a_n|-\ln|a_{n-1}|=\ln|q|.$$

从而知 $\{\ln|a_n|\}$ 是公差为 $\ln|q|$ 的等差数列.

注意　例 2 揭示了等比数列与等差数列的内在联系，即若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{\log_a|a_n|\}$ 是等差数列；若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{a^{a_n}\}$ 是等比数列，其中 $a>0$，$a\neq 1$（见命题 1.6.9）.

例 3(条件充分性判断)　数列$\{a_n\}$是等差数列.

(1) 数列$\{a_n\}$前 n 项和为 $S_n=n^2+n-1$;

(2) 数列$\{a_n\}$前 n 项和为 $S_n=n^2+n$.

解法 1　当条件(1)成立时,有 $a_1=1$。当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-1-[(n-1)^2+n-1-1]=2n,$$

故 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2n, & n\geqslant 2。\end{cases}$ 显然条件(1)不充分.

事实上由定理 1.6.3 知,条件(1)中数列$\{a_n\}$从第 2 项起才是等差数列.

当条件(2)成立时,有 $n=1$。当 $a_1=2$,$n\geqslant 2$ 时,有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-[(n-1)^2+(n-1)]=2n.$$

当 $n=1$ 时,a_1 满足 $a_n=2n$,故$\{a_n\}$为等差数列.仅 B 入选.

解法 2　由定理 1.6.2 即知条件(1)不充分,条件(2)充分.仅 B 入选.

法二　用通项公式法求之。

用命题 1.6.1 或定理 1.6.1 判别一数列为等差数列,用定理 1.6.4 判别一数列为等比数列.

例 4　已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足

$$b_n=(a_1+2a_2+\cdots+na_n)/(1+2+\cdots+n),$$

且$\{b_n\}$为等差数列,问数列$\{a_n\}$是什么数列?

解　设等差数列的公差为 d,由题设有

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(1+2+\cdots+n)b_n=n(n+1)b_n/2, \qquad ①$$

则 $a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(1+2+\cdots+n-1)b_{n-1}=(n-1)nb_{n-1}/2$, ②

①－②得到　　$na_n=n(n+1)b_n/2-(n-1)nb_{n-1}/2$,

故
$$\begin{aligned}a_n&=(n+1)[b_1+(n-1)d]/2-(n-1)[b_1+(n-2)d]/2\\&=b_1+(3/2)d(n-1)=[b_1-(3/2)d]+(3/2)dn, \qquad ③\end{aligned}$$

由式③并利用命题 1.6.1 知,$\{a_n\}$为等差数列,其公差为 $(3/2)d$,首项为 $b_1-(3/2)d+(3/2)d=b_1$.或由式(1.6.2)知,$\{a_n\}$是首项为 b_1、公差为 $3d/2$ 的等差数列.

法三　用中项公式法求之。

用下述命题表述之。

命题 1.6.5　(1) 若数列$\{a_n\}$满足 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$或 $a_{n+1}=a_na_{n+2}$ ($n\in$ N),则该数列$\{a_n\}$为等差数列或等比数列。其逆也成立.

(2) 由三项 a,b,c 组成的数列,若满足 $2b=a+c$,或 $b^2=ac$,则该数列 a,

b,c 为等差数列或等比数列。其逆也成立.

例 5 设各项均为正数的无穷数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足如下条件:对任意自然数 n 都有 a_n,b_n,a_{n+1} 成等差数列,b_n,a_{n+1},b_{n+1} 成等比数列,则数列$\{\sqrt{b_n}\}$

(A) 是等差数列. (B) 既不是等差数列又不是等比数列.

(C) 是等比数列. (D) 既是等差数列又是等比数列.

解 由题设有

$$b_n=(a_n+a_{n+1})/2, \tag{①}$$

$$a_{n+1}=\sqrt{b_nb_{n+1}},$$

因而

$$a_n=\sqrt{b_nb_{n-1}}\ (n\geqslant 2), \tag{②}$$

将式②代入式①得到

$$b_n=(\sqrt{b_{n-1}b_n}+\sqrt{b_nb_{n+1}})/2\ (n\geqslant 2),$$

因 $b_n>0$,由 $2b_n=\sqrt{b_nb_{n-1}}+\sqrt{b_{n+1}b_n}$ 即得

$$2\sqrt{b_n}=\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{b_{n+1}}\ (n\geqslant 2),$$

所以$\{\sqrt{b_n}\}$是等差数列.仅(A)入选。

法四 利用下述等差数列或等比数列诸性质判别之.

命题 1.6.6 (1) 设$\{a_n\}$为等差数列,则

$$2a_n=a_{n-m}+a_{n+m}\quad (n,m\in\mathbf{N},\text{且 } n\geqslant m+1)。 \tag{1.6.10}$$

反之,若式(1.6.10)成立,则$\{a_n\}$为等差数列.

(2) 若$\{a_n\}$为等比数列,则

$$a_n^2=a_{n-m}a_{n+m}\quad (m,n\in\mathbf{N},n\geqslant m+1), \tag{1.6.11}$$

反之,若式(1.6.11)成立,则$\{a_n\}$为等比数列.

设$\{a_n\}$为等差数列,则项数相同的连续项和 $a_1+a_2+\cdots+a_k,a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k},a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{3k},\cdots$也为等差数列.

设等差数列$\{a_n\}$的前 k 项之和为 S_k,上述结论可表示为下述命题。

命题 1.6.7 设 S_k 为等差数列$\{a_n\}$的前 k 项的和,则 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots$仍为等差数列,且其等差中项为

$$S_{2k}-S_k=[S_k+(S_{3k}-S_{2k})]/2. \tag{1.6.12}$$

同样,设$\{a_n\}$为等比数列,则项数相同的连续项的和(和不为零)$a_1+a_2+\cdots+a_k,a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k},\cdots$仍为等比数列。由此即得下述命题。

命题 1.6.8 若 S_k 是公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$的前 k 项的和,则 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots$仍为等比数列,公比为 q^k,且有

$$(S_{2k}-S_k)^2=S_k(S_{3k}-S_{2k}). \tag{1.6.13}$$

命题 1.6.9 （1）若数列$\{y_n\}(y_n>0)$为等比数列，则$\{\log_a y_n\}$为等差数列，其中$a>0,a\neq 1$.

（2）若$\{x_n\}$为等差数列，则$\{a^{x_n}\}$为等比数列，其中$a>0,a\neq 1$.

命题 1.6.10 （1）设$\{a_n\}$为等差数列，公差为d，则$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$也是等差数列，公差为$-d$.

（2）设$\{a_n\}$为等比数列，公差为$q\neq 0$，则$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$也是等比数列，公差为$1/q$.

命题 1.6.11 一个数列如果既是等差数列，又是等比数列，则该数列必是常数数列.

命题 1.6.12 设数列$\{a_n\}$的第k项、第l项、第n项分别为a_k,a_l,a_n，则$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是

$$\begin{vmatrix} k & a_k & 1 \\ l & a_l & 1 \\ n & a_n & 1 \end{vmatrix}=0.$$

例 6[2002 年 Ⅱ 9] 设$3^a=4,3^b=8,3^c=16$，则a,b,c

(A) 是等比数列，但不是等差数列.

(B) 是等差数列，但不是等比数列.

(C) 既是等比数列，也是等差数列.

(D) 既不是等比数列，也不是等差数列.

解法 1 显然三个数$4,8,16$为等比数列，其公比$d=2$，由命题 1.6.9(1)即知$\log_3 4,\log_3 8,\log_3 16$为等差数列，即

$$\log_3 4=\log_3 3^a=a,\quad \log_3 8=\log_3 3^b=b,\quad \log_3 16=\log_3 3^c=c$$

成等差数列，但因$b^2=(\log_3 8)^2=(\log_3 2^3)^2=(3\log_3 2)^2=9(\log_3 2)^2$，而$ac=\log_3 4\cdot\log_3 16=2\log_3 2\cdot 4\log_3 2=8(\log_3 2)^2$，故$b^2\neq ac$. 因而$a,b,c$不成等比数列. 仅(B)入选.

解法 2 在$3^a=4,3^b=8,3^c=16$两端分别取以 3 为底的对数函数得到

$$a\log_3 3=\log_3 4,\quad b\log_3 3=\log_3 8,\quad c\log_3 3=\log_3 16,$$

即$a=\log_3 4,b=\log_3 8,c=\log_3 16$. 因有

$$2b=2\log_3 8=\log_3 64,\quad a+c=\log_3 4+\log_3 16=\log_3 64,$$

故$2b=a+c$. 由命题 1.6.5(2)知a,b,c成等差数列，但不成等比数列，其理由见本例解法 1。也可用反证法证之.

事实上，如果a,b,c又是等比数列，则a,b,c既是等差数列又是等比数

列，由命题 1.6.11 知该数列 a,b,c 必为常数列，但显然有

$$a=\log_3 4\neq b=\log_3 8\neq c=\log_3 16.$$

因而 a,b,c 不成等比数列，仅为等差数列. 仅(B)入选.

例 7 已知 a,b,c 是不为 1 的正数，$x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且有

$$a^x=b^y=c^z \quad \text{和} \quad 1/x+1/z=2/y,$$

证明 a,b,c 成等比数列.

证 令 $a^x=b^y=c^z=k$，则

$$x=\log_a k,\quad y=\log_b k,\quad z=\log_c k,$$

由 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$ 得到

$$\frac{1}{\log_a k}+\frac{1}{\log_c k}=\frac{2}{\log_b k},\quad \text{即}\quad \frac{\lg a}{\lg k}+\frac{\lg c}{\lg k}=\frac{2\lg b}{\lg k},$$

亦即

$$\lg a+\lg c=2\lg b,$$

故 $b^2=ac$，由命题 1.6.5(2) 知 a,b,c 成等比数列.

法五 利用等差数列、等比数列的运算性质判别之.

定理 1.6.5 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为等差数列，公差分别为 d_1,d_2，则

(1) 在等差数列各项中，如果加上同一个数 b，或同乘一个不等于零的常数 k，则所得的新数列 $\{a_n+b\},\{ka_n\}$ 仍为等差数列，且公差不变仍为 d_1.

(2) n 个等差数列的对应项的和组成的数列仍为等差数列，例如 $\{a_n+b_n\}$ 仍为等差数列.

(3) $\{ka_n+b_n\}$ 仍为等差数列(k 为常数).

(4) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中每隔 k ($k\in\mathbf{N}$)项取出一项，按原来顺序排列，所得的新数列仍为等差数列，其公差为 $(k+1)d_1$.

定理 1.6.6 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为等比数列，其公比分别为 q_1,q_2，则

(1) $\{a_nb_n\}$ 为公比是 q_1q_2 的等比数列，特别 $\{a_n^2\},\{b_n^2\}$ 均为等比数列；

(2) $\{a_n/b_n\}$ 为公比是 q_1/q_2 的等比数列；

(3) $\{ka_n\}$(k 为非零常数)为公比是 q_1 的等比数列；

(4) $\{|a_n|\}$ 仍为等比数列；

(5) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中每隔 k($k\in\mathbf{N}$)项取出一项，按原来顺序排列，所得的新数列仍为等比数列，其公比为 q_1^{k+1}.

例 8(条件充分性判断) 数列 $\{a_n\}$ 的偶数项所组成的新数列的前 n 项和为 $\dfrac{3}{4}(9^n-1)$.

(1) 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\times 3^{n-1}$；

(2) 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3^n$.

解 当条件(1)成立时，易知$\{a_n\}$为等比差数列，$a_1=2$，$a_2=6$，公比 $q=6/2=3$. 又由定理 1.6.6(5)知数列$\{a_n\}$的偶数项组成的数列$\{a_{2n}\}$也为等比数列，其首项应 $a_1^{(1)}=a_2=6$，公比 $q_1=q^2=3^2=9$，则其前 n 项的和应为

$$S_n=\frac{a_1^{(1)}(1-q_1^n)}{1-q_1}=\frac{6(1-9^n)}{1-9}=\frac{3}{4}(q^n-1)。$$

条件(1)充分. 但当条件(2)成立时，$a_1=3$，$a_2=9$，$q=3$，因而新数列$\{a_{2n}\}$的首项 $a_1^{(2)}=a_2=9$，其前 n 项和的表示式不等于 $3(9^n-1)/4$. 条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 9 若$\{a_n\}$是等比数列，有

(1) 数列$\{a_n^2\}$也是等比数列；　(2) 数列$\{a_{2n}\}$也是等比数列；

(3) 数列$\{1/a_n\}$也是等比数列；　(4) $\{|a_n|\}$也是等比数列.

以上命题中正确命题的个数是

(A) 1 个.　(B) 2 个.　(C) 3 个.　(D) 4 个.

解 由定理 1.6.6(1)知命题(1)正确；由该定理(5)知命题(2)也正确；由该定理(2)知命题(3)也正确，因为 $1,1,\cdots,1$ 为常数等比数列，公比 $q=1$. 最后由该定理(4)知命题(4)也正确. 因而四个命题全部正确. 仅(D)入选.

题型二　求等差数列或等比数列的通项公式

法一　归结求首项 a_1，公差 d 或首项 a_1，公比 q.

当已知数列的两项或两个条件时，常利用定理 1.6.1 或式(1.6.2)、式(1.6.3)建立方程组求出 a_1 和 d，利用式(1.6.7)建立方程组求出 a_1 和 q.

也可利用式(1.6.2)建立关于 n 的一次方程求出待求系数 k，b，从而求得通项 a_n.

例 10　试求第 3 项为 12，第 5 项为 48 的等比级数第 8 项.

解　先求出该数列的通项公式. 依题意，利用式(1.6.7)得到

$$aq^2=12,\qquad ①$$

$$aq^4=48,\qquad ②$$

则②÷①得到 $q^2=4$，故 $q=\pm 2$. 将其代入式①得 $a_1=3$，所求通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1}=3(\pm 2)^{n-1},$$

于是所求第 8 项为 $a_8=3(\pm 2)^{8-1}=3(\pm 2)^7=\pm 384$。

当 $q=2$ 时，$a_8=384$；当 $q=-2$ 时，$a_8=-384$.

例 11(条件充分性判断)　在等差数列$\{a_n\}$的每相邻两项间插入一个数,使所得数列$\{b_n\}$的通项公式为

$$b_n=\frac{3}{4}n-\frac{23}{4}.$$

(1) 等差数列$\{a_n\}$的公差为 3/2;

(2) 等差数列$\{a_n\}$中 $a_1=-5$,$a_4=-1/2$.

解　由所得新数列$\{b_n\}$的通项公式,利用定理 1.6.1 知,所得新数列为等差数列,且公差 $k=d_2=3/4$,首项 $b_1=k+b=3/4-23/4=-5$.

当条件(1)成立时,仅知$\{a_n\}$的公差 $d_1=3/2$,因而新数列$\{b_n\}$的公差 $d_2=d_1/2=3/4$,但首项无法确定。条件(1)不充分.

但当条件(2)成立时,由 $a_1=-5=b_1$,且由 $a_4=a_1+3d_1=-1/2$ 得到 $d_1=(-1/2+5)/3=3/2$. 因$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等差数列,由$\{b_n\}$的构造知,$d_2=d_1/2$,从而 $d_2=3/4$. 于是条件(2)推出$\{b_n\}$的首项为-5,公差为 3/4,因而其通项为

$$b_n=b_1+(n-1)d_2=nd_2+(b_1-d_2)=(3/4)n-23/4.$$

条件(2)充分. 仅 B 入选.

例 12　已知$\{a_n\}$为等差数列,且 $p,q\in\mathbf{N}$,$p>q$. 若 $a_p=q$,$a_q=p$,求 a_{p+q}.

解法 1　由题设有

$$\begin{cases}a_1+(p-1)d=q, & ①\\ a_1+(q-1)d=p, & ②\end{cases}$$

①$-$②得到$(p-q)d=q-p$,故 $d=-1$. 又由式①有 $a_1=p+q-1$,所以

$$a_{p+q}=a_1+(p+q-1)d=p-1+q-(p+q-1)=0.$$

解法 2　设等差数列$\{a_n\}$中第 m,n 项分别为 a_m,a_n. 先求出第 $m+n$ 项 a_{m+n}用 a_m,a_n 表示的式子. 事实上,

$$a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d=a_1+(m-1)d+nd=a_m+nd, \quad ①$$

$$a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d=a_1+(n-1)d+md=a_n+md, \quad ②$$

①$\times m-$②$\times n$ 得到

$$(m-n)a_{m+n}=ma_m-na_n, \quad \text{即} \quad a_{m+n}=\frac{ma_m-na_n}{m-n}\ (m\neq n)。 \quad ③$$

在式③中令 $m=p$,$n=q$,则

$$a_{p+q}=\frac{pa_p-qa_q}{p-q}=\frac{pq-qp}{p-q}=0.$$

解法 3 由式(1.6.2)知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=kn+b$ $(k\neq 0)$. 将 a_p, a_q 之值代入得到

$$\begin{cases} a_p=pk+b, \\ a_q=qk+b, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k=-1, \\ b=p+q. \end{cases}$$

因而 $$a_n=-n+p+q.$$

于是 $$a_{p+q}=-(p+q)+p+q=0.$$

法二 已知等差数列的前 n 项和,可按式(1.6.1)求其通项.

例 13[2003 年Ⅱ 22] 数列$\{a_n\}$的前 n 项和是 $S_n=4n^2+n-2$,则它的通项 a_n 是

(A) $3n-2$. (B) $4n+1$. (C) $8n-2$.

(D) $8n-1$. (E) 以上结论都不正确.

解法 1 当 $n=1$ 时 $a_1=S_1=4+1-2=3$.

当 $n\geqslant 2$ 时 $$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1}=4n^2+n-2-[4(n-1)^2+(n-1)-2] \\ &=4n^2+n-4(n-1)^2-(n-1)=8n-3. \end{aligned}$$

将 $n=1$ 代入 $a_n=8n-3$ 中得到 $a_1=5\neq 3$,故所求通项为

$$a_n=\begin{cases} 3, & n=1, \\ 8n-3, & n\geqslant 2. \end{cases}$$ 仅(E)入选.

解法 2 由定理 1.6.3 知 $S_n=4n^2+n-2$, $c=-2\neq 0$,该数列$\{a_n\}$从第二项起才是等差数列. 因而$\{a_n\}$不是等差数列. 由命题 1.6.1 知选项(A)、(B)、(C)、(D)均为 n 的一次函数,均为等差数列的通项公式,故它们均不能入选. 仅(E)入选.

法三 已知等差数列中任意两项还可用命题 1.6.2 求其通项.

例 14 在 -3, 25 之间插入 6 个数,使它们和这两个数成等差数列. 求所插入的数.

解法 1 由题意有 $a_1=-3$, $a_8=25$. 设该等差数列的通项为 a_n,则由命题 1.6.12 得到

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 8 & 25 & 1 \\ n & a_n & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{即} \quad a_n=4n-7.$$

于是令 $n=2,3,4,5,6,7$,即得所插入的数为 $1,5,9,13,17,21$.

解法 2 由 $a_8=a_1+7d=-3+7d=25$,故 $d=4$. 于是

$$a_2=a_1+d=-3+4=1, \quad a_3=a_1+2d=5, \quad a_3=a_1+3d=9,$$

$a_4=a_1+3d=13$，　$a_5=a_1+4d=17$，　$a_6=a_1+5d=21$.

法四　各项不是由一个式子表示的数列可用递推法、数学归纳法等法求其通项.

例 15　已知数列$\{a_n\}$中的项满足$\begin{cases}a_1=b,\\ a_{n+1}=ca_n+d,\end{cases}$求$\{a_n\}$的通项公式.

解　可分如下三种情况讨论.

1° **当** $c=0$ **时**，$a_n=\begin{cases}b, & n=1,\\ d, & n\geqslant 2.\end{cases}$

2° **当** $c=1$ **时，有** $a_{n+1}=a_n+d$，$a_n=a_{n-1}+d$，**故**

$$a_{n+1}=a_{n-1}+2d,\cdots,a_{n+1}=a_1+nd=b+nd.$$

因而
$$a_n=a_1+(n-1)d=b+(n-1)d.$$

3° **当** $c\neq 0$，$c\neq 1$ **时，用递推法求之.**

由 $a_{n+1}=ca_n+d$ **得到** $a_n=ca_{n-1}+d$，$a_{n-1}=ca_{n-2}+d$，**故**

$$\begin{aligned}a_n&=ca_{n-1}+d=c(ca_{n-2}+d)+d=c^2a_{n-2}+cd+d=\cdots\\&=c^{n-1}a_1+c^{n-2}d+c^{n-3}d+\cdots+cd+d\\&=c^{n-1}b+d(1+c+c^2+\cdots+c^{n-2})=c^{n-1}b+d\,\frac{1-c^{n-1}}{1-c}\\&=c^{n-1}b+d\,\frac{c^{n-1}-1}{c-1}=\frac{c^nb-c^{n-1}b+dc^{n-1}-d}{c-1}=\frac{bc^n+(d-b)c^{n-1}-d}{c-1}.\end{aligned}$$

故其通项为 $a_n=\begin{cases}b, & c=0,n=1,\\ d, & c=0,n\geqslant 2,\\ b+(n-1)d, & c=1,\\ [bc^n+(d-b)c^{n-1}-d]/(c-1), & c\neq 0,c\neq 1.\end{cases}$

题型三　求等差数列或等比数列若干项的代数式的值

等差数列和等比数列的通项公式、前 n 项和公式涉及五个量：a_1，d（或 q），n，a_n，S_n. 当已知条件中能确定其中任何三个，另外两个必定可求出. 一般常将等差数列、等比数列的计算问题转化为先求首项 a_1 和公差 d（或公比 q）这两个量. 计算时，要灵活运用数列的有关性质，以简化计算；恰当地设未知数可使计算更为简捷和准确.

类型(一)　求等差数列、等比数列的前 n 项和。

例 16　等差数列$\{a_n\}$中$\dfrac{a_{2n}}{a_n}=\dfrac{4n-1}{2n-1}$，则$\dfrac{S_{2n}}{S_n}=$____.

解　由通项公式得到

$$\frac{a_1+(2n-1)d}{a_1+(n-1)d}=\frac{a_{2n}}{a_n}=\frac{4n-1}{2n-1}.$$

设 $x=a_1/d$，则

$$(2n-1)[x+(2n-1)]=(4n-1)[x+(n-1)],$$

即
$$2nx=(2n-1)^2-(4n-1)(n-1)=n,$$

故 $x=1/2$. 利用等差级数求和式(1.6.6)得到

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{2na_1+2n(2n-1)d/2}{na_1+n(n-1)d/2}=\frac{4x+(2n-1)\times 2}{2x+(n-1)}=2\times\frac{2x+2n-1}{2x+n-1}$$

$$=2\,\frac{2\times 1(1/2)+2n-1}{2\times(1/2)+n-1}=2\times\frac{2n}{n}=4.$$

例 17 一等差数列第 6 项等于 5，第 11 项等于 30，前 25 项和 S_{25} 的值是

(A) 860. (B) 1000. (C) 1500. (D) 1800.

(E) 以上结论都不正确.

解法 1 利用 $S_{25}=25(a_1+a_{25})/2$ 求之. 为此先求出 a_1 及 a_{25} 的值，于是需先求出公差 d. 由式(1.6.3)得到

$$d=\frac{a_{11}-a_6}{11-6}=\frac{30-5}{5}=5.$$

因而
$$5=a_6=a_1+5d=a_1+25,$$

故 $a_1=-20$. 于是

$$a_{25}=a_1+24d=-20+24\times 5=100,$$

$$S_{25}=25(a_1+a_{25})/2=(25\times 80)/2=1000.$$ 仅(B)入选.

解法 2
$$d=\frac{a_{11}-a_6}{11-6}=\frac{30-5}{5}=5,$$

$$a_{13}=a_{11}+2d=30+2\times 5=40.$$

因 $n=25$ 为奇数，由求和公式(1.6.5)即得

$$S_{25}=n\left(\frac{a_1+a_{25}}{2}\right)=n\cdot a_{(1+25)/2}=n\cdot a_{13}=25a_{13}=25\times 40=1000.$$

解法 3 由等差数列之性质可知，距第 13 项 a_{13} 等远的两项之和都相等，且都等于 $2a_{13}$，因而有

$$a_1+a_{25}=a_2+a_{24}=a_3+a_{23}=\cdots=a_{12}+a_{14}=2a_{13},$$

故
$$S_{25}=a_1+a_2+\cdots+a_{25}=12\times 2a_{13}+a_{13}=25a_{13}$$

$$=25\times 40=1000.$$ 仅(B)入选.

解法 4 由式(1.6.2)知，等差数列的通项 $a_n=kn+b$ 为 n 的一次函数，

由题意有

$$\begin{cases} a_6 = 5 = 6k + b, \\ a_{11} = 30 = 11k + b。 \end{cases}$$

解得 $k=5, b=-25$. 因而 $a_n = 5n - 25$, 则

$$a_1 = 5 - 25 = -20, \quad a_{25} = 5 \times 25 - 25 = 100,$$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \times 25}{2} = \frac{80}{2} \times 25 = 1000.$$ 仅(B)入选.

例 18 在等比数列$\{a_n\}$中 $a_1 = -1$, 前 n 项和为 S_n, 若 $S_{10}/S_5 = 31/32$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 等于

(A) 2/3. (B) $-2/3$. (C) 2. (D) -2.

(E) 以上结论都不正确.

解法 1 利用命题 1.6.14 即式(1.6.16)得到

$$S_{10} = S_5 + q^5 S_5 = S_5(1 + q^5), \quad S_{10}/S_5 = 1 + q^5 = 31/32.$$

因而 $q^5 = 31/32 - 1 = -1/32 = -1/2^5$, 即 $q = -1/2$.

再由式(1.6.9)得到 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{-1}{1+1/2} = -\dfrac{2}{3}$. 仅(B)入选.

解法 2 利用式(1.6.8)得到

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{a_1(1-q^{10})}{a_1(1-q^5)} = \frac{a_1[1-(q^5)^2]}{a_1(1-q^5)} = 1 + q^5 = \frac{31}{32}, \quad q^5 = \frac{1}{2^5},$$

故 $q = -1/2$. 下同解法 1(略).

解法 3 $S_{10} = S_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$

$$= S_5 + a_1 q^5 + a_2 q^5 + a_3 q^5 + a_4 q^5 + a_5 q^5$$

$$= S_5 + q^5(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = S_5 + q^5 S_5。$$

下同解法 1(略).

例 19[1998 年 Ⅱ 7] 若在等差数列中前 5 项的和 $S_5 = 15$, 前 15 项的和 $S_{15} = 120$, 则前 10 项的和 $S_{10} =$

(A) 40. (B) 45. (C) 50. (D) 55. (E) 60.

解法 1 利用定理 1.6.2 求之. 设等差级数$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n = An^2 + Bn (A \neq 0)$, 由题意有

$$\begin{cases} S_5 = 15 = 5^2 A + Bn = 25A + 5B, \\ S_{15} = 120 = 15^2 A + 15B = 225A + 15B, \end{cases}$$

解得 $A = B = 1/2$. 因而 $S_n = n^2/2 + n/2$, 于是当 $n = 10$ 时有

$$S_{10}=10^2/2+10/2=50+5=55.$$ 仅(D)入选.

解法 2 利用命题 1.6.7 求之. 由该命题知 $S_5, S_{10}-S_5, S_{15}-S_{10}, \cdots$ 仍为等差数列,且有

$$2(S_{10}-S_5)=S_5+(S_{15}-S_{10}),$$

则 $$3S_{10}=3S_5+S_{15}=3\times 15+120=165,$$ 即 $$S_{10}=55.$$

解法 3 因 5,15 均为奇数,由式(1.6.5)得到 $S_5=5a_3, S_{15}=15a_8$,故

$$a_3=S_5/5=3=a_1+2d, \quad ①$$

$$a_8=120/15=8=a_1+7d。 \quad ②$$

由式①、式②得到 $a_1=d=1$,故

$$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_1+a_1+9d)}{2}=55.$$ 仅(D)入选.

解法 4 由解法 3 知 $d=1$,则

$$\begin{aligned}S_{15}&=S_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+\cdots+a_{15}\\&=S_5+(a_1+5d)+(a_2+5d)+\cdots+(a_{10}+5d)\\&=S_5+(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+10\times 5d\\&=S_5+S_{10}+50(\text{因 } d=1),\end{aligned}$$

故 $$S_{10}=S_{15}-S_5-50=120-15-50=55.$$

解法 5 由命题 1.6.13 即式(1.6.14)有

$$S_{n+m}=S_n+S_m+mnd.$$

由本例解法 3 知 $d=1$. 又 $n=5, m=10$,则 $n+m=15$,

$$S_{15}=S_5+S_{10}+5\times 10\times d$$ 即 $$120=15+S_{10}+50,$$

故 $S_{10}=55$. 仅(D)入选.

解法 6 由定理 1.6.2 知 $S_n=An^2+Bn(A\neq 0)$,则 $\frac{S_n}{n}=An+B$,此为关于 n 的一次函数,其图形为一直线,直线上点的坐标为 $\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$. 由题设知,点 $C\left(5,\frac{15}{5}\right), D\left(15,\frac{120}{15}\right), E\left(10,\frac{S_{10}}{10}\right)$ 均在此直线上,故 $k_{CD}=k_{CE}$ (CD 线段与 CE 线段斜率相等),故有

$$\left(\frac{120}{15}-\frac{15}{5}\right)\Big/(15-5)=\left(\frac{S_{10}}{10}-\frac{15}{5}\right)\Big/(10-5),$$ 即 $$\frac{5}{10}=\frac{S_{10}-30}{50},$$

亦即 $25=S_{10}-30$,所以 $S_{10}=55$.

例 20 设有等比数列,它的前 n 项的和为 48,前 $2n$ 项的和为 60,试求它

的前 $3n$ 项的和.

解法 1 因 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项的和，由命题 1.6.8 知 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$，仍为等比数列. 因而

$$(S_{2n}-S_n)^2=S_n(S_{3n}-S_{2n}), \quad \text{即} \quad (60-48)^2=48(S_{3n}-60).$$

解得 $$S_{3n}=144/48+60=63.$$

解法 2 设首项为 a，公比为 q. 若 $q=1$ 则 $na=48, 2na=60$，此两式矛盾，因而 $q=1$ 不合理，故 $q\neq 1$。依题意有

$$\frac{a(1-q^n)}{1-q}=48, \qquad ①$$

$$\frac{a(1-q^{2n})}{1-q}=60. \qquad ②$$

由式②有$\frac{a(1-q^n)(1+q^n)}{1-q}=60$. 将式①代入 $48(1+q^n)=60$，故 $q^n=1/4$. 因此前 $3n$ 项的和为

$$\frac{a(1-q^{3n})}{1-q}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}(1+q^n+q^{2n})=48\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=63.$$

例 21（条件充分性判断） 数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n(n+2)$.

(1) $\{a_n\}$是等差数列；

(2) $\{a_n\}$的前 $2n-1$ 项和 $S_{2n-1}=(2n-1)(2n+1)$.

解 由定理 1.6.2 知 $S_n=n(n+2)$为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且该等差数列的公差为 2，首项为 3. 条件(1)、条件(2)都无法说明这些条件成立，所以条件(1)、条件(2)都不充分。但将其联合起来后，由条件(1)知$\{a_n\}$为等差数列，由条件(2)可证明该等差数列首项 $a_1=3$，公差 $d=2$.

事实上，$n=1$ 时由条件(2)得到 $S_1=a_1=3$.

又 $a_1+a_2+a_3=S_3$ 即 $3a_1+d+2d=3a_1+3d=3\times 5=15$，故 $d=5-a_1=5-3=2$. 这就说明了条件(1)、条件(2)联合起来$\{a_n\}$确是首项为 3、公差为 2 的等差数列，因而 $S_n=n^2+2n=n(n+2)$.

或由 $a_n=a_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$ 也得到

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n(n+2).$$ 仅 C 入选.

例 22 等差数列$\{a_n\}$有 n 项，n 为奇数，则其奇数项之和与偶数项之和的比为

(A) $\frac{n-1}{2}$. (B) $\frac{2n+1}{n}$. (C) $\frac{2n+1}{2n}$. (D) $\frac{n+1}{n-1}$.

(E) 以上结论都不正确.

解 设等差数列$\{a_n\}$公差为d,因n为奇数,设$n=2m-1$ ($m\in\mathbf{N}$),故在$\{a_n\}$中有m项奇数项,$m-1$项偶数项,则由定理1.6.5(4)知,奇数项$\{a_n^{(1)}\}$也为一等差数列$a_1^{(1)}=a_1$,$d_1=2d$,其和为

$$S_1=\frac{m(a_1^{(1)}+a_{2m-1}^{(1)})}{2}=\frac{m(a_1+a_n)}{2}=\frac{m[a_1+a_1+(m-1)2d]}{2}$$
$$=m[a_1+(m-1)d].$$

偶数项也组成一等差数列$\{a_n^{(2)}\}$(见定理1.6.5(4),$a_1^{(2)}=a_2$,$d_2=2d$,$a_n^{(2)}=a_{2m-2}=a_{2(m-1)}$.因而共有$m-1$项,其和为

$$S_2=\frac{(a_1^{(2)}+a_{2m-2}^{(2)})(m-1)}{2}=\frac{(m-1)[a_2+a_2+(m-2)\times 2d]}{2}$$
$$=(m-1)[a_2+(m-2)d]=(m-1)[a_1+d+(m-2)d]$$
$$=(m-1)[a_1+(m-1)d],$$

故
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{m[a_1+(m-1)d]}{(m-1)[a_1+(m-1)d]}=\frac{m}{m-1}=\frac{(n+1)/2}{(n+1)/2-1}$$
$$=\frac{n+1}{n-1}.$$ 仅(D)入选.

类型(二) 计算等差数列或等比数列若干项的代数式的值.

除用到前述有关公式、命题、定理外,还用到下述命题。

命题1.6.13 设等差数列$\{a_n\}$的前$m+n$项的和为S_{m+n},前m项、前n项的和分别为S_m,S_n,d为公差,则

$$S_{m+n}=S_m+S_n+mnd, \tag{1.6.14}$$

$$nS_m=mS_n+mn(m-n)d/2。 \tag{1.6.15}$$

命题1.6.14 若$\{a_n\}$是等比数列,其公比为q ($q\neq 1$),S_n为其前n项和,则

$$S_{m+n}=S_n+q^nS_m=S_m+q^mS_n。 \tag{1.6.16}$$

例23[2001年Ⅱ12] 等差数列$\{a_n\}$中$a_5<0$,$a_6>0$,且$a_6>|a_5|$,S_n是前n项之和,则

(A) S_1,S_2,S_3均小于零,而S_4,S_5,…均大于零.

(B) S_1,S_2,…,S_5均小于零,而S_6,S_7,…均大于零.

(C) S_1,S_2,…,S_9均小于零,而S_{10},S_{11},…均大于零.

(D) S_1,S_2,…,S_{10}均小于零,而S_{11},S_{12},…均大于零.

解法1 利用命题1.6.2及命题1.6.13判别之.

先由 $a_5<0, a_6>0, a_6>|a_5|$ 得到

$$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9}{2}\times 2a_5<0,$$

$$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_5+a_6)}{2}>0,\quad d=\frac{a_6-a_5}{6-5}>0\ (\text{见式}(1.6.3)),$$

设等差数列$\{a_n\}$的前 m, n 项的和分别为 S_m, S_n，公差为 d，则由命题 1.6.13 有 $mS_n=nS_m+mn(n-m)d/2$.

因而
$$10S_{11}=11S_{10}+11\times 10(11-10)d/2>0,$$
$$10S_{12}=12S_{11}+12\times 11(12-11)d/2>0,$$
$$\cdots$$

因而对任意 $k>10$ 的正整数 k 总有

$$10S_k=kS_{10}+10\times k(k-10)d/2>0\quad (k=11,12,\cdots).$$ 仅(C)入选.

解法 2 先将等差数列$\{a_n\}$中的相关元素 a_5, a_6 及 S_n 均化为用其首项 a_1 和公差 d 表述：

$$\left.\begin{aligned}&a_5=a_1+4d<0,\\ &a_6=a_5+d=a_1+4d+d=a_1+5d>0,\\ &a_6=a_1+5d>|a_5|=-a_1-4d,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a_1<-4d,\\ d>-a_5>0,\\ a_1>(-9/2)d,\end{cases}\quad\Rightarrow -\frac{9d}{2}<a_1<-4d.$$

由
$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

得到
$$-\frac{9}{2}nd+\frac{n(n-1)}{2}d<S_n<-4nd+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

即
$$\frac{n(n-10)}{2}d<S_n<\frac{n(n-9)}{2}d。$$

因而当 $n\leqslant 9$ 时，$S_n<0$；当 $n\geqslant 10$ 时，$S_n>0$. 仅(C)入选.

例 24[2000 年Ⅱ7] 已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，但第 3、第 4、第 7 项构成等比数列，则$\frac{a_2+a_6}{a_3+a_7}=$

(A) 3/5. (B) 2/3. (C) 3/4. (D) 4/5.

解法 1 因$\{a_n\}$为等差数列，且其公差 $d\neq 0$，由 $a_n=a_1+(n-1)d$，得到

$$a_3=a_1+2d,\quad a_4=a_1+3d,\quad a_7=a_1+6d,$$

由 $a_4^2=a_3a_7$ 得到$(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+6d)$，即

$$3d^2+2da_1=d(3d+2a_1)=0,$$

因 $d\neq 0$，故 $a_1=-3d/2$. 则

$\frac{a_2+a_6}{a_3+a_7}=\frac{a_1+d+a_1+5d}{a_1+2d+a_1+6d}=\frac{2a_1+6d}{2a_1+8d}=\frac{-3d+6d}{-3d+8d}=\frac{3}{5}$. 仅(A)入选.

解法 2　利用等差数列性质

$$a_2+a_6=2a_4,\quad a_3+a_7=2a_5,$$

则
$$\frac{a_2+a_6}{a_3+a_7}=\frac{2a_4}{2a_5}=\frac{a_4}{a_5}=\frac{a_4}{a_4+d}.$$

又已知 a_3,a_4,a_7 成等比数列,故

$$a_4^2=a_3a_7=(a_4-d)(a_4+3d)=a_4^2+2a_4d-3d^2,$$

即 $3d^2=2a_4d$. 因 $d\neq0$,故 $d=2a_4/3$,于是

$$\frac{a_2+a_6}{a_3+a_7}=\frac{a_4}{a_4+d}=\frac{a_4}{a_4+(2/3)a_4}=\frac{3}{5}.$$ 仅(A)入选.

例 25(条件充分性判断)　在等比数列$\{a_n\}$中 a_3+a_7 的值能确定

(1) $a_2a_3a_4+a_6a_7a_8+3a_5^2(a_3+a_7)=-8$;　　(2) $a_4+a_6=6$.

解　当条件(1)成立时,利用等比数列的性质得到

$$a_3^2+a_7^3+3a_3a_7(a_3+a_7)=(a_3+a_7)^3=-8,$$

故 $a_3+a_7=-2$. 条件(1)充分. 当条件(2)成立时,由于无法确定 a_4 与 a_6 的值,从而无法确定 a_3+a_7 的值. 条件(2)不充分。仅 A 入选.

例 26　在等比数列$\{a_n\}$中 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2$,$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{30}=12$,则 $a_{31}+a_{31}+\cdots+a_{60}$的值等于

(A) 100.　　(B) 101.　　(C) 110.　　(D) 112.　　(E) 115.

解　由所给的两个等式可知数列$\{a_n\}$的公比 $q\neq1$,则

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=a_1+qa_1+q^2a_1+\cdots+q^9a_1=a_1(1+q+\cdots+q^9)$$
$$=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=2,\qquad①$$

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{30}=S_{30}-S_{10}=\frac{a_1(1-q^{30})}{1-q}-2=12,\qquad②$$

①÷②得$\frac{1-q^{10}}{1-q^{30}}=\frac{1-q^{10}}{1-(q^{10})^3}=\frac{1}{7}$. 因而 $q^{10}=2$. 代入式①得$\frac{a_1}{1-q}=-2$,故

$$a_{31}+a_{31}+\cdots+a_{60}=S_{60}-S_{30}=\frac{a_1(1-q^{60})}{1-q}-14=\left(\frac{a_1}{1-q}\right)[1-(q^{10})^6]-14$$
$$=(-2)[1-2^6]-14=112.$$

注意　利用等比数列($q\neq1$)求和公式建立方程组时,有时 q 的指数较高,一般采用两式相除的方法求解方程,有时还需把一个代数式$\left(\text{如}\frac{a_1}{1-q}\right)$看

成一个整体运算，这样运算简捷、准确.

例 27[1998 年 Ⅱ 7]（条件充分性判断） 数列$\{a_n\}$的前 k 项和 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 与随后 k 项和 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}$ 之比与 k 无关.

(1) $a_n=2n-1$ $(n=1,2,\cdots)$； (2) $a_n=2n$ $(n=1,2,\cdots)$.

解 条件(1)成立时，由命题 1.6.1 知，以 $a_n=2n-1$ 为通项的数列$\{a_n\}$为等差数列，其公差 $d=2$，首项为 $2-1=1$. 再由等差数列的和的计算公式(1.6.4)知

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=\frac{(a_1+a_k)k}{2}=\frac{(1+2k-1)k}{2}=k^2,$$

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}=\frac{k(a_{k+1}+a_{2k})}{2}=\frac{k[2(k+1)-1+4k-1]}{2}=3k^2,$$

则$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}=\dfrac{k^2}{3k^2}=\dfrac{1}{3}$为常数，与 k 无关。条件(1)充分.

当条件(2)成立时，由命题 1.6.1 知，以 $a_n=2n$ 为通项的数列$\{a_n\}$仍为等差数列，且其公差为 2，首项为 $a_1=2$. 由其和的计算公式(1.6.4)得到

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(2+2k)}{2}=k(k+1),$$

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}=\frac{k(a_{k+1}+a_{2k})}{2}=\frac{k[2(k+1)+2\times 2k]}{2}=k(3k+1),$$

则$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}=\dfrac{k+1}{3k+1}$与 k 有关。条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 28 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是两个等差数列，$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n'. 若$\dfrac{S_n}{S_n'}=\dfrac{3n-2}{2n+7}$，则 $a_8:b_8$ 的比值为

(A) 43/37. (B) 2. (C) 37/43. (D) 17/28. (E) 28/17.

解法 1
$$\frac{a_8}{b_8}=\frac{a_1+7d_1}{b_1+7d_2}=\frac{2a_1+14d_1}{2b_1+14d_2}=\frac{a_1+(a_1+14d_1)}{b_1+(b_1+14d_2)}$$
$$=\frac{a_1+a_{15}}{b_1+b_{15}}=\frac{15(a_1+a_{15})/2}{15(b_1+b_{15})/2}=\frac{S_{15}}{S_{15}'}=\frac{3\times 15-2}{2\times 15+7}$$
$$=\frac{43}{37}.$$ 仅(A)入选.

解法 2
$$\frac{S_{15}}{S_{15}'}=\frac{15(a_1+a_{15})/2}{15(b_1+b_{15})/2}=\frac{a_1+a_{15}}{b_1+b_{15}}=\frac{2a_8}{2b_8}=\frac{a_8}{b_8},$$

即
$$\frac{a_8}{b_8}=\frac{S_{15}}{S_{15}'}=\frac{3\times 15-2}{2\times 15+7}=\frac{43}{37}.$$

例 29(条件充分性判断)　$\{a_n\}$为等差数列,$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=m$的值可知。

(1) 数列$\{a_n\}$的公差为 1;　　(2) 前 99 项之和为 $S_{99}=98$.

解　条件(1)只知公差为 1,无其他条件,不能确定$\{a_n\}$中任何一项的值,因而无法求得 m. 条件(1)不充分。由条件(2),利用等差数列之性质距a_{50}项等远的项的和均相等得到 $a_1+a_{99}=a_2+a_{98}=\cdots=a_{49}+a_{51}$,故 $a_1+a_{99}=98\div 49=2$,故中值 $M=(a_1+a_{99})/2=1$.

注意到 a_{51}是 $a_3,a_6,a_9,\cdots,a_{48},a_{51},a_{54},a_{57},\cdots,a_{99}$的中间项,由等差数列的性质:距 a_{51}前后等远的两项之和其值相等且都等于 $2a_{51}$,有

$$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=2a_{51}\times 16=32a_{51}.$$

如果能将 a_{51}求出,则 m 即可求出,仅有条件(2)还求不出 a_{51},只能求出

$$2a_{50}=a_1+a_{99}=2 \quad \text{即} \quad a_{50}=1.$$

如能加上条件(1)知道$\{a_n\}$的公差为 1,则 $a_{51}=1+1=2$. 于是由前面分析即得

$$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=16\times 2a_{51}=64.$$ 仅 C 入选.

例 30(条件充分性判断)　两个等差数列首项都是 x,末项均为 9,则第一个数列中第 3 项与第 2 项之差和第二个数列第 5 项与第 3 项之差的比值为$\dfrac{n+1}{2(m+1)}$.

(1) 第 1 个数列是在 x 与 y 之间插入 m 个数;

(2) 第 2 个数列是在 x 与 y 之间插入 n 个数.

解　因题干中给出的比与两个数列的个别项直接有关,条件(1)与条件(2)单独都不充分,将它们联合起来看是否充分。为此设两个数列分别为

$x,a_1,a_2,\cdots,a_m,y$,公差为 d_1,则

$$y=x+(m+2-1)d_1。 \qquad ①$$

$x,b_1,b_2,\cdots,b_n,y$,公差为 d_2,则

$$y=x+(n+2-1)d_2. \qquad ②$$

下面考察$\dfrac{a_2-a_1}{b_1-b_2}=\dfrac{n+1}{2(m+1)}$是否成立,即$\dfrac{d_1}{2d_2}=\dfrac{m+1}{2(m+1)}$是否成立. 由式①、式②分别得到 $d_1=\dfrac{y-x}{m+2-1}=\dfrac{y-x}{m+1}$,$d_2=\dfrac{y-x}{n+1}$,故

$$\frac{d_1}{2d_2}=\frac{y-x}{2(m+1)}\Big/\frac{y-x}{(n+1)}=\frac{n+1}{2(m+1)}.$$

即条件(1)与条件(2)联合起来后是充分的. 仅 C 入选.

题型四　求非等差数列或非等比数列的前 n 项和

法一　用拆项分组法求之。

该法是指将某些数列拆成两个或两个以上的等差数列或(和)等比数列，然后再利用等差数列或(和)等比级数的前 n 项和的公式求之.

例 31　求和：(1) $\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{4}\right)+\left(3+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right)$；

(2) $1+(1+a)+(1+a+a^2)+\cdots+(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})$.

解　(1) **原式**$=(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1/2-1/2^{n+1}}{1-1/2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n^2+n+2}{2}-\frac{1}{2^n}.$$

(2) **原式**$=\dfrac{[1+(1+a)+(1+a+a^2)+\cdots+(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})](1-a)}{1-a}$

$$=[(1-a)+(1-a^2)+(1-a^3)+\cdots+(1-a^n)]/(1-a)$$

$$=[n-(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)]/(1-a)$$

$$=\frac{1}{1-a}\left[n-\left(\frac{a-a^{n+1}}{1-a}\right)\right]=\frac{1}{1-a}\left[n-a\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)\right]$$

$$=\frac{n}{1-a}-\frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}.$$

例 32　在一个数列$\{a_n\}$**中**，$a_1=1$，$a_2=3$，$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$ $(n=1,2,\cdots)$，**求** S_{100}.

解　将$\{a_n\}$**分成两个数列**$\{A_n\}$，$\{B_n\}$，**其中**

$$A_n=a_{2n-1}\ (n=1,2,\cdots),\quad B_n=a_{2n}\ (n=1,2,\cdots).$$

因而$\{A_n\}=\{a_{2n-1}\}$**是首项为** $a_1=1$、**公比为** 2 **的等比数列**，$\{B_n\}$**是首项为** $a_2=3$、**公比为** 2 **的等比数列**. $\{A_n\}$**的前** 50 **项的和为**

$$S_{A50}=\frac{a_1(1-2^{50})}{1-2}=2^{50}-1.$$

$\{B_n\}$**的前** 50 **项的和为**

$$S_{B50}=\frac{a_2(1-2^{50})}{1-2}=3(2^{50}-1),$$

所以　$S_{100}=S_{A50}+S_{B50}=(2^{50}-1)+3(2^{50}-1)=4(2^{50}-1)=2^{52}-2^2$.

法二　用错位相减法求之.

该法常用来求下述一类数列的前 n 项和：设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别是公差为 d 的等差数列与公比为 q 的等比数列，其积数列 $\{a_nb_n\}$（常称为混合数列）的前 n 项和便可采用此法。同时利用等比数列求和公式求之.

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公式为 q（$q\neq1$），记 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，利用

$$qb_k=b_{k+1}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

得到
$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n, \qquad ①$$

$$\begin{aligned}qS_n&=a_1(qb_1)+a_2(qb_2)+\cdots+a_{n-1}(qb_{n-1})+a_n(qb_n)\\&=a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_{n+1}.\end{aligned} \qquad ②$$

①－②，左端为 $(1-q)S_n$，而其右端错位相减得到

$$\begin{aligned}(1-q)S_n&=a_1b_1+(a_2-a_1)b_2+(a_3-a_2)b_3+\cdots+(a_n-a_{n-1})b_n-a_nb_{n+1}\\&=a_1b_1+db_2+dqb_2+dq^2b_2+\cdots+dq^{n-2}b_2-a_nb_{n+1}\\&=a_1b_1+db_2(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2})-a_nb_{n+1}\\&=a_1b_1-a_nb_{n+1}+\frac{db_2(1-q^{n-1})}{1-q},\end{aligned}$$

故
$$S_n=\frac{a_1b_1-a_nb_{n+1}}{1-q}+\frac{db_2(1-q^{n-1})}{1-q}.$$

例 33［1999 年Ⅰ21］ **求和**：$S_n=3+2\times3^2+3\times3^3+4\times3^4+\cdots+n\times3^n$.

解 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$，其中 a_k 为等差数列 $1,2,\cdots,k,\cdots,n$ 的一般项，b_k 为等比数列 $3,3^2,3^3,\cdots,3^n$ 的一般项，因而 S_n 为混合数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项的和.

在 $S_n=3+2\times3^2+3\times3^3+4\times3^4+\cdots+(n-1)3^{n-1}+n3^n$ ①

的两端乘以公比 $q=3$ 得到

$$3S_n=3^2+2\times3^3+3\times3^4+\cdots+(n-2)3^{n-1}+(n-1)3^n+n\times3^{n+1}, \qquad ②$$

①－②，将其右端错位相减得到

$$S_n-3S_n=-2S_n=3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{n-1}+3^n-n3^{n+1}.$$

上式最右端含一公比为 $q=3$ 的 n 项等比数列之和，利用其求和的公式得到

$$-2S_n=3(1+3+3^2+\cdots+3^{n-2}+3^{n-1})-n3^{n+1}=3\times\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^{n+1},$$

故 $S_n=\frac{3}{4}(1-3^n)+\frac{n}{2}3^{n+1}=\frac{3}{4}\left(1-3^n+\frac{2n}{3}\times3^{n+1}\right)=\frac{3}{4}[1+(2n-1)3^n]$.

法三　用列项法求之.

如果数列的通项公式 a_n 可表示为 $f(n+1)-f(n)$ 的形式，常可采取裂项求和法，这时其前 n 项和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]$ 通过前后项相消转化为

只求两项代数和的值，即

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]\\ &= f(2)-f(1)+f(3)-f(2)+f(4)-f(3)+\cdots+f(n-1)\\ &\quad -f(n-2)+f(n)-f(n-1)+f(n+1)-f(n)\\ &= f(n+1)-f(1).\end{aligned}$$

这样极大地简化了计算. 特别当数列的通项表示式为 n 的分式形式而分母又能分解成其差为常数的两项乘积时，常可应用此法求其前 n 项和. 例如求和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k},\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$$

时可将其一般项分解为

$$\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

$$\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$$

通过前后项相消，即可求得前 n 项和 S_n.

例 34[2000 年 Ⅱ 17] $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{99\times100}=$____.

解 用裂项法求之，所求和为 $\sum\limits_{n=1}^{99}\dfrac{1}{n(n+1)}$. 注意到 $(n+1)-n=1$ 为常数，可将一般项分项为 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$，故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\\ &=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}=0.99.\end{aligned}$$

例 35 数列 $\left\{\dfrac{1}{4n^2-1}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=$____.

解 $\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，其分母为其差 $2n+1-(2n-1)=2$ 是常数的两因式 $(2n-1)$ 与 $(2n+1)$ 的乘积. 可用裂项法求其前 n 项和. 事实上由

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

法四　用公式法求之.

公式法是指直接应用等差数列或等比数列的前 n 项和的公式,或者应用自然数一次幂的和、平方和、立方和的公式

$$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2, \tag{1.6.17}$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6, \tag{1.6.18}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=n^2(n+1)^2/4 \tag{1.6.19}$$

及无穷递减等比级数求和公式(式(1.6.9))的方法.

一般地,如果已知数列的通项公式是不超过三次幂的 n 的多项式形式,其前 n 项和就可利用上述三个常用的求和公式求出.

例 36　已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_n=3n^2-2n+1$ $(n\in\mathbf{N})$,试求此数列前 n 项和 S_n 的表达式.

解　依题意有
$$a_1=3\times1^2-2\times1+1,$$
$$a_2=3\times2^2-2\times2+1,$$
$$a_3=3\times3^2-2\times3+1,$$
$$\cdots$$
$$a_n=3\times n^2-2\times n+1.$$

将以上这 n 个等式纵向相加,由式(1.6.17)、式(1.6.18)得到其和为
$$S_n=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-2(1+2+3+\cdots+m)+n\times1$$
$$=3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n(2n^2+n+1)/2.$$

题型五　求解与等差数列或(和)等比数列有关的综合应用题

等差数列、等比数列涉及的知识面较广,考生除了要熟练掌握有关数列的概念和公式外,还要善于根据题设的特征挖掘隐含条件,联想有关数学内容和方法,求解有关综合应用题.

类型(一)　已知数列元素为某方程的系数或其根,讨论该数列的性质.常根据方程根(解)的情况,利用判别式及韦达定理等讨论之.

例 37[1998 年Ⅰ21]　**已知 a,b,c 三数既成等差数列,又成等比数列,设**

α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，且 $\alpha>\beta$，求 $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3$.

解法 1 由题设有

$$2b=a+c, \tag{1}$$

$$b^2=ac. \tag{2}$$

将式①平方得

$$4b^2=(a+c)^2=a^2+c^2+2ac, \tag{3}$$

将式②代入式③有 $4ac=a^2+c^2+2ac$，即 $(a-c)^2=0$，故 $a=c$. 由式①有 $2b=2a$，即 $a=b=c$.

由韦达定理得 $\alpha+\beta=-b/a=-a/a=-1$，$\alpha\beta=-c/a=-a/a=-1$，则

$$\begin{aligned}\alpha^3\beta-\alpha\beta^3&=\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\\&=\alpha\beta(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2}\ (\text{因 }\alpha>\beta)=\alpha\beta(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=(-1)(-1)\sqrt{(-1)^2-4(-1)}=\sqrt{5}.\end{aligned} \tag{4}$$

解法 2 由等差数列与等比数列之关系即命题 1.6.11 知 a,b,c 为常数数列，即 $a=b=c$，则

$$ax^2+bx-c=ax^2+ax-a=0,$$

即

$$x^2+x-1=0 \quad (\text{因 } a,b,c \text{ 成等比数列},a\neq0).$$

又因 α,β 为上方程的两根，故 $\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-1$（根据韦达定理）. 将其代入解法 1 中的式④即得 $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=\sqrt{5}$.

例 38[1999 年Ⅰ4] 若方程 $(a^2+c^2)x^2-2c(a+b)x+b^2+c^2=0$ 有实根，则

(A) a,b,c 成等比数列。　(B) a,c,b 成等比数列。

(C) b,a,c 成等比数列。　(D) a,b,c 成等差数列。

(E) b,a,c 成等差数列。

解 因方程有实根，故其判别式 $\Delta\geqslant0$. 但

$$\Delta=4c^2(a+b)^2-4(a^2+c^2)(b^2+c^2)=4(2abc^2-a^2b^2-c^4)=-4(ab-c^2)^2\leqslant0,$$

故 $\Delta=0$. 因而 $ab-c^2=0$，故 $c^2=ab$. 又因 a^2+c^2 为一元二次方程的系数，故 $a^2+c^2\neq0$，即 $a\neq0,c\neq0$，于是 $b\neq0$. 这样 a,b,c 为非零实数，又 $c^2=ab$，故 a,c,b（或 b,c,a）成等比数列. 仅(B)入选.

例 39 若实数 a_1,a_2,a_3,a_4 都不为零，且

$$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0, \tag{1}$$

则 a_1,a_2,a_3 成等比数列，且 a_4 是其公比.

解 视 a_4 为方程①的实根，则其判别式

$$\Delta=b^2-4ac=4a_2^2(a_1+a_3)^2-4(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)=-4(a_2^2-a_1a_3)^2\geqslant0.$$

显然上述代数式只有 $4(a_2^2-a_1a_3)=0$ 时才成立，因而 $a_2^2-a_1a_3=0$，即 $a_2^2=a_1a_3$，由命题 1.6.5 知 a_1,a_2,a_3 成等比数列.

由于判别式 $\Delta=0$，由求根公式得到

$$a_4=-\frac{b}{2a}=\frac{2a_2(a_1+a_3)}{2(a_1^2+a_2^2)}=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1(a_1+a_3)}=\frac{a_2}{a_1},$$

故 a_4 为该等比数列的公比.

例 40 $\{a_n\}$是等比数列，$a_4a_7=-512$，$a_3+a_8=124$，且公比 q 为整数，则 a_{10} 等于

(A) -512.　　(B) 512.　　(C) 4096.　　(D) -4096.

(E) 以上结论都不正确.

解 $a_4a_7=a_3qa_7=a_3a_8=-512$，又 $a_3+a_8=124$，故 a_3,a_8 是关于 x 的二次方程 $x^2-124x-512=0$ 的两根.

又因 $q\in\mathbf{Z}$(整数集合)，故 $|a_3|<|a_8|$. 由

$$x^2-124x-512=(x-128)(x+4)=0$$

得到　　$$x_1=-4=a_3,\quad x_2=128=a_8.$$

又由 $a_8=a_3q^5$，即 $128=(-4)q^5$ 得到 $q=-2$. 因而

$$a_{10}=a_8q^2=128\times4=512.$$ 仅(B)入选.

类型(二)　求满足一定条件的等差数列或等比数列的前 n 项和的最大(小)值.

由定理 1.6.2 知等差数列的前 n 项和 $S_n=An^2+Bn$ $(A\neq0)$是关于 n 的二次函数，其图像是抛物线上横坐标为自然数的一群孤立点，可借助关于 n 的二次函数的抛物线图像求得该等差数列前 n 项和 S_n 的最大(小)值.

也可用配方法求得等差数列前 n 项和 S_n 的最大(小)值. 为此先利用题设(例如 $a_1>0$)证明 $S_n=An^2+Bn$ $(A\neq0)$中系数 $A<0$，然后再配方，即有

$$S_n=A\left(n-\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2}{4A},$$

由于 $A<0$，当 $n=B/(2A)$时，S_n 取最大值.

值得注意的是，首项为正的递减的等差数列，其前面所有非负项的和即为 S_n 的最大值.

常用式(1.6.8)求等比数列前 n 项和的最大(小)值。

各项为正，且公比 $q>1$ 的等比数列，其最后一项必为最大项，其前 n 项和的最大值易求得。

例 41　等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1>0$，前n项和为S_n. 若$S_l=S_k$（$l\neq k$），问当n取何值时，S_n最大？

解法 1　应用数列通项的表示式将数列问题转化为二次函数问题求解。为此不妨令

$$f(n)=S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{2}dn^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n.$$

此函数为自变量n的二次函数. 下面说明$d<0$，从而其图像是开口向下的抛物线上横坐标自然数的一群孤立点.

由$f(l)=f(k)$得到

$$\frac{1}{2}dl^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)l=\frac{1}{2}dk^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)k,$$

即

$$(l-k)\left[\frac{1}{2}d(l+k)+a_1-\frac{d}{2}\right]=0.$$

因$l\neq k$，故

$$\frac{1}{2}d(l+k)+a_1-\frac{d}{2}=0 \quad \text{即} \quad \frac{1}{2}d(l+k-1)+a_1=0. \qquad ①$$

又因$a_1>0$，而$l,k\in\mathbf{N}$（自然数集），$l+k>1$，则$l+k-1>0$. 由式①知，必有$d=-2a_1/(l+k-1)<0$. 因而二次函数$f(n)$的图像必为开口向下的抛物线上横坐标为自然数的一群孤立点. 而$f(l)=f(k)$，故当$x=(l+k)/2$时$f(x)$取最大值，但$f(n)$中$n\in\mathbf{N}$，所以当$l+k$为偶数时，$n=(l+k)/2$时，S_n最大.

当$l+k$为奇数时，$n=(l+k\pm1)/2$时，S_n最大.

解法 2　用配方法求之. 由$S_l=S_k$（$l\neq k$）得到

$$la_1+\frac{l(l-1)}{2}d=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d,$$

不妨设$l>k$，则

$$(l-k)a_1=-\left[\frac{l(l-1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}\right]d.$$

因$l-k>0$，$a_1>0$，而$l(l-1)/2-k(k-1)/2>0$，故$d<0$.

又由定理 1.6.2 知，$S_n=An^2+Bn$（$A\neq0$），且$A+B=a$，$A=2d$，故$A<0$.

$$\begin{aligned}S_n&=An^2+Bn=A\left(n^2+\frac{B}{A}n\right)=A\left(n^2+2\times\frac{B}{2A}n+\frac{B}{4A^2}\right)-\frac{B}{4A}\\&=A\left(n+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2}{4A}\quad(A<0).\end{aligned}$$

又由 $S_l=S_k$ 得 $Al^2+bl=Ak^2+Bk$，即 $A(l^2-k^2)=-B(l-k)$，亦即 $A(l+k)=-B$，故 $-B/A=l+k$，因而

$$S_n=A\left(n-\frac{l+k}{2}\right)^2-\frac{B^2}{4A}\quad(A<0),$$

故当 $n=(l+k)/2$ 时，S_n 最大. 因 $n\in\mathbf{N}$，故

当 $l+k$ 为偶数时，$n=(l+k)/2$ 时，S_n 最大；

当 $l+k$ 为奇数时，$n=(l+k\pm1)/2$ 时，S_n 最大.

例 42 一个首项为正数的等差数列$\{a_n\}$的 $S_3=S_{11}$，则此数列的前____项和最大.

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9　　(E) 10

解法 1 由定理 1.6.2 知等差数列的前 n 项和 S_n 是关于 n 的二次函数，且常数项为零，即 $S_n=An^2+Bn$ $(A\neq0)$.

由题意知 $S_3=S_{11}$，由式(1.6.6)有

$$S_3=3a_1+\frac{3(3-1)}{2}d,\quad S_{11}=11a_1+\frac{11(11-1)}{2}d.$$

由 $S_3=S_{11}$ 得到 $8a_1=-52d$. 由题意知 $a_1>0$，故 $d<0$. 而 A 为半公差，即 $A=d/2<0$. 下用配方法求出 S_n 的最大值.

因 $S_3=S_{11}$，故 $A\times3^2=B\times3=A\times11^2+B\times11$，即 $14A+B=0$，故

$$-B/(2A)=7,\quad 即\quad B/(2A)=-7.$$

又

$$\begin{aligned}S_n&=An^2+Bn=A\left(n^2+\frac{B}{A}n\right)=A\left(n^2+2\times\frac{B}{2A}n\right)\\&=A\left[n^2+2\times\frac{B}{2A}n+\left(\frac{B}{2A}\right)^2\right]-\frac{B^2}{4A}\\&=A\left(n+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2}{4A}\quad(A<0),\end{aligned}$$

因 $A<0$，且已求出 $B/(2A)=-7$，故当 $n=7$ 时 S_n 有最大值. 仅(B)入选.

解法 2 由 $S_3=S_{11}$ 得到 $a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}=0$. 又因 $a_{11}+a_4=a_5+a_{10}=a_6+a_9=a_7+a_8$，故

$$4(a_7+a_8)=0\quad 即\quad a_7+a_8=0.$$

由于 $a_1>0$，$d<0$(见解法 1)，数列$\{a_n\}$是首项为正的递减的等差数列，它前面所有非负项和即为 S_n 的最大值.

由 $a_7+a_8=0$ 有 $a_7>0$，$a_8<0$. 因而前 7 项和最大. 仅(B)入选.

例 43(条件充分性判断) 一个各项均为正数的等比数列前 n 项之中数

值最大的项为 54，此数列的首项 a_1 与公比 q 的乘积为 6.

(1) 此数列的前 n 项之和 $S_n=80$；

(2) 此数列的前 $2n$ 项之和 $S_{2n}=6560$.

解 当条件(1)成立时，加上题设 $a_1q=6$ 只有两个条件，要求出 a_1，q 和 n 不可能，故条件(1)不充分. 因一个等差(等比)数列在 a_1，$q(d)$，n，a_n，S_n 中需已知三个，另外两个才能求出.

同理条件(2)也不充分。但条件(1)与条件(2)联合起来情况就不同了，这时共有三个条件，从而可求出三个元素，另外两个就可求出了. 事实上，由条件(1)与条件(2)得到

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=80, \qquad ①$$

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=6560。 \qquad ②$$

②÷①得 $1+q^n=82$，故 $q^n=81=3^4$，$n=4$，$q=3$. 将 $q^n=81$ 代入式①得 $a_1=2$. 此时满足 $a_1q=2\times3=6$，又因 $n=4$，即该数列只有四项，各项均为正，公比 $q=3>1$，因而其最后一项 $a_4=a_1q^3=2\times27=54$ 必最大. 于是条件(1)与条件(2)联合起来充分. 仅 C 入选.

例 44[2001 年Ⅰ9] 在等差数列$\{a_n\}$中 $a_3=2$，$a_{11}=6$；数列$\{b_n\}$是等比数列. 若 $b_2=a_3$，$b_3=1/a_2$，则满足 $b_n>1/a_{26}$ 的最大的 n 是

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

解 在等差数列$\{a_n\}$中因已知两项，则此数列即为已知数列，因由这两项可求出公差和首项. 因而可求出数列中任意项. 同理在等比数列$\{b_n\}$中已知两项也可视为已知数列. 下面分别求出其 a_1，d；b_1，q. 求解

$$a_1+2d=a_3=2, \quad a_1+(11-1)d=a_1+10d=a_{11}=6$$

得 $a_1=1$，$d=1/2$，故 $a_2=a_1+d=3/2$，$a_{26}=a_1+(26-1)d=27/2$.

再求等比级数的首项与公比. 由 $b_2=a_3=2$，$b_3=1/a_2=2/3$，得到

$$q=b_3/b_2=1/3,$$

则 $$b_2=b_1q^{2-1}=b_1\times(1/3), \quad 即 \quad 2=b_1\times(1/3),$$

所以 $b_1=6$. 于是 $b_n=b_1q^{n-1}=6\times(1/3)^{n-1}$. 由 $b_n>1/a_{26}$ 得到

$$6(1/3)^{n-1}>2\times(1/27)=2\times(1/3)^3, \quad 即 \quad (1/3)^{n-1}>(1/3)^4.$$

因 $1/3<1$，故满足上式的 n 应有 $n-1<4$，即 $n<5$. 于是满足上式的最大的 $n=4$. 仅(B)入选.

例 45 等比数列$\{a_n\}$中$a_1=2,q=3$,则使$S_n>1000$的最小自然数n为

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7. (E) 以上结论都不正确.

解 由式(1.6.8)知$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}>1000$,即$3^n>1001$,故$n$的最小值为7.仅(D)入选.

类型(三) 已知一数列的部分项为等差(或等比)数列,求该数列中的另一些项或确定该数列项中的待定常数

充分利用等差数列或等比数列之性质及题设条件求之.必要时,需建立联立方程组解之.

例 46 七个数排成一列,奇数项成等差数列,偶数项成等比数列,且奇数项的和与偶数项的积之差为42,首末两项与中间项的和为27,则中间项为

(A) -2. (B) 2. (C) -3. (D) 3. (E) 以上结论都不正确.

解 设七个数为$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$.由题设$a_1,a_3,a_5,a_7$成等差数列.设$a_1=a-3d,a_3=a-d,a_5=a+d,a_7=a+3d$,故$a_1+a_3+a_5+a_7=4a$.

又因a_2,a_4,a_6成等比数列,公比为q,则

$$a_2=a_4/q,\quad a_6=a_4q,$$

故
$$a_2a_4a_6=a_4^3.$$

由已知
$$4a-a_4^3=42, \tag{①}$$

又
$$a-3d+a_4+a+3d=27,$$

即
$$2a+a_4=27, \tag{②}$$

由式①与式②消去a,得

$$a_4^3+2a_4+12=0 \quad \text{即} \quad a_4^3+2^3+2a_4+4=0,$$

$$(a_4+2)(a_4^3-2a_4+2^2)+2(a_4+2)=(a_4+2)(a_4^2-2a_4+6)=0,$$

故$a_4=-2$,即中间项为-2.仅(A)入选。

注意 三个数或四个数成等差(等比)数列,常采用对称法:$a-d,a,a+d$(或$a/q,a,aq$);或$a-3d,a-d,a+d,a+3d$(或$a/q^3,a/q,aq,aq^3$).

例 47[2001年Ⅰ10] 若$2,2^x-1,2^x+3$成等比数列,则x等于

(A) $\log_2 5$. (B) $\log_2 6$. (C) $\log_2 7$. (D) $\log_2 8$.

解法 1 $2,2^x-1,2^x+3$为等比级数,则有

$$(2^x-1)^2=2\times(2^x+3) \quad \text{即} \quad (2^x)^2-4(2^x)-5=(2^x-5)(2^x+1)=0,$$

故$2^x=5$,即$x=\log_2 5$.仅(A)入选.

解法 2 将$x=\log_2 5$代入,得

$$2^x-1=2^{\log_2 5}-1=5-1=4,\quad 2^x+3=2^{\log_2 5}+3=5+3=8.$$

而 2,4,8 成等比级数,故 $x=\log_2 5$. 仅(A)入选.

解法 3 因 $2,2^x-1,2^x+3$ 成等比数列,由命题 1.6.9(1)知 $\log_2 2,\log_2(2^x-1),\log_2(2^x+3)$ 成等差数列,因而有

$$2\log_2(2^x-1)=\log_2 2+\log_2(2^x+3),\quad 即\quad \log_2(2^x-1)^2=\log_2(2^{x+1}+6),$$

故 $(2^x-1)^2=2^{x+1}+6$ 即 $(2^x)^2-4\times 2^x-5=(2^x-5)(2^x+1)=0.$

因而 $2^x=5$ 或 $2^x=-1$ (因 $2^x>0$,舍去).

于是由 $2^x=5$ 得到

$$x\log_2 2=\log_2 5,\quad 即\quad x=\log_2 5.$$ 仅(A)入选.

题型六 应用等差数列或等比数列求解实际应用题

这类应用题主要是与变化率(如增长率、浓度等)有关的应用题(可参阅 1.4 节题型九、题型十). 求解这类问题时首先要明确该问题中哪些量依什么顺序组成数列;这个数列是等差数列还是等比数列;在这个数列中已知什么;应该求的是什么;是求通项 a_n、求前 n 项和 S_n 还是求其中某一项.

例 48 铜片绕在盘上,空盘时,盘心直径 80 毫米,满盘直径 160 毫米. 已知铜片的厚度是 0.1 毫米. 求满盘时一盘铜片共长多少。

解 盘心半径为 40 毫米,满盘半径为 80 毫米,而铜片厚度为 0.1 毫米,故铜片一共绕的圈数 $n=(80-40)/0.1=400$.

每一圈看成一个圆,其半径组成一个公差为 0.1(毫米)的等差数列,因而每圈的长度也组成一个等差数列,其首项为 $a_1=2\pi(40+0.1)=80.2\pi$(毫米),公差为两圆圆周长之差,即 $d=80.2\pi-80\pi=0.2\pi$(毫米). 该等差数列共 400 项即 $n=400$,其和即为一盘铜片的长,由式(1.6.4)有

$$S_{400}=80.2\pi\times 400+\frac{400(400-1)}{2}\times 0.2\pi=48040\pi(\text{毫米})\approx 151(\text{米}).$$

即铜片总长约为 151 米.

例 49(条件充分性判断) 从盛满 20 升酒精的容器中倒出 1 升酒精,然后用纯净水加满至 20 升,再倒出 1 升稀释后的酒精,又用纯净水加满……照此方法继续几次之后,容器中只会有纯酒精约为 16.3 升.

(1) 连续进行了三次; (2) 连续进行了四次.

解 第一次倒出后,余纯酒精 19 升,加水后浓度为 $\frac{19}{20}$ 升,第二次倒出后,余纯酒精为 $19\times\frac{19}{20}$ 升,加水后浓度为 $\frac{19^2}{20^2}$. 第三次倒出后余纯酒精为 $19\times$

$\frac{19}{20}\times\frac{19}{20}=19\times\frac{19^2}{20^2}$升，加水后浓度为$\frac{19^3}{20^3}$. 第四次倒出后，余纯酒精 $19\times\frac{19^2}{20^2}\times\frac{19}{20}=19\ \frac{19^3}{20^3}=16.3$ 升.

当条件(1)成立时，三次倒出后余纯酒精 $19\times\frac{19^2}{20^2}=17.1$ 升，故条件(1)不充分，条件(2)充分. 仅 B 入选.

例 50 李先生打算存入银行一笔钱，希望 5 年后得到 5000 元. 如果 5 年内银行的年利率不变，均为 5%，按单利(不计复利)每年计息一次计算，李先生现在应该存入

(A) 3000 元. (B) 3500 元. (C) 3750 元.

(D) 4000 元. (E) 4166 元.

解 由于银行不计复利，仅计算单利，每年的本利和是一个等差数列 $\{a_n\}$ 的问题. 设应存入 x 元，则 $a_1=x$，公差 $d=x\cdot 5\%$，其通项为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

第二年得到本利和为 $a_2=a_1+d=x+x\times 5\%=x(1+5\%)$；

第三年得到本利和为 $a_3=a_1+2d=x+2\times x\times 5\%=x(1+2\times 5\%)$；

第四年得到本利和为 $a_4=a_1+3d=x+3\times x\times 5\%=x(1+3\times 5\%)$；

第五年得到本利和为 $a_5=a_1+4d=x+4\times x\times 5\%=x(1+4\times 5\%)$；

第六年得到本利和为

$$a_6=a_1+5d=x+5\times x\times 5\%=x(1+5\times 5\%)=5000. \qquad ①$$

求解式①，得到 $x=4000$(元)，即现时应存入银行 4000 元. 仅(D)入选.

习 题 1.6

(一) 问题求解

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3+2^n$，则该数列是

(A) 等差数列. (B) 既非等差数列，又非等比数列.

(C) 等比数列. (D) 既是等差数列，又是等比数列.

2. 设 $2^a=3$，$2^b=6$，$2^c=12$，则数列 a，b，c

(A) 是等差数列，但不是等比数列.

(B) 是等比数列，但不是等差数列.

(C) 既是等差数列,又是等比数列.

(D) 既不是等差数列,又不是等比数列.

3. [1997 年 Ⅰ 6] 一等差数列中 $a_1=2, a_4+a_6=-4$,该数列的公差是

(A) -2. (B) -1. (C) 1. (D) 2. (E) 3.

4. 等差数列$\{a_n\}$中 $a_1=1$,公差 $d\neq 0$,且 a_3, a_4, a_6 依次是某等比数列的前 3 项,则这个等比数列的第 4 项是

(A) -8. (B) -6. (C) 8. (D) 9. (E) 不能确定

5. 如果 A 是 a, b 的等差中项,G 是 a, b 的等比中项,$a, b, G\in \mathbf{R}^+$,则 ab 与 AG 之间的关系是

(A) $ab>AG$. (B) $ab\geqslant AG$. (C) $ab<AG$. (D) $ab\leqslant AG$.

6. 一个等比数列$\{a_n\}$,其前 4 项之和为前 2 项之和的 2 倍,则其公比为

(A) $1/2$ 或 $-1/2$. (B) 1. (C) 1 或 -1. (D) 2 或 -2.

7. 在等比数列$\{a_n\}$中如果 $a_1+a_2+a_3=18, a_2+a_3+a_4=-9, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 的值等于

(A) 8. (B) 16. (C) 32. (D) 48. (E) 50.

8. 已知$\{a_n\}$是等差数列,$a_1+a_4+a_7=39, a_2+a_5+a_8=33$,则 $a_3+a_6+a_9$ 等于

(A) 30. (B) 27. (C) 24. (D) 36. (E) 22.

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d\neq 0$,且 a_1, a_3, a_9 成等比数列,则 $(a_1+a_3+a_9)/(a_2+a_4+a_{10})$的值是

(A) 9/10. (B) 4. (C) -4. (D) 13/16. (D) 6/7.

10. 设$\{a_n\}$为等比数列,且 $a_4a_7=-512, a_3+a_8=124$,且 $q\in \mathbf{Z}$,则 $a_{10}=$

(A) 360. (B) 128. (C) 256. (D) 512. (E) 480.

11. 等差数列$\{a_n\}$的前 m 次和为 30,前 $2m$ 项和为 100,则其前 $3m$ 项和为

(A) 130. (B) 170. (C) 210. (D) 260. (E) 270.

12. 一等差数列的前 4 项和为 26,后 4 项和为 110,且所有项之和为 187,则项数 $n=$

(A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 11. (E) 12.

13. $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{8}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}=$

(A) $\dfrac{2n+3}{2^n}$. (B) $\dfrac{2n+5}{2^n}$. (C) $\dfrac{2n+8}{2^n}$. (D) $3-\dfrac{2n+3}{2^n}$. (E) $\dfrac{2n+15}{2^n}$.

14. 数列 $\left\{\frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=$

(A) $\frac{1}{2^n(n+1)}$. (B) $1-\frac{1}{2^n(n+1)}$. (C) $\frac{1}{2^n(n+1)}$.

(D) $\frac{2}{2^n(n+1)}$. (E) $\frac{3}{2^n(n+1)}$.

15. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 S_n' 满足关系式

$$\frac{S_n}{S_n'}=\frac{7n+1}{4n+27}\quad(n\in\mathbf{N}),$$

则 $\frac{a_{11}}{b_{11}}=$

(A) 1/4. (B) 2/4. (C) 4/3. (D) 1/5. (E) 2/5.

16. 等差数列 $\{a_n\}$ 中满足 $3a_3=7a_7$，且 $a_1>0$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 S_n 取最大值，则 $n=$

(A) 10. (B) 9. (C) 8. (D) 7. (E) 6.

17. [2002 年 Ⅰ 9] 设有两个数列 $\{\sqrt{2}-1,a\sqrt{3},\sqrt{2}+1\}$ 和 $\{\sqrt{2}-1,a\sqrt{6}/2,\sqrt{2}+1\}$，则使前者成为等差数列、后者成为等比数列的实数 a 的值有

(A) 0 个. (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 3 个.

18. [2000 年 Ⅰ 6] 若 $\alpha^2,1,\beta^2$ 成等比数列，而 $1/\alpha,1,1/\beta$ 成等差数列，则 $(\alpha+\beta)/(\alpha^2+\beta^2)=$

(A) $-1/2$ 或 1. (B) $-1/3$ 或 1. (C) 1/2 或 1.

(D) 1/3 或 1. (D) 1/2 或 1/3.

19. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2$，且对任意自然数 n，a_n 与 a_{n+1} 均是关于 x 的方程 $x^2-kx+(1/3)^n=0$ 的两根，则 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{15}$ 的值为

(A) $3-3^{-6}$. (B) $3-3^6$. (C) $3-3^7$. (D) $3-3^{-7}$. (E) $3-3^{-9}$.

20. 某人在 1998 年 1 月 1 日存入银行一年整存整取的金额为 a. 1999 年 1 月 1 日存款到期时，将本利一并取出，并全部再存入一年到期的定期存款. 若某人每年 1 月 1 日都照上述方法存款，且年利率 r 保持不变，他到 2002 年 1 月 1 日本利取出总数为

(A) $a(1+r)^4$. (B) $a(1+r)^5$. (C) $a(1+r)^6$. (D) $a(1+r)$.

21. 钻井的费用第一米为 500 元，以后每往下钻一米，费用增加 800 元. 若要钻一口 50 米深的井，总费用为

(A) 120 万元。 (B) 123 万元。 (C) 125 万元。

(D) 180 万元。　　(D) 190 万元。

22. 等差数列$\{a_n\}$中$a_1=1$,它的前 11 项的算术平均值是 16,去掉其中一项后的算术平均值是 14.8,那么去掉的是

(A) a_{11}.　　(B) a_{10}.　　(C) a_9.　　(D) a_8.　　(D) a_7.

(二) 条件充分性判断

1. 对任意自然数n,$f(n+1)=[2f(n)+1]/2$成立,则$f(101)$的值是 52.

(1) $f(51)=27$;　　(2) $f(1)=2$.

2. 可确定a,b,c成等比数列.

(1) a,b,c满足$b^2=ac$;　　(2) $b\neq 0$.

3. 要使等差数列$\{a_n\}$的第 10 项等于 12.

(1) 等差数列$\{a_n\}$中$a_3=5,a_9=8$;

(2) 等差数列$\{a_n\}$中$S_{20}=180$,且其中的偶数项和为 60.

4. 在数列$\{a_n\}$中$a_{50}=3/52$.

(1) 数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列,公差为$\dfrac{1}{3}$,且$a_1=1$;

(2) 数列$\{a_n\}$是等差数列,公差为$-1/49$,且$a_1=55/52$.

5. 设$\{a_n\}$为等差数列,其前 80 项之和S_{80}可求出.

(1) $a_3+a_7+a_{74}+a_{78}=100$;　　(2) $a_4+a_{11}+a_{69}+a_{76}=96$.

6. 在等比数列$\{a_n\}$中a_3+a_7的值可确定.

(1) $a_2a_3a_4+a_6a_7a_8+3a_5^2(a_3+a_7)=-8$;　　(2) $a_4+a_6=6$.

7. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列,且$a_3+a_4+a_5=14$,则可知其公比值.

(1) $a_4+a_5+a_6=7$;　　(2) $a_4+a_5+a_6=28$.

8. [2004 年Ⅰ3]　**由方程组**$\begin{cases}x+y=a,\\ y+z=4,\\ z+x=2\end{cases}$**解得的$x,y,z$成等差数列.**

(1) $a=1$;　　(2) $a=0$.

9. [2003 年Ⅰ4]　$(a+b)/(a^2+b^2)=-1/3$.

(1) $a^2,1,b^2$成等差数列;　　(2) $1/a,1,1/b$成等比数列.

10. $\{a_n\}$为等差数列,其前 100 项和S_{100}可求.

(1) $S_{10}=10$;　　(2) $a_{100}+a_{99}+a_{98}+\cdots+a_{91}=60$.

11. 已知 2,$f(x)$,$g(x)$成等比数列时,$x=\log_2 5$.

(1) $f(x)=2^x-1, g(x)=2^x+3$；　　(2) $f(x)=2^x/5, g(x)=2^x/10$.

12. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，且 $a_3=2, a_{11}=6$，则满足 $b_n>1/a_{26}$的最大的 n 值是 4.

(1) **在上述数列中 $b_2=a_3$，且 $b_3=1/a_2$；**

(2) **在上述数列中 $b_3=a_2, b_2=1/a_3$.**

13. 等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=(1\pm\sqrt{5})/2$ 成立.

(1) **$\{a_n\}$是等差数列；**

(2) **在等比数列中 a_1, a_3, a_4 互不相等，且成等差数列.**

14. 要使 $a:b:c=4:1:-2$ 成立.

(1) **三个不同的实数 a, b, c 成等差数列；**

(2) **三个实数 a, c, b 成等比数列.**

15. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，则数列$\{b_n\}$也成等比数列.

(1) $b_n=a_na_{n+1}$；　　(2) $b_n=(a_{n+1})^2$.

16. 在等差数列$\{a_n\}$中 S_n 的最大值为 S_{21}.

(1) $a_1<0$；　　(2) $a_1>0$，且 $3a_4=5a_{11}$.

17. 使抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴无交点.

(1) **a, b, c 成等比数列；**　　(2) **a, b, c 成等差数列.**

(三) 解答题

1. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足关系式 $\lg(S_n-1)=n$ $(n\in\mathbf{N})$，求$\{a_n\}$的通项公式.

2. 若$\{a_n\}$是等差数列，则$\{a^{a_n}\}$是等比数列，其中 $a>0, a\neq1$.

3. 设等比数列的首项为 a $(a>0)$，公比为 q $(q>0)$，它的前 n 项和为 80，而其中最大一项为 54，又前 $2n$ 项的和为 6560，求 a, q 的值.

4. 设$\{a_n\}$为等差数列，d 为公差，前 $m+n$ 项和为 S_{m+n}，则 $S_{m+n}=S_n+S_m+mnd$.

5. 在整数 $a=-10, b=6$ 之间插入五个数，使这七个数组成等差数列，求 S_7.

6. 已知 S_1 为前 50 个正偶数的和，S_2 为前 50 个正奇数的和，求 S_1, S_2.

7. 如果 a 是 n 个连续正整数的算术平均值，$n>1$，问这 n 个数中最大与最小数的和是多少？

8. 求 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

9. 有四个数前三个成等比数列，其和为 19，后三个成等差数列，其和为 12，求这四个数.

10. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列，其首项 $a_1=1$，公比 $q=3$，求数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和 S_n.

11. 有四个数，其中前三个数成等差数列，后四个数成等比数列，且第一个数与第四个数的和为 16，第二个数与第三个数的和为 12. 求这四个数.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $p,q\in\mathbf{N}$，若 $S_p=q,S_q=p$，求 S_{p+q}.

13. 求 $\{a_n\}$ 是等比数列，其公比为 $q(q\neq1)$，则

$$S_{m+n}=S_n+q^nS_m=S_m+q^mS_n.$$

第 2 篇　微 积 分

*2.1　函数、极限、连续

2.1.1　函数

（一）考试内容

1. 函数概念

1）函数的定义

定义 2.1.1.1　设在某一变化过程中有两个变量 x 与 y，若对非空集合 D 中的每一点 x，按照某一对应规则 f，都有惟一确定的实数 y 与之相应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)。$$

其中，x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为函数的定义域，记作 D_f；y 的取值范围即集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域，记作 Z_f。

由定义可知，函数的定义域 D_f 和对应规则 f 是确定函数的两个要素. 因而，两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等（或相同）当且仅它们的定义域相同和对应规则一样.

---

* 本书打 * 号的章节内容是未列入 MBA 联考数学考纲的内容. 但由于这些内容是学好其他有关内容的必备基础，同时也为了保持前后衔接，便于查阅，仍编写它们。由于考题不会出现在打 * 号的章节中，所以对其基本内容有所了解就可以了，不必深入钻研较难的题目。

xOy 平面上点的集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的图形.

2）函数的表示方法

函数一般有三种表示方法:解析法、图示法及表格法. 这三种表示方法各有其特点. 解析法便于运算,而图示法和表格法直观,在实际中常结合使用.

3）函数的定义域

实际问题中的函数的定义域由实际意义确定. 由式子表示的函数 $y=f(x)$,如不考虑实际意义,其定义域是使 $f(x)$有意义的 x 的集合。微积分是讨论实变量的实值函数. 因而 $f(x)$有意义是指 $f(x)$取实数,且其定义域即 x 的取值范围也应取实数集合.

2. 函数的主要性质

1）有界性

定义 2.1.1.2 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,若存在实数 $M>0$,使得对任意 $x\in D$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D 上有界,或称 $f(x)$为 D 上的有界函数。

定义 2.1.1.3 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,若对任意实数 $M>0$,总可以找到一个 $x\in D$,使得 $|f(x)|>M$,即不存在实数 $M>0$,使得对每个 $x\in D$,$|f(x)|\leqslant M$ 都成立,则称 $f(x)$在 D 上无界或称 $f(x)$为 D 上的无界函数.

2）单调性

定义 2.1.1.4 设函数在区间(a,b)内有定义,如果对于(a,b)内任意两点 x_1 和 x_2,且 $x_1<x_2$ 均有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,称 $f(x)$在(a,b)内单调增加,若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内单调减少。若$f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内严格单调增加,若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称为 $f(x)$在(a,b)内严格单调减少。单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

3）奇偶性

定义 2.1.1.5 设函数 $f(x)$在关于原点对称的区间$[-a,a]$上有定义,如果对于$[-a,a]$上任意点 x 均有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称函数 $f(x)$为$[-a,a]$上的偶(奇)函数.

偶函数的图形对称于 y 轴;奇函数的图形对称于原点,且 $f(0)=0$.

4）周期性

定义 2.1.1.6 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,如果存在正常数 T,使

得对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足上式的最小正数 T，称为 $f(x)$ 的基本周期，简称周期.

周期函数的图形沿 x 轴每间隔一个周期 T，就重复一次.

注意　首先，式子 $f(x+T)=f(x)$ 是要求对定义中的每一个值都成立，而不能是对“一个 x”或“某些个 x”成立。其次，是一个函数是周期函数，它并不一定就有最小正数 T 使 $f(x+T)=f(x)$. 例如 $f(x)=2$，任何正数 T 都满足 $f(x+T)=f(x)$，因而它没有周期.

3. 常用函数

1) 基本的初等函数

1° 常数函数 $y=C$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图形为平行于 x 轴的直线。

2° 幂函数 $y=x^{\alpha}$，其定义域随着 α 的不同而变化. 但不论 α 取何值，函数总在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且其图形过点 $(1,1)$.

对于 $x>0$ 部分的图形，由 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$，$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ 知道：

当 $\alpha>0$ 时，$y'>0$，y 单调增加；若 $\alpha>0$，且 $\alpha<1$，则 $y''<0$，其图形上凸（下凹），若 $\alpha>0$，且 $\alpha>1$，则 $y''>0$，其图形下凸（上凹），且图形都过原点，如图 2.1.1.1(a) 所示.

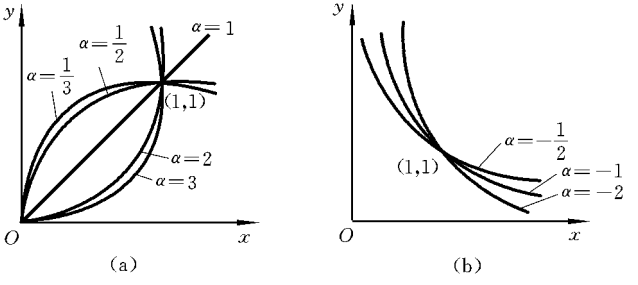


图 2.1.1.1

当 $\alpha<0$ 时，$y'<0$，y 单调减少，且 $y''>0$，其图形上凹（下凸），如图 2.1.1.1(b) 所示.

3° 指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少；当 $a>1$ 时，函数严格单调增加. 函数图形过点 $(0,1)$. 微积分中常用到以 e 为底的指数函数. 常见形式有 $y=ae^{-bx}$，$y=ae^{bx}$，$b>0$，其图形分别如图 2.1.1.2(a)、(b) 所示。

4° 对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$，其定义域为 $(0,+\infty)$。它与 $y=a^{x}$

互为反函数. 微积分中常用到以 e 为底的对数函数 $y=\ln x$，它称为自然对数，其图形过点(1,0)，如图 2.1.1.3(a)所示。图 2.1.1.3(b)是以 b $(0<b<1)$为底的对数函数的图形。

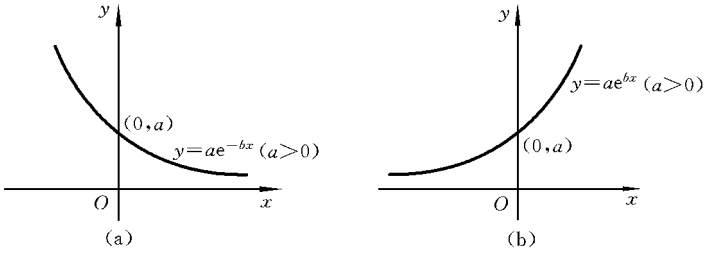


图 2.1.1.2

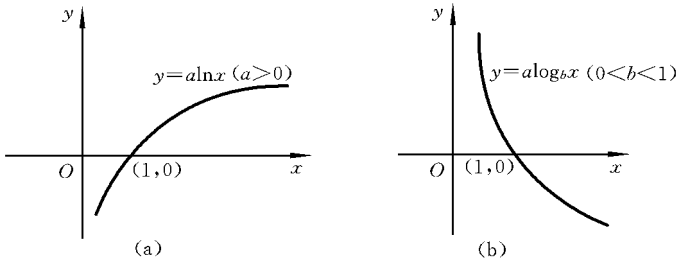


图 2.1.1.3

对基本初等函数的定义及其特性、图形都要熟练地掌握，因在导数和定积分中常用到它们. 有些问题若能用基本初等函数图形及性质判断显得非常便捷.

2) 初等函数

由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合所得到的函数称为初等函数.

初等函数在其定义域内有统一的表达式。

初等函数是微积分的主要研究的对象.

3) 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f，值域为 Z_f，如果对于每一个 $y\in Z_f$，都有 D_f 中惟一的点 x 与之对应，且满足 $y=f(x)$，则 x 是一个定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z_f$，并称其为 $y=f(x)$的反函数。

习惯上用 x 作自变量，y 作因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数也记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z_f$。由于 x，y 互换，函数 $y=f(x)$ 的图形与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

由反函数的定义可知，函数与其反函数有以下的重要结果。

命题 2.1.1.1 （1）反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域、值域分别为 $f(x)$ 的值域、定义域.

（2）$f[f^{-1}(x)]=x$，其中 $x\in Z_f$，$f^{-1}[f(x)]=x$，其中 $x\in D_f$。

（3）严格单调函数必有反函数，且函数与其反函数有相同的单调性.

4）复合函数

设 $y=f(u)$ 是定义域为 D_f，值域为 Z_f 的函数. $u=\varphi(x)$ 是以 D_φ 为定义域、Z_φ 为值域的函数，如果集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量.

5）隐函数

若对某一区间 D 内的每一点 x，方程 $F(x,y)=0$ 都有惟一的解 y，由此得到的 x 的函数 $y=y(x)$，$x\in D$ 称为由此方程确定的隐函数。

若函数的因变量 y 明显地表示成 $y=f(x)$ 的形式，则称其为显函数. 方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数有时也可以表示成显函数的形式.

但并不是所有隐函数都可以用 x 的显函数的形式表示出来.

当然并不是任何一个方程都能确定一个隐函数，例如 $x^2+y^2+1=0$.

6）分段函数

对于其定义域内的自变量 x 的不同值，不能用统一的解析式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数.

（二）考试要求

理解函数的概念、反函数的概念；会求函数的定义域，会求已知函数的反函数；掌握函数的主要性质，会判断函数的单调性、周期性及奇偶性. 熟悉基本初等函数的定义、特性及其图形.

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　求函数的定义域

若函数单用数学式子表示，没给出实际含义，则其定义域就是这个数学

式子的自变量允许取值的范围. 常用下述几条法则确定之.

1° 当数学式子中有分式形式时,应使分式的分母不等于零.

2° 当数学式子中有偶次根式时,应使其被开方数大于零或等于零.

3° 当数学式子中含有对数时,应使对数的真数大于零.

4° 反函数 $f^{-1}(x)$的定义域就是 $f(x)$的值域(见命题 2.1.1.1)。

例 1 函数 $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{e-e^{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2}}$ 的定义域是

(A) $(\infty,1/2]$. (B) $(-\infty,1/3]$. (C) $[-1/3,1/2]$.

(D) $[1/3,1/2]$. (E) $(-\infty,-1/3]$.

解 由 $\begin{cases}1-2x\geqslant 0,\\ \left(\dfrac{3x-1}{2}\right)^2\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1-2x\geqslant 0,\\ -1\leqslant\dfrac{3x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}$

易解得 $-1/3\leqslant x\leqslant 1/2$. 因而其定义域为 $[-1/3,1/2]$. 仅(C)入选.

例 2 设 $y=f(x)=\begin{cases}-4x^2, & -3\leqslant x<0,\\ x, & 0<x\leqslant 4,\\ x^2/4, & x>4,\end{cases}$ 则其反函数 $f(x)$的定义域为

(A) $(-\infty,+\infty)$. (B) $[-36,+\infty)$.

(C) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. (D) $[-36,0)\cup(0,+\infty)$.

(E) $[-3,0)\cup(0,+\infty)$。

解 由命题 2.1.1.1 知,$f^{-1}(x)$的定义域就是 $f(x)$的值域,而 $f(x)$的值域为 $[-36,0)\cup(0,+\infty)$,故 $f^{-1}(x)$的定义域为 $[-36,0)\cup(0,+\infty)$. 仅(D)入选.

例 3(条件充分性判断) 函数 $f(x)$的定义域为 $(1,+\infty)$.

(1) $f(e^{-x})=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; (2) $f(e^x+1)=x$。

解 当条件(1)成立时,令 $e^{-x}=t$,则 $-x\ln e=\ln t$,即 $x=-\ln t$. 因而

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{-\ln t-1}}。$$

为求 $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{-\ln t-1}}$ 的定义域,必有 $-\ln t-1>0$ 即 $-\ln t>1$,$\ln t<-1$ 即 $t<e^{-1}$. 因而条件(1)不充分. 当条件(2)成立时,令 $e^x+1=t$,则 $e^x=t-1$,$x=\ln(t-1)$. 因而必有 $t-1>0$ 即 $t>1$,故 $f(x)$的定义域为 $(1,+\infty)$. 条件(2)充分. 仅 B 入选.

题型二　已知 $af[g(x)]+bf[\varphi(x)]=h(x)$**，求** $f(x)$.

所给方程中的 $g(x)$，$\varphi(x)$**常有一定关系，例如互为倒数或互为反函数等. 求** $f(x)$**一般常作两次变量代换：一次令** $t=g(x)$。**因** $\varphi(x)$**与** $g(x)$**有一定关系，从而** $f[\varphi(x)]$**也可化成** t **的函数；另一次变量代换是令** $t=\varphi(x)$。**从而得到两个** t **的方程。联立解之，即可求出** $f(t)$**即** $f(x)$**. 有时也只需作一次变量代换就可求出** $f(x)$.

例 4　已知函数 $f(x)$**满足** $f(x^3)+2f(1/x^3)=3x$，$x\neq0$，**试求** $f(x)$。

解　令 $x^3=t$，**则**

$$f(t)=2f(1/t)=3\sqrt[3]{t},\quad t\neq0, \tag{1}$$

再令 $t=1/x^3$，**则**

$$f(1/t)+2f(t)=3\sqrt[3]{1/t},\quad t\neq0, \tag{2}$$

联立式①与式②易解得

$$f(t)=2\sqrt[3]{1/t}-\sqrt[3]{t},\quad t\neq0,\quad \textbf{即}\quad f(x)=2\sqrt[3]{1/x}-\sqrt[3]{x},\quad x\neq0.$$

例 5　已知

$$2f(x)+f(1-x)=x^2, \tag{1}$$

试求 $f(x)$**的表示式.**

解　令 $1-x=t$，**则** $x=1-t$，**代入式①得到**

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,\quad \textbf{即}\quad 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2. \tag{2}$$

①×2−②**得到**

$$3f(x)=2x^2-(1-x)^2=x^2+2x-1,\ f(x)=(x^2+2x-1)/3.$$

例 6（条件充分性判断）　$f(2)=-1/3$。

(1) **函数** $f(x)$**满足方程** $f(x)+2f(1/x)=4x+3$；

(2) **函数** $f(x)$**满足方程** $2f(x)+f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=-x^2+6$.

解　当条件(1)成立时，将 $x=2$，$x=1/2$ **代入方程得到**

$$f(2)+2f(1/2)=11, \tag{1}$$

$$f(1/2)+2f(2)=5, \tag{2}$$

联立式①、式②解得 $f(2)=-1/3$. **条件(1)充分。**

当条件(2)成立时，令 $x=2$，$x=1$ **分别代入方程有**

$$2f(2)+f(1)=2, \tag{3}$$

$$2f(1)+f(2)=5. \tag{4}$$

联立式③、式④解得 $f(2)=-1/3$. **条件(2)也充分. 仅** D **入选.**

题型三　求反函数的表达式

求反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 x，再交换 x 与 y 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 同时得到 f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数. 且在各分段区间上都是单调函数，则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数，且 $f(x)$ 的每段的值域就是其反函数的定义域.

互为反函数的两个函数，其图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 7 已知函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 与 $y=g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称，则 $y(x)$ 的表示式为 $g(x)=$

(A) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.　　(B) $3\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

(D) $2\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.　　(E) $\ln\dfrac{x+2}{x+1}$.

解 由题意知，$g(x)$ 与已知函数互为反函数，反解函数 y 的表示式得到

$$(e^x+e^{-x})y=e^x-e^{-x},\quad e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},\quad 2x=\ln\frac{1+y}{1-y},\quad x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},$$

即
$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=g(x).$$ 仅(C)入选.

例 8(条件充分性判断)　函数 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x)=(e^x+e^{-x})/2,\ x\in(-\infty,0]。$$

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$；　(2) $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$。

解 只需求出 $f^{-1}(x)$ 的反函数，即可判断条件是否充分. 由 $y=f^{-1}(x)=(e^x+e^{-x})/2$，$x(-\infty,0]$ 得到 $2y=e^x+e^{-x}$，即 $2ye^x=e^{2x}+1$，故

$$(e^x)^2-2ye^x+1=0。$$

解得
$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1},\ y\in[1,+\infty)。$$

因 $x\in(-\infty,0]$，故 $e^x\leqslant 1$，因而 $e^x=y-\sqrt{y^2-1}$。于是

$$x=\ln(y-\sqrt{y^2-1}),\quad 即\quad y=\ln(x-\sqrt{x^2-1}),$$

故条件(2)充分，条件(1)不充分. 仅 B 入选.

例 9 求 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数并作图.

解 当 $x>0$ 时，由 $y=1+x^2$ 得到 $x=\pm\sqrt{y-1}$. 因 $x>0$，故 $x=$

$\sqrt{y-1}$，从而 $y>1$。

当 $x=0$ 时，$y=0$。

当 $x<0$ 时，由 $y=-1-x^2$ 得到 $x=\pm\sqrt{-1-y}$. 因 $x<0$，故 $x=-\sqrt{-1-y}$，从而 $-1-y>0$，即 $y<-1$.

于是得到
$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1,\\ 0, & y=0,\\ -\sqrt{-1-y}, & y<-1,\end{cases}$$

因而所求的反函数为
$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1,\\ 0, & x=0,\\ -\sqrt{-1-x}, & x<-1。\end{cases}$$

其图形如图 2.1.1.4 所示.

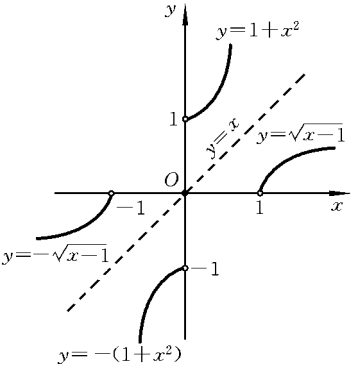


图 2.1.1.4

注意　由例 9 可知，函数 $f(x)$ 的值域、定义域恰好分别是 $f^{-1}(x)$ 的定义域、值域.

题型四　求分段函数的复合函数

法一　用分段复合法求之。

当两分段函数定义域的分段区间的分段点相同时，常用此法求之.

例 10　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 注意到 $f(x),g(x)$ 定义域及其分段区间的划分均相同，可用分段复合法求之.

当 $|x|<1$ 时，$g(x)=2-x^2>1$，$f[g(x)]=0$；当 $|x|=1$ 时，$g(x)=1$，$f[g(x)]=1$；当 $|x|>1$ 时，$g(x)=2>1$，$f[g(x)]=0$。故

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & |x|\neq 1,\\ 1, & |x|=1.\end{cases}$$

法二 用代换法求之。

一般当两分段函数的分段区间不相同，即分段点不一致时，用此法求之.

求 $f[g(x)]$ 的表示式，可把函数关系式 $f(x)$ 中的 x 都换成 $g(x)$，且把 $f(x)$ 的自变量取值范围（一般用不等式表示）中的 x 也同时换成 $g(x)$，即可求得 $f[g(x)]$ 的表达式；然后解所得到的 $g(x)$ 的两个不等式，分别求出与之等价的 x 的取值范围，从而求得 $f[g(x)]$ 的定义域；再根据 $f[g(x)]$ 的定义域写出其表示式中 $g(x)$ 的表示式；最后得到表示式及定义域均用 x 表示的函数 $f[g(x)]$ 的表达式.

例 11 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}g(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解
$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{g(x)}, & g(x)<1,\\ g(x), & g(x)\geqslant 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{x+2}, & x+2<1,x<0,\\ x+2, & x+2\geqslant 1,x<0,\\ e^{x^2-1}, & x^2-1<1,x\geqslant 0,\\ x^2-1, & x^2-1\geqslant 1,x\geqslant 0,\end{cases}=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

例 12 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 1-2x, & x<0,\end{cases}\varphi(x)=e^{-x}$，求 $\varphi[f(x)]$ 和 $f[\varphi(x)]$.

解 (1) $\varphi[f(x)]=e^{-f(x)}=\begin{cases}e^{-x^2}, & x\geqslant 0,\\ e^{-(1-2x)}, & x<0.\end{cases}$

(2) 由于在 $-\infty<x<+\infty$ 上 $\varphi(x)=e^{-x}>0$，有

$$\begin{aligned}f[\varphi(x)]&=\varphi^2(x),\ \varphi(x)>0\\ &=(e^{-x})^2,\ e^{-x}>0\\ &=e^{-2x}\quad(-\infty<x<+\infty).\end{aligned}$$

题型五　判别函数的单调性

法一　用单调性定义即定义 2.1.1.4 判断。

例 13(条件充分性判断)　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$f^2(x)$必单调增加。

(1) $f(x)$单调增加；　(2) $f(x)>0$.

解　当条件(1)成立时，$f^2(x)$未必单调增加，例如 $y=x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调增加，但 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上非单调. 条件(1)不充分. 当条件(2)成立时，$f^2(x)$未必单调. 例如 $y=e^{-x}>0$，但 $f^2(x)=e^{-2x}$在$(-\infty,+\infty)$上单调减少。条件(2)不充分. 但当条件(1)与条件(2)联合时，有 $f(x)>0$，且当 $x_1>x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)>0$，由不等式运算知，必有 $f^2(x_1)>f^2(x_2)>0$，故条件(1)和条件(2)联合起来充分. 仅 C 入选.

法二　利用函数的几何图形判断。

一方面可根据基本初等函数的几何图形判别其单调性，另一方面还可利用函数的对称性(包含偶函数关于 y 轴对称，奇函数关于原点对称，互为反函数的两个函数关于直线 $y=x$ 对称)的几何图形直观判别函数的单调性。

例 14(条件充分性判断)　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，当 $x>0$ 时，$f(x)+f(-x)$单调增加。

(1) 当 $x<0$ 时，$f(x)+f(-x)$单调增加；

(2) 当 $x<0$ 时，$f(x)+f(-x)$单调减少.

解　定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)+f(-x)$为偶函数，因而其几何图形关于 y 轴对称，在 $x=0$ 的左右两旁单调性相反. 当条件(1)成立即 $x<0$ 时，$f(x)+f(-x)$单调增加，则 $x>0$ 时，$f(x)+f(-x)$单调减少。条件(1)不充分. 当条件(2)成立时，有 $x<0$ 时 $f(x)+f(-x)$单调减少，因而 $x>0$ 时 $f(x)+f(-x)$必单调增加. 条件(2)充分. 仅 B 入选.

法三　利用下述命题判断复合函数的单调性。

命题 2.1.1.2　(1) 当 $\varphi(x)$在$[a,b]$上单调增加时，$f[\varphi(x)]$在$[a,b]$上的单调性与 $f(u)$的单调性相同；

(2) 当 $\varphi(x)$在$[a,b]$上单调减少时，$f[\varphi(x)]$在$[a,b]$上的单调性与 $f(u)$的单调性相反.

例 15(条件充分性判断)　$f(x)+f[\varphi(x)]$单调减少。

(1) $f(x)$与 $\varphi(x)$都单调减少；　(2) $f(x)$单调减少，$\varphi(x)$单调增加.

解　当条件(1)成立时，由于 $\varphi(x)$单调减少，而 $f(x)$也单调减少，由命

题 2.1.1.2(2)知 $f[\varphi(x)]$单调增加，而 $f(x)$单调减少，其和 $f(x)+f[\varphi(x)]$的单调性不确定。条件(1)不充分.

当条件(2)成立时，由命题 2.1.1.2(1)知 $f[\varphi(x)]$单调减少，而 $f(x)$也单调减少，其和函数 $f(x)+f[\varphi(x)]$单调减少. 条件(2)充分. 仅 B 入选.

法四　利用导数判断函数的单调性(详见 2.2.2 节题型三)。

题型六　判别函数的周期性

常用周期函数的定义即定义 2.1.1.6 判别。

例 16(条件充分性判断)　函数 $y=f\left[\frac{1}{3}x+g(x)\right]$是周期函数，其中 $f(x)$，$g(x)$都定义在$(-\infty,+\infty)$上。

(1) $f(x)$，$g(x)$都是以 1 为周期的函数；

(2) $f(x)$以 2 为周期，且 $g(x)$以 3 为周期的函数.

解　当条件(1)成立时，有

$$y(x+3T)=f\left[\frac{1}{3}(x+3T)+g(x+3T)\right]=f\left[\frac{1}{3}x+g(x+3T)+T\right]$$

$$=f\left[\frac{1}{3}x+g(x)+T\right]=f\left[\frac{1}{3}x+g(x)\right]=y(x).$$

条件(1)充分。当条件(2)成立时，有

$$y(x+18T)=f\left[\frac{1}{3}(x+18T)+g(x+18T)\right]$$

$$=f\left[\frac{1}{3}x+g(x+18T)+6T\right]=f\left[\frac{1}{3}x+g(x)+6T\right]$$

$$=f\left[\frac{1}{3}x+g(x)+2T\times 3\right]=f\left[\frac{1}{3}x+g(x)\right]=y(x).$$

条件(2)也充分. 仅 D 入选.

例 17　$[x]$表示不超过 x 的最大整数，则函数 $f(x)=x-[x]$在$(-\infty,+\infty)$上

(A) 单调增加.　　(B) 单调减少.　　(C) 为奇函数.

(D) 为偶函数.　　(E) 为周期函数.

解　由$[x]$的定义知，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$有$[x+1]=[x]+1$，因而对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数. 仅(E)入选.

它在一个周期$[0,1)$上的表示式为 $y=x$，$x\in[0,1)$，因而 $f(x)=x-[x]$

的图形如图 2.1.1.5(a)所示。

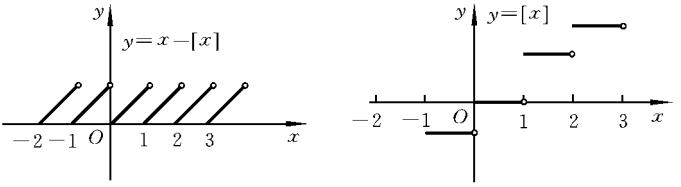


图 2.1.1.5

注意　$f(x)=x-[x]$的图形与 $y=[x]$的图形(见图 2.1.1.5(b))是不一样的,要注意区分.

例 18(条件充分性判断)　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义,$f(x+3)=f(x)$,且 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x<3, \end{cases}$则 $f(x)$单调减少。

(1) $-5<x<-3$ 时;　(2) $5<x<7$ 时.

解　周期为 3 的周期函数 $f(x)$在区间$[3k,3k+3)(k$ 为整数)与在区间$[0,3)$上的性质相同. 而 $f(x)$在区间$(-5,-3)$内的性质与 $f(x)$在区间$[1,3)$上的性质相同. 而在$[1,3)$上 $f(x)=2-x$ 单调减少,故 $f(x)$在$(-5,-3)$内 $f(x)$也单调减少。条件(1)充分.

同样,$f(x)$在区间$(5,7)$内的性质与在区间$(6,7)$内的性质相同,与$f(x)$在区间$(0,1)$内性质也相同. 而 $0\leqslant x<1$ 时 $f(x)=x$ 单调增加,故 $f(x)$在$(5,7)$内也应单调增加. 条件(2)不充分. 仅 A 入选.

注意　计算周期函数有关问题常利用等区间平移法放归到标准的周期内,利用已知条件讨论之.

题型七　判别函数的奇偶性

法一　利用奇、偶函数的定义 2.1.1.5 判别之。

例 19　判别函数 $y=f\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)+f\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)$的奇偶性。

解　利用奇偶性定义即定义 2.1.1.5 判别之.

$$y(-x)=f\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)+f\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right),$$

将内层函数的分子、分母均乘以 e^{x} 得到

$$y(-x)=f\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{x}e^{-x}}\right)+f\left(\frac{e^{x}e^{-x}}{e^{x}+e^{x}e^{-x}}\right)$$

$$=f\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)+f\left(\frac{1}{1+e^{x}}\right)=y(x).$$

因而 $y(x)$为偶函数.

法二　利用奇、偶函数的运算规律判别之。

命题 2.1.1.3　关于奇偶函数有如下的运算规律：

(1)奇函数乘(除)偶函数为奇函数；(2)奇函数乘(除)奇函数为偶函数；(3)偶函数乘(除)偶函数为偶函数；(4)奇函数加(减)奇函数为奇函数；(5)偶函数加(减)偶函数为偶函数；(6)不恒等于零的偶函数(不恒等于零的奇函数)加减不恒等于零的奇函数(不恒等于零的偶函数)为非奇非偶函数，特别是奇函数加非零常数为非奇非偶函数；(7)偶(奇)函数乘以非奇非偶函数为非奇非偶函数.

以上命题(7)可如下证明：设 $f(x)$为偶函数，$g(x)$为非奇非偶函数，$f(x)g(x)=h(x)$，则 $h(x)$为非奇非偶函数。事实上，如果 $h(x)$为偶函数 $(h(x)\neq 0)$，则由上命题(3)知道 $g(x)=h(x)/f(x)$为偶函数，与 $g(x)$为非偶函数矛盾. 同法可证如 $h(x)$为奇函数，则得到 $g(x)$为奇函数，与 $g(x)$为非奇函数矛盾，故$h(x)$为非奇非偶函数.

例 20[1997 年Ⅱ13]　下列函数中非奇非偶的函数是

(A) $f(x)=3^{x}-3^{-x}$。　(B) $f(x)=\sqrt[3]{x}$。　(C) $f(x)=x(1-x)$。

(D) $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$。　(E) $f(x)=x^{2}\cos x$。

解　x 为奇函数，$1-x$ 为非奇非偶函数，由命题 2.1.1.3(7)知(C)中 $f(x)$为非奇非偶函数. 或由 $f(x)=x-x^{2}$ 为奇函数与偶函数之差及命题 2.1.1.3(6)知 $f(x)$为非奇非偶函数.

由命题 2.1.1.3(5)知(E)中 $f(x)$为偶函数.

由命题 2.1.1.4(2)知(A)与(D)中函数 $f(x)$均为奇函数.

利用定义易知(B)中函数 $f(x)$为奇函数. 仅(C)入选.

例 21(条件充分性判断)　函数 $y=f(x)-\ln(-x+\sqrt{x^{2}+1})$为奇函数。

(1) $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的常数函数 $f(x)=0$；

(2) $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的偶函数.

解　令　　$g(x)=\ln(-x+\sqrt{x^{2}+1})$，

则 $$g(-x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{x^2-(\sqrt{1+x^2})^2}{x-\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$=-\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=-g(x),$$

故 $g(x)$为奇函数.

当条件(1)成立时,$f(x)=0$ 也为奇函数,故由命题 2.1.1.3(4)知 $y=f(x)-\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$也是奇函数. 条件(1)充分.

当条件(2)成立时,y 为非奇非偶函数。条件(2)不充分. 仅 A 入选.

类型(一) 判断自变量带相反符号的两同名函数的代数和的奇偶性。

利用下述命题判别之.

命题 2.1.1.4 设 $f(x)$定义在$[-a,a]$(a 可以为无穷)上的任意函数,则

(1)$f(x)+f(-x)$为偶函数;

(2)$f(x)-f(-x)$或 $f(-x)-f(x)$为奇函数.

即自变量带相反符号的两同名函数之和为偶函数,之差为奇函数.

例 22(条件充分性判断) 函数 $y=f(x)\left(\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right)$是奇函数.

(1)$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$; (2)$f(x)=\frac{e^x}{1+x}+\frac{e^{-x}}{1-x}$.

解 因 $\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln(1-x)-\ln(1+x)$为自变量带相反符号的两同名函数之差,由命题 2.1.1.4 知为奇函数,而 $\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}$ 为偶函数,故 $y=f(x)\left(\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)$为奇函数. 条件(1)充分.

由 $f(x)=\frac{e^x}{1+x}+\frac{e^{-x}}{1-x}$为自变量带相反符号的两同名函数之和为偶函数,因而 y 为偶函数,条件(2)不充分。仅 A 入选.

例 23 判断函数 $y=\frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}-\frac{1}{2}$的奇偶性.

解 $$y=\frac{2f(x)-[f(x)+f(-x)]}{2[f(x)+f(-x)]}=\frac{f(x)-f(-x)}{2[f(x)+f(-x)]}.$$

而 $f(x)-f(-x)$,$f(x)+f(-x)$分别是自变量带相反符号的两同名函数之

差、之和，故依次是奇函数、偶函数。两者相除，由命题 2.1.1.3(1)知，y 为奇函数.

例 24(条件充分性判断)　$f(x)$与 $g(x)$的定义域均为$(-a,a)$，$f(x)+g(x)$为奇函数。

(1) $f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数；　(2) $g(x)=-f(-x)$.

解　当条件(1)成立时，$f(x)+g(x)$为奇函数与偶函数之和。由命题 2.1.1.3(6)知，$f(x)+g(x)$为非奇非偶函数，条件(1)不充分. 当然，当 $g(x)\equiv 0$ 时，条件(1)也不充分.

当条件(2)成立时，$f(x)+g(x)=f(x)-f(-x)$为自变量带相反符号的两同名函数之差，由命题 2.1.1.4(2)知为奇函数. 条件(2)充分。仅 B 入选.

类型(二)　判断复合函数的奇偶性。

命题 2.1.1.5　(1) 若函数 $y=f(t)$，$t=g(x)$的奇偶性不同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$必为偶函数；若奇偶性相同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$与外层函数 $f(x)$具有相同的奇偶性.

(2) f 不具有奇偶性时，则 $f(g_0)$，$f(g_0)$，$g_0(f)$，$g_e(f)$，$f(f)$也同样不具有奇偶性，其中 g_0 为奇函数，g_e 为偶函数.

由命题 2.1.1.5 易得到下述命题。

命题 2.1.1.6　当 $g(x)$为偶函数时，$y=f[g(x)]$为偶函数.

这是因为当 $f(x)$为奇函数时，$f[g(x)]$为偶函数，而当 $f(x)$为偶函数时，$f[g(x)]$的奇偶性与外层函数 $f(x)$的奇偶性相同，故 $f[g(x)]$仍为偶函数.

例 25(条件充分性判断)　复合函数 $f[\varphi(x)]$为偶函数，其中函数 $f(x)$与 $\varphi(x)$均定义在$(-\infty,+\infty)$上。

(1) $\varphi(x)$为奇函数且 $f(x)$为偶函数；

(2) $\varphi(x)$为偶函数且 $f(x)$为奇函数.

解　由命题 2.1.1.5 及命题 2.1.1.6 即知条件(1)与条件(2)均为充分条件，仅 D 入选.

例 26　判断函数 $y=f[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})]$的奇偶性.

解　因 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$与 x 均为奇函数，故其乘积 $x\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$为偶函数，由命题 2.1.1.6 即得 $y=f[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})]$为偶函数.

类型(三)　判别函数$(a^{kx}\pm1)/(a^{kx}\mp1)$ $(a>0,a\neq1,k\neq0)$**的奇偶性。**

利用下述命题判别之。

命题 2.1.1.7　函数 $f(x)=(a^{kx}\pm1)/(a^{kx}\mp1)$**为奇函数,其中常数** $a>0,a\neq1,k\neq0$。

例 27(条件充分性判断)　函数 $y=f\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}\right)$**为奇函数.**

(1) $f(x)$**为**$(-\infty,+\infty)$**上的奇函数;**

(2) $f(x)$**为**$(-\infty,+\infty)$**上的偶函数.**

解　因　$$\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}=\frac{2e^x-1-e^x}{2(1+e^x)}=\frac{e^x-1}{2(e^x+1)},$$

由命题 2.1.1.7 **知它为奇函数.**

当条件(1)**成立时,由命题** 2.1.1.5 **知函数** $y=f\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}\right)$**为奇函数.条件**(1)**充分.**

当条件(2)**成立时,由命题** 2.1.1.5 **知** y **为偶函数。条件**(2)**不充分.仅** A **入选.**

例 28(条件充分性判断)　函数 y **为偶函数。**

(1) $y=\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}$;　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)x$。

解　条件(1)**中函数为自变量带相反符号的两同名函数之和,由命题** 2.1.1.4 **知** y **为偶函数.条件**(1)**充分。当条件**(2)**成立时,**

$$\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{2-(a^x+1)}{2(a^x+1)}=\frac{1-a^x}{2(1+a^x)}=-\frac{1}{2}\frac{a^x-1}{a^x+1}。$$

由命题2.1.1.7 **即知上述函数为奇函数,**x **也为奇函数,由命题** 2.1.1.3(2) **知** y **为偶函数。条件**(2)**充分.仅** D **入选.**

类型(四)　判别分段函数的奇偶性.

常用奇偶性的定义即定义 2.1.1.5 **判别之.**

例 29　证明 $f(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\geqslant0,\\ 2^x-1, & x<0\end{cases}$**是单调增加的奇函数.**

证　由　$$f(-x)=\begin{cases}1-2^x, & -x\geqslant0,\\ 2^{-x}-1, & -x<0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-(2^x-1), & x<0\\ -(1-2^{-x}), & x\geqslant0\end{cases}=-f(x)$$

知，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为奇函数. 又因 2^{-x} 单调减少，故 -2^{-x} 单调增加，即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加. 又 2^{x} 单调增加，因而 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调增加，于是 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加.

类型(五)　判别原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性。

利用以下命题判别之.

命题 2.1.1.8　设 $f(x)$是连续的奇(偶)函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶(奇)函数，即连续奇(偶)函数的一个原函数为偶(奇)函数.

证　(1) $f(x)$为奇函数时，下面用负代换证明 $F(-x)=F(x)$.

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\text{(负代换)}]{t=-u} \int_0^{x} f(-u)\mathrm{d}(-u)$$
$$=\int_0^x [-f(-u)]\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

或　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{t=-u} \int_0^{-x}[-f(-u)]\mathrm{d}u=\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u=F(-x)$，

故 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(2) $f(x)$为偶函数时，同法可证 $F(-x)=-F(x)$，故 $F(x)$为奇函数.

例 30(条件充分性判断)　$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 必为奇函数.

(1) $f(t)$为偶函数；　(2) $a=0$.

解　当条件(1)单独成立时，由命题 2.1.1.8 的证明易看出并不能确保 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 必为奇函数，故条件(1)不充分. 当条件(2)单独成立时也不能确保 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数. 只有条件(1)、(2)同时成立时才有 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数. 仅 C 入选.

例 31　设函数 $f(x)$连续，则在下列函数中，必为偶函数的是

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$.　　(B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$.

(C) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$.　　(D) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$.

解法 1　令 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$，作负代换得

$$F(-x)=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t \xrightarrow{t=-u} \int_0^x u[f(-u)+f(u)]\mathrm{d}(-u)$$
$$=\int_0^{-x} u[f(u)+f(-u)]\mathrm{d}u=F(x).$$

故 $F(x)$为偶函数. 仅(A)入选.

解法 2　由命题 2.1.1.8 知(A)中函数为偶函数，因为 $t[f(t)+f(-t)]$ 为奇函数；而(B)中函数为奇函数，因为 $t[f(-t)-f(-t)]$ 为偶函数；(C)中函数也为奇函数，因为 $f(t^2)$ 为偶函数；而 $f^2(t)$ 无法判定其奇偶性，因而(D)中函数不一定是偶函数.

题型八　奇、偶函数的几个性质的应用

可导的奇、偶函数的性质常用的有下述几条：

1° 如 $f(x)$为奇(偶)函数，则 $f'(x)$为偶(奇)函数，$f''(x)$为奇(偶)函数.

2° 偶函数在对称区间间内单调性相反，而凹向相同，且拐点关于 y 轴对称；而奇函数则相反：在对称区间内单调性相同，凹向相反，且拐点关于原点对称.

3° 可导的偶函数 $f(x)$有 $f'(0)=0$，而(可导的)奇函数 $f(x)$则有 $f(0)=0$.

4° 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例 32　设 $f(x)$为偶函数，且 $f'(0)$存在，则 $f'(0)$等于

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) 2.　　(D) 0.　　(E) 1/2.

解法 1　$f(x)$为偶函数，且 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，则由偶函数的性质知必有 $f'(0)=0$. 仅(D)入选.

解法 2　因为 $f(x)$为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$对任何 x 成立，而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-(-x)}=-f'(0),$$

故 $f'(0)=0$。仅(D)入选.

例 33　若 $f(-x)=f(x)$ $(-\infty<x+\infty)$，在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在$(0,+\infty)$内有

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

解法 1　由 $f(-x)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$知，$f(x)$的图形关于 y 轴对称. 由题设有 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0, f''(x)<0$. 因为 $f(x)$的图形在$(-\infty,0)$内凸着上升。由对称性知，在$(0,+\infty)$内 $f(x)$的图形凸着下降，因而必有$f'(x)<0, f''(x)<0$. 仅(C)入选.

解法 2　由 $f(-x)=f(x)$得到

$$[f(-x)]'=-f'(-x)=f'(x),$$

$$[f(-x)]''=\{[f(-x)]'\}'=[-f'(-x)]'=-f''(-x)(-x)'=f''(-x),$$

因而有　　$$f''(-x)=f''(x).$$

当 $x\in(0,\infty)$时，有$-x\in(-\infty,0)$，由题意有 $f'(-x)>0, f''(-x)<0$，则

$$f'(x)=-f'(-x)<0,\quad f''(x)=f''(-x)<0.$$ 仅(C)入选.

例 34　下列函数中关于 y 轴对称的是

(A) $y=x^2+2x+1$. (B) $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. (C) $y=2^x-2^{-x}$.

(D) $y=2^x e^{-x}$。 (E) $y=\begin{cases}1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1+x, & -1<x\leqslant 0.\end{cases}$

解 只需找出偶函数.显然,(A)、(D)中函数为非偶函数.(E)中函数显然有 $f(-x)=f(x)$,但区间不对称,因而也不是偶函数。(B)中函数 x 与 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$均为奇函数,故其乘积 $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为偶函数,其曲线关于 y 轴对称。仅(B)入选.

2.1.2 极限

(一) 考试内容

1. 极限的概念

在这里仅给出极限的描述性定义,其精确定义从略.

1) 数列的极限

设有数列$\{x_n\}$和常数 A,如果当项数 n 无限增大时,x_n 无限接近于常数 A,则称 A 为数列$\{x_n\}$当 n 趋于无穷大时的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad \text{或} \quad x_n\to A\ (n\to\infty)。$$

这时也称数列$\{x_n\}$是收敛的,否则称该数列是发散的.

2) 函数的极限

1° $x\to x_0$ 时的函数极限 设函数 $f(x)$定义在点 x_0 的去心邻域内,A 为常数,如果 x 无限接近于点 x_0(但不到点 x_0)时函数 $f(x)$无限接近于常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 x 趋于点 x_0 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

2° $x\to\infty$时的函数的极限 设函数定义在$\{x\mid |x|>r\}$,其中 r 为一正数,A 为常数.如果当$|x|$无限变大时,虽然 $f(x)$无限接近于常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 x 趋于无穷大时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (x\to\infty)。$$

3° 左极限与右极限 如果当 x 仅从 x_0 的左(或右)侧($x<x_0$)(或 $x>x_0$)趋于x_0 时,$f(x)$无限接近于 A,则称 A 为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的左(或右)极

限，记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x_0-0)\left(=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\right)=A$$

（或 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)\left(=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right)=A$）。

类似地可定义 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时 $f(x)\to A$ 的极限概念，分别记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A。$$

左、右极限统称为单侧极限，它与极限有以下关系。

定理 2.1.2.1 极限存在的充要条件是左、右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \quad \text{当且仅当 } f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

3）函数极限的性质

命题 2.1.2.1 函数极限有以下性质：

（1）**惟一性** 若函数 $f(x)$ 有极限，则其极限值惟一，即若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=B,$$

则 $A=B$.

（2）**有界性** 若函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时有极限 A，则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域（点 x_0 除外）或在 $|x|$ 足够大时有界。

（3）**保号性** 1° 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 x_0 的某邻域（点 x_0 除外），在该邻域内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

2° 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某邻域内（点 x_0 除外），$f(x)>0$，（或 $f(x)<0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

3° 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$（或 $A<B$），则存在点 x_0 的一个邻域（点 x_0 除外），使得在此邻域内有

$$f(x)>g(x) \quad (\text{或 } f(x)<g(x)).$$

4° 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的邻域（点 x_0 除外）内满足不等式 $f(x)\leqslant g(x)$（或 $f(x)\geqslant g(x)$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则 $A\leqslant B$（或 $A\geqslant B$）.

（4）**函数极限与无穷小的关系**

$$\lim_{x\to\square} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to\square$ 时的无穷小量，这里 $x\to\square$ 表示 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$（下同）.

4）极限的运算法则

下述法则在求极限时经常用到，应很好地掌握.

定理 2.1.2.2（四则运算法则） 若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\square} g(x)$ 都存在，则

$$\lim_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to\square} f(x)\pm\lim_{x\to\square} g(x),$$

$$\lim_{x\to\square}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to\square} f(x)\cdot\lim_{x\to\square} g(x),$$

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square} f(x)}{\lim\limits_{x\to\square} g(x)}\ (\lim_{x\to\square} g(x)\neq 0).$$

值得注意的是，上述四则运算法则的前提是其多个因子的极限都存在，否则不能应用此法则。商的极限运算法则的前提除了其分子、分母极限存在以外，还要求其分母的极限不能为零.

定理 2.1.2.3（复合运算法则） 设 $f(u)$，$\varphi(x)$ 构成复合函数，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq u_0$. 又设 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

该法则的重要性在于可通过换元 $u=\varphi(x)$ 来计算极限.

定理 2.1.2.4（洛必达法则） 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} g(x)=0$（或 ∞）；

(2) 在点 x_0 的某去心邻域内（或存在正数 N，使当 $|x|>N$ 时），$f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞），则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\right)^{*\,1}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{*}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

洛必达法可用于求 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限. 对于其他类型的未定式，

---

* 记号 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\cdots$ 表示 $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ 的左边是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，其右边表示对其使用洛必达法则的结果. 记号 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\cdots$ 也表示类似含义。下同.

如$\infty \pm \infty$，$0 \cdot \infty$，1^{∞}，0^{0} 和∞^{0} 等，应先化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，再用洛必达法则求之.

5）极限存在准则与重要极限

定理 2.1.2.5 设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$在点 x_0 的邻域内（点 x_0 除外）满足不等式 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理 2.1.2.6（极限存在准则） 单调增加（或减少）且有上（或下）界的数列必有极限。

由定理 2.1.2.6 可得下述重要极限。

命题 2.1.2.2 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}$. (2.1.2.1)

6）无穷小量与无穷大量

（i）**无穷小量的定义和性质**

定义 2.1.2.2 若 x 在某一变化过程中函数 $f(x)$以零为极限，则称 $f(x)$在此变化过程中为无穷小量，简称无穷小.

定理 2.1.2.7 （1）有限多个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量；

（2）无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量；

（3）在连乘、连除的情况下可用等价无穷小代换；

（4）在极限的加、减运算中，如果各项均为无穷小，则可以去掉高阶无穷小，只保留最低阶无穷小.

如果各项趋于无穷大，只保留最高阶的无穷大.

（ii）**无穷小的比较**

定义 2.1.2.2 当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为两个无穷小量，如 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = l$，则

（1）当 $l \neq 0$ 时，称 $\beta(x)$是 $\alpha(x)$的同阶无穷小；

特别当 $l = 1$ 时，称 $\beta(x)$是 $\alpha(x)$的等价无穷小，记作 $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

（2）当 $l = 0$ 时，称 $\beta(x)$是 $\alpha(x)$的高阶无穷小，记作 $\beta(x) = o[\alpha(x)]$.

（3）当 $l = \infty$ 时，称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$高阶的无穷小.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$不存在，但非无穷大，称两个无穷小 $\beta(x)$与 $\alpha(x)$不可比较.

（iii）**无穷大量**

定义 2.1.2.3 x 在某一变化过程中，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限变大，则称 $f(x)$ 在此变化过程中为无穷大量，记作 ∞，简称无穷大.

类似地，可定义正无穷大量与负无穷大量，它们分别记作 $+\infty$，$-\infty$.

(iv) 无穷大量与无穷小量的关系

定理 2.1.2.9 无穷小量的倒数是无穷大量；无穷大量的倒数为无穷小量.

（二）考试要求

极限是研究微积分的基本分法，它贯穿于微积分理论的始终. 微积分中的一些基本概念，如连续、导数、微分、定积分、偏导数及全微分都是通过极限来定义的，虽然考试大纲中未列出极限，仍需了解极限的思想，掌握极限的性质、运算法则及其计算方法.

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　判别极限的存在性

一般根据极限的定义判别其存在性. 对于其定义要注意考察两点，一是考察自变量的趋向过程是否加了限制，即要考察趋向过程是全过程还是某个子过程。如果是后者，函数的极限存在不能推出整个函数极限的存在. 当然如果已知极限存在，自变量沿任何一个路径变化，函数极限是存在的，且是惟一的. 二是考察函数值的趋向是否一致，例如，左、右极限是否存在且相等.

例 1[1999 年 Ⅰ 12]　设 $\delta>0$，函数 f 在 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 内有意义，如果下面条件成立，则 f 在 a 点极限存在。

(A) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A, A\neq\infty$ (x 为有理数)。

(B) $f(a-0)$ 和 $f(a+0)$ 都存在，并且 f 在 a 点有定义。

(C) f 在 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 内可导。

(D) f 在 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 内连续，并且单调有界。

(E) A 为某一定数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-A}{\sqrt[3]{x}}$ 存在。

解　选项(E)中因 $\lim\limits_{x\to 0}\{[(a+x)-A]/\sqrt[3]{x}\}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0$，由命题 2.1.2.10 知，$\lim\limits_{x\to 0}[f(a+x)-A]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(a+x)=A$.

令 $a+x=t$，则 $\lim\limits_{t\to a} f(t)=A$. 仅(E)入选.

对选项(A)至(D),下举反例说明它们不正确.

1° 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$ 则 x 取有理数时,有 $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$,满足选项(A)的条件,但当 $x\to 2$(x 取任意实数趋于 2)时,$f(x)$不能在某一时刻后总无限接近于 1. 因 x 取无理数时总有 $f(x)=0$,故 $f(x)$在 $x\to 2$ 时没有极限。(A) 不正确.

2° 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0,\\ -x^2-1, & x<0\end{cases}$ 在$(0-\delta,0)$和$(0,0+\delta)$内有定义,这里取 $a=0$,且 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0-0)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0+0)=1$, $f(0)=1$ 满足选项(B)的条件,但 $f(0-0)\neq f(0+0)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。(B)也不正确。

3° $f(x)$为(2)中所设,解 $f(x)$在$(0-\delta,0)=(-1,0)$和$(0,0+\delta)=(0,1)$(这里取 $\delta=1$)内可导,但由于 $f(0+0)=1\neq f(0-0)=-1$,因而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.(C)也不正确.

4° $f(x)$为(2)中所设,仍取 $a=0$,$\delta=1$,则 $f(x)$在$(0-\delta,0)=(-1,0)$和$(0,0+\delta)=(0,1)$内都连续,且分别单调有界同样 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.(D)也不正确。

例 2 设下列极限存在,且 $f(x)$为连续函数,则能等于 $f'(6)$的极限式为

(A) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x+4)-f(2x+2)}{2-x}$.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(6+\dfrac{1}{n}\right)-f(6)\right]$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[f\left(6+\dfrac{1}{x}\right)-f(6)\right]$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2+6)-f(6)}{x^2}$.

解 本例实质是判别极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(6+\Delta x)-f(6)}{\Delta x} \qquad ①$$

的存在性问题.由(A)推不出式①中的极限存在.(B)、(D)中 Δx 分别为 $1/n$,x^2 只是 $\Delta x\to 0$ 的子过程,推不出 Δx 在任意过程中趋于零的极限。仅(C)入选.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 1\\ 3+x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 1,\\ 2x-1, & x>1,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]=$

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5.　(E) 不存在.

解　易求得　$f[g(x)]=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 1,\\ 3+(2x-1), & x>1,\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+} f[g(x)]=\lim_{x\to 1^+}[3+(2x-1)]=4,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f[g(x)]=\lim_{x\to 1^-}(-x^3)=-1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[g(x)]\neq \lim_{x\to 1^-} f[g(x)].$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]$**不存在. 仅**(E)**入选.**

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ xe^{-\frac{1}{x}}, & x<0,\end{cases}$ **则** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**不存在的原因是**

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$**和** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$**都存在,但不相等.**　(B) $f(0)$**无意义.**

(C) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$**不存在.**　(D) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$**不存在.**

(E) **左、右极限均不存在.**

解　因　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0$,　$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}}=\infty$,

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**不存在的原因是** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$**不存在. 仅**(D)**入选.**

题型二　求 $\frac{0}{0}$**型或** $\frac{\infty}{\infty}$**型极限**

法一　先化简极限式,再求极限.

下面举例介绍几种化简极限式的常用方法.

化简极限式的常用方法之一是通过恒等变形(例如有理化)暴露出分子或(与)分母中极限为零的公因子或极限为∞**的公因子。约去这些公因子后,然后再用极限四则运算法则即定理** 2.1.2.2 **求其极限.**

例 5　$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=$

(A) 1/2.　(B) 1/3.　(C) 1/4.　(D) 1/5.　(E) 1/6.

解　分子、分母同乘一个因子将无理式从分子移到分母(简称分子有理化),并分解出极限为零的公因子,约去这个公因子就可以利用极限四则运算法则求之.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\lim 1}{\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{4}.$$ **仅(C)入选.**

例 6 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}=$

(A) 1. (B) 2. (C) 1/4. (D) −1/4. (E) 5.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+3}=-\dfrac{1}{4}$. **仅(D)入选.**

例 7 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=$

(A) 12/5. (B) 13/6. (C) 14/5. (D) 15/7. (E) 16/9.

解 所求极限为 $\dfrac{0}{0}$ **型极限. 将其分子、分母同时有理化。为此将分子、分母分别同乘** $\sqrt{9+2x}+5,(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+2^2$ **得到**

$$\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+2^2]}{(\sqrt[3]{x}-2)[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+2^2](\sqrt{9+2x}+5)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)[(\sqrt[3]{x})^2+3\sqrt[3]{x}+2^2]}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}=2\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5}$$

$$=2\times\frac{\lim\limits_{x\to 8}[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4]}{\lim\limits_{x\to 8}(\sqrt{9+2x}+5)}=2\times\frac{(\sqrt[3]{8})^2+2\sqrt[3]{8}+4}{\sqrt{9+16}+5}$$

$=12/5$。**仅(A)入选.**

化简极限式的常用方法之二是利用无穷小(无穷大)性质化简(详见定理 2.1.2.7).

