高等院校力学教材

弹性力学简明教程

杨桂通 编著

清华大学出版社

北京

内容简介

本书是为工程类各有关专业编写的一本弹性力学简明教程,可供研究生和高年级大学生作为 教材,其中有些内容可以选读。全书共有 14 章,包括弹性力学的基本理论、基本概念和基本方法; 简单的和一些工程上常见的弹性力学问题;弹性弯曲和扭转;弹性薄板和薄壳;热应力问题;变分 原理和数值方法等。本书理论与应用并重,概念清晰,易于理解,列有习题和思考题,举一反三,便 于掌握。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学简明教程/杨桂通编著.一北京:清华大学出版社,2006.9 (高等院校力学教材)

ISBN 7-302-12989-4

I. 弹… Ⅲ. 杨… Ⅲ. 弹性力学一高等学校一教材 Ⅳ. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 046379 号

出 版 者:清华大学出版社

http://www.tup.com.cn

社 总 机: 010-62770175

- 责任编辑:杨 倩
- 印装者:北京国马印刷厂
- 发 行 者:新华书店总店北京发行所
- **开**本: 175×245 印张: 18.25 字数: 377 千字
- 版 次: 2006 年 9 月 第 1 版 2006 年 9 月 第 1 次印刷
- 书 号: ISBN 7-302-12989-4/O•540
- 印数:1~3000
- 定价: 26.00元

- 地 址:北京清华大学学研大厦
- **邮 编**:100084

客户服务: 010-62776969

HI 言

本书是为工程类各有关专业的研究生和高年级大学生,提供一本简明易懂的教 材,其中包含必要的基本理论基础和工程上常见的弹性力学问题。这就要求在取材 和讲授方法上做到:去粗取精,通俗易懂,概念清晰,系统不乱。开始动笔以来,我 便朝这个方向努力去做。

所有的工程技术人员都会碰到各式各样的力学问题,其中最多的可能就是当各 种材料的物体或结构受各式各样的外界作用时,要我们判断其工作状态或是做出有 安全、经济要求的设计。对于重要的工程要求给出科学的判断或精确的设计,这就需 要掌握固体力学首先是弹性力学的基础理论和分析方法,以求给出正确的工程设计。

本书共分 14 章,都是弹性力学的最基本和最有实用价值的重要概念和分析方法,除第 1 章绪论外,第 2~6 章包括: 应力和应变的概念和表达方法; 应力和应变之间的联系; 弹性力学问题的提法和简单的平面问题。第 7 章介绍弹性力学平面问题 最精彩的求解方法——复变函数法;第 8 章讲述柱体的弹性扭转;第 9 章介绍弹性体 受热状态引起的应力问题;第 10 章介绍空间问题的解题方法和两弹性体的接触问 题;第 11 章讲述弹性力学的变分原理及数值方法,介绍了常见的里兹法、迦辽金法和 有限元法,这一章实为做数值计算准备理论基础,并对进一步做研究工作建立重要概 念。第 12 和 13 章分别介绍薄板和薄壳问题;最后一章介绍弹性波理论,希望借此给 读者一些在动力作用下将产生弹性波传播的概念。书中每章附有复习要点、思考题 和习题。为了使读者对力学的发展历程和著名科学家对力学发展的贡献有些了解, 书中安排了相应的简介和插图。 在编写本书过程中,树学锋教授、陈维毅教授、赵广慧博士以及太原理工大学应 用力学研究的老师和我的学生们给了我许多帮助,特向他们表示衷心的谢意。此外, 本书参考并吸收了许多国内外弹性力学名著的思想和内容,非常感谢众多专家学者 给予的现成的精彩成果,主要的都列在参考文献中。

最后,我特别感谢清华大学出版社的杨倩编辑,由于她的辛勤工作,热心的支持 与帮助,使得本书得以问世。

杨桂通

于太原理工大学

2006 年 5 月

日录

第1	章	绪论	. 1
	1.1	弹性力学的研究对象和任务	. 1
	1.2	基本假定	. 2
	1.3	弹性变形	. 3
	1.4	弹性力学发展历程简介	. 3
	思考	题	. 5
第 2	章	应力	. 6
	2.1	力和应力的概念	. 6
	2.2	二维应力状态与平面问题的平衡方程	10
	2.3	一点处应力状态的描述	14
	2.4	边界条件	16
	2.5	主应力与主方向	19
	2.6	球张量与应力偏量	24
	复习	要点	26
	思考	题	27
	习题		27
第3	章	应变	29

-	-		
	3.1	变形与应变的概念	29
	3.2	主应变与应变偏量及其不变量	35

3.	.3 应变协调方程	36
复	夏习要点	38
馬	3考题	38
3	7.5	39
第4章	章 应力应变关系	41
4	.1 广义胡克定律	41
4	2 丁程上常用的弹性常数	45
4.	.3 弹性应变能函数	48
复		51
- -	三字の	51
10	こ。 うた こう	52
	J #22	02
笠ヶ空	5. 递州力学问题的担注	ΕD
<i>╄᠈</i> ᠮ	2	55
э. г		53
5.		55
5.	.3 弹性力字问题的基本解法 解的惟一性	57
5.	.4 全班用原理	61
5.	.5 叠加原埋	62
5.	.6 简例	63
Į	夏习要点	65
思	3考题	65
2]题	66
第6章	〔 平面问题	67
6	.1 平面问题的基本方程	67
6	.2 应力函数	70
6	.3 梁的弹性平面弯曲	73
6	.4 深梁的三角级数解法	79
6	.5 用极坐标表示的基本方程	83
6	.6 厚壁筒问题	86
6	.7 半无限平面体问题	89
6	.8 圆孔孔边应力集中	96
复	夏习要点	100
思	3考题	101

习题	101
第7章 用复变函数法解平面问题	103
7.1 复变函数的基本关系式	103
7.2 Goursat 公式和 Kolosoff-Muskhelishvili 函数	105
7.3 应力与位移的解析函数表达式	106
7.4 边界条件	107
7.5 多连域内应力与位移的单值条件	108
7.6 保角映射及其应用	111
7.7 带有圆孔口的无限大板问题	113
7.8 带有椭圆孔的无限大板问题	115
复习要点和思考题	117
习题	118
第8章 柱体的扭转	119
8.1 问题的提出 基本关系式	119
8.2 矩形截面柱体的扭转	123
8.3 薄膜比拟法	128
8.4 受扭开口薄壁杆的近似计算	129
复习要点	131
思考题	131
习题	131
第9章 热应力	133
9.1 一般概念	133
9.2 热力学定律	134
9.3 基本方程	136
9.4 Duhamel-Neumann 法则	139
9.5 平面热应力问题	140
复习要点和思考题	144
习题	145
第10章 空间问题	146

10.1	弹性力学问题的一般解		146
------	------------	--	-----

有集中力作用的无限弹性体问题	150
Boussinesq 问题	152
Hertz 接触问题	155
要点和思考题	158
	158
变分原理及其应用	159
基本概念	159
虚位移原理	160
最小总势能原理	166
虚应力原理	169
最小总余能原理	171
一般变分原理	172
利用变分原理的近似解法	176
要点	188
题	189
	189
薄板的弯曲	191
基本概念与基本假定	191
薄板弯曲的平衡方程	194
边界条件	199
矩形板的经典解法	203
周板的轴对称弯曲	208
	200
用变分法解板的弯曲问题	213
田变分法解板的弯曲问题	213 218
周变分法解板的弯曲问题 要点	208213218218
周变分法解板的弯曲问题 要点	 208 213 218 218 219
图1001和3145号 画 用变分法解板的弯曲问题 要点	200 213 218 218 218 219
周变分法解板的弯曲问题 要点	 213 218 218 219 220
周变分法解板的弯曲问题 要点	 213 213 218 218 219 220 220 220
周变分法解板的弯曲问题	 208 213 218 219 220 220 220 225
周	 208 213 218 218 219 220 220 220 225 232
	Hertz 接触问题 要点和思考题 空分原理及其应用 基本概念 虚位移原理 最小总势能原理 虚应力原理 最小总余能原理 一般变分原理 利用支分原理的近似解法 要点 题 薄板的弯曲 基本概念与基本假定 薄板弯曲的平衡方程 边界条件 矩形板的经典解法 四括的社社和恋女

复习要点和思考题 240

习题	 240

第 14	章	弹性波	242
	14.1	一维弹性波	242
	14.2	无限介质中的弹性波 体波	246
	14.3	半无限介质表面的波 面波	248
	复习弱	要点和思考题	253
	习题		253
附录	A 🛃	天量与张量的基本公式	254
附录	BZ	变分法概要	263
附录	C 1	夏变函数与解析函数的基本性质	272
外国	人名	译名对照表	276
索引			278
参考	文献		281

第1章 绪

1.1 弹性力学的研究对象和任务

弹性力学是固体力学的一个分支学科,是研究可变形固体受到外载荷、温度变化 及边界约束变动等作用时,弹性变形和应力状态的科学。本书专门讨论固体材料中 的理想弹性体的力学问题。

弹性力学是人们在长期生产实践与科学实验的丰富成果的基础上发展起来的。 它的发展与社会生产发展有着特别密切的关系,它来源于生产实践,又反过来为生产 实践服务。弹性力学作为固体力学的一个独立分支学科已有一百多年的历史。它有 一套较完善的经典理论和方法,在工程技术的许多领域得到了广泛的应用。目前,由 于现代科学技术的进一步发展,向弹性力学的新理论提出了一系列新课题,新任务。 因而,研究弹性力学的新理论、新方法及其在工程上的应用是非常必要的。在目前, 弹性力学仍然是一门富有生命力的学科。

材料力学和结构力学的研究对象及问题,往往也是弹性力学所要研究的问题。 不过,在材料力学和结构力学中主要是采用简化的可用初等理论描述的数学模型。 在弹性力学中,则将采用较精确的数学模型。有些工程问题(例如非圆形断面柱体的 扭转,孔边应力集中,深梁应力分析等问题)用材料力学和结构力学的理论无法求解, 而在弹性力学中是可以解决的。有些问题虽然用材料力学和结构力学的方法可以求 解,但无法给出精确可靠的结论,而弹性力学则可以给出用初等理论所得结果可靠性 与精确度的评价。因而,弹性力学的任务有二:一是建立并给出用材料力学和结构 力学方法无法求解的问题的理论和方法;二是给出初等理论可靠性与精确度的度量。 学习本课程的目的大致可归结为:

- 1) 确定一般工程结构在外载荷作用下的弹性变形与内力的分布规律。
- 2) 确定一般工程结构的承载能力。
- 3)为进一步研究工程结构的强度、振动、稳定性等力学问题打下必要的理论基础。

1.2 基本假定

固体材料通常分为晶体和非晶体两种。晶体是由许多离子、原子或分子按一定 规则排列起来的空间格子(称为晶格)构成的。它们一般均处于稳定的平衡状态。普 通固体(例如低碳钢、黄铜、铝、铅等)是由许多晶粒方位混乱地组合起来的。它们中 间常有一些缺陷存在。非晶体一般是由许多分子的集合组成的高分子化合物。由此 可见,固体材料的微观结构是多样的、复杂的。如果我们在研究工程结构的力学性态 时,考虑固体材料的这些特征,必将带来数学上的极大困难。为了把本书所研究的问 题限制在一个简便可行的范围内,必须引进下列一些假定。

1) 假定固体材料是连续介质。即,这种介质无空隙地分布于物体所占的整个空间。这一假定显然与上述介质是由不连续的粒子所组成的观点相矛盾。但我们采用连续性假定,不仅是为了避免数学上的困难,更重要的是根据这一假定所进行的力学分析,被广泛的实验与工程实践证实是正确的。事实上,连续性假定与现代物质理论的分歧可用统计平均的观点统一起来。从统计学的观点看来,只要所论物体的尺寸足够大,物体的性质就与体积的大小无关。通常工程结构构件的尺寸,与晶粒或分子团的大小相比,其数量级是非常悬殊的。在力学分析中,从物体中取出任一微小单元,在数学上是一个无穷小量,但它却含有大量的晶粒,晶体缺陷与微小单元进而与物体尺寸相比更是小得很多,因而连续性假定实际上是合理的。对于一些多相物体,通常也作为连续性介质看待。

根据连续性假定,用以表征物体变形和内力分布的量,就可以用坐标的连续函数 来表示。这样,在进行弹性力学分析时,就可以应用数学分析这个强有力的工具。

弹性力学的理论基础仍然是牛顿力学。连续性假定和理论力学中的牛顿力学定 律相结合就必然会产生连续介质力学。当进一步给出固体材料的弹性本构关系之 后,也就必然会得到弹性力学的基本方程。

2)物体为均匀各向同性的。即认为物体内各点介质的力学特性相同,且各点的 各方向的性质也相同。也就是说,表征这些特性的物理参数在整个物体内是不变的。

3)物体的变形属于小变形。即认为物体在外力作用下所产生的变形,与其本身

几何尺寸相比很小,可以不考虑因变形而引起的尺寸的变化。这样,就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的尺寸。此外,物体的变形和各点的位移公式中二阶 微量可以略去不计,从而使得几何变形线性化。

4)物体原来是处于一种无应力的自然状态。即在外力作用以前,物体内各点应 力均为零。我们的分析计算是从这种状态出发的。

以上基本假定是本书讨论问题的基础,还有一些针对具体问题所作的假定,将在 以后各章分别给出。

1.3 弹性变形

由材料力学知道,弹性变形是物体卸载以后,就完全消失的那种变形,即,弹性变 形是可恢复的、可逆的变形。而非弹性变形则是指卸载后不能消失而残留下来的那 部分变形,是不可逆的变形。在小变形假定的条件下,弹性变形与应力的关系是一一 对应的线性关系,因而,具有可加性,即叠加原理是适用的。

物体变形的机理,应从材料内部原子间力的作用来分析。实际上,固体材料之所 以能保持其内部结构的稳定性是由于组成该固体材料(如金属)的原子间存在着相互 平衡的力。吸力使各原子彼此密合在一起,而短程排斥力则使各原子间保持一定的 距离。在正常情况下,这两种力保持平衡,原子间的相对位置处于一种规则排列的稳 定状态。受外力作用时,这种平衡被打破,为了恢复平衡,原子便须产生移动和调整, 使得吸力、斥力和外力之间取得平衡。因此,如果知道了原子间的力相互作用的定 律,原则上就能算出晶体在一定外力作用下的弹性反应。

实际上,固体材料的内部结构是多样的、复杂的。例如夹杂、微孔、晶界等,都是 影响变形发展的因素。目前的一些学说尚不能解释全部固体材料的微观变形机理。 主要是由于所有的工程材料都不可避免的有缺陷存在。对于工程问题来说不必具体 分析每一个缺陷对于材料性态的影响,而只需研究其宏观的统计特性,即可解决工程 设计中的力学分析问题。

今后,我们仅宏观地研究弹性体在受外部作用时的应力场和位移场的分布,主要 是梁、板、壳这一类结构及其他形式的结构物和构筑物的弹性力学问题。

1.4 弹性力学发展历程简介

弹性力学的发展历程与人类文明和社会进步是密切相关的。中国在7世纪至 17世纪这段时期,社会、政治相对稳定,从而出现了以陶瓷、纺织和建筑为代表的生 产技术和生活环境的大改造,以及以农、医、天、算四大学科为代表的中国古代科学体系,还有影响世界文明的四大发明。

11 世纪以后,欧洲从漫长的黑夜苏醒,十字军东征带回了中国的四大发明和希腊的学术,通过大翻译运动,出现了以经院哲学、理性论证为代表的学术复苏。诞生 了实验科学的先驱罗吉尔·培根(Roger·Bacon,1219—1292)。文艺复兴以后,人 们的世界观发生了重大变化,近代科学体系逐渐形成。人们开始探索天体、地球、大 自然。出现了航海罗盘、钟表、枪炮等。社会文明大大的前进了。继欧几里得(Euclid,约 330—275 BC)以后,哥白尼(Nicolaus Copernicus,1473—1543)、开普勒(Johannes Kepler,1571—1630)、伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)、笛卡儿(René Descartes,1596—1650)、牛顿(Isaac Newton,1642—1727)等一大批学者的工作推动 了社会的进步和科学技术的发展。

本书的全部内容,显然都是建立在牛顿力学的基础上。牛顿力学的诞生与完善 经历了漫长的发展历程。谈到牛顿力学就会想到伽利略对牛顿力学的重要贡献。牛 顿于 300 多年前(1687)发表了《自然哲学的数学原理》这一伟大著作,完成了牛顿力 学科学体系的建立。以后,又过了 100 年,拉格朗日(1736—1813)做了出色的工作。 他接受了欧拉变分法的概念和理论,建立了分析力学,降低了解题的难度,使得牛 顿力学有了新的解题方法和严格的数学表述。可称为拉格朗日力学。又过了半个多 世纪,哈密顿(1805—1865)进一步发展了牛顿力学。形成了影响广泛的、具有崭新 面貌的哈密顿力学。牛顿、拉格朗日和哈密顿这三位伟大的天才科学家,经过了 300 多年完成了经典力学的完美体系,至今仍是光彩夺目,应用广泛。

弹性力学完整科学体系的形成也已经有了上百年的历史。有不少著名的经典著 作。例如,勒夫(A. E. H. Love, 1863—1940)著,《数学弹性理论》(A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,)其第一版于 1892年问世,第四版为 1927 年,后被译成各种文字,人们视为不朽经典名著。又如铁摩辛柯(Stephen P. Timoshenko, 1878—1972)著《弹性理论》(Theory of Elasticity,俄文版,卷一,1914 年,卷二,1916年)和以后的各种版本(英文、中文等),以及他的一系列专著(如弹性 振动理论、板壳理论、材料力学、弹性稳定理论等),世界各国用它培养了一代又一代 的工程师和研究人员。稍后有穆斯海里什维利(N. I. Muskhelishvili,1891—1976)在 他的老师克罗索夫(G. V. Kolosoff)工作的基础上出版了著名著作 Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity,俄文第一版于 1933年问世,以后 多次修订,1966年做最后一次修订。在这本传世名著中用复变函数法和奇异积分对 弹性力学平面问题给出了完美的解答。多年来国外出版的弹性力学教科书种类繁 多,各有千秋,难以胜数。

国内出版了很多很好的弹性力学专著和教科书。最早问世的有:钱伟长、叶开源 著《弹性力学》(1956),之后有徐芝伦著《弹性力学》(上下册),武际可、王敏中著《弹性 力学引论》,程昌钧著《弹性力学》、吴家龙著《弹性力学》等,和一大批国外优秀弹性力 学专著和教科书的翻译本。

我国学者在弹性力学发展进程中曾做出了卓越的贡献。例如,钱学森在弹性薄 壳的非线性稳定理论方面的开创性工作,钱伟长对弹性板壳内禀理论的研究,摄动 法、弹性圆板大挠度、穿甲理论等方面的重要贡献,胡海昌对广义变分原理的重要贡 献。最近,钟万勰发展了辛弹性力学和弹性力学求解的新方法,武际可对弹性稳定理 论和力学史的研究做出了贡献。郭仲衡,黄克智,杜庆华,徐秉业等众多知名学者在 弹性力学发展上都做出了各自不同的重要贡献。

思考题

1-1 为什么要引进一些基本假定?如果放弃其中的任一条会出现什么情况?

1-2 你对弹性力学的发展历程和展望有何见解?



2.1 力和应力的概念

作用在物体上的外力可分为表面力和体积力,简称面力和体力。

所谓面力指的是作用在物体表面上的力,如风力、液体压力、两固体间的接触力等。物体上各点所受的面力一般是不同的。为了表明物体表面上的一点 P 所受面

力的大小和方向,我们在 P 点的邻域取一包含 P点在内的微小面积元素 $\Delta S(\mathbb{B} 2-1)$,设在 ΔS 上的 面力为 Δp ,则面力的平均集度为 $\Delta p/\Delta S$ 。如将 ΔS 不断地缩小,则 $\Delta p/\Delta S$ 及 Δp 都将不断地改变 其大小、方向和作用点。如令 ΔS 无限缩小而趋于 P 点, $\Delta p/\Delta S$ 将趋于一定的极限 p_s ,即有

这个极限矢量 p_s 就是 P 点面力的集度。由于

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S} = \boldsymbol{p}_{s} \tag{2-1}$$



 ΔS 是标量,故矢量 p_s 的方向与 Δp 的极限方向相同。 p_s 在坐标轴 x, y, z 方向的投影 p_x, p_y, p_z 称为 P 点面力的分量,并规定指向坐标轴正方向的分量为正,反之为负。

作用在物体表面上的力都占有一定的面积,但对于作用面很小的面力通常理想 化为作用在一点的集中力。 体力,则是满布在物体内部各质点上的力,如重力、惯性力、电磁力等。物体内各 点所受的体力一般也是不同的。我们可以仿照对面力的讨论,得出物体内一点 *C* 所 受的体力为按体积计算的平均集度 Δ**F**_b/ΔV,在微小体积元素 ΔV 无限缩小而趋于*C* 点时的极限矢量 **F**_b,即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F_{\rm b}}{\Delta V} = F_{\rm b} \tag{2-2}$$

显然,体力矢量 $F_{\rm b}$ 的方向就是 ΔV 内的体力 ΔF 的极限方向。

固体材料受外力作用后就要产生内力和变形。用以描述物体中任何部位的内力 和变形特征的力学量是应力和应变。应力的概念,在材料力学课程中虽已讨论并应 用过,但由于这一概念的重要性,我们在这里除了强调应力的确切含义之外,还要进 一步给出在受力物体内某一点处的应力状态的描述方法。



Augustin Louis Cauchy

柯西(A. L. Cauchy) 1789 年生于法国,1857 年逝 世。数学家和力学家。他奠定了应力和应变的理论,首 先指出了矩形截面柱体的扭转与圆形截面柱体的扭转有 重大区别,最早研究了板的振动问题。在数学和力学的 其他领域有很多重要贡献。

柯西(A. L. Cauchy, 1789—1857)首先提出了应力和应变的理论。为了说明应 力的概念,我们假想把受一组平衡力系作用的物体用任一平面 C 分为 A 、B 两部分 (图 2-2)。如将 B 部分移去,则 B 对 A 的作用应代之以 B 部分对 A 部分的作用力。 这种力在 B 移去前是物体内 A ,B 之间在 C 截面上的内力,且为分布力。如从 C 面 上 P 点的邻域取出一包括 P 点在内的微小面积元素 ΔS_c ,而 ΔS_c 上的内力矢量为 Δp ,则内力的平均集度为 $\Delta p/\Delta S_c$ 。如令 ΔS_c 无限缩小而趋于 P 点,则在内力连续 分布的条件下 $\Delta p/\Delta S_c$ 趋于一定的极限 σ ,即

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta S_C \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S_C} \tag{2-3}$$

这个极限矢量 σ 就是物体在过C面上P点处的应力。由于 ΔS_c 为标量,故 σ 的 方向与 Δp 的极限方向一致。

应力 σ 可分解为其所在平面的外法线方向和切线方向这样两个分量。沿应力

所在平面的外法线方向(n)的应力分量叫做正应力,记做 σ_n。沿切线方向的应力分

量叫做剪应力,记做 τ_n 。此处脚注 n 标 明其所在面的外法线方向。因此, Δp 的正应力和剪应力分别为

$$\sigma_{n} = \lim_{\Delta S_{C} \to 0} \frac{\Delta p_{n}}{\Delta S_{C}}$$

$$\tau_{n} = \lim_{\Delta S_{C} \to 0} \frac{\Delta p_{s}}{\Delta S_{C}}$$

$$(2-4)$$

其中 $,\Delta p_n,\Delta p_s$ 分别为 ΔS_c 上的内力矢 量 Δp 在n平面的法向和切向分量。 如果图 2-2 中的n方向与v坐标

轴的方向一致(图 2-3),则此时有 $\sigma_n = \sigma_y \ \mathcal{D}_{\tau_n} = \tau_y$

其中 τ_y 是作用在*C*截面内的剪应力,如将 τ_y 分解为沿*x*轴和*z*轴的两个分量,并记 作 τ_{yx} 和 τ_{yz} ,则过*C*面上*P*点的应力分量为 σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} 。以后,我们对正应力只用一 个字母的下标标记,对剪应力则用两个字母标记,其中第一个字母表示应力所在面的 外法线方向;第二个字母表示应力分量的指向。应力的正负号规定为:正应力以拉 应力为正,压应力为负。

剪应力的正负号规定分为两种情况:当其所在面的外法线与坐标轴的正方向一 致时,则以沿坐标轴正方向的剪应力为正,反之为负;当所在面的外法线与坐标轴的 负方向一致时,则以沿坐标轴负方向的剪应力为正,反之为负。图 2-3 及图 2-4 中的 各应力分量均为正。应力及其分量的量纲为[力][长度]⁻²,单位为帕(Pa)。



在以上的讨论中,过 *P* 点的*C* 平面是任选的。显然,过 *P* 点可以做无穷多个这样的平面*C*。或者说,过 *P* 点有无穷多个连续变化的 *n* 方向。不同面上的应力是不同的。这样,就产生了一个到底如何描绘一点处应力状态的问题。下面我们讨论这个问题。

为了研究 P 点处的应力状态,我们在 P 点处沿坐标轴x,y,z 方向取一个微小的 平行六面体(图 2-5),其六个面的外法线方向分别与三个坐标轴的正、负方向重合, 各边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。假定应力在各面上均匀分布,于是各面上的应力矢量便 可用作用在各面中心点的一个应力矢量来表示。每个面上的应力又可分解为一个正 应力和两个剪应力分量。按前面约定的表示法,图 2-5 给出的各应力分量均为正 方向。



冬 2-5

由图 2-5 可知,当微小的平行六面体趋于无穷小时,六面体上的应力就代表 *P* 点处的应力。因此,*P* 点处的应力分量共有九个,其中有三个正应力分量、六个剪应 力分量(以后将证明剪应力互等定理,从而实际上独立的剪应力分量只有三个)。我 们把这 9 个应力分量按一定规则排列,令其中每一行为过 *P* 点的一个面上的三个应 力分量,即

 $\begin{aligned} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{aligned}$

以上这 9 个应力分量定义一个新的量 Σ ,它描绘了一种物理现象,即 P 点处的应力状态。 Σ 是对坐标系 Oxyz 而言的,当坐标系变换时,它们按一定的变换式变换成 另一坐标系 Ox'y'z'中的九个量

 $\begin{aligned} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{aligned}$

这 9 个分量描绘同一点 *P* 的同一物理现象,所以它们定义的仍为 Σ 。而 σ_x , σ_y ,...,这 9 个量就称为 Σ 的元素。数学上,在坐标变换时,服从一定坐标变换式的九 个数所定义的量叫做二阶张量。根据这一定义, Σ 是一个二阶张量,并称为应力张 量。以后将证明,应力张量为一对称的二阶张量。各应力分量即为应力张量的元素。 在第 2.3 节中我们将给出应力分量在坐标变换时服从的变换公式。

应力张量通常表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$
(2-5)

其中 $i, j = x, y, z, \exists i, j$ 任取 x, y, z 时,便得到相应的分量^①。

式(2-5)与 3×3 阶的矩阵写法相同。如令 *i* 代表行,*j* 代表列,行列数 1,2,3,对 应于 x,y,z。例如第二行第三列的元素为 τ_{23} ,即应力分量为 τ_{yz} ,余类推。

应当指出,物体内各点的应力状态,一般来说是不同的,即非均匀分布的。亦即, 各点的应力分量应为坐标 *x*,*y*,*z* 的函数。所以,应力张量 σ_{ij}与给定点的空间位置有 关,谈到应力张量总是针对物体中的某一确定点而言的。以后我们将看到,应力张量 σ_{ij}完全确定了一点处的应力状态。

张量符号与下标记号法使冗长的弹塑性力学公式变得简明醒目,在文献中已被 广泛应用,今后我们将逐渐熟悉这种标记法。

2.2 二维应力状态与平面问题的平衡方程

上一节中讨论力和应力概念时,是从三维受力物体出发的,其中 P 点是从一个 三维空间中取出来的点。现为简单起见,我们首先讨论平面问题。掌握了平面问题 以后,再讨论空间问题就比较容易了。

平面问题的特点是物体所受的面力和体力以 及其应力都与某一个坐标轴(例如 *x* 轴)无关。平 面问题又分为平面应力问题与平面应变问题。

在平面应力问题中,所考虑的物体是一个很薄 的平板,载荷只作用在板边,且平行于板面 (图 2-6),即 z 方向的体力分量 F_{bz} 及面力分量 p_z 均为零。故取图 2-6 中的坐标系,则板面上($z = \pm t/2$ 处)

$$(\sigma_z)_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0$$

 $(\tau_{zx})_{z=\pm \frac{t}{2}} = (\tau_{zy})_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0$



① σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 已简写为 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 。

由于板的厚度很小,外载荷又沿厚度均匀分布,所以可以近似地认为应力沿厚度 均匀分布。由此,在垂直于 *z* 轴的任一微小面积上均有

$$\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$$

根据我们后面将要证明的剪力互等定理,即应力张量的对称性,还有 $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ 。这就是说,过任一点处不等于零的应力分量只有 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$,且均为x, y的函数。此时,应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(2-6)

现在讨论平面应变问题。设有等截面柱体,其纵轴方向(Oz 坐标方向)很长。外载荷及体力为作用在垂直于 Oz 方向且沿 z 轴均匀分布的一组力。图 2-7 所示的挡

土墙是这类问题的典型例子。如略去端部效 应,则由于外载荷沿 z 轴方向为一常数,故可 以认为,沿纵轴方向各点的位移与其所在 z方向的位置无关,就是说 z 方向各点的位移 均相同。如令 u,v,w 分别为一点在 x,y,z坐标方向的位移分量,则有 w = 常数,等于常 数的位移 w 并不伴随产生任一 xy 平面的翘 曲变形,故在研究应力、应变问题时,可取 w=0。此外,由于物体的变形只在 Oxy 平面 内产生,故 u,v 均与z 无关。因而,对于平面 应变状态有



$$\begin{array}{c} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{array}$$
 (2-7)

由对称条件可知在 O_{xy} 平面内,过任一点处的应力分量 τ_{zx}, τ_{zy} (从而 τ_{xx}, τ_{yz})均 等于零,但由于 z 方向对变形的约束,故 σ_z 一般不等于零。此时,应力张量 σ_{ij} 为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$
(2-8)

实际上,以后将证明, σ_z 不是一个独立的量,它可以由 σ_x 和 σ_y 求出。所以不管 是平面应力问题还是平面应变问题,独立的应力分量只有三个,即 σ_x , σ_y , τ_{xy} ($=\tau_{yx}$), 在求解过程中, σ_z 可暂不考虑。

下面讨论物体处于平衡状态时,各点应力及体力的相互关系,并由此导出平衡

方程。

假定从处于平面应力状态的物体中取出一个微小矩形单元 abcd(图 2-6 中的阴

影部分),其两边的长度分别为 dx,dy,厚度 就是原物体的厚度 t(图 2-8)。这里,因 dxt, dyt 为微小面元,可以把 dxt 和 dyt 上的应力 看成是均匀分布的,故面元上任意点的应力 分量值,可以用该面元中点的应力分量表示 (图 2-8)。在此微小单元体不同的边上,应 力分量的值也不同。如 ab 边上^①的正应力分 量为 σ_x ,则 cd 边上,由于距 y 轴的距离增加 了 dx,正应力分量应随之变化。应力分量的 这种变化可用泰勒级数展开来求。实际上, 我们有



$$\sigma_x\Big|_{cd} = \sigma_x\Big|_{ab} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\Big|_{ab} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\Big|_{ab} dy + o(dx^2, dy^2)$$

注意到,ab 线元与 cd 线元上的应力分量,皆可用相应线元中点处的应力分量来表示。

显然,如 ab 边上的正应力为 σ_x ,则当略去二阶以上微量后 cd 边上的正应力应为

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \mathrm{d}x$$

同理,如 ab 边上的剪应力分量为 τ_{xy} ,ad 边上的两个应力分量为 σ_y , τ_{yx} ,则得 cd 边上的剪应力分量及 bc 边的两个应力分量分别为(图 2-8)

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \end{pmatrix}$$

在静力平衡条件下,各应力分量必然满足平衡条件的要求。对于厚度 t=1 的微 小矩形单元 abcd (图 2-8),由平衡条件 $\sum M_a = 0$ 得

$$\left(\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} \mathrm{d}y \mathrm{d}x\right) \frac{\mathrm{d}x}{2} - \left(\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} \mathrm{d}y \mathrm{d}x\right) \frac{\mathrm{d}y}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$
$$- \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + F_{\mathrm{by}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}x}{2} - F_{\mathrm{bx}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}y}{2} = 0$$

① 即 dyt 面积上,以下的讨论取 t=1,故 dyt 上的应力就以 ab 线上的应力来表示。下同。

略去 dx、dy 的三次方的项,得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{2-9}$$

这就是前面曾经提到的剪应力互等定理^①。以下我们常不再区分 τ_{xy} 和 τ_{yx} 。 由平衡条件 $\Sigma X = 0$ 得

$$\left(\sigma_{x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y - \sigma_{x} \mathrm{d}y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x - \tau_{yx} \mathrm{d}x + F_{\mathrm{b}x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0$$

化简后为

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

其中 dxdy 不等于零,故有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx} = 0 \qquad (2-10a)$$

同理由 $\sum Y=0$ 得

$$\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_{by} = 0 \qquad (2-10b)$$

上式(2-10)是平面问题的平衡方程。

对于三维应力状态的情况,可从受力物体中取出一微小六面体单元,可类似地导 出(具体推导,留作练习)

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{2-11}$$

及

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_{bx} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_{by} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} = 0$$
(2-12)

上式(2-12)为三维情况下的平衡方程。

如采用张量符号与下标记号法,则剪应力互等定理可缩写为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = x, y, z) \tag{2-13}$$

由此可知,应力张量为一对称张量,其中只有6个独立元素

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ (\mathfrak{M} \mathfrak{M}) & \sigma_z \end{bmatrix}$$

在平面应力状态,有

① 剪应力互等定理的成立仅限于"非极化"介质,对于微极性介质则该定理不再成立。详见,W. Nowacki, Tmeory of Asymmetric Elasticity, Pergamon Press 1986

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ (\mathfrak{M} \mathfrak{K}) & 0 \end{bmatrix}$$

平衡方程(2-12)可缩写为

$$\sigma_{ij,j} + F_{\mathrm{b}i} = 0 \tag{2-14}$$

其中 $\sigma_{ij,j}$ 表示 $\sigma_{ij}(i,j=x,y,z)$ 对于 j(=x,y,z)取偏导数。下同(下标记号法和求和 约定详见附录 [)。

所以 $\sigma_{ii,i}=0$,就代表

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

2.3 一点处应力状态的描述

现以平面问题为例说明一点处应力状态的描述。为此,我们在受力物体中取一 个微小三角形单元,如图 2-9 所示,其中 AB,AC 与坐标 y,x 重合,而 BC 的外法线



与x 轴成 θ 角。取x'y'坐标,使 BC 的外法线方 向与x'方向重合(如图 2-9)。在这种情况下,如 果 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 已给定,则 BC 面上的正应力 σ_x' 与剪 应力 $\tau_{x'y'}$ 可用已知量表示,由于 θ 角的任意性,则 当 BC 面趋于A 点时,便可以说求得了描绘过A 点处的应力状态的表达式。实际上,此处所讨论 的问题,是一点处不同方向的面上的应力的转 换,即 BC 面无限趋于A 点时,该面上的应力如 何用与原坐标相平行的面上的应力来表示。在 这种问题的分析中,可不必引入应力增量和体 力,因为它们与应力相比属于小量。

假定 BC 的面积为 1,则 AB 和 AC 的面积分别为 $\cos\theta = \sin\theta$ 。于是,由平衡条 件 $\sum X = 0$ 和 $\sum Y = 0$ 可得

$$p_{x} = \sigma_{x} \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta$$

$$p_{y} = \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_{y} \sin\theta$$
(2-15)

其中 p_x, p_y 为 BC 面上单位面积的力 p 在 x, y 方向的投影(图 2-9)。把 p_x, p_y 投影

到x',y'坐标方向得

$$\sigma_{x'} = p_x \cos\theta + p_y \sin\theta$$

$$\tau_{x'y'} = p_y \cos\theta - p_x \sin\theta$$
(2-16)

把式(2-15)代入式(2-16)得

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta$$
(2-17)

或改写为

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (2-18a)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (2-18b)$$

把式(2-18a)中的 θ 换成 $\theta + \frac{\pi}{2}$,则得

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (2-18c)$$

上式(2-18)在材料力学中曾经讨论过,并给出了莫尔圆的作图法。于是当 BC面趋于A点时,若已知A点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,则由式(2-18)即可求得过该点任 意方向平面上的应力分量。换言之,对于平面问题,式(2-18)充分地描述了一点的 应力状态。

在三维的情况下,我们在任意一点 O 附近 取出一微小四面体单元 OABC,斜面 ABC 的 外法线为 n(图 2-10)。如令斜面 ABC 的面积 为 1,则三角形 OBC,OAC,OAB 的面积分 别为

$$1 \times \cos(n, x) = l_1$$
$$1 \times \cos(n, y) = l_2$$
$$1 \times \cos(n, z) = l_3$$

如 ABC 面上单位面积的面力为 p,其沿坐标 轴方向的分量用 p_x, p_y, p_z 表示,则不难由微 小四面体单元的平衡条件得出



冬 2-10

$$p_{x} = \sigma_{x}l_{1} + \tau_{xy}l_{2} + \tau_{xz}l_{3}$$

$$p_{y} = \tau_{yx}l_{1} + \sigma_{y}l_{2} + \tau_{yz}l_{3}$$

$$p_{z} = \tau_{zx}l_{1} + \tau_{zy}l_{2} + \sigma_{z}l_{3}$$
(2-19)

上式(2-19)按下标记号法与求和约定可缩写为

 p_i

$$=\sigma_{ij}n_j \quad (i,j=x,y,z) \tag{2-19'}$$

此处 n_j 为斜面 ABC 外法线 n = j(=x,y,z) 轴间夹角的方向余弦 $\cos(n,j)$,根

据以上定义,有

$$n_x = \cos(n, x) = l_1$$

$$n_y = \cos(n, y) = l_2$$

$$n_z = \cos(n, z) = l_3$$

以上讨论的是在空间坐标系 Oxyz内,与坐标轴呈任意倾斜的面上单位面积的面力 p_x, p_y, p_z 的表达式(2-19)。现在考虑当坐标系 Oxyz 变换到坐标系 Ox'y'z'时,新旧坐标系内各应力分量间的关系。并由此给定应力张量的各元素在坐标变换时所遵循的法则。

为此令新坐标系 Ox'y'z'的 Ox'轴与图 2-10中的 n方向相合,新旧坐标系间的方 向余弦为 $l_{11} = \cos(x',x), l_{12} = \cos(x',y), \dots,$ 如表 2-1所示,则 x'方向的正应力 σ_x' 为

$$\sigma_{x'} = p_x l_{11} + p_y l_{12} + p_z l_{13}$$

耒	2-1
75	- 4-1

	x	У	z
<i>x</i> ′	l_{11}	l_{12}	l_{13}
y'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
z'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

将式(2-19)代入上式,并注意到其中之 l_1 , l_2 , l_3 分别等于 l_{11} , l_{12} , l_{13} ,则得

 $\sigma_{x'} = \sigma_{x} l_{11}^{2} + \sigma_{y} l_{12}^{2} + \sigma_{z} l_{13}^{2} + 2(\tau_{xy} l_{11} l_{12} + \tau_{yz} l_{12} l_{13} + \tau_{xz} l_{11} l_{13})$

类似地,有 p_x, p_y, p_z 在 y', z'方向的投影,可得用 $\sigma_{ij}(i, j = x, y, z), l_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 表示的 $\tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}$ 。之后将 y'轴与 n 方向重合,类似地可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的 $\sigma_{y'}, \tau_{y'x'}, \tau_{y'z'}$ 。再将 z'轴与 n 方向重合,可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的 $\sigma_{z'}, \tau_{z'x'}, \tau_{z'y'}$ 。这样最终可得 $\Pi \sigma_{ij}, l_{ij}$ 表示的全部 Ox'y'z'坐标系内的应力分量 $\sigma_{ij'}$

$$\sigma_{i'j'} = l_{i'i}l_{j'j}\sigma_{ij} \tag{2-20}$$

变换式(2-20)即 σ_{ij}在坐标变换时所遵守的法则。

凡一组 9 个量 σ_{ii} ,在坐标变换时服从式(2-20)给出的法则,就称为二阶张量。

2.4 边界条件

当物体处于平衡状态时,其内部各点的应力状态应满足平衡微分方程(2-12), 在边界上应满足边界条件。边界条件可能有三种情况:(1)在边界上给定面力称为 应力边界条件;(2)在边界上给定位移称为位移边界条件;(3)在边界上部分给定面 力,部分给定位移称为混合边界条件。下面分别以平面问题为例给出几种边界条件 的表示法。 1. 应力边界条件

当物体的边界上给定面力时(以后称给定面力的边界为 S_{σ}),则物体边界上的应 力应满足与面力相平衡的力的平衡条件。如边界附近有一点 A,物体的坐标系为 $Oxy(图 2-9),边界线为 BC,其外法线方向为 n; A 点的应力 <math>\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的值尚为未 知,BC 面上单位面积的面力为 p,其在 x, y方向的分量为 p_x, p_y 。当 A 点无限趋于 BC 时,由应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 与面力 p_x, p_y 之间的平衡条件可得应力边界条件。BC 的外法线方向为 n,它的方向余弦为 $\cos(n, x) = l_1, \cos(n, y) = l_2$,则式(2-15)可改 写为

$$p_x = \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2$$

$$p_y = \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2$$

$$(2-15')$$

在三维条件下,则可由边界附近任取一微小四面体 OABC,如图 2-10 所示。如面力已知为 p,则相应的应力边界条件为式(2-19)

$$p_x = \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3$$

$$p_y = \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3$$

$$p_z = \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3$$

或即

$$p_i = \sigma_{ij} n_j$$

此处 $n_j = \cos(x_j, n)$,从应力边界条件的表达式(2-15['])或(2-19)看出应力边界 条件与坐标系 Oxyz 的选取及物体边界的方向余弦有关。

对于平面问题,当边界与某一坐标轴相垂直时,应力边界条件可得到简化。在垂 直于 x 轴的边界上 n 与 x 轴方向重合,故有 $l_1 = \cos(n, x) = \pm 1, l_2 = \cos(n, y) = 0$, 于是(2-15')简化成为

$$\sigma_x = \pm p_y, \quad \tau_{xy} = \pm p_x$$

同理在垂直于 y 轴的边界上,由于 n 与 y 轴方向相重合故有

 $l_1 = \cos(n, x) = 0, \quad l_2 = \cos(n, y) = \pm 1$

应力边界条件可化为

$$\sigma_y = \pm p_x, \quad \tau_{yx} = \pm p_y$$

在这种情况下,边界处应力分量的数值与单位面积上的面力分量相等。且当边 界的外法线方向沿坐标轴的正向时,取正号。反之,取负号。

2. 位移边界条件

当边界上已知位移时,应建立物体边界上点的位移与给定位移相等的条件。如 令给定位移的边界为 S_u,则有(在 S_u 上)

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \tag{2-21}$$

其中 ū、ī 分别为边界上 x, y 方向的已知位移分量。

对于三维问题, 位移边界条件为(在 S_u 上)

$$= \bar{u}_i \tag{2-22}$$

此处 $i=1,2,3(u_1,u_2,u_3 \subseteq u,v,w$ 相对应)。

3. 混合边界条件

混合边界条件有两种情况:一种情况是在物体的整个边界 S 中,一部分已知应力,即给定应力的边界 S_a ,此部分边界应用应力边界条件(2-19);其余部分给定位移,即给定位移的边界 S_a ,在 S_a 上用位移边界条件(2-22)。这时相当于给了两种边界。另一种情况是在同一部分边界上已知部分位移和部分应力,即给定位移与应力混合条件。如图 2-11 给出的由一组连杆支承的深梁就是这种情况,已知 AB 面上 y 方向的位移及 x 方向剪应力均等于零,即(在 S_{AB} 上)

 u_i



例 2-1 若已给定坐标系 Oxy 如图 2-12 所示,试列出图中各平面问题的自由边界的应力边界条件。

解

- (a) 1) 题中已给定坐标系 Oxy。
 - 2) 求方向余弦。已知边界 S = x 轴相垂直,故有

$$l_1 = \cos(n, x) = \pm 1, \quad l_2 = \cos(n, y) = 0$$

- 3) **已知** $p_x = p_y = 0$ 。
- 4) 代入应力边界条件公式(2-15['])

$$\sigma_x = + p_x = 0, \quad \tau_{xy} = + p_y = 0$$

即应力边界条件为(在 S L):

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0$$

- (b) 1) **题已给出坐标系** *Oxy*。
 - 2) 求方向余弦。已知边界 S = y 轴成 θ 角,故有

 $l_1 = \cos(n, x) = \cos\theta$

 $l_2 = \cos(n, y) = \sin\theta$

3) S 为自由边界,故有

$$p_x = p_y = 0$$

4) 代入式(2-15')得

 $0 = \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta$ $0 = \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta$

得边界条件为

$$\sigma_x = -\tau_{xy} \tan\theta$$
$$\sigma_y = -\tau_{xy} \cot\theta$$

例 2-2 设有图 2-13 所示水坝,试列出光滑的 OA 面的应力边界条件。

解此问题可作为平面应变问题考虑。

1) 选取坐标系 *Oxy* 如图 2-13 所示,坐标原点在 坝顶 *O* 处。

2) 计算方向余弦。因 OA 与 x 轴垂直,故

$$l_1 = \cos(n, x) = -1$$
$$l_2 = \cos(n, y) = 0$$

3) 求出面力分量 p_x, p_y (设水的容重为 γ)代入边 界条件(2-15[']),整理后得

 $\tau_{xy} = 0$

 $\sigma_x = -\gamma_y$



2.5 主应力与主方向

在过受力物体内一点任意方向的微小面元上,一般都有正应力与剪应力,不同方 向的面元上这些应力有不同的数值。当此微小面元转动时,它的法线方向 n 随之改 变,面元上的正应力 σ_n 与剪应力 τ_n 的方向和它们的值也都要发生变化。在 n 方向不 断改变的过程中,必然要出现这样的情况,即面元上只有正应力,而剪应力 τ_n 等于 零。我们把这时面元的法线方向 n 称为主方向,相应的正应力 σ_n 称为主应力, σ_n 所 在的面称为主平面。以下将说明,物体中任一点都有三个主应力和相应的三个主 方向。

在图 2-10 中,如令 p_x, p_y, p_z 为 ABC 面上单位面积面力 p 的三个分量,则有

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$
 (a)

ABC 面上的正应力 σ_n 即为

$$\sigma_n = p_x l_1 + p_y l_2 + p_z l_3 \tag{b}$$

将(2-19)式代入上式(b)式得

$$\sigma_{n} = (\sigma_{x}l_{1} + \tau_{xy}l_{2} + \tau_{xz}l_{3})l_{1} + (\tau_{yx}l_{1} + \sigma_{y}l_{2} + \tau_{yz}l_{3})l_{2} + (\tau_{zx}l_{1} + \tau_{zy}l_{2} + \sigma_{z}l_{3})l_{3} = \sigma_{x}l_{1}^{2} + \sigma_{y}l_{2}^{2} + \sigma_{z}l_{3}^{2} + 2(\tau_{xy}l_{1}l_{2} + \tau_{xz}l_{1}l_{3} + \tau_{yz}l_{2}l_{3})$$
(2-23)

式(2-23)为 *n* 方向(亦即任意方向)的斜面上正应力的表达式。该面上的剪应力为 $\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2$ (2-24)

将(a)式及(2-23)式代入上式(2-24),可得法线方向为n的面上的剪应力。

如果在一个斜面上的剪应力为零,即 $\tau_n = 0$,则从(2-24)式有 $\sigma_n^2 = p^2$,此时该斜面上的正应力 σ_n 就是正应力。在这种情况下,该斜面的正应力 σ_n 即与 p 的大小和方向完全相同^①。于是有

$$p_{x} = pl_{1} = \sigma_{n}l_{1}$$

$$p_{y} = pl_{2} = \sigma_{n}l_{2}$$

$$p_{z} = pl_{3} = \sigma_{n}l_{3}$$
(c)

将(c)式代入(2-19)式得

$$\sigma_{x}l_{1} + \tau_{xy}l_{2} + \tau_{xz}l_{3} = \sigma_{n}l_{1}$$

$$\tau_{xy}l_{1} + \sigma_{y}l_{2} + \tau_{yz}l_{3} = \sigma_{n}l_{2}$$

$$\tau_{xz}l_{1} + \tau_{yz}l_{2} + \sigma_{z}l_{3} = \sigma_{n}l_{3}$$
(d)

上式可改为

$$\begin{aligned} & (\sigma_{x} - \sigma_{n})l_{1} + \tau_{xy}l_{2} + \tau_{xz}l_{3} = 0 \\ & \tau_{xy}l_{1} + (\sigma_{y} - \sigma_{n})l_{2} + \tau_{yz}l_{3} = 0 \\ & \tau_{xz}l_{1} + \tau_{yz}l_{2} + (\sigma_{z} - \sigma_{n})l_{3} = 0 \end{aligned}$$

$$(2-25)$$

或

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_n)l_j = 0 \tag{2-25'}$$

此处 δ_{ii} 为柯氏 δ (Kronecker- δ), 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \stackrel{\text{if}}{=} i = j \\ 0 & \stackrel{\text{if}}{=} i \neq j \end{cases}$$

*l*₁,*l*₂,*l*₃ 满足下列关系式

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \tag{2-26}$$

于是我们得到含有 σ_n , l_1 , l_2 , l_3 四个未知数的四个方程式(2-25)和式(2-26), 求解之 后便可得到主应力及与之对应的主方向。现在我们用下述方法来讨论问题的解。由 于式(2-26)说明 l_1 , l_2 , l_3 这三个方向余弦不可能同时等于零, 所以式(2-25)可看成

① 该斜面的面积取为1。

关于 l_1 , l_2 , l_3 的线性齐次方程组,而且应当有非零解存在。由齐次方程组有非零解的条件得到

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0$$
 (2-27)

上式展开后得

$$(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \tau_{xz}\tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n)$$
$$- \tau_{yz}\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_n) - \tau_{xy}\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) = 0$$
$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0$$
(2-28)

或 其中

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{2-29a}$$

$$I_{2} = \sigma_{x} \sigma_{y} + \sigma_{y} \sigma_{z} + \sigma_{x} \sigma_{z} - \tau_{xy}^{2} - \tau_{yz}^{2} - \tau_{xz}^{2}$$
(2-29b)

$$I_{3} = \begin{vmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z} \end{vmatrix}$$
(2-29c)

方程(2-28)是关于 σ_n 的三次方程,它的三个根,即为三个主应力,其相应的三组 方向余弦对应于三组主平面。方程(2-28)的三个根都是实根,因为(2-25)说明主应 力是应力张量 σ_{ij} 的特征值,式(2-27)或式(2-28)为特征方程。因应力张量为对称张 量,其各元素均为实数,故必有实特征根,即三个主应力都是实数,其方向余弦为应力 张量 σ_{ij} 的特征向量。方程(2-28)的三个根均为实数的证明还可以从三次方程根的 性质的代数理论中得到。上述讨论证实了下列事实:在物体内任意一点,必有三个 互相垂直的主应力,它们的方向就是主方向。

主应力的大小与坐标选择无关,故方程(2-28)的三个系数 I_1, I_2, I_3 也必与坐标选择无关。不然的话,主应力就要随坐标选择的不同而变化。所以 I_1, I_2, I_3 为不变量,分别称为第一、第二、第三应力张量的不变量,简称应力不变量。

解(2-28)后,得到所考虑点的三个主应力,从大到小记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,$ 即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。如果坐标轴恰与主方向重合,则应力不变量用主应力表示为

$$I_{1} = \sigma_{1} + \sigma_{2} + \sigma_{3}$$

$$I_{2} = \sigma_{1}\sigma_{2} + \sigma_{2}\sigma_{3} + \sigma_{3}\sigma_{1}$$

$$I_{3} = \sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}$$

$$(2-30)$$

以主应力 σ_1 , σ_2 , σ_3 的方向为坐标轴(记为 1,2,3)的几何空间,称为主向空间。 要了解在主向空间任意斜面上的应力,可假定某一斜面的应力矢量为 p,该斜面的方 向余弦为 l_1 , l_2 , l_3 (图 2-14),注意到 p 在坐标轴方向的三个投影分别为 $p_1 = \sigma_1 l_1$, $p_2 = \sigma_2 l_2$, $p_3 = \sigma_3 l_3$,于是该面上的正应力 σ 与剪应力 τ 的关系为

$$\sigma^{2} = p^{2} - \tau^{2} = p_{1}^{2} + p_{2}^{2} + p_{3}^{2} - \tau^{2}$$

= $\sigma_{1}^{2} l_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2} l_{2}^{2} + \sigma_{3}^{2} l_{3}^{2} - \tau^{2}$ (2-31)

由于

$$\sigma = p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2$$
(2-32)

故有

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 l_1^2 + \sigma_2^2 l_2^2 + \sigma_3^2 l_3^2 - (\sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2)^2}$$
(2-33)

现在我们讨论一种特殊情况,即在主向空间取一斜面,该斜面的法线 *n* 与三个坐 标轴呈等倾斜,即

 $l_1 = l_2 = l_3$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

故

$$l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

或

 $\operatorname{arccos}(l_1) = \operatorname{arccos}(l_2) = \operatorname{arccos}(l_3) = 54^{\circ}44'$

在这一三维空间中的上半空间(*xy* 平面以上,即 *z* 的正方向)可构成四个这样的面,在下半空间(*xy* 平面以下,即 *z* 的负方向)也可构成四个这样的面,共有八个。这 八个面组成了一个正八面体,其中每一个面称为八面体平面。图 2-15 给出了八面体的图形。



鉴于八面体平面上的应力在塑性理论中的重要性,下面我们给出八面体平面上的正应力和剪应力。八面体平面上的正应力σ₈由式(2-32)得

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$
 (2-34)

y

I

ΓΩ

图 2-16

由式(2-33)得八面体平面上的剪应力 τ₈ 为

$$\tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$
(2-35)

一般情况为

$$\tau_{8} = \frac{1}{3} \left[(\sigma_{x} - \sigma_{y})^{2} + (\sigma_{y} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{z} - \sigma_{x})^{2} + 6(\tau_{yz}^{2} + \tau_{zx}^{2} + \tau_{xy}^{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$
(2-35')

例 2-3 设在平面问题条件下,一点 P 的应力状态 为已知,试求(1)主应力及主方向,(2)最大剪应力及其所 在的面 θ_p 。

解 (1) 已知一点的应力状态,即给定应力张量

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设在某一平面 $C \mathrel{\subseteq} x$ 轴成 θ 角(图 2-16),则有

$$l_1 = \cos\theta, \quad l_2 = \sin\theta, \quad l_3 = 0$$

代入式(2-18),得 C 面上的正应力及剪应力分别为

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$
 (a)

$$\tau_n = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{b}$$

如 n 方向为主方向, C 平面为主平面, 则 $\tau_n = 0$ 由(b)得到

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{c}$$

由于 $\tan 2\theta = \tan(\pi + 2\theta)$,所以,*n*方向及与之正交的方向是两个主方向。两个 主平面的法线与 Ox 轴分别呈 θ 及 $\theta + \frac{\pi}{2}$ 角度

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

将由式(c)所得之结果代入式(a),可得两个主应力 σ₁,σ₂ 之值,亦可由代数运算 求出主应力的一般公式为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{d}$$

(2) 欲求最大或最小剪应力所在的面,可由下列条件求出:

$$d\tau_n/d\theta=0$$

由此得

23

$$\cot 2\theta_p = -2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \tag{e}$$

和前一种情况类似, $2\theta_p$ 和 $2\theta_p + \pi$ 同时满足上式,由此可知最大和最小剪应力作 用面相互垂直。由式(e)求出 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 后,代入(b)式可得

$$\left. \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

当 $\tau_{xy} = 0$ 时, $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ 为两个主应力,此时最大最小剪应力为

$$\left. \begin{array}{c} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

比较(c)与(e)可以看出

$$\tan 2\theta = -\cot 2\theta_p = \tan\left(2\theta_p + \frac{\pi}{2}\right)$$

所以,最大、最小剪应力所在的面与主平面成 45°角。

2.6 球张量与应力偏量

在外力作用下,物体的变形通常可分为体积改变和形状改变两种成分。并且认为,体积的改变是由于各向相等的应力引起的。试验证明^①,固体材料在各向相等的 应力作用下,一般都表现为弹性性质。因而可以认为,材料的塑性变形主要是物体产 生形状变化时产生的。这样,在塑性理论中,常根据这一特点把应力状态进行分解。

在一般情况下,某一点处的应力状态可以分解为两部分,一部分是各向相等的压 (或拉)应力 σ,另一部分记为 s_{ii},即

$$\sigma_{ii} = \sigma + s_{ii} \tag{2-36}$$

其中

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{\rm m} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{\rm m} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{\rm m} \end{bmatrix}$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\rm m} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\rm m} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\rm m} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\rm m} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_8$$

① P. W. Bridgman(1925)的实验证明,对于金属材料,在大约 2.5Gpa 的静水压力作用下,才呈现出很小的压缩性(约 0.06%)。

 σ 可定义为球形应力张量,简称球张量。而 s_{ij} 则称为偏斜应力张量,简称应力偏量。

球张量表示一种"球形"应力状态。实际上,在主向空间内,如令任一斜面 *n* 上的 应力矢量为 *p*,其沿 1,2,3 轴的分量为

$$p_1 = \sigma_1 l_1$$

 $p_2 = \sigma_2 l_2$
 $p_3 = \sigma_3 l_3$

代入式(2-26)后,则得

$$\frac{p_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$
(2-37)

上式是一个椭球面方程,它表示在以 p_1, p_2, p_3 为坐标轴的空间内的主半轴为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的一个椭球面,称为应力椭球面(图 2-17(a))。意思是说,当任一点 O 的每 一斜面上的应力都用应力矢量 $p(其分量为 p_1, p_2, p_3)$ 表示的话,则任一从 O 做出的 这种矢量的矢端都落在此椭球面上,如图 2-17(a)所示。



冬 2-17

当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$ 时,式(2-37)可化为

 $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \sigma_{\rm m}^2$

这是一个以_{σ_m}为半径,以坐标轴原点为球心的球面方程,是上述应力椭球面的 特殊情况。它表示一个球形应力状态,如图 2-17(b)所示。球张量便由此而得名。

应力偏量则只由偏应力分量 $\sigma_x - \sigma_m = s_1, \sigma_y - \sigma_m = s_2, \sigma_z - \sigma_m = s_3,$ 及剪应力分量

 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 构成。以主应力表示的应力偏量为

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix}$$

对于球张量和应力偏量 *s_{ij}*,可以类似于应力张量 *σ_{ij}*那样得到其应力偏量的三个 不变量为

$$J_{1} = 0$$

$$J_{2} = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_{1} - \sigma_{2})^{2} + (\sigma_{2} - \sigma_{3})^{2} + (\sigma_{3} - \sigma_{1})^{2} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} (s_{1}^{2} + s_{2}^{2} + s_{3}^{2}) = s_{1}s_{2} + s_{2}s_{3} + s_{3}s_{1}$$

$$J_{3} = s_{1}s_{2}s_{3}$$

$$(2-38)$$

其中:

$$\left. \begin{array}{c} s_1 = \sigma_1 - \sigma_m \\ s_2 = \sigma_2 - \sigma_m \\ s_3 = \sigma_3 - \sigma_m \end{array} \right\}$$

$$(2-39)$$

复习要点

1. 应力矢量 σ 的准确定义:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S} = \boldsymbol{\sigma}$$

2. 一点应力状态的描述:

应力张量 *σ_{ii}*完全确定了一点的应力状态

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \sigma_{ii} + s_{ij}$$

3. 三类边界条件:

应力边界条件 $p_i = \sigma_{ij} n_j$ (在 S_σ 上) 位移边界条件 $u_i = \overline{u}_i$ (在 S_u 上) 两种形式的混合边界条件。 4. 三个应力不变量 I_1, I_2, I_3 : $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ $I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$ $I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$ 5. 应力偏量的概念及应力偏量的三个不变量: $J_1 = 0$ $J_2 = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1$

$$J_3 = s_1 s_2 s_3$$

思考题

2-1 为什么定义物体内部应力状态的时候要采取在一点的邻域取极限的办法? 是什么物理意义?

2-2 满足平衡方程和边界条件的应力是否是实际的应力?为什么?

2-3 剪应力互等定理有没有前提条件?为什么?

2-4 应力不变量为什么不变?

2-5 平面应力与平面应变的主要异同是什么? 它们都是怎样从实际问题中简化而来的?

