

内 容 简 介

本书的讨论对象为极端细长具有超大变形的弹性杆。细长弹性杆作为电缆、绳索、钻杆、纤维的力学模型,有着广泛的工程背景。近年来在分子生物学领域内将弹性细杆作为 DNA 和其他生物大分子链的宏观力学模型,使这一经典力学问题重新引起注意。力学与分子生物学的结合形成一个交叉的新学科分支,即应用传统的力学研究与分子生物学实验研究相结合的方法,讨论 DNA 等生物大分子链的几何形态和稳定性问题。

本书系统地叙述超大变形弹性细杆的非线性力学。作为一本力学著作,本书不涉及生物学范畴的内容,但注意力学概念与分子生物学之间的联系。全书共分 7 章,内容包括曲线和曲杆的微分几何和拓扑学基础,平衡方程的建立和特殊情况下的解析积分,挠性线的计算,稳定性分析,动力学问题,以及数值计算问题等。附录中给出与正文有关的数学和力学基础知识。

本书可作为力学学科或分子生物学学科的研究生教材或教学参考书,也可供相关学科的研究人员参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

弹性细杆的非线性力学: DNA 力学模型的理论基础/刘延柱著. —北京:清华大学出版社, 2006. 3
ISBN 7-302-11986-4

I. 弹… II. 刘… III. 弹性力学:非线性力学 IV. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 119085 号

出 版 者: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机: 010-62770175

地 址: 北京清华大学学研大厦

邮 编: 100084

客户服务: 010-62776969

责任编辑: 陈朝晖

印 刷 者: 清华大学印刷厂

装 订 者: 三河市春园印刷有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×260 印张: 14.75 字数: 349 千字

版 次: 2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-11986-4/O·503

印 数: 1~2000

定 价: 78.00 元

序 言

P R E F A C E

弹性杆在外力作用下的平衡问题是一个古老的经典力学课题,其历史可追溯到 1730 年 Daniel Bernoulli 和 Euler 关于弹性杆变形的研究工作。1859 年 Kirchhoff 根据弹性杆的平衡微分方程与经典力学中刚体定点转动微分方程之间的相似性,提出了弹性杆平衡的动力学比拟理论,奠定了弹性杆静力学的理论基础。本书作为研究对象的弹性杆以其极端细长性和超大变形及平衡微分方程的强非线性,而不同于传统弹性力学的研究对象。在静力学中注入动力学的概念和方法也不同于传统弹性力学的研究方法。弹性杆作为电缆、绳索、钻杆、纤维的力学模型,有着广泛的工程背景。近年来由于在分子生物学领域内利用弹性杆作为 DNA 和其他生物大分子链的宏观模型研究工作的兴起,使这一经典力学问题重新引起注意。自 20 世纪 70 年代以来,在物理和化学物理、物理化学、生物化学和高分子化学,以及分子生物学等学科的刊物上发表了与弹性杆非线性力学有关的大量文献,逐渐形成了力学与分子生物学交叉的一个新学科分支,即应用传统的力学研究与分子生物学实验研究相结合的方法,讨论 DNA、RNA 以及细菌纤维等各种生物大分子链的几何形态和稳定性问题。

弹性杆非线性力学的经典理论在 Love 的弹性力学著作以及 Frisch-Fay, Antman 和 Ilyukhin 等人的专著中曾作过系统的论述,而国内至今尚无完整叙述弹性杆非线性力学的著作。本书的编写目的是试图将弹性杆非线性力学的经典理论与近年来以分子生物学为背景的弹性杆平衡和稳定性问题的新发展纳入统一的理论体系。除叙述基于 Kirchhoff 方程解析积分的经典内容以外,还讨论与稳定性问题、动力学问题和数值计算问题等有关的现代研究成果,包括作者在平衡稳定性方面的研究工作。为阅读正文所必须的数学和力学基础知识在附录中列出。

作者希望这本书能为力学学科或分子生物学学科的研究人员提供较系统的基础理论知识,从而为今后开展交叉学科的研究工作创造条件。也希望这本书有助于力学专业的研究生了解力学在更广阔领域中应用的可能性。

本书的编写工作得到各方面的帮助和鼓励。关于弹性杆非线性力学的研究工作得到国家自然科学基金项目“超细长弹性杆的非线性力学研究”(编号 10472067)的资助。本书的出版得到母校——清华大学,以及清华大学出版社、施普林格出版社合作编辑室的出

版支持。上海交通大学也为本书提供了资助。薛纭教授协助书稿的校对工作。作者谨表示衷心感谢。书中的错误和不当之处请读者不吝赐正。

刘延柱

2005 年 3 月

于上海交通大学

主要符号表

LIST OF SYMBOLS

A	杆绕 x 轴的抗弯刚度	e_n, e_b, e_t	Frenet 坐标系($P-NBT$) 的基矢量
A_j	第 $\bar{j}$ 单元对 x 轴的抗弯刚度	$e_i (i = 1, 2, 3)$	($P\text{-}xyz$) 的基矢量
A_{pq}	$\underline{e}^{(p)}$ 相对 $\underline{e}^{(q)}$ 的方向余弦矩阵	e_ξ, e_η, e_ζ	($O\text{-}\xi\eta\zeta$) 的基矢量
a	P_a 相对 P 的矢径	e_ρ, e_ψ	柱坐标的径向和周向基矢量
$a^{(j)}$	a 对第 j 坐标系的坐标列阵	F	截面作用力主矢
a	圆截面杆的半径	F_0	截面作用力等效力螺旋的主矢
a	$a = h + m^2 - l^2$	F_{0k}	第 k 截面的集中力
B	中心线的副法线矢量	$F(\phi, k)$	第一类椭圆积分
B	杆绕 y 轴的抗弯刚度	F	复主矢, $F = F_1 + iF_2$
B_j	第 $\bar{j}$ 单元对 y 轴的抗弯刚度	$F_j (j = 1, 2, 3)$	F 对($P\text{-}xyz$) 的投影
b	杆的轴向位移	$F_{j0} (j = 1, 2, 3)$	F_j 的常值特解
C	中心线	$F_{0,cr}$	压杆的欧拉载荷
C	杆的抗扭刚度	f	单位长度接触力
C_j	第 $\bar{j}$ 单元对 z 轴的抗扭刚度	f	复分布力, $f = f_1 + if_2$
C_1	$C_1 = C(\omega_{30} - \omega_3^0)/\omega_{30}$	$f_j (j = 1, 2)$	f 沿 x, y 轴的投影
$c_\perp, c_3$	介质的阻力系数	f_n, f_b	f 沿法线轴和副法线轴的投影
c_0	介质的阻力力矩系数	G	杆的剪切模量
D	杆的刚度矩阵	G_j	第 $\bar{j}$ 单元的剪切模量
D	复刚度, $D = D_1 + iD_2$	H	哈密顿函数
D_j	有限元法的第 $\bar{j}$ 单元	h	$h = (2H/A) - \lambda\omega_{30}^2$
E	单位阵	I_x, I_y	截面对 x 轴和 y 轴的惯性矩
E	杆的杨氏模量	I_z	截面的极惯性矩
E_j	第 $\bar{j}$ 单元的杨氏模量	$I_{x,j}, I_{y,j}$	第 $\bar{j}$ 单元对 x 轴和 y 轴的惯性矩
$E(\phi, k)$	第二类椭圆积分	$I_{z,j}$	第 $\bar{j}$ 单元对 z 轴的极惯性矩
$\tilde{E}(k)$	第二类完全椭圆积分	J	单位长度杆的惯量张量
E_e	杆的弹性应变能	$J_i (i = 1, 2, 3)$	单位长度杆的主惯量矩
E_p	杆的外力势能	J	Schrödinger 方程的初积分常数
E_f	杆的静电引力势能	$K(k)$	第一类完全椭圆积分
E	杆的总势能	k	第一类椭圆积分的模
E_c	与中心线形状相关的势能	k	挠性线相对弧坐标的角频率
E_t	杆的扭转应变能	$\bar{k}$	无量纲化的角频率 k
$\tilde{E}$	受约束杆的总势能	L	弯扭度与欧拉角导数的变换矩阵

- L 杆的长度
 L_{12} 曲线 C_1 与 C_2 的连接数
 L_k 曲杆的自连接数
 L_j 有限元法第 j 单元的长度
 l 积分常数 $l = M_0/A$
 M 截面作用力主矩
 M_0 截面作用力等效力螺旋的主矩
 M_{0k} 第 k 截面的集中力矩
 M 复弯矩, $M = M_1 + iM_2$
 $M_j (j = 1, 2, 3)$ M 对 $(P\text{-}xyz)$ 的投影
 $\tilde{M}$ Melnikov 函数
 m 单位长度分布力偶
 m 积分常数 $m = \lambda(\omega_{30} - \omega_3^0)$
 N 中心线的法线矢量
 N 螺旋线的圈数
 n 截面边界线的外法线基矢量
 n 弯曲振动模态的阶数
 n 封闭挠性线的分支数
 n_1 $n_1 = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 - 1)$
 n_2 $n_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + 1)$
 n_3 $n_3 = 4\Omega^2 k^2 / (h - p\gamma_1)$
 n_4 $n_4 = p(\gamma_2 - \gamma_1)/(a - p\gamma_1)$
 O 固定参考点
 P 中心线上任意点
 P' P 点的邻近点
 P_0 杆的起始端
 P_L 杆的终止端
 P_a 杆截面边缘上任意点
 $P_i (i = 1, 2, 3)$ 准动量
 $P_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 有限元法的节点
 p 有限转动轴的基矢量
 p $p = 2F/A$
 $p_i (i = 1, 2, 3)$ 广义动量
 Q 截面上任意点
 $Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ $Q_j = dq_j/ds$
 $q_i (i = 1, 2, 3)$ 广义坐标(欧拉角)
 $q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 广义坐标(欧拉参数)
 R 连接杆两端的矢径
 R 螺旋线半径
 R 杆的最大挠度
 $R_j (j = 1, 2, 3)$ R 对 $(P_0\text{-}\xi\eta\zeta)$ 的投影
 r P 点相对 O 点的矢径
 r_{12} P_1 点至 P_2 点的矢径
 r_a P_a 相对 P_0 的矢径
 S 横截面面积
 S_i 第 i 奇点
 S_j 第 j 单元的截面积
 s 弧坐标
 s_0 起始点的弧坐标
 $\bar{s}$ 无量纲化的弧坐标
 T 中心线的切线矢量
 T 尺度缩小的时间变量 $T = \bar{\epsilon}t$
 T_w 曲杆的扭转数
 T_{w0} 曲杆的原始扭转数
 $\bar{T}$ $\bar{T} = \bar{\epsilon}\bar{t}$
 t 时间变量
 $\bar{t}$ 无量纲化的时间变量
 u P 点的位移
 u $u = \sin(\theta/2)$
 V Lyapunov 函数
 $\hat{V}$ Lyapunov 函数
 v P 点的速度
 $v_i (i = 1, 2, 3)$ v 对 $(P\text{-}xyz)$ 的投影
 $v_{Fi} (i = 1, 2, 3)$ v 对 $(P\text{-}NBT)$ 的投影
 $v(s)$ $v^2 = (\gamma - \gamma_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)$
 W 外力功
 W_τ 曲杆的缠绕数
 ω 时域内的特征值
 X, Y, Z 柱坐标轴
 x, y, z 截面主轴
 x_i 有限元法第 i 个变量
 $x_{i,j}$ 变量 x_i 在节点 P_j 处的值
 $\bar{x}_{i,j}$ $\bar{x}_{i,j} = (x_{i,j} + x_{i,j-1})/2$
 α 螺旋线倾角
 β $\beta = F_0 R/M_0$
 α, β, γ ζ 轴相对 $(P\text{-}xyz)$ 的方向余弦
 Γ 势能密度函数
 $\tilde{\Gamma}$ 受约束杆的势能密度函数
 Γ 截面边界线
 γ $\gamma = \cos\theta$
 γ_0 γ 的起始值
 $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$ 方程 $f(\gamma) = 0$ 的根
 γ_{ij} 剪应变分量
 $\gamma_{km}^i (i, k, m = 1, 2, 3)$ Boltzman 三标记号

ΔF 截面作用力主矢的增量

ΔL 螺旋线的周长

ΔL_k $\Delta L_k = L_k - T_{w0}$

ΔM 截面作用力主矩的增量

Δr 矢径 r 的增量

Δs 弧坐标增量

Δt 时间增量

ΔT_w $\Delta T_w = T_w - T_{w0}$

$\Delta \theta$ 欧拉角 θ 的增量

$\Delta \omega_3$ 杆的过扭率

$\Delta \phi$ 截面的无限小角位移

$\Delta \phi_F$ Frenet 坐标系的无限小角位移

δ $\delta = C\omega_3^0/M_0$

δ_1 $\delta_1 = \sqrt{B/|F_0|}\omega_3^0$

δ_n 振动阻尼系数

δE 总势能的变分

δE_e 弹性应变能的变分

δE_p 外力势能的变分

δR 矢径 R 的变分

δT_w 扭转数 T_w 的变分

δW 截面作用力的虚功

δW_r 缠绕数 W_r 的变分

ϵ $\epsilon = B\kappa^0/M_0$

ϵ 杆的轴向应变

ϵ_j 第 j 单元的轴向应变

ϵ_i 正应变分量

$\bar{\epsilon}$ 摄动参数

ζ $\zeta = \omega_2 + i\omega_3$

η $\eta = \beta + i\gamma$

$\eta_i (i = 1, 2, 3)$ 扰动量

θ 欧拉角中的章动角

θ_0 θ 的起始值

θ_s θ 的奇点

θ_1 $\theta_1 = \theta \cos \varphi$

κ 中心线的曲率

κ_0 κ 的起始值

κ_p 中心线平面投影的曲率

κ^0 κ 的原始值

κ_s κ 的奇异值

Δ 有限转动四元数

Δ^* Δ 的共轭四元数

$\tilde{\Lambda}$ 四元数的投影方阵

$\Lambda_j (j = 1, 2)$ 拉格朗日乘子

λ $\lambda = C/A$

λ 线性系统的特征值

$\lambda_k (k = 0, 1, 2, 3)$ 欧拉参数

μ $\mu = BF_0/M_0^2$

ν 杆的泊松比

ν 扭转振动的角频率

ν $\nu = (B/C) - 1$

ν_1 $\nu_1 = \nu + \delta(1 + \nu)$

ξ, η, ζ 定坐标轴

ξ 复曲率, $\xi = \omega_1 + i\omega_2$

ξ 0 与 1 之间的无量纲变量

$\xi_i (i = 1, 2, 3)$ 扰动量

$\Pi(u, n, k)$ 第三类椭圆积分

$\tilde{\Pi}(n, k)$ 第三类完全椭圆积分

$\pi_i (i = 1, 2, 3)$ 准坐标

ρ Q 相对 P 的矢径

ρ 曲率半径

ρ 柱坐标

ρ 杆的密度

ρ_0 ρ 的起始值

σ 正应力

σ_i 正应力分量

σ $\sigma = (B/A) - 1$

τ 剪应力

τ_{ij} 剪应力分量

τ 中心线的挠率

τ_0 挠率的起始值

τ^0 挠率的原始值

Φ $\Phi = (-E_5, E_5)$

ϕ 角位移矢量

ϕ 有限转动角位移

ϕ 椭圆函数的幅角

φ 欧拉角中的自旋角

φ_0 φ 的起始值

φ_s φ 的奇点

φ_1 $\varphi_1 = \theta \sin \varphi$

χ 截面的相对扭角

χ^0 χ 的原始值

Ψ 柱坐标的极角

Ψ_0	Ψ 的起始值	ω	弯扭度
Ψ	$\Psi = ((1-\xi)E_5, \xi E_5)$	$\omega^{(2)}$	动坐标系的角位移变化率
ψ	欧拉角中的进动角	ω_F	Darboux 矢量
ψ_0	ψ 的起始值	$\omega_j (j = 1, 2, 3)$	ω 对 $(P\text{-}xyz)$ 的投影
Ω	截面的角速度矢量	ω_3	杆的扭率
Ω_F	Frenet 坐标系的角速度矢量	$\omega_j^0 (j = 1, 2, 3)$	ω_j 的原始值
Ω_j	$\Omega_j = (\omega_{1,j} \quad \omega_{2,j} \quad \omega_{3,j} \quad \varepsilon_j)^T$	ω_3^0	杆的原始扭率
$\Omega_{Fi} (i = 1, 2, 3)$	Ω_F 对 $(P\text{-}NBT)$ 的投影		
Ω	$\Omega^2 = (p/4)(\gamma_3 - \gamma_1)$		

目 录

C O N T E N T S

序言	1
主要符号表	3
绪论	15
第 1 章 曲线和曲杆的几何学基础.....	1
1.1 曲线的几何学	1
1.2 曲杆的弯扭度	3
1.3 曲杆的扭转数	4
1.4 曲线的连接数	8
1.5 曲杆的缠绕数	9
第 2 章 Kirchhoff 方程及其积分	14
2.1 Kirchhoff 方程的建立	14
2.2 用欧拉角表示 Kirchhoff 方程	18
2.3 弧坐标分析力学.....	21
2.4 Kirchhoff 方程的初积分	29
2.5 圆截面杆的解析积分.....	32
2.6 非圆截面杆的解析积分.....	36
第 3 章 弹性杆平衡的 Schrödinger 方程	42
3.1 考虑分布力的弹性杆平衡方程.....	42
3.2 圆截面杆的 Schrödinger 方程	44
3.3 圆截面杆的解析积分.....	46
3.4 非圆截面杆的 Schrödinger 方程	47
3.5 非圆截面杆的解析积分.....	49

第 4 章 弹性杆的挠性线	53
4.1 挠性线方程的建立	53
4.2 螺旋挠性线	56
4.3 圆截面杆挠性线的定性分析	58
4.4 挠性线方程的解析积分	67
4.5 平面挠性线	69
4.6 拉扭杆的挠性线	73
4.7 封闭杆的挠性线	76
4.8 圆柱面约束杆的挠性线	80
第 5 章 弹性杆平衡的稳定性	85
5.1 稳定性分析的能量原理	85
5.2 圆截面直杆的平衡稳定性	89
5.3 圆截面螺旋杆的平衡稳定性	94
5.4 非圆截面螺旋杆的平衡稳定性	101
5.5 非圆截面直杆的平衡稳定性	107
5.6 受扭矩作用螺旋杆的稳定性与分岔	112
5.7 稳定性分析的 Lyapunov 直接方法	116
5.8 弹性杆的混沌平衡形态	120
第 6 章 弹性杆的动力学	124
6.1 曲线和曲杆的运动学	124
6.2 弹性杆的动力学方程	127
6.3 非圆截面螺旋杆的动态稳定性	131
6.4 弹性杆的扭转振动	135
6.5 弹性杆的弯曲振动	139
6.6 圆截面杆在黏性介质中的运动	146
第 7 章 弹性杆平衡状态的数值计算	151
7.1 用欧拉参数表示的 Kirchhoff 方程	151
7.2 Kirchhoff 方程的数值积分	155
7.3 弹性杆变分原理的离散化	159
7.4 考虑静电引力的变分原理离散化	163
7.5 考虑几何约束的变分原理离散化	166
7.6 考虑轴向变形的变分原理离散化	168
附录 A 椭圆函数基础	173

附录 B 刚体运动学基础	178
附录 C 弹性杆的应力、应变和应变能	189
附录 D 稳定性理论基础	193
名词索引	198
参考文献	201

Contents

Preface	1
List of symbols	3
Introduction	15
Chapter 1 Fundamentals of geometry of curves and rods	1
1.1 Geometry of curves	1
1.2 Curvature and twisting vector of rods	3
1.3 Twisting number of rods	4
1.4 Linking number of curves	8
1.5 Writhing number of rods	9
Chapter 2 Kirchhoff's equation and its integral	14
2.1 Kirchhoff's equation	14
2.2 Kirchhoff's equation expressed by Euler angles	18
2.3 Analytical mechanics based on arc-coordinate	21
2.4 First integrals of Kirchhoff's equation	29
2.5 Analytical integrals of rod with circular cross section	32
2.6 Analytical integrals of rod with non-circular cross section	36
Chapter 3 Schrödinger's equations of equilibrium of elastic rod	42
3.1 Equilibrium equations of rod with distributed force	42
3.2 Schrödinger's equations for rod with circular cross section	44
3.3 Analytical integrals of rod with circular cross section	46
3.4 Schrödinger's equations of rod with non-circular cross section	47
3.5 Analytical integrals of rod with non-circular cross section	49
Chapter 4 Elastica of the rod	53
4.1 Differential equations of elastica	53

4.2	Helical elastica	56
4.3	Qualitative analysis of elastica of rod with circular cross section	58
4.4	Analytical integrals of equations of elastica	67
4.5	Planar elastica	69
4.6	Elastica of rod with axial force and torque	73
4.7	Elastica of closed rod	76
4.8	Elastica of rod under cylindrical constraint	80
Chapter 5	Stability of equilibrium of elastic rod	85
5.1	Energy principle in stability analysis	85
5.2	Stability of straight rod with circular cross section	89
5.3	Stability of helical rod with circular cross section	94
5.4	Stability of helical rod with non-circular cross section	101
5.5	Stability of straight rod with non-circular cross section	107
5.6	Stability and bifurcation of helical rod under action of torque	112
5.7	Lyapunov direct method in stability analysis	116
5.8	Chaotic configuration of elastic rod	120
Chapter 6	Dynamics of elastic rod	124
6.1	Kinematics of curves and rods	124
6.2	Dynamical equations of elastic rod	127
6.3	Dynamic stability of helical rod with non-circular cross section	131
6.4	Torsional vibration of elastic rod	135
6.5	Flexural vibration of elastic rod	139
6.6	Motion of rod with circular cross section in viscous medium	146
Chapter 7	Numerical simulation of elastic rod	151
7.1	Kirchhoff's equations expressed by Euler parameters	151
7.2	Numerical integration of Kirchhoff's equation	155
7.3	Discretization of variational principle of elastic rod	159
7.4	Discretization of variational principle with electrostatic force	163
7.5	Discretization of variational principle with geometrical constraints	166
7.6	Discretization of variational principle with axial extension of rod	168
Appendix A	Fundamentals of elliptic functions	173
Appendix B	Fundamentals of kinematics of rigid body	178

Appendix C	Stress, strain and strain energy of elastic rod	189
Appendix D	Fundamentals of stability theory	193
References		198
Index		201

早在 1730 年,伯努利(D. Bernoulli) 和欧拉(L. Euler) 就已开始研究细长弹性杆在外力和力矩作用下的变形问题。1859 年 Kirchhoff^①(见图 0.1)对不考虑轴向变形的圆截面杆,在刚性截面假定和无体积力作用的条件下,根据弹性杆的平衡微分方程与刚体定点转动微分方程之间的相似性,提出了弹性细杆平衡的动力学比拟理论^[1,4]。1862 年 Clebsch 在其弹性力学著作中论述了这一理论^[2,3]。根据 Kirchhoff 理论,将动力学中的时间变量 t 置换为一维空间变量即弧坐标 s ,经典刚体动力学几种可积情形的椭圆函数解即可移植到弹性杆静力学。其中拉格朗日(J. L. Lagrange)情形和欧拉情形刚体定点转动分别与一般受力状态的圆截面杆和受力矩单独作用的非圆截面杆的平衡相对应。判断拉格朗日情形重刚体绕垂直轴永久转动稳定性的 Maievskii (1865)条件也转换为判断受轴向拉扭的圆截面直杆平衡稳定性的 Greenhill (1883)公式^[5]。刚体动力学的经典结论与弹性杆几何形态之间的对应关系在 Nizzete, Goriely(1999)的论文中作了详尽的对照^[173]。作为弹性杆静力学的理论基础,Kirchhoff 理论在 Love (1927)的弹性力学著作中有详细的论述^[7],也见于 Timoshenko (1953)的材料力学史^[8]。Timoshenko (1957, 1961)^[9,10],Eriksen, Truesdell (1958)^[11], Reissner (1973)^[23], Maddocks (1984)^[54], Simo, Marsden, Krishnaparasad (1988)^[75] 等对弹性杆非线性力学的发展做出了贡献。Frisch-Fay (1962)^[14] Antman (1972,1995)^[22,118] 和 Ilyukhin (1979)^[40] 的专著系统地总结了弹性杆非线性力学的经典理论。国内关于 Kirchhoff 弹性杆理论的论述和报道不多,可参阅武际可、苏先榭和陈至达的著作^[253~255]。

弹性细杆的平衡和稳定性问题有着广泛的实际背景,电缆、绳索、钻杆、纤维乃至自然界中攀缘植物的细茎都可将弹性细杆作为其力学模型。以海底电缆等工业技术为背景,Zajac (1962)^[15], Cohen (1966)^[16], James (1981)^[42], Knap (1979, 1988, 1994)^[37,73,113], Coyne (1990)^[82], Miyazaki (1997)^[154] 等对圆截面杆的平衡稳定性问题作了深入的研究,



图 0.1 G. R. Kirchhoff
(1824—1887)

① Gustav Robert Kirchhoff (1824—1887) 出生于德国 Königsberg, 1848 年于 Königsberg 大学获博士学位,先后于 Breslau, Heidelberg, 柏林等大学任教授。弹性杆的动力学比拟理论发表于 1859 年。

van der Heijden, Champney, Thompson (1998, 1999)^[160,161,199] 等研究了非圆截面杆的屈曲问题。以钻杆为背景, Seemann (1996)^[142], van der Heijden (2001, 2002)^[177,204,212] 等讨论了受平面和圆柱面约束的弹性杆平衡和稳定性。Goriely, Tabor (1998)^[158] 解释了攀缘植物细茎螺旋形态的力学原理。由于数学微分方程的相似性, 弹性杆非线性力学的研究结果也与更广泛的领域发生联系, 如卷浪的传播、涡管的运动、太阳黑子的形成等^[85]。而近代最重要的促使弹性细杆力学发展的新领域是分子生物学。

在分子生物学领域中, 自 20 世纪中期 Watson 和 Crick 提出了 DNA 分子的双螺旋三维结构模型以来, 关于 DNA 的基础理论研究不断取得突破, 促进了以基因工程为代表的生物技术的迅速发展。DNA 是由两条螺旋形成糖-磷酸骨架和联系骨架的碱基对组成的双螺旋结构的长链分子。虽然对于分子内部结构的研究属于量子力学范畴, 但其宏观几何形态及宏观运动的研究可借助于经典力学方法。用具有原始扭率的圆截面弹性细杆作为 DNA 的宏观力学模型的理论研究得到了实验的肯定 (见图 0.2)。Hagerman (1988), Smith (1992), Bustamante (2003)^[74,97,224] 等借助分子生物学的实验手段和统计物理方法测出 DNA 弹性杆模型的杨氏模量、泊松比, 以及抗弯和抗扭刚度等力学计算所必需的物理常数。在这种宏观力学模型的基础上研究 DNA 的平衡和稳定性规律, 经典力学的基本原理和方法得到了充分应用。人体细胞的最大染色体所含 DNA 分子的螺旋直径约为 2nm, 而长度可达 7cm, 杆长为半径的 3.5×10^7 倍。此细长分子链必须反复缠绕、卷曲和折叠方能被容纳在半径仅 $10\mu\text{m}$ 的狭小的细胞核空间内。因此 DNA 的弹性杆模型以其极端细长性和超大变形而完全不同于传统弹性力学的研究对象。自 20 世纪 70 年代以来, 关于 DNA 力学模型的研究逐渐形成一支力学与分子生物学交叉的新学科分支, 即应用传统的力学分析与分子生物学的实验研究相结合的方法, 讨论 DNA、RNA 以及细菌纤维等各种生物大分子链的几何形态和稳定性问题。

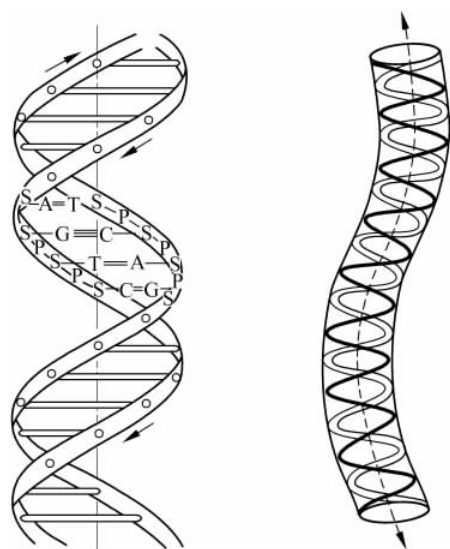


图 0.2 DNA 双螺旋结构与弹性杆

关于 DNA 弹性杆模型的研究工作已经取得不少成果,涌现出大量文献资料。White (1969)^[20], Fuller(1971)^[21]最早研究了 DNA 双螺旋结构的拓扑性质,引入了缠绕数作为三维空间曲线的几何不变量。Crick(1976)^[26]讨论了描述 DNA 双螺旋结构的连接数、扭转数、缠绕数及其相互关系。Benham (1977,1979)^[28,33]和 Le Bret (1978,1979)^[30,34]等在 Kirchhoff 弹性杆理论上建立了 DNA 弹性杆模型。此细长弹性杆的应变和位移仍满足小变形条件,也满足线弹性本构关系,但由于杆的极端细长性,局部的小应变沿弧长的积累可使变形后的挠性线远离变形前的松弛状态,表现出超大变形的整体效果。Benham (1983)^[48]和 Le Bret (1984)^[49]还讨论了封闭曲杆连接数的不变性。此外,还应提到 Tanaka, Takahashi (1985)^[58], Wadati, Tsuru, (1986)^[65~68], Jülicher (1994)^[110], Starostin (1996)^[135]等人的工作。Kirchhoff 方程并非表达弹性杆平衡的唯一方式,Shi 和 Hearst 等(1994,1995)^[108,122]以弹性杆的曲率和挠率为变量,建立了 Schrödinger 方程形式的另一种数学模型。Coleman, Westcott, Tobias, Swigon (1995, 2000)^[125,146,187,229], Starostin (2000,2004)^[201,217,231], van der Heijden(2003)^[219], Schubert(2003)^[221]等研究了杆间自相接触情形。Kehrbaum, Kai Hu 等(1997,1999)^[153,180]给出用欧拉参数代替欧拉角的数学表达。对于最普遍的情况,即同时考虑杆的非圆截面、轴向变形、体积力和杆间接触力等复杂因素时,则必须应用数值方法。如 Klenin (1991)^[88], Yang, Zhang, Westcott, Tobias, Olson (1993—1997)^[102,107,121,146], Schlick, Beard (1992,2000)^[93,194]等人的工作。国内以分子生物学为背景的研究可参阅 Zhou Haijun, Zhang Yang, Ou-Yang Zhongcan(1999,2000)等发表的论文^[175,188]。1996 年 Mesirov 等编辑出版的关于分子生物学中数学方法的论文集中收集了与 DNA 弹性杆模型有关的综述文章^[134]。

Kirchhoff 的动力学比拟理论在将动力学的概念和方法注入弹性力学的同时,也向分析力学、运动稳定性等传统学科提出新问题。根据弹性力学最小势能原理分析弹性杆的平衡状态,可导出与分析力学形式相同的哈密顿 (W. R. Hamilton) 原理,仅时间积分变量 t 被弧坐标 s 代替,哈密顿作用量被弹性杆的总势能代替。由弧坐标哈密顿原理出发,可以导出弧坐标拉格朗日方程、哈密顿正则方程或 Boltzman-Hamel 方程。Kirchhoff 方程及其初积分可用任何一种分析力学方法导出。尽管利用分析力学方法讨论弹性杆的文章已见诸文献,如 Westcott, Tobias, Olson (1995)^[121], Langer, Singer (1996)^[140], Coronado (2000)^[198]的工作,但目前尚未形成严格的弧坐标分析力学体系。经典分析力学的一些基本概念,如完整约束与非完整约束的含义在弧坐标分析力学中应重新加以阐释。杆的端部约束条件常以积分形式出现。定常约束,即同一约束条件施加于全杆的情形在弹性杆中并不多见,而约束条件随弧坐标改变的非定常约束在弹性杆中则普遍存在,因为作为 DNA 模型的弹性杆往往在不同区域内受到不同的几何约束。例如当考虑 DNA 在不同弧段自相接触或与蛋白质分子接触的可能性时,约束仅存在于杆的局部范围,即弧坐标的有限区间以内。产生约束的位置则有待于在计算过程中确定。在分析力学中,时间变量 t 只能朝正方向单调增大,约束的出现只影响随后的运动。而弧坐标 s 的变化具有可逆性,在 $s=s_0$ 处出现的约束不仅影响 $s>s_0$ 的状态,而且也影响 $s<s_0$ 的状态。这种特殊的“分段约束”问题在经典分析力学中尚无先例,必须建立新概念,研究新问题。

弹性杆力学的研究工作也对运动稳定性理论提出了新的问题。将时间变量 t 替换为空间变量 s 以后,原则上 Lyapunov 关于运动稳定性的严格定义和定理,以及各种形式的稳定性判据均可照搬到弹性杆的平衡稳定性。由于弹性杆仅占据有限空间域,关于平衡稳定性的判断仅在弧坐标的有限范围内进行,因此弹性杆的平衡稳定性属于在有限区间内考察的实用稳定性范畴。根据 Lyapunov 运动稳定性理论导出的稳定性判据超出了弹性杆稳定性的实际要求。Lyapunov 运动稳定性理论中的时间变量 t 从发生初扰动的时刻起只能朝正方向单调变化。考虑到弧坐标变化的可逆性,若初扰动位置不在弹性杆的端点,当弧坐标 s 朝正、负两个方向变化时,渐近稳定性或不稳定性可持相反结论。Lyapunov 稳定性不同于工程中判断弹性杆屈曲所依据的欧拉稳定性。以受轴向力作用的直杆为例,压杆受微扰的挠性线切线倾角在零附近变化而符合 Lyapunov 稳定性定义。拉杆的受微扰平衡状态为带回环的挠性线,其切线倾角在大范围内变化而符合 Lyapunov 不稳定性定义。但按照欧拉稳定性概念,对于确定的弹性杆端部约束,只要有与原平衡状态不同的新平衡状态出现,即认为原状态失稳,据此导出压杆失稳的欧拉载荷。于是对于相同的物理现象,根据两种稳定性概念可得出截然不同的结论。

在静力学范畴内研究弹性杆的稳定性,由于无时间变量参与,不可能根据挠性线变化的时间历程来判断受扰后弹性杆的运动趋向。更严格的稳定性判断必须在动力学范畴内进行,即必须研究具有弧坐标 s 和时间 t 双重自变量的离散系统的稳定性问题。在已发表的弹性杆动力学文献中,Tabor, Klapper(1994)^[116] 导出了杆截面的运动学关系式,以及用拓扑学参数描述杆几何形态的运动学方程。Goriely, Shipman(2000)^[190,191] 在线性化动力学方程的基础上,用数值方法研究了螺旋线平衡的一次近似稳定性。Tsuru(1986,1987)^[66,68], Tobias, Coleman 等(1996)^[133,144] 研究了杆的扭转转动,Antman(1979)^[39], Coleman(1992)^[98] 研究了弹性波问题。Goldstein, Camalet, Wolgemuth 等(1998,1999,2000)^[162,179,203] 研究了弹性杆在黏性介质中的运动。

弹性杆平衡方程的非线性必然导致分岔与混沌等非线性现象的出现。Thompson, Virgin, Milke, Holmes(1988)^[72,76], Davis, Moon(1993)^[101] 等研究了弹性杆平衡的混沌问题。由于时间变量被弧坐标所取代,动力学中的时间历程概念转换为弹性杆空间分布的几何概念。动力学中的周期运动转换为两端连接的封闭弹性杆。因此弹性杆的混沌概念应形象地理解为对初值极端敏感且在空间中无规则分布的不封闭的往复缠绕状态。混沌动力学的理论和研究方法均可用于分析弹性杆的混沌形态。Vielsack(1982)^[46], Buzano(1986)^[64], Domokos(2003)^[223] 等研究了弹性杆平衡的分岔问题。

国内在弹性细杆力学基础方面的研究工作主要偏重于平衡稳定性的分析^[240,259,260,264,271,274,279],以及与动力学有关的分析^[267,270,273,275,278]。此外,还提出了将 Schrödinger 方程的表达形式扩展到非圆截面杆,导出其近似解析解^[242,272],研究了弹性杆的分析力学问题^[241,281],以及受圆柱面约束杆的平衡稳定性等问题^[266,280]。

本书系统地叙述超大变形弹性细杆的非线性力学。全书共分 7 章。第 1 章为曲线和曲杆的微分几何和拓扑学基础,对描述曲杆几何形态的扭转数、连接数、缠绕数等参数的定义和计算作出解释。第 2 章分别应用矢量力学方法和分析力学方法建立弹性杆的 Kirchhoff 方程,讨论若干可积情况,即一般受力情况的圆截面杆和受力矩单独作用的非

圆截面杆。第 3 章建立以杆的曲率、挠率和截面扭角为变量的 Schrödinger 方程, 作为 Kirchhoff 理论的另一种表达方式; 在圆截面杆情形, 有与 Kirchhoff 方程完全一致的解析积分。第 4 章叙述杆变形后的挠性线计算, 讨论可利用解析积分计算挠性线的若干特殊问题, 并讨论受约束杆的挠性线问题。第 5 章在 Lyapunov 稳定性理论上讨论弹性杆的平衡稳定性, 分别利用能量方法、相平面方法、一次近似理论和 Lyapunov 直接方法推导圆截面和非圆截面直杆和螺旋杆的平衡稳定性条件; 第 1 章中建立的拓扑学参数在能量法中得到了应用; 通过对具体问题的分析, 讨论 Lyapunov 稳定性概念与欧拉稳定性概念的区别与联系; 此外还讨论弹性杆平衡状态的分岔和混沌问题。第 6 章讨论弹性杆的动力学问题, 建立一般情况下以及黏性介质中弹性杆的动力学方程; 在以弧坐标 s 和时间 t 为双重自变量的离散系统稳定性概念的基础上, 利用一次近似理论推导直杆和螺旋杆的动态稳定性条件; 讨论弹性杆的扭转振动和弯曲振动问题。第 7 章为计算弹性杆平衡的数值方法, 使用欧拉参数代替欧拉角作为基本变量, 以避免数值计算过程中的奇异性; 对静电引力和几何约束两种不同情况, 建立基于有限元方法的离散化弹性杆平衡方程。为使读者能顺利阅读, 与正文有关的一些数学和力学基础知识, 包括椭圆函数基础、刚体运动学基础、弹性杆的位移、应变和应变能和稳定性理论基础等在附录中列出。参考文献中列出的二百余篇文献分别按中英文以发表时间顺序排列。这些文章多发表在物理、化学物理、物理化学、生物化学、高分子化学, 以及分子生物学等学科的刊物上, 但却与力学学科密切相关。作为一本力学著作, 本书在讨论弹性杆的力学问题时不涉及生物学范畴的内容, 但在叙述中注意与分子生物学背景的联系, 并在脚注中对具体概念之间的关系作出解释。

第 1 章 曲线和曲杆的几何学基础

极端细长且具有超大变形的弹性细杆不同于传统弹性力学的研究对象。松弛状态下的直杆变形后可呈现蜿蜒、缠绕、扭结等复杂的几何形态。本章建立与曲线和曲杆几何学有关的基本概念。曲率和挠率是描述空间曲线局部性质的微分几何参数。在刚性截面假定基础上,曲杆的几何形态由截面沿中心线的移动和转动所体现。中心线几何形状的改变由杆的弯曲变形引起,截面绕中心线的转动则体现杆的扭转变形。截面的弯扭度矢量,即截面的无限小角位移矢量对弧坐标的变化率是描述曲杆局部几何特征的参量,由中心线的曲率和截面的扭率构成。1970 年前后 White, Fuller 等利用扭转数、连接数、缠绕数等拓扑学参数描述曲杆的整体几何特征,并将其应用于 DNA 的弹性杆模型。本章叙述这些拓扑学参数的定义和性质,以及参数之间的相互关系。

1.1 曲线的几何学

讨论一长度为 L 的光滑空间曲线 C 。选定曲线上的 P_0 点为原点,在曲线无伸缩变形的条件下,建立沿曲线 C 的弧坐标 s 。曲线上任意点 P 在曲线上的位置由弧坐标 s 确定。以空间中的固定点 O 为原点,建立定参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$, P 点在空间中的位置由相对固定点 O 的矢径 r 确定, r 为弧坐标 s 的单值连续可微函数。矢量 $r(s)$ 完全确定曲线 C 的几何形状。计算矢量 $r(s)$ 对 s 的导数,记作 $T(s)$

$$T(s) = \frac{dr}{ds} \quad (1.1.1)$$

T 为沿曲线 C 在 P 点处切线方向的单位矢量,称为切线矢量。 T 对 s 的导数的模定义为曲线 C 在 P 点处的曲率,记作 $\kappa(s)$

$$\kappa(s) = \left| \frac{dT}{ds} \right| \quad (1.1.2)$$

在图 1.1 中,曲率 κ 等于 P 点移动到相邻的 P' 点时,切线矢量的无限小角位移 $\Delta\phi$ 与弧坐标增量 Δs 之比,当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时的极限,可表示为 ϕ 对弧坐标 s 的导数^①

① ϕ 对 s 的导数是一种借用的表达形式,因为一般情况下 ϕ 不能表示为 s 的函数,只是其无限小增量 $\Delta\phi$ 为 s 的函数。 ϕ 属于分析力学中的准坐标。

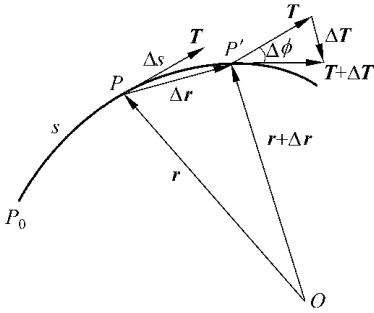


图 1.1 切线的无限小角位移

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta T}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} \quad (1.1.3)$$

因此曲率 κ 为度量曲线弯曲程度的参数,其倒数称为曲线 C 在 P 点处的曲率半径,记作 $\rho(s)$:

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa} \quad (1.1.4)$$

沿 dT/ds 方向的单位矢量称为曲线 C 在 P 点处的法线矢量,记作 $N(s)$:

$$N(s) = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} \quad (\kappa \neq 0) \quad (1.1.5)$$

定义以下矢量为曲线 C 在 P 点处的副法线矢量,记作 $B(s)$:

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (1.1.6)$$

矢量 N, B, T 组成以 P 为原点,依附于曲线的右手坐标系 (P - NBT),称为曲线的 Frenet 坐标系(图 1.2)。各坐标轴分别称为法线轴、副法线轴和切线轴,其基矢量 e_n, e_b, e_t 分别与矢量 N, B, T 相等。切线轴和法线轴张成的平面 (T, N)称为曲线 C 在 P 点处的密切平面,法线轴和副法线轴张成的平面 (N, B)称为曲线 C 在 P 点处的法平面。设想 P 点沿曲线 C 以单位速度朝弧坐标 s 的正向运动,则法平面绕副法线轴转动的角速度为 $\kappa(s)$ 。由于副法线矢量 B 与密切平面正交,密切平面绕切线轴转动角速度的模为

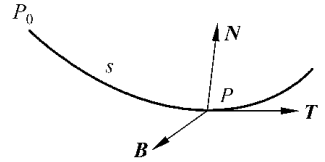


图 1.2 Frenet 坐标系

$$\tau(s) = \left| \frac{dB}{ds} \right| \quad (1.1.7)$$

$\tau(s)$ 称为曲线 C 在 P 点处的挠率。挠率为零时密切平面在空间中无转动,因此平面曲线上任意点处的挠率均等于零。上述法线和副法线的定义均要求曲率 κ 不得为零。在以下讨论中,除特别指出的情形以外,均认为 $\kappa \neq 0$ 条件得到满足。

引入矢量 $\omega_F(s)$,定义为

$$\omega_F(s) = \kappa(s)B + \tau(s)T \quad (1.1.8)$$

$\omega_F(s)$ 称为曲线的 Darboux 矢量,其物理意义可理解为当 P 点沿曲线 C 以单位速度朝弧坐标 s 的正向运动时,Frenet 坐标系相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的转动角速度。 $\omega_F(s)$ 与运动学中的角速度概念相似,区别在于时间自变量 t 被弧坐标 s 替代。利用式(1.1.5)和式(1.1.6),式(1.1.8)中与曲率有关的第一项也可表示为

$$\kappa B = T \times \frac{dT}{ds} \quad (1.1.9)$$

矢量 N, B, T 随弧坐标 s 的变化规律取决于 $\omega_F(s)$,由以下微分方程确定:

$$\frac{dN}{ds} = \omega_F \times N \quad (1.1.10a)$$

$$\frac{dB}{ds} = \omega_F \times B \quad (1.1.10b)$$

$$\frac{dT}{ds} = \omega_F \times T \quad (1.1.10c)$$

将式(1.1.8)代入计算后,化作

$$\frac{dN}{ds} = \tau B - \kappa T \quad (1.1.11a)$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N \quad (1.1.11b)$$

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N \quad (1.1.11c)$$

此矢量方程组称为 Frenet-Serret 方程。给定曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 为弧坐标 s 的已知函数,可从 Frenet-Serret 方程解出矢量 N, B, T 的变化规律。则空间曲线 C 可根据式(1.1.1)由以下积分得出:

$$r(s) = \int_0^s T(\sigma) d\sigma + r(0) \quad (1.1.12)$$

其中 σ 为积分变量,矢径 $r(0)$ 表示 P_0 点的空间位置。曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 是确定空间曲线 C 的两个独立变量。借用分析力学名词,将确定曲线或曲杆几何形态的独立变量数目称为曲线或曲杆的自由度,则空间曲线的自由度为 2。

1.2 曲杆的弯扭度

讨论一长度为 L 的细杆,杆截面的几何中心连成的空间曲线 C 称为曲杆的中心线。假定

- (1) 中心线在变形前后均为 2 阶以上光滑曲线;
- (2) 杆的长度和曲率半径远大于横截面的尺度;
- (3) 横截面为刚性平面;
- (4) 忽略弯曲引起的剪切变形,横截面与中心线正交;
- (5) 忽略中心线的拉伸变形,任意两截面沿中心线的距离不变;
- (6) 相邻截面可绕中心线作相对扭转,扭角为 s 的连续函数。

以中心线上的任意点 P 为原点建立截面的主轴坐标系(P - xyz),各坐标轴的基矢量分别为 e_1, e_2, e_3 ,其中 z 轴与曲线 C 的切线轴 T 重合,即 $e_3 = e_t = T$ 。设 χ 为 x 轴与 N 轴,或 y 轴与 B 轴的夹角,即截面相对 Frenet 坐标系扭转的角度(图 1.3),则 (P - xyz) 与 (P - NBT) 之间的方向余弦如表 1.1 所示。曲杆的中心线确定以后,只需再确定扭角 $\chi(s)$ 随弧坐标的变化规律,曲杆在空间中的几何形态即被完全确定,因此曲杆的自由度为 3。

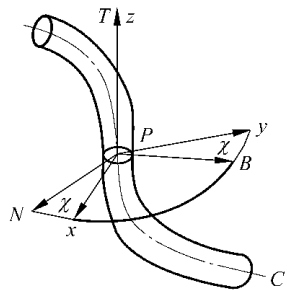


图 1.3 截面主轴坐标系与 Frenet 坐标系

表 1.1

	N	B	T
x	$\cos\chi$	$\sin\chi$	0
y	$-\sin\chi$	$\cos\chi$	0
z	0	0	1

设想当 P 点沿曲线 C 以单位速度朝弧坐标 s 的正向运动时,截面以角速度 ω 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 转动。 ω 为截面相对定坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的绝对角速度,即截面相对 Frenet 坐标系 $(P-NBT)$ 的相对角速度 $(d\chi/ds)e_3$ 与 $(P-NBT)$ 相对定坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的牵连角速度 ω_F 之和。利用式(1.1.8)和表 1.1 可导出

$$\omega = \omega_F + \left(\frac{d\chi}{ds}\right)e_3 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 \quad (1.2.1)$$

其中

$$\omega_1 = \kappa \sin\chi, \quad \omega_2 = \kappa \cos\chi, \quad \omega_3 = \tau + \frac{d\chi}{ds} \quad (1.2.2)$$

式中 ω 沿切线轴的分量 ω_3 为挠率 τ 与相对扭角变化率 $d\chi/ds$ 之和,即截面绕切线轴的绝对转角对弧坐标 s 的变化率,称为杆的扭率,以区别于前面定义的挠率 τ 。有以下几种不同情形

过扭转: $d\chi/ds$ 与 τ 同号, $\omega_3 > \tau$

纯扭转: $d\chi/ds$ 为零, $\omega_3 = \tau$

欠扭转: $d\chi/ds$ 与 τ 异号, $\omega_3 < \tau$

ω 是与杆的弯曲变形和扭转变形相关的矢量,称为杆的弯扭度矢量,或简称弯扭度^①。其物理意义为截面相对定坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的无限小角位移对弧坐标 s 的变化率,可参见附录 B 中式(B.74)的弯扭度定义。利用式(1.1.8)和式(1.1.9),弯扭度 ω 也可用切线矢量 T 及其导数表示为

$$\omega = T \times \frac{dT}{ds} + \omega_3 T \quad (1.2.3)$$

弯扭度的 3 个分量 $\omega_i(s) (i=1,2,3)$ 由曲杆的曲率 κ 、挠率 τ 和相对扭角 χ 的变化率确定,因此也可将 $\omega_i(s) (i=1,2,3)$ 作为确定曲杆几何形态的 3 个独立变量。

1.3 曲杆的扭转数

当 P 点沿曲线 C 从起点 P_0 移动至终端 P_L 时,将扭率 ω_3 沿杆长的积分除以 2π 定义为杆的扭转数,记作 T_w

$$T_w = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \omega_3(s) ds = T_F + \frac{1}{2\pi} \int_C d\chi \quad (1.3.1)$$

^① ω 在文献中尚无统一的名称,如称曲率矢量(curvature vector),或扭率矢量(twisting vector)等,此处称弯扭度似更为确切。相对扭角的变化率 $d\chi/ds$ 在文献中也称为内扭率(internal twist)。

其中 T_F 为 Frenet 坐标的扭转数, 仅取决于曲线 C 的几何形状, 由挠率 τ 的积分确定

$$T_F = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \tau(s) ds \quad (1.3.2)$$

扭转数 T_w 为截面相对定坐标系绕切线轴扭转的圈数。若杆的扭率沿杆长保持不变, 即 ω_3 为常数时, 式(1.3.1)简化为

$$T_w = \frac{L\omega_3}{2\pi} \quad (1.3.3)$$

作为度量曲杆总体扭转程度的参数, 扭转数有以下性质:

- (1) 包含曲杆在内的空间作刚性位移或均匀膨胀时, 扭转数不变;
- (2) 扭转数具有可加性, 曲杆总体的扭转数为各组成部分扭转数之和;
- (3) 平面封闭曲杆的扭转数为整数, 空间封闭曲杆的扭转数为实数, 但不一定为整数。

DNA 的力学模型常简化为具有原始扭率的超细长弹性杆。所谓原始扭率, 是指杆处于无外力作用的松弛状态时已具有的扭率^①。记 ω_3^0 为杆的原始扭率, 杆在受力状态下的扭率为 ω_3 , 则 ω_3 与 ω_3^0 之差称为杆的过扭率, 记作 $\Delta\omega_3$

$$\Delta\omega_3 = \omega_3 - \omega_3^0 \quad (1.3.4)$$

杆的原始扭率产生的原始扭转数 T_{w0} 为

$$T_{w0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \omega_3^0(s) ds \quad (1.3.5)$$

对于具有原始扭率的曲杆, 其扭转数定义为 T_w 与 T_{w0} 之差, 即截面相对松弛状态的扭转数, 记作 ΔT_w :

$$\Delta T_w = T_w - T_{w0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \Delta\omega_3(s) ds \quad (1.3.6)$$

若杆的扭率 ω_3 和原始扭率 ω_3^0 均沿杆长保持不变, 上式简化为

$$\Delta T_w = \frac{L\Delta\omega_3}{2\pi} \quad (1.3.7)$$

截面的主轴坐标系 $(P-xyz)$ 随弧坐标 s 的变化规律取决于弯扭度 $\omega(s)$, 由以下微分方程确定

$$\frac{de_i}{ds} = \omega \times e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3.8)$$

将式(1.2.1)代入后, 导出

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds} &= \left(\tau + \frac{d\chi}{ds} \right) e_2 - \kappa \cos\chi e_3 \\ \frac{de_2}{ds} &= - \left(\tau + \frac{d\chi}{ds} \right) e_1 + \kappa \sin\chi e_3 \\ \frac{de_3}{ds} &= \kappa (\cos\chi e_1 - \sin\chi e_2) \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

若截面相对 Frenet 坐标系无相对扭转, 令 $\chi \equiv 0$, 则方程组(1.3.9)转化为 Frenet-Serret

① 以 DNA 的弹性杆模型为例, 其原始扭率为 1.78 rad/nm 。

方程(1.1.11)。

在截面内沿任一主坐标轴(例如 x 轴)的正负方向各取长度为 ε 的微小线段,曲杆的中心线 C 与此微线段构成一宽度为 2ε 的空间分布的狭长曲带(图 1.4),曲带的中心线 C 上任意点 P 对应的边缘曲线 $C_j (j = 1, 2)$ 上 P_1, P_2 点的矢径 $r_j (j = 1, 2)$ 可用矢量函数表示为

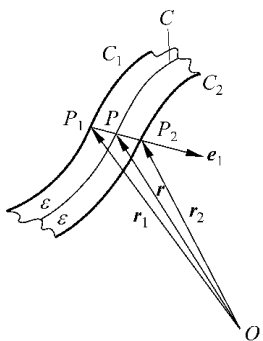


图 1.4 沿曲杆中心线展开的曲带

$$\begin{aligned} C_1: r_1(s) &= r(s) - \varepsilon e_1(s) \\ C_2: r_2(s) &= r(s) + \varepsilon e_1(s) \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

其中 r 为 P 点相对固定点 O 的矢径, $r_j (j = 1, 2)$ 为与 P 点对应的边缘点 P_1, P_2 的矢径。上述曲带可作为曲杆的简化模型,曲杆变形的几何形态可利用上述曲带的弯扭变形直观地表达出来^①。以下举例说明。

例 1: 螺旋杆

螺旋杆的中心线为圆柱面螺旋线。设螺旋线的半径为 R , 螺旋角为 α , 则每个螺旋周期的长度 ΔL 为

$$\Delta L = \frac{2\pi R}{\cos\alpha} \quad (1.3.11)$$

有 N 圈的螺旋线总长度为 $L = N\Delta L$ 。设固定坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的 ζ 轴沿螺旋轴, 当 P 点以单位速度朝弧坐标 s 的正向沿螺旋线运动时, 截面的 Frenet 坐标系以常值角速度 ω_0 绕 ζ 轴转动。 $\omega_0 = \omega_0 e_\zeta$ 即螺旋线的 Darboux 矢量。利用图 1.5 中表示的几何关系 $R\omega_0 s = s\cos\alpha$ 导出

$$\omega_0 = \frac{1}{R} \cos\alpha \quad (1.3.12)$$

将 ω_0 向副法线轴和切线轴投影, 导出螺旋线的曲率 κ 和挠率 τ 均为常值

$$\begin{aligned} \kappa &= \omega_0 \cos\alpha = \frac{1}{R} \cos^2\alpha \\ \tau &= \omega_0 \sin\alpha = \frac{1}{R} \cos\alpha \sin\alpha \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

ω_0 的正负号确定螺旋线的旋转方向, $0 < \alpha < \pi/2$ 时为右螺旋, $\omega_0 > 0$; $\pi/2 < \alpha < \pi$ 时为左螺旋, $\omega_0 < 0$ 。 $\alpha = \pi/2$ 和 $\alpha = 0$ 的两种极端情形作为特例另行讨论。

杆截面相对中心线可产生任意扭转变形, 因此杆的扭率 ω_3 应等于螺旋线的常值挠率 τ 与相对扭角的变化率 $d\chi/ds$ 之和。若截面相对 Frenet 坐标系无扭转, 则扭率与挠率相等, N 圈螺旋杆的扭转数为

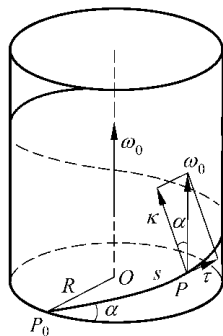


图 1.5 螺旋杆

^① 若将 DNA 双螺旋结构的两条螺旋形核苷酸主链作为边缘曲线 C_1 和 C_2 , 则长度为 2ε 的微小线段可视为联系二主链的碱基对。曲带的宽度即螺旋线直径约为 2nm 。

$$T_w = T_F = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \tau ds = N \sin \alpha \quad (1.3.14)$$

例 2: 直杆

直杆是螺旋角为 $\pi/2$ 时螺旋杆的特例。令式(1.3.13)中的 $\alpha = \pi/2$, 则曲率 κ 为零。作为 Frenet 坐标系的奇异位置, 挠率 τ 无意义。因此截面的扭转必须以定坐标系($O-\xi\eta\zeta$)为参照物。 $\alpha = \pi/2$ 时, 上述定坐标系的 ζ 轴与直杆的中心线 z 轴一致。设截面的主轴坐标系($P-xyz$)相对($O-\xi\eta\zeta$)的转角, 即直杆的绝对扭角为 ϕ (图 1.6)。扭角 ϕ 相对 s 的导数为杆的扭率。由于 $\phi = \omega_0 s$, 杆的扭转数 T_w 为

$$T_w = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \omega_0 ds = \frac{\omega_0 L}{2\pi} \quad (1.3.15)$$

例 3: 圆环杆

圆环杆是螺旋角为零时螺旋杆的另一特例, 也是最简单的封闭曲杆。令式(1.3.13)中的 $\alpha = 0$, 得到

$$\kappa = \frac{1}{R}, \quad \tau = 0 \quad (1.3.16)$$

其中 R 为圆环的中心线半径。由于任何平面曲线上各点的密切平面相同, 因此圆环杆的 T_F 等于零, 扭转数 T_w 等于截面扭转的圈数, 必为整数。若截面无扭转(图 1.7(a)), 则 T_w 等于零。若截面在 A 点处绕切线轴产生 180° 扭转, 从 T 矢量的顶端观察确定扭转方向, 则每次扭转可为 T_w 提供 $+1/2$ (逆时针)或 $-1/2$ (顺时针)。封闭曲杆的连续性要求曲带的边缘曲线 C_1 、 C_2 自相连接, 而奇次扭转可使 C_1 与 C_2 产生交叉连接, 使曲面的法线方向变得不确定^①。因此扭转的次数必须为偶数, 以保证双侧曲面的有向性。若截面在 B 点处也产生 180° 扭转, 则经过两次扭转后的总扭转数 T_w 可为 $+1, 0$ 或 -1 三种可能性之一(图 1.7(b), (c), (d))。

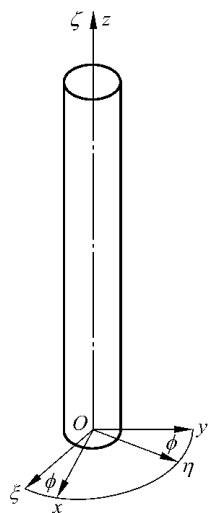


图 1.6 直杆截面的主轴坐标系

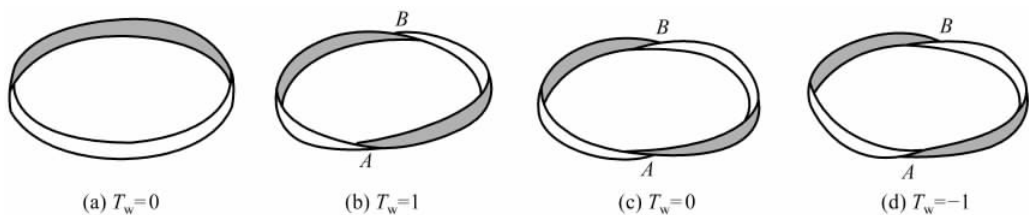


图 1.7 圆环杆

例 4: 8 字形杆

平面封闭曲线自相交一次即形成 8 字形曲线。以 8 字形曲线为中心线的曲杆为 8 字形杆。由于实际存在的曲杆是有粗细的实体, 作为平面曲线的中心线不可能自相穿越。因此必须将曲线的相交理解为空间交叉, 而曲线在交叉点处的距离为无限小量。也可直

^① 例如若环形带只产生一次扭转, 则形成 Möbius 带。

观地想像为,在交叉点处,曲线的一部分紧贴另一部分从上方越过,或从下方钻过。这种有交叉点的曲线只能在近似意义上理解为平面曲线。由于曲线的切平面在交叉点处有微小转动,因此 Frenet 坐标系的扭转数 T_F 在近似意义上等于零。若截面绕切线轴无相对扭转,则杆的扭转数 T_w 亦在近似意义上等于零(图 1.8(a))。与圆环杆类似,若截面在 A 点处绕切线轴产生 180° 扭转,则必须在另一点 B 处也产生 180° 扭转,每次扭转为 T_w 提供 $+1/2$ (逆时针)或 $-1/2$ (顺时针),总扭转数 T_w 在近似意义上等于 $+1, 0$ 或 -1 (图 1.8(b), (c), (d))。

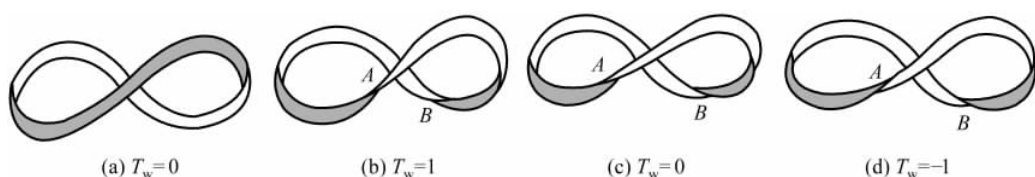


图 1.8 8 字形杆

1.4 曲线的连接数

设 C_1, C_2 为两条不相交的空间有向曲线, T_1, T_2 分别为 C_1, C_2 的切线基矢量。在 C_1 与 C_2 的交叉处, 从一个确定的点 O (如观察者的视点) 观察二曲线在投影面上的交点 P , 引矢量 $\sigma = PO$ 。根据矢量 T_1, T_2 和 σ 的相互关系, 按以下规则定义此二曲线的连接数 L_{12} (图 1.9)。

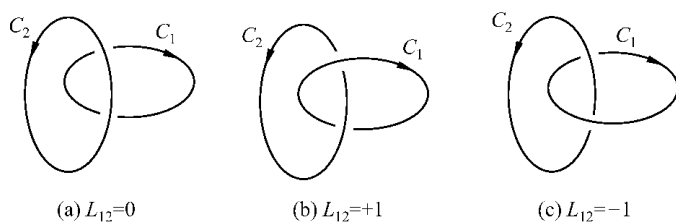


图 1.9 连接数的定义

- (1) 若 T_1 在 T_2 的上方与 T_2 交叉, 且 $T_1 \times T_2$ 与 σ 方向一致, 则 $L_{12} = +1$;
- (2) 若 T_1 在 T_2 的上方与 T_2 交叉, 且 $T_1 \times T_2$ 与 σ 方向相反, 则 $L_{12} = -1$;
- (3) 若 C_1 与 C_2 有数个交叉点, 则 L_{12} 为各交叉点处连接数的总和。

图 1.10 给出连接数的若干具体例子。

若 C_1, C_2 为两条不相交的空间有向闭曲线, 连接数也可采用另一种定义: 将闭曲线 C_1 包围的曲面称为 D_1 , 根据 C_1 的方向由右手定则确定 D_1 的方向, 则 C_2 从 D_1 负向穿过 D_1 的次数减去从 D_1 正向穿过 D_1 的次数定义为二曲线 C_1 与 C_2 的连接数 L_{12} (图 1.11)。读者不难利用图 1.10 中的例子检验此两种定义的一致性。

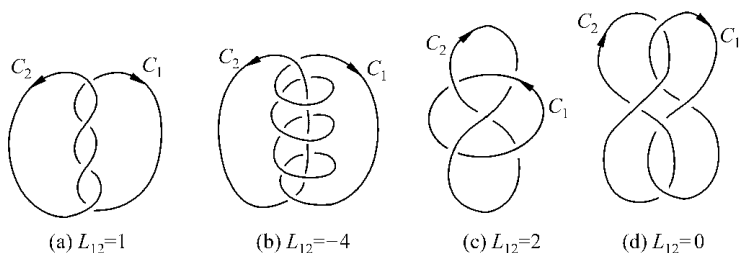


图 1.10 曲线的连接数举例

连接数有以下性质：

- (1) L_{12} 为整数；
- (2) $L_{12} = L_{21}$ ；
- (3) L_{12} 与观察点的位置无关；
- (4) 二曲线每交叉一次，根据从上方还是从下方交叉方式的不同， L_{12} 的值改变 +1 或 -1；
- (5) 二曲线中若任一曲线改变方向，则 L_{12} 变号。

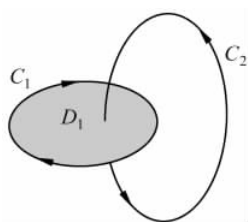


图 1.11 连接数的另一种定义

1833 年 Gauss 曾给出一个计算连接数 L_{12} 的二重积分，称为 Gauss 连接数积分：

$$L_{12} = G(r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(T_1(s_1) \times T_2(s_2)) \cdot (r_1(s_1) - r_2(s_2))}{|r_1(s_1) - r_2(s_2)|^3} ds_1 ds_2 \quad (1.4.1)$$

其中 P_1, P_2 为二有向光滑曲线 C_1, C_2 上弧坐标分别为 s_1, s_2 的二任意点， $r_1(s_1), r_2(s_2)$ 为 P_1, P_2 相对固定点 O 的矢径， $T_1(s_1), T_2(s_2)$ 为 P_1, P_2 点处的切线矢量。设 P_1, P_2 相对笛卡尔坐标系的坐标分别为 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ ，可将 Gauss 积分 $G(r_1, r_2)$ 写作

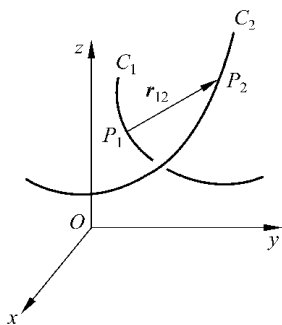


图 1.12 连接数的计算

$$G(r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & dx_1 & dx_2 \\ y_2 - y_1 & dy_1 & dy_2 \\ z_2 - z_1 & dz_1 & dz_2 \end{vmatrix} \quad (1.4.2)$$

其中 r_{12} 为 P_1 至 P_2 的矢径 $r_{12} = r_2 - r_1$ 的长度(图 1.12)

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.4.3)$$

但 Gauss 未将证明过程写出。以后 Maxwell (1873), Edwards(1968), Moffatt(1969) 等人从不同途径作出了数学证明。曲线 C_1, C_2 的几何形状给定以后，即可对积分式(1.4.2)

用数值方法计算其连接数。

1.5 曲杆的缠绕数

前面已说明，曲杆的几何形态可用沿中心线 C 展开的曲带表示。设 C_1 和 C_2 为曲带的两条边缘曲线，将 1.4 节定义的 C_1 与 C_2 的连接数 L_{12} 称为此曲带或曲杆的自连接数，记

作 L_k 。自连接数 L_k 是描述曲带或曲杆几何形态的特征参数。图 1.13 展示不同自连接数的曲带的若干例子。由于截面绕切线轴扭转的任意性,同一条中心线可扩展出不同的曲带,对应于不同的自连接数 L_k 和扭转数 T_w 。可以证明(Calugareanu,1961; Pohl,1968; White,1969),曲杆的自连接数 L_k 有以下性质:

- (1) 封闭的曲杆或两端固定的曲杆,当中心线连续变形时其自连接数 L_k 为常值^①;
- (2) 由同一条闭曲线扩展出的不同曲杆的自连接数 L_k 与扭转数 T_w 之差为常值;
- (3) 曲杆的中心线为不自相穿越的平面曲线时,其自连接数 L_k 与扭转数 T_w 相等。

性质(1)表明,当曲杆在边界处被严格固定时,中心线的任意连续变形不影响其自连接数 L_k ^②。因此自连接数 L_k 是封闭曲杆或两端固定曲杆的拓扑不变量。将曲杆的自连接数 L_k 与扭转数 T_w 的差值定义为曲杆的缠绕数,记作 W_r :

$$W_r = L_k - T_w \quad (1.5.1)$$

式(1.5.1)也称为 White 公式^[20]。若曲杆具有原始扭率,将式(1.5.1)的右边各项减去原始扭转数 T_{w0} ,White 公式改写为

$$W_r = \Delta L_k - \Delta T_w \quad (1.5.2)$$

其中 ΔL_k 为自连接数 L_k 与 T_{w0} 之差。

$$\Delta L_k = L_k - T_{w0} \quad (1.5.3)$$

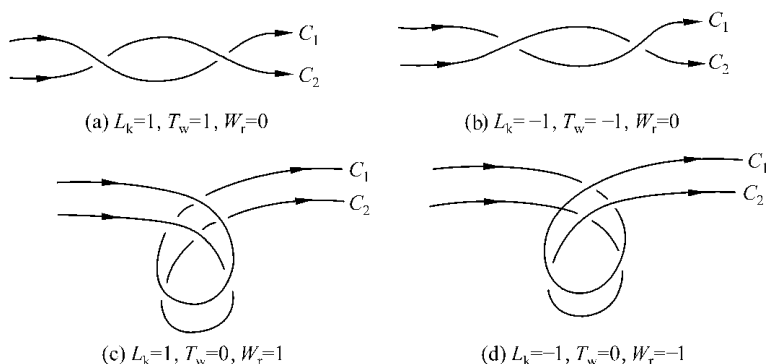


图 1.13 曲带的自连接数举例

从图 1.13 看出,曲带的自连接数可来源于扭转(图 1.13(a),(b))和缠绕(图 1.13(c),(d))两种不同几何形态,即扭转和缠绕均对自连接数做出贡献。可从中理解 White 公式(1.5.1)中自连接数 L_k 等于扭转数 T_w 与缠绕数 W_r 之和的合理性。

从自连接数的性质(2),(3)归纳出缠绕数的以下性质:

- (1) 以同一条闭曲线为中心线扩展出的不同曲带具有相同的缠绕数;
- (2) 平面曲线的缠绕数 W_r 为整数。空间曲线的缠绕数 W_r 为实数,但不一定为整数;
- (3) 平面曲线不自相穿越时缠绕数 W_r 为零。每穿越一次,根据从上方还是从下方穿越方式的不同,缠绕数 W_r 增加 +1 或 -1。

① 封闭曲杆或两端固定曲杆要求其中心线 C 和边缘曲线 C_1, C_2 均为封闭曲线或两端均被固定。

② 曲线的连续变形必须满足同胚映射条件,即曲线可任意变形但不得自相交。

性质(1)表明缠绕数 W_r 由闭曲线的几何形态完全确定,与扩展出的曲带的扭转状况无关,因此缠绕数 W_r 是闭曲线的拓扑不变量。在图 1.14 中,由平面 8 字形曲线展成各种不同的曲带,各自对应于不同的自连接数 L_k 和扭转数 T_w ,但缠绕数 W_r 均等于 +1 或 -1,与曲带的构成无关。图 1.15 给出若干平面曲线的缠绕数 W_r 的具体例子。图 1.16(a) 表示自连接数 L_k , 缠绕数 W_r 和扭转数 T_w 均为零的无扭转平面圆环杆,当中心线连续变形为图 1.16(b) 和图 1.16(c) 中的螺旋线时,缠绕数 W_r 和螺旋杆的扭转数 T_w 可能改变,但自连接数 L_k 保持零值不变。其中图 1.16(c) 中的曲杆由两个旋转方向相反的螺旋杆组成,其自连接数 L_k , 缠绕数 W_r 和扭转数 T_w 均保持零值。电话线和攀缘植物细茎的自缠绕现象可由此获得理论解释。

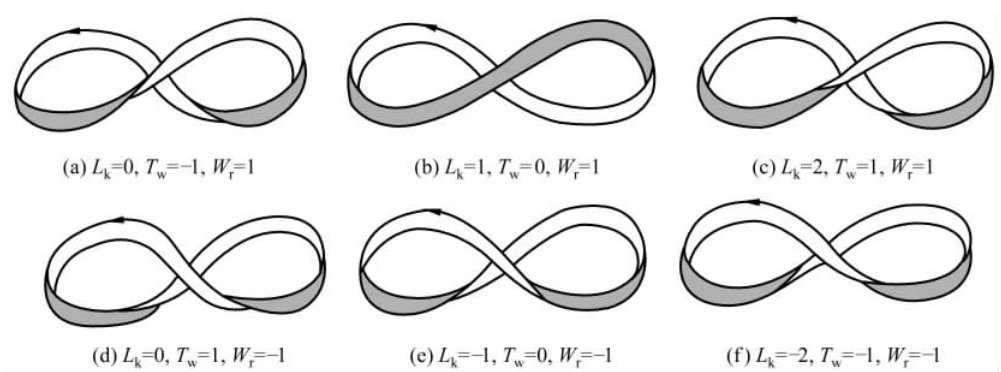


图 1.14 8 字形杆的自连接数、扭转数和缠绕数

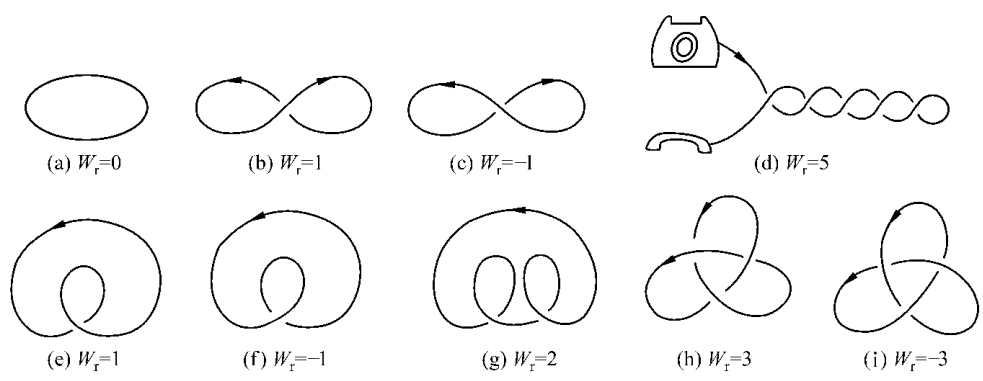


图 1.15 曲线的缠绕数举例

Fuller 于 1978 年对缠绕数 W_r 给出一个直观的几何解释^[29]。设有不自相穿越的空间闭曲线 C , 其切线基矢量 T 随弧坐标 s 连续变化。将矢量 $T(s)$ 的起点移至单位球面的中心, 其末端随弧坐标 s 从起点至终点的变化在单位球面上描出封闭的球面曲线 Γ , 将 Γ 包围的内侧 (即沿曲线方向左侧) 的球面面积记作 S , 则曲线 C 的缠绕数 W_r 的计算公式为

$$W_r = \frac{S}{2\pi} - 1 \tag{1.5.4}$$

利用此几何解释, 不自相交的任意平面闭曲线的切线基矢量 T 环绕一周后在单位球面上

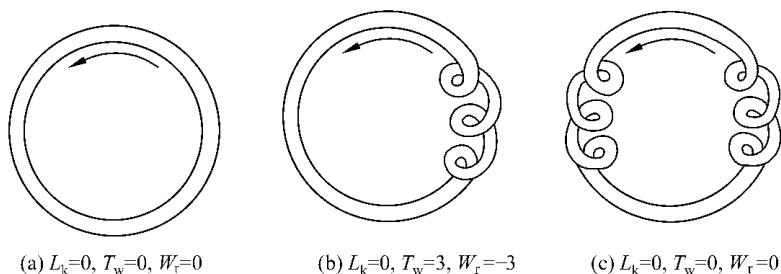


图 1.16 无扭转平面圆环杆转变为螺旋杆

描出一个大圆弧 Γ , 包围的半球面积为 2π , 代入式 (1.5.4) 后, 算出的缠绕数 W_r 等于零。可以推断, 8 字形平面曲线的切线基矢量 T 环绕两周, Γ 包围两倍的半球面积, 对应的缠绕数 W_r 等于 $+1$ 或 -1 。8 字形曲线重复 n 次构成“麻花”形平面曲线, 其缠绕数 W_r 为 $+n$ 或 $-n$, 与曲线的交叉次数相等。对于图 1.17

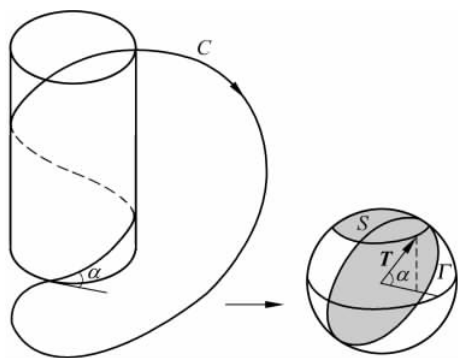


图 1.17 螺旋线的缠绕数

表示的倾角为 α 的螺旋线, 两端用平面闭曲线连接, 其切线基矢量 T 描出的球面曲线 Γ 所包围的面积为半球面积 2π 与球冠面积 $2\pi(1 - \sin\alpha)$ 之和, 即

$$S = 2\pi(2 - \sin\alpha) \quad (1.5.5)$$

代入式 (1.5.4) 后, 算出缠绕数 W_r 为 $1 - \sin\alpha$ 。由于自连接数 $L_k = 1$ (见图 1.13(c)), 根据 White 公式 (1.5.1) 算出螺旋杆的扭转数 T_w 为 $\sin\alpha$ 。若螺旋线有 n 圈, 则缠绕数 W_r 为 $n(1 - \sin\alpha)$, 自连接数 $L_k = n$, 扭转数 T_w 为 $n\sin\alpha$, 与

式 (1.3.14) 一致。从上述麻花线和螺旋线的例子可以直观地理解缠绕数 W_r 为度量曲线缠绕或盘旋程度的参数。

以上定义的缠绕数 W_r 体现了曲杆中心线的拓扑性质, 扭转数 T_w 或 ΔT_w 体现了曲杆绕切线轴的扭转性质。因此缠绕数 W_r 与扭转数 T_w 或 ΔT_w 可作为描述曲杆宏观几何形态的两个拓扑学参数。White 公式 (1.5.1) 或 (1.5.2) 表明, 缠绕数与扭转数之和等于曲杆的自连接数 L_k 或 ΔL_k 。根据上述自连接数的性质 (1), 当曲杆的端部约束状况被严格固定时, 其自连接数为常值, 即缠绕数与扭转数之和为守恒量。当缠绕数确定以后, 扭转数即随之确定。此时曲杆的几何状态可由缠绕数单独确定。当中心线有微小变形时, 自连接数 L_k 或 ΔL_k 的增量为零, 缠绕数 W_r 和扭转数 T_w 的增量 δW_r 和 δT_w 应满足以下关系:

$$\delta W_r + \delta T_w = 0 \quad (1.5.6)$$

对于有原始扭率的曲杆, 应改为

$$\delta W_r + \delta(\Delta T_w) = 0 \quad (1.5.7)$$

变分式 (1.5.6) 或式 (1.5.7) 体现出曲杆的弯曲变形与扭转变形之间的相互转换关系。如图 1.18 所示的两端固定的曲杆, 当中心线为直线时其扭转数与连接数相等, $T_w = L_k = 2$, 缠绕数 W_r 为零; 中心线变为螺旋线时, 自连接数 L_k 不变, 扭转数 T_w 从 2 变为零, 而缠绕

数 W_r 从零变为 2。若曲杆的端部约束被部分解除, 自连接数即不再守恒, 缠绕数与扭转数的变分成为独立变量, 即弯曲变形与扭转变形相互独立。此时曲杆的几何状态由缠绕数和扭转数两个独立参数共同确定。

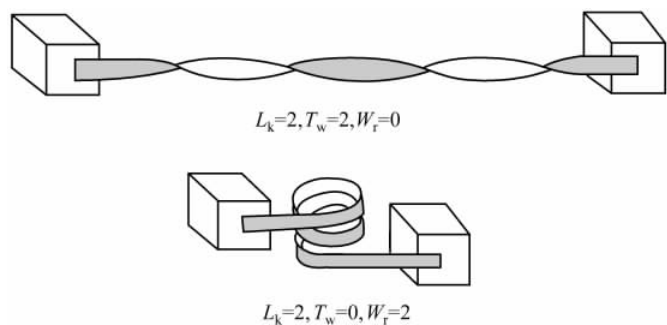


图 1.18 两端固定杆的扭转数与连接数的相互转换

对于不自相交的光滑曲线 C , White(1989) 证明了可利用 Gauss 连接数积分式(1.4.1) 计算缠绕数 W_r , 只须将缠绕数 W_r 设想为曲线 C 与自身的连接数。将积分式(1.4.1) 中的曲线 C_1, C_2 改为同一条曲线 C , P_1, P_2 为曲线 C 上弧坐标分别为 s_1, s_2 的两个任意点。导出

$$W_r = G(r, r) = \frac{1}{4\pi} \int_C \int_C \frac{(T(s_1) \times T(s_2)) \cdot (r(s_1) - r(s_2))}{|r(s_1) - r(s_2)|^3} ds_1 ds_2 \quad (1.5.8)$$

其中 $r(s)$ 为曲线 C 上任意点 P 相对固定点 O 的矢径, $T(s)$ 为 P 点处的切线矢量。

第 2 章 Kirchhoff 方程及其积分

1859 年 Kirchhoff 在刚性截面、线性本构关系和忽略体积力等假定条件下讨论弹性杆的平衡问题。刚性截面假定使一维连续系统的弹性杆简化为以弧坐标 s 为自变量的离散系统。由于所建立的弹性杆平衡方程形式上与刚体定点转动的欧拉-泊松方程相同, Kirchhoff 提出动力学比拟方法, 将经典力学中的动力学理论用于弹性杆的静力学研究。从弹性力学的最小势能原理出发, 可导出弧坐标的哈密顿原理。以表示截面姿态的欧拉角为广义坐标, 可导出拉格朗日方程和相应的正则方程。以准坐标代替广义坐标, 则导出 Boltzman-Hamel 方程和相应的准坐标正则方程。从而形成以弧坐标代替时间坐标的弧坐标分析力学。Kirchhoff 方程可用弧坐标分析力学的任何一种方法建立。对于受约束弹性杆, 可引入拉格朗日乘子建立平衡方程。对于圆截面杆和仅受力偶作用的非圆截面杆两种特殊情形, 可导出椭圆函数形式的解析积分, 分别与刚体动力学的拉格朗日情形和欧拉情形相对应。另一类特殊情形, 即扭率为常值的非圆截面杆也存在解析积分。

2.1 Kirchhoff 方程的建立

2.1.1 基本假定

本章在叙述弹性杆平衡问题时仍保留 1.2 节中规定的假定条件。其中刚性截面假定在弹性杆的弯曲问题中对截面形状无特殊限制, 在扭转问题中则仅限于圆截面杆。对于非圆截面杆的一般情形, 过截面的几何中心 P 作与中心线正交的平面 Π , 利用 Saint-Venant 的刚性周边假定, 可将实际截面的边界在 Π 平面上的投影所包围的域作为杆的名义截面。对于接近圆截面的超细长杆, 扭转引起的截面翘曲对杆中心线弯曲变形的影响可予忽略。中心线不伸长的假定基于对拉伸正应变的忽略, 刚性截面与中心线正交的假定基于对弯曲剪应变的忽略。作为对 Kirchhoff 理论的改进, Cosserat 考虑杆的轴向线应变和弯曲剪应变等因素, 建立了更精确的平衡方程^[118]。但 Cosserat 理论不能代替 Kirchhoff 理论在弹性杆力学分析中的奠基作用。

除 1.2 节规定的条件以外, 还必须补充以下条件:

- (1) 杆为等截面, 且截面内两主轴方向有相同的几何尺度;
- (2) 杆为均匀各向同性, 弹性常数为常值, 应力和应变满足线性本构关系;
- (3) 忽略杆的体积力以及杆与杆之间的引力或接触力等分布力;
- (4) 杆在松弛状态下为直杆, 无原始曲率。

其中对截面几何尺度的限制是为避免非圆截面杆扭转变形引起过大的截面翘曲。线性本构关系仅在小应变条件下成立。由于杆的极端细长性,应变沿弧长的积累可使变形后的挠性线远离变形前的松弛状态。因此杆的局部小应变也能形成超大变形的整体效果。考虑到杆的轴向抗拉刚度不可能为无限大,且杆与杆之间可能存在静电力或接触力,因此 1.2 节规定的中心线无拉伸变形以及杆上无分布力的补充假定具有明显的近似性。杆在尚未受力的松弛状态下已经具有的曲率和扭率称为原始曲率和原始扭率。在本章的解析研究中仅考虑杆的原始扭率,认为杆的松弛状态为带扭转变形的直杆。在第 7 章的数值分析方法中,上述假定条件将被放宽,考虑截面和弹性常数沿中心线的变化,以及轴向变形、分布力、原始曲率等被忽略的因素,使研究对象更符合弹性杆的实际状态。

2.1.2 弹性杆平衡方程

讨论一长度为 L 的细长弹性杆,杆的起始端和终止端分别记为 P_0 和 P_L 。设 P 为杆中心线上的任意点, P' 为无限接近的邻近点, P 和 P' 点相对固定参考点 O 的矢径分别为 r 和 $r + \Delta r$, 相对 P_0 点的弧坐标分别为 s 和 $s + \Delta s$ 。规定 P 和 P' 点处外法线矢量与弧坐标增大方向一致的截面为正截面,反之,外法线矢量与弧坐标减小方向一致的截面为负截面。考虑 PP' 微圆弧段内杆的平衡,设 P 点的负截面受邻近截面作用的内力主矢和主矩为 $-F$ 和 $-M$, P' 点的正截面受邻近截面作用的内力主矢和主矩为 $(F + \Delta F)$ 和 $(M + \Delta M)$ (图 2.1)。在平衡状态下上述作用力对 P 点简化的主矢和主矩必须为零。仅保留各增量的一阶小量时,导出

$$\begin{aligned} \Delta F &= 0 \\ \Delta M + \Delta r \times F &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

将上式各项除以 Δs , 令 $\Delta s \rightarrow 0$, 且利用式 (1.1.1), 得到

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds} = T \quad (2.1.2)$$

则从式 (2.1.1) 导出杆的平衡方程

$$\frac{dF}{ds} = 0 \quad (2.1.3a)$$

$$\frac{dM}{ds} + T \times F = 0 \quad (2.1.3b)$$

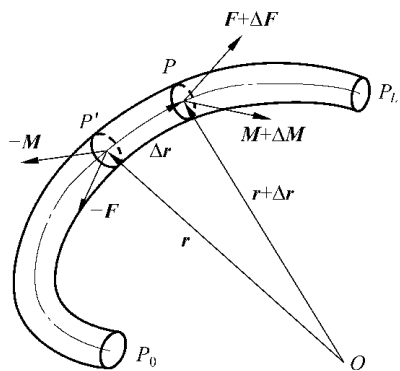


图 2.1 弹性杆微圆弧段的平衡

将求导过程改为相对截面的主轴坐标系 ($P\text{-}xyz$) 进行, 基矢量 T 改记为 e_3 , 方程 (2.1.3) 改写为

$$\frac{\tilde{d}F}{ds} + \omega \times F = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\tilde{d}M}{ds} + \omega \times M + e_3 \times F = 0 \quad (2.1.5)$$

参考坐标系 ($P\text{-}xyz$) 随截面沿弧坐标 s 的转动而改变方位, 上式中的波浪号表示变量相对动坐标系 ($P\text{-}xyz$) 的局部导数, ω 为 ($P\text{-}xyz$) 的角位移变化率, 即 1.2 节中定义的弯扭度。

2.1.3 Kirchhoff 方程

式(1.2.1)给出弯扭度 ω 相对 $(P-xyz)$ 的投影式:

$$\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 \quad (2.1.6)$$

设 F 和 M 的投影式分别为

$$F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3 \quad (2.1.7)$$

$$M = M_1 e_1 + M_2 e_2 + M_3 e_3$$

利用式(2.1.6)和式(2.1.7),导出矢量方程(2.1.4)和方程(2.1.5)相对 $(P-xyz)$ 的投影式

$$\frac{dF_1}{ds} + \omega_2 F_3 - \omega_3 F_2 = 0 \quad (2.1.8a)$$

$$\frac{dF_2}{ds} + \omega_3 F_1 - \omega_1 F_3 = 0 \quad (2.1.8b)$$

$$\frac{dF_3}{ds} + \omega_1 F_2 - \omega_2 F_1 = 0 \quad (2.1.8c)$$

$$\frac{dM_1}{ds} + \omega_2 M_3 - \omega_3 M_2 - F_2 = 0 \quad (2.1.9a)$$

$$\frac{dM_2}{ds} + \omega_3 M_1 - \omega_1 M_3 + F_1 = 0 \quad (2.1.9b)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + \omega_1 M_2 - \omega_2 M_1 = 0 \quad (2.1.9c)$$

式(2.1.3a)表明,由于忽略杆的体积力,各截面内力的主矢 F 为常矢量。将 F 的方向选为定坐标轴 ζ , ζ 轴相对 $(P-xyz)$ 各轴的方向余弦记为 α, β, γ , 则有

$$F_1 = F\alpha, \quad F_2 = F\beta, \quad F_3 = F\gamma \quad (2.1.10)$$

将上式代入方程组(2.1.8),化作

$$\frac{d\alpha}{ds} + \omega_2 \gamma - \omega_3 \beta = 0 \quad (2.1.11a)$$

$$\frac{d\beta}{ds} + \omega_3 \alpha - \omega_1 \gamma = 0 \quad (2.1.11b)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} + \omega_1 \beta - \omega_2 \alpha = 0 \quad (2.1.11c)$$

根据附录 C 中的式(C.15),无原始曲率和扭率时,杆截面作用力的主矩可表达为

$$M_1 = A\omega_1, \quad M_2 = B\omega_2, \quad M_3 = C\omega_3 \quad (2.1.12)$$

其中 A, B 为截面绕 x 轴和 y 轴的抗弯刚度, C 为截面绕 z 轴的抗扭刚度。等截面杆的刚度系数为常数,由杆的弹性常数和截面的几何形状确定

$$A = EI_x, \quad B = EI_y, \quad C = GI_z \quad (2.1.13)$$

杆为均匀各向同性时有 $G = E/2(1+\nu)$, 其中 E, G, ν 分别为杆的杨氏模量、剪切模量和泊松比。 I_x, I_y 为截面相对 x 轴和 y 轴的惯性矩, I_z 为截面相对 z 轴的极惯性矩, 对于半径为 a 的圆截面杆, 分别为

$$I_x = I_y = \frac{\pi a^4}{4}, \quad I_z = \frac{\pi a^4}{2} \quad (2.1.14)$$

椭圆截面杆的惯性矩和极惯性矩计算公式见附录 C 中的式(C. 32)和式(C. 33)。DNA 力学模型的几何和物理参数的典型数据在表 2. 1 中列出^[102,146]。