在连乘、连除的情况下常用下述等价无穷小代换($x\to 0$):

$$x\sim\ln(1+x)\quad \textbf{即}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\tag{2.1.2.2}$$

$$e^x-1\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a,\tag{2.1.2.3}$$

$$\log_a(1+x)\sim(1/\ln a)x,\tag{2.1.2.4}$$

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim x/n\quad (n=2,3,\cdots),\tag{2.1.2.5}$$

$$(1+x)^\lambda-1\sim\lambda x\quad (\lambda\ \textbf{为实数}),\tag{2.1.2.6}$$

$$x-\ln(1+x)\sim x^2/2,\tag{2.1.2.7}$$

$$x^x-1\sim x\ln x。\tag{2.1.2.8}$$

例 8(条件充分性判断) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\ln(1+ax)}-\sqrt{1-\ln(1-ax)}}{x-\ln(1+x)}=-1.$

(1) $a=-1$;　　(2) $a=1$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt{1+\ln(1+ax)}-\sqrt{1-\ln(1-ax)}][\sqrt{1+\ln(1+ax)}+\sqrt{1-\ln(1-ax)}]}{[x-\ln(1+x)][\sqrt{1+\ln(1+ax)}+\sqrt{1-\ln(1-ax)}]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)+\ln(1-ax)}{x-\ln(x+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x-\ln(x+1)}.$$

再使用式(2.1.2.2)**及式**(2.1.2.7)**得到**

$$\text{原式左端}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\Delta}\frac{-a^2x^2}{x^2/2}=-a^2.$$

可见条件(1)**和条件**(2)**均充分. 仅** D **入选.**

例 9(条件充分性判断) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\ln(1+ax)]}{\ln(e^{bx}+x)}=1.$

(1) $a=2,b=1$;　　(2) $a=-1,b=-2$.

解　用等价无穷小式(2.1.2.2)**先将极限式化简,有**

$$\ln[1+\ln(1+ax)]\sim\ln(1+ax)\sim ax\ (x\to 0),$$

$$\ln(e^{bx}+x)=\ln[1+(x+e^{bx}-1)]\sim x+e^{bx}-1\ (x\to 0),$$

故　　$$\text{原式左端}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x+e^{bx}-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a}{1+be^{bx}}=\frac{a}{1+b}.$$

当条件(1)**成立时,有　原式左边**$=\dfrac{2}{1+1}=1$**,条件**(1)**充分.**

当条件(2)**成立时,有　原式左边**$=\dfrac{-1}{1-2}=1$**,条件**(2)**充分. 仅**(D)**入选.**

例 10　$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]\ (a\neq 0)=$

(A) a^2.　　(B) $a^2/2$.　　(C) $a^2/3$.　　(D) $a^2/4$.　　(E) $a^2/5$.

解法 1　先化简极限或去掉分子中高阶无穷小,保留最低阶无穷小,即

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\ln(1+ax)+a^2x^2\ln(1+ax)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a-a/(1+ax)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a+a^2x-a}{2x(1+ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2}{2(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$ **仅**(B)**入选.**

解法 2　先拆项,再分项,用等价无穷小式(2.1.2.7)**求之.**

由 $x\to 0$ 得 $x-\ln(1+x)\sim x^2/2$，$\ln(1+x)\sim x$. 因而

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2\ln(1+ax)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(ax)^2/2}{x^2}+\lim_{x\to 0}a^2\cdot ax=\frac{a^2}{2}.$$ 仅(B)入选.

化简极限式的常用方法之三是先算出极限式中极限不等于零的因子的极限.

例 11(条件充分性判断题) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[n]{2-x})}{\sqrt[n]{4-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

(1) $n=4$；　　(2) $n=2$。

解 $$\lim_{x\to 2-0}\frac{\ln(1+\sqrt[n]{2-x})}{\sqrt[n]{2-x}\sqrt[n]{2+x}}=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\lim_{x\to 2-0}\frac{\ln(1+\sqrt[n]{2-x})}{\sqrt[n]{2-x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\lim_{x\to 2-0}\frac{\sqrt[n]{2-x}}{\sqrt[n]{2-x}}=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\times 1=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}.$$

因而当 $n=4$ 时，有 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{4}}=\dfrac{1}{2^{\frac{2}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 而当 $n=2$ 时，上式不成立，故条件(1)充分，而条件(2)不充分. 仅 B 入选.

化简极限式的常用方法之四是将所求极限的函数恒等变形，例为提取公因式，拆项合并、将分子、分母同除某函数，利用对数性质变形，将幂指函数化成以 e 为底的指数函数等.

例 12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 5.

解法 1　利用对数性质先化简极限式。

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to 0}\ln(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}+\ln\lim_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\ln(\mathrm{e}+\ln\mathrm{e})]=\frac{1}{2}(1+1)=1.$$ 仅(A)入选.

解法 2　先利用对数性质化简极限式，再利用式(2.1.2.10)直接计算出结果.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]=\ln\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right]$$

$$=\ln\lim_{1/x\to\infty}\left[\left(\frac{1/x+1}{1/x-1}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\ln(e^2)^{\frac{1}{2}}=1.$$

例 13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

解法 1 将 x^x 化为 $x^x=e^{x\ln x}$，因 $\lim\limits_{x\to 1}x\ln x=0$，用等价无穷小代换得到

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x}=1.$$ 仅(A)入选.

解法 2 令 $x\ln x=t$，则 $x^x=e^t$，当 $x\to 1$ 时，有 $t\to 0$，故

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$ 仅(A)入选.

解法 3 所求极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，注意到

$$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(1+\ln x),$$

利用洛必达法则得到

$$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(1+\ln x)}{1+\ln x}=\lim_{x\to 1}e^{x\ln x}=1.$$

例 14 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{1/x}}{x+e^{1/x}}=$

(A) 1/2. (B) 1/3. (C) -1. (D) 2. (E) 3.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{1/x}=+\infty$，将分子、分母同除 $e^{1/x}$，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/e^{1/x}-1}{x/e^{1/x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$ 仅(C)入选.

化简极限式的常用方法之五是作变量代换。例如 $x\to 0$ 时，函数中含有子函数 $1/x$ 时，常作变量代换 $t=1/x$.

例 15 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-\ln(1+1/x)^{x^2}]=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 1/2.

解 利用对数性质，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\xlongequal{1/x=t}\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1-1/(1+t)}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2},$$

或由式(2.1.2.7)有

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2/2}{t^2}=\frac{1}{2}.\ \text{仅(E)入选.}$$

法二 下述几类特殊形式的$\frac{0}{0}$型的极限可先直接使用洛必达法则即定理 2.1.2.4 求之较简便.

1° 含趋于无穷大的对数函数的$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限式;

2° 含三项(或三项以上)代数和的$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限式;

3° 含变限积分的$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限式.

例 16(条件充分性判断) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x-\ln x}{\ln(1+a/x)}=1.$

(1) $a=2$; (2) $a=3$.

解 极限式中含趋于无穷大的对数函数,先用洛必达法则求之.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln x}{\ln(1+a/x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln x}{\ln(x+a)-\ln x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-1/x}{1/(x+a)-1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)(x+a)}{-a}=1.$$

上式成立,a 可为任一非零实数。条件(1)与条件(2)都充分. 仅 D 入选.

例 17(条件充分性判断) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2\ln(x-a)}{\ln(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)}=16.$

(1) $a=8$; (2) $a=4$.

解 极限式中含趋于无穷大的对数函数,先用洛必达法则求之。

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^2\ln(x-a)}{\ln(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a^+}\frac{x^2\ln(x-a)+x^2/(x-a)}{\mathrm{e}^x/(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{x[2(x-a)\ln(x-a)+x]}{(x-a)\mathrm{e}^x/\mathrm{e}^a(\mathrm{e}^{x-a}-1)}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\mathrm{e}^a(\mathrm{e}^{x-a}-1)x[2(x-a)\ln(x-a)+x]}{(x-a)\mathrm{e}^x}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\mathrm{e}^a(x-a)x[2(x-a)\ln(x-a)+x]}{\mathrm{e}^x(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a^+}[2x(x-a)\ln(x-a)+x^2]$$

$$=\lim_{x\to a^+}x^2=a^2=16。$$

（由命题 2.1.2.3(1)知 $\lim\limits_{x\to a^+}[(x-a)\ln(x-a)]=0.$）故当 $a=4$（或 $a=-4$）时所给极限式成立。条件(2)充分，条件(1)不充分. 仅 B 入选.

例 18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$

(A) -1.　(B) $-1/2$.　(C) $-1/3$.　(D) $-1/4$.　(E) $-1/5$.

解法 1　先用洛必达法则求之，再有理化得到

$$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)\Big/(2x)=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1-x-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}.\text{仅(D)入选.}$$

解法 2　接连两次使用洛必达法则，得到

$$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}/2-(1-x)^{-1/2}/2}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{-3/2}}{-2}-\frac{(1-x)^{-3/2}}{2}\right]=-\frac{1}{4}.\text{仅(D)入选.}$$

解法 3　$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x})^2-4}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times(-x^2)/2}{4x^2}=-\frac{1}{4}.\text{仅(D)入选.}$$

例 19[2001 年 Ⅱ 28]　设函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 连续，求

$$\lim_{x\to 0}\left[\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt\right]/x^2.$$

解　注意到分子的变限积分中被积函数除含积分变量外，还含有参变量（求导变量）x，应先将 x 移到积分号外，即

$$\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt=x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt,$$

则　$$\left[\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt\right]'_x=\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=\int_0^x f'(t)\,dt.$$

于是使用洛必达法则得到

$$\lim_{x\to 0}\left[\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt\right]/x^2\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt\right]'/(x^2)'$$

$$=\lim_{x\to 0}\int_0^x f'(t)\,dt/(2x)\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2}=\frac{f'(0)}{2}.$$

例 20[1998 年Ⅰ 22]　当 α 等于何值时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ 存在并且非零，再求此极限值.

解　由于 $\sqrt{1+t^4}>0$，变上限积分 $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\to+\infty$（$x\to+\infty$时）. 又因所给极限存在且非零，故 $\alpha>0$，且 x^{α} 与 $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ 在 $x\to+\infty$时是同阶无穷大. 于是可先用洛必达法则求其极限，即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^8}\times 2x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{2}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{\alpha-2}}$$

$$=\frac{2}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^8}{x^{2(\alpha-2)}}}=\frac{2}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^{2\alpha-4}}+\frac{x^8}{x^{2\alpha-4}}},$$

因而当 $2\alpha-4=8$ 即 $\alpha=6$ 时上述极限存在，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\alpha}\times 1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

题型三　求 $0\cdot\infty$ 型极限

对 $0\cdot\infty$ 型极限也像题型二那样先尽量化简极限式，然后再求极限. 如需用洛必达法则，需先将其化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限. 求时，有用到下述 $0\cdot\infty$ 型极限等于零的结论。

命题 2.1.2.3　(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$；　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^m\ln x=0(m>0)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}x^m\ln^{\alpha}x=0$ $(m>0,\alpha>0)$.

例 21　$\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{x^n}-1)\ln x=$(　　)，$n$ 为正整数.

(A) 1　　(B) 2　　(C) n　　(D) 0　　(E) ∞

解　当 $x\to0^+$ 时有 $\mathrm{e}^{x^n}-1\sim x^n$，则由命题 2.1.2.3(2)得到

$$\lim_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{x^n}-1)\ln x=\lim_{x\to0^+}x^n\ln x=0.$$ 仅(D)入选.

例 22　$\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 1/2.　　(D) e.　　(E) 1/e.

解法 1　用等价无穷小代换化简极限式得到

$$\lim_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{x}-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\xlongequal{t=1/x}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+t}=0.$$ 仅(A)入选.

解法 2 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}x[\ln(1+x)-\ln x]$

$$=\lim_{x\to0^+}x\ln(1+x)-\lim_{x\to0^+}x\ln x.$$

由命题 2.1.2.3(1)知 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$，因而

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}x\ln(1+x)=\lim_{x\to0^+}x\cdot x=\lim x^2=0.$$ 仅(A)入选.

题型四　求$\infty-\infty$型极限

$\infty-\infty$型极限不能直接利用极限四则运算法则. 一般先将它通分或有理化，然后约去极限为零的公因子，最后利用极限的四则运算法则或洛必达法则求其极限. 如果所求极限的函数不是分式，可利用函数性质(例如对数函数性质)或通过恒等变形将函数化为分式函数再用洛必达法则求之.

例 23 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 4.　　(D) ∞.　　(E) 5.

解　所求极限为$\infty-\infty$型，先通分，再用洛必达法则求之.

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-1+x}{(1-x)\ln x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1/x+1}{1/x-\ln x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+x}{1-x\ln x-x}=\infty.$$ 仅(D)入选.

例 24　求 $\lim\limits_{n\to\infty}[n^2\ln(n+1)-n^2\ln n-n]$。

解　所求极限为$\infty-\infty$型极限。为使用洛必达法则，先将其化为分式的形式，且让对数函数在分子上，于是得到

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)-1/n}{(1/n)^2}。$$

上式最右边是$\dfrac{0}{0}$型极限，但不能直接使用洛必达法则，因为 n 为离散型变量. 为此将 $1/n$ 换为连续变量 x，得到

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1/(1+x)-1}{2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}-\frac{x}{2x(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

或者利用式(2.1.2.7)得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

题型五　求幂指函数的极限

类型(一)　设 $y=f(x)^{g(x)}$，**若** $\lim f(x)=A>0$，$\lim g(x)=B$，**求** $\lim f(x)^{g(x)}$.

可按下述命题求其极限.

命题 2.1.2.4　若 $\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A>0$，$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，**其中** A,B **为常数，则**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)^{g(x)}=\left[\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\right]^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)}=A^B.$$

值得注意的是，求极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ **时函数式中各部分** $f(x)$**与** $g(x)$**是同步变化的整体.**

例 25　$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=$

(A) e.　　(B) e^2.　　(C) e+1.　　(D) e^3.　　(E) e+2.

解　利用命题 2.1.2.4 **求之. 由**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

得
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{x}{\ln(1+x)}}=\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}}$$
$$=e^1=e.$$ **仅(A)入选.**

在命题 2.1.2.4 **中，当** A **或(和)** B **不是常数，或者** A **不大于零时，上述命题不成立. 因而不能通过计算底和指数的极限求出幂指函数的极限. 例如** $1^\infty,0^0,\infty^0$ **型的极限不能用它来计算。下面讨论** $1^\infty,0^0,\infty^0$ **型极限的求法.**

类型(二)　求 0^0 **型、**∞^0 **型极限。**

常用换底法即利用恒等式 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ **将其化为** $0\cdot\infty$**型极限，再用洛必达法则求之.**

例 26　$\lim_{x\to 0}[\ln(e^x-x)]^x=$

(A) 0.　　(B) e.　　(C) 1/e.　　(D) 1.　　(E) ∞.

解
$$\lim_{x\to 0}[\ln(e^x-x)]^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln[\ln(e^x-x)]},$$

而
$$\lim_{x\to 0} x\ln\ln(e^x-x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln(e^x-x)}{1/x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(e^x-x)\cdot(e^x-x)(-1/x^2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2(e^x-1)}{(e^x-x)\ln(e^x-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1\times\ln(e^x-x)}\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2(e^x-x)}{e^x-1}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\times 1}{x}=-\lim_{x\to 0}(3x)=0,$$

故原极限$=e^0=1$. **仅**(D)**入选**.

例 27 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln+\dfrac{1}{x}\right)^x=$

(A) 0. (B) 1. (C) e. (D) 1/e. (E) ∞.

解
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\ln+\frac{1}{x}\right)^x},$$

而
$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(1/x)}{1/x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1/x^2}{-(1/x)(1/x^2)\ln(1/x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=0.$$

故原极限$=e^0=1$. **仅**(B)**入选**.

类型(三) 求 1^∞ 型极限。

1^∞ 型极限求法较多,下面分别举例介绍.

法一 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 求之.

上极限的一般形式为
$$\lim_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,\qquad(2.1.2.9)$$

注意上式左端的结构特点:第一,所求极限的函数为幂指函数;第二,其指数为无穷(趋于无穷大),底数由两项所组成,一项是 1,另一项是无穷小(趋于零);第三,无穷小所在的项(底数中的加项)与无穷大所在的项(指数)互为倒数. 至于自变量 x 的极限过程没有具体要求,只要使 $\varphi(x)\to 0$ 即可. 此外,易看出式(2.1.2.9)中的极限是 1^∞ 型极限.

例 28 [1997 年 Ⅰ 23] **求极限** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

解 利用重要极限求之。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}\left[(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}/\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{-1}/\mathrm{e}=\mathrm{e}^{-2}。$$

法二　利用命题 2.1.2.4 求之。

例 29　极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}[1+\ln(1+x)]^{\ln x}=$

(A) 5.　　(B) 4.　　(C) 3.　　(D) 2.　　(E) 1.

解

$$\lim_{x\to 0^+}[1+\ln(1+x)]^{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left\{\left[1+\ln(1+x)\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}\ln(1+x)\ln x}\right\}$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0^+}\left[1+\ln(1+x)\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)\ln x}$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0^+}\left[1+\ln(1+x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}\right]\right\}^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^0=1。$$

法三　利用换底法求之。

这同本题型类型(一)使用的方法一样.

1^∞ 型极限,其一般形式 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}$**,其中** $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=1$**,** $\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$**,将其恒等变形为**

$$\lim_{x\to\square}u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln u(x)},$$

而 $\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln u(x)=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\ln u(x)}{1/v(x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)$**,然后利用洛必达法则求之.**

例 30　$\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}=$

(A) e^{-3}.　　(B) e^{-4}.　　(C) e^{-5}.　　(D) e^{-2}.　　(E) e^{3}.

解　用换底法求之.原式左边可改写成

$$\text{原式左边}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{\ln(1-x)}},$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{\ln(1-x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{1+\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}=-2,$$

故原式左边 $=\mathrm{e}^{-2}=-2$**. 仅(D)入选.**

法四　对下述三种不同形状的 1^∞ 型极限可分别利用其简化公式计算.

1° 设 a,b,c **为常数,且** $\lim\limits_{x\to\square}\varphi(x)=\infty$**,对 1^∞ 型极限** $\lim\limits_{x\to\square}\left(\dfrac{\varphi(x)+a}{\varphi(x)+b}\right)^{\varphi(x)\pm c}$ **可用下述命题简化计算。**

命题 2.1.2.5 设 a,b,c 为常数，且 $\lim\limits_{x\to\square}\varphi(x)=\infty$，则

$$\lim_{x\to\square}\left(\frac{\varphi(x)+a}{\varphi(x)+b}\right)^{\varphi(x)\pm c}=\mathrm{e}^{a-b}. \tag{2.1.2.10}$$

值得注意的是，式(2.1.2.10)x 的极限过程使 $\varphi(x)\to\infty$，且三处的变量即分子、分母与指数中的变量部分完全相同，均为 $\varphi(x)$.

在式(2.1.2.10)中，左边幂指函数形式的极限是考试中出现频率较高的题型. 利用上述命题，只需心算即可写出其极限结果，因而上述公式具有简便、实用、有效的优点，应熟记.

例 31(条件充分性判断) $f(t)=\lim\limits_{x\to 0}t\left(\dfrac{x-kt}{x}\right)^{x}$ 的二阶导数 $f''(t)=4(t-1)\mathrm{e}^{-2t}$。

(1) $k=-2$；　　(2) $k=2$.

解 由式(2.1.2.10)先求出 $f(t)$的表示式

$$f(t)=t\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-kt}{x-0}\right)^{x}=t\mathrm{e}^{-kt}.$$

然后在上式两端对 t 求导得到

$$f'(t)=(1-kt)\mathrm{e}^{-kt},\quad f''(t)=k(kt-2)\mathrm{e}^{-kt}.$$

当 $k=-2$ 时，$f'(t)=-2(-2t-2)\mathrm{e}^{-2t}=4(t+1)\mathrm{e}^{-2t}\neq 4(t-1)\mathrm{e}^{-2t}$。条件(1)不充分.

当 $k=2$ 时，$f'(t)=2(2t-2)\mathrm{e}^{-2t}=4(t-1)\mathrm{e}^{-2t}$。条件(2)充分. 仅 B 入选.

例 32(条件充分性判断) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+k}\right)^{2x}=\mathrm{e}^{2}$.

(1) $k=-2$；　　(2) $k=-3$.

解 由式(2.1.2.10)即得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+k}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+2k}\right)^{2x}=\mathrm{e}^{-2-2k}=\mathrm{e}^{2(-1-k)}.$$

当条件(1)成立时，有 $\mathrm{e}^{2(-1-k)}=\mathrm{e}^{2(-1+2)}=\mathrm{e}^{2}$。条件(1)充分。

当条件(2)成立时，有 $\mathrm{e}^{2(-1-k)}=\mathrm{e}^{2(-1+3)}=\mathrm{e}^{4}\neq\mathrm{e}^{2}$. 条件(2)不充分。仅 A 入选.

2° 计算 1^{∞} 型极限 $\lim\limits_{x\to\square}[1+\varphi(x)]^{v(x)}$，其 $\lim\limits_{x\to\square}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$，可用下述命题简化计算。

命题 2.1.2.6 $\lim\limits_{x\to\square}[1+\varphi(x)]^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\varphi(x)}$，　　(2.1.2.11)

其中 $\lim\limits_{x\to\square}\varphi(x)=0,\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$。

这是因为 $[1+\varphi(x)]^{v(x)}=e^{\ln(1+\varphi(x)]^{v(x)}}=e^{v(x)\ln[1+\varphi(x)]}$,

故 $\lim\limits_{x\to\square}[1+\varphi(x)]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln[1+\varphi(x)]}=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\,\varphi(x)}$。

(**因** $\ln[1+\varphi(x)]\sim\varphi(x),\varphi(x)\to0$.)

例 33[1997 **年** Ⅰ 13] $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{2/x}=$

(A) 1。 (B) 0。 (C) e^2。 (D) e^3。 (E) e^6。

解法 1 **由式**(2.1.2.11)**即得**

$$\lim_{x\to\square}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}(3x\cdot12/x)}=e^6.$$ **仅**(E)**入选**.

解法 2 **利用重要极限式**(2.1.1.1)**求之**.

$$\text{**原式**}=\lim_{x\to0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{3\times2}=e^6.$$ **仅**(E)**入选**.

例 34 $\lim\limits_{x\to0^+}[1+\ln(1-x)]^{\ln x}=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

解 **原式由式**(2.1.2.11)**可改写成**

$$\text{**原式**}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln x\ln(1-x)}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}.$$

由命题 2.1.2.3(1) **有** $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$。**原式**$=e^0=1$. **仅**(A)**入选**.

3° **计算** 1^∞ **型极限** $\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}$,**其中** $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=1,\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$,**可用下述命题简化计算**.

命题 2.1.2.7 **设** $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=1,\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$,**则**

$$\lim_{x\to\square}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)[u(x)-1]}。\qquad(2.1.2.12)$$

这是因为 $\ln u(x)=\ln\{1+[u(x)-1]\}\sim[u(x)-1][u(x)-1\to0]$,

故 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}\ln u(x)^{v(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)[u(x)-1]}$.

例 35 $a>0,b>0$ **为常数,求** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{b}{x}}$.

解 **所求极限** 1^∞ **型未定式.由式**(2.1.2.12)**得到**

$$\text{**原式**}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\cdot\frac{3}{x}},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}-1\right)\cdot\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b^x-1}{x}\right)$

$$=\frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln b}{x}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln(ab)\quad(\textbf{利用式}(2.1.2.3)).$$

故 $$\textbf{原式}=e^{\ln\sqrt[3]{(ab)^3}}=(ab)^{3/2}.$$

注意 **一般有** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m^x}{m}\right)^{\frac{n}{x}}=(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{n}{m}}$.

例 36 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=$

(A) 0. (B) 1. (C) $1/e$. (D) e. (E) $1/\sqrt{e}$.

解 **所求极限为** 1^∞ **型,且是数列极限.先将其连续化,计算**

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^x\xlongequal{x=1/t}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right]^{1/t}.$$

由式(2.1.2.12)**即得**

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^x=e^{\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)\cdot\frac{1}{t}}.$$

而 $$\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)\cdot\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^2/2}{t^2}=-\frac{1}{2}.$$

因而原极限 $=e^{-\frac{1}{2}}$. **仅**(E)**入选.**

注意 **例** 36 **如使用洛必达法则求解,要多次使用,计算量很大.**

例 37 **函数** $f(x)$ **在** $x=a$ **点可导,且** $f'(a)=3$, $f(a)=2$, **则** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=$

(A) $e^{3/2}$. (B) $e^{2/3}$. (C) e^3. (D) e^2. (E) 1.

解 **所求极限为** 1^∞ **型未定式.利用式**(2.1.2.12)**有**

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}-1\right)\frac{1}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x)-f(a)}{x}\frac{1}{f(a)}\right]}$$

$$=e^{f'(a)/f(a)}=e^{3/2}.\ \textbf{仅}(A)\textbf{入选}。$$

法三 x **趋于无穷时的有理分式函数的极限常用下述命题求之.**

命题 2.1.2.8 **有理分式** $x\to\infty$ **时的极限有三种可能结果,即**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}a_0/b_0, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m。\end{cases}\qquad(2.1.2.13)$$

$(a_0\neq 0, b_0\neq 0。)$

式(2.1.2.13)说明，$x\to\infty$时的有理函数的极限，仅与其分子、分母中 x 的最高次幂的那一项(首项)有关，即分子中 x 最高次幂如果小于分母中 x 的最高次幂，则该分式的极限为零；如果前者大于后者，则该分式的极限不存在，即为∞；如果二者相等，则该分式的极限等于一常数，该常数为分子、分母中 x 的最高次幂所在项的系数之比.

上述结论可当公式使用.值得注意的是，命题 2.1.2.8 当 m, n 是正分数时也成立，但 x 趋于有限数时不成立.

各项趋于无穷大的多项和的极限值当然应由趋于无穷大的速度最快的项决定，因而上述命题的结论是很自然的.

例 38 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^{12}(2x+1)^8}{(3x-1)^{20}}=$

(A) $(2/3)^{10}$. (B) $(2/3)^5$. (C) $2^8/3^{20}$. (D) $2^{10}/3^{21}$. (E) $2^9/3^{21}$.

解 所求极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型的有理分式的极限。由命题 2.1.2.8 知，所求极限值为分子、分母中 x 的最高次幂所在项的系数之比，于是

原式$=2^8/3^{20}$.仅(C)入选.

题型六 求几类形式特殊的函数极限

类型(一) 求初等函数在其定义域内某点的极限。

一般可根据下述命题求之。

命题 2.1.2.9 初等函数 $f(x)$ 在其定义域 D 内某点 x_0 的极限值等于函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\quad x_0\in D.$$

这是因为初等函数在其定义域 D 内处处连续.根据函数在一点连续的定义必有上式成立.

例 39 根据 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\lg(100+x)}{a^x+\sqrt{1-x}}\right]^{\frac{1}{2}}$ 的值等于

(A) 1. (B) $\sqrt{2}$. (C) 3. (D) $\sqrt{3}$. (E) 4.

解 因函数 $f(x)=\left[\dfrac{\lg(100+x)}{a^x+\sqrt{1-x}}\right]^{\frac{1}{2}}$ 在 $x=0$ 处连续，故其极限值等于 $f(0)$，即将 $x=0$ 代入 $f(x)$ 得到

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\lg(100+x)}{a^x+\sqrt{1-x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\lg 10^2}{1+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=1.$$ 仅(A)入选.

例 40(条件充分性判断) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\ln(x^2-2x+2)}{e^{ax}+(x-1)}=e^2$.

(1) $a=-2$; (2) $a=2$.

解 因函数 $f(x)=\dfrac{x^2+\ln(x^2-2x+2)}{e^{ax}+(x-1)}$ 是初等函数,且其分母在 $x=1$ 处不等于零,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义,因而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\ln(x^2-2x+2)}{e^{ax}+(x-1)}=\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=\frac{1}{e^a}.$$

可见当条件(1)成立时,有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\ln(x^2-2x+2)}{e^{ax}+(x-1)}=\frac{1}{e^{-2}}=e^2。$$

条件(1)充分.但当 $a=2$ 时,上式不成立,条件(2)不充分.仅 A 入选.

类型(二) 求含有界但极限不存在的因式的函数极限。

常用定理 2.1.2.7(2)求之.一般,当所求极限为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的两函数乘积的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\ g(x)]$ 时,如果有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$),应注意考察 $g(x)$(或 $f(x)$)是否有界.如果有界,应利用 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\ g(x)]=0$ 求出有关极限.这时有界函数在所给的 x 的变化过程中其极限常不存在,因而不能使用极限四则运算法则求出 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\ g(x)]=0$.

例 41(条件充分性判断) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{a/x}}=0$。

(1) $a>0$; (2) $a<0$.

解 无论 a 取何值,有 $e^{a/x}>0$.因而 $1+e^{a/x}>1$,故 $\left|\dfrac{1}{1+e^{a/x}}\right|=\dfrac{1}{1+e^{a/x}}<1$,即 $\dfrac{1}{1+e^{a/x}}$ 为有界变量,又 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$,即 x 为无穷小量,由定理 2.1.2.7(2)知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{a/x}}=0$.条件(1)和条件(2)都充分.仅 D 入选.

注意 函数 $1/(1+e^{a/x})$ 为有界函数。

类型(三) 求须先考察左、右极限的函数极限。

考题中这一类极限出现较多的是含 $e^{\frac{1}{x}}$ 的极限 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$.

e^x 是常见的指数函数,它是 a^x 的特殊情况($a=e$).

含 $a^{\frac{1}{x}}$ 的函数 x 趋于零的极限，实质上是含 a^x 的函数 x 趋于无穷的极限，这只要作变量代换 $t=1/x$ 即可看出

$$\lim_{x\to 0}a^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}a^t=\lim_{x\to\infty}a^x.$$

对于 $e^{\frac{1}{x}}$，特别要注意变量 x 的变化过程是 $x\to 0^+$ 还是 $x\to 0^-$. 前者表示 $1/x\to+\infty$，$-1/x\to-\infty$；后者表示 $1/x\to-\infty$，$-1/x\to+\infty$. 在这些变化过程中 $e^{\frac{1}{x}}$ 的极限情况是各不相同的，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$. 因而 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在. 但含 $e^{\frac{1}{x}}$ 的函数当 $x\to 0$ 时不一定没有极限. 是否有极限需考察函数的左、右极限是否存在且相等来确定.

此外还可作变量代换 $t=1/x$（或 $t=e^{1/x}$）将其转化为 $t\to\infty$ 求之.

求含绝对值的函数的极限，求分段函数在分段点处的极限，求含偶次方根的函数的极限及求含取整函数的极限，一般都需先考察其左、右极限。如它们存在且相等，由定理 2.1.2.1 知该极限存在，否则其极限不存在.

例 42 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)=$

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) -1.　　(E) -2.

解法 1　求所给极限需先求左、右极限。求时，注意使用下述结果：

$$\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to-\infty}e^y=0,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}e^y=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{2/x}}+\dfrac{x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2e^x/(e^{\frac{1}{x}}+1)}{e^{2x}(1/e^{2/x}+1)}+\dfrac{x}{|x|}\right]=0+1=1,$

当 $x\to 0^-$ 时，$\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{2/x}}\to 2$，$\dfrac{x}{|x|}\to-1$，

从而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right]=1$。仅(C)入选.

解法 2　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{2/x}}\xlongequal{e^{\frac{1}{x}}=t}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2+t}{1+t^2}=0$（利用命题 2.1.2.2），

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=1$，故原式 $=0+1=1$。

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{2/x}}\xlongequal{e^{\frac{1}{x}}=t}\lim_{t\to 0^-}\frac{2+t}{1+t^2}=2,$$

而 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$，**故原式**$=2-1=1$. **仅**(C)**入选**.

例 43　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}y$，**其中** $y=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ 2^x, & x\geqslant0。\end{cases}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$；

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=2\times0=0$.

因左、右极限不存在，故极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to0^-}y=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2-1)=-1$，　$\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}2^x=1$，

其左、右极限也不相等，故其极限也不存在.

类型(四)　求含指数函数差的函数极限。

极限中含有指数函数差的因式时，求其极限有效的方法是先恒等变形，常以被减的指数函数作为公因式提出，再用公式 $e^x-1\sim x$ **或** $a^x-1\sim x\ln a$ $(x\to0)$**进行无穷小等价代换.**

如果是$\dfrac{0}{0}$**型或**$\dfrac{\infty}{\infty}$**型未定式，一般不宜一开始就使用洛必达法则.**

例 44　$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)=$(　　) $(x>0)$.

(A) 0　　(B) ∞　　(C) $\ln x$　　(D) $\ln2$　　(E) 1

解　**因极限式中含有指数函数是公因子. 先提取公因式得到**

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\,x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n+1}}\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\,\dfrac{1}{n(n+1)}\ln x=\ln x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n(n+1)}=\ln x$. **仅**(C)**入选.**

例 45(条件充分性判断)　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{a(x-1)}-e^{x-1}}{f(3-2x)-f(1)}=\dfrac{1}{8}$.

(1) $f'(1)=4$，$a=0$；　　(2) $f'(1)=-4$，$a=2$.

解　$e^{a(x-1)}-e^{x-1}=e^{x-1}\left[e^{a(x-1)-(x+1)}-1\right]$

$=e^{x-1}\left[e^{(x-1)(a-1)}-1\right]\sim(x-1)(a-1)$ $(x\to1$ **时**$)$，

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(3-2x)-f(1)}{2-2x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f[1+2(1-x)]-f(1)}{2(1-x)}=f'(1)$.

因而　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{a(x-1)}-e^{x-1}}{f(3-2x)-f(1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(a-1)}{f[1+2(1-x)]-f(1)}$

$$=\frac{1}{2}\lim\frac{a-1}{\{f[1+2(1-x)]-f(1)\}/2(x-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a-1}{f'(1)}=\frac{1}{8}.$$

当 $f'(1)=4$，$a=0$ 时上式成立。条件(1)充分.

当 $f'(1)=-4$，$a=2$ 时，上式也成立。条件(2)也充分. 仅 D 入选.

题型七　判别无穷小量与无穷大量

一般用无穷小量与无穷大量的定义判别。

例 46[2002 年Ⅰ13]　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1-\ln(2+x)}{x}=$

(A) 3/2.　　(B) 2.　　(C) 0.　　(D) ∞.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2+x)}{x}=\infty$.

因而当 $x\to0$ 时，$\dfrac{e^{2x}-1-\ln(2+x)}{x}$ 为无穷大量. 仅(D)入选.

注意　虽然分子为三项的代数和，但由于 $\lim\limits_{x\to0}[e^{2x}-1-\ln(2+x)]=-\ln2\neq0$，该极限属于 $\dfrac{\text{常数}}{\text{无穷小}}$ 型的极限，其结果是 ∞，不是未定式，不能用洛必达法则求其极限.

例 47　设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，则当 $x\to0$ 时，一定是无穷小量的变量是

(A) $xf(x)$.　　(B) $f(x)-x$.　　(C) $\dfrac{x}{f(x)}-x$.

(D) $f(x)-\dfrac{1}{x}$.　　(E) $xf(x)-x$.

解　$\lim\limits_{x\to0}xf(x)$ 为 $0\cdot\infty$ 型未定式；

$\lim\limits_{x\to0}[f(x)-x]=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}[f(x)-(1/x)]$ 为 $\infty-\infty$ 型未定式；

$\lim\limits_{x\to0}[x\,f(x)-x]$ 为 $0\cdot\infty$ 型未定式；

只有 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{x}{f(x)}-x\right]=0$，因而 $\dfrac{x}{f(x)}-x$ 为无穷小量. 仅(C)入选.

例 48　设数列 x_n，y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\,y_n=0$，则有

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.

(D) 若 $1/x_n$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\,y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{1/x_n}=0$ 及 $1/x_n$ 为无穷小，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/x_n)=0$。根据命题 2.1.2.9 知，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 因而 y_n 必为无穷小. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{1/x_n}=0$ 还进一步可知 y_n 为比 $1/x_n$ 高阶的无穷小. 仅(D)入选.

例 49[2001 年Ⅱ19] 无穷大量与无穷小量的乘积必定是

(A) 无穷小量. (B) 有界变量. (C) 无穷小量.

(D) 上述(A)、(B)、(C)都有可能.

解 选项(A)未必成立，例如 $x\to0$ ($x\neq0$)时，$1/x$ 为无穷大量，但 $x\cdot(1/x)=1$ 不是无穷小量.

选项(B)未必成立. 例如 $x\to0$ ($x\neq0$)时，$1/x$ 为无穷大量，但乘积 $x\cdot(1/x^2)=1/x\to\infty$ ($x\to0$)不是有界变量。

选项(C)也不一定成立，例如 $x\to0$ ($x\neq0$)时，无穷大量 x^2 与无穷大量 $1/x$ 乘积为无穷小量，而不是无穷大量. 仅(D)入选.

题型八 比较无穷小的阶

一般用阶的比较定义即定义 2.1.2.2 比较之.

例 50(条件充分性判断) $x\to0$ 时，$x+x^2$ 与 $\ln(1+x^k)$ 是等价无穷小.

(1) $k=1$; (2) $k=2$.

解 因 $x\to0$ 时，x^2 是 x 的高阶无穷小，故 $x+x^2\sim x$，当条件(1)成立时，有 $k=1$ 于是

$$\ln(1+x^k)=\ln(1+x)\sim x\quad(x\to0),$$

因而 $x+x^2\sim x\sim\ln(1+x)$. 条件(1)充分.

但当条件(2)成立时，有 $\ln(1+x^k)=\ln(1+x^2)\sim x^2$. 显然它不与 $x+x^2$ 等价. 条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 51 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时，

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小.

(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量.

(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

解 因
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)$$
$$=\ln2+\ln3=\ln6\neq1,$$

由定义 2.1.2.2(1)知 $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价的无穷小。仅(B)入选.

例 52(条件充分性判断) $x\to 0$ 时,x^m+2x^n 是与 x^n 同阶无穷小。

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^m}=c_1\neq 0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^n}=c_2\neq 0$.

解　当条件(1)成立时,有

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^{2m}}+\sqrt{\frac{x}{x^{4m}}+\sqrt{\frac{x}{x^{8m}}}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{1-2m}+\sqrt{x^{1-4m}+\sqrt{x^{1-8m}}}}.$$

为使该极限等于 $c_1\neq 0$,必有 $m=1/2$,即当 $m=1/2$ 时有

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1-2m}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}x^{1-4m}=\lim_{x\to+\infty}x^{-1}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}x^{1-8m}=0.$$

因而当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^m}=1\neq 0$.

当条件(2)成立时,有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x}{x^{2n}}+\sqrt{\frac{x}{x^{4n}}+\sqrt{\frac{x}{x^{8n}}}}}。$$

因而当 $8n=1$ 即 $n=1/8$ 时,上式极限等于 1. 这时有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^m+2x^n}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{1/2}+2x^{1/8}}{x^{1/8}}=\lim_{x\to 0}x^{3/8}+2=2.$$

故条件(1)与条件(2)联合起来充分. 仅 C 入选.

题型九　求极限式中的待定常数

已知一极限式,求其待定常数的题型有下述几类.

类型(一)　求有理函数的极限式中的待定常数。

常用命题 2.1.2.8 **求之。**

例 53　当 $x\to\infty$ 时,$f(x)=\dfrac{px^2-2}{x+1}-3qx+5$ 为无穷小量,则常数 p,q 满足条件

(A) $p=5$ 且 $q=5/3$.　　(B) $p=5$ 或 $q=5/3$.

(C) $p=5$ 且 q 为任意实数.　　(D) p 为任意实数,$q=5/3$.

(E) $p+q=20$ $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}/3$.

解　因 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{px^2-2}{x+1}-3qx+5\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{px^2-2+(5-3qx)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(p-3q)x^2+(5-3q)x+5}{x+1}=0,$$

由式(2.1.2.13)知 $p-3q=0$，且 $5-3q=0$，即 $q=5/3$，$p=5$. 仅(A)入选.

类型(二)　确定分式函数极限式中的参数。

法一　用下述命题求之.

命题 2.1.2.10　已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=A$（$x_0$ 与 A 均为常数），且 $\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=0$），则 $P(x)$（或 $Q(x)$）必为无穷小量，即

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=0\ (\text{或}\ \lim_{x\to x_0}Q(x)=0).$$

命题 2.1.2.10 可说成分式极限存在，而分母（或分子）的极限为零，则分子（或分母）的极限也必为零.

先由命题 2.1.2.10 推知分子（或分母）的极限为零，从而建立待求参数所满足的（第一个）方程.

可有多个所求参数，可多次使用洛必达法则（每次使用都要验证是否满足洛必达法则的条件）得到多个其分子（或分母）极限为零的等式，从而得到多个待求参数所满足的多个方程，直到由这些方程能求出待求参数为止.

例 54　[2001 年 Ⅱ 21] $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2-x+1}{x+1}=b$（$a$，$b$ 都是常数），则 $a=$_____，$b=$_____.

解　因 b 为常数，且 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$，由命题 2.1.2.9 知，$\lim\limits_{x\to-1}(ax^2-x+1)=0$，即 $a-(-1)+1=0$，故 $a=-2$. 因而

$$b=\lim_{x\to-1}\frac{-2x^2-x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{-(2x-1)(x+1)}{x+1}=-\lim_{x\to-1}(2x-1)=3.$$

例 55（条件充分性判断）　$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{2x^2-3x+k}=a$（$a$ 为非零常数）.

(1) $k=2$，$a=1/3$；　　(2) $k=-2$，$a=1/5$.

解　因 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$，而 a 为非零常数，故由命题 2.1.2.9 知

$$\lim_{x\to2}(2x^2-3x+k)=8-6+k=0,\quad \text{即}\quad k=-2.$$

条件(1)不充分. 因 $k=-2$ 有

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{5}.$$

因而 $a=1/5$. 条件(2)充分。仅 B 入选.

法二　利用无穷小性质求之，即利用定理 2.1.2.7 求之.

例 56　已知 $\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln(1+x^k)/(e^{x^n}-1)]=1$，**其中** k,n **为正整数，则**

(A) $k>n$.　　(B) $k=n$.　　(C) $k<n$.

(D) $k+n\leqslant 4$.　　(E) k,n **为任意整数.**

解　先用等价无穷小代换化简所给的极限式. 利用式(2.1.2.2)**及式**(2.1.2.3)**分别得到**

$$\ln(1+x^k)\sim x^k,\quad e^{x^n}-1\sim x^n\quad (x\to 0,k,n\text{ 为正整数})。$$

因而由所给的极限式得到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^k}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}x^{k-n}=1。$$

于是 $k=n$. **仅**(B)**入选.**

例 57　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b[(1+x^2)^{1/3}-1]}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，$a,b,c,d$ **为非零常数，则**

(A) $a+4c=0,b,d$ **为任意数.**　　(B) $b+4d=0,a=c$.

(C) $a+4c=0,b=d$.　　(D) a,b,c,d **为任意数.**

解　所给极限式的分子，分母均为两项的代数和. 考虑到 $x\to 0$，**其极限值取决于** x **的最低阶的无穷小量，因而高阶无穷小均可去掉，不影响极限值.**

而　$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim(1/3)x^2$，$1-e^{-x^2}=-(e^{-x^2}-1)\sim-(-x^2)=x^2$，

$$\ln(1-2x)\sim-2x\quad (x\to 0),$$

故　　**原式**$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax_1}{c\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{c\ (-2x)}=-\dfrac{a}{2c}=2$，

即 $a+4c=0$，**而** b,d **为任意数. 仅**(A)**入选.**

题型十　已知含未知函数的一(些)极限，求与该函数有关的极限

此类题型的求法有下述几个：

1° **设法求出(或确定)未知函数(或未知函数的极限)，再求所求极限.**

2° **利用变量代换，恒等变形等方法找出所求极限与题设极限之间的关系，利用题设极限求出所求极限.**

3° **利用存在极限的变量与无穷小量的关系，即命题** 2.1.2.1(4)**求之.**

例 58[1999 **年** Ⅰ 23]　**已知** $\lim\limits_{x\to+\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[4\ f(x)+5]$，**求** $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)$.

解　(1) **若** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$**不存在，且不为**$\infty$，**则** $\lim\limits_{x\to+\infty}[4\ f(x)+5]$**不存在，也**

不为∞. 因而 $\lim\limits_{x\to+\infty}3x\,f(x)$ 不存在，也不为∞，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,f(x)$ 不存在，也不为无穷大.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[3x\,f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[4\,f(x)+5]=\infty$，因而 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,f(x)$ 也为无穷大.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}3\,x\,f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[4\,f(x)+5]=4a+5$，因而 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,f(x)=(4a+5)/3$.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}3\,x\,f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[4\,f(x)+5]=5$，因而

$$\lim_{x\to+\infty}x\,f(x)=5/3。$$

例 59 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)}{x}=$

(A) 1/2. (B) 1/3. (C) 1/4. (D) 1/5. (E) 1/6.

解法 1 令 $3x=u$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(3x)}=\lim_{u\to0}\frac{u/3}{f(u)}=\frac{1}{3}\lim_{u\to0}\frac{u}{f(u)}=2,\quad \text{即}\quad \lim_{u\to0}\frac{u}{f(u)}=6.$$

再令 $2x=t$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}\xlongequal{t=2x}2\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=2\Big/\lim_{t\to0}\frac{t}{f(t)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$ 仅(B)入选.

解法 2 令 $3x=2u$，即 $x=2u/3$，则

$$2=\lim_{x\to0}\frac{x}{f(3x)}=\lim_{u\to0}\frac{(2/3)u}{f(2u)},\quad \text{即}\quad \lim_{u\to0}\frac{u}{f(2u)}=3.$$

于是

$$\lim_{u\to0}\frac{f(2u)}{u}=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\frac{1}{3}.$$

例 60 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x^2)+x\,f(x)}{x^3}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+f(x)}{x}=$

(A) 0. (B) ∞. (C) 2. (D) 4. (E) 不能确定.

解 由题设及命题 2.1.2.1 知，有

$$\ln(1-2x^2)+x\,f(x)=2x^3+o(x^3),\quad f(x)=\frac{2x^3-\ln(1-2x^2)}{x}+o(x^2),$$

$$2x+f(x)=2x^2+2x-\frac{\ln(1-2x^2)}{x}+o(x^2),$$

$$\frac{2x+f(x)}{x}=2+2x-\frac{\ln(1-2x^2)}{x^2}+o(x),$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+f(x)}{x}=2-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x^2)}{x^2}=2-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x^2}{x^2}=4.$ 仅(D)入选.

例 61 设 $f(x)$是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1\ (a\neq 0)$，求 $\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1\ (a\neq 0)$，由命题 2.1.2.9 知 $f(2a)=f(4a)=0$. 故 $x-2a$，$x-4a$ 均为 $f(x)$的因式. 故可令

$$f(x)=A\ (x-2a)\ (x-4a)\ (x-B),$$

则
$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 2a}A\ (x-4a)\ (x-B)=-2Aa(2a-B)=1,$$

$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to 4a}A\ (x-2a)\ (x-B)=2Aa(4a-B)=1.$$

联立可解得
$$A=1/(2a^2),\quad B=3a.$$

故
$$f(x)=(x-2a)(x-4a)(x-3a)/(2a^2),$$

所以
$$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to 3a}\frac{1}{2a^2}(x-2a)\ (x-4a)=-\frac{1}{2}.$$

例 62 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$

(A) e^3.　(B) e^2.　(C) e.　(D) e^{-1}.　(E) e^{-2}.

解 由题设得到

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}=e^3.$$

因而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{x}=3,\qquad ①$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，由命题 2.1.2.9 知

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=0.$$

从而 $x\to 0$ 时，有
$$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)\sim x+\frac{f(x)}{x}.$$

由式①得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+f(x)/x}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，

则
$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x\,f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

为 1^{∞} 型极限，由式(2.1.2.11)得到

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x}{x^2}\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$$ **仅(B)入选.**

2.1.3 函数的连续性

(一)考试内容

1. 函数连续与间断的概念

1)函数的连续

定义 2.1.3.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,若有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,并称点 x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

定义 2.1.3.2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内,当自变量有改变量 $\Delta x=x-x_0$ 时,相应地函数有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 2.1.3.3 (1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,即 $f(x_0+0)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,即 $f(x_0-0)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

定理 2.1.3.1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是在该点左、右连续,即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

定义 2.1.3.4 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都连续,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,如果又在点 $x=a$ 处右连续,在点 $x=b$ 处左连续,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且称 $[a,b]$ 为 $f(x)$ 的连续区间.

2)函数的间断点

定义 2.1.3.5 如函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义,或无极限,或极限值不等于函数值 $f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断,点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

2. 连续函数的运算法则

命题 2.1.3.1(四则运算法则) 若函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x),f(x)g(x),f(x)/g(x)\ (g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

定理 2.1.3.2(复合运算)　设函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，$u_0=\varphi(x_0)$，且函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续，即有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(u_0).$$

由定理 2.1.3.2 可知，当复合函数连续时，可将极限运算与函数记号相交换，这给计算复合函数的极限带来很大方便.

定理 2.1.3.3　(1) 基本初等函数在其定义域内连续.

(2) 初等函数在其定义区间内连续.

由上定理知，初等函数的连续性也提供了初等函数求极限的一种方法.

3. 闭区间上连续函数的性质

定理 2.1.3.4(最值定理)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在其上一定有最大值和最小值.

定理 2.1.3.5(介值定理)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对介于 m 和 M 之间的任一实数 c，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.

定理 2.1.3.6(零点定理，根的存在定理)　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

(二) 考试要求

理解函数在一点连续和间断的概念，掌握关于函数连续性的一些结论及在闭区间上连续的函数的性质.

(三) 常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　讨论函数的连续性

类型(一)　判别函数在指定点的连续性。

常用定义 2.1.3.1、定义 2.1.3.2、定义 2.1.3.3 及定义 2.1.3.5 判别之.

判别绝对值函数 $|f(x)|$ 在指定点的连续性常用到下述命题。

命题 2.1.3.2　(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$ (a 为常数)；

(2) 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$.

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $f(x)$在 $x=0$ 处

(A) 连续. (B) 右连续. (C) 左连续.

(D) 左、右均不连续. (E) 连续性不确定.

解 因

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0.$$

故

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}/e^{-1/x}-1}{e^{1/x}/e^{-1/x}+1}=-1=f(0-0),$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-1/x}/e^{1/x}}{1+e^{-1/x}/e^{1/x}}=1=f(0+0)=f(0),$$

由定义 2.1.3.3 知，$f(x)$在点 $x=0$ 处右连续. 仅(B)入选.

例 2 设函数 $f(x)$在点 x_0 处的某邻域内有定义，且 x_0 为间断点，则在点 x_0 处必间断的函数是

(A) $f(x)(x-1)^2$. (B) $f(x)+(x-1)^2$. (C) $f^2(x)$.

(D) $|f(x)|$. (E) $1/f(x)$.

解 用反证法证之. 令 $h(x)=f(x)+(x-1)^2$，注意到$(x-1)^2$为初等函数，处处连续，当然在点 x_0 处也连续. 如果 $h(x)$在点 x_0 处连续，则 $f(x)=h(x)-(x-1)^2$，由命题 2.1.3.1 知 $f(x)$在点 x_0 处也连续. 这与题设矛盾. 故 $f(x)+(x-1)^2$ 必在点 x_0 处间断. 仅(B)入选.

例 3 设 $f(x)$在$[a,b]$上有定义，且在(a,b)内连续，则有

(A) 若 $f(a)f(b)<0$，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

(B) 若 $f(a)f(b)\leqslant 0$，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

(C) $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(D) $f(x)$在$[a,b]$上取得最大、最小值.

(E) 任意 $\xi\in(a,b)$必有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

解 由于 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续成立的性质都可能不成立. 因而，选项(A)、(B)、(C)、(D)都不一定成立. 而因 $f(x)$在(a,b)内连续，又 $\xi\in(a,b)$，由连续的定义 2.1.3.1 知仅(E)入选.

例 4 设 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+2}{x-1}=3$. 则 $f(1)=$

(A) -1.　　(B) -2.　　(C) -3.　　(D) 1.　　(E) 4.

解法 1　因$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，由命题 2.1.2.9 知必有$\lim\limits_{x\to1}[f(x)+2]=0$，又因 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，故$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$. 于是

$$\lim_{x\to1}f(x)=-2,\quad \text{即}\quad f(1)=-2。\text{仅(B)入选.}$$

解法 2　由命题 2.1.2.1 知有$\dfrac{f(x)+2}{x-1}=3+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to1}\alpha(x)=0$. 因而

$$f(x)+2=[3+\alpha(x)](x-1),\quad \lim_{x\to1}[f(x)+2]=0,$$

即
$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=-2。\text{仅(B)入选.}$$

例 5[1997 年Ⅱ 14]　函数 $f(x)=\begin{cases}4-x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & 1<x\leqslant3\end{cases}$ 在 $x=1$ 点间断是因为

(A) $f(x)$在点 $x=1$ 无定义.

(B) $f(x)$在点 $x=1$ 的左极限不存在.

(C) $f(x)$在点 $x=1$ 的右极限不存在.

(D) $f(x)$在点 $x=1$ 的左、右极限都存在，但不相等.

(E) $f(x)$在点 $x=1$ 的极限存在，但不等于 $f(1)$.

解　在点 $x=1$ 处的左极限 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}(4-x)=3$，右极限为 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$，因 $f(1-0)\neq f(1+0)$，故 $f(x)$在点 $x=1$ 处的极限不存在. 由定义 2.1.3.5 知 $f(x)$在点 $x=1$ 处不连续。仅(D)入选.

例 6(条件充分性判断)　函数 $f(x)$在点 $x=a$ 处连续.

(1) $|f(x)|$在 $x=a$ 处连续；　　(2) $f(a)=0$.

解　条件(1)与条件(2)单独都不是充分条件。使用命题 2.1.3.2(2)知，当条件(1)与条件(2)联合起来时，由$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|=0$ 得到

$$\lim_{x\to a}f(x)=0=f(a),$$

从而知 $f(x)$在点 $x=a$ 处连续。仅(C)入选.

类型(二)　函数在某点无定义，试补充定义使函数在该点连续.

先求函数在该点的极限，如果该极限存在，再补充定义使该函数在该点的函数值等于该极限之值.

例 7　函数 $f(x)=\ln\left[\left(\dfrac{1+kx}{e^x}\right)^{\frac{m}{x}}\right]$ **在点** $x=0$ **处无定义，试补充定义** $f(0)$ **使其在点** $x=0$ **处连续.**

解　先求出 $f(x)$ **在点** $x=0$ **处的极限，即**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}\left[\ln\left(\frac{1+kx}{e^x}\right)^{\frac{m}{x}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{m}{x}[\ln(1+kx)-\ln e^x]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{mk\ln(1+kx)}{kx}-m\right]=mk\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{kx}-m\\&=m(k-1).\end{aligned}$$

这里利用了式(2.1.2.2)**.再补充定义** $f(0)=m(k-1)$ **时，由定义** 2.1.3.1 **知** $f(x)$ **在点** $x=0$ **处连续.**

例 8(**条件充分性判断**)　**函数** $f(x)$ **在点** $x=0$ **处可以重新定义，使之在该点连续.**

(1) $f(x)=\dfrac{(e^{2x}-1)(x+1)}{x^2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x\ln(1+x)}{e^x-1}$.

解　当条件(1)**成立时，有**

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(x+1)}{x^2}=2+\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty。$$

条件(1)**不充分.当条件**(2)**成立时，有**

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

故重新定义 $f(0)=0$**，则** $f(x)$ **在点** $x=0$ **处连续.仅** B **入选.**

类型(三)　求函数的连续区间。

例 9　函数在其定义域内连续的是

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.　　(B) $f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+x), & x>0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x-1, & x\geqslant 0。\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}1/|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0。\end{cases}$

解　函数 $f(x)=1/x$ **在其定义域**$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$**内连续，而**(B)、(C)、(D)**中各个分段函数在其有定义的分段点** $x=0$ **处都不连续.仅**(A)**入选.**

例 10(**条件充分性判断**)　**当** $x\neq 0$ **时，**$f(x)=(e^x)^{\frac{x}{\ln(1+x^2)}}$**，且** $f(x)$ **在**$(-\infty,+\infty)$**内连续，**

(1) $f(0)=\mathrm{e}$;　　(2) $f(0)=1$.

解　当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 为初等函数且有定义，因而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续. 下面只需考虑 $x=0$ 时的连续性.

当条件(1)成立时，有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{x})^{\frac{x}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2}}=\mathrm{e}=f(0),$$

因而 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。条件(1)充分。显然，当条件(2)成立时，由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}\neq f(0)=1,$$

$f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 条件(2)不充分。仅 A 入选.

题型二　讨论极限函数的连续性

类型(一)　讨论以 n 为极限变量的极限函数的连续性.

以 x 为参变量，以自变量 n 的无限变化趋势(即 $n\to\infty$)的极限所定义的函数 $f(x)$，即

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}g(x,n)\qquad(2.1.3.1)$$

称为极限函数. 为讨论 $f(x)$ 的连续性，应先求出极限，得到仅用 x 表示的函数，一般为分段函数. 为求出这分段函数，观察出分段点是关键，其标准就是能求出上面极限.

下面讨论 $g(x,n)$ 中与极限变量 n 有关的项仅为 $x^{h(n)}$ 时，式(2.1.3.1)中极限的求法，其中 $h(n)$ 为 n 的多项式函数.

因在 $n\to\infty$ 的极限过程中底数 x 是定值，因而 $x^{h(n)}$ 为指数函数，根据指数函数的性质知，常分 $|x|<1$，$|x|=1$，$|x|>1$ 三种情况求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{h(n)}$. 事实上，由于当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}1/x^{n}=0$；当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{n}=0$. 利用它们易求出 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x,n)$，从而求出 $f(x)$ 的表示式，$|x|=1$ 为其分段点.

例 11　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

解　先求分段函数 $f(x)$ 的表示式.

(1) 当 $|x|=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})=0$.

(2) 当 $|x|<1$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(x^{n})^{2}=0$，故

$$f(x)=x\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=x.$$

(3) 当 $|x|>1$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/x^{2n})=0$，故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x\,\frac{1/x^{2n}-1}{1/x^{2n}+1}=x\lim_{n\to\infty}\frac{1/x^{2n}-1}{1/x^{2n}+1}=-x,$$

所以
$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1.\end{cases}$$

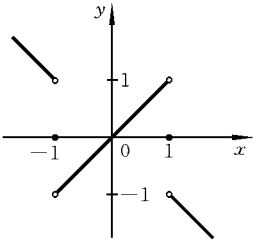


图 2.1.3.1

显然，$f(x)$在区间$(-\infty,-1),(1,+\infty)$及$-1<x<1$内连续，而在点$x=\pm1$处，有

$$\begin{aligned}f(-1-0)&=\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)\\&=1\neq f(-1)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(1+0)&=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)\\&=-1\neq f(1)=0.\end{aligned}$$

故在点$x=\pm1$处$f(x)$不连续，其连续区间为$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$，$x=\pm1$为其间断点，其图形如图 2.1.3.1 所示.

类型(二)　讨论以连续变量为极限变量的极限函数$f(x)=\lim_{t\to x}g(x,t)$的连续性.

同类型(一)一样先求出其极限。如果$g(x,t)$中与极限变量t有关的项为$a^{h(t,x)}$，其中a为常数，应以满足$h(x,t)=0$即$a^{h(t,x)}=1$的x之值x_0为分段点，分$x=x_0$，$x>x_0$，$x<x_0$三种情况分别求出$f(x)$的表示式，然后再讨论其连续性.

例 12　讨论函数$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x}{2+x^2-\mathrm{e}^{tx}}$的连续性.

解　极限函数中与连续型变量t有关的项为$\mathrm{e}^{h(t,x)}=\mathrm{e}^{tx}$，于是应由$\mathrm{e}^{tx}=1$，即$tx=0$的$x$之值$x=0$为分段点，分下列三种情况求出$f(x)$：

当$x=0$时，$f(x)=0$；

当$x<0$时，$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{tx}=0$，故$f(x)=\frac{x}{2+x^2}$；

当$x>0$时，$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{tx}=\infty$，故$f(x)=0$.

所以
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant0,\\ \dfrac{x}{2+x^2}, & x<0.\end{cases}$$

因$f(0+0)=f(0-0)=f(0)$，故$f(x)$在点$x=0$处连续，因而$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

例 13 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x+(x-\mathrm{e})\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}}{1+(x-\mathrm{e})\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+k}}$ $(k\leqslant\mathrm{e},x>0)$，求函数 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$，并讨论 $g(x)$ 的连续性.

解 先求 $f(x)$. 因极限式中 $\mathrm{e}^{h(x,t)}=\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}=\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t}$. 令 $(x-\mathrm{e})t=0$ 得到 $x=\mathrm{e}$. 于是应分 $x=\mathrm{e}$，$x<\mathrm{e}$，$x>\mathrm{e}$ 三种情况求出极限.

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}=+\infty$，$f(x)=\mathrm{e}^{x-k}$；

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}=0$，$f(x)=\ln x$；

当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(\mathrm{e})=1$.

所以
$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-k}, & x>\mathrm{e},\\ 1, & x=\mathrm{e},\\ \ln x, & 0<x<\mathrm{e}.\end{cases}$$

下面求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$：

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$y=\mathrm{e}^{x-k}$，$x=\ln y+k$，即 $y=\ln x+k$；

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$，$x=\mathrm{e}^{y}$，即 $y=\mathrm{e}^{x}$；

当 $x=\mathrm{e}$ 时，$y=1$，$x=\mathrm{e}$，即 $y=\mathrm{e}$.

所以
$$g(x)=\begin{cases}\ln x+k, & 1<x<+\infty,\\ \mathrm{e}^{x}, & -\infty<x\leqslant 1.\end{cases}$$

$g(x)$ 在各自分段开区间对应的初等函数连续，只考虑点 $x=1$ 处的连续性.

由
$$\lim_{x\to1^{+}}f(x)=k=\lim_{x\to1^{-}}f(x)=\mathrm{e}=f(1)$$
知，当 $k=\mathrm{e}$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，当 $k\neq\mathrm{e}$ 时，$g(x)$ 在 $x=1$ 处间断.

题型三　用零点定理讨论方程根的存在性

例 14 讨论 c 为何值时，方程 $x^{3}-3x+c=0$ 在 $[0,1]$ 上有实根、无实根.

解 令 $f(x)=x^{3}-3x+c$，因 $f(0)=c$，$f(1)=c-2$，当 $f(0)f(1)<0$ 时有实根，于是可由
$$\begin{cases}f(0)\geqslant0,\\ f(1)\leqslant0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(0)\leqslant0,\\ f(1)\geqslant0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}c\geqslant0,\\ c\leqslant2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}c\leqslant0,\\ c\geqslant2.\end{cases}$$
前者的解为 $0\leqslant c\leqslant2$，后者无解，故当 $0\leqslant c\leqslant2$ 时方程在 $[0,1]$ 上有实根，当 c 为其他情况无实根.

例 15 方程 $x^{3}-3x=1$ 在下列区间中至少存在一个实根的区间是

(A) $(1,2)$.　　(B) $(0,1)$.　　(C) $(2,3)$.

(D) $(0,1/2)$.　　(E) $(-1/3,0)$.

解 令 $f(x)=x^3-3x-1$，显然 $f(x)$ 在上述开区间组成的闭区间上连续，而

$$f(-1/3)=-1/8+3/8-1<0,\quad f(0)=-1<0,\quad f(1/2)=1/8-3/2-1<0,$$
$$f(1)=1-3-1<0,\quad f(2)=8-6-1>0,\quad f(3)=27-9-1>0.$$

由定理 2.1.3.6 知，在区间 $(1,2)$ 内 $f(x)$ 至少存在一个实根.

例 16（条件充分性判断） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在且异号.

解 上述两条件单独都不充分. 联合起来利用定理 2.1.3.8（零点定理），知为充分条件. 仅 C 入选.

例 17 证明方程 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=0$ 在 $(1,2)$，$(2,3)$ 内均有惟一实根.

证 因 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$. 又 $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$. 故至少存在一根 $\xi_1\in(1,2)$ 使得 $f(\xi_1)=0$. 下面再证在 $(1,2)$ 内 $f(x)$ 只有一实根。为此需证 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内单调. 事实上，

当 $1<x_1<x_2<2$ 时，有 $x_2-1>x_1-1>0$，$\dfrac{1}{x_1-1}>\dfrac{1}{x_2-1}$；

当 $x_1-2<x_2-2<0$ 时，有 $\dfrac{1}{x_1-2}>\dfrac{1}{x_2-2}$；

当 $x_1-3<x_2-3<0$ 时，有 $\dfrac{1}{x_1-3}>\dfrac{1}{x_2-3}$。

所以 $f(x_1)=\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_1-2}+\dfrac{1}{x_3-3}>f(x_2)=\dfrac{1}{x_2-1}+\dfrac{1}{x_2-2}+\dfrac{1}{x_2-3}$，

即 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调减少，因此 $f(x)=0$ 在 $(1,2)$ 内只有一根，即 ξ_1 惟一.

同法可证在 $(2,3)$ 内 $f(x)=0$ 也只有一根 ξ_2.

习 题 2.1

（一）问题求解

1. 设 $f(x)=e^x$，且 $f(\varphi(x))=1-x$，则函数 $\varphi(x)$ 的定义域为

(A) $(-\infty,+\infty)$. (B) $(-\infty,0)$. (C) $(0,+\infty)$.

(D) $(-\infty,1)$.　　(E) $(1,+\infty)$.

2. 设 $f(x)=\ln(1+e^{-x})$,则与该函数曲线关于 $y=x$ 对称的是

(A) $y=\ln(1-e^{x})$.　　(B) $y=1+e^{x}$　　(C) $y=e^{x}-1$.

(D) $y=-\ln(e^{x}-1)$.　　(E) $y=1-e^{x}$.

3. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^{2}, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ **则** $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^{2}, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^{2}, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^{2}, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^{2}, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

4. 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调减少,则下列函数中单调增加的函数是

(A) $f^{2}(x)$.　(B) $1/f(x)$.　(C) $f(-x)$.　(D) $xf(x)$.

5. 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则

(A) **当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必为偶函数.**

(B) **当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必为奇函数.**

(C) **当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必为周期函数.**

(D) **当 $f(x)$是单调增加函数时,$F(x)$必为单调增加函数.**

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \cos x+x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\end{cases}$ **则 $f(x)$在其定义域内为**

(A) **奇函数.**　　(B) **偶函数.**

(C) **非奇非偶函数.**　　(D) **奇函数同时又为偶函数.**

7. 若函数 $f(x)=-f(-x)$ $(-\infty<x<+\infty)$,在$(0,+\infty)$内 $f'(x)>0$,且 $f''(x)>0$,则在$(-\infty,0)$内有

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1-x}{\ln(1+x)-x}=$

(A) 3.　(B) 2.　(C) 1.　(D) -1.　(E) -2.

9. [1999 **年** Ⅱ 15]　$\lim\limits_{x\to 0}(x-\int_{0}^{x}e^{t^{2}}\,dt)/x^{3}=$

(A) 1/3.　(B) $-2/3$.　(C) 1/6.　(D) $-1/6$.　(E) $-1/3$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^{x})\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$

(A)ln3. (B)ln4. (C)ln2. (D)ln6. (E)ln7.

11. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1-x)^{\ln(1+x)}=$

(A) ∞. (B) 2. (C) 1/2. (D) 0. (E) 1.

12. $\lim\limits_{x\to +0}[1+\ln(1+x)]^{\ln x}=$

(A) 0. (B) e. (C) 1. (D) e^{-1}. (E) $\sqrt{e}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x(\sqrt{x+1}-1)}=$

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) -1. (E) -2.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{3x-1}}{e^{\frac{1}{x}}+e^x}=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\sqrt{1-x}-1}=$

(A) -8. (B) -9. (C) -10. (D) -11. (E) -12.

16. [2001 年 Ⅰ 17] **设函数在** x_0 **可导,则** $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}$ **等于**

(A) $f'(x_0)$. (B) $-2f'(x_0)$. (C) ∞. (D) **不能确定.**

17. 函数 $y=\dfrac{x(x-1)\sqrt{x+1}}{x^3-1}$ **在下列自变量的趋向下,除什么过程外均为无穷小量?**

(A) $x\to 0^+$. (B) $x\to 0^-$. (C) $x\to 1^+$.

(D) $x\to +\infty$. (E) $x\to 1$.

18. [2000 年 Ⅰ 10] **设数列** $\{a_n\}$ **为无穷小量,** $\{b_n\}$ **是有界数列(对一切** n, $b_n\neq 0$**),则** $\{a_nb_n\}$

(A) **必是无穷大量.** (B) **有可能是无穷小量.**

(C) **不可能是无穷小量.** (D) **必是有界数列.**

19. 若函数 $y=f(x)$ **有** $f'(x_0)=1/2$**,则当** $\Delta x\to 0$ **时,该函数在** $x=x_0$ **处的微分** dy **是**

(A) **与** Δx **等价的无穷小.** (B) **与** Δx **同阶的无穷小.**

(C) **比** Δx **低阶的无穷小.** (D) **比** Δx **高阶的无穷小.**

20. 当 $x\to 1$ **时,** $\dfrac{1-x}{1+x}$ **与** $\ln x$ **相比是**

(A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价无穷小.

(C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小.

21. [1998 年 Ⅰ 14] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{x}+1}{x}=$

(A) $-1/2$. (B) $1/2$. (C) -1. (D) 1. (E) ∞.

22. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+bx^{3}}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^{2}})}=2$,其中 $a^{2}+c^{2}\neq 0$,则必有

(A) $b=4d$. (B) $b=-4d$. (C) $a=4c$.

(D) $a=-4c$. (E) $a=5c$.

23. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^{2})+x^{2}f(x)}{x^{4}}=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^{2}}=$

(A) 0. (B) 1. (C) $1/2$. (D) $-1/2$. (E) -1.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^{2}+x^{3})+\ln(1-x)}{\ln(1+x^{3})}=$

(A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) ∞. (E) 2.

25. $\lim\limits_{x\to 2^{+}}\dfrac{x^{2}\ln(x-2)}{\ln(e^{x}-e^{2})}=$

(A) 4. (B) $4e$. (C) $4e^{2}$. (D) $2e^{2}$. (E) e^{2}.

26. $f(x)$在点 $x=x_{0}$ 处连续是 $|f(x)|$ 在点 $x=x_{0}$ 处连续的

(A) 必要条件. (B) 充分条件. (C) 充分必要条件.

(D) 无关的条件. (E) 以上结论都不正确.

27. 设 $f(x)=\begin{cases}|x^{2}-1|/(x-1), & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则在 $x=1$ 处函数 $f(x)$

(A) 不连续. (B) 连续但不可导.

(C) 可导但导数不连续. (D) 可导且导数连续.

28. 设 $f(x)$在 $x=a$ 处连续,$\varphi(x)$在 $x=a$ 处间断,又 $f(a)\neq 0$,则

(A) $\varphi[f(x)]$在 $x=a$ 处间断. (B) $f[\varphi(x)]$在 $x=a$ 处间断.

(C) $\varphi^{2}[f(x)]$在 $x=a$ 处间断. (D) $\varphi(x)/f(x)$在 $x=a$ 处间断.

(E) $f^{2}[\varphi(x)]$在 $x=a$ 处间断.

(二) 条件充分性判断

1. 函数 $y=f(x-1)+f(x+1)$的定义域是$(1,3]$.

(1) 函数 $f(x)$的定义域为$(0,4]$; (2) 函数 $f(x)$的定义域为$[0,4)$.

2. 函数 $y=\sqrt{kx^{2}-2kx+2k+1}$定义在$(-\infty,+\infty)$上.

(1) $k>0$；　　(2) $k\geqslant 0$.

3. 函数 $y=f[x/5+2g(x)]$ 是周期函数，其中 $f(x)$，$g(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上。

(1) $f(x)$，$g(x)$ 都是以 T 为周期的函数；

(2) $f(x)$ 以 $3T$ 为周期，$g(x)$ 以 $2T$ 为周期.

4. 设 $F(x)=\int_a^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，则 $F(x)$ 是奇函数.

(1) $f(x)$ 为偶函数；　　(2) $a=0$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，当 $x>0$ 时，$f(x)+f(-x)$ 单调增加.

(1) $x<0$ 时，$f(x)+f(-x)$ 单调增加；

(2) $x<0$ 时，$f(x)+f(-x)$ 单调减少。

6. 复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

(1) $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少；

(2) $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

7. 函数 $y=f\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)-f\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$ 为奇函数.

(1) $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数；

(2) $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{x^2+x})=1$.

(1) $a=-3$；　　(2) $a=-1$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-k}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{-2}$.

(1) $k=2$；　　(2) $k=-2$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3-2\mathrm{e}^{ax})}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=0$.

(1) $a=1$；　　(2) $a=2$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7}{x^n-(x-1)^n}=\dfrac{1}{a}$.

(1) $n=8$，$a=8$；　　(2) $n=7$，$a=7$.

12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{2x^2-3x+k}=\dfrac{1}{5}$.

(1) $k=-3$；　　(2) $k=-2$.

13. $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[n]{2-x})}{\sqrt[n]{4-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

(1) $n=3$; (2) $n=4$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=3$.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)+x^2 f(x)/2}{x^4}=1$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-2$.

15. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{a}{x}-1}, & x\neq 0,\\ b+2, & x=0\end{cases}$**在点** $x=0$ **处连续.**

(1) $a<0, b=-3$; (2) $a>0, b=-3$.

16. 方程 $kx-e^{-x}=0$ **在**$(0,1)$**内有一个实根.**

(1) $k>1/e$; (2) $k<1/3$.

17. 方程 $f(x)=0$ **在**$[a,b]$**上必有实根.**

(1) $f(x)$**在**$[a,b]$**上连续**; (2) $f(a)f(b)<0$.

18. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}+(x^2-1)\sqrt[3]{1/2+ax^2}}{x^n+x^2-1}$**在**$(-\infty,+\infty)$**上连续.**

(1) $a=1/2$; (2) $a=2$.

(三) 解答题

1. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y=\dfrac{x}{x+2}$; (2) $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ x^2-1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ **求** $f[g(x)]$.

3. 设函数 $f(x)$**在**$(-\infty,+\infty)$**满足** $2f(1+x)+f(1-x)=3e^x$**,求** $f(x)$.

4. 设 f **为偶函数,**g **为奇函数,试考察下列函数的奇偶性:**

(1) $f(g)$; (2) $g(f)$; (3) $g(g)$; (4) $f(f)$.

5. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=A$**,求**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

6. 求 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^2}{(x^2+x-2)(2+e^{1/x})}$**的连续区间及间断点.**

7. 求 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+xe^{tx}}$**的连续区间和间断点.**

8. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^{-2n}}{x^{2n}+x^{-2n}}$**,试求** $f(x)$**,并求其间断点.**

2.2 一元函数微分学

2.2.1 导数与微分

（一）考试内容

导数的概念、函数的可导性与连续性的关系，基本初等函数的导数公式（不含三角函数和反三角函数），导数的四则运算，复合函数的导数，二阶导数的概念及计算，微分的概念.

（二）考试要求

理解导数、微分的概念，熟练掌握导数的求导公式、运算法则和微分的计算公式、运算法则，掌握可导与连续的关系，可导与可微的关系.

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　用导数定义求某些分式函数的极限

定义 2.2.1.1　设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内有定义，在该邻域内给自变量一个改变量 Δx，函数值有一相应的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.2.1.1}$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 点 x_0 处的导数，此时称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导. 记作

$$f'(x_0),\quad y'|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\quad \text{或}\quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}.$$

若令 $x=x_0+\Delta x$，得到导数定义的另一形式

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{2.2.1.2}$$

类型(一)　求含或可化为函数改变量的分式函数的极限。

例 1[2001 年Ⅰ(17)]　**设函数** $f(x)$**在点** x_0 **处可导,则**

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=$$

(A) $f'(x_0)$.　　(B) $-2f'(x_0)$.　　(C) ∞.　　(D) **不能确定.**

解　$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}+\frac{f(x_0-3t)-f(x_0)}{t}+\frac{2f(x_0)}{t}\right],$$

由

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=f'(x_0),$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0-3t)-f(x_0)}{t}=-3f'(x_0)$$

可知,当 $f(x_0)=0$ **时,有**

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=f'(x_0)-3f'(x_0)=-2f'(x_0).$$

当 $f(x_0)\neq 0$ **时,所给极限属于(常数/无穷小)型的极限,故为**

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=\infty.$$ **仅(D)入选.**

例 2(条件充分性判断)　$f(x)$**是定义在**$(-1,1)$**内的奇函数,**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)}{e^x-1}=-2$.

(1) $f'(0)=-2$;　　(2) $f'(0)=2$.

解　**因** $f(x)$**是**$(-1,1)$**上的奇函数,故** $f(0)=0$. **于是**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\ \frac{-x-0}{e^x-1}\right]=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(e^x-1)/x}$$

$$=f'(0)\times 1=-f'(0)=-2,$$

故 $f'(0)=2$. **条件(2)充分,而条件(1)不充分. 仅** B **入选.**

类型(二)　求含改变量的幂指数函数的极限。

这类极限的一般形式为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+\varphi(\Delta x))}{f(x_0)}\right]^{\frac{1}{\varphi(\Delta x)}}$**,常用换底的方法将其恒等变形化为差商比的形式,即**

$$e^{\ln\left\{\frac{f[x_0+\varphi(\Delta x)]}{f(x_0)}\right\}^{\frac{1}{\varphi(\Delta x)}}}=e^{\frac{\ln f[x_0+\varphi(\Delta x)]-\ln f(x_0)}{\varphi(\Delta x)}},$$

归结为求上述指数部分的极限，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln f[x_0+\varphi(\Delta x)]-\ln f(x_0)}{\varphi(\Delta x)}.$$

例 3 $f(x)$**在** $x=a$ **处可导，且** $f(a)\neq 0$**，则** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(a+1/x)}{f(a)}\right]^x=$

(A) e. (B) e^2. (C) $e^{f'(a)}$. (D) $e^{f'(a)/f(a)}$. (E) $e^{f(a)}$.

解 **所求极限属** 1^∞ **型，由式**(2.1.2.12)**得**

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+f(a+1/x)}{f(a)}-1\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(a+1/x)-f(a)}{f(a)}\cdot\frac{1}{x}\right]}$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(a+1/x)-f(a)}{f(a)}\cdot\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(a+1/x)-f(u)}{1/x}\cdot\frac{1}{f(a)}\right]$$
$$=f'(a)/f(a),$$

故所求极限为 $e^{f'(a)/f(a)}$**. 仅**(D)**入选.**

类型(三) **已知** $f'(0)=A$**(常数)，且** $f(0)=0$**. 求** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

可直接利用下述命题求之.

命题 2.2.1.1 (1) **如** $f'(0)=A$**，且** $f(0)=0$**，则**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=A\ (A\text{ 为常数}).$$

(2) **如** $f(0)=0$**，**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ (A **为常数**)**，则** $f(x)$**在点** $x=0$ **处可导，且**

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A.$$

例 4 **设函数** $f(x)$**有连续的导函数，**$f(0)=0$**，且** $f'(0)=b$**. 若**

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a(e^x-1)}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ **处连续，则常数** $A=$

(A) b. (B) a. (C) $a+b$. (D) $a-b$. (E) ab.

解 **因** $f(0)=0$**，**$f'(0)=b$**，由命题** 2.2.1.1(1)**知，有**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=b.$$

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

故 $$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}+a\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=b+a=F(0)=A,$$

即 $$A=a+b.$$ 仅(C)入选.

题型二　讨论函数在某点的可导性

常利用导数定义及导数在一点存在的充要条件讨论之. 为此先介绍有关的定义、定理及命题.

1) 左、右导数

定义 2.2.1.2　若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则该极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数，记作

$$f'_-(x_0)\quad 或\quad f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则该极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数，记作

$$f'_+(x_0)\quad 或\quad f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

左、右导数的求法除用定义外还可利用下述命题简化计算。

命题 2.2.1.2　设(1) $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta]$ $(\delta>0)$ 上连续，(2) $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在，则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$.

命题 2.2.1.3　设(1) $f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0]$ $(\delta>0)$ 上连续，(2) $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内可导，(3) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 存在，则 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$.

值得注意的是，只有上述三个条件全部得到满足时，才能使用上述命题求出右导数 $f'_+(x_0)$、左导数 $f'_-(x_0)$，否则不能使用上述命题.

讨论函数 $f(x)$ 在某点 x_0 是否可导可这样进行。

先看 $f(x)$ 在点 x_0 处是否连续，如不连续，由定理 2.2.1.2 知 $f(x)$ 在该点处必不可导.

利用导数定义讨论 $f(x)$ 在某点 x_0 处是否可导，要一看自变量趋向过程是否加了限定，即看该过程是子过程还是全过程；二看函数值的差值中是否含有讨论可导性的点的函数值；三看左、右导数是否存在，且相等.

定理 2.2.1.1 $f(x)$在点 x_0 处可导且导数为 A 的充要条件是

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A.$$

定义 2.2.1.3 若 $f(x)$在(a,b)内可导，且 $f'_+(a)$及 $f'_-(b)$都存在，则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

2）导函数

若 $f(x)$在区间(a,b)内每一点都可导，则称 $f(x)$在区间(a,b)内可导，区间内每一点与该点处的导数值构成一个新的函数，称为 $f(x)$在(a,b)内的导函数，简称导数，记作 $f'(x)$，y'，$\frac{dy}{dx}$或$\frac{df(x)}{dx}$.

3）可导与连续的关系

定理 2.2.1.2 若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，则 $f(x)$在点 x_0 处一定连续. 但其逆命题不一定成立.

事实上，若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，则极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$必存在，由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$ 及命题 2.1.2.10 知必有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. 因而 $f(x)$在点 x_0 处连续. 但 $f(x)$在点 x_0 处连续只说明，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，而当 Δy 的无穷小的阶低于 Δx 时，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$即不存在，这时 $f(x)$在点 x_0 处不可导. 只有 Δy 与 Δx 是同阶无穷小或 Δy 是比 Δx 高阶无穷小时，$f(x)$在点 x_0 处才可导.

例 5 设 $f(x)$在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+1/h)-f(a)]$存在.

(B) $\lim\limits_{h\to 0}[f(a+2h)-f(a+h)]/h$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a-h)]/(2h)$存在.

(D) $\lim\limits_{h\to 0}[f(a)-f(a-h)]/h$ 存在.

解 选项(A) 中极限是

$$\lim_{h\to+\infty}[f(a+1/h)-f(a)]\Big/\frac{1}{h}\xlongequal{\Delta x=1/h}\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},$$

它只说明 $f(x)$在 $x=a$ 处的右导数存在，因而不能充当充分条件. 选项(B)、(C)中分子两点函数的差均与函数 $f(x)$在 $x=a$ 处的值无关，因而这两个极限存在与否与 $f(x)$在点 $x=a$ 处的值无关，这样可能出现下述两极限均存在但函数 $f(x)$在 $x=a$ 处不连续的现象.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 显然在 $x=0$ 处不连续，因而不可导，但(B)中极限存在，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{h}=0,$$

故(B)不能作为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分条件.

再如，取 $f(x)$ 为偶函数，$f(x)=\begin{cases}\cos(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 显然在点 $x=0$ 处不连续，当然不可导. 但(C)中极限却存在，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(1/h)-\cos(-1/h)}{2h}=0.$$

因而(C)也不能作为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分条件.

只有(D)中极限可作为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分条件，事实上，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$=f'(a).$$ 仅(D)入选。

例 6(条件充分性判断)　函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导.

(1) $f(x)$ 是 $(-1,1)$ 内的奇函数；　(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在.

解　易知条件(1)与条件(2)单独都不充分. 但当条件(1)、(2)同时成立时，由条件(1)有 $f(0)=0$，再由条件(2)及命题 2.2.1.1(2)即知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。仅 C 入选.

例 7(条件充分性判断)　函数 $|f(x)|$ 在点 x_0 处可导.

(1) $f'(x_0)>0$；　(2) $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)=0$.

解　条件(1)不充分，例如函数 $f(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数 $f'(0)=1>0$，但 $|f(x)|=|x|$ 在点 $x=0$ 处导数不存在.

若条件(2)成立，利用命题 2.1.3.2(2)，由

$$0=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\right|=0. \qquad ①$$

利用 $|f(x)|$ 在点 x_0 处可导的定义，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|f(x_0+\Delta x)|-|f(x_0)|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|f(x_0+\Delta x)|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|f(x_0+\Delta x)|}{|\Delta x|}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\right|\frac{|\Delta x|}{\Delta x}。$$

因为 $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta x}\right|<1$，由式①知上式极限为零. 因而函数 $|f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且导数为零. 条件(2)充分. 仅 B 入选.

题型三　讨论几类形式特殊的函数的可导性

类型(一)　讨论分段函数的可导性及其导函数的连续性。

1° 讨论分段函数的可导性，关键在于讨论在分段点的可导性. 因为在分段点的两侧一般为初等函数，在定义区间是可导的. 若分段函数在其分段点不连续，则此函数在其分段点必不可导. 如果连续，可用导数定义或可导的充要条件讨论之；若分段函数在分段点两侧的表示式不同用可导的充要条件即定理 2.2.1.1 讨论之；若在分段点两侧的表示式相同，就用导数定义式(2.2.1.1)或式(2.2.1.2)讨论之.

2° 讨论分段函数的导函数在分段点 x_0 的连续性的步骤是：

先求出 $x=x_0$ 时 $f'(x)$ 的表示式，再求出极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$，则 $f'(x)$ 在分段点 x_0 处连续，否则不连续.

例 8[2000 年 Ⅱ 26]　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos(1/x), & 0<x<1,\\ x, & -1<x\leqslant 0\end{cases}$ 的连续性与可导性.

解　函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 内连续可导。下面讨论在分段点 $x=0$ 处是否连续与可导.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cos(1/x)=0$，这是因为 $x\to 0^+$ 时，x^2 为无穷小量，$\cos(1/x)$ 为有界变量，因而 $x\to 0^+$ 时，$x^2\cos(1/x)$ 为无穷小量，故

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\cos(1/x)=0,\quad \text{即}\quad f(0+0)=0.$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0=f(0-0)$，因 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 因

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\cos(1/x)=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 9[1999 年 Ⅰ 24] 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $g(0)=g'(0)=0$，讨论导函数 $f'(x)$ 在哪个区间内连续.

解 先求 $f'(x)$。当 $x\neq 0$ 时，因 $g(x)$ 有二阶连续导数，故 $f(x)$ 可导，且

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{x}\right]'=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时，由式(2.2.1.2)有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}.$$

因 $g''(x)$ 在 $x=0$ 附近连续，故 $g(x)$，$g'(x)$ 在 $x=0$ 附近必连续，又 $g(0)=0$，上式为 $\frac{0}{0}$ 型，可用洛必达法则求其极限，即

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}g''(x)。$$

因 $g''(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}[g''(x)/2]=g''(0)/2$. 因而

$$f'(x)=\begin{cases}[xg'(x)-g(x)]/x^2, & x\neq 0,\\ g''(0)/2, & x=0.\end{cases}$$

下证 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 事实上，因

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)+g'(x)-g'(x)}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{2}=\frac{g''(0)}{2}=f'(0),$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

类型(二) 讨论两函数乘积在指定点的可导性。

常用导数定义或可导的充要条件讨论之.

例 10 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的

(A) 充分必要条件. (B) 必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

解 用可导的充分必要条件判别之. 为此求出 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左、右导数，即

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|(1+\Delta x)^3-1|\varphi(1+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\{[(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)+1]\varphi(1+\Delta x)\}=3\varphi(1);$$
$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|(1+\Delta x)^3-1|\varphi(1+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}-\{[(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)+1]\varphi(1+\Delta x)\}=-3\varphi(1).$$

因当且仅当 $f'_+(1)=f'_-(1)$，**即** $3\varphi(1)=-3\varphi(1)$，**亦即** $\varphi(1)=0$ **时，**$f(x)$ **在点** $x=1$ **处可导. 仅**(A)**入选.**

类型(三)　已知 $f(x+y)$**或** $f(xy)$**满足一定条件，讨论** $f(x)$**的可导性.**

这里 $f(x+y)$**或** $f(xy)$**满足一定条件常由** $f(x)$**所满足的等式给出. 为用定义讨论** $f(x)$**的可导性，常取自变量的改变量** $\Delta x=y$，**讨论** $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}$**是否存在.**

例 11　设 $f(x)$，$g(x)$**在**$(-\infty,+\infty)$**上有定义，且满足方程** $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$，**又** $f(x)$，$g(x)$**在** $x=0$ **可导，**$f(0)=g'(0)=0$，$g(0)=f'(0)=1$，**则** $f'(x)=$

(A) $g(x)$.　　(B) $f(x)g(x)$.　　(C) $xf(x)$.

(D) $xg(x)$.　　(E) $x^2g(x)$.

解　由形如 $f(x+y)$**的函数求** $f'(x)$，**可用导数定义求之。**

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)[g(y)-g(0)]}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{g(x)[f(y)-f(0)]}{y}$$
$$=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)=g(x).$$ **仅**(A)**入选.**

题型四　求一元函数的导数

先将基本初等函数的求导公式，导数的四则运算法则及二阶导数的概念、计算方法表述于下。

1) 基本初等函数的求导公式

1° $y=c$ (c **为常数**)，$y'=0$.

2° $y=x^\alpha$，$y'=\alpha x^{\alpha-1}$.

3° $y=a^x$，$y'=a^x\ln a$，**特别** $y=e^x$，$y'=e^x$.

4° $y=\log_a x$，$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$，**特别** $y=\ln x$，$y'=\dfrac{1}{x}$.

2）导数的四则运算法则

设函数 $u(x)$，$v(x)$**可导，则**

1° $[cu(x)]'=cu'(x)$（c **为常数**）；

2° $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

3° $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

4° $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

由导数的运算法则可得下述常用的重要结果，应记住。

定理 2.2.1.3　可导的奇函数的导数为偶函数，可导的偶函数的导数为奇函数.

定理 2.2.1.4　可导的周期函数的导函数是具有相同周期的周期函数.

命题 2.2.1.4　函数 $y=\ln|x|$，**则** $y'=(\ln|x|)'=1/x$.

3）二阶导数的概念及计算

如果函数 $y=f(x)$**的导数** $f'(x)$**在点** x **处可导，则称导函数** $f'(x)$**在点** x **处的导数为函数** $f(x)$**在点** x **处的二阶导数，记作** y''，$f''(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$**或**$\dfrac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

由上定义可知，$y=f(x)$**的二阶导数就是对** $f(x)$**求两次导数（更高阶导数的内容在** MBA **大纲中不作要求）.**

类型（一）　求复合函数的导数。

复合函数的求导法则

定理 2.2.1.5　设函数 $u=\varphi(x)$**在点** x **处可导，而函数** $y=f(u)$**在相应的点** $u=\varphi(x)$**处可导，则复合函数** $y=f[u(x)]$**在点** x **处可导，且**

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad \text{或}\quad y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

求复合函数导数时，要一层一层地计算，不要漏层，每一层都可以使用如下的公式

$$(\text{复合函数})'_x=(\text{复合函数})'_{\text{中间变量}}\times(\text{中间变量})'_x.$$

因而求导前首先要将复合函数分解（在头脑里分解）成基本初等函数或者简单函数，这里简单函数是指用基本初等函数的求导公式和求导的四则运算法则可直接求出导数的函数. 此外对较复杂的复合函数还可利用微分形式不变性及微分的运算法则先求出微分，再由此微分即可求得其导数.

为求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$**的二阶导数，先求出其一阶导数** $y'_x=f'(u)\varphi'(x)$，**对此一阶导数，再求一次导数，即得** y **的二阶导数.**

例 12[2003 年 Ⅱ 6](**条件充分性判断**) 设 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$,则$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}$.

(1) $f(x)=-x^2/2$; (2) $f(x)=\ln x$.

解 条件(1)成立时,有 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2x^2}$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=-\frac{d[1/(2x^2)]}{dx}=\frac{1}{x^3}\neq-\frac{1}{x}。$$

条件(1)不充分. 当条件(2)成立时,$f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(-\ln x)}{dx}=-\frac{d\ln x}{dx}=-\frac{1}{x}.$$

条件(2)充分. 仅 B 入选.

例 13[2001 年 Ⅱ 16] 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,并且 $f(x)\neq0$,$y=\ln|f(x)|$,则 y'等于

(A) $\frac{f'(x)}{f(x)}$. (B) $\frac{f'(x)}{|f(x)|}$. (C) $\frac{|f'(x)|}{f(x)}$. (D) $\frac{|f'(x)|}{|f(x)|}$.

解法 1 若 $f(x)>0$,则 $\ln|f(x)|=\ln f(x)$,易求得

$$y'=[\ln|f(x)|]'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

若 $f(x)<0$,则$|f(x)|=-f(x)>0$,$\ln|f(x)|=\ln[-f(x)]$,易求得

$y'=(\ln[-f(x)])'=\frac{[-f(x)]'}{-f(x)}=-\frac{-f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$. 仅(A)入选.

解法 2 由命题 2.2.1.4 知$(\ln|f(x)|)'_{f(x)}=\frac{1}{f(x)}$,则

$$y'=[\ln|f(x)|]'_x=\frac{d(\ln|f(x)|)}{df(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$ 仅(A)入选.

类型(二) 求分段函数的导数.

求分段函数以及含绝对值或形如 $\max\{\cdot\}$,$\min\{\cdot\}$的函数的导数均可按分段函数求导的方法求导. 求导时,在分段开区间可用求导公式求导,在分段点应通过左、右导数判断在该点是否可导. 如可导,再由右、左导数确定其导数值.

例 14 设函数 $y=\max\{-1-x,0,x^3\}$,求 y'_x.

解 函数 $y=\max\{-1-x,0,x^3\}$属于可化为分段函数的函数,先化为分段函数. 为此,先令$-1-x=0$,得到 $x=-1$ 为一个分段点,再令 $x^3=0$,得另一分段点 $x_2=0$. 于是

当 $x\leqslant -1$ 时，有 $-1-x\geqslant 0, x^3\leqslant -1$，故 $y=\max\{-1-x,0,x^3\}=-1-x$；

当 $-1<x<0$ 时，有 $-1-x<0, x^3<0$，故 $y=\max\{-1-x,0,x^3\}=0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，有 $-1-x\leqslant -1\leqslant 0, x^3\geqslant 0$，故 $y=\max\{-1-x,0,x^3\}=x^3$.

于是得到所求的分段函数为

$$y=\begin{cases}-1-x, & x\leqslant -1,\\ 0, & -1<x<0,\\ x^3, & x\geqslant 0。\end{cases}\qquad ①$$

将函数化为分段函数的另一简便方法是图像法. 易画得 $y=-1-x, y=0$ 及 $y=x^3$ 的图像如图 2.2.1.1 所示，由其图像易得到分段函数 y 的表示式①. 于是

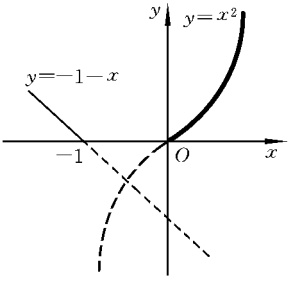


图 2.2.1.1

$$y'=\begin{cases}-1, & x<-1,\\ 0, & -1<x<0,\\ 3x^2, & x>0.\end{cases}$$

$$f'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-1-(-1+\Delta x)-0}{\Delta x}=-1,$$

$$f'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{0-0}{\Delta x}=0,\quad f'_+(-1)\neq f'_-(-1).$$

$f'(-1)$不存在。当 $x=0$ 时，$f'_+(0)=f'_-(0)=0$，故 $f'(0)=0$. 因而

$$y'=f'(x)=\begin{cases}-1, & x<-1,\\ 0, & -1<x<0,\\ 3x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

类型(三)　求指数函数的导数。

例 15[1997 年 Ⅱ 15]　函数 4^x 的一阶导数是

(A) 4^x.　(B) $x\cdot 4^{x-1}$.　(C) $4^x\ln x$.　(D) $\dfrac{4^x}{\ln 4}$.　(E) $4^x\ln 4$.

解法 1　$4^x=e^{\ln 4^x}=e^{x\ln 4}$，则

$$(4^x)'=(e^{x\ln 4})'=e^{x\ln 4}\cdot(x\ln 4)'=4^x\ln 4.$$ 仅(E)入选.

解法 2　直接使用求导公式$(a^x)'=a^x\ln a$ 即得

$$(4^x)'=4^x\ln 4.$$ 仅(E)入选.

类型(四)　求含对数函数的函数的导数。

求含有对数函数的函数的导数时，注意使用对数函数的性质先化简函数，再行求导.

常将积或商的对数化成对数之和或对数之差，将以 a 为底的对数函数化成以 e 为底的自然对数函数.

例 16(条件充分性判断)[2004 年 Ⅰ 7] 函数 $y=\ln\dfrac{3x}{1+ax}$ 的二阶导数 $y''=\dfrac{2}{(1+\sqrt{2}x)^2}-\dfrac{1}{x^2}$.

(1) $a=\sqrt{2}$；　　(2) $a=2$.

解 先利用对数函数性质化简函数 y 得到

$$y=\ln\frac{3x}{1+ax}=\ln(3x)-\ln(1+ax)=\ln 3+\ln x-\ln(1+ax),$$

再求导得到 $y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{1+ax}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a^2}{(1+ax)^2}$。

将 $a=\sqrt{2}$ 代入上式时，得到 y 的二阶导数表示式. 条件(1)充分，而条件(2)不充分. 仅 A 入选.

类型(五) 求幂指函数的导数。

对于幂指函数 $y=f(x)^{g(x)}$ $(f(x)>0)$ 可用下述两法求其导数.

法一 用换底法求之.

将 y 先改写成以 e 为底的指数函数，即

$$y=f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)},$$

然后再用复合函数的求导法则求之，即

$$y'_x=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

法二 用对数求导法求之.

先在 $y=f(x)^{g(x)}$ 两端取对数，即

$$\ln y=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x),$$

然后在上式两端对 x 求导(左边按复合函数求导法求导)得

$$\frac{1}{y}y'_x=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},$$

故 $$y'_x=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]。$$

值得注意的是，由于幂指函数既不是幂函数也不是指数函数，其导数切不可按幂函数或指数函数求导法求之.

例 17[1997 年 Ⅰ 15] $y=x^x$ 的导数是

(A) $x^x(1+\ln x)$.　　(B) $x^x\ln x$.　　(C) x^{x-1}.

(D) $x^x(1-\ln x)$.　　(E) $x^{x-1}(\ln x+1)$.

解法 1　用对数求导法求之. 在 $y=x^x$ 两端取对数得到 $\ln y=x\ln x$，则

$$y'/y=1+\ln x,\quad \text{即}\quad y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

仅(A)入选.

解法 2　用换底法求之，先将其化成以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^{\ln x^x}=\mathrm{e}^{x\ln x}$，

则
$$y'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\mathrm{e}^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(1+\ln x).$$

类型(六)　求多个因子函数连乘的函数的导数.

常用对数求导法求之.

例 18　设 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1-2x)\ln x}{1+x^2}}$，求 y'.

解　在所给函数两边取对数，利用对数函数的性质得到

$$\ln y=[\ln(1-2x)+\ln(\ln x)-\ln(1+x^2)]/3.$$

再对 x 求导数得到

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\left[\frac{-2}{1-2x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right],$$

故
$$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(1-2x)\ln x}{1+x^2}}\left(\frac{-2}{1-2x}+\frac{1}{x\ln x}-\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

题型五　求函数在指定点的导数值

类型(一)　求带绝对值符号的函数在指定点的导数值。

要先去掉绝对值符号将函数化成分段函数，归结求其分段点的导数值.

例 19　求函数 $y=x|x|$ 在点 $x=0$ 处的导数值.

解　将 y 改写成分段函数 $y(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$ 显然有 $y(0)=0$. 因

$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

$$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

故 $y'_+(0)=y'_-(0)=0$，所以 y 在点 $x=0$ 处可导，且 $y'(0)=0$.

类型(二)　求复合函数在指定点的导数值。

常用复合函数求导法则求之. 当函数的复合关系比较复杂时还可利用微分形式不变性及微分的运算法则求之. 其步骤是:先求出其微分,再利用此微分求出其导数,最后将指定点的值代入,即得所求.

例 20 已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\ln(1+x^2)$,则 $y'_x|_{x=0}=$

(A)$5\ln 2$. (B)$4\ln 3$. (C)$3\ln 2$. (D)$2\ln 2$. (E) 0.

解 显然 y 是 x 的复合函数,设 $u=\frac{3x-2}{3x+2}$,则 $y=f(u)$. 于是由复合函数求导法则得到

$$y'_x=f'_u(u)u'_x=\ln(1+u^2)\cdot\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'_x=\ln\left[1+\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\right]\cdot\frac{12}{(3x+2)^2},$$

故 $y'_x|_{x=0}=3\ln 2$. 仅(C)入选.

例 21(条件充分性判断) 函数 $y=f[3x^2f(3x)]$在点 $x=1$ 处的导数 $y'(1)=3$.

(1) $f(3)=1$, $f'(3)=-1$; (2) $f(3)=1$, $f'(3)=1/3$.

解 利用一阶微分形式的不变性,先求 y 的微分,即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=f'[3x^2f(3x)]\mathrm{d}[3x^2f(3x)]\\&=f'[3x^2f(3x)][6xf(3x)\mathrm{d}x+3x^2f'(3x)\mathrm{d}3x]\\&=f'[3x^2f(3x)][6xf(3x)\mathrm{d}x+9x^2f'(3x)\mathrm{d}x]\\&=3f'[3x^2f(3x)][2xf(3x)\mathrm{d}x+3x^2f'(3x)\mathrm{d}x],\end{aligned}$$

得
$$y'=3f'[3x^2f(3x)][2xf(3x)+3x^2f'(3x)]. \qquad ①$$

当条件(1)成立时,将 $x=1$ 代入式①得到

$$\begin{aligned}y'(1)&=3f'[3f(3)][2f(3)+3f'(3)]\\&=3f'(3)(2\times1+3\times-1)=3\times-1\times(2-3)=3.\end{aligned} \qquad ②$$

当条件(2)成立时,将 $x=1$ 代入式①,由式②得到

$$y'(1)=3f'(3)(2\times1+3\times1/3)=3\times1/3\times3=3,$$

故条件(1)与条件(2)都充分。仅 D 入选.

类型(三) 求具有特殊性质的函数在指定点的导数值.

应充分利用该函数所具有的特殊性质,为应用导数定义求其在指定点的导数值创造条件.

例 22 函数 $f(x)$满足 $f(1+x)=-f(x)$,且 $f'(0)=2$,则 $f'(2)=$

(A) 2. (B) -2. (C) 1. (D) -1. (E) 0.

解 因只知道 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,并不知道 $f(x)$在点 $x=2$ 处可导,

故不能直接在等式两端求导，然后将 $x=2$ 代入，只能用定义求之. 由定义有

$$f'(2)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)-f(2)}{x}.$$

下面反复利用所给等式求出 $f(x+2)$ 及 $f(2)$，事实上，有

$$f(x+2)=f[1+(x+1)]=-f(1+x)=-[-f(x)]=f(x),$$

$$f(2)=f(1+1)=-f(1)=-f(1+0)=-[-f(0)]=f(0),$$

故 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)-f(2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$. 仅(A)入选.

例 23(条件充分性判断)　曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-7,f(-7))$ 处的切线斜率为 2，其中 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 5 的可导的奇函数.

(1) $f'(2)=2$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3-x)+f(3)}{1-x}=2$.

解　当条件(1)成立时，因 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数且是周期为 5 的周期函数(见定理 2.2.1.3 和定理 2.2.1.4)，故

$$f'(2)=f'(-2)=f'(-2-5)=f'(-7)=2,$$

因而条件(1)充分. 当条件(2)成立时，由于

$$f(3)=f(-5+3)=f(-2)=-f(2),\ f(3-x)=f[2+(1-x)],$$

则　$$2=\lim_{x\to 1}\frac{f(3-x)+f(3)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{f[2+(1-x)]-f(2)}{1-x}=f'(2).$$

而 $f'(x)$ 也是周期为 5 的周期偶函数，故 $f'(2)=f'(-2)=f'(-7)$，因而 $f'(-7)=2$. 条件(2)也充分. 仅 D 入选.

例 24[1999 年 Ⅱ 14]　设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则 $f'(1)=$

(A) 2.　(B) -2.　(C) 3.　(D) -3.　(E) 0.

解法 1　利用乘积函数的求导法则求之. 因 $f'(x)$ 共有四项，只有对因式 $x-1$ 求导的那一项在 $x=1$ 处不等于零，其他三项均有因式 $(x-1)$，它们在 $x=1$ 处都等于零，故

$$\begin{aligned}f'(1)=f'(x)|_{x=1}&=\{(x-1)[x(x-2)(x-3)]\}'|_{x=1}\\&=(x-1)'[x(x-2)(x-3)]|_{x=1}\\&=x(x-2)(x-3)|_{x=1}\end{aligned}$$

故　$f'(1)=1\times(1-2)(1-3)=2$. 仅(A)入选.

解法 2　使用导数定义 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 求之.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}x(x-2)(x-3)$$

$=1\times(1-2)(1-3)=2.$

题型六　求一元函数的微分

定义 2.2.1.4　设函数 $y=f(x)$，如果对自变在点 x_0 处的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

其中 A 与 Δx 无关，α 是关于 Δx 的无穷小量，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微(分)，且称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=\mathrm{d}f|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

$A\Delta x$ 也称为函数改变量(函数增量) Δy 的线性主部.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.

当 $f(x)=x$ 时，可得 $f'(x)=1$. 于是

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=\mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}=\mathrm{d}x|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=1\Delta x=\Delta x.$$

因而有 $\Delta x=\mathrm{d}x$. 于是

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

由此可知，微分的计算完全可以借助导数的计算来完成.

1) 微分运算法则

1° **设 $u(x)$，$v(x)$ 可微，则**

$$\mathrm{d}[cu(x)]=c\mathrm{d}u(x),\quad \mathrm{d}(c)=0\ (c\text{ 为常数}).$$

$$\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm\mathrm{d}v(x).$$

$$\mathrm{d}[u(x)v(x)]=u(x)\mathrm{d}v(x)+v(x)\mathrm{d}u(x).$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}.$$

2° **一阶微分形式不变性。设 $y=f(u)$，则** $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$**($u$ 为自变量)，若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$(这里 u 为中间变量)，则仍有**

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u,$$

即无论 u 为自变量还是中间变量，其微分形式保持不变，故称一阶微分形式不变性. 但导数就没有此性质：若 u 为自变量，$y'=f'(u)$，但 u 若为中间变量 $u=u(x)$，则

$$y'=f'_u\cdot u'_x\neq f'(u)。$$

由上述微分运算法则易得到下述常用的基本初等函数的微分公式：

$$\mathrm{d}(c)=0\ (c\text{ 为常数}),\quad \mathrm{d}(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}\mathrm{d}u,\ \alpha\text{ 为非零常数},$$

$$d(a^u)=a^u\ln a\,du,\quad d(e^u)=e^u du,$$

$$d[\log_a(u)]=\frac{1}{u\ln a}du,\quad d(\ln|u|)=\frac{1}{u}du.$$

以上各式中的变量 u 既可以是自变量，也可以是函数.

2）微分的几何意义

当 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数纵坐标的改变量为 Δy，此时点 x_0 的切线的纵坐标的改变量为 dy.

当 $dy<\Delta y$ 时，切线在曲线下方，曲线为凹弧.

当 $dy>\Delta y$ 时，切线在曲线上方，曲线为凸弧.

例 25[2003 年 Ⅰ 10]（**条件充分性判断**） $dy|_{x=1}=(2/e)dx$.

(1) $y=xe^{-\frac{1}{x}}$；　　(2) $y=2x^2e^{-x}$.

解　当条件(1)成立时，有

$$dy=e^{-\frac{1}{x}}dx+xe^{-\frac{1}{x}}d[(-1/x)]=e^{-\frac{1}{x}}(1+1/x)dx,$$

由此可得 $dy|_{x=1}=(2/e)dx$。**条件(1)充分.**

当条件(2)成立时，有

$$dy=4xe^{-x}dx+2x^2de^{-x}=2xe^{-x}(2-x)dx,$$

由此可得 $dy|_{x=1}=(2/e)dx$。**条件(2)也充分。仅 D 入选.**

例 26　设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$_____.

解法 1　$y'=f'(\ln x)(1/x)\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)e^{f(x)}f'(x)$，

$$dy=y'dx=e^{f(x)}[(1/x)f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)]dx。$$

解法 2　$dy=d[f(\ln x)e^{f(x)}]=e^{f(x)}d[f(\ln x)]+f(\ln x)d(e^{f(x)})$

$$=e^{f(x)}[(1/x)f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)]dx.$$

例 27　设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$. 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$

(A) -1.　　(B) 0.1.　　(C) 1.　　(D) 0.5.　　(E) -0.5.

解　因 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $A\Delta x$ 称为 y 的线性主部，即为 y 的微分，于是 $dy=A\Delta x=y'dx$ 为 Δy 的线性主部，对 $y=f(x^2)$ 求微分得到

$$dy=df(x^2)=f'(x^2)dx^2=2xf'(x^2)dx.$$

由题设有 $x=-1$，$dx=\Delta x=-0.1$，$dy=0.1$，将它们代入上式得到

$0.1=2(-1)f'[(-1)^2](-0.1)$，　**即**　$f'(1)=0.5$。**仅(D)入选.**

注意　函数微分就是函数增量的线性主部. 因而例 27 是已知微分值、自变量 x 的增量，反求函数的导数值 $f'(1)$.

例 28　已知函数 $y=g(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\alpha\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)=$

(A)2π.　　(B)π.　　(C)$e^{\pi/4}$.　　(D)$\pi e^{\pi/4}$.

解　由题意和微分定义得到 $dy=[y/(1+x^2)]dx$，两端积分有

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{1+x^2},\quad \text{即}\quad \ln y=\arctan x+\ln C.$$

因而 $y=Ce^{\arctan x}$，令 $x=0$ 得到 $C=\pi$，因而 $y(1)=\pi e^{\pi/4}$. 仅(D)入选.

题型七　已知函数在某点连续或可导，求其待定常数

类型(一)　已知函数在某点连续，求其待定常数.

常利用函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的定义 2.1.3.1 和函数在点 $x=x_0$ 处连续的充要条件即定理 2.1.3.1 求之.

例 29(条件充分性判断)　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-\sqrt{x}+b}{x-4}, & x>0\text{，且 }x\neq 4,\\ 0, & x=4\end{cases}$

在点 $x=4$ 处连续.

(1)$a=1/2, b=0$;　　(2)$a=1/4, b=1$.

解　由函数 $f(x)$ 在点 $x=4$ 处连续的定义 2.1.3.1 有

$$\lim_{x\to 4}f(x)=f(4)=0,\quad \text{即}\quad \lim_{x\to 4}\frac{ax-\sqrt{x}+b}{x-4}=0。$$

因 $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$，由命题 2.1.2.10 知

$$\lim_{x\to 4}(ax-\sqrt{x}+b)=4a-\sqrt{4}+b=0。\qquad ①$$

当条件(1)与条件(2)单独分别成立时，均有式①成立，故条件(1)、条件(2)都充分. 仅 D 入选.

类型(二)　已知函数在某点可导，求其待定常数.

如果待求的常数只有一个，可根据可导的定义或其充要条件即在某点 x_0 处的左、右导数 $f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$ 存在且相等求之.

如待求的常数有两个，通常一要利用函数在某点 x_0 处可导的充要条件 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ 列出一个关于待定常数的方程；二要利用函数的可导必连续的结论. 根据一个函数在 x_0 处连续的充要条件 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ 再列出关于待定常数的另一方程. 解这两方程即可求得待定常数.

值得注意的是，函数在 x_0 处的左、右导数 $f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$ 即可按定义

2.2.1.2 求之，也可利用命题 2.2.1.2 和命题 2.2.1.3 化简求之.

例 30[1998 年 Ⅱ 15] 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & x\geqslant 1, \\ e^{1/x}, & 0<x<1, \end{cases}$ $f(x)$在 $x=1$ 处可导，则 a,b 分别等于

(A) $a=e/2,b=3e/2$. (B) $a=-e/2,b=3e/2$. (C) $a=-e/2,b$ 任意.

(D) $a=e/2,b$ 任意. (E) $a=e/2,b=e/2$.

解 由题设知 $f(x)$在 $x=1$ 处连续得到 $e=a+b$. 显然，$f(x)$分别满足命题 2.2.1.2 与命题 2.2.1.3 的三个条件，其中 $x_0=1$，则有

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax^2+b)'=\lim_{x\to 1^+}2ax=2a,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(e^{1/x})'=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x}}(-1/x^2)=-e.$$

因 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，故 $f'_+(1)=f'_-(1)$，即 $2a=-e$，故 $a=-e/2$. 因而 $b=e-a=e-(e/2)=3e/2$. 仅(B)入选.

例 31[1997 年 Ⅰ 22] 若一条二次曲线将$(-\infty,0)$内的曲线 $y=e^x$ 和$(1,+\infty)$内曲线 $y=1/x$ 连接成一条一阶可导的曲线，求定义在$[0,1]$上这条二次曲线 $y=ax^2+bx+c$.

解 依题意，即确定常数 a,b,c，使函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & -\infty<x<0, \\ ax^2+bx+c, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1/x, & 1<x<+\infty \end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上可导.

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，有 $c=1$；

由 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$，有 $a+b+c=1$。

因而当 $c=1$，且 $a+b=0$ 时 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

又由

$$f'(x)=\begin{cases} e^x, & -\infty<x<0, \\ 2ax+b, & 0<x<1, \\ -1/x^2, & 1<x<+\infty \end{cases}$$

及命题 2.2.1.2 和命题 2.2.1.3 得到

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=1=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=f'_+(0)=b,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=2a+b=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=f'_+(1)=-1.$$

解 $1=b$，$2a+b=-1$，得 $a=-1$.

则当 $a=-1,b=1,c=1$，即 $y=-x^2+x+1$ 时，$f(x)$为一阶可导函数.

例 32[2002 年 Ⅰ 27] 设函数 f 满足 $f(0)=2,f(-2)=0$，$f(x)$在 $x=-1,x=5$ 有极值，$f'(x)$是二次多项式，求 $f(x)$.

解 由 $f'(x)$是二次多项式及 $f(x)$有极值点 $x=-1,x=5$ 可知

$$f'(x)=k(x+1)(x-5),$$

其中 k 为非零常数. 对上式两端积分，可得

$$f(x)-f(0)=k\int_0^x(t+1)(t-5)\mathrm{d}t=k\int_0^x(t^2-4t-5)\mathrm{d}t=k[x^3/3-2x^2-5x],$$

即

$$f(x)=k[x^3/3-2x^2-5x]+2,$$

由 $f(-2)=0$，可得 $k=3$. 结果有

$$f(x)=x^3-6x^2-15x+2.$$

2.2.2 导数的应用

（一）考试内容

变化率与切线斜率，曲线的切线方程，函数的单调性及其判别，极值概念及其判别，函数图像的凹凸性及其判别，拐点及其判别，函数的最大值与最小值及其应用.

（二）考试要求

明确导数的几何意义、物理意义。会求解相关变化率及切线斜率有关的问题，会求切线方程，掌握函数单调性的判别方法，掌握求函数极值和最值的方法，会解简单的最值应用题，掌握函数曲线的凹凸性及拐点的判别方法.

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一 求曲线的切线方程

函数的导数 $f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$在点(x_0,y_0)处的切线斜率. 从而过曲线上的点(x_0,y_0)的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.2.2.1}$$

求曲线的切线方程有四种常见类型.

类型(一) 求过曲线 $y=f(x)$上一点$(x_0,f(x_0))$的切线方程.

这是四种类型中最简单的一种。为求出所求的切线方程，只需求出切线的斜率 $f'(x_0)$ 并将其代入切线方程(2.2.2.1)即可.

例 1 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4. 又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1,$$

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

(A) 1/2. (B) 0. (C) -1. (D) -2.

解 因 $f(x)$ 可导，故

$$-1=\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1).$$

又因 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，且 $f'(1)/2=-1$ 即 $f'(1)=-2$，由定理 2.2.1.4 知 $f'(x)$ 也是周期为 4 的周期函数，故

$$f'(5)=f'(1+4)=f'(1)=-2。$$ 仅(D)入选.

例 2[2003 年 Ⅰ 8](条件充分性判断) 曲线 $y=e^{a-x}$ 在点 $x=x_0$ 的切线方程为 $x+y=2$.

(1) $a=2,x_0=2$; (2) $a=1,x_0=1$.

解 由切线斜率为 -1 及导数的几何意义可得

$$-1=(e^{a-x})'|_{x=x_0}=-e^{a-x_0},\quad 即\quad a-x_0=0.$$

又因切点 (x_0,e^{a-x_0}) 在切线 $x+y=2$ 上，故有

$$x_0+e^{a-x_0}=2,\quad 即\quad x_0+1=2.$$

于是 $x_0=1,a=x_0=1$. 故条件(2)充分，而条件(1)不充分. 仅 B 入选.

类型(二) 过曲线 $y=f(x)$ 外一点 (a,b) $(b\neq f(a))$ 求曲线的切线方程.

设切点为 $(x_0,f(x_0))$，则切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，将点 (a,b) 代入切线方程中得到

$$b-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0). \qquad ①$$

从中解出 x_0，化为本题型类型(一)的情况求之.

若方程①的解 x_0 不惟一，则切线也不惟一. 一般有几个解相应地过点 (a,b) 就有几条切线.

例 3 过点 $(2,0)$，曲线 $y=2x-x^3$ 的切线有

(A) 一条. (B) 两条. (C) 三条. (D) 四条.

解 点 $(2,0)$ 不在该曲线 $y=2x-x^3$ 上. 于是另设切点 (x_0,y_0)，则过切点 (x_0,y_0) 的切线方程为

$$y=(2-3x_0^2)(x-x_0)+2x_0-x_0^3.$$

切线过点$(2,0)$,将其坐标代入得到

$$(2-3x_0^2)(2-x_0)+2x_0-x_0^3=0,\quad \text{即}\quad x_0^3-3x_0^2+2=0.$$

亦即 $$\begin{aligned}&(x_0^3-1)-3(x_0^2-1)\\&=(x_0-1)[x_0^2+x_0+1-3(x_0+1)]=(x_0-1)(x_0^2-2x_0-2)\\&=(x_0-1)[x-(1+\sqrt{3})][x-(1-\sqrt{3})]=0.\end{aligned}$$

解得 $x_0=1,1\pm\sqrt{3}$. 因而知曲线 $y=2x-x^3$ 过点$(2,0)$的切线有三条. 仅(C)入选.

注意　过曲线外的已知点作切线不一定只能作一条.

类型(三)　求两条曲线在某公共点处的切线方程.

求这类切线方程往往需要确定曲线中未知的常数. 为此求解这类问题时应注意利用两曲线在公共点处(切点)相切的含义. 它包含有两层意义:一是两曲线相交,因而两曲线在切点的纵坐标相等,即两曲线的函数在切点的函数值相等;二是两曲线在切点相切就是在切点斜率相等,即其导数值相等. 据此可建立两个方程求解有关诸如求未知常数、切点等有关的问题.

例 4[1997 年Ⅱ2]　曲线 $y=x^3+ax$ 与曲线 $y=bx^3+c$ 相交于点$(-1,0)$并且在该点有公切线,求 a,b,c 和公切线方程.

解　因曲线 $y=x^3+ax$ 与曲线 $y=bx^3+c$ 相交于点$(-1,0)$,故在该点函数值相等,即

$$0=(-1)^3+a(-1)=-1-a,\quad 0=-b+c,$$

故
$$a=-1,\quad b=c. \tag{①}$$

又两曲线在点$(-1,0)$相切,故在该点两曲线的公切线的斜率相等,即

$$y'|_{x=-1}=(ax+x^3)'|_{x=-1}=3x^2+a|_{x=-1}=a+3,$$

$$y'|_{x=-1}=(bx^3+c)'|_{x=-1}=3bx^2|_{x=-1}=3b,$$

故 $a+3=3b$. 由式①得到 $2=3b,b=2/3$. 于是 $b=c=2/3,a=-1$. 又因

$$y'|_{x=-1}=3x^2+a|_{x=-1}=3-1=2,$$

所以所求的切线方程为

$$y-0=2(x+1),\quad \text{即}\quad y=2(x+1).$$

例 5[2004 年Ⅰ4](条件充分性判断)　曲线 $y=2-x^2$ 与 $y=1/x$ 在点(a,b)处相切.

(1) $a=b=1$;　　(2) $a=b=2$.

解 用代入法判别之. 条件(1)成立,即 $a=b=1$ 时,点(1,1)在两曲线上,但在点(1,1)处相切的切线斜率分别为

$$k_1=y'|_{x=1}=(2-x^2)'|_{x=1}=-2,\quad k_2=y'|_{x=1}=(1/x)'|_{x=1}=-1.$$

由于 $k_1\neq k_2$,两曲线不可能在点(1,1)处相切。条件(1)不充分.

条件(2)成立,即 $a=b=2$ 时,点(2,2)不在两曲线上,更不是两曲线的交点,因而两曲线不可能在此点相切。条件(2)不充分.

另外,条件(1)与(2)联合也不充分。仅 E 入选.

类型(四) 求两条相离(不相交)曲线的公切线。

设两条相离曲线 $y=f(x)$,$y=g(x)$,所求公切线在此两曲线上的切点分别设为$(a,f(a))$,$(b,g(b))$. 如能求出 a,b,则公切线的方程即可求出. 下面建立 a,b 所满足的两方程,联立求解.

首先两切点连线的斜率即为公切线的斜率,因而有

$$f'(a)=g'(b)。\qquad①$$

另外过点$(a,f(a))$作切线方程 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$,该切线必过点$(b,g(b))$,因而该点坐标满足切线方程,于是有

$$g(b)-f(a)=f'(a)(b-a).\qquad②$$

联立式①与式②,即可求得 a 与 b,从而可求出 $f(a)$,$g(b)$. 于是可写出公切线的方程.

例 6 求曲线 $y=x^2$ 与 $y=1/x$ 的公切线方程.

解法 1 设两曲线 $y=f(x)=x^2$,$y=g(x)=1/x$,其上切点分别为(a,a^2),$(b,1/b)$,则在这两切点上的切线斜率应相等. 于是有

$$f'(a)=g'(b),\quad 即\quad 2x|_{x=a}=-1/x^2|_{x=b},$$

亦即

$$2a=-1/b^2.\qquad①$$

又过点$(a,f(a))=(a,a^2)$的切线方程为 $y-a^2=f'(a)(x-a)=2a(x-a)$. 该切线必过另一切点$(b,g(b))=(b,1/b)$. 将其坐标代入得到

$$1/b-a^2=2a(b-a).\qquad②$$

下面由式①与式②求出 a 与 b。将式①代入式②得到

$$1/b-a^2=-(1/b^2)(b-a),\quad 即\quad b-a^2b^2=a-b,b-a^2(-1/2a)=-b+a,$$

故 $b=a/4$. 将其代入式①得到 $a^3=-8$,即 $a=-2$,于是由式①得到 $b=\pm1/2$。但当 $b=1/2$ 及 $a=-2$ 时,不满足方程②,而 $b=-1/2$,$a=-2$ 满足方程②. 因而所求的公切线方程为

$$y-4=2(-2)[x-(-2)],\quad 即\quad y=-4x-4.$$

解法 2　过切点(a,a^2),$(b,1/b)$分别作切线,其方程分别为

$$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2,$$

$$y=-(x-b)/b^2+1/b=(-1/b^2)x+2/b.$$

由题意,切线相同应同时有

$$\begin{cases}2a=-1/b^2,\\-a^2=2/b,\end{cases}\quad\text{解得}\quad a=-2,\ b=-1/2,$$

从而得公切线方程为 $y=-4(x+2)+4=-4x-4$.

题型二　求解相关变化率问题

函数的导数 $f'(x)$刻画了 $f(x)$在点 x_0 处相对于自变量 x 的变化速度,即刻画了函数值随自变量变化而变化的快慢程度,因此把导数称为变化率.

根据导数是因变量关于自变量的变化率的物理意义,可利用导数求解相关变化率问题. 问题的一般提法是:在一个问题中常有几个变量,它们之间有隐含的函数关系(一般为线性关系),且同是另一变量(如时间或地点)的函数,已知其中一个变量的变化率需求另一个变量的变化率. 由于这些变化率有一定的关系,常把求解这样的问题称为求解相关变化率问题.

例 7[1999 年Ⅰ11]　如图 2.2.2.1 所示,A 为固定的一盏路灯,MN 为一垂直于 x 轴的木杆,NP 为该杆在路灯下的影子,若该杆沿 x 轴正向匀速前进,并保持与 x 轴垂直,则

(A) 点 P 作匀速前移。

(B) 点 P 前移速度逐渐减少。

(C) 点 P 前移速度逐渐增加。

(D) 点 P 前移速度先增加然后减少。

(E) 点 P 前移速度先减少然后增加。

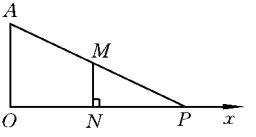


图 2.2.2.1

解　本题是相关变化率问题.

设 $ON=x$,$OP=g$,显然 x,g 均为 t 的函数. 下面先求出 x 与 g 的关系. 由$\triangle PMN\backsim\triangle PAO$(见图 2.2.2.1)得到

$$\frac{PN}{OP}=\frac{MN}{AO},\quad\text{即}\quad\frac{OP-ON}{OP}=\frac{MN}{AO},$$

由题意有 MN 及 AO 均为定值,不妨设$\dfrac{MN}{AO}=a$(定值),则$\dfrac{g-x}{g}=a$,解之得

$g=\dfrac{x}{1-a}$,故

$$\frac{dg}{dt}=\frac{1}{1-a}\frac{dx}{dt}.$$

这表明当木杆沿 x 轴匀速前行即$\frac{dx}{dt}$为一常数时，$\frac{dg}{dt}$也是一常数，即点 P 作匀速前移. 仅(A)入选.

例 8 从离水面 30 米高的岩壁上用 58 米长的绳拉船. 若用 4 米/秒的速度拉绳，求 2 秒时的船速.

解 设时刻 t 拉船的绳长为 $l(t)$，船所在位置为 $x(t)$，则

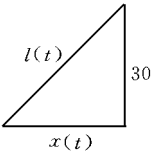


图 2.2.2.2

$$l(t)=\sqrt{30^2+x^2(t)},$$

$$\frac{dl(t)}{dt}=\frac{2xx'(t)}{2\sqrt{30^2+x^2(t)}}。\qquad①$$

为求 2 秒时的船速，需先求 2 秒时船所在的位置. 因$\frac{dl}{dt}$ $=4$(米/秒)，故在 2 秒时拉船的绳长变为 $58-2\times4=50$(米). 于是 $l(t)=50$(米)即得到 $50^2-30^2=x^2(t)|_{t=2}$，即

$$x^2(t)|_{t=2}=40^2.$$

因而将 $x^2(t)=40^2$，$l'(t)=4$ 代入式①即得

$$x'(t)=\sqrt{30^2+40^2}\times4/40=50\times4/40=5.$$

注意到船速单调减少，故 $x'(t)=-5$(米/秒).

题型三 判别函数的单调性并求其单调区间

类型(一) 判别函数的单调性。

定理 2.2.2.1 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，若 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)，则 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加(或单调减少). 反之，若 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加(或单调减少)且可导，则 $f'(x)\geqslant0$(或 $f'(x)\leqslant0$).

利用上定理讨论闭区间上定义的函数的单调性时，前提是 $f(x)$在$[a,b]$上连续.

由上定理易知利用导数讨论函数的单调性的一般方法是首先求出驻点和导数不存在的点，这些点把函数的定义域分割成几部分区间，然后在各个区间上确定一阶导数的正负号，利用上述定理判别其单调性，同时也求出了函数的单调区间. 如 $f'(x)=0$ 在$[a,b]$上无实根，则 $f(x)$在$[a,b]$上单调(a，b 可为有限数，也可为无穷大).

此外，利用函数曲线的对称性也是判断函数单调性的一个有效方法. 两曲线如关于原点对称，则在对称区间有相同的单调性；如两曲线关于 y 轴对称，则在对称区间内单调性相反.

例 9（条件充分性判断） 设 $f(x)$ 可导，$y=\dfrac{x}{f(x)}$ 在 $x>0$ 时单调增加.

(1) $x>0$ 时，$f(x)-xf'(x)>0$；

(2) $x>0$ 时，$f(x)>0$，且 $f(x)$ 单调减少.

解 当条件(1)成立时，由于没有指明 $x>0$ 时，$f(x)\neq 0$，故 $y'=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}$ 不一定成立. 从而不能保证 $y'>0$. 条件(1)不充分.

当条件(2)成立时，对任意 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)>f(x_2)$，且 $f(x_1)>0$，$f(x_2)>0$，故有 $\dfrac{x_1}{f(x_1)}<\dfrac{x_2}{f(x_2)}$，因而 $\dfrac{x}{f(x)}$ 单调增加。条件(2)充分. 仅 B 入选.

例 10 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则

(A) 对任意 x，$f'(x)>0$.　　(B) 对任意 x，$f'(-x)\leqslant 0$.

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加.　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

解法 1 因对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，有 $-x_1<-x_2$，因 $f(x)$ 单调增加，故 $f(-x_1)<f(-x_2)$，即

$$-f(-x_1)>-f(-x_2).$$

视 $-f(-x)$ 为一新函数，则对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，有 $-f(-x_1)>-f(-x_2)$，这说明 $-f(-x)$ 单调增加.

解法 2 因函数 $f(x)$ 与 $-f(-x)$ 的图形关于原点对称，而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，故 $-f(-x)$ 也单调增加.

注意 由题设得知 $f(x)$ 为单调增加后易错选为(A) 项. 这里错误的根源是把“对任意 x，$f'(x)>0$”当作 $f(x)$ 单调增加的必要条件. 事实上它只是充分条件，即当 $f(x)$ 单调增加时，$f(x)$ 有可能在原点的导数等于零. 如 $f(x)=x^3$ 为单调增加函数，但在点 $x=0$ 处有 $f'(0)=0$（参阅定理 2.2.2.1）.

例 11（条件充分性判断） 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内先单调减少，后单调增加.

(1) $f''(x)>0$，$x\in(a,b)$；　　(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内有惟一驻点.

解 由条件(2)知，存在惟一的点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$. 又由条件

(1)知，$f'(x)$在(a,b)内严格单调增加. 由此可知，当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<f'(x_0)=0$；当 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)>f'(x_0)=0$，于是 $f(x)$在(a,x_0)内单调减少，而在(x_0,b)内单调增加，故条件(1)，(2)同时成立时，条件充分，而条件(1)与条件(2)单独都不充分. 仅 C 入选.

例 12[2001 年 Ⅰ 16] 设函数 $f(x)$在(a,b)内有二阶导数，且 $f''(x)>0$，则 $f(x)$在(a,b)内

(A) 单调增加. (B) 单调减少.

(C) 先单调减少，然后单调增加. (D) 以上结论都有可能.

解 仅有 $f''(x)>0, x\in(a,b)$，不能保证只有(A)或(B)或(C)成立. 事实上，这三种情况均有可能.

例如，设 $f(x)=e^x$ 或 $f(x)=e^{-x}$ 都满足 $f''(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$. 但 $f(x)=e^x$ 为单调增加函数，$f(x)=e^{-x}$ 为单调减少函数. 而 $f(x)=x^2$ 在$(-1,1)$内满足 $f''(x)=2>0$，在$(-1,0)$内单调减少，在$(0,1)$内却单调增加. 仅(D)入选.

例 13(条件充分性判断) 函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

(1) $f'(x)>0, x\in(a,b)$； (2) $f(x)$在$[a,b]$上可导.

解 条件(1)只能保证 $f(x)$在开区间(a,b)内单调增加，只有加上条件 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(x)$才能在$[a,b]$上单调增加，而条件(2)正好保证了 $f(x)$在$[a,b]$上的连续性，因此只有条件(1)和(2)联合才是充分的. 仅 C 入选.

类型(二) 求函数的单调区间。

函数 $y=f(x)$的导函数 y'不变号的区间称为 y 的单调区间. 因而求 y 的单调区间就是求其导函数保持正号或保持负号的区间.

例 14[2001 年 Ⅰ 2] 已知函数 $f(x)=-x^3/3+bx^2+1$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 处有极值，求 $f(x)$的单调区间.

解 令 $f'(x)=-x^2+2bx=x(-x+2b)=0$ 得其驻点 $x_1=0, x_2=2b$. 由题设 $f(x)$在 $x=0$ 和 $x=2$ 处有极值，故 $x_1=0, x_2=2$ 处为其驻点，所以 $2b=2, b=1$，因而 $f(x)=-x^3/3+x^2+1$. 由 $f'(x)=x(2-x)$知，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$内单调减少；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,2)$内单调增加；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(2,+\infty)$内单调减少.

例 15[2003 年 Ⅱ 26] $f(x)=(5x-1)e^{-x}$的单调增加区间是

(A) $(6/5,+\infty)$. (B) $(-\infty,6/5)$. (C) $(1/5,+\infty)$.

(D) $(-\infty,1/5)$.　　(E) 以上结论都不正确.

解　$f'(x)=5e^{-x}-(5x-1)e^{-x}=(6-5x)e^{-x}$. 令 $f'(x)=0$ 得惟一驻点 $x_0=6/5$. 当 $x<6/5$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加；当 $x>6/5$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少。故 $f(x)$的单调增加区间$(-\infty,6/5)$. 仅(B)入选.

题型四　求一元函数的极值

定义 2.2.2.1　(1) 设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，若对该邻域内任意一点 x $(x\neq x_0)$均有 $f(x)<f(x_0)$(或 $f(x)>f(x_0)$)，则称 $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值(或极小值)，称点 x_0 为 $f(x)$的极大值点(或极小值点)。

(2) 函数的极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点.

由定义 2.2.2.1 可知极值点一定是区间的内点(因要能以 x_0 为中心组成邻域)，极值点不可能在区间的端点.

极值存在的必要条件：若 $f(x)$在点 x_0 处可导，且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0)=0$. 因此极值点只需在 $f'(x)=0$ 的点(驻点)或 $f'(x)$不存在的点中去找. 当然这些点并不一定都是极值点，可用下述各法判别.

定理 2.2.2.2(一阶导数判别法)　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$不存在，但 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续. 若 $f'(x)$在点 x_0 的两侧异号，$f(x_0)$是函数 $f(x)$的极值，且当导数符号由正变负时，$f(x_0)$是极大值，点 x_0 为 $f(x)$的极大值点；当导数符号由负变正时，$f(x_0)$为$f(x)$的极小值，点 x_0 为 $f(x)$的极小值点；若 $f(x)$在点 x_0 的两侧邻近同号，则 $f(x_0)$不是函数 $f(x)$的极值.

由上定理易知单调子区间的分界连续点一般为极值点.

定理 2.2.2.3(二阶导数判别法)　设函数 $f(x)$在点 x_0 处二阶可导，且 x_0 为驻点(即 $f'(x_0)=0$)，而 $f''(x_0)\neq 0$，则：当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$为 $f(x)$的极小值；当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$为 $f(x)$的极大值.

当 $f'(x_0)=0$，且 $f''(x_0)=0$ 时，上述判别法失效.

二阶导数判别法只适用于二阶导数存在，且不为零的点. 因而该定理有一定的局限性，但使用方便，常为首选判别极值的方法.

法一　用一阶导数、二阶导数判别法即定理 2.2.2.2、定理 2.2.2.3 求之.

利用导数求函数的极值同讨论函数的单调性一样要掌握好下述方法和步骤：

1° 用导数讨论函数性质应在开区间上进行，在定义域上函数导数大于零，不保证函数单调增加，因此讨论前应找出驻点，不可导点（尖点）及间断点用这些点把函数的定义域分割几部分区间.

2° 熟悉导数与函数性质之间的对应关系即一阶导数符号与函数单调性（增减性）的关系，这样就能在各个开区间上由一阶导数的正负号判别其增减性即单调性. 增减区间（单调区间）分界的连续点即为极值点.

3° 若 $f''(x)$易求，可根据驻点处的二阶导数的正、负号即定理 2.2.2.3 判别极值点.

例 16 求 $y=4x^3-3x^2-6x+1$ 的增减区间与极值点，并画简图.

解 由 $y'=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)=0$ 得驻点 $x_1=-1/2, x_2=1$. 于是可得表 2.2.2.1。

表 2.2.2.1

x	$(-\infty,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	极大	↘	极小	↗

从而得 $y(-1/2)=2.75$ 为极大值，$y(1)=-4$ 为极小值. 在$(-\infty,-1/2)$和$[1,+\infty)$上，$y'\geqslant 0$，函数单调增加；在$[-1/2,1]$上，$y'\leqslant 0$，函数单调减少. 简图如图 2.2.2.3 所示.

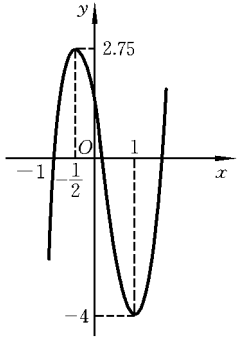


图 2.2.2.3

注意 一般，三次多项式函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$. 当 $a>0$ 时，其图形为上图所示的“N”形；如 $a<0$，则其图形为“倒 N”形. 而特殊的三次多项式 $y=x^3$，其图形为退化的“N”形.

四次多项式函数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，当 $a>0$ 时，其图形一般为“W”形.

例 17（条件充分性判断） $y=f(x)$在 x_0 点取得极大值.

(1) 当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0$；

(2) $f(x)$在点 x_0 的某邻域内连续.

解 根据定理 2.2.2.2 知，当 $f(x)$在点 x_0 处连续，且 $f'(x)$经 x_0（由小到大）两侧由正变负时，$f(x_0)$为极大值. 条件(1)、(2)联合为充分条件. 仅 C 入选.

例 18 函数 $y=\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}$ 的极值点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

解 先求出 y 的驻点及不可导点再加以判别，由

$$y'=\frac{2}{3}(x^2-4x)^{-\frac{1}{3}}(2x-4)=0.$$

得到驻点 $x=2$ 及不可导点为 $x=0, x=4$. 因求二阶导数较繁，兼之 y 有多个驻点和不可导点，应列表利用一阶导数判别法加以判别（见下表 2.2.2.2）。

表 2.2.2.2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,+\infty)$
y'	−		+		−		+

从表易看出 y' 在 $x=0,2,4$ 处，其左、右导数均变号，故 $x=0, x=2, x=4$ 均为 y 的极值点. 且 $x=0, x=4$ 为极小值点，$x=2$ 为极大值点.

注意 $f'(x), f''(x)$ 有多个零点或多个不存在的点时，应列表讨论函数的有关极值和凹凸性等方面的性质.

法二 用配方法求之。

当所求极值的函数为或可化为一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 时，可试用配方法求其极值.

例 19[1997 年 Ⅱ 31] 已知二次方程 $x^2-2ax+10x+2a^2-4a-2=0$ 有实根，求其两根之积的极值.

解法 1 由韦达定理知，已知方程的两根之积为

$$\begin{aligned} y(a)&=2a^2-4a-2=2(a^2-2a-1)=2[(a^2-2a+1)-2] \\ &=2(a-1)^2-4. \end{aligned}$$

显然当 $a=1$ 时，两根之积 $y(a)$ 取极小值，且极小值为 $y(1)=-4$.

解法 2 两根之积为 $y(a)=2a^2-4a-2$. 由 $y'=4a-4=4(a-1)=0$，得其驻点 $a=1$.