2-1 已知一点处的应力状态为

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{3} \operatorname{Pa}$$

试求该点处的最大主应力及主方向。

答案: $\sigma_1 = 17.083 \times 10^3 \text{ Pa}, \sigma_1$ 与 x 轴的夹角为 $40^{\circ}16'$ 。

2-2 试用初等理论求出受均布载荷作用的简支梁(矩形截面)的应力状态,并 校核所得结果是否满足平衡方程与边界条件。

2-3 试证在坐标变换时, I₁ 为一不变量。

2-4 已知下列应力状态
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix} \times 10^5 \, \mathrm{Pa}$$

试求八面体正应力与剪应力。

答案: $\sigma_8 = 5.333 \times 10^5$ Pa, $\tau_8 = 8.653 \times 10^5$ Pa

2-5 试写出下列情况的边界条件(坐标系如图所示)。

2-6 设图中短柱体处于平面应力状态,试证在牛腿尖端C处的应力等于零。





3.1 变形与应变的概念

前面我们讨论了受力物体的应力,现在开始讨论物体的变形。在外力作用下,物 体各点的位置要发生变化,即发生位移。如果物体各点发生位移后仍保持各点间初 始状态的相对位置,则物体实际上只产生了刚体移动和转动,称这种位移为刚体位 移。如果物体各点发生位移变形后改变了各点间初始状态的相对位置,则物体就同 时也产生了形状的变化,称为该物体产生变形。

本章主要讨论弹性物体的变形。

设有一弹性体(图 3-1),在外力作用下发生 了变形。图中实线轮廓为变形前的状态,虚线 为变形后的状态。物体中的点 A 和 B,变形后 的位置为 A'和B'。各点的位移可以用其 x,y,z方向的位移分量 u,v,w表示。因而只要确定了 物体各点的位移,物体的变形状态就确定了。 因物体各点的位移一般是不同的,故位移分量 u,v,w 应为坐标的函数,即



u = u(x, y, z), v = (x, y, z), w = (x, y, z)

为要确定物体各点的位移,我们首先研究物体中任一微小线段的变形状态,以此

逐步阐述应变的概念。

设在 Oxy 平面内未变形前物体中相邻的两点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 P(x, y)间的线段为 P_0P_0 变形后该线段两端分别移到 $P'_0(x'_0, y'_0)$ 和 P'(x',y')。如 P_0P 用矢量 S 表示(图 3-2),变形后为 S'。S 沿 x, y 轴的分量为 S_x, S_y 。而 S'为 $P_0'(x_0', y_0')$ $S'_x = S_x + \delta S_x$ $P_0(x_0, y_0)$ $S'_{v} = S_{v} + \delta S_{v}$ x P。点的位移分量为 冬 3-2

(3-1)

P 点的位移分量为

$$\begin{array}{c} u = x' - x \\ v = y' - y \end{array}$$

$$(3-2)$$

假定位移 u,v 为 x,y 的单值连续函数,则可将 P 点位移对 P₀ 按泰勒级数展开, 即有

$$u = u_{0} + \frac{\partial u}{\partial x} S_{x} + \frac{\partial u}{\partial y} S_{y} + o(S_{x}^{2}, S_{y}^{2})$$

$$v = v_{0} + \frac{\partial v}{\partial x} S_{x} + \frac{\partial v}{\partial y} S_{y} + o(S_{x}^{2}, S_{y}^{2})$$
(3-3)

由于 P 就在 P_0 的邻域, S 是个小量, 故 S_x , S_x 的二次项认为是可以略去不计的高阶 微量。

将(3-1)、(3-2)代入(3-3),可得

$$(x'-x) - (x'_0 - x_0) = \frac{\partial u}{\partial x} S_x + \frac{\partial u}{\partial y} S_y$$
$$(y'-y) - (y'_0 - y_0) = \frac{\partial v}{\partial x} S_x + \frac{\partial v}{\partial y} S_y$$

而矢量 S, S'的变化为

$$\begin{split} \delta S_x &= S'_x - S_x = (x' - x) - (x'_0 - x_0) \\ \delta S_y &= S'_y - S_y = (y' - y) - (y'_0 - y_0) \end{split}$$

于是有

$$\delta S_{x} = \frac{\partial u}{\partial x} S_{x} + \frac{\partial u}{\partial y} S_{y}$$

$$\delta S_{y} = \frac{\partial v}{\partial x} S_{x} + \frac{\partial v}{\partial y} S_{y}$$
(3-4)

或简写为

y)

 \overline{O}

$$\delta S_i = u_{i,j} S_j \tag{3-5}$$

在二维情况 i, j = x, y,此时 $u_{i,j}$ 为

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在三维情况下,i,j=x,y,z,此时 $u_{i,j}$ 为

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

称为相对位移张量。一般地说,它是不对称的。

由图 3-2 明显看出,S 移至 S'有刚体位移发生。但这种刚体移动并不引起物体的变形,在应变分析中不需考虑,故应从以上的公式中消去表示刚体移动的一部分位移。为此,我们设想 S 经刚体位移移至 S'的位置。此时,因长度没有变化,故有

$$S^{2} = S'^{2} = (S_{x} + \delta S_{x})^{2} + (S_{y} + \delta S_{y})^{2}$$
(3-6)

展开上式,并略去 δS_i 的高阶微量后,得

$$S^{2} = S^{2} + 2(S_{x}\delta S_{x} + S_{y}\delta S_{y})$$

由此得
$$S_{x}\delta S_{x} + S_{y}\delta S_{y} = 0$$
(3-7)

或

$$S_i \delta S_i = 0 \tag{3-8}$$

与(3-5)比较,有

$$S_i \delta S_i = S_i u_{i,j} S_j = 0$$

或即

$$\frac{\partial u}{\partial x}S_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)S_xS_y + \frac{\partial v}{\partial y}S_y^2 = 0$$

由 S_x , S_y 的任意性, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3-9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{3-10}$$

同样地,当在 Oyz 平面和 Oxz 平面讨论时,可得出另外三个条件:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

从而当在 Oxyz 空间讨论时,则同时得到以下六个条件。由此有

 $u_{i,j} = -u_{j,i}$

这就是说,对应于刚体移动的相对位移张量,必为反对称张量。

任何一个二阶张量都可以惟一地分解成一个对称张量和一个反对称张量。因而 *u_{i,j}*分解成的反对称部分即表示刚体位移部分,对称部分为纯变形部分。于是,*u_{i,j}*可 分解为如下两部分:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$
(3-11)

或

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \tag{3-12}$$

此处

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0\\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(3-13)
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(3-14)

 ε_{ij} 即应变张量, ω_{ij} 即转动张量。

对于三维情况,应变张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$
(3-15)

转动张量为

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

这样,对于纯变形来说,方程(3-5)化为

$$\delta S_i = \epsilon_{ij} S_j$$
 (3-16)
现在说明应变张量 ϵ_{ij} 的物理意义。如 S 平行 x 轴,则
 $S_x = S, S_y = 0$

则(3-4)化为

$$\epsilon_{11} = \epsilon_x = rac{\delta S_x}{S_x} = rac{\delta S}{S}$$

可见, ε_x 表示原来与x轴平行的矢量的单位长度的伸长(或压缩),称为线应变 或正应变。同理可知 ε_{γ} 和 ε_{z} 的物理意义也是线应变。

如有两个矢量 S_1, S_2 变形前分别平行于 Ox, Oy轴(图 3-3),i, j分别为Ox, Oy方向 的单位矢量,则

$$S_1 = iS$$

 $\mathbf{S}_2 = \mathbf{j}S_2$

变形后, S_1 , S_2 分别变为 S'_1 , S'_2 显然有

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{S}_{1}' = \boldsymbol{i}(\delta S_{1x} + S_{1}) + \boldsymbol{j} \delta S_{1y} \\ \boldsymbol{S}_{2}' = \boldsymbol{i} \delta S_{2x} + \boldsymbol{j} (\delta S_{2y} + S_{2}) \end{array}$$
(3-17)

令 S'_1 与 S'_2 的夹角为 φ ,则由两矢量的内积定 义,有

$$\mathbf{S}_1' \cdot \mathbf{S}_2' = S_1' S_2' \cos \varphi$$

而

$$S'_{1} \cdot S'_{2} = (S'_{1x}i + S'_{1y}j) \cdot (S'_{2x}i + S'_{2y}j) = S'_{1x} \cdot S'_{2x} + S'_{1y} \cdot S'_{2y}$$
其中, $S'_{1y} = \delta S_{1y}, S'_{2x} = \delta S_{2x}$ 故

$$\boldsymbol{S}_1' \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{S}_2' = (S_1 + \delta S_{1x}) \delta S_{2x} + \delta S_{1y} (S_2 + \delta S_{2y})$$

因 S_1 , S_2 均为小量, 故略去 δS 的二次微量后, 得

$$\mathbf{S}_1' \cdot \mathbf{S}_2' = S_1 \delta S_{2x} + S_2 \delta S_{1y} \tag{3-19}$$

由式(3-18),有

$$\cos\varphi = \frac{S_1' \cdot S_2'}{S_1'S_2'} = \frac{S_1 \delta S_{2x} + S_2 \delta S_{1y}}{[(\delta S_{1y})^2 + (\delta S_{1x} + S_1)^2]^{\frac{1}{2}} [(\delta S_{2x})^2 + (\delta S_{2y} + S_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

略去高阶微量后得



$$\cosarphi \cong rac{S_1\delta S_{2x}+S_2\delta S_{1y}}{S_1S_2}=rac{\delta S_{2x}}{S_2}+rac{\delta S_{1y}}{S_1}=oldsymbol{\epsilon}_{xy}+oldsymbol{\epsilon}_{yy}$$

另一方面, 令 S_1 , S_2 间夹角的改变为 α , 并注意到 α 为一小量, 则有

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \alpha$$

由 $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$,得

或

$$\alpha = \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} + \boldsymbol{\varepsilon}_{yx} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \tag{3-20}$$

由此可知, ε_{xy} 表示变形前与坐标轴 x, y 正方向一致的两正交线段在变形后的夹角减 小量之半,即 $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \alpha_{\circ}$

如将变形前与 Ox, Oy 轴正向一致的相互垂直的两线段在变形过程中发生的夹 角改变量称为剪应变 γ_{xy} ,则

$$\gamma_{xy} = \alpha = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
(3-21)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{xy} \tag{3-22}$$

剪应变的正负号规定为:当两个正向(或负向)坐标轴间的直角减小时为正,反之为 负。于是,我们得到了二维应变情况下的全部(三个)应变分量:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{y} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$
 (3-23)

对于平面问题,一点处的应变状态就由这三个应变分量完全确定。

三维问题各应变分量为

$$\epsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{z} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
(3-24)

显然 x 轴与 y 轴间的角度变化及 y 轴与 x 轴间的角度变化是没有什么不同的, 即有

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \tag{3-25}$$

式(3-24)称为应变位移关系式。用张量符号可缩写为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (i,j = x, y, z)$$
(3-26)

由以上讨论可知,当i=j时,得到的是正应变。当 $i\neq j$ 时,得到的是剪应变。对 剪应变有

$$\mathbf{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{\varepsilon}_{ji}$$
 (3-27)

3.2 主应变与应变偏量及其不变量

和讨论应力状态时相类似。我们把剪应变等于零的面叫做主平面,主平面的法 线方向叫做主应变方向。主平面上的正应变就是主应变。

设在 *ABC* 面的法线方向有一矢量 S_n (图 3-4), 在变形过程中 S_n 的方向不变,只有长度变化为 δS_n 。因 S_n 与 δS_n 是在一条直线上,故 S_n 与 δS_n 的 分量成正比例,即

$$\frac{\delta S_n}{S_n} = \frac{\delta S_x}{S_x} = \frac{\delta S_y}{S_y} = \frac{\delta S_z}{S_z} \qquad (3-28)$$

其中 S_x , S_y , S_z 及 ∂S_x , ∂S_y , ∂S_z 分别为 S_n 及 ∂S_n 在 Ox,Oy,Oz 轴上的投影。考虑到

 $\frac{\delta S_n}{S_n} = \varepsilon_n$



冬 3-4

则有

$$\delta S_x = \epsilon_n S_x, \quad \delta S_y = \epsilon_n S_y, \quad \delta S_z = \epsilon_n S_z \tag{3-29}$$

于是,由(3-16),有

$$\delta S_{x} = \epsilon_{x} S_{x} + \epsilon_{xy} S_{y} + \epsilon_{xz} S_{z}$$

$$\delta S_{y} = \epsilon_{xy} S_{x} + \epsilon_{y} S_{y} + \epsilon_{yz} S_{z}$$

$$\delta S_{z} = \epsilon_{xz} S_{x} + \epsilon_{yz} S_{y} + \epsilon_{z} S_{z}$$
(3-30)

将关系式(3-29)代入(3-30)得

$$\left\{ \begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon}_{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n}) S_{x} + \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} S_{y} + \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} S_{z} &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} S_{x} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{y} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n}) S_{y} + \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} S_{z} &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} S_{x} + \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} S_{y} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{z} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n}) S_{z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$(3-31)$$

或

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{ii} - \boldsymbol{\delta}_{ii} \boldsymbol{\varepsilon}_n) \mathbf{S}_i = 0 \tag{3-32}$$

式(3-31)与式(2-25)完全相似,故可得出以 ε,,为未知量的一个三次方程

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^3 - \boldsymbol{I}_1^\prime \boldsymbol{\varepsilon}_n^2 + \boldsymbol{I}_2^\prime \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{I}_3^\prime = 0 \tag{3-33}$$

其中:

$$I'_{1} = \varepsilon_{x} + \varepsilon_{y} + \varepsilon_{z}$$

$$I'_{2} = \varepsilon_{x} \varepsilon_{y} + \varepsilon_{y} \varepsilon_{z} + \varepsilon_{z} \varepsilon_{x} - (\varepsilon_{xy}^{2} + \varepsilon_{yz}^{2} + \varepsilon_{zx}^{2})$$

$$I'_{3} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{x} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{y} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{z} \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon_{x} \varepsilon_{y} \varepsilon_{z} + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - (\varepsilon_{x} \varepsilon_{yz}^{2} + \varepsilon_{y} \varepsilon_{zx}^{2} + \varepsilon_{z} \varepsilon_{xy}^{2}) \end{cases}$$

$$(3-34)$$

分别称为第一、第二、第三应变不变量。

方程(3-33)有三个实根,即主应变 ε1,ε2,ε3,完全类似地可得最大剪应变为

$$\begin{array}{c} \gamma_{1} = \pm (\varepsilon_{2} - \varepsilon_{3}) \\ \gamma_{2} = \pm (\varepsilon_{1} - \varepsilon_{3}) \\ \gamma_{3} = \pm (\varepsilon_{1} - \varepsilon_{2}) \end{array}$$

$$(3-35)$$

八面体剪应变为

$$\gamma_{8} = \frac{2}{3} \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{2})^{2} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{2} - \boldsymbol{\varepsilon}_{3})^{2} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{3} - \boldsymbol{\varepsilon}_{1})^{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{3} \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_{y})^{2} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{y} - \boldsymbol{\varepsilon}_{z})^{2} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{z} - \boldsymbol{\varepsilon}_{x})^{2} + 6(\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^{2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{yz}^{2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{zx}^{2}) \right]^{\frac{1}{2}} (3-36)$$

应变偏量及其不变量分别为

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\epsilon_{1} - \epsilon_{2} - \epsilon_{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2\epsilon_{2} - \epsilon_{1} - \epsilon_{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2\epsilon_{3} - \epsilon_{2} - \epsilon_{1}) \end{bmatrix}$$
(3-37)
$$J'_{1} = 0$$
$$J'_{2} = e_{1}e_{2} + e_{2}e_{3} + e_{3}e_{1}$$
$$J'_{3} = e_{1}e_{2}e_{3}$$
(3-38)

及

在我们所讲的问题范围内,物体变形后必须仍保持其整体性和连续性,即变形的 协调性。从数学的观点说,要求位移函数 и,v,w 在其定义域内为单值连续函数。容 易理解,若把一个矩形物体划分为一些方格,如对应变不加任何约束,即不要求协调 性的话,就可能在变形后出现"撕裂"或"套叠"等现象。显然,出现了"撕裂"现象后位 移函数就出现了间断,出现了"套叠"现象后位移函数就不会是单值的。这些现象破 坏了物体的整体性和连续性。因此,为保持物体的整体性,各应变分量之间,必须要 有一定的关系。

另一方面,如给出应变分量需要求出位移,则应积分应变位移方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

以平面问题为例来说,有三个这样的方程,但只有两个位移分量,如果没有附加 条件的话,一般地说是没有单值解的。这就要求应变分量 ε_{ij} 应当满足一定的变形协 调条件。

以下导出二维情况的变形协调条件即应变协调方程。为此,将 ϵ_x 对y的二阶导数与 ϵ_y 对x的二阶导数相加得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \boldsymbol{u}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \boldsymbol{v}}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \Big) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y}$$

即

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial \boldsymbol{v}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{v}}$$
(3-39)

式(3-39)即二维情况下用应变分量表示的应变协调方程,或简称协调方程。应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 满足变形协调之后就保证了物体在变形后不会出现撕裂、套叠等现象, 保证了位移解的单值和连续性。

类似地可得三维问题的应变协调方程

$$\frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{x}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{y}}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{y}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{z}}{\partial y^{2}} = \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{z}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{z}}{\partial z^{2}} = \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial z \partial x}$$

$$2 \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{x}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{y}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{y}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\epsilon}_{z}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right)$$

当6个应变分量满足以上应变协调方程(3-40)时就能保证得到单值连续的位移

函数①。

应当指出,应变分量只确定物体中各点间的相对位置,而刚体位移并不包含在应 变分量之中。无应变状态下,可以产生任一种刚体移动。另一方面,如能正确地求出 物体各点的位移函数 *u*,*v*,*w*,根据应变位移方程求出各应变分量,则应变协调方程 即可自然满足。因为应变协调方程本身是从应变位移方程推导出来的。从物理意义 来看,如果位移函数是连续的,变形自然也就可以协调。因而,在以后用位移法解题 时,应变协调方程可以自然满足,而用应力法解题时,则需同时考虑应变协调方程。

复习要点

1. 相对位移张量可分解为两部分: 应变张量与转动张量,即

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

2. 正应变与切应变的概念。 ϵ_x 表示原来与x轴平行的矢量的单位长度的伸长 (或压缩)。 $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$ 表示变形前与x, y坐标轴正方向一致的两正交线段在变形后 夹角变化量之半。

3. 应变位移关系式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (i,j=x,y,z)$$

4. 二维情况下的用应变分量表示的应变协调方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y}$$

5. 应变协调方程的重要意义。要理解本章最后一段话的意义,即如能正确地求 出一点的位移函数,根据应变位移方程求出应变分量,则应变协调方程自然满足。

思考题

- 3-1 为什么要研究一点邻域的变形或应变状态?
- 3-2 剪应变是什么含义?为什么取这种形式?
- 3-3 应变协调方程的物理意义是什么? 有什么用途?
- 3-4 为什么要强调位移的单值性和连续性?

① 关于方程(3-40)是应变分量可积分的充要条件的证明,可参阅有关弹性力学书,例如文献[16]。

3-5 应变分析与应力分析有哪些异同之处?

3-1 已知下列位移,试求指定点的应变状态。

(1) $u = (3x^2 + 20) \times 10^{-2}, v = (4xy) \times 10^{-2}, \mathbf{E}(0,2) \mathbf{k} \mathbf{\psi};$ (2) $u = (6x^2 + 15) \times 10^{-2}, v = (8zy) \times 10^{-2}, w = (3z^2 - 2xy) \times 10^{-2}, \mathbf{E}(1,3,4)$

点处。

答案: (1)
$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-2};$$

(2) $\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 32 & 11 \\ -3 & 11 & 24 \end{bmatrix} \times 10^{-2}.$

3-2 试证在平面问题中下式成立

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon'_x + \epsilon'_y$$

3-3 已知应变张量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -0.006 & -0.002 & 0 \\ -0.002 & -0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试求:

- (a) **主应变**,
- (b) 主应变方向,
- (c) 八面体剪应变,
- (d) 应变不变量。

答案:

- (a) $\epsilon_{1,2} = -2.764 \times 10^{-3}$, -7.236×10^{-3} ,
- (b) 与*x* 轴成 121°43′,
- (c) $\gamma_8 = 5.96 \times 10^{-3}$,
- (d) $I'_1 = -0.01, I'_2 = -20 \times 10^{-5}, I'_3 = 0.$

3-4 试说明下列应变状态是否可能

(a) $\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} C(x^2 + y^2) & Cxy & 0 \\ Cxy & Cy^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b)
$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} C(x^2 + y^2)z & Cxyz & 0\\ Cxyz & Cy^2z & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3-5 试求下列正方形单元在纯剪应变状态时,剪应变 γ_{xy} 与对角线应变 ϵ_{OB} 之间的关系。

答案:
$$\epsilon_{OB} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$



第4章 应力应变关系

4.1 广义胡克定律^①

在材料力学课程中,已经详细讨论了在单向应力状态时材料处于线性弹性阶段 的应力应变关系。如图 4-1 所示,当应力小于屈服应力 ____

 $σ_0$ 时,应力 $σ_x$ 与应变 $ε_x$ 之间有下列简单的线性关系:

 $\sigma_x = E \varepsilon_x$

其中 E 为弹性常数(杨氏弹性模量),这就是熟知的胡 克定律。

在三维应力状态下,描绘一点处的应力状态需要 9 个应力分量,与之相应的应变状态也要用 9 个应变分量 来表示。在线弹性阶段,应力与应变间仍有线性关系存 在,但在一般情况下,任一应变分量要受 9 个应力分量

的制约。事实上,由于应力张量与应变张量的对称性, $\sigma_{ii} = \sigma_{ii}$, $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}$,9个应力分量



① 胡克定律是英国物理学家 Robert Hooke(1635—1703)于 1678 年提出:弹簧被外力拉开至平衡位置后 就总是倾向于回到自己的平衡位置上去,这种倾向表现为一种弹性力,其大小与离开平衡位置的距离成正比。 同时还发现撤力后,弹簧有周期性伸缩现象。

在中国,东汉郑玄(127—200)早于胡克约 1500 年也曾提出过力与变形成比例的概念(载于《考工论・弓人》)。到了宋代,宋应星还谈到类似的事。

与 9 个应变分量中独立的分量均仅有 6 个。于是,对于均匀的理想弹性体,上述关系 式应有如下形式:

$$\sigma_{x} = c_{11}\varepsilon_{x} + c_{12}\varepsilon_{y} + c_{13}\varepsilon_{z} + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{yz} + c_{16}\gamma_{zx}$$

$$\sigma_{y} = c_{21}\varepsilon_{x} + c_{22}\varepsilon_{y} + c_{23}\varepsilon_{z} + c_{24}\gamma_{xy} + c_{25}\gamma_{yz} + c_{26}\gamma_{zx}$$

$$\sigma_{z} = c_{31}\varepsilon_{x} + c_{32}\varepsilon_{y} + c_{33}\varepsilon_{z} + c_{34}\gamma_{xy} + c_{35}\gamma_{yz} + c_{36}\gamma_{zx}$$

$$\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_{x} + c_{42}\varepsilon_{y} + c_{43}\varepsilon_{z} + c_{44}\gamma_{xy} + c_{45}\gamma_{yz} + c_{46}\gamma_{zx}$$

$$\tau_{yz} = c_{51}\varepsilon_{x} + c_{52}\varepsilon_{y} + c_{53}\varepsilon_{z} + c_{54}\gamma_{xy} + c_{55}\gamma_{yz} + c_{56}\gamma_{zx}$$

$$\tau_{zx} = c_{61}\varepsilon_{x} + c_{62}\varepsilon_{y} + c_{63}\varepsilon_{z} + c_{64}\gamma_{xy} + c_{65}\gamma_{yz} + c_{66}\gamma_{zx}$$

$$(4-1)$$

其中 $c_{mn}(m, n=1, 2, \dots, 6)$ 为弹性系数。由材料的均匀性可知,系数 c_{mn} 与坐标 x, y,z 无关。

如采用张量表示法,式(4-1)可缩写为

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \tag{4-1'}$$

此处 c_{ijkl} 为弹性系数^①。

式(4-1)建立了应力与应变之间的关系,称为广义胡克定律或弹性本构方程^{$\circ}$ 。</sup> 在式(4-1)中,弹性常数 c_{mi} (或 c_{mik})共有 36 个。这 36 个常数并不是独立的,以下要 证明,对于各向同性材料,独立的弹性常数只有两个。

首先证明,在弹性状态下主应力方向与主应变方向相重合。为此, σ_x ,v,z为 主应变方向,则剪应变分量 γ_{rv} , γ_{vz} , γ_{zr} 应等于零。于是,由式(4-1)有

$$\tau_{xy} = c_{41} \varepsilon_x + c_{42} \varepsilon_y + c_{43} \varepsilon_z \tag{a}$$

现在引进坐标系 Ox'y'z',原坐标系 Oxyz 绕 y 轴转动 180°后可与之重合(图 4-2)。 新旧坐标轴间的方向余弦如表 2-1 所示,则有

 $l_{11} = l_{33} = \cos 180^\circ = -1$ $l_{22} = \cos 0^{\circ} = 1$ $l_{21} = l_{31} = l_{12} = l_{32} = l_{13} = l_{23} = \cos 90^{\circ} = 0$ \mathbf{x}' 对于各向同性材料,弹性常数应与方向无关。于是对新 **冬** 4-2

坐标系有

$$\tau_{x'y'} = c_{41} \varepsilon_{x'} + c_{42} \varepsilon_{y'} + c_{43} \varepsilon_{z'}$$
 (b)

① 如应力分量与应变分量同以前一样,用两个下标符号表示(即 σ_{ii}, ε_{kl}),则弹性系数应改用四个下标符 号 c_{iikl} 表示。 c_{iikl} 中的 i, j, k, l 只取 $1, 2, 3, c_{ii}$ 与 c_{iikl} 的对应关系为:

> $c_{11} = c_{1111}, c_{12} = c_{1122}, c_{13} = c_{1133}, c_{14} = c_{1112}, c_{15} = c_{1123}, c_{16} = c_{1131},$ $c_{21} = c_{2211}, c_{22} = c_{2222}, \cdots, c_{26} = c_{2231}, \cdots$

② 本构方程有更广义的含义,凡介质的应力或应力率,应变或应变率等之间关系的物性方程,统称为本构 关系或本构方程(constitutive equation)。

由应力分量的坐标变换公式(2-20)得

$$\tau_{x'y'} = l_{11} l_{22} \tau_{xy} = -\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{x'} = l_{11}^2 \varepsilon_x = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{y'} = l_{22}^2 \varepsilon_y = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{z'} = l_{33}^2 \varepsilon_z = \varepsilon_z$$
(c)

由(b),(c)可得出

$$-\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z \tag{d}$$

比较(a),(d)后,得出 $\tau_{xy} = -\tau_{xy}$,所以,必定有

同理可得

$$\tau_{vz} = \tau_{zr} = 0$$

 $\tau_{rv} = 0$

由此得出:对各向同性弹性体,如 x,y,z 轴为主应变方向,则同时必为主应力方向。 即应变主轴与应力主轴重合。

现在考察各向同性的材料独立的弹性常数的个数。为此,首先令坐标轴 Ox, Oy,Oz与主应力方向相一致。于是由式(4-1)可得主应力与主应变之间有下列关 系式:

$$\sigma_{x} = c_{11}\varepsilon_{x} + c_{12}\varepsilon_{y} + c_{13}\varepsilon_{z}$$

$$\sigma_{y} = c_{21}\varepsilon_{x} + c_{22}\varepsilon_{y} + c_{23}\varepsilon_{z}$$

$$\sigma_{z} = c_{31}\varepsilon_{x} + c_{32}\varepsilon_{y} + c_{33}\varepsilon_{z}$$
(e)

在各向同性介质中, ϵ_x 对 σ_x 的影响应与 ϵ_y 对 σ_y 及 ϵ_z 对 σ_z 的影响相同,即应有 $c_{11} = c_{22} = c_{33}$ 。同理, ϵ_y 和 ϵ_z 对 σ_x 的影响应相同,即 $c_{12} = c_{13}$,类似地有: $c_{21} = c_{23}$, $c_{31} = c_{32}$ 等,因而有

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = a c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = b$$
(f)

由此得出:对应变主轴(用1,2,3 表示)来说,弹性常数只有两个 a 和 b。将上式(f) 代入式(e),并令 $a-b=2\mu, b=\lambda, e=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ 可得下列弹性本构关系:

$$\sigma_{1} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{1}$$

$$\sigma_{2} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{2}$$

$$\sigma_{3} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{3}$$

$$(4-2)$$

常数λ,μ称为拉梅弹性常数。

通过坐标变换后,可得任意坐标系 Oxyz 内的本构关系为

$$\sigma_{x} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{x}, \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{y} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{y}, \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}$$

$$\sigma_{z} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{z}, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}$$

$$(4-3)$$

或缩写为

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{4-3'}$$

以上证明了各向同性的均匀弹性体的弹性常数只有两个。



杨(Thomas Young) 1773 年生于英国,1829 年逝 世。他是一位多才多艺的学者,曾以物理学和考古学著称,利用罗赛塔石(Rosetta)辨认了埃及的象形文字。他 给出了应力与应变间的定量数值关系,从而使得弹性力 学正式成为一门科学。

Thomas Young

有些工程材料具有明显的非对称弹性性质。常见的双向配筋不同的钢筋混凝土 构件,木材等。这类材料的弹性性质,往往可以认为对于适当选取的坐标系中的平面 *x*=0,*y*=0,*z*=0为对称。由于这三个平面为相互正交,故称之为正交各向异性 材料。

正交各向异性的弹性材料的本构关系,可根据任一坐标轴反转时弹性常数 *c_{ij}* 保 持不变的要求,由广义胡克定律(4-1)得出,为

$$\sigma_{x} = c_{11}\varepsilon_{x} + c_{12}\varepsilon_{y} + c_{13}\varepsilon_{z}$$

$$\sigma_{y} = c_{12}\varepsilon_{x} + c_{22}\varepsilon_{y} + c_{23}\varepsilon_{z}$$

$$\sigma_{z} = c_{13}\varepsilon_{x} + c_{23}\varepsilon_{y} + c_{33}\varepsilon_{z}$$

$$\tau_{xy} = c_{44}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = c_{55}\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = c_{66}\gamma_{zx}$$

$$(4-4)$$

其中含有 c_{11} , c_{22} , c_{33} , c_{12} , c_{13} , c_{23} , c_{44} , c_{55} , c_{66} 共 9 个弹性常数(具体推导留作练习, 见习 题 4-2)。

将式(4-3)中的 ϵ_{ij} 解出后,可得用应力分量 σ_{ij} 表示的应变分量 ϵ_{ij} 的表达式

上式稍加变换,并令 $\sigma = \sigma_{ii}$,可缩写为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij} \sigma}{2\mu (3\lambda + 2\mu)} \tag{4-5'}$$

现在考虑一种物体各边平行于坐标轴的特殊情况,并由此导出工程上常用的弹 性常数和广义胡克定律。当物体边界法线方向与 *x* 轴重合的两对边上有均匀的 σ_x 作用,其他边均为自由边时,则由材料力学知道

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{\boldsymbol{\sigma}_x}{E} \tag{4-6}$$

$$\epsilon_{y} = \epsilon_{z} - \nu \epsilon_{x} = -\nu \frac{\sigma_{x}}{E} \tag{4-7}$$

此处 E, , 分别为杨氏弹性模量与泊松比。

比较式(4-5)与(4-6),(4-7)可得

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$
(4-8)

4.2 工程上常用的弹性常数

工程上,常把广义胡克定律用E和 ν 表示,在这种情况下,式(4-5)化为

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E} [\sigma_{x} - \nu(\sigma_{y} + \sigma_{z})], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E} [\sigma_{y} - \nu(\sigma_{z} + \sigma_{x})], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_{z} = \frac{1}{E} [\sigma_{z} - \nu(\sigma_{x} + \sigma_{y})], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$(4-9)$$

此处

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

为各向同性物体的剪切弹性模量。由 G 的表达式可知,G 并不是独立的弹性常数。 对于各向同性弹性体,独立的弹性常数只有两个,即 λ 和 μ 或 E 和 ν 。将式(4-9)稍 加变换后,可缩写为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \,\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \,\delta_{ij}\sigma \tag{4-9'}$$

其中 $\sigma = \sigma_{ii}$ 。如解出应力 σ_{ii} ,则上式转换为

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E \delta_{ij} e}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
(4-10)

如令

$$\sigma_{\rm m} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_{\rm m} = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$
(4-11)

则广义胡克定律又可写成

$$\sigma_{\rm m} = 3K\varepsilon_{\rm m} \qquad (4-12)$$

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

其中 s_{ij} , e_{ij} 分别为应力偏量与应变偏量, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ 。

在平面应力的情况下,由于 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$,则式(4-9)化为

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E} (\sigma_{x} - \nu \sigma_{y})$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E} (\sigma_{y} - \nu \sigma_{x})$$

$$\varepsilon_{z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{x} + \sigma_{y})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$(4-13)$$

如用应变分量表示应力分量,则由式(4-10)可得

$$\sigma_{x} = \frac{E}{1-\nu^{2}} (\varepsilon_{x} + \nu \varepsilon_{y})$$

$$\sigma_{y} = \frac{E}{1-\nu^{2}} (\varepsilon_{y} + \nu \varepsilon_{x})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$(4-14)$$

对于平面应变问题,由于 $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$,则由式(4-9)可得

$$\varepsilon_{x} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{x} - \nu\sigma_{y}] \\ \varepsilon_{y} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{y} - \nu\sigma_{x}] \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$(4-15)$$

如解出应力,则有

① 由应力偏量和应变偏量的定义及式(4-3'),并注意到 $K = \lambda + \frac{2\mu}{3}, \mu = G \mathbf{n}\theta = 3\epsilon_{m}, \mathbf{p} \mathbf{n} \mathbf{h}(4-12)$ 的 第一式,得 $s_{ij} + \sigma_{m}\delta_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2G(e_{ij} + \epsilon_{m}\delta_{ij}) = 2Ge_{ij} + 3(\lambda + \frac{2}{3}G)\epsilon_{m}\delta_{ij}$,等式两 边第二式互相抵消,于是得 $s_{ij} = 2Ge_{ij}$ 。

$$\sigma_{x} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{x} + \nu\varepsilon_{y}]$$

$$\sigma_{y} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{x} + (1-\nu)\varepsilon_{y}]$$

$$\sigma_{z} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$(4-16)$$

比较以上平面应力与平面应变问题的广义胡克定律可知,如将平面应力问题应 力应变关系公式(4-13)中的 E 换成 E_1 , ν 换成 ν_1 ,而

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$$

便可得平面应变问题应力应变关系的公式(4-15)。

由式(4-12)可以看出,物体的变形可分为两部分:一部分是各向相等的正应力 (静水压力)σ引起的相对体积变形;一部分是应力偏量作用引起的物体几何形状的 变化。并可认为前一种变形不包括物体形状的改变(即畸变),而后一种变形则不包 括体积的变化,从而可以将变形分解为两部分。这种分解在塑性理论中很有用处。

以下顺便说明式(4-2)中e的物理意义。如令变形物体中的微小六面体单元的 原始体积为 V_0 ,则

$$V_0 = dx dy dz$$

变形后的体积为

$$V = (1 + \varepsilon_x) dx \cdot (1 + \varepsilon_y) dy \cdot (1 + \varepsilon_z) dz$$

= $dx dy dz [(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + o(\varepsilon^2)]$

略去高阶微量后,得

$$V = V_0 + V_0 e$$

此处 $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ 或

$$e = \frac{\Delta V}{V_0}$$

由此可见,e为变形前后单位体积的相对体积变化,或称相对体积变形。显然对于体积不可压缩材料有e=0。由广义胡克定律有

$$e = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

当 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_m$ 时,

$$e = \frac{3(1-2\nu)\sigma_{\rm m}}{E}$$

或

$$K = \frac{\sigma_{\rm m}}{e} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$
(4-17)

其中 K 称为弹性体积膨胀系数,称为体积模量。如将 $e=3\epsilon_m$ 代入上式(4-17),则得 (4-12)中的第一式。

4.3 弹性应变能函数

弹性体受外力作用后,不可避免地要产生变形,同时外力的势能也要发生变化。 当外力缓慢地(不致引起物体产生加速运动)加到物体上时,视作静力,便可略而不计 系统的动能^①,同时也略去其他能量(如热能等)的消耗,则外力势能的变化就全部转





化为应变能(一种势能)储存于物体的内部。 这个问题,以后还要进一步研究。下面我们 给出单位体积应变能的表达式。为此,以 σ_x 作用在微小单元 *ABCD* 两对边为例来说明 (图 4-3)。

由图可知,作用在 *ABCD* 单元上的外 力为 *AD* 与 *CB* 边的 σ_x 。而 σ_x dydz 在 *AD* 边单位应变上所做的功为 $- \sigma_x$ dydzdu, σ_x dydz 在 *CB* 边单位应变上所做的功为 σ_x dydz $\left(du + \frac{\partial du}{\partial x} dx \right)$ 。所以,外力在 *ABCD*

变形上所做的总功为^②

$$W = \int_{0}^{\epsilon_{x}} \sigma_{x} \left(\frac{\partial \mathrm{d}u}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_{0}^{\epsilon_{x}} \sigma_{x} \mathrm{d}\epsilon_{x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

而 y 方向虽有变形,但没有外力作用,所以没有做功。上述 σ_x 所做的功,将全部转化 为系统的应变能。如令总应变能为 U,则应有

$$U = W = \int_{0}^{\varepsilon_{x}} \sigma_{x} \mathrm{d}\varepsilon_{x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = U_{0} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

此处,U。为单位体积的应变能

$$U_{0} = \int_{0}^{\varepsilon_{x}} \sigma_{x} d\varepsilon_{x} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{x}^{2} = \frac{1}{2} \sigma_{x} \varepsilon_{x}$$
(4-18)

上述讨论,不难推广到一般情况,即物体的总应变能为

$$U = \iint_{V} U_0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{4-19}$$

其中

① 实际上,这里隐含着一个合理的假定:引起弹性变形的静力与引起加速度的动力是等同的。

② 注意到,当 f 是 x 的连续函数时,则有
$$\delta df = d\delta f$$
,从而 $\frac{\partial (du)}{\partial x} = d \frac{\partial u}{\partial x} = d\epsilon_x$ 。

$$U_{0} = \frac{1}{2} (\sigma_{x} \varepsilon_{x} + \sigma_{y} \varepsilon_{y} + \sigma_{z} \varepsilon_{z} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \qquad (4-20)$$

或简写为

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \tag{4-20'}$$

在上式中引入广义胡克定律可得

$$U_{0} = \frac{1}{2E} (\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} + \sigma_{z}^{2}) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{x}\sigma_{y} + \sigma_{y}\sigma_{z} + \sigma_{x}\sigma_{z}) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{xz}^{2}) \quad (4-21)$$

及

$$U_{0} = \frac{1}{2} \left[\lambda e^{2} + 2G(\varepsilon_{x}^{2} + \varepsilon_{y}^{2} + \varepsilon_{z}^{2}) + G(\gamma_{xy}^{2} + \gamma_{yz}^{2} + \gamma_{xz}^{2}) \right]$$
(4-22)

由上式看出,U。恒为正。

由式(4-21)、(4-22)可知下式成立

$$\frac{\partial U_0(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} = \boldsymbol{\sigma}_{ij} \tag{4-23a}$$

及

$$\frac{\partial U_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \tag{4-23b}$$

此处 $U_0(\sigma_{ij}), U_0(\epsilon_{ij})$ 分别为用应力分量及应变分量表示的单位体积应变能(应变能 密度),统称为应变能函数。对于理想弹性体,则在每一确定的应变状态下,都具有确 定的应变能。应变能函数是正定的势函数,所以弹性变形能又叫弹性势。式(4-23) 表示,弹性应变能 $U_0(\epsilon_{ij})$ 对任一应变分量的改变率等于相应的应力分量;而弹性应 变能 $U_0(\sigma_{ij})$ 对任一应力分量的改变率,就等于相应的应变分量。

前已叙及,物体的变形可以分解为两部分,一部分为体积的变化,一部分为形状的变化。因而应变能也应可以分解为相应的两部分。容易理解,引起体积变化的各向同性的平均正应力(称为静水应力)为 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$,而与之相应的平均正应变为 $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$,就是说,下列应力状态不引起微小单元体的形状改变:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{\rm m} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\rm m} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\rm m} \end{bmatrix}$$

因而,由于体积变化所储存在单位体积内的应变能(简称为体变能)为

$$U_{0v} = \frac{3}{2} \sigma_{\mathrm{m}} \varepsilon_{\mathrm{m}} = \frac{\sigma_{\mathrm{m}}^2}{2K} = \frac{1}{18K} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \frac{1}{18K} \sigma^2 \qquad (4-24)$$

引起形状改变的应力状态为应力偏量 s_{ii}

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

如令由于形状变化所储存在单位体积内的应变能(简称为畸变能)为 U_{od} ^①

$$U_{\rm od} = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij}$$

此处, s_{ij} 为应力偏量, e_{ij} 为应变偏量。为简便计,我们给出用主应力表示的 U_{0a} 的表达式,即

$$U_{\rm od} = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2}{18G} + \frac{(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)^2}{18G} + \frac{(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^2}{18G} \right] \\ = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12G} = \frac{1}{2G} J_2 = \frac{3}{4G} \tau_8^2$$
(4-25)

从而总应变能密度为

$$U_{0} = U_{0v} + U_{0d} = \frac{1}{18K} I_{1}^{2} + \frac{1}{2G} J_{2}$$
(4-26)

由上式看出,系统的总应变能密度与坐标的选择无关,U。是一个不变量。 我们指出,如定义有效应力(或称应力强度)和有效应变(或称应变强度)分别为

$$\sigma_{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{x} - \sigma_{y})^{2} + (\sigma_{y} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{z} - \sigma_{x})^{2} + 6(\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{zx}^{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{8} = \sqrt{2J_{2}}$$

$$\sqrt{2} \left[(4-27) + (\sigma_{y} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{z} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{z} - \sigma_{z})^{2} + \sigma_{zz}^{2} + \sigma_{zz}^{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \left[(4-27) + (\sigma_{z} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{z} - \sigma_{z})^{2} + \sigma_{zz}^{2} + \sigma_{zz}^{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_{y})^{2} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{y} - \boldsymbol{\varepsilon}_{z})^{2} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{z} - \boldsymbol{\varepsilon}_{x})^{2} + \frac{3}{2} (\boldsymbol{\gamma}_{xy}^{2} + \boldsymbol{\gamma}_{yz}^{2} + \boldsymbol{\gamma}_{zx}^{2}) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\gamma}_{8}$$

$$(4-28)$$

在很多情况下,可以把复杂应力状态下的 $\sigma_i = \varepsilon_i$ 关系式用简单的一维应力应变曲线来 代替。实际上,实验证实,在外载荷按比例变化的情况下, $\sigma_i = \varepsilon_i$ 曲线可以用简单拉伸 曲线 $\sigma = \varepsilon$ 来代替,此即所谓单一曲线假定。图 4-4 是儒科夫(1955)所做的镍铬钢薄 管试验的结果。图中 5 种不同的点是所考虑应力点处 5 种不同方向的实验值。实线 为 $\sigma = \varepsilon$ 曲线。由图可见,实验完全证实了这一假定。

① 注意到: $U_0 = \frac{1}{2} [(s_1 + \sigma_m)(e_1 + \varepsilon_m) + (s_2 + \sigma_m)(e_2 + \varepsilon_m) + (s_3 + \sigma_m)(e_3 + \varepsilon_m)]$ $= \frac{1}{2} [3\sigma_m \varepsilon_m + (s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3)] = U_{0v} + U_{0d}$



复习要点

1. 应变主轴与应力主轴重合是各向同性弹性体的特征。 2. 拉梅弹性常数与工程弹性常数的关系, $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$, $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ 。 3. 弹性变形能、弹性势的重要概念, $U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, $U_t = \iint_V U_0 dV$ 。 4. 应变能函数 $U_0(\varepsilon_{ij}) = U_0(\sigma_{ij})$ 的意义。 5. $U_0(\varepsilon_{ij})$ 对任一应变分量的改变率等于相应的应力分量, 即 $\frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$ 。 同样地, 有 $\frac{\partial U_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$ 。 6. 引进弹性势的重要意义。

- 4-1 广义胡克定律的常数是怎么从 36 减至 2 个的?
- 4-2 工程上为什么不常用拉梅常数?
- 4-3 弹性势是什么意思?为什么称为势函数?有什么特点?
- **4-4** 说明畸变能及下式的物理意义: $U_{\text{od}} = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2G} J_2 = \frac{3}{4G} \tau_8^2$ 。

4-5 正交各向异性有什么工程背景?你能举出一些实例吗?

习 题

4-1 试证明在弹性应力状态下下式成立: $\gamma_8 = \frac{1}{2G} \tau_8$ 。

4-2 试由式(4-1)导出正交各向异性弹性体的广义胡克定律。

提示:假定材料的弹性性质对三个相互垂直的平面 x=0, y=0, z=0 为对称,首先令 任一坐标轴转动 180° ,考察应力分量及应变分量的正负号变化。由任意两相反方向 的弹性性质相同,可得到一些等于零的弹性常数。之后,再分别转动其他两坐标轴, 又可得到一些等于零的常数。

答案:式(4-4)

4-3 给出以下问题的最大剪应力条件与畸变能条件。

(1) 受内压作用的封闭长薄管。

(2) 受拉弯作用的杆(矩形截面,材料为理想弹塑性)。

提示:前者按平面应力状态考虑,后者按截面有弯矩 *M* 和轴力 *N* 共同作用 考虑。

4-4 试证下式成立:

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$$

第5章

弹性力学问题的提法

5.1 基本方程

由以前几章的讨论,我们得出了在三维情况下弹性力学的下列基本方程:

1. 平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} + F_{bz} = 0$$
(5-1)

或

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0$$

(i,j = x, y, z) (5-1')

2. 几何方程

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_{y} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{z} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(5-2)$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i,j = x, y, z)$$
(5-2')

及由应变位移关系导出的应变协调方程

$$\frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{x}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{y}}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{y}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{z}}{\partial y^{2}} = \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{z}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{z}}{\partial z^{2}} = \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\gamma}_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$2 \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{x}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{y}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{z}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right)$$
(5-3)

3. 应力应变关系

在弹性条件下本构关系为广义胡克定律。

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E} [\sigma_{x} - \nu(\sigma_{y} + \sigma_{z})], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E} [\sigma_{y} - \nu(\sigma_{x} + \sigma_{z})], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\varepsilon_{z} = \frac{1}{E} [\sigma_{z} - \nu(\sigma_{x} + \sigma_{y})], \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$(5-4)$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \,\delta_{ij}\sigma \qquad (i,j=x,y,z) \tag{5-4'}$$

其中 $\sigma = \sigma_{ii}$ 。如用应变表示应力,则有

$$\sigma_{x} = 2G\left(\varepsilon_{x} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}e\right), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{y} = 2G\left(\varepsilon_{y} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}e\right), \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\sigma_{z} = 2G\left(\varepsilon_{z} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}e\right), \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

$$(5-5)$$

或

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}e \qquad (5-5')$$

其中 $e = \varepsilon_{ii}$ 。

总括起来,当物体处于弹性状态时,有3个平衡方程(5-1),6个几何方程(5-2), 6个本构方程(5-4)或(5-5),共15个方程(统称为泛定方程)。其中包括6个应力分量,6个应变分量,3个位移分量,共15个未知函数,因而在给定边界条件时,问题是可以求解的。

如上所述,在一定的边界条件下,原则上,问题是可以求解的。弹性静力学的这 种问题在数学上称为求解边值问题。

在研究弹性小变形平衡问题的范围内,上述弹性力学问题的解,必须满足边界上 给定的应力边界条件

$$P_{x} = \sigma_{x}l_{1} + \tau_{xy}l_{2} + \tau_{xz}l_{3}$$

$$P_{y} = \tau_{yx}l_{1} + \sigma_{y}l_{2} + \tau_{yz}l_{3}$$

$$P_{z} = \tau_{zx}l_{1} + \tau_{zy}l_{2} + \sigma_{z}l_{3}$$
(5-6)

即

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \qquad (\textbf{\pounds} \ S_\sigma \ \textbf{\pounds}) \qquad (5-6')$$

或位移边界条件

$$u = \overline{u}$$
 $v = \overline{v}$ $w = \overline{w}$ ($\underline{a} S_u \underline{b}$)

即

$$u_i = \bar{u}_i \qquad (\mathbf{\pounds} S_u \mathbf{\perp}) \tag{5-7}$$

以上这些方程的解是惟一的。以后将说明解的惟一性。

5.2 问题的提法

弹性力学问题的提法必须使定解问题是适定的,即:(1)有解;(2)解是惟一的; (3)解是稳定的。就是说,如定解条件(边界条件和初始条件)有微小变化,只引起解 作微小变化。我们这里只限于讨论前两个问题。 求解弹性力学问题的目的,在于求出物体内各点的应力和位移,即应力场、位移 场。因而,问题的提法是,给定作用在物体全部边界或内部的外界作用(包括温度影 响,外力等),求解物体内因此产生的应力场和位移场。具体地说,对物体内每一点, 当它处在弹性阶段,其应力分量、应变分量、位移分量等 15 个未知函数要满足平衡方 程(5-1)、几何方程(5-2)、本构方程(5-4)或(5-5)这 15 个方程(泛定方程),并要在边 界上满足给定的全部边界条件。

弹性力学的 15 个基本方程(泛定方程)含有 15 个未知函数,是一个封闭的方程 组,但只有这组方程并不能解决具体问题。在所有满足泛定方程的应力、应变和位 移分布的函数中,只有与定解条件(边界条件)相符合的解,才是我们需要的解答。因 而,边界条件的重要性是不容忽视的。

边界条件分为应力边界条件、位移边界条件和混合边界条件三种。应当强调指出,这些边界条件的个数必须给得不多也不少,才能得出正确的解答。例如对于空间问题的应力边界,必须在边界的每一点上有三个应力边界条件,如果条件给多了,就 找不到满足全部条件的解;如果给少了,就会有许多的解满足所给的条件,因而也就 无法判断哪些是正确的解。

由此可见,弹性力学的基本方程组一般地控制了物体内部应力、应变和位移之间 相互关系的普遍规律,而定解条件则具体地给出了每一个边值问题的特定规律,每一 个具体的问题反映在各自的边界条件上。于是,弹性力学的基本方程组和边界条件 一起构成了弹性力学边值问题的严格完整的提法。

根据具体问题边界条件类型的不同,常把边值问题分为以下三类:

第一类边值问题:给定物体的体力和面力,求在平衡状态下的应力场和位移场, 即所谓边界应力已知的问题。

第二类边值问题:给定物体的体力和物体表面各点的位移,求在平衡状态下的 应力场和物体内部的位移场,即所谓边界位移已知的问题。

第三类边值问题:在物体表面上,一部分给定面力,其余部分给定位移(或 在部分表面上给定外力和位移关系)的条件下求解上述问题,即所谓混合边值 问题。

在求解以上边值问题时有三种不同的处理办法,即

(1) 位移法,用位移作为基本未知量,来求解边值问题,叫位移法。此时将一切 未知量和基本方程都转换为用位移表示。通常,给定位移边界条件(第二类边值问题)时,宜用位移法。

(2)应力法,用应力作为基本未知量来求解边值问题,叫应力法。此时将一切未 知量和基本方程都转换为用应力表示。显然,当给定应力边界条件(第一类边值问题)时,宜用应力法。 (3)混合法,对第三类边值问题则宜以各点的一部分位移分量和一部分应力分量作为基本未知量,混合求解。这种方法叫混合法。

以下讨论弹性力学问题的解法。

5.3 弹性力学问题的基本解法 解的惟一性

1. 位移法

为用位移作为基本未知量,必须将泛定方程改用位移 u,v,w 来表示。为此,由 方程(5-5)利用(5-2)可得

$$\sigma_{x} = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu e}{1 - 2\nu}\right), \quad \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{y} = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu e}{1 - 2\nu}\right), \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{z} = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu e}{1 - 2\nu}\right), \quad \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
(5-8)

将式(5-8)代入平衡方程(5-1)第一式得

$$2G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + F_{\rm bx} = 0$$

余类推。

注意到 $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

并采用拉普拉斯算符

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

可得下列用位移表示的微分方程:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^{2} u + F_{bx} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^{2} v + F_{by} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^{2} w + F_{bz} = 0$$

$$(5-9)$$

在不计体力时,上式简化为齐次方程

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^{2} u = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^{2} v = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^{2} w = 0$$

$$(5-10)$$

或

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = 0$$
 (5-10')

上式称为拉梅-纳维方程。



纳维(C. L. Navier) 1785 年生于法国,1836 逝世。他 是一位优秀的道路与桥梁工程师,著有很多关于弹性理 论、材料强度和道路桥梁方面的著作。1824 年当选为法 国科学院院士。纳维首先给出了弹性力学的平衡方程和 运动方程。

Claude Louis Navier

方程组(5-9)是基本方程的综合(包括平衡方程、几何方程及本构方程)、方程组 (5-9)含有三个未知函数 *u*,*v*,*w*。此外,边界条件也要用位移表示,当给定位移边界 条件时,问题自然简单。如给定应力边界条件,则需将边界条件加以变换,改用位移 表示。由此,用位移法解弹性力学问题归纳为按给定边界条件积分式(5-9)。若不 计体力,则积分式(5-10)。

2. 应力法

为用应力作为基本未知量,需将泛定方程改用应力分量表示,并求出 6 个应力分量所满足的 6 个方程。由此所求得的解,应满足应变协调条件和边界条件,为此应将应变协调方程改用应力表示。如考虑式(5-3)的第二式

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{yz}}{\partial y \partial z} \tag{a}$$

将上式中的应变分量用广义胡克定律(4-9)代入,得

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}$$
(b)

其中 $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = I_1$,利用平衡方程(5-1),式(b)等号右边可写为

$$\frac{\partial^{2} \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - F_{bz} \right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - F_{by} \right)$$
(c)

于是式(b)可写为

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_z + \sigma_y) - \nu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\right)$$
$$= -(1+\nu)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right) + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y}\right]$$

或

$$(1+\nu)\left(\nabla^{2}\sigma - \nabla^{2}\sigma_{x} - \frac{\partial^{2}\sigma}{\partial x^{2}}\right) - \nu\left(\nabla^{2}\sigma - \frac{\partial^{2}\sigma}{\partial x^{2}}\right)$$
$$= (1+\nu)\left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} - \frac{\partial F_{by}}{\partial y} - \frac{\partial F_{bz}}{\partial z}\right)$$
(d)

对于式(5-3)中的第一、三两式,可得类似于式(d)的两个方程,将此三式相加,得

$$\nabla^{2} \sigma = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{\text{bx}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{\text{by}}}{\partial y} + \frac{\partial F_{\text{bz}}}{\partial z} \right)$$
(e)

将式(e)代入式(d),最终得

$$\nabla^{2}\sigma_{x} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^{2}\sigma}{\partial x^{2}} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_{\text{b}x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{\text{b}y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{\text{b}z}}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial F_{\text{b}x}}{\partial x}$$

类似地可得其他的 5 个方程。于是得到用应力表示的 6 个协调方程

$$\nabla^{2} \sigma_{x} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial x^{2}} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_{bx}}{\partial x}$$

$$\nabla^{2} \sigma_{y} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial y^{2}} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_{by}}{\partial y}$$

$$\nabla^{2} \sigma_{z} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial z^{2}} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_{bz}}{\partial z}$$

$$\nabla^{2} \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial F_{by}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^{2} \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial y \partial z} = - \left(\frac{\partial F_{bz}}{\partial y} + \frac{\partial F_{by}}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^{2} \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial z \partial x} = - \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial z} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial x} \right)$$
(5-11)

式(5-11)称为拜尔特拉米-密乞尔方程。实际上是用应力表示的协调方程,称为应 力协调方程。 当体力不计时,式(5-11)简化为

$$\nabla^{2} \sigma_{x} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial x^{2}} = 0$$

$$\nabla^{2} \sigma_{y} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial y^{2}} = 0$$

$$\nabla^{2} \sigma_{z} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial z^{2}} = 0$$

$$\nabla^{2} \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\nabla^{2} \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\nabla^{2} \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial x \partial y} = 0$$
(5-12)

或

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} = 0 \qquad (5-12')$$

由此可知,用应力法解弹性力学问题,就归结为求满足平衡方程(5-1),协调方程(5-11)及边界条件的应力分量 σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} 的数学问题。因三个平衡方程 中含有 6 个未知量,在给定边界条件下,尚需增加协调方程,使 6 个应力分量对 9 个 方程同时满足。

3. 逆解法与半逆解法

由以上讨论可以看出,对于弹性力学问题需要在严格的边界条件下解复杂的微 分方程组。在一般情况下,这是一件很不容易的事,因为往往难以克服数学上的困 难。因而,人们研究了各种解题方法,如逆解法、半逆解法等。

所谓逆解法,就是选取一组位移或应力的函数,由此求出应变与应力,然后验证 是否满足基本方程。若满足,则求出与之对应的边界上的位移或面力,再与实际边界 条件比较。如果相同或可认为相近,就可把所选取的解作为所要求的解。所谓半逆 解法又叫凑合解法,就是在未知量中,先根据问题的特点假设一部分为已知,然后在 基本方程和边界条件中,求另一部分,这样便得到了全部未知量。此外,尚有近似解 法,数值解法等。

在研究弹性力学问题解的时候,自然会提出问题的解是否存在和是否惟一的问题,回答是肯定的:解是存在的,而且在小变形条件下,对于受一组平衡力系作用的 物体应力和应变的解是惟一的。其位移的解则含有6个表征物体作刚体移动和转动 的任意常数。就是说,对于基本方程(5-1)、(5-2)、(5-4)(或(5-5)),在给定边界条 件下,不但有解,而且只有惟一的解。解的存在定理证明过程冗长,不拟介绍^①。以 下以应力解为例,对解的惟一性做一些讨论。

设问题的解不惟一, $\sigma_{ij}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 是同一问题的两组不同的应力解,与之对应的位移 为 $u_i^{(1)}$ 和 $u_i^{(2)}$,它们的差为 $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$ 及 $u_i^* = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$ 。

因为应力 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 都满足平衡方程和协调方程,由于体力是相同的,故代入平衡方程(5-1)和协调方程(5-11)后,得

$$\sigma_{ij,j} = 0$$
$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0$$

如 $\sigma_{ii}^{(1)}$, $\sigma_{ii}^{(2)}$ 满足同一边界条件

$$\sigma_{ij}^{(1)}n_j = P_i, \quad \sigma_{ij}^{(2)}n_j = P_i$$

则必有

$$(\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(2)})\boldsymbol{n}_j = 0$$

由此可知,在给定面力的边界上,有

 $\sigma_{ij}^* = 0$

这就是说,*σij* 对应于一个无面力、无体力的自然状态。在第1章曾经定义,无面力、 无体力作用的自然状态是无应力、无应变状态。由此得出,在全部体积内有

$$\sigma_{ij}^* = 0$$

或

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$$

于是,解的惟一性得证。

5.4 圣维南原理

上述解的惟一性定理告诉我们,两组静力等效载荷分别作用于同一物体同一部 分时,因各自构成的边界条件不同,所以两种情况下物体中的内力是不同的。但是, 由材料力学知道,若有静力等效的两组力与力矩,作用在不同的面上,则由此所求得 的应力场,只在面力作用点附近才有显著的不同,而离受力点较远地方的应力分布基 本相同,这一事实被总结为圣维南原理。事实上,在边界上我们往往不知道应力的确 实分布,而只知道某一段边界上的合力和合力矩。因而圣维南原理对解决实际问题

61

① 见文献[16]。

是必要的,实践证明也是符合实际的。其数学证明已得到一定程度的进展^①。

圣维南原理 如作用在弹性体表面上某一不大的局部面积上的力系,为作用在 同一局部面积上的另一静力等效力系所代替,则载荷的这种重新分布,只在离载荷作 用处很近的地方,才使应力的分布发生显著的变化,在离载荷较远处只有极小的 影响。

用钳子夹截一直杆是阐明圣维南原理的一个生动的实例(图 5-1)。

由图可见,杆在 A 处受钳夹紧以后,就等于在 该处加了一对平衡力系,无论作用力的大小如何, 在夹住部分 A 以外,几乎没有应力产生,甚至杆被 钳子截断后,A 处以外仍几乎不受影响。这个例子 生动地说明了圣维南原理的真实性。研究表明,影 响区的大小,大致与外力作用区的大小相当。





圣维南(A.J.C. Barre de Saint-Venant) 1797 年生于 法国,1886 年逝世。1825 年毕业于巴黎桥梁公路学校后 从事工程设计工作,1837 年回该校任教。1868 年当选为 法国科学院院士。在弹塑性力学方面有很多贡献。他的 力作用的局部性思想被称为"圣维南原理"。

Barre de Saint-Venant

5.5 叠加原理

如前所述,弹性力学边值问题的解,必须满足基本方程与边界条件。如采用应力 法,则所得应力分量 σ_{ij} 必须满足平衡方程(5-1),协调方程(5-13)和边界条件。设某 一弹性体在面力和体力为 p_i , F_{bi} 作用下的应力分量为 σ_{ij} ,在同一弹性体内由另一组 面力 p'_i 和体力 F'_{bi} 所引起的另一组应力分量为 σ'_{ij} ,则 $\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}$ 就一定是由于面力 p_i +

① 圣维南原理的数学证明,可参看: Sternberg E., Quart, Appl. Math. 11, NO, 4, 1954, Sternberg E. and Koiter W. T., J. Appl. Mech., 25, 575-581, (1958),还可参考: Flavin, J. N., ZAMP, vol. 29, (1978), 328-332。

 p'_{i} 和体力 $F_{bi} + F'_{bi}$ 的共同作用所引起的应力。这是因为定解条件和泛定方程都是 线性的。在这种情况下,

$$\sigma_{ij,j} + F_{\mathrm{b}i} = 0$$

$$\sigma_{ij,j}' + F_{bi}' = 0$$

成立,以上两式相加后,有

$$(\sigma_{ij} + \sigma'_{ij})_{,j} + F_{bi} + F'_{bi} = 0$$
(5-13)

此外,由于

$$p_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$p'_i = \sigma'_{ij} n_j$$

$$(5-14)$$

故在边界上有

$$p_i + p'_i = (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij})n_j$$

同样,协调方程也可以合并。显然, $(\sigma_{ij} + \sigma'_{ij})$ 满足由 $p_i + p'_i$ 和 $F_{bi} + F'_{bi}$ 作用下的边值 问题。这就是叠加原理。

叠加原理成立的条件为:小变形、线性弹性本构方程。对于大变形情况,物体的 变形将影响外力的作用,如受纵向和横向外力作用的梁,就必须考虑变形的影响,此 时,叠加原理便不再适用。此外,对于弹性稳定问题和弹塑性力学问题,叠加原理都 不适用。

5.6 简 例

例 5-1 设有图 5-2 所示的柱体,两端受集中力 P 作用,柱体表面为自由表面。 求其应力场与位移场。

1. 确定体力和面力

对于上述问题,首先选取坐标系 Oxyz,如图 5-2 所示。两端 z=0,z=l 处,有外 力作用,其合力为 P,假定体力略去不计,柱体侧面的面力等于零。



图 5-2
2. 写出边界条件

在柱体侧面,因任一点的外法线方向n均垂直于z轴,故 $l_3 = \cos(n, z) = 0$,柱体侧面的边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_{x}l_{1} + \tau_{xy}l_{2} = 0\\ \tau_{xy}l_{1} + \sigma_{y}l_{2} = 0\\ \tau_{xz}l_{1} + \tau_{zy}l_{2} = 0 \end{cases}$$

在两端部,因 $l_1 = \cos(z, x) = l_2 = \cos(z, y) = 0$, $l_3 = 1$, 设 σ_z 在端部均匀分布,则边界 条件化为

$$\sigma_z l_3 F = P$$

其中 F 为杆的截面面积。

3. 选择解题方法

选用应力法,则未知应力函数应满足式(5-1)和式(5-11),即

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1-\nu} \sigma_{,ij} = 0$$
(a)

现用逆解法求解。根据解的惟一性知道,如能给出一个既满足全部方程,又满足 边界条件的解,则这个解就是本问题的惟一解。

4. **解边值问题**

取

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = A \tag{b}$$

此处 A 为待定常数,将式(b)代入式(a)可见恒满足。

由边界条件得出 $\sigma_z = P/F$, 故有

$$A = P/F, \quad \sigma_z = P/F, \quad \sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = P/F$$
 (c)

由广义胡克定律

$$\varepsilon_{z} = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{z} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right) = \sigma_{z} \left(\frac{1+\nu}{E} - \frac{\nu}{E} \right) = \frac{P}{EF}$$

$$\varepsilon_{x} = \varepsilon_{y} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{-\nu \sigma_{z}}{1+\nu} = -\frac{\nu P}{EF}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$
(d)

由上式可见,各应变分量均为常数。

由式(d)有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{e}_x = -\frac{\mathbf{v}P}{EF}$$

积分上式,得在无刚体位移情况下的解为

同理得

$$v = -\frac{\nu P}{EF}y$$
$$w = \frac{P}{EF}z$$

 $u = -\frac{\nu P}{FF}x$

如给定位移边界条件,则在上面的积分中便包含了积分常数,它反映了杆件的刚体位移。如给定 $x=0, u=\bar{u}_0$ 则上述位移解为

$$u = -\frac{\nu P}{EF}x + \bar{u}_0$$

 \overline{u}_0 即 x 方向的刚体位移。

5. 校核

将所得结果代入平衡方程、应变协调方程、边界条件等公式均满足。

在本例题中,各应力分量都是常数,对于这种情况,各位移分量为坐标的线性函数,通常称为弹性力学的最简单问题,而一般的问题要复杂得多。

复习要点

1. 弹性力学的基本方程和弹性力学问题的提法是,给定作用在物体全部边界或 内部的外界作用,求解物体内由此而产生的应力场与位移场。

 2. 弹性力学边值问题可分三类:①第一类边值问题,宜用应力法求解;②第二 类边值问题,宜用位移法求解;③第三类边值问题,宜用混合法求解。

3. 拉梅-纳维方程

$$(\lambda + \mu)u_{i,i} + \mu u_{i,i} = 0$$

包括了平衡方程,几何方程和本构方程。

4. 贝尔特拉米-米歇尔方程实际上是应力协调方程。

5. 圣维南原理与叠加原理。

思考题

5-1 所给边界条件的数目为什么很重要?

5-2 为什么线性弹性力学问题可以用叠加原理? 而其他情况不行?

5-3 逆解法,半逆解法的理论根据是什么?为什么?

5-4 为什么当以应力应变和位移这 15 个量作未知函数求解时,则应变协调方程就可以自然满足?

5-5 你还能举出哪些圣维南原理的实例?如果放弃圣维南原理,应该考虑怎 样处理你举出的实例?

