

研究生教学用书 湖南省教育厅推荐

研究生数学基础课程系列教材

非线性常微分方程 理论 方法 应用

钱祥征 戴斌祥 刘开宇 编 著

湖南大学出版社

2006年·长沙

内 容 简 介

全书分为两大部分,第一至第四章为第一篇非线性系统的平面定性理论及分支,讲述奇点的局部结构、极限环、平面系统的全局结构、平面系统的结构稳定性与分支问题;第五至第八章为第二篇非线性系统的稳定性理论及其应用,讲述 Liapunov 稳定性的基本概念与基本定理、线性系统及其扰动系统的稳定性、Liapunov 直接法和稳定性概念的拓广、Liapunov 函数的构造和应用实例。除第八章外,各章配有习题、补充与问题及参考文献。

本书可作为高等院校数学专业常微分方程方向的硕士研究生学位基础课程教材,也可作为数学与应用数学专业本科高年级选修课教材使用,同时也可供相关理工科教师和研究参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性常微分方程理论 方法 应用/钱祥征,戴斌祥,刘开宇编著.

—长沙:湖南大学出版社,2006.6

ISBN 7-81113-064-5

I. 非... II. ①钱... ②戴... ③刘...

III. 非线性—常微分方程—研究 IV. O175.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072060 号

非线性常微分方程理论 方法 应用

Feixianxing Changweifen Fangcheng Lilun Fangfa Yingyong

作 者: 钱祥征 戴斌祥 刘开宇 编著

责任编辑: 厉 亚

封面设计: 张 毅

出版发行: 湖南大学出版社

社 址: 湖南·长沙·岳麓山

邮 编: 410082

电 话: 0731-8821691(发行部), 8821142(编辑室), 8821006(出版部)

传 真: 0731-8649312(发行部), 8822264(总编室)

电子邮箱: pressliy@hnu.cn

网 址: <http://press.hnu.cn>

印 装: 长沙瑞和印务有限公司

开本: 787×1092 16 开 印张: 19.75

字数: 344 千

版次: 2006 年 8 月第 1 版 印次: 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1~3 000 册

书号: ISBN 7-81113-064-5/O·65

定价: 38.00 元

前 言

本书主要为数学专业常微分方程方向硕士研究生编写的学位基础课教材. 编写中我们遵循了以下原则:

1. 与专著不同, 作为方向基础课程的教材, 要考虑便于教与学: 取材不宜过多、过广、过深, 文字通顺易读、适当简洁, 注意基础性, 注重原始思想与先进性的结合.

2. 本书主要涵盖常微定性理论和稳定性理论两大部分的基础内容, 这是考虑到近年来不少院校学制、学时有所压缩, 课程门数有所增加, 把这两部分写在一本书中便于在一个学期中完成原来两门课程的内容, 同时在教学上也可灵活处理, 有利于突出两者的相互联系与区别.

3. 考虑到知识的适度扩充, 我们在每一章末尾写了一小段“补充与问题”, 以指导读者在学习该章基础内容后, 去阅读相关专著与文献, 了解、思考一些尚未解决的相关问题.

全书分为两篇共 8 章. 第一篇非线性系统的平面定性理论及分支, 为第一章至第四章, 重点讲述二维动力系统的相平面分析和分支理论. 第一章较全面、详细地讨论了平面奇点的局部结构, 重点放在 Frömmers 方法及中心-焦点判定问题. 第二章讲述了极限环的存在性、唯一性及不存在的判定, 重次及稳定性等基本内容和旋转向量场理论; 作为它的理论基础的 Poincaré-Bendixson 理论和奇点的指数也在这一章中讲述; 值得一提的是, Poincaré-Lindstedt 小参数法和 Колмогоров-боголюбов 平均方法, 作为计算极限环(周期解)的渐近方法也写进了这一章后的“补充与问题”之中. 第三章讲述了无穷远奇点的讨论方法, 研究平面系统全局结构的步骤和若干实现的例子; 我们还在第三节中列出两个如何全面应用相平面分析的例子, 包括模型的建立、定性分析过程和结论返回到实际的解释. 第四章讲述了结构稳定性理论, 并且系统而简洁地介绍了平面动力系统的分支理论.

第二篇非线性系统的稳定性理论及其应用, 含第五章至第八章, 主要介绍 n 维非线性系统稳定性理论和方法, 重点是 Liapunov 稳定性与直接法. 第五章介绍 Liapunov 意义下的稳定性概念和基本定理, 是这一篇的主要基础. 第六章讨论当系统是线性时所出现的一些特殊情况与性质: 一些等价概念和等

价定理,稳定性的代数判据,扰动理论和相关的周期系数线性系统的稳定性问题等.第七章讲述在 Liapunov 开创性工作之后,直接法和稳定性概念两个方面的拓广.方法拓广方面主要介绍了 Lassalle 不变原理、比较原理,以及直接法功能的扩展——系统的有界性、耗散性;第四节介绍了 Liapunov 稳定性以外的多种稳定性概念及结果.第八章较系统地介绍了 Liapunov 函数作法的多种思路和应用稳定性理论和方法解决实际问题的几个例子.

讲授完本书全部内容需 72~80 学时,如果为了锻炼研究生阅读、理解、表达能力,把部分内容分给他们,以学生报告、讨论,老师最后总结的方式进行,则学时要相应增加,甚至可延为两学期来完成.在减缩部分内容和定理的证明下,本书也可作为高等院校数学与应用数学本科高年级学生选修课教材用.

本书的正文曾以讲义的形式于 2002 年秋在湖南大学内部印刷,初稿经王志成教授、庾建设教授、黄立宏教授、李志祥教授、周展教授和袁朝晖副教授等审阅或试用过,他们对初稿提出了许多宝贵的意见,作者对他们热情的帮助表示衷心的感谢.湖南大学出版社为本书的出版给予了大力支持,特别是厉亚责任编辑为本书高质量的出版付出了辛勤的劳动,我们的博士研究生张娜、胡海军等为本书的校对作出了贡献,作者在此也向他们表示感谢.

本书初稿印本自 2002 年秋以来虽经多次在硕士研究生和数学专业本科高年级选修课中试用,并作了多次修改,但由于我们水平所限,加之这种写法也是初次尝试,不足和错误之处在所难免,恳请同行和读者批评指正.

编 著 者

2006 年 6 月

目 次

绪论	1
第一篇 非线性系统的平面定性理论及分支	
第一章 奇点的局部结构	7
第一节 双曲奇点的局部结构	7
第二节 Frömmner 方法	16
第三节 中心-焦点判定	33
第四节 Liapunov 型奇点	44
习题一	51
补充与问题	54
参考文献	57
第二章 极限环	59
第一节 平面动力系统的 P - B 理论	59
第二节 极限环的存在性	67
第三节 Liénard 方程周期解的存在唯一性	76
第四节 奇点的指数和它在极限环存在性位置中的应用	92
第五节 极限环的重次与稳定性	95
第六节 旋转向量场中的极限环	100
习题二	110
补充与问题	112
参考文献	117
第三章 平面系统的全局结构	121
第一节 无穷远奇点	121
第二节 全局结构的例子	128
第三节 几个应用实例	135
习题三	142
补充与问题	143
参考文献	145

第四章 平面系统的结构稳定性与分支问题	146
第一节 结构稳定性	146
第二节 分支的基本概念与分类	154
第三节 多重奇点分支	158
第四节 Hopf 分支	162
第五节 多重极限环分支和 Poincaré 分支	171
第六节 同宿环分支与 Bogdanov-Takens 分支	175
补充与问题	178
参考文献	180
 第二篇 非线性系统的稳定性理论及其应用	
第五章 Liapunov 稳定性的基本概念与基本定理	182
第一节 Liapunov 意义下的稳定性概念	182
第二节 Liapunov 稳定性基本定理	187
习题五	202
补充与问题	204
参考文献	207
第六章 线性系统及其扰动系统的稳定性	208
第一节 线性系统稳定性的等价定理	208
第二节 常系数线性系统稳定性的代数判据	211
第三节 线性系统的扰动理论	218
第四节 周期系数线性系统的稳定性	222
习题六	228
补充与问题	229
参考文献	233
第七章 Liapunov 直接法和稳定性概念的拓广	234
第一节 Lassalle 不变原理	234
第二节 比较原理	241
第三节 系统的有界性和耗散性	249
第四节 稳定性概念的拓广	257

习题七.....	270
补充与问题.....	272
参考文献.....	274
第八章 Liapunov 函数的构造和应用实例	275
第一节 Liapunov 函数的某些作法	275
第二节 几个应用实例.....	292
补充与问题.....	303
参考文献.....	305

绪 论

人们熟知,常微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}),$$

或微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x),$$

$x \in \mathbf{R}^n$, 在 f 或 F 对变元连续的条件下, 它们的解是存在的, 但要确切地找出解的有限形式的表达式常常是不可能的, 特别是对非线性常微分方程(组), 这种可能性更是极小(即使 $n=1$ 时). 1841 年 Liouville 严格证明了看来极其简单的 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

一般不可解以后, 更促使人们去寻找新的途径、新的方法, 从给定微分方程(组)本身可提供的信息来研究其解的性质, 而不依赖于几乎求不出的解的表达式.

一、H. Poincaré 开创的常微分方程定性理论

1881~1886 年, H. Poincaré 接连以“微分方程所定义的积分曲线”为题发表了四篇论文^[3], 系统地建立了“作出由微分方程所定义的曲线族”的方法, 在分析与几何工具的帮助下从微分方程(组)本身所提供的信息, 几何地全面反映了解曲线的性质, 这就是人们通常所说的微分方程定性理论或几何理论.

1. 相平面与轨线

Poincaré 所创立的作出全部解曲线的方法要基于几何中的 **Jordan 定理**: 任何 $\mathbf{R}^2$ 的单闭曲线 L 将 $\mathbf{R}^2$ 分为 D_1 和 D_2 两部分, 自 D_1 内任何一点到 D_2 内任何一点的连续路径必定与 L 相交. 同时, 该方法也要基于解曲线的不相交性. 基于这两点, 定性理论着重讨论的是平面自治系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \quad (0.1)$$

在相平面 $x-y$ 上全部轨线的分布状态.

系统(0.1)在相平面 $x-y$ 上定义了一个向量场, $(x(t), y(t))$ 是向量场中的一个运动着的点, 它的轨迹称为系统(0.1)的轨线. 我们要研究、作出系统(0.1)的全部轨线, 因为它们能很好地描述出系统(0.1)对应的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)},$$

或二阶方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt})$$

的积分曲线族的一切性质. 这种对应关系我们也可从简单的例子:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x - 2ny, \end{cases} \quad \text{在相平面 } x-y \text{ 上的轨线}$$

与

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x + 2ny}{y} \quad \text{在平面 } x-y \text{ 上的积分曲线}$$

或

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad \text{在平面 } t-x \text{ 上的积分曲线}$$

(其中 $n \geq 0, \omega > 0$) 三者之间的关系来体会.

我们设系统(0.1)中的 $X(x, y), Y(x, y)$ 在讨论的区域内连续, 且满足解的唯一性条件. 以

$$x = x(t; t_0, x_0, y_0), \quad y = y(t; t_0, x_0, y_0) \quad (0.2)$$

表示初始条件 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ 的解, 则容易证明系统(0.1)的轨线有下列三条性质:

性质 1(对时间 t 的平移性) 对任意常数 $\tau, x = x(t + \tau; t_0, x_0, y_0), y = y(t + \tau; t_0, x_0, y_0)$ 都是系统(0.1)的解, 它们对相平面 $x-y$ 上的投影是同一条轨线, 因此式(0.2)也是相平面 $x-y$ 上过 (x_0, y_0) 轨线的参数表达式. 当只考虑 $t \geq t_0$ ($t \leq t_0$) 那一半时, 式(0.2)代表的是过 (x_0, y_0) 的正半轨 L^+ (负半轨 L^-).

性质 2(唯一性) 过相平面 $x-y$ 中的每一点 (x_0, y_0) , 系统(0.1)有且只有一条轨线.

性质 3(对时间 t 的可加性) 设 $t=0$ 时自点 (x_0, y_0) 出发的解在 $t=t_1$ 时到达点 (x_1, y_1) , 又 $t=0$ 时自点 (x_1, y_1) 出发的解在 $t=t_2$ 时到达点 (x_2, y_2) , 则 $t=0$ 时自点 (x_0, y_0) 出发的解在 $t=t_1+t_2$ 时也到达点 (x_2, y_2) , 即

$$x(t_2; 0, x(t_1; 0, x_0, y_0), y(t_1; 0, x_0, y_0)) = x(t_1 + t_2; 0, x_0, y_0),$$

$$y(t_2; 0, x(t_1; 0, x_0, y_0), y(t_1; 0, x_0, y_0)) = y(t_1 + t_2; 0, x_0, y_0).$$

对轨线而言,这个性质可简述为:自 (x_0, y_0) 出发的轨线,若经 t_1 到达 (x_1, y_1) ,又经 t_2 到达 (x_2, y_2) ,则自 (x_0, y_0) 出发的轨线经 $t_1 + t_2$ 也到达 (x_2, y_2) .

使系统(0.1)中

$$X(x^*, y^*) = Y(x^*, y^*) = 0 \quad (0.3)$$

的点 (x^*, y^*) ,称为系统(0.1)的**奇点**,也称**静止点**、**平衡点**.这样的点是相平面上特殊的点,是由一个点构成的轨线(点轨线),任何其他的轨线不可能在有限时间内到达奇点 (x^*, y^*) .

以上关于轨线的性质可以推广到相空间 $\mathbf{R}^n$ 上去.

2. 常点邻域的平直性

若点 $P_0(x_0, y_0)$ 是系统(0.1)的**常点**,即

$$X^2(x_0, y_0) + Y^2(x_0, y_0) \neq 0,$$

则我们有下面的描述任何常点邻域中轨线共性的“**局部平直性**”定理.

定理 设系统(0.1)满足 $X(x, y), Y(x, y) \in C^r(D), r \geq 1$, 区域 $D \subset \mathbf{R}^2$; $P_0 \in D$ 是常点,则存在 P_0 的一个曲四边形邻域 U 及定义在 $\bar{U}$ 上的一个 C^r 拓扑变换 T ,它使 $T\bar{U} = \bar{R}$ 为矩形,且将 U 中系统(0.1)的轨线族变为 R 中的平行直线族.

证明 先经非奇异线性变换将坐标原点移到常点 P_0 上,且使纵轴与点 P_0 处的方向场重合,这样若延用原记号,则有 $X(0, 0) = 0, Y(0, 0) \neq 0$.由 X, Y 的连续性,存在 $O(0, 0)$ 的邻域 $S(0, \epsilon)$,使 $Y(x, y) \neq 0$,对 $\forall (x, y) \in S(0, \epsilon)$ 成立.从而在 $S(0, \epsilon)$ 中,系统(0.1)等价于方程

$$\frac{dx}{dy} = \frac{X(x, y)}{Y(x, y)}. \quad (0.4)$$

由定理的假设知,方程(0.4)满足初值问题解的存在唯一条件且解对初值可微 r 次.因此,它的解可表示为

$$x = x(y, a), \quad x(0, a) = a,$$

再在 $S(0, \epsilon)$ 中取一个矩形 $ABCD$,在其上定义变换

$$F: (a, y) \rightarrow (x(y, a), y),$$

它将矩形 $ABCD$ 映为 $S(0, \epsilon)$ 中的曲四边形 $A'B'C'D'$,把前者中的平行直线族 $x=a$ 映为后者中对应的积分曲线族 $x=x(y, a)$,显然,这个 $F \in C^{r+1, r}(a, y)$,如图0-1所示.

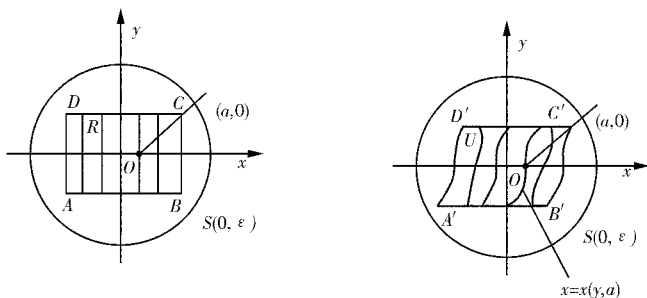


图 0-1

以下证明这样定义的 F , 其逆变换 F^{-1} 存在, 也是一对一的, 且 $F^{-1} \in C^r$, 因 $x = x(y, a)$ 是方程 (0.4) 的解, 故

$$\frac{dx(y, a)}{dy} = \frac{X(x(y, a), y)}{Y(x(y, a), y)}.$$

又由解对初值可微公式, 可得

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \exp\left(\int_0^y \frac{Y \frac{\partial X}{\partial x} - X \frac{\partial Y}{\partial x}}{Y^2} dy\right) > 0.$$

故可在曲四边形 $A'B'C'D'$ 中, 由 $x = x(y, a)$ 解出反函数

$$a = a(x, y),$$

它满足 $a(a, 0) = a, a(x(y, a), y) \equiv a$, 我们定义

$$T = F^{-1}: (x, y) \mapsto (a(x, y), y),$$

显然变换 $T \in C^r(x, y)$ 是一对一的, 由 $a(x(y, a), y) \equiv a$ 知, 它将曲四边形 $A'B'C'D'$ 中的积分曲线 $x = x(y, a)$ [满足 $x(0, a) = a$] 映为矩形 $ABCD$ 的平行直线 $x = a$. 取曲四边形 $A'B'C'D'$ 的闭包为 P_0 的闭邻域 $\bar{U}$, 矩形 $ABCD$ 的闭包为矩形 $\bar{R}$, 则 T 即为所求之拓扑变换. 证毕.

3. 本书定性理论篇内容的框架结构

研究并作出系统 (0.1) 的全部轨线的分布状态及扰动下的变化, 是本书第一篇平面定性理论及分支问题的主要内容, 我们是按由小范围到大范围, 再谈“变化”的框架来叙述的:

(1) 轨线的局部分布: 奇点邻域中轨线的各种分布结构与判定方法.

(2) 轨线的大范围分布: 闭轨线和极限环的存在、唯一性、位置、稳定性等与判定方法.

(3) 轨线的全局结构: 无穷远奇点邻域的结构, 轨线的分隔与联接, 全局结构图.

(4) 当系统含有可变参数时, 在参数微小变化下轨线的分布结构是否稳定(结构稳定性); 参数在达到或通过某个值时, 结构会发生突变吗? —— 分支问题, 动力系统的分支问题是近 30 年来发展起来的重要研究课题, 近代科技的许多领域, 甚至包括经济、医学、生物生态的研究中均出现分支现象, 有待我们去研究解决.

二、A. M. Liapunov 创立的常微分方程稳定性理论

对高维系统, 上面的许多讨论就行不通了, 因而无法再通过作出系统的全部轨线来弄清解的一切性质. 于是, 人们把目标转向对一般的 n 维系统

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (0.5)$$

$x \in \mathbf{R}^n$, 去探求任一个特定的解 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ (一般求不出来) 所具有的某种重要的性质.

1892 年俄国数学家 A. M. Ляпунов (Liapunov) 发表了“运动稳定性的一般问题”的杰出论文^[5], 创立了 Liapunov 稳定性理论. 他首次提出了, 当初始条件 (t_0, x_0) 受到微小扰动时, 在此后的任何时候都能保持解 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ 受到的影响极小的“稳定性”概念(后人称之为 Liapunov 意义下的稳定性), 同时创造了“Liapunov 函数” $V(t, x)$ 这一判定解的稳定性的强有力的分析工具. 这个理论与方法在工程控制中有着广泛的应用, 意义极其重要. 在其后的几十年中, 随着科学技术的发展和理论研究的不断深入, 人们一方面进一步完善了 Liapunov 稳定性的基础理论体系, 另一方面, 在稳定性概念的拓广和 V 函数这一工具应用领域的开拓这两条主线上不断延伸、发展稳定性领域的丰富成果, 人们建立了许多新的稳定性概念, 大大地发展了 V 函数的应用方式与应用领域, 将它用于研究解的有界性、收敛性、耗散性及周期解等. 本书的稳定性理论篇就是按照上述思路来分章叙述的.

参考文献

[1] 秦元勋. 微分方程所定义的积分曲线(上册). 北京: 科学出版社, 1959

[2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная Теория дифференциальных Уравнений, М. — Л., гостехизгиз, 1949 (中译本: 涅梅茨基, 斯捷巴诺夫. 微分方程定性理论(上、下

册)北京:科学出版社,1956,1959.)

- [3] Poincaré H. Sur les Courbes définies par des équations différentielles, J. Math. Pures et Appl. , (3), 7 (1881), 375~422; Ibid 8 (1882), 251~296; Ibid (4), 1 (1885), 167~244; Ibid 2 (1886), 151~217
- [4] 秦元勋. 运动稳定性的一般问题讲义. 北京:科学出版社, 1958
- [5] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950

第一篇 非线性系统的平面定性理论及分支

第一章 奇点的局部结构

在研究平面系统的局部结构时,奇点邻域中轨线结构的判定占有首要的位置.本章除了介绍常用的初等奇点 $p-q$ 参数判定法和 Perron 定理外,重点讲述了通用的 Frömmel 判定法.我们还较详细地介绍了重要的中心-焦点判定问题的两种经典的方法,引入了“焦点判定量”这一重要概念.

第一节 双曲奇点的局部结构

在区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 中给定平面自治系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (1.1)$$

在 D 内 X, Y 连续且保证解的存在唯一性.若

$$X^2(x_0, y_0) + Y^2(x_0, y_0) = 0$$

成立,则称点 $P_0(x_0, y_0)$ 是系统(1.1)的奇点(静止点、平衡点);否则,点 P_0 为系统(1.1)的常点.

一、常系数线性系统的奇点

这时系统(1.1)具有形式

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy, \quad (1.2)$$

其中 a, b, c, d 都是实常数,我们以 $\mathbf{A}$ 表示它的系数矩阵,即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} \equiv ad - bc.$$

以下分 $\det \mathbf{A} \neq 0$ 和 $\det \mathbf{A} = 0$ 两种情形来讨论.

1. $\det \mathbf{A} \equiv ad - bc \neq 0$

这时原点 $O(0, 0)$ 是系统(1.2)唯一的(孤立)奇点. $\mathbf{A}$ 的[也称系统(1.2)对应的]特征方程

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \equiv \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根,若是实的就以 λ, μ 来记;若是复的(必然共轭),则记为 $\lambda = \alpha + i\beta, \mu = \alpha - i\beta (\beta \neq 0)$. 由化实矩阵为若当标准型的定理知,必存在非奇异线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

将系统(1.2)化为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv \mathbf{J} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

其中 $\mathbf{J}$ 为下列五种标准型之一:

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \lambda \neq \mu, & \text{(ii)} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, & \text{(iii)} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \\ & \text{(iv)} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0, & \text{(v)} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \beta \neq 0. \end{aligned}$$

系统(1.4)在 $\xi-\eta$ 平面上点 O 邻域内的相图是容易画出的,即图 1-1,这在常微分方程基础课程中已讲过,不再赘述,回到 $x-y$ 平面上时,图形相当于施行了(1.3)的逆变换

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

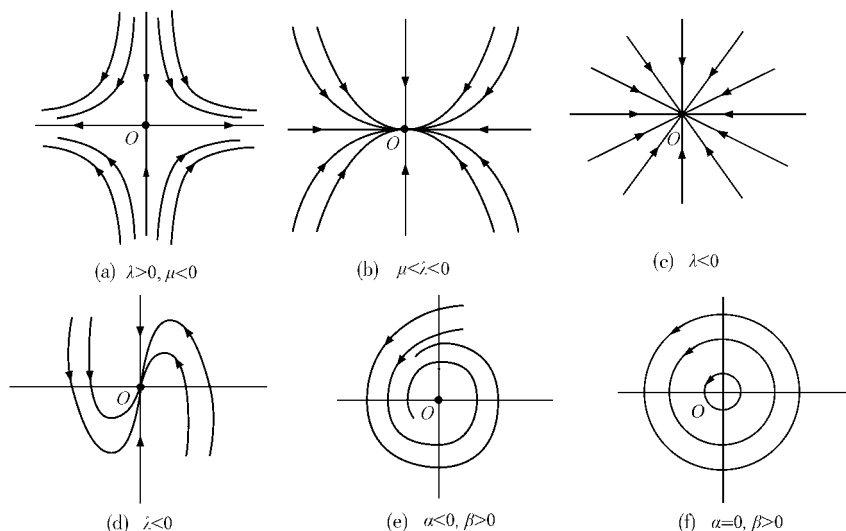


图 1-1 轨线相图

其结果只是使图 1-1 在固定点 O, ξ, η 轴被挤压成为 $x-y$ 平面上两条斜交于 O 的直线, 而其他轨线之间及轨线与这两条斜线之间的相互结构没有改变(见例 1.2), 这样的相图与图 1-1 对应的相图是“拓扑等价的”, 在定性结构本质上是一样的, 我们通常就用图 1-1 中所示的相图代表了系统(1.2)在相应条件下 $x-y$ 平面上 O 邻域中的**轨线相图**.