因 $a<1$ 时，$y'<0$，$a>1$ 时，$y'>0$，由一阶导数判别法即定理 2.2.2.2 知 $a=1$ 为 y 的极小值点，且极小值 $y(1)=2-4-2=-4$. 这时二次方程 $x^2-2ax+10x+2a^2-4a-2|_{a=1}=x^2-8x-4=0$ 确有两实根，这是因为其判别式

$$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times 1\times(-4)>0.$$

题型五　判别函数在某点是否取得极值

法一　利用极限的保号性和极值的定义判别之.

当题设给出一极限式时,常利用有极限的函数的保号性(见命题 2.1.2.1(3))**、函数极限与无穷小的关系(命题** 2.1.2.1(4))**和极值的定义** 2.2.2.1(1)**、一阶导数判别法或二阶导数判别法判别之.**

例 20(条件充分性判断)　$x=0$ **为函数** $f(x)$**的极大值点。**

(1) $f'(0)=0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\sqrt[3]{x^2}}=-1$.

解　条件(1)成立时,仅表示 $x=0$ **为** $f(x)$**的驻点,不一定为极值点。条件(1)不充分. 当条件(2)成立时,由极限的保号性及** $\sqrt[3]{x^2}>0$ **知在** $x=0$ **处的左右邻域** $f''(x)$**均为负值,故由二阶导数判别法即定理** 2.2.2.3 **知** $x=0$ **为** $f(x)$**的极大值点. 条件(2)充分。仅 B 入选。**

例 21(条件充分性判断)　**函数** $f(x)$**在点** $x=0$ **处有极小值。**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x^2}$;　　(2) $f'(0)$**存在.**

解　要判别点 $x=0$ **为** $f(x)$**的一个极小值点,** $f(x)$**必须在** $x=0$ **处连续,且在该点邻域内有** $f(x)\geqslant f(0)$.

由条件(1)和 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ **及命题** 2.1.2.10 **得到**

$$\lim_{x\to 0}[f(x)+1]=\lim_{x\to 0}f(x)+1=0,\quad \text{即}\quad \lim_{x\to 0}f(x)=-1.$$

当条件(2)成立时,因 $f'(0)$**存在,则** $f(x)$**在点** $x=0$ **处连续,于是**

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=-1.$$

再由条件(1)知因在点 $x=0$ **的某一去心邻域内有** $x^2>0$**,所以在此去心邻域内也有**

$$f(x)+1>0,\quad \text{即}\quad f(x)>-1=f(0)。$$

由定义 2.2.2.2(1)**知,** $f(0)$**为** $f(x)$**的一个极小值. 仅 C 入选.**

例 22　设 $f(x)$**的导数在点** $x=a$ **处连续,又** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$**,则**

(A) $x=a$ **是** $f(x)$**的极小值点.**　　(B) $x=a$ **是** $f(x)$**的极大值点.**

(C) $(a,f(a))$**是曲线** $y=f(x)$**的拐点.**

(D) $x=a$ **不是** $f(x)$**的极值点,** $(a,f(a))$**也不是曲线** $y=f(x)$**的拐点.**

解法 1　因 $f(x)$**的导数在点** $x=a$ **处连续,由** $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=0$**,** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=$

-1得到$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=0$，即 $x=a$ 为 $f'(x)$的驻点.

又根据极限的保号性，在点 $x=a$ 的去心邻域内有$\dfrac{f'(x)}{x-a}<0$，则当 $x>a$ 即 $x-a>0$ 时，必有 $f'(x)<0$；当 $x<a$ 即 $x-a<0$ 时，必有 $f'(x)>0$. 又由题设知$f'(x)$在点 $x=a$ 处连续，故由极大值的一阶导数判别法知 $x=a$ 为 $f(x)$的极大值点。仅 B 入选.

解法 2　由题设有 $f'(x)/(x-a)=-1+\alpha(x)(\alpha(x)\to 0)$，即 $f'(x)=-(x-a)+\alpha(x)(x-a)$，$-(x-a)$为 $f'(x)$的主要部分.

当 $x<a$，即 $x-a<0$ 时，$-(x-a)>0$，即 $f'(x)>0$；

当 $x>a$，即 $x-a>0$ 时，$-(x-a)<0$，即 $f'(x)<0$.

根据一阶导数判别法知 $f(x)$在 $x=a$ 处取极大值.

例 23(条件充分性判断)　点 $x=0$ 是函数 $f(x)$的极值点.

(1) $f''(0)$存在；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=1$.

解　因 $f''(0)$存在，故 $f'(x)$在点 $x=0$ 处连续，因而

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0).$$

又因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=1$，且$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，由命题 2.1.2.10 有

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0),$$

于是　$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0)=1>0。$$

由定理 2.2.2.3 知 $x=0$ 是 $f(x)$的极小值点，故条件(1)、(2)联合为充分条件. 仅 C 入选.

法二　利用函数或其导数满足的方程讨论该函数在某点是否取得极值。

常将所给方程转化为一阶导数或二阶导数所满足的不等式，再利用有关定义、定理判别之.

例 24　设 $f(x)$存在二阶连续导数，且满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，又 x_0 为驻点，则

(A) $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值.　　(B) $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值.

(C) $(x_0,f(x_0))$为 $f(x)$的拐点.

(D) $f(x_0)$非极值，$(x_0,f(x_0))$也非拐点.

解　由已知 $f'(x_0)=0$，于是有

$$x_0f''(x_0)=1-e^{-x_0},\quad f''(x_0)=(1-e^{-x_0})/x_0.$$

当 $x_0>0$ 时，$e^{-x_0}<1$，故 $f''(x_0)>0$；

当 $x_0<0$ 时，$e^{-x_0}>1$，因而 $1-e^{-x_0}<0$，故 $f''(x_0)>0$.

从而知，总有 $f''(x_0)>0$。由定理 2.2.2.3 知，$f(x_0)$为极小值. 仅(B)入选.

法三　利用其导数所满足的不等式讨论原来函数在某点是否取得极值.

常用定理 2.2.2.2 或定理 2.2.2.3 判别之.

例 25(条件充分性判断)　$f(0)$必为函数 $f(x)$的极小值。

(1) $f(x)$连续；　　(2) 当 $x\neq0$，$xf'(x)>0$.

解　显然条件(1)不充分. 当条件(2)成立时，有 $x\neq0$ 时 $xf'(x)>0$，即 $f'(x)\begin{cases}<0, & x<0,\\ >0, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$在点 $x=0$ 的左侧单调减少，在点 $x=0$ 的右侧单调增加. 如果再加上条件(1)，即 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续，则 $f(0)$为 $f(x)$的极小值. 仅 C 入选.

例 26(条件充分性判断)　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处取极大值。

(1) 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；　　(2) 当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$.

解　条件(1)、条件(2)单独都不充分，因为函数 $f(x)$没有在点 x_0 处连续的条件，函数 $f(x)$可能在点 x_0 处没有定义。例如，$y=1/(x-1)^2$，$y'=-\dfrac{1}{2(x-1)^3}$在 $x=1$ 处满足条件(1)、条件(2)，但因 $f(x)$在 $x=1$ 处不连续，$x=1$ 不是 $f(x)$的极大值点. 条件(1)与条件(2)联合起来也不充分。仅 E 入选.

题型六　求函数在给定区间上的最值

求函数在区间上的最大值和最小值(简称最值)，常用下述四种方法.

法一　根据连续函数的性质知，函数 $f(x)$在闭区间上必存在最大值、最小值，其最大值点、最小值点只可能出现在区间内的驻点、不可导点和区间端点. 因此只要找出这三种点，并算出相应的函数值，比较其大小，即可求出函数在此闭区间上的最值(不必判断这些驻点和不可导点是否为极值点，但函数在这些点必有定义).

例 27　求 $f(x)=3(x-1)^2x^{\frac{2}{3}}$ 在$[-1,2]$上的最大、最小值.

解　只需求出 $f(x)$在$(-1,2)$上的驻点和导数不存在的点，将其函数值与闭区间$[-1,2]$端点 $a=-1$，$b=2$ 处的函数值比较，其中最大(小)的就是 $f(x)$在$[-1,2]$上的最大(小)值. 由于

$$f'(x)=6(x-1)x^{2/3}+2(x-1)^2x^{-1/3}=2(x-1)x^{-1/3}[3x+(x-1)]$$

$$=2(x-1)(4x-1)x^{-1/3},$$

令 $f(x)=0$ 得驻点 $x_1=1, x_2=1/4$，而在 $x_3=0$ 处 $f'(x)$ 不存在，易求得

$$f(1)=f(0)=0,\quad 0<f(1/4)<f(-1)=12,\quad f(2)=3(\sqrt[3]{4}),$$

故
$$f_{\min}(0)=0,\quad f_{\max}(-1)=12.$$

求函数在闭区间上的最值除按上述一般方法外，还要注意使用下述几种特殊的方法.

法二 若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加(单调减少)，则 $f(a)$ 是其在区间 $[a,b]$ 上的最小(大)值，$f(b)$ 是其在区间 $[a,b]$ 上的最大(小)值.

例 28[2000 年 Ⅱ 9] 求函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$，$x\in[1,\mathrm{e}]$ 的导数和 y 的值域.

解 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 为幂指函数，用对数求导法求其导数，即

$$\ln y=\frac{\ln x}{x},\quad \frac{1}{y}y'=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad \text{即}\quad y'=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}.$$

由上式知，当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$y'>0$，故函数 y 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上严格单调增加，因而 y 的最小值为 $y(1)=1$，最大值为 $y(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. 由此可得在 $[1,\mathrm{e}]$ 上连续函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的值域为 $[1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$.

法三 利用下述命题求之.

命题 2.2.2.1 若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内只有一个极大(小)值点(惟一驻点)，则它也是 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大(小)值点.

例 29[1997 年 Ⅰ 25] 求函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 在 $[0,2]$ 上的极值、最大值和最小值.

解法 1 先求出 y 在 $[0,2]$ 上的驻点. 由

$$y'=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)=0$$

得驻点 $x=1$ 及 $x=-1/3$，因 $-1/3\notin[0,2]$，舍去 $x=-1/3$. 因而 $x=1$ 为 y 在 $[0,2]$ 上的惟一驻点. 又因当 $0<x<1$ 时 $y'<0$，当 $1<x<2$ 时 $y'>0$，故 $x=1$ 为 y 的极小值点。由于该驻点惟一，由命题 2.2.2.1 知该点也是 y 在 $[0,2]$ 上的最小值点. 因而 y 的极小值和最小值均为 $y(1)=0$.

再求出函数 y 在 $[0,2]$ 上的端点值 $y(0)=1, y(2)=3$. 显然 y 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $y(2)=3$.

解法 2 显然 y 在 $[0,2]$ 上没有不可导点，由解法 1 知只有一个驻点 $x=1$，求出 y 在驻点 $x=1$ 及在端点的值，即

$$y(1)=0,\quad y(0)=1,\quad y(2)=3.$$

比较之，谁最小、最大，谁就是 y 在 $[0,2]$ 上的最小值、最大值. 显然所求的最小值为 $y(1)=0$，最大值为 $y(2)=3$.

法四　用配方法求之。

当所求最值的函数为或可化为一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 时，可用配方法简化求出其最值.

例 30（条件充分性判断）　x^2+y^2 的最小值是 2.

(1) x,y 是关于 t 的方程 $t^2-2at+a+2=0$ 的两个实根；

(2) x,y 满足条件 $y^2-2x^2-6x-5=0$.

解　由条件(1)得 $\Delta\geqslant 0$，所以 $a^2-a-2\geqslant 0$. 解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 2$。因为 $x+y=2a$，$xy=a+2$，所以

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4a^2-2a-4=4(a-1/4)^2-17/4.$$

$a\in(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$，所以当 $a=-1$ 时，$(x^2+y^2)_{\min}=2$。条件(1)充分.

由条件(2)得 $y^2=2x^2+6x+5$，因为 $y^2\geqslant 0$，则有 $2x^2+6x+5\geqslant 0$. 因为 $\Delta=36-40=-4<0$，所以 $x\in\mathbf{R}$.

又因为 $x^2+y^2=3x^2+6x+5=3(x+1)^2+2\geqslant 2$，所以当 $x=-1$ 时，$(x^2+y^2)_{\min}=2$. 条件(2)也充分. 仅 D 入选.

题型七　求解最值问题的应用题

要充分利用题设条件（特别是等量关系）建立目标函数所满足的方程.

解方程时，要注意利用命题 2.2.2.1 的条件和结论求出最值点.

例 31[2003 年Ⅰ 27]　已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C=25000+200x+x^2/40$（元），要使平均成本最小所应生产的产品件数为

(A) 100 件.　　(B) 200 件.　　(C) 1000 件.

(D) 2000 件.　　(E) 以上结论都不正确.

解　平均成本为

$$\overline{C}=\frac{C}{x}=\frac{1}{x}\left(25000+200x+\frac{x^2}{40}\right)=\frac{25000}{x}+200+\frac{x}{40},$$

则 $\overline{C}'=-\dfrac{25000}{x^2}+\dfrac{1}{40}$. 令 $\overline{C}'=0$，得驻点 $x=\pm 1000$. 因 $x>0$，得惟一驻点 $x_0=1000$. 又 $\overline{C}''|_{x=x_0}=\dfrac{2\times 25000}{x^3}\Big|_{x=x_0}=\dfrac{50000}{(1000)^3}>0$，故 x_0 为 $\overline{C}$ 的极小值点. 又因驻点惟一，由命题 2.2.2.1 知该极小值点 x_0 也是其最小值点. 仅(C)入选.

例 32 将一长为 a 的铁丝切成两段，并将其中一段围成正方形，另一段围成圆形，为使正方形和圆形面积之和最小，问两段铁丝的长各为多少？

解 设圆形的周长为 x，则正方形的周长为 $a-x$，两图形的面积之和为

$$A=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16},$$

$$A'=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{a}{8},\quad A''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0.$$

令 $A'=0$，解得惟一驻点 $x=\pi a/(4+\pi)$，且为极小值点. 由命题 2.2.2.1 知，该点也是最小值点，故当圆的周长 $x=\pi a/(4+\pi)$，正方形的周长为 $a-x=4a/(4+\pi)$ 时，两图形的面积之和最小.

例 33 假设某种商品的需求量 Q 是价格 P（单位：元）的函数 $Q=12000-80P$，商品的总成本 C 是需求量 Q 的函数 $C=25000+50Q$，每单位产品需纳税 2 元，试求使利润最大的商品单价和最大利润额.

解 根据销售额＝单价×销量，销售额为 $(12000-80P)P$. 又根据税额＝销量×单位税额，应付税额为 $(12000-80P)\times 2$，因而其销售利润为

$$\begin{aligned}L&=\text{销售额}-\text{税额}-\text{总成本}\\&=(12000-80P)P-(12000-80P)\times 2-(25000+50Q)\\&=(12000-80P)(P-2)-[25000+50(12000-80P)]\\&=-80P^2+16160P-64900,\end{aligned}$$

$$L'=-160P+16160.$$

令 $L'=0$ 得惟一驻点 $P_0=101$（元）. 又因 $L''|_{P=P_0}=-160<0$，故 P_0 为 L 的极大值点，又驻点惟一，由命题 2.2.2.1 知它也为最大值点. 于是 $P_0=101$ 为所求的商品单价，其最大利润额为 $L|_{P_0=101}=167080$（元）.

题型八　判别函数图形的凹凸性

研究函数的性态，不仅需要知道它的增减性，还要知道它单调增加或单调减少的“方式”. 例如，函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 都是单调增加函数，但 $y=e^x$ 单调增加是向上凹的，而 $y=\ln x$ 单调增加则是向上凸的. 这反映了它们的图形的弯曲状态不一样.

定义 2.2.2.2 若在某区间内曲线弧位于任一点处的切线的上方，则称曲线在此区间内是向上凹的（或简称上凹），或称向下凸（下凸），或称凹弧，用符号“$\smile$”表示. 且称该区间为 $f(x)$ 的凹区间. 反之，若弧位于切线的下方，则称曲线是向上凸的（或称下凹，上凸），或叫凸弧，用符号“$\frown$”表示，且称该区间为 $f(x)$ 的凸区间. 曲线上上凹弧与下凹弧即凹弧与凸弧，亦即凹区间与凸区间的分界点称为拐点.

由图 2.2.2.4 可见，凹弧（见图(a)）的切线斜率随着 x 的增加而增加，即 $f'(x)$ 单调增加，而凸弧（见图(b)）的切线斜率随着 x 的增加而减少，即 $f'(x)$ 单调减少. 因此有下面的判定定理.

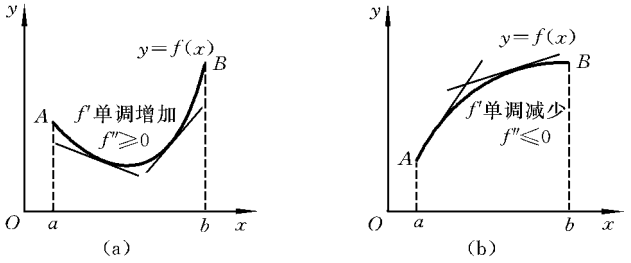


图 2.2.2.4

定理 2.2.2.4（曲线凹性的充分条件） 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内二阶可导，若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$（或 $f''(x)<0$）则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 是凹（或凸）的.

值得注意的是，上述条件仅是充分的而不是必要的，曲线为凹（凸）弧时，其二阶导数在有些点可能等于零. 例如，$y=1-x^4$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为凸弧，但却有 $y''(0)=0$.

再如，$y=x^4$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为凹弧，但 $y''|_{x=0}=12x^2|_{x=0}=0$.

由上定理知道，讨论函数 $y=f(x)$ 的凸凹性应先求出 $f''(x)$ 的零点或 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点将 $f(x)$ 的定义域分为若干子区间，再进一步根据 $f''(x)$ 在各自区间的符号性质确定相应区间的凹凸性. 其次还要注意，用导数讨论函数性质特别是凹凸性时，应该在开区间内进行。在定义域上二阶导数为正不保证函数曲线上凹。因此讨论函数曲线的凹性应先找出间断点，把定义域分为若干子区间，然后分区间一一判别.

定理 2.2.2.5（曲线凹性的充分必要条件） 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凹（或凸）的充分必要条件是

$$f''(x)\geqslant 0(\text{或 } f''(x)\leqslant 0),\quad \forall x\in(a,b).$$

此外利用函数曲线的对称性也是判断函数凹凸性的一个有效方法.

例 34[1998 年 Ⅰ 27] 讨论函数 $f(x)=\int_0^x(t-1)^3\mathrm{d}t$ 的单调性、极值和凹凸性.

解 $f(x)=\int_0^x(t-1)^3\mathrm{d}t$，所以 $f'(x)=(x-1)^3$，驻点为 $x=1$. 当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调减少；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调增

加. 从而知在 $x=1$ 处函数 $f(x)$ 有极小值，极小值为

$$f(1)=\int_0^1(t-1)^3\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(t-1)^4\Big|_0^1=-\frac{1}{4}.$$

又 $f''(x)=3(x-1)^2>0$ $(x\neq1)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为上凹(或下凸)函数.

例 35[2003 年 Ⅰ 7](条件充分性判断) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数，曲线在区间 (a,b) 内是凹的。

(1) 导函数 $y'=f'(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；

(2) 存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f''(x_0)>0$.

解 当条件(1)成立时，只能推出 $f''(x)$ 在 (a,b) 内有 $f''(x)\geqslant0$，这不能保证曲线 $y=f(x)$ 是凹的. 条件(2)仅在一点处有 $f''(x_0)>0$，不足以说明曲线在整个区间 (a,b) 内的性质，故条件(2)不充分. 例如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-1,1)$ 内存在点 $x_0=1/2$，$f''(1/2)=3>0$，但函数曲线在区间 $(-1,1)$ 内有拐点 $(0,0)$. 因而即使加上条件(2)，仍只有 $f''(x)\geqslant0$，$x\in(a,b)$，所以条件(1)、(2)都不充分，即使联合在一起，也是不充分的. 这是因为曲线在 (a,b) 内是凹的判别的充分条件为 (a,b) 内恒有 $f''(x)>0$(称曲线上凹)或恒有 $f''(x)<0$(称曲线为下凹). 仅 E 入选.

例 36 设 k 为偶数，$y=-x^k+4x+1$ 的图形在 $x<0$ 时为凸弧，则 k 的取值范围为

(A) $k=2$. (B) $k=\pm2n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(C) $k=2n$ $(n=1,2,\cdots)$. (D) $k=-2n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(E) 以上结论都不正确.

解 $y''=-k(k-1)x^{k-2}$，为使 $y''\leqslant0$ 必有

$$\begin{cases}k(k-1)\geqslant0,\\ x^{k-2}\geqslant0,\end{cases}\quad①\quad\text{或}\quad\begin{cases}k(k-1)\leqslant0,\\ x^{k-2}\leqslant0,\end{cases}\quad②$$

解不等式组①得到 $\begin{cases}k\leqslant0\text{ 或 }k\geqslant1,\\ k-2\text{ 为偶数}。\end{cases}$ 显然当 $k=-2n$ 或 $k=2n$ $(n=1,2,\cdots)$ 时，合乎要求，于是(B)入选.

解不等式组②得到 $\begin{cases}0\leqslant k\leqslant1,\\ k-2\text{ 为奇数},\end{cases}$ 即 $k=1$，这与 k 为偶数矛盾，故不等式组②无解. 仅(B)入选.

题型九 判别拐点

定义 2.2.2.3 一条连续曲线 $y=f(x)$，在其上一点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 的左、右两侧的凹凸性正好相反，则称点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 为该曲线的拐点。

定理 2.2.2.6（拐点存在的必要条件） 设 $f''(x)$ 存在，点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

定理 2.2.2.6 表明，二阶可导函数的拐点 $(x_0,f(x_0))$ 的必要条件是 $f''(x_0)=0$。但 $f''(x_0)=0$ 不是拐点的充分条件。例如 $y=x^4$，有 $y''(0)=0$，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=x^4$ 的拐点。

定理 2.2.2.7（拐点的充分条件） (1) 如 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$x_0\in(a,b)$ 且在 x_0 的两侧 $f''(x)$ 变号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

(2) 在点 x_0 处一阶导数存在，而二阶导数不存在时，如在点 x_0 的两侧二阶导数存在且符号相反，则 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点；如符号相同，则不是拐点。

(3) 在点 x_0 处函数连续，而一、二阶导数都不存在，如在该点 x_0 的两侧二阶导数存在且符号相反，则 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点；如符号相同，则不是拐点。

(4) 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处三阶可导，$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点。

注意 拐点应记作坐标点形式 $(x_0,f(x_0))$，不可记作 $x=x_0$。

由上定理可看出，曲线的拐点同曲线的凹凸性一样都取决于二阶导数的符号。

因 $f(x)$ 的上凸区间为对应曲线 $y=f'(x)$ 的下降区间，$f(x)$ 的上凹区间是对应曲线 $y=f'(x)$ 的上升区间，因而拐点即为曲线 $y=f'(x)$ 的单调区间的分界点。

同讨论函数曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性一样，讨论拐点也应先找出 $f''(x)$ 的零点或 $f''(x)$ 不存在的点将定义域分为若干个子区间，再进一步根据 $f''(x)$ 在相邻左、右区间的变号性确定此相邻区间的分界点是否为拐点。

例 37[2003 年 Ⅰ 9]（条件充分性判断） 函数 $y=f(x)$ 的拐点 (x_0,y_0) 的横坐标 $x_0=-2$.

(1) $f(x)=x^3+6x^2+x+1$；　　(2) $f(x)=xe^x/2$.

解 当条件(1)成立时，有 $f''(x)=6x+12=6(x+2)$，可知 $f''(-2)=0$，且当 $x<-2$ 时 $f''(x)<0$，而当 $x>-2$ 时 $f''(x)>0$，故知 $(-2,y_0)$ 为拐点。条件(1)充分。

当条件(2)成立时，有 $f'(x)=(x+1)e^x/2$，$f''(x)=e^x(x+2)/2$. 可知 $f''(-2)=0$，且当 $x<-2$ 时 $f''(x)<0$，而当 $x>-2$ 时 $f''(x)>0$，因此

$(-2,y_0)$也是曲线的拐点，条件(2)也充分。仅 D 入选。

例 38(条件充分性判断)　$y=f(x)$的图形在 $x=x_0$ 处有拐点。

(1) $f''(x_0)=0$；

(2) $f''(x_0)$经 x_0 时两侧改变正负号。

解　$y=f(x)$图形的拐点应是曲线凹凸的分界点，在拐点处，若二阶可导，则必有 $f''(x)=0$，但不可导点也可能是拐点，只要在 x_0 两侧 $f''(x_0)$变号即可. 如图 2.2.2.5 所示，$(0,f(0))$是拐点，由于曲线在 $x=0$ 处的斜率为∞，$f(x)$在 $x=0$ 处不可导。因而 $f''(0)$不存在，所以条件(2)是充分的. 仅 B 入选.

例 39　曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

解　$y'=2(x-1)(x-3)(x-2)$，令

$$y''=2(3x^2-12x+11)=2(x-x_1)(x-x_2)=0$$

得到　　$x_1=(6-\sqrt{3})/3$，　$x_2=(6+\sqrt{3})/3$。

因当$-\infty<x<x_1$ 时，$y''>0$，曲线 y 向上凹；当 $x_2<x<+\infty$时，$y''>0$，曲线 y 向上凹；当 $x_1<x<x_2$ 时，$y''<0$，曲线 y 向下凹。因而

$$(x_1,y_1)=((6-\sqrt{3})/3,4/9)\quad 与\quad (x_2,y_2)=((6+\sqrt{3})/3,4/9)$$

为拐点。仅(C)入选。

例 40(条件充分性判断)　$(0,f(0))$必为曲线 $y=f(x)$的拐点。

(1) $f'(0)=1$；　　(2) 当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{f''(x)}{x}<0$。

解　显然，条件(1)单独成立时并不充分。当条件(2)成立时，有当 $x>0$ 时 $f''(x)<0$，当 $x<0$ 时 $f''(x)>0$。即 $f''(x)$在点 $x=0$ 处的左、右两侧变号，但不知 $f(x)$在点 $x=0$ 处是否连续。如果条件(1)同时成立，则由 $f'(0)=1$ 知 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，当然连续，从而$(0,f(0))$为 $f(x)$的拐点。仅 C 入选。

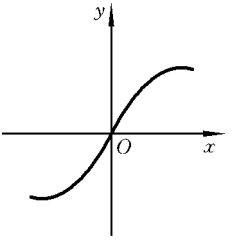


图 2.2.2.5

例 41(条件充分性判断)　点(1,6)是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

(1) $a=b=6$；　　(2) $ab=-27$.

解　条件(1)与条件(2)单独成立时，由 a,b 不能具体确定无法判定点(1,6)是否是其拐点，条件(1)、条件(2)单独不充分。

条件(1)与条件(2)联合时有 $a+b=6, ab=-27$，解方程 $x^2-6x-27=(x+3)(x-9)=0$，得 $a=-3, b=9$，或 $a=9, b=-3$。将 $a=-3, b=9$ 代入 y 得到 $y=-3x^3+9x^2$，该曲线过点(1,6)，由 $y''=18(1-x)=0$ 得到拐点横坐标 $x_0=1$，其纵坐标为 $y_0=6$。但当 $a=-9, b=3$ 时，有 $y=9x^3-3x^2$，点(1,6)也在此曲线上，但由 $y''=-6+54x=0$ 有 $x=1/9$，可见(1,6)不是拐点，故条件(1)、条件(2)联合起来也不充分。仅 E 入选。

题型十　已知函数的极(最)值点或(和)拐点，求该函数中的待定常数。

先根据题设条件列出相应方程：例如当 $f(x)$ 可导时，若 $x=x_0$ 为其驻点，则有 $f'(x_0)=0$；若 $(x_0, f(x_0))$ 为其拐点时，则有 $f''(x_0)=0$，且 $y_0=f(x_0)$；若曲线 $f(x)$ 切于原点，则有 $f'(0)=0$. 联立上述诸方程，解之可求得待定常数。

例 42[2004 年 Ⅱ 17](条件充分性判断)　曲线 $y=ax^3+bx^2-24x+d$ 以 $x=-2$ 为驻点，(1,−10)为拐点。

(1) $a=-1, b=-1, d=16$；　　(2) $a=1, b=-3, d=16$.

解　因函数 y 二阶可导，由 $x=-2$ 为其驻点，(1,−10)为其拐点，得到

$$\begin{cases} f'(-2)=0, \\ f''(1)=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 3ax^2+2bx-24\big|_{x=-2}=12a-4b-24=0, & ① \\ 6ax+2b\big|_{x=1}=6a+2b=0。 & ② \end{cases}$$

联立式①与式②，解得 $a=1, b=-3$.

又因(1,−10)为曲线 y 的拐点，该点在曲线上，故有

$$y\big|_{x=1}=-10,$$

将 $a=1, b=-3$ 代入 y，有

$$y=x^3-3x^2-24x+d,$$

所以　　$y\big|_{x=1}=1-3-24+d=10$，　即　$d=16$.

显然条件(2)充分，条件(1)不充分。仅 B 入选。

例 43(条件充分性判断)　$y=ax^3+bx+c$ 在点 $x=1$ 处取极小值 -1，且点(0,1)为曲线的拐点。

(1) $a=1, b=-3, c=1$；　　(2) $a=-1, b=-1, c=1$.

解　　$y'=3ax^2+b$，　$y''=6ax$，　$y''(1)=6a$.

因 $x=1$ 为 y 的极小值点，故 $y''(1)=6a>0$，即 $a>0$。条件(2)不充分。

因 $y'(1)=0$，有

$$3a+b=0, \qquad ①$$

又因(0,1)为拐点，该点必在曲线上，故有 $y(0)=1$，即

$$1=0\cdot a+0\cdot b+c,\quad \text{即}\quad c=1. \qquad ②$$

又因 y 在 $x=1$ 处有极小值 -1，故 $y(1)=-1$，即

$$a+b+c=-1。 \qquad ③$$

联立式①、②、③解得

$$a=1,\quad b=-3,\quad c=1.$$

条件(1)充分。仅 A 入选。

例 44(条件充分性判断) 函数 $f(x)=x^3+3ax^2-ax-1$ 既有极大值又有极小值。

(1) $a\in(2,3)$；　　(2) $a\in(-3,-2)$.

解 由 $f'(x)=3x^2+6ax-a$ 可知，函数 $f(x)$ 既有极小值，又有极大值，当且仅当二次方程 $3x^2+6ax-a=0$ 有两个相异的实根，则其判别式

$$\Delta=(6a)^2+12a=12a(3a+1)>0,$$

故由 $\begin{cases}a>0,\\3a+1>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\a>-1/3。\end{cases}$ 其解为 $a>0$，即为 $(0,+\infty)$；

由 $\begin{cases}a<0,\\3a+1<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a<0,\\a<-1/3,\end{cases}$ 得其解为 $a<-1/3$，即为 $(-\infty,-1/3)$。

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-1/3)$ 或 $(0,+\infty)$，因而条件(1)、(2)都充分。仅 D 入选。

题型十一　由所给函数的图形确定相关函数的性质

这类题型有两种类型，一是已知原来函数 $f(x)$ 的图形，确定其导函数 $f'(x)$ 的性质；二是已知导函数 $f'(x)$ 的图形，确定原来函数 $f(x)$ 的性质。

应注意从曲线 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图形上直观看出它们有下述对应关系，这是求解这些题型的关键所在。

1° 曲线 $f(x)$ 是否有水平渐近线、铅直渐近线。如果有前者，应找出 $f'(x)$ 等于零的对应点；如果有后者，则曲线 $f'(x)$ 也有对应的铅直渐近线。

2° 在哪些区间上 $f(x)$ 单调增加(减少)，从而确定在相应区间上有 $f'(x)\geqslant 0$($f'(x)\leqslant 0$)，其图形在 x 轴的上方(下方)。

3° $f(x)$ 有无极值点，有几个极值点，哪些点是极大值点，哪些点是极小值点，相应地在 $f'(x)$ 的图形上找出 $f'(x)$ 等于零的点，或由 $f'(x)$ 改变符号的点找出 $f(x)$ 的极值点。

4° 在哪些区间上曲线 $f(x)$ 上凸、下凸，有无拐点，有几个拐点。相应地

在曲线 $f'(x)$ 的图形中找出单调增加(减少)与单调减少(增加)的界点。

类型(一) 已知函数的图形,确定其导函数的性质。

例 45 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y=f(x)$ 的图形如图 2.2.2.6 所示,则导函数 $y'=f'(x)$ 的图形为图 2.2.2.7 中的

(A) 图(a)。　　(B) 图(b)。

(C) 图(c)。　　(D) 图(d)。

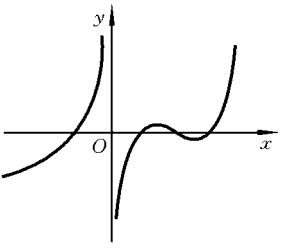


图 2.2.2.6

解 由图 2.2.2.6 易看出,当 $x<0$ 时,$f(x)$ 单调增加,因而当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$。于是 $f'(x)$ 的图形在 $x<0$ 的部分应在 x 轴的上方。这就排除了 $y'=f'(x)$ 的图(a)、(c)中图形的可能性。可从下述几方面排除为图(b)中图形的可能性。仅(D)入选。

1° $y=f(x)$ 只有两个极值点,因而 $f'(x)$ 只有两个零点。而在图(b)中 $f'(x)$ 有三个零点。

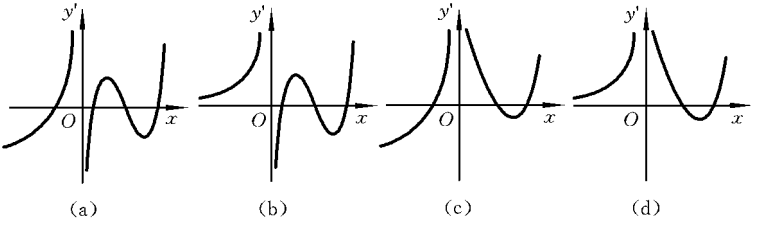


图 2.2.2.7

2° 曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线,且在 y 轴左右两侧都是单调增加趋于无穷大,因而 y 轴为曲线 $f'(x)$ 的渐近线,且都从 x 轴上方趋于正无穷大。

3° 曲线 $y=f(x)$ 在 $x>0$ 部分的第一个区间单调增加,因而在相应区间有 $f'(x)>0$,其图形应在 x 轴上方。

4° 曲线 $f(x)$ 只有一个拐点。因而 $[f'(x)]'=0$ 只有一解,而图(b) 中有两点满足 $[f'(x)]'=0$,而在图(d) 中只有一点满足 $[f'(x)]'=0$。

类型(二) 已知导函数的图形,确定其原来函数的性质。

例 46[2005 年Ⅰ4] 设 $f'(x)=g(x)$,$x\in(a,b)$。已知曲线 $y=g(x)$ 的图形如图 2.2.2.8 所示,则曲线 $y=f(x)$ 的极值点为

(A) c_1，c_3。　　(B) c_2，c_4。

(C) c_1，c_3，c_5。　　(D) c_2，c_4，c_5。

(E) 以上结论都不正确。

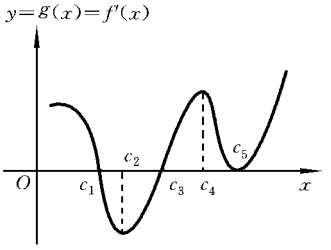


图 2.2.2.8

解　因 $f'(x)=g(x)$ 在 $x=c_1$ 处等于零，又在 c_1 的两侧改变符号，且由正变为负，故 $x=c_1$ 为 $y=f(x)$ 的极大值点。

又在 $x=c_3$ 处 $f'(x)$ 等于零，在 c_3 的两侧 $f'(x)$ 改变符号，且由负变为正，故点 $x=c_3$ 为 $y=f(x)$ 的极小值点。因而 $f(x)$ 的极值点为 c_1，c_3。仅(A)入选。

例 47(条件充分性判断)　函数曲线 $y=f(x)$ 有三个拐点。

(1)曲线 $y'=f'(x)$，如图 2.2.2.9(a)；

(2)曲线 $y'=f'(x)$，如图 2.2.2.9(b).

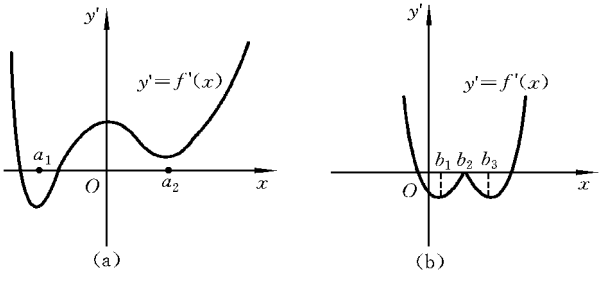


图 2.2.2.9

解　拐点应是二阶导数变号的分界点，因 $f''(x)=[f'(x)]'$，故也可以说拐点是一阶导数变号的分界点。在图 2.2.2.9(a)中，点 a_1，O，a_2 为一阶导数变号的分界点，因而均为拐点的横坐标。同理，图 2.2.2.9(b)中，点 b_1，b_2，b_3 也是一阶导数变号的分界点，故它们也都是拐点的横坐标。仅 D 入选。

题型十二　讨论方程的根或函数零点的个数

讨论方程的根或函数零点的个数多为三次(或四次)多项式，一般形式为

$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　(或 $F(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$)。

当 $a>0$ 时，$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形一般如图 2.2.2.10(a)所示的“N”形；$a<0$ 时，则其图形为“倒 N”形，如图 2.2.2.10(b)所示。特殊情况 $y=x^3$ 是退化的“N”形。

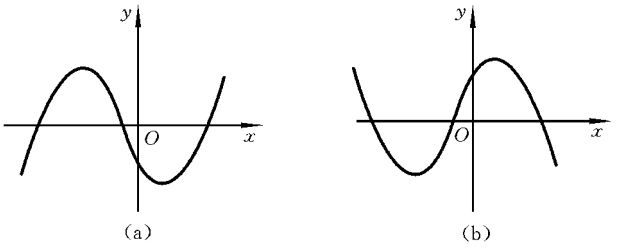


图 2.2.2.10

一般的四次多项式函数 $F(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，当 $a>0$ 时，其图形一般都是“W”形。如果 $F(x)$ 缺项其图形为退化的“W”形。

$F(x)$ 中的常数项与图形形状无关。它只是把函数的图形上下移动，因而极值的正负与常数项有关，即函数零点（或方程实根）的个数与常数项有关。当其他项的系数已经确定，即函数图形的形状已定，函数零点（或方程实根）个数由常数项确定，而 ax^3+bx^2+cx+d 的极值点的个数与常数 b,c 有关，而 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的极值点个数与常数 b,c,d 有关。

类型(一)　判别方程 $F(x)=0$ 有惟一实根（或函数有惟一零点）。

常用下述命题判别之。由函数几何图形易知下述命题成立。

命题 2.2.2.2　下述条件之一成立，则方程 $F(x)=0$ 有惟一实根。

(1) 函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$（a,b 可为有限数也可为无穷）上连续，单调，且两端异号（或 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ 异号）。

(2) 函数 $F(x)$ 在区间端点同号，只有一个极值点，且极值为零。

(3) 函数 $F(x)$ 有多个极值点，但极值都同号，而函数 $F(x)$ 在两区间端点异号。

(4) 函数 $F(x)$ 有多个极值点但只有一个极值为零，其他极值均与两区间端点函数值同号（同大于零或同小于零）。

此外，还可先用零点定理即定理 2.1.3.6 证明 $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上至少有一实根，再用反证法证明只有一个实根。

例 48　方程 $f(x)=x^3-3x+k=0$ 只有一个实根，则 k 的取值范围为

(A) $|k|<1$。　　(B) $|k|>1$。　　(C) $|k|>2$。

(D) $k<2$。　　(E) $k<-2$。

解　$f(x)$ 为三次函数，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，即 $f(x)$ 在区

间端点值异号。为要使 $f(x)=0$ 只有一个实根，要么 $f(x)$ 单调，要么 $f(x)$ 的极值同号。显然 $f(x)=x^3-3x+k$ 不单调。于是求出其驻点，由

$$f'(x)=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)=0$$

得驻点 $$x=\pm 1。$$

由三次函数的图形易知 $f(-1)$ 为极大值，$f(1)$ 为极小值。

$$f(1)=1-3+k=k-2,\quad f(-1)=-1+3+k=k+2.$$

由命题 2.2.2.2(3)知，当 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 同号时，$f(x)=0$ 只有一个实根。

解 $\begin{cases} f(1)=k-2>0, \\ f(-1)=k+2>0, \end{cases}$ 得 $k>2$，解 $\begin{cases} f(1)=k-2<0, \\ f(-1)=k+2<0, \end{cases}$ 得 $k<-2$，因而当 $k>2$ 或 $k<-2$，即 $|k|>2$ 时，$f(x)=0$ 只有一个实根。仅(C)入选。

例 49 若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$

(A) 无实根。　(B) 有惟一实根。　(C) 有三个不同实根。

(D) 有五个不同实根。　(E) 有两个不同实根。

解 $$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$$

$$=5\left\{\left[x^4+2\times\frac{3}{5}ax^2+\left(\frac{3}{5}a\right)^2\right]+\frac{3}{5}b-\left(\frac{3}{5}a\right)^2\right\}$$

$$=5\left[\left(x^2+\frac{3}{5}a\right)^2-\frac{3}{5^2}(3a^2-5b)\right].$$

因 $3a^2-5b<0$，故 $f'(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加。又

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

由命题 2.2.2.2(1)知，$f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点，即方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根。仅(B)入选。

类型(二)　判别方程 $F(x)=0$ 只有两个实根(或函数只有两个零点)。

常用下述命题判别之。由函数几何图形易知下述命题成立。

命题 2.2.2.3　下述条件之一成立，则方程 $F(x)=0$ 只有两个实根。

(1) 函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$(a,b 可为有限，也可为无穷)端点的值均大于零，又只有一个极(最)小值点，其极(最)小值小于零。

(2) 函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 端点值均小于零，又只有一个极(最)大值点，其极(最)大值大于零。

(3) 函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 端点值异号(或 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ 异号)，且有一个极值等于零，另一个极值与一个区间端点值同号。

命题 2.2.2.4 设 $F(x)=ax^4+bx^2+c$，作代换 $t=x^2$，原方程化为 $at^2+bt+c=0$，如果后者只有一个实根，则原方程只有两个实根。

例 50[2000 年 Ⅰ 28] 当 q 为何值时，方程 $x^3-3x+q=0$ 有两相异实根。

解 设 $f(x)=x^3-3x+q$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$. 令 $f'(x)=0$，得 $f(x)$ 的驻点 $x=\pm1$。

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，$(-\infty,-1)$ 为其单调区间；当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，$(-1,1)$ 为 $f(x)$ 的单调减少区间；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，$(1,+\infty)$ 为 $f(x)$ 的单调增加区间。因而 $f(1)$ 为 $f(x)$ 的极小值，$f(-1)$ 为其极大值。又

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty。$$

于是当 $f(-1)=2+q>0$，$f(1)=-2+q<0$ 时，即 $-2<q<2$ 时，因 $f(x)$ 的定义域可划分为四个端点值异号的三个单调区间，故 $f(x)$ 有三个相异实根。

为要使 $f(x)$ 只有两个相异实根，由命题 2.2.2.3(3) 知，只需 $f(-1)=2+q=0$ 或 $f(1)=-2+q=0$，即 $q=-2$ 或 $q=2$ 时，$f(x)$ 有两个零点。亦即 $q=\pm2$ 时，方程有两相异实根。

例 51 设常数 $k>0$，$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为

(A) 3。　(B) 2。　(C) 1。　(D) 0。　(E) 4。

解 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$。由 $f'(x)=1/x-1/\mathrm{e}=0$ 得惟一驻点 $x_0=\mathrm{e}$. 且 $f''(x)|_{x=x_0}=-1/x^2|_{x=x_0}=-1/\mathrm{e}^2<0$，因而 $x_0=\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 的极大值点。又由于驻点惟一，该极大值点也为 $f(x)$ 的最大值点。设其最大值为 M，则 $M=f(\mathrm{e})=1-1+k=k$. 因 $k>0$，故 $M>0$，由命题 2.2.2.3(2) 知曲线 $f(x)$ 与 x 轴有两个交点，即 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个实根，亦即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点，仅(B)入选。由表 2.2.2.3 可知 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内各有一个零点。

表 2.2.2.3

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大	↘

例 52(条件充分性判断) 方程 $x^4-2x^2+k=0$ 有两个相异实根。

(1) $k=1$；　　(2) $k<0$。

解　原方程可化为$(x^2)^2-2x^2+k=0$. 令 $x^2=t$，则 $t^2-2t+k=0$。其根的判别式为 $\Delta=b^2-4ac=4-4k=4(1-k)$，当 $k<0$ 时，有 $\Delta>0$。t 有两相异实根，则由 $x=\pm\sqrt{t}$ 知原方程有四个相异实根。条件(2)不充分。

当 $\Delta=0$ 时即 $k=1$ 时，t 只有一个实根，于是由 $x=\pm\sqrt{t}$ 及命题 2.2.2.4 知，原方程有两个相异实根。条件(1)充分。仅 A 入选。

类型(三)　判别方程 $F(x)=0$ 只有三个实根(或函数只有三个零点)。

可用下述命题判别之，由函数的几何图形易知下述命题成立。

命题 2.2.2.5　下述条件之一成立，则方程 $F(x)=0$ 只有三个实根。

(1) $F(a)<0, F(b)>0, c_1, c_2\in(a,b)$ 分别为 $F(x)$ 的极大值点、极小值点，且 $F(c_1)>0, F(c_2)<0, F'(x)<0, x\in(c_1,c_2)$。

(2) $F(a)>0, F(b)<0, c_1, c_2\in(a,b)$ 分别为 $F(x)$ 的极小值点、极大值点，且 $F(c_1)<0, F(c_2)>0, F'(x)>0, x\in(c_1,c_2)$.

例 53[1999 年 Ⅱ 27]　设方程 $x^3-27x+c=0$，当 c 为何值时，方程有三个相异实根。

解　设 $y=x^3-27x+c$，则其定义域为$(-\infty,+\infty)$。令 $y'=3x^2-27=3(x^2-9)=3(x-3)(x+3)=0$ 得 $x=-3$ 或 $x=3$。当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$y'>0, y''=6x, y''|_{x=-3}=-18<0$，因而 $x=-3$ 为 y 的极大值点，极大值 $y(-3)=54+c$。函数 y 在$(-\infty,-3)$单调增加，当 $x\in(-3,3)$ 时，$y'<0, y''|_{x=3}=18>0$，函数单调减少，$x=3$ 为函数 y 的极小值点，极小值 $y(3)=c-54$. 当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$y'>0$，函数单调增加。又

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}(x^3-27x+c)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}(x^3-27x+c)=+\infty。$$

为使 $y=x^3-27x+c$ 有三个零点，只需 y 在三个单调区间$(-\infty,-3)$，$(-3,3)$，$(3,+\infty)$的端点处函数值异号。为此需 $y(-3)=54+c>0, y(3)=c-54<0$，即 $c>-54$ 且 $c<54$，亦即 $-54<c<54$ 时，由命题 2.2.2.5(1) 知方程 $x^3-27x+c=0$ 有三相异实根。

类型(四)　判别方程 $F(x)=0$ 无实根(或函数无零点)。

可用下述命题判别之，由函数几何图形易知下述命题成立。

命题 2.2.2.6　下述条件之一成立，则方程 $F(x)=0$ 无实根。

(1) 函数 $F(x)$ 在区间内取值均大于零或均小于零。

(2) 函数 $F(x)$ 在区间端点取值均为正，且最小值也为正。

(3) 函数 $F(x)$ 在区间端点取值均为负，且最大值也为负。

例 54[1998 年 Ⅰ 25] 设方程 $x^4+ax+b=0$。

(1) 当 a,b 满足何种关系时，方程有惟一实根？

(2) 当 a,b 满足何种关系时，方程无实根？

解 令 $y=x^4+ax+b$，$y'=4x^3+a=0$，得惟一驻点 $x_0=\sqrt[3]{-a/4}$。又 $y''=12x^2>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，因而 $y''|_{x=x_0}>0$，于是 x_0 为 y 的极小值点。又 x_0 为惟一驻点，故 x_0 为最小值点，最小值 $y_{\min}=(\sqrt[3]{-a/4})^4+(\sqrt[3]{-a/4})a+b$，且曲线 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 内上凹。

又当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，故

(1) 当 $y_{\min}=0$ 时，即 $(-a/4)^{4/3}+a(-a/4)^{1/3}+b=0$ 时，方程有惟一实根(利用命题 2.2.2.2(2))。

(2) 当 $y_{\min}>0$ 时，即 $(-a/4)^{4/3}+a(-a/4)^{1/3}+b>0$ 时，方程无实根(利用命题 2.2.2.6(2))。

(3) 当 $y_{\min}<0$ 时，即 $(-a/4)^{4/3}+a(-a/4)^{1/3}+b<0$ 时，方程有两相异实根(利用命题 2.2.2.3(1))。

类型(五) 讨论含参数的方程实根的存在性及其个数。

其求法可采取如下步骤：

1° 将要讨论方程实根个数的方程 $F(x,k)=0$ 同解变形为 $f(x)=k$ 的形式，其中 k 为影响方程实根个数的参数。

2° 作出 $y=f(x)$ 的简图，这里所谓简图是指不必考虑图形的凹凸性，只需求出函数 $y=f(x)$ 的单调区间、极值(最值)的符号，并求出当 x 趋于求实根区间的端点时 $f(x)$ 极限的符号。

3° 考察直线 $y=k$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数如何随 k 的改变而改变。它们的交点个数就是所求方程实根的个数。

也可不引入辅助函数 $f(x)$，直接讨论曲线 $F(x,k)$ 与 x 轴(即直线 $y=0$)的交点个数如何随参数 k 的变化而变化。其讨论步骤与前述类似。

例 55 当 k 取何值时，方程 $f(x)=x^4-2x^2+k=0$ 有两个、三个、四个实根或没有实根。

解法 1 易求得函数 $f(x)$ 的驻点，由 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0$ 得到 $x_1=-1,x_2=0,x_3=1$.

进一步讨论这些驻点的性质，即是否为极值点。由表 2.2.2.4 易看出，

三个驻点将$(-\infty,+\infty)$分为四个单调区间，且这些驻点为极值点：$f(\pm1)=k-1$为极小值，即±1为极小值点；$f(0)=k$为极大值，即0为极大值点。

表 2.2.2.4

x	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	极小 $k-1$	↗	极大 k	↘	极小 $k-1$	↗	$+\infty$

因$f(x)$的其他项的系数已定，$f(x)=0$的根的个数由常数项确定。

下面利用$f(x)$的轮廓图形，确定k取何值时，$f(x)=0$有两个、三个、四个实根或没有实根。

$f(x)$的图形大致为“W”形。注意到$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，其图形的轮廓曲线如图 2.2.2.11 所示。

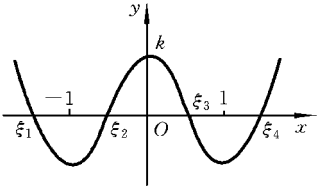


图 2.2.2.11

因$f_{极大}(0)=k$，$f_{极小}(\pm1)=k-1$，由图 2.2.2.11 易知

1° 当$f_{极小}(\pm1)>0$，即$k-1>0$，亦即$k>1$时，$f(x)$与x轴没有交点，即$f(x)=0$没有实根。

2° 当$f_{极小}(\pm1)=0$即$k-1=0$亦即$k=1$时，$f(x)$与x轴有两个交点即为$x=\pm1$，因而$f(x)=0$有两个实根。

3° 当$f_{极小}(\pm1)<0$，且$f_{极大}(0)>0$即$k-1<0$，$k>0$时，亦即$0<k<1$时，$f(x)$与x轴有四个交点，因而$f(x)=0$有四个实根。

4° 当$f_{极大}(0)=k=0$时，曲线与x轴有三个交点，$f(x)=0$有三个实根。

5° $k<0$时，这时$f(x)$与x轴只有两个交点，因而$f(x)=0$只有两个实根。

例 56 讨论方程$\ln x=ax$ $(a>0)$有几个实根。

解 方程$\ln x=ax$同解变形为$f(x)=\ln x/x=a$的形式，其定义域为$x>0$。于是所给方程有几个实根的问题转化为曲线$y=f(x)$与直线$y=a$有几个交点的问题。

令$f'(x)=(1-\ln x)/x^2=0$得惟一驻点$x=\mathrm{e}$，且易知

$$f'(x)\begin{cases}>0, & 0<x<\mathrm{e},\\ =0, & x=\mathrm{e},\\ <0, & x>\mathrm{e}.\end{cases}$$

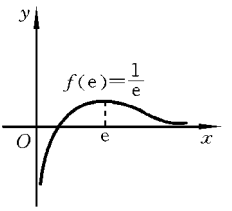


图 2.2.2.12

因而 $x=\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，即为最大值点，其最大值为 $f(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}$.

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x/x)=-\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

由上可作出 $y=f(x)=\ln x/x$ 的简图(见图 2.2.2.12)。

所给方程有几个根，取决于曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=a$ $(a>0)$ 有几个交点。

1° 当 $a=1/\mathrm{e}=f(\mathrm{e})$ 时，显然曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=a$ 相切，它们仅有一个交点，即方程 $\ln x=ax$ 仅有一个实根。

2° 当 $0<a<1/\mathrm{e}=f(\mathrm{e})$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=a$ 有两个交点，即方程 $\ln x=ax$ 有两个实根。

3° 当 $a>1/\mathrm{e}=f(\mathrm{e})$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=a$ 没有交点，即方程 $\ln x=ax$ 没有实根。

4° 当 $a<0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=a$ 只有一个交点，即方程 $\ln x=ax$ 只有一个实根(但因有 $a>0$ 的要求，可不考虑此点)。

题型十三　利用导数判别不等式

一般常用两种方法判别之。一是利用函数的单调性即定理 2.2.2.1 判别之。另一方法是利用函数的最值判别。

先介绍利用函数的单调性判别不等式的情况。

例 57[1998 年 Ⅰ 24]　设 $0<x_1<x_2<2$，问 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1^2}$ 和 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2^2}$ 哪一个更大？为什么？

解　显然可作辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x/x^2$。因 $0<x_1<x_2<2$，故

$$F'(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)'=\frac{x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x}{x^4}=\frac{x\mathrm{e}^x(x-2)}{x^4}<0,$$

即 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调减少。故由 $0<x_1<x_2<2$，有

$$F(x_1)>F(x_2)\quad\text{即}\quad \mathrm{e}^{x_1}/x_1^2>\mathrm{e}^{x_2}/x_2^2.$$

例 58(条件充分性判断)　对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当 $x_1>x_2$

时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$.

(1) 函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且 $f'(x)>0$；

(2) 函数$-f(-x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加。

解法 1 当条件(1)成立时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加。因而对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$. 条件(1)充分。当条件(2)成立时，对任意 $-x_1,-x_2\in(-\infty,+\infty)$，当 $-x_1>-x_2$ 时，有 $-f(-x_1)>-f(-x_2)$，即 $f(-x_1)<f(-x_2)$.

当 $-x_1>-x_2$ 时，有 $x_1<x_2$，由上式有 $f(x_2)<f(x_1)$。条件(2)充分。仅 D 入选。

解法 2 从几何上分析，函数 $f(x)$与$-f(-x)$的图形关于原点对称，因而它们有相同的单调性。当条件(2)成立，即$-f(-x)$在$(-\infty,+\infty)$单调增加时，必有 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加，于是当 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_2)<f(x_1)$。条件(2)充分。仅 D 入选。

例 59(条件充分性判断) $f(a)g(b)>f(b)g(a)$，其中 $f(x),g(x)$为$[a,b]$上的正值连续函数。

(1) $f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$，$x\in(a,b)$；

(2) $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$，$x\in(a,b)$.

解 由于 $f(x)>0,g(x)>0$，有 $f(a)>0,g(a)>0$，问题归结为证明

$$f(a)/g(a)>f(b)/g(b).$$

为此作辅助函数 $F(x)=f(x)/g(x)$。如能证 $F(x)$在$[a,b]$上单调减少，则此例得证。

当条件(1)成立时，有 $F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$，因而 $F(x)$单调减少，故 $F(a)>F(b)$即 $f(a)/g(a)>f(b)/g(b)$，亦即 $f(a)g(b)>f(b)g(a)$。条件(1)充分。因而条件(2)不充分。仅 A 入选。

注意 从条件(1)、(2)应能看出当 $g(x)\neq0$ 时，$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$为$[f(x)/g(x)]'$的分子。这就要求对导数公式很熟悉，且能灵活运用。

类型(一) 已知 $F(a)\geqslant0$(或 $F(b)\geqslant0$)，判别 $x>a$(或 $x<b$)时 $F(x)>0$。

这类命题可用 $F(x)$的单调增加(或单调减少)即定理 2.2.2.1 判别之。

这里 $F(a)\geqslant0$ 也可换为 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)\geqslant0$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)\geqslant0$，因而 $F(x)$可以在 a 没有定义。a 与 b 可以分别是$-\infty,+\infty$.

利用导数判别不等式先要作出辅助函数 $F(x)$，常将待判的不等式恒等变形找出 $F(x)$. 例如，将待判的不等式的小端函数移至大端，然后将大于零的一端函数设为辅助函数 $F(x)$。

例 60[2003 年Ⅱ 18]（条件充分性判断） 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是区间 $(a,+\infty)$ 内的可导函数，可以确定在 $(a,+\infty)$ 上总有 $f(x)>g(x)$.

(1) $f'(x)>g'(x)$； (2) $f(a)=g(a)$.

解法 1 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，当条件(2)成立时，有 $F(a)=0$，当条件(1)同时成立时，有 $F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$。由定理 2.2.2.1 知 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加，于是当 $x>a$ 时有 $F(x)>F(a)=0$ 即 $f(x)>g(x)$。结论成立。当条件(1)与条件(2)单独成立时，结论不成立，因而它们都不充分。仅 C 入选。

解法 2 当条件(2)满足时，说明是在同一点 $(a,f(a))$，$(a,g(a))$ 开始比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小。当条件(1)成立时，说明 $f(x)$ 的变化率大于 $g(x)$ 的变化率，因而曲线 $y=f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上高于曲线 $y=g(x)$，即有 $f(x)>g(x)$. 于是只有当条件(1)、(2)同时满足时，结论才成立。仅 C 入选。

类型(二) 已知 $F(a)\leqslant 0$（或 $F(b)\leqslant 0$），判别 $x>a$（或 $x<b$）时，$F(x)<0$。

这类命题可用 $F(x)$ 的单调减少（或单调增加）即定理 2.2.2.1 判别。

例 61 设 $F(x)=x-x^2/2$，$g(x)=\ln(1+x)$，当 $x>0$ 时有

(A) $f(x)<g(x)$。 (B) $f(x)>g(x)$。 (C) $f(x)\leqslant g(x)$.

(D) $f(x)\geqslant g(x)$。 (E) 以上结论都不正确。

解 设 $F(x)=f(x)-g(x)=x-x^2/2-\ln(1+x)$. 因 $F(0)=0$，又当 $x>0$ 时，有

$$F'(x)=1-x-1/(1+x)=-x^2/(1+x)<0,$$

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少。从而当 $x>0$ 时，有

$F(x)<F(0)=0$， 即 $f(x)-g(x)<0$，$f(x)<g(x)$. 仅(A)入选。

下面介绍利用函数最值判别不等式的情况。

类型(三) 判别含常数加项的不等式。

含常数加项的一类不等式是指下述一类不等式：

$$x\in I \text{ 时，} f(x)\geqslant c \quad \text{或} \quad f(x)\leqslant c \quad \text{或} \quad c_1\leqslant f(x)\leqslant c_2,$$

其中 c，c_1，c_2 均为常数，I 为有限区间或为无穷区间。此类不等式可用最值法证明，即先求出函数 $f(x)$ 的最小值 m（或最大值 M），再证明 $m\geqslant c$，或 $M<$

c。为证 $c_1\leqslant f(x)\leqslant c_2$，可证 $m\geqslant c_1$，$M\leqslant c_2$.

例 62 若 $0\leqslant x\leqslant 1$，$p>1$，证明 $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

证 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，如能证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值为 1，最小值为 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$，此例得证。

由 $f'(x)=0$ 即 $x^{p-1}=(1-x)^{p-1}$ 得到 $x=1-x$，惟一驻点为 $x=1/2$，而 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{p-1}}<1$（因 $p>1$），而 $f(x)$ 在区间两端点的值为 $f(0)=f(1)=1$. 将上述三个函数值比较，得到 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 1，其最小值为 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$。此例得证。

例 63 对任意实数 x_1 恒有

(A) $e^{-x}\leqslant 1-x$。　(B) $e^{-x}\leqslant 1+x$。　(C) $e^{-x}\geqslant 1-x$.

(D) $e^{-x}\geqslant 1+x$.　(E) 以上结论都不正确。

解法 1 因上述不等式中都含常数加项，可用最值法判别之。令 $f_1(x)=e^{-x}+x$，则 $f_1'(x)=-e^{-x}+1$，由 $f_1'(x)=0$ 得惟一驻点 $x_0=0$。又

$$f''(x)\big|_{x_0=0}=e^{-x}\big|_{x_0=0}=1>0,$$

故 $x=0$ 为 $f_1(x)$ 的极小值点，且极小值为

$$m=f_1(0)=1。$$

又因驻点惟一，故 m 也为 $f_1(x)$ 的最小值，因而 $f_1(x)\geqslant f(0)=1$，即 $e^{-x}+x\geqslant 1$，即 $e^{-x}\geqslant 1-x$. 仅(C)入选。

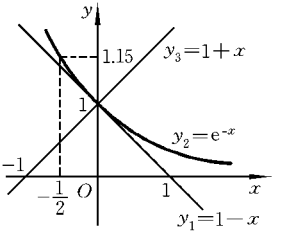


图 2.2.2.13

解法 2 在直角坐标系内作出三个函数

$$y_1=e^{-x},\quad y_2=1-x,\quad y_3=1+x$$

的图形，如图 2.2.2.13 所示。由图 2.2.2.13 易看出对任何 x 恒有

$$e^{-x}\geqslant 1-x.$$ 仅(C)入选。

习　题　2.2

(一)问题求解

1. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f(1)=2$，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+x-1}{x-1}=3$，则 $f'(1)=$

(A) 1。　　(B) 2。　　(C) 3。　　(D) 4。

(E) **以上结论都不正确**。

2. 已知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x^3)]|_{x=-2}=8$，$f(x)$**为偶函数，则** $f'(8)=$

(A) 2/3。　　(B) −2/3。　　(C) −8。　　(D) 8。　　(E) −2.

3. 设 $f(x)=\ln(1+2x)\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$，**则** $f'(0)=$

(A) **不存在且非无穷大**.　(B) ∞.　(C) 2.　(D) 1/2.　(E) 2/3.

4. [1997 **年** Ⅰ 14]　**若** $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\geqslant 0,\\ \ln(1+ax), & x<0\end{cases}$ **在** $x=0$ **处可导，则** $a=$

(A) −2。　　(B) 2。　　(C) −1。　　(D) 1。　　(E) 0。

5. 设 $f(x)$**有连续的导函数，**$f(0)=0$，$f'(0)=4$，**若函数** $F(x)=\begin{cases}\left[f(x)+\int_0^x\frac{\ln(1-2t)}{t}\mathrm{d}t\right]\Big/x, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$ **在点** $x=0$ **处连续，则** $A=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 5.

6. 设 $f(x)$**为可导函数，函数** $y=f(\ln x)$**在** $x=\mathrm{e}$ **处，当自变量的增量为** −0.5 **时，函数增量的线性主部为** 2，**则** $f'(1)=$

(A)4e。　　(B)−4e。　　(C) 4。　　(D) −4。　　(E)2e。

7. 设 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$，**则** $f'(4)=$

(A) 2。　　(B) −2。　　(C) 3。　　(D) −3。　　(E) 0。

8. 已知 $y=f\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$，$f'(x)=\ln(1+x^2)$，**则** $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$

(A) 2(ln10−ln3)/3.　　(B) 4(ln10−ln3)/9.

(C) 2(ln5−2ln3).　　(D) 4(ln10−2ln3)/9.

(E) **以上结论都不正确**.

9. $y=\sqrt[x]{x}$ **的导数** $y'_x=$

(A) $\sqrt{x}x^{\sqrt{x}-1}$。　　(B) $\sqrt[x]{x}\ln x$。

(C) $\sqrt[x]{x}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\ln x}{2}\right)$。　　(D) $\sqrt[x]{x}\left(1+\frac{\ln x}{2}\right)$。

(E) **以上结论都不正确**。

10. 设 $f(x)$**有二阶连续导数，且** $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$，**则**

(A) $f(0)$是 $f(x)$的极大值。　　(B) $f(0)$是 $f(x)$的极小值。

(C) $(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点。

(D) $f(0)$不是 $f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点。

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $f(x)$在 $x=a$ 处

(A) 导数存在，且 $f'(a)\neq 0$。　　(B) 导数不存在。

(C) 取得极大值。　　(D) 取得极小值。

12. 设 $f(x)$是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则 $f(x)$在点 x_0 处

(A) 取得极大值。　　(B) 取得极小值。　　(C) 取得最小值.

(D) 在某邻域内单调增加　　(E)在某邻域内单调减少。

13.［2003 年 Ⅱ 27］ 已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C=25000+200x+x^2/40$(元)。若产品以每件 500 元售出，则使利润最大的产量是

(A) 2000 件.　　(B) 3000 件.　　(C) 4000 件.

(D) 5000 件.　　(E) 6000 件.

14. 函数 $f(x)=5x^2/6-3\sqrt[3]{x^5}$的拐点个数为

(A) 0。　　(B) 1。　　(C) 2。　　(D) 3。　　(E) 4。

15. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则

(A) $f'(x_0)$是 $f'(x)$的极大值。(B) $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值。

(C) $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值。　(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线 $f(x)$的拐点。

(E) $f'(x_0)$是 $f'(x)$的极小值。

16. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图 2.2.2.14 所示，则 $f(x)$有

(A) 一个极小值点和两个极大值点。

(B) 两个极小值点和一个极大值点。

(C) 两个极小值点和两个极大值点。

(D) 三个极小值点和一个极大值点。

17. 设函数 $f(x)$具有连续的二阶导数，图 2.2.2.15 中三条曲线 L_1，L_2，L_3 分别为曲线

(A) $y=f(x)$，$y=f'(x)$，$y=f''(x)$.

(B) $y=f(x)$，$y=f''(x)$，$y=f'(x)$。

(C) $y=f''(x)$，$y=f'(x)$，$y=f(x)$。

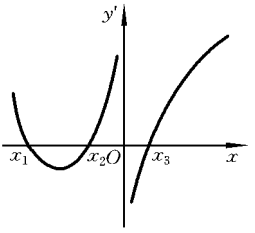


图 2.2.2.14

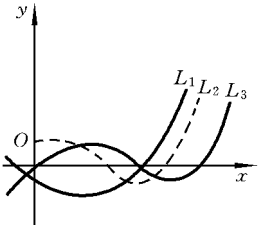


图 2.2.2.15

(D) $y=f'(x)$,$y=f(x)$,$y=f''(x)$.

18. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$,则方程$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$的根的个数为

(A) 4。　(B) 3。　(C) 2。　(D) 1。　(E) 0。

19. 已知方程 $x^3+(2m-3)x+m^2-m=0$ 有三个相异实根,分别介于$(-\infty,0)$,$(0,1)$,$(1,+\infty)$之间,则

(A) $-2<m<0$。　(B) $0<m<1$。　(C) $m>1$。　(D) $-2<m<1$.

20. 设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$,则

(A) $f(x)\leqslant x$。　(B) $x<0$ 时,$f(x)<x$;$x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant x$。

(C) $f(x)\geqslant x$。　(D) $x<0$ 时,$f(x)>x$;$x\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant x$。

21.[2000 年 Ⅰ 9] **设函数 $f(x)$和 $g(x)$都在$(-\infty,+\infty)$内可导,且对一切 x 有 $f(x)>g(x)$,那么**

(A) **对一切 x 有** $f'(x)\leqslant g'(x)$. (B) **存在惟一的 x,使** $f'(x)\leqslant g'(x)$.

(C) 存在某些 x，使 $f'(x)\leqslant g'(x)$.(D) 以上结论都不正确.

22. 已知函数 $f(x)$在其定义域内存在二阶导数，则在定义域内

(A) 若恒有 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$恒为常数。

(B) 若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$单调增加。

(C) 若 $f''(x)>0$，则函数曲线 $y=f(x)$下凹。

(D) $f(x)$连续。

23. 已知某产品的价格是产量 x 的函数，为 $P=10-x/5$，成本函数为 $C(x)=50+2x$，要使总利润 L 最大，产量应为

(A) 10。　　(B) 20。　　(C) 50。　　(D) 100。　　(E) 200。

24. [2004 年 Ⅱ 7]　根据图 2.2.2.16(a)、(b)、(c)、(d)，判断函数 $f(x)$的单调性。

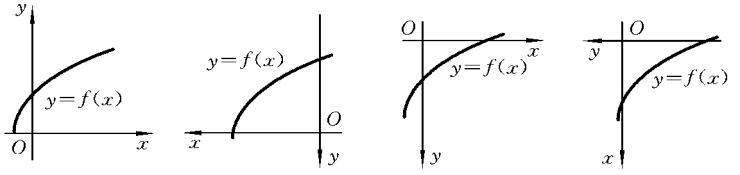


图 2.2.2.16

(A) (a)、(b)、(c)、(d)均单调增加。

(B) (a)、(d)单调增加，(b)、(c)单调减少。

(C) (a)、(c)单调增加，(b)、(d)单调减少。

(D) (a)、(b)、(d)单调增加，(c)单调减少。

(E) (a)、(b)、(c)单调增加，(d)单调减少。

(二) 条件充分性判断

1. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geqslant 0, \\ ax+b, & x<0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$内可导。

(1) $a=-1$；　　(2) $b=1$.

2. 函数 $f(x)=[\ln(1+x)+\ln(1-x)]g(x)$在点 $x=0$ 处可导。

(1) $g(x)$在 $(-1,1)$内有界；　　(2) $g(x)$在点 $x=0$ 处连续。

3. 设函数 $f(x)=\ln\sqrt{1/(a-x)+1/(a+x)}$ 在点 $x=1$ 处的二阶导数 $f''(1)=5/32$，其中 $a>1$.

(1) $a=2$；　　(2) $a=3$.

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$**在点** $x=0$ **处的导数** $f'(0)$**存在。**

(1) $g(0)=g'(0)=0$；　　(2) $g''(0)$**存在。**

5. 函数 $y=f[3x^2f^2(3x)]$**在点** $x=1$ **处的导数** $y'(1)=24$**，其中函数** $f(x)$**可导。**

(1) $f(3)=1,f'(3)=1$；　　(2) $f(3)=1,f'(3)=-4/3$.

6. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-2f(x)}{x}$**存在。**

(1) $f'(0)$**存在**；　　(2) $f(x)$**是**$(-1,1)$**内的奇函数。**

7. 函数 $f(x)$**在** $x=1$ **处可导。**

(1) $f(x)$**在** $x=1$ **处连续**；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3-2x)+3+x}{x-1}$**存在。**

8.[2004 **年** Ⅰ 5]$y=\sqrt[3]{x}$**在点** x_0 **处的切线方程为** $x-12y+16=0$。

(1) $x_0=1$；　　(2) $x_0=8$.

9.[2003 **年** Ⅱ 7]　**可以断定两条抛物线** $y=ax^2$ **与** $y=x^2-2x$ **相切。**

(1) $a=2$；　　(2) $a=-1$.

10. 过点(a,b)**可作出曲线** $y=x^2$ **的两条切线。**

(1) (a,b)**为**(a,a^2+1)；　　(2) (a,b)**为**(a,a^2-1).

11.[2003 **年** Ⅱ 10]　$f''(x_0)$**存在，**$y=f(x)$**在点** x_0 **处取得极值。**

(1) $f'(x_0)=0$；　　(2) $f''(x_0)=0$.

12. 点 x_0 **是** $f(x)$**的极值点。**

(1) $f'(x)$**在点** x_0 **左、右两边的符号相反**；　　(2) $f''(x_0)=0$.

13. $f(x)$**在**(a,b)**上每一点的二阶导数** $f''(x)<0$。

(1) $f(x)$**二阶可导，**$f(x)$**图形在**(a,b)**内为凸弧**；

(2) $f(x)$**二阶可导，**$f'(x)$**在**(a,b)**上严格单调减少。**

14. 方程 $x-1=\ln(1+x)$**有惟一实根。**

(1) **在区间**$(0,1)$**内**；　　(2) **在区间**$(1,3)$**内。**

15. 已知 $a>0$**，则方程** $e^x=ax+b$ **有两个实根。**

(1) a,b **满足** $a(1-\ln a)<b$；　　(2) a,b **满足** $a(1-\ln a)\geqslant b$.

16. 方程 $x^3-12x+q=0$ **有三个相异实根。**

(1) $q\leqslant 16$；　　(2) $q>-16$.

17. 方程 $x^4+ax+b=0$ 无实根。

(1) $a=4,b=4$.　　(2) $a=1/2,b=1$.

18. 方程 $x^3+kx+1=0$ 在$(-1,1)$内有实根。

(1) $k>0$;　　(2) $k\leqslant -3$.

19. $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,则对任意 $x\in(a,b)$,有 $f(x)>g(x)$.

(1) $f'(x)>g'(x)$;　　(2) $f(b)=g(b)$.

20. 使 $\lg x+\lg y$ 的最大值为 $-3\lg 2$.

(1) $x>0,y>0$;　　(2) $2x+y=1$.

(三) 解答题

1. [2000 年 Ⅱ 29]　求函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的导数和 y 的最大值,其中 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$.

2. 设 f,g 定义在$(-1,1)$上,且 $f(x),g(x)$在 $x=0$ 处连续,令

$$f(x)=\begin{cases} g(x)/x, & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$$

求 $g(0)$及 $g'(0)$.

3. 已知 $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x+1}}}$,求 y'.

4. 设 $y=\ln(1+3^{-x})$,则 $\mathrm{d}y=$_____。

5. 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数,求 $\mathrm{d}y$.

6. 设函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$,且 $f(0)$存在,求 $f'(x)$.

7. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且满足下列性质:

(1) $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$,a,b 为任意实数;

(2) $f(0)=1$;　　(3) 在 $x=0$ 处可导。

证明:对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$都有 $f'(x)=f'(0)f(x)$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}[g(x)-\mathrm{e}^{-x}]/x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$其中 $g(x)$有二阶连续导数,且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$;　　(2) 讨论 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性。

9. 判别 $y=x|x|$ 在点 $x=0$ 处是否可导。

10. 讨论 a,b 为何值时,才能使函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+b, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+ax), & x>0\end{cases}$在 $x=$

0 处可导。

11. 设 $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$，$\varphi(0)=\psi(0)=2$，$\varphi'(0)=2$，$\psi'(0)=1/2$，求 $y'(0)$.

12. $y=f(x^2+b)$，求 y''。

13. 设 $f(x)$ 可导，恒正，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=$_____。

14. 设 $f(0)=1$，$f'(0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)^{\frac{1}{x}}=$_____。

15. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(x)$ 是奇函数，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(tx)-f(x)}{x}$.

16. [2002 年 Ⅱ 21] 曲线 $y=[x/(1+x)]^2$ 在 $x=1$ 处的切线斜率等于_____。

17. 设曲线 $y_1=ax+\ln x$ 和曲线 $y_2=bx^2+ce^x$ 在点 $(1,2)$ 相交且相切，试求 a,b,c，并求公切线方程。

18. [1998 年 Ⅰ 23] 求曲线 $x^y=x^2y$ 在 $(1,1)$ 点的切线方程。

19. [1998 年 Ⅱ 23] 设圆的面积以均匀的速度 c 增长，问圆周长的增长速度与圆的半径有什么关系？为什么？

20. 旗杆高 100 米，一人以 3 米/秒的速度向杆前进，当此人跑至离杆脚 50 米时，他与杆顶距离的变化率是多少？（这里不考虑人的高度，并假定步行的速度不变。）

21. 求函数 $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值点。

22. [1998 年Ⅱ24] 求函数 $f(x)=2\sqrt{x}+1/x-3$ 在 $[1,4)$ 上的最大值。

23. [2003 年 Ⅰ 31] 求函数 $F(x)=\int_0^1(1-t)|x-t|\,\mathrm{d}t$（其中 $0\leqslant x\leqslant1$）的凹凸区间。

24. [1999 年 Ⅰ 25] 讨论函数 $y=\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{x-a_2}+\dfrac{1}{x-a_3}$ 的零点，其中 $a_1<a_2<a_3$.

25. 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4x$ 的交点个数。

26. 设 p,q 是大于 1 的常数，且 $1/p+1/q=1$，证明对于任意 $x>0$，有 $x^p/p+1/q\geqslant x$.

27. 方程 $x^4+ax+b=0$ 有惟一实根，试求 a,b 满足的条件。

28. 方程 $x^3-3x+A=0$，问 A 取何值时，(1)只有一个实根；(2)有两个不同实根；(3)有三个不同实根。

2.3 一元函数积分学

（一）考试内容

定积分的概念和基本性质，变上限定积分，牛顿-莱布尼兹公式，应用换元积分法和分部积分法进行简单的定积分计算，平面图形面积的计算。

（二）考试要求

理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的性质，熟练掌握计算不定积分的换元法和分部积分法，了解定积分的概念和基本性质，理解变上限定积分是函数的一种表示形式，会求变上限定积分的导数，掌握牛顿-莱布尼兹公式，掌握计算定积分的两种基本方法（换元法和分部积分法），会用定积分计算平面图形的面积。

*2.3.1 原函数与不定积分

1. 原函数与不定积分概念

定义 2.3.1.1 设在某区间上的任一点 x，都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的原函数。

定义 2.3.1.2 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数，则 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的全体原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，其中 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积式。

2. 不定积分的性质

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$；

(3) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ （$k\neq 0$，常数）；

(4) $\int(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$。

3. 基本积分公式

(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$（C 为常数）； (2.3.1.1)

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$; (2.3.1.2)

(3) $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$; (2.3.1.3)

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^{x}+C\ (a>0,a\neq1)$; (2.3.1.4)

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$; (2.3.1.5)

(6) $\int\frac{1}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}|+C$; (2.3.1.6)

(7) $\int\frac{ax}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$; (2.3.1.7)

(8) $\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$; (2.3.1.8)

以上各式中的 x 既可以是自变量也可以是函数。

4. 求不定积分的基本方法

1) 直接积分法

所谓直接积分法就是用基本积分公式和不定积分的运算性质求出不定积分的方法。求之前有时需先将被积函数恒等变形。

2) 换元积分法

1° **第一换元法(凑微分法)**

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u(\text{令 }\varphi(x)=u)。$$

2° **第二换元法**

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\psi(x)]\psi'(t)\mathrm{d}t\ (\text{令 }x=\psi(t))。$$

3) 分部积分法

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

或

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u。$$

5. 常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　求解与原函数有关的问题

类型(一)　已知某函数求其原函数。

求出该函数的不定积分就是所求的原函数,或将该函数与 $\mathrm{d}x$ 相乘改写为 d 与某函数相乘,则微分号后面所得到的函数就是该函数的一个原函数。

例 1　设 $f'(\ln x)=1+x$,求 $f(x)$.

解法 1　设 $\ln x=t$,则 $x=\mathrm{e}^{t}$, $f'(t)=1+\mathrm{e}^{t}$, $f(t)=\int f'(t)\mathrm{d}t=\int(1+\mathrm{e}^{t})\mathrm{d}t=t+\mathrm{e}^{t}+C$,即 $f(x)=x+\mathrm{e}^{x}+C$。

解法 2 $f(\ln x)=\int f'(\ln x)\mathrm{d}\ln x=\int(1+x)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}+\int\mathrm{d}x$

$$=\ln x+x+C=\ln x+\mathrm{e}^{\ln x}+C,$$

故
$$f(x)=x+\mathrm{e}^{x}+C。$$

例 2 $\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}$ _____。

解 设 $\mathrm{d}f(x)=\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)\mathrm{d}x$，则 $f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)\mathrm{d}x$. 因而 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)$。于是所求的 $f(x)$ 为 $\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)$ 的一个原函数，因

$$\int\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}\mathrm{d}x-\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}-\mathrm{e}^{x}+C,$$

故 $\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)$ 的一个原函数为 $\dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}-\mathrm{e}^{x}$。因而 $f(x)=(2/5)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}-\mathrm{e}^{x}$，即

$$\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}[(2/5)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}-\mathrm{e}^{x}]。$$

于是
$$\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}[(2/5)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}-\mathrm{e}^{x}+C]。$$

例 3[1997 年 Ⅱ 23]（条件充分性判断） 函数 $f(x)=\ln(1+ax^{2})-b\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+ax^{2}}$ 在点 $x=0$ 处的二阶导数 $f''(0)=4$.

(1) $a=2,b=0$； (2) $a=2,b=3$.

解 在所给函数表示式两端对 x 求导，得到

$$f'(x)=\frac{2ax}{1+ax^{2}}-\frac{b}{1+ax^{2}},\quad f''(x)=\frac{2ax(1+ax^{2})-(2ax-b)-2ax}{(1+ax^{2})^{2}}。$$

将 $x=0$ 代入上面二阶导数表示式，得到

$$4=f''(0)=2a,\quad \text{即}\quad a=2,$$

而 b 可为任一实数。条件(1)充分，条件(2)也充分. 仅 D 入选。

类型(二) 已知某函数的一个原函数，求该函数或其因子函数或其积分.

设 $\int f(x)g(x)=F(x)+C$，其中 $g(x),F(x)$ 为已知函数。下用两种方法求出 $f(x)$.

一是由 $\left(\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)g(x)=(F(x)+C)'=F'(x)$ 得到

$$f(x)=F'(x)/g(x);$$

二是由 $f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(F(x)+C)=\mathrm{d}F(x)$ 得到

$$f(x)=\mathrm{d}F(x)/(g(x)\mathrm{d}x)=F'(x)/g(x)。$$

例 4[1997 年 Ⅰ 17] 若 $\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=$

(A) $1/x$. (B) $1/x^2$. (C) $-1/x$. (D) $-1/x^2$. (E) $e^{-\frac{1}{x}}$.

解法 1 在所给等式两端对 x 求导得到

$$f(x)e^{-\frac{1}{x}}=(-e^{-\frac{1}{x}}+C)'=-e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}},$$

故 $f(x)=-1/x^2$. 仅(D)入选。

解法 2 $f(x)e^{-\frac{1}{x}}dx=d(-e^{-\frac{1}{x}}+C)=d(-e^{-\frac{1}{x}})=-de^{-\frac{1}{x}}$

$$=-(e^{-\frac{1}{x}})'dx=-e^{-\frac{1}{x}}(1/x^2)dx,$$

故 $f(x)=-1/x^2$. 仅(D)入选。

例 5 设$\frac{d}{dx}[f(3x-1)]=e^x$,则 $f(x)=$

(A) e^x+C. (B) $e^{2x}+C$. (C) $e^{(x+1)/3}+C$. (D) $e^{(x+2)/3}+C$.

解 由$\frac{d}{dx}[f(3x-1)]=e^x$ 知,e^x 的一个原函数为 $f(3x-1)$,而由$\int e^x dx=e^x+C$ 知,e^x 的任一个原函数为 e^x+C,于是有

$$f(3x-1)=e^x+C.$$

令$(3x-1)=u$,则 $f(u)=e^{(u+1)/3}+C$,即

$$f(x)=e^{(x+1)/3}+C \quad (C \text{ 为任取的一个常数})。仅(C)入选。$$

例 6[2004 年Ⅰ8](条件充分性判断) 已知 $x\ln x$ 是 $f(x)$的一个原函数,有$\int_1^e \frac{f(x)}{ax}dx=1$.

(1) $a=2/3$; (2) $a=3/2$.

解 因 $f(x)=(x\ln x)'$,故

$$\int_1^e \frac{f(x)}{ax}dx=\int_1^e \frac{(x\ln x)'}{ax}dx=\frac{1}{a}\int_1^e \frac{\ln x+1}{x}dx=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x\right)\Big|_1^e$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2a}=1.$$

当条件(1)成立时,$\int_1^e \frac{f(x)}{ax}dx=\frac{3}{2a}=\frac{9}{4}$。条件(1)不充分。当条件(2)成立时,有$\int_1^e \frac{f(x)}{ax}dx=1$。条件(2)充分.仅 B 入选。

类型(三) 判断某个函数为已知函数的原函数。

先看在给定区间某函数是否连续,可导,再看其导数是否等于已知函数。

例 7 函数 $e^{|x|}$ 的原函数是

(A) $\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ e^{-x}, & x<0. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ -e^{-x}, & x<0. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ 2-e^{-x}, & x<0. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ 3-e^{-x}, & x<0. \end{cases}$

解 设 $F(x)$ 为 $e^{|x|}$ 的原函数，则 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处连续，且可导。(C)和(A)中函数满足在 $x=0$ 处连续的条件，但(A)中函数的导数

$$F'(x)=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ -e^{-x}, & x<0, \end{cases} \neq f(x)=e^{|x|}=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ e^{-x}, & x<0, \end{cases}$$

即 $F'(x)\neq f(x)$，故(A)中函数不能入选。仅(C)入选。

例 8 函数(　　)是 e^{x^2} 的原函数。

(A) $\int e^{t^2}\,dt$ (B) $\int e^{t^2}\,dt+C$ (C) $\int e^{x^2}\,dt$ (D) $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ (E) $\int e^{x^2}\,dx^2$

解 依据原函数的定义分别对各选项求导，看哪一项的导数等于 e^{x^2}，仅(D)中的积分符合条件 $\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)'=e^{x^2}$。仅(D)入选。

题型二　简化计算有理函数的积分

有理函数积分是一个基本积分类型，考生应重点掌握如下几种类型的有理函数积分。

类型(一)　计算形如 $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ 的有理函数积分。

对分母为二次式，分子为一次式的形式 $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ 的有理函数的不定积分，常用凑微分法求之。为此先将被积式凑成两项的代数和，其中一项的分子为其分母的微分，再将另一项的分母配成完全平方。

例 9 $\int_{-1}^{3}\frac{x\,dx}{x^2-2x-8}=$

(A) 0. (B) $-\ln 5/3$. (C) $-2\ln 5$. (D) $\ln 5$. (E) $6\ln 5$.

解 原式 $=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{2x\,dx}{x^2-2x-8}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{2x-2+2}{x^2-2x-8}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-8}+\int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2-9}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{d(x^2-2x-8)}{x^2-2x-8}+\int_{-1}^{3}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2-9}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x-8)\Big|_{-1}^{3}+\frac{1}{2\times 3}\ln\left|\frac{x-1-3}{x-1+3}\right|_{-1}^{3}+C$$

$=-\ln 5/3$。**仅**(B)**入选**。

类型(二)　计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{[f(x)+a][f(x)+b]}$**,其中** a,b **为常数。**

被积函数的分母是(或能分解为)其差为常数的两项乘积,其积分常用下列分项法求之。由

$$\frac{1}{[f(x)+a][f(x)+b]}=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{f(x)+a}-\frac{1}{f(x)+b}\right],$$

得到　$$\int\frac{\mathrm{d}x}{[f(x)+a][f(x)+b]}=\frac{1}{b-a}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+a}-\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+b}\right],$$

这里 $f(x)$**常为幂函数** $f(x)=x^k$**。为将其被积函数的分母化成差为常数的两项乘积,有时需在分子、分母上同乘** x **的方幂** x^k**。**

例 10　求 $I=\int\frac{x^3+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$。

解　$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$**,且**$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)$**,故**

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{x^3+1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3+1}{x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{x^3-1+2}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3+2^3-7}{x+2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int(x^2+x+1)\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int(x^2-2x+4)+\frac{7}{3}\ln|x+2|$$

$$=\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{6}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C。$$

例 11　计算 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+1)}$。

解法 1　为将被积函数的分母化成其差为常数的两项乘积,在分子、分母上同乘 x^{n-1}**得到**

$$I=\int\frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{x^{n-1}x(x^n+1)}=\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}x^n}{x^n(x^n+1)}=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^n+1}\right)\mathrm{d}x^n$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}x^n}{x^n}-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^n)}{1+x^n}=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C。$$

解法 2　$$I=\int\frac{x^n+1-x^n}{x(x^n+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{x^{n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{n}\int\frac{1}{x^n+1}\mathrm{d}(x^n+1)=\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+1|+C.$$

解法 3 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}(1+x^{-n})}=\int\frac{x^{-(n+1)}}{1+x^{-n}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}x^{-(n+1)+1}}{1+x^{-n}}$

$$=-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}(x^{-n}+1)}{x^{-n}+1}=-\frac{1}{n}\ln|1+x^{-n}|+C.$$

例 12(条件充分性判断) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(x-a)(x+b)}=\frac{1}{3}\ln\frac{27}{32}$.

(1) $a=2,b=4$;　　(2) $a=4,b=2$。

解 $\frac{1}{(x-a)(x+b)}=\frac{1}{b+a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+b}\right)$,**则**

$$\text{原式}=\frac{1}{b+a}\left(\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{x-a}-\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{x+b}\right)=\frac{1}{b+a}\left(\int_0^1\frac{x-a+a}{x-a}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x+b-b}{x+b}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{b+a}\left(\int_0^1\frac{a\mathrm{d}x}{x-a}+\int_0^1\frac{b\mathrm{d}x}{x+b}\right)=\frac{1}{b+a}(a\ln|x-a|+b\ln|x+b|)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{b+a}(a\ln|1-a|+b\ln|1+b|-a\ln|-a|-b\ln|b|)。$$

当条件(1)成立时,将 $a=2,b=4$ **代入上式得原式**$=\frac{1}{3}\ln\frac{25}{32}\neq\frac{1}{3}\ln\frac{27}{32}$.

条件(1)不充分。当条件(2)成立时,将 $a=4,b=2$ **代入上式得到**

$$\text{原积分}=\frac{1}{6}(4\ln3+2\ln3-4\ln4-2\ln2)=\frac{1}{6}(6\ln3-10\ln2)$$

$$=\frac{1}{6}\times2\times(\ln3^3-5\ln2)=\frac{1}{3}\ln\frac{27}{32}.$$

条件(2)充分.仅 B 入选。

题型三　计算被积函数含根式的积分

常用的计算方法有下述几种。

法一　用凑微分求之。

被积函数的分母出现 $\sqrt{f(x)}$ **因子函数时,应先考察被积式能否凑成** $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\sqrt{f(x)}}$**的形式,如果能,则利用**

$$\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{\sqrt{f(x)}}=2\int\mathrm{d}\sqrt{f(x)}=2\sqrt{f(x)}+C$$

计算,即可解决去掉被积函数中分母根式 $\sqrt{f(x)}$ **的问题。**

例 13　计算不定积分 $\int\frac{x\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

解　原式$=-\frac{1}{2}\int\frac{e^{-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$=-\int e^{-\sqrt{1-x^2}}d\sqrt{1-x^2}$（**用到**$\frac{1}{\sqrt{u}}du=2d\sqrt{u}$）

$=\int e^{-\sqrt{1-x^2}}d(-\sqrt{1-x^2})=e^{-\sqrt{1-x^2}}+C$。

例 14　$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}=$

(A) $\sqrt{1+\sqrt{x}}$.　　(B) $2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.　　(C) $3\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

(D) $4\sqrt{1+\sqrt{x}}$.　　(E) $5\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

解　原式$=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=2\int\frac{d(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=2\times2\int d\sqrt{1+\sqrt{x}}$

$=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$。**仅**(D)**入选**。

例 15　$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1+x\sqrt{x}}}dx=$

(A) $(\sqrt{2}-1)/3$.　　(B) $2(\sqrt{2}-1)/3$.　　(C) $4(\sqrt{2}-1)/3$.

(D) $\sqrt{2}-1$.　　(E) $4(\sqrt{2}-1)/3$.

解　$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1+x\sqrt{x}}}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}=\int_0^1\frac{2}{3}\frac{dx^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1+x^{\frac{3}{2}}}}$

$=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{d(1+x^{\frac{2}{3}})}{\sqrt{1+x^{\frac{3}{2}}}}=\frac{2}{3}\times2\int_0^1 d\sqrt{1+x^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{1+x^{\frac{3}{2}}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$。**仅**(E)**入选**。

法二　将被积函数的分母或(和)分子有理化求之。

例 16　计算$\int\frac{xdx}{x-\sqrt{x^2+1}}$。

解　分母有理化得到

原式$=\int\frac{x(x+\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}dx=-(\int x^2dx+\int x\sqrt{1+x^2}dx)$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}d(1+x^2)\right]$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C。$$

法三　化根式为幂函数，应用幂函数的积分公式求之。

例 17　求 $I=\int\frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解　$I=\int\frac{(x^2+x^{3/2}+3)}{x^{1/2}}\mathrm{d}x=\int(x^{3/2}+x+3x^{-1/2})\mathrm{d}x$

$$=\left[1\Big/\left(1+\frac{3}{2}\right)\right]x^{3/2+1}+\frac{1}{2}x^2+\left[3\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]x^{1-1/2}+C$$

$$=\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{1}{2}x^2+6x^{1/2}+C。$$

法四　用配方法求之。

根式中含 x 的二次函数可通过配方等方法化为 $\sqrt{A^2-u^2}$，$\sqrt{u^2-A^2}$，$\sqrt{u^2+A^2}$ 等形式，再用凑微分法或直使用积分公式(2.3.1.6)算出一些较特殊的积分。

例 18(条件充分性判断)　$\int_2^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\ln(1+\sqrt{2})$。

(1) $a=3$；　　(2) $a=4$.

解　$\int_2^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\int_2^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-2)^2+1}}=\int_2^a\frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$

$$=\ln\left[(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right]\Big|_2^a$$

$$=\ln\left[(a-2)+\sqrt{(a-2)^2+1}\right].$$

当条件(1)成立即 $a=3$ 时，有

$$\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\ln\left[(a-2)+\sqrt{(a-2)^2+1}\right]\Big|_2^3=\ln(1+\sqrt{2})。$$

条件(1)充分。但当条件(2)成立即 $a=4$ 时，有

$$\int_2^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\ln\left[(a-2)+\sqrt{(a-2)^2+1}\right]\Big|_2^4=\ln(2+\sqrt{5})$$

$$\neq\ln(1+\sqrt{2})。$$

条件(2)不充分。仅 B 入选。

法五　用变量代换法求之。

一般均可令被积函数中的根式为一新变量使无理式积分化为有理式的积分。常考题型有下述几种情况：

1° 根式内含 x 的一次函数，且被积函数只含一个根式，作变量代换，直接令整个根式为新变量 u。

2° 被积函数中含有两个根式 $\sqrt[m]{ax+b}$，$\sqrt[n]{ax+b}$，常作代换 $t=\sqrt[p]{ax+b}$，其中 p 为正整数 m，n 的最小公倍数。

3° 被积函数含根式 $\sqrt{e^{kx}\pm a}$（或 $\sqrt{a\pm e^{kx}}$）时常作代换 $t=\sqrt{e^{kx}\pm a}$（或 $t=\sqrt{a\pm e^{kx}}$）化为有理函数积分，有理也可作代换 $t=e^{kx}$ 利用基本积分公式(2.3.1.6)直接积分（参阅本节题型四）。

例 19[1999 年Ⅱ25] **求** $I=\int_0^1\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$.

解法 1 **令** $t=1+\sqrt{x}$，**则** $x=(t-1)^2$，$dx=2(t-1)dt$. **因而**

$$I=\int_0^1\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=2\int_1^2\sqrt{t}(t-1)dt=2\int_1^2(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt$$
$$=2\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2=\frac{8}{15}(1+\sqrt{2})。$$

解法 2 **令** $t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$，**则** $x=(t^2-1)^2$，$dx=4t(t^2-1)$，

$$I=4\int_1^{\sqrt{2}}t^2(t^2-1)dt=4\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{8}{15}(1+\sqrt{2}).$$

例 20[2000 年Ⅱ30] **求** $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$。

解 **因 2 与 3 的最小公倍数为 6，令** $x+1=t^6$，**则** $dx=6t^5dt$，$\sqrt{x+1}=t^3$，$\sqrt[3]{x+1}=t^2$，**所以**

$$\text{原式}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=\int\frac{6t^3dt}{1+t}=6\int\frac{t^3+1-1}{1+t}dt=6\int(t^2+t+1)dt-\int\frac{dt}{1+t}$$
$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$$
$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C.$$

例 21 $\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=$

(A) $\sqrt{3}/2-\ln(2-\sqrt{3})$.　　(B) $1/2-\ln(2-\sqrt{3})$.

(C) $1/2+\ln(2+\sqrt{3})$.　　(D) $\sqrt{3}/2+\ln(2+\sqrt{3})$.

(E) $\sqrt{3}/2-\ln(2+\sqrt{3})$.

解 **本例是含根式的被积函数的积分，应先通过变量代换** $t=\sqrt{1-e^{2x}}$

去掉根式和指数函数，再积分。

由 $t=\sqrt{1-e^{2x}}$ **得到** $x=\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$，$dx=\frac{-t}{1-t^2}dt$. **于是**

$$\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{-t^2}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\sqrt{3}/2-\ln(2+\sqrt{3}).$$ **仅(E)入选。**

例 22　计算 $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4e^x+e^{2x}}}$。

解　原式 $=\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}\sqrt{e^{2x}-4e^x+1}}=-\frac{de^{-x}}{\sqrt{1-4e^{-x}+e^{-2x}}}$

$$\xlongequal{e^{-x}=u}-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-4u+1}}=-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-2\times 2u+4-3}}$$

$$=-\int\frac{d(u-2)}{\sqrt{(u-2)^2-3}}=-\ln|(u-2)+\sqrt{(u-2)^2-3}|+C$$

$$=-\ln|(e^{-x}-2)+\sqrt{(e^{-x}-2)^2-3}|+C。$$

法六　用倒代换法求之。

为求这类积分 $\int\frac{dx}{x^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **常用倒代换** $t=\frac{1}{x}$ **求之。这时虽不能去掉根号，但可以降低分母中** x^k **的幂指数改善根号内的函数，使之能用凑微分法或用基本积分公式求出其积分。**

例 23[2000 **年** Ⅰ 29]　**求** $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

解法 1　用倒代换 $x=\frac{1}{t}$ **求之，则** $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. **于是**

$$I=-\int\frac{dt}{t^2(1/t^2)\sqrt{1+(1/t)^2}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2\int d\sqrt{1+t^2}=-\sqrt{1+t^2}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

解法 2　用分部积分法求之。

$$I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1+1/x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1/x^2)}{\sqrt{1+1/x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+1/x^2)}{\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2\int \mathrm{d}\sqrt{1+1/x^2}=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

题型四　计算被积函数仅含指数函数类的积分

类型(一)　计算被积函数仅含 e^{kx}(或 a^{kx})的积分。

如果被积函数的分母仅含 e^{kx}(或 a^{kx})其积分有多种求法。作代换 $t=\mathrm{e}^{kx}$,将原积分化为有理函数积分求之是常用方法,计算时要利用式(2.3.1.4)。

例 24　计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$。

解　令 $\mathrm{e}^{2x}=t$,**则** $2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/(2\mathrm{e}^{2x})=\mathrm{d}t/(2t)$。**于是**

$$\text{原式}=\int\frac{\mathrm{d}t}{2t(t+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[\ln t-\ln(t+1)]+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{1+t}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}+C.$$

例 25　计算 $\int\frac{2^x3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x$.

解　原式$=\int\frac{6^x\mathrm{d}x}{4^x[(9/4)^x-1]}=\int\frac{(3/2)^x}{(3/2)^{2x}-1}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{(3/2)^x\ln(3/2)\mathrm{d}x}{\ln(3/2)\{[(3/2)^x]^2-1\}}=\int\frac{[(3/2)^x]'\mathrm{d}x}{\ln(3/2)\{[(3/2)^x]^2-1\}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(3/2)^x}{\ln(3/2)\{[(3/2)^x]^2-1\}}$$

$$=\frac{1}{\ln(3/2)}\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{(3/2)^x-1}{(3/2)^x+1}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left(\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right)+C.$$

例 26(条件充分性判断)　$\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=6$.

(1) $a=6$;　　(2) $a=3$.

解法 1　作变量代换 $\mathrm{e}^x=t$ **求之,则** $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/\mathrm{e}^x=\mathrm{d}t/t$. **于是**

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-a}}^{\mathrm{e}^a}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\int_{\mathrm{e}^{-a}}^{\mathrm{e}^a}\frac{\mathrm{d}t}{t}-\int_{\mathrm{e}^{-a}}^{\mathrm{e}^a}\frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1}$$

$$=\ln\mathrm{e}^a-\ln\mathrm{e}^{-a}-\ln\frac{\mathrm{e}^a+1}{\mathrm{e}^{-a}+1}=2a-\ln\left[\mathrm{e}^a\frac{\mathrm{e}^a+1}{\mathrm{e}^a(\mathrm{e}^{-a}+1)}\right]$$

$$=2a-a=a.$$

当条件(1)成立时，有 $\int_{-6}^{6}\frac{1}{1+e^x}dx=6$。**条件(1)充分。**

当条件(2)成立时，有 $\int_{-3}^{3}\frac{1}{1+e^x}dx=3$。**条件(2)不充分。仅 A 入选。**

解法 2 $$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+e^x}dx&=\int_{-a}^{a}\frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}=\int_{-a}^{a}\frac{de^x}{e^x}-\int_{-a}^{a}\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}\\&=\ln e^x\Big|_{-a}^{a}-\ln(1+e^x)\Big|_{-a}^{a}=2a-\ln\frac{1+e^a}{1+e^{-a}}\\&=2a-\ln\left[e^a\frac{1+e^a}{e^a(1+e^{-a})}\right]=2a-\ln\left(e^a\frac{1+e^a}{1+e^a}\right)\\&=2a-\ln e^a=2a-a=a.\end{aligned}$$

解法 3 $$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+e^x}dx&=\int_{-a}^{a}\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\int_{-a}^{a}\frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})\Big|_{-a}^{a}\\&=-\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a}=-\ln\left[e^a\frac{1+e^{-a}}{e^a(1+e^a)}\right]\\&=-\ln\left[\frac{1}{e^a}\left(\frac{1+e^a}{1+e^a}\right)\right]=-\ln\frac{1}{e^a}=-(-\ln e^a)=a.\end{aligned}$$

解法 4 **注意到** $g(x)=\frac{2-(1+e^x)}{2(1+e^x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$**为奇函数，**$\int_{-a}^{a}g(x)dx=0$**，于是**

$$0=\int_{-a}^{a}g(x)=\int_{-a}^{a}\frac{2dx}{2(1+e^x)}-\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dx=\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+e^x}-a,$$

即

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+e^x}=a。$$

解法 5 $$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+e^x}dx&=\int_{-a}^{a}\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int_{-a}^{a}dx-\int_{-a}^{a}\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}\\&=2a-\ln(1+e^x)\Big|_{-a}^{a}=2a-\ln\frac{1+e^a}{1+e^{-a}}\\&=2a-\ln\left[e^a\frac{1+e^a}{e^a(1+e^{-a})}\right]=2a-\ln e^a=2a-a=a.\end{aligned}$$

解法 6 **注意到积分区间为对称区间，虽** $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$**不是奇、偶函数，但**

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{1+e^x}=1,$$

由式(2.3.2.6)即得

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx=\int_{0}^{a}1dx=a。$$

解法 7 $\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+e^{x}}dx=\int_{-a}^{a}\frac{dx}{e^{x}(1+e^{-x})}=\int_{-a}^{a}\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=a$(见解法 3)。

注意 被积函数 $f(x)$含 e^{x} 时,为求其积分常进行如下恒等变形:

1° 分子、分母同乘 e^{x} 或 e^{-x},即 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{e^{x}g(x)}{e^{x}h(x)}=\frac{e^{-x}g(x)}{e^{-x}h(x)}$;

2° 分子上加减相同的项,即 $f(x)=\frac{(g(x)\pm e^{x})\mp e^{x}}{h(x)}$;

3° 分子或分母上提取公因式,即

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{e^{x}g_{1}(x)}{h(x)}\quad 或\quad f(x)=\frac{g(x)}{e^{x}h_{1}(x)}.$$

类型(二) 计算被积函数含多个指数项的积分。

常用下述方法求之:

1° 作变量代换 $u=e^{x}$ 或 $u=e^{-x}$,将其化为 $\int\frac{dx}{u^{2}-a^{2}}$ 而求之。

2° 将被积函数分母的和差形式化为乘积形式而求之。

3° 被积函数中如含有 e^{-kx} 可在分子分母上同乘 e^{kx},如含有 e^{kx},可在分子分母上同乘 e^{-kx},化简被积函数而求之。

类型(三) 计算被积函数含 $\sqrt{e^{kx}\pm a}$ 或 $\sqrt{a\pm e^{kx}}$ 的积分(参阅本节题型三中的法五)。

例 27 计算 $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}-2}$。

解法 1 用配方法,提公因式等方法将分母中和差化为乘积形式。

$$\int\frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}-2}=\int\frac{dx}{(e^{x})^{2}-2e^{x}e^{-x}+(e^{-x})^{2}}=\int\frac{dx}{(e^{x}-e^{-x})^{2}}$$

$$=\int\frac{dx}{e^{-2x}[(e^{x})^{2}-1]^{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}d(2x)}{[(e^{x})^{2}-1]^{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)^{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int d\left(\frac{1}{e^{2x}-1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{2x}-1}+C。$$

解法 2 将原积分的分子分母同乘 e^{2x} 得到

$$原式=\int\frac{e^{2x}dx}{(e^{2x})^{2}+1-2e^{2x}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)^{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}+C。$$

解法 3　令 $\mathrm{e}^{2x}=t$，**则** $2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，$2t\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，**于是**

$$\text{原式}=\int\frac{\mathrm{d}t/2t}{t+t^{-1}-2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}+C.$$

题型五　计算 $\int\frac{f(x)\mathrm{d}x}{(ax+b)^k}$ **(**k **为实数且不等于** 1**)**

常用凑微分的公式求解，为此要熟练掌握下列凑微分公式：

$$x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\mathrm{d}x^{n+1},\tag{2.3.1.9}$$

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{d}\frac{1}{x^3},$$

一般 k **为不等于** 1 **的实数时，有**

$$\frac{1}{x^k}\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}\mathrm{d}\frac{1}{x^{k-1}}。\tag{2.3.1.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^k}=\frac{-1}{a(k-1)}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}\right]=\frac{1}{a(1-k)}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}\right].\tag{2.3.1.11}$$

为理解式(2.3.1.11)，**下面对** $k=2,3,4$ **加以验证。**

$$\frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}(ax+b)=-\frac{1}{a}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(ax+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{a(1-2)}\mathrm{d}\left(\frac{1}{ax+b}\right),$$

$k=3$ **时，有** $\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^3}=-\frac{1}{2a}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(ax+b)^2}\right]=\frac{1}{a(1-3)}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(ax+b)^2}\right]$，

$k=4$ **时，有** $\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^4}=-\frac{1}{3a}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(ax+b)^3}\right]=\frac{1}{a(1-4)}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(ax+b)^3}\right]$。

例 28　计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+\ln x}}$.

解　由式(2.3.1.11)**得到**

原式$=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt[3]{1+\ln x}}=\int\frac{\mathrm{d}(1+\ln x)}{(1+\ln x)^{1/3}}=-\frac{1}{1/3-1}\int\mathrm{d}\frac{1}{(1+\ln x)^{1/3-1}}$

$=\frac{3}{2}\frac{1}{(1+\ln x)^{-2/3}}+C=\frac{3}{2}(1+\ln x)^{2/3}+C.$

例 29[2002 年Ⅰ21] **设函数** $f(x)$**在**$[0,1]$**上有连续的导数,**$f(x)$**无零点,且** $f(0)=1,f(1)=2$**,则**$\int_0^1\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=$_____。

解　先将被积函数中导函数因子移入微分号内,再用分部积分法求之,即

$$\int_0^1\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=(-1)\int_0^1\mathrm{d}\frac{1}{f(x)}=-\left[\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(0)}\right]=\frac{1}{2}.$$

例 30(条件充分性判断)　$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}-1$。

(1)$f(x)=\mathrm{e}^x$;　　(2)$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

解　$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}f'(\ln x)\mathrm{d}\ln x=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}f(\ln x)=f(\ln\mathrm{e})-f(\ln 1)$

$=f(1)-f(0).$

当条件(1)成立时,$f(x)=\mathrm{e}^x$**,则** $f(1)-f(0)=\mathrm{e}-1\neq\mathrm{e}^{-1}-1$。**条件(1)不充分。当条件(2)成立时,有**

$f(1)-f(0)=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-0}=\mathrm{e}^{-1}-1$。**条件(2)充分。仅** B **入选。**

例 31　$\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1-1/x}\mathrm{d}x=$

(A)$\mathrm{e}^{1/2}-1$.　　(B)$\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1/2}$.　　(C)$\mathrm{e}^{-1/2}-\mathrm{e}^{-1}$.

(D)$\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}$.　　(E)$\mathrm{e}^{1/2}$.

解　**原式**$=\int_1^2\mathrm{e}^{1-1/x}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2\mathrm{e}^{1-1/x}\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$=\int_1^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{1-1/x}=\mathrm{e}^{1-1/x}\Big|_1^2=\mathrm{e}^{1/2}-1$。**仅(A)入选。**

例 32　$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^3)^{3/2}}=$

(A)$\frac{1}{3}\frac{1}{(1-x^3)^{1/2}}+C$.　(B)$\frac{2}{3}\frac{1}{(1-x^3)^{1/2}}+C$.　(C)$\frac{4}{3}\frac{1}{(1-x^3)^{3/2}}+C$.

(D)$\frac{5}{3}\frac{1}{(1-x^3)^{1/2}}+C$.　(E)$\frac{1}{(1-x^3)^{3/2}}+C$.

解　**原式**$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x^3}{(1-x^3)^{3/2}}=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(1-x^3)}{(1-x^3)^{3/2}}$

$$=-\frac{1}{3}\frac{-1}{3/2-1}\int \mathrm{d}\left[\frac{1}{(1-x^3)^{3/2-1}}\right]=\frac{2}{3}\frac{1}{(1-x^3)^{1/2}}+C。$$

仅(B)**入选**。

例 33 $\int\frac{1+x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x=$

(A)$C+\frac{x}{(1-x)^2}$. (B)$\frac{1}{(1-x)^2}+C$. (C)$\frac{1}{(1-x)^3}+C$.

(D)$\frac{2}{(1-x)^3}+C$. (E)$\frac{1}{1-x}+C$.

解 $\int\frac{1+x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x-1+1}{(1-x)^3}\mathrm{d}x=-2\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{(1-x)^3}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$

$$=(-2)\left(\frac{-1}{2}\right)\int \mathrm{d}\,\frac{1}{(1-x)^2}+\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}+(-1)\int \mathrm{d}\,\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}+C$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}+C。\textbf{仅}(\mathrm{B})\textbf{入选}。$$

习 题 2.3.1

(一)问题求解

1. [1997 **年** Ⅱ 17] $\int_3^6 f'\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x=$

(A) $f(2)-f(1)$. (B) $3[f(2)-f(1)]$. (C) $[f(2)-f(1)]/3$.

(D) $[f''(2)-f''(1)]/3$. (E) $3[f''(2)-f''(1)]$.

2. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$,**则**$\int\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$

(A) $-1/x+C$. (B) $-\ln x+C$. (C) $1/x+C$.

(D) $\ln x+C$. (E) $-x+C$.

3. 设$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(3x-1)]=\mathrm{e}^x$, $f(x)=$

(A) $\mathrm{e}^{x/3}$. (B) $\mathrm{e}^{(x+1)/3}$. (C) $\mathrm{e}^{(x+1)/3}+C$.

(D) $\mathrm{e}^{(x-1)^2}+C$. (E) $\mathrm{e}^{(x+2)^2}+C$.

4. $\int_0^1\ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x=$

(A) $\ln 2$. (B) 11. (C) 2. (D) $1/2$. (E) -1.

5. $I=\int_{e}^{e^2}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x(1+\ln x)}}=$

(A) $3\ln(\sqrt{3}-1)$. (B) $2\ln(\sqrt{3}-1)$.

(C) $4\ln(\sqrt{3}-1)$. (D) $5\ln(\sqrt{3}-1)$.

6. $\int\sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx=$

(A) $\sqrt{1-x^{3/2}}+C$. (B) $3\sqrt{1-x^{3/2}}+C$. (C) $5\sqrt{1-x^{3/2}}+C$.

(D) $(-4/3)\sqrt{1-x^{3/2}}+C$. (E) $4\sqrt{1-x^{3/2}}+C$.

7. $\int_{1}^{32}\dfrac{dx}{x^{1/5}\sqrt{1+x^{4/5}}}=$

(A) $\sqrt{17}-\sqrt{2}$. (B) $5(\sqrt{17}-\sqrt{2})$.

(C) $6(\sqrt{17}-\sqrt{2})$. (D) $(5/2)(\sqrt{17}-\sqrt{2})$.

(E) $7(\sqrt{17}-\sqrt{2})$.

(二) 条件充分性判断

1. $\int_{0}^{1}a^x e^x dx=\dfrac{e^2-1}{2}$.

(1) $a=e$; (2) $a=\sqrt{e}$。

2. $\int_{0}^{a}e^{(x+e^x)}dx=e^2-e$.

(1) $a=2$; (2) $a=\ln 2$.

3. $\int_{1/2}^{2}\dfrac{dx}{x(1+x^n)}=\ln 2$。

(1) $n=6$; (2) $n=3$.

4. $\int_{0}^{a}\dfrac{x+\ln(1+x)}{1+x}dx=e-\dfrac{3}{2}$.

(1) $a=1$; (2) $a=e$。

5. $\int_{-1}^{a}f(x)dx=1$,**其中函数** $f(x)$**满足** $\int xf(x)dx=x^2e^x+C$.

(1) $a=-2$; (2) $a=0$.

6. $f(a)=3(e-1)$,**其中函数** $f(x)$**满足** $f'(3x-1)=e^x$ **且** $f(-1)=3$.

(1) $a=2$; (2) $a=0$.

(三) 解答题

1. 已知 $\int\sqrt{1+x}dx=F(x)+C$,**求** $dF(e^x)$。

2. 求 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3. [2001 年 Ⅱ 22] $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$____。

4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2-x)}=$____。

5. [1998 年 Ⅱ 25] 求 $I=\int\frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\mathrm{d}x$.

6. 求下列积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$；　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$；　(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-4}}$；

(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^x}}$；　(5) $\int\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-x-2}$；　(6) $\int_1^2\frac{\ln x\mathrm{d}x}{x(1+3\ln^2 x)}$；

(7) $\int\frac{2x^2-3}{x^2(x^2-1)}\mathrm{d}x$.

2.3.2 计算定积分

1. 定积分的定义

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的已知函数，对区间 $[a,b]$ 进行任意分划，其任意分划的 x 区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，作和式 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. 若和式的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}S_n=\lim_{\Delta x\to 0i=1}^{n}\sum f(\xi_i)\Delta x_i,\ \text{其中}\ \Delta x=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$$

存在，且极限值与 $[a,b]$ 的分划及 ξ_i 的取法无关，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且称此极限值为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0i=1}^{n}\sum f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，$[a,b]$ 称为积分区间，a,b 分别称为积分下限、积分上限，x 称为积分变量，S_n 称为积分和. 由积分的上述定义易知

1° 定积分的值只与被积函数和积分区间有关；

2° 定积分的值与积分变量用什么文字表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t;$$

3° $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$，**特别有** $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$。

2. 定积分的基本性质

1° $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

2° $\int_a^b k\,f(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，**$k$ 为常数**.

3° **定积分的可加性：对任意** a,b,c **总有**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x。$$

定理 2.3.2.1（牛顿-莱布尼兹公式） **若函数** $f(x)$**在**$[a,b]$**上连续，**$F(x)$**是** $f(x)$**在**$[a,b]$**上的一个原函数，则**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

上述公式也称为微积分基本定理，是计算定积分的基本公式.

3. 常考题型及其解题分法技巧归纳

题型一　利用定积分的几何意义计算定积分

类型(一)　利用圆心在原点、半径为 R **的圆的面积计算定积分**。

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi R^2。\tag{2.3.2.1}$$

$$\int_{-R}^{0}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi R^2。\tag{2.3.2.2}$$

例 1（充分条件性判断）　$\int_{-a}^{a}(a+x)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=4\pi$.

(1) $a=1$；　　(2) $a=2$.

解　$\int_{-a}^{a}(a+x)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

$$=a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}ax+0=a\cdot\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi a^3}{2}.$$

由 $\pi a^3/2=4\pi$ **得到** $a^3=8=2^3$，**故** $a=2$. **仅** B **入选.**

例 2　$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & -a\leqslant x\leqslant 0,\\ x-a, & 0\leqslant x\leqslant a,\end{cases}$ **利用几何意义求** $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x+\int_0^a(x-a)\mathrm{d}x$

$$=\pi a^2/4+a^2/2-a^2=\pi a^2/4-a^2/2=(\pi-2)a^2/4.$$

类型(二)　利用圆心在$(a,0)$**、半径为** a **的圆的面积计算定积分**。

$$\int_0^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{2a}\sqrt{x(2a-x)}=\frac{\pi a^2}{2},\tag{2.3.2.3}$$

$$\int_0^a\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\sqrt{x(2a-x)}=\int_a^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{2a}\sqrt{x\ (2a-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}. \qquad (2.3.2.4)$$

例 3　由定积分的几何意义，有 $\int_0^2\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x=$

(A) $\pi/4$.　(B) $\pi/2$.　(C) π.　(D) $3\pi/2$.　(E) 2π.

解法 1　注意到 $x(2-x)=2x-x^2=1-1+2x-x^2=1-(x-1)^2$，**有**

$$y=\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{x(2-x)}.$$

此为圆心在点$(1,0)$、**半径为** 1 **的上半圆周的方程. 由于该上半圆周的面积为** $\pi/2$，**由定积分的几何意义有**

$$\int_0^2\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x=\text{上半圆面积}=\frac{\pi}{2}.$$ **仅**(B)**入选.**

解法 2　令 $a=1$，**直接利用式**(2.3.2.3)**计算得到**

$$\int_0^2\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$ **仅**(B)**入选.**

解法 3　$\int_0^2\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}\xrightarrow{x-1=t}\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

$=\pi\times1^2/2=\pi/2.$ **仅**(B)**入选**。

例 4（**条件充分性判断**）　**有** $\int_0^a\sqrt{x(a-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

(1) $a=2$;　　(2) $a=4$.

解　由式(2.3.2.3)**知所给等式的左边是圆心在**$(a/2,0)$、**半径为** $a/2$ **的半圆的面积，即**

$$\int_0^a\sqrt{x(a-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi(a/2)^2}{2}=\frac{\pi a^2}{8}.$$

于是当 $a=2$ **时有**　$\int_0^2\sqrt{x\ (2-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\times4}{8}=\frac{\pi}{2}.$

条件(1)**充分. 显然条件**(2)**不充分. 仅** A **入选.**

题型二　计算对称区间上的定积分

对称区间上的定积分可用下述命题简化计算.

命题 2.3.2.1　(1) **用下式可简化对称区间上奇偶函数定积分的计算：**

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{为偶函数},\\ 0, & f(x)\text{为奇函数}.\end{cases} \qquad (2.3.2.5)$$

(2) **积分区间是对称区间，但被积函数不是奇函数**(**也不是偶函数**)**可利用下式简化计算：**

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x. \quad (2.3.2.6)$$

注意到区间为对称区间，可作负代换 $x=-t$ 证明式(2.3.2.6)，即

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{a}^{-a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t,$$

故
$$2I=\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

计算对称区间$[-a,a]$上的定积分时，一要注意被积函数的奇偶性，简化计算，二要想到使用负代换计算或证明不熟悉的问题. 例如式(2.3.2.6)没有记住时，就可利用负代换推得.

类型(一)　计算对称区间上的奇偶函数的定积分。

常用式(2.3.2.5)简化计算。

例 5 [2005 年 Ⅰ 18](条件充分性判断)　$\int_{-a}^{a} x^k \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x=0.$

(1) $k=2$；　　(2) $k=0$.

解　首先应注意函数

$$g(x)=\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|=\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\ln|1-x|-\ln|1+x|$$

是自变量带相反符号的两函数之差. 由命题 2.1.1.4 知它是奇函数. 而当条件(1) 满足时，$x^k=x^2$ 为偶函数. 于是 $x^2\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|$ 为奇函数，在对称区间$[-a,a]$上其积分

$$\int_{-a}^{a} x^2\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|\mathrm{d}x=0.$$

条件(1)充分. 当条件(2)成立时，$x^k=x^0=1$ 仍为偶函数，因而有

$$\int_{-a}^{a} x^0\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|\mathrm{d}x=0.$$ **条件(2)充分. 仅 D 入选.**

例 6　**若** $\int_{-2}^{2}\frac{ax+b}{\sqrt{x^2-1}}=2\ln(\sqrt{5}-2)$，**则有**

(A) $a=1,b=1$.　　(B) $a=0,b=-1$.　　(C) $a=2,b=0$.

(D) a **为任意实数**，$b=1$.　　(E) a **为任意实数**，$b=-1$.

解　**被积函数** $\frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$ **为奇函数，由对称性有** $\int_{-2}^{2}\frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=0$. **而由积分的基本公式有**

$$\int_{-2}^{2}\frac{b}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=2b\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=2b\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=2b\ln(\sqrt{5}+2)=2b\ln\left[\frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2}\right]$$

$$=2b\ln\frac{1}{(\sqrt{5}-2)}=-2b\ln(\sqrt{5}-2).$$

比较所给结果易看出 $b=-1$，a 为任意实数. 仅(E)入选.

例 7　定积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{|x|^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$

(A) 1/2.　　(B) 2/3.　　(C) 4/3.　　(D) 4/5.　　(E) 5/6.

解　设积函数为偶函数，故

$$I=2\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2\ 2x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1-\frac{x^2\ \mathrm{d}(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\int_0^1\frac{x^2\ \mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-2\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=-2\left(x^2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x^2\right)$$

$$=-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{2\times2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=4/3.$$ **仅(C)入选.**

类型(二)　计算对称区间上被积函数含因子函数 $g(x)$ 的积分，其中 $g(x)+g(-x)$ 易于计算，且其结果较简.

常用式(2.3.2.6)**简化计算. 这样的因子函数常见的有**

$$g(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x},\quad\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}},\quad\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x},\quad\frac{\mathrm{e}^{kx}\pm1}{\mathrm{e}^{kx}\mp1}\text{等.}$$

例 8　$I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 5.

解法 1　考虑到积分区间为对称区间，可使用负代换求之.

$$I\xlongequal{x=-t}-\int_1^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{-1/t}}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{1+\mathrm{e}^{1/t}}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\mathrm{d}x,$$

因此　$2I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2,\quad I=1.$

解法 2　$f(x)+f(-x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1/x}}$

$$=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\times1}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\mathrm{e}^{-1/x}}$$

$$=\frac{1}{1+e^{1/x}}+\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}=1,$$

利用式(2.3.2.6)**即得**

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+e^{1/x}}=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+e^{1/x}}+\frac{1}{1+e^{-1/x}}\right)dx=\int_{0}^{1}1\ dx=1.$$ **仅**(A)**入选.**

例 9(**条件充分性判断**) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}f(x)\ dx=\int_{0}^{1}f(x)dx.$

(1) $f(x)$**为连续的奇函数**; (2) $f(x)$**为连续的偶函数.**

解 **当条件**(1) **成立时,有** $-f(x)=f(-x)$. **由式**(2.3.2.6)**有**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e}f(x)&=\int_{0}^{1}\left[\frac{e^x}{1+e^x}f(x)+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}f(-x)\right]dx\\&=\int_{0}^{1}\left[\frac{e^x}{1+e^x}f(x)-\frac{e^{-x}\cdot e^x}{e^x+e^{-x}\cdot e^x}f(x)\right]dx\\&=\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{e^x-1}{1+e^x}\right)f(x)\right]dx\neq\int_{0}^{1}f(x)dx.\end{aligned}$$

条件(1) **不充分. 当条件**(2)**成立时,有** $f(-x)=f(x)$,**则**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}f(x)&=\int_{0}^{1}\left[\frac{e^x}{1+e^x}f(x)+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}f(-x)\right]dx\\&=\int_{0}^{1}\left[\frac{e^x}{1+e^x}f(x)+\frac{1}{1+e^x}f(x)\right]dx\\&=\int_{0}^{1}\frac{e^x+1}{e^x+1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)\ dx.\end{aligned}$$

条件(2)**充分. 仅** B **入选.**

例 10 $\int_{-2}^{2}\frac{1}{1+e^x}(x^2+2)^2dx=$

(A) 374/15. (B) 376/15. (C) 378/15. (D) 379/16.

(E) 372/15.

解 **注意到被积函数含因子函数**$\frac{1}{1+e^x}$,**又积分区间为对称区间,可利用式**(2.3.2.6)**简化计算**。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_{0}^{2}\left\{\frac{1}{1+e^x}(x^2+2)^2+\frac{1}{1+e^{-x}}[(-x)^2+2]^2\right\}dx\\&=\int_{0}^{2}\left[\frac{1}{1+e^x}(x^2+2)^2+\frac{e^x}{1+e^x}(x^2+2)^2\right]dx\\&=\int_{0}^{2}(x^2+2)^2dx=\int_{0}^{2}(x^4+4x^2+4)dx\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+4x\Big|_0^2=25\frac{1}{15}=\frac{376}{15}.$$ 仅(B)入选.

题型三　利用周期函数性质计算定积分

常用下述定理将周期函数的定积分化为以零为起点的一个周期内的定积分计算.

定理 2.3.2.2　设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则对任一实数 a 有

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{d}x$;　　(2.3.2.7)

(2) $\int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$, n 为自然数。　　(2.3.2.8)

由定理 2.3.2.2 易知,周期函数在一个周期内的定积分的值与起点是 a 无关,因而常化为以零为起点的一个周期内计算.

定理 2.3.2.3　若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续奇函数,则

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

例 11　$f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则 $I=\int_l^{l+T} f(x)\mathrm{d}x$ 的值

(A) 依赖于 l,T.　　(B) 依赖于 l,T 和 x.

(C) 依赖于 T,x,不依赖于 l.　　(D) 依赖于 T 不依赖于 l.

解法 1　直接利用定理 2.3.2.2 即式(2.3.2.8)得到

$$I=\int_l^{l+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$ 仅(D)入选.

解法 2　$\int_l^{l+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_l^T f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^{l+T} f(x)\mathrm{d}x$(第二式中令 $t=x-T$)

$$=\int_l^T f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(t+T)\mathrm{d}t$$

$$=\int_l^T f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$ 仅(D)入选.

例 12 [2001 年 Ⅰ 28]　设 $\varphi(x)$ 是 x 点到离它最近的整数点的距离,求

$$I=\int_0^{100}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

解　依题设应以两个整数点的中点为界,在其左右两侧分别写出函数 $\varphi(x)$ 的表示式. 例如在区间 $[0,1]$ 上在其中点 $1/2$ 的左侧 x 到 0 的距离为 $x-0=x$,在其右侧 x 到 1 的距离为 $1-x$. 因而 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上表示式为

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1/2,\\ 1-x, & 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

在任意两整数点 $n,n+1$ 之间的区间上,也应以区间中点 $n+1/2$ 为界点,在其左右两侧分别写出 $\varphi(x)$ 的表示式. 在点 $n+1/2$ 的左侧上的点 x 到其最近的整数点 n 的距离为 $x-n$;在其右侧上的点 x 到最近的整数点 $n+1$

的距离为 $n+1-x$. 于是得到 $\varphi(x)$ 在区间 $[n,n+1]$ 上的表示式

$$\varphi(x)=\begin{cases} x-n, & n\leqslant x<n+1/2, \\ n+1-x, & n+1/2\leqslant x<n+1, \end{cases} \quad n\in\mathbf{Z}。$$

由图易知 $\varphi(x)$ 是周期为 1 的连续函数，故由周期函数的定积分公式式(2.3.2.8)得到

$$I=\int_0^{100}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=100\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}x=100\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=100(1/8+1/8)=25。$$

例 13 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的连续奇函数. 已知 $\int_6^{12}(x+24)\,f(x)\mathrm{d}x=24$，则 $\int_0^3(167x+120)\,f(x)\mathrm{d}x=$

(A) 60. (B) 120. (C) 167. (D) 2004.

(E) 以上结论都不正确.

解 $f(x)$ 是以 3 为周期的连续奇函数，由定理 2.3.2.2 和式(2.3.2.7)知

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3/2}^{3/2}f(x)\mathrm{d}x=0.$$

再利用定理 2.3.2.2 即式(2.3.2.8)得到

$$\int_6^{12}(x+24)f(x)\mathrm{d}x=\int_{0+6}^{6+6}(x+24)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^6(x+24)f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{3\times2}(x+24)f(x)=2\int_0^3(x+24)f(x)\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^3 x\,f(x)\mathrm{d}x+2\times24\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^3 x\,f(x)\mathrm{d}x=24,$$

故 $\int_0^3 x\,f(x)\mathrm{d}x=12$. 于是

$$\int_0^3(167+120)f(x)\mathrm{d}x=167\int_0^3 x\,f(x)\mathrm{d}x+120\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$$
$$=167\times12=2004.$$ 仅(D)入选.

题型四 比较和估计定积分的大小

常用下述定理(比较定理)判别之.

定理 2.3.2.4（比较定理） (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant0.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant0$，但在 $[a,b]$ 上 $f(x)\neq0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

(4) 当 $x\in[a,b]$ 且 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

定理 2.3.2.5(估值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b]$ 上的最大

值、最小值分别为 M,m，则

(1) $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$；

(2)如 $f(x)$在$[a,b]$上不恒为常数，则 $m(b-a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<M(b-a)$.

定理 2.3.2.6 （积分中值定理）若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

上式若改写成 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则其右端称为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值.

例 14 [2002 年 Ⅱ 27] 设函数 $f(x)$在$[0,1]$内可导，且 $f'(x)<0$，问当 $0<t<1$ 时，$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ 和 $t\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 何者更大？为什么？

解 因在$[0,1]$上 $f'(x)<0$，$f(x)$单调减少. 又由积分中值定理即定理 2.3.2.6 知，必存在 $\xi_1\in[0,t]$使得$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=t\,f(\xi_1)$，也必存在 $\xi_2\in[t,1]$使得$\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_2)(1-t)$，且 $f(\xi_1)>f(\xi_2)$. 从而有

$$\begin{aligned}y&=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-t\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-t\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x+\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\int_0^t(1-t)f(x)\mathrm{d}x-t\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=(1-t)tf(\xi_1)-t(1-t)f(\xi_2),\xi_1\in[0,t],\xi_2\in[t,1].\\&=t(1-t)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]。\end{aligned}$$

由于 $f'(x)<0$，$\xi_1<\xi_2$，$f(x)$单调减少，有 $f(\xi_1)>f(\xi_2)$. 又因 $0<t<1$，$1-t>0$，故 $y>0$. 因而$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ 更大.

例 15 下列不等式中成立的是

(A) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_1^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x<\int_1^2 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x<\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_{-2}^{-1}x^2\mathrm{d}x<\int_{-2}^{-1}x^3\mathrm{d}x$.

(E) $\int_{-1}^{-2}x^2\mathrm{d}x>\int_{-1}^{-2}x^3\mathrm{d}x$.

解 在$(0,1)$内 $x>x^2$，即 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^{x^2}$，故$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. 在$(1,2)$内 $x<x^2$，则 $\mathrm{e}^x<x^{x^2}$，故$\int_1^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x<\int_1^2 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. 选项(B)入选。在$[-2,-1]$上，$x^2>0>x^3$，故$\int_{-2}^{-1}x^2\mathrm{d}x>\int_{-2}^{-1}x^3\mathrm{d}x$ 或$\int_{-1}^{-2}x^2\mathrm{d}x<\int_{-1}^{-2}x^3\mathrm{d}x$. 由于函数 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 单调减少，$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\geqslant\mathrm{e}^{-1}\geqslant\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. 仅(B)入选.

例 16 设 $M=\int_{-1}^{1}\ln^3(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x$，$N=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^3+|x|}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$，$P=\int_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{1+x^2}\mathrm{d}x$，则有

(A) $M<N<P$. (B) $M<P<N$. (C) $P<M<N$.

(D) $N<P<M$. (E) $P<N<M$.

解 因 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数，故 $\ln^3(x+\sqrt{1+x^2})$ 仍为奇函数，所以 $M=0$. 又

$$N=\int_{-1}^{1}\frac{x^3\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}+\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{(1+x^2)}\mathrm{d}x=0+2\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\int_0^1\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}>0,$$

$$P=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=0-4\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}<0,$$

故 $N>M>P$. 仅(C)入选.

例 17 设 $\delta>0$，在区间 $[-\delta,\delta]$ 上恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，$f''(x)>0$，设 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)\mathrm{d}x$，则

(A) $I=0$. (B) $I>0$. (C) $I<0$. (D) 不确定.

解 本题关键是判断 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内的符号. 由 $|f(x)|\leqslant x^2$ 可得 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$. 又因 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，因此在 $(-\delta,0)$ 和 $(0,\delta)$ 内分别有 $f'(x)<0$ 和 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少，在 $(0,\delta)$ 内单调增加. 由于 $f(0)=0$，于是有在 $(-\delta,\delta)$ 上除 $f(0)=0$ 外，其他点 x 有 $f(x)>0$，由定理 2.3.2.4(2)知 $\int_{-\delta}^{\delta}f(x)\mathrm{d}x>0$. 仅(B)入选.

题型五 使用分部积分法计算的几类定积分

使用分部积分法计算定积分时，常用到下述公式：

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}(x)=\!=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

或

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

使用分部积分法计算不定积分或定积分的关键在于正确选择函数 $u(x)$ 或 $\mathrm{d}v(x)$. 选好了 $u(x)$，$\mathrm{d}v(x)$ 也就随之确定了. 下面着重介绍函数 $u(x)$ 的选法.

类型(一) 求幂函数或指数函数与对数函数乘积的积分.

常选 $u(x)$ 为对数函数，其理由是根据分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u,$$

当 u 为对数函数时，$\mathrm{d}u$ 为 x 的有理函数，能使 $\int v\mathrm{d}u$ 较易求出. 另一方面，由于对数函数的原函数一般无法观察求出，如果原选对数函数为 v'，因求不出 v 也就行不通.

例 18 [1997 年 Ⅱ 24] 求定积分 $\int_1^2 x^2\ln x\mathrm{d}x$.

解　用分部积分法求之。选 $\ln x$ 为 $u(x)$，得到

$$\int_1^3 x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}\int_1^3\ln x\,dx^3=\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^3-\frac{1}{3}\int_1^3 x^2\,dx$$

$$=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{9}x^3\Big|_1^3=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}.$$

类型(二)　求幂函数(多项式)与指数函数乘积的定积分。

一般选 $u(x)$ 为幂函数，其理由是虽然这两类函数的原函数均易求出，但对幂函数求其微分 du 时，可降低幂函数的次数. 因而其积分 $\int u\,dv$ 较原积分 $\int u\,dv$ 易求出.

例 19　$\int_0^2 x^3e^x\,dx=$

(A) e^2+5.　　(B) $2e^2+4$.　　(C) $3e^2+6$.

(D) $4e^2+7$.　　(E) $2e^2+6$.

解　$\int_0^2 x^3e^x\,dx=\int_0^2 x^3\,de^x=x^3e^x\Big|_0^2-\int_0^2 e^x\,dx^3=8e^2-3\int_0^2 x^2e^x\,dx$

$$=8e^2-3\int_0^2 x^2\,de^x=8e^2-3x^2e^x\Big|_0^2+3\int_0^2 e^x\,dx^2.$$

$$=-4e^2+6\int_0^2 xe^x\,dx=-4e^2+6\int_0^2 x\,de^x$$

$$=-4e^2+6xe^x\Big|_0^2-6\int_0^2 e^x\,dx=8e^2-6e^x\Big|_0^2=2e^2+6.$$

仅(E)入选.

注意　例 19 三次使用了分部积分法. 多次使用分部积分法时，第一次选某类函数为 $u(x)$(例 19 是 $u(x)=x^3$ 为幂函数)第二次、第三次再用分部积分法时仍选该类函数为 $u(x)$(例 19 第二次、第三次分别选 $u(x)$ 为幂函数，即选 $u(x)=x^2$，$u(x)=x$).

类型(三)　计算被积函数含导函数的积分。

含函数一阶或高阶导数的被积函数，其(不)定积分的算法总是先让导数部分进入微分号，然后再用分部积分法求之. 同样被积函数虽然不含函数导数但含已知其导数的函数，或含已知其原函数的函数仍然可按上述方法用分部积分法求其积分.

例 20　**当 $x>0$ 时，$f(\ln x)=1/\sqrt{x}$，则** $\int_{-2}^2 xf'(x)\,dx=$

(A) $-4/e$.　　(B) $4/e$.　　(C) $2/e$.　　(D) $-2/e$.

解　**令** $\ln x=t$，**则** $x=e^t$，$f(t)=1/\sqrt{e^t}=e^{-\frac{t}{2}}$。**于是**

$$\int_{-2}^2 xf'(x)\,dx=\int_{-2}^2 x\,d(f(x))=xf(x)\Big|_{-2}^2-\int_{-2}^2 f(x)\,dx$$

$$=xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^2-\int_{-2}^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx=\frac{4}{e}.$$ **仅(B)入选.**

例 21（条件充分性判断） $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}+1$.

(1) $x^2\ln x$ 是 $f(x)$的一个原函数；　　(2) $f(x)=x\mathrm{e}^x+1$.

解　条件(1) 成立时，由于已知 $f(x)$的原函数，用分部积分法得到

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(x^2\ln x)'}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x\ln x+x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}(2\ln x+1)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_1^{\mathrm{e}}\ln\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x=2(x\ln x-x)\Big|_1^{\mathrm{e}}+(\mathrm{e}-1)$$

$$=2(\mathrm{e}-\mathrm{e}+1)+\mathrm{e}-1=1+\mathrm{e}.$$

因而条件(1) 充分. 当条件(2)成立时，有

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x\mathrm{e}^x+1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\big|_1^{\mathrm{e}}+\ln x\big|_1^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+1\neq\mathrm{e}+1.$$

条件(2)不充分. 仅 A 入选.

类型(四)　求被积函数仅为一类函数的积分.

这类积分如不能用其他方法求出，可用分部积分法求之. 特别是当这类函数为对数函数、复合函数时，常用分部积分法求其积分，且选该函数为 $u(x)$，$v(x)=x$.

例 22 [2002 年 Ⅱ 14]　$\int_0^3 \ln\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$ 等于

(A) $9\ln 3-9/2$.　　(B) $9\ln 3+9/2$.

(C) $4\ln 2-3/2$.　　(D) $4\ln 2+3/2$.

解　先利用对数函数的性质，化简被积函数得到

$$\int_0^3 \ln\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^3 \ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

再利用分部积分法求之，即

$$\text{原式}=\frac{1}{2}x\ln(1+x)\Big|_0^3-\int_0^3 x\mathrm{d}\ln(1+x)$$

$$=\frac{3}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1+x-1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\ln 4-\frac{1}{2}[x-\ln(1+x)]\Big|_0^3=3\ln 2-3/2+(\ln 4)/2$$

$$=4\ln 2-3/2.$$ 仅(C)入选.