习 颕

5-1 试用逆解法求圆截面柱体扭转问题的解。

提示参考初等问题的解答。如柱体的轴线为轴,则假定

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

答案: 位移分量 $u = -\varphi yz, v = \varphi xz, w = 0$

5-2 设一物体内的位移分量为 u=v=0, w=w(z)。试求位移函数 w(z)。

答案: w = Cz, C 为常数

5-3 试求解简支的梁在中点受集中力作用时的弹性弯曲问题。

第6章 平面问题

6.1 平面问题的基本方程

在第5章中介绍了求解弹性力学问题的两种基本解法,现在讨论平面问题相应 的公式,并分别给出平面应力和平面应变两种情况的应力法基本方程和解法示例。

1. 平面应力问题

在这种情况下,已知

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \tag{6-1}$$

及

$$\sigma_{x} = \sigma_{x}(x, y)$$

$$\sigma_{y} = \sigma_{y}(x, y)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$$
(6-2)

平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{bx} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_{x}} + \frac{\partial \sigma_{y}}{\partial_{y}} + F_{by} = 0$$
(6-3)

边界条件为

$$p_{x} = \sigma_{x} l_{1} - \tau_{xy} l_{2}$$

$$p_{y} = \tau_{xy} l_{1} + \sigma_{y} l_{2}$$
(6-4)

其中 p_x , p_y 为面力在 x, y 方向的分量(图 6-1)。

 $l_1 = \cos(n, x)$ $l_2 = \cos(n, y)$

弹性本构方程为



及

$$\left. \begin{array}{c} \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{array} \right\}$$

$$(6-6)$$

У

此处 ϵ_z 为薄片在 z 方向的应变分量,因在平面应力问题的方程中并不包含 ϵ_z , 它可以从式(6-6)中独立地求出。应变协调方程为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{\gamma}}$$
(6-7)

在应力法中要把上式改用应力分量表示。为此,将方程(6-3)第一式对 x 取导数,第二式对 y 取导数,有

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{\text{bx}}}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial F_{\text{by}}}{\partial y}$$

将以上两式相加后,得

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_{\text{bx}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{\text{by}}}{\partial y} \right)$$

因

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} \right)$$

将式(6-7)中的 ϵ_x , ϵ_y 用胡克定律(6-5)代入, $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$ 以上式代换, 则得

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{\text{bx}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{\text{by}}}{\partial y} \right) = 0$$

化简后,得

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial F_{\text{b}x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{\text{b}y}}{\partial y} \right)$$

或写成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y}\right)$$
(6-8)

式(6-8)即为用应力分量表示的应变协调方程。若不计体力或体力为常数,则 式(6-8)化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{6-9}$$

或写成

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{6-9'}$$

此处▽²为拉普拉斯算子。式(6-9)称为莱维方程。

2. 平面应变问题

在平面应变条件下,由于 z 方向的约束(z 方向的无限延伸,相当于刚性约束),则有

w = 0

由于沿长度方向几何形状不变(如图 2-7),载荷也沿 z 方向不变,故位移 u,v 仅为 x, y 的函数,而与 z 无关。由此可沿长度方向任取一个与 Oxy 平面平行且厚度等于 1 的薄片作为模型来分析而不失代表性。于是有

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

及

$$\mathbf{\varepsilon}_z = \mathbf{\gamma}_{xz} = \mathbf{\gamma}_{yz} = 0$$

将以上关系式代入本构方程,可得

$$\sigma_{x} = 2G \varepsilon_{x} + \lambda(\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y})$$

$$\sigma_{y} = 2G \varepsilon_{y} + \lambda(\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
(6-10)

及

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$
(6-11)

因 σ_z 不包含在基本方程中,故 σ_z 不是独立的未知量,而在求得 σ_x 和 σ_y 后,可由

式(6-11)单独求解。

由于应力分量只是 *x*, *y* 的函数,故平面应变问题的平衡方程同样为式(6-3)。 应用从平面应力变换到平面应变的对应关系,平面应变问题的协调方程可直接从 式(6-8)中得出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y}\right)$$
(6-12)

比较式(6-8)和(6-12)可知,式(6-12)和(6-8)只差一个常数系数,此外,在边界上,应力应满足边界条件<math>(6-4)。

这样一来,平面应力和平面应变问题的解,除共同必须满足同一组平衡方程外,还应分别满足变形协调方程(6-8)和(6-12)。但是,如果体力 F_{br} , F_{by} 都是常数的话,则以上两个协调方程都化为(6-9)。

如果考虑的问题为 D 上的调和函数,则($\sigma_x + \sigma_y$)是在区域 D 上直到二阶导数都 连续的连续函数。在这种情况下,平面应力和平面应变问题的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的 分布是相同的,或者说,他们在 Oxy 平面内应力场一致。

从以上的讨论中可以发现,方程(6-3)和(6-9)以及边界条件(6-4)中均不含材 料常数。这就是说,不同材料的物体只要它们的几何条件、载荷条件相同,则不论其 为平面应力或平面应变问题,他们在平面内的应力分布规律是相同的。这一结论,给 模型试验(例如光弹性试验等)提供了理论基础。应当注意,以上两种情况的应力 σ_ε、 应变和位移是不相同的。

6.2 应力函数

由以上讨论可知,平面问题的弹性解,要求积分平衡方程(6-3)和应变协调方 程(6-12),并满足边界条件(6-4)。在不计体力时,这些方程简化为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$
(6-13)

和式(6-9)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

以及边界条件(6-4)。

方程(6-13)和协调方程(6-9)是用应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 写出的弹性平面问题的基本方程组,如边值问题属于第一类,即面力已知问题,则可由以上方程组按应力求解,

而不需要考虑位移。进一步观察可以发现,如果引进一个函数 $\varphi(x,y)$,使得

$$\sigma_{x} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}}$$

$$\sigma_{y} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x \partial y}$$
(6-14)

代入平衡方程,可知恒满足。于是有

$$\sigma_{x} + \sigma_{y} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}} = \nabla^{2} \varphi$$
(6-15)

由应变协调方程可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

展开为

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$
 (6-16)

或简写为

$$\nabla^4 \varphi = 0 \tag{6-16'}$$

函数 φ 称为应力函数,是由艾里(G. B. Airy, 1862)所引进,故又称为艾里应力 函数。方程(6-16)称为双调和方程。由此可知,平面问题的应力分量可用应力函数 φ 来表示,而函数 φ 应满足双调和函数,也就是说, φ 为双调和函数。显然,函数 φ 的 选取应使其满足边界条件。

现在考虑有体力的情况。假定体力是有势的^①,即

$$F_{\rm bx} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_{\rm by} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$
 (a)

其中 V 为势函数。此时,平衡微分方程(6-3)化为

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) = 0$$
(b)

比较式(b)与(6-13)可知,如令

① 由理论力学知道,如果作用在点 *M* 的力 *F* 的投影是坐标的函数,且可用对某一单值函数 *V*(*x*,*y*,*z*) 取 偏微商并冠以负号表示,则该力场称为是有势的,或称为势场。力 *F* 所做的功由其起始位置与终止位置的势差 所决定,而完全与点 *M* 所走过的轨迹无关。重力场是势场的例子。

$$\sigma_{x} - V = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}}$$

$$\sigma_{y} - V = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x \partial y}$$
(6-17)

则平衡微分方程(b)可满足,将式(6-17)代入应变协调方程(6-8)及(6-12)后,分别得出 对于平面应力情况

$$\nabla^4 \varphi = -(1-\nu)\nabla^2 V \tag{6-18}$$

对于平面应变情况

$$\nabla^{4}\varphi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla^{2}V \qquad (6-19)$$

前已述及,直接求解弹性力学问题往往是很困难的。因此有时不得不采用逆解 法或半逆解法等来求解。

当用逆解法时,要先假定满足双调和方程(6-16)的某种形式的应力函数 φ ,然后用 式(6-14)求出应力分量 σ_x , σ_y , τ_{xy} 等,再根据应力边界条件来分析所得应力分量对应于 什么样的面力。由此判定所选应力函数 φ 可以解什么样的问题。如用半逆解法则针对 所要求的问题,假定部分或全部应力分量为某种形式的双调和函数,留下足够多的待定 参数,从而导出应力函数 φ 。然后来分析所得应力函数是否满足应变协调方程,判断假 定的以及由应力函数导出的应力分量是否满足边界条件。如不满足则应重新假定。

应当指出,双调和方程是四阶的,故低于四阶的多项式都是双调和函数。但必须至少 是二次和二次以上,以保证得出非零的应力解。例如,如取应力函数 *φ* 为下列一次式

$$\varphi = C_0 + C_1 x + C_2 y$$

则双调和方程可以满足,而应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$$

显然,这是一个无应力状态。由此得出,在应力函数中增添或除去 *x* 和 *y* 的一次式,并不影响应力分量。

不难验证,当应力函数取二次多项式时可得均匀应力状态,取三次多项式时得线 性分布的应力场。

6.3 梁的弹性平面弯曲

作为用直角坐标解题的示例,讨论下述悬臂梁的平面弯曲。设悬臂梁自由端有 集中力 F 作用,略去梁的自重,梁的高度为 2h,厚度为 t,跨度为 l(图 6-2)。

以下首先讨论梁内应力分布。在此情况下,边界条件为

$$F = -\int_{-h}^{+h} \tau_{xy} t \, dy$$

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0$$

$$(\tau_{xy})_{y=\pm h} = 0$$

$$(\sigma_y)_{y=\pm h} = 0$$

$$(a)$$

图 6-2

$$\begin{aligned} \tau_{xy} \rangle_{y=\pm h} &= 0 \\ \sigma_{y} \rangle_{y=\pm h} &= 0 \\ \gamma &= -\int_{-h}^{+h} \tau_{xy} t \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$
(a)

上述边界条件表示: 自由端没有轴向水平力,顶部和底部没有载荷作用,及自由 端的剪应力之和应等于 F_{o} 式(a)中第四式的符号是根据第 2 章对剪应力的正负号 约定得来的,因此处剪应力是作用在外法线方向与 x 轴反向的平面内,剪应力方向 与y轴同向,故为负。

1. 选取应力函数

由材料力学知道,任一截面上由 F 产生的弯矩随 x 作线性变化,而且截面上任 一点的正应力 σ_r 与 γ 成比例,故可假定 σ_r 为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C_1 x y \tag{b}$$

其中 C_1 为一常数。将上式对 y 积分两次,得

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{6}C_1 x y^3 + y f_1(x) + f_2(x)$$
(c)

此处 $f_1(x), f_2(x)$ 为 x 的待定函数。将 φ 代入双调和方程(6-16)可得

$$y \frac{d^4 f_1}{dx^4} + \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$
 (d)

由于上式(d)中的第二项与v无关,故上式成立时,必有

$$\frac{\mathrm{d}^4 f_1}{\mathrm{d}x^4} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^4 f_2}{\mathrm{d}x^4} = 0$$

积分此二式得

$$f_1 = C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$$

$$f_2 = C_6 x^3 + C_7 x^2 + C_8 x + C_9$$

其中 C_2 , C_3 , ..., C_9 为积分常数。将上面两函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 代入式(c), 得

$$\varphi = \frac{1}{6} C_1 x y^3 + y (C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5) + (C_6 x^3 + C_7 x^2 + C_8 x + C_9)$$
(6-20)

将式(6-20)代入式(6-14)可得应力分量 σ_y , τ_{xy} 为

$$\sigma_{y} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} = 6(C_{2}xy + C_{6}x) + 2(C_{3}y + C_{7})$$
(e)

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} C_1 y^2 - 3C_2 x^2 - 2C_3 x - C_4 \tag{f}$$

2. 系数的确定

根据边界条件(a)的第二、三式有

$$(\sigma_y)_{y=\pm h} = 6(\pm C_2 h + C_6) x + 2(\pm C_3 h + C_7) = 0$$

即

$$6(C_2h+C_6)x+2(C_3h+C_7)=0$$

$$6(-C_2h+C_6)x+2(-C_3h+C_7)=0$$

上式对所有的x都成立,故有

$$\begin{cases} C_2 h + C_6 = 0 \\ C_3 h + C_7 = 0 \\ -C_2 h + C_6 = 0 \\ -C_3 h + C_7 = 0 \end{cases}$$

解此方程组,得

$$C_2 = C_3 = C_6 = C_7 = 0$$

而

$$(\tau_{xy})_{y=\pm h} = -\frac{1}{2}C_1h^2 - 3C_2x^2 - 2C_3x - C_4 = 0$$

故有

$$C_4 = -\frac{1}{2}C_1h^2$$

由方程(a)的第四式得

$$-\int_{-h}^{h} \tau_{xy} t \, \mathrm{d}y = \int_{-h}^{h} \frac{1}{2} C_1 t (y^2 - h^2) \, \mathrm{d}y = F$$

由此

$$C_1 = -\frac{3F}{2th^3} = -\frac{F}{J}$$

其中 $J = \frac{2}{3}th^3$ 为截面对中性轴的惯性矩。

至此,所有常数均已求出,于是由方程(b)、(e)和(f)得各应力分量为

$$\sigma_{x} = -\frac{Fxy}{J}$$

$$\sigma_{y} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F}{2J}(h^{2} - y^{2})$$
(6-21)

由此可见,所得结果与材料力学所得结果完全一致。并可得出结论,当端部剪力 是按抛物线分布,σ_x在固定端是按线性分布的话,这一解是精确解。如果不是这样, 则根据圣维南原理,这一解在梁内远离端部的截面还是足够精确的,其所影响的区段 大约只有截面尺寸那样大小的长度。

3. 位移的计算

现在讨论梁的变形。应用应变位移关系及胡克定律,由式(6-21)可得出

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{Fxy}{EJ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu Fxy}{EJ}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = -\frac{(1+\nu)F}{EJ}(h^2 - y^2)$$

$$= -\frac{F(h^2 - y^2)}{2GJ}$$
(g)

将式(g)中的前两式积分得

$$u = -\frac{Fx^{2}y}{2EJ} + u_{i}(y)$$

$$v = \frac{\nu Fxy^{2}}{2EJ} + v_{1}(x)$$
(h)

将式(h)中两式分别对 y 和 x 微分

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}y} - \frac{Fx^2}{2EJ}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x} - \frac{vFy^2}{2EJ}$$

将此结果代入(g)中第三式得

$$\frac{du_1}{dy} - \frac{F(2+\nu)}{2EJ}y^2 = -\frac{dv_1}{dx} + \frac{F}{2EJ}x^2 - \frac{(1+\nu)}{EJ}Fh^2$$

上式等号两边分别为 y 与 x 的函数,故各边均等于同一常数 C_1 ,即

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}y} - \frac{F(2+\nu)}{2EJ}y^2 = C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu_{1}}{\mathrm{d}x} - \frac{F}{2EJ}x^{2} + \frac{(1+\nu)}{EJ}Fh^{2} = -C_{1}$$

积分后得

$$u_{1}(y) = \frac{F}{6EJ}(2+\nu)y^{3} + C_{1}y + C_{2}$$

$$v_{1}(x) = \frac{Fx^{3}}{6EJ} - \frac{(1+\nu)}{EJ}Fxh^{2} - C_{1}x + C_{3}$$
(i)

其中 C₂,C₃为积分常数,将以上两式代入式(h)得位移表达式为

$$u = -\frac{F}{2EJ}x^{2}y + \frac{F}{6EJ}(2+\nu)y^{3} + C_{1}y + C_{2}$$

$$v = \frac{\nu F}{2EJ}xy^{2} + \frac{F}{6EJ}x^{3} - \frac{F}{EJ}(1+\nu)xh^{2} - C_{1}x + C_{3}$$
(j)

常数 C_1 , C_2 , C_3 由阻止梁在 Oxy 面内作刚体运动所必需的三个约束条件来确定, 如 在固定端(x=l,y=0 处)有

$$u = v = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

代入位移表达式求出

$$C_1 = \frac{Fl^2}{2EJ} - \frac{F(1+\nu)}{EJ}h^2$$
, $C_2 = 0$, $C_3 = \frac{Fl^3}{3EJ}$

于是梁的位移为

$$u = \frac{F}{2EJ} (l^{2} - x^{2}) y + (2 + \nu) \frac{Fy^{3}}{6EJ}$$

$$v = \frac{F}{EJ} \left[\frac{x^{3}}{6} + \frac{l^{3}}{3} + \frac{x}{2} (\nu y^{2} - l^{2}) + h^{2} (1 + \nu) (l - x) \right]$$
(6-22)

由此得出: u 和 v 都是 x、y 的非线性函数,就是说,梁的任一截面变形后不再保 持平面,这一点和材料力学初等理论所得到的结果是不同的。如在固定端(x = l 处) 则由式(6-22)得

$$(v)_{x=l} = \frac{F}{EJ} \left(\frac{l^3}{2} + \frac{vly^2}{2} - \frac{l^3}{2} \right) = \frac{vFl}{2EJ} y^2$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=l} = \frac{F}{EJ} \left[\frac{vy}{2} - h^2 (1+v) \right], \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{Fh^2 (1+v)}{EJ} = -\frac{Fh^2}{2GJ}$$

即由固定端条件得到的固定端的水平线元有一个转角 $Fh^2/2GJ$ (图 6-3)。如用另外的条件,如 x=l, y=0 处, $u=v=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0$,即固定端在 y=0 处水平线元被固定,则可得类似的结果。

实际上,固定端的水平线元与竖直线元都不能转动,端部效应的详细分析是比较复杂的。不过,由圣维 南原理知道,端部效应的影响范围是不大的(约与梁高 相当)。

梁轴的竖向位移为

$$(v)_{y=0} = \frac{Fx^{3}}{6EJ} - \frac{Fl^{2}x}{2EJ} + \frac{Fl^{3}}{3EJ} + \frac{F(1+\nu)}{EJ}h^{2}(l-x)$$
(6-23)



而端部的挠度

$$(v)_{x=y=0} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fh^2(1+v)l}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Flh^2}{2GI}$$

上式等号右边第二项,显然是剪力对挠度的影响。而这部分与弯曲的影响之比,为

$$\frac{Fh^2 l/2GJ}{Fl^3/3EJ} = \frac{3}{4} (1+\nu) \left(\frac{2h}{l}\right)^2 \approx \left(\frac{2h}{l}\right)^2$$

如 l=10(2h),则此比值为 1/100。所以当 $2h \ll l$ 时,梁的挠度主要由于弯曲所引起。 由此可见,在材料力学中得到的结果,对于细长梁是精确的。

应当指出,在高而短的梁中,以及在梁的高频振动和在波的传播问题中,剪力效 应是非常重要的。

例 6-1 求图 6-4 中受均匀载荷作用的两端简支梁的应力分布与中点位移(不 计体力)。



解

(1) 取应力函数

$$\varphi = C_1 x^2 + C_2 x^2 y + C_3 y^3 + C_4 \left(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5} \right)$$
(a)

容易证明 φ 满足双调和方程。

(2) 由边界条件确定各常数。边界条件为

 Fh^2

$$(\tau_{xy})_{y=\pm h} = 0 \tag{b}$$

$$(\sigma_{v})_{v=-b} = -q \tag{c}$$

$$(\sigma_{v})_{v=h} = 0 \tag{d}$$

在 $x = \pm l$ 处有

$$\int_{-\hbar}^{\hbar} \sigma_x y \, \mathrm{d}y = 0 \tag{e}$$

$$l \int_{-h}^{h} \tau_{xy} \, \mathrm{d}y = \pm q l \delta \tag{f}$$

根据以上条件得

$$C_{2} + 3C_{4}h^{2} = 0$$

$$2(C_{1} + C_{2}h + C_{4}h^{3}) = 0$$

$$2(C_{1} - C_{2}h - C_{4}h^{3}) = -q$$

$$C_{3} + C_{4}l^{2} - \frac{2}{5}C_{4}h^{2} = 0$$

$$4(C_{2}h + C_{4}h^{3}) = q$$

上式分两组求解后得

曲率为

$$\varphi = q \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{3}{8} \frac{x^2 y}{h} + \frac{y^3}{8h^3} \left(l^2 - \frac{2h^2}{5} \right) - \frac{1}{8h^3} \left(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5} \right) \right]$$
(g)

(3) 求应力分量

$$\sigma_x = \frac{q}{2J} \left[(l^2 - x^2) + 2y \left(\frac{y^2}{3} - \frac{h^2}{5} \right) \right]$$
(h)

$$\sigma_{y} = -\frac{q}{2J} \left(\frac{y^{3}}{3} - h^{2} y + \frac{2}{3} h^{3} \right)$$
(i)

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2J} (h^2 - y^2) x \tag{j}$$

其中 $J = \frac{2}{3} \delta h^3$ 。与材料力学中的结果相比较,式(h)的等号右边多出了第二项,此项 与 x 无关,在 h = l/10 时这项仅为全部 σ_x 的 1/1500。由上式看出,在两端面 $(x=\pm l)$ 上,有 $\sigma_x = (qy/J)(y^2/3 - h^2/5)$ 存在,这显然与原题意不符,但在两端面的 这些力的合力和合力偶都等于零。于是,根据圣维南原理,除端部附近以外,对全梁 来说,此解是准确的。

(4) 用所求得之应力,并按本节所述的方法求 y=0 处的位移 v_0 ,为

$$v_{0} = \frac{q}{2EJ} \left[\frac{l^{2}x^{2}}{2} - \frac{x^{4}}{12} - \frac{h^{2}x^{2}}{5} + \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)h^{2}x^{2} \right]$$
$$\frac{d^{2}v_{0}}{dx^{2}} = \frac{q}{EJ} \left[\frac{l^{2} - x^{2}}{2} + \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)h^{2} \right]$$

上式方括号中的第二项为材料力学结果的修正项。

6.4 深梁的三角级数解法

矩形截面梁,在受连续分布载荷作用的情况下,应力函数取多项式来解题是方便的。如果情况比较复杂,特别是载荷不连续时,则应采用三角级数形式的应力函数。现在就以图 6-5 所示的梁为例来讨论弹性平面问题的三角级数解答。取应力函数为

$$\frac{\partial^{4} \varphi}{\partial x^{2} \partial y^{2}} = -\alpha^{2} f''(y) \sin \alpha x$$
$$\frac{\partial^{4} \varphi}{\partial y^{4}} = f^{(4)}(y) \sin \alpha x$$

于是得常微分方程

$$f^{(4)}(y) - 2\alpha^2 f''(y) + \alpha^4 f(y) = 0$$
(6-25)

这一常系数线性微分方程的通解,可用双曲线函数表示为

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch}_{\alpha} y + C_2 \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_3 \operatorname{ych}_{\alpha} y + C_4 \operatorname{ysh}_{\alpha} y \qquad (6-26)$$

将此式代入式(6-24),得应力函数为

$$\varphi = (C_1 \operatorname{ch}_{\alpha} y + C_2 \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_3 \operatorname{ych}_{\alpha} y + C_4 \operatorname{ysh}_{\alpha} y) \sin \alpha x \qquad (6-27)$$

相应的应力分量为

$$\sigma_{x} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}} = \sin \alpha x [C_{1} \alpha^{2} \operatorname{cha} y + C_{2} \alpha^{2} \operatorname{sha} y + C_{3} \alpha (2 \operatorname{sha} y + \alpha y \operatorname{cha} y) + C_{4} \alpha (2 \operatorname{cha} y + \alpha y \operatorname{sha} y)]$$

$$\sigma_{y} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} = -\alpha^{2} \sin \alpha x (C_{1} \operatorname{cha} y + C_{2} \operatorname{sha} y + C_{3} \operatorname{y} \operatorname{cha} y + C_{4} \operatorname{y} \operatorname{sha} y)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x \partial y} = -\alpha \cos \alpha x [C_{1} \alpha \operatorname{sha} y + C_{2} \alpha \operatorname{cha} y + C_{3} (\operatorname{cha} y + \alpha y \operatorname{sha} y) + C_{4} (\operatorname{sha} y + \alpha y \operatorname{cha} y)]$$

$$(6-28)$$

$$+C_{4} (\operatorname{sha} y + \alpha y \operatorname{cha} y)]$$

不难证明,如取应力函数 φ 为

$$\varphi = \cos_{\alpha} x \left[C_5 \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_6 \operatorname{ch}_{\alpha} y + C_7 y \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_8 y \operatorname{ch}_{\alpha} y \right]$$
(6-29)

也能满足双调和方程。此外 n 为任意整数,因而可得无穷多的特解。这样,应力函数 φ 可写为下列无穷级数的形式

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha x \left(C_1 \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \operatorname{ch} \alpha y + C_3 \operatorname{ysh} \alpha y + C_4 \operatorname{ych} \alpha y \right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x \left(C_5 \operatorname{sh} \alpha y + C_6 \operatorname{ch} \alpha y + C_7 \operatorname{ysh} \alpha y + C_8 \operatorname{ych} \alpha y \right) \quad (6-30)$$

式(6-30)中的系数 $C_i(i=1,2,\dots,8)$ 应根据边界条件来确定。这时应力边界条件也应展开为无穷级数的形式

$$q(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos_{\alpha} x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin_{\alpha} x \qquad (6-31)$$

由数学分析可知,某一在区域[-*l*,*l*]上的函数展成傅里叶级数(6-31)时,其系数(称为傅里叶系数)为

$$A_{0} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} q(x) dx$$

$$A_{n} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} q(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$B_{n} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$
(6-32)

对于在梁的上下边界上有宽度为 2a 的均布载荷作用时(图 6-5),傅里叶系数为

$$A_{0} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} q(x) dx = \frac{q_{1}}{2l} \int_{-a}^{a} dx = \frac{q_{1}a}{l}$$
$$A_{n} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} q(x) \cos \alpha x dx = \frac{2q_{1}}{al} \sin \alpha a$$
$$B_{n} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} q(x) \sin \alpha x dx = \frac{q_{1}}{l} \int_{-a}^{a} \sin \alpha x dx = 0$$

这样,对于上边界有

$$q(x) = 2q_1 \left(\frac{a}{2l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ax}{al} \cos ax\right)$$
(6-33)

对于下边界也得同样的表达式。

现在我们研究有足够多跨的连续墙梁 的弹性分析。所谓墙梁是指高度与跨度相 近的一类墙板结构。载荷的作用只在板面 以内(图 6-6),墙梁是深梁的一种。

设梁的高度为 h,跨度为 2l,梁的上边界 有均布 q 载荷作用,略去边跨的效应,取中 间某一跨为代表来讨论,如图 6-6 所示。

墙梁的支座往往是一系列的柱,现在将其 反力均简化为集中力,在上述情况下为 2ql。

现在考虑用三角级数形式的应力函数来求解。

(1) 选取应力函数

因正弦函数项是反对称函数 $(\sin(-x) = -\sin x)$, 而 σ_x , σ_y 应对 y 轴为对称, 故应力 函数应取只包含余弦函数项的级数。此外从以后的分析可知仅有三角级数尚难满足全部 边界条件, 应补充二次多项式, 于是应力函数取下列形式:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x \left(C_1 \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \operatorname{ch} \alpha y + C_3 \operatorname{ysh} \alpha y + C_4 \operatorname{ych} \alpha y \right) + D_1 x^2 + D_2 x y + D_3 y^2$$
(6-34)

此外 $\alpha = n\pi/l$, D 为常数。应当指出,由于 $\cos\alpha(x+2l) = \cos\alpha x$,故所研究的一跨,具 有代表性,它和下一跨有相同的条件。

(2) 计算应力分量

$$\sigma_{x} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2} \cos \alpha x \left[\alpha (C_{1} \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_{2} \operatorname{ch}_{\alpha} y + C_{3} \operatorname{y} \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_{4} \operatorname{y} \operatorname{ch}_{\alpha} y) \right] + 2D_{3}$$

$$+ 2(C_{3} \operatorname{ch}_{\alpha} y + C_{4} \operatorname{sh}_{\alpha} y) \left] + 2D_{3}$$

$$\sigma_{y} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2} \cos \alpha x (C_{1} \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_{2} \operatorname{ch}_{\alpha} y + C_{3} \operatorname{y} \operatorname{sh}_{\alpha} y)$$

$$+ C_{4} \operatorname{y} \operatorname{ch}_{\alpha} y) + 2D_{1}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x \left[\alpha (C_{1} \operatorname{ch}_{\alpha} y + C_{2} \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_{3} \operatorname{y} \operatorname{ch}_{\alpha} y) + C_{4} \operatorname{y} \operatorname{sh}_{\alpha} y + C_{4} \operatorname{y} \operatorname{ch}_{\alpha} y \right] - D_{2}$$

剪应力分量 τ_{xy} 应为反对称,故应有

$$D_2 = 0$$

(3) 写出边界条件与平衡条件

i $\exists \tau_{xy}=0, x=0, x=l$



ii
$$\int_{0}^{h} \sigma_{y} dx = -ql$$

iii 当 $\tau_{xy} = 0, \sigma_{y} = 0, y = 0, x \neq 0, x \neq 2l$
iv 当 $\tau_{xy} = 0, \sigma_{y} = -q, y = h$
v 对任意竖向截面有

$$\int_{0}^{h} \sigma_{x} \mathrm{d}y = 0$$

(4) 确定常数,求应力分布规律

以上共 8 个条件,将式(6-35)代入后求解,不难得到

$$D_{1} = -q/2, \quad D_{2} = 0, \quad D_{3} = 0$$

$$C_{1} = -\frac{2q}{\alpha} \frac{\alpha h + \mathrm{sh}\alpha h \mathrm{ch}\alpha h}{\mathrm{sh}^{2}\alpha h} \approx -\frac{2q}{\alpha}$$

$$C_{2} = \frac{2q}{\alpha^{2}}$$

$$C_{3} = -\frac{2q}{\alpha} \frac{\mathrm{sh}^{2}\alpha h}{\mathrm{sh}^{2}\alpha h - \alpha^{2}h^{2}} \approx -\frac{2q}{\alpha}$$

$$C_{4} = \frac{2q}{\alpha} \frac{h + \mathrm{sh}\alpha h \mathrm{ch}\alpha h}{\mathrm{sh}^{2}\alpha h - \alpha^{2}h^{2}} \approx \frac{2q}{\alpha}$$

将以上常数代入式(6-35),并注意到

$$ch_{\alpha}y - sh_{\alpha}y = e^{-\alpha}$$

得

$$\sigma_{x} = -2q \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1 - \alpha y) e^{-\alpha y}$$

$$\sigma_{y} = -2q \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} - q$$

$$\tau_{xy} = -2q \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha x (\alpha y) e^{-\alpha y}$$
(6-36)

各应力分量的分布规律如图 6-7 所示。

(5) 求位移分量

将所得各应力分量的表达式代入 下式:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$



之后积分,可得各位移分量u和v。

6.5 用极坐标表示的基本方程

在解某些工程问题时,采用极坐标是很方便的。例如厚(薄)壁筒,圆弧形曲梁、 圆盘以及弹性半无限体边界受集中力作用等问题。以下给出极坐标的有关公式。

极坐标系 (r,θ) 与直角坐标系(x,y)间的关系为(图

6-8)



vi

平衡方程

考虑单位厚度的微小单元 abcd,其中在 r, θ 方向的体力分量分别为 $F_{br}, F_{b\theta}$,以下推导径向的平衡方程,于是由径向力的平衡得(图 6-9)





$$\left(\sigma_{r} + \frac{\partial \sigma_{r}}{\partial_{r}} dr\right) (r + dr) d\theta - \sigma_{r} r d\theta - \left(\sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) dr \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_{\theta} dr \sin \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr \cos \frac{d\theta}{2} + F_{br} r dr d\theta = 0$$

由于 $d\theta$ 是个小量,故 $\sin \frac{d\theta}{2}$ 及 $\cos \frac{d\theta}{2}$ 分别可用 $\frac{d\theta}{2}$ 和 1 来代替,略去高次项,化简后并 以类似的步骤可得周向列平衡方程,整理后可得

$$\frac{\partial \sigma_{r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r} - \sigma_{\theta}}{r} + F_{br} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_{b\theta} = 0$$
(6-39)

在不计体力时,由极坐标与直角坐标的关系,可导出满足平衡方程(6-39)的用 应力函数 $\varphi(r,\theta)$ 表示的应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta} \to \mathbb{D}$

$$\sigma_{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial \theta^{2}}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial r^{2}}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$
(6-40)

应变位移关系

现在考虑微小 ABCD 的变形,将 r, θ 方向的位移分别记作 u 和 v,图 6-10 中的



微小扇形 ABCD 为变形前的状态,虚线 A'B'C'D'为变形后的状态。各点的位移可以分解为径向与 周向两个矢量,例如 $\overrightarrow{AA'}$,可分解为 $\overrightarrow{AA''}$ 和 $\overrightarrow{A''A'}$, 余类同(见图 6-10)。图中 AB=dr,OA'的延长线 交 $B''B' \mp F$,A'E 为 A''B''的平行线。半径为 OA'的圆弧交 $OD'' \mp G$,且交 D'处至该弧的垂线于 H。

可见,
$$\angle HA'F = \frac{\pi}{2}$$
, A, B, C, D 各点之位移
为 $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA''} + \overrightarrow{A''A'}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB''} + \overrightarrow{B''B'}$,…。

考虑到 $d\theta$ 为一小量,故 $AD \approx r d\theta$,由此可得各应变分量为

$$\varepsilon_{r} = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{BB'' - AA''}{AB} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r}dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}$$
$$\varepsilon_{\theta} = \frac{A'D' - AD}{AD} \approx \frac{D'D'' + GA'' - A'A'' - AD}{AD}$$
$$= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta + (r+u)d\theta - v - rd\theta}{rd\theta} = \frac{\partial v}{r\partial \theta} + \frac{u}{r}$$

① 利用直角坐标系和极坐标系的关系式(6-37),(6-38)便不难得到,读者可进行校核。

$$\begin{split} \gamma_{r\theta} &= \gamma_1 + \gamma_2 = \angle B'A'F + \angle D'A'H \approx \frac{B'E - EF}{A''B''} + \frac{D'H}{A'H} \\ &= \frac{B'E}{A''B''} - \frac{A''A'}{OA''} + \frac{DD'' - AA''}{A'H} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial r}dr}{dr + \frac{\partial u}{\partial r}dr} - \frac{v}{r + u} + \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta - u}{rd\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta} \\ &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r\partial \theta} \end{split}$$

于是有

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{6-41}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \tag{6-42}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r\partial \theta}$$
(6-43)

式(6-41)~(6-43)即用极坐标表示的应变位移关系式。

胡克定律

用极坐标表示的胡克定律与用直角坐标表示时形式不变,因局部一点的 r, θ 坐 标仍是一个直角坐标系,而只需将直角坐标系的公式中的 x, y 分别换成 r, θ ,于是

对于平面应力情况为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r} &= \frac{1}{E} (\sigma_{r} - \nu \sigma_{\theta}) \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_{r}) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \end{aligned}$$
 (6-44)

对于平面应变情况为

$$\varepsilon_{r} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{r} - \nu\sigma_{\theta}] \\\varepsilon_{\theta} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{\theta} - \nu\sigma_{r}] \\\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta}$$
(6-45)

应变协调方程

采用导出直角坐标系应变协调方程的方法,不难导出以极坐标表示的应变协调 方程为

$$\frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{r}}{\partial \theta^{2}} + \frac{2}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{r}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\gamma}_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{r\theta}}{\partial \theta}$$
(6-46)

在轴对称情况(物体和外载荷,从而应力和位移均对称于经过物体中心(也是重 心)而垂直于 x,y 平面的轴线,此时各量均与 θ 无关,故称为轴对称),不计体力时,通 过胡克定律,将式(6-46)写成以应力表示的应变协调方程为

$$\nabla^{2}(\sigma_{r}+\sigma_{\theta}) = \frac{\mathrm{d}^{2}(\sigma_{r}+\sigma_{\theta})}{\mathrm{d}r^{2}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(\sigma_{r}+\sigma_{\theta})}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{6-47}$$

在用应力函数求解时,应将应变协调方程改用应力函数表示,为此,须将 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ 改用 r, θ 表示。根据式(6-15)可导出拉普拉斯算符为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$$
(6-48)

于是极坐标表示的应变协调方程为

$$\nabla^{4}\varphi = \left(\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}}\right) \left(\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial \theta^{2}}\right) = 0 \quad (6-49)$$

有了以上基本方程,便可按下列步骤求解边值问题:

- (1) 确定体力和面力;
- (2) 写出边界条件;
- (3) 选择解题方法;
- (4) 解方程(满足边界条件);
- (5) 校核(代回基本方程和边界条件)。

6.6 厚壁筒问题

作为用极坐标解题的第一个例子,我们讨论一类最简单的极对称问题,即应力和 应变只与一个坐标有关,从而不难得到其封闭形式的解答。受内外压力作用的厚壁 筒,属于这类问题。此外还有整球形容器等。

现在研究受内压 *P*₁ 和外压 *P*₂ 作用的厚壁圆筒(图 6-11)。圆筒的内径为 2*a*, 外径为 2*b*。设圆筒的长度比起圆筒的直径来说足够大,以致可以认为离两端足够 远处的应力和应变分布沿筒长方向没有差异。由对称性可知,原来的任一横截面 变形后仍保持平面(如图 6-11)。因而,应力与应变的分布对称于圆筒的中心轴

线。如取图 6-11 所示的坐标,则 Oz 为对称轴。每 一点的位移将只有 r 方向的分量 u 和 z 方向的分量 w,即 u,w 均与 θ 无关。由于,垂直于 Oz 轴的平面 变形后仍为平面,沿圆筒长度一样,故知 u 只依赖于 r,w 只依赖于 z。于是各应变分量由式(6-41)~ (6-43)得





及

$$\varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}$$

(6-50)

由此,相对体积变形 e 为:

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{u}{r} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \tag{6-51}$$

将应变位移关系式代入广义胡克定律,得

$$\sigma_{r} = 2G\left(\varepsilon_{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{du}{dr} + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{dw}{dz}\right)$$

$$\sigma_{\theta} = 2G\left(\varepsilon_{\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{du}{dr} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{dw}{dz}\right)$$

$$\sigma_{z} = 2G\left(\varepsilon_{z} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{dw}{dz} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{du}{dr}\right)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0$$

$$(6-52)$$

假定体力略去不计,则平衡方程(6-39)化为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{6-53}$$

如对任一微小楔形六面体单元列出 z 方向的平衡条件(图 6-12),则由于 $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$,可得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{6-54}$$

将式((6-52)中的 σ_z 表达式代入式((6-54)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{6-55}$$



$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \text{const}$$
 (6-56)
将式(6-52)代入式(6-53),化简后可得

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$
 (6-57)

式(6-57)为欧拉二阶线性齐次微分方程,其特 解为

$$u = r^n \tag{6-58}$$

将式(6-58)代入式(6-57),并除以 r^{n-2} 后得特征方程

$$n^2 - 1 = 0$$
 (6-59)

方程(6-59)的根为

 $n_1 = 1$ $n_2 = -1$

于是得

其相应的特解为r和 $\frac{1}{r}$,而其通解应为这两个特解的线性组合,即

$$u = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \tag{6-60}$$

将此结果代入式(6-52)得各应力分量为

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} (C_1 + \nu \varepsilon_z) - 2GC_2 \frac{1}{r^2} = A - B \frac{1}{r^2}$$
$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu} (C_1 + \nu \varepsilon_z) + 2GC_2 \frac{1}{r^2} = A + B \frac{1}{r^2}$$
$$\sigma_z = \frac{4G\nu C_1}{1-2\nu} + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_z = 2\nu A + E\varepsilon_z$$

其中

$$A = \frac{2G}{1-2\nu}(C_1 + \nu \varepsilon_z) \quad B = 2GC_2 \quad E = \frac{2G}{1-2\nu}$$

均为常数,应由边界条件来确定。我们知道因 σ_ε 为一常数,故所得结果在圆筒两端 也是均匀拉力(或压力)时是精确的。

现在考虑自由端即 $\sigma_z = 0$ 的情况。此时,边界条件为

$$\begin{array}{c} \exists r = a, \quad \sigma_r = -p_1 \\ \exists r = b, \quad \sigma_r = -p_2 \end{array}$$

$$(6-61)$$

用以上条件,求出 A,B之后可得下列弹性解的公式:

$$\sigma_{r} = \frac{p_{1}a^{2} - p_{2}b^{2}}{b^{2} - a^{2}} - \frac{(p_{1} - p_{2})a^{2}b^{2}}{(b^{2} - a^{2})r^{2}}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{p_{1}a^{2} - p_{2}b^{2}}{b^{2} - a^{2}} + \frac{(p_{1} - p_{2})a^{2}b^{2}}{(b^{2} - a^{2})r^{2}}$$

$$u = \frac{1 - \nu(p_{1}a^{2} - p_{2}b^{2})r}{E} + \frac{1 + \nu(p_{1} - p_{2})a^{2}b^{2}}{(b^{2} - a^{2})r}$$

$$(6-62)$$

当 r=a,即在筒内侧,有

$$\sigma_{r} = -p_{1}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{b^{2} + a^{2}}{b^{2} - a^{2}} p_{1} - \frac{2b^{2} p_{2}}{b^{2} - a^{2}}$$

$$u = \frac{a}{E} \left(\frac{b^{2} + a^{2}}{b^{2} - a^{2}} + \nu \right) p_{1} - \frac{2ab^{2} p_{2}}{E(b^{2} - a^{2})}$$
(6-63)

当 r=b,即在简外侧,有

$$\sigma_{r} = -p_{2}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2a^{2}p_{1}}{b^{2}-a^{2}} - \frac{b^{2}+a^{2}}{b^{2}-a^{2}}p_{2}$$

$$u = \frac{2a^{2}bp_{1}}{E(b^{2}-a^{2})} - \frac{b}{E} \left(\frac{b^{2}+a^{2}}{b^{2}-a^{2}} - \nu\right)p_{2}$$
(6-64)

如外侧压力为零,即 $p_2 = 0$,则式(6-62)化为

$$\sigma_{r} = \frac{p_{1}a^{2}}{b^{2}-a^{2}} - \frac{p_{1}a^{2}b^{2}}{(b^{2}-a^{2})r^{2}}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{a^{2}p_{1}}{(b^{2}-a^{2})} + \frac{a^{2}b^{2}}{(b^{2}-a^{2})r^{2}}p_{1}$$

$$u = \frac{1-\nu a^{2}rp_{1}}{E} + \frac{1+\nu p_{1}a^{2}b^{2}}{(b^{2}-a^{2})r}$$
(6-65)
(6-65)
(6-65)

应力分布情况如图 6-13 所示。

6.7 半无限平面体问题

当作为建筑物地基的土体视为弹性体考虑时,地表面受带状载荷作用的问题可 化为弹性半平面受垂直载荷作用的问题。此外,大尺寸薄板边界受作用于板的中面, 且平行于板面的外力作用时也是这类问题。不过前者为平面应变问题,后者为平面 应力问题。以下我们按平面应力的情况来讨论,最后将说明,所得结果对于平面应变 情况的应力分量部分仍然适用,位移与应变部分只需更换一下弹性常数。

1. 楔形尖顶承受集中载荷

下面首先考虑图 6-14 所示三角形截面的长柱体在顶端受载荷作用时的应力分 布。取应力函数为

$$\varphi = Ar\theta \sin\theta$$

其中A为常数,则由式(6-40),得

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{2A}{r} \cos\theta$$
$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0$$

这一应力状态,显然可以满足在楔的外缘斜边上无外力作用的边界条件。



在上式中,当 $r \rightarrow 0$ 时, $\sigma_r \rightarrow \infty$ 。这就说,在载荷F的作用点处应力是无穷大,即 解答是不适用的。如果外力不是作用在顶点一个点上,而是按式(6-66)的规律,分 布在一个小圆弧形面积上,则上面的解为该问题的精确解,否则根据圣维南原理除掉 在作用点附近的一个小扇形,所得解答仍然是足够精确的。 2. 半无限平面边界受集中载荷

在上述问题中,如令 $\alpha = \frac{\pi}{2}$,则得在弹性半平面边界上有集中载荷作用的问题 (图 6-15)的解答。这就是本节所要讨论的问题。



下面讨论一下该应力场的特征.

(1) 由式(6-67)知, σ_r 为主应力,并指向 O点,其大小随 θ 角的变化而变化。

(2) 在直径为h,圆心在Ox轴日相切于O



点的圆上(图 6-15),任一点都有 $r/\cos\theta = h$,所以在此圆周上各点的正应力 σ_{e} 均为

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi h} \tag{6-68}$$

这就是说,除载荷作用点外,此圆上各点 σ 的应力均等,即此圆为等径向应力轨迹, ·通常称为压力泡。又因此圆上 $au_{
m max} = rac{1}{2} \sigma_r =$ 常数,故又称等色线(因在光弹性试验中 等剪应力线的颜色相同而得名)(图 6-16a)。

(3) 丰应力轨迹为一组同心圆和以O为中心的放射线 $^{(0)}$ (图 6-16b)。

(4) 最大剪应力轨迹为一组与主应力轨迹成 45°的两组曲线(图 6-16c)。最大 剪应力轨迹为对数螺线^②。

上述用极坐标表示的各应力分量式(6-67),不难转变到直角坐标系上去。实际 **上.**由图 6-17 得

② 任一点的最大剪应力均与主应力轨迹成 45° ,由此可建立微分方程 $\frac{rd\theta}{dr}$ = tan $\frac{\pi}{4}$ = 1,积分后得 $r = Ce^{\theta}$, 因而,最大剪应力轨迹是一族对数螺线。

① 因主应力 gr 为 O 点出发的一束放射线与这族放射线正交的曲线即 gr 的轨迹(所谓应力轨迹,是描绘物 体内各点应力矢量的方向的变化曲线,它并不表示应力大小的变化),显然这是以 ()点为圆心的一族同心半圆。





或

$$\sigma_{x} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^{3}}{(x^{2} + y^{2})^{2}}$$

$$\sigma_{y} = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^{2}}{(x^{2} + y^{2})^{2}}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^{2}y}{(x^{2} + y^{2})^{2}}$$
(6-69')



由以上可得,距自由边为 a 的平面上的应力为(图 6-18)

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{a^3}{(a^2 + y^2)^2} \\ \sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{ay^2}{(a^2 + y^2)^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{a^2 y}{(a^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

位移计算

现在来求位移分量。将广义胡克定律

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r} &= \frac{1}{E} (\sigma_{r} - \nu \sigma_{\theta}) \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_{r}) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned}$$
 (a)

代入应变位移关系式,得

$$\varepsilon_{r} = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2F\cos\theta}{\pi E r}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{2\nu F\cos\theta}{\pi E r}$$

$$v_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0$$
(b)

将(b)第一式积分,得

$$u = -\frac{2F}{\pi E} \cos\theta \cdot \ln r + f(\theta) \tag{c}$$

将式(c)代入(b)第二式得

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{2\nu F}{\pi E} \cos\theta + \frac{2F}{\pi E} \cos\theta \ln r - f(\theta) \tag{d}$$

积分上式得

$$v = \frac{2\nu F}{\pi E} \sin\theta + \frac{2F}{\pi E} \sin\theta \ln r - \int f(\theta) \, \mathrm{d}\theta + f_1(r) \tag{e}$$

将式(c),(e)代入(b)第三式,简化并乘以 r 后,得 $df_1(r) = df(\theta) = c = -2(1-x)F$

$$f_1(r) - r \frac{\mathrm{d}f_1(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \int f(\theta) \,\mathrm{d}\theta + \frac{2(1-\nu)F}{\pi E} \sin\theta = F = \mathrm{const} \qquad (f)$$

由此得下列两个方程

$$f_{1}(r) - r \frac{df_{1}(r)}{dr} = Q$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta) d\theta + \frac{2(1-\nu)F}{\pi E} \sin\theta = Q$$
(g)

解微分积分方程(g),得

$$\begin{cases} f_1(r) = Hr + Q\\ f(\theta) = I\sin\theta + K\cos\theta - \frac{(1-\nu)F}{\pi E}\theta\sin\theta \end{cases}$$

其中 Q, H, I, K 均为任意常数,考虑到对轴的对称性,有下列边界条件(图 6-19):



$$u = \frac{2F}{\pi E} \cos\theta \ln \frac{h}{r} - \frac{(1-\nu)F}{\pi E} \theta \sin\theta$$

$$v = -\frac{2F}{\pi E} \sin\theta \ln \frac{h}{r} - \frac{(1-\nu)F}{\pi E} \theta \cos\theta + \frac{(1+\nu)F}{\pi E} \sin\theta$$
(6-70)

由此,自由边界处的位移 v 为

$$(-v)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{h}{r} - \frac{(1+v)F}{\pi E}$$

此处 υ 以沿θ 正方向为正。

$$\eta = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{s}{r} \tag{6-71}$$

应当指出,当 $h \to \infty$ 时,由上式(6-70)得 (v)_{$\theta=\pi/2$}→∞,这显然是与实际不符的。为了实际 应用的目的(例如在土力学中求地基的沉陷),我们 可以取自由边界上的一点作为基点(例如图 6-20 中 B 点),求任意 M 对该点的相对位移 η $\eta = \left[\frac{2F}{\pi E} \ln \frac{h}{r} - \frac{(1+\nu)F}{\pi E}\right] - \left[\frac{2F}{\pi E} \ln \frac{h}{s} - \frac{(1+\nu)F}{\pi E}\right]$ 即 $\eta = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{s}{r}$



前面曾提到,对于平面应变问题,以上所得结果仍然适用,只需将位移分量公式

中的 E 换为 $\frac{E}{1-\nu^2}$, ν 应换为 $\frac{\nu}{1-\nu}$ 。例如, 在平面应变的情况下式(6-71)应改写为

$$\eta = \frac{2(1-\nu^2)F}{\pi E} \ln \frac{s}{r}$$
(6-72)

3. 半无限平面体边界上受分布载荷

以上结果不难用叠加原理推广到自由边有多个集中力及分布载荷作用的情况。 设在自由边有分布载荷作用(图 6-21),则由图得出



$$\mathrm{d}y = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$$

于是有

$$q dy = \frac{q r d\theta}{\cos \theta}$$

以此代替式(6-69)中 F,便得到 qdy作用下各点之应力。如载荷从 a 均匀分布 (q=常数)到 b,则任一点的应力由下列公式确定:

$$\sigma_{x} = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} q \cos^{2} \theta d\theta = -\frac{q}{2\pi} (2\theta + \sin 2\theta) \Big|_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} \\ \sigma_{y} = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} q \sin^{2} \theta d\theta = -\frac{q}{2\pi} (2\theta - \sin 2\theta) \Big|_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} \\ \tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} q \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{q}{2\pi} (2\sin^{2} \theta) \Big|_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} \Big|$$

$$(6-73)$$

如令 $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ (图 6-21),则主应力为

$$\sigma_{1} = -\frac{q}{\pi} (\alpha - \sin \alpha)$$

$$\sigma_{2} = -\frac{q}{\pi} (\alpha + \sin \alpha)$$
(6-74)

由此得最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{q}{\pi} \sin \alpha \qquad (6-75)$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,最大剪应力达到最大值。

以上为弹性解。如果外载荷不断增加,则必将在载荷达到某一数值时,在介质中的某一点处,开始出现塑性区,如图 6-22 所示。



6.8 圆孔孔边应力集中

本节讨论对边受均匀拉力作用的带孔平板。设孔为圆形,半径为*a*,且与板的尺 寸相比很小(图 6-23)。则孔边的应力将远大于无孔时的应力,这种现象称为应力 集中。



由圣维南原理可知,在远离小孔的地方,孔边局部应力集中的影响将消失。对于 无孔板来说,板中应力为

$$\sigma_x = q$$
, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$

与之相应的应力函数为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} q y^2 \tag{6-76}$$

用极坐标表示为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} q r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} q r^2 (1 - \cos 2\theta) \tag{6-77}$$

现在要找一个应力函数 φ ,使它适用于有圆孔的板,且在 r 值足够大时给出的应力与 φ_0 给出的应力相同。

我们取应力函数为下列形式:

$$\varphi = f_1(r) + f_2(r)\cos 2\theta \tag{6-78}$$

将式(6-78)代入(6-49),得

$$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^{2}f_{1}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{df_{1}}{dr}\right) + \left(\frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^{2}}\right) \times \left(\frac{d^{2}f_{2}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{df_{2}^{2}}{dr} - \frac{4f_{2}}{r^{2}}\right)\cos 2\theta = 0$$
(6-79)

因上式对所有的 θ 均应满足,故有

$$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^{2}f_{1}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{df_{1}}{dr}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^{2}}\right)\left(\frac{d^{2}f_{2}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{df_{2}}{dr} - \frac{4f_{2}}{r^{2}}\right) = 0$$
(6-80)

式(6-80)第一式为欧拉线性方程,其特解为

$$f_1 = r^n \tag{6-81}$$

于是得

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}r} = [n(n-1) + n]r^{n-2} = n^2 r^{n-2}$$
(6-82)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)n^2r^{n-2} = n^2[(n-2)(n-3) + (n-2)]r^{n-4}$$
$$= n^2(n-2)^2r^{n-4} = 0$$
(6-83)

特征方程为

$$n^2 (n-2)^2 = 0 \tag{6-84}$$

其4个根为

$$n_{1,2}=0$$
, $n_{3,4}=2$

从而得(6-80)第一式的通解为

$$f_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r \tag{6-85}$$

式(6-80)第二式也是欧拉线性方程,其特解同样为

$$f_2 = r^n$$

类似地有

$$\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} - \frac{4f_2}{r^2} = [n(n-1) + (n-4)]r^{n-2}$$

$$= (n+2)(n-2)r^{n-2}$$

$$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^{2}}\right)(n+2)(n-2)r^{n-2}$$

$$= (n+2)(n-2)[(n-1)(n-3)+n-2-4]r^{n-4}$$

$$= (n+2)(n-2)n(n-4)r^{n-4} = 0$$
(6-87)

因而 n 的 4 个值为

$$n_1 = -2$$
, $n_2 = 0$, $n_3 = 2$, $n_4 = 4$

于是得(6-80)第二式的通解为

$$f_2 = \frac{C_5}{r^2} + C_6 + C_7 r^2 + C_8 r^4 \tag{6-88}$$

于是

$$\varphi = f_1 + f_2 \cos 2\theta$$

$$=C_{1}+C_{2}\ln r+C_{3}r^{2}+C_{4}r^{2}\ln r+\left(\frac{C_{5}}{r^{2}}+C_{6}+C_{7}r^{2}+C_{8}r^{4}\right)\cos 2\theta \qquad (6-89)$$

代入式(6-40)有

$$\sigma_{r} = C_{2} \frac{1}{r^{2}} + 2C_{3} + C_{4} (1 + 2\ln r) - \left(\frac{6C_{5}}{r^{4}} + \frac{4C_{6}}{r^{2}} + 2C_{7}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta} = -C_{2} \frac{1}{r^{2}} + 2C_{3} + C_{4} (3 + 2\ln r) + \left(\frac{6C_{5}}{r^{4}} + 2C_{7} + 12C_{8}r^{2}\right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(-\frac{6C_{5}}{r^{4}} - \frac{2C_{6}}{r^{2}} + 2C_{7} + 6C_{8}r^{2}\right) \sin 2\theta$$

$$(6-90)$$

上式中的常数,应根据下列条件确定:

- (1) 当 $r \rightarrow \infty$ 时,应力应保持有限;
- (2) 当 r=a时, $\sigma_r=\tau_{r\theta}=0$ 。

由第一个条件,因当 $r \rightarrow \infty$ 时,以 C_4 , C_8 为系数的项无限增长,故 $C_4 = C_8 = 0$ 。 由第二个条件,当 r = a时, $\sigma_r = 0$,有

$$2C_3 + \frac{C_2}{a^2} = 0, \quad 2C_7 + \frac{6C_5}{a^4} + \frac{4C_6}{a^2} = 0$$
 (a)

及当 r=a 时, $\tau_{r\theta}=0$,有

$$2C_7 - \frac{6C_5}{a^4} - \frac{2C_6}{a^2} = 0 \tag{b}$$

此外,应力函数 φ 在 r 足够大时给出的应力应与 φ_0 给出的应力相同。因 $\varphi_0 = \frac{1}{4}qr^2 - \frac{1}{4}qr^2\cos 2\theta$,故由 φ_0 确定的应力分量为

$$\sigma_r^0 = \frac{1}{2} q(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sigma_\theta^0 = \frac{1}{2} q(1 - \cos 2\theta)$$

$$\tau_{r\theta}^0 = -\frac{1}{2} q \sin 2\theta$$
(6-91)

于是,以上要求即在 $r \rightarrow \infty$ 的条件下,式(6-90)应与式(6-91)相等。 由此,得

$$2C_7 = -\frac{1}{2}q, \quad 2C_3 = \frac{1}{2}q$$
 (c)

解(a)、(b)、(c)后,得

$$C_2 = -\frac{1}{2}qa^2$$
, $C_3 = \frac{1}{4}q$, $C_5 = -\frac{1}{4}qa^4$
 $C_6 = \frac{1}{2}qa^2$, $C_7 = -\frac{1}{4}q$

将以上结果代入式(6-89),并弃去 C_1 (因它对应力分量没有影响),得应力函数为

(6 - 94)

$$\varphi = \frac{1}{4}q \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]$$
(6-92)

各应力分量为

$$\sigma_{r} = \frac{1}{2}q \left[1 - \frac{a^{2}}{r^{2}} + \left(1 - \frac{4a^{2}}{r^{2}} + \frac{3a^{4}}{r^{4}} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}q \left[1 + \frac{a^{2}}{r^{2}} - \left(1 + \frac{3a^{4}}{r^{4}} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}q \left(1 + \frac{2a^{2}}{r^{2}} - \frac{3a^{4}}{r^{4}} \right) \sin 2\theta$$
(6-93)

人们关心的是圆边(即 r = a 和 $\theta = \pm \pi/2$)处的应力。实际上,由式 (6-93)可得出(图 6-24)

当
$$r=a, \sigma_r=0, \tau_{r\theta}=0, \sigma_{\theta}=q(1-2\cos 2\theta)$$

而当 $r=a, \theta=\pm \pi/2, \sigma_{\theta}=3q;$ 当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi, \sigma_{\theta}=-q_{\circ}$

当 $\theta = \pm \pi/2$, σ_{θ} 随r的变化而变化的关系为(图 6-24):



冬 6-24
$$\sigma_{\theta} = q \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right) \tag{6-95}$$

当 r=a 时, $\sigma_{\theta}=3q$,这就是说,板条拉伸时孔边的最大拉应力为平均拉应力的三 倍。而当 $\theta=0^{\circ}$ 或 $\theta=\pi$ 时, $\sigma_{\theta}=-q$ 为压应力。再由式(6-95)可知,当 r=2a时, $\sigma_{\theta}=1$. 22q,r=3a时, $\sigma_{\theta}=1$. 07q,当r足够大时, $\sigma_{\theta} \rightarrow q$,即应力集中现象只发生在孔边附近,远离孔边即迅速衰减下去。

应当指出,在孔的尺寸 2*a*(图6-25)与平板尺寸 *d*相比为很小(2*a*≪*d*)时,可采用 下列近似公式

$$(\sigma_{\theta})_{\max} = 3q \frac{d}{d-a} \tag{6-96}$$

对于椭圆形的孔,当椭圆的一个主轴(2b)与受拉方向一致时(图 6-26),则在另 一主轴(2a)端部产生的应力为



由此可见,如a > b,则(σ_{θ})_{max}>3q,且当 $b \rightarrow 0$,即椭圆孔趋于一条裂纹时,裂纹尖端的应力是相当大的。这种情况说明,垂直于受拉方向的裂纹首先在端部扩展。为防止裂纹的扩展,常在裂纹尖端钻一小孔以降低应力集中系数。

复习要点

1. 在平面问题中,当不记体力时,应变协调方程简化为调和方程(称为莱维 方程)

 $\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$

2. 在平面问题的平衡方程、应变协调方程和边界条件中,均不含材料常数,故平面应 力问题或是平面应变问题,它们的应力分布是相同的,这是模型试验的理论基础。

3. 艾里应力函数 φ 为双调和函数

$$\nabla^4 \varphi = 0$$

及其特性。

- 4. 逆解法与半逆解法的技巧。
- 5. 适用于直角坐标和极坐标解题的特点。

思考题

6-1 为什么平面应力和平面应变问题的应力分布是相同的?

6-2 应力函数的选取有哪些注意点?

6-3 在半平面表面受集中力作用时,物体中的最大切应力轨迹为什么是一族 对数螺线?

6-4 什么样的问题可以简化成平面应力问题或平面应变问题?

6-5 用应力函数解问题时,应有哪些步骤?