如果我们注意到 A 的特征方程可写成

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ \equiv \lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

又注意到三个参数

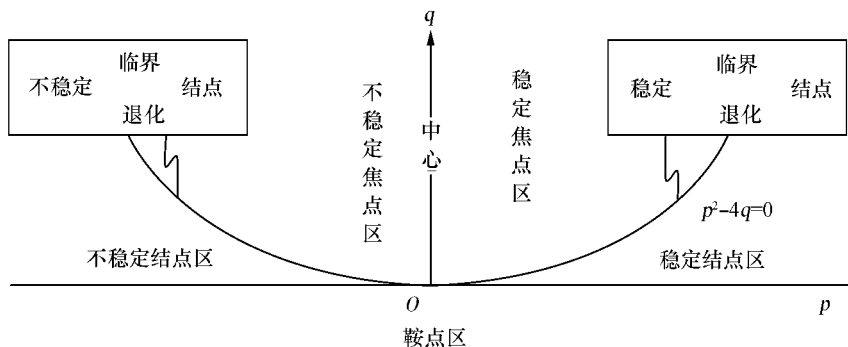
$$p \equiv -(a+d), \quad q \equiv \det A \equiv ad - bc, \quad \Delta \equiv p^2 - 4q$$

与特征根及五种若当标准型之间的对应关系时, 我们可得到下面的, 以参数 p, q, Δ 来判定系统(1.2)奇点 O 类型的分类表(见表 1-1).

表 1-1 分类表

		特征根	奇点 O 的类型	
$q < 0$		不等异号	鞍点[图 1-1(a)]	
$q > 0$	$\Delta > 0$	不等同号	结点	$p > 0$ 时稳定[图 1-1(b)] $p < 0$ 时不稳定
	$\Delta = 0$	相等 $b^2 + c^2 = 0$	临界结点	$p > 0$ 稳定[图 1-1(c)] $p < 0$ 时不稳定
		相等 $b^2 + c^2 \neq 0$	退化结点	$p > 0$ 时稳定[图 1-1(d)]
	$\Delta < 0$	复根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$	焦点	$p > 0$ 时稳定[图 1-1(e)] $p < 0$ 时不稳定
		纯虚根 $\lambda = \pm i\beta$	中心[$p=0$, 图 1-1(f)]	

如果进一步把这种分类记录在 $p-q$ 参数平面上, 我们将发现, 系统(1.2)的系数对应的 p, q, Δ 三个数决定的点 (p, q) 落在该平面的不同位置立即决定了奇点 O 的类型, 我们称它为 **$p-q$ 参数判定法**. $p-q$ 图(见图 1-2)十分有利于对上述判定法的理解、记忆和应用, 我们应熟记在心.

图 1-2 $p-q$ 图

例 1.1 具有正阻尼的线性振动方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (m > 0, r > 0, k > 0),$$

它的等价系统是

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}y.$$

这时, 系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{r}{m} \end{pmatrix},$$

所以对应的

$$q = \det \mathbf{A} = \frac{k}{m} > 0, \quad p = -(a + d) = \frac{r}{m} > 0,$$

$$\Delta = p^2 - 4q = \frac{r^2 - 4km}{m^2}.$$

按 $p-q$ 图可知:

(i) 当 $r^2 < 4km$ (即阻尼较小) 时, 点 (p, q) 落在稳定焦点区, 表明奇点 $O(0, 0)$ 就是稳定焦点——平衡位置附近的运动是阻尼振动.

(ii) 当 $r^2 > 4km$ (即阻尼较大) 时, 点 (p, q) 落在稳定结点区, 表明奇点 O 就是稳定结点.

当 $r^2 = 4km$ (临界阻尼) 时, 点 (p, q) 落在抛物线 $p > 0$ 部分上, 这时 $b^2 + c^2 = 1 + \frac{k^2}{m^2} \neq 0$, 表明奇点 O 是稳定退化结点.

这两种情形都表明平衡位置附近的运动是不起振的衰减运动.

(iii) 特殊情形 $r=0$ (即无阻尼) 时, 这时 $p=0$, 点 (p, q) 落在正 q 轴上, 表明奇点 O 是中心——平衡位置附近都是等幅振动.

例 1.2 判定系统

$$\dot{x} = x - 3y, \quad \dot{y} = 4x - 6y$$

的奇点 $O(0,0)$ 的类型, 并画出其代表图形及原 $x-y$ 平面上的图形.

解 (1) 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, 对应的

$$q = 6, \quad p = 5, \quad \Delta = 1.$$

因此在 $p=q$ 平面上, 点 (p, q) 处于稳定结点区, 即 O 是稳定结点, 其代表图形为图 1-3(a).

(2) A 对应的特征方程是

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0,$$

特征根为 $\lambda = -2, \mu = -3$. 容易算出原系统可经线性变换

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

下化为标准型

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

因此在 $x-y$ 平面上 ξ 轴 ($\eta=0$ 处) 和 η 轴 ($\xi=0$ 处) 分别是直线

$$-x + y = 0, \quad 4x - 3y = 0.$$

那么, 在 $x-y$ 平面上 O 点邻域内的图形应是图 1-3(b).

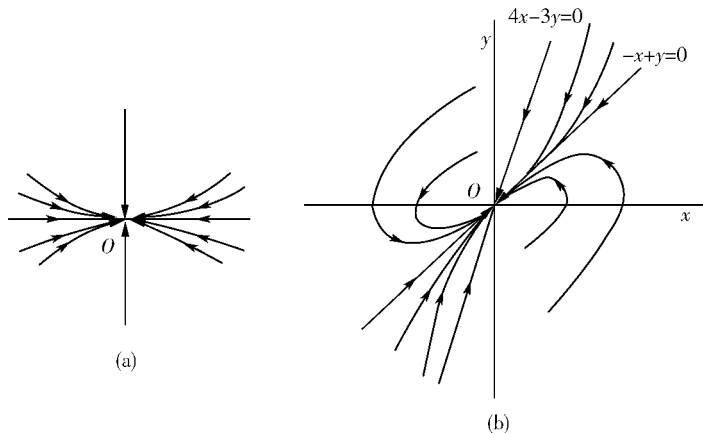


图 1-3

实际上,上述这两条直线就是特征根 $\lambda = -2, \mu = -3$ 分别对应的特征向量 $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 所决定的直线,也正是下一节中我们将提到的系统的两个特征方向.它们也可以用下面的方法求得:令 $y = kx$,代入系统对应的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 6y}{x - 3y},$$

消去 x ,得

$$k = \frac{4 - 6k}{1 - 3k} \quad \text{或} \quad (3k - 4)(k - 1) = 0,$$

求得 $k_1 = 1, k_2 = \frac{4}{3}$,它们就是 $x - y$ 平面上 ξ 轴和 η 轴的斜率.

2. $\det \mathbf{A} = ad - bc = 0$ 情形. 这时又分两种情况讨论:

(1) $a^2 + b^2 = 0, c^2 + d^2 \neq 0$ (或 $a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 = 0$), 只讨论前者, 后者类似. 这时系统为

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = cx + dy.$$

显然 $x = \text{const}$ 是解, 直线 $cx + dy = 0$ 上的点都是奇点, 该线称为奇线, 图形可分为 $d = 0$, 如图 1-4(a)、图 1-4(b) 所示; $d \neq 0$ 如图 1-4(c)、图 1-4(d) 所示.

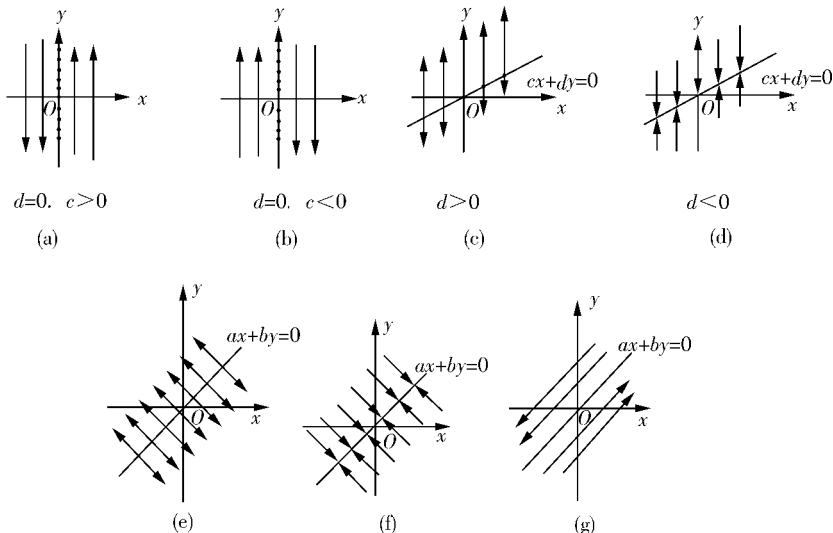


图 1-4

(2) $a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0$

由 $q = \det \mathbf{A} = 0, a^2 + b^2 \neq 0$, 这时系统可写成

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = k(ax + by),$$

对应

$$\frac{dy}{dx} = k,$$

轨线是一族平行直线

$$y = kx + l,$$

直线 $ax + by = 0$ 上的点都是奇点, 如图 1-4(e)、图 1-4(f)、图 1-4(g) 所示.

二、双曲奇点的局部结构

考虑非线性系统

$$\dot{x} = ax + by + P(x, y), \quad \dot{y} = cx + dy + Q(x, y), \quad (1.5)$$

其中 P 和 Q 都是 x, y 高于一次的非线性连续函数, 且 $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$.
矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

仍称为系统(1.5)所对应的(线性部分)系数矩阵, 我们研究当 $q \equiv \det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$ 时, 奇点 $O(0, 0)$ 邻域内系统(1.5)轨线的性态.

定义 1.1 当系统(1.5)的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征根实部均非零时, 它的奇点 O 称为是双曲的.

双曲奇点具有较好的拓扑性质, 我们有下面的属于 O. Perron 的两个定理及更为深刻的 Hartman-Grobman 定理.

定理 1.1^[7] (Perron) 若系统(1.5)中的 P, Q 满足

(i) 在点 O 的某邻域内具有连续的一阶偏导数;

(ii) 对 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 一致地有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Q(x, y)}{r} = 0;$$

(iii) $\mathbf{A}$ 对应的参数 $p \equiv -(a + d), q \equiv ad - bc, \Delta \equiv p^2 - 4q$ 满足 $q < 0$, 或 $q > 0$ 时 $p \neq 0$ 及 $\Delta \neq 0$, 则系统(1.5)与其线性近似系统(1.2)的 O 点具有相同的奇点类型(鞍点、结点、焦点)和相同的稳定性.

定理 1.2^[7] (Perron) 若系统(1.5)中的 P, Q 满足

(i) 在 O 的某邻域内具有连续的一阶偏导数;

(ii) 存在常数 $\delta > 0$, 对 r 一致地有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P(x, y)}{r^{1+\delta}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Q(x, y)}{r^{1+\delta}} = 0;$$

(iii) $q < 0$ 或 $q > 0$ 时 $p \neq 0$.

则系统(1.5)与系统(1.2)的 O 点具有相同的奇点类型(鞍点、结点、临界结点、退化结点、焦点)和相同的稳定性.

定理 1.3^[8] (Hartman-Grobman) 设系统(1.5)中的 P, Q 满足

(i) 在 O 的邻域 S 内具有连续的一阶偏导数;

(ii) 在 S 内当 $r \rightarrow 0$ 时, 有

$$P(x, y) = o(r), \quad Q(x, y) = o(r);$$

(iii) O 是双曲奇点.

则必存在 O 的一个邻域 $S_1 \subset S$ 和其上的一个拓扑变换

$$x = u(\xi, \eta), \quad y = v(\xi, \eta)$$

$[u(0, 0) = v(0, 0) = 0]$, 将原点 O 及邻域 S_1 映为 $\xi - \eta$ 平面上的原点 $O'(0, 0)$ 及邻域 S'_1 , 并将系统(1.5)在 S_1 内的轨线映为线性系统

$$\dot{\xi} = a\xi + b\eta, \quad \dot{\eta} = c\xi + d\eta \quad (1.6)$$

在 S'_1 内的轨线, 且保持时间定向.

这三个定理都体现了非线性系统(1.5)可“线性化”的思想, 但在不同的条件下得到的结论是有区别的. 因此, 我们在用于判定系统(1.5)的双曲奇点类型时, 要准确掌握好这些区别点. 在下节讲述的 Frömmers 方法时, 作为例子将给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明.

注 定理 1.1 和定理 1.2 的条件(i)和(ii), 在应用中常常以更强的条件来代替, 譬如 P, Q 对变元具有二阶连续偏导数, 且 $P(0, 0) = Q(0, 0) = P'_x(0, 0) = P'_y(0, 0) = Q'_x(0, 0) = Q'_y(0, 0) = 0$.

例 1.3 一个无阻尼的倒立于不稳定平衡位置附近的数学摆, 其运动方程为

$$ml^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} = mgl \sin \phi.$$

令 $\phi = x, \frac{d\phi}{dt} = \frac{dx}{dt} = y$, 则得等价系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{g}{l} \sin x = \frac{g}{l} x - \frac{g}{l} \left(\frac{x^3}{3!} + \cdots \right). \end{cases}$$

显然 $O(0, 0)$ 是唯一奇点, 且

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix},$$

对应 $q = -\frac{g}{l} < 0$, 说明 O 是线性近似系统的鞍点; 又 $P(x, y) \equiv 0, Q(x, y) \equiv -\frac{g}{l} \left(\frac{x^3}{3!} + \cdots \right)$, 满足了定理 1.2 的三个条件, 故 O 也是非线性系统的鞍点. 这与 $\phi = 0$ 是不稳定的平衡位置这一事实相一致.

例 1.4 无线电技术中著名的自激振荡之一, 是由 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (\epsilon \neq 0)$$

来描述, 它的等价系统是

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \epsilon y - \epsilon x^2 y,$$

这里 $P(x, y) \equiv 0, Q(x, y) \equiv -\epsilon x^2 y$, 满足定理 1.2 的条件 (i) 和 (ii). 这时

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}, \text{ 对应}$$

$$q = 1, \quad p = -\epsilon, \quad \Delta = p^2 - 4q = \epsilon^2 - 4,$$

因此, 当 $\epsilon^2 > 4, \epsilon^2 = 4, \epsilon^2 < 4$ 时, O 分别是线性近似系统的结点, 退化结点 ($b^2 + c^2 \neq 0$), 焦点. 由定理 1.2 知, 也是上述非线性系统点 O 的同类型奇点, 且稳定性也相同. 由方程的导出中知

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(\frac{\sigma M}{LC} - \frac{R}{L} \right),$$

所以我们只要适当加大线圈的互感 M , 使 $\frac{\sigma M}{LC} - \frac{R}{L} > 0$, 就可使 $p < 0$, 从而使奇点 O 是不稳定的 (这是使系统产生自激振的基础).

例 1.5 讨论系统

$$\dot{x} = -x + \frac{2y}{\ln(x^2 + y^2)}, \quad \dot{y} = -y - \frac{2x}{\ln(x^2 + y^2)}$$

的奇点 $O(0, 0)$ 的类型.

解 这里 P, Q 只满足定理 1.1 的条件 (ii), 而不满足定理 1.2 的条件 (ii), 因此不能保证 O 仍是此非线性系统的临界结点. 事实上, 我们令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 时, 系统化为

$$\frac{dr}{dt} = -r, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\ln r},$$

积分得

$$r = r(0)e^{-t}, \theta = \theta(0) + \ln(t - \ln r(0))$$

$[t > \ln r(0)]$. 因此, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $r(t) \rightarrow 0, \theta(t) \rightarrow +\infty$. O 显然是非线性系统的稳定焦点.

第二节 Frömmier 方法

M. Frömmier^[9] 在 Poincaré 讨论奇点的思想基础上, 总结出一套完整的奇点判定法, 它具有相当的一般性, 多数情况下用起来也比较方便.

考虑一般的平面自治系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \quad (1.1)$$

或对应的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \quad (1.1)'$$

其中 X, Y 对变元具有连续的一阶偏导数, $O(0, 0)$ 是它的孤立奇点.

定义 1.2 当

$$q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(0, 0)}{\partial x} & \frac{\partial X(0, 0)}{\partial y} \\ \frac{\partial Y(0, 0)}{\partial x} & \frac{\partial Y(0, 0)}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

时, 我们称点 O 为系统 (1.1) 或方程 (1.1)' 的 **高次奇点**; $q \neq 0$ 时, O 为 **初等奇点**.

上节讨论过的孤立奇点都是初等奇点, 高次奇点的局部结构一般较初等奇点要复杂得多.

一、基本概念

引入极坐标, 系统 (1.1) 化为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = X(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Y(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \\ r \frac{d\theta}{dt} = -X(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta + Y(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta. \end{cases}$$

定义 1.3 若在相平面上能找到一串点序列 $\{P_n(r_n, \theta_n)\}$ 满足: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $r_n \rightarrow 0, \theta_n \rightarrow \theta_0$, 且 $\tan \psi_n \rightarrow 0$, 其中 ψ_n 表示点 P_n 上的向径 $\theta = \theta_n$ 逆时针转到该点的线素场方向所转过的角. 则称 $\theta = \theta_0$ 所确定的方向是系统 (1.1) 或方程 (1.1)' 的一个 **特征方向**.

注意: (1) 按此定义若 $\theta = \theta_0$ 是特征方向, 则 $\theta = \theta_0 + \pi \pmod{2\pi}$ 也必然是特征方向.

(2) 若系统 (1.1) 有轨线以某一确定的方向 $\theta = \theta_0$ 趋于原点 O (即 $r \rightarrow 0$ 时, $\theta \rightarrow \theta_0$), 则该方向必是特征方向; 但反过来却不一定, 即沿定义中的特征方向系统不一定有轨线趋于奇点 O . 例如系统

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = 2x^3,$$

令 $y = x^2$ 代入它对应的微分方程的右端, 得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{y} \Big|_{y=x^2} = -2x,$$

这说明, 沿过原点的抛物线 $y = x^2$ 取定义 1.3 中的点列 $\{P_n(r_n, \theta_n)\}$, 则当 $r_n \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) 时, $\theta_0 = 0, \pi$ 均是该系统的特征方向; 但此系统的轨线都是环绕着 O 的闭曲线族

$$x^4 + y^2 = c^2.$$

引理 1.1 特征方向的集合 Θ 是闭集.

不难从定义可证: 任意的 $\{\theta_n\}$, $n = 1, 2, \dots, \theta_n \in \Theta$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta^*$, 则有 $\theta^* \in \Theta$.

引理 1.2 若 $\theta = \theta_0$ 不是特征方向, 则对于 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时趋于奇点 O 的任何正半轨 L^+ (负半轨 L^-) $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, 必存在时刻 $T > 0$, 使当 $t > T$ ($t < -T$) 时, 此半轨或与 $\theta = \theta_0$ 不再相交, 或同向穿过向径 $\theta = \theta_0$.

证明 只证括号外的情形. 若存在某时刻 $T_1 > 0$, $t > T_1$ 后 L^+ 不再与 $\theta = \theta_0$ 相交, 则引理已成立.

若不论 T_1 取得多么大, $T > T_1$ 后总要与 $\theta = \theta_0$ 相交, 这时设引理结论不真, 即在射线 $\theta = \theta_0$ 上, 总可选到 L^+ 的无限多个交点 $\{P_n(r_n, \theta_0)\}$, 具有性质: $r_{n+1} < r_n$; 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $r_n \rightarrow 0$; 各相邻两点 P_k, P_{k+1} 处, L^+ 异向穿过 $\theta = \theta_0$ (见图 1-5). 于是, 按场的连续性知, 在 $\theta = \theta_0$ 上总可找到点列 $\{\bar{P}_k(\bar{r}_k, \theta_0)\}$, 每点介于相应两点 $P_k(r_k, \theta_0), P_{k+1}(r_{k+1}, \theta_0)$ 之间, $r_k > \bar{r}_k > r_{k+1}$, 且其上轨线与 $\theta = \theta_0$ 相切 (即定义 1.3 中相应的 $\tan \psi_{P_k} = 0$). 这意味着 $\theta = \theta_0$ 是一个特征方向了, 这与假设矛盾. 证毕.

引理 1.3 若系统 (1.1) 的非特征方向是处处稠密的, 则任何趋于奇点 O 的半轨, 或以确定的方向, 或以绕 O 无限盘旋的方式趋于 O .

证明 我们只对趋于 O 的正半轨 $L^+ : r = r(t), \theta = \theta(t)$ 来证明. 采用反证法, 设 $t \rightarrow +\infty$ 时 L^+ 不是以结论中的两种方式趋于 O 时, 我们来导出矛盾. 这时必可选出两串时间序列 $\{t_n\}, \{t_n\}'$:

$$t_n < t'_n, \quad n = 1, 2, \dots, n \rightarrow +\infty \text{ 时 } t_n \rightarrow +\infty,$$

且使

$$\theta_n \equiv \theta(t_n) \rightarrow \theta_1, \quad \theta'_n \equiv \theta(t'_n) \rightarrow \theta_2, \quad \theta_1 < \theta_2,$$

由设非特征方向是处处稠密的, 故必存在非特征方向 $\theta = \theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ 及序列 $\{t_n^0\}, n = 1, 2, \dots$:

$$t_n^0 \in (t_n, t'_n), \quad \theta(t_n^0) = \theta_0, \quad r(t_n^0) \rightarrow 0,$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $r(t_n^0) \rightarrow 0$ (见图 1-6). 显然, 这些点 $(r(t_n^0), \theta_0)$ 上 L^+ 是异向穿过非特征方向 $\theta = \theta_0$ 的, 这与引理 1.2 的结论矛盾. 证毕.

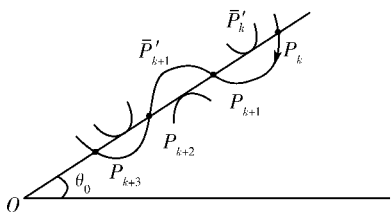


图 1-5

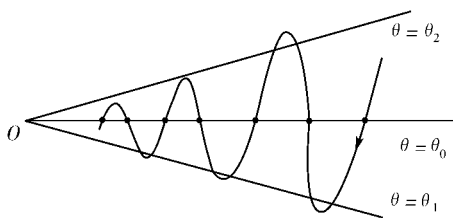


图 1-6

定义 1.4 以奇点 O 为心, r_0 为半径的圆弧段 $\widehat{AB}$ 及 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 两线段构成的充分小的扇形 OAB , 称为系统 (1.1) 的 **典型域**, 如果它包括边界在内满足:

- (i) 除 O 外其上无其他奇点;
- (ii) 在角域 $\angle BOA$ 内部有且只有一个特征方向 $\theta = \theta_0$;
- (iii) 在扇形上各点, 系统确定的场方向与该点的向径不正交.

下面为了叙述上的方便, 我们称 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 为典型域的侧边, $\widehat{AB}$ 为后边.