例 23　求 $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

解　可用分部积分法求解. 令 $u=\sqrt{a^2+x^2}$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，即 $v=x$，得到

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\,\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{a^2+x^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

将等式右端的积分移到左端，得 $2\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\right] + C.$$

注意 用分部积分法求积分时，如果右端出现所求的积分（如例 23 右端出现 $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$），则无需再进行计算，只需将其移到左端即可求得所求之积分. 一般，如果

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(x) + k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k\neq 1),$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{G(x)}{1-k} + C.$$

类型（五） 求被积函数为分式函数 $f(x)/g(x)$ 的定积分.

如果 $1/g(x)$ 或其因子 $1/g_1(x)$（$g_1(x)$ 为 $g(x)$ 的一因式）的一个原函数易求得，则可设该原函数为所选的 v，这时被积函数的其余部分选为 $u(x)$. 确定 v 时，需熟练地利用有关微分公式.

例 24 $\int_0^1 \frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{d}t =$

(A) $\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.　(B) $\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} + \ln\frac{2}{1+\mathrm{e}}$.　(C) $\frac{3\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} + \ln\frac{2}{1+\mathrm{e}}$.

(D) $\frac{4\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} + \ln\frac{2}{1+\mathrm{e}}$.　(E) $\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} + \ln\frac{2}{1+\mathrm{e}}$.

解 $\int_0^1 \frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{d}t$

$$= \int_0^1 \frac{t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t+1)}{(\mathrm{e}^t+1)^2} = -\int_0^1 t\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\right)$$

$$= -\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} = -\frac{1}{1+\mathrm{e}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t+1)}$$

$$= -\frac{1}{1+\mathrm{e}^t} + \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{\mathrm{e}^t} - \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^t = -\frac{1}{1+\mathrm{e}} +\right.$$

$$\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}e^t}{e^t}-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(e^t+1)}{e^t+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{1+e}+[\ln e^t-\ln(e^t+1)]\Big|_0^1=-\frac{1}{1+e}+[1-\ln(1+e)+\ln 2]$$

$$=\frac{e}{1+e}+\ln\frac{2}{1+e}.$$ **仅(E)入选.**

题型六　求需换元计算的定积分

定理 2.3.2.7　设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，而函数 $x=\varphi(t)$满足下列条件：(1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$. (2) 当 t 在 α 与 β 之间变动时，$x=\varphi(t)$的值与$[a,b]$上变动，(3)$\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

为了变换积分限和(或)被积函数，常作变量代换. 用换元法计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$时，由定理 2.3.2.7 知首先必须注意所选的变换 $x=\varphi(t)$取值在 a 与 b 之间：$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，且在$[\alpha,\beta]$上 $\varphi(t)$单调连续，$\varphi'(t)$连续。不满足这些条件的换元将导致错误计算.

其次应注意的是换元必须相应地变换积分限，但若换元采用的是凑微分法，未引入新变量，则不必更换上、下限.

此外，还应注意，使用换元法所得新的定积分，其被积函数的原函数找到后，不必代回原变量，只需代入新变量的积分上、下限后再相减就行了.

类型(一)　计算需变换积分上、下限的定积分，常根据积分限的变更作换元计算.

例 25　设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t\ (x>0)$，**则** $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=$

(A) $2+\ln^2 x$.　　(B) $3+\ln^2 x$.　　(C) $(\ln^2 x)/2$.

(D) $(\ln^2 x)/3$.　　(E) $(\ln^2 x)/5$.

解　为计算 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，**需变更后一积分的积分限，为此令** $t=1/u$，**则** $t=1$，$1/x$ **时，**$u=1,x$，**于是**

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^x \frac{-\ln u}{1+1/u}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^x \ln u\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x \frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u-\int_1^x \frac{\ln u}{1+u}\mathrm{d}u,$$

故　　$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x \ln t\mathrm{d}\ \ln t=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$ 仅(C)入选.

注意 例 25 若分别算出 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 比较困难,变更积分限合在一起计算,一些积分正负相消,都变得容易了。

类型(二) 计算需变换被积函数的定积分。

常根据被积函数的变更作换元计算,特别是计算被积函数中含有不好处理的子函数的定积分时,常需作变量代换.

这类不好处理的子函数常为无理函数、指数函数.不好处理的含义是,既不能用凑微分,又不能用常用公式计算其积分。但通过换元改善被积函数,其原函数常可求出.

例 26 设 $f(x)$ 为连续函数,若

$$\int_0^a x^3\ f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_b^k xf(x)\mathrm{d}x\quad(a>0),$$

则 (A) $b=0,k=a^3$. (B) $b=a^2,k=0$. (C) $b=0,k=a^2$.

(D) $b=a^3,k=0$. (E) 以上结论都不正确.

解 令 $x^2=t$,因 $a>0$,故 $x>0$,$x=\sqrt{t}$. 于是

$$\int_0^a x^3\ f(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t)\ \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\mathrm{d}t,$$

因此,当 $b=0,k=a^2$ 时有

$$\int_0^a x^3\ f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_b^k x\ f(x)\mathrm{d}x.$$ 仅(C)入选.

类型(三) 计算被积函数和积分限都需变换的定积分.

例 27[2004 年Ⅱ16](条件充分性判断) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(1) $a=1,b=4$; (2) $a=1,b=2$.

解法 1 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_1^4 f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$

令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=1,4$ 时,$t=1,2$。于是

$$\int_1^4 f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}=\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t,$$

所以当 $a=1,b=2$ 时,有

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

条件(2)充分，条件(1)不充分. 仅 B 入选.

解法 2 令$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int_1^2 2t\,\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

条件(2)充分，条件(1) 不充分. 仅 B 入选.

例 28 若$\int_0^2(x+a)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\pi$，则 $a=$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) -2.

解 利用对称性计算所给积分，作变量代换 $t=x-1$，则 $x=0,2$ 时有 $t=-1,1$。于是

$$\begin{aligned}\int_0^2(x+a)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^2(x+a)\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(t+1+a)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t+(1+a)\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t\\&=0+(1+a)\pi/2=3\pi/2,\end{aligned}$$

即 $a=2$. 仅(C)入选.

题型七 计算几类需分子区间积分的定积分

类型(一) 计算分段函数的定积分。

对分段函数的积分，应在各分段区间分别积分.

对于不定积分还要注意在分段点处，应根据原函数在分段点处连续的性质确定各分段区间上任意常数之间的关系，使各个任意常数应互相匹配，最后求出各个任意常数.

对于定积分(含变限定积分)，如果积分下限与积分上限之间即积分区间含有分段点，还要分段积分。

要会使用“分区间”的办法处理含绝对值或可化为分段函数的被积函数的积分.

例 29 设 $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -1/2\leqslant x<1/2,\\ -1, & x\geqslant 1/2,\end{cases}$ 则$\int_{1/2}^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$____.

解法 1 令 $x-1=t$，则

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^2 f(x-1)\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\,e^{x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(-1)\mathrm{d}x\\&=0+(-1)(1-1/2)=-1/2.\end{aligned}$$

解法 2 由 $f(x)$的表达式易写出 $f(x-1)$的表达式得到

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2}, & -1/2\leqslant x-1<1/2,\\ -1, & x-1\geqslant 1/2.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}, & -1/2\leqslant x<3/2,\\ -1, & x\geqslant 3/2,\end{cases}$$

故
$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^{2}(-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\mathrm{d}[-(x-1)^2]-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}。$$

类型(二)　求被积函数含绝对值的定积分。

计算带绝对值的被积函数的积分,先脱掉其绝对值符号.常用的方法有两种:一是令含绝对值部分的函数等于零,求出其实根,以此实根为分段点将被积函数化成分段函数;二是利用函数的奇偶性、周期性等性质,使绝对值符号自然脱落.

例 30 [2002 年 Ⅱ 28]　**求** $\int_0^2\sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^2\sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int_0^2|x-1|\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1[-(x-1)]\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=1.$$

例 31(**条件充分性判断**)　**曲线** $y=f(x)=\int_0^1(1-t)|x-t|\mathrm{d}t$ **在区间** D **内是凹的.**

(1) $D=(0,1/2)$;　　(2) $D=(1/2,1)$.

解　**函数** $f(x)$**的表示式为**

当 $x<0$ **时**, $f(x)=\int_0^1(1-t)(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}-\frac{x}{2}$;

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ **时**, $f(x)=\int_0^x(1-t)(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1(1-t)(t-x)\mathrm{d}t$

$$=-x^3/3+x^2-x/2+1/6;$$

当 $x>1$ **时**, $f(x)=\int_0^1(1-t)(x-t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}-\frac{1}{6}$.

由此可知,当 $x<0$ **时**, $f''(x)=0$;**当** $x>1$ **时**, $f''(x)=0$;**当** $0<x<1$ **时**,

$f''(x)=-2x+2>0$. 可知条件(1) 充分，条件(2)也充分. 仅 D 入选.

类型(三) 求被积函数含最值符号 max 或 min 的定积分.

求 $\int_a^b \max\{g(x),h(x)\}\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b \min\{g(x),h(x)\}\mathrm{d}x$ 的方法一般是，由 $g(x)=h(x)$ 找出区分函数大小的界点. 用这些界点将积分区间 $[a,b]$ 分成为若干个子区间，然后求出各子区间上的被积函数，算出其积分.

例 32（条件充分性判断） 设 $a>0$，$\int_0^a \max\{x,x^3\}\mathrm{d}x=\frac{17}{4}$.

(1) $a=3$； (2) $a=2$.

解 先算出定积分. 为此令 $x=x^3$ 得到 $x=0$，$x=1$. 以 $x=1$ 为分段点将积分化为分段积分：

$$\int_0^a \max\{x,x^3\}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^a x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^a$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a^4=\frac{1}{4}(1+a^4)=\frac{17}{4}。$$

因而 $1+a^4=17$，即 $a^4=16=2^4$，故 $a=2$. 条件(1)不充分，条件(2)充分。仅 B 入选.

题型八 求解含积分值为常数的函数方程

注意到定积分、二重积分等虽然被积函数为抽象函数，但由于积分限、积分区域确定，该积分为一常数 A. 可在所给含积分的等式两边进行等式中所出现的积分，利用 A 为常数，即可求得该积分值 A 或该函数。如有必要再讨论该函数的性质.

例 33 [1999 年 Ⅰ 26] 设 $x\,\mathrm{e}^x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1+x^2}+f(x)=1$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，则有

$$f(x)=1-x\,\mathrm{e}^x A-\frac{1}{1+x^2}。$$

在此等式两端在区间 $[0,1]$ 上积分得到

$$\int_0^1\left(1-x\,\mathrm{e}^x A-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=A.$$

即 $1-A-\pi/4=A$，于是 $A=1/2-\pi/8$.

例 34 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $f(x)=x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-1$，则 $f(x)=$

(A) $f(x)=2x-1$. (B) $f(x)=2x-1$. (C) $f(x)=x^2-2x-1$.

(D) $f(x)=-x^2-2x-1$. (E) $f(x)=-2x+1$.

解 设$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=A$(常数),在所给等式两端在区间$[0,1]$上积分得到

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A\int_0^1 x\mathrm{d}x-\int_0^1 \mathrm{d}x,\quad \text{即}\quad A=A\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-1,$$

故$2A=A-2$,即$A=-2$. 因而$f(x)=-2x-1$. 仅(B)入选.

例35(条件充分性判断) 设$f(x)$连续,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$,则必有

$$f(x)+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1+kx.$$

(1) $k=2$; (2) $k=4$.

解 所给等式两端在$[0,1]$上积分得到

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+2=2+2=\int_0^1(1+kx)\mathrm{d}x=\frac{k}{2}+1.$$

因而$k=8-2=6$. 于是条件(1)、条件(2)均不充分,条件(1)、条件(2)联合起来也不充分. 仅E入选.

习 题 2.3.2

(一) 问题求解

1. $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$

(A) $\pi/3$. (B) $\pi/4$. (C) $\pi/2$. (D) $\pi/5$. (E) $\pi/6$.

2. $\int_0^{2a}x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x=$

(A) $\pi a/2$. (B) $\pi a^2/2$. (C) $\pi a^3/2$. (D) $\pi a/3$. (E) $\pi a/4$.

3. 设$F(x)$是以2为周期的周期函数,当$x\in[-1,1]$时,$F(x)=|x|$,$\int_{-100}^{100}F(x)\mathrm{d}x=$

(A) 10000. (B) 200. (C) 100. (D) 5000.

4. 设$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,其中$f(x)=\begin{cases}(x^2+1)/2, & 0\leqslant x<1,\\ (x-1)/3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$则$g(x)$在$(0,2)$内

(A) 无界. (B) 单调减少. (C) 不连续. (D) 连续.

5. $I=\int_{-3}^{3}\max\{1,2x-3\}\mathrm{d}x=$

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4. (E) 3.

6. $I=\int_{-2}^{3}\min\{1,x^2\}\mathrm{d}x=$

(A) 10/3. (B) 13/3. (C) 15/3. (D) 11/3. (E) 17/3.

7. $\int_{1/e}^{e}|\ln x|\,dx=$

(A) 1−1/e. (B) 1−2/e. (C) 2−2/e. (D) 2−1/e. (E) 3−2/e.

8. 设 $N=\int_{-a}^{a}x^2\ln\left|\dfrac{2a-x}{2a+x}\right|dx$, $P=\int_{-a}^{a}(x^3-a)^2dx$, $Q=\int_{-a}^{a}(x^3-e^{x^2})dx$, **则有不等式**

(A) $N<P<Q$. (B) $P<N<Q$.

(C) $Q<N<P$. (D) $P<Q<N$.

9. 设 $I=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$, $J=\int_0^1 xe^{-x}dx$, $K=\int_0^1 e^{-x}dx$, **则** I,J,K **的大小关系是**

(A) $I<J<K$. (B) $J<K<I$. (C) $K<J<I$.

(D) $J<I<K$. (E) $I<K<J$.

10. 连续函数 $f(x)$**满足** $f(x)=3x^2-x\int_0^1 f(x)dx$, **则** $f(x)=$

(A) $3x^2-2x$. (B) $3x^2-2x/3$. (C) $3x^2+x+1$.

(D) $3x^2+2x+1$. (E) **以上结论都不正确**.

11. 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}$, $f'(2)=0$ **及** $\int_0^2 f(x)dx=1$, **则** $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 0.

12. 已知连续函数 $f(x)$**满足** $f(x)=f(2a-x)$ $(a\neq 0)$, c **为任意常数, 则** $\int_{-c}^{c}f(a-x)dx=$

(A) $2\int_0^c f(2a-x)dx$. (B) $2\int_{-c}^{c}f(2a-x)dx$.

(C) 0. (D) $2\int_0^c f(a-x)dx$.

(二) 条件充分性判断

1. $\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]e^{|x|}dx=0$.

(1) $f(x)$**在**$[-a,a]$**上为连续的偶函数;**

(2) $f(x)$**在**$[-a,a]$**上为非奇非偶函数.**

2. 设 $f(x)$**在**$[-a,a]$**上可积, 下列等式恒成立:**

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$$

(1) $f(x)$**为偶函数;** (2) $f(x)$**为任意连续函数.**

3. [2005 **年** Ⅰ 16] $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{a-x^2})^2dx=8$.

(1) $a=8$; (2) $a=64$.

4. $\int_{-1}^{1}e^x(1+e^x)^\alpha dx=1$.

(1) $\alpha=1$; (2) $\alpha=-1$.

5. $\int_0^2[ax+b\sqrt{1-(x-1)^2}]\mathrm{d}x=1-2\pi$.

(1) $a=1,b=-1$；　　(2) $a=1/2,b=-4$.

6. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}-1$.

(1) $f(x)=x-1/2-2\mathrm{e}^{-2x}$；

(2) **连续函数** $f(x)$**满足** $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-2x}-1$.

7. $\int_{\frac{a}{2}}^a f(a-x)g(x)\mathrm{d}x=\int_b^c f(x)g(a-x)\mathrm{d}x$.

(1) $b=a/2,c=0$；　　(2) $b=a,c=a/2$.

8. $\int_0^1 f(\sqrt{1-x})\mathrm{d}x=\int_a^b 2x\,f(x)\mathrm{d}x$.

(1) $a=0,b=1$；　　(2)$a=1,b=0$.

9. [2003 **年** Ⅱ 9]　$\int_0^1(\sqrt{x}+a)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{3}$.

(1) $a=1$；　　(2) $a=-1$.

10. $\int_1^4\dfrac{(\sqrt{x}+a)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$.

(1) $a=-1$；　　(2) $a=-2$.

11. $\int_0^1\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$,**其中函数** $f(x)$**在**$[0,1]$**上有连续的导数且** $f(x)$**无零点**.

(1) $f(0)=1$ **且** $f(1)=2$；(2) $f(0)=2/3$ **且** $f(1)=1$.

(三) 解答题

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^1 x^2\ln\dfrac{2-x}{2+x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ **且** $f(x+2)=f(x)$,**求** $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

3. 计算 $\int_a^b|2x-a-b|\mathrm{d}x\ (a<b)$.

4. 计算 $\int_0^2\dfrac{1+x^{\frac{3}{2}}+\left|x^{\frac{3}{2}}-1\right|}{\sqrt{x}(x+1)}\mathrm{d}x$.

5. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-2}^2(|x|+x+1)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$；　　(2)$\int_0^1 x|a-x|\mathrm{d}x$.

6. [2002 **年** Ⅱ 22]　$\int_{-1}^2\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=$_____.

7. 计算 $\int_a^b x\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x$.

8. 计算$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

9. 若$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则$f(x)=$_____.

10.[1997 年Ⅰ24] 计算$\int x^2\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

11. 已知$\int_0^1\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x=A$,则$\int_{a+1}^a\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x-a-1}\mathrm{d}x=$_____.

12. 计算$\int_0^{50} f(x)\mathrm{d}x$,其中$f(x)$是$x$到离$x$最近的整数的距离.

2.3.3 求解与变限定积分有关的问题

1. 变上限定积分的定义

定义 2.3.3.1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,x为$[a,b]$上任意一点,则在$[a,x]$上的定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是上限x的函数,记作$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,并称$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为变上限定积分.

变上限定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$有时也写成$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$。这时要注意后者的x是积分变量,与上限x的意义不同,积分时上限x固定不变,而积分变量x在积分区间$[a,x]$或$[x,a]$上变化.

2. 变上限积分的性质

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数$F(x)$对积分上限x的导数等于被积函数$f(x)$在上限x处的值,即

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x).$$

定理 2.3.3.1(原函数存在定理) 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,即

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]=f(x).$$

设$\varphi(x),\psi(x)$可导,定理 2.3.3.1 可进一步推广得到如下定理。

定理 2.3.3.2 设$F(x)=\int_a^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$,则

$$F'(x)=f[\psi(x)]\psi'(x). \tag{2.3.3.1}$$

定理 2.3.3.3 设$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$,则

$$F'(x)=f[\psi(x)]\psi'(x)-f[\varphi(x)]\varphi'(x) \tag{2.3.3.2}$$

不定积分、变上限定积分及牛顿-莱布尼兹定理三者之间的关系是:当$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数时,函数$f(x)$的不定积分是它所有原函数的集

合；变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是在以a为起点的区间上连续的函数$f(x)$的一个原函数；定积分$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$是一个确定的数值，是变上限定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$x=b$处的函数值，也是$f(x)$在$[a,b]$上任一原函数在区间$[a,b]$上的增量即$F(b)-F(a)$.

3. 常考题型及其解题方法技巧归纳

与变限积分有关的题型是历年来试题中出现频率较高的题型。与变限积分有关的问题包括其极限、导数、积分、极(最)值的求法以及含变限积分的方程的求解等问题，求含变限积分的未定型极限已在前面介绍(详见2.1.2节例19、例20)。下面介绍与变限积分有关的其他题型的求解方法与技巧.

题型一　求变限定积分的导数

类型(一)　求$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$的导数.

值得注意的是，类型(一)的被积函数不含求导变量x，仅是积分变量t的函数.这时可直接使用式(2.3.3.2)求之。当$\psi(x)$或$\varphi(x)$中有一个为常数时，可直接使用式(2.3.3.1)求之.

例1[2002年Ⅰ22]　设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，则$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=$_____.

解　利用变限积分的求导公式(2.3.3.2)即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=f(x^2)\cdot(x^2)'_x-f(x)x'_x=2xf(x^2)-f(x),$$

则
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[2xf(x^2)-f(x)]$$
$$=2f(x^2)+4x^2f'(x^2)-f'(x).$$

例2[2001年Ⅰ22]　设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，$f(1)=1$，$g(x)=\int_{1+x}^{\mathrm{e}^x} f(t)\mathrm{d}t$，则$g''(0)=$(　　).

解　按公式(2.3.3.2)有

$$g'(x)=\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)-f(1+x)(1+x)'=\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)-f(1+x).$$

又
$$g''(x)=\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{2x}f'(\mathrm{e}^x)-f'(1+x).$$

由此可得，
$$g''(0)=f(1)+f'(1)-f'(1)=f(1)=1.$$

例3[2005年Ⅰ5]　设$f(x,y)=\int_x^{x^2+y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，则$f''_{xy}(x,y)=$

(A) $x(x^2+y^2)\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}$.　　(B) $xy(x^2+y^2)\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}$.

(C) $8xy(x^2+y^2)\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}$.　　(D) $y(x^2+y^2)\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}$.

解　由变限积分的求导公式(2.3.3.2)得到

$$f'_x(x,y)=\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}-\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=2x\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}-\mathrm{e}^{x^2}.$$

又

$$\begin{aligned}f''_{xy}(x,y)&=2x\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial(x^2+y^2)^2}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{e}^{x^2}}{\partial y}\\&=2x\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}2(x^2+y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}\\&=4x\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)\cdot 2y\\&=8xy(x^2+y^2)\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

仅(C)入选.

例 4(条件充分性判断)　$f''(a)=7\mathrm{e}$,**其中** $f(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t\left(\int_0^t u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$.

(1) $a=-1$;　　(2) $a=1$.

解　$f'(x)=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^{x^2}u\mathrm{d}u(x^2)'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^{x^2}u\mathrm{d}u=x\mathrm{e}^{x^2}\cdot x^4=x^5\mathrm{e}^{x^2}$,

$$f''(x)=5x^4\mathrm{e}^{x^2}+2x\cdot x^5\mathrm{e}^{x^2}=5x^4\mathrm{e}^{x^2}+2x^6\mathrm{e}^{x^2}=x^4\mathrm{e}^{x^2}(5+2x^2),$$

故

$$f''(a)=a^4\mathrm{e}^{a^2}(5+2a^2).$$

当条件(1)成立即 $a=-1$ **时,有**

$$f''(-1)=(-1)^4\mathrm{e}^{(-1)^2}[5+2(-1)^2]=7\mathrm{e}。$$

条件(1)充分. 当条件(2)成立即 $a=1$ **时,有**

$$f''(1)=1\times\mathrm{e}(5+2)=7\mathrm{e}。$$

条件(2)也充分. 仅 D 入选.

类型(二)　求 $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,t)\mathrm{d}t$ **的导数.**

对形如 $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,t)\mathrm{d}t$ **的变限定积分,由于被积函数** $f(t,x)$**中除含积分变量** t **外还含有求导变量** x**(参变量** x**),对** x **求导前必须先设法将** $f(x,t)$**中的求导变量** x **移出被积函数,使其成为只是积分变量** t **的函数.**

移出求导变量的方法常用的有两个。一是移项法,当求导变量 x **的函数** $g(x)$**为被积函数** $f(x,y)$**的因子函数时,常采用这种方法,例如**

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,t)\mathrm{d}t=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}H(t)g(x)\mathrm{d}t=g(x)\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}H(t)\mathrm{d}t.$$

例 5(条件充分性判断)　**设** $f(x)$**的导数** $f'(x)$**连续,则**

$$\left[\int_0^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x).$$

(1) $f(0)=0$;　　(2) $f'(0)=0$.

解　**因** $f'(x)$**连续,故**$(x-t)f'(t)$**连续,从而** $\int_0^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t$ **可导. 因**

$$\begin{aligned}\left[\int_0^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t\right]'&=\left[x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t\right]'\\&=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+xf'(x)-xf'(x)\end{aligned}$$

$$=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(0),$$

故当 $f(0)=0$ 时有 $\left[\int_0^x (x-t)f'(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)$. 条件(1)充分。仅 A 入选.

移出求导变量的另一方法是作变量代换. 当求导变量含于抽象被积函数的中间变量之中或求导变量无法直接移出时,常作变量代换将求导变量变到积分限上去.

例 6 设 $F(a)=\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 为连续正值函数,则 $F(a)$ 为

(A) 正常数. (B) 负常数. (C) 零. (D) 与 a 值有关的数.

解 视 a 为参变量,则

$$F(a)=\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f(2a-x)\mathrm{d}x,$$

而 $$\int_0^a f(2a-x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } 2a-x=t} -\int_{2a}^a f(t)\mathrm{d}t=-\int_{2a}^a f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $$F(a)=\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_{2a}^a f(x)\mathrm{d}x.$$

在上方程两边对 a 求导,得到

$$\begin{aligned}F'(a)&=2f(2a)-f(a)+\left[\int_{2a}^a f(x)\mathrm{d}x\right]'\\&=2f(2a)-f(a)+f(a)-2f(2a)=0,\end{aligned}$$

所以 $F(a)=c$,又 $F(0)=0$,故 $c=0$. 从而知 $F(a)=0$. 仅(C)入选.

题型二 计算被积函数为变限定积分的定积分

这类积分可用分部积分法计算,且选 $u(x)$ 为变限定积分,这是因为已知变限积分也就知道了其导数. 已知被积函数的导数是可以用分部积分法求出该积分的.

例 7[2005 年 Ⅰ 7] 函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1-t}\mathrm{d}t$,则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的值为

(A) e−1. (B) 1−e. (C) e/(1−e). (D) e. (E) 1.

解 因已知 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=\mathrm{e}^x/(1-x)$,故可用分部积分法求之.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}f(x)=f(1)-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1-t}\mathrm{d}t-\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1-x}\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1.\end{aligned}$$

仅(A)入选.

例 8 计算 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\int_1^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.

解 积分 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$ 中的被积函数含变上限定积分,用分部积分法求

之，且选

$$u(x)=f(x)=\int_1^{x^2}\frac{e^t}{t}dt,\quad dv=xdx=\frac{1}{2}dx^2.$$

由变上限定积分求导法则得到

$$f'(x)=\left(\int_1^{x^2}\frac{e^t}{t}dt\right)'=2\frac{xe^{x^2}}{x^2}=2\frac{e^{x^2}}{x}.$$

则
$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)dx&=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2df(x)\\&=\frac{1}{2}\times1\times f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\times2\frac{e^{x^2}}{x}dx=-\int_0^1 xe^{x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}dx^2\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1 de^{x^2}=-\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1}{2}(1-e).\end{aligned}$$

题型三　求被积函数为分段函数的变限定积分

计算分段函数的变限积分，因对其变限的取值范围要进行讨论需分段积分．其分段情况与被积函数中的分段函数一样。值得注意的是，如果在积分下限与上限之间有分段点，还需再分段积分．

例 9　设 $x\geqslant-1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$。

解　为去掉被积函数中的绝对值，应以 $t=0$ 为分段点先求出其被积函数的表示式

$$f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\leqslant t<+\infty,\\ 1+t, & -1\leqslant t<0.\end{cases}$$

当 $-1\leqslant x<0$ 时，$[-1,x]\subseteq(-1,0)$，则

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{x}(1+t)dt=\frac{(1+x)^2}{2}.$$

当 $x\geqslant0$ 时，$[-1,x]=[-1,0]\cup[0,x]$ 即在积分上限 -1 与上限 x 之间有分段点 0，故

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt&=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_0^x(1-t)dt=\frac{1}{2}+\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^x\\&=1-\frac{(x-1)^2}{2},\end{aligned}$$

故
$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\begin{cases}(x+1)^2/2, & -1\leqslant x<0,\\ 1-(x-1)^2/2, & x\geqslant0.\end{cases}$$

例 10 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (-1\leqslant x<+\infty)。$$

解 当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(1+t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1+t)$$

$$=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{x}=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}.$$

而当 $0<x<+\infty$ **时，**$[-1,x]=[-1,0]\cup[0,x]$，**即在积分下限** 0 **与上限** x **之间有分段点** 0，**故**

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

而

$$\int_{-1}^{0}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(1+t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1+t)=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}=\frac{2}{3},$$

$$\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\xlongequal{\sqrt{t}=u}\int_{0}^{\sqrt{x}}2\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=-2\int_{0}^{\sqrt{x}}u\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-u}$$

$$=-2\left[u\mathrm{e}^{-u}\Big|_{0}^{\sqrt{x}}-\int_{0}^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right]$$

$$=-2\left[\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-u}\Big|_{0}^{\sqrt{x}}\right]$$

$$=-2[\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1]$$

$$=-2(\sqrt{x}+1)+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+2,$$

故

$$F(x)=2/3+2-2(\sqrt{x}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}=8/3-2(\sqrt{x}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}},$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}2(1+x)^{3/2}/3, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 8/3-2(\sqrt{x}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

例 11 设 $f(x)=x, x\geqslant 0, g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & 0\leqslant x\leqslant \ln 2,\\ 0, & x>\ln 2,\end{cases}$ **求** $\int_{0}^{x} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

解 **原式** $I\xlongequal{x-t=u}\int_{0}^{x} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_{0}^{x}(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$

于是，当 $0\leqslant x\leqslant \ln 2$ **时，有**

$$I=\int_{0}^{x}(x-u)\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u=x\mathrm{e}^{u}\Big|_{0}^{x}-(u\mathrm{e}^{u}-\mathrm{e}^{u})\Big|_{0}^{x}$$

$$=x(\mathrm{e}^{x}-1)-x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}-1=\mathrm{e}^{x}-x-1;$$

当 $\ln 2<x$ **时，因积分区间**$(0,x)$**含分段点** $\ln 2$，**需分段积分，即**

$$I=\int_{0}^{x}(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_{0}^{\ln 2}(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u+\int_{\ln 2}^{x}(x-a)g(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_{0}^{\ln 2}(x-u)\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u+\int_{\ln 2}^{x}(x-u)\cdot 0\,\mathrm{d}u=\int_{0}^{\ln 2}(x-u)\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u$$

$$=xe^{u}\Big|_{0}^{\ln 2}-(ue^{u}-e^{u})\Big|_{0}^{\ln 2}=x-2\ln 2-1.$$

所以
$$I=\begin{cases} e^{x}-x-1, & 0\leqslant x\leqslant \ln 2,\\ x-2\ln 2-1, & x>\ln 2.\end{cases}$$

例 12 计算$\int_0^x \max(e^{-t},1/2)\,dt$.

解 令 $e^{-t}=1/2$,则$-t\ln e=\ln(1/2)$,故 $t=\ln 2$.

当 $t<\ln 2$ 时,$e^{-t}>1/2$,故 $\max(e^{-t},1/2)=e^{-t}$;当 $t\geqslant \ln 2$ 时,$e^{-t}\leqslant 1/2$,故 $\max(e^{-t},1/2)=1/2$。于是

$$f(t)=\max(e^{-t},1/2)=\begin{cases} e^{-t}, & t<\ln 2,\\ 1/2, & t\geqslant \ln 2,\end{cases}$$

所以 原式$=\begin{cases} \int_0^x e^{-t}\,dt, & x<\ln 2\\ \int_0^{\ln 2} e^{-t}\,dt+\int_{\ln 2}^x \frac{1}{2}\,dt, & x\geqslant \ln 2\end{cases}=\begin{cases} 1-e^{-x}, & x<\ln 2,\\ \frac{1-\ln 2+x}{2}, & x\geqslant \ln 2.\end{cases}$

题型四 讨论由变限积分所确定的函数的性态

由变限积分所确定的函数同其他形式表示的函数一样,可用其导数讨论其多种性态.

例 13 设 $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$,且 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\geqslant 0,\\ 2x-1, x<0,\end{cases}$则 $F(x)$是

(A) 连续函数. (B) 单调增加函数. (C) 单调减少函数

(D) 有界函数. (E) 可导函数.

解 因 $f(x)$可积,故 $F(x)$必连续,选项(A)成立。但 $f(x)$可积,$F(x)$不一定可导,如 $f(x)$连续,则 $F(x)$一定可导,但 $f(x)$在 $x=0$ 处不连续,(E)不成立。又 $f(x)$无界,故 $F(x)$也无界,(D)也不成立.

因 $F'(x)=f(x)$,故当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)>0$,因而 $F'(x)>0$;在 $x<0$ 时,$f(x)<0$,因而 $F'(x)<0$。在$(-\infty,+\infty)$上 $F(x)$变号不单调。仅(A)入选.

例 14(条件充分性判断) 函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(k-t)e^{-t}\,dt(k>0)$在 $x=\sqrt{2}$ 处取得最大值.

(1) $k=2$; (2) $k=4$.

解 $f(x)$为偶函数且 $f(0)=0$,故只需求出 $f(x)$区间$(0,+\infty)$上的最大值即可.

令 $f'(x)=(k-x^2)e^{-x^2}\times 2x=0$ 得$(0,+\infty)$内的惟一驻点 $x=\sqrt{k}$。当 x

$\in(0,\sqrt{k})$时，$f'(k)>0$；当$k\in(\sqrt{k},+\infty)$时，$f'(x)<0$。故$x=\sqrt{k}$为$f(x)$的惟一极大值点，因而也是$f(x)$在$(0,+\infty)$内的最大值点，于是当$k=2$时，函数$f(x)=\int_0^{x^2}(k-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ $(k>0)$在$x=\sqrt{2}$处取得最大值，条件(1)充分。仅A入选.

注意 若不考虑$f(x)$的奇偶性，则由$f'(x)=0$得三个驻点$x=0,x=\pm\sqrt{k}$，需一一判别，计算量就较大了.

例15[2000年Ⅰ27] 求由$\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{3}}-1)^2$ $(x>0)$所确定的函数$y=y(x)$的极值.

解 在方程两端对x求导，得到

$$\mathrm{e}^{y^2}y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-1),\quad y'=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-y^2}x^{-\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-1),$$

$x=1$为驻点.且当$0<x<1$时，$y'<0$，函数单调增加；当$x>1$时，$y'>0$，函数单调减少。所以$y(x)$在$x=1$处有极小值$y(1)$，且由

$$\int_0^{y(1)}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{3}}-1)^2\Big|_{x=1}=0$$

知，极小值为$y(1)=0$.

例16 积分$t\int_0^s f(tx)\mathrm{d}x$与变量(　　)有关.

(A) t,s,x　　(B) s,t　　(C) x,t　　(D) s,x　　(E) s

解 令$tx=u$，则$x=0,s/t$时，$u=0,s,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/t$，于是

$$t\int_0^{s/t}f(tx)\mathrm{d}x=t\int_0^s f(u)\frac{\mathrm{d}u}{t}=\int_0^s f(u)\mathrm{d}u.$$

仅与s有关。仅(E)入选.

例17 曲线$y=\int_0^x|t(t-1)(t-3)|\mathrm{d}t$有(　　)个拐点.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4　　(E) 5

解
$$y'=|x(x-1)(x-3)|=\begin{cases}-x(x-1)(x-3), & x<0,\\ x(x-1)(x-3), & 0<x<1,\\ -x(x-1)(x-3), & 1<x<3,\\ x(x-1)(x-3), & x>3,\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases}(3x-1)(3-x), & x<0,\\ (3x-1)(x-3), & 0<x<1,\\ (3x-1)(3-x), & 1<x<3,\\ (3x-1)(x-3), & x>3。\end{cases}$$

令 $y''=0$ 得 $x_1=1/3, x_2=3$.

显然在 $x_1=1/3$ 处二阶导数 y'' 变号，因而为 y 的一个拐点。另外 y' 不存在的点有 $x_3=0, x_4=1, x_5=3$，由于在这些点的左、右两侧其二阶导数都变号（由 y'' 的表示式易看出），它们都是拐点。仅(C)入选.

例 18[1999 年 Ⅱ 28] 设三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t=12x^2+18x+1$，当 x 何值时，$f(x)$ 达到极大值.

解 依题意，$f(x+1)-f(x)=12x^2+18x+1$，即有

$$3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)=12x^2+18x+1.$$

比较系数得 $\begin{cases}3a=12,\\3a+2b=18,\\a+b+c=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=3,\\c=-6.\end{cases}$

所以有 $f(x)=4x^3+3x^2+6x+d$ （d 为任意常数）.

令 $f'(x)=12x^2-6x+6=0$，得驻点 $x=-1$ 或 $x=1/2$.

又 $f''(x)=24x+6$，$f''(-1)=-18<0$，$f''(1/2)=18>0$，

知 $x=-1$ 时，函数有极大值.

题型五 由变限定积分所满足的函数方程求未知函数或其积分值

类型(一) 求未知函数.

为求未知函数先在所给方程两端求导，得到未知函数的导数所满足的方程，再用积分法求出其未知函数.

例 19[1999 年 Ⅰ 27] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且满足

$$xf(x)=\frac{3}{2}x^4-3x^2+4+\int_2^x f(t)\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$.

解 在所满足的等式中，令 $x=2$，可得初始条件 $f(2)=8$. 在所给方程两端对 x 求导得到

$$xf'(x)+f(x)=6x^3-6x+f(x), \quad \text{即} \quad f'(x)=6x^2-6.$$

在 $f'(x)=6x^2-6$ 两端积分，得到

$$\int_2^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(2)=\int_2^x(6t^2-6)\mathrm{d}t=(2t^3-6t)\Big|_2^x=2x^3-6x-4.$$

于是 $f(x)=2x^3-6x-4+f(2)=2x^3-6x+4.$

例 20 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1)=5/2$，且对所有 $x,t\in(0,+\infty)$ 满足下述条件，求 $f(x)$：

$$\int_1^{xt} f(u)\,\mathrm{d}u = t\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u + x\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

解 因 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，题设方程中各项均可导，在所给方程两端对 x 求导，由于各个被积函数都只含积分变量，由式(2.3.3.1)得到

$$tf(xt) = tf(x) + \int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u。 \qquad ①$$

在式①中令 $x=1$，由 $f(1)=5/2$ 得到

$$tf(t) = \frac{5t}{2} + \int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u。 \qquad ②$$

因式②右端两项可导，故 $tf(t)$也可导，因而 $f(t)$是可导的，对 t 求导得到

$$f(t)+tf'(t) = 5/2 + f(t), \quad \text{即} \quad f'(t) = 5/(2t)。 \qquad ③$$

在式③两端积分得到 $f(x)=5\ln t/2+c$. 由 $f(1)=5/2$ 得到

$$f(x) = 5(\ln x+1)/2.$$

例 21 变量 x 与积分$\int_0^1[f(x)+xf(tx)]\mathrm{d}t$ 无关，则 $f(x)=$

(A) $c\mathrm{e}^{-2x}$. (B) $c\mathrm{e}^{-3x}$. (C) $c\mathrm{e}^{-x}$. (D) $c\mathrm{e}^{2x}$. (E) $c\mathrm{e}^{3x}$.

解 因 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}t = f(x)\int_0^1 \mathrm{d}t = f(x)$，

$$\int_0^1 xf(tx)\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=tx} x\int_0^x f(u)\frac{1}{x}\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u,$$

故
$$\int_0^1[f(x)+xf(tx)]\mathrm{d}t = f(x)+\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

依题意积分对变量 x 求导，因而

$$\{\int_0^1[f(x)+xf(tx)]\mathrm{d}t\}' = f'(x)+f(x)=0,$$

即
$$f'(x)/f(x) = -1,$$

积分得
$$\ln f(x) = -x + \ln C.$$

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-x}\ (C\text{为任意常数})。\text{仅(C)入选.}$$

类型(二) 求未知函数的积分值.

先由所给方程求出 $f(x)$的一个原函数$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}t$ 或其变限定积分$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$所满足的方程，然后代入 $x=b$ 或令 $\varphi(x)=a$，$\psi(x)=b$，解出 x，求出$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ 的值.

例 22 设连续函数满足$\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-2x}-1$，则$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$

(A) $1/\mathrm{e}-1$. (B) $1/\mathrm{e}^2-1$. (C) $\mathrm{e}-1$. (D) $1/\sqrt{\mathrm{e}}-1$. (E) 0.

解 令 $x-t=u$，则 $t=0$，x 时，$u=x$，0. 于是

$$\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-2x}-1.$$

令 $x=1$，则$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2\cdot 1}-1 = \mathrm{e}^{-2}-1$. 仅(B)入选.

例 23 设 $f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x$. 已知 $f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 因被积函数中含上限变量(求导变量)需先作变量代换 $u=2x-t$，将其变换到积分上限中去.

当 $t=0$，x 时，$u=2x$，x，且 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$，故

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=-\int_{2x}^x(2x-u)f(u)\mathrm{d}u=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u.$$

则
$$2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x.$$

等式两端对 x 求导得到

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[f(2x)\times 2-f(x)]-2xf(2x)\times 2+xf(x)=\mathrm{e}^x,$$

化简得到 $2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x+xf(x)$. 令 $x=1$ 得

$$2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\mathrm{e}+1,\quad \text{即}\quad \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1+\mathrm{e}}{2}.$$

习 题 2.3.3

(一) 问题求解

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{y-1}\sqrt{3+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x=x^3-1$ 所确定，则 $y'(1)=$

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 3/2. (E) $\sqrt{3}$.

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{1/x}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$

(A) $\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$. (B) $f(\ln x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(C) $\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$. (D) $f(\ln x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. 设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t=$

(A) $f(x)$. (B) 0. (C) $f(x)-f(a)$.

(D) $f(x)+f(a)$. (E) $f(a)$.

4. 设 $\int_0^{x-1}f(t)\mathrm{d}t=x^3-x^2+x$，则 $f(x)$ 在 $x=$(　　)处取得最小值.

(A) 1 (B) $-1/2$ (C) -1 (D) $-2/3$ (E) 不能确定

5. 已知 $\int_0^x\frac{\sqrt[3]{t}}{1+f(t)}\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$

(A) 1/2. (B) 1/3. (C) 1. (D) $-1/2$. (E) 3/2.

6. 设 $f(x)=\int_0^x\frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) −1.

7. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且满足$\int_0^1 f(xt)\,dt=f(x)+xe^x$，则 $f(x)=$

(A) $-(x+1)e^x+1$.　　(B) $-(x+1)e^x+2$.　　(C) $(x+1)e^x+1$.

(D) $(x+1)e^x+C$.　　(E) $-(x+1)e^x+C$，C 为任意常数.

8. 函数 $I(x)=\int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间$[e,e^2]$上的最大值为

(A) $\ln(1+e)$.　　(B) $\ln(1+e)-e/(1+e)$.

(C) $2\ln(1+e)-e/(1+e)$.　　(D) $e/(1+e)$.　　(E) $3e/(1+e)$.

（二）条件充分性判断

1. 设 $f(x)=\begin{cases} a+x, & x<0, \\ 1+e^{-x}, & x\geqslant 0, \end{cases}$ $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\,dt$ **在点** $x=0$ **处可导.**

(1) $a=0$;　　(2) $a=2$。

2. 设 $f(x)$**为连续函数，曲线** $y=F(x)=\int_{-x}^{e} f(x)\,dx$ **下凸.**

(1) $f(x)$**单调减少**;　　(2) $f(x)$**单调增加.**

3.[2004 **年** Ⅰ 6]　**函数** $I(x)=\int_1^x \frac{dx}{2x-a}$**在**$[1,2]$**上取得的最大值和最小值分别为**$(\ln 3)/2$ **和** 0.

(1) $a=3/2$;　　(2) $a=1$.

（三）解答题

1.[1999 **年** Ⅱ 26]　**该函数** $f(x)$ **的导函数** $f'(x)$ **连续，**$F(x)=\int_a^x (x-t)f'(t)\,dt$**. 求** $F''(x)$.

2.[2000 **年** Ⅰ 27]　**求由方程**$\int_0^y e^{t^2}\,dt=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}-1)^2$，$x>0$ **所确定的隐函数** $y=y(x)$**的极值.**

3. 求$\frac{d}{dx}\int_0^{\varphi(x)}(\varphi(x)-t)f(t)\,dt$**，其中** $f(t)$**为已知的连续函数，**$\varphi(x)$**为已知的可导函数.**

4. 设 $f(x)$**单调增加，有连续导数，**$f(0)=0$，$f(a)=b$，$g(x)$**是** $f(x)$**的反函数，证明**$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b g(x)\,dx=ab$.

5. 设函数 $f(x)$**连续，**$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$**，且** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ （A **为常数**），**求** $\varphi'(x)$**并讨论** $\varphi'(x)$**在** $x=0$ **处的连续性.**

6. 计算 $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt\right)\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

2.3.4 定积分的应用

题型一　已知曲线方程,求其所围平面图形的面积

这类题型解题的步骤为:

1° **根据已知条件画出曲线图形及所围的平面图形。**

2° **求出曲线的有关交点。**

3° **根形平面图形的形状与位置选好积分变量,并确定积分限。一般平面图形的边界曲线之间的位置关系是上与下(或左与右)的关系应选** x**(或** y**)为积分变量。**

4° **列出所求平面图形面积的表示式,并算出结果.**

根据考纲的要求定积分的应用主要就是计算平面图形的面积,往届的考题较多,希望考生熟练掌握这类题型中下述各类试题的解法.

类型(一)　求坐标轴上曲边梯形的面积。

1° **当** $f(x)\geqslant 0$ **时,由** $x=a, x=b, y=0$ **与** $y=f(x)$**所围成的** x **轴上方的平图形称为以** $f(x)$**为曲边的** x **轴上方的曲边梯形,设为** G_1**. 由定积分的几何意义知** G_1 **的面积为**

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2° **若** $f(x)\leqslant 0$**,以** $f(x)$**为曲边,由** $x=a, x=b\ (b>a)\ y=0$ **与** $y=f(x)$ **所围成的** x **轴下方的曲边梯形** G_2 **的面积为**

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

3° **由曲线** $x=\varphi(y)\geqslant 0$ **及直线** $y=c, y=d\ (c<d)$**及** $x=0$ **所围成的** y **轴右边的曲边梯形** G_3 **的面积为**

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

4° **若** $x=\varphi(y)\leqslant 0$**,以** $\varphi(y)$**为曲边,**$y=c, y=d\ (c<d), x=0$ **与** $x=\varphi(y)$ **所围成的** y **轴左边的曲边梯形** G_4 **的面积为**

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

例 1[2004 **年** Ⅰ 20]　**设函数** $f(x)$**在区间**$[a,b]$**上非负,且在**(a,b)**内** $f''(x)>0, f'(x)<0$,

$$I_1=\frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)],\quad I_2=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad I_3=(b-a)f(b),$$

则 (A) $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$. (B) $I_2\leqslant I_3\leqslant I_1$. (C) $I_1\leqslant I_3\leqslant I_2$.

(D) $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$. (E) 以上结论都不正确.

解 由于 $f(x)$在$[a,b]$上非负,且在(a,b)内 $f''(x)>0$,$f'(x)<0$,曲线 $y=f(x)$的图形如图 2.3.4.1 所示。

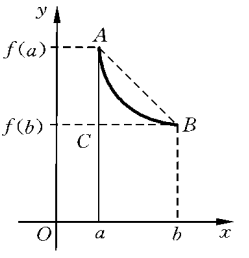


图 2.3.4.1

$I_1=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$表示以 a,b 为底的梯形 $BbaA$ 的面积.

$I_2=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲边梯形 $BbaA$ 的面积.

$I_3=(b-a)f(a)$表示矩形 $abBC$ 的面积,显然有 $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$.仅(D) 入选.

例 2 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$与 x 轴所围图形面积为

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$. (B) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(E) 以上结论都不正确.

解 函数与 x 轴的交点分别为 0,1,2,且当 $0<x<1$ 时,函数为负,$1<x<2$ 时函数为正,于是曲线与 x 轴所围图形的面积为

$$S=\int_0^2|x(x-1)(2-x)|\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x.$$ 仅(C)入选.

类型(二) 计算所围平面图形不是曲边梯形的面积。

当 $y=f(x)$(或 $x=\varphi(y)$)所围平面图形不是坐标轴上的曲边梯形要将其分解为 x(或 y)坐标轴上的曲边梯形之差或之和,分别求出相应的曲边梯形的面积,将其相减或相加,即得所求平面图形的面积.

计算时,还应注意所分解的 x(或 y)坐标轴上的曲边梯形中是否有规则的图形(如直角三角形、矩形、梯形等),如有应利用其面积计算公式直接写出其面积,不必使用定积分计算,这样可减少计算工作量.

一般说来当所围的平面图形的边界线中含有不垂直于坐标轴的直线时,所作出来的曲边梯形中常含有规则图形.

例 3[2004 年Ⅰ21] 曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$和直线 $x=-2,x=2$ 及 x 轴所围成

的图形的面积是

(A) $2-2/e^2$.　　(B) $2-2/e$.　　(C) $e-2/e$.

(D) $e+1/e$.　　(E) $2+2/e$.

解法 1　由题意可知，所求面积为 x 轴上的曲边梯形之面积. 曲线 $y=xe^{-x^2/2}$ 不易画出，其取值又有负的部分，其面积可用绝对值之积分表示，再由区间的对称性，脱掉绝对值，即

$$S=\int_{-2}^{2}|y|\,dx=\int_{-2}^{2}|xe^{-\frac{x^2}{2}}|\,dx=2\int_{0}^{2}xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=-2\int_{0}^{2}de^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=-2e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^2=-2(e^{-2}-1)=2-2/e^2.$$ 仅(A)入选.

解法 2　如图 2.3.4.2 所示，函数 $y=xe^{-x^2/2}$ 为奇函数，所求面积为 x 轴上的两曲边梯形之和，即

$$\int_{-2}^{2}y\,dx=\int_{-2}^{0}-y\,dx+\int_{0}^{2}y\,dx=-\int_{-2}^{0}y\,dx+\int_{0}^{2}y\,dx$$

$$=-\int_{-2}^{0}xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx+\int_{0}^{2}xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_{-2}^{0}de^{-\frac{x^2}{2}}-\int_{0}^{2}de^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-2}^{0}-e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^2=1-e^{-2}-e^{-2}+1$$

$$=2-2/e^2.$$ 仅(A)入选.

解法 3　先作出函数 $y=xe^{-x/2}$ 在(0,2)内的图形，再由奇函数的图形关于原点对称作出另一区间(−2,0)的图形。令

$$y'=e^{-x^2/2}+x(-x)e^{-x^2/2}=(1-x^2)e^{-x^2/2}=0,$$

解得驻点 $x=\pm1$(舍去 $x=-1$)。又

$$y''=-xe^{-x^2/2}\times(3-x^2),$$

因 $0<x<2$ 故 $y''<0$，所以 $x=1$ 为极大值是也是最大值点，且曲线 y 在(0,2)内上凸. 由于 y 为奇函数，其图形关于点 O 对称，故在$[-2,2]$上 y 的图形如图 2.3.4.2 所示，其面积为

$$S=2\int_{0}^{2}xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=2\int_{0}^{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,d\frac{x^2}{2}=-2e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^2=2-2e^{-2}=2-\frac{2}{e^2}.$$

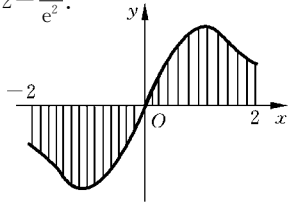


图 2.3.4.2

例 4[1997 年 Ⅱ 25]　求曲线 $y=1/x$ 和直线 $y=x$，$y=2$ 所围成的图形的面积.

解法 1　如图 2.3.4.3 所示，选 y 为积分变量，所求面积的平面图形为一梯形与一曲边梯形之差，而梯形面积为 $(2+1)(2-1)/2=3/2$，故所求面积为

$$S=\frac{3}{2}-\int_1^2\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

或所求面积为

$$S=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2-\ln y\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2。$$

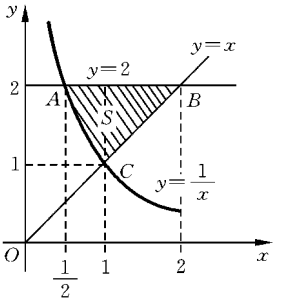


图 2.3.4.3

解法 2　选 x 为积分变量，则其面积分为两部分 S_1 和 S_2 计算

$$S_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 2-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1-\ln\Big|_{\frac{1}{2}}^1=1-\ln 2,$$

$$S_2=(2-1)\times 2-\frac{(1+2)(2-1)}{2}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

故　　$S=S_1+S_2=1-\ln 2+1/2=3/2-\ln 2.$

或所求面积为

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x$$

$$=(2x-\ln x)\Big|_{1/2}^1+(2x-x^2/2)\Big|_1^2=3/2-\ln 2.$$

注意　用定积分计算面积时，一要注意适当选择好积分变量，二要注意用面积计算公式求规则图形的面积，这样会使计算工作量大为减少.

类型(三)　求切线与曲线所围平面图形的面积.

先设出切点(x_0,y_0)，根据题设条件再求出切点坐标，为减少未知量的个数，将 y_0 用 $f(x_0)$ 代替之(其中 $f(x)$ 为曲线方程)，于是切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)。$$

它是仅含一个待求常数 x_0 的方程，利用切线过一已知点将其坐标代入上面的切线方程即可求出切点横坐标 x_0，然后再写出切线方程，最后根据所围图形的形状与位置利用本题类型(一)或类型(二)中所述方法求出其面积。求解时要特别注意考察曲边梯形中是否有由切线或不垂直坐标轴的直线所围成的规则图形，如直角三角形、梯形、矩形等，如有，应按其面积的计算公式直接写出其结果，简化计算。不宜再用定积分表示.

这类题型能反映考生一定的综合应用知识能力，试题中出现率较高.

例 5[1998 年Ⅰ 28]　**从点(2,0)引两条直线与曲线 $y=x^3$ 相切，求由这两直线与曲线 $y=x^3$ 所围图形的面积.**

解法 1　设切点为(x_0,y_0)，则在该点的切线斜率为 $y'|_{x=x_0}=3x_0^2$，于是

切点为(x_0,y_0)的切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$. 又因切线过点$(2,0)$，于是该点在切线上，将其坐标 $x=2,y=0$ 代入切线方程得到

$$-x_0^3=3x_0^2(2-x_0),$$

即
$$x_0^2[3(2-x_0)+x_0]=x_0^2(6-2x_0)=0。$$

因而切点的横坐标为 $x_0=0$ 或 $x_0=3$，于是两切线方程为 $y=0,y=27x-54$.

所求面积的平面图形可看作是 y 轴上的两个曲边梯形之差（见图2.3.4.4），其中大的曲边梯形为一梯形，其面积为

$$S_1=\frac{[(2-0)+(3-0)]\times 27}{2}=\frac{3^3\times 5}{2},$$

另一曲边梯形的面积为

$$S_2=\int_0^{27} y^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}y=\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\Big|_0^{27}=\frac{1}{4}\times 3^5,$$

故所求面积为

$$S=S_1-S_2=3^3\times 5/2-3^5/4=3^3/4=27/4.$$

或
$$S=\int_0^{27}\frac{y+54}{27}\mathrm{d}y-\int_0^{27}y^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{27}\left(\frac{y}{27}+2-y^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{27}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{27}+2\times 27-\frac{3}{4}y^{1+\frac{1}{3}}\Big|_0^{27}$$

$$=\frac{1}{27}\frac{27^2}{2}+2\times 27-\frac{3}{4}27^{\frac{4}{3}}=27/2+2\times 27-(3/4)\times 27\times 3$$

$$=27(1/2+2-9/4)=27/4.$$

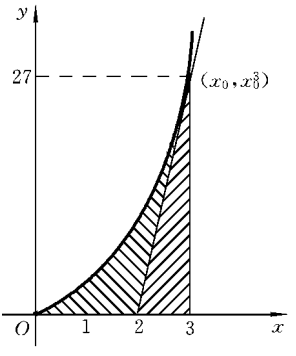


图 2.3.4.4

解法 2　将所求面积看作是 x 轴上两曲边梯形面积之差（见图2.3.4.4），其中小曲边梯形为一个以切线为斜边的直角三角形，其面积为

$$S_1=(3-2)\times 27/2=27/2=3^3/2.$$

而另一曲边梯形之面积为

$$S_2=\int_0^3 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^3=\frac{1}{4}3^4。$$

故所求面积为

$$S=S_2-S_1=3^4/4-3^3/2=3^3(3/4-2/4)=27/4.$$

或
$$S=\int_0^3 x^3\,\mathrm{d}x-\int_2^3(27x-54)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^3-3^3\frac{x^2}{2}\Big|_2^3$$

$$=\frac{3^4}{4}-3^3\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)+2\times 3^3=3^3\left(\frac{11}{4}-\frac{10}{4}\right)=\frac{27}{4}.$$

例 6[1998 年 Ⅱ 28] **从原点**(0,0)**引两条直线与曲线** $y=1+x^2$ **相切(见图** 2.3.4.5),**求两直线与曲线** $y=1+x^2$ **所围的面积.**

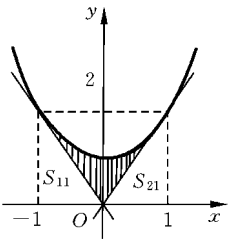


图 2.3.4.5

解　设切点为$(x_0,y_0)=(x_0,1+x_0^2)$,**切线为**

$$y=2x_0(x-x_0)+1+x_0^2,$$

即

$$y=2x_0x+1-x_0^2.$$

切线过点(0,0),**有** $x_0=\pm1$,**所以切点**(1,2),(−1,2)。**切线方程为**

$$y-2=2(x-1),\quad y-2=-2(x+1),$$

即

$$y=2x,\quad y=-2x.$$

所求面积可分两部分面积 S_1 **与** S_2 **计算,其中**

$$S_1=\int_{-1}^{0}y\mathrm{d}x-S_{11}\text{(以切线 }y=-2x\text{ 为斜边的直角三角形面积)}$$

$$=\int_{-1}^{0}(1+x^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3},$$

$$S_2=\int_{0}^{1}y\mathrm{d}x-S_{21}\text{(以切线 }y=2x\text{ 为斜边的直角三角形面积)}$$

$$=\int_{0}^{1}(1+x^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\times1\times2=\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3},$$

所求面积

$$S=S_1+S_2=1/3+1/3=2/3。$$

或

$$S=\int_{-1}^{0}[x^2+1-(-2x)]\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x^2+1-2x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+x+x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{3}x^3+x-x^2\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}.$$

例 7　曲线 $y=1/\sqrt{x}$**的切线与** x **轴和** y **轴围成一个图形。记切点的横坐标为** a,**试求切线方程和这个图形的面积当切点沿曲线趋于无穷远时,该面积的变化趋势如何?**

解　由 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$**得** $y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$,**则切点** $P(a,1/\sqrt{a})$**处的切线方程为**

$$y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a),\quad \textbf{即}\quad y=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}x+\frac{3}{2\sqrt{a}}.$$

切线与 x **轴、**y **轴的交点分别为** $Q(3a,0)$**与** $R\left(0,\dfrac{3}{2\sqrt{a}}\right)$**(见图** 2.3.4.6).

于是$\triangle ORQ$ **的面积为**

$$S(a)=\frac{1}{2}\times3a\,\frac{3}{2\sqrt{a}}=\frac{9}{4}\sqrt{a}$$

或 $S(a)=\int_0^{3a}\left(-\frac{x}{2a\sqrt{a}}+\frac{3}{2\sqrt{a}}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2a\sqrt{a}}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2\sqrt{a}}\right)\Big|_0^{3a}$

$=-\frac{9}{4}\sqrt{a}+\frac{9}{2}\sqrt{a}=\frac{9}{4}\sqrt{a}.$

当切点按 x 轴正方向趋于无穷远时，有 $\lim\limits_{a\to+\infty}S(a)=+\infty$.

当切点按 y 轴方向趋于无穷远时，即 $a\to0^+$ 时，有 $\lim\limits_{a\to0^+}S(a)=0$.

类型(四)　求所围平面图形的最大面积.

为求最大面积，需将曲线方程及其有关交点坐标均用参数表示。因而所围平面图形的面积也用该参数表示，求所围平面图形的最大面积转化为求参数取何值时，面积函数取最大值.

例 8[2000 年 Ⅰ 30]　当 a $(0\leqslant a\leqslant4)$ 为何值时，两曲线 $y=-\frac{2}{3}x(x-a)$ 与 $y=(4-a)x(x-a)$ 所围图形面积最大.

解　$y=-\frac{2}{3}x(x-a)$ 是开口向下的抛物线，$y=(4-a)x(x-a)$ 是开口向上的抛物线(见图 2.3.4.7)，其交点为 $(0,0)$，$(a,0)$，所以所围图形面积为

$$S(a)=\int_0^a\left[-\frac{2}{3}x(x-a)-(4-a)x(x-a)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a x(x-a)\left[-\frac{2}{3}-(4-a)\right]\mathrm{d}x=\int_0^a\left(a-\frac{14}{3}\right)x(x-a)\mathrm{d}x$$

$$=\left(a-\frac{14}{3}\right)\int_0^a x(x-a)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}a^3\left(a-\frac{14}{3}\right)(0\leqslant a\leqslant4),$$

$$S'=-\frac{1}{6}(4a^3-14a^2)=-\frac{1}{6}a^2(4a-14).$$

令 $S'(a)=0$ 得驻点 $a=0$，$a=3.5$. 又函数 S 在区间 $[0,4]$ 的端点的值为

$$S(0)=0,\quad S(4)=64/9,$$

又

$$S(3.5)=2401/288.$$

比较这三个值可知当 $a=3.5$ 时两条曲线所围成图形面积最大.

注意　面积 $S(a)$ 是上限 a 的函数可以用变上限函数求导的方法求出驻点和极值，但因被积函数中含上限变量 a，需先把 a 提到积分号外才能对 a 求导，计算量较大。这里没有采用此法.

例 9　已知抛物线 $y=px^2+qx$(其中 $p<0$，$q>0$)在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

(1) 问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值？

(2) 求出此最大值.

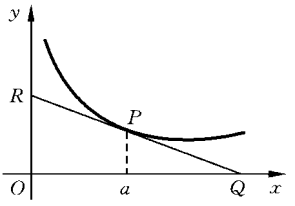


图 2.3.4.6

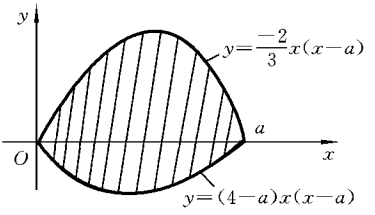


图 2.3.4.7

解 令 $px^2+qx=0$ 得抛物线与 x 轴的两交点为 $O(0,0)$，$B(-q/p,0)$。由于 $p<0$，抛物线开口向下(见图 2.3.4.8)，则

$$S=\int_0^{-q/p}(px^2+qx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{px^3}{3}+\frac{qx^2}{2}\right)\Big|_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}. \qquad ①$$

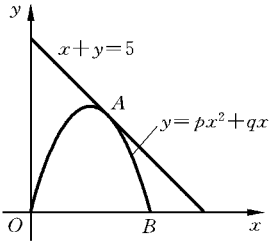


图 2.3.4.8

为将 S 化成仅为一个参数的函数，需找出 p 和 q 的关系. 因在点 A，两线的斜率相等，设 $A=A(x_0,y_0)$. 由 $y=-x+5$ 知

$$y'|_{x=x_0}=-1,$$

则

$$y'|_{x=x_0}=2px+q|_{x=x_0}=-1.$$

于是 $x_0=-(1+q)/(2p)$，而在点 A 两曲线的纵坐标相等，故

$$5-x_0=px_0^2+qx_0, \quad \text{即} \quad 5+\frac{1+q}{2p}=p\,\frac{(1+q)^2}{4p^2}-\frac{q(1+q)}{2p}.$$

整理得到

$$p=-(q+1)^2/20. \qquad ②$$

也可由直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切，有惟一交点，即由 $\begin{cases}x+y=5,\\ y=px^2+qx\end{cases}$ 有惟一解得到方程 $px^2+(q+1)x-5=0$ 的判别式等于零，即

$$\Delta=(q+1)^2+20p=0,\quad \text{即}\quad p=-(1+q)^2/20.$$

将式②代入式①得 $S(q)=\dfrac{200q^3}{3(q+1)^4}$. 令 $S'=\dfrac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0$. 得驻点 $q=3$. 当 $0<q<3$ 时，$S'(q)>0$；当 $q>3$ 时，$S'(q)<0$. 于是当 $q=3$ 时，$S(q)$ 取极大值，即最大值，此时 $p=-4/5$，其最大值为 $S=225/32$.

题型二　已知曲线所围平面图形的面积确定有关待定常数

例 10（条件充分性判断）　过曲线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作曲线的切线，切线与曲线，x 轴所围面积为 $1/12$.

(1) $a=1$；　　(2) $a=-1$.

解　$y'=2x$，$y'|_{x=a}=2a$，切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，即 $y=2ax-a^2$. 令 $y=0$ 得切线与 x 轴之交点为 $a/2$，阴影部分面积如图 2.3.4.9 所示，为

$$S=x\text{ 轴上的一曲边梯形面积减去一直角三角形面积}$$

$$=\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^3=\frac{1}{12}a^3。$$

由 $S=\dfrac{1}{12}$ 得到 $\dfrac{1}{12}a^3=\dfrac{1}{12}$，即 $a=1$，条件(1)充分. 由于 $y=x^2$ 的图形关于 y 轴对称且通过原点，故条件(2)也是充分的。仅 D 入选.

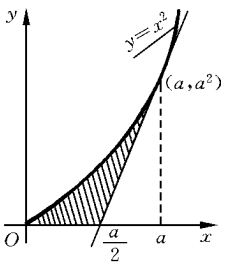


图 2.3.4.9

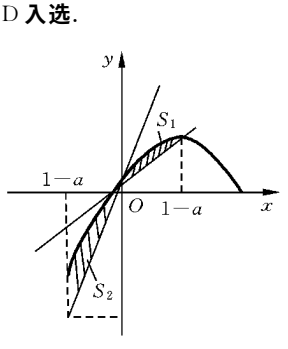


图 2.3.4.10

例 11　$a=$（　　）时，$y=x-x^2$ 与 $y=ax$ 间的图形面积为 $9/2$ $(a>0)$.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4　　(E) 5

解法 1　由 $y=x-x^2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ 易画出其图形（见图 2.3.4.10）.

由 $x-x^2=ax$ 易求得其交点坐标 $x=0$ 或 $x=1-a$，于是当 $a<1$ 时，所求图形面积为

$$S_1=\int_0^{1-a}(x-x^2-ax)\mathrm{d}x=\int_0^{1-a}[(1-a)x-x^2]\mathrm{d}x=\frac{(1-a)^3}{6}。$$

由题设有 $\frac{(1-a)^3}{6}=\frac{9}{2}$ 解得 $a=-2$.

当 $a>1$ 时，所求图形面积为

$$S_2=\int_{1-a}^{0}[(x-x^2)-ax]\mathrm{d}x=-\int_0^{1-a}[(x-x^2)-ax]=-\frac{(1-a)^3}{6}=\frac{(a-1)^3}{6}。$$

由题设有 $\frac{(a-1)^3}{6}=\frac{9}{2}$，解得 $a=4$. 仅(D)入选.

例 12 求抛物线 $y=a^2x^2$ 与直线 $y=ax$ 以及直线 $x=1$ 所围成的在直线 $x=1$ 的左方面积，其中 $0<a<1$(见图 2.3.4.11)，并问 a 等于多少时，上述面积最大，并求最大面积.

解 所求面积 S 等于直线 $y=ax$ 为斜边的直角三角形面积减去以 $y=a^2x^2$ 为曲边的曲边梯形之面积，即

$$S=\frac{1\times a}{2}-\int_0^1 a^2x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a^2。$$

令 $S'(a)=1/2-(2/3)a=0$ 得惟一驻点 $a=3/4$.
因 $S''(a)=-2/3<0$，故点 $a=3/4$ 为 $S(a)$ 的极大值点，也是最大值点，其最大值为

$$S\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{3}{16}=\frac{3}{16}.$$

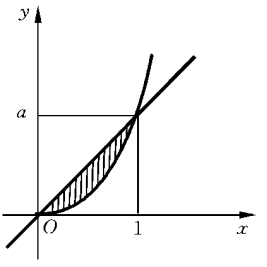


图 2.3.4.11

题型三 求函数在区间上的平均值

函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值为

$$\overline{y}=\overline{f(x)}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (2.3.4.1)$$

例 13 设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为 $x(t)=kt, t\in[0,T](k>0)$. 欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完，试求

(1) t 时的商品剩余量，并确定 k 的值；

(2) 在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量.

解 (1) 在时刻 t 商品的剩余量为 $y(t)=A-x(t)=A-kt, t\in[0,T]$. 依题意有 $A-kT=0$，得 $k=A/T$，故 $y(t)=A-At/T, t\in[0,T]$.

(2) 依题意，$y(t)$ 在 $[0,T]$ 上的平均值由式(2.3.4.1)得到

$$\bar{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\left(A-\frac{A}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{A}{2}.$$

因此，在时间段$[0,T]$上的平均剩余量为$A/2$.

例 14 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，又设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\int_x^{x+a}f(x)\mathrm{d}t\quad(\text{其中 }a>0)。$$

解 由定理 2.3.2.6(积分中值定理)得到$\int_x^{x+a}f(t)\mathrm{d}t=af(\xi)$，其中$x\leqslant\xi\leqslant x+a$，因而$x\to+\infty$时有$\xi\to+\infty$，于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\int_x^{x+a}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\xi\to+\infty}f(\xi)=A.$$

习 题 2.3.4

(一) 问题求解

1. [2004 年Ⅱ4] 由图 2.3.4.12 判断如下三个表达式的大小：

$$I_1=\frac{b-a}{2}[g(b)+g(a)],$$

$$I_2=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\quad I_3=(b-a)g(b).$$

(A) $I_3<I_1<I_2$.　(B) $I_1<I_3<I_2$.

(C) $I_2<I_3<I_1$.　(D) $I_1<I_2<I_3$.

(E) $I_3<I_2<I_1$.

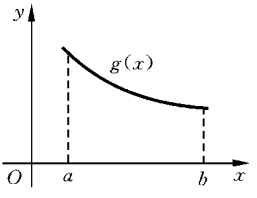


图 2.3.4.12

2. [2004 年Ⅱ5] 曲线$y=\ln x$与x轴及直线$x=1/\mathrm{e}$，$x=\mathrm{e}$围成图形的面积是

(A) $\mathrm{e}-1/\mathrm{e}$.　(B) $2-2/\mathrm{e}$.　(C) $\mathrm{e}-2/\mathrm{e}$.　(D) $\mathrm{e}+1/\mathrm{e}$.　(E) $2+2/\mathrm{e}$.

3. 双曲线$y=1/x$与点$P_0(x_0,y_0)$处的切线及$x=a$(a为切线在x轴上的截距)所围图形面积S与x_0的关系是

(A) x_0越大S越大.　(B) x_0越大S越小.

(C) S与x_0无关，恒为常数.　(D) S不是x_0的单调函数.

4. [2003 年Ⅰ23] 过点$(1,0)$可作曲线$y=x^2$的两条切线，它们与曲线$y=x^2$所围图形的面积是

(A) 1/3.　(B) 2/3.　(C) 1.　(D) 4/3.　(E) 5/3.

5. [2005 年Ⅰ6] 过抛物线$y=-x^2+4x-3$上的两点$(0,-3)$，$(3,0)$的两条切线与x轴所围图形的面积是

(A) 4/9. (B) 27/8. (C) 9/4. (D) 8/27. (E) 27/4.

6. [2003 年 Ⅱ 24] **曲线** $y=\ln x, y=\mathrm{e}+1-x$ **与** $y=0$ **所围成的平面图形的面积为**

(A) 3/2. (B) 3. (C) $(\mathrm{e}+1)\ln(\mathrm{e}+1)-\mathrm{e}$.

(D) $(\mathrm{e}+1)\ln(\mathrm{e}+1)$. (E) **以上结论都不正确.**

7. 假设曲线 $L_1: y=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, x **轴及** y **轴所围区域被曲线** $L_2: y=ax^2$ **分为面积相等的两部分,其中** a **是大于零的常数,则** $a=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

8. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ **与直线** $y=\mathrm{e}^{-t}\ (t\in[0,1])$, $x=1$ **和** y **轴所围图形面积** S(**见图** 2.3.4.13 **中阴影部分**)**为**

(A) **没有最大值.** (B) **没有最小值.**

(C) **必有最大值,且在** $t=0$ **处取得最大值.**

(D) **必有最小值,且在** $t=0$ **处取得最小值.**

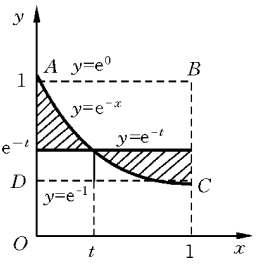


图 2.3.4.13

9. 根据定积分的几何值意义,在区间$[a,b]$**上若** $f(x)>0$**,能使不等式**

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

成立的 $f(x)$**满足**

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$. (B) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$. (D) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

(E) **以上结论都不正确.**

10. 某仓库在 4 **月** 1 **日至** 30 **日** t **时油库存量为** $f(t)=t^2-3t+12$**,则日平均库存量为**

(A) 267. (B) 411. (C) 275.833. (D) 415.875. (E) **无法确定.**

(二) 条件充分性判断

1. 抛物线 $y=1+x^2$ **与过点** $B(0,b)$**的切线及** y **轴所围图形面积为** 8/3.

(1) $b=-3$; (2) $b=-2$.

2. 以抛物线 $y=a^2-x^2\ (x\geqslant 0$ **的部分**)**与** x **轴,** y **轴及** $x=2a\ (a>0)$**为边界所围图形面积为** 16.

(1) $a=1$; (2) $a=2$。

3. 曲线 $y=1/x$ **与直线** $x=a, y=x$ **所围图形面积为** $1-(\ln 3)/2$.

(1) $a=\sqrt{3}$; (2) $a=2$。

4. 抛物线 $y=x^2$ **与直线** $y=ax$ **所围图形面积为** 9/2.

(1) $a=3$；　　(2) $a=-3$。

(三) 解答题

1. [1997 年 Ⅰ 31] **求由曲线 $y=e^x$ 和该曲线的经过原点的切线以及 y 轴所围图形的面积.**

2. [2000 年 Ⅱ 31] **从原点向抛物线 $y=x^2+x+1$ 引两条切线,求此两切线与抛物线所围图形的面积.**

3. 已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0)$, $B(3,0)$(见图 2.3.4.14),求证两坐标轴与该曲线所围平面图形的面积 S_1 等于 x 轴与该曲线所围平面图形的面积 S_2.

4. 求椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的面积.

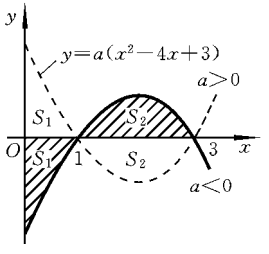


图 2.3.4.14

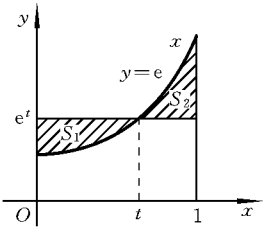


图 2.3.4.15

5. 如图 2.3.4.15 所示,两块阴影部分面积分别为 S_1 和 S_2。

(1) 求 t 的值使得 $S_1=S_2$；

(2) 当 t 为何值时, S_1+S_2 为最小,并求最小的面积和的值。

2.4　多元函数的微分学

(一) 考试内容

多元函数一阶偏导数的概念及计算二元函数的极值及判定。

(二) 考试要求

理解二元函数的概念;理解二元函数的偏导数概念,会求多元函数的一阶偏导数,掌握多元函数极值存在的必要条件,充分条件,会求二元函数的极

值，会求解简单的极值应用题.

2.4.1 多元函数一阶偏导数的计算

* 1. 多(二)元函数及其极限，连续的概念

定义 2.4.1.1（二元函数定义） 设 D 为 xOy 平面上的一个非空点集，如果对于任意 $(x,y)\in D$，按照某个确定的对应法则 f，总有惟一确定的实数 z 与之对应，则称 z 为 x,y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$，其中 x,y 称为自变量，z 称为因变量，且称点集 D 为函数 $z=f(x,y)$ 的定义域，集合

$$Z=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 的值域。

二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$，其图形在空间直角坐标系下通常表示空间中的一张曲面，该曲面在 xOy 平面上的投射区域就是该函数的定义域 D。

定义 2.4.1.2（二元函数的极限） 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内除去点 P_0 以外都有定义为某动点 $P(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 之间的距离 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 趋于零时，$f(x,y)$ 趋于一个常数 A，则称该常数 A 为 P 趋于 P_0 时函数 $f(x,y)$ 的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

定义 2.4.1.3（二元函数的连续性） 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义，若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，点 P_0 称为函数 $f(x,y)$ 的连续点；否则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处间断。点 P_0 称为函数 $f(x,y)$ 的间断点。

也可用改变量定义二元函数的连续性.

定义 2.4.1.4 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义，当自变量有改变量 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$ 时，相应地函数有改变量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，如果 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处连续.

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续.

定理 2.4.1.1 二元初等函数在其定义域内连续.

定理 2.4.1.2 有界闭区域 D 上的二元连续函数,在 D 上必有最大值和最小值.

2. 偏导数的概念

1) 一阶偏导数

定义 2.4.1.5 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义,如果当 $\Delta x\to 0$ 时,极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数,记作

$$f'_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad \text{或}\quad \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

如果当 $\Delta y\to 0$ 时,极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在,则称此极限值为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数,记作

$$f'_y(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad \text{或}\quad \left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x(或 y)的偏导数都存在,则函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内的偏导数存在,且称函数 $f(x,y)$ 在 D 内有对 x(或 y)的偏导函数,记作

$$f'_x(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\quad \text{或}\quad z'_x$$

$$\left(\text{或}\ f'_y(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\quad \text{或}\quad z'_y\right)$$

2) 二阶偏导数

一般说来,函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 仍是 x,y 的二元函数。如果函数 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 对于自变量 x 和 y 的偏导数也存在,则称这些偏导数为函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数,记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \text{或}\quad z''_{xx},\quad z''_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \text{或}\quad z''_{yy},\quad z''_{yx}.$$

命题 2.4.1.1 当二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)$ 为 x,y 的连续函数

时，必有 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$，即二阶混合偏导数与求偏导的次序无关.

题型一　计算二(多)元显函数的偏导数

计算二(多)元显函数对某个变量的偏导数就是把另一变量(其余变量)暂视为常数，仅对该变量求导数。其计算方法与一元函数的求导方法相同，即使用一元函数的求导公式与运算法则求之.

有时为了得到二元显函数的表示式，求导前需先作变量代换.

例 1[2003 年Ⅱ 29]　设 $z=f(x)e^{ax+by}$，f 为任意有二阶连续偏导数的函数，求 a,b，使 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)e^{ax+by}+af(x)e^{ax+by}=[f'(x)+af(x)]e^{ax+by}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=bf(x)e^{ax+by}$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=b[f'(x)+af(x)]e^{ax+by}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}[(b-1)f'(x)+(ab-a-b+1)f(x)],$$

令 $b-1=0$，$ab-a-b-1=0$，则上式等于零. 即 $b=1$，a 为任意实数时，上式等于零.

例 2　设 $u=x^{yz}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$。

解　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=(yz)x^{yz-1}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{yz}\cdot z\ln x$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{yz}\cdot y\ln x$.

例 3(条件充分性判断)　$xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$，其中

$$u=[(x-y)+2z)/(x+2y-z)]^n。$$

(1) $n=3$；　(2) $n=5$.

解　利用对数求导法得到

$$\ln u=n[\ln(x-y+2z)-\ln(x+2y-z)],$$

在上式两端分别对 x,y,z 求偏导数得到

$$\frac{u'_x}{u}=n\left[\frac{1}{x-y+2z}-\frac{1}{x+2y-z}\right],$$

$$\frac{u'_y}{u}=n\left[\frac{-1}{x-y+2z}-\frac{2}{x+2y-z}\right],$$

$$\frac{u'_z}{u}=n\left[\frac{2}{x-y+2z}+\frac{1}{x+2y-z}\right],$$

则 $xu'_x+yu'_y+zu'_z=nu\left[\left(\dfrac{x}{x-y+2z}-\dfrac{x}{x+2y-z}\right)\right.$

$$+\left(\frac{-y}{x-y+2z}-\frac{2y}{x+2y-z}\right)+\left(\frac{2z}{x-y+2z}+\frac{z}{x+2y-z}\right)\Big]$$

$$=nu\left(\frac{x-y+2z}{x-y+2z}-\frac{x+2y-z}{x+2y-z}\right)=0。$$

可见条件(1)、条件(2)都充分。仅 D 入选。

题型二　求二元显函数的偏导数在某点的值

求在某定点(x_0,y_0)的偏导数的值可采用下述三种方法.

一是先求偏导数,然后再将定点坐标代入导函数,求出偏导数在该点的值.

二是使用下述公式计算一阶偏导数在某定点(x_0,y_0)处的值:

$$f'_x(x_0y_0)=\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0},\quad f'_y(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\bigg|_{y=y_0}.$$

即求 $f'_x(x_0,y_0)$时,可先将 y_0 代入 $f(x,y)$得到 $f(x,y_0)$,然后求 x 的函数 $f(x,y_0)$对 x 在 $x=x_0$ 处的导数.

求 $f'_y(x_0,y_0)$也一样,先将 $x=x_0$ 代入函数 $f(x,y)$得到 $f(x_0,y)$,然后再求 y 的函数 $f(x_0,y)$对 y 在 $y=y_0$ 处的导数.

求对 x 的二阶偏导数在点(x_0,y_0)的值,可先将 $y=y_0$ 代入函数得到 $f(x,y_0)$,再对 $f(x,y_0)$求出 x 的二阶导数,最后代入 $x=x_0$ 即可。

同法可求到 y 的二阶偏导数在点(x_0,y_0)处的值.

为求二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}$在点$(x_0,y_0)$的值,先对 x 求出一阶偏导数后,再代入 $x=x_0$ 的值,再对 y 求出 $f'_x(y,x_0)$的一阶导数后再代入 $y=y_0$ 的值.

三是求分段函数(包括含绝对值的函数)在分段点处的偏导数,一段用偏导数的定义,先判定在该点偏导数是否存在,若存在同时也就求出了在该分段点的导数值.

例 4　设 $f(x,y)=x^3(y^2-1)+(x-1)\sqrt[3]{y/x}$,则 $f'_x(1,0),f'_y(1,0)$分别等于

(A) 0,0.　　(B) −1,0.　　(C) −3,0.　　(D) 1/3,1.

解　$f(x,0)=-x^3,f'_x(x,0)=-3x^2,f'_x(1,0)=-3,f(1,y)=y^2-1,f'_y(1,y)=2y,f'_y(1,0)=0$.仅(C)入选.

例 5[2001 年Ⅱ 18]　设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,则$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$分别等于

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) -1.　　(D) ∞.

解法 1　根据二元函数在$(0,0)$处导数的定义求之。

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0.$$ 仅(A)入选.

解法 2　将 $y=0$ 代入 $f(x,y)$ 中得到 $f(x,0)=0$,故 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$.

例 6[2000 年 Ⅰ 20]　已知 $z=\mathrm{e}^{2x^2y}$,则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,3)}=$_____.

解法 1　由　$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2x^2y}$, $\frac{\partial(2x^2y)}{\partial x}=4xy\mathrm{e}^{2x^2y}$,

有　$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,y)}=8y\mathrm{e}^{8y}$,　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(8y\mathrm{e}^{8y})=8\mathrm{e}^{8y}+64y\mathrm{e}^{8y}$,

所以　$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,3)}=200\mathrm{e}^{24}$.

解法 2　$\frac{\partial z}{\partial x}=4xy\mathrm{e}^{2x^2y}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4xy\mathrm{e}^{2x^2y})=4x\mathrm{e}^{2x^2y}+4xy\mathrm{e}^{2x^2y}\cdot 2x^2=4x\mathrm{e}^{2x^2y}(1+2x^2y),$$

所以　$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,3)}=8\mathrm{e}^{24}(1+24)=200\mathrm{e}^{24}$.

注意　解法 1 较解法 2 简便。一般求二阶混合偏导时,可以在对 x 求出一阶偏导数后将 x 的值代入,再对 y 求偏导后,再代入 y 的值,但不能先将 y 的值代入,再对 x 求偏导,因为后面还要对 y 求偏导。若是求 x 或 y 的二阶偏导在某点的值,求一阶偏导前就可以将 y 或 x 的值代入,再求偏导数.

题型三　计算复合函数的偏导数

计算抽象复合函数的偏导数,不是将中间变量 u,v 直接代入算式 $z=f(u,v)$ 成为 $z=F(x,y)$,再对 x,y 求偏导数,不能这样计算的原因或是代入困难,或是根本无法代入。一般的计算方法是主动地引入中间变量,把抽象复合函数分解成复合函数形式后利用下述链锁法则,再求其导数.

定理 2.4.1.3(链锁法则)　设 $z=f(u,v)$,$u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$,且 f,φ,ψ 的偏导数均连续,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 的偏导数也连续,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}。\tag{2.4.1.1}$$

从历年的考题情况看，上述定理总是满足的，考生的任务就是熟悉链锁法则以及在什么情况下使用该法则，在什么情况下主动地引入中间变量应用该法则.

为正确写出二元复合函数求偏导数的链锁法则中的各项，可先将变量间的复合关系作出其结构图(见图 2.4.1.1)，然后据图写出链锁法则中的各项.从图中易看出因变量 z 对一自变量的偏导数，等于 z 关于每一个中间变量的偏导数分别乘以这些中间变量关于该自变量的偏导数，然后相加.

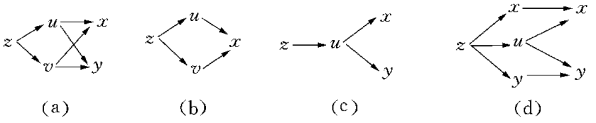


图 2.4.1.1

上面介绍的链锁法则是关于两个中间变量两个自变量的情形，下面再介绍其他几种常见情形.

1° 两个中间变量，一个自变量的情形。由函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$ 构成的复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$，函数复合条件同定理 2.4.1.3 中的一样，其复合关系如图 2.4.1.1(b)所示，因自变量只有一个 x，z 对 x 的导数称为全导数，由图 2.4.1.1(b)易写出其公式为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}。\tag{2.4.1.2}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 都是一元函数的导数(这里要注意何时用偏 ∂，何时用 d)。

2° 一个中间变量，两个自变量的情形。由函数 $z=f(u)$，$u=\varphi(x,y)$ 构成的复合函数 $z=f[\varphi(x,y)]$，函数复合条件同定理 2.4.1.3 中一样，其复合关系如图 2.4.1.1(c)所示，借助于图 2.4.1.1(c)易写出链锁法则为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{2.4.1.3}$$

3° 三个中间变量，两个自变量，其中两个中间变量又是自变量的情形.由函数 $z=f(x,y,u)$，$u=\varphi(x,y)$ 这里 x，y 既是中间变量，又是自变量.函数 $z=f[x,y,\varphi(x,y)]$ 的复合关系，如图 2.4.1.1(d)所示，由该图易写出其偏导数公式为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{2.4.1.4}$$

值得注意的是，上式两端的$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$具有不同的含义。左端的$\frac{\partial z}{\partial x}$是把另一个变量$y$看作常数对自变量$x$求导，因而$f$中的$x$与$u$中的$x$都变。而$\frac{\partial f}{\partial x}$是把$z=f(x,y,u)$中的中间变量$y,u$看作常数对中间变量$x$求偏导数，即视$u$为常数，从而$u$中的$x$不变.

同样，$\frac{\partial z}{\partial y}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$也具有上面所解释的那样不同的含义.

由上述法则及求导公式易看出，求复合函数对自变量的偏导数时必经过所有的中间变量，而最后到达自变量，有几条分线(通道)，该导数就有几项相加，每条分线有几条线段，该加项就有几个因子相乘，即遵循“分线相加，连线相乘”的法则.

例 7(条件充分性判断)　$z=f(u,v)$且f,u,v的偏导数都连续，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(1) $u=\mathrm{e}^{xy}$；　　(2) $v=x^2-y^2$.

解　当条件(1)与条件(2)同时成立时，将$u=\mathrm{e}^{xy},v=x^2-y^2$代入$z=f(u,v)$中得到$z=f(\mathrm{e}^{xy},x^2-y^2)$，则由式(2.4.1.1)得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}y\mathrm{e}^{xy}+\frac{\partial f}{\partial v}2x=y\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

因而条件(1)与条件(2)联合起来充分.仅 C 入选.

例 8　设二元函数$y=f[x^2,\varphi(x,y)]$，且y与$\varphi(x,y)$具有连续的偏导数，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$

(A) $\frac{2xf'_{x^2}}{1-f'_{\varphi}\varphi'_y}$.　　(B) $\frac{f'_{\varphi}+2xf'_{x^2}}{1-f'_{\varphi}\varphi'_y}$.　　(C) $f'_{\varphi}\varphi'_x+2xf'_{x^2}$.

(D) $\frac{f'_{\varphi}\varphi'_x+f'_{x^2}}{1-f'_{\varphi}\varphi'_y}$.　　(E) $\frac{f'_{\varphi}\varphi'_x+2xf'_{x^2}}{1-f'_{\varphi}\varphi'_y}$.

解　作$y=f[x^2,\varphi(x,y)]$的复合函数关系图(见图 2.4.1.2)，则由链锁法则得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]$$

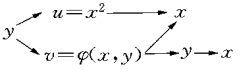


图 2.4.1.2

$$=f'_{x^2}\cdot 2x+f'_{\varphi}\left(\varphi'_x+\varphi'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

解得 $$(1-f'_{\varphi}\varphi'_y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'_{\varphi}\varphi'_x+2xf'_{x^2},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'_{\varphi}\varphi'_x+2xf'_{x^2}}{1-f'_{\varphi}\varphi'_y}$$。**仅**(E)**入选**。

例 9 **设** $z=f(x,y,u)=xy+xF(u)$,**其中** F **有连续的偏导数,且** $u=\frac{y}{x}$,**则** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

(A) $xz+y$. (B) $yz+x$. (C) $x+y+z$.

(D) $xy+z$. (E) **以上结论都不正确**.

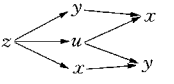


图 2.4.1.3

解 **作出复合函数** z **的结构图形如图** 2.4.1.3 **所示.**

z **有三个中间变量** x,y,u,**其中** x,y **既是中间变量,又是自变量,**$u=y/x$ **为** x,y **的函数,由式**(2.4.1.4)**得到**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=[y+F(u)]+x\frac{\partial F}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=y+F(u)-\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+x\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\frac{\partial F}{\partial u}\frac{1}{x}=x+\frac{\partial F}{\partial u},$$

故 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[y+F(u)-\frac{y}{x}\frac{\partial F}{\partial u}\right]+y\left(x+\frac{\partial F}{\partial u}\right)=2xy+xF(u)$$

$$=xy+[xy+xF(u)]=xy+z.$$ **仅**(D)**入选.**

例 10(**条件充分性判断**) $f(u,v)=x^2+10xy+y^2$,**且** $f'_x=6x$, $f'_y=-4y$.

(1) $u=x+y$; (2) $v=x-y$.

解 **先求出** $f(x,y)$**的表示式.条件**(1)**与条件**(2)**同时成立时,有**

$$x=(u+v)/2,\quad y=(u-v)/2,$$

则 $$f(u,v)=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+10\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

$$=\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{5}{2}(u^2-v^2)=3u^2-2v^2,$$

即 $f(x,y)=3x^2-2y^2$. **因而** $f'_x=6x$, $f'_y=-4y$,**于是条件**(1)**与条件**(2)**联合相起来充分。仅** C **入选.**

例 11[2001 **年** Ⅱ 29] **设** $z=xf(x+y)+yg(x+y)$, f **和** g **有二阶连续**

导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 在$z=xf(x+y)+yg(x+y)$两边分别对x,y求导数，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf'+yg',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'+f'+xf''+yg''=2f'+xf''+yg'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'+xf''+g'+yg'',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'+g+yg',\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf''+g'+g'+yg''=xf''+2g'+yg'',$$

故
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$
$$=2f'+xf''+yg''+2g'+xf''+yg''-2f'-2g'-2xf''-2yg''=0。$$

注意 例11中的f',g',f''及g''不可以带下标，写成f'_x,f'_y等是错误的.这是因为这里f',f''表示对中间变量$u=x+y$求一阶导数、二阶导数，对中间变量$u=x+y$来说f是一元函数。对g',g''也应同样理解.

例12 设$z=f(x,x/y)$具有连续二阶偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设$u=x,v=x/y$，则$z=f(u,v)$，其结构图如图2.4.1.4所示，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_u+(1/y)f'_v,$$

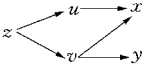


图2.4.1.4

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2}f'_v。$$

题型四 求带绝对值的函数的偏导数

对含绝对值的函数求导数或偏导数，需先脱掉绝对值符号，化成分段函数然后再求。对分段点处是否存在导数，存在的话其值等于什么，都需用导数定义来讨论.

例13[2001年Ⅰ29] 设$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，求$\frac{\partial f}{\partial x}$.

解 (1) 当$x>0$时，$f(x,y)=\sqrt{x|y|}$，则$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sqrt{|y|}}{2\sqrt{x}}$。

(2) 当$x<0$时，$f(x,y)=\sqrt{(-x)|y|}=\sqrt{|y|}\sqrt{-x}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(\sqrt{|y|}\sqrt{-x})}{\partial x}=\sqrt{y}\frac{\partial\sqrt{-x}}{\partial x}=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{-x}}(-x)'_x=-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{-x}}.$$

(3) **当** $x=0,y\neq 0$ **时,则**

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot y|}}{\Delta x}$$

$$=\sqrt{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x},$$

当 $\Delta x>0$ **时,有** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=1$。

当 $\Delta x<0$ **时,有** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^1}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$。**故** $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}$ **不存在.**

(4) **当** $x=0,y=0$ **时,则**

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|0+\Delta x|0}-\sqrt{0\cdot 0}}{\Delta x}=0.$$

例 14[2001 **年** Ⅰ 18] **设** $f(x,y)=|x-a|+|y-b|(a>0,b>0)$,**则** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$**为**

(A) ∞. (B) 1. (C) 0. (D) **不存在,非**∞.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

当 $\Delta x>0$ **时,** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$;

当 $\Delta x<0$ **时,** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$.

因 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$**不存在,但非**$\infty$,**故** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$**不存在,但非**$\infty$.**仅**(D)**入选.**

习 题 2.4.1

(一) 问题求解

1.[2004 **年** Ⅱ 6] **设三元函数** $w(x,y,z)=x^{yz}(x>0)$,**则** $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}-z\dfrac{\partial w}{\partial z}=$

(A) xzw. (B) $-xzw$. (C) yzw.

(D) $-yzw$. (E) **以上结论都不正确**.

2. 设 $f(x+y,x-y)=3x^2+2y^2-4xy$,则 $f(x,y)$的二阶混合偏导$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

=

(A) 4. (B) 1. (C) 1/2. (D) $-1/2$. (E) -1.

3. 设 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,且 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2+2xy$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$分别为

(A) $2(x+y),2(x-y)$. (B) $x+y,x-y$.

(C) $2x,-2y$. (D) $x-y,x+y$. (E) $2y,2x$.

4. [2002 年Ⅰ14] 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$则$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$为

(A) ∞. (B) 1. (C) 0. (D) **不存在,非**∞.

(二) 条件充分性判断

1. 对函数 $f(x,y)$总有$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

(1) $f(x,y)$存在二阶偏导数; (2) $f(x,y)$存在二阶连续偏导数。

2. 设 $z=f(u)$,其中函数 f 可导,有 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

(1) $u=x^2+y^2$; (2) $u=\ln(x^2+y^2)$.

3. 函数 $u(x,y)=\dfrac{x}{f^{\alpha}(x^2-y^2)}$满足方程$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{x^2}$。

(1) α 为任意实数; (2) α 为正整数。

4. 设 $y=y(x)$由方程 $y=f(x^2+y^2)+f(x+y)$所确定,且 $y(0)=2$,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{7}.$$

(1) $f(u)$是可导函数,$f'(2)=1/2$; (2) $f(u)$是可导函数,$f'(4)=1$。

5. $f(x-y,xy)=kxy(ax^2+y^2)$,则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x$.

(1) $k=-1,a=1$; (2) $k=1,a=1$.

6. $u''_{xx}\big|_{(1,1)}=4$,其中 $u=\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}tf(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}t$,$f$ 有连续的导数.

(1) $f(2)=2,f'(2)=1$; (2) $f(2)=3,f'(2)=1/2$.

7. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(1) $z=f(x^2+y^2)$，f 有连续的偏导数；

(2) $z=f(x+y)$，f 有连续的偏导数.

(三) 解答题

1. [2002 年 Ⅱ 23] 已知 $f(x,y)=\ln\left(y+\dfrac{x^2}{3y}\right)$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)}=$_____.

2. 已知 $z=(x-2)^2y^2+(y-1)\sqrt{x/y}$，求 $z''_{xx}(2,1)$，$z''_{yy}(0,1)$.

3. 设 $z=f(x,x/y)$，f 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z=u^v$，$u=3x^2+y^2$，$v=xy$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5. [2002 年 Ⅱ 29] 若 $z=xf(x+y)+yg(x-y)$，f 和 g 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2.4.2 二元函数极值的判定与求法

1. 二元函数极值的概念

定义 2.4.2.1 (二元函数极值定义) 在函数 $z=f(x,y)$ 有定义的点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内，若有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0) \quad \text{或} \quad f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0),$$

其中 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，则称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极大值或极小值. 点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的极大值点或极小值点.

函数的极大值与极小值统称为极值，使函数取得极值的点称为极值点.

定理 2.4.2.1(极值存在的必要条件) 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处存在偏导数，且点 $P_0(x_0,y_0)$ 是极值点，则

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

如果 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的驻点。对于驻点，与一元函数一样，也要注意以下两点：

1° 二元函数 $f(x,y)$ 的极值点不一定是驻点，因偏导数不存在的点，也可能是二元函数的极值点。例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$(圆锥面)，原点 $O(0,0)$ 显然是

其极小值点，但 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在其顶点 $O(0,0)$ 处是尖点，两个偏导数都不存在。这是因为 $z'_x(0,0)$ 是 $z(x,0)=\sqrt{x^2+0}=\sqrt{x^2}=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数，而 $z=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导. 同理 $z'_y(0,0)$ 也不存在.

2° 驻点也不一定是极值点，例如 $z=xy$（马鞍面）的两个偏导数 $z'_x=y$，$z'_y=x$ 在原点 $O(0,0)$ 处均存在，且等于 0，即点 $O(0,0)$ 是驻点，但 $z(0,0)=0$ 不是它的极值，因为 $z=xy$ 当 (x,y) 在第一、第二象限时 $z>0$，而在第三、第四象限时 $z<0$.

这表明驻点的存在是偏导数连续的函数存在极值的必要条件，但非充分条件.

2. 二元函数极值的判定

定理 2.4.2.2（极值存在的充分条件） 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续，存在二阶连续偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，即点 (x_0,y_0) 是它的驻点，令

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0).$$

(1) 若 $B^2-AC<0$，且 $A<0$（或 $C<0$），则点 $P_0(x_0,y_0)$ 是极大值点，即 $f(x_0,y_0)$ 是它的一个极大值；

若 $B^2-AC<0$ 且 $A>0$（或 $C>0$），则点 $P_0(x_0,y_0)$ 是极小值点，即 $f(x_0,y_0)$ 是它的一个极小值；

(2) 若 $B^2-AC>0$，则点 $P_0(x_0,y_0)$ 不是极值点；

(3) 若 $B^2-AC=0$，此法不能判定点 $P_0(x_0,y_0)$ 是否为极值点，需应用其他方法.

3. 常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一 判别二元函数的极值

法一 利用二元函数的极值的定义即定义 2.4.2.1 判别之。

例 1 设函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则结论成立的是

(A) 原点(0,0)为该函数的驻点，但非极值点.

(B) 原点(0,0)为该函数的驻点，且为极小值点.

(C) 原点(0,0)为该函数的驻点，且为极大值点.

(D) 原点(0,0)不是该函数的驻点，故不是极值点.

(E) 原点(0,0)是该函数的极小值点.

解 因为函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点(0,0)处的偏导数 $z'_x(0,0)$，$z'_y(0,0)$

不存在，故点$(0,0)$不是函数z的驻点，但由$z(0,0)=0$且$z(x,y)>0,(x,y)\neq(0,0)$，可知在点$(0,0)$的邻域内有$z(x,y)\geqslant f(0,0)$。由定义2.4.2.1知，点$(0,0)$为函数z的极小值点，亦是最小值点。仅(E)入选.

例2(条件充分性判断)　$z=z(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处取得极小值.

(1) $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=0$.

(2) 在P_0的一个邻域内恒有$z(x,y)>z(x_0,y_0)$。

解　当条件(1)成立时，只说明点$P_0(x_0,y_0)$为$z=z(x,y)$的一个驻点，但驻点是可能的极值点，不一定为$z=z(x,y)$的极值点。条件(1)不充分.

当条件(2)成立时，根据定义2.4.2.1知，点$P_0(x_0,y_0)$为$z=z(x,y)$的一个极小值点，即$z=z(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处取得极值. 条件(2)充分. 仅B入选.

法二　使用充分条件即定理2.4.2.2判别之。

用定理2.4.2.2判别二元函数$z=f(x,y)$的极值可按下述步骤进行：

1° 令$z'_x=0,z'_y=0$，解得可能取的极值点；

2° 根据函数极值存在的充分条件即定理2.4.2.2判别所求得的驻点是否为极值点.

例3[2003年Ⅰ6](条件充分性判断)　$z=2x^2+y^2-xy+7y+a$的极小值为-6。

(1) $a=8$；　　(2) $a=-8$.

解　由$\begin{cases}z'_x=4x-y=0,\\ z'_y=2y-x+7=0\end{cases}$可得函数$z$的驻点为$x=-1,y=-4$，再判断点$(-1,-4)$是否是极小值点。由

$$z''_{xx}=4,\quad z''_{xy}=-1,\quad z''_{yy}=2$$

知
$$A=z''_{xx}(-1,-4)=4>0,\quad B=z''_{xy}(-1,-4)=-1,$$
$$C=z''_{yy}(-1,-4)=2,\quad B^2-AC=-7<0.$$

由定理2.4.2.2可知点$(-1,-4)$为函数z的极小值点。又z的极小值为-6，故

$$z(-1,-4)=2+16-4-28+a=-6,$$

由此可知$a=8$。条件(1)是充分的，而条件(2)不充分。仅A入选.

例4(条件充分性判断)　函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取得极值.

(1) (x_0,y_0)是$f(x,y)$的驻点；

(2) $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$且满足$B^2-AC<$

0.

解　从表面看，似乎应 C 入选，原因是一方面(x_0,y_0)是驻点，另一方面A,B,C的关系又满足判别式所要求的关系。但这里容易忽略的一点是，判别法中要求在(x_0,y_0)处的二阶偏导数连续，而条件(1)、(2)中都不含连续性。仅 E 入选.

例 5　函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极大值为

(A) **不存在.**　(B) $e/2$.　(C) $2e^2$.　(D) e.　(E) $-e/2$.

解　先求函数的驻点，由

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}=0, \\ f'_y(x,y)=2(y+1)e^{2x}=0, \end{cases}$$

可得 $f(x,y)$的惟一驻点为 $x=1/2,y=-1$.

再判别点$(1/2,-1)$是否是极值点，是极大值点还是极小值点。由

$$A=f''_{xx}(1/2,-1)=[4e^{2x}(x+y^2+2y)+4e^{2x}]\Big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e,$$

$$B=f''_{xy}(1/2,-1)=4e^{2x}\Big|_{(\frac{1}{2},-1)}=0,$$

$$C=f''_{yy}(1/2,-1)=2e^{2x}\Big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e,$$

$$B^2-AC=-4e^2<0,\text{且 } A=2e>0,$$

可知点$(1/2,-1)$是函数 $f(x,y)$的极小值点，故函数 $f(x,y)$不存在极大值。仅(A)入选.

例 6(条件充分性判断)　函数 $z=3axy-x^3-y^3$ 在点(a,a)取得极大值.

(1) $a<0$;　　(2) $a>0$.

解　由 $z=3axy-x^3-y^3$ 得到

$$z'_x=3ay-3x^2=0,\quad z'_y=3ax-3y^2=0。$$

当 $x=a,y=a$ 时，有 $z'_x(a,a)=0,z'_y(a,a)=0$. 又

$$A=z''_{xx}(a,a)=-6a,\quad B=z''_{xy}(a,a)=3a,$$

$$C=z''_{yy}=-6a,\quad B^2-AC=9a^2-36a^2=-27a^2<0.$$

由极值的判别条件即定理 2.4.2.2 知，当 $A<0$ 即 $a>0$ 时，点(a,a)为极大值点。条件(1)不充分，条件(2)充分。仅 B 入选.

法三　用配方法判别之。

例 7(条件充分性判断)　要使 $x+y$ 的最大值为 2.

(1) **实数 x,y 满足 $x^2+6xy+9y^2+x+y+2=0$;**

(2) **实数 x,y 满足 $x^2+6xy+9y^2+2x+2y-4=0$.**

解 当条件(1)成立时，有 $x+y=-2-(x+3y)^2\leqslant -2$，因而 $x+y$ 的最大值为 -2，条件(1)不充分. 当条件(2)成立时，有

$$2(x+y)=4-(x+3y)^2\leqslant 4,\quad \text{即}\quad x+y\leqslant 2,$$

故 $x+y$ 的最大值为 2，条件(2)充分。仅 B 入选.

此时有 $x+3y=0, x+y=2$，解得 $x=3, y=-1$，它们满足

$$x^2+6xy+9y^2+2x+2y-4=0.$$

题型二 求二元函数的极值

常用的求法有两个，一是根据定义求之，二是利用极值存在的充分条件即定理 2.4.2.2 求之.

例 8 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ 极小值=

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

解 $z'_x=2x, z'_y=2y$，令 $z'_x=z'_y=0$ 得其驻点为 $(x_0,y_0)=(0,0)$. 当 (x,y) 在点 $(0,0)$ 的邻域内变化时，即当 x,y 不同时为零时，总有 $f(x,y)>f(0,0)=f(x_0,y_0)=0$. 由定义 2.4.2.1 知，点 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 是极小值点，$f(0,0)=0$ 为极小值(也是 $f(x,y)$ 的最小值)。仅(A)入选.

例 9 计算下列函数的极值：

(1) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$； (2) $z=xy+1/x+1/y$.

解 (1) 令 $\begin{cases} z'_x=2x-y+9=0, \\ z'_y=-x+2y-6=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-4, \\ y=1. \end{cases}$

又 $$A=z''_{xx}=2>0,\quad B=z''_{xy}=-1,\quad C=z''_{yy}=2,$$

$$B^2-AC=(z''_{xy})^2-z''_{xx}z''_{yy}=1-4=-3<0,$$

由定理 2.4.2.2 知该点为极小值点，且极小值为 $z(-4,1)=-1$.

(2) 令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\dfrac{1}{x^2}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{1}{y^2}=0, \end{cases}$ 得 $x=y=1$。

又 $$z''_{xx}=2/x^3,\quad z''_{xy}=1,\quad z''_{yy}=2/y^3,$$

$$B^2-AC=[(z''_{xy})^2-z''_{xx}z''_{yy}]\Big|_{x=1,y=1}=1-4=-3<0,\quad z''_{xx}(1,1)=2>0,$$

由定理 2.4.2.2 知 $x=1, y=1$ 为极小值点，且极小值为 $z(1,1)=3$.

例 10 已知 $f(1,2)$ 为函数 $f(x,y)=ax^2-bxy+ay^2+c\ln x-d\ln y$ 的极值，则 a,b,c,d 分别取值为

(A) 1,1,4,10. (B) $-1,-1,-4,-10$. (C) $-1,1,4,-10$.

(D) $1,-1,-4,10$. (E) $1,1,-4,-10$.

解 因 $f(1,2)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值，而 $f(x,y)$ 的偏导数存在，故 $x=1, y$

$=2$ 为 $f(x,y)$的驻点. 因而有

$$f'_x(1,2)=2ax+c/x-by\Big|_{(1,2)}=2a-2b+c=0;$$

$$f'_y(1,2)=(-bx+2ax-d/y)\Big|_{(1,2)}=-b+4a-d/2=0。$$

经检验,(C)、(D)中的四个数学点符合上述两等式.

又因 $f''_{xx}(1,2)=2a-c$, $f''_{xy}(1,2)=-b$, $f''_{yy}(1,2)=2a+d/4$,

故

$$\begin{aligned}B^2-AC&=[f''_{xx}(1,2)]^2-f''_{xx}(1,2)f''_{yy}(1,2)\\&=b^2-4a^2+2ac-ad/2+cd/4.\end{aligned}$$

仅当取(D)中四个数即 $a=1,b=-1,c=-4,d=10$ 才满足 $B^2-AC<0$,且有 $f''_{xx}(1,2)>0$。仅(D)入选.

题型三　求简单的实际问题的最大值、最小值

实际问题中的二元函数的最大值、最小值的判别方法与一元函数相同.

如由实际问题能确定最大(小)值在这域内部存在而驻点惟一,又没有偏导数不存在的点,则此驻点必为最大(小)值点.

二元函数的驻点惟一,又证明了该驻点为极大(小)值点,则该驻点必为该函数的最大(小)值点.

实际应用问题中的二元函数极值常分两类。如果求二元函数 $f(x,y)$的极值(最值)仅仅要求自变量(x,y)在某区域内,即求函数 $f(x,y)$在其定义域 D 上的极值,这类极值称为二元函数的无条件极值.

如果求二元函数 $f(x,y)$的极值(最值)还要求满足某个约束条件 $\varphi(x,y)=0$,这类极值称为二元函数的条件极值. 常将二元函数的条件极值转化为无条件极值求之. 这时常由 $\varphi(x,y)=0$ 解出 $y=y(x)$代入 $z=z(x,y)$中将其转化为一元函数的极值问题或二元函数无条件极值问题解之. 当从条件 $\varphi(x,y)=0$ 解出 y 较困难时,此法就不适用。这时就用拉格朗日乘数法求之。

该法的解题步骤是:

1° 先作辅助函数(称为拉格朗日函数)

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 是待定常数,称为拉格朗日乘数。在这里它起桥梁作用,并不一定要求出其值。

2° 求可能极值点。为此求偏导数,并解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\[2ex]\varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

一般情况下，消去 λ，解出 x,y，则点 (x,y) 就是可能的极值点。

3° 判定可能极值点是否为极值点。对应用问题一般根据问题的实际意义判定。

例 11 [2000 年 Ⅱ 32] 某工厂生产两种产品，产量分别为 x 和 y，总成本为 $C=800+34x+70y$，总收入为 $R=134x+150y-2x^2-2xy-y^2$，问在限定两种产量之和为 30 的条件下该厂生产两种产品各为多少时能使取得的利润最大？

解法 1 显然所求利润最大值是在条件 $x+y=30$ 约束下的最大值，由此约束条件可求出变量 x 与 y 之间的简单关系 $y=30-x$，将其代入利润函数中可化为一元函数的最值问题而求之.

设利润函数为 $L(x,y)$，将 $y=30-x$ 代入 L 中得到

$$\begin{aligned}L(x,y)&=R-C=134x+150y-2x^2-2xy-y^2-(800+34x+70y)\\&=134x+150(30-x)-2x^2-2x(30-x)-(30-x)^2\\&=-x^2+20x+700=-(x-2\times10x+100)+800\\&=-(x-10)^2+800。\end{aligned}$$

显然当 $x=10$，因而 $y=30-x=20$ 时，$L(x,y)$ 取最大值，最大值为 800.

解法 2 本例所求的利润最大问题为条件极值问题。可用拉格朗日乘数法解之。为此，先作出拉格朗日函数

$$\begin{aligned}F(x,y)&=L(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=R-C+\lambda(x+y-30)\\&=134x+150y-2x^2-2xy-y^2\\&\quad-(800+34x+70y)+\lambda(x+y-30),\end{aligned}$$

然后求出偏导数，并解下列方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=134-4x-2y-34+\lambda=100-4x-2y+\lambda=0, & ①\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}=150-2x-2y-70+\lambda=80-2x-2y+\lambda=0, & ②\\[2ex]\varphi(x,y)=x+y-30=0。 & ③\end{cases}$$

②－①得到 $x=10$，将其代入式③得到 $y=20$。于是拉格朗日函数的惟一驻点即可能的极值点为 $(10,20)$。

由此问题的实际意义知，显然利润函数 $L(x,y)$ 有最大值，故 $F(x,y)$ 的惟一驻点 $x=10,y=20$ 就是使 $L(x,y)$ 取得最大值的最大值点。

例 12 某厂家生产一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 P_1 和

P_2，销售量分别为 Q_1 和 Q_2，需求函数分别为

$$Q_1=24-0.2P_1,\quad Q_2=10-0.05P_2,$$

总成本函数为

$$C=35+40(Q_1+Q_2).$$

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

解法 1 总收入函数为

$$R=P_1Q_1+P_2Q_2=24P_1-0.2P_1^2+10P_2-0.05P_2^2.$$

总利润函数为

$$\begin{aligned}L&=R-C=(P_1Q_1+P_2Q_2)-[35+40(Q_1+Q_2)]\\&=32P_1-0.2P_1^2+12P_2-0.05P_2^2-1395.\end{aligned}$$

这是个无条件极值问题，由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial P_1}=32-0.4P_1=0,\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial P_2}=12-0.1P_2=0,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}P_1=80,\\P_2=120.\end{cases}$$

将$(P_1,P_2)=(80,120)$代入$\dfrac{\partial^2 L}{\partial P_1\partial P_2},\dfrac{\partial^2 L}{\partial P_1^2},\dfrac{\partial^2 L}{\partial P_2^2}$得到

$$B=\frac{\partial^2 L}{\partial P_1\partial P_2}=0,\quad A=\frac{\partial^2 L}{\partial P_1^2}=-0.4,\quad C=\frac{\partial^2 L}{\partial P_2^2}=-0.1,$$

则 $B^2-AC=-(-0.4)\times(-0.1)=-0.04<0$，且 $A=\dfrac{\partial^2 L}{\partial P_1^2}<0$。

由极值的充分条件即定理 2.4.2.2 知，点$(80,120)$为极大值点，即为最大值点，厂家此时能得总利润最大，其利润为 $L\Big|_{P_1=80,P_2=120}=605.$

解法 2 因 C 是以 Q_1,Q_2 为未知变元的函数，将利润 L 表示为以 Q_1,Q_2 为未知变元而求之，由题设易得

$$P_1=120-5Q_1,\quad Q_2=200-20Q_2,$$

则
$$\begin{aligned}R&=P_1Q_1+P_2Q_2=(120-5Q_1)Q_1+(200-20Q_2)Q_2,\\L&=R-C=80Q_1-5Q_1^2+160Q_2-20Q_2^2-35.\end{aligned}\qquad①$$

令 $$L'_{Q_1}=80-10Q_1=0,\quad L'_{Q_2}=160-40Q_2=0,$$

解得 $$Q_1=8,\quad Q_2=4.$$

又 $$L''_{Q_1Q_2}=0,\quad L''_{Q_1Q_1}=-10<0,\quad L''_{Q_2Q_2}=-40<0。$$

所以$B^2-AC=L''^2_{Q_1Q_2}-L''_{Q_1Q_1}\cdot L''_{Q_2Q_2}=-400<0,\quad A=L''_{Q_1Q_1}<0。$

由定理 2.4.2.2 即知 $Q_1=8,Q_2=4$ 为 L 的极大值点，又驻点惟一也是 L

的最大值点。代入式①可得最大利润为 605，因而公司在

$$Q_1=120-5Q_1=120-40=80,\quad P_2=200-20Q_2=200-20\times4=120$$

时可取得最大利润 605.

例 13 设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量，若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中 α,β 为正常数，且 $\alpha+\beta=1$，假设两种要素的价格分别为 P_1 和 P_2. 试问当产出量为 12 时两要素投入多少可以使得投入总费用最小？

解 由题设知投入总费用为 $f(x_1,x_2)=P_1x_1+P_2x_2$. 下求 $f(x_1,x_2)$ 的最小值。由题设有 $2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}=12$，即

$$x_1^{\alpha}x_2^{\beta}=6, \tag{①}$$

且

$$\alpha+\beta=1, \tag{②}$$

可利用这两个条件将求二元函数 $f(x_1,x_2)$ 的最值问题化为求一元函数的最值问题.

由式①与式②得到

$$x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6,\quad x_1=6^{1/\alpha}x_2^{1-1/\alpha},$$

则

$$f=P_1x_1+P_2x_2=P_16^{1/\alpha}x_2^{1-1/\alpha}+x_2P_2。$$

在上式对 x_2 求导得到

$$f'_{x_2}=P6^{1/\alpha}(1-1/\alpha)x_2^{-1/\alpha}+P_2,$$

令 $f'_{x_2}=0$，易解得

$$x_2^{1/\alpha}=6^{1/\alpha}\frac{P_1}{P_2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right),\quad \text{即}\quad x_2=6\left(\frac{P_1\beta}{P_2\alpha}\right)^{\alpha}。 \tag{③}$$

又因

$$\begin{aligned}f''_{x_2}&=-P(1/\alpha)6^{1/\alpha}(1-1/\alpha)x_2^{-1/\alpha-1}\\&=P(1/\alpha)6^{1/\alpha}(\beta/\alpha)x^{-1/\alpha-1}>0,\end{aligned}$$

故 $x_2=6[P_1\beta/(P_2\alpha)]^{\alpha}$ 为 f 的极小值点. 由于驻点惟一，也是 f 的最小值点.

将③式代入①式易求得 $x_1=6[P_2\alpha/(P_1\beta)]^{\beta}$.

因该实际问题存在最小值，故当

$$x_1=6[P_2\alpha/(P_1\beta)]^{\beta},\quad x_2=6[P_1\beta/(P_2\alpha)]^{\alpha}$$

时可以使得投入总费用最小.

习 题 2.4.2

（一）问题求解

1.[2003 年Ⅰ24] 某产品的产量 Q 与原材料 A,B,C 的数量 x,y,z(单位均为吨)满足 $Q=0.05xyz$,已知 A,B,C 每吨的价格分别是 3,2,4(百元),若用 540 元购买 A,B,C 三种原材料,则使产量最大的 A,B,C 的采购量分别为

(A) 6,9,4.5(吨). (B) 2,4,8(吨). (C) 2,3,6(吨).

(D) 2,2,2(吨). (E) 以上结论都不正确.

2. 设 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$,则下述结论中不正确的是

(A) 点(2,2)是 $f(x,y)$ 的驻点. (B) 点(2,2)不是极值点.

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的驻点. (D) 点(0,0)是极值点.

(E) 点(0,0)是极小值点.

3. 二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点是

(A) (1,0). (B) (1,2). (C) (−3,0).

(D) (−3,2). (E) 以上结论都不正确.

4. $z=x^2+y^2$ 在约束条件 $x+y=3$ 下的最小值是

(A) 9/2. (B) 9. (C) 0. (D) 3. (E) 1/2.

(二) 条件充分性判断

1. $z=z(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点取极大值.

(1) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=0,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=0$;

(2) $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\Big|_{P_0}-\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}<0$,且 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}<0$.

2. $z=y^3-x^2+6x-12y+a$ 的极大值为 30.

(1) $a=5$; (2) $a=4$.

3. 函数 $f(x,y)=xy-x^2-y^2+x-2y$ 在点 (a,b) 处取得最大值.

(1) 当常数满足 $2a-b=2$ 时; (2) 当常数满足 $a-2b=1$ 时.

4. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的某邻域内有一阶和二阶连续偏导数,点 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的极值点.

(1) $f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$;

(2) $[f''_{xy}(x_0,y_0)]^2-f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)<0$.

5. $z=y^2\ln x+a(x+y)+b(x-y)$ 在点 $(e,1)$ 处取得极值.

(1) $a=-1-1/(2e),b=1-1/(2e)$; (2) $a=-1,b=1$.

(三) 解答题

1. 求下列函数的极值：

(1) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$；　　(2) $z=x^3+y^3-3(x^2+y^2)$；

(3) $z=x^3+y^3-3xy$.

2. 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下的经验公式：

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2。$$

(1) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

第3篇　线性代数

*3.1　行　列　式

（一）考试内容

n 阶行列式定义，行列式性质，代数余子式，克莱姆法则。

（二）考试要求

理解 n 阶行列式定义，熟练掌握行列式性质，并能灵活运用行列式性质计算或化简行列式；理解并掌握代数余子式的概念，会求行列式中元素的代数余子式；熟练掌握行列式按一行（一列）展开的方法，会用克莱姆法则解简单的未知数个数等于方程个数的非齐次线性方程组。

3.1.1　行列式计算

1. 行列式的递归定义

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m} \end{vmatrix}$$

表示一个数，它是由不同行（横为行）不同列（竖为列）的 n 个元素乘积的代数和。

$n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$。

$n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$。

$n=3$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}。 \quad (3.1.1.1)$$

一般地，n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}。$$

2. 行列式性质

行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$ 的行、列互换所得的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$ 称为 D 的转置行列式，用符号 D^{T} 或 D' 表示。显然 D

与 D^{T} 是互为转置的。为方便计，n 阶行列式 D 简记作 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

此性质表明了行列式中行与列的地位是对称的，也就是说行列式中有关行的性质对列也同样成立。当然对列的有关性质对行也成立。下面仅叙述有关行的性质。

为方便起见，以 r_i 表示行列式（或矩阵）的第 i 行，以 c_i 表示行列式（或矩阵）的第 i 列，k 为常数，有

（1）交换第 i，j 两行（列）记作 $r_i\leftrightarrow r_j$（$c_i\leftrightarrow c_j$）；

（2）第 i 行（列）乘以 k 记作 $r_i(k)$[$c_i(k)$]；

（3）k 乘第 i 行（列）加到第 j 行（列）记作 r_j+kr_i（c_j+kc_i）.

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式变号。

特别地，如果行列式中有两行（列）相同，则行列式等于零；如果行列式有两行（列）成比例，则行列式等于零。

性质 3 行列式有一行（列）有公因式，该公因式可提到行列式外面。

特别地，若行列式有某行（列）元素全为零，则行列式的值等于零。

性质 4 如果行列式有某行（列）的所有元素均为两数的和，即该行（列）有两个分行（列），则这个行列式等于两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个分行（列）为该行（列），其他行与原行列式分别相同。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$。

性质 5 行列式某行（列）的 k 倍加至另一行（列），行列式的值不变。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\xlongequal{r_2+kr_1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$。

3. 行列式按行（列）展开

定义 3.1.1.1 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列后得到的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

定理 3.1.1.1 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任一行（列），例如第 i 行（第 j 列）的所有元素与它们对应的代数余子式 A_{ik}（A_{kj}）（$k=1,2,\cdots,n$）的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

定理 3.1.1.2 n **阶行列式** $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ **中某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即**

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{sk}=a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s),$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kt}=a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t).$$

将定理 3.1.1.1 **和定理** 3.1.1.2 **合写为**

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{sk}=\begin{cases}D, & i=s,\\ 0, & i\neq s,\end{cases}\tag{3.1.1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kt}=\begin{cases}D, & j=t,\\ 0, & j\neq t.\end{cases}\tag{3.1.1.3}$$

4. 几个常用的计算行列式的公式

1° **上三角行列式、下三角行列式及对角行列式的值等于主对角线(由行列式左上角到右下角的对角线)上元素的乘积,即**

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\ddots&\cdots\\\cdots&\ddots&\ddots&0\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\ddots&\cdots\\\cdots&\ddots&\ddots&a_{n-1,n}\\0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\ddots&\cdots\\\cdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。\tag{3.1.1.4}$$

2° $$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\\cdots&\iddots&\iddots&0\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\iddots&\cdots\\a_{n1}&0&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\\cdots&\iddots&\iddots&a_{2n}\\0&a_{n-1,2}&\iddots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\\cdots&\iddots&\iddots&0\\0&a_{n-1,2}&\iddots&\cdots\\a_{n1}&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}。$$

(3.1.1.5)

注意　上面三种行列式不是上、下三角行列式和对角行列式，常称为副(次)对角线行列式。它们的值不但与副(次)对角线上的元素有关，且其符号与行列式的阶数 n 有关。

3° **准三角行列式(特殊的拉普拉斯展开式)，即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}。$$

(3.1.1.6)

即

$$\begin{vmatrix} A_{n\times n} & C_{n\times m} \\ O_{m\times n} & B_{m\times m} \end{vmatrix}=|A_{n\times n}||B_{m\times m}|=\begin{vmatrix} A_{n\times n} & O_{n\times m} \\ C_{m\times n} & B_{m\times m} \end{vmatrix},$$

其中　　$A=(a_{ij})_{n\times n}$，　$B=(b_{ij})_{m\times m}$。

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}。 \tag{3.1.1.7}$$

即 $$\begin{vmatrix} O_{n\times m} & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & C_{m\times n} \end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A_{n\times n}||B_{m\times m}|=\begin{vmatrix} C_{n\times m} & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O_{m\times n} \end{vmatrix},$$

其中 $$A_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n},\quad B_{m\times m}=(b_{ij})_{m\times m}。$$

4° **第 1 行、最后一行及第 1 列、最后一列的元素除交叉处的四个元素外其余元素全为零的 n 阶行列式，即**

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & & & & 0 \\ \cdots & & A & & \cdots \\ 0 & & & & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}=(ad-bc)|A|_{(n-2)\times(n-2)}。 \tag{3.1.1.8}$$

5° **爪型行列式，即**

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}=x_2x_3\cdots x_n\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right)。 \tag{3.1.1.9}$$

6° **范德蒙行列式。以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为行元素的 n 阶范德蒙行列式的算式为**

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)。 \tag{3.1.1.10}$$

以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为列元素的 n 阶范德蒙行列式的算式为

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)。\qquad(3.1.1.11)$$

要注意范德蒙行列式的结构特点：D_n（或 Δ_n）的每列（每行）都是某一个数的不同方幂，且自上而下（自左至右）幂次数由零连续递增至 $n-1$。这样的 n 行阶列式称为范德蒙行列式，它等于其第 2 行（列）元素中下标大的数减去下标小的数所有可能的差的连乘积，其中符号 $\prod_{i=1}x_i$ 表示 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相乘，即

$$\prod_{i=1}x_i=x_1x_2\cdots x_n.$$

题型一　利用行列式定义计算行列式

根据 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 的定义知道，它是一个数，该数是由不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和。为计算行列式，只需找出由不同行、不同列的 n 个非零元素乘积的代数和，或根据问题的需要找出由不同行、不同列的 n 个非零元素组成的且具有特殊性质的这样一些乘积项的代数和。

例 1[2000 年 Ⅱ 19]　设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & x & -1 & 1\\ 0 & -2 & x+1 & 1\\ -2 & 1 & -3 & 2\end{vmatrix}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}=$____。

解　根据行列式定义知 $f(x)$ 中含 x^2 的项只有一项，这就是不同行不同列的四个元素的乘积项 $1\times x(x+1)\times 2=2(x+1)x$。而含 x 的项虽然有几项，但其二阶导数都等于零。显然，不含 x 的各项均为常数，其导数也为零。因而由 $f(x)=2x^2+ax+b$（a,b 为常数）得

$$\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2(2x^2+ax+b)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(4x)}{\mathrm{d}x}=4。$$

题型二　利用对角线法则计算三阶行列式

可由对角线法则即式(3.1.1.1)计算三阶行列式的值。下用图 3.1.1.1 所示的画线方法帮助记忆。

图 3.1.1.1 中各实线连接的三个元素的乘积是式(3.1.1.1)右端带正号的项，各虚线连接的三个元素的乘积是式(3.1.1.1)右端带负号的项。

如三阶行列式含有零元素，可用式(3.1.1.1)简化计算。因这时式

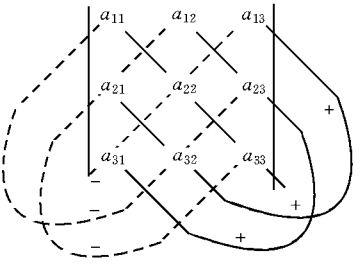


图 3.1.1.1

(3.1.1.1)右端至少有两项等于零。

例 2[1997 年Ⅰ19] 下列矩阵中,行列式的值为零的是

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. (E) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

解 它的第三个列向量是第一个列向量的 2 倍,所以行列式为零,其他均不为零。事实上,利用式(3.1.1.1)易求得(A)中行列式的值为 $1\times2\times3-(-3)\times2\times1=6+6=12$;(B)中行列式的值为 $-[3\times(-1)\times1]=3$;(C)中行列式的值为 $(-1)[1\times(-1)\times3]=3$. 而(D)中行列式的值为

$$3\times1\times1+2\times4\times1+6\times2\times4-1\times1\times6-4\times4\times3-1\times2\times2=1。$$

仅(E)入选。

例 3 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{bmatrix}$,已知 $|\boldsymbol{A}|=-1$,$a=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

解 由三阶行列式的计算公式(3.1.1.1)得到

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= (-3)\times a(-a)+(1-a)\times(-1)\times3 \\ &\quad -(-3)\times a\times(1-a)-(-a)\times(-1)\times5 \\ &= 3a^2-3+3a+3a-3a^2+5a=a-3=-1, \end{aligned}$$

即 $a=2$。仅(B)入选。

例 4(条件充分性判断) 可确定 a,b,c 的值均等于零。

(1) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{vmatrix}=0$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & 1 & -a \\ b & a & 1 \end{vmatrix}=1$.

解　设条件(1)与(2)中的三阶行列式分别为 D_3 与 Δ_3，由式(3.1.1.1)即得

$$\begin{aligned} D_3 &=(a-1)\times b\times c+1\times 0\times 2+2\times 1\times 0-2\times b\times 2\\ &\quad -(a-1)\times 0\times 0-1\times 1\times c\\ &=(a-1)bc-4b-c,\\ \Delta_3 &=1\times 1\times 1+c\times a(-b)+b(-c)(-a)-b(-b)\times 1\\ &\quad -a(-a)\times 1-c(-c)\times 1\\ &=1-abc+abc-(b^2+a^2+c^2)=1-(a^2+b^2+c^2)。\end{aligned}$$

当条件(1)成立时，有 $(a-1)bc-4b-c=0$，但不能由此确定 $a=b=c=0$. 条件(1)不充分。

当条件(2)成立时，有 $1-(a^2+b^2+c^2)=1$，即 $a^2+b^2+c^2=0$，因而可确定 $a=b=c$。仅 B 入选。

题型三　计算行列式的若干常用方法

法一　用展开计算法求之。

利用行列式性质将行列式某行(列)化为只有一个(或两个)非零元，然后对该行(列)展开计算；或利用行列式性质将行列式化成准三角行列式(特殊的拉普拉斯的展开形式)直接利用式(3.1.1.6)或式(3.1.1.7)计算。

例 5[1997 年 Ⅰ 27]　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}。$$

解法 1　将 D 按第 1 行展开得到

$$D=a\begin{vmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & \\ & & & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=aa^{n-1}+(-1)^{1+n}(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & \\ & & & & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$。

解法 2　直接使用式(3.1.1.8)**求之即得** $D=(a^2-1)a^{n-2}$.

例 6[1997 年 Ⅱ 26]　**计算** n **阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} -a_1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}。$$

解法 1　D **中第** 1 **行、第** 2 **行……第** $n-1$ **行的行和都等于零，只有第** n **行的行和为** n。**将各列加到第** 1 **列，这时虽不能提公因式，但可将其展开。**

$$D\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}n\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$=(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n-1}\cdot n$。

解法 2　将 D **中第** i **列加到第** $i+1$ **列**($i=1,2,\cdots,n-1$)**得到**

$$D=\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}=n(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}。$$

例 7　计算下列 n 阶行列式，其中 a_i, b_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零：

$$D_n^{(1)}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

$$D_n^{(2)}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & b_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix}。$$

解　下面只计算 $D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ 计算类似。用展开(降阶)法求之，按第 1 列展开，得到

$$D_n^{(1)}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+n}b_n\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2a_3\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n。\qquad(3.1.1.12)$$

$D_n^{(1)}$ 等于主对角线上元素之积加上其余 n 个元素之积，后者所带的符号为 $(-1)^{n+1}$($n+1$ 即为行列式阶数加 1)或 $(-1)^{n-1}$($n-1$ 即为行列式阶数 n 减 1).

同法可求得

$$D_n^{(2)}=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_n.\qquad(3.1.1.13)$$

注意　上述两个行列式在求解其他问题时经常碰到，应记住所得结果，

直接引用可简化计算。

例 8 设 $D=\begin{vmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&3\\3&0&4&0\\0&4&0&1\end{vmatrix}$，则 $D=$

(A) 0. (B) 10. (C) 20. (D) -10. (E) -20.

解法 1 用行列式性质将 D 化为准对角行列式，用式(3.1.1.6)计算.

$$D\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}(-1)\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&0&2&3\\3&4&0&0\\0&0&4&1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}(-1)(-1)\begin{vmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&2&3\\0&0&4&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&3\\4&1\end{vmatrix}=(4-6)(2-12)=20。$$ 仅(C)入选。

解法 2 将 D 利用行列式性质化成式(3.1.1.8)中行列式的形式，直接使用该式结果求之。

$$D\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}(-1)\begin{vmatrix}1&0&0&2\\0&2&3&0\\3&0&0&4\\0&4&1&0\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}(-1)(-1)\begin{vmatrix}1&0&0&2\\0&2&3&0\\0&4&1&0\\3&0&0&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&3\\4&1\end{vmatrix}=(-2)(-10)=20。$$ 仅(C)入选。

法二 用去掉成比例的分行(列)的方法计算。

所谓一行(列)与另一行(列)的分行(分列)成比例是指该行(列)元素与另一行(列)的分行(分列)的对应元素成比例。

一个行列式的第 i 行(列)元素乘以常数 k 加到第 j 行(列)($i\neq j$)上，成为第 j 行(列)中的一分行(分列)，消掉第 j 行(列)的这一分行(分列)，下称在第 j 行(列)中去掉与第 i 行(列)成比例的分行(分列)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{i1}+b_{j1} & ka_{i2}+b_{j2} & \cdots & ka_{in}+b_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+(-k)r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

各行(列)元素分别有类似结构的行列式常用上法简化计算,该法就是利用行列式性质 5 进行计算。

例 9[2001 年 Ⅱ 20] **已知三阶行列式** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$, **则**

$$\begin{vmatrix} a_{31} & 2a_{11}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{32} & 2a_{12}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{33} & 2a_{13}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix} =$$

(A) $-6a$. (B) $6a$. (C) $-15a$. (D) $15a$.

解 **用行列式的性质将所求值的行列式用已知其值的行列式表示。**

$$\begin{vmatrix} a_{31} & 2a_{11}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{32} & 2a_{12}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{33} & 2a_{13}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{\text{第 2 列中去掉与第 3}\\ \text{列成比例的分列}}} \begin{vmatrix} a_{31} & 2a_{11} & 3a_{21} \\ a_{32} & 2a_{12} & 3a_{22} \\ a_{33} & 2a_{13} & 3a_{23} \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{33} & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_3} (-6)\times(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{取转置}} 6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6a.$$ **仅(B)入选。**

例 10 **证明** $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。

证　设左端行列式为 D，先将其拆成为两个行列式，得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix},$$

然后再去掉上述两个行列式中与第 1 列成比例的分列，得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix},$$

再去掉 D_1 中与 $(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$ 成比例的分列得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}。$$

因

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3}(-1)\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}(-1)\times(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

故行列式等式获证。

例 11　$n+1$ **阶行列式** $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & a_n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n+b_n \end{vmatrix}=$

(A) $(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_n$.　　(B) $b_1b_2\cdots b_n$.　　(C) $(-1)^{n-2}b_1b_2\cdots b_n$.

(D) $a_1a_2\cdots a_n$.　　(E) $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n$.

解　去掉与第 1 列成比例的分列即得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&b_1&0&\cdots&0\\\cdots&0&b_2&\ddots&\cdots\\1&\cdots&\ddots&\ddots&0\\1&0&\cdots&0&b_n\end{vmatrix}=b_1b_2\cdots b_n。$$ **仅**(B)**入选**。

例 12 $D_1=\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}=$

(A) 2000. (B) 3000. (C) 4000. (D) 5000. (E) 6000.

解 D_1 **中去掉与第** 2 **列成比例的分列得到**

$$D_3=\begin{vmatrix}100+3&100&200+4\\200-1&200&400-5\\300+1&300&600+0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&100&4\\-1&200&-5\\1&300&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}3&1&4\\0&5&-5\\1&3&0\end{vmatrix}=500\begin{vmatrix}3&1&4\\0&1&-1\\1&3&0\end{vmatrix}=500\begin{vmatrix}3&1&5\\0&1&0\\1&3&3\end{vmatrix}$$

$$=500\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}=2000。$$ **仅**(A)**入选**。

注意 对其元素为数字,且数字较大的行列式应仔细分析各行或各列数字之间的线性关系,利用上法(法二)将行列式尽量化简,使其各元素的数字变小,然后再展开计算。

法三 利用已知其结果的行列式计算。

为此,常利用行列式性质将行列式化为上、下三角行列式和对角行列式,化为副(次)对角线行列式利用式(3.1.1.5)计算,化为范德蒙行列式使用式(3.1.1.10)或式(3.1.1.11)计算,化为爪型行列式使用式(3.1.1.9)计算。

例 13 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}x_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\b_2&x_2&0&\cdots&0\\b_3&0&x_3&\ddots&\cdots\\\cdots&\cdots&\ddots&\ddots&0\\b_n&0&\cdots&0&x_n\end{vmatrix}\quad(x_i\neq0,i=1,2,\cdots,n)。$$

解 $D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_1+(-a_i/x_i)r_i} \begin{vmatrix} x_1-\dfrac{a_2b_2}{x_2}-\cdots-\dfrac{a_nb_n}{x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}$

$$=x_2x_3\cdots x_n\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right)。$$

例 14(条件充分性判断) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}\neq 0$。

(1) $a+b+c\neq 0$；　　(2) a,b,c **为互异实数**。

解　因 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$

$$=(-1)(-1)(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}。$$

左端行列式为三阶范德蒙行列式，由式(3.1.1.10)**即得**

$$\textbf{原行列式}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

显然，当条件(1)**与条件**(2)**单独成立时，它们都不充分。当条件**(1)**与条件**(2)**联合时，条件充分。仅** C **入选。**

例 15(条件充分性判断) $D_4=\begin{vmatrix} x & 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 1 & x & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & x & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 & x \end{vmatrix}>0$。

(1) $x>3$；　　(2) $x<-3$。

解　所给行列式为爪型行列式。利用式(3.1.1.9)**即得**

$$D_4 = xxx\left(x-\frac{1\times 1}{x}-\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{x}-\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{x}\right)=x^3\,\frac{x^2-9}{x}$$

$$=x^2(x^2-9)。$$

当条件(1)成立时，有 $x>3, x^2(x^2-9)>0$。**条件(1)充分。当条件(2)成立时，**$x<-3$，**有** $x^2(x^2-9)>0$。**条件(2)也充分。仅 D 入选。**

法四　用消成零元素、提取公因式法计算。

将行列式化成未知变元的线性函数的因式的乘积，可试用消成零元素、提取公因式法。此法的含义就是将行列式中不含未知变元的某元素利用行列式性质将其消成零，使零所在的行或所在的列出现未知变元的一次公因式，直到行列式化成为未知变元的二次或一次式才展开行列式。这时就可将行列式写成未知变元的线性函数的因式的乘积，求出其结果。

例 16[2000 年Ⅱ 22]　4 **阶行列式** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2+x \\ 2 & 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2+y & 2 & 2 \\ 2-y & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=$____。

解　将不含 x, y **的元素消成零，然后再在零元素所在的行或列提取公因式，最后展开行列式，得到**

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2+x \\ 2 & 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2+y & 2 & 2 \\ 2-y & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2+x \\ 0 & 0 & -x & -x \\ 2 & 2+y & 2 & 2 \\ -y & -y & 0 & 0 \end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2+x \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2+y & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_4]{r_1+2r_4} xy\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 2+x \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & y & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=xy(-1)^5(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2+x \\ 0 & -1 & -1 \\ y & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=xyy(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 2+x\\ -1 & -1\end{vmatrix}=xy^2(-2+2+x)=x^2y^2。$$

法五　使用递推法计算。

计算三对角线行列式常用递推法计算。

应用行列式的性质把一个高(n)阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式(例如 $n-1$ 阶,或 $n-1$ 阶与 $n-2$ 阶的行列式)的线性关系式。这种关系式称为递推关系式。根据递推关系式及某个低阶行列式(例如二阶或一阶行列式)的值,便可递推求得所给 n 阶行列式的值。这种计算行列式的方法称为递推法。

元素特殊的三对角线行列式还可利用行列式性质采用其他的方法计算。

例 17[2002 年Ⅰ15]　5 **阶行列式** $D_5=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{vmatrix}$ **等于**

(A) 264.　　(B) 364.　　(C) -264.　　(D) -364.