6-1 求下图中给出的圆弧曲梁内的应力分布。

提示:(1)选用极坐标;

(2) 应力函数取 $\varphi = f(r) \sin \theta$ 。

答案:



6-2 试分析下列应力函数可解什么样的平面应力问题

$$\varphi = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) + \frac{q}{2}y^2$$

6-3 悬臂梁(-c < y < c, 0 < x < l)沿下边受均布剪力,而上边和x = l的一端不 受载荷时,可用应力函数

$$\varphi = s \left(\frac{1}{4} xy - \frac{xy^2}{4c} - \frac{xy^3}{4c^2} + \frac{ly^2}{4c} + \frac{ly^3}{4c^2} \right)$$

 $\hat{\rho}_1 g y$

УŤ

习题 6-4

x

得出解答。并说明,此解答在哪些方面是不完善的。

6-4 已求得三角形坝体的应力场为

 $\sigma_{x} = ax + by$ $\sigma_{y} = cx + dy$ $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -dx - ay - \gamma x$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{z} = 0$

其中 γ 为坝体材料比重, γ_1 为水的比重,试根据边界条件 求常数 $a_{x}b_{x}c_{x}d$ 的值。

答案:
$$a=0, b=-\gamma$$
,

 $c = \gamma \cot \beta - 2\gamma_1 \cot^3 \beta, \quad d = \gamma_1 \cot^3 \beta - \gamma$

6-5 试以简支梁受均布载荷作用为例,求当泊松比 $\gamma = 0.3$ 时,用初等理论给出的结果的误差不超过 2.5%时的跨长 l 与梁高 h 之比。

答案: h/l≤0.1085





并证明楔顶没有集中力或力偶作用。

答案:
$$c = \frac{s}{2\sin 2\alpha}$$

第7章

用复变函数法解平面问题

7.1 复变函数的基本关系式

许多弹性力学平面问题很适宜用复变函数方法求解,不仅方便,而且完美。由克 罗索夫(G.V. kolosoff)和穆斯海里什维利(N.I. Muskhelishvili)发展的这一方法使 复杂的弹性力学平面问题可以简便地得到完善的解答。以下我们给出一些数学上的 准备。

在笛卡儿坐标系中,复变量 z 作为自变量,而 z 由实变量 x 和 y 构成,即 $z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$ (7-1)

其中 i 为虚单位, \overline{z} 称为复变量 z 的共轭变量,称 x(=Rez)为复变量 z 的实部, y(=Imz)为其虚部,即

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$
$$y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

这样,应力函数 ϕ 为一复合函数。根据复合函数的微分法则,并考虑到下列关系式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$
, $\frac{\partial z}{\partial y} = i$

可得

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{z}}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi$$
(7-2)

或

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \tag{7-3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i} \, \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \tag{7-4}$$

应力函数的二阶导数为

$$\psi_{.xx} = \left(\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} + 2 \frac{\partial^{2}}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{\partial^{2}}{\partial \overline{z}^{2}}\right) \psi$$

$$\psi_{.yy} = -\left(\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} - 2 \frac{\partial^{2}}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{\partial^{2}}{\partial \overline{z}^{2}}\right) \psi$$

$$\psi_{.xy} = i\left(\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} - \frac{\partial^{2}}{\partial \overline{z}^{2}}\right) \psi$$
(7-5)

于是有

$$\psi_{.xx} + \psi_{.yy} = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \overline{z}}$$
$$\nabla^4 \psi = 16 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2}$$
(7-6)

其中

$$abla^2(ullet) = 4 \, rac{\partial^2}{\partial z \partial \, \overline{z}}(ullet)$$

从而有

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\nabla^2 \psi) = \nabla^2 \psi$$
(7-7)

这样一来,协调方程 $\nabla^4 \psi = 0$ 变为

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial z^2} = 0 \tag{7-8}$$

因而双调和方程可表示为

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0 \tag{7-9}$$

由此可知,函数

$$p = \nabla^2 \psi \tag{7-10}$$

满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 p = 0$. 若将 p 的共轭调和函数表示为 q,则

$$f(z) = p + iq \tag{7-11}$$

为一解析函数,其对 z 的积分则为另一解析函数,令

$$\varphi(z) = P + iQ = \frac{1}{4} \int f(z) dz \qquad (7-12)$$

则显然也是一解析函数,其导数

$$\varphi'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}$$
$$= \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (p + iq)$$
(7-13)

由此可得下列关系式

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$
 (7-14)

上式称为柯西-黎曼条件,是函数 $\varphi(z)$ 为解析函数的充要条件。

7.2 Goursat 公式和 Kolosoff-Muskhelishvili 函数

由方程(7-13)**和**(7-14)**可得**

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{4}p$$

进而可求得

$$\nabla^{2}(xP + yQ) = 2\frac{\partial P}{\partial x} + 2\frac{\partial Q}{\partial y} = p$$
$$\nabla^{2}\psi = p$$

注意到

则有

$$\nabla^2(\psi - xP - yQ) = 0 \tag{7-15}$$

这就是说函数($\psi = xP = yQ$)为调和函数,令其为 P_1 ,则应力函数可写为

$$\psi = xP + yQ + P_1 \tag{7-16}$$

应力函数 ∉ 可以写成不同的形式。现在构造下列解析函数

$$\chi(z) = P_1 + \mathrm{i}Q_1 \tag{7-17}$$

其中 Q_1 是 P_1 的共轭函数,不难证明,下式的实部

 $(x - iy)(P + iQ) + P_1 + iQ_1$

与方程(7-16)的等号右边相同。于是有

$$\bar{z}\varphi(z) = (x - iy)(P + iQ) = (xP + yQ) + i(xQ - yP)$$

方程(7-16) 可写成

$$\psi(z,\bar{z}) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$$
(7-18)

若将函数 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 的共轭函数分别用 $\overline{\varphi}(\overline{z})$ 和 $\overline{\chi}(\overline{z})$ 表示,则可得下列关系式: $\overline{\varphi}(\overline{z}) = P - iQ \quad \overline{\chi}(\overline{z}) = P_1 - iQ_1$ 于是,公式(7-18)可写为

$$\psi(z,\bar{z}) = \frac{1}{2} \left[\bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) \right]$$
(7-19)

方程(7-18)和(7-19)表明应力函数可以选用解析函数来表示。方程(7-19)称为 Goursat 公式(系 E. J. B. Goursat,于 1898 年给出),它是方程(7-8)的积分。函数 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)(或 \phi(z) = \chi'(z))$ 是两个解析函数,称为 Kolosoff-Muskhelishvili 函数 (或 K-M 函数)。

7.3 应力与位移的解析函数表达式

以下给出,在平面应力条件下,当不计体力时的应力与位移及其组合的表达式。 应力分量为

$$\sigma_x = rac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = rac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -rac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

应力的组合式为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \overline{z}} = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\overline{z}) \right] = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z)$$
(7-20a)

$$\sigma_{y} - \sigma_{x} + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^{2} \psi}{\partial z^{2}} = 2 \left[z \overline{\varphi}''(\overline{z}) + \overline{\chi}''(\overline{z}) \right]$$
(7-20b)

应变分量的展开式为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

由此可得应变的组合式为

$$2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 4\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \overline{z}} = 4(1+2\nu)\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$$
(7-21)

$$2G(\varepsilon_{y} - \varepsilon_{x} + 2i\gamma_{xy}) = \sigma_{y} - \sigma_{x} + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^{2}\psi}{\partial z^{2}} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \phi'(z)] \quad (7-22)$$

已知 $P+iQ=\varphi(z)$ 和 $\phi(z)=\chi'(z)$,则有

$$2G(u+i\nu) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\overline{z}) - \overline{\chi}'(\overline{z})$$
(7-23)

其中 $\kappa = 3 - 4\nu$ 对应于平面应变问题, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 对应于平面应力问题。当函数 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 已知时,方程(7-23)可用来计算平面问题的位移分量,方程(7-20)和

(7-23)称为 Kolosoff 公式。

7.4 边界条件

如所周知,寻求问题的解就等于在给定区域 Ω 研究两个解析函数 $\omega(z), \phi(z)$ 的 问题,同时要求 K-M 函数必须满足给定的边界条件。

现在讨论在应力边界 S_a 上已知外力为 \overline{p}_x 和 \overline{p}_y 的情况。若一点处的外法线矢 量为 n,则有(以后将 p_x 和 p_y 顶标略去)

$$p_{xn} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y)$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$p_{yn} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y)$$

$$= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$\overline{c} AB \bot$$
的合力为(图 7-1)

$$p_{x} + ip_{y} = \int_{A}^{B} (p_{xn} + ip_{yn}) ds = \int_{A}^{B} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) ds \qquad (7-1)$$
$$= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{A}^{B} = -i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{A}^{B} \qquad (7-24)$$

由以上公式可得

$$p_x + ip_y = -i[\varphi(z) + z\overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{\phi}(\overline{z})]_A^B$$
(7-25)

由于在 K-M 函数中增减一个复常数并不影响应力值,故可以选取应力函数 $\omega(z)$ 使 得积分常数为零(下同),于是有

 $p_{x} + ip_{y} = -i[\varphi(z) + z\overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{\phi}(\overline{z})] \quad \mathbf{\acute{E}} S_{\sigma} \mathbf{\mathrel{E}}$ (7 - 26)方程(7-26)是应力边界条件。

在 AB 上的力对于坐标原点 O 的矩 M 为

$$M = \int_{A}^{B} (xp_{yn} - yp_{xn}) ds = -\int_{A}^{B} \left[xd\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + yd\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \right]$$

分部积分后可得

$$M = -\left[x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{A}^{B} + \left[\psi\right]_{A}^{B}$$
(7-27)

注意到

及

$$x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{Re} \left[z \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] = \operatorname{Re} \left[z \overline{\varphi}(\overline{z}) + z \overline{z} \varphi'(z) + z \phi(z) \right]$$
$$\psi = \operatorname{Re} \left[\overline{z} \varphi(z) + \chi(z) \right]$$

)

可得

$$M = \operatorname{Re}\left[-\overline{zz}\varphi'(z) - z\phi(z) + \gamma(z)\right]_{A}^{B}$$
(7-28)

现在考察在位移边界 S_u 上的位移。若在一点 $x = \xi$ 上的位移为 u° 和 v° ,则位移边界 条件为

$$2G(u^{0} + iv^{0}) = \kappa\varphi(\xi) - \xi\bar{\varphi}'(\bar{\xi}) - \bar{\phi}(\bar{\xi}) \quad \text{fr} S_{u} \perp$$
(7-29)

7.5 多连域内应力与位移的单值条件

若简单封闭曲线 Ω 内的任意点都属于该封闭区内的点,则称该区域 Ω 为单连

域。在图 7-2 中,边界 C 内含有不属于 Ω 内的 点,故这时的 Ω 就不再是单连域,而称为多 连域。

现在讨论 K-M 函数的确定程度及其相关 的应力与位移的单值条件问题。在物体内的应 力确定后,应力函数仍可差一个任意的线性函 数。这就是说,应力确定后 K-M 函数并未完全 确定。如给定物体的位移场,则不仅应力完全 确定,刚体运动也被约束。但分析以后可知,此



时式(7-26)和(7-29)中的 K-M 函数仍有复常数可以任意选择。对于单连域可以采 取选择适当的坐标系等办法,使得 K-M 函数完全确定。但对于多连域来说,K-M 函 数就可能是多值的,如何保证其满足单值条件就是以下要讨论的问题。

首先讨论一个边界为 S 的单连域 Ω ,现在的问题是,对应于该单连域内相同应力 分布的两组函数(φ , ϕ)和($\hat{\varphi}$, $\hat{\phi}$)有何不同。实际上,若用函数 φ 和 ϕ 的应力分布应该 与用函数 $\hat{\varphi}$ 和 $\hat{\phi}$ 所表示的相同。于是方程 (7-26)要求有

$$\operatorname{Re}[\varphi'(z)] = \operatorname{Re}[\phi'(z)] \tag{7-30}$$

和

$$\bar{z}\varphi''(z) + \phi'(z) = \bar{z}\varphi''(z) + \phi'(z)$$
 (7-31)

由式(7-30)得出

$$\hat{\varphi}'(z) = \varphi'(z) + ci$$

其中 c 是实常数,由此可知

$$\hat{\varphi}(z) = \varphi(z) + ciz + \alpha$$
 (7-32)

此处 α 为任意复数,代入式 (7-31) 得 $\phi'(z) = \hat{\phi}'(z)$,于是有

$$\dot{\phi}(z) = \phi(z) + \beta \tag{7-33}$$

其中 β 为一复常数。

这样一来,若给定 Ω 内的应力,则单值解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\phi(z)$ 将可确定,并分别 含有线性函数 $ciz+\alpha$ 和常数 β ,这就是说, Ω 内的应力状态在 φ 代之以 $\varphi+ciz+\alpha$ 和 ϕ 代之以 $\phi+\beta$ 时不发生变化。

现在考虑在 Ω 内给定位移的情况,由于给定的位移可以惟一地确定应力状态, 放函数 $\hat{\rho}(z)$ 和 $\hat{\phi}(z)$ 的可选择性不会大于方程(7-32)和(7-33)之所示。

将式(7-32)和(7-33)代入式(7-29),得

$$c = 0$$
 和 $\kappa \alpha = \bar{\beta}$

若已知 Ω 内的位移,则函数 φ 可以确定并含有一个复常数 α ,一旦该常数为已 知,则可完全确定函数 $\hat{\phi}(z)$ 中的常数 β_{\circ} 若位移为已知,令 c=0,则可选择 α 使得 $\varphi(0)=0$ 。同时固定 β_{\circ} 强调指出,在有限单连域 Ω 内,函数 $\varphi(z)$ 和 $\phi(z)$ 是 z 的单值 解析函数,即全纯函数(holomorphic function),于是,在 Ω 内可用幂级数表示为

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad (7-34)$$

若 Ω 不是单连域,则 φ 和 ϕ 就不再是单值函数,但若假定应力与位移是单值的,则不难确定其结构。若 Ω 是由外边界 C_{m+1} 和 m 个内边界 $C_k(k=1,2,\dots,m)$ 界定的有限多连域,并假定在全域 Ω 内位移和应力均为单值函数,则显然克罗索夫公式的等号右边必为单值。现在选择函数 φ 和 ϕ 为如下形式:

$$\begin{array}{l} \varphi(z) = A_k \ln(z - Z_k) + \varphi_1(z) \\ \phi(z) = B_k \ln(z - Z_k) + \phi_1(z) \end{array}$$
(7-35)

则上述条件可以完全满足。在式 (7-35)中 $A_k = a_k + i\beta_k$, $B_k = a'_k + i\beta'_k$ 均为常数。 Z_k 为内边界 C_k 上的点, φ_1 和 $\phi_1 \in \Omega$ 内的全纯函数,这就是说,当沿 C_k 逆时针旋转一周时, K-M 函数将产生一个增量, 数 φ 和 ϕ 的增量为

$$[A_k \ln(z - Z_k)]_{C_k} = 2\pi i A_k, \quad [B_k \ln(z - Z_k)]_{C_k} = 2\pi i B_k \quad (7-36)$$
于是,由应力边界条件得

$$p_{xk} + \mathrm{i}p_{yk} = -2\pi (A_k - \overline{B}_k) \tag{7-37}$$

其中 $\overline{B}_k = a'_k - i\beta'_k$ 。

根据单值条件和下列关系式

$$p_{x} + ip_{y} = -i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\Big|_{A}^{B}$$
(7-38)

可得

$$\kappa A_k + \overline{B}_k = 0 \tag{7-39}$$

于是有

$$A_{k} = -\frac{p_{xk} + \mathrm{i}p_{yk}}{2\pi(1+\kappa)}, \quad \overline{B}_{k} = \kappa \frac{p_{xk} + \mathrm{i}p_{yk}}{2\pi(1+\kappa)}$$
(7-40)

将式(7-40)代入式(7-37)后得

$$\varphi(z) = -\frac{p_{xk} + ip_{yk}}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z - Z_k) + \varphi_1(z)$$

$$\phi(z) = \kappa \frac{p_{xk} - ip_{yk}}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z - Z_k) + \phi_1(z)$$
(7-41)

其中 (p_{xk}, p_{yk}) 是单连域 Ω_k 的边界 C_k 在 Z_k 处外力矢量的和。函数 φ_1 和 ϕ_1 是 Ω 内 的全纯函数,对于由外边界 C_{m+1} 和由 m 个内边界 $C_k(k=1,2,\dots,m)$ 界定的多连域, 若在 Ω 内位移和应力是单值函数,则式 $(p_{xk}+ip_{yk})$ 就应该换成 $\sum_{i=1}^{m} (p_{xk}+ip_{yk})$ 。

若 Ω 是由许多简单闭合曲线 $C_k(k=1,2,\dots,m)$ 组成的多连通区域,若应力分量 σ_{ii} 限定在一点的邻域,则方程(7-41)有下列结构

$$\varphi(z) = -\frac{p_{xk} + ip_{yk}}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \varphi^*(z)$$

$$\phi(z) = \kappa \frac{p_{xk} - ip_{yk}}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \phi^*(z)$$
(7-42)

其中 $\varphi^*(z)$ 和 $\phi^*(z)$ 在 $C(C < z < C_0)$ 外为全纯函数,此处 C_0 是一个无限小的圆。于 是,函数 φ^* 和 ϕ^* 可用 Laurent 级数展开为

$$\varphi^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \phi^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n \qquad (7-43)$$

于是可得

$$\sigma_{x} + \sigma_{y} = 2 \left[-\frac{p_{x} + ip_{y}}{2\pi(1+\kappa)} \cdot \frac{1}{z} - \frac{p_{x} - ip_{y}}{2\pi(1+\kappa)} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty} n(a_{n}z^{n-1} + \bar{a}_{n}\bar{z}^{n-1}) \right]$$
(7-44)

由于在无限远处一点 *x* 的应力分量应该是有限的,容易断定当 $n \ge 2$ 时,若 $a_n = \overline{a}_n = 0$,则($\sigma_x + \sigma_y$)将是有界的。在满足这些条件时,类似地可以证实,当 $n \ge 2$ 时,若 $b_n = 0$,则($\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}$)也是有界的。

于是有

$$\varphi^*(z) = \tilde{a}_1 z + \varphi_0(z), \quad \phi^*(z) = \tilde{b}_1 z + \phi_0$$
(7-45)

其中 $\tilde{a}_1 = \alpha + i\beta$, $\tilde{b}_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ 为常数。当|z|足够大时,函数 φ_0 , ϕ_0 可表示为下列形式

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \phi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$
(7-46)

在应力分析时,取 $\beta=0$,不会改变应力张量,但可以简化计算。

于是,当 $|z| \rightarrow \infty$,可得

$$\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty} = 4\operatorname{Re}\psi'(z) = 4\alpha$$

$$\sigma_y^{\infty} - \sigma_x^{\infty} + 2\mathrm{i}\tau_{xy}^{\infty} = 2b_1 = 2\alpha_1 + 2\mathrm{i}\beta_1$$
(7-47)

或

$$\sigma_x^{\infty} = 2\alpha - \alpha_1, \quad \sigma_y^{\infty} = 2\alpha + \alpha_1, \quad \tau_{xy}^{\infty} = \beta_1 \tag{7-47'}$$

这就是说,在无限远处,应力状态是均匀的。

克罗索夫公式(7-23)可以给出:欲使位移在无限远处等于零,则须有 $^{\odot}$

 $p_{x} + ip_{y} = 0$, $\alpha = 0$, $\alpha_{1} + i\beta_{1} = 0$ (7 - 48)

7.6 保角映射及其应用

设有两个复平面 $\zeta = \xi + i\eta$ 和 z = x + iy,则单值复变函数 $z = \omega(\zeta)$ 可理解为将 ζ 平面上的 Ω' 域内的点P'映射到z平面 Ω 域内的P点,这就是说, $z=\omega(z)$ 定义了一 个映射。假定这一映射的反函数存在,且两个函数都是单值,若这一映射 $z = \omega(z)$ 将 ζ 平面上的任意两线元映射到z平面后,其夹角的大小和转向保持不变,则称为保角 映射。

若S是z平面上的一条曲线,且其上的点可沿S移动,则相应的点z在z平面上 的轨迹(曲线)S[']称为S 的映射。若函数 $\omega(\zeta)$ 为解析函数,且 $\omega'(\zeta) \neq 0$,则可知如有 这样的映射,若 S_1 和 S_2 是 ζ 平面上的两条曲线,且相交呈 α 角,则其相应的 z 平面上 的曲线 S'_1 和 S'_2 间的夹角也是 α_{\circ}

由此可见,对于解析函数 $z = \omega(\zeta)$,在 $\omega'(\zeta) \neq 0$ 条件下进行的变换,总能实现为 保角映射。

今

$$z = \omega(\zeta)$$

为一保角映射,则 K-M 函数为

$$\varphi(z) = \varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_1(\zeta)$$

$$\phi(z) = \phi[\omega(\zeta)] = \phi_1(\zeta)$$

$$(7-49)$$

为方便计,令函数 φ 和 ϕ 代之以函数 φ_1 和 ϕ_1 ,则有

$$\varphi'(z) = \frac{\mathrm{d}\varphi(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\varphi(z)}{\mathrm{d}\zeta} \cdot \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$
(7-50)

由此可得位移边界条件

$$2G(u+iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'}(\overline{\zeta}) - \overline{\phi}(\overline{\zeta})$$
(7-51)

在正交曲线坐标系 (ρ, θ) 中,在 ζ 平面上的一点可表示为

和
$$\zeta = \rho e^{w} = \rho (\cos\theta + i\sin\theta)$$

 $u_{\rho} + u_{\theta} = \frac{\overline{\zeta \omega'}(\overline{\zeta})}{\rho |\omega'(\zeta)|} (u + iv)$

① 见 Muskhelishvili. Some Basic Problems of the Methematical Theory of Elasticity (1953).

由保角映射得

$$2G(u_{\rho} + iu_{\theta}) = \frac{\overline{\zeta\omega}'(\overline{\zeta})}{\rho \mid \omega'(\zeta) \mid} \left[\kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \overline{\varphi}'(\overline{\zeta}) - \overline{\phi}(\overline{\zeta}) \right]$$
(7-52)

在正交曲线坐标系中,应力分量为(图 7-3)

$$\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} = \sigma_{x} + \sigma_{y}$$

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} + 2i\tau_{\theta} = (\sigma_{y} - \sigma_{x} + 2i\tau_{xy})e^{2i\lambda}$$
(7-53)



图 7-3

考虑到

$$\omega'(\zeta) \mid^2 = \omega'(\zeta) \cdot \bar{\omega}'(\bar{\zeta}) \tag{7-54}$$

和

$$e^{2i\lambda} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{(\omega'(\zeta))^2}{\mid \omega'(\zeta) \mid^2} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\rho^2 \overline{\omega}'(\overline{\zeta})}$$
(7-55)

可得曲线坐标系中的应力组合为

$$\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} = 2\left[\varphi'(\zeta) + \overline{\varphi}'(\overline{\zeta})\right] = 4\operatorname{Re}\varphi'(\zeta)$$

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} + 2\mathrm{i}\tau_{\rho\theta} = 2\left[\overline{\zeta}\varphi''(\zeta) + \phi'(\zeta)\right]e^{2\mathrm{i}\zeta} = \frac{2\zeta^{2}}{\rho^{2}\overline{\omega}'(\overline{\zeta})}\left[\overline{\omega}(\overline{\zeta})\varphi'^{*}(\zeta) + \phi'(\zeta)\right]\right\}$$
(7-56)

其中

$$\varphi^{'*}(\zeta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta} \left[\frac{\varphi^{'}(\zeta)}{\omega^{'}(\zeta)} \right]$$
(7-57)

考虑到式(7-50),可得应力边界条件为

$$p_x + ip_y = -i\left[\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\bar{\zeta})}\bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) + \bar{\phi}(\bar{\zeta})\right]$$
(7-58)

其中 ζ 是圆 $|\zeta| < 1$ 上的一点, 但 $p_x + i p_y$ 必须是圆 $\zeta = e^{\vartheta}$ 上给定的函数。

如在极坐标系中边界圆的中心与坐标原点重合,则外法线矢量 n 的分量 $n_p=1$, $n_{\theta}=0$ 。于是由

$$\sigma_{ij} = p_i \quad (i, j = \rho, \theta)$$

得

$$\sigma_{\rho} = p_{\rho}, \quad \tau_{\theta} = p_{\theta} \tag{7-59}$$

从式(7-56)的第一式减去第二式,得

$$\sigma_{\rho} - i\tau_{\rho} = \varphi'(\zeta) + \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) - [\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \phi'(\zeta)]e^{2i\lambda}$$
(7-60)

若在 $|\zeta| < 1$ 圆周 C 上的一点 χ 上,则上式可改写为 $\sigma_{\rho} - i\tau_{\theta} = \varphi'(\chi) + \overline{\varphi}'(\overline{\chi}) - [\overline{\chi}\varphi''(\chi) + \phi'(\chi)]e^{2i\theta}$

将方程(7-58)和(7-52)写成下列统一的形式

$$\chi\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) + \bar{\phi}(\bar{\zeta}) = K(\zeta)$$
(7-62)

其中

$$\chi = 1, \quad K(\zeta) = i(p_x + p_y) \quad \textbf{\acute{E}} \ S_{\sigma} \ \textbf{\acute{E}}$$
(7-63)

$$\chi = -\kappa, \quad K(\zeta) = -2G(u + iv) \quad \textbf{\acute{E}} S_u \perp \tag{7-64}$$

7.7 带有圆孔口的无限大板问题

把坐标原点选在半径为 *a* 的圆孔中心。在这种情况下,孔边界 *C* 以外的 K-M 函数为

$$\varphi'(z) = -\frac{p_x + ip_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} + \tilde{a}_1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{-(n+1)}$$

$$\phi'(z) = \kappa \frac{p_x - ip_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} + \tilde{b}_1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n n z^{-(n+1)}$$
(7-65)

或

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}, \quad \phi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^{-k}$$
 (7-66)

及

$$\varphi''(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} A_k k z^{-(k+1)}$$
(7-67)

其中

$$A_{0} = \tilde{a}_{1} = \alpha + i\beta, \quad B_{0} = \tilde{b}_{1} = \alpha_{1} + i\beta_{1}$$

$$A_{1} = -\frac{p_{x} + ip_{y}}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad B_{1} = \kappa \frac{p_{x} - ip_{y}}{2\pi(1 + \kappa)}$$

$$A_{k} = -(k - 1)a_{k-1}, \quad B_{k} = -(k - 1)b_{k-1}$$

$$(k = 1, 2, \dots) \quad (7-68)$$

对于在孔边界 C上的点 $z = ae^{i\theta}$,由方程(7-66)和(7-67)可得

(7 - 61)

$$\bar{\varphi}'(z) |_{c_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_k a^{-k} e^{ik\theta} - \bar{z} e^{2i\theta} \varphi''(z) |_{c_1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k k a^{-k} e^{-ik\theta} - e^{2i\theta} \varphi'(z) |_{c_1} = -\sum_{k=0}^{\infty} B_k a^{-k} e^{-i(k-2)\theta} = -B_0 e^{2i\theta} - B_1 a^{-1} e^{i\theta} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+2}}{a^{k+2}} e^{-ik\theta}$$

$$(7-69a)$$

$$\phi'(z) \mid_{C_1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k a^{-k} e^{-ik\theta}$$
 (7-69b)

当边界 C 上的外力 p_{ρ} 和 p_{θ} 为已知,则函数 $(p_{\rho} - ip_{\theta})$ 可写成下列傅里叶级数形式

$$p_{\rho} - \mathrm{i} p_{\theta} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$$
(7-70)

其中
$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p_\rho - ip_\theta) e^{-ik\theta} d\theta$$

将式(7-69)和(7-70)代入式(7-60)并比较等号两边系数 e^{i@}和 e^{-i@}可得

$$A_{0} + \overline{A}_{0} - \frac{B_{2}}{a^{2}} = C_{0}$$

$$\overline{A}_{1} - \frac{B_{1}}{a} = C_{1}$$

$$\overline{A}_{2} - B_{0} = C_{2}$$

$$(7-71a)$$

当 *k*≥3,得

$$\frac{A_k}{a^k} = C_k \tag{7-71b}$$

和

$$\frac{(1+\kappa)A_k}{a^k} - \frac{B_{k+2}}{a^{k+2}} = C_{-k} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$
(7-71c)

若 $ImA_0 = \beta = 0$ 则应力张量保持不变,则 A_0 为一实数

$$A_{\scriptscriptstyle 0}+\overline{A}_{\scriptscriptstyle 0}=2A_{\scriptscriptstyle 0}=2lpha$$

为要由方程(7-45)确定无限远处的应力系数,当 $A_0 = \alpha$, $B_0 = \alpha_1 + i\beta_1$ 为已知,且必须 满足条件(7-39),则有

$$\kappa A_1 + \overline{B}_1 = 0$$

由方程(7-67)可得

$$A_{1} = \frac{\overline{C}_{1}a}{1+\kappa}, \quad B_{1} = \frac{\kappa C_{1}a}{1+\kappa}, \quad A_{2} = (\overline{B}_{0} + \overline{C}_{2})a^{2}, \quad B_{2} = (2A_{0} - C_{0})a^{2} \quad (7-72)$$

由式(7-68)和式(7-69)得出

$$A_{k} = \overline{C}_{k}a^{k}, \quad B_{k} = (\kappa - 1)a^{2}A_{k-2} - a^{k}C_{-k+2}$$
(7-73)

于是便求出了方程(7-65)中的全部系数。

若在边界 C 上作用的是均匀外力 $p_{\rho} = -p, p_{\theta} = 0,$ 及无限远处的应力为零,则有 $\alpha = \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad A_0 = B_0 = 0$

于是有

$$p_{\rho} - \mathrm{i}p_{\theta} = -p \tag{7-74}$$

当 $k \neq 0$,则有 $C_0 = -p$ 和 $C_k = 0$ 。

考虑到方程(7-72)和(7-73)的前两个方程,则可得

$$A_1 = B_1 = A_2 = 0, \quad B_2 = pa$$

 $A_k = B_k = 0 \quad (\stackrel{\bullet}{=} k \ge 3)$

于是方程(7-66)变成

$$\varphi'(z) = 0, \quad \phi'(z) = \frac{pa^2}{z^2} \quad (7-75)$$

于是有

$$\sigma_{
ho}=-rac{pa^2}{
ho^2}, \ \ \sigma_{ heta}=rac{pa^2}{
ho^2}, \ \ au_{
ho}=0$$



应力分布如图 7-4 所示。

 $u_{\rho}=rac{pa^2}{2G
ho},\quad u_{ heta}=0$

7.8 带有椭圆孔的无限大板问题

(7 - 76)

(7 - 77)

现在考虑被一椭圆界定的无限大板的应力边值问题。在 *z* 平面上的椭圆孔的外 部区域到 ζ 平面上单位圆外部区域的变换函数为

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \tag{7-78}$$

其中 R 和 m 均为常数,且 $R > 0, 0 \le m < 1$,不难验证,单位圆 $|\zeta| = 1$ 对应于 z 平面上 中心在原点的椭圆,其半轴为

 $a = R(1+m), \quad b = R(1-m)$

当m=0时,为有圆孔的无限大板,若m=1,则化为含一直裂纹的大板。

下面考虑一种简单情况,即仅讨论椭圆孔周边 C 上的外力主矢量等于零的情况,且认为无限远处的应力为零。

在这种情况下,式(7-42)化为

$$\varphi(z) = -\frac{p_x + \mathrm{i}p_y}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + a_1 z + \varphi_0(z)$$
(7-79a)

$$\phi(z) = \kappa \frac{p_x - \mathbf{i} p_y}{2\pi (1+\kappa)} \ln z + b_1 z + \phi_0(z)$$
(7-79b)

此时 $R = 常数, 变成 z = \omega(\zeta) = R\zeta + \omega_0(\zeta), \omega_0(\zeta) 为 - 无限域的单值解析函数。$ 于是式(7-79)可写成

$$\varphi(\zeta) = -\frac{p_x + \mathrm{i}p_y}{2\pi(1+\kappa)} \ln\zeta + a_1 R\zeta + \varphi_0(\zeta)$$
(7-80a)

$$\phi(\zeta) = \kappa \frac{p_x - ip_y}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta + b_1 R \zeta + \phi_0(\zeta)$$
(7-80b)

其中函数 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\phi_0(\zeta)$ 可表示为级数

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad \phi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}$$
 (7-81)

由式(7-58)可得应力边界条件

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\overline{\sigma})}\overline{\varphi}'(\overline{\sigma}) + \overline{\phi}(\overline{\sigma}) = f(\sigma)$$
(7-82)

将式(7-80)代入式(8.82)并考虑到 $\zeta = \sigma = e^{i\theta}, \ln \bar{k} = \ln \frac{1}{k} = -\ln k, \bar{k} = e^{-i\theta} = \frac{1}{k}, 则有$ $\varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\bar{\sigma}) + \bar{\phi}_0'(\bar{\sigma}) = f_0$ (7-83)

和

$$f_{0} = i \int_{\sigma} (p_{x} + ip_{y}) ds + A_{1} \ln \sigma - A_{0} \omega(\sigma) - \overline{B}_{1} \ln \sigma - \overline{B}_{0} \overline{\omega}(\overline{\sigma})$$
$$- \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\overline{\sigma})} [-\overline{A}_{1}\sigma + \overline{A}_{0} \overline{\omega}'(\overline{\sigma})] = i \int_{\sigma} (p_{x} + ip_{y}) ds - \frac{p_{x} + ip_{y}}{2\pi} \ln \sigma$$
$$- \frac{p_{x} - ip_{y}}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\overline{\sigma})} \sigma - 2R(A_{0}) \omega(\sigma) - \overline{B}_{0} \overline{\omega}(\overline{\sigma})$$
(7-84)

上式前三项依赖于孔边的外力,当孔边无外载荷时前三项为零。后两项与远方应力 有关,当远方不受力时,后两项为零。即方程(7-84)是σ已知函数。

现在设法求式(7-83)中的函数 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\varphi_0(\zeta)$ 。为此,将式(7-83)的两边乘以 $\frac{1}{2\pi i t - \zeta}$ (此处 $|\zeta| > 1$),之后按逆时针方向围绕单位圆周 *C* 积分,根据柯西积分定 理,若函数 f(z)是在一条可分段光滑的简单闭曲线 *C* 内解析,在包含 *C* 的闭区域上 连续的函数,则

$$\oint_C f(z) \mathrm{d}z = 0 \tag{7-85}$$

由此导出的柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z} dt$$
(7-86)

若一点 z 位于区域外部 Ω^{-} , $\frac{f(t)}{t-z}$ 可视为 t 的函数, 它在 Ω 内解析, 在 Ω 内和 C 上连续, 则由柯西定理可得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z} dt = 0$$
(7-87)

若函数 f(z)在边界 C 外部 Ω^- 和在 C 上为全纯函数,在 C 上和 Ω 内连续,则有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(\infty), & z \in \Omega^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in \Omega^- \end{cases}$$
(7-88)

由此得

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{-1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi_0(t)}{t-\zeta} dt \qquad (7-89)$$

方程(7-83)的共轭式可写成

$$\bar{\varphi}_{0}(\bar{\sigma}) + \frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)} \varphi'_{0}(\sigma) + \phi_{0} = \bar{f}_{0}$$
(7-90)

类似地,在方程(7-90)两边乘以 $\frac{2}{2\pi i\sigma-\zeta}$,沿整个周边积分,可得

$$\phi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f}_0}{\sigma - \zeta} d\sigma - \zeta \frac{(1 + m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} \varphi'_0(\zeta)$$
(7-91)

有了以上关系式,在计算具体问题时,可先由式(7-85)求得 f_0 ,之后分别代入式 (7-89)和式(7-91)进行积分,求出 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\phi_0(\zeta)$,从而便不难求得所研究域内各点 的位移分量和应力分量。

复习要点和思考题

- 1. 熟悉复变函数和共轭函数的特性。
- 2. 对 K-M 函数的来历应有清晰的概念。
- 3. 辨清单连域和多连域的不同之处和单值条件的由来。
- 4. 复习保角映射理论
- 5. 复变函数法的优点何在?

习 题

7-1 试求出复变函数 z"和 thz 的用实函数 x 和 y 表示的实部和虚部。

7-2 试给出在 *x*-y 平面上一多连域内,用应力表示的位移单值条件。

7-3 设有一两端受弯矩 *M* 作用的圆弧形曲杆,其内外半径和径线开角可自定。 若用下列函数求解,试求出其中的常数 *A*,*B* 和*C*。

 $\psi(z) = Az \ln z + Bz$, $x(z) = C \ln z$

第8章

柱体的扭转

8.1 问题的提出 基本关系式

本章研究柱体的扭转问题,这类问题在航空、土建及机械工程中是常见的。所谓 柱体的扭转,是指圆柱体和棱柱体只在端部受到扭矩的作用,且扭矩矢量与柱体的轴 线 *z* 的方向相重合。

圆形截面柱体的扭转,在材料力学课程中已经进行过讨论。其特点是扭转变形前 后的截面都是圆形而且每一个截面只作刚体转动,在小变形条件下,没有轴向位移,取 坐标系为 *x*,*y*,*z*,且柱体的轴线为 *z* 方向,*z* 方向的位移为 *w*,即 *w*(*x*,*y*,*z*)=0。这样, 变形后截面的半径及柱体长度基本不变。

非圆形截面柱体的情况要复杂得多。由于截面的非对称形式,在扭转过程中,截 面不再保持为平面,而发生了垂直于截面的翘曲变形,即 $w(x,y,z) \neq 0$ 。函数w(x,y,z)称为翘曲函数。本章主要讨论棱柱体的扭转问题。

以下以截面为任意形状柱体扭转为例写出扭转问题的基本方程式。设有任意的 等截面柱体,受扭矩 *M*_T 作用,如图 8-1 所示。

为了求解扭转问题,要适当选取坐标系。对于有两个对称轴的截面,坐标原点应 选在两个对称轴的交点,即对称中心处。对于扭转问题,柱体的侧面为自由表面,其 边界条件为



其中 $l = \cos(n, x), m = \cos(n, y)_{\circ}$

在端部有

$$\begin{cases} \int \tau_{zx} dF = 0 \\ \int \int \tau_{zy} dF = 0 \\ \int \int \sigma_z dF = 0 \\ \int \int \sigma_z x dF = 0 \\ \int \int \sigma_z y dF = 0 \\ \int \int (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dF = M_T \end{cases}$$
(8-2)

根据圣维南半逆解法做的假定,认为截面的翘曲变形与 z 无关,即各截面的翘曲都一样。这就是说,翘曲函数 w 仅为 x, y 的函数,即

w = f(x,y) (8-3) 此外,假定柱体发生变形后,截面只有绕 z 轴的刚体转 动,并且间距为单位长度的两截面的相对扭转角 θ 是一 个常数。 θz 则是距原点为 z 处的截面相对于 z = 0 截 面的转角。

若截面上距扭转中心 A 为r 的任一点 P(x,y),扭 转后移到 P'(x-u,x+v)(图 8-2),且 z=0 端没有转 动只有翘曲,P 点位移的 x,y 方向的分量为



冬 8-2

$$u = -(r\theta z)\sin\alpha = -y\theta z$$

$$v = (r\theta z)\cos\alpha = x\theta z$$
(8-4)

其中 α 为AP与x轴所成的角。由于截面总扭转角与该截面到坐标原点的距离成正 比,故AP的转角为 θz 。将式(8-3),(8-4)代入应变位移关系式后,得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x} = \gamma_{xy} = \varepsilon_{y} = \varepsilon_{z} = 0 \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} - y\theta \\ \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + x\theta \end{aligned}$$

$$(8-5)$$

广义胡克定律化为

$$\sigma_{x} = \sigma_{y} = \sigma_{z} = \tau_{xy} \equiv 0$$

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right) = G\gamma_{zx}$$

$$\tau_{zy} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right) = G\gamma_{zy}$$
(8-6)

平衡方程(不计体力)化为

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$
(8-7)

将式(8-6)中 τ_{xx} 的表达式对 y 微分, τ_{xy} 的表达式对 x 微分后相减,可得用应力表示的应变协调方程,即

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = -2G\theta \tag{8-8}$$

于是,任意形状截面的柱体扭转时的应力,可根据边界条件由解(8-7),(8-8)两式 求得。

上述问题的解,可采用应力函数法。为此,如取一个函数 ψ ,使得

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8-9}$$

此处 ϕ 称为普朗特应力函数。显然,式(8-9)满足平衡方程。而应变协调方程(8-8) 化为

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\theta \qquad (8-10)$$

由此得出,应力函数 ϕ 应当满足上述偏微分方程(8-10),这种类型的方程是著名的泊松方程。



他原来学习医学,后于 1798 年进入巴黎综合工科学校改 学数学,毕业后任教于该校。著有数学、天文学、电学和 力学等方面的著作。其代表性著作《力学教程》于 1811 年问世,泊松比便是以他的名字命名的。

泊松(S. D. Poisson) 1781 年生于法国,1840 年逝世。

Simon Denis Poisson

在无侧面面力作用的情况下,边界条件(8-1)简化为

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m = 0 \tag{8-11}$$

考虑到

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$$

$$m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$$
(8-12)

其中 x = x(s), y = y(s), 并且 s 增加时, y 增加, 而 x 减少(图 8-1), 故在 dx, dy 前冠 以正负号来表示这种关系。将式(8-9)和(8-12)代入式(8-11)得出在边界上应有

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{8-13}$$

或

$$\psi = 常数$$

上式说明,沿柱体任意截面的边界曲线,应力函数 $\psi(x,y)$ 为一任意常数。因为 在此问题中,我们所注意的只限于 ψ 的一阶导数,即剪应力分量,所以,将常数取为零 无损于一般性,即有

$$\psi = 0$$
 (沿周边 C) (8-14)

而任一点的合剪应力为

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2}$$

$$\tau = |\operatorname{grad}\psi|$$
(8-15)

或

此处 n 为沿 ϕ 等值线的法线方向, τ 的方向为沿 ϕ 等值线的切线方向,因而 ϕ 等值线

也称为剪应力线。由于边界上的剪应力方向必须与边界的切线一致,故周界线 C 本 身也是一条剪应力线。

对于给定的 θ 值,不难由方程(8-10)和(8-14)惟一地确定应力函数 ϕ ,从而由式(8-9) 求出应力,由(8-6)求出应变,以及翘曲函数f。但我们注意到,由式(8-6)和(8-9)有

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

当通过积分来求位移函数和翘曲函数时,所得结果中总含有表示刚体位移的积分常 数。所以位移函数和翘曲函数可准确到一个附加常数的范围内。

按上述方法求得的应力分布还应满足端部条件,即

$$M_{T} = \iint_{A} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dx dy$$
$$= -\iint_{A} x \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy - \iint_{Y} \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy$$
$$= -\iint_{A} dy \int_{X} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \iint_{Y} y \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

其中积分限 A 为截面面积。

对上式分部积分后,得

$$M_{T} = -\int x\psi dy \Big|_{x_{1}}^{x_{2}} + \iint \psi dx dy - \int y\psi dx \Big|_{y_{1}}^{y_{2}} + \iint \psi dx dy$$

因在边界上 $\psi=0, x_1, x_2, y_1, y_2$ 为侧面的点,故得

$$M_{\rm T} = 2 \iint \psi \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{8-16}$$

上式表示,如在截面上每一点有一个 $\psi(x,y)$ 值,则扭矩 M_T 为 ψ 曲面下所包体积的 二倍。

由以上讨论得出,如能找到一个函数 ϕ ,其在边界上的值为零,在截面内满足方程(8-10),则截面的剪应力分布及扭矩 M_T 就都可求得。

今后我们把用以除扭矩 M_T 而得到单位长度扭角 θ 的因子称为扭转刚度,通常 记作 K_T ,其单位与扭矩的单位相同。

8.2 矩形截面柱体的扭转

作为例子,现在来讨论矩形截面柱体的扭转。问题的求解应首先得到应力函数 ϕ ,有了函数 ϕ 以后,便不难进一步求得剪应力 τ_{zx} , τ_{zy} 和扭矩 M_T 。 由以上讨论知道,应力函数 ψ 在矩形区域 ABCD 内(图 8-3)满足泊松方程

$$\nabla^2 \psi = -2G\theta$$

在边界上,即当 $x = \pm a, y = \pm b$ 时,有

 $\psi = 0$

其中a,b为截面长和宽的一半(图 8-3)。



由数学物理方程知道,上述问题为求解泊松方程 的第一边值问题,或狄利克雷(Dirichlet)问题。在该问 题的定义域是单连通域的情况下,这类问题的解可假 定为下列形式:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \tag{8-17}$$

其中 φ₀ 为 泊 松 方 程 的 特 解, φ₁ 是 相 应 齐 次 方 程 的 解, 即

$$\nabla^2 \psi_0 = -2G\theta, \quad \nabla^2 \psi_1 = 0$$

一旦求得 ψ₀,则下列狄利克雷问题

$$abla^2 \psi_1 = 0$$
 $\psi_1 = -\psi_0$ (在边界上)

的解就可以求出。

在我们的情况下,ψ 取为

$$\phi_0 = -G\theta(y^2 - b^2)$$

而 ϕ_1 为一调和函数,应满足下列条件

令取 *ψ*1 为下列函数形式

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y)$$
 (8-19)

由

$$abla^{2} \psi_{1} = \sum_{n=0}^{\infty} (X_{n}''Y_{n} + Y_{n}''X_{n}) = 0$$

有

$$\frac{X_n''}{X_n} = -\frac{Y_n''}{Y_n}$$

上式等号左面仅为 x 的函数,右边仅为 y 的函数,故只能等于常数 k_n^2 ,于是有 $X_n'' = k_n^2 X_n$, $Y_n'' = -k_n^2 Y_n$ (8-20)

由此可得

$$X_{n} = C_{1n} \operatorname{sh} k_{n} x + C_{2n} \operatorname{ch} k_{n} x$$

$$Y_{n} = C_{3n} \operatorname{sin} k_{n} y + C_{4n} \cos k_{n} y$$
(8-21)

其中 C_{in} (*i*=1,2,3,4)是由边界线条件确定的常数。由边界条件(8-18),在 $x = \pm a$ 上有

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y'_n(y) = 2G\theta y$$
(8-22)

由上式可以看出 $X_n(x)Y'_n(y)$ 是 y 的奇函数,所以有 $C_{3n} = 0$ 。又由式(8-18)可以看 出在 $x = \pm a$ 时

$$\psi_1 = G\theta(y^2 - b^2) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y)$$
(8-23)

可见 $Y_n(y)$ 是关于 y 轴的对称函数,由此得 $C_{1n}=0$,于是有

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n} \cos k_n y \cdot C_{2n} \operatorname{ch} k_n x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos k_n y \cdot \operatorname{ch} k_n x \quad (8-24)$$

因 $y=\pm b, \phi_1=0,$ 故

$$\cos k_n b = 0$$
, $k_n = \frac{n\pi}{2b}$

其中 n 为奇数。

于是得到应力函数 ∉ 为

$$\psi = -(y^2 - b^2)G\theta + \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b}$$
(8-25)

上式第一项按级数展开

$$-(y^{2}-b^{2})G\theta = \frac{32b^{2}}{\pi^{3}}G\theta \sum_{n=1,3,5,...}^{\infty} \frac{1}{n^{3}}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi y}{2b}$$

从而有

$$\psi = \frac{32b^2}{\pi^3} G\theta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi y}{2b} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b}$$
$$= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos \frac{n\pi y}{2b} \left[G\theta \frac{32b^2}{n^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi}{2} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \right]$$

因 $x = \pm a$ 时, $\phi = 0$,代入上式可得

$$A_n = -G\theta \frac{32b^2}{\pi^3} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}$$
(8-26)

将式(8-26)代入式(8-25)得到

$$\psi = -G\theta \left[y^2 - b^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3 \operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{2b} \cos\frac{n\pi y}{2b} \right]$$
(8-27)

于是由式(8-16)得扭矩为

$$M_T = 2 \iint_A \psi \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 16 G \theta a b^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{64b}{a \pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\mathrm{th} \frac{n \pi a}{2b}}{n^5} \right]$$

引进符号

$$\alpha = f_1\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{3} - \frac{64b}{a\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b}}{n^5}$$
(8-28)

则

$$\theta = \frac{M_T}{16Gab^3\alpha} = \frac{M_T}{K_t} \tag{8-29}$$

其中 $K_t = 16\alpha Gab^3 = \alpha G(2a)(2b)^3$ 称为扭转刚度。

将式(8-29)代入式(8-27)得

$$\psi = -\frac{M_T}{16\alpha ab^3} \left[y^2 - b^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3 \operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{2b} \cos\frac{n\pi y}{2b} \right] \quad (8-30)$$

从而可得剪应力

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= -\frac{M_T}{16\alpha ab^3} \left[2y - \frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right]$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= -\frac{M_T}{16\alpha ab^3} \left[\frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right]$$
(8-31)

在 $x=0, y=\pm b$ 处,剪应力取得最大值,即

$$\tau_{\max} = \frac{2M_T}{16\alpha ab^3} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right]$$
$$= \frac{M_T}{8\beta ab^2} = \frac{M_T}{\beta (2a) (2b)^2}$$
(8-32)

其中

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}} = f_2\left(\frac{a}{b}\right)$$

由式 $\beta = f_2\left(\frac{a}{b}\right)$ 及式 $(8-28)_{\alpha} = f_1\left(\frac{a}{b}\right)$ 可知, α 和 β 随 $\frac{a}{b}$ 而变化, 表 8-1 给出了不同 $\frac{a}{b}$ 时的 α 及 β 值。

夷	8-1
1.X	0 1

a/b	α	β	a/b	α	β
1.0	0.141	0.208	3.0	0.263	0.267
1.2	0.166	0.219	4.0	0.281	0.282
1.5	0.196	0.231	5.0	0.291	0.291
2.0	0.229	0.246	10.0	0.312	0.312
2.5	0.249	0.258	00	0.333	0.333

由表 8-1 看出,当 $\frac{a}{b}$ 很大时,即对于很窄的矩形截面, α 和 β 值均趋于 $\frac{1}{3}$,此时式 (8-29)和(8-32) 简化为

$$\theta = \frac{3M_T}{G(2a)(2b)^3}, \qquad \tau_{\max} = \frac{3M_T}{(2a)(2b)^2}$$
(8-33)

其中,2a和2b分别为矩形截面的长和宽(图 8-4)。



8.3 薄膜比拟法

以下将看出,弹性扭转问题用应力函数写出的微分方程,与用表面受压力作用时 的薄膜的挠度方程在形式上完全相似,因而求解扭转问题时,就可以用解张紧的薄膜 的挠度问题来比拟。这样对一些截面形状复杂的柱体扭转就可以避开数学上的困 难,而采用这种比拟的实验方法求出扭转问题的解。

假定在一块板上开一个与柱体断面形状相同的孔(尺寸不必相同),孔上敷以张 紧的均匀薄膜,支持在边界上,则薄膜一侧受均匀压力 q 作用时,各点就要发生挠度 z (图 8-5),此时薄膜受均匀张力作用,取任一微小单元为 dxdy,如令单位长度的张 力为 s,则在小挠度情况下,作用在 ab 边的 s 的斜率为 β ,



 $\beta \!\approx\! \frac{\partial z}{\partial x}$

冬 8-5

因各点挠度 z 不同,s 在 dc 边的斜率为

$$\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathrm{d}x \approx \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \mathrm{d}x$$

同样可得张力在 $ac \ D bd$ 边的斜率分别为 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dy$ 。在不计薄膜重量时,s可认为是常数,故薄膜的竖向平衡方程为

$$-sdy\frac{\partial z}{\partial x}+sdy\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx\right)-sdx\frac{\partial z}{\partial y}+sdx\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)+qdxdy=0$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{s}$$
(8-34)

式(8-34)也是泊松方程,与方程(8-10)比较,可知薄膜问题与扭转问题相似,其各量 之间的对应关系列入表 8-2。

耒	8-2
12	0-4

薄 膜 问 题	扭 转 问 题
z	ψ
1/s	G
q	2θ
$-rac{\partial z}{\partial x},rac{\partial z}{\partial y}$	$ au_{zy}$, $ au_{zx}$
2V	M_{T}

表 8-2 中 V 为薄膜下的体积。这就 是说,膜的平衡位置 z 与 ϕ 曲面相似,膜 的等挠度线与剪应力线相似,膜在任一点 的坡度与相应的合剪应力成比例。由此 得到结论:(1)杆件上任一点的最大剪应 力的方向,就是薄膜上相应点处等挠度线 在该点的切线方向,其大小与过该点的切 面沿法线方向的斜率成正比。(2)薄膜的 等挠度线与截面的剪力线一致。(3)薄膜 挠曲面下的体积与扭矩成正比。

8.4 受扭开口薄壁杆的近似计算

对于具有窄长截面的杆(图 8-6),其自由扭转问题的解可利用薄膜比拟法,且可 认为薄膜形状沿截面的 b 方向不变。在不计薄膜两端处的坡度时,即可认为薄膜呈 一柱面,于是有



式(8-34)则简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{s} \tag{8-35}$$

上式积分两次后,考虑到边界条件 $(x=0 \, \mathbf{U}, dz/dx=0, x=t/2 \, \mathbf{U}, z=0)$ 得

$$z = \frac{1}{2} \frac{q}{s} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - x^2 \right]$$
(8-36)

即薄膜挠度在 t 方向为一抛物线(图 8-6)。于是,薄膜下的体积为

 $V = qbt^3/12s$

根据上节给出的比拟关系,q换成 2θ ,1/s换成 G,因而扭矩的近似公式为

$$M_T = 2V = \frac{1}{3}bt^3G\theta = JG\theta \tag{8-37}$$

其中 $J = bt^3/3$ 为薄矩形截面的极惯性矩。已知

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial z}{\partial x} = 2G\theta x \tag{8-38}$$

单位长度的转角由扭矩公式得出为

$$\theta = \frac{3M_T}{Gbt^3} \tag{8-39}$$

由式(8-38)可见,最大剪应力发生在x为最大值 $\pm t/2$ 处,即最大弹性剪应力发生在 周边最靠近形心轴的点上,其值为

$$\tau_{\max} = G\theta t = \frac{3M_T}{bt^3} \tag{8-40}$$

或

$$M_T = \frac{1}{3} b t^3 \tau_{\text{max}} \tag{8-41}$$

现在考虑剪应力沿矩形周边的性质。由于柱体的表面为自由表面,所以剪应力 线总是与边界线平行。在四个角点处,由于薄膜在此点和 z=0 平面相切,故该点之 合剪应力等于零。这一结果对开口薄壁杆的弹性扭转近似计算很有意义。根据这一 性质,对于截面为多个窄条组成的杆的自由扭转,就可以看成是若干窄条截面杆扭转 问题的解的组合。

例 8-1 求工字形截面杆受扭矩 M_T 作用时的最大剪力(图 8-7)。

解 将图示三个矩形窄条的扭转刚度相加后,可得

$$\theta = \frac{M_T}{G\left(\frac{1}{3}b_1t_1^3 + \frac{2}{3}b_2t_2^3\right)} = \frac{3M_T}{G}\frac{1}{b_1t_1^3 + 2b_2t_2^3}$$

于是有

$$\tau_{\max} = G\theta t_i = \frac{3M_T t_i}{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3}$$

其中 t_i 是 t_1 , t_2 中较大的一个。

应当指出,在图 8-7 中角点处将由于应力集中而产生 很大的应力,因而,将首先在这里进入塑性状态。实际上, 若在此处做成圆角,即可避免出现应力高度集中。



复习要点

1. 柱体扭转问题的特点是对于非圆截面柱体来说,在扭转过程中,柱体截面要 发生翘曲变形,即 $w(x,y,z) \neq 0$ 。

2. 普朗特应力函数 ψ 满足泊松方程 $\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\theta$ 。

3. 任一点上的剪应力为 $\tau = |\operatorname{grad} \psi|, \psi$ 的等值线是剪应力线。

4. 受张力的薄膜平衡问题与柱体扭转问题的基本方程相似。

5. 弹性柱体扭转的近似算法。

思考题

8-1 为什么非圆形截面柱体受扭后,其截面要发生翘曲?

8-2 截面的周边为什么也是一条剪应力线?

8-3 $\nabla^2 \phi = -2G\theta$ 的成立有何约束条件?

8-4 若要求解一个闭口截面杆的弹性扭转问题,将遇到什么困难,你有什么办 法求解?

习 题

8-1 试证柱体扭转时,任一横截面上的剪应力方向与边界切线方向重合。

提示:利用柱体侧表面的自由边界条件容易得到。

8-2 如有边长为 *a* 的正方形截面柱体和直径为 *a* 的圆截面柱体,试求各自的 最大剪应力。哪一种截面的扭转刚度较大。

8-3 试求有以下形状截面柱体的 扭转刚度 *K*_T。

答案: (a) $K_T = G(b_1t_1^3 + b_2t_2^3 + b_3t_3^3)$, (b) $K_T = 4.72Ga^4$

8-4 试证明 $\psi = A(r^2 - a^2)$ 既可以 用来求解实心圆截面柱体的扭转问题, 也可解圆管的扭转问题。求出用 $G\theta$ 表



示的A。

答案: A=-0.5Gθ 8-5 试求椭圆形截面受扭作用时的最大剪应力。 提示: 取应力函数为

$$\psi = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

a,b为椭圆的长短轴。

答案: $\tau_{\max} = \frac{2M_T}{\pi a b^2}$

第9章 热 应 力

9.1 一般概念

弹性体因所处环境的温度变化引起物体的膨胀或收缩,因而在物体内必将产生 应力。这种因温度场的变化而产生的附加应力,称为热应力。前面几章所讨论的问 题都没有考虑热应力问题,可以认为那些问题是处在一个等温场中,温度没有变化, 是一种等温过程,可以称为等温弹性力学问题。在某些场合,例如在剧烈变化的温度 场工作的结构物,热应力问题可能是最重要的问题,不可忽视。本章专门讨论热弹性 力学问题,简称热应力问题。

温度是表明热水平的一种物理量,两不同温度的物体相接触时,热将自然会由高 温向低温传播,以寻求两物体的热平衡。这种现象称为热传导。

固体材料大都具有在均匀温度场内因受热而膨胀的特性,例如有一细杆,长度为 *l*,若该杆所受温度升高一定值 *T* 时,长度变为 *αTl*,此处 *α* 称为线膨胀系数。则其长 度方向的应变为

$$\varepsilon_l = \frac{\alpha T l}{l} = \alpha T \tag{9-1}$$

物体所处的环境温度往往是随时间和空间位置变化的,在直角坐标系中,温度场 可表示为

$$T = T(x, y, z, t)$$

不随时间变化的温度 T 称为定常温度场。此时有 $(\partial T/\partial t) = 0$,若令 W 为热源强度,则定常温度场的热源强度 W = 0,若 $W \neq 0$,则为非定常温度场。温度场是一种数量场。热量的传递引起温度的变化,也就是温度梯度的变化。热量总是从高温向低温流动,因而热流是有方向性的。单位时间流过单位等温面面积的热量称为热流密度。 热流密度是一矢量,记作 q,其方向总是与等温线正交。

对于弹性各向同性材料,热流密度q与温度梯度成正比,而方向相反,即

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{9-2}$$

其中 k 为导热系数。式(9-2)称为热传导的 Fourier 定律^①,系傅里叶(Fourier J. B. J.)于 1818 年给出。



J. B. Joseph Fourier

傅里叶(J. B. Joseph Fourier,1768—1830) 生于法国 Auxerre 城的一个裁缝家庭,8 岁时父母双亡,18 岁任军 事学校数学讲师。曾随拿破仑赴埃及考察,任地方长官。 在热力学方面有重要贡献,他提出的传热公式,称为 Fourier 公式。1822 年出版《热的解析理论》提出热传导方程, 分离变量法,把函数表示成三角级数,称为 Fourier 级数。 1817 年被选为巴黎科学院院士,1829 年任彼得堡科学院 荣誉院士。

9.2 热力学定律

物体的变形是一种热力学过程,所以必须服从热力学定律。

现在我们给出一些关于热力学的基本知识。在静力学中,平衡是一种所有质点的速度和加速度都等于零的特殊状态。就是说,作用于各质点上的合力在每一瞬间 为零,否则平衡被破坏。热力学平衡的概念则完全不同,与力学的平衡相反,构成系 统的分子服从于力的作用,并在所有可能的方向上持续运动,除非已处于冻结状态。

1840年,焦耳根据实验建立了广义的能量守恒和热能向电能转化的定量关系, 从而奠定了热力学第一定律的基础。实验进一步证明,功可以完全转化为热,而热却

① 对于快速导热过程,该定律应予修正,即应在式(9-2)等号右边增加(-τ₀∂q/∂t)项,τ₀为热流松弛时间。

不能完全转化为功,至今转换效率不到 30%。

1850—1851 年克劳修斯(Clausius R.)和开尔文(Kelvin Lord)先后给出了表达 方式不同的热力学第二定律。热力学第一定律和第二定律是宏观热力学的主要 规律。

把能量守恒定律用于热学,可认为任何物体都蕴涵能量,称为内能。内能具有可加性,是描述物体状态的物理量。若一系统从一种平衡态经历一热力学过程达到另 一种平衡态,则系统在 Δt 时间间隔内,其总能量的变化量为 ΔE,等于在这一过程中 系统从外部吸收的热量 ΔQ,和系统对外部所作的功 ΔW 之和,即

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta W$$

传热和功都可以是双向的,这里都取正号,上式或写成

$$\Delta E_k + \Delta U = \Delta Q + \Delta W \tag{9-3}$$

此处 ΔE_k 为系统的动能增量, ΔU 为系统的内能增量。这就是热力学第一定律。

热力学过程分为等温过程和绝热过程。等温过程是指在一微过程中参与热力学 过程的物质保持在平衡态,而每一微过程都经历了足够长的时间。绝热过程是指在 此热力学过程中参与该过程的物质不吸收(或放出)热的情况。

1850年克劳修斯提出,"不能把热从低温物体传给高温物体,而不引起其他变化。"这是热力学第二定律的最早的一种表述。15年以后,他进一步提出:若系统经历一准平衡微过程,吸收的热量为 dQ,该系统熵的增量为

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} \tag{9-4}$$

式中T为物体的温度, dQ为与过程有关的热量。熵(entropiy)S是描述系统状态的、具有可加性的物理量。熵的单位是J/K(焦耳/开尔文)。

因此,热力学第二定律可以表示为

$$TdS = dU + dW \tag{9-5}$$

由此可得

$$\mathrm{d}S = T^{-1}(\mathrm{d}U + \mathrm{d}W) \tag{9-6}$$

一个热力学系统经过一个过程,系统的熵由 S_0 变为 S_1 则必有

 $S-S_0 \ge 0$

若过程是可逆的,则有 $S=S_0$;若过程是不可逆的,则有 $S>S_0$ 。这一论断叫做熵增 原理。

开尔文(1851)还给出了热力学第二定律的另一种表述:"不能从单一热源吸取 热量,使之完全变为有用的功而不引起其他变化。"显然,这和上述克劳修斯说法的效 果是一致的。


R. Clausius

克劳修斯(R. Clausius,1822—1888) 法国物理学家. 1840 年入柏林大学,1847 年获哈雷大学博士学位,1855 年始在法国、瑞士的几所大学任教。1850 发表热学理论 普遍规律的学术论文,提出了热力学第二定律的概念。 1854 年给出了数学表达式。1865 年给出了熵增定理。 与开尔文(Kelvin)勋爵同为热力学的奠基人。



Lord Kelvin

开尔文(Lord Kelvin,(1824—1907) 英国物理学家。 原名 William Thomson,幼时聪慧过人,有神童之称,11 岁进 Glasgov 大学学数学,1841 年进剑桥大学,1845 年毕 业,1846 年任教授。曾研究地球年龄问题,1848 年发表 热力学第一、第二定律概念,与克劳修斯(Clousius)同为 热力学的奠基人。此外,还研究弹性板的变形、粘弹性理 论等问题。

9.3 基本方程

以下导出热弹性力学的基本方程。在小变形条件下,应变-位移关系仍为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{9-7}$$

运动方程是描述物体所受的力与运动之间的关系,因而,它与力的产生原因并无关

系,故运动方程与等温弹性力学问题相同,即在不计体力的情况下为

$$\sigma_{ij,j} + F_{\rm b} = 0 \tag{9-8}$$

由于温度的变化材料内部将产生附加应力和应变,所以本构关系必与温度有关。下 面我们将导出热弹性本构关系。

设流进物体的热流为

$$Q = \int_{\Omega} \rho r \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{n}) \,\mathrm{d}A = \int_{\Omega} (\rho r - \mathrm{div}\boldsymbol{h}) \,\mathrm{d}\Omega \tag{9-9}$$

其中, Ω 为受热物体体积, ρ 为材料的质量密度,r为单位体积吸收(或辐射)的热量, $h(\mathbf{n}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ 为流经单位表面积的热流矢量。则由热力学第一定律得

$$\dot{\rho u} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho r - \operatorname{div} \boldsymbol{h} \tag{9-10}$$

此处,u为内能密度。由于内能应为应变的函数,这样,热力学第二定律可改述为:存 在一个熵密度函数 $\eta = \eta(u, \epsilon_{ij})$,对于绝热过程有 $\eta = 0$,即 $\rho r - \text{div} h = 0$ 。由此可得

$$\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial \varepsilon_{ii}} \dot{\varepsilon}_{ij} = 0$$
(9-11)

和

$$\dot{\rho u} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 0 \tag{9-12}$$

若定义绝对温度 T 及单位质量的亥姆霍兹自由能分别为

$$T^{-1} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u} \tag{9-13}$$

和

$$\psi = u - T\eta = \psi(T, \varepsilon_{ij}) \tag{9-14}$$

则得

从而得

$$\dot{\psi} = -\eta \dot{T} + \rho^{-1} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \tag{9-15}$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \tag{9-16}$$

在无内约束的情况下可得

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{9-17}$$

式(9-17)是等温应力应变关系。进一步分析可知,自由能仅与应变和温度相关,而 与温度梯度无关。在小变形条件下,将自由能函数 $\phi(T,\epsilon_{ij})$ 按泰勒级数展开后,略去 高阶项,可得热弹性本构关系的具体形式:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 - \beta (T - T^0) + C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}$$
(9-18)

其中,带肩标"0"的量为初始状态参考值, β 称为散热系数, C_{ijkl}^{0} 为初始状态的弹性常数张量(见 4.1 节)。

若初始状态为无应力和未加热的自由状态,则热弹性材料的本构关系为 $\sigma_{ii} = C^0_{iik}\epsilon_{kl} + eta T$

$$(9-19)$$

显然,当T=0时,上式便简化为广义胡克定律:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{9-20}$$

对应变解出则有

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \Big(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2G + 3\lambda} \sigma_{kk} \delta_{ij} \Big) + \alpha T \delta_{ij}$$
(9-21)

其中, α 为线膨胀系数,散热系数 β 为

$$\beta = -\frac{E\alpha}{1-2\nu}$$

下面给出这些应力应变关系的展开形式:

$$\sigma_{x} = 2G\varepsilon_{x} + \lambda\theta - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_{y} = 2G\varepsilon_{y} + \lambda\theta - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{z} = 2G\varepsilon_{z} + \lambda\theta - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$
(9-22)

和

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E} [\sigma_{x} - \nu(\sigma_{y} + \sigma_{z})] + \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E} [\sigma_{y} - \nu(\sigma_{x} + \sigma_{z})] + \alpha T, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\varepsilon_{z} = \frac{1}{E} [\sigma_{z} - \nu(\sigma_{x} + \sigma_{y})] + \alpha T, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$
(9-23)

求解热弹性问题的边界条件与等温弹性力学问题一样,即

$$u_i = \overline{u}_i, \quad \text{if } S_u \perp$$

 $p_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \text{if } S_\sigma \perp$

下面给出平面热应力问题的本构关系。

对于平面应力问题有

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E}(\sigma_{x} - \nu \sigma_{y}) + \alpha T$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E}(\sigma_{y} - \nu \sigma_{x}) + \alpha T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{E}(1 + \nu)\tau_{xy}$$
(9-24)

对于平面应变问题有

$$\varepsilon_{x} = \frac{1-\nu^{2}}{E} \left(\sigma_{x} - \frac{\nu \sigma_{y}}{1-\nu} \right) + (1+\nu)\alpha T$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1-\nu^{2}}{E} \left(\sigma_{y} - \frac{\nu \sigma_{x}}{1-\nu} \right) + (1+\nu)\alpha T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$
(9-25)

9.4 Duhamel-Neumann 法则

若将物体受热产生的应变分成两部分,一部分是因受热而自由膨胀所产生的应 变,另一部分是因物体变形时因受约束而产生的弹性应变。热膨胀应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}' = \alpha T \boldsymbol{\delta}_{ij} \tag{9-26}$$

第二部分则仅和应力状态有关,即如式(9-20)所示:

$$\varepsilon_{ij}'' = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu \sigma_{ij}$$

于是总应变如式(9-21)所示:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \Big(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2G+3\lambda} \sigma_{kk} \delta_{ij} \Big) + \alpha T \delta_{ij}$$

将此式中的 σ_{ij} 解出,可得

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \alpha (3\lambda + 2\mu) T \delta_{ij}$$
(9-27)

上式是由 M. C. Duhamel(1838)和 F. Neumann(1841)分别从不同角度得到的。

将应变位移关系代入平衡方程,得

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} = -(F_{\mathrm{b}i} - \beta T_{,i})$$
(9-28)

在温度场为定常温度场 T = T(x, y, z) 及不计体力和无表面力的情况下,式 (9-28)整理后化为

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = \beta T_{,i}$$
(9-29)

式(9-29)与拉梅-纳维方程比较可知,解热弹性问题就等于在假想体力 βT_{i} 作用下的 弹性力学问题,此时面力为($-\beta T n_{j}$)。按这种办法求解热弹性力学问题的思路,称 为 Duhamel-Neumann 法则。

下面给出一个简例。

例 9-1 设有一长度为 l 细杆,其横截面积为 A,两端固定。若杆的温度由 T_1 均 匀升至 T_2 ,试求杆中的热应力。

解 已知因约束杆伸长 Δl 而产生的力为 P,因而有

$$P = (\Delta l/l) EA = EA_{\alpha} (T_1 - T_2)$$
 (a)

于是杆中的热应力为

$$\sigma = -\frac{P}{A} = E_{\alpha}(T_1 - T_2)$$
 (b)

式(b)说明,热应力与物体的弹性模量、热膨胀系数和温差成正比。

9.5 平面热应力问题

现在研究平面热应力问题。此时基本方程分别为 不计体力时平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$
(9-30)

几何方程

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
 (9-31)