引理 1.4 系统 (1.1) 若有典型域, 只可能是下列三种类型之一:

(i) 两侧边上的线素场都是朝向 (看伸入 OAB 内部的那半截线段, 下同) 奇点 O 的, 称为 **I 类典型域** [图 1-7(a)];

(ii) 两侧边上的线素场都是朝向后边的, 称为 **II 类典型域** [图 1-7(b)];

(iii) 两侧边上的线素场的朝向是不同, 即一条侧边上的线素场皆朝向 O , 另一条侧边上的线素场皆朝向后边, 称为 **III 类典型域** [图 1-7(c)、图 1-7(d)].

考虑到场的连续性和定义 1.4 中条件 (iii) 的规定, 很容易得出上述结论.

定理 1.4 当 t 增加 (减少) 时, 系统 (1.1) 进入典型域的半轨, 若

(1) 它们进入 **I 类典型域**, 则当 $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) 时都沿特征方向 $\theta = \theta_0$ 趋于 O ;

(2) 它们进入 **II 类典型域**, 则经有限时间后, 有无穷多条半轨从后边走出

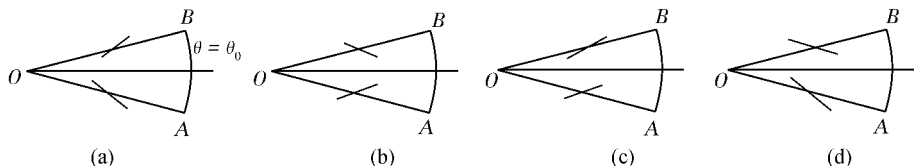


图 1-7

此域, 但后边 $\widehat{AB}$ 上必有一点或一段闭弧, 从它上面出发的半轨当 $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) 时, 都沿特征方向 $\theta = \theta_0$ 趋于 O ;

(3) 它们进入 III 类典型域, 则或全部半轨经有限时间后都离开此域; 或在边界(侧边或后边)上存在一点 S , 使 O 到 S 边界上出发的一切半轨当 $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) 时皆沿特征方向 $\theta = \theta_0$ 趋于 O , 而过边界其他点的轨线经有限时间后皆离开此域。

证明 只证括号外的情形。

(1) 正半轨 L^+ 进入 I 类 OAB 后, 由场的连续性及定义 1.4 的条件 (iii) 知, L^+ 不能走出此域, 也不能趋于内部某点, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时 L^+ 必趋于 O , 再由引理 1.3 知, L^+ 只能沿 OAB 中唯一的特征方向 $\theta = \theta_0$ 趋于 O [图 1-8(a)].

(2) 正半轨 L^+ 通过侧边 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 进入 II 类 OAB 后, 它们都可以从后边走出此域, 分别得后边 $\widehat{AB}$ 上的点列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 这两个点列都是有序、有界的, 因而各自有确界 A' 和 B' . 显然, 过这两点的轨线 $\overline{L_{A'}}, \overline{L_{B'}}$ 必沿特征方向 $\theta = \theta_0$ 趋于 O . 这时, 若 A' 与 B' 重合时, $\widehat{AB}$ 上出发的沿 $\theta = \theta_0$ 趋于 O 的负半轨是唯一的; 若不重合, 则从 $\widehat{A'B'}$ 弧上的所有负半轨都沿 $\theta = \theta_0$ 趋于 O [图 1-8(b)].

(3) 正半轨 L^+ 自侧边(例如 $\overline{OB}$) 进入 III 类 OAB 后有两种可能, 或全部通过 $\overline{OA}$ 走出此域, 或在 $\overline{OB}$ (或在后边 $\widehat{AB}$) 上存在一点 S , 从它出发的正半轨 L_S^+ 沿 $\theta = \theta_0$ 趋于 O , 这时闭线段 $\overline{OS}$ 上(或 $\overline{OB} \cup \overline{BS}$ 上)出发的一切正半轨都沿 $\theta = \theta_0$ 趋于 O [图 1-8(c)、图 1-8(d)]. 证毕。

注 1 上述定理的结论(2)和结论(3)都各有两种可能结果, 对 II 类典型域判别何时有且只有一条轨线沿 $\theta = \theta_0$ 趋于 O , 被称为“**第一判定问题**”; 对 III 类典型域判别何时有无数条轨线沿 $\theta = \theta_0$ 趋于奇点 O , 何时没有轨线趋于 O , 被称为“**第二判定问题**”。这里不加证明地引用两个基本上属于 E. R. Lohn 的两个定理^[10]。

首先把系统(1.1)写成

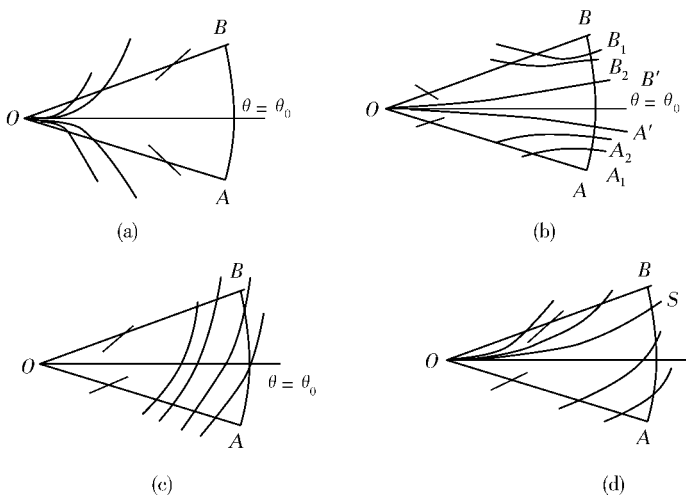


图 1-8

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, y) \equiv X_m(x, y) + \varphi(x, y), \\ \dot{y} &= Y(x, y) \equiv Y_n(x, y) + \psi(x, y),\end{aligned}\quad (1.1)_1$$

其中 X_m, Y_n 分别是 x, y 的 m 次和 n 次齐次多项式, $m \geq 1, n \geq 1$ 且不可公约; φ, ψ 连续, 且保证系统 (1.1) 解的存在唯一性.

第一判定定理 设系统 (1.1)₁ 中 φ, ψ 对应的 $\frac{\varphi(r, \theta)}{r^m}, \frac{\psi(r, \theta)}{r_n}$ 对 θ 满足具无穷小系数的 Lipschitz 条件

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^m} |\varphi(r, \theta_1) - \varphi(r, \theta_2)| &\leq L(r) |\theta_1 - \theta_2|, \\ \frac{1}{r^n} |\psi(r, \theta_1) - \psi(r, \theta_2)| &\leq L(r) |\theta_1 - \theta_2|,\end{aligned}$$

其中 $L(r) \rightarrow 0$, 当 $r \rightarrow 0$ 时. 且

(i) 若 $\theta = \theta_0$ 是简单特征方向时, 有 $r \rightarrow 0$ 时

$$\varphi(x, y) = o(r^m), \quad \psi(x, y) = o(r^n); \quad (1.7)$$

(ii) 若 $\theta = \theta_0$ 是 k 重特征方向时 (这是 $k \geq 3$ 必为奇数, 且 $m = n$), 有 $r \rightarrow 0$ 时

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y) = O(r^{m+1}). \quad (1.8)$$

则系统 (1.1)₁ 在 $\theta = \theta_0$ 上的 II 类典型域中只有唯一的轨线沿 $\theta = \theta_0$ 趋于奇点 O .

第二判定定理 设 θ_0 是 $F(\theta)=0$ 的 k 重根(k 必为偶数), 且

$$G(\theta) \equiv X_m(\theta) \cos \theta + Y_m(\theta) \sin \theta,$$

$$F(\theta) \equiv -X_m(\theta) \sin \theta + Y_m(\theta) \cos \theta,$$

$$f(r, \theta) \equiv -\varphi(r, \theta) \sin \theta + \psi(r, \theta) \cos \theta,$$

$$A(r) \equiv r^m \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$F^{(k)}(\theta_0)G(\theta_0) \neq 0$, 常数

$$D = \left(\frac{G(\theta_0)}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{F^{(k)}(\theta_0)}{k!} (k-1) \right]^{\frac{1}{k-1}};$$

及当 δ, r_0 充分小时, 在Ⅲ类典型域 $\Delta_0: |\theta - \theta_0| \leq \delta, 0 \leq r \leq r_0$ 中, 若

$$f(r, \theta) \leq C_1 A(r), 0 < C_1 < D,$$

则 Δ_0 中系统(1.1)₁ 有无穷多条轨线沿 $\theta = \theta_0$ 趋于奇点 O ; 若

$$f(r, \theta) \geq C_2 A(r), C_2 > D,$$

则 Δ_0 中系统(1.1)₁ 无轨线趋于奇点 O .

注 2 当 φ 和 ψ 在点 O 的邻域内具有连续的一阶偏导数, 加上条件(1.7)或(1.8), 则系统(1.1)₁ 在 $\theta = \theta_0$ 上的Ⅱ类典型域中只有唯一的轨线沿 $\theta = \theta_0$ 趋于奇点 O ;

当 $r \rightarrow 0$ 时, $\varphi, \psi = O(r^{m+1})$, 则系统(1.1)₁ 在 $\theta = \theta_0$ 上的Ⅲ类典型域 Δ_0 中有无穷多条轨线沿 $\theta = \theta_0$ 趋于奇点 O .

二、奇点的判别法则

为了讨论的统一性, 我们把系统(1.1)写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y) \equiv X_m(x, y) + \varphi(x, y), \\ \dot{y} &= Y(x, y) \equiv Y_m(x, y) + \psi(x, y). \end{aligned} \quad (1.1)_2$$

$m \geq 1, X_m, Y_m$ 是变元的 m 次齐次多项式, 不可公约, φ, ψ 从高于 m 次的项开始, 连续且保证解的唯一性. X_m, Y_m 中可以有一个恒为零, 例如 $Y_m \equiv 0$ 时, 系统(1.1)₂ 可写成系统(1.1)₁ 形式且 $m < n$.

引入极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 系统(1.1)₂ 化为

$$\frac{dr}{dt} = r^m [X_m(\theta) \cos \theta + Y_m(\theta) \sin \theta] + o(r^m),$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = r^m [-X_m(\theta) \sin \theta + Y_m(\theta) \cos \theta] + o(r^m).$$

我们用 $F(\theta), G(\theta)$ 记

$$F(\theta) \equiv -X_m(\theta) \sin \theta + Y_m(\theta) \cos \theta,$$

$$G(\theta) \equiv X_m(\theta) \cos \theta + Y_m(\theta) \sin \theta.$$

则上系统可化为方程

$$r \frac{d\theta}{dr} = \frac{F(\theta) + o(1)}{G(\theta) + o(1)}, \quad (1.9)$$

其中 $X_m(\theta), Y_m(\theta)$ 是 $X_m(\cos \theta, \sin \theta), Y_m(\cos \theta, \sin \theta)$ 的简写; $o(1)$ 满足 $r \rightarrow 0$ 时 $o(1) \rightarrow 0$.

若记任一点 $P(r, \theta)$ 的线素场方向与极轴的夹角为 β , 点 P 的向径逆时针转到该点线素场方向转过的角为 ψ (或 $\psi + \pi$) (如图 1-9 所示), 则由 $\beta = \theta + \psi$ 及

$$\tan \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta}{\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta},$$

容易推得

$$\tan \psi = r \frac{d\theta}{dr}. \quad (1.10)$$

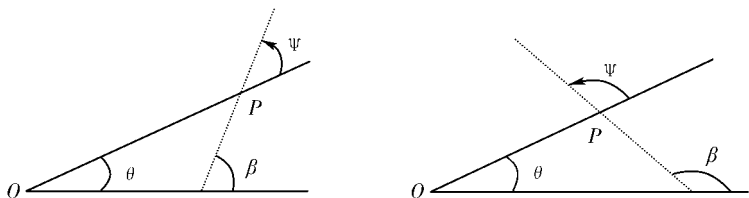


图 1-9

由方程(1.9), 关系式(1.10)和特征方向的定义知, $\theta = \theta_0$ 是系统(1.1)的特征方向的必要条件是 $F(\theta_0) = 0$; 反之, 若 $F(\theta_0) = 0, G(\theta_0) \neq 0$, 可取点列 $(r_n, \theta_0), r_n \rightarrow 0$, 则同样可知 $\tan \psi_n \rightarrow 0$, 按定义 1.3, $\theta = \theta_0$ 就是特征方向. 这样, 下面的定义就十分自然了.

定义 1.5 $F(\theta_0) = 0$ 称为系统(1.1)的**特性方程**, 它的零点包含了系统(1.1)的全部特征方向.

下面我们分三类情形来讨论.

(1) $F(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上定号

不妨先设 $F(\theta) > 0, \theta \in [0, 2\pi]$. 由连续函数性质, 存在正常数 a , 使 $F(\theta) \geq a > 0, \theta \in [0, 2\pi]$. 取圆域 $S_{r_0} = \{(r, \theta) : r \leq r_0\}$, 当 r_0 充分小时, 在 S_{r_0} 中有

$$F(\theta) + o(1) > \frac{a}{2} > 0,$$

颠倒方程(1.9)的分子分母, 在 S_{r_0} 中沿轨线 $r = r(\theta)$ 由 $\bar{\theta}$ 到 θ 积分, 得

$$\int_{r(\bar{\theta})}^{r(\theta)} \frac{dr}{r} = \int_{\bar{\theta}}^{\theta} \frac{G(\theta) + o(1)}{F(\theta) + o(1)} d\theta \leq \left| \int_{\bar{\theta}}^{\theta} \frac{2}{a} |G(\theta) + o(1)| d\theta \right|,$$

于是存在常数 $M > 0$, 使

$$\int_{r(\bar{\theta})}^{r(\theta)} \frac{dr}{r} \leq M |\theta - \bar{\theta}|,$$

或

$$-M |\theta - \bar{\theta}| \leq \ln \frac{r(\theta)}{r(\bar{\theta})} \leq M |\theta - \bar{\theta}|,$$

亦即在 S_{r_0} 中有

$$r(\bar{\theta})e^{-M|\theta-\bar{\theta}|} \leq r(\theta) \leq r(\bar{\theta})e^{M|\theta-\bar{\theta}|}.$$

由右边的不等式可看出, 只要初始点取得足够靠近 O 时, 例如 $r(\bar{\theta}) \leq r_0 e^{-2k\pi M}$ 时, 有

$$r(\bar{\theta} + 2k\pi) \leq r(\bar{\theta})e^{2k\pi M} \leq r_0,$$

即转有限的 k 圈后, 轨线 $r(\theta)$ 还可以在 S_{r_0} 中, 从而保证上面的讨论是有效的. 左边的不等式

$$r(\theta) \geq r(\bar{\theta})e^{-M|\theta-\bar{\theta}|} > 0.$$

说明, 只有 $\theta \rightarrow \infty$ 时 $r(\theta)$ 的下界才有可能趋于 O , 这表明 S_{r_0} 中系统 (1.1) 这时只可能有闭轨或无限绕 O 旋转的开轨.

再设 $I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{G(\theta)}{F(\theta)} d\theta$, 因 $r \rightarrow 0$ 时积分

$$\int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}+2\pi} \frac{G(\theta) + o(1)}{F(\theta) + o(1)} d\theta \rightarrow I.$$

若 $I < 0$, 则当 r_0 充分小时, 在 S_{r_0} 中有

$$\ln r(\bar{\theta} + 2\pi) - \ln r(\bar{\theta}) < \frac{I}{2} < 0,$$

即

$$r(\bar{\theta} + 2\pi) < r(\bar{\theta}),$$

或存在正常数 $q < 1$, 使

$$r(\bar{\theta} + 2\pi) < qr(\bar{\theta}),$$

从而有

$$r(\bar{\theta} + 2k\pi) < q^k r(\bar{\theta}), \quad k = 1, 2, \dots.$$

又注意 $F(\theta) > 0$ 时, 由系统 (1.1) 极坐标形式的第二式知, r_0 足够小时, 在 S_{r_0} 中

$$\frac{d\theta}{dt} = r^{m-1} [F(\theta) + o(1)] > 0.$$

这说明沿轨线 t 增加时 θ 增加, 而 $r(\theta)$ 不断减小趋于 0 , 得 O 是系统 (1.1) 的稳

定焦点.

类似讨论其他情况,我们得

定理 1.5 $F(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上定号时,系统(1.1)在 origin 邻域中的轨线只能是绕 O 的闭轨和绕 O 无限次旋转的两种. 这时若 $F(\theta) > 0$, 则当 $I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{G(\theta)}{F(\theta)} d\theta < 0$ 时, O 是系统(1.1)的稳定焦点; 当 $I > 0$ 时, O 是不稳定焦点; $F(\theta) < 0$, 则 $I < 0$ 时 O 是不稳定焦点; $I > 0$ 时 O 是稳定焦点.

例 1.6 (Perron 定理中双曲焦点) 设非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + \varphi(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + \psi(x, y),\end{aligned}\tag{1.11}$$

其中 φ, ψ 连续可微, 且当 $r \rightarrow 0$ 时 $\varphi, \psi = o(r)$.

试证: 当点 O 是系统(1.11)线性近似系统的焦点时, 点 O 也是系统(1.11)自身的焦点, 且稳定性相同.

证明 在所设下, 系统(1.11)可经非奇异线性变换化为(记号不变)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x + \beta y + \varphi(x, y), \\ \dot{y} &= -\beta x + \alpha y + \psi(x, y),\end{aligned}$$

其中 $\alpha \pm i\beta (\alpha \neq 0, \beta > 0)$ 为系统(1.11)的特征根, $\alpha < 0 (\alpha > 0)$ 时, O 是线性近似系统的稳定(不稳定)焦点. 经极坐标变换, 它又化为

$$r \frac{d\theta}{dr} = \frac{-\beta + o(1)}{\alpha + o(1)},$$

这时特性方程左端的 $F(\theta) \equiv -\beta > 0$, 并且

$$I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{G(\theta)}{F(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{-\beta} d\theta = \frac{2\pi\alpha}{-\beta}.$$

因此, 由上定理知, 当 $\alpha < 0 (\alpha > 0)$ 时, O 也是非线性系统(1.11)的稳定(不稳定)焦点. 证毕.

例 1.7 考察方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y(x^2 + y^2) \sin \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)} \right]}{-y + x(x^2 + y^2) \sin \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)} \right]}$$

的奇点 $O(0, 0)$.

解 这时

$$F(\theta) \equiv -(-\sin \theta) \sin \theta + \cos \theta \cdot \cos \theta \equiv 1 > 0,$$

虽属定理 1.5 涵盖的范围, 但

$$G(\theta) \equiv -\sin \theta \cdot \cos \theta + \cos \theta \cdot \sin \theta \equiv 0,$$

从而 $I=0$, 仍不能断定 O 的类型. 引入极坐标, 方程化为

$$\frac{dr}{d\theta} = r^3 \sin \frac{1}{r^2},$$

它显然有一系列闭轨 $r=0$ 和 $r=\frac{1}{\sqrt{k\pi}}, k=1, 2, \dots$, 并且越靠近 O 这些闭轨分布越密. 又有

$$\text{当 } r \in \left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}, \frac{1}{\sqrt{(2k-1)\pi}} \right) \text{ 时, } \frac{dr}{d\theta} < 0,$$

$$\text{当 } r \in \left(\frac{1}{\sqrt{(2k-1)\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \right) \text{ 时, } \frac{dr}{d\theta} > 0,$$

说明上述每两个闭轨之间, 充满着无限绕 O 盘旋的开轨. 这种奇点 O 称为 **Bendixson** 型中心.

(2) $F(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上变号

这时, 由于 $F(\theta)$ 是 $\cos \theta, \sin \theta$ 的 $m+1$ 次齐次多项式, 它在 $[0, 2\pi]$ 上最多有 $2m+2$ 个零点, 我们采取逐个实零点讨论的原则, 设 θ_0 是 $F(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的一个实零点, 我们有

定理 1.6 设 $F(\theta_0)=0, G(\theta_0) \neq 0$, 且在 θ_0 附近 θ 由小到大经过 θ_0 , 若 $F(\theta)G(\theta_0)$ 的符号变化是:

(i) 由负变正, 则在 $\theta=\theta_0$ 上系统 (1.1) 存在一个 I 类典型域;

(ii) 由正变负, 则在 $\theta=\theta_0$ 上系统 (1.1) 存在一个 II 类典型域;

(iii) 符号不变, 则在 $\theta=\theta_0$ 上系统 (1.1) 存在一个 III 类典型域.

证明 按所设, $\theta=\theta_0$ 是系统 (1.1) 的一个特征方向, 作扇形 S_0 :

$$\theta_0 - \delta \leq \theta \leq \theta_0 + \delta, \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

当 r_0, δ 取得充分小时, 可使在 S_0 上除 O 外无其他奇点, $F(\theta)$ 除 θ_0 外无其他实零点, $G(\theta_0) + o(1) \neq 0$ (在 S_0 上 $|\tan \phi| \neq \infty$). 这样, S_0 就构成了系统的典型域.

记 $G(\theta) = G(\theta_0) + O(|\theta - \theta_0|)$, 则由 (1.9) 式知, 当 r_0, δ 足够小时, 在 S_0 上有

$$\text{sign} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) = \text{sign} [F(\theta)G(\theta_0)].$$

在 S_0 上 θ 由小到大经过 θ_0 , 按上式考察 $F(\theta)G(\theta_0)$ 的符号变化:

(i) 若 $F(\theta)G(\theta_0)$ 由负变正, 即有

$$\frac{d\theta}{dr} \begin{cases} < 0, \text{在 } \theta = \theta_0 - \delta \text{ 上,} \\ > 0, \text{在 } \theta = \theta_0 + \delta \text{ 上,} \end{cases}$$

则 S_0 就是一个 I 类典型域[图 1-10(a)];

(ii) 若 $F(\theta)G(\theta_0)$ 由正变负, 即有

$$\frac{d\theta}{dr} \begin{cases} > 0, \text{在 } \theta = \theta_0 - \delta \text{ 上,} \\ < 0, \text{在 } \theta = \theta_0 + \delta \text{ 上,} \end{cases}$$

则 S_0 就是一个 II 类典型域[图-10(b)];

(iii) 若 $F(\theta)G(\theta_0)$ 不变号, 即在 $\theta = \theta_0 \pm \delta$ 上都有

$$\frac{d\theta}{dr} > 0 \quad \text{或} \quad \frac{d\theta}{dr} < 0,$$

则 S_0 就是一个 III 类典型域[图 1-10(c)、图 1-10(d)]. 证毕.

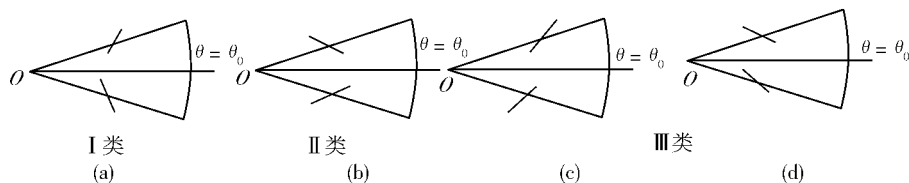


图 1-10

当系统 $(1.1)_2$ 中的 X_m, Y_m 有一个恒为零, 例如 $Y_m \equiv 0 (X_m \equiv 0)$ 时, 系统实际上具 $(1.1)_1$ 形式, 且 $m < n (m > n)$, 这时有

$$F(\theta) \equiv -X_m(\theta) \sin \theta \quad [F(\theta) \equiv Y_n(\theta) \cos \theta],$$

$$G(\theta) \equiv X_m(\theta) \cos \theta \quad [G(\theta) \equiv Y_n(\theta) \sin \theta],$$

这时 $F(\theta)$ 的实零点且使 $G(\theta) \neq 0$ 的只有特征方向

$$\theta = 0, \pi \quad (\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}).$$

在 $\theta = 0$ 邻近看 $F(\theta)G(0) \equiv -X_m(\theta)X_m(0)\sin \theta$, 和在 $\theta = \pi$ 邻近看 $F(\theta)G(\pi) \equiv X_m(\theta)X_m(\pi)\sin \theta$ 的符号变化 [在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 邻近看 $F(\theta)G(\frac{\pi}{2}) \equiv Y_n(\theta)$.