表 2. 1 DNA 的几何和物理参数的典型数据

参 数	符 号	数 据
截面半径	a	10^{-7} cm
截面积	S	$3.1 \times 10^{-14} \text{ cm}^2$
截面惯性矩	I_x, I_y	$0.77 \times 10^{-28} \text{ cm}^4$
截面极惯性矩	I_z	$1.5 \times 10^{-28} \text{ cm}^4$
密度	ρ	1.7 g/cm^3
杨氏模量	E	$1.6 \times 10^9 \text{ dyne/cm}^2$
剪切模量	G	$0.65 \times 10^9 \text{ dyne/cm}^2$
泊松比	ν	0.23
抗弯刚度	A, B	$1.3 \times 10^{-19} \text{ erg} \cdot \text{cm}$
抗扭刚度	C	$1.0 \times 10^{-19} \text{ erg} \cdot \text{cm}$
原始扭率	ω_3^0	$1.8 \times 10^7 \text{ cm}^{-1}$

将式(2. 1. 12)和式(2. 1. 10)代入方程组(2. 1. 9),化作

$$A \frac{d\omega_1}{ds} + (C - B)\omega_2\omega_3 - F\beta = 0 \tag{2. 1. 15a}$$

$$B \frac{d\omega_2}{ds} + (A - C)\omega_3\omega_1 + F\alpha = 0 \tag{2. 1. 15b}$$

$$C \frac{d\omega_3}{ds} + (B - A)\omega_1\omega_2 = 0 \tag{2. 1. 15c}$$

考虑杆的原始扭率 ω_3^0 时,杆截面作用力的主矩(2. 1. 12)应改为

$$M_1 = A\omega_1, \quad M_2 = B\omega_2, \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \tag{2. 1. 16}$$

若弹性杆还具有原始曲率,令 ω_i^0 为弯扭度 $\omega_i (i=1,2,3)$ 在松弛状态下的原始值^①,则截面作用力主矩的更一般形式为

$$M_1 = A(\omega_1 - \omega_1^0), \quad M_2 = B(\omega_2 - \omega_2^0), \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \tag{2. 1. 17}$$

将式(2. 1. 16)代替式(2. 1. 12)重复以上推导,导出带原始扭率的弹性杆平衡方程

$$A \frac{d\omega_1}{ds} + (C - B)\omega_2\omega_3 - C\omega_3^0\omega_2 - F\beta = 0 \tag{2. 1. 18a}$$

$$B \frac{d\omega_2}{ds} + (A - C)\omega_3\omega_1 + C\omega_3^0\omega_1 + F\alpha = 0 \tag{2. 1. 18b}$$

$$C \frac{d\omega_3}{ds} + (B - A)\omega_1\omega_2 = 0 \tag{2. 1. 18c}$$

上述封闭的微分方程组(2. 1. 11)和(2. 1. 18)为描述弹性杆平衡的 Kirchhoff 方程。若给出弧坐标起始点处截面相对 ζ 轴的起始位置以及弯扭度 ω 的起始值,则可从 Kirchhoff 方程积分得到 $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ 及 $\omega_1(s), \omega_2(s), \omega_3(s)$ 以确定刚性截面在惯性空间中的姿态,中

① 此处用上角标零表示变量在松弛状态下的原始值,以区别于用下角标零表示的变量在弧坐标起始点处的起始值。

心线的切线基矢量 $T(s)$ 随之确定。将 $T(s)$ 代入 1.1 节的式(1.1.12), 可积分算出杆变形后的挠性线, 从而确定弹性杆的几何形态。但上述初值问题在弹性杆平衡问题中并不常见, 一般情况下要求计算 Kirchhoff 方程的边值问题, 即要求方程的解满足两个端点的几何约束条件。

2.2 用欧拉角表示 Kirchhoff 方程

2.2.1 定参考坐标系的建立

令图 2.1 中的微元弧段长度趋近于零, 则 P 与 P' 接近重合, P 点处的负截面和正截面上作用力的主矢和对截面中心的主矩分别为 $-F, -M$ 和 F, M , 其中的主矢 F 对任意截面均相同。定义矢径 $r = OP$ 为

$$r = \frac{M \times F}{F^2} \quad (2.2.1)$$

按此定义的矢径 r 的起点 O 为空间中的确定点。将作用于 P 点处正截面上的力系 (F, M) 向 O 点简化, 得到作用于 O 点与 (F, M) 等效的力系 (F_0, M_0)

$$F_0 = F, \quad M_0 = M + r \times F = (M \cdot F) \left(\frac{F_0}{F_0^2} \right) \quad (2.2.2)$$

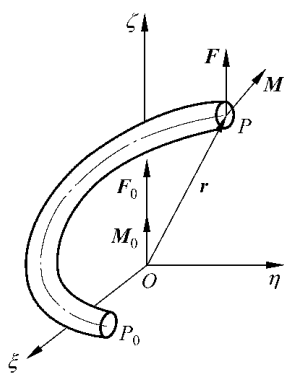


图 2.2 等效力螺旋

M_0 与 F_0 共线, 表明力系 (F_0, M_0) 为力螺旋, 其作用线过 O 点且与常矢量 F 平行。根据力局部效应的 Saint-Venant 原理可以推断, 任意 P 截面上作用力的等效力螺旋 (F_0, M_0) 与在端点 P_0 处作用的外力形成的过 O 点的等效力螺旋 $(-F_0, -M_0)$ 维持平衡, 而不必考虑外力在端部的分布状况。同时杆在另一个端点 P_L 处作用的外力形成与 (F_0, M_0) 完全相同的等效力螺旋。由于无体积力和接触力, 任意截面的作用力主矢 F 均与 F_0 相等, 主矩 M 向 F 方向的投影均等于 M_0 的模。以 O 为原点, 力螺旋作用轴为 ξ 轴, 建立惯性

参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ (图 2.2)。规定 F_0, M_0 沿 ξ 轴正方向, $F_0 > 0$ 为拉力, $F_0 < 0$ 为压力。

2.2.2 用欧拉角表示的 Kirchhoff 方程

第 1 章的 1.2 节中已说明弹性杆的自由度为 3, 由中心线的 2 个自由度和截面绕切线轴转动的 1 个自由度所体现。将参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 平移到以任意点 P 为原点, 令 $(P-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转过 ψ 角后的位置为 $(P-x_1y_1z_1)$, $(P-x_1y_1z_1)$ 绕 x_1 轴转过 θ 角后的位置为 $(P-x_2y_2z_2)$, 绕 z_2 轴转过 φ 角后的位置与 P 点处截面的主轴坐标系 $(P-xyz)$ 重合。按以上顺序定义的 ψ, θ, φ 称为欧拉角, 是描述截面相对中心点姿态的 3 个角度坐标, 可作为确定弹性杆位形的 3 个独立变量 (参见附录 B 和图 2.3)。坐标系 $(P-xyz)$ 与 $(P-\xi\eta\zeta)$ 之间的方向余弦的欧拉角表达如表 2.2 所示。其中 c, s 为 cos 和 sin 的简写符号。利用表 2.2 和附录 B 中的式 (B.79), Kirchhoff 方程中的方向余弦 α, β, γ , 以及弯扭度分量 $\omega_i (i=1, 2, 3)$

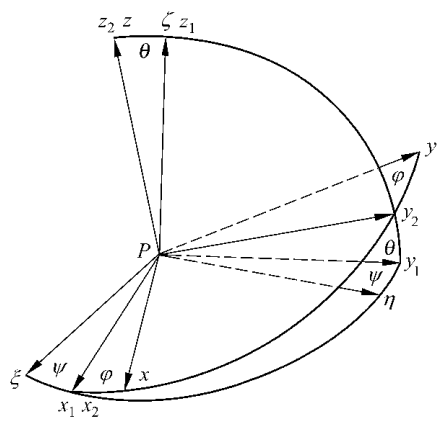


图 2.3 Euler 角

表 2.2 方向余弦

	x	y	z
ξ	$c\psi c\varphi - c\theta s\psi s\varphi$	$-c\psi s\varphi - c\theta s\psi c\varphi$	$s\theta s\psi$
η	$s\psi c\varphi + c\theta c\psi s\varphi$	$-s\psi s\varphi + c\theta c\psi c\varphi$	$-s\theta c\psi$
ζ	$s\theta s\varphi$	$s\theta c\varphi$	$c\theta$

可用欧拉角及其导数表示为

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin\theta\sin\varphi \\ \beta &= \sin\theta\cos\varphi \\ \gamma &= \cos\theta\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{d\psi}{ds}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{ds}\cos\varphi \\ \omega_2 &= \frac{d\psi}{ds}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{ds}\sin\varphi \\ \omega_3 &= \frac{d\psi}{ds}\cos\theta + \frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

将式(2.2.3)和式(2.2.4)代入方程组(2.1.11)后成为恒等式。代入方程组(2.1.18),得到用欧拉角表示的 Kirchhoff 方程

$$\begin{aligned}A \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \cos\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \sin\varphi \right) + (C - B) \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \cos\varphi \right) \left(\frac{d\psi}{ds} \cos\theta \right. \\ \left. + \frac{d\varphi}{ds} \right) - C\omega_3^0 \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \cos\varphi \right) - F \sin\theta \cos\varphi = 0\end{aligned}\tag{2.2.5a}$$

$$\begin{aligned}B \frac{d}{ds} \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \cos\varphi \right) + (A - C) \left(\frac{d\theta}{ds} \cos\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \sin\varphi \right) \left(\frac{d\psi}{ds} \cos\theta \right. \\ \left. + \frac{d\varphi}{ds} \right) + C\omega_3^0 \left(\frac{d\theta}{ds} \cos\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \sin\varphi \right) + F \sin\theta \sin\varphi = 0\end{aligned}\tag{2.2.5b}$$

$$C \frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi}{ds} \cos\theta + \frac{d\varphi}{ds} \right) + (B-A) \left(\frac{d\theta}{ds} \cos\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \sin\varphi \right) \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin\varphi + \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \cos\varphi \right) = 0 \quad (2.2.5c)$$

对于圆截面杆的特殊情形,可以简化方程的建立过程。由于 $A=B$, 上述 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 坐标系成为截面的主轴坐标系,但不参与截面绕切线轴 z_2 的转动而与 φ 角无关。因此若采用 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 代替 $(P-xyz)$ 作为投影坐标系,变量 α, β, γ 和 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 的 Euler 角表达式简化为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\theta}{ds}, \quad \omega_2 = \frac{d\psi}{ds} \sin\theta, \quad \omega_3 = \frac{d\psi}{ds} \cos\theta + \frac{d\varphi}{ds} \\ \alpha &= 0, \quad \beta = \sin\theta, \quad \gamma = \cos\theta \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

设 $e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)}$ 为 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 各坐标轴的基矢量,其中沿切线方向的 $e_3^{(2)} = e_3$ 。矢量方程 (2.1.5) 应变更为

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} = 0 \quad (2.2.7)$$

其中的波浪号表示变量相对动坐标系 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 的局部导数, $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ 为动坐标系 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 的角位移变化率,其相对 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 的投影式为

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \omega_1^{(2)} \mathbf{e}_1^{(2)} + \omega_2^{(2)} \mathbf{e}_2^{(2)} + \omega_3^{(2)} \mathbf{e}_3^{(2)} \quad (2.2.8)$$

其中

$$\omega_1^{(2)} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \omega_2^{(2)} = \frac{d\psi}{ds} \sin\theta, \quad \omega_3^{(2)} = \frac{d\psi}{ds} \cos\theta \quad (2.2.9)$$

将式 (2.1.10), 式 (2.1.12), 式 (2.2.6), 式 (2.2.8) 和式 (2.2.9) 等代入方程 (2.2.7), 导出用欧拉角表示的圆截面杆的 Kirchhoff 方程

$$A \left[\frac{d^2\theta}{ds^2} - \left(\frac{d\psi}{ds} \right)^2 \cos\theta \sin\theta \right] + C \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\psi}{ds} \cos\theta - \omega_3^{(2)} \right) - F \sin\theta = 0 \quad (2.2.10a)$$

$$A \left[\frac{d^2\psi}{ds^2} \sin\theta + 2 \left(\frac{d\psi}{ds} \right) \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \cos\theta \right] - C \frac{d\theta}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\psi}{ds} \cos\theta - \omega_3^{(2)} \right) = 0 \quad (2.2.10b)$$

$$C \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\psi}{ds} \cos\theta \right) = 0 \quad (2.2.10c)$$

当外力主矢 F 以及欧拉角及其导数的起始值给定以后,即可从欧拉角形式的 Kirchhoff 方程 (2.2.5) 或方程 (2.2.10) 积分得到 $\theta(s), \psi(s), \varphi(s)$, 以确定平衡状态下刚性截面的姿态沿弧坐标的变化规律。

2.2.3 Kirchhoff 方程与欧拉-泊松方程

1859 年 Kirchhoff 在导出上述弹性杆平衡方程的同时,发现其与经典力学中的刚体或陀螺体绕定点转动的微分方程具有完全相同的数学形式。方程组 (2.1.11) 与泊松方程相同,方程 (2.1.15) 与描述重刚体定点运动的欧拉方程相同,具有原始扭率的弹性杆平衡

方程(2.1.18)与描述带轴对称转子的陀螺体定点运动的欧拉方程相同^①。于是两种完全不同的物理现象借助数学形式的相似性而产生联系。在经典力学中,刚体定点运动微分方程在 3 种特殊情况下存在解析积分,即欧拉情况、拉格朗日情况和 Kovalevskaya 情况。由于数学形式的相似性,描述弹性杆平衡的 Kirchhoff 方程也存在相应的解析积分。两种物理现象的相似性在表 2.3 中作了归纳。

表 2.3 弹性杆静力学与刚体动力学的相似性

变量与参数	欧拉-泊松方程	Kirchhoff 方程
自变量	时间(t)	空间(弧坐标 s)
定坐标系	$(O-\xi\eta\zeta)$, $O\zeta$ 轴沿重力加速度 g 的反方向, O 为固定点	$(O-\xi\eta\zeta)$, $O\zeta$ 轴沿截面作用力主矢 F 的方向, O 为固定点
动坐标系	刚体的主轴坐标系 $(O-xyz)$, Oz 轴为轴对称刚体的极轴	截面的主轴坐标系 $(P-xyz)$, Pz 轴为切线轴
ω	刚体的角速度	杆的变扭度
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	ω 相对 Ox, Oy, Oz 的投影	ω 相对 Px, Py, Pz 的投影
α, β, γ	$O\zeta$ 轴相对 Ox, Oy, Oz 的方向余弦	$O\zeta$ 轴相对 Px, Py, Pz 的方向余弦
θ, ψ, φ	$(O-xyz)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的欧拉角	$(P-xyz)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的欧拉角
A, B	刚体相对主轴 Ox, Oy 的转动惯量	杆相对主轴 Px, Py 的抗弯刚度
C	刚体相对主轴 Oz 的转动惯量	杆相对主轴 Pz 的抗扭刚度
ω_3^0	转子的折算角速度 $H_R/C, H_R$ 为转子相对主刚体的动量矩	杆的原始扭率
重力矩与作用力主矢	$mg l$; m 为刚体质量, g 为重力加速度, l 为重心至定点距离	F_0 : 截面作用力的主矢, 方向与 $-g$ 对应, 模与 $mg l$ 对应
动量矩与作用力主矩	H : 刚体相对定点 O 的动量矩	M_0 : 截面作用力的主矩

2.3 弧坐标分析力学

2.3.1 自由度与虚位移

根据以上分析,弹性杆截面的自由度为 3。从刚体运动学观点考虑,自由刚体在惯性空间中应有 6 个自由度,由于刚性截面的几何中心受中心线约束而减少 2 个自由度,截面与中心线正交的限制又提供 1 个独立约束,使弹性杆刚性截面的自由度减为 3 个。

经典分析力学研究质点系的位形随时间的变化规律。作为连续介质的弹性杆,其研究对象是杆截面的几何形态随弧坐标的变化规律。在静力学范畴内,截面的虚位移是指在固定的弧坐标位置发生的约束允许的可能位移。在虚位移过程中所有作用力均保持不

^① 在经典力学中,陀螺体是指由主刚体和多个轴对称转子组成的系统,转子相对主刚体的转动不影响总体的质量几何。

变,弹性杆始终保持平衡。考虑弹性杆的动力学问题时,应有时间变量参与,则截面的虚位移是指在固定的弧坐标位置发生的与时间无关的约束允许的可能位移。

2.3.2 弧坐标哈密顿原理

以上应用矢量力学方法建立的 Kirchhoff 方程也可利用弹性力学的最小势能原理导出。为此必须计算弹性杆的总势能 E 。由于忽略了体力和体力势能,弹性杆的总弹性势能 E 等于杆的弹性应变能 E_e 与外力势能 E_p 之和,

$$E = E_e + E_p \quad (2.3.1)$$

考虑杆的原始扭率 ω_3^0 ,利用附录 C 中的式(C.37)计算应变能 E_e ,得到

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L [A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C(\omega_3 - \omega_3^0)^2] ds \quad (2.3.2)$$

其中积分沿杆的中心线进行, L 为杆的总长度。若考虑杆的轴向拉伸变形, E_e 内还应增加拉伸应变能。对于刚性截面的虚位移,弹性应变能的变分 δE_e 为

$$\delta E_e = \delta \frac{1}{2} \int_0^L [A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C(\omega_3 - \omega_3^0)^2] ds \quad (2.3.3)$$

外力势能 E_p 等于外力功 W 的负值,外力势能的变分 δE_p 等于外力虚功 δW 的负值。由于体积力和接触力已被忽略,仅需考虑杆的两端作用的外力。设在 P_0 端部作用于负截面的外力主矢和相对截面形心的主矩分别为 F_0 和 M_0 ,在另一端部 P_L 作用于正截面的外力主矢和主矩为 F_L 和 M_L 。从固定点 O 至端点 P_0 和 P_L 引矢径 $r_0 = r(0)$ 和 $r_L = r(L)$,令

$R = r_L - r_0$ 为 P_0 至 P_L 的矢径(图 2.4)。无分布力作用时,杆的平衡条件为

$$F_0 + F_L = 0, \quad M_0 + M_L + R \times F_L = 0 \quad (2.3.4)$$

各截面的内力主矢 $F = -F_0 = F_L$ 为常矢量。则外力主矢的虚功 δW_1 可用内力主矢 F 表示为

$$\delta W_1 = F_0 \cdot \delta r_0 + F_L \cdot \delta r_L = F \cdot \delta R \quad (2.3.5)$$

将矢径 R 用中心线的切线基矢量 T 对弧坐标的积分表示为

$$R = r_L - r_0 = \int_0^L T(s) ds \quad (2.3.6)$$

由于矢量 F 不随虚位移改变,可写入变分号内,利用 F 相对切线轴的方向余弦 γ ,外力主矢的虚功可写作

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= F \cdot \delta R = F \cdot \delta \int_0^L T ds \\ &= \delta \int_0^L F \cdot T ds = \delta \int_0^L F \gamma ds \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

设端部 P_0 和 P_L 的截面虚角位移分别为 $\delta \phi_0$ 和 $\delta \phi_L$,则外力主矩的虚功 δW_2 为

$$\delta W_2 = M_0 \cdot \delta \phi_0 + M_L \cdot \delta \phi_L \quad (2.3.8)$$

外力势能的变分 δE_p 为式(2.3.7)与式(2.3.8)之和的负值

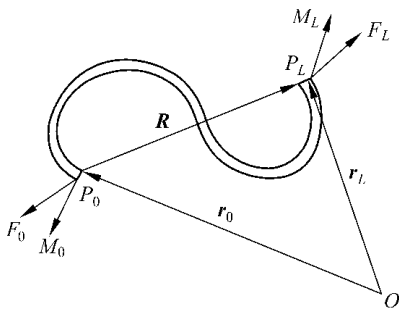


图 2.4 杆的端部作用力和端点矢径

$$\begin{aligned}\delta E_p &= -(\delta W_1 + \delta W_2) \\ &= -\delta \int_0^L F \gamma ds - (M_0 \cdot \delta \phi_0 + M_L \cdot \delta \phi_L)\end{aligned}\quad (2.3.9)$$

杆的总势能变分为式(2.3.3)与式(2.3.9)之和,可写作

$$\delta E = \delta \int_0^L \Gamma ds - (M_0 \cdot \delta \phi_0 + M_L \cdot \delta \phi_L) \quad (2.3.10)$$

其中 Γ 为势能密度函数,定义为

$$\Gamma = \frac{1}{2} [A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C(\omega_3 - \omega_3^0)^2] - F\gamma \quad (2.3.11)$$

根据最小势能原理,弹性杆的平衡状态对应于总弹性势能的极小值。因此在杆的所有可能平衡状态中,真实平衡状态所对应的杆的总势能的一阶变分应等于零,

$$\delta E = \delta \int_0^L \Gamma ds - (M_0 \cdot \delta \phi_0 + M_L \cdot \delta \phi_L) = 0 \quad (2.3.12)$$

此条件在形式上与经典分析力学中的哈密顿变分原理相同。只是在弹性杆问题中,哈密顿变分原理中的时间变量 t 被弧坐标 s 替代,哈密顿作用量被弹性杆的总势能 E 替代,作为被积函数的拉格朗日函数被弹性杆的势能密度函数 Γ 替代。以上述弧坐标哈密顿变分原理为基础,构成以弹性杆平衡为分析对象的弧坐标分析力学。经典分析力学的各种分析方法原则上均可移植到弧坐标分析力学。

2.3.3 弧坐标拉格朗日方程

将欧拉角作为确定截面姿态的 3 个广义坐标,引入广义坐标符号: $q_1 = \phi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ 。以右上角的撇号表示相对弧坐标 s 的导数,广义坐标的导数 q'_j ($j=1,2,3$) 称为广义速度。将式(2.2.6)代入后,式(2.3.11)中的 Γ 为 q_j, q'_j ($j=1,2,3$) 的函数。将式(2.3.10)中的积分式展开,并利用分部积分化作

$$\begin{aligned}\delta \int_0^L \Gamma ds &= \sum_{j=1}^3 \left[\int_0^L \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_j} \delta q'_j + \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} \delta q_j \right) ds \right] \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_0^L \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_j} \right) \right] \delta q_j ds + \frac{\partial \Gamma}{\partial q'_j} \delta q_j \Big|_0^L \right\}\end{aligned}\quad (2.3.13)$$

在端点 P_0 和 P_L 处,截面作用力主矩 M 分别等于外力矩 $-M_0$ 和 M_L 。将式(2.3.10)右边第二项的矢量式用相对截面坐标系的投影式表示,并利用附录 B 中的式(B.62)将 $\delta \phi$ 用广义坐标的变分表示,导出

$$M_L \cdot \delta \phi_L + M_0 \cdot \delta \phi_0 = M^T \delta \phi \Big|_0^L = M^T L \delta q \Big|_0^L \quad (2.3.14)$$

其中 M 为截面作用力的主矩相对截面坐标系的投影列阵, δq 为 δq_j ($j=1,2,3$) 排成的列阵,矩阵 L 的定义见附录 B 中的式(B.63)。

将式(2.3.13)和式(2.3.14)代入平衡条件(2.3.12),由于 δq_j ($j=1,2,3$) 为独立变量,导出

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_j} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (2.3.15)$$

$$\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Gamma}{\partial q'_j} e_j^T + M^T L \right) \delta q \Big|_0^L = 0 \quad (2.3.16)$$

其中 $e_j (j=1,2,3)$ 为基矢量的投影列阵。方程(2.3.15)在形式上与经典分析力学中的拉格朗日方程相同,只是拉格朗日函数被弹性杆的势能密度函数 Γ 代替。式(2.3.16)确定杆的边界条件。

将式(2.2.3)和式(2.2.4)代入式(2.3.11),计算 Γ 函数的欧拉角表达式,得到

$$\Gamma = \frac{1}{2} [A(\theta' \cos \varphi + \psi' \sin \theta \sin \varphi)^2 + B(-\theta' \sin \varphi + \psi' \sin \theta \cos \varphi)^2 + C(\psi' \cos \theta + \varphi' - \omega_3^0)^2] - F \cos \theta \quad (2.3.17)$$

代入拉格朗日方程(2.3.15),可直接导出用欧拉角表示的非圆截面弹性杆的 Kirchhoff 方程(2.2.5)。对于圆截面情形,将式(2.2.6)代入式(2.3.11), Γ 函数简化为

$$\Gamma = \frac{1}{2} [A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta) + C(\psi' \cos \theta + \varphi' - \omega_3^0)^2] - F \cos \theta \quad (2.3.18)$$

代入弧坐标拉格朗日方程(2.3.15)后,导出圆截面弹性杆的 Kirchhoff 方程(2.2.10)。

2.3.4 弧坐标哈密顿正则方程

按照经典分析力学的定义,引入弧坐标哈密顿函数 H

$$H = \sum_{i=1}^3 q'_i \frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i} - \Gamma \quad (2.3.19)$$

将式(2.3.11)代入上式,略去常数项 $(\omega_3^0)^2/2$,导出

$$H = \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + F\gamma \quad (2.3.20)$$

与式(2.3.11)比较,哈密顿函数 H 在形式上与原始扭率 ω_3^0 为零时的势能密度函数 Γ 相似,区别仅在于 $F\gamma$ 前的符号相反。仍按照经典分析力学的定义,将势能密度函数 Γ 对广义坐标 $q_i (i=1,2,3)$ 的偏导数称为广义动量,记作 $p_i (i=1,2,3)$

$$p_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i} \quad (i=1,2,3) \quad (2.3.21)$$

将 Γ 函数的欧拉角表达式代入计算后,各广义动量分别等于内力对截面中心的主矩 M 在 ζ 轴、 x_1 轴和 z 轴上的投影

$$\begin{aligned} p_1 &= A\omega_1\alpha + B\omega_2\beta + C\omega_3\gamma = M_\zeta \\ p_2 &= (1-\gamma)^{-1/2} (A\omega_1\beta - B\omega_2\alpha) = M_{x_1} \\ p_3 &= C\omega_3 = M_z \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

将式(2.2.4)代入后,可将广义动量写作广义速度 $q'_i (i=1,2,3)$ 的线性式

$$p_i = \sum_{j=1}^3 c_{ij} q'_j \quad (i=1,2,3) \quad (2.3.23)$$

其中的系数矩阵 (c_{ij}) 为

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} (As^2q_3 + Bc^2q_3)s^2q_2 + Cc^2q_2 & (A-B)sq_2cq_3sq_3 & Ccq_2 \\ (A-B)sq_2cq_3sq_3 & Ac^2q_3 + Bs^2q_3 & 0 \\ Ccq_2 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.3.24)$$

矩阵 (c_{ij}) 非奇异,可从式(2.3.23)解出

$$q'_j = \tilde{q}'_j(q, p) \quad (j=1,2,3) \quad (2.3.25)$$

其中括号内不带下标的 q, p 表示 $q_i, p_i (i=1, 2, 3)$ 的全体。利用式 (2.3.25) 将式 (2.3.19) 定义的哈密顿函数中的广义速度 $\dot{q}_i' (i=1, 2, 3)$ 用广义动量 $p_i (i=1, 2, 3)$ 表示为

$$H = \sum_{i=1}^3 \tilde{q}_i' p_i - \Gamma(q, p) \quad (2.3.26)$$

将 H 对 q_j 求偏导数, 并利用式 (2.3.21) 化简, 得到

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^3 \left(p_i - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i'} \right) \frac{\partial \tilde{q}_i'}{\partial q_j} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} \quad (2.3.27)$$

再将 H 对 p_j 求偏导数, 化简后得到

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \tilde{q}_j' + \sum_{i=1}^3 \left(p_i - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i'} \right) \frac{\partial \tilde{q}_i'}{\partial p_j} = \tilde{q}_j' \quad (2.3.28)$$

利用式 (2.3.21) 和式 (2.3.27), 拉格朗日方程 (2.3.15) 可改写为

$$p_j' + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad (2.3.29)$$

式 (2.3.28) 和式 (2.3.29) 组成形式对称的弧坐标哈密顿正则方程

$$\tilde{q}_j' = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad p_j' = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.3.30)$$

哈密顿函数 H 的欧拉角表达式为

$$H = \frac{1}{2} [A(\theta' \cos \varphi + \psi' \sin \theta \sin \varphi)^2 + B(-\theta' \sin \varphi + \psi' \sin \theta \cos \varphi)^2 + C(\psi' \cos \theta + \varphi')^2] + F \cos \theta \quad (2.3.31)$$

对于圆截面情形, 哈密顿函数简化为

$$H = \frac{1}{2} [A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta) + C(\psi' \cos \theta + \varphi')^2] + F \cos \theta \quad (2.3.32)$$

将式 (2.3.31) 或式 (2.3.32) 代入弧坐标哈密顿正则方程 (2.3.30), 导出与式 (2.2.5) 或式 (2.2.10) 相同的 Kirchhoff 方程。

2.3.5 弧坐标 Boltzman-Hamel 方程

将弯扭度的 3 个投影 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 在形式上写作变量 $\pi_i (i=1, 2, 3)$ 的导数

$$\pi_i' = \omega_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3.33)$$

变量 $\pi_i (i=1, 2, 3)$ 不能从上式积分为广义坐标的函数而称为准坐标。准坐标可代替广义坐标作为确定截面姿态的独立变量。与附录 B 中的式 (B.74) 对照可看出, 准坐标的无限小增量即刚体无限小转动 $\Delta \phi$ 的 3 个投影

$$\Delta \pi_i = \Delta \phi_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3.34)$$

因此准坐标仅无限小增量或导数有物理意义。利用附录 B 中的式 (B.62) 可确定准坐标增量与广义坐标增量之间的关系

$$\Delta \pi_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \Delta q_j, \quad \Delta q_j = \sum_{i=1}^3 b_{ji} \Delta \pi_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3.35)$$

经典分析力学中将准坐标的导数 $\pi_i' (i=1, 2, 3)$ 称为准速度。在弧坐标分析力学中, 相对弧坐标的准速度即弯扭度的投影, 与广义速度 $\dot{q}_j' (j=1, 2, 3)$ 之间满足以下关系

$$\pi'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} q'_j, \quad q'_j = \sum_{i=1}^3 b_{ji} \pi'_i \quad (2.3.36)$$

式(2.3.35)和式(2.3.36)中的 (a_{ij}) 即为附录 B 中的式(B.63)表示的矩阵 L , (b_{ji}) 为 L 的逆阵

$$L = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ \sin q_2 \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \cos q_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.37)$$

$$L^{-1} = (b_{ji}) = \begin{pmatrix} \csc q_2 \sin q_3 & \csc q_2 \cos q_3 & 0 \\ \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ -\cot q_2 \sin q_3 & \cot q_2 \cos q_3 & 1 \end{pmatrix}$$

系数 a_{ij}, b_{ji} 可写作

$$a_{ij} = \frac{\partial \pi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \omega_i}{\partial q'_j}, \quad b_{ji} = \frac{\partial q_j}{\partial \pi_i} = \frac{\partial q'_j}{\partial \omega_i} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3.38)$$

在给定位形下发生的准坐标变分和弯扭度变分为

$$\delta \pi_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial q'_j} \delta q_j, \quad \delta \omega_i = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial q'_j} \delta q'_j + \frac{\partial \omega_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \quad (2.3.39)$$

计算 $\delta \pi_i$ 对 s 的导数, 得到

$$\frac{d}{ds}(\delta \pi_i) = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial q'_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \omega_i}{\partial q'_j} \frac{d}{ds}(\delta q_j) \right] \quad (2.3.40)$$

将上式和式(2.3.39)的第二式相减, 考虑完整系统的广义坐标的微分与变分的可交换性, 导出准坐标的微分与变分的交换关系

$$\frac{d}{ds}(\delta \pi_i) - \delta \omega_i = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial q'_j} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial q_j} \right] \frac{\partial q'_j}{\partial \omega_k} \delta \pi_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3.41)$$

利用式(2.3.38)导出

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial q'_j} \right) = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial q'_l} q'_l, \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j} q'_l, \quad q'_l = \sum_{m=1}^3 b_{lm} \omega_m, \quad \frac{\partial q'_j}{\partial \omega_k} = b_{jk} \quad (2.3.42)$$

将上式代入式(2.3.41), 并引入 Boltzman 三标记号 γ_{km}^i

$$\gamma_{km}^i = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q'_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j} \right) b_{jk} b_{lm} \quad (i, k, m = 1, 2, 3) \quad (2.3.43)$$

则式(2.3.41)可简明地表达为

$$\delta \omega_i = (\delta \pi_i)' - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \omega_m \gamma_{km}^i \delta \pi_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3.44)$$

将式(2.3.10)中的势能密度函数 Γ 写作准坐标 π_i 及其导数 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 的函数, 展开后得到

$$\delta \int_0^L \Gamma ds = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^L \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_i} \delta \omega_i + \frac{\partial \Gamma}{\partial \pi_i} \delta \pi_i \right) ds \right] \quad (2.3.45)$$

其中对准坐标 π_i 的偏导数定义为

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q'_k}{\partial \omega_i} \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (2.3.46)$$

将式(2.3.44)代入式(2.3.45),适当改变下标符号和求和顺序,化作

$$\delta \int_0^L \Gamma ds = \sum_{k=1}^3 \left\{ \int_0^L \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \pi_k} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_k} \right) - \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_i} \omega_m \gamma_{km}^i \right] \delta \pi_k ds + \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_k} \delta \pi_k \right\} \Big|_0^L \quad (2.3.47)$$

将上式代入平衡条件(2.3.12),其中的边值项可化作与式(2.3.14)类似的边界条件

$$\left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_k} \mathbf{e}_k^T + \mathbf{M}^T \right) \delta \boldsymbol{\phi} \Big|_0^L = 0 \quad (2.3.48)$$

其中 $\delta \boldsymbol{\phi}$ 为 $\delta \pi_i (i=1,2,3)$ 排成的列阵。由于式(2.3.47)的积分式中 $\delta \pi_k (k=1,2,3)$ 为独立变量,导出以下弧坐标 Boltzman-Hamel 方程

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_k} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \pi_k} + \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_i} \omega_m \gamma_{km}^i = 0 \quad (k=1,2,3) \quad (2.3.49)$$

将式(2.3.11)代入 Boltzman-Hamel 方程(2.3.49),可直接得到 Kirchhoff 方程(2.1.18)。

2.3.6 准坐标正则方程

定义与准坐标 $\pi_i (i=1,2,3)$ 对应的准动量,记作 $P_i (i=1,2,3)$

$$P_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_i} \quad (i=1,2,3) \quad (2.3.50)$$

将式(2.3.11)代入上式,导出的准动量等于内力对截面中心 P 的主矩 M 在主轴坐标系 $(P-xyz)$ 中的投影

$$P_i = M_i \quad (i=1,2,3) \quad (2.3.51)$$

直接验算可以证明,各准动量 $P_i (i=1,2,3)$ 满足以下泊松括号恒等式^①

$$(P_1, P_2) = -P_3, \quad (P_2, P_3) = -P_1, \quad (P_3, P_1) = -P_2 \quad (2.3.52)$$

将弧坐标哈密顿函数 H 重新定义为

$$H = \sum_{i=1}^3 \omega_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_i} - \Gamma \quad (2.3.53)$$

势能密度函数 Γ 和哈密顿函数 H 可用准动量 $P_i (i=1,2,3)$ 代替准速度,表示为

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{A} + \frac{P_2^2}{B} + \frac{P_3^2}{C} \right) - F\gamma \quad (2.3.54)$$

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{P_1^2}{A} + \frac{P_2^2}{B} + \frac{(P_3 + C\omega_3^0)^2}{C} \right] + F\gamma \quad (2.3.55)$$

若原始扭率 ω_3^0 为零,则二者的区别仅在于 $F\gamma$ 前的符号相反。将式(2.3.54)和式(2.3.55)对 π_k 分别求偏导数,由于 π_k 仅与其中的 γ 有关,得到

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_k} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \pi_k} \quad (2.3.56)$$

将式(2.3.53)对 P_k 求偏导数,得到

① 在 n 维相空间 (q, p) 内定义的任意函数 u, v 的泊松括号: $(u, v) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$ 。

$$\frac{\partial H}{\partial P_k} = \omega_k \quad (2.3.57)$$

将式(2.3.50)和式(2.3.56)代入 Boltzman-Hamel 方程(2.3.49),与方程(2.3.57)组成准坐标正则方程

$$\pi'_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.3.58a)$$

$$P'_k = -\frac{\partial H}{\partial \pi_k} + \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 P_i \pi'_m \gamma_{km}^i \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.3.58b)$$

若方程(2.3.36)可积,则 $\partial a_{ij}/\partial q_l = \partial a_{il}/\partial q_j$,准坐标转化为广义坐标,三标记号 γ_{km}^i 为零, Boltzman-Hamel 方程(2.3.47)转化为拉格朗日方程(2.3.15),准坐标正则方程(2.3.58)转化为哈密顿正则方程(2.3.30)。

将式(2.3.55)代入正则方程中的(2.3.58b),将准动量 P_k 改记为主矩分量 M_k ,且利用式(2.1.16)将准速度 $\pi'_m = \omega_m$ 也用主矩分量表示,导出用主矩分量表示的 Kirchhoff 方程

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{ds} &= \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)M_2M_3 + \omega_3^0M_2 + F\beta \\ \frac{dM_2}{ds} &= \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)M_1M_3 - \omega_3^0M_1 - F\alpha \\ \frac{dM_3}{ds} &= \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)M_1M_2 \end{aligned} \quad (2.3.59)$$

这种表达形式的 Kirchhoff 方程在第 5 章中被用于稳定性分析。

2.3.7 拉格朗日乘子

讨论受约束弹性杆的平衡时,必须同时列出相应的约束条件。以中心线两端相连的封闭杆为例,要求弧坐标等于 0 和 L 的连接处有相同的位置矢量。令式(2.3.6)中的 R 为零矢量,此约束条件可写作

$$\mathbf{r}(L) - \mathbf{r}(0) = \int_0^L \mathbf{T}(s)ds = 0 \quad (2.3.60)$$

其中 $\mathbf{T}(s)$ 为弹性杆的切线基矢量。利用表 2.2 确定矢量 $\mathbf{T}$ 相对惯性坐标系($O-\xi\eta\zeta$)的投影,约束条件(2.3.60)的标量形式为

$$\int_0^L \sin\theta \sin\psi ds = 0, \quad \int_0^L \sin\theta \cos\psi ds = 0, \quad \int_0^L \cos\theta ds = 0 \quad (2.3.61)$$

引入矢量形式的常值拉格朗日乘子 $\mathbf{\Lambda}$,与积分(2.3.60)相乘后移至积分号内,与总势能 E 相加,定义为受约束杆的总势能,记作 $\tilde{E}$

$$\tilde{E} = \int_0^L \Gamma(s)ds + \int_0^L \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T}(s)ds \quad (2.3.62)$$

将 $\tilde{E}$ 的变分写作

$$\delta \tilde{E} = \delta \int_0^L \tilde{\Gamma}(s)ds \quad (2.3.63)$$

其中的被积函数 $\tilde{\Gamma}$ 为考虑约束条件后重新定义的势能密度函数

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T} \quad (2.3.64)$$

设矢量 $\mathbf{\Lambda}$ 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 上的投影为 $\Lambda_j (j=1,2,3)$, 导出

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T} = \Lambda_1 \sin\theta \sin\psi - \Lambda_2 \sin\theta \cos\psi + \Lambda_3 \cos\theta \quad (2.3.65)$$

设杆为圆截面, 将上式和式(2.3.17)代入式(2.3.64), 重复 2.3.3 节中的推导, 得到与式(2.3.15)类似的弧坐标拉格朗日方程, 但其中的势能密度函数 Γ 以 $\tilde{\Gamma}$ 替代

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (2.3.66)$$

将式(2.3.17)和式(2.3.65)代入后, 导出用欧拉角表示的圆截面封闭杆的 Kirchhoff 方程

$$\begin{aligned} A(\theta'' - \psi'^2 \cos\theta \sin\theta) + C\psi'(\psi' \cos\theta + \varphi' - \omega_3^0) - (F - \Lambda_3) \sin\theta \\ - (\Lambda_1 \sin\psi + \Lambda_2 \cos\psi) \cos\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.3.67a)$$

$$\begin{aligned} A(\psi'' \sin\theta + 2\psi'\theta' \cos\theta) - C\theta'(\psi' \cos\theta + \varphi' - \omega_3^0) \\ - \Lambda_1 \cos\psi - \Lambda_2 \sin\psi = 0 \end{aligned} \quad (2.3.67b)$$

$$C \frac{d}{ds} (\psi' \cos\theta + \varphi' - \omega_3^0) = 0 \quad (2.3.67c)$$

中心线两端重合的约束条件(2.3.60)仅为弹性杆封闭的必要条件。为保证弹性杆的光滑连续性, 还要求截面的姿态和杆的弯扭度也连续, 体现为欧拉角的连续条件

$$\begin{aligned} \psi(L) = \psi(0), \quad \theta(L) = \theta(0), \quad \varphi(L) = \varphi(0) \\ \psi'(L) = \psi'(0), \quad \theta'(L) = \theta'(0), \quad \varphi'(L) = \varphi'(0) \end{aligned} \quad (2.3.68)$$

以此为边界条件, 将方程组(2.3.67)与约束条件(2.3.61)联立求解, 可确定欧拉角的变化规律和待定的拉格朗日乘子。

2.4 Kirchhoff 方程的初积分

2.4.1 普遍情况下的初积分

在普遍情况下, Kirchhoff 方程存在以下 3 个初积分。

1. 几何积分

将 Kirchhoff 方程中的式(2.1.11a)~式(2.1.11c)分别与 α, β, γ 相乘后相加, 积分后得到

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (2.4.1)$$

此初积分也可由方向余弦的性质直接得出。

2. Jacobi 积分

将 Kirchhoff 方程中的式(2.1.18a)~式(2.1.18c)和式(2.1.11c)分别与 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, F 相乘后相加, 积分后得到

$$\frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + F\gamma = H_0 \quad (2.4.2)$$

按分析力学观点,由于 Γ 函数不显含弧坐标 s ,此积分即弧坐标拉格朗日方程(2.3.15)的 Jacobi 积分。与式(2.3.20)对照, Jacobi 积分表明弧坐标哈密顿函数守恒,积分常数 H_0 为守恒的函数值。虽然与刚体定点运动的能量积分在形式上相同,但有不同的物理意义。Jacobi 积分(2.4.2)的第一项在无原始扭率时表示弹性杆的应变能密度函数,第二项 $F\gamma = F \cdot e_3$ 为截面作用力主矢沿 z 轴的切向分量。将哈密顿函数 H 与原始扭率 ω_3^0 为零时的势能密度函数 Γ 比较,二者的 $F\gamma$ 项的符号相反。仅当外力功为零且无原始扭率时, Jacobi 积分(2.4.2)方可解释为杆的势能密度守恒。否则此初积分与能量守恒无关。因此无原始扭率时, Jacobi 积分(2.4.2)仅表示弹性杆的应变能密度与作用力的切向投影之和沿弧坐标守恒。而且此解释不适用于有原始扭率的情形,此时式(2.4.2)的第一项已不同于杆的应变能密度。

3. 沿 ζ 轴的力矩积分

将 Kirchhoff 方程式(2.1.11a)~式(2.1.11c)、式(2.1.18a)~式(2.1.18c)分别与 $\alpha, \beta, \gamma, A\omega_1, B\omega_2, C(\omega_3 - \omega_3^0)$ 相乘后相加,积分后得到

$$A\omega_1\alpha + B\omega_2\beta + C(\omega_3 - \omega_3^0)\gamma = M_0 \quad (2.4.3)$$

与式(2.3.22)中的第一式对照,上式左边即截面作用力的主矩在 ζ 轴上的投影 M_ζ 。积分常数 M_0 等于沿 ζ 轴作用的外力矩 M_0 的模。初积分(2.4.3)的存在又一次证明 2.2.1 节中的结论:杆的任意截面上作用力对截面中心的主矩在 ζ 轴上的投影沿弧坐标守恒。按分析力学观点,由于 Γ 函数不显含 ψ ,式(2.4.3)是与循环坐标 ψ 对应的循环积分。

2.4.2 若干特殊情况下的初积分

由于 Kirchhoff 方程不显含弧坐标 s ,因此完全确定方程的解仅需要 5 个初积分。应用 Jacobi 最后乘子方法可在 4 个初积分基础上构造出一个新的初积分,因此实际上只要存在 4 个初积分, Kirchhoff 方程即可积。前面已对不同截面形状和受力状态的普遍情况导出了 3 个初积分,而第四初积分仅在弹性杆的特殊条件下存在。以下将说明,对于圆截面杆和作用力主矢为零的非圆截面杆两种特殊情形, Kirchhoff 方程存在第四初积分。这两种情况分别与刚体定点运动的拉格朗日情况和欧拉情况相似。除此以外,还有另一种更特殊的情况存在第四初积分,与刚体定点运动的 Kovalevskaya 情况相似,将在 2.6 节中单独叙述。受约束弹性杆在某种特殊约束条件下也存在含拉格朗日乘子的初积分。

1. 圆截面杆沿 z 轴的力矩积分

对于圆截面杆的特殊情形,令方程(2.1.18c)中 $A=B$,即导出另一个初积分

$$\omega_3 = \omega_{30} \quad (2.4.4)$$

表明圆截面杆的扭率保持常值 ω_{30} 。也可直接从方程(2.2.10c)导出此初积分的欧拉角表达式。可推知,主矩在切线轴上的投影 M_3 ,即截面上作用的扭矩沿弧坐标守恒

$$M_{30} = C(\omega_{30} - \omega_3^0) = mA \quad (2.4.5)$$

其中 m 为新定义的积分常数

$$m = \frac{M_{30}}{A} = \lambda(\omega_{30} - \omega_3^0) \quad (2.4.6)$$

参数 $\lambda = C/A$ 为抗扭与抗弯刚度之比。按分析力学观点, 由于在圆截面情况下 Γ 函数不显含 φ , 式(2.4.5)为与循环坐标 φ 对应的循环积分。

2. 作用力主矢为零时的力矩积分

对于作用力主矢为零的特殊情形, 令式(2.1.18a)~式(2.1.18c)分别与 $A\omega_1, B\omega_2, C(\omega_3 - \omega_3^0)$ 相乘后相加, 积分后得到

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2(\omega_3 - \omega_3^0)^2 = M_0^2 \quad (2.4.7)$$

此初积分的物理意义为任意截面上作用力主矩的模沿弧坐标守恒, 积分常数 M_0 为保持常值的主矩的模。当 $F=0$ 时, 从式(2.2.2)可直接得出 $M=M_0$ 。表明杆的任意截面的作用力主矩均等于端部作用的外力矩 M_0 。由于 $F_0=0$, 惯性参考系的 ζ 轴改由力矩 M_0 的方向确定。

3. 中心线封闭的圆截面杆的 Jacobi 积分

2.3 节中对于中心线封闭的圆截面杆, 列出了带拉格朗日乘子的 Kirchhoff 方程(2.3.67)。其中的第三式存在与式(2.4.5)相同的初积分

$$C(\psi' \cos\theta + \varphi' - \omega_3^0) = mA \quad (2.4.8)$$

将上式代入方程(2.3.67)的前两式, 引入参数 Λ, δ , 并定义新的广义坐标 $\tilde{\psi}$

$$\Lambda = (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)^{1/2}, \quad \delta = \arctan\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}\right), \quad \tilde{\psi} = \psi + \pi + \delta \quad (2.4.9)$$

化作

$$A(\theta'' - \tilde{\psi}'^2 \cos\theta \sin\theta) + (mA\tilde{\psi}' - F - \Lambda_3) \sin\theta - \Lambda \cos\theta \cos\tilde{\psi} = 0 \quad (2.4.10a)$$

$$A(\tilde{\psi}'' \sin\theta + 2\tilde{\psi}'\theta' \cos\theta) - mA\theta' + \Lambda \sin\tilde{\psi} = 0 \quad (2.4.10b)$$

将方程(2.4.10a)和方程(2.4.10b)分别与 θ' 和 $\tilde{\psi} \sin\theta$ 相乘后相加, 可积分得到带拉格朗日乘子的圆截面封闭杆的 Jacobi 积分

$$\frac{1}{2}A(\theta'^2 + \tilde{\psi}'^2 \sin^2\theta) + (F - \Lambda_3) \cos\theta - \Lambda \sin\theta \cos\tilde{\psi} = H \quad (2.4.11)$$

2.4.3 用主矢和主矩分量表示的初积分

利用式(2.1.10)和式(2.1.16), 以上导出的初积分(2.4.1), (2.4.2), (2.4.4), (2.4.5), (2.4.7)可改用主矢和主矩分量 $F_i, M_i (i=1, 2, 3)$ 表示为

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_0^2 \quad (2.4.12)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_1^2}{A} + \frac{M_2^2}{B} + \frac{(M_3 + C\omega_3^0)^2}{C} \right] + F_3 = H \quad (2.4.13)$$

$$F_1 M_1 + F_2 M_2 + F_3 M_3 = F_0 M_0 \quad (2.4.14)$$

$$M_3 = M_{30} \quad (2.4.15)$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M_0^2 \quad (2.4.16)$$

除 Jacobi 积分(2.4.13)以外, 用主矢和主矩分量表示的初积分均不显含原始扭率。

2.5 圆截面杆的解析积分

上述圆截面杆和作用力主矢为零的两种特殊情形均存在第四初积分,其 Kirchhoff 方程必可积。本节讨论的圆截面杆与刚体动力学中的拉格朗日情形相对应。作用力主矢为零的非圆截面杆的另一种可积情形将在 2.6 节中讨论。

2.5.1 欧拉角的解析积分

讨论带原始扭率的圆截面杆。令初积分(2.4.2)和(2.4.3)中 $A=B$,将圆截面杆特有的初积分(2.4.5)代入,化作

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + p\gamma = h \quad (2.5.1)$$

$$\omega_1\alpha + \omega_2\beta + m\gamma = l \quad (2.5.2)$$

各常数定义为

$$p = \frac{2F}{A}, \quad h = \frac{2H}{A} - \lambda\omega_{30}^2, \quad l = \frac{M_0}{A} \quad (2.5.3)$$

利用式(2.2.4)将初积分(2.4.5),(2.5.1)和(2.5.2)化为用欧拉角表示,得到

$$\frac{d\psi}{ds}\cos\theta + \frac{d\varphi}{ds} = \frac{m}{\lambda} \quad (2.5.4)$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 \sin^2\theta + p\cos\theta = h \quad (2.5.5)$$

$$\frac{d\psi}{ds}\sin^2\theta + m\cos\theta = l \quad (2.5.6)$$

在 $\theta \neq 0$ 或 π 条件下,利用式(2.4.5)和式(2.5.6)消去 Kirchhoff 方程(2.2.10a)中的变量 ψ 和 φ ,解耦为变量 θ 的微分方程

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + Q(\theta) = 0 \quad (2.5.7)$$

其中函数 $Q(\theta)$ 为

$$Q(\theta) = - \left[\left(\frac{l - m\cos\theta}{\sin^2\theta} \right)^2 \cos\theta - m \left(\frac{l - m\cos\theta}{\sin^2\theta} \right) + \frac{p}{2} \right] \sin\theta \quad (2.5.8)$$

利用式(2.5.6)消去 Jacobi 积分(2.5.5)中的 $d\psi/ds$,化作

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + U(\theta) = h \quad (2.5.9)$$

函数 $U(\theta)$ 为

$$U(\theta) = \frac{(l - m\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + p\cos\theta \quad (2.5.10)$$

$U(\theta)$ 对 θ 的导数应等于 $2Q(\theta)$ 。对于欧拉角的奇异值,可从式(2.5.6)导出 $m=l(\theta=0)$, 或 $m=-l(\theta=\pi)$,并导出

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{l - m\cos\theta}{\sin^2\theta} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\cos\theta} \right) = \frac{m}{2} = \frac{l}{2} \\ \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left(\frac{l - m\cos\theta}{\sin^2\theta} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left(\frac{m}{2\cos\theta} \right) = -\frac{m}{2} = -\frac{l}{2} \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

则方程(2.5.7)及其初积分(2.5.9)的有效范围可扩大到 $\theta=0$ 或 π , 令

$$Q(0) = Q(\pi) = 0, \quad U(0) = -U(\pi) = p \quad (2.5.12)$$

从初积分(2.5.9)可直接计算欧拉角 $\theta(s)$ 的变化规律

$$s = s_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{h - U(\theta)}} \quad (2.5.13)$$

将导出的 $\theta(s)$ 代入式(2.5.4)和式(2.5.6), 积分得到 $\psi(s), \varphi(s)$ 的变化规律

$$\psi(s) = \psi_0 + \int_{s_0}^s \frac{l - m \cos \theta(s)}{\sin^2 \theta(s)} ds \quad (2.5.14)$$

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s \left\{ \frac{m}{\lambda} - \frac{[l - m \cos \theta(s)] \cos \theta(s)}{\sin^2 \theta(s)} \right\} ds \quad (2.5.15)$$

2.5.2 椭圆函数形式的解析解

为寻求以上积分的解析表达, 将方程(2.5.9)中的变量 θ 用 $\gamma(s) = \cos \theta$ 代替, 导出

$$\frac{d\gamma}{ds} = \pm \sqrt{f(\gamma)} \quad (2.5.16)$$

适当选择弧坐标的方向, 使上式的右项取正号, 其中函数 $f(\gamma)$ 定义为

$$f(\gamma) = (h - p\gamma)(1 - \gamma^2) - (l - m\gamma)^2 \quad (2.5.17a)$$

函数 $f(\gamma)$ 也可有另一种表达

$$f(\gamma) = (a - p\gamma)(1 - \gamma^2) - (m - l\gamma)^2 \quad (2.5.17b)$$

其中的常数 a 定义为

$$a = h + m^2 - l^2 \quad (2.5.18)$$

由于 $|\gamma| = |\cos \theta| \leq 1$, 方程(2.5.16)仅在 γ 的闭区间 $[-1, +1]$ 内有定义, 且要求 $f(\gamma) \geq 0$ 。根据三次代数多项式 $f(\gamma) = 0$ 的以下性质

$$\lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} f(\gamma) = \pm\infty, \quad f(\pm 1) < 0 \quad (2.5.19)$$

方程 $f(\gamma) = 0$ 的 3 个根 $\gamma_i (i=1, 2, 3)$ 的分布情况为

$$-1 \leq \gamma_i \leq 1 \quad (i=1, 2), \quad \gamma_3 > 1 \quad (2.5.20)$$

在杆截面作用力的主矢 F 不为零的条件下, 即 $p \neq 0$ 时, 可将函数 $f(\gamma)$ 写作

$$f(\gamma) = p(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \quad (2.5.21)$$

由于 γ_3 在 $[-1, +1]$ 区间以外, γ 的定义域缩小为 $[\gamma_1, \gamma_2]$ (见图 2.5)。

引入新的变量 $v(s)$, 使满足

$$\gamma(s) = \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)v^2(s) \quad (2.5.22)$$

则有

$$\frac{d\gamma}{ds} = 2v(\gamma_2 - \gamma_1) \frac{dv}{ds} \quad (2.5.23a)$$

$$f(\gamma) = p(\gamma_3 - \gamma_1)(\gamma_2 - \gamma_1)^2 v^2(1 - v^2)(1 - kv^2) \quad (2.5.23b)$$

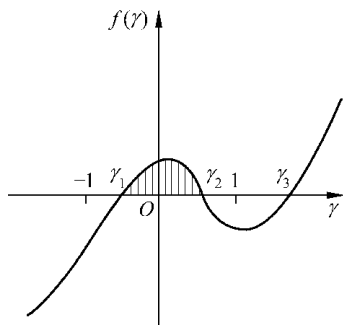


图 2.5 $f(\gamma)$ 函数曲线

将式(2.5.21)和式(2.5.23b)代入方程(2.5.16),化作 $v(s)$ 的微分方程

$$\frac{dv}{ds} = \Omega \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)} \quad (2.5.24)$$

其中的常数 k, Ω 定义为

$$k^2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_1}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho}{4}(\gamma_3 - \gamma_1) \quad (2.5.25)$$

方程(2.5.24)可分离变量积分,写作

$$\Omega ds = \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \quad (2.5.26)$$

设 $\gamma = \gamma_1$ 处的弧坐标为 s_0 , 参照附录 A, 可对上式积分得到椭圆函数形式的解析解

$$\begin{aligned} \Omega(s - s_0) &= \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \\ &= \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = F(\phi, k) \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

其中利用了 $v = \sin\phi$ 所作的代换, $F(\phi, k)$ 为以 k 为模的第一类椭圆积分, ϕ 为 $F(\phi, k)$ 的幅角, 记作

$$\phi = \text{am}[\Omega(s - s_0)] \quad (2.5.28)$$

进而导出

$$v(s) = \text{sn}[\Omega(s - s_0)] \quad (2.5.29)$$

代入式(2.5.22), 得到

$$\gamma(s) = \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \text{sn}^2[\Omega(s - s_0)] \quad (2.5.30)$$

$\gamma(s)$ 确定以后, $\theta(s)$ 的变化规律随之确定

$$\theta(s) = \arccos \gamma(s) \quad (2.5.31)$$

将式(2.5.6)中的 $\theta(s)$ 以式(2.5.31)代入, 展开后得到

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{l - m\gamma_1 - m(\gamma_2 - \gamma_1) \text{sn}^2[\Omega(s - s_0)]}{1 - \gamma_1^2 - 2\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1) \text{sn}^2[\Omega(s - s_0)] - (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \text{sn}^4[\Omega(s - s_0)]} \quad (2.5.32a)$$

上式可化作

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{l - m}{2(1 - \gamma_1)} \frac{1}{1 - n_1 \text{sn}^2[\Omega(s - s_0)]} + \frac{l + m}{2(1 + \gamma_1)} \frac{1}{1 - n_2 \text{sn}^2[\Omega(s - s_0)]} \quad (2.5.32b)$$

其中

$$n_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - 1}, \quad n_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + 1} \quad (2.5.33)$$

积分式(2.5.32), 得到

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \frac{l - m}{2\Omega(1 - \gamma_1)} \Pi[\Omega(s - s_0), n_1, k] \\ &\quad + \frac{l + m}{2\Omega(1 + \gamma_1)} \Pi[\Omega(s - s_0), n_2, k] \end{aligned} \quad (2.5.34)$$

其中 $\Pi(v, n, k)$ 为第三类椭圆积分, 定义为

$$\Pi(v, n, k) = \int_0^v \frac{dv}{(1 - nv^2)\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}} \quad (2.5.35a)$$

将 $v = \sin\phi, \phi = amu$ 代入, 此积分也可表示为

$$\Pi(u, n, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - n\sin^2\phi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} = \int_0^u \frac{du}{1 - nsn^2u} \quad (2.5.35b)$$

将式(2.5.30)中的 $\gamma(s)$ 写作

$$\gamma(s) = (\gamma_1 - 1) \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma_1 - 1} - n_1 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)] \right\} \quad (2.5.36a)$$

或写作

$$\gamma(s) = (\gamma_1 + 1) \left\{ 1 - \frac{1}{\gamma_1 + 1} - n_2 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)] \right\} \quad (2.5.36b)$$

将式(2.5.32)和式(2.5.36)代入式(2.5.4), 导出

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} = & \frac{m}{\lambda}(1 - \lambda) + \frac{m - l}{2(1 - \gamma_1)} \frac{1}{1 - n_1 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)]} \\ & + \frac{m + l}{2(l + \gamma_1)} \frac{1}{1 - n_2 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)]} \end{aligned} \quad (2.5.37)$$

积分后得到

$$\begin{aligned} \varphi = & \varphi_0 + \frac{m}{\lambda}(1 - \lambda)(s - s_0) + \frac{m - l}{2\Omega(1 - \gamma_1)} \Pi[\Omega(s - s_0), n_1, k] \\ & + \frac{m + l}{2\Omega(1 + \gamma_1)} \Pi[\Omega(s - s_0), n_2, k] \end{aligned} \quad (2.5.38)$$

2.5.3 曲率和挠率计算

解出 $\gamma(s)$ 的函数规律以后, 可导出杆的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 的解析式。为此将 Jacobi 积分(2.5.1)写作

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = h - p\gamma \quad (2.5.39)$$

从式(1.2.2)导出

$$\kappa = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (2.5.40)$$

将式(2.5.39)代入式(2.5.40), 得到

$$\kappa(s) = \sqrt{h - p\gamma(s)} \quad (2.5.41)$$

其中的 $\gamma(s)$ 已在式(2.5.30)中给出。

从式(1.2.2)还可导出

$$\tau = \omega_{30} - \frac{d\chi}{ds} \quad (2.5.42)$$

$$\chi = \arctan\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \quad (2.5.43)$$

将式(2.5.43)对 s 求导, 得到

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \left(\omega_2 \frac{d\omega_1}{ds} - \omega_1 \frac{d\omega_2}{ds} \right) \quad (2.5.44)$$

令 Kirchhoff 方程(2.1.18a)和方程(2.1.18b)中 $A=B, \omega_3=\omega_{30}$, 写作

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{ds} &= (1-\lambda)\omega_2\omega_{30} + \lambda\omega_2\omega_3^0 + \frac{p}{2}\beta \\ \frac{d\omega_2}{ds} &= (\lambda-1)\omega_1\omega_{30} - \lambda\omega_1\omega_3^0 - \frac{p}{2}\alpha\end{aligned}\quad (2.5.45)$$

将初积分(2.4.3)和(2.4.5)写作

$$\omega_1\alpha + \omega_2\beta + m\gamma = l \quad (2.5.46a)$$

$$\omega_{30} - \omega_3^0 = \frac{m}{\lambda} \quad (2.5.46b)$$

将式(2.5.45)代入式(2.5.44), 并利用式(2.5.40)、式(2.5.42)和式(2.5.46), 化作

$$\frac{d\chi}{ds} = \omega_{30} - m + \frac{p}{2}\left(\frac{l-m\gamma}{h-p\gamma}\right) \quad (2.5.47a)$$

也可化作

$$\frac{d\chi}{ds} = \omega_3^0 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)m - \frac{mh-pl}{2(h-p\gamma)} \quad (2.5.47b)$$

将式(2.5.46b)和式(2.5.47b)代入式(2.5.42), 导出

$$\tau = \frac{m}{2} + \frac{mh-pl}{2(h-p\gamma)} \quad (2.5.48)$$

将式(2.5.30)表示的 $\gamma(s)$ 代入式(2.5.41)和式(2.5.48), 得到曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 的解析式

$$\kappa(s) = (h-p\gamma_1)^{1/2} \{1 - n_3 \operatorname{sn}^2[\Omega(s-s_0)]\}^{1/2} \quad (2.5.49)$$

$$\tau(s) = \frac{m}{2} + \frac{mh-pl}{2(h-p\gamma_1) \{1 - n_3 \operatorname{sn}^2[\Omega(s-s_0)]\}} \quad (2.5.50)$$

其中

$$n_3 = \frac{p(\gamma_2 - \gamma_1)}{h - p\gamma_1} \quad (2.5.51)$$

将式(2.5.30)代入式(2.5.47), 积分得到截面相对扭角 $\chi(s)$ 的解析式

$$\chi(s) = \left[\omega_3^0 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)m\right](s-s_0) - \frac{mh-pl}{2(h-p\gamma_1)} \Pi[\Omega(s-s_0), n_3, k] \quad (2.5.52)$$

2.6 非圆截面杆的解析积分

对于无原始扭率和曲率的非圆截面杆, 仅当作用力主矢为零, 或抗弯刚度和抗扭刚度满足 $C=B=2A$ 条件时存在解析积分。这两种情况分别与刚体动力学中的欧拉情形和 Kovalevskaya 情形相对应。

2.6.1 作用力主矢为零时非圆截面杆的解析解

2.5 节对圆截面杆推导解析积分的过程中, 必须满足作用力主矢 F 不为零的限制条件。本节讨论外力主矢 F_0 为零, 即截面作用力的主矢 F 亦为零的情形。利用 2.4 节中

$F=0$ 条件下存在的初积分(2.4.7), 设杆无原始扭率, 令 $\omega_3^0=0$, 写作

$$A^2 \omega_1^2 + B^2 \omega_2^2 + C^2 \omega_3^2 = M_0^2 \quad (2.6.1)$$

其物理意义为杆的任意截面上作用力主矩的模守恒。利用此初积分, 可直接导出降阶的平衡方程以代替 Kirchhoff 方程。

以守恒的矢量 M_0 的方向作为 ζ 轴, 建立惯性参考坐标系($O-\xi\eta\zeta$), 仍使用 2.2 节中定义的欧拉角, 利用表 2.2 写出 M 相对截面主轴坐标系($P-xyz$)的投影式

$$M = M_0(\sin\theta\sin\varphi e_1 + \sin\theta\cos\varphi e_2 + \cos\theta e_3) \quad (2.6.2)$$

根据式(2.1.12), 此投影式还可写作

$$M = A\omega_1 e_1 + B\omega_2 e_2 + C\omega_3 e_3 \quad (2.6.3)$$

利用式(2.2.4)将上式中的 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 用欧拉角表示, 并与式(2.6.2)的各分量互等, 导出

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds}\cos\varphi + \frac{d\psi}{ds}\sin\theta\sin\varphi &= \frac{M_0}{A}\sin\theta\sin\varphi \\ -\frac{d\theta}{ds}\sin\varphi + \frac{d\psi}{ds}\sin\theta\cos\varphi &= \frac{M_0}{B}\sin\theta\cos\varphi \\ \frac{d\psi}{ds}\cos\theta + \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{M_0}{C}\cos\theta \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

在 $\theta \neq 0$ 或 π 条件限制下, 可将方程组(2.6.4)解耦, 得到欧拉角的一阶微分方程组

$$\frac{d\theta}{ds} = l\sigma\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi \quad (2.6.5a)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = l(1 + \sigma\sin^2\varphi) \quad (2.6.5b)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = l\cos\theta(\nu - \sigma\sin^2\varphi) \quad (2.6.5c)$$

其中参数 l 和 σ, ν 定义为

$$l = \frac{M_0}{B}, \quad \sigma = \frac{B}{A} - 1, \quad \nu = \frac{B}{C} - 1 \quad (2.6.6)$$

无量纲参数 σ 表征截面的非对称性, ν 表征抗弯刚度与抗扭刚度的差异。由于在一般情况下, 弹性杆的抗扭刚度小于抗弯刚度, 即 $C < A, C < B$, 因此参数 ν 满足 $\nu > 0$, 且 $\nu > \sigma$ 。对于均匀各向同性的圆截面杆, ν 等于杆材料的泊松比。由于在推导过程中直接利用了主矩守恒的初积分, 导出的方程组(2.6.5)比 Kirchhoff 方程(2.2.5)的阶数降低一半。将式(2.6.5a)与式(2.6.5c)相除, 消去弧坐标 s , 得到由 θ 和 φ 组成的自治系统微分方程

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\sigma\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\theta(\nu - \sigma\sin^2\varphi)} \quad (2.6.7)$$

设弧坐标 s 在 $\varphi=0$ 位置的值为 s_0 , θ, ψ 在 $s = s_0$ 处的值为 θ_0, ψ_0 , 将上式分离变量, 积分得到

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1 - \delta\sin^2\varphi}} \quad (2.6.8)$$

从式(2.6.5c)和式(2.6.8)中消去 θ , 化作

$$\frac{d\varphi}{ds} = n \sqrt{(1 - \delta\sin^2\varphi)(1 - \delta_1\sin^2\varphi)} \quad (2.6.9)$$

其中

$$\delta = \frac{\sigma}{\nu} = \frac{C(B-A)}{A(B-C)}, \quad \delta_1 = \frac{\delta}{\cos^2 \theta_0}, \quad n = l\nu \cos \theta_0 \quad (2.6.10)$$

将方程(2.6.9)分离变量积分,得到

$$n(s-s_0) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\delta \sin^2 \varphi)(1-\delta_1 \sin^2 \varphi)}} \quad (2.6.11)$$

引入参数 k, Ω 和变量 x 如下

$$k = \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}} \tan \theta_0, \quad \Omega = n\sqrt{1-\delta}, \quad x = \left(\frac{\sqrt{1-\delta}}{\sin \theta_0} \right) \sin \theta \sin \varphi \quad (2.6.12)$$

则式(2.6.11)可化作第一类椭圆积分

$$\Omega(s-s_0) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad (2.6.13)$$

根据附录 A 的式(A.6),从式(2.6.12)和式(2.6.13)导出

$$\sin \theta \sin \varphi = \left(\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{1-\delta}} \right) \operatorname{sn}[\Omega(s-s_0)] \quad (2.6.14)$$

将式(2.6.8)代入上式,导出

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{sn}[\Omega(s-s_0)]}{\sqrt{1-\delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s-s_0)]}} \quad (2.6.15)$$

由此导出

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1-\delta}{1-\delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s-s_0)]}} \operatorname{cn}[\Omega(s-s_0)] \quad (2.6.16)$$

将以上两式相除,得到

$$\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} \operatorname{tn}[\Omega(s-s_0)] \quad (2.6.17)$$

将式(2.6.15)代入式(2.6.14),导出

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{1-\delta}} \sqrt{1-\delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s-s_0)]} \quad (2.6.18)$$

且由此导出

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \operatorname{dn}[\Omega(s-s_0)] \quad (2.6.19)$$

以上导出的解析积分(2.6.19)和(2.6.17)完全确定欧拉角 $\theta(s), \varphi(s)$ 的变化规律

$$\theta = \arccos \{ \cos \theta_0 \operatorname{dn}[\Omega(s-s_0)] \} \quad (2.6.20)$$

$$\varphi = \arctan \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} \operatorname{tn}[\Omega(s-s_0)] \right\} \quad (2.6.21)$$

将式(2.6.15)代入式(2.6.5b),得到

$$\frac{d\psi}{ds} = l \left\{ 1 + \frac{\sigma \operatorname{sn}^2[\Omega(s-s_0)]}{1-\delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s-s_0)]} \right\} \quad (2.6.22)$$

积分上式,得到 $\psi(s)$ 的变化规律

$$\psi = \psi_0 + l(s-s_0) + l\sigma \int_{s_0}^s \frac{\operatorname{sn}^2[\Omega(s-s_0)]}{1-\delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s-s_0)]} ds \quad (2.6.23)$$

对于圆截面杆的特殊情形,令 $A=B, \sigma=0, \delta=0$,可直接对方程(2.6.5a), (2.6.5b)和(2.6.5c)积分,导出的欧拉角具有十分简单的变化规律

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = l\nu(\cos\theta_0)(s-s_0), \quad \psi = \psi_0 + l(s-s_0) \quad (2.6.24)$$

即 θ 保持常值, φ 和 ψ 随弧坐标匀速增长,对应的杆中心线为螺旋线。弹性杆变形后的中心线称为挠性线,关于挠性线的深入讨论将在第 4 章中进行。

2.6.2 一类特殊非圆截面杆的解析积分

本节讨论存在第四初积分的另一种可积情形,即具有特殊非圆截面的一类弹性杆。这种可积情形与刚体动力学中的 Kovalevskaya 情况相对应。设非圆截面弹性杆无原始扭率和曲率,其抗弯和抗扭刚度满足以下关系

$$C = B = 2A \quad (2.6.25)$$

要满足此限制条件,弹性杆的泊松比必须为负值^①。因此与 Kovalevskaya 情况对应的弹性杆仅存在于这种具有负泊松比的特殊材料。

将式(2.6.25)代入 Kirchhoff 方程(2.1.15),化作

$$A \frac{d\omega_1}{ds} - F\beta = 0 \quad (2.6.26a)$$

$$2A \frac{d\omega_2}{ds} - A\omega_3\omega_1 + F\alpha = 0 \quad (2.6.26b)$$

$$2A \frac{d\omega_3}{ds} + A\omega_1\omega_2 = 0 \quad (2.6.26c)$$

方程组(2.1.11)不变,即

$$\frac{d\alpha}{ds} + \omega_2\gamma - \omega_3\beta = 0 \quad (2.6.27a)$$

$$\frac{d\beta}{ds} + \omega_3\alpha - \omega_1\gamma = 0 \quad (2.6.27b)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} + \omega_1\beta - \omega_2\alpha = 0 \quad (2.6.27c)$$

令方程(2.6.26c)乘以 i ,与(2.6.26b)相加,方程(2.6.27c)乘以 i ,与式(2.6.27b)相加,并引入以下复变量

$$\eta = \beta + i\gamma, \quad \zeta = \omega_2 + i\omega_3 \quad (2.6.28)$$

则方程组(2.6.26b), (2.6.26c)和方程组(2.6.27b), (2.6.27c)可综合为以下复数形式

$$2A \frac{d\zeta}{ds} + iA\omega_1\zeta + F\alpha = 0 \quad (2.6.29)$$

$$\frac{d\eta}{ds} + i\omega_1\eta - i\zeta\alpha = 0 \quad (2.6.30)$$

令方程(2.6.29)乘以 ζ ,方程(2.6.30)乘以 iF ,相减后导出

^① 以椭圆截面杆为例,利用附录 C 中的式(C.32)和式(C.33)计算其抗弯和抗扭刚度,代入条件(2.6.25),算出 $b=\sqrt{2}a$,即椭圆的长半轴为短半轴的 $\sqrt{2}$ 倍时对应的泊松比为 $\nu=-0.33$ 。

$$\frac{d}{ds}(A\zeta^2 - iF\eta) + i\omega_1(A\zeta^2 - iF\eta) = 0 \quad (2.6.31)$$

可写作

$$\frac{d}{ds}\ln(A\zeta^2 - iF\eta) = -i\omega_1 \quad (2.6.32)$$

将上式中的 i 改为 $-i$, 得到

$$\frac{d}{ds}\ln(A\bar{\zeta}^2 + iF\bar{\eta}) = i\omega_1 \quad (2.6.33)$$

其中 $\bar{\zeta}, \bar{\eta}$ 为 ζ, η 的共轭复数,

$$\bar{\zeta} = \omega_2 - i\omega_3, \quad \bar{\eta} = \beta - i\gamma \quad (2.6.34)$$

将式(2.6.32)与式(2.6.33)相加, 得到

$$\frac{d}{ds}\ln[(A\zeta^2 - iF\eta)(A\bar{\zeta}^2 + iF\bar{\eta})] = 0 \quad (2.6.35)$$

从上式积分得到

$$(A\zeta^2 - iF\eta)(A\bar{\zeta}^2 + iF\bar{\eta}) = K^2 \quad (2.6.36)$$

展开后导出实数形式的初积分, 即 Kovalevskaya 情况的第四积分

$$[A(\omega_2^2 - \omega_3^2) + F\gamma]^2 + (2A\omega_2\omega_3 - F\beta)^2 = K^2 \quad (2.6.37)$$

将第四积分(2.6.37)与前面导出的初积分(2.4.1), (2.4.2)和(2.4.4)联立, 可以导出超椭圆积分形式的解析解。

2.6.3 常扭率杆曲率变化的 Duffing 方程

扭率为常值的弹性杆称为常扭率杆。为分析常扭率状态的存在条件, 将式(1.2.2)代入方程(2.1.18c), 得到

$$C \frac{d\omega_3}{ds} = (A - B)\kappa^2 \cos\chi \sin\chi \quad (2.6.38)$$

若 $A=B$, 扭率 ω_3 必保持常值, 即 2.4.2 节中导出的圆截面杆的初积分(2.4.4)。但对于非圆截面杆, 常扭率仅为一种特殊的平衡状态。 $A \neq B$ 时, 常扭率要求转角 χ 满足以下限制条件

$$\chi \equiv j \frac{\pi}{2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6.39)$$

即要求截面的主轴与中心线的法线轴和副法线轴保持一致。 j 为偶数时 x 轴沿法线轴, y 轴沿副法线轴; j 为奇数时 y 轴沿法线轴, x 轴沿副法线轴。不失一般性, 令 $\chi \equiv 0$, 即主轴坐标系(P - xyz)与 Frenet 坐标系重合, 则 $\omega_1 = 0, \omega_2 = \kappa$ 。将常值扭率记作 ω_{30} , 由于 $d\chi/ds = 0$, 杆的挠率与扭率相同, 亦保持常值

$$\tau = \omega_3 = \omega_{30} \quad (2.6.40)$$

从方程(2.1.18a)和方程(2.1.18b)解出

$$\alpha = -\left(\frac{B}{F}\right)\frac{d\kappa}{ds}, \quad \beta = \frac{\kappa}{F}[(C - B)\omega_{30} - C\omega_3^0] \quad (2.6.41)$$

从 Jacobi 积分(2.4.2)解出 γ

$$\gamma = \frac{H}{F} - \frac{1}{2F}(B\kappa^2 + C\omega_{30}^2) \quad (2.6.42)$$

将式(2.6.41)和式(2.6.42)代入方程(2.6.27a),化简后导出曲率 κ 的微分方程

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} - c\kappa + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0 \quad (2.6.43)$$

系数 c 定义为

$$c = \frac{H}{B} + \lambda\omega_3^0\omega_{30} + \left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)\omega_{30}^2 \quad (2.6.44)$$

其中 $\lambda = C/B$ 为杆的刚度系数比。方程(2.6.43)为 Duffing 方程,其解析积分将在 3.4 节中导出。在 5.3 节中还将利用此方程作定性分析,讨论与曲率 κ 的常值特解对应的平衡状态的分岔现象。

第 3 章 弹性杆平衡的 Schrödinger 方程

第 2 章中建立的 Kirchhoff 方程是以截面作用力的主矢和主矩投影为变量的一阶方程组,或以欧拉角为变量的二阶方程组。从 Kirchhoff 方程解出欧拉角,可以计算杆的曲率 κ 、挠率 τ 和相对扭角 χ 以确定弹性杆的几何形态。但 Kirchhoff 方程并非描述弹性杆平衡的唯一数学形式。1994 年 Shi, Hearst 等对于圆截面杆的特殊情形,将 Kirchhoff 方程的变量解耦,化作以曲率 κ 、挠率 τ 和相对扭角 χ 为未知变量的非线性 Schrödinger 方程。薛纭等引入复刚度概念将这种表达形式扩展到非圆截面杆的一般情形。利用弹性杆平衡的这种数学表达,可直接对曲率、挠率和相对扭角等参数求解,而免去与欧拉角有关的三角函数计算。圆截面杆或常扭率非圆截面杆的 Schrödinger 方程也存在椭圆函数形式的解析解。对于截面接近对称的准圆截面杆,可用半解析法求近似解。一般情况下则必须用数值方法求解。

3.1 考虑分布力的弹性杆平衡方程

第 2 章叙述的 Kirchhoff 动力学比拟仅在基本假定得到满足的前提下成立,包括忽略分布力的假定条件。实际上若考虑弹性杆有可能与其他物体接触或相互接触,则存在

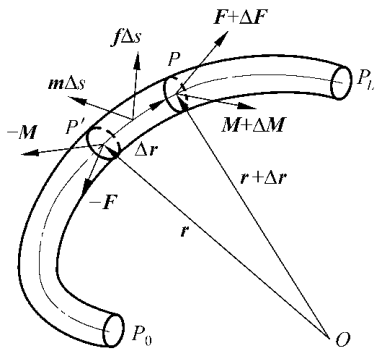


图 3.1 考虑分布力的弹性杆微元弧段的平衡

分布的接触力。若考虑杆与杆之间的静电排斥作用,则存在分布的静电引力。讨论杆在黏性介质中的运动时,还必须考虑分布的黏性阻力和力矩。因此更完善的平衡方程应将分布力和分布力偶考虑在内。设 PP' 弧段上作用有单位长度分布力 f 和分布力偶 m ,略去分布力 f 对截面中心主矩的影响^①,平衡方程(2.1.1)应修改为(图 3.1)

$$\Delta F + f \Delta s = 0 \quad (3.1.1a)$$

$$\Delta M + \Delta r \times F + m \Delta s = 0 \quad (3.1.1b)$$

将上式各项除以 Δs ,令 $\Delta s \rightarrow 0$,导出

$$\frac{dF}{ds} + f = 0 \quad (3.1.2a)$$

^① 圆截面杆的分布力对微元体的主矩为 Δs 的二阶微量。非圆截面杆的分布力可产生对截面中心的力矩。以椭圆截面为例,此力矩与标志截面非对称性的参数 $\epsilon = (b-a)/a$ 成正比。截面接近对称时,此项分布力矩亦可予忽略。

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.1.2b)$$

以截面主轴坐标系(P - xyz)作为求导的参考坐标系,上式改作

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.1.3a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.1.3b)$$

列出方程(3.1.3a)在(P - xyz)中的投影式

$$\frac{dF_1}{ds} + \omega_2 F_3 - \omega_3 F_2 + f_1 = 0 \quad (3.1.4a)$$

$$\frac{dF_2}{ds} + \omega_3 F_1 - \omega_1 F_3 + f_2 = 0 \quad (3.1.4b)$$

$$\frac{dF_3}{ds} + \omega_1 F_2 - \omega_2 F_1 + f_3 = 0 \quad (3.1.4c)$$

其中 $f_i (i=1,2,3)$ 为分布力 $\mathbf{f}$ 在(P - xyz)中的投影。若不计摩擦力或切向引力,则方程(3.1.4)中 $f_3 = 0$ 。若分布力全部略去,方程组(3.1.4)即转化为第2章中的方程(2.1.8)。分布力偶 $\mathbf{m}$ 仅在黏性介质中运动的动力学问题中出现,可在静力学讨论中略去,力矩平衡方程与(2.1.9)完全相同

$$\frac{dM_1}{ds} + \omega_2 M_3 - \omega_3 M_2 - F_2 = 0 \quad (3.1.5a)$$

$$\frac{dM_2}{ds} + \omega_3 M_1 - \omega_1 M_3 + F_1 = 0 \quad (3.1.5b)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + \omega_1 M_2 - \omega_2 M_1 = 0 \quad (3.1.5c)$$

设弹性杆带有常值原始扭率 ω_3^0 ,其本构关系与式(2.1.16)相同

$$M_1 = A\omega_1, \quad M_2 = B\omega_2, \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \quad (3.1.6)$$

其中 $\omega_i (i=1,2,3)$ 与杆中心线的曲率 κ , 挠率 τ 和截面的相对扭角 χ 的关系如式(1.2.2)所示

$$\omega_1 = \kappa \sin \chi, \quad \omega_2 = \kappa \cos \chi, \quad \omega_3 = \tau + \frac{d\chi}{ds} \quad (3.1.7)$$

方程组(3.1.5)存在与式(2.4.13)相同的 Jacobi 积分

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_1^2}{A} + \frac{M_2^2}{B} + \frac{(M_3 + C\omega_3^0)^2}{C} \right] + F_3 = H \quad (3.1.8)$$

方程组(3.1.4a)与(3.1.4b), (3.1.5a)与(3.1.5b)相互对称。引入以下复变量

$$F = F_1 + iF_2, \quad M = M_1 + iM_2, \quad \xi = \omega_1 + i\omega_2, \quad f = f_1 + if_2 \quad (3.1.9)$$

则可将此成对的方程组表示为复数形式

$$\frac{dF}{ds} + i(\omega_3 F - F_3 \xi) + f = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\frac{dM}{ds} + i(M\omega_3 - M_3 \xi + F) = 0 \quad (3.1.11)$$

3.2 圆截面杆的 Schrödinger 方程

3.2.1 复弯矩的 Schrödinger 方程

先讨论圆截面杆情形。令式(3.1.6)中 $A=B$, 圆截面杆本构关系中的弯矩与曲率关系可利用复弯矩 M 和复曲率 ξ 表示为

$$M = A\xi \quad (3.2.1)$$

复曲率的模等于曲率, $|\xi| = \kappa$ 。对于圆截面杆, 方程(3.1.5c)存在初积分(2.4.4)或(2.4.5), 即

$$\omega_3 = \omega_{30}, \quad M_3 = C(\omega_{30} - \omega_3^0) = mA \quad (3.2.2)$$

利用式(3.2.1)和式(3.2.2)将方程(3.1.10)和(3.1.11)化作

$$\frac{dF}{ds} + i\left(\omega_{30}F - \frac{1}{A}F_3M\right) + f = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\frac{dM}{ds} + i(\omega_{30} - m)M + iF = 0 \quad (3.2.4)$$

从式(3.2.4)解出 F , 代入式(3.2.3), 化作

$$\frac{d^2M}{ds^2} + i(2\omega_{30} - m)\frac{dM}{ds} - (\omega_{30} - m)\omega_{30}M - \frac{1}{A}F_3M - if = 0 \quad (3.2.5)$$

令 Jacobi 积分(3.1.8)中 $A=B$, $M_1^2 + M_2^2$ 以 $|M|^2$ 代替, 利用初积分(3.2.2)消去 M_3 , 解出

$$F_3 = H - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}|M|^2 + C\omega_{30}^2\right) \quad (3.2.6)$$

将上式代入方程(3.2.5), 得到解耦的以复弯矩 M 为未知变量的 Schrödinger 方程

$$\frac{d^2M}{ds^2} + ib\frac{dM}{ds} - cM + \frac{1}{2A^2}|M|^2M - if = 0 \quad (3.2.7)$$

系数 b, c 定义为

$$b = 2\omega_{30} - m, \quad c = \frac{h}{2} + \omega_{30}^2 - m\omega_{30}, \quad h = \frac{2H}{A} - \lambda\omega_{30}^2 \quad (3.2.8)$$

从方程(3.2.7)积分得到 $M(s)$ 后, 代入方程(3.2.4)解出 $F(s)$, 代入方程(3.2.6)解出 $F_3(s)$ 。

3.2.2 复曲率的 Schrödinger 方程

将分布力 f 向 Frenet 坐标系投影

$$f = f_n e_n + f_b e_b \quad (3.2.9)$$

其中 e_n, e_b 为法线轴和副法线轴的基矢量。根据式(1.2.2), 弯扭度 ω 沿副法线轴方向的投影为曲率 κ

$$\kappa e_b = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \quad (3.2.10)$$

从上式导出

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_b &= \frac{1}{\kappa}(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{e}_b \times \mathbf{e}_t = \frac{1}{\kappa}(\omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

将上式代入式(3.2.9),得到 f_1, f_2 与 f_b, f_n 之间的变换式

$$f_1 = \frac{1}{\kappa}(f_b \omega_1 + f_n \omega_2), \quad f_2 = \frac{1}{\kappa}(f_b \omega_2 - f_n \omega_1) \quad (3.2.12)$$

引入矢量 f 相对 Frenet 坐标系的复数式 f_F

$$f_F = f_n + i f_b \quad (3.2.13)$$

则变换式(3.2.12)可简明地表示为

$$f = -i f_F \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) \quad (3.2.14)$$

将式(3.2.1)和式(3.2.14)代入方程(3.2.7),导出以复曲率 ξ 为未知变量的 Schrödinger 方程

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} + i b \frac{d\xi}{ds} - c \xi + \frac{1}{2} |\xi|^2 \xi - \left(\frac{f_F}{A} \right) \frac{\xi}{|\xi|} = 0 \quad (3.2.15)$$

将式(3.2.1)代入复数方程(3.2.4),导出

$$F = A \left[i \frac{d\xi}{ds} - (\omega_{30} - m) \xi \right] \quad (3.2.16)$$

将式(3.2.6)改写为

$$F_3 = \frac{A}{2}(h - \kappa^2) = \frac{A}{2}(h - |\xi|^2) \quad (3.2.17)$$

从方程(3.2.15)解出 $\xi(s)$ 以后,代入式(3.2.16)确定 $F(s)$,代入式(3.2.17)确定 $F_3(s)$ 。

利用式(1.2.2),将复数 $\xi(s)$ 表示为指数形式

$$\xi = \kappa(s) \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right) \right] \quad (3.2.18)$$

将初积分(3.2.2)代入(1.2.2)的第三式,导出截面的相对扭角 $\chi(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 之间的以下关系

$$\frac{d\chi}{ds} = \omega_{30} - \tau \quad (3.2.19)$$

将式(3.2.18)代入方程(3.2.15),令虚实部分开,并将式(3.2.2)、式(3.2.13)和式(3.2.19)代入,导出含实变量 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 的封闭的微分方程组

$$\frac{d^2 \kappa}{ds^2} - \kappa \left(\tau - \frac{m}{2} \right)^2 - c_1 \kappa + \frac{1}{2} \kappa^3 = \frac{f_n}{A} \quad (3.2.20a)$$

$$\kappa \frac{d\tau}{ds} + 2 \frac{d\kappa}{ds} \left(\tau - \frac{m}{2} \right) = \frac{f_b}{A} \quad (3.2.20b)$$

其中系数 c_1 定义为

$$c_1 = \frac{h}{2} - \frac{m^2}{4} \quad (3.2.21)$$

方程组(3.2.20)有明确的物理意义,即分布的外力与弹性内力之间的平衡。从方程组(3.2.20)积分得到 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 的变化规律后,可从式(3.2.19)积分导出 $\chi(s)$ 的变化规律

$$\chi(s) = \omega_{30}(s - s_0) - \int_{s_0}^s \tau(s) ds \quad (3.2.22)$$

弹性杆的几何形态即被完全确定。

3.3 圆截面杆的解析积分

按照 Kirchhoff 条件忽略分布力时, 3.2 节导出的圆截面杆的 Schrödinger 方程存在解析积分。令 $f_n = f_b = 0$, 方程组 (3.2.20) 简化为

$$\frac{d^2 \kappa}{ds^2} - \kappa \left(\tau - \frac{m}{2} \right)^2 - c_1 \kappa + \frac{1}{2} \kappa^3 = 0 \quad (3.3.1a)$$

$$\kappa \frac{d\tau}{ds} + 2 \frac{d\kappa}{ds} \left(\tau - \frac{m}{2} \right) = 0 \quad (3.3.1b)$$

其中的方程 (3.3.1b) 可写作全微分形式

$$\frac{d}{ds} \left[\kappa^2 \left(\tau - \frac{m}{2} \right) \right] = 0 \quad (3.3.2)$$

可直接得到初积分

$$\kappa^2 \left(\tau - \frac{m}{2} \right) = J \quad (3.3.3)$$

将 2.5 节中导出的用 $\gamma(s)$ 表示的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 表达式 (2.5.41) 和式 (2.5.48) 代入式 (3.3.3) 的左边, 可验证此初积分的存在, 且导出积分常数 J 为

$$J = \frac{1}{2} (mh - pl) \quad (3.3.4)$$

利用初积分 (3.3.3) 消去方程 (3.3.1a) 中的 τ , 使方程解耦为欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d^2 \kappa}{ds^2} - \frac{J^2}{\kappa^3} - c_1 \kappa + \frac{1}{2} \kappa^3 = 0 \quad (3.3.5)$$

将可能存在的解析解写作以下椭圆函数形式

$$\kappa^2(s) = \alpha(\beta - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \quad (3.3.6)$$