应变协调方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{\gamma}} \tag{9-32}$$

本构方程如式(9-24)和式(9-25)所示。在给定边界条件之后便可求解。如前面所 讨论过的一样,可用位移法或应力函数法求解。若用位移法求解,则可将几何方程代 入本构方程(9-24)或(9-25),再代入平衡方程(9-30)后,可得以下用位移表示的平 衡方程

$$\nabla^{2} u + \frac{1+\nu_{1}}{1-\nu_{1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{1+\nu_{1}}{1-\nu_{1}} \alpha_{1} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\nabla^{2} v + \frac{1+\nu_{1}}{1-\nu_{1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{1+\nu_{1}}{1-\nu_{1}} \alpha_{1} \frac{\partial t}{\partial y}$$
(9-33)

其中

$$abla^2 = rac{\partial^2}{\partial x^2} + rac{\partial^2}{\partial y^2}$$

对平面应力问题时, $\nu_1 = \nu, \alpha_1 = \alpha$,当对平面应变问题时, $\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}, \alpha_1 = (1 + \nu)\alpha_{\circ}$

当用应力函数求解时,不难得到下列用应力函数 $\phi = \phi(x, y)$ 表示的应变协调 方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = -E_1 \alpha_1 \nabla^2 T \tag{9-34}$$

其中

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

及在平面应力情况下, $E_1 = E$,而在平面应变情况下, $E_1 = E/(1-\nu^2)$ 。

以下给出两个例题。

例 9-2 受热管道的热应力

设管的内径为 *a*,管的内部增温为 *T_a*,管外增温为零,管内无热源时管内热应力 为零。由于管内为定常温度场,由热传导定律,知单位时间沿 *n* 方向流经微元面积 dS 的热量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q_i n_i \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9-35}$$

注意到,温度 T 沿 n 方向的导数为

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = T_{,i} n_i \qquad (9-36)$$

于是得

$$\mathrm{d}Q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{9-37}$$

若物体的密度为 ρ_0 ,物体内的热源强度为 r = r(x,t),物体的比热为 c,则在 dt 时间 内,物体的温度升高为 $(\partial T/\partial t)$ dt,则由热平衡条件不难求得

$$c
ho_0 \; rac{\partial T}{\partial t} = - q_{i,i} +
ho_0 r$$

将傅里叶定律代入,化简后得

$$\dot{T} - \alpha' \nabla^2 T = \frac{r}{c} \tag{9-38}$$

此处 $\alpha' = \frac{\alpha}{c\rho_0}$,上式是温度场的微分方程,即热传导方程。

在定常温度场中无热源的情况下,由热传导方程知

$$\frac{\partial T}{\partial t}=0, \quad \nabla^2 T=0$$

在轴对称情况,取坐标系为 (ρ, φ, z) 时,有

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho} = 0 \tag{9-39}$$

积分得

 $T = A \ln \rho + B$

由边界条件为

$$T \mid_{\rho=a} = T_a$$
$$T \mid_{\rho=b} = 0$$

得

$$A = \frac{1}{\ln a - \ln b} T_{a}, \quad B = \frac{-\ln b}{\ln a - \ln b} T_{a}$$

$$T = \frac{\ln b - \ln \rho}{\ln b - \ln a} T_{a}$$
(9-40)

因为我们考虑的是轴对称平面应变问题,故有

$$w=0, \quad u_{\rho}=u_{\rho}(\rho)$$

其基本方程化为

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} = 0$$

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\mathrm{d}u_{\rho}}{\mathrm{d}\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{u_{\rho}}{\rho} \tag{9-41}$$

$$\sigma_{\rho} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e^{2} + \epsilon_{\rho} \right) - \frac{\alpha E I}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e^{2} + \epsilon_{\varphi} \right) - \frac{\alpha E T}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{z} = \frac{E\nu e}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\alpha E T}{1-2\nu}$$
(9-42)

此处, $e = \epsilon_{\rho} + \epsilon_{\varphi}$,将以上关系式代入平衡方程,得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{\rho}}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}u_{\rho}}{\mathrm{d}\rho} - \frac{u_{\rho}}{\rho^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho}$$
(9-43)

现在引入热弹性势 $\Phi(\rho)$, 使得

$$u_{\rho} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\rho} \tag{9-44}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left(\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right) \tag{9-45}$$

并计及式(9-41),可得

$$\Phi = \frac{\beta \rho^2}{\ln b - \ln a} (\ln b - \ln \rho + 1)$$

$$\beta = \frac{1 + \nu}{4(1 - \nu)} \alpha T$$
(9-46)

将式(9-44)代入式(9-41),再代入式(9-42),则得

$$\bar{\sigma}_{\rho} = -2G \frac{\mathrm{d}\Phi}{\rho \mathrm{d}\rho}, \quad \bar{\sigma}_{\varphi} = -2G \frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\rho^2}$$
(9-47)

将式(9-46)代入式(9-47),可得

$$\bar{\sigma}_{\rho} = -\frac{2G\beta}{\ln b - \ln a} \left(2\ln \frac{b}{\rho} + 1 \right)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi} = -\frac{2G\beta}{\ln b - \ln a} \left(2\ln \frac{b}{\rho} - 1 \right)$$
(9-48)

在上式中,令 $\rho = a, \rho = b$ 代入后,得

$$(\sigma'_{\rho})_{\rho=a} = -q_1, \quad (\sigma'_{\rho})_{\rho=b} = -q_2$$
 (9-49)

这一结果与原命题不符,故应消去管内外的压力 $-q_1$ 和 $-q_2$,为此,可借助于平面问

题的解,将其叠加到式(9-48)上,最终可得管内热应力为

$$\sigma_{\rho} = -\frac{aET_{a}}{2(1-\nu)} \left[\frac{\ln b - \ln \rho}{\ln b - \ln a} - \frac{(b/\rho)^{2} - 1}{(b/a)^{2} - 1} \right]$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{aET_{a}}{2(1-\nu)} \left[\frac{\ln b - \ln \rho - 1}{\ln b - \ln a} + \frac{(b/\rho)^{2} + 1}{(b/a)^{2} - 1} \right]$$
(9-50)

例 9-3 坝体热应力

现在讨论坝体的内部热应力。假定坝体可简化为顶角为 2β 的楔形尖顶坝,如图 9-1 所示。这里只考虑一种坝体中心线上的温度变化为 *T*₀、 两侧边上的温度变化为零的情况。设其内部的温度变化规律 遵循下列公式:

$$T = \frac{\cos\varphi - \cos\beta}{1 - \cos\beta} T_{0} \tag{9-51}$$

这一问题属平面应变问题,可以按平面应力问题求解,之 后进行变换即可。由平面应力问题位移法,热弹性势满足

$$\nabla^2 \Phi = (1+\nu)_{\alpha} T$$
 (9-52) **8** 9-1

即

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial}{\rho\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2\partial\rho^2}\Big)\Phi = (1+\nu)\alpha T_0 \frac{\cos\varphi - \cos\beta}{1 - \cos\beta}$$

取弹性势函数为

$$\Phi = \rho^2 (c_1 \cos\varphi + c_2) \tag{9-53}$$

将式(9-53)代入式(9-52)得

$$3c_{1}\cos\varphi + 4c_{2} = (1+\nu)\alpha T_{0} \frac{\cos\varphi - \cos\beta}{1 - \cos\beta}$$
(9-54)

由此可得

$$c_1 = \frac{(1+\nu)\alpha T_0}{3(1-\cos\beta)}, \quad c_2 = -\frac{(1+\nu)\alpha T_0\cos\beta}{4(1-\cos\beta)}$$

代入式(9-53)后得

$$\Phi = \frac{(1+\nu)\alpha T_0 \rho^2}{1-\cos\beta} \left(\frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos\beta\right)$$
(9-55)

从而可得应力分量的特解

$$\sigma'_{\rho} = k_1 \left(\frac{1}{3} \cos \varphi - k_2 \right)$$

$$\sigma'_{\varphi} = k_1 \left(\frac{2}{3} \cos \varphi - k_2 \right)$$

$$\tau'_{\rho\varphi} = k_1 \frac{1}{3 \sin \varphi}$$
(9-56)

其中

ø

 \mathbf{x}

$$k_1 = -\frac{E_{\alpha}T_0}{1-\cos\beta}, \quad k_2 = \frac{1}{2}\cos\beta$$

由此得出在边界上的应力分量为

$$\sigma'_{\rho} \mid_{\varphi=\pm\beta} = \frac{1}{3} k_1 k_2$$

$$\tau'_{\varphi} \mid_{\varphi=\pm\beta} = \pm \frac{k_1 \sin\beta}{3}$$
(9-57)

为了消除与原命题不符的应力场,类似地可叠加一相反的应力场,为此,考虑应力函数 Φ'

$$\Phi' = \rho^2 f(\varphi)$$

因 Φ' 为双调和函数,故有

$$\Phi' = \rho^2 \left(A\cos 2\varphi - B\sin 2\varphi + C\varphi + D\right) \tag{9-58}$$

由此,可按平面问题一章(第6章)的方法,求得应力场 $\sigma''_{\rho}, \sigma''_{\rho}, \tau''_{\rho}$ 后与式(9-56)叠加, 并计及在边界上 $\sigma_{\rho}, \tau_{\infty}$ 均为零的条件,最终得

$$\sigma_{\rho} = \frac{-k_{1}(\sin\varphi - \cos\beta\cos\varphi + \cos^{2}\beta)}{6k_{2}}$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{k_{1}(\cos\varphi - \cos\beta)^{2}}{6k_{2}}$$

$$\tau_{\rho\varphi} = -\frac{k_{1}\sin\varphi(\cos\varphi - \cos\beta)}{6k_{2}}$$
(9-59)

不难看出,最大拉应力在边界上,其值为

$$\sigma_{\varphi} \mid_{\varphi=\pm\beta} = \frac{k_1}{6k_2} (\cos^2\beta - 1)$$
(9-60)

复习要点和思考题

- 1. 深刻了解热力学第二定律的重要公式。
- 2. Duhamel-Neumann 法则告诉我们什么重要法则?
- 3. 热传导的重要规律是热流密度与温度梯度成正比而方向相反,为什么?
- 4. 温度场的边界条件怎么确定?
- 5. 给出用极坐标解热应力问题的全部公式。
- 6. 弹性体在温度变化影响下何以会产生热应力?

习 题

9-1 给出两端固定的圆柱体在温度变化 △T 时所产生的热应力。

9-2 设有一厚壁筒,其内外直径分别为 *A* 和 *B*,若外壁温度为零,内部温度升高至 *T*,试求因此而产生的温度场。

9-3 设有薄窄长板条,若温度场为

 $T = T_0 (1 - y/h)$

其中 y 为宽度方向的坐标, h 为长条的宽度, 坐标原点位于板条的中心。

第 10 章 空 间 问 题

10.1 弹性力学问题的一般解

我们在第5章已经给出了弹性力学问题可归结为用位移表示的拉梅-纳维方程 $(\lambda + \mu)u_{i,ji} + \mu u_{i,jj} + F_{bi} = 0$ (10-1)

或

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\lambda} + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} = 0$$
(10-2)

对于这类问题的求解,通常采取分别求其非齐次方程之特解 u_0 和齐次方程之通 解 u_1 ,则一般解 $u=u_0+u_1$,并使其满足给定的边界条件,就可得到所给弹性力学问 题的解答。

这就是说, u1是下列齐次方程的通解

$$(\lambda + \mu)u_{1j,ji} + \mu u_{1i,jj} = 0 \quad (i,j = 1,2,3)$$
(10-3)

或即

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_1) = 0$$
 (10-4)

注意到 $u_{i,i} = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \theta$,有

$$\nabla^2 u_{1i} + \frac{1}{1 - 2\nu} \theta_{,i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$
 (10-5)

考虑到(见附录 A)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = \nabla \times (\nabla \times u) = \nabla (\nabla \cdot u) - \nabla^2 u = \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) - \nabla^2 u \quad (10\text{-}6)$$

则有下列更简洁方便的形式:

$$rot rot \boldsymbol{u}_1 - K grad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = 0 \tag{10-7}$$

此处 $K = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$ 。

而特解 u_0 则依赖于体力 F_b 的具体形式。下面讨论如何求得齐次方程的通解,或 即无体力的情况下弹性力学问题的解,此时 u 的下标就不再出现。将方程(10-5)对 坐标 x_i 求导,得

$$abla^2 u_{i,i} + \frac{1}{1 - 2\nu} \theta_{,ii} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$
(10-8)

因 $u_{i,i} = \theta, \theta_{i,i} = \nabla^2 \theta$,由此得

$$\nabla^2 \theta = 0 \tag{10-9}$$

$$\nabla^2(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = 0 \tag{10-10}$$

这就是说,在无体力或体力为常数时,体应变 θ 满足拉普拉斯方程,即 θ 为调和函数。 将拉普拉斯微分算子作用于式(10-5),并计及式(10-9)可得

$$\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{10-11}$$

即位移分量 и;是双调和函数。

在各向同性弹性体不计体力的情况下,拉梅-纳维方程已化为式(10-5),该方程 的解可写成下列形式:

$$u_i = \varphi_i + \psi_{,i} \tag{10-12}$$

其中 ψ 为待定函数, φ_i (i=1,2,3)为调和函数, 即

$$\nabla^2 \varphi_i = 0 \tag{10-13}$$

将式(10-12)的关系式代入体应变的表达式,得

$$\theta = u_{i,i} = \varphi_{i,i} + \psi_{,ii} = \varphi_{i,i} + \nabla^2 \psi$$
 (10-14)

于是,方程(10-5)中的 u_i 代之以 θ ,并计及式(10-13),可得

$$(\nabla^{2}\psi)_{,i} + \frac{1}{1-2\nu}(\varphi_{i,i} + \nabla^{2}\psi)_{,i} = 0 \qquad (10-15)$$

由此得

戓

$$\nabla^{2} \psi = \frac{1}{2(1-\nu)} \varphi_{i,i} \tag{10-16}$$

(10 - 17)

由式(10-13)可知 $\nabla^2(\varphi_{i,i}) = (\nabla^2 \varphi_i)_{,i} = 0$,从而得 $\nabla^2(\nabla^2 \psi) = \nabla^4 \psi = 0$

即函数 ϕ 为双调和函数。

已知任何调和函数同时也是双调和函数,即有

$$\nabla^4 \varphi_i = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi_i) = 0 \tag{10-18}$$

可以证明,若 φ_i 是调和函数,则

$$\psi_i = x_i \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{10-19}$$

是双调和函数。

实际上,考虑到

$$\nabla^2 \varphi_1 = \varphi_{1,11} + \varphi_{1,22} + \varphi_{1,33} = 0$$

(x₁\varphi_1)_{,1} = \varphi_1 + x_1 \varphi_{1,1}
(x_1\varphi_1)_{,11} = 2\varphi_{1,1} + x_1 \varphi_{1,1}

及

$$(x_1 \varphi_1)_{,22} = x_1 \varphi_{1,22}$$

 $(x_1 \varphi_1)_{,33} = x_1 \varphi_{1,33}$

可得

$$\nabla^2 \psi_1 = \nabla^2 (x_1 \varphi_1) = (x_1 \varphi_1)_{,ii} = 2\varphi_{1,1}$$
(10-20)

注意到,上式中的重复下标表示求和,由此可得

$$\nabla^2 \psi_1 = \nabla^2 (x_1 \varphi_1) = \nabla^2 (2\varphi_{1,1}) = 2(\nabla^2 \varphi_1)_{,1} = 0$$
(10-21)
调和函数的导数仍是调和函数。

由以上讨论可知,方程(10-16)的解应具有以下形式

$$\psi = C x_k \varphi_k \tag{10-22}$$

此处 C 为一常数。注意到

$$\psi_{,i} = C(x_k \varphi_k)_{,i} = C(\varphi_i + x_k \varphi_{k,i})$$

$$\psi_{,ij} = C(x_k \varphi_k)_{,ij} = C(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} + x_k \varphi_{k,ij})$$
(10-23)

将式(10-23)的第二式进行缩并运算,并考虑到

$$\varphi_{k,ii} = \nabla^2 \varphi_k = 0 \tag{10-24}$$

得

$$\nabla^2 \psi = C \nabla^2 (x_k \varphi_k) = 2C \varphi_{i,i} \qquad (10-25)$$

式(10-25)与式(10-16)比较后得

$$C = \frac{1}{4(1-\nu)} \tag{10-26}$$

方程(10-16)的一般解应该是它的特解(10-22)和任意调和函数(例如 φ_0)的和,即

$$\psi = -\frac{1}{4(1-\nu)}(x_k\varphi_k + \varphi_0) \tag{10-27}$$

由式(10-27)和式(10-12)可知,方程的一般解可由 4 个任意的、互不相关的调和函数 $\varphi_0, \varphi_k (k=1,2,3)$ 表示,即

$$u_{i} = \varphi_{i} - \frac{1}{4(1-\nu)} (x_{k}\varphi_{k} + \varphi_{0})_{,i}$$
(10-28)

式(10-28)是无体力时位移矢量 u 的表达式,称为 Papkovich-Neuber 形式的一般解, 是 Papkovich P. F. (1932)与 Neuber H. (1934)分别独立得到的。

在不破坏 Papkovich-Neuber 一般解(10-28)的情况下, Slobodyanski M. G. (1954), Eubanks R. 和 Sternberg E. (1956)证明了,在上述一般解中可以仅保留 3 个调和函数。

以下讨论如何应用以位移表示的一般解,从而可由式(10-28)得到应力分量。 为此,对 x 求导得

$$u_{i,j} = \varphi_{i,j} - \frac{1}{4(1-\nu)} (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} + x_k \varphi_{k,ij})$$
(10-29)

将上式中的下标 i 和 j 缩并,并注意到 $\varphi_{k,ii} = \nabla^2 \varphi_k = 0$,可得

$$u_{i,i} = \theta = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}\varphi_{i,i}$$
(10-30)

将式(10-29)和式(10-30)代入广义胡克定律,可得应力分量的表达式:

$$\sigma_{ij} = \frac{G}{2(1-\nu)} [2\nu \varphi_{k,k} \delta_{ij} + (1-2\nu)(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) - x_k \varphi_{k,ij}] \qquad (10-31)$$

式(10-31)是用 3 个调和函数 φ_k 表示的应力分量。

现在考虑一种简单情况,令式(10-28)中的 φ_k 取下列形式:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 4(1-\nu)A/r$$
 (10-32)

此处 A 为常数, r 为任一点 $K(x_k)$ 到坐标原点的距离。

我们熟知,1/r为调和函数,实际上

$$(1/r)_{,i} = -x_i/r^3, (1/r^2)_{,j} = -3x_j/r^5$$

(1/r)_{,ij} = $-\delta_{ij}/r^3 + 3x_ix_j/r^5$ (10-33)

将式(10-33)的第二式进行缩并可得

$$(1/r)_{,ii} = -\nabla^2 (1/r) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3x_i x_i}{r^5} = 0 \qquad (10-34)$$

将以上函数的表达式代入式(10-28),得

$$u_{1} = A \frac{x_{1} x_{3}}{r^{3}}, \quad u_{2} = A \frac{x_{2} x_{3}}{r^{3}}$$

$$u_{3} = \frac{A}{r} \left(3 - 4\nu + \frac{x_{3}^{2}}{r^{2}}\right)$$
(10-35)

从而由式(10-31)可得与函数(10-32)相应的应力张量分量:

$$\sigma_{11} = 2AG \frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3 \frac{x_1^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{22} = 2AG \frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3 \frac{x_2^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{33} = 2AG \frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3 \frac{x_3^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{12} = -6AG \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5}$$

$$\sigma_{23} = 2AG \frac{x_2}{r^3} \left(2\nu - 1 - 3 \frac{x_3^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{31} = 2AG \frac{x_1}{r^3} \left(2\nu - 1 - 3 \frac{x_3^2}{r^2} \right)$$

由上式看出,当 r 无限增大时,位移分量和应力分量都无限增加,显然,这说明坐标原 点是奇点,因此,所得结果除坐标原点以外对无限弹性体上所有的点都是正确的。这 种在奇点附近无限增大的解是 Boussinesq J. (1885) 给出的一类解。

根据求解问题的不同,可以选取不同的调和函数。

10.2 有集中力作用的无限弹性体问题

设有体力 F 作用在无限弹性体 Ω 内,则问题的一般解为下列拉梅-纳维方程 $\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} = -F_i$ (10-37)

的特解和 10.1 节中给出的一种特解。

开尔文(1848)给出了一种特殊积分

$$u_i(x) = A \int_{\Omega} \left[B \frac{F_i(\boldsymbol{\xi})}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)_{,i} (x_j - \boldsymbol{\xi}_j) F_i(\boldsymbol{\xi}) \right] d\boldsymbol{\Omega}$$
(10-38)

此处

$$A = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad B = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \left(\frac{1}{r}\right)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r}\right)$$

和

 $r = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \right]^{1/2}$

显然,r为弹性体内由所考虑的一点 x_i 到任意点 ξ_i 的距离, $F_i(\xi)$ 为体力 F_i 在点 ξ_i 的值。

将积分(10-38)代入方程(10-37),不难验证该积分满足拉梅-纳维方程。

现在我们认为体力 F_i 作用在一个很小的区域 Ω_1 内,则当 $\Omega_1 \rightarrow 0$ 时, F_i 即为作用 在 ξ_i 处的集中力。可见, $x_i = \xi_i$ 的点为一奇点,此时在所有 $x_i \neq \xi_i$ 的点的位移为

$$u_i(x) = \frac{\lambda + 3\mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{F_i}{r}\right) + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^3} F_j \quad (10\text{-}39)$$

若坐标系的选择使得 $\xi_i = 0, F_1 = F_2 = 0, F_3 = F, 则有$

$$u_{1} = C \frac{x_{1} x_{3}}{r^{3}}$$

$$u_{2} = C \frac{x_{2} x_{3}}{r^{3}}$$

$$u_{3} = C \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{x_{3}^{2}}{r^{3}} \right) \right)$$
(10-40)

其中

$$C = \frac{(\lambda + \mu)F}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad r^2 = x_i x_i \tag{10-41}$$

由广义胡克定律

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{10-42}$$

便可得到各应力分量(留作练习)。

利用 Popkovich-Neuber 表达式中的调和函数也可求得此问题的解。为此取调和函数 φ_k 为下列形式:

$$\varphi_k = \frac{B'x_k}{r^3} \tag{10-43}$$

其中 B'为常数。这些函数所对应的无限体内任一点的位移为

$$u_{i} = \frac{B'x_{i}}{r^{3}} - \frac{B'}{4(1-\nu)} \left(\frac{1}{r}\right)_{,i} = \frac{Bx_{i}}{r^{3}}$$
(10-44)

其中

$$B = B' \frac{5 - 4\nu}{4(1 - \nu)} \tag{10-45}$$

将调和函数 φk 对 x 求导数

$$\varphi_{k,i} = B'\left(\frac{\delta_{ik}}{r^3} - 3\frac{x_i x_k}{r^5}\right) \tag{10-46}$$

并整理后得

$$\varphi_{k,k} = 0 \tag{10-47}$$

由式(10-30)知 $\theta=0$,于是可得应力分量

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) = 2BG\left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{x_i x_k}{r^5}\right)$$
(10-48)

或表示为

$$\sigma_{ii} = 2BG\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x_i^2}{r^5}\right), \quad \sigma_{ij} = -6BG\frac{x_i x_k}{r^5}$$
(10-49)

由以上所得结果可知,当 r→0 时,位移和应力均无限增大,即坐标原点为一奇 点。为了消除这一奇点,可在坐标原点的邻域做一个以原点为球心、以 r₀为半径的 小球,则在小球表面上的力为

$$p_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \left(n_j = -\frac{x_j}{r_0} \right) \tag{10-50}$$

考虑到小球表面上任一点 p_i的合力是沿球面的法线方向,也就是径向方向。从而不 难求得弹性体内任一点上的应力为

$$\sigma_{rr} = -\frac{4BG}{r^3} = \frac{C}{r^3}$$
(10-51)

其中,C = -4BG为常数。若B < 0,则 $p_r > 0$,此时为中心受拉;若B > 0,则 $p_r < 0$, 即为中心受压。

10.3 Boussinesq 问题

求解弹性半空间表面受集中力作用下的应力场和位移场的问题是 Boussinesq J. V. 于 1885 年首先给出的,故称为 Boussinesq 问题。

设有一以平面 z=0 为界的弹性半空间表面上有一沿坐标 z 方向作用的集中力,



坐标原点就设在力的作用点处。由 10.2 节讨论可 知,坐标原点为一奇点,为了消除这一奇点,可在坐标 原点的邻域做一个以原点为中心以 r₀ 为半径的微小 半球,则所考虑的问题变为求解由无限平面和微小半 球所界定的弹性半空间受小球表面力作用的问题。 显然,微小半球表面力的合力就是所作用的集中 力*F*。

根据问题的特点,可视为轴对称空间问题,故以 下的讨论采用柱坐标 ρ, φ, z (图 10-1),与笛卡儿坐标 的关系为

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$
 (10-52)

于是,在不计体力的情况下,用位移表示的平衡方程为

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \nabla^2 u - \frac{u}{\rho^2} = 0$$

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \nabla^2 w = 0$$
(10-53)

其中, u, v, w 为位移分量, 且有

$$u = u(\rho, z), \quad v = 0, \quad w = w(\rho, z)$$

为了求解方程组(10-53),引进 Love 函数 ϕ (系 A. E. H. Love 于 1929 年提出), 目的是令所选定的函数 ϕ 能使式(10-53)化为 ϕ 的双调和函数,即位移分量为

$$u = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z}$$

$$w = \frac{1}{2G} \left[2(1-2\nu) \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi \right]$$
(10-54)

将式(10-54)代入式(10-53)得函数 $\psi(\rho,z)$ 的双调和函数。于是,问题归结为在给定 边界条件下求双调和函数 $\psi(\rho,z)$ 的问题。为此,可以利用应力分量的量纲分析来确 定 Love 函数 $\psi(\rho,z)$ 的可能形式。

已知应力分量的表达式为外力 F 乘以 ρ,z,R 等长度坐标的负二次幂,注意到位移分量与应变分量之间及应变分量与应力分量之间的关系,可由式(10-54)看出,

Love 位移函数 $\psi(\rho,z)$ 应为 ρ,z 的正一次幂的双调和函数。于是,取 $\psi(\rho,z) = AR + B[R - z\ln(R + z)]$ (10-55)

其中

 $R=\sqrt{
ho^2+z^2}$

将以上关系式依次代入应变位移关系和广义胡克定律可得

$$\sigma_{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^{2} - \frac{\partial^{2}}{\partial \rho^{2}} \right) \psi$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^{2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi$$
(10-56)
$$\sigma_{z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^{2} - \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} \right] \psi$$

$$\tau_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1 - \nu) \nabla^{2} - \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} \right] \psi$$

将式(10-55)分别代入式(10-54),并注意到边界条件

$$(\sigma_z)_{z=0,R=\rho} = 0, \quad (\tau_{\rho z})_{z=0,R=\rho} = 0$$
 (10-57)

和下列平衡条件

$$F = -\int_{0}^{\infty} 2\sigma_{z} \pi \rho \mathrm{d}\rho \qquad (10-58)$$

并确定常数 A 和 B 后,即可得位移分量和应力分量。实际上

$$A = \frac{F}{2\pi}, \quad B = -(1 - 2\nu) \frac{F}{2\pi}$$
(10-59)

从而位移分量为

$$u = -\frac{F(1+\nu)\rho}{2\pi E R^{2}} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right]$$

$$w = \frac{F(1+\nu)}{2\pi E R} \left[2(1-\nu) + \frac{z^{2}}{R^{2}} \right]$$
(10-60)

应力分量为

$$\sigma_{\rho} = \frac{F}{2\pi R^{2}} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{3\rho^{2}z}{R^{3}} \right]$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{F}{2\pi R^{2}} \left[(1-2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right) \right]$$

$$\sigma_{z} = -\frac{3F}{2\pi R^{2}} \cdot \frac{z^{3}}{R^{3}}$$

$$\tau_{\rho z} = -\frac{3F}{2\pi R^{2}} \cdot \frac{\rho z^{2}}{R^{3}}$$
(10-61)

由方程(10-60)可见,在任一 z/ρ =常数的直线上的位移与距原点的距离成反比。当 $R \rightarrow \infty$ 时,位移趋于零。而在 z=0 平面上,竖向位移 w 为

$$w \mid_{z=0} = \frac{F(1-\nu^2)}{\pi E \rho}$$
(10-62)

上式在除原点附近之外的各点都是正确的。

以上结果,可以推广到在一定表面域上有分布载荷作用的情况。例如,在半空间



$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint \mathrm{d}s \mathrm{d}\psi \qquad (10-63)$$

对 s 积分,弦 mn 的长度 L 为

$$L_{mn} = 2(a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi)^{1/2}$$

注意到 $a\sin\varphi = \rho\sin\psi$, 当 ψ 从 $-\pi/2$ 变到 $\pi/2$ 时, 弦 mn 扫过整个圆的面积 A 为

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\psi$$

于是由对称性,得

$$w = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} q a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2 \psi} \mathrm{d}\psi \qquad (10-64)$$

对 ρ/a 的任何值,都容易利用椭圆积分表算出 w。而 z=0 在表面该区域中心一 点处的竖向位移 w 为

$$(w)_{z=0} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} qa$$
(10-65)

在 z=0 表面的载荷作用区 Ω 以外的任一点 M_0 的竖向位移 w_0 ,可由式 (10-60) 得

$$w_0 = \beta \iint_{\Omega} \frac{q \,\mathrm{d}\Omega}{R} \tag{10-66}$$

其中 R 为从点 M 到 M_0 的距离, 及

$$\beta = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \tag{10-67}$$

式(10-66)中的积分称为表面 Ω 上集度为 q 的单层势^①。



① 由数学中的势论得知,任何一个调和函数都可以用一些曲面积分表示出来,这些曲面积分称为面势。
 单层势是面势的一种类型。详见有关数学物理方程教科书,例如,吉洪诺夫等著,《数学物理方程》,上册,第5
 章,§5(368页),高等教育出版社,1956。或柯朗等著,《数学物理方法》,第四章,195页,科学出版社,1977。

10.4 Hertz 接触问题

现在考察有两个不同弹性模量的弹性球体 I 和 II 相接触的应力问题。该问题的 解是赫兹(Hertz H. R.)于 1881 年给出的。

设两球的弹性模量和泊松比分别为 E_1 , ν_1 和 E_2 , ν_2 半径分别为 R_1 和 R_2 ,两球在 O 点处 相切,其接触面的法线即为 z 轴,令变形前 A_1 和 A_2 两点距 z 轴的距离均为 ρ (图 10-3)。而 A_1 与 A_2 间的距离为

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{\rho^2}{2R_1} + \frac{\rho^2}{2R_2} = \beta \rho^2 \quad (10-68)$$
$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} \qquad (10-68')$$

当两球体受沿中心法线作用的力 F 相向 挤压时,原两球体接触点 O 因球体变形而扩 大为圆形接触面。接触面的半径远小于两球 体的光径。 所以 可以用 10.2 节的结果来讨论



体的半径。所以,可以用 10.3节的结果来讨论其局部变形问题。



赫茲(Heinrich Hertz,1857—1894) 德国物理学家。 曾任 Karisruhe 工学院及 Bonn 大学教授。他发现了无线 电传输中的一种波,称为 Hertz 波,1880 年的圣诞节期间 完成了两弹性球体的接触应力问题,发表于 1822 年,后 被称为 Hertz 问题。他还研究了固体材料的硬度问题,塑 性屈服时接触应力问题等。

设在 A_1 - A_2 连线上的两点因相互挤压而互相接近的距离为 δ_1 若 A_1 和 A_2 点因球 体变形后重合为一点 A_1 假定重合后的 A 点处在接触面内,且原 A_1 和 A_2 点各自仍 沿原方向产生位移 w_1 和 w_2 ,于是有

Heinrich Hertz

$$\delta = w_1 + w_2 + \xi_1 + \xi_3 \tag{10-69a}$$

或

$$w_1 + w_2 = \delta - \beta \rho^2 \tag{10-69b}$$

若将接触面视为弹性半空间表面受圆形域载荷作用, A_1 点表示下面球在接触面上的一点,这种情况,恰如上述求载荷作用区以外一点 A_1 的位移 w_1 的问题。于是, 在图 10-2 中取一微小单元面积,该微元以M为中心,以s和 ds的两圆弧与夹角为 d ϕ 的两半径所围成,如图 10-2 中的阴影部分所示。于是不难求出 A_1 点的竖向位移为

$$w_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \iint q \mathrm{d}s \mathrm{d}\psi \tag{10-70}$$

其中, E₁, y₁ 为下面球的弹性模量和泊松比。类似地可得 w₂ 及

$$w_1 + w_2 = \frac{1}{\pi} \Big(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \Big) \iint q \mathrm{dsd}\phi = \delta - \beta \rho^2 \tag{10-71}$$

式中的积分域为图 10-4 所示的圆形接触面。变形前为 A_1 和 A_2 的两点,变形后为 A_1 点。而式中的 ρ, ψ 则是以 O 点为中心的平面极坐标,现在的问题便归结为求满足积分方程(10-71)的未知函数 $q(\rho)$ 。Hertz 得出

$$q(\rho) = \frac{q_{\max}}{a} \sqrt{a^2 - \rho^2}$$
(10-72)

其中, q_{max} 为接触点中心 O 处的压力,a 为接触圆的半径, ρ 为距中心的距离。将式 (10-72)在接触面上作积分,令积分结果等于外加压力 F,可得

$$q_{\max} = \frac{3F}{2\pi a^2} \tag{10-73}$$

其中 a 为接触圆的半径。上式说明,最大压力是平均压力的 1.5 倍。



为了验证以上结果,可将式(10-72)改写为

$$q(\rho) = \frac{q_{\max}}{a} [a^2 - (\rho^2 - s^2 - 2\rho s \cos \psi)]^{\frac{1}{2}}$$
(10-74)

将式(10-74)代入式(10-71)可得含参数 s 的积分。可以采取先对 ρ 沿 mn 积分;后对 ϕ 由 0 到 2π 积分。由载荷分布和积分域的对称性,上述结果的两倍即所要求的结果。注意到 mn 的长度为

$$\overline{mn} = 2a\cos\varphi = 2a \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = 2 \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2\psi}$$
(10-75)

于是有

$$\int q(\rho) ds = \frac{q_{\max}}{a} \frac{\pi}{2} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi)$$

$$\iint q(\rho) ds d\psi = \frac{\pi^2 q_{\max} (2a^2 - \rho^2)}{4a}$$
(10-76)

将(10-76)的第二式代入式(10-71),整理后得

$$\delta = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right) \frac{\pi a q_{\max}}{2} \\ \beta = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right) \frac{\pi \rho^2 q_{\max}}{4a} \right)$$
(10-77)

于是得

$$q_{\max} = \frac{3F}{2\pi a^2} \tag{10-78}$$

将式(10-68')和式(10-78)代入式(10-77),解得

$$a = \left[\frac{3FR_1R_2}{4(R_1 + R_2)} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$q_{\max} = \left[\frac{6F(R_1 + R_2)^2}{\pi^2 R_1^2 R_2^2 \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}$$
(10-79)

若取 $E_1 = E_2 = E, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, 则得$

$$q_{\max} = 0.388 \left[\frac{FE^2 (R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$a = 1.11 \left[\frac{FR_1 R_2}{E(R_1 + R_2)} \right]^{\frac{1}{3}}$$
(10-80)

及

$$\delta = 1.23 \left[\frac{F^2 (R_1 + R_2)}{E^2 R_1 R_2} \right]^{\frac{1}{3}}$$
(10-81)

从而可进一步求出球体中的应力场。最大压应力发生在接触面中心,即其 q_{max} 值,最 大拉应力发生在接触面边界上,其值为 0.133 q_{max} ,最大切应力发生在公共法线上距 $O \le 0.47a$ 附近,其值为 0.31 q_{max} 。

复习要点和思考题

1. 用位移法求解空间问题的基本方法是什么?

2. 为什么在解空间问题时,要采取求非齐次方程的特解和齐次方程的通解的方法? 根据什么?

3. Papkovich-Neuber 函数是怎么引入的?

4. 如何把 Boussinesq 问题引伸到不规则分布载荷的情况?(可自拟练习题)

5. 如何由 Boussinesq 问题导出弹性接触问题,根据什么?

6. 在两弹性球接触问题中,最大接触压应力和最大接触拉应力分别在什么部位 发生?

7. 试考虑两弹性圆柱接触时的特点。(可自拟练习题)

习 题

10-1 试由位移平衡方程,直接导出空心球的位移分布,设其内外径分别为 *a* 和 *b*。

10-2 若取应力函数为

$$\varphi = Ar + B\sin(r+z)$$

试求解 Boussinesq 问题。

10-3 在不计体力的情况下,试导出柱坐标下的以应力形式表达的协调方程。

第11章

变分原理及其应用

11.1 基本概念

在第5章中曾经谈到,求解弹性力学问题,归结为求解偏微分方程的某种边值问题。如对空间问题来说,泛定方程为含有15个未知量的15个偏微分方程,在给定边 界条件时,求解是极其困难的,而且往往是不可能的。本章将讨论利用能量原理求解 弹性力学问题的近似方法。

研究物体的状态,不仅要知道物体的变形状态,而且要知道物体中每一点的温度。若物体在变形过程中,各点的温度与其周围介质的温度保持平衡,则称这一过程 为等温过程。若在变形过程中,物体的温度没有什么升降,也没有损失或增加热量, 则称这一过程为绝热过程。物体的瞬态高频振动,高速变形过程都可视为绝热过程。

物体在外界因素影响下的变形过程,严格来说都是一个热力学过程。如令物体的动能为 *E*_k,应变能为 *U*,则在微小的 δ*t* 时间间隔内,物体从一种状态过渡到另一种 状态时,根据热力学第一定律,总能量的变化为

$$\delta E_k + \delta U = \delta W + \delta Q \tag{11-1}$$

此处 δW 为体力 F_{bi} 与面力 p_i 所完成的功, δQ 为物体由其周围介质所吸收(或向外发散)的热量,且以等量的功来度量。假定弹性变形过程是绝热的,则对于静力平衡问题有

$$\delta Q=0\,,\qquad \delta E_k=0$$

$$\delta U = \delta W \tag{11-2}$$

和

由第5章和以上的讨论知道,在线弹性情况下,单位体积的应变能为

$$U_{0} = \int_{0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \qquad (11\text{-}3)$$

以一维应力状态为例, U_0 实际上是 $\sigma_x = \epsilon_x$ 平面内,应力应变曲线与 ϵ_x 轴和 $\epsilon_x = \epsilon'_x$ 所包围的面积 (图 11-1)

$$U_{0} = \int_{0}^{\varepsilon'_{x}} \sigma_{x} \mathrm{d}\varepsilon_{x} \qquad (11-4)$$

现在,定义另一个重要的量 U'。

$$U_0' = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}\sigma_{ij} \qquad (11-5)$$



在一维状态下

$$U_0' = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x \,\mathrm{d}\sigma_x \tag{11-6}$$

 σ_{x}

 U'_0 称为单位体积的应变余能(也称应力能),简称余能。

应变能 U_0 表示物体受外力作用时,储存于变形物体中的能量。而应变余能 U'_0 的物理解释便不明显。在图 11-1 中,它只表示 $\sigma_x \in x$ 曲线与轴 σ_x 及 $\sigma_x = \sigma'_x$ 所围成的 面积。 σ'_x 为物体内指定时刻的应力,相应的应变为 ϵ'_x ,则 $\epsilon'_x \sigma'_x = U_0 + U'_0$ 。 U_0 与 U'_0 分别互补(或互余)对方为 $\epsilon'_x \sigma'_x$ 矩形的面积。显然,在曲线 $\sigma_x \in x$ 为直线时(即线弹性 情况), $U_0 = U'_0$ 即余能在数量上等于应变能。

余能是一个重要的概念,尽管它不像应变能那样有明确的物理意义,但引 进余能的概念以后,讨论问题的范围就大为扩大了。对余能的认识应强调以下 三点:

(1) 应变余能与应变能是互补的,面积

$$\varepsilon'_x \sigma'_x = U_0 + U'_0;$$

(2) 在应变余能的积分式中,积分变量为应力分量

$$U_0' = \int_0^{\sigma_x'} \epsilon_x \mathrm{d}\sigma_x$$
 ;

(3) 在线弹性时 $U_0 = U'_0$ 。

11.2 虚位移原理

现在考虑一个受一组体力 F_{bi} (分量为 F_{bx} , F_{by} , F_{bz})和面力 p_i (分量为 p_x , p_y , p_z)作用而处于平衡状态的物体,其体积 V,表面积 S。则在体积 V 内有

$$\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bz} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} + F_{bz} = 0$$
(11-7)

或用张量表示为

$$\sigma_{ii,j} + F_{bi} = 0$$
 $(i,j=x,y,z)$ (11-8)

设S为物体的全部表面,其中给定面力的部分表面为 S_a ,给定位移的部分表面为 S_u ,则全部表面S应为 S_a 与 S_u 之和。如将给定的已知量用字母上加一横线表示(以下常省略),则边界条件为

$$\sigma_{x}l_{1} + \tau_{xy}l_{2} + \tau_{xz}l_{3} - \overline{p}_{x} = 0$$

$$\tau_{yx}l_{1} + \sigma_{y}l_{2} + \tau_{zy}l_{3} - \overline{p}_{y} = 0$$

$$\tau_{zx}l_{1} + \tau_{yz}l_{2} + \sigma_{z}l_{3} - \overline{p}_{z} = 0$$

$$(11-9)$$

或

 $\sigma_{ij}n_j = \overline{p}_i \quad (i,j=x,y,z) (\not{a} S_{\sigma} \not{\perp})$ (11-10)

现在设想一个处于平衡状态的物体,由于某种原因,由其平衡位置得到了一个约 束许可的、任意的、微小虚位移 δu_i,其分量为 δu,δv,δw。实际的力系在虚位移上所 做的功叫做虚功。

虚位移原理:在外力作用下处于平衡状态的可变形体,当给予物体微小虚位移时,外力的总虚功等于物体的总虚应变能。

外力的总虚功 δW 为实际的体力 F_{bi} 和面力 p_i 在虚位移上所做的功,即

$$\delta W = \iint_{V} (F_{bx} \delta u + F_{by} \delta v + F_{bz} \delta w) dV + \iint_{S_{\sigma}} (p_{x} \delta u + p_{y} \delta v + p_{z} \delta w) dS$$
(11-11)

或

$$\delta W = \iint_{V} F_{bi} \delta u_{i} dV + \iint_{S_{\sigma}} p_{i} \delta u_{i} dS \qquad (11-11')$$

在物体产生微小虚变形的过程中,该物体内的总虚应变能为

$$\delta U = \iiint_{V} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (11-12)$$

或

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d} V \tag{11-12'}$$

于是虚位移原理可表示为

$$\iint_{V} (\sigma_{x} \delta \varepsilon_{x} + \sigma_{y} \delta \varepsilon_{y} + \sigma_{z} \delta \varepsilon_{z} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV$$

$$= \iint_{V} (F_{bx} \delta u + F_{by} \delta v + F_{bz} \delta w) dV$$

$$+ \iint_{\sigma} (p_{x} \delta u + p_{y} \delta v + p_{z} \delta w) dS \qquad (11-13)$$

或

 $\iint_{V} \sigma_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}V = \iiint_{V} F_{bi} \, \delta u_i \, \mathrm{d}V + \iint_{S} p_i \, \delta u_i \, \mathrm{d}S \qquad (11-13')$ $\delta W = \delta U$

即

式(11-13)为虚位移原理的位移变分方程。

以下给出详细证明。

若在虚位移原理的变分方程(11-13)中,考虑到在给定位移的部分表面 S_u 上, δu_i =0,在给定面力的部分表面 S_σ 上,边界条件 $p_i = \sigma_{ij}n_j$ 成立。因而式(11-13)中对 S_σ 的积分可以写成对 S 的积分,即有

$$\delta W = \int_{S_{\sigma}} p_i \delta u_i dS + \int_{V} F_{bi} \delta u_i dV = \int_{S} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_{V} F_{bi} \delta u_i dV \quad (11-14)$$

运用高斯散度定理

$$\iint_{V} \left[\frac{\partial (\sigma_{x} \delta u)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{y} \delta v)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_{z} \delta w)}{\partial z} \right] dV$$

$$= \iint_{S} (\sigma_{x} \delta u l_{1} + \sigma_{y} \delta v l_{2} + \sigma_{y} \delta w l_{3}) dS$$
(11-15)

其中 l_1 , l_2 , l_3 为边界外法线方向单位矢量n的方向余弦,

$$l_1 = \cos(x, n), \quad l_2 = \cos(y, n), \quad l_3 = \cos(z, n)$$

则有

$$\iiint_{V} \left[\frac{\partial (\sigma_{x} \delta u)}{\partial x} \right] dV = \iiint_{V} \left[\sigma_{x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) \right] dV + \iiint_{V} \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} \delta u dV$$

$$= \iint_{S} \sigma_{x} l_{1} \delta u dS$$

及

$$\iint_{V} \tau_{xy} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right] dV + \iint_{V} \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta u \right] dV$$
$$= \iint_{S} \tau_{xy} (l_{1} \delta v + l_{2} \delta u) dS$$

即

$$\int_{V} (\sigma_{ij} \,\delta u_i)_{,j} \,\mathrm{d}V = \int_{S} \sigma_{ij} n_j \,\delta u_i \,\mathrm{d}S \tag{11-16}$$

此处, $n_i = l_1$, l_2 , l_3 。将式(11-16)代入式(11-14),得

$$\delta W = \int_{V} (\sigma_{ij} \,\delta u_i)_{,j} \,\mathrm{d}V + \int_{V} F_{\,\mathrm{b}i} \,\delta u_i \,\mathrm{d}V$$
$$= \int_{V} (\sigma_{ij,j} \,\delta u_i + \sigma_{ij} \,\delta u_{i,j}) \,\mathrm{d}V + \int_{V} F_{\,\mathrm{b}i} \,\delta u_i \,\mathrm{d}V$$
$$= \int_{V} (\sigma_{ij,j} + F_{\,\mathrm{b}i}) \,\delta u_i \,\mathrm{d}V + \int_{V} \sigma_{ij} \,\delta u_{i,j} \,\mathrm{d}V$$

当物体处于平衡状态时,因为

 $\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0$

此时上式第一项积分等于零。而由

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

故

$$\sigma_{ij}\,\delta u_{i,j}=\sigma_{ij}\,\delta \varepsilon_{ij}$$

于是得到

$$\delta W = \int_{V} \sigma_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d} V$$
$$\delta W = \delta U$$

即

以上实质上证明了,当给予系统微小虚位移时,外力的总虚功与物体的总应变能 相等是物体处于平衡状态的必要条件。此外,还可以证明 $\partial W = \partial U$ 是物体处于平衡 状态的充分条件,即由 $\partial W = \partial U$,导出平衡方程

$$\sigma_{ii,i} + F_{\mathrm{b}i} = 0$$

和应力边界条件

 $p_i = \sigma_{ij} n_j$

读者可以自行校验。

由以上讨论可知,虚位移原理变分方程(11-13)等价于平衡方程与应力边界条件。因此,满足变分方程(11-13)的解就一定满足平衡方程和应力边界条件。由此, 虚位移原理也可表述为:变形连续体平衡的必要与充分条件是,对于任意微小虚位移,外力所做总虚功等于变形体所产生的总虚变形能。

应当指出,式(11-13)等号左边表示由于产生虚位移 δu_i 而引起的物体内的总 虚应变能。这种虚位移实际上应理解为真实位移的变分,而不是其他随便一种位移 函数。这就是说,式(11-13)中的 $\delta \epsilon_x$, $\delta \epsilon_y$,…, $\delta \gamma_{xx}$ 不是别的什么虚应变,而是由于 $\delta u_i, \delta v_i, \delta w$ 引起的,即它们之间满足下列条件

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \tag{11-17}$$

此外 u_i 应满足在 S_u 上的位移边界条件 $u_i = \overline{u_i}$, 即

$$\delta u_i = 0$$

(11 - 18)

式(11-17)和(11-18)即为方程(11-13)的两个附加条件。

在应用虚位移方程(11-13)时,所选取的解,不必预先满足平衡方程和应力边界 条件,只要求所给的虚位移 ∂u , ∂v , ∂w 能满足附加条件(11-17)和(11-18),即要求满 足变形协调条件和几何边界条件。

 δu_i 可理解为变量函数 $u_i(x_i)$ 的变分,即 $u_i(x_i)$ 与其邻域的任意容许函数之微小差别。可见, δu_i 是指 u_i 值的微小变化,而 du_i 则是指其自变量的微小变化所引起 u_i 的微小变化,二者不要混淆。欧拉最早引入了变分的概念和方法,从而使得一些变分原理得以产生。之后,拉格朗日完成了《分析力学》两卷集巨著(1788),使得整个力学可以建立在变分原理的基础上。

欧拉(L. Euler) 1707 年生于瑞士,1783 年逝世。 1722 年 15 岁时毕业于巴赛尔大学(University of Basel), 师从伯努利(John Bernoulli)。次年获硕士学位。1726 年 应邀赴俄罗斯讲学,1733 年当选为彼得堡科学院院士, 1727—1741 年曾在彼得堡俄罗斯科学院做研究工作多 年。1741 年应德国国王之邀,返回德国。1766 年应凯瑟 琳二世(Catherine II)之邀,回彼得堡工作至终。他首先 提出了变分法的概念,使得变分原理的发展成为可能,并 在力学、数学和流体动力学等多方面都有重要贡献,他首 先定义了数学符号 e,i,! 等。以欧拉命名的数学力学公 式有数种。其晚年由于劳累和俄罗斯的寒冷而失明后仍 在工作。



Leonard Euler



Joseph Louis Lagrange

拉格朗日(J. L. Lagrange) 1736 年生于意大利, 1813 年逝世。他自学掌握了当时的数学分析,16 岁时就 任皇家炮兵学校的数学教授。他把变分学引入力学,著 有《分析力学》,形成了经典力学新体系,称为"拉格朗日 力学",后任巴黎科学院院士。当时,其学术声望已达到 了顶峰。

应当特别指出,虚位移原理的成立与材料的本构关系无关。就是说,虚位移原 理对于弹性体、弹塑性体和理想塑性体等类固体材料都是适用的。

下面给出应用虚位移原理的例题。

例 11-1 设有图 11-2 所示的简支梁,跨中附有弹性支承,受均布载荷 q 作用, 试写出梁的挠曲线的微分方程和边界条件。



冬 11-2

$$\delta U = 2 \int_{0}^{t} \left(\int_{A} \sigma_{x} \delta \varepsilon_{x} dA \right) dx \qquad ($$

$$\varepsilon_{x} = -z w'', \quad \sigma_{x} = -Ez w''$$

$$\delta \varepsilon_{x} = -z \delta(w'') = -z (\delta w)''$$

代入式(b)并整理后得

$$\delta U = 2EJ \int_0^l w''(\delta w'') \,\mathrm{d}x$$

两次分部积分后,可化为

$$\delta U = 2EJ \left[w''(\delta w)' \left| {}_{0}^{l} - w^{(3)}(\delta w) \right| {}_{0}^{l} + \int_{0}^{l} w^{(4)} \delta w \mathrm{d}x \right]$$
(c)

如令弹簧内的反力为P,则

$$\delta W = 2 \int_{0}^{l} q \delta w \mathrm{d}x - P \delta w_{c} \tag{d}$$

此处 w_c 为梁在弹簧支承 c 处的挠度。由此,(a)化为

 $2\int_{0}^{l} (EJw^{(4)} - q) \, \delta w \, dx + 2EJw''(\delta w)' \, |_{0}^{l} - 2EJw^{(3)}(\delta w) \, |_{0}^{l} + P \, \delta w_{c} = 0 \quad (e)$

边界条件为

 $(\delta w)'_l = 0, \quad (\delta w)_0 = 0, \quad (\delta w)_l = \delta w_l$

考虑到 δw 除弹簧支承处外,均为任意,故欲使式(e)成立,必有

$$(EJw'')_{x=0} = 0, \quad 2(EJw^{(3)})_{x=l} - P = 0$$
 (f)

挠度函数必须满足

$$EJw^{(4)} - q = 0 \tag{g}$$

及

$$(w)_{x=0} = 0, \quad (w)'_{x=l} = 0$$
 (h)

11.3 最小总势能原理

由虚位移原理可直接导出最小总势能原理。实际上,我们由应变能函数 U。

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \tag{a}$$

及

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{b}$$

在 U₀ 中引入广义胡克定律后,因为有

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)$$

故有

$$U_{0} = G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} e^{2} = U_{0} (\varepsilon_{ij})$$
 (c)

其中 $e = \varepsilon_{ii}$ 。

在上式中代入应变位移关系,当存在应变能函数 $U_0(u_i)$ 时,虚功方程可写为

$$\int_{V} \delta U_{0}(u_{i}) \,\mathrm{d}V - \int_{V} F_{\mathrm{b}i} \delta u_{i} \,\mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma}} p_{i} \delta u_{i} \,\mathrm{d}S = 0 \qquad (11-19)$$

假定当物体从平衡位置有微小虚位移时,物体的几何尺寸的变化略去不计。原 来作用在物体上的体力 F_{bi} ,面力 p_i ,其大小和方向都保持不变。于是,式(11-19) 中的变分符号可以移至积分号以外,令 δE_i 记作这个变分量,有

$$\delta E_{t} = \delta \left[\int_{V} U_{0}(u_{i}) \, \mathrm{d}V - \int_{V} F_{bi} u_{i} \, \mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma}} p_{i} u_{i} \, \mathrm{d}S \right] = 0$$

于是有

$$\delta E_{t} = \delta(U - W) = 0 \tag{11-20}$$

其中

$$E_{t} = \int_{V} \left[U_{0}(u_{i}) - F_{bi}u_{i} \right] \mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma}} p_{i}u_{i} \mathrm{d}S \qquad (11-20')$$

其附加条件

 $u_i - \overline{u}_i = 0$, (在 $S_u \perp$)

其中 \overline{u}_i 为已知量。

式(11-20)中, *E*_t 称为总势能, *U* 称为弹性体的应变势能, *W* 为外力所做的功, 即外力势能。当物体在不受外力作用的自然状态下,应变势能与外力的势能均为零。 式(11-20)说明,在给定的外力作用下,实际的位移应使总势能的一阶变分为零,即 使总势能取驻值。以下进一步证明实际的位移总是使物体的总势能取最小值。

对于稳定的平衡状态来说,物体偏离平衡状态而有虚位移时,其总势能的增量恒为正。实际上,可以证明,总势能 *E*,的二阶变分为正。为此,令 *u*^{*} 为机动许可的 位移场,*u*ⁱ 为真实解的位移场,与之相应的应变张量为 ε^{*}_i 和 ε^{*}_i

 $u_i^* = u_i + \delta u$ $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}$

如将 $U_0(\epsilon_{ij})$ 按泰勒级数展开,略去二阶以上的高阶微量,可得

$$U_{0}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{*}) = U_{0}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) + \frac{\partial U_{0}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} U_{0}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{2}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij})^{2}$$
(d)

于是,机动许可状态的总势能与真实状态总势能之差为

$$E_{t}(\varepsilon_{ij}^{*}) - E_{t}(\varepsilon_{ij}) = \int_{V} [U_{0}(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) - U_{0}(\varepsilon_{ij})] dV$$
$$- \int_{V} F_{bi} \delta u_{i} dV - \int_{S_{\sigma}} p_{i} \delta u_{i} dS$$
(e)

而

$$E_{t}(\varepsilon_{ij}^{*}) - E_{t}(\varepsilon_{ij}) = \delta E_{t} + \frac{1}{2} \delta^{2} E_{t} + \cdots$$

其中

$$\delta E_{t} = \int_{V} \delta U_{0} \, \mathrm{d}V - \int_{V} F_{\mathrm{b}i} \, \delta u_{i} \, \mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma}} p_{i} \, \delta u_{i} \, \mathrm{d}S = 0$$

故

$$\delta^{2} E_{t} = \int_{V} \delta^{2} U_{0} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_{V} \frac{\partial^{2} U_{0}}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \, \delta \epsilon_{kl} \, \mathrm{d}V \tag{f}$$

式(f)在 $\delta_{\varepsilon_{ij}}$ 足够小时必为正,因为,如令 $\varepsilon_{ij} = 0$,从而 $\sigma_{ij} = 0$,则式(d)可化为

$$U_{0}(\delta \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} U_{0}}{\partial \varepsilon_{ij}^{2}} (\delta \varepsilon_{ij})^{2}$$

从而得

$$E_{t}(\varepsilon_{ij}^{*}) - E_{t}(\varepsilon_{ij}) = \delta^{2} E_{t} = \int_{V} U_{0}(\delta \varepsilon_{ij}) dV$$

由式(c)知 $U_0(\varepsilon_{ij})$ 为正定的,故

$$\delta^2 E_t \ge 0, \quad E_t(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^*) \ge E_t(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij})$$

$$(11-21)$$

于是,得出下列最小总势能原理:在所有满足给定几何边界条件的位移场中, 真实的位移场使物体的总势能取最小值。

物体在外力作用下所产生的位移场,除了满足位移边界条件以外,还必须满足 以位移表示的平衡方程以及应力边界条件。最小总势能原理说明,真实的位移除满 足几何边界条件外,还要满足最小势能原理的变分方程。实际上以上已经证明,变分 方程(11-13)完全等价于平衡方程与应力边界条件。同样的结论也适用于式 (11-20)。用最小势能原理和用泛定方程求解边值问题,只是形式上不同。以后将看 到,这种解题手段的变更,在不少情况下,将给予我们很大的方便,同时也扩大了解题 的范围。以后还要讨论用变分方法求弹性力学问题的近似解。

由最小总势能原理可导出熟知的卡氏(Castigliano A.)第一定理:当应变能 E_t 可用广义位移表示[$E_t = E_t(\Delta_i)$]时,则广义力 Q_i 由 $\partial E_t(\Delta_i)/\partial \Delta_i$ 给出,此即卡氏第一定理(推导留作习题)。

例 11-2 设有受分布载荷集度为 q(x)作用的简支梁(图 11-3),试用最小总势 能原理导出梁的挠曲线方程。

解 为简便计,略去剪应力。

$$\delta E_{t} = \delta(U - W) = 0$$

于是有

$$E_{t} = \int_{V} U_{0} \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2E} \iiint \sigma_{x}^{2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$



11-3

冬

其中

$$\sigma_x = rac{My}{I}, \quad M = - EI \; rac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d} x^2}, \quad I = \iint y^2 \mathrm{d} z \mathrm{d} y$$

由此

$$U = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} EI\left(\frac{\mathrm{d}^{2} w}{\mathrm{d} x^{2}}\right)^{2} \mathrm{d} x \tag{a}$$

$$W = \int_{0}^{t} q \omega \, \mathrm{d}x \tag{b}$$

根据 $\delta E_t = 0$ 变分量为 δw ,注意到

$$\delta w' = \delta \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \right) = \frac{\mathrm{d}(\delta w)}{\mathrm{d}x} = (\delta w)'$$
$$\delta E I(w'')^2 = 2 E I w'' (\delta w)'' = 2 E I w'' \delta(w'')$$

故

$$\delta E_{t} = \int_{0}^{l} EI w''(\delta w)'' dx - \int_{0}^{l} q \delta w dx$$
 (c)

上式等号左边第一项积分利用两次分部积分,可得

$$\int_{0}^{l} EIw''(\delta w)'' dx = EIw''(\delta w)' |_{0}^{l} - (EIw'')' \delta w dx |_{0}^{l} + \int_{0}^{l} (EIw'')'' \delta w dx \quad (d)$$

对于简支端

$$EIw''(\delta w)' \mid_0^l = (EIw'') \delta w \mid_0^l = 0$$

故将式(d)代入式(c),得

$$\int_{0}^{l} \left[(EIw'')'' - q \right] \delta w \mathrm{d}x = 0$$

由 & w 的任意性,得

$$(EIw'')'' - q = 0 \tag{e}$$

此即梁的挠曲线方程。

11.4 虚应力原理

在第 11.2 节中,讨论了在外力作用下处于平衡状态的变形体,当有微小虚位移时,得出了外力的总虚功与物体内的总虚应变能相等的性质,并在考虑了物体弹性本构关系后,直接导出了最小总势能原理。本节讨论处于同样状态的物体,当应力分量 有微小变化时的情况。为此,引进虚应力概念。所谓虚应力是满足力的平衡条件及 指定的力的边界条件的、任意的、微小的应力。虚应力记作 $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{zx}$ 。虚应力的特征是,它使改变后的应力分量

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij} \tag{a}$$

仍满足平衡方程和应力边界条件,但不满足变形协调方程。于是有

$$\sigma'_{ii,i} + F_{bi} = 0 \tag{b}$$

其中体力 F_{bi}是给定的。于是,上式与产生虚力以前的平衡方程相减后,可得

$$(\delta \sigma_{ii})_{,i} = 0 \tag{11-22}$$

物体 V 的表面分为两部分,即给定面力的部分表面 S_a 和给定位移的部分表面 S_a 。在 S_a 上,由于应力分量的变化,面力分量 p_x, p_y, p_z 也随之变化。于是,在 S_a 上有

$$(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) n_{ij} = p_i + \delta p_i \tag{11-23}$$

与原边界条件相减后,得

$$\delta p_i = (\delta \sigma_{ij}) n_j \tag{11-24}$$

而在 S。上有

$$\delta \sigma_{ij} n_j = 0 \tag{11-25}$$

现在物体处在给定条件下的平衡状态,位移分量和应变分量分别为u,v,w和 $\epsilon_x,\epsilon_y,\cdots,\epsilon_{xy}$,且有

$$\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \dots, \quad \gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\mathbf{\underline{\epsilon}} V \mathbf{\underline{\beta}})$$
(11-26)

$$u - \overline{u} = 0, \quad \dots, \quad w - \overline{w} = 0 \quad (\mathbf{\pounds} S_u \mathbf{\perp}) \tag{11-27}$$

此处 $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ 为给定量(下同)。

如物体内的应力分量有一微小虚应力,则有

$$\iint_{V} \left[\left(\varepsilon_{x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta\sigma_{x} + \left(\varepsilon_{y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta\sigma_{y} + \dots + \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta\tau_{xy} \right] dV \\
+ \iint_{S_{u}} \left[(u - \bar{u}) \delta p_{x} + (v - \bar{v}) \delta p_{y} + (w - \bar{w}) \delta p_{z} \right] dS = 0$$
(11-28)

由分部积分和散度定理,上式可化为

$$\iiint_{V} \left[\varepsilon_{x} \delta \sigma_{x} + \varepsilon_{y} \delta \sigma_{y} + \dots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \delta \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{zx}}{\partial z} \right) u + (\dots) v + (\dots) w \right] dV \\
+ \iint_{S_{\sigma}} (u \delta p_{x} + v \delta p_{y} + w \delta p_{z}) dS - \iint_{S_{u}} (\bar{u} \delta p_{x} + \bar{v} \delta p_{y} + \bar{w} \delta p_{z}) dS = 0 \qquad (11-29)$$

代入式(11-22)和式(11-25)后,简化为

$$\int_{V} \varepsilon_{ij} \, \delta \sigma_{ij} \, \mathrm{d}V - \int_{S_{u}} \bar{u}_{i} \, \delta p_{i} \, \mathrm{d}S = 0 \qquad (11-30)$$

如令 ôW[′]为虚外力在实际位移上所做的总虚功

$$\delta W' = \int_{S_u} \bar{u}_i \, \delta p_i \, \mathrm{d}S$$

∂U′为物体内的虚外力在实际应变上的总虚应变余能

$$\delta U' = \int_V \varepsilon_{ij} \, \delta \sigma_{ij} \, \mathrm{d} V$$

则有

$$\delta W' = \delta U'$$

式(11-30)表示虚应力原理,又称虚余功原理,可表述为:当物体处于平衡状态时,微小虚外力在真实位移上所做的总虚功,等于虚应力在真实应变上所完成的总虚 应变余能。显然式(11-30)成立的附加条件为

$$(\delta \sigma_{ij})_{,j} = 0$$
 (在V内)
 $\delta p_i = 0$ (在S_s上)

由以上讨论可以看出,虚应力原理和虚位移原理在形式上是互补的。和虚位移 原理一样,虚应力原理的成立也与材料的本构关系无关。

应当指出,在虚位移原理中包含了实际的外力和内力,因而可理解为虚位移原理 是对系统平衡的要求,而虚应力原理则包含有实际的位移和应变,所以可把虚应力原 理看作是对物体变形协调的要求。实际上由虚应力原理的变分方程(11-30)不难导 出变形协调方程,这就是说式(11-30)等价于应变协调条件。于是,按式(11-30)解 题时,对于所设解答,不必预先满足变形协调条件,而只须使虚应力 δσ₉满足物体的 平衡和应力边界条件。