解　**将** D_5 **按第** 1 **行展开得到** $D_5=4D_4-3D_3$。**依次递推,有**

$$\begin{aligned}D_5&=4(4D_3-3D_2)-3D_3=13D_3-12D_2\\&=13(4D_2-3D_1)-12D_2=40D_2-39D_1,\end{aligned}$$

易求得　$D_2=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=16-3=13,\quad D_1=4,$

故　$D_5=40\times13-39\times4=520-156=364$. **仅**(B)**入选**。

题型四　计算行(列)和相等的行列式

将各列(行)加到第 1 **列(行),提取公因式,再利用行列式性质化为三角行列式或将元素为** 1 **的第** 1 **列(行)化成只含一个非零元素,再展开计算.**

例 18[1997 年Ⅱ28]　**已知** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ **为三阶单位阵,问** λ **为何值时,能使** $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$**?**

解法 1　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$.　①

此行列式为行和与列和都相等的行列式，因而有下述解法：

$$|\lambda E-A|\xrightarrow[i=2,3]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}\lambda-5 & -2 & -2\\ \lambda-5 & \lambda-1 & -2\\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & \lambda-1 & -2\\ 1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+2c_1]{c_2+2c_1}(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 或 $\lambda_3=5$ 时，有 $|\lambda E-A|=0$.

解法 2　在行列式①中将不含 λ 的元素消成零，提取公因式，得到

$$|\lambda E-A|\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{vmatrix}\lambda+1 & -\lambda-1 & 0\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}(\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+2r_1}(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-3 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-5).$$

故当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 或 $\lambda_3=5$ 时，$|\lambda E-A|=0$.

例 19[1998 年 Ⅱ 30]　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

解　把 D 的各列加到第 1 列上，提出公因子 15，得到

$$D=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&1\\1&4&5&1&2\\1&5&1&2&3\\1&1&2&3&4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{由下而上各行减去上一行}}15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&1&1&-4&1\\0&1&-4&1&1\\0&-4&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{对第 1 行}}15\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{各列加到第 1 列上}}15\begin{vmatrix}-1&1&1&-4\\-1&1&-4&1\\-1&-4&1&1\\-1&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{各列上}]{\text{第 1 列加到}}15\begin{vmatrix}-1&0&0&-5\\-1&0&-5&0\\-1&-5&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix}$$

$=15\times(-1)^{4(4-1)/2}(-5)^3\times(-1)=1875.$

例 20　行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}=$

(A) x.　　(B) x^2.　　(C) x^5.　　(D) x^3.　　(E) x^4.

解　上行列式仅各行的行和相等，将各列都加到第 1 列，得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&x+1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3+(-1)c_1\\c_4+c_1}]{c_2+c_1}x\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x(-1)^{4(4-1)/2}x^3$$

$=x^4$(**利用**(3.1.1.5)**式**). **仅**(E)**入选**.

例 21(条件充分性判断) $\begin{vmatrix} a-3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & a-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix}=0$.

(1)$a=3$; (2)$a=5$.

解 令所给 4 阶行列式为 D_4,则 D_4 是行和相等的行列式. 因而

$$D_4 \xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} a-3 & -1 & 0 & 1 \\ a-3 & a-3 & 1 & 0 \\ a-3 & 1 & a-3 & -1 \\ a-3 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix} =(a-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i+(-1)r_1}(a-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & a-3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a-4 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ 2 & a-3 & -2 \\ 1 & -1 & a-4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_3}(a-3)\begin{vmatrix} a-3 & 1 & -1 \\ 0 & a-3 & -2 \\ a-3 & -1 & a-4 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a-3 & -2 \\ 1 & -1 & a-4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2}(a-3)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & a-5 \\ 1 & -1 & a-5 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)^2(a-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_3}(a-3)^2(a-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a-2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)^2(a-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a-2 \end{vmatrix}=(a-1)(a-3)^2(a-5).$$

显然,条件(1)与条件(2)都充分. 仅 D 入选.

题型五 求解行列式方程

其思路就是将行列式利用行列式性质化为未知数的线性函数的乘积。

法一 用观察法计算。

观察未知数取何值时该行列式有两行(两列)相同或成比例. 未知数所取的这些值就是所求行列式方程的根.

例 22 x 为何值时 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$.

解 该行列式展开后是关于 x 的四次方程，因而行列式等于零的根有四个.

注意到由第 1、第 2 行及第 3、第 4 行对应元素成比例分别得到 $x^2-5=4, x^2+1=2$，即 $x=\pm 3, x=\pm 1$.

例 23 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-x \end{vmatrix}=0$ 的根为

(A) $-1,0,1,2,\cdots,n-2$. (B) $0,1,2,\cdots,n-1$. (C) $1,2,3,\cdots,n$.

(D) $2,3,4,\cdots,n+1$. (E) $3,4,5,\cdots,n+2$.

解法 1 用观察法求之. 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 中第 1 列与第 2 列相同，有 $f(x)=0$. 因而 $x=0$ 为 $f(x)=0$ 的一个根. 同法可观察出，当 $x=1$ 时，第 3 列与第 1 列相同，故 $x_2=1$ 也是 $f(x)=0$ 的根。一般有 $x_i=i-1$ 时 $f(x)$ 的第 i 列与第 1 列相同，故 $x_i=i-1(i=1,2,\cdots,n)$ 均为 $f(x)=0$ 的根. 显然，$f(x)$ 为 n 次多项式最多只有 n 个根，因而 $0,1,\cdots,n-1$ 为其全部根。仅(B)入选.

解法 2 在 $f(x)$ 中去掉行列中与第 1 列成比例的分别得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+(1-x) & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+(n-1-x) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1-x \end{vmatrix}$$

$$=-x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)=0,$$

故 $f(x)=0$ 的解为 $0,1,2,\cdots,n-1$. 仅(B)入选.

法二　使用展开的方法计算。

利用行列式性质将行列式的某行或某列化成只含一个非零元素或化成准三角行列式(特殊的拉普拉斯展开式)的形式,再展开.

例 24[2000 年Ⅰ22]　求方程 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-2&x&3&1\\2&2&x&4\\3&3&4&x\end{vmatrix}=0$ 的根.

解　将行列式算出并化为 x 的一次因式的乘积得

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-2&x&3&1\\2&2&x&4\\3&3&4&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1-C_2}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\-(2+x)&x&3&1\\0&2&x&4\\0&3&4&x\end{vmatrix}=-(2+x)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&x&4\\3&4&x\end{vmatrix}$$

$$=(2+x)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&x-2&2\\3&1&x-3\end{vmatrix}=(2+x)[(x-2)(x-3)-2]$$

$$=(2+x)(x^2-5x+4)=(2+x)(x-4)(x-1)=0,$$

故所给方程的根为 $1,4,-2$.

例 25 [2002 年Ⅱ17]　$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-3\\2x-2&2x-1&2x-3\\3x-3&3x-2&3x-5\end{vmatrix}=0$ 的根为

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 0 或 3.　　(D) 0.

解　注意到各列都含有相同的分列先用行列式性质化简行列式,得到

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-3\\2x-2&2x-1&2x-3\\3x-3&3x-2&3x-5\end{vmatrix}\xlongequal[C_3-C_1]{C_2-C_1}\begin{vmatrix}x-2&1&-1\\2x-2&1&-1\\3x-3&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal{C_3+C_2}\begin{vmatrix}x-2&1&0\\2x-2&1&0\\3x-3&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}=(-1)[x-2-(2x-2)]$$

$$=(-1)(-x)=0.$$

故 $x=0$，即 $f(x)=0$ 的根只有一个零. 仅(D)入选.

法三　化成已知其结果的行列式求之.

例 26　（条件充分判断）$D=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=0$。

(1)$\lambda=1$；　　(2)$\lambda=-3$.

解　所给行列式为列和与行和均相等的行列。将各行都加到第 1 行，有

$$D\xrightarrow[i=2,3,4]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}\lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1\\ -1 & \lambda+2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda+2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i+r_i}(\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+3)^3.$$

当条件(1)与条件(2)单独成立时，都有 $D=0$. 它们都充分. 仅 D 入选.

例 27　方程 $\begin{vmatrix}1 & x-1 & (x-1)^2 & (x-1)^3\\ 1 & 2 & 4 & 6\\ 1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & -3 & 9 & -27\end{vmatrix}=0$ 根的个数为

(A) 2 个.　　(B) 3 个.　　(C) 4 个.　　(D) 5 个.　　(E) 6 个.

解　方程左边的行列式为一个以 $x-1,2,x,-3$ 为列元素的 4 阶范德蒙行列式. 由式(3.1.1.11)得到

$$\text{原式}=[2-(x-1)][x-(x-1)][-3-(x-1)](x-2)(-3-2)(-3-x)$$
$$=-5(x+2)(x-2)(x+3)(3-x),$$

故方程的根共有四个不同的根. 仅(C)入选.

法四　消成零元素，提取公因式法求之。

详见本节题型三（计算行列式的若干常用方法）法四.

例 28　λ 的三次方程 $f(x)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=0$ 的根为

（A）1.（B）9 或 0.（C）1，−1.（D）2，8.（E）以上结论都不正确.

解　直接展开将得到 λ 的三次多项式不易分解为 λ 的线性函数的乘积，为此采用消成零元素、提取公因式法，即将 $f(\lambda)$ 的第 1 行，第 3 行处的元素消成零，再提取零所在的第 3 列的公因式 λ，即

$$f(\lambda)\xlongequal{C_3+C_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-4 & \lambda\\ -2 & 4 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-4 & 1\\ -2 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_3}\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 4 & \lambda-8 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 4 & \lambda-8\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[(\lambda-1)(\lambda-8)-8]=\lambda(\lambda^2-9\lambda+8-8)$$

$$=\lambda(\lambda^2-9\lambda)=\lambda^2(\lambda-9).$$

因而 $f(\lambda)=x^2(\lambda-9)$ 的根为 0 或 9。仅（B）入选.

题型六　求代数余子式之和的值

类型（一）　求代数余子式线性组合的值。

法一　常用代数余子式性质即定理 3.1.1.1 和定理 3.1.1.2 求之.

例 29[2003 年Ⅰ28]　**已知** $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 5 & 2\end{vmatrix}$，**则** $A_{13}+A_{23}+A_{43}$ **等于**

（A）2.　　（B）3.　　（C）4.　　（D）−8.　　（E）−4.

解法 1　$A_{13}+A_{23}+A_{43}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{C_3-C_1}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}$$

$=-4$. **仅(E)入选.**

解法 2 $A_{13}+A_{23}+A_{43}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0&3\\1&5&1\\-1&1&2\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1&4\\1&5&1\\-1&1&2\end{vmatrix}$

$+(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}2&1&4\\1&0&3\\1&5&1\end{vmatrix}=27-39-(-8)=-4.$

例 30 **设** $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\2&3&4&5\\6&7&8&9\end{vmatrix}$**,求** $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$**,其中** A_{i2} $(i=1,2,3,4)$**为** D **中元素** a_{i2}**的代数余子式.**

解法 1 **因** A_{i2}**为** D **中元素** a_{i2}**的代数余子式**$(i=1,2,3,4)$**,故将** D **中第** 2 **列元素依次换为** 3,7,4,8**,即得**

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix}1&3&3&4\\5&7&7&8\\2&4&4&5\\6&8&8&9\end{vmatrix}=0.$$

解法 2 **因** 3,7,4,8 **恰为** D **中第** 3 **列元素,而** $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$**为** D **中第** 2 **列元素的代数余子式,由定理** 3.1.1.2 **有** $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=0$.

例 31 **已知** 5 **阶行列式** $D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27$**,求** $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ **和** $A_{44}+A_{45}$**,其中** A_{4j}**为** D_5 **中第** 4 **行第** j **列元素的代数余子式**$(j=1,2,3,4,5)$.

解 **由已知条件及式**(3.1.1.2)**分别得到**

$$\begin{cases}(1\times A_{41}+1\times A_{42}+1\times A_{43})+(2\times A_{44}+2\times A_{45})=27,\\(2\times A_{41}+2\times A_{42}+2\times A_{43})+(1\times A_{44}+1\times A_{45})=0。\end{cases}$$

由上面两个方程可解得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9;A_{44}+A_{45}=18.$$

例 32(条件充分性判断)　三阶行列式 $\begin{vmatrix}2&2&3\\1&1&2\\2&y&x\end{vmatrix}=1$，**且** $M_{11}+M_{12}-M_{13}=3$(M_{ij} **是行列式中元素** a_{ij} **的余子式**).

(1) $x=4,y=1$;　　(2) $x=0,y=1$.

解　由 $\begin{vmatrix}2&2&3\\1&1&2\\2&y&x\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&1&2\\2&y&x\end{vmatrix}=(-1)(y-2)=1.$

故 $y=1$. **又由**

$$M_{11}+M_{12}-M_{13}=(-1)^{1+1}M_{11}-(-1)^{1+2}M_{12}-(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$=A_{11}-A_{12}-A_{13}=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&2\\2&y&x\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3+C_1]{C_2+C_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&3\\2&y+2&2+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\y+2&2+x\end{vmatrix}$$

$$=2(2+x)-3(y+2)=4+2x-3\times3=3,$$

即 $x=4$. **条件**(1)**充分,而条件**(2)**不充分. 仅** A **入选.**

法二　利用伴随矩阵直接写出 $\sum_{k=1}^{n}A_{kj}$ **或** $\sum_{k=1}^{n}A_{ik}$ **求之.**

如果由矩阵 A **能方便地求出** A^{-1} **及** $|A|$**,则由** $A^*=A^{-1}|A|$**,即可写出所求.**

例 33　设 A **为三阶可逆矩阵,且** $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&-1&2\\3&1&2\end{bmatrix}$**,则** $A_{21}+A_{22}+A_{23}=$

(A) 1/20.　　(B) 2/20.　　(C) 3/20.　　(D) 5/21.　　(E) 6/27.

解　$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&-1&2\\3&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3&10\\0&-1&0\\4&1&4\end{vmatrix}=20,$$

$$A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}/|A^{-1}|=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}2&3&4\\1&-1&2\\3&1&2\end{bmatrix},$$

故其第 2 列的元素之和，即

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}=\frac{1}{20}(3-1+1)=\frac{3}{20}.$$ 仅(C)入选.

法三　利用伴随矩阵 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$ 的特征值性质求之.

设 A^* 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$.

例 34　设 A 是三阶可逆矩阵，如 A^{-1} 的特征值为 1,2,3，则 $|A|$ 的代数余子式之和：$A_{11}+A_{22}+A_{33}=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 5.

解　A_{11},A_{22},A_{33} 为 A 的伴随矩阵 A^* 的主对角线上的元素，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=A^*$ 的三个特征值之和。下求 A^* 的特征值.

因 A^{-1} 的特征值为 1,2,3，故 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1/2,\lambda_3=1/3$，又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1\times(1/2)\times(1/3)=1/6$，故 A^* 的三个特征值分别为

$$|A|/\lambda_1=1/6,\quad |A|/\lambda_2=1/3,\quad |A|/\lambda_3=1/2,$$

故 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=1/6+1/3+1/2=1$. 仅(A)入选.

类型(二)　求行列式 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和.

伴随矩阵法。　当 A^{-1} 易求时，先求出 A^{-1}，再由 $A^*=|A|A^{-1}$，求出 A^*，则 A^* 中所有元素之和即为 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和.

例 35　n 阶行列式 $|A|=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\1&0&\ddots&0&0\\0&1&\ddots&0&\cdots\\\cdots&\cdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1&0\end{vmatrix}$ 所有元素的代数余子式的和=

(A) $(-1)^{n-2}n$.　(B) n.　(C) $(-1)^{n-1}n$.　(D) $2n$.　(E) $3n$.

解　设 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，下求 $|A|$ 中所有元素的代数余子式的和. 由于 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$，如能求 A^* 便可求出 $|A|$ 中所有元素的代数余子式的和，而 $A^*=(A)A^{-1}$，归结求出 $|A|$ 及 A^{-1}. 易求得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\\1&0&\ddots&\cdots&0\\0&1&\ddots&0&\cdots\\\cdots&\ddots&\ddots&0&0\\0&\cdots&0&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\cdots\\\cdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&0&1\\1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$$

由式(3.1.1.12)即得$|\boldsymbol{A}|=00\cdots0+(-1)^{n-1}1\times1\cdots1=(-1)^{n-1}$，从而$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，故$|\boldsymbol{A}|$中的所有元素代数余子式之和为$(-1)^{n-1}n$.仅(C)入选.

习　题　3.1.1

(一) 问题求解

1. 如果 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 2 \\ 3 & a & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=8$，**则** $a=$

(A) 2 **或** 4. (B) -2 **或** -4. (C) 0 **或** 8. (D) -2 **或** 4. (E) 0 **或** -8.

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$，**则** $f'(2)=$

(A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 8. (E) 12.

3. 设 n **阶矩阵** $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，**则** $|\boldsymbol{A}|=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)$. (B) $(-1)^{n-2}(n-1)$. (C) $(-1)n$.

(D) n. (E) $n-1$.

4. 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，**则**

$$\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ 2a_{11}-3a_{21} & 2a_{12}-3a_{22} & 2a_{13}-3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

(A) 16. (B) 48. (C) -24. (D) -8. (E) 24.

5. 设 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则 $D_3=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=$

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3. (E) 4.

6. 已知 5 阶行列式第 1 列元素分别为 $-1,1,3,x,4$；其第 2 列对应的代数余子式依次为 $3,4,2,5,7$，则 x 等于

(A) 4. (B) -7. (C) 6. (D) -4. (E) **以上结论都不正确.**

7. $\begin{vmatrix}a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1\\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2\\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3\end{vmatrix}=$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

8. $\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ b & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=$

(A) a^4-b^4. (B) a^4+b^4. (C) $(a^2+b^2)^2$.

(D) $(a^2-b^2)^2$. (E) $(a+b)^2$.

9. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=$

(A) x. (B) x^2. (C) x^3. (D) x^4. (E) $3x^4$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots\\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$。计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=$(　　)，**其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵，λ 为常数.**

(A) λ^{12} (B) λ^{10} (C) λ^{-10} (D) $\lambda^{10}-10^{10}$ (E) λ^{14}

11. 方程 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & x & 3 & 4\\ 1 & 2 & x & 4\\ 1 & 2 & 3 & x\end{vmatrix}=0$ **的解是**

(A) 0,1,5. (B) 2,3,4. (C) 6,7,8.

(D) $-2,-1,0$. (E) 5,6,7.

12. 设等差数列$\{a_n\}$的第k项,第l项和第n项分别为a_k,a_l,a_n,则

$$\begin{vmatrix} k & a_k & 1 \\ l & a_l & 1 \\ n & a_n & 1 \end{vmatrix} =$$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

13. 已知4阶行列式的值为3,它的第3个行向量为$(0,2,4,a)$,它们对应的代数余子式分别等于$10,3,-2,-1$,则$a=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) -5.

14. 行列式方程$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$的根的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

15. 下列行列式中为零的是

(A) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. (B) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$. (C) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

(D) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. (E) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

(二) 条件充分性判断

1. $f(x)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$.

(1) $\lambda=0$; (2) $\lambda=2$.

2. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & t \end{vmatrix}=4$.

(1) $t=1$; (2) $t=2$.

3. 设5阶行列式D依下列次序变换:变换第1行与第5行,周转置,用2

乘所有元素，再用(－3)乘第 2 列加至第 4 列，最后用 4 除第 2 列各元素，结果为－32.

(1) $D=4$；　　(2) $D=2$.

4. 行列式 $D=\begin{vmatrix}0&1&2&0&1\\2&0&0&3&0\\0&a&1&0&1\\1&0&0&b&0\\0&1&3&0&1\end{vmatrix}=0$.

(1) $a=1$，b **为任意数**；　　(2) $b=3/2$，a **为任意数**.

5. $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a-1&2&a+1\\(a-1)^2&4&(a+1)^2\end{vmatrix}=0$.

(1) $a=1$；　　(2) $a=3$.

6. 行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&0&x&1\\0&1&1&x\\1&x&0&1\\x&1&1&0\end{vmatrix}=0$.

(1) $x=\pm2$；　　(2) $x=0$.

7. 4 **阶行列式** $D_4=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-1&x&-1&0\\-4&0&x&-1\\4&0&0&x\end{vmatrix}>0$.

(1) $x>2$；　　(2) $x<-2$.

8. $D=\begin{vmatrix}\lambda-1&4&4\\4&\lambda-1&4\\4&4&\lambda-1\end{vmatrix}=0$.

(1) $\lambda=5$；　　(2) $\lambda=-7$.

9. 行列式 $D=\begin{vmatrix}0&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a&b&c&d\end{vmatrix}=-1$.

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$；　　(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}$.

（三）解答题

1. 解方程 $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_2 & \ddots & x & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & \cdots & \ddots & a_{n-1} & x & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2. 计算 $D_3 = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

3. 计算 5 阶行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

4. 设 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$**，求**

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$；　　(2) $2A_{11}+3A_{12}+4A_{13}+5A_{14}$.

5. 设 $xyz \neq 0$**，计算** $D = \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+y & 3 \\ 1 & 2 & 3+z \end{vmatrix}$.

6. 计算 6 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix}$.

3.1.2 克莱姆法则

1. 克莱姆法则

定理 3.1.2.1(克莱姆法则) 含有 n 个未知数,n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n1}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{3.1.2.1}$$

当其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,有惟一解,且可表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$,其中 D_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 是行列式 D 的第 j 列元素换为方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列元素不变而得到的行列式.

将克莱姆法则用于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \tag{3.1.2.2}$$

有下述常用的结论.

推论 3.1.2.1 齐次线性方程组(3.1.2.2)当其系数行列式 $D\neq 0$ 时,该方程组有惟一零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

当齐次线性方程组(3.1.2.2)有非零解时,则其系数行列式 $D=0$,反之

如果该方程组有非零解，则由推论 3.1.2.1 的逆否命题知，$D=0$，因而得到以下推论。

推论 3.1.2.2 齐次线性方程组(3.1.2.2)有非零解的充要条件是其系数行列式 D 等于 0.

2. 常见题型及其解题方法技巧归纳

题型一 使用克莱姆法则求解方程个数与未知数个数相等的非齐次线性方程组

例 1 三元一次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=4, \\ 4x_1+x_2+9x_3=16 \end{cases}$ 的解中未知数 x_2 的解值必为

(A) 1. (B) 5/2. (C) 7/3. (D) 1/6. (E) 5/12.

解 因所给方程组的系数矩阵的行列式是三阶范德蒙行列式. 由式(3.1.1.10)即得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2^0 & (-1)^0 & 3^0 \\ 2^1 & (-1)^1 & 3^1 \\ 2^2 & (-1)^2 & 3^2 \end{vmatrix}$$

$$=(-1-2)(3-2)[3-(-1)]=-12,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 16 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 \end{vmatrix}$$

$$=(4-2)(3-2)(3-4)=-2,$$

故由克莱姆法则得到 $x_2=D_2/D=-2/(-12)=1/6$. 仅(D)入选.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$，

其中 $a_i\neq a_j$ $(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，求线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}X=b$ 的解.

解 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 即为 $\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}$.

因其系数行列式 D 为 n 阶范德蒙行列式，由 $a_i\neq a_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，可知 $D=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\neq 0$，从而方程组有惟一解，又易求出（观察出）

$$D_1=D,\quad D_2=D_3=\cdots=D_n=0,$$

故 $x_1=D_1/D=1$，$x_i=D_i/D=0$（$i=2,3,\cdots,n$），所以 $\boldsymbol{X}=[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 为所求的惟一解.

题型二　判别方程个数与未知数个数相等的齐次线性方程组只有零解

例 3　设 a,b,c,d 是不全为零的实数，证明线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0,\\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0,\\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0,\\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0\end{cases}$$

仅有零解.

证　为证其系数行列式 D 不等于零，考虑到系数行列式的特点，先计算 D 与 D^{T} 的乘积，即

$$DD^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ b & -a & d & -c\\ c & -d & -a & b\\ d & c & -b & -a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ b & -a & -d & c\\ c & d & -a & -b\\ d & -c & b & -a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b^2+a^2+c^2+d^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2\end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4。$$

因 $D^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\neq 0$，由克莱姆法则知，所给方程组只有零解.

题型三　确定方程个数与未知数个数相等的线性方程组的系数行列式中的待定常数

类型（一）　已知非齐次线性方程组（3.1.2.1）**有惟一解，确定其系数行**

列式中的待定常数.

常根据定理 3.1.2.1(克莱姆法则)即 $D\neq 0$ 确定之.

例 4(条件充分性判断)　方程组$\begin{cases} ax_1+3x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+ax_2+x_3=5, \\ ax_1+2x_2+x_3=2 \end{cases}$有惟一解.

(1) $a\neq 2$;　　(2) $a\neq -1$.

解　所给方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -a & -1 & 0 \\ 2-a & a-2 & 0 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -a & -1 \\ 2-a & a-2 \end{vmatrix}$$

$$=-(a^2-a-2)=-(a-2)(a+1).$$

因已知方程组有惟一解,则 $D\neq 0$.

当条件(1)成立时,不能保证 $D\neq 0$. 条件(1)不充分。同理,条件(2)也不充分。但当条件(1)与条件(2)联合时有 $D\neq 0$,因而为充分条件. 仅 C 入选.

类型(二)　已知齐次线性方程组(3.1.2.2)只有零解,确定其系数行列式中的待定常数.

利用推论 3.1.2.1 即 $D\neq 0$ 确定之.

例 5(条件充分性判断)　齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$只有零解.

(1)$\lambda=2$;　　(2)$\lambda=1$.

解　当条件(1)成立时,其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)\times 1=1\neq 0.$$

这时方程组只有零解。条件(1)充分. 当条件(2)成立时,其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$。条件(2)不充分。仅 A 入选.

类型(三)　已知齐次线性方程组(3.1.2.2)有非零解,即有无穷多解,确定其系数行列式中的待定常数.

利用推论 3.1.2.2 即 $D=0$ 确定之.

例 6 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x^2x_1+2x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=$

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 1 或 2. (E) 以上结论都不正确.

解 因已知齐次线性方程组有非零解，由定理 3.1.1.2 知其系数行列式 $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=0$. 为求出 λ，不能直接展开行列式。因为 D 为 λ 的三次多项式，不便于因式分解，为此将 D 中不含 λ 的元素消成零，使零所在的行或列有 λ 的一次公因式，然后提出，再展开行列式。为此利用行列式性质得到

$$D\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_1}(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ \lambda^2 & 2+\lambda^2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1\\ 2+\lambda^2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

故 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$. 仅(D)入选.

例 7[2002 年 Ⅱ 17] 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+tx_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+tx_3=0,\end{cases}$ 若存在三阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则

(A) $t=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$. (B) $t=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

(C) $t=1$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$. (D) $t=1$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$.

解 因 $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，因而知秩$(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

而 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & t & 1\\ 1 & 1 & t\end{vmatrix}$，当 $t=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|$ 中三行成比例，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，因而 $t=1$。而 $t=-2$ 时代入 $|\boldsymbol{A}|$，求得 $|\boldsymbol{A}|=12\neq 0$，故(A)、(B)不能入选。下证 $|\boldsymbol{B}|=0$，用反证法证之.

如 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得到 $\boldsymbol{ABB}^{-1}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，与题设矛盾. 故 $|\boldsymbol{B}$

$|=0$。**仅**(D)**入选**.

习　题　3.1.2

(一) 问题求解

1. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,**且** $\boldsymbol{B}$ **的每个列向量** $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3$ **都是下列方程组的解向量:**

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1-x_3=0,\end{cases}$$

则 λ **和** $|\boldsymbol{B}|$ **的值分别为**

(A) $\lambda=1,|\boldsymbol{B}|=2$.　(B) $\lambda=-1,|\boldsymbol{B}|=1/2$.　(C) $\lambda=1/6,|\boldsymbol{B}|=0$.

(D) $\lambda=6,|\boldsymbol{B}|=0$.　(E) **以上结论都不正确.**

2. 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ **的系数矩阵记作** $\boldsymbol{A}$。**若存在三阶矩阵** $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,**使得** $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,**则**

(A) $\lambda=-2$ **且** $|\boldsymbol{B}|=0$.　(B) $\lambda=-2$ **且** $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

(C) $\lambda=1$ **且** $|\boldsymbol{B}|=0$.　(D) $\lambda=1$ **且** $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

3. 若方程组$\begin{cases}-2x_1+ax_2+x_3=1,\\2x_1-x_3=2,\\-ax_1+3x_2+x_3=-1\end{cases}$ **有惟一解,则** a **应满足**

(A) $a\neq0$.　(B) $a\neq1$.　(C) $a\neq0$ **且** $a\neq2$.　(D) $a\neq2$.　(E) $a\neq4$.

(二) 条件充分性判断

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&4\\2&a&-1\\-2&3&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ **为三阶非零矩阵,且** $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

(1) $a=3$;　(2) $a=-3$.

2. 方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(k-2)x_2+(k-2)^2x_3=0,\\x_1+(k-4)x_2+(k-4)^2x_3=0\end{cases}$**有非零解.**

(1) $k=3$；　　(2) $k=5$.

3. 方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+px_3+qx_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_4=0 \end{cases}$ **有非零解.**

(1) $p=4$ **且** $q=1$；　(2) $p=8$ **且** $q=-1$.

(三) 解答题

1. 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1-3x_2-4x_3=100, \\ -4x_1+10x_2-5x_3=200, \\ -2x_1-x_2+10x_3=120. \end{cases}$$

2. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$**,且** $\boldsymbol{B}$ **的每个列向量都是下列方程组的解向量：**

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0。 \end{cases}$$

(1) **求** λ **的值；**　　(2) **证明** $|\boldsymbol{B}|=0$.

3. k **取何值时，下列齐次线性方程组仅有零解：**

$$\begin{cases} kx+y-z=0, \\ x+ky-z=0, \\ 2x-y+z=0。 \end{cases}$$

4. 如果下列齐次线性方程组有非零解，k **应取什么值？**

$$\begin{cases} kx+y-z=0, \\ x+ky-z=0, \\ 2x-y-z=0。 \end{cases}$$

5. 设 a,b,c,d **是不全为零的实数，证明下列线性方程组仅有零解：**

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0, \\ -bx_1+ax_2-dx_3+cx_4=0, \\ -cx_1+dx_2+ax_3-bx_4=0, \\ -dx_1-cx_2+bx_3+ax_4=0. \end{cases}$$

3.2 矩　　阵

（一）考试内容

矩阵的概念，矩阵的加法、数乘和乘法的计算及性质，矩阵的转置及性质，逆矩阵的概念、性质及计算.

（二）考试要求

理解矩阵的概念，掌握矩阵加、减、数乘和乘法的运算规则，明确矩阵运算与行列式运算的区别，掌握矩阵的行列式的有关性质，理解可逆矩阵的概念，会用初等行变换及伴随矩阵法求逆矩阵，了解初等矩阵与初等变换的概念及其关系，理解矩阵的秩的概念，会求矩阵的秩.

3.2.1 矩阵的运算及其运算律

1. 矩阵的概念

定义 3.2.1.1 由 $m\times n$ 个元素 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 个行 n 个列的矩形数表，称为 $m\times n$ 矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

也可简记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行、第 j 列元素.

如 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行数与列数都等于 n，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 叫做方阵的主对角元素，它们所在的位置叫做主对角线.

所有元素 a_{ij} 都等于 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$. 两矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，并且仅当 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 时称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等于矩阵 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

值得注意的是：(1) n 阶矩阵不同于 n 阶行列式，前者是一个由 n^2 个元素排成的正方形数表，无大小可言，后者是一个数；又矩阵也可为长方形，而行列式必为方形.

(2) 两矩阵相等与两行列式相等的含义也不一样。前者需要两矩阵有相同的行数、列数，且对应位置上的元素均分别相等，而两个行列式相等就是其值相等.

2. 矩阵的运算及其运算律

1) 矩阵的加法

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 且称 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和.

$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，称 $\boldsymbol{D}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，其中 $(-\boldsymbol{B})=(-b_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 的负矩阵，$\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

2) 数与矩阵的乘法

设 k 是一个数，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为数 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，即将 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素.

矩阵的加法与数乘称为矩阵的线性运算，它们满足以下的运算律：

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵，k,l 为数。

1° 交换律　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，$k\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot k$；

2° 结合律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

3° 分配律　$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

值得注意的是，数 k 与矩阵相乘，不同于数 k 与行列式相乘，前者要乘矩阵中每个元素，后者只能用 k 去乘某一行或某一列.

3. 矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{p\times m}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})=\boldsymbol{AB}$ 是一个 $p\times n$ 的矩阵，它的第 i 行，第 j 列元素为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}\ (i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,n).$$

矩阵的乘法有下述运算律：

1° 结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$；

2° 分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矩阵，k 为数.

3° 矩阵乘法不满足交换律，即一般 $AB\neq BA$；

4° 矩阵乘法不满足消去律，即由 $AC=BC$，且 $C\neq O$ 一般不能推出 $A=B$；

5° 两个非零矩阵相乘可以是零矩阵，因而由 $AB=O$ 一般不能推出 $A=O$ 或 $B=O$；

4. 方阵的幂和矩阵多项式

设 A 为方阵，$A^k=AA\cdots A$ 称为 A 的幂，$k=0$ 时规定 $A^0=E$。

设 A 为方阵，若 $p(x)$ 是 x 的 n 次多项式 $p(x)=ax^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，则称 $p(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE$ 为 A 的矩阵多项式。这里要特别注意常数项 a_n 一定要在 $p(A)$ 中变为 a_n 乘单位矩阵 E.

方阵的幂有以下的运算律：

1° $A^rA^s=A^{r+s}$；　　2° $(A^k)^l=A^{lk}$.

其中 A 为方阵，r,k,l 为自然数.

注意　一般 $(AB)^n\neq A^nB^n$，只有 A,B 可交换时，才有 $(AB)^n=A^nB^n$；但当 $(AB)^n=A^nB^n$ 时不能推出 A,B 可交换.

5. 矩阵的转置

将矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$ 的行、列互换，所得矩阵 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$ 称为原矩阵的转置矩阵用符号 A^{T} 或 A' 表示.

转置矩阵有以下运算律：

1° $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；　　2° $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

3° $(kA)^{\mathrm{T}}=kA$；　　4° $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$；

5° $(A^k)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^k$。

其中 A,B 为矩阵，k 为实数.

题型一　利用矩阵的运算法则判别矩阵算式的正确性

例 1（条件充分性判断）　n 阶矩阵 A 必是零矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；　　(2) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

解　条件(1)、(2)单独都不充分，但两条件合在一起时，可求得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。事实上，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\boldsymbol{O},$$

故 $c_{ii}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $a_{ij}=0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。仅 C 入选.

例 2　若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=$

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.　　(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{-1}$.　　(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$.

(E) 以上结论都不正确.

解　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$

$=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 仅(B)入选.

例 3　设有矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times s}$，$\boldsymbol{C}_{s\times m}$，则下列运算中有意义的是

(A) $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2$.　　(B) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.　　(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$.

(D) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$.　　(E) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$.

解　n 阶方阵才有方幂运算，故(A) 不正确.

同型矩阵(即行数和列数分别相等的两矩阵)才能相加，因而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 无意义，(C) 不正确. 又 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵，因而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ 没有意义，(D) 排除. 根据矩阵乘法知 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 没有意义因而(B) 也不成立. 而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 同为 $m\times s$ 矩阵且其行数 m 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列数 m 相等，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$ 有意义. 仅(E)入选.

例 4　设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵.

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$，　　(2) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，

(3) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，(4) $\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^5\cdot\boldsymbol{A}^2$，

(5) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{k+1}-\boldsymbol{E}$.

在上述命题中，正确的共有

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.　　(E) 5 个.

解　由于乘法没有交换律，(1)、(2)不正确；由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}$，乘法有结合律，(4)正确，(3)正确；利用分配律，(5)正确。仅(C)入选.

题型二　判别两矩阵是否可交换

一般两个同阶方阵 A,B 不可交换，即 $AB\neq BA$，但有下述几类特殊矩阵可交换.

定理 3.2.1.1　(1) 乘积矩阵等于单位矩阵 E 的两同阶方阵可交换；

(2) 两对角矩阵可交换；

(3) 同一方阵的两不同方幂之乘积可交换 $A^kA^\alpha=A^\alpha A^k$；

(4) $(A+kE)(A-kE)=(A-kE)(A+kE)$，$A(A\pm kE)=(A\pm kE)A$；

(5) $A^*A=AA^*$；

(6) $AA^{-1}=A^{-1}A$；

(7) $A(kE)=(kE)A$.

命题 3.2.1.1　设 A,B 均为同阶矩阵，下列诸条件之一均为 $AB=BA$ 的充分必要条件：

(1) $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$；　　(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$；

(3) $AB=A+B$.

命题 3.2.1.2　A 与 B 可交换时，有

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^kB^{n-k}. \tag{3.2.1.1}$$

例 5[2003 年Ⅰ 11]（条件充分性判断）　两个 n 阶矩阵 A,B 满足 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

(1) $|A|\neq 0$；　　(2) $AB-B-A=O$.

解　由 $AB-B-A=O$，得到 $AB-B-A+E=E$，对左边因式分解，得 $(A-E)(B-E)=E$. 由定理 3.2.1.1(1)知 $A-E,B-E$ 可交换，即有

$$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E),$$

由此推出 $AB=BA$. 从而

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2。$$

条件(2)充分。由 $|A|\neq 0$ 推不出 $AB=BA$。条件(1)不充分。仅 B 入选.

例 6[2003 年Ⅱ 14]（条件充分性判断）　A,B 均为 n 阶矩阵，有 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

(1) B 可逆；　　(2) $B=E+A$。

解　因 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\Leftrightarrow AB=BA$，下面检验当条件(1)、条件(2)成立时，是否满足 $AB=BA$.

因 B 可逆，同 $AB=BA$ 没有必然联系。条件(1)不充分.

当条件(2)成立即 $B=E+A$ 时,则

$$AB=A(E+A)=A+A^2,\quad BA=(E+A)A=A+A^2,$$

因而 $AB=BA$。条件(2)充分。仅 B 入选.

当条件(2)成立时,也可直接验证$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$,从而条件(2)充分。事实上 $B=E+A$ 时,有

$$(A+B)^2=(A+E+A)^2=(E+2A)^2=E+4A+4A^2,$$

$$A^2+2AB+B^2=A^2+2A(E+A)+(E+A)^2=A^2+2A+2A^2+E+A^2+2A$$

$$=4A^2+4A+E=(2A+E)^2=(A+B)^2.$$

题型三　计算方阵的高次幂

类型(一)　计算能分解为一列向量与一行向量相乘的方阵的高次幂.

若 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,利用矩阵乘法的结合律得到简化计算 A 的 k 次幂的公式,即

$$A^k=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})^k=(\alpha\beta)^{\mathrm{T}}(\alpha\beta)^{\mathrm{T}}\cdots(\alpha\beta)^{\mathrm{T}}=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)^{k-1}\beta^{\mathrm{T}}=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)^{k-1}\alpha\beta^{\mathrm{T}}$$

$$=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)^{k-1}A=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^{k-1}A. \tag{3.2.1.2}$$

有时先需将 A 分解成$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 的形式。如何分解呢?因为 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$,则 A 中各列向量应与列向量α 成比例,据此可找出列向量 α 及行向量 β,然后再找式(3.2.1.1)计算 A 的高次幂.

例 7[2001 年Ⅰ24]　已知 $\alpha=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$,$\beta=(-1,-1/2,1/3)^{\mathrm{T}}$. 设 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$,则 $A^6=$_____.

解法 1　由式(3.2.1.2)得到

$$A^6=(\alpha\beta)^6=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)^5\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)^5A$$

$$=\Big(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\Big)\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}A=3^5A.$$

而
$$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\Big(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\Big)=\begin{bmatrix}1&-1/2&1/3\\-2&1&-2/3\\3&-3/2&1\end{bmatrix},$$

故
$$A^6=3^5\begin{bmatrix}1&-1/2&1/3\\-2&1&-2/3\\3&-3/2&1\end{bmatrix}.$$

解法 2　$A=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})$

$$=\boldsymbol{\alpha}[(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}]=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{5}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$$

$$=3^{5}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=3^{5}\begin{bmatrix}1 & -1/2 & 1/3\\ -2 & 1 & -2/3\\ 3 & -3/2 & 1\end{bmatrix}.$$

例 8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 9\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{n}=$

(A) $2^{n}\boldsymbol{A}$. (B) $3^{n}\boldsymbol{A}$. (C) $2^{n-1}\boldsymbol{A}$. (D) $3^{n-1}\boldsymbol{A}$. (E) $2\boldsymbol{A}$.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 9\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}(2\quad 1\quad 3)=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(2,1,3)$，则由式(3.2.1.2)及 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 得到

$$\boldsymbol{A}^{n}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{A}=\left[(2,1,3)\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}\right]^{n-1}\boldsymbol{A}=2^{n-1}\boldsymbol{A}.$$

类型(二) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中多元素，求 $\boldsymbol{A}^{n}$.

一般用递推归纳法求之，即先算出 $n=2,3,\cdots$ 时 $\boldsymbol{A}^{2},\boldsymbol{A}^{3},\cdots$ 的结果，找出其与幂次数 $2,3,\cdots$ 的关系，据此推算出 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂的结果，最后用数学归纳法证明推算的正确性.

例 9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^{n}-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$

(A) $\boldsymbol{O}$. (B) $\boldsymbol{E}$. (C) $-\boldsymbol{E}$. (D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$. (E) 以上结论都不正确.

解法 1 先求出 $\boldsymbol{A}$ 的方幂 $\boldsymbol{A}^{k}$ 的一般公式，为此先求 $\boldsymbol{A}^{2}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{3}=\boldsymbol{A}^{2}\cdot\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}^{2}=2^{2}\boldsymbol{A},\cdots$，由此得到 $\boldsymbol{A}^{k}=2^{k-1}\boldsymbol{A}$，$k=1,2,\cdots$，于是 $\boldsymbol{A}^{n}-2\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-1}\boldsymbol{A}-2\times 2^{n-2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。仅(A)入选.

解法 2 当 $n=2$ 时，$\boldsymbol{A}^{2}-2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{2}-2\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$.

当 $n>2$ 时，原式 $=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^{2}-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{n-2}\cdot\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

故 $n\geqslant 2$ 时，$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{O}$. 仅(A)入选.

解法 3　$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，

而 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$.

故　$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}\cdot\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}(n\geqslant 2)$。仅(A)入选.

例 10　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^8=$

(A) $\begin{bmatrix}-8&8\\8&-8\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}-16&16\\16&-16\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}-64&64\\64&-64\end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix}64&64\\64&64\end{bmatrix}$.　(E) $\begin{bmatrix}128&-128\\-128&128\end{bmatrix}$.

解　用递推归纳法求之。

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2\\-2&2\end{bmatrix}=-2\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}^8=(\boldsymbol{A}^2)^4=(-2\boldsymbol{A})^4=16(\boldsymbol{A}^2)^2=16(-2\boldsymbol{A})^2$$

$$=64\boldsymbol{A}^2=-128\boldsymbol{A},$$

即　$\boldsymbol{A}^8=\begin{bmatrix}128&-128\\-128&128\end{bmatrix}$。仅(E)入选.

类型(三)　计算能分解为两可交换的矩阵之和的高次幂。

常利用命题 3.2.1.2 计算。

例 11　已知 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}^n$.

解　$\boldsymbol{B}$ 可分解为单位矩阵与一主对角元为零的上三角阵之和，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A},$$

而 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，利用命题 3.2.1.2 展开可求出 $\boldsymbol{B}^n$.

又因 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O}$，…，即 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ $(k\geqslant 3)$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^n &= (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^n = \boldsymbol{E}^n + n\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_n^2\boldsymbol{E}^{n-2}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^n \\ &= \boldsymbol{E} + n\boldsymbol{A} + \frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{A}^2 \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 2n & 3n\\ 0 & 0 & 2n\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 2n(n-1)\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 2n & 2n^2+n\\ 0 & 1 & 2n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}。\end{aligned}$$

注意　在展开式(3.2.1.1)**中如有** $\boldsymbol{A}^k$ **或** $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}$ $(k<n)$**，用上述展开式计算矩阵的高次幂更简单.**

类型(四)　利用初等矩阵的性质计算方阵的高次幂.

因初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ **左乘(或右乘)矩阵** $\boldsymbol{A}$**，相当于对** $\boldsymbol{A}$ **施以相应的初等行(或列)变换(参阅** 3.2.2 **节** 6.(3)**初等变换与初等矩阵的性质)，所以初等矩阵** $\boldsymbol{P}$ **的高次幂** $\boldsymbol{P}^k$ **左乘或(和)右乘矩阵** $\boldsymbol{A}$ **时，要注意分析相应的这些初等变换对** $\boldsymbol{A}$ **变换的结果，根据这变换的结果可直接写出所求矩阵.**

例 12　计算 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{2001}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{2002}$。

解　矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **均为初等矩阵，因** $\boldsymbol{P}^{2001}$ **左乘** $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{Q}^{2002}$ **右乘** $\boldsymbol{A}$**，其中** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$。

$\boldsymbol{P}^{2001}$ **左乘** $\boldsymbol{A}$**，其含义就是对** $\boldsymbol{A}$ **进行** 2001 **次的第** 1 **行、第** 2 **行调换，显然，这变换的结果就是对** $\boldsymbol{A}$ **进行一次第** 1 **行、第** 2 **行交换，即**

$$\boldsymbol{P}^{2001}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{2002}$**，其含义就是对** $\boldsymbol{B}$ **矩阵进行** 2002 **次的第** 1 **列、第** 3 **列的调换，显然，变换结果就是对** $\boldsymbol{B}$ **没有进行变换，因此有**

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2001}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2002}=\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}。$$

题型四　求与已知矩阵可交换的所有矩阵

用待定元素法求之. 由所给矩阵的行数和列数，设出所求矩阵的行数和列数及待求的矩阵元素。根据矩阵相等的定义列出齐次方程组，并求出其通解，将通解向量中的元素，代入所求矩阵中的待求元素即为所求. 或确定齐次线性方程组的独立变量与自由变量，并将独立变量用由自变量表示之，代入所求矩阵，即为所求.

例 13[2000 年Ⅱ34]　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 相乘可交换的全体矩阵.

解　设待求矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 可交换得到

$$\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x_1-x_3&x_2-x_4\\2x_1+3x_3&2x_2+3x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+2x_1&-x_1+3x_2\\x_3+2x_4&-x_3+3x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

亦即
$$\begin{bmatrix}-x_3-2x_2&-2x_2+x_1-x_4\\2x_1+2x_3-2x_4&2x_2+x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}。$$

由矩阵相等的定义得到

$$\begin{cases}2x_2+x_3=0,\\-x_1+2x_2+x_4=0,\\x_1+x_3-x_4=0,\\2x_2+x_3=0。\end{cases}\qquad①$$

将方程组①的系数矩阵使用初等行变换化为阶梯形矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&1&-1\\0&2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1/2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1,$$

得到方程组①的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1/2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}。$$

其通解为 $$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=C_1\boldsymbol{\alpha}_1+C_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-C_1+C_2,(-1/2)C_1,C_1,C_2)^{\mathrm{T}},$$

将 $$x_1=-C_1+C_2,x_2=(-1/2)C_1,x_3=C_1,x_4=C_2$$

代入矩阵 $\boldsymbol{X}$ 得到所求矩阵为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-C_1+C_2 & (-1/2)C_1\\ C_1 & C_2\end{bmatrix},\quad C_1,C_2 \text{ 为任意实数.}$$

或由秩$(\boldsymbol{A}_1)=2$ 知，方程组①的独立变量有 2 个，自由变量也有 $n-2=4-2=2$ 个. 为方便计，确定 x_1,x_2 为独立变量，x_3,x_4 为自由变量，且 $x_1=-x_3+x_4,x_2=(-1/2)x_3$，将此代入待求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 中得到

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-x_3+x_4 & -x_3/2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix},$$

其中 x_3,x_4 为任意实数.

例 14[1999 年 Ⅱ 23] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 首先要使 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 都有意义，$\boldsymbol{B}$ 一定是三阶矩阵，用待定系数法决定 $\boldsymbol{B}$ 的各元素。设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix},$$

则 $$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&0&0\\b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}b_{12}&b_{13}&0\\b_{22}&b_{23}&0\\b_{32}&b_{33}&0\end{bmatrix},$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 得到下列等式：

$$b_{12}=b_{13}=b_{23}=0,\quad b_{11}=b_{22}=b_{33},\quad b_{21}=b_{32}.$$

而 b_{33} 可任意取值，不妨设为 z. 又设 $b_{11}=b_{22}=b_{33}=x,b_{21}=b_{32}=y,x,y,z$ 均为自由变量.

于是满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一般形式为 $\begin{bmatrix}x&0&0\\y&x&0\\z&y&x\end{bmatrix}$，$x,y,z$ 可取任

意实数.

题型五　计算方阵的行列式

类型(一)　计算抽象矩阵的行列式。

常利用下述命题中的公式计算。

命题 3.2.1.3　设 A,B 为 n 阶矩阵，k 为实数，则

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；　(2) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；　(3) $|\boldsymbol{A}k|=|\boldsymbol{A}|^k$；

(4) $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；　(5) $|\boldsymbol{A}^{-1}=1/|\boldsymbol{A}|$；　(6) $|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

分块矩阵的行列式可用下述命题中的公式计算。

命题 3.2.1.4　分块矩阵的行列式

(1) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O}_{n\times m}\\ \boldsymbol{C}_{m\times n} & \boldsymbol{B}_{m\times m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{C}_{n\times m}\\ \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{B}_{m\times m}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{n\times n}||\boldsymbol{B}_{m\times m}|$；

(2) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{A}_{n\times n}\\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{A}_{n\times n}\\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{m\times n}\end{vmatrix}=(-1)^{m\times n}|\boldsymbol{A}_{n\times n}||\boldsymbol{B}_{m\times m}|$；

(3) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O}_{n\times m}\\ \boldsymbol{O}_{m\times n} & B_{m\times m}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{n\times n}||\boldsymbol{B}_{m\times m}|$；

(4) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{Q}_{n\times m} & \boldsymbol{A}_{n\times n}\\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n}\end{vmatrix}=(-1)^{m\times n}|\boldsymbol{A}_{n\times n}||\boldsymbol{B}_{m\times m}|$.

其中，$\boldsymbol{O}_{m\times n}$，$\boldsymbol{O}_{n\times m}$ 均为零矩阵.

两分块矩阵的乘积的行列式，只要符合分块矩阵可相乘法则，先将两分块矩阵相乘，然后再取行列式.

例 15　设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，已知 $|\boldsymbol{A}|=5$，求

$$|\boldsymbol{B}|=|2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3|.$$

解法 1　显然 $\boldsymbol{B}$ 的各个列向量均为 $\boldsymbol{A}$ 的三个列向量的线性组合. 将 $\boldsymbol{B}$ 改写为 $\boldsymbol{A}$ 与另一个数字矩阵的乘积，即

$$(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

易求得 $\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=6$，

则 $|2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$=|\boldsymbol{A}|\times 6=5\times 6=30.$

解法 2 利用行列式性质求之，自行求出（略）.

例 16[1998 年 Ⅰ 30] 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 4 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，求

(1) $|5\boldsymbol{AB}|$；　(2) $|-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|$；　(3) $|(\boldsymbol{AB})^{-1}|$；

(4) $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|$；　(5) $|[(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}]^{-1}|$.

解 (1) $|5\boldsymbol{AB}|=5^4|\boldsymbol{AB}|=5^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-3750.$

(2) $|-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=(-1)^4|\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-6.$

(3) $|(\boldsymbol{AB})^{-1}|=|\boldsymbol{AB}|^{-1}=-1/6.$

(4) $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{B}|^{-1}=-1/6.$

(5) $|((\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}})^{-1}|=|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}|^{-1}=|\boldsymbol{AB}|^{-1}=-1/6.$

例 17 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times n$ 矩阵，则必有

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

解 因 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$。仅(C)入选.

类型(二) 计算由行(列)向量表示的矩阵的行列式。

利用行列式加法(减法)运算法则计算，设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为同维列向量，$\boldsymbol{\beta}_i$ 为同维行向量($i=1,2,3,4$)，则

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|+|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)|=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)|$$

$$\left|\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_4\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4\end{bmatrix}\right|。$$

这里要区分矩阵相加与行列式相加的不同含义，两矩阵相加，则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4),$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\boldsymbol{\beta}_1\\ 2\boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4\end{bmatrix}.$$

例 18 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_2\\ 3\boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 都是三维行向量，其已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=18$，$|\boldsymbol{B}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

解 两矩阵相减，其对应行分别相减，因而

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_2\\ 3\boldsymbol{\gamma}_3-\boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ 2\boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}.$$

且行列式的第 1 行为两分列之差，因而可拆分为两行列式之差，得到

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=2\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_2\\ 3\boldsymbol{\gamma}_2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\times 18-2\times 2=2.$$

类型(三)　计算分块矩阵的行列式。

例 19　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=-1$，则行列式 $\left|2\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & -2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}\right|=$_____.

解
$$\left|2\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & -2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}\right|=2^6|\boldsymbol{A}||-2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=2^6\times(-2)^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*|$$
$$=2^9|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=2^9|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=2^9|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}|$$
$$=2^9\times 1^3|\boldsymbol{E}|=2^9.$$

例 20　已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=4,|\boldsymbol{B}|=-5$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}/4 & \boldsymbol{C}\\ 0 & -\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=$

(A) $-1/16$.　(B) $-3/16$.　(C) $-5/16$.　(D) $-7/16$.　(E) $-9/16$.

解
$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}/4 & \boldsymbol{C}\\ 0 & -\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right||-\boldsymbol{B}|=(-1)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$
$$=(-1/64)\times 4\times(-5)=-5/16。\text{仅(C)入选.}$$

类型(四)　计算矩阵和(差)的行列式。

一般情况下 $|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|\pm|\boldsymbol{B}|$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，因此常将两矩阵的和(差)利用题设或恒等变形为两矩阵的乘积，或化为同一个矩阵的倍数，再计算其行列式.

例 21　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解　$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$
$$=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|,$$

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|(1-|\boldsymbol{A}|)=0$，而 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $1-|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

例 22　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=1/2$，求行列式 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$ 的值.

解法 1　利用 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 计算得到

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}/3-\boldsymbol{A}^{-1}|=|(-2/3)\boldsymbol{A}^{-1}|$$
$$=(-2/3)^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=-16/27.$$

解法 2 利用 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*/|\boldsymbol{A}|=2\boldsymbol{A}^*$ 计算得到

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{-1}/3-2\boldsymbol{A}^*||(2/3)\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^*|=|(-4/3)\boldsymbol{A}^*|$$
$$=(-4/3)^3|\boldsymbol{A}^*|=(-4/3)^3|\boldsymbol{A}|^{3-1}$$
$$=(-4/3)^3\times(1/4)=-16/27.$$

解法 3 $(1/2)|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}/3-2\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}/3-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|$

$$=|\boldsymbol{E}/3-2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{E}/3-\boldsymbol{E}|$$
$$=|(-2/3)\boldsymbol{E}|=-(8/27)|\boldsymbol{E}|=-8/27,$$

即 $$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=-2\times 8/27=-16/27.$$

例 23[2004 年Ⅰ24] 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$

(A) 2. (B) 1/2. (C) −2. (D) −1/2. (E) **以上结论都不正确.**

解 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

由于 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=18\neq 0$，**故** $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

由于 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2\neq 0$，**故** $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$，**且**

$$|\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}|=1/|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=1/2.$$ **仅**(B)**入选.**

题型六 讨论矩阵的对称性

类型(一) 讨论矩阵是否对称。

利用下述定义讨论之。

定义 3.2.1.2 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，**如果** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$(**或** $a_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$)，**则称** $\boldsymbol{A}$ **为对称矩阵.**

此外也可利用对称矩阵的性质判别之。

命题 3.2.1.5 对称矩阵的和、数乘仍是对称矩阵。

命题 3.2.1.6 当且仅当两对称矩阵能交换时，其积也是对称矩阵.

命题 2.3.1.7 互为转置的两矩阵乘积为对称矩阵.

例 24 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$，**则下列表述不正确的是**

(A) $\boldsymbol{AB}$ **为对称矩阵，**$\boldsymbol{B}$ **是三阶对称矩阵.** (B) $2\boldsymbol{A}$ **为对称矩阵.**

(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.　　(D) $\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(E) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$ 为对称矩阵.

解　因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,由命题 3.2.1.6 知,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 不一定为对称矩阵,(A) 不正确。又由命题 3.2.1.5、命题 3.2.1.7 知,$2\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

因 $|\boldsymbol{A}|=8\neq0$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆,易求得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3/2 & -1/4 & 1/2\\ -1/4 & 3/4 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1\end{bmatrix}$. 显然 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为对称矩阵。又因 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$,由命题 3.2.1.6 知,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为对称矩阵。仅(A)入选.

例 25　设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵,则下列结论中不正确的是

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵.　　(B) 对任意矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对称矩阵.

(C) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵.　　(D) 若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可换,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵.

(E) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵.

解　因 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵,由命题 3.2.1.5 知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵,(A)、(E) 均正确. 因 $(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,(B) 也正确.

因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,由命题 3.2.1.6 即知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵,(D) 正确. 因(C)中矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 不一定有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 不对称(利用命题 3.2.1.6). 事实上 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. 仅(C)入选.

类型(二)　讨论矩阵是否为反对称矩阵。

讨论方法与本题类型(一)类似. 常用反对称矩阵的定义讨论之.

定义 3.2.1.3　如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$(或 $a_{ij}=-a_{ji}$,$i,j=1,2,\cdots,n$),则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

也可利用其性质判别之。

命题 3.2.1.8　反对称矩阵的和、数乘仍是反对称矩阵.

命题 3.2.1.9　当且仅当反对称矩阵与对称矩阵可换时,其积为反对称矩阵.

事实上,设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分别为同阶的反对称矩阵、对称矩阵,则 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵.

例 26(条件充分性判断)　$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵;　　(2) $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵.

解　当条件(1)成立时,由

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$$

知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵。条件(1)不充分. 当条件(2)成立时,由

$(\boldsymbol{ABA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{ABA}$，$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

$=\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})-(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}$

知 $\boldsymbol{ABA}$ 与 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 都是对称矩阵。仅 B 入选.

例 27（条件充分性判断） $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵；

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵.

解 当条件(1)成立时，因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 不一定成立，由命题 3.2.1.9 即知 $\boldsymbol{AB}$ 不是反对称矩阵. 条件(1)不充分。当条件(2)成立时，由命题 3.2.1.9 即知 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵。事实上有

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{BA}=-\boldsymbol{AB}.$$

条件(2)充分。仅 B 入选.

习 题 3.2.1

(一) 问题求解

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n}=$

(A) 3^n. (B) 4^n. (C) 5^n. (D) 6^n. (E) 7^n.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；

(2) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{O}=\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

正确的命题个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

4. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，下列各式正确的是

(A) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$. (B) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$. (C) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

(D) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$. (E) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换的充分必要条件是

(A) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$. (B) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2$.

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$. (D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

6. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$**,则** $\boldsymbol{A}^{2003}=$

(A) $2^{1000}\boldsymbol{A}$. (B) $2^{1001}\boldsymbol{A}$. (C) $2^{1002}\boldsymbol{A}$. (D) $2^{1003}\boldsymbol{A}$. (E) $2^{1004}\boldsymbol{A}$.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=-3$,则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$

(A) $-2^{2n-1}/3$. (B) $2^{2n}/3$. (C) $2^{2n+1}/5$.

(D) $3^{2n+1}/4$. (E) $5^{2n+1}/6$.

8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是三维列向量,设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$,则 $|2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}|=$

(A) $2|\boldsymbol{A}|-5|\boldsymbol{B}|$. (B) $8|\boldsymbol{A}|-125|\boldsymbol{B}|$. (C) $18|\boldsymbol{A}|-45|\boldsymbol{B}|$.

(D) $9|\boldsymbol{A}|-9|\boldsymbol{B}|$. (E) **以上结论都不正确.**

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵,则下述矩阵不为对称矩阵的是

(A) $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$. (B) $-\boldsymbol{ABA}$. (C) $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$. (D) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$. (E) $\boldsymbol{BA}^2\boldsymbol{B}$.

10. 若矩阵 A 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 满足

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. (B) $\boldsymbol{A}$ **为任意矩阵.** (C) $\boldsymbol{A}$ **可逆.**

(D) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. (E) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=-1$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|(2\boldsymbol{A})^{-1}+2\boldsymbol{A}^*|=$

(A) $-9/8$. (B) $-27/8$. (C) -2. (D) $27/8$. (E) $9/8$.

(二) 条件充分性判断

1. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$。

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$; (2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$。

2. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$; (2) $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

3. $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$，则 $A^n=\begin{bmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) $a=1,b=1$；　　(2) $a=1,b=0$.

4. A,B 均为 n 阶矩阵，$AB=BA$.

(1) $AB^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A$；　　(2) A 是对称矩阵.

(三) 解答题

1. 设 A 是三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维向量组，满足

$$A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3,\quad A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3,\quad A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2.$$

求 A 的行列式 $|A|$.

2. [2001 年 Ⅰ 25]　已知 A 是 4 阶矩阵，且 $|A|=a\neq 0$，求 $||A^*|A|$.

3. 设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，且 $|A|=a,|B|=b,C=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$，则 $C=$_____.

4. 已知 A,B 均为三阶矩阵，$|A|=4,|B|=-5$，试求 $|2AB|,|AB^{\mathrm{T}}|,|A^{-1}B^{-1}|,|-A^{-1}B|,|((AB)^{-1})^{\mathrm{T}}|,\begin{vmatrix} A/4 & C \\ O & -B \end{vmatrix}$.

5. [1997 年 Ⅱ 19]　若 A 是三阶矩阵，且 $|A|=3$. 求 $|A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}|$.

6. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$，$n$ 为正整数，则 $A^n=$_____.

7. 设 A 为 n 阶非零矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^{T} 是 A 的转置矩阵. 当 $A^*=A^{\mathrm{T}}$ 时，证明 $|A|\neq 0$.

8. 求与矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

9. 设 A,B 是两个反对称矩阵，则 $AB-BA$ 是反对称矩阵.

10. [1999 年 Ⅱ 22]　设 $f(x)=x^2-3x+1$，$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，求 $f(A)$.

3.2.2 逆矩阵

1. 逆矩阵的概念

定义 3.2.2.1 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

命题 3.2.2.1 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，其逆矩阵惟一.

命题 3.2.2.2 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都可逆，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. 矩阵可逆的充分必要条件

定理 3.2.2.1 下列诸条件之一均为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

(2) $\boldsymbol{A}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积；

(3) $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等变换可化为单位矩阵.

定理 3.2.2.2 (1) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆；反之 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 也可逆；(2) $\boldsymbol{AB}$ 不可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一个不可逆.

3. 逆矩阵的性质

1° $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；　　2° $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}/k$ (k 为非零实数)；

3° $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；　4° $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；　(5) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

4. 逆矩阵的求法

1) 伴随矩阵法

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，由定理 3.2.2.1(1) 知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{*}/|\boldsymbol{A}|$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，即

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

2) 初等行变换法

1° $$[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{A}^{-1}]。\tag{3.2.2.1}$$

2° 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，且

$$[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}]。\tag{3.2.2.2}$$

3° 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，由于 $(\boldsymbol{XA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，且

$$[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \vdots\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}\ \vdots\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}],\tag{3.2.2.3}$$

因而 $$\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

5. 可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的性质

命题 3.2.2.3 （1）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$（无论 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆都对！）；

（2）$(\lambda\boldsymbol{A})^{*}=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}$（因式对 $|\boldsymbol{A}|=0$ 也对）；

（3）$(\boldsymbol{A}^{*})=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$（因式对 $|\boldsymbol{A}|=0$ 也对）；

（4）$(\boldsymbol{AB})^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}$；

（5）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{*}=(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}$；

（6）若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^{*}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}$；

（7）$(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

6. 矩阵的初等变换

1）初等变换

对矩阵施行以下三种变换，称为矩阵的初等变换：

1° 交换矩阵的某两行（列）；

2° 以一个非零数 k 乘矩阵的某一行（列）；

3° 将矩阵的某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上.

2）初等矩阵

对单位矩阵实施一次某种初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

初等变换有上述三种形式，相应地初等矩阵也有三种形式.

3）初等变换与初等矩阵的性质

1° 初等变换不改变矩阵的秩；

2° 对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 进行某种初等行变换等于用同种的 m 阶初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 施行某种列变换等于用同种的 n 阶初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$；

3° 初等矩阵为可逆矩阵，且其逆矩阵仍为初等矩阵；

4° 经若干次初等行变换可将矩阵化为行阶梯形矩阵.

定义 3.2.2.2 若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 满足其非零行（即元素不全为零的行）的第一个非零元素的列下标随着行标的递增而严格增大，且该矩阵若有元素全为零的行必排在非零行的下方，称该矩阵为（行）阶梯形矩阵.

把一个矩阵通过初等行变换化成(行)阶梯形矩阵是线性代数中各类计算题中常使用的基本运算,考生务必熟练掌握.

题型一　利用逆矩阵的性质讨论有关矩阵等式的正确性

例 1[2002 年 Ⅱ 16]　设 A,B 均为 n 阶矩阵,且 $(AB)^2=E$,则下列命题中不成立的是

(A) $(BA)^{-1}=BA$.　　(B) $AB=E$.

(C) 秩$(A)=$秩(B).　　(D) $B^{-1}=ABA$.

解　由 $(AB)^2=E$ 得到 $ABAB=A(BAB)=E$,故 A 可逆,秩$(A)=n$. 又由 $ABAB=A(BAB)=E$ 得到 $(BAB)A=(BA)BA=E$,故 BA 可逆,且 $(BA)^{-1}=BA$;再 $BABA=B(ABA)=E$ 得到 B 可逆,且 $B^{-1}=ABA$,因而秩$(B)=n$. 于是秩$(A)=$秩(B).

综上可知,选项(A)、(C)、(D) 均成立,但(B) 项不一定成立. 虽然 $AB=E$ 是 $(AB)^2=E$ 的充分条件,但不是必要条件. 事实上由 $(AB)^2-E=O$ 得到 $(AB-E)(AB+E)=O$,满足等式的 AB。除 $AB=E$ 外,还有其他矩阵,例如 $AB=-E$ 也满足上式因而也满足 $(AB)^2=E$。(B) 不成立. 仅(B)入选.

例 2　设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵,则下述结论中不正确的是

(A) $[(AB)^{\mathrm{T}}]^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}(B^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(B) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

(C) $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$ (k 为正整数).

(D) $|(kA)^{-1}|=k^{-n}|A|^{-1}$ ($k\neq 0$,常数).

(E) 若 $(AB)^2=E$,则 $(BA)^2=E$.

解　对选项(A)成立,因为由可逆矩阵性质有

$$[(AB)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}]^{-1}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}(B^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}(B^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

选项(B) 不一定成立。首先 A,B 可逆,$A+B$ 不一定可逆,例如 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 都可逆,但 $A+B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 不可逆. 即使 $A+B$ 可逆,也不一定有 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$. 因而(B) 不成立.

选项(C) 成立,因为由逆矩阵性质有

$$(A^k)^{-1}=(AA\cdots A)^{-1}=A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}=(A^{-1})^k \quad (k \text{ 为正整数}).$$

选项(D)、(E) 都成立,因为

$$|(kA)^{-1}|=\left|\frac{1}{k}A^{-1}\right|=\frac{1}{k^n}|A^{-1}|=\frac{1}{k^n}\frac{1}{|A|}=k^{-n}|A|^{-1},$$

$$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E},\quad \text{即}\quad (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{E},$$

由结合律有 $$\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BAB})=\boldsymbol{E},$$

故 $$(\boldsymbol{BAB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})=(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}。$$

或在 $\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{E}$ 两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{BAB}=\boldsymbol{A}^{-1}$，再在后一方程两端右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到

$$\boldsymbol{BABA}=(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$ 仅(B)入选。

例 3 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则下列正确的表示式是

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{AB})^{-1}$.

(C) $((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{-1}=((\boldsymbol{A}^{-1})^{-1})^{\mathrm{T}}$.　　(D) $(3\boldsymbol{A})^{-1}=3\boldsymbol{A}^{-1}$.

(E) $((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　(A) 显然不正确. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{BA})^{-1}$，(B) 也不正确。$((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A})^{-1}$，而 $((\boldsymbol{A}^{-1})^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，(C) 也不正确。$(3\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}/3\neq\boldsymbol{A}^{-1}$，(D) 也不正确. $((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1})^{\mathrm{T}}=((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$。仅(E)入选.

例 4　$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，n 为奇数，$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=$

(A) 1。　(B) -1。　(C) 0。　(D) 2。　(E) -4。

解
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|\\&=|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}|\\&=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|\\&=(-1)^n|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|,\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，即 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$。仅(C)入选.

例 5　下列等式中正确的是

(A) $[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}]^*$。(B) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$。

(C) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$。　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$。

解　由命题 3.2.2.3(5)知，伴随、转置矩阵求逆可任意交换运算次序。仅(A)入选。事实上，

$$[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(\boldsymbol{A}^*)^{-1}]^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}^{-1})^*]^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}]^*.$$

其余选项均不成立，且是常见错误.

例 6(条件充分性判断)　三阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$.

(1) $\boldsymbol{ABAC}=\boldsymbol{E}$；　(2) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

解　当条件(1)成立时，显然有 $(\boldsymbol{ABAC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{CABA}=\boldsymbol{E},$$

则 $$(\boldsymbol{CABA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}.$$

条件(1)充分。当条件(2)成立时，有

$$(\boldsymbol{CABA})^{-1}=\boldsymbol{E},\quad \text{即}\quad [(\boldsymbol{CABA})^{-1}]^{-1}=\boldsymbol{E}^{-1},$$

故 $\boldsymbol{CABA}=\boldsymbol{E}$，两端取转置有

$$(\boldsymbol{CABA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}.$$

条件(2)也充分。仅 D 入选.

例 7 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，$a<0$，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}/a$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) -1. (E) -2.

解 由题设有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{E}+\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}{a}\right)=\boldsymbol{E}$. 整理得

$$(1-a)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}\quad \text{或}\quad (1-a-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}。$$

因而 $(1-a-2a^2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$。因 $a<0$，故

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O}.$$

于是 $1-a-2a^2=0$，即 $2a^2+a-1=(2a-1)(a+1)=0$.

由 $a<0$ 得到 $a=-1$。仅(D)入选.

题型二 讨论矩阵的可逆性

法一 利用定义 3.2.2.1 或命题 3.2.2.2 讨论之.

例 8(条件充分性判断) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆。

(1) 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BA}$； (2) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

解 条件(1)成立时，有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BA},\quad \text{即}\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}.$$

化为 $$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{E}.$$

由命题 3.2.2.2 知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，于是条件(1)充分。当条件(2)成立时，有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 得到

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E},$$

即 $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}.$$

由命题 3.2.2.2 知，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆。仅 D 入选.

例 9(条件充分性判断) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 必可逆.

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$； (2) $\boldsymbol{ABA}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{E}$.

解 当条件(1)成立时，有 $AB-B-A=0$，即

$$(A-E)B-A+E=E,\quad (A-E)B-(A-E)=E,\quad (A-E)(B-E)=E.$$

由命题 3.2.2.2 知，$A-E$ 可逆. 条件(1)充分。当条件(2)成立时，有

$$ABA-BA+B-AB=E,\quad 即\quad (A-E)(BA)-(AB-B)=E,$$

$$(A-E)BA-(A-E)B=(A-E)(BA-B)=(A-E)B(A-E)=E.$$

由命题 3.2.2.2 知，$A-E$ 可逆，条件(2)也充分。仅 D 入选.

法二 利用矩阵可逆的充分必要条件即定理 3.2.2.1 和定理 3.2.2.2 讨论之.

例 10 设 A,B 均是 n 阶矩阵，则正确命题是

(A) 若 A,B 均可逆，则 $A+B$ 可逆.

(B) 若 A,B 均不可逆，则 $A+B$ 不可逆.

(C) 若 AB 不可逆，则 $A+B$ 不可逆.

(D) 若 AB 可逆，则 A 与 B 均可逆.

(E) 若 $A+B$ 可逆，则 A 与 B 均可逆.

解 若 AB 可逆，由定理 3.2.2.2(1)知 A,B 也可逆。事实上由 $|AB|=|A||B|\neq 0$，有 $|A|\neq 0,|B|\neq 0$，即 A,B 均可逆，选项(D) 正确，其余各选项都不正确.

若 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $A+B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，因 $|A+B|=0$，$A+B$ 不可逆。因而(A)不正确。

若 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$不可逆，虽然 $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$不可逆，但 $A+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$可逆. 因而(B)不正确，(C)也不正确。

本例也说明 $A+B$ 可逆，但 $|A|=|B|=0$，A,B 不可逆. 于是(E)不正确。仅(D)入选。

注意 两个可逆矩阵之和(差)不一定可逆；同样，两个矩阵的和(差)可逆，但这两个矩阵也不一定可逆.

例 11[2000 年 I 13] 已知 A,B 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则

(A) A,B 中必有一个可逆.　　(B) A,B 都不可逆.

(C) A,B 都可逆.　　(D) 以上结论都不正确.

解法 1 事实上，如果 A,B 中有一个可逆，例如 A 可逆，则由 $AB=O$，得

到 $A^{-1}AB=B=O$，与题意矛盾. 仅(B)入选。

解法 2 因 $AX=0$ 有非零解，故 $|A|=0$，因而 A 不可逆，又由 $AB=O$ 得到 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=O$，而 A^{T} 为非零矩阵，故 $B^{\mathrm{T}}X=O$ 也有非零解，因而 $|B^{\mathrm{T}}|=|B|=0$，即 B 不可逆. 仅(B)入选。

注意 方阵 $AB=O$，当然 AB 不可逆，由定理 3.2.2.2(2)即知 A 与 B 中至少有一个不可逆. 由上例知如果再加上条件 A,B 均为非零矩阵，则两者都不可逆.

例 12(条件充分性判断) n 阶矩阵 $A+B$ 可逆.

(1) $A,B,A^{-1}+B^{-1}$ 都可逆； (2) A,B 与 $A^{-1}+B$ 都可逆.

解 因 $$A+B=AE+EB=AE+AA^{-1}B=A(E+A^{-1}B)$$
$$=A(B^{-1}B+A^{-1}B)=A(B^{-1}+A^{-1})B,$$

当 $A,B,A^{-1}+B^{-1}$ 可逆时，由定理 3.2.2.2(1)知，其乘积矩阵也可逆，由上式知，$A+B$ 可逆，条件(1)充分。但条件(2)不充分，可举反例如下：

$$A=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1/3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

则 $A+B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ 不可逆，但 $A,B,A^{-1}+B$ 都可逆，事实上

$$A^{-1}+B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1/3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8/3 & 0\\ 0 & 5/2\end{bmatrix}$$

可逆. 条件(2)不充分。仅 A 入选.

例 13(条件充分性判断) 设 A 为 n 阶矩阵，则 $E\pm A$ 均不可逆.

(1) $A^2=E$； (2) $a_{11}\neq\pm1$。

解法 1 当条件(1)成立时，有 $A^2-E=(E-A)(A+E)=O$。由定理 3.2.2.2(2)知，$E-A,E+A$ 至少有一个不可逆。如条件(2)也成立，则 $A+E$ 与 $E-A$ 两者都不可逆，如果有一个可逆，例如 $A+E$ 可逆，则由

$$(E-A)(E+A)=O$$

得到 $(E-A)(E+A)(E+A)^{-1}=O(E+A)^{-1}=O$， 即 $E-A=O$，

故 $E=A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $a_{11}=1$ 与条件(2)矛盾。因此当条件(1)与条件(2)同时成立时，必有 $E\pm A$ 均不可逆. 仅 D 入选。

解法 2 利用本节例 11 的结论“$AB=O$ 且 $A\neq O,B\neq O$，则 A,B 都不可逆”证之. 事实上，因 $(A-E)(A+E)=O$，而 $a_{11}\neq\pm1$，则 $A-E\neq O,A+E\neq O$，故 $A-E,A+E$ 均不可逆. 仅 D 入选。

法三 对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 可用下述命题证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

命题 3.2.2.4 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使多项式 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,且 $f(x)$ 的常数项不为零,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

例 14(条件充分性判断) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为零.

(1) $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$; (2) $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

解 当条件(1)成立时,有 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, $f(x)=x^2-x-6$ 且 $f(x)$ 的常数项为 -6 不等于零,故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,因而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为零,条件(1)充分.

但当条件(2)成立时,$\boldsymbol{A}$ 满足 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,其中 $f(x)=x^2-5x$. 由 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,知 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}$ 不可逆. 根据定理 3.2.2.2(2)知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}$ 中至少有一个不可逆,因而 $\boldsymbol{A}$ 不一定可逆.

当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时,$|\boldsymbol{A}|=0$,这时不能保证 A 的特征值全不为零,条件(2)不充分。仅 A 入选.

例 15 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,证明对任何实数 k, $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 可逆.

证 用命题 3.2.2.4 证之. 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{E}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}&=(\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{E})^2+2(\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{E})+5\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{B}^2-2(k+1)\boldsymbol{B}+(k^2-2k+5)\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}.\end{aligned}$$

设 $f(x)=x^2-2(k+1)x+(k^2-2k+5)$,因 $f(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$,且 $\Delta=b^2-4ac=4-4\times 5=-16<0$,故对任何实数 k,有 $k^2-2k+5\neq 0$,即 $f(x)$ 的常数项不等于零,由命题 3.2.2.4 知,对任何实数 $\boldsymbol{B}$ 可逆,即 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 可逆.

题型三 矩阵元素给定,求其逆矩阵

法一 用伴随矩阵法求之。

根据公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*/|\boldsymbol{A}|$ 求其逆矩阵.

特别当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 为二阶矩阵时,由行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ 得到代数余子式

$$A_{11}=(-1)^{1+1}d=d,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}c=-c,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}b=-b,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}a=a,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$,因而得到二阶矩阵的伴随矩阵的求法:将 $\boldsymbol{A}$ 的主对角上两元素位置调换,次对角线上的两元素

符号调换即得. 由此进而得到二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的逆矩阵的求法：如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 可逆，利用两调一除的方法即可求得其逆矩阵

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}. \tag{3.2.2.4}$$

这里的两调就是求二阶矩阵的伴随矩阵中的两调，一除就是用 $|\boldsymbol{A}|$ 除 1.

例 16 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$（　　）.

解 因　　$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5$，

而　　$b^2-4ac=16-4\times1\times5<0$，

故 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 没有实根. 而 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，故 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq0$，$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq0$，因而 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆且其逆矩阵可用两调一除的方法即用式(3.2.2.4)求得，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}&=[(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\\&=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\times\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/2\\ -1 & -1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意　如不将 $\boldsymbol{B}$ 化成乘积矩阵，计算将比较烦琐。

例 17 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 用伴随矩阵法求之，因 $|\boldsymbol{A}|=-2+8-4=2\neq0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

故 $$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ -3/2 & 1 & -1/2\end{bmatrix}.$$

注意　用伴随矩阵法计算 A_{ij} 时，不要忘记所带符号 $(-1)^{i+j}$，用 A_{ij} 构造 A^{*} 时要注意 A_{ij} 的排列次序.

法二　用初等行变换法求之。

对矩阵 $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E})$ 进行初等行变换化为 $(\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{A}^{-1})$，从而直接求得 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

若在初等行变换求逆的过程中出现 $\boldsymbol{A}$ 的某行全为零，则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

用初等行变换法求逆时，只能用初等行变换，其中不能用初等列变换.

例 18[1998 年 Ⅱ 29]　**设** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，**求** $(\boldsymbol{AB})^{-1}$.

解　$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},$$

因 $|\boldsymbol{AB}|=18\neq 0$，**故** $\boldsymbol{AB}$ **可逆。下用初等行变换求出其逆矩阵.**

$$(\boldsymbol{AB}\,|\,\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & -6 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3(-1/3)]{r_2(-1/6)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & -6 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+6r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+4r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-2/3&-2\\0&1&0&0&-1/6&0\\0&0&1&0&0&-1/3\end{array}\right],$$

故
$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2/3&-2\\0&-1/6&0\\0&0&-1/3\end{bmatrix}.$$

例 19[1998 年 Ⅰ 29] 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4&-3&1\\-5&-3&1\\6&4&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 可用初等行变换判定 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆，如果可逆，可同时求出其逆矩阵.

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}-4&-3&1&1&0&0\\-5&-3&1&0&1&0\\6&4&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-1&0\\-5&-3&1&0&1&0\\1&1&0&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+5r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&-3&1&5&-4&0\\0&1&0&-1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2+3r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&0&1&2&2&3\\0&1&0&-1&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&2&2&3\end{array}\right].$$

因在上述初等行变换的过程中虚线左边没有出现一个不可逆的变换矩阵，因而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且其逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}.$$

在所给矩阵方程两端右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得到

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-3&-3\\1&0&1\\-3&0&-2\end{bmatrix}.$$

注意 例 19 中用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵有一点技巧。尽管 $\boldsymbol{A}$ 的

第 1 列没有单位元素，注意到其第 1 列的第 1 行与第 2 行元素相差 1，将其相减，便可产生单位元素，因而使用初等变换 r_1-r_2。这给后面计算带来极大方便。切忌用 -4 除第 1 行元素产生 1，因这样会出现分数，使计算繁杂，易错.

法三　利用下述求逆矩阵的公式求之：

(1) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$ $(k\neq 0)$；　　(2) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；　　(4) $(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$。

例 20[2003 年 Ⅱ 28]　**已知** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{*}$ **是** $\boldsymbol{A}$ **的伴随矩阵，则** $(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}$ **等于**

(A) $\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}4&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　　(C) $\begin{bmatrix}1&1/2&1/2\\0&1/2&1/2\\0&0&1/2\end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix}-1&1/2&1/2\\0&-1/2&-1/2\\0&0&-1/2\end{bmatrix}$.　　(E) **以上结论都不正确.**

解　$(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}/|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|$，**而** $|\boldsymbol{A}|=2$，**故**

$$(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1/2&1/2\\0&1/2&1/2\\0&0&1/2\end{bmatrix}$$

。**仅**(C)**入选.**

例 21　**设** $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ **及** $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ **为** n **阶可逆矩阵，则** $[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^{-1}]^{-1}$ **等于**

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$。　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。

(C) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{A}$。　　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{A}$。

解法 1
$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^{-1}]^{-1}\\&=[\boldsymbol{BB}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^{-1}]^{-1}=\{[\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})]\boldsymbol{B}^{-1}\}^{-1}\\&=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})]^{-1}=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}]^{-1}\\&=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})]^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{A}.\ \text{仅(C)入选.}\end{aligned}$$

解法 2 $[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{-1}\boldsymbol{A}]^{-1}$

$=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABB}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BAB}^{-1}$

$=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^{-1}$. 仅(C)入选.

题型四　求解矩阵方程

求解矩阵方程是一种常见的考题。其解法大致分两步进行:先化简方程,然后求解.

如果矩阵方程中含多个未知矩阵,所求的未知矩阵只有一个,应对所给方程进行适当的矩阵运算,将其恒等变形,消掉非所求的未知矩阵,再代入已知数据,求出所求的未知矩阵.

切忌一开始就代入已知数据,那样往往导致运算复杂化、费时、易错.

类型(一)　求解只含一个未知矩阵的矩阵方程。

先用恒等变形(提取因式等)将方程化简,化成乘积形式,使之变为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$,或 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的形式,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为已知矩阵,再通过左乘或(和)右乘可逆矩阵求出未知矩阵

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\quad 或\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{CB}^{-1}\quad 或\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}.$$

也可通过初等行变换即用式(3.2.2.1)或式(3.2.2.2)或式(3.2.2.3)求之.

例 22[1997 年 Ⅱ 27]　已知 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{A}$,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\1&3&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-1&3\\-3&2&-1\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{X}$.

解法 1　$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1\neq 0$,故 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵,所以由 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{A}$ 得到 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AB}^{-1}$,利用初等行变换式(3.2.2.1)易求得

$$(\boldsymbol{B}\vdots\boldsymbol{E})\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&1&-3&2\end{array}\right],$$

则
$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&-1\\1&-3&2\end{bmatrix},$$

因而
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AB}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-1&3\\-3&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&-1\\1&-3&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 6 & -11 & 7\\ -6 & 7 & -4\end{bmatrix}.$$

解法 2 使用初等行变换式(3.2.2.3),先求出 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,由 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{A}$,得到 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,则

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -11 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & -4\end{array}\right],$$

故 $$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2 & 6 & -6\\ 2 & -11 & 7\\ -1 & 7 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 6 & -11 & 7\\ -6 & 7 & -4\end{bmatrix}.$$

例 23[2002 年 Ⅱ 31] 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}$ 为三阶矩阵,且满足 $\boldsymbol{ACA}+\boldsymbol{BCA}=3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{ACB}-\boldsymbol{BCB}$,求 $\boldsymbol{C}$.

解 由 $$\boldsymbol{ACB}+\boldsymbol{BCA}=3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{ACB}-\boldsymbol{BCB}$$

得到 $\boldsymbol{AC}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{BC}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=3\boldsymbol{E}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=3\boldsymbol{E}$.

又因 $$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\times1\times1+(-1)^{3-1}\times1\times1\times1$$

$$=2+1=3\neq0(\text{利用了式}(3.1.1.12)),$$

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵。用初等行变换式(3.2.2.1)易求得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\vdots\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3\end{array}\right],$$

故 $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

因而 $$\boldsymbol{C}=3[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}]^2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 5\\ 5 & 1 & -7\\ -2 & 5 & 1\end{bmatrix}.$$

例 24[2003 年 Ⅰ 29]　**已知** $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$X$ **满足** $AX+2B=BA+2X$，**则** $X^4=$

(A) $\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$。　(B) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。　(E) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

解法 1　**原式化为** $(A-2E)X=B(A-2E)$，**其中** $A-2E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ **可逆，于是**

$$X=(A-2E)^{-1}B(A-2E),\quad X^4=(A-2E)^{-1}B^4(A-2E),$$

即
$$(A-2E)X^4=B^4(A-2E).$$

这是关于 X^4 **的一个矩阵方程，可用初等行变换式**(3.2.2.2)**求解.**

$$B^4(A-2E)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$(A-2E\ \vdots\ B^4)(A-2E)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\2&0&0&0&0&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right],$$

设 $X^4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. **仅**(B)**入选.**

解法 2　**由** $AX+2B=BA+2X$ **得到** $(A-2E)X=B(A-2E)$ **由于** $A-2E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ **可逆，且** $(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1/2\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，**故**

$$X=(A-2E)^{-1}B(A-2E)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{X}^4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。仅(B)入选.

类型(二) 求解除含未知矩阵外,还含未知逆矩阵的矩阵方程.

常在方程两端左乘或右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{A}^{-1}$),以消掉未知逆矩阵,简化方程.如已知 $\boldsymbol{A}^*$,还可利用 $\boldsymbol{A}^*/|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{A}^{-1}$ 消掉 $\boldsymbol{A}^{-1}$,有时也利用 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1}$ 来消掉 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{B}^{-1}$,简化方程.

例 25 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,且满足方程 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/7\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{B}=$

(A) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/6\end{bmatrix}$. (E) $\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解 因 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,$\boldsymbol{A}$ 可逆,用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 右乘所给方程两端得到

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},\quad \text{即}\quad (\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E},$$

因而 $\boldsymbol{B}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{B}=[(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})/6]^{-1}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}$$

$$=6\left[\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right]^{-1}=6\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}。仅(A)入选.$$

类型(三) 求解除含所求未知矩阵除外,还含未知转置矩阵的矩阵方程.

常利用转置矩阵的性质 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$ 简化方程.

例 26　设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，试将上述关系化简，并求 $\boldsymbol{A}$.

解　由所给的矩阵关系式得到

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},\quad \text{即}\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$，而

$$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\left[\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}.$$

$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ 的逆矩阵可用初等行变换法求得

$$\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

类型(四)　求解与伴随矩阵有关的矩阵方程.

这里与伴随矩阵有关的矩阵方程，其含义是要么方程中含有伴随矩阵或含有与伴随矩阵有关的矩阵，要么方程中不含伴随矩阵但已知伴随矩阵.

这类方程的解法是固定的，利用 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的性质消掉 $\boldsymbol{A}^{*}$，为此，常在所给矩阵等式两端右乘或左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，或在方程两端乘以 $1/|\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|\neq 0)$ 利用 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{*}/|\boldsymbol{A}|$ 消掉 $\boldsymbol{A}^{*}$，简化方程，或利用 $|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 求出 $|\boldsymbol{A}|$.

例 27[2001 年 Ⅱ 30]　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-1&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

解　在 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{X}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $\boldsymbol{X}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{X}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，易求得 $|\boldsymbol{A}|=-3$。下面用初等行变换求出 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$。

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1/3&1/6&2/3\\0&1&0&1/3&1/6&-1/3\\0&0&1&-1/3&1/3&1/3\end{array}\right],$$

故 $$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/6 & 2/3\\ 1/3 & 1/6 & -1/3\\ -1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1/2 & -2\\ -1 & -1/2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

例 28 已知 $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$，$|\boldsymbol{A}|>0$，$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$ 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}^{-1}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解 在所给方程两端右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $\boldsymbol{AB}=3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，再在此方程两端左乘 $\boldsymbol{A}^*$ 得到

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B},$$

即 $$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} \quad 或 \quad (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}。$$

又 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，故 $(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}=3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 因 $|\boldsymbol{A}|>0$，故 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}$，即 $[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})/3]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，从而 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}=[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})/3]^{-1}$，而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*/|\boldsymbol{A}|$。又因 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2$，而 $|\boldsymbol{A}^*|=4$，$|\boldsymbol{A}|>0$，故 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{4}=2$，因而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*/2$。所以有

$$\boldsymbol{B}=\left[\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{A}^*}{2}\right)\right]^{-1}=\left[\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1/6 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

类型(五) 求解 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不是方阵或不可逆.

使用待定元素法求之。先设出所求矩阵的阶数及其元素，再根据矩阵相等的定义列出待求元素所满足的方程解之.

例 29[2004 年Ⅰ25] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为二阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 等于

(A) $\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$。 (C) $\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\ -k_2 & -k_1\end{bmatrix}$。

(D) $\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix}$。(E) 以上结论都不正确(其中 k_1, k_2 为任意常数).

解 由题设得到$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 因$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$,下用待定元素法即解方程组的方法求出矩阵 $\boldsymbol{B}$. 为此设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$,而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \text{即}\quad \begin{cases} x_1+x_3=0, \\ x_2+x_4=0. \end{cases} \tag{①}$$

由方程组①的系数矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$即得其基础解系中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,0,1)$。因而其通解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=(-k_1,-k_2,k_1,k_2),$$

故
$$x_1=-k_1,\quad x_2=-k_2,\quad x_3=k_1,\quad x_4=k_2,$$

所以所求矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$,其中 k_1, k_2 为任意常数。仅(D)入选。

例 30 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,1/2,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置,求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解 由题设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=2$,

又
$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{A}^2=4\times 2\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{A},$$

代入原方程得 $16\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=8\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$,即

$$8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}\quad(\boldsymbol{E}\text{ 为三阶单位矩阵}). \tag{①}$$

因$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$,故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 不可逆. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,代入方程①得到

$$\begin{cases} -x_1+x_2/2=0, \\ 2x_1-x_2=0, \\ x_1+x_2/2-2x_3=1. \end{cases}$$

因
$$\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故所求的通解为 $x=k(1,2,1)^{\mathrm{T}}+(1/2,1,0)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）.

习　题　3.2.2

（一）问题求解

1. 已知 A,B 为三阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 E 是三阶单位矩阵，则 $A-2E=$

（A）$B-4E$.　（B）$(B-4E)^{-1}$.　（C）$(B-4E)/8$.　（D）$8(B-4E)^{-1}$.

（E）以上结论都不正确.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2-2A-3E=O$，则 $(A-E)^{-1}=$

（A）$4(A-E)$.　（B）$(A-E)/4$.　（C）$\pm E/2$.　（D）不能确定.

3. 设 A,B,C,D 都是 n 阶矩阵，满足 $ABCD=E$，则必有

（A）$B^{-1}=ACD$.　（B）$C^{-1}=ABD$.（C）$(BC)^{-1}=DA$.

（D）$(BC)^{-1}=AD$.

4. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^4=O$，则 $(E+A+A^2+A^3)^{-1}=$

（A）$E+A$.　（B）$E-A$.　（C）A.　（D）$2A$.　（E）$3A$.

5. 设 A,B 都是 n 阶矩阵，$AB=O$，则不正确的结论是

（A）秩$(A)+$秩$(B)\leqslant n$.　（B）A 与 B 中至少有一个不可逆.

（C）A 与 B 中至少有一个可逆.（D）A,B 不同时可逆.

（E）$|A|$ 与 $|B|$ 中至少有一个为零.

（二）条件充分性判断

1. n 阶矩阵 A 是可逆矩阵.

（1）A 可以只通过初等行变换化成单位矩阵；　（2）$|A|\neq 0$.

2. $B-E$ 可逆，则 $(B-E)^{-1}=A-E$.

（1）$|B|\neq 0$，且 $|A-E|\neq 0$；　（2）$AB-A-B=O$.

3. 设 A,B 是 n 阶矩阵，$(B-E)^{-1}=-(A+E)/2$.

（1）$B=(A+E)^{-1}(A-E)$；　（2）$B=(A-E)(A+E)^{-1}$.

4. 设 n 阶矩阵 A 满足等式 $A^2-3A+2E=O$，要使得 $A+aE$ 可逆.

（1）$a\neq 1$ 和 2；　（2）$a\neq -1$ 和 -2.

5. 已知 n 阶矩阵 A 满足等式 $A^2+kA+lE=O$，要使得 $A+CE$ 可逆.

（1）C 不是 $x^2+kx+l=0$ 的解；　（2）$-C$ 不是 $x^2+kx+k=0$ 的解.

6. 设 $C=\begin{bmatrix}a&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&b&2\\0&0&c\end{bmatrix}$，**则满足**$(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}A=E$ **的**

$A=\mathrm{diag}(1/2,1/2,1)$，$A^{-1}=\mathrm{diag}(2,2,1)$.

(1) $a=1,b=0,c=2$； (2) $a=1,b=1,c=-2$.

7. 已知 $A=\mathrm{diag}(1,a,1)$，**且** $A^{*}BA=2BA-8E$，**则** $B=\mathrm{diag}(2,-4,2)$.

(1) $a=1$； (2) $a=-2$.

(三) 解答题

1. [2000 **年** Ⅰ 33] **已知** $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，**且满足**

$(2E-A^{-1}B)C^{\mathrm{T}}=A^{-1}$，**求** C.

2. [1999 **年** Ⅰ 30] **已知** $A=\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\\-2&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&3&0\\3&2&3\end{bmatrix}$，**并且** $BX=$

$A+2X$，**求矩阵** X.

3. [1997 **年** Ⅰ 27] **已知** $AX=B$，**其中** $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}$，**求** X.

4. [2000 **年** Ⅱ 24] **已知** $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$ **且** $AB^{*}A=3AB-2E$，**则** $B=$

_____.

5. 设矩阵 A **的伴随矩阵** $A^{*}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，**且** $ABA^{-1}=BA^{-1}+$

$3E$，**其中** E **为** 4 **阶单位矩阵，求矩阵** B.

6. 设三阶矩阵 A，B，**满足关系式** $A^{-1}BA=6A+BA$，**且** $A=$

$\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/7\end{bmatrix}$，**则** $B=$_____.

7. [2002 年 Ⅰ 30] 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}$，求 $\boldsymbol{B}$.

8. [2001 年 Ⅰ 30] 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&1&0\\-3&4&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{XA}+2\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{X}$.

9. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并用 $\boldsymbol{A}$ 的多项式表示 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&0&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\end{bmatrix}$，求 $(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，求 $\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}=(2,-1,4,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}=(1,7,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

12. 已知 $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}=$_____.

13. 若 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$_____.

14. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3.3 向　　量

3.3.1 向量组的线性相关性

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成一个有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为一个 n 维向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，也称为 n 维行向量。n 维列向量则表示为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{bmatrix}$$

由于行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个 $1\times n$ 矩阵，而列向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix}$ 是 $n\times 1$ 矩阵，向量可认为是矩阵的特殊情况. 因而向量的相等、向量的加法及数乘运算都与矩阵的相应运算相同，且满足相同的运算律.

题型一　判别向量组的线性相关性

法一　用线性相关定义判定向量组的线性相关性。

利用向量组线性无关、线性相关的下述定义及其等价说法判别之.

定义 3.3.1.1　对向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geqslant 1)$，如果有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

上述定义有下述等价的说法：

定义 3.3.1.2　如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geqslant 2)$ 中至少有一个向量（注意不要求所有向量）能由其余向量线性表示，则该向量组线性相关.

定义 3.3.1.3　一个向量组不线性相关，就称之为线性无关.

联系线性相关定义，上述定义与下述诸定义等价。

定义 3.3.1.4　对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，总有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

由上定义知，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 成立的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必不是不全为零的一组数，即只有完全是零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 能使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 才线性无关. 因而又得到向量组线性无关的下述等价定义。

定义 3.3.1.5　只有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

由线性相关的定义 3.3.1.2 可得到线性无关的另一等价定义.

定义 3.3.1.6　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geqslant 2)$ 中，若其中每个向量都不能表成其余向量的线性组合，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

例 1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 n 维向量组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分

必要条件是

(A) 存在全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$。

(B) 存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$。

(C) 每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示。

(D) 存在 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示。

解　选项(C)实质上就是定义 3.3.1.6. 它是定义 3.3.1.2 的逆否命题，不正确.(B)不正确. 正确的说法应为定义 3.3.1.4 即对任意一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，总有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$.(A)也不正确. 正确的说法由定义 3.3.1.5 知，将“存在”改为“只有”才正确.(D)中“存在”改为“每个”就正确了. 仅(C)入选.

例 2　向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个是零向量。

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量成比例。

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一部分组线性相关。

(E) 向量个数大于向量的维数。

解　选项(A)仅是充分条件，选项(B)、(D)、(E)均为向量线性相关的充分条件而非必要条件. 由线性相关的定义 3.3.1.2 知选项(C)为向量组线性相关的充分必要条件. 仅(C)入选。

例 3　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.

(D) 若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

解　由定义 3.3.1.4 知，仅(B)入选.

法二　利用线性相关、线性无关的下述性质判别之.

命题 3.3.1.1　(1) 单独一个零向量组成的向量组线性相关，含有零向量的向量组必线性相关，一个非零向量组成的向量组线性无关.

(2) 两向量线性相关的充要条件是其分量成比例.

(3) 向量组的部分向量组线性相关，则该向量组的任一包含该部分向量

组的另一向量组必线性相关.

(4) 向量组线性无关,则该向量组不含零向量,且其任何部分向量组必线性无关.

(5) 一向量组线性相关,则在相同位置上去掉相同个数的分量所得的向量组仍线性相关.

(6) 一向量组线性无关,则在相同位置上增加相同个数的分量所得的向量组仍线性无关.

(7) 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

(8) n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(1,0,\cdots,0,1)$ 线性无关.

例 4[1999 年 Ⅰ 14] 已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关($m>2$),则

(A) 对任何一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$.

(B) $m<n$。

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中少于 m 个向量构成的向量组均线性相关.

(D) 对任一 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$,有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

(E) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量均线性无关.

解 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时,才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,因而(A) 选项不成立.

选项(B)也不成立. 事实上 $m=n$ 也是可以的. 例如 $m=n=3$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ ($m<n$)线性无关,$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也可能线性无关. 例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 线性无关($m=3<n=5$),且 $\boldsymbol{\beta}=(0,0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 仍线性无关. 选项(D)不正确.

根据向量组线性无关的性质,由命题 3.3.1.1(4)知,若整组向量线性无关,则其任一部分向量组也线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关($s<m$),因而选项(C)不正确. 仅(E)入选.

例 5 对任意实数 a,b,c,线性无关的向量组是

(A) $(a,1,2)^{\mathrm{T}},(2,b,3)^{\mathrm{T}},(0,0,0)^{\mathrm{T}}$。

(B) $(1,2,-3)^{\mathrm{T}},(a,5,7)^{\mathrm{T}},(-2,-4,6)^{\mathrm{T}}$。

(C) $(1,a,1)^{\mathrm{T}},(3,b,5)^{\mathrm{T}},(2,4,7)^{\mathrm{T}},(a,0,c)^{\mathrm{T}}$。

(D) $(1,a,1,2)^{\mathrm{T}},(0,3,-1,b)^{\mathrm{T}},(0,c,0,8)^{\mathrm{T}}$。

(E) $(1,1,1,a)^{\mathrm{T}},(2,2,2,b)^{\mathrm{T}},(0,0,0,c)^{\mathrm{T}}$。

解 由命题 3.3.1.1(1)知含有零向量的向量组必线性相关，故(A)不正确. 又因向量$(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$与$(-2,-4,6)^{\mathrm{T}}$对应分量成比例，它们线性相关。再由命题 3.3.1.1(3)知(B)中向量组线性相关，再由命题 3.3.1.1(7)知(C)中向量组也线性相关. 又因

$$c[(2,2,2,b)^{\mathrm{T}}-2(1,1,1,2a)^{\mathrm{T}}]=[0,0,0,c(b-2a)]^{\mathrm{T}}=(b-2a)(0,0,0,c)^{\mathrm{T}}.$$

(E)中三向量也线性相关.

注意到向量$(1,1,2)^{\mathrm{T}},(0,-1,b)^{\mathrm{T}},(0,0,8)^{\mathrm{T}}$为三个阶梯形向量组. 显然线性无关，根据命题 3.3.1.1(6)知，在相同位置上再增添一个分量所得向量组仍然线性无关. 仅(D)入选.

法三 利用下述线性相关、线性无关的充分必要条件判别。

定理 3.3.1.1 下述条件之一是列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关的充分必要条件：

(1) 向量方程$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$有非零解；

(2) 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解；

(3) 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n$；

(4) n个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，其分量组成的行列式等于零.

定理 3.3.1.2 下述条件之一是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关的充分必要条件：

(1) 向量方程$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$只有零解；

(2) 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解；

(3) 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，方程$\boldsymbol{A}$=秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$；

(4) n个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，其分量组成的行列式不等于零.

定理 3.3.1.3(三秩定理) 矩阵的秩与其行向量组的秩、列向量组的秩相等.

例 6[2001 年Ⅰ 24] 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-2,3,-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,t,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,1,-4,1)^{\mathrm{T}}$线性相关，则$t=$____.

解法 1 令$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，用初等行变换将$\boldsymbol{A}$化成阶梯形矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&-1&-2\\0&-2&1&1\\5&3&t&-4\\2&-4&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&-2\\0&-2&1&1\\0&-12&t+5&6\\0&-10&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&-2\\0&-2&1&1\\0&0&t-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

当 $t=1$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2<n=4$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

当 $t\neq1$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3<n=4$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

因而 t 为任何实数值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

解法 2 因 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|\xlongequal{\substack{r_3+r_1\\r_4+2r_1}}\begin{vmatrix}0&3&0&0\\0&-2&1&1\\5&3&t+5&6\\2&-4&5&5\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-2&1&1\\5&-12&t+5&6\\2&-10&5&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1&1\\-12&t+5&6\\-10&5&5\end{vmatrix}$$

$\equiv0$（因第 1 列与第 3 列成比例），

故 t 取任意实数时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

例 7（条件充分性判断） 4 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的前三个行向量线性无关；

(2) 去掉 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的第 2 行之后的行列式非零.

解 因秩$(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩$=\boldsymbol{A}$ 的列秩，当条件(1)成立时说明秩$(\boldsymbol{A})\geqslant3$，则秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\geqslant3$. 又因 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，故秩$(\boldsymbol{A})\leqslant3$，即秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant3$ 所以秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，即列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 条件(1)充分. 当条件(2)成立时，$\boldsymbol{A}$ 中有三阶子式不等于零，因而这三阶子式的列向量 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3$ 线性无关，将其在第一个分量后都增加一个分量，即得到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. 由命题 3.3.1.1(6)即知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，条件(2)也充分。仅 D 入选.

或由条件(2)成立时，$\boldsymbol{A}$ 中有一个三阶子式不等于零，故秩$(\boldsymbol{A})\geqslant3$，再由秩$(\boldsymbol{A})\leqslant3$，即得秩$(\boldsymbol{A})=3$，由定理 3.3.1.3 知秩$(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩$=3$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 8 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(E) 以上结论都不正确.

解　为方便计，不妨设 A 为 $s\times t$ 矩阵，B 为 $t\times m$ 矩阵，且 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}$，$B=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_m)$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$ 分别为 A 的行向量，B 的列向量，则由 $AB=O$ 知 $\boldsymbol{B}_i$ 为 $AX=0$ 的解向量. 因 $B\neq O$，故 $AX=0$ 有非零解. 由定理 3.3.1.1(2) 知秩$(A)<t$(A 的列数). 因而 A 的列向量组线性相关.

又由 $AB=O$ 知 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $X^{\mathrm{T}}B=O$ 的解向量，因 $A\neq O$，故 $X^{\mathrm{T}}B=O$ 有非零解. 由定理 3.3.1.1(2)知秩$(B)<t$(B 的行数)，因而 B 的行向量线性相关。仅(A)入选.

例 9　判断下列向量组是否线性相关，是否线性无关。

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,-5),\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,2)$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-3,1),\boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-2),\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,3)$。

解　(1)**解法 1**　利用线性相关的充分必要条件判断，即是否存在一组不全为零的数 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，为此设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，即得齐次线性方程组 $\begin{cases}k_1 & & -k_3=0,\\ -2k_1+2k_2 & & =0,\\ 3k_1-5k_2+2k_3 & & =0.\end{cases}$ 因系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{vmatrix}=0,$$

故上方程组有非零解，即 k_1,k_2,k_3 可以不全为零，由定理 3.3.1.1(1)知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

解法 2　易看出 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，由定义 3.3.1.1 即知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) 设 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则得齐次线性方程组 $\begin{cases}k_1-k_2+k_3=0,\\ -3k_1+2k_2+k_3=0,\\ k_1-2k_2+3k_3=0.\end{cases}$ 其系数矩阵的行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-3&2&1\\2&-2&3\end{vmatrix}=2\neq0$，由克莱姆法则知，上方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，由定理 3.3.1.2 知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

例 10(条件充分性判断)　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A 的行向量组中必有

一个行向量是其余行向量的线性组合.

(1) 秩$(\boldsymbol{A})=n$;　　(2) 秩$(\boldsymbol{A})<n$。

解　将$\boldsymbol{A}$的n行看成n个n维向量组,该组有n个向量,而这个向量组的秩小于n,由定理 3.3.1.1(3)知$\boldsymbol{A}$的n个行向量线性相关,由定义 3.3.1.2 知条件(2)充分,而条件(1)不充分.因由秩$(\boldsymbol{A})=n$,根据定理 3.3.1.2(3)知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,再由定义 3.3.1.6 知任何一个向量都不能表成其余向量的线性组合。条件(1)不充分.仅 B 入选.

法四　利用下述结论判别之。

命题 3.3.1.2　设向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的每个向量可由另一向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示,如$s>r$,则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关.

命题 3.3.1.2 可理解为,如果多数向量能用少数向量线性表出,无论少数向量线性相关还是线性无关,那么多数向量一定线性相关.

例 11[2005 年Ⅰ8]　已知n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,则下列结论不正确的是

(A) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$线性相关。

(B) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$线性无关。

(C) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关。

(D) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$线性相关。

(E) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关。

解　因$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均可用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,$4>3$,由命题 3.3.1.2 即知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$线性相关,(A)正确.

因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,如$\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,则由定理 3.3.2.1 知$\boldsymbol{\beta}_2$必可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示与题设矛盾,(B)正确.

因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$线性相关,由命题 3.3.1.1(3)知添加一向量$\boldsymbol{\beta}_2$所得的新向量组仍线性相关,(C)也正确,(E)也正确.

事实上,如$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关,则因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,故$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$可写成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合,即$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$,而$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,故$\boldsymbol{\beta}_2=(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_3-k_3)\boldsymbol{\alpha}_3$即$\boldsymbol{\beta}_2$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,与题设矛盾,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.同法可证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$也线性无关,因而(D)不正确。仅(D)入选.

题型二　判别解向量组的线性相关性

法一　一般用线性相关、线性无关的定义判别.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，欲证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\eta}$ 的线性相关性，令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}. \qquad ①$$

为利用 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$ 的已知条件，常用方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或某解向量左乘式①，通过一次或多次对等式①的这种运算，确定 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k$ 必须全为零或不全为零，从而得到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\eta}$ 线性无关或线性相关的结论.

法二　使用反证法证明。

由于向量组的线性相关和线性无关是两个相互对立的概念，因此在证明向量组线性相关性时，反证法往往具有特殊的重要性，因而很常用.

法三　利用下述命题判别之。

命题 3.3.1.3　齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系所含解向量的个数小于解向量组的向量个数，则该解向量组线性相关.

例 12[2003 年 Ⅱ 13]（条件充分性判断）　n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中两两线性无关.

解　当条件(1)成立时，可用下述两法证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，先用反证法证明. 如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性组合表示为 $\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 则 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)=k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，这与 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

还可用线性无关的定义证明，设

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \qquad ①$$

下证 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$。用 $\boldsymbol{A}$ 左乘式①两端得到

$$\lambda_1\boldsymbol{A\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{0}+\lambda_2\boldsymbol{0}+\lambda_3\boldsymbol{b}=\lambda_3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

因 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda_3=0$，将其代入式①有 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\lambda_1=\lambda_2=0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

条件(2)不充分. 例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)$ 中两两线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 却线性相关：$\boldsymbol{\alpha}_3=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$.

例 13　设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}\ (i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 已知 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases} \quad ①$$

的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

解 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0} \quad ②$$

成立. 因为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组①的解，且 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，故有

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0 \quad (i=1,2,\cdots,r),$$

在上式两端求转置得到

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0} \quad (i=1,2,\cdots,r), \quad ③$$

于是，在式②两端左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$

由式③得 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，但 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq0$，故 $k=0$，从而式②化为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$. 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\beta$ 线性无关.

例 14（条件充分性判断） n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是齐次方程 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解，其中 $\boldsymbol{A}$ 是秩大于 $n-s$ 的 $m\times n$ 矩阵；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是非齐次方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，其中 $\boldsymbol{A}$ 是秩大于 $n-s$ 的 $m\times n$ 矩阵；

解 由 $\boldsymbol{A}$ 的秩大于 $n-s$ 知，$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系的向量个数小于 s，因此当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解时，由命题 3.3.1.3 即知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关。条件(1)充分.

但当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解时，无法判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性相关或线性无关。条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 15（条件充分性判断） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3 都是 n 维向量，使得 $\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{A}\xi_3\neq\mathbf{0}$，要使得 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(1) 其中任何两个都线性无关； (2) $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1$ 线性无关.

解 条件(1)不充分。例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_3=$

$\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}$，则 $A\xi_1=A\xi_2=A\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$ 并且满足条件(1)，但 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关.

条件(2)充分. 设 $A\xi_1=\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 都是非齐次方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，于是 $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1$ 都是 $A\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解，且线性无关。因而 ξ_1 不能用 $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1$ 线性表示(否则 $A\xi_1=\mathbf{0}$)，于是 $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1,\xi_1$ 线性无关，ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1,\xi_1$ 等价，秩也为 3. 因而也线性无关.

题型三　判别用向量组线性表出的向量组的线性相关性

类型(一)　判别用线性无关向量组线性表出的向量组的线性相关性。

法一　用线性相关性定义判别。

例 16[2004 年Ⅱ 19](条件充分性判断)　n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

(1) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1$.

解　条件(1)单独不充分. 条件(2)单独也不充分，但条件(1)与条件(2)联合起来后是充分的. 这可用线性相关性定义证明.

设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$，下证 $k_1=k_2=k_3=0$。因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，由

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即由
$$(k_1+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-k_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

得到
$$k_1+3k_3=0,\qquad①$$
$$k_1+k_2=0,\qquad②$$
$$k_3-k_2=0.\qquad③$$

②+③得到 $k_1+k_3=0$，代入式①有

$$k_1+k_3+2k_3=0+2k_3=0,$$

故 $k_3=0$. 因而 $k_1=-k_3=0,k_2=-k_1=0$. 于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

法二　用下述命题判别之.

命题 3.3.1.4　设向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 能由线性无关向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{bmatrix}=[k_{ij}]_{r\times s}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{bmatrix}\quad(\text{这里 }\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j\text{ 均为行向量})$$

或
$$[\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_r^{\mathrm{T}}]=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}},$$

其中矩阵 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})$称为向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)之间的转换矩阵,则向量组(Ⅱ)线性无关的充要条件是秩$(\boldsymbol{K})=r$(或秩$(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})=r$).

由命题 3.3.1.4 可知,证明向量组(Ⅱ)的线性相关性归结为计算矩阵 $\boldsymbol{K}$ 或 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$ 的秩,如其秩等于向量组(Ⅱ)中向量个数,则向量组(Ⅱ)线性无关,否则线性相关.

当 $r=s$ 时,归结计算行列式$|\boldsymbol{K}|$或$|\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}|$,如不等于零,则向量组(Ⅱ)线性相关,否则线性无关.

例 17(条件充分性判断)　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 一定线性无关.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

解　设有数 k_1,k_2,k_3,使
$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$
即
$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

当条件(1)成立时,k_1+k_3,k_1+k_2,k_2+k_3 中至少有一个不等于零,从而 k_1,k_2,k_3 中至少有一个非零,于是 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关。条件(1)不充分.

当条件(2)成立时,必有 $k_1+k_3=0,k_1+k_2=0,k_2+k_3=0$,此方程组仅有零解 $k_1=k_2=k_3=0$,故 k_1+k_2,k_2+k_3,k_3+k_1 必线性无关.条件(2)充分.仅 B 入选.

例 18[2001 年Ⅱ16]　已知 n 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$,其中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,线性无关,则

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关。

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关。

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关。

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关。

解 因
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4\\ \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4\\ \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix},$$

由式(3.1.1.12)易求得上式中的转换矩阵 $\boldsymbol{K}_1$ 与 $\boldsymbol{K}_2$ 的行列式，即

$$|\boldsymbol{K}_1|=1+(-1)^{4-1}=0,\quad |\boldsymbol{K}_2|=1+(-1)^{4-1}=0,$$

故(B)、(C)中向量组均线性相关，而(A)中向量组可能线性相关，也可能线性无关。例如 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 如不能写成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，否则线性相关.

而(D)中向量线性无关。这是因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}$$

中转换矩阵的行列式 $|\boldsymbol{K}_3|=1+(-1)^{3-1}=2\neq 0$。

类型(二) 判别用另一向量组线性表出的向量组的线性相关性。

常用命题 3.3.1.2、命题 3.3.2.2、命题 3.3.2.4、命题 3.3.3.4 等判别之.

例 19[2003 年Ⅰ12](条件充分性判断) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均为 n 维向量，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

解 可用命题 3.3.1.2 判别之. 因向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均可用向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且 $r=3>s=2$. 由命题 3.3.1.2 即知，向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，而与向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关还是线性相关无关. 仅(D)入选.

例 20(条件充分判断) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(1) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示；

(2) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$=秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$.

解 当条件(1)成立时,是少数向量可由多数向量线性表示,这对向量组的线性相关性没有任何信息(注意不要与命题 3.3.1.2 相混淆),条件(1)不充分.

当条件(2)成立时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均可写成 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 的线性组合。显然有 $s>s-1$. 由命题 3.3.1.2 即知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关。仅 B 入选.

例 21(条件充分性判断) 要使得向量组(Ⅰ):$s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关; (2) $s=2$ 或 $t=1$.

解 当条件(1)成立时,秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$,而向量组(Ⅰ)可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,由命题 3.3.2.2(1)知,秩(向量组(Ⅰ))$\leqslant$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$,再由命题 3.3.2.4(2)知,向量组(Ⅰ)必线性相关.条件(1)充分. 又因

$$(s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$$
$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} s & 2 & -2 \\ t & t & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{K},$$

当 $t=1$ 时,$|\boldsymbol{K}|=\begin{vmatrix} s & 2 & -2 \\ t & t & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 中的第 2、第 3 行成比例,$|\boldsymbol{K}|=0$,当 $s=2$ 时,$|\boldsymbol{K}|$ 中的第 1、第 2 列相同,$|\boldsymbol{K}|=0$. 由命题 3.3.3.4 知秩(向量组(Ⅰ))$\leqslant$秩$(\boldsymbol{K})$,而当条件(2)成立时,由于$|\boldsymbol{K}|=0$,秩$|\boldsymbol{K}|<3$,有秩(向量组(Ⅰ))<3,因而向量组(Ⅰ)线性相关. 条件(2)也充分。仅 D 入选.

习 题 3.3.1

(一) 问题求解

1.[1999 年Ⅲ16] 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,6,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a,-2)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,则

(A) $a=2$. (B) $a=1$. (C) $a=-2$. (D) $a\neq1$. (E) $a\neq2$.

2.[2000 年Ⅲ12] 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s\geqslant2)$线性无关,则

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关。

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关。

3. n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0})$线性相关,则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $s-1$ 个向量线性相关.

(B) 对于每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都可以由其余向量线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中无零向量.

(E) 存在一组不全为零的数组 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

4. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充要条件是。

(A) 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关。

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 存在一个向量,它不能用其余向量线性表示。

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 任意一个向量都不能用其余向量线性表示。

5. 设向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})^{\mathrm{T}}$;向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})^{\mathrm{T}}$,则必有

(A) 组(Ⅰ)相关⇒组(Ⅱ)相关. (B) 组(Ⅱ)相关⇒组(Ⅰ)无关.

(C) 组(Ⅰ)相关⇒组(Ⅱ)无关. (D) 组(Ⅱ)无关⇒组(Ⅰ)相关.

(E) 组(Ⅰ)无关⇒组(Ⅱ)无关.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量,下列结论不正确的是

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s。

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

7. 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m<n)$线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(B) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示,且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(D) $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]$,秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$.

(E) 上述结论都不正确.

8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,k,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)$,则下列结论正确的是

(A) 当 $k=-2$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(B) 当 $k\neq-2$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(C) 当 $k\neq-2$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(D) 当 $k\neq-2$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

9. 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列结论正确的是

(A) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

(D) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(E) $\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\boldsymbol{A}$ 中

(A) 必有一列元素全为 0.

(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

(二) 条件充分性判断

1. [2004 年 Ⅰ 11] n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(1) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i+\boldsymbol{\gamma}_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$,其中向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关,向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 也线性相关.

2. $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的三个解,要使得 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性相关.

(1) 秩$(\boldsymbol{A})=n-2$; (2) $\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_1$ 和 $\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$ 线性相关.

3. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$2t\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$,$-t\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关; (2) $t\neq1/2$.

4. 要使 $2\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$,$2\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$,$2\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；　　(2) $t=-2$.

5. 要使 $\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；　　(2) $t\neq 1$.

(三) 解答题

1. 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)$的线性相关性.

2. $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是三维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，试判断向量组 $\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 的线性相关性.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，试问常数 m,k 满足什么条件时，向量组 $k\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,m\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，线性相关.

3.3.2　向量组的秩

秩是表明向量组线性相关“程度”的一个数量描述.

定义 3.3.2.1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一个 n 维向量组，如果向量组中有 r 个向量线性无关，且向量组的任意 $r+1$ 个向量线性相关，则这 r 个线性无关的向量称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极(最)大线性无关组，简称极(最)大无关组. 极(最)大无关组的向量个数称为向量组的秩，记作秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$或 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都是零向量，则规定秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=0$.

定义 3.3.2.2　若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 中每个向量均可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，如果它们可互相线性表示，则称它的等价，记作

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k\}.$$

向量组的秩的性质，用命题表述如下。

命题 3.3.2.1　如果秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=l$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任何含有多于 l 个向量的部分组一定线性相关；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任何含 l 个向量的线性无关部分组一定都是极大无关组，一个向量组的秩惟一，但其极大无关组不惟一.

命题 3.3.2.2　(1) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则

$$\text{秩}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)\leqslant\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s);$$

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 $\Longleftrightarrow$ 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

命题 3.3.2.3 若向量组$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$,则

$$\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\text{秩}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k).$$

命题 3.3.2.3 的逆命题不成立,例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1),$$

显然秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$,秩$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,但$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$与$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$不是等价向量.

命题 3.3.2.4 (1) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant s$ 和其维数 n;

(2) 当秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关;

当秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关;

(3) $s>n$ 即向量个数大于其维数时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

命题 3.3.2.5 一向量组加上或去掉可用其线性表出的向量后所得的新向量组与原向量组等价.

以上性质说明了秩的重要性。命题 3.3.2.4 可用来判别向量组的线性相关性,命题 3.3.2.2(2)可用来判别一个向量能否用向量组线性表示,而命题 3.3.2.1(2)常作为求极大无关组的依据.

题型一 求分量给出的向量组的秩及其极大线性无关组

将所给出向量排成列向量组(不管原题给出的向量是行向量还是列向量都按列排),组成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,当矩阵经过初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$时,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性关系,其含义就是:

1° 它们的秩相等。

2° 它们的极大线性无关组相对应。若 $\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jr}$ 列是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大线性无关组,则 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组。

3° 它们有相同的内在线性表示关系:若 $\boldsymbol{B}$ 的某个列向量 $\boldsymbol{\beta}_s$ 可表示为某些列向量 $\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的线性组合

$$\boldsymbol{\beta}_s=l_i\boldsymbol{\beta}_i+l_j\boldsymbol{\beta}_j+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 中对应列向量 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 也可表示为列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的线性组合

$$\boldsymbol{\alpha}_s=l_i\boldsymbol{\alpha}_i+l_j\boldsymbol{\alpha}_j+\cdots+l_t\boldsymbol{\alpha}_t.$$

基于此,为求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩,极大线性无关组及其线性表示,只需求出 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩、极大线性无关组及其线性表示即可. 将 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换化

为行阶梯形矩阵 A_1，则 A_1 中非零行的个数即等于该向量组的秩；从每一个阶梯中取一列向量，则所得的向量组就是所求的一个极(最)大无关组(这里的两个列向量属于同一阶梯是指不等于零的最后一个分量在同一行的两个列向量)．一般选阶梯形矩阵的阶梯角所在列号对应的部分组为一个极大无关组，即 A_1 中各非零行的第一个非零元素所在的列号对应的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的那些向量构成一个极大无关组．

极大无关组所含向量的个数就是该向量组的秩．

向量组的秩除用上述求法外，还可利用矩阵秩的定义(不等于零的子式 D_r 的最高阶数 r)求之。即是 D_r 的线性无关组。将它们分别增加相同个数的分量后得到 A 的线性无关的列向量组，这是因为

矩阵的秩＝行向量组的秩＝列向量组的秩，

而 D_r 包含的 r 个列向量即是 A 的列向量组的一个极大无关组．

例 1[2003 年Ⅰ 13](条件充分性判断)　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,6,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a,-2)^{\mathrm{T}}$ 的秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

(1) $a=-2$；　(2)$a\neq-2$.

解　以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列向量作矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$用初等行变换将 A 化为行阶梯形矩阵

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\b&2&a\\2&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&0&a+2\\0&0&0\end{bmatrix}。$$

当条件(1)成立，即 $a=-2$ 时，秩$(A)=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$．条件(1)不充分．

当条件(2)成立，即 $a\neq-2$ 时，秩$(A)=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$．条件(2)充分．仅 B 入选．

例 2　[1999 年Ⅰ 31]　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,6,7)^{\mathrm{T}}$．问 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，并求它的一组最大线性无关组．

解　令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$．用初等行变换将 A 化为阶梯形矩阵

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&1&6\\3&a&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&1&-1&4\\0&a-3&-2&4\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & a-5 & 0 & 0\end{bmatrix}\overset{a=5}{=\!=}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\boldsymbol{A}_1.$$

当 $a=5$ 时，由 $\boldsymbol{A}_1$ 可知秩$(\boldsymbol{A}_1)=$秩$(\boldsymbol{A})=3<n=4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

注意到 $\boldsymbol{A}_1$ 中列向量 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的不等于零的最后一个分量在同一行(第 2 行)，因此 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 属同一阶梯的列向量. 显然 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_4$ 是属于不同阶梯的列向量，在这三个阶梯中每一阶梯取一列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 即为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一组最大(极大)线性无关组. 且 $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3+0\boldsymbol{\beta}_4$. 由于初等行变换保持原来列向量之间的线性关系. 因而原向量组的一组最大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是另一组最大线性无关组。

例 3 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)^{\mathrm{T}}$ 的极大线性无关组不能是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$.　　(E) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$.

解 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1。$$

由于 $\boldsymbol{A}_1$ 中有三个阶梯而第三个阶梯只能选 $\boldsymbol{\alpha}_4$，故极大无关组中虽有多组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等但每组都有 $\boldsymbol{\alpha}_4$，因而极大无关组不能是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$。仅(E)入选.

题型二　将向量用极大线性无关组线性表示

为将向量用极大线性无关组线性表示，需将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成含行最简形矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，这时 $\boldsymbol{A}_1$ 的列向量之间的线性关系可一眼看出，从而即可将向量用极(最)大线性无关组线性表示.

这里所谓行最简形矩阵是指具有下述特点的行阶梯形矩阵：

1° 每个非零行的第一个非零元素(也称首元素)均为 1；

2° 首元素所在列的其余元素全为零.

例 4[2001 年 Ⅱ 31]　已知四维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,t,8)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,t,t^2-5,7)^{\mathrm{T}}$，问 t 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可被向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，并求表示系数.

解 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，记矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$. 对 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换化为行阶梯形矩阵，即

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&5&0&t\\-1&t&3&t^2-5\\3&8&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&t-2\\0&0&-2(t+1)&0\\0&0&0&-2(t-4)\end{bmatrix}$$

$=\overline{\boldsymbol{A}}_1$。

显然，当 $t=4$ 时，秩$(\overline{\boldsymbol{A}}_1)=$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=3<n=4$，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因而 $\boldsymbol{\beta}$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且可惟一地被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性表示.

下面求表示系数。为此将$\overline{\boldsymbol{A}_1}$用初等行变换化成行最简形矩阵即化成含最高阶(三阶)单位矩阵的矩阵，即

$$\overline{\boldsymbol{A}_1}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&2\\0&0&-10&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则当 $t=4$ 时，$\boldsymbol{\beta}=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3$，表示系数 $k_1=-3,k_2=2,k_3=0$.

例 5 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-1,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-2,8,-9),\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,3,1,7)$，求向量组的一个极大无关组和向量组的秩，并用此极大无关组将其余向量线性表示.

解 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 作列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，化 $\boldsymbol{A}$ 为最简行阶梯形矩阵. 由三秩定理知 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于其列秩，即为向量组的秩.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1\\r_3+(-3)r_1}}\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+(-2)r_2]{r_3+(-1)r_2}\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2(1/2)}\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&1&-7/2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&3/2&1\\0&1&-7/2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1.$$

由 $\boldsymbol{A}_1$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的秩即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2，其一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(3/2)\boldsymbol{\alpha}_1-(7/2)\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

题型三　求抽象向量组的秩及其极大无关组

常用向量组的性质即命题 3.3.2.1 至命题 3.3.2.5 求之.

例 6(条件充分性判断)　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一个 n 维向量组，$s>3$，要使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大无关组.

(1) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=3$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价.

解　当条件(1)成立时，由于没有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，条件(1)不充分. 当条件(2)成立时，也推不出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故条件(2)单独也不充分。但当条件(1)与条件(2)联合时，由条件(2)利用命题 3.3.2.3 有，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$。再由条件(1)知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 3，于是秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$. 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 再由命题 3.3.2.1(2)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组. 仅 C 入选.

例 7[2005 年Ⅰ19](条件充分性判断)　秩$(\boldsymbol{A})<3$.

(1) 对于三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$；

(2) 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{\beta}$ 是三维向量，

秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$.

解　当条件(1)成立，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时，这时有可能秩$(\boldsymbol{A})=3$，仍满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 结论秩$(\boldsymbol{A})<3$ 不一定成立. 条件(1)不充分.

当条件(2)成立时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 均为三维向量，由命题 3.3.2.4(1)知其秩必不超过其维数 3，因而当秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$时，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$ 必成立. 仅 B 入选.

例 8(条件充分性判断)　要使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s>3)$的极大无关组.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；　　(2) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=3$.

解　条件(1)与条件(2)单独成立时都不充分. 但当条件(1)与条件(2)联合起来时，说明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组含三个向量，由条件

(1)说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.由命题 3.3.2.1(2)知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组。仅 C 入选.

例 9[2003 年Ⅱ25] 已知 n 维向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,向量组(Ⅲ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$,它们的秩为秩(向量组(Ⅰ))=秩(向量组(Ⅱ))=3,秩(向量组(Ⅲ))=4,则秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=$_____.

解法 1 因秩(向量组(Ⅰ))=3,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,由秩(向量组(Ⅱ))=3,有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,由定理 3.3.2.1 知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.设 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$。利用初等列变换得到

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)\\
&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+2\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5)\\
&\xrightarrow[c_4+(-2\lambda_3)c_3]{c_4+(-2\lambda_1)c_1,\,c_4+(2\lambda_1)c_2}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_5)\xrightarrow{c_5(-1)}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)
\end{aligned}
$$

因而矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)$与$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)$等价.等价必等秩,故

$$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=秩(向量组(Ⅲ))=4.$$

解法 2 利用命题 3.3.2.5 求之.

因 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,由命题 3.3.2.5 知

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_5\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5\}.$$

而 $$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=秩(向量组(Ⅲ))=4,$$

故 $$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=4.$$

解法 3 用线性无关的定义证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,从而

$$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=4.$$

设 $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=\boldsymbol{0},\qquad①$$

下证 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$.又设 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$,将其代入式①得到

$$
\begin{aligned}
&k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+2\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5)\\
&=(k_1+2k_4\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+2k_4\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_3+2k_4\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3-k_4\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,故

$$k_1+2k_4\lambda_1=0,\quad k_2+2k_4\lambda_2=0,\quad k_3+2k_4\lambda_3=0,\quad k_4=0.$$

将 $k_4=0$ 代入上式的前三式得到 $k_1=k_2=k_3=0$.因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,即秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=4$.

解法 4 用向量组的秩与线性表示的关系证之.

因秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$,故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.而秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$,故 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.为证

$$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=4,$$

只需证 $2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

事实上,如果 $2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,即

$$2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\mu_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

则由 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$,有

$$\boldsymbol{\alpha}_5=(2\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(2\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(2\lambda_3-\mu_3)\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,这矛盾说明 $2\boldsymbol{\alpha}_6-\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故

$$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5)=秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+1=3+1=4.$$

题型四　判别一向量能否用向量组线性表出

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一个 n 维向量组,$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为一组数,称 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性组合,或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为该组合的系数.

类型(一)　判别分量已知的向量能否由向量组线性表示.

法一　转化为非齐次线性方程组的求解.

先根据定义设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\alpha}_t$. 由向量相等的关系写出以 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 为未知数的非齐次线性方程组,然后求解该方程组. 如该方程组无解,则 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示;如有解,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,且当解惟一时,其线性表示惟一,解不惟一时,其线性表示不惟一.

解题时可不写出上述方程组直接对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})$进行初等行变换。

1° 当 $秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)\neq秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示;

2° 当 $秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})=t$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 惟一地线性表示;

3° 当 $秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})<t$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示,且表示方法有无穷多种.

例 10　已知 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,t)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-4)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,求 t 的值.

解　设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$,按分量写出为 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=1,\\ x_1+2x_2-x_3=2,\\ x_1+7x_2-4x_3=t.\end{cases}$ 因 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,故此方程组无解. 对其增广矩阵作初等行变换化

为行阶梯形矩阵，得到

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&1&1\\1&2&-1&2\\1&7&-4&t\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\2&-1&1&1\\1&7&-4&t\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\0&-5&3&-3\\0&5&-3&t-2\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\0&-5&3&-3\\0&0&0&t-5\end{array}\right]。$$

为使秩$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\neq$秩$(\boldsymbol{A})$，必 $t-5\neq0$，即 $t\neq5$，故当 $t\neq5$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

例 11 设有三维列向量

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+\lambda,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+\lambda,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1+\lambda)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$.

问 λ 取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式惟一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不惟一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解法 1 用初等行变换解之。

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccc}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\left[\begin{array}{cccc}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&-\lambda(3+\lambda)&-\lambda(\lambda^2+2\lambda-1)\end{array}\right]=\boldsymbol{A}_1.$$

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，有

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&-(\lambda+1)/(\lambda+3)\\0&1&0&2/(\lambda+3)\\0&0&1&(\lambda^2+2\lambda-1)/(\lambda+3)\end{array}\right],$$

故当 $\lambda\neq0$，且 $\lambda\neq-3$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，且

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{-(\lambda+1)}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_3。$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\beta}$ 的上述表示法惟一.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{A}_1=\left[\begin{array}{cccc}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$，显然有 $\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{\alpha}_1$ 或 $\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{\alpha}_2$ 或 $\boldsymbol{\beta}=$

$0\boldsymbol{\alpha}_3$，表示法不惟一.

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$，因

$$\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\neq\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3,$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解法 2 用解方程组的方法求之. 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则

$$\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \lambda\\ \lambda^2\end{bmatrix}\quad\text{即}\quad\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}.$$

因 $|\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda+3)$，故

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，方程组有惟一解，$\boldsymbol{\beta}$ 可惟一地表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合；

(2) 当 $\lambda=0$ 时，易看出秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=$秩$(\boldsymbol{A})=1<3=n$，故原方程组有无穷多组解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法不惟一；

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=2<$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，原方程组无解，故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能写成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

法二 利用向量组的秩与线性表出的下列关系判别。

命题 3.3.2.6 (1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示$\Leftrightarrow$

$$\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})=\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t);$$

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 惟一线性表示$\Leftrightarrow$

$$\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})=\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=t;$$

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，但表示不惟一$\Leftrightarrow$

$$\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})=\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=r<t;$$

(4) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示$\Leftrightarrow$

$$\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta})=\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)+1.$$

例 12[2004 年Ⅰ 9](条件充分性判断) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 与$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_4}$不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,4)^{\mathrm{T}}$.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-3,15)^{\mathrm{T}}$；　(2) $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_4}=(-2,-5,-1)^{\mathrm{T}}$.

解 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\alpha}_4,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_4})$，对其进行初等行变换将其化为最简行阶梯形矩阵，即含最高阶单位矩阵的矩阵.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_4,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_4})=\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&4&-2\\0&3&5&-3&-5\\3&3&4&15&-1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&4&-2\\0&1&5/3&-1&-5/3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1/3&6&4/3\\0&1&5/3&-1&-5/3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]=\boldsymbol{A}_1,$$

因而当条件(1)与条件(2)分别成立时,有

$$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,$$

$$秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_4})=秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,$$

由命题 3.3.2.6(3)知,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 与$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_4}$都能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 由 $\boldsymbol{A}_1$ 易知其线性表示式分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_4=6\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_3=6\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_4}=\frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{5}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}-\frac{5}{3}\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}。$$

类型(二)　判别一抽象向量能否由向量组线性表示.

除用本题型类型(一)中法二以外还可用反证法及下述线性相关与线性表出的关系判别.

定理 3.3.2.1　如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 惟一线性表示.

定理 3.3.2.2　若秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,反之也成立.

例 13　(条件充分性判断)　向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的分量不成比例。

解　当条件(1)与条件(2)单独成立时,都不是充分条件,但两条件(1)与条件(2)联合起来时,由于条件(2)保证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,再加上条件(1),利用定理 3.3.2.1 即知 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 惟一地线性表示。仅 C 入选.

例 14　设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但不能由向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,记向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$,则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能用向量组(Ⅰ)线性表示,也不能由向量组(Ⅱ)线性表示.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能用向量组(Ⅰ)线性表示,但可由向量组(Ⅱ)线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示,也可由向量组(Ⅱ)线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示,但不可由向量组(Ⅱ)线性表示.

(E) 条件不够,$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否用向量组(Ⅰ)或向量组(Ⅱ)线性表示不能确定.

解法 1 由题设有

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k_m\boldsymbol{\alpha}_m。\tag{①}$$

因 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,则 $k_m\neq0$,故

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}/k_m-(k_1/k_m)\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-k_{m-1}|k_m)\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能用向量组(Ⅱ)线性表示,但 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否用向量组(Ⅰ)线性表示呢?由上式易看出如果 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,即

$$\boldsymbol{\alpha}_m=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\tag{②}$$

则 $\boldsymbol{\beta}$ 就可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,事实上将式②代入式①有

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+k_ml_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_ml_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{m-1}+k_ml_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_{m-1}.$$

这与 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组(Ⅰ)线性表示矛盾,所以 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能用向量组(Ⅰ)表示.仅(B)入选.

解法 2 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,为方便计,假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性无关,由 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,由定理 3.3.2.1 即知 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组(Ⅱ)线性表示,不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_m=s_1\boldsymbol{\alpha}_1+s_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+s_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+s\boldsymbol{\beta}。$$

由上式易知 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,如果能,由上式易看出 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,与题设矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由向量组(Ⅰ)线性表示。仅(B)入选.

注意 涉及抽象向量不能线性表出的问题一个常用的思路是用反证法.设其能表出,然后找矛盾.

例 15 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关,则

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示. (B) $\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示. (C) $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

解 因 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关,由命题 3.3.1.1(4)知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,又因 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关,由定理 3.3.2.1 知 $\boldsymbol{\delta}$ 可惟一地表成 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的线性组合.因而 $\boldsymbol{\delta}$ 必可

表示成 α,β,γ 的线性组合，即 δ 必可由 α,β,γ 线性表示. 仅(C)入选.

例 16 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是三维非零向量.

(1) 如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

(2) 如果秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)=$秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(3) 如果秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，则 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(4) 如果 α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示，α_4 不能由 α_2,α_3 线性表示，则 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

上述四个命题中正确命题的个数为

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1. (E) 0.

解 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为非零的三维向量，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关。或由

$$\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+1$$

得到 $$\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)-1\leqslant 3-1\leqslant 2,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关.(1)正确.

由于经过初等变换向量组的秩不变，而$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)\to(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，故

$$\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),$$

因而方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$ 有解。(2)正确.

如秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 α_i 为三维向量，故 α_4 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。(3)正确.