其中 $u = \Omega(s - s_0)$, k 为椭圆函数的模。将上式对 s 微分两次, 并利用附录 A 中的椭圆函数性质化作 $\operatorname{sn} u$ 的多项式, 得到

$$\kappa \frac{d^2 \kappa}{ds^2} = - \frac{\alpha k^2 \Omega^2 [\beta - 2\beta(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 u + k^2(1 + 3\beta + k^2) \operatorname{sn}^4 u - 2k^4 \operatorname{sn}^6 u]}{\beta - k^2 \operatorname{sn}^2 u} \quad (3.3.7)$$

将方程 (3.3.5) 的各项乘以 κ , 并将式 (3.3.6) 和式 (3.3.7) 代入, 令 $\operatorname{sn} u$ 的各次幂的系数等于零, 导出常数 α, β, Ω, k 与 J, c_1 之间的关系式

$$\begin{aligned} \alpha &= 4\Omega^2 \\ c_1 &= \Omega^2(3\beta - 1 - k^2) \\ J^2 &= 16\Omega^6 \beta(1 - \beta)(\beta - k^2) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

将常数 β, Ω, k 用以下关系式代替

$$\beta = \frac{1}{4\Omega^2}(h - p\gamma_1), \quad k^2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_1}, \quad \Omega^2 = \frac{p}{4}(\gamma_3 - \gamma_1) \quad (3.3.9)$$

则欧拉-拉格朗日方程 (3.3.5) 的解 (3.3.6) 与第 2 章中从 Kirchhoff 方程导出的曲率变

化规律(2.5.49)完全一致,写作

$$\kappa(s) = \{h - p\gamma_1 - 4\Omega^2 k^2 \sin^2[\Omega(s - s_0)]\}^{1/2} \quad (3.3.10)$$

将式(3.3.10)代入式(3.3.3),解出与式(2.5.50)相同的挠率 $\tau(s)$ 的变化规律

$$\tau(s) = \frac{m}{2} + \frac{mh - pl}{2\{h - p\gamma_1 - 4\Omega^2 k^2 \sin^2[\Omega(s - s_0)]\}} \quad (3.3.11)$$

代入式(3.2.22),导出与式(2.5.52)完全相同的截面相对扭角 $\chi(s)$ 的变化规律

$$\chi(s) = \left[\omega_3^0 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) m \right] (s - s_0) - \frac{mh - pl}{2(h - p\gamma_1)} \Pi[\Omega(s - s_0), n_3, k] \quad (3.3.12)$$

$\kappa(s)$ 和 $\chi(s)$ 确定以后, $\xi(s)$ 随之由式(3.2.18)确定。将式(3.2.18)代入式(3.2.16),得到

$$F(s) = A \left[i \frac{d\kappa}{ds} + \frac{1}{2} (m - \tau) \kappa(s) \right] \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \chi(s) \right) \right] \quad (3.3.13)$$

将上式的虚实部分开,得到

$$\begin{aligned} F_1 &= A \left[\frac{1}{2} (m - \tau) \kappa \sin \chi - \frac{d\kappa}{ds} \cos \chi \right] \\ F_2 &= A \left[\frac{d\kappa}{ds} \sin \chi - \frac{1}{2} (m - \tau) \kappa \cos \chi \right] \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

变换到 Frenet 坐标系的 e_n 和 e_t 轴,得到

$$F_n = -A \frac{d\kappa}{ds}, \quad F_t = \frac{A}{2} (m - \tau) \kappa \quad (3.3.15)$$

将式(3.2.17)中的 $|\xi|^2$ 以 κ^2 代替,写作

$$F_3 = F_t = \frac{A}{2} (h - \kappa^2) \quad (3.3.16)$$

利用上式和主矢的模 F_0 计算 $\gamma = \cos \theta$, 得到

$$\gamma(s) = \frac{F_3}{F_0} = \frac{1}{p} [h - \kappa^2(s)] \quad (3.3.17)$$

则截面切线轴相对 ζ 轴的章动角 $\theta(s)$ 亦随之确定

$$\theta(s) = \arccos \left\{ \frac{1}{p} [h - \kappa^2(s)] \right\} \quad (3.3.18)$$

3.4 非圆截面杆的 Schrödinger 方程

3.4.1 复曲率的 Schrödinger 方程

讨论弹性杆为非圆截面的一般情形,设 $A \neq B$,仍使用式(3.1.9)定义的复数 M, ξ ,引入复抗弯刚度 D

$$D = D_1 + iD_2 \quad (3.4.1)$$

D_1, D_2 为相对扭角 χ 的函数,定义为

$$D_1 = A \sin^2 \chi + B \cos^2 \chi, \quad D_2 = (B - A) \cos \chi \sin \chi \quad (3.4.2)$$

则非圆截面杆的本构关系(3.1.6)可利用复弯矩 M 与复曲率 ξ 简明地表示为

$$M = D \xi \quad (3.4.3)$$

令式(3.4.2)中 $A = B$, 则 $D_1 = A, D_2 = 0$, 圆截面杆的复抗弯刚度为实数, $D = A$ 。

非圆截面杆不存在初积分(3.2.2),杆的扭率 ω_3 和扭矩 M_3 不再保持常值,

$$M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \quad (3.4.4)$$

将式(3.4.3)和式(3.4.4)代入 Jacobi 积分(3.1.8),导出

$$F_3 = H - \frac{1}{2}(D_1 |\xi|^2 + C\omega_3^2) \quad (3.4.5)$$

再代入方程(3.1.11),导出

$$F = iD \frac{d\xi}{ds} + \left[i \frac{dD}{ds} - D\omega_3 + C(\omega_3 - \omega_3^0) \right] \xi \quad (3.4.6)$$

将上式对 s 求导,得到

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} = & iD \frac{d^2\xi}{ds^2} + \left[C(\omega_3 - \omega_3^0) - D\omega_3 + 2i \frac{dD}{ds} \right] \frac{d\xi}{ds} \\ & + \left[(C - D) \frac{d\omega_3}{ds} - \omega_3 \frac{dD}{ds} + i \frac{d^2D}{ds^2} \right] \xi \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

将上式及式(3.4.5),式(3.4.6)等式代入方程(3.1.10),整理后得到以复曲率 ξ 为未知变量的非圆截面杆的 Schrödinger 方程

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + (a + ib) \frac{d\xi}{ds} - (c + id)\xi + \frac{1}{2}G |\xi|^2 \xi = i\tilde{f} \quad (3.4.8)$$

此方程与方程(3.2.15)的形式相似,但 a, b, c, d, G 等系数均为 s 的函数,定义为

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{|D|^2}(D_1 D_1' + D_2 D_2') - \frac{CD_2}{|D|^2}(\omega_3 - \omega_3^0) \\ b &= \frac{2}{|D|^2}(D_1 D_2' - D_2 D_1') - \frac{CD_1}{|D|^2}(\omega_3 - \omega_3^0) + 2\omega_3 \\ c &= -\frac{1}{|D|^2}(D_1 D_1'' + D_2 D_2'') + \frac{\omega_3}{|D|^2} \left[2(D_1 D_2' - D_2 D_1') - CD_1 \left(\frac{3}{2}\omega_3 - \omega_3^0 \right) \right] \\ &\quad + \frac{CD_2}{|D|^2}\omega_3' + \omega_3^2 + \frac{D_1 H}{|D|^2} \\ d &= \frac{1}{|D|^2}(D_2 D_1'' - D_1 D_2'') - \frac{\omega_3}{|D|^2} \left[2(D_1 D_1' + D_2 D_2') - CD_2 \left(\frac{3}{2}\omega_3 - \omega_3^0 \right) \right] \\ &\quad + \left(\frac{CD_1}{|D|^2} - 1 \right) \omega_3' - \frac{D_2 H}{|D|^2} \\ G &= \frac{D_1 \bar{D}}{|D|^2}, \quad \tilde{f} = \frac{\bar{D}f}{|D|^2} \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

其中以撇号表示对 s 的导数符号, $\bar{D}$ 为 D 的共轭复数, $|D|$ 为 D 的模。

3.4.2 曲率和挠率的 Schrödinger 方程

将式(3.2.18)代入方程(3.4.8),约去公因子 $\exp[i(\pi/2 - \chi)]$,将虚实部分开,导出实变量方程组

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} + a \frac{d\kappa}{ds} - \left[\left(\frac{d\chi}{ds} \right)^2 - b \left(\frac{d\chi}{ds} \right) + c \right] \kappa + \frac{D_1^2}{2|D|^2} \kappa^3 = \frac{1}{|D|^2} (D_1 f_n + D_2 f_b) \quad (3.4.10a)$$

$$\left[2\left(\frac{d\chi}{ds}\right)-b\right]\frac{d\kappa}{ds}+\left[\left(\frac{d^2\chi}{ds^2}\right)+a\left(\frac{d\chi}{ds}\right)+d\right]\kappa+\frac{D_1D_2}{2|D|^2}\kappa^3=\frac{1}{|D|^2}(D_1f_b-D_2f_n) \quad (3.4.10b)$$

方程(1.2.2)的第三式确定相对扭角 χ 的导数与扭率 ω_3 和挠率 τ 之间的关系

$$\frac{d\chi}{ds}+\tau-\omega_3=0 \quad (3.4.11)$$

将式(3.4.3)和式(3.4.4)代入方程(3.1.5c),化作

$$\frac{d\omega_3}{ds}+\frac{D_2}{C}\kappa^2=0 \quad (3.4.12)$$

方程组(3.4.10)~(3.4.12)组成以 $\kappa(s)$, $\tau(s)$, $\chi(s)$ 和 $\omega_3(s)$ 为未知变量的封闭的微分方程组,可完全确定曲率、挠率、扭率和相对扭角的变化规律。

对于圆截面杆特殊情形,令 $D_1=|D|=A$, $D_2=0$, $\omega_3=\omega_{30}$, 则有

$$a=0, \quad b=2\omega_{30}-m, \quad c=\omega_{30}^2-m\omega_{30}+\frac{h}{2}, \quad d=0, \quad G=1 \quad (3.4.13)$$

方程组(3.4.10)转化为圆截面杆的曲率和挠率方程(3.2.20)。

3.5 非圆截面杆的解析积分

3.5.1 准圆截面杆的近似解析积分

一般情况下非圆截面杆的 Schrödinger 方程无解析形式的通解,只能求数值解。对于接近对称的准圆截面杆特殊情形,可应用近似解析方法求半解析解。引入式(2.6.6)定义的特征截面非对称性的无量纲参数 σ

$$\sigma=\frac{B}{A}-1 \quad (3.5.1)$$

杆截面接近对称时, $A \approx B$, σ 为小量,则有

$$B=A(1+\sigma), \quad D_1=A(1+\sigma\cos^2\chi), \quad D_2=\sigma A\cos\chi\sin\chi, \quad |D|=D_1 \quad (3.5.2)$$

将变量 $\kappa(s)$, $\chi(s)$ 和 $\tau(s)$ 展成 σ 的幂级数:

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \kappa_{(0)}(s) + \sigma\kappa_{(1)}(s) + \sigma^2\kappa_{(2)}(s) + \cdots \\ \tau(s) &= \tau_{(0)}(s) + \sigma\tau_{(1)}(s) + \sigma^2\tau_{(2)}(s) + \cdots \\ \chi(s) &= \chi_{(0)}(s) + \sigma\chi_{(1)}(s) + \sigma^2\chi_{(2)}(s) + \cdots \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

从方程(3.4.11)导出

$$\omega_3(s) = \omega_{30} + \sigma[\tau_{(1)}(s) + \chi'_{(1)}(s)] + \sigma^2[\tau_{(2)}(s) + \chi'_{(2)}(s)] + \cdots \quad (3.5.4)$$

将式(3.5.2), 式(3.5.4)代入式(3.4.9), 仅保留 σ 的一次项, 导出简化后的系数

$$\begin{aligned} a &= -\sigma\left(2\chi'_{(0)} + \frac{m}{2}\right)\sin 2\chi_{(0)} \\ b &= 2\omega_{30} - m + \sigma[2\chi'_{(0)}\cos 2\chi_{(0)} + m\cos^2\chi_{(0)} + (2-\lambda)(\tau_{(1)} + \chi'_{(1)})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= \omega_{30}^2 - m\omega_{30} + \frac{h}{2}(1 - \sigma \cos^2 \chi_{(0)}) + \sigma[\chi_{(0)}'' \sin 2\chi_{(0)} + 2\chi_{(0)}'(\omega_{30} + \chi_{(0)}') \cos 2\chi_{(0)}] \\
d &= \sigma \left\{ -\chi_{(0)}'' \cos 2\chi_{(0)} + \left[2\chi_{(0)}'(\omega_{30} + \chi_{(0)}') + \frac{m}{2}\omega_{30} - \frac{h}{4} \right] \sin 2\chi_{(0)} \right\} \\
G &= 1 - \frac{i\sigma}{2} \sin 2\chi_{(0)}
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

将式(3.5.3)~式(3.5.5)代入方程组(3.4.10)~(3.4.12),不计分布力令 $f_n = f_b = 0$,从两边 σ 的零次幂系数导出零次近似方程,与圆截面杆的曲率和挠率方程(3.2.20)相同,

$$\frac{d^2 \kappa_{(0)}}{ds^2} - \kappa_{(0)} \left(\tau_{(0)} - \frac{m}{2} \right)^2 - c_1 \kappa_{(0)} + \frac{1}{2} \kappa_{(0)}^3 = 0 \tag{3.5.6a}$$

$$\kappa_{(0)} \frac{d\tau_{(0)}}{ds} + 2 \frac{d\kappa_{(0)}}{ds} \left(\tau_{(0)} - \frac{m}{2} \right) = 0 \tag{3.5.6b}$$

$$\frac{d\chi_{(0)}}{ds} + \tau_{(0)} = \omega_{30} \tag{3.5.6c}$$

式(3.3.10)~式(3.3.12)给出椭圆函数形式的零次近似解

$$\kappa_{(0)}(s) = \{h - p\gamma_1 - 4\Omega^2 k^2 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)]\}^{1/2} \tag{3.5.7a}$$

$$\tau_{(0)}(s) = \frac{m}{2} + \frac{mh - pl}{2\{h - p\gamma_1 - 4\Omega^2 k^2 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)]\}} \tag{3.5.7b}$$

$$\chi_{(0)}(s) = \left[\omega_{30}^0 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) m \right] (s - s_0) - \frac{mh - pl}{2(h - p\gamma_1)} \Pi[\Omega(s - s_0), n_3, k] \tag{3.5.7c}$$

式中各参数的定义见式(3.3.9)。

从 σ 的一次幂系数导出一次近似方程

$$\frac{d^2 \kappa_{(1)}}{ds^2} + a_{11} \kappa_{(1)} + a_{12} \tau_{(1)} + a_{13} \frac{d\chi_{(1)}}{ds} = a_{10} \tag{3.5.8a}$$

$$\frac{d\kappa_{(1)}}{ds} + a_{21} \kappa_{(1)} + a_{22} \tau_{(1)} + a_{23} \frac{d^2 \chi_{(1)}}{ds^2} + a_{24} \frac{d\chi_{(1)}}{ds} = a_{20} \tag{3.5.8b}$$

$$a_{31} \kappa_{(1)} + \frac{d\tau_{(1)}}{ds} + \frac{d^2 \chi_{(1)}}{ds^2} = a_{30} \tag{3.5.8c}$$

其中的系数定义为

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \left[\kappa_{(0)}' \left(2\chi_{(0)}' + \frac{m}{2} \right) + \kappa_{(0)} \chi_{(0)}'' \right] \sin 2\chi_{(0)} \\
&\quad + \kappa_{(0)} \left[2\omega_{30} \chi_{(0)}' \cos 2\chi_{(0)} - \left(\frac{h}{2} + m\chi_{(0)}' \right) \cos^2 \chi_{(0)} \right] \\
a_{11} &= \frac{3}{2} \kappa_{(0)}^2 - \tau_{(0)}^2 + m\tau_{(0)} - \frac{h}{2} \\
a_{12} &= (2 - \lambda) \kappa_{(0)} \chi_{(0)}' \\
a_{13} &= \kappa_{(0)} [2\tau_{(0)} + (2 - \lambda) \chi_{(0)}' - m] \\
a_{20} &= (m - 2\tau_{(0)})^{-1} \left[(2\kappa_{(0)}' \chi_{(0)}' + \kappa_{(0)} \chi_{(0)}'') \cos 2\chi_{(0)} + m\kappa_{(0)}' \cos^2 \chi_{(0)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa_{(0)} \left(\frac{h}{4} - 2\omega_{30} \chi'_{(0)} - \frac{m\tau_{(0)}}{2} - \frac{1}{4} \kappa_{(0)}^2 \right) \sin 2\chi_{(0)} \Big] \\
a_{21} &= (m - 2\tau_0)^{-1} \chi''_{(0)} \\
a_{22} &= -(m - 2\tau_0)^{-1} (2 - \lambda) \kappa'_{(0)} \\
a_{23} &= (m - 2\tau_0)^{-1} \kappa_{(0)} \\
a_{24} &= (m - 2\tau_0)^{-1} \lambda \kappa'_{(0)} \\
a_{30} &= -\frac{\kappa_{(0)}^2}{2\lambda} \sin 2\chi_{(0)} \\
a_{31} &= \frac{\kappa_{(0)}}{\lambda} \sin 2\chi_{(0)}
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

将零次近似解(3.5.7)代入一次近似方程组(3.5.8)的系数和右项,可用数值方法计算一次近似解。再代入式(3.5.3),最终导出曲率、挠率和相对扭角的变化规律。

3.5.2 常扭率杆的 Duffing 方程

非圆截面杆的 Schrödinger 方程在特殊情况下存在解析积分。例如在 2.6.3 节中曾讨论过的常扭率杆特殊情形。这种特殊平衡状态仅存在于截面的主轴与 Frenet 坐标轴重合的情形。令 $\chi=0$, 导出

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \kappa, \quad \omega_3 = \tau = \omega_{30} \tag{3.5.10}$$

从式(3.4.2)还可导出

$$D_1 = B, \quad D_2 = 0 \tag{3.5.11}$$

将式(3.5.10)和式(3.5.11)代入式(3.4.9),简化后的系数与式(3.4.12)完全相同。代入方程(3.4.10a)后导出曲率 κ 的微分方程,即 2.6.3 节中的 Duffing 方程(2.6.43)

$$\frac{d^2 \kappa}{ds^2} - c\kappa + \frac{1}{2} \kappa^3 = 0 \tag{3.5.12}$$

其中系数 c 为

$$c = \omega_{30}^2 - m\omega_{30} + \frac{h}{2} \tag{3.5.13}$$

可化作与式(2.6.44)的定义完全相同。

令方程(3.5.12)中的导数项等于零,计算曲率 κ 的常值特解。参数 $c \leq 0$ 时,只存在零解 $\kappa=0$,对应于杆的直线平衡状态。 $c > 0$ 时除零解以外,还出现 2 个非零常值特解 $\kappa = \pm \sqrt{2c}$,对应于杆的螺旋线平衡状态。常扭率杆的曲率在 $c=0$ 处产生的分岔现象将在 5.5.4 节中讨论,本节推导 Duffing 方程(3.5.12)的解析积分。

首先导出方程(3.5.12)的 Jacobi 积分

$$\left(\frac{d\kappa}{ds} \right)^2 - c\kappa^2 + \frac{\kappa^4}{4} = C_0 \tag{3.5.14}$$

积分常数 C_0 由起始位置的曲率 κ_0 及其变化率 κ'_0 确定,

$$C_0 = (\kappa'_0)^2 - c\kappa_0^2 + \frac{\kappa_0^4}{4} \tag{3.5.15}$$

再对式(3.5.14)分离变量积分,得到

$$s = s_0 + \int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{d\kappa}{\sqrt{c\kappa^2 - (\kappa^4/4) - C_0}} \quad (3.5.16)$$

设 $c \geq C_0$, 引入常数 a_1, a_2 , 定义为

$$a_1^2 = 2(c - \sqrt{c^2 - C_0}), \quad a_2^2 = 2(c + \sqrt{c^2 - C_0}) \quad (3.5.17)$$

引入新变量 x 和常数 Ω, k

$$x = \frac{\kappa}{a_2}, \quad \Omega = \frac{a_1}{2}, \quad k = \frac{a_2}{a_1} \quad (3.5.18)$$

则可将积分式(3.5.16)化作第一类椭圆积分

$$\begin{aligned} \Omega(s - s_0) &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = F(\phi, k) \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

其中利用了 $x = \sin\phi$ 的代换。将幅角 ϕ 记作

$$\phi = \text{am}[\Omega(s - s_0)] \quad (3.5.20)$$

则曲率 $\kappa(s)$ 为弧坐标 s 的椭圆正弦函数

$$\kappa(s) = \text{sn}[\Omega(s - s_0)] \quad (3.5.21)$$

第 4 章 弹性杆的挠性线

弹性杆受外力作用产生变形后的中心线称为挠性线。对挠性线的研究可追溯到 1730 年伯努利和欧拉的工作。早期的挠性线研究仅限于杆的平面变形,已在 1962 年 Frisch-Fay 的著作中作了系统的总结。Kirchhoff 提出的弹性杆动力学比拟为三维挠性线的研究提供了便利。1979 年 Ilyukhin 在其著作中提出了表达挠性线的柱坐标方法。Coyne 等以电缆为工程背景,对圆截面杆失稳后挠性线的转变过程作了深入研究。van der Heijden 等研究了非圆截面杆失稳屈曲后的挠性线。Starostin 等讨论了两端封闭杆的挠性线。本章叙述挠性线方程的建立,挠性线的定性性质,以及各种可积情形的解析表达。着重分析两端受轴向力单独作用或与扭矩共同作用的圆截面杆的挠性线。螺旋线是一种广泛存在的特殊挠性线,直线和圆弧为螺旋线的两种特例。本章讨论各种情况下螺旋线平衡的存在条件,以及螺旋线的几何参数与作用力之间的对应关系。此外,还讨论两端封闭和受圆柱面约束两种受约束弹性杆的挠性线。

4.1 挠性线方程的建立

4.1.1 挠性线的笛卡儿坐标表示

弹性杆受外力作用产生弹性变形后的中心线称为挠性线。以固定点 O 为原点建立惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$,以确定 P 点在空间中的位置(图 4.1)。设 e_ξ, e_η, e_ζ 为 $(O-\xi\eta\zeta)$ 各坐标轴的基矢量,挠性线上任意点 P 相对 O 点的矢径 r 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的投影式为

$$r(s) = \xi(s)e_\xi + \eta(s)e_\eta + \zeta(s)e_\zeta \quad (4.1.1)$$

ξ, η, ζ 为确定挠性线几何形态的 3 个独立坐标,但忽略轴向变形时有以下非完整约束条件

$$(d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2 = (ds)^2 \quad (4.1.2)$$

因此独立变量数仍为 2。根据式 (1.1.1),导数 $d\xi/ds, d\eta/ds, d\zeta/ds$ 分别等于中心线的切线基矢量 $T(s)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的投影,利用第 2 章中的表 2.2,用截面的欧拉角表示为

$$\frac{d\xi}{ds} = \sin\theta\sin\psi \quad (4.1.3a)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\sin\theta\cos\psi \quad (4.1.3b)$$

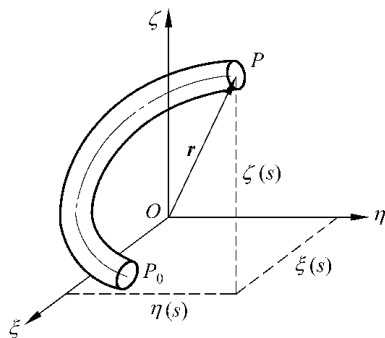


图 4.1 挠性线的笛卡儿坐标表示

去 $\phi - \Psi$ 后化作

$$\frac{d\Psi}{ds} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} \quad (4.1.9)$$

4.1.3 挠性线与作用力

利用弹性杆的平衡方程可以建立挠性线与截面作用力之间的联系。根据 2.2 节的分析,在无分布力作用的条件下,杆中心线上任意截面处的作用力主矢 F 和对截面中心的主矩 M 与端点 P_0 处作用的力螺旋 $(-F_0, -M_0)$ 组成平衡力系(图 4.3)。平衡方程为

$$F - F_0 = 0 \quad (4.1.10)$$

$$M - M_0 + r \times F = 0$$

将式(4.1.10)中的矢量 F_0, M_0, r 用柱坐标基矢量 e_ρ, e_ψ, e_ζ 表示为

$$F_0 = F_0 e_\zeta, \quad M_0 = M_0 e_\zeta, \quad r = \rho e_\rho + \zeta e_\zeta \quad (4.1.11)$$

将上式代入方程(4.1.10)的第二式,得到

$$M = M_0 e_\zeta + F_0 \rho e_\psi \quad (4.1.12)$$

令上式两边的模互等,其中 M 的模可利用式(2.1.17)计算,导出

$$A^2(\omega_1 - \omega_1^0)^2 + B^2(\omega_2 - \omega_2^0)^2 + C^2(\omega_3 - \omega_3^0)^2 = M_0^2 + F_0^2 \rho^2 \quad (4.1.13)$$

在主矢不为零的条件下,从上式解出 ρ^2 ,开方后只取正号,得到

$$\rho = \frac{1}{F_0} [A^2(\omega_1 - \omega_1^0)^2 + B^2(\omega_2 - \omega_2^0)^2 + C^2(\omega_3 - \omega_3^0)^2 - M_0^2]^{1/2} \quad (4.1.14)$$

4.1.4 圆截面杆的挠性线

对于圆截面情形,可直接将 2.5 节中导出的解析解代入式(4.1.14)计算挠性线。设杆仅有原始扭率,令式(4.1.14)中 $A=B, \omega_1^0=\omega_2^0=0$,利用初积分(2.4.5)和(2.5.1)以及式(2.5.18)可将式(4.1.14)化作

$$\rho(s) = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma(s)} \quad (4.1.15)$$

将上式对 s 求导,并利用式(2.5.16)和式(2.5.17b)化作

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a - p\gamma}} \frac{d\gamma}{ds} = \sqrt{1 - \gamma^2 - \frac{(m - l\gamma)^2}{a - p\gamma}} \quad (4.1.16)$$

将上式以及 $\sin^2 \theta = 1 - \gamma^2$ 代入式(4.1.9),只取正号,得到

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{p}{2} \left(\frac{m - l\gamma}{a - p\gamma} \right) \quad (4.1.17)$$

或改写为

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{l}{2} - \frac{al - mp}{2(a - p\gamma)} \quad (4.1.18)$$

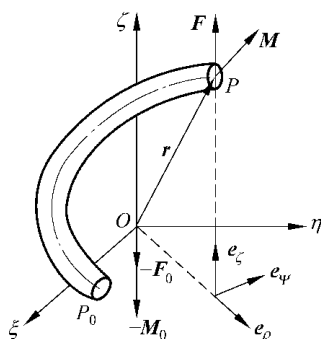


图 4.3 弹性杆的平衡

椭圆函数表达的 $\gamma(s)$ 被确定以后,即可从式(4.1.15)和式(4.1.4c)以及方程(4.1.18)的积分得到挠性线的柱坐标方程。

将 3.3 节中的式(3.3.17)代入式(4.1.15)、式(4.1.4c)和式(4.1.18),利用式(3.3.6)表示的曲率 $\kappa(s)$ 的解析式,得到

$$\rho(s) = \frac{2}{p} \sqrt{a - h + \kappa^2(s)} \quad (4.1.19)$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{1}{p} [h - \kappa^2(s)] \quad (4.1.20)$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{l}{2} - \frac{al - mp}{2[a - h + \kappa^2(s)]} \quad (4.1.21)$$

可见圆截面杆的挠性线由中心线的曲率完全确定,与挠率无关。但非圆截面杆的挠性线必须由曲率和挠率共同确定。

在分析挠性线的几何特征时,有时需要作出挠性线在 (ξ, η) 平面内的投影曲线。此投影曲线的曲率 κ_p 可利用平面曲线的曲率公式计算

$$\kappa_p = \left(\frac{d\xi}{ds} \frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds} \frac{d^2\xi}{ds^2} \right) \left[\left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (4.1.22)$$

将式(4.1.3a)、式(4.1.3b)和式(2.5.6)代入后,导出

$$\kappa_p = \frac{1}{\sin\theta} \frac{d\psi}{ds} = \frac{l - m\gamma}{(1 - \gamma^2)^{3/2}} \quad (4.1.23)$$

4.2 螺旋挠性线

4.2.1 螺旋线的几何特征

1.3 节中叙述的螺旋线是一种特殊的挠性线,即柱坐标 ρ 和章动角 θ 均为常值时所确定的挠性线。令挠性线方程(4.1.8a)中 $d\rho/ds=0$,则除 $\theta=0$ 或 π 对应的直杆平衡状态以外,柱坐标 Ψ 与欧拉角 ψ 之间必须满足

$$\Psi = \psi \pm n\pi \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.2.1)$$

即要求 2.2.2 节中定义的 x_1 轴与 X 轴的正向(n 为偶数)或负向(n 为奇数)重合。将 ρ 和 θ 的常值特解记作

$$\rho = R, \quad \theta = \theta_0 \quad (4.2.2)$$

则对应的螺旋线半径为 R ,螺旋倾角为 $\alpha = (\pi/2) - \theta_0$ 。直线和圆弧线为 $\theta_0 = 0$ 和 $\theta_0 = \pi/2$ 时的螺旋线特例。在 $0 < \theta_0 < \pi/2$ 范围内, n 为奇数时螺旋线为右旋, n 为偶数时为左旋。不失一般性,令 $n=1$,则 2.2.2 节中定义的 $(P-x_1y_1z_1)$ 为 $(O-XYZ)$ 的原点移至 P 点后绕 Z 轴转过 π 角后的位置,其中 x_1 轴与 X 轴的负方向重合。 $(P-x_1y_1z_1)$ 绕 x_1 轴转过 θ_0 角后的 $(P-x_2y_2z_2)$ 为挠性线的 Frenet 坐标系, Px_2, Py_2, Pz_2 分别为 P 点处的法线轴、副法线轴和切线轴(见图 4.4)。柱坐标系 $(O-XYZ)$ 与 Frenet 坐标系 $(P-x_2y_2z_2)$ 之间的方向余弦在表 4.1 中列出。

将条件(4.2.1)和(4.2.2)代入方程(4.1.8b),导出 $d\psi/ds$ 亦为常值,记作 ω_0

表 4.1 方向余弦

	$x_2(e_n)$	$y_2(e_n)$	$z_2(e_l)$
$X(e_\rho)$	-1	0	0
$Y(e_\psi)$	0	$-\cos\theta_0$	$\sin\theta_0$
$Z(e_\zeta)$	0	$\sin\theta_0$	$\cos\theta_0$

$$\omega_0 = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\sin\theta_0}{R} \quad (4.2.3)$$

与 1.3 节中的式(1.3.12)一致(图 4.4)。为使式(4.2.3)与式(4.1.9)取得一致,后者应取正号。

4.2.2 螺旋杆与作用力

讨论带原始扭率 ω_3^0 的圆截面杆,其螺旋线平衡状态与 Kirchhoff 方程(2.2.10)的以下特解相对应

$$\theta = \theta_0, \quad \psi' = \omega_0, \quad \varphi' = \omega_{30} - \omega_0 \cos\theta_0 \quad (4.2.4)$$

其中常数 ω_{30} 与 ω_0 满足以下关系式:

$$A\omega_0^2 \cos\theta_0 - C\omega_0(\omega_{30} - \omega_3^0) + F_0 = 0 \quad (4.2.5)$$

由于螺旋线状态下 $(P-x_2y_2z_2)$ 坐标系与 Frenet 坐标系重合,截面的欧拉角 φ 即相对扭角 χ 。 φ' 的存在表明杆截面绕螺旋线切线轴有相对扭转。截面内力主矩 M 相对主轴坐标系 $(P-x_2y_2z_2)$ 的投影 $M_i (i=1,2,3)$ 为

$$M_1 = 0, \quad M_2 = A\omega_0 \sin\theta_0, \quad M_3 = C(\omega_{30} - \omega_3^0) \quad (4.2.6)$$

利用表 4.1 将与 M 等效的力螺旋 (F_0, M_0) 对 P 点的矩投影到 $(P-x_2y_2z_2)$ (图 4.5),令 $\rho=R$,得到

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M_0 \sin\theta_0 - F_0 R \cos\theta_0, \quad M_3 = M_0 \cos\theta_0 + F_0 R \sin\theta_0 \quad (4.2.7)$$

令上式与式(4.2.6)互等,设 $\theta_0 \neq 0, R \neq 0$, 消去 $F_0 R$, 解出

$$M_0 = A\omega_0 \sin^2\theta_0 + C(\omega_{30} - \omega_3^0) \cos\theta_0 \quad (4.2.8)$$

利用式(2.4.6)和式(2.5.3)定义的积分常数 l, p, m , 从式(4.2.5)和式(4.2.8)导出

$$p = -2\omega_0(\omega_0 \cos\theta_0 - m), \quad l = \omega_0 \sin^2\theta_0 + m \cos\theta_0 \quad (4.2.9)$$

$\theta_0 \neq \pi/2$ 时,解出

$$\omega_0 = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2p}{l^2} \cos\theta_0} \right) \quad (4.2.10a)$$

$$m = \frac{l}{2\cos\theta_0} \left(1 + \cos^2\theta_0 \mp \sin^2\theta_0 \sqrt{1 - \frac{2p}{l^2} \cos\theta_0} \right) \quad (4.2.10b)$$

ω_0 与 m 的实数解条件为

$$l^2 - 2p \cos\theta_0 \geq 0 \quad (4.2.11)$$

可作为圆截面杆螺旋线平衡的存在条件。以上结论受 $\theta_0 \neq 0$ 的限制而不适用于直杆。对于直杆平衡情形,轴向力 F_0 可取任意值。

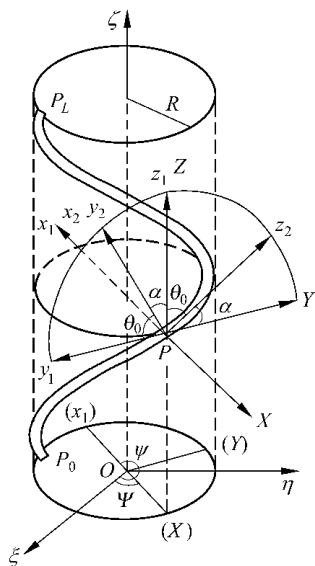


图 4.4 螺旋线

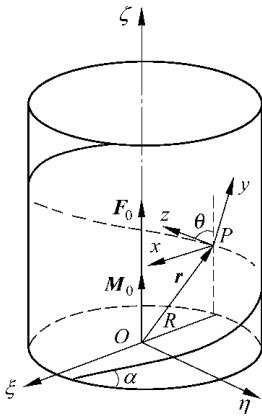


图 4.5 螺旋杆的平衡

5.4.2 节中的分析将表明,非圆截面杆的螺旋线平衡仅在截面相对 Frenet 坐标系无相对扭转条件下实现(图 4.5)。主轴坐标系与 Frenet 坐标系重合时,杆的弯扭度等于螺旋线的 Darboux 矢量(1.3.13)

$$\omega_{20} = \omega_0 \sin \theta_0, \quad \omega_{30} = \omega_0 \cos \theta_0 \quad (4.2.12)$$

将上式代入式(4.2.6),其中的 \$A\$ 改为 \$B\$,与式(4.2.7)互等,导出非圆截面杆的螺旋线平衡条件

$$\begin{aligned} F_0 &= -\omega_0 [\omega_0 (B-C) \cos \theta_0 + C \omega_3^0] \\ M_0 &= \omega_0 [C + (B-C) \sin^2 \theta_0] - C \omega_3^0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

若杆无原始扭率,简化为

$$F_0 = -\omega_0^2 (B-C) \cos \theta_0, \quad M_0 = \omega_0 [C + (B-C) \sin^2 \theta_0] \quad (4.2.14)$$

由于一般情况下 \$B > C\$,因此在 \$|\theta| < \pi/2\$ 范围内 \$F_0\$ 均为负值,且对任意 \$\theta_0\$ 值 \$M_0\$ 均不为零。\$\omega_0\$ 与 \$M_0\$ 同号, \$M_0 > 0\$ 时为右螺旋, \$M_0 < 0\$ 时为左螺旋。

4.3 圆截面杆挠性线的定性分析

4.3.1 圆截面螺旋杆

利用 2.5.2 节中以 \$\gamma(s) = \cos \theta\$ 为变量的圆截面杆平衡方程(2.5.16)

$$\frac{d\gamma}{ds} = \sqrt{f(\gamma)} \quad (4.3.1)$$

可对挠性线的几何性质作定性分析。方程(4.3.1)与常值特解 \$\gamma_0 = \cos \theta_0\$ 对应的平衡状态要求函数 \$f(\gamma)\$ 在 \$\gamma = \gamma_0\$ 处对 \$s\$ 的一阶和二阶导数均等于零,即 \$\gamma_0\$ 为 \$f(\gamma)\$ 的二重根

$$f(\gamma_0) = 0, \quad f'(\gamma_0) = 0 \quad (4.3.2)$$

满足此条件时, \$f(\gamma)\$ 函数曲线在 \$\gamma = \gamma_0\$ 处与 \$\gamma\$ 轴相切。将式(2.5.17b)代入条件(4.3.2),得到

$$f(\gamma_0) = (a - p\gamma_0)(1 - \gamma_0^2) - (m - l\gamma_0)^2 = 0 \quad (4.3.3a)$$

$$f'(\gamma_0) = -p(1 - \gamma_0^2) - 2\gamma_0(a - p\gamma_0) + 2l(m - l\gamma_0) = 0 \quad (4.3.3b)$$

设 \$a - p\gamma_0 \neq 0\$, 可从以上两式消去, 导出 \$m\$ 的二次代数方程

$$2\gamma_0 m^2 - 2l(1 + \gamma_0^2)m + 2l^2\gamma_0 + p(1 - \gamma_0^2)^2 = 0 \quad (4.3.4)$$

从方程的实数解条件可化简为

$$l^2 - 2p\gamma_0 \geq 0 \quad (4.3.5)$$

此即常值 \$\gamma_0\$ 或 \$\theta_0\$ 的存在条件。作为特例,圆孤杆(\$\gamma_0 = 0\$)和受压扭直杆(\$\gamma_0 = -1\$)恒满足此条件,受拉扭直杆(\$\gamma_0 = 1\$)仅在 \$p < l^2/2\$ 时满足。若 \$p > l^2/2\$, 此条件仅在 \$\gamma_0 < l^2/2p\$ 时成立。由于 \$|\gamma_0| < 1\$ 对应的挠性线为螺旋线, 因此 \$p > l^2/2\$ 为弹性杆存在螺旋线平衡的充分条件。图 4.6 给出 \$f(\gamma)\$ 的函数曲线。

令式(4.1.15)、式(4.1.18)和式(4.1.3c)中 $\gamma = \gamma_0$, 计算螺旋线的几何参数

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_0} = R \\ \frac{d\Psi}{ds} &= \frac{l}{2} - \frac{al - mp}{2(a - p\gamma_0)} = \omega_0 \\ \frac{d\zeta}{ds} &= \gamma_0\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

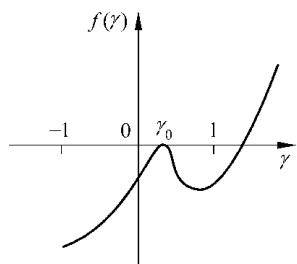


图 4.6 螺旋杆 ($1 > \gamma_0 \geq -1$) 的 $f(\gamma)$ 曲线

令式(2.5.41)、式(2.5.47)和式(2.5.48)中 $\gamma = \gamma_0$, 螺旋杆的曲率、挠率, 以及扭角变化率均为常值

$$\begin{aligned}\kappa &= \sqrt{h - p\gamma_0} = \kappa_0 \\ \tau &= \frac{m}{2} + \frac{mh - pl}{2(h - p\gamma_0)} = \tau_0 \\ \frac{d\chi}{ds} &= \omega_3^0 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)m - \frac{mh - pl}{2(h - p\gamma_0)} = \chi'_0\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

4.3.2 圆截面圆弧杆与直杆

1. 圆弧杆 ($\gamma_0 = 0, \theta_0 = \pi/2$)

令式(4.3.3)中 $\gamma_0 = 0$, 且利用式(2.5.18), 导出

$$a = m^2, \quad p = 2ml, \quad h = l^2 \quad (4.3.8)$$

代入式(2.5.17b), 化作

$$f(\gamma) = \gamma^2(2ml\gamma - m^2 - l^2) \quad (4.3.9)$$

方程 $f(\gamma) = 0$ 存在 $\gamma = 0$ 的重根, 此外还存在另一根 $\gamma = (m^2 + l^2)/2ml$ 。利用以下不等式

$$m^2 - 2ml + l^2 = (m - l)^2 \geq 0 \quad (4.3.10)$$

导出 $m^2 + l^2 \geq 2ml$, 可判断此第三根必大于 1, 3 个根的排列次序为

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{m^2 + l^2}{2ml} \quad (4.3.11)$$

在 γ 的定义域内只有 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 的孤立值(图 4.7)。将式(4.3.8)代入式(4.3.6)和式(4.3.7), 得到

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{l}, \quad \frac{d\Psi}{ds} = l, \quad \frac{d\zeta}{ds} = 0, \\ \kappa &= l, \quad \tau = 0, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{m}{\lambda}\end{aligned}\quad (4.3.12)$$

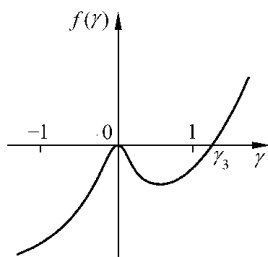


图 4.7 圆弧杆 ($\gamma_0 = 0$) 的 $f(\gamma)$ 曲线

表明在此情况下, 螺旋线压缩为沿 (ξ, η) 平面的半径为 $R = 1/l$ 的圆弧线, 若两端连接则形成圆环。沿 ζ 轴的力矩 $M_0 = Al$ 引起杆的弯曲变形而产生曲率 κ , 沿 z 轴的力矩 $M_3 = Am$ 引起杆截面的扭转变形而产生扭率 $d\chi/ds$ 。

2. 受压扭直杆 ($\gamma_0 = -1, \theta_0 = \pi$)

与 $\theta_0 = \pi$ 对应的受拉扭直杆等价于受压扭直杆。令方程(4.3.3)中 $\gamma_0 = -1$, 且利用式(2.5.18), 导出

$$m = -l, \quad a = h = -p \quad (4.3.13)$$

代入式(2.5.17b), 化作

$$f(\gamma) = -(1+\gamma)^2 [p(1-\gamma) + l^2] \quad (4.3.14)$$

除重根 $\gamma = -1$ 对应于轴向受压扭的直杆状态以外, 还存在大于 1 的另一根 $\gamma = (l^2/p) + 1$ 。 $p > 0$ 时 3 个根按以下次序排列

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -1, \quad \gamma_3 = \frac{l^2}{p} + 1 \quad (4.3.15)$$

图 4.8 压扭直杆 ($\gamma_0 = -1$) 的 $f(\gamma)$ 曲线

3. 受拉扭直杆 ($\gamma_0 = 1, \theta_0 = 0$)

令式(4.3.3)中 $\gamma_0 = 1$, 且利用式(2.5.18), 导出

$$m = l, \quad a = h = p \quad (4.3.16)$$

将上式代入式(2.5.17b), 化作

$$f(\gamma) = (1-\gamma)^2 [p(1+\gamma) - l^2] \quad (4.3.17)$$

除重根 $\gamma = 1$ 对应于轴向受拉扭的直杆状态以外, 还存在另一根 $\gamma = (l^2/p) - 1$ 。 $p > 0$ 时有以下 3 种不同情况

(1) $(l^2/p) - 1 > 1$, 即 $l^2 > 2p$, 3 个根的排列次序为

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = \frac{l^2}{p} - 1 \quad (4.3.18)$$

其中仅 $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ 的孤立点属于 γ 的定义域(图 4.9(a))。

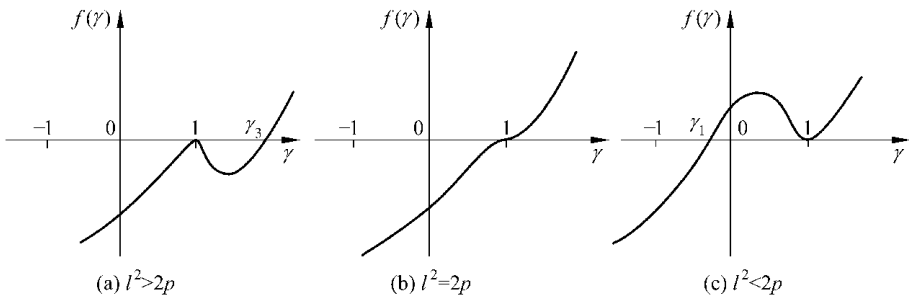


图 4.9 拉扭直杆 ($\gamma_0 = 1$) 的 $f(\gamma)$ 曲线

(2) $(l^2/p) - 1 = 1$, 即 $l^2 = 2p$, $\gamma = 1$ 为三重根(图 4.9(b))。

(3) $(l^2/p) - 1 < 1$, 即 $l^2 < 2p$, 3 个根的排列次序改为

$$\gamma_1 = \frac{l^2}{p} - 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 1 \quad (4.3.19)$$

γ 可在 $[\gamma_1, 1]$ 范围内取值(图 4.9(c))。

4.3.3 螺旋线平衡的稳定性

根据 $f(\gamma)$ 曲线的几何性质可直观地判断上述几种状态的稳定性^①。在 $p > 0$ 前提下, 图 4.6、图 4.7 和图 4.8 给出的圆弧杆($\gamma_0 = 0$)、压扭直杆($\gamma_0 = -1$)和螺旋杆($1 > \gamma_0 \geq -1$)的 $f(\gamma)$ 曲线均自下往上与 γ 轴相切, 在定义域内仅有唯一孤立点(图 4.10)。在小扰动作用下 $f(\gamma)$ 曲线即使偏离原曲线, 也只能使横坐标轴上方有定义部分出现微小增量, 其形态仅有微小改变。从而表明圆弧杆、压扭直杆和螺旋杆均为稳定平衡状态。在图 4.10 和图 4.11 中, 分别以实线和虚线表示与未扰和受扰状态对应的 $f(\gamma)$ 曲线。

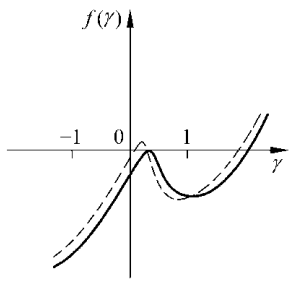


图 4.10 受扰后的 $f(\gamma)$ 曲线
($1 > \gamma_0 \geq -1$)

对于 $\gamma_0 = 1$ 情形, 即受拉扭直杆的平衡状态, 应区分 $l^2 \geq 2p$ 或 $l^2 < 2p$ 两种不同情况。 $l^2 \geq 2p$ 时 $f(\gamma)$ 曲线在定义域内也只有唯一的孤立点, 受扰后的 $f(\gamma)$ 曲线在横坐标轴上方增加的有定义部分必足够微小, 表明平衡状态稳定(图 4.11(a), (b))。但 $l^2 < 2p$ 时的 $f(\gamma)$ 曲线则不同, 不论扰动有多小, 只要曲线在与横坐标相切处的斜率稍稍偏离零值, 就可能使 $\gamma(s)$ 在定义域内作大幅度变动, 挠性线的几何形状随之产生明显改变, 则平衡状态不稳定(图 4.11(c))。因此受拉扭直杆平衡的稳定性判据为

$$l^2 \geq 2p: \text{稳定}, \quad l^2 < 2p: \text{不稳定} \quad (4.3.20)$$

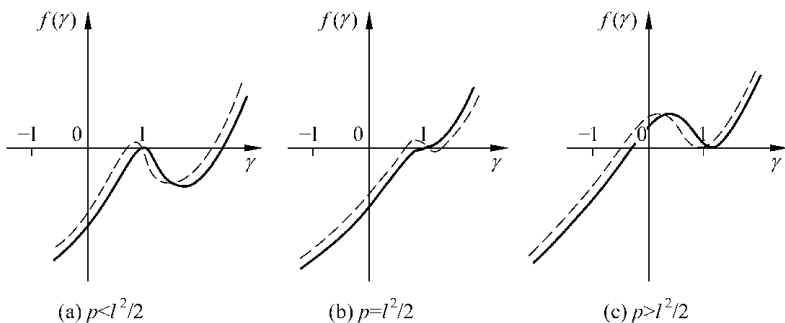


图 4.11 受扰后的 $f(\gamma)$ 曲线($\gamma_0 = 1$)

p 为负值时此稳定性条件自行满足, 表明受压扭直杆的平衡状态恒稳定。稳定性条件(4.3.20)的有量纲形式为

$$F_0 \leq \frac{M_0^2}{4A} \quad (4.3.21)$$

^① 关于平衡稳定性的概念可解释为: 杆受小扰动作用后, 若其中心线接近受扰前的中心线, 则平衡状态稳定, 反之则为不稳定。本节采用直观方法对稳定性作初步判断, 更严格的稳定性分析在第 5 章中叙述。

Greenhill 于 1883 年导出此不等式^[5]。此条件与 1865 年 Maievskii 导出的判断重刚体绕垂直轴永久转动的稳定性条件相似。基于 Kirchhoff 的动力学比拟, Greenhill 公式可看作是动力学领域内的 Maievskii 条件在弹性杆静力学中的再现。

4.3.4 端部固定圆截面杆的挠性线

设圆截面杆的挠性线相对中点具有对称性, 则中点处的切线轴必与 ζ 轴平行, 相当于杆中点处受固定端约束的挠性线。将中点处的 $\theta_0 = 0$ 或 π 作为起始值代入式(2.5.6)和式(2.5.18), 得到 $|m| = |l|$, $a = h$ 。由于 $\gamma_0 = \pm 1$ 的重根情形已在 4.3.1 节中作过分析, 仅讨论 $|h| \neq |p|$ 情形。拉扭杆或压扭杆分别对应于 $m = l$ 或 $m = -l$ 两种不同情形。

1. 固定端受拉扭情形($m = l$)

令式(2.5.17a)中 $m = l$, $f(\gamma)$ 函数化作

$$f(\gamma) = (1 - \gamma) [(h - p\gamma)(1 + \gamma) - l^2(1 - \gamma)] \quad (4.3.22)$$

方程 $f(\gamma) = 0$ 除 $\gamma = 1$ 的根以外, 另外两个根满足以下代数方程

$$p\gamma^2 + (p - h - l^2)\gamma + l^2 - h = 0 \quad (4.3.23)$$

可以证明, 若 $h > p$, 则 $\gamma = 1$ 介于上式确定的两个根之间, 3 个根的排列次序为(图 4.12(a))

$$\gamma_{1,3} = \frac{h - p + l^2 \pm \sqrt{(h - p + l^2)^2 - 4p(l^2 - h)}}{2p}, \quad \gamma_2 = 1 \quad (4.3.24)$$

$\gamma_1 < 1 < \gamma_3$ 由以下条件保证

$$|h - 3p + l^2| < \sqrt{(h - p + l^2)^2 - 4p(l^2 - h)} \quad (4.3.25)$$

将上式展开后, 导出 $h > p$, 证毕。

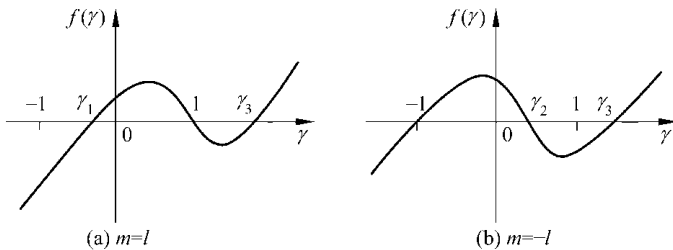


图 4.12 满足 $|m| = |l|$ 的 $f(\gamma)$ 曲线

以上得到的 3 个根中, 只有 γ_1 和 γ_2 在定义域内, $\gamma(s)$ 的变化范围为 $[\gamma_1, 1]$ 。令式(4.1.15)中 $a = h$, 将 γ_1 和 $\gamma_2 = 1$ 代入后导出柱坐标 ρ 的最大值 $\rho_{\max}$ 和最小值 $\rho_{\min}$

$$\rho_{\max} = \frac{2}{p} \sqrt{h - p\gamma_1}, \quad \rho_{\min} = \frac{2}{p} \sqrt{h - p} \quad (4.3.26)$$

令式(4.1.17)中 $m = l$, $a = h$, 得到

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{pl}{2} \left(\frac{1 - \gamma}{h - p\gamma} \right) \quad (4.3.27)$$

由于 $h > p$, $d\Psi/ds$ 在 $\gamma < 1$ 的定义域内均保持与 pl 相同的符号, 仅在 $\gamma = 1$ 处等于零。表

明挠性线朝同一方向伸展,但在 $\gamma=1$ 即 $\rho=\rho_{\min}$ 处 Ψ 产生驻值。利用式(4.1.23)计算挠性线在 (ξ, η) 平面内投影曲线的曲率 κ_p , 令其中 $m=l, a=h$, 得到

$$\kappa_p = \frac{l}{(1+\gamma)(1-\gamma^2)^{1/2}} \quad (4.3.28)$$

κ_p 在定义域内与 l 的符号相同, 曲线保持相同的凹凸性。在 $\gamma=1$ 即 $\rho=\rho_{\min}$ 处, $\kappa_p=\infty$, 此投影曲线出现尖点(图 4.13(a))。若 $h=p$, 则 $\rho_{\min}=0$, 图中的小圆弧缩为一点。

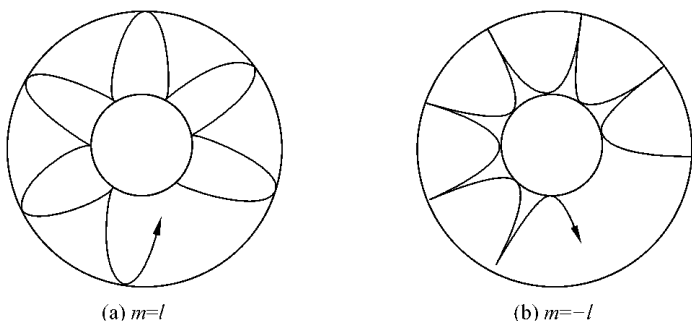


图 4.13 $|m|=|l|$ 时挠性线在 (ξ, η) 平面内的投影曲线

2. 固定端受压扭情形($m=-l$)

令式(2.5.17a)中 $m=-l, f(\gamma)$ 函数化作

$$f(\gamma) = (1+\gamma)[(h-p\gamma)(1-\gamma)-l^2(1+\gamma)] \quad (4.3.29)$$

方程 $f(\gamma)=0$ 除存在 $\gamma=-1$ 的根以外, 另外两个根满足以下代数方程

$$p\gamma^2 - (p+h+l^2)\gamma + h-l^2 = 0 \quad (4.3.30)$$

可以证明, 若 $p>0$, 则 $\gamma=1$ 介于上式确定的两个根之间, 3 个根的排列次序为(图 4.12(b))

$$\gamma_1 = -1, \quad \gamma_{2,3} = \frac{h+p+l^2 \pm \sqrt{(h+p+l^2)^2 + 4p(l^2-h)}}{2p} \quad (4.3.31)$$

$\gamma_2 < 1 < \gamma_3$ 由以下条件保证

$$|h-p+l^2| < \sqrt{(h+p+l^2)^2 + 4p(l^2-h)} \quad (4.3.32)$$

将上式展开后, 导出 $p>0$, 证毕。

以上得到的 3 个根中, 只有 -1 和 γ_2 在定义域内, $\gamma(s)$ 的变化范围为 $[-1, \gamma_2]$ 。将 -1 和 γ_2 代入式(4.1.15), 令其中 $a=h$, 导出柱坐标 ρ 的最大值 $\rho_{\max}$ 和最小值 $\rho_{\min}$

$$\rho_{\max} = \frac{2}{p}\sqrt{h+p}, \quad \rho_{\min} = \frac{2}{p}\sqrt{h-p\gamma_2} \quad (4.3.33)$$

令式(4.1.17)和式(4.1.23)中 $m=-l, a=h$, 得到

$$\frac{d\Psi}{ds} = -\frac{pl}{2} \left(\frac{1+\gamma}{h-p\gamma} \right), \quad \kappa_p = \frac{l}{(1-\gamma)(1-\gamma^2)^{1/2}} \quad (4.3.34)$$

$d\Psi/ds$ 在 $\gamma>-1$ 的定义域内均保持与 pl 相反的符号, 只是在 $\gamma=-1$ 处等于零。表明挠性线朝相反方向伸展, 在 $\gamma=-1$ 即 $\rho=\rho_{\max}$ 处出现 Ψ 的驻值。 κ_p 在定义域内仍与 l 的符

号相同,但由于曲线的伸展方向相反,曲线具有与 $m=l$ 情形相反的凹凸性。在 $\gamma=-1$ 即 $\rho=\rho_{\max}$ 处, $\kappa_p=\infty$, 曲线出现尖点(图 4.13(b))。

4.3.5 满足 $al-m p=0$ 条件的挠性线

设积分常数满足 $al-m p=0$ 条件,但 $a \neq p$, 以避免与 4.3.1 节中已讨论过的 $\gamma_0=\pm 1$ 重根情形重复。将 $al-m p=0$ 代入式(2.5.17b),化作

$$f(\gamma) = \frac{1}{p^2}(a - p\gamma)[p^2(1 - \gamma^2) - l^2(a - p\gamma)] \quad (4.3.35)$$

方程 $f(\gamma)=0$ 除存在 $\gamma=a/p$ 的根以外,另外两个根满足以下代数方程

$$p^2\gamma^2 - pl^2\gamma + al^2 - p^2 = 0 \quad (4.3.36)$$

解出

$$\gamma = \frac{l^2 \mp \sqrt{l^4 - 4al^2 + 4p^2}}{2p} \quad (4.3.37)$$

以下分别讨论 $|a| < |p|$ 和 $|a| > |p|$ 两种不同情况。

1. $|a| < |p|$, 即 $|m| < |l|$ 情形

由于 $|a| < |p|$, $\gamma=a/p$ 必在 $[-1, 1]$ 区间内。再由于

$$l^4 - 4al^2 + 4p^2 > l^4 - 4pl^2 + 4p^2 = (l^2 - 2p)^2 > 0 \quad (4.3.38)$$

方程(4.3.36)满足实数解条件。利用 $a < p$ 可证明式(4.3.37)中带负号的根小于 a/p

$$\gamma = \frac{l^2 - \sqrt{l^4 - 4al^2 + 4p^2}}{2p} < \frac{a}{p} \quad (4.3.39)$$

根据 $f(\gamma)$ 函数的性质可以推断,式(4.3.37)中另一个根大于 1。3 个根的排列次序为(图 4.14(a))

$$\gamma_{1,3} = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^4 - 4al^2 + 4p^2}}{2p}, \quad \gamma_2 = \frac{a}{p} \quad (4.3.40)$$

对于压杆情形,令 $p = -|p|$, 3 个根的排列次序相反。

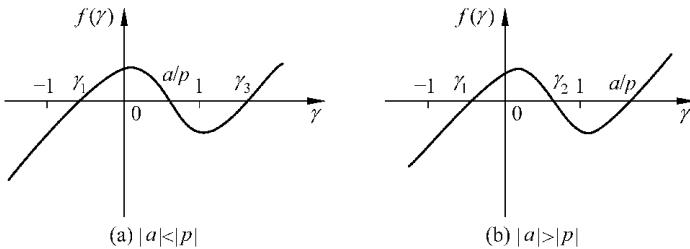


图 4.14 满足 $al-m p=0$ 的 $f(\gamma)$ 曲线

令椭圆函数解(2.5.30)中的 $\gamma_2=a/p$, 代入式(4.1.15), 化作

$$\rho = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1} \operatorname{cn}[\Omega(s - s_0)] \quad (4.3.41)$$

ρ 的最小值和最大值分别发生在 $\text{cn}[\Omega(s-s_0)]$ 的函数值为 0 或 1 处, 导出

$$\rho_{\min} = 0, \quad \rho_{\max} = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1} \quad (4.3.42)$$

将条件 $al - mp = 0$ 代入式(4.1.18), 化作

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{l}{2} \quad (4.3.43)$$

$d\Psi/ds$ 为常值, 表明挠性线的伸展方向不变。 ρ 的最小值为零, 表明挠性线在此处穿过 ζ 轴, 从而使角度坐标 Ψ 产生增量 π 。在式(4.1.23)中, 由于 $|a| < |p|$, 则 $|m| < |l|$, 因此 κ_p 恒保持与 l 同号, 曲线的凹凸性不变(图 4.15(a))。

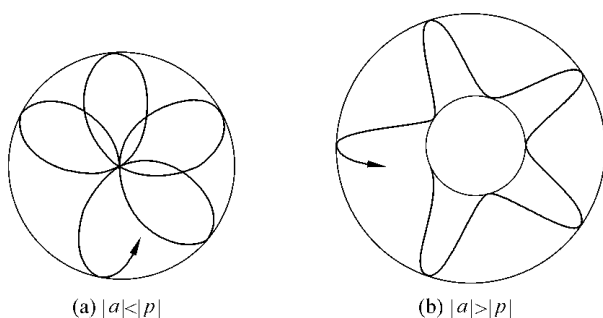


图 4.15 $al - mp = 0$ 时挠性线在 (ξ, η) 平面内的投影曲线

2. $|a| > |p|$, 即 $|m| > |l|$ 情形

由于 $|a| > |p|$, $\gamma = a/p$ 大于 1, 根的排列次序改为(图 4.14(b))

$$\gamma_{1,2} = \frac{l^2 \mp \sqrt{l^4 - 4al^2 + 4p^2}}{2p}, \quad \gamma_3 = \frac{a}{p} \quad (4.3.44)$$

其中 $\gamma_{1,2}$ 的实数解条件 $l^4 - 4al^2 + 4p^2 > 0$ 可转化为

$$l > l_1 \quad \text{或} \quad l < l_2 \quad (4.3.45)$$

其中

$$l_{1,2}^2 = 2(a \pm \sqrt{a^2 - p^2}) \quad (4.3.46)$$

满足此条件时, γ_1 和 γ_2 的实数解分别对应于 ρ 的最大值和最小值

$$\rho_{\max} = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1}, \quad \rho_{\min} = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_2} \quad (4.3.47)$$

若 p/a 介于 γ_1 与 γ_2 之间, 即以下条件满足:

$$\gamma_1 < \frac{p}{a} < \gamma_2 \quad (4.3.48)$$

将 $\gamma = p/a = l/m$ 代入式(4.1.23)和式(4.1.17), 导出 $\kappa_p = 0$, 以及

$$\kappa_p = 0, \quad \left(\frac{d\Psi}{ds} \right)_{\gamma=p/a} = \frac{pa}{2m} \left(\frac{m^2 - l^2}{a^2 - p^2} \right) > 0 \quad (4.3.49)$$

表明挠性线的投影曲线在此处出现拐点, 且曲线在此处的伸展方向不变(图 4.15(b))。

4.3.6 满足 $mh - pl = 0$ 条件的挠性线

设积分常数满足 $mh - pl = 0$ 条件,代入式(2.5, 17a)后化作

$$f(\gamma) = (h - p\gamma) \left[1 - \gamma^2 - \frac{m^2}{p^2} (h - p\gamma) \right] \quad (4.3.50)$$

方程 $f(\gamma) = 0$ 除存在 $\gamma = h/p$ 的根以外,其余两个根满足以下代数方程

$$\gamma^2 - \frac{m^2}{p} \gamma + \frac{m^2 h}{p^2} - 1 = 0 \quad (4.3.51)$$

解出

$$\gamma = \frac{1}{2p} \left[m^2 \pm \sqrt{m^4 + 4(p^2 - m^2 h)} \right] \quad (4.3.52)$$

根的实数解条件为

$$m^4 - 4hm^2 + 4p^2 > 0 \quad (4.3.53)$$

为避免重复已讨论过的 $\gamma_0 = \pm 1$ 重根情形,只讨论 $h < p$ 和 $h > p$ 两种情况。

1. $h < p$ 情形

则 $\gamma = h/p$ 小于 1,且由于

$$m^4 - 4hm^2 + 4p^2 > m^4 - 4pm^2 + 4p^2 > (m^2 - 2p)^2 > 0 \quad (4.3.54)$$

方程(4.3.51)的实数解条件得到满足。根的排列次序为(图 4.16(a))

$$\gamma_{1,3} = \frac{1}{2p} \left[m^2 \mp \sqrt{m^4 + 4(p^2 - m^2 h)} \right], \quad \gamma_2 = \frac{h}{p} \quad (4.3.55)$$

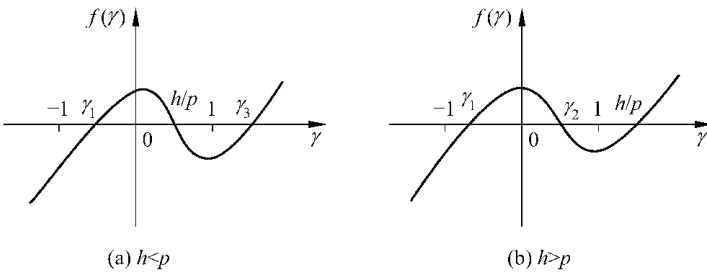


图 4.16 满足 $mh - pl = 0$ 的 $f(\gamma)$ 曲线

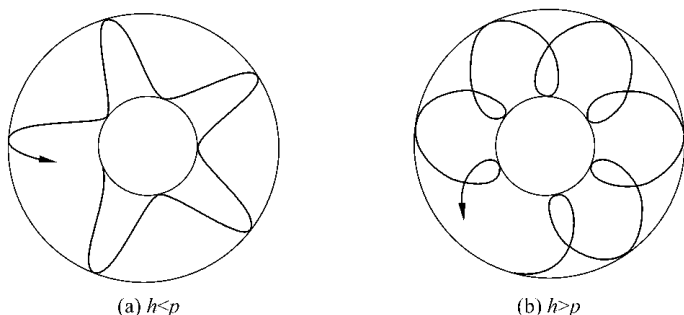
将 γ_1 和 $\gamma_2 = h/p$ 代入式(4.1.15),算出 ρ 的最大值和最小值

$$\rho_{\max} = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1}, \quad \rho_{\min} = \frac{2}{p} \sqrt{a - h} \quad (4.3.56)$$

由于 $l < m$, 式(4.1.17)表示的 $d\Psi/ds$ 不可能出现零值,曲线的伸展方向不变。但式(4.1.23)表示的曲率 κ_p 却可能在 $\gamma = l/m$ 处为零,使曲线产生拐点。挠性线的投影曲线有与图 4.16(b)相似的几何特征(图 4.17(a))。

2. $h > p$ 情形

由于 $h > p$, $\gamma = h/p$ 大于 1,根的排列次序改为(图 4.16(b))

图 4.17 $mh-pl=0$ 时挠性线在 (ξ, η) 平面内的投影曲线

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2p} [m^2 \mp \sqrt{m^4 + 4(p^2 - m^2 h)}], \quad \gamma_3 = \frac{h}{p} \quad (4.3.57)$$

其中 $\gamma_{1,2}$ 的实数解条件(4.3.51)转化为

$$m > m_1 \quad \text{或} \quad m < m_2 \quad (4.3.58)$$

其中

$$m_{1,2}^2 = 2(h \pm \sqrt{h^2 - p^2}) \quad (4.3.59)$$

满足此条件时, γ_1 和 γ_2 的实数解分别对应于 ρ 的最大值和最小值

$$\rho_{\max} = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1}, \quad \rho_{\min} = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_2} \quad (4.3.60)$$

若 p/h 介于 γ_1 与 γ_2 之间, 即以下条件满足

$$\gamma_1 < \frac{p}{h} < \gamma_2 \quad (4.3.61)$$

将 $\gamma = p/h = m/l$ 代入式(4.1.17), 得到 $d\Psi/ds=0$, 但 $d^2\Psi/ds^2$ 在此处可化作 $-pl/2$ 而不等于零, 因此曲线在此处必改变伸展方向而出现折返。由于在定义域内 $\gamma < h/p = l/m$, 式(4.1.23)表示的曲率 κ_p 不可能出现零点, 曲线保持不变的凹凸性(图 4.17(b))。

4.4 挠性线方程的解析积分

4.4.1 圆截面杆挠性线方程的解析积分

在外力主矢 F_0 不为零的条件下, 可利用第2章或第3章导出的解析解 $\gamma(s)$ 或 $\kappa(s)$ 对圆截面杆的挠性线方程求解。将 $\kappa(s)$ 的椭圆函数表达式(2.5.49)代入方程(4.1.20), 写作

$$\frac{d\zeta}{ds} = \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)] \quad (4.4.1)$$

积分此方程, 并利用附录 A 中的关系式(A.24)

$$\int_0^u \operatorname{sn}^2 u du = \frac{1}{k^2} [u - E(\operatorname{am} u, k)] \quad (4.4.2)$$

其中 $E(\operatorname{am} u, k)$ 是以 k 为模的第二类椭圆积分

$$E(\operatorname{am} u, k) = \int_0^u \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} du \quad (4.4.3)$$

从方程(4.4.1)积分得到

$$\zeta(s) = \zeta_0 + \gamma_3(s - s_0) - 2\sqrt{\frac{\gamma_3 - \gamma_1}{p}} E\{\operatorname{am}[\Omega(s - s_0)], k\} \quad (4.4.4)$$

将式(2.5.49)代入式(4.1.21),得到

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{l}{2} - \frac{al - mp}{2(a - p\gamma_1) \{1 - n_4 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)]\}} \quad (4.4.5)$$

其中参数 n_4 定义为

$$n_4 = \frac{p(\gamma_2 - \gamma_1)}{a - p\gamma_1} \quad (4.4.6)$$

从方程(4.4.5)积分得到

$$\Psi(s) = \Psi_0 + \frac{l}{2}(s - s_0) - \frac{al - mp}{2\Omega(a - p\gamma_1)} \Pi[\Omega(s - s_0), n_4, k] \quad (4.4.7)$$

将式(2.5.49)代入式(4.1.19),得到

$$\rho(s) = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1} \{1 - n_4 \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)]\}^{1/2} \quad (4.4.8)$$

式(4.4.2)、式(4.4.7)和式(4.4.8)完全确定挠性线的几何形状。

将挠性线的稳态解(4.2.23)与一般形式解(4.4.1),(4.4.5)和(4.4.8)相对照,令 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$, 可以认为,一般情况下挠性线的解析解是在稳态解基础上增加由椭圆函数表示的周期变化增量。当此增量为无限小量时,可将稳态的螺旋线看作是非稳态挠性线的骨架曲线,而实际挠性线围绕骨架曲线作螺旋式缠绕。也可以认为,此时非稳态挠性线是稳态大螺旋线与非稳态小螺旋线的叠加。

4.4.2 非圆截面杆挠性线方程的积分

非圆截面杆仅在作用力主矢 F_0 为零,即扭矩单独作用时存在欧拉角的解析积分。即 2.6 节中的式(2.6.20)、式(2.6.21)和式(2.6.23)。

将式(2.6.19)代入方程(4.1.3c),设 θ_0, ψ_0 为 $s = s_0$ 处 θ, ψ 的起始值,得到

$$\frac{d\zeta}{ds} = \cos\theta_0 \operatorname{dn}[\Omega(s - s_0)] \quad (4.4.9)$$

积分上式,得到

$$\zeta = \zeta_0 + \cos\theta_0 \int_{s_0}^s \operatorname{dn}[\Omega(s - s_0)] ds \quad (4.4.10)$$

将式(2.6.18)代入方程(4.1.8a)和(4.1.8b),并与方程(2.6.22)联立,得到

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1 - \delta}} \sqrt{1 - \delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s - s_0)]} \sin(\psi - \Psi) \quad (4.4.11a)$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = -\frac{\sin\theta_0}{\rho \sqrt{1 - \delta}} \sqrt{1 - \delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s - s_0)]} \cos(\psi - \Psi) \quad (4.4.11b)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = l \left\{ 1 + \frac{\sigma \operatorname{sn}^2[\Omega(s - s_0)]}{1 - \delta \operatorname{cn}^2[\Omega(s - s_0)]} \right\} \quad (4.4.11c)$$

4.4.1 节导出的圆截面杆解析积分不适用于 $F_0=0$ 情形,因此本节结果可用于计算受扭矩单独作用的圆截面杆的挠性线。令 $\sigma=0, \delta=0$, 方程(4.4.11c)存在积分(2.6.24), 令其中 $\phi_0=0$, 代入方程(4.4.11a)和(4.4.11b)后化作

$$\frac{d\rho}{ds} = \sin\theta_0 \sin[l(s-s_0) - \Psi] \quad (4.4.12a)$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = -\frac{1}{\rho} \sin\theta_0 \cos[l(s-s_0) - \Psi] \quad (4.4.12b)$$

由于 ρ 与 Ψ 相互耦合, 一般情况下只能用数值方法求解。

4.5 平面挠性线

4.5.1 平面挠性线的解析积分

对于平面挠性线的特殊情形, 可导出形式更简明的解析积分。设挠性线为过 ζ 轴的平面曲线, 令式(4.1.17)中 $d\Psi/ds=0$, 对于 θ 的任意值, 要求 $m=l=0$ 。即截面作用力主矩沿 ζ 轴和 z 轴的分量 M_0 和 M_3 均应为零。只有两端受轴向力 F_0 单独作用的弹性杆满足此条件。令方程(2.5.7)中 $m=l=0$, 简化为

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{p}{2} \sin\theta = 0 \quad (4.5.1)$$

将杆的两个端点 P_0 和 P_L 的连线作为 ζ 轴, 连线的中点作为坐标原点 O 。设杆的两端为铰支点, 受到的轴向力为压力。根据载荷的对称性推断, 挠性线相对中点 C 对称, C 点处的切线必平行于 ζ 轴, 相应的欧拉角 θ 等于零。此问题等同于在 C 点处固定, 自由端 P_L 处受压力 F_0 作用的杆长为 $1/2$ 实际杆长的弹性杆平衡问题(图 4.18)。不失一般性, 令 $\Psi=\pi/2$, 则柱坐标的 X 轴与笛卡儿坐标的 η 轴保持重合。将 $m=l=0$ 代入式(2.5.18)导出 $a=h$, 代入式(2.5.4)和式(2.5.6), 导出 $d\psi/ds=d\varphi/ds=0$, 即欧拉角 ψ, φ 均保持不变。为保证挠性线在 (η, ζ) 坐标面内且截面无扭转, 要求 $\psi=0, \varphi=0$ 。

在杆两端受压条件下, 与轴向力平衡的截面作用力主矢 F 沿 ζ 轴的负方向, 因此按式(2.5.3)定义的参数 p 应为负数, 即

$$p = -|p| = -\frac{2|F_0|}{A} \quad (4.5.2)$$

将上式代入式(4.1.15), 令 $a=h, \gamma$ 写作 $\cos\theta$, 只取正号, 得到

$$\rho(\theta) = \frac{2}{|p|} \sqrt{h+|p|} \cos\theta \quad (4.5.3)$$

在 C 点处令上式中 $\theta=0$, 导出杆变形后的最大挠度 R

$$R = \rho_{\max} = \rho(0) = \frac{2}{|p|} \sqrt{h+|p|} \quad (4.5.4)$$

可利用半角公式将式(4.5.3)化作

$$\rho(\theta) = \sqrt{R^2 - \frac{8}{|p|} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (4.5.5)$$

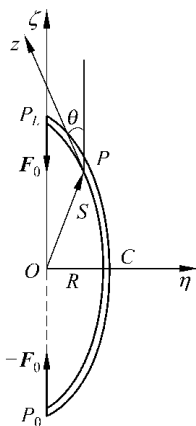


图 4.18 两端受压力作用的弹性杆

在常数 h 满足 $h \geq -|p|$ 条件下,引入参数 k

$$k^2 = \frac{1}{8} |p| R^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h}{|p|} \right) \quad (4.5.6)$$

引入变量 ϕ , 作以下变量置换

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \phi \quad (4.5.7)$$

则式(4.5.5)化作

$$\rho(\phi) = R \cos \phi \quad (4.5.8)$$

在 P_0 点处由于 $\rho=0$, 对应的变量 ϕ 应为 $\pi/2$, 将对应的 θ 角记作 θ_0 。式(4.5.7)中的参数 k 可用 θ_0 表示为

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (4.5.9)$$

将式(4.5.8)代入方程(4.1.8a), 令其中 $\Psi = \pi/2, \phi=0$, 并利用半角公式及式(4.5.6)和式(4.5.7), 整理后导出

$$ds = -\frac{d\rho}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{2}{|p|}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad (4.5.10)$$

从上式导出用第一类椭圆积分表示的解析解

$$\Omega(s-s_0) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = F(\phi, k) \quad (4.5.11)$$

将 C 点取作弧坐标原点, 则 $s_0=0$, 参数 Ω 定义为

$$\Omega^2 = \frac{|p|}{2} = \frac{|F_0|}{A} \quad (4.5.12)$$

式(4.5.11)确定变量 ϕ 随弧坐标 s 的变化规律

$$\phi(s) = \text{am}[\Omega(s-s_0)] \quad (4.5.13)$$

对于长度为 L 的弹性杆, 当 θ 在 0 至 π 范围内变化时, 式(4.5.11)中的积分上限应为 $\pi/2$, 从 C 点到 P_L 点的积分值应等于杆长的一半。得到

$$\frac{\Omega L}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = K(k) \quad (4.5.14)$$

其中 $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分。将式(4.5.2)代入式(4.5.12), 其中的抗弯刚度系数 A 以 EI 代替, $I=I_x=I_y$ 为圆截面杆的惯性矩, 则从式(4.5.14)和式(4.5.12)导出轴向压力 $|F_0|$ 与参数 k 之间的关系式

$$|F_0| = \frac{4EI}{L^2} K^2(k) \quad (4.5.15)$$

对于 $k=0$, 即 $R=0$ 的特殊情形, $K(0)=\pi/2$, 上式中的 $|F_0|$ 化为根据线性理论导出的长度为 L 两端铰支的压杆欧拉载荷 $|F_0|_{\text{cr}}$

$$|F_0|_{\text{cr}} = |F_0|_{k=0} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (4.5.16)$$

对于 $R>0$, 即 $k>0$ 的更一般情形, 由于第一类完全椭圆积分 $K(k)$ 随参数 k 单调增大, 必有 $K(k)>\pi/2$, 代入式(4.5.16)后导出的作用力 $|F_0|$ 大于 $|F_0|_{\text{cr}}$, 即

$$|F_0|_{k>0} > |F_0|_{cr} \quad (4.5.17)$$

可由此推论：弹性杆偏离直线的弯曲变形应在载荷超过欧拉载荷 $|F_0|_{cr}$ 时发生。与材料力学中关于压杆问题的结论一致。从式(4.5.6)，式(4.5.12)，式(4.5.14)，式(4.5.15)和式(4.5.16)导出

$$\frac{R}{L} = \frac{k}{K(k)}, \quad \frac{|F_0|}{|F_0|_{cr}} = \frac{4K^2(k)}{\pi^2} \quad (4.5.18)$$

以 k 为参变量，可利用上式计算压杆偏离直线后最大挠度 R 与载荷 $|F_0|$ 之间的对应关系。这在线性理论中是无法完成的。从图 4.19 的载荷挠度曲线可看出，超过欧拉载荷 $|F_0|_{cr}$ 时，挠度随载荷 $|F_0|$ 增大，至 $k=0.8374$ ，即端部倾角 $\theta_0=114^\circ$ 时，挠度 R 为极大值，继续增大载荷，挠度反而减小。原因是端部倾角从锐角变为钝角时中心线向外侧迂回，使挠性线与 ζ 轴的平均距离减小。

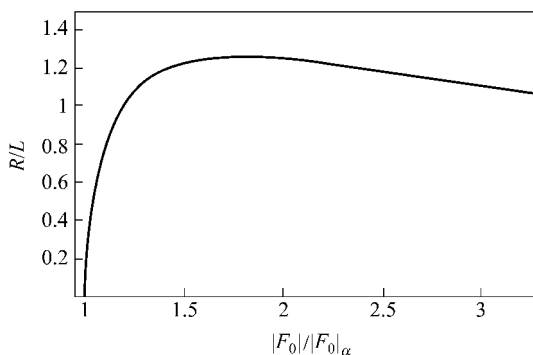


图 4.19 压杆的载荷挠度曲线

为计算挠性线上任意点 P 的 ζ 坐标，将式(4.1.3c)中的 $\cos\theta$ 以式(4.5.7)表示，利用式(4.5.10)和式(4.5.12)导出

$$d\zeta = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \phi}{\Omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \quad (4.5.19)$$

对上式积分，由于 $\phi=0$ 对应的 ζ 为零，得到

$$\zeta(\phi) = \frac{1}{\Omega} \left[\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} - 2k^2 \int_0^\phi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \right] \quad (4.5.20)$$

利用附录 A 的式(A.4)和式(A.26)，上式中第二个积分可表示为

$$\int_0^\phi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{k^2} [F(\phi, k) - E(\phi, k)] \quad (4.5.21)$$

则式(4.5.20)化作

$$\zeta(\phi) = \frac{1}{\Omega} [2E(\phi, k) - F(\phi, k)] \quad (4.5.22)$$

将式(4.5.13)确定的 $\phi(s)$ 代入式(4.5.8)和式(4.5.22)，挠性线的几何形状即完全确定。图 4.20 中给出以 θ_0 为参变量的一端固定压杆的挠性线族，将杆的自由端视为铰支点，固定端视为杆的中点，即转化为两端铰支杆的半截挠性线。

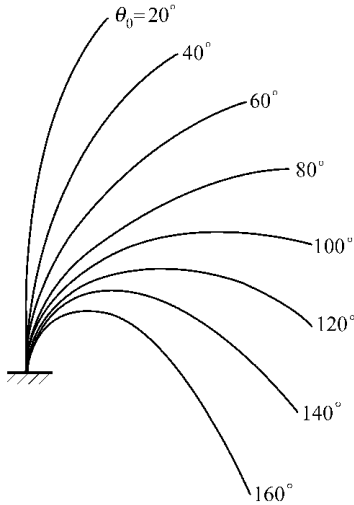


图 4.20 一端固定压杆的挠性线族

4.5.2 封闭挠性线

令式(4.5.22)中 $\phi=\pi/2$, 导出 P_0 点至 O 点的距离 D

$$D = \zeta(\pi/2) = \frac{1}{\Omega} [2\tilde{E}(k) - K(k)] \tag{4.5.23}$$

其中 $K(k)$ 和 $\tilde{E}(k)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分。杆的两个端点 P_0, P_L 均与 O 点接触时, $D=0$, 挠性线在 O 点处相交形成回环(图 4.21)。此条件要求

$$2\tilde{E}(k) - K(k) = 0 \tag{4.5.24}$$

用数值方法可解出: $k=0.9089, R=0.3916L, |F_0|=2.183|F_0|_{cr}$ 。由 2 个回环可组成 8 字形挠性线(图 4.22)。封闭挠性线的更普遍情况将在 4.7 节中讨论。

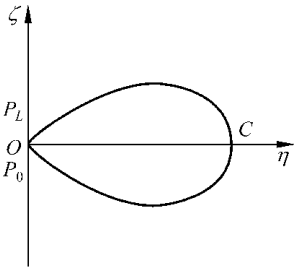


图 4.21 封闭的挠性线

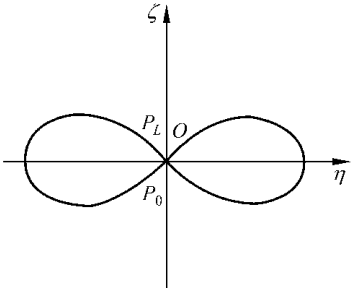


图 4.22 8 字形挠性线

4.5.3 无限长弹性杆

讨论 $k=1$ 的特殊情形。从式(4.5.6), 式(4.5.4)和式(4.5.12)导出 $h=|p|, \Omega=2/R$, 代入积分式(4.5.11), 导出

$$s - s_0 = \frac{R}{2} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}} = \frac{R}{2} \int_0^\phi \sec \phi d\phi = \ln | \sec \phi + \tan \phi | \quad (4.5.25)$$

利用上式计算杆的长度,得到

$$L = R \ln | \sec \phi + \tan \phi |_0^{\pi/2} = \infty \quad (4.5.26)$$

因此若 $R \neq 0$, 则 $k=1$ 相当于无限长弹性杆的特殊情形。从式(4.5.6)导出 C 点与 O 点的距离 R ,

$$R = 2 \sqrt{\frac{2}{|p|}} = 2 \sqrt{\frac{EI}{|F_0|}} \quad (4.5.27)$$

从式(4.5.7)导出 $\phi = \theta/2$ 。表明当 $\phi \rightarrow \pi/2$ 时, $\theta \rightarrow \pi$, 即无限长挠性线的端点 P_0 和 P_L 的切线轴分别向 ζ 轴的负方向和正方向趋近, 挠性线为带回环的曲线(图 4.23)。若杆为有限长, 则式(4.5.26)要求 R 趋于零, 挠性线趋于直线, 压杆转化为两端受拉的直杆。

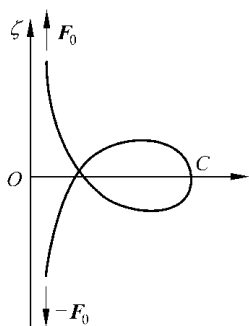


图 4.23 无限长弹性杆的挠性线

4.6 拉扭杆的挠性线

4.6.1 挠性线的解析积分

4.3.2 节的分析表明, 两端固定的圆截面杆在轴向拉力和扭矩作用下可维持直线平衡。但在同样受力状态下, 拉扭杆可能存在不同于直线的挠性线。Coyne 利用三角函数形式的解析积分讨论挠性线从直线到非直线的转变过程, 以解释电缆的失稳现象^[82]。弹性杆处于非直线的其他平衡形态时, 由于固定约束的限制, 杆的端部倾角 θ 及其导数 $d\theta/ds$ 仍保持为零。与 4.5 节讨论的仅受轴向力作用的情况不同, 扭矩的存在使远离端部的挠性线不再保持为平面曲线。

将两个端点 P_0 和 P_L 连线的中点作为原点 O , 建立固定坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ (图 4.24)。利用 θ 与 $\theta' = d\theta/ds$ 在 $s=0$ 或 L 的边界条件

$$\theta(0) = \theta(L) = 0, \quad \theta'(0) = \theta'(L) = 0 \quad (4.6.1)$$

从初积分(2.5.5)和(2.5.6)及式(2.5.18)导出 $m=l, a=h=p$ 。在 4.3.4 节中已对这种情况作过定性讨论。利用以上关系将 Jacobi 积分(2.5.9)化作

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + l^2 \left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right) - p(1 - \cos\theta) = 0 \quad (4.6.2)$$

在 p 为正值条件下, 可利用半角公式进行变换, 解出

$$\frac{d\theta}{ds} = \sqrt{2p} \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{l^2}{2p}} \quad (4.6.3)$$

令上式为零, 计算 θ 的驻值, 得到最小值 $\theta_{\min} = 0$ 。在 $l^2 < 2p$ 条件下存在非零最大值 $\theta_{\max}$

$$\theta_{\max} = 2 \arccos \left(\frac{l}{\sqrt{2p}} \right) \quad (4.6.4)$$

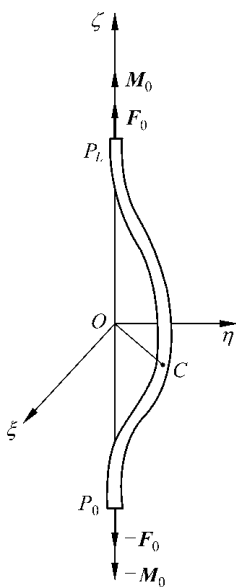


图 4.24 受拉扭作用的两端固定圆截面杆

将杆的中点 C 作为弧坐标原点, 引入新变量 $u = \sin(\theta/2)$, 对方程(4.6.3)分离变量积分。得到

$$\sqrt{\frac{p}{2}}s = \int_0^u \frac{du}{u\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{1}{c} \ln \frac{u}{c + \sqrt{c^2 - u^2}} \quad (4.6.5)$$

其中常数 c 定义为

$$c = \sqrt{1 - \frac{l^2}{2p}} = \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \quad (4.6.6)$$

当 $c > 1/\sqrt{2}$ 时, 即 $l^2 < p$ 时, $\theta_{\max} > \pi/2$, 挠性线产生回环。引入参数 β , 定义为

$$\beta = c\sqrt{\frac{p}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2p - l^2} \quad (4.6.7)$$

则从式(4.6.5)解出

$$u = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{c}{\operatorname{ch}\beta s} \quad (4.6.8)$$

从图 4.25 的 $u(s)$ 函数曲线可以看出挠性线相对 C 点的对称性。 $c=0$, 即 $p=l^2/2$ 时, $u=0$, $\theta=0$, 挠性线保持为直线。随着 p 的增大挠性线逐渐偏离直线。将 $m=l, a=h=p$ 代入式(2.5.41)和式(2.5.48), 导出杆的曲率和挠率的变化规律

$$\kappa = \sqrt{2p} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau = \frac{l}{2} \quad (4.6.9)$$

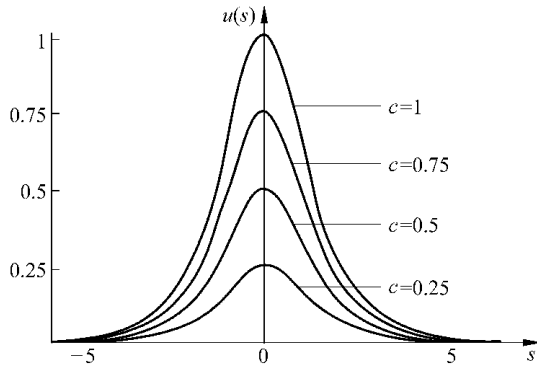


图 4.25 $u(s)$ 函数曲线

其中挠率 τ 在杆的任意位置均相同而保持常值 $l/2$ 。将式(4.6.8)代入式(4.1.15)和式(4.1.18), 得到柱坐标形式的挠性线方程

$$\rho = 2\sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{\theta}{2} = 2c\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{1}{\operatorname{ch}\beta s}, \quad \Psi = \left(\frac{l}{2}\right)s \quad (4.6.10)$$

挠性线的密切平面在空间中的转动由 Ψ 随弧坐标 s 线性增长所体现。 ρ 在 $s=0$ 处有极大值 $\rho_{\max}$, 即 C 点相对原点 O 的最大偏移

$$\rho_{\max} = 2\sqrt{\frac{2}{p} \left(1 - \frac{l^2}{2p}\right)} \quad (4.6.11)$$

随着弧坐标 s 的增大, ρ 向两端不断减小。从式(4.1.3c)还可导出

$$\frac{d\zeta}{ds} = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{2c^2}{\operatorname{ch}^2 \beta s} \quad (4.6.12)$$

由于

$$0 < \theta < \pi/2: \frac{d\zeta}{ds} > 0, \quad \pi/2 < \theta < \pi: \frac{d\zeta}{ds} < 0 \quad (4.6.13)$$