11.5 最小总余能原理

由虚应力原理可直接导出最小总余能原理。为了避免混乱,今后把用应变表示的 弹性应变能函数*U*(ε_{ij})称为应变能函数,或应变能;而把用应力表示的应变余能函数称 为余应变能函数,或应变余能(或应力能),记做*U*['](σ_{ij})。如在虚应力原理中引进广义 胡克定律,并认为应变状态是有势的,记应变分量可由余应变能函数导出,即

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial U'_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

而

$$\delta U_0' = \epsilon_{ij} \, \delta \sigma_{ij}$$

总应变余能的变分为

$$\delta U' = \iint\limits_V \delta U'_0(\sigma_{ij}) \,\mathrm{d} V = \iint\limits_V arepsilon_{ij} \,\delta \sigma_{ij} \,\mathrm{d} V$$

于是式(11-30)化为

$$\iint_{V} \delta U_{0}'(\sigma_{ij}) \,\mathrm{d}V - \iint_{S_{u}} \bar{u}_{i} \,\delta p_{i} \,\mathrm{d}S = 0$$

当有虚应力时,在边界 S_u 上,位移分量保持不变。于是,可把上式中的变分符号放在积分号外,即有

$$\left[\iint_{V} U'_{0}(\sigma_{ij}) \,\mathrm{d}V - \int_{S_{u}} \bar{u}_{i} p_{i} \,\mathrm{d}S \right] = 0 \qquad (11-31)$$

显然,在此情况下,附加条件为

$$\sigma_{ij,j} + \overline{F}_{bi} = 0 \qquad (\mathbf{\underline{\epsilon}} V \mathbf{\underline{\beta}})$$

$$\sigma_{ij} n_j - \overline{p}_i = 0 \qquad (\mathbf{\underline{\epsilon}} S_\sigma \mathbf{\underline{L}})$$

$$(11-32)$$

如令为物体的总余能

$$E'_{t} = \int_{V} U'_{0}(\sigma_{ij}) \,\mathrm{d}V - \int_{S_{u}} \overline{u}_{i} p_{i} \,\mathrm{d}S \qquad (11-33)$$

则有

$$\delta E'_{t} = 0$$

上式说明,在所有满足平衡方程和应力边界条件的静力许可的应力场中,真实的 应力场使总余能取极值。进一步分析可以证明

$$\delta^2 E'_t \ge 0$$

故得最小总余能原理:在所有满足平衡方程和应力边界条件的应力场中,真实的应力 场使物体的总余能取最小值。
最小总余能原理以及最小势能原理都适用于线性、非线性弹性体。

我们知道,物体的真实的应力场既满足平衡方程、应力边界条件,又满足变形协 调条件。由最小总余能原理知道,真实的应力场,满足平衡方程和应力边界条件,还 满足使总余能取最小值的条件。可见,最小总余能原理与变形协调条件等价,实际 上,通过直接变换,可由变分方程(11-31)导出变形协调方程。

下面指出最小总余能原理的一种特殊情况。若在全部表面上给定面力,则面力 的变分等于零,由式(11-22),得

$$\delta E'_{t} = \delta U' = 0 \tag{11-34}$$

变分方程(11-34)称为最小功定理:若物体的面力给定,则在所有满足平衡方程 边界条件的应力场中,真实的应力场使余应变能取最小值。对于线弹性体,余应变能 与应变能相等,故式(11-34)又称为最小应变能定理。此时有

$$\delta U = 0$$
 (11-35)

如将最小余应变能原理用于线弹性力学问题,则不难导出熟知的卡氏第二定理, 即当应变余能 U'可用广义力 Q_i 表示时,则广义位移由 $\partial U'(Q_i)/\partial Q_i$ 给出(推证留作 习题)。

11.6 一般变分原理

在虚位移与最小总势能原理中,位移分量是参与变分的独立变量;而虚应力原理 与最小总余能原理,则应以应力分量作为参与变分的独立变量。这两种类型的变分 原理,对于求解不同类型的问题时所显示出来的优点,各不相同。但我们有时候希望 在一个变分过程中,位移分量和应力分量等能够同时独立变分,一次就从一个变分方 程中导出弹性力学问题的全部基本方程,包括平衡方程,应变协调方程和应力边界条 件与几何边界条件。本节将讨论这样的一般变分原理。

为达到上述目的,我们可以从最小势能原理出发,引用拉格朗日待定乘子法,即 把它的附加条件纳入变分方程中去,从数学角度说,就是把条件极值问题用拉格朗日 乘子法加以变化,从而得到一般变分原理的泛函。我们知道,最小势能原理是以 u_i 为变分量,附加条件为:在 S_u 上, $u_i = \bar{u}_i$,在V内,有 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$,共9个关系 式。这是条件极值问题,于是,我们在 Π_P 内引进9个拉格朗日乘子 λ_i ($i = 1, 2, \cdots$, 9),于是得到一般变分原理的泛函 Π_H 为

$$\Pi_{H} = \prod_{v} [U_{0}(\boldsymbol{\varepsilon}_{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_{y}, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{zx}) - (\bar{F}_{x}u + \bar{F}_{y}v + \bar{F}_{z}w)] dV$$

$$- \iint_{V} \left[\left(\varepsilon_{x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \lambda_{1} + \left(\varepsilon_{y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \lambda_{2} + (\cdots) \lambda_{3} + (\cdots) \lambda_{4} + (\cdots) \lambda_{5} + (\cdots) \lambda_{6} \right] dV$$

$$- \iint_{S_{T}} (\overline{T}_{x} u + \overline{T}_{y} v + \overline{T}_{z} w) dS - \iint_{S_{u}} \left[(u - \overline{u}) \lambda_{7} + (v - \overline{v}) \lambda_{8} + (w - \overline{w}) \lambda_{9} \right] dS$$

(11-36)

式(11-36)中每一项都应有功的量纲,故 $\lambda_1,\lambda_2,\dots$,相应地应为 $\sigma_x,\sigma_y,\dots,\tau_{zx}$ 及 P_x , P_y,P_z 这样 9 个待定乘子而参与变分的独立变量为 $\sigma_{ij},\epsilon_{ij},P_i,u_i$ 共计 18 个: $\sigma_x,\sigma_y,\dots,\tau_{zx},\epsilon_x,\epsilon_y,\dots,\gamma_{zx},P_x,P_y,P_z$ 和u,v,w。此外,没有别的约束条件。关于这 18 个 独立的量取变分,求 Π_{ii} 的极值:

$$\delta \Pi_{H} = \iint_{V} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{x}} - \boldsymbol{\sigma}_{x}\right) \delta \boldsymbol{\epsilon}_{x} + \dots + \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{zx}} - \boldsymbol{\tau}_{zx}\right) \delta \boldsymbol{\gamma}_{zx} - \left(\boldsymbol{\epsilon}_{x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta \boldsymbol{\sigma}_{x} - \dots \\ - \left(\boldsymbol{\gamma}_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \delta \boldsymbol{\tau}_{zx} - \left(\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{F}_{x}\right) \delta \boldsymbol{u} - (\dots) \delta \boldsymbol{v} - (\dots) \delta \boldsymbol{w} \end{bmatrix} dV \\ + \iint_{S_{T}} \left[(T_{x} - P_{x}) \delta \boldsymbol{u} + \dots + (T_{z} - \bar{T}_{z}) \delta \boldsymbol{w} \right] dS + \iint_{S_{u}} \left[(T_{x} - P_{x}) \delta \boldsymbol{u} + \dots \right] dS \\ - \iint_{S_{u}} \left[(u - \bar{u}) \delta P_{x} + \dots + (w - \bar{w}) \delta P_{z} \right] dS = 0 \tag{11-37}$$

或

$$\delta \Pi_{H} = \iint_{V} \left\{ \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} - \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} - (\sigma_{ij,j} + \overline{F}_{i}) \delta u_{i} \right\} dV$$

+
$$\iint_{S_{T}} (\sigma_{ij}n_{j} - \overline{T}_{i}) \delta u_{i} dS + \iint_{S_{u}} (\sigma_{ij}n_{j} - P_{i}) \delta u_{i} dS - \iint_{S_{u}} (u_{i} - \overline{u}_{i}) \delta P_{i} dS = 0$$

(11-37')

由此可得

1)
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}},$$
在 V 内
2) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$ 在 V 内
3) $\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i = 0,$ 在 V 内
 $\sigma_{ij}n_j = \overline{T}_i,$ 在 $S_T \perp$
 $P_i = \overline{T}_i,$ 在 $S_u \perp$
4) $u_i = \overline{u}_i,$ 在 $S_u \perp$

显然,以上是弹性力学问题的全部基本方程及边界条件。9 个拉格朗日乘子的物理意义均可由式(11-38)确定,例如 P_i 显然表示 S_u 上的面力, σ_{ij} 是物体内的应力。

其泛函 Пн为

$$\Pi_{H} = \int_{V} \left\{ U_{0}\left(\varepsilon_{ij}\right) - \overline{F}_{i}u_{i} + \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \varepsilon_{ij}\right] \right\} dV$$
$$- \int_{S_{T}} \overline{T}_{i}u_{i} dS - \int_{S_{u}} P_{i}\left(u_{i} - \overline{u}_{i}\right) dS \qquad (11-36')$$

上述一般变分原理由胡海昌于 1954 年提出^①。日本学者鹫津久一郎于 1955 年^②独立地给出相同的结果。文献称为胡海昌-鹫津变分原理。

如在泛函(11-36)中,用广义胡克定律把应变分量 ϵ_{ij} 消去,注意到 $\epsilon_{ij} = c'_{ijkl}\sigma_{kl},\sigma_{ij}$ = $c_{ijkl}\epsilon_{kl}$,则得赖斯纳(Reissner E.)变分原理的泛函 Π_R

$$\Pi_{R} = \iint_{V} \begin{bmatrix} \sigma_{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{y} \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ - E(\sigma_{x}, \sigma_{y}, \dots, \tau_{zx}) - (\overline{F}_{x}u + \overline{F}_{y}v + \overline{F}_{z}w) \end{bmatrix} dV$$
$$- \iint_{S_{T}} (\overline{T}_{x}u + \overline{T}_{y}v + \overline{T}_{z}w) dS - \iint_{S_{u}} [(u - \overline{u})P_{x} + \dots + (w - \overline{w})P_{z}] dS$$
(11-39)

其中 $E(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}) = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy} - U(\varepsilon_{ij})$ 采用张量符合,式(11-39)可写为

$$\Pi_{R} = \int_{V} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \sigma_{ij} - E(\sigma_{ij}) - \overline{F}_{i} u_{i} \right] dV$$
$$- \int_{S_{T}} \overline{T}_{i} u_{i} dS - \int_{S_{u}} P_{i} (u_{i} - \overline{u}_{i}) dS \qquad (11-39')$$

其中 σ_{ij} , u_i , P_i 共 12 个独立变分量。

同样地,由泛函 Π_R的极值条件可导出弹性力学问题的全部基本方程和边界条件。实际上,注意到

$$\delta E = \sigma_x \, \delta \varepsilon_x + \sigma_y \, \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \, \delta \gamma_{zx} + \varepsilon_x \, \delta \sigma_x + \varepsilon_y \, \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \, \delta \tau_{zx} - \delta U_0 \left(\varepsilon_{ij} \right) \\ = \varepsilon_x \, \delta \sigma_x + \varepsilon_y \, \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \, \delta \tau_{zx}$$

或 $\delta E = \epsilon_{ij} \, \delta \sigma_{ij}$ 。

则关于 П_R的一阶变分为

$$\delta \Pi_{R} = \iint_{V} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial U_{0}'}{\partial \sigma_{x}}\right) \delta \sigma_{x} + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial U_{0}'}{\partial \tau_{zx}}\right) \delta \tau_{zx} \\ - \left(\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_{x}\right) \delta u - (\dots) \delta v - (\dots) \delta w \end{bmatrix} dV \\ + \iint_{S_{T}} [(l_{1}\sigma_{x} + l_{2}\tau_{xy} + l_{3}\tau_{zx} - \overline{T}_{x}) \delta u + (\dots) \delta v + (\dots) \delta w] dS \quad (11-40)$$

① **见物理学报**,10 卷,3 期,1954。

② 见 MIT, Technical Report 25-18, March, 1955。

$$-\iint_{S_{u}} [(u-\bar{u})\delta P_{x} + (\cdots)\delta P_{y} + (\cdots)\delta P_{z}]dS$$

$$-\iint_{S_{u}} [(P_{x} - T_{x})\delta u + (P_{y} - T_{y})\delta v + (P_{z} - T_{z})\delta w]dS = 0$$

由此得

(1)
$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U'_0}{\partial \sigma_{ij}}$$
,在V内, $\left[\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]$;

- (2) $\sigma_{ij,j}$ + \overline{F}_i =0,在V内;
- (3) $\sigma_{ij}n_j = \overline{T}_i$,在 S_T上;
- (4) $u_i = \overline{u}_i$,在 S_u 上。

即弹性力学问题的全部基本方程。

由此可见,从最小总势能原理出发,应用拉格朗日乘子法,可以导出一般变分原 理。为适当地限制独立变分量还可由此导出最小总余能原理。在弹性小变形条件 下,这两种类型的变分原理是一致的。

例 11-3 如有一个受分布载荷 q(x)及弯矩 M_0 作用的梁,左端固定,右端简支(如图 11-4)。 试给出泛函 Π_P, Π_H ,并验证 $\delta \Pi_H = 0$ 等价于此问 题的全部方程和边界条件。

解 最小势能原理的泛函 Π_P为

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(\kappa)^2 \mathrm{d}x - \int_0^l qW \mathrm{d}x + M_0 \frac{\mathrm{d}w(l)}{\mathrm{d}x}$$
(a)

其中 $\kappa = w'' \equiv \left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d} x^2}\right)$ 为梁挠曲线的曲率:

$$\kappa = \frac{M}{EJ}$$

几何边界条件为

$$w(0) = \frac{\mathrm{d}w(0)}{\mathrm{d}x} = w(l) = 0$$

为了求出泛函 Π_H ,我们在式(a)中引用拉格朗日乘子:M,P,Q,R,并将 $\kappa = w''$ 作为附加条件看待。于是,上述问题化为条件极值问题。如前所述,我们有泛函 Π_H 为

$$\Pi_{H} = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} EJ(\kappa)^{2} dx - \int_{0}^{l} qw dx + M_{0} \frac{dw(l)}{dx} + \int_{0}^{l} (\kappa - w'') M dx + Pw(0) + Qw'(0) + Rw(l)$$
 (b)

其中变分量为 κ, w, M, P, Q 和R, m无其他附加条件。式(b)的一阶变分为



图 11-4

$$\delta \Pi_{H} = \int_{0}^{1} \left[M + E J(\kappa) \, \delta \kappa - M \delta(w'') - q \, \delta w \right] \mathrm{d}x$$

 $M_0 \delta w'(l) + P \delta w(0) + w(0) \delta P + Q \delta w'(0) + w'(0) \delta Q + R \delta w(l) + w(l) \delta R$ 注意到

$$\int_{0}^{t} M\delta(w)'' dx = EJ \int_{0}^{t} w''(\delta w)'' dx$$
$$= EJ w''(\delta w)' \Big|_{0}^{t} - EJ \int_{0}^{t} w'''(\delta w)' dx$$
$$= EJ w''(\delta w)' \Big|_{0}^{t} - EJ w''' \delta w \Big|_{0}^{t} + \int_{0}^{t} w'''' \delta w dx$$
$$= M(\delta w)' \Big|_{0}^{t} - M' \delta w \Big|_{0}^{t} + \int_{0}^{t} w'' \delta w dx$$

则有

$$\delta \Pi_{H} = \int_{0}^{l} \left[(M + EJ_{\kappa}) \delta \kappa - (M'' + q) \delta w + (\kappa - w'') \delta M \right] \mathrm{d}x \\ + \left[q - M'(0) \right] \delta w(0) + \left[Q + M(0) \right] \delta \kappa'(0) + \left[R + M'(l) \right] \delta w(l) \quad (c) \\ - \left[M(l) - M_{0} \right] \delta w'(l) + w(0) \delta P + w'(0) \delta Q + w(l) \delta R$$

由 $\delta \Pi_H = 0$,及 $\delta \kappa$, δW , δM , δP , δQ 和 δR 等的任意性, 可得所给问题的全部方程和边 界条件:

> 1) $EJ_{\kappa} + M = 0$ 2) M'' + q = 03) q - M'(0) = 04) Q + M(0) = 05) R + M'(l) = 06) $M(l) - M_0 = 0$ 7) w(0) = 08) w'(0) = 09) w(l) = 010) $\kappa - w'' = 0$

由此,拉格朗日乘子的物理意义也就明确了。

11.7 利用变分原理的近似解法

能量原理可分为三种类型: 虚位移原理和最小总势能原理属于位移变分原理; 虚应力原理和最小总余能原理属于应力变分原理;此外还有一般变分原理。本节讨 论利用变分原理的近似解法。

1. 里茨法

当给定面力和几何约束条件时,可以利用位移变分原理来求解。此时,应力边界 条件与位移边界条件为已知,但根据虚位移原理或最小势能原理,其变分方程 (11-13)和(11-20)均等价于平衡方程和应力边界条件,故如采用式(11-13)或式 (11-20)求解,则选取的位移函数无须预先满足应力边界条件,而只须满足位移边界 条件。如选取位移函数为

$$u(x_{i}) = u_{0} + \sum_{k=1}^{n} a_{k}u_{k}(x_{i})$$

$$v(x_{i}) = v_{0} + \sum_{k=1}^{n} b_{k}v_{k}(x_{i})$$

$$w(x_{i}) = w_{0} + \sum_{k=1}^{n} c_{k}w_{k}(x_{i})$$
(11-41)

式中 $,a_k,b_k,c_k$ 为未知待定的任意常数 $,u_0,v_0,w_0$ 满足位移边界条件,即

$$u_0 = \overline{u}, \quad v_0 = \overline{v}, \quad w_0 = \overline{w} \quad (\mathbf{\acute{e}} S_u \mathbf{\mathrel{\perp}})$$

而 u_k, v_k, w_k ($k=1, 2, \dots, n$)为坐标的线性独立的设定函数,且满足 $u_k = v_k = w_k = 0, (k=1, 2, \dots, n)$ (在 S_u 上)

这样不论系数 n 如何取值,位移函数总能满足位移边界条件。

对于位移取一阶变分时,只需对系数 a_k, b_k, c_k 取一阶变分,即

$$\delta u = \sum_{k=1}^n \delta a_k u_k$$
, $\delta v = \sum_{k=1}^n \delta b_k v_k$, $\delta w = \sum_{k=1}^n \delta c_k w_k$

将式(11-41)代入虚位移原理的变分方程式(11-13)或代入最小势能原理的变分方 程式(11-20),由 δa_k , δb_k , δc_k 的任意性,都可得到用以确定全部系数的线性代数方 程组。

例如,将式(11-41)代入式(11-20),可得

$$-\sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a_{k}} \delta a_{k} + \frac{\partial U}{\partial b_{k}} \delta b_{k} + \frac{\partial U}{\partial c_{k}} \delta c_{k} \right) + \iint_{V} \delta a_{k} u_{k} F_{bx} dV + \iint_{V} \delta b_{k} v_{k} F_{by} dV \\ + \iint_{V} \delta c_{k} w_{k} F_{bz} dV + \iint_{S_{\sigma}} \delta a_{k} u_{k} p_{x} dS + \iint_{S_{\sigma}} \delta b_{k} v_{k} p_{y} dS + \iint_{S_{\sigma}} \delta c_{k} w_{k} p_{z} dS \right] = 0$$

计及 $\delta a_k, \delta b_k, \delta c_k$ 的任意性,整理后得

$$\frac{\partial U}{\partial a_{k}} = \iint_{V} u_{k} F_{bx} dV + \iint_{S_{\sigma}} u_{k} p_{x} dS$$

$$\frac{\partial U}{\partial b_{k}} = \iint_{V} v_{k} F_{by} dV + \iint_{S_{\sigma}} v_{k} p_{y} dS$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_{k}} = \iint_{V} w_{k} F_{bz} dV + \iint_{S_{\sigma}} w_{k} p_{y} dS$$
(11-42)

上式(11-42)中,U为应变能函数,系 a_k , b_k , c_k 的二次函数。因而式(11-42)为系数 a_k , b_k , c_k 的线性代数方程组。方程的个数为3n,与未知数的个数相等,故可由式 (11-42)确定全部系数 a_k , b_k , c_k ,从而由式(11-41)可求出位移分量。式(11-42)或写 成下列形式

$$\frac{\partial U}{\partial a_{k}} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial b_{k}} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_{k}} = 0$$

$$(k=1, 2, \dots, n) \quad (11-43)$$

这一方法即里茨(W. Ritz)法,系法国学者里茨于 1908 年所提出。

2. 伽辽金法

适当地选择函数 *u*₀,*v*₀,*w*₀ 和 *u_k*,*v_k*,*w_k* 以及项数 *n*,可以得到精确度较高的位移解。如将求得的位移解,代入用位移表示的应力表达式,即

$$\sigma_{x} = 2G \Biggl\{ \frac{\partial U_{0}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} a_{k} \frac{\partial u_{k}}{\partial x} + \frac{v}{1-2v} \Biggl[\frac{\partial u_{0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0}}{\partial y} + \frac{\partial w_{0}}{\partial z} + \sum_{k=1}^{n} \Biggl(a_{k} \frac{\partial u_{k}}{\partial x} + b_{k} \frac{\partial v_{k}}{\partial y} + c_{k} \frac{\partial w_{k}}{\partial z} \Biggr) \Biggr] \Biggr\}$$
(11-44)
$$\sigma_{y} = \cdots$$

由此即可求出对应的应力分量的近似解。

通常近似解的精度往往因取导数而降低,所以应力近似解的精度一般都较差。 这是因为,应力分量并不精确地满足平衡方程,而是只满足了平衡方程与一个加权函数 *u*;乘积的积分为零的条件

$$\delta U = \delta \left(\int_{V} (\sigma_{ij,j} + F_{bi}) u_i \mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma}} (\sigma_{ij} n_j - p_i) u_i \mathrm{d}S \right) = 0$$

为了提高精度,可增加式(11-41)中的总和号下的项数,当 *n*→∞则解应趋于精确解。 现在讨论另一种方法。

如选取位移函数时,使其不仅满足位移边界条件,而且也满足应力边界条件,则 变分方程(11-13)或(11-20)为

$$\delta W = \delta U$$

或

$$\int_{V} \frac{\partial U_{0}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}V = \int_{V} \overline{F}_{\mathrm{b}i} \delta u_{i} \, \mathrm{d}V + \int_{S} \overline{p}_{i} \, \delta u_{i} \, \mathrm{d}S = \int_{V} \sigma_{ij} \, \delta u_{i,j} \, \mathrm{d}V$$
$$= \int_{S} \sigma_{ij} n_{j} \, \delta u_{i} \, \mathrm{d}S - \int_{V} \sigma_{ij,j} \, \delta u_{i} \, \mathrm{d}V \qquad (11-45)$$

由此得

$$\int_{V} (\sigma_{ij,j} + \overline{F}_{bi}) \delta u_i dV = 0 \qquad (11-46)$$

即

即

$$\iint_{V} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} \right) \delta u + (\cdots) \delta v + (\cdots) \delta w \right] dV = 0 \quad (11-47)$$

注意到
$$\delta u_i = \sum_{k=1}^{n} \delta a_{ik} u_{ik}$$

~

$$\iint_{V} (\sigma_{ij,j} + \overline{F}_{bi}) \sum_{k=1}^{n} \delta a_{ik} u_{ik} \, \mathrm{d}V = 0$$

$$(i=1,2,3; a_{ik}=a_k, b_k, c_k; u_{ik}=u_k, v_k, w_k)$$
(11-48)

 $(\delta u_i = \delta u, \delta v, \delta w)$

此式展开为三个方程,则每个含有n个积分,其中 δa_k 为任意值,故如该式成立,则只 有每个积分都等于零。

将式(11-41)代入式(11-48),并注意到 δa_k 与 x, y, z 无关,可放在积分号外,故有

$$\int_{V} \left(\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} \right) u_{k} dV = 0$$

$$\int_{V} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} \right) v_{k} dV = 0$$

$$\int_{V} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} + F_{bz} \right) w_{k} dV = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n) \quad (11-49)$$

在上式中,各应力分量可用位移分量表示。由于位移分量是系数 a_k , b_k , c_k 的线性 函数,故式(11-49)为该系数的线性方程组。求解之后,代入式(11-44)便可求得 各位移分量。这一方法即伽辽金(B.G.Galerkin)法,系俄国学者伽辽金于 1930 年 所提出。



Bolice Grigaolibich Galerkin

伽辽金(B.G. Galerkin) 1871 年生于俄罗斯,1945 年逝世。1899 年毕业于彼得堡技术学院,1909 年进入该 学院任教,1920 年任应用力学教研室主任,1935 年当选 为苏联科学院院士。他在弹性力学中的板壳问题、弹性 稳定等方面有重要研究成果。他给出的近似计算方法称 为"伽辽金方法"。 如前所述,利用虚应力原理和最小总余能原理来求弹性力学问题的近似解时,要 以应力分量作为独立变量进行变分,所选的应力场,必须是静力许可的应力场,即满 足平衡方程和应力边界条件,而变形协调条件则无须预先满足。在求解具体问题时, 可能会碰到两种边值问题:一种是给定面力,一种是给定位移。当给定面力时,则将 $\delta p_x = \delta p_y = \delta p_z = 0$ 代入变分方程;如给定位移,则应力的变分应满足式(11-22),再 由式(11-24)求出 $\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z$ 之后代入应力变分方程进行计算。在此情况下,仍可 用里茨法或伽辽金法求近似解。

3. 有限元法

解弹性力学问题本质上是求解偏微分方程边值问题。由于问题的复杂性,人们 往往采取各种近似方法或渐近方法来求解。有限差分法就是用差分方程逼近所研究 问题的微分方程的近似方法,在那里用有限差分关系式代替导数,就可以用代数方程 来近似表示微分方程。这就方便地使用近代计算手段数值求解。本节将介绍有限元 法,它是应用更加广泛的一种数值计算法,这种方法可以十分方便地用电子计算机实 现,而且目前已有多种有效的功能齐全的计算软件可使用。

本节将从变分原理引出有限元法的基本概念。在前面讨论的变分方法中,实际 上是把求解微分方程边值问题化为求某一泛函近似最小的问题。例如,在最小总势 能原理中,变分方程(11-20)除了满足给定几何边界条件外,它完全等价于平衡方程 与应力边界条件。就是说,用最小势能原理和用泛函方程求解边值问题只是形式上 的不同。

物体的总势能为

$$E_{t} = \int_{V} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} - F_{bi} u_{i} \right) \mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma}} p_{i} u_{i} \mathrm{d}S$$
(11-50)

为了以后讨论方便,将应力矢量、应变矢量、位移矢量等均用矩阵符号表示,即

$$E_{t} = \int_{V} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \right) \mathrm{d} V - \int_{S_{\sigma}} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} \mathrm{d} S \qquad (11-51)$$

以下,把体积域分成有限个单元,并把上式写成

$$E_{t} = \sum_{i=1}^{m} E_{ti}$$
 (*i* = 1,2,...,*m*) (11-52)

其中 m 为所分割成的单元数,而

$$E_{ti} = \int_{V_i} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{F} \right) \mathrm{d} V - \int_{(S_{\sigma})_i} \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{p} \mathrm{d} S$$
(11-53)

此处 V_i ,(S_a);分别表示第 i个单元的区域和其上的应力边界那一部分。显然,若物体的位移场是连续的,则一个单元的 u,与所有相邻单元在它们公共边界上的值是相同的。所以式(11-53)就和式(11-51)形式相似,是第 i个单元的势能。就是说,物体

整体的总势能就可以用 m 个单元体的势能的总和来计算。这就是说,有限元法的理 论根据就是最小总势能原理。同样地,也可从最小总余能原理,乃至广义变分原理等 都可导出各种类型的有限元法。以下,将以最小总势能原理来说明有限元法的概念。 有兴趣的读者可参阅专门的有限元法著作。

现以平面问题为例给出有限元法的基本思路。设 有一给定形状和所占区域的平面应力问题,现将其划分 为若干个三角形单元,取出其中第 *i* 个单元,它的三个顶 点分别为 *l*, *m*, *n* (图 11-5)。三角形的顶点称为节点, 我们将设法将三角形内部的值用节点上的值表示。最 简便的方法是选用线性插值函数,目的是使得沿三角形 任一边上位移的变化都是线性的。于是由于节点上的 位移相等,所以边界上的位移也必然相等。



单元的每一个节点的位移有两个分量,例如对于节点 / 有

$$(u_i^l) = \begin{bmatrix} u_1^l \\ u_2^l \end{bmatrix}$$
(11-54)

而该单元 i 的三个节点的 6 个位移分量可表示成

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i^l \\ \boldsymbol{u}_i^m \\ \boldsymbol{u}_i^n \end{pmatrix} \quad (i=1,2) \tag{11-55}$$

i单元内部任一点的位移 u_i 可由节点u惟一确定

$$(u_i) = Au \tag{11-56}$$

其中矩阵 A 中的元素是该点坐标 x_j 的函数。

选取这一函数要考虑到,将相应节点坐标代入后可以得到该节点的位移,并能保证相邻单元边界上位移的连续性。为此,选取 x_i的线性函数

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_{ij} x_j$$
 (j=1,2) (11-57)

其中 α_i , β_i 在单元i中保持常数,上式(11-57)的展开形式为

$$\begin{array}{c} u_{i}^{l} = \alpha_{i} + \beta_{i1} x_{1}^{l} + \beta_{i2} x_{2}^{l} \\ u_{i}^{m} = \alpha_{i} + \beta_{i1} x_{1}^{m} + \beta_{i2} x_{2}^{m} \\ u_{i}^{n} = \alpha_{i} + \beta_{i1} x_{1}^{n} + \beta_{i2} x_{2}^{n} \end{array} \right) \quad (i = 1, 2)$$

$$(11-58)$$

考虑到三角形的面积为

$$S_{\triangle} = rac{1}{2} egin{array}{ccc} 1 & x_1^l & x_2^l \ 1 & x_1^m & x_2^m \ 1 & x_1^n & x_2^n \end{array}$$

则可得到有限单元 i 中任意点的位移分量为

$$u_{i} = \frac{1}{2S_{\triangle}} \left[(a^{l} + b^{l}x_{1} + c^{l}x_{2})u_{i}^{l} + (a^{m} + b^{m}x_{1} + c^{m}x_{2})u_{i}^{m} + (a^{n} + b^{n}x_{1} + c^{n}x_{2})u_{i}^{n} \right]$$

$$(11-59)$$

其中

$$a^{l} = x_{1}^{m} x_{2}^{n} - x_{1}^{n} x_{2}^{m}, \quad b^{l} = x_{2}^{m} - x_{2}^{n}, \quad c^{l} = x_{1}^{n} - x_{1}^{m}$$

其余系数可由循环置换角标 l, m, n 而得到。

求出单元所有点上的位移后,便不难确定应变分量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{11-60}$$

或即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
(11-61)

在平面应力情况下,有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{11-62}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$
(11-63)

在平面应变情况下,只需按前述规则代换弹性常数即可。此外,不难给出下列关系式
 σ=Du (11-64)

此处D称为应力矩阵,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b^{l} & \nu c^{l} & b^{m} & \nu c^{m} & b^{n} & \nu c^{n} \\ \nu b^{l} & c^{l} & \nu b^{m} & c^{m} & \nu b^{n} & c^{n} \\ \frac{1-\nu}{2}c^{l} & \frac{1-\nu}{2}b^{l} & \frac{1-\nu}{2}c^{m} & \frac{1-\nu}{2}b^{m} & \frac{1-\nu}{2}c^{n} & \frac{1-\nu}{2}b^{n} \end{bmatrix}$$

显然,用以上公式所描述的单元的应力、应变状态,可以看成是节点力作用的结果,节点力与单元边界上的应力必须是静力等效的。

节点力可以写成列向量

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_i^l \\ \boldsymbol{R}_i^m \\ \boldsymbol{R}_i^n \end{bmatrix}$$
(11-65)

于是 i 单元的势能的一次变分的另一形式为

$$\delta \boldsymbol{E}_{ti} = (\delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \int_{S} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u} h \, \mathrm{d} x \mathrm{d} y - (\delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}$$
(11-66)

由 $\delta E_{ii} = 0$,得

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u} \boldsymbol{h} \boldsymbol{S}_{\wedge} \tag{11-67}$$

其中 S_{\triangle} 为单元面积,h 为单元厚度。上式即

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{u} \tag{11-68}$$

其中

$$K_0 = B^{\mathrm{T}} C B h S_{/}$$

K。称为单元刚度矩阵,且可写成下列展开的形式

$$\mathbf{K}_{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0}^{ll} & \mathbf{K}_{0}^{lm} & \mathbf{K}_{0}^{ln} \\ \mathbf{K}_{0}^{ml} & \mathbf{K}_{0}^{mm} & \mathbf{K}_{0}^{mn} \\ \mathbf{K}_{0}^{nl} & \mathbf{K}_{0}^{nm} & \mathbf{K}_{0}^{nn} \end{bmatrix}$$
(11-69)

此处,每一个子阵均为 2×2 维。例如 K_0^{lm} 为

$$\boldsymbol{K}_{0}^{lm} = \boldsymbol{K}_{0}^{l\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}^{m} h \boldsymbol{S}_{\wedge} \tag{11-70}$$

现在我们来考虑外力。若作用在物体上的外力为集中力,则在划分单元时,应使 这些力作用在单元网格的节点上。若外力为分布力,则应以静力等效集中力来代替。 这样,节点上的外力矢量为 *p*,其相应位移矢量为 *u*,则有

$$\delta \boldsymbol{E}_{t} = (\delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \int_{S} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u} h \, \mathrm{d} x \mathrm{d} y - (\delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \qquad (11-71)$$

由 $\delta E_t = 0$,得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \tag{11-72}$$

此处 K 为总刚度阵,其中任一元素可表示为

$$\mathbf{K}^{rs} = \sum_{M} \mathbf{K}^{rs}_{0}$$

式中的求和号表示在节点r和s所连接的全部单元上求和。而矩阵 K_0^{ss} 由式(11-70)求出。

由此可见,有限元法就是当在单元内部给定机动许可的位移场时,寻求使物体的 总势能为最小的位移场。从而,不难想象到,有限元法与里茨法有相似之处,其差别 仅在于选择位移函数上。里茨法中,位移函数是用整体范围内的某些参数给出的,而 在有限元法中,它是由单元范围内的节点位移给出的。位移函数的任一变更影响的 范围差别很大。因而,里茨法仅适用于简单形状的物体,而有限元法,则只需在划分 单元时,选用简单的便于分析的单元形状。

下面给出主要计算步骤:

- (1) 将结构离散化,划分单元并编号;
- (2) 写出单元刚度矩阵;
- (3) 形成总体刚度矩阵;

- (4) 移置结构载荷;
- (5) 引入支承条件;
- (6) 解总体平衡方程组;
- (7) 计算结果整理。

例 11-4 设有长度为 l 的简支梁,受均布载荷 q 作用,用近似解法求梁的挠度 v(x) (图 11-6)。



将 c1 代入式(a),得梁的挠度为

$$v = \frac{ql^4}{24EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l}\right) \tag{b}$$

其跨度中的最大挠度为

$$v_{\max} = \frac{ql^4}{96EI}$$

初等理论解为

$$\bar{v}_{\max} = \frac{ql^4}{76.8EI}$$
 (11-73)

可见,误差为 17%。如取式(a)的前两项,则可得 $c_1 = \frac{ql^2}{24EI}, c_2 = \frac{q}{24EI}$,于是有

$$v = \frac{ql^2 x}{24EI}(l-x) + \frac{qx^2}{24EI}(l-x)^2$$
 (c)

上式(c)给出的最大位移与初等理论的解已比较接近。

(2) 再假定位移函数为下列三角级数

$$v = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + a_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (d)$$

其中 a_n 为待定系数,即梁的挠度曲线将由一组正弦曲线叠加而成(图 11-6b)。 此时,最小势能原理的总势能 E_t 仍为

$$E_{t} = \int_{0}^{t} \frac{EI}{2} \left(\frac{d^{2}v}{dx^{2}}\right)^{2} dx - \int_{0}^{t} qv dx$$
 (e)

而其中等号右边第一项的被积函数为

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -a_1 \frac{\pi}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - 4a_2 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - 9a_3 \frac{\pi^2}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} - \cdots$$

将上式代入式(e),并注意到

$$\int_{0}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$
$$\int_{0}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

得

$$E_{t} = \frac{EI\pi^{4}}{4l^{3}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{4} a_{n}^{2} - \frac{2ql}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{a_{n}}{n}$$
(11-74)

根据里茨法,有

$$\frac{\partial E_t}{\partial a_n} = 0 \tag{f}$$

当 n 为奇数时,有

$$\frac{2EI\pi^4}{4l^3}n^4a_n-\frac{2ql}{n\pi}=0$$

当 n 为偶数时,有

$$\frac{2EI\pi^4}{4l^3}n^4a_n=0$$

由此, n 为奇数时, 得

$$a_n = \frac{4ql^4}{EIn^5\pi^5}$$

由此, n为偶数时, 得

$$a_n = 0$$

于是梁的挠曲线可写为

$$v = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}$$
(11-75)

级数式(11-75)收敛很快,一般地说,取前两项已足够精确。

梁中点的最大挠度为

$$v_{\max} = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots \right)$$

当取级数的第一项时,有

$$v_{\max} = \frac{ql^4}{76.\ 6EI}$$

与初等理论的解 \overline{v}_{max} 相比,误差为 0.26%。

2) 用伽辽金法求解

用伽辽金法解题,要求设定位移函数既满足位移边界条件又满足力的边界条件。 在这种情况下,位移边界条件为

$$v'' \Big|_{x=0}_{x=l} = 0$$

力的边界条件为

$$v \Big|_{x=0} = 0$$

(1) 首先考虑多项式形式的位移函数

由于一次、二次多项式不满足位移和力的边界条件,三次多项式不满足对称性要求,故选取下列四次多项式

$$v = a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$$
 (g)

于是,

$$v'' = 12a_1x^2 + 6a_2x + 2a_3$$

由 x=0, v=v''=0, 得

 $a_3 = a_5 = 0$

由 x=l, v=v''=0, 得

$$a_2 = -2a_1l, \qquad a_4 = a_1l^3$$

由此得

$$v = a_1 (x^4 - 2lx^3 + l^3 x) \tag{h}$$

此时式(11-51)化为

$$\iint\limits_{V} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_{\rm by} \right) v_k \, \mathrm{d}V = 0$$

即

$$\int_{0}^{t} \left(\frac{\partial Q_{x}}{\partial x} + q\right) v_{k} \mathrm{d}x = 0 \tag{i}$$

= 0

此处
$$v_k = x^4 - 2lx^3 + l^3x$$
,于是有
 $\int_0^l (-EIv^{(4)} + q)(x^4 - 2lx^3 + l^3x) dx$

即有

$$EIv^{(4)} = q$$
$$EI \cdot 24a_1 = q$$

由此得 $a_1 = q / 24EI$,及

$$v = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$
 (j)

此即初等理论的解。

(2) 取位移函数为三角级数

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{i\pi x}{l}$$
 (k)

显然此函数能满足全部边界条件

$$v(0) = v''(0) = v(l) = v''(l) = 0$$

此时式(i)化为

$$\int_{0}^{l} EI\left[\sum_{i=1}^{\infty} a_{i}\left(-\frac{i\pi x}{l}\right)^{4} \sin\frac{i\pi x}{l}\right] \sin\frac{i\pi x}{l} dx + \int_{l}^{0} q\sin\frac{i\pi x}{l} dx = 0$$

注意到三角函数的正交性,上式化为

$$-EIa_{i}\left(\frac{i\pi}{l}\right)^{4} \cdot \frac{1}{2} - \left(q\frac{l}{i\pi}\cos\frac{i\pi x}{l}\right)_{0}^{l} = 0$$

由此可得

$$a_i = \frac{4ql^5}{EI(i\pi)^5}$$
$$v = \frac{4ql^5}{EI\pi^5} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^5} \sin \frac{i\pi x}{l}$$

这一结果与里茨法结果相同。但在计算过程中可以不必计算结构的总势能,而直接 由平衡方程开始,较为简便。

如将最小总余能原理用于线性弹性力学问题,则不难导出熟知的卡氏第二定理。 实际上,如假定线性弹性结构上受 *n* 个广义力*Q*₁,*Q*₂,…,*Q*_n的作用,并认为结构的内 力已由广义力表示,则系统的总余能为

$$\prod_{c} = u'(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n) - \sum_{i=1}^{n} Q_i \Delta_i$$
(11-76)

其中 Δ_i为与广义力 Q_i相对应的广义位移。由最小总余能原理,有

$$\delta \Pi_{\rm c} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi_{c}}{\partial Q_{i}} \delta Q_{i}$$

由于变分 δQ_i 的独立性,则得 n 个独立的方程:

$$\frac{\partial \Pi_{c}}{\partial Q_{i}} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{11-77}$$

于是,由(11-76)得

$$\Delta_i = \frac{\partial U'}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{11-78}$$

式(11-78)即为卡氏第二定理。

例 11-5 用卡氏第二定理求图 11-7 所示简单拉伸杆的伸长。

解 由卡氏第二定理



在此情况下,有

$$U'(T) = \int_0^T \delta(T) \, \mathrm{d}T$$

对于弹性情况

$$\delta = \frac{l}{AE}T$$
$$U'(T) = \frac{l}{2AE}T^{2}$$

故杆的伸长为

$$\Delta = \frac{\partial U'}{\partial T} = \frac{lT}{AE}$$

复习要点

1. 单位体积的应变能为

$$U_{\scriptscriptstyle 0} = \int_{\scriptscriptstyle 0}^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, \mathrm{d} \epsilon_{ij}$$

而单位体积的应变余能(又称为应力能)为

$$U_{\scriptscriptstyle 0} = \int_{\scriptscriptstyle 0}^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} \, \mathrm{d}\sigma_{ij}$$

两者之间的关系为

(a) 应变能与应变余能是互补的;

(b) 在线弹性时两者相等。

2. 虚位移原理可以表示为:物体平衡的充要条件是,对于任一微小虚位移,有

 $\delta U = \delta W$

与虚应力原理的表述和含义不同。

3. 最小总势能原理与最小总余能原理的表述

$$\delta E_{\rm t}=0, \quad \delta E_{\rm t}'=0$$

4. 由最小总势能原理导出的卡氏第一定理:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}$$

由最小总余能原理导出的卡氏第二定理:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i}$$

5. 里兹法与伽辽金法都是基于最小总势能原理的近似解。

 有限元法可以认为是变分原理的近似解法,其精确度随着离散化的网格增密 而提高。

思考题

11-1 虚位移和虚应力是什么含义?

11-2 虚位移原理为什么和材料性质无关?

11-3 为什么最小总势能原理等价于平衡方程和应力边界条件?

11-4 用最小总势能原理求得近似解后,能否由此求出位移分量?为什么?

11-5 里兹法与伽辽金法的近似性表现在哪里?

11-6 如果弹性体处于运动状态则由达朗贝尔(d' Alembert, J. le R.)原理, 你能否建立起一个弹性体运动的变分方程(称为哈密顿(Hamilton, W. R.)变分原理)?

习 颕

11-1 试证:

$$\iint_{V} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \mathrm{d}V = \int_{S} \sigma_{ij} n_{j} u_{i} \mathrm{d}S - \iiint_{V} \sigma_{ij,j} u_{i} \mathrm{d}V$$

11-2 试证明虚位移与虚应力是下列高斯散度定理的特殊情况:

$$\iint_{V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}V = \int_{S_{u}} p_{i} u_{i} \,\mathrm{d}S + \iint_{V} F_{\mathrm{b}i} u_{i} \,\mathrm{d}V + \int_{S_{\sigma}} p_{i} u_{i} \,\mathrm{d}S$$

11-3 试证明图示悬臂梁的应变能公式:

$$U=\frac{1}{2}\int_{l}^{0}EI(w'')^{2}\mathrm{d}x$$

及

$$E_{\iota} = \frac{1}{2} \int_{l}^{0} EI(w'') dx - \int_{l}^{0} q(x)w dx - Mw'(l) + Fw(l)$$

并说明其附加条件。



习题 11-3

11-4 试绘出图示结构的余能表达式。



习题 11-4

11-5 试用卡氏第二定理求图示三杆桁架中 A 点的位移。 答案: $\Delta = \frac{Pl}{AE(1+2\cos^3 \alpha)}$



11-6 试给出平面应力状态极坐标的应变能表达式。

答案: $U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{E}{2(1-2\nu)} [\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_\theta + (1+\nu)\gamma_{r\theta}^2]$

11-7 设有图示悬臂梁右端受 P 作用,如取挠曲线为

$$w = ax^2 + bx^3$$

试求 a, b 的值。

答案:
$$a = \frac{Pl}{2EJ}, b = -\frac{P}{6EJ}$$

第12章

薄板的弯曲

12.1 基本概念与基本假定

在工程结构中,经常用板作为一种结构构件。板的几何特点是其厚度远小于其 他两个方向的尺寸(图 12-1)。



板可分为薄板和厚板以及薄膜。所谓薄 板,实际上是有一定厚度的板,通常把满足下 列条件的板算为薄板:

$$\left(\frac{1}{80} \sim \frac{1}{100}\right) \leqslant \frac{h}{b} \leqslant \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{8}\right)$$

其中 b 为板的较小的边长。否则就是厚板 $\left(\frac{h}{b} > \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{8}\right)\right)$ 或薄膜 $\left(\frac{h}{b} < \left(\frac{1}{80} \sim \frac{1}{100}\right)\right)$ 。 采用薄板一词只是为了区别厚板与薄膜。

冬 12-1

板是一种主要抗弯扭的结构单元。厚度 很小的薄膜,其抗弯扭的能力很低,可认为其

抗弯刚度等于零,而横向外载荷由轴向力与中面剪力来承担。当板的厚度足够大时, 其内部任一点的应力状态与三维物体类似,难以采用较多的简化措施,所以厚板的分 析要复杂得多。薄板具有中等厚度,可以进行简化。本章只讨论这种薄板的小挠度 理论(最大挠度与板厚之比在 $\frac{1}{10} \sim \frac{1}{5}$,或最大挠度与最小边长之比不大于 $\frac{1}{50}$,可认为是小挠度的界限)。

对薄板小挠度理论,普遍采用以下基本假定:

(1) 变形前垂直于中面的任一直线线段,变形后,仍为直线,并垂直于变形后的 弹性曲面,且长度不变。

(2) 垂直于板中面方向的应力较小,可略去不计。

以上两项重要的假定称为基尔霍夫-勒夫假定,其中所谓中面是指平分板厚的 平面。显然,变形前的中面为与板的上下表面平行的平面,变形后,板发生挠曲,中面 变成了曲面,称之为弹性曲面,也称为变形后的中面,统称中面。



Gustav Robert Kirchhoff

基尔霍夫(G. R. Kirchhoff) 1824 年生于德国, 1887 年逝世。曾在海登堡大学和柏林大学任物理学教授,他发现了电学中的"基尔霍夫定律",同时在薄板研究 中也做出了重要贡献。



Augustus Edward Hough Love

勒夫(A. E. H. Love) 1863 年生于英国,1940 年逝 世。牛津大学自然哲学教授,在数学、弹性力学方面做出 了杰出的贡献。例如他给出了薄板的合理简化假定,首先 发现了在介质界面处弹性波的传播规律(称为勒夫波)。 他所著《数学弹性理论》被译成多种文字,被公认为经典巨 著。 下面进一步分析这些假定的力学意义,并由此导出弹性薄板小挠度理论的基本关 系式。

上述第一条假定习惯上称为直法线假定,和材料力学中梁的弯曲理论中平截 面假定相似。图 12-2 是直法线假定的几何表示。图中给出了 y=常数的截面,其 中,1-1,2-2 为两条垂直于中面的法线,变形前后都是与中面相垂直的直线。于是 可得

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\blacksquare \qquad \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \underline{\mathfrak{g}} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (12-1)$$

同理,可给出 x=常数的截面,同样由直法线假定得

即
$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$
, 或 $\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}$ (12-2)

 $\gamma = 0$

由图 12-2 可知,距中面为 z 处的板层 AB,变形后,变为曲线 A'B',设 A 点的坐标为 x,B 点的坐标为 x + dx。当 y = 常数,坐标为 x 的 A 点,变形后的位移为 u (图 12-2),考虑到 θ 为小量,故

$$u = -z\sin\theta \approx -z\tan\theta$$
$$\tan\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

于是

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \tag{12-3}$$

此处 u,w 分别为以指向 x,z 的正方向时为正, θ 以顺时针旋转为正。当 θ 为正时,u 为负。

同理,对于 x = 常数的截面,坐标为(y,z)的一点处的水平位移为

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \tag{12-4}$$

由以上两式可知,在中面 z=0 处位移 u 和 v 均等于零。

第一项假定中的直法线长度不变可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{z} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial z} = 0 \qquad (12-5)$$

由此得到



(12-6)

即板中面的挠度是 x, y 的函数。这就是说,垂直于中面的任一根法线上各点的位移 w 均相同。

第二项假定给出

$$\sigma_z = 0 \tag{12-7}$$

由此连同第一项假定中的 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \epsilon_z = 0$ 便可得到薄板弯曲的下列本构关系:

$$\epsilon_{x} = \frac{1}{E} (\sigma_{x} - \nu \sigma_{y})$$

$$\epsilon_{y} = \frac{1}{E} (\sigma_{y} - \nu \sigma_{x})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$
(12-8)

由式(12-3),(12-4)及(12-6)可知,对于薄板问题来说,重要的是求薄板的挠曲 函数 w(x,y)。

应当指出,第1章曾对弹塑性理论所作的基本假定仍然有效,例如,材料的均匀 性、连续性、各向同性及小变形假定等。

12.2 薄板弯曲的平衡方程

求解薄板弯曲问题时,由于采用了以上两条基本假定而使位移分量均可表示为 挠度 w 的函数。从而,用位移(w)作为基本未知量(即位移法)来求解有明显的优点。 以下讨论建立薄板弯曲的基本方程。

对于矩形板,我们采用图 12-3 所示的直角坐标系。如从其中取出一微小单元 hdxdy,如图 12-3 所示 abcd,放大以后为图 12-4 所示的情况。此时,微小单元的顶 部有外载荷 qdxdy 作用,底面为自由表面,其他四个表面有板的内力作用。其中,在 外法线与 x 轴相平行的面上,有 σ_x , τ_{xx} , τ_{xy} 作用。由以上假定可知,应力 σ_x , τ_{xx} , τ_{xy} 的



冬 12-3

分布均以中面为对称面而反对称分布(如图 12-4(a)),且分别合成弯矩 M_x ,扭矩 M_{xy} 和横向剪力 Q_x (图 12-4(b))。如果 M_x , M_{xy} , Q_x 等分别表示单位长度上的相应值, 我们有



冬 12-4

$$M_{x} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{x} dz, \quad M_{y} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{y} dz$$
(12-9)

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{\pi}{2}} z \tau_{xy} \,\mathrm{d}z \tag{12-10}$$

$$Q_{x} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \, \mathrm{d}z, \quad Q_{y} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \, \mathrm{d}z \tag{12-11}$$

现在我们设法将所得内力公式 $(12-9) \sim (12-11)$ 用位移函数 w 来表示。为此, 由广义胡克定律(12-8),有

$$\sigma_x = E \varepsilon_x + \nu \sigma_y \tag{a}$$

$$\sigma_{y} = E \varepsilon_{y} + \nu \sigma_{x} \tag{b}$$

将上式(b)代入(a)中得

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \sigma_y)$$
 (c)

同理得

$$\sigma_{y} = \frac{E}{1 - \nu^{2}} (\varepsilon_{y} + \nu \sigma_{x})$$
 (d)

类似地,有

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \tau_{xy}$$
(e)

由应变位移方程,并考虑到式(12-3),(12-4)有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{z} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{x}^{2}} \tag{12-12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}} = -z \frac{\partial^{2} \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{y}^{2}} \tag{12-13}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
(12-14)

由基本假设知

$$\varepsilon_x = 0$$
, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

于是,

$$\sigma_{x} = \frac{E}{1-\nu^{2}} (\varepsilon_{x} + \nu \varepsilon_{y}) = -\frac{Ez}{1-\nu^{2}} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \nu \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right)$$

$$\sigma_{y} = \frac{E}{1-\nu^{2}} (\varepsilon_{y} + \nu \varepsilon_{x}) = -\frac{Ez}{1-\nu^{2}} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} + \nu \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y}$$
(12-15)

将式(12-15)代入式(12-9)~(12-11),积分后可得

$$M_{x} = -\frac{Eh^{3}}{12(1-\nu^{2})} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \nu \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right) = -D \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \nu \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right)$$
(12-16)

其中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{12-17}$$

称为薄板的抗弯刚度。

同理有

$$M_{y} = -D\left(\frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} + \nu \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}}\right)$$
(12-18)

$$M_{xy} = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
(12-19)

 M_x, M_y, M_{xy}, Q_x 和 Q_y 称为广义力。图中给出了各力的正方向(如图 12-5(a)所示), 用力矩矢量表示时,如图 12-5(b)所示。

与以上广义力相对应的广义应变分别为

$$K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad K_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad K_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

其中 K_x 实际上是中面在与 xz 面相平行的平面内的曲率,因为,如令 R_x 为其曲率半 径,则

$$\frac{1}{R_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

此处负号是因为取挠曲面的凸面向下为正曲率时,其二次导数 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 为负。同理





冬 12-5

$$\frac{1}{R_{y}} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}}$$

而 K_{xy} 叫做曲面对 xy 轴的扭率。于是式(12-16)、(12-18)、(12-19)可以写成 $M_x = D(K_x + \nu K_y)$ $M_y = D(K_x + \nu K_x)$ $M_{xy} = (1-\nu)DK_{xy}$ (12-20)

$$\sum M_x = 0$$
, $\sum M_y = 0$, \cdots , $\sum F_z = 0$

如 $\mathbf{U} \sum M_y = 0$ 即绕 y 轴的力矩之和等于零,当坐标原点取在 dxdy 的角点上时,则有

$$\left(M_{x} + \frac{\partial M_{x}}{\partial x} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y - M_{x} \mathrm{d}y + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$
$$-M_{yx} \mathrm{d}x - \left(Q_{x} + \frac{\partial Q_{x}}{\partial x} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x - q \mathrm{d}x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

整理后,略去高阶微量,可得

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \tag{12-21}$$

同理,由 $\Sigma M_x = 0$,可得

$$\frac{\partial M_{y}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_{y} \qquad (12-22)$$

由 $\Sigma F_z = 0$,得

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0$$

即

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q$$

将式(12-21),(12-22)代入上式,并考虑到 $M_{yx} = M_{xy}$,则得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \qquad (12-23)$$

将式(12-16)、(12-18)、(12-19)代入上式,则得用位移函数 w 表示的平衡方程,即

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$
(12-24)

或写成

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q \tag{12-24'}$$

其中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子。式(12-24)为薄板弯曲问题的平衡微分方程。 从而,求解薄板弯曲问题归结为在满足边界条件情况下由(12-24)求解w(x,y),进而 根据式(12-16)、(12-18)、(12-19)求得弯矩和扭矩,又可根据式(12-15)求出应力。 如欲求横剪力 Q_x , Q_y ,则可引用式(12-21),(12-22)

$$Q_{x} = \frac{\partial M_{x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right)$$

$$Q_{y} = \frac{\partial M_{y}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right)$$
(12-25)

或

$$Q_{x} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^{2} w)$$

$$Q_{y} = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^{2} w)$$
(12-25')

12.3 边界条件

薄板弯曲问题的准确解必须同时满足平衡微分方程(12-24)和给定的边 界条件。由于(12-24)为一四阶偏微分方程,因而,在每个边界上应给出两个边界 条件。

典型的边界条件可分为三类:

1) 几何边界条件,即在边界上给定边界挠度 \overline{w} 和边界切向转角 $\frac{\partial w}{\partial t}$,此处 t 为边界切线方向。

2)静力边界条件,即在边界上给定横向剪力 \overline{Q}_{t} 和弯矩 \overline{M}_{t} 。

3) 混合边界条件,即在边界上同时给定广义力和广义位移。如对于弹性支承 边,则除给定边界剪力 Q 外,还给定弹性反力 $-c\overline{w}$,此处 c>0 为弹性系数, \overline{w} 为边界 已知挠度。或除给定边界弯矩 \overline{M}_n 外,还给定弹性反力矩 $-c'\frac{\partial w}{\partial n}$,此处 n 为边界的法 线方向。

以下讨论常见的边界支承情况和相应的边界条件:

(1) 固定边界(图 12-6)

在固定边,显然有位移与转角为零的几何条件,即在 x=0 边

$$\begin{pmatrix}
(w)_{x=0} = 0 \\
\frac{\partial w}{\partial x} \\
_{x=0} = 0
\end{pmatrix}$$
(12-26)

(2) 简支边界(图 12-7)

板在简支边(用图 12-7(b)中的虚线表示)不能有竖向(z 方向)的位移,但可 以有微小转动。故边界上挠度等于零(几何条件)和弯矩等于零(静力条件),即在 x=0边

$$\begin{array}{c}
(w)_{x=0} = 0 \\
(M_x)_{x=0} = 0
\end{array}$$
(12-27)

由于有



冬 12-6

(3) 自由边界(图 12-8)

对于自由边界,我们有下列静力条件,即

$$(M_x)_{x=a} = 0 (M_{xy})_{x=a} = 0 (Q_x)_{x=a} = 0$$
(12-29)

式(12-29)给出了三个静力条件,进一步分析可以证明这三个条件并不是独立 的。其中 M_x 可用等效剪力来表示。实际上,作用在 x=a 边界上长度为 dy 的微 小单元上的扭矩 M_{yy} dy(图 12-9),可用两个大小相等,方向相反,相矩 dy 的垂直力 来代替。显然,这种代换是静力等效的。根据圣维南原理,这一代换的影响是局部 的。故经过图 12-9 这样的代换后,两相邻微小单元间只需增加一个集度为∂M_m/∂ y 的竖向剪力就可以了(图 12-9(c))。这样,在边界 x=a 的自由边界上总的分布 剪力应为

或



冬 12-9

冬 12-10

而式(12-29)中的第一式可改写为

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0$$
(12-31)

应当特别指出,如相邻两边都是自由边界,如图 12-10 所示,则当将扭矩用剪力 做静力等效代替以后,则角点 *B* 将出现未被抵消的集中剪力 *R*_B(如图 12-11)。

由于 B 点处于自由状态,故应有

$$(R_B)_{x=a} = 2(M_{xy})_{x=a} = 0$$

或

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=a\\x=b}} = 0 \tag{12-32}$$

此即角点 B 应满足的条件。显然,如 B 点有柱支承,则角点 B 应满足下列条件:

$$(w)_{x=a}=0$$

此外,当自由边与简支边或固定相邻,或两非自由边相邻处有集中力时,将被反

力所吸收,不需要列条件。还有其他类型的边界条件,均一并列入表 12-1 中。



冬 12-11

表 12-1 矩形板的各种边界条件

边 界 支 承 类	数 学 表 达 式
简支端 <u>x=a</u>	$(w)_{x=a} = 0$ $(M_x)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0$
固定端 <u>x=a</u>	$(w)_{x=a} = 0$ $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0$
台山端 <u>x=a</u> 	$(M_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0$ $(V_x)_{x=a} = \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=a} = 0$



注: $\rho = 弹性支承的抗压刚度, \rho' = 弹性约束的抗旋转刚度$

由此可见,板的边界条件由 $w, \partial w/\partial n, M_n, V_n$ 四个量中的两个组成。此处n表示边界外法线方向,V为单位长度的竖向边界力 $\left({
m uv}_x = Q_x + rac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \cdots
ight)$ 。

12.4 矩形板的经典解法

现在我们以简支矩形板为例,说明薄板弯曲问题的解法。图 12-12 中给出了边长为 a,b 的受分布载荷 q(x,y)作用的简支矩形板。



冬 12-12



续表

$$\begin{pmatrix} w \end{pmatrix}_{x=0}_{y=0} = (w)_{x=a} = 0 \\ y=b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{pmatrix}_{x=a} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{y=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{y=b} = 0$$

$$(12-33)$$

如前所述,所论问题归结为按上述边界条件求解薄板平衡微分方程(12-24')为 $D \nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y)$

求解上述问题的方法甚多。以下介绍广泛应用的分离变量法。用这种方法求

解,通常取 w 为无穷级数形式,在很多情况下,这种级数收敛很快。在直角坐标系中,最方便的是采用双重傅里叶级数形式的解。

纳维(Navier C. L. M. H., 1823)取挠度 w 的表达式如下列二重正弦级数:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
(12-34)

其中 A_{mn} 为未知待定系数,m,n 为任意整数。如用 w_{mn} 代表级数的通项,则(12-34) 可写为

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} = w_{11} + w_{12} + \dots + w_{1n} + \dots + w_{21} + w_{22} + \dots + w_{2n} + \dots + w_{m1} + w_{m2} + \dots + w_{mn} + \dots$$

显然,按式(12-43)选取的 w(x,y),必然满足全部边界条件。此外,在分布载荷作用下,三角级数收敛很快,因此,实际计算时只需取级数的前几项(一般为三项)即可满 足普通精度的要求。

莱维(Levy M., 1899)提出了下列级数形式的解:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$
(12-35)

其中 $Y_m(y)$,只是 y 的函数。这就是说, 将挠度函数 w 展成一个半幅的单傅里 叶正弦级数。对 x=0 和 x=a 的边为 简支(图 12-13)的板,级数(12-35)中的 每一项都满足该两边的 $w=0, \partial^2 w/$ $\partial x^2 = 0$ 边界条件。剩下的问题就是使 Y_m 满足 $y = \pm \frac{b}{2}$ 的边界条件及微分 方程



冬 12-13

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q$$

并由此确定 $Y_m(y)$ 。在一般情况下莱维方法比纳维方法收敛快,以下将以算例予以 说明。

除以上经典方法外,薄板弯曲问题的求解,还可以采用基于变分原理的里茨法或 伽辽金法,以及各种数值解法,如有限差分法、有限单元法等。

例 12-1 设有图 12-15 所示之四边简支矩形板,两对边 $y = \pm \frac{b}{2}$ 受均布力矩 M_0 作用。试求板的挠曲面方程及对称轴 y=0上的挠度。

解

(1) 平衡方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$
 (a)

(2) 边界条件为

$$x=0 \ \mathcal{B} \ x=a \ \mathfrak{m}, \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$y=\pm \frac{b}{2} \ \mathfrak{m}, \qquad w=0 \qquad (b)$$

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=\pm \frac{b}{2}} = M_0$$

(3) 假定位移函数

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m \pi x}{a}$$

所设级数的每一项均应满足边界条件。x=0及x=a处的边界条件显然满足。 此处 Y_m 应取下列形式:

$$Y_m = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}$$

即可满足(a)。

(4) 求系数,此时载荷为对称,故 Y_m 一定是y的偶函数,因此上式中的 $A_m = D_m = 0$,由此并考虑到边界条件(b)中的第二式,可得

$$B_m = -C_m \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m$$

其中

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

于是得

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{c}$$

其中 C_m 可根据边界条件(b)确定,在 $y=\pm \frac{b}{2}$ 时,有 $-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=M_0$

即

$$-2D\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2\pi^2}{a^2}C_m\mathrm{ch}\,\alpha_m\sin\frac{m\pi x}{a}=M_0$$

如边界上的分布力矩 $(M_y)_{y=\pm b/2}$ 也写成下列级数形式:

$$(M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \frac{4M_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

则系数 C_m 为

$$C_m = -\frac{2M_0a^2}{Dm^3\pi^3 \mathrm{ch}\,\alpha}$$

(5)将求得的系数代入位移函数,得最终挠度表达式。将 C_m 代入式(c)得

$$w = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch}_{\alpha_m}} \left(\alpha_m \operatorname{th}_{\alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{d}$$

在对称轴 y=0 上的挠度为

$$(w)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \frac{a_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \sin \frac{m \pi x}{a}$$
(e)

(a)

例 12-2 设有两对边简支,两对边固定的矩形板,受集度为 *q* 的均布载荷作用(图 12-14),求板中心的挠度。

解 用莱维法解,平衡微分方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$$

边界条件为

在x=0及x=a处

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

在
$$y=\pm \frac{b}{2}$$
处

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0$$
 (b)

微分方程(12-24['])的解为





$$w = w_1 + w_2 \tag{c}$$

其中 w_1 为(12-24['])的齐次解, w_2 为(12-24['])的一个任意特解。取

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$

(代) $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$ 解得

$$Y_m(y) = \left(A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}\right) \frac{qa^4}{D}$$
(12-36)