$Y_n(\frac{\pi}{2})\cos \theta$ 和在 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 邻近看 $F(\theta)G(\frac{3\pi}{2}) \equiv -Y_n(\theta)Y_n(\frac{3\pi}{2})\cos \theta$ 的符号变化], 按上定理同样的推理, 可得

定理 1.7 当系统 (1.1) 实际为 $(1.1)_1$ 形式时, 若 $m < n (m > n)$, 只要 $X_m(\pm 1, 0) \neq 0$ [$Y_n(0, \pm 1) \neq 0$], 则系统有且只有两个特征方向 $\theta = 0$ 和 $\theta =$

$\pi(\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 和 } \theta = \frac{3\pi}{2})$, 在每个特征方向上都存在一个 II 类典型域.

例 1.8(Perron 定理中双曲结点和双曲鞍点) 考察非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + \varphi(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + \psi(x, y),\end{aligned}\quad (1.11)$$

其中 φ, ψ 连续可微, 且当 $r \rightarrow 0$ 时, $\varphi, \psi = o(r)$.

试证: 当它的线性近似系统系数矩阵有两个不相等的非零实特征根 λ, μ (不妨设 $\lambda > \mu$) 时, 此非线性系统奇点 O 的类型和稳定性全同于相应的线性近似系统.

证明 在所设条件下, 经非奇异线性变换可将 (1.11) 化为

$$\dot{x} = \lambda x + \varphi(x, y), \quad \dot{y} = \mu y + \psi(x, y), \quad (1.11)'$$

再化为极坐标方程

$$r \frac{d\theta}{dr} = \frac{(\mu - \lambda) \sin \theta \cdot \cos \theta + o(1)}{\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta + o(1)}.$$

这时特性方程为

$$F(\theta) \equiv (\mu - \lambda) \sin \theta \cdot \cos \theta \equiv \frac{\mu - \lambda}{2} \sin 2\theta = 0,$$

它在 $[0, 2\pi]$ 内有四个实零点 $\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$, 在这四个零点上 $G(\theta) \equiv \lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta \neq 0$, 所以系统有且只有这四个特征方向.

(i) 两特征根 λ, μ 同为负, 即 $\mu < \lambda < 0$. 则取 $\theta_0 = 0$ 和 π 时, θ 由小到大经过 θ_0 , $F(\theta)G(\theta_0) = \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{2} \sin 2\theta$ 由负到正, 由定理 1.6 知, 在 $\theta = 0$ 和 π 上系统各存在一个 I 类典型域. 当取 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 时, θ 由小到大经过 θ_0 , $F(\theta)G(\theta_0) = \frac{\mu(\mu - \lambda)}{2} \sin 2\theta$ 由正到负, 所以在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 上系统各有一个 II 类典型域; 同时由定理 1.4 的注 2 知, 在所设条件下各只有一条轨线沿 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 趋于 O . 综合起来, 决定了系统 (1.11)', 从而系统 (1.11) 的原点 O 也是稳定结点, 如图 1-11(a) 所示.

(ii) 两特征根同为正, 即 $\lambda > \mu > 0$. 同样讨论可得 (1.11) 的 O 与线性近似系统一样都是不稳定结点.

(iii) 两特征根异号, 即 $\lambda > 0 > \mu$. 则取 $\theta_0 = 0$ 和 π 时, θ 由小到大经过 θ_0 , $F(\theta)G(\theta_0) = \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{2} \sin 2\theta$ 由正到负; 取 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 时, θ 由小到大经过 θ_0 ,

$F(\theta)G(\theta_0) = \frac{\mu(\mu-\lambda)}{2} \sin 2\theta$ 也是由正到负, 因此在 $\theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 四个特征方向上系统都各自存在一个 II 类典型域, 定理 1.4 的注 2 决定了都只有一条轨线沿它们趋于 O . 综合起来, 系统(1.11)的奇点仍然还是鞍点, 如图 1-11(b)所示.

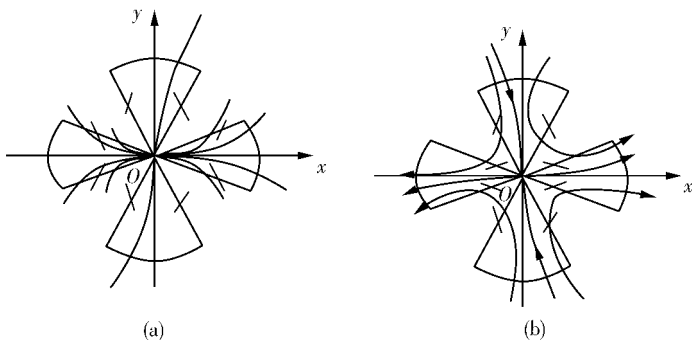


图 1-11

$$(3) F(\theta) \equiv 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

这种情形的讨论比较复杂, 称为**奇异情形**. 这时必有 $G(\theta) \neq 0$ (否则将推出 $X_m \equiv Y_m \equiv 0$), 又注意到特征方向的集合是闭的, 因此奇异情形的特征方向是 $[0, \pi]$ 中一切方向. 这样一来, 我们不能用典型域的方式逐个讨论特征方向了, 而首先考虑的是, 如何将处处稠密的特征方向离散开. 为此, 我们引入 **Briot-Bouquet 变换**

$$y = ux \quad (x \neq 0) \quad (1.12)$$

和

$$x = vy \quad (x = 0). \quad (1.12)'$$

变换(1.12)将 $x-y$ 平面上的原点 $O(0,0)$ 化为 $x-u$ 平面上的 u 轴, 把 $x-y$ 平面 O 的邻域化为 $x-u$ 平面 u 轴邻近的“带域”, 它还将 $x-y$ 平面的一、二、三、四象限对应地变到 $x-u$ 平面上的一、三、二、四象限, 它是拓扑变换. 更重要的是, 我们考察系统(1.1)对应的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y_m(x, y) + \phi(x, y)}{X_m(x, y) + \varphi(x, y)} \quad (1.1)'_2$$

沿着 $y = x \tan \alpha$ (即 $\theta = \alpha$) 方向上无积分曲线通过原点, 等价于考察 u 轴邻近 $(1.1)'_2$ 的对应 $x-u$ 坐标下的方程有无积分曲线经过点 $(0, \tan \alpha)$, 如图 1-12 所示.

变换(1.12)化 $(1.1)'_2$ 为

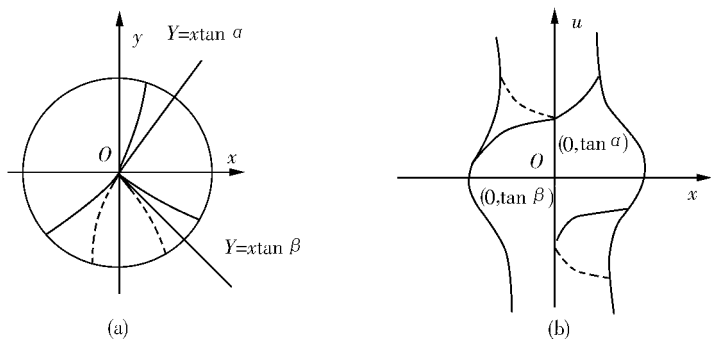


图 1-12

$$\frac{du}{dx} = \frac{Y_m(x, ux) - uX_m(x, ux) + \phi(x, ux) - u\varphi(x, ux)}{x[X_m(x, ux) + \varphi(x, ux)]}.$$

注意到

$$\begin{aligned} Y_m(x, ux) - uX_m(x, ux) &= \frac{1}{x}[xY_m(x, y) - yX_m(x, y)] \\ &= \frac{r^m}{\cos \theta}[Y_m(\theta) \cos \theta - X_m(\theta) \sin \theta] \\ &= \frac{r_m}{\cos \theta}F(\theta) \equiv 0, \end{aligned}$$

又令

$$H_1(x, u) \equiv \frac{\varphi(x, ux)}{x^{m+1}}, \quad H_2(x, u) \equiv \frac{\psi(x, ux)}{x^{m+1}},$$

则上式写为

$$\frac{du}{dx} = \frac{H_2(x, u) - uH_1(x, u)}{X_m(1, u) + xH_1(x, u)}. \quad (1.13)$$

对 y 轴上的两个方向, 我们用变换 (1.12)', 化方程 (1.1)' 为

$$\frac{dv}{dy} = \frac{H_1(v, y) - vH_2(v, y)}{Y_m(v, 1) + yH_2(v, y)}, \quad (1.13)'$$

其中

$$H_1(v, y) \equiv \frac{\varphi(vy, y)}{y^{m+1}}, \quad H_2(v, y) \equiv \frac{\psi(vy, y)}{y^{m+1}}.$$

为使下面的讨论更方便些, 我们先略提高对 φ 和 ψ 的条件: 设 $r \rightarrow 0$ 时, $\varphi, \psi = O(r^{m+1})$.

(1) $X_m(1, u) = 0$ 无实根

这时在 $x-u$ 平面上存在一个 u 轴的邻域 $|x| < \epsilon$, 当 ϵ 足够小时, 其上方程(1.13)的分母不等于零. 由所给的条件知, 式(1.13)满足解的存在唯一性条件, 故过 u 轴上任一有限点 $(0, u_0)$, 它有且只有一条积分曲线. 相应地, $x-y$ 平面上在 O 的邻域内方程(1.1)₂ 沿每个方向 $y=u_0x$ 有且只有一条积分曲线通过 O , 而系统(1.11)沿任意方向 $\theta=\alpha=\arctan u_0$ 和 $\theta=\alpha+\pi$ 各有一条轨线趋于 O .

(2) 某实的 u_s 使 $X_m(1, u_s)=0$, 但 $H_2(0, u_s)-u_s H_1(0, u_s) \neq 0$

这时过 $x-u$ 平面上的点 $(0, u_s)$, 方程(1.13)有且只有一条积分曲线, 且在该点切于 u 轴. 这时有两种可能: 如果这条曲线穿过 u 轴, 则在 $x-y$ 平面 O 的邻域中系统(1.1)沿 $\theta=\theta_s=\arctan u_s$ 及 $\theta=\theta_s+\pi$ 各有且只有一条轨线趋于 O ; 如果该曲线不穿过 u 轴而处在 $x \geq 0 (x \leq 0)$ 半平面内, 则在 $x-y$ 平面上系统(1.1)沿 $\theta=\theta_s (\theta=\theta_s+\pi)$ 有且只有两条轨线形成尖点趋于 O , 如图 1-13 所示.

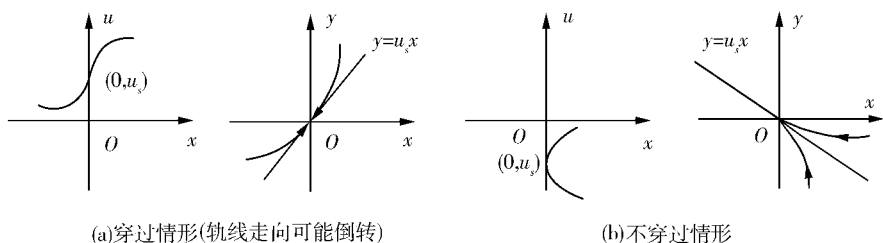


图 1-13

(3) 若实的 u_s 使 $X_m(1, u_s)=0, H_2(0, u_s)-u_s H_1(0, u_s)=0$

这时点 $(0, u_s)$ 也是方程(1.13)的奇点, 我们只有将它移为 $x-u$ 平面上的原点, 如同对 $x-y$ 平面上的原点 O 一样再重新对它进行讨论, 这种步骤经有限次必可完成.

(4) 对方程(1.13)', 我们只需对 $v-y$ 平面上的点 $(0, 0)$ 按以上讨论即可

注 1 系统属奇异情形时, $[0, 2\pi]$ 中的一切方向均是系统的特征方向, 但这无穷多个特征方向中, 最多有 $2m$ 个方向需要我们特别考察外(可能是“非正常的”), 其余的方向都是“正常的特征方向”, 即沿着它系统有且只有一条轨线趋于 O , 这是因为

$$0 \equiv Y_m(x, ux) - uX_m(x, ux) \equiv x^m Y_m(1, u) - ux^m X_m(1, u),$$

即

$$Y_m(1, u) \equiv uX_m(1, u).$$

这说明 $X_m(1, u)$ 关于 u 的次数不高于 $m-1$, 因此它最多只有 $m-1$ 个实零点, 每一个实零点对应两个实方向, 再加上 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 共 $2m$ 个方向有可能属“非正常的”需认真考察.

注 2 系统(1.1)中高次项的条件可以减弱为: $r \rightarrow 0$ 时, 存在 $\delta > 0$, 使

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y) = O(r^{m+\delta}).$$

这只要作变换 $z = \frac{x^\delta}{\delta}$ 便可证明, 作为习题留给读者.

例 1.9 (Perron 定理中的双曲临界结点) 考察系统

$$\dot{x} = x + \varphi(x, y), \quad \dot{y} = y + \psi(x, y)$$

的奇点 $O(0, 0)$ 邻域内轨线的分布, 其中 φ, ψ 满足: 存在 $\delta > 0$, 使当 $r \rightarrow 0$ 时, $\varphi, \psi = O(r^{1+\delta})$, 且对变元具一阶连续偏导数.

解 这里

$$F(\theta) \equiv -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \equiv 0$$

属奇异情形. 此时

$$X_m(x, y) \equiv x, \quad \text{对应 } X_m(1, u) \equiv 1,$$

$$Y_m(x, y) \equiv y, \quad \text{对应 } Y_m(v, 1) \equiv 1.$$

由上述讨论(1)及附注 2 知, 一切方向都是正常的特征方向, 即沿每一方向上非线性系统都有且只有一条轨线趋于 O , 因此它与线性近似系统一样都是不稳定的临界结点.

例 1.10 考察方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^4}{xy}$$

的奇点 $O(0, 0)$ 邻域内积分曲线的分布.

解 由

$$F(\theta) \equiv -\cos \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta \equiv 0$$

知, 它属奇异情形. 这时

$$X_2(x, y) \equiv xy, \quad \text{对应 } X_2(1, u) \equiv u,$$

$$Y_2(x, y) \equiv y^2, \quad \text{对应 } Y_2(v, 1) \equiv 1.$$

因此只有 $X_2(1, u) = 0$ 的实零点 $u = 0$ 所对应的方向 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 需要考察, 其余的方向均是正常的特征方向.

作变换 $y = ux$, 化方程为

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x}{u},$$

点 $(x, u) = (0, 0)$ 又是这个方程的奇点, 属讨论中的 (3), 应再度讨论. 但恰好这奇点明显是 $x-u$ 平面上的中心, 即在 $x-u$ 平面上没有积分曲线经过 $(0, 0)$. 对应地, 在 $x-y$ 平面上沿 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两方向上也没有积分曲线进入 O , 而沿其余的每一正常特征方向上都有且只有一条积分曲线进入 O , 这就得到了图 1-14 中所示的分布.

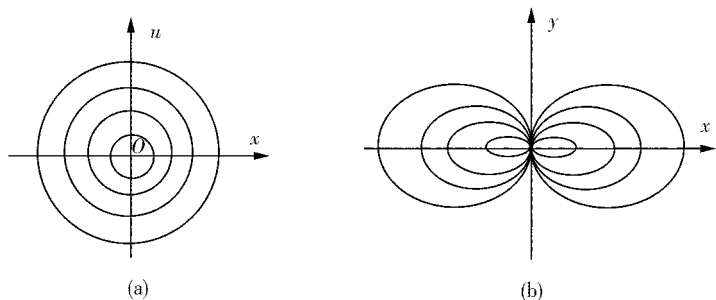


图 1-14

例 1.11 考察方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 6x^2y + x^4}{xy - 3x^3}$$

的奇点 $O(0, 0)$ 邻域内积分曲线的分布.

解 由于分子、分母的齐二次项与例 1.10 一样, 所以开始的讨论是一样的, 只需认真考察 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两个特征方向.

作变换 $y=ux$, 方程化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u-x}{-u+3x},$$

显然 $(x, u) = (0, 0)$ 又是它的奇点. 按线性系统奇点类型判别法, 易知它是结点, 即在 $x-u$ 平面上有无穷多条积分曲线进入 $(0, 0)$. 对应地, 在 $x-y$ 平面上沿 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两方向上也有无穷多条积分曲线进入 O . 为使图形更精确些, 我们先计算 $x-u$ 平面上结点的特征方向: 令 $u=kx$ 代入方程, 得

$$k = \frac{3k-1}{-k+3} \quad \text{或} \quad k^2 = 1.$$

求得 $k=1$ 和 $k=-1$, 所以 $x-u$ 平面上画出的较准确的结点分布如图 1-15 (a) 所示. 注意到 $x-y$ 平面上 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两方向进入 O 的无穷多条积分曲线的对应关系, 及其余方向均是正常的, 我们得到了奇点 O 邻域中的分布如图 1-15 (b) 所示.

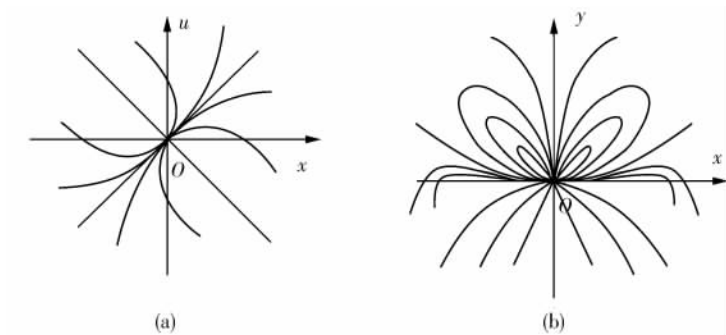


图 1-15

第三节 中心-焦点判定

在 $F(\theta)$ 定号的情形中, 定理 1.5 还遗留了一个问题, 即奇点 O 究竟是中心还是焦点的问题. 还从例 1.7 和下面两个最简单的例子

$$\dot{x} = -y + xy^2, \quad \dot{y} = x - x^2y$$

及

$$\dot{x} = -y + x^3, \quad \dot{y} = x + y^3$$

说明, 它们的线性近似系统虽都是以 O 为中心, 但加各自的非线性项后有不同的变化: 在例 1.7 中 O 变为 Bendixson 型中心, 在上述第一个例中 O 却仍保持中心, 在第二个例中 O 变为不稳定焦点了. 这进一步说明, 仅仅提高 φ, ψ 的无穷小阶数和一般的光滑性, 不足以保证系统的奇点 O 仍是中心. 下面介绍的两个一般的判定法(定理 1.9 和定理 1.10)都需要假设系统是解析的(这时不可能出现 Bendixson 型中心), 从而判定步骤是无限多次, 因此中心的判别问题是奇点研究中的难点之一.

首先介绍一个比较简单的, 判别中心的充分条件——对称原理.

定理 1.8 对给定的系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (1.1)$$

若右端函数决定的线素场对称于 x 轴, 即满足条件

$$X(x, -y) = -X(x, y), \quad Y(x, -y) = Y(x, y);$$

或对称于 y 轴, 即满足条件

$$X(-x, y) = X(x, y), \quad Y(-x, y) = -Y(x, y).$$

则在奇点 O 的中心-焦点判定中, O 必是中心.

在所给的条件下,从积分曲线的几何对称性质和向量场的连续性,容易看出结论是显然的.

一、Poincare 形式级数判定法

我们先建立一个下面要用到的引理.

引理 1.5 考虑一个在原点 O 邻域内收敛的级数

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} f_k(x, y),$$

其中 $f_k(x, y)$ 表示 x, y 的 k 次齐次多项式. 则当常数 $c > 0$ 充分小时,

$$f(x, y) = c$$

在 O 的某足够小的邻域内存在一族单闭分支,它是环绕着 O 的闭曲线族.

证明 设 $f(x, y)$ 在极坐标下表示为

$$f(r, \theta) \equiv r^2 + \sum_{k=3}^{\infty} r^k \varphi_k(\theta),$$

收敛域为 $r \leq r_0$, 则有

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2r + \sum_{k=3}^{\infty} k r^{k-1} \varphi_k(\theta) = 2r + o(r).$$

所以,必存在充分小的 $r_1 \leq r_0$, 使 $r \in (0, r_1]$ 时, $\frac{\partial f}{\partial r} > r > 0$, 即 $f(r, \theta)$ 在 $r \in (0, r_1]$ 内随 r 单调变化. 又 $f(0, \theta) = 0$, 故对固定的 $r_2 \in (0, r_1]$, 必有

$$h \equiv \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} f(r_2, \theta) > 0,$$

即

$$f(r_2, \theta) \geq h > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

因此,由 $f(r, \theta)$ 在射线 $\theta = \theta_0$ 上对 r 的连续性、单调性知,对任意取定的正常数 $c < h$, 都存在唯一的点 (r, θ_0) , $r < r_2$, 使

$$f(r, \theta_0) = c.$$

这表明,当 $c > 0$ 足够小时,在圆 $r = r_2$ 的内部, $f(r, \theta) = 0$ 与原点 O 出发的任意一条射线都有唯一的交点. 由 $c \in [0, h)$ 的任意性, 即得 $f(x, y) = c$ 在圆 $r = r_2$ 内部存在一族围绕 O 的单闭分支. 证毕.

下面叙述形式级数判定法.

设系统(1.1)是解析的,含有一次项,对应的 $F(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 中定号,这时系统(1.1)可写为

$$\dot{x} = X(x, y) \equiv y + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y),$$

$$\dot{y} = Y(x, y) \equiv -x + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y). \quad (1.14)$$

我们作一个形式级数

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x, y), \quad (1.15)$$

其中 $F_k(x, y)$ 表示 x, y 的齐次待定多项式. 若能从恒等式

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1.14)} \equiv 0$$

中确定一切 $F_k(x, y)$, 且能证明确定出的级数 (1.15) 在 O 的邻域中收敛, 则 $f(x, y) = c$ 就是式 (1.14) 的解曲线族. 由上述引理知, 奇点 O 就是中心了. 形式上展开上式左端, 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1.14)} &= (2x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial x})(y + \sum_{l=2}^{\infty} X_l) \\ &\quad + (2y + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial y})(-x + \sum_{l=2}^{\infty} Y_l) \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \left(y \frac{\partial F_k}{\partial x} - x \frac{\partial F_k}{\partial y} \right) + 2 \sum_{l=2}^{\infty} (x X_l + y Y_l) \\ &\quad + \sum_{l=2, k=3}^{\infty} \left(X_l \frac{\partial F_k}{\partial x} + Y_l \frac{\partial F_k}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

令上式右端恒等于零, 即右端每个同次的齐次多项式恒等于零, 于是有

$$\begin{aligned} x \frac{\partial F_k}{\partial y} - y \frac{\partial F_k}{\partial x} &= 2(x X_{k-1} + y Y_{k-1}) + \sum_{l=3}^{k-1} (X_{k-l+1} \frac{\partial F_l}{\partial x} + y_{k-l+1} \frac{\partial F_l}{\partial y}) \\ &\equiv H_k \quad (k = 3, 4, 5, \dots). \end{aligned} \quad (1.16)_k$$

这是可列个关于 $F_k (k = 3, 4, 5, \dots)$ 的一阶偏微分方程. 注意到右端只与 $F_3, F_4, \dots, F_{k-1}$ 有关, 所以从 $k = 3$ 开始逐个求解 F_k 时, 式 (1.16)_k 右端的 H_k 是已知函数.