由秩$(\alpha_1,\alpha_2)\neq$秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$知，$\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关，即秩$(\alpha_2,\alpha_3)=2$，又由秩$(\alpha_2,\alpha_3)\neq$秩$(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，而 α_2,α_3 线性无关，故秩$(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2+1=3$，而 α_i 又是三维向量，故 α_1 必可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出. 仅(A)入选.

习 题 3.3.2

(一) 问题求解

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，则

(A) 必有 $r<s$.

(B) 向量组中任意 $r-1$ 个向量线性无关.

(C) 向量组中任意 r 个向量线性无关.

(D) 向量组中任意 $r+1$ 个向量线性相关.

(E) 向量组中不存在 r 个向量线性相关.

2. 若向量组的秩为 s,则

(A) 向量组中只有一个极大线性无关组。

(B) 向量组中任何 s 个向量都线性无关。

(C) 向量组中任何 s 个线性无关向量组都是向量组的极大无关组。

(D) 向量组中任何 $s-1$ 个向量都线性无关。

(E) 以上结论都不正确。

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(4,6,2a+7,10)^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,a+4,2a+5,a+7)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(2,3,2a+3,5)^{\mathrm{T}}$,

若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则 $a=$

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 2. (E) -2.

4. 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,则

(A) 表达式不惟一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中无零向量.

(B) 表达式不惟一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 表达式不惟一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 表达式惟一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 互不相同.

(E) 表达式不惟一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中无零向量.

5. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示,$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关。

(B) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

(C) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示。

(D) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示。

(E) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关。

6. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,6,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(4,0,4,8)^{\mathrm{T}}$,则下列结论正确的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. (B) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示. (D) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(E) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

(二) 条件充分性判断

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，则 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(1) $2k_1-k_2=0$；　　(2) $2k_1-k_2\neq 0$.

2. 已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，要使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关。

(1) $n<4$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

3. 要使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s>3)$的极大无关组。

(1) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$；

(2) $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}\subseteq\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

4. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，线性表示。

(1) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$；　　(2) $3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

5. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

6. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

(三) 解答题

1.[1999 年 Ⅱ 29]　已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,6,5,8)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(4,3,2,1)^{\mathrm{T}}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩及它们的一组最大线性无关组.

2.[2000 年 Ⅱ 33]　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0,a-3),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,a,6)$，问 a 为何值时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？并求此时向量组的一个最大线性无关组.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(3,0,b,4)^{\mathrm{T}}$.

(1) a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(2) a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？并写出线性表示式.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关。

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论.

3.3.3 矩阵的秩

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，A 的 m 维列向量依次记作 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$A$ 的 n 维行向量依次记作 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$。由定理 3.3.1.3 有

$$秩(\boldsymbol{A})=秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=秩(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n). \tag{3.3.3.1}$$

对于 n 阶矩阵 A，当秩$(A)=n$ 时，称 A 为满秩矩阵.

定理 3.3.3.1 设 A 为 n 阶矩阵，下列条件之一为秩$(A)=n$ 的充分必要条件：

(1) A 的行(列)向量组线性无关；　(2) $|A|\neq 0$；

(3) A 是可逆矩阵；　(4) A 是满秩矩阵；

(5) 齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解；

(6) 对任意 $b\in\mathbf{R}^n$，非齐次线性方程组 $AX=b$ 有惟一解.

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩还可用其子式如下定义.

定义 3.3.3.1 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中任取 k 行 k 列$(k\leqslant\min(m,n))$，位于这些行、列交叉处的 k^2 个元素组成的 k 阶行列式称为矩阵的一个 k 阶子式. 矩阵 A 中不等于零的子式的最高阶数 r 称为矩阵 A 的秩.

规定零矩阵 $O=(0)_{m\times n}$ 的秩等于零.

题型一　求元素具体给定的矩阵的秩

法一　利用秩的定义 3.3.3.1 求之.

利用秩的定义求矩阵 A 的秩就是求矩阵 A 中不等于零的子式的最高阶数，由此定义易知下述结论成立.

命题 3.3.3.1 (1) 如 A 为非零矩阵，则秩$(A)\geqslant 1$；如 A 为任意矩阵，则秩$(A)\geqslant 0$.

(2) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则 $r\leqslant\min\{m,n\}$.

(3) $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r 的充分必要条件是 A 中有一个 r 阶子式不为零，所有 $r+1$ 阶子式全为零.

(4) n 阶矩阵 A 的秩为 n 的充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

(5) n 矩阵阵 A 的秩小于 n 的充分必要条件是 $|A|=0$.

(6) 秩$(A)=$秩$(A)^{\mathrm{T}}$.

(7) 若 $k\neq 0$，则秩$(kA)=$秩(A)，其中 k 为非零常数.

由矩阵秩的定义所推出的上述命题应用较广，除用来求矩阵的秩外，还可根据矩阵秩的大小，确定矩阵中的待定常数.

例 1 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，秩$(A)=l$，则下述命题正确的是：

(A) 如果 $l<m$，则 A 有非零行.

(B) 如果 $l<m$，则 A 的最后一行的元素一定全为零.

(C) A 存在 l 个列向量线性无关.

(D) A 的 l 阶子式都不为零.

解 由式(3.3.3.1)知 A 的列向量组的秩为 l，因而 A 存在 l 个列向量线性无关.(C)正确.

(A)、(B)是错误的. 秩$(A)=l<m$ 只能说明用初等行变换将 A 化为阶梯形矩阵的非零行的行数小于 m，从而阶梯形矩阵中有零行，显然不能推断 A 中有零行或非零行.

从定义 3.3.3.1 知，存在 l 阶不等于零的子式，并不是说所有 l 阶子式都不等于零，因而(D)也不正确. 仅(C)入选.

例 2 设 $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq 0, b_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则秩$(A)=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 以上结论都不正确.

解法 1 由矩阵秩的定义知，因 A 中任意二阶子式的两行都成比例，因而其值等于零，又 $a_i\neq 0, b_i\neq 0$，故 $a_ib_i\neq 0$，所以秩$(A)=1$。仅(A)入选.

解法 2 $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1b_2\cdots b_n)$，由命题 3.3.3.4 知

$$秩(A)=秩\left[\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1b_2\cdots b_n)\right]\leqslant 秩(b_1,b_2,\cdots,b_n)=1.$$

又 A 为非零矩阵，故秩$(A)\geqslant 1$. 于是有秩$(A)=1$. 仅(A)入选。

法二 用初等变换求之.

求矩阵的秩，既可用初阶等行变换，也可用初等列变换求之。一般常将

所求秩的矩阵 A 用初等行变换化为行阶梯形矩阵 A_1，因初等变换不改变矩阵的秩，所以矩阵 A 的秩等于 A 的阶梯形矩阵 A_1（或最简阶梯形矩阵）的秩，而阶梯形矩阵的 A_1 的秩等于非零行向量的个数，所以矩阵 A 的秩等于 A 的阶梯形矩阵 A_1 中非零行向量个数.

例 3 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的秩.

解 用初等行变换求之.

$$A\xrightarrow[r_3+r(-3)]{r_2+r(-2)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4\left(-\frac{1}{4}\right)]{r_2+r(-1)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A_1.$$

因阶梯形矩阵 A_1 中仅有三个非零行，故秩$(A)=3$.

题型二 求与乘积矩阵有关的矩阵的秩

利用下述诸命题求之.

命题 3.3.3.2 若 P,Q 可逆，则

$$\text{秩}(PAQ)=\text{秩}(PA)=\text{秩}(AQ)=\text{秩}(A).$$

命题 3.3.3.3 A 为实矩阵时，有

$$\text{秩}(A)=\text{秩}(A^{\mathrm{T}})=\text{秩}(A^{\mathrm{T}}A)=\text{秩}(AA^{\mathrm{T}}).$$

命题 3.3.3.4 秩$(AB)\leqslant\min\{\text{秩}(A),\text{秩}(B)\}$.

命题 3.3.3.5 设 A 为 $m\times p$ 矩阵，B 为 $p\times n$ 矩阵.

(1) 如 $AB=O$，且 $B\neq O$，则 $AX=0$ 有非零解，因而秩$(A)<p$；

(2) 如 $AB=O$，则秩$(A)+$秩$(B)\leqslant p$（p 为 A 的列数，B 的行数）.

例 4 A,B 均是 n 阶矩阵，且 $A^2-2AB=E$，则秩$(AB-BA+2A)=$

(A) $n-2$.　　(B) $n-1$.　　(C) $n-3$.

(D) n.　　(E) $n-3$.

解 由 $A(A-2B)=E$ 知，A 可逆，因而秩$(A)=n$. 且有

$$A(A-2B)=(A-2B)A=E,\quad \text{即}\quad A^2-2AB=A^2-2BA.$$

于是 $AB=BA$，所以

$$\text{秩}(AB-BA+2A)=\text{秩}(2A)=\text{秩}(A)=n.$$ 仅(D)入选.

例 5[2002 年 Ⅰ 24]　已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\0&2&0&1\\0&0&3&-1\\0&0&0&4\end{bmatrix}$，

则矩阵 $BA+2A$ 的秩为_____.

解 $BA+2A=(B+2E)A$，而

$$B+2E=\begin{bmatrix}3&-1&2&4\\0&4&0&1\\0&0&5&-1\\0&0&0&6\end{bmatrix},\quad \text{且}\quad |B+2E|=3\times4\times5\times6\neq0,$$

因而 $B+2E$ 为可逆矩阵，而用初等行变换将 A 化为阶梯形矩阵得到

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A_1,$$

故秩$(A_1)=$秩$(A)=2$，因 $B+2E$ 可逆，由命题 3.3.3.2 有

$$\text{秩}(BA+2A)=\text{秩}[(B+2E)A]=\text{秩}(A)=2.$$

例 6[1999 年 Ⅰ 15]　设有矩阵 $A_{m\times n}$，秩$(A)=m<n$，B 为 n 阶矩阵，则

(A) A 的任意 m 阶子式均不为零.

(B) A 的任意 m 个列向量均线性无关.

(C) $|A^{\mathrm{T}}A|\neq0$。

(D) 当 $AB=O$ 时，必有 $B=O$。

(E) 当秩$(B)=n$ 时，有秩$(AB)=m$。

解 由秩$(A)=m$ 知，矩阵 A 中必有一个 m 阶子式不等于零，且存在 m 个列向量线性无关，但不能说任意 m 阶子式不等于零，任意 m 个列向量线性

无关。(A)、(B)均不成立.

因秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant$秩$(\boldsymbol{A})=m<n$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,故秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant m<n$,因而$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$.(C)也不成立.或直接利用命题 3.3.3.3 有秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A})=m<n$,而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,故$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$.

两个因子矩阵相乘等于零矩阵,但因子矩阵不一定为零矩阵.例如

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O},$$

但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,这里 $m=2$,$n=3$,秩$(\boldsymbol{A})=2$.(D)也不成立.

但如秩$(\boldsymbol{A})=n$,且有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则因 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,或如秩$(\boldsymbol{A})=m$,且有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$($\boldsymbol{B}$ 为 m 阶矩阵),则因 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

当秩$(\boldsymbol{B})=n$ 时,$\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵,由命题 3.3.3.2 知秩$(\boldsymbol{AB})=$秩$(\boldsymbol{A})=m$,仅(E)入选.事实上,因 $\boldsymbol{B}$ 可逆,可写成初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_i$ 的乘积:$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s$.于是有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s,$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 经 s 次初等列变换后所得到的矩阵。由于矩阵经初等变换后秩不变,有秩$(\boldsymbol{AB})=$秩$(\boldsymbol{A})$.

例 7[2004 年Ⅰ 10](条件充分性判断) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩$(\boldsymbol{A})=1$.

(1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$ ($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数);

(2) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&0&\cdots&0\\\cdots&\ddots&\ddots&\ddots&\cdots\\0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix}.$$

解 秩$(\boldsymbol{\alpha})=1$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,由命题 3.3.3.4 知

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}),\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\}=1,\quad \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},$$

由命题 3.3.3.1(1)知秩$(\boldsymbol{A})\geqslant 1$,条件(1)充分.当条件(2)成立时,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}).$$

$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,故秩$(\boldsymbol{B})=n$,于是由命题 3.3.3.2 知

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})=\text{秩}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})]=\text{秩}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\text{秩}\begin{bmatrix}0&2&3&\cdots&n\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}=1.$$

条件(2)充分。仅 D 入选.

例 8(条件充分性判断)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,要使得秩$(\boldsymbol{AB})<$秩$(\boldsymbol{B})$.

(1) $|\boldsymbol{A}|=0$;　　(2) 秩$(\boldsymbol{B})=n$.

解　当条件(1)成立时,如 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时就有秩$(\boldsymbol{AB})=0$,秩$(\boldsymbol{B})=0$。因而推不出秩$(\boldsymbol{AB})<$秩$(\boldsymbol{B})$.条件(1)不充分.

当条件(2)成立,且秩$(\boldsymbol{A})=n$ 时,有秩$(\boldsymbol{AB})=$秩$(\boldsymbol{B})=n$.条件(2)也不充分.但当条件(1)与条件(2)联合时,由命题 3.3.3.4 得到秩$(\boldsymbol{AB})\leqslant$秩$(\boldsymbol{A})$.又因$|\boldsymbol{A}|=0$ 有秩$(\boldsymbol{A})<n$,故

$$\text{秩}(\boldsymbol{AB})\leqslant\text{秩}(\boldsymbol{A})<n=\text{秩}(\boldsymbol{B}).$$

仅 C 入选.

题型三　求与 $\boldsymbol{A}^*$ 有关的矩阵的秩

主要用下述命题求之.

命题 3.3.3.6　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则

$$\text{秩}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & \text{秩}(\boldsymbol{A})=n,\\1, & \text{秩}(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, & \text{秩}(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

例 9(条件充分性判断)　$\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,秩$(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(1) $\boldsymbol{A}$ 不可逆;　　(2) $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$.

解　当条件(1)、条件(2)单独成立时,都得不到秩$(\boldsymbol{A}^*)=1$,所以它们单独不充分.但联合起来后,由 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个元素 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 不等于零,即至少有一个二阶子式不等于零,而条件(1)又成立,因而$|\boldsymbol{A}|=0$.于是 $\boldsymbol{A}$ 的三阶行列式等于零.由命题 3.3.3.1(3)知秩$(\boldsymbol{A})=2=n-1$。再由命题 3.3.3.6 知秩$(\boldsymbol{A}^*)=1$. 仅 C 入选.

例 10(条件充分性判断)　有三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,秩$(\boldsymbol{A})<3$.

(1) 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩小于 2;

(2) 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意两列均不成比例.

解 A 为三阶矩阵，则秩$(A^*)=\begin{cases}3, & \text{秩}(A)=3,\\ 1, & \text{秩}(A)=2,\\ 0, & \text{秩}(A)<2。\end{cases}$ 当条件(1)成立时，有秩$(A^*)<2$ 即秩$(A^*)\leqslant 1$。由命题 3.3.3.6 知有秩$(A)\leqslant n-1=2$ 即秩$(A)<3$，故条件(1)充分.

当条件(2)成立时，有可能秩$(A)=3$，例如 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，因而条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 11 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

解法 1 因秩$(A)=2=n-2=4-2<n-1=3$，由命题 3.3.3.6 知，秩$(A^*)=0$，故仅(A)入选.

解法 2 由题设秩$(A)=2$，由命题 3.3.3.1(3)知 A 的所有三阶子式等于零. 于是 A 的所有元素的代数余子式均为零，即 $A^*=O$，故秩$(A^*)=0$. 仅(A)入选.

例 12 已知 A 是 4 阶不可逆矩阵，则秩$((A^*)^*)=$_____。

解法 1 因 A 的秩$\leqslant 3=n-1$，由命题 3.3.3.6 知，当秩$(A)=3=n-1=4-1$时，秩$(A^*)=1$，当秩$(A)<3=n-1=4-1$ 时，秩$(A^*)=0$，于是秩$(A^*)\leqslant 1<n-1=4-1=3$，对矩阵 A^* 使用命题 3.3.3.6，即知秩$(A^*)^*=0$.

解法 2 因$|A|=0$，故$(A^*)^*=|A|^{n-2}A=O$，因而秩$(A^*)^*=0$.

注意 当 $n\geqslant 3$ 时，由于 A^* 的秩只有等于 n，1，0 这三种情况，对 A^* 利用命题 3.3.3.6 即知

$$\text{秩}(A^*)^*=\begin{cases}n, & \text{秩}(A^*)=n,\\ 0, & \text{秩}(A^*)=1<n-1,\\ 0, & \text{秩}(A^*)==0<n-1,\end{cases}$$

即
$$\text{秩}(A^*)^*=\begin{cases}n, & \text{秩}(A^*)=n,\\ 0, & \text{秩}(A^*)=0 \text{ 或秩}(A^*)=1。\end{cases}$$

依此类推得到

$$\text{秩}(((A^*)^*))^*=\begin{cases}n, & \text{秩}((A^*)^*)=n,\\ 0, & \text{秩}((A^*)^*)=0<n-1.\end{cases}$$

例 13(条件充分性判断) 设 A 为 n 阶矩阵，必有 $A^*=O$.

(1) $|\boldsymbol{A}|=0$；　　(2) 秩$(\boldsymbol{A})=n-2$ $(n\geqslant 2)$.

解　当条件(1)成立时，只能得到$|\boldsymbol{A}^*|=0$不一定有$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，条件(1)不充分。当条件(2)成立时，由命题 3.3.3.6 有秩$(\boldsymbol{A}^*)=0$，因而$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$. 条件(2)充分。仅 B 入选.

题型四　已知矩阵的秩，求该矩阵的待定常数

常用矩阵秩的定义求之，为此常先将所给矩阵用初等行(列)变换化简矩阵，再用秩的定义求其待定常数，或直接利用行列式性质化简或求出方阵的行列式，利用行列式等于零的性质，求出待求常数.

例 14[2002 年 Ⅱ 24]　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&3&-6&1\\-2&2&3&2\\-6&-8&9&t\end{bmatrix}$，秩$(\boldsymbol{A})=2$，则 $t=$_____.

解　求矩阵的秩，既可以用初等行变换，也可以用初等列变换，同时还可以既用初等行变换，又用初等列变换.

下用初等行变换先将 $\boldsymbol{A}$ 化成阶梯形矩阵，然后再根据秩的大小确定 t.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&3&-6&1\\-2&2&3&2\\-6&-8&9&t\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}-2&2&3&2\\4&3&-6&1\\-6&-8&9&t\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}-2&2&3&2\\0&7&0&5\\0&-14&0&t-6\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}-2&2&3&2\\0&7&0&5\\0&0&0&t+4\end{bmatrix},$$

因秩$(\boldsymbol{A})=2$，故 $t+4=0$ 所以 $t=-4$.

例 15[2001 年 Ⅰ 20]　已知 5 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&a&a&a&a\\a&2&a&a&a\\a&a&2&a&a\\a&a&a&2&a\\a&a&a&a&2\end{bmatrix}$，且秩$(\boldsymbol{A})=4$，则 a 必为

(A) -2.　　(B) $-1/2$.　　(C) $1/2$.　　(D) 2.

解　因秩$(\boldsymbol{A})=4$，由命题 3.3.3.1(5)知$|\boldsymbol{A}|=0$. 于是由$|\boldsymbol{A}|=0$得到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&a&a&a&a\\a&2&a&a&a\\a&a&2&a&a\\a&a&a&2&a\\a&a&a&a&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+4a&a&a&a&a\\2+4a&2&a&a&a\\2+4a&a&2&a&a\\2+4a&a&a&2&a\\2+4a&a&a&a&2\end{vmatrix}$$

$$=(2+4a)\begin{vmatrix}1&a&a&a&a\\1&2&a&a&a\\1&a&2&a&a\\1&a&a&2&a\\1&a&a&a&2\end{vmatrix}=(2+4a)\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&2-a&0&0&0\\1&0&2-a&0&0\\1&0&0&2-a&0\\1&0&0&0&2-a\end{vmatrix}$$

$=(2+4a)(2-a)^4=0$，

则 $a=2$ **或** $a=-1/2$. **当** $a=2$ **时显然秩**$(\boldsymbol{A})=1$，**故** $a=-1/2$. **仅**(B)**入选**.

例 16 n **阶**$(n\geqslant 3)$**矩阵** $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\ddots&\cdots\\\cdots&\ddots&\ddots&a\\a&\cdots&a&1\end{vmatrix}$ **的秩为** $n-1$，**则** a **必为**

(A) 1. (B) $1/(1-n)$. (C) -1. (D) $1/(n-1)$. (E) 0.

解法 1 $|\boldsymbol{A}|\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}[(n-1)a+1]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&1&a&\cdots&a\\1&a&1&\ddots&\cdots\\\cdots&\cdots&\ddots&\ddots&a\\1&a&\cdots&a&1\end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{c_i-ac_1}[(n-1)a+1]\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1-a&0&\cdots&0\\1&0&1-a&\ddots&\cdots\\\cdots&\cdots&\ddots&\ddots&0\\1&0&\cdots&0&1-a\end{vmatrix}$$

$=(1-a)^{n-1}[(n-1)a+1]$。

令 $|\boldsymbol{A}|=0$ **得** $a=1$ **或** $a=1/(1-n)$. **但当** $a=1$ **时秩**$(\boldsymbol{A})=1$，**这与秩**$(\boldsymbol{A})=n-1\geqslant 3-1=2$ **矛盾**。**仅**(B)**入选**.

解法 2 **先用初等变换化简矩阵，再用秩的定义求之. 易求得**

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{bmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a-1&1-a&0&\ddots&0\\a-1&0&1-a&\ddots&\cdots\\\cdots&\cdots&\ddots&\ddots&0\\a-1&0&\cdots&0&1-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{a\neq 1\\ i=2,3,\cdots,n}]{r_1\left(\frac{1}{1-a}\right)}\begin{bmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{i=2,3,\cdots,n\\ a\neq 1}]{c_1+c_i}\begin{bmatrix}1+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1.$$

因秩$(\boldsymbol{A})=n-1$**,由秩的定义知当** $1+(n-1)a=0$ **且** $a\neq 1$ **时有秩**$(\boldsymbol{A}_1)=$**秩**$(\boldsymbol{A})=n-1$**. 因** $n\geqslant 3$**,当** $1+(n-1)a=0$ **时自然有** $a\neq 1$**. 于是有** $a=1/(1-n)$**. 仅**(B)**入选.**

例 17[2000 **年** Ⅱ 13] **已知** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & t\\ 3 & t & -1\\ 4 & 3 & -3\end{bmatrix}$**,** $\boldsymbol{B}$ **是三阶非零矩阵,且** $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$**,则** $t=$

(A) 6. (B) -4. (C) 1. (D) **任何实数.**

解法 1 **因** $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$**,故秩**$(\boldsymbol{B})\geqslant 1$**,又** $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$**,所以秩**$(\boldsymbol{A})+$**秩**$(\boldsymbol{B})\leqslant 3$ **即秩**$(\boldsymbol{A})\leqslant 3-$**秩**$(\boldsymbol{B})\leqslant 3-1\leqslant 2$**. 当** $t=1$ **时,**$\boldsymbol{A}$ **中有两列成比例,秩**$(\boldsymbol{A})=2$**. 仅**(C)**入选.**

解法 2 **因** $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$**,**$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$**,故** $\boldsymbol{AX}=0$ **有非零解. 因而秩**$(\boldsymbol{A})\leqslant 2$**,而经初等行变换** $\boldsymbol{A}$ **可化为**

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & t\\ 3 & t & -1\\ 4 & 3 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & t-1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1。$$

当 $t=1$ **时秩**$(\boldsymbol{A}_1)=2$**,因而秩**$(\boldsymbol{A})=$**秩**$(\boldsymbol{A}_1)=2$。**仅**(C)**入选.**

习 题 3.3.3

(一) 问题求解

1. [1998 年 Ⅰ 16] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 6 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 3 & a & 4\end{bmatrix}$，且秩$(\boldsymbol{A})=2$，则 $a=$

(A) 9. (B) 18. (C) 0. (D) 1. (E) -18.

2. [2000 年 Ⅰ 12] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ -3 & 6 & 8\\ 2 & -4 & t\end{bmatrix}$，且秩$(\boldsymbol{A})=2$，则 $t=$

(A) -6. (B) 6. (C) 8. (D) 任何实数.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，则必有

(A) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|>0$. (B) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|>0$. (C) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$.

(D) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|<0$. (E) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|<0$.

4. [2003 年 Ⅱ 29] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & a & -2\\ 0 & 5 & a\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，则秩$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 不定，与 a 取值有关.

5. $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $3\Leftrightarrow$

(A) $\boldsymbol{A}$ 的 4 阶子式全为零，三阶子式全不为零.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的 4 阶子式全为零.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的 4 阶子式全为零，三阶子式不全为零.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式不全为零.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{bmatrix}$ 且秩$(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$

(A) -1. (B) -2. (C) -3. (D) -4.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则

(A) 当 $m>n$ 时，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$. (B) 当 $m>n$ 时，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$.

(C) 当 $m<n$ 时，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$. (D) 当 $m=n$ 时，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & a & -2\\ 0 & 5 & a\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，则秩$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B})=$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 不定，与 a 取值有关.

9. 设 A 是 n 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维列向量组，$\beta_i=A\alpha_i$（$i=1,2,\cdots,s$），则

（A）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也线性无关.

（B）当 A 可逆时，秩$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$=秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

（C）若 A 不可逆，则秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)>$秩$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$.

（D）若秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)>$秩$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则 A 不可逆.

（E）上述结论都不正确.

10. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $t=$

（A）-1。　（B）-2。　（C）-3。　（D）1。　（E）2。

（二）条件充分性判断

1. A 为 n 阶矩阵，则 A 的行向量组必有一个行向量是其余行向量的线性组合.

（1）秩$(A)=n$；　（2）秩$(A)<n$.

2. $A=(a_{ij})_{m\times m}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则秩$(A)=0$.

（1）秩$(B)=m$；　（2）$AB=O$.

3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 作为矩阵 A 的行向量，对任意 $b\in R^s$，非齐次线性方程组 $AX=b$ 有惟一解；

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 作为矩阵 B 的列向量，$BX=0$ 只有零解.

4. $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$，则 B 的列向量组线性无关.

（1）$m<n$；　（2）$AB=E$.

3.4　线性方程组

（一）考试内容

齐次线性方程组的基础解系及求解，非齐次线性方程组解的结构及求解.

（二）考试要求

掌握非齐次线性方程组解的判定定理，齐次线性方程只有零解和有非零解的判定定理；熟练掌握用初等行变换求线性方程的通解（一般解）；掌握非齐次线性方程组解的结构及解的性质；会求齐次线性方程组的基础解系，会用基础解系（向量形式）表示齐次和非齐次线性方程组的全部解.

3.4.1 齐次线性方程组

题型一　判定齐次线性方程组解的情况

类型（一）　判定齐次线性方程组只有零解。

定理 3.4.1.1　齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=0$ 仅有零解的充分必要条件是：

（1）秩$(\boldsymbol{A})=n$（即 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的列数，或 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于未知数个数）.

（2）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

定理 3.4.1.2　齐次线性方程组 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，只有零解的充分必要条件是：

（1）秩$(\boldsymbol{A})=m$（即 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，或 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于未知数个数）.

（2）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

命题 3.4.1.1　当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

例 1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 仅有零解的充分条件是

（A）$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关.　　（B）$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

（C）$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关.　　（D）$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关.

解　由定理 3.4.1.1(2)知，仅(A)入选.

例 2　要使方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0,\\ 2x_2+3x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有惟一解，则

（A）$\lambda=0$。　（B）$\lambda\neq 0$。　（C）$\lambda=2$。　（D）$\lambda\neq -2$。　（E）$\lambda\neq 2$。

解 因 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&2&3\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_1}\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&2&3\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}$ 为三阶矩阵. 由命题 3.4.1.1 知,当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,即 $\lambda+2\neq 0$,即 $\lambda\neq -2$ 时该方程组有惟一解,即只有零解. 仅(D)入选.

类型(二) 判别齐次线性方程组有非零解.

定理 3.4.1.3 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=0$ 有非零解(无穷多解)的充分必要条件是下列条件之一成立:

(1) 秩$(\boldsymbol{A})<n$(即 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $\boldsymbol{A}$ 的列数,或 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于未知数个数);

(2) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

定理 3.4.1.4 齐次线性方程组 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2,\cdots x_m)$ 有非零解(无穷多解)的充分必要条件是下列条件之一成立:

(1) 秩$(\boldsymbol{A})<m$(即 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $\boldsymbol{A}$ 的行数,亦即小于未知数个数);

(2) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

命题 3.4.1.2 当 $m<n$ 时齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=0$ 必有非零解.

命题 3.4.1.3 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵时,$\boldsymbol{AX}=0$ 有非零解的充分必要条件为秩$(\boldsymbol{A})<n$,即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

例 3[2003 年Ⅱ 11](条件充分性判断) $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 一定有非零解.

(1) $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵; (2) $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵.

解 当条件(1)成立的,$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 为 4 阶矩阵,而秩$(\boldsymbol{A})\leqslant 3$,秩$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})\leqslant \min\{$秩$(\boldsymbol{A})$,秩$(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\}\leqslant 3<n=4$,故秩$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})<4$,所以 $|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=0$,由命题 3.4.1.3知$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 条件(1)充分.

当条件(2)成立时,$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 为三阶矩阵,且

$$\text{秩}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})\leqslant\min\{\text{秩}(\boldsymbol{A}),\text{秩}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\}\leqslant 3.$$

当秩$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})<3$ 时,$|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=0$,$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解;当秩$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=3$ 时,$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,因而 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$ 一定有非零解不一定成立. 条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 4[1997 年Ⅰ 32] 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,问常数 λ 为何值时,线性齐次方程$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

解 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}$. 由命题 3.4.1.3 知使$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有非零解的 λ 之值，即使$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$的 λ 之值.

下面利用行列式的性质将$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$中不含 λ 的元素消成零元素，使该零元素所在的行或列出现 λ 的一次公因式.

$$
\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{r_3+(-1)r_1} (\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1-(\lambda-2) & 0 & \lambda-2-1\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -(\lambda-3) & 0 & \lambda-3\end{vmatrix} = (\lambda-3)^2\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{c_3+c_1} (\lambda-3)^2\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & \lambda-1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\\
&= (-1)(-1)^{3+1}(\lambda-3)^2\begin{vmatrix}-1 & \lambda-1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\
&= -(\lambda-3)^2(-1-\lambda+1) = \lambda(\lambda-3)^2.
\end{aligned}
$$

故当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，线性齐次方程组$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有非零解.

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=0$.

(A) 当 $n>m$ 时，仅有零解。　(B) 当 $n>m$ 时，必有非零解。

(C) 当 $m>$时 n，仅有零解。　(D) 当 $m>n$ 时，必有非零解。

(E) 以上结论都不正确.

解 因秩$(\boldsymbol{A})\leqslant\min(m,n)$，秩$(\boldsymbol{B})\leqslant\min(m,n)$，而秩$(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{$秩$(\boldsymbol{A})$，秩$(\boldsymbol{B})\}$，于是

当 $n>m$ 时，有秩$(\boldsymbol{A})\leqslant m$，秩$(\boldsymbol{B})\leqslant m$，而 $\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶矩阵. 由于秩$(\boldsymbol{AB})$

可能等于也可能小于 m，只能说当 $n>m$ 时，如果秩$(\boldsymbol{AB})=m$，则$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，如果秩$(\boldsymbol{AB})<m$，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=0$ 必有非零解，因而(A)、(B)都不正确.

又当 $n<m$ 时，秩$(\boldsymbol{AB})\leqslant n<m$，而 $\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶矩阵，因而矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩小于未知数的个数，由定理 3.4.1.3(1)知齐次方程$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解。仅(D)入选.

题型二　求齐次线性方程组的基础解系

定义 3.4.1.1　若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，且 $\boldsymbol{AX}=0$ 的任意一个解均可用它们线性表示，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

由此定义易知，只有有非零解的齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 才有基础解系，它实质上就是全部解的集合的一个极大无关组。因而 $\boldsymbol{AX}=0$ 的一组解 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为其基础解系的条件是：

(1) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关；　(2) 其个数 $s=n-$秩$(\boldsymbol{A})$.

定理 3.4.1.5(齐次线性方程组解的结构)　设齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$，其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，且秩$(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系由 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=n-r$ 个解向量所组成.

$\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系可用下述两法求之.

法一　用初等行变换化系数矩阵为阶梯形矩阵求之.

先用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形矩阵，得到同解方程组。其非零行的行数设为 r(即秩$(\boldsymbol{A})=r$)，每行第一个非零元素所在的列(共有 r 列)对应的未知量称为独立未知量，其余 $n-r$ 个未知量称为自由未知量，并用自由未知量表示独立未知量。为此给自由未知量赋值，每次给一个自由未知量赋值为1，其余的自由未知量赋值为零，即令自由未知量分别取$(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$代入同解方程组中求得独立变量的取值，从而得到 $r-$秩$(\boldsymbol{A})=n-r$个解. 它就是所求的方程组的一个基础解系.

法二　用初等行变换化系数矩阵为含最高阶单位矩阵的矩阵求之.

这是基础解系的一种简便求法. 用这种方法还可求出非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解。

设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵. 设秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=$秩$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=r$. 对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$施行初等行变换，化为 $\overline{\boldsymbol{A}}_1=(\boldsymbol{A}_1\ \vdots\ \boldsymbol{b}_1)$，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 化成含 r 阶(最高阶)单位矩阵的矩阵. 如果 r 阶(最高阶)单位矩阵在 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列，则基础解系的 $n-r$ 个解向量

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$的$j_1,j_2,\cdots,j_r$个分量依次是$\boldsymbol{A}_1$中除$r$阶单位矩阵所在$r$个列以外的其余$n-r$列前$r$个分量反号，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$的其余$n-r$个分量依次组成$n-r$阶单位矩阵.

特解$\boldsymbol{\eta}_0$的第$j_1,j_2,\cdots,j_r$个分量依次为$\bar{\boldsymbol{A}}_1$中最后一列b_1的前r个分量(但不反号)，而$\boldsymbol{\eta}_0$的其余$n-r$个分量全部取成零.

例 6 求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$的基础解系。

解法 1 用初等行变换将系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$化为阶梯形矩阵，确定独立未知量、自由未知量，即

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

得原方程组的同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0,\\ x_3+x_5=0,\\ x_4=0。\end{cases}\qquad①$$

因秩$(\boldsymbol{A})=3,n=5$，故自由未知量共有$n-$秩$(\boldsymbol{A})=5-3=2$个. 令x_1,x_5为自由未知量，将$x_1=1,x_5=0$代入式①得到$x_2=-x_1=-1,x_3=0$. 又$x_4=0$，故基础解系中一解向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,0,0)$。

再令$x_1=0,x_5=1$，代入式①得到$x_2=-x_5=-1,x_3=-x_5=-1,x_4=0$，于是基础解系中另一解向量为$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,-1,0,1)$。因而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为所求的一个基础解系.

解法 2 用初等行变换将系数矩阵$\boldsymbol{A}$化为含最高阶单位矩阵的矩阵，然后直接写出所求的基础解系中的解向量.

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1,\quad \text{秩}(\boldsymbol{A})=\text{秩}(\boldsymbol{A}_1)=3,$$

$n=5$，故该方程组的一个基础解系含$n-$秩$(\boldsymbol{A})=5-3=2$个解向量. 下面就来写出这两个解向量的分量，不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},x_3^{(i)},x_4^{(i)},x_5^{(i)})\quad(i=1,2).$$

因最高阶(三阶)单位矩阵 $\boldsymbol{E}_3$ 位于 $\boldsymbol{A}_1$ 中的第 $j_1=2,j_2=3,j_3=4$ 列,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的第 2、第 3、第 4 个分量分别为 $\boldsymbol{A}_1$ 中的最高阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_3$ 以外的另外两列即第 1、第 5 两列的前三个分量反号,故

$$x_2^{(1)}=-1,x_3^{(1)}=-0,x_4^{(1)}=0,\quad \text{即}\quad \boldsymbol{\alpha}_1=(x_1^{(1)},-1,0,0,x_5^{(1)}),$$

$$x_2^{(2)}=-1,x_3^{(2)}=-1,x_4^{(2)}=0,\quad \text{即}\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(x_1^{(2)},-1,-1,0,x_5^{(2)})。$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的尚未确定的分量 $x_1^{(1)},x_5^{(1)};x_1^{(2)},x_5^{(2)}$ 依次要组成二阶单位矩阵,即可写出它们的取值分别为

$$x_1^{(1)}=1,\quad x_5^{(1)}=0;\quad x_1^{(2)}=0,\quad x_5^{(2)}=1.$$

它们组成的二阶单位矩阵为 $\begin{bmatrix}x_1^{(1)} & x_5^{(1)}\\ x_1^{(2)} & x_5^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. 于是所求的基础解系中的向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

例 7[2001 年Ⅱ 24] 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ x_3+x_4+x_5=0,\\ x_1+x_2+x_3+x_5=0\end{cases}$ 的基础解系为_____.

解 将上方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$,用初等行变换化为含最高阶单位矩阵的矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\\1&1&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-r_1}\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&-1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&-1&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_5+r_2}\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4(-1/2)}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[i=1,2,3]{\substack{r_2+r_4\\ r_i-r_4}}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1。$$

因秩$(\boldsymbol{A}_1)=4$，故所给齐次方程组的一个基础解系只含 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=5-$秩$(\boldsymbol{A}_1)=5-4=1$ 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 又因 $\boldsymbol{A}_1$ 的最高阶(4 阶)单位矩阵位于第 2、第 3、第 4、第 5 列，故解向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 2、第 3、第 4、第 5 个分量为最高阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_4$ 所在列的另外一列，即 $\boldsymbol{A}_1$ 中第 1 列的前四个分量反号，而 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第一个分量组成一阶单位矩阵，即为 1. 于是 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 此为所求的一个基础解系.

例 8 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=0, \\ 4x_1+5x_2+6x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系是

(A) $(-3,0,3,0)^{\mathrm{T}},(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(B) $k_1(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2 为任意实数.

(C) $(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}},(1,-3/2,0,1/2)$.

(D) $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}},(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(E) $(-3,4,1,-2)^{\mathrm{T}},(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}},(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

解 基础解系中的向量首先必是解. 而$(-3,0,3,0)$不是解，故(A)不能入选. 其次这些向量必线性无关. 而(C) 中两向量对应分量成比例，线性相关. (C)也不能入选. 另外基础解系是一个向量组，而不是通解，(B)也不能入选. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1$$

知，秩$(\boldsymbol{A})=2$，$n=4$，一个基础解系所含解向量个数有要求，它只含 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=4-2=2$ 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，因而(E) 也不能入选.

用基础解系的简便求法可由 $\boldsymbol{A}_1$ 直接写出 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$. 因 $\boldsymbol{A}_1$ 的最高阶(二阶)单位矩阵位于 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 1、第 2 两列，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的第 1、第 2 个分量分别是 $\boldsymbol{A}_1$ 中其余的第 3、第 4 两列的前两个分量反号，即 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,x_3^{(1)},x_4^{(1)})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-3,x_3^{(2)},x_4^{(2)})$. 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的第 3、第 4 个分量组成二阶单位矩阵即 $\begin{bmatrix}x_3^{(1)}&x_4^{(1)}\\x_3^{(2)}&x_4^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，因而 $x_3^{(1)}=1,x_4^{(1)}=0,x_3^{(2)}=0,x_4^{(2)}=1$. 于是该方

程组的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$. 仅(D)入选.

例 9[2001 年 Ⅰ 19] 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 4×5 矩阵，ξ_1,ξ_2 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，则

(A) $\xi_1-\xi_2,\xi_1+2\xi_2$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系。

(B) $k(\xi_1+\xi_2)$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解。

(C) $k\xi_1+\xi_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解。

(D) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_1$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系.

解 由题设知，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系含两个解向量，故选项(B)、(C)不成立. 事实上其通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$.

又因 $\begin{bmatrix}\xi_1-\xi_2\\ \xi_1+2\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=3\neq0$，由命题 3.3.1.4 知，$\xi_1-\xi_2,\xi_1+2\xi_2$ 线性无关，且它们都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，所以 $\xi_1-\xi_2,\xi_1+2\xi_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系. 选项(D)中向量。因为

$$\begin{bmatrix}\xi_1-\xi_2\\ \xi_2-\xi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix},\quad \text{而}\quad \begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0,$$

由命题 3.3.1.4 知 $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_1$ 线性相关.(D) 不成立。仅(A)入选.

例 10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则秩$(\boldsymbol{A})=$

(A) t. (B) $n-t$. (C) $m-t$. (D) $n+t$. (E) $m+t$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times m$ 矩阵，由定理 3.4.1.5 知该方程组一个基础解系含 $m-$秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=m-$秩$(\boldsymbol{A})=t$ 个解向量，则

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})=\text{秩}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=m-t.$$ 仅(C)入选.

题型三 求(判定)齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解

齐次线性方程组一定有零解，仅有零解的充分必要条件是秩$(\boldsymbol{A})=n$，其中 n 为 $\boldsymbol{X}$ 的维数(未知数的个数)，即 $\boldsymbol{A}$ 的列数.

在有非零解的条件下必存在 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 设秩$(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系必含 $n-r$ 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解(全部解)可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 的线性组合，即

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r},\quad \text{其中 } c_1,c_2,\cdots,c_{n-r} \text{ 为任意常数.}$$

因而为求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解先求出系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 r，然后再求出其基础解系.

例 11[2005 年 Ⅰ 9] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\a&b&c\end{bmatrix}$，且秩$(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩

阵，则 $A^*X=0$ 的通解是

(A) $k_1\begin{bmatrix}1\\0\\a\end{bmatrix}$. (B) $k_1\begin{bmatrix}2\\1\\b\end{bmatrix}$. (C) $k_1\begin{bmatrix}3\\1\\c\end{bmatrix}$. (D) $k_1\begin{bmatrix}1\\0\\a\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\1\\b\end{bmatrix}$.

(E) 以上结论都不正确(注：k_1，k_2 为任意常数).

解 由秩$(A)=2$，由命题 3.3.3.6 知秩$(A^*)=1$. 因而 $n-$秩$(A^*)=3-1=2$，且$|A^*|=0$. 于是 $A^*X=0$ 的一个基础解系含两个解向量. 由 $A^*A=|A|E=0$ 知，A 的三个列向量均为 $A^*X=0$ 的非零解向量. 因

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,a)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,b)^{\mathrm{T}}$$

的两分量不成比例，故线性无关，为 $A^*X=0$ 的一个基础解系. 因而 $A^*X=0$ 的通解为(D)。仅(D)入选.

例 12[2000 年 Ⅰ 23] 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_4=0,\\x_2+x_3=0,\\x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$ 的一般解(全部解)是_____.

解法 1 先将方程组的系数矩阵用初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=A_1.$$

由矩阵 A_1 可写出原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_2=0,\\x_2+x_3=0,\\x_4=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_1=-2x_2,\\x_2=-x_3,\\x_4=0.\end{cases}$$

令 x_2 为自由变量，且因秩$(A)=$秩$(A_1)=3$，$n=4$，故上方程组只含一个自由变量。不妨令 $x_2=c$ 为任意常数，则得其方程组的全部解为

$$\begin{cases}x_1=-2c,\\x_2=c,\\x_3=-c,\\x_4=0\end{cases}\quad(c\text{ 为任意常数}).$$

解法 2　用基础解系表示一般解. 因秩$(\boldsymbol{A}_1)=$秩$(\boldsymbol{A})=3<n=4$,故原方程组有无穷多解,且一个基础解系只含 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=4-3=1$ 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 下由 $\boldsymbol{A}_1$ 直接写出此解向量义 $\boldsymbol{\alpha}$. 因 $\boldsymbol{A}_1$ 的最高阶(三阶)单位矩阵位于 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 1、第 3、第 4 列,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 1、第 3、第 4 个分量分别是其余的一列向量(第 2 列向量)的三个分量反号,而第 2 个分量为 1,即 $\boldsymbol{\alpha}=(-2,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$. 因而原方程的一般解为 $\boldsymbol{X}=c\boldsymbol{\alpha}$,其中 c 为任意常数. 它与解法 1 所得结果是相同的。

例 13　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{bmatrix}$,齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个解向量,求 $\boldsymbol{AX}=0$ 的通解.

解　由题设有 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=2$,即秩$(\boldsymbol{A})=n-2=4-2=2$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换得到

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&a-2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&(a-1)^2&0&0\\1&a-2&-1&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1.$$

当 $a=1$ 时,显然秩$(\boldsymbol{A}_1)=$秩$(\boldsymbol{A})=2$. 此时

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&0&0&0\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1/3&0\\0&1&2/3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1.$$

因秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A}_1)=2$,$n=4$,故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只含两个自由变量。

令自由变量为 x_3,x_4,同解方程组为 $\begin{cases}x_1=(1/3)x_3,\\x_2=(-2/3)x_3-x_4。\end{cases}$ 令 $x_3=1$,$x_4=0$ 可求得 $x_1=1/3$,$x_2=-2/3$;再令 $x_3=0$,$x_4=1$ 可得到 $x_1=0$,$x_2=-1$。从而得到方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1/3,-2/3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

或对 $\boldsymbol{A}_1$ 使用基础解系的简便求法即得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1/3,-2/3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

故方程组的通解为 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

习　题　3.4.1

(一) 问题求解

1.［1998 年Ⅰ17］ 四元线性方程组$\begin{cases}x_1+x_4=0,\\x_2=0,\\x_1-x_4=0\end{cases}$的基础解是

(A) $(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$。 (B) $(0,0,2,0)^{\mathrm{T}}$。 (C) $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$。

(D) $(0,0,2,0)^{\mathrm{T}}$ 和$(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$。 (E) $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$。

2. 已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 没有非零解的充分条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关。 (B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关。

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关。 (D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关。

(E) $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于其列秩。

3.［1999 年Ⅱ17］ 四元齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_2+x_4/2=0\end{cases}$的基础解系是

(A) $(0,-1,0,2)^{\mathrm{T}}$。 (B) $(0,-1,0,2)^{\mathrm{T}}$ 和$(0,1/2,0,1)^{\mathrm{T}}$。

(C) $(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$。 (D) $(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和$(2,0,-2,0)^{\mathrm{T}}$。

(E) $(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和$(0,-1,0,2)^{\mathrm{T}}$。

4. 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1/2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(-2,0,1,-2)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=(0,-2,1,-2)^{\mathrm{T}},$$

则齐次方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_4=0,\\2x_3+x_4=0\end{cases}$的基础解系是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$. (C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$. (E) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

5.［2004 年Ⅱ8］ 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-1,2)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-2,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(0,-2,1,-2)^{\mathrm{T}},$$

则齐次方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_4=0,\\2x_3+x_4=0\end{cases}$的基础解系是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$. (C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(E) 以上结论都不正确。

（二）条件充分性判断

1.［2005 年Ⅰ20］ $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_4=0,\\2x_3+x_4=0\end{cases}$的一个基础

解系。

(1) $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$；　　(2) $\boldsymbol{\eta}_2=(4,0,-2,4)^{\mathrm{T}}$.

2. 齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+4x_2+(3a+1)x_3+2tx_4=0,\\2x_1+4x_2+2ax_3+(ta+t-a+1)x_4=0,\\x_1+2x_2+ax_3+tx_4=0\end{cases}$ **的基础解系由两个向量组成.**

(1) $t=1$ 且 $a=1$；　　(2) $t=1$ 且 $a=-1$.

3. $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ **是齐次方程组** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ **的三个解，要使得** $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ **是** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ **的基础解系.**

(1) **任何解都可以用** $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ **线性表示，并且表示方式惟一；**

(2) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ **线性无关.**

4. 设 $\boldsymbol{A}$ **是** $m\times n$ **矩阵，**$\boldsymbol{AX}=0$ **只有零解.**

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ **无解；**　　(2) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ **有惟一解.**

(三) 解答题

1. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0,\\4x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+x_3=0,\\x_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}$ **有非零解，求** a **及其通解.**

2. λ **取何值时齐次线性方程组** $\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=0,\\-x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$ **有非零解，只有零解？**

3. 求下列齐次线性方程组的基础解系：

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+3x_5=0,\\2x_1-2x_2-x_3+2x_4+4x_5=0,\\3x_1-3x_2-x_3+4x_4+5x_5=0,\\x_1-x_2+x_3+x_4+8x_5=0.\end{cases}$$

4. 求下列齐次方程组的通解：

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3+x_4=0,\\3x_1-6x_2+4x_3-2x_4=0,\\4x_1-5x_2+5x_3-3x_4=0.\end{cases}$$

3.4.2 非齐次线性方程组

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_3+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_1, \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

除该形式还有下述两种形式。一是向量形式。记 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则上方程组可写成向量形式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$。二是矩阵形式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

称齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，简称导出组.

题型一　判定非齐次线性方程组解的情况

下面判定 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$有解、无解及有解时有多少个解.

定理 3.4.2.1　下列条件之一是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件：

(1) 秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}})$，其中 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$为方程组的增广矩阵.

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示($\boldsymbol{b}$ 为常数项组成的列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组).

(3) $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}\}$。

定理 3.4.2.2　下列条件之一是非齐次方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件：

(1) 秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$，其中 n 为方程组未知数的个数.

(2) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

定理 3.4.2.3　下列条件之一是非齐次方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解的充分必要条件：

(1) 秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=r=n$，其中 n 为方程组未知数的个数.

(2) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 惟一线性表示.

定理 3.4.2.4　下列条件之一是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 无解的充

分必要条件：

(1) 秩$(\overline{A})$=秩(A)+1。

(2)b 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

方程个数在上定理中没有出现，它是秩(A)=秩$(\overline{A})$的上限，由此得到.

命题 3.4.2.1 当秩$(A)=m$ 时，非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=b$ 一定有解，其中 m 为 $A_{m\times n}X=b$ 中方程的个数.

值得注意的是当 A 的秩等于方程组 $A_{m\times n}X=b$ 中未知数个数即秩$(A)=n$ 时，$A_{m\times n}X=b$ 不一定有解. 因为这时有可能秩$(\overline{A})$=秩$(A\ \vdots\ b)>$秩$(A)=n$，即由秩$(A)=n$ 推不出秩$(\overline{A})=n$. 例如方程组 $x_1+x_2=0,x_1-x_2=0,5x_1+6x_2=1$，易知秩$(A)=2$，但秩$(\overline{A})=3$.

例 1[2003 年 Ⅰ 14]（条件充分性判断） 线性方程组

$$\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1,\\ tx_2-3x_3=3,\\ x_1+3x_2+(t+1)x_3=0\end{cases}$$

有无穷多解.

(1) $t=-3$；　　(2) $t=1$.

解 将所给方程组的增广矩阵进行初等行变换得到

$$\overline{A}=(A\ \vdots\ b)=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-4&1&1\\0&t&-3&3\\1&3&t+1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&4&-1&-1\\0&-1&t-2&1\\0&0&(t+3)(t-1)&t+3\end{array}\right]。$$

当条件(1)成立即 $t=-3$ 时，秩(A)=秩$(\overline{A})=2<n=3$，因而方程组有无穷多组解。条件(1)充分。当条件(2)成立即 $t=1$ 时，秩$(A)=2$，秩$(\overline{A})=3$，方程组无解. 条件(2)不充分。仅 A 入选.

例 2[2002 年 Ⅱ 15] A 是 $m\times n$ 矩阵，X 是 n 维向量，b 是非零 m 维向量，则

(A) 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 必有惟一解。

(B) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 必有无穷多解。

(C) 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 只有零解。

(D) 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 必有非零解。

解 当 $AX=0$ 只有零解时，这只说明秩$(A)=n$，但不能保证秩$(A\ \vdots\ b)$=秩$(A)=n$，因而不能保证 $AX=b$ 有解，更不能保证 $AX=b$ 有惟一解.(A) 不成立.

同样，$AX=0$ 有非零解，只说明秩$(A)=r<n$，但不能保证秩$(A\ \vdots\ b)=$秩$(A)=r$，因而不能保证 $AX=b$ 有解。(B)不成立.

当 $AX=b$ 有非穷多解时，则秩$(A\ \vdots\ b)=$秩$(A)=r<n$. 因而秩$(A\ \vdots\ 0)$ $=$秩$(A)=r<n$，于是 $AX=0$ 必有无穷多解，即必有非零解。(D)成立，(C)不成立. 仅(D)入选.

例 3(条件充分性判断)　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，非齐次方程组 $AX=b$ 有无穷多解。

(1) $m<n$；　　(2) 秩$(A)=m$.

解　对齐次方程组 $AX=0$，当 $m<n$ 时必有非零解，因而有无穷多解，但对非齐次方程组 $AX=b$ 来说，$m<n$ 时，结论就不成立了. 原因是这时有可能秩$(A\ \vdots\ b)>$秩(A)，因而这时可能 $AX=b$ 无解. 例如 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\3x_1+3x_2+3x_3=4\end{cases}$ 就无解. 条件(1)单独不充分.

当条件(2)成立时，虽能保证秩$(A\ \vdots\ b)=$秩(A)，因而 $AX=b$ 有解，但不能保证秩$(A)=m<n$. 因而条件(2)单独也不充分. 将条件(1)与条件(2)联合起来，正好有秩$(A)=$秩$(\bar{A})=m<n$. 仅 C 入选.

例 4　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 有惟一解的充分条件是

(A) $m>n$ 且 A 的列向量组线性无关.　　(B) $m=n$ 且 $|A|\neq 0$.

(C) $m<n$ 且 A 的行向量组线性无关。　　(D) 秩$(A)<n$。

解　当 $m=n$ 且 $|A|\neq 0$ 时，有秩$(\bar{A})=$秩$(A)=r=n$. 由定理 3.4.2.3(1)知 $AX=b$ 有惟一解. 仅(B)入选.

(A) 成立不能保证有解，若有解，则一定惟一.

(C) 成立由命题 3.4.2.1 知能保证有解，但不能保证解惟一.

(D) 成立既不能保证有解，也不能保证解惟一.

例 5(条件充分性判断)　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\1 & a+2 & a+3\\b & 2a+b+2 & 2a+2b+2\\b & a+b+1 & a+2b+2\end{bmatrix}$ 存在两个不相等的矩阵 B 与 C，使得 $AB=AC$.

(1) $a=-1$，b 为任何数；　　(2) $b=2$，a 为任何数.

解　由 $AB=AC$ 得 $A(B-C)=O$，于是 $B-C$ 的列向量是线性齐次方程组 $AX=0$ 的解. 由 $B\neq C$ 知$(B-C)$是非零矩阵，则方程组 $AX=0$ 有非零解，

秩$(\boldsymbol{A})<3$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & a+2 & a+3\\ b & 2a+b+2 & 2a+2b+2\\ b & a+b+1 & a+2b+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & a+1 & a\\ 0 & 0 & b-2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

当$a=-1$,b为任何数时,秩$(\boldsymbol{A})<3$,条件(1)充分;当$b=2$,a为任意数时,秩$(\boldsymbol{A})<3$,条件(2)也充分.仅D入选.

题型二　求解非齐次线性方程组

定理3.4.2.5(解的结构定理)　(1)非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的任意一个解均可表示为方程组的一个特解与其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的某个解的和.

(2)当非齐次线性方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有无穷多解时,其中$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,且秩$(\boldsymbol{A})=r<n$,它的全部解(通解)为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_0+c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r},$$

其中,$\boldsymbol{\eta}_0$为原非齐次方程组的一个特解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$为其导出组的一个基础解系,$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为任意常数.

由定理3.4.2.5易得非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解的求法:

(1)对增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$作初等行变换将其化为阶梯形矩阵;

(2)求导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系;

(3)求出$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个特解(令自由变量全为零即得一特解);

(4)按上述解的结构定理写出其通解.

类型(一)　求解不含参数的非齐次线性方程组。

例6[1997年Ⅰ28]　求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4,\\ x_2-x_3+x_4=-3,\\ x_1+3x_2-3x_4=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3.\end{cases}$$

解法1　利用初等行变换将方程组的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$化为含最高阶单位矩阵的矩阵,即

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]=\overline{\boldsymbol{A}}_1。$$

秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$=秩$(\boldsymbol{A}_1)$=3，n=4，原方程组只含 n−秩$(\boldsymbol{A})$=4−3=1 个自由未知量。不妨令 x_4 为自由未知量，则由 $\bar{\boldsymbol{A}}_1$ 得原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1=-8, \\ x_2-x_4=3, \\ x_3-2x_4=6。 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1=-8, \\ x_2=3+x_4, \\ x_3=6+2x_4, \\ x_4=x_4. \end{cases}$$

解法 2　$\bar{\boldsymbol{A}}_1$ 为含最高阶(三阶)单位矩阵的矩阵. 易知秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$=3<n=4，原方程组有无穷多组解，导出组的一个基础解系含 n−秩$(\boldsymbol{A})$=4−3=1 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 由基础解系和特解的简便求法，由 $\boldsymbol{A}_1$ 即可写出 $\boldsymbol{\alpha}$ 和原方程组的一特解 $\boldsymbol{\eta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\eta}=(-8,3,6,0)^{\mathrm{T}}.$$

于是原方程组的所有解用向量形式可表示为

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}=k(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}+(-8,3,6,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

类型(二)　求解含参数的线性方程组。

求解含参数的线性方程组这一类考题是必考内容，它是线性方程组最常出现的一类考题. 因为它既考了解的判别法则，又考了求解方法.

利用初等行变换求解含参数的线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的步骤如下：

1° 将增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$ 进行初等行变换，化为行阶梯形矩阵；

2° 利用行阶梯形矩阵对参数的取值加以讨论：参数取哪些值时，使秩$(\boldsymbol{A})$≠秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$，从而使方程组无解？参数取哪些值时，使秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$，因而使方程组有解？

3° 在有解的情况下，进一步讨论：参数取哪些值时，使秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$=r<n，因而使方程组有无穷多解？参数取哪些值时，使秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$=r=n，因而使方程组有惟一解？

对于求解方程个数与未知数个数相等的含参数的线性方程组，一般用初等行变换求之. 也可先用克莱姆法则求出系数行列式不等于零的参数的取值，从而求得方程组有惟一解的参数取值，再对使系数行列式等于零的参数取值讨论方程组解的情况. 常用初等行变换讨论之.

对于求解方程个数与未知数个数不等的含参数的线性方程组只能用初等行变换解之.

例 7[1997 年 Ⅱ 32]　当 a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a, \\ ax_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$ 有惟一解、无穷解？并分别求出解.

解　对上方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ 进行初等行变换得到

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix}=\overline{\boldsymbol{A}}_1 。$$

当 $1-a\neq 0$ 即 $a\neq 1$ 时，秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}}_1)$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，上方程组有惟一解。为求惟一解，对 $\boldsymbol{A}_1$ 进一步初等行变换，将 $\boldsymbol{A}_1$ 化为含最高阶单位矩阵的矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

故惟一解为 $x_1=-1, x_2=a+2, x_3=-1$.

$1-a=0$ 时，$\boldsymbol{A}_1$ 化为 $\overline{\boldsymbol{A}}_2=(\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b})=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 因秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}}_2)$ $=1, n=3$，原方程含 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=3-1=2$ 个自由变量。不妨令 x_2, x_3 为自由变量。原方程组与方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 同解，故所求解为 $\begin{cases} x_1=1-x_2-x_3, \\ x_2=x_2, \\ x_3=x_3, \end{cases}$ 其中 x_2, x_3 可取任意实数，因而方程组有无穷多组解.

或由 $\boldsymbol{A}_2$ 知，当 $a=1$ 时，秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}}_2)=1$，因而对应的齐次线性方程组的一个基础解系含 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=3-1=2$ 个解向量，即 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

又由 $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ 知 $a=1$ 时，所给方程组的一特解为 $\boldsymbol{\eta}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，因而 $a=1$ 时所给方程的一般解用向量形式可表示为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\eta}=k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

例 8[2001 年 Ⅰ 31]　a, b, t 各为何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1-tx_2=a, \\ x_2-tx_3=b, \\ -tx_1+x_3=0 \end{cases}$$

有惟一解、无解、无穷多解？求出无穷多解时的一般解.

解　将增广矩阵化为阶梯形矩阵，即

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -t & 0 & a\\ 0 & 1 & -t & b\\ -t & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -t & 0 & a\\ 0 & 1 & -t & b\\ 0 & 0 & 1-t^3 & at+bt^2\end{array}\right]=\bar{\boldsymbol{A}}_1.$$

当 $1-t^3\neq 0$ 时，即 $t\neq 1$ 时，有惟一解；当 $t=1$，且 $a+b\neq 0$ 时无解；当 $t=1$，且 $a+b=0$ 时有无穷多解，此时

$$\bar{\boldsymbol{A}}_1=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]。$$

设原方程组只有一个自由变量，不妨令其为 x_3，其同解方程组 $x_1=x_3$，$x_2=x_3-a$. 令 $x_3=0$，求出一特解 $\boldsymbol{\xi}_0=(0,-a,0)$。令 $x_3=1$ 可求出导出组 $x_1-x_3=0$，$x_2-x_3=0$ 的一个解 $\boldsymbol{\eta}=(1,1,1)$，它构成基础解系，原方程组的一般解为 $\boldsymbol{\xi}_0+c\boldsymbol{\eta}$，$c$ 可取任意实数.

例 9[1999 年Ⅰ 32]　已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+tx_3=4,\\ x_1-x_2+2x_3=-4,\\ -x_1+tx_2+x_3=t^2\end{cases}$ 有无穷多组解，求 t 的值，并求方程组的一般解.

解法 1　用初等行变换将方程组的增广矩阵化成阶梯形矩阵，即

$$\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & t & 4\\ 1 & -1 & 2 & -4\\ -1 & t & 1 & t^2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & t & 4\\ 0 & -2 & 2-t & -8\\ 0 & t+1 & t+1 & t^2+4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc}1 & 0 & (t+2)/2 & 0\\ 0 & 1 & (t-2)/2 & 4\\ 0 & 0 & (t+1)(4-t)/2 & t(t-4)\end{array}\right]=\bar{\boldsymbol{A}}_1。$$

显然，当 $t=4$ 时，秩$(\bar{\boldsymbol{A}}_1)=$秩$(\bar{\boldsymbol{A}})=2=$秩$(\boldsymbol{A})<n=3$，因而方程组有无穷多解. 当 $t=4$ 时，$\bar{\boldsymbol{A}}_1=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，因而原方程组只有一个自由变量，不妨设为 x_3。原方程与下列方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_3=0,\\ x_2+x_3=4,\\ x_3=x_3,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_1=-3x_1,\\ x_2=4-x_3,\\ x_3=x_3\end{cases}$$

同解。令 $x_3=0$，得原方程组的一个特解 $\boldsymbol{\eta}=(0,4,0)^{\mathrm{T}}$. 因 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=3-2=1$，原方程组的导出组的一个基础解系只含一个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

令自变量 $x_3=1$ 得原方程组导出组 $x_1+3x_3=0, x_2+x_3=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-3,-1,1)^{\mathrm{T}}$，所以方程组的一般解为

$$\boldsymbol{X}=c\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}=c(-3,-1,1)^{\mathrm{T}}+(0,4,0)^{\mathrm{T}}.$$

解法 2 当 $t=4$ 时，$\boldsymbol{A}_1=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right]$ 中已含最高阶(二阶)单位矩阵，可直接写出基础解系及一个特解.

因秩$(\boldsymbol{A}_1)=$秩$(\boldsymbol{A})=2, n-$秩$(\boldsymbol{A})=3-2=1$，基础解系只含一个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 又因 A_1 中的最高阶(二阶)单位矩阵在第 1、第 2 列，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 1、第 2 个分量就是 $\boldsymbol{A}_1$ 中第 3 列的前两个分量反号，即为 $-3,-1$. 第 3 个分量为 1，于是 $\boldsymbol{\alpha}=(-3,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 用此法也可写出原方程组的一个特解，它的第 1、第 2 个分量就是最后一个的前两个分量(但不反号)，第 3 个分量取成 0，即 $\boldsymbol{\eta}=(0,4,0)^{\mathrm{T}}$. 则其一般解为

$$\boldsymbol{X}=c\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}=c(-3,-1,1)^{\mathrm{T}}+(0,4,0)^{\mathrm{T}},\quad c \text{ 为任意常数}.$$

题型三　求抽象线性方程组的通解

抽象线性方程组是指方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 没有具体给出或没有完全具体给出. 欲求这类方程组的通解需综合运用方程组解的性质及其结构.

利用下述解的性质判定某向量为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 或为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$的解向量.

定理 3.4.2.6　(1) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组解，则其任意线性组合 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 也是其解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任意一个解，$\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解(即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解是其特解 $\boldsymbol{\eta}_0$ 和 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解的和)(见定理 3.4.2.5(1)).

(3) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的任意线性组合 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s$ 不一定是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，更不一定是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解。当且仅当 $k_1+k_2+\cdots+k_3=1$ 时，$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s$ 仍是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，当且仅当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时，$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解。特别 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两解 $\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2$ 的差 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

类型(一)　A 没有具体给出，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 通解。

一般先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，由此确定一个基础解系含多少个解向量，然后设

法求出这些解向量，证明它们线性无关.

例 10 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_____.

解 $\boldsymbol{X}$ 的维数为 n，秩$(\boldsymbol{A})=n-1$，故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础系含 $n-r=n-(n-1)=1$ 个解向量。而 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 满足方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，因而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，于是其通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1$（$k_1$ 为任意常数）.

例 11 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 的非零矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_____.

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})\leqslant3$，又因 $|\boldsymbol{B}|=0$，秩$(\boldsymbol{B})=2$，故秩$(\boldsymbol{A})\leqslant3-$秩$(\boldsymbol{B})=1$，又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，故秩$(\boldsymbol{A})\geqslant1$. 因而得到秩$(\boldsymbol{A})=1$，于是 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=2$，因此 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系含两个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，取 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,7)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,8)^{\mathrm{T}}$，因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，其通解为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

例 12 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，判别下列向量的表示式是不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

(1) $c_1(\xi_1-\xi_2)+c_2(\xi_2-\xi_3)+c_3(\xi_3-\xi_1)$，$c_1,c_2,c_3$ 为任意常数.

(2) $c_1(\xi_1+\xi_2)+c_2(\xi_2+\xi_3)+c_3(\xi_3+\xi_1)$，$c_1,c_2,c_3$ 为任意常数.

解 如果 $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则(1)中的表示式即为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解。但因

$$\begin{bmatrix}\xi_1-\xi_2\\\xi_2-\xi_3\\\xi_3-\xi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_1\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix},$$

$$|\boldsymbol{K}_1|=1\times1\times1+(-1)^{3-1}(-1)(-1)(-1)=0\quad(\text{见式}(3.1.1.12)),$$

故 $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$ 不线性无关，因而不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故(1)不是通解. 而

$$\begin{bmatrix}\xi_1+\xi_2\\\xi_2+\xi_3\\\xi_3+\xi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_1\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix},$$

$$|\boldsymbol{K}_1|=1\times1\times1+(-1)^{3-1}\times1\times1\times1=2\neq0,$$

故 $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ 线性无关，因而为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故(2)为 $\boldsymbol{AX}$

$=\mathbf{0}$ 的通解.

类型(二) 已知 $AX=b$ 的特解及其线性组合,且已知 A 的秩或 $AX=0$ 的基础解系,求其通解.

归结为求 $AX=0$ 的通解。先由 A 的秩确定其解的结构即其基础解系所含解向量个数,再利用解的性质(定理 3.4.2.6(3))构造出 $AX=0$ 的分量已知的解向量,为此常将其分量已知的各个特解的线性组合凑成组合系数之和等于零的特解的线性组合,从而求出 $AX=0$ 的解向量.

如需要还可利用 $AX=b$ 的解的性质(定理 3.4.2.6(3))求出 $AX=b$ 的分量已知的特解,为此常将特解的线性组合凑成组合系数之和等于 1 的特解的线性组合.

最后,写出通解时,还要利用解的结构的结论(详见定理 3.4.2.5).

例 13 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量,且秩$(A)=3,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},c$ 表示任意常数,则线性方程组 $AX=b$ 的通解 $X=$

(A) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$.

解法 1 $AX=b$ 为四元非齐次方程,秩$(A)=3,AX=0$ 的一个基础解系只含 $n-$秩$(A)=4-3=1$ 个解向量. 将特解的线性组合 $2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 写成特解之差的线性组合:$2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$,由定理 3.4.2.6(3)与(1)知

$$2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$$

仍为 $AX=0$ 的一个解向量,且为其一个基础解系,故 $AX=b$ 的通解为

$$X=\boldsymbol{\alpha}_1+k[2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)]=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

仅(C)入选.

解法 2 因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $AX=b$ 的解,且 $1/2+1/2=1$,由定理 3.4.2.6(3)知

$$\boldsymbol{\alpha}_2/2+\boldsymbol{\alpha}_3/2=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)/2=(0,1/2,1,3/2)^{\mathrm{T}}$$

仍为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 也为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，由定理 3.4.2.6(3)知，向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)/2=(1,3/2,2,5/2)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$$

为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，且线性无关，故为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解也可表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}_1+k[\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)/2]=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,3/2,2,5/2)^{\mathrm{T}}.$$

例 14 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次线性方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)/2$。

(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)/2$。

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)/2$。

(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)/2$。

解 (A) 中向量是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，更不是其通解.

(B) 因 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，秩 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量. 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，又 $(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)/2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，故(B) 中向量为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(C) 中向量 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，又 $(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)/2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，但不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解，故(C)中向量也不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(D) 中向量 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1$ 虽是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，但因无法证明它们线性无关，故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$ 不能确定为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解，因而(D) 中向量不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 中的通解的表示式. 仅(B)入选.

类型(三) 已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解，但不知 $\boldsymbol{A}$ 的秩，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

先求 $\boldsymbol{A}$ 的秩，由方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有两个或多个特解，得到秩$(\boldsymbol{A})<n$(如秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=n$，则其解惟一)即得到秩$(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$(或由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关特解的个数 k 及 $n-$秩$(\boldsymbol{A})\geqslant k$，求出秩$(\boldsymbol{A})\leqslant n-k$)). 再在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中找出一个 $n-1$ 阶不等于零的子式，则秩$(\boldsymbol{A})\geqslant n-1$，于是得到秩$(\boldsymbol{A})=n-1$. 知道了 $\boldsymbol{A}$ 的秩也就知道了 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的结构.

例 15[2000 年 Ⅰ 34] 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 是方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-1,\\ 3x_1+x_2+4x_3=1,\\ ax_1+bx_2+cx_3=d\end{cases}$$

的两个解. 求此方程组的全部解.

解法 1 已知方程组 $AX=b$ 有两个解，故秩$(A)<3$，即秩$(A)\leqslant 2$. 又因 A 的前两行不成比例，故秩$(A)\geqslant 2$. 因而秩$(A)=2$，于是 $AX=0$ 的基础解系只含一个解向量 $\alpha_1-\alpha_2=(3,-1,-2)^{\mathrm{T}}$. 故其通解为

$$\alpha_1+c(\alpha_1-\alpha_2)=(0,1,0)^{\mathrm{T}}+c(3,-1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

解法 2 因 $\alpha_1\neq\alpha_2$，故 $\alpha_1-\alpha_2\neq 0$ 为 $AX=0$ 的解，因而 $3-$秩$(A)\geqslant 1$，即秩$(A)\leqslant 2$，又因 A 的前两行不成比例，故秩$(A)\geqslant 2$. 于是必有秩$(A)=2$，因而 $AX=0$ 的一个基础解系含一个解向量，$\alpha_1-\alpha_2$. 则该方程的全部解为 $\alpha_1+c(\alpha_1-\alpha_2)$或 $\alpha_2+c(\alpha_1-\alpha_2)$，其中 c 为任意常数。

解法 3 因秩$(A)=2$，故方程组的第三个方程是多余方程，即原方程与下面方程组同解：

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-1,\\ 3x_1+x_2+4x_3=1。\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3/2 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 1\end{bmatrix},$$

其基础解系为$(-3/2,1/2,1)$，即 $\alpha=(-3,1,2)^{\mathrm{T}}$. 特解为 $\eta=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，因而其通解为

$$c\alpha+\eta=c(-3,1,2)^{\mathrm{T}}+(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

类型(四) 利用线性方程组的向量形式求(证明)其解。

利用定理 3.4.2.1 至定理 3.4.2.4 中有关解向量形式的结论求(证)之.

例 16 已知 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$. 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $AX=b$ 的解.

解 由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关和 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$ 知，A 的秩为 3. 因此 $AX=0$ 的基础解系只包含一个解向量. 将 $AX=0$ 及 $AX=\beta$ 写成列向量形式，即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_3\alpha_3=0,\qquad①$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_3\alpha_3=\beta,\qquad②$$

为求上方程组的一个解向量，只需求出满足上方程组的 x_1,x_2,x_3,x_4 即可. 将 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$ 与组①比较即知组①的一个解向量为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

又由式②及 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 有

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

因而 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，即 $(x_1,x_2,x_3,x_3)^{\mathrm{T}}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k\text{ 为任意常数}).$$

注意 例 16 解法的关键是将线性方程组写成向量形式，即式①与式②.

题型四 由其解反求方程组的参数或其系数矩阵

一般根据解的性质(定理 3.4.2.6)，利用线性方程组解的理论(定理 3.4.2.5)求之. 求出参数值后，应检验哪些参数值符合题设要求，应舍去与题设不符的参数值.

类型(一) 已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解的情况，反求 $\boldsymbol{A}$ 中参数.

当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时，根据 $|\boldsymbol{A}|=0$(有非零解)或 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$(只有零解)确定 $\boldsymbol{A}$ 中参数；当 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，即方阵个数与未知数个数不相等时，一般用秩 $(\boldsymbol{A})$ 的大小确定解的情况，求出 $\boldsymbol{A}$ 中参数。常用初等行变换求出 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

例 17[1998 年 Ⅱ 16] 设齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & t & 1\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

则 $t=$

(A) 4. (B) -4. (C) -1. (D) 1. (E) 0.

解 根据解的判别法则应有秩 $(\boldsymbol{A})<3$，而

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & t-4 & -5\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 5 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -t-1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故当 $t=-1$ 时，秩 $(\boldsymbol{A})=2<3$。仅(C)入选.

例 18[2004 年 Ⅰ 12](条件充分性判断) $\xi=(-2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$；　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & -4 & -4\\ 2 & 4 & 4\end{bmatrix}$.

解 因 $AX=0$ 的基础解系只含一个解向量，因而 $n-$秩$(A)=1$，即秩$(A)=n-1=3-1=2$. 而条件(2)中 A 的秩为 1，故条件(2)不充分.

又条件(1)成立时，秩$(A)=2$ 且 $A\xi=0$，ξ 是 $AX=0$ 的解。条件(1)充分。仅 A 入选.

类型(二) 已知 $AX=b$ 的解的情况，反求方程组中的参数.

常用两种方法求之。第一种方法是计算行列式法. 当 A 为方阵时先由 $|A|=0$(或 $|A|\neq 0$)确定参数可能取的值，再用是否满足秩$(A)=$秩$(A\ \vdots\ b)=$秩$(\overline{A})$确定参数的取值，即用下述命题求之.

命题 3.4.2.2 设 A 是 n 阶矩阵，若 $|A|\neq 0$，则方程组 $AX=b$ 有惟一解；若 $|A|=0$，则方程组 $AX=b$ 可能有无穷多解，也可能无解. 当秩$(A)=$秩$(\overline{A})$时有无穷多解，当秩$(A)<$秩$(\overline{A})$时无解.

由命题 3.4.2.2 易知 $|A|=0$ 是方程 $AX=b$ 无解或有无穷多解的必要条件. 但仅由 $|A|=0$ 还不能确定方程组 $AX=b$ 是无解还是有无穷多解，还必须由秩(A)与秩$(\overline{A})$是否相等来判定.

第二种方法是初等行变换法. 此法对任意矩阵 A 均适用，对 $\overline{A}$ 进行初等行变换，看参数等于何值时有秩$(A)=$秩$(\overline{A})$，或秩$(A)\neq$秩$(\overline{A})$.

例 19 已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=a, \\ 3x_1-x_2-6x_3=a+2, \\ x_1+4x_2+11x_3=a+3 \end{cases}$ 有无穷多解，那么 $a=$_____.

解 线性方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是秩$(A)=$秩$(\overline{A})$，对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -6 & a+2 \\ 1 & 4 & 11 & a+3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{array}\right].$$

由于秩$(A)=2$，而要秩$(\overline{A})=2$ 必 $6-2a=0$，$a=3$，所以方程组有解的充分必要条件是 $a=3$.

例 20 已知方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=5, \\ ax_2+2x_3-x_4=-6 \end{cases}$ 无解，则 $a=$_____.

解 非齐次线性方程组 $AX=b$ 无解的充分必要条件是秩$(A)\neq$秩$(\overline{A})$，对增广矩阵作初等行变换有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&3&1\\2&1&4&3&5\\0&a&2&-1&-6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&3&1\\0&1&-2&1&-1\\0&a+1&0&0&-7\end{array}\right],$$

可见，$a=-1$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=2$，秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，线性方程组无解.

例 21（条件充分性判断） 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1/2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}=(-1/2,b,c)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{\gamma}$ 的一般解为

$$\boldsymbol{X}=c(1,2,1)^{\mathrm{T}}+(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(1) $b=2$，$c=-1$；　　(2) $b=1$，$c=-1/2$.

解　易求得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}$，则

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{\gamma},$$

即
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\gamma}, \qquad ①$$

其中 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\left[\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},0\right]-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-1&1/2&0\\2&-1&0\\1&1/2&-2\end{bmatrix}.$

于是方程组①为

$$\begin{bmatrix}-1&1/2&0\\2&-1&0\\1&1/2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\b\\c\end{bmatrix}. \qquad ②$$

因已知方程组②的通解为 $\boldsymbol{X}=c(1,2,1)^{\mathrm{T}}+(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 为求 b,c 只需将特解 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 代入方程组②即可. 由

$$2\times1-1\times1+0\times1=b,\quad 1\times1+(1/2)\times1+(-2)\times1=c$$

解得 $b=1$，$c=-1/2$。条件(2)充分，条件(1)不充分。仅 B 入选.

题型五　求两线性方程组的非零公共解

类型(一)　求两齐次线性方程组的非零公共解.

设两齐次线性方程组(Ⅰ)：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，方程组(Ⅱ)：$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=0$. 其非零公共解常有下述求法：

1° 将方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)联立，求解 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，其非零解就是方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)的非零公共解.

2° 求出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=0$ 的通解，令其相等，求出通解中任意常数的表示式，将其代入方程组(Ⅰ)或方程组(Ⅱ)的通解，即可求得其公共非零解.

3° 将方程组(Ⅰ)或方程组(Ⅱ)的通解代入方程组(Ⅱ)或方程组(Ⅰ)中,求出其任意常数的表示式,即可求得其公共非零解.

求法 3°常用于已知一个方程组及另一个方程组的通解(或基础解系)的情况下求其公共解.

例 22 设方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_3-x_4=0, \end{cases}$ 方程组(Ⅱ)有基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,1,0)$,$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,2,2,1)$. 求方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)的全部公共解.

解法 1 方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)的公共解也是方程组(Ⅱ)的解. 从而可写成

$$c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2=(-c_2,\ c_1+2c_2,\ c_1+2c_2,\ c_2)$$

的形式,同时它又是方程组(Ⅰ)的解,因而满足方程组(Ⅰ) $\begin{cases} (-c_2)+(c_1+2c_2)=0, \\ (c_1+2c_2)-c_2=0, \end{cases}$ 即 $c_1+c_2=0$,$c_2=-c_1$。于是方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)的所有公共解为

$$c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2=-c_2\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2=c_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)=c_2(-1,1,1,1),$$

其中 c_2 为任意常数.

解法 2 由其基础解系构造一个齐次方程组(Ⅱ)′,使得它以 $\boldsymbol{\eta}_1$,$\boldsymbol{\eta}_2$ 为基础解系,这样的方程组不惟一,例如可作方程组(Ⅱ)′为 $\begin{cases} x_2-x_3=0, \\ x_1+x_4=0。 \end{cases}$ 所求的全部公共解就是方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)′的全部公共解。联立方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)′得到

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_3-x_4=0, \\ x_2-x_3=0, \\ x_1+x_4=0, \end{cases}$$

其系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

故该方程组的基础解系只含一个解向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,因而方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)即与方程组(Ⅱ)′的所有公共解为 $c\boldsymbol{\alpha}=c(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$c$ 为任意常数。

类型(二)　求两非齐次线性方程组的公共解。

例 23［2000 年Ⅱ23］　**方程组**

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2, \\ 2x_1+6x_2+3x_3=6 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} -x_1-x_2+3x_3=4, \\ x_1+5x_2+6x_3=10 \end{cases}$$

的公共解是_____。

解　求两方程组的公共解就是求上述四个方程联立的方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2, \\ 2x_1+6x_2+3x_3=6, \\ -x_1-x_2+3x_3=4, \\ x_1+5x_2+6x_3=10 \end{cases}$$

的解。对上程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换将其化为行阶梯形矩阵,即

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 10 \end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]=\overline{\boldsymbol{A}}_1=(\boldsymbol{A}_1\vdots\boldsymbol{b}_1)。$$

因秩$(\overline{\boldsymbol{A}})$=秩$(\boldsymbol{A}_1)=3=n$,故秩$(\overline{\boldsymbol{A}})$=秩$(\boldsymbol{A})=3=n$。因而上方程组有惟一解。将 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 用初等行变换化为含最高阶的单位矩阵的矩阵得到

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

故其惟一解为 $x_1=3,x_2=-1,x_3=2$,即为$(3,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

题型六　讨论两方程组同解的有关问题

设两线性方程组(Ⅰ):$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,方程组(Ⅱ):$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{d}$. 其导出组(对应的齐次线性方程组)分别为方程组(Ⅲ):$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,方程组(Ⅳ):$\boldsymbol{BX}=0$.

所谓方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)同解,由其定义易知方程组(Ⅰ)的解也是方程组(Ⅱ)的解,且方程组(Ⅱ)的解也是方程组(Ⅰ)的解。常用此定义讨论两方程组同解的问题,有时也用下述同解的充分必要条件讨论之.

定理 3.4.2.7　方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)同解的充分必要条件是其特解相同,即方程组(Ⅰ)的任一特解均为方程组(Ⅱ)的特解,反之亦然。且其导出组的基础解系相同,即 $\boldsymbol{AX}=0$ 的任一基础解系是 $\boldsymbol{BX}=0$ 的基础解系,反之亦然.

定理 3.4.2.8　方程组 $AX=0$ 与方程组 $BX=0$ 同解的充分必要条件是它们有相同的基础解系.

值得注意的是,由定理 3.4.2.7 **易知,仅有秩(A)=秩(B)不能保证 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解,秩(A)=秩(B)是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解的必要条件而不是充分条件.**

例 24 [2002 年Ⅰ31]　**已知线性方程组**

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\3x_1+5x_2+x_3=7,\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}2x_1+3x_2+ax_3=4,\\2x_1+4x_2+(a-1)x_3=b+4,\end{cases}$$

问 a,b 为何值时,方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)有相同的解?并求此解.

解法 1　方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)有相同的解如理解为两方程组同解,可如下求出 a 和 b。先求出方程组(Ⅰ)的通解,由

$$\overline{A}=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\3&5&1&7\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\end{array}\right)$$

即知其特解为$(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$,导出组的基础解系为$(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$,于是方程组(Ⅰ)的通解为

$$(-1,2,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k\text{ 为任意实数}).\qquad①$$

因方程组(Ⅱ)与方程组(Ⅰ)同解,故其任一特解相同,于是$(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$也是方程组(Ⅱ)的特解,将其代入方程组(Ⅱ)的第二个方程得 $b=2$,又因方程组(Ⅱ)与方程组(Ⅰ)有相同的基础解系,故$(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 也是方程组(Ⅱ)的解,将其代入方程组(Ⅱ)导出组的任一方程得到 $a=1$.

解法 2　方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)有相同的解如理解为它们有公共解即方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)联立有解,即 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}X=b$ 有解,于是由

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\3&5&1&7\\2&3&a&4\\2&4&a-1&b+4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix}。$$

于是当 $b=2$(a 为任意)时,方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)总有公共解.

当 $b=2,a=1$ 时,其公共解即为方程组(Ⅰ)的通解(见式①)。

当 $b=2,a\neq1$ 时,$\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$ 的公共解只有一个(−1,2,

$0)^{\mathrm{T}}$.

例 25（条件充分性判断） 方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 与方程组 $\boldsymbol{BX}=0$ 同解。

(1) 若 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B\alpha}=0$；　(2) 秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$.

解 条件(1)成立，仅说明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\boldsymbol{BX}=0$ 的解，但其逆不一定成立。条件(1)不充分.

若条件(2)成立，则有 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=n-$秩$(\boldsymbol{B})$，仅说明两方程组的基础解系所含解向量的个数相等，条件(2)单独也不充分。但当两条件联合起来后，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 也是方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，且仍线性无关。于是由于两方程组的基础解系所含解向量个数相同，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 也是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，从而 $\boldsymbol{BX}=0$ 的解向量也是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解向量，因此 $\boldsymbol{AX}=0$ 与 $\boldsymbol{BX}=0$ 同解. 仅 C 入选.

例 26 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，则

(1) 方程组(Ⅰ)：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和方程组(Ⅱ)：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 为同解方程组；

(2) 秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$。

证 因若有 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，则 $\boldsymbol{A\alpha}=0$，因而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解向量都是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 的解向量，反之，若有向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 的解向量，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}=0$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta})=(\boldsymbol{A\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\beta})=\boldsymbol{0},$$

设

$$\boldsymbol{A\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}.$$

则 $(\boldsymbol{A\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\beta})=[(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=0$，因而 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$，于是 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$。这说明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 的解向量也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，故 $\boldsymbol{AX}=0$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 同解.

(2) 因 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 同解，故其基础解系也含有相同个数的解向量。为方便计，设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则它们一个基础解系分别含有 $n-$秩$(\boldsymbol{A})$，$n-$秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$个解向量. 由 $n-$秩$(\boldsymbol{A})=n-$秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$得到秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

例 27 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是方程组(　　)的基础解系.

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$　　(B) $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$　　(D) 以上结论都不正确

解　由题设易知 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ **与** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ **同解，故** ξ_1,ξ_2,ξ_3 **也是** $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ **的基础解系. 仅**(C)**入选.**

习　题　3.4.2

(一) 问题求解

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ **的秩等于** $m<n$**，下述结论中正确的是**

(A) $\boldsymbol{A}$ **的任意** m **个列向量此线性无关。**

(B) $\boldsymbol{A}$ **的任意一个** m **阶子式不等于零。**

(C) **齐次方程组** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ **只有零解。**

(D) **非齐次方程组** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ **必有无穷多解。**

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ **是四元非齐次方程组** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ **的三个解向量，且秩**$(\boldsymbol{A})=3$**，**$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$**，**$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$**，**$k$ **和** l **是任意常数，则** $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ **的通解是**

(A) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$.　(B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}3\\5\\7\\9\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{bmatrix}$.

(D) $l\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\3\end{bmatrix}$.　(E) $\begin{bmatrix}3\\5\\7\\9\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

3. 已知线性方程组 $\begin{bmatrix}1&2&a\\1&a+3&1\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ **无解，则** $a=$

(A) 4.　(B) 2.　(C) 1.　(D) -1.　(E) -3.

4. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$**，**$\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,2,2)^{\mathrm{T}}$ **是方程组** $\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=-1,\\3x_1+x_2+4x_3=1,\\ax_1+bx_2+cx_3=d\end{cases}$ **的两个解，则**

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$ 不是方程导出组的基础解系.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是方程导出组的基础解系.

(C) 方程组的通解是 $c(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\boldsymbol{\alpha}_1$($c$ 为任意常数).

(D) 方程组的通解是 $c_1(x_1-x_2)+c_2(x_1+x_2)$($c_1,c_2$ 为任意常数).

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{A}_{3\times4}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_{3\times1}$ 的三个解向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1,1)^{\mathrm{T}}$,秩$(\boldsymbol{A})=3$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一般解是

(A) $\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}_1+k(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$。

(C) $\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+\boldsymbol{\alpha}_3$。　　(D) $\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)+\boldsymbol{\alpha}_1$。

(E) $\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_1)+\boldsymbol{\alpha}_1$。

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,秩$(\boldsymbol{A})=l$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$

(A) 在 $l=m$ 时有解。　　(B) 在 $l=n$ 时有惟一解。

(C) 在 $m=n$ 时有惟一解。　　(D) 在 $l<n$ 时有无穷多解。

7. 已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有两个不同的解 ξ_1,ξ_2,它的导出组有基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$,则(　　)是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(A) $c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$($c_1,c_2$ 任意实数)

(B) $c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)/2$($c_1,c_2$ 为任意实数)

(C) $c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+\boldsymbol{\xi}_1$($c_1,c_2$ 为任意实数)

(D) $c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)$($c_1,c_2$ 为任意实数)

8. 要使 $\xi_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\xi_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 都是线性方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,只要 $\boldsymbol{A}$ 为

(A) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}2&1&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&2&1\end{bmatrix}$.

(二) 条件充分性判断

1. n 元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解.

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解;　　(2) 秩$(\boldsymbol{A})=n$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个解,则 $\boldsymbol{X}=c_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+c_2(\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2)+(k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2)$是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(1) $a=-1,k_1=2,k_2=-1$；　　(2) $a=2,k_1=3,k_2=-2$.

3. 三元齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解是 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) **A 中每行元素之和均为零**；　　(2) **A 的伴随矩阵 A^* 非零.**

4. 将 n 阶($n\geqslant 2$)矩阵 A 的前 $n-1$ 列形成的矩阵记作 A_1,其第 n 列记作 b,则线性方程组 $A_1X=b$ 无解.

(1) $|A|\neq 0$；　　(2) $1\leqslant$**秩**$(A)<n$.

5. 方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\ x_2-x_3=a_2,\\ x_3-x_4=a_3,\\ x_4-x_1=a_4\end{cases}$ **有解.**

(1) $a_1+a_2=0$；　　(2) $a_3+a_4=0$.

6. 方程组 $\begin{cases}tx_1+x_3=a,\\ 2x_1+tx_2+x_3=b,\\ tx_1-2x_2+x_3=c\end{cases}$ **有惟一解.**

(1) $t\neq 0$；　　(2) $t\neq 2$.

7. [2003 **年** Ⅱ 12]　**线性方程组** $\begin{cases}x_1-tx_2=1,\\ x_2-tx_3=-1,\\ -x_1+x_3=0\end{cases}$ **有无穷多解.**

(1) $t=-1$；　　(2) $t=1$.

8. 线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ 3x_1+5x_2+x_3=7\end{cases}\quad\text{与}\quad(\mathrm{II})\begin{cases}2x_1+3x_2+ax_3=4,\\ 2x_1+4x_2+(a-1)x_3=b+4\end{cases}$$

是同解方程组.

(1) $a=1$；　　(2) $b=2$.

(三) 解答题

1. [1997 **年** Ⅱ 32]　**当 a 取何值时,线性方程组** $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a,\\ ax_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+x_2+ax_3=1\end{cases}$ **有惟一解、无穷多解？并求解.**

2. [1998 **年** Ⅰ 31]　**已知线性方程组**

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3, \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5, \end{cases}$$

问 a,b 为何值时，方程组有无穷多组解，并求其解(用向量形式表示).

3. [2002 年 Ⅱ 30] 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1, \\ x_1-x_2-2x_3-7x_4=3, \\ x_2+ax_3+4x_4=1, \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4=7 \end{cases}$$

在 a 为何值时有无穷多组解？并在此时求方程组的通解.

4. [1999 年 Ⅱ 31] 设方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t, \end{cases}$$

问 t 为何值时，方程组(1)有惟一解；(2)有无穷多组解.

5. [1998 年 Ⅱ 31] 已知方程组 $\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3=1, \\ tx_2-3x_3=3, \\ x_1+3x_2+(t+1)x_3=0, \end{cases}$ 问 t 为何值时，方程组有无穷多组解，并写出其全部解(用向量形式表示).

6. 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 都是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，$\xi_1=(2,0,5,-1)$，$\xi_2+\xi_3=(1,9,0,3)$，秩$(\boldsymbol{A})=3$，求该方程组的通解.

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-3,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_4, \\ x_1+2x_2-x_3=1, \\ 2x_1+x_2+x_3=-4 \end{cases}$ 的两个解，求此方程组的通解.

8. 已知方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+bx_3+2x_4=c, \\ x_1+bx_2-x_3-2x_4=4, \\ -2x_1+x_2-x_3-5x_4=1 \end{cases}$ 的通解是 $(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，求 a 和 b 的值.

9. 设有四元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，秩$(\boldsymbol{A})=3$，又已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解，且 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,0,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=(0,2,2,0)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的四个解向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,6,8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,7,9)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,0,2)^{\mathrm{T}}$. 若秩$(\boldsymbol{A})=2$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解是_____.

11. 已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，$k_1,k_2$ 为任意常数，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

12. 已知方程组(Ⅰ)：$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\2x_1+3x_2+x_3=0,\end{cases}$ 方程组(Ⅱ)：$x_1+5x_3=0$，则方程组(Ⅰ)与组方程(Ⅱ)的公共解是_____.

13. 已知齐次线性方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)同解，其中方程组(Ⅰ)：$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=5,\\x_2+x_3=2.\end{cases}$ 方程组(Ⅱ)：$\begin{cases}ax_1+4x_2+x_3=11,\\2x_1+5x_2-ax_3=16.\end{cases}$ 则 $a=$_____.

3.5 矩阵的特征值与特征向量的概念

（一）考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念.

定义 3.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在一个数 λ 和一个非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则称数 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，如果 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，即 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的非零解。此方程组有非零解的充要条件是 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$。将 λ 看成未知数，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 是关于 λ 的多项式，称 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。从 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 中求出的 λ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，也是特征方程的根，因而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根.

（二）考试要求

理解矩阵的特征值和特征向量的概念，掌握其性质及求法.

（三）常考题型及其解题方法技巧归纳

题型一　求矩阵的特征值

法一　用解方程法求之。

先算出特征多项式$|\lambda E-A|$，再令$|\lambda E-A|=0$，求出其根，即得A的特征值.

当A为n阶矩阵时，其特征多项式$|\lambda E-A|$是关于λ的一个n次多项式，$|\lambda E-A|=0$的根就是A的全部特征值。A的特征值中可能有复特征值，但本书仅讨论A的实特征值及对应的特征向量.

若已知$|\lambda_0 E-A|=0$，则λ_0就是A的一个特征值，其中λ_0为一个已知数.

例 1 [1998 年 Ⅱ 17]　**已知** $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}$，**则$A$的特征值为**

(A) 1，−6，2。　　(B) −1，6，2。　　(C) 1，1，2。

(D) 1，−2，−2。　　(E) 1，6，−2。

解　由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & -4\\ 0 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)[(\lambda+2)^2-16]$

$$=(\lambda-1)(\lambda+6)(\lambda-2)=0,$$

得到A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-6,\lambda_3=2$。仅(A)入选.

例 2　**设三阶矩阵A满足$|A-2E|=0$，$|2A+3E|=0$，$|3A-E|=0$，则A的三个特征值是**

(A) −2，3，−1.　　(B) −2，3/2，−1/3。　　(C) 2，−3/2，1/3。

(D) 2，3/2，1/3.　　(E) **以上结论都不正确.**

解　由$|A-2E|=0$得$|(-2)E-A|=0$，故$\lambda_1=-2$是A的特征值。由$|2A+3E|=0$得

$$\left|2\left(A+\frac{3}{2}E\right)\right|\left|(-2)\left(-\frac{3}{2}E-A\right)\right|=(-2)^3\left|-\frac{3}{2}E-A\right|=0,$$

即$\left|-\frac{3}{2}E-A\right|=0$，故$\lambda_2=-\frac{3}{2}$为$A$的特征值. 又

$$|3A-E|=\left|3\left(A-\frac{1}{3}E\right)\right|=\left|(-3)\left(\frac{1}{3}E-A\right)\right|$$

$$=(-3)^3\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0,$$

即$\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$，故$\lambda_3=\frac{1}{3}$为$\boldsymbol{A}$的特征值. 因而$\boldsymbol{A}$特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=-3/2,\lambda_3=1/3$. 仅(C)入选.

例 3 矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}$的全部特征值是

(A) 2,6,6. (B) 2,2,6. (C) 2,3,3. (D) 2,2,3. (E) −2,3,3.

解 $\boldsymbol{A}$的特征多项式为$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}$。为将$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$展开成$\lambda$的因式的乘积，先利用行列式性质将$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$化简，将其不含$\lambda$的某元素消成零，使零所在的行或列出现$\lambda$的一次因式，即

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}\overset{c_2+c_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\-2&\lambda-2&2\\3&\lambda-2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\-2&1&2\\3&1&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_3}{=\!=\!=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&1&2\\\lambda-2&1&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\1&1&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-5+1-2)=(\lambda-2)^2(\lambda-6),$$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2$(二重)，$\lambda_2=6$. 仅(B)入选.

注意 按上述化简行列式的方法使行列式为λ的二次或一次多项式再展开行列式，不要一开始就展开，因为对λ的三次多项式因式分解是不方便的.

例 4(条件充分性判断) 设有矩阵$\boldsymbol{A}_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}_{n\times n}$，则$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{BA}$有相同的特征值.

(1) $\boldsymbol{A}$可逆； (2) $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

解 当条件(1)成立时，$\boldsymbol{A}$可逆，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|.$$

条件(1)充分. 当条件(2)成立时即$\boldsymbol{B}$可逆时，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{B}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}||\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}(\lambda E-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|.$$

条件(2)也充分。仅 D 入选.

法二　利用特征值的定义 $A\alpha=\lambda\alpha$ 求之.

求抽象矩阵的特征值常用此法求之. 求时为利用题设条件常在等式 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两端左乘或右乘适当矩阵,且多次用到定义 $A\alpha=\lambda\alpha$,最终化为 $g(\lambda)\alpha=0$,由于 $\alpha\neq0$,得到 $g(\lambda)=0$,求出特征值 λ.

例 5(条件充分性判断)　设 A 为 n 阶矩阵,A 的特征值只能是 -1 或 1。

(1) $A^2=E$;　　(2) A 可逆且 $A=A^{-1}$.

解　设 A 的特征值为 λ,属于 λ 的特征向量为 α,则 $A\alpha=\lambda\alpha$。两端左乘 A,得到 $A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$。

当条件(1)成立即 $A^2=E$ 时,有 $\alpha=\lambda^2\alpha$ 即 $(1-\lambda^2)\alpha=0$ 因 $\alpha\neq0$,故 $\lambda^2=1$,$\lambda=\pm1$. 条件(1)充分。当条件(2)成立时,在 $A\alpha=\lambda\alpha$ 左乘 A^{-1},则

$$\alpha=\lambda A^{-1}\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha,\quad \text{即}\quad (1-\lambda^2)\alpha=0.$$

故 $1-\lambda^2=0$,所以 $\lambda=\pm1$. 条件(2)也充分. 仅 D 入选.

例 6(条件充分性判断)　可以求出 $A+5E$ 的一个特征值.

(1) $\lambda=3$ 是矩阵 A 的特征值;　　(2) 矩阵 $A+2E$ 不可逆.

解　当条件(1)成立时有 $A\alpha=3\alpha$ $(\alpha\neq0)$,则

$$(A+5E)\alpha=A\alpha+5\alpha=3\alpha+5\alpha=8\alpha\ (\alpha\neq0),$$

因而 $\lambda=8$ 是 $A+5E$ 的一个特征值。条件(1)充分.

当条件(2)成立时,有 $|A+2E|=0$,即

$$|(-1)(-2E-A)|=0,\quad |-2E-A|=0.$$

因而 -2 为 A 的一个特征值,于是有

$$A\alpha=-2\alpha,\quad (A+5E)\alpha=A\alpha+5\alpha=-2\alpha+5\alpha=3\alpha\ (\alpha\neq0),$$

即 $\lambda=3$ 为 $A+5E$ 的一个特征值。条件(2)充分。仅 D 入选.

法三　当秩$(A)=1$ 时可使用下述命题求之。

命题 3.5.1　设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$. 若秩$(A)=1$,则 A 有 $n-1$ 个零特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$,另一个特征值为 $\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

例 7[2004 年Ⅱ9]　三阶矩阵 A 的元素全为 2,则 A 的特征值为

(A) 0,6,-6.　(B) 0,0,6.　(C) 0,0,-6.　(D) 0,2,6.　(E) 2,2,2.

解　因 A 的元素全为 2,故秩$(A)=1$。由命题 3.5.1 知其特征值有 $n-1=3-1=2$ 个零,另一个为主对角线上的元素之和即为 6. 仅(B)入选.

法四　利用特征值的下列性质求之。

命题 3.5.2　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，则

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$；　　(2) $\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

例 8　三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2$，则 $|\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}|$ =

(A) 16.　　(B) 8.　　(C) 10.　　(D) -2.　　(E) 0.

解　$\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $1,-1,2$，则 $\boldsymbol{B}$ 的三个特征值为

$$f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2,\quad \lambda=1,-1,2,$$

即

$$f(1)=-4,\quad f(-1)=-8,\quad f(2)=-12,$$

则 $\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}$ 的三个特征值为

$$-4+4=0,\quad -8+4=-4,\quad -12+4=-8,$$

故 $|\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}|=0\times(-4)\times(-8)=0$。仅(E)入选.

例 9　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是

(A) $1,0,-2$.　　(B) $1,1,-3$.　　(C) $3,0,-2$.　　(D) $2,0,-3$.

解法 1　由 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，即 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-1$ 即可排除(C)．又因 $\boldsymbol{A}$ 的第 2、第 3 列成比例，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的三个特征值必有一个是零，于是排除(B)。下用 λ 取特殊值的方法先判定 1 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因为

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & -2 & 2\\ -4 & 4 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0,$$

故 $\lambda=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。仅(D)入选.

解法 2　由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ -4 & \lambda+3 & -3\\ -2 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -4 & \lambda+3 & \lambda\\ -2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -4 & \lambda+3 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -2 & \lambda+2 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)=0,$$

得到 $\lambda_1=0,\lambda_2=-3,\lambda_3=2$. 仅(D)入选.

题型二　求矩阵的特征向量

类型(一)　求矩阵的全部特征值与全部特征向量。

一般求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和全部特征向量的方法和步骤如下：

1° 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，解方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，其中可能有重根或复根；

2° 对每个不同的 λ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 解齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，如秩 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=k_i$，则可得此方程组的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-k_i}$，于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-k_i}\boldsymbol{\alpha}_{n-k_i}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k_i}$ 是不全为零的常数.

例 10　求 n 阶矩阵的特征值和特征向量

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix};\qquad (2)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}\ (a\neq 0).$$

解　(1) **令** $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-a & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a)^n=0$，**得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=a$(n 重)。解 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由于秩 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 故任意 n 个线性无关的向量都可充当 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，例如**

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\cdots,0,1).$$

(2) 因秩 $(\boldsymbol{A})=1$，由命题 3.5.1 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有

$$\lambda_1=0(n-1\text{ 重})\quad \text{和}\quad \lambda_2=na.$$

解 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 因 $a\neq 0$，用初等行变换可化为

$$-\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

因秩 $(\boldsymbol{A})=1$，故属于 $\lambda_1=0$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0\cdots,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1),$$

所以属于 $\lambda_1=0$ 的所有特征向量为

$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$　($c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$不全为零)。

当 $\lambda_2=na$ 时,解$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$.因

$$\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=na\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(n-1)a & -a & \cdots & -a\\ -a & (n-1)a & \ddots & \cdots\\ \cdots & \ddots & \ddots & -a\\ -a & \cdots & -a & (n-1)a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_i(1/a)}\begin{bmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \ddots & \cdots\\ \cdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & n-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n-1]{r_i+(-1)r_1}\begin{bmatrix}n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -n & n & 0 & \cdots & 0\\ -n & 0 & n & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0\\ -n & 0 & \cdots & 0 & n\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n-1]{r_i(1/n)}\begin{bmatrix}n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_i}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故$(na\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解中只含一个解向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

其所有的特征向量为 $c\boldsymbol{\alpha}$（c 为不等于零的任意实数）。

例 11[1999 年 Ⅱ 30]　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&2&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和其中最小特征值对应的特征向量.

解　$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\1&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda+1\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-3&3-\lambda&0\\1&\lambda-2&-2\\0&2\lambda-6&\lambda-3\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-3)(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-2&-2\\0&2&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)^2\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-1&-2\\0&2&1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda-1+4)$$

$$=(\lambda-3)^2(\lambda+3),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=-3$. 最小特征值为 $\lambda_3=-3$，下求属 $\lambda_3=-3$ 的特征向量，即解 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-5&1&-2\\1&-5&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1,$$

因而秩 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，$(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系只含 $n-$秩 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1$ 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，由 $\boldsymbol{A}_1$ 即可写出为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=-3$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}$（k 为不等于零的常数）.

类型(二)　求矩阵的部分特征向量。

常用定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$　$(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$求之.

例 12　矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-4&-4\\0&2&0\\2&-2&-3\end{bmatrix}$ 有一个特征向量是

(A) $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.　　(B) $(3,3,-6)^{\mathrm{T}}$.

(C) $(4,-1,2)^{\mathrm{T}}$.　　(D) $(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

解　若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，那么 $k\boldsymbol{\alpha}$ $(k\neq0)$仍是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 因此若 (B) 正确，则(D) 也正确. 由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 的坐标应当成比例. 但

$\boldsymbol{A}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}\neq\lambda(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$，故(D)不能入选，(B)亦应排除.

因 $\boldsymbol{A}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}=(7,0,5)^{\mathrm{T}}\neq\lambda(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，即 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 与 $(7,0,5)^{\mathrm{T}}$ 坐标不成比例，所以 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，(A)不正确。用排除法可知应选(C)，或由下式即知仅(C)入选：

$$\begin{bmatrix}3&-4&-4\\0&2&0\\2&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-2\\4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

例 13(条件充分性判断)　非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解；　(2) $\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关.

解　当条件(1)成立时有 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}$，因而 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量。条件(1)充分.

当条件(2)成立时，有 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，因而其对应分量成比例。于是有 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 k 的特征向量。条件(2)充分，仅 D 入选.

例 14　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是

(A) $\boldsymbol{P}^{-1}\lambda$.　(B) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.　(C) $\boldsymbol{P\alpha}$.　(D) $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

解　注意到 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\neq0$，事实上，如 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，则 $(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 与 $\boldsymbol{\alpha}\neq0$ 矛盾.

因 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$，$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，将 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 比较易知，由 $\boldsymbol{A}$ 产生出 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 先产生 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，为此在 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两端左乘 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，得到

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

因 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，在上式左端能出现因子 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则对应于 λ 的特征向量即为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，为此将上式左端恒变形得到

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

即　$[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}]\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$。

故 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}^{\mathrm{T}})$ 的对应于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. 仅(B)入选.

题型三　已知一矩阵的特征值、特征向量，求相关联矩阵的特征值、特征向量

类型(一)　已知一矩阵的特征值求相关联矩阵的特征值。

利用下述命题求之。

命题 3.5.3 设矩阵 A 的特征值为 λ，A 的属于特征值 λ 的特征向量为 α，则

(1) 对任何常数 c，cA 的特征值为 $c\lambda$；

(2) 对任何自然数 k，A^k 的特征值为 λ^k；

(3) A 的多项式 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$；

(4) 若 A 可逆，则 A^{-1} 的特征值不等于零，且为 λ^{-1}；

(5) 若 A 可逆，A^* 的特征值为 $|A|/\lambda$；

(6) A^{T} 的特征值为 λ；

(7) $B_1=P^{-1}AP$ 的特征值为 λ；

(8) $B_2=(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ $(A=A^{\mathrm{T}})$ 的特征值为 λ.

既要会利用命题 3.5.3 由矩阵 A 的特征值求出相关联矩阵的特征值，也要会由相关联矩阵的特征值反求矩阵 A 的特征值，特别要会由 A^* 的特征值反求 A 的特征值.

例 15[1999 年 Ⅰ 13] 已知 λ 为可逆矩阵 A 的特征值，A^* 为 A 的伴随矩阵，则

(A) A^* 可逆，且 $|A|/\lambda$ 是 A^* 的特征值。

(B) A^* 不可逆，但 $|A|/\lambda$ 是 A^* 特征值。

(C) A^* 可逆，且 $-\lambda|A|$ 是 A^* 的特征值。

(D) A^* 不可逆，但 $-\lambda|A|$ 是 A^* 的特征值。

(E) 不可判断 A^* 可逆否。

解法 1 因 A 可逆，故 $|A|\neq 0$，由 $AA^*=|A|E$ 得到 $(A/|A|)A^*=E$，故 A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=A/|A|$.

由题设有 $A\alpha=\lambda\alpha$，其中 α 为 A 的属于 λ 的特征向量，则

$$A^*A\alpha=\lambda A^*\alpha. \qquad ①$$

又因 A 可逆，故 $\lambda\neq 0$，于是由式①得到

$$A^*\alpha=(1/\lambda)A^*A\alpha=(|A|/\lambda)E\alpha=(|A|/\lambda)E\alpha=(|A|/\lambda)\alpha.$$

即 $|A|/\lambda$ 为 A^* 的特征值，其他选项都不对. 仅(A)入选.

解法 2 利用命题 3.5.3(5)即知. 仅(A)入选.

例 16 设 A 为 n 阶矩阵 $(n\geqslant 2)$，A^* 为其伴随矩阵，$|A|=3$. 秩 $(2E+A^*)=n-1$，则 A 有一个特征值

(A) $-3/2$。 (B) $-2/3$。 (C) $3/2$。 (D) $2/3$。

解法 1 $2E+A^*$ 为 n 阶矩阵，而秩 $(2E+A^*)=n-1$，故 $|2E+A^*|=0$，

即$|\boldsymbol{A}^*-(-2)\boldsymbol{E}|=0$，所以$\boldsymbol{A}^*$有一个特征值$-2$，于是由$|\boldsymbol{A}|/\lambda=-2$得到$\lambda=|\boldsymbol{A}|/(-2)=-3/2$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值. 仅(A)入选.

解法 2 因$|\boldsymbol{A}|=3$，故$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=3\boldsymbol{A}^{-1}$，于是

$$|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*|=|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^{-1}|=0,\quad \text{即}\quad |\boldsymbol{A}||2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^{-1}|=|2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0,$$

亦即$|\boldsymbol{A}-(-3/2)\boldsymbol{E}|=0$，故$-3/2$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值. 仅(A)入选.

例 17[2002 年Ⅰ16] 已知$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，满足$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2$，则

(1) $\boldsymbol{A}$可逆；(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$可逆；(3) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$可逆；(4) $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$可逆.

以上结论正确的有

(A) 一个。　　(B) 两个。　　(C) 三个。　　(D) 四个。

解 根据特征值的性质，$\boldsymbol{A}+C\boldsymbol{E}$可逆，则$|-C\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，$-C$不是$\boldsymbol{A}$的特征值.

而条件$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2$，即$\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 于是当$\lambda$是$\boldsymbol{A}$的特征值时，$\lambda^2+4\lambda+1$是$\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的特征值，从而$\lambda^2+4\lambda+1=0$. 而此方程的解为$-2\pm\sqrt{3}$，是无理数，于是$0,-1,-2,-3$都不是$\boldsymbol{A}$的特征值，从而四个矩阵都是可逆的. 仅(D)入选.

例 18(条件充分性判断) 可确定-1为n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$；　　(2) $|\boldsymbol{A}|=-1$.

解 条件(1)与条件(2)单独都不充分。当条件(1)成立时，由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$得到$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。因而当$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的特征值时，$1/\lambda$为$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值，$\lambda$也为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的特征值。于是由$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$得到$1/\lambda=\lambda$即$\lambda^2=1$，$\lambda=\pm 1$即当条件(1)成立时，$\boldsymbol{A}$的特征值为 1 或为$-1$。又由命题 3.5.2 知$|\boldsymbol{A}|$等于$\boldsymbol{A}$的所有特征值之积，故当条件(2)成立时，有$|\boldsymbol{A}|=-1$，故$-1$必为$\boldsymbol{A}$的特征值. 于是条件(1)与条件(2)联合起来充分。仅 C 入选.

例 19(条件充分性判断) 设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，有$|\boldsymbol{A}|=0$，可确定矩阵$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$必可逆.

(1) $|2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=0$；　　(2) $|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$.

解 由$|\boldsymbol{A}|=0$知$\boldsymbol{A}$也有一特征值为 0，因而$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$也有一特征值为$1+0=1$；当条件(1)成立由

$$|2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=\left|(-2)\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\right|=(-2)^3\left|\frac{3}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$$

知$|(3/2)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$. 因而$\boldsymbol{A}$有一特征值$3/2$，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$有一特征值$1+3/2=5/2$. 但不能保证$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$的另一个特征值不为零，因而条件(1)不充分.

同样，当条件(2)成立时，由

$$|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=\left|(-3)\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\right|=(-3)^3\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$$

仅说明 $\boldsymbol{A}$ 有一特征值 $-2/3$，因而 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值为 $1-2/3=1/3$，不能保证另一特征值不等于零，所以条件(2)也不充分. 但当条件(1)与条件(2)联合起来时，这时由于 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 有三个非零特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=5/2,\lambda_3=1/3$，故 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 必可逆，仅 C 入选.

类型(二) 已知一矩阵的特征向量，求相关联矩阵的特征向量.

利用特征向量的下列诸性质判别之.

命题 3.5.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $C\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $c\lambda$ 的特征量；

(2) $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^k$ 的属于特征值 λ^k 的特征向量；

(3) $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i\boldsymbol{A}^i$ 的属于特征值 $f(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i\lambda^i$ 的特征向量；

(4) $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$(如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆)的属于特征值 $1/\lambda$ 的特征向量；

(5) $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 $|\boldsymbol{A}|/\lambda$ 的特征向量；

(6) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的属于特征值 λ 的特征向量；

(7) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

既要会利用上述命题由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量求相关联矩阵的特征向量，也要会由相关联矩阵的特征向量利用上述命题反求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，特别要会由 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量，反求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

为了便于记忆，特将命题 3.5.3 和命题 3.5.4 的内容归纳成下表 3.5.1

表 3.5.1 相关联矩阵的特征值、特征向量一览表

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$C\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\boldsymbol{A}^i$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$	$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ $(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$
特征值	λ	$c\lambda$	λ^k	$f(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\lambda^i$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	λ	λ	λ
特征向量	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	不一定是 $\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

命题 3.5.5 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 λ，$\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的线性无关

的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$，则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是不全为零的任意常数.

命题 3.5.6 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的同一个特征向量不可能是属于不同特征值的特征向量，即 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量只能属于 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

由命题 3.5.1.6 易知下述命题成立。

命题 3.5.7 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为属于 λ_i 的特征向量($i=1,2,\cdots,m$)，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

例 20 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是特征向量的矩阵是

(A) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$. (B) $3\boldsymbol{A}$. (C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. (D) $\boldsymbol{A}^2$. (E) $-\boldsymbol{A}$.

解 仅(C)入选. 这是因为

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \quad 与 \quad (\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

是不同的方程组，其解不同，因而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量是不同的，由 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，易推得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}=(\lambda-2)\boldsymbol{\alpha},$$

$$(3\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(3\lambda)\boldsymbol{\alpha},$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

$$(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=-\lambda\boldsymbol{\alpha}=(-\lambda)\boldsymbol{\alpha}.$$

可见 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},3\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,-\boldsymbol{A}$ 的特征值不同，但 $\boldsymbol{\alpha}$ 仍是这些矩阵的特征向量。仅(C)入选.

例 21[2004 年 Ⅰ 26] 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的两个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{X}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则

(A) $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(B) $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(C) $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 是 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征向量.

(D) $\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3$ 是 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征向量.

(E) 以上结论都不正确(其中 k_1,k_2 是任意常数).

解 因 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵多项式，其特征向量与 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量相同，而 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，故线性组合 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。因而 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 也是 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征向量.

因(A)中未交代 k_1 与 k_2 不全为零，如 $k_1=k_2=0$，显然 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2$ 不是

A 的特征向量；因 X_2, X_3 属于 A 的不同特征值的特征向量，故其线性组合 X_2+X_3 不是 A 的特征向量，也不是 $2A-E$ 的特征向量。同理，$k_1X_1+k_2X_3$ 也不是 A 的特征向量。事实上，当 $k_1=k_2=0$ 时，显然不是。当 k_1, k_2 不全为零时，有可能是也可能不是。如全不为零时，不是；如其中有一个等于零，则是. 仅(C)入选.

例 22[2005 年Ⅰ21](条件充分性判断) $\boldsymbol{\beta}=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的一个特征向量.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是三阶矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的两个特征向量；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是三阶矩阵 A 属于特征值 $\lambda_2=0$ 的特征向量.

解 当条件(1)成立时，因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{A}-(-2)\boldsymbol{E}]\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

的解向量，$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 也是上方程组的解向量，即 $\boldsymbol{\beta}=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的一个特征向量. 条件(1)充分。

当条件(2)成立，即 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 的非零解向量时，$\boldsymbol{\beta}$ 绝不可能再为 A 的特征向量，如果是，则同一个 A 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}$ 既属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量又属于特征值 $\lambda_2=0$ 的特征向量. 由命题 3.5.6 知，这是不可能的。条件(2)不充分。仅(A)入选.

题型四 已知特征值或(和)特征向量，求矩阵中的待定常数

类型(一) 已知特征值，求矩阵中的待定常数.

利用特征值的性质即命题 3.5.2 求之，有时也利用特征值的定义 $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求之.

如果已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，还可通过比较 A 的两个特征多项式，即

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \ddots & \cdots\\ \cdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}\\ -a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

与 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ 的系数求出待定常数.

例 23 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & x & 2\\ 5 & y & 3\\ -1 & z & -2\end{bmatrix}$ 的特征值为 $-1,-1,-1$，则 x, y, z 之值

是

(A) $x=1,y=-3,z=0$.　　(B) $x=-1,y=3,z=0$.

(C) $x=-1,y=-3,z=1$.　　(D) $x=-1,y=-3,z=0$.

(E) 以上结论都不正确.

解法 1　由命题 3.5.2 知

$$2+y-2=-1-1-1,\quad \text{即}\quad y=-3.$$

又由 $\lambda=-1$ 得到

$$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,\quad \text{即}\quad (-1)^3|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0,$$

$$-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=-\begin{vmatrix}2 & x & 2\\ 5 & y & 3\\ -1 & z & -2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & x+2z & 0\\ 2 & y+1+3z & 0\\ 0 & z & -1\end{vmatrix}$$

$$=y+1+3z-2(x+2z)=1-2x-z+y=0,$$

即

$$-2x-z=2. \qquad ①$$

又由 $|\boldsymbol{A}|=(-1)(-1)(-1)=-1$ 得到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & x+z & 0\\ 5 & y & 3\\ -1 & z & -2\end{vmatrix}=7x+4z-2y=-1,$$

即

$$7x+4z=-7。 \qquad ②$$

联立式①与式②解得 $x=-1,z=0$。仅(D)入选.

解法 2　因　$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -x & -2\\ -5 & \lambda-y & -3\\ 1 & -z & \lambda+2\end{vmatrix}$

$$=\lambda^3-y\lambda^2+(-2-5x-3z)\lambda-7x+2y-4z,$$

又 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-1,-1$,故

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^3=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1.$$

比较 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的上述两个表示式得到

$$-y=3,\quad -2-5-3z=3,\quad -7x+2y-4z=1,$$

解得 $x=-1,y=-3,z=0$。仅(D)入选.

例 24(条件充分性判断)　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{bmatrix}$ 可确定 a,b 的值.

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1;　　(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值之积为 -12.

解 当条件(1)和条件(2)单独成立时都不充分.但两条件联合时,由命题 3.5.2 有

$$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-12=2(-2a-b^2),\quad \text{即}\quad 2a+b^2=6,$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1=a+2-2=a.$$

将 $a=1$ 代入上式即得 $b=\pm 2$,故 $a=1,b=2$,或 $a=1,b=-2$. 条件(1)与条件(2)联合后充分.仅 C 入选.

例 25 已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&4&6\\2&1&3&2\\2&0&2&x\\2&3&1&2\end{bmatrix}$ 有一个零特征值,则

(A) x 为任意数. (B) $x=1$. (C) $x=2$. (D) $x=-2$. (E) $x=0$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 有一个零特征值,故 $|\boldsymbol{A}|=0$,而

$$|\boldsymbol{A}|=2\begin{vmatrix}1&1&2&3\\2&1&3&2\\2&0&2&x\\2&3&1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&-1&-1&-4\\0&-2&-2&x-6\\0&1&-3&-4\end{vmatrix}$$

$$=(-2)\begin{vmatrix}1&1&4\\-2&-2&x-6\\1&-3&-4\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&1&4\\0&0&x+2\\0&-4&-8\end{vmatrix}$$

$$=(-2)\begin{vmatrix}0&x+2\\-4&-8\end{vmatrix}=(-2)4(x+2),$$

故 $x=-2$. 仅(D)入选.

类型(二) 给出分量已知的特征向量,求矩阵中的待定常数.

常用特征值,特征向量的定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$及分量已知的特征向量建立方程组求出待定常数.

事实上 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 这是一个含特征值及待定常数的方程组.

例 26[2003 年 Ⅱ 30] 已知 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&1\\-1&0&b\\1&b&1\end{bmatrix}$ 的属于 λ_0 是一个特征向量,则 λ_0,a,b 的值分别为

(A) 1,1,0. (B) −1,1,2. (C) 0,0,1. (D) 1,0,1.

(E) 以上结论都不正确.

解　由题设有 $\boldsymbol{A}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}=\lambda_0(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$**，即**

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}-\lambda_0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ -\lambda_0 \\ 0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a+1=\lambda_0, \\ -1=-\lambda_0, \\ 1-b=0. \end{cases}$$

解得 $\lambda_0=1,a=0,b=1$**. 仅(D)入选.**

例 27　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$**，且** $|\boldsymbol{A}|=-1$**，又设** $\boldsymbol{A}$ **的伴随矩阵** $\boldsymbol{A}^*$ **有特征值** λ_0**，属于** λ_0 **的特征向量为** $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$**，求** a,b,c **和** λ_0 **的值.**

解法 1　设与 $\boldsymbol{A}^*$ **的一个特征值** λ_0 **相对应的** $\boldsymbol{A}$ **的特征值为** λ**，则**

$$|\boldsymbol{A}|/\lambda=\lambda_0,\quad \text{即}\quad \lambda=|\boldsymbol{A}|/\lambda_0.$$

又因 $\boldsymbol{A}^*$ **的属于** λ_0 **的特征向量为** $\boldsymbol{\alpha}$**，故** $\boldsymbol{A}$ **的属于** λ **的特征向量为** $\boldsymbol{\alpha}$**，于是有**

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}=(|\boldsymbol{A}|/\lambda_0)\boldsymbol{\alpha},\quad \text{即}\quad \lambda_0\boldsymbol{A\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}, \tag{1}$$

由

$$\lambda_0\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

有

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1, & (2) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1, & (3) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1. & (4) \end{cases}$$

②－④得 $\lambda_0=1$**，将其代入式②、式③得** $b=-3,a=c$**. 再由** $|\boldsymbol{A}|=-1$ **和** $a=c$ **有**

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1.$$

所以 $a=c=2$**. 因此** $a=c=2,b=-3,\lambda_0=1$**.**

解法 2　由题设知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$**，用** $\boldsymbol{A}$ **左乘此式两端得** $\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}$**. 因为** $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$**，所以上式变为** $\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}=-\boldsymbol{E\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$**. 这样就得到解法 1 中的式①. 下面与解法 1 相同(略).**

注意　如由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ **得到的方程个数小于参数个数，再利用其他条件(如上例** $|\boldsymbol{A}|=-1$**)求之.**

习　题　3.5

（一）问题求解

1. 设 4 阶矩阵 A 满足条件 $|3E+A|=0$，$A^{\mathrm{T}}A=2E$，$|A|<0$，则矩阵 A 的伴随矩阵的一个特征值为

（A）$-4/3$.　（B）$4/3$.　（C）$3/4$.　（D）$-3/4$.　（E）3.

2. n 阶矩阵 A 满足 $A^3-2A^2+A=O$，则正确的结论是

（A）A 的特征值至少有一个为零.　（B）A 的特征值至少有两个为 1.

（C）A 的特征值为 0，1，1 及其他.　（D）A 的特征值全为零或全为 1.

（E）A 的特征值只能是从 0，1 中取.

3. 下述结论中不正确的是

（A）A 与 A^{T} 有相同的特征多项式.

（B）若 λ 是 A 的特征值，则方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的非零解向量必是 A 的对应于 λ 的特征向量.

（C）若 $\lambda=0$ 是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组 $AX=0$ 必有非零解.

（D）A 的特征向量的线性组合仍为 A 的特征向量.

（E）A 的一个特征值可对应于多个特征向量，但 A 的一个特征向量只能属于 A 的一个特征值.

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \beta\\ 1 & \beta & 1\end{bmatrix}$ 有三个特征值 0，1，2，则

（A）$\alpha=1,\beta=1$.　（B）$\alpha=1,\beta=0$.　（C）$\alpha=0,\beta=1$.

（D）$\alpha=0,\beta=0$.　（E）$\alpha=2,\beta=2$.

5.［2003 年Ⅰ 30］　设 $X=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & b & a\\ 1 & a & 3\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 a，b 的值为

（A）5，2.　（B）1，-3.　（C）-3，1.　（D）-1，3.　（E）2，5.

6. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 a,b 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值 λ 是

(A) $a=3,b=0,\lambda=-1$.　　(B) $a=-3,b=0,\lambda=1$.

(C) $a=-3,b=0,\lambda=-1$.　　(D) $a=3,b=0,\lambda=1$.

7. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\6&x&-6\\y&-9&13\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，则

(A) $x=-10,y=-9$.　　(B) $x=-10,y=9$.

(C) $x=10,y=-9$.　　(D) $x=10,y=9$.

8. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为零，则正确的结论是

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。　(B) 秩$(\boldsymbol{A})=0$。　(C) 秩$(\boldsymbol{A})<n-1(n>2)$。

(D) $|\boldsymbol{A}|=0$。　(E) $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{O}$.

（二）条件充分性判断

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$，可确定 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；　　(2) n 为奇数.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 或 1.

(1) $\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{A}$；　　(2) $|\boldsymbol{A}|=0$.

3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 5.

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有特征值 5；　　(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 各行元素之和均为 5.

4. $\boldsymbol{\alpha}=(3,-1,a)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&2&1\\1&3&a\end{bmatrix}$ 的特征向量.

(1) $a=1$；　　(2) $a=0$.

（三）解答题

1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 的非零特征值和特征向量.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & a & 3\\ 6 & -6 & b\end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4$. 试求 a,b 的值.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，求 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值，并求参数 a.

4. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}$ 的实特征值.

5. 若 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，求矩阵 $[(1/3)\boldsymbol{A}^2]^{-1}$ 的一个特征值.

第4篇　概率论

4.1　随机事件与概率

（一）考试内容

随机事件，事件的关系及其运算，概率及性质，条件概率及独立性.

（二）考试要求

理解随机事件与随机试验的意义，根据随机试验的条件正确求出样本空间及样本空间所包含的样本点；理解事件的四种关系：包含关系、相等关系、对立关系和互不相容的关系；掌握事件的并、交、差的运算及其运算法则.

理解古典型概率定义，掌握古典型概率的计算方法，掌握概率的基本性质.

理解条件概率及事件独立性等概念，熟练掌握概率加法定理、乘法定理，会用事件独立性计算概率；掌握贝努利公式，会用这个公式计算有关事件概率.

4.1.1　随机事件及其运算

1. 随机现象

在一定事件下必然发生某种结果的现象称为确定性现象. 在一定条件下可能出现的结果多于一个，而且事前无法确切预知到底会出现什么结果的现象称为不确定性现象或随机现象.

随机现象具有以下特点：它在一次试验中呈现偶然性，而在多次重复试

验中呈现规律性.

概率论就是研究随机现象统计规律的一个数学分支.

2. 随机试验

为了掌握随机现象的统计规律而对随机现象进行的大量观测或实验,其可能出现的试验结果在上一个,这样的试验称为随机试验简称试验. 随机试验有下述特点:

1° 可重复性　在相同条件下试验可重复地进行;

2° 随机性　在一次试验中可能出现哪一种结果事先无法确定;

3° 全体结果的可知性　试验有多种可能的结果,且试验的所有可能结果试验之前都已知.

3. 随机事件

在一次试验中可能出现,也可能不出现的结果称为随机事件. 随机事件通常用大写字母 A,B,C 等表示.

基本(随机)事件　试验中可能出现的最基本结果,称为基本随机事件,简称基本事件.

必然事件　每次试验中都一定出现的结果称为必然事件,记作 Ω。

不可能事件　每次试验中都不出现的结果称为不可能事件,记作$\varnothing$.

例如掷一枚骰子的试验,{点数为偶数}是随机事件,{点数为 5}为基本事件,{点数小于 7}是必然事件,{点数小于 1}是不可能事件.

题型一　描绘随机试验的样本空间

一个随机事件的每一种可能的结果称为该试验的样本点. 所有样本点的集合称为该试验的样本空间,记作 Ω.

样本点就是基本事件. 任何随机事件都可看作若干个样本点的集合. 事件 A 发生就是指事件 A 所包含的某个样本点在试验中发生,但不可能事件不包含任何样本点,它就是空集$\varnothing$. 样本空间 Ω 和空集是 Ω 的两个特殊子集,它们作为特殊的随机事件处理.

样本空间由随机试验的方式和目的所确定. 当然不同的随机试验具有不同的样本空间. 就是同一个随机试验由于目的和划分的方式不一样也可能得到不同的样本空间. 因此在构造样本空间时,一定要仔细考察随机试验的条件和方式.

样本空间所包含的样本点可能是有限的,也可能是无限的;可能是有顺序的样本点,也可能是无序的样本点.

例 1　写出下列试验的样本空间：

(1) 掷一枚骰子，考虑它出现的点数；

(2) 掷一枚骰子，考虑它出现点数的奇偶性.

解　(1)设掷骰子这个随机事件的基本事件为 $A_i=\{$骰子出现 i 点$\}$，则样本空间为

$\Omega=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$，　且　$A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j;i,j=1,2,3,4,5,6)$.

(2) 设该试验的基本事件为 $B_1=\{$出现 1，3，5 点$\}$；$B_2=\{$出现 2，4，6 点$\}$，其样本空间为 $\Omega=\{B_1,B_2\}$，$B_1B_2=\varnothing$.

注意　由例 1 看出，同一试验的样本空间 Ω 可以有不同划分，它依赖于所考虑的随机事件.

例 2　写出下列随机试验的样本空间：

(1) 任取一支灯管，观察它的寿命；

(2) 连续两次抛一枚硬币，观察出现正面和反面的情况；

(3) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止，观察抛硬币的次数；

(4) 一次抛两枚硬币，观察出现正面和反面的情况.

解　(1) 灯管的使用寿命不可能是负数，可以是大于或等于零的任何实数，故 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

(2) 在这个随机试验中样本点是有顺序的，所有可能的结果为 $W_1=\{$正，正$\}$，$W_2=\{$正，反$\}$，$W_3=\{$反，反$\}$，$W_4=\{$反，正$\}$. 因此样本空间为

$\Omega=\{W_1,W_2,W_3,W_4\}=\{$(正，正)，(正，反)，(反，反)，(反，正)$\}$.

(3) 第一次抛时可能就出现正面，也可能是第二次、第三次……才出现正面，因而其样本点为无限，$\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$。

(4) 在这个随机试验中不考虑样本点的顺序，所有可能的结果为 $W_1=\{$两个全是正面$\}$，$W_2=\{$一正，一反$\}$，$W_3=\{$两个全是反面$\}$. 因此 $\Omega=\{W_1,W_2,W_3\}$.

例 3　计算下列随机试验样本空间中及下列事件中的样本点数：

(1) 10 件产品中有 2 件次品. 从中随机抽取两次，每次 1 件，抽取不放回.

事件 $A=\{$两件中至少有一件次品$\}$，事件 $B=\{$已知第一次抽到次品$\}$.

(2) 掷一枚骰子两次，得两个点数.

事件 $A=\{$两数之和不超过 6$\}$，事件 $B=\{$第一次得的数小于第二次得的数$\}$。

解 (1) 样本空间样本点数为第一次抽有 10 种可能，余下的抽第二次就有 9 种可能，总共有 $10\times9=90$ 个样本点.

因第一次得次品，第二次为正品有 $C_2^1C_8^1$ 种，第一次正品，第二次为次品又有 $C_2^1C_8^1$ 种，再加上两次全为次品有两种，事件 A 总共有 34 个样本点.

第一次抽到次品有 2 种，第二次可以随便抽取有 9 种，事件 B 总共有 18 个样本点.

(2) 样本空间的样本点数为 $6^2=36$ 个. 先求事件 A 的样本点数.

设第一个数为 1，第二个数有 5 种可能与 1 之和不超过 6.

设第一个数为 2，3，4 时，第二个数分别有 4，3，2 种可能使两数之和不超过 6. 事件 A 总共有样本点 14 个.

设第一个数为 1，2，3，4，5 时，第二个数分别有 5，4，3，2，1 种可能，事件 B 总共有样本点数为 $5+4+3+2+1=15$ 个.

题型二　用事件的运算表示事件

事件间的关系与运算，在集合论中的表示方法及其在概率论中的含义列表归纳为表 4.1.1。

表 4.1.1　事件间关系与运算

文字描述	集合论中的表示法	概率论中的含义
(1) 事件 B 包含事件 A (或事件 A 包含事件 B)	$B\supset A$ (或 $A\supset B$)	事件 A 发生，则事件 B 必发生(或事件 B 发生则事件 A 必发生)
事件 A 与 B 相等	$A=B$	事件 A 发生，则 B 也发生，反之亦然
事件 A 与 B 的和(或并)	$A+B$ 或 $A\cup B$	两事件 A，B 中至少有一事件发生
事件 A 与 B 的积(或交)	AB 或 $A\cap B$	事件 AB 发生，当且仅当 A 与 B 同时发生
事件 A 与 B 的差	$A-B$	事件 A 发生，而事件 B 不发生
事件 A 与 B 互不相容 (或互斥)	$AB=\varnothing$ 或 $A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 不可能同时发生
事件 A 与 B 对立 (或互逆)	$AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$， 记 $B=\overline{A}$	事件 $\overline{A}$ 发生，当且仅当事件 A 不发生

有限个事件 $A_1,\cdots,A_n$ ($n\geqslant 2$)构成完备事件组	$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega, A_iA_j=\varnothing,$ $i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$	n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 不能同时都不发生，且任何两事件也不可能同时发生

事件运算法则有：

1° **交换律** $A+B=B+A, AB=BA$；

2° **结合律** $A+(B+C)=(A+B)+C, A(BC)=(AB)C$；

3° **分配律** $(A+B)C=AC+BC, AB+C=(A+C)(B+C)$；

4° **摩根律** $\overline{A+B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}+\overline{B}$，一般有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

在样本空间中常要讨论不同事件之间的关系和运算，为了直观，常用几何图形来表示事件．一般用某一个矩形区间表示样本空间．该区域的一个子区间表示一个事件．这样便可以用集合表示事件的各种关系和运算法则．

如图 4.1.1.1 所示，用来表示事件关系及其运算法则的图称为文氏图．

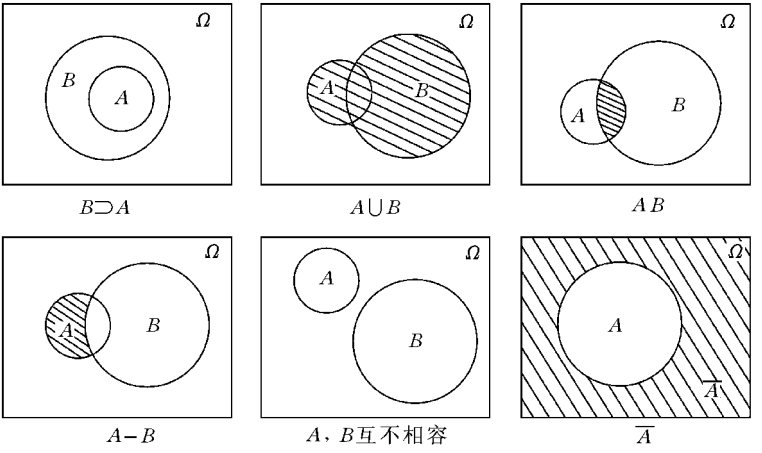


图 4.1.1.1

利用事件的运算，可将一个事件表示成与其等价的多种不同形式，在计算概率时可以根据不同条件（如包含、互不相容、相互对立、相互独立等）和需要而选取其恰当形式．

例 4　设事件 A 表示{甲是女生，乙吸烟，丙戴眼镜}，则事件 $\overline{A}$ 表示

(A) 甲是男生，乙不吸烟，丙不戴眼镜.

(B) 甲是女生，乙不吸烟，丙戴眼镜.

(C) 甲是女生，乙吸烟，丙不戴眼镜.

(D) 甲是男生，乙吸烟，丙戴眼镜.

(E) 甲是男生或乙不吸烟或丙不戴眼镜.

解　设事件 B_1, B_2, B_3 分别表示{甲是女生}，{乙吸烟}，{丙戴眼镜}，依题意有 $A=B_1\ B_2\ B_3$，则

$$\overline{A}=\overline{B_1\ B_2\ B_3}=\overline{B_1}+\overline{B_2}+\overline{B_3}。$$

其含义是甲是男生或乙不吸烟或丙不戴眼镜. 仅(E)入选.

例 5　设 A, B, C 为任意三个事件，试用事件的运算表示下列事件：

(1) 仅有 A 发生；　　(2) A, B, C 都不发生；

(3) A, B, C 不都发生；　　(4) A, B, C 中至少有两个发生；

(5) A, B, C 中不多于两个发生.

解　(1) 仅有 A 发生的含义是 A 发生，B、C 都不发生，因而用事件的运算表示应为 $A\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

(3) ABC 为 A, B, C 都发生，而 A, B, C 不都发生即为事件 A, B, C 同时发生是不可能的，应为 $\overline{ABC}$；或 A, B, C 不都发生理解为 A, B, C 至少有一个事件不发生，因而也可表示为 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

(4) 因有三个事件，A, B, C 中至少有两个发生，其含义是至少有两个事件发生，另一个事件不发生. 于是

$$\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}\quad 或\quad AB+BC+CA.$$

(5) 不多于两个发生，包含两个发生、一个发生、三个事件都不发生，为

$$\overline{A}BC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

例 6　{事件 A_1 或 A_2 发生，但不同时发生，且事件 A_3 发生}可以表示为

(A) $A_1\ A_3$.　　(B) $A_2\ A_3$.　　(C) $(A_1+A_2)A_3$.

(D) $(A_1\ \overline{A}_2+\overline{A}_1\ A_2)A_3$.　　(E) 以上结论都不正确.

解　可表示为 $(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\ A_2)A_3$. 仅(D)入选.

例 7　某地区共有 100 家工厂，其中有 80 家工厂能生产甲种产品(设为 A)，有 61 家工厂能生产乙种产品(设为 B)，有 55 家工厂能生产甲、乙两种产

品(设为 C)。试用 A,B,C 表示下列各类工厂,并算出各类工厂的数目。

(1) 只能生产甲种产品的工厂;

(2) 只能生产乙种产品的工厂;

(3) 甲、乙两种产品至少能生产其中一种的工厂;

(4) 甲、乙两种产品都不能生产的工厂。

解 (1) 只能生产甲种产品的工厂数目为

$$A-AB=A-C=80-55=25,$$

即有 25 家工厂只能生产甲种产品.

(2) 只能生产乙种产品的工厂数目为

$$B-AB=B-C=61-55=6,$$

即有 6 家工厂只能生产乙种产品.