$\theta_{\max} > \pi/2$ 时挠性线沿 ζ 轴从上行转为下行, 证明有回环产生。图 4.26 给出与轴向力 F_0 成比例的不同参数 p 所对应的挠性线。可从中看出弹性杆的平衡形态随拉力增加的变化过程。挠性线在 (ξ, η) 平面内的投影可参见图 4.13(a)。

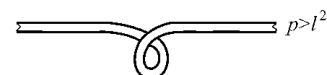
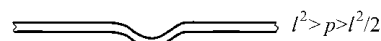
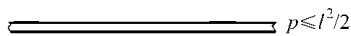


图 4.26 不同轴向力 F_0 对应的挠性线

4.6.2 杆的端点位移

弹性杆从直线转变为带回环的挠性线时, 由于端点间的距离缩小而引起端点位移。中心线上的任意点 P 处沿 ζ 轴的位移应等于弧坐标 s 与 ζ 坐标之差(图 4.27)。利用式(4.6.12)导出

$$\frac{d}{ds}(s - \zeta) = 1 - \frac{d\zeta}{ds} = 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2c^2}{\operatorname{ch}^2 \beta s} \quad (4.6.14)$$

积分上式, 得到 P 点的位移

$$s - \zeta = 2c^2 \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch}^2 \beta s} = \frac{4c^2}{\beta} \left(\frac{1}{1 + e^{-2\beta s}} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.6.15)$$

杆的长度为 L 时, 从 C 至端点 P_0 或 P_L 的长度为 $L/2$ 。令上式中 $s = L/2$, 导出的端部位移记作 $b/2$, 得到

$$\frac{b}{2} = \frac{4c^2}{\beta} \left(\frac{1}{1 + e^{-\beta L}} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.6.16)$$

对于杆的长度极大的情形, 可令 $e^{-\beta L} \approx 0$ 而从上式中略去, 得到的端点位移恰好等于式(4.6.11)表示的极坐标 ρ 的最大值, 即 C 点距 ζ 轴的最大偏移,

$$\frac{b}{2} = 2c \sqrt{\frac{2}{p}} = \rho_{\max} \quad (4.6.17)$$

将上式中的 c 以式(4.6.6)代入, 化作

$$b = 4 \sqrt{\frac{2}{p} \left(1 - \frac{l^2}{2p} \right)} \quad (4.6.18)$$

对于给定的 l , 上式确定了端点位移 b 与 p 之间的关系, 如图 4.28 所示。

观察图 4.28 可看出, $p < l^2/2$ 时 b 无实数解, $p = l^2/2$ 时 $b = 0$, 因此在 $p \leq l^2/2$ 条件下杆均能保持直线平衡状态。但在 $p = l^2/2$ 附近, p 的微小增加可引起 b 的急剧变化, 在 $p > l^2/2$ 条件下杆因弯曲变形而引起端点位移, 外力因端点位移而做的功转换为杆的弯曲

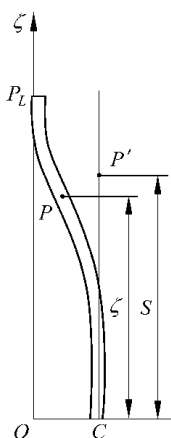
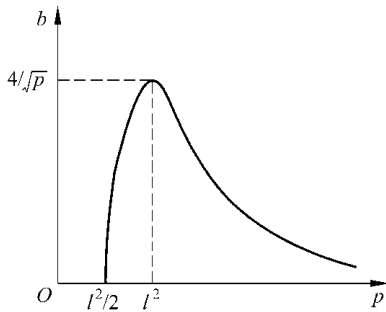


图 4.27 端点位移的计算

图 4.28 端点位移 b 随 p 变化的函数曲线

变形能。因此 $p \leq l^2/2$ 就是受拉扭直杆的稳定性条件, 其有量纲形式即 4.3.3 节中导出的 Greenhill 公式(4.3.21)。从图 4.28 还可看出, $p = l^2$ 为端点位移 b 的极值点, 可产生最大端点位移。从式(4.6.6)和式(4.6.18)推知, 此极值位置与 $c = 1/\sqrt{2}$, $\theta_{\max} = \pi/2$, $b_{\max} = 4/l = 4A/M_0$ 相对应。将式(4.6.11)对 s 求导还可证实, $p = l^2$ 同时也是 $\rho_{\max}$ 的极值点。 $p > l^2$ 时, $\theta_{\max} > \pi/2$, 挠性线产生回环, 且 C 点偏移 $\rho_{\max}$ 从增加转为减小, 回环趋于收紧, 以致端点位移 b 也从增加转为减小。

以上分析对 Greenhill 公式的物理意义作出了解释。

4.7 封闭杆的挠性线

4.7.1 弹性杆的封闭条件

以分子生物学为背景的弹性杆模型常具有闭环形态。若杆与杆之间发生接触, 不计杆的粗细时中心线在接触点处相交也形成封闭曲线。第 2 章的 2.3.5 节中对中心线两端连接情形, 列出了相应的约束条件(2.3.60)。弹性杆的封闭性除要求中心线封闭以外, 还要求中心线连续光滑, 且截面姿态沿中心线的变化连续光滑。设杆的长度为 L , 且 $s_0 = 0$, 则中心线的封闭条件为

$$\xi(L) = \xi(0) \quad (4.7.1a)$$

$$\eta(L) = \eta(0) \quad (4.7.1b)$$

$$\zeta(L) = \zeta(0) \quad (4.7.1c)$$

也可用柱坐标表示为

$$\rho(L) = \rho(0) \quad (4.7.2a)$$

$$\Psi(L) = \Psi(0) \quad (4.7.2b)$$

$$\zeta(L) = \zeta(0) \quad (4.7.2c)$$

若要求中心线连续光滑且截面姿态连续光滑, 还应补充以下条件

$$\theta(L) = \theta(0) \quad (4.7.3a)$$

$$\varphi(L) = \varphi(0) \quad (4.7.3b)$$

$$\psi(L) = \psi(0) \quad (4.7.3c)$$

$$\omega_i(L) = \omega_i(0) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.7.3d)$$

对于圆截面杆情形, 以上列出的边界条件并非完全独立。由式(2.5.30)和式(4.4.8)得知, θ 和 ρ 均为椭圆正弦函数平方 $\text{sn}^2[\Omega(s-s_0)]$ 的函数, 而 $\text{sn}^2[\Omega(s-s_0)]$ 的周期为 $2K$ 的整数倍, $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分。因此只要令

$$\Omega L = 2nK(k) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.7.4)$$

则当 $s-s_0 = L$ 时, 必有 $\text{sn}^2(0) = \text{sn}^2(1)$, 使条件(4.7.2a)和(4.7.3a)自行满足。条件

(4.7.2c)可利用式(4.4.4)计算。当 $\Omega(s-s_0)$ 改变 K 的整数倍时, $\text{am}[\Omega(s-s_0)]$ 改变 $\pi/2$ 。因此令式(4.4.4)中

$$\Omega(s-s_0) = K(k), \quad \text{am}[\Omega(s-s_0)] = \frac{\pi}{2} \quad (4.7.5)$$

可将条件(4.7.2c)表示为

$$\frac{\gamma_3 K(k)}{\Omega} - 2\sqrt{\frac{\gamma_3 - \gamma_1}{p}} \tilde{E}(k) = 0 \quad (4.7.6)$$

其中 $\tilde{E}(k) = E(\pi/2, k)$ 为第二类完全椭圆积分。利用式(2.5.25)消去 Ω ,上式化作

$$\gamma_3 K(k) - (\gamma_3 - \gamma_1) \tilde{E}(k) = 0 \quad (4.7.7)$$

条件(4.7.2b)可利用式(4.4.7)计算。将式(4.7.5)代入后,导出

$$lK(k) - \left(\frac{al - mp}{a - p\gamma_1}\right) \tilde{\Pi}(n_1, k) = 0 \quad (4.7.8)$$

其中 $\tilde{\Pi}(n_1, k) = \Pi(\pi/2, n_1, k)$ 为第三类完全椭圆积分。条件(4.7.3b)可利用式(2.5.38)计算。将式(4.7.4)和式(4.7.5)代入后,导出

$$\frac{2mK(k)}{\lambda}(1-\lambda) + \left(\frac{m-l}{1-\gamma_1}\right) \tilde{\Pi}(n_1, k) + \left(\frac{m+l}{1+\gamma_1}\right) \tilde{\Pi}(n_2, k) = 0 \quad (4.7.9)$$

根据以上分析,可将式(4.7.4),式(4.7.7),式(4.7.8)和式(4.7.9)归纳为圆截面杆的独立封闭条件。在下节中将根据以上条件确定待定的常数 a, p, l, m 。

4.7.2 对称相交的圆截面杆挠性线

应用4.4节导出的解析积分,可在已知受力状况和积分常数条件下计算圆截面杆的挠性线。也可用于讨论逆问题,即给定挠性线的几何形状分析其实现条件。本节分析受轴向压力作用的圆截面杆以对称形式在同一点接触,形成由多个封闭曲线组成的三维挠性线。利用挠性线的封闭条件,计算其对应的积分常数。

为便于解析计算,设积分常数满足4.3.5节中规定的特殊条件

$$al - mp = 0 \quad (4.7.10)$$

且满足 $|a| < |p|$ 。满足此条件时,式(4.3.40)已给出

$$\gamma_2 = \frac{a}{p} \quad (4.7.11)$$

柱坐标 $\rho(s)$ 由式(4.3.41)给出

$$\rho(s) = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1} \text{cn}[\Omega(s-s_0)] \quad (4.7.12)$$

设弹性杆的中点 P_0 的弧坐标为 s_0 ,该点与 O 点的距离为最大值 R ,即

$$\rho(s_0) = \rho_{\max} = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1} = R \quad (4.7.13)$$

导出

$$a - p\gamma_1 = p(\gamma_2 - \gamma_1) = \left(\frac{pR}{2}\right)^2 \quad (4.7.14)$$

杆长为 L 时,两个端点 P_1, P_2 的弧坐标分别为

$$s_1 = s_0 - \frac{L}{2}, \quad s_2 = s_0 + \frac{L}{2} \quad (4.7.15)$$

设 P_1 与 P_2 在固定点 O 处相交(图 4.29), 将上式代入式(4.7.12), 得到

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \frac{2}{p} \sqrt{a - p\gamma_1} \operatorname{cn}\left(\pm \frac{\Omega L}{2}\right) \quad (4.7.16)$$

$\operatorname{cn}(u)$ 的偶函数性质使 P_0 点两侧的柱坐标 $\rho(s)$ 具有对称性。由于 P_1, P_2 与柱坐标原点 O 重合, $\rho(s_1) = \rho(s_2) = 0$, 导出

$$\operatorname{am}\left(\pm \frac{\Omega L}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\Omega L}{2} = K(k) \quad (4.7.17)$$

即式(4.7.4)给出的与 $n=1$ 对应的封闭杆条件。将式

(4.7.15) 与 $L=2K/\Omega$ 代入式(4.4.4), 得到

$$\begin{aligned} \zeta(s_1) &= \zeta_0 - \frac{\gamma_3 K}{\Omega} + 2 \sqrt{\frac{\gamma_3 - \gamma_1}{p}} \tilde{E} \\ \zeta(s_2) &= \zeta_0 + \frac{\gamma_3 K}{\Omega} - 2 \sqrt{\frac{\gamma_3 - \gamma_1}{p}} \tilde{E} \end{aligned} \quad (4.7.18)$$

令以上两式相等, 利用式(2.5.25)消去 Ω , 导出条件(4.7.7)

$$(K - \tilde{E})\gamma_3 + \tilde{E}\gamma_1 = 0 \quad (4.7.19)$$

则 $\zeta(s_1) = \zeta(s_2) = \zeta_0$, 表明重合的端点 P_1, P_2 与中点 P_0 的高度相同。将 $\Omega=2K/L$ 代入式(2.5.25)的第二式, 由于受压状态下常数 p 为负值, 令 $p = -|p|$, 导出

$$\gamma_3 - \gamma_1 = -\frac{16K^2}{|p|L^2} \quad (4.7.20)$$

方程(4.7.19)与(4.7.20)联立解出

$$\gamma_3 = -\frac{16K\tilde{E}}{|p|L^2}, \quad \gamma_1 = \frac{16K}{|p|L^2}(K - \tilde{E}) \quad (4.7.21)$$

由于 $K(k) > \tilde{E}(k)$, γ_1 为正值。由于常数 p 为负值, γ 的 3 个根排列次序与 2.5.2 节相反。将上式中的 γ_1 代入式(4.7.14), 导出

$$a = \left(\frac{pR}{2}\right)^2 - \frac{16K}{L^2}(K - \tilde{E}) \quad (4.7.22)$$

将式(4.7.15)代入式(4.3.43)的积分计算端点 P_1, P_2 处的 Ψ 值, 得到

$$\Psi(s_1) = \Psi_0 - \frac{Ll}{4}, \quad \Psi(s_2) = \Psi_0 + \frac{Ll}{4} \quad (4.7.23)$$

令 $\Delta\Psi = \Psi(s_2) - \Psi(s_1)$ 为 O 点处挠性线两端的切线轴在 (ξ, η) 坐标面上投影的夹角(图 4.29), 导出

$$l = \frac{2\Delta\Psi}{L} \quad (4.7.24)$$

将式(4.7.21)中的 γ_1 及式(4.7.10)、式(4.7.14)和式(4.7.24)代入式(2.5.17b), 令 $f(\gamma_1) = 0$, 在 l, m 不为零条件下解出

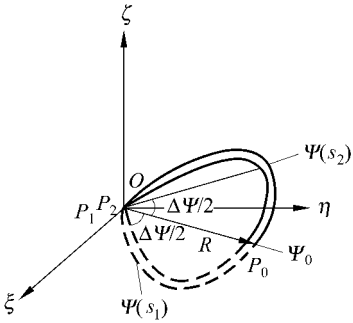


图 4.29 对称相交于 O 点的挠性线

$$|p| = \frac{16K(K - \tilde{E})}{L \sqrt{L^2 - R^2(\Delta\Psi)^2}} \quad (4.7.25)$$

以下条件满足时, 参数 p 有实数解

$$\Delta\Psi < \frac{L}{R} \quad (4.7.26)$$

将式(4.7.11)、式(4.7.20)和式(4.7.25)代入式(2.5.25)的第一式, 导出

$$K(k) - \tilde{E}(k) - \frac{k}{2R} \sqrt{L^2 - R^2(\Delta\Psi)^2} = 0 \quad (4.7.27)$$

由此方程确定参数 k 的值。将式(4.7.22)、式(4.7.24)和式(4.7.25)代入式(4.7.10), 解出另一个积分常数 m

$$m = \frac{2\Delta\Psi}{\sqrt{L^2 - R^2(\Delta\Psi)^2}} \left\{ 1 - \left(\frac{R}{L} \right)^2 [4K(K - \tilde{E}) + (\Delta\Psi)^2] \right\} \quad (4.7.28)$$

利用式(4.7.24)、式(4.7.25)和式(4.7.28)等式, 可根据预先给定的 $L, R, \Delta\Psi$ 等几何参数, 确定挠性线两端交于 O 点形成回环时所对应的 p, l, m, a 等积分常数。上述推导过程基于 Kirchhoff 方程的解析积分, 不考虑杆在交点处的接触力。

基于椭圆函数的周期性, 以上对单个回环挠性线的分析可扩展应用于多个回环交于同一点的形态更复杂的挠性线。设挠性线由 n 个形状相同的回环组成, 每个回环的长度为 L/n , 将以上公式中的 L 以 L/n 替换, 令 $\Omega = 2nK/L, s_1 - s_0 = s_2 - s_0 = L/2n$, 式(4.7.19)不变, 其余常数为

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= -\frac{16n^2 K \tilde{E}}{|p| L^2}, \quad \gamma_1 = \frac{16n^2 K}{|p| L^2} (K - \tilde{E}), \quad l = \frac{2n}{L} \Delta\Psi \\ |p| &= \frac{16n^2 K (K - \tilde{E})}{L \sqrt{L^2 - n^2 R^2 (\Delta\Psi)^2}}, \quad a = \left(\frac{pR}{2} \right)^2 - \frac{16n^2 K}{L^2} (K - \tilde{E}) \end{aligned} \quad (4.7.29)$$

参数 k 由以下方程确定

$$K(k) - \tilde{E}(k) - \frac{k}{2nR} \sqrt{L^2 - n^2 R^2 (\Delta\Psi)^2} = 0 \quad (4.7.30)$$

上述对单回环挠性线导出的所有公式为 $n=1$ 的特例。 $n=2$ 时为 8 字形曲线, $n=3$ 时为三叶草曲线, $n=5$ 时为梅花形曲线(图 4.30)。多回环挠性线的几何特征与 4.3.5 节中用定性方法分析的 (ξ, η) 坐标面内的投影曲线类似, 如图 4.15(a)所示。

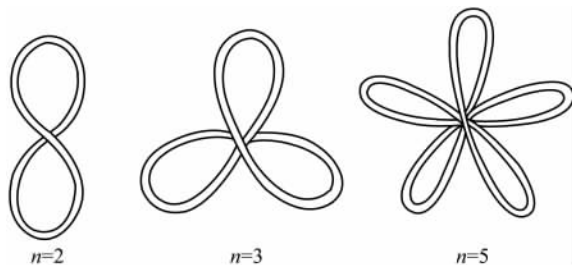


图 4.30 多回环挠性线

对于 $\Delta\Psi=0$ 的特殊情形, 对应的积分常数 l, m 均为零, 条件(4.7.12)自行满足, 挠性

线为与 (ξ, η) 坐标面正交的平面曲线。令式(2.5.17b)中 $l=m=0$, 参数 $\gamma_i (i=1, 2, 3)$ 为以下代数方程的根

$$(a - p\gamma)(1 - \gamma^2)^2 = 0 \quad (4.7.31)$$

导出

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{a}{p}, \quad \gamma_3 = -1 \quad (4.7.32)$$

代入封闭条件(4.7.19)后, 从另一途径导出平面曲线封闭条件(4.5.24)

$$2\tilde{E}(k) - K(k) = 0 \quad (4.7.33)$$

作为三维曲线的特殊情形, 此条件亦可从式(4.7.27)导出。令其中 $\Delta\Psi=0$, 且利用式(4.5.18)消去 L/R , 即得到条件(4.7.33)。对于多分支情形, 令式(4.7.30)中 $\Delta\Psi=0$, 将式(4.5.18)中的 L 以 L/n 代替后代入, 得到的封闭条件亦与(4.7.33)完全相同。表明平面曲线封闭条件与分支数无关。方程(4.7.33)的解 $k=0.9089$ 已在4.5.2节中给出。

4.8 圆柱面约束杆的挠性线

4.8.1 圆柱面约束杆的挠性线方程

设具有原始扭率 ω_3^0 的圆截面杆受半径为 R_0 的圆柱面约束^①。在理想约束情形, 即圆柱面与杆之间为光滑接触时, 约束力沿圆柱面的法线方向。以圆柱面中心轴为 ζ 轴, 轴上的固定点 O 为原点, 建立固定参考坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 。弹性杆中心线上任意点 P 在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 中的位置用4.2.1节中定义的 $(O-XYZ)$ 坐标系和柱坐标 ρ, Ψ, ζ 表示, 其中 X 轴和 Y 轴分别沿径向和周向, Z 轴与 ζ 轴重合。限制 P 点在圆柱面内的充分条件等同于4.2.1节中导出的 ρ 的常值条件(4.2.1)

$$\Psi = \psi - \pi \quad (4.8.1)$$

设圆截面杆的半径为 a , 则有

$$\rho = R, \quad R = R_0 + a \quad (4.8.2)$$

将式(4.8.1)和式(4.8.2)代入式(4.1.8)得到

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{R} \sin\theta \quad (4.8.3)$$

式(4.8.3)可看作是圆柱面约束施加于欧拉角的约束方程。 $\theta(s)$ 的规律确定以后, 受圆柱面约束的挠性线由式(4.8.3)和方程(4.1.3c)确定。

按照条件(4.8.1)的要求, $(P-x_1y_1z_1)$ 和 $(P-x_2y_2z_2)$ 等坐标系与 $(O-XYZ)$ 之间的关系与4.2.1节相同, 其中 (y_1, z_1) 坐标面为 P 点处圆柱面的切平面(图4.31)。截面主轴坐标系 $(P-x_2y_2z_2)$ 与 $(O-XYZ)$ 之间的方向余弦可利用表4.1, 将其中的常值 θ_0 改为变量 θ 。

① 在工程技术中, 受圆柱面约束的弹性杆是钻杆受套筒约束的力学模型。在分子生物学中, 缠绕在圆柱体上的弹性杆可作为DNA与蛋白质分子结合的简化模型。

4.8.2 圆柱面约束杆的平衡方程

由于 Kirchhoff 方程不适用于有接触力存在情形,其中的力平衡方程(2.1.3a)必须用 3.1 节中建立的考虑接触力的平衡方程(3.1.2)代替

$$\frac{dF}{ds} + f = 0 \quad (4.8.4)$$

其中 f 为单位长度接触力。杆缠绕于圆柱面的外侧时, f 沿圆柱面的外法线 X 轴,即 x_2 轴的负方向,写作

$$f = f e_p = -f e_1^{(2)} \quad (4.8.5)$$

其中 $e_i^{(2)}$ ($i=1,2,3$) 为 $(P-x_2y_2z_2)$ 各坐标轴的基矢量。若杆在圆柱面的内侧被约束,则 f 的方向相反。以 $(P-x_2y_2z_2)$ 为参考坐标系,将方程(4.8.4)写作

$$\frac{dF}{ds} + \omega^{(2)} \times F + f = 0 \quad (4.8.6)$$

其中 $\omega^{(2)}$ 为 $(P-x_2y_2z_2)$ 的角位移变化率,如式(2.2.8)的定义。利用表 4.1 写出其投影式:

$$\omega^{(2)} = \frac{d\theta}{ds} e_1^{(2)} + \frac{d\psi}{ds} (\sin\theta e_2^{(2)} + \cos\theta e_3^{(2)}) \quad (4.8.7)$$

将式(4.8.5)和式(4.8.7)代入方程(4.8.6), F 相对 $(P-x_2y_2z_2)$ 的投影记作 F_i ($i=1,2,3$),导出

$$\frac{dF_1}{ds} + \frac{d\psi}{ds} (F_3 \sin\theta - F_2 \cos\theta) - f = 0 \quad (4.8.8a)$$

$$\frac{dF_2}{ds} + \frac{d\psi}{ds} F_1 \cos\theta - \frac{d\theta}{ds} F_3 = 0 \quad (4.8.8b)$$

$$\frac{dF_3}{ds} - \frac{d\psi}{ds} F_1 \sin\theta + \frac{d\theta}{ds} F_2 = 0 \quad (4.8.8c)$$

接触力对杆的力矩平衡方程(2.1.3b)不产生影响。其相对 z 轴的投影式有与式(2.4.4)相同的初积分,用欧拉角表示为

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\psi}{ds} \cos\theta = \omega_{30} \quad (4.8.9)$$

则方程(2.1.3b)相对 x_2 轴和 y_2 轴的投影式为

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 \cos\theta \sin\theta + m \frac{d\psi}{ds} \sin\theta - \frac{F_2}{A} = 0 \quad (4.8.10a)$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} \sin\theta + 2 \left(\frac{d\psi}{ds}\right) \left(\frac{d\theta}{ds}\right) \cos\theta - m \frac{d\theta}{ds} + \frac{F_1}{A} = 0 \quad (4.8.10b)$$

其中积分常数 $m = \lambda(\omega_{30} - \omega_3^0)$ 的定义与式(2.4.6)一致。力平衡方程(4.8.8),力矩平衡

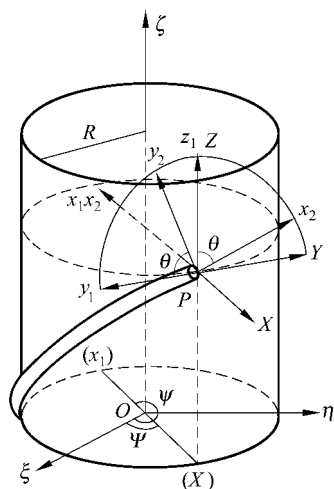


图 4.31 圆柱面约束杆

方程(4.8.10)及约束方程(4.8.3)共 6 个方程完全确定 $F_i (i=1,2,3), \phi, \theta, f$ 等 6 个变量。

4.8.3 平衡方程的初积分

除式(4.8.9)以外,方程组(4.8.8)和(4.8.10)另存在 3 个初积分。为便于表达,利用表 4.1 写出截面作用力主矢在 $(O-XYZ)$ 中的投影

$$F_X = -F_1, \quad F_Y = -F_2 \cos \theta + F_3 \sin \theta, \quad F_Z = F_2 \sin \theta + F_3 \cos \theta \quad (4.8.11)$$

令方程(4.8.8b)和(4.8.8c)分别乘以 $\sin \theta, \cos \theta$ 后相加,积分得出

$$F_Z = F_{Z_0} \quad (4.8.12)$$

此初积分表明,由于约束力与 Z 轴正交,因此不影响截面作用力沿 Z 轴,即 ζ 轴的投影守恒。积分常数 F_{Z_0} 等于杆两端作用的拉力沿 Z 轴的分量。

从方程组(4.8.10)解出 F_1, F_2 ,代入式(4.8.8c)后导出 Jacobi 积分

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 \sin^2 \theta + \frac{2F_3}{A} = h \quad (4.8.13)$$

与无约束杆的 Jacobi 积分(2.5.5)形式上一致,积分常数 $h=2H/A-\lambda\omega_{30}^2$ 也按式(2.5.3)的定义,但 F_3 并非常值。

令方程(4.8.8b)和(4.8.8c)分别乘以 $\cos \theta, \sin \theta$,相减后解出 F_1 ,与约束条件(4.8.3)代入式(4.8.10b),导出另一个初积分

$$\left(\frac{R}{A}\right)F_Y + m \cos \theta + \frac{\sin^3 \theta}{R} = l \quad (4.8.14)$$

由于约束力的作用线均通过 ζ 轴,此初积分的物理意义为截面作用力向 ζ 轴简化的主矩保持常值 M_0 。积分常数 $l=M_0/A$ 与式(2.5.3)一致。可从中解出

$$F_Y = \frac{A}{R} \left(l - m \cos \theta - \frac{\sin^3 \theta}{R} \right) \quad (4.8.15)$$

从式(4.8.12)和式(4.8.15)导出

$$F_2 = F_{Z_0} \sin \theta - \frac{A}{R} \left(l - m \cos \theta - \frac{\sin^3 \theta}{R} \right) \cos \theta \quad (4.8.16a)$$

$$F_3 = F_{Z_0} \cos \theta + \frac{A}{R} \left(l - m \cos \theta - \frac{\sin^3 \theta}{R} \right) \sin \theta \quad (4.8.16b)$$

将式(4.8.16b)和约束条件(4.8.3)代入 Jacobi 积分(4.8.13),改写为

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + U(\theta) = h \quad (4.8.17)$$

函数 $U(\theta)$ 定义为

$$U(\theta) = \left[2 \left(l - m \cos \theta \right) - \frac{\sin^3 \theta}{R} \right] \frac{\sin \theta}{R} + p \cos \theta \quad (4.8.18)$$

其中常数 $p=2F_{Z_0}/A$ 。对方程(4.8.17)积分可确定 θ 与弧坐标 s 的函数关系

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{h - U(\theta)}} \quad (4.8.19)$$

其中 θ_0 为弧坐标原点处 θ 的起始值。利用式(4.8.3)和式(4.8.17)从方程(4.8.10b)导

出截面内力的径向分量

$$F_1 = A[h - U(\theta)]^{1/2} \left(m - \frac{3}{2R} \sin 2\theta \right) \quad (4.8.20)$$

将式(4.8.3)和式(4.8.16a)代入方程(4.8.10a),导出解耦的 $\theta(s)$ 的微分方程

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + Q(\theta) = 0 \quad (4.8.21)$$

其中 $Q(\theta) = U'(\theta)/2$, 即

$$Q(\theta) = \frac{1}{R}(l \cos \theta - m \cos 2\theta) - \left(\frac{p}{2} + \frac{2 \cos \theta \sin^2 \theta}{R^2} \right) \sin \theta \quad (4.8.22)$$

将积分(4.8.19)确定的 $\theta(s)$ 代入式(4.8.16)和式(4.8.20)确定截面内力 $F_i(s)$ ($i=1, 2, 3$), 再代入式(4.8.8a)解出圆柱面对杆的约束力

$$f = \frac{A}{R^2} \left(l - m \cos \theta - \frac{\sin^3 \theta}{R} \right) \sin \theta + A[h - U(\theta)]^{-1/2} \left\{ Q(\theta) \left(\frac{3}{2R} \sin 2\theta - m \right) - \frac{3}{R} [h - U(\theta)] \cos 2\theta \right\} \quad (4.8.23)$$

一般情况下必须应用数值方法求解。

4.8.4 螺旋线特解

方程(4.8.20)存在 θ 的常值特解 θ_0 , 所对应的特殊平衡状态即缠绕在圆柱面外侧弹性杆的螺旋线平衡状态。此常值特解应满足以下条件

$$Q(\theta_0) = 0, \quad h - U(\theta_0) = 0 \quad (4.8.24)$$

从式(4.8.3)推知, θ 为常值时 $d\psi/ds$ 亦为常值。 $\pi/2 > \theta_0 > 0$ 时, $d\psi/ds > 0$, 挠性线为右螺旋; $0 > \theta_0 > -\pi/2$ 时, $d\psi/ds < 0$, 挠性线为左螺旋。 θ 为常值时, 截面作用力各主分量和约束力均为常值

$$\begin{aligned} F_1 &= 0, \quad F_2 = F_{20} = F_{z0} \sin \theta_0 - F_{y0} \cos \theta_0 \\ F_3 &= F_{30} = F_{z0} \cos \theta_0 + F_{y0} \sin \theta_0, \quad f = F_{y0} \left(\frac{\sin \theta_0}{R} \right) \end{aligned} \quad (4.8.25)$$

其中 F_{z0} 为式(4.8.12)的积分常数, F_{y0} 为

$$F_{y0} = \frac{A}{R} \left(l - m \cos \theta_0 - \frac{\sin^3 \theta_0}{R} \right) \quad (4.8.26)$$

若圆柱面约束为单面约束, 则约束作用仅当约束力 $f > 0$ 时方可能维持。从式(4.8.25)导出约束存在条件

$$F_{y0} \sin \theta_0 > 0 \quad \text{或} \quad F_{30} > F_{z0} \cos \theta_0 \quad (4.8.27)$$

表明周向力与杆中心线延伸方向一致, 即 F_{y0} 与 θ_0 同号是维持约束作用的充分必要条件。此条件要求杆有足够大的切向拉力 F_{30} 使杆被拉紧。对于受圆柱面内侧约束的钻杆类型弹性杆, 由于约束力方向相反, 维持约束的切向拉力应改为切向压力。

作为特例, 设 $\theta_0 = 0$, 令 $l = m, h = p$, 截面作用力和约束力为

$$F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = F_{z0}, \quad f = 0 \quad (4.8.28)$$

对应的平衡状态为直杆平衡, 圆柱面对弹性杆无约束作用。作为另一特例, 设 $\theta_0 = \pi/2$,

则要求

$$m = \frac{pR}{2}, \quad h = \frac{1}{R} \left(2l - \frac{1}{R} \right) \quad (4.8.29)$$

截面作用力和约束力为

$$F_1 = 0, \quad F_2 = F_{z0}, \quad F_3 = F_{30} = \frac{A}{R} \left(l - \frac{1}{R} \right), \quad f = \frac{F_{30}}{R} \quad (4.8.30)$$

对应的平衡状态为平面圆环。上式中的 $f = F_{30}/R$ 不难从圆环的微元弧段上力的平衡状态直接得到验证。

第 5 章 弹性杆平衡的稳定性

关于弹性杆平衡稳定性问题的研究建立在不同的理论基础上。从最小势能原理出发可以判断弹性杆整体几何特征的变化趋势。对于端部约束固定的弹性杆, Tobias, Coleman 等将自连接数相对缠绕数的变化率作为判断弹性杆平衡稳定性的重要指标。Lyapunov 运动稳定性理论是以离散动力学系统为对象的稳定性理论。在刚性截面假定基础上, 作为一维连续系统的弹性杆被简化为以弧坐标 s 为自变量的离散系统。根据 Kirchhoff 的动力学比拟, 将时间变量 t 改为弧坐标 s , 即可在静力学范畴内, 将 Lyapunov 运动稳定性理论转变为弹性杆的平衡稳定性理论。可直接根据微分方程判断弹性杆的平衡稳定性, 而无须分析其挠性线。圆截面和非圆截面的直杆和螺旋杆的 Lyapunov 稳定性为本章的主要讨论内容。应用相平面方法或一次近似方法可导出平衡稳定性的解析判据。对于直杆平衡的几种特殊情形, 可用 Lyapunov 直接方法证明此判据的充分必要性。Lyapunov 意义下的稳定性不同于工程中判断弹性杆屈曲的欧拉稳定性, 二者在概念上存在区别和联系。此外, 本章还讨论受扭矩单独作用的非圆截面杆平衡状态的分岔问题和混沌问题。

5.1 稳定性分析的能量原理

5.1.1 拉格朗日定理与最小势能原理

拉格朗日定理是分析力学中判断保守系统平衡稳定性的充分条件, 已在附录 D 的 D.4 节中用 Lyapunov 直接方法作出证明。

拉格朗日定理: 若保守系统的势能 E 在平衡位置处取孤立极小值, 则保守系统的平衡稳定。

弹性杆的总势能是由弹性杆几何形态确定的总体参数。最小势能原理是上述拉格朗日定理在弹性杆平衡稳定性问题中的具体应用。在 2.3.2 节中已说明, 弹性杆的总势能 E 由弹性应变势能 E_e 与外力势能 E_p 组成, 可表示为势能密度函数 Γ 的积分

$$E = \int_0^L \Gamma ds \quad (5.1.1)$$

其中

$$\Gamma = \frac{1}{2} [A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C(\omega_3 - \omega_3^0)^2] - F\gamma \quad (5.1.2)$$

若考虑杆的轴向变形和杆的体积力, Γ 内还应增加轴向应变势能和体积力势能。根据最

小势能原理,弹性杆的平衡条件为泛函 E 的一次变分为零,即

$$\delta E = 0 \quad (5.1.3)$$

弹性杆平衡状态稳定的充分条件为泛函 E 的二次变分大于零,即

$$\delta^2 E > 0 \quad (5.1.4)$$

5.1.2 端部约束固定的圆截面杆的稳定性

弹性杆在空间中的形态由中心线 C 和截面的过扭率 $\Delta\omega_3$ 完全确定,可利用 C 与 $\Delta\omega_3$ 的组合 $(C, \Delta\omega_3)$ 表征杆的形态。根据上述最小势能原理,杆的某种形态 $(C, \Delta\omega_3)_0$ 是否稳定的判断方法是,将 $(C, \Delta\omega_3)_0$ 与满足约束条件的与 $(C, \Delta\omega_3)_0$ 接近的其他形态比较,若 $(C, \Delta\omega_3)_0$ 对应的总势能为极值,则处于平衡状态,若总势能为极小值,则为稳定平衡。杆的总势能由杆的整体几何状态确定,是第 1 章中定义的扭转数、连接数和缠绕数等参数的函数。

讨论端部受固定约束或两端封闭弹性杆的平衡稳定性。设杆为圆截面,带原始扭率 ω_3^0 ,令式(5.1.2)中 $A=B$,将弹性杆的总势能 E 划分为与中心线 C 的几何形状以及与扭转变形有关的两部分

$$E = E_c + E_t \quad (5.1.5)$$

分别为

$$E_c = \int_0^L \left(\frac{1}{2} A \kappa^2 - F_0 \gamma \right) ds, \quad E_t = \frac{1}{2} \int_0^L C (\Delta\omega_3)^2 ds \quad (5.1.6)$$

其中与中心线几何形状有关的势能部分 E_c 由弯曲应变能与外力势能的负值组成,与扭转变形有关的势能部分 E_t 即扭转应变能,由杆的过扭率 $\Delta\omega_3 = \omega_3 - \omega_3^0$ 确定。根据 1.5 节的分析, E_c 与中心线的缠绕数 W_r 相关, E_t 与杆的扭转数 ΔT_w 相关。若杆的过扭率 $\Delta\omega_3$ 沿杆长保持常数,则上式中的 E_t 可积分得出

$$E_t = \frac{LC}{2} (\Delta\omega_3)^2 \quad (5.1.7)$$

利用式(1.3.7), E_t 可用杆的扭转数 ΔT_w 表示

$$E_t = \frac{2\pi^2 C}{L} (\Delta T_w)^2 \quad (5.1.8)$$

利用式(1.5.2)将上式中的 ΔT_w 以 $\Delta L_k - W_r$ 代替,改写为

$$E_t = \frac{2\pi^2 C}{L} (\Delta L_k - W_r)^2 \quad (5.1.9)$$

根据 1.5 节关于自连接数性质的说明,对于端部约束固定的曲杆,包括封闭曲杆在内,当中心线连续变形时其自连接数 ΔL_k 为守恒量,因此上式中的 E_t 随中心线的缠绕数 W_r 改变。将式(5.1.9)代入后,式(5.1.5)写作

$$E = \int_0^L \left(\frac{1}{2} A \kappa^2 - F_0 \gamma \right) ds + \frac{2\pi^2 C}{L} (\Delta L_k - W_r)^2 \quad (5.1.10)$$

从而表明,当守恒的自连接数确定以后,端部约束固定的弹性杆或封闭弹性杆的总势能 E 可由中心线的几何形状单独确定。缠绕数 W_r 的增大使上式中的扭转变形能减小,若自连接数 ΔL_k 足够大,这种影响超过由缠绕引起的弯曲变形能增量,则杆的总势能随缠绕

数 W_r 的增大而减小。两端受拉的柔索同时受扭,当扭转变形足够大时拉直的柔索可产生螺旋状缠绕而出现失稳。这种扭转数朝缠绕数转化的现象可应用最小势能原理作出解释。

弹性杆的平衡条件(5.1.3)要求

$$\delta E = \delta E_c + \delta E_t = 0 \quad (5.1.11)$$

其中扭转变形势能的变分 δE_t 为

$$\delta E_t = \frac{4\pi^2 C}{L} \Delta T_w (\delta \Delta T_w) \quad (5.1.12)$$

当杆的挠性线有微小改变时,从变分式(1.5.7)导出

$$\delta \Delta T_w = -\delta W_r \quad (5.1.13)$$

则在平衡状态下,势能 E_c 的变分应满足

$$\delta E_c = -\delta E_t = -\frac{4\pi^2 C}{L} \Delta T_w (\delta \Delta T_w) = \frac{4\pi^2 C}{L} \Delta T_w (\delta W_r) \quad (5.1.14)$$

由于缠绕数 W_r 与中心线的几何形状,扭转数 ΔT_w 与杆的扭转状况一一对应,可将 E_c 视为 W_r 的函数, E_t 视为 ΔT_w 的函数,从式(5.1.12)和式(5.1.14)导出以下平衡条件

$$\left(\frac{dE_t}{d\Delta T_w} \right)_0 = \left(\frac{dE_c}{dW_r} \right)_0 = \frac{4\pi^2 C}{L} \Delta T_w \quad (5.1.15)$$

下角标 0 表示平衡状态下的挠性线所确定的泛函值。

弹性杆的平衡稳定性条件(5.1.4)要求

$$\delta^2 E = \delta^2 E_c + \delta^2 E_t > 0 \quad (5.1.16)$$

对式(5.1.12)和式(5.1.14)分别再取一次变分,得到

$$\delta^2 E_t = \frac{4\pi^2 C}{L} (\delta \Delta T_w)^2 = \frac{4\pi^2 C}{L} (\delta W_r)^2 \quad (5.1.17a)$$

$$\delta^2 E_c = \frac{4\pi^2 C}{L} \frac{d(\Delta T_w)}{dW_r} (\delta W_r)^2 \quad (5.1.17b)$$

讨论弹性杆的平衡稳定性问题时,必须考虑扰动对自连接数 ΔL_k 产生影响的可能性^①。

考虑 ΔL_k 在扰动作用下的变化,将 White 公式(1.5.2)各项对缠绕数 W_r 求导,得到

$$\frac{d(\Delta T_w)}{dW_r} = \frac{d(\Delta L_k)}{dW_r} - 1 \quad (5.1.18)$$

将上式代入式(5.1.17),再代入式(5.1.16),得到

$$\frac{4\pi^2 C}{L} \left(\frac{d(\Delta L_k)}{dW_r} \right)_0 (\delta W_r)^2 > 0 \quad (5.1.19)$$

此不等式要求

$$\left(\frac{d(\Delta L_k)}{dW_r} \right)_0 > 0 \quad (5.1.20)$$

从而导出端部约束固定的弹性杆的平衡稳定性条件:当扰动引起的缠绕数 W_r 和自连接数 ΔL_k 的变化满足 ΔL_k 相对 W_r 的变化率大于零时,弹性杆的平衡稳定。

^① 对 DNA 平衡状态的扰动可来源于双螺旋结构局部断裂引起约束状态的改变,以及温度或溶剂成分变化引起的扭率改变。这种扰动的出现导致自连接数的改变。

弹性杆可能处于无扭转平衡状态,即过扭率 $\Delta\omega_3$ 为零的特殊平衡状态^①。处于这种状态的杆的零值扭转应变能 E_t 已为最小值,因此稳定性条件(5.1.16)仅要求与挠性线形状有关的势能 E_c 取极小值

$$\delta^2 E_c > 0 \quad (5.1.21)$$

将式(5.1.18)代入式(5.1.17b),导出

$$\left(\frac{d(\Delta L_k)}{dW_r} \right)_0 > 1 \quad (5.1.22)$$

即端部约束固定的无扭转平衡状态的平衡稳定性条件为:当扰动引起的缠绕数 W_r 和自连接数 ΔL_k 的变化满足 ΔL_k 相对 W_r 的变化率大于 1 时,弹性杆的平衡稳定。

上述结论适用于端部约束固定的弹性杆,包括封闭弹性杆在内的任意形态的平衡稳定性。自连接数、缠绕数的计算可利用对 Gauss 积分(1.4.1)和(1.5.8)的数值积分实现。若杆与杆之间,或杆与固定物体之间产生接触,且接触力为理想约束力,则接触现象对杆的总势能不发生影响,上述结论依然有效。

5.1.3 弧坐标的拉格朗日定理

拉格朗日定理或最小势能原理属于离散系统动力学范畴。在用于判断弹性杆的平衡稳定性时,作为分析对象的参量,如总势能、扭转数、自连接数、缠绕数等均为标志弹性杆总体状态的物理量。这些总体状态变量均为时间 t 的一元函数,与弧坐标 s 无关。另一类稳定性问题是以表征弹性杆几何形态的参量为分析对象,如欧拉角、欧拉参数及其对弧坐标的导数。在静力学范畴内,这些变量均为弧坐标 s 的一元函数,其平衡条件已由 Kirchhoff 方程体现,稳定性问题必须在弧坐标分析力学的基础上讨论。在第 2 章的 2.4 节中曾导出 Kirchhoff 方程的 Jacobi 积分(2.4.2),即应变势能密度与作用力的切向投影之和沿弧坐标守恒。利用以弧坐标为自变量的 Lyapunov 直接方法,将受扰后守恒的弧坐标哈密顿函数 H 取为 Lyapunov 函数

$$H = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + F_0\gamma \quad (5.1.23)$$

由于 H 函数沿扰动方程解曲线计算的全导数为零,若 H 函数在平衡位置处取孤立极小值,则 H 为扰动的正定函数,根据 Lyapunov 定理一,弹性杆的未扰平衡状态必稳定。从而得出以下推广到弧坐标的拉格朗日定理。

弧坐标的拉格朗日定理:若弹性杆的弧坐标哈密顿函数 H 在平衡位置处取孤立极小值,则保守系统的平衡稳定。

此稳定性条件可表示为

$$\delta^2 H > 0 \quad (5.1.24)$$

由于弧坐标哈密顿函数并不代表弹性杆的总势能,因此弧坐标的拉格朗日定理并不具有总势能取极小值的物理意义。弧坐标的拉格朗日定理仅提供稳定性充分条件,其逆定理有条件地成立。

^① 当 DNA 的双螺旋骨架局部断裂时,可处于过扭率为零的平衡状态。

5.2 圆截面直杆的平衡稳定性

5.2.1 受拉扭圆截面直杆的稳定性

讨论圆截面杆在轴向拉力和扭矩作用下的平衡稳定性,可利用 2.5.1 节中解耦的平衡方程(2.5.7)

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + Q(\theta) = 0 \quad (5.2.1)$$

其中函数 $Q(\theta)$ 的定义已在式(2.5.8)中给出

$$Q(\theta) = - \left[\left(\frac{l - m \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 \cos \theta - m \left(\frac{l - m \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{p}{2} \right] \sin \theta \quad (5.2.2)$$

方程(5.2.1)的常值特解 θ_0 , 即 $Q(\theta_0) = 0$ 的解对应于杆的特殊平衡状态。其中的平凡解 $\theta_0 = 0$ 或 π 对应于受拉扭或压扭的直杆状态, 非平凡解与螺旋线平衡相对应。为判断平衡状态的稳定性, 引入扰动量 $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, 只保留 $\Delta\theta$ 的一次项, 从方程(5.2.1)导出 θ_0 状态附近的线性化扰动方程

$$\frac{d^2\Delta\theta}{ds^2} + c\Delta\theta = 0 \quad (5.2.3)$$

其中 $c = (dQ/d\theta)_{\theta=\theta_0}$, 展开为

$$c = (1 + 2\cos^2\theta_0) \left(\frac{l - m \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \right)^2 - 3m \cos \theta_0 \left(\frac{l - m \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \right) + m^2 - \frac{p}{2} \cos \theta_0 \quad (5.2.4)$$

稳态解的一次近似稳定性取决于参数 c 的符号:

$$c > 0: \text{稳定}, \quad c < 0: \text{不稳定} \quad (5.2.5)$$

先讨论直杆平衡的稳定性。将 $\theta_0 = 0$ 代入式(5.2.4), 考虑式(2.5.11), 得到

$$c = \frac{1}{4}(l^2 - 2p) \quad (5.2.6)$$

导出受拉扭直杆的稳定性判据

$$l^2 > 2p: \text{稳定}, \quad l^2 < 2p: \text{不稳定} \quad (5.2.7)$$

与 4.3.3 节中用几何方法分析得出的稳定性判据(4.3.20)对照, 上述一次近似方法证明了其中的不等式部分。应用本章 5.7 节中的 Lyapunov 直接方法可以严格证明 $l^2 = 2p$ 条件下的稳定性, 构成完整的 Greenhill 公式

$$F_0 \leq \frac{M_0^2}{4A} \quad (5.2.8)$$

将方程(5.2.1)的另一平凡解 $\theta_0 = \pi$ 代入式(5.2.4), 考虑式(2.5.11), 得到

$$c = \frac{1}{4}(l^2 + 2p) \quad (5.2.9)$$

则受拉扭直杆的稳定性判据(5.2.7)中的 p 替换为 $-p$, 即转换为受压扭直杆的稳定性判据。令其中 $p > 0$, 或判据(5.2.7)中 $p < 0$, 均证实受压扭直杆的平衡状态恒稳定。

以上判断弹性杆平衡稳定性的一次近似方法也可从能量观点加以解释。根据式(2.5.9), 方程(5.2.1)的 Jacobi 积分为

$$\left(\frac{2}{A}\right)H = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + U(\theta) = h \quad (5.2.10)$$

其中 H 为弧坐标哈密顿函数, $U(\theta)$ 的定义见式(2.5.10)。根据弧坐标的拉格朗日定理, 稳态解 θ_0 的稳定性取决于哈密顿函数 H 在 θ_0 处的正定性。由于

$$\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} = 2\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = 2c \quad (5.2.11)$$

因此 $c > 0$ 条件等同于函数 $U(\theta)$ 的正定性条件, 即哈密顿函数 H 的正定性条件。

5.2.2 相轨迹奇点与稳定性

将 θ 对 s 的导数记作 θ' , 将方程(5.2.1)两边与 $d\theta/ds = \theta'$ 相除, 消去弧坐标 s 的微分, 化作一阶自治系统

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = -\frac{Q(\theta)}{\theta'} \quad (5.2.12)$$

方程(5.2.12)确定 (θ, θ') 相平面上的相轨迹, 即 Jacobi 积分(5.2.10)所代表的曲线族。相轨迹的奇点 (θ_s, θ'_s) 对应于变量 θ 相对 s 的一阶和二阶导数均为零的特殊状态

$$Q(\theta_s) = 0, \quad \theta'_s = 0 \quad (5.2.13)$$

因此奇点 θ_s 与方程(5.2.1)的常值特解 θ_0 等价。在与受拉扭直杆状态对应的奇点 $\theta_s = 0$ 附近, 令 $x = \theta, y = \theta'$, 导出方程(5.2.12)的一次近似式

$$\frac{dy}{dx} = -c \frac{x}{y} \quad (5.2.14)$$

其中 c 的定义与式(5.2.4)相同。根据附录 D 中的判据(D.19), 奇点的类型由系数 c 的符号确定

$$c > 0: \text{中心}, \quad c < 0: \text{鞍点} \quad (5.2.15)$$

则平衡稳定性条件(5.2.5)也可根据奇点的类型得出。

5.2.3 压杆的稳定性

根据 5.2.1 节的分析, 受压扭圆截面直杆的平衡状态恒稳定, 包括无扭矩作用的压杆。令 Greenhill 公式(5.2.8)中 $M_0 = 0$, 得到

$$F_0 \leq 0 \quad (5.2.16)$$

表明轴向受压的直杆稳定, 而轴向受拉的直杆不稳定。设杆的两端 P_0 和 P_L 铰接在 ζ 轴上, 轴向压力沿 ζ 轴, F_0 为负值, 令 $F_0 = -|F_0|$, 将常数 p 改为 $-|p|$ 。在平面变形条件下, 令 $l = m = 0$, $Q(\theta)$ 简化为

$$Q(\theta) = \Omega^2 \sin\theta \quad (5.2.17)$$

其中 $\Omega^2 = |p|/2 = |F_0|/A$ 同式(4.5.12)的定义。简化后的方程(5.2.1)与单摆动力学方程相同(图 5.1)

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Omega^2 \sin\theta = 0 \quad (5.2.18)$$

将奇点 $\theta_s = 0$ 或 $\pm\pi$ 代入参数 $c = \Omega^2 \cos\theta_s$, 利用式(5.2.15)判断, $\theta_s = 0$ 为中心, $\theta_s = \pm\pi$ 为

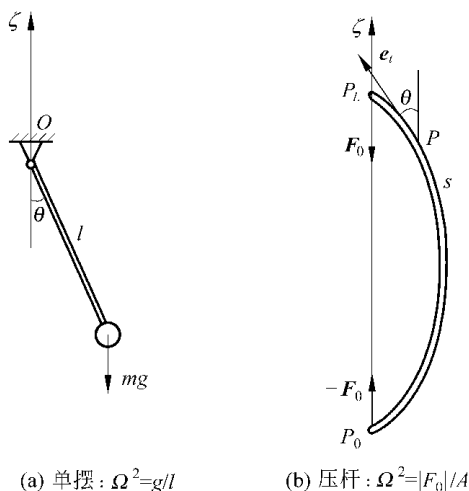


图 5.1 单摆与压杆

鞍点。

设 θ 在铰结点 P_0 处的起始值为 θ_0 , 以 P_0 为弧坐标原点, 方程(5.2.18)的起始条件为

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0 \quad (5.2.19)$$

代入 Jacobi 积分(5.2.10), 解出积分常数 h

$$h = -|p| \cos \theta_0 \quad (5.2.20)$$

导出 (θ, θ') 相平面内的相轨迹方程

$$\theta' = \pm \sqrt{h + |p| \cos \theta} \quad (5.2.21)$$

所确定的相轨迹曲线族见图 5.2。

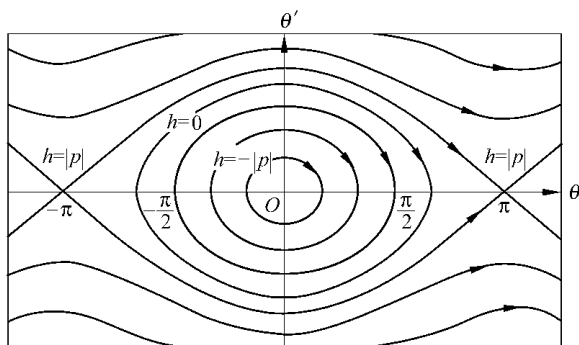


图 5.2 压杆的相轨迹曲线族

利用图 4.18 中的 $(O-\eta\zeta)$ 平面坐标系讨论相轨迹与挠性线的对应关系。当 $\theta_0 = 0$ 或 $h = -|p|$ 时, 相轨迹为孤立的中心奇点, 挠性线为沿 ζ 轴的直线(图 5.3(a))。随着 $|\theta_0|$ 的增大, 总机械能 h 增大, 相轨迹从原点向外转变为半径不断增大的椭圆。由于 θ 偏离零值, 挠性线逐渐偏离 ζ 轴, 当 $0 < \theta_0 < \pi/2$, 即 $-|p| < h < 0$ 时, 在端点处挠性线的切线矢量与 ζ 轴呈锐角(图 5.3(b))。在 $\theta_0 = \pi/2$, 即 $h = 0$ 时, 切线矢量与 ζ 轴垂直(图 5.3(c))。

在 $\pi/2 < \theta_0 < \pi$, 即 $0 < h < |p|$ 时, 切线矢量与 ζ 轴呈钝角(图 5.3(d))。继续增大 h , 挠性线可演变为 8 字形(图 5.3(e)), 或双侧带回环的曲线(图 5.3(f))。以上几种情形的挠性线均在 $\eta=0$ 位置形成拐点。在 $\theta_0 = \pi$, 即 $h = |p|$ 的特殊情形, 相轨迹为鞍点, 对应于直杆轴向受拉的平衡状态, 即压杆转变为拉杆(图 5.3(g))。当总机械能增大为 $h > |p|$, 即 $\theta_0 > \pi$ 时, 由式(5.2.21)推知 $d\theta/ds$ 不可能为零, 相轨迹转化为与横轴不相交的曲线, 对应的挠性线无拐点而具有不变的凹凸性, 形成带单侧回环的曲线(图 5.3(h))。根据上述奇点附近的相轨迹所对应的受扰平衡状态可以看出, 压杆受微小扰动后的波浪形挠性线的 θ 值可充分接近于零, 而拉杆受扰后的带单侧或双侧回环的挠性线其 θ 值可在 0 与 π 之间作大幅度变化。根据 Lyapunov 稳定性定义, 压杆稳定, 而拉杆不稳定。

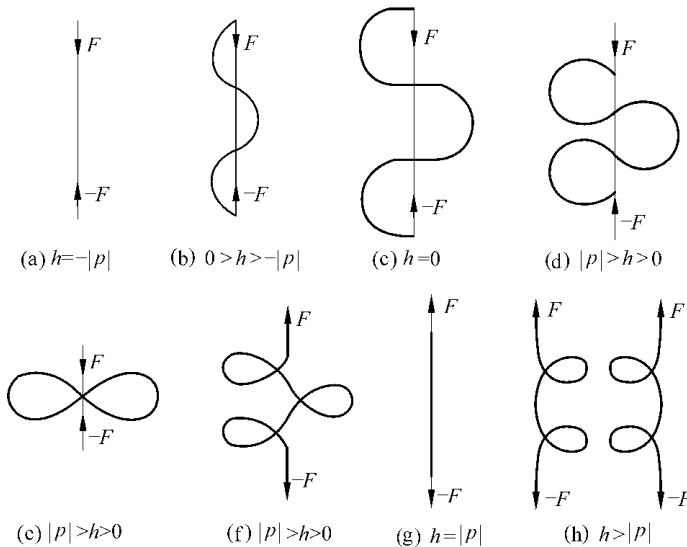


图 5.3 与相轨迹对应的挠性线

由于 θ 变量的周期性, $\theta = \pi$ 或 $-\pi$ 代表杆的同一状态。在相平面中只取包含在二直线 $\theta = \pi$ 和 $\theta = -\pi$ 之间的带域, 使两条边线粘合卷成相柱面(图 5.4)。在此柱面上, 中心和鞍点各只有一个。过鞍点的相轨迹称为分隔线, 它将相轨迹分隔出两类拓扑性质不同的封闭曲线: 一类可在柱面上缩为一点, 另一类则不能。在单摆问题中, 前者对应于单摆的往复摆动, 后者对应于单摆的单方向回转。在弹性杆的平衡问题中, 前者对应于朝双侧弯曲, 或带双侧回环的挠性线。后者则对应于带单侧回环的挠性线。由此可见弹性杆的平衡虽与单摆的摆动有着相同的微分方程和相轨迹曲线, 却反映了完全不同的物理过程。

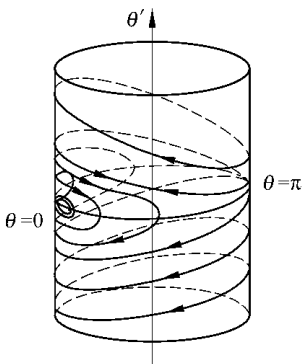


图 5.4 相柱面

5.2.4 Lyapunov 稳定性与欧拉稳定性

以上根据 Lyapunov 稳定性理论的分析结果与工程设计中认同的压杆失稳理论相悖,其原因在于对稳定性概念的不同理解。Lyapunov 稳定性是对初值的稳定性。压杆在弧坐标的起始位置受微扰后,由于挠性线切线倾角的变化在零附近而符合 Lyapunov 稳定性定义。拉杆在直线状态附近可能存在带单侧或双侧回环的挠性线,其切线倾角可在 $0 \sim 2\pi$ 的大范围内变化而符合不稳定性定义。Lyapunov 稳定性中的扰动发生于杆的一端,不要求受扰后的挠性线符合另一端的约束条件。与 Lyapunov 稳定性概念不同,材料力学中对弹性杆屈曲问题的分析依据另一种稳定性概念,即欧拉稳定性。根据欧拉稳定性概念,在满足两端确定的约束条件下,如平衡方程存在偏离直线状态的非平凡解,即认为弹性杆失稳。而此欧拉失稳的弹性杆仍可能满足 Lyapunov 稳定性。材料力学中对欧拉失稳现象的讨论仅限于压杆,因为拉杆的带回环受扰状态已超出线性理论范围。

为弥补 Lyapunov 稳定性不考虑端部约束状况的不足,在利用 Lyapunov 理论判断包括封闭杆在内的两端受约束弹性杆的平衡稳定性时,必须补充考察受扰状态是否符合端部约束条件。以受拉扭的两端铰支圆截面直杆为例。设轴向力 F_0 和扭矩 M_0 满足 Lyapunov 稳定性条件(5.2.8),参数 c 为正实数,改记为 $c=k^2$ 。将指数形式的扰动解

$$\Delta\theta = \Delta\theta_0 \exp(\lambda s) \quad (5.2.22)$$

代入线性化的扰动方程(5.2.3)后,导出特征方程

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \quad (5.2.23)$$

其特征值为纯虚根 $\lambda = \pm ik$, k 为受扰挠性线随弧坐标 s 周期变化的角频率,由式(5.2.6)确定

$$k^2 = \frac{1}{4}(l^2 - 2p) \quad (5.2.24)$$

两端铰支杆的受扰挠性线在发生初扰动的 P_0 处应满足

$$\Delta\theta(0) = \Delta\theta_0, \quad \Delta\theta'(0) = 0 \quad (5.2.25)$$

方程(5.2.3)满足此边界条件的特解为

$$\Delta\theta = \Delta\theta_0 \cos ks \quad (5.2.26)$$

另一铰支点 P_L 处的约束条件为

$$\Delta\theta(L) = \pm \Delta\theta_0, \quad \Delta\theta'(L) = 0 \quad (5.2.27)$$

为满足此边界条件,必须令参数 k 满足

$$kL = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.2.28)$$

其中整数 n 为受扰挠性线的谐波数。奇数 n 或偶数 n 分别对应于式(5.2.27)中的负号或正号,前者的受扰挠性线相对中点对称,后者为反对称。将式(5.2.24)代入式(5.2.28),导出轴向拉力和扭矩应满足的以下条件

$$\frac{M_0^2}{4A} - F_0 = \frac{n^2 \pi^2 A}{L^2} \quad (5.2.29)$$

在欧拉稳定性分析中,可从上式确定导致欧拉失稳的拉力和扭矩的临界值。若仅有扭矩单独作用,令 $F_0 = 0$,抗弯刚度 A 以 EI 表示,导出扭矩的临界值

$$|M_0|_{cr} = \frac{2\pi EI}{(L/n)} \tag{5.2.30}$$

若仅有轴向压力单独作用,令 $M_0=0, F_0=-|F_0|$, 转化为压力的临界值

$$|F_0|_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/n)^2} \tag{5.2.31}$$

$n=1$ 时与 4.5.1 节中导出的两端铰支压杆欧拉载荷(4.5.16)一致。根据对受扰挠性线几何形态的分析,若 n 不限于整数,临界载荷(5.2.31)也适用于其他端部约束情况。如表 5.1 所示。

表 5.1 不同的 n 对应的端部约束情况

n	0.5	1	1.5	2
约束情况	一端固定 一端自由	两端铰支	一端固定 一端铰支	两端固定

根据 4.5.1 节中在非线性平衡方程基础上对压杆载荷与挠性线关系的讨论,当 $h=-|p|$,即 $k=0$ 时,可从式(4.5.14)和式(4.5.15)推知欧拉载荷 $|F_0|_{cr}$ 恰好等于杆的最大挠度 R 为 0 时对应的压力 $|F_0|$ 。对于 $h>-|p|$ 的更一般情形,则导出 $|F_0|>|F_0|_{cr}$,且 $R>0$,表明超过欧拉载荷的压力使弹性杆偏离直线产生弯曲变形。利用式(4.5.18)计算的杆失稳后最大挠度与轴向压力之间的对应关系如图 4.19 所示。

在静力学范畴内讨论稳定性问题,无论 Lyapunov 稳定性或欧拉稳定性,杆的受扰状态和未扰状态均满足静力学平衡条件,稳定或不稳定是根据受扰挠性线和未扰挠性线的几何形态来判断。在第 6 章中还将讨论更合理的稳定性判断方法,即引入时间变量在动力学范畴内进行。

5.3 圆截面螺旋杆的平衡稳定性

5.3.1 螺旋杆平衡的存在性和稳定性

在方程(5.2.1)的常值特解中,除上述平凡解对应的直杆平衡以外,还可能存在着与螺旋线平衡对应的非平凡解,由以下方程确定

$$\left(\frac{l-m\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}\right)^2 \cos\theta_0 - m\left(\frac{l-m\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}\right) + \frac{p}{2} = 0 \tag{5.3.1}$$

解出的 θ_0 对应于倾角为 $\alpha=\pi/2-\theta_0$ 的螺旋线平衡。若积分常数满足式(4.2.11)或式(4.3.5)给出的以下条件,方程(5.3.1)有实数解。

$$l^2 \geq 2p\cos\theta_0 \tag{5.3.2}$$

与式(5.2.7)比较,可看出 $\theta_0=0$ 时此条件与受拉扭直杆的稳定性条件一致。

将螺旋线平衡状态下积分常数的关系式(4.2.9)代入式(5.3.1),可使其成为恒等式,代入式(5.2.4)计算参数 c ,得到

$$c = \omega_0^2 \sin^2\theta_0 + (2\omega_0 \cos\theta_0 - m)^2 > 0 \tag{5.3.3}$$

从而证明,在一次近似意义上,对于几何参数和刚度系数的任意值,受轴向力和扭矩联合作用的圆截面螺旋杆平衡状态均满足 Lyapunov 稳定性条件,与 4.3.3 节用直观方法的分析结果一致。

5.3.2 受拉扭圆截面杆的全局性态

在图 5.5 表示的 (θ, θ') 相平面中, $l^2 > 2p$ 和 $l^2 < 2p$ 分别对应于不同拓扑性质的两类相轨迹曲线。每条相轨迹与弹性杆的挠性线一一对应。图 5.5(a) 中与平凡解 $\theta_0 = 0$ 对应的奇点 S_1 为中心,代表稳定的直杆平衡。受扰后的相轨迹为围绕 S_1 的封闭曲线,对应的挠性线为 θ 角微幅周期变化的曲线。在图 5.5(b) 中奇点 S_1 为鞍点,对应于不稳定的直杆平衡。由于满足非平凡解存在条件,出现与非零解对应的两个新奇点 S_2^+ 和 S_2^- , 分别对应于右旋和左旋的螺旋线平衡。其稳定性已由式(5.3.3)证明。当参数 p 的值从 $l^2/2$ 起增大时, S_2^+ 和 S_2^- 逐渐向另一个平凡解 $\theta_0 = \pm\pi$ 对应的奇点趋近。从鞍点 S_1 出发的相轨迹返回至同一鞍点形成同宿轨道。根据受扰后相点处于同宿轨道之内或之外,鞍点 S_1 附近的受扰相轨迹为不同拓扑性质的两类封闭曲线。前者为围绕 S_2^+ 或 S_2^- 的封闭曲

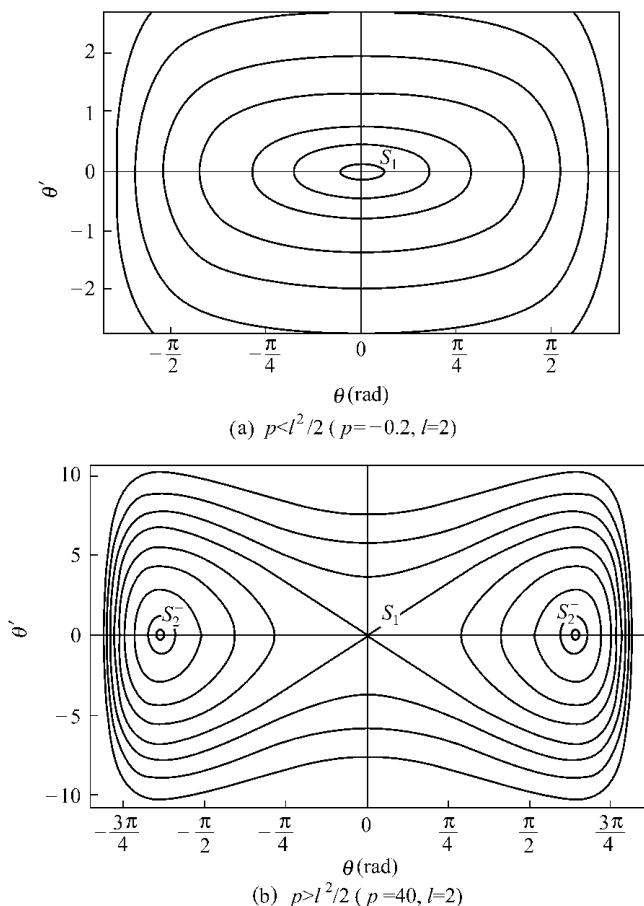


图 5.5 圆截面杆平衡的相轨迹曲线族

线。后者为围绕原点 O 和 3 个奇点 S_1, S_2^+ 和 S_2^- 在内的封闭曲线, 对应的挠性线为 θ 角大幅度周期变化且过零点的空间曲线。在中心 S_2^+ 或 S_2^- 附近受微扰后的相轨迹为围绕 S_2^+ 或 S_2^- 的微幅封闭曲线, 对应于 θ 角作微幅周期变化的准螺旋线。图 5.6 为 $m=l$ 时, 参数平面 $(2p/l^2, \theta_s)$ 内奇点个数和稳定性的分岔图, 分别以黑线和灰线表示稳定和 unstable 平衡状态。

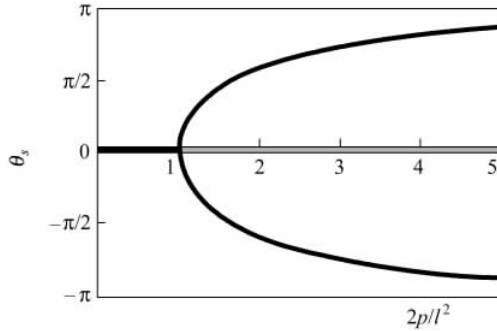


图 5.6 $(2p/l^2, \theta_s)$ 参数平面内的分岔曲线

5.3.3 螺旋杆的受扰挠性线与欧拉稳定性

在 5.3.1 节中利用解耦后仅含 θ 的平衡方程, 证明了带原始扭率的圆截面杆的螺旋线平衡满足 Lyapunov 稳定性条件。本节讨论螺旋杆的受扰挠性线与端点约束条件的关系。设两端铰支的圆截面杆在轴向力 F_0 和扭矩 M_0 的联合作用下形成以 ζ 轴为螺旋轴, 半径为 R , 倾角为 α , 扭率为 ω_{30} 的螺旋线 (见图 5.7)。利用 4.1.2 节中定义的 $(O-XYZ)$ 坐标系和柱坐标 Ψ, ζ 表示杆中心线的位置, 杆的螺旋线状态与 Kirchhoff 方程 (2.2.10) 的特解 (4.2.4) 相对应

$$\theta = \theta_0, \quad \psi' = \psi'_0 = \omega_0, \quad \varphi' = \varphi'_0 = \omega_{30} - \omega_0 \cos \theta_0 \quad (5.3.4)$$

其中 $\omega_0 = \sin \theta_0 / R$ 同式 (1.3.12) 或 (4.2.3), ω_{30} 为初积分 (2.4.4) 确定的常值扭率。轴向力 F_0 由式 (4.2.5) 确定

$$F_0 = \omega_0 [C(\omega_{30} - \omega_0^2) - A\omega_0 \cos \theta_0] \quad (5.3.5)$$

设在同样受力条件下, 螺旋杆的受扰平衡状态为

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta, \quad \psi' = \psi'_0 + \Delta\psi', \quad \varphi' = \varphi'_0 + \Delta\varphi' \quad (5.3.6)$$

代入 Kirchhoff 方程 (2.2.10c) 的初积分 (2.4.4), 只保留 $\Delta\theta, \Delta\psi', \Delta\varphi'$ 的一次项, 导出

$$\Delta\varphi' + (\cos \theta_0) \Delta\psi' - (\omega_0 \sin \theta_0) \Delta\theta = 0 \quad (5.3.7)$$

代入方程 (2.2.10a) 和 (2.2.10b), 利用式 (4.2.9) 消去 p , 导出一次近似扰动方程

$$\Delta\theta'' + (\omega_0^2 \sin^2 \theta_0) \Delta\theta - (2\omega_0 \cos \theta_0 - m) \sin \theta_0 \Delta\psi' = 0 \quad (5.3.8a)$$

$$(\sin \theta_0) \Delta\psi'' + (2\omega_0 \cos \theta_0 - m) \Delta\theta' = 0 \quad (5.3.8b)$$

将以下指数形式的扰动解代入 (5.3.7) 和 (5.3.8) 组成的扰动方程组

$$\Delta\theta = \Delta\theta_0 \exp(\lambda s), \quad \Delta\psi' = \Delta\psi'_0 \exp(\lambda s), \quad \Delta\varphi' = \Delta\varphi'_0 \exp(\lambda s) \quad (5.3.9)$$

在 $\theta_0 \neq 0$ 条件下, 导出此线性常微分方程组的特征方程

$$\lambda^2(\lambda^2 + k^2) = 0 \quad (5.3.10)$$

其中的参数 k^2 即式(5.3.3)确定的参数 c

$$k^2 = \omega_0^2 \sin^2 \theta_0 + (2\omega_0 \cos \theta_0 - m)^2 \quad (5.3.11)$$

特征方程(5.3.10)中的零根与方程(5.3.8b)存在的初积分相对应。除零根以外的特征值为纯虚根 $\lambda = \pm ik$, k 为受扰后 $\theta(s), \psi'(s), \varphi'(s)$ 随弧坐标 s 周期变化的角频率。

在满足 Lyapunov 稳定性的前提下,还必须补充附加条件使螺旋杆的受扰状态符合两端约束条件。对于两端铰支的螺旋杆,扰动方程组(5.3.7)和(5.3.8)存在以下特解

$$\Delta\theta = \Delta\theta_0 \cos ks, \quad \Delta\psi' = \Delta\psi'_0 \cos ks, \quad \Delta\varphi' = \Delta\varphi'_0 \cos ks \quad (5.3.12)$$

满足螺旋杆铰支端 P_0 的边界条件

$$\begin{aligned} \Delta\theta(0) &= \Delta\theta_0, \quad \Delta\theta'(0) = 0, \\ \Delta\psi'(0) &= \Delta\psi'_0, \quad \Delta\varphi'(0) = \Delta\varphi'_0 \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

从方程(5.3.7)和(5.3.8a)解出

$$\begin{aligned} \Delta\psi'_0 &= \left(\frac{\omega_0^2 \sin \theta_0}{2\omega_0 \cos \theta_0 - m} \right) \Delta\theta_0 \\ \Delta\varphi'_0 &= \left(\frac{\omega_0 \cos \theta_0 - m}{2\omega_0 \cos \theta_0 - m} \right) \omega_0 \sin \theta_0 \Delta\theta_0 \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

设螺旋杆有整数圈,即长度 L 为周长 $\Delta L = 2\pi R / \sin \theta_0$ 的整数

倍,则端部 P_0 与 P_L 在螺旋线上有相同的相位,在载荷对称,端部约束相同的条件下,可能出现的受扰状态在螺旋杆两端应有相同的几何形态。扰动量在 P_0 与 P_L 处应有相同的边界值

$$\Delta\theta(L) = \Delta\theta_0, \quad \Delta\theta'(L) = 0, \quad \Delta\psi'(L) = \Delta\psi'_0, \quad \Delta\varphi'(L) = \Delta\varphi'_0 \quad (5.3.15)$$

则参数 k 应满足以下附加条件

$$kL = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3.16)$$

此条件作为满足端部约束条件的非零解存在条件,同时也是欧拉稳定性意义下的失稳条件。满足此条件的轴向载荷即欧拉临界载荷。对于仅受轴向力作用的特殊情形,令式(4.2.9)中 $l=0$,导出

$$m = -\frac{\omega_0 \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}, \quad F_0 = -\frac{A\omega_0^2}{\cos \theta_0} \quad (5.3.17)$$

将上式中的 m 代入式(5.3.11),化为

$$k^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1 + 3\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \right) \quad (5.3.18)$$

从式(5.3.16)和式(5.3.18)解出 ω_0 代入式(5.3.17),导出能保证受扰状态满足端部约束条件的轴向力,即轴向受压螺旋杆的欧拉载荷 $|F_0|_{cr}$

$$|F_0|_{cr} = \frac{4\pi^2 EI \cos \theta_0}{(L/n)^2 (1 + 3\cos^2 \theta_0)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3.19)$$

令式(5.3.19)中 $\theta_0 \rightarrow 0$,则轴向受压螺旋杆欧拉载荷的极限值与直杆的欧拉载荷(5.2.31)

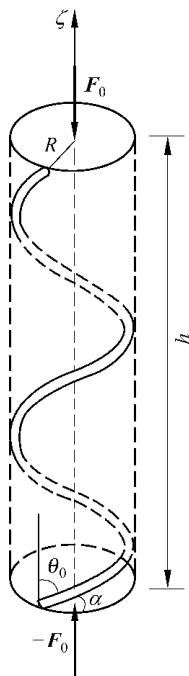


图 5.7 轴向受压扭螺旋杆的平衡

一致

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} |F_0|_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(L/n)^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3.20)$$

两端铰支压杆的欧拉载荷(4.5.16)为 $n=1$ 的特殊情形。考虑螺旋杆向直杆过渡的连续性,表 5.1 中不同 n 对应的临界载荷(5.3.20)应也适用于其他端部约束的螺旋杆。

设螺旋杆为 N 圈,则杆长为 $L=2N\pi R/\sin\theta_0$ 。引入无量纲角频率 $\bar{k}=k/\omega_0$,端部约束条件(5.3.16)要求参数 $\bar{k}$ 等于每个螺距内受扰挠性线的波数

$$\bar{k} = \frac{2n\pi}{\omega_0 L} = \frac{n}{N} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3.21)$$

将上式代入式(5.3.18),解出 θ_0 后代入式(5.3.17),欧拉载荷也可表示为

$$\frac{|F_0|_{\text{cr}}}{A\omega_0^2} = \left[\left(\frac{n}{N} \right)^2 - 3 \right]^{1/2} \quad (5.3.22)$$

上式仅当 $(n/N) > 3$ 时方有意义。

讨论另一特殊情形,设螺旋杆相对 Frenet 坐标系无扭转,令 $\varphi'_0=0, \omega_3^0=0$,则有

$$\omega_{30} = \omega_0 \cos\theta_0, \quad m = \frac{C}{A} \omega_0 \cos\theta_0 \quad (5.3.23)$$

代入式(5.3.5),(5.3.11),导出

$$F_0 = (C-A)\omega_0^2 \cos\theta_0, \quad \bar{k}^2 = 1 + \left(1 - \frac{C}{A}\right) \left(3 - \frac{C}{A}\right) \cos^2\theta_0 \quad (5.3.24)$$

从上式中消去 $\cos\theta_0$,将式(5.3.21)代入,导出无相对扭转螺旋杆的欧拉载荷

$$\frac{|F_0|_{\text{cr}}}{A\omega_0^2} = \left(\frac{A-C}{3A-C} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{n}{N} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3.25)$$

仅当 $(n/N) > 1$ 时此欧拉载荷方有意义。

5.3.4 圆环杆的稳定性

对于 $\theta_0=\pi/2$ 的特殊情形,螺旋杆转化为圆弧杆,若两端封闭则成为圆环杆。设原始扭率为 ω_3^0 ,半径为 R 的圆截面圆环杆位于 (ξ, η) 坐标面。此平衡状态与 Kirchhoff 方程(2.2.10)的以下特解相对应

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi'_0 = \omega_0 = \frac{1}{R}, \quad \varphi'_0 = \omega_{30}, \quad F = mA\omega_0 \quad (5.3.26)$$

其中曲率 ω_0 与扭率 ω_{30} 为相互独立的参数。

将受扰平衡状态(5.3.6)代入方程组(2.2.10),导出一次近似扰动方程

$$\Delta\theta'' + \omega_0^2 \Delta\theta + m\Delta\psi' = 0 \quad (5.3.27a)$$

$$\Delta\psi'' - m\Delta\theta' = 0 \quad (5.3.27b)$$

将指数形式的扰动解(5.3.9)代入方程组(5.3.27),导出与式(5.3.10)相同的特征方程。

但参数 k 的定义改为

$$k^2 = \omega_0^2 + m^2 \quad (5.3.28)$$

特征方程中的零根与方程(5.3.27b)存在的初积分相对应。除零根以外的特征值为纯虚根。表明在一次近似意义上,对于几何参数和刚度系数的任意值,圆截面圆环杆的平衡状

态均满足 Lyapunov 稳定性条件。

扰动方程组(5.3.27)存在与式(5.3.12)相同的特解,为保证圆环杆两个端部 P_0 和 P_L 处的截面在受扰后的连续性,各扰动量应满足两端边界值相等的条件(5.3.16)。令式(5.3.22)中 $N=1$,与式(2.4.6)代入式(5.3.28),解出

$$\omega_{30} = \frac{A\sqrt{n^2-1}}{CR} + \omega_3^0 \quad (5.3.29)$$

根据式(1.3.6)的定义,圆环杆的扭转数 ΔT_w 为

$$\Delta T_w = \frac{(\omega_{30} - \omega_3^0)L}{2\pi} = R(\omega_{30} - \omega_3^0) \quad (5.3.30)$$

则条件(5.3.29)也可写作

$$\Delta T_w = \frac{A\sqrt{n^2-1}}{C} \quad (5.3.31)$$

因此受扰后偏离圆环的平衡状态仅当扭率 ω_{30} 或扭转数 ΔT_w 满足此限制条件时方可能实现。 $n=2$ 时式(5.3.31)确定的扭转数有非零最小值,记作 $\Delta T_{w,cr}$

$$\Delta T_{w,cr} = \sqrt{3}\left(\frac{A}{C}\right) \quad (5.3.32)$$

当圆环杆的扭转数到达极限值 $\Delta T_{w,cr}$ 时,将有偏离圆环杆的新平衡状态存在。从欧拉稳定性概念出发,认为此时圆环杆失稳,归纳为

$$\Delta T_w < \sqrt{3}\left(\frac{A}{C}\right): \text{稳定}, \quad \Delta T_w \geq \sqrt{3}\left(\frac{A}{C}\right): \text{不稳定} \quad (5.3.33)$$

1962 年 Zajac 在分析电缆失稳问题时导出此条件^[15]。不同扭转数的圆环杆如图 5.8 所示。

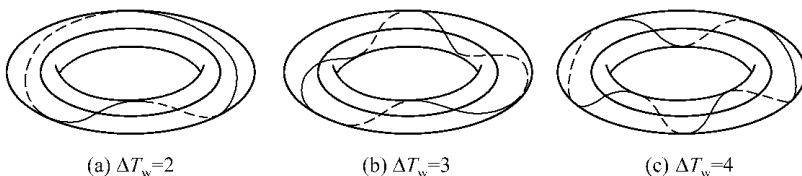


图 5.8 受扭圆环杆

5.3.5 圆柱面约束杆的稳定性

相平面方法也可用于讨论受圆柱面约束弹性杆的平衡稳定性。利用 4.8.3 节中圆柱面约束杆的平衡方程(4.8.21),与螺旋线平衡对应的奇点位置 $\theta = \theta_0$ 从以下方程解出

$$\frac{1}{R}(l\cos\theta_0 - m\cos 2\theta_0) - \left(\frac{p}{2} + \frac{2\cos\theta_0\sin^2\theta_0}{R^2}\right)\sin\theta_0 = 0 \quad (5.3.34)$$

令 $x = \theta - \theta_0$, $y = \theta'$, 导出与式(5.2.3)相同的一次近似方程,其中参数 c 定义为

$$c = \frac{\sin\theta_0}{R} \left[4m\cos\theta_0 - l + \frac{2}{R}\sin\theta_0(1 - 4\cos^2\theta_0) \right] - \frac{p}{2}\cos\theta_0 \quad (5.3.35)$$

利用式(4.8.14)和式(4.8.11)以及 $p = 2F_{z0}/A$,将参数 c 用切向拉力 F_{30} 表示为

$$c = \frac{\sin\theta_0}{R} \left[3m\cos\theta_0 + \frac{\sin\theta_0}{R}(\sin^2\theta_0 - 6\cos^2\theta_0) \right] - \frac{F_{30}}{A} \quad (5.3.36)$$

根据判据(5.2.5),在满足约束存在条件(4.8.27)的前提下,螺旋杆的稳定性要求切向拉力低于极限值 $(F_{30})_{cr}$

$$F_{30} < (F_{30})_{cr}: \text{稳定}, \quad F_{30} > (F_{30})_{cr}: \text{不稳定} \quad (5.3.37)$$

极限值 $(F_{30})_{cr}$ 定义为

$$(F_{30})_{cr} = \frac{A \sin \theta_0}{R} \left[3m \cos \theta_0 + \frac{\sin \theta_0}{R} (\sin^2 \theta_0 - 6 \cos^2 \theta_0) \right] \quad (5.3.38)$$

$\theta_0 = 0$ 时的稳定性条件与无约束直杆相同,即受压直杆稳定,拉杆不稳定。 $\theta_0 = \pi/2$,即受圆柱面约束的圆弧杆的稳定性条件为

$$F_{30} < \frac{A}{R^2}: \text{稳定}, \quad F_{30} > \frac{A}{R^2}: \text{不稳定} \quad (5.3.39)$$

对于受圆柱面内侧约束的钻杆类型弹性杆,由于约束力方向相反,稳定性条件应改为切向压力低于极限值。

将 DNA 弹性杆模型的典型数据: $A = 1.3 \times 10^{-19} \text{ erg} \cdot \text{cm}$, $C = 1.0 \times 10^{-19} \text{ erg} \cdot \text{cm}$, $\omega_{30} = 2.0 \times 10^7 \text{ cm}^{-1}$, $\omega_3^0 = 1.8 \times 10^7 \text{ cm}^{-1}$, $R_0 = 1.2 \times 10^{-4} \text{ cm}$, $a = 10^{-7} \text{ cm}$, $F_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{ dyne}$, $M_0 = 1.2 \times 10^{-13} \text{ dyne} \cdot \text{cm}$,解出方程(4.8.21)的 3 个奇点 $S_i (i=1,2,3)$

$$S_1: \theta_{01} = 0.9148$$

$$S_2: \theta_{02} = 1.8019$$

$$S_3: \theta_{03} = 3.8849$$

将各奇点分别代入式(5.3.36)判断其稳定性,得到

$$c = (\partial Q / \partial x)_{\theta=\theta_{01}} = 1.2533 \times 10^{10}, \quad S_1 \text{ 为中心, 稳定}$$

$$c = (\partial Q / \partial x)_{\theta=\theta_{02}} = -1.6513 \times 10^{10}, \quad S_2 \text{ 为鞍点, 不稳定}$$

$$c = (\partial Q / \partial x)_{\theta=\theta_{03}} = 3.8018 \times 10^{10}, \quad S_3 \text{ 为中心, 稳定}$$

图 5.9 为利用式(4.8.17)作出的相轨迹曲线族。

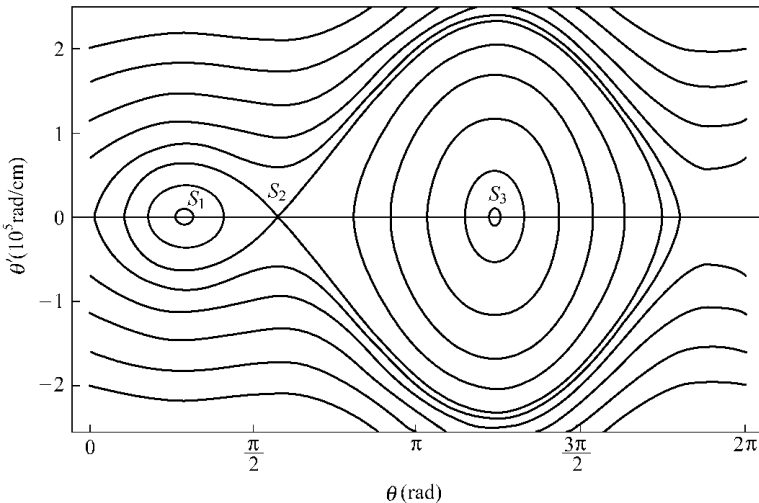


图 5.9 圆柱面约束杆的相轨迹

5.4 非圆截面螺旋杆的平衡稳定性

5.4.1 以主矢和主矩分量表示的弹性杆平衡方程

讨论非圆截面弹性杆的最一般情况, 设杆在松弛状态下的弯扭度原始值为

$$\omega_1^0 = \kappa^0 \sin \chi^0, \quad \omega_2^0 = \kappa^0 \cos \chi^0, \quad \omega_3^0 = \tau^0 + \frac{d\chi^0}{ds} \quad (5.4.1)$$

其中 κ^0, τ^0, χ^0 为松弛状态下杆的曲率、挠率以及截面相对 Frenet 坐标系的转角。截面作用力的主矩在 $(P\text{-}xyz)$ 中的投影为

$$M_1 = A(\omega_1 - \omega_1^0), \quad M_2 = B(\omega_2 - \omega_2^0), \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \quad (5.4.2)$$

从上式解出 $\omega_i(s) (i=1, 2, 3)$, 代入 Kirchhoff 方程 (2.1.8) 和 (2.1.9), 转换为以主矢和主矩 $F_i, M_i (i=1, 2, 3)$ 为未知变量的微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{ds} + \left(\frac{M_2}{B} + \omega_2^0 \right) F_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \right) F_2 &= 0 \\ \frac{dF_2}{ds} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \right) F_1 - \left(\frac{M_1}{A} + \omega_1^0 \right) F_3 &= 0 \\ \frac{dF_3}{ds} + \left(\frac{M_1}{A} + \omega_1^0 \right) F_2 - \left(\frac{M_2}{B} + \omega_2^0 \right) F_1 &= 0 \\ \frac{dM_1}{ds} + \left(\frac{M_2}{B} + \omega_2^0 \right) M_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \right) M_2 - F_2 &= 0 \\ \frac{dM_2}{ds} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \right) M_1 - \left(\frac{M_1}{A} + \omega_1^0 \right) M_3 + F_1 &= 0 \\ \frac{dM_3}{ds} + \left(\frac{M_1}{A} + \omega_1^0 \right) M_2 - \left(\frac{M_2}{B} + \omega_2^0 \right) M_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

此方程组在形式上与带有匀速转子的陀螺体定点运动的微分方程相似。由于增加了与原始曲率和原始扭率有关的附加项, 一般情况下不存在解析解。但若 Kirchhoff 方程存在某组特解, 且满足稳定性条件, 则此特解所对应的状态即为弹性杆可能发生的实际状态。螺旋线平衡状态与曲率和挠率的常值特解相对应。本节的讨论对象限定为常扭率的非圆截面螺旋杆。根据 2.6.3 节的说明, 常扭率杆的截面主轴坐标系与 Frenet 坐标系重合。令 $\chi \equiv 0$, 式 (5.4.2) 简化为^①

$$M_1 = A\omega_1, \quad M_2 = B(\omega_2 - \kappa^0), \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \quad (5.4.4)$$

Kirchhoff 方程 (5.4.3) 相应地简化为

$$\frac{dF_1}{ds} + \left(\frac{M_2}{B} + \kappa^0 \right) F_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \right) F_2 = 0 \quad (5.4.5a)$$

^① $\chi \equiv 0$ 时杆的原始扭率与原始挠率相同, 此处以原始扭率 ω_3^0 表示杆的原始状态, 因为一般情况下不排除杆的松弛状态为直杆, 即原始曲率为零的情形, 此时杆的挠率无定义。

$$\frac{dF_2}{ds} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)F_1 - \frac{M_1}{A}F_3 = 0 \quad (5.4.5b)$$

$$\frac{dF_3}{ds} + \frac{M_1}{A}F_2 - \left(\frac{M_2}{B} + \kappa^0\right)F_1 = 0 \quad (5.4.5c)$$

$$\frac{dM_1}{ds} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)M_2M_3 - \omega_3^0M_2 + \kappa^0M_3 - F_2 = 0 \quad (5.4.5d)$$

$$\frac{dM_2}{ds} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)M_1M_3 + \omega_3^0M_1 + F_1 = 0 \quad (5.4.5e)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)M_1M_2 - \kappa^0M_1 = 0 \quad (5.4.5f)$$

方程(5.4.5d)~方程(5.4.5f)即第2章2.3.6节中用准动量表示的 Kirchhoff 方程(2.3.59)。

5.4.2 螺旋线平衡状态

准动量表示的 Kirchhoff 方程(5.4.5)存在以下特解

$$F_1 = 0, \quad F_2 = F_{20}, \quad F_3 = F_{30}, \quad (5.4.6)$$

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M_{20} = B(\omega_{20} - \kappa^0), \quad M_3 = M_{30} = C(\omega_{30} - \omega_3^0)$$