由于结构与载荷均对称于 x 轴,则 $Y_m(y)$ 亦应对称于 x 轴,由此断定 $A_m = D_m = 0$,且 m 为奇数,因此得

$$w_1 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (12-37)$$

特解为

$$w_2 = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x)$$

现在将 w_2 展为三角级数,即

$$w_2 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}$$
(12-38)

将式(12-37),(12-38)代入式(c),得(12-24')的通解为

$$w = w_1 + w_2 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi^5 m^5} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$
(12-30)

w 应满足边界条件,并由此可确定上式中的待定常数 B_m , C_m 。由式(12-39)确定的 w 满足边界条件(a)。此外,由边界条件(w)_{y=±b/2}=0 及 $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm b/2}=0$,可得 $\frac{4}{5-5}+B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi b}{2}+C_m\frac{m\pi b}{2}\operatorname{sh}\frac{m\pi b}{2}=0$]

$$\pi^{\circ} m^{\circ} \qquad 2a \qquad 2a \qquad 2a \qquad 2a \qquad (d)$$

$$B_{m} \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{2a} + C_{m} \left(\frac{m\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a} + \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{2a} \right) = 0$$

令 $\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m$,由此可得

$$B_{m} = -\frac{4}{\pi^{5} m^{5}} \cdot \frac{\alpha_{m} \operatorname{ch} \alpha_{m} + \operatorname{sh} \alpha_{m}}{\operatorname{ch} \alpha_{m} (\alpha_{m} \operatorname{ch} \alpha_{m} + \operatorname{sh} \alpha_{m}) - \alpha_{m} \operatorname{sh}^{2} \alpha_{n}}$$
$$C_{m} = \frac{4}{\pi^{5} m^{5}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha_{m}}{\operatorname{ch} \alpha_{m} (\alpha_{m} \operatorname{ch} \alpha_{m} + \operatorname{sh} \alpha_{m}) - \alpha_{m} \operatorname{sh}^{2} \alpha_{m}}$$
将 B_m , C_m 的表达式代入(12-39)即得最终的位移函数

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[1 - \frac{(\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m + \operatorname{sh}\alpha_m) \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\alpha_m (\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m + \operatorname{sh}\alpha_m) - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m} + \frac{\operatorname{sh}\alpha_m}{\operatorname{ch}\alpha_m (\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m + \operatorname{sh}\alpha_m) - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m} \cdot \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$
(12-40)

将 x = a/2, y = 0 代入上式,即得所要求的板中心处的挠度

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[1 - \frac{\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m + \operatorname{sh}\alpha_m}{\operatorname{ch}\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m + \operatorname{sh}\alpha_m} - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi}{2} \qquad (12-41)$$

此级数收敛很快, $\mathbf{W} = 1$ 即可得较满意的近似解, 即

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \left[1 - \frac{\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1 (\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1) - \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} \right]$$
(12-42)

对于方板,即 a=b时,则 $\alpha_1=\pi/2$

$$ch\alpha_1 = ch \frac{\pi}{2} = 2.507$$
, $sh\alpha_1 = sh \frac{\pi}{2} = 2.299$

将这些值代入式(12-42),得

$$w_{\max} = 0.00192 \, \frac{qa^4}{D}$$
 (12-43)

12.5 圆板的轴对称弯曲

计算圆板弯曲问题时,采用极坐标(r,θ)较为方便。以下我们导出圆板轴对称弯

曲的单元体的静力平衡微分方程。轴对称的意思 是指板的几何形状,外载荷及边界条件都对称于经 过圆心垂直于中面的轴线。因而,位移场、应变场、 应力场也都是轴对称的,各分量不随θ变化而只是 r 的函数。于是,问题可大为简化。

考虑圆板的一个微小单元 *abcd*(图 12-15)在 轴对称条件下的平衡,取坐标系如图所示,则微小 单元 *abcd*上的力对 *z*轴的力矩方程在略去高次项 后为

$$\left(M_x + \frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}\right)(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta - M_r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$



 $-M_{\theta} \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta + Qr \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 0$

化简得

或

$$r\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} + M_r - M_\theta = -Qr \tag{12-44}$$

$$(rM_r)' - M_\theta = -\int_0^r qr dr \qquad (12-45)$$

此处()'=d()/dr,q为分布外载荷强度。

现在来讨论圆板变形后的挠曲面的曲率。对圆板的挠曲面来说,任一点 A 的曲率可用径向与周向的曲率来描述。其中径向曲率 K_r ,实际上就是包含 z 轴在内的竖 直平面与挠曲面的交线 s 的曲率,图 12-16 给出了过任意点 A 的 s 线,nB 为 A 点的 法线,且交 z 轴于 B 点。

设邻近于 A 有一点 A' (图 12-17),其法线为 n',设 A 点的转角为 θ ,可得





$$\tan\theta = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

在小挠度的情况下,有

tanθ≈θ

故

$$\theta = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}$$

曲线 s 的曲率等于 $\frac{d\theta}{ds}$,此处 ds为弧长的微分,在小挠度情况下,曲率 K_r 为

$$K_r = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$$

或

210

$$K_r = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} \tag{12-46}$$

过 A 点含有 n,与上述平面正交的平面称为法截面,它与挠曲面的交线 t 的曲率 即周向曲率 K_{g} 。

为了确定曲线 t 的曲率,可分析图 12-18 中给出的法截面 T。由微分几何知道, 曲面法截面的曲率为任意截面周线的曲率乘以两平面夹角的余弦^①。在我们讨论的 情况下,已知圆周的曲率为 $\frac{1}{2}$,于是交线 t 的曲率为

$$K_{\theta} = \frac{1}{r} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{r} \theta$$
$$K_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} \qquad (12\text{-}47)$$

即

由于轴对称弯曲,故扭率等于零,K_r,K_e便是两 个主曲率。也就是说,我们有了曲率位移关系式 (12-46)和(12-47)。

当圆板受分布轴对称载荷时,即载荷只是r的函数q(r),则问题可大为简化。事实上,式 (12-24)可简化为如下形式:

$$D\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = q(r)$$

(12-48)

这一方程式的解可由齐次解 w₁ 和特解 w₂ 所组成。故其通解为

$$w = w_1 + w_2 \tag{a}$$

其中

$$w_1 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C^4 \tag{b}$$

式中常数 C_1 , C_2 , C_3 , C_4 按边界条件确定,特解 w_2 由载荷分布的具体情况而定。当 圆板板面上布满有连续的均布载荷时,即 q 等于常数 q_0 ,其特解为

$$w_2 = Cr^4 \tag{c}$$

将式(c)代入(12-48),即可求得



① 在微分几何中称为梅尼定理(Meunier's theorem, 1776), 参看, 例如, 斯米尔诺夫, 《高等数学教程》, 第 二卷, 第五章, 第 132 节, 高等教育出版社, 1958。

$$C = \frac{q_0}{64D}$$

其通解即为

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{q_0 r^4}{64D}$$
(12-49)

对于完整的中心并无圆孔削弱的圆板,常数 C_1 , C_2 必须为零,否则在板的中心 (r=0)处,挠度和内力将无穷大,这与实际情况不符。常数 C_3 和 C_4 可由边界条件确 定。以下研究两种边界情况的解。

(1) 固定边界: 半径为 a, 周界固定的圆板, 其边界条件为

$$(w)_{r=a}=0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a}=0$$

由(12-49)可知

$$w = C_3 r^2 + C_4 + \frac{q_0 r^4}{64D} \tag{d}$$

代入边界条件

$$a^{2}C_{3}+C_{4}+rac{q_{0}a^{4}}{64D}=0$$
, $2aC_{3}+rac{q_{0}a^{3}}{16D}=0$

则得

$$C_3 = -rac{q_{\scriptscriptstyle 0} a^2}{32D}, \quad C_4 = rac{q_{\scriptscriptstyle 0} a^4}{64D}$$

代入式(d),得

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \tag{12-50}$$

在板中心处最大挠度为

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{64D}$$

有了挠度表达式,即可求出类似于(12-16),(12-18)等用挠度表示的内力公式, 即求出用极坐标表示的弯矩和扭矩的方程。因为在轴对称情况下,直角坐标与极坐 标之间有下列关系式:

$$\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} w}{\partial r^{2}}, \quad \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y} = 0$$

$$M_{r} = -D\left(\frac{\partial^{2} w}{\partial r^{2}} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial_{w}}{\partial r}\right)$$
新以
$$M_{\theta} = -D\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^{2} w}{\partial r^{2}}\right)$$

$$M_{r\theta} = 0$$
(12-51)

在轴对称情况下,剪力 Q 很容易求得,它等于分布在半径为 r 的圆周内的总载荷除 以 $2\pi r_{\circ}$ 因有

$$2\pi r \mathbf{Q} = \int_{0}^{r} 2\pi r q \, \mathrm{d}r$$
$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2\pi r} \int_{0}^{r} 2\pi r q \, \mathrm{d}r \qquad (12-52)$$

故

当q = 常数,则

$$Q = \frac{qr}{2} \tag{12-53}$$

当周边固定的圆板受有均布载荷时,弯矩、扭矩、横剪力的表达式即为

$$M_{r} = \frac{q_{0}}{16} [a^{2} (1+\nu) - r^{2} (3+\nu)]$$
$$M_{\theta} = \frac{q_{0}}{16} [a^{2} (1+\nu) - r^{2} (1+3\nu)]$$
$$M_{r\theta} = 0$$
$$Q = \frac{1}{2} qr$$

最大弯矩在板的中心处, $\exists \nu = 0.3$ 时,

$$(M_r)_{\max} = (M_{\theta})_{\max} = \frac{1.3}{16} q a^2 = 0.0813 q_0 a^2$$

(2) 简支边界: 边界为简支的圆板受有均布载荷时,则当 r=a 时,

$$w=0$$
, $M_r=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0$

由这两个条件可以确定

$$C_{3} = -\frac{(3+\nu)q_{0}a^{2}}{32(1+\nu)D}\nu, \quad C_{4} = -\frac{(5+\nu)q_{0}a^{4}}{64(1+\nu)D}$$

并可求得挠度表达式为

$$w = \frac{q_0}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \nu} \right]$$
(12-54)

弯矩的表达式

$$M_{r} = \frac{q_{0}}{16} [a^{2} (3+\nu) - r^{2} (3+\nu)]$$

$$M_{\theta} = \frac{q_{0}}{16} [a^{2} (3+\nu) - r^{2} (1+3\nu)] \qquad (12-55)$$

最大弯矩出现在板的中心处, $\exists \nu = 0.3$ 时,

$$(M_r)_{\max} = (M_0)_{\max} = \frac{3.3}{16} q_0 a^2 = 0.206 q_0 a^2$$

约等于固定边圆板中心弯矩的 2.5 倍。

12.6 用变分法解板的弯曲问题

1. 板的应变能,总势能与总余能

在第4章中,式(4-19)给出了弹性体的总应变能,为

$$U = \frac{1}{2} \iint_{V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d} V$$

在板的弯曲问题中,根据基尔霍夫-勒夫假定,已知

$$\sigma_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

于是,板的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \iint_{V} (\sigma_{x} \varepsilon_{x} + \sigma_{y} \varepsilon_{y} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \qquad (12-56)$$

将广义胡克定律代入(12-56),可得

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iint_{V} \left(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx dy dz \qquad (12-57)$$

若板厚为1,则将式(12-12)~(12-14)代入上式(12-57)得板的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \iint_{A} D\left\{ \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right)^{2} + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y} \right)^{2} - \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right] \right\} dx dy \qquad (12-58)$$

此处 A 为板中面面积。

如只考虑板受横向(即垂直于板面)的外载荷 q 作用,则外力的势能为

$$W = \iint_A q w \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y$$

于是板的总势能 E_t 为

$$E_{t} = \iiint_{V} U_{0}(\varepsilon_{ij}) dV - \iint_{S_{T}} (p_{x}u + p_{y}v + p_{z}w) ds$$
$$= \frac{1}{2} \iint_{A} D\left\{ \left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} \right)^{2} + 2(1-\nu) \right.$$
$$\cdot \left[\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x \partial y} \right)^{2} - \frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} \right] \right\} dx dy - \iint_{A} qw dx dy$$

$$-\int_{S_T} \left[-\overline{Q}_z w + \overline{M}_n w_{,n} + \overline{M}_{ns} w_{,s}\right] \mathrm{d}S \qquad (12-59)$$

其中, $\overline{Q}_{\varepsilon}$, \overline{M}_{n} , \overline{M}_{n} ,分别为边界上的横向剪力,弯矩和扭矩,下标 n,s分别为边界处的 法线与切线方向。w,w,_n (= $\partial w/\partial n$)及w,_s (= $\partial w/\partial s$)显然是相应的广义位 移(图 12-19)。



冬 12-19

如将广义位移 K_x 、 K_y 、 K_{xy} 的表达式(12-20)代入式(12-59),则有

$$E_{t} = \iint_{A} \left\{ \frac{2}{D} \left[(K_{x} + K_{y})^{2} + 2(1-\nu)(K_{x}^{2} - K_{x}K_{y}) \right] - qw \right\} dxdy$$
$$- \int_{S_{T}} \left[-\overline{Q}_{z}w + \overline{M}_{n}w_{,n} + \overline{M}_{n,s}w_{,s} \right] dS \qquad (12-60)$$

此即最小势能原理的泛函。

类似地,可得出最小总余能原理的泛函 E。。实际上,由总余能公式可得

$$E'_{t} = \iint_{V} U'_{0}(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_{u}} (up_{x} + vp_{y} + wp_{z}) dS$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{A} \frac{1}{E} [\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} - 2(1+v)\tau_{xy}^{2} - 2v\sigma_{x}\sigma_{y}] dx dy$$

$$+ \int_{S_{u}} [-\overline{Q}_{z}\overline{w} + M_{n}\overline{w}_{,n} + M_{m}\overline{w}_{,s}] dS$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{A} \left(\frac{12}{Eh^{3}}\right) [(M_{x} + M_{y})^{2} + 2(1+v)(M_{xy}^{2} - M_{x}M_{y})] dx dy$$

$$+ \int_{S_{u}} [-Q_{z}\overline{w} + M_{n}\overline{w}_{,n} + M_{m}\overline{w}_{,s}] dS \qquad (12-61)$$

我们知道,薄板弯曲问题归结为寻求板的平衡微分方程(12-24)相应边界条件 的解。一般说来,问题的精确解往往是难以求得的,因而需要研究各种近似法。基于 能量原理的变分法是一种非常有效的方法。以下介绍的里茨法和伽辽金法便是这种 求近似解的重要方法。这两种方法的基本思路,都是以选择满足给定边界条件的挠 曲函数为基础,尽可能地满足板的平衡微分方程,以求得好的近似解。 2. 里茨法解例

对于板的弯曲问题来说,就是要寻求一个满足几何边界条件,同时使板的总势能 或总余能为最小的挠曲函数 w(x,y)。

假定板中面的挠曲函数为

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k w_k(x,y)$$
(12-62)

则有

$$\frac{\partial E_{t}}{\partial a_{k}} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{12-63}$$

我们知道,最小总势能原理等价于平衡方程和应力边界条件,所以在用里茨法解 题选择挠曲函数 w(x,y)时要注意使其满足几何边界条件。

作为例子,考虑一个四边简支的矩形板,边长为 a 和 b,并取挠曲函数为下列三 角级数形式:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
(12-64)

显然上式可以满足简支边界条件。将式(12-64)代入式(12-59)可得

$$E_{t} = \frac{D}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^{2} \pi^{2}}{a^{2}} + \frac{n^{2} \pi^{2}}{b^{2}} \right) \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \right]^{2} dx dy$$
$$- \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} dx dy \qquad (12-65)$$

注意到,如 $m \neq m', n \neq n', 则有$

$$\int_{0}^{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \int_{0}^{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = 0$$

所以积分的计算只需考虑平方项,此外,已知

$$\int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \sin^{2} \frac{m\pi x}{a} \sin^{2} \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$
$$\int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \cos^{2} \frac{m\pi x}{a} \cos^{2} \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$

故(12-59)中的第二项积分等于零,在式(12-65)中已不包含这一项积分。于是式 (12-65)化为

$$E_{t} = \frac{\pi^{4} a b D}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{2} \left(\frac{m^{2}}{a^{2}} + \frac{n^{2}}{b^{2}}\right)^{2}$$
$$- \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} dx dy \qquad (12-66)$$

此时,式(12-63)为

$$\frac{\partial E_{t}}{\partial a_{11}} = 0, \quad \frac{\partial E_{t}}{\partial a_{12}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{E_{t}}{\partial a_{mn}} = 0, \quad \dots$$
 (12-67)

其一般形式为

$$\frac{\pi^4 a b D}{4} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} dx dy = 0 \qquad (12-68)$$

这是一组以 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ 为未知量的 $m \times n$ 个线性方程。在某一指定情况下,这些 量可以算出。当取 m, n 为无穷大时,则得问题的精确解,当 m, n 为有限数量时,即得 近似解。如板在 $x = \xi, y = \eta$ 处受集中力 *F* 作用,则由式(12-68)得

$$a_{mn} = \frac{4F \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\pi^4 abD \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$
(12-69)

将式(12-69)代入式(12-64)得

$$w = \frac{4F}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \times \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$
(12-70)

如载荷作用在板的中点,即 $\xi = \frac{a}{2}, \eta = \frac{b}{2}, \eta$

$$\omega = \frac{4F}{\pi^4 a b D} \sum_{m,n=1,3\cdots}^{\infty} \sum_{m=1,3\cdots}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^{-2} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{m \pi y}{b}$$
(12-71)

对于方板 a=b,且取级数第一项时,得中点挠度为

$$w_{\rm max} = 0.0112 \, \frac{Fa^2}{D}$$
 (12-72)

此解与精确解相比小 3.5%。

3. 伽辽金法解例

前面曾经谈到,伽辽金法要求选取一个满足板的位移边界条件和应力边界条件 的挠曲函数 w(x,y),而 w(x,y)却不一定严格满足板的平衡微分方程。在这个前提 下,寻求一个近似地满足平衡微分方程的解。与里茨法所不同的是,可以不必计算板 的总势能(或总余能),而直接从微分方程入手,这在第9章已经讨论过。

设有四边支承的矩形板,挠曲函数取如下形式:

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{12-73}$$

式中 $\varphi_k = \varphi_k(x, y)$ 应满足全部边界条件。

实际上,如板在平衡状态下有虚位移(挠度)δw,则外载荷的相应的虚功为

$$\delta W = \iint_A q \, \delta w \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

由于, $q=D\nabla^2\nabla^2w$,故当 w 是微分平衡方程的精确解时,则有

$$\iint_{A} q \, \delta w \mathrm{d} x \mathrm{d} y = \iint_{A} D \, \nabla^2 \nabla^2 w \delta w \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

当取挠曲函数为式(12-73)所示的近似解时,因

.

$$\delta w = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \delta a_k$$

则可由式(11-48)得下列方程组:

$$\iint_{A} \left(\nabla^{2} \nabla^{2} w - \frac{q}{D} \right) \varphi_{k} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$$
(12-74)

将式(12-73)代入式(12-74)对未知系数 $a_k(a_k=1,2, 3, \dots, n)$ 求解,即可得挠曲函数的表达式。

设有四边固定的矩形板(图 12-20),受均布载荷作 用,假定板的挠曲函数为下列简单形式:

$$w = a_1 \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \times \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$
(a)
上述函数(a),满足边界条件。实际上,当 $x = a$ 及

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

由式(12-74)得

y=b时,

$$\int_{0}^{a}\int_{0}^{b} (\nabla^{2}\nabla^{2}w)\varphi_{k} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\frac{q}{D}\varphi_{k} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

即

$$-\int_{a}^{a}\int_{0}^{b}a_{1}\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{4}\cos\frac{2\pi x}{a}+\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi y}{a}\right)\left(\frac{2\pi}{b}\right)^{4}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{2}\left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2}\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]\times\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)$$
$$=\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\frac{1}{2}\frac{q}{D}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)dxdy$$

由此

$$a_{1} = -\frac{q}{D} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{4} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(\frac{2\pi}{b} \right)^{4} \cos \frac{2\pi y}{b} \right]$$



$$-\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]^{-1}$$

在板中心,最大挠度为

$$w_{\max} = \frac{qa^2b^2}{8\pi^4 D} = 0.00128 \frac{qa^2b^2}{D}$$

以上结果与精确解相比仅小 1.6%。

1. 薄板是指板厚度 δ 与板的最小边长满足下列关系式

$$\left(\frac{1}{80} \sim \frac{1}{100}\right) \leqslant \frac{\delta}{b} \leqslant \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{8}\right)$$

不然则属于厚板或薄膜。厚板理论要比薄板理论复杂得多,薄板理论因基尔霍夫-勒夫假定得到了很大的简化。

2. 薄板的平衡方程,在直角坐标系中为

 $D \nabla^2 \nabla^2 w = q$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,而在极坐标(ρ, φ)(轴对称情况)中为

$$D\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\rho}\right) = q(\rho)$$

3. 板的边界条件的各种类型(见表 10-1)。注意每一个边界条件必须是独立的。
 独立的边界条件不能多也不能少。

4. 矩形板的经典解法-莱维解是采用下列形式

 ∇

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

它是半幅的单傅里叶正弦级数。w 应取 $w = w_1 + w_2, w_1$ 应满足平衡方程的齐次解, w_2 满足特解,即

$${}^{2}\nabla^{2}w_{1}=0$$
 $D\nabla^{2}\nabla^{2}w_{2}=q(x,y)$

5. 圆板的平衡方程(在轴对称情况)有两种形式: (1)以内力为未知函数表示;(2)以挠度为未知函数表示。

思考题

12-1 薄板理论的基本假定有哪些方面使问题得到简化?为什么?

12-2 板(矩形板)的每个边的边界条件有几个?为什么?

12-3 你能否给出四角点支承的矩形板的边界条件?

12-4 以圆板为例,当用内力作为未知函数求解时,需要哪些方程和条件?

习 题

- **12-1** 写出应力 $\sigma_x, \sigma_y, \dots,$ 表示的板的平衡方程。
- 12-2 证明在极坐标系内,下式成立

$$Q_r = rac{\partial M_r}{\partial r} + rac{\partial M_{ heta r}}{r \partial heta}, \quad Q_{ heta} = rac{\partial M_{ heta}}{r \partial heta} + rac{\partial M_{ heta r}}{\partial r}$$

- 12-3 试用纳维法求图示方板的最大挠度。
- 答案: $w_{\text{max}} = 0.00203 \frac{q_0 a}{D}$



12-4 求图示环板在周边载荷 P 作用下的最大挠度。设 R/a=1.5, y=0.3,板 厚为 h_{o}

答案: $w_{max} = 0.209 \frac{PR^2}{Eh^3}$ 12-5 详细推导板的总势能 E_t 的公式。 12-6 试证在薄板问题中, $\delta E_t = 0$ 与下式 $D \nabla^2 \nabla^2 w = q$

及边界条件等价。

▲ 第 13 章 薄 売

13.1 壳体结构的受力特点

在工业与民用建筑中,壳体是一种常见的屋盖结构形式。此外,壳体常用来作为 容器,如拱壳坝、水轮机蜗壳、飞机与船舰结构等。它的主要特点是薄壁曲面空间结 构,受力性能好,能较充分地发挥材料的潜力。

常见的壳体结构按其外形分为:圆柱形壳(图 13-1)、旋转面壳(图 13-2)、双曲扁 壳(图 13-3)和扭壳(图 13-4)等。



壳体中平分厚度的曲面称为中面。而其厚度 h 通常比其跨度 l 和曲率半径 R 要 小得多 $\left(\left(\frac{h}{R}\right)_{\max} \leqslant \frac{1}{20}\right)$,故称为薄壳。对于那些较厚的壳 $\left(\left(\frac{h}{R}\right)_{\max} > \frac{1}{20}\right)$ 应做专门 讨论,我们这里只讨论薄壳。



壳体的表面一般是曲面,今后我们谈到曲面将理解为壳的中面。由于曲面的微 分几何关系较为复杂,使得壳体问题的分析增加了数学上的难度。曲面理论的基本 知识可参看有关文献,例如,B•B•诺沃日洛夫著,《薄壳理论》,科学出版社,1977。

用微分学处理各种物理问题时,往往在微小单元内把问题线性化。这样,在正交 坐标系中,对于无限小的线段 ds,下列关系近似地成立:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \tag{13-1}$$

其中 ds_1 , ds_2 为对应于曲线坐标 α 和 β 的增量线段(图 13-5),它和自变量的微分成正比:

$$ds_1 = A d\alpha
 ds_2 = B d\beta$$
(13-2)

A, B可理解为把曲线坐标 α, β 的增量化为直线线段时的长度系数,称为拉梅系数,将式(13-2)代入式 (13-1)后得



 $\mathrm{d}s^2 = A^2 \mathrm{d}\alpha^2 + B^2 \mathrm{d}\beta^2 \tag{13-3}$

上式称为在正交坐标系 α , β 内的第一个二次式。其中 A、B 即拉梅系数,或称为第一 个二次式的系数,它们在一般情况下是 α 和 β 的函数。

给定曲面以后,A和B可直接求出。例如,对于任意旋转壳(图 13-6(a)),坐标 系取 φ, θ, z ,则由图 13-6 可知

$$ds_2 = rd\theta$$

由图 13-6(b)有

$$\mathrm{d} s_1 = \mathrm{d} z \; rac{1}{\mathrm{sin} arphi} = \mathrm{d} z \; \sqrt{1 + \mathrm{cot}^2 arphi}$$
 $= \mathrm{d} z \; \sqrt{1 + \left(rac{\mathrm{d} r}{\mathrm{d} z}
ight)^2}$

$$\mathrm{d}s = \Big[1 + \Big(rac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\Big)^2\Big]\mathrm{d}z^2 + r^2\,\mathrm{d} heta^2$$



13-6

即有

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2}, \quad B = r \tag{13-4}$$

同理可得其他情况的二次式系数。

壳体是一种空间结构,其计算理论是比较复杂的。目前仍采用板弯曲理论中的 基尔霍夫-勒夫假设,即

1) 变形前垂直干中面的直线线段,变形后仍保持为直线,并垂直干变形后的中 面,且此线段的长度不变。

2) 垂直于中面的法向应力与其他应力相比很小,可以略去不计。

根据以上假定,在壳中面任一点 O,沿两个主曲率方向取微小单元体 abcd(图 13-7), 则坐标轴即分别为单元体中面在O点主曲率线的两条切线(x, y)和中面的法线(z)。

单元体上的应力为 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (= τ_{yx}), τ_{xz} (= τ_{zx})及 τ_{yz} (= τ_{zy})(根据假定 σ_z =0), 如图 13-7 所示。设主曲率半径为 r_x , r_y ,则图 13-7 中 cd 截面上坐标 z 处的阴影窄 条面积 dF 为



冬 13-7

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{ad}} = \left(\mathrm{d}y - \frac{z\mathrm{d}y}{r_{\mathrm{y}}}\right)\mathrm{d}z = \left(1 - \frac{z}{r_{\mathrm{y}}}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

同理,在 bc 截面上的阴影窄条面积为

$$\mathrm{d}F_{bc} = \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}z$$

壳体单位长度截面上的内力应为法向力 N_x , N_y , 中面剪力 N_{xy} , N_{yx} , 横剪力 Q_x , Q_y 及弯矩 M_x , M_y 和扭矩 M_{xy} , M_{yx} 等 10 个, 如下所示:

$$N_{x} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) dz$$

$$N_{y} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{y} \left(1 - \frac{z}{r_{x}}\right) dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) dz$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) z dz$$

$$M_{x} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{y} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) z dz$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) z dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) z dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) z dz$$

$$Q_{x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx} \left(1 - \frac{z}{r_{y}}\right) dz$$

$$Q_{y} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_{x}}\right) dz$$

以上各类内力所作用的面如图 13-8 所示,它们的正负号规定如下:法向力 N_x , N_y 以拉力为正。中面剪力 N_{xy} , N_{yx} 以使 x,y 正号方向的夹角减小为正。横剪力 Q_x , Q_y 作用在x,y的正方向一边时以指向z 的正方向为正。弯矩 M_x , M_y 以壳体在 z 的正方向一面产生拉应力时为正。扭矩 M_{xy} , M_{yx} 则以用右手螺旋定则表示的力矩 矢量与其所在面的外法线方向相同时为正,反之均为负。图 13-8 中给出的都是正 内力。

对于薄壳来说,式(13-5)中的 $\frac{z}{r_x}$, $\frac{z}{r_y}$ 与1相比均为很小的量,如略去不计,则有 $N_{xy} = N_{yx}$, $M_{xy} = M_{yx}$

从而全部内力就只有 8 个分量。这 8 个内力分量,可分成两组:一组是作用在壳中面 内的内力 N_x , N_y , $N_{xy} = N_{xx}$,它们使中面产生拉、压和剪切变形,称为薄膜内力。另 一组为使中面产生弯曲和扭曲的内力 $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}$ 和 $Q_x, Q_y,$ 称为弯曲内力, 统称为广义力。



壳体问题的边界条件有

(1) 对于不动铰支承(图 13-9 中的 ef),有

 $M_{\beta}=0, \quad u=v=w=0$

其中u, v, w分布为 α, β, z 方向的位移。

(2) 对于在曲面法线方向可动的铰支承(图 13-9 中的 gh),则有

$$M_{eta}=0$$
, $Q_{eta}+rac{1}{A}rac{\partial M_{aeta}}{\partial a}=0$, $u=v=0$

(3) 对于固定支承, 若图 13-9 中的 ef 边改为固定边, 则有

$$u = v = w = 0$$
, $\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} = 0$

(4) 对于自由支承, 若在 α = 常数处沿 β 坐标为一自由边, 则有

$$N_y = N_{xy} = M_y = Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = 0$$

13.2 薄膜理论

如在壳体分析中忽略其弯曲内力,只考虑薄膜内力 N_x , N_y , $N_{xy} = N_{yx}$,就是说,把 壳体看成一张不抵抗弯曲和扭曲的薄膜。这种简化理论叫做薄膜理论或无矩理论。

欲使壳体实现薄膜应力状态,需满足以下几个条件:(1)壳中面的曲率连续变化; (2)壳的厚度连续变化;(3)载荷的分布连续变化;(4)壳支承处只在中面切线方向 产生反力。如这几种条件不满足,壳中就要产生弯曲变形及相应的内力。对于大多 数薄壳来说,除(4)外,这些条件是容易满足的。如支承情况不满足以上要求,则在支座 附近将有弯曲内力产生。薄膜理论计算简便。在满足以上条件时,可以采用薄膜理论。

1. 圆柱壳

现在以圆柱形壳为例来进一步说明薄膜理论。取图 13-10 所示的圆柱坐标系。 其中 *x* 轴平行于壳体的母线。



冬 13-10

取微小单元,如图 13-10(b)所示,作用在此微小单元边缘上的所有薄膜力均画 在图上。取局部坐标 x, y, z,其中 y 轴沿柱面周向切线方向,z 轴沿法线方向(图 13-10(b))。外载荷沿 x, y, z 方向的分量为 q_x , q_y , q_z 。于是,由 $\Sigma X=0$,得

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x + q_x r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x = 0$$

由 $\Sigma Y = 0$,得

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x + q_{y} r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x = 0$$

由 $\Sigma Z = 0$,得

$$N_{\varphi} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x + q_z r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}x = 0$$

于是,平衡方程为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = -q_x$$

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} = -q_y$$

$$N_x = -q_z r$$
(13-6)

由此可见,用薄膜理论解圆柱壳的平衡问题,归结为解包含三个未知内力的方程组 (13-6)。显然,这是一个静定问题。由式(13-6)第三式,立即得出 N_{φ} ,代入第二式积 分后可得 $N_{x\varphi}$ 。最后由第一式积分得 N_x 。积分中出现的任意函数由边界条件确定。

例 13-1 计算简支于两端横隔^①上的圆柱壳屋盖受自重作用时的内力。设单位 面积上的壳自重为 $p(N/m^2)$,载荷的分力为 $q_x=0, q_y=p\sin\varphi, q_z=p\cos\varphi$ 。

解 由式(13-6)**第三式**得

$$N_{\varphi} = -pr\cos\varphi \tag{13-7}$$

由式(13-6)第二式有

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} = -p\sin\varphi - p\sin\varphi = -2p\sin\varphi$$

故对 x 积分后得

 $N_{x\varphi} = -2px\sin\varphi + C_1(\varphi)$

此处 $C_1(\varphi)$ 为 φ 的任意函数。如将坐标原点取在跨中,则由于对称性^②,当 x=0 时, $N_{x\varphi}=0$,由此得 $C_1(\varphi)=0$,即

$$N_{x\varphi} = -2px\sin\varphi \tag{13-8}$$

由式(13-6)第一式可得

$$N_x = \frac{px^2}{r} \cos\varphi + C_2(\varphi)$$

其中 $C_2(\varphi)$ 为第二个任意函数,为要确定 $C_2(\varphi)$,考虑 $x = \pm \frac{l}{2}$ 处的边界条件。已知 在 $x = \frac{l}{2}$ 处有屋盖之横隔(图 13-11),横隔只能承受在其平面内的力,故有

当
$$x = \frac{1}{2}$$
时, $N_x = 0$

由此得

$$C_2(\varphi) = -\frac{pl^2}{4r}\cos\varphi$$

于是得

$$N_x = -\frac{p\cos\varphi}{4r}(l^2 - 4x^2)$$
(13-9)

① 横隔本身平面刚度很大,但抗弯刚度极小。

② 壳体几何形状、载荷及边界条件都对称。



图 13-11

作为屋盖的柱壳,通常两个直线边都设有边梁(图 13-11(a))。现在考察壳体两个侧 边的内力。壳体的侧边 $\varphi = \varphi_0$ 的内力由式(13-7),(13-8)得

$$\begin{array}{c} N_{\varphi} = - pr \cos\varphi_{0} \\ N_{er} = -2 px \sin\varphi_{0} \end{array}$$

$$(13-9')$$

可见,壳边有不平衡的剪力 N_{φ} 及内力 N_{φ} 存在,于是,边梁受相等相反的力作用,如图 13-12 所示。这就是说,在边梁中有纵向剪力及弯曲内力等存在。如 $\varphi_0 = \pi/2$,则有

$$\begin{cases} N_{\varphi} = 0\\ N_{x\varphi} = -2\,px \end{cases}$$

由以上讨论可见,壳在边界上受力情况是较为复杂的。壳的变形将受到边梁的 约束而引起弯曲,从而产生弯曲内力;此外,边梁的自重将部分地由壳体承担;由壳经 横隔传到支柱上去。这也是引起壳体弯曲的因素。所以壳内的薄膜内力状态在边界 附近难以保证。这种误差可用有矩理论或边界效应理论加以修正。

例 13-2 讨论圆柱形贮液筒壁的内力。设定圆柱形壳的半径为 R_0 ,高度为 L(图 13-13)装满密度为 $\rho(kg/m^3)$ 的液体。贮液筒下端固定在底板上,上端开口。现 求筒壁的内力。





解 在此情况下,液体对缸壁的压力为 $q_x = q_y = 0$, $q_z = -\rho(L-x)$,将此压力代入式(13-6)得

$$N_{\varphi} = R_0 (L - x)\rho$$

$$N_{x\varphi} = f_1(\varphi)$$

$$N_x = -\frac{x}{R} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + f_2(\varphi)$$
(a)

式(a)中的任意函数 $f_1(\varphi), f_2(\varphi)$ 可由下列边界条件确定: 当 x=0

当x = L

于是可得

$$f_1(\varphi) = f_2(\varphi) = 0 \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)得

$$N_{\varphi} = R_0 (L - x)\rho$$
$$N_{x\varphi} = N_x = 0$$

 $N_{xx} = 0$

 $N_{\pi} = 0$

不难理解,当贮液筒壁薄半径大时,用薄膜理论能给出全筒中应力状态较好的近 似解答。因为底部固定端的弯曲应力的影响在离底稍远处便已消失。而对于壁厚半 径小的筒,底部边界影响就较大。

2. 旋转壳

圆柱形壳可以认为是由一条平行于旋转轴(x 轴)的直线绕 x 轴旋转一周所成的 柱面壳。一般地,如由一条平面曲线围绕位于该平面内的某一轴线旋转而成的曲面 作为中面的壳体,就统称为旋转壳。这条平面曲线称为子午线或经线,而与旋转轴成 正交的任一平面截壳面所成的圆,则称为平行圆,或纬线。图 13-14 为一旋转曲面。 曲面上任一点的位置由角度 φ 和 θ 确定, θ 是由某一基准经线 O'A 到 Oc 绕轴旋转的 角度, φ 角为中面上一点的法线与旋转轴间的夹角。取流动坐标 x, y, z, 由图 13-14 (a)所示。则 φ 为旋转轴与z 轴间的夹角, r_0 为过 b 点的平行圆的半径, r_1 表示壳体中 面沿经线的曲率半径, r_2 表示与上述主曲率线正交的另一主曲率线的曲率半径。

现在考虑由两条子午线和两条平行圆截出的微小曲面单元 *abcd*,如图 13-14(a) 所示。由图可知

$$ds = \hat{ab} = r_1 d\varphi$$

$$r_0 = r_2 \sin\varphi \qquad (13-10)$$

$$\hat{bc} = (r_2 \sin\varphi) d\theta$$



冬 13-14

以下考虑薄膜应力状态。作用在微小单元上的薄膜内力为:沿子午线方向的薄膜力 N_{φ} ,和沿纬线方向的薄膜力 N_{θ} ,以及分别作用在子午线与平行圆上的剪力 $N_{\theta\varphi}$ 和 $N_{\omega\theta}$,如图 13-14(c)所示。

在许多情况下,外载荷对于旋转轴为对称,即无 q_x 分量,薄膜剪力 $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = 0$, 而仅有薄膜内力 N_{φ} 和 N_{θ} 。以下讨论这种情况。

我们列出旋转壳微小曲面单元 *abcd* 的力的平衡条件。为此,取 *abcd* 的中心为 流动坐标 x_1 , y_1 , z_1 的原点。由于对称性,只需建立 y_1 、 z_1 两个坐标轴方向的平衡条 件。以下首先列出沿 y_1 轴方向的平衡条件,注意到两经线截面的内力的合力为 N_{θ} dsd θ ,它在纬线平面内并指向纬圈中心(图 13-14(b)),由平衡条件 $\Sigma Y_1 = 0$,并略 去三阶以上微量,可得

 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(N_{\varphi}r_{0}\,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}s - N_{\theta}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\mathrm{cos}\varphi + q_{y}r_{0}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s = 0$

上式第一项为纬线方向两相对截面上内力之差,如图 13-14(b)所示,第二项为 经线方向两相对截面上内力的合力在 y1轴方向的投影,第三项为外载荷在 y1轴方向 的投影。将上式除以 d*d*ds 后得

$$\frac{\mathrm{d}(N_{\varphi}r_{0})}{\mathrm{d}s} - N_{\theta}\mathrm{cos}\varphi + q_{y}r_{0} = 0 \qquad (13-11)$$

由图 13-14(a),(d)可见,上下两条纬线间的夹角为 d φ ,忽略二阶微量后,上下两 纬线截面上的内力合力为 $N_{\varphi}r_{0} d\theta d\varphi$,且与 z_{1} 轴重合,由平衡条件 $\Sigma Z_{1} = 0$,各项除以 $dsd\theta$ 并注意到 $d\varphi = \frac{ds}{r_{0}}$,可得

$$N_{\varphi} \frac{r_0}{r_1} + N_{\theta} \sin\varphi + q_z r_0 = 0$$

将上式各项除以 r_0 ,并注意到 $r_0 = r_2 \sin \varphi$,可得

$$\frac{N_{\varphi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} + q_z = 0 \tag{13-12}$$

方程(13-11)和(13-12)是旋转壳薄膜理论的基本方程式。由此看出,这个问题 也是"静定"问题,即从此两个方程便可以完全确定内力。

方程(13-11)和(13-12)的解法,可首先消去 N_{θ} ,之后,将所得仅含 N_{φ} 的方程积 分求解 N_{φ} 。实际上, N_{φ} 的求法可采用以下较简便的方案。即将壳体沿某一平行圆 截开(图 13-15),然后将微小长度 $r_0 d\theta$ 上的 N_{φ} 的竖向分量 $N_{\varphi}r_0 d\theta \sin\varphi$ 加起来,即

$$\int_{0}^{2\pi} N_{\varphi} r_{0} \sin\varphi \mathrm{d}\theta = N_{\varphi} \cdot 2\pi r_{0} \sin\varphi$$



冬 13-15

令它和截出壳体上的外力的总垂直分量 R 相加等于零,则可得 N_{g} (图 13-15(b)):

$$2\pi N_{\varphi} r_{0} \sin\varphi + R = 0$$

$$N_{\varphi} = \frac{-R}{2\pi r_{0} \sin\varphi}$$
(13-13)

例 13-3 有半径为 a 的球顶壳,每单位球面上的自重为 $q(N/m^2)$,周边为铰支 承(如图 13-16),求壳体内力分布。

解 已知条件有

$$r_0 = a \sin \varphi$$

A 点以上部分的载荷合力为

$$R = 2\pi \int_{0}^{\varphi} a \sin\varphi q a \, \mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi a^{2} (1 - \cos\varphi) q$$

由式(13-13)得

$$N_{\varphi} = \frac{-R}{2\pi a \sin^2 \varphi} = \frac{-aq \left(1 - \cos \varphi\right)}{\sin^2 \varphi}$$
$$= \frac{-qa}{1 + \cos \varphi}$$



考虑到

$$q_z = q \cos \varphi$$

故由式(13-12)得

$$N_{ heta} = -aq\left(rac{-1}{1+\cosarphi}+\cosarphi
ight)$$

从以上结果可知, N_{φ} 恒为负,因此整个球顶壳在子午线方向受到压缩,且压应力 随 φ 的增加而增加,在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $N_{\varphi} = -aq, \varphi = 0$ 时, $N_{\varphi} = -aq/2$,而 N_{θ} 则在壳的上 部为负,下部为正。其变号点处, $N_{\theta} = 0$,即

$$aq\left(\frac{1}{1+\cos\varphi}-\cos\varphi\right)=0$$
$$(-\cos\varphi-\cos^{2}\varphi)=0$$

由此得

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$
$$\varphi = 51^{\circ}49'$$

或

或

即在 $\varphi = 51^{\circ}49'$ 处, N_{θ} 变号(如图 13-17 所示)。若球壳之中心角小于 $51^{\circ}49'$,则壳内 将不出现受拉区。



在此例中,若支承反力系在壳体经线方向,则边界上只有薄膜力 N_e。若在边界上的约束使得壳体边缘受到横向力作用,则在边界附近将产生弯曲应力。按薄膜理论计算的结果,在边界上不能反映这种情况。所以,壳球底部支承反力若能保证在经线方向时,则用薄膜理论计算的结果更为可靠。

例 **13-4** 若在例 13-3 中的球顶壳屋盖上开天窗后,上下边均加肋,上端作用有 分布载荷 *p*,求壳体内力(图 13-18)。

解 壳顶部的薄膜内力为

$$N_{\varphi} = -\frac{p}{\sin\varphi_0}$$

而壳顶的水平分力,可认为由顶部加肋环承 担。当壳面无载荷时,各平行圆以上的合力 均为

$$R = 2\pi pa \sin \varphi_0$$

由式(13-13)得

$$N_{\varphi} = -\frac{R}{2\pi r_0 \sin\varphi} = \frac{-pa \sin\varphi_0}{\sin\varphi(a \sin\varphi)} = \frac{-p \sin\varphi_0}{\sin^2\varphi}$$

而 $q_z=0, r_1=r_2$,故

$$N_{ heta} = -N_{arphi} = rac{-p\sinarphi_0}{\sin^2arphi}$$

当需同时考虑自重产生的内力时,则可分别计算后将两部分的解叠加得最终结果。

13.3 圆筒壳轴对称问题的有矩理论

当考虑了壳体的弯曲内力后,在薄壳弯曲问题中,总的内力分量将增至 10 个。 显然问题复杂多了。但对于封闭的圆柱形筒壳在对称(指对于柱面的中心轴为对称) 载荷作用下,应力分量的数目。将因对称关系而减少。这时,非对称的剪力 N_{xy} 和 N_{yx} 及扭矩 M_{xy} 和 M_{yx} 必等于零。此外,对于任意平行圆来说, M_{y} 和 N_{y} 应与 y 无关, 故 Q_{y} 必等于零。于是,不等于零的内力仅有 5 个: N_{x} , N_{y} , M_{x} , M_{y} 和 Q_{x} 。

由单元体的平衡条件 $\Sigma X = 0($ 图 13-19),得

$$\left(N_x + \frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x}\right) r \,\mathrm{d}\varphi - N_x r \,\mathrm{d}\varphi + X \mathrm{d}x r \,\mathrm{d}\varphi = 0 \tag{a}$$

这里 X 为单位面积上沿 x 方向的外载荷集度。当 X=0 时,得

$$\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{13-14}$$

232





冬 13-19

$$N_x =$$
常数 (b)

如果两端边界沿 x 方向自由,则 $N_x = 0$ 。由平衡条件 $\Sigma Z = 0$,得

$$\frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}x} + \frac{N_\varphi}{r} + q = 0 \tag{13-15}$$

其中 q 为单位面积上沿 z 方向的外载荷集度。

再由平衡条件 $\Sigma M_{y} = 0$ 得

$$\left(M_x + \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)r\,\mathrm{d}\varphi - M_xr\,\mathrm{d}\varphi - Q_xr\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x = 0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} - Q_x = 0 \tag{13-16}$$

将式(13-15),式(13-16)合并得

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_{\varphi}}{r} + q = 0$$
(13-17)

方程(13-14),(13-17)中共包含有 3 个未知函数: N_{φ} , N_{x} , M_{x} ,或(13-17)一个方 程中包含两个未知函数 M_{x} , N_{φ} ,故问题的解必需补充变形条件或几何条件。

现在考虑中面的位移。由于对称,柱面环向位移分量 v 必须等于零。而只考虑 $x_{3,z}$ 方向的位移分量 u 和 w 。

应变分量的表达式为

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{w}{r}$$
 (13-18)

式(13-18)中第二式表示壳体的环向应变 ϵ_{φ} ,现证明如下(图 13-20):

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{\overline{AB}}$$
$$= -\frac{rd\varphi - (r-w)d\varphi}{rd\varphi} = -\frac{w}{r}$$
(13-19)

rdø

图 13-20

因而由胡克定律和式(13-18),且 $N_r = 0$,得

$$N_{x} = \frac{Eh}{1 - \nu^{2}} (\varepsilon_{x} + \nu \varepsilon_{\varphi}) = \frac{Eh}{1 - \nu^{2}} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{r} \right) = 0 \quad (c) \quad A \xrightarrow{w} B$$

$$N_{\varphi} = \frac{Eh}{1 - \nu^{2}} (\varepsilon_{\varphi} + \nu \varepsilon_{x}) = \frac{Eh}{1 - \nu^{2}} \left(-\frac{w}{r} + \nu \frac{du}{dx} \right) \quad (d)$$

$$\texttt{tht}(c)$$

$$\texttt{tht}(c)$$

$$\texttt{tht}(c)$$

$$\texttt{tht}(c)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \nu \, \frac{w}{r}$$

干是由式(d)有

$$N_{\varphi} = -Ehw/r \qquad (13-20)$$

由薄板理论,有

$$M_x = -D \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \tag{13-21}$$

$$M_{\varphi} = {}_{\mathcal{M}_x} \tag{f}$$

此处, $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ 称为薄壳的抗弯刚度。

将式(13-20)、(13-21)代入式(13-17),得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(D \, \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \right) + \frac{Eh}{r^2} w - q = 0 \tag{13-22}$$

由此可见,圆柱壳的对称变形问题归结为求解方程(13-22)。

当壳体厚度为常数时,式(13-22)化为

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + 4\beta^4 w = \frac{q}{D} \tag{13-23}$$

其中

$$\beta^{4} = \frac{Eh}{4r^{4}D} = \frac{3(1-\nu^{2})}{r^{2}h^{2}}$$

常微分方程(13-23)可用通常的方法求解。当w求得后,则不难由式(13-20), (13-21)求得 N_{ω} 及 M_{x} 等内力。

现在讨论式(13-23)的解。这是一个四阶线性常微分方程,它的解包含两部分, 即齐次方程的一般解和一个特解。其中齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + 4\beta^4 w = 0 \tag{13-24}$$

的解令为

$$w = \sum_{n} A_n e^{\lambda_n r} \tag{13-25}$$

其中 A_n 为任意常数, λ_n 为待定参数。则将式(13-25)代入式(13-24)得

$$\sum_{n} A_{n} (\lambda_{n}^{4} + 4\beta^{4}) e^{\lambda_{n} x} = 0$$

由此得

$$\lambda_n^4 + 4\beta^4 = 0 \tag{13-26}$$

其根为

$$\lambda_n = \pm \sqrt{2}\beta \sqrt[4]{-1}$$

由复数开方的法则知 $\sqrt[4]{-1}$ 的四个根可表示为 $\pm (1\pm i)/\sqrt{2}$,其中 $i = \sqrt{-1}$,由此, λ_n 的四个根为 $\lambda_n = \pm (1\pm i)\beta$ 将 λ_n 的值代入式(13-25)得

$$w = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x}$$

= $e^{\beta x} (A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x) + e^{-\beta x} (A_3 \cos\beta x + A_4 \sin\beta x)$

方程(13-23)的特解随外载荷 p 的特征而变化,此特解可用 f(x)表示。于是,微分方 程(13-23)的全解为

$$w = e^{\beta x} \left(A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x \right) + e^{-\beta x} \left(A_3 \cos\beta x + A_4 \sin\beta x \right) + f(x) \quad (13-27)$$

或

 $w = A_1 \sin\beta x \operatorname{sh}\beta x + A_2 \sin\beta x \operatorname{ch}\beta x + A_3 \cos\beta x \operatorname{sh}\beta x + A_4 \cos\beta x \operatorname{ch}\beta x + f(x)$ (13-28)

式中 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 为任意常数,它们须由壳体的边界条件确定。

在许多情况下,以上常数的数目可减到两个。例如①对于半无限长壳,当 x 取 很大的值时, e^{α} 的值也很大,然而径向变形应当很小(应等于零),故应有 $A_1 = A_2 =$ 0;②对于端部支承对称的情况,可将坐标原点选在对称断面上,则由于对称性,径向 位移应对原点对称,由式(13-28)可见,只有 $\sin\beta x \sh\beta x$ 和 $\cos\beta x \cosh\beta x$ 是对称的,故其 他项的系数,即 A_2 , A_3 必等于零。这样,方程(13-27)便得到了简化。

例 13-5 设有长圆柱形筒壳,在其中部受环向压力作用(图 13-21),试求其内力 及位移。



冬 13-21

解 由题意知

$$N_x = 0, \quad f(x) = 0, \quad N_{x\varphi} = M_{x\varphi} = 0$$
$$w = e^{-\beta x} \left(A_3 \cos\beta x + A_4 \sin\beta x \right)$$
(a)

而

$$N_{\varphi} = \frac{-Ehw}{a} \tag{b}$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$$
$$M_{\varphi} = -D_{\nu} \frac{d^2 w}{dx^2}$$
$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3}$$

当 x=0 时, $Q_x=-p/2$,且由于对称应有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0$$
 (在 $x = 0$ 处)

故式(a)中的常数 A_3 , A_4 应由下列条件确定

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = \left[-\beta A_3 \mathrm{e}^{-\beta x} \left(\cos\beta x + \sin\beta x\right) + \beta A_4 \mathrm{e}^{-\beta x} \left(\cos\beta x - \sin\beta x\right)\right]_{x=0}$$
$$= -A_3 + A_4 = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{3} w}{\mathrm{d}x^{3}}\right)_{x=0} = \left[2\beta^{3} A_{3} \mathrm{e}^{-\beta x} \left(\cos\beta x - \sin\beta x\right) + 2\beta^{3} A_{4} \mathrm{e}^{-\beta x} \left(\cos\beta x + \sin\beta x\right)\right]_{x=0}$$
$$= 2\beta^{3} \left(A_{3} + A_{4}\right) = \frac{p}{2D}$$

由此得: $A_3 = A_4 = \frac{p}{8\beta^3 D}$ 。 将 A_3 , A_4 之值代入式(a)得

$$w = \frac{p e^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin\beta x + \cos\beta x)$$
(13-29)

将式(13-29)代入内力的表达式得

$$N_{\varphi} = -\frac{Ehw}{a} = -\frac{Ehpe^{-\beta x}}{8\beta^{3}Da}(\sin\beta x + \cos\beta x)$$

$$M_{x} = -D\frac{d^{2}w}{dx^{2}} = \frac{pe^{-\beta x}}{4\beta}(\cos\beta x - \sin\beta x)$$

$$M_{\varphi} = -D_{\nu}\frac{d^{2}w}{dx^{2}} = \frac{2pe^{-\beta x}}{4\beta}(\cos\beta x - \sin\beta x)$$

$$Q_{x} = -D\frac{d^{3}w}{dx^{3}} = \frac{pe^{-\beta x}}{2}\cos\beta x$$

$$(13-30)$$

引进下列函数:

$$A(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos\beta x + \sin\beta x)$$

$$B(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos\beta x - \sin\beta x)$$

$$C(\beta x) = e^{-\beta x} \cos\beta x$$

$$D(\beta x) = e^{-\beta x} \sin\beta x$$

$$(13-31)$$

βx	А	В	С	D
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	0
0.5	0.8231	0.2415	0.5323	0.2908
1.0	0.5083	-0.1108	0.1988	0.3096
1.5	0.2384	-0.2068	0.0158	0.2226
2.0	0.0667	-0.1794	-0.0563	0.1230
2.5	-0.0166	-0.1149	-0.0658	0.0492
3.0	-0.0423	-0.0563	-0.0493	0.0071
3.5	-0.0389	-0.0177	-0.0283	-0.0106
4.0	-0.0258	-0.0019	-0.0120	-0.0139
4.5	-0.0132	0.0085	-0.0023	-0.0108
5.0	-0.0046	0.0084	0.0019	-0.0065
6.0	0.0017	0.0031	0.0024	-0.0007
7.0	0.0013	0.0001	0.0007	0.0006

其值随 βx 的变化如图 13-22(及表 13-1)所示。

表 13-1 函数 A, B, C, D 的值

注: 摘自参考文献 Timoshenko s. et al., Theory of plates and shells, 2nd edition, 1959. pp. 472-473.

由图 13-22 看出,w, M_x , M_φ , N_φ , Q_x 之值均在 x=0 处为最大值,即

$$w_{\max} = \frac{p}{8\beta^3 D} = \frac{pa^2\beta}{2Eh}$$

$$(M_x)_{\max} = \frac{p}{4\beta}$$

此外,由图 13-22 可知,当 $x > \pi/\beta$ 时,内力与位移均趋于零。这就是说,当圆柱形筒



冬 13-22

壳长度为 $L=2\pi/\beta$,载荷作用在中间断面时,则可视为无限长壳来计算,其中间断面 处的内力与位移和上式相同。

应当注意,由式(13-29),(13-30)所确定的壳体的位移和内力,为衰减很快的周 期函数。衰减函数的半波长为

$$\sin\beta\lambda = \sin\pi$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\beta}$$

设 x=0 处的位移为 w_0 ,距 x=0 为半波长 λ 处的位移为 w_λ ,则二者之比可由式 (13-29)得出为

$$\left|\frac{w_0}{w_{\lambda}}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-\beta x}\left(\sin\beta x + \cos\beta x\right)}{e^{-\beta(x+\lambda)}\left(\sin\beta(x+\lambda) + \cos\beta(x+\lambda)\right)}\right| = \left|\frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\lambda}}\right| = 23.14$$

可见,离开x=0断面后,位移的衰减是很快的。

x=0的断面可理解为壳体的一个边界。实际上,如将这个无限长的壳,在*x*=0 断面截开,一分为二,各自作用以原载荷的一半,则结果不变。所以*x*=0断面实际 上是一个半无限长壳的边界。这种衰减很快的弯曲应力状态称为边缘效应。以后, 我们还要进一步讨论这个问题。

顺便指出,方程式(13-23)与弹性地基上的梁,按文克勒假说所得到的梁的挠曲 线方程类似^①。如将 D 作为梁的抗弯刚度,4^β作为基床系数、w 作为梁的挠度,则式 (13-23)就完全与弹性地基上梁的挠曲线方程相同。于是,以上给出的解,以及全部 图表均可直接用于弹性地基梁问题^②。

13.4 边缘效应的概念

关于壳体的精确计算结果表明,壳体边界附近的弯曲应力状态沿子午线(或母线)方向远离边界时,衰减很快,且具有变号的性质,类似于衰减振动的特征。这种现象称为壳体的边缘效应。在 13.3 节中讨论圆柱形壳有矩应力状态计算时,已经看到了由于这种边缘效应使得位移函数 w(x),从而弯曲内力 M(x),Q(x)等,都随 x(x=0 实际上可以认为是壳体的边界)的增长而迅速衰减的现象。现在我们以简单问题为例说明考虑壳体边缘效应的方法。

在13.3节,我们曾将圆柱形壳轴对称问题有矩理论的平衡方程归结为

① 按文克勒假说所得到的平衡方程为: $EJ_y^{1_v} + k_y = q, y$ 为梁的挠度,此处 k称为基床系数, k_y 为基底反力, q为外荷载。

② 详见 S. Timoshenko,《材料力学》, Part Ⅱ, 第三版, 1956, 第一章(有中译本)。

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + 4\beta^4 w = \frac{q}{D} \tag{13-23}$$

并已说明,此方程的解可表示为下列两部分的和

$$w = w_0 + w_1$$

其中 wo 为齐次方程

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 4\beta^4 w_0 = 0 \tag{13-24}$$

的解, w1为非齐次方程的特解。

现在说明这两类解的性质。实际上,齐次解 w_0 满足给定的边界条件,对应于平衡方程中 q = 0 的情况,就是说,位移分量 w_0 给出的不是由于外载荷的作用而仅是 边缘效应影响所引起的壳体内的位移。而 w_1 就可以认为是满足边界条件的由于外 载荷作用而不计边缘效应时所引起的位移。

这样一来,在计入边缘效应影响的近似计算中,便可分别求出在外载荷作用下的薄 膜理论解和上述齐次方程(13-24)的解,然后把两部分解叠加起来便是所要求的解答。

作为例子,我们讨论例13-2中贮液筒的边缘效应影响。为此,应进行以下计算。

(1) 按薄膜理论求出挠度函数 w_1

已知环向内力 N。为

$$N_{arphi} = R_0 (L-x) \gamma$$
 $\mathbf{\epsilon}_{arphi} = rac{w}{R_0}$

环向应变为

由胡克定律有

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{Eh} (N_{\varphi} - \nu N_x) = \frac{\gamma R_0}{Eh} (L - x)$$

于是,在轴对称载荷作用下得

$$w_1 = \frac{\gamma R_0^2}{Eh} (L - x) \tag{a}$$

(2) 解齐次方程(13-24), 求 w₀

方程(13-24)的解为

 $w_0 = e^{\beta x} (A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x) + e^{-\beta x} (A_3 \cos\beta x + A_4 \sin\beta x)$ (b) (3) **x\$\mathbf{x}\$ \$\mathbf{w}\$ = \$w_0\$ + \$w_1\$ \$**

进一步可根据已求得的位移函数 w(x),求出所需的薄膜内力和弯曲内力。

应当指出,挠度的表达式中包括了三部分:第一部分是式(b)等号右边的第一项,它描述了 x = L 边缘附近的情况;第二部分是式(b)等号右边的第二项,它描述 了 x = 0 边缘附近的情况;第三部分是式(a),它表示外载荷作用下的薄膜力部分。 明确了各项所描述的不同现象,则可根据需要来选取其中的一部分解。

对于各种特殊情况,还可将所得到的解进行简化。例如,当上述贮液筒足够高,

且底部固定时,w(x)化为

$$w(x) = e^{-\beta x} \left(A_3 \cos\beta x + A_4 \sin\beta x \right) + \frac{\gamma R_0^2}{Eh} (L - x)$$

以上以简例说明了边缘效应的概念和用来进行近似计算时的思路。应当说明, 上述圆柱壳的轴对称问题是一种简单的情况。此时的平衡方程恰为一个以位移 w 为基本未知函数的四阶非齐次常微分方程,其全解的两部分恰恰反映了载荷作用下 的薄膜内力和边缘效应的影响。对于有矩理论的一般情况,问题要复杂得多。在推 导边缘效应的基本方程时,要根据问题的性质进行简化,基本未知量通常采用横剪力 Q。。在以内力表示的壳体平衡方程的基础上可导出下列边缘效应的基本方程:

$$\frac{d^4 Q_{\varphi}}{dx^4} + 4\lambda^4 Q_{\varphi} = 0$$
(13-32)
$$\lambda^4 = 3(1-\nu) \frac{r_1^4}{h^2 r_2^2}$$

此处

式中_v为泊松比,h为壳体厚度,r₁,r₂在13.2节中已有定义。式(13-32)的解,我们已经熟悉,求得 Q_e以后便可通过它求出因边缘效应产生的弯曲内力。详见有关参考文献,例如,H•B•科尔库诺夫著,张维嶽译,《弹性薄壳计算的基本理论》,高等教育出版社,1966。

复习要点和思考题

- 1. 壳体结构的构造特征,区分什么是薄壳,什么是厚壳?
- 2. 薄膜理论建立在哪些假定上?
- 3. 导出轴对称圆柱壳的轴对称问题的微分方程。

习 颕

13-1 试求图示装满水的圆柱形壳的内力(壳两端作为简支考虑)。



答案:
$$\begin{cases} N_{\varphi} = q_0 a - \gamma a^2 \cos\varphi \\ N_x = \frac{\gamma}{2} \left[x^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right] \cos\varphi \\ N_{x\varphi} = -\gamma a x \sin\varphi \end{cases}$$

此处 q₀为圆筒壳中心处的压力。

13-2 底部简支的锥形截顶壳,顶周边受垂直载荷 p 作用,计算其内力。





13-3 试求半无限长圆筒壳在端部受弯矩 M。作用时内力与位移。

13-4 若圆柱壳为一密封压力容器,试写出其边界条件。

第14章 弹 波 性

14.1 一维弹性波

变形物体受突加载荷作用后,必将产生变形,这种变形和与之伴随产生的应力并 不能立即传到物体的各个部分。在开始时刻,物体的变形,或者一般地说,物体受到 的扰动,只在加载处的邻域内产生,该邻域以外的部分则仍处于未扰动的状态。之 后,物体的变形和应力便以波的形式向远处传播。在载荷作用时间与波的传播过程 所经历的时间相比短得多的情况下,物体的运动主要表现为波的传播现象。根据介 质的物理性质,边界条件和载荷的作用形式不同,波的传播过程将呈现出各种不同的 特征。

本节以半无限长弹性细杆在端部受到动载荷作用为例,研究弹性应力波在杆内 向远处传播的规律。材料的弹性模量为 E,密度为 $\sigma(t)$ ρ 。设外载荷较小,使得杆端应力 $\sigma < \sigma_0, \sigma_0$ 为动屈 服极限。又设载荷为压力(图 14-1),则在杆中传 σ 播的是弹性压缩波。在此处,应力以压缩为正,于 是运动方程(波动方程)为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14-1}$$



其中 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ 是与应力大小无关的常数,为杆中弹性纵波的波速。对金属材料而

言, c_0 的数量级为每秒几千米(横波波速一般只是纵波波速的一半)。表 14-1 中给出 了若干种材料的纵波波速 c_0 的值。

材料	c_0/ms^{-1}	$Z_S/\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-1} imes 10^5$
黄 铜	4300	361
铝合金	6100	165
钢	5800	452
有机玻璃	2600	31
土壤	100~500	5~82

应当指出,波的传播速度(简称波速)和在波传播中材料质点的运动速度是两个 不同的物理量,不能相互混淆。材料的质点受到扰动后,只能在平衡位置附近运动, 其运动的速度称为质点的速度。而质点将所受到的干扰相继传播到相邻质点的速 度,称为波的传播速度。

二阶微分方程(14-1)可以改写成与之等价的一阶偏微分方程组,如令

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{a}$$

则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{b}$$

代入
$$c_0^2 = \frac{E}{\rho} \mathbf{f}$$
,方程(b)化为

$$\frac{1}{E}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial\nu}{\partial x}$$

于是有

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
(14-2)

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1/E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{,t} \\ \sigma_{,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{,x} \\ \sigma_{,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