引入极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 记

$$F_k \equiv r^k \varphi_k(\theta), \quad H_k \equiv r^k \psi_k(\theta),$$

注意到

$$\frac{\partial F_k}{\partial \theta} = - \frac{\partial F_k}{\partial x} y + \frac{\partial F_k}{\partial y} x,$$

则 (1.16)_k 化为

$$\frac{d\varphi_k}{d\theta} = \psi_k(\theta). \quad (1.17)_k$$

这里 $\varphi_k(\theta), \psi_k(\theta)$ 都是 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 的 k 次齐次式, 写出其 Fourier 展开式

$$\begin{aligned}\varphi_k(\theta) &= \sum_j (A_j \cos j\theta + B_j \sin j\theta), \\ \psi_k(\theta) &= \sum_j (C_j \cos j\theta + D_j \sin j\theta),\end{aligned}$$

其中 C_j, D_j 为已知常数, A_j, B_j 为待求常数. 按富氏展开理论知: 当 k 是奇数(偶数)时, 上述两展开式中只出现 j 为奇数(偶数)的项, 从而, 前者必可从式 (1.17)_k 求得 2π 周期函数 $\varphi_k(\theta)$, 即得 F_k ; 而后者(偶数时)要看 $\psi_k(\theta)$ 展式中的常数项

$$C_0 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_k(\theta) d\theta.$$

若 $C_0 = 0$ 则仍可从式 (1.17)_k 求得 2π 周期的 $\varphi_k(\theta)$; 若 $C_0 \neq 0$, 则式 (1.17)_k 不能解出 2π 周期的 $\varphi_k(\theta)$, 但将所得 C_0 构成方程

$$\frac{d\varphi_k}{d\theta} = \psi_k(\theta) - C_0$$

时, 却有 2π 周期的解 $\varphi_k(\theta)$. 这个方程写回直角坐标为

$$x \frac{\partial F_k}{\partial y} - y \frac{\partial F_k}{\partial x} = H_k - C_0 (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}, \quad (1.18)$$

它必有解, 记为 $\tilde{F}_k(x, y)$. 设 $\varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_{k-1}$ 均已从式 (1.17)_k 求得, $\psi_k(\theta)$ 对应的 $C_0 \neq 0$ (k 一定是偶数), 由式 (1.18) 求得 $\tilde{F}_k$, 作曲线族

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + F_2 + \dots + F_{k-1} + \tilde{F}_k = C, \quad (1.19)$$

由引理 1.5 知, 当 $C > 0$ 足够小时, 它在 O 附近是一族绕 O 的单闭曲线, 将它沿系统求导, 得

$$\begin{aligned}\left. \frac{df}{dt} \right|_{(1.14)} &= y \frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial x} - x \frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial y} + H_k + \Phi_{k+1}^* \\ &= C_0 (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}} + \Phi_{k+1}^*,\end{aligned} \quad (1.20)$$

其中 Φ_{k+1}^* 表示对 x, y 至少为 $k+1$ 次项的全体[这里注意 $\tilde{F}_k$ 是式 (1.18) 的解]. 我们用闭曲线族 (1.19) 作为参考系, 当 $C_0 < 0$ (> 0) 时, (1.20) 式说明在 O 点的邻域中, 系统 (1.14) 的轨线当 t 增加时, 是由闭曲线族的外(内)部走向内(外)部的, 即 $C_0 < 0$ 时, O 是稳定焦点, $C_0 > 0$ 时, O 是不稳定焦点.

当对一切 k, F_k 均可从式 (1.16)_k 求出时, 可以证明它们构成的级数 (1.15) 在 O 的某邻域中收敛^[1], 这时 O 是中心, 我们归纳为:

定理 1.9 对解析系统 (1.14), 若

(1) 从式 (1.16)_k 中已解出 $F_3, F_4, \dots, F_{k-1}$, 而 F_k 解不出, 则 k 一定是偶数. 这时将式 (1.16)_k 的右端函数 $H_k \equiv r^k \psi_k(\theta)$ 之 $\psi_k(\theta)$ 展开为 θ 的富氏级数,

计算其 Fourier 常数

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_k(\theta) d\theta,$$

它必定不为零,这时 O 一定是焦点,当 $C_0 < 0$ 时为稳定焦点,当 $C_0 > 0$ 时为不稳定焦点;

(2) 从式 (1.16)_k 中能解出一切 $F_k (k=3, 4, \dots)$ 时,原点 O 是中心.

注 我们具体求各 F_k 时,通常采用多项式待定系数法.

推论 原点 O 是系统 (1.14) 的中心的充分必要条件是,它存在一个与 t 无关的实正则积分 $F(x, y) = c$.

证明是简单的,留作习题.

例 1.12 考察系统

$$\dot{x} = y - \frac{1}{2}x^3 \equiv X, \quad \dot{y} = -x + 3x^2y - \frac{1}{2}y^3 \equiv Y$$

的奇点 $O(0, 0)$ 的类型.

解 这是一个中心焦点判定问题,我们采用定理 1.9 来判定,将系统的右端写成

$$X \equiv y + 0 + \left(-\frac{1}{2}x^3\right) + 0 + \dots,$$

$$Y \equiv -x + 0 + (3x^2y - \frac{1}{2}y^3) + 0 + \dots.$$

作

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 + F_3 + F_4 + \dots,$$

由式 (1.16)_k 知, F_3 满足

$$x \frac{\partial F_3}{\partial y} - y \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2(xX_2 + yY_2) = 0.$$

我们取最简单的解 $F_3(x, y) \equiv 0$, F_4 应满足式 (1.16)₄

$$\begin{aligned} x \frac{\partial F_4}{\partial y} - y \frac{\partial F_4}{\partial x} &= 2(xX_3 + yY_3) + (X_2 \frac{\partial F_3}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial F_3}{\partial y}) \\ &= -x^4 + 6x^2y^2 - y^4 \equiv H_4, \end{aligned}$$

$$H_4(r, \theta) = r^4(-\cos^4\theta + 6\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta) \equiv r^4\phi_4(\theta),$$

容易算出 $\phi_4(\theta)$ 的富氏展式中的常数项 $C_0 = 0$, 则 F_4 可解出, 令

$$F_4 \equiv a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4,$$

代入式 (1.16)₄, 比较同类项系数, 得

$$a_1 = -1, \quad 2a_2 - 4a_0 = 0, \quad 3a_3 - 3a_1 = 6,$$

$$a_4 - 2a_2 = 0, \quad -a_3 = -1,$$

其中 a_0 可以任取, 我们取 $a_0 = 0$, 则得

$$a_0 = a_2 = a_4 = 0, \quad a_1 = -1, \quad a_3 = 1,$$

那么定出 $F_4 = xy^3 - x^3y$. F_5 是一定可求的, 又由式(1.16)₅ 得

$$x \frac{\partial F_5}{\partial y} - y \frac{\partial F_5}{\partial x} \equiv 0,$$

我们仍取 $F_5 \equiv 0$. 由式(1.16)₆ 有

$$\begin{aligned} x \frac{\partial F_6}{\partial y} - y \frac{\partial F_6}{\partial x} &= -\frac{1}{2}x^3(y^3 - 3x^2y) + (3x^2y - \frac{1}{2}y^3)(3xy^2 - x^3) \\ &= -\frac{3}{2}x^5y + 9x^3y^3 - \frac{3}{2}xy^5 \equiv H_6, \end{aligned}$$

所以

$$H_6(r, \theta) = r^6 \psi_6(\theta) = r^6 \left(-\frac{3}{2} \cos^5 \theta \sin \theta + 9 \cos^3 \theta \sin^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \sin^5 \theta \right),$$

容易算出 $\psi_6(\theta)$ 富氏展式的常数项 $C_0 = 0$, 故 F_6 也可解出, 令

$$F_6(x, y) \equiv a_0x^6 + a_1x^5y + a_2x^4y^2 + a_3x^3y^3 + a_4x^2y^4 + a_5xy^5 + a_6y^6,$$

代入式(1.16)₆, 比较同类项系数, 并取 $a_0 = 0$, 得

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0, \quad a_2 = -\frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{3}{2}, \quad a_6 = \frac{1}{4},$$

即确定了

$$F_6 = -\frac{3}{4}x^4y^2 + \frac{3}{2}x^2y^4 + \frac{1}{4}y^6.$$

F_7 一定可求, 且由式(1.16)₇ 得

$$x \frac{\partial F_7}{\partial y} - y \frac{\partial F_7}{\partial x} \equiv 0,$$

仍取 $F_7 \equiv 0$, 再由式(1.16)₈ 得

$$\begin{aligned} x \frac{\partial F_8}{\partial y} - y \frac{\partial F_8}{\partial x} &= X_3 \frac{\partial F_6}{\partial x} + Y_3 \frac{\partial F_6}{\partial y} \\ &= -\frac{x^3}{2}(-3x^3y^2 + 3xy^4) + (3x^2y - \frac{1}{2}y^3)(-\frac{3}{2}x^4y + 6x^2y^3 + \frac{3}{2}y^5) \\ &= -3x^6y^2 + \frac{69}{4}x^4y^4 + \frac{3}{2}x^2y^6 - \frac{3}{4}y^8 \equiv H_8, \end{aligned}$$

所以

$$H_8(r, \theta) = r^8 \left(-3 \cos^6 \theta \sin^2 \theta + \frac{69}{4} \cos^4 \theta \cdot \sin^4 \theta + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \cdot \sin^6 \theta - \frac{3}{4} \sin^8 \theta \right)$$

$$\equiv r^8 \psi_8(\theta),$$

经计算, 可得 $\psi_8(\theta)$ 富氏展式中常数项

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_8(\theta) d\theta = \frac{9}{64}.$$

至此, 我们按定理 1.9, 可判定原点 O 是该系统的不稳定焦点.

二、中心-焦点判别法二

系统(1.14)有时也写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta y + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y) \equiv -\beta y + \Phi(x, y), \\ y &= \beta x + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y) \equiv \beta x + \Psi(x, y), \end{aligned} \quad (1.14)'$$

不妨设 $\beta > 0$. 引入极坐标, 式(1.14)' 化为

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \Phi \cos \theta + \Psi \sin \theta \equiv rP(x, y), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \beta + \frac{1}{r}(-\Phi \sin \theta + \Psi \cos \theta) \equiv \beta + Q(r, \theta), \end{aligned}$$

其中 P, Q 可展成 r 的幂级数, 至少从 r 的一次幂开始. 注意到 $\beta > 0$, 所以存在 $r_1 > 0$, 使当 $r \leq r_1$ 时, 对一切 θ 有

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta + Q(r, \theta) > \frac{\beta}{2} > 0, \quad (1.21)$$

因此在 O 的邻域 $S(0, r_1)$ 中可消去 dt , 得解析方程

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rP}{\beta + Q} \equiv R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + \cdots, \quad (1.22)$$

其中 $R_i(\theta) (i=2, 3, \cdots)$ 是 $\sin \theta, \cos \theta$ 的已知多项式. 由于它存在解 $r(\theta) \equiv 0$ ($-\infty < \theta < +\infty$), 故当 $c > 0$ 充分小时, 至少在区间 $[-4\pi, 4\pi]$ 上它有解 $r = r(\theta, c), r(0, c) = c, r \in [0, r_1)$, 且关于 c 是解析的, 即有

$$r(\theta, c) = r_1(\theta)c + r_2(\theta)c^2 + \cdots$$

及初始条件

$$r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = r_3(0) = \cdots = 0, \quad (1.23)$$

现在来确定这个幂级数. 为此将它代入式(1.22), 得恒等式

$$r'_1(\theta)c + r'_2(\theta)c^2 + \cdots \equiv R_2(r_1c + r_2c^2 + \cdots)^2 + R_3(\theta)(r_1c + r_2c^2 + \cdots)^3 + \cdots,$$

比较两端 c 的各同次幂系数, 得一系列微分方程:

$$r'_1(\theta) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 r'_2(\theta) &= R_2(\theta)r_1^2 \equiv F_2(\theta), \\
 r'_3(\theta) &= R_3(\theta)r_1^3 + 2R_2(\theta)r_1r_2 \equiv F_3(\theta), \\
 &\dots\dots \\
 r'_m(\theta) &= F_m(\theta), \\
 &\dots\dots
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

其中 $F_m(\theta)$ 代表上面恒等式右端 r^m 的系数, 它只与 $r_1(\theta), r_2(\theta), \dots, r_{m-1}(\theta)$ 有关, 因此从第一个开始逐个求解上述方程时它是已知的. 与初始条件式 (1.23) 一起, 逐个求解式 (1.24), 可得表达式:

$$\begin{aligned}
 r_1(\theta) &= 1, \\
 r_2(\theta) &= \int_0^\theta R_2(\theta) d\theta, \\
 r_3(\theta) &= \int_0^\theta [R_3(\theta) + 2R_2(\theta)r_2(\theta)] d\theta, \\
 &\dots\dots \\
 r_m(\theta) &= \int_0^\theta F_m(\theta) d\theta,
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

这里要用到一个引理

引理 1.6 若 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续周期函数 (简称连续 l 周期函数), 则必有

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = gx + \varphi(x),$$

其中 $g = \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi$ 是常数, $\varphi(x)$ 仍是连续 l 周期函数.

证明 以 g 的表达式代入上式, 得

$$\varphi(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{x}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi,$$

验证有 $\varphi(x+l) = \varphi(x)$, 即可.

用引理结论来考察式 (1.25), 因 $R_2(\theta)$ 是 2π 周期的, 所以有

$$r_2(\theta) = g_2\theta + \varphi_2(\theta), \quad g_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_2(\theta) d\theta,$$

其中 $\varphi_2(\theta)$ 也是 2π 周期的, 且 $\varphi_2(0) = r_2(0) = 0$. 经计算, $g_2 = 0$, 从而 $r_2(\theta) = \varphi_2(\theta)$ 也是 2π 周期的, 这样式 (1.25) 中第三式的被积函数也是 2π 周期的. 继续应用引理得

$$r_3(\theta) = g_3\theta + \varphi_3(\theta),$$

$$g_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [R_3(\theta) + 2R_2(\theta)r_2(\theta)]d\theta,$$

$\varphi_3(0)=r_3(0)=0$. 若 $g_3=0$, 则 $r_3(\theta)=\varphi_3(\theta)$ 又是 2π 周期的; ……如此继续下去, 设 $i=2, 3, \dots, m-1$ 时, 均有 $g_i=0$, 而

$$g_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\theta)d\theta \neq 0,$$

$$r_m(\theta) = g_m\theta + \varphi_m(\theta), \varphi_m(0) = r_m(0) = 0,$$

[这里 $F_m(\theta)$ 是已知的 2π 周期函数]. 可以证明 m 一定是奇数, 记 $m=2k+1$ ($k \geq 1$), 则当 c 充分小时, 有

$$r(\theta, c) = c + \varphi_2(\theta)c^2 + \dots + \varphi_{2k}(\theta)c^{2k} \\ + [g_{2k+1}\theta + \varphi_{2k+1}(\theta)]c^{2k+1} + O(c^{2k+2}),$$

其中 $\varphi_2(\theta), \dots, \varphi_{2k+1}(\theta)$ 均为已知的 2π 周期函数, 且 $\varphi_2(0)=\dots=\varphi_{2k+1}(0)=0$.

注意到(1.21)式, 在邻域 $r \leq r_1$ 内沿轨线均有 $\frac{d\theta}{dt} > 0$, 说明从 $(0, c)$ 出发的正半轨随 θ 增大而绕 O 逆时针盘旋, 经 2π 到达点 $(2\pi, r(2\pi, c))$. 我们定义这两点极轴之差为**后继函数**, 即

$$\rho(c) \equiv r(2\pi, c) - r(0, c) = r(2\pi, c) - c,$$

显然, 由上式得

$$\rho(c) = 2\pi g_{2k+1}c^{2k+1} + O(c^{2k+2}).$$

这说明, 当 $c > 0$ 充分小时, 若 $g_{2k+1} < 0$ (> 0), 则 $r(2\pi, c) < r(0, c) = c$ ($r(2\pi, c) > c$), 即转一圈后, 更靠近(离开) O , 这时 O 是稳定(不稳定)焦点, 如图 1-16 所示.

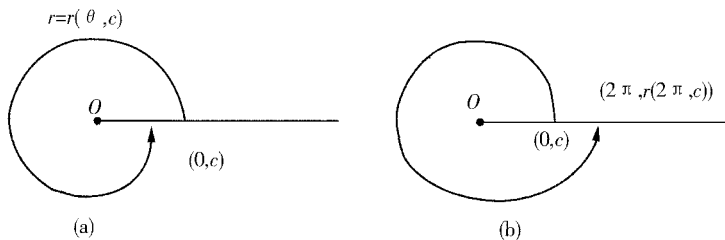


图 1-16

若对一切 $i=2, 3, \dots$ 都有 $g_i=0$, 即式(1.24)所得的 $r_i(\theta)$ 都是 2π 周期的, 于是对充分小的 $c > 0$, 解 $r=r(\theta, c)$ 都是 2π 周期的, 即 O 附近的轨线全是闭轨, 则 O 是中心.

我们归纳为

定理 1.10 系统(1.14)'的中心焦点判定中,当 $\beta > 0$ ($\beta < 0$)时,我们按式(1.25)逐个计算 $r_2(\theta), r_3(\theta), \dots$ 和

$$g_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\theta) d\theta, \quad m = 3, 5, \dots, 2k+1, \dots,$$

若 $g_3 = g_5 = \dots = g_{2k-1} = 0$,而 $g_{2k+1} \neq 0$,则当 $g_{2k+1} < 0$ (> 0)时, O 是系统的稳定(不稳定)焦点;若一切 $g_i = 0$,则 O 是系统的中心.

最后,我们顺便提出一个十分重要的概念.注意系统(1.14)'的后继函数是

$$\rho(c) \equiv r(2\pi, c) - c = r_2(2\pi)c^2 + r_3(2\pi)c^3 + \dots,$$

它满足 $\rho'(0) = 0, \rho''(0) = 2!r_2(2\pi) = 2!2\pi g_2 = 0$.若 $\rho'''(0) = 3!r_3(2\pi) = 3!2\pi g_3 \neq 0$,我们称 O 为系统(1.14)'的**1阶细焦点**;若 $\rho^{(i)}(0) = 0, i = 1, 2, \dots, l-1$,而 $\rho^{(l)}(0) = l!2\pi g_l \neq 0$ ($l = 2k+1$ 必为奇数),则称 O 为系统(1.14)'的 **k 阶细焦点**.数 $\rho^{(2k+1)}(0) = (2k+1)!2\pi g_{2k+1}$ (或 g_{2k+1})称为 O 点的 **k 阶焦点判定量**,它的符号决定了 O 的稳定性.

例 1.13 考察振动方程

$$\ddot{x} + a\dot{x}^3 + x + x^2 = 0, a \neq 0$$

在平凡解 $x(t) \equiv 0$ 附近解的性质.

解 令 $\dot{x} = -y$,问题化为讨论等价系统

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + x^2 - ay^3$$

的奇点 $O(0,0)$ 的类型,这恰好是个中心-焦点判定问题.

引入极坐标,系统化为

$$\frac{dr}{dt} = r^2 \cos^2 \theta \sin \theta - ar^3 \sin^4 \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + r(\cos^3 \theta - ar \sin^3 \theta \cdot \cos \theta),$$

消去 dt ,在 O 的邻域内得

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2 \cos^2 \theta \sin \theta - r^3 (a \sin^4 \theta + \cos^5 \theta \cdot \sin \theta) + \dots.$$

令解的形式为

$$r = c + r_2(\theta)c^2 + r_3(\theta)c^3 + \dots,$$

其中 $r_2(0) = r_3(0) = \dots = 0$,将它代入上面方程,比较两端 c^2 的系数,得

$$\frac{dr_2}{d\theta} = R_2(\theta) = \cos^2 \theta \cdot \sin \theta.$$

显然有 $g_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = 0$,知 $r_2(\theta)$ 是 2π 周期函数,事实上

$$r_2(\theta) = \int_0^\theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{3}.$$

再比较两端 c^3 的系数,得

$$\frac{dr_3}{d\theta} = -a \sin^4 \theta - \cos^5 \theta \sin \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{3}\right) \equiv F_3(\theta),$$

由

$$g_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_3(\theta) d\theta = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta \neq 0,$$

知 O 是 1 阶细焦点. 当 $a > 0$ 时, $g_3 < 0$, 所以 O 是稳定的焦点; $a < 0$ 时, $g_3 > 0$, O 是不稳定的焦点.

返回到原方程时得: $a > 0$ 时, $x(t) \equiv 0$ 附近的解是随着 t 增大而逐渐衰减到 0 的振动; $a < 0$ 时, 这些解是随 t 增大而振幅渐增的振动.

当系统 (1.1) 是具有形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_m(x, y) + X_{m+1}(x, y) + \cdots, \\ \dot{y} &= Y_m(x, y) + Y_{m+1}(x, y) + \cdots \end{aligned} \quad (1.26)$$

($m \geq 2$) 的解析系统时, 由定理 1.5 知, 在

$$F(\theta) \equiv -X_m(\theta) \sin \theta + Y_m(\theta) \cos \theta \neq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

时, 也出现中心焦点判定问题. 引入极坐标, 系统化为

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r p_{m+1}(\theta) + r^2 p_{m+2}(\theta) + r^3 p_{m+3}(\theta) + \cdots}{q_{m+1}(\theta) + r q_{m+2}(\theta) + r^2 q_{m+3}(\theta) + \cdots}, \quad (1.27)$$

其中

$$\begin{aligned} p_{m+i}(\theta) &\equiv X_{m+i-1}(\theta) \cos \theta + Y_{m+i-1}(\theta) \sin \theta, \\ q_{m+i}(\theta) &\equiv -X_{m+i-1}(\theta) \sin \theta + Y_{m+i-1}(\theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \cdots$, 显然有

$$q_{m+1}(\theta) \equiv F(\theta) \neq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

作式 (1.27) 的形式级数积分

$$\varphi(r, \theta) \equiv r \varphi_0(\theta) + r^2 \varphi_1(\theta) + r^3 \varphi_2(\theta) + \cdots = \text{const},$$

其中 $\varphi_i(\theta)$, $i = 0, 1, 2, \cdots$ 是 2π 周期的待定函数. 将它代入式 (1.27) 得恒等式, 比较 r 的同次幂系数, 得可数个线性微分方程

$$q_{m+1} \varphi_i + (i+1) p_{m+1} \varphi_i + R_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, \quad (1.28)$$

其中 $R_0 \equiv 0$, 而 R_i ($i \geq 2$) 只与 φ_s , φ_s ($s < i$) 有关, 因此逐个求解式 (1.28) 时, R_i 是已知的函数. 我们有

定理 1.11 解析系统 (1.26) 在中心焦点判定中, 原点 O 是中心的充要条件是: 系统对应的可数个线性微分方程 (1.28) 逐个可解出周期为 2π 的周

期解.

证明参阅文献[3].

第四节 Liapunov 型奇点

当线性部分具有零特征根时,系统(1.5)对应的高阶奇点 O 通常称为 **Liapunov**型奇点,Frömmner 方法不能处理这类奇点. 以下分 $q=0, p \neq 0$ (一个零根); $q=p=0$ (两个零根)两种情形讨论.

一、 $q=0, p \neq 0$ 情形

这时总可经非奇异线性变换和时间 t 的线性置换,将这样的系统化为

$$\dot{x} = \varphi(x, y), \quad \dot{y} = y + \psi(x, y). \quad (1.29)$$

这里假设 φ, ψ 在原点 O 的邻域 $S(0, \delta)$ 内是解析函数,展开式至少从 2 次开始,且设奇点 O 是孤立的.