其中常数 $F_{20}, F_{30}, \omega_{20}, \omega_{30}$ 受以下关系式的限制

$$\omega_{20}F_{30} - \omega_{30}F_{20} = 0 \quad (5.4.7a)$$

$$(C - B)\omega_{20}\omega_{30} + B\kappa^0\omega_{30} - C\omega_3^0\omega_{20} - F_{20} = 0 \quad (5.4.7b)$$

特解(5.4.7a)表明弯扭度 ω 为常矢量,与截面作用力主矢 F 平行,即与沿 ζ 轴的外力主矢 F_0 平行,记作 ω_0 。按2.2.2节中欧拉角的定义,切线轴 z 与 ζ 轴的夹角为章动角 θ 。 ω_0 的常值投影 ω_{20}, ω_{30} 表明 θ 为常值,记作 θ_0 ,则(5.4.7a)中的常数可写作

$$F_{20} = F_0 \sin\theta_0, \quad F_{30} = F_0 \cos\theta_0 \quad (5.4.8)$$

$$\omega_{20} = \omega_0 \sin\theta_0, \quad \omega_{30} = \omega_0 \cos\theta_0$$

其中 F_0, ω_0 为主矢 F_0 和弯扭度 ω_0 的模。特解(5.4.6)对应的挠性线是以 ζ 轴为中心轴的螺旋线。利用式(1.3.12)和式(4.2.3),螺旋线的螺旋角 α 和半径 R 由 θ_0 和 ω_0 完全确定

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_0, \quad R = \frac{\sin\theta_0}{\omega_0} \quad (5.4.9)$$

将式(5.4.8)与式(1.3.13)对照,可看出杆的弯扭度与 Darboux 矢量相等。表明非圆截面杆的螺旋线平衡仅在截面相对 Frenet 坐标系无扭转条件下实现。设主轴坐标系(P - xyz)与 Frenet 坐标系重合, x, y, z 轴分别为法线轴、副法线轴和切线轴(图4.5)。杆的任意截面内力主矢和主矩(F, M)与沿 ζ 轴的力螺旋(F_0, M_0)等效。利用4.1.2节定义的惯性坐标系(O - $\xi\eta\zeta$)和柱坐标系(O - XYZ),令式(4.1.12)中 $\rho=R$,得到

$$F = F_0 e_\zeta, \quad M = M_0 e_\zeta + F_0 R e_\psi \quad (5.4.10)$$

将上式在(P - xyz)中的投影与式(5.4.6)中相应各项互等,导出

$$\begin{aligned} F_0 &= -\omega_0 [(B - C)\omega_0 \cos\theta_0 - B\kappa^0 \cot\theta_0 + C\omega_3^0] \\ M_0 &= \omega_0 [C + (B - C)\sin^2\theta_0] - B\kappa^0 \sin\theta_0 - C\omega_3^0 \cos\theta_0 \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

引入无量纲参数 μ, σ, ν

$$\mu = \frac{BF_0}{M_0^2}, \quad \sigma = \frac{B}{A} - 1, \quad \nu = \frac{B}{C} - 1 \quad (5.4.12)$$

对于各向同性的圆截面杆, $\mu = 2\rho/l^2, \sigma = 0, \nu$ 等于杆的泊松比。由于一般情况下, 杆的抗弯刚度 A, B 大于抗扭刚度 C , 且 A 与 C 之和大于 B , 有以下不等式存在

$$\nu > 0, \quad \nu - \sigma > 0, \quad 1 - \sigma\nu > 0 \quad (5.4.13)$$

引入无量纲化的原始曲率和扭率 ε 和 δ

$$\varepsilon = \frac{B\kappa^0}{M_0}, \quad \delta = \frac{C\omega_3^0}{M_0} \quad (5.4.14)$$

设 $\theta_0 \neq 0$, 从式(5.4.11)导出无量纲形式 F_0, M_0 与螺旋线参数 θ_0, ω_0 之间的关系式

$$\frac{F_0}{C\omega_0^2} = -\frac{\nu\cos\theta_0 - \varepsilon\cot\theta_0 + \delta(1+\nu)}{1 + \varepsilon\sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0} \quad (5.4.15)$$

$$\frac{M_0}{C\omega_0} = \frac{1 + \nu\sin^2\theta_0}{1 + \varepsilon\sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0} \quad (5.4.16)$$

将上式代入式(5.4.12)计算螺旋线平衡状态下的参数 μ , 得到

$$\mu = -\frac{(1+\nu)(1 + \varepsilon\sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0)[\nu\cos\theta_0 - \varepsilon\cot\theta_0 + \delta(1+\nu)]}{(1 + \nu\sin^2\theta_0)^2} \quad (5.4.17)$$

若杆无原始曲率和原始扭率, 则简化为

$$\mu = -\frac{\nu(1+\nu)\cos\theta_0}{(1 + \nu\sin^2\theta_0)^2} \quad (5.4.18)$$

在 $|\theta| < \pi/2$ 范围内参数 μ 为负值, 表明松弛状态下的直杆仅当轴向力 F_0 为压力时方能维持螺旋线平衡。圆截面螺旋杆的存在条件(5.3.2)可用参数 μ 表示为

$$\mu\cos\theta_0 \leq \frac{1}{4} \quad (5.4.19)$$

将式(5.4.18)代入后, 此条件对 θ_0 的任意值均自行满足。

在杆的松弛状态下, 令式(5.4.11)中 $F_0 = M_0 = 0, \omega^0 = \sin\theta^0/R^0$, 解出

$$\kappa^0 = \frac{\sin^2\theta^0}{R^0}, \quad \omega_3^0 = \frac{\cos\theta^0\sin\theta^0}{R^0} \quad (5.4.20)$$

表明无外力作用时, 具有原始曲率 κ^0 和原始扭率 ω_3^0 的弹性杆的松弛状态为螺旋线状态, 半径 R^0 和倾角 α^0 分别为

$$R^0 = \frac{\kappa^0}{(\kappa^0)^2 + (\omega_3^0)^2}, \quad \alpha^0 = \frac{\pi}{2} - \theta^0, \quad \theta^0 = \arctan\left(\frac{\kappa^0}{\omega_3^0}\right) \quad (5.4.21)$$

5.4.3 螺旋线平衡的稳定性

利用式(5.4.10)在 $(P-xyz)$ 中的投影, 方程组(5.4.5)的常值特解(5.4.6)可写作

$$\begin{aligned} F_1 &= 0, \quad F_2 = F_{20} = F_0\sin\theta_0, \quad F_3 = F_{30} = F_0\cos\theta_0 \\ M_1 &= 0, \quad M_2 = M_{20} = M_0\sin\theta_0 - F_0R\cos\theta_0 \\ M_3 &= M_{30} = M_0\cos\theta_0 + F_0R\sin\theta_0 \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

其中常数 F_0 和 M_0 由式(5.4.15)和式(5.4.16)确定。设 $F_i, M_i (i=1, 2, 3)$ 为受扰后的主

矢和主矩分量,引入无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和无量纲扰动量 $x_i (i=1, 2, \dots, 6)$

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \left(\frac{M_0}{B} \right) s, \quad x_1 = \frac{F_1}{F_0}, \quad x_2 = \frac{F_2 - F_{20}}{F_0}, \quad x_3 = \frac{F_3 - F_{30}}{F_0} \\ x_4 &= \frac{M_1}{M_0}, \quad x_5 = \frac{M_2 - M_{20}}{M_0}, \quad x_6 = \frac{M_3 - M_{30}}{M_0} \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

将上式代入 Kirchhoff 方程(5.4.5),略去 $x_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 的二次以上微量,导出螺旋线平衡的线性化扰动方程

$$x'_1 = (\beta_4 + \nu_1)x_2 - (\beta_3 + \epsilon)x_3 - \beta_2 x_5 + (1 + \nu)\beta_1 x_6 \quad (5.4.24a)$$

$$x'_2 = -(\beta_4 + \nu_1)x_1 + (1 + \sigma)\beta_2 x_4 \quad (5.4.24b)$$

$$x'_3 = (\beta_3 + \epsilon)x_1 - (1 + \sigma)\beta_1 x_4 \quad (5.4.24c)$$

$$x'_4 = \mu x_2 + \nu_1 x_5 + (\nu\beta_3 - \epsilon)x_6 \quad (5.4.24d)$$

$$x'_5 = -\mu x_1 + (\sigma\beta_4 - \nu_1)x_4 \quad (5.4.24e)$$

$$x'_6 = (\epsilon - \sigma\beta_3)x_4 \quad (5.4.24f)$$

其中的撇号表示对无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 的导数,参数 $\beta_i (i=1, 2, \dots, 4)$ 和 ν_1 定义为

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{F_{20}}{F_0} = \sin\theta_0, \quad \beta_2 = \frac{F_{30}}{F_0} = \cos\theta_0 \\ \beta_3 &= \frac{M_{20}}{M_0} = \sin\theta_0 - \beta_2 \cos\theta_0 \\ \beta_4 &= \frac{M_{30}}{M_0} = \cos\theta_0 + \beta_2 \sin\theta_0 \\ \beta &= \frac{F_0 R}{M_0}, \quad \nu_1 = \beta_1 \nu + \delta(1 + \nu) \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

利用式(5.4.15)和式(5.4.16)可将无量纲参数 β 和 ν_1 化作 θ_0 的函数

$$\begin{aligned} \beta &= - \frac{[\nu \cos\theta_0 + \delta(1 + \nu)] \sin\theta_0 - \epsilon \cos\theta_0}{1 + \nu \sin^2 \theta_0} \\ \nu_1 &= \frac{\nu \cos\theta_0 (1 + \epsilon \sin\theta_0) + \delta(1 + \nu)}{1 + \nu \sin^2 \theta_0} \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

利用特解 $x_i = x_{i0} \exp(\lambda \bar{s}) (i=1, 2, \dots, 6)$ 计算方程组(5.4.24)的特征方程 $\det D = 0$, 矩阵 D 定义为

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & -(\beta_4 + \nu_1) & (\beta_3 + \epsilon) & 0 & \beta_2 & -(1 + \nu)\beta_1 \\ (\beta_4 + \nu_1) & \lambda & 0 & -(1 + \sigma)\beta_2 & 0 & 0 \\ -(\beta_3 + \epsilon) & 0 & \lambda & -(1 + \sigma)\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \lambda & -\nu_1 & -(\nu\beta_3 + \epsilon) \\ \mu & 0 & 0 & -(\sigma\beta_4 + \nu_1) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\epsilon - \sigma\beta_3) & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (5.4.27)$$

展开后写作

$$\lambda^2 (\lambda^4 + a\lambda^2 + b) = 0 \quad (5.4.28)$$

其中

$$\begin{aligned}
 a &= (\beta_3 + \epsilon)^2 + (\beta_4 + \nu_1)^2 + (\sigma\beta_3 - \epsilon)(\nu\beta_3 - \epsilon) - \mu\beta_2(2 + \sigma) + \nu_1(\nu_1 - \sigma\beta_4) \\
 b &= \mu^2\beta_2^2(1 + \sigma) + \mu\beta_1(\beta_4 + 2\nu_1)[(1 + \sigma)(\beta_3 + \epsilon) - (1 + \nu)(\sigma\beta_3 - \epsilon)] \\
 &\quad + \mu\beta_2\{(\beta_4 + \nu_1)[\nu_1(2 + \sigma) - \sigma\beta_4] - [(\sigma\beta_3 - \epsilon)(\nu\beta_3 - \epsilon) + (1 + \sigma)(\beta_3 + \epsilon)^2]\} \\
 &\quad + [(\beta_3 + \epsilon)^2 + (\beta_4 + \nu_1)^2][(\sigma\beta_3 - \epsilon)(\nu\beta_3 - \epsilon) + \nu_1(\nu_1 - \sigma\beta_4)] \quad (5.4.29)
 \end{aligned}$$

系数 a, b 仅由 θ_0 确定, 表明杆的螺旋线平衡状态仅取决于螺旋角, 与螺旋线的半径无关。为解释特征方程(5.4.28)的两个零特征值, 将扰动方程组中的(5.4.24b), (5.4.24c)二式分别与 β_1, β_2 相乘后相加, 将(5.4.24b), (5.4.24c), (5.4.24e), (5.4.24f)四式分别与 $\beta_3, \beta_4, \beta_1, \beta_2$ 相乘后相加, 利用等式 $\beta_2(\beta_3 + \epsilon) = \beta_1(\beta_4 + \nu_1)$, 导出

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds}(\beta_1 x_2 + \beta_2 x_3) &= 0 \\
 \frac{d}{ds}(\beta_3 x_2 + \beta_4 x_3 + \beta_1 x_5 + \beta_2 x_6) &= 0
 \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

所对应的初积分导致零特征值的出现。上式也可从 2.4 节中的初积分(2.4.12)和(2.4.14)直接得出。除零根以外, 特征方程(5.4.28)的单虚根条件为

$$a > 0, \quad b > 0, \quad a^2 - 4b > 0 \quad (5.4.31)$$

应用一次近似理论判断弹性杆的 Lyapunov 稳定性, 此条件即螺旋线平衡状态(5.4.6)的稳定性必要条件。

若弹性杆无初始曲率和扭率, 令 $\epsilon = \delta = 0$, 式(5.4.28)中的参数 a, b 简化为

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(1 + \nu)^2(1 + \sigma\nu)\sin^2\theta_0 + [(1 + 2\nu)^2 + \sigma\nu^2]\cos^2\theta_0}{(1 + \nu\sin^2\theta_0)^2} \\
 b &= \frac{\sigma\nu(1 + \nu)^3[1 + \nu(1 + 3\cos^2\theta_0)]\sin^2\theta_0}{(1 + \nu\sin^2\theta_0)^4}
 \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

且有

$$\begin{aligned}
 a^2 - 4b &= \frac{\{(1 + \nu)^2(1 - \sigma\nu)\sin^2\theta_0 - [(1 + 2\nu)^2 + \sigma\nu^2]\cos^2\theta_0\}^2}{(1 + \nu\sin^2\theta_0)^4} \\
 &\quad + \frac{4(1 - \sigma\nu)(1 + \nu)^2(1 + 2\nu)^2\cos^2\theta_0\sin^2\theta_0}{(1 + \nu\sin^2\theta_0)^4} \quad (5.4.33)
 \end{aligned}$$

考虑不等式(5.4.13)中 $\nu > 0, 1 - \sigma\nu > 0$ 的条件, 若 $\sigma > 0$, 稳定性条件(5.4.31)必全部满足。从而得到无原始曲率和扭率的螺旋杆平衡的稳定性必要条件

$$\sigma > 0 \quad \text{或} \quad B > A \quad (5.4.34)$$

此条件表明, 要保证非圆截面弹性杆的螺旋线平衡稳定, 杆截面绕副法线轴的抗弯刚度必须大于绕法线轴的抗弯刚度。

对于具有原始扭率的圆截面杆, 令式(5.4.29)中 $\sigma = \epsilon = 0$, 简化为

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{1 + \delta\cos\theta_0}{1 + \nu\sin^2\theta_0}\right)^2 \{[(1 + \nu)^2\sin^2\theta_0]^2 \\
 &\quad + [(1 + 2\nu)^2\cos^2\theta_0 + \delta(1 + \nu)(1 + \delta\cos\theta_0)^{-1}]^2\}, \quad b = 0 \quad (5.4.35)
 \end{aligned}$$

特征方程(5.4.28)的纯虚根为 $\lambda = \pm i\bar{k}$, 表明具有原始扭率的圆截面螺旋杆满足 Lyapunov 稳定性条件。 $\bar{k} = \sqrt{a}$ 为扰动量随弧坐标 $\bar{s}$ 周期变化的无量纲角频率。利用式(5.4.12)、式(5.4.14)、式(2.4.6)等式将参数 $\bar{k}$ 有量纲化, 导出与式(5.3.11)一致的

结果

$$k^2 = \left(\frac{M_0}{B}\right)^2 \bar{k}^2 = \omega_0^2 \sin^2 \theta_0 + (2\omega_0 \cos \theta_0 - m)^2 \quad (5.4.36)$$

扰动方程组(5.4.24)的通解为 $\sin \bar{k}s$ 和 $\cos \bar{k}s$ 的线性组合。为使受扰后的平衡状态符合杆的端部约束条件,参数 $\bar{k}$ 还应满足由端部约束确定的附加条件。参照 5.3.3 节中对圆截面螺旋杆的分析,在螺旋杆长度 L 为周长 ΔL 的整数倍,载荷对称,端部约束相同等条件下,常扭率的非圆截面螺旋杆在端点处有相同的受扰状态。各扰动量应满足

$$x_i(\bar{L}) = x_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.4.37)$$

其中 $\bar{L} = (M_0/B)L$ 为无量纲化的杆长。则参数 $\bar{k}$ 应满足与式(5.3.16)类似的附加条件

$$\bar{k}\bar{L} = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.4.38)$$

整数 n 为受扰挠性线的谐波次数。条件(5.4.38)同时也是欧拉稳定性意义下的失稳条件。

5.4.4 圆弧杆的平衡稳定性

由于非圆截面杆的螺旋线特解(5.4.6)规定弯扭度 ω 沿 ζ 轴,因此当 $\theta_0 = \pi/2$,即切线轴与 ζ 轴正交时要求 $\omega_{30} = 0$,即非圆截面圆弧杆的常扭率必须为零。此时特解(5.4.22)中的积分常数简化为

$$F_{20} = F_0, \quad F_{30} = 0, \quad M_{20} = M_0, \quad M_{30} = F_0 R \quad (5.4.39)$$

从式(5.4.11)导出

$$F_0 = -C\omega_0\omega_3^0, \quad M_0 = B(\omega_0 - \kappa^0) \quad (5.4.40)$$

式(5.4.17)、式(5.4.25)和式(5.4.26)中的参数简化为

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1, \quad \beta_4 = -\delta \\ \nu_1 &= \delta, \quad \mu = -\delta(1 + \epsilon) \end{aligned} \quad (5.4.41)$$

将上式代入式(5.4.32)后,特征方程系数 a, b 简化为

$$\begin{aligned} a &= (1 + \epsilon)^2 + (\sigma - \epsilon)(\nu - \epsilon) + (1 + \sigma)\delta^2 \\ b &= (1 + \epsilon)(\sigma - \epsilon) \{ (1 + \epsilon)(\nu - \epsilon) + (1 + \nu)\delta^2 \} \end{aligned} \quad (5.4.42)$$

若圆弧杆无原始扭率,仅具有原始曲率,令 $\delta = 0$,进一步简化为

$$a = (1 + \epsilon)^2 + (\epsilon - \sigma)(\epsilon - \nu), \quad b = (1 + \epsilon)^2(\epsilon - \sigma)(\epsilon - \nu) \quad (5.4.43)$$

其稳定性条件(5.4.31)的最后一个条件可自行满足

$$a^2 - 4b = \{ (1 + \epsilon)^2 - (\epsilon - \sigma)(\epsilon - \nu) \}^2 > 0 \quad (5.4.44)$$

从而导出圆弧杆的稳定性必要条件

$$\epsilon > \sigma, \quad \epsilon > \nu \quad \text{或} \quad \epsilon < \sigma, \quad \epsilon < \nu \quad (5.4.45)$$

若圆弧杆为圆截面,则 $\sigma = 0$,且由于一般情况下 $\nu > 0$,此稳定性条件简化为

$$\epsilon > \nu \quad \text{或} \quad \epsilon < 0 \quad (5.4.46)$$

将 $\kappa = 1/R, \epsilon = \kappa^0/(\kappa - \kappa^0)$ 代入后,化作

$$0 < \kappa < \kappa^0 \quad (5.4.47)$$

表明圆弧杆的曲率小于原始曲率为稳定性必要条件。

若圆弧杆无原始曲率,仅有原始扭率,令 $\epsilon = 0$,系数 a, b 简化为

$$\begin{aligned} a &= 1 + \sigma\nu + (1 + \sigma)\delta^2, \quad b = \sigma[\nu + (1 + \nu)\delta^2] \\ a^2 - 4b &= [(1 - \sigma\nu) + (1 - \sigma)\delta^2]^2 + 4\sigma\delta^4 \end{aligned} \quad (5.4.48)$$

根据不等式(5.4.31)判断,得到与式(5.4.34)完全相同的稳定性必要条件

$$\sigma > 0 \quad (5.4.49)$$

从而证明,稳定性条件(5.4.34)也适用于具有原始扭率的非圆截面圆弧杆。即杆绕圆弧平面法线轴的抗弯刚度应大于绕径向轴的抗弯刚度,与杆的原始扭率无关。对不同 θ_0 值所作的数值计算表明,此条件的适用范围可扩展为 θ_0 为任意值的更普遍情形。稳定性条件(5.4.34)可作为判断带原始扭率非圆截面螺旋杆平衡稳定性的普遍条件。

对于圆截面特殊情形,令 $\sigma=0$,特征方程有纯虚根 $\lambda=\pm i\bar{k}$,其中

$$\bar{k}^2 = 1 + \delta^2 = \left(\frac{B}{M_0}\right)^2 (\omega_0^2 + m^2) \quad (5.4.50)$$

有量纲的角频率 $k=(M_0/B)\bar{k}$ 与式(5.3.28)一致。若圆弧杆的两端封闭为圆环,则约束条件(5.4.35)即为圆环杆受扰状态的封闭条件。将式(5.4.50)和圆环杆的无量纲长度 $\bar{L}=(M_0/B)2\pi R$ 代入式(5.4.38),导出判断圆环杆欧拉稳定性的 Zajac 条件(5.3.33)。

5.5 非圆截面直杆的平衡稳定性

5.5.1 具有原始扭率的非圆截面直杆的平衡稳定性

直线平衡状态为 $\theta_0=0$ 时螺旋线状态的特例。设非圆截面杆有原始扭率 ω_3^0 ,无原始曲率,令方程组(5.4.5)的特解(5.4.22)中 $\theta_0=0, R=0$,简化为

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = F_0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = M_0 \quad (5.5.1)$$

其中

$$M_0 = M_{30} = C(\omega_{30} - \omega_3^0) \quad (5.5.2)$$

由于 z 轴与 ζ 轴重合, $\omega_{30}=\omega_0$ 。表明在中心线维持直线的同时,截面绕中心线产生扭率为 ω_0 的均匀扭转。式(5.4.25)和式(5.4.26)中的参数简化为

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 1, \quad \nu_1 = \nu + \delta(1 + \nu) \quad (5.5.3)$$

代入线性化扰动方程(5.4.24),且令 $\varepsilon=0$,简化为

$$x'_1 = (1 + \nu_1)x_2 - x_5 \quad (5.5.4a)$$

$$x'_2 = -(1 + \nu_1)x_1 + (1 + \sigma)x_4 \quad (5.5.4b)$$

$$x'_3 = 0 \quad (5.5.4c)$$

$$x'_4 = \mu x_2 + \nu_1 x_5 \quad (5.5.4d)$$

$$x'_5 = -\mu x_1 + (\sigma - \nu_1)x_4 \quad (5.5.4e)$$

$$x'_6 = 0 \quad (5.5.4f)$$

4.2.2节中已说明,式(4.2.8)或式(5.4.15)不适用于 $\theta_0=0$ 的情形。在直杆状态下 F_0 与 M_0 相互独立,参数 μ 不受式(5.4.17)的限制而成为独立参数。式(5.4.28)中的系数 a, b 简化为

$$\begin{aligned} a &= (1 + \nu_1)^2 + \nu_1(\nu_1 - \sigma) - \mu(2 + \sigma) \\ b &= \nu_1(\nu_1 - \sigma)(1 + \nu_1)^2 + \mu(1 + \nu_1)[\nu_1(2 + \sigma) - \sigma] + \mu^2(1 + \sigma) \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

特征方程(5.4.28)也存在两个零特征值 $\lambda=0$, 与扰动方程(5.5.4c), (5.5.4f)的初积分相对应

$$x_3 = \text{const}, \quad x_6 = \text{const} \quad (5.5.6)$$

利用式(5.5.1), 可从 2.4.2 节中的式(2.4.12)和式(2.4.15)直接导出此初积分。

若直杆为圆截面, 则 $A=B, \sigma=0$, 系数(5.5.5)简化为

$$\begin{aligned} a &= (1+\nu_1)^2 + \nu_1^2 - 2\mu, \quad b = [\nu_1(1+\nu_1) + \mu]^2 \\ a^2 - 4b &= (1-4\mu)(1+2\nu_1)^2 \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

对于此特殊情况, 稳定性条件(5.4.31)中的 $b>0$ 条件自行满足, 从其余条件导出 Greenhill 公式(5.2.8)中的不等式部分

$$\mu < \frac{1}{4} \quad \text{或} \quad F_0 < \frac{M_0^2}{4A} \quad (5.5.8)$$

从而将 Greenhill 公式的适用范围扩展到具有原始扭率的圆截面直杆。令 $M_0=0$, Greenhill公式简化为 $F_0<0$, 则 5.2.3 节在平面变形条件下得到的压杆稳定性结论也适用于更具普遍性的三维变形情形。

另一特例是受纯扭的非圆截面杆。设 $\sigma \neq 0, \mu=0$, 系数(5.5.5)简化为

$$\begin{aligned} a &= (1+\nu_1)^2 + \nu_1(\nu_1 - \sigma), \quad b = \nu_1(\nu_1 - \sigma)(1+\nu_1)^2 \\ a^2 - 4b &= [(1+\nu_1)^2 - \nu_1(\nu_1 - \sigma)]^2 \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

稳定性条件(5.4.31)中的 $a^2 - 4b > 0$ 自行满足, 从其余条件导出

$$\nu_1 > 0, \quad \nu_1 > \sigma \quad \text{或} \quad \nu_1 < 0, \quad \nu_1 < \sigma: \text{稳定} \quad (5.5.10a)$$

则直杆平衡的不稳定条件为

$$\sigma < \nu_1 < 0 \quad \text{或} \quad \sigma > \nu_1 > 0: \text{不稳定} \quad (5.5.10b)$$

参数 ν_1 的定义也可写作

$$\nu_1 = \frac{B}{C_1} - 1, \quad C_1 = C \left(1 - \frac{\omega_3^0}{\omega_{30}} \right) \quad (5.5.11)$$

判据(5.5.10)的有量纲形式为

$$C_1 < A, C_1 < B \quad \text{或} \quad C_1 > A, C_1 > B: \text{稳定} \quad (5.5.12a)$$

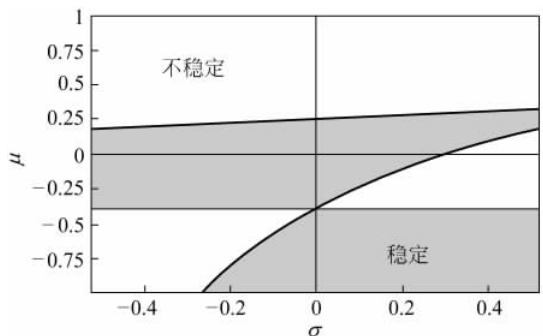
$$A > C_1 > B \quad \text{或} \quad A < C_1 < B: \text{不稳定} \quad (5.5.12b)$$

若直杆无原始扭率, 此稳定性条件与欧拉情形刚体绕主轴永久转动的稳定性条件在形式上完全相同

$$C < A, C < B \quad \text{或} \quad C > A, C > B: \text{稳定} \quad (5.5.13a)$$

$$A > C > B \quad \text{或} \quad A < C < B: \text{不稳定} \quad (5.5.13b)$$

由于一般情况下弹性杆的抗扭刚度小于抗弯刚度, 因此无原始扭率的非圆截面直杆在扭矩单独作用下必保持稳定。此结论与 Greenhill 公式(5.5.8)当 $F_0=0$ 时自然满足的现象一致。对于受纯扭的圆截面杆, 令式(5.5.7)中 $\mu=0$, 或令式(5.5.9)中 $\sigma=0$, 所有的稳定性条件均自行满足。对于一般情况的非圆截面杆, 图 5.10 给出当 $\nu_1=0.3$ 时, (σ, μ) 参数平面内划分的稳定域。与圆截面情形比较, 截面的非对称性引起的不稳定区随非对称性的增加而扩大。

图 5.10 (σ, μ) 参数平面内的稳定域

5.5.2 具有原始曲率的非圆截面直杆的平衡稳定性

若非圆截面杆在松弛状态下具有原始曲率 κ^0 , 由于直杆平衡要求 $\omega_i = 0 (i=1, 2)$, 必须存在绕副法线轴的常值力矩 $M_0 = -B\kappa^0$ 以消除杆的原始曲率。此平衡状态与 Kirchhoff 方程 (5.4.5) 的以下特解相对应

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = F_0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = M_0, \quad M_3 = 0 \quad (5.5.14)$$

从方程组 (5.4.5) 导出一次近似扰动方程

$$x_1' = -x_5 \quad (5.5.15a)$$

$$x_2' = (1 + \sigma)x_4 \quad (5.5.15b)$$

$$x_3' = 0 \quad (5.5.15c)$$

$$x_4' = \mu x_2 + (1 + \nu)x_6 \quad (5.5.15d)$$

$$x_5' = -\mu x_1 \quad (5.5.15e)$$

$$x_6' = -(1 + \sigma)x_4 \quad (5.5.15f)$$

其特征方程为

$$\lambda^2(\lambda^2 - \mu)[\lambda^2 + (1 + \sigma)(1 + \nu - \mu)] = 0 \quad (5.5.16)$$

存在两个零特征值 $\lambda = 0$, 与扰动方程组 (5.5.15) 的以下初积分相对应:

$$x_3 = \text{const}, \quad x_2 + x_6 = \text{const} \quad (5.5.17)$$

利用式 (5.5.14), 可从 2.4 节中的式 (2.4.12) 和式 (2.4.14) 直接导出此初积分。除零根以外特征方程 (5.5.16) 的纯虚根条件为

$$\mu < 0 \quad \text{或} \quad F_0 < 0 \quad (5.5.18)$$

表明带原始曲率的弹性杆在轴向压力与横向力矩的联合作用下可维持直杆的稳定平衡。

5.5.3 轴向受压的非圆截面直杆的平衡稳定性

讨论受轴向压力单独作用的非圆截面直杆, 令特解 (5.5.1) 中 $M_0 = 0, F_0 = -|F_0|$, 化作

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -|F_0|, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0 \quad (5.5.19)$$

由于 $M_0 = 0$, 必须重新定义无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和扰动量 $x_i (i=1, 2, \dots, 6)$

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \sqrt{\frac{|F_0|}{B}} s, \quad x_1 = \frac{F_1}{|F_0|}, \quad x_2 = \frac{F_2}{|F_0|}, \quad x_3 = \frac{F_3}{|F_0|} + 1 \\ x_4 &= \frac{M_1}{\sqrt{B|F_0|}}, \quad x_5 = \frac{M_2}{\sqrt{B|F_0|}}, \quad x_6 = \frac{M_3}{\sqrt{B|F_0|}}\end{aligned}\quad (5.5.20)$$

代入方程组(5.4.5),导出一次近似扰动方程

$$x_1' = \delta_1 x_2 + x_5 \quad (5.5.21a)$$

$$x_2' = -\delta_1 x_1 - (1 + \sigma) x_4 \quad (5.5.21b)$$

$$x_3' = 0 \quad (5.5.21c)$$

$$x_4' = x_2 + \delta_1 x_5 \quad (5.5.21d)$$

$$x_5' = -x_1 - \delta_1 x_4 \quad (5.5.21e)$$

$$x_6' = 0 \quad (5.5.21f)$$

其中 δ_1 为新定义的无量纲扭率

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{B}{|F_0|}} \omega_3^0 \quad (5.5.22)$$

方程组(5.5.21)的特征方程与式(5.4.28)完全相同,系数 a, b 定义为

$$\begin{aligned}a &= \sigma + 2(1 + \delta_1^2), \quad b = (1 - \delta_1^2)(1 + \sigma - \delta_1^2) \\ a^2 - 4b &= \sigma^2 + 8\delta_1^2(2 + \sigma)\end{aligned}\quad (5.5.23)$$

由于 $1 + \sigma = B/A > 0$, 可看出稳定性条件(5.4.31)中的 $a > 0$ 和 $a^2 - 4b > 0$ 条件恒满足,且满足

$$\begin{aligned}b &> (1 - \delta_1^2)^2 > 0 \quad (B > A) \\ b &> (1 + \sigma - \delta_1^2)^2 > 0 \quad (B < A)\end{aligned}\quad (5.5.24)$$

从而证明:具有原始扭率的非圆截面压杆的平衡恒稳定。其圆截面情形特例即 5.2.3 节中讨论过的压杆问题。上述稳定性条件满足时,除零根以外的特征值为纯虚根 $\lambda = \pm i\bar{k}$ 。对以下两种特殊情况分别导出

无原始扭率的非圆截面杆($\delta_1 = 0$)

$$\bar{k} = 1 \quad \text{或} \quad 1 + \sigma \quad (5.5.25a)$$

具有原始扭率的圆截面杆($\sigma = 0$)

$$\bar{k} = 1 + \delta_1 \quad \text{或} \quad 1 - \delta_1 \quad (5.5.25b)$$

由于压杆两端的载荷对称,两端铰支的约束状况亦对称,直杆的受扰挠性线为相对中点对称或反对称曲线,扰动量的边界值应满足

$$x_i(\bar{L}) = \pm x_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.5.26)$$

其中 $\bar{L} = L\sqrt{|F_0|/B}$ 为无量纲化的杆长。参数 $\bar{k}$ 应满足与式(5.2.28)类似的附加条件

$$\bar{k}\bar{L} = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.5.27)$$

与条件(5.4.38)的区别在于,考虑直杆受扰后可能出现相对中点对称的挠性线,谐波次数 n 也可奇数。将式(5.5.25)确定的参数 $\bar{k}$ 代入条件(5.5.27),令 $n = 1$,导出满足此条件的最小载荷,即导致压杆失稳的欧拉载荷 $|F_0|_{cr}$ 。

无原始扭率的非圆截面杆

$$|F_0|_{cr} = \min\left(\frac{\pi^2 A}{L^2}, \frac{\pi^2 B}{L^2}\right) \quad (5.5.28a)$$

具有原始扭率的圆截面杆

$$|F_0|_{cr} = \min\left[\frac{\pi^2 B}{(1 \pm \delta_1)^2 L^2}\right] \quad (5.5.28b)$$

两端铰支压杆的欧拉载荷为上述结论中 $\delta_1=0, A=B=EI$ 的特例。

5.5.4 常扭率杆平衡状态的分岔

根据 2.6.3 节中对常扭率杆的分析,当截面主轴坐标系 ($P\text{-}xyz$) 与 Frenet 坐标系重合时,杆的挠率与扭率均为常值 ω_{30} 。设杆具有原始扭率 ω_3^0 ,令方程 (2.1.15a) 和方程 (2.1.15b) 中 $\omega_1=0, \omega_2=\kappa, \omega_3=\omega_{30}, F_\alpha, F_\beta$ 改记为 F_1, F_2 , 解出

$$F_1 = -B \frac{d\kappa}{ds}, \quad F_2 = \kappa[(C-B)\omega_{30} - C\omega_3^0] \quad (5.5.29)$$

将 Jacobi 积分 (2.4.2) 中的 F_γ 改记为 F_3 , 解出

$$F_3 = H - \frac{1}{2}(B\kappa^2 + C\omega_{30}^2) \quad (5.5.30)$$

将式 (5.5.29) 和式 (5.5.30) 代入方程 (5.4.5a), 化简后导出与式 (2.6.43) 或式 (3.5.12) 完全相同的 Duffing 方程。引入变量 $\kappa' = d\kappa/ds$, 化作以下一阶自治系统

$$\frac{d\kappa'}{d\kappa} = \frac{\kappa(2c - \kappa^2)}{2\kappa'} \quad (5.5.31)$$

其中系数 c 的定义见式 (2.6.44), 改写为

$$c = \left(\frac{3}{2}\lambda - 1\right)(\mu - 1)\omega_{30}^2 \quad (5.5.32)$$

$\lambda = C/A$ 为杆的刚度系数比, μ 为新定义的与积分常数 H 有关的无量纲参数

$$\mu = \left(\frac{3}{2}\lambda - 1\right)^{-1} \left(\frac{H}{B\omega_{30}^2} + \frac{\lambda\omega_3^0}{\omega_{30}}\right) \quad (5.5.33)$$

Duffing 方程 (3.5.12) 的解析解已在 3.5.2 节中导出。为定性分析弹性杆的平衡状态及其稳定性, 讨论方程 (5.5.31) 可能存在的奇点 (κ_s, κ_s')

$$\begin{aligned} \kappa_s &= 0 \quad \text{或} \quad \kappa_s = \pm\sqrt{2c} \\ \kappa_s' &= 0 \end{aligned} \quad (5.5.34)$$

上述各奇点与杆的平衡状态一一对应。设 $\lambda > 2/3$, 则 $\mu \leq 1$ 时方程 (5.5.31) 只有唯一的奇点 $\kappa_s = 0$, 对应于杆的直线平衡状态。 $\mu > 1$ 时, 除零点以外还增加 2 个非零奇点 $\kappa_s = \pm\omega_{30}\sqrt{(3\lambda-2)(\mu-1)}$ 。1.2 节中已说明非零常值曲率对应的平衡状态为螺旋线状态。随着参数 μ 的变化, 杆的曲率在 $\mu=1$ 处产生叉式分岔。利用静态分岔的 Poincaré 理论判断^[257], $\mu \leq 1$ 时杆的直线平衡状态稳定, 当 $\mu > 1$ 时转为不稳定, 而新出现的螺旋线状态为稳定平衡状态。在图 5.11 的参数平面 (μ, κ_s) 内,

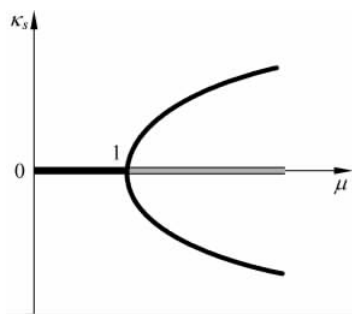


图 5.11 弹性杆曲率变化的分岔图

分别以黑线和灰线表示杆的稳定和不稳定的曲率稳态值。 $\lambda < 2/3$ 时也存在类似的分岔现象,但稳定与不稳定条件应互换。

以上分析表明,当参数 μ 经过临界点 1 时,直杆失稳转变为螺旋线。直杆平衡的稳定条件 $\mu < 1$ 也可写作

$$H < A\omega_{30}^2 \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{\omega_3^0}{\omega_{30}} \right) \lambda - 1 \right] \quad (5.5.35)$$

令式(5.5.30)中 $F_3 = F_0, \kappa_s = 0, \omega_{30} = M_0/C$,将解出的积分常数 H 代入上式后化作

$$F_0 < \frac{M_0^2}{C} \left(1 - \frac{A}{C} - \frac{\omega_3^0}{\omega_{30}} \right) \quad (5.5.36)$$

对于 2.6.2 节中讨论过的 Kovalevskaya 特殊情形,令上式中 $C = 2A, \omega_3^0 = 0$,简化为

$$F_0 < \frac{M_0^2}{4A} \quad (5.5.37)$$

将上式与式(5.5.8)比较可看出,此不等式与判断受拉扭圆截面直杆平衡稳定性的 Greenhill 判据在形式上一致,表明 Greenhill 判据也适用于无原始扭率的 Kovalevskaya 情形非圆截面杆。上述直杆失稳转变为螺旋线的现象可在电话线或攀缘植物细茎的卷曲过程中观察到。

5.6 受扭矩作用螺旋杆的稳定性与分岔

5.6.1 奇点与螺旋线平衡

设非圆截面弹性杆受扭矩 M_0 单独作用,令式(5.4.10)中 $F_0 = 0$,则截面内力主矩 M 为常矢量

$$F = 0, \quad M = M_0 e_\zeta \quad (5.6.1)$$

在 2.6.1 节中曾利用此特殊情况下的初积分(2.4.7)导出降阶的平衡方程。同样方法也可用于稳定性的定性分析。以欧拉角 ψ, θ, φ 表示截面坐标系 $(P-xyz)$ 相对惯性坐标系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的姿态(图 2.3),根据式(2.2.4)将弯扭度 ω 用欧拉角及其导数表示为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \sin\varphi + \frac{d\theta}{ds} \cos\varphi \\ \omega_2 &= \frac{d\psi}{ds} \sin\theta \cos\varphi - \frac{d\theta}{ds} \sin\varphi \\ \omega_3 &= \frac{d\psi}{ds} \cos\theta + \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

将沿 ζ 轴的主矩 M 向 $(P-xyz)$ 各轴投影

$$M_1 = M_0 \sin\theta \sin\varphi, \quad M_2 = M_0 \sin\theta \cos\varphi, \quad M_3 = M_0 \cos\theta \quad (5.6.3)$$

将式(5.6.2)代入式(2.1.17),与式(5.6.3)的各项相等,在 $\theta \neq 0$ 条件下导出无量纲化的一阶微分方程组

$$\theta' = (\sigma \sin\theta \cos\varphi - \epsilon) \sin\varphi \quad (5.6.4a)$$

$$\psi' = 1 + \sigma \sin^2 \varphi + \epsilon \csc \theta \cos \varphi \quad (5.6.4b)$$

$$\varphi' = (\nu - \sigma \sin^2 \varphi) \cos \theta - \epsilon \cot \theta \cos \varphi + \delta(1 + \nu) \quad (5.6.4c)$$

其中撇号表示对无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 的导数, $\bar{s}$ 的定义见式(5.4.23)。将方程(5.6.4a)与(5.6.4c)相除消去 $\bar{s}$ 的微分后, 导出只含变量 θ, φ 的一阶微分方程

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{(\sigma \sin \theta \cos \varphi - \epsilon) \sin \varphi}{(\nu - \sigma \sin^2 \varphi) \cos \theta - \epsilon \cot \theta \cos \varphi + \delta(1 + \nu)} \quad (5.6.5)$$

此方程在 (θ, φ) 相平面内的奇点 φ_s, θ_s 为以下方程组的解

$$(\sigma \sin \theta_s \cos \varphi_s - \epsilon) \sin \varphi_s = 0 \quad (5.6.6a)$$

$$(\nu - \sigma \sin^2 \varphi_s) \cos \theta_s - \epsilon \cot \theta_s \cos \varphi_s + \delta(1 + \nu) = 0 \quad (5.6.6b)$$

欧拉角的常值解 φ_s, θ_s 对应于螺旋线平衡状态。将 φ_s, θ_s 代入式(5.6.4b), 得到 ψ' 的常值解

$$\psi'_s = 1 + \sigma \sin^2 \varphi_s + \epsilon \csc \theta_s \cos \varphi_s \quad (5.6.7)$$

使用 4.2.1 节中建立的柱坐标, 令 $\Psi = \psi - \pi$, 将 θ_s, ψ'_s 代入挠性线方程(4.1.8b)和(4.1.3c), 积分得到

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{1}{\psi'_s} \sin \theta_s \\ \Psi_s &= \pi + \psi'_s (s - s_0) \\ \zeta_s &= (\cos \theta_s) (s - s_0) \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

则奇点 φ_s, θ_s 所对应的螺旋线平衡状态的螺旋角和半径分别为

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_s, \quad R = \left(\frac{B}{M_0 \psi'_s} \right) \sin \theta_s \quad (5.6.9)$$

引入扰动 $x = \varphi - \varphi_s, y = \theta - \theta_s$, 导出方程(5.6.5)的一次近似方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \quad (5.6.10)$$

其中系数 a, b, c, d 按附录 D 中式(D.16)计算, 得到

$$\begin{aligned} a &= -\sigma \cos \theta_s \sin 2\varphi_s + \epsilon \cot \theta_s \sin \varphi_s \\ b &= -(\nu - \sigma \sin^2 \varphi_s) \sin \theta_s + \epsilon \csc^2 \theta_s \cos \varphi_s \\ c &= \sigma \sin \theta_s \cos 2\varphi_s - \epsilon \cos \varphi_s \\ d &= \sigma \cos \theta_s \cos \varphi_s \sin \varphi_s \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

螺旋线平衡的稳定性可根据奇点 φ_s, θ_s 的类型, 利用附录 D 中的判据(D.19)判断。

5.6.2 带原始曲率弹性杆的平衡稳定性与分岔

设杆的松弛状态为具有原始曲率 κ^0 的圆弧杆, 令方程(5.6.5)中 $\delta=0$, 化作

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{(\sigma \sin \theta \cos \varphi - \epsilon) \sin \varphi}{[(\nu - \sigma \sin^2 \varphi) - \epsilon \csc \theta \cos \varphi] \cos \theta} \quad (5.6.12)$$

考虑不等式 $\nu > 0, |\epsilon| < 1$ 的存在, 利用判据(D.19)判断各奇点的类型如表 5.2 所示。

表 5.2 带原始曲率杆的奇点类型

奇点	φ_s	θ_s	a	b	c	d	存在条件	奇点类型
S_1	0 或 π	$\pi/2$ 或 $3\pi/2$	0	$-\nu+\epsilon$	$\sigma-\epsilon$ $\sigma-\epsilon$	0	—	$\epsilon<\sigma, \epsilon<\nu$: 中心 $\nu>\epsilon>\sigma$: 鞍点
S_2	0 或 π	$3\pi/2$ 或 $\pi/2$	0	$-\nu-\epsilon$	$-\sigma-\epsilon$	0	—	$\epsilon>-\sigma, \epsilon>-\nu$: 中心 $-\nu<\epsilon<-\sigma$: 鞍点
S_3	0	$\arcsin\left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)$	0	$\frac{\nu^2-\epsilon^2}{\epsilon}$	$\epsilon\left(\frac{\sigma}{\nu}-1\right)$	0	$ \epsilon < \nu $	中心
S_4	π	$\arcsin\left(-\frac{\epsilon}{\nu}\right)$	0	$\frac{\epsilon^2-\nu^2}{\epsilon}$	$\epsilon\left(1-\frac{\sigma}{\nu}\right)$	0	$ \epsilon < \nu $	中心
S_5	$\arccos\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)$	$\pi/2$	0	$\frac{2\epsilon^2-\sigma(\nu+\sigma)}{\sigma}$	$\frac{\epsilon^2-\sigma^2}{\sigma}$	0	$ \epsilon < \sigma $	鞍点

奇点 S_1, S_2 对应于平面圆弧的平衡状态,其稳定性条件可综合为

$\nu > \pm \epsilon, \sigma > \pm \epsilon$: 稳定, $\nu > \pm \epsilon > \sigma$: 不稳定 (5.6.13)

化为有量纲形式时,由于 $\nu > \pm \epsilon, B > C(1 \pm \epsilon)$ 条件自然满足,稳定性条件为

$B > A(1 \pm \epsilon)$: 稳定, $B < A(1 \pm \epsilon)$: 不稳定 (5.6.14)

无原始曲率时,得到圆弧杆的稳定性条件 $\sigma > 0$,即 $B > A$ 。

奇点 S_3, S_4 对应于稳定的螺旋线平衡,螺旋角取决于原始曲率。奇点 S_5 对应于不稳定的圆弧杆平衡。图 5.12 为 $(\theta_s, \varphi_s, \epsilon)$ 三维参数空间中奇点随参数 ϵ 的分布状况,分别以黑线和灰线表示稳定和 unstable 平衡状态。

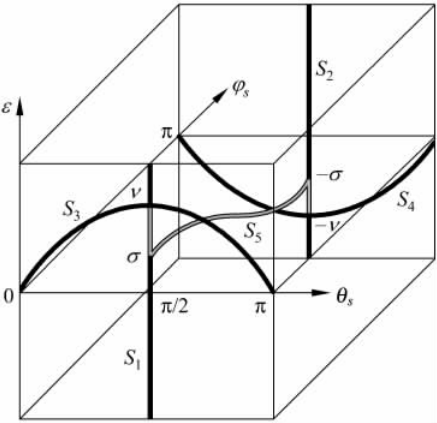


图 5.12 $(\theta_s, \varphi_s, \epsilon)$ 参数空间中奇点的分布

5.6.3 带原始扭率弹性杆的平衡稳定性与分岔

设杆的松弛状态为具有原始扭率的直杆,令方程(5.6.5)中 $\epsilon=0$,化作

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\sigma \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi}{(\nu - \sigma \sin^2\varphi) \cos\theta + \delta_1} \quad (5.6.15)$$

令式(5.6.11)中 $\varepsilon = 0$, 考虑不等式(5.4.12), 利用判据(D.19)判断各奇点的类型如表 5.3 所示, 其中 $\delta_1 = \delta(1 + \nu)$ 。

表 5.3 带原始扭率杆的奇点类型

奇点	φ_s	θ_s	a	b	c	d	存在条件	奇点类型
S_1	0 或 π	$\arccos\left(-\frac{\delta_1}{\nu}\right)$	0	$-\sqrt{\nu^2 - \delta_1^2}$	$\frac{\sigma}{\nu} \sqrt{\nu^2 - \delta_1^2}$	0	$ \delta_1 < \nu $	$\sigma > 0$: 中心 $\sigma < 0$: 鞍点
S_2	$\pi/2$ 或 $3\pi/2$	$\arccos\left(\frac{\delta_1}{\nu - \sigma}\right)$	0	$\sqrt{(\nu - \sigma)^2 - \delta_1^2}$	$\frac{\sigma}{\nu - \sigma} \sqrt{(\nu - \sigma)^2 - \delta_1^2}$	0	$ \delta_1 < \nu - \sigma $	$\sigma < 0$: 中心 $\sigma > 0$: 鞍点

奇点 S_1 和 S_2 分别对应于不同的螺旋线平衡状态, 原始扭率亦为零时, 转化为圆弧杆。奇点 S_1 的中心条件 $\sigma > 0$ 与 5.4.3 节中导出的无原始曲率和原始扭率的螺旋杆平衡稳定性条件一致。无论 S_1 或 S_2 的中心奇点条件均可归纳为 $B > A$ 。参照以上对类似情况的分析结果(5.4.34), (5.4.49)和(5.6.14)可归纳出共同的稳定性条件, 即弹性杆绕副法线轴的抗弯刚度大于绕法线轴的抗弯刚度为平衡稳定性条件。以下就圆弧杆情形, 从能量观点出发解释此结论的物理意义。

利用式(5.1.23)计算圆弧杆的弧坐标哈密顿函数 H 。令其中

$$F_0 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{M_0}{B}, \quad \omega_3 = 0 \quad (5.6.16)$$

得到

$$H = \frac{M_0^2}{2B} \quad (5.6.17)$$

将 $B > A$ 与 $B < A$ 两种相反情况相比较, 由于 M_0 为常值, 前者对应的弧坐标哈密顿函数 H 为极小值, 而后者的 H 为极大值。根据推广的拉格朗日定理, 前者稳定, 后者不稳定。

与直杆对应的 $\theta = 0$ 或 π 的特殊位置为欧拉角的奇点。为有可能讨论直杆平衡状态的稳定性, 引入新的角度坐标 θ_1, φ_1 以代替欧拉角 θ, φ

$$\theta_1 = \theta \cos\varphi, \quad \varphi_1 = \theta \sin\varphi \quad (5.6.18)$$

其中 θ 是在零附近变化的扰动量。将 θ_1, φ_1 对 $\bar{s}$ 求导, 得到

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \theta' \cos\varphi - \varphi' \theta \sin\varphi \\ \varphi'_1 &= \theta' \sin\varphi + \varphi' \theta \cos\varphi \end{aligned} \quad (5.6.19)$$

将式(5.6.4a)和式(5.6.4c)代入式(5.6.19), 令 $\varepsilon = 0$, 略去 θ 的二次以上小量, 且利用式(5.5.3)定义的参数 $\nu_1 = \nu + \delta_1$, 导出

$$\theta'_1 = (\sigma - \nu_1) \theta \sin\varphi \quad (5.6.20a)$$

$$\varphi'_1 = \nu_1 \theta \cos\varphi \quad (5.6.20b)$$

将此二方程相除消去弧坐标 $\bar{s}$ 的微分, 得到以 θ_1 和 φ_1 为变量的自治系统

$$\frac{d\theta_1}{d\varphi_1} = c \frac{\varphi_1}{\theta_1} \quad (5.6.21)$$

其中参数 c 定义为

$$c = \frac{\sigma - \nu_1}{\nu_1} \quad (5.6.22)$$

方程(5.6.21)存在奇点 $S_3: \theta_{1s} = \varphi_{1s} = 0$, 与直杆平衡状态相对应。奇点 S_3 的类型取决于参数 c , 即

$$c < 0: \text{中心}, \quad c > 0: \text{鞍点} \quad (5.6.23)$$

导出与式(5.5.10)相同的稳定性条件

$$\nu_1 > 0, \nu_1 > \sigma \quad \text{或} \quad \nu_1 < 0, \nu_1 < \sigma: \text{稳定} \quad (5.6.24a)$$

$$\sigma < \nu_1 < 0 \quad \text{或} \quad \sigma > \nu_1 > 0: \text{不稳定} \quad (5.6.24b)$$

5.5.1 节中已说明, 无原始扭率的非圆截面直杆在扭矩单独作用下必稳定。若原始扭率的存在使不稳定条件(5.6.24b)得到满足, 则不稳定的直杆状态 S_3 在扰动作用下转化为与 S_1 或 S_2 对应的螺旋线平衡。

为便于表达与直杆对应的特殊奇点 $\theta_s = 0$, 以 θ_s 为径向坐标, φ_s 为幅角, 建立柱坐标形式的三维参数空间 $(\theta_s, \varphi_s, \delta_1)$ 。图 5.13 为此空间中奇点的分布状况, 仍以黑线和灰线表示稳定和 unstable 平衡状态。

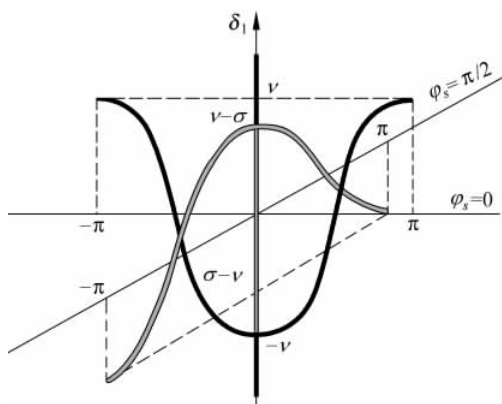


图 5.13 $(\theta_s, \varphi_s, \delta_1)$ 柱坐标参数空间中奇点的分布

5.7 稳定性分析的 Lyapunov 直接方法

以上各节对弹性杆平衡稳定性的讨论以特征值的纯虚根条件为依据, 导出的稳定性条件为一次近似稳定性的临界情况, 仅为原非线性系统稳定性的必要条件。本节应用 Lyapunov 直接方法讨论直杆平衡的两种特殊情形, 证明上述稳定性条件为原非线性系统稳定性的充分必要条件。

5.7.1 圆截面直杆平衡的稳定性条件

关于具有原始扭率的圆截面直杆的平衡问题, 在 2.4.2 节中已导出用主矢和主矩分量 $F_i, M_i (i=1, 2, 3)$ 表示的初积分(2.4.12)~(2.4.15), 令其中 $A=B$, 写作

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_1^2 + M_2^2}{A} + \frac{(M_3 + C\omega_3^0)^2}{C} \right] + F_3 = H \quad (5.7.1)$$

$$F_1 M_1 + F_2 M_2 + F_3 M_3 = F_0 M_0 \quad (5.7.2)$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_0^2 \quad (5.7.3)$$

$$M_3 = M_{30} \quad (5.7.4)$$

积分常数 F_0, M_0, H, M_{30} 取决于杆的受力状态。上述初积分也可从方程组(5.4.5)直接

导出。

将带原始扭率圆截面直杆的特解(5.5.1)作为未扰状态,设受扰状态为

$$\begin{aligned} F_1 &= \eta_1, \quad F_2 = \eta_2, \quad F_3 = F_0 + \eta_3, \\ M_1 &= \xi_1, \quad M_2 = \xi_2, \quad M_3 = M_0 + \xi_3 \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

其中扰动 $\xi_i, \eta_i (i=1,2,3)$ 为小量,在以下计算中仅保留扰动的二次项。将式(5.7.5)代入初积分(5.7.1)~(5.7.4),得到的二次多项式分别记作 V_1, V_2, V_3, V_4

$$V_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2A\eta_3 = \text{const} \quad (5.7.6a)$$

$$V_2 = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 + M_0 \eta_3 = \text{const} \quad (5.7.6b)$$

$$V_3 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2F_0 \eta_3 = \text{const} \quad (5.7.6c)$$

$$V_4 = \xi_3 = \text{const} \quad (5.7.6d)$$

构造以下 Lyapunov 函数

$$V = F_0(V_1 + 2\mu V_2 + V_4^2) - (A + \mu M_0)V_3 \quad (5.7.7)$$

其中 μ 为待定常数。将式(5.7.6)代入上式,展开化简后整理为

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i^* \quad (5.7.8)$$

$V_i^* (i=1,2,3)$ 为二次多项式

$$V_i^* = F_0 \xi_i^2 + 2\mu F_0 \xi_i \eta_i - (A + \mu M_0) \eta_i^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.7.9)$$

根据 Sylvester 判据, $V_i^* (i=1,2,3)$ 有相同的正定性条件

$$\begin{vmatrix} F_0 & \mu F_0 \\ \mu F_0 & -(A + \mu M_0) \end{vmatrix} = -F_0(F_0\mu^2 + M_0\mu + A) > 0 \quad (5.7.10)$$

令上式括号中 μ 的二次多项式等于零,得到

$$F_0\mu^2 + M_0\mu + A = 0 \quad (5.7.11)$$

若方程(5.7.11)存在单实根,则必有适当的常数 μ 使不等式(5.7.10)得到满足。方程(5.7.11)的单实根条件为

$$M_0^2 - 4AF_0 > 0 \quad (5.7.12)$$

此不等式即 Greenhill 判据(5.2.8)中的不等式条件。

再讨论 Greenhill 判据中的等式条件

$$M_0^2 - 4AF_0 = 0 \quad (5.7.13)$$

满足此条件时,方程(5.7.11)存在重实根

$$\mu = -\frac{M_0}{2F_0} = -\frac{2A}{M_0} \quad (5.7.14)$$

利用式(5.7.13)和式(5.7.14)可将式(5.7.8)中的 V 函数化作

$$V = F_0 \sum_{i=1}^3 \left(\xi_i - \frac{2A}{M_0} \eta_i \right)^2 \quad (5.7.15)$$

当以下关系式成立时 V 函数为零

$$\xi_i - \frac{2A}{M_0} \eta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.7.16)$$

表明 V 函数为半正定函数。将式(5.7.7)表示的 V 函数增加一附加项,定义为新的 Lyapunov 函数 $\hat{V}^{[251]}$

$$\hat{V} = V + \left[V_3 - \left(\frac{F_0 M_0}{A} \right) V_4 \right]^2 \quad (5.7.17)$$

利用式(5.7.14)可将 $\hat{V}$ 函数化作

$$\hat{V} = F_0 \sum_{i=1}^3 \left(\xi_i - \frac{2A}{M_0} \eta_i \right)^2 + \left[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - \frac{F_0 M_0}{A} \left(\xi_3 - \frac{2A}{M_0} \eta_3 \right) \right]^2 \quad (5.7.18)$$

满足关系式(5.7.16)时上式化作

$$\hat{V} = (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)^2 \quad (5.7.19)$$

即使在满足关系式(5.7.16)的条件下, $\hat{V}$ 函数也仅在 $\xi_i = \eta_i = 0 (i=1, 2, 3)$ 时等于零, 即 $\hat{V}$ 为正定函数。由于 V 函数或 $\hat{V}$ 函数沿扰动方程解曲线保持常数, 其全导数必等于零, 根据 Lyapunov 定理一, 未扰状态(5.5.1)必稳定。综合条件(5.7.12)和(5.7.13), 证明 Greenhill 判据(4.3.21)或(5.2.8)也是具有原始扭率圆截面直杆平衡稳定的充分条件。

5.7.2 圆截面直杆平衡的不稳定条件

将式(5.7.5)代入 Kirchhoff 方程(5.4.5a), (5.4.5b), (5.4.5d)和(5.4.5e), 只保留扰动的一阶小量, 导出扰动方程

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{ds} &= - \left(\frac{F_0}{A} \right) \xi_2 + \left(\frac{M_0}{C} + \omega_3^0 \right) \eta_2 \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= \left(\frac{F_0}{A} \right) \xi_1 - \left(\frac{M_0}{C} + \omega_3^0 \right) \eta_1 \\ \frac{d\xi_1}{ds} &= - \left(\frac{M_0}{A} - \frac{M_0}{C} - \omega_3^0 \right) \xi_2 + \eta_2 \\ \frac{d\xi_2}{ds} &= \left(\frac{M_0}{A} - \frac{M_0}{C} - \omega_3^0 \right) \xi_1 - \eta_1 \end{aligned} \quad (5.7.20)$$

构造以下不定号函数为 Lyapunov 函数

$$V = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \quad (5.7.21)$$

将扰动方程(5.7.20)代入 V 函数对 s 的全导数, 导出

$$\begin{aligned} \frac{dV}{ds} &= \frac{d\xi_1}{ds} \eta_2 + \frac{d\eta_2}{ds} \xi_1 - \frac{d\xi_2}{ds} \eta_1 - \frac{d\eta_1}{ds} \xi_2 \\ &= \frac{F_0}{A} (\xi_1^2 + \xi_2^2) - \frac{M_0}{A} (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2) + \eta_1^2 + \eta_2^2 \end{aligned} \quad (5.7.22)$$

根据 Sylvester 判据, dV/ds 的正定性条件为

$$\begin{vmatrix} F_0/A & -M_0/2A \\ -M_0/2A & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{A} \left(F_0 - \frac{M_0^2}{4A} \right) > 0 \quad (5.7.23)$$

即

$$M_0^2 - 4AF_0 < 0 \quad (5.7.24)$$

此条件满足时, dV/ds 为正定函数。根据 Lyapunov 定理三, 未扰状态(5.5.1)不稳定。从而沿另一途径证明 Greenhill 稳定性条件的必要性。

5.7.3 受扭矩单独作用的非圆截面直杆平衡的稳定性条件

关于受扭矩单独作用的带原始扭率的非圆截面直杆的平衡问题, 2.4.2 节中已给出主矢为零时非圆截面杆的初积分(2.4.16)和 Jacobi 积分(2.4.13), 令其中 $F_3 = 0$, 得到

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M_0^2 \quad (5.7.25)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_1^2}{A} + \frac{M_2^2}{B} + \frac{(M_3 + C\omega_3^0)^2}{C} \right] = H \quad (5.7.26)$$

由于杆仅受扭矩作用,令特解(5.5.1)中 $F_0=0$ 作为未扰状态。设受扰状态为

$$M_1 = \xi_1, \quad M_2 = \xi_2, \quad M_3 = M_0 + \xi_3 \quad (5.7.27)$$

将式(5.7.27)代入初积分(5.7.25)和(5.7.26),得到以下二次多项式

$$V_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2M_0\xi_3 = \text{const} \quad (5.7.28)$$

$$V_2 = \frac{\xi_1^2}{A} + \frac{\xi_2^2}{B} + \frac{1}{C} [\xi_3^2 + 2(M_0 + C\omega_3^0)\xi_3] = \text{const} \quad (5.7.29)$$

构造以下 Lyapunov 函数

$$V = V_1 - C_1 V_2 \pm V_1^2 \quad (5.7.30)$$

其中常数 $C_1 = C(1 - \omega_3^0/\omega_{30})$ 如式(5.5.11)的定义。将式(5.7.28)和式(5.7.29)代入上式,展开化简后整理为

$$V = \left(\frac{A-C_1}{A} \right) \xi_1^2 + \left(\frac{B-C_1}{B} \right) \xi_2^2 \pm (4ABM_0^2) \xi_3^2 \quad (5.7.31)$$

对以下两种情形,分别对上式的第三项取不同符号

$$C_1 < A, C_1 < B: \text{第三项取正号}, V \text{ 函数为正定} \quad (5.7.32a)$$

$$C_1 > A, C_1 > B: \text{第三项取负号}, V \text{ 函数为负定} \quad (5.7.32b)$$

由于 V 函数沿扰动方程解曲线保持常数,其全导数等于零,根据 Lyapunov 定理一,对以上两种情形未扰状态(5.5.1)均稳定。从而证明仅受扭矩作用的带初扭率非圆截面直杆平衡稳定的充分条件为

$$C_1 < A, C_1 < B \quad \text{或} \quad C_1 > A, C_1 > B \quad (5.7.33)$$

与判据(5.5.12a)完全一致。

5.7.4 受扭矩单独作用的非圆截面直杆平衡的不稳定条件

将式(5.7.27)代入 Kirchhoff 方程(5.4.5d)和(5.4.5e),只保留扰动的一阶小量,导出扰动方程

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} &= - \left(\frac{M_0}{B} \right) \xi_2 + \left(\frac{M_0}{C_1} \right) \xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{ds} &= \left(\frac{M_0}{A} \right) \xi_1 - \left(\frac{M_0}{C_1} \right) \xi_1 \end{aligned} \quad (5.7.34)$$

构造以下不定号函数为 Lyapunov 函数

$$V = \xi_1 \xi_2 \quad (5.7.35)$$

将扰动方程(5.7.34)代入 V 函数对 s 的全导数,导出

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\xi_1}{ds} \xi_2 + \frac{d\xi_2}{ds} \xi_1 = M_0 \left[\left(\frac{C_1 - A}{AC_1} \right) \xi_1^2 + \left(\frac{B - C_1}{BC_1} \right) \xi_2^2 \right] \quad (5.7.36)$$

dV/ds 的定号性条件为

$$A < C_1 < B: dV/ds \text{ 正定} \quad (5.7.37a)$$

$$A > C_1 > B: dV/ds \text{ 负定} \quad (5.7.37b)$$

根据 Lyapunov 定理三,以上两种情形的未扰状态(5.5.1)均不稳定,从而证明条件

(5.7.33)也是稳定性的必要条件,与判据(5.5.12b)一致。

5.8 弹性杆的混沌平衡形态

5.8.1 相空间中的奇点与异宿轨道

设无原始扭率的非圆截面弹性杆的两端仅受扭矩作用,截面作用力的主矢为零。列出以主矩 $M_i (i=1,2,3)$ 为变量的 Kirchhoff 方程

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{ds} &= \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)M_2M_3 \\ \frac{dM_2}{ds} &= \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)M_1M_3 \\ \frac{dM_3}{ds} &= \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)M_1M_2\end{aligned}\quad (5.8.1)$$

系统(5.8.1)的初积分(5.7.25)表示主矩 M 的模守恒

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M_0^2 \quad (5.8.2)$$

初积分(5.7.26)表示未扰状态下系统(5.8.1)的哈密顿函数 H 守恒,令其中 $\omega_3^0=0$,写作

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1^2}{A} + \frac{M_2^2}{B} + \frac{M_3^2}{C} \right) = H_0 \quad (5.8.3)$$

在 (M_1, M_2, M_3) 三维相空间内,初积分(5.8.2)和(5.8.3)表示的球面与椭球面的交线确定相轨迹曲线族(图 5.14)。

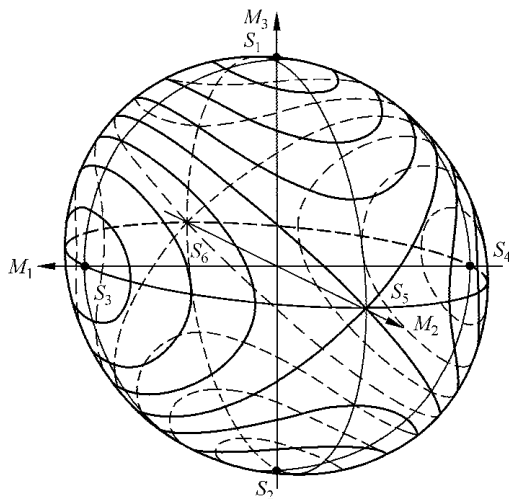


图 5.14 (M_1, M_2, M_3) 相空间内未扰系统的相轨迹族

设在理想状态下 A, B, C 的未扰值为 A_0, B_0, C_0 , 将方程组(5.8.1)各式两两相除,消去弧坐标微分,化作

$$\begin{aligned}
\frac{dM_1}{dM_2} &= - \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \frac{M_2}{M_1} \\
\frac{dM_2}{dM_3} &= - \left(\frac{c_2}{c_3} \right) \frac{M_3}{M_2} \\
\frac{dM_3}{dM_1} &= \left(\frac{c_3}{c_1} \right) \frac{M_1}{M_3}
\end{aligned} \tag{5.8.4}$$

其中系数 $c_i (i=1,2,3)$ 定义为

$$c_1 = \frac{B_0 - C_0}{B_0 C_0}, \quad c_2 = \frac{A_0 - C_0}{A_0 C_0}, \quad c_3 = \frac{A_0 - B_0}{B_0 A_0} \tag{5.8.5}$$

方程组(5.8.4)各式确定的平面相轨迹为图 5.14 中 (M_1, M_2, M_3) 三维相空间的相轨迹在坐标面上的投影。未扰系统(5.8.1)或(5.8.4)存在 6 个奇点

$$S_{1,2} : (0, 0, \pm M_0), \quad S_{3,4} : (\pm M_0, 0, 0), \quad S_{5,6} : (0, \pm M_0, 0) \tag{5.8.6}$$

不失一般性, 设 $A_0 > B_0 > C_0$, 则系数 $c_i (i=1,2,3)$ 均为正值。利用附录 D 的式(D.19)判断方程组(5.8.4)的奇点类型, $S_{1,2}, S_{3,4}$ 为 4 个中心, $S_{5,6}$ 为 2 个鞍点(图 5.14)。相空间中连接不同鞍点的 4 条异宿轨道可用初等函数表示为

$$\begin{aligned}
M_1 &= \pm M_0 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \operatorname{sech}(\sqrt{c_1 c_2} M_0 s) \\
M_2 &= \pm M_0 \tanh(-\sqrt{c_1 c_3} M_0 s) \\
M_3 &= \pm M_0 \sqrt{\frac{c_3}{c_2}} \operatorname{sech}(-\sqrt{c_1 c_3} M_0 s)
\end{aligned} \tag{5.8.7}$$

5.8.2 刚度系数周期变化引起的混沌

设在受扰状态下杆的抗扭刚度 C 仍保持常值 C_0 , 抗弯刚度 A, B 有微幅周期变化

$$\begin{aligned}
A &= A_0 + \varepsilon A_1 \cos(\omega_c s + \theta_c) \\
B &= B_0 + \varepsilon B_1 \cos(\omega_c s + \theta_c)
\end{aligned} \tag{5.8.8}$$

其中 ε 为小参数。将上式代入 Kirchhoff 方程(5.8.1), 仅保留 ε 的一次项, 导出

$$\begin{aligned}
\frac{dM_1}{ds} &= M_2 M_3 [c_1 + \varepsilon b_1 \cos(\omega_c s + \theta_c)] \\
\frac{dM_2}{ds} &= -M_1 M_3 [c_2 + \varepsilon a_1 \cos(\omega_c s + \theta_c)] \\
\frac{dM_3}{ds} &= M_1 M_2 [c_3 + \varepsilon (a_1 - b_1) \cos(\omega_c s + \theta_c)]
\end{aligned} \tag{5.8.9}$$

其中

$$a_1 = \frac{A_1}{A_0^2}, \quad b_1 = \frac{B_1}{B_0^2} \tag{5.8.10}$$

将式(5.8.8)代入式(5.8.3), 将导出的受扰状态哈密顿函数展成 ε 的幂级数

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2) \tag{5.8.11}$$

其中

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1^2}{A_0} + \frac{M_2^2}{B_0} + \frac{M_3^2}{C_0} \right) \tag{5.8.12a}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}(a_1 M_1^2 + b_1 M_2^2) \cos(\omega_c s + \theta_c) \quad (5.8.12b)$$

应用 Melnikov 解析方法判断受扰系统存在混沌的可能性。上述未扰哈密顿系统存在由异宿轨道(5.8.7)组成的异宿环,若受扰后其稳定流形与不稳定流形横截相交,则受扰系统存在 Smale 马蹄意义下的混沌。稳定流形与不稳定流形之间的距离可近似简化为便于计算的 Melnikov 函数^[257]

$$\tilde{M}(\theta_c) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} -\mathbf{M} \cdot (\nabla_M H_0 \times \nabla_M H_1) ds \quad (5.8.13)$$

其中 ∇ 为梯度算子。将式(5.8.7)代入此积分式,导出

$$\tilde{M}(\theta_c) = \frac{\pi \omega_c^2}{2(c_1 c_3)^{3/2}} (c_1 a_1 - c_2 b_1) \operatorname{cosech} \left(-\frac{\pi \omega_c}{\sqrt{c_1 c_3} M_0} \right) \sin \theta_c \quad (5.8.14)$$

以下条件满足时 $\tilde{M}(\theta_c)$ 存在简单零点,表明异宿轨道横截相交

$$c_1 a_1 - c_2 b_1 \neq 0 \quad (5.8.15)$$

因此不等式(5.8.15)为弹性杆存在混沌性态的充分条件。

5.8.3 Poincaré 截面与弹性杆的混沌性态

对受扰平衡方程(5.8.8)进行数值积分,给定参数 $M_0 = 2\sqrt{2}, A_0 = 2, B_0 = 1.5, C_0 = 1, A_1 = 1, B_1 = 2$ 对 $\varepsilon = 0, 0.005, 0.07$ 的不同值,从 36 个起始点出发的 Poincaré 截面见图 5.15。可看出当 $\varepsilon \neq 0$ 时,在异宿轨道附近出现的混沌区随着 ε 的增大而扩大。图 5.16 为 (M_1, M_2, M_3) 相空间内从单个起始点(1.2, 1.7, 1.9)出发的混沌性态相轨迹曲线。图 5.17 和图 5.18 表示规则性态与混沌性态弹性杆的不同几何形态。

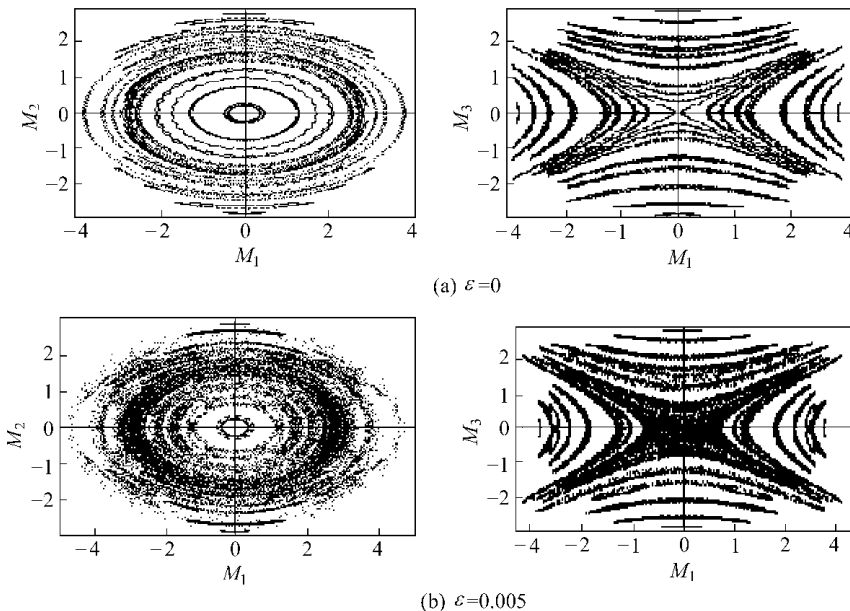


图 5.15 Poincaré 截面图

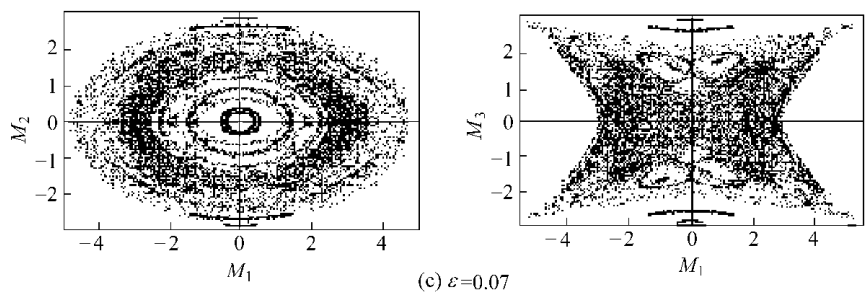


图 5.15(续)

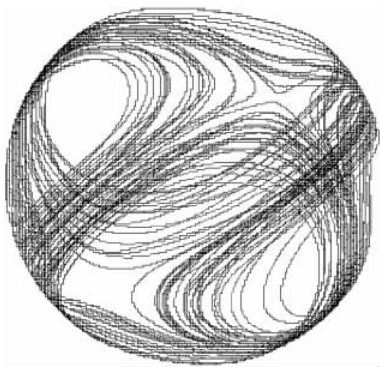


图 5.16 (M_1, M_2, M_3) 相空间内混沌性态的相轨迹



图 5.17 规则性态弹性杆的几何形态

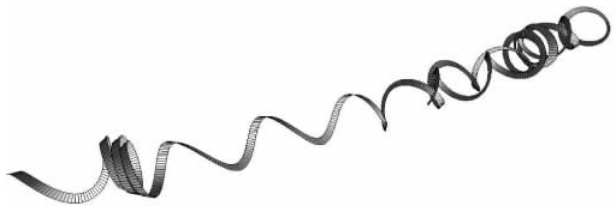


图 5.18 混沌性态弹性杆的几何形态

第 6 章 弹性杆的动力学

以上各章关于弹性杆平衡形态的讨论均限于静力学范畴,弧坐标为唯一的自变量。在动力学问题中引入时间变量后,弹性杆的动力学模型成为以弧坐标 s 和时间 t 为双重自变量的离散系统。本章首先讨论曲线和曲杆的运动学问题,导出截面的速度和角速度与切线基矢量和弯扭度之间的运动学关系,与动力学方程组成含 12 个未知变量的偏微分方程组。关于弹性杆动态稳定性的讨论建立在双自变量离散系统的 Lyapunov 稳定性理论基础上。对于封闭杆或两端约束状态相同的弹性杆,可在一次近似范围内确定螺旋线平衡在时域内的稳定性条件。受扰运动极其缓慢时,可将弹性杆的动力学过程视为对静力学平衡状态的摄动。证明在摄动参数二次项精度范围内,静态稳定性条件满足时,其动态稳定性条件必也同时满足。一般情况下弹性杆的扭转运动与弯曲运动相互耦合,仅在平面运动条件下解耦。本章讨论杆的几种特殊振动问题,如均匀扭转振动、平面扭转振动和弯曲振动,螺旋杆的弯曲振动,以及杆在黏性介质中的衰减振动。

6.1 曲线和曲杆的运动学

6.1.1 Darboux 矢量与曲线的角速度

讨论长度为 L 的光滑空间曲线 C 。曲线上任意点 P 在曲线上的位置由弧坐标 s 确定,在空间中的位置由相对固定点 O 的矢径 r 确定。讨论曲线 C 的几何形态随时间改变的运动学问题时,矢径 $r(s, t)$ 为弧坐标 s 和时间 t 的二元连续函数。以 P 为原点的 Frenet 坐标系 (P -NBT) 的姿态亦随弧坐标 s 和时间 t 改变,其无限小角位移 $\Delta\phi_F$ 为 s 和 t 的二元连续函数(图 1.1)。在 t 时刻,当 P 点的弧坐标 s 改变为 $s + \Delta s$ 时, Frenet 坐标系的无限小角位移 $\Delta\phi_F$ 与弧坐标增量 Δs 之比,当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时的极限即 1.1 节中定义的 Darboux 矢量 ω_F , 利用对 s 的偏导数符号表示为^①

$$\omega_F = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_F}{\Delta s} = \frac{\partial\phi_F}{\partial s} \quad (6.1.1)$$

根据式(1.1.8), ω_F 沿副法线轴和切线轴的分量为曲线 C 的曲率 κ 和挠率 τ

$$\omega_F = \kappa e_b + \tau e_t \quad (6.1.2)$$

^① 与第 1 页的脚注^①类似, ϕ_F 以及下文中 ϕ 对 s 或对 t 的偏导数是一种借用的表达形式, 因为 ϕ_F, ϕ 并非 s 和 t 的函数, 只是其无限小增量 $\Delta\phi_F$ 为 s 和 t 的函数, ϕ_F 和 ϕ 为分析力学中的准坐标。

当时间 t 改变为 $t + \Delta t$ 时, P 点处 Frenet 坐标系的无限小角位移 $\Delta\phi_F$ 与时间增量 Δt 之比, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限为曲线 C 的 Frenet 坐标系的角速度, 或简称为曲线 C 的角速度, 记作 Ω_F 。利用对 t 的偏导数符号, Ω_F 可表示为

$$\Omega_F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_F}{\Delta t} = \frac{\partial\phi_F}{\partial t} \quad (6.1.3)$$

设 e 为与 Frenet 坐标系固定的基矢量, 根据附录 B 中的式 (B. 76) 和式 (B. 84), e 对 s 和 t 的偏导数可利用矢量 ω_F 和 Ω_F 计算

$$\frac{\partial e}{\partial s} = \omega_F \times e \quad (6.1.4a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \Omega_F \times e \quad (6.1.4b)$$

以 Frenet 坐标系为参考系, 将式 (6.1.4a) 对 t , 式 (6.1.4b) 对 s 求偏导数, 得到

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial t} (\omega_F \times e) + \Omega_F \times (\omega_F \times e) \quad (6.1.5a)$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s} (\Omega_F \times e) + \omega_F \times (\Omega_F \times e) \quad (6.1.5b)$$

其中波浪号表示相对 Frenet 坐标系的局部导数。由于 Frenet 坐标系的角位移连续变化, 以上二式相等。展开化简后导出 Darboux 矢量 ω_F 与曲线角速度 Ω_F 之间的以下关系式

$$\tilde{\omega}_F = \frac{\partial \Omega_F}{\partial s} + \omega_F \times \Omega_F \quad (6.1.6)$$

6.1.2 曲率和挠率的运动学方程

P 点的无限小位移 Δr 与完成此位移的时间增量 Δt 之比, 在截面的同一位置, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限为 P 点的速度, 记作 v

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (6.1.7)$$

将切线基矢量 $T = e_t = e_3$ 的定义式 (1.1.1) 中的导数符号改为偏导数

$$e_3 = \frac{\partial r}{\partial s} \quad (6.1.8)$$

将上式两边对 s 求偏导数, 矢径 r 连续变化时可改变求导顺序。考虑式 (6.1.7), 导出

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial e_3}{\partial t} \quad (6.1.9)$$

其相对 Frenet 坐标系的局部导数形式为

$$\tilde{\frac{\partial v}{\partial s}} + \omega_F \times v = \Omega_F \times e_3 \quad (6.1.10)$$

设 $v_n, v_b, v_3, \Omega_{Fn}, \Omega_{Fb}, \Omega_{F3}$ 分别为 v 和 Ω_F 在 $(P-NBT)$ 中的投影, 利用式 (1.1.8), 写出方程 (6.1.10) 相对 $(P-NBT)$ 的投影式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_n}{\partial s} + \kappa v_3 - \tau v_b - \Omega_{Fb} &= 0 \\
\frac{\partial v_b}{\partial s} + \tau v_n + \Omega_{Fn} &= 0 \\
\frac{\partial v_3}{\partial s} - \kappa v_n &= 0
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

以及方程(6.1.6)相对(P - NBT)的投影式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_{Fn}}{\partial s} - \tau \Omega_{Fb} + \kappa \Omega_{F3} &= 0 \\
\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_{Fb}}{\partial s} - \tau \Omega_{Fn} &= 0 \\
\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_{F3}}{\partial s} + \kappa \Omega_{Fn} &= 0
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

从式(6.1.11)和式(6.1.12)消去 $\Omega_{Fn}, \Omega_{Fb}, \Omega_{F3}$, 导出曲率 κ 和挠率 τ 的运动学方程

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \kappa v_3 - \tau v_b \right) + \tau \left(\frac{\partial v_b}{\partial s} + \tau v_n \right) = 0 \tag{6.1.13a}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \tau v_b \right) + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial v_b}{\partial s} + \tau v_n \right) + \tau v_3 \right] - \kappa \left(\frac{\partial v_b}{\partial s} + \tau v_n \right) = 0 \tag{6.1.13b}$$

已知曲线 C 的速度变化规律 $v(s, t)$, 即可从此偏微分方程组积分得到曲率和挠率的变化规律 $\kappa(s, t)$ 和 $\tau(s, t)$ 。

对于平面曲线的特殊情形, 挠率 τ 等于零, 设 $v_n \equiv v_3 \equiv 0, \partial v_b / \partial s = 0$, 则 $\partial \kappa / \partial t = \partial \tau / \partial t = 0$ 。表明曲线沿平面法线方向的整体运动不会使曲线的几何形态发生改变。

6.1.3 曲杆的运动学

讨论曲杆的运动学问题时, 仍采用 1.2 节中的基本假定。曲杆的运动离散为沿中心线 C 连续分布且与 C 正交的刚性截面的运动。刚性截面的状态变量为弧坐标 s 和时间 t 的二元连续函数。设杆中心线上任意点 P 处的弧坐标 s 改变为 $s + \Delta s$, 时间 t 改变为 $t + \Delta t$ 时, Frenet 坐标系有无限小角位移 $\Delta \phi_F$, 截面有无限小角位移 $\Delta \phi$ 。与 $\Delta \phi_F$ 相比, $\Delta \phi$ 增加了绕切线轴的无限小相对扭角 $\Delta \chi e_3$, 即

$$\Delta \phi = \Delta \phi_F + \Delta \chi e_3 \tag{6.1.14}$$

在同一时刻, 将无限小角位移矢量 $\Delta \phi$ 除以弧坐标增量 Δs , 令 $\Delta s \rightarrow 0$, 即得到 1.2 节中定义的弯扭度矢量 ω , 利用对 s 的偏导数符号表示为

$$\omega = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \tag{6.1.15}$$

在截面的同一位置, 将矢量 $\Delta \phi$ 与时间增量 Δt 之比, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限定义为杆截面的角速度, 记作 Ω 。利用对 t 的偏导数符号表示为

$$\Omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{6.1.16}$$

前面各章在对弹性杆平衡状态的讨论中, 角速度 Ω 被限制为零, 弯扭度 ω 为 s 的一元连续函数。本章在讨论弹性杆的运动时, 弯扭度 ω 和角速度 Ω 均为 s 和 t 的二元连续函数。将式(6.1.14)代入式(6.1.15)和式(6.1.16), 导出弯扭度与 Darboux 矢量, 曲杆的

角速度与曲线的角速度之间的以下关系式

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_F + \frac{\partial \chi}{\partial s} \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_F + \frac{\partial \chi}{\partial t} \boldsymbol{e}_3 \quad (6.1.17)$$

利用表 1.1 计算弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 $(Pxyz)$ 中的投影 $\omega_i, \Omega_i (i=1, 2, 3)$, 导出

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \kappa \sin \chi, \quad \omega_2 = \kappa \cos \chi, \quad \omega_3 = \tau + \frac{\partial \chi}{\partial s} \\ \Omega_1 &= \Omega_n \cos \chi + \Omega_b \sin \chi \\ \Omega_2 &= -\Omega_n \sin \chi + \Omega_b \cos \chi \\ \Omega_3 &= \Omega_{F3} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

重复 6.1.2 节中式 (6.1.6) 和式 (6.1.10) 的推导过程, 将 Darboux 矢量 $\boldsymbol{\omega}_F$ 和曲线的角速度 $\boldsymbol{\Omega}_F$ 改为曲杆的弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角速度 $\boldsymbol{\Omega}$, 导出类似的关系式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (6.1.19)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_3 \quad (6.1.20)$$

其中波浪号改为相对截面坐标系 $(Pxyz)$ 的局部导数。直接验算表明, 利用式 (6.1.18) 推导矢量方程 (6.1.19) 和方程 (6.1.20) 在 $(P-NBT)$ 中的投影式时, 含扭角 χ 的项均被自行消去, 导出的结果与方程 (6.1.11) 和方程 (6.1.12) 相同。曲率 κ 和挠率 τ 满足与式 (6.1.13) 相同的运动学方程。从而表明, 在曲线运动的基础上讨论曲杆的运动时, 截面的相对扭角 χ 为运动学独立变量。

6.2 弹性杆的动力学方程

6.2.1 非圆截面杆的动力学方程

设弹性杆在力和力矩作用下作任意运动, 考虑弧坐标分别为 s 和 $s + \Delta s$ 的 P 和 P' 点之间的微元弧段。设 P 点的负截面在 t 时刻受邻近截面作用的内力主矢和主矩为 $-F$ 和 $-M$, P' 点的正截面在 $t + \Delta t$ 时刻受邻近截面作用的内力主矢和主矩为 $F + \Delta F$ 和 $M + \Delta M$, 主矢 F 和主矩 M 均为 s 和 t 的二元连续函数。考虑弧段上作用的单位长度分布力 f 和分布力偶 m (图 3.1), 将全部作用力对 P 点简化, 只保留各增量的一阶小量, 根据牛顿力学的动量定理和对质心的动量矩定理, 导出

$$\Delta F + f \Delta s = \rho S \Delta s \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} \quad (6.2.1a)$$

$$\Delta \boldsymbol{M} + \Delta \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{m} \Delta s = \Delta s \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (6.2.1b)$$

其中 ρ 为杆的密度; S 为杆的截面积; $\boldsymbol{J}$ 为单位长度杆的惯量张量, 其在截面主轴坐标系 $(Pxyz)$ 中的投影矩阵以截面绕 x 轴, y 轴, z 轴的单位长度转动惯量 $J_i (i=1, 2, 3)$ 为元素

$$\boldsymbol{J} = \text{diag}(J_1 \quad J_2 \quad J_3) \quad (6.2.2)$$

其中 $J_1 = \rho I_x, J_2 = \rho I_y, J_3 = \rho I_z, I_x, I_y$ 为截面的惯性矩, I_z 为极惯性矩, 其定义见附录 C 中式 (C. 17), 即

$$I_x = \int_S y^2 dS, \quad I_y = \int_S x^2 dS, \quad I_z = \int_S (x^2 + y^2) dS \quad (6.2.3)$$

根据式 (C. 16), 转动惯量 $J_i (i=1, 2, 3)$ 与杆的抗弯和抗扭刚度之间有以下关系

$$J_1 = \frac{\rho A}{E}, \quad J_2 = \frac{\rho B}{E}, \quad J_3 = \frac{\rho C}{G} \quad (6.2.4)$$

将式 (6.2.1a) 和式 (6.2.1b) 各项除以 Δs , 令 $\Delta s \rightarrow 0$, 利用关系式 (6.1.7), 导出

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} + \mathbf{f} = \rho S \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (6.2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (6.2.6)$$

其中 $\mathbf{v}$ 为式 (6.1.7) 定义的 P 点速度, 满足式 (6.1.9) 的运动学关系。将方程 (6.2.5) 和方程 (6.2.6) 的求导过程改为相对截面主轴坐标系进行, 写作