或缩写为

$$AW_{,t} + BW_{,x} = 0 \tag{14-3}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1/E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} v \\ \sigma \end{pmatrix}$$
今后可看到,质点的运动速度与瞬时应力成正比,它比波速要小得多,并且可从 方程(14-3)的解直接得到。实际上,在所论问题的情况下(半无限长细杆在端部受 到动力作用,没有反向波),方程(14-3)的解为

$$u = f(x - c_0 t) \tag{14-4}$$

于是有

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - c_0 t)$$

$$\sigma = E\varepsilon = Ef'(x - c_0 t)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = c_0 [-f'(x - c_0 t)]$$
(14-5)

在式(14-5)中, σ 是以拉伸为正,本书已规定应力以压缩为正,所以应力相差一个符 号。考虑到这一点,比较 σ 和v的表达式后,得到

$$v = \frac{c_0 \sigma}{E} \tag{14-6}$$

或者

$$\sigma = \rho c_0 v = Z_S v \tag{14-7}$$

注意,此处规定压应力为正, $Z_s = \rho c_0$ 。式(14-7)表明:

(1) 质点的运动速度 v 与瞬时应力 σ 成正比,比例常数 Z_s 称为声阻抗率,其单位为 $Pa \cdot s/m$ 。若干材料的声阻抗率已列在表 14-1 中。

(2)当杆端受到压力时,波的传播方向、质点的运动速度方向及应力方向一致。
反之,如果杆端是受到拉力作用,由波的传播方向与后者的方向相反。

(3) 式(14-7)又可如下地解释或推导。设在 t 时刻内,杆端受到的应力是不变的,因而杆件受压缩的长度为 $c_0 t$,在 $x > c_0 t$ 的杆内,没有受到扰动。在扰动段内, $\epsilon = \sigma / E$ 。因此,杆端的总位移为 $c_0 t\epsilon = c_0 t\sigma / E$ 。在此时间内,杆端的位移应为 vt。令 两者相等,就得到式(14-7)。

现讨论弹性波在有限长杆端部的反射,已知方程(14-3)的一般解为

 $u(x,t) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$

其中, $u_1 = f_1(x - c_0 t)$ 为右行波,其波前行进线路的方程为 $x = c_0 t + \text{const}$; $u_2 = f_2(x + c_0 t)$ 为左行波,其波前行进线路的方程为 $x = -c_0 t + \text{const}$ 。对应于 u_1 和 u_2 的应力 分别为

$$\sigma_{1} = E \frac{\partial u_{1}}{\partial x} = -Z_{s} \frac{\partial u_{1}}{\partial t} = -Z_{s} v_{1}$$
$$\sigma_{2} = E \frac{\partial u_{2}}{\partial x} = Z_{s} \frac{\partial u_{2}}{\partial t} = Z_{s} v_{2}$$

上式表明,对于右行波,应力和质点速度符号相反,即负应力对应于正速度;左行波的 应力与质点速度符号相同。应力和速度之比为 $\pm Z_s$ 。 现在考虑两个相向运动的应力波,如图 14-2(a)所示。应力分别为 σ₁和 σ₂,符号 相同。由于弹性波的控制方程为线性的,所以当两个波相遇时,其重叠部分的应力和 速度可以用叠加法来计算。但应注意,这里是代数相加,要注意它们的符号。对于同 号应力波相遇之后,在波形重合部分的应力为两应力波应力之和,符号不变(图 14-2 (b),(c))而速度则为两者之差,符号与其中绝对值最大者相同。两波分离之后,则各 自按原来的波形传播。如果两个相向运动的应力波应力符号相反,则两波相遇之后, 其重合部分的应力为两应力之差,符号与其中绝对值最大者相同,而速度则为两者之

显然,若两个应力值相等,波的长度相同,但应力符号相反的波相遇之后,应力互 相抵消,即其重叠部分的应力变为零,但其质点速度加倍。图 14-3 给出了两个异号 应力波相遇时应力的变化情况。

现在设想在 B 处(两波相遇的截面)将杆切开,则在图 14-2 所示的情况下,B 截 面的应力加倍,速度为零,这相当于有限长杆的固定端;而在图 14-3 所示的情况下, 则应力恒为零,这相当于有限长杆的自由端,在该处速度加倍。



由此可见,对于有限长杆,当波由扰动端(加载端)A 传播到远端B 时,必将发生 波的反射,生成反射波。这个反射波相当于从 B 端以外传来的相向运动的波。由以 上讨论可知:波由固定端反射后,应力增至入射波应力的二倍,质点速度减为零,波的 性质不变(即拉伸(压缩)波仍为拉伸(压缩)波;而波由自由端反射后,应力减至零,质 点速度增为入射波质点速度的二倍,波的性质改变(即拉伸(压缩)波变为压缩(拉伸) 波)),波形不变。

在弹性介质中传播的应力波的研究无疑是空间问题,根据介质的特征将出现各 种复杂的情况。

下面给出一维平面波与一维应力波的区别。

所谓平面波是指波阵面为(或近似为)平面的情况。在同一波面上,状态参量相

同。设以 *x* 坐标轴表示波的传播方向,则所有状态参量都只是 *x*,*t* 的函数。当质点 的运动方向与波的传播方向平行时(即只有 *x* 方向的位移),称为纵向平面波,简称 为纵波。这时有

$$u_1 = u(x,t), \quad u_2 = u_3 = 0$$

将上列关系式代入基本方程,可得纵波的运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \tag{14-8}$$

上式表明,纵向平面波的波速等于膨胀波的波速。实际上,在本情况下,有

$$\mathbf{\epsilon}_r \neq 0$$

其余应变分量为零。根据广义胡克定律,有

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{x} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{x}$$

由此可得

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \lambda + 2\mu = E_1 \tag{14-9}$$

*E*₁称为侧限弹性模量。于是有

$$c_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$$

这表明,弹性平面纵波(或一维应变平面波)波速与细杆中一维应力纵波波速($c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$)不同。

如果质点的运动方向与波的传播方向正交,则称为横向平面波,简称横波。设 y 坐标轴与质点的运动方向平行,则对于横波,应有

$$u_2 = u(x,t), \quad u_1 = u_3 = 0$$

于是 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$, $\theta = 0$ 。所以横向平面波是畸变波或等容波。这时,运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14-10}$$

式中u为y方向的位移分量。 c_2 称为横波波速。

式(14-8)及(14-10)同一维弹性应力波的运动方程在形式上完全相同,只是波速不同,所以它们的解法和所得到的结论都一样。

在无限弹性介质中传播的应力波无疑是三维空间问题,根据条件的不同将出现 各种复杂的情况。

14.2 无限介质中的弹性波 体波

地震发生时,由地源发出的地震波向其周围传播的问题,可视为波在不计边界时 的传播,这类波统称为体波,即在物体内部传播的波。体波有两种基本形式,即所谓 畸变波(或等容波)和膨胀波(或无旋波)。在研究弹性波在空间的传播问题时,采用 拉梅-纳维方程比较方便,即

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu \nabla^2 u_i - \rho_0 \ddot{u}_i = 0 \qquad (14-11)$$

式中 i=1, 2, 3(或 $x, y, z); \theta = \epsilon_{ii}$ 为体应变; ∇^2 为拉普拉斯算子,在笛卡儿坐标内,有

$$\nabla^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}$$

畸变波在传播过程中,介质的体积不改变, $\theta \equiv 0$ 。于是式(14-11)变为 $c_2^2 \nabla^2 u_i = \ddot{u}_i$ (14-12)

式中

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}} \tag{14-13}$$

为畸变波波速。因为在波的传播过程中,介质只有剪切变形,所以波速只与介质的切 变模量 G 和密度 ρ₀ 有关。因而畸变波有时也叫做剪切波。

如果在波的传播过程中,介质质点的位移场为无旋场,即有

$$rot \boldsymbol{u} = 0 \tag{14-14}$$

则可设

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}_{\varphi_p} \tag{14-15}$$

因为 rot(grad φ_p)=0,所以位移 *u* 恒能满足式(14-15)。 φ_p 称为位势函数。这种波称 为无旋波或膨胀波。因为

所以式(14-11) 变为

 $c_1^2 \,\nabla^2 u_i = \ddot{u}_i \tag{14-16}$

式中

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$$

为膨胀波波速。已知

$$\lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}G = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{14-17}$$

其中 K 为体积弹性模量。所以,膨胀波的波速与介质的体积弹性模量 K、切变模量 G 和密度 ρ_0 有关。这是因为,在膨胀波的传播过程中,介质不只发生体积变形,而且 伴随有剪切变形。式(14-12)和式(14-16)可统一写成

$$\ddot{\psi} = c_k^2 \nabla^2 \psi \tag{14-18}$$

式中

$$c_{k} = \begin{cases} c_{1} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_{0}} \\ c_{2} = \sqrt{G/\rho_{0}} \end{cases}$$
(14-19)

以上的讨论均未计入体力。当计入体力时问题将变得复杂起来,详见参考文献 [8]。

14.3 半无限介质表面的波 面波

现在考虑半无限空间 $y \ge 0$,假定波的传播方向 n 位于 x-y 平面而不失一般性 (图 14-4)x-y 平面称为竖向平面,x-z 平面即半空间表面,为水平面。其位移分量为 u_x, u_y, u_z 分别为法向,竖向和水平面内的位移(图 14-4)。



图 14-4 在 x-y 平面内的平面波向自由表面前进的示意图

我们在研究体波时没有计入体力,且在研究剪切波(S波)时不计体积变化,研究 膨涨波(P波)时不计转动。这样,问题得到了简化。实际上,求解运动方程

$$(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) \nabla (\nabla \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\mu} \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{\ddot{u}}$$
(14-20)

具有较大的复杂性。此处▽为哈密顿算子,▽²为拉普拉斯算子,为了把位移分解成 转动和膨胀两部分,注意到以下关系式成立

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) - \nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{u} \right)$$
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{u}$$
(14-21)

于是可得

$$(\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu}) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - 2\boldsymbol{\mu} \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \rho \boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{\ddot{u}}$$
(14-22)

为了简化以下的分析,引进标量函数 Φ 和矢量势 H,于是又根据亥姆霍兹定理^① $u = \nabla \Phi + \nabla \times H$, $\nabla \cdot H = 0$ (14-23)

① 见 Morse P., Feshbarbl M., Method of Theoretical Physics, Vol.1, MacGraw Hill, 1953, p. 52-53。

条件▽・H=0 给出了可以由 Φ 和 H 的 4 个分量惟一确定位移分量的必要条件。 同样还可以给出

$$\boldsymbol{f} = \nabla \boldsymbol{f} + \nabla \times \boldsymbol{B}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{14-24}$$

将以上结果代入运动方程,整理后可得

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi + \rho f = \rho \dot{\Phi}$$

$$\mu \nabla^2 H + \rho B = \rho \ddot{H}$$
 (14-25)

将上式代入运动方程,可得上式的另一种形式,即

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^{2} \Phi + \rho f = \rho \ddot{\Phi} -\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{B} = \rho \ddot{\mathbf{H}}$$
(14-26)

注意到, $\nabla \cdot \nabla \approx \nabla^2$, $\nabla \cdot (\nabla^2 u) = \nabla^2 (\nabla \cdot u)$ 和 $\nabla \cdot u = \varepsilon_{k}$ 。于是对于沿弹性体表 面传播的波,其位移分量可表示为

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$w = -\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial x}$$
(14-27)

注意到▽ · *H*=0,则有以下控制方程

$$abla^2 \Phi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \qquad
abla^2 H_i = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (14-28)$$

应力位移关系表示为

$$\sigma_{x} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{y} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{z} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{x} + \sigma_{y})$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \tau_{xz} = 0$$
(14-29)

上式还用势函数表示为应力与 Φ , H_y , H_z 的关系式。从式(14-27)可见, 位移 u, v只与 Φ 和 H_z 有关, 而位移 w 只与 H_x 和 H_y 有关。这就是说, 介质的运动可以分为 两部分, 一部分是平面应变运动, 即 u = 0, $v \neq 0$, $w = \partial/\partial z = 0$; 表示质点在 Oyz平面内运动, 所以称为 SV 横波; 另一部分为 SH 横波运动, $\partial/\partial z = u = v = 0$, $w \neq 0$, 即 位移分量 w 在 Oxy 平面内传播的横波, 其质点运动发生在 z 轴方向。SV 波和 SH 波都属于横波, 它们以其所引起的质点运动方向的不同相区别, 称为极化波。 在地震过程中观察到,对地面设施造成破坏的是首先到达地面的地震波 P 波和 SV 波。前面已说明,这两种波的特性是 $\partial/\partial z=0$,w=0。瑞利(Rayleigh J. W. S.)首 先研究了这种沿表面传播的面波,故称这种波为瑞利波。以下专门讨论这种波的 特性。

瑞利(Lord Rayleigh,1842—1919) 英国物理学家, 原名 William Strutt, 1879—1884 年任剑桥大学教授, 1873 年被选为皇家学会会员,1904 年因从空气中分离出 氩而获得诺贝尔奖。他有众多研究成果,发表过粘性流 体理论的重要论文,著有经典名著《声学理论》。发现了 称为瑞利波的弹性表面波。

在这种情况下,边界条件为

$$\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \qquad y = 0 \tag{14-30}$$

实际上,对于平面应变可直接考虑下列运动方程

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{14-31}$$

对于平面应变情况(回忆式(14-27)前两式和式(14-28)),令

$$\Phi = f(y)\exp[i(\xi x - \omega t)], \qquad H_z = h_z(y)\exp[i(\xi x - \omega t)] \quad (14-32)$$
将式(14-32)代入方程(14-28)得

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - \alpha^2 f = 0, \quad \frac{d^2 h_z}{dy^2} - \beta^2 h = 0$$
(14-33)

其中令 $\alpha^2 = -\bar{\alpha}^2$, $\beta^2 = -\bar{\beta}^2$

$$\bar{\alpha}^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \xi^2, \quad \bar{\beta}^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - \zeta^2$$
 (14-34)

方程(14-28)的解给出了波呈指数增长与衰减两部分。设式(14-32)呈下列形式:

$$\Phi = A e^{\alpha y} \exp[i\xi(x - ct)]$$

$$H_z = B e^{\beta y} \exp[i\xi(x - ct)]$$
(14-35)

由此可得位移和应力分量为



$$u = (i\xi A e^{-\alpha y} + \beta B e^{-\beta y}) \exp[i\xi(x - ct)]$$

$$v = -(\alpha\xi A e^{-\alpha y} + i\xi B e^{-\beta y}) \exp[i\xi(x - ct)]$$

$$\sigma_x = \mu[(\beta^2 - \xi^2 - 2\alpha^2)Ae^{-\alpha y} - 2i\beta B\xi e^{-\beta y}] \exp[i\xi(x - ct)]$$

$$\sigma_y = \mu[(\beta^2 + \xi^2)Ae^{-\alpha y} + 2i\beta B\xi e^{-\beta y}] \exp[i\xi(x - ct)]$$

$$\tau_{xy} = \mu[-2i\alpha\xi A e^{-\alpha y} + (\beta^2 + \xi^2)Be^{-\beta y}] \exp[i\xi(x - ct)]$$
(14-36)

在自由表面 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$,由此可得

$$\left. \begin{array}{l} \left(\beta^2 + \xi^2\right)A + 2\mathrm{i}\xi\beta B = 0\\ -2\mathrm{i}\xi\alpha A + \left(\beta + \xi^2\right)B = 0 \end{array} \right)$$

$$(14-37)$$

由此振幅比

$$\frac{A}{B} = -\frac{2i\beta\xi}{\beta^2 + \xi^2} = \frac{\beta^2 + \xi^2}{2i\alpha\xi}$$
(14-38)

从而,表面波的频率方程为

$$(\beta^2 + \xi^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2 = 0$$
 (14-39)

此处

$$\alpha^{2} = \xi^{2} - \frac{\omega^{2}}{c_{1}^{2}}, \quad \beta^{2} = \xi^{2} - \frac{\omega^{2}}{c_{2}^{2}}$$
(14-40)

由此,考虑到 $\omega = \xi c$,则波速可表示为

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(14-41)

最后得出下列关于 (c/c₂) 的三次代数方程

$$\frac{c^2}{c_2^2} \left[\left(\frac{c}{c_2}\right)^6 - 8\left(\frac{c}{c_2}\right)^4 + (24 - 16k^{-2})\left(\frac{c}{c_2}\right)^2 - 16(1 - k^{-2}) \right] = 0 \quad (14-42)$$

方程(14-41)的三个根取决于 k^2 的值,因 $k^2 = \left(\frac{c^2}{c_2^2}\right) = 2(1-\nu)(1-2\nu)$,故此三个根与 材料的泊松比有关。此处 k 实为瑞利波波速与剪切波波速之比。分析后不难得出, 当泊松比 $\nu < 0.263$ 时,该方程有 3 个实根;当 $\nu > 0.263$ 时,有一个实根,两个共轭复 数根;当 $\nu = 1/4$ 时,得出 $\left(\frac{c}{c_2}\right)^2$ 的三个值,分别为:4,(2+2/\sqrt{3}),(2-2/\sqrt{3})。

方程(14-41)所确定的波速 c 即瑞利波的波速,今后记作 c_R 。若把 $\left(\frac{c}{c_2}\right)^2$ 的三个值代入式(14-40),并要求 α^2 , $\beta^2 > 0$,则只可能有

$$\left(\frac{c^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.9194$$

由此得

 $c_R = 0.9194c_2$

瑞利波的质点运动可由方程组(14-36)的前两式确定,y = 0时,有

$$u = \operatorname{Ai}\left(\gamma - \frac{\beta^{2} + \gamma^{2}}{2\gamma}\right) e^{i\gamma(x-ct)}$$

$$v = A\left(-\alpha + \frac{\beta^{2} + \gamma^{2}}{2\beta}\right) e^{i\gamma(x-ct)}$$
(14-43)

取实数部分,有

$$\begin{array}{c} u = a(\gamma)\sin\gamma(x - ct) \\ v = b(\gamma)\cos\gamma(x - ct) \end{array}$$
(14-44)

由此可见,瑞利波传播时介质质点在垂直平面内振动,质点在振动过程中沿椭圆轨道 旋转,椭圆的主轴是垂直的。质点沿与波的传播方向相反的方向沿椭圆旋转,呈逆进 椭圆型。其竖向分量大于水平分量约1.5倍。质点振动的振幅随深度呈指数衰减, 并在约0.192波长处质点运动的轨迹变为相反方向的椭圆,如图14-5和图14-6所 示。因此,瑞利波的波长越长,它向介质深部的穿透越深。





在地震观测中还发现一种 SH 面波,其质点振动平面平行于地表面,产生于地表面上覆盖着的薄层底面,沿分界面方向传播,这种波称为 Love 波。详见有关文献, 例如参考文献[9]。

复习要点和思考题

1. 弹性波波速与质点速度是两个不同的概念。在一维情况下,它们有下列关系 $v = c_0 \sigma/E$

或

$$\sigma = \rho c_0 v$$

上两式有三点重要的理解(见正文)

2. 波由杆的固定端反射后,应力增至入射波应力的二倍,质点速度减为零;而波 由杆的自由端反射后,应力减至零,质点速度增为二倍,波形均不变。

3. 在无限介质中传播的波主要有两类。各自的特点不同。

4. Rayleigh 波是一种表面波,且沿深度衰减很快。其质点旋转运动的方向在 0.192波长处开始反向。

5. 应力波的波速与哪些因素有关? 质点运动速度和波的传播速度有什么区别? 为什么?

6. 介质的弹性常数是否影响波的传播速度? 为什么?

7. 弹性波在工程上有多方面的应用,你能举出几个工程应用实例吗?

 8. 设有一钢丝,一端固定,另一端悬一圆盘,若有一套在钢丝上的圆形空心重物 沿丝线落下,试问该钢丝有可能在哪一端断开?为什么?

习 题

14-1 试求瑞利波传播时,沿深度的衰减规律,並以图形表示。

14-2 设有两圆截面直杆,直径相同,中间以同直径的一试件相连,当一端受冲击力作用时,试给出反射波、透射波、反射波间的相互关系和试件中的应力和应变。

14-3 给出思考题 4 的力学分析。

附录 A 矢量与张量的基本公式

A.1 指标记法

以下均采用 Einstein 求和约定,即重复一次的上、下标,即表示求和。若在 N 维 空间,则 $i=1, 2, \dots, N$,例如

$$S = a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_N b^N$$
 (A-1)

求和指标又称为哑指标。这种指标采用什么字母是无关紧要的,即

$$a_i b^i = a_j b^j = a_m b^m = \cdots$$
 (A-2)

求和约定也可用来表示双重和式、多重和式等。

$$a_{ij}x^j = b_i$$
 (*i*, *j* = 1, 2, 3) (A-3)

式中的指标 *i* 称为自由指标,它在此方程中每项只出现一次,不符合求和约定。方程 组(A-3)展开为

$$\begin{array}{c} a_{1j}x^{j} = b_{1} \\ a_{2j}x^{j} = b_{2} \\ a_{3j}x^{j} = b_{3} \end{array}$$

$$(A-4)$$

方程(A-4)按求和约定可以展开,例如第一式为

$$a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = b_1$$

A.2 坐标变换 基矢量

设在三维空间中取一直角坐标系 $OX^1 X^2 X^3$,沿此三个坐标方向的相互垂直的三 个单位矢量为 e_1 、 e_2 、 e_3 ,记作 $\{e_i\}$,即为坐标系的标架,而其相伴标架(或互易坐标基) 为 $\{e^i\}$,二者统称为基矢量。若任一矢量 a 可表示为

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i = a_j \boldsymbol{e}_j \tag{A-5}$$

则有

$$a_j = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_j = a^i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = a^i \delta_{ij} \tag{A-6}$$

同理有

$$a^{i} = a_{j}\delta_{ij} \tag{A-7}$$

今后称矢量 $a \in \{e_i\}$ 中的分量为逆变分量,记作 a^i ;称 $a \in a$ 在相伴标架 $\{e^i\}$ 中的分量为协变分量,记作 a_i 。对于正交标架,矢量的协变分量与逆变分量相重合,二者就不再区分。

现在考虑坐标系 $OX^1X^2X^3$ 中的一点位置 r 为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(X^1 X^2 X^3) = \boldsymbol{X}^i \boldsymbol{e}_i \tag{A-8}$$

该点的位置同时也可以用坐标系 $ox^1x^2x^3$ 中的矢径 r 表示,即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1 x^2 x^3) = \boldsymbol{x}^i \boldsymbol{e}_i \tag{A-9}$$

以上两组变量 (X^1, X^2, X^3) 和 (x^1, x^2, x^3) 表示同一空间位置,故可用下列坐标变 换联系起来

$$X^i = X^i(x^i) \tag{A-10}$$

若 Xⁱ为一斜角坐标系,且为 xⁱ的线性函数,xⁱ也是一个斜角坐标,其坐标变换为

$$X^{i} = \frac{\partial X^{i}}{\partial x^{i}} x^{i} \tag{A-11}$$

若 X^i 不是 x^i 的线性函数,则 $\{x^i\}$ 为曲线坐标。在曲线坐标系中 $\partial X^i/\partial x^i$ 不再是常数。 此时 X^i 与 x^i 之间有一一对应的关系。坐标变换的条件由隐函数存在定理可知为:只 要 x^i 的邻域内函数 $X^i(x^1,x^2,x^3)$ 有连续的一阶偏导数存在,则在 x^i 点下列雅可比函 数行列式 J 存在,即

$$J = \frac{\partial(X^{1}, X^{2}, X^{3})}{\partial(x^{1}, x^{2}, x^{3})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X^{1}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial X^{1}}{\partial x^{2}} & \frac{\partial X^{1}}{\partial x^{3}} \\ \frac{\partial X^{2}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial X^{2}}{\partial x^{2}} & \frac{\partial X^{2}}{\partial x^{3}} \\ \frac{\partial X^{3}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial X^{3}}{\partial x^{2}} & \frac{\partial X^{3}}{\partial x^{3}} \end{vmatrix} \neq 0$$
(A-12)

若令 g_i 为曲线坐标 $\{x_i\}$ 的基矢量,则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{g}_i \tag{A-13}$$

同时可写为

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{1}} d\mathbf{x}^{1} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{2}} d\mathbf{x}^{2} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{3}} d\mathbf{x}^{3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i}} d\mathbf{x}^{i}$$
(A-14)

由此给出

$$\boldsymbol{g}_{i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial}{\partial x^{i}} (X^{j} \boldsymbol{e}_{j}) = \frac{\partial X^{j}}{\partial x^{i}} \boldsymbol{e}_{j}$$
(A-15)

由 $J \neq 0$ 可知, g_1 、 g_2 、 g_3 为线性无关,即可由 $\{g_i\}$ 作为曲线坐标的标架,以平面坐标为例

$$x^1 = r$$
, $x^2 = \theta$

则有

$$g_1 \mid = 1, \quad \mid g_2 \mid = r$$

今后取右手坐标系。如前所述,g1为协变基矢量,与之对应的逆变基矢量为

$$\boldsymbol{g}^{i} = \frac{\boldsymbol{g}_{j} \times \boldsymbol{g}_{k}}{\left[\boldsymbol{g}_{1} \, \boldsymbol{g}_{2} \, \boldsymbol{g}_{3}\right]} \tag{A-16}$$

其中 $[g_1g_2g_3]$ 为 g_i 的混合积。

类似地, $[g^1g^2g^3]$ 为 g^i 的混合积,记作 ε^{ijk} 。 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 称为 Eddington 张量。 g_i (或 g^i)为线性无关的三个基矢量,故其混合积代表它们构成的平行六面体的体积,必不为零。在直角坐标系中,有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1 \, \boldsymbol{g}^2 \, \boldsymbol{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \, \boldsymbol{g}_2 \, \boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} = 1 \tag{A-17}$$

故有

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ijk} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} = \boldsymbol{e}_{ijk} \tag{A-18}$$

定义协变度量张量

$$\boldsymbol{g}_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{g}_{ji} \tag{A-19}$$

逆变度量张量

$$\boldsymbol{g}^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}^{ji} \tag{A-20}$$

混合度量张量

$$\boldsymbol{g}^{i}{}_{j} = \boldsymbol{g}^{i} \cdot \boldsymbol{g}_{j} = \boldsymbol{g}_{j} \cdot \boldsymbol{g}^{i} \tag{A-21}$$

容易证明,下列公式成立

$$\boldsymbol{g}_{j}^{i} = \boldsymbol{g}^{i} \cdot \boldsymbol{g}_{j} = \delta_{j}^{i} \tag{A-22}$$

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}^{ij} \boldsymbol{g}_j \tag{A-23}$$

$$\boldsymbol{g}^{ij}\boldsymbol{g}_{kj} = \boldsymbol{g}^i_j = \delta^i_j \tag{A-24}$$

$$\delta_{j}^{i} = \delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$
(A-25)

A.3 张量及张量代数

为简便计,以下在直角坐标系中给出张量的定义。设在坐标 $ox_1x_2x_3$ 中具有两 个下标的 9 个量 T_{ij} ,当变换新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 时, T_{ij} 变成了 $T_{ij'}$,若 T_{ij} 与 $T_{ij'}$ 之间服 从下列关系式

$$T_{i'j'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij} \tag{A-26}$$

其中 $\alpha_{ii}(\mathbf{x}, \alpha_{jj})$ 是新旧坐标系的基矢量间夹角的方向余弦,例如

$$\boldsymbol{\alpha}_{i'i} = \boldsymbol{e}_{i'} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{A-27}$$

式(A-26)所定义的 9 个量定义一个二阶张量,记作 T。类似地,在卡氏直角坐标系可以定义三阶张量

$$T_{ij'k'} = \alpha_{ii}\alpha_{jj}\alpha_{k'k}T_{ijk}$$
(A-28)

依此类推,可定义任意阶张量。

可以推出,二阶张量T实际上是一个线性变换。

A.3.1 张量的加减

设T和S是两个二阶张量, $(T\pm S)$ 表示T与S的和与差,则对任意矢量a有 ($T\pm S$)・ $a = T \cdot a \pm S \cdot a$ (A-29)

其分量为

 $(\mathbf{T} \pm \mathbf{S})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T} \pm \mathbf{S}) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j \pm \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{T}_{ij} \pm \mathbf{S}_{ij} \quad (A-30)$ 显然, $(\mathbf{T} \pm \mathbf{S})$ 仍为一二阶张量。

A.3.2 并矢积 张量的张量积

矢量 a 和 b 的并矢积 ab 定义为按下列规则对任意矢量 c 做变换 (ab)c = a(bc) (A-31) 不难证明^①,并矢积 ab 又称 a 和 b 的张量积,是一个二阶张量,它的分量为 $(ab)_{ij} = e_i \cdot (ab) \cdot e_j = e_i \cdot [a(b \cdot e_j)] = e_i \cdot (ab_j) = (e_i \cdot a)b_j = a_ib_j$

① 详见有关张量计算的文献,例如:周季生编,张量初步,高等教育出版社,北京,1985。

若T和S分别为m阶和n阶张量,则它们的张量积为

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{S} = (T_{i_2, \cdots, i_m} \mathbf{e}_{i_2, \cdots, i_m}) \otimes (S_{i_{m+2}, \cdots, i_{m+n}} \mathbf{e}_{i_{m+2}, \cdots, i_{m+n}}) = C_{i_1, \cdots, i_{m+n}} \mathbf{e}_{i_1, \cdots, i_{m+n}} = \mathbf{C}$$
(A-33)

显然张量C的阶数为T和S两张量阶数之和。

A.3.3 张量的标量积和内积

两个二阶张量 $T \subseteq S$ 的标量积用T:S表示,其标量

$$T_{:}S = \sum_{i} \sum_{j} T_{ij} S_{ji} = \operatorname{tr}(T^{T} \cdot S)$$

T和S的内积定义为

 $T \cdot S = (T_{ij}e_ie_j) \cdot (S_{mn}e_me_n) = T_{ij}S_{mn}e_i(e_je_m)e_n = T_{ij}S_{mn}\delta_{jm}e_ie_n$ (A-34) 显然,两个二阶张量的内积 $T \cdot S$ 的结果仍是二阶张量。内积一次之后,所得新张量 的阶数比原两张量阶数之和降低 2 阶。

一般情况下内积是不可交换的,即

$$T \cdot S \neq S \cdot T$$
 (A-35)

但二阶张量服从结合律,结果仍为二阶张量,即有

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \tag{A-36}$$

对于张量的内积可以连续进行。例如二次内积可写成 T •• S 的形式。若 T 和 S 均 为二阶张量,则它们的双重内积为

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = (T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) (S_{mm} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) = T_{ij} S_{mm} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_n) = T_{ij} S_{mm} \delta_{im} \delta_{im} (A-37)$$
$$= T_{ij} S_{mm}$$
(A-38)

上式结果 T_{ii}S_m为一标量。显然有

$$\boldsymbol{T} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{T} \tag{A-39}$$

类似地可定义多重内积。

A.3.4 张量的迹

设 a 和 b 为两个矢量,则其并矢积 ab 的迹 tr ab 定义为

$$tr ab = a \cdot b \tag{A-40}$$

于是有

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\delta}_{ij} \tag{A-41}$$

张量 T 的迹定义为

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{T} = \operatorname{tr}(T_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}) = T_{ij}\operatorname{tr}(\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}) = T_{ij}\delta_{ij} = T_{ji} \qquad (A-42)$$

由此可以导出二阶张量的迹的一些特性。例如下列关系式成立

$$tr(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = tr(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \tag{A-43}$$

A.4 Christoffel 符号 协变导数

引进记号

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\quad) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{i}(\quad) \stackrel{\text{def}}{=} (\quad),$$

于是对应矢量 a 的导数有

$$\boldsymbol{a}_{,i} = (a^{i}\boldsymbol{g}_{i})_{,j} = a^{i}_{,j}\boldsymbol{g}_{i} + a^{i}\boldsymbol{g}_{i,j}$$
(A-44)

同样地

$$\boldsymbol{a}_{,i} = (a_i \boldsymbol{g}^j)_{,j} = a_{i,j} \boldsymbol{g}^i + a_i \boldsymbol{g}^i_{,j}$$
(A-45)

其中矢量 $g_{i,i}$ 可以分解为 g_i 和 g^i 方向的分量,即

$$\boldsymbol{g}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{ijk} \boldsymbol{g}^{k} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{ij}^{k} \boldsymbol{g}_{k} \qquad (A-46)$$

此处 Γ_{ijk} 和 Γ_{ij}^{k} 分别为第一类 Christoffel 符号和第二类 Christoffel 符号,它们不是张 量,但有一些有用的性质,例如,对指标 i 和 j 有对称性,相互可表示性,而在直角坐 标系中 Γ_{ijk} 和 Γ_{ij}^{k} 都等于零。

现在考察第一个矢量 a 的协变导数(covariant derivation)

$$\boldsymbol{a}_{,j} = a^{i}_{,j}\boldsymbol{g}_{i} + a^{j}\Gamma^{k}_{ij}\boldsymbol{g}^{k} = (a^{i}_{,j} + a^{k}\Gamma^{k}_{ij})\boldsymbol{g}_{i} = a^{i}\Big|_{j}\boldsymbol{g}_{i} \qquad (A-47)$$

其中

$$a^{i}\Big|_{j} = a^{i}_{,j} + a^{k} \Gamma^{jk}_{i} \tag{A-48}$$

称为矢量 a 的协变导数。类似地有

$$a_i \Big|_j = a_{i,j} + a_k \Gamma^k_{ij} \tag{A-49}$$

 $a^{i} |_{i} \mathbf{n} a_{i} |_{i} \mathbf{b} \mathbf{h} \mathbf{K} \mathbf{E}$.

对二阶张量 T 的偏导数经运算后得

$$\mathbf{T}_{,k} = T_{ij} \Big|_{k} \mathbf{g}^{i} \mathbf{g}^{j}$$
(A-50)

其中

$$T_{ij}\Big|_{k} = T_{ijk} - T_{ij}\Gamma^{l}_{jk} - T_{il}\Gamma^{l}_{jk}$$
(A-51)

称为张量 T 的协变导数。类似地可以给出 $T_j^i \Big|_{k}, T_i^i \Big|_{k}$ …。

A.5 标量场与矢量场

A.5.1 标量场的梯度

设标量函数 u(M)为在区域 V 上的一个标量场,M(x, y, z)为 V 中的任一点, 及 u(M)在 V 上任一点,若存在极限

$$\lim_{M\to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\overline{MM_0}}$$

则称该极限值为函数 u(M)在 M_0 处沿方向 l 的方向导数,并记作

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\overline{MM_0}}$$

不难证明,若函数 u(M)在 M 点可微, \cos_{α} , \cos_{β} , \cos_{γ} 为l 的方向余弦,则 u(M)在 点l的方向导数必存在,并有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \tag{A-52}$$

若记

$$G = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$L = (\cos_{\alpha}, \cos_{\beta}, \cos_{\gamma})$$

则方向导数可用两矢量G和L的点积形式表示,即

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{L} \tag{A-53}$$

我们称式(A-53)因 L 的方向变化使得方向导数 $\frac{\partial u'}{\partial l}$ 取最大值时定义为函数 u (M)在 该点的梯度方向,记作 gradu,即

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{k}$$
(A-54)

梯度为一矢量场。现在引入算子▼

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

▼称为哈密顿算子(读作 nabla),于是有

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$
 (A-54a)

或

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \qquad (A-54b)$$

梯度的运算公式:

(a) grad c= 0 (c 为常数);
(b) grad cu = cgrad u;
(c) grad (u±v) = grad u ± grad v;
(d) grad (uv) = v grad u + u grad v;
(e) grad (^u/_v) = ¹/_{v²} (v grad u-u grad v);
(f) grad[f(u)]=f'(u)grad u
梯度可以推广到矢量场和张量场。

A.5.2 矢量场的散度

设 *a*(*M*)为一矢量场,*M*为场中的任一点,*S*为包围*M*在内的一个封闭曲面,其 区域为*V*,若极限



存在且有极限,则称该极限值为矢量场 a (M)在点 M 处的散度,并记作

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M) = \lim \frac{\oint \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{V} \tag{A-55}$$

显然上式中的曲面积分 $\iint_{a} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$ 为矢量场 a 穿过有向曲面 S 的流量。

由高斯公式和积分中值定理,可设散度的下列表达形式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$
(A-56)

或

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{a} \tag{A-57}$$

由此可设高斯公式的矢量形式

$$\iint_{S} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_{V} \mathrm{div} \boldsymbol{a} \mathrm{d} V \tag{A-58}$$

可见,矢量场的散度为一标量,散度全体构成一标量场。

A.5.3 矢量场的旋度

设 a(M)为一矢量场, L 为场中的任一闭合曲线, 则沿曲线 L 的曲线积分

$$\oint_{I} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

称为矢量场 a(M)沿 L 的环量。若 L 为某一曲面 S 的边界,曲面上动点 M 处的单位 矢量为 $m = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,则由斯托克斯公式,有

$$\oint_{L} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_{S} \left[\left(\frac{\partial a_{z}}{\partial y} - \frac{\partial a_{y}}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial a_{x}}{\partial z} - \frac{\partial a_{z}}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial a_{y}}{\partial x} - \frac{\partial a_{x}}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] ds$$
(A-59)

我们称矢量 $\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$ 为矢量场 a(M)的旋度 rot a(或 curl a),即

rot
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, & \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, & \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{a}$$
(A-60)

从而导出

$$\oint_{L} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_{S} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{s}$$
(A-61)

由此可知,对于无旋场(保守场)有

$$rot \ \mathbf{a} = 0 \tag{A-62}$$

当 a(M)是无旋场时,可推出 a(M)为某一标量函数 ϕ 的梯度,即 $a = \nabla \phi$ (A-63)

若矢量场 *a* 可表示为某一标量函数 ∮ 的梯度,则 *a* 为一有势场,∮ 即为其势函数。 因有

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{grad}\phi = 0 \tag{A-64}$$

故有势场必为无旋场。于是,若称矢量场 a 为保守场,则等价于:rot a=0,或 $\oint_{L} a \cdot dl$ = 0。

附录 B

变分法概要

在数学分析中,曾经讨论过函数的极值问题。变分法是这类问题的推广。

B.1 泛函和泛函的极值问题

我们首先引进泛函的概念。泛函是指一个量,它的值依赖于一个或者几个函数。 变分法的基本问题是求泛函的极值。下面是一个简单的变分问题的例子。

如给定 x, y 平面上的两定点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ (图 B-1),求满足边界条 件的连接这两点的任意曲线 y = y(x)中的最短线。于是,问题归结为,求 P_1, P_2 两 点间的曲线长度

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \tag{B-1}$$

У

为最小的一条曲线。这条曲线满足连续性要求和边界条件。以后我们把这种满足给定条件的函数称为容许函数。于是,变分法问题就是在容许函数中,寻求使给定泛函为极值的特定函数的问题。L = L[y]是一个泛函,因为它依赖于"变量函数" y = y(x)。求 P_1, P_2 两点间最短线的问题是一个变分法问题。

上述变分法问题的一般形式为:求泛函



冬 B-1

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x \tag{B-2}$$

在满足边界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$
 (B-3)

下为极小值的函数 y(x)。

由数学分析知道,如一个连续函数 f = f(x), $a \leq x \leq b$,在点 $x = x_0$ 处达极值 (最大或最小),则 x_0 可由下列方程的解给出:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{B-4}$$

或者说,若函数 f(x)在点 $x = x_0$ 处取极值,则 f(x)的导数在该点等于零。其另一 种表达方式为

$$df = \left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)dx = 0$$
 (B-5)

由函数 f(x)的二阶导数可知:

1) 当
$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0$$
 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值
2) 当 $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值 (B-6)

由此可见,对于函数 f(x)在一点取最小值来说,式(B-4)(或(B-5))是必要条件,而(B-6)的第一式便是充分条件。同理,可以讨论最大值的情况。

B.2 泛函极值的必要条件,欧拉方程

以上求函数极值的方法,可以推广应用到泛函中来,以下仍以最短线为例研究泛 函的极值问题。

设 y(x)为使泛函 J 取最小值的容许函数,函数 $\overline{y}(x)$ 为 y(x)邻近的任意容许函数,即

$$\overline{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$$

其中∊为小参数。而

$$y(x) - y(x) = \varepsilon \eta(x) \tag{B-7}$$

称为变量函数 y(x)的变分,记作

$$\delta y = \epsilon \eta(x) \tag{B-8}$$

 $\eta(x)$ 为满足 $\eta(x_1) = 0, \eta(x_2) = 0$ 的任意的函数(如图 B-2 所示)。

应当注意,变分 δy 是指 y 值的任意微小变化;而微分 dy 是指自变量 x 的微小 变化 dx 所引起的 y 的微小变化。二者不要混淆。



设

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$
(B-9)

其中 y' = dy/dx,根据泰勒级数展开,有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y + \epsilon \eta(x), y' + \epsilon \eta'(x)] dx$$

=
$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \epsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \epsilon \eta'\right) dx$$
(B-10)
+
$$\frac{1}{2!} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\epsilon \eta)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \epsilon^2 \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\epsilon \eta')^2\right] dx + \cdots$$

于是得

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2!} \delta^2 J + \frac{1}{3!} \delta^3 J + \cdots$$
 (B-11)

其中泛函 / 的一阶变分,二阶变分,…,定义为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \epsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \epsilon \eta' \right) \mathrm{d}x$$

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\epsilon \eta)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \epsilon^2 \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\epsilon \eta')^2 \right] \mathrm{d}x \qquad (B-12)$$

:

此处一阶变分 δJ ,二阶变分 $\delta^2 J$,…,是关于 ε 的一次,二次,…,齐次式。

下面导出泛函 J 取极值时的必要条件。为此,选择 $\eta(x)$,使其在积分区间的两 端等于零,且在新函数 $y(x) + \epsilon \eta(x)$ 中, ϵ 为小参数。对于充分接近于零的一切 ϵ 值, 函数 $y(x) + \epsilon \eta(x)$ 与曲线 y(x)有 ϵ 接近度。因而沿 $\overline{y}(x)$ 积分(B-10)可视为 ϵ 的函 数,即

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x) + \varepsilon \eta(x), y'(x) + \varepsilon \eta'(x)] dx \qquad (B-13)$$

因 J(0) 是 $J(\varepsilon)$ 的最小值, 故有

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J(0) \ge 0 \tag{a}$$

由于 ε 为无穷小,故可在 $\varepsilon = 0$ 处将 $J(\varepsilon)$ 展开,于是得

$$J(\varepsilon) = J(0) + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon + o(\varepsilon^2)$$
 (b)

因为 ε 可正可负,故为满足式(a),必须有

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=J'(0)=0$$

由此得出

$$\delta J = J(\varepsilon) - J(0) = 0 \tag{B-14}$$

这就证明了,J(y) 取极值时要求式(B-14)成立,即J的一次变分等于零。

由分部积分,则得

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'} \epsilon \eta \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(\frac{\partial F}{\partial y'} \Big) \Big] \epsilon \eta \mathrm{d}x = 0$$

考虑到边界条件,得 $\delta J = 0$ 的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \tag{B-15}$$

或写成下列展开式

$$F_{y'y'} \frac{d^2 y}{dx^2} + F_{y'y} \frac{dy}{dx} + F_{y'x} - F_y = 0$$
 (B-16)

其中 F 的下标表示关于该变量的偏导数,式(B-15)和(B-16)称为欧拉方程,一般地,设

$$J = \int_{v} F(x, y, z, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) dv$$
 (B-17)

则欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) = 0$$
 (B-18)

由以上讨论可知,求泛函J(y)的极值问题可归结为解欧拉方程(B-15)或(B-16),且 满足边界条件(B-3)。

如需判断所得到的解 y(x),使泛函 J(y)取极大还是极小,则需考察 $\delta^2 J$ 的正负 号。如 $\delta^2 J > 0$,则解 y(x)使 J 为极小;反之,如 $\delta^2 J < 0$,则解 y(x)使 J 为极大。这 是因为,当 $\delta J = 0$ 时,有

$$\Delta J = \frac{1}{2!} \delta^2 J + \cdots$$

如 $\delta^2 J > 0$,即 $\Delta J > 0$,这说明泛函 J 的极值为极小。

例 B-1 试求下列泛函

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - y^2] \mathrm{d}x$$

及边界条件
$$y(0) = 0$$
, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$
在什么曲线上取极值。
解 欧拉方程为
 $2y + \frac{d}{dx}(2y') = 0$
即 $y'' + y = 0$
其通解为
 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
利用边界条件得
 $C_1 = 0$, $C_2 = 1$
故仅在曲线
 $y = \sin x$

其诵解为

即

利用边界会

故仅在曲约

上达极值。

B.3 有附加条件的变分问题

有许多变分法问题是求泛函

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$
 (B-19)

0

在边界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$
 (B-20)

及附加条件

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx = L$$
 (B-21)

下的极值问题, L为一常数。这类问题称为有附加条件的变分问题。典型的有附加 条件的变分问题的简单例子是所谓等周问题,即求周长为 L 的封闭曲线所围成的面 积为最大的问题。

求解这类问题,须用拉格朗日乘子法。即求下列泛函

$$H(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \lambda \left[\int_{x_1}^{x_2} G(y, y, y') dx - L \right]$$
(B-22)

在边界条件(B-20)下的极值解。在式(B-22)中参与变分的独立变量为 y 和 λ 。于是 有 H(y)的一阶变分为

$$\delta H = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2} \delta G dx + \delta \lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G dx - L \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta F + \lambda \delta G\right) \mathrm{d}x + \delta \lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G \mathrm{d}x - L\right)$$

솏

 $F^* = F + \lambda G$

得

$$\delta H = \frac{\partial F^*}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \Big) \Big] \delta y \mathrm{d}x + \delta \lambda \Big(\int_{x_1}^{x_2} G \mathrm{d}x - L \Big)$$

由 $\delta H=0$,得

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) = 0 \tag{B-23}$$

及

$$\int_{x_1}^{x_2} G \mathrm{d}x - L = 0 \tag{B-24}$$

由此可见,有附加条件的变分问题,归结为在边界条件(B-20)及附加条件(B-21)下, 求解方程(B-23)。

如前所述,求泛函 J(y)的极值问题可归结为在给定边界条件下求解欧拉方程的问题。换言之,求解欧拉方程,与求解泛函的极值问题 $\delta J = 0$ 等价。

以下举例说明,欧拉方程可作为变分问题的极值条件得到。

例 B-2 若函数 y(x)的二次泛函为

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} [p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)(y')^2 + 2f(x)y + 2g(x)y']dx \quad (a)$$
今证明欧拉方程为

$$(ry')' + (q' - p)y + g' - f = 0$$
 (b)

解 实际上,

$$\frac{1}{2}\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [py\delta y + qy\delta y' + qy'\delta y + ry'\delta y' + f\delta y + g\delta y']dx$$

= $(ry' + qy + g)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} [(ry')' + (q' - p)y + g' - f]\delta ydx$ (c)

于是,由 $\delta J = 0$,计及零边界条件,并注意到 δy 在积分范围内的任意性,则可得式 (b)。

例 B-3 如函数 y(x)的二次泛函

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[p(x) y^2 + 2q(x) y y' + r(x) (y')^2 \right] dx$$
 (d)

在边界条件

$$y(x_1) = y(x_2) = 0$$
 (e)

和附加条件

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} k(x) y^2 dx = 1$$
 (f)

下取极值的变分问题成立,则相应的欧拉方程为

$$(ry')' + (q' - p + \lambda k)y = 0$$
 (g)

其λ为标量参数。

解 实际上,引入拉格朗日乘子λ后,有

$$H = J(y) - \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} k y^2 \,\mathrm{d}x - 1\right) \tag{h}$$

计算 δH ,有

$$\begin{split} \delta H &= \int_{x_1}^{x_2} \left[py \, \delta y + qy \, \delta y' + qy' \, \delta y + ry' \, \delta y' \right] \mathrm{d}x - \lambda \int_{x_1}^{x_2} ky \, \delta y \, \mathrm{d}x - \delta y \left(\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} ky^2 \, \mathrm{d}x - 1 \right) \\ &= (ry' + qy) \, \delta y \, \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[(ry')' + (q' - p + \lambda k) \, y \right] \, \delta y \, \mathrm{d}x - \delta \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} ky^2 \, \mathrm{d}x - 1 \right) \\ \diamondsuit \delta H = 0 \\ \mathbf{\overline{p}} \, \mathbf{\overline{q}} \, \mathbf{\overline{q}} \, \mathbf{\overline{f}} \, \mathbf{\overline{f}}$$

B.4 变边界问题,自然边界条件

在以上所讨论的泛函极值问题中,边界上的值是固定不变的。在这样的条件下, 导出了欧拉方程。现在考虑边界值变动时,即在积分限变动条件下泛函取极值的 条件。

当边界和(或)变量函数在边界上的值容许改变时,欧拉方程仍成立,原因是,虽 然边界和函数的边界值都可以变化,但在可供选择的变量函数中,含有边界和函数的 边界值都不变的一类在内。这就是说,容许函数类中除了与所研究的变量函数有公 共边界的比较函数外,还可以取具有变边界的函数。例如,在泛函

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$
 (B-25)

中 x_1, x_2 以及 $y(x_1), y(x_2)$ 之值都是可变的,就是说,曲线 y=y(x)的端点位置可变。 如在所有端点可变的曲线中,y=y(x)是使泛函 J(y)取极值的一条曲线,则与端点 固定的一类曲线相比,y=y(x)必然的是使 J(y)取极值的一条曲线。换句话说,不 论在哪一条曲线 y=y(x)上,若能使具有变边界问题达到极值,则对于与其有公共边 界点的更窄的曲线类来说,将更能使之达到极值。从而不变边界问题取极值的基本 必要条件必须满足。因而,仍满足欧拉方程

$$F_{y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \tag{B-26}$$

下面讨论,当式(B-25)中的积分限 x_1, x_2 不变,而 $y(x_1), y(x_2)$ 之值可变时,使 泛函 J(y)取极值的函数 y(x),除了必须满足欧拉方程外,还要满足什么条件。

此时泛函 J 取极值的条件为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] \mathrm{d}x = 0$$

注意到

$$\delta y' = \frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(\frac{\partial F}{\partial y'} \Big) \delta y \mathrm{d}x$$

有

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

因为 $\delta y \in [x_2, x_1]$ 区间上是任意的,故欧拉方程必须仍满足。此外要求在 $x = x_1$, $x = x_2 \mathcal{O}$, 有

$$\delta y = 0, \quad \mathbf{g} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$
 (B-27)

如 y 事先并未规定它在边界上的值(此时 δy 将不等于零),则泛函 J 取极值的必要 条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{B-28}$$

式(B-27)中第一类边界条件称为强加边界条件或几何边界条件。第二类边界条件, 即式(B-28),是 y(x)在端点 $x = x_1, x = x_2$ 所应满足的条件,称为自然边界条件。

对于 x_1, x_2 可变的情况,也有类似的边界条件。

例 B-4 设曲线两端在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 直线上,求 x_1, x_2 间最短线的必要条件,并 说明其几何意义。

解 x1、x2间的任意曲线长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} \, \mathrm{d}x \tag{a}$$

其欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0 \tag{b}$$

积分后

$$\frac{\mathbf{y}'}{\sqrt{1+(\mathbf{y}')^2}} = C$$

其通解为

$$y = C_1 x + C_2 \tag{c}$$

由式(c)知 y(x)显然是一直线,它尚应满足自然边界条件:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0 \quad (\mathbf{\pounds} \ x_1, x_2 \ \mathbf{\pounds})$$

即

$$y' = 0(\mathbf{\pounds} x_1, x_2 \mathbf{\pounds}) \tag{d}$$

将式(c)代入式(d)得 $C_1 = 0$,所以

$$y = C_2 \tag{e}$$

它是平行于 x 轴的直线段。

▲ 附录 C 复变函数与解析函数的基本性质

C.1 复变函数与解析函数

由两实数 x,y 确定的数

$$x = x + iy \tag{C-1}$$

称为复数,其中 $i = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位,x,y 分别称为复数 z 的实部与虚部,记作:

$$x = \operatorname{Re}z, \quad y = \operatorname{Im}z$$
 (C-2)

显然 z 可用直角坐标系(x,y)上的一点表示,x 轴称为实轴,y轴称为虚轴,该平面称为复平面,或称为 z 平面。这样,z 平 面上的任一点 A 可记作(图 C-1)

 $z = x + iy = |z| (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| e^{i\varphi} \quad (C-3)$ 其中, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为复数的模, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ 称为 z 的幅 角, 记作 argz, 其中位于[0, 2\pi)间的一个角称为主幅角。

设有两个复变数 z 和 w,z 可在 z 平面内的某一区域 D 内任意取值,若对每一个 z 值,有 w 的确定值与之对应,则称为定义在域 D 上的复变函数。记作

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{C-4}$$

其中 u,v 是 x,y 的函数。



f(z)的共轭为

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$$
(C-5)

若 w = f(z)定义在域 $D \perp z_0$ 是域 D 内的一点,且下列极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在,则称该极限为 f(z)在 z_0 处的导数,记作

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0} \tag{C-6}$$

并称函数在 z_0 处可微。若 f(z)在 z_0 及其邻域内处处可微,则称 f(z)在 z_0 处解析;若 在 D 内处处解析,则称 f(z)为 D 内的解析函数。若 f(z)在点 z_0 处不解析,则称 z_0 为 f(z)的奇点。

下面我们不加证明地给出解析函数具有的下列基本性质(证明见有关复变函数 教程)。

(1) 解析函数 f(z) = u(x, y) + iv(x, y)的实部与虚部满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
 (C-7)

反之,柯西-黎曼条件是函数 f(z)为解析函数的充要条件。

(2) 若 f(z)为一解析函数,且 $f'(z) \neq 0$,则其实部与虚部的等值线 $u(x,y) = C_1$ 与 $v(x,y) = C_2$ 必相互正交。

(3) 解析函数的实部与虚部均为调和函数,即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$
 (C-8)

或即

 $\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0$

并称构成解析函数的两调和函数 u 和 v 互为共轭调和函数。调和函数 $\nabla^2 u = 0$ 的解为

$$u = f(z) + \overline{f(z)} \tag{C-9}$$

(4) 解析函数的任意阶导数仍为解析函数。

(5) 若 f(z)在以 z_0 为中心的圆域 $|z-z_0| < R$ 内解析,则可展成泰勒(Taylor)级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$
 (C-10)

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$
 (C-11)

其中

(6) 若 f(z)在以 z_0 为中心的圆环 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析,则可展成洛朗

(Laurent)级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$
 (C-12)

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$
(C-13)

此处 C 为圆环域内绕 z₀的任何一条简单闭曲线。

(7) 若 f(z)在单连通域 Ω 内处处解析,则 f(z)沿 Ω 内任一闭曲线 C 的积分为零,即

$$\oint_C f(z) dz = 0 \tag{C-14}$$

这一性质称为柯西积分定理。

C.2 柯西积分公式

下面给出柯西积分的一些性质。

(1) 设有一光滑的闭周界 C 其上的点用 t 表示,C 把 z 平面分成内部有限域 Ω^+ 和外部无限域 Ω^- 。约定观察者沿简单闭曲线 C 逆时针前进的方向为正, Ω^+ 是逆时 针绕 C 一周留在左手边的区域。

若在区域 Ω^+ 内给定 f(z) 为全纯函数,且在 C 的正方向上连续,则有柯西公式成 立,即

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega^{+} \\ 0 & z \in \Omega^{-} \end{cases}$$
(C-15)

(2) 若函数 f(z)在 Ω^- 域内是全纯的,且在 C 的正方向上连续,则柯西公式化为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(\infty) & z \in \Omega^{+} \\ -f(z) + f(\infty) & z \in \Omega^{-} \end{cases}$$
(C-16)

若式(C-15),(C-16)中的被积函数 f(t)是 f(z)在 C 上的,则称为柯西积分。若 f(t)在 C 上连续,但不是周界上的值,则称为柯西型积分。

(3) 在 C 上连续的函数 f(t) 是 Ω^+ 内某全纯函数的边界值的充要条件为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0 \quad z \in \Omega^{-}$$
(C-17)

(4) 在 C 上连续的函数 $f(t) \in \Omega^-$ 内某全纯函数的边界值的充要条件为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(t)}{t-z} dt = a \quad z \in \Omega^+$$
(C-18)

式中 a 为常数,等于 $f(\infty)$ 。

(5) 若 C 为圆周,分 z 平面为内外域 Ω^+ 和 Ω^- ,若 f(t) 是圆周 C 上的连续函数, 是圆周之外某全纯函数的边界值的充要条件为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0 \quad z \in \Omega^{-}$$
(C-19)

(6) 在圆周 C 上连续的函数 f(t) 是 C 内某全纯函数的边界值的充要条件为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(t)}{t-z} dt = C_1 \quad z \in \Omega^+$$
(C-20)

其中 C 为常数,等于函数在 $\zeta = 0$ 处的值。

外国人名译名对照表

Airy, G. B.	艾里
Bauschinger, J.	鲍辛格
Beltrami, E.	贝尔特拉米
Boussinesq, T. V.	布西内斯克
Castigliano, A	卡斯蒂利安诺
Cauchy, A. L.	柯西
Clausius, R.	克劳修斯
d'Alembert, J. le R.	达朗贝尔
Duhamel, M. C.	杜哈默
Euler, L.	欧拉
Fourier, J. B. J.	傅里叶
Galerkin, B.G.	伽辽金
Geiringer, H.	盖林格
Goursat, E.	古尔萨
Hamilton, W. R.	哈密顿
Hertz, H.	赫兹
Hill, R.	希尔
Hooke, R.	胡克
Kelvin Lord	开尔文
Kirchhoff, G. R.	基尔霍夫
Kolosoff, G. V.	克洛索夫
Lagrange, J. L.	拉格朗日
Lamé, G	拉梅
Laplace, P. G.	拉普拉斯
Love, A. E. H.	勒夫
Lévy, M.	莱维
Michell, J. H.	米歇尔
Muskhelishvili, N. I.	穆斯海里什维利
Nadai, A.	纳达依
Navier, C. L.	纳维
Neumann, F.	纽曼
Neuber, H.	诺贝尔

Papkovich, P. F.	帕普柯维奇
Poisson, S. D.	泊松
Prandtl, L.	普朗特
Riemann, G. F. B.	黎曼
Ritz, W.	里茨
Rayleigh Lord	瑞利
Rukov, A.M.	儒可夫
Saint-Venant, A. J. C. B. de	圣维南
Schmidt, R.	施密特
Timoshenko, S. P.	铁摩辛柯
Young, T.	杨

G

Н

J

K

抗扭刚度 123 K-M函数 105

抗弯刚度 196

Kolosoff 公式 107

Α 艾里应力函数 71 В 八面体剪应力 23 八面体剪应变 36 **八面体平面** 22 变形 29 拜尔特拉米-密乞尔方程 59 保角映射 111 Boussinesg 问题 152 标量场的梯度 260 波速 243 边缘效应 238 薄膜理论 225 **半逆解法** 60 **薄膜比拟法** 128 С **侧限弹性模量** 246 **沉陷** 94 D 单一曲线假定 50 **单元刚度矩阵** 183 **杜哈默-纽曼法则** 139 **单层势** 154 等温过程 159 **等容波** 247 **对数螺线** 91 叠加原理 62 F **反对称张量** 32 **反射波** 245 Fourier 定律 134

Goursat 公式 105 伽辽金法 179 **刚体位移** 29 广义胡克定律 41 **哈密顿算子** 260 胡海昌-鹫津变分原理 174 **亥姆霍茲定理** 248 混合边值问题 56 Hertz 接触问题 155 厚壁筒 86 **混合边界条件** 16,18 **横波** 246 极化波 249 剪应力 8 **剪应力互等定理** 9,13 基尔霍夫-勒夫假定 192,222 解的惟一性 60 **剪应变** 34 剪切波 247 **畸变能** 50 **畸变波** 247 卡氏第一定理 168 卡氏第二定理 172,188 **开口薄壁杆** 129

柯西积分定理 274 **柯西-黎曼条件** 105,273 Kolosoff-Muskhelishvili 函数 105 L 拉梅系数 221 拉梅弹性常数 43 Love 函数 152 拉梅-纳维方程 58 **莱维**方程 69 莱维方法 204 **里茨法** 176 赖斯纳变分原理 174 Μ 面力 6 **面波** 248 Ν **逆解法** 60 **纳维方法** 204 **扭转刚度** 123,126 0 **欧拉方程** 264 Р 膨胀波 247 **泊松比** 45 偏斜应力张量 25 **泊松方程** 121 普朗特应力函数 121 Pupkovich-Neuber 一般解 146 Q **全纯函数** 109 **翘曲函数** 119 球张量 25 R **热力学定律** 134 **热应力** 133 **热力学第一定律** 134,159 **热力学第二定律** 135 **雷利波** 250

热流密度 134 **热弹性势** 142 **痼** 135 **声阻抗率** 244 **圣维南原理** 61 **矢量场的旋度** 261 **矢量场的散度** 261 **弹性系数** 42 弹性本构方程 42 **弹性势** 49 **弹性应变能** 48 **弹性波** 242 体力 6 **体积模量** 47 体波 246 **位移边界条件** 16.17 无矩理论 225 **位移法** 56 无旋波 247 位势函数 247 协调方程 37 旋转壳 228 相对位移张量 31 **虚位移原理** 160 **虚应力原理** 169 一般变分原理 172 **压力泡** 91 杨氏弹性模量 41 应力 7 应力不变量 21 应力法 51 应力函数 70

S

т

W

Χ

Y

应力集中 96

索引
应力能 160
应力偏张量 9,25
应力球张量 25
应力椭球张量 25
应力张量 10
应力协调方程 36,59
应力强度 50
应力不变量 21
应变不变量 36
应力边界条件 16,17
应变能密度 49
应变强度 50
应变余能 160
应变位移关系式 35
应变张量 32
有效应力 50
有效应变 50
应变能函数 49

圆柱壳 225 **有限元法** 180 正应力 8,20 **正应变** 33 **主应力** 19 主方向 19 **主平面** 19 **主向空间** 21 **主应变** 35 **转动张量** 32 **总刚度阵** 183 最大剪应力轨迹 91 **最小总势能原理** 166 最小总余能原理 171 **自然边界条件** 269 **最小功定理** 172 最小应变能定理 172

Z

参考文献

- 1 铁摩辛柯,古地尔著.弹性理论.徐芝纶译.北京:高等教育出版社,1990
- 2 徐芝纶. 弹性力学(上下册). 北京: 人民教育出版社, 1979
- 3 钱伟长,叶开源.弹性力学.北京:科学出版社,1956
- 4 杜庆华,余寿文,姚振汉.弹性理论.北京:科学出版社,1986
- 5 王启德.应用弹性理论.林砚田等译.北京:机械工业出版社,1966
- 6 陆明万,罗学富.弹性理论基础.北京:清华大学出版社,1990
- 7 杨绪灿,金建三.弹性力学.北京:高等教育出版社,1987
- 8 杨桂通. 弹塑性力学. 北京:人民教育出版社,1979
- 9 杨桂通,张善元.弹性动力学.北京:中国铁道出版社,1988
- 10 杨桂通. 弹塑性力学引论. 北京:清华大学出版业,2004
- 11 吴家龙.弹性力学(新版).上海:同济大学出版社,1993
- 12 徐秉业,黄炎,刘信声等.弹塑性力学及其应用.北京:机械工业出版社,1984
- 13 程昌钧. 弹性力学. 兰州: 兰州大学出版社, 1995
- 14 徐秉业主编.弹性与塑性力学——例题和习题(第二版).北京:机械工业出版社,1991
- 15 徐秉业,刘信声.应用弹塑性力学.北京:清华大学出版社,1995
- 16 武际可,王敏中.弹性力学引论(修订版).北京:北京大学出版社,2001
- 17 武际可. 力学史. 重庆: 重庆出版业, 2000
- 18 钟伟芳,皮道华.高等弹性力学.武汉:华中理工大学出版社,1993
- 19 张行主编. 高等弹性理论. 北京:北京航空航天大学出版社, 1994
- 20 钱伟长. 变分法及有限元. 北京:科学出版社, 1980
- 21 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京:科学出版社, 1981
- 22 黄文彬,曾国平.弹塑性力学难题分析.北京:高等教育出版业,1992
- 23 Rabotnov U N. Mechanics of deformable solid bodies (Russian edition). Moscow: Science Press, 1979
- 24 Saada A S. Elasticity theory and applications. London: Pergamon Press, Inc., 1974
- 25 Nikiforoff L V. A course of theory of elasticity and plasticity (Russian edition). Moscow: Higher Education Press, 1959
- 26 Love A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. New York: Dover Publications, Inc. 1944
- 27 Sokolinkoff I S. Mathmatical theroy of elasticity. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1956
- 28 Arkulis G I, Dorogobed V G. Theory of plasticity (in Russian). Moscow: Metal, Pub. House, 1987
- 29 Doghri I. Mechanics of deformable solids. New York: Springge, 2000
- 30 Yang Guitong. Theory of elasticity and plasticity. CBMI Press, 2004