令 $y + \psi(x, y) = 0$, 由隐函数定理知,可从中解出解析的

$$y = y(x), y(0) = y'(0) = 0, |x| < \delta_1 \leq \delta,$$

即 $y(x)$ 的展式也至少从 2 次开始. 作变换

$$x = \xi, y = \eta + y(\xi),$$

这是 $S(0, \delta_1)$ 中的解析拓扑变换,将式(1.29)化为

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varphi(\xi, \eta + y(\xi)) \equiv \Phi(\xi, \eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \eta + \Psi(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (1.30)$$

其中

$$\Psi(\xi, \eta) \equiv \psi(\xi, \eta + y(\xi)) - \psi(\xi, y(\xi)) - \frac{dy(\xi)}{d\xi} \Phi(\xi, \eta).$$

我们不妨设 $\Phi(\xi, 0) \neq 0$. 因若 $\Phi(\xi, 0) \equiv 0$, 则有

$$\Psi(\xi, 0) \equiv -\frac{dy(\xi)}{d\xi} \Phi(\xi, 0) \equiv 0,$$

这说明邻域 $S(0, \delta_1)$ 内 $\eta=0$ 上每一点都是式(1.30)的奇点,与 O 是孤立奇点矛盾. 因此必有展开式(注意 $\xi=x$)

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, 0) &\equiv \varphi(\xi, y(\xi)) = g\xi^m + o(\xi^{m+1}) \\ &= \varphi(x, y(x)) = gx^m + o(x^{m+1}), g \neq 0, m \geq 2, \\ \Psi(\xi, 0) &\equiv -\frac{dy(\xi)}{d\xi} \Phi(\xi, 0) = o(\xi^{m+1}). \end{aligned} \quad (1.31)$$

定理 1.12 设式(1.29)中的 φ, ψ 是 $S(0, \delta)$ 内的解析函数, 展开式至少从 2 次开始, $O(0, 0)$ 是孤立奇点, 由

$$y + \psi(x, y) = 0$$

解出的满足 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=0$ 的解 $y=y(x)$, 使

$$\varphi(x, y(x)) = gx^m + O(x^{m+1}), g \neq 0, m \geq 2,$$

(i) 若 m 是奇数, 则当 $g > 0$ 时, O 是不稳定结点, 如图 1-17(a) 所示; 当 $g < 0$ 时, O 是鞍点, 如图 1-17(b) 所示.

(ii) 若 m 是偶数, 则 O 是鞍结点. $g > 0$ 时, 如图 1-17(c) 所示, $g < 0$ 时, 如图 1-17(d) 所示.

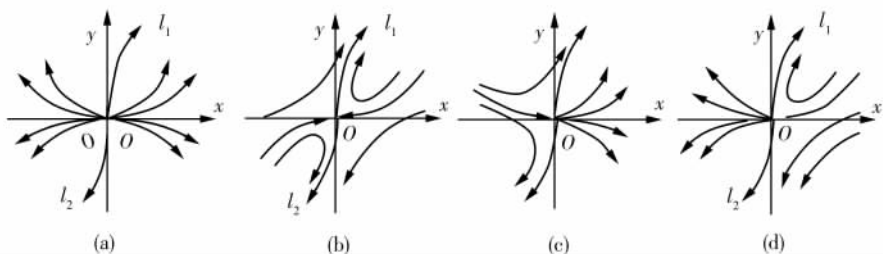


图 1-17

证明 我们以变换后的系统(1.30)来证, 它是和原系统拓扑等价的. 系统(1.30)对应的特性方程是

$$F(\theta) \equiv \sin \theta \cos \theta = 0,$$

对应 $G(\theta) \equiv \sin^2 \theta$, 显然 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 是它的两个特征方向, 但 $\theta = 0, \pi$ 使 $G = 0$, 不能断定这两个是否是特征方向, 对前两个特征方向, 由

$$F(\theta)G\left(\frac{\pi}{2}\right) = F(\theta)G\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \theta \cos \theta$$

知, θ 由小到大过 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, 上式都是由正变负, 因此在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 上均各自存在一个 II 类典型域. 系统是解析的, 则沿这两个方向各有且只有一条轨线趋于 O . 又注意系统(1.30)的第二式, 在点 O 的充分小的邻域内, $\frac{dy}{dt}$ 的符号由 η 确定, 所以如图 1-17 所示那样, 4 个图形中切于纵轴的轨线都是 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于 O 的. 横轴上轨线的分布就比较复杂了, 要分多种情况讨论.

(i) m 是奇数, $g > 0$ 情形.

这时作曲线族

$$V_1 \equiv \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{g}{2}\eta^2 + \eta[a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \cdots + a_m\xi^m] = c, \quad (1.32)$$

其中 a_i 是待定常数. 由引理 1.5 知, 当 $c > 0$ 充分小时, 在 O 充分小的邻域中它是一族绕 O 的单闭曲线, 将它沿系统(1.30)求得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(1.30)} &= \left[\frac{\partial V_1}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \dot{\eta} \right]_{(1.30)} \\ &= [\xi + \eta(2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \cdots + ma_m\xi^{m-1})] \cdot \\ &\quad [g\xi^m + \Phi^*(\xi, \eta)] + [g\eta + (a_2\xi^2 + \cdots + a_m\xi^m)] \cdot [\eta + \Psi(\xi, \eta)] \\ &= g(\xi^{m+1} + \eta^2) + S(\xi, \eta). \end{aligned}$$

经过细致分析知, $S(\xi, \eta)$ 中包含的项可分为两个部分, 一部分项在 O 的充分小邻域内使上式的符号全可由 $g(\xi^{m+1} + \eta^2)$ 来确定, 剩下的另一部分则具有与式(1.32)中 $\eta(a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \cdots + a_m\xi^m)$ 相同的形式, 这恰好引出 $m-1$ 个 a_i 的代数线性方程来确定 $a_2, a_3, \cdots, a_m$ 而消去之. 这样, 在 O 的充分小邻域内就有

$$\left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(1.30)} > \frac{g}{2}(\xi^{m+1} + \eta^2) > 0,$$

这表明一切轨线当 $t \rightarrow -\infty$ 时都是趋于 O 的, 因 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 两个方向上不能再有轨线进入 O 了, 它们只能沿另两个方向 $\theta = 0, \theta = \pi$ 当 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于 O , 所以 O 是不稳定结点.

当 m 是奇数, $g < 0$ 时, 我们仍作曲线族(1.32). 当 $c > 0$ 足够小时, 注意到这时 $g < 0$, 它在 O 的邻域内是一族高阶双曲线, 较大的 c 对应的曲线 $V_1 = c$ 离 O 较远, $c = 0$ 时, 由 $V_1 = 0$ 解得

$$\eta = -\frac{1}{g}[(a_2\xi^2 + \cdots + a_m\xi^m) \pm \sqrt{(a_2\xi^2 + \cdots)^2 - g\xi^2}],$$

这是过 O 的两支双曲线, 在 O 点切于直线 $\eta = \pm \frac{1}{\sqrt{-g}}\xi$, 如图 1-18 所示. 将式(1.32)沿系统求导, 仍得

$$\left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(1.30)} = g(\xi^{m+1} + \eta^2) + S.$$

在 O 的充分小邻域内有

$$\left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(1.30)} < \frac{g}{2}(\xi^{m+1} + \eta^2) < 0,$$

因此, 在两直线 $\eta = \pm \frac{1}{\sqrt{-g}}\xi$ 所夹的包含 ξ 轴在内的角域中, 如图 1-18 所示, 式(1.30)的轨线由 $V_1 = c_1$ 上走向 $V_1 = c_2$ 上 ($c_1 > c_2 \geq 0$), 我们进一步可以

证明,这时,当 $t \rightarrow +\infty$ 时各有且只有一条轨线分别沿 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 趋于 O ,这就决定了 O 是鞍点.

(ii) m 为偶数, $g < 0$ 情形

这时对 l_1, l_2 轨线的左侧作曲线族

$$V_2 \equiv \xi + \eta(a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{m-1}\xi^{m-1}) + a_m\eta^2 = c,$$

其中可变常数 $c \leq 0$, a_i 是待定常数,特别将确定 $a_m < 0$. 它是 O 邻域中一个高阶抛物线族,分布如图 1-19 所示,将它作参考系,像上面讨论一样,可得 $\theta=\pi$ 的方向上轨线是结点式的分布.

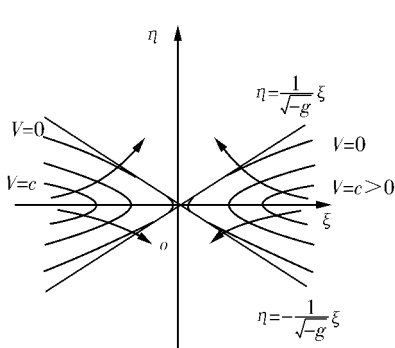


图 1-18

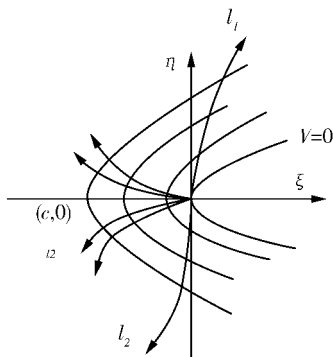


图 1-19

对 l_1, l_2 两轨线的右侧部分,我们仍沿用上面 $g < 0$ 时的讨论,则在 $\theta=0$ 的方向上得鞍点式的分布,综合起来 O 就是图 1-17(d)中的鞍结点.

当 m 为偶数, $g > 0$ 时,可令 $-\xi$ 代 ξ , 系统(1.30)化为

$$\frac{d\xi}{dt} = -\Phi(-\xi, \eta) = -g\xi^m + \cdots,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta + \phi(-\xi, \eta),$$

这就是上述情形. 相当于图形对 η 轴作反射,所以原分布就为如图 1-17(c)所示的鞍结点. 证毕.

例 1.14 考察系统

$$\dot{x} = 2x - 6y + xy + y^2,$$

$$\dot{y} = x - 3y + x^2 - xy^2$$

的奇点 $O(0,0)$ 邻域内轨线的分布.

解 对应的线性系统系数矩阵是

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, q = 0, p = 1,$$

这是具有一个零特征根的情形,按定理 1.12 处理.

$$\text{特征根为 } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \text{ 容易算出 } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 使 } \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

即非奇线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

化原系统为(仍用原记号)

$$\dot{x} = -14x^2 - 17xy - 5y^2 + 6x^3 + 16x^2y + 14xy^2 + 4y^3,$$

$$\dot{y} = -y + 23x^2 + 29xy + 9y^2 - 9x^3 - 24x^2y - 21xy^2 - 6y^3.$$

再令 $t = -\tau$, 化为定理 1.12 所要求的标准形式

$$\frac{dx}{d\tau} = 14x^2 + 17xy + \cdots \equiv \varphi(x, y),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = y - 23x^2 - \cdots \equiv y + \psi(x, y). \quad (1.33)$$

令

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$

代入 $y + \psi(x, y) = 0$, 比较同类项系数, 确定出 $a_2, a_3, \cdots$, 得

$$y = 23x^2 + 658x^3 + \cdots,$$

再将它代入 $\varphi(x, y)$, 得

$$\varphi(x, y(x)) = 14x^2 + O(x^3).$$

由定理 1.12 的结论知, 系统(1.33)的原点 O 是形如图 1-17(c)的鞍结点, 回到时间 t , 即原系统的原点 O 是图 1-20 的鞍结点.

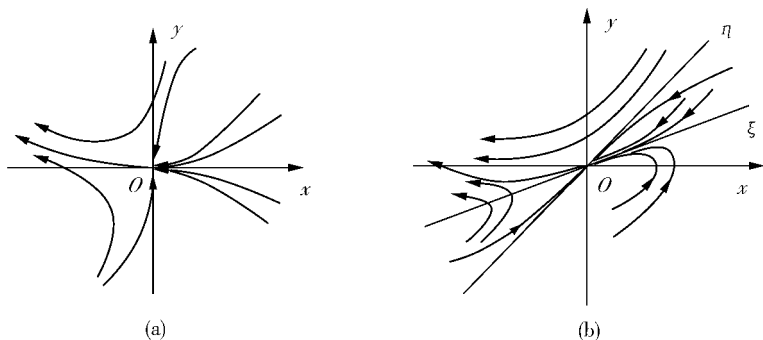


图 1-20

二、 $q=p=0$ 情形

这时相应线性系统的两个特征根都是零. 一定存在非奇异线性变换和时间 t 的线性置换, 将这样的系统化为

$$\dot{x} = y + \varphi(x, y), \quad \dot{y} = \psi(x, y), \quad (1.34)$$

这里设 φ, ψ 在点 O 邻域内是解析的, 展开式至少从 2 次开始, 且设 O 是孤立奇点.

下面给出奇点 O 的判定定理, 由于证明相当复杂, 限于篇幅而省略. 有兴趣的读者可参阅文献[2].

首先由 $y + \varphi(x, y) = 0$ 解出隐函数

$$y = y(x), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

代入 $\psi(x, y)$ 及 $\varphi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y)$ 中, 设分别得展开式

$$\begin{aligned} \psi(x, y(x)) &= a_k x^k + O(x^{k+1}), a_k \neq 0, \\ \varphi'_x(x, y(x)) + \psi'_y(x, y(x)) &= b_n x^n + O(x^{n+1}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

定理 1.13 设系统(1.34)中 φ, ψ 在点 O 邻域内是解析的, 展开式至少从 2 次开始, O 是它的孤立奇点. 则

(i) 若展开式(1.35)中的 $k=2m+1$ 为奇数时, 当

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{2m+1} > 0 \\ a_{2m+1} < 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} b_n = 0 \\ b_n \neq 0 \begin{cases} n > m \\ n = m, \lambda < 0 \end{cases} \\ b_n \neq 0 \begin{cases} n < m \\ n = m, \lambda \geq 0 \end{cases} \end{array} \right\} \begin{array}{l} O \text{ 是鞍点,} \\ O \text{ 是中心或焦点,} \\ \begin{array}{l} n \text{ 是偶数时, } O \text{ 是结点,} \\ n \text{ 是奇数时, } O \text{ 是形如} \\ \text{图 1-21 的复合型奇点.} \end{array} \end{array}$$

其中 $\lambda \equiv b_n^2 + 4(m+1)a_{2m+1}$.

(ii) 若 $k=2m$ 为偶数, 当

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = 0 \\ b_n \neq 0, n \geq m \end{array} \right\} \quad O \text{ 是形如图 1-22 的退化奇点,}$$

$$b_n \neq 0, n < m \quad O \text{ 是形如图 1-23 的鞍结点.}$$

注 1 上面结论中“ O 是中心或焦点”, 如何进一步判定, 至今尚未有满意的一般结果.

注 2 上面画出的图形只是这三类奇点的标准形式之一, 具体的图形可能要根据给出系统的特征作适当的调整; 另外, (1) 中说的结点也可能形如线

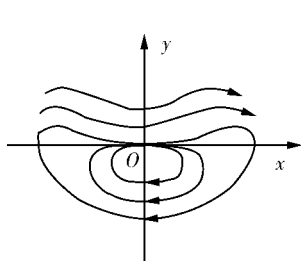


图 1-21

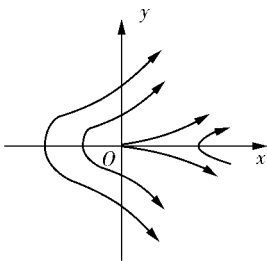


图 1-22

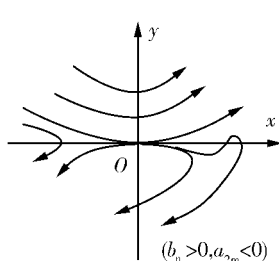


图 1-23

性系统中的退化结点,这些均可从坐标轴上向量场的分布得到启示.

例 1.15 考察系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x\left(\frac{3}{2}x + y\right), \\ \dot{y} &= 3x - \frac{1}{2}xy - 3y^2\end{aligned}\quad (1.36)$$

奇点 $O(0,0)$ 邻域内轨线的分布.

解 对应的

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = p = 0,$$

两个特征根都是零,按定理 1.13 来处理.

首先将 x 与 y 对调一下,化为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3y - \frac{1}{2}xy - 3x^2 \equiv 3y + \varphi(x, y), \\ \dot{y} &= -y\left(x + \frac{3}{2}y\right) \equiv \psi(x, y),\end{aligned}\quad (1.37)$$

符合定理中的标准形式(这里第一式中的 y 的系数只要是正的,它是不是 1 无关紧要). 令

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

从第一式

$$3y - \frac{1}{2}xy - 3x^2 = 0$$

中,确定隐函数

$$y = x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots,$$

代入两式中得展开式(1.35)

$$\phi(x, y(x)) = -x^3 + O(x^4),$$

$$\phi'_x(x, y(x)) + \phi'_y(x, y(x)) = -7x + O(x^2).$$

于是, 对应定理 1.13 中的各参数有

$$k = 3, \quad m = 1 = n, \quad a_3 = -1, \quad b_1 = -7,$$

$$\lambda = b_1^2 + 4(m+1)a_3 = 41 > 0.$$

按分类, 系统(1.37)原点 O 邻域内轨线分布应属图 1-21 型的复合奇点型, 但注意到 $y=0$ 是它的解, 且其上 $\dot{x} = -3x^2 \leq 0$, 因此 O 的邻域内系统(1.37)的轨线分布应如图 1-24(a)所示. 回到原系统(1.36), 则如图 1-24(b)所示.

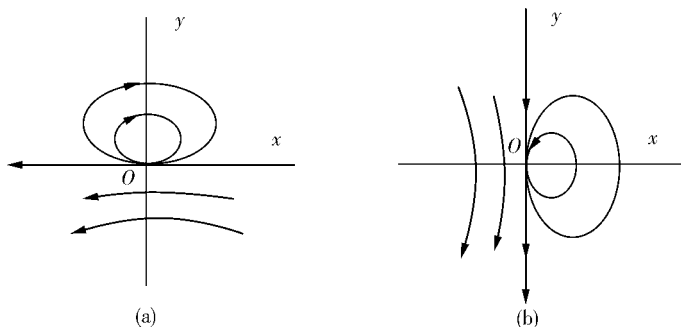


图 1-24

习 题 一

1. 考虑系统(1.1), 若端函数连续且保证解的唯一性, 试证明:

(1) 若 $t \rightarrow +\infty$ 时, 它的半轨 $L^+ \rightarrow A$, 则点 A 一定是系统(1.1)的奇点.

(2) 绪论中轨线的三条性质成立.

2. 确定下列方程组奇点及其类型, 并作出其相图:

(1) $\dot{x} = -8x + y, \quad \dot{y} = -3x;$

(2) $\dot{x} = 4x + y, \quad \dot{y} = -3x;$

(3) $\dot{x} = -x - 5 + y, \quad \dot{y} = -3x.$

3. 利用上题的结果, 并找出每题奇点处对应的特征方向, 拼出系统

$$\dot{x} = f(x) + y, \quad \dot{y} = -3x$$

的相图, 其中

$$f(x) = \begin{cases} -8x, & x > 0, \\ 4x, & -1 < x \leq 0, \\ -x-5, & x \leq -1. \end{cases}$$

4. 试确定下列方程的奇点及其类型, 并画出奇点邻域内积分曲线的分布:

- (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+y}{3x+y}$;
- (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+5}{2x-7y+19}$;
- (3) $\frac{dy}{dx} = \frac{6x-9y-4xy+5y^2}{6x-6y-4x^2+5xy}$.

5. 确定系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(a^2 - x^2) + by, \quad ab \neq 0$$

的奇点及其类型.

6. 确定下列各系统的一切奇点, 并判定它们的类型:

- (1) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = a(1-x^2)y - bx \quad (a \geq 0, b > 0)$;
- (2) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ay - b \sin x \quad (a \geq 0, b > 0)$;
- (3) $\dot{x} = my + ax(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -mx + ay(x^2 + y^2)$;
- (4) $\dot{x} = e^x - 1, \quad \dot{y} = \sin(x+y)$.

7. 画出方程

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^4 - 2)x = 0$$

在相平面上有限区域内的轨线分布图形.

8. 用 Frömmel 方法作出下列各系统在奇点邻域中的轨线相图:

- (1) $\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$;
- (2) $\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 + 2y^2$;
- (3) $\dot{x} = xy - x^2, \quad \dot{y} = y^2$;
- (4) $\dot{x} = -3x^4 + 6x^2y^2 + y^2, \quad \dot{y} = 8xy^3$.

9. 作出下列系统在奇点邻域中的相图:

- (1) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y^3$;
- (2) $\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y^3$;
- (3) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y^2$;
- (4) $\dot{x} = xy(1+2x^2+2y^2), \quad \dot{y} = y^2+y^4-x^4$.

10. 讨论系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2y + y(x^2 + y^2)^2, \\ \dot{y} &= xy^2 - x(x^2 + y^2)^2\end{aligned}$$

的奇点邻域, 并作局部相图.

11. 求出系统

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = 1 + 2x - 3x^2 + 5xy^2$$

的两个奇点, 并在同一个平面上画出这两个奇点附近的轨线分布.

12. 作出下列系统奇点邻域内的轨线分布:

- (1) $\dot{x} = x^3 + xy^2, \quad \dot{y} = y^3$;
- (2) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x^3(x-y)^2$.

13. 试讨论: a, b 在什么条件下, 系统

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = a + 2x + bx^2 + xy^2$$

($a \neq 0$) 有两个中心.

14. 试证明 Frömmel 方法的奇异情形的注 2, 即作变换 $z = \frac{x^\delta}{\delta}$, 可使结论中加于高次项的条件降为: $r \rightarrow 0$ 时, 存在 $\delta > 0$, 使

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y) = O(r^{m+\delta}).$$

15. 试证明: 若 $\varphi(\theta)$ 是 $\cos \theta, \sin \theta$ 的 m 次齐次多项式, 则它的 Founier 展开

$$\varphi(\theta) = \sum_k [A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta]$$

中的系数 A_k, B_k 满足下列条件:

(i) 当 m 为奇数时, $A_{2s} = B_{2s} = 0$;

(ii) 当 m 为偶数时, $A_{2s+1} = B_{2s+1} = 0$,

其中 $s = 0, 1, 2, \dots$.

16. 设 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ 连续, 保证解的唯一性, 且当 $r \rightarrow 0$ 时, $\varphi, \psi = o(r)$. 试证系统 (1.5) 的双曲奇点 O 的稳定性与其线性近似系统 O 的稳定性是一致的.

17. 试用中心-焦点判定方法二, 判定下列系统奇点 $O(0, 0)$ 的类型:

$$(1) \dot{x} = y - x^3, \quad \dot{y} = -x + 2x^2y - y^3;$$

$$(2) \dot{x} = y - x^3, \quad \dot{y} = -x + 6x^2y - y^3.$$

18. 试证定理 1.9 的推论: O 是系统 (1.14) 的中心的充要条件是, 它存在一个与 t 无关的实正则积分 $F(x, y) = C$.

19. 试讨论下列各系统的奇点 $O(0, 0)$ 邻域轨线结构, 并画出局部相图:

$$(1) \dot{x} = -x + x^2 - xy^2, \quad \dot{y} = xy + y^2 - y^3;$$

$$(2) \dot{x} = x + xy, \quad \dot{y} = x - y^2;$$

$$(3) \dot{x} = y - 2x^2 - xy, \quad \dot{y} = y^2 - xy;$$

$$(4) \dot{x} = x^2 + 2xy, \quad \dot{y} = x + 2xy + y^2.$$

20. 计算焦点判定量:

(1) 计算系统

$$\dot{x} = y + bx^2 + (2c + \beta)xy + dy^2,$$

$$\dot{y} = -[x + ax^2 + (2b + a)xy + cy^2]$$

的奇点 $O(0, 0)$ 的一阶焦点判定量;

(2) 计算例 1.12 中系统的奇点 $O(0, 0)$ 的三阶焦点判定量.

补充与问题

1. 平面双曲奇点局部结构的讨论, 已有人向三维空间推广. 我们可以讨论系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

的奇点 $O(0,0,0)$ 的拓扑几何类型, 及加高次项后

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_2(x, y, z) \\ Y_2(x, y, z) \\ Z_2(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (2)$$

的奇点 O 的拓扑不变性问题^[1,3].

系数矩阵 $\mathbf{A}$ 经线性变换化为约当型后, 可分为 4 种类型:

(i) 三个初等因子
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

(ii) 两个初等因子
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

(iii) 一个初等因子
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

(iv) 一对共轭复根, 一个实根
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

经讨论, 我们可得

定理 若 $\lambda_i \neq 0, i=1, 2, 3$, 则

(i) 系统(1)有 5 种不同的拓扑几何结构, 它们是三维空间的结点、鞍点、结点-焦点、鞍点-焦点和中心-焦点;

(ii) 在解析的高次项时, 对系统(1)是前 4 种拓扑结构, 系统(2)的 O 仍保持不变; 当系统(1)的 O 是中心-焦点时, 系统(2)的 O 可以有结点-焦点、鞍点-焦点、中心-焦点三种可能, 这也是一个判定问题.