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} + \mathbf{f} - \rho S \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = 0 \quad (6.2.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad (6.2.8)$$

将 $\mathbf{F}, \mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{m}$ 等矢量在 $(P-xyz)$ 中的投影记作 $F_i, M_i, \omega_i, \Omega_i, v_i, f_i, m_i (i=1, 2, 3)$, 设弹性杆在松弛状态下有常值原始扭率 ω_3^0 , 无原始曲率, 利用 2.1 节中的线性本构关系 (2.1.16)

$$M_1 = A\omega_1, \quad M_2 = B\omega_2, \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \quad (6.2.9)$$

将运动学关系式 (6.1.19) 和式 (6.1.20), 以及动力学方程 (6.2.7) 和方程 (6.2.8) 向 $(P-xyz)$ 投影, 并利用式 (6.2.9) 将 $M_i (i=1, 2, 3)$ 用 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 表示, 导出

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial s} + \omega_2 \Omega_3 - \omega_3 \Omega_2 - \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = 0 \quad (6.2.10a)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial s} + \omega_3 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_3 - \frac{\partial \omega_2}{\partial t} = 0 \quad (6.2.10b)$$

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial s} + \omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1 - \frac{\partial \omega_3}{\partial t} = 0 \quad (6.2.10c)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 - \Omega_2 = 0 \quad (6.2.11a)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} + \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 + \Omega_1 = 0 \quad (6.2.11b)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial s} + \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 = 0 \quad (6.2.11c)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} + \omega_2 F_3 - \omega_3 F_2 - \rho S \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2 \right) + f_1 = 0 \quad (6.2.12a)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} + \omega_3 F_1 - \omega_1 F_3 - \rho S \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \Omega_3 v_1 - \Omega_1 v_3 \right) + f_2 = 0 \quad (6.2.12b)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} + \omega_1 F_2 - \omega_2 F_1 - \rho S \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \Omega_1 v_2 - \Omega_2 v_1 \right) + f_3 = 0 \quad (6.2.12c)$$

$$A \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + (C - B) \omega_2 \omega_3 - C \omega_2 \omega_3^0 - F_2 - J_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + (J_2 - J_3) \Omega_2 \Omega_3 + m_1 = 0 \quad (6.2.13a)$$

$$B \frac{\partial \omega_2}{\partial s} + (A - C) \omega_3 \omega_1 + C \omega_1 \omega_3^0 + F_1 - J_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + (J_3 - J_1) \Omega_3 \Omega_1 + m_2 = 0 \quad (6.2.13b)$$

$$C \frac{\partial \omega_3}{\partial s} + (B - A) \omega_1 \omega_2 - J_3 \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + (J_1 - J_2) \Omega_1 \Omega_2 + m_3 = 0 \quad (6.2.13c)$$

以上 12 个偏微分方程(6.2.10)~(6.2.13)组成封闭的弹性杆动力学方程组,可确定 12 个未知变量 $F_i, \omega_i, \Omega_i, v_i (i=1,2,3)$ 。一般情况下,此非线性方程组只能用数值方法积分。将解出的弯扭度 $\omega_i (i=1,2,3)$ 代入附录 B 中的式(B.80)或式(B.82),可积分得到欧拉角或欧拉参数随弧坐标 s 和时间 t 的变化规律,再代入方程组(4.1.4),积分后得到弹性杆的挠性线随时间 t 的变化规律。

6.2.2 圆截面杆的动力学方程

讨论圆截面杆的运动时,由于过圆截面中心的任意轴,包括法线轴和副法线轴在内均为主轴,因此可将 Frenet 坐标系($P-NBT$)作为动参考系计算动力学方程(6.2.7)和(6.2.8)中的矢量导数,得到

$$\frac{\tilde{\partial} \mathbf{F}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}_F \times \mathbf{F} + \mathbf{f} - \rho S \left(\frac{\tilde{\partial} \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{v} \right) = 0 \quad (6.2.14)$$

$$\frac{\tilde{\partial} \mathbf{M}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}_F \times \mathbf{M} + \mathbf{m} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} - \frac{\tilde{\partial}}{\partial t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega}_F \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad (6.2.15)$$

其中波浪号表示相对 Frenet 坐标系($P-NBT$)的局部导数。将矢量方程(6.2.14)和方程(6.2.15)向($P-NBT$)投影,以下标 $n, b, 3$ 表示各矢量的投影,令 $A=B, J_1=J_2, J_3=2J_1, \omega_n=\omega_{Fn}=0, \omega_b=\omega_{Fb}=\kappa, \omega_{F3}=\tau, \Omega_n=\Omega_{Fn}, \Omega_b=\Omega_{Fb}$, 得到

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + \kappa F_3 - \tau F_b - \rho S \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \Omega_b v_3 - \Omega_{F3} v_b \right) + f_n = 0 \quad (6.2.16a)$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial s} + \tau F_n - \rho S \left(\frac{\partial v_b}{\partial t} + \Omega_{F3} v_n - \Omega_n v_3 \right) + f_b = 0 \quad (6.2.16b)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \kappa F_n - \rho S \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \Omega_n v_b - \Omega_b v_n \right) + f_3 = 0 \quad (6.2.16c)$$

$$C \kappa (\omega_3 - \omega_3^0) - A \kappa \tau - F_b - J_1 \left[\frac{\partial \Omega_n}{\partial t} + \Omega_b (2\Omega_3 - \Omega_{F3}) \right] + m_n = 0 \quad (6.2.17a)$$

$$A \frac{\partial \kappa}{\partial s} + F_n - J_1 \left[\frac{\partial \Omega_b}{\partial t} + \Omega_n (\Omega_{F3} - 2\Omega_3) \right] + m_b = 0 \quad (6.2.17b)$$

$$C \frac{\partial \omega_3}{\partial s} - 2J_1 \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + m_3 = 0 \quad (6.2.17c)$$

与运动学方程(6.1.11)和方程(6.1.12)联立,组成封闭的动力学方程组。

利用运动学关系式将动力学方程中的速度 v 消去,可减少未知变量数目。为此将方程(6.1.9)对 t 求偏导

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial e_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\Omega_F \times e_3) \quad (6.2.18)$$

将动量定理(6.2.5)对 s 求偏导,改变求导顺序,将上式代入消去 v ,得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial s} - \rho S \frac{\partial}{\partial t} (\Omega_F \times e_3) = 0 \quad (6.2.19)$$

令求导过程相对 Frenet 坐标系进行,写作

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\partial}}{\partial s} \left(\frac{\tilde{\partial} F}{\partial s} + \omega_F \times F \right) + \omega_F \times \left(\frac{\tilde{\partial} F}{\partial s} + \omega_F \times F \right) + \frac{\tilde{\partial} f}{\partial s} + \omega_F \times f \\ & - \rho S \left[\frac{\tilde{\partial}}{\partial t} (\Omega_F \times e_3) + \Omega_F \times (\Omega_F \times e_3) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

将方程(6.2.20)向 Frenet 坐标系($P-NBT$)投影,得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F_n}{\partial s^2} + F_3 \frac{\partial \kappa}{\partial s} - F_b \frac{\partial \tau}{\partial s} + (\kappa^2 + \tau^2) F_n + \frac{\partial f_n}{\partial s} + \tau f_b - \kappa f_3 \\ & - \rho S \left(\frac{\partial \Omega_b}{\partial t} + \Omega_n \Omega_{F3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.21a)$$

$$\frac{\partial^2 F_b}{\partial s^2} + F_n \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{\partial f_b}{\partial s} - \tau f_n + \rho S \left(\frac{\partial \Omega_n}{\partial t} - \Omega_b \Omega_{F3} \right) = 0 \quad (6.2.21b)$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial s^2} - F_n \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial f_3}{\partial s} + \kappa f_n + \rho S (\Omega_n^2 + \Omega_b^2) = 0 \quad (6.2.21c)$$

圆截面杆动力学方程组由式(6.2.21)和(6.2.17)包含的 6 个方程组成。

6.2.3 牛顿-欧拉方程特例

将杆的微元段视为刚体,方程(6.2.1a)中的 $\rho S \Delta s$ 以微元段的质量 m_0 代替, $\Delta F + f \Delta s$ 改以作用于微元段的合力 F_0 表示,转化为

$$m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} = F_0 \quad (6.2.22)$$

将方程(6.2.1b)中的 $\Delta M + \Delta r \times F + m \Delta s$ 改以作用于微元段的合力矩 M_0 表示, $J \Delta s$ 改以微元段的惯量张量 J_0 表示,转化为

$$\frac{d}{dt} (J_0 \cdot \Omega) = M_0 \quad (6.2.23)$$

方程(6.2.22)和方程(6.2.23)转化为刚体动力学中的牛顿-欧拉方程。

6.2.4 Kirchhoff 方程特例

作为另一特例,设弹性杆处于平衡状态,令 $v \equiv 0, \Omega \equiv 0$,略去分布力和分布力偶,从式(6.2.5)和式(6.2.6)导出第 2 章中的弹性杆平衡方程(2.1.3)

$$\frac{dF}{ds} = 0, \quad \frac{dM}{ds} + T \times F = 0 \quad (6.2.24)$$

其在 $(P\text{-}xyz)$ 中的投影式为 Kirchhoff 方程(2.1.8)和方程(2.1.18)

$$\frac{dF_1}{ds} + \omega_2 F_3 - \omega_3 F_2 = 0 \quad (6.2.25a)$$

$$\frac{dF_2}{ds} + \omega_3 F_1 - \omega_1 F_3 = 0 \quad (6.2.25b)$$

$$\frac{dF_3}{ds} + \omega_1 F_2 - \omega_2 F_1 = 0 \quad (6.2.25c)$$

$$A \frac{d\omega_1}{ds} + (C - B)\omega_2\omega_3 - C\omega_3^0\omega_2 - F_2 = 0 \quad (6.2.26a)$$

$$B \frac{d\omega_2}{ds} + (A - C)\omega_3\omega_1 + C\omega_3^0\omega_1 + F_1 = 0 \quad (6.2.26b)$$

$$C \frac{d\omega_3}{ds} + (B - A)\omega_1\omega_2 = 0 \quad (6.2.26c)$$

6.3 非圆截面螺旋杆的动态稳定性

6.3.1 螺旋杆平衡的扰动方程

利用式(6.2.9)将方程(6.2.10)和方程(6.2.11)中的弯扭度分量 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 改用 $M_i (i=1, 2, 3)$ 表示, 令

$$\omega_1 = \frac{M_1}{A}, \quad \omega_2 = \frac{M_2}{B}, \quad \omega_3 = \frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \quad (6.3.1)$$

将动力学方程组(6.2.10)至(6.2.13)改写为

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} + \frac{M_2}{B}F_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)F_2 - \rho S \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2\right) = 0 \quad (6.3.2a)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)F_1 - \frac{M_1}{A}F_3 - \rho S \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \Omega_3 v_1 - \Omega_1 v_3\right) = 0 \quad (6.3.2b)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} + \frac{M_1}{A}F_2 - \frac{M_2}{B}F_1 - \rho S \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \Omega_1 v_2 - \Omega_2 v_1\right) = 0 \quad (6.3.2c)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{1}{B}M_2M_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)M_2 - F_2 - J_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + (J_2 - J_3)\Omega_2\Omega_3 = 0 \quad (6.3.2d)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial s} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)M_1 - \frac{1}{A}M_1M_3 + F_1 - J_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + (J_3 - J_1)\Omega_3\Omega_1 = 0 \quad (6.3.2e)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial s} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)M_1M_2 - J_3 \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + (J_1 - J_2)\Omega_1\Omega_2 = 0 \quad (6.3.2f)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial s} + \frac{M_2}{B}\Omega_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)\Omega_2 - \frac{1}{A} \frac{\partial M_1}{\partial t} = 0 \quad (6.3.2g)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial s} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)\Omega_1 - \frac{M_1}{A}\Omega_3 - \frac{1}{B} \frac{\partial M_2}{\partial t} = 0 \quad (6.3.2h)$$

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial s} + \frac{M_1}{A} \Omega_2 - \frac{M_2}{B} \Omega_1 - \frac{1}{C} \frac{\partial M_3}{\partial t} = 0 \quad (6.3.2i)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{M_2}{B} v_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \right) v_2 - \Omega_2 = 0 \quad (6.3.2j)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0 \right) v_1 - \frac{M_1}{A} v_3 + \Omega_1 = 0 \quad (6.3.2k)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial s} + \frac{M_1}{A} v_2 - \frac{M_2}{B} v_1 = 0 \quad (6.3.2l)$$

此方程组存在与螺旋杆平衡状态对应的常值特解

$$\begin{aligned} F_1 &= 0, \quad F_2 = F_{20} = F_0 \sin \theta_0, \quad F_3 = F_{30} = F_0 \cos \theta_0 \\ M_1 &= 0, \quad M_2 = M_{20} = M_0 \sin \theta_0 - F_0 R \cos \theta_0 \\ M_3 &= M_{30} = M_0 \cos \theta_0 + F_0 R \sin \theta_0 \\ \Omega_1 &= \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

其中 R 为螺旋线的半径, $\alpha = \pi/2 - \theta_0$ 为螺旋角。利用式(5.4.23)定义的无量纲弧坐标 $\bar{s}$, 引入无量纲时间坐标 $\bar{t}$

$$\bar{s} = \left(\frac{M_0}{B} \right) s, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{F_0}{\rho S}} \left(\frac{M_0}{B} \right) t \quad (6.3.4)$$

定义以下扰动量 $x_i (i=1, 2, \dots, 12)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{F_1}{F_0}, \quad x_2 = \frac{F_2 - F_{20}}{F_0}, \quad x_3 = \frac{F_3 - F_{30}}{F_0} \\ x_4 &= \frac{M_1}{M_0}, \quad x_5 = \frac{M_2 - M_{20}}{M_0}, \quad x_6 = \frac{M_3 - M_{30}}{M_0} \\ x_7 &= \frac{B \Omega_1}{M_0} \sqrt{\frac{\rho S}{F_0}}, \quad x_8 = \frac{B \Omega_2}{M_0} \sqrt{\frac{\rho S}{F_0}}, \quad x_9 = \frac{B \Omega_3}{M_0} \sqrt{\frac{\rho S}{F_0}} \\ x_{10} &= v_1 \sqrt{\frac{\rho S}{F_0}}, \quad x_{11} = v_2 \sqrt{\frac{\rho S}{F_0}}, \quad x_{12} = v_3 \sqrt{\frac{\rho S}{F_0}} \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

以撇号表示对无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 的偏导数, 点号表示对无量纲时间 $\bar{t}$ 的偏导数, 略去扰动量 $x_i (i=1, 2, \dots, 12)$ 的二次以上微量, 导出螺旋杆的一次近似扰动方程

$$x_1' = (\beta_4 + \nu_1) x_2 - \beta_3 x_3 - \beta_2 x_5 + (1 + \nu) \beta_1 x_6 + \dot{x}_{10} \quad (6.3.6a)$$

$$x_2' = -(\beta_4 + \nu_1) x_1 + (1 + \sigma) \beta_2 x_4 + \dot{x}_{11} \quad (6.3.6b)$$

$$x_3' = \beta_3 x_1 - (1 + \sigma) \beta_1 x_4 + \dot{x}_{12} \quad (6.3.6c)$$

$$x_4' = \mu x_2 + \nu_1 x_5 + \nu \beta_3 x_6 + \mu \bar{J}_1 \dot{x}_7 \quad (6.3.6d)$$

$$x_5' = -\mu x_1 + (\sigma \beta_4 - \nu_1) x_4 + \mu \bar{J}_2 \dot{x}_8 \quad (6.3.6e)$$

$$x_6' = -\sigma \beta_3 x_4 + \mu \bar{J}_3 \dot{x}_9 \quad (6.3.6f)$$

$$x_7' = (1 + \sigma) \dot{x}_4 + (\beta_4 + \nu_1) x_8 - \beta_3 x_9 \quad (6.3.6g)$$

$$x_8' = \dot{x}_5 - (\beta_4 + \nu_1) x_7 \quad (6.3.6h)$$

$$x_9' = (1 + \nu)\dot{x}_6 + \beta_3 x_7 \quad (6.3.6i)$$

$$x_{10}' = x_8 + (\beta_4 + \nu_1)x_{11} - \beta_3 x_{12} \quad (6.3.6j)$$

$$x_{11}' = -x_7 - (\beta_4 + \nu_1)x_{10} \quad (6.3.6k)$$

$$x_{12}' = \beta_3 x_{10} \quad (6.3.6l)$$

其中无量纲参数 μ, σ, ν, δ 的定义见式(5.4.12)和式(5.4.14), $\beta_i (i=1, 2, 3, 4)$ 和 ν_1 的定义见式(5.4.25), $\bar{J}_i (i=1, 2, 3)$ 为新定义的量纲转动惯量

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{BF_0}{M_0^2}, \quad \sigma = \frac{B}{A} - 1, \quad \nu = \frac{B}{C} - 1, \quad \delta = \frac{C\omega_3^0}{M_0} \\ \beta_1 &= \frac{F_{20}}{F_0}, \quad \beta_2 = \frac{F_{30}}{F_0}, \quad \beta_3 = \frac{M_{20}}{M_0}, \quad \beta_4 = \frac{M_{30}}{M_0} \\ \nu_1 &= \beta_4 \nu + \delta(1 + \nu), \quad \bar{J}_i = \frac{J_i M_0^2}{\rho S B^2} \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

不考虑动力学因素时, 方程组(6.3.6)转化为无原始曲率的螺旋杆静平衡扰动方程(5.4.24)。

6.3.2 端部约束相同时的动态稳定性

利用以下指数形式特解:

$$x_i(\bar{s}, \bar{t}) = x_{i0} \exp(\lambda \bar{s} + \omega \bar{t}) \quad (i=1, 2, \dots, 12) \quad (6.3.8)$$

从扰动方程(6.3.6)导出特征方程

$$\det \mathbf{D} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.3.9)$$

组成矩阵 $\mathbf{D}$ 的子矩阵 $\mathbf{D}_{ij} (i, j=1, 2)$ 定义为

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} \lambda & -(\beta_4 + \nu_1) & \beta_3 & 0 & \beta_2 & -(1 + \nu)\beta_1 \\ (\beta_4 + \nu_1) & \lambda & 0 & -(1 + \nu)\beta_2 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & \lambda & -(1 + \sigma)\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \lambda & -\nu_1 & -\nu\beta_3 \\ \mu & 0 & 0 & -(\sigma\beta_4 + \nu_1) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\beta_3 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (6.3.10a)$$

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \\ -\mu\bar{J}_1\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\bar{J}_2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\bar{J}_3\omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.10b)$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1+\sigma)\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+\nu)\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.10c)$$

$$\mathbf{D}_{22} = \begin{pmatrix} \lambda & -(\beta_4 + \nu_1) & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ (\beta_4 + \nu_1) & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & -(\beta_4 + \nu_1) & \beta_3 \\ 1 & 0 & 0 & (\beta_4 + \nu_1) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (6.3.10d)$$

展开后的特征方程包含 λ 和 ω 两个待定参数,一般情况下无确定解。设静态稳定性条件已得到满足, λ 的静态特征值为纯虚根 $\lambda = \pm i\bar{k}$, $\bar{k}$ 为扰动解相对弧坐标周期变化的无量纲角频率。在螺旋杆长度 L 为周长 ΔL 的整数倍,载荷对称,端部约束相同等条件下,静力学分析中关于端部受扰状态相同的分析结论也适用于动力学分析。边界条件(5.4.37)对动力学分析同样有效

$$x_i(\bar{L}, \bar{t}) = x_i(0, \bar{t}) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (6.3.11)$$

其中 $\bar{L} = (M_0/B)L$ 为无量纲化的杆长。弧坐标角频率 $\bar{k}$ 应满足静力学分析中导出的附加条件(5.4.38)

$$\bar{k}\bar{L} = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.3.12)$$

静态分析中的受扰挠性线相当于动态分析中的振动模态, n 为受扰挠性线的谐波数,即模态的阶数。由于弧坐标特征值 λ 已由式(6.3.12)确定,特征方程(6.3.9)成为以时间特征值 ω 为唯一未知变量的 6 次代数多项式

$$a_1(\bar{k})\omega^6 + a_2(\bar{k})\omega^4 + a_3(\bar{k})\omega^2 + a_4(\bar{k}) = 0 \quad (6.3.13)$$

系数 $a_j(\bar{k})$ ($j=1, 2, 3$) 为 $\bar{k}$ 的多项式。以无原始曲率和扭率的圆截面圆弧杆为例,令 $\sigma = \delta = 0, \bar{J}_2 = \bar{J}_1, \bar{J}_3 = 2\bar{J}_1$, 各系数为

$$\begin{aligned} a_1(\bar{k}) &= 2\mu^3 \bar{J}_1^3 (1 + \nu) \\ a_2(\bar{k}) &= \mu^2 \bar{J}_1^2 [\bar{k}^2 (5 + 4\nu) - 2\nu] \\ a_3(\bar{k}) &= \mu \bar{J}_1 \bar{k}^2 [2\bar{k}^2 (2 + \nu) + 1 + 2\nu] \\ a_4(\bar{k}) &= \bar{k}^4 (\bar{k}^2 - 1) \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

弹性杆在时域内的稳定性可从时域特征方程(6.3.13)中 ω 的单虚根条件确定。在 6.5 节中,将对作平面运动的两端固定的轴向受压直杆和圆环杆的动态稳定性作具体分析。

6.3.3 缓慢受扰运动的动态稳定性

在弹性杆动态稳定性的讨论中,若杆的受扰运动极其缓慢,则可在静力学平衡状态的基础上,将动力学过程视为对静态平衡的摄动。设 ε 为与运动速率有关的小参数,引入尺

度缩小的时间坐标 $T = \bar{\epsilon} t$ 。将定义角速度 Ω 和速度 v 的式(6.1.7)和式(6.1.16)中的时间增量 Δt 以 $\bar{\epsilon}^{-1} \Delta T$ 代替,令 $\Delta T \rightarrow 0$,导出的 Ω 和 v 为 $\bar{\epsilon}$ 的同阶小量

$$\Omega = \bar{\epsilon} \bar{\Omega}(s, T), \quad v = \bar{\epsilon} \bar{v}(s, T) \quad (6.3.15)$$

其中

$$\bar{\Omega} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta T} = \frac{\partial \phi}{\partial T}, \quad \bar{v} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta T} = \frac{\partial r}{\partial T} \quad (6.3.16)$$

截面的角加速度 $\partial \Omega / \partial t$ 和加速度 $\partial r / \partial t$ 为 $\bar{\epsilon}^2$ 的同阶小量

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \bar{\epsilon}^2 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial T}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{\epsilon}^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial T} \quad (6.3.17)$$

弯扭度 ω 对时间 t 的偏导数与 $\bar{\epsilon}$ 同阶

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \bar{\epsilon} \frac{\partial \omega}{\partial T} \quad (6.3.18)$$

定义尺度缩小的无量纲时间变量 $\bar{T}$

$$\bar{T} = \bar{\epsilon} \bar{t} = \bar{\epsilon} \sqrt{\frac{F_0}{\rho S}} \left(\frac{M_0}{B} \right) t \quad (6.3.19)$$

利用式(6.3.15)、式(6.3.17)和式(6.3.18)将扰动方程(6.3.6)中的自变量 $\bar{t}$ 改为尺度缩小的无量纲时间变量 $\bar{T}$,将特征方程(6.3.9)展开后,得到

$$\det \mathbf{D} = \lambda^4 (\lambda^4 + a \lambda^2 + b) [\lambda^2 + \beta_3^2 + (\beta_4 + \nu_1)^2]^2 + O(\bar{\epsilon}^3) = 0 \quad (6.3.20)$$

其中系数 a, b 与静态稳定性分析中无原始曲率 ($\epsilon = 0$) 情形的系数(5.4.29)相同

$$\begin{aligned} a &= \beta_3^2 + (\beta_4 + \nu_1)^2 + \sigma \nu \beta_3^2 - \mu \beta_2 (2 + \sigma) + \nu_1 (\nu_1 - \sigma \beta_4) \\ b &= \mu^2 \beta_2^2 (1 + \sigma) + \mu \beta_1 \beta_3 (\beta_4 + 2\nu_1) (1 - \sigma \nu) \\ &\quad + \mu \beta_2 \{ (\beta_4 + \nu_1) [\nu_1 (2 + \sigma) - \sigma \beta_4] - \beta_3^2 [\sigma \nu + (1 + \sigma)] \} \\ &\quad + [\beta_3^2 + (\beta_4 + \nu_1)^2] [\sigma \nu \beta_3^2 + \nu_1 (\nu_1 - \sigma \beta_4)] \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

受扰运动足够缓慢时可略去 $\bar{\epsilon}^3$ 以上高阶小量,特征方程(6.3.20)简化为

$$\lambda^4 (\lambda^4 + a \lambda^2 + b) [\lambda^2 + \beta_3^2 + (\beta_4 + \nu_1)^2]^2 = 0 \quad (6.3.22)$$

简化后的特征方程有 4 个零根和 2 对纯虚根,以下条件满足时其余 4 个根亦为纯虚根

$$a > 0, \quad b > 0, \quad a^2 - 4b > 0 \quad (6.3.23)$$

作为动态稳定性的必要条件,上式与静态稳定性条件(5.4.31)完全相同。从而证明,受扰运动极其缓慢时,在摄动参数 $\bar{\epsilon}$ 的二次项精度范围内,即使考虑动力学效应,第 5 章中关于螺旋杆一次近似静态稳定性的分析结果依然成立,且动力学方程中增加的截面角速度 Ω 和速度 v 等动力学参数的扰动量亦相对弧坐标 $\bar{s}$ 稳定。

6.4 弹性杆的扭转振动

6.4.1 弹性杆的扭转振动方程

设弹性杆无分布力和分布力偶,令方程组(6.2.12)和(6.2.13)中 $f_i = m_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$)。将方程(6.2.13c)各项对 s 求导,方程(6.2.10c)各项对 t 求导,消去 $\partial^2 \Omega_3 / \partial s \partial t$ 项,利用式(6.2.4)将 J_i ($i = 1, 2, 3$) 用 A, B, C 表示,导出弹性杆的扭转振动方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} - \left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial s^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1) + \frac{G}{E\rho} \left(\frac{A-B}{C} \right) \frac{\partial}{\partial s} (\rho \Omega_1 \Omega_2 - E \omega_1 \omega_2) \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

对于圆截面杆的特殊情形,令方程(6.4.1)中 $A=B$,简化为

$$\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} - \left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1) \quad (6.4.2)$$

方程(6.4.1)或(6.4.2)的右项体现了杆的扭转振动与弯曲振动之间的耦合。

将方程(6.2.13c)各项对 t 求导,方程(6.2.10c)各项对 s 求导,消去 $\partial^2 \omega_3 / \partial s \partial t$ 项,可导出用截面角速度表示的扭转振动方程。对于圆截面杆,形式上与方程(6.4.2)相似

$$\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - \left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial s^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial s} (\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1) \quad (6.4.3)$$

仅在 ω 与 Ω 平行的特殊情形,方程(6.4.2)或(6.4.3)的右项为零,简化为与直杆扭转振动方程完全相同的一维波动方程

$$\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial s^2} = 0 \quad (6.4.4a)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial s^2} = 0 \quad (6.4.4b)$$

参数 c 定义为

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.4.5)$$

6.4.2 非圆截面螺旋杆的均匀扭转振动

弹性杆的均匀扭转振动是最简单的特殊形式扭转振动,即截面的振动规律相同,且振动过程不影响中心线几何形状。在振动过程中 Frenet 坐标系保持不变,各截面相对 Frenet 坐标系以相同的扭角振动,扭角 χ 为时间 t 的一元函数,与弧坐标 s 无关^[133]。设半径为 R ,倾角为 $\alpha = \pi/2 - \theta_0$ 的非圆截面螺旋杆作均匀扭转振动,中心线各点的曲率和挠率为

$$\kappa = \frac{1}{R} \sin^2 \theta_0, \quad \tau = \frac{1}{R} \cos \theta_0 \sin \theta_0 \quad (6.4.6)$$

令式(6.1.17)中角速度 Ω_F 和 $\partial \chi / \partial s$ 为零,则有

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \kappa \sin \chi, \quad \omega_2 = \kappa \cos \chi, \quad \omega_3 = \tau \\ \Omega_1 &= 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \frac{d\chi}{dt} \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

将式(6.4.6)、式(6.4.7)和式(6.2.4)代入方程(6.2.10c),导出螺旋杆的均匀扭振方程

$$\frac{d^2 \chi}{dt^2} + \nu^2 \sin 2\chi = 0 \quad (6.4.8)$$

其中参数 ν^2 定义为

$$\nu^2 = \frac{G}{2\rho R^2} \left(\frac{B-A}{C} \right) \sin^4 \theta_0 \quad (6.4.9)$$

设杆截面扭角的初始条件为

$$t = 0: (\chi)_0 = \chi_0, \quad \left(\frac{d\chi}{dt}\right)_0 = 0 \quad (6.4.10)$$

则方程(6.4.8)存在以下 Jacobi 积分

$$\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 - \nu^2 (\cos 2\chi - \cos 2\chi_0) = 0 \quad (6.4.11)$$

将上式分离变量积分, 写作

$$\sqrt{2}\nu dt = \frac{d\chi}{\sqrt{\sin^2 \chi_0 - \sin^2 \chi}} \quad (6.4.12)$$

作以下代换

$$\sin \chi = k \sin \phi, \quad k = \sin \chi_0 \quad (6.4.13)$$

从式(6.4.11)导出椭圆函数形式的解析解

$$\nu_1 t = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = F(\phi, k) \quad (6.4.14)$$

其中 $\nu_1 = \sqrt{2}\nu$ 。解出

$$\chi(t) = \arcsin[k \operatorname{sn}(\nu_1 t)] \quad (6.4.15)$$

扭振周期 T 由第一类完全椭圆积分 $K(k)$ 确定

$$T = \frac{4}{\nu_1} K(k) \quad (6.4.16)$$

对于微幅振动情形, 略去 χ 的二次以上小量, 方程(6.4.8)简化为

$$\frac{d^2 \chi}{dt^2} + \nu_1^2 \chi = 0 \quad (6.4.17)$$

从线性化方程(6.4.17)算出的周期为式(6.4.16)中 $k=0, K(0)=\pi/2$ 时的特例

$$T = \frac{2\pi}{\nu_1} \quad (6.4.18)$$

方程(6.4.17)的解是以 ν_1 为圆频率, χ_0 为振幅的谐振动

$$\chi(t) = \chi_0 \cos \nu_1 t \quad (6.4.19)$$

将式(6.4.6)和式(6.4.7)代入式(6.2.9), 得到

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{A}{R} \sin^2 \theta_0 \sin \chi(t) \\ M_2 &= \frac{B}{R} \sin^2 \theta_0 \cos \chi(t) \\ M_3 &= C \left(\frac{1}{2R} \sin 2\theta_0 - \omega_s^0 \right) \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

在均匀扭振过程中, 杆截面上作用的弯矩随扭角周期性变化, 扭矩保持常值。

6.4.3 具有原始曲率和挠率的圆截面螺旋杆的均匀扭转振动

设上述螺旋杆为圆截面, 在松弛状态下为半径 R^0 , 倾角 $\alpha^0 = \pi/2 - \theta^0$ 的螺旋线, 且具有原始扭角 χ^0 , 其原始曲率 κ^0 和原始挠率 τ^0 由式(5.4.20)确定

$$\kappa^0 = \frac{\sin^2 \theta^0}{R^0}, \quad \tau^0 = \frac{\cos \theta^0 \sin \theta^0}{R^0} \quad (6.4.21)$$

其原始弯扭度 ω^0 在截面主轴 x, y 的投影为

$$\omega_1^0 = \kappa^0 \sin \chi^0, \quad \omega_2^0 = \kappa^0 \cos \chi^0, \quad \omega_3^0 = \tau^0 \quad (6.4.22)$$

设杆作均匀扭振, 将截面运动规律(6.4.7)与利用式(5.4.2)计算的截面作用力主矩 M 代入动力学方程(6.2.8), 其在切线轴上的投影为

$$\frac{d^2 \chi}{dt^2} + 2\nu^2 \sin(\chi - \chi^0) = 0 \quad (6.4.23)$$

其中参数 ν^2 重新定义为

$$\nu^2 = \frac{AG}{2\rho CRR^0} \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta^0 \quad (6.4.24)$$

引入新变量 $\tilde{\chi}$, 定义为

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2}(\chi - \chi^0) \quad (6.4.25)$$

则方程(6.4.23)可改写为与方程(6.4.8)相同的形式

$$\frac{d^2 \tilde{\chi}}{dt^2} + \nu^2 \sin 2\tilde{\chi} = 0 \quad (6.4.26)$$

$\tilde{\chi}(t)$ 的椭圆函数解与式(6.4.15)相同

$$\chi(t) = \chi^0 + 2\arcsin[k \operatorname{sn}(\nu_1 t)] \quad (6.4.27)$$

其中参数 $\nu_1 = \sqrt{2}\nu$ 的定义不变, $k = \sin((\chi_0 - \chi^0)/2)$ 。扭振周期 T 的计算公式与式(6.4.16)和式(6.4.18)相同。杆的微幅扭振规律为与式(6.4.19)类似的谐振动

$$\chi(t) = \chi^0 + (\chi_0 - \chi^0) \cos \nu_1 t \quad (6.4.28)$$

6.4.4 圆截面杆的平面扭转振动

设圆截面杆的中心线为任意平面曲线, 且保持在 (ξ, ζ) 平面内运动, 杆的副法线轴 e_b 与运动平面的法线 η 轴平行, Frenet 坐标系绕法线轴和切线轴无转动(图 6.1)。则有

$$v_b = 0, \quad \tau = 0, \quad \omega_3 = \frac{\partial \chi}{\partial s}, \quad \Omega_{Fn} = \Omega_n = 0$$

$$\Omega_{Fb} = \Omega_b, \quad \Omega_{F3} = 0, \quad \Omega_3 = \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (6.4.29)$$

方程(6.2.17c)化作

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} = 0 \quad (6.4.30)$$

参数 c 的定义见式(6.4.5)。方程(6.4.4a)和方程(6.4.4b)均可由此方程导出。

设杆的两端固定, 边界条件为

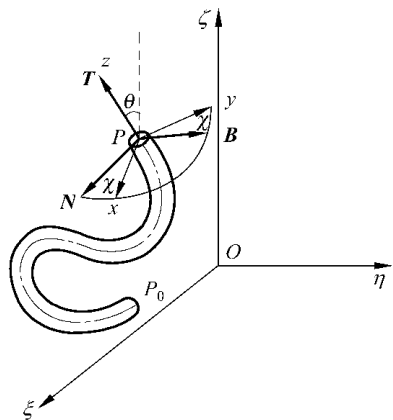


图 6.1 弹性杆的平面运动

$$\begin{aligned}\chi(0, t) &= 0, \quad \chi(L, t) = 0, \\ \omega_3(0, t) &= \omega_3(L, t) = 0\end{aligned}\quad (6.4.31)$$

方程(6.4.30)存在与弦振动相同形式的解

$$\chi(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos k_n s) (A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t) \quad (6.4.32)$$

其中挠性线相对弧坐标周期变化的角频率 k_n 和扭转振动角频率 ν_n 分别为

$$k_n = \frac{2n\pi}{L}, \quad \nu_n = ck_n = \frac{2\pi n}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.4.33)$$

将式(6.4.32)对 s 或 t 求导, 得到杆的扭率 ω_3 以及绕切线轴的角速度 Ω_3 的变化规律

$$\omega_3(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin k_n s (A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t) \quad (6.4.34)$$

$$\Omega_3(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n (1 - \cos k_n s) (B_n \cos \nu_n t - A_n \sin \nu_n t) \quad (6.4.35)$$

此结果也可从方程(6.4.4)直接积分得到。常数 A_n, B_n ($n = 1, 2, \dots$) 取决于扭角 χ 以及角速度 Ω_3 的初始状态

$$\begin{aligned}\chi(s, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1 - \cos k_n s) \\ \Omega_3(s, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n (1 - \cos k_n s)\end{aligned}\quad (6.4.36)$$

解出

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \chi(s, 0) \cos k_n s \, ds \\ B_n &= \frac{1}{n\pi c} \int_0^L \Omega_3(s, 0) \cos k_n s \, ds\end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.4.37)$$

除上述振动解以外, 方程(6.4.30)还存在行波解

$$\chi(s, t) = \tilde{\chi}_1(s - ct) + \tilde{\chi}_2(s + ct) \quad (6.4.38)$$

其中 $\tilde{\chi}_1(\tilde{s}), \tilde{\chi}_2(\tilde{s})$ 为 $\tilde{s} = s \pm ct$ 的连续函数, 参数 $c = \sqrt{G/\rho}$ 为弹性波的传播速度, $\tilde{s}$ 为原点以速度 c 或 $-c$ 沿中心线移动的动弧坐标。

6.5 弹性杆的弯曲振动

6.5.1 圆截面杆平面运动的动力学方程

讨论圆截面杆在 (ξ, ζ) 平面内运动的特殊情形(图 6.1)。利用 6.4.4 节中的条件(6.4.29), 略去分布力和原始扭率, 圆截面杆动力学方程组(6.1.11), (6.1.12), (6.2.16)和(6.2.17)可简化为

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_b}{\partial s} = 0 \quad (6.5.1a)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + \kappa v_3 - \Omega_b = 0 \quad (6.5.1b)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial s} - \kappa v_n = 0 \quad (6.5.1c)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + \kappa F_3 - \rho S \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \Omega_b v_3 \right) = 0 \quad (6.5.1d)$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial s} = 0 \quad (6.5.1e)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \kappa F_n - \rho S \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} - \Omega_b v_n \right) = 0 \quad (6.5.1f)$$

$$C\kappa \frac{\partial \chi}{\partial s} - 2J_1 \Omega_b \frac{\partial \chi}{\partial t} - F_b = 0 \quad (6.5.1g)$$

$$A \frac{\partial \kappa}{\partial s} - J_1 \frac{\partial \Omega_b}{\partial t} + F_n = 0 \quad (6.5.1h)$$

$$2J_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - C \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} = 0 \quad (6.5.1i)$$

其余方程均为恒等式。解耦的方程(6.5.1i)在6.4.4节中曾用于讨论杆的平面扭转振动。本节在讨论杆的弯曲振动时忽略扭转振动的影响,设杆的扭角为零。令方程组(6.5.1)中 $\chi(s,t) \equiv 0$,方程(6.5.1g)要求 F_b 亦为零,此时Frenet坐标系(P -NBT)与截面的主轴坐标系(P -xyz)重合。以杆的切线轴相对 ζ 轴的倾角 θ 确定截面的姿态(图6.1),可将 κ, Ω_b 表示为

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad \Omega_b = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (6.5.2)$$

则方程(6.5.1a)为恒等式。方程组(6.5.1)简化为

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + v_3 \frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (6.5.3a)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial s} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial s} = 0 \quad (6.5.3b)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + F_3 \frac{\partial \theta}{\partial s} - \rho S \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_3 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.5.3c)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - F_n \frac{\partial \theta}{\partial s} - \rho S \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} - v_n \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.5.3d)$$

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + F_n = 0 \quad (6.5.3e)$$

6.5.2 圆截面直杆的平面弯曲振动

讨论沿 ζ 轴伸展受轴向力 F_0 作用的直杆的弯曲振动。杆中心线各点的位置和速度以笛卡尔坐标 ξ, ζ 表示,令

$$\nu_n = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \nu_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (6.5.4)$$

将上式代入方程组(6.5.3),得到直杆的平面运动方程组

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (6.5.5a)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (6.5.5b)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial s} F_3 - \rho S \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.5.5c)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} F_n - \rho S \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.5.5d)$$

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + F_n = 0 \quad (6.5.5e)$$

此方程组与直杆平衡对应的特解为

$$\theta = 0, \quad \xi = 0, \quad \zeta = s, \quad F_n = 0, \quad F_3 = F_0 \quad (6.5.6)$$

设轴向力为压力, 令 $F_0 = -|F_0|$, 定义以下无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和时间坐标 $\bar{t}$, 无量纲参数 μ , 以及无量纲扰动量 $x_i (i=1, 2, \dots, 5)$

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \sqrt{\frac{|F_0|}{A}} s, \quad \bar{t} = \frac{|F_0|}{\sqrt{\rho S A}} t, \quad \mu = \frac{J_1 |F_0|}{\rho S A} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{|F_0|}{A}} \xi, \quad x_2 = \sqrt{\frac{|F_0|}{A}} \zeta - \bar{s} \\ x_3 &= \theta, \quad x_4 = \frac{F_n}{|F_0|}, \quad x_5 = \frac{F_3}{|F_0|} + 1 \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

仍以撇号和点号表示对无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和时间 $\bar{t}$ 的偏导数, 导出扰动方程

$$\dot{x}'_1 - \dot{x}'_3 = 0 \quad (6.5.8a)$$

$$\dot{x}'_2 = 0 \quad (6.5.8b)$$

$$\ddot{x}_1 + x'_3 - x'_4 = 0 \quad (6.5.8c)$$

$$\ddot{x}_2 - x'_5 = 0 \quad (6.5.8d)$$

$$x''_3 - \mu \ddot{x}_3 + x_4 = 0 \quad (6.5.8e)$$

利用与式(6.3.8)相同的指数形式特解

$$x_i(\bar{s}, \bar{t}) = x_{i0} \exp(\lambda \bar{s} + \omega \bar{t}) \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (6.5.9)$$

代入方程组(6.5.8)后, 导出的特征方程包含 2 个待定参数 λ, ω 。5.2.3 节的分析表明轴向受压直杆恒满足静态 Lyapunov 稳定性条件, 弧坐标特征值为 $\lambda = \pm i\bar{k}$ 。根据 6.3.2 节中的说明, 利用静力学分析中对两端铰支直杆导出的附加条件(5.2.28)可确定弧坐标角频率 $\bar{k}$

$$\bar{k} = k_n \sqrt{\frac{A}{|F_0|}}, \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.5.10)$$

则方程组(6.5.8)的特征方程中仅含待定的时域特征值 ω

$$\omega^2(\omega^2 + a) = 0 \quad (6.5.11)$$

上式中的参数 a 为

$$a = \frac{\bar{k}^2(\bar{k}^2 - 1)}{1 + \mu \bar{k}^2} \quad (6.5.12)$$

$\bar{k}^2 > 1$ 条件满足时, a 为正实数, 则时域中的直杆稳定性条件为

$$|F_0| < \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \leq \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.5.13)$$

与式(4.5.16)比较,条件(6.5.13)即两端铰支直杆的静态欧拉稳定性条件。从而证明,在满足静态 Lyapunov 稳定性前提下,若欧拉稳定性条件亦满足,则直杆的动态稳定性条件必也同时满足。可见静态的欧拉稳定性概念在动态稳定性分析中也有重要意义。条件(6.5.13)满足时,特征方程(6.5.12)除零根以外的特征值为纯虚根。令 $w = \pm i\sqrt{a}$, 将式(6.5.10)和 $A = EI$ 代入,化作有量纲形式,导出压杆弯曲振动的固有角频率

$$\nu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \left(1 - \frac{|F_0| L^2}{n^2 \pi^2 EI}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 J_1}{\rho S L^2}\right)^{-1/2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.5.14)$$

直杆受扰后作驻波形式的弯曲振动,以第 n 阶受扰挠性线为第 n 阶模态,振动规律为

$$x_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{i0})_n \exp(ik_n s) \sin \nu_n t \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (6.5.15)$$

6.5.3 圆截面圆环杆的平面弯曲振动

再以圆环杆的平面弯曲振动为例,改用极坐标 r, ϕ 表示杆中心线各点的位置和速度,令

$$v_n = -\frac{\partial r}{\partial t}, \quad v_3 = r \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.5.16)$$

代入方程组(6.5.3),得到圆环杆的平面运动方程组

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} - r \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (6.5.17a)$$

$$r \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (6.5.17b)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial s} F_3 + \rho S \left[\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad (6.5.17c)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} F_n - \rho S \left[r \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial r}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad (6.5.17d)$$

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + F_n = 0 \quad (6.5.17e)$$

此方程组存在与圆环杆平衡对应的以下特解

$$\theta = \phi = \frac{s}{R}, \quad r = R, \quad F_n = F_3 = 0 \quad (6.5.18)$$

其中 R 为圆环杆的半径。重新定义无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和时间坐标 $\bar{t}$, 无量纲参数 μ , 以及无量纲扰动量 $x_i (i=1, 2, \dots, 5)$

$$\bar{s} = \frac{s}{R}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{A}{\rho S}} \frac{t}{R^2}, \quad \mu = \frac{J_1}{\rho S R^2}$$

$$x_1 = \frac{r}{R} - 1, \quad x_2 = \phi - \bar{s}, \quad x_3 = \theta - \bar{s}, \quad x_4 = \frac{R^2}{A} F_n, \quad x_5 = \frac{R^2}{A} F_3 \quad (6.5.19)$$

导出圆环杆的扰动方程

$$\dot{x}'_1 - \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0 \quad (6.5.20a)$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}'_2 = 0 \quad (6.5.20b)$$

$$\ddot{x}_1 + x'_4 + x_5 = 0 \quad (6.5.20c)$$

$$\ddot{x}_2 + x_4 - x'_5 = 0 \quad (6.5.20d)$$

$$x''_3 - \mu \ddot{x}_3 + x_4 = 0 \quad (6.5.20e)$$

5.3.6 节中已证明圆截面圆环杆恒满足静态 Lyapunov 稳定性条件, 令 $\lambda = \pm i\bar{k}_n$ 。利用静力学分析中的圆环杆封闭的附加条件(5.4.38), 令 $L = 2\pi R$, 导出

$$\bar{k}_n = n = Rk_n, \quad k_n = \frac{n}{R} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.5.21)$$

将指数形式特解(6.5.9)代入方程组(6.5.20), 其特征方程与式(6.5.11)相同, 但参数 a 的定义改为

$$a = \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1 + \mu(n^2 - 1)^2} \quad (6.5.22)$$

$n > 1$ 时参数 a 为正实数, 表明圆截面圆环杆也满足动态稳定性条件。化作有量纲形式后导出圆环杆弯曲振动的固有角频率 ν_n

$$\nu_n = \frac{n(n^2 - 1)}{R^2 \sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \left[1 + \frac{J_1(n^2 - 1)^2}{\rho S R^2 (n^2 + 1)} \right]^{-1/2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.5.23)$$

驻波形式的弯曲振动规律与式(6.5.15)形式相同, 其中参数 k_n, ν_n 改用式(6.5.21)和式(6.5.23)的定义。与通常使用的梁和圆环的横向振动固有频率公式比较, 以上基于 Kirchhoff 理论导出的弯曲振动频率公式(6.5.14)和式(6.5.23)考虑了轴向力和截面转动惯性效应的影响, 增加了与 F_0 和截面转动惯量 J_1 有关的修正项。

6.5.4 圆截面螺旋杆的弯曲振动

用欧拉角表示圆截面杆的截面姿态时, 将 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 作为投影坐标系。在螺旋线平衡的特殊状态下, $(P-x_2 y_2 z_2)$ 与 Frenet 坐标系 $(P-NBT)$ 重合。将 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 坐标系的角位移相对 s 和 t 的变化率记作 ω_F 和 Ω_F , 矢量 $\omega, \omega_F, \Omega, \Omega_F$ 在 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 中的投影记作 $\omega_i, \omega_{Fi}, \Omega_i, \Omega_{Fi} (i = 1, 2, 3)$, 其欧拉角表达式为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{F1} = \frac{\partial \theta}{\partial s}, & \omega_2 &= \omega_{F2} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \sin \theta \\ \omega_3 &= \omega_{F3} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}, & \omega_{F3} &= \frac{\partial \psi}{\partial s} \cos \theta \\ \Omega_1 &= \Omega_{F1} = \frac{\partial \theta}{\partial t}, & \Omega_2 &= \Omega_{F2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \theta \\ \Omega_3 &= \Omega_{F3} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, & \Omega_{F3} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \theta \end{aligned} \quad (6.5.24)$$

略去原始扭率和分布力, 列出动力学方程(6.2.15)和(6.2.20)在 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 中的投影式, 将式(6.5.24)代入, 得到仅含 ψ, θ, φ 以及 F 在 $(P-x_2 y_2 z_2)$ 中的投影 $F_i (i = 1, 2, 3)$ 共 6 个未知变量的圆截面杆动力学方程

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \left(\frac{\partial F_3}{\partial s} \sin \theta - \frac{\partial F_2}{\partial s} \cos \theta \right) - F_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 - F_2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \cos \theta - 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial s} \sin \theta \right)$$

$$+ F_3 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \sin \theta + 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial s} \cos \theta \right) - \rho S \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \sin \theta + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \theta \right) = 0 \quad (6.5.25a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_2}{\partial s^2} + 2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \cos \theta - \frac{\partial F_3}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) + F_1 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \cos \theta \right) - F_2 \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 \cos^2 \theta \right) \\ - F_3 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 \cos \theta \sin \theta \right) + \rho S \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \cos \theta \sin \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.5.25b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_3}{\partial s^2} + 2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\partial F_1}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \sin \theta \right) - F_1 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \sin \theta \right) + F_2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 \cos \theta \sin \theta \right) \\ - F_3 \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 \sin^2 \theta \right) + \rho S \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \sin^2 \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.5.25c)$$

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + (C - A) \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 \cos \theta \sin \theta + C \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \sin \theta - F_2 \\ - J_1 \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \cos \theta \sin \theta + 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \sin \theta \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.5.25d)$$

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \sin \theta + (2A - C) \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \cos \theta - C \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + F_1 \\ - J_1 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \sin \theta - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.5.25e)$$

$$C \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) - 2J_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.5.25f)$$

方程组(6.5.25)存在以下特解

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0, \quad \psi = \omega_0 s, \quad \varphi = 0 \\ F_1 = 0, \quad F_2 = F_0 \sin \theta_0, \quad F_3 = F_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (6.5.26)$$

对应于螺旋角为 $\alpha = \pi/2 - \theta_0$, 半径为 $R = \sin \theta_0 / \omega_0$, 且相对 Frenet 坐标系无扭转的螺旋线平衡状态。轴向力 F_0 与 ω_0, θ_0 之间满足关系式(5.3.24)

$$F_0 = (C - A) \omega_0^2 \cos \theta_0 \quad (6.5.27)$$

定义无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和时间坐标 $\bar{t}$, 引入无量纲参数 μ

$$\bar{s} = \omega_0 s, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{C}{\rho S}} \omega_0^2 t, \quad \mu = \frac{J_1 \omega_0^2}{\rho S} = \frac{I_x \omega_0^2}{S} \quad (6.5.28)$$

将上式参数 μ 中的 ω_0 以 $\sin \theta_0 / R$ 代替, 设 a 为截面的平均半径, 由于 $I_x \sim a^4, S \sim a^2$, 则 $\mu \sim (a/R)^2$ 。当杆足够细长时, μ 为无限小量。定义以下无量纲扰动量 $x_i (i=1, \dots, 6)$

$$\begin{aligned} x_1 = \theta - \theta_0, \quad x_2 = \psi - \bar{s}, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = \frac{F_1}{C \omega_0^2} \\ x_5 = \frac{F_2 - F_0 \sin \theta}{C \omega_0^2} = \frac{F_2}{C \omega_0^2} + \nu \cos \theta_0 (\sin \theta_0 + \cos \theta_0 x_1) \\ x_6 = \frac{F_3 - F_0 \cos \theta}{C \omega_0^2} = \frac{F_3}{C \omega_0^2} + \nu \cos \theta_0 (\cos \theta_0 - \sin \theta_0 x_1) \end{aligned} \quad (6.5.29)$$

其中参数 ν 见式(5.4.12)的定义。将上式代入方程组(6.5.25), 导出螺旋杆的一次近似扰动方程

$$(1 + \nu) x_1'' + \nu \sin^2 \theta_0 x_1 - \mu \ddot{x}_1 - \nu \sin 2\theta_0 x_2' + \sin \theta_0 x_3' - x_5 = 0 \quad (6.5.30a)$$

$$(1+2\nu)\cos\theta_0 x'_1 + [(1+\nu)x''_2 - \mu\ddot{x}_2]\sin\theta_0 + x_4 = 0 \quad (6.5.30b)$$

$$-\sin\theta_0 x'_1 + (x''_2 - 2\epsilon\ddot{x}_2)\cos\theta_0 + x''_3 - 2\mu\ddot{x}_3 = 0 \quad (6.5.30c)$$

$$-\ddot{x}_2\sin\theta_0 + x''_4 - x_4 - 2x'_5\cos\theta_0 + 2x'_6\sin\theta_0 = 0 \quad (6.5.30d)$$

$$\ddot{x}_1 + 2x'_4\cos\theta_0 + x''_5 - x_5\cos^2\theta_0 + x_6\cos\theta_0\sin\theta_0 = 0 \quad (6.5.30e)$$

$$-2x'_4\sin\theta_0 + x_5\cos\theta_0\sin\theta_0 + x''_6 - x_6\sin^2\theta_0 = 0 \quad (6.5.30f)$$

在静态稳定性分析中,各变量仅为弧坐标 $\bar{s}$ 的函数。由于各截面的内力主矢保持常矢量, x_4, x_5, x_6 恒等于零。方程(6.5.30a)至(6.5.30c)构成封闭的静态扰动方程,与式(5.3.7), (5.3.8)一致。在5.3.1和5.3.3节中已经证明圆截面螺旋杆恒满足静态 Lyapunov 稳定性条件,相应的弧坐标角频率 $\bar{k}$ 以及满足端部约束条件时的欧拉载荷 $|F_0|_{cr}$ 在式(5.3.24)和式(5.3.25)中给出,利用式(5.4.12)定义的参数 ν ,写作

$$\bar{k}^2 = 1 + \frac{\nu(2+3\nu)}{(1+\nu)^2} \cos^2\theta_0 \quad (6.5.31)$$

$$\frac{|F_0|_{cr}}{C\omega_0^2} = \left\{ \frac{\nu(1+\nu)^2}{2+3\nu} \left[\left(\frac{n}{N} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (6.5.32)$$

在动力学分析中,将双自变量的指数形式特解(6.5.9)代入扰动方程组(6.5.30),计算其特征方程。其中的弧坐标特征值 $\lambda = i\bar{k}$, $\bar{k} = n/N$, 由端部约束条件(5.3.22)确定。则方程组(6.5.30)的特征方程仅含待定的时域特征值 ω 。设杆足够细长,近似将小参数 μ 略去,导出

$$a\omega^4 + b\omega^2 + c = 0 \quad (6.5.33)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \bar{k}^2 + \sin^2\theta_0 \\ b &= 2\bar{k}^4 [(1+\nu)(\bar{k}^2 - 1) + 2(2+3\nu)\cos^2\theta_0] \end{aligned} \quad (6.5.34)$$

$$c = \bar{k}^4 (\bar{k}^2 - 1)^2 [(1+\nu)^2 (\bar{k}^2 - 1) - \nu(2+3\nu)\cos^2\theta_0]$$

若 $\bar{k}^2 > 1$, 则时域特征值 ω 的纯虚根条件中 $a > 0, b > 0$ 自然满足, $c > 0$ 的条件为

$$\bar{k}^2 > 1 + \frac{\nu(2+3\nu)}{(1+\nu)^2} \cos^2\theta_0 \quad (6.5.35)$$

且可证明:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4\bar{k}^4 \{ \bar{k}^4 [(1+\nu)(\bar{k}^2 - 1) + 2(2+3\nu)\cos^2\theta_0]^2 \\ &\quad - (\bar{k}^2 + \sin^2\theta_0)(\bar{k}^2 - 1)^2 [(1+\nu)^2 (\bar{k}^2 - 1) - \nu(2+3\nu)\cos^2\theta_0] \} \\ &> 4\bar{k}^4 (1+\nu)^2 (\bar{k}^2 - 1)^2 [\bar{k}^4 - (\bar{k}^2 + 1)(\bar{k}^2 - 1)] \\ &= 4\bar{k}^4 (1+\nu)^2 (\bar{k}^2 - 1)^2 > 0 \end{aligned} \quad (6.5.36)$$

则不等式(6.5.35)为螺旋杆的动态 Lyapunov 稳定性条件,与等式(6.5.31)中的等号改为不等号一致。将 $\bar{k} = n/N$ 代入式(6.5.35),与式(6.5.27)联立消去 θ_0 , 导出

$$\frac{|F_0|}{C\omega_0^2} < \left\{ \frac{\nu(1+\nu)^2}{2+3\nu} \left[\left(\frac{n}{N} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (6.5.37)$$

与式(6.5.32)对照,上式表示轴向力小于临界值 $|F_0|_{cr}$ 。因此6.5.2节关于直杆动态稳定性的分析结论可扩大到螺旋杆:在满足静态 Lyapunov 稳定性前提下,若欧拉稳定性条件亦满足,则螺旋杆的动态 Lyapunov 稳定性条件必也同时满足。

上述稳定性条件满足时,令 $\omega = \pm i\bar{\nu}_n$, 可计算螺旋杆在时域内的无量纲固有频率 $\bar{\nu}_n$

$$\bar{\nu}_n = (2a)^{-1/2} [b \mp (b^2 - 4ac)^{1/2}]^{1/2} \quad (6.5.38)$$

设泊松比 $\nu=0.3$, 不同波数 $\bar{k}$ 对应的无量纲固有频率 $\bar{\nu}_n$ 随螺旋角 $\alpha = \pi/2 - \theta_0$ 的变化曲线在图 6.2 中给出。

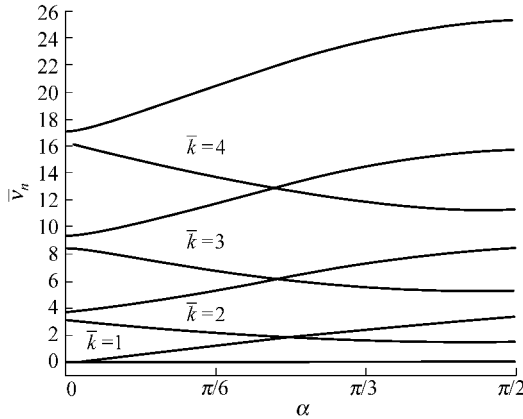


图 6.2 不同螺旋角对应的螺旋杆弯曲振动固有频率

圆环杆作为螺旋杆的特例,令式(6.5.38)中 $\theta_0 = \pi/2, N=1$, 括号中取正号,得到

$$\bar{\nu}_n = \frac{(1+\nu)n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \quad (n=1,2,\dots) \quad (6.5.39)$$

其有量纲形式与式(6.5.23)中略去截面转动惯性效应影响的结果一致

$$\nu_n = \bar{\nu}_n \left(\sqrt{\frac{C}{\rho S}} \omega_0^2 \right) = \frac{n(n^2-1)}{R^2 \sqrt{n^2+1}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (n=1,2,\dots) \quad (6.5.40)$$

6.6 圆截面杆在黏性介质中的运动

6.6.1 黏性介质的阻力和阻力矩

讨论弹性杆在黏性介质中的运动时,必须考虑介质阻力。圆截面杆作缓慢运动时, P 点处作用的单位长度流体黏性阻力 f 的计算公式为

$$f = -c_{\perp} v_{\perp} - c_3 v_3 \quad (6.6.1)$$

其中 $v_{\perp}, v_3$ 分别为 P 点的速度 v 沿截面径向及中心线切向的速度分量, $c_{\perp}, c_3$ 为径向和切向介质阻力系数。 $v_{\perp}, v_3$ 在 Frenet 坐标系 $(P-NBT)$ 中的投影式为

$$v_{\perp} = v_n e_n + v_b e_b, \quad v_3 = v_3 e_3 \quad (6.6.2)$$

则黏性阻力 f 在 $(P-NBT)$ 中的投影为

$$f_n = -c_{\perp} v_n, \quad f_b = -c_{\perp} v_b, \quad f_3 = -c_3 v_3 \quad (6.6.3)$$

单位长度杆上作用的黏性阻力矩 m 沿切线轴,与 P 点处绕切线轴角速度 Ω_3 成正比。设

c_0 为介质阻尼力矩系数^①, 黏性阻力矩 m 在 $(P-NBT)$ 中的投影为

$$m_n = m_b = 0, \quad m_3 = -c_0 \Omega_3 \quad (6.6.4)$$

6.6.2 黏性介质中圆截面杆的扭转振动

设圆截面细长杆在黏性介质中作速度十分缓慢的运动, 由于雷诺数接近于零, 可足够精确地忽略动力学方程中的惯性力项, 认为介质阻力与杆的弹性力互相平衡。将黏性阻力和阻力矩(6.6.3), (6.6.4)代入动力学方程组(6.2.16), (6.2.17), 略去惯性力项, 得到黏性介质中圆截面杆的动力学方程

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + \kappa F_3 - \tau F_b - c_{\perp} v_n = 0 \quad (6.6.5a)$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial s} + \tau F_n - c_{\perp} v_b = 0 \quad (6.6.5b)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \kappa F_n - c_3 v_3 = 0 \quad (6.6.5c)$$

$$C\kappa\left(\frac{\partial \chi}{\partial s} - \omega_3^0\right) + (C-A)\kappa\tau - F_b = 0 \quad (6.6.5d)$$

$$A\frac{\partial \kappa}{\partial s} + F_n = 0 \quad (6.6.5e)$$

$$C\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + \frac{\partial \tau}{\partial s}\right) - c_0\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \Omega_{F3}\right) = 0 \quad (6.6.5f)$$

将动力学方程(6.6.5)与运动学方程(6.1.11)和(6.1.12)联立, 可确定 12 个未知变量:

$F_n, F_b, F_3, v_n, v_b, v_3, \kappa, \tau, \chi, \Omega_n, \Omega_b, \Omega_{F3}$ 。

设圆截面杆的运动保持在 (ξ, ζ) 平面内, 杆的副法线轴 e_b 与运动平面的法线 η 轴平行(图 6.1)。将平面运动条件(6.4.29)代入方程组(6.6.5), 其中方程(6.6.5f)解耦为扭角 $\chi(s, t)$ 的热传导方程

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} = 0 \quad (6.6.6)$$

参数 a 定义为

$$a = \sqrt{\frac{C}{c_0}} \quad (6.6.7)$$

扭角 $\chi(s, t)$ 由解耦的方程(6.6.6)独立确定, 设边界条件与式(6.4.31)相同, 解出

$$\chi(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n0} \sin k_n s \exp(-\delta_n t) \quad (6.6.8)$$

表明扭角相对弧坐标的第 n 次谐波以阻尼系数 δ_n 作衰减自由振动, 其中

$$k_n = \frac{2n\pi}{L}, \quad \delta_n = \frac{4\pi^2 n^2 C}{L^2 c_0} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.6.9)$$

① 杆作缓慢运动且长度 L 远大于截面半径 a 时, 阻尼力和力矩系数的近似计算公式为^[27, 203]:
 $c_{\perp} \approx 2c_3 \approx 4\pi\mu/\ln(L/a)$, $c_0 \approx 4\pi\mu a^2$, μ 为介质黏度。

χ_{n0} 为扭角 $\chi(s, t)$ 相对弧坐标的第 n 次谐波振幅。

6.6.3 黏性介质中圆截面直杆的弯曲振动

设杆无原始扭率, $\omega_3^0 = 0$, 将解出的扭角 $\chi(s, t)$ 规律代入方程组 (6.6.5) 的其余方程, 与运动学方程联立, 可确定杆的弯曲振动规律。

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + \kappa F_3 - c_\perp v_n = 0 \quad (6.6.10a)$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial s} = 0 \quad (6.6.10b)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \kappa F_n - c_3 v_3 = 0 \quad (6.6.10c)$$

$$C\kappa \frac{\partial \chi}{\partial s} - F_b = 0 \quad (6.6.10d)$$

$$A \frac{\partial \kappa}{\partial s} + F_n = 0 \quad (6.6.10e)$$

忽略扭转振动的影响, 令 $\chi(s, t) \equiv 0$, 从方程 (6.6.10d) 导出 $F_b = 0$ 。讨论受轴向压力 F_0 作用的直杆弯曲振动, 仍以杆的切线轴相对 ζ 轴的倾角 θ 及笛卡儿坐标 ξ, ζ 为广义坐标, 将式 (6.5.2) 和式 (6.5.4) 代入方程组 (6.6.10) 及运动学方程 (6.5.5a) 和 (6.5.5b), 得到

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (6.6.11a)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (6.6.11b)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + F_3 \frac{\partial \theta}{\partial s} - c_\perp \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (6.6.11c)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - F_n \frac{\partial \theta}{\partial s} - c_3 \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (6.6.11d)$$

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + F_n = 0 \quad (6.6.11e)$$

方程组 (6.6.11) 也存在直杆平衡特解 (6.5.6), 仍利用式 (6.5.7) 定义的无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和时间 $\bar{t}$, 及无量纲扰动量 $x_i (i=1, 2, \dots, 5)$, 导出压杆的扰动方程

$$\dot{x}'_1 - \dot{x}'_3 = 0 \quad (6.6.12a)$$

$$\dot{x}'_2 = 0 \quad (6.6.12b)$$

$$\bar{c}_\perp \dot{x}'_1 + x'_3 - x'_4 = 0 \quad (6.6.12c)$$

$$\bar{c}_3 \dot{x}'_2 - x'_5 = 0 \quad (6.6.12d)$$

$$x''_3 + x_4 = 0 \quad (6.6.12e)$$

其中 $\bar{c}_\perp, \bar{c}_3$ 为无量纲化的阻尼力系数

$$\bar{c}_\perp = \sqrt{\frac{A}{\rho S}} \frac{c_\perp}{|F_0|}, \quad \bar{c}_3 = \sqrt{\frac{A}{\rho S}} \frac{c_3}{|F_0|} \quad (6.6.13)$$

将指数形式特解(6.5.9)代入方程组(6.6.13),令 $\lambda = i\bar{k}$, 利用由端部约束条件确定的式(6.5.10), 导出时域特征方程

$$w(w+a) = 0 \quad (6.6.14)$$

其中 $a = \bar{c}_\perp$ 。时域特征根为负实根 $w = -a$, 表明直杆的受扰运动为衰减弯曲振动

$$x_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{i0})_n \sin k_n s \exp(-\delta_n t) \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (6.6.15)$$

其中 $(x_{i0})_n$ 为扰动 $x_i(s, t)$ ($i=1, 2, \dots, 5$) 相对弧坐标的第 n 次谐波振幅, 角频率 k_n 的定义同式(6.5.10), 阻尼系数 δ_n 为

$$\delta_n = \frac{c_\perp}{2\rho S} \quad (6.6.16)$$

6.6.4 黏性介质中圆截面圆环杆的弯曲振动

讨论圆截面圆环杆的弯曲振动时, 改用极坐标 r, ϕ 为广义坐标, 杆中心线各点的速度如式(6.5.16)所示。将式(6.5.2)和式(6.5.16)代入方程组(6.6.10)及运动学方程(6.5.17a)和(6.5.17b), 得到

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} - r \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (6.6.17a)$$

$$r \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (6.6.17b)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial s} F_3 + c_\perp \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \quad (6.6.17c)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} F_n - c_3 r \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (6.6.17d)$$

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + F_n = 0 \quad (6.6.17e)$$

方程组(6.6.17)也存在圆环杆平衡特解(6.5.18), 利用式(6.5.19)定义的无量纲弧坐标 $\bar{s}$ 和时间 $\bar{t}$, 以及无量纲扰动量 x_i ($i=1, 2, \dots, 5$), 导出圆环杆的扰动方程

$$\dot{x}'_1 - \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0 \quad (6.6.18a)$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}'_2 = 0 \quad (6.6.18b)$$

$$\bar{c}_\perp \dot{x}_1 + x'_4 + x_5 = 0 \quad (6.6.18c)$$

$$\bar{c}_3 \dot{x}_2 + x_4 - x'_5 = 0 \quad (6.6.18d)$$

$$x''_3 + x_4 = 0 \quad (6.6.18e)$$

无量纲阻尼力系数 $\bar{c}_\perp, \bar{c}_3$ 改定义为

$$\bar{c}_\perp = \frac{R^2 c_\perp}{\sqrt{\rho S A}}, \quad \bar{c}_3 = \frac{R^2 c_3}{\sqrt{\rho S A}} \quad (6.6.19)$$

利用指数形式特解(6.5.9), 令 $\lambda = i\bar{k}$, 圆环杆的封闭条件要求 $\bar{k} = n$, 重复 6.6.3 节的计算, 导出与式(6.6.14)相同的时域特征方程, 参数 a 改为

$$a = \frac{\bar{c}_3 + \bar{c}_\perp n^2}{n^2 + 1} \quad (6.6.20)$$

时域的负实特征根表明圆环杆作衰减弯曲振动

$$x_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{i0})_n \sin k_n s \exp(-\delta_n t) \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (6.6.21)$$

其中 $(x_{i0})_n$ 为扰动 $x_i(s, t)$ ($i=1, 2, \dots, 5$) 相对弧坐标的第 n 次谐波振幅, 角频率 k_n 的定义同式(6.5.21), 阻尼系数 δ_n 为

$$\delta_n = \frac{(\bar{c}_3 + \bar{c}_4 n^2) R^2}{2\rho S R^2 (n^2 + 1)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.6.22)$$

第 7 章 弹性杆平衡状态的数值计算

在 Kirchhoff 假定条件下,弹性杆的平衡与稳定性问题也仅能对有限的几种特殊情况导出解析结果。对于弹性杆的更普遍情况,例如考虑杆的轴向变形及分布力的存在,考虑截面形状和物理参数沿中心线的变化等,则必须应用数值方法计算其几何形态。1992 年 Westcott, Tobias, Olson 等应用有限元方法建立用欧拉角表示的离散化的弹性杆平衡方程,以及表示杆间接触约束的代数方程,利用拉格朗日乘子计算受约束杆的几何形态。由于欧拉角存在奇点,1997 年上述作者改用欧拉参数代替欧拉角表示截面的姿态,并提出利用杆与杆之间静电引力的排斥作用代替几何约束方程,以避免杆与杆的接触和相互穿越。本章建立用欧拉参数表示的 Kirchhoff 方程,导出杆的总势能变分。对于静电引力和几何约束两种不同计算方案,列出离散化的弹性杆平衡方程,作为应用数值方法研究弹性杆平衡问题的理论基础。

7.1 用欧拉参数表示的 Kirchhoff 方程

7.1.1 弹性杆力学模型的改进

在以上各章中,由于解析研究的需要,对弹性杆的力学模型作了不同程度的简化。在对弹性杆平衡问题作数值计算时,在以下几方面可不受此简化条件的限制,使力学模型更接近于弹性杆的实际情况。

- (1) 杆的截面形状和物理参数沿中心线发生变化;
- (2) 杆沿中心线存在弹性拉伸变形;
- (3) 杆具有原始曲率、原始扭率和原始相对扭角;
- (4) 杆存在分布力。

上述条件(1)表明,杆的截面积 S 、杨氏模量 E 、泊松比 ν ,以及抗弯刚度 A , B 和抗扭刚度 C 等均为弧坐标 s 的函数。根据条件(2),杆受力后中心线上任意点的弧坐标已不同于松弛状态。将受力状态下的弧坐标改以 s_1 表示,以区别于松弛状态下的弧坐标 s ,二者之间的关系为

$$ds_1 = (1 + \epsilon)ds \quad (7.1.1)$$

其中 $\epsilon(s)$ 为杆沿中心线的轴向应变,取决于轴向力 F_3 和截面的抗拉刚度 $K = ES$,为弧坐标 s 的函数

$$\epsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{F_3}{K} \quad (7.1.2)$$

考虑杆的轴向变形,前面各章中所有公式中出现的弧坐标的函数以及相对弧坐标的导数均应将自变量 s 改为受力状态下的弧坐标 s_1 。为简化符号,略去 s_1 的下标,仍以 s 表示受力状态下的弧坐标。

根据条件 3) 规定的普遍情形,利用 2.1 节中的力矩计算公式(2.1.17)

$$M_1 = A(\omega_1 - \omega_1^0), \quad M_2 = B(\omega_2 - \omega_2^0), \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \quad (7.1.3)$$

其中杆的原始弯扭度 $\omega_i^0(s) (i=1,2,3)$ 由杆的原始曲率 $\kappa^0(s)$ 、原始挠率 $\tau^0(s)$ 和原始扭角 $\chi^0(s)$ 确定

$$\omega_1^0 = \kappa^0 \sin \chi^0, \quad \omega_2^0 = \kappa^0 \cos \chi^0, \quad \omega_3^0 = \tau^0 + \frac{d\chi^0}{ds} \quad (7.1.4)$$

一般情况下, $\omega_i^0(s) (i=1,2,3)$ 为弧坐标 s 的函数,不一定为常数。

由于作为实体的弹性杆占据着确定的空间,不允许杆的其他部分穿透。因此不同截面中心点之间必须维持一定的法向距离,即不得小于杆的直径。杆与杆之间的接触力可以阻止距离继续减小防止相互穿透。若杆与杆之间有相互排斥的引力存在^①,且随杆间距离的减小而迅速增强,也可避免接触和穿透。这两种情形均必须考虑分布力,即条件(4)的规定。将单位长度中心线范围内的分布力记作 $f(s)$,一般情况下为弧坐标 s 的连续函数。若存在集中的接触力,则 $f(s)$ 在力作用点处产生不连续的突变。分布力 $f(s)$ 对力矩平衡方程的影响为二阶微量而忽略。

7.1.2 考虑分布力和拉伸变形的 Kirchhoff 方程

利用 3.1 节中列出的考虑分布力的力平衡方程(3.1.3),以及 2.1 节中的主矩平衡方程(2.1.5),由于考虑弹性拉伸变形,其中的自变量 s 应理解为变形后的弧坐标

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} + \mathbf{f} = 0 \quad (7.1.5)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} = 0 \quad (7.1.6)$$

导出矢量方程(7.1.5)和(7.1.6)在截面主轴坐标系(P - xyz)中的投影式

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{ds} + (\omega_2 F_3 - \omega_3 F_2 + f_1) &= 0 \\ \frac{dF_2}{ds} + (\omega_3 F_1 - \omega_1 F_3 + f_2) &= 0 \\ \frac{dF_3}{ds} + (\omega_1 F_2 - \omega_2 F_1 + f_3) &= 0 \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

^① 对于 DNA 的双螺旋结构,这种排斥引力可来自带负电荷的糖-磷酸骨架之间的静电引力,以及中性分子之间非共价结合的 van der Waal 力。

$$A \frac{d\omega_1}{ds} + [C\omega_2(\omega_3 - \omega_3^0) - B\omega_3(\omega_2 - \omega_2^0) - F_2] = 0$$
$$B \frac{d\omega_2}{ds} + [A\omega_3(\omega_1 - \omega_1^0) - C\omega_1(\omega_3 - \omega_3^0) + F_1] = 0$$
$$C \frac{d\omega_3}{ds} + [B\omega_1(\omega_2 - \omega_2^0) - A\omega_2(\omega_1 - \omega_1^0)] = 0$$

(7.1.8)

其中分布力 $f_i(i=1,2,3)$ 的规律应预先确定。以 DNA 双螺旋骨架之间的静电引力为例,不同杆截面之间的静电引力取决于截面之间的距离,其离散化的表达式在 7.1.3 节中给出。

7.1.3 欧拉参数表述的弹性杆平衡方程

在以上各章的分析中,均以欧拉角作为确定截面空间位置的广义坐标。虽然用欧拉角表示的 Kirchhoff 方程对几种特殊情形存在解析积分,但根据附录 B 中的说明,由于欧拉角存在奇点,在积分过程中当变量接近奇点值时,数值积分即无法进行。因此在对弹性杆平衡问题作数值计算时,必须改用欧拉参数代替欧拉角表示截面的姿态。欧拉参数不存在奇点,其另一优点是以代数运算代替三角函数运算,可提高数值计算效率。

利用附录 B 中式(B.30)定义的欧拉参数表示截面的姿态,改记为 $q_k(k=1,2,3,4)$

$$q_1 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad q_{k+1} = p_k \sin \frac{\phi}{2} \quad (k=1,2,3)$$

(7.1.9)

其中 $p_k(k=1,2,3)$ 为刚性截面的有限转动轴 p 相对惯性参考系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦, ϕ 为有限转动角。利用式(B.31)将截面主轴坐标系 $(P-xyz)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦用欧拉参数表示,如表 7.1 所示。

表 7.1 方向余弦

	x	y	z
ξ	$q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2$	$2(q_2 q_3 - q_1 q_4)$	$2(q_2 q_4 + q_1 q_3)$
η	$2(q_2 q_3 + q_1 q_4)$	$q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2$	$2(q_3 q_4 - q_1 q_2)$
ζ	$2(q_2 q_4 - q_1 q_3)$	$2(q_3 q_4 + q_1 q_2)$	$q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2$

根据附录 B 中的式(B.32),欧拉参数应满足以下约束条件

$$h_1 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 - 1 = 0$$

(7.1.10)

将 $q_k(k=1,2,3,4)$ 对 s 的导数作为新的变量 $Q_k(k=1,2,3,4)$,则有

$$h_2 = \frac{dq_1}{ds} - Q_1 = 0$$

(7.1.11a)

$$h_3 = \frac{dq_2}{ds} - Q_2 = 0$$

(7.1.11b)

$$h_4 = \frac{dq_3}{ds} - Q_3 = 0$$

(7.1.11c)

$$h_5 = \frac{dq_4}{ds} - Q_4 = 0$$

(7.1.11d)

根据附录 B 中的式(B. 81),弹性杆的弯扭度 $\omega_i (i=1,2,3)$ 可用欧拉参数及其导数表示为

$$\omega_1 = 2(-q_2 Q_1 + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4) \quad (7.1.12a)$$

$$\omega_2 = 2(-q_3 Q_1 - q_4 Q_2 + q_1 Q_3 + q_2 Q_4) \quad (7.1.12b)$$

$$\omega_3 = 2(-q_4 Q_1 + q_3 Q_2 - q_2 Q_3 + q_1 Q_4) \quad (7.1.12c)$$

将方程组(7.1.8)和(7.1.7)中的 $\omega_i (i=1,2,3)$ 以式(7.1.12)代入,得到

$$\begin{aligned} h_6 = & -q_2 \frac{dQ_1}{ds} + q_1 \frac{dQ_2}{ds} + q_4 \frac{dQ_3}{ds} - q_3 \frac{dQ_4}{ds} \\ & + 2\{(C/A)(-q_3 Q_1 - q_4 Q_2 + q_1 Q_3 + q_2 Q_4)[-q_4 Q_1 \\ & + q_3 Q_2 - q_2 Q_3 + q_1 Q_4 - (\omega_3^0/2)] \\ & - (B/A)(-q_4 Q_1 + q_3 Q_2 - q_2 Q_3 + q_1 Q_4)[-q_3 Q_1 \\ & - q_4 Q_2 + q_1 Q_3 + q_2 Q_4 - (\omega_2^0/2)] \\ & - (F_2/A)\} = 0 \end{aligned} \quad (7.1.13a)$$

$$\begin{aligned} h_7 = & -q_3 \frac{dQ_1}{ds} - q_4 \frac{dQ_2}{ds} + q_1 \frac{dQ_3}{ds} + q_2 \frac{dQ_4}{ds} \\ & + 2\{(A/B)(-q_4 Q_1 + q_3 Q_2 - q_2 Q_3 + q_1 Q_4)[-q_2 Q_1 \\ & + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4 - (\omega_1^0/2)] \\ & - (C/B)(-q_2 Q_1 + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4)[-q_4 Q_1 \\ & + q_3 Q_2 - q_2 Q_3 + q_1 Q_4 - (\omega_3^0/2)] \\ & + (F_1/A)\} = 0 \end{aligned} \quad (7.1.13b)$$

$$\begin{aligned} h_8 = & -q_4 \frac{dQ_1}{ds} + q_3 \frac{dQ_2}{ds} - q_2 \frac{dQ_3}{ds} + q_1 \frac{dQ_4}{ds} \\ & + 2\{(B/C)(-q_2 Q_1 + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4)[-q_3 Q_1 \\ & - q_4 Q_2 + q_1 Q_3 + q_2 Q_4 - (\omega_2^0/2)] \\ & - (A/C)(-q_3 Q_1 - q_4 Q_2 + q_1 Q_3 + q_2 Q_4)[-q_2 Q_1 \\ & + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4 - (\omega_1^0/2)]\} = 0 \end{aligned} \quad (7.1.13c)$$

$$\begin{aligned} h_9 = & \frac{dF_1}{ds} + 2[(-q_3 Q_1 - q_4 Q_2 + q_1 Q_3 + q_2 Q_4)F_3 \\ & - (-q_4 Q_1 + q_3 Q_2 - q_2 Q_3 + q_1 Q_4)F_2 + (f_1/2)] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.14a)$$

$$\begin{aligned} h_{10} = & \frac{dF_2}{ds} + 2[(-q_4 Q_1 + q_3 Q_2 - q_2 Q_3 + q_1 Q_4)F_1 \\ & - (-q_2 Q_1 + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4)F_3 + (f_2/2)] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.14b)$$

$$\begin{aligned} h_{11} = & \frac{dF_3}{ds} + 2[(-q_2 Q_1 + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4)F_2 \\ & - (-q_3 Q_1 - q_4 Q_2 + q_1 Q_3 + q_2 Q_4)F_1 + (f_3/2)] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.14c)$$

以上列出的 11 个方程(7.1.10), (7.1.11), (7.1.13)和(7.1.14)构成封闭的方程组, 分布力的规律给出以后, 可解出 11 个未知变量 $q_k(s)$, $Q_k(s)$ ($k=1,2,3,4$), $F_i(s)$ ($i=1,2,3$)。对于无分布力的情形, 由于截面作用力主矢 F 为常矢量, 可将 F 的方向作为惯性坐

标系的 ζ 轴, 则从表 7.1 可确定 $F_i(s) (i=1, 2, 3)$ 为欧拉参数的以下函数

$$\begin{aligned} F_1 &= 2F_0(q_2q_4 - q_1q_3) \\ F_2 &= 2F_0(q_3q_4 + q_1q_2) \\ F_3 &= F_0(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

其中 F_0 为端部作用力的模。式(7.1.2)表示的轴向应变 $\varepsilon(s)$ 也是欧拉参数的函数

$$\varepsilon = \varepsilon_0(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \quad (7.1.16)$$

其中 $\varepsilon_0 = F_0/K$ 。方程组(7.1.14)在式(7.1.15)代入后成为恒等式。将式(7.1.15)代入方程组(7.1.13), 且利用式(7.1.16)计算变形后的弧坐标, 则 8 个方程(7.1.10), (7.1.11)和(7.1.13)构成封闭的方程组, 确定 8 个未知变量: $q_k(s), Q_k(s) (k=1, 2, 3, 4)$ 。

7.1.4 挠性线的欧拉参数表示

设杆的端点 P_0 与固定点 O 重合, 根据式(1.1.12), 杆中心线上任意点 P 相对固定点 O 的矢径 $r(s)$ 为

$$r(s) = \int_0^s e_3(\sigma) d\sigma \quad (7.1.17)$$

利用表 7.1 将 e_3 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦代入上式, 导出由欧拉参数 $q_j(s) (j=1, 2, 3, 4)$ 的积分表示的 P 点的笛卡儿坐标 $\xi(s), \eta(s), \zeta(s)$, 以确定杆的挠性线

$$\xi(s) = 2 \int_0^s (q_2(\sigma)q_4(\sigma) + q_1(\sigma)q_3(\sigma)) d\sigma \quad (7.1.18a)$$

$$\eta(s) = 2 \int_0^s (q_3(\sigma)q_4(\sigma) - q_1(\sigma)q_2(\sigma)) d\sigma \quad (7.1.18b)$$

$$\zeta(s) = \int_0^s [2(q_1^2(\sigma) + q_4^2(\sigma)) - 1] d\sigma \quad (7.1.18c)$$

考虑分布力因素时, 由于静电引力场或其他保守力场均为位置的函数

$$f_i = f_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (i=1, 2, 3) \quad (7.1.19)$$

则方程(7.1.14)必须与式(7.1.18)和式(7.1.19)联立, 方能使方程组封闭。

7.2 Kirchhoff 方程的数值积分

7.2.1 有限元离散化

应用有限元方法将弹性杆沿中心线用 $n+1$ 个节点 $P_j (j=0, 1, \dots, n)$ 划分为 n 个单元 $D_j (j=1, 2, \dots, n)$, 其中的第 j 单元 D_j 介于第 $j-1$ 节点 P_{j-1} 和第 j 节点 P_j 之间, 如图 7.1 所示。将 11 个未知变量改用 $x_k (k=1, 2, \dots, 11)$ 符号统一表示为

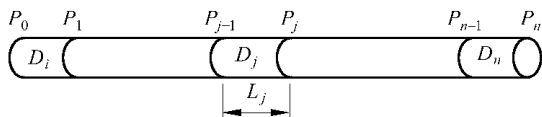


图 7.1 杆的单元划分

$$\begin{aligned} x_k &= q_k, \quad x_{k+4} = Q_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \\ x_{k+8} &= F_i \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

将第 k 变量 x_k 在第 j 节点 P_j 处的值记作 $x_{k,j}$ ($k=1, 2, \dots, 11; j=0, 1, \dots, n$)。设杆的变形前总长度为 L_0 , 第 j 单元 D_j 的变形前长度为 L_{j0} , 若单元划分均匀, 则 $L_{j0} = L_0/n$ 。设单元 D_j 在受力状态下的轴向应变为 ϵ_j , 则变形后的长度为

$$L_j = L_{j0}(1 + \epsilon_j) \quad (7.2.2)$$

当单元分隔足够精细, 即 L_{j0} 足够小时, 可认为截面形状和物理参数在单元内为常值, 且可足够精确地令变量 x_k 在单元 D_j 内按线性规律插值。引入介于 0 与 1 之间的无量纲变量 ξ , 将 D_j 单元内的变量 x_k 记作 $x_{k,j}$, 令

$$x_{k,j}(\xi) = (1 - \xi)x_{k,j-1} + \xi x_{k,j} \quad (k = 1, 2, \dots, 11; j = 1, 2, \dots, n; 0 \leq \xi \leq 1) \quad (7.2.3)$$

将上式在 D_j 单元内积分, 得到的平均值等于两端节点值的平均, 记作 $\bar{x}_{k,j}$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k,j} &= \int_0^1 x_{k,j}(\xi) d\xi \\ &= \frac{x_{k,j} + x_{k,j-1}}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, 11; j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

以撇号表示变量对 s 的导数, x_k 在 D_j 单元内的导数 $x'_{k,j}$ 也可利用两端节点值计算

$$\begin{aligned} x'_{k,j} &= \frac{dx_{k,j}(s)}{ds} = \frac{1}{L_j} \frac{dx_{k,j}(\xi)}{d\xi} \\ &= \frac{x_{k,j} - x_{k,j-1}}{L_j} \quad (k = 1, 2, \dots, 11; j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

式(7.2.5)中的 L_j 为变形后的单元长度, 如式(7.2.2)所示。其中的轴向应变 ϵ_j 可根据式(7.1.2)用轴向力 F_3 在该单元内的平均值, 即 $x_{11,j}$ 的平均值表示为

$$\epsilon_j = \frac{\bar{x}_{11,j}}{K_j} = \frac{x_{11,j} + x_{11,j-1}}{2K_j} \quad (7.2.6)$$

其中 K_j 为 D_j 单元的抗拉刚度。

7.2.2 方向余弦和矢径在单元内的平均值

将第 j 单元 D_j 内的截面主轴坐标系(P - xyz)与惯性坐标系(O - $\xi\eta\zeta$)之间的方向余弦用表 7.2 的符号表示。

表 7.2 第 j 单元内的方向余弦

	x	y	z
ξ	α_{1j}	β_{1j}	γ_{1j}
η	α_{2j}	β_{2j}	γ_{2j}
ζ	α_{3j}	β_{3j}	γ_{3j}

各方向余弦用单元内的欧拉参数表示为

$$\begin{aligned}
\alpha_{1\bar{j}} &= x_{1,\bar{j}}^2 + x_{2,\bar{j}}^2 - x_{3,\bar{j}}^2 - x_{4,\bar{j}}^2, \quad \beta_{1\bar{j}} = 2(x_{2,\bar{j}}x_{3,\bar{j}} - x_{1,\bar{j}}x_{4,\bar{j}}), \quad \gamma_{1\bar{j}} = 2(x_{2,\bar{j}}x_{4,\bar{j}} + x_{1,\bar{j}}x_{3,\bar{j}}) \\
\alpha_{2\bar{j}} &= 2(x_{3,\bar{j}}x_{2,\bar{j}} + x_{1,\bar{j}}x_{4,\bar{j}}), \quad \beta_{2\bar{j}} = x_{1,\bar{j}}^2 - x_{2,\bar{j}}^2 + x_{3,\bar{j}}^2 - x_{4,\bar{j}}^2, \quad \gamma_{2\bar{j}} = 2(x_{3,\bar{j}}x_{4,\bar{j}} - x_{1,\bar{j}}x_{2,\bar{j}}) \\
\alpha_{3\bar{j}} &= 2(x_{4,\bar{j}}x_{2,\bar{j}} - x_{1,\bar{j}}x_{3,\bar{j}}), \quad \beta_{3\bar{j}} = 2(x_{4,\bar{j}}x_{3,\bar{j}} + x_{1,\bar{j}}x_{2,\bar{j}}), \quad \gamma_{3\bar{j}} = x_{1,\bar{j}}^2 - x_{2,\bar{j}}^2 - x_{3,\bar{j}}^2 + x_{4,\bar{j}}^2
\end{aligned} \quad (7.2.7)$$

将以上各方向余弦在 D_j 单元内平均化, 记作 $\bar{\alpha}_{l\bar{j}}, \bar{\beta}_{l\bar{j}}, \bar{\gamma}_{l\bar{j}} (l=1,2,3)$

$$\bar{\alpha}_{l\bar{j}} = \int_0^1 \alpha_{l\bar{j}}(\xi) d\xi, \quad \bar{\beta}_{l\bar{j}} = \int_0^1 \beta_{l\bar{j}}(\xi) d\xi, \quad \bar{\gamma}_{l\bar{j}} = \int_0^1 \gamma_{l\bar{j}}(\xi) d\xi \quad (l=1,2,3) \quad (7.2.8)$$

此平均化方向余弦可理解为截面主轴坐标系在 D_j 单元内的平均位置 $(P_j - x_j y_j z_j)$ 相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的方向余弦。将式(7.2.3)和式(7.2.7)代入后, 积分得到 D_j 单元内用欧拉参数的节点值表示的平均化方向余弦