(3) 甲、乙两种产品中至少能生产其中一种的工厂数目为

$$\begin{aligned}A+B=&\{\text{只能生产甲种产品的工厂}\}+\{\text{只能生产乙种产品的工厂}\}\\&+\{\text{甲、乙两种产品都能生产的工厂}\}\\=&(A-B)+(B-A)+AB\\=&(A-AB)+(B-AB)+AB=25+6+55=86.\end{aligned}$$

(4) 甲、乙两种产品都不能生产的工厂数目为

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A+B}=\Omega-(A+B)=100-86=14,$$

即有 14 家工厂既不能生产甲种产品,也不能生产乙种产品.

例 8 射手射击三次,用 A_i $(i=1,2,3)$ 表示"第 i 次击中目标".

(1) 用文字叙述下列事件的含义:

1° A_1+A_2; 2° A_3-A_2; 3° $\overline{A}_2+\overline{A}_3$.

(2) 用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件:

1° 至少有两次击中; 2° 前两次均未击中; 3° 至少有一次未击中.

解 (1) 1° A_1+A_2 表示前两次中至少有一次击中,也表示或者第一次击中或者第二次击中。

2° A_3-A_2 表示第三次击中而第二次未击中.

3° $\overline{A}_2+\overline{A}_3$ 表示后两次中至少有一次未击中,或由摩根律有 $\overline{A}_2+\overline{A}_3=\overline{A_2A_3}$,它表示第二次与第三次未全击中.

(2) 1° $A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$,

或 $A_1A_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$。

2° $\overline{A}_1\overline{A}_2$,或 $\overline{A_1+A_2}$(前两次至少有一次击中是不可能的)。

3° $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$，或由摩根律可表为$\overline{A_1\ A_2\ A_3}$（三次全击中不可能）.

例 9　A,B,C 是任意三个事件，说明下列各对事件 D_{2i-1} 与 D_{2i}（$i=1,2,3,4$）间的关系：

（1）$D_1=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 与 $D_2=AB+BC+AC$；

（2）$D_3=A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$ 与 $D_4=A+B+C$；

（3）$D_5=(A+B)-C$ 与 $D_6=A+(B-C)$；

（4）$D_7=A+BC$ 与 $D_8=(A+B)(A+C)$。

解　（1）D_1 表示 A,B,C 事件中仅发生其中两个，而 D_2 表示至少发生两个的事件，$D_2\supset D_1$.

（2）D_3 表示 A,B,C 三个事件中仅有一个事件发生，而 D_4 表示 A,B,C 三个事件中至少发生一个事件，$D_4\supset D_3$。

（3）$D_5=(A+B)-C=(A+B)\overline{C}=A\overline{C}+B\overline{C}$，

$$D_6=A+(B-C)=A+B\overline{C},$$

而 $A\supset A\overline{C}$，故 $D_6\supset D_5$.

（4）由和对积的分配律可知 $D_7=D_8$.

题型三　判别事件间的关系

可用文氏图直接判定，也可由事件的运算法则予以推证，当然还可以举反例排错．此外，还应熟练下列常见的一些事件间的关系.

命题 4.1.1.1　设 A,B 为随机事件，则

（1）$A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing\Leftrightarrow A+B=B\Leftrightarrow AB=A$。

（2）$\varnothing\subset A$，$A\subset\Omega$，$\Omega\supset A\supset\varnothing$，$AB\subset A\subset A+B$，$A-B\subset A\subset A+B$。

（3）$A+\varnothing=A$，$A\varnothing=\varnothing$，$A+\Omega=\Omega$，$A\Omega=A$，$\varnothing A+A=A$，$AA=A$，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{A}=\Omega-A$。

（4）AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容，且 $A=AB+A\overline{B}$。

（5）AB，$A\overline{B}$，$\overline{A}B$ 两两互不相容，且 $A+B=\overline{A}B+AB+A\overline{B}$。

（6）$A=B$，且 $AB=\varnothing$，则 $A=B=\varnothing$（两个相等且互不相容的事件为不可能事件）.

（7）$A-B=A\overline{B}$.

如果说事件的并与交与初等数学中的数字相加与相乘类似的话，则两事件的差就与初等数学中两数字的差的含义不同了。一般情况下不将 $A-B$ 化成 $A\overline{B}$，也就是不将两事件之差化成两事件之交来处理，然后再用事件运算规律，因为一般的规律都是对并与交的运算而言的.

注意避免事件之差的运算中常犯的下述错误：从 $A+B-A=C$ 错误得出 $B=C$，或从 $A+B=B+C$ 错误得出 $A=C$，或从 $A-B=C-B$ 错误得出 $A=C$.

例 10 [2003 年Ⅰ15]（事件充分性判断） A,B,C 为随机事件，A 发生必导致 B,C 同时发生.

(1) $A\cap B\cap C=A$；　　(2) $A+B+C=A$.

解 当条件(1)成立时，由 $A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)=A$ 知 $A\subset B\cap C$，故 A 发生必导致 B,C 同时发生. 事件(1)充分.

当条件(2)成立时，即 $A+B+C=A+(B+C)=A$，这说明 $B+C\subset A$. 于是当 A 发生时，不一定能导致 B 与 C 同时发生. 故条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 11（条件充分性判断） 事件 A,B 为对立事件.

(1) $AB=\overline{A}\,\overline{B}$；　　(2) $A+B=\Omega$.

解 当条件(1)成立时，有 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，又 $AB\cdot\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}A\cdot B\,\overline{B}=\varnothing$. 由命题 4.1.1.1 (6)即知 $AB=\varnothing$.

又由 $\overline{AB}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}=A+B$，即 $A+B=\overline{\varnothing}=\Omega$，因而 A,B 为对立事件. 条件(1)充分. 条件(2)不充分. 仅 A 入选.

注意　得到 $AB=\varnothing$ 后很容易与条件(2)联合错选为答案 C.

例 12　设事件 A,B,C 满足关系式 $\overline{A+B}C=\overline{A}C+\overline{B}C$，则

(A) $A+B\subset\overline{C}$。　　(B) $A\subset B\subset\overline{C}$。　　(C) $A=B=\overline{C}$。

(D) $\overline{A}BC=\varnothing$。　　(E) $\overline{AB}C=\varnothing$。

解 由 $(\overline{A+B})C=\overline{A}C+\overline{B}C$ 得到 $\overline{A}\,\overline{B}C=(\overline{A}+\overline{B})C$.

在等式两端乘以 B，得到

$$\overline{A}\,\overline{B}C\,B=(\overline{A}+\overline{B})CB=\overline{A}CB+\overline{B}CB,$$

即
$$\varnothing=\overline{A}C\,B=\overline{A}BC.$$ 仅(D)入选.

例 13　设 A,B,C 为三个事件，则下列结论中正确的是

(A) $ABC\subset(AB+BC+CA)$.　　(B) 若 $AC=BC$，则 $A=B$.

(C) 若 $A+C=B+C$，则 $A=B$.　　(D) 若 $A-C=B-C$，则 $A=B$.

(E) $(A-B)+(A-C)=A-(B+C)$.

解 对于选项(A)，因 $ABC\subset AB,ABC\subset BC,ABC\subset CA$，故

$$ABC\subset(AB+BC+CA).$$

(A)正确. 由图 4.1.1.2(文氏图)也可看出其正确性.

在代数中，若 $a+c=b+c$，则有 $a=b$，但对于事件，若 $A+C=B+C$ 不一定有 $A=B$，例如

$$A=\{1,2,3,4,5,6\},$$

$$B=\{1,2,3\},\quad C=\{4,5,6\},$$

则有 $A+C=B+C=\{1,2,3,4,5,6\}$，但显然 $A\neq B$. (C)不正确.

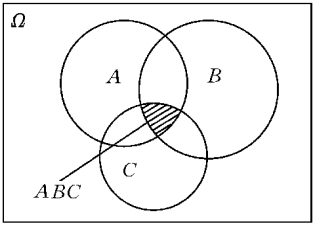


图 4.1.1.2

$(A-B)+(A-C)=\{4,5,6\}+\{1,2,3,4,5,6\}=A$，

但 $A-(B+C)=\{1,2,3,4,5,6\}-\{1,2,3,4,5,6\}=\varnothing$，

显然 $A\neq\varnothing$. (E)也不正确.

$$A-C=\{1,2,3\},\quad B-C=\{1,2,3\},$$

虽有 $A-C=B-C$，但 $A\neq B$. (D)也不正确.

又 $A\varnothing=\varnothing$，$B\varnothing=\varnothing$，故 $A\varnothing=B\varnothing$，但 $A\neq B$. (B)也不正确. 仅(A)入选.

例 14 A,B,C 为三个任意事件则 $(A-B)+(B-C)$ 等于事件

(A) $A-C$。　(B) $A+(B-C)$。　(C) $(A+B)-C$。

(D) $(A+B)-BC$。

(E) $B+(A-C)$。

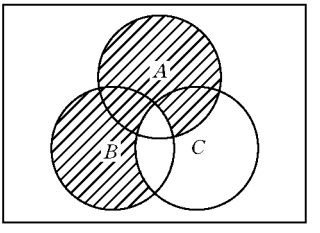


图 4.1.1.3

解法 1　用文氏图判断易知(A)、(B)、(C)、(E)均不成立. 由文氏图(见图 4.1.1.3)可直接得到 $(A+B)-BC$ 为图中画有斜线的部分，而 $A-B$ 与 $B-C$ 的并恰好为该图中画有斜线部分. 仅(D)入选.

解法 2

$$\begin{aligned}(A+B)-BC&=(A+B)\overline{BC}\\&=(A+B)(\overline{B}+\overline{C})\\&=A\overline{B}+B\overline{B}+A\overline{C}+B\overline{C}=A\overline{B}+\varnothing+A\Omega\overline{C}+B\overline{C}\\&=A\overline{B}+A(B+\overline{B})\overline{C}+B\overline{C}=A\overline{B}+A\overline{B}\overline{C}+AB\overline{C}+B\overline{C}\\&=A\overline{B}+B\overline{C}\ (\text{因 } A\overline{B}\overline{C}\subset A\overline{B},AB\overline{C}\subset B\overline{C})\\&=(A-B)+(B-C).\ \text{仅(D)入选.}\end{aligned}$$

例 15　A,B,C 为任意三个事件，则必有

(A) $A+(B-C)=(A+B)-C$.　(B) $A-(B+C)=(A-B)-C$.

(C) $A-(B-C)=(A-B)+C$.　(D) $(A+B)-(A+C)=B-C$.

(E) $(A-B)-(C-B)=A-C$.

解　选项(A)**一般不成立，因为**

$$\text{右端}=(A+B)\overline{C}=A\overline{C}+B\overline{C},$$

$$\text{左端}=A+B\overline{C}=A(C+\overline{C})+B\overline{C}=AC+A\overline{C}+B\overline{C}.$$

左端较右端多 AC **部分，所以仅当** $AC=\varnothing$**时，选项**(A)**才成立**.

选项(B)**成立，因为**

$$\text{左端}=A(\overline{B+C})=A\overline{BC}=(A\overline{B})\overline{C}=(A-B)-C=\text{右端}.$$

选项(C)**一般不成立**. **因为**

$$\text{左端}=A(\overline{B-C})=A(\overline{B\overline{C}})=A(\overline{B}+C)=A\overline{B}+AC,$$

$$\text{右端}=A\overline{B}+C=A\overline{B}+(A+\overline{A})C=A\overline{B}+AC+\overline{A}C,$$

右端较左端多$\overline{A}C$ **部分，所以仅当**$\overline{A}C=\varnothing$(**即** $C\subset A$)**时，选项**(C)**才成立**.

选项(D)**也不成立，因左端**$=(A+B)(\overline{A+C})=(A+B)(\overline{A}\,\overline{C})=\overline{A}B\,\overline{C}$，**而右端**$=B\overline{C}$.

选项(E)**也不成立，因左端**$=A\overline{B}-C\overline{B}=A\overline{B}\overline{C\overline{B}}=A\overline{B}(\overline{C}+B)=A\overline{B}\overline{C}$，**而右端**$=A\overline{C}$. **仅**(B)**入选**.

例 16（**条件充分性判断**） A,B **是两个随机事件，**$A=\overline{B}$.

(1) $AB=\overline{A\overline{B}}$；　　(2) $AB=B$.

解　当条件(1)**成立时，有** $AB=\overline{A\overline{B}}=\overline{A+B}$. **另一方面由** $AB=\overline{A}\,\overline{B}$ **得到**$AB\cdot AB=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=(A\cdot\overline{A})(B\cdot\overline{B})=\varnothing$，**故** AB **与** AB **互不相容，但** $AB=AB$，**由命题** 4.1.1.1(6)**知** $AB=\varnothing$. **于是**$\overline{A+B}=AB=\varnothing$，**因而** $A+B=\Omega$. **又** $AB=\varnothing$，**故** A,B **为对立事件**. **于是** A **为** B **的对立事件，故** $A=\overline{B}$. **条件**(1)**充分**. **当条件**(2)**成立时，有** $B\subset A$. **只有当** $B=\varnothing,A=\Omega$ **时，**A **与** B **才是对立事件，才有** $A=\overline{B}$。**因而条件**(2)**不充分**. **仅** A **入选**。

例 17　**对于任意两事件** A **和** B，**与** $A+B=B$ **不等价的是**

(A) $A\subset B$.　　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$.　　(C) $A\overline{B}=\varnothing$.　　(D) $\overline{A}B=\varnothing$.

解　因 $A+B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{A}\supset\overline{B}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$，**故与** $A+B=B$ **不等价的是**$\overline{A}B=\varnothing$. **仅**(D)**入选**.

习　题　4.1.1

(一) 问题求解

1. 若 $AB\subset C$，则必有

(A) $A\subset C$ 或 $B\subset C$.　　(B) $\overline{C}\subset\overline{A}+\overline{B}$.　　(C) $\overline{AB}\supset\overline{C}$.

(D) $\overline{AB}\subset C$.　　(E) $\overline{C}\supset\overline{A}+\overline{B}$.

2. A,B 为任意两个事件，则

(A) $(A+B)-B\supset A$。　　(B) $(A-B)+B=A$。

(C) $(A+B)-B\subset A$。　　(D) $(A-B)+B\subset A$。

(E) $A-(A-B)\supset B$。

3. 设 A,B,C 是三个随机事件，下列选项中与 $A+B=B$ 不等价的是

(A) $B\supset A$.　　(B) $\overline{A}\supset\overline{B}$.　　(C) $A-B=\varnothing$.

(D) $B-A=\varnothing$.　　(E) $AB=A$.

4. A,B 为任意两事件，则不能得出结论

(A) 若 $A\subset B$，则 $AB=A$.　　(B) 若 $\overline{A}\subset\overline{B}$，则 $A\subset B$.

(C) $A+B=B$，等价于 $A\subset B$.　　(D) 若 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，则 $A+B=\Omega$。

(E) 若 $A\overline{B}=\varnothing$，则 $\overline{A}+B=\Omega$.

5. A,B 为任意两事件，则

(A) $(A+B)-B=A$.　(B) $(A-B)+B=A$.　(C) $A-(AB)=A-B$.

(D) $A-(B-A)=A$.　(E) $A-(A-B)=B$.

(二) 条件充分性判断

1. $(B+C)-A=B+(C-A)$。

(1) A,B 是互不相容事件；　　(2) A,B 是对立事件.

2. A,B,C 是随机事件，$A+B\subset C$.

(1) $C+(A+B)\subset C$；　　(2) $\overline{C}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

3. A,B 是两个随机事件，$A+B=B$.

(1) $A=\Omega$；　　(2) $B=\Omega$.

4. A,B,C 为随机事件，A 发生必导致 B 与 C 至少有一个不发生.

(1) $A\subset\overline{BC}$；　　(2) $\overline{A}\supset BC$.

5. 事件 $A=B$.

(1) $A+B=B$；　　(2) $\overline{A}B=\varnothing$.

(三) 解答题

1. 写出下列多随机试验的样本空间：

(1) 将两枚骰子掷一次，已知出现点数之和是 6 的倍数；

(2) 将一枚骰子掷两次，已知第二次出现点数大于第一次出现的点数.

2. 写出下列各随机试验的样本空间：

(1) 将一枚硬币抛三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况，再将三枚硬币抛一次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

(2) 将一个红球、一个白球随机地放入三个盒子中，观察两个球放置的所有可能结果.

3. 某射击运动员向目标射击三次，记事件 A_i =“第 i 次击中目标”，$i=1,2,3$. 试用文字叙述下列事件的含义：

(1) $A_1A_2\overline{A}_3$；　(2) $A_1+A_2+A_3$；　(3) A_1-A_2；

(4) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$；

(5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$。

4. 设事件 A 与 B 相等且互不相容，事件 C 为任意随机事件，则 $\overline{A}+C=$_____，$BC=$_____.

5. 设事件 A,B 满足 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，问 A 与 B 满足什么关系？

6. 设 A 与 B 为对立事件，求证 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是对应事件.

7. 设 A,B,C 构成一完备事件组，且 $C\neq\varnothing$，判断 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 是否仍构成一个完备事件组.

8. 设 A,B,C 是三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 不都发生；

(2) A 发生，B 与 C 至少有一个发生；

(3) A,B,C 中至少有两个发生；

(4) A,B,C 恰好有两个发生；

(5) A,B,C 最多有两个发生；

(6) A,B,C 最多有两个发生，且 A 发生；

(7) A,B,C 不都发生.

9. 从一批产品中每一次取出一个(取后不放回)，抽取三次，且 A_i ($i=1,2,3$)表示“第 i 次取到的是正品”. 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 抽到的三个产品中，没有一个次品；

(2) 抽到的三个产品中，只有一个次品；

(3) 抽到的三个产品中，至少有一个是次品；

(4) 抽到的三个产品中，次品不多于一个。

4.1.2 随机事件的概率

1. 古典型概率定义

如果一个随机试验的样本空间 Ω 仅包含有限个样本点，且每个样本点出现的可能性相同，称此试验的数学模型为古典概型，则在古典概型中事件 A 发生的概率（常称为古典型概率）为

$$P(A)=\frac{\text{有利于事件 } A \text{ 的样本点数}(m)}{\text{样本空间所含样本点总数}(n)}=\frac{m}{n}.$$

计算古典概型中某事件 A 的概率，只需求出样本空间中样本点的总数 n 和事件 A 所含样本点的个数 m. 两者之比即为事件 A 的概率. 计算 m 和 n 时，常常利用排列组合的有关计算公式.

2. 概率的公理化定义

为使概率论具有严谨的逻辑基础，可抽象出古典型概率、统计概率所共有的几条基本性质作为概率论公理化结构的基础. 于是有概率的公理化定义.

设随机试验的样本空间为 Ω，若对任意事件 A，都能按照某种方法赋予一个实数值 $P(A)$，且 $P(A)$ 满足以下三条公理：

1° 非负性：$P(A)\geqslant 0$；　　2° 规范性：$P(\Omega)=1$；

3° 可列可加性：如果事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥，恒有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，则称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

由上面的三条公理就可严谨推出概率的一系列重要性质.

题型一　计算古典型概率

在古典概型的问题中，计算某事件 A 的概率经常要用到排列组合的某些计算公式. 用命题形式述于下。

命题 4.1.2.1　从 n 个不同元素中任取 r（$r\leqslant n$）个构成一组（不计序），称为从 n 个不同元素中取 r 个元素的一个组合，所有不同组合的个数称为组合数，记作 C_n^r. C_n^r 的计算公式是

当 $r<n$ 时，$C_n^r=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$；　　(4.1.2.1)

当 $r=n$ 时，$C_n^r=1$；

当 $r>n$ 时，$C_n^r=0$.

命题 4.1.2.2 组合数有下述常用性质：

(1) $C_n^r=C_n^{n-r}$；　　(2) $C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$；

(3) $\sum\limits_{k=0}^{r} C_{n_1}^k C_{n_2}^{r-k}=C_{n_1+n_2}^r$；　　(4) $\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r=2^n$.

命题 4.1.2.3 从 n 个不同元素里，每次任取 r $(1\leqslant r\leqslant n)$ 个不同元素按一定的次序排成一列，称为从 n 个不同元素里取 r 个不同元素的排列．如 $r<n$，称为选排列，记作 A_n^r 或 P_n^r；如果 $r=n$，称为全排列，记作 P_n. 则

$$\begin{aligned} A_n^r &= n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1) \\ &= \frac{n\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\times 1}=\frac{n!}{(n-r)!} \\ &= r!C_n^r \quad (r\leqslant n, \text{规定 } 0!=1), \qquad (4.1.2.2) \\ P_n &= n(n-1)\cdots[n-(n-1)]=n!. \end{aligned}$$

命题 4.1.2.4 从 n 个相异元素里，每次取出允许重复使用的 m 个元素，按照一定的顺序排成一列，称为 n 个相异元素里允许重复的 m 元排列，简称重复排列，其排列的总数为 n^m.

古典模型的概率计算常见的大致可归纳为下述四类．

类型(一)　计算摸球问题的概率。

摸球问题是指从 n 个可分辨的球中按照不同要求(例如是否放回，是否计序等)一个个地从中取出 m 个球，从而得到不同的样本空间，然后在各自的样本空间中计算事件的概率。一般说来，根据摸球的方式不同，常见的有如表 4.1.2 所述三种情况。

表 4.1.2

从 n 个球中摸取 m 个球	摸球方式		不同摸法总数
	有放回	计序	n^m
	无放回	计序	A_n^m(或 P_n^m)
		不计序	C_n^m

有放回摸球是指每次摸出的球，在下一次摸以前要放回袋内，因而每次摸球均在全部球中进行．这样，各个球都有可能多次摸到，同一球重复出现便是有放回摸球的特点。这时就必须按命题 4.1.2.4 即按相异元素允许重复的排列公式计算这种样本空间的基本事件总数．

计算基本事件(样本点)总数以及事件所含的基本事件(样本点)的数目时,必在同一确定的样本空间中考虑,因而摸球方式也应一致,例如,如果一个计序或不计序,另一个的计算也必须按同样方法计序或不计序. 当然如果可以不考虑顺序,应尽量采取不考虑顺序的方法.

摸球问题是古典概型中的一类重要模型,实际中的许多问题,如产品的抽样检查问题都可以运用这一模型的解法. 例如,N 个产品中有 N_1 个次品,从中任取 n 个($1\leqslant n\leqslant N_1\leqslant N$),设 $A=\{$抽取产品中有 k 个($k\leqslant n$)个次品$\}$,其概率为

$$P(A)=C_{N_1}^{k}\ C_{N-N_1}^{n-k}/C_N^n. \tag{4.1.2.3}$$

例 1 [2002 年Ⅱ 18] 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只,则其中没有成双鞋子的概率是

(A) 4/11. (B) 5/11. (C) 16/33. (D) 2/3.

解 这是古典概型中摸球模型的计算问题. 其摸球方式是无放回,不计序,因而样本空间包含的样本点数即基本事件总数为

$$n=C_{12}^4=12!/[4!(12-4)!]=12!/(4!8!)。$$

令事件 $A=\{$从 6 双不同的鞋子中任取 4 只,没有成双鞋子$\}$,则有利于事件 A 的样本点数,即基本事件数为

$$\begin{aligned} m&=(\text{从 6 双鞋子中任选 4 双的选法数})\\ &\quad\times(\text{从选出的每一双鞋子中任取一只的选法数})\\ &=C_6^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=(6!\times 2^4)/(4!2!), \end{aligned}$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4!8!}{12!}\times\frac{6!2^4}{4!2!}=\frac{2\times3\times4\times5\times6\times2^3}{9\times10\times11\times12}=\frac{16}{33}.$$ 仅(C)入选.

例 2 [2001 年Ⅱ 14] 一只口袋中有 5 只同样大小的球,编号分别为 1,2,3,4,5。今从中随机抽取 3 只球,则取到的球中最大号码是 4 的概率为

(A) 0.3. (B) 0.4. (C) 0.5. (D) 0.6.

解 摸球方式是无放回、不计序,样本空间的基本事件总数为 $n=C_5^3=10$. 设事件 $A=\{$任取 3 球,其中最大号码为 4$\}$,则有利于事件 A 的基本事件总数为从 1,2,3 中任取 2 个元素的组合数即为 $m=C_3^2=3$,则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}=0.3。$$ 仅(A)入选.

例 3 [2001 年Ⅰ 13] 在共有 10 个座位的小会议室内随机地坐上 6 名

与会者，则指定的 4 个座位被坐满的概率是

(A) 1/14.　　(B) 1/13.　　(C) 1/12.　　(D) 1/11.

解　10 个座位中坐其中 6 位，共有 C_{10}^{6} 种可能．设事件 $A=\{$指定的 4 个座位都坐了与会者$\}$，则其发生的可能性大小是 $C_4^1\ C_6^2$（在另外 6 个座位中坐了两个），因而所求概率由式(4.1.2.3)得到

$$P(A)=C_4^1\ C_6^2/C_{10}^6=15\times 4!/(10\times 9\times 8\times 7)=1/4。$$

仅(A)入选．

例 4 [2001 年Ⅱ15]　从集合$\{0,1,3,5,7\}$中先任取一个数记作 a，放回集合后再任取一个数记作 b，若 $ax+by=0$ 能表示一条直线，则该直线的斜率等于 -1 的概率是

(A) 4/25.　　(B) 1/6.　　(C) 1/4.　　(D) 4/15.

解　直线可化为 $y=-\dfrac{a}{b}x$．为确定以直线必确定 a,b. a,b 可从集合 $\{0,1,3,5,7\}$中任意取值．但要除掉 $a=0,b=0$ 这一种情况．因而 a,b 取值的样本空间总的基本事件数为 5^2-1.

设事件 $A=\{a=b\}$，则有利于事件 A 的基本事件数只有 4 个即 $a=b=1$，$a=b=3$，$a=b=5$，$a=b=7$，故所求概率为

$$P(A)=4/(5^2-1)=4/24=1/6。$$

仅(B)入选．

例 5 [2000 年Ⅰ14]　袋中有 6 只红球，4 只黑球．从袋中随机取出 4 只球．设取到一只红球得 2 分，取到一只黑球得 1 分，则得分不大于 6 分的概率是

(A) 23/42.　　(B) 4/7.　　(C) 25/42.　　(D) 13/21.

解　设事件 $A=\{$随机取出 4 球得分不大于 6$\}$，则事件 A 发生当且仅当取出的 4 只球，其中红球数不大于 2.

设事件 $A_1=\{4$ 球中有 2 只红球$\}$，事件 $A_2=\{4$ 球中只有 1 只红球$\}$，事件 $A_3=\{4$ 只全是黑球$\}$，则 $A=A_1+A_2+A_3$，且 A_1,A_2,A_3 两两互斥，于是所求概率为

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)。$$

用古典概型计算公式(4.1.2.3)易求得

$$P(A_1)=C_4^2\times C_6^2/C_{10}^4,\quad P(A_2)=C_4^3\times C_6^1/C_{10}^4,\quad P(A_3)=1/C_{10}^4,$$

因而　$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^2\times C_6^2}{C_{10}^4}+\frac{C_4^3\times C_6^1}{C_{10}^4}+\frac{1}{C_{10}^4}$$

$=\frac{6\times15+4\times6+1}{C_{10}^{4}}=\frac{115}{210}=\frac{23}{42}$。仅(A)入选.

类型(二)　计算质点入盒问题的概率。

质点入盒(或置球入盒)问题是古典概型中又一重要模型．实际中的许多问题都可运用这一模型的解法。该模型是指有 n 个可分辨的盒子，m 个质点．按照质点是否可分辨，每盒可容纳多少质点等不同情况，把 m 个质点放入 n 个盒中，从而形成不同的样本空间，然后在各自样本空间计算事件的概率．与摸球模型类似，常见的也有下述三种情况，如下表 4.1.3 所示。

表 4.1.3

	放入方式		不同放法总数
m 个质点随机放入 n 个盒中	每盒可容纳任意个质点	质点可分辨	n^m
	每盒最多只容纳一质点	质点可分辨	A_m^n(或 P_n^m)
		质点不可辨	C_n^m

从表 4.1.3 易看出，质点可分辨的问题就是排列问题，盒子能容纳任意多个质点的问题就是重复排列问题．

每盒最多可容纳一质点且质点可分辨，这样的问题属不允许重复的排列问题．

每盒最多只容纳一质点，且质点不可分辨，这样的问题属元素不允许重复的组合问题．

经常遇到的分房问题，如 n 个人的生日问题，n 封信装入 n 个信封的配对问题或 n 封信装入 m 个邮筒的问题，n 个人乘车途经 m 个车站、每个人在任一车站下车等问题，都可用质点入盒问题的分析方法．处理这类问题时要分清什么是“点”，什么是“盒”．一般不能颠倒．拿分房问题来说，一个房间可以同时住多人，而一个人在任一时刻不可能同时住两间或更多间房．

例 6 [1999 年Ⅱ19]　将 3 人以相同的概率分配到 4 间房的每一间中，恰有 3 间房中各一人的概率是

(A) 0.75.　　(B) 0.375.　　(C) 0.1875.

(D) 0.125.　　(E) 0.105.

解　由于每个人都可以进入 4 间房的每一间，3 个人分配到 4 间房中的所有可能的分配方法为 4^3．属重复排列问题．其基本事件总数为 4^3.

设事件 $A=\{$恰有 3 间房各有一人$\}$. 4 间房中选出 3 间房共有 C_4^3 种选法. 房间选定后 3 人进入 3 间房共有 3！种不同方法. 因而事件 A 所包含的基本事件总数为 $C_4^3\times 3!$，故所求概率为

$$P(A)=C_4^3\times 3!/4^3=3/8=0.375。$$

仅(B)入选.

例 7 [1998 年 Ⅰ 18] 有 3 个人，每人都以相同的概率被分配到 4 间房的每一间中，某指定房间中恰有 2 人的概率是

(A) 1/64. (B) 3/64. (C) 9/64. (D) 5/32. (E) 3/16.

解 这 3 个人每人有 4 种分房可能. 其基本事件总数有 4^3. 令事件 $A=\{$某指定房间中恰有 2 人$\}$，这 2 个人是 3 人中的哪 2 个人，有 $C_3^2=3$ 种可能，而不在此房中的那人仍有 3 间房可选择. 因此事件 A 的基本事件数为 $3C_3^2=9$. 于是所求的概率为

$$P(A)=9/64。$$

仅(C)入选.

例 8 10 封信随机投进甲、乙两个空信箱，求两个信箱都有信的概率.

解 设事件 $A=\{$两个信箱都有信$\}$，则总的投信方法数为 2^{10}. 由于 A 所含的基本事件数不易直接计算，用古典概型公式计算其概率比较复杂. 因此先求 A 的逆事件的概率 $P(\overline{A})$.

设事件 $B=\{10$ 封信全投入甲信箱$\}$，事件 $C=\{10$ 封信全投入乙信箱$\}$，则 B,C 包含的基本事件数都只有 1. 因而

$$P(B)=P(C)=1/2^{10}.$$

又因 B,C 互斥，故 $P(BC)=P(\varnothing)=0$，于是由 $\overline{A}=B+C$ 得到

$$P(\overline{A})=P(B)+P(C)=1/2^{10}+1/2^{10}=1/2^9,$$

故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-1/2^9.$$

类型(三) 计算随机取数问题的概率。

如果是有放回地随机取数，其样本空间的基本事件总数可按从 n 个不同数字里取出 m 个的重复排列计算(参阅命题 4.1.2.4)。

如果是无放回且计序(或不计序)随机取数，其样本空间的基本事件总数要根据不重复的排列(或组合)计算。

例 9 [1997 年 Ⅱ 30] 一种编码由 6 位数字组成，其中每位数字都可以是 0,1,2,…,9 中的任意一个，求编码前两位数字都不能超过 5 的概率.

解 基本事件总数(即编码总数)为 10^6(因为 6 位数字每一位都有 10 种可能)，而事件“前两位数字不超过 5”即前两位可以是 0,1,…,5 这 6 个数中的任意 2 个，后 4 位每位仍有 10 种可能，因此该事件包含基本事件数(即适

合要求的编码数)共有 $6^2\times10^4$ 个,于是所求概率为$(6^2\times10^4)/10^6=0.36$.

例 10 某公司电话号码有 5 位,若第一位数字必须是 5,其余各位可以是 0～9 的任意一个,则由完全不同的数字组成电话号码的概率是

(A) 0.0126. (B) 0.1260. (C) 0.3026.

(D) 0.5040. (E) 以上结论都不正确.

解 设事件 $A=\{$电话号码的 5 位数字全不相同$\}$,则电话号码后 4 位数字是 0,1,2,3,4,6,7,8,9 共 10 个数字中的 4 个不同数字. 样本空间 Ω 的样本点总数 $n=10^4$,而有利于事件 A 的样本点数 $m=A_9^4$,则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_9^4}{10^4}=\frac{9!}{(9-4)!}\frac{1}{10^4}=\frac{9\times8\times7\times6}{10^4}=0.3026.$$ 仅(C)入选.

例 11 从 0,1,2,…,9 这 10 个数字中任意选出 3 个不同的数字。

(1) 求事件 $A_1=$“3 个数字中不含 0 和 5”的概率;

(2) 求事件 $A_2=$“3 个数字中不含 0 或 5”的概率.

解 (1) 这是一个古典概型问题,属不放回、不计序地随机取数模型. 该试验的样本空间所含的样本点总数为 C_{10}^3.

对于事件 A_1,由于不含 0 和 5,故可以在剩余的 8 个数中,任取 3 个不同的数,共有 C_8^3 种选择,因此

$$P(A_1)=C_8^3/C_{10}^3=7/15.$$

为计算事件 A_2 的概率,可引进下述事件:$B_1=$“3 个数字中含 0,不含 5”;$B_2=$“3 个数字中含 5,不含 0”;$B_3=$“3 个数字中不含 5,又不含 0”.

(2) **解法 1** $A_2=B_1+B_2+B_3$,且 B_1,B_2,B_3 是互斥的,于是有

$$P(A_2)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

解法 2 利用其逆事件的概率计算,则

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-C_8^1/C_{10}^3=1-1/15=14/15.$$

解法 3 含事件 $C_1=\{3$ 个数字中不含 $0\}$,$C_2=\{3$ 个数字中不含 $5\}$,则 $A_2=C_1+C_2$,从而

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(C_1+C_2)=P(C_1)+P(C_2)-P(C_1C_2)\\&=C_9^3/C_{10}^3+C_9^3/C_{10}^3-C_8^3/C_{10}^3=7/10+7/10-7/15=14/15.\end{aligned}$$

类型(四) 求排书问题的概率.

对书架上的书常要求属于同一系列的书排在一起,求这类问题的概率称为排书问题的概率,其求解方法和步骤如下:

(1) 先将要求“相邻”或“排在一起”的“书”看作一个整体，将这个整体与其他的“书”作通常的排队.

(2) 再根据要求计算(或不计算)这个整体内部的排队问题.

例 12 A、B、C、D、E 5 个人站在一排，其中 A、B 是一对情人，求(1) A、B 两个相邻且 A 在 B 的左边的概率；(2) A、B 两个相邻的概率.

解 5 个人站成一排所有不同的站法共有 5！种.

1° 把 A、B 看成一整体 AB，与 C、D、E 排成一排一共有 4！种不同的排法. 因而所求概率为

$$p_1=4!/5!=1/5.$$

2° 只要求 A、B 相邻，A 可站在 B 的左边，也可站在 B 的右边，假如 A 站在 B 的左边，A、B 组成的整体 AB 与 C、D、E 一起站成一排有 4！种不同的站法. 只要求 AB 相邻则共有 $2\times4!$ 种不同的站法. 因而所求概率为

$$p_2=2\times4!/5!=2/5。$$

例 13 将 4 封信投入 3 个不同的邮筒，则每个邮筒都至少投入 1 封信的概率是

(A) 4/27. (B) 7/27. (C) 12/27. (D) 9/27.

解 令事件 $A=\{$每个邮筒都至少投入 1 封信$\}$. 由于有 4 封信，只有 3 个不同的邮筒，事件 A 与事件 $B=\{$有一个邮筒投入 2 封信，另 2 个邮筒各投入 1 封信$\}$等价.

4 封信投入 3 个邮筒共有 3^4 种不同的等可能投法，即 $n=3^4=81$. 而有利于事件 B 即事件 A 的投法，可用排书问题的求法求得：先选出 2 封信为一组与另外 2 封信各为一组，共三组投入不同邮筒内，其投法总数即有利于事件 A 的投法总数为 $m=C_4^2\times3!=36$，故

$$P(A)=36/81=12/27.$$ 仅(C)入选.

题型二 利用概率的性质计算事件的概率

类型(一) 计算与互斥(互不相容)事件有关的事件的概率。

计算与互斥事件($AB=\varnothing$)有关的事件的概率时，除利用 $P(AB)=0$ 以外，还可利用下述隐含的关系：$A\subset\overline{B}$，$B\subset\overline{A}$，$\overline{A}+\overline{B}=\Omega$ 及 $A-B=A$，$B-A=B$ 求其概率. 还应注意命题 4.1.1.1(6)的应用。

例 14 [2003 年Ⅱ16](条件充分性判断) A，B 是两个随机事件，

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

(1) A 与 $\overline{B}$ 互不相容； (2) $\overline{A}$ 与 B 互不相容.

解 若条件(1)成立，则 $A\overline{B}=\varnothing$，即 $A\subset\overline{\overline{B}}=B$，于是 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(\varnothing)=0$，而 $P(A)<P(B)$，故 $P(A)-P(B)\neq 0$. 因而 $P(A-B)\neq P(A)-P(B)$. 条件(1)不充分.

若条件(2)成立，即 $\overline{A}B=\varnothing$ 成立时，有 $B\subset\overline{\overline{A}}=A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)$. 条件(2)充分. 仅(B)入选.

例 15[2003 年 Ⅰ 31] 对任意两个互不相容的事件 A 与 B，以下等式中只有一个不正确，它是

(A) $P(A-B)=P(A)$. (B) $P(A-B)=P(A)+P(\overline{A}\cup\overline{B})-1$.

(C) $P(\overline{A}-B)=P(\overline{A})-P(B)$. (D) $P[(A\cup B)\cap(A-B)]=P(A)$.

(E) $P(\overline{A-B})=P(A)-P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 因 A,B 互不相容，故有 $AB=\varnothing$，$\overline{B}\supset A$，$\overline{A}\supset B$，且 $\overline{A}+\overline{B}=\Omega$. 因而有

(A) $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)$. (A)正确.

(B) $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)=P(A)+P(\Omega)-1=P(A)+P(\overline{A}+\overline{B})-1$。(B)也正确.

(C) $P(\overline{A}-B)=P(\overline{A})-P(B)$(因 $\overline{A}\supset B$)。(C)正确.

(D) 因 $(A+B)\cap(A-B)=(A+B)\cap A=A+BA=A$，故 $P[(A+B)\cap(A-B)]=P(A)$. (D)也正确.

(E) 因 $\overline{A}+\overline{B}=\Omega$，故 $P(\overline{A}+\overline{B})=P(\Omega)=1$，于是 $P(A)-P(\overline{A}+\overline{B})=P(A)-1<0$. 显然这是不可能的。(E)不正确. 仅(E)入选。

例 16 [2001 年 Ⅰ 15] 若事件 A 和 B 互不相容，且 $P(A+B)<1$，$P(A)>0$，则在下列式子

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),\quad P(\overline{A}\,\overline{B})=0,$$

$$P(\overline{A}B+A\overline{B})=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B}),\quad P(\overline{A}+\overline{B})=1$$

当中，正确的有

(A) 四个. (B) 三个. (C) 两个. (D) 一个.

解 对任意两事件 A,B 有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 成立. 又事件 $\overline{A}B$ 与 $A\overline{B}$ 互不相容(因 $\overline{A}$ 与 A 互不相容)，故 $P(\overline{A}B+A\overline{B})=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$ 也成立。

而 $P(\overline{A}+\overline{B})=1-P(AB)=1-0=1$ 正确. 又

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)>0(\text{因 } P(A+B)<1)。$$

因 $A+B\supset A$，故 $P(A+B)\geqslant P(A)>0$，因而

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)<1,$$

于是　　$0<P(\overline{A}\,\overline{B})<1,\quad P(\overline{A}\,\overline{B})\neq 0.$

四个式子中共有三个正确．仅(B)入选．

例 17　事件 A 与 B 互不相容，且 $A=B$. 求 $P(\overline{A})+P(\overline{B})$.

解　由 $A=B$ 有 $AB=AA=A=\varnothing$，由命题 4.1.1.1(6)即知 $A=B=\varnothing$，因而 $\overline{A}=\overline{\varnothing}=\Omega=\overline{B}$，于是

$$P(\overline{A})=1,\quad P(\overline{B})=1.$$

故　　$$P(\overline{A})+P(\overline{B})=2.$$

类型(二)　求与包含关系有关的事件的概率。

命题 4.1.2.5　设 $A\subset B$，则

(1) $\overline{A}\supset\overline{B}$，$A+B=A$，$AB=A$，$A\,\overline{B}=\varnothing$；

(2) $P(A)\leqslant P(B)$，$P(\overline{A})\geqslant P(\overline{B})$，$P(A+B)=P(B)$，$P(AB)=P(A)$，$P(A\,\overline{B})=0$；

(3) $P(B|A)=1$，但由 $P(B|A)=1$，一般推不出 $B\supset A$.

例 18[2003 年 Ⅱ 15](条件充分性判断)　A,B,C 为随机事件，A 发生必导致 B 与 C 至少有一个不发生。

(1) $A\subset\overline{BC}$；　　(2) $\overline{A}\supset BC$.

解　当条件(1)成立即 $A\subset\overline{BC}=\overline{B}+\overline{C}$ 时，A 发生必导致 $\overline{B}$ 与 $\overline{C}$ 中至少有一个发生，即 B 与 C 至少有一个不发生。条件(1)充分．

当条件(2)成立即 $\overline{A}\supset BC$ 时，有 $A\subset\overline{BC}=\overline{B}+\overline{C}$. 条件(2)充分．仅 D 入选．

例 19[2001 年 Ⅱ 14]　已知 $B\supset A$，$P(A)=0.30$，$P(\overline{B})=0.40$，则 $P(\overline{B-A})=$

(A) 0.45.　　(B) 0.50.　　(C) 0.60.　　(D) 0.70.

解法 1　因 $\overline{B-A}=\overline{B\overline{A}}=\overline{B}+\overline{\overline{A}}=\overline{B}+A$，又因 $B\supset A$，有 $A\,\overline{B}=\varnothing$，$P(A\,\overline{B})=0$，所以

$$\begin{aligned}P(\overline{B-A})&=P(\overline{B}+A)=P(\overline{B})+P(A)-P(A\,\overline{B})\\&=0.40+0.30-0=0.70。\end{aligned}$$

仅(D)入选．

解法 2　易知　　$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.4=0.6$，

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=0.6-0.3=0.3,$$

故利用减法公式(4.1.2.5)得到

$$P(\overline{B-A})=1-P(B-A)=1-0.3=0.7.$$

类型(三)　计算差事件的概率。

常用下述减法公式求之：

命题 4.1.2.6 (1) 对任意事件 A,B，有

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB);\qquad(4.1.2.4)$$

(2) 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B);\qquad(4.1.2.5)$

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A-B)=P(A)。\qquad(4.1.2.6)$

例 20[1998 年Ⅰ20] 若 $A\supset B,A\supset C,P(A)=0.9,P(\overline{B}+\overline{C})=0.8$，则 $P(A-BC)=$

(A) 0.4. (B) 0.6. (C) 0.7. (D) 0.8. (E) 0.9.

解 因 $A\supset B,A\supset C$，故 $A\supset BC$. 因而由式(4.1.2.5)有

$$P(A-BC)=P(A)-P(BC).$$

又因 $P(\overline{B}+\overline{C})=P(\overline{BC})=1-P(BC)=0.8$，故 $P(BC)=0.2$. 所以

$$P(A-BC)=P(A)-P(BC)=0.9-0.2=0.7.$$

仅(C)入选.

例 21(条件充分性判断) 已知 $P(A)=0.5,P(AB)=0.3,P(A-C)=0.3$，则可以确定 $P(AB-C)$的值.

(1) $C\subset A$; (2) $C\subset B$。

解 由

$$P(A-C)=P(A)-P(AC)=0.3,\qquad①$$

$$P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)。\qquad②$$

当 $C\subset A$ 且 $C\subset B$ 时，有 $AC=C,ABC=C$，则由式①有

$$P(AC)=P(C)=P(A)-0.3=0.5-0.3=0.2。$$

由式②有

$$P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)=P(AB)-P(C)$$
$$=0.3-0.2=0.1.$$

仅 C 入选.

类型(四) 计算和事件的概率。

常利用事件运算的性质及加法公式的不同应用形式求之。

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(\overline{A}B)$$
$$=P(A)+P(B-A)(\text{因 } B=(A+\overline{A})B=AB+\overline{A}B)$$
$$=P(B)+P(A\overline{B})=P(B)+P(A-B)$$
$$=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(AB)(\text{因 } A=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}).$$
$$(4.1.2.7)$$

求 $P(A+B)$关键在求 $P(AB)$. 在不同条件下求法不一样，如

1° A,B 互斥时，$P(AB)=0$;

2° A,B 独立时，$P(AB)=P(A)P(B)$;

3° 已知 $A\overline{B}$ 的概率时，还可用 $P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})$ 求之；

4° $P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}+\overline{B})$；

5° 已知条件概率时，$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$.

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC). \quad (4.1.2.8)$$

例 22（条件充分性判断） A,B 是两个随机事件，$P(A+B)=0.8$.

(1) $P(A)=0.6,P(B)=0.3$； (2) $P(\overline{A}+\overline{B})=0.9$.

解 $$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-[1-P(\overline{AB})]$$
$$=P(A)+P(B)-[1-P(\overline{A}+\overline{B})]. \quad ①$$

条件(1)或条件(2)单独成立时，均不充分．但若将条件(1)与条件(2)联合起来，将有关事件概率的值代入式①，得到 $P(A+B)=0.8$. 仅 C 入选．

例 23[1997 Ⅰ 30] 已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(A-B)=0.3$，求 $P(A\cup B)$ 和 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解法 1 $$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=P(A)-P(A-B)$$
$$=0.5-0.3=0.2,$$

则 $P(A\cup B)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$，

因而 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$.

解法 2 $A+B=B+(A-B)$，其中 B 与 $A-B$ 互斥，故

$$P(A\cup B)=P(A+B)=P(B)+P(A-B)=0.4+0.3=0.7,$$

因而 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=0.5+0.4-0.7=0.2$.

于是 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$.

例 24（条件充分性判断） 设 $P(A)=0.7,P(B)=0.5$，则 $P(\overline{A}+\overline{B})=0.62$.

(1) $P(B|\overline{A})=0.4$； (2) $P(AB)\neq 0$.

解 当条件(1)成立时，有

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{0.5-P(AB)}{1-0.7}=0.4,$$

故 $P(AB)=0.38$. 因而 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.62$，即

$$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=0.62。$$

条件(1)充分．当条件(2)成立时，有

$$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)\neq 1,$$

但求不出 $P(\overline{A}+\overline{B})$ 的值。条件(2)不充分．仅 A 入选．

例 25(条件充分性判断) A,B,C 为随机事件，$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$.

(1) A 与 C 互斥； (2) $ABC=\varnothing$.

解 当条件(1)成立时，有 $AC=\varnothing$，$ABC=\varnothing$。因而 $P(AC)=P(ABC)=0$. 由式(4.1.2.8)知条件(1)充分. 当条件(2)成立时，有 $ABC=\varnothing$，但推不出 $AC=\varnothing$。条件(2)不充分. 仅 A 入选.

类型(五) 计算积事件的概率。

常利用下述各式计算：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B);$$

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B}),\quad \text{即}\quad P(A\overline{B})=P(A)-P(AB);$$

$$P(AB)=P(B)-P(B\overline{A}),\quad \text{即}\quad P(B\overline{A})=P(B)-P(AB).$$

此外，含对立事件为因子的积事件的概率常化为差事件，或对立事件的概率而求之，即

$$P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n})=1-P(A_1+A_2+\cdots+A_n).$$

有时还用概率不等式 $P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$ 求(证)之.

例 26 设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(A+B)=c$，则 $P(A\overline{B})=$

(A) $a-b$. (B) $c-b$. (C) $a(1-b)$. (D) $b-a$.

(E) 以上结论都不正确.

解 由 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$得到

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),$$

而

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B),$$

故

$$P(A\overline{B})=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A+B)]$$

$$=P(A+B)-P(B)=c-b.$$ 仅(B)入选.

例 27[1999 年 Ⅰ 17] 设 A_1,A_2,A_3 为三个独立事件，且 $P(A_k)=p$ $(k=1,2,3,0<p<1)$，则这三个事件不全发生的概率是

(A) $(1-p)^3$. (B) $3(1-p)$. (C) $(1-p)^3+3p(1-p)$.

(D) $3p(1-p)^2+3p^2(1-p)$. (E) $3p(1-p)^2$.

解 因 A_1,A_2,A_3 为三个独立事件，且 $P(A_k)=p$ $(k=1,2,3)$，故三个事件全发生的概率为 $P(A_1\,A_2\,A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=p^3$. 由逆事件的概率计算公式得到三个事件不全发生的概率为

$$P(\overline{A_1\,A_2\,A_3})=1-P(A_1\,A_2\,A_3)=1-p^3$$

$$=(1-3p+3p^2-p^3)+(3p-3p^2)$$

$=(1-p)^3+3p(1-p)$. 仅(C)入选.

例 28(条件充分性判断) $P(AB)=1$.

(1) $P(A)=1$; (2) $P(B)=1$.

解 当条件(1)成立时有 $P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1=P(B)$. 条件(1)不充分. 同样,条件(2)单独也不充分. 但当条件(1)与条件(2)联合时,有

$$P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1=P(B)=1.$$

又因 $P(AB)\leqslant 1$,故 $P(AB)=1$. 仅 C 入选.

例 29(条件充分性判断) 设 A 和 B 为两个事件,$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

(1) $P(A)=P(B)=1/2$; (2) $P(A)+P(B)=1$.

解 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$=[1-P(A)-P(B)]+P(AB)$,

因为当 $P(A)+P(B)=1$ 时有 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)$,所以条件(1)与条件(2)单独都充分。仅 D 入选.

例 30(条件充分性判断) A 与 B 互斥.

(1) $P(A+B)=P(A)+P(B)$; (2) $P(A-B)=P(A)$.

解 由条件(1)与(2)均可推出 $P(AB)=0$,但仅由 $P(AB)=0$ 不能证明 A,B 互斥,因而仅 E 入选.

类型(六) 求与条件概率有关的事件的概率.

定义 4.1.2.1 在同一随机试验中有两个事件 A 与 B,且 $P(B)>0$,在已知 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率称为 A 对于 B 的条件概率,记作 $P(A|B)$.

若 $B\subset A$,则 B 发生时必有 A 发生,因而 $P(A|B)=1$.

若 $AB=\varnothing$,则 B 发生时必有 A 不发生. 因而 $P(A|B)=0$.

一般可把 B 看成样本空间,其中 A 发生(即 AB 发生)的概率即为条件概率 $P(A|B)$,可理解为 B 区域中 AB 所占的份额数,即为条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}。$$

条件概率具有无条件概率的一切性质,例如

$$P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1,$$

$$P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B).$$

例 31[2005 年 Ⅰ 10] 若 $P(A)=[P(A\cup B)]/2=0.3$,则 $P(B|\overline{A})=$

(A) 1/3. (B) 2/5. (C) 3/7. (D) 1/2. (E) 5/8.

解　依题意有 $2P(A)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，**即**

$$P(A)=P(B)-P(AB),$$

因而　　$$P(B)-P(AB)=P(A)=0.3。$$

而　　$$P(B|\overline{A})=P(\overline{A}B)/P(\overline{A})=[P(B)-P(AB)]/[1-P(A)]$$

$$=0.3/(1-0.3)=0.3/0.7=3/7.$$ **仅**(C)**入选**.

例 32　已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(A|B)=0.5.$ **求** $P(B|A)$，$P(B|A+B)$，$P(\overline{A}+\overline{B}|A+B)$.

解　由题设得到 $P(AB)=P(B)P(A|B)=0.4\times0.5=0.2$，**因而**

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3},$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5.$$

又因 $A+B\supset B$，**故** $B(A+B)=B$，**则**

$$P(B|A+B)=\frac{P[B(A+B)]}{P(A+B)}=\frac{P(B)}{P(A+B)}=\frac{0.4}{0.5}=\frac{4}{5}=0.8,$$

$$P(\overline{A}+\overline{B}|A+B)=P(\overline{AB}|A+B)=1-P(AB|A+B).$$

因 $AB\subset A+B$，**故** $AB(A+B)=AB.$ **因而**

$$P(\overline{A}+\overline{B}|A+B)=1-P(AB|A+B)=1-\frac{P[AB(A+B)]}{P(A+B)}$$

$$=1-\frac{P(AB)}{P(A+B)}=1-\frac{0.2}{0.5}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=0.6.$$

例 33(**条件充分性判断**)　**设** $P(C)>0$，**则** $P[(A+B)|C]=P(A|C)+P(B|C)$.

(1) $P(ABC)=0$;　　(2) $P(AB)=0.$

解　$P[(A+B)|C]=P[(A+B)C]/P(C)=P(AC+BC)/P(C)$

$$=[P(AC)+P(BC)-P(ABC)]/P(C)$$

$$=P(A|C)+P(B|C)-P(ABC)/P(C)。$$

若条件(1)**成立，即** $P(ABC)=0$ **时，由上式知条件**(1)**充分**.

当条件(2)**成立，即** $P(AB)=0$ **时，由于** $ABC\subset AB$，**故** $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，**即** $P(ABC)=0$。**条件**(2)**也充分**. **仅** D **入选**.

类型(七)　求与它事件有关的单个事件的概率。

利用所给复合事件的概率信息综合应用事件关系与运算及有关计算概率的公式求之.

例 34[1997 **年** Ⅰ 29]　**若两事件** A **和** B **相互独立，且** $P(A)=0.4$，P

$(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，求 $P(B)$.

解 由于 A,B 独立，$\overline{A}$与$\overline{B}$也独立，于是 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(\overline{AB})=P(\overline{A})P(\overline{B})$. 代入等式 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$得到

$$P(A)P(B)=P(\overline{A})P(\overline{B})=[1-P(A)][1-P(B)],$$

即 $0.4P(B)=0.6[1-P(B)]$，解得 $P(B)=0.6$.

例 35 设 A,B 是一次随机试验中的两个事件，已知 $P(\overline{A}+\overline{B})=0.7$，$P(A\overline{B})=0.2$，求 $P(A)$.

解 由 $P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7$，有 $P(AB)=0.3$.

由 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.2$ 得到

$$P(A)=P(AB)+0.2=0.3+0.2=0.5.$$

例 36 设 A,B 是一次随机事件中的两个事件，已知 $P(A+B)=0.9$，$P(A-B)=0.4$，$P(B-A)=0.2$. 求 $P(A)$，$P(B)$及 $P(AB)$.

解 由题设的三个概率可建立关于 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$的三个方程：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9, \quad ①$$

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4, \quad ②$$

$$P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=0.2. \quad ③$$

将式②代入式①得到

$$P(B)+[P(A)-P(AB)]=P(B)+0.4=0.9, \quad \text{故 } P(B)=0.5.$$

将式③代入式①得到

$$P(A)+[P(B)-P(AB)]=P(A)+0.2=0.9, \quad \text{故 } P(A)=0.7.$$

由式②或由式③即得

$$P(AB)=P(A)-0.4=0.3。$$

类型(八) 利用抽签原理计算事件概率。

命题 4.1.2.7 若 n 个签中有 m $(1\leqslant m<n)$个“有”签，$n-m$ 个“无”签，n 个人排队依次抽签(或某人抽 n 次每次抽出一个)，则第 k 个人(或某人第 k 次)$(k=1,2,\cdots,n)$抽到“有”签的概率都一样，都等于 m/n.

命题4.1.2.7 常称为抽签原理. 利用抽签原理计算事件概率这类题目，在日常生活中的原型即是“抓阄”. 因此有经验的读者应该不假思索地知道，先取与后取，取后放回与不放回的概率是相等的.

常称 m/n 为中签率，由上述命题知中签率与抽签次序，与取后放回与不放回无关.

例 37[1998 年Ⅰ19] 5 人以摸彩方式决定谁得一张电影票. 今设“A”

表示第 i 人摸到($i=1,2,3,4,5$),则下列结果中有一个不正确,它是

(A) $P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=1/3$.　　(B) $P(\overline{A_1}A_2)=1/5$.

(C) $P(\overline{A_1}A_2)=1/4$.　(D) $P(A_5)=1/5$.　(E) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=3/5$.

解　(C)与(B)不一致,肯定有一个不正确. 只需计算 $P(\overline{A}_1A_2)$,即

$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=(4/5)\times(1/4)=1/5\neq1/4$. (C)不正确. 事实上,由抽签原理即命题 4.1.2.7 知(D)正确. 而

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=(4/5)\times(3/4)=3/5。$$

(E)正确.

$$P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5},$$

故 $P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ A_3)/P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2)=(1/5)\times(5/3)=1/3$. (A)正确.

仅(C)入选。

例 38　抽签考试时,从 8 个考题中任取 1 个题解答. 如果 8 个题中有 2 个较难题,6 个容易的题. 第 3 名考生抽到难题的概率 p 是

(A) 2/8.　　(B) 2/6.　　(C) 1/6.

(D) 3/6.　　(E) 以上结论都不正确.

解　由命题 4.1.2.7 知第三名考生抽到难题的概率 p 就是中签率 $2/8=1/4$. 仅(A)入选.

例 39　10 个考题签中有 4 个难题签,3 人参加抽签(不放回),甲先,乙次之,丙最后。求

(1) 甲抽到难题签的概率;

(2) 甲没抽到难题签而乙抽到难题签的概率;

(3) 甲、乙、丙都抽到难题签的概率.

解　(1) 由命题 4.1.2.7 知甲抽到难题签的概率为难题签率,即 $4/10=2/5$。

(2) 设甲、乙、丙抽到难题签的事件分别为 A,B,C,则

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}.$$

(3) 同理有 $P(ABC)=P(A)P(B|A)P\ (C|AB)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$.

注意　例 39(2)、(3)中所求概率不符合抽签原理的条件. 它使用了前面的抽签者所抽的结果,这是条件概率问题. 不能用抽签原理求之.

类型(九)　判别事件概率不等式。

常用下述命题判别之:

命题 4.1.2.8 设 A,B,C 为任意随机事件，则

(1) $A\subset B$ 时，有 $P(A)\leqslant P(B)$；　　(2) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(3) $P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$；　　(4) $P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$；

(5) $P(A+B+C)\leqslant P(A)+P(B)+P(C)$。

此外，还可利用文氏图判别之。

例 40[2003 年Ⅱ32]　A,B,C 为随机事件，若 $AB\subset C$，则

(A) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-P(AB)$.　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1/2$.　　(D) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1/3$.

(E) $P(C)\geqslant 2-P(A)-P(B)$。

解法 1　$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\geqslant P(A)+P(B)-P(C)$ (因 $P(AB)<P(C)$)，

即　$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-P(A+B)$

$\geqslant P(A)+P(B)-1$ (因 $P(A+B)\leqslant 1$)。仅(B)入选。

解法 2　$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)$

$\geqslant P(A)+P(B)-1$. 仅(B)入选.

例 41　已知 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.9$，则 $P(A+B)-P(AB)$ 的最大可能值等于

(A) 0。　(B) 0.2。　(C) 0.4。　(D) 0.5。　(E) 0.7。

解　$P(A+B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-2P(AB)$，

因　$P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$，

故　$P(A+B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B)-2[P(A)+P(B)-1]$

$=2-[P(A)+P(B)]=2-1.6$

$=0.4$. 仅(C)入选.

例 42　设 A,B 是两个随机事件，其概率 $P(A)=a$，$P(B)=b$ 均大于零，则条件概率 $P(A|B)$

(A) $=(a+b-1)/b$。　(B) $>(a+b-1)/b$.

(C) $<(a+b-1)/b$.　(D) $\geqslant(a+b-1)/b$.

(E) $\leqslant(a+b-1)/b$.

解　$P(A|B)=P(AB)/P(B)\geqslant[P(A)+P(B)-1]/P(B)$

$=(a+b-1)/b$. 仅(D)入选.

习　题　4.1.2

（一）问题求解

1. [1998 年 Ⅱ 18]　将 3 人分配到 4 间房的每一间中，若每人被分配到这 4 间房的每一间房中的概率都相同，则第一、二、三号房中各有一人的概率是

(A) 3/4.　(B) 3/8.　(C) 3/16.　(D) 3/32.　(E) 3/64.

2. [1998 年 Ⅱ 20]　若 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(A+B)=0.9$，则 $P(\overline{A}+\overline{B})=$

(A) 0.3。　(B) 0.5。　(C) 0.6。　(D) 0.7。　(E) 0.8。

3. [1999 年 Ⅱ 20]　若 $A \supset C, B \supset C, P(A)=0.7, P(A-C)=0.4, P(AB)=0.5$. 则 $P(AB-C)=$

(A) 0.1.　(B) 0.2.　(C) 0.3.　(D) 0.4.　(E) 0.5.

4. [2000 年 Ⅱ 15]　某剧院正在上演一部新歌剧．前座票价 50 元，中座票价 35 元，后座票价 20 元．如果购到任何一种票是等可能的．现任意购买到 2 张票，则其值不超过 70 元的概率是

(A) 1/3.　(B) 1/2.　(C) 3/5.　(D) 2/3.

5. [2001 年 Ⅰ 14]　将一块各面均涂有红漆的正立方体锯成 125 个大小相同的小正立方体．从这些小正立方体中随机抽取一个，所取到的小正立方体至少两面涂有红漆的概率是

(A) 0.064.　(B) 0.216.　(C) 0.288.　(D) 0.352.

6. 设 A, B 是对立事件，$0<P(A)<1$，则必有

(A) $0<P(A+B)<1$.　(B) $0<P(B)<1$。　(C) $0<P(\overline{\overline{A}\overline{B}})<1$.

(D) $0<P(\overline{A}+\overline{B})<1$。　(E) $0<P(AB)<1$。

7. 有 50 只乒乓球在袋中，其中 20 只是黄球，30 只是白球．今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取到黄球的概率是

(A) 1/5.　(B) 3/5.　(C) 2/5.　(D) 4/5.

(E) 以上结论都不正确．

（二）条件充分性判断

1. A, B 是两随机事件，$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(1) A 与$\overline{B}$互不相容，且 $A=B$；　　(2) A 与 B 互不相容.

2. 已知事件 A 发生、B 不发生的概率与事件 B 发生、A 不发生的概率相等，则可以确定 $P(A)=0.5$.

(1) $P(B)=0.5$；　　(2) $P(A)+P(B)=0.8$.

3. A,B,C 是任意三个概率均大于零的随机事件，则

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B).$$

(1) AC 与 BC 互不相容；　　(2) $A+B\supset C$.

4. 设 A,B 为两个互不相容事件，则 $P(B)=0.25$.

(1) $P(A)=0.5$；　　(2) $P(A|A+B)=2/3$.

5. A,B 是两个随机事件，$P(\overline{A}+\overline{B})=1$.

(1) A 与 B 互不相容；　　(2) A 与 B 互相独立.

6. $P(\overline{AB})=P(AB)$.

(1) $P(A)=P(B)=1/2$；　　(2) $A=\overline{B}$.

7. 事件 A,B 的概率 $P(A)=1/3,P(B)=1/2$，则 $P(\overline{A}B)=1/2$.

(1) $A\subset B$；　　(2) A 与 B 互斥.

8. A 和 B 是随机事件，$P(A-B)=P(A)$.

(1) A 与 B 对立；　　(2) A 与 B 互斥.

9. 设 $P(A)=P(B)=1/2,P(C)=1/3$，可求 $P(A+B+C)$的值.

(1) $P(AB)=1/6,P(BC)=1/4$；　　(2) $P(AC)=0$.

10. 设 $P(A)=0.5,P(B)=0.4$，则 $P(A+B)=0.7$.

(1) $P(A\overline{B})=0.3$；　　(2) $P(\overline{A}B)=0.2$.

11. 10 个考题中有 4 个难题，甲、乙、丙三人参加抽答考题，每人抽一题，甲先、乙次之、丙最后，则三人抽到难题的概率相等.

(1) 抽后放回；　　(2) 抽后不放回.

(三) 解答题

1. 除设随机事件 A 与 B 满足 $P(AB)=P(\overline{AB})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

2. 两袋中分别装有写 0,1,2,3,4,5 六个数字的六张卡片. 从每个袋中各取一张，求所得卡片上两数字之和等于 6 的概率.

3. 已知 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B|A+\overline{B})$.

4. 设 $P(A)=1/3,P(B)=1/2$，在下列三种情况下，分别求 $P(\overline{A}B)$的值.

(1) A 与 B 互斥；　　(2) $A\subset B$；　　(3) $P(AB)=1/8$.

5. 已知 $B\subset A$，$P(A)=0.8$，$P(B\cup C)=0.6$，$P(C-B)=0.4$，**求** $P(A-B)$.

6. 一组中有 a **名女生，**b **名男生，随机地站成一列，求从前面数第** k **名**$(1\leqslant k\leqslant a+b)$**是女生的概率.**

7. 有 6 **张电影票，**1 **张话剧票，**7 **个人抓阄，求每个人抓到话剧票的概率是多少？**

8. 一座楼有 N **个房间，今有** n **个人**$(n\leqslant N)$**，每个人都以同样的概率** $1/N$ **被分配在任一房间中，试求下列事件** A,B,C **的概率，其中**

事件 $A=\{$**某指定** n **个房间中各有一人**$\}$；

事件 $B=\{$**恰有** n **间房各有一人**$\}$；

事件 $C=\{$**某指定房中恰有** k $(k\leqslant n)$**人**$\}$.

4.1.3 条件概率与独立性

1. 条件概率

条件概率的定义与性质详见 4.1.2 **节定义** 4.1.2.1。

2. 概率的乘法公式

一般，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **为** n $(n\geqslant 2)$**个事件，则**

$$P(A_1\ A_2\cdots A_n)=P(A_1)\ P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\ A_2\cdots\ A_n).$$

特别地，若 A,B,C **为任意三事件，则**

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)\ P(C|AB).$$

3. 事件的独立性

定义 4.1.3.1 (1) **设** A,B **是两事件，如果** $P(AB)=P(A)\ P(B)$**，则称** A,B **是相互独立的事件.**

(2) **设** $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **为** n **个事件，如果它们中任意** k $(2\leqslant k\leqslant n)$**个事件乘积的概率等于其各自概率的乘积，则称这** n **个事件** $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立.**

题型一　用乘法公式求解实际应用题

如所要求解的问题是由若干个连续的分过程所组成的总过程，计算与此总过程有关的事件的概率，常利用乘法公式求之.

解概率应用题一般包括三个步骤。

1° 用适当字母表示题中有关事件。这一点很重要，它是正确理解题意的体现，是解应用题的基础和关键。

2° 用字母和数学符号表示事件之间的关系及要求的概率。

3° 综合运用古典型概的定义、加法公式、减法公式、乘法公式及条件概率等进行计算.

例 1[2000 年Ⅰ15] 某人忘记三位号码锁(每位均有 0～9 十个数码)的最后一个数码. 因此在正确拨出前两个数码后，只能随机地试拨最后一个数码。每拨一次算作一次试开，则他在第 4 次试开时才将锁打开的概率是

(A) 1/4。　　(B) 1/6。　　(C) 2/5。　　(D) 1/10。

解法 1　设 $A_i=\{$第 i 次试开成功$\}$，$i=1,2,3,4$，则

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\ A_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{10}.$$ 仅(D)入选.

解法 2　用条件概率求之. 令事件 $A=\{$前 3 次均没打开$\}$，事件 $B=\{$第 4 次打开$\}$. 因事件 B 发生即第 4 次才打开时，必有前 3 次未打开，故 $B\subset A$. 于是 $AB=B$，则所求概率为

$$P(B)=P(AB)=P(A)P(B|A)=(C_9^3/C_{10}^3)\times(1/7)=1/10.$$ 仅(D)入选。

例 2[1999 年Ⅱ32] 甲袋中装有 3 只白球和 5 只黑球，乙袋中装有 4 只白球和 6 只黑球. 先从甲袋中取出一球放入乙袋后搅和，再从乙袋中取出一球放回甲袋.

(1) 求甲袋白球数增加的概率；　(2) 求甲袋白球数不变的概率.

解　设事件 $A=\{$从甲袋中取出一白球放入乙袋$\}$，事件 $B=\{$从乙袋中取出一白球放回甲袋$\}$.

(1) 事件 $C=\{$甲袋中白球数增加$\}$，则

$$C=\overline{A}B,\quad P(C)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A}).$$

而
$$P(\overline{A})=C_5^1/C_8^1=5/8,\quad P(B|\overline{A})=C_4^1/C_{11}^1=4/11,$$

故
$$P(C)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=(5/8)\times(4/11)=5/22.$$

(2) 事件 $D=\{$甲袋中白球数不变$\}$，则

$$D=AB+\overline{A}\,\overline{B},$$

$$P(D)=P(AB+\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})$$

$$=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}),$$

而 $P(A)=C_3^1/C_8^1$，$P(B|A)=C_5^1/C_{11}^1$，$P(\overline{A})=C_5^1/C_8^1$，$P(\overline{B}|\overline{A})=C_7^1/C_{11}^1$，

故　　$P(D)=(3/8)\times(5/11)+(5/8)\times(7/11)=25/44.$

例 3[1998 年Ⅰ32]　甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，甲选手发球成功后乙选手回球失误的概率为 0.3. 若乙选手回球成功后甲选手回球失误的概率为 0.4，甲选手回球成功乙选手再次回球失误的概率为 0.5. 试计算这几个回合中乙选手输掉一分的概率.

解　令事件 $B_1=\{$乙接球成功$\}$，事件 $A=\{$甲接乙第一次回球成功$\}$，$B_2=\{$乙第二次回球成功$\}$，则乙选手输掉一分的情况在下述两种情况下出现. 一种情况是乙第一次接球失误，这时事件 $\overline{B_1}$ 发生；另一种情况是乙第一次接球成功，但第二次接球失误，这时三个事件 $B_1, A, \overline{B_2}$ 同时发生. 因而乙选手输掉一分的概率为

$$P=P(\overline{B_1}+B_1\ A\ \overline{B_2})=P(\overline{B_1})+P(B_1\ A\ \overline{B_2})\ (\overline{B_1}\text{与}\ B_1A\ \overline{B_2}\text{互斥}).$$

依题意有 $P(\overline{B_1})=0.3$，因而

$$P(B_1)=0.7,\quad P(A|\overline{B_1})=0.6,\quad P(B_1\ A\ \overline{B_2}|B_1\ A)=0.5.$$

由乘法公式得到

$$\begin{aligned}P(B_1\ A\ \overline{B_2})&=P(B_1)P(A|B_1)P(B_1\ A\ \overline{B_2}|B_1\ A)\\&=0.7\times0.6\times0.5=0.21,\end{aligned}$$

故所求概率 $p=P(\overline{B_1})+P(B_1\ A\ \overline{B_2})=0.3+0.21=0.51.$

例 4[2003 年Ⅱ31]　甲、乙、丙依次轮流投掷一枚均匀的硬币，若先投出正面者为胜，则甲、乙、丙获胜的概率分别为

(A) 1/3,1/3,1/3.　　(B) 4/8,2/8,1/8.　　(C) 4/8,3/8,1/8.

(D) 4/7,2/7,1/7.　　(E) 以上结论都不正确.

解　令事件 A,B,C 分别表示甲、乙、丙掷出正面，则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 分别表示甲、乙、丙掷出反面. 显然 A,B,C 相互独立. 又设事件 D,E,F 分别为甲、乙、丙获胜，由 A,B,C 及 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 相互独立得到：

$$\begin{aligned}P(D)(\text{甲获胜的概率})&=P(A)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ A)+(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}A)+\cdots\\&=1/2+(1/2)^4+(1/2)^7+\cdots\\&=1/2\times(1+1/8+1/8^2+\cdots)\\&=1/2\times1/(1-1/8)=4/7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(E)(\text{乙获胜的概率})&=P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}AB)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}A\overline{B}\overline{C}AB)+\cdots\\&=1/2^2+1/2^5+1/2^8+\cdots\\&=1/4\times(1+1/8+1/8^2+\cdots)=2/7.\end{aligned}$$

$P(F)$(丙获胜的概率)$=1-$甲获胜的概率$-$乙获胜的概率

$=1-4/7-2/7=1/7$. 仅(D)入选.

题型二　用条件概率与概率的乘法公式求解实际应用题

计算事件 A,B 同时发生的概率用 $P(AB)$;计算 A,B 同时发生,且有包含关系 $B\subset A$ 的概率用 $P(B|A)$;计算 A,B 同时发生,且事件 B 是在 A 发生的条件下发生的概率 $P(B|A)$.

当 $P(A)>0$ 时,先求 $P(AB),P(A)$,再用公式 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$ 算出 $P(B|A)$. 有时,直接从加入条件后改变了情况去算,更为方便.

例 5[1999 年 Ⅰ 16]　设 N 件产品中 D 件是不合格品,从这 N 件产品中任取 2 件,已知其中有一件是不合格品,则另一件也是不合格品的概率是

(A) $\dfrac{D-1}{2N-D-1}$.　(B) $\dfrac{D(D-1)}{N(N-1)}$.　(C) $\dfrac{D(D-1)}{N^2}$.　(D) $\dfrac{D-1}{2(N-D)}$.

解　设事件 $A=\{$任取 2 件,至少有 1 件不合格$\}$,事件 $B=\{$任取 2 件,2 件都不合格$\}$,显然有 $B\subset A$. 由式(4.1.2.3)得到

$$P(A)=\frac{C_D^1\,C_{N-D}^1+C_D^2}{C_N^2}=\frac{D(N-D)+D(D-1)/2}{C_N^2}$$

$$=\frac{D[2(N-D)+(D-1)]}{2\,C_N^2}=\frac{D(2N-D-1)}{2\,C_N^2},$$

$$P(AB)=P(B)=C_D^2/C_N^2=D(D-1)/(2\,C_N^2),$$

故
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{D(D-1)}{2\,C_N^2}\Big/\left[\frac{D(2N-D-1)}{2C_N^2}\right]$$

$$=\frac{D-1}{2H-D-1}.$$ 仅(A)入选.

例 6(条件充分性判断)　甲、乙两人独立地向同一目标射击一次,现目标已被击中,则它是由甲射中的概率为 0.75.

(1) 甲的命中率是 0.6;　(2) 乙的命中率是 0.5.

解　设事件 $A=\{$甲击中目标$\}$,$B=\{$乙击中目标$\}$,则 $A+B=\{$目标被击中$\}$,显然有 $A\subset A+B$. 由于 A,B 独立,由命题 4.1.3.3 知,$\overline{A},\overline{B}$也独立,

$$P(\overline{AB})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.6)(1-0.5)=0.20,$$

因而
$$P[A|(A+B)]=\frac{P[A(A+B)]}{P(A+B)}=\frac{P(A)}{1-P(\overline{A+B})}=\frac{P(A)}{1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})}$$

$$=\frac{0.6}{0.8}=\frac{3}{4}=0.75.$$

由此可知条件(1)与条件(2)单独不充分,但联合起来后,可求出 $P[A|(A+B)]$的值为 0.75. 仅 C 入选.

例 7　口袋中装有 $2n-1$ 只白球和 $2n$ 只黑球，一次取 n 只球，发现都是同一种颜色的，则此颜色是黑色的概率为

(A) 1/3.　(B) 2/3.　(C) 1/4.　(D) 1/2.　(E) 3/4.

解　令 $A=\{n$ 只球是同一颜色$\}$，$B=\{n$ 只球全是黑色$\}$，则 $B\subset A$，且

$$P(B)=C_{2n}^{n}/C_{4n-1}^{n},\quad P(A)=(C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n})/C_{4n-1}^{n}.$$

由此得到

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n}}.$$

由式(4.1.2.1)**有**

$$C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!\,n!},\quad C_{2n-1}^{n}=\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}=\frac{(2n)!}{2n\cdot n!\,(n-1)!}=\frac{(2n)!}{2\cdot n!\,n!},$$

故

$$P(B|A)=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n}}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}\Big/\left[\frac{(2n)!}{n!\,n!}+\frac{(2n)!}{2\,n!\,n!}\right]$$

$$=1/(1+1/2)=2/3.$$

例 8[2004 **年** Ⅱ 10]　**甲、乙两名篮球运动员投篮的命中率分别为** 0.8 **和** 0.75. **今每人各投一球结果有一球命中，乙未命中的概率为**

(A) 2/7.　(B) 5/14.　(C) 4/7.　(D) 9/14.　(E) 5/7.

解　事件 $A=\{$甲命中$\}$，事件 $B=\{$乙命中$\}$，则 $A\overline{B}+\overline{A}B$ 表示甲、乙各投一球结果有一球命中的事件，因而所求概率为 $P(\overline{B}|(A\overline{B}+\overline{A}B))$. 因 A，B 独立，由命题 4.1.3.3 **得到**

$$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$$

$$=0.8\times0.25+0.20\times0.75=0.35,$$

而

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.75=0.25,$$

$$P(\overline{B}A)=P(\overline{B})P(A)=0.25\times0.8=0.20.$$

因而所求概率为

$$P(\overline{B}|(A\overline{B}+\overline{A}B))=\frac{P(\overline{B}(A\overline{B}+\overline{A}B))}{P(A\overline{B}+\overline{A}B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(A\overline{B}+\overline{A}B)}$$

$$=\frac{0.20}{0.35}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}.$$ **仅**(C)**入选。**

题型三　判别事件的独立性

在某随机试验中，如果两个事件中每一个的发生与否都不影响另一事件发生的概率，就称这两个事件是相互独立的.

类型(一)　判别两事件相互独立。

在事件 B 发生的条件下，事件 A 的条件概率一般不等于事件 A 的无条

件概率，即一般 $P(A|B)\neq P(A)$. 这是因为事件 B 发生一般要改变事件 A 发生的机会. 当然也会出现 $P(A|B)=P(A)$ 的特殊情况. 这时就称 A 独立于 B，这时乘法公式变得较简单.

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(B)P(A).$$

用上式刻画独立性较用 $P(A|B)=P(A)$ 更好，因它不受 $P(B)\neq 0$ 的制约因此得到。

法一　用定义 4.1.3.1 判别之。

法二　用下述诸命题判别之。

命题 4.1.3.1　(1) 任何事件与不可能事件，必然事件相互独立，即如果 $P(A)=0$ 或 1，则事件 A 与任何事件相互独立；(2) 任意两个事件如有包含关系，而它们又不是不可能事件，必然事件，则它们相互不独立.

命题 4.1.3.2　当 $P(A)P(B)>0$ 时，如果 A 与 B 互不相容(互斥)，则 A 与 B 必不相互独立；如果 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 必相容(不互斥).

值得注意的是，如果条件 $P(A)P(B)>0$ 不成立，上述结论不一定成立.

命题 4.1.3.3　(1) 事件 A,B 相互独立

$$\Leftrightarrow A \text{ 与 } \overline{B} \text{ 相互独立} \Leftrightarrow \overline{A} \text{ 与 } B \text{ 相互独立}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A} \text{ 与 } \overline{B} \text{ 相互独立}.$$

(2) 如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则它们的任何一部分换成各自的对立事件后所得到的 n 个事件相互独立。反之亦然.

命题 4.1.3.4　若 $0<P(A)<1$(或 $0<P(B)<1$)，则事件 A 与 B 相互独立的充要条件为

$$P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)\text{(或 } P(A|B)=P(A|\overline{B})=P(A)\text{)}。$$

命题 4.1.3.5　若 $0<P(A)<1$，则事件 A,B 相互独立的充分条件是

$$P(B|A)=P(B|\overline{A}).$$

上式说明在事件 A 发生与不发生的条件下，B 的条件概率相同，因而 A 与 B 相互独立.

命题 4.1.3.6　设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则 A,B 相互独立的充要条件是

$$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1.$$

例 9　对随机事件 A 和 B，下列陈述中正确的是：

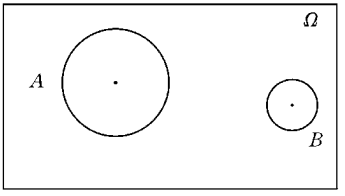
(A) 如果 A 和 B 互斥，则 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也互斥.

(B) 如果 A 和 B 不互斥，则 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也不互斥.

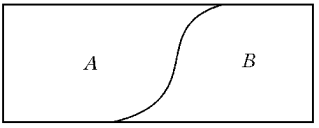
(C) 如果 A 和 B 互斥，且 $P(A)P(B)>0$，则 A,B 相互独立.

(D) 如果 A,B 相互独立，且 $P(A)P(B)>0$，则 A 与 B 互斥.

(E) 如果 A,B 相互独立，则 $\overline{A},\overline{B}$ 也相互独立.



(a)



(b)

图 4.1.3.1

解 当 $A+B=\Omega$，且 A 和 B 互斥时，$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也互斥（见图 4.1.3.1(b)）。但当 $A+B\subset\Omega$ 时，如 A 和 B 互斥，而 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 则相容，不互斥（见图 4.1.3.1(a)）. (A)不正确.

如果 $A=\Omega=B$，则 A,B 不互斥，但 $\overline{A}=\overline{B}=\varnothing$，则 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，因而 $\overline{A},\overline{B}$ 也互斥。(B)也不正确.

如果 A,B 互斥，则 $P(AB)=0\neq P(A)\ P(B)>0$，由定义 4.1.3.1 知，A,B 不相互独立，或由命题 4.1.3.2 知，A,B 也不相互独立.

如果 A,B 相互独立，且 $P(A)P(B)=P(AB)>0$，由命题 4.1.3.2 知，A 与 B 也不互斥。(C)、(D)均不正确. 仅(E)入选.

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\\&=[1-P(A)]-P(B)[1-P(A)]\\&=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B}).\end{aligned}$$

由定义 4.3.3.1 知，$\overline{A},\overline{B}$ 相互独立.

例 10（条件充分性判断） 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则事件 A,B 相互独立.

(1) $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$；　　(2) $P(A+B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$.

解 当条件(1)成立时，有 $P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$，则

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})},$$

即

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)},$$

化简得 $P(AB)=P(A)P(B)$. 因而 A,B 相互独立. 条件(1)充分. 或由命题 4.1.3.6 即知条件(1)充分.

当条件(2)成立时,有

$$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

因而 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$,即事件 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立. 由命题 4.1.3.3 知 A,B 相互独立,故条件(2)也充分. 仅 D 入选.

类型(二) 判别 n ($n>2$)个事件相互独立。

法一 利用下述定义判别之。

定义 4.1.3.2 若事件 A_1,A_2,A_3 两两相互独立,且有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

则称三个事件 A_1,A_2,A_3 相互独立.

当 $n=2$ 时,由定义 4.1.3.1(1)知,A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$,于是 $n=3$ 时,由定义 4.1.3.1(2)知,A,B,C 相互独立,也可表述为

$$A,B,C\text{ 相互独立}\Leftrightarrow\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\P(BC)=P(B)P(C),\\P(CA)=P(C)P(A),\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{cases}$$

三个事件 A,B,C 的相互独立的上述定义是常用的。上面前三个等式成立只表示事件 A,B,C 两两相互独立,并不是 A,B,C 三个事件相互独立. 只有当上面四个等式都成立时 A,B,C 三个事件才相互独立.

法二 利用下述命题判别之。

命题 4.1.3.7 A,B,C 相互独立的充要条件是 A,B,C 两两独立,且 A 与 B 的简单组合(为 $A+B,A-B,AB$ 等)与 C 相互独立.

命题 4.1.3.8 若 A,B,C 是三个相互独立的随机事件,则其中任意两个事件的和(并)、差、积(交)、逆与另一个事件或其逆事件是相互独立的.

例 11[2003 年Ⅰ 16](条件充分性判断) A,B,C 为随机事件,$A-B$ 与 C 独立.

(1) A,B,C 两两相互独立; (2) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

解法 1 因 $A-B$ 与 C 相互独立$\Leftrightarrow P[(A-B)C]=P(A-B)P(C)$,

而 $$P[(A-B)C]=P(AC-BC)=P(AC)-P(ABC),\qquad①$$

$$P(A-B)P(C)=[P(A)-P(AB)]P(C)=P(A)P(C)-P(AB)P(C).\qquad②$$

下面讨论在什么样的条件下式①与式②的右端相等.

当条件(1)成立时，有 $P(AC)=P(A)P(C)$，但 $P(ABC)=P[(AB)C]\neq P(AB)P(C)$，因而不一定有 $P(ABC)=P(AB)P(C)$.

当条件(2)成立时，有 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，但不一定有 $P(AB)=P(A)P(B)$，因而不一定有 $P(ABC)=P(AB)P(C)$，当然也不一定有 $P(AC)=P(A)P(C)$. 为保证这些等式成立，还需 A,B,C 两两相互独立，这时有 $P(AC)=P(A)P(C)$，$P(AB)=P(A)P(B)$. 于是式①与式②的右端相等，从而 $A-B$ 与 C 相互独立. 于是条件(1)与条件(2)联合时，条件充分. 仅 C 入选.

解法 2 当条件(1)与条件(2)联合时，由定义 4.1.3.2 知，A,B,C 相互独立，再由命题 4.1.3.8 知 $A-B$ 与 C 相互独立. 仅 C 入选。

例 12(条件充分性判断) 事件 A,B,C 相互独立.

(1) A,B,C 两两相互独立； (2) A 与 $B+C$ 相互独立.

解法 1 当条件(1)成立，即 A,B,C 两两相互独立时，不能得到 A,B,C 相互独立. 条件(1)不充分.

当条件(2)成立时，有

$$P[A(B+C)]=P(A)P(B+C),\quad \text{即}\quad P(AB+AC)=P(A)P(B+C).$$

于是
$$P(AB)+P(AC)-P(ABC)=P(A)[P(B)+P(C)-P(BC)],\qquad ①$$

由此不能得到 A,B,C 相互独立的结论. 但若两个条件联合在一起，则由条件(1)得到

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\end{cases}\qquad ②$$

将式②代入式①有

$$P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(ABC)=P(A)[P(B)+P(C)-P(B)P(C)],$$

化简得
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

再由式②成立及定义 4.1.3.2 知，A,B,C 相互独立. 仅 C 入选.

解法 2 当条件(1)与条件(2)联合时，由命题 4.1.3.7 即知 A,B,C 相互独立，仅 C 入选.

例 13(条件充分性判断) A 和 B_1+B_2 相互独立。

(1) A_1,B_1,B_2 相互独立；

(2) A 与 B_1 相互独立，A 与 B_2 相互独立，且 $B_1B_2=\varnothing$.

解 由命题 4.1.3.7 知条件(1)充分. 事实上，由于

$$P(A(B_1+B_2))=P(AB_1+AB_2)=P(A\,B_1)+P(AB_2)-P(A\,B_1\,B_2)$$

若条件(1)成立,即 A,B_1,B_2 相互独立,有

$$\begin{aligned}P(A(B_1+B_2))&=P(A)P(B_1)+P(A)P(B_2)-P(A)P(B_1)P(B_2)\\&=P(A)[P(B_1)+P(B_2)-P(B_1\,B_2)]\\&=P(A)P(B_1+B_2),\end{aligned}$$

即 A 与 B_1+B_2 独立. 条件(1)充分. 或由命题 4.1.3.8 知条件(1)充分.

当条件(2)成立时,有

$$\begin{aligned}P(A(B_1+B_2))&=P(AB_1+AB_2)=P(AB_1)+P(AB_2)\\&=P(A)P(B_1)+P(A)P(B_2)=P(A)P(B_1+B_2),\end{aligned}$$

因而 A 与 B_1+B_2 相互独立,条件(2)也充分. 仅 D 入选.

题型四　利用事件的独立性计算事件的概率

常利用下述事件独立的性质计算有关事件的概率。

命题 4.1.3.9　事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立时,有

(1) $P(A_1+A_2+\cdots A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$; (4.1.3.1)

(2) $P(A_1\,A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$; (4.1.3.2)

(3) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$. (4.1.3.3)

常用上述性质(1)将独立事件的和的概率转化为独立事件的概率的积来计算. 因而计算"n 个独立事件至少有一个发生"的概率时常用式(4.1.3.1)计算.

例 14[1999 年 Ⅰ 19]　下列框图(见图 4.1.3.2)中的字母代表元件种类,字母相同但下标不同为同一类元件. 已知 A,B,C,D 各类元件的正常工作的概率依次为 p,q,r,s,且各元件的工作是相互独立的,则此系统正常工作的概率为

(A) $s^2\,p\,q\,r$.　　(B) $s^2(p+q+r)$.　　(C) $s^2(1-p\,q\,r)$.

(D) $1-(1-p\,q\,r)(1-s)^2$.　　(E) $s^2[1-(1-p)(1-q)(1-r)]$.

解　就用这些字母表示相应元件正常工作事件,于是 A,B,C,D_1,D_2 是独立事件组.

设 E 为事件"系统正常工作",则

$$E=D_1(A+B+C)D_2,$$

于是所求概率由式(4.1.3.1)得到

$$P(E)=P(D_1)P(A+B+C)P(D_2)$$

$=P(D_1)P(D_2)[1-P(\overline{A+B+C})]$

$=P(D_1)P(D_2)[1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})]$

$=s^2[1-(1-p)(1-q)(1-r)]$. **仅(E)入选.**

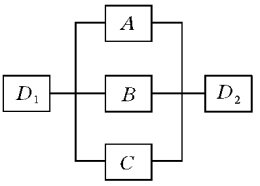


图 4.1.3.2

例 15(条件充分性判断) 若事件 A 与 B 相互独立,则 $P(A)=P(B)=1/2$.

(1) $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$; (2) $P(A\overline{B})=1/4$.

解 仅由条件(1)或条件(2)求不出 $P(A)=P(B)=1/2$. 但当条件(1)与条件(2)联合起来后利用命题 4.1.3.3 得到

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-(B)], \quad ①$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=[1-P(A)]P(B), \quad ②$$

由条件(1)成立及式①与式②相等,有 $P(A)=P(B)$.

再由条件(2)得到

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=1/4,$$

即 $$P(A)-P(A)P(B)=P(A)-[P(A)]^2=1/4,$$

亦即 $$[P(A)-1/2]^2=0,$$

故 $P(A)=1/2$,所以 $P(A)=P(B)=1/2$. 仅 C 入选.

习 题 4.1.3

(一) 问题求解

1. [2002 年Ⅰ18] 在盛有 10 只螺母的盒中,有 0 只,1 只,2 只,…,10 只铜螺母是等可能的. 今向盒中放入 1 个铜螺母,然后随机从盒中取出 1 个螺母,则这个螺母为铜螺母的概率为

(A) 6/11. (B) 5/10. (C) 5/11. (D) 4/11.

2. 设事件 A 与 B 相互独立,则下列结论中成立的是

(A) $P(A+B)=P(A)+P(B)$. (B) $P(AB)=0$.

(C) $AB=\varnothing$. (D) $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(E) $P(A+B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$.

3. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件,且 $0<P(C)<1$,则在下列给

出的五对事件中不相互独立的是

(A) $\overline{A+B}$与 C. (B) $\overline{AC}$与$\overline{C}$. (C) $\overline{AB}$与$\overline{C}$.

(D) $\overline{A-B}$与$\overline{C}$. (E) $A-AB$ 与 C.

4. [2002 年Ⅱ19] 10 件产品中有 3 件是不合格品,今从中任取 2 件,则在已知两件中有一件是合格品的条件下,另一件是不合格品的概率是

(A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) 0.5.

5. [2004 年Ⅰ29] 某种电子元件的寿命 X(小时)服从正态分布 $N(500,40^2)$,一只该种元件在工作 500 小时未失效的条件下还能再工作 100 小时的概率为

(A) 0.0124。 (B) 0.0134。 (C) 0.0144。

(D) 0.0154。 (E) 0.0164。

6. [2004 年Ⅰ28] 某事件在 0 时至 7 时发生的概率为 $P(0\leqslant T\leqslant t)$. T 时从$[0,20]$上的均匀分布. 已知该事件在 0 时至 4 时没有发生,则它在 4 时至 8 时发生的概率为

(A) 0.25. (B) 0.22. (C) 0.20. (D) 0.18. (E) 0.16.

(二) 条件充分性判断

1. 一种零件的加工由两道工序组成,该零件加工的成品率为 $1-p-q+pq$.

(1) 第一道工序的废品率为 p,第二道工序的废品率为 q;

(2) 第一道工序的废品率为 q,第二道工序的废品率为 p。

2. 设事件 A,B 的概率满足 $P(A)P(B)>[P(A)P(B)]^2$,则

$$P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1.$$

(1) $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$; (2) $P(A-B)=P(A)[1-P(B)]$.

3. 设事件 A,B 相互独立,且 A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)=2/3$.

(1) $P(\overline{B})=1/3$; (2)A,B 都不发生的概率为 $1/9$.

4. 事件 A,B 相互独立.

(1) $P(A)=0$; (2) $P(B)=1$.

5. $\overline{A+B}$与 C 相互独立.

(1) A,B,C 两两相互独立; (2) A,B,C 相互独立.

6. 事件 A,B,C 相互独立.

(1) A,B,C 两两相互独立; (2) A 与 $B-C$ 相互独立.

7. 两两相互独立的事件 A,B,C 相互独立.

(1) AB 与 C 相互独立;　　(2) $\overline{A}-B$ 与 C 相互独立.

(三) 解答题

1. 一实习生用同一台机器接连独立制造 3 个同种零件,第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=1/(i+1)(i=1,2,3)$. 以 X 表示 3 个零件中合格的个数,则 $P(X=2)=$_____.

2. [1998 年 Ⅱ 32] **甲、乙、丙三个人投篮,他们的命中率依次为 0.9,0.8,0.7. 现每人各投一次,求**

(1) 至少有两人投进的概率;(2)最多有两人投进的概率.

3. 设随机事件 A 与 B 相互独立,$P(A)=P(\overline{B})=a-1$,$P(A+B)=7/9$,则 $a=$_____.

4. 一工人照看三台机床,一小时内,甲机床、乙机床和丙机床不需照看的概率分别为 0.9、0.8 和 0.85. 求(1)三台机床需照看的概率;(2)至少有一台机床需照看的概率;(3)机床因无人照看而停工的概率.

5. 设有四张字母卡片,其中两张是 a,一张是 d,一张是 t,混合后重新排列,求正好得到 $data$ 的概率.

6. 加工某一零件需过四道工序,设第一、二、三、四道工序的次品率分别为 0.02,0.03,0.05 和 0.03. 修改各道工序互不影响. 求加工出来的零件的次品率.

7. 某种动物活到 20 岁的概率为 0.8,活到 25 岁的概率为 0.4. 问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少?

8. 某市统计,居民户洗衣机拥有率为 0.92,冰箱拥有率为 0.93. 无洗衣机户中冰箱拥有率为 0.95. 试求:

(1) 无冰箱户中洗衣机拥有率;　　(2) 两样电器都没有的比率.

9. 设 N 件产品中有 M 件不合格,从这 N 件产品中任取 2 件,已知其中有不合格品,求两件都不合格的概率.

4.1.4　计算独立试验序列概型的概率

进行 n 次试验如果每次试验的条件都相同,且各次试验相互独立,即每次试验的结果都不受其他各次试验结果的影响,则称为 n 次重复独立试验.

同时观察在相同条件下进行的 n 个试验与重复观察同一个试验 n 次具有相同的意义.

定义 4.1.4.1 如果某试验的可能结果只有两个:A 发生与$\overline{A}$发生(即 A 不发生),且每次试验中事件 A 发生的概率都相同,即 $P(A)=p>0$(则 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-p=q$),则称这一试验为贝努利试验. 将一贝努利试验独立地重复 n 次所得的 n 次重复独立试验,称为 n 重贝努利试验.

定理 4.1.4.1 在 n 重贝努利试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n),q=1-p。 \tag{4.1.4.1}$$

式(4.1.4.1)称为二项概率公式,也称为贝努利公式.

在相同条件下,对某随机试验重复进行 n 次,求一个事件 A 发生了 k ($k\leqslant n$)次的概率,这种题型称为独立试验序列概型.

定理 4.1.4.2 独立地做了 n 次贝努利试验,直到第 k 次试验时,事件 A 才首次发生,其概率为

$$P_n(k)=p\,q^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots,n),\text{其中 } p=P(A).$$

如果在一次试验中事件 A 发生的概率为 $P(A)=p$ ($0<p<1$),而这样的试验重复了n 次,且已知各次试验相互独立,或从问题的实际背景判断各次试验相互独立,则可利用二项概率公式即式(4.1.4.1)求解有关问题. 常见的题型有以下四种.

题型一 已知 n 和 p,求事件 A 发生一定次数的概率

事件 A 发生一定次数的概率常见的有下述几种情况:

(1) n 次试验中事件 A 全不发生的概率为

$$P_n(0)=(1-p)^n. \tag{4.1.4.2}$$

(2) n 次试验中事件 A 至少发生一次的概率为

$$P_n(k\geqslant 1)=1-p_n(0)=1-(1-p)^n. \tag{4.1.4.3}$$

(3) n 次试验中事件 A 至少发生 r 次的概率为

$$P_n(k\geqslant r)=\sum_{k=r}^{n}P_n(k)=1-\sum_{k=0}^{r-1}P_n(k). \tag{4.1.4.4}$$

(4) n 次试验中事件 A 最多发生 r 次的概率为

$$P_n(k\leqslant r)=\sum_{k=0}^{r}P_n(k). \tag{4.1.4.5}$$

例 1[2000 年Ⅰ 25] 假设实验室器皿中产生 A 类细菌与产生 B 类细菌的机会相等,且每个细菌的产生是相互独立的. 若某次发现产生了 n 个细菌,求其中至少有一个 A 类细菌的概率是_____.

解 视产生 n 个细菌为 n 次独立贝努利实验，每次实验结果要么为一个 A 类细菌，要么为一个 B 类细菌，出现的概率均为 1/2。设事件 A 表示 n 次试验中出现一个 A 类细菌，以 k 表示 n 重贝努利试验中事件 A 出现的次数，其概率为

$$P_n(k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k}=C_n^k\,(1/2)^k\,(1/2)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)。$$

下求 $P_n^n(k\geqslant 1)$，利用对立事件的概率求之。

$$\begin{aligned}P_n(k\geqslant 1)&=1-P_n(k<1)=1-P_n(k=0)\\&=1-C_n^0\,(1/2)^0\,(1/2)^{n-0}=1-1/2^n。\end{aligned}$$

例 2[2000 年Ⅰ 35] 甲袋中有 9 只白球和 1 只黑球，乙袋中有 10 只白球，每次从甲、乙两袋中各随机地取一球交换后放入另一袋中．这样做了 3 次，求黑球仍在甲袋中的概率．

解 每做一次实验，黑球可能转移(记作 A)，也可能不转移，而且易用古典概型求出 $P(A)=0.1$. 做 3 次试验后黑球仍在甲袋，即 A 发生了 0 次或 2 次，于是

$$\begin{aligned}P&=P(A\text{ 发生 }0\text{ 次})+P(A\text{ 发生 }2\text{ 次})\\&=(0.9)^3+C_3^2\times(0.1)^2\times 0.9=7.29+0.027=0.756。\end{aligned}$$

题型二 已知事件 A 发生一定次数的概率，求 p 或(和)n

这是本题型类型(一)的反问题．常根据题设条件列出以 p 或(和)n 为未知数的方程，解出 p 或(和)n.

最常见的题设条件是已知 n 次试验中 A 至少发生一次的概率 $P_n(k\geqslant 1)=a$，其中 a,n 已知，求参数 p.

如果已知 $P_n(k\geqslant 1)$(事件 A 在 n 次试验中至少发生一次的概率)，则由 $P_n(0)=1-P_n(k\geqslant 1)$ 得到

$$p^0(1-p)^n=1-P_n(k\geqslant 1),\quad 1-p=\sqrt{1-P_n(k\geqslant 1)},$$

则一次试验中事件 A 发生的概率为

$$p=1-\sqrt{1-P_n(k\geqslant 1)}.\qquad(4.1.4.6)$$

例 3(条件充分性判断) 在 3 次独立试验中，每次试验事件 A 出现的概率相等，则事件 A 在一次试验中出现的概率是 1/3.

(1) 3 次试验 A 至少出现一次的概率为 19/27；

(2) 3 次试验 A 不出现的概率为 8/27.

解 设事件 A 在一次试验中出现的概率为 p，则本题可看作 $n=3,p=1$

的独立试验概型．当条件(1)成立时，有 $p_3(k\geqslant 1)=19/27$，由式(4.1.4.6)即得 $p=1/3$.

$$p_3(1)+p_3(2)+p_3(3)=19/27,\quad \text{即}\quad 1-p_3(0)=19/27.$$

再由式(4.1.4.2)有 $1-(1-p)^3=19/27$，易解得 $p=1/3$．条件(1)充分．

当条件(2)成立时，由式(4.1.4.1)有 $p_3(0)=C_3^0p^0(1-p)^3=8/27$，易解得 $p=1/3$．条件(2)也充分．仅 D 入选．

例 4(条件充分性判断)　设进行 4 次独立重复试验，可以确定每次试验的成功率 $p=0.8$.

(1) 试验 4 次都成功的概率与试验 4 次都失败的概率相等；

(2) 试验 4 次中恰好成功 1 次的概率是试验 4 次都失败的概率的 16 倍．

解　当条件(1)成立时，有 $C_4^4p^4(1-p)^0=C_4^4(1-p)^4p^0$，即 $p^4=(1-p)^4$，因而 $p=1-p$，$p=0.5\neq 0.8$．条件(1)不充分．

当条件(2)成立时，有 $C_4^1p(1-p)^3=16C_4^4(1-p)^4p^0$，即 $4p(1-p)^3=16(1-p)^4$，故 $p=4(1-p)$，因而 $p=4/5=0.8$．条件(2)充分．仅 B 入选．

例 5　设每次试验中事件 A 发生的概率为 p，为了使事件 A 在独立试验序列中至少发生一次的概率不小于 α，问需进行多少次试验？

解　设进行 n 次重复独立试验，事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k。由式(4.1.4.3)知 A 在 n 次试验中至少发生一次的概率为

$$P_n(k\geqslant 1)=1-(1-p)^n.$$

要使　$1-(1-p)^n\geqslant\alpha$，即　$(1-p)^n\leqslant 1-\alpha$，

两端取对数得　$n\ln(1-p)\leqslant\ln(1-\alpha)$，

因为　$0<1-p<1$，　$\ln(1-p)<0$，

所以有　$$n\geqslant\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}.$$

以$[x]$表示不超过 x 的最大整数，则得

$$n>\left[\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}\right]+1。$$

题型三　求解独立试验序列中的等待时间问题

例 6[1999 年Ⅰ20]　进行一系列独立的试验，每次试验成功的概率为 p，则在成功 2 次之前已经失败 3 次的概率为

(A) $4p^2(1-p)^3$.　　(B) $4p(1-p)^3$.　　(C) $10p^2(1-p)^3$.

(D) $p^2(1-p)^3$. (E) $(1-p)^3$.

解 仅(A)入选. 在成功 2 次之前已经失败 3 次这意味着第 5 次必定成功. 设第 5 次成功的事件为 B_1,而第 1 次成功发生在前 4 次试验中的某一次,其余 3 次都为失败. 设前 4 次试验中仅成功一次的事件为 B_2. 显然 B_1, B_2 两事件独立. 又设在 5 次试验中成功 2 次之前已经失败了 3 次的事件为 B,则

$$P(B)=P(B_1\ B_2)=P(B_1)P(B_2)=pC_4^1p(1-p)^{4-1}=4p^2(1-p)^3.$$

例 7 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间为 X 分钟,X 服从指数分布($\lambda=1/5$)。等待时间超过 10 分钟,顾客就要离去. 某顾客在一个月内要去银行 5 次,则他至少有一次离去的概率为

(A) $5(1-e^{-2})$. (B) $(1-e^{-2})/5$. (C) $(1-e^{-2})^5$.

(D) $1-(1-e^{-2})^5$. (E) 以上结论都不正确.

解 离去的概率为 $p=P(X>10)=e^{-\lambda\cdot 10}=e^{-2}$。

设离去的次数为 Y,则 $Y\sim B(5,e^{-2})$,因而

$$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-C_5^0(e^{-2})^0(1-e^{-2})^5=1-(e^{-2})^5.$$

仅(D)入选.

题型四 计算抽样检验中的概率问题

有放回地抽取中取得次品的件数的概率可按式(4.1.4.1)计算。从数量很大的产品中,每次抽取一件,无论是放回或不放回,都可以看作有放回地的重复抽取,也可以用式(4.1.4.1)计算概率。

例 8 设 N 件产品中含有 M 件次品,从中一个接一个有放回地取 n 次,问其中恰有 $k(k\leqslant n)$件次品的概率有多大?

解 每取一次可看作进行了一次贝努利试验. 由于取后是放回的,各次取得的结果是相互独立的. 因此取 n 次相当于做了 n 重贝努利试验. 若记 $X=n$ 次有放回抽样时取出的次品件数,则 $X\sim B(n,M/N)$,故所求概率为

$$P(X=k)=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

例 9[2003 年Ⅰ32] 两只一模一样的铁罐里都装有大量的红球和黑球,其中一罐(取名"甲罐")内的红球数与黑球数之比为 2∶1,另一罐(取名"乙罐")内的黑球数与红球数之比为 2∶1,今任取一罐并从中依次取出 50 只球,查得其中有 30 只红球和 20 只黑球,则该罐为"甲罐"的概率是该罐为"乙罐"的概率的

(A) 154 倍. (B) 254 倍. (C) 438 倍.

(D) 798 倍. (E) 1024 倍.

解 题中假设都有大量红球和黑球,其意是可以认为从任意一罐中先后往外取球,将不改变罐中两种颜色的比例。因此每一球可看作一次试验。A 表示球取自"甲罐"的事件,B 表示球取自"乙罐"的事件,C 表示取到 30 个红球 20 个黑球的事件.

由题设知
$$P(C|A)=C_{50}^{30}\left(\frac{2}{3}\right)^{30}\left(\frac{1}{3}\right)^{20},$$
$$P(C|B)=C_{50}^{30}\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\left(\frac{2}{3}\right)^{20},$$
$$P(A)=P(B)=1/2.$$

又
$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C)},\quad P(B|C)=\frac{P(B)P(C|B)}{P(C)}.$$

所求概率比为
$$\frac{P(A|C)}{P(B|C)}=\frac{P(A)P(C|A)}{P(B)P(C|B)}=\frac{P(C|A)}{P(C|B)}=\frac{C_{50}^{30}(2/3)^{30}(1/3)^{20}}{C_{50}^{30}(1/3)^{20}(2/3)^{20}}$$
$$=2^{10}=1024.$$ 仅(E)入选.

习 题 4.1.4

(一) 问题求解

1. 进行 3 次独立重复试验,假设至少成功 1 次的概率恰是成功 1 次概率的 2 倍,则 3 次全失败的概率为

(A) $(8+3\sqrt{21}/125)$。 (B) $(3\sqrt{21}-8)/125$。

(C) $(4+3\sqrt{21})/125$。 (D) $(3\sqrt{21}-2)/125$。

(E) 以上结论都不正确。

2. 设每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$,则在 4 次重复试验中至少成功一次的概率为

(A) $p(1-p)^3$. (B) $C_4^1p(1-p)^3$. (C) $p^3(1-p)$.

(D) $1-(1-p)^4$. (E) 以上结论都不正确.

3. 每次实验成功的概率为 $p(0<p<1)$,则在 3 次重复试验中至多失败 2 次的概率为

(A) $(1-p)^3$. (B) $1-(1-p)^3$. (C) $p^3+p^2(1-p)+p(1-p)^2$。

(D) $3(1-p)^2$。 (E) 以上结论都不正确。

4. 每次试验成功概率为 $p(0<p<1)$，则在 3 次重复试验中至少失败 1 次的概率为

(A) $(1-p)^3$. (B) $1-p^3$. (C) $3(1-p)$.

(D) $(1-p)^3+p(1-p)^2+p^2(1-p)$. (E) $3p^2(1-p)$.

5. 10 个产品中只有 1 个是次品，有放回地每次取一件，直到第 n 次才取得 k $(k\leqslant n)$次次品的概率等于

(A) $(0.1)^k\times(0.9)^{n-k}$. (B) $C_n^k(0.1)^k\times(0.9)^{n-k}$.

(C) $C_{n-1}^{k-1}(0.1)^k\times(0.9)^{n-k}$. (D) $C_{n-1}^{k-1}(0.1)^{k-1}\times(0.9)^{n-k}$.

(E) $C_n^{k-1}(0.1)^k\times(0.9)^{n-k}$.

(二) 条件充分性判断

1. 进行 4 次独立重复试验，可以确定 1 次试验的成功率 p 的值.

(1) 已知试验 4 次都成功的概率与试验 4 次恰好成功 3 次的概率相等；

(2) 已知 4 次试验恰好成功 1 次的概率是试验 4 次都失败的概率的 16 倍.

2. 一射击选手连续向目标射击 4 次，可确定该选手一次射击的命中率为 2/3.

(1) 至少命中 1 次的概率为 80/81； (2) 4 次全未命中的概率为 1/81.

3. 设一个试验只有两个结果，即成功与失败，且每次成功的概率为 p $(0<p<1)$，各次试验独立，随机变量 X 的分布律为

$$P(X=n)=C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k},\quad n\geqslant k.$$

(1) X 表示获得第 k 次成功时的试验次数；

(2) X 表示获得第 $k-1$ 次成功时的试验次数.

4. 在试验取得第 2 次成功之前已经失败 2 次的概率 $P(B)=27/256$.

(1) 各次试验相互独立且每次试验的成功率都是 p $(0<p<1)$；

(2) 已知第一次试验成功之前已经失败 1 次的概率是 3/16.

5. 在独立重复试验中，需进行多少次试验，使至少成功一次的概率不小于 0.9，则可确定试验次数 $n\geqslant 4$.

(1) 若每次试验成功的概率为 0.5；

(2) 若每次试验成功的概率为不小于 0.5.

(三) 解答题

1. 甲、乙两选手用五盘三胜制进行围棋决赛. 按实力，甲在每局的胜率为 0.6，求甲在决赛中取胜的概率.

2.[1998 年Ⅱ19] 掷一枚不均匀的硬币，正面朝上的概率为 2/3，抛掷 4 次，求正面朝上 3 次的概率.

3. 同样掷 6 枚骰子，求：(1)出现了 3 个偶数点的概率；(2)出现偶数点个数多于奇数点个数的概率.

4. 某厂生产的 40 瓦灯泡使用寿命大于 500 小时的概率为 0.4，一工作室用了 8 个这种灯泡，求 500 小时后仍有不少于 3 个灯泡能正常使用的概率.

4.2 随机变量

（一）考试内容

随机变量的概念，离散型随机变量的概率函数，连续型随机变量的概率密度，随机变量的分布函数，随机变量的数学期望、方差和标准差，数学期望和分差的性质，二项分布，正态分布.

（二）考试要求

理解离散型随机变量及其概率分布的概念，理解连续型随机变量及其概率密度的概念，了解随机变量独立性的概念，会应用有关性质计算随机变量落入区间内的概率；理解期望和分差的定义，会计算离散型随机变量或连续型随机变量的期望和方差；知道常用分布(二项分布、正态分布)的分布律或概率密度，会利用它们计算有关概率及其数学期望和方差.

4.2.1 随机变量及其分布

1. 随机变量的概念

在一些随机试验中，试验结果本身就是由数量来表示的，例如，掷一枚骰子观察其出现的点数，可能的结果可分别由 1，2，3，4，5，6 来表示；在另一些随机试验中根据问题的需要对每一个可能结果指定一个数量与其对应，这样对每一种可能结果有惟一实数与之对应. 这种对应关系实际上在样本空间

Ω 上定义了一个函数，通常记作 $X=X(\omega)$，$\omega\in\Omega$.

定义 4.2.1.1 设一个随机试验的样本空间为 Ω，如果其每一个样本点（试验结果）$\omega\in\Omega$，都有惟一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，则称 $X(\omega)$ 为一个随机变量，简记作 X.

一般随机变量可用 $X,Y,\cdots$ 或 $\xi,\eta,\cdots$ 表示.

由于随机变量 X 的取值随试验的结果而定，而试验的各个结果的出现具有一定的概率，因此 X 取各个值也有一定的概率.

2. 随机变量的分布函数

1）分布函数的概念

设 X 是一个随机变量，对任意实数 x，记

$$F(x)=P(X\leqslant x),$$

称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数。显然 $F(x)$ 是一个普通的函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,1]$。上述分布函数 $F(x)$ 的定义及下述分布函数的性质对于任意类型（包括离散型、连续型）的随机变量都是适用的.

2）分布函数的性质

1° $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，$x(-\infty,+\infty)$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1.$$

2° $F(x)$ 是单调非减函数，即若 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

3° $F(x)$ 是右连续的，而对任一实数 a，有

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=F(a),\quad \text{即}\quad F(a+0)=f(a).$$

4° $P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)$，即随机变量 X 落入区间 $(a,b]$ 上的概率为 $F(b)-F(a)$.

5° 事件 $\{X=a\}$ 的概率为

$$P(X=a)=F(a)-F(a-0),\quad \text{其中}\quad F(a-0)=\lim_{x\to a^-}F(x).$$

值得注意的是下述命题成立：

命题 4.2.1.1 一函数 $F(x)$ 为某一随机变量的分布函数当且仅当上述性质 1°，2°，3° 成立.

3. 一维离散型随机变量及其分布

（1）如果随机变量 X 只取有限个或可列个可能的值 $x_1,x_2,\cdots$，且有 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots$，则称 X 为离散型随机变量，称

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

为离散型随机变量 X 的概率函数或概率分布或分布律.

一般离散型随机变量 X 的概率函数可列表表示为

$$\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

其中 p_k $(k=1,2,\cdots)$,必须满足以下性质:

1° $p_k \geqslant 0, k=1,2,\cdots$; $\quad 2^\circ$ $\sum\limits_k p_k = 1$.

反之,凡满足上述性质 1° 与 2° 的 $p_k, k=1,2,\cdots$,一定可以是某个离散型随机变量的概率函数. 因而得到下述命题。

命题 4.2.1.2 $P(X=x_k)=p_k$ 成为随机变量 X 的概率函数(即分布列)的充分必要条件是 p_k 满足以下两个条件:

(1) $p_k \geqslant 0$; $\quad$ (2) $\sum\limits_k p_k = 1$.

(2) **离散型随机变量的分布函数** 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$p_k = P(X=x_k), \quad k=1,2,\cdots,$$

则 X 的分布函数为

$$F(x) = \sum_{k,x_k \leqslant x} P(X=x_k) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k. \tag{4.2.1.1}$$

离散型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是一个阶跃函数,在每个 x_k 处为 $F(x)$ 的跳跃点,其跳跃高度是 p_k. 显然给定分布律可以确定 $F(x)$. 由 $F(x)$ 也可以惟一地确定 x_k 及 p_k 即确定其分布律.

$F(x)$ 在点 $x=x_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 处间断,且在这些间断点上右连续. 因而 $F(x)$ 的图形是一条在随机变量的一切可能取值 x_i $(i=1,2,\cdots)$ 处间断的右连续的曲线,且在间断点 x_i 处 $F(x)$ 的图形有一个跳跃,其跳跃高度就是随机变量取该值 x_i 的概率 p_i,且

$$p_i = P(X=x_i) = F(x_i) - F(x_i - 0).$$

(3) **离散型随机变量的概率函数** $\{p_i, i=1,2,\cdots\}$ **与其分布函数** $F(x)$ **的关系除式**(4.2.1.1)**以外,还有**

1° $p_i = F(X=x_i) = F(x_i) - F(x_i-0), x_1 < x_2 < \cdots,$ $\tag{4.2.1.2}$

2° $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \sum\limits_{i; a < x_i \leqslant b} p_i.$ $\tag{4.2.1.3}$

4. 一维连续型随机变量及其分布

1) 连续型随机变量的概念

设 X 是一个随机变量,对于 X 的分布函数 $F(x)$,如果存在一个非负可积函数 $f(x)$,使得对于任何实数 x 都有

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\qquad(4.2.1.4)$$

则称 X 是连续型随机变量，$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度或分布密度或密度，记作 $X\sim f(x)$.

2) 连续型随机变量 X 的分布的性质

命题 4.2.1.3 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则

(1) $f(x)\geqslant 0,-\infty<x<+\infty$；　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

反之，凡满足命题 4.2.1.3 中(1)和(2)的函数 $f(x)$ 一定可以是某个连续型随机变量的概率密度函数.

连续型随机变量 X 的分布还有下述性质：

1° 如果 $f(x)$ 在点 x 处连续，则 $F'(x)=f(x)$.

2° 分布函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

3° 对任意实数 a,b $(a<b)$，有

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

4° $P(X=x)=0$，其中 x 为任一给定值.

由上述性质 4°易知，对连续型随机变量 X 取任一给定值的概率为零，即 $P(X=x)=0$，从而对任意实数 a,b 有

$$P(X\leqslant b)=P(X<b),$$

$$P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)。$$

上述的概率性质与离散型随机变量不大相同，读者应当特别注意.

由式(4.3.1.4)易知，连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 实际上是曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,x]$ 上的曲边梯形的面积(见图 4.2.1.1(a))，而由连续型随机变量的概率密度性质(2)知曲线 $f(x)$ 与 x 之间的面积等于 1(见图 4.2.1.1(b))．X 落在区间 $(x_1,x_2]$ 上的概率 $P(x_1<X\leqslant x_2)$ 等于曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(x_1,x_2]$ 上的曲边梯形的面积(见图 4.2.1.1(c)).

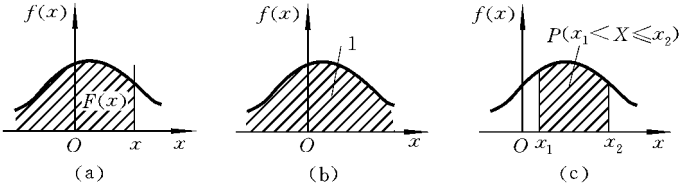


图 4.2.1.1

记住 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的关系及其几何意义，对今后的解题会有很大帮助.

5. 随机变量的独立性

设 X,Y 是两个随机变量，如果对于任意的 $a<b,c<d$，事件 $\{a<X<b\}$ 与 $\{c<Y<d\}$ 相互独立，则称随机变量 X 与 Y 是相互独立的.

两个随机变量相互独立的概念可推广到多个随机变量的情况：如果对于任意 $a_i<b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有

$$P(a_1<X_1<b_1,a_2<X_2<b_2,\cdots,a_n<X_n<b_n)$$
$$=P(a_1<X_1<b_1)P(a_2<X_2<b_2)\cdots P(a_n<X_n<b_n),$$

则称这 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的.

题型一　求离散型随机变量的分布

类型(一)　求离散型随机变量的分布律。

法一　用其分布律的定义求之.

为此首先要设出随机变量 X(如没有给出)，分析 X 的所有可能取值，然后再求出 X 取各个值的概率 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots$. 为求 p_i 需利用古典概型中的各种方法，因而求离散型随机变量的分布律是本节的难点之一.

例 1　如果在 500 元人民币(面值均为 100 元)中混有两张假币，无放回地每次取一张进行检查，直到取到真币为止，则抽取次数 X 的分布律为

(A)

X	0	1	2
p	3/5	3/10	1/10

(B)

X	1	2	3
p	3/5	3/10	1/10

(C)

X	1	2	3
p	3/10	2/5	3/10

(D)

X	1	2	3
p	2/5	2/5	1/5

(E)

X	0	1	2	3
p	3/10	1/5	2/5	1/10

解　因只有两张假币，第三次抽取必取得真币，故 X 的可能取值为 1,2,3，所以排除(A)和(E).

设　　$A_i=\{$第 i 次取到真币$\}$，$i=1,2,3$，

则

$$P(x=1)=P(A_1)=3/5,$$

$$P(x=2)=P(\overline{A}_1A_2)=(2/5)\times(3/4)=3/10,$$

$$P(x=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=(2/5)\times(1/4)\times(3/3)=1/10.$$ 仅(B)入选.

例 2　一个袋中有 5 只球，编号为 1,2,3,4,5，在其中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码，试求 X 的概率分布.

解　X 的可能取值为 3,4,5.

事件$\{X=3\}$表示取出的3只球号码分别为1,2,3,只有这一种情况,所以

$$P(X=3)=1/C_5^3=1/10.$$

事件$\{X=4\}$表示3只球中最大号码为4,另外两个号码可在1,2,3中任取2个,共有C_3^2种取法,故

$$P(X=4)=C_3^2/C_5^3=3/10.$$

事件$\{X=5\}$表示3只球中最大号码为5,另外两个号码可在1,2,3,4中任取2个共有C_4^2种取法,所以

$$P(X=5)=C_4^2/C_5^3=3/5 \quad \text{或} \quad P(X=5)=1-P(X=3)-P(X=4)=3/5.$$

于是X的概率分布律为

X	3	4	5
p	1/10	3/10	3/5

例3 设相互独立的两个随机变量X,Y具有相同的分布律,即

X	-1	0	1
p	1/4	1/2	1/4

求随机变量$Z=\max(X,Y)$的分布律.

解 Z的可能取值为$-1,0,1$,且由X,Y相互独立,有

$$\begin{aligned}P(Z=-1)&=P(X=-1,Y=-1)=P(X=-1)P(Y=-1)\\&=1/4\times 1/4=1/16,\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}P(Z=0)&=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=-1)\\&\quad+P(X=-1,Y=0)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Z=1)&=P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)\\&\quad+P(X=-1,Y=1)+P(X=0,Y=1)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{16}.\end{aligned}$$

Z的分布律为

Z	-1	0	1
p	1/16	1/2	7/16

法二 利用随机变量分布的现成公式求之。

例4 100件产品中有5件次品,从中随机取20件,求抽到次品数X的

分布律.

解 X 服从超几何分布,其取值为 0,1,2,3,4,5,由式(4.1.2.3)有

$$P(X=k)=C_5^kC_{95}^{20-k}/C_{100}^{20},\quad k=0,1,2,3,4,5.$$

例 5 一运动员定点投篮命中率为 0.8,现连续投 30 次,试求投进球数 X 的分布律.

解 显然 X 服从二项分布,即 $X\sim B(30,0.8)$,其分布律为

$$P(X=k)=C_{10}^k(0.8)^k0.2^{30-k},\quad k=0,1,\cdots,30.$$

法三 利用分布函数法求之。

已知离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 时,$F(x)$ 的各分段点(间断点) x_k 的取值就是 X 的可能取值,而 X 取这些值的概率,可由式(4.2.1.2)求出,从而可求出 X 的分布律.

例 6 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & 3\leqslant x<+\infty,\end{cases}$$

求 X 的概率分布.

解 显然 $F(x)$ 的间断点即 X 的可能取值为 $x_1=-1,x_2=1,x_3=3$,又由式(4.2.1.2)得到

$$p_1=P(X=-1)=F(-1)-F(-1-0)=0.4-0=0.4,$$
$$p_2=P(X=1)=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4,$$
$$p_3=P(X=3)=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2,$$

故 X 的概率分布为

X	-1	1	3
p	0.4	0.4	0.2

法四 利用解方程组法求之。

运用分布律的两条基本性质:$p_k\geqslant 0$,$\sum p_k=1$,建立随机变量 X 的取值概率 $p_k=P(X=x_k)$ 所满足的关系式,或列出 X 的可能取值 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$ 所满足的方程组. 解这些方程求出 p_k 或 x_k,即可求出分布律.

例 7 若 ξ 是离散型随机变量,$P(\xi=x_1)=3/5$,$P(\xi=x_2)=2/5$,且 $x_1<x_2$,又已知 $E(\xi)=7/5$,$D(\xi)=6/25$,求 ξ 的分布律.

解 为求 ξ 的分布律,必须求出 x_1,x_2. 由

ξ	x_1	x_2
p	3/5	2/5，

和

ξ^2	x_1^2	x_2^2
p	3/5	2/5

可知　$E(\xi)=(3/5)x_1+(2/5)x_2=7/5$，$E(\xi^2)=(3/5)x_1^2+(2/5)x_2^2$，

故　$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=[(3/5)x_1^2+(2/5)x_2^2]-(7/5)^2=6/25$.

于是有
$$\begin{cases}3x_1+2x_2=7,\\3x_1^2+2x_2^2=11,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x_1=9/5,\\x_2=4/5.\end{cases}$$

因 $x_2>x_1$，故舍去后一组解值，得到 $x_1=1$，$x_2=2$，于是有

ξ	1	2
p	3/5	2/5

类型(二)　求离散型随机变量的分布函数。

如果已知离散型随机变量 X 的分布律 $P(X=x_k)=p_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 可由下述方法求得 X 的分布函数 $F(x)$：

1° 先由 X 的可能取值 x_k 将 $(-\infty,+\infty)$ 分划为若干个子区间；

2° 由累加的方法依次分别求出 $F(x)$ 在各子区间上的取值，即可得到所求的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ p_1, & x_1\leqslant x<x_2,\\ p_1+p_2, & x_2\leqslant x<x_3,\\ \cdots & \cdots\\ p_1+p_2+\cdots+p_k, & x_k\leqslant x<x_{k+1},\\ \cdots & \cdots\\ 1, & x\geqslant x_n,\end{cases}$$

即
$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

例 8　设离散型随机变量 X 只取 1,2,3 共三个值，且取各值的概率与其取值成反比，求 X 的分布函数.

解　为求 X 的分布函数先求 X 的分布律.

由题设有 $P(X=i)=\lambda/i$，$i=1,2,3$. 根据 $\sum_{i=1}^{3}p_i=1$ 得到 $\lambda+\lambda/2+\lambda/3=1$。解得 $\lambda=6/11$. 于是

$p_1=P(X=1)=6/11$，　$p_2=P(X=2)=3/11$，　$p_3=P(X=3)=2/11$。

因而有
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ p_1=6/11, & 1\leqslant x<2,\\ p_1+p_2=9/11, & 2\leqslant x<3,\\ p_1+p_2+p_3=1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

例 9 设某一设备由三大部件构成，设备运转时各部件需调整的概率分别为 0.1，0.2，0.3. 若各部件的状态相互独立，求同时需调整的部件数 X 的分布函数.

解 显然 X 为离散型随机变量，为求 X 的分布函数，需先求出 X 的分布律，即求出 X 的所有可能取值及其相应概率.

易见，X 只取 0，1，2，3 各值. 为计算 $P(X=i)(i=0,1,2,3)$，设事件 $A_i=\{$第 i 个部件需调整$\}(i=1,2,3)$. 依题意，A_1,A_2,A_3 相互独立，且

$$P(A_1)=0.1,\quad P(A_2)=0.2,\quad P(A_3)=0.3,$$

则
$$\begin{aligned}P(X=0)&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=0.9\times 0.8\times 0.7=0.504,\\P(X=3)&=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\&=0.1\times 0.2\times 0.3=0.006,\\P(X=1)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1\overline{A}_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=0.1\times 0.8\times 0.7+0.9\times 0.2\times 0.7+0.9\times 0.8\times 0.3=0.398,\\P(X=2)&=1-P(X=1)-P(X=3)-P(X=0)=0.092,\end{aligned}$$

故
$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.504, & 0\leqslant x<1,\\ 0.902, & 1\leqslant x<2,\\ 0.994, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3。\end{cases}$$

题型二　求连续型随机变量的分布和有关概率

类型(一)　已知概率密度函数，求其分布函数或(和)有关概率。已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$，可按式(4.2.1.4)求出其分布函数.

下按下述诸式求出随机变量落在这间内的概率

$$P(X\leqslant b)=\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x,\tag{4.2.1.5}$$

$$\begin{aligned}P(a<X\leqslant b)&=P(a\leqslant X<b)=P(a\leqslant X\leqslant b)\\&=P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{4.2.1.6}$$

求出 X 的分布函数 $F(x)$ 后，还可按下式求出有关概率

$$P(X\leqslant b)=F(b),\tag{4.2.1.7}$$

$$P(a<X\leqslant b)=F(a\leqslant X<b)=P(a\leqslant X\leqslant b),$$

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).\tag{4.2.1.8}$$

例 10[2002 年 Ⅱ 33] 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1/2, & 0<x\leqslant 1,\\ 1/(2x^2), & x>1.\end{cases}$$

求 X 的分布函数，并求 $P(1/4\leqslant X<2)$.

解 当 $x\leqslant 0$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$；

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=0+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x;$$

当 $x>1$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{2t^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_{1}^{x}\mathrm{d}\,\frac{1}{t}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{t}\Big|_{1}^{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-\frac{1}{2x}。$$

故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x/2, & 0<x\leqslant 1,\\ 1-1/(2x), & x>1.\end{cases}$$

求 $P(1/4\leqslant X<2)$ 可用式(4.2.1.8)或式(4.2.1.6)求之，即用 X 的分布函数，密度函数分别求之。

$$P(1/4\leqslant X<2)=P(X\leqslant 2)-P(X\leqslant 1/4)+P(X=1/4)-P(X=2)$$

$$=F(2)-F(1/4)+0+0=F(2)-F(1/4)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2\times 2}\right)-\frac{1/4}{2}=\frac{5}{8},$$

或

$$P(1/4\leqslant X<2)=\int_{1/4}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1/4}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\Big|_{1}^{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}.$$

例 11[2002 年 Ⅱ 25] 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} bx(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $P(3X^2+2X-1<0)=$_____.

解 抛物线 $y=3x^2+2x-1$ 是开口向上的抛物线。由

$$3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)=0,$$

易求得它与 x 轴的两个交点为 $x_1=-1, x_2=1/3$. 因而 $y=3x^2+2x-1<0$ 与 $-1\leqslant x\leqslant 1/3$ 等价，故

$$P(3X^2+2X-1<0)=P(-1\leqslant X\leqslant 1/3),$$

因而
$$\begin{aligned} &P(3X^2+2X-1<0)\\ &=P(-1\leqslant X\leqslant 1/3)=\int_{-1}^{1/3} f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1/3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1/3} 6x(1-x)\mathrm{d}x\\ &=6\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{3}}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{3}}\right)=6\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{3\times 27}\right)=\frac{9-2}{27}=\frac{7}{27}.\end{aligned}$$

例 12[2004 年 Ⅱ 12] 某小城市每天的用电量不超过 1000 万千瓦·时，以 X 表示每天的耗电率(实际用电量除以 1000 万千瓦·时)，它具有密度函数 $f(x)=12x(1-x)^2$ $(0<x<1)$，若每天供电量为 900 万千瓦·时，则供电量不能满足需要的概率是

(A) 0.0037. (B) 0.0039. (C) 0.0041.

(D) 0.0045. (E) 0.0049.

解 因该市每天耗电量为 $1000X$(万千瓦·时)，故所求概率为

$$\begin{aligned} P(1000X>900)&=P(X>9/10)=1-P(X\leqslant 9/10)=1-\int_0^{0.9}12x(1-x)^2\mathrm{d}x\\ &=1-12\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{0.9}\\ &=1-12\left(\frac{6x^2}{12}-\frac{8x^3}{12}+\frac{3x^4}{12}\right)\Big|_0^{0.9}\\ &=1-x^2(6-8x+3x^2)\Big|_0^{0.9}=1-0.81(6-7.2+2.43)\\ &=1-0.81\times 1.23=1-0.9963=0.0037.\end{aligned}$$

仅(A)入选.

例 13 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，求 X 的分布函数 $F(x)$；$P(|X|\leqslant 1)$；$P(X\leqslant 0\mid |X|\leqslant 1)$.

解 当 $x<0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}/2=\mathrm{e}^x/2$，由式(4.2.1.4)得到

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x;$$

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}/2=\mathrm{e}^{-x}/2$.

故 $F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}=1-\mathrm{e}^{-x}/2$，

于是 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}/2, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}/2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$P(|X|\leqslant 1)=P(-1\leqslant X\leqslant 1)=P(-1<X\leqslant 1)=F(1)-F(-1)=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

$$P(X\leqslant 0\mid |X|\leqslant 1)=\frac{P(X\leqslant 0,|X|\leqslant 1)}{P(|X|\leqslant 1)}=\frac{P(-1\leqslant X\leqslant 0)}{P(|X|\leqslant 1)}$$

$$=\frac{F(0)-F(-1)}{P(|X|\leqslant 1)}=\frac{1/2-\mathrm{e}^{-1}/2}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{1}{2}.$$

例 14 设随机变量 X 具有关于 y 轴对称的概率密度 $p_X(x)$，即

$$p_X(-x)=p_X(x),$$

其分布函数为 $F(x)$，试证明对任意 $a>0$，有

(1) $F(-a)=1-F(a)=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}p_X(x)\,\mathrm{d}x$；

(2) $P(|X|<a)=2F(a)-1$；

(3) $P(|X|>a)=2[1-F(a)]$.

证明一 如图 4.2.1.2 所示，S_1，S_2，S_3，S_4 分别表示对应区间上曲线 $p_X(x)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积，因密度曲线 $p_X(x)$ 关于 y 轴对称，故 $S_1=S_4$，$S_2=S_3$，且

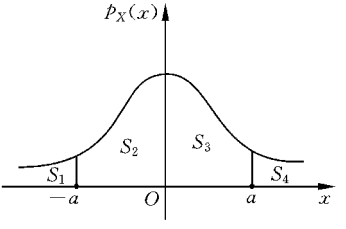


图 4.2.1.2

$$S_1+S_2=\int_{-\infty}^{0}p_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}p_X(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$S_3=S_2=\int_{0}^{a}p_X(x)\,\mathrm{d}x,\quad S_1+S_2+S_3=F(a),$$

$$S_1=S_4,\quad S_1+S_2+S_3+S_4=1.$$

(1) 因 $p_X(x)$ 关于 y 轴对称，故为偶函数，$S_1=S_4$，而

$$F(a)=S_1+S_2+S_3,\quad F(-a)=S_1,$$

故 $$F(a)+F(-a)=S_1+S_2+S_3+S_1=S_1+S_2+S_3+S_4=1,$$

即 $$F(-a)=1-F(a).$$

又 $$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}p_X(x)\,\mathrm{d}x=S_1=(S_1+S_2)-S_2$$

$$=\frac{1}{2}-S_3=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}p_X(x)\,\mathrm{d}x。$$

(2) $P(|X|<a)=P(-a<X<a)=S_2+S_3=2S_3$

$=2[S_1+S_2+S_3-(S_1+S_2)]$

$=2[F(a)-1/2]=2F(a)-1.$

(3) $P(|X|>a)=P(X>a)+P(X<-a)=S_4+S_1$

$=2S_1=2F(-a)=2[1-F(a)].$

证明二 (1) **先证** $F(a)+F(-a)=1$. **由式**(4.2.1.4)**得到**

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a}p_X(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=-u}-\int_{+\infty}^{-a}p_X(-u)\mathrm{d}u=\int_{+\infty}^{-a}p_X(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-a}^{+\infty}p_X(u)\mathrm{d}u,$$

故 $F(-a)+F(a)=\int_{-\infty}^{-a}p_X(u)\mathrm{d}u+\int_{-a}^{+\infty}p_X(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(u)\mathrm{d}u=1.$

下面证明 $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a p_X(x)\mathrm{d}x$. **事实上,有**

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}p_X(x)\mathrm{d}x\xlongequal{t=-x}-\int_{\infty}^{a}p_X(t)\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}p_X(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}p_X(x)\mathrm{d}x-\int_0^a p_X(x)\mathrm{d}x(a>0)=\frac{1}{2}-\int_0^a p_X(x)\mathrm{d}x$$

或 $F(-a)=1-F(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{a}p_X(x)\mathrm{d}x$

$=\int_{-\infty}^{0}p_X(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}p_X(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}p_X(x)\mathrm{d}x-\int_0^a p_X(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}-\int_0^a p_X(x)\mathrm{d}x$。

(2) $P(|X|<a)=P(-a<X<a)=F(a)-F(-a)$

$=F(a)-[1-F(a)]=2F(a)-1$。

(3) $P(|X|>a)=1-P(|X|\leqslant a)$

$=1-[2F(a)-1]=2[1-F(a)].$

类型(二) 已知随机变量的分布函数,求其密度函数或(和)有关概率.

已知随机变量 X **的分布函数** $F(x)$**根据下述命题可求密度函数.**

命题 4.2.1.4 若 $f(x)$**在点** x **处连续,则** $f(x)=F'(x)$.

利用分布函数及式(4.2.1.8)**可求得有关概率.**

求出其密度函数后也可利用式(4.2.1.6)**或式**(4.2.1.5)**求出有关概率**.

例 15 设随机变量 X **的分布函数为**

$$F(x)=\begin{cases}1-(1+x)\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

求:(1) X **的密度函数**;(2) $P(X\leqslant 1),P(X>2),P(1<X<2)$.

解 由 $f(x)=F'(x)$ 得到

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0. \end{cases}$$

(2) $P(X\leqslant 1)=F(1)=1-(1+1)e^{-1}=1-2e^{-1}$,

$P(X>2)=1-P(X\leqslant 2)=1-F(2)=1-[1-3e^{-2}]=3e^{-2}$,

$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=(1-3e^{-2})-(1-2e^{-1})=2e^{-1}-3e^{-2}$.

例 16[2003 年 Ⅱ 17]（条件充分性判断） $P(x_1\leqslant X\leqslant x_2)\geqslant 0.55$.

(1) $P(X\leqslant x_2)\geqslant 0.75$, $P(X\geqslant x_1)\geqslant 0.8$;

(2) $P(X\leqslant x_2)\geqslant 0.65$, $P(X\geqslant x_1)\geqslant 0.9$.

解 $P(x_1\leqslant X\leqslant x_2)=P(X\leqslant x_2)-P(X<x_1)$

$=P(X\leqslant x_2)-[1-P(X\geqslant x_1)]$

$=P(X\leqslant x_2)+P(X\geqslant x_1)-1$

$\geqslant 0.75+0.8-1=0.55$.

条件(1)充分。当条件(2)成立时，有

$$P(x_1\leqslant X\leqslant x_2)=P(X\leqslant x_2)+P(X\geqslant x_2)-1$$
$$\geqslant 0.65+0.9-1=0.55.$$

条件(2)也充分。仅 D 入选.

题型三　利用分布确定分布中的未知参数

类型(一)　确定分布律中含有的未知参数.

常利用离散型随机变量的分布律的性质

$$\sum_i p_i=1,\quad 0\leqslant p_i\leqslant 1,$$

建立以所求参数为未知量的方程或方程组确定之.

例 17[2002 年 Ⅱ 20]　若随机变量 X 的分布为 $P(X=k)=a^k$ $(k=2,4,6,\cdots)$，则 a 等于

(A) $1/2$.　　(B) $-1/2$.　　(C) $\pm 1/2$.　　(D) $\pm 1/\sqrt{2}$.

解　X 为离散型随机变量，应利用 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(X=2i)=1$，求出 a. 由

$$1=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=2i)=\sum_{i=1}^{\infty}a^{2i}=\sum_{i=1}^{\infty}(a^2)^i=a^2+(a^2)^2+(a^2)^3+\cdots$$
$$=a^2[1+a^2+(a^2)^2+(a^2)^3+\cdots]=a^2\,\frac{1}{1-a^2}\quad(|a^2|<1)$$

得到 $1-a^2=a^2$，即 $a=\pm 1/\sqrt{2}$。仅(D)入选.

类型(二)　确定离散型随机变量的分布函数中的未知参数.

常利用分布函数的性质及式(4.2.1.2)求之.

例 18 设离散随机变量 X 的分布数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a, & -1\leqslant x<1,\\ 2/3-a, & 1\leqslant x<2,\\ a+b, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

且 $P(X=2)=1/2$,试确定常数 a 和 b,并求 X 的分布律.