2. 齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \cdots + a_m x^m}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \cdots + b_m x^m} \equiv \frac{Y_m(x, y)}{X_m(x, y)} \quad (3)$$

及加高次项后的

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y_m(x, y) + \phi(x, y)}{X_m(x, y) + \varphi(x, y)}, \quad (4)$$

其中 $X_m(x, y), Y_m(x, y)$ 不可约, $\varphi(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 解析且至少为 x, y 的 $m+1$ 次, $m > 1$ 为整数. 研究它原点 O 邻域中积分曲线的分布曾是被关注的一个问题. 在我们学习了 Frömmers 方法后, 也可以用此方法来解决, 可得:

记

$$\begin{aligned} F(\theta) &\equiv -\sin \theta \sum_{i=0}^m b_i \sin^{m-i} \theta \cos^i \theta + \cos \theta \sum_{i=0}^m a_i \sin^{m-i} \theta \cos^i \theta, \\ G(\theta) &\equiv \cos \theta \sum_{i=0}^m b_i \sin^{m-i} \theta \cos^i \theta + \sin \theta \sum_{i=0}^m a_i \sin^{m-i} \theta \cos^i \theta, \end{aligned}$$

定理^[1]

(i) $F(\theta) = 0$ 无实根时, 若 $\int_0^{2\pi} \frac{G(\theta)}{F(\theta)} d\theta = 0$, 则 O 为 (3) 的中心; 若 $\int_0^{2\pi} \frac{G(\theta)}{F(\theta)} d\theta \neq 0$, 则 O 为 (3) 的焦点.

(ii) 设 $\theta = \theta_0$ 是 $F(\theta) = 0$ 的一个实根,

$$F(\theta) = \sin^l(\theta - \theta_0) H_l(\theta), H_l(\theta_0) \neq 0, G(\theta_0) \neq 0.$$

则若 l 为奇数, 当 $G(\theta_0)/H_l(\theta_0) < 0$ 时, $\theta = \theta_0$ 是方程 (3) 的孤立射线解; 当 $G(\theta_0)/H_l(\theta_0) > 0$ 时, $\theta = \theta_0$ 是方程 (3) 的结点射线解;

若 l 为偶数, 当 $G(\theta_0)/H_l(\theta_0) < 0$ 时, $\theta = \theta_0$ 是方程 (3) 的第一类变异射线解; 当 $G(\theta_0)/H_l(\theta_0) > 0$ 时, $\theta = \theta_0$ 是方程 (3) 的第二类变异射线解.

(iii) 对方程 (4) 而言, 除 (i) 中方程 (3) 的中心可能变为方程 (4) 的中心或焦点外, 其他情形的拓扑图形均不改变, 其中孤立射线尚需附加 θ_0 是 $F(\theta) = 0$ 的单根的条件. 这里也留下了一个中心-焦点判定问题.

3. 孤立奇点邻域的几何划分

Frömmers 方法告诉我们, 要研究孤立奇点邻域内轨线的分布, 先找出特殊方向, 再讨论有无轨线或有多少条轨线沿特殊方向走向奇点. 但严格地说这还不够, 对一个确定下来的小邻域 $S_\delta(O)$, 我们还要弄清两个特殊方向之间轨线的可能走向, 也就是说要把 $S_\delta(O)$ 分成一些曲边扇形, 要研究这些扇形有多少种不同的类型及它们的规律.

这方面的研究有结论^[2,3]:

(i) 对连续 (且保证唯一性条件) 系统, 非中心型孤立奇点 O 的充分小邻域 $S_\delta(O)$ 中, 只可能有 5 种不同的曲边扇形: 双曲扇形、椭圆扇形、抛物扇形、双曲椭圆扇形、抛物椭圆扇形, 它们的个数是有限的, 且是相间排列的;

(ii) 对于平面解析系统, 可取到足够小的 δ , 使 $S_\delta(O)$ 中只有双曲、椭圆、抛物三种扇形;

(iii) 这三种扇形的个数之间满足 Bendixson 公式

$$J_0 = 1 + \frac{e-h}{2},$$

其中 J_0 是孤立奇点 O 的指数 (见第二章第四节), e, h 分别表示 $S_0(O)$ 中椭圆扇形、双曲扇形的个数. 这是一个非常有用的公式.

4. 多项式系统的焦点判定量

除了方向场轴对称的情形外, 一般来说中心—焦点判定要进行无穷多次运算, 在满足了无穷多个条件下才能获得奇点是中心的结论. 但 М. N. А́лмухамедов^[13] 首先证明了, 平面多项式系统的中心—焦点判定可以在有限步内解决. 接着, 有许多人对二次多项式系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} &= x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2,\end{aligned}\quad (5)$$

研究原点仍是中心的全部有限个条件.

较早的一个优秀的结果是属于 Н. Н. Гаутин^[15] 的, 他将式 (5) 经转轴化为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} &= x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2,\end{aligned}\quad (5)'$$

推出了三个焦点判定量:

$$\begin{aligned}V_3 &= -\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6), \\ V_5 &= \frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)[\lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6)], \\ V_7 &= -\frac{25}{32}\pi\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2).\end{aligned}$$

并导出

定理

- (i) $V_3 \neq 0$ 时, 原点 O 是一阶细焦点;
 $V_3 = 0, V_5 \neq 0$ 时, O 是二阶细焦点.
 $V_3 = V_5 = 0, V_7 \neq 0$ 时, O 是三阶细焦点;
 $V_3 = V_5 = V_7 = 0$ 时, O 是中心.
- (ii) k 阶细焦点 ($k=1, 2, 3$) 的稳定性由 $\text{sgn} V_{2k+1}$ 决定:
 $V_{2k+1} < 0$ 时稳定, $V_{2k+1} > 0$ 时不稳定.

1982 年, 我国的李承治^[16] 推广了这个定理, 他直接用系统 (5) 的系数给出了二次系统的三个焦点判定量公式, 可更直接、更简单地计算和区分出原点是中心或焦点. 对应上面的 V_3, V_5, V_7 , 他推出的三个判定量是:

$$\begin{aligned}W_1 &= A\alpha - B\beta, \\ W_2 &= [\beta(5A - \beta) + \alpha(5B - \alpha)]\gamma, \\ W_3 &= (A\beta + B\alpha)\gamma\delta,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A &= a_{20} + a_{02}, \quad B = b_{20} + b_{02}, \\ \alpha &= a_{11} + 2b_{02}, \quad \beta = b_{11} + 2a_{20},\end{aligned}$$

$$\gamma = b_{20}A^3 - (a_{20} - b_{11})A^2B + (b_{02} - a_{11})AB^2 - a_{02}B^3,$$

$$\delta = a_{02}^2 - b_{20}^2 + a_{02}A + b_{20}B.$$

对应

定理

- (i) 当且仅当 $W_1 \neq 0$ 时, 原点 O 是一阶细焦点;
 - (ii) 当且仅当 $W_1 = 0, W_2 \neq 0$ 时, O 是二阶细焦点;
 - (iii) 当且仅当 $W_1 = W_2 = 0, W_3 \neq 0$ 时, O 是三阶细焦点;
 - (iv) k 阶细焦点 ($k=1, 2, 3$) 的稳定性由 $\operatorname{sgn} W_k$ 决定, $W_k < 0$ 时稳定, $W_k > 0$ 时不稳定;
 - (v) 当且仅当 $W_1 = W_2 = W_3 = 0$ 时, O 是中心.
- 焦点判定量及其定理在极限环的研究中将起到重要的作用.

参考文献

- [1] 秦元勋. 微分方程所定义的积分曲线. 北京: 科学出版社, 1959
- [2] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985
- [3] 蔡燧林, 钱祥征. 常微分方程定性理论引论. 北京: 高等教育出版社, 1994
- [4] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 2000
- [5] Hartman P. Ordinary Differential Equations. Wiley, N. Y. 1982
- [6] Sansone G, Conti R. 非线性微分方程(中译本). 北京: 科学出版社, 1983
- [7] Perron O. Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines Singulären Punktes, Math. Ztschr., I. 1922, 15: 121 ~ 146; II. 1923, 16: 273 ~ 295
- [8] Hartman P. On the local linearization of differential equations. Proc. A. M. S., 1963, 14: 568 ~ 573
- [9] Frömmer M. Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Umgebung Unbestimmtheitsstellen. Math. Annalen, 1928, 99: 222 ~ 272
- [10] Lonn ER. Über singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen. Math. Ztschr., 1939, 44: 507 ~ 530
- [11] 胡钦训, 陆毓麒. 高次奇点在不定号情形下的定性分析. 北京工业学院学报, 1981, 2: 1 ~ 16
- [12] Андреев А. ф. Особые Точки дифференциальных уравнений. Минск, Высшая школа, 1979
- [13] Альмухамедов М. И. О число Возможных типов Особых Точек Для систем обыкновенных Дифференциальных уравнений с n — Переменными, Казань, Изв.

физматем. общ. ества(3), 1936~1937, 8:23~29

- [14] Албмухамедов М. И. О число Возможных типов Особых Точек Для систем обыкновенных Дифференциальных уравнений с n — Переменными, О проблеме центра, Изв. физматем. общ. ества, 1936~1937, 8:29~37
- [15] Баутин НН. О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра, мат. сб., 30(72), 1952, 1:181~196
- [16] 李承治. 关于平面二次系统的两个问题. 中国科学, A 辑, 1982, 12:1087~1096
- [17] 刘一戎. 一类高次奇点与无穷远点的中心焦点理论. 中国科学, A 辑, 2001

第二章 极限环

在研究轨线的大范围分布中,处于核心地位的是闭轨线(特别是极限环),本章讨论它的存在性、唯一性、稳定性及重次的判定方法和它随参数的变化.第一节介绍的有关动力系统极限集的知识,是判定极限环存在的环境定理的重要基础,以后在稳定性理论中还会用到.第四节的奇点指数为极限环的存在性及位置也提供了很好的信息.

第一节 平面动力系统的 P-B 理论

来自 H. Poincaré 的思想,经 I. Bendixson 完善的 P-B 理论^[1],奠定了平面定性理论坚实的基础,其中许多精细的结果由于依赖了著名的 Jordan 定理(见绪论)只能在欧氏平面或二维球面上才能成立,但关于动力系统和轨线极限集的基本概念及基本性质却是在 $\mathbf{R}^n$ 中建立的.

一、 $\mathbf{R}^n$ 上动力系统的基本概念及性质

考虑 $\mathbf{R}^n$ 上的自治系统

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (2.1)$$

其中 $t \in (-\infty, +\infty)$, $x \in D \subset \mathbf{R}^n$, $F(x) \in C(D)$, 且在 D 上满足局部 Lipschitz 条件. 我们在绪论中已经引进了关于系统(1.1)的相空间、向量场、轨线、奇点等的概念,也列出了关于轨线的三条性质:对 t 的平移性、唯一性及对 t 的可加性.

现在我们引进一个新的概念,设系统(2.1)的一切解均在 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$ 上存在,用记号 $f(p, t)$ 表示系统(2.1)在 $t=0$ 时过点 p 的解,则对任意固定的 $t \in \mathbf{R}$, $f(p, t)$ 定义了 D 到 D 的单参数变换

$$f(\cdot, t): D \rightarrow D, \quad D \subset \mathbf{R}^n.$$

在我们对系统(2.1)所作的假设下,容易看出变换族 $\{f(\cdot, t) | t \in \mathbf{R}\}$ 具有下列性质:

- (i) $f(p, 0) = p$, (恒同变换)
- (ii) $f(p, t)$ 对 p, t 连续, (连续性)

(iii) $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$, (对参数 t 的可加性).

性质(i)说明变换族存在单位元, 性质(iii)说明变换族对 t 满足可加性, (i)和(iii)一起又可推出每个变换 $f(\cdot, t_1)$ 存在逆变换 $f(\cdot, -t_1)$. 因此, 该变换族构成了 $D \rightarrow D$ 的单参数连续变换群, 称为由系统(2.1)定义的动力系统.

剩下的问题是, 如何保证系统(2.1)的一切解都是整体存在的. 我们可以证明^[4], 在对系统(2.1)所设的条件下, D 上至少存在一个等价的系统, 它与系统(2.1)的轨线是相同的, 而一切解却均在 $\mathbf{R}$ 上整体存在. 由于我们的任务是研究系统的轨线结构, 因此不妨认为, 系统(2.1)在所给假设下总是定义了一个动力系统.

在动力系统中, 对固定的点 p , 称 $f(p, t)$ 为过 p 的运动. 当 t 遍取 $\mathbf{R}$ 时, $f(p, \mathbf{R})$ 是过 p 的轨线, 常记为 $L_p \equiv f(p, \mathbf{R}) \equiv \{f(p, t) | t \in \mathbf{R}\}$; 那么, 由 t 出发的正半轨是

$$L_p^+ \equiv f(p, \mathbf{R}^+) \equiv \{f(p, t) | t \in \mathbf{R}^+\};$$

负半轨是

$$L_p^- \equiv f(p, \mathbf{R}^-) \equiv \{f(p, t) | t \in \mathbf{R}^-\},$$

其中 $\mathbf{R}^+ \equiv [0, +\infty)$, $\mathbf{R}^- \equiv (-\infty, 0]$.

若存在常数 $T > 0$, 使对一切 t 有

$$f(p, t + T) = f(p, t),$$

则称该 $f(p, t)$ 为周期运动, 满足上式的最小正数 T 称为它的周期. 周期运动对应的轨线是相空间 $\mathbf{R}^n$ 中的闭轨线.

定义 2.1 若存在序列 $\{t_n\}$: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $t_n \rightarrow +\infty (-\infty)$, 使

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(p, t_n) = q \in D,$$

则称点 q 为 $f(p, t)$ 的 ω 极限点 (α 极限点), 也可称为 L_p^+ (L_p^-) 的极限点. $f(p, t)$ 的所有 $\omega(\alpha)$ 极限点的全体称为它的 ω 极限集, 记为 Ω_p (α 极限集记 A_p).

容易证明, q 是 $f(p, t)$ 的 ω 极限点, 当且仅当对任意小的 $\epsilon > 0$, 任意大的 $T > 0$, 总存在 $t > T$, 使 $f(p, t)$ 与 q 的距离

$$d(f(p, t), q) < \epsilon.$$

若 p 是系统(2.1)的奇点, 或 $f(p, t)$ 是周期运动时, 显然都有 $\Omega_p = A_p = L_p$.

定义 2.2 设点集 $A \subset D$, 记 $f(A, t) \equiv \{f(p, t) | p \in A\}$. 若 $\{f(A, t) | t \in \mathbf{R}\} = A$, 则称 A 为该动力系统的不变集.

因此, 由轨线的定义知: 任何一条轨线都是 $\{f(\cdot, t) | t \in \mathbf{R}\}$ 的不变集; 反之, $\{f(\cdot, t) | t \in \mathbf{R}\}$ 的不变集都是由整条整条的轨线构成的.

定理 2.1 若 L_p^+ (L_p^-) 有界, 则 Ω_p (A_p) 是一个非空、不变、连通的有界闭

集,它是由系统的整条整条轨线构成的.

证明 只证括号外情形. 由 Bolzano - Weierstrass 聚点存在定理易知 Ω_p 非空且有界,以下证

(1) Ω_p 是闭集. 这只要证明,若 $\{q_n\} \subset \Omega_p$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = q$, 则有 $q \in \Omega_p$. 事实上, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m > 0$, 使 $d(q_m, q) < \frac{\varepsilon}{2}$. 又 $q_m \in \Omega_p$, 按 ω 极限点的等价定义, $\forall T > 0$ 和每个 q_m , $\exists t_m > T$, 使 $d(f(p, t_m), q_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而有

$$d(f(p, t_m), q) \leq d(f(p, t_m), q_m) + d(q_m, q) < \varepsilon.$$

这说明了 $q \in \Omega_p$.

(2) Ω_p 是不变集. 即要证 $\{f(\Omega_p, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \Omega_p$, 这等价于分别证明 $\{f(\Omega_p, t) \mid t \in \mathbf{R}\} \subset \Omega_p$ 和 $\{f(\Omega_p, t) \mid t \in \mathbf{R}\} \supset \Omega_p$ 都成立.

事实上, 设 $\forall q \in \Omega_p$, 则 $\exists \{t_n\}; n \rightarrow +\infty$ 时 $t_n \rightarrow +\infty$, 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(p, t_n) = q$. 对于任意固定的 $t \in \mathbf{R}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(p, t_n + t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(p, t_n), t) = f(q, t),$$

这说明 $f(q, t) \in \Omega_p$, 从而 $\{f(\Omega_p, t) \mid t \in \mathbf{R}\} \subset \Omega_p$.

另一方面, 对任意固定的 $t \in \mathbf{R}$, 有

$$\Omega_p = f(f(\Omega_p, t), -t) \subset f(\Omega_p, -t),$$

而 $\{f(\Omega_p, -t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{f(\Omega_p, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$, 于是得 $\Omega_p \subset \{f(\Omega_p, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

(3) Ω_p 是连通集. 反证法, 若 Ω_p 不连通, 即存在闭的 $\Omega_p^{(1)}, \Omega_p^{(2)}: \Omega_p = \Omega_p^{(1)} \cup \Omega_p^{(2)}$, 且 $\Omega_p^{(1)} \cap \Omega_p^{(2)} = \emptyset$. 令 $d(\Omega_p^{(1)}, \Omega_p^{(2)}) = d > 0$, 作不相交的两个邻域 $S(\Omega_p^{(i)}, \frac{d}{3}), i=1, 2$, 则由 ω 极限集的定义知, 分别存在序列 $\{t_n^{(i)}\}, i=1, 2$, 满足 $n \rightarrow +\infty$ 时 $t_n^{(i)} \rightarrow +\infty$, 使

$$f(p, t_n^{(i)}) \in S(\Omega_p^{(i)}, \frac{d}{3}), i=1, 2,$$

且可选择 $\{t_n^{(i)}\}$ 满足:

$$0 < t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < t_2^{(1)} < t_2^{(2)} < \dots < t_n^{(1)} < t_n^{(2)} < \dots.$$

这样, 一定可找到一串 $\{\bar{t}_n\}$ 满足: $\bar{t}_n \in (t_n^{(1)}, t_n^{(2)}), n \rightarrow +\infty$ 时 $\bar{t}_n \rightarrow +\infty$, 使

$$f(p, \bar{t}_n) \in S(\Omega_p^{(1)}, \frac{d}{3}) \cup S(\Omega_p^{(2)}, \frac{d}{3}).$$

由 L_p^+ 的有界性, 可在 $\{f(p, \bar{t}_n)\}$ 中选出收敛的子列 $\{f(p, \bar{t}_{n_i})\} \rightarrow q \in \Omega_p$, 这与上式矛盾. 证毕.

二、 $\mathbf{R}^2$ 上的 Poincaré – Bendixson 理论

考虑自治系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (2.2)$$

$(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $X, Y \in C(D)$ 且对 x, y 满足 Lipschitz 条件. 因此, 系统 (2.2) 是 D 上的一个动力系统.

定义 2.3 直线段 $\overline{N_1 N_2} \subset D$, 若其上(含端点)没有系统 (2.2) 的奇点和轨线的切点, 则称 $\overline{N_1 N_2}$ 为系统 (2.2) 的**无切线段**.

定义 2.4 设 $\overline{N_1 N_2}$ 是系统 (2.2) 的无切线段, $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{AD}$ 是过其两端点系统 (2.2) 的两条轨线段, $\overline{AB}$ 和 $\overline{DC}$ 是平行于 $\overline{N_1 N_2}$ 的直线段, 它们构成的曲边矩形 $ABCD$ 若满足: 其内任一点出发的轨线当 t 增加(或减少)时必同向穿过 $\overline{N_1 N_2}$; 当 t 增加和减少时分别与 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 交且仅交一次, 则称曲边矩形 $ABCD$ 为系统 (2.2) 在 $\overline{N_1 N_2}$ 上的**平行轨线矩形**(简称**轨线矩形**), 记为 $\square \overline{N_1 N_2}$ (见图 2-1).

性质 1(存在性) 设 P_0 是系统 (2.2) 的常点, 则必存在过 P_0 的无切线段 $\overline{N_1 N_2}$ 及 $\overline{N_1 N_2}$ 上的轨线矩形 $\square \overline{N_1 N_2}$.

证明 取常点 P_0 , 作邻域 $S(P_0, \epsilon)$, 当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 它内部无系统 (2.2) 的奇点. 在邻域内作过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的轨线, 又在轨线过 P_0 的法线上取一小段为 $\overline{N_1 N_2}$, 则它的方程为

$$X(x_0, y_0)(x - x_0) + Y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

这样, $S(P_0, \epsilon)$ 内平行于 $\overline{N_1 N_2}$ 的直线族是

$$\lambda(x, y) \equiv X(x_0, y_0)(x - x_0) + Y(x_0, y_0)(y - y_0) = c.$$

沿系统 (2.2) 的轨线对 t 求导, 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.2)} &= \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \dot{y} \right]_{(2.2)} \\ &= X(x_0, y_0)X(x, y) + Y(x_0, y_0)Y(x, y). \end{aligned}$$

由连续性和 $\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(x_0, y_0)} = X^2(x_0, y_0) + Y^2(x_0, y_0) > 0$ 知, $\exists \delta \in (0, \epsilon)$ 使 $\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.2)} > 0$, $(x, y) \in S(P_0, \delta)$. 这说明系统 (2.2) 的轨线在 $S(P_0, \delta)$ 内, 当 t 增加时沿着 C 增加的方向与平行直线族 $\lambda(x, y) = C$ 相交且只相交一次. 我们取 $\overline{N_1 N_2}$, $\overline{AB}, \overline{CD} \subset S(P_0, \delta)$, 则 $\overline{N_1 N_2}$ 就是过 P_0 的无切线段, 曲边矩形 $ABCD$ 就是定义中的 $\square \overline{N_1 N_2}$ (见图 2-1). 证毕.

由 X, Y 的连续性及 δ 可以取得足够小, 可使 $\square \overline{N_1 N_2}$ 内向量场的诸向量近似于同向平行分布, 这就是 $\square \overline{N_1 N_2}$ 的名称中冠以“平行”两字的含义.

性质 2(相交依时性) 设 $\square \overline{N_1 N_2}$ 是系统(2.2)的轨线矩形, 若轨线 L_p^+ (或 L_p^-) 与 $\overline{N_1 N_2}$ 按时间顺序相交于点 M_1, M_2, M_3 , 则在 $\overline{N_1 N_2}$ 上点 M_2 必在 M_1 与 M_3 之间.

证明 只对 L_p^+ 给出证明. 由图 2-2 知, L_p^+ 与 $\overline{N_1 N_2}$ 按时间顺序交于 M_1 , M_2 时只有图中两种情形. 不论是哪种, 均可看到当 L_p^+ 与 $\overline{N_1 N_2}$ 相交于 M_2 后, 再不可能离开(或进入)轨线弧 $\widehat{M_1 S M_2}$ 与无切线段 $\overline{M_1 M_2}$ 所围成的区域了, 因此 M_3 不能落在 M_1, M_2 之间. 证毕.