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_{1\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(x_{1,j-1}^2 + x_{1,j-1}x_{1,j} + x_{1,j}^2) + (x_{2,j-1}^2 + x_{2,j-1}x_{2,j} + x_{2,j}^2) \\
&\quad - (x_{3,j-1}^2 + x_{3,j-1}x_{3,j} + x_{3,j}^2) - (x_{4,j-1}^2 + x_{4,j-1}x_{4,j} + x_{4,j}^2)] \\
\bar{\alpha}_{2\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(2x_{3,j-1} + x_{3,j})x_{2,j-1} + (2x_{3,j} + x_{3,j-1})x_{2,j} \\
&\quad + (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{4,j-1} + (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{4,j}] \\
\bar{\alpha}_{3\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(2x_{2,j-1} + x_{2,j})x_{4,j-1} + (2x_{2,j} + x_{2,j-1})x_{4,j} \\
&\quad - (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{3,j-1} - (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{3,j}]
\end{aligned} \quad (7.2.9a)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{1\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(2x_{2,j-1} + x_{2,j})x_{3,j-1} + (2x_{2,j} + x_{2,j-1})x_{3,j} \\
&\quad - (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{4,j-1} - (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{4,j}] \\
\bar{\beta}_{2\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(x_{1,j-1}^2 + x_{1,j-1}x_{1,j} + x_{1,j}^2) - (x_{2,j-1}^2 + x_{2,j-1}x_{2,j} + x_{2,j}^2) \\
&\quad + (x_{3,j-1}^2 + x_{3,j-1}x_{3,j} + x_{3,j}^2) - (x_{4,j-1}^2 + x_{4,j-1}x_{4,j} + x_{4,j}^2)] \\
\bar{\beta}_{3\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(2x_{3,j-1} + x_{3,j})x_{4,j-1} + (2x_{3,j} + x_{3,j-1})x_{4,j} \\
&\quad + (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{2,j-1} + (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{2,j}]
\end{aligned} \quad (7.2.9b)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_{1\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(2x_{2,j-1} + x_{2,j})x_{4,j-1} + (2x_{2,j} + x_{2,j-1})x_{4,j} \\
&\quad + (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{3,j-1} + (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{3,j}] \\
\bar{\gamma}_{2\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(2x_{3,j-1} + x_{3,j})x_{4,j-1} + (2x_{3,j} + x_{3,j-1})x_{4,j} \\
&\quad - (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{2,j-1} - (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{2,j}] \\
\bar{\gamma}_{3\bar{j}} &= \frac{1}{3}[(x_{1,j-1}^2 + x_{1,j-1}x_{1,j} + x_{1,j}^2) - (x_{2,j-1}^2 + x_{2,j-1}x_{2,j} + x_{2,j}^2) \\
&\quad - (x_{3,j-1}^2 + x_{3,j-1}x_{3,j} + x_{3,j}^2) + (x_{4,j-1}^2 + x_{4,j-1}x_{4,j} + x_{4,j}^2)]
\end{aligned} \quad (7.2.9c)$$

设弧坐标为 s 的 P 点所在单元的序号为 $\bar{s}$, 记作 $D_{\bar{s}}$ 。此单元内各点的平均化切线轴基矢量 $\bar{e}_{3,\bar{j}}$ 为

$$\bar{e}_{3,\bar{j}} = \int_0^1 \mathbf{e}_{3,\bar{j}}(\xi) d\xi = \bar{\gamma}_{1\bar{j}} \mathbf{e}_{\xi} + \bar{\gamma}_{2\bar{j}} \mathbf{e}_{\eta} + \bar{\gamma}_{3\bar{j}} \mathbf{e}_{\zeta} \quad (7.2.10)$$

将式(7.1.17)离散化,将 P 点的矢径以 D_s 单元内的平均化矢径 $\bar{r}_s$ 代替

$$r(s) = \bar{r}_s = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \bar{e}_{3,j} = \bar{\xi}_s e_\xi + \bar{\eta}_s e_\eta + \bar{\zeta}_s e_\zeta \quad (7.2.11)$$

其中 $\bar{\xi}_s, \bar{\eta}_s, \bar{\zeta}_s$ 为 D_s 单元内各点坐标的平均值

$$\bar{\xi}_s = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \bar{\gamma}_{1j}, \quad \bar{\eta}_s = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \bar{\gamma}_{2j}, \quad \bar{\zeta}_s = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \bar{\gamma}_{3j} \quad (7.2.12)$$

7.2.3 数值积分方法

暂不考虑分布力,利用式(7.2.1)将 7.1.3 节导出的弹性杆平衡方程(7.1.10), (7.1.11), (7.1.13)和(7.1.14)中的变量改为 $x_k (k=1, 2, \dots, 11)$, 写作

$$h_m = H(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 11) \quad (7.2.13)$$

将差分式(7.2.4)和式(7.2.5)代入此方程组,方程中的物理参数取自各单元内的平均值,则以上 11 个微分方程转化为包含 $11(n+1)$ 个未知节点值 $x_{k,j} (k=1, 2, \dots, 11; j=0, 1, \dots, n)$ 的 $11n$ 个代数方程

$$H_{m,j}(x_{k,j}, x_{k,j-1}) = 0 \quad (m, k = 1, 2, \dots, 11; j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.2.14)$$

为使方程组封闭,应列出必要的补充条件。对于弹性杆两端位置固定的边值问题,设杆的端点 P_0 与固定点 O 重合, P_0 至另一端点 P_L 的矢径为固定在空间中的常矢量 R (见图 2.4),其投影式为

$$R = R_1 e_\xi + R_2 e_\eta + R_3 e_\zeta \quad (7.2.15)$$

从方程组(7.1.18)导出

$$2 \int_0^L (x_2 x_4 + x_1 x_3) ds - R_1 = 0 \quad (7.2.16a)$$

$$2 \int_0^L (x_3 x_4 - x_1 x_2) ds - R_2 = 0 \quad (7.2.16b)$$

$$\int_0^L (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2) ds - R_3 = 0 \quad (7.2.16c)$$

其中 L 为变形后杆的总长度

$$L = \sum_{j=1}^n L_{j0} = L_0 \sum_{j=1}^n (1 + \epsilon_j) \quad (7.2.17)$$

作为特例,若杆的两端相连成闭环,则 $R_1 = R_2 = R_3 = 0$ 。利用式(7.2.4)将式(7.2.16)中的定积分离散化,得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n L_j [(2x_{2,j-1} + x_{2,j})x_{4,j-1} + (2x_{2,j} + x_{2,j-1})x_{4,j} \\ & \quad + (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{3,j-1} + (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{3,j}] - R_1 = 0 \\ & \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n L_j [(2x_{3,j-1} + x_{3,j})x_{4,j-1} + (2x_{3,j} + x_{3,j-1})x_{4,j} \\ & \quad - (2x_{1,j-1} + x_{1,j})x_{2,j-1} - (2x_{1,j} + x_{1,j-1})x_{2,j}] - R_2 = 0 \\ & \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n L_j [2(x_{1,j-1}^2 + x_{1,j-1}x_{1,j} + x_{1,j}^2 + x_{4,j-1}^2 + x_{4,j-1}x_{4,j} + x_{4,j}^2) - 1] - R_3 = 0 \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

则代数方程增加为 $11n+3$ 个。预先给定杆的两个端部节点 P_0 和 P_n 处的边界值 $x_{k,0}, x_{k,n}$ ($k=1,2,\dots,11$) 中的 8 个,使未知变量数减为 $11n+3$ 个,则代数方程组封闭。利用数值方法,例如 Newton-Raphson 方法,对此代数方程组求解,弹性杆的几何形态便完全确定。

7.3 弹性杆变分原理的离散化

7.3.1 弹性应变能的变分和外力虚功

第 2 章的 2.3 节中曾根据弹性力学的最小势能原理列出弹性杆的平衡方程。本节将弹性杆变分原理应用于数值计算。弹性杆的总弹性势能 E 由杆的弹性应变能 E_e 与外力势能 E_p 组成

$$E = E_e + E_p \quad (7.3.1)$$

考虑轴向变形时,弹性应变能 E_e 中必须增加与轴向应变 $\epsilon(s)$ 有关部分,即式(C.38)

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L [A(\omega_1 - \omega_1^0)^2 + B(\omega_2 - \omega_2^0)^2 + C(\omega_3 - \omega_3^0)^2 + K\epsilon^2] ds \quad (7.3.2)$$

对弹性应变能 E_e 取变分

$$\delta E_e = \int_0^L [A(\omega_1 - \omega_{10})\delta\omega_1 + B(\omega_2 - \omega_{20})\delta\omega_2 + C(\omega_3 - \omega_{30})\delta\omega_3 + K\epsilon\delta\epsilon] ds \quad (7.3.3)$$

暂不计杆的分布力,设在 N 个截面 $s = s_l$ ($l=1,2,\dots,N$) 处作用有集中力和力矩 $F_{0,l}$, $M_{0,l}$ ($l=1,2,\dots,N$), 包括在端点 P_0 和 P_L 处作用的外力和外力矩在内,则外力对杆所做虚功为

$$\delta W = \sum_{l=1}^N [F_{0,l} \cdot \delta \mathbf{r}(s_l) + M_{0,l} \cdot \delta \boldsymbol{\phi}(s_l)] \quad (7.3.4)$$

其中 $\delta \mathbf{r}$ 和 $\delta \boldsymbol{\phi}$ 为截面的虚位移和虚角位移

$$\delta \mathbf{r} = \delta \int_0^s \mathbf{e}_3 ds = \int_0^s \delta \mathbf{e}_3 ds, \quad \delta \boldsymbol{\phi} = \int_0^s \delta \boldsymbol{\omega} ds \quad (7.3.5)$$

外力势能的变分等于外力虚功的负值, $\delta E_p = -\delta W$, 则弹性杆的总势能变分为

$$\delta E = \delta E_e - \delta W \quad (7.3.6)$$

7.3.2 欧拉参数表示的弹性应变能和外力虚功

将确定截面姿态的欧拉参数作为描述杆变形后几何形态的基本变量,用式(7.2.1)定义的符号表示为 $x_k = q_k$ ($k=1,2,3,4$)。杆的弯扭度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 可用变量 x_k ($k=1,2,3,4$) 表示为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(-x_2 x'_1 + x_1 x'_2 + x_4 x'_3 - x_3 x'_4) \\ \omega_2 &= 2(-x_3 x'_1 - x_4 x'_2 + x_1 x'_3 + x_2 x'_4) \\ \omega_3 &= 2(-x_4 x'_1 + x_3 x'_2 - x_2 x'_3 + x_1 x'_4) \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

可写作矩阵形式

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}(x)\mathbf{x}' \quad (7.3.8)$$

其中 3×4 矩阵 $\mathbf{R}(x)$ 的定义来自式(7.1.12)

$$\mathbf{R}(x) = 2 \begin{bmatrix} -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (7.3.9)$$

利用式(7.3.8)将弹性应变能(7.3.2)写作

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L [(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0)^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0) + K\epsilon^2] ds \quad (7.3.10)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^0$ 为弯扭度的原始值, $\mathbf{D}$ 为杆的刚度矩阵

$$\boldsymbol{\omega}^0 = (\omega_1^0 \quad \omega_2^0 \quad \omega_3^0)^T, \quad \mathbf{D} = \text{diag}(A \quad B \quad C) \quad (7.3.11)$$

对式(7.3.10)取变分,得到

$$\delta E_e = \int_0^L \{ [\mathbf{D}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0)]^T \delta \boldsymbol{\omega} + K\epsilon \delta \epsilon \} ds \quad (7.3.12)$$

其中弯扭度的变分从式(7.3.8)导出,可整理为

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}(x) \delta \mathbf{x}' + \delta \mathbf{R}(x) \mathbf{x}' = \mathbf{R}(x) \delta \mathbf{x}' - \mathbf{R}'(x') \delta x \quad (7.3.13)$$

其中矩阵 $\mathbf{R}'(x')$ 为 $\mathbf{R}(x)$ 对 s 的导数。

$$\mathbf{R}'(x') = 2 \begin{bmatrix} -x'_2 & x'_1 & x'_4 & -x'_3 \\ -x'_3 & -x'_4 & x'_1 & x'_2 \\ -x'_4 & x'_3 & -x'_2 & x'_1 \end{bmatrix} \quad (7.3.14)$$

不考虑分布力时,可利用式(7.1.16)计算轴向应变 $\epsilon(s)$

$$\epsilon = \mathbf{G}^T(x) \mathbf{x} \quad (7.3.15)$$

1×4 列阵 $\mathbf{G}(x)$ 定义为

$$\mathbf{G}(x) = \epsilon_0 (x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad x_4)^T \quad (7.3.16)$$

对式(7.3.15)取变分,导出

$$\delta \epsilon = \delta \mathbf{G}^T(x) \mathbf{x} + \mathbf{G}^T(x) \delta \mathbf{x} = 2\mathbf{G}^T(x) \delta \mathbf{x} \quad (7.3.17)$$

将式(7.3.8)、式(7.3.13)和式(7.3.17)代入式(7.3.12),得到

$$\delta E_e = \int_0^L \{ [\mathbf{D}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0)]^T (\mathbf{R} \delta \mathbf{x}' - \mathbf{R}' \delta \mathbf{x}) + 2K\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{x} \} ds \quad (7.3.18)$$

将式(7.3.4)表示的外力虚功写作矩阵形式

$$\delta W = \sum_{l=1}^N (\mathbf{F}_{0,l}^T \delta \mathbf{r} + \mathbf{M}_{0,l}^T \delta \boldsymbol{\phi}) \quad (7.3.19)$$

其中 $f, F_{0,l}, M_{0,l}, \delta u, \delta \boldsymbol{\phi}$ 为分布力、集中力、力矩,以及虚位移和虚角位移相对 $(O-\xi\eta\zeta)$ 的投影列阵。

7.3.3 弹性应变能的离散化

采用与 7.2 节相同的有限元离散方案。将描述杆几何形态的基本变量 $x_k (k=1, 2,$

3,4)在第 j 节点 P_j 处的值记作 $x_{k,j}$ ($j=0,1,\dots,n$),排列为 $n+1$ 个 4 阶列阵 $x_j(s)$

$$x_j(s) = (x_{1,j} \quad x_{2,j} \quad x_{3,j} \quad x_{4,j})^T \quad (j=0,1,\dots,n) \quad (7.3.20)$$

设变量 x_k ($k=1,2,3,4$) 在 D_j 单元内按线性规律 (7.2.3) 插值,其平均值 $\bar{x}_{k,j}$ 及对 s 的导数 $x'_{k,j}$ 的差分式与式 (7.2.4) 和式 (7.2.5) 相同

$$\bar{x}_{k,j} = \frac{x_{k,j} + x_{k,j-1}}{2}, \quad x'_{k,j} = \frac{x_{k,j} - x_{k,j-1}}{L_j} \quad (k=1,2,3,4; j=1,2,\dots,n) \quad (7.3.21)$$

将上述平均值和导数值 $\bar{x}_{k,j}, x'_{k,j}$ ($k=1,2,3,4$) 排成的 4 阶列阵记作 $\bar{x}_j, x'_j$

$$\bar{x}_j(s) = (\bar{x}_{1,j} \quad \bar{x}_{2,j} \quad \bar{x}_{3,j} \quad \bar{x}_{4,j})^T \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (7.3.22a)$$

$$x'_j(s) = (x'_{1,j} \quad x'_{2,j} \quad x'_{3,j} \quad x'_{4,j})^T \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (7.3.22b)$$

将表示第 $j-1$ 和第 j 节点值的 x_{j-1}, x_j 合并为 8 阶列阵,记作 $x_{j-1,j}$

$$\begin{aligned} x_{j-1,j} &= (x_{j-1}^T \quad x_j^T)^T \\ &= (x_{1,j-1}, x_{2,j-1}, x_{3,j-1}, x_{4,j-1}, x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, x_{4,j})^T \quad (j=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

则变量在 D_j 单元内的平均值和导数值列阵 $\bar{x}_j, x'_j$ 可用变量的节点值列阵表示为

$$\bar{x}_j = \Psi x_{j-1,j}, \quad x'_j = \Phi x_{j-1,j} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (7.3.24)$$

其中 Ψ 和 Φ 为由 4 阶单位阵 E_i 组成的 4×8 矩阵

$$\Psi = \frac{1}{2}(E_4, E_4), \quad \Phi = \frac{1}{L_j}(-E_4, E_4) \quad (7.3.25)$$

将矩阵 $R(x)$ 在 D_j 单元内的平均值和导数 $R'(x')$ 记作 $\bar{R}_j(\bar{x}_j)$ 和 $R'_j(x'_j)$, 矩阵 $G(x)$ 的平均值记作 $\bar{G}_j(\bar{x}_j)$, 可分别表示为 $R_j(x_j)$ 和 $R_{j-1}(x_{j-1})$, 以及 $G_j(x_j)$ 和 $G_{j-1}(x_{j-1})$ 的组合

$$\begin{aligned} \bar{R}_j(\bar{x}_j) &= \frac{1}{2}[R_{j-1}(x_{j-1}) + R_j(x_j)] \\ R'_j(x'_j) &= \frac{1}{L_j}[R_j(x_j) - R_{j-1}(x_{j-1})] \quad (j=1,2,\dots,n) \\ \bar{G}_j(\bar{x}_j) &= \frac{1}{2}[G_{j-1}(x_{j-1}) + G_j(x_j)] \end{aligned} \quad (7.3.26)$$

其中 $R_j(x_j), G_j(x_j)$ ($j=0,1,\dots,n$) 为第 j 节点处取值的矩阵

$$\begin{aligned} R_j(x_j) &= 2 \begin{bmatrix} -x_{2,j} & x_{1,j} & x_{4,j} & -x_{3,j} \\ -x_{3,j} & -x_{4,j} & x_{1,j} & x_{2,j} \\ -x_{4,j} & x_{3,j} & -x_{2,j} & x_{1,j} \end{bmatrix} \quad (j=0,1,\dots,n) \\ G_j(x_j) &= \epsilon_0(x_{1,j} \quad -x_{2,j} \quad -x_{3,j} \quad x_{4,j})^T \end{aligned} \quad (7.3.27)$$

将式 (7.3.8) 和式 (7.3.13) 在 D_j 单元内平均化, 得到 ω 和 $\delta\omega$ 在 D_j 单元内的平均值 $\bar{\omega}_j$ 和 $\delta\bar{\omega}_j$

$$\bar{\omega}_j = \bar{R}_j(\bar{x}_j)x'_j, \quad \delta\bar{\omega}_j = \bar{R}_j(\bar{x}_j)\delta x'_j - R'_j(x'_j)\delta\bar{x}_j \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (7.3.28)$$

将式 (7.3.15) 和式 (7.3.17) 在 D_j 单元内平均化, 得到 ϵ 和 $\delta\epsilon$ 在 D_j 单元内的平均值 $\bar{\epsilon}_j$ 和 $\delta\bar{\epsilon}_j$

$$\bar{\epsilon}_j = \bar{G}_j^T(\bar{x}_j)\bar{x}_j, \quad \delta\epsilon_j = 2\bar{G}_j^T(\bar{x}_j)\delta\bar{x}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.3.29)$$

将式(7.3.24), 式(7.3.26)代入式(7.3.28)和式(7.3.29), 化作

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_j &= \bar{R}_j \Phi x_{j-1,j}, \quad \delta\bar{\omega}_j = (\bar{R}_j \Phi - R'_j \Psi) \delta x_{j-1,j} \\ \bar{\epsilon}_j &= \bar{G}_j^T \Psi x_{j-1,j}, \quad \delta\epsilon_j = 2\bar{G}_j^T \Psi \delta x_{j-1,j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (7.3.30)$$

则杆的应变能变分式(7.3.18)可离散为

$$\delta E_e = \sum_{j=1}^n [(x_{j-1,j}^T D_j \Phi^T \bar{R}_j^T - \omega_j^{0T})(\bar{R}_j \Phi - R'_j \Psi) + 2x_{j-1,j}^T \Psi^T \bar{G}_j \bar{G}_j^T \Psi] \delta x_{j-1,j} \quad (7.3.31)$$

其中 D_j, ω_j^0 为刚度矩阵 D 和弯扭度原始值 ω^0 在 D_j 单元内的平均值。上式可简写为

$$\delta E_e = \sum_{j=1}^n (x_{j-1,j}^T K_j - P_j) \delta x_{j-1,j} \quad (7.3.32)$$

其中 K_j, P_j 分别为 8×8 矩阵和 1×8 行阵, 定义为

$$\begin{aligned} K_j &= D_j \Phi^T \bar{R}_j^T (\bar{R}_j \Phi - R'_j \Psi) + \Psi^T \bar{G}_j \bar{G}_j^T \Psi \\ P_j &= 2 \omega_j^{0T} (\bar{R}_j \Phi - R'_j \Psi) \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.3.33)$$

将 $n+1$ 个节点值列阵 $x_j (j=0, 1, \dots, n)$ 排成 $4(n+1)$ 阶列阵, 记作 x

$$x = (x_0^T \ x_1^T \ \dots \ x_n^T)^T \quad (7.3.34)$$

将 n 个 8×8 矩阵 K_j 沿对角线排列。由于各单元的起点与前个单元的终点为同一点, 将每个矩阵向左上方移动 4 行和 4 列, 即令 K_j 的前 4 行和前 4 列与 K_{j-1} 的后 4 行和后 4 列重叠, 重叠部分的元素一一相加, 组成 $4(n+1) \times 4(n+1)$ 矩阵 K 。与此类似, 将 n 个 8 阶行阵 P_j 依次排列, 每个矩阵均向左移动 4 列, 即 P_j 的前 4 列与 P_{j-1} 的后 4 列重叠, 重叠部分的元素一一相加, 组成 $4(n+1)$ 阶行阵 P 。则求和式(7.3.32)可简明地表示为

$$\delta E_e = (x^T K - P) \delta x \quad (7.3.35)$$

7.3.4 外力虚功的离散化

为使外力虚功 δW 离散化, 首先应将式(7.3.5)中的 δr 和 $\delta \phi$ 用 x 的变分表示。7.2.2 节中的式(7.2.11)表明, 中心线上任意点 P 的矢径 $r(s)$ 可用 P 点所在单元内的平均化矢径 $\bar{r}_s$ 代替, 将其中的平均化方向余弦 $\bar{\gamma}_{l,j} (l=1, 2, 3)$ 以式(7.2.9c)代入后, 写作

$$r(s) = \bar{r}_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\bar{s}} S_j x_{j-1,j} \quad (7.3.36)$$

其中 $S_j(x_j) (j=1, 2, \dots, n)$ 为 3×8 矩阵, 由 2 个 3×4 矩阵 $Q_j, Q_{j-1} (j=1, 2, \dots, n)$ 组合构成:

$$S_j(x_j) = \frac{L_j}{3} (2Q_{j-1} + Q_j, Q_{j-1} + 2Q_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.3.37)$$

矩阵 $Q_j(x_j) (j=1, 2, \dots, n)$ 在节点处取值, 定义为

$$\mathbf{Q}_j(\mathbf{x}_j) = \begin{pmatrix} x_{3,j} & x_{4,j} & x_{1,j} & x_{2,j} \\ -x_{2,j} & -x_{1,j} & x_{4,j} & x_{3,j} \\ x_{1,j} & -x_{2,j} & -x_{3,j} & x_{4,j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.3.38)$$

对式(7.3.36)取变分,整理后得到

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{j=1}^{\bar{s}} \mathbf{S}_j \delta \mathbf{x}_{j-1,j} \quad (7.3.39)$$

对式(7.3.5)中的角位移变分 $\delta \phi$ 写作离散化形式,将式(7.3.30)代入后,得到

$$\delta \phi = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \delta \bar{\omega}_j = \sum_{j=1}^{\bar{s}} \mathbf{T}_j \delta \mathbf{x}_{j-1,j} \quad (7.3.40)$$

其中 3×8 矩阵 $\mathbf{T}_j$ 定义为

$$\mathbf{T}_j = L_j (\bar{\mathbf{R}}_j \bar{\boldsymbol{\Phi}} - \mathbf{R}'_j \boldsymbol{\Psi}) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.3.41)$$

利用式(7.3.39)和式(7.3.40),将虚功(7.3.19)化作

$$\delta W = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^{\bar{s}_l} (\mathbf{F}_{0l}^T \mathbf{S}_j + \mathbf{M}_{0l}^T \mathbf{T}_j) \delta \mathbf{x}_{j-1,j} \quad (7.3.42)$$

其中 $\bar{s}_l (l=1, 2, \dots, N)$ 为 N 个集中力和力矩 $\mathbf{F}_{0l}, \mathbf{M}_{0l}$ 作用点的弧坐标 $s = s_l$ 所在单元的序号。

将 $\bar{s}_l$ 个 3×8 矩阵 $\mathbf{Q}_j (j=1, 2, \dots, \bar{s}_l)$ 水平排列,每个矩阵均向左移动 4 列,组成 $3 \times 4(\bar{s}_l+1)$ 矩阵 $\mathbf{Q}_l (l=1, 2, \dots, N)$;用同样方法,将 $\bar{s}_l$ 个矩阵 $\mathbf{T}_j (j=1, 2, \dots, \bar{s}_l)$ 排列成 $3 \times 4(\bar{s}_l+1)$ 阶矩阵 $\mathbf{T}_l (l=1, 2, \dots, N)$;则求和式(7.3.42)可简明地表示为

$$\delta W = \sum_{l=1}^N (\mathbf{F}_{0l}^T \mathbf{S}_l + \mathbf{M}_{0l}^T \mathbf{T}_l) \delta \mathbf{x} \quad (7.3.43)$$

其中 $\mathbf{x}$ 为 $4(n+1)$ 阶列阵,如式(7.3.34)的定义。将式(7.3.35)和式(7.3.43)代入式(7.3.6),导出无约束无分布力弹性杆的总势能变分 δE

$$\delta E = (\mathbf{x}^T \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{P}}) \delta \mathbf{x} \quad (7.3.44)$$

其中 $4(n+1)$ 阶行阵 $\tilde{\mathbf{P}}$ 定义为

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \sum_{l=1}^N (\mathbf{F}_{0l}^T \mathbf{S}_l + \mathbf{M}_{0l}^T \mathbf{T}_l) \quad (7.3.45)$$

代入平衡条件 $\delta E=0$,无约束杆的变量 $\mathbf{x}$ 为独立变量,导出弹性杆平衡方程

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{P}} = 0 \quad (7.3.46)$$

7.4 考虑静电引力的变分原理离散化

7.4.1 静电引力势能与静电引力

根据 7.1.1 节中对条件 4) 的分析,为保证杆中心线之间维持一定距离以避免相互侵占空间,必须考虑杆与杆之间的近距离排斥作用。对于 DNA 的弹性杆模型,这种引力为带负电荷双螺旋骨架之间的静电斥力,可离散化为带电单元之间的作用。根据库仑定律,

杆的静电场势能 E_f 为带电单元之间距离的函数^①

$$E_f = \sum_{i,k=1,k>i}^n \frac{c_{ik}}{\bar{r}_{ik}} \quad (7.4.1)$$

其中系数 c_{ik} ($i, k=1, 2, \dots, n$) 取决于相关单元的带电量 and 介质的介电常数, $\bar{r}_{ik} = |\bar{\mathbf{r}}_{ik}|$ 为第 i 单元的中点 P_i 至第 k 单元的中点 P_k 的矢径 $\bar{\mathbf{r}}_{ik}$ 的模, 即二者的平均距离。矢径 $\bar{\mathbf{r}}_{ik}$ 为第 i 单元与第 k 单元的中点相对固定点的矢径之差

$$\bar{\mathbf{r}}_{ik} = \bar{\mathbf{r}}_k - \bar{\mathbf{r}}_i \quad (7.4.2)$$

利用式(7.2.11)计算矢径 $\bar{\mathbf{r}}_{ik}$ 和距离 $\bar{r}_{ik}$, 得到

$$\bar{\mathbf{r}}_{ik} = (\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_i)\mathbf{e}_\xi + (\bar{\eta}_k - \bar{\eta}_i)\mathbf{e}_\eta + (\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_i)\mathbf{e}_\zeta \quad (7.4.3)$$

$$\bar{r}_{ik} = \sqrt{(\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_i)^2 + (\bar{\eta}_k - \bar{\eta}_i)^2 + (\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_i)^2} \quad (7.4.4)$$

其中 $\bar{\xi}_s, \bar{\eta}_s, \bar{\zeta}_s$ 为 D_s 单元内各点坐标的平均值, 由式(7.2.12)和式(7.2.9c)确定,

$$\bar{\xi}_s = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \bar{\gamma}_{1j}, \quad \bar{\eta}_s = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \bar{\gamma}_{2j}, \quad \bar{\zeta}_s = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \bar{\gamma}_{3j} \quad (7.4.5)$$

第 i 单元对第 k 单元 D_k 作用的静电引力 F_{ik} 为静电势能的梯度, 沿 $\bar{\mathbf{r}}_{ik}$ 方向, 且随距离 $\bar{r}_{ik}$ 的增加迅速减小

$$\mathbf{F}_{ik} = \frac{c_{ik}}{\bar{r}_{ik}^2} \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}_{ik}}{\bar{r}_{ik}} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n; k > i) \quad (7.4.6)$$

利用表 7.1 将上式中的矢径 $\bar{\mathbf{r}}_{ik}$ 变换到单元中点 P_k 处的截面主轴坐标系 ($P_k - x_k y_k z_k$), 得到

$$\bar{\mathbf{r}}_{ik} = \bar{r}_{ik,1} \mathbf{e}_{k,1} + \bar{r}_{ik,2} \mathbf{e}_{k,2} + \bar{r}_{ik,3} \mathbf{e}_{k,3} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k > i) \quad (7.4.7)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{r}_{ik,1} &= (\bar{x}_{1,k}^2 + \bar{x}_{2,k}^2 - \bar{x}_{3,k}^2 - \bar{x}_{4,k}^2)(\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_i) + 2(\bar{x}_{2,k}\bar{x}_{3,k} - \bar{x}_{1,k}\bar{x}_{4,k})(\bar{\eta}_k - \bar{\eta}_i) \\ &\quad + 2(\bar{x}_{2,k}\bar{x}_{4,k} + \bar{x}_{1,k}\bar{x}_{3,k})(\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_i) \\ \bar{r}_{ik,2} &= 2(\bar{x}_{3,k}\bar{x}_{2,k} + \bar{x}_{1,k}\bar{x}_{4,k})(\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_i) + (\bar{x}_{1,k}^2 - \bar{x}_{2,k}^2 + \bar{x}_{3,k}^2 - \bar{x}_{4,k}^2)(\bar{\eta}_k - \bar{\eta}_i) \\ &\quad + 2(\bar{x}_{3,k}\bar{x}_{4,k} - \bar{x}_{1,k}\bar{x}_{2,k})(\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_i) \\ \bar{r}_{ik,3} &= 2(\bar{x}_{2,k}\bar{x}_{4,k} - \bar{x}_{1,k}\bar{x}_{3,k})(\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_i) + 2(\bar{x}_{4,k}\bar{x}_{3,k} + \bar{x}_{1,k}\bar{x}_{2,k})(\bar{\eta}_k - \bar{\eta}_i) \\ &\quad + (\bar{x}_{1,k}^2 - \bar{x}_{2,k}^2 - \bar{x}_{3,k}^2 + \bar{x}_{4,k}^2)(\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_i) \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

则静电场产生的第 i 单元对第 k 单元作用的单位长度分布力 f_{ik} 在该单元的平均化截面主轴坐标系 ($P_k - x_k y_k z_k$) 中的投影式为

$$\mathbf{f}_{ik} = \frac{\mathbf{F}_{ik}}{L_k} = f_{ik,1} \mathbf{e}_{k,1} + f_{ik,2} \mathbf{e}_{k,2} + f_{ik,3} \mathbf{e}_{k,3} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k > i) \quad (7.4.9)$$

① 根据 Debye-Hückel 理论, DNA 的糖 - 磷酸骨架之间的静电场势能的计算公式为 $E_e =$

$\sum_{j=1, i>j}^n (c_{ij}/r_{ij}) e^{-\kappa r_{ij}}$ 。增加的指数项考虑溶液电离效应的影响, 常数 κ 取决于溶液的离子强度。系数 $c_{ij} = e_i e_j / 4\pi\epsilon$, 其中 e_i, e_j 为第 i 和第 j 单元内的带电量, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_w$, ϵ_0 为真空介电常数, ϵ_w 为温度 300K 时单价盐溶液的介电常数。每个碱基对范围内的带电量约为 7.7×10^{-20} C(库仑), $\kappa = 0.0329 \sqrt{c_s} \text{ nm}^{-1}$, 其中 c_s 为盐的摩尔浓度^[146]。

其中

$$f_{ik,l} = \frac{c_{ik} r_{ik,l}}{L_k r_{ik}^3} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (7.4.10)$$

第 $\bar{k}$ 单元上作用的静电引力 $f_{\bar{k}}$ 为作用于此单元的所有引力的总和

$$f_{\bar{k}} = \sum_{i=1}^n f_{i\bar{k}} = f_{k,1} e_{k,1} + f_{k,2} e_{k,2} + f_{k,3} e_{k,3} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7.4.11)$$

其中

$$f_{k,l} = \sum_{i=1}^n f_{ik,l} \quad (k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, 3) \quad (7.4.12)$$

在对 Kirchhoff 方程(7.1.13)作数值积分的过程中,必须将上述静电引力 $f_{\bar{k}} (k=1, 2, \dots, n)$ 加入离散化的方程(7.2.14)。由于分布力的存在,截面作用力主矢 F 已不是常矢量,式(7.1.14)和式(7.1.15)已不成立,轴向应变 $\epsilon(s)$ 为独立变量。

7.4.2 静电引力势能的变分

对离散化的静电引力势能(7.4.1)取变分

$$\delta E_f = - \sum_{\bar{i}, \bar{k}=1, \bar{k} > \bar{i}}^n \frac{c_{i\bar{k}}}{r_{i\bar{k}}^2} \delta \bar{r}_{i\bar{k}} \quad (7.4.13)$$

利用任意矢量 r 及其变分的恒等式 $\bar{r} \cdot \delta \bar{r} = \bar{r} \delta \bar{r}$, 将上式化作

$$\delta E_f = - \sum_{\bar{i}, \bar{k}=1, \bar{k} > \bar{i}}^n \frac{c_{i\bar{k}}}{r_{i\bar{k}}^3} \bar{r}_{i\bar{k}}^T \delta \bar{r}_{i\bar{k}} \quad (7.4.14)$$

其中矢径 $\bar{r}_{i\bar{k}}$ 可利用式(7.3.36)计算,

$$\bar{r}_{i\bar{k}} = \frac{1}{2} \sum_{j=i}^{\bar{k}} S_j x_{j-1,j} \quad (j = i, i+1, \dots, \bar{k}) \quad (7.4.15)$$

4×8 矩阵 $S_j(x_j)$ ($j=1, 2, \dots, n$) 的定义见式(7.3.37)。暂不考虑杆的轴向变形,将 $k-i$ 个矩阵 $S_j (j=i, i+1, \dots, k)$ 沿对角线的第 $i+1$ 至第 k 位置排列,每个矩阵向左移动 4 列,即令 S_j 的前 4 列与 S_{j-1} 的后 4 列对齐,对角线的其余位置填以 4×8 零矩阵,组成 $4(n+1) \times 4(n+1)$ 矩阵 $S_{i\bar{k}}$ 。则式(7.4.15)可写作

$$\bar{r}_{i\bar{k}} = \frac{1}{2} S_{i\bar{k}} x \quad (j = i, i+1, \dots, k) \quad (7.4.16)$$

对上式取变分,整理后得到

$$\delta \bar{r}_{i\bar{k}} = S_{i\bar{k}} \delta x \quad (j = i, i+1, \dots, k) \quad (7.4.17)$$

将式(7.4.16)和式(7.4.17)代入式(7.4.14),得到

$$\delta E_f = - \frac{1}{2} \sum_{\bar{i}, \bar{k}=1, \bar{k} > \bar{i}}^n \frac{c_{i\bar{k}}}{r_{i\bar{k}}^3} x^T \tilde{S}_{i\bar{k}} \delta x \quad (7.4.18)$$

其中 $4(n+1) \times 4(n+1)$ 矩阵 $\tilde{S}_{i\bar{k}}$ 是将以下定义的 8×8 矩阵 $\tilde{S}_j (j=1, 2, \dots, n)$ 沿对角线的第 $i+1$ 至第 k 位置排列,每个矩阵向左上方移动 4 行和 4 列,即令 $\tilde{S}_j$ 的前 4 行 4 列与 $\tilde{S}_{j-1}$ 的后 4 行 4 列重叠,重叠部分的元素一一相加,对角线的其余位置填以 8×8 零矩阵,组成

$$\tilde{S}_j = S_j^T S_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.4.19)$$

引入 $4(n+1) \times 4(n+1)$ 矩阵 S

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \sum_{i, \bar{k}=1, k>i}^n \frac{c_{i\bar{k}}}{r_{i\bar{k}}^3} \tilde{\mathbf{S}}_{i\bar{k}} \quad (7.4.20)$$

则式(7.4.18)可简明地表示为

$$\delta E_f = -\mathbf{x}^T \mathbf{S} \delta \mathbf{x} \quad (7.4.21)$$

7.4.3 考虑静电引力的总势能变分

由于静电引力的存在,7.3节中对无分布力情形导出的轴向应变公式(7.3.15)已不能利用。只有在忽略轴向变形的情况下,才允许将上述静电引力势能的变分 δE_f 加入7.3节中的总势能变分(7.3.6)

$$\delta E = \delta E_e + \delta E_f - \delta W \quad (7.4.22)$$

将式(7.3.35)、式(7.3.43)和式(7.4.21)代入后,化作

$$\delta E = (\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{P}}) \delta \mathbf{x} \quad (7.4.23)$$

参数 $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{P}}$ 定义为

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{S}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \sum_{l=1}^N (\mathbf{F}_{0l}^T \mathbf{S}_l + \mathbf{M}_{0l}^T \mathbf{T}_l) \quad (7.4.24)$$

其中 $\mathbf{P}$ 按式(7.3.35)的定义。由于忽略轴向变形,组成 $\mathbf{K}$ 的 $\mathbf{K}_j$ 矩阵中的 $\bar{\mathbf{G}}_j (j=1, 2, \dots, n)$ 项应予略去,改为

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{J}_j \Phi^T \bar{\mathbf{R}}_j^T (\bar{\mathbf{R}}_j \Phi - \mathbf{R}'_j \Psi) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (7.4.25)$$

其余符号均按7.3节的定义。从平衡条件 $\delta E=0$ 导出弹性杆平衡方程

$$\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{P}} = 0 \quad (7.4.26)$$

7.5 考虑几何约束的变分原理离散化

7.5.1 弹性杆的几何约束

一般情况下,弹性杆存在以下两种典型的几何约束。

1. 端部约束

设杆的一端 P_0 固定于 O 点,杆的另一端 P_L 处于指定位置,则 P_L 相对 P_0 的矢径 $\mathbf{r}(L) = \mathbf{r}_L$ 等于指定的常矢量 $\mathbf{R}$ (见图2.4)。弹性杆必须满足的端部约束条件为

$$\mathbf{r}_L - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (7.5.1)$$

其投影式已在式(7.2.16)中给出。

2. 接触约束

7.1节中已说明,弹性杆的不可入性也可由相应的约束条件保证。在基于 Kirchhoff 假定的计算过程中,若出现不同截面的相交,则意味不可入性的破坏,杆出现穿透现象。将任意 P_i 和 P_j 处的两不同截面所含点集记作 Π_i 和 Π_j , 则 Π_i 与 Π_j 交集的存在为穿透现象的产生条件

$$\Pi_i \cap \Pi_j \neq \emptyset \quad (7.5.2)$$

将 P_i 和 P_j 附近满足以上穿透条件的弧坐标区间记作 Σ_i 和 Σ_j , 分别为弧坐标 s_i 和 s_j 的邻域

$$\begin{aligned}\Sigma_i: s_i - \Delta s_i &\leq s \leq s_i + \Delta s_i \\ \Sigma_j: s_j - \Delta s_j &\leq s \leq s_j + \Delta s_j\end{aligned}\quad (7.5.3)$$

作为实体的弹性杆不可能自相穿透,实际可能发生的状况应为杆在弧坐标为 s_i 和 s_j 的两点 P_i 和 P_j 处自相接触,所产生的接触力制止了穿透的发生。对于半径为 a 的圆截面杆,设 P_a 为 P 点处截面边缘上的任意点,其相对固定的端点 P_0 的矢径 r_a 为

$$\begin{aligned}r_a(s, \theta) &= r(s) + a(s, \theta) \\ a(s, \theta) &= a(s) [\cos\theta(s) e_1(s) + \sin\theta(s) e_2(s)]\end{aligned}\quad (7.5.4)$$

其中, r 为 P 点相对固定点 P_0 的矢径, a 为 P_a 相对 P 点的矢径, θ 为 P 点至边缘点 P_a 的矢径与截面主轴 Px 的夹角(图 7.2)。当杆自相接触时,分属不同截面的接触点 P_{ia} 与 P_{ja} 相对 P_0 点的矢径 r_{ia} 与 r_{ja} 应相等(图 7.3)。导出以下接触约束条件

$$r_i + a_i = r_j + a_j \quad (7.5.5)$$

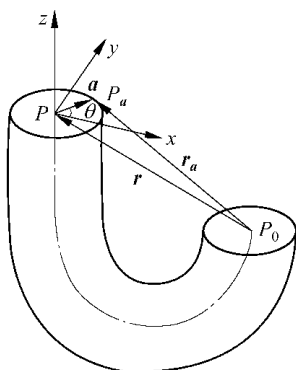


图 7.2 杆边缘点的矢径

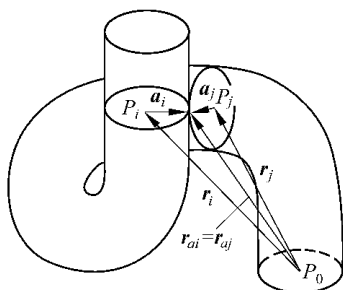


图 7.3 杆的接触约束

其中 r_i, r_j 及 a_i, a_j 分别为 P_i 和 P_j 相对 P_0 点及 P 点的矢径。对于圆截面杆情形,约束条件简化为

$$r(s_i) - r(s_j) + 2a e_a(s_i, s_j) = 0 \quad (7.5.6)$$

e_a 为杆的轮廓曲面在接触点处的公法线,可利用两接触截面的切线轴基矢量计算

$$e_a(s_i, s_j) = \frac{e_3(s_i) \times e_3(s_j)}{|e_3(s_i) \times e_3(s_j)|} \quad (7.5.7)$$

增加接触约束条件式(7.5.6)后重新计算,可避免杆自相穿透。

7.5.2 约束条件的离散化

引入矢量形式的拉格朗日乘子 $\Lambda_1(s), \Lambda_2(s)$, 其物理意义分别为端部和接触处的约束力。为避免表达式过于繁琐,设杆只有一个接触点,对应的截面中心,矢径为 r_1 和 r_2 。定义函数 $\tilde{E}$ 为受约束杆的总势能

$$\tilde{E} = E + \Lambda_1 \cdot (r_L - R) + \Lambda_2 \cdot (r_1 - r_2 + 2a e_a) \quad (7.5.8)$$

对约束杆总势能 $\tilde{E}$ 取变分,得到

$$\delta \tilde{E} = \delta E + \Lambda_1 \cdot \delta r_L + \Lambda_2 \cdot (\delta r_1 - \delta r_2) + \delta \Lambda_1 \cdot (r_L - R) + \delta \Lambda_2 \cdot (r_1 - r_2 + 2a e_a) \quad (7.5.9)$$

将式(7.3.39)代入上式与约束有关的附加项,化作

$$\delta\tilde{E} = \delta E + \mathbf{\Lambda}_1^T \sum_{j=1}^n \mathbf{S}_j \delta \mathbf{x}_{j-1,j} + \mathbf{\Lambda}_2^T \sum_{j=n_2}^{n_1} \mathbf{S}_j \delta \mathbf{x}_{j-1,j} + \delta \mathbf{\Lambda}_1^T (\mathbf{r}_L - \mathbf{R}) + \delta \mathbf{\Lambda}_2^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 2a\mathbf{e}_a) \quad (7.5.10)$$

其中 n_1, n_2 为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 对应的弧坐标所在的单元序号, $\mathbf{r}_L, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{e}_a, \mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$ 均表示采用相同符号的矢量在 $(O-\xi\eta\zeta)$ 坐标系内的投影列阵, 且有

$$\mathbf{r}_L = \sum_{j=1}^n L_j \bar{\mathbf{e}}_{3,j}, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \sum_{j=n_2}^{n_1} L_j \bar{\mathbf{e}}_{3,j} \quad (7.5.11)$$

利用 7.3 节中定义的 $3 \times 4(\bar{s}_l + 1)$ 矩阵 $\mathbf{S}_l$, 当 $\bar{s}_l = n_1, n_2, n$ 时, 分别记作 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ 和 $\mathbf{S}_n$, 则式(7.5.10)的矩阵形式为

$$\delta\tilde{E} = \delta E + [\mathbf{\Lambda}_1^T \mathbf{S}_n + \mathbf{\Lambda}_2^T (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2)] \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{\Lambda}_1^T (\mathbf{r}_L - \mathbf{R}) + \delta \mathbf{\Lambda}_2^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 2a\mathbf{e}_a) \quad (7.5.12)$$

7.5.3 受约束杆的总势能及其变分

由于约束力的存在使杆的轴向变形 $\epsilon(s)$ 成为独立变量, 只有在忽略轴向变形条件下, 才允许利用式(7.3.44)表示的总势能变分 δE , 代入式(7.5.12)后导出

$$\delta\tilde{E} = (\mathbf{x}^T \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{P}}) \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{\Lambda}_1^T (\mathbf{r}_L - \mathbf{R}) + \delta \mathbf{\Lambda}_2^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 2a\mathbf{e}_a) \quad (7.5.13)$$

其中组成 $\mathbf{K}$ 的 $\mathbf{K}_j$ 矩阵略去 $\bar{\mathbf{S}}_j$ 项, $4(n+1)$ 阶行阵 $\tilde{\mathbf{P}}$ 仿照式(7.4.24)定义为

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \sum_{l=1}^N (\mathbf{F}_{0l}^T \mathbf{S}_l + \mathbf{M}_{0l}^T \mathbf{T}_l) - \mathbf{\Lambda}_1^T \mathbf{S}_n - \mathbf{\Lambda}_2^T (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) \quad (7.5.14)$$

代入平衡条件 $\delta\tilde{E}=0$, 由于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$ 均为独立变量, $\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{\Lambda}_1, \delta \mathbf{\Lambda}_2$ 等变分可任意取值, 导出弹性杆平衡方程:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{P}} = 0 \quad (7.5.15a)$$

$$\mathbf{r}_L - \mathbf{R} = 0 \quad (7.5.15b)$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 2a\mathbf{e}_a = 0 \quad (7.5.15c)$$

由于系数中包含 $\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$ 等变量, 此非线性代数方程组共包含 $4n+10$ 个方程, 可用于确定 $4(n+1)$ 个节点变量 $\mathbf{x}$ 和 6 个拉格朗日乘子变量 $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$, 方程组封闭。

7.6 考虑轴向变形的变分原理离散化

7.6.1 轴向变形杆的应变能和外力虚功

7.3 节中对于无分布力的特殊情形推导了带轴向变形杆的变分原理, 7.4 节和 7.5 节中在忽略轴向变形条件下讨论了静电引力和约束力杆的数值计算。本节讨论分布力和轴向变形需同时考虑的一般情形。由于分布力的存在, 轴向位移已不能由欧拉参数确定而成为独立变量。增加轴向位移 $u(s)$ 后, 描述杆几何形态的变量列阵 $\mathbf{x}$ 应扩展为 5 阶

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T \quad (7.6.1)$$

其中

$$x_k = q_k \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad x_5 = u \quad (7.6.2)$$

在弯扭度列阵 ω 中增加轴向应变 ϵ 扩展成 4 阶列阵,记作 $\tilde{\omega}$

$$\tilde{\omega} = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \epsilon)^T \quad (7.6.3)$$

$\tilde{\omega}$ 与 x 之间也有类似于式(7.3.8)的关系式

$$\tilde{\omega} = R(x)x' \quad (7.6.4)$$

其中 $R(x)$ 改定义为以下 4×5 矩阵

$$R(x) = 2 \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 & 0 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (7.6.5)$$

则弹性应变能式(7.3.10)可写作

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L [(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}^0)^T \tilde{D}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}^0)] ds \quad (7.6.6)$$

其中 $\tilde{\omega}^0$ 为扩展的弯扭度原始值, $\tilde{D}$ 为扩展的刚度矩阵:

$$\tilde{\omega}^0 = (\omega_1^0 \quad \omega_2^0 \quad \omega_3^0 \quad 0)^T \quad (7.6.7)$$

$$\tilde{D} = \text{diag}(A \quad B \quad C \quad K)^T \quad (7.6.8)$$

对式(7.6.6)取变分,得到

$$\delta E_e = \int_0^L \{ [\tilde{D}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}^0)]^T \delta \tilde{\omega} \} ds \quad (7.6.9)$$

对式(7.6.4)取变分计算 $\delta \tilde{\omega}$, 整理后得到

$$\delta \tilde{\omega} = R(x) \delta x' + \delta R(x) x' = R(x) \delta x' - R'(x') \delta x \quad (7.6.10)$$

其中矩阵 $R'(x')$ 为 $R(x)$ 对 s 的导数。

$$R'(x') = 2 \begin{pmatrix} -x'_2 & x'_1 & x'_4 & -x'_3 & 0 \\ -x'_3 & -x'_4 & x'_1 & x'_2 & 0 \\ -x'_4 & x'_3 & -x'_2 & x'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6.11)$$

外力对杆的总虚功 δW 中应增加分布力 $f(s)$ 的虚功

$$\delta W = \int_0^L f^T \delta r ds + \sum_{l=1}^N (F_{0l}^T \delta r + M_{0l}^T \delta \phi) \quad (7.6.12)$$

7.6.2 弹性应变能的离散化

将变量列阵 x 在节点 P_j 处的值记作

$$x_j(s) = (x_{1,j} \quad x_{2,j} \quad x_{3,j} \quad x_{4,j} \quad x_{5,j})^T \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (7.6.13)$$

根据线性插值公式(7.2.3),将变量 $x_{k,j} (k=1, 2, \dots, 5)$ 的平均值 $\bar{x}_{k,j}$ 和导数 $x'_{k,j}$ 的差分式(7.3.21)排成 5 阶列阵 $\bar{x}_j, \bar{x}'_j$

$$\bar{x}_j(s) = (\bar{x}_{1,j} \quad \bar{x}_{2,j} \quad \bar{x}_{3,j} \quad \bar{x}_{4,j} \quad \bar{x}_{5,j})^T \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.6.14a)$$

$$\bar{x}'_j(s) = (x'_{1,j} \quad x'_{2,j} \quad x'_{3,j} \quad x'_{4,j} \quad x'_{5,j})^T \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.6.14b)$$

将第 $j-1$ 和第 j 节点值组成 10 阶列阵 $x_{j-1,j}$

$$\begin{aligned} x_{j-1,j} &= (x_{j-1}^T \quad x_j^T)^T \\ &= (x_{1,j-1}, x_{2,j-1}, \dots, x_{5,j-1}, x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{5,j})^T \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (7.6.15)$$

重复 7.3 节的推导过程, 导出离散化的应变能变分

$$\delta E_e = \sum_{j=1}^n (x_{j-1,j}^T \tilde{D}_j \Phi^T \bar{R}_j^T - \tilde{\omega}_j^{0T}) (\bar{R}_j \Phi - R_j' \Psi) \delta x_{j-1,j} \quad (7.6.16)$$

其中 $\tilde{D}_j, \tilde{\omega}_j^0$ 为刚度矩阵 $\tilde{D}$ 和弯扭度原始值 $\tilde{\omega}^0$ 在 D_j 单元内的平均值, Ψ 和 Φ 改定义为由 5 阶单位阵 E_5 组成的 5×10 矩阵

$$\Psi = \frac{1}{2}(E_5, E_5), \quad \Phi = \frac{1}{L_j}(-E_5, E_5) \quad (7.6.17)$$

$\bar{R}_j(\bar{x}_j), R_j'(x_j')$ 为 $R(x)$ 在 D_j 单元内的平均值和导数值, 可表示为在节点处取值的矩阵 $R_j(x_j)$ 和 $R_{j-1}(x_{j-1})$ 的组合

$$\begin{aligned} \bar{R}_j(\bar{x}_j) &= \frac{1}{2} [R_{j-1}(x_{j-1}) + R_j(x_j)] \\ R_j'(x_j') &= \frac{1}{L_j} [R_j(x_j) - R_{j-1}(x_{j-1})] \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.6.18)$$

其中

$$R_j(x_j) = 2 \begin{bmatrix} -x_{2,j} & x_{1,j} & -x_{4,j} & x_{3,j} & 0 \\ -x_{3,j} & x_{4,j} & x_{1,j} & -x_{2,j} & 0 \\ -x_{4,j} & -x_{3,j} & x_{2,j} & x_{1,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (7.6.19)$$

式(7.6.16)可简写为

$$\delta E_e = \sum_{j=1}^n (x_{j-1,j}^T K_j - P_j) \delta x_{j-1,j} \quad (7.6.20)$$

其中 K_j, P_j 分别为 10×10 矩阵和 1×10 行阵, 定义为

$$K_j = \tilde{D}_j \Phi^T \bar{R}_j^T (\bar{R}_j \Phi - R_j' \Psi), \quad P_j = \tilde{\omega}_j^{0T} (\bar{R}_j \Phi - R_j' \Psi) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.6.21)$$

将 $n+1$ 个节点值列阵 $x_j (j=0, 1, \dots, n)$ 排成 $5(n+1)$ 阶列阵, 记作 x

$$x = (x_0^T \quad x_1^T \quad \dots \quad x_n^T)^T \quad (7.6.22)$$

与 7.3 节中的方法类似, 将 n 个 10×10 矩阵 K_j 沿对角线排列, 各矩阵向左上方移动 5 行和 5 列, 重叠部分的元素相加, 组成 $5(n+1) \times 5(n+1)$ 矩阵 K ; 将 n 个 10 阶行阵 P_j 依次排列, 各矩阵向左移动 5 列, 重叠部分的元素相加, 组成 $5(n+1)$ 阶行阵 P 。则求和式(7.6.20)可表示为

$$\delta E_e = (x^T K - P) \delta x \quad (7.6.23)$$

7.6.3 外力虚功的离散化

中心线上任意点 P 的矢径 $r(s)$ 仍可用式(7.3.36)表示,

$$r(s) = \bar{r}_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s S_j x_{j-1,j} \quad (7.6.24)$$

但其中 $S_j(x_{k,j}) (k=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, n)$ 改为 3×10 矩阵, 在形式上 $S_j(x_{k,j})$ 仍可写作式(7.3.37)形式, 但组成此矩阵的 $Q_j, Q_{j-1} (j=1, 2, \dots, n)$ 改定义为以下 3×5 矩阵

$$Q_j(x_{k,j}) = \begin{bmatrix} x_{3,j} & x_{4,j} & x_{1,j} & x_{2,j} & 0 \\ -x_{2,j} & -x_{1,j} & x_{4,j} & x_{3,j} & 0 \\ 2x_{1,j} & 0 & 0 & 2x_{4,j} & 0 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.6.25)$$

对式(7.6.24)取变分,得到的表达式与式(7.3.39)相同

$$\delta r = \sum_{j=1}^{\bar{s}} S_j \delta x_{j-1,j} \quad (7.6.26)$$

对式(7.6.4)取变分,略去第4列,整理后化作与式(7.3.13)相同的形式

$$\delta \omega = R_0(x) \delta x' + \delta R_0(x) x' = R_0(x) \delta x' - R'_0(x') \delta x \quad (7.6.27)$$

其中 $R_0(x)$ 为式(7.6.19)定义的矩阵 $R(x)$ 减去第4行后形成的 3×5 矩阵。代入离散化的角位移变分 $\delta \phi$ 相应地表示为

$$\delta \phi = \sum_{j=1}^{\bar{s}} L_j \delta \bar{\omega}_j = \sum_{j=1}^{\bar{s}} T_{0,j} \delta x_{j-1,j} \quad (7.6.28)$$

其中 3×10 矩阵 $T_{0,j}$ 定义为

$$T_{0,j} = \bar{R}_{0,j} \Phi - R'_{0,j} \Psi \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.6.29)$$

5×10 矩阵 Ψ 和 Φ 按照式(7.6.17)的定义。

利用式(7.6.26)和式(7.6.28)计算虚功,得到

$$\delta W = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^{\bar{s}} f_s^T S_j \delta x_{j-1,j} + \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^{\bar{s}_l} (F_{0l}^T S_j + M_{0l}^T T_{0,j}) \delta x_{j-1,j} \quad (7.6.30)$$

将 n 个 3×10 矩阵 $S_j (j=1, 2, \dots, n)$ 水平排列,每个矩阵均向左移动 5 列,组成 $3 \times 5(n+1)$ 矩阵 S ;用同样方法将 $\bar{s}_l$ 个 3×10 矩阵 S_j 组成 $3 \times 5(\bar{s}_l+1)$ 矩阵 $S_l (l=1, 2, \dots, N)$;将 $\bar{s}_l$ 个矩阵 $T_{0,j} (j=1, 2, \dots, \bar{s}_l)$ 组成 $3 \times 5(\bar{s}_l+1)$ 阶矩阵 $T_l (l=1, 2, \dots, N)$;则求和式(7.6.30)可简明地表示为

$$\delta W = \left[f^T S + \sum_{l=1}^N (F_{0l}^T S_l + M_{0l}^T T_{0,l}) \right] \delta x \quad (7.6.31)$$

将式(7.6.23)和式(7.6.31)代入式(7.3.6),导出无约束无分布力弹性杆的总势能变分 δE

$$\delta E = (x^T K - \tilde{P}) \delta x \quad (7.6.32)$$

其中 $5(n+1)$ 阶行阵 $\tilde{P}$ 定义为

$$\tilde{P} = P - f^T S - \sum_{l=1}^N (F_{0l}^T S_l + M_{0l}^T T_{0,l}) \quad (7.6.33)$$

代入平衡条件 $\delta E=0$,导出弹性杆的平衡方程

$$x^T K - \tilde{P} = 0 \quad (7.6.34)$$

7.6.4 考虑静电引力和轴向变形的受约束杆

考虑静电引力和轴向变形时,杆的应变能和静电引力势能表达式中的变量 x 均按式(7.6.1)定义为 5 阶列阵。利用式(7.6.24)和式(7.6.26)表示静电势能变分(7.4.14)中的 $\bar{r}_{ik}$ 和 $\delta \bar{r}_{ik}$,得到形式上与式(7.4.16)和式(7.4.17)相同的表达式,但其中的 S_{ik} 改为按以下定义的 $5(n+1) \times 5(n+1)$ 矩阵:将 $k-i$ 个矩阵 $S_j (j=i, i+1, \dots, k)$ 沿对角线的第 $i+1$ 至第 k 位置排列,每个矩阵向左移动 5 列,即令 S_j 的前 5 列与 S_{j-1} 的后 5 列对齐,对角线的其余位置填以 5×10 零矩阵组成 S_{ik} 。定义以下 10×10 矩阵 $\tilde{S}_j (j=1, 2, \dots, n)$

$$\tilde{S}_j = S_j^T S_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.6.35)$$

引入 $5(n+1) \times 5(n+1)$ 矩阵 S

$$S = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1,k>i}^n \frac{c_{ik}}{r_{ik}^3} \tilde{S}_{ik} \quad (7.6.36)$$

得到与式(7.4.21)相同形式的静电势能变分

$$\delta E_t = -x^T S \delta x \quad (7.6.37)$$

增加静电势能变分后,杆的总势能变分为

$$\delta E = (x^T \tilde{K} - \tilde{P}) \delta x \quad (7.6.38)$$

参数 $\tilde{K}, \tilde{P}$ 定义为

$$\tilde{K} = K - S, \quad \tilde{P} = P - \sum_{l=1}^N (F_{0l}^T S_l + M_{0l}^T T_l) \quad (7.6.39)$$

其中 K, S, P 均按照本节给出的式(7.6.21)和式(7.6.36)的定义。导出杆的平衡方程

$$x^T \tilde{K} - \tilde{P} = 0 \quad (7.6.40)$$

将受约束杆的总势能变分(7.5.13)中的变量 x 按式(7.6.1)定义为 5 阶列阵。矢径 r 以式(7.6.24)代入,仍写作

$$\delta \tilde{E} = (x^T \tilde{K} - \tilde{P}) \delta x + \delta \mathbf{A}_1^T (r_L - R) + \delta \mathbf{A}_2^T (r_1 - r_2 + 2a e_a) \quad (7.6.41)$$

其中矩阵 K 按式(7.6.21)的定义, $\tilde{P}$ 定义为

$$\tilde{P} = P - \sum_{l=1}^N (F_{0l}^T S_l + M_{0l}^T T_{0,l}) - \mathbf{A}_1^T S_n - \mathbf{A}_2^T (S_1 - S_2) \quad (7.6.42)$$

导出形式上与式(7.5.15)相同的平衡条件

$$x^T \tilde{K} - \tilde{P} = 0 \quad (7.6.43a)$$

$$r_L - R = 0 \quad (7.6.43b)$$

$$r_1 - r_2 + 2a e_a = 0 \quad (7.6.43c)$$

但其中的所有符号均按照本节的定义。

图 7.4 的算例显示包含 2000 个碱基对的 DNA 弹性杆模型在溶液中的变形过程。

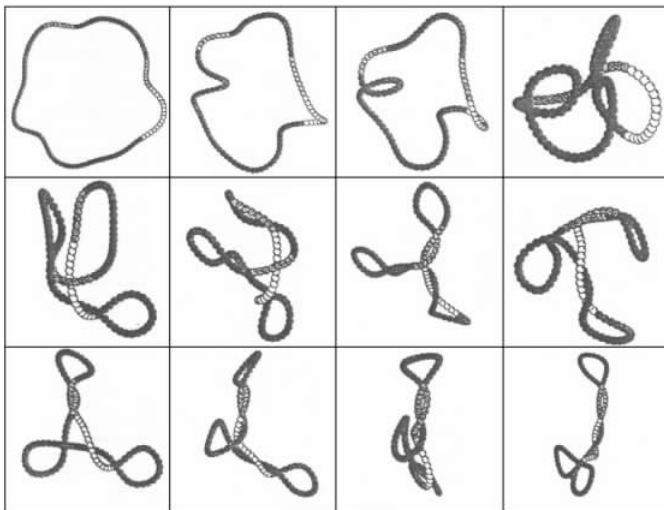


图 7.4 数值计算算例(引自 T, Schlick^[119])

附录 A 椭圆函数基础

A.1 第一类椭圆积分和椭圆函数

以下积分称为 Legendre 第一类椭圆积分

$$u = F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (\text{A.1})$$

其中常数 k 称为此积分的模。对于 $k=0$ 或 $k=1$ 的特殊情形, $F(x, k)$ 退化为初等函数:

$$\begin{aligned} k=0: \quad F(x, 0) &= \arcsin x \\ k=1: \quad F(x, 1) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

一般情况下 $F(x, k)$ 不能用初等函数表示。规定 k 的变化范围为 $1 > k > 0$, 作以下变量置换

$$x = \sin\phi \quad (\text{A.3})$$

则第一类椭圆积分(A.1)也可表达为

$$u = F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad (\text{A.4})$$

$u=F(\phi, k)$ 的反函数称为 u 的幅角, 记作

$$\phi(u) = \operatorname{am} u \quad (\text{A.5})$$

定义以下函数:

$$\text{椭圆正弦函数: } \operatorname{sn} u = \sin(\operatorname{am} u) = \sin\phi = x \quad (\text{A.6})$$

$$\text{椭圆余弦函数: } \operatorname{cn} u = \cos(\operatorname{am} u) = \cos\phi = \sqrt{1-x^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{椭圆 Delta 函数: } \operatorname{dn} u = \Delta(\operatorname{am} u) = \Delta\phi = \sqrt{1-k^2x^2} \quad (\text{A.8})$$

上述各函数总称为 Jacobi 椭圆函数。图 A.1 给出不同模值 k 对应的 $\operatorname{am} u, \operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ 的函数曲线。对于 $k=0$ 和 $k=1$ 的特殊情形, 幅角和椭圆函数分别退化为

$$k=0: \operatorname{am} u = u = \phi, \operatorname{sn} u = \sin u, \operatorname{cn} u = \cos u, \operatorname{dn} u = 1 \quad (\text{A.9a})$$

$$k=1: \operatorname{am} u = \arcsin \tanh u, \operatorname{sn} u = \tanh u, \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \operatorname{sech} u \quad (\text{A.9b})$$

椭圆函数之间存在以下关系

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1 \quad (\text{A.10})$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = 1 - k^2 \quad (\text{A.12})$$

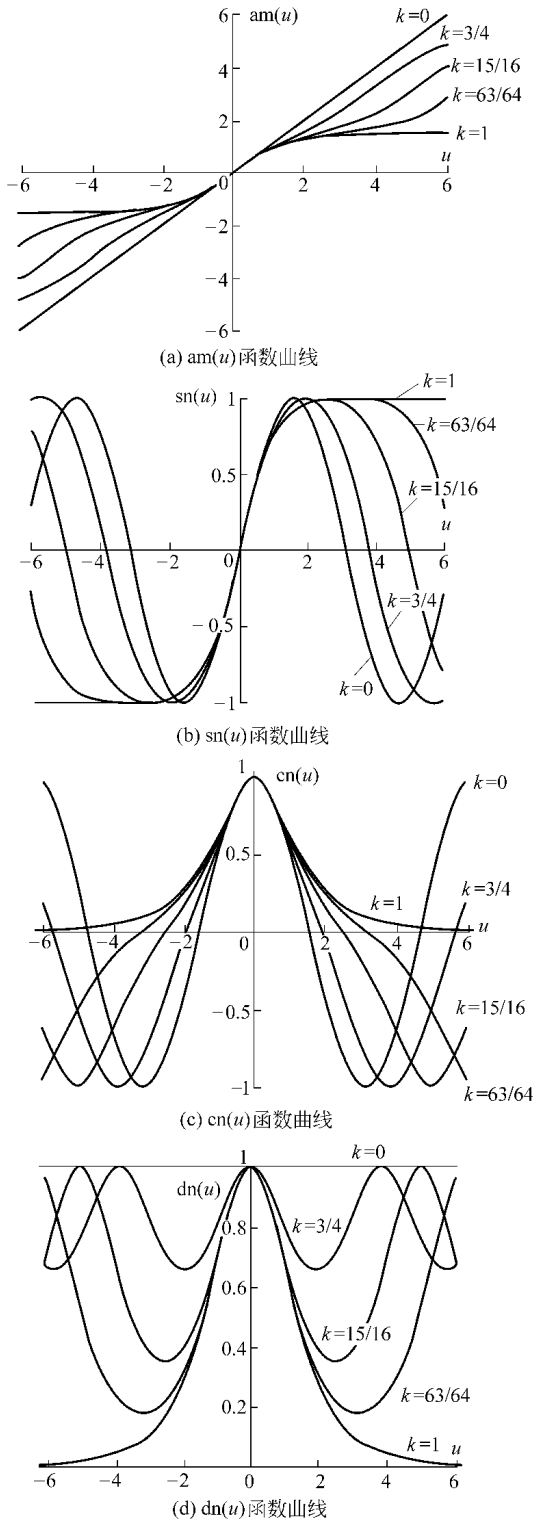


图 A.1 椭圆函数曲线

$$\frac{d}{du} \operatorname{am} u = \operatorname{dn} u \quad (\text{A. 13})$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u \quad (\text{A. 14})$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u \quad (\text{A. 15})$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \quad (\text{A. 16})$$

其中式(A. 10)~式(A. 12)根据其定义即可证明, 式(A. 13)~式(A. 16)的证明可利用下式完成

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}, \quad \frac{d\phi}{du} = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} \quad (\text{A. 17})$$

A. 2 椭圆函数的周期

$x = \sin \phi$ 为 ϕ 的以 2π 为周期的周期函数。当 ϕ 改变 2π 时 u 的增量为

$$u(2\pi) - u(0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = 4K \quad (\text{A. 18})$$

其中 K 为 k 的函数, 称为第一类完全椭圆积分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad (\text{A. 19})$$

式(A. 18)表明 $x = \operatorname{sn} u$ 为 u 的以 $4K$ 为周期的周期函数。由于 $x^2 = \operatorname{sn}^2 u$ 的周期为 $2K$, 可推知 $\operatorname{cn} u$ 和 $\operatorname{dn} u$ 的周期均为 $2K$ 。若 $k=0$, 则 $K(0) = \pi/2$ 。对于任意整数 n , 以下公式成立

$$\operatorname{am}(2nK(k) \pm u) = n\pi \pm \operatorname{am}(u) \quad (\text{A. 20a})$$

$$\operatorname{sn}(2nK(k) \pm u) = \pm (-1)^n \operatorname{sn}(u) \quad (\text{A. 20b})$$

$$\operatorname{cn}(2nK(k) \pm u) = (-1)^n \operatorname{cn}(u) \quad (\text{A. 20c})$$

$$\operatorname{dn}(2nK(k) \pm u) = \operatorname{dn}(u) \quad (\text{A. 20d})$$

积分(A. 19)中的被积函数随参数 k 的增大而增大, 因此第一类完全椭圆积分 $K(k)$ 为 k 的单调增函数。当 $k > 0$ 时, 必有 $K(k) > \pi/2$ 。

A. 3 第二类椭圆积分

以下积分称为以 k 为模的第二类椭圆积分

$$E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{A. 21})$$

利用式(A. 2)作变量置换后, 也可记作 $E(\phi, k)$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (\text{A. 22})$$

或记作 $E(\operatorname{am} u, k)$

$$E(\operatorname{am} u, k) = \int_0^u \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} du \quad (\text{A. 23})$$

存在以下恒等式

$$\int_0^u \operatorname{sn}^2 u du = \frac{1}{k^2} [u - E(\operatorname{am} u, k)] \quad (\text{A. 24})$$

为证明上式, 利用式(A. 17)导出

$$\begin{aligned} \int_0^u \operatorname{sn}^2 u du &= \int_0^\phi \sin^2 \phi \left(\frac{du}{d\phi} \right) d\phi \\ &= \int_0^\phi \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned} \quad (\text{A. 25})$$

还可导出

$$\begin{aligned} u - E(\operatorname{am} u, k) &= \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} - \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \\ &= k^2 \int_0^\phi \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned} \quad (\text{A. 26})$$

对照式(A. 26)与式(A. 25), 即得到式(A. 24)。证毕。

上限为 $\pi/2$ 的积分(A. 22)称为第二类完全椭圆积分, 为 k 的函数, 记作 $\tilde{E}(k)$

$$\tilde{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (\text{A. 27})$$

存在以下关系式

$$E(n\pi \pm \phi, k) = 2n\tilde{E}(k) \pm E(\phi, k) \quad (\text{A. 28})$$

A. 4 第三类椭圆积分

以下积分称为以 k 为模的第三类椭圆积分

$$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dx}{(1 - nx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \quad (\text{A. 29})$$

利用式(A. 2)作变量置换后, 也可表示为

$$\Pi(\phi, n, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - n\sin^2 \phi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (\text{A. 30})$$

第三类椭圆积分还可以 u 为积分变量, 表示为

$$\Pi(u, n, k) = \int_0^u \frac{du}{1 - n\operatorname{sn}^2 u} \quad (\text{A. 31})$$

为证明上式, 利用式(A. 16)将此积分化作

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{du}{1 - n\operatorname{sn}^2 u} &= \int_0^\phi \frac{1}{1 - n\sin^2 \phi} \left(\frac{du}{d\phi} \right) d\phi \\ &= \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - n\sin^2 \phi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \Pi(u, n, k) \end{aligned} \quad (\text{A. 32})$$

证毕。

上限为 $\pi/2$ 的积分 (A. 29) 称为第三类完全椭圆积分, 为 n 和 k 的函数, 记作 $\tilde{\Pi}(n, k)$

$$\tilde{\Pi}(n, k) = \Pi(\pi/2, n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - n\sin^2\phi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} \quad (\text{A. 33})$$

也存在关系式

$$\Pi(n\pi \pm \phi, k) = 2n\tilde{\Pi}(k) \pm \Pi(\phi, k) \quad (\text{A. 34})$$

附录 B 刚体运动学基础

B.1 矢量的矩阵表达

设 e_1, e_2, e_3 为笛卡儿坐标系 ($Oxyz$) 各坐标轴 Ox, Oy, Oz 的单位矢量, 称为 ($Oxyz$) 的基矢量。所排成的列阵称为基, 记作 $\underline{e}$,

$$\underline{e} = (e_1 \ e_2 \ e_3)^T \quad (\text{B.1})$$

在上式中, 表示矩阵的黑体字母 $\underline{e}$ 的下方增加横杠表示元素为矢量的矩阵, 以区别于标量矩阵。基矢量有以下正交特性

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1 \\ e_1 \cdot e_2 &= e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

此特性可利用矩阵 $\underline{e}$ 简略地表示为

$$\underline{e} \cdot \underline{e}^T = E \quad (\text{B.3})$$

其中 E 为 3 阶单位阵。任意矢量 a 可表示为基矢量 e_1, e_2, e_3 的线性组合

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad (\text{B.4})$$

a_1, a_2, a_3 称为矢量 a 在 $\underline{e}$ 基上的投影或坐标, 所排成的列阵称为矢量 a 在 $\underline{e}$ 基上的坐标列阵。以右上角带括号角标的黑体字母表示坐标列阵, 以区别用同样黑体字母表示的矢量^①, 写作

$$a^{(0)} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T \quad (\text{B.5})$$

则矢量 a 可写作基的转置阵与坐标列阵的乘积或坐标行阵与基的乘积

$$a = \underline{e}^T a^{(0)} = a^{(0)T} \underline{e} \quad (\text{B.6})$$

可以利用矢量的坐标列阵完成所有矢量运算

$$\begin{aligned} a \pm b &= c & a^{(0)} \pm b^{(0)} &= c^{(0)} \\ \alpha a &= c & \alpha a^{(0)} &= c^{(0)} \\ a \cdot b &= \lambda & a^{(0)T} b^{(0)} &= b^{(0)T} a^{(0)} = \lambda \\ a \times b &= c & \tilde{a}^{(0)} b^{(0)} &= -\tilde{b}^{(0)} a^{(0)} = c \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

其中 α 为标量, 带波浪号的矩阵 $\tilde{a}^{(0)}$ (或 $\tilde{b}^{(0)}, \tilde{c}^{(0)}$) 为矢量 a (或 b, c) 的坐标组成的 3 阶反对称方阵

① 在正文中为避免表达方式过繁而略去上角标, 表示矢量的黑体字母也同时表示其投影矩阵。

$$\tilde{a}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 8})$$

B.2 方向余弦矩阵

设 $(O-x_p y_p z_p)$ 和 $(O-x_q y_q z_q)$ 是以 O 为同一原点的不同坐标系, 对应的基分别为 $\underline{e}^{(p)}$ 和 $\underline{e}^{(q)}$, 则同一矢量 a 可用不同的基表示为

$$a = \underline{e}^{(p)\text{T}} a^{(p)} = \underline{e}^{(q)\text{T}} a^{(q)} \quad (\text{B. 9})$$

坐标列阵的上角标为坐标系的标号。将上式左边用 $\underline{e}^{(p)}$ 点积, 并考虑关系式 (B. 3), 导出

$$a^{(p)} = A_{pq} a^{(q)} \quad (\text{B. 10})$$

其中 A_{pq} 为 3×3 标量矩阵, 定义为

$$A_{pq} = \underline{e}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(q)\text{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B. 11})$$

A_{pq} 的元素 a_{ij} 等于不同坐标系 $\underline{e}^{(p)}$ 的第 i 轴和 $\underline{e}^{(q)}$ 的第 j 轴夹角的余弦, 称为 $\underline{e}^{(p)}$ 相对 $\underline{e}^{(q)}$ 的方向余弦矩阵。

根据关系式 (B. 3) 可以判断: 相同基之间的方向余弦矩阵为三阶单位阵, 即

$$A_{pp} = E \quad (\text{B. 12})$$

从式 (B. 11) 的定义不难看出, 将 p 与 q 互换位置后的矩阵 A_{qp} 为 A_{pq} 的转置阵

$$A_{qp} = A_{pq}^{\text{T}} \quad (\text{B. 13})$$

设有 3 个不同基 $\underline{e}^{(p)}, \underline{e}^{(q)}, \underline{e}^{(s)}$, 连续使用式 (B. 10), 导出

$$a^{(p)} = A_{pq} a^{(q)} = A_{ps} A_{sq} a^{(q)} \quad (\text{B. 14})$$

将式 (B. 14) 与式 (B. 10) 比较, 导出任意三个基之间的方向余弦矩阵之间的关系式

$$A_{pq} = A_{ps} A_{sq} \quad (\text{B. 15})$$

从而作出推论: 在按序编号的基族中, 任意两基之间的方向余弦矩阵等于一系列相邻基之间的方向余弦矩阵的连乘积, 即

$$A_{pq} = A_{p, p+1} A_{p+1, p+2} \cdots A_{q-1, q} \quad (\text{B. 16})$$

从式 (B. 15) 和式 (B. 12) 导出

$$A_{pp} = A_{pq} A_{qp} = E \quad (\text{B. 17})$$

表明方向余弦矩阵的逆阵等于其转置阵, 即方向余弦矩阵为正交矩阵

$$A_{pq}^{-1} = A_{qp} = A_{pq}^{\text{T}} \quad (\text{B. 18})$$

B.3 刚体的有限转动

刚体绕固定点 O 转动时, 若转角为有限值称为有限转动。关于刚体有限转动的欧拉定理表明: 刚体绕定点 O 的任意有限转动可由绕 O 点的某个轴 p 的一次有限转动实现。

转动轴 p 轴的基矢量 p 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 或 $(O-x_1y_1z_1)$ 有相同的方向余弦 p_1, p_2, p_3 。设刚体的连体坐标系 $(O-xyz)$ 的起始位置为 $(O-x_0y_0z_0)$ ，它绕过 O 点的 p 轴转过 ϕ 角后的位置为 $(O-x_1y_1z_1)$ 。与刚体固定的任意矢量在转动前后的位置 a_0 及 a 都位于相对 p 轴对称的圆锥面内。过 a_0 和 a 的矢量端点 P_0 和 P 作平面与 p 轴垂直并相交于 O_1 点，过 P 点向 O_1P_0 引垂线，垂足为 Q (图 B. 1)，则有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q} + \overrightarrow{QP} \quad (\text{B. 19})$$

其中的矢量 $\overrightarrow{QP}$ 及 $\overrightarrow{P_0Q}$ 分别沿 $p \times a_0$ 及 $p \times (p \times a_0)$ 方向，上式可写作

$$a = a_0 + (1 - \cos\phi)p \times (p \times a_0) + \sin\phi(p \times a_0) \quad (\text{B. 20})$$

将其中的二重矢积展开后，化作

$$a = \cos\phi a_0 + (1 - \cos\phi)(p \cdot a_0)p + \sin\phi(p \times a_0) \quad (\text{B. 21})$$

此矢量式可表达为以 $(O-x_1y_1z_1)$ 为参考基的矩阵形式

$$a^{(1)} = A_{01}a_0^{(1)} \quad (\text{B. 22})$$

矩阵 A_{01} 为

$$A_{01} = \begin{pmatrix} p_1^2(1-\cos\phi) + \cos\phi & p_2p_1(1-\cos\phi) - p_3\sin\phi & p_3p_1(1-\cos\phi) + p_2\sin\phi \\ p_2p_1(1-\cos\phi) + p_3\sin\phi & p_2^2(1-\cos\phi) + \cos\phi & p_3p_2(1-\cos\phi) - p_1\sin\phi \\ p_3p_1(1-\cos\phi) - p_2\sin\phi & p_3p_2(1-\cos\phi) + p_1\sin\phi & p_3^2(1-\cos\phi) + \cos\phi \end{pmatrix} \quad (\text{B. 23})$$

其中 c, s 为 $\cos, \sin$ 的简写符号。由于 a 相对 $(O-x_1y_1z_1)$ 的坐标列阵 $a^{(1)}$ 与 a_0 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 的坐标列阵 $a_0^{(0)}$ 完全相同，式(B. 22)可改写为

$$a_0^{(0)} = A_{01}a_0^{(1)} \quad (\text{B. 24})$$

因此 A_{01} 为 $(O-x_0y_0z_0)$ 相对 $(O-x_1y_1z_1)$ 的方向余弦矩阵。由于方向余弦之间有以下关系式

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (\text{B. 25})$$

因此构成矩阵 A_{01} 各元素的 4 个参数 p_1, p_2, p_3, ϕ 中只有 3 个独立变量，与刚体绕定点 O 转动的 3 个自由度相对应。

刚体作多次有限转动后的位置可根据式(B. 16)，由方向余弦矩阵的连乘积实现。由于矩阵乘法运算的不可交换性，有限转动后的最终位置与转动次序有关。

B. 4 欧拉角

刚体绕定点 O 转动的 3 个自由度也可由 3 个角度坐标体现。将刚体的有限转动分解为依一定顺序绕连体坐标轴的 3 次有限转动，并将每次转过的角度定义为确定刚体转动前后相对位置的 3 个广义坐标。设连体坐标系的初始位置 $(O-x_0y_0z_0)$ 与定坐标系重合，令 $(O-x_0y_0z_0)$ 先绕 z_0 轴转动 ψ 角到达 $(O-x_1y_1z_1)$ 位置，然后绕 x_1 轴转动 θ 角到达 $(O-x_2y_2z_2)$ 位置，最后绕 z_2 轴转动 φ 角到达 $(O-x_3y_3z_3)$ 位置。按此顺序定义的广义坐

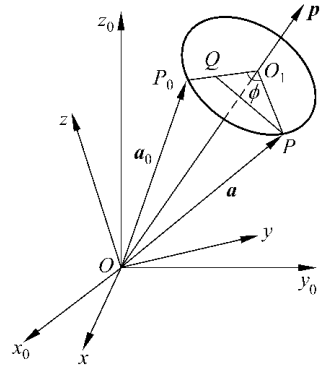


图 B. 1 刚体的有限转动

标 ψ, θ, φ 称为欧拉角, 其中 ψ 为进动角, θ 为章动角, φ 为自转角 (图 B. 2)。

利用式 (B. 23) 或直接观察各坐标轴之间的夹角不难确定各次转动所对应的方向余弦矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{01} &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{23} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 26}) \end{aligned}$$

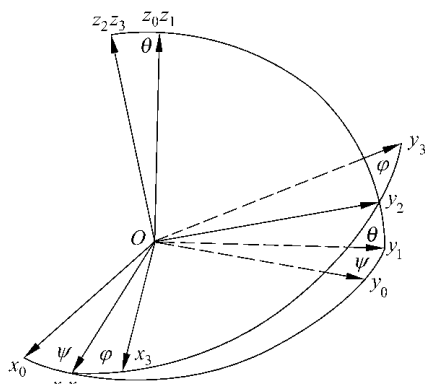


图 B. 2 欧拉角

连体坐标系 ($O-x_3y_3z_3$) 相对 ($O-x_1y_1z_1$) 和 ($O-$

$x_0y_0z_0$) 的方向余弦矩阵 $\mathbf{A}_{13}$ 和 $\mathbf{A}_{03}$, 可利用式 (B. 15) 导出

$$\mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B. 27})$$

$$\mathbf{A}_{03} = \mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & s\psi s\theta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B. 28})$$

将上式中矩阵 $\mathbf{A}_{03}$ 的各元素记作 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), 可导出用方向余弦表示的欧拉角计算公式

$$\begin{aligned} \psi &= \arccos\left(-\frac{a_{23}}{\sin\theta}\right) = \arcsin\left(\frac{a_{13}}{\sin\theta}\right) \\ \theta &= \arccos a_{33} = \arcsin(\pm \sqrt{1 - a_{33}^2}) \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{a_{32}}{\sin\theta}\right) = \arcsin\left(\frac{a_{31}}{\sin\theta}\right) \end{aligned} \quad (\text{B. 29})$$

在 $\theta = n\pi$ ($n=0, 1, \dots$) 的特殊位置, 式 (B. 29) 无意义而成为欧拉角的奇点。在奇点位置由于 z_3 轴与 z_0 轴重合, x_1 轴的位置变得不确定, 角度 ψ 与 φ 亦不能确定。实际上只要 z_3 轴接近 z_0 轴, θ 接近零时, 就可能出现数值计算方面的困难。

B.5 欧拉参数与四元数

将式 (B. 23) 表示的方向余弦矩阵 $\mathbf{A}_{01}$ 的各元素用半角公式化作以 $\sin(\phi/2)$ 和 $\cos(\phi/2)$ 表示, 并定义以下符号

$$\lambda_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad \lambda_k = p_k \sin \frac{\phi}{2} \quad (k=1, 2, 3) \quad (\text{B. 30})$$

所定义的 4 个实数 λ_k ($k=0, 1, 2, 3$) 称为欧拉参数。刚体有限转动前后的方向余弦矩阵

(B. 23)可用欧拉参数表示为

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{pmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 31})$$

直接验算可以证实欧拉参数之间存在以下关系式

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad (\text{B. 32})$$

因此与欧拉角相同,用欧拉参数表示刚体之间的相对位置时也只有 3 个独立变量。方向余弦矩阵 $\mathbf{A}_{01}$ 也可写作两个 3×4 矩阵 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}^*$ 的乘积

$$\mathbf{A}_{01} = \mathbf{R}^* \mathbf{R}^T \quad (\text{B. 33})$$

$\mathbf{R}, \mathbf{R}^*$ 由完全相同的第 1 列和相互转置的 3 阶方阵组成

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^* = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 34})$$

直接验算可证实,矩阵 $\mathbf{R}, \mathbf{R}^*$ 的转置阵为其逆阵

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^* \mathbf{R}^{*T} = \mathbf{E} \quad (\text{B. 35})$$

由于 $\mathbf{A}_{01}$ 与 $\mathbf{A}_{10}$ 互为逆阵,利用式(B. 33)导出

$$\mathbf{A}_{10}\mathbf{A}_{01} = \mathbf{R}\mathbf{R}^{*T}\mathbf{R}^*\mathbf{R}^T = \mathbf{E} \quad (\text{B. 36})$$

比较式(B. 35)与式(B. 36),导出

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{*T}\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \quad (\text{B. 37})$$

将式(B. 23)中矩阵 $\mathbf{A}_{01}$ 的元素记作 $a_{ij} (i, j=1, 2, 3)$, 与式(B. 31)比较,导出用方向余弦表示的欧拉参数计算公式

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + \text{tr}\mathbf{A}_{01}}{2}}, \quad \lambda_k = \pm \sqrt{\frac{1 + a_{kk}}{2} - \lambda_0^2} \quad (k=1, 2, 3) \quad (\text{B. 38})$$

将解出的欧拉参数代入式(B. 31),与原矩阵 $\mathbf{A}_{01}$ 核对,以确定 λ_k 的正负号,再代入式(B. 30),解出转动轴位置 $p_k (k=1, 2, 3)$ 和转角 ϕ 。欧拉参数不存在奇点,且以代数运算代替三角运算,是与欧拉角相比的主要优点。

欧拉参数也可以哈密顿四元数的形式表达,称为有限转动四元数。四元数是由一个实数单位 1 和 3 个虚数单位 i, j, k 组成的包含 4 个实元的超复数,记作 Δ

$$\Delta = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \quad (\text{B. 39})$$

若将 i, j, k 视为基矢量,则上式的后三项组成矢量 λ 。因此也可将四元数定义为一个标量 λ_0 和一个矢量 λ 的集合,借用加法符号写作

$$\Delta = \lambda_0 + \lambda \quad (\text{B. 40})$$

作为两种特例, $\lambda = 0$ 或 $\lambda_0 = 0$ 时四元数转化为标量和矢量。对于确定的基,设 $\lambda_r (r=1, 2, 3)$ 为矢量 λ 的投影,则四元数 Δ 也可定义为 4 个标量 $\lambda_r (r=1, 2, 3)$ 的集合,用标量列阵 $\Delta^{(0)}$ 表示为

$$\Delta^{(0)} = (\lambda_0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3)^T \quad (\text{B. 41})$$

四元数遵循特殊的规则进行乘法运算,以空心圆点 $\circ$ 作为乘法运算符号。标量 α 与标量 β 之间或标量 α 与矢量 a 之间的四元数乘积遵从一般乘法运算规则

$$\alpha \circ \beta = \alpha\beta, \quad \alpha \circ a = \alpha a \quad (\text{B. 42})$$

矢量 a 与矢量 b 的四元数乘积等于由标量 $-a \cdot b$ 与矢量 $a \times b$ 组成的四元数

$$a \circ b = -a \cdot b + a \times b \quad (\text{B. 43})$$

一般情况下四元数与四元数之间的乘法规则可从式(B. 42)和式(B. 43)直接导出。设 Δ , M 均为四元数

$$\Delta = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}, \quad M = \mu_0 + \boldsymbol{\mu} \quad (\text{B. 44})$$

则有

$$\Delta \circ M = (\lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}) + (\lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}) \quad (\text{B. 45})$$

此运算过程也可利用矩阵运算实现。设 $N = \Delta \circ M$, 对应的矩阵运算为

$$N^{(0)} = \tilde{\Delta}^{(0)} M^{(0)} \quad (\text{B. 46})$$

其中 $M^{(0)}$, $N^{(0)}$ 为 M , N 的标量列阵, $\tilde{\Delta}^{(0)}$ 为 Δ 的标量方阵, 定义为

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Delta}^{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad M^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 47})$$

改变四元数 Δ 中矢量的正负号形成 Δ 的共轭四元数, 记作 Δ^*

$$\Delta^* = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{B. 48})$$

四元数 Δ 及其共轭四元数 Δ^* 的乘积为标量, 称为四元数的范数或模, 记作 $|\Delta|$

$$|\Delta| = \Delta \circ \Delta^* = \Delta^* \circ \Delta = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (\text{B. 49})$$

式(B. 32)表明, 有限转动四元数的范数等于 1, 称为规范四元数。两个共轭四元数的乘积等于原四元数交换位置后乘积的共轭四元数

$$\Delta^* \circ M^* = (M \circ \Delta)^* \quad (\text{B. 50})$$

利用有限转动四元数 Δ 及其共轭四元数 Δ^* , 有限转动公式(B. 21)可表示为

$$a = (2\lambda_0^2 - 1)a_0 + 2\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda} \cdot a_0) + 2\lambda_0(\boldsymbol{\lambda} \times a_0) = \Delta \circ a_0 \circ \Delta^* \quad (\text{B. 51})$$

将上式左、右两边各乘以 Δ^* 及 Δ , 考虑式(B. 49), 逆解出

$$a_0 = \Delta^* \circ a \circ \Delta \quad (\text{B. 52})$$

若刚体相继作两次有限转动。第一次有限转动四元数为 Δ_1 , 将矢量 a_0 转至 a_1 位置

$$a_1 = \Delta_1 \circ a_0 \circ \Delta_1^* \quad (\text{B. 53})$$

第二次有限转动四元数为 Δ_2 , 将矢量 a_1 转至 a 位置, 则有

$$a = \Delta_2 \circ a_1 \circ \Delta_2^* = \Delta \circ a_0 \circ \Delta^*, \quad \Delta = \Delta_2 \circ \Delta_1 \quad (\text{B. 54})$$