解 利用 $P(X=x)=F(x)-F(x-0)$,$P(X=2)=1/2$,

得到
$$1/2=F(2)-F(2-0)=a+b-(2/3-a), \qquad ①$$

又
$$\lim_{x\to+\infty} F(X)=1,$$

故
$$a+b=1, \qquad ②$$

解式①与式②得
$$a=1/6,\quad b=5/6.$$

因而
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/6, & -1\leqslant x<1,\\ 1/2, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2。\end{cases}$$

再由分布律与分布函数的关系即知 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	$1/6$	$1/3$	$1/2$

类型(三) 求连续型随机变量分布中的未知数参数。

根据题设条件建立以所求参数为未知量的方程或方程组求之.

法一 利用分布函数 $F(x)$ 及概率密度 $f(x)$ 的下述性质建立方程求之。

$$F(-\infty)=0,\quad F(+\infty)=1,\quad F(x)=F(x+0)=F(x-0),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1,\quad f(x)\geqslant 0.$$

例 19 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+B\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

求 A,B 的值和 X 的概率密度函数.

解 (1)因 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,故

$$\lim_{x\to 0^+} F(x)=\lim_{x\to 0^+}(A+B\mathrm{e}^{-2x})=A+B=F(0)=0,$$

又 $F(+\infty)=1$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(A+B\mathrm{e}^{-2x})=A=1$,

由 $A=1$ 可得 $B=-1$，即 $F(x)=1-\mathrm{e}^{-2x}$（$x>0$）。于是

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

法二　利用连续型随机变量的分布参数与分布的数字特征之间的关系式建立方程或利用数字特征与概率密度之间的定义关系求之。

$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$，　$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$，　$DX=E(X^2)-(EX)^2$.

例 20[2003 年Ⅰ 34]　**若随机变量 X 的密度函数为**

$$f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-bx, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且 $E(X)=1$，则

(A) $a=1,b=2$。　(B) $a=2,b=1$。　(C) $a=1,b=1$。

(D) $a=-1,b=2$。　(E) $a=1,b=-2$.

解　由密度函数的性质得到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1ax\mathrm{d}x+\int_1^2(2-bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a}{2}x^2\Big|_0^1+\Big(2x-\frac{b}{2}x^2\Big)\Big|_1^2=\frac{a}{2}+2-\frac{3b}{2},$$

即　$a-3b=-2$。　①

又由　$1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1ax^2\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-bx^2)\mathrm{d}x$

$$=\frac{a}{3}x^3\Big|_0^1+\Big(x^2-\frac{b}{3}x^3\Big)\Big|_1^2=\frac{a}{3}+3-\frac{7}{3}b,$$

即　$a-17b=16$。　②

联立式①、式②，解得 $b=1$，因而 $a=1$。仅(C)入选.

例 21　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$$

$E(X)=0.5$，$D(X)=0.15$，**则** $a+b+c=$

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 4.

解　依题意，有

$$0.5=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)=\int_0^1(ax^3+bx^2+cx)\mathrm{d}x=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2},$$

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=0.4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)=\int_0^1(ax^4+bx^3+cx^2)\mathrm{d}x$$

$$=a/5+b/4+c/3,$$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c。$$

由上述三个方程易求得 $a=12,b=-12,c=3$**,故** $a+b+c=3$**.仅**(D)**入选.**

法三　根据题设找出待求参数所满足的条件求之.

例 22　设连续型随机变量 X **的概率密度为**

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad \text{且}\quad P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$

求:(1) a,b **的值;** (2) **分布函数** $F(x)$**.**

解　(1) **依题意有**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+b=1,\qquad①$$

$$P(X\leqslant\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{a}{8}+\frac{b}{2}=\frac{1}{4},\qquad②$$

联立式①与式②,解得 $a=2,b=0$**.**

(2) **当** $x<0$ **时,因** $f(x)=0$**,故**

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0;$$

当 $0\leqslant x<1$ **时,**$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x 2t\mathrm{d}t=x^2$**;**

当 $x\geqslant 1$ **时,**$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^x 0\mathrm{d}t=1$。

故 X **的分布函数为**

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

例 23　设随机变量 X **的概率密度为**

$$f(x)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant\lambda,\\ 0, & x<\lambda\end{cases}\quad(\lambda>0,A\text{ 为常数}),$$

又 $p=P(\lambda<x<\lambda+a)\ (a>0)$**,则**

(A) p **的值与** a **无关,且随** λ **增大而增大.**

(B) p **的值与** a **无关,且随** λ **增大而减小.**

(C) p **的值与** λ **无关,且随** a **增大而增大.**

(D) p **的值与** λ **无关,且随** a **增大而减小.**

(E) **因** λ,a **的具体值未知,无法判断** p **取值的增减性.**

解　**由**$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$**,可求得** $A=\mathrm{e}^{\lambda}$**,所以**

$$P(\lambda<X<\lambda+a)=\mathrm{e}^{\lambda}\int_{\lambda}^{\lambda+a}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\lambda}(-\mathrm{e}^{-x})\Big|_{\lambda}^{\lambda+a}=1-\mathrm{e}^{-a},$$

此值与 λ **无关,且随** a **的增大而增大.仅**(C)**入选.**

事实上利用连续型随机变量落入某一区间的概率等于密度函数曲线在该这间上的曲边梯形面积即知 $P(\lambda<X<\lambda+a)$ 随 a 的增大而增大，而与 λ 的值无关．仅(C)入选．

题型四　判别随机变量的概率函数、分布函数、概率密度函数

类型(一)　判别随机变量的概率函数。

利用命题 4.2.1.2 **判别之．**

例 24(条件充分性判断)　离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\alpha\beta^k$，$k=1,2,\cdots$。

(1) $\alpha>0$；　　(2) $\beta=1/(\alpha+1)$。

解　当条件(1)成立即 $\alpha>0$ 时，无法判断 $P(X=k)=\alpha\beta^k>0$，因为不知道 β 是否大于零。条件(1)不充分．当条件(2)成立时，虽有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k=\frac{\alpha\beta}{1-\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\Big/\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)=1,$$

但无法判别 $P(X=k)$ 是否大于零，因而条件(2)单独也不充分。当条件(1)与条件(2)联合时，由于 $\alpha>0$ 保证 $p_k=P(X=k)>0$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(X=k)=1$，故离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\alpha\beta^k$，$k=1,2,\cdots$。仅 C 入选．

类型(二)　判别随机变量的概率密度函数。

常用命题 4.2.1.3 **判别之．**

例 25(条件充分性判断)　函数 $f(x)$ 是连续型随机变量 X 的概率密度。

(1) $f(x)\geqslant 0$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

解　由命题 4.2.1.3 知要使 $f(x)$ 成为 X 的密度函数，$f(x)$ 必须满足 $f(x)\geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即条件(1)与条件(2)单独不充分，但条件(1)与条件(2)联合起来充分。仅 C 入选．

例 26(条件充分性判断)　函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+b)}$，$-\infty<x<+\infty$，为连续型随机变量 x 的概率密度函数．

(1) $b=0$；　　(2) $a=\mathrm{e}^{b/2}/\sqrt{2\pi}$。

解　当条件(1)成立时，有 $f(x)=a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，且当 $a<0$ 时，$f(x)<0$，因而不满足 $f(x)\geqslant 0$ 的条件。条件(1)不充分。当条件(2)成立时，有

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+b)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty。$$

此为标准正态分布的概率密度函数。条件(2)充分。仅 B 入选.

类型(三)　判别随机变量的分布函数。

常用命题 4.2.1.1 **判别之.**

例 27 [2004 年Ⅰ13](**条件充分性判断**)　**分布函数** $F_1(x)$ **与** $F_2(x)$**的线性组合** $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$**是分布函数。**

(1) $a>0,b>0$,**且** $a+b=1$;　　(2) $0<a+b\leqslant 1$。

解　**当条件(1)成立时,有**

$$F(-\infty)=aF_1(-\infty)+bF_2(-\infty)=a\times 0+b\times 0=0,$$

$$F(+\infty)=aF_1(+\infty)+bF_2(+\infty)=a\times 1+b\times 1=a+b=1,$$

$$0\leqslant F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)\leqslant 1。$$

又对于任意实数 x_1,x_2,**当** $x_1<x_2$ **时有**

$$F_i(x_1)\leqslant F_i(x_2)\ (i=1,2),\quad \text{故}\quad F(x_1)\leqslant F(x_2).$$

又　$$F_i(x+0)=F_i(x)\ (i=1,2),\quad \text{故}\quad F(x+0)=F(x)。$$

即 $F(x)$**仍为单调不减、右连续函数,由命题** 4.2.1.1 **知** $F(x)$**是某一个随机变量的分布函数。条件(1)充分.**

当条件(2)成立时,由于

$$F(+\infty)=aF_1(+\infty)+bF_2(+\infty)=a\times 1+b\times 1=a+b\leqslant 1,$$

不能保证 $F(+\infty)=1$。**条件(2)不充分。仅 A 入选.**

例 28　**如下五个函数中,哪个不能作为随机变量** X **的分布函数?**

(A) $F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/4, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2。\end{cases}$　(B) $F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/3, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1。\end{cases}$

(C) $F_3(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-8x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0。\end{cases}$　(D) $F_4(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x\geqslant 0。\end{cases}$

(E) $F_5(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1。\end{cases}$

解　**作为随机变量** X **的分布函数,**$F(x)$**必须具有命题** 4.2.1.1 **中所述三条性质。反之,若** $F(x)$**不满足这三条性质,则不能作为随机变量** X **的分布函数.由于**

$$\lim_{x\to+\infty}F_4(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0\neq1,$$

故 $F_4(x)$不能作为 X 的分布函数. 仅(D)入选.

题型五　求随机变量函数的概率分布

类型(一)　若 X 是离散型随机变量,求其函数 $Y=g(X)$的概率分布.

求离散型随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$的概率分布常用同一表格法求之,其方法与步骤如下。

1° 将 X 的分布律 $p_i=P(X=x_i)$改写成下列形式:

p	p_1	p_2	…	p_i	…
X	x_1	x_2	…	x_i	…

2° 在上面的同一表格的下面列出 Y 的全部可能取值(其概率大于零的取值),即由 $x=x_i$,求出函数 $y_i=g(x_i)(i=1,2,\cdots)$,并将其写在上表的第三行中,即

p	p_1	p_2	…	p_i	…
X	x_1	x_2	…	x_i	…
$Y=g(X)$	$y_1=g(x_1)$	$y_2=g(x_2)$	…	$y_i=g(x_i)$	…

3° 由上表计算出 Y 取值概率,即求出 $P(Y=y_i)$。当 $y_i=g(x_i)$ $(i=1,2$ …)有相等的值时,应把相等的值所对应的概率相加,并把相等的 y_i 的值合并,即得 $Y=g(X)$的分布律.

例 29　设随机变量 X 具有以下分布律,求 $Y=e^{X^2}$ 的分布律。

X	-1	0	1	2
p	0.2	0.3	0.1	0.4

解　用同一表格法求之,为此将 X 的分布律改写成下列形式:

p	$p_1=0.2$	$p_2=0.3$	$p_3=0.1$	$p_4=0.4$
X	$x_1=-1$	$x_2=0$	$x_3=1$	$x_4=2$

在上面的同一表格的下面(即表中第 3 行处)列出 Y 的全部可能取值,即由 $x=x_i$ $(i=1,2,3,4)$算出 $y_i=e^{x_i^2}$,写在上表的第三行中,即

p	$p_1=0.2$	$p_2=0.3$	$p_3=0.1$	$p_4=0.4$

X	$x_1=1$	$x_2=0$	$x_3=1$	$x_4=2$
$Y=e^{x^2}$	$y_1=e$	$y_2=1$	$y_3=e$	$y_4=e^4$

由上表算出 Y 的取值的概率，因 $y_1=y_3=e$，应将 Y 所取相等值的对应概率相加，得到 $P(Y=y_1=e)=0.2+0.1=0.3$.

经过合并与整理得到 $Y=e^{X^2}$ 的分布律如下。

$Y=e^{X^2}$	e	1	e^4
p	0.3	0.3	0.4

类型(二)　若 X 是连续型随机变量，求其函数 $Y=g(X)$ 的概率分布函数。

一般用下述分布函数法求之.

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$，分布函数为 $F_X(x)$，随机变量 $Y=g(X)$，其中 $y=g(x)$ 是单调的可导函数，则 $Y=g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$ 可按下述方法求出：首先求出 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant g)=\int_{x\in D_Y}f_X(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $D_Y=\{x\mid g(x)\leqslant y\}$，然后再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)$。上述方法常称为分布函数法.

值得注意的是，在对分布函数 $F_Y(y)$ 求导时，有时要利用变限积分的求导公式，对可导函数 $\varphi(y)$，$\psi(y)$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x)\mathrm{d}x=f[\psi(y)]\psi'(y)-f[\varphi(y)]\varphi'(y)。\quad(4.2.1.9)$$

例 30　设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，求 $Y=1-e^{-2x}$ 的分布函数。

解　X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2X}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

设　$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(1-e^{-2X}\leqslant y)=P(e^{-2X}\geqslant 1-y)$。

当 $y\geqslant 1$ 时，$1-y\leqslant 0$，$\{e^{-2X}\geqslant 1-y\}$ 为必然事件，有

$$F_Y(y)=P(e^{-2X}\geqslant 1-y)=1;$$

当 $y<1$ 时，$1-y>0$，有

$$F_Y(y)=P(e^{-2X}\geqslant 1-y)=P\left[X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]$$

$$=F_X\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right],$$

所以，当 $-(1/2)\ln(1-y)\leqslant 0$，**即** $y\leqslant 0$ **时，**$F_Y(y)=0$.

当 $-(1/2)\ln(1-y)>0$，**即** $0<y<1$ **时，有**

$$F_Y(y)=1-e^{-2\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]}=y。$$

由此得到

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{若 } y\leqslant 0,\\ y, & \text{若 } 0<y<1,\\ 1, & \text{若 } y\geqslant 1,\end{cases}$$

即 Y **服从区间**$(0,1)$**上的均匀分布**.

例 31　**设** $X\sim N(0,1)$，$Y=X^2$，**求** Y **的密度函数** $f_Y(y)$.

解　**用分布函数法求之，因** $X\sim N(0,1)$，**其密度函数为**

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

且为偶函数，则当 $y>0$ **时，**

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\varphi(x)\,dx.$$

在上式两端对 y **求导，利用变限定积分的求导公式**(4.2.1.9)**得到**

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\varphi(x)\,dx\right)'$$

$$=\varphi(\sqrt{y})(\sqrt{y})'-\varphi(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(-\sqrt{y})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\varphi(\sqrt{y})+\varphi(-\sqrt{y})]$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\sqrt{y})^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}\quad (y>0)。$$

当 $y\leqslant 0$ **时，由于** $F_Y(y)=P(X^2\leqslant y)=P(\varphi)=0$，$f_Y(y)=0$，**所以**

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}, & y>0.\end{cases}$$

例 32　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

求 $Y=3X+1$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

解　用分布函数法求之。Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(3X+1\leqslant y)=P(X\leqslant (y-1)/3)=F_X((y-1)/3),$$

在上等式两端对 y 求导数，得到

$$F'_Y(y)=f_Y(y)=F'_X[(y-1)/3][(y-1)/3]'_y=(1/3)f'_X[(y-1)/3]$$

$$=\frac{1}{3}\begin{cases}e^{-(y-1)/3}, & (y-1)/3\geqslant 0,\\ 0, & (y-1)/3<0,\end{cases}=\begin{cases}e^{-(y-1)/3}/3, & y\geqslant 1,\\ 0, & y<1.\end{cases}$$

习　题　4.2.1

（一）问题求解

1. 设相互独立的随机变量 X 与 Y 的分布相同，且 X 的分布律为

X	0	1
p	1/2	1/2

则随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律为

(A)

Z	0	1
p	1/2	1/2

(B)

Z	0	1	4
p	1/4	1/4	2/4

(C)

Z	0	1
p	1/4	3/4

(D)

Z	1
p	1

2. 掷一均匀骰子 2 次，记 X 为 2 次中掷的最大点数，则 $P(X=4)$ 等于

(A) 3/36.　(B) 5/36.　(C) 1/6.　(D) 7/36.　(E) 11/36.

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}A+Be^{-x^2/2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则系数 A 和 B 分别等于

(A) $A=1,B=-1$.　(B) $A=0,B=1$.　(C) $A=1,B=1$.

(D) $A=-1,B=1$.　(E) $A=-1,B=2$.

4. 若随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-(3/x)^2, & x>3,\\ 0, & x\leqslant 3,\end{cases}$ 则

$P(5<X<10)$等于

(A) 0.18. (B) 0.21. (C) 0.24. (D) 0.27. (E) 0.30.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$，且 $\varphi(x)=\varphi(-x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$. (B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$. (D) $F(-a)=2F(a)-1$.

(E) **以上结论都不正确**.

6. 设随机变量 X 密度函数为 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ **且** $E(X)=1/2$，$D(X)=3/20$，**则 a,b,c 的值为**

(A) $a=12,b=-12,c=3$. (B) $a=-12,b=12,c=3$.

(C) $a=12,b=-12,c=-3$。 (D) $a=-12,b=12,c=-3$.

(E) **以上结论都不正确**.

（二）条件充分性判断

1. $P(X=k)=C(2/3)^k$ $(k=1,2,\cdots)$**为某一离散型随机变量的分布律**.

(1) $C=1/2$; (2) $C=1$.

2. $P(X=k)=a/k$ $(k=1,2,3)$**是一个离散型随机变量的概率函数**.

(1) a **是方程** $11x^2-17x+6=0$ **的两实根中较小的根**;

(2) a **是方程** $11x^2-17x+6=0$ **的两实根中较大的根**.

3. $f_1(x)+f_2(x)$**是概率密度函数**.

(1) $f_1(x),f_2(x)$**均为概率密度函数**; (2) $0\leqslant f_1(x)+f_2(x)\leqslant 1$.

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/2, & 0\leqslant x<1,\\ k(4x-x^2), & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

(1) $k=1/6$; (2) $k=1/2$.

5. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x<1,\\ b-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ **可求 a,b 的值**.

(1) $E(X)=1$;　　(2) $P(X\leqslant 0)=0$.

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}A(1-x^2), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ **则** $P(|X|\geqslant a)=5/16$.

(1) $a=3/4$;　　(2) $a=1/2$.

7.[2003 年Ⅱ18] **随机变量 X 的值落入区间**$(0,1/\lambda)$**的概率为**$1-5/(2\mathrm{e})$.

(1) $X\sim f(x)=\lambda^3 x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x/2}$ $(\lambda>0,x>0)$;

(2) $X\sim f(x)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ $(\lambda>0,x>0)$.

8.[2005 年Ⅰ23] $P(0\leqslant X\leqslant 4)=0.75$.

(1) X **的概率密度函数为** $f(x)=\begin{cases}2/x^3, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1;\end{cases}$

(2) X **的分布函数为** $F(x)=\begin{cases}1-4/x^2, & x>2,\\ 0, & x\leqslant 2.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}\lambda-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ **是某一随机变量的分布函数。**

(1) $\lambda=1$;　　(2) $\lambda=1/2$.

10. 连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$**是偶函数.**

(1) **对任意实数** x,$P(X\leqslant x)+P(X\leqslant -x)=1$;

(2) $X\sim N(1,1)$.

(三) 解答题

1. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=c/k$ $(k=2,3,\cdots)$,**求常数** c.

2. 把 3 个球逐个随机地放入编号为 1,2,3,4 的四个盒中,设 X 表示其中至少有一只球的盒子的最小号码,求 X 的分布律.

3. 设随机变量 X 的概率函数为 $P(X=i)=a/i^2$, $i=1,2$,**求其分布函数.**

4. 设随机变量 X 的分布函为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\leqslant x<0,\\ 0.5, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ 1, & x\geqslant\sqrt{2},\end{cases}$ **求 X 的概率函数及** $P(|X|\leqslant 1)$。

5.[2001 年Ⅰ33] **随机变量 X 的概率密度为** $f(x)=$

$\begin{cases} x^3 e^{\frac{-x^2}{2}}/2, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$

求 X 的分布函数 $F(x)$ 和 $P(-2<X\leqslant 4)$.

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 试写出 X 的分布函数.

7. 设随机变量 $X\sim N(u,\sigma^2)$, $Y=e^X$, 求 Y 的概率密度 $f_Y(x)$.

8. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ 求:

(1) $Y_1=g_1(X)=5-X$ 的概率密度函数 $f_1(y)$;

(2) $Y_2=g_2(X)=X^2$ 的概率密度函数 $f_2(y)$.

9. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=e^{-|x|}/2$ $(-\infty<x<+\infty)$, 求 $Y=X^2$ 的概率密度.

4.2.2 随机变量的数学期望和方差

若知道随机变量的概率分布,就完全知道了随机变量的全部概率特性。但要求得随机变量的概率分布不是一件容易的事,况且在实际问题中并不需要知道随机变量的全部变化情况,而只需知道它的某些分布特点就够了。描绘其分布特点的就是随机变量的数字特征,其中最重要的是反映随机变量取值集中程度的数学期望和反映取值分散程度的方差。下面不妨再举一例说明这两个量的重要性.

用某种方法测量某零件的某项性能指标时,由于种种随机因素,使得测量结果是一个随机变量,首先我们关心的是这个随机变量的平均值是不是等于该零件性能的真实指标,如不相等,自然会问这个平均值与性能的真实指标偏离程度有多大。显然,这是衡量该测量方法正确性的一个方面. 另一方面,上述随机变量的分布是集中在平均值近旁,还是很分散。如果是后者,即使平均值等于或很接近于性能的真实指标,上述测量结果也是很不可信的.

1. 数学期望的定义及其性质

定义 4.2.2.1 (1) 设 X 为离散型随机变量,且可能取值为有限个,其

分布律为

$$P(X=x_k)=p_k\ (k=1,2,\cdots,n),$$

称$\sum_{k=1}x_kp_k$为X的数学期望，记作$E(X)$，即$E(X)=\sum_{k=1}x_kp_k$.

(2) 设X为离散型随机变量，且可能取值为可数个，其分布律为$P(X=x_k)=p_k\ (k=1,2,\cdots)$. 若级数$\sum_k x_kp_k$绝对收敛，则称$\sum_k x_kp_k$为$X$的数学期望，记作$E(X)$，即

$$E(X)=\sum_k x_kp_k.$$

定义 4.2.2.2 设X为连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，则称该积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$为$X$的数学期望，记作$E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2.2.1}$$

数学期望简称为期望或均值。顾名思义，X的数学期望是X的所有可能取值的加权平均，它所映了X取值的平均情况.

上述定义中要求绝对收敛是为了数学处理的方便，以离散型随机变量来说，x_i的顺序改变不影响其收敛性以及收敛时的和值，这在数学上就相当于要求绝对收敛，在实际问题的求解中一般是满足绝对收敛这条件的.

显然数学期望由概率分布惟一确定，也称某概率分布的数学期望.

数学期望有下述性质。

命题 4.2.2.1 (1) 若C为常数，则$E(C)=C$.

(2) 若C为常数，X是随机变量，则$E(CX)=CE(X)$.

(3) 若X,Y是两个随机变量，则$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$.

一般，若$C_1,C_2,\cdots,C_n$为常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为n个随机变量，则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}C_iE(X_i),$$

即随机变量之和的数学期望等于随机变量的数学期望之和。此性质很有用，因为这里并没要求随机变量之间相互独立。对于不具有相互独立的随机变量，使用这性质能带来很大方便.

(4) 若X与Y相互独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$。

(5) 设X为连续型随机变量，其概率密度函数为$f(x)$，则

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x \quad (\text{详见定理 } 4.2.2.1(2))。 \tag{4.2.2.2}$$

2. 方差的定义及其性质

在实际问题中数学期望反映了随机变量取值的集中程度，但仅有数学期

望并不能完整地反映随机变量的分布特征，还必须考察它取值的离散程度。通常，人们关心的是随机变量 X 对其期望 $E(X)$ 的离散程度，称 $X-E(X)$ 为随机变量的离差，显然随机变量 X 的离差的期望总是零，即 $E[X-E(X)]=E(X)-E(X)=0$，因而为考察 X 的分布的离散程度需考察离差 $X-E(X)$ 的平方的期望，于是有下述定义。

定义 4.2.2.3 随机变量 X 离差平方的数学期望称为随机变量 X 的方差，记作 $D(X)$，即 $D(X)=E[X-E(X)]^2$. 其非负平方根 $\sqrt{D(X)}$ 称为 X 的标准差，记作 σ_x 或 σ.

由上定义易知 $D(X)$ 是一个非负数。$D(X)$ 越小，说明 X 的可能取值越集中在 $E(X)$ 近旁；$D(X)$ 越大，说明 X 的可能取值越分散.

$D(X)$ 可以看成是随机变量 $Y=[X-E(X)]^2$ 的数学期望，因此当 X 是离散型随机变量，且其概率函数为 $P(X=x_k)=p_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 时，有

$$D(X)=\sum_k [x_k-E(X)]^2 p_k.$$

当 X 是连续型随机变量，且其概率密度函数为 $f(x)$ 时，有

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2.2.3}$$

方差有以下命题所述的性质。

命题 4.2.2.2 (1) 若 X 是一个常数，则 $D(X)=0$。反之，方差为零的随机变量不一定是常量.

(2) $D(X+c)=D(X)$ (c 为常数).（随机变量平移一下，其离散程度不变。）

(3) $D(kX+b)=k^2D(X)$ (k 为一常数).（方差是反映随机变量 X 分布的离散程度的，它为非负数，上式中出现 k^2 而不是 k 是合理的.）

(4) $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

性质(4)是计算方差的常用公式，用它可简化方差的计算，此性质也用来在已知数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 时计算 $E(X^2)$，即

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2. \tag{4.2.2.4}$$

(5) 若 X 与 Y 相互独立，则 $D(X+Y)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

一般地，若 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 n 个相互独立的随机变量，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}C_i^2D(X_i). \tag{4.2.2.5}$$

值得注意的是，此性质与数学期望的相应性质不同，此性质必须要求随

机变量之间相互独立.

题型一　求随机变量的数学期望或(和)方差

类型(一)　求离散型随机变量的数学期望或(和)方差。

应先求出随机变量 X 的概率分布再根据定义计算期望。计算方差时，应先计算 $E(X)$，$E(X^2)$，然后再由公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 求出结果.

也可根据方差定义直接计算，还可利用期望和方差的性质计算.

服从参数为 p 的 0-1 分布的随机变量 X 的期望与方差可用以下命题求之.

命题 4.2.2.3　若服从参数为 p 的 0-1 分布的随机变量 X，即

X	0	1
p	$1-p$	p

则　　$E(X)=E(X^2)=p$，　$D(X)=p(1-p)$.

例 1[2003 年Ⅰ33]　已知随机变量 X_1 和 X_2 相互独立，且具有相同分布律如下：

X	1	2	3
p	0.2	0.6	0.2

则 $D(X_1+X_2)=$

(A) 0.4。　(B) 0.5。　(C) 0.6。　(D) 0.7。　(E) 0.8。

解　由于 X_1，X_2 独立且同分布，由命题 4.2.2.2(5)得到

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2D(X_1).$$

由 $D(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2$ 知，为求 $D(X_1)$ 需先求出 $E(X_1)$ 与 $E(X_1^2)$.

由 X_1 的分布律，易求得 X_1^2 的分布律为

X_1^2	1	$2^2=4$	$3^2=9$
p	0.2	0.6	0.2

因而由定义 4.2.2.1 得到

$$E(X_1)=1\times0.2+2\times0.6+3\times0.2=2,$$

$$E(X_1^2)=1\times0.2+4\times0.6+9\times0.2=4.4,$$

故　　$D(X_1)=E(X_1)^2-[E(X_1)]^2=4.4-2^2=0.4,$

$$D(X_1+X_2)=2D(X_1)=0.8.$$ **仅(E)入选.**

例 2 已知离散型随机变量 X 只取 $-1,0,1$ 三个值，且取零值的概率是取非零值概率的两倍，又知 $E(X)=1/6$，则 $D(X)=$

(A) 13/36。 (B) 11/36。 (C) 15/36。 (D) 1/3。 (E) 2/9。

解 由题设知 $P(X=0)=2/3$，$P(X=-1)+P(X=1)=1/3$，设 $P(X=-1)=p$，则 $P(X=1)=1/3-p$. 于是 X 的分布律为

X	-1	0	1
p	p	$2/3$	$1/3-p$

由 $E(X)=1/6$ 得到 $(-1)p+0\times(2/3)+1\times(1/3-p)=1/6$，故 $p=1/12$. 为求 $D(X)$ 只需求 $E(X^2)$，用同一表格法先求出 X^2 的分布律

p	$1/12$	$2/3$	$3/12$
X	-1	0	1
X^2	1	0	1

即

p	$4/12$	$2/3$
X^2	1	0

故 $$E(X^2)=1/3,$$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1/3-1/36=11/36$. 仅(B)入选。

例 3 从标有数码 $1,2,3,4,5$ 的 5 个球中任取 3 个，设 X 为取出的 3 个球上的最小数码，则 $D(X)=$

(A) 0.45. (B) 0.50. (C) 0.62. (D) 1.02. (E) 0.96.

解 X 取值可为 $1,2,3$，且

$$P(X=1)=C_4^2/C_5^3=3/5,\quad P(X=2)=C_3^2/C_5^3=3/10,$$

$$P(X=3)=C_2^2/C_5^3=1/10,$$

所以 $$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=1.5,$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2p_i=1\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=2.7,$$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.7-1.5^2=0.45$. 仅(A)入选.

例 4 若有 $1\sim n$ 号球各一个，$1\sim n$ 号盒各一个. 将球放入盒内，每个盒中只能放一个球，当盒中的球号与盒号相同时称为一个匹配，令 X 表示匹配数，则 $E(X)=$

(A) n. (B) $n/2$. (C) $n/4$. (D) $n-1$. (E) 1.

解 令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{如果第 } i \text{ 个球与第 } i \text{ 个盒匹配},\ i=1,2,\cdots n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则 $$X=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

且 $$P(X_i=1)=\frac{1}{n},\quad P(X_i=0)=\frac{n-1}{n}。$$

因 X_i 服从参数为 $p=1/n$ 的 0-1 分布，由命题 4.2.2.3 知

$$E(X_i)=1/n,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由数学期望的性质，有 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$. 仅(E)入选.

注意 例 4 将随机变量 X 分解成若干个服从 0-1 分布的随机变量 X_i 之和，把求 $E(X)$ 转化为求 $E(X_i)$，即

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n),$$

而 $E(X_i)$ 易于求出。这样，$E(X)$ 的计算就非常简便。这种方法称为随机变量分解法.

类型(二) 求连续型随机变量的期望或(和)方差。

法一 使用期望和方差的定义和性质求之。

常利用式(4.2.2.1)、式(4.2.2.3)与命题 4.2.2.1 及命题 4.2.2.2 求之.

例 5 [2001 年 Ⅰ 26] 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且它们的均值和方差都相同，若有 $Y_1=(X_1+X_2+X_3)/3$ 和 $Y_2=(2X_1+X_2+X_3)/4$，则 Y_1 的方差 $D(Y_1)$ 和 Y_2 的方差 $D(Y_2)$ 的大小关系是 $D(Y_1)$_____$D(Y_2)$(用“$<$”,“$=$”,“$>$”表示)。

解 利用命题 4.2.2.2(5)即式(4.2.2.5)得到

$$\begin{aligned}D(Y_1)&=[D(X_1+X_2+X_3)]/9(\text{由条件 } X_1,X_2,X_3 \text{ 相互独立})\\&=[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)]/9=3D(X_1)/9=D(X_1)/3,\\D(Y_2)&=[D(2X_1+X_2+X_3)]/16=[D(2X_1)+D(X_2)+D(X_3)]/16\\&=[4D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)]/16=3D(X_1)/8,\end{aligned}$$

于是 $$D(Y_1)<D(Y_2).$$

例 6 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量，且有 $E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots,n$，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right),$$

则 $E(S^2)=$

(A) $3\sigma^2$. (B) $2\sigma^2$. (C) σ^2. (D) $\sigma^2/2$. (E) $\sigma^2/3$.

解 利用命题 4.2.2.1(3)得到

$$E(S^2)=\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-nE(\overline{X}^2)\right].$$

由式(4.2.2.4)**有**

$$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

又因为
$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu,$$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

故
$$E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\sigma^2/n+\mu^2.$$

于是
$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\}=\sigma^2.$$ **仅**(C)**入选**.

法二　利用下述命题求之。

命题 4.2.2.4　(1) **概率密度函数为偶函数的随机变量** X,**如果** $E(X)$ **存在,则** $E(X)=0$。

(2) **如果连续型随机变量** X **的概率密度函数关于** $x=\mu$ **对称,且** $E(X)$ **存在,则** $E(X)=\mu$。

(3) **对任意** $a\geqslant 0$ **有** $P(X\geqslant a)=P(X\leqslant -a)$.

例 7　**设随机变量** X **的概率密度为下列函数,求** $D(X)$。

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解法 1　**注意到** $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ **因而** $f(X)$**为偶函数。由命题** 4.2.2.4 **知** $E(X)=0$,**则**

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)$$
$$=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

解法 2　**由式**(4.2.2.1)**及式**(4.2.2.3)**分别得到**

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x(1-|x|)\mathrm{d}x=0,$$
$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

题型二　已知随机变量的数学期望或(和)方差,求其分布的待定常数

常用期望、方差的定义与性质求之.

例 8(条件充分性判断)　随机变量 X 的取量为 $-1,0$ 和 1,能确定 X 的分布律.

(1) $EX=0.1$;　　(2) $E(X+1)^2=2$.

解　设 X 的分布律为

X	-1	0	1
p	a	b	c

则

$(X+1)^2$	0	1	4
p	a	b	c

故　　$$EX=-a+c,$$

而　　$$E(X+1)^2=1\times b+4\times c=b+4c.$$

显然,不能单独由条件(1)和条件(2)确定 X 的分布,但当条件(1)与条件(2)联合时,有

$$a+b+c=1,\qquad ①$$

$$b+4c=2,\qquad ②$$

$$-a+c=0.1,\qquad ③$$

①+③得到 $b+2c=1.1$,即

$$2b+4c=2.2。\qquad ④$$

④-②得到 $b=2.2-2=0.2$. 将 $b=0.2$ 代入式②有 $c=0.45$. 将 c 代入式③得 $a=0.45-0.1=0.35$. 从而能确定 X 的分布律. 仅 C 入选.

例 9 [2001 年Ⅱ 33]　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax, & 0<x\leqslant 1,\\ B-x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且数学期望是 1,求:(1)常数 A 和 B;(2)X 的标准差.

解　(1) $1=\int_{+\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 Ax\mathrm{d}x+\int_1^2(B-x)\mathrm{d}x=\frac{A}{2}+B-\frac{3}{2}$,

即　　$$A+2B=5,\qquad ①$$

$$1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 Ax\cdot x\mathrm{d}x+\int_1^2 x(B-x)\mathrm{d}x,$$

即　　$$2A+9B=20.\qquad ②$$

联立式①与式②,解得 $B=2,A=1$.

(2) 先求 X 的方差 $D(X)$。用 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 求之。为此利用(1)的结果,再求

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x^2\cdot x\mathrm{d}x+\int_1^2x^2(2-x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^3}{4}\Big|_0^1+\frac{2}{3}x^3\Big|_1^2-\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{1}{4}+\frac{14}{3}-\frac{15}{4}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6},$$

故 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=7/6-1=1/6,$$

所以 X **的标准差为** $\sqrt{D(X)}=1/\sqrt{6}$.

例 10（条件充分性判断） **设随机变量** X,Y **相互独立，且有相同的密度函数**

$$f(x)=\begin{cases}2\theta^2x, & 0<x<1/\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $$E[a(X+2Y)]=1/\theta.$$

(1) $a=1$； (2) $a=1/2$.

解 由于 $$f(x)=\begin{cases}2\theta^2x, & 0<x<1/\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $$E(X)=E(Y)=\int_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}}2\theta^2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\theta^2x^3\Big|_0^{\frac{1}{\theta}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\theta}。$$

从而 $E[a(X+2Y)]=a[E(X)+2E(Y)]=a\times3E(X)=2a(1/\theta)=1/\theta$，

故 $a=1/2$，**所以条件**(2)**充分。仅** B **入选**.

题型三 求随机变量函数的数学期望

设 X **是一随机变量，**$g(x)$**是任意实函数，则** $Y=g(X)$**也是一个随机变量，**Y **的随机性完全由** X **的随机性所决定，因而** Y **的分布原则上由** X **的分布所确定，下面的结论表明不必先求** Y **的分布(由** X **的分布求出** Y **的分布并非易事)，只需根据** X **的分布即可求出其函数** $Y=g(X)$**的数学期望**.

定理 4.2.2.1 设 X **是一个随机变量，**$g(x)$**是一个实函数**.

(1) **若** X **为离散型随机变量，其概率分布为**

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

且 $\sum_{i=1}^{\infty}|g(x_i)|p_i<\infty$**，则** $E[g(X)]$**存在，且**

$$E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i。\tag{4.2.2.8}$$

(2) **若** X **为连续性随机变量，**$f(x)$**是其密度函数，且** $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)\mathrm{d}x<\infty$**，则** $E[g(X)]$**存在，且**

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.\tag{4.2.2.9}$$

例 11 随机变量 X **的概率密度为**

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-bx, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且 $E(X)=1$，求 $D(X)$ 与 $D(X^2)$.

解 根据 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 与 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=1$，得

$$\begin{cases} a-3b=-2,\\ a-7b=-6.\end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=1$，即

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 (2-x)x^2\mathrm{d}x=\frac{7}{6},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=7/6-1=1/6,$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^5\mathrm{d}x+\int_1^2 (2-x)x^4\mathrm{d}x=\frac{31}{15},$$

$$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2=31/15-49/36=127/180.$$

题型四　求解与期望或方差有关的实际应用题

要正确求解与数学期望或方差的实际应用题，首先要正确理解它们的概率含义，明确所求的是期望还是方差的问题。如果所求的是与平均值有关的问题，则属于期望问题；如果所求的是随机变量取值的离散程度的问题，则属于方差问题.

下面举例说明求解与期望或方差有关的实际应用题的常用解法。

法一　根据期望或方差的定义求解.

例 12　据统计，一位 40 岁的健康者（体检未发现病症者），在五年之内仍然活着或自杀的概率为 p（$0<p<1$），p 为已知，在五年内死亡（非自杀）的概率为 $1-p$。保险公司开办五年人寿保险，条件是参保者需交保险费 a 元（a 已知），若五年之内死亡，公司赔偿 b 元（$b>a$）. 问 b 值定在什么范围内公司才能可望获益？

解　公司获益就是其平均收益非负，属数学期望问题.

设 $\{\xi=1\}$ 表示一个人在五年内非自杀死亡，$\{\xi=0\}$ 表示一个人在五年内活着或自杀，由题设有

$$P(\xi=0)=p,\quad P(\xi=1)=1-p.$$

以随机变量 η 表示公司收益，则

$$\eta=\begin{cases} a, & \xi=0,\\ a-b, & \xi=1.\end{cases}$$

注意到事件 $\{\eta=a\}$ 与 $\{\xi=0\}$ 等价，$\{\eta=a-b\}$ 与 $\{\xi=1\}$ 等价，由期望的定义得到

$$\begin{aligned}E\eta&=aP(\eta=a)+(a-b)P(\eta=a-b)=aP(\xi=0)+(a-b)P(\xi=1)\\&=ap+(a-b)(1-p).\end{aligned}$$

因当平均收益非负，即 $E\eta\geqslant 0$ 时，保险公司才可望获益，故由

$$E\eta=ap+(a-b)(1-p)=a-b(1-p)\geqslant 0$$

得到：当 $a<b\leqslant a/(1-p)$ 时可望获益.

例 13 设甲、乙两家灯泡厂生产的灯泡的寿命（单位：小时）ξ 和 η 的分布列分别为

ξ	900	1000	1100
p	0.1	0.8	0.1

和

η	950	1000	1050
p	0.3	0.4	0.3

试问哪家工厂生产的灯泡质量较好？

解 哪家工厂生产的灯泡寿命期望值大，其质量就好，由期望的定义 4.2.2.1(1) 得到

$$E\xi=900\times 0.1+1000\times 0.8+1100\times 0.1=1000,$$

$$E\eta=950\times 0.3+1000\times 0.4+1050\times 0.3=1000.$$

现因 $E\xi=E\eta=1000$，这就需要再考察哪家工厂灯泡的质量比较稳定，即看哪家工厂灯泡的寿命取值更集中一些，这就必须进一步比较其方差，方差小者，寿命值较稳定，灯泡质量较好。由方差定义 4.2.2.3 得到

$$\begin{aligned}D\xi&=(900-1000)^2\times 0.1+(1000-1000)^2\times 0.8+(1100-1000)^2\times 0.1\\&=2200\ (\text{其中 } E\xi=1000),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D\eta&=(950-1000)^2\times 0.3+(1000-1000)^2\times 0.4+(1050-1000)^2\times 0.3\\&=1500\ (\text{其中 } E\eta=1000).\end{aligned}$$

因 $D\xi>D\eta$，故乙厂生产的灯泡质量较甲厂的好.

法二 先求随机变量之间的函数关系，利用此关系，再求期望或方差。

应用题中常有两个随机变量，就先找出它们之间的关系．如有函数关系，先求出此函数表示式（常为分段函数），然后设法求出其期望或方差．

例 14　游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光，电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行。假设一游客在上午八点的第 X 分钟到达底层电梯处，且 X 在 $[0,60]$ 上均匀分布，求该游客等候时间的数学期望．

解　设 Y 是等候时间，它是 X 的函数，即

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & 0<X\leqslant 5,\\ 25-X, & 5<X\leqslant 25,\\ 55-X, & 25<X\leqslant 55,\\ 60-X+5, & 55<X\leqslant 60.\end{cases}$$

由题设，X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1/60, & 0\leqslant x<60,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 因此

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=[12.5+200+450+37.5]/60=11.67.$$

法三　先求随机变量的分布，再求期望与方差．

例 15［2001 年 Ⅱ 32］　对一批产品进行检验，若连续检查 10 件未查出不合格品则停止检验，并认为该批产品合格，若在尚未查满 10 件产品前的某次（包括第 10 件的那一次）检查出不合格品也停止检验，但认为该批产品不合格。假设每批产品的批量都很大，且每次检查到不合格品的概率均为 0.01，求每批要检查的产品件数的数学期望．

解　设每批要检查的件数为 X，则 $X=k$ 的含义就是前 $k-1$ 次检查的结果都是合格品，只有第 k 次检查的才是不合格品，因而 $P(X=k)=q^{k-1}p$，其中 $p=0.01$，$q=1-p=0.99$，$k=1,2,\cdots,9$.

对于第 10 次的检查可能有两种情况出现：一是前 9 次检查的都是合格品，只有第 10 次检查的才是不合格品；另一种情况是前 10 次检查的都是合格品，即连续检查的 10 件未查出不合格品则停止检查．因 $P(X=10)=q^9p+q^{10}$，于是得到 X 的概率分布为

$$P(X=k)=\begin{cases}q^{k-1}p & (k=1,2,\cdots,9),\\ q^9p+q^{10} & (k=10),\end{cases}$$

其中　　$p=0.01$，　$q=1-p=0.99$.

由离散型随机变 X 的期望定义有

$$E(X)=\sum_{k=1}^{9}kq^{k-1}p+10q^{9}p+10q^{10}=p\left(\sum_{k=1}^{9}kq^{k-1}+10q^{9}\right)+10q^{10}$$

$$=p\sum_{k=1}^{10}kq^{k-1}+10q^{10},$$

令　　$$S=\sum_{k=1}^{10}kq^{k-1}=1+2q+3q^{2}+\cdots+9q^{8}+10q^{9},\qquad①$$

式①右端为综合数列之和，可用错位相减法（见 1.6 节题型四法二）求之。

令　　$$qS=q+2q^{2}+\cdots+8q^{8}+9q^{9}+10q^{10},\qquad②$$

①－②得到　　$(1-q)S=1+q+q^{2}+\cdots+q^{8}+q^{9}-10q^{10}$。

再令　　$S_1=1+q+q^{2}+\cdots+q^{8}+q^{9}$，

则　　$qS_1=q+q^{2}+\cdots+q^{9}+q^{10}$，

$S_1-qS_1=(1-q)S_1=1-q^{10}$，　即　$S_1=(1-q^{10})/(1-q)$。

于是有　　$$(1-q)S=S_1-10q^{10}=\frac{1-q^{10}}{1-q}-10q^{10},$$

$$S=\frac{1-q^{10}}{(1-q)^{2}}-\frac{10q^{10}}{1-q},$$

故　　$$E(X)=pS+10q^{10}=p\left(\frac{1-q^{10}}{p^{2}}-\frac{10q^{10}}{p}\right)+10q^{10}=\frac{1-q^{10}}{p}$$

$$=\frac{1-(0.99)^{10}}{0.01}=9.56\approx10.$$

例 16　假设一台机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生 1 次故障可获利润 5 万元；发生 2 次故障可获利润 0 元；发生 3 次或 3 次以上故障就要亏损 2 万元．求一周内的期望利润是多少？

解　设 X 表示一周 5 天内机器发生故障的天数，则 $X\sim B(5,0.2)$，所以

$$P(X=k)=C_5^k\times0.2^{k}\times0.8^{5-k}\ (k=0,1,2,3,4,5)。$$

于是　　$P(X=0)=0.8^{5}=0.328$，

$P(X=1)=C_5^1 0.2\times0.8^{4}=0.410$，

$P(X=2)=C_5^2 0.2\times0.8^{3}=0.205$，

$P(X\geqslant3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=0.057.$

记 Y 表示能获利润，则

$$Y=g(X)=\begin{cases}10, & X=0,\\ 5, & X=1,\\ 0, & X=2,\\ -2, & X\geqslant 3。\end{cases}$$

期望利润为

$$E(Y)=10\times 0.328+5\times 0.410+0\times 0.205-2\times 0.057=5.216\ (\text{万元}).$$

法四　随机变量分解法

随机变量取值为非负整数(例如次数,件数)而与其有关的随机事件发生时,只有两种可能结果,常把这两种结果分别与 0,1 对应起来,使之数量化。为此引入服从 0-1 分布的随机变量 X_i,这样每一种结果的概率易求得。从而 $E(X_i)$易求出(见命题 4.2.2.3)。因这时 X 可分解成 X_i 之和:$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$,利用期望的性质,$E(X)$也就易求出。此法常称为随机变量分解法.

例 17[2002 年Ⅰ19]　一台仪器由 5 只不太可靠的元件组成,已知各元件出故障是独立的,且第 k 只元件出故障的概率为 $p_k=(k+1)/10$,$k=1,2,3,4,5$,则出故障的元件数的方差是

(A) 1.3.　　(B) 1.2.　　(C) 1.1.　　(D) 1.0.

解　仅(C)入选。设随机变量 X 为出故障的元件数,记

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{若第 } k \text{ 只元件出故障},\\ 0, & \text{若第 } k \text{ 只元件不出故障}.\end{cases}$$

则 $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$。由于 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 相互独立,有

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)+D(X_5).$$

下面求 $D(X_k)$. 因 X_k 服从参数为 $p_k=(k+1)/10$ 的 0-1 分布,由命题 4.2.2.3 知

$$E(X_k)=p_k=(k+1)/10,\quad E(X_k^2)=p_k.$$

所以 $D(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=p_k(1-p_k)$,于是

$$D(X)=\sum_{k=1}^{5}D(X_k)=\sum_{k=1}^{5}p_k(1-p_k)=\sum_{k=1}^{5}\frac{k+1}{10}\left(\frac{10-k-1}{10}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{k+1}{10}\frac{9-k}{10}=\frac{1}{10^2}(2\times 8+3\times 7+4\times 6+5\times 5+6\times 4)=1.1。$$

例 18　一台设备由三大部件构成,在设备运转中各部件需要调整的概率分别为0.10,0.20,0.30,假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要

调整的部件数，试求 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$.

解 设 X 的取值为调整的部件数，显然为非负整数，又每一部件是否需调整只有两种可能结果（调整与不调整），于是可引入随机变量 X_i，为此设三大部件中第 i 件需调整的事件为 A_i $(i=1,2,3)$，令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若 } A_i \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } A_i \text{ 不发生},\end{cases}$$

则 X_i 与 X_i^2 的分布律分别为

X_i	0	1
p	$1-P(A_i)$	$P(A_i)$

X_i^2	0	1
p	$1-P(A_i)$	$P(A_i)$

因而 $$E(X_i)=P(A_i),\quad E(X_i^2)=P(A_i)\ (i=1,2,3),$$

$$D(X_i)=E(A_i^2)-[E(X_i)]^2=P(A_i)-[P(A_i)]^2=P(A_i)[1-P(A_i)]。$$

因 $X=X_1+X_2+X_3$，且 X_1,X_2,X_3 相互独立，有

$$\begin{aligned}E(X)&=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=0.1+0.2+0.3=0.6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(X)&=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)[1-P(A_i)]\\&=0.1\times0.9+0.2\times0.8+0.3\times0.7=0.46.\end{aligned}$$

法五 使用微积分中求最值的方法或用配方法求期望的最大（小）值.

例 19 假设由自动线加工的某种零件的内径 X（单位：毫米）服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小 10 和大于 12 的为不合格品，其余为合格品，销售每件合格品盈利，销售每件不合格品亏损，已知销售利润 T（单位：元）与零件内径 X 有如下关系：

$$T=\begin{cases}-1, & X<10,\\ 20, & 10\leqslant X\leqslant12,\\ -5, & X>12.\end{cases}$$

问平均内径取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

解 先求出 $E(T)$ 与参数 μ 的函数关系.

因 $$P(X<10)=P\Big(\frac{X-\mu}{1}<\frac{10-\mu}{1}\Big)=\Phi(10-\mu),$$

$$P(10\leqslant X\leqslant12)=P\Big(\frac{10-\mu}{1}\leqslant\frac{X-\mu}{1}\leqslant\frac{12-\mu}{1}\Big)=\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu),$$

$$P(X>12)=P\Big(\frac{X-\mu}{1}>\frac{12-\mu}{1}\Big)=1-\Phi(12-\mu).$$

p	$\Phi(10-\mu)$	$\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)$	$1-\Phi(12-\mu)$
X	$X<10$	$10\leqslant X\leqslant 12$	$X>12$
$T=g(X)$	-1	20	-5

于是可得

$$E(T)=(-1)\Phi(10-\mu)+20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-5[1-\Phi(12-\mu)]$$
$$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5,$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。设 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数，则有 $\Phi'(x)=\varphi(x)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\,E(T)}{\mathrm{d}\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu).$$

令其等于零，得到

$$\frac{-25}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(12-\mu)^2}{2}}+\frac{21}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(10-\mu)^2}{2}}=0,$$

即
$$25\mathrm{e}^{\frac{-(12-\mu)^2}{2}}=21\mathrm{e}^{\frac{-(10-\mu)^2}{2}}.$$

解得
$$\mu=\mu_0=11-[\ln(25/21)]/2\approx 10.9,$$

即当 $\mu=\mu_0\approx 10.9$（毫米）时，平均利润最大.

例 20 假定在国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是随机变量 ξ（单位：吨），已知 ξ 服从 $[2000,4000]$ 上的均匀分布。设每售出这种商品一吨，可为国家挣得外汇 3 万元，但如销售不出而囤积于仓库，则每吨需浪费保养费 1 万元，问应组织多少货源，才能使国家的收益最大？

解 设随机变量 Y 表示年出口商品量（$2000\leqslant y\leqslant 4000$），随机变量 η 表示所得收益（单位：万元），则

$$\eta=g(\xi)=\begin{cases}3Y, & \xi\geqslant Y\text{（供不应求）},\\ 3\xi-(Y-\xi)=4\xi-Y, & \xi<Y\text{（供大于求）}.\end{cases}$$

由题设有 $f_\xi(x)=\begin{cases}1/2000, & 2000\leqslant x\leqslant 4000,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则国家的平均收益为

$$E(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_\xi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{4000}g(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{y}(4x-y)\mathrm{d}x+\frac{1}{2000}\int_{y}^{4000}3y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{1000}(-y^2+7000y-4\times 10^6)$$

$$=\frac{1}{1000}[825000-(y-3500)^2],$$

故当 $y=3500$ 吨时，可使国家的平均收益值达到最大，即使国家收益最大．

注意　怎样组织货源，使收益满足一定条件。这是常见的经济应用题型．要会根据供大于求和供不应求两种情况分别列出利润与进货量的关系，从而正确写出此函数关系．这是求解这类题型的关键所在．写出这个函数表达式后再计算有关的量．

上例出现的随机变量较多，弄不清楚它们之间的关系就无法求解。另外，要会将求收益最大转化为求平均收益最大．

习　题　4.2.2

（一）问题求解

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.2	0.3	0.5

若 $Y=2X-1$，则 $D(Y)=$

（A）0.61.　（B）2.44.　（C）3.6.　（D）2.3.　（E）4.2.

2. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立，如果 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0 (i=1, 2)$，且 $U=X_1+aX_2, V=X_1+bX_2, D(U+V)=D(U)+D(V)$，则必有

（A）$a+b=0$.　（B）$a-b=0$.　（C）$a-2b=0$.

（D）$ab=1$.　（E）$ab=-1$.

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

其中 A 为待定常数，则 $Y=1/X$ 的数学期望 $E(Y)$ 是

（A）1/2.　（B）1.　（C）2.　（D）4.　（E）8.

4. 设 X 是一随机变量，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$，则对于任意常数 C，必有

（A）$E[(X-C)^2]=E(X^2)-C^2$.　（B）$E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]$.

（C）$E[(X-C)^2]<E[(X-\mu)^2]$.　（D）$E[(X-C)^2]\geqslant E[(X-\mu)^2]$.

(E) 以上结论都不正确.

(二) 条件充分性判断

1. 设随机变量 X 的数学期望存在,可求 $E(CX^2)$ 的值.

(1) $E(X)=a$; (2) $D(X)=b$.

2. 随机变量 X 的期望值能够确定.

(1) $E\left(\frac{X^2}{2}-1\right)=2$; (2) $D\left(\frac{X}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$.

3. 对于随机变量 X,Y,必有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

(1) X,Y 相互独立; (2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

(三) 解答题

1. [2002 年Ⅱ 26] 假设小蛋糕中葡萄干的颗粒服从泊松分布. 若要使每个小蛋糕中至少有一颗葡萄干的概率为 0.99,则其平均应含有_____颗葡萄干(精确到 0.1).

2. 某种商品每周的需求量为随机变量 X,X 服从区间[10,30]上均匀分布. 经销售店进货量为 a,a 是区间[10,30]中的某一整数,商店每销售一单位商品可获利 500 元;若供大于求,则削价处理,每处理一单位商品亏损 100 元;若供不应求,则可从外部调剂供应,此时每单位商品仅获利用 300 元,为使商店所获利润期望值不少于 9280 元,试确定进货量 a 的范围.

4.2.3 几种常用的分布

1. 常用的离散型随机变量的分布

1) 二项分布

如果随机变量 X 取值为 $0,1,\cdots,n$,且其分布律为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n,\quad (4.2.3.1)$$

其中 $q=1-p$,$0<p<1$,则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布,记作 $X\sim B(n,p)$.

当 $n=1$ 时,二项分布退化为 0-1 分布,因而服从 0-1 分布的随机变量 X,其分布律也可以记作

$$P(X=k)=p^k q^{n-k},\quad (4.2.3.2)$$

其中 $k=0,1$ $(0<p<1)$,$q=1-p$。

二项分布多见于独立随机试验序列,若事件 A 发生的概率为 p,X 作为

n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数，则 X 服从 $B(n,p)$，记作 $X\sim B(n,p)$.

下面几类离散型随机变量的分布考纲中没有列入，仅供考生查阅.

* 2）几何分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots,0<p<1,q=1-p, \tag{4.2.3.3}$$

则称 X 服从参数为 p 的几何分布.

* 3）超几何分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P(X=m)=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n,\ m=0,1,\cdots,l, \tag{4.2.3.4}$$

其中 $l=\min(M,n)$，$n\leqslant N-M$，则称 X 服从超几何分布.

* 4）泊松分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,\cdots,\lambda>0, \tag{4.2.3.5}$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布.

2. 常用的连续型随机变量的分布

1）正态分布

正态分布在所有的分布中具有特殊的重要性. 如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty, \tag{4.2.3.6}$$

其中 μ,σ 为常数，且 $\sigma>0$，则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 其分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty, \tag{4.2.3.7}$$

如果 $X\sim N(0,1)$，称 X 服从标准正态分布，用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 分别表示服从标准正态分布的随机变量 X 的概率密度和分布函数，即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2},\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{4.2.3.8}$$

$$\Phi(x)=P(X\leqslant x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t. \tag{4.2.3.9}$$

下面几类连续型随机变量的分布考纲中没有列入，仅供考生查阅.

* 2）均匀分布

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{4.2.3.10}$$

则称 X 在区间$[a,b]$上服从均匀分布，记作 $X\sim U[a,b]$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b。\end{cases} \tag{4.2.3.11}$$

* 3）指数分布

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(\lambda>0), \tag{4.2.3.12}$$

则称 X 服从参数为λ 的指数分布，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases} \tag{4.2.3.13}$$

* 4）对数正态分布

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 μ,σ 均为常数，且 $\sigma>0$，则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的对数正态分布.

题型一　求服从二项分布的随机变量取值的概率

凡涉及的数量指标为正整数（例如次数、个数等）的有关问题，都是与二项分布有关的问题. 求解此类问题，首先要设出服从二项分布的随机变量 X，然后求出参数 n 和 p，有时还需通过其他（离散型或连续型）随机变量的分布或题设求出二项分布的参数 p，最后利用式(4.2.3.1)求出 X 取值的概率.

式(4.2.3.1)中有四个互相联系的数量指标：试验总次数 n、事件 A 出现的次数 k、相应的概率 $P(X=k)$及一次试验中事件 A 出现的概率 p，知道其中三个就可求出另一个. 不少情况是 n 已知但 p 未知，在求其未知参数 p 时，又涉及另一个随机变量有关事件的概率计算.

例 1 [2004 年 Ⅰ 27] 某种疾病自然痊愈率为 0.10，为了检验一种治疗该病的新药是否有效，将它给患该病的 10 位自愿者服用．假定判定规则是若 10 名自愿者中至少有 3 人痊愈，则认为该药有效，否则认为完全无效。按此规则，新药实际上完全无效却判为有效的概率为

(A) 0.01. (B) 0.02. (C) 0.03. (D) 0.05. (E) 0.07.

解 设事件 A 表示新药实际上完全无效的事件，事件 B 表示新药被判为有效的事件，又设 10 名患者中痊愈的人数为随机变量 X，则 $X\sim B(n,p)$，即服从以 n,p 为参数的二项分布，其中 $n=10$，$p=0.1$，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(B|A)&=P(X\geqslant 3)=1-P(X\leqslant 2)\\&=1-C_{10}^{0}p^{0}(1-p)^{10}-C_{10}^{1}p(1-p)^{9}-C_{10}^{2}p^{2}(1-p)^{8}\\&=1-0.9^{10}-10\times 0.1\times 0.9^{9}-[(10\times 9)/2]\times 0.1^{2}\times 0.9^{8}\\&=0.07.\end{aligned}$$

仅(E)入选．

例 2 设随机变量 X 服从参数为$(2,p)$的二项分布，随机变量 Y 服从参数为$(3,p)$的二项分布，若 $P(X\geqslant 1)=5/9$，则 $P(Y\geqslant 1)=$_____．

解 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-C_{2}^{0}p^{0}(1-p)^{2}=1-(1-p)^{2}=5/9$，故 $1-p=\sqrt{4/9}=2/3$，即 $p=1/3$。因而

$$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-C_{3}^{0}p^{0}(1-p)^{3}=19/27.$$

例 3 设 X 服从二项分布 $B(n,p)$，且已知

$$P(X=1)=P(X=2)=2P(X=3),$$

则 $P(X=4)$等于

(A) 1/81. (B) 2/243. (C) 2/81. (D) 10/243. (E) 19/243.

解 由于 n,p 未知，需先求出 n,p，才能求出 $P(X=4)$。由式(4.2.3.1)及

$$P(X=1)=P(X=2)$$

得到 $$C_{n}^{1}p^{1}(1-p)^{n-1}=C_{n}^{2}p^{2}(1-p)^{n-2},$$

即 $$np(1-p)^{n-1}=[n(n-1)/2]p^{2}(1-p)^{n-2},$$

于是 $$(n+1)p=2。\qquad①$$

又由 $$P(X=2)=2P(X=3)$$

得 $$[n(n-1)/2]p^{2}(1-p)^{n-2}=[n(n-1)(n-3)/3]p^{3}(1-p)^{n-3},$$

即 $$(2n-1)p=3。\qquad②$$

联立式①与式②，解得 $n=5$，$p=1/3$．于是

$$P(X=4)=C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}=C_5^1\ \frac{2}{3^5}=\frac{10}{243}.$$ 仅(D)入选.

例 4(条件充分性判断) 若 $P(X\geqslant 1)=5/9$,则 $P(Y\geqslant 1)=65/81$.

(1)$X\sim B(2,p)$; (2)$Y\sim B(4,p)$.

解 显然条件(1)和条件(2)单独都不充分. 设条件(1)和条件(2)都成立,则因为 $X\sim B(2,p)$,并且 $P(X\geqslant 1)=5/9$,有

$$P(X<1)=P(X=0)=4/9=(1-p)^2,$$

故 $p=1/3$. 因此

$$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-(1-p)^4=1-(2/3)^4=65/81.$$ 仅 C 入选.

例 5 随机变量 $X\sim B(4,p)$,已知 $E(X-2)(X+1)=1$,求 $P(X\geqslant 1)$.

解 计算二项分布随机变量 X 取值的概率需已知其分布参数 n,p,从题设知 $n=4$,应先求出 p 的值. 因为 $X\sim B(4,p)$,所以

$$E(X)=4p,\quad E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4pq+16p^2,$$

$$E(X-2)(X+1)=E(X^2)-E(X)-2=16p^2+4pq-4p-2$$

$$=16p^2-4p^2-2=12p^2-2.$$

依题意 $12p^2-2=1$, $p=1/2$(负根已舍去).

$$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^4=15/16.$$

例 6(条件充分性判断) $P(X\leqslant 3)=P(X>6)$.

(1) 随机变量 X 服从 $n=10,p=0.2$ 的二项分布;

(2) 随机变量 X 服从 $n=10,p=0.8$ 的二项分布.

解 当条件(1)和条件(2)单独成立时,它们均不充分,但当它们联合起来却是充分的. 由 $C_{10}^k=C_{10}^{10-k}$ 得到

$$P(X\leqslant 3)=\sum_{k=0}^{3}C_n^k p^k(1-p)^{10-k}=\sum_{k=0}^{3}C_{10}^{10-k}(0.2)^k(0.8)^{10-k}$$

$$=C_{10}^{10}(0.2)^0(0.8)^{10}+C_{10}^{9}(0.2)(0.8)^9+C_{10}^{8}(0.2)^2(0.8)^8$$

$$+C_{10}^{7}(0.2)^3(0.8)^7,$$

$$P(X>6)=\sum_{k=7}^{10}C_{10}^k p^k(1-p)^{10-k}=\sum_{k=7}^{10}C_{10}^k(0.8)^k(0.2)^{10-k}$$

$$=C_{10}^{7}(0.8)^7(0.2)^3+C_{10}^{8}(0.8)^8(0.2)^2+C_{10}^{9}(0.8)^9(0.2)$$

$$+C_{10}^{10}(0.8)^{10}(0.2)^0,$$

因而有 $P(X\leqslant 3)=P(X>6)$. 仅 C 入选.

或令 $k=10-t$,则 $k=7,8,9,10$ 时,有 $t=3,2,1,0$,且

$$P(X>6)=\sum_{k=7}^{10}C_{10}^k(0.8)^k(0.2)^{10-k}=\sum_{t=0}^{3}C_{10}^{10-t}(0.8)^{10-t}(0.2)^t$$

$$=\sum_{k=0}^{3}C_{10}^{10-k}(0.2)^k(0.8)^{10-k}=P(X\leqslant 3)。$$

例 7 如用 X,Y 分别表示将一个硬币接连掷 8 次正、反面出现的次数，则 t 的一元二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有重根的概率等于

(A) 35/128. (B) 5/64. (C) 7/64. (D) 9/64. (E) 9/128.

解 因 X,Y 是随机变量，则{方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有根或无根}是一个随机事件．由韦达定理知，这个事件与事件$\{X^2-4Y\geqslant 0\}$或$\{X^2-4Y\leqslant 0\}$是同一事件，因而可把方程有根或无根的概率利用判别式转化为随机变量 X,Y 在某范围内取值的概率，为此需先知道随机变量的概率函数或密度函数．

$$\{\text{方程 } t^2+Xt+Y=0 \text{ 有至根}\}\Leftrightarrow X^2-4Y=0\Leftrightarrow X^2=4Y,$$

其中 $X\sim B(8,1/2)$，$Y=8-X$，故所求概率为

$$P(X^2=4Y)=P(X^2=4(8-X))=P(X^2+4X-32=0)$$
$$=P((X+8)(X-4)=0)$$

因 X,Y 的取值为零或自然数，故

$$P(X^2=4Y)=P(X=4)=C_8^4(1/2)^4(1-1/2)^4=C_8^4(1/2)^8=35/128.$$

仅(A)入选．

题型二 已知随机变量服从二项分布，且满足其他条件，确定分布参数

设 $X\sim B(n,p)$，可利用参数 n,p 与其期望、方差之间的关系 $E(X)=np$，$D(X)=npq$ 求之。

如果已知 n，只需求出 p，求参数 p 时常涉及服从另一分布的随机变量取值概率的计算．

例 8(条件充分性判断) 设 $X\sim B(n,p)$，能确定 n,p 的值．

(1) $D(2X)=E(2X)$； (2) $D(X-2)=E(X-2)$.

解 由条件(1)可得 $4D(X)=2E(X)$，从而

$$4npq=2np,\quad 4q=2,\quad q=1/2,\quad p=1/2, \qquad ①$$

即条件(1)只能确定 p，无法确定 n.

由条件(2)有 $$D(X)=E(X)-2,$$

$$npq=np-2, \qquad ②$$

条件(2)也不能确定 n 和 p. 但当条件(1)与条件(2)联合时，将式①代入式②得到 $n/4=n/2-2$，从而 $n=8$。条件(1)、(2)联合起来充分。仅 C 入选．

例 9(条件充分性判断) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 三次重复观察中事件 $\{X\leqslant a\}$ 出现的次数，则 $P(Y=2)=9/64$.

(1) $a=1/3$；　　(2) $a=1/2$.

解　设 $P(X\leqslant a)=p$，则 $p=\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}2x\mathrm{d}x=a^2$。

$$P(Y=2)=C_3^2p^2(1-p)=3(p^2-p^3)=9/64,$$

当 $a=1/2$ 时，$p^2-p^3=3/64$；当 $a=1/3$ 时，$p^2-p^3=8/729\neq 3/64$. 仅 B 入选.

例 10　设随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则分布的参数为

(A) $n=8$，$p=0.3$.　　(B) $n=4$，$p=0.6$.　　(C) $n=6$，$p=0.4$.

(D) $n=2.4$，$p=0.1$.　　(E) 以上结论都不正确.

解　由题设有

$$E(X)=np=2.4,\qquad ①$$

$$D(X)=np(1-p)=1.44,\qquad ②$$

②÷①得到 $1-p=1.44/2.4=0.6$，故 $p=1-0.6=0.4$. 代入式①得到 $n=2.4/0.4=6$. 仅(C)入选.

例 11(条件充分性判断)　若 $P(X\geqslant 1)=5/9$，则 $P(Y\geqslant 1)=65/81$.

(1) $X\sim B(2,p)$；　　(2) $Y\sim B(4,p)$.

解　显然条件(1)和条件(2)单独都不充分.

设条件(1)和条件(2)都成立，则因为 $X\sim B(2,p)$，并且 $P(X\geqslant 1)=5/9$，所以　　$P(X=0)=1-p(X\geqslant 1)=1-5/9=4/9$。

另一方面，有

$$P(X=0)=C_2^0 2^0(1-p)^2=(1-p)^2,$$

由 $(1-p)^2=4/9$ 得 $p=1/3$. 故

$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-(1-p)^4=1-(2/3)^4=65/81$. 仅 C 入选.

例 12(条件充分性判断)　设随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布，则 $n=5$，$p=0.2$.

(1) $P(X=1)=2P(X=2)$；　　(2) $E[(X-1)(X-2)]=0.8$.

解　由题设条件及条件(1)成立时，有

$$C_n^1p(1-p)^{n-1}=2C_n^2p^2(1-p)^{n-2},$$

化简得

$$np=1,\qquad ①$$

由题设有　　$E(X)=np$，　$D(X)=np(1-p)$，

故 $$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=np(1-p)+(np)^2.$$

当条件(2)成立时有

$$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2$$
$$=np(1-p)+(np)^2-3np+2=0.8。 \qquad ②$$

由式②易知,条件(1)不能确定 n,p 的值. 条件(2)也不充分。但当条件(1)和条件(2)联合起来后,则条件充分,事实上,将式①代入式②得到

$$(1-p)+1-3+2=0.8,$$

即 $p=0.2$,因而 $n=5$. 仅 C 入选.

题型三　计算服从二项分布的随机变量或其函数的期望、方差、标准差

设 $X\sim B(n,p)$,由 $E(X)=np$, $D(X)=npq$, $\sqrt{D(X)}=\sqrt{npq}$, $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 知,归结为求二项分布的参数 n,p.

也可用期望的定义 4.2.2.1 及定义 4.2.2.3 求之.

例 13[2004 年 Ⅱ 23](条件充分性判断)　随机变量 $3X$ 的数学期望 $E(3X)=1$.

(1) 随机变量 X 的密度数 $f(x)=\begin{cases}1/2, & 0<x<2/3,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(2) 随机变量 X 的概率函数是

$$f(x)=C_{10}^{x}\left(\frac{1}{30}\right)^{x}\left(\frac{29}{30}\right)^{10-x}\quad(x=0,1,\cdots,10)。$$

解　当条件(1)成立时,由定义 4.2.2.2 有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

故 $$E(3X)=3E(X)=3(1/3)=1.$$

条件(1)充分. 当条件(2)成立时有

$$E(X)=np=10\times(1/30)=1/3,$$

故 $$E(3X)=3E(X)=3\times(1/3)=1.$$ 仅 D 入选.

例 14　从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是 2/5. 设 X 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

解　设 $A=\{$途中遇到红灯$\}$,由题设知 $n=3$, $p=P(A)=2/5$. 由独立性知,$X\sim B(3,2/5)$. 其各种取值的概率为

$$P(X=0)=C_3^0(2/5)^0(1-2/5)^3=27/125,$$
$$P(X=1)=C_3^1(2/5)(1-2/5)^2=54/125,$$
$$P(X=2)=C_3^2(2/5)^2(1-2/5)=36/125,$$
$$P(X=3)=C_3^3(2/5)^3(1-2/5)^0=8/125.$$

即 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	27/125	54/125	36/125	8/125

由 X 的分布函数的定义

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_k\leqslant x}P(X=x_k)$$

得到

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 27/125, & 0\leqslant x<1,\\ 81/125, & 1\leqslant x<2,\\ 117/125, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

X 的数学期望为

$$E(X)=np=3\times 2/5=6/5.$$

或由定义 4.2.2.1 得到

$$E(X)=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{6}{5}.$$

注意 将分布函数写成分段函数时，不要写错分段区间.

例 15（条件充分性判断） 随机变量 X 的期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 相等.

(1) X 服从参数 $p=0.5$ 的 0-1 分布；

(2) X 服从参数为 $n=200$，$p=1/2$ 的二项分布.

解 当条件(1)成立时，由命题 4.2.2.3 知，$E(X)=p=0.5$，$D(X)=pq=1/4=0.25$，显然 $E(X)\neq D(X)$. 条件(1)不充分.

当条件(2)成立时，$E(X)=np=100$，$D(X)=npq=50$，$E(X)\neq D(X)$. 条件(2)也不充分. 仅 E 入选.

例 16 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim B(10,0.3)$，$Y\sim B(10,0.4)$，则 $E(2X-Y)^2=$

(A) 12.6. (B) 14.8. (C) 15.2. (D) 18.9. (E) 20.1.

解 由题设可得

$$E(X)=np=10\times0.3=3,\quad D(X)=npq=10\times0.3\times0.7=2.1,$$

$$E(Y)=10\times0.4=4,\quad D(Y)=10\times0.4\times0.6=2.4,$$

故
$$\begin{aligned}E(2X-Y)^2&=[E(2X-Y)]^2+D(2X-Y)\\&=[2E(X)-E(Y)]^2+4DX+DY\\&=(2\times3-4)^2+4\times2.1+2.4=14.8.\end{aligned}$$

例 17 求事件在 n 次独立试验中发生次数的数学期望及方差，如果它在第 i 次试验中发生的概率为 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$.

解 设在第 i 次试验中事件发生的次数是随机变量 ξ_i，则 ξ_i 只有两个可能值 0 与 1. 当事件发生时，$\xi_i=1$，对应的概率为 $P(\xi_i=1)=p_i$，当事件不发生时，$\xi_i=0$，对应的概率 $P(\xi_i=0)=1-p_i$. 由命题 4.2.2.3 即得

$$E(\xi_i)=E(\xi_i^2)=p_i,\quad D(\xi_i)=p_i(1-p_i)。$$

在 n 次试验中事件发生的次数为 ξ，则 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. 于是

$$E\xi=E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=\sum_{i=1}^{n}p_i,$$

$$D\xi=D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i).$$

题型四　计算服从正态分布的随机变量落入区间内的概率

定理 4.2.3.1　(1) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，则

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\quad F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

其中 $\varphi(X)$，$\Phi(x)$ 分别为服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量的概率密度和分布函数.

(2) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. 由此通过标准化将 $F(x)$ 的值转换成 $\Phi(x)$ 的值 $F(x)=\Phi\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)$，而后者可查表求出其值. 这样就可算出一般正态分布的分布函数值和有关概率.

类型(一)　已知分布参数，求正态分布随机变量落入区间内的概率.

常用下述两法求之.

法一　将随机变量标准化，利用标准正态分布求概率.

当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，由定理 4.2.3.1(2) 知 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. 于是得到

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)。$$

常称随机变量 Y 为标准化随机变量，或说将随机变量 X 标准化．因 $\Phi(x)$ 的值可查表求得，利用上式即可计算服从正态分布的随机变量在某一区间内取值的概率，将随机变量标准化是计算概率普遍适用的一条法则，应熟练使用．

一般将随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 标准化得到 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 后，常利用下述各式将其概率的计算转化为查表求 $\Phi(x)$ 的值：

$$P(Y\leqslant x)=\begin{cases}\Phi(x), & x>0,\\ 0.5, & x=0,\\ 1-\Phi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad(4.2.3.14)$$

$$P(|Y|\leqslant x)=2\Phi(x)-1(\text{当 } x>0 \text{ 时})。\qquad(4.2.3.15)$$

$$P(a<Y\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)。\qquad(4.2.3.16)$$

只有一些特殊的 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$ 的值不用查表．

当 $x\geqslant 5$ 时，$\Phi(x)\approx 1$，特别 $\Phi(+\infty)=F(+\infty)=1$；当 $x\leqslant -5$ 时，$\Phi(x)\approx 0$，特别

$$\Phi(-\infty)=F(-\infty)=0,\quad \Phi(0)=F(\mu)=1/2。$$

例 18 设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布，已知

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t,\quad \Phi(25)=0.9938,$$

则 X 落在区间 $(9.95,10.05)$ 内的概率为_____．

解 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu=10,\sigma=0.02$，即 $X\sim N(10,0.02^2)$。将随机变量 X 标准化，得到

$$Y=\frac{X-10}{0.02}\sim N(0,1).$$

因而
$$\begin{aligned}P(9.95<X<10.05)&=P\left(\frac{9.95-10}{0.02}<\frac{X-10}{0.02}<\frac{10.05-10}{0.02}\right)\\&=P\left(-2.5<\frac{X-10}{0.02}<2.5\right)\\&=\Phi(2.5)-\Phi(-2.5)=\Phi(2.5)-1+\Phi(2.5)\\&=2\Phi(2.5)-1=1.9876-1=0.9876,\end{aligned}$$

或
$$P(9.95<X<10.05)=P\left(-2.5<\frac{X-10}{0.02}<2.5\right)$$

$$=P\left(\left|\frac{X-10}{0.02}\right|<2.5\right)$$

$$=2\Phi(2.5)-1=2\cdot 0.9938-1$$

$$=0.9876\ (\text{用式}(4.2.3.15))。$$

例 19 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,4)$，则 $P(|X|<2)=$

(A) $2\Phi(2)-1$.　(B) $\Phi(1.5)+\Phi(0.5)-1$.　(C) $\Phi(1.5)-\Phi(0.5)$.

(D) $\Phi(0.25)-\Phi(0.75)$.　(E) $\Phi(2)-\Phi(1.5)$.

解 仅(B)入选．因 $X\sim N(1,4)$，故

$$P(|X|<2)=P(-2<X<2)=P\left(\frac{-2-1}{2}<\frac{X-1}{2}<\frac{2-1}{2}\right)$$

$$=P\left(-\frac{3}{2}<\frac{X-1}{2}<\frac{1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\Phi(0.5)-[1-\Phi(3/2)]=\Phi(1.5)+\Phi(0.5)-1。$$

注意 $X\sim N(1,4)$时，$P(|X|<2)\neq P\left(\frac{|X-1|}{2}<\frac{2-1}{2}\right)$。

例 20 设某科统考成绩 X 近似服从正态分布 $N(70,10^2)$，且第 100 名的成绩为 60 分。问第 20 名的成绩约为多少分(假设没有并列第 20 名)？

解 $P(X\geqslant 60)=1-P(X<60)=1-\Phi\left(\frac{60-70}{10}\right)=1-\Phi(-1)$

$$\approx 0.8413.$$

这说明成绩在 60 和 60 分以上的考生(共 100 名)，在全体考生中占 84.13%．因此，考生总数大致为 $\frac{100}{0.8413}\approx 119$(名)．

故前 20 名考生在全体考生中的比率大致为 $\frac{20}{119}\approx 0.1681$.

设分数 S 为第 20 名考生的成绩，它满足

$$P(X\geqslant S)=1-\Phi\left(\frac{S-70}{10}\right)\approx 0.1681.$$

从而 $\Phi\left(\frac{S-70}{10}\right)\approx 0.8319$，查表可得 $\frac{S-70}{10}\approx 0.96$．于是，第 20 名考生分数 $S\approx 79.6$.

法二　利用正态概率密度的对称性计算概率．

正态概率密度曲线式(4.2.3.6)关于直线 $x=\mu$ 对称，故下述命题成立。

命题 4.2.3.1　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则对任意 $k>0$，有

(1) $P(\mu-k<X<\mu)=P(\mu<X<\mu+k)$。(在关于 $x=\mu$ 对称区间上 X 取值的概率相等.)

(2) $P(X\leqslant\mu)=P(X\geqslant\mu)=1/2$,即

$$\int_{+\infty}^{\mu} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

(在直线 $x=\mu$ 两边的两块面积相等,且都等于 1/2.)

例 21 $\xi\sim N(1,1)$,其概率密度记作 $f(x)$,则

(A) $P(\xi\leqslant 0)=P(\xi\geqslant 0)=0.5$.

(B) $f(x)=f(-x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(C) $P(\xi\leqslant 1)=P(\xi\geqslant 1)=0.5$.

(D) $F(x)=1-F(-x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

解 因 $\xi\sim N(1,1)$,故 $\mu=1$,曲线 $f(x)$ 关于 $\mu=0$(y 轴)不对称,即 $f(x)$ 不是偶函数,(B)不成立.(A)也不成立,(D)也不成立。因曲线 $f(x)$ 关于直线 $x=\mu=1$ 对称,由命题 4.2.3.1(2)知(C)成立. 仅(C)入选。

例 22(条件充分性判断) 设随机变量 X 服从均值为 2,方差为 σ^2 的正态分布,$P(X<0)=0.2$.

(1) $P(2<X<4)=0.3$; (2) $P(0\leqslant X\leqslant 2)=0.3$.

解 当条件(1)成立时,因 $X\sim N(2,\sigma^2)$,其概率密度曲线

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

关于直线 $x=2$ 对称,因而

$$P(0\leqslant X<2)=P(2<X<4)=0.3。$$

又因 $$P(X\leqslant 2)=F(2)=1/2,$$

故 $$P(X<0)+P(0\leqslant X<2)=0.5.$$

因而 $$P(X<0)=0.5-P(0\leqslant X<2)=0.5-0.3=0.2.$$

条件(1)充分. 当条件(2)成立时,同理可知由 $P(X\leqslant 2)=0.5$ 得到

$$P(X<0)=0.5-P(0\leqslant X<2)=0.5-0.3=0.2,$$

条件(2)也充分。仅 D 入选.

例 23 某种电子元件的寿命 X(单位:小时)服从正态分布 $N(500,40^2)$。一只该种元件在工作 500 小时未失效的条件 n,还能再工作 100 小时的概率是

(A) 0.0124. (B) 0.0134. (C) 0.0144. (D) 0.0154. (E) 0.0164.

（附标准正态分布函数表如下。）

x	2.30	2.35	2.45	2.50
$\Phi(x)$	0.9893	0.9906	0.9929	0.9938

解 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，由于其概率密度是关于直线 $x=\mu$ 对称，由命题 4.2.3.1(2)知

$$P(X\geqslant\mu)=P(X\leqslant\mu)=0.5,$$

即

$$P(X>500)=P(X\leqslant 500)=0.5.$$

$$P(X>500+100)=1-P(X\leqslant 600)=1-\Phi\Big(\frac{600-500}{40}\Big)$$

$$=1-\Phi(2.5)=0.0062,$$

$$P(X>600\mid X>500)=\frac{P(X>600,X>500)}{P(X>500)}=\frac{P(X>600)}{P(X>500)}$$

$$=0.0062/0.5=0.0124.$$ 仅(A)入选。

例 24[2003 年 Ⅱ 34] 已知 $X\sim N(15,4)$. 若 X 的值落入区间$(-\infty,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,+\infty)$内的概率之比为 7∶24∶38∶24∶7，则 x_1,x_2,x_3,x_4 分别为

(A)12,13.5,16.5,18. (B)11.5,13.5,16.5,18.5.

(C)12,14,16,18. (D)11,14,16,19. (E)以上结论都不正确.

注 $\Phi(1.5)=0.93,\Phi(0.5)=0.69$.

解 记 $p_1=P(X<x_1)$, $p_2=P(x_1<X<x_2)$, $p_3=P(x_2<X<x_3)$,

$$p_4=P(x_3<X<x_4),\quad p_5=P(X>x_4),$$

依题意有

$$p_1=P(X<x_1)=\frac{7}{7+24+38+24+7}=\frac{7}{100}=0.07,\quad p_2=\frac{24}{100}=0.24,$$

$$p_3=\frac{38}{100}=0.38,\quad p_4=\frac{24}{100}=0.24,\quad p_5=\frac{7}{100}=0.07.$$

因 $X\sim N(15,2^2)$，将 X 标准化，得到

$$p_1=P(X<x_1)=P\Big(\frac{X-15}{2}<\frac{x_1-15}{2}\Big)=\Phi\Big(\frac{x_1-15}{2}\Big)$$

$$=0.07=1-0.93=1-\Phi(1.5)=\Phi(-1.5),$$

于是 $(x_1-15)/2=-1.5$, 即 $x_1=15-3=12.$

又

$$0.24=P(x_1<X<x_2)=P\Big(\frac{x_1-15}{2}<\frac{X-15}{2}<\frac{x_2-15}{2}\Big)$$

$$=\Phi\left(\frac{x_2-15}{2}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-15}{2}\right),$$

即
$$\Phi\left(\frac{x_2-15}{2}\right)=\Phi\left(\frac{x_1-15}{2}\right)+0.24=\Phi\left(\frac{12-15}{2}\right)+0.24$$
$$=\Phi(-3/2)+0.24=\Phi(-1.5)+0.24$$
$$=1-\Phi(1.5)+0.24=1-0.93+0.24=0.31$$
$$=1-0.69=1-\Phi(0.5)=\Phi(-0.5),$$

故 $(x_2-15)/2=-0.5$，即 $x_2=15-1=14$.

由
$$P(X<x_1)=0.07=P(X>x_4),$$
$$P(x_1<X<x_2)=0.24=P(x_3<X<x_4),$$

可知区间$(-\infty,x_1)$与$(x_4,+\infty)$，(x_1,x_2)与(x_3,x_4)关于直线 $x=\mu=15$ 对称(见图 4.2.3.1)。

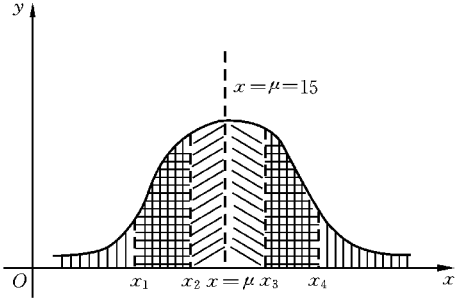


图 4.2.3.1

又已求出 $x_2=14$，因而 $x=\mu=15$ 必在区间(x_2,x_3)的对称线上. 于是必有 $x_3=15+1=16$，因而 $x_4=16+2=18$. 仅(C)入选.

类型(二) 分布参数未知，求正态分布随机变量取值概率。

分布参数常有一个未知，应先根据已知条件，使用“标准化”方法确定该未知参数，然后再用本题型类型(一)中所述各法求其概率.

例 25 设随机变量 X 和 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P(X\leqslant\mu-4)$，$p_2=P(Y\geqslant\mu+5)$，则有

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$. (B) 对任何实数 μ 都有 $p_1>p_2$.

(C) 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$. (D) 只有当 $\mu=0$ 时才有 $p_1=p_2$.

(E) 只有对 μ 的个别值才有 $p_1>p_2$.

解 对随机变量 X,Y 先标准化，再计算 p_1 与 p_2，比较其大小.

$$p_1=P(X\leqslant\mu-4)=P\left(\frac{X-\mu}{4}\leqslant-1\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1),$$

$$p_2=P(Y\geqslant\mu+5)=1-P(Y<5+\mu)=1-P\left(\frac{Y-\mu}{5}\leqslant1\right)=1-\Phi(1),$$

故对 μ 的任意值都有 $p_1=p_2$. 仅(A)入选.

例 26(条件充分性判断) 随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$**可以确定**

$$P(2<X\leqslant4)=0.3。$$

(1) $P(X\leqslant0)=0.2$; (2) $P(X\leqslant3.96)=0.975$。

解 **因** $X\sim N(2,\sigma^2)$**,若条件(1)成立,则**

$$P(X\leqslant0)=P\left(\frac{X-2}{\sigma}\leqslant\frac{0-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{-2}{\sigma}\right)=0.2,$$

$$P(2<X\leqslant4)=P\left(\frac{2-2}{\sigma}<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{4-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)=1-0.2-0.5=0.3。$$

条件(1)充分。当条件(2)成立时,有

$$P(X\leqslant3.96)=P\left(\frac{X-2}{\sigma}\leqslant\frac{3.96-2}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-2}{\sigma}\leqslant\frac{1.96}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{1.96}{\sigma}\right)=0.975,$$

因 $\Phi(1.96)=0.975$**,故** $1.96/\sigma=1.96$**,因而** $\sigma=1$**,则**

$$P(2<X\leqslant4)=P\left(\frac{2-2}{1}\leqslant\frac{X-2}{1}\leqslant\frac{4-2}{1}\right)=\Phi(2)-\Phi(0)$$

$$=0.99725-0.5\neq0.3。$$

条件(2)不充分。仅 A 入选.

例 27 **某地抽样调查结果表明,考生的外语成绩(百分制)近似正态分布,平均成绩为 72 分,96 分以上的占考生总数的 2.3%,试求:(1)考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率;(2)该地外语考试的及格率;(3)若已知第三名的成绩是 96 分,求不及格人数.(附标准正态分布函数表如下。)**

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

解 **设** X **为考生的外语成绩,由题设** $X\sim N(27,\sigma^2)$**,其中标准差** σ **待定.将随机变量标准化得到**

$$0.023=P(X\geqslant96)=P\left(\frac{X-72}{\sigma}\geqslant\frac{96-72}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right),$$

即 $$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.977.$$

由附表查得 $24/\sigma=2,\sigma=12,\quad X\sim N(72,12^2).$

(1) 将随机变量标准化,即得所求概率为

$$P(60\leqslant X\leqslant 84)=P\left(\frac{60-72}{12}\leqslant\frac{X-72}{\sigma}\leqslant\frac{84-72}{12}\right)=P\left(-1\leqslant\frac{X-72}{\sigma}\leqslant 1\right)$$

$$=P\left(\left|\frac{X-72}{\sigma}\right|\leqslant 1\right)=2\Phi(1)-1$$

$$=2\times 0.841-1=0.682.$$

(2) $P(X\geqslant 60)=1-\Phi\left(\frac{60-72}{12}\right)=1-\Phi(-1)=\Phi(1)$

$=0.8413=84.13\%$。

(3) 由(2)知不及格率为 $1-84.13\%=15.87\%$,且由题设知,如果全班人数为 n,则因 96 分以上的只有 2 人,故 $n=2/0.23$,于是不及格人数为

$$0.1587n=0.1587\times(2/0.023)\approx 14\ (\text{人}).$$

类型(三) 已知 X 为正态分布随机变量,求其函数 $g(X)$ 落入区间内的概率.

应将 $g(X)$ 的取值转化为 X 的取值,而 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其概率可以算出.

对服从对数正态分布的随机变量取值概率的计算问题可转化为服从一般正态分布的随机变量的取值概率的计算。事实上,如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=e^X$ 服从对数正态分布,也就是说服从对数正态分布的随机变量 Y,取对数得 $\ln Y=X$ 就服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

命题 4.2.3.2 (1)如果随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=e^X$ 服从参数为 μ 和 σ^2 的对数正态分布;

(2)如果随机变量 Y 服从参数为 μ,σ^2 的对数正态分布,则 $X=\ln Y$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

例 28 设随机变量 $X^3\sim N(1,7^2)$,则 $P(1<X<2)$ 等于

(A) $\Phi(2)-\Phi(1)$. (B) $\Phi(\sqrt[3]{2})-\Phi(1)$. (C) $\Phi(1)-1/2$.

(D) $\Phi(\sqrt[3]{3})-\Phi(\sqrt[3]{2})$. (E) 以上结论都不正确.

解 $P(1<X<2)=P(1=1^3<X^3<2^3=8)=P(1<X^3<8)$

$$=P\left(\frac{1-1}{7}<\frac{X^3-1}{7}<\frac{8-1}{7}\right)=P\left(0<\frac{X^3-1}{7}<1\right)$$

$=\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi(1)-1/2$. 仅(C)入选.

例 29　设 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-1)^2}{8}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

试求 $P(1/2<X<2)$.

解　显然，X 是服从参数为 $\mu=1,\sigma^2=4$ **的对数正态分布的随机变量，由对数正态分布与正态分布的关系，即命题** 4.2.3.2(2) **知** $\ln X\sim N(1,2^2)$，**因而** $(\ln X-1)/2\sim N(0,1)$. **故**

$$\begin{aligned}P\Big(\frac{1}{2}<X<2\Big)&=P\Big(\ln\frac{1}{2}<\ln X<\ln 2\Big)\\&=P\Big(\frac{\ln(1/2)-1}{2}<\frac{\ln X-1}{2}<\frac{\ln 2-1}{2}\Big)\\&=\Phi\Big(\frac{\ln 2-1}{2}\Big)-\Phi\Big(\frac{-\ln 2-1}{2}\Big)\\&=\Phi(-0.1535)-\Phi(-0.8466)\\&=\Phi(0.8466)-\Phi(0.1535)\approx 0.24.\end{aligned}$$

题型五　求正态分布随机变量或其函数的期望与方差

当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$**时，有** $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$.

此外还可利用期望与方差的性质与定义求之.

例 30　设 $X\sim N(-1,4)$，**则** $E(3-2X)^2$ **的值是**

(A) 4.　(B) 16.　(C) 17.　(D) 4.　(E) 46.

解法 1　利用 $E(3-2X)^2=D(3-2X)+[E(3-2X)]^2$ **求之.**

由 $E(X)=-1,D(X)=4$，**有**

$$E(3-2X)=3-2E(X)=5,\quad D(3-2X)=4D(X)=16.$$

故
$$E(3-2X)^2=D(3-2X)+[E(3-2X)]^2=16+5^2=41.$$

解法 2　$E(3-2X)^2=E(9-12X+4X^2)=9-12E(X)+4E(X^2)$，

而
$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4+(-1)^2=5,$$

故
$$E(3-2X)^2=9+12+20=41.$$

例 31[2004 **年** Ⅰ 15]**(条件充分性判断)　随机变量** X **的数学期望** $E(X)=0$.

(1) X **的密度函数** $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}/2$ $(-\infty<X<+\infty)$；

(2) X **的密度函数** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<X<+\infty)$.

解　因条件(1)、条件(2)中 $f(x)$ 均为偶函数，又 $E(X)$ 存在，由命题 4.2.2.4 知 $E(X)=0$. 仅 D 入选.

例 32(条件充分性判断)　$E(X)=6D(X)$.

(1) X 服从正态分布 $N(1,6)$；　(2) X 服从正态分布 $N(6,1)$.

解　若 $X\sim N(1,6)$，$E(X)=1$，$D(X)=6$，显然 $E(X)\neq 6D(X)$，从而条件(1)不充分.

若 X 服从正态分布 $N(6,1)$，则 $EX=6$，$D(X)=1$，故条件(2)是充分的。仅 B 入选.

例 33　设 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2-x-1}$，$-\infty<x<+\infty$，则 X 的数学期望和标准差分别为

(A) $\mu=2,\sigma=2$.　(B) $\mu=-2,\sigma=2$.　(C) $\mu=2,\sigma=\sqrt{2}$.

(D) $\mu=-2,\sigma=\sqrt{2}$.　(E) **以上结论都不正确.**

解　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\times 2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\times 2}(x^2+4x+4)}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\times 2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\times 2}(x+2)^2}$。

这是期望 $\mu=-2$，方差 $\sigma^2=2$ 的正态分布的密度函数，所以有

$$\mu=-2,\quad \sigma=\sqrt{2}.$$ **仅(D)入选.**

例 34　设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,1)$，$Y=\mathrm{e}^X$，求 Y 的数学期望 $E(Y)$ 与方差 $D(Y)$.

解　根据式(4.2.2.9)及命题(4.2.1.3(2))得到

$$E(Y)=E\mathrm{e}^X=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2x+1-2x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\times 1=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$$

$$E(Y^2)=E(\mathrm{e}^X)^2=E(\mathrm{e}^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2x+1-4x}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-3)^2-8}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-3)^2}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^4\times 1=\mathrm{e}^4.$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^3=\mathrm{e}^3(\mathrm{e}+1).$$

题型六　确定正态分布，使之满足一定要求

法一　利用标准化方法确定正态分布。

注意使用命题 4.2.2.4 确定之.

例 35(条件充分性判断) $P(X\leqslant a)$随 a 的增加而增大($a>0$).

(1) $X\sim N(1,a^2)$;　　(2) $X\sim N(-1,a^2)$.

解　当条件(1)成立时,有

$$P(X\leqslant a)=P\left(\frac{X-1}{a}\leqslant\frac{a-1}{a}\right)=\Phi\left(\frac{a-1}{a}\right)=\Phi\left(1-\frac{1}{a}\right)。$$

显然,$P(X\leqslant a)$随 a 增大而增大. 这是因为 $\Phi(x)$表示$(-\infty,x]$上 $\varphi(x)$与 x 轴所围成的面积,当 a 增大时,$1-1/a$ 增大,因而所围面积也增大. 条件(1)充分.

当条件(2)成立时,有

$$P(X\leqslant a)=P\left(\frac{X-(-1)}{a}\leqslant\frac{a-(-1)}{a}\right)=P\left(\frac{X+1}{a}\leqslant\frac{a+1}{a}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{a+1}{a}\right)=\Phi\left(1+\frac{1}{a}\right)。$$

当 a 增大时,$1+\frac{1}{a}$减小,因而 $\varphi(X)$与 x 轴所围面积减小,于是 $\Phi(1+1/a)$减小,即 $P(X\leqslant a)$也减小。条件(2)不充分. 仅 A 入选.

例 36(条件充分性判断)　随机变量 X 满足 $P(X\geqslant 1/2)=P(X\leqslant -1/2)$.

(1) $X\sim N(0,\sigma^2)$;　　(2) $X\sim N(1,\sigma^2)$.

解法 1　当条件(1)成立时,X 的概率密度函数为偶函数. 由命题 4.2.2.4(3)知条件(1)充分. 当条件(2)成立时,X 的概率密度函数不是偶函数,其曲线关于 $x=1$ 对称. 条件(2)不充分. 仅 A 入选.

解法 2　当条件(1)成立时,X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$,将其标准化得到 $\frac{X-0}{\sigma}=\frac{X}{\sigma}\sim N(0,1)$,于是

$$P\left(X\geqslant\frac{1}{2}\right)=1-P\left(X<\frac{1}{2}\right)=1-P\left(\frac{X-0}{\sigma}<\frac{1/2-0}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{2\sigma}\right),$$

而 $P\left(X\leqslant-\frac{1}{2}\right)=F\left(-\frac{1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{-1/2-0}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{2\sigma}\right)$

或　$P\left(X\leqslant-\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{X-0}{\sigma}\leqslant-\frac{1/2-0}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{2\sigma}\right)$,

故 $P(X\geqslant 1/2)=P(X\leqslant -1/2)$,条件(1)充分. 当条件(2)成立时,将 X 标准化得到$\frac{X-1}{\sigma}\sim N(0,1)$,于是

$$P\left(X\geqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{X-1}{\sigma}\geqslant\frac{1/2-1}{\sigma}\right)=1-P\left(\frac{X-1}{\sigma}\leqslant\frac{1/2-1}{\sigma}\right)$$

$$=1-\Phi\left[-\left(\frac{1}{2\sigma}\right)\right]=\Phi\left(\frac{1}{2\sigma}\right),$$

$$P\left(X\leqslant-\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{X-1}{\sigma}\leqslant\frac{-1/2-1}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{-1/2-1}{\sigma}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{3/2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)\neq\Phi\left(\frac{1}{2\sigma}\right)。$$

条件(2)**不充分.仅** A **入选.**

法二　利用分布参数的概率含义确定正态分布。

例 36[2003 **年** Ⅰ 18]**(条件充分性判断)　随机变量** X **的数学期望** $E(X)=\mu$.

(1) X **密度函数** $f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$ $(\lambda>0,-\infty<x<+\infty)$;

(2) X **密度函数** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $(\sigma>0,-\infty<x<+\infty)$.

解法 1　条件(1)**与条件**(2)**中的概率密度函数** $f(X)$**都关于直线** $x=\mu$ **对称,且** $E(X)$**存在,由命题** 4.2.2.4(2)**知,** $E(X)=\mu$**,条件**(1)**与条件**(2)**都充分.仅** D **入选.**

解法 2　显然密度函数 $g(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$ **为偶函数,其期望存在,由命题** 4.2.2.4(1)**知其期望为** $EX=0$**,而** $f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|X-\mu|}{\lambda}}$ **是对上述密度函数** $g(x)$**平移了** μ **个单位,因此期望期由** 0 **变至** μ**,即** $E(X)=\mu$. **由命题** 4.2.2.4(2)**知条件**(2)**也充分。仅** D **入选。**

法三　利用概率密度函数的对称性确定之.

命题 4.2.3.3　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0,\mu\neq0)$**,** $f(x)$**,** $F(x)$**分别为其概率密度函数、分布函数,则**

(1) $f(x)$**的函数图形关于直线** $x=\mu$ **对称,即对任何实数** a **有** $f(\mu-a)=f(\mu+a)$;

(2) **对任意** $x\in(-\infty,+\infty)$**,有** $F(\mu+x)+F(\mu-x)=1$.

命题 4.2.3.4　(1) **设** $X\sim N(0,1)$**,则** $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$;

(2) **设** $X\sim N(0,\sigma^2)$**,则** $F(x)+F(-x)=1$.

命题 4.2.3.4 **是下述命题的特殊情况.**

命题 4.2.3.5 设随机变量 X 具有关于 y 轴对称的概率密度函数 $p_X(x)$，即 $p_X(-x)=p_X(x)$，则对任意 $a\geqslant 0$，有

(1) $F(a)+F(-a)=1$，$F(-a)=1-F(a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a p_X(x)\mathrm{d}x$；

(2) $P(|X|<a)=2F(a)-1$；

(3) $P(|X|>a)=2[1-F(a)]$；

(4) $P(X>a)=P(X<-a)$.（该命题的证明详见 4.2.1 节例 14。）

例 37（条件充分性判断） 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，有 $P(|X|>1)=2[1-F(1)]$.

(1) $X\sim N(1,4)$； (2) $X\sim N(0,4)$.

解法 1 由命题 4.2.3.5(3)知，要使 $P(|X|>1)=2[1-F(1)]$ 成立，X 的概率密度函数关于 y 轴对称，$X\sim N(1,4)$ 时，其概率密度关于 $x=\mu=1$ 对称. 条件(1)不充分。当条件(2)成立时，其概率密度数关于 $\mu=0$ 即 y 轴对称，因而有 $P(|X|>1)=2[1-F(1)]$。条件(2)充分。仅 B 入选.

解法 2 $P(|X|>1)=P(X<-1)+P(X>1)$，而

$$P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-F(1)。$$

如果结论成立，则

$$P(X<-1)=2[1-F(1)]-P(X>1)=1-F(1)。$$

于是有 $P(X<-1)=P(X>1)$，而要此等式成立，由命题 4.2.3.5 知 X 的概率密度函数必为偶函数，因而 $N(\mu,\sigma^2)$ 中 μ 必须为零，这样从正态分布密度函数的图形直观推出，$X\sim N(0,4)$ 时才能得到

$$P(|X|>1)=2[1-F(1)].$$ 仅 B 入选。

例 38（条件充分性判断） 随机变量 X 的分布函数必满足

$$F(\mu+x)+F(\mu-x)=1\ (-\infty<X<+\infty)$$，其中 $\mu\neq 0$.

(1) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma>0$； (2) X 服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布，其中 $a>0$.

解 由命题 4.2.3.3(2)知当条件(1)成立，即 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，必有

$$F(\mu+x)+F(\mu-x)=1\ (-\infty<x<+\infty).$$

条件(1)充分，这时 X 的概率密度函数 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称，或当条件(1)成立，即 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，有

$$F(\mu+x)=P(X\leqslant\mu+x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{\mu+x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

$$P(\mu-X)=P(X\leqslant\mu-x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{\mu-x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

故 $F(\mu+x)+F(\mu-x)=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)=1$. 条件(1)充分.

当条件(2)成立时,X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/(2a), & -a\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$$

$f(x)$ 关于 $\mu=0$ 即 y 轴对称,因 $\mu\neq 0$,故条件(2)不充分. 仅 A 入选。

法四　利用下述定理确定之。

定理 4.2.3.2　若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$,$i=1,2,\cdots,n$,则对任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}k_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2\right)。$$

定理 4.2.3.2 可表述为独立正态的随机变量的线性组合仍为正态的随机变量,其参数 μ,σ^2 有下述关系:$\mu=\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i$,$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2$.

定理 4.2.3.3　(1) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则当 $a\neq 0$ 时,有

$$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2),$$

即正态随机变量 X 的线性函数 $aX+b$ 仍为正态的随机变量,其参数分别为 $a\mu+b$,$a^2\sigma^2$ $(a\neq 0)$.

(2) 若随机变量 X_1,X_2 相互独立,且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $(i=1,2)$,则对任意不全为零的两实数 a_1,a_2 及常数 b,有

$$a_1X_1+a_2X_2+b\sim N[a_1\mu_1+a_2\mu_2+b,(a_1\sigma_1)^2+(a_2\sigma_2)^2]。$$

例 39(条件充分性判断)　已知 $X\sim N(2,2^2)$,则 $aX+b\sim N(0,1)$。

(1) $a=1/2,b=-1$;　　(2) $a=-1/2,b=1$.

解法 1　由定理 4.2.3.3 知,当 $X\sim N(2,2^2)$ 时,有

$$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2).$$

当条件(1)成立时,有

$$X/2-1\sim N[(1/2)\times 2-1,(1/4)\times 2^2]=N(0,1)。$$

条件(1)充分. 当条件(2)成立时,有

$$-X/2+1\sim N[(-2/2)+1,(1/4)\times 2^2]=N(0,1).$$

条件(2)也充分. 仅 D 入选.

解法 2　设 $Y=aX+b$。当条件(1)成立时,将 a,b 代入,有

$$P(Y\leqslant y)=P\left(\frac{X}{2}-1\leqslant y\right)=P\left(\frac{X-2}{2}\leqslant y\right)=\Phi(y),$$

故 $Y=\frac{1}{2}X-1\sim N(0,1)$。**条件**(1)**充分**.

当条件(2)**成立时,将** a,b **的值代入得到**

$$P(Y\leqslant y)=P\left(-\frac{X}{2}+1\leqslant y\right)=P\left(-\frac{X-2}{2}\leqslant y\right)=P\left(\frac{X-2}{2}>-y\right)$$

$$=1-P\left(\frac{X-2}{2}\leqslant -y\right)=1-\Phi(-y)=\Phi(y)。$$

故 $Y\sim N(0,1)$. **条件**(2)**也充分。仅** D **入选**.

例 40(**条件充分性判断**)　**设随机变量** X **的分布函数为** $F(x)$,**则有**

$$P(|X|<1)=2F(1)-1。$$

(1) $X+1\sim N(0,1)$;　　(2)$X+1\sim N(1,1)$。

解　**由命题** 4.2.3.5(2)**知当** X **的概率密度关于** y **轴对称时,必有**

$$P(|X|<1)=2F(1)-1.$$

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,**由定理** 4.2.3.3(1)**有** $X+1\sim N(\mu+1,\sigma^2)$。**当条件**(1)**成立时,**$\mu+1=0,\sigma^2=1\times 1=1$,**故** $\mu=-1,\sigma^2=1$。**因而** $X\sim N(-1,1)$,**其概率密度函数关于** $\mu=-1$ **对称,关于** y **轴不对称。条件**(1)**不充分**。

当条件(2)**成立时,**$\mu+1=1,\sigma^2=1$,**于是** $\mu=0,\sigma^2=1,X\sim N(0,1)$,**其概率密度函数关于** y **轴对称。条件**(2)**充分。仅** B **入选**.

例 41　**设随机变量** X,Y **相互独立,都服从正态分布** $N(0,1/2)$,**则随机变量**$|X-Y|$**的方差为**

(A) $3-2/\pi$. (B) $2-2/\pi$. (C) $1-2/\pi$. (D) $-2/\pi$. (E) $1+2/\pi$.

解　**因** X,Y **相互独立,且都服从正态分布,由定理** 4.2.3.2 **知随机变量** $Z=X-Y$ **服从正态分布,且**

$$Z\sim N(0-0,1^2\sigma_1^2+(-1)^2\sigma_2^2)=N(0,(1+1)1/2)=N(0,1).$$

下求 $D(|Z|)$. **由** $D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2$ **知需先求** $E(|Z|)$**及** $E(|Z|^2)=E(Z^2)$.

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

由 $D(Z)=1, E(Z)=0$ 得到

$$E(|Z|^2)=E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=1+0=1,$$

因而 $D|X-Y|=D|Z|=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=1-2/\pi$. 仅(C)入选.

习 题 4.2.3

(一) 问题求解

1. 设 $X\sim B(1,0.5)$, $Y\sim B(10,0.6)$, 则 $E(6X+2Y)=$

(A) 15. (B) 9. (C) 4.2. (D) 17. (E) 12.

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 已知 $P(X\leqslant 2)=0.062$, $P(X\geqslant 9)=0.025$($\Phi(1.54)=0.938$, $\Phi(1.96)=0.975$), 则

(A) $\mu=0,\sigma=1$. (B) $\mu=0,\sigma=2$. (C) $\mu=1.54,\sigma=2$.

(D) $\mu=1.54,\sigma=1$. (E) $\mu=5.08,\sigma=2$。

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 σ 增大时, 概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$

(A) 单调增大. (B) 单调减小. (C) 保持不变. (D) 增减不变。

4. 设随机变量 X,Y 均服从正态分布, $X\sim N(\mu,4^2)$, $Y\sim N(\mu,5^2)$, 记

$$p_1=P(X\leqslant\mu-4),\quad p_2=P(Y\geqslant\mu+6),$$

则 (A) 对任何实数 μ, 都有 $p_1=p_2$. (B) 只对 μ 的个别值, 才有 $p_1=p_2$.

(C) 对任何 μ, 都有 $p_1<p_2$. (D) 对任何 μ, 都有 $p_1>p_2$.

5. 随机变量 $X\sim N(0,4)$, 则 $Z=2(X+1)$ 的数学期望和标准差分别为

(A) 0 和 16. (B) 2 和 16. (C) 0 和 4. (D) 2 和 4。

(E) 以上结论都不正确.

6. 设 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{1}{6}(x+1)^2}$, $-\infty<x<+\infty$, 则 $E(X)=\mu$ 和 $\sqrt{D(X)}=\sigma$ 分别为

(A) $\mu=1,\sigma=\sqrt{3}$. (B) $\mu=1,\sigma=3$. (C) $\mu=-1,\sigma=\sqrt{3}$。

(D) $\mu=-1,\sigma=3$. (E) 以上结论都不正确.

7. 随机变量 $X\sim N(-3,1)$, $Y\sim N(2,2)$, 则 $Z=X+2Y^2+3$ 的数学期望为

(A) 12. (B) 4. (C) 24. (D) 6. (E) 8。

8. 已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}\ (-\infty<x<+\infty)$$

则 $\frac{E(X)}{D(X)}=$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4. (E) 8。

9. 设随机变量 $X\sim N(-1,3)$**,则** $E(2+3X-X^2)=$

(A) 2. (B) 3. (C) -3. (D) -4. (E) 4。

10. 已知 $X\sim N(3,4)$**,则** $P(|X|<1)=$

(A) $2\Phi(1)-1$. (B) $\Phi(1.5)-\Phi(1)$. (C) $\Phi(2)-\Phi(1)$。

(D) $2\Phi(2)-1$. (E) $2\Phi(1.5)-1$.

11. 假设每一个飞机发动机在飞行中出故障的概率为 $1-p$**,且发动机是否出故障是相互独立的. 如果至少有** 50%**的发动机能正常运行,飞机就能正常飞行,则四发动机飞机比二发动机飞机更为可取的** p **值为**

(A) $p<1/3$. (B) $p>1/3$. (C) $p<1/2$. (D) $p>1/2$. (E) $p>2/3$.

(二) 条件充分性判断

1. 设随机变量 $X\sim B(2,p)$**,**$Y\sim B(3,p)$**,则** $p(Y\geqslant 1)$**能确定.**

(1) **已知** $E(X)$; (2) **已知** $P(X\geqslant 1)$.

2. $X\sim B(n,p)$**且** $E(X)=0.24$.

(1) $n=1,p=0.24$; (2) $n=4,p=0.6$。

3. X **服从参数为** n,p **的二项分布,**$E(X)=12,D(X)=6$.

(1) $n=36$; (2) $p=1/3$.

4. 设 $X\sim B(2,p)$**,**$Y\sim B(3,p)$**,确定** $P(Y\geqslant 3)$**的值.**

(1) $E(X)=1$; (2) $P(X\geqslant 1)=3/4$.

5. 函数 $f(x)=ke^{-\frac{x^2}{2}-x}\ (-\infty<x<+\infty)$**是随机变量** X **的概率密度函数.**

(1) $k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$; (2) $k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1}$.

6. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-ax^2+bx-1}\ (-\infty<x<+\infty)$**是随机变量** X **的概率密度函数.**

(1) $a=1$; (2) $b=4$.

7. 设 $a>0$，X 为随机变量，则 $P(X\leqslant a)$ 将随着 a 的增大而增大.

(1) $X\sim N(a,a^2)$；　　(2) $X\sim N(-a,a^2)$.

8. $P(|X|\leqslant x)=2F(x)-1,0\leqslant x\leqslant\infty$，其中 $F(x)$ 是 X 的分布函数.

(1) X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足性质：对于任意 x，$f(x)=f(-x)$；

(2) $X\sim N(0,\sigma^2)$.

9. 连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 是偶函数.

(1) 对任意实数 x，$P(X\leqslant x)+P(X\leqslant -x)=1$；　　(2) $X\sim N(1,1)$.

10. 设随机变量 X,Y 相互独立，$Z=X-2Y+8$，可求得 $P(|Z|<3)=2\Phi(1)-1$.

(1) $X\sim N(-2,1)$，$Y\sim N(3,2)$；　　(2) $X\sim N(0,4)$，$Y\sim N(3,3)$。

11. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$，则 $a=3.92$.

(1) $P(|X-1|<a)=0.95$ ($\Phi(1.96)=0.975$)；

(2) $P(X>a)=P(X<2-a)$.

12. $P(X\geqslant 2)=1/2$.

(1) $X\sim N(2,4)$；　　(2) $X\sim U[0,4]$(U 表示均匀分布).

13. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(X\geqslant\mu+1)=P(X\leqslant\mu-1)$.

(1) $\mu=0$；　　(2) $\mu\neq 0$.

(三) 解答题

1. 设每位顾客在一个理发店内的等候时间 T(单位：小时)是随机变量，其概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}4e^{-4t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

一名顾客每月理发一次，若每次等待时间超过 15 分钟，他就离去改日再理，假设每月顾客人流相互独立，求该顾客一年内至多有一个月不能完成一次理发的概率.

2. 设随机变量 X 具有概率密度函数

$$p(x)=Ce^{-2x^2+12x},\quad -\infty<x<+\infty,$$

求常数 C，并指出 X 服从什么分布(包括参数).

3. 甲、乙两人投篮，投中率分别为 0.6 与 0.7. 今各投 3 次，求：(1)两人投中次数相等的概率；(2)甲比乙投中次数多的概率.

4. 若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P(2<X<4)=0.3$，则 $P(X<0)=$_____.

5. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，证明 $Y=AX+B$ 仍然服从正态分布，且 $Y\sim N(A\mu+B,A^2\sigma^2)$，其中 A,B 为常数，$A\neq 0$.

6. 设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1，标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.

7. 设随机变量 $\ln X$ 服从正态分布 $N(2,4)$. 求 $P(e^2<X<e^{5.92})$ ($\Phi(1.96)=0.975$).

8. 若随机变量 Y 服从参数为 μ,σ^2 的对数正态分布，则 $X=\ln Y$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

9. [2002 年 Ⅰ 26] **若随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的对数正态分布，则 $P(X>e^{\mu})=$_____.**

习题参考答案

习　题　1.1

(一) 1. (D)　**2.** (D)　**3.** (A)　**4.** (B)　**5.** (D)　**6.** (B)　**7.** (E)　**8.** (E)
9. (B)　**10.** (D)　**11.** (E)

(二) 1. E　**2.** B　**3.** D　**4.** B　**5.** C　**6.** D　**7.** B

习　题　1.2

(一) 1. (D)　**2.** (C)　**3.** (B)　**4.** (C)　**5.** (B)　**6.** (D)　**7.** (B)　**8.** (D)
9. (A)　**10.** (B)　**11.** (D)　**12.** (D)　**13.** (C)　**14.** (B)　**15.** (C)　**16.** (A)
17. (C)　**18.** (D)　**19.** (A)　**20.** (B)　**21.** (B)　**22.** (A)　**23.** (E)　**24.** (A)
25. (C)　**26.** (B)　**27.** (C)　**28.** (D)　**29.** (E)　**30.** (B)　**31.** (C)　**32.** (D)

(二) 1. C　**2.** D　**3.** C　**4.** C　**5.** C

习　题　1.3

(一) 1. (D)　**2.** (A)　**3.** (C)

(二) 1. C　**2.** B　**3.** B　**4.** A　**5.** A　**6.** B　**7.** C

习　题　1.4

(一) 1. (B)　**2.** (D)　**3.** (A)　**4.** (B)　**5.** (C)　**6.** (C)　**7.** (D)　**8.** (B)
9. (A)　**10.** (D)　**11.** (C)　**12.** (C)　**13.** (B)　**14.** (C)　**15.** (C)　**16.** (B)
17. (B)　**18.** (A)　**19.** (C)　**20.** (A)　**21.** (E)　**22.** (A)　**23.** (C)　**24.** (A)
25. (A)　**26.** (C)　**27.** (B)　**28.** (A)　**29.** (B)　**30.** (C)　**31.** (D)　**32.** (A)
33. (A)　**34.** (B)

(二) 1. A　**2.** B　**3.** D　**4.** D　**5.** D　**6.** D　**7.** C

(三) 1. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　**2.** $\sqrt{5}/9$　**3.** (1)7　(2)$\sqrt{5}$　(3)7　(4)18
4. 655 **千米**　**5.** 12.5 **斤**　**6.** 1250 **斤**
7. $ar(1+r)^5/[(1+r)^5-1]$　**8.** $x=1/9$　**9. 下午** 3 **时**

习　题　1.5

(一) 1. (A)　**2.** (C)　**3.** (A)　**4.** (C)　**5.** (D)　**6.** (E)　**7.** (E)　**8.** (A)
9. (C)　**10.** (D)　**11.** (C)　**12.** (E)　**13.** (D)　**14.** (D)　**15.** (C)

(二) 1. C　**2.** B　**3.** C　**4.** B　**5.** D　**6.** B　**7.** B　**8.** D　**9.** D　**10.** A

(三) 1. (1)$(-4,-2)\cup(1,+\infty)$　(2)$(-3,-1)\cup(1,+\infty)$

2. $-6\leqslant x<0$ **或** $3<X\leqslant 4$ **3.** $x>6$ **4.** $\lg(10^{-3}+1)<x<\lg(10^{2}+1)$

5. $(-1,1)$

习 题 1.6

(一) 1.(B) **2.**(A) **3.**(B) **4.**(A) **5.**(D) **6.**(C) **7.**(B) **8.**(B)

9.(D) **10.**(D) **11.**(C) **12.**(D) **13.**(D) **14.**(B) **15.**(C) **16.**(B)

17.(B) **18.**(B) **19.**(D) **20.**(A) **21.**(B) **22.**(B)

(二) 1. D **2.** C **3.** B **4.** D **5.** A **6.** A **7.** D **8.** B **9.** E **10.** C **11.** D

12. A **13.** B **14.** C **15.** D **16.** B **17.** A

(三) 1. $n=1$ **时**,$a_1=11$,$n\geqslant 2$ **时**,$a_n=9\times 10^{n-1}$

2. $a_n-a_{n-1}=d$,$a^{a_n-a_{n-1}}=a^{d}$ **3.** $a=2$,$q=3$,$n=4$ **4. 利用式**(1.6.4)**证之**

5. 利用式(1.6.5),$S_7=-14$ **6.** $a_1=1$,$d_1=2$,$S_1=2500$,$S_2=S_1+50$

7. $a_1+a_n=2S_n/n=2a$ **8.** $(n^2+3n)/[4(n+1)(n+2)]$

9. 25,-10,4,18 **或** 9,6,4,2。**设四个数为**$(a-d)^2/a$,$a-d$,a,$a+d$

10. $\{a_n^2\}$**为等比数列**,$S_n=(3^{2n}-1)/8$ **11.** 0,4,8,1 **或** 15,9,3,1

12. 用定理 1.6.2。$S_{p+q}=-(p+q)$ **13. 用式**(1.6.8)**证之,或** $S_{m+n}=S_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{m+n}=S_n+a_nq+a_nq^2+\cdots+a_nq^m$

习 题 2.1

(一) 1.(D) **2.**(D) **3.**(D) **4.**(C) **5.**(A) **6.**(B) **7.**(C) **8.**(C)

9.(E) **10.**(C) **11.**(E) **12.**(C) **13.**(C) **14.**(A) **15.**(C) **16.**(D)

17.(E) **18.**(B) **19.**(B) **20.**(B) **21.**(E) **22.**(D) **23.**(C) **24.**(A)

25.(A) **26.**(B) **27.**(A) **28.**(D)

(二) 1. A **2.** D **3.** D **4.** E **5.** B **6.** D **7.** D **8.** B **9.** A **10.** D **11.** A

12. B **13.** A **14.** E **15.** E **16.** D **17.** C **18.** A

(三) 1. (1)$y=\dfrac{2x}{1-x}$ $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(2)$y=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$ $[-1,1]$

2. $f[g(x)]=\begin{cases}e^{x+1}, & x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$ **3.** $f(x)=2e^{x-1}-e^{1-x}$

4. (1),(2),(4)**为偶函数**,(3)**为奇函数** **5.** $A/3$

6. $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$；**间断点是** $x_1=-2,x_2=0,x_3=1$

7. $(-\infty,0),(0,+\infty)$；$x=0$ **是间断点**

8. $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ 1, & |x|>1。\end{cases}$ $x_1=-1,x_2=0,x_3=1$ **均为间断点**

习　题　2.2

(一) 1. (B)　**2.** (B)　**3.** (C)　**4.** (B)　**5.** (B)　**6.** (B)　**7.** (A)　**8.** (D)

9. (C)　**10.** (B)　**11.** (C)　**12.** (A)　**13.** (E)　**14.** (C)　**15.** (D)　**16.** (C)

17. (C)　**18.** (D)　**19.** (A)　**20.** (C)　**21.** (D)　**22.** (D)　**23.** (B)　**24.** (D)

(二) 1. C　**2.** D　**3.** B　**4.** C　**5.** D　**6.** C　**7.** C　**8.** B　**9.** E　**10.** B　**11.** E

12. C　**13.** E　**14.** B　**15.** A　**16.** C　**17.** D　**18.** D　**19.** E　**20.** C

(三) 1. $y'=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{e}{x}$，**y 的最大值为** $e^{\frac{1}{e}}$　**2.** 0；2

3. $x^{-\frac{1}{4}}(x+1)^{-\frac{7}{8}}(7x+6)/8$　**4.** $dy=-\dfrac{\ln 3}{1+3^x}dx$　**5.** $dy=dx/[x(1+\ln y)]$

6. $f'(x)=[1+f^2(x)]f'(0)$　**7. 用导数定义证之**

8. $f'(x)=[xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}]/x^2$，**在** $(-\infty,+\infty)$ **上连续**

9. 可导　**10.** $a=2$　$b=0$　**11.** $y'(0)=-3/(4\ln 2)$

12. $y''_x=4x^2f''(x^2+b)+2f'(x^2+b)$　**13.** $e^{f'(a)/f(a)}$　**14.** $e^{f'(0)}$

15. $(t-1)f'(0)$　**16.** 1/4　**17.** $y=3x-1$　**18.** $y=2-x$

19. $\dfrac{dl}{dt}$ **与** $\dfrac{1}{R(t)}$ **成正比，即与半径** $R(t)$ **成反比**　**20.** $-3/\sqrt{5}$(m/s)

21. 单调增加区间为 $(-\infty,+0),[2,+\infty)$，**单调减少区间为** $[0,2]$，$x=0$ **为极大值点，**$x=2$ **为极小值点**

22. 5/4　**23.** $[0,1]$ **为** $F(x)$ **的凹区间**　**24. 仅有两个零点**

25. $4-k>0$ **时，无交点；**$4-k=0$ **时，一个交点；**$4-k<0$ **时，两个交点**

26. 利用函数的最值证之　**27.** $b=(3/4)a\times(a/4)^{1/3}$

28. (1)$A>2$ **或** $A<-2$　(2)$A=2$ **或** $A=-2$　(3)$-2<A<2$

习　题　2.3.1

(一) 1. (B)　**2.** (C)　**3.** (C)　**4.** (D)　**5.** (B)　**6.** (D)　**7.** (D)

(二) 1. A　**2.** B　**3.** D　**4.** E　**5.** B　**6.** E

(三) 1. $\sqrt{1+e^x}e^x dx$　**2.** $(4/7)(x^2+7)/\sqrt[4]{x}+C$　**3.** $2\ln 2-1$

4. $1/3\cdot[\ln(x+1)-\ln(2-x)]+C$ **5.** $\ln x-\ln 2\ln\ln 4x+C$

6. (1)$2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$

(2)$(4/3)(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$ (3)$\sqrt{x^2-4}/(4x)+C$

(4)$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2-e^x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-e^x}+\sqrt{2}}\right|+C$ (5)$\ln|x^2-x-2|+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

(6)$\frac{1}{6}\ln(1+3\ln^2 2)$ (7)$-\frac{3}{x}-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

习 题 2.3.2

(一) 1.(C) **2.**(C) **3.**(C) **4.**(D) **5.**(A) **6.**(D) **7.**(C) **8.**(C)

9.(D) **10.**(B) **11.**(E) **12.**(D)

(二) 1. D **2.** D **3.** E **4.** B **5.** B **6.** D **7.** E **8.** A **9.** A **10.** D **11.** D

(三) 1. (1)0 (2)0 **2.** $4-e^{-1}$ **3.** $(a-b)^2/2$ **4.** $\pi+2-2\ln(3/2)$

5. (1)$16/3+2\pi$ (2)$\begin{cases}1/3-a/2, & a<0,\\ a^3/3-a/2+1/3, & 0\leqslant a\leqslant 1,\\ a/2-1/3, & a>1\end{cases}$ **6.** e^2+e-2

7. $(|b|-1)e^{|b|}-(|a|-1)e^{|a|}$ **8.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

9. $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2\ln 2}{4-\pi}\sqrt{1-x^2}$

10. $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$ **11.** $-e^{-a}A$ **12.** 12.5

习 题 2.3.3

(一) 1.(D) **2.**(A) **3.**(C) **4.**(D) **5.**(A) **6.**(E) **7.**(E) **8.**(B)

(二) 1. B **2.** D **3.** B

(三) 1. $F''(x)=f'(x)$ 2. $y(1)=0$ **3.** $\varphi'(x)\int_0^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$

4. 令 $F(a)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}X+\int_0^{f(a)}g(x)\mathrm{d}X-af(a)$

5. $\lim\limits_{X\to 0}\varphi'(x)=A/2=\varphi'(0)$,$\varphi'(x)$**在** $x=0$ **处连续** **6.** $e^{-1}-1$

习 题 2.3.4

(一) 1.(E) **2.**(B) **3.**(C) **4.**(B) **5.**(B) **6.**(A) **7.**(C) **8.**(C)

9.(D) **10.**(C)

(二) 1. A **2.** B **3.** A **4.** D

(三) 1. $e/2-1$ **2.** $2/3$ **4.** πab 5.(1)$\ln(e-1)$;(2)$e-2\sqrt{e}+1$

习　题　2.4.1

(一) 1. (C)　**2.** (C)　**3.** (B)　**4.** (C)

(二) 1. B　**2.** D　**3.** D　**4.** C　**5.** B　**6.** D　**7.** A

(三) 1. $-1/7$　**2.** 2,8　**3.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial v},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial v}$

4. $(3x^2+y^2)^{xy}\left[y\ln(3x^2+y^2)+6x^2y/(3x^2+y^2)\right]$　**5.** $4yg''-4g'$

习　题　2.4.2

(一) 1. (A)　**2.** (E)　**3.** (A)　**4.** (A)

(二) 1. C　**2.** A　**3.** E　**4.** C　**5.** E

(三) 1. (1)**极小值** $f(1/2,-1)=-\mathrm{e}/2$　(2)**极小值** $z(2,2)=-8$,**极大值** $z(0,0)=0$　(3)**极小值** $f(1,1)=-1$

习　题　3.1.1

(一) 1. (A)　**2.** (B)　**3.** (A)　**4.** (C)　**5.** (C)　**6.** (B)　**7.** (A)　**8.** (D)

9. (D)　**10.** (D)　**11.** (B)　**12.** (A)　**13.** (E)　**14.** (B)　**15.** (B)

(二) 1. A　**2.** E　**3.** A　**4.** D　**5.** D　**6.** D　**7.** A　**8.** D　**9.** D

(三) 1. $x_i=a_i(i=1,2,\cdots,n)$　**2.** -294×10^5　**3.** $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$

4. (1)0　(2)32　**5.** $yz+xyz+3xy+2zx$

6. $(a_1d_1-c_1b_1)(a_2d_2-c_2b_2)(a_3d_3-c_3b_3)$

习　题　3.1.2

(一) 1. (C)　**2.** (C)　**3.** (C)

(二) 1. B　**2.** D　**3.** D

(三) 1. $x_1=100,x_2=80,x_3=40$　**2.** (1)$\lambda=1$;(2)**用反证法证之**

3. $k\neq1$ **或** $k\neq-2$　**4.** $k_1=1,k_2=-2$　**5.** $D\cdot D^{\mathrm{T}}\neq0$。**因而** $D\neq0$

习　题　3.2.1

(一) 1. (C)　**2.** (D)　**3.** (A)　**4.** (C)　**5.** (C)　**6.** (B)　**7.** (A)　**8.** (C)

9. (D)　**10.** (D)　**11.** (D)

(二) 1. D　**2.** D　**3.** B

(三) 1. 2　**2.** a^{13}　**3.** $(-1)^{mn}ab$

4. (1)-160　(2)-20　(3)$-1/20$　(4)5/4　(5)$-1/20$　(6)$-5/16$

5. 24　**6.** $6^{n-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$　**8.** $X=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\0&x_1&x_2\\0&0&x_1\end{bmatrix}$($x_1,x_2,x_3$ **为任意实数**)

9. 用定义证$(AB-BA)^{\mathrm{T}}=-(AB-BA)$　**10.** $f(A)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

习　题　3.2.2

（一）**1.**(D)　**2.**(B)　**3.**(C)　**4.**(B)　**5.**(C)

（二）**1.** D　**2.** B　**3.** D　**4.** B　**5.** B　**6.** A　**7.** B

（三）**1.** $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 10 & -2 & 1\end{bmatrix}$　**2.** $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 5\\ 0 & -6\end{bmatrix}$　**3.** $\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}2/9 & 0 & 0\\ 0 & 1/6 & 0\\ 0 & 0 & -2/3\end{bmatrix}$　**5.** $\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$　**6.** $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix}x & y & z\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$($x,y,z$为任意常数)　**8.** $\begin{bmatrix}5/2 & -4 & -1/2\\ 0 & -4 & 0\end{bmatrix}$

9. $A^{-1}=(A-E)/5$　**10.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}$　**11.** $\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix}-1/3 & 1/3 & 4/3\\ 2/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$　**13.** $\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$　**14.** 证$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$

习　题　3.3.1

（一）**1.**(D)　**2.**(C)　**3.**(E)　**4.**(D)　**5.**(E)　**6.**(B)　**7.**(D)　**8.**(D)

9.(D)　**10.**(C)

（二）**1.** E　**2.** D　**3.** C　**4.** B　**5.** C

（三）**1.** $t=1$时，$|A|=0$，向量组α,α_2,α_3线性相关；$t\neq 1$时，$|A|\neq 0$，线性无关

2. 线性相关　**3.** $km\neq 1$时，向量组线性无关；$km=1$时，向量组线性相关

习　题　3.3.2

（一）**1.**(D)　**2.**(C)　**3.**(B)　**4.**(C)　**5.**(C)　**6.**(D)

（二）**1.** A　**2.** D　**3.** E　**4.** D　**5.** C　**6.** C

（三）**1.** 秩$(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$或$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一组最大线性无关组

2. $a=3$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为最大线性无关组　**3.**(1)$b\neq 2$；(2)$b\neq 2$且$a\neq 1$时，$\boldsymbol{\beta}$可惟

一地表示为 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$；(3)$a=1$ 且 $b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示为：$\boldsymbol{\beta}=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$ 为任意常数）

4. (1)能　(2)不能

习　题　3.3.3

(一) **1.** (B)　**2.** (D)　**3.** (C)　**4.** (C)　**5.** (C)　**6.** (C)　**7.** (B)　**8.** (C)

9. (B)　**10.** (C)

(二) **1.** B　**2.** C　**3.** D　**4.** C

习　题　3.4.1

(一) **1.** (B)　**2.** (C)　**3.** (E)　**4.** (C)　**5.** (C)

(二) **1.** E　**2.** A　**3.** A　**4.** B

(三) **1.** $a=2$；$c(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$　**2.** $\lambda=-1$ 或 $\lambda=4$ 时，有非零解；$\lambda\neq1$ 或 $\lambda\neq4$ 时，只有零解．　**3.** $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-7,0,-4,3,1)^{\mathrm{T}}$

4. $C_1(2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+C_2(2,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）

习　题　3.4.2

(一) **1.** (D)　**2.** (C)　**3.** (D)　**4.** (C)　**5.** (D)　**6.** (A)　**7.** (B)　**8.** (A)

(二) **1.** E　**2.** D　**3.** C　**4.** A　**5.** C　**6.** B　**7.** B　**8.** C

(三) **1.** $a\neq1$ 时，有惟一解为$(-1,2+a,1)^{\mathrm{T}}$；$a=1$ 时有无穷多解，其通解为 $\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$，$c_1,c_2$ 为任意常数

2. $a=1$ 且 $b=0$ 时，方程组有无穷多解：$X=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta$，其中 k_1,k_2 为任意实数

3. $a=2$ 时，方程组有无穷多解，其通解为 $x=(0,-7,0,2)^{\mathrm{T}}+c(0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$c$ 为任意常数

4. (1)t 为任意实数，方程组都无惟一解；(2)$t=-2$ 时，方程组有无穷多组解

5. $t=-3$，$x=k(5,-1,1)^{\mathrm{T}}+(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）

6. $X=\xi_1+C[2\xi,-(\xi_2+\xi_3)]$，$C$ 为任意常数

7. $X=(-3,2,0)^{\mathrm{T}}+C(-2,2,2)^{\mathrm{T}}$　**8.** $a=3,b=1$

9. $X=(2,0,0,2)^{\mathrm{T}}+k(2,-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$

10. $X=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k_1(2,0,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(0,4,6,6)^{\mathrm{T}}$

11. $X=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_1(0,-1,2,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$

12. $X=k(-5,3,1)^{\mathrm{T}}$　**13.** $a=1$

习　题　3.5

(一) **1.** (B)　**2.** (E)　**3.** (D)　**4.** (D)　**5.** (C)　**6.** (C)　**7.** (C)　**8.** (D)

(二) **1.** D **2.** A **3.** D **4.** B

(三) **1.** **非零特征值为** 4,**特征向量为** $c(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ **2.** $a=-4,b=4$

3. $\lambda=2$ **为** A **的三重特征值**;$a\neq 5$ **4.** 0 **5.** 3/4

习 题 4.1.1

(一) **1.** (B) **2.** (C) **3.** (D) **4.** (B) **5.** (C)

(二) **1.** D **2.** D **3.** B **4.** D **5.** C

(三) **1.** (1){(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,6)}

(2){(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)}

2. (1)$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$

三枚硬币抛一次所得样本空间形式同上

(2)$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

3. (1)**表示前两次击中目标,但第三次未击中**;

(2)**表示三次射击至少命中一次**;

(3)**表示第一次击中目标而第二次未中**;

(4)**表示三次射击中恰好命中两次**;

(5)**表示三次射击中至多击中一次**

4. $\overline{A}+C=\Omega,BC=\varnothing$ **5.** A **与** B **是对立事件** 7. **不能**

8. (1)$A(\overline{B}+\overline{C})$;(2)$A(B+C)$;(3)$ABC+\overline{A}BC+A\,\overline{B}C+AB\,\overline{C}$;

(4)$AB\,\overline{C}+BC\,\overline{A}+A\,\overline{B}C$;(5)$\overline{C}+\overline{B}+\overline{A}$;(6)**与**(1)**同**;(7)**与**(5)**同**

9. (1)$A_1A_2A_3$;(2)$\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\,\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\,\overline{A}_3$;(3)$\overline{ABC}$;(4)$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1$

习 题 4.1.2

(一) **1.** (D) **2.** (E) **3.** (B) **4.** (D) **5.** (D) **6.** (B) **7.** (C)

(二) **1.** A **2.** A **3.** C **4.** C **5.** A **6.** D **7.** B **8.** D **9.** C **10.** D **11.** D

(三) **1.** $1-p$ **2.** 5/36 **3.** 0.25 **4.** (1)1/2;(2)1/6;(3)3/8

5. 0.6 **6.** $a/(a+b)$ 7. 1/7

8. $P(A)=n!/N^n$;$P(B)=N!/N^n(N-n)!$;$P(C)=\dfrac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}=C_n^k\left(\dfrac{1}{N}\right)^k\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n-k}$

习 题 4.1.3

(一) **1.** (A)　**2.** (E)　**3.** (B)　**4.** (D)　**5.** (A)　**6.** (A)

(二) **1.** D　**2.** D　**3.** D　**4.** D　**5.** B　**6.** C　**7.** D

(三) **1.** 11/24　**2.** (1)0.902;(2)0.496　**3.** 4/3 **或** 5/3

4. (1)0.003;(2)0.388;(3)0.059　**5.** 1/12　**6.** 0.124

7. 1/2　**8.** (1)0.82857;(2)0.012　**9.** $\dfrac{M-1}{2N-M-1}$

习　题　4.1.4

(一) **1.** (A)　**2.** (D)　**3.** (B)　**4.** (B)　**5.** (C)

(二) **1.** D　**2.** C　**3.** A　**4.** C　**5.** A

(三) **1.** $C_5^3(0.6)^3(0.4)^2+C_5^4(0.6)^4(0.4)+C_5^5(0.6)^5$

2. 32/81　**3.** (1)0.3125;(2)0.34375　**4.** 0.6846

习　题　4.2.1

(一) **1.** (C)　**2.** (D)　**3.** (A)　**4.** (D)　**5.** (B)　**6.** (A)

(二) **1.** A　**2.** A　**3.** E　**4.** A　**5.** A　**6.** B　**7.** A　**8.** B　**9.** A　**10.** A

(三) **1.** $1/(e-2)$　**2.**

X	1	2	3	4
P	37/64	19/64	7/64	1/64

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$　**4.**

X	-1	0	$\sqrt{2}$
P	0.2	0.3	0.5

$P(|X|\leqslant 1)=0.5$

5. $F(x)=\begin{cases}1-(x^2/2+1)e^{-x^2/2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $P(-2<X\leqslant 4)=1-9e^{-8}$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/2, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-x^2/2-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$

7. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\end{cases}$

8. $f_1(y)=\begin{cases}e^{-(5-y)}, & y\leqslant 5,\\ 0, & y>5,\end{cases}$　$f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$

9. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$

习　题　4.2.2

(一) 1. (B)　**2.** (E)　**3.** (C)　**4.** (D)

(二) 1. C　**2.** E　**3.** D

(三) 1. $2\ln 10\approx 4.6$　**2.** 21 **和** 26 **之间**　**3.** $E(X)=2, D(X)=1.1$

习　题　4.2.3

(一) 1. (A)　**2.** (E)　**3.** (C)　**4.** (D)　**5.** (D)　**6.** (C)　**7.** (A)　**8.** (C)

9. (C)　**10.** (C)　**11.** (E)

(二) 1. D　**2.** D　**3.** E　**4.** D　**5.** E　**6.** E　**7.** E　**8.** D　**9.** A　**10.** A　**11.** A

12. D　**13.** D

(三) 1. $(1-e^{-1})(1+11e^{-1})$

2. X **服从参数** $\mu=3, \sigma=1/2$ **的正态分布**, $C=2e^{-18}/\sqrt{2\pi}$

3. (1)0.321; (2)0.243　**4.** 0.2　**6.** $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(z-5)^2}{18}}, -\infty<z<+\infty$

7. 0.475　**8.** 1/2