上式表明, 刚体的相继两次有限转动可由一次有限转动实现, 合成的有限转动四元数 Δ 等于各次有限转动四元数 Δ_2 与 Δ_1 的乘积。此结论不难推广到刚体相继作 n 次有限转动的一般情形, 其合成有限转动四元数为

$$\Delta = \Delta_n \circ \Delta_{n-1} \circ \cdots \circ \Delta_2 \circ \Delta_1 \quad (\text{B. 55})$$

有限转动次序的不可交换性由四元数乘法运算的不可交换性所体现。

B.6 刚体的无限小转动

刚体绕 O 点转动的角度极小, 可视为无限小量时, 称为刚体的无限小转动。将式(B. 23)中的有限转角 ϕ 改为无限小转角 $\Delta\phi$, 只保留 $\Delta\phi$ 的一次项, 导出

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & -p_3\Delta\phi & p_2\Delta\phi \\ p_3\Delta\phi & 1 & -p_1\Delta\phi \\ -p_2\Delta\phi & p_1\Delta\phi & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 56})$$

将刚体的转动分解为绕连体坐标轴的 3 次无限小转动, 即从起始位置 $(O-x_0y_0z_0)$ 出发, 先绕 x_0 轴转动 $\Delta\phi_1$ 角到达 $(O-x_1y_1z_1)$ 位置, 再绕 y_1 轴转动 $\Delta\phi_2$ 角到达 $(O-x_2y_2z_2)$ 位置, 最后绕 z_2 轴转动 $\Delta\phi_3$ 角到达 $(O-x_3y_3z_3)$ 位置。计算每次转动所对应的方向余弦矩阵 $\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{23}$ 时, 只保留无限小量 $\Delta\phi_i (i=1, 2, 3)$ 的一次项, 将各方向余弦矩阵相乘后导出 $(O-x_3y_3z_3)$ 相对 $(O-x_0y_0z_0)$ 的方向余弦矩阵 $\mathbf{A}_{03}$

$$\mathbf{A}_{03} = \mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi_3 & \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_3 & 1 & -\Delta\phi_1 \\ -\Delta\phi_2 & \Delta\phi_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 57})$$

将上式与式(B. 56)比较, 得出

$$\Delta\phi_i = p_i\Delta\phi \quad (i=1, 2, 3) \quad (\text{B. 58})$$

上式表明, 若沿转轴 p 方向以无限小转角 $\Delta\phi$ 为模作无限小转动矢量 $\Delta\phi = p\Delta\phi$, 则可使用矢量加法规则, 将刚体的一次无限小转动 $\Delta\phi$ 分解为绕连体坐标轴的 3 次无限小转动 $\Delta\phi_i = e_i\Delta\phi (i=1, 2, 3)$ 。多次无限小转动的最终位置与转动顺序无关。

设 a 为固结于刚体的矢量, 刚体作无限小转动 $\Delta\phi$ 后矢量 a 的位置改变为 $a + \Delta a$, 利用式(B. 10), 增量 Δa 可利用式(B. 57)表示的矩阵 $\mathbf{A}_{03}$ 计算, 得到

$$\Delta a = (\mathbf{A}_{03} - \mathbf{E})a = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\phi_3 & \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_3 & 0 & -\Delta\phi_1 \\ -\Delta\phi_2 & \Delta\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 59})$$

其中 $a_i (i=1, 2, 3)$ 为矢量 a 相对 $(O-x_3y_3z_3)$ 的投影。根据式(B. 8), 矩阵式(B. 59)与以下矢量式等价

$$\Delta a = \Delta\phi \times a \quad (\text{B. 60})$$

无限小转动 $\Delta\phi$ 可用欧拉角的无限小增量 $\Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi$ 表示。根据欧拉角的定义, 刚体的无限小转动 $\Delta\phi$ 等于绕 z_0, x_1, z_2 各轴的无限小转动的矢量和

$$\Delta\phi = \Delta\psi e_3^{(0)} + \Delta\theta e_1^{(1)} + \Delta\varphi e_3^{(2)} \quad (\text{B. 61})$$

设刚体相对定坐标系 $(O-XYZ)$ 的欧拉角为 ψ, θ, φ , 利用方向余弦矩阵(B. 26)和矩阵(B. 27), 导出矢量式(B. 61)在连体坐标系 $(O-x_3y_3z_3)$ 中的投影式

$$\Delta\phi^{(3)} = L\Delta q \quad (\text{B. 62})$$

其中 $\Delta\phi^{(3)}$ 为无限小转动矢量 $\Delta\phi$ 在 $(O-x_3y_3z_3)$ 中的投影列阵, Δq 为 $\Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi$ 排成的列阵, 矩阵 L 定义为

$$L = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 63})$$

无限小转动 $\Delta\phi$ 也可用欧拉参数的无限小增量 $\Delta\lambda_j$ ($j=0,1,2,3$) 表示。根据式(B. 30)计算刚体绕 p 轴的无限小转动 $\Delta\phi$ 所对应的四元数, 记作 $\Lambda_{\Delta\phi}$ 。设 $\Delta\phi_i^{(0)}$ ($i=1,2,3$) 为 $\Delta\phi$ 在定坐标系($O-XYZ$)中的投影, 只保留其一次项时, $\Lambda_{\Delta\phi}$ 相对定坐标系($O-XYZ$)的标量列阵 $\Lambda_{\Delta\phi}^{(0)}$ 为

$$\Lambda_{\Delta\phi}^{(0)} = (1 \quad \Delta\phi_1^{(0)}/2 \quad \Delta\phi_2^{(0)}/2 \quad \Delta\phi_3^{(0)}/2)^T \quad (\text{B. 64})$$

设刚体相对定坐标系($O-XYZ$)的四元数 Λ_0 如式(B. 39)所示, 刚体作无限小转动后的四元数为 Λ 。根据式(B. 54), Λ 与 Λ_0 , $\Lambda_{\Delta\phi}$ 之间满足以下关系

$$\Lambda = \Lambda_{\Delta\phi} \circ \Lambda_0 \quad (\text{B. 65})$$

利用式(B. 46), 将上式中的四元数乘法用相对($O-XYZ$)的投影矩阵实现, 写作

$$\Lambda^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{\Delta\phi}^{(0)} \Lambda_0^{(0)} \quad (\text{B. 66})$$

其中 $\Lambda^{(0)}$, $\Lambda_0^{(0)}$ 为 Λ , Λ_0 的标量列阵, $\tilde{\Lambda}_{\Delta\phi}^{(0)}$ 为按式(B. 47)定义的 $\Lambda_{\Delta\phi}$ 的标量方阵。将式(B. 66)两边减去 $\Lambda_0^{(0)}$, 化作

$$\Delta\Lambda^{(0)} = (\tilde{\Lambda}_{\Delta\phi}^{(0)} - E) \Lambda_0^{(0)} = \frac{1}{2} R^{*T} \Delta\phi^{(0)} \quad (\text{B. 67})$$

其中 E 为 4 阶单位阵, 4×3 矩阵 R^{*T} 为式(B. 34)定义的 R^* 的转置阵, $\Delta\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)} - \Lambda_0^{(0)}$ 为无限小转动引起的欧拉参数增量 $\Delta\lambda_j$ ($j=0,1,2,3$) 组成的 4 阶列阵, $\Delta\phi^{(0)}$ 为 $\Delta\phi_i^{(0)}$ ($i=1,2,3$) 组成的 3 阶列阵

$$\Delta\Lambda^{(0)} = (\Delta\lambda_0 \quad \Delta\lambda_1 \quad \Delta\lambda_2 \quad \Delta\lambda_3)^T, \quad \Delta\phi^{(0)} = (\Delta\phi_1^{(0)} \quad \Delta\phi_2^{(0)} \quad \Delta\phi_3^{(0)})^T \quad (\text{B. 68})$$

令方程(B. 67)左乘 R^* , 导出

$$\Delta\phi^{(0)} = 2R^* \Delta\Lambda^{(0)} \quad (\text{B. 69})$$

将方向余弦矩阵 $A_{10} = RR^{*T}$ 与上式左乘, 使无限小转动 $\Delta\phi$ 的投影列阵变换到刚体坐标系, 记作 $\Delta\phi^{(1)}$, 利用关系式(B. 37), 导出

$$\Delta\phi^{(1)} = A_{10} \Delta\phi^{(0)} = 2RR^{*T} R^* \Delta\Lambda^{(0)} = 2R \Delta\Lambda^{(0)} \quad (\text{B. 70})$$

导出无限小转动 $\Delta\phi$ 沿($O-x_3 y_3 z_3$)各轴的投影, 略去上角标, 得到

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= 2(-\lambda_1 \Delta\lambda_0 + \lambda_0 \Delta\lambda_1 + \lambda_3 \Delta\lambda_2 - \lambda_2 \Delta\lambda_3) \\ \Delta\phi_2 &= 2(-\lambda_2 \Delta\lambda_0 - \lambda_3 \Delta\lambda_1 + \lambda_0 \Delta\lambda_2 + \lambda_1 \Delta\lambda_3) \\ \Delta\phi_3 &= 2(-\lambda_3 \Delta\lambda_0 + \lambda_2 \Delta\lambda_1 - \lambda_1 \Delta\lambda_2 + \lambda_0 \Delta\lambda_3) \end{aligned} \quad (\text{B. 71})$$

从式(B. 32)还可导出欧拉参数增量的以下等式

$$\lambda_0 \Delta\lambda_0 + \lambda_1 \Delta\lambda_1 + \lambda_2 \Delta\lambda_2 + \lambda_3 \Delta\lambda_3 = 0 \quad (\text{B. 72})$$

从方程组(B. 71), (B. 72)逆解出

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_0 &= \frac{1}{2}(-\lambda_1 \Delta\phi_1 - \lambda_2 \Delta\phi_2 - \lambda_3 \Delta\phi_3) \\ \Delta\lambda_1 &= \frac{1}{2}(\lambda_0 \Delta\phi_1 - \lambda_3 \Delta\phi_2 + \lambda_2 \Delta\phi_3) \\ \Delta\lambda_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_3 \Delta\phi_1 + \lambda_0 \Delta\phi_2 - \lambda_1 \Delta\phi_3) \\ \Delta\lambda_3 &= \frac{1}{2}(-\lambda_2 \Delta\phi_1 + \lambda_1 \Delta\phi_2 + \lambda_0 \Delta\phi_3) \end{aligned} \quad (\text{B. 73})$$

B.7 刚体的弯扭度

在弹性杆平衡问题的讨论中,需要计算弹性杆的刚性截面的转角相对弧坐标 s 的变化率。设杆中心线上的任意点 P 的弧坐标 s 有无限小增量 Δs 时,截面产生无限小转动 $\Delta\phi$ 。 ϕ 为准坐标,仅无限小增量 $\Delta\phi$ 有物理意义。令 $\Delta\phi$ 与 Δs 相除,将 $\Delta s \rightarrow 0$ 时的极限记作 ω ,称为截面的弯扭度

$$\omega = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \quad (\text{B. 74})$$

弯扭度 ω 可用于计算固结于刚体的矢量 a 对弧坐标 s 变化率,为此将式 (B. 60) 与 Δs 相除,令 $\Delta s \rightarrow 0$,导出

$$\frac{da}{ds} = \omega \times a \quad (\text{B. 75})$$

若矢量 a 不与刚体固结,则任意矢量 a 相对弧坐标 s 变化率的一般公式为

$$\frac{da}{ds} = \tilde{da} + \omega \times a \quad (\text{B. 76})$$

其中的波浪号表示矢量 a 相对刚体的局部导数。

用欧拉角表示刚体的姿态时,将式 (B. 61) 各项与 Δs 相除,令 $\Delta s \rightarrow 0$,导出用欧拉角的变化率表示的弯扭度 ω

$$\omega = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta s} e_3^{(0)} + \frac{\Delta\theta}{\Delta s} e_1^{(1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} e_3^{(2)} \right) = \frac{d\psi}{ds} e_3^{(0)} + \frac{d\theta}{ds} e_1^{(1)} + \frac{d\varphi}{ds} e_3^{(2)} \quad (\text{B. 77})$$

经过同样过程,从式 (B. 62) 导出弯扭度 ω 在 $(O-x_3 y_3 z_3)$ 中的投影列阵 $\omega^{(1)}$ 的欧拉角表达式

$$\omega^{(1)} = L \frac{dq}{ds} \quad (\text{B. 78})$$

其投影式为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{ds} + \cos\varphi \frac{d\theta}{ds} \\ \omega_2 &= \sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{ds} - \sin\varphi \frac{d\theta}{ds} \\ \omega_3 &= \cos\theta \frac{d\psi}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned} \quad (\text{B. 79})$$

对方程 (B. 78) 中的矩阵 L 求逆,导出用弯扭度表示的欧拉角变化率

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= (\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi) \csc\theta \\ \frac{d\theta}{ds} &= \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} &= -(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi) \cot\theta + \omega_3 \end{aligned} \quad (\text{B. 80})$$

用欧拉参数表示刚体的姿态时,将式 (B. 71) 各项与 Δs 相除,令 $\Delta s \rightarrow 0$,导出用欧拉参数变化率表示的弯扭度分量

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2 \left(-\lambda_1 \frac{d\lambda_0}{ds} + \lambda_0 \frac{d\lambda_1}{ds} + \lambda_3 \frac{d\lambda_2}{ds} - \lambda_2 \frac{d\lambda_3}{ds} \right) \\
\omega_2 &= 2 \left(-\lambda_2 \frac{d\lambda_0}{ds} - \lambda_3 \frac{d\lambda_1}{ds} + \lambda_0 \frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_1 \frac{d\lambda_3}{ds} \right) \\
\omega_3 &= 2 \left(-\lambda_3 \frac{d\lambda_0}{ds} + \lambda_2 \frac{d\lambda_1}{ds} - \lambda_1 \frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_0 \frac{d\lambda_3}{ds} \right)
\end{aligned} \tag{B.81}$$

将式(B.73)各项与 Δs 相除,令 $\Delta s \rightarrow 0$,导出用弯扭度分量表示的欧拉参数变化率

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_0}{ds} &= \frac{1}{2} (-\lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2 - \lambda_3 \omega_3) \\
\frac{d\lambda_1}{ds} &= \frac{1}{2} (\lambda_0 \omega_1 - \lambda_3 \omega_2 + \lambda_2 \omega_3) \\
\frac{d\lambda_2}{ds} &= \frac{1}{2} (\lambda_3 \omega_1 + \lambda_0 \omega_2 - \lambda_1 \omega_3) \\
\frac{d\lambda_3}{ds} &= \frac{1}{2} (-\lambda_2 \omega_1 + \lambda_1 \omega_2 + \lambda_0 \omega_3)
\end{aligned} \tag{B.82}$$

已知杆的弯扭度分量的变化规律 $\omega_i(s)$ ($i=1,2,3$),可对微分方程(B.80)或方程(B.82)进行数值积分,计算欧拉角或欧拉参数的变化规律。对方程(B.80)积分时,必须避开奇点位置 $\theta=n\pi$ ($n=0,1,\dots$),而方程(B.82)的积分不受限制。

由于未考虑时间因素,本节的分析仅适用于弹性杆静力学问题。在弹性杆动力学问题中,各变量均为弧坐标 s 和时间 t 的二元函数,本节各式中的常微分符号均应改为偏微分符号。

B.8 刚体的角速度

在刚体动力学问题中,设刚体的无限小转动 $\Delta \phi$ 在 t 与 $t+\Delta t$ 之间的无限小时间间隔内完成,令 $\Delta \phi$ 与 Δt 相除,将 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限,即刚体的姿态相对时间 t 的变化率称为截面的角速度,记作 Ω

$$\Omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \tag{B.83}$$

与 B.7 节的分析类似,可导出任意矢量 a 对时间 t 的变化率计算公式

$$\frac{da}{dt} = \frac{\bar{d}a}{dt} + \Omega \times a \tag{B.84}$$

当用欧拉角表示刚体的姿态时,也可导出与式(B.80)类似的微分方程

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= (\Omega_1 \sin\varphi + \Omega_2 \cos\varphi) \csc\theta \\
\frac{d\theta}{dt} &= \Omega_1 \cos\varphi - \Omega_2 \sin\varphi \\
\frac{d\varphi}{dt} &= -(\Omega_1 \sin\varphi + \Omega_2 \cos\varphi) \cot\theta + \Omega_3
\end{aligned} \tag{B.85}$$

其中 Ω_i ($i=1,2,3$) 为角速度矢量 Ω 相对 $(O-x_3y_3z_3)$ 的投影。用欧拉参数表示刚体的姿态

时,则导出与式(B. 81)和式(B. 82)类似的微分方程

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= 2\left(-\lambda_1 \frac{d\lambda_0}{dt} + \lambda_0 \frac{d\lambda_1}{dt} + \lambda_3 \frac{d\lambda_2}{dt} - \lambda_2 \frac{d\lambda_3}{dt}\right) \\ \Omega_2 &= 2\left(-\lambda_2 \frac{d\lambda_0}{dt} - \lambda_3 \frac{d\lambda_1}{dt} + \lambda_0 \frac{d\lambda_2}{dt} + \lambda_1 \frac{d\lambda_3}{dt}\right) \\ \Omega_3 &= 2\left(-\lambda_3 \frac{d\lambda_0}{dt} + \lambda_2 \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1 \frac{d\lambda_2}{dt} + \lambda_0 \frac{d\lambda_3}{dt}\right)\end{aligned}\quad (\text{B. 86})$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_0}{dt} &= \frac{1}{2}(-\lambda_1 \Omega_1 - \lambda_2 \Omega_2 - \lambda_3 \Omega_3) \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{1}{2}(\lambda_0 \Omega_1 - \lambda_3 \Omega_2 + \lambda_2 \Omega_3) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= \frac{1}{2}(\lambda_3 \Omega_1 + \lambda_0 \Omega_2 - \lambda_1 \Omega_3) \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= \frac{1}{2}(-\lambda_2 \Omega_1 + \lambda_1 \Omega_2 + \lambda_0 \Omega_3)\end{aligned}\quad (\text{B. 87})$$

将本节与刚体角速度有关的计算公式用于分析弹性杆动力学问题时,各式中的常微分符号均应改为偏微分符号。

附录 C 弹性杆的应力、应变和应变能

C.1 刚性截面上任意点的位移、应变和应力

假定弹性杆的截面为刚性平面,且保持与中心线正交。还假定弹性杆局部仍满足小变形条件,且满足线弹性本构关系。由于杆的极端细长性,局部微小应变沿弧长的积累可使变形后的挠性线远离变形前的松弛状态,从而表现出超大变形的整体效果。以截面的几何中心 P 为原点,作截面的主轴坐标系 $(P\text{-}xyz)$ 。设刚性截面上任意点 Q 相对 P 点的矢径 ρ 在 $(P\text{-}xyz)$ 中的投影式为

$$\rho = x e_1 + y e_2 \quad (\text{C.1})$$

忽略杆中心线的拉伸变形,截面上各点的位移仅由截面的转动产生。根据刚体转动公式(B.60),截面的无限小角位移 $\Delta\phi$ 引起 Q 点的无限小位移 Δu 为

$$\Delta u = \Delta\phi \times \rho \quad (\text{C.2})$$

将上式各项除以 Δs ,令 $\Delta s \rightarrow 0$,将左项中的弧坐标增量 Δs 以切线轴的坐标增量 Δz 代替,并引入式(B.74)定义的弯扭度 ω ,导出

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \omega \times \rho \quad (\text{C.3})$$

将位移矢量 u 在 $(P\text{-}xyz)$ 中的投影记作 $u_i (i=1,2,3)$,写出式(C.3)的投影式

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\omega_3 y, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = \omega_3 x, \quad \frac{\partial u_3}{\partial z} = \omega_1 y - \omega_2 x \quad (\text{C.4})$$

将上式对 z 积分,令 $z=0$ 处的位移为零,得到 Q 点附近的位移分量

$$u_1 = -\omega_3 y z, \quad u_2 = \omega_3 x z, \quad u_3 = (\omega_1 y - \omega_2 x) z \quad (\text{C.5})$$

其中的坐标 z 应限制为小量。截面绕切线轴的刚体转角 ϕ_3 可利用 u_1, u_2 计算,导出

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \omega_3 z \quad (\text{C.6})$$

将上式对 z 求导,计算截面的扭率 ω_3

$$\omega_3 = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \quad (\text{C.7})$$

Q 点的应变分量由位移分量(C.5)确定,在小变形条件下可利用 Cauchy 公式计算,得到

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \epsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z} = \omega_1 y - \omega_2 x \\
\gamma_{12} &= \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\
\gamma_{13} &= \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\omega_3 y \\
\gamma_{23} &= \gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = \omega_3 x
\end{aligned} \tag{C.8}$$

其中 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ 与截面的刚性平面假定一致。设弹性杆为均匀各向同性, 满足线性本构关系, E, G, ν 分别为杨氏(T. Young)模量、剪切模量和泊松(S. D. Poisson)比, 且有 $G = E/2(1 + \nu)$, 导出 Q 点的应力分量

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = E(\omega_1 y - \omega_2 x) \\
\tau_{12} &= \tau_{21} = 0 \\
\tau_{13} &= \tau_{31} = -G\omega_3 y \\
\tau_{23} &= \tau_{32} = G\omega_3 x
\end{aligned} \tag{C.9}$$

由于杆侧面无面力作用, 截面在边界线 Γ 处的法向分量应等于零。设截面边界线 Γ 的外法线基矢量为

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 \tag{C.10}$$

则剪应力应满足边界条件

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 = 0 \quad (P \in \Gamma) \tag{C.11}$$

对于圆截面的特殊情形, 有

$$n_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad n_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{C.12}$$

边界条件(C.11)自行满足。

C.2 圆截面杆的刚度系数

截面作用力相对 P 点的主矩由以下积分式表示

$$M_1 = \int_S \sigma_3 y dS, \quad M_2 = - \int_S \sigma_3 x dS, \quad M_3 = \int_S (\tau_{23} x - \tau_{13} y) dS \tag{C.13}$$

其中 S 为截面的积分域。将式(C.9)代入上式, 利用 $(P\text{-}xyz)$ 为中心主轴坐标系的以下条件

$$\int_S x dS = 0, \quad \int_S y dS = 0, \quad \int_S xy dS = 0 \tag{C.14}$$

导出

$$M_1 = A\omega_1, \quad M_2 = B\omega_2, \quad M_3 = C\omega_3 \tag{C.15}$$

其中 A, B 为截面绕 x 轴和 y 轴的抗弯刚度, C 为截面绕 z 轴的抗扭刚度

$$A = EI_x, \quad B = EI_y, \quad C = GI_z \tag{C.16}$$

I_x, I_y 为截面相对 x 轴和 y 轴的惯性矩, I_z 为截面相对 z 轴的极惯性矩

$$I_x = \int_S y^2 dS, \quad I_y = \int_S x^2 dS, \quad I_z = \int_S (x^2 + y^2) dS \tag{C.17}$$

此结论仅在刚性截面假定的前提下成立。对于圆截面杆情形,设 a 为圆截面的半径,可积分得到

$$I_x = I_y = \frac{\pi a^4}{4}, \quad I_z = \frac{\pi a^4}{2} \quad (\text{C. 18})$$

若杆存在原始曲率和原始扭率,在松弛状态下各弯扭度分量的原始值为 $\omega_i^0 (i=1,2,3)$,则各主矩分量改为

$$M_1 = A(\omega_1 - \omega_1^0), \quad M_2 = B(\omega_2 - \omega_2^0), \quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0) \quad (\text{C. 19})$$

C.3 椭圆截面杆的刚度系数

讨论长短半轴为 a, b 的椭圆截面杆,其截面边界线 Γ 用以下方程表示

$$\Phi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\text{C. 20})$$

计算此边界法线基矢量 n 相对 x 轴和 y 轴的投影,得到

$$n_1 = \frac{b^2 x}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}, \quad n_2 = \frac{a^2 y}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}} \quad (\text{C. 21})$$

则式(C. 9)表示的剪应力 τ_{13}, τ_{23} 不可能满足椭圆截面的边界条件(C. 11)。为此将剪应变 γ_{13}, γ_{23} 的分布规律用修正系数 k_1, k_2 修改为

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = -k_1 \omega_3 y \quad (\text{C. 22})$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = k_2 \omega_3 x$$

其中 k_1, k_2 为待定常数。将上式中的 γ_{13}, γ_{23} 乘 G 后与式(C. 21)代入条件(C. 11),导出

$$b^2 k_1 - a^2 k_2 = 0 \quad (\text{C. 23})$$

设 u_3 按以下规律分布

$$u_3 = k_3 \omega_3 xy \quad (\text{C. 24})$$

将上式代入式(C. 22),导出

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -(k_1 + k_3) \omega_3 y, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = (k_2 - k_3) \omega_3 x \quad (\text{C. 25})$$

对上式积分,得到

$$u_1 = -(k_1 + k_3) \omega_3 yz, \quad u_2 = (k_2 - k_3) \omega_3 xz \quad (\text{C. 26})$$

将上式代入截面的扭率 ω_3 的计算公式(C. 7),导出

$$k_1 + k_2 = 2 \quad (\text{C. 27})$$

联立式(C. 23)和式(C. 27),解出

$$k_1 = \frac{2a^2}{a^2 + b^2}, \quad k_2 = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{C. 28})$$

将式(C. 24)和式(C. 26)代入式(C. 8)计算 γ_{12} ,得到

$$\gamma_{12} = (k_2 - k_1 - 2k_3) \omega_3 z \quad (\text{C. 29})$$

若令系数 k_3 满足

$$k_3 = \frac{1}{2}(k_2 - k_1) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{C. 30})$$

则 $\gamma_{12}=0$ 。将式(C. 26)代入式(C. 8),算出 $\epsilon_1=\epsilon_2=0$,从而证明椭圆截面扭转变形后仍保持截面形状不变。但式(C. 24)表示的位移 u_3 不等于零,表明扭转后的椭圆截面产生翘曲而不能保持平面。因此对于椭圆截面杆,截面的刚性平面假定应修改为截面在与中心线正交的刚性平面上的投影保持形状不变,满足 Saint-Venant 的刚性周边假定。

利用式(C. 28)和式(C. 22)计算剪应力,得到

$$\begin{aligned}\tau_{13} &= \tau_{31} = -G\left(\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right)\omega_3 y \\ \tau_{23} &= \tau_{32} = G\left(\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right)\omega_3 x\end{aligned}\quad (\text{C. 31})$$

将上式代入式(C. 13)计算扭矩 M_3 ,得到 $M_3=C\omega_3$, $C=GI_z$,但其中的积分 I_z 并非截面的极惯性矩,应重新定义为

$$I_z = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2} \quad (\text{C. 32})$$

椭圆截面杆的抗弯刚度仍按式(C. 13)计算,得到

$$I_x = \int_S y^2 dS = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad I_y = \int_S x^2 dS = \frac{\pi b^3 a}{4} \quad (\text{C. 33})$$

将圆截面情形视为椭圆截面的特例。令式(C. 32)和式(C. 33)中 $a=b$,即化作式(C. 18)。

C.4 弹性杆的应变能

弹性杆的应变能是由外力功转化成的弹性变形势能,其计算公式为

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3 + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{23} \gamma_{23} + \tau_{31} \gamma_{31}) dS ds \quad (\text{C. 34})$$

其中对弧坐标 s 的积分沿杆的中心线进行, L 为杆的总长度。在刚性截面假定前提下,将式(C. 8)和式(C. 9)代入上式,并利用式(C. 14),式(C. 16)和式(C. 17)导出应变能公式

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) ds \quad (\text{C. 35})$$

圆截面杆的应变能为

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L [A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C\omega_3^2] ds \quad (\text{C. 36})$$

若杆存在原始曲率和原始扭率,改为

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L [A(\omega_1 - \omega_1^0)^2 + B(\omega_2 - \omega_2^0)^2 + C(\omega_3 - \omega_3^0)^2] ds \quad (\text{C. 37})$$

若考虑杆中心线的拉伸变形,还必须增加与轴向拉伸应变 ϵ 的有关部分。设 $K=ES$ 为截面的抗拉刚度,则总应变能为

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L [A(\omega_1 - \omega_1^0)^2 + B(\omega_2 - \omega_2^0)^2 + C(\omega_3 - \omega_3^0)^2 + K\epsilon^2] ds \quad (\text{C. 38})$$

附录 D 稳定性理论基础

D.1 Lyapunov 稳定性的基本概念

运动稳定性理论作为一门学科,建立在 Lyapunov 关于稳定性严格定义的基础上。Lyapunov 稳定性理论是讨论离散系统运动稳定性的基本理论,而弹性杆为一维连续介质,因此在分析弹性杆的平衡稳定性时,必须对 Lyapunov 稳定性理论的一些基本概念作适当修改。为将 Lyapunov 稳定性理论扩展到连续系统, Movchan 建立了由有限个变量描述的连续系统的稳定性概念。在弹性杆的平衡问题中,确定弹性杆几何形态的状态变量均为弧坐标 s 和时间 t 的二元连续函数。因此为使 Lyapunov 稳定性理论适用于弹性杆,必须将离散系统的单个时间变量扩展为弧坐标 s 和时间 t 的双重自变量。这种双重自变量离散系统的 Lyapunov 稳定性概念可看作是连续系统的 Movchan 稳定性概念的特例。

设以弧坐标 s 和时间 t 为自变量的 n 个状态变量 $y_j(s, t)$ ($j=1, 2, \dots, n$) 完全确定弹性杆的几何形态,其变化规律由弹性杆的动力学方程确定。动力学方程的一般形式为以 s 和 t 为自变量的一阶偏微分方程组。引入 n 维列阵 $y = (y_j)$ 和 $Y = (Y_j)$, 以右上角的撇号表示对弧坐标 s 的偏导数,顶部的圆点表示对时间 t 的偏导数,动力学方程的一般形式可写作

$$y' = Y(\dot{y}, y, s, t) \quad (\text{D. 1})$$

弹性杆的平衡状态,即未扰状态 $y_s(s, t)$, 是动力学方程(D. 1)中当 $\dot{y} \equiv 0$ 时的特解,满足

$$y'_s = Y(0, y_s, s, t) \quad (\text{D. 2})$$

若弹性杆中心线上任一点 $s=s_0$ 处以及 $t=t_0$ 时刻的状态变量与未扰状态一致,即 $y(s_0, t_0) = y_s(s_0, t_0)$ 时,此未扰状态即可在弹性杆上具体实现。当状态变量 $y(s, t)$ 在 $s=s_0$ 处及 $t=t_0$ 时刻的值 $y(s_0, t_0)$ 偏离未扰状态时,动力学方程(D. 1)的解 $y(s, t)$ 为杆的受扰状态。扰动 $x(s, t) = y(s, t) - y_s(s, t)$ 为受扰状态与未扰状态之差,满足扰动方程

$$x' = X(\dot{x}, x, s, t) \quad (\text{D. 3})$$

其中 $X(\dot{x}, x, s, t) = Y(\dot{y}, y, s, t) - Y(0, y_s, s, t)$ 。弹性杆的未扰状态与扰动方程的零解 $x(s) \equiv 0$ 完全等价。扰动 $x(s, t)$ 在 $s=s_0$ 处及 $t=t_0$ 时刻的值 $x(s_0, t_0)$ 为起始扰动。扰动方程(D. 3)中不显含弧坐标 s 和时间 t 的系统称为自治系统,写作

$$x' = X(\dot{x}, x) \quad (\text{D. 4})$$

本书主要的讨论对象为自治系统。

分析以弧坐标 s 和时间 t 为双自变量的弹性杆平衡稳定性问题时, Lyapunov 的稳定定义必须作以下修改:

定义一: 若给定任意小的正数 ε , 存在正数 δ , 对于一切受扰状态, 只要其起始扰动满足 $|x(s_0, t_0)| \leq \delta$, 对于所有 $s > s_0, t > t_0$ 均有 $|x(s, t)| < \varepsilon$, 则称未扰状态 $y_s(s, t)$ 是稳定的。

此稳定性定义的形象化解释是: 在 t_0 时刻, 以受扰前杆的中心线上弧坐标为 s_0 的 P_0 点为中心, 作半径为 δ 的球面 S_δ , 再以弧坐标为 s 的任意点 P 为中心作半径为 ε 的球面 S_ε , 当受扰后的 P_0 点在 S_δ 球面以内时, 在 $t > t_0$ 的任意时刻, 中心线上的任意点 P 均被限制在 S_ε 球面以内(图 D.1 曲线 a)。

定义二: 若未扰状态稳定, 且当 $s \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ 时均有 $|x(s, t)| \rightarrow 0$, 则称未扰运动 $y_s(s, t)$ 是渐近稳定的。

渐近稳定的形象化解释是: 随着弧坐标 s 的增大和时间 t 的增长, 受扰后杆中心线上的任意点 P 渐近地向受扰前位置趋近(图 D.1 曲线 b)。

定义三: 若存在正数 ε_0 , 对任意正数 δ , 存在受扰状态 $y(s, t)$, 当其起始扰动满足 $|x(s_0, t_0)| \leq \delta$ 时, 存在弧坐标 s_1 和时刻 t_1 , 满足 $|x(s_1, t_1)| = \varepsilon_0$, 则称未扰状态 $y_s(s, t)$ 是不稳定的。

不稳定的形象化解释是: 当受扰后中心线上的 P_0 点在 S_δ 球面以内时, 不论 S_δ 球面选择如何小, 总有中心线上弧坐标为 s_1 的一点 P 在 $t = t_1$ 时刻能达到 S_ε 的边界(图 D.1 曲线 c)。

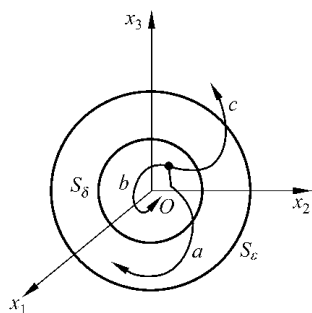


图 D.1 稳定性的几何解释
a. 稳定; b. 渐近稳定; c. 不稳定

D.2 离散时变系统的稳定性

经典的 Lyapunov 稳定性理论, 即以时间 t 为单自变量的离散系统的运动稳定性理论, 可视为上述稳定性理论的特例。将上述稳定性理论中的状态变量视为时间 t 的一元函数, 扰动方程是以 t 为自变量的一阶常微分方程组

$$\dot{x} = X(x) \quad (\text{D.5})$$

将基本定义中与弧坐标 s 有关的叙述删去, 即可用于分析离散时变系统的运动稳定性。

在弹性杆平衡问题中, 由弹性杆几何形态确定的总体参数, 如杆的总势能、扭转数、连接数、缠绕数等均为与弧坐标 s 无关的离散变量。运动稳定性理论中所有的分析方法和各种判据均可直接用于判断上述总体参数的稳定性。

D.3 弹性杆的静态稳定性

讨论弹性杆的静力学问题时, 确定其几何形态的状态变量为弧坐标 s 的一元函数, 弹性杆的扰动方程是以 s 为自变量的一阶常微分方程组

$$x' = X(x) \quad (\text{D.6})$$

作为 Lyapunov 稳定性理论的另一种单自变量特殊情形,将上述稳定性的基本定义中与时间 t 有关的叙述删去,即转化为弹性杆的静态稳定性理论。考虑到弹性杆实际上仅占据有限的空间域,因此仅要求扰动变量在弧坐标的有限范围内满足平衡稳定性的定义。上述 Lyapunov 意义下的稳定性要求考察扰动变量在弧坐标的无限区间内的变化状况,已超出了弹性杆稳定性的要求。系统在自变量有限区间内的稳定性称为实用稳定性,弹性杆的平衡稳定性属于实用稳定性范畴。

弹性杆平衡的静态稳定性概念是指在同样的受力条件下,判断杆的受扰几何形态与未扰几何形态是否接近。由于无时间变量参与,不考虑受扰运动过程中出现的速度和角速度等动力学因素,也不可能根据挠性线变化的时间历程来判断受扰后弹性杆的运动趋向。因此更严格的稳定性分析必须同时考虑时间 t ,分析以弧坐标 s 和时间 t 为双重自变量的离散系统稳定性。

D.4 Lyapunov 直接方法

Lyapunov 直接方法是根据扰动方程直接判断单自变量离散系统稳定性的方法,基于以下 3 个基本定理:

定理一:若能构造一个可微正定函数 $V(x)$,使沿扰动方程(D.5)解曲线 $x(t)$ 计算的全导数 dV/dt 为半负定或等于零,则系统的未扰平衡状态稳定。

定理二:若能构造一个可微正定函数 $V(x)$,使沿扰动方程(D.5)解曲线 $x(t)$ 计算的全导数 dV/dt 为负定,则系统的未扰平衡状态渐近稳定。

定理三:若能构造一个可微正定、半正定或不定号函数 $V(x)$,使沿扰动方程(D.5)解曲线 $x(t)$ 计算的全导数 dV/dt 为正定,则系统的未扰平衡状态不稳定。

以上定理的叙述是针对离散时变自治系统,若将时间 t 替换为弧坐标 s 即适用于弹性杆的静态稳定性分析。根据以上定理一或定理二导出的稳定性条件为充分条件,其必要性必须根据定理三证明。具体应用 Lyapunov 直接方法时,若所讨论的系统存在初积分,则只要将受扰状态的初积分或若干初积分的组合构造为 Lyapunov 函数,其沿扰动方程解曲线的全导数必等于零。则未扰状态的稳定性只取决于所选 Lyapunov 函数的定号性。

以判断保守系统平衡稳定性的拉格朗日定理为例。由于保守系统存在能量积分,即动能 E_k 与势能 E_p 之和守恒。将受扰后系统的总机械能取为 Lyapunov 函数,令 $V=E_k+E_p$,由于动能 E_k 为扰动的正定函数,因此若势能 E_p 在平衡位置处取孤立极小值, V 函数必正定。根据 Lyapunov 定理一,未扰平衡状态稳定。拉格朗日定理从而得证。在弹性杆的平衡稳定性问题中,上述拉格朗日定理表现为最小势能原理:弹性杆的平衡状态对应于总势能的极值,若总势能为极小值,则平衡状态稳定。

D.5 一次近似稳定性

对于单自变量自治系统,当扰动足够微小时,将扰动方程(D.5)或方程(D.6)的右边展成泰勒级数,略去二次以上项,转化为线性方程组,即原系统的一次近似方程

$$\dot{x} = Ax \quad \text{或} \quad x' = Ax \quad (\text{D.7})$$

其中 $n \times n$ 系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 为在 $x=0$ 处函数 X 相对变量 x 的 Jacobi 矩阵

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x=0} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{D.8})$$

对于自变量为 t 或 s 两种不同情形,设方程(D.8)的解为

$$x = Be^{\lambda t} \quad \text{或} \quad x = Be^{\lambda s} \quad (\text{D.9})$$

其中 $B = (B_j)$ 为 n 维常值列阵,代入方程(D.7),得到

$$(A - \lambda E)B = 0 \quad (\text{D.10})$$

B 有非零解的充分必要条件为系数行列式等于零

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (\text{D.11})$$

展开后得到 λ 的 n 次代数方程,即矩阵 A 的特征方程。此方程的根为矩阵 A 的特征值。方程组(D.7)的零解稳定性可根据特征值的实部符号判定。归纳为判断一次近似稳定性的以下定理:

定理一:若所有特征值的实部为负,则线性方程组的零解渐近稳定。

定理二:若至少有一特征值的实部为正,则线性方程组的零解不稳定。具有正实部特征值的数目称为不稳定性度。

定理三:若存在零实部的特征值,且为单根,其余根无正实部,则线性方程组的零解稳定,但不是渐近稳定。若为重根,则零解不稳定。

由于线性方程(D.7)在推导过程中略去了高次项,已完全不同于原方程(D.5)或(D.6),因此其稳定性准则仅对一次近似方程有效。Lyapunov 证明,在一定条件下,可从一次近似稳定性推断原方程的稳定性。归纳为以下定理:

定理一:若一次近似方程的所有特征值实部均为负,则原方程的零解渐近稳定。

定理二:若一次近似方程至少有一特征值实部为正,则原方程的零解不稳定。

定理三:若一次近似方程存在零实部的特征值,其余根无正实部,则不能判断原方程的零解稳定性。

上述第一种和第二种情况与线性方程组的零解渐近稳定和不稳定的条件完全一致,可直接根据一次近似方程判断原方程的零解稳定性。第三种情况为介于前两种情况之间的临界情况,不能根据一次近似方程判断原方程的零解稳定性,但可作为判断原方程零解稳定性的必要条件。

D.6 相平面方法

相平面方法是分析一阶非线性系统稳定性的定性方法,也可用于讨论弹性杆的平衡和稳定性。设 x, y 为确定弹性杆几何形态的参数或坐标,其平衡方程如(D.5)或(D.6)所

示,其中

$$\mathbf{x} = (x, y)^T, \quad \mathbf{X} = (P, Q)^T \quad (\text{D. 12})$$

消去扰动方程(D. 5)或方程(D. 6)中的自变量 t 或 s 的微分,简化为一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (\text{D. 13})$$

不含自变量 t 或 s 的方程(D. 12)确定相平面 (x, y) 上的相轨迹,可用于定性地描述弹性杆的几何形态。相轨迹曲线族中的奇点 x_s, y_s 为以下方程的解

$$P(x_s, y_s) = 0, \quad Q(x_s, y_s) = 0 \quad (\text{D. 14})$$

奇点 x_s, y_s 对应于弹性杆的一种特殊平衡状态。

将方程(D. 12)的右项在奇点 (x_s, y_s) 附近展开为 Taylor 级数,化作

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\text{D. 15})$$

其中 $\mathbf{A}$ 为变量 x, y 的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)} \right|_{x_s, y_s} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{D. 16})$$

则方程(D. 13)的一次近似式为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \quad (\text{D. 17})$$

方程(D. 13)的奇点类型与矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值有以下对应关系

特征值为不等实根: 奇点为鞍点或结点

特征值为共轭复根: 奇点为中心或焦点

引入以下参数 p, q, Δ

$$p = a + d, \quad q = ad - bc, \quad \Delta = p^2 - 4q \quad (\text{D. 18})$$

则奇点 (x_s, y_s) 的类型和稳定性可根据以下判据由系数 a, b, c, d 确定^[256]

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 & \begin{cases} q > 0 & \text{结点} \begin{cases} p \leq 0 & \text{稳定} \\ p > 0 & \text{不稳定} \end{cases} \\ q < 0 & \text{鞍点} \end{cases} \\ \Delta < 0 & \begin{cases} p = 0 & \text{中心} \\ p \neq 0 & \text{焦点} \begin{cases} p \leq 0 & \text{稳定} \\ p > 0 & \text{不稳定} \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D. 19})$$

图 D. 2 给出上述各类奇点的几何特征。按照 Lyapunov 的稳定性定义,中心对应于稳定平衡,鞍点对应于不稳定平衡,结点和焦点可能稳定也可能不稳定。利用判据式(D. 19)确定奇点的类型,所对应的特殊平衡状态的稳定性也随之确定。



图 D. 2 奇点的类型

名词索引

(按汉语拼音字母顺序)

A

鞍点(saddle) D. 6

B

8 字形曲线 (figure-eight curve) 1. 3
4. 5. 2

变分(variation) 2. 3. 2

泊松比(Poisson ratio) 2. 1. 3

Boltzman-Hamel 方程 (Boltzman-Hamel equation) 2. 3. 5

C

叉式分岔(pitchfork bifurcation) 5. 5. 4

缠绕数(writhing number) 1. 5

常扭率杆 (rod with constant twist)
2. 6. 3 3. 5. 2

初积分(first integral) 2. 4. 1 2. 4. 2

D

Darboux 矢量(Darboux vector) 1. 1

动力学比拟(kinetic analogy) 2. 2. 3

动态稳定性(dynamic stability) 6. 3

Duffing 方程(Duffing equation) 2. 6. 3
3. 5. 2

F

法平面(normal plane) 1. 1

法线(normal) 1. 1

分布力(distributed force) 3. 1 6. 2. 1

分布力偶(distributed couple) 6. 2. 1

分岔(bifurcation) 5. 3. 2 5. 5. 4 5. 6

分隔线(separatrix) 5. 2. 3

封闭条件 (closed conditions) 2. 3. 7

4. 7. 1

Frenet-Serret 方程(Frenet-Serret equation) 1. 1

Frenet 坐标系(Frenet coordinates frame)
1. 1

副法线(binormal) 1. 1

复抗弯刚度(complex bending rigidity)
3. 4. 1

复弯矩(complex bending moment) 3. 2. 1

复曲率(complex curvature) 3. 2. 1

G

刚体(rigid body) 2. 2. 3

刚性截面(rigid cross section) 2. 1. 1

Gauss 积分(Gauss integral) 1. 4 1. 5

Greenhill 公式(Greenhill formula) 4. 3. 3
5. 2. 1

惯性矩(moment of inertia) 2. 1. 3

广义动量(generalized momentum) 2. 3. 4

广义坐标(generalized coordinates) 2. 3. 3

过扭率(excess twist) 1. 3

过扭转数(excess twisting number) 1. 3

H

哈密顿函数 (Hamiltonian) 2. 3. 4
2. 3. 6

哈密顿原理(Hamilton principle) 2. 3. 2

弧坐标(arc coordinate) 1. 1

混沌(chaos) 5. 8

J

Jacobi 积分(Jacobi integral) 2. 4. 1

极惯性矩(polar moment of inertia) 2. 1. 3

渐近稳定性(asymptotic stability) 6. 6

剪切模量(shear modulus) 2.1.3
角速度(angular velocity) 6.1.3 B.8
接触力(contact force) 4.8.2
接触约束(contact constraint) 7.5.1
静电引力(electrostatic force) 7.4
7.6.4
静态稳定性(static stability) D.3

K

抗拉刚度(tensile rigidity) 7.1.1
抗扭刚度(torsional rigidity) 2.1.3
抗弯刚度(bending rigidity) 2.1.3
Kirchhoff 方程(Kirchhoff equation)
2.1.3 2.2.2
Kovalevskaya 情况(Kovalevskaya's case)
2.6.2

L

拉格朗日方程(Lagrange equation) 2.3.3
拉格朗日乘子(Lagrange multiplier) 2.3.7
拉格朗日定理(Lagrange theorem) 5.1.1
力螺旋(force screw) 2.2.1
连接数(linking number) 1.4
螺旋杆(helican rod) 1.3 4.2.2
螺旋角(pitch angle of helix) 1.3
螺旋线(helix) 4.2.1
Lyapunov 函数(Lyapunov function) 5.7
D.4
Lyapunov 直接方法(Lyapunov direct
method) 5.7 D.4

M

Maievskii 条件(Maievskii condition) 4.3.3
Melnikov 函数(Melnikov function) 5.8.2

N

挠率(torsion) 1.1
挠性线(elastica) 4.1.1

扭率(twist) 1.3
扭转数(twisting number) 1.3
扭转振动(torsional vibration) 6.4
6.6.2

O

欧拉参数(Euler parameters) 7.1.3
B.5
欧拉-泊松方程(Euler-Poisson equation)
2.2.3
欧拉角(Euler angles) 2.2.2 B.4
欧拉载荷(Euler critical load) 4.5.1
5.2.4

P

Poincaré 截面(Poincaré section) 5.8.3

Q

奇点(singular point) 5.2.2 D.6
切线矢量(tangent vector) 1.1
曲率(curvature) 1.1

R

扰动(perturbation) D.1

S

Saint-Venant 原理(Saint-Venant principle) 2.2.1
Schrödinger 方程(Schrödinger equation)
3.2.1 3.4.1
势能密度(density of potential energy)
2.3.2
受扰状态(perturbed state) D.1
四元数(quaternion) B.5
Smale 马蹄(Smale horseshoe) 5.8.2
Sylvester 判据(Sylvester criterion)
5.7.1 5.7.2

T

弹性应变能(elastic strain energy) 2.3.2
7.3.1 C.4
特征方程(characteristic equation) 5.4.3
D.5
特征值(eigenvalue) 5.4.3 D.5
同宿轨道(homoclinic orbit) 5.3.2
椭圆函数(elliptic function) A.1 A.2
椭圆积分(elliptic integral) A.3 A.4

W

稳定性(stability) D.1
White 公式(White formula) 1.5
弯扭度(curvature-twisting vector) 1.2
B.7
弯曲振动(flexural vibration) 6.5 6.6.3
未扰状态(unperturbed state) D.1

X

相轨迹(phase trajectory) 5.2.2 D.6
虚功(virtual work) 2.3.2 7.3.1
虚位移(virtual displacement) 2.3.1
7.3.1
循环积分(cyclic integral) 2.4.1 2.4.2

Y

压杆失稳(buckling of compressed bar)
4.5.1
一次近似稳定性(stability of first approx-

imation) 5.3 6.3 D.5

异宿轨道(heteroclinic orbit) 5.8.1
有限元方法(finite elements method)
7.2.1
有限转动(finite rotation) B.3
圆弧杆(circular rod) 4.3.2 5.3.4
圆环(circular ring) 1.3 5.3.4
圆柱面约束(cylindrical constraint) 4.8.1
5.3.5
原始扭率(intrinsic twisting) 2.1.1
原始曲率(intrinsic curvature) 2.1.1
约束(constraint) 2.3.7 4.8.1

Z

Zajac 条件(Zajac condition) 5.3.4
正定性(positive definiteness) D.4
正则方程(canonical equation) 2.3.4
2.3.6
中心(center) D.6
中心线(centerline) 1.2
主轴(principal axis) 2.1.2
准动量(quasi-momentum) 2.3.5
准速度(quasi-velocity) 2.3.5
准坐标(quasi-coordinate) 2.3.5
自连接数(self-linking number) 1.5
自由度(degree of freedom) 1.1 2.3.1
自治系统(autonomous system) 5.2.2
直杆(straight rod) 4.3.2
最小势能原理(principle of minimal po-
tential energy) 2.3.2 5.1.1

参考文献

1. Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. *J. Rein Angew. Math.*, 1859, 56: 285~313
2. Clebsch A. Theorie der Elasticität Fester Körper. Leipzig: Teubner, 1862
3. Clebsch A. Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris: Dunod, 1883
4. Kirchhoff G. Vorlesung über mathematische Physik. Leipzig: Teubner, 1876
5. Greenhill A G. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1883
6. Cosserat E, Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: Hermann & Fils, 1909
7. Love A E H. A treatise on mathematical theory of elasticity. 4th ed.. New York: Dover, 1927
8. Timoshenko S P. History of strength of materials. New York: McGraw-Hill, 1953
9. Timoshenko S P. Strength of materials, Part. II. New York: Van Nostrand Company, 1957
10. Timoshenko S P, Gere J M. Theory of elastic stability. 2nd ed.. New York: McGraw-Hill, 1961
11. Ericksen J L, Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, 1: 293~323
12. Călugăreanu G. Sur les classes d'isotopie des noeuds tridimensionnels et leurs invariants. *Czechoslovak Mathem. J.*, 1961, 11: 588~625
13. Calugareanu G. L'intégral de Gauss et l'analyse des noeuds tridimensionnels. *Rev. Math. Pures Appl.*, 1959, 4: 5~10
14. Frisch-Fay R. Flexible bars. London: Butterworth, 1962
15. Zajac E E. Stability of two planar loop elasticas. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1962, 29: 136~142
16. Cohen H. A nonlinear theory of elastic directed curves. *Int. J. Engng Sci.*, 1966, 4: 511~524
17. Harris R A, Hearst J E. On polymer dynamics. *J. Chemical Physics*, 1966, 44: 2595~2602
18. Pohl W F. The self-linking number of a closed space curve. *J. Math. Mech.*, 1968, 17: 975~985
19. Kovári K. Räumliche Verzweigungsprobleme des dünnen elastischen Stabes mit endlichen Verformungen. *Ingenieur-Archiv*, 1969, 37: 393~416
20. White J H. Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions. *Amer. J. Math.*, 1969, 91: 693~728
21. Fuller F B. The writhing number of a space curve. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1971, 68(4): 815~819
22. Antman S S. The theory of rods. New York: Springer, 1972
23. Reissner R. On a one-dimensional, large-displacement, finite-strain beam-theory. *Stud. Appl. Math.*, 1973, 52: 87~95
24. Schellman J A. Flexibility of DNA. *Biopolymers*, 1974, 13: 217~226
25. Antman S S, Jordan K B. Qualitative aspects of the spatial deformation of non-linearly elastic rods. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1974, A73(5): 85~105
26. Crick F H C. Linking numbers and nucleosomes. *Proc. Nat. Acad. Sci. U S A.*, 1976, 73: 2639~2643

27. Keller J B, Rubinow S I. Slender-body theory for slow viscous flow. *J. Fluid Mechanics*, 1976, 75(4): 705~714
28. Benham C J. Elastic model of supercoiling. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 1977, 74: 2397~2401
29. Fuller F B. Decomposition of the linking number of a closed ribbon: A problem for molecular biology. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 1978, 75(8): 3557~3561
30. Le Bret M. Relationship between the energy of superhelix formation, the shear modulus and the torsional Brownian motion of DNA. *Biopolymers*, 1978, 17(8): 1939~1955
31. Bauer W R. Structure and reactions of closed duplex DNA. *Ann. Rev. Biophys. Bioeng.*, 1978, 7: 287~313
32. Bauer W R, Crick F H C, White J H. Supercoiled DNA. *Sci. Amer.*, 1979, 243: 118~133
33. Benham C J. An elastic model of the large-scale structure of duplex DNA. *Biopolymers*, 1979, 18: 609~623
34. Le Bret M. Catastrophic variation of twist and writhing of circular DNAs with constraint? *Biopolymers*, 1979, 18: 1709~1725
35. Vologodskii A V, Anshelevich V V, Lukashin A V et al. Statistical mechanics of supercoils and the torsional stiffness of the DNA double helix. *Nature*, 1979, 280: 294~298
36. Barkley M D, Zimm B H. Theory of twisting and bending of chain macromolecules: Analysis of the fluorescence depolarization of DNA. *J. Chem Phys.*, 1979, 70: 2991~3006
37. Knap R H. Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion. *Int. J. for Numerical Methods in Engng*, 1979, 14: 515~529
38. Zachmann D W. Nonlinear analysis of a twisted axially loaded elastic rod. *Quarterly of Applied Mathm.*, 1979, 2: 67~72
39. Antman S S, Liu T P. Travelling waves in hyperelastic rods. *Quat. Appl. Math.*, 1979, 36: 377~399
40. Ilyukhin A A. Spatial problems of the nonlinear theory of elastic rods. Kiev: Naukova Dumka, 1979 (in Russian)
41. Pohl W F. DNA and differential geometry. *Math. Intelligencer*, 1980, 3: 20~27
42. James R D. The equilibrium and post-buckling behavior of an elastic curve governed by a non-convex energy. *J. Elasticity*, 1981, 11: 239~269
43. Ichikawa Y, Konno K, Wadati M. Nonlinear transverse oscillation of elastic beams under tension. *J. Phys. Soc. Japan*, 1981, 50: 1799~1802
44. Yabuta T, Yoshizawa N, Kojima N. Cable kink analysis: cable loop stability under tension. *ASME J. of Applied Mechanics*, 1982, 49: 584~588
45. Kharlamov M P. A new method for solving three-dimensional problems in the nonlinear theory of elastic rods. *Mekh. Tverd. Tela*, 1982, 14: 116~124 (in Russian)
46. Vielsack P. Spatial bifurcation of a prestressed rod. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1982, 49: 443~444
47. Alexander J C, Antman S S. The ambiguous twist of Love. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1982, 40: 83~92
48. Benham C J. Geometry and mechanics of DNA superhelicity. *Biopolymers*, 1983, 22(11): 2477~2495
49. Le Bret M. Twist and writhing in short circular DNAs according to first-order elasticity.

- Biopolymers*, 1984, 23: 1835~1867
50. Berdichevskii V L, Sutyryn V G. Problem of an equivalent rod in nonlinear theory of springs. *PMM USSR*, 1984, 47(2): 197~205
51. Langer J, Singer D A. Knotted elastic curves in R^3 . *J. London Math. Soc.*, 1984, 30: 512~520
52. Caflisch R E, Maddocks J H. Nonlinear dynamical theory of the elastica. *Proc. Royal Soc.* 1984, 99A: 1~23
53. Antman S S. Large lateral buckling of nonlinearly elastic rods. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1984, 84: 293~305
54. Maddocks J H. Stability of nonlinearity elastic rods. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1984, 85: 311~354
55. Horowitz D S, Wang J C. Torsional rigidity of DNA and length dependence of the free energy of DNA supercoiling. *J. Molecular Biology*, 1984, 173: 75~91
56. Yabuta T. Submarine cable kink analysis. *Bulletin of Japan. Society of Mechn. Engineers*, 1984, 27: 1821~1828
57. Buzano E, Geymonat G, Poston T. Post-buckling behaviour of a non-linearly hyperelastic thin rod with cross-section invariant under the dihedral group D_n . *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1985, 89: 307~388
58. Tanaka F, Takahashi H. Elastic theory of supercoiled DNA. *J. Chem. Physics*, 1985, 83: 6017~6026
59. Benham C J. Theoretical analysis of conformational equilibria in superhelical DNA. *Ann. Rev. Biophys. Chem.*, 1985: 23~45
60. Seleпова P, Kypr J. Computer simulation of DNA supercoiling in a simple elastomechanical approximation. *Biopolymers*, 1985, 24: 867~882
61. Manning G S. Polymer persistence length characterized as a critical length for instability caused by a fluctuating twist. *Phys. Review A*, 1986, 34(1): 668~670
62. Simo J C, Vu-Quoc J. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational Aspects. *Appl. Mech. Engng.*, 1986, 58: 79~116
63. White J H, Bauer W R. Calculation of the twist and the writhe for representstive models of DNA. *J. Molec. Biology*, 1986, 189: 329~341
64. Buzano E. Secondary bifurcations of a thin rod under axial compression. *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, 17(2): 312~321
65. Tsuru H, Wadati M. Elastic model of highly supercoiled DNA. *Biopolymers*, 1986, 25: 2083~2096
66. Tsuru H. Nonlinear dynamics of thin elastic rod. *J. Phys. Soc. Japan*, 1986, 55(7): 2177~2182
67. Wadati M, Tsuru H. Elastic model of looped DNA. *Physica D*, 1986, 21: 213~226
68. Tsuru H. Equilibrium shapes and vibrations of thin elastic rods. *J. Phys. Soc. Japan*, 1987, 56: 2309~2324
69. Benham C J. The role of the stress resultant in determinating mechanical equilibria of superhelical DNA. *Biopolymers*, 1987, 26: 9~15
70. Maddocks J H. Stability and folds. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1987, 99: 301~328
71. White J H, Cozzarelli N R, Bauer W R. Helical repeat and linking number of surface-wrapped DNA. *Science*, 1988, 241: 323~327

72. Milke A, Holmes P. Spatially complex equilibria of buckled rods. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1988, 101: 319~348
73. Knap R H. Helical wire stresses in bent cables. *Trans. ASME, J. Offshore Mech. And Artic Engng.*, 1988, 110: 55~61
74. Hagerman P J. Flexibility of DNA. *Ann. Rev. Biophys. Chem.*, 1988, 17: 265~286
75. Simo J C, Marsden J E, Krishnaparasad P S. The Hamiltonian structure of nonlinear elasticity; the material and convective representations of solids, rods and plates. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1988, 104: 125~183
76. Thompson J M T, Virgin L N. Spatial chaos and localization phenomena in nonlinear elasticity. *Physics Letters A*, 1988, 126(8,9): 491~495
77. Rachmouni A R, Welles R D. Stabilization of Z DNA in vivo by localized supercoiling. *Science*, 1989, 246: 358~363
78. Benham C J. Onset of writhing in circular elastic polymers. *Phys. Review A*, 1989, 39: 2582~2586
79. White J H. An introduction to the geometry and topology of DNA structure. *Mathematical Methods for DNA Sequences*. Florida: Boca Raton FL: CRC, 1989: 225~253
80. Naschie M S. On certain homoclinic soliton in elastic stability. *J. Phys. Soc. Japan*, 1989, 58(12): 4310~4321
81. Costello G A. Theory of wire rop. NewYork: Springer-Verlag, 1990
82. Coyne J. Analysis of the formulation and elimination of loops in twisted cable. *IEEE J. of Oceanic Engng*, 1990, 15(2): 72~83
83. Langer J, Perline R. Poisson geometry of the filament equation. *J. Nonlinear Science*, 1991, 1: 71~93
84. Mendelson N H, Thwaites J J. Bending, folding and buckling progresses during bacterial macrofiber morphogenesis. *Math. Res. Soc. Symp.*, 1990, 174: 171~178
85. Tyson J J, Strogatz S H. The differential geometry of scroll waves. *Int. J. Bifudcation and Chaos*, 1991, 1(4): 723~744
86. Hunt N G, Hearst J E. Elastic model of DNA supercoiling in the infinite-length limit. *J. Chem. Physics*, 1991, 95(12): 9329~9336
87. Hearst J E, Hunt N G. Statistical mechanical theory for the plectonemic DNA supercoil. *J. Chem. Physics*, 1991, 95: 9322~9327
88. Klenin K V, Vologodskii A V, Anshelevich V V, et al. Computer simulation of DNA supercoiling. *J. Molecular Biology*, 1991, 217: 413~419
89. Kolpakov A G. Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure. *J. Appl. Mech.*, 1991, 55(3): 358~365
90. Thwaites J J, Mendelson N H. Mechanical behavior of becterial cell walls. *Adv. Microbiol. Physiol.*, 1991, 32: 174~222
91. Dill E H. Kirchhoff's theory of rods. *Arch. for History of Exact Science*, 1992, 44: 2~23
92. Schlick T, Olson W K. Trefoil knotting revealed by molecular dynamics of supercoiled DNA. *Science*, 1992, 257: 1110~1114
93. Schlick T, Olson W K. Supercoiled DNA energetics and dynamic by computer simulation. *J. Molecular Biology*, 1992, 223: 1089~1119
94. Cook D N, Ma D, Pon N G, Hearst J E. Dynamics of DNA supercoiling by transcription in E. Coli.

- Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1992, 89: 10603~10607
95. Nakayama K, Segur H, Wadati M. Integrability and the motion of curves. *Physical Review Letters*, 1992, 69(18): 2603~2606
96. Moffat H K, Ricca R L. Helicity and the Calugareanu invariant. *Proceedings of the Royal Society on London*, 1992, A439: 411~429
97. Smith S B, Finci L, Bustamante C. Direct mechanical measurement of the elasticity of single DNA molecules by using magnetic beads. *Science*, 1992, 258(5085): 1122~1126
98. Coleman B D, Dill E H. Flexure waves in elastic rods. *J. Acoustical Soc. Amer.*, 1992, 91: 2663~2673
99. Malhotra A, Gabb H A, Harvey S C. Modeling large nucleic acids. *Current Opinion. in Struct. Biol.*, 1993, 3: 241~246
100. Bauer W R, Lund R A, White J H. Twist and writhe of a DNA loop containing intrinsic bends. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 1993, 90: 833~837
101. Davis M A, Moon F C. 3-D spatial chaos in the elastica and the spinning top; Kirchhoff analogy. *Chaos*, 1993, 3(1): 93~99
102. Yang Y, Tobias I, Olson W K. Finite element analysis of DNA supercoiling. *J. Chem. Physics*, 1993, 98(2): 1673~1686
103. Tobias I, Olson W K. The effect of intrinsic curvature on superloiling—predictions of elasticity theory. *Biopolymers*, 1993, 33: 639~646
104. Coleman B D, Dill E H, Lembo Z, et al. On the dynamics of rods in theory of Kirchhoff and Clebsch. *Arch. Ration. Mech. Anal*, 1993, 121: 339~359
105. Starotsin E L. Three-dimensional conformations of looped DNA in an elastomechanical approximation. *Proc. 2nd Int. Conf. on Nonlinear Mechanics*, Beijing: Peking University Press, 1993
106. Cook D N, Ma D, Hearst J E. Supercoiling induced by transcription. *Nucleic Acids and Molecular Biology*, 1994, 8: 133~146
107. Zhang P, Tobias I, Olson W K. Computer simulation of protein-induced structural changes in closed circular DNA. *J. Molec. Biol.*, 1994, 242: 271~290
108. Shi Y, Hearst J E. The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling. *J. Chem. Physics*, 1994, 101: 5186~5200
109. Klapper I, et al. A new twist in the kinematics and elastic dynamics of thin filaments and ribbons. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1994, 27: 4919~4924
110. Jülicher F. Supercoiling transitions of closed DNA. *Phys. Rev. E*, 1994, 49: 2429~2435
111. Maddocks J H, Dichmann D J. Conservation laws in the dynamics of rods. *J. Elasticity*, 1994, 34: 83~96
112. Schlick T, Olson W K, Westcott T, et al. On higher buckling transitions in supercoiled DNA. *Biopolymers*, 1994, 34: 565~597
113. Le T T, Knap R H. A finite element model for cables with nonsymmetrical geometry and loads. *Trans. ASME, J. Offshore Mech. And Artic Engng.*, 1994, 116: 14~20
114. Domokos G. Global description of elastic bars. *Z. für Angew. Mathm. und Mechanik*, 1994, 74: T289~T291
115. Gaeta G, Reiss C, Peyrard M, Dauxois. Simple models of nonlinear DNA dynamics. *Rivista del*

- Nuovo Cimento*, 1994, 17: 1~48
116. Tabor M, Klapper I. The dynamics of knots and curves (Parts I and II). *Nonlinear Science Today*, 1994, 4(1): 7~13; 1994, 4(2): 12~18
117. Tobias I, Coleman B D, Olson W K. The dependence of DNA tertiary structure on end conditions: theory and implications for topological transitions. *J. of Chem. Physics*, 1994, 101: 10990~10996
118. Antman S S. Nonlinear problems of elasticity. New York: Springer, 1995
119. Schlick T. Modelling superhelical DNA: recent analytical and dynamic approaches. *Current Opinion in structural biology*, 1995, 5: 245~262
120. Renzo L R. The energy spectrum of a twisted flexible string under elastic relaxation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1995, 28: 2335~2352
121. Westcott T P, Tobias I, Olson W K. Elasticity theory and numerical analysis of DNA supercoiling: An application to DNA looping. *J. Phys. Chemistry*, 1995, 99: 17926~17935
122. Shi Y, Borovik A E, Hearst J E. Elastic rod model incorporating shear and extension, generalized nonlinear Schrödinger equations, and novel closed-form solutions for supercoiled DNA. *J. Chem. Physics*, 1995, 103: 3166~3183
123. Hearst J E, Shi Y. New solutions for the stationary states of the elastic rod model are useful in the representstion of DNA configuration in the living cell. *Nonlinear Sci. Today*, 1995, 5(1): 1~49
124. Domokos G. A group-theoretic approach to the geometry of elastic rings. *J. Nonlinear Science*, 1995, 5: 453~478
125. Coleman B D, Tobias I, Swigon D. Theory of the influence of end conditions on self-contact in DNA loops. *J. Chem. Physics*, 1995, 103(20): 9101~9109
126. Coleman B D, Dill E, Swigon D. on the dynamics of flexure and stretch in the theory of elastic rods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1995, 129: 147
127. Ricca R L. The energy spectrum of a twisted flexible string under elastic relaxation. *J. Phys. A*, 1995, 28: 2335~2352
128. Goldstein R E, Langer S A. Nonlinear dynamics of stiff polymers. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1094~1097
129. Thompson J M T, Champney A R. From helix to localized writhing in the torsional post-buckling of elastic rod. *Proc. Roy. Soc. A*, 1996, 452: 117~138
130. Smith S B, Cui Y, Bustamante C. Overstretching B-DNA: The elastic response of individual double-stranded and single-stranded DNA molecules. *Science*, 1996, 271: 795~799
131. Strick T R, Allemand J F, et al. The elasticity of a single supercoiled DNA molecule. *Science*, 1996, 271: 1835~1837
132. Champney A R, Thompson J M T. A multiplicity of localized buckling modes for twisted rod equations. *Proc. Roy. Soc. A*, 1996, 452: 2467~2491
133. Tobias I, Coleman B D, Lembo M. A class of exact dynamical solution in the elastic rod model of DNA with implications for the theory of fluctuations in the torsional motion of plasmids. *J. Chem. Physics*, 1996, 105(6): 2517~2526
134. Mesirov J P, Schulten K, Sumners D W. Mathematical approaches to biomolecular structure and dynamics. New York: Springer, 1996
135. Starostin E L. Three-dimensional shapes of looped DNA. *Meccanica*, 1996, 31: 235~271

-
136. Tobias I, et al. A class of exact dynamical solutions in the elastic rod model of DNA with implications for the theory of fluctuations in the torsional motion of plasmids. *J. Chem. Physics*, 1996, 105(6): 2517~2526
 137. Manning R S, Maddocks J H, Kahn J D. A continuum rod model of sequence-dependent DNA structure. *J. Chem. Physics*, 1996, 105(13): 5626~5646
 138. Klapper I. Biological applications of the dynamics of twisted elastic rods. *J. of Comput. Physics*, 1996, 125(2): 325~337
 139. Smith S B, Cui Y, Bustamante C. Overstretching B-DNA: The elastic response of individual double-stranded and single-stranded DNA molecules. *Science*, 1996, 271: 795~799
 140. Langer J, Singer D A. Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod. *SIAM Rev.* 1996, 38(4): 605~618
 141. Heath P J, Clendinning J B, Fujimoto B S, et al. Effect of bending strain on the torsion elastic constant of DNA. *J. of Molecular Biology*, 1996, 260: 718~730
 142. Seemann W. Deformation of an elastic helix in contact with a rigid cylinder. *Archive of Applied Mechanics*. 1996, 67: 117~139
 143. Goriely A, Tabor M. New amplitude equations for thin elastic rods. *Phys. Rev. Letters*, 1996, 77: 3537~3540
 144. Coleman B D, Lembo M, Tobias I. A new class of flexure-free torsional vibrations of annular rods. *Meccanica*, 1996, 31: 565~575
 145. Dichmann D, Maddocks J, Pego R. Hamiltonian dynamics of an elastica and the stability of solitary waves. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1996, 135: 357
 146. Westcott T P, Tobias I, Olson W K. Modeling self-contact forces in the elastic theory of DNA supercoiling. *J. Chem. Physics*, 1997, 107(10): 3967~3980
 147. Goriely A, Tabor M. Nonlinear dynamics of filaments I. Dynamical instabilities. *Physica D*, 1997, 105: 20~44
 148. Goriely A, Tabor M. Nonlinear dynamics of filaments II. Nonlinear analysis. *Physica D*, 1997, 105: 45~61
 149. Goriely A, Tabor M. Nonlinear dynamics of filaments III: Instabilities of helical rods. *Proc. Roy. Soc. A*, 1997, 453: 2583~2601
 150. Champney A R, van der Heijden G H M, Thompson J M T. Spatially complex localisation after one-twist-per-wave equilibria in twisted circular cross rods with initial curvature. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1997, A355: 2151~2174
 151. Maroz J D, Nelson P. Torsional directed walks, entropic elasticity and DNA twist stiffness. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 1997, 94: 14418~14422
 152. Marko J F. Supercoiled and braided DNA under tension. *Phys. Review E*, 1997, 55: 1758~1772
 153. Kehrbaum S, Maddocks J H. Elastic rods, rigid bodies, quaternions, and the last quadrature. *Phil. Trans.* 1997, 355: 2117~2136
 154. Miyazaki Y, Kondo K. Analytical solution of spatial elastica and its application to kinking problem. *Intern. J. of Solid and Structures*, 1997, 34: 3619~3636
 155. Schuricht F. A variational approach to obstacle problems for shearable nonlinearly elastic rods. *Arch. for Rational Mechanics and Analysis*, 1997, 140: 103~159
 156. Fain B, Rudnick J, Östlund S. Conformations of DNA. *Physics Review E*, 1997, 55(6):

7364~7368

157. Goriely A, Tabor M. Nonlinear dynamics of filaments IV: Spontaneous looping of elastic rods. *Proc. Roy. Soc. A*, 1998, 454: 3183~3202
158. Goriely A, Tabor M. Spontaneous helix hand reversal and tendril perversion in climbing plants. *Phys. Review Letters*, 1998, 80(7): 1564~1567
159. Swigon D, Coleman B D, Tobias I. The elastic rod model for DNA and its application to the tertiary structure of DNA minicircles in nonnucleosomes. *Biophysical J.*, 1998, 74: 2515~2530
160. van der Heijden G H M, et al. The spatial complexity of localized buckling in rods with noncircular cross section. *SIAM J. Appl. Math.*, 1998, 59(1): 198~221
161. van der Heijden G H M, Thompson J M T. Lock-on to tape-like behaviour in the torsional buckling of anisotropic rods. *Physica*, 1998, D112: 201~224
162. Goldstein R E, et al. Viscous nonlinear dynamics of twist and writhe. *Phys. Review Letters*, 1998, 80(23): 5232~5235
163. Shi Y, Hearst J E, et al. Erratum: "The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation and DNA supercoiling". *J. Chem. Physics*, 1998, 109(7): 2959~2961
164. Bouchiat C, Mezard M. Elasticity model of supercoiled DNA molecule. *Physical Review Letters*, 1998, 80: 1556~1559
165. Stump D M, Frazer W B, Gates K E. The writhing of circular cross-section rods-undersea cables to DNA supercoiled. *Proc. Royal Society of London*, 1998, A 454: 2123~2156
166. Hou T Y, Klapper I, Si H. Removing the stiffness of curvature in computing 3-D filaments. *J. Comput. Phys.* 1998, 143: 628~664
167. Marco J F. DNA under high tension, overstretching, undertwisting, and relaxation dynamics. *Physical Review E*, 1998, 57(2): 2134~2149
168. Chechetkin V R. Local rotation, topological invariant for thin rod and supercoiling of DNA. *Physics Letters A*, 1998, 240: 171~176
169. Kamien R D. Local writhing dynamics. *Eur. Physics J. B*, 1998, 1: 1~4
170. Sun Y, Leonard J W. Dynamics of ocean cables with local low-tension regions. *Ocean Eng.* 1998, 25: 443~463
171. Bishop T C, Hearst J E. Potential function describing the folding of the 30nm fiber. *J. Phys. Chem.*, 1998, B102: 6433~6439
172. Moroz J D, Nelson P. Entropic elasticity of two-storing polymers. *Macromolecules*, 1998, 31: 6333
173. Nizzete M, Goriely A. Towards a classification of Euler-Kirchhoff filaments. *J. Math. Physics*, 1999, 40(6): 2830~2837
174. Velichko Yu S, Yoshikama A R, Khokhlov A R. Effect of twisting on the behavior of a double-stranded polymer chain: A Monte Carlo simulation. *J. Chem. Physics*, 1999, 111(20): 9424~9433
175. Zhou H J, Ou-Yang, Z C. Spontaneous curvature-induced dynamical instability of Kirchhoff filaments: Application to DNA kink deformation. *J. Chem. Physics*, 1999, 110(2): 1247~1251
176. Manning R S, Maddocks J H. Symmetry breaking and the twisted ring. *Computer Meth. in Applied Mechanics and Engng*, 1999, 170: 313~330
177. van der Heijden G H M, Champneys A R, Thompson J M T. Spatially complex localisation in

- twisted elastic rods constrained to lie in the plane. *J. of Mechanics and Physics of Solids*, 1999, 47: 59~79
178. van der Heijden G H M, Champneys A R, Thompson J M T. The spatial complexity of localised buckling in rods with noncircular cross-section. *SIAM J. Appl. Math.*, 1999, 59: 198~221
179. Camalet S, Jülicher F, Prost J. Self-organized beating and swimming of internally driven filament. *Physical Review Letters*, 1999, 82(7): 1590~1593
180. Kai Hu. A differential geometric interpretation of Kirchhoff's elastic rods. *J. Math. Physics*, 1999, 40(7): 3341~3352
181. Beliaeff A, Mahadevan L, Schulten K. Elastic rod model of a DNA loop in the Lac operation. *Phys. Rev. Letters*, 1999, 83(23): 4900~4903
182. Barbi M, Cocco S, Payrard M, Ruffo S. A twist opening model for DNA. *J. Biol. Phys.*, 1999, 24: 358~369
183. Vaz M A, Patel M H. Three dimensional behavior of elastic marine cables in sheare currents. *Appl. Ocean Res.* 2000, 22(1): 45~53
184. Stump D M, Fraser W B. Multiple solutions for writhed rods; implications for DNA supercoiling. *Proc. Royal Soc. Lond. A*, 2000, 456: 455~467
185. Coleman B D, Swigon D. Theory of supercoiled elastic rings with self-contact and its application to DNA plasmids. *J. of Elasticity*, 2000, 60: 173~221
186. Tobias I, Swigon D, Coleman B D. Elastic stability of DNA configurations. I. General theory. *Physical Review E*, 2000, 61(1): 747~758
187. Coleman B D, Swigon D, Tobias I. Elastic stability of DNA configurations. II. Supercoiled plasmids with self-contact. *Physical Review E*, 2000, 61(1): 759~770
188. Zhou H J, Zhang Y, Ou-Yang Z C. Elastic property of single double-stranded DNA molecules: Theoretical study and comparison with experiments. *Physical Review E*, 2000, 61(1): 1045~1058
189. Golubovic L, Moldovan D, Peredera A. Flexible polymers and thin rods far from equilibrium: buckling dynamics. *Physical Review E*, 2000, 61(2): 1703~1715
190. Goriely A, Shipman P. Dynamics of helical strips. *Physical Review E*, 2000, 61(4): 4508~4517
191. Goriely A, Tabor M. The nonlinear dynamics of filaments. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 21: 101~133
192. Stump D M, Watson P J, Fraser W B. Mathematical modelling of interwound DNA supercoils. *J. of Biomechanics*, 2000, 33(4): 407~413
193. Klenin K, Langowski J. Computation of writhe in modelling of supercoiled DNA. *Biopolymers*, 2000, 54: 307~317
194. Schlick T, Beard D A, et al. Computational challenges in simulating large DNA over longtimes. *IEEE Computing in Science and Engng.*, 2000, 2(6): 38~51
195. Goldstein R E, Goriely A, Huber G, et al. Bistable helices. *Phys. Rev. Lett.* 2000, 84(7): 1631~1634
196. Bouchiat C, Mezard M M. Elastic rod model of a supercoiled DNA molecule. *The Europ. Phys. Journ.*, 2000, E2: 377~402
197. Golubovic L, Moldovan D, Peredera A. Flexible polymers and the rods far from equilibrium: Buckling dynamics. *Phy. Rev.* 2000, E61: 1703~1715
198. Coronado L M P. Hamilton equations for elasticae in the Euclidean 3-space. *Physica*, 2000, D141:

248~260

199. van der Heijden G H M, Thomson J M T. Helical and localized buckling in twisted rods; A unified analysis of the symmetric case. *Nonlin. Dynamics*, 2000, 21(1): 71~99
200. Hunt G B, Peletier M A, Champneys A R, Woods P D, et al. Cellular buckling in long structures. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 21: 3~29
201. Starostin E L. Closed loops of a thin elastic rod and its symmetric shapes with self-contacts. *Proc. of the 16th IMACS World Congress*, Lausanne, 2000: 21~25
202. Kehrbaum S, Maddocks J H. Effective properties of elastic rods with high intrinsic twist. *Proc. of the 16th IMACS World Congress*, Lausanne, 2000
203. Wolgemuth C W, Powers T R, Goldstein R E. Twirling and whirling: viscous dynamics of rotating elastic filaments. *Physical Review Letters*, 2000, 84(7): 1623~1626
204. van der Heijden G H M. The static deformation of a twisted elastic rod constrained to lie on a cylinder. *Proc. Royal Soc. London*, 2001, A 457: 695~715
205. Stump B M, van der Heijden G H M. Birdcaging and the collapse of rods and cables in fixed-grip compression. *Int. J. Solids and Structure*, 2001, 38: 4265~4278
206. Manning R S, Hoffman K A. Stability of n-covered circles for a elastic rod with planar intrinsic curvature. *J. of Elasticity*, 2001, 62(1): 1~23
207. Przybyl S, Pieranski P. Helical close packings of ideal ropes. *The Europ. Phys. J.*, 2001, E4: 445~449
208. Lembo M. On the free shapes of elastic rods. *Eur. J. Mech./Solids A*, 2001, 20: 469~483
209. Yakushevich L V. Is DNA a nonlinear system where solitary conformation waves are possible? *J. Biosci.* 2001, 26: 305~313
210. Noguchi H. Folding dynamics in a semiflexible polymer as a model of DNA. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(9): 2003~2008
211. Zhou H J, Zhang Y, Ou-Yang Z C. Elastic theories of single DNA molecules. *Physica*, 2002, A 306: 359~367
212. van der Heijden G H M, Champneys A R, Thomson J M T. Spatially complex localisation in twisted elastic rods constrained to a cylinder. *Intern. J. Solids and Structures*, 2002, 39: 1863~1883
213. Neukirch S, van der Heijden G H M, Thompson J M T. Writhing instabilities of twisted rods; from infinite to finite length. *J. Mechanics and Physics of Solids*, 2002, 50: 1175~1191
214. Thompson J M T, van der Heijden G H M, Neukirch S. Supercoiling of DNA plasmids; mechanics of the generalized ply. *Proc. Royal Society of London*, 2002, A 458: 959~985
215. Hoffman K A, Manning R S, Paffenroth R C. Calculation of the stability index in parameter-dependent calculus of variations problems; buckling of a twisted elastic struct. *SIAM J. on Applied Dynamical Systems*, 2002, 1: 115~145
216. Neukirch S, van der Heijden G H M. Geometry and mechanics of uniform n-plices; from engineering ropes to biological filaments. *J. of Elasticity*, 2002, 69(1-3): 41~72
217. Starostin E L. Equilibrium configuration of a thin elastic rod with self-contact. *PAMM, Proc. Appl. Math. Mech.*, 2002, 1: 137~138
218. Rapaport D C. Molecular dynamics simulation of polymer helix formation using rigid-link methods. *Physical Review E*, 2002, 66: 011906-1~15

-
219. van der Heijden G H M, Neukirch S, Goss V G A, et al. Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods. *Intern. J. Mechanical Sciences*, 2003, 45: 161~196
220. da Fonseca A F, de Aguiar M A M. Solving the boundary value problem for finite Kirchhoff rods. *Physica D*, 2003, 181: 53~69
221. Schubert F, van der Mosel. Euler-Lagrange equations for nonlinearly elastic rods with self-contact. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2003, 168: 35~82
222. Margell B, Ejtehadi MR, Everaers R. Modeling DNA structure, elasticity, and deformations at the base-pair level. *Physical Review E*, 2003, 68: 021911-1~5
223. Domokos G, Fraser W B, Szeberényi I. Symmetry-breaking bifurcations of the uplifted elastic strip. *Physica D*, 2003, 185(2): 67~77
224. Bustamante C, Bryant Z. Ten years of tension: single-molecule DNA mechanics. *Nature*, 2003, 421: 423~427
225. Jiang Z T, Zhang L X, Chen J, et al. A study on conformations of DNA chain under the elastic rod model. *Acta Polymerica Sinica*, 2003, (2): 207~210
226. Bishop T C, Cortez R, Zhmudsky O O. Investigation of bend and shear waves in a geometrically exact elastic rod model. *J. Comput. Aphysics*. 2003, 193(2): 642~665
227. Neukirch S. Extracting DNA twist rigidity from experimental supercoiling data. *Physical Review Letters*, 2004, 93(19): No. 198107
228. Travers A A, Thompson M T. An introduction to the mechanics of DNA. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1265~1279
229. Coleman B D, Swigon D. Theory of self-contact in Kirchhoff rods with applications to supercoiling of knotted and unknotted DNA plasmids. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1281~1299
230. Hoffman K A. Methods for determining stability in continuum elastic-rod models of DNA. Philosophical Transactions; Mathematical, Physical and Engineering Sciences, *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1301~1315
231. Starostin E L. Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self-contacts. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1317~1334
232. White J H, Bauer W R. Finite-element analysis of the displacement of closed DNA loops under torsional stress. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1335~1353
233. Balaeff A, Koudella C R, Mahadevan L, Schulten K. Modelling DNA loops using continuum and statistical mechanics. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1355~1371
234. Tobias I. Thermal fluctuations of small rings of intrinsically helical DNA treated like an elastic rod. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1387~1402
235. Olson W K, Swigon D, Coleman B D. Implications of the dependence of the elastic properties of DNA on nucleotide sequence. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1403~1422
236. Travers A A. The structural basis of DNA flexibility. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1423~1438
237. Wattis J A D. Nonlinear breathing modes due to a defect in a DNA chain. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1461~1477
238. Sivolob A, Prunell A. Nucleosome conformational flexibility and implications for chromatin dynamics. *Phil. Trans. Royal Society London*, 2004, 362(1820): 1519~1547

239. Bishop T C, Corez R, Zhmudsky O O. Investigation of bend and shear waves in a geometrically exact elastic rod model. *J. Comput. Physics*, 2004, 193: 642~665
240. Liu Y Z, Zu J W. Stability and bifurcation of helical equilibrium of thin elastic rod. *Acta Mechanica*, 2004, 167(1-2): 29~39
241. Liu Yanzhu, Xue Yun. Formulation of Kirchhoff rod based on quasi-coordinates. *Technische Mechanik*, 2004, 24(3-4): 206~210
242. Xue Yun, Liu Yan-zhu, Chen Li-qun. The Schrödinger's equation for a Kirchhoff elastic rod with non-circular cross section. *Chinese Physics*, 2004, 13(6): 794~797
243. Moakher M, Maddocks J H. A double-strand elastic rod theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2005, 177: 53~91
244. Zhou ZC, Lai PY, Joos B. Elasticity and stability of a helical filament. *Physical Review* 2005, E 71(5): No. 052801 Part 1
245. Matsumoto A, Tobias I, Olson W K. Normal-mode analysis of circular DNA at the base-pair level. 1. Comparison of computed motions with the predicted behavior of an ideal elastic rod. *J. Chemical Theory and Computation*, 2005, 1(1): 117~129
246. Matsumoto A, Tobias I, Olson W K. Normal-mode analysis of circular DNA at the base-pair level. 2. Large-scale configurational transformation of a naturally curved molecule. *J. Chemical Theory and Computation*, 2005, 1(1): 130~142
247. Moakher M, Maddocks J H. A double-strand elastic rod theory. *Arch. Rational Mechanics and Analysis*, 2005, 177(1): 53~91
248. da Fonseca A F, Malta C P, de Aguiar M A M. Resonant helical deformations in nonhomogeneous Kirchhoff filaments. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications* 2005, 352(2-4): 547~557
249. Schlagberger X, Netz R R. Orientation of elastic rods in homogeneous Stokes flow. *Europhysics Letters*, 2005, 70(1): 129~135
250. Lin C C, Schwetlick H R. On the geometric flow of Kirchhoff elastic rods. *SLAM J. Applied Mathematics*, 2005, 65(2): 720~736
251. 戈正铭. Lagrange 铅垂陀螺运动无条件稳定的充分必要条件. *上海交通大学学报*, 1979, 13(1): 53~59
252. 武际可, 黄永刚. 弹性曲杆的稳定性问题. *力学学报*, 1987, 19(5): 445~454
253. 武际可, 苏先榘. 弹性系统的稳定性. 北京: 科学出版社, 1994: 103~125
254. 陈至达. 杆、板、壳大变形理论. 北京: 科学出版社, 1994
255. 武际可. 力学史. 重庆: 重庆出版社, 2000: 208~211
256. 刘延柱. 高等动力学. 北京: 高等教育出版社, 2001
257. 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2001
258. 刘延柱. 非圆截面弹性细杆的平衡稳定性与分岔. *力学季刊*, 2001, 22(2): 147~153
259. 刘延柱. 压杆失稳与 Lyapunov 稳定性. *力学与实践*, 2002, 24(4): 56~59
260. 刘延柱. 具有初曲率和初挠率弹性直杆的平衡稳定性. *上海交通大学学报*, 2002, 36(4): 1587~1590
261. 刘延柱. DNA 双螺旋结构的螺旋杆力学模型. *力学学报*, 2002, (增刊): 117~121
262. 刘延柱. 弹性杆基因模型的力学问题. *力学与实践*, 2003, 25(1): 1~5
263. 刘延柱. Kovalevskaya 弹性杆. *力学与实践*, 2003, 25(5): 21~23
264. 刘延柱. 非圆截面弹性细杆的螺旋线平衡及稳定性. *力学季刊*, 2003, 24(4): 433~439
265. 刘延柱. 曲线的运动学. *力学与实践*, 2004, 26(3): 83~84

-
266. 薛纭,陈立群,刘延柱. 受曲面约束弹性细杆的平衡问题. 物理学报,2004, 53(7): 2040~2045
267. 刘延柱,薛纭,陈立群. 弹性细杆平衡的动态稳定性. 物理学报,2004, 53(8): 2424~2428
268. 刘延柱. 超大变形弹性细杆几何形态的拓扑描述. 力学与实践,2004, 26(5): 68~70
269. 薛纭,陈立群. 再论压杆失稳与 Lyapunov 稳定性. 力学与实践,2004, 26(5): 71~72
270. 刘延柱. 螺旋细杆的均匀扭转振动. 力学与实践,2004, 26(6): 14~16
271. 薛纭,陈立群,刘延柱. Kirchhoff 方程的相对常值特解及其 Lyapunov 稳定性. 物理学报,2004, 53(12): 4029~4035
272. 薛纭,刘延柱,陈立群. 复弯矩表示的非圆截面杆平衡的 Schrödinger 方程及其半解析解. 力学季刊,2004, 25(4): 463~469
273. 刘延柱,薛纭. 弹性细杆螺旋线平衡的动态稳定性. 力学季刊,2005, 26(1): 1~7
274. 刘延柱,薛纭. 受轴向力和扭矩作用的直杆的平衡稳定性. 力学与实践,2005, 27(1): 64~65
275. 刘延柱. 圆截面弹性细杆的平面振动. 力学与实践,2005, 27(3): 32~34
276. 彭建华,刘延柱. 弹性细杆的混沌形态. 动力学与控制学报,2005, 3(2): 36~39
277. 黄磊,包光伟,刘延柱. 弹性细杆弯曲的 Kirchhoff 方程的违约校正求解. 物理学报,2005, 54(6): 2457~2462
278. 刘延柱. 黏性介质中圆截面弹性细杆的平面振动. 物理学报,2005, 54(11): 4989~4993
279. 刘延柱. 轴向力作用下螺旋杆的平衡稳定性. 固体力学学报, 2005, 26(3): 256~260
280. 刘延柱,薛纭. 受圆柱截面约束弹性杆的平衡与稳定性. 应用力学学报,2005, 22(3): 392~394
281. 薛纭,刘延柱,陈立群. 超细长弹性杆的分析力学问题. 力学学报, 2005, 37(4), 37(4): 485~493
282. 刘延柱. 松弛状态非圆截面弹性螺旋细杆的稳定性. 动力学与控制学报,2005, 3(4): 12~16