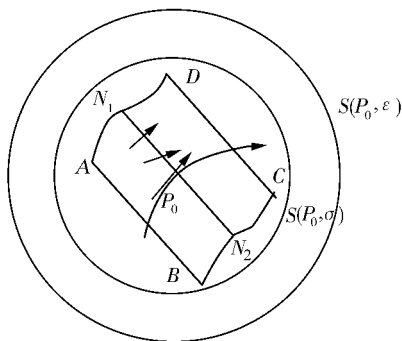


图 2-1

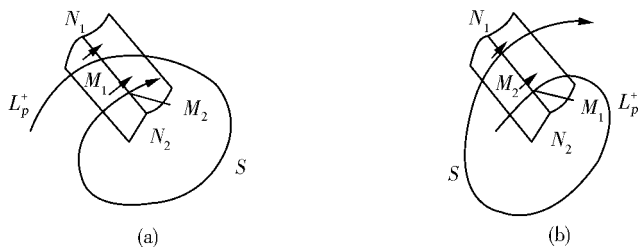


图 2-2

平面上的轨线, 除了与周期运动对应的闭轨线外, 不是闭的轨线称为**开轨线**. 奇点是个例外, 单列一类, 它既可认为是闭轨又可认为是开轨. 这样一来, 平面轨线可以分为三类: 闭轨线、开轨线和奇点. 下面为建立 P-B 定理, 我们先证明两个引理.

引理 2.1 若半轨 L_p^+ (L_p^-) 与自己的 $\omega(\alpha)$ 极限集有交, 则 L_p 或本身是奇点, 或本身是闭轨.

证明 只证括号外结论. 设点 $M_1 \in \Omega_p \cap L_p^+$, 若 M_1 是奇点, 则 $L_p = M_1$, 即第一个结论成立. 若 M_1 是常点, 过 M_1 作无切线段 $\overline{N_1 N_2}$ 及 $\square \overline{N_1 N_2}$, 因 $M_1 \in \Omega_p$, 故 L_p^+ 在点 M_1 之后经过有限时间会再次进入 $\square \overline{N_1 N_2}$, 按 $\overline{N_1 N_2}$ 上轨线同向穿过性知, 当 L_p^+ 继续延伸时必与 $\overline{N_1 N_2}$ 再交于 M_2 , 这时 M_1, M_2 在 $\overline{N_1 N_2}$

上的相关位置只能是图 2-2 中所示的(a),(b)和 M_1 与 M_2 重合三种. 前两种按“相交依时性”(性质 2), 将引出与 $M_1 \in \Omega_p$ 相矛盾的结论, 因此只剩下唯一可能, M_1 与 M_2 必重合, 即 L_p 是闭轨. 证毕.

引理 2.2 若半轨 $L_p^+(L_p^-)$ 为开轨线, 且 $\Omega_p(A_p)$ 中含有常点, 则 $L_p^+(L_p^-)$ 不能包含在任何轨线的 $\omega(\alpha)$ 极限集中.

证明 只证括号外情形. 设常点 $M \in \Omega_p$, 则 $L_M \in \Omega_p$. 取常点 $R \in L_M$, 作过 R 的无切线段 $\overline{N_1 N_2}$ 及 $\square \overline{N_1 N_2}$, 因 $R \in \Omega_p$, 故 L_p^+ 必将进入 $\square \overline{N_1 N_2}$, 再延伸时与 $\overline{N_1 N_2}$ 相交, 继而走出 $\square \overline{N_1 N_2}$, 过一定时间后, L_p^+ 将再次进入 $\square \overline{N_1 N_2}$ 与 $\overline{N_1 N_2}$ 相交. 设 P_1, P_2, P_3 是开轨线 L_p^+ 与 $\overline{N_1 N_2}$ 按时间顺序排列的三个交点 (见图 2-3), 以下用反证法来导出矛盾. 设引理结论不真, 即 L_p^+ 可以充当某轨线 L_q 的 ω 极限集, 则因 $P_2 \in L_p^+$, P_2 也是 L_q^+ 的 ω 点. 但这是不可能的, 因为 L_q^+ 一旦进入 $\widehat{P_2 S P_3}$ 及 $\overline{P_3 P_2}$ 所围的区域后再也穿不出来. 证毕.

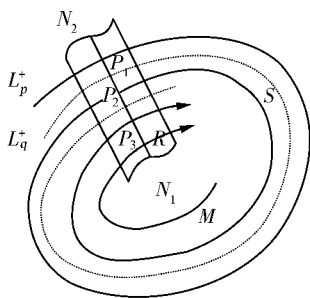


图 2-3

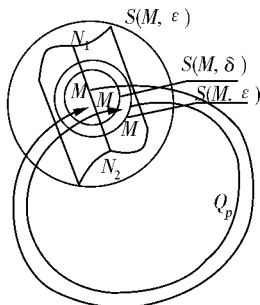


图 2-4

定理 2.2 (Poincaré-Bendixon 定理) 若半轨 $L_p^+(L_p^-)$ 有界, 且 $\Omega_p(A_p)$ 中不含奇点, 则 $\Omega_p(A_p)$ 必为闭轨线. 这时或 L_p 本身就是该闭轨线, 或 $L_p^+(L_p^-)$ 无限盘旋逼近于闭轨 $\Omega_p(A_p)$.

证明 只证括号外情形. 由 L_p^+ 有界, 知 Ω_p 非空, 取常点 $q \in \Omega_p$, 若 $q \in L_p^+$, 则由引理 2.1 知 L_p 本身就是闭轨, 这时 $\Omega_p = A_p = L_p$, 第一种结论成立. 若 $q \notin L_p^+$, 我们考察半轨 L_q^+ , 显然 $\Omega_q \subset \Omega_p$ 由常点构成. 由引理 2.2 知, L_q 必为闭轨 $L_q = \Omega_q = \Omega_p$, 简记为 Γ . 剩下要证的是, L_p^+ 无限盘旋逼近于闭轨 Γ .

事实上, 对任一点 $M \in \Gamma$, $\forall \epsilon > 0$, 在 M 上可作无切线段 $\overline{N_1 N_2}$ 及 $\square \overline{N_1 N_2} \subset S(M, \epsilon)$, 又取正数 $\epsilon_1 < \epsilon$, 使 $S(M, \epsilon_1) \subset \square \overline{N_1 N_2}$. 设 Γ 的周期为 T , 则由解对初值的连续依赖性知, 对此 ϵ_1 及 T , $\exists \delta = \delta(\epsilon_1, T) > 0$, 使当点 B 满足 $d(B,$

$M) < \delta$ 时, 有

$$d(f(B, t), f(M, t)) < \epsilon_1, 0 \leq t \leq T.$$

由于 $M \in \Gamma = \Omega_p$, 故必 $\exists t_1$, 使点 $M_1 = f(p, t_1) \in S(M, \delta) \cap \overline{N_1 N_2}$ (见图 2-4). 取 M_1 作上述的点 B , 按上式有

$$\begin{aligned} & d(f(p, t+t_1), f(M, t)) \\ &= d[f(f(p, t_1), t), f(M, t)] \\ &= d(f(M_1, t), f(M, t)) < \epsilon_1, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

特别当 $t=T$ 时, 有

$$d(f(p, T+t_1), M) < \epsilon_1,$$

即点 $f(p, T+t_1) \in \square \overline{N_1 N_2}$. 由 $\square \overline{N_1 N_2}$ 的性质知, L_p^+ 由该点正向或负向略延伸时必再交 $\overline{N_1 N_2}$ 于点 M_2 , 则 M_2 必落在 M_1 与 M 之间 (因 $M \in \Omega_p$), 故 $d(M_2, M) < \delta$, 且 L_p^+ 自 M_2 之后再也不能走出 $\widehat{M_1 R M_2} \cup \overline{M_2 M_1}$ 与 Γ 所围成的环域了. 同样的讨论, 随着时间的增大 L_p^+ 将再交 $\overline{N_1 N_2}$ 于 $M_3, M_4, \dots, M_n, \dots$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $M_n \rightarrow M$. 这就说明 L_p^+ 是无限盘旋逼近闭轨 Γ 的. 证毕.

下面考虑 $L_p^+ (L_p^-)$ 的极限集中也有奇点的情形. 我们设

$$\Omega_p = \Omega_p^{(1)} \cup \Omega_p^{(2)} \quad (A_p = A_p^{(1)} \cup A_p^{(2)}),$$

其中 $\Omega_p^{(1)} (A_p^{(1)})$ 表示 $\Omega_p (A_p)$ 中所有常点的集合, $\Omega_p^{(2)} (A_p^{(2)})$ 表示 $\Omega_p (A_p)$ 中所有奇点的集合. 由极限集的闭连通性知, $\Omega_p^{(1)} (A_p^{(1)})$ 内都是一些整条整条的轨线, 而 $\Omega_p^{(2)} = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} (A_p^{(2)} = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha})$ 是个闭集, 且 C_{α} 是 $\Omega_p^{(2)}$ 中的连通分支, $C_{\alpha} \cap C_{\beta} = \emptyset, \alpha \neq \beta$.

引理 2.3 若 $\Omega_p (A_p)$ 有界, $\Omega_p^{(1)}$ 和 $\Omega_p^{(2)} (A_p^{(1)}$ 和 $A_p^{(2)})$ 均非空, 则 $\Omega_p^{(1)} (A_p^{(1)})$ 中每条轨线正向和负向皆趋于 $\Omega_p^{(2)} (A_p^{(2)})$ 中的某个连通分支 C_{α} . 且 $\Omega_p^{(1)} (A_p^{(2)})$ 最多由可列条轨线组成.

证明 只证括号外情形. 因 $\Omega_p^{(2)}$ 非空, 则对任一常点 $q \in \Omega_p^{(1)}, L_q \subset \Omega_p^{(1)}$ 是有界开轨线 (否则 L_q 与 $\Omega_p^{(2)}$ 不可能连通), 从而 Ω_q 非空且 $\Omega_q \subset \Omega_p$. 由引理 2.2 知, Ω_q 中不能含有常点, 再由极限集的连通性知, Ω_q 只能是 $\Omega_p^{(2)}$ 中某个 C_{α} . 同理 A_q 也只能是 $\Omega_p^{(2)}$ 中某个 C_{β} .

其次, 我们证明 $\Omega_p^{(1)}$ 最多只含有可列条轨线. 任取一常点 $M \in \Omega_p^{(1)}$, 过 M 作 $\square \overline{N_1 N_2}$, 易知 L_p^+ 只能交 $\overline{N_1 N_2}$ 于 M 的一侧, 例如交 $\overline{N_1 M}$ 于点 $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$, 且 $n \rightarrow +\infty$ 时 $M_n \rightarrow M$ (见图 2-5). 取正整数 m 足够大, 使 $S(M, \frac{1}{m}) \subset$

$\overline{N_1 N_2}$, 且使它除 $\widehat{AMB} \equiv f(M, R) \cap S(M, \frac{1}{m})$

外不再含有 Ω_p 中其他点. 对 $\Omega_p^{(1)}$ 中每条轨线

都取一常点 M 作这样的 $S(M, \frac{1}{m})$, 只要 m 足

够大, 使它对每条轨线满足上述要求外, 还使

这些圆互不包含彼此的圆心. 另一方面, 由于

Ω_p 有界, 存在有界域 D 使 $\Omega_p^{(1)} \subset D \subset \mathbf{R}^2$, 对固

定的正整数 m , 只要有限个这样的圆 $S(A, \frac{1}{m})$,

$A \in D$, 就可覆盖 D , 从而覆盖 $\Omega_p^{(1)}$. 让点 A 用

$\Omega_p^{(1)}$ 中每条轨线上的常点 M 取代, 不同的半径 $\frac{1}{m}$ 最多是可列个, 因而上述的圆

$S(M, \frac{1}{m})$ 的个数最多是可列个. 这就说明 $\Omega_p^{(1)}$ 最多含有可列条轨线. 证毕.

定义 2.5 当 $\Omega_p = \Omega_p^{(1)} \cap \Omega_p^{(2)}$ ($A_p = A_p^{(2)} \cup A_p^{(1)}$) 且 $\Omega_p^{(i)}$ ($A_p^{(i)}$), $i=1, 2$ 均非空时, 称 Ω_p (A_p) 为系统(2.2)的一个奇异闭集合.

图 2-6 中列出了几个奇异闭集合的例子.

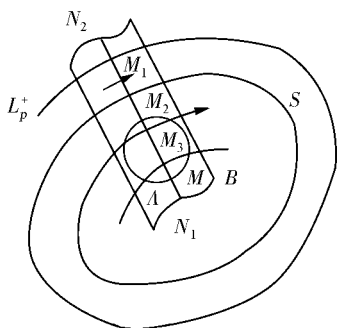
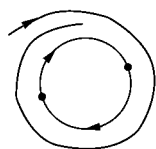
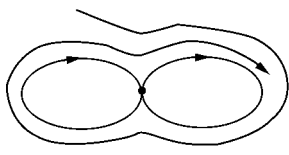


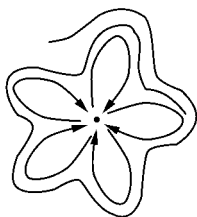
图 2-5



(a)



(b)



(c)

图 2-6

我们容易证明下面的两个结论

定理 2.3 (有界极限集的分类) 若 L_p^+ (L_p^-) 有界, 则 Ω_p (A_p) 亦有界, 且只能是下列三种类型之一:

(i) 一个奇点; (ii) 一个闭轨线; (iii) 一个奇异闭集合.

定理 2.4 (有界半轨线的分类) 若 L_p^+ (L_p^-) 有界, 则它只能是下列五种轨线之一:

(i) 一个奇点; (ii) 一个闭轨线; (iii) 趋于一个奇点的半轨线; (iv) 趋于一个闭轨的半轨线; (v) 趋于一个奇异闭集合的半轨线.

下面两个有关闭轨线重要性质的定理暂不给出证明,前者在本章第四节中引进奇点的指数后可自然推得;后者留作习题.

定理 2.5 任何闭轨线所包围的区域中必有系统(2.2)的奇点.

定理 2.6 (闭轨线邻域的性质)

(1)若 Γ 是闭轨线,则由它充分邻近出发的轨线,至少有一条半轨线永远落在 Γ 的领域中.确切地说, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $p \in S(\Gamma, \delta)$ 时, 或有 $L_p^+ \subset S(\Gamma, \epsilon)$, 或有 $L_p^- \subset S(\Gamma, \epsilon)$;

(2)若 Γ_1, Γ_2 为两条相邻的闭轨线,它们所围成的环域 G 中无奇点,则对任何点 $P \in G, \Gamma_1$ 必是 Ω_p, A_p 中的一个,而 Γ_2 则是剩下的另一个.

第二节 极限环的存在性

我们先从一个例子谈起.

例 2.1 考察系统

$$\dot{x} = -y + xf(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + yf(x^2 + y^2), \quad (2.3)$$

其中 $f(u)$ 对 $u \geq 0$ 有定义,连续且保证初值问题解的唯一性, $O(0,0)$ 是孤立奇点.

引入极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 它化为

$$\dot{r} = rf(r^2), \quad \dot{\theta} = 1. \quad (2.4)$$

显然,若 $r_0^2 > 0$ 是 $f(r^2) = 0$ 的解,则 $r = r_0$ 是系统(2.3)的一个闭轨线.

(1)设 $f(u) \equiv 0$. 这时 O 是中心,绕 O 充满着闭轨线.

(2)设 $f(u) = 1 - u$. 即式(2.4)为 $\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$.

这时 $r = 1$ 是式(2.4)的一个解,对应系统(2.3)的一个闭轨线. 由

$$\frac{dr}{dt} \begin{cases} > 0, & 0 < r < 1, \\ = 0, & r = 1, \\ < 0, & r > 1, \end{cases} \quad \theta = t + \theta_0,$$

说明 $r = 1$ 是一个孤立的闭轨线,内外两侧的轨线随着时间的增加逆时针旋转无限逼近它,如图 2-7 所示.

(3)设 $f(u) = (u - 1)^2 \sqrt{u}$. 即式(2.4)为

$$\dot{r} = r^2(r^2 - 1)^2, \quad \dot{\theta} = 1.$$

这时由 $\frac{dr}{dt} > 0$, 当 $0 < r < 1$ 和 $r > 1$ 时知, $r = 1$ 是式(2.3)的一个孤立闭轨,它内侧的轨线逆时针旋转逼近,外侧的轨线逆时针旋转离开它. 如图 2-8 所示.

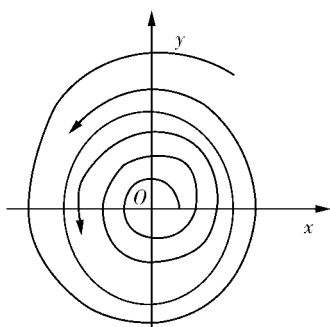


图 2-7

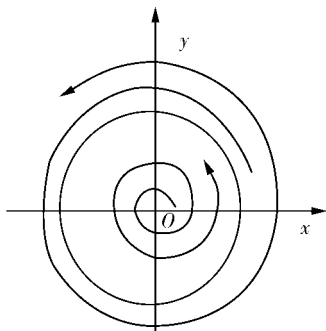


图 2-8

(4) 设

$$f(u) = \begin{cases} u^{-1}(u-1)^2 \ln(u-1), & u > 1, \\ 0, & 0 \leq u \leq 1. \end{cases}$$

即式(2.4)为

$$\dot{r} = \begin{cases} \frac{(r^2-1)^2}{r} \ln(r^2-1), & r^2 > 1, \\ 0, & 0 \leq r^2 \leq 1, \end{cases} \quad \dot{\theta} = 1.$$

这时显然一切圆周 $r=r_0, 0 < r_0 \leq 1$ 都是式(2.3)的闭轨线, $r=\sqrt{2}$ 是式(2.3)的孤立闭轨; $r=1$ 与 $r=\sqrt{2}$ 之间的一切轨线随 t 增加逆时针旋转逼近 $r=1$ 而离开 $r=\sqrt{2}$, 而 $r=\sqrt{2}$ 外的轨线逆时针旋转离开它, 如图 2-9 所示.

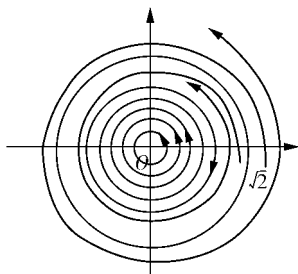


图 2-9

(5) 设

$$f(u) = \begin{cases} (u-1)^2 \sin(u-1)^{-1}, & 0 \leq u < 1 \text{ 及 } u > 1, \\ 0, & u = 1. \end{cases}$$

即式(2.4)为

$$\dot{r} = \begin{cases} r(r^2 - 1)^2 \sin(r^2 - 1)^{-1}, & 0 \leq r^2 < 1 \text{ 及 } r^2 > 1, \quad \dot{\theta} = 1. \\ 0, & r^2 = 1. \end{cases}$$

因此,一切圆周 $r^2 = 1 + \frac{1}{k\pi}$, 其中 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 都是式(2.3)的孤立闭轨线, 每两个闭轨线之间都充满式(2.3)的开轨线; 其中 $r=1$ 是一个特殊的闭轨线, 在它的任意小的邻域内, 既还有上述的闭轨线 ($|k|$ 足够大时), 又有开轨线, 我们称它为式(2.3)的**复合环**.

一、基本概念和一般存在定理

定义 2.6 系统(2.2)的一个闭轨线 Γ 称为是它的**极限环**, 如果有系统(2.2)的另一轨线以 Γ 为 ω 极限集或 α 极限集. 或等价地: 闭轨 Γ 称为系统(2.2)的极限环, 如果存在 Γ 的一个邻域 $S(\Gamma, \epsilon)$, 使从邻域位于 Γ 内侧或外侧那部分出发的全部轨线, 以 Γ 为极限集. 极限环还可分类为:

(1) 若仅只是 Γ 的一侧半邻域内的轨线以 Γ 为极限集时, 称 Γ 为**单侧极限环**; 若整个邻域 $S(\Gamma, \epsilon)$ 内的轨线都以 Γ 为极限集时, 称 Γ 为**双侧极限环**;

(2) Γ 内(外)侧半邻域中的轨线, 以 Γ 为 ω 极限集时, 称 Γ 为**内(外)稳定极限环**; 以 Γ 为 α 极限集时称 Γ 为**内(外)不稳定极限环**.

(3) 在双侧极限环中, 若两侧皆稳定(不稳定)时, 称 Γ 为**稳定(不稳定)极限环**; 两侧稳定性不同时, 称 Γ 为**半稳定极限环**.

定理 2.7 (Poincaré-Bendixson 环域定理) 如果 $\mathcal{D}$ 是两条单闭曲线 C_1, C_2 所围成的环域, C_1 为内境界, C_2 为外境界, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. 环域 $\mathcal{D}$ 满足:

(i) $\mathcal{D}$ 的闭包不含系统(2.2)的奇点,

(ii) 从 C_1, C_2 上出发的一切轨线, 当 t 增加(减少)时都进入环域 $\mathcal{D}$ 内部. 则 $\mathcal{D}$ 内至少存在围绕着 C_1 的一条内稳定(内不稳定)极限环和一条外稳定(外不稳定)极限环, 这两条极限环也可能重合成一条围绕 C_1 的稳定(不稳定)极限环.

证明 我们只证括号外情形. 在定理的条件下, 从 C_1 上任一点 p_1 出发的轨线 $L_{p_1}^+$ 进入 $\mathcal{D}$ 后永远走不出 $\mathcal{D}$ 了, 由定理 2.2 知, $\mathcal{D}$ 内必存在闭轨 $\Gamma_1, L_{p_1}^+$ 盘旋逼近它. 又因 $\mathcal{D}$ 内无奇点, 而 Γ_1 内域至少含有一个奇点(定理 2.5), 所以 Γ_1 只能围绕着 C_1 , 且这个 Γ_1 至少是单侧内稳定极限环. 同理, 从 C_2 上任一点 p_2 出发的轨线 $L_{p_2}^+$ 也逼近围绕 C_1 的闭轨线 Γ_2 , 它至少是单侧外稳定的极限环.

证毕.

注 1 若 Γ_1 和 Γ_2 不重合时, 则这两个闭轨之间的轨线分布有以下情况:

(1) Γ_1 和 Γ_2 之间没有别的闭轨, 或还有有限个闭轨, 则经过逐个闭轨分析其稳定性后, 易知这时 $\mathcal{D}$ 内至少有一个稳定(不稳定)的极限环;

(2) Γ_1 和 Γ_2 之间为闭轨所充满, 或虽不充满但有无穷多个闭轨且闭轨间又有开轨线[当系统(2.2)是解析系统时这种情况不会发生], 这时 Γ_1, Γ_2 仍不失为 $\mathcal{D}$ 内的单侧极限环.

注 2 定理的条件可以在以下两个方面减弱: ① $\mathcal{D}$ 的内境界 C_1 可以缩成一个奇点 C , 只要 C 邻域内的轨线都以 C 为 $\alpha(\omega)$ 极限点; ② 外境界 C_2 可以部分由轨线构成, 甚至上面也可以出现有限个奇点, 只要保证轨线一旦正向(负向)进入 $\mathcal{D}$ 后, 不再正向(负向)离开 $\mathcal{D}$, 就能保证原证明仍然可行.

注 3 应用这个定理时, 困难在于如何针对一个给定的系统准确地作出满足定理条件的外境界 C_2 . 尽管如此, 环域定理仍然是判定极限环存在的最常用的方法.

例 2.2 试证 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (2.5)$$

对任何 $\mu > 0$ 都存在孤立的稳定等幅振荡.

证明 问题等价于: 证明等价系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu(1 - x^2)y \quad (2.6)$$

对任何 $\mu > 0$ 都有一个稳定的极限环. 我们来构造一个满足定理 2.7 的环域(内境界缩为一点)来证明此结论.

(1) 式(2.6)的线性近似系统的系数矩阵是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$, 它对应的

$$q = 1, p = -\mu < 0, \Delta \equiv p^2 - 4q = \mu^2 - 4.$$

所以唯一奇点 $O(0, 0)$ 是不稳定焦点(当 $\mu < 2$) 或不稳定结点(当 $\mu > 2$), 或不稳定退化结点(当 $\mu = 2$). 总之, 对一切 $\mu > 0$, O 邻域中的轨线都以 O 为 α 极限点——奇点 O 起到了内境界的作用.

(2) 分段作出外境界 C_2 .

式(2.6)对应的方程是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \mu(1 - x^2)y}{y}, \quad (2.7)$$

它的零等倾线是

$$-x + \mu(1 - x^2)y = 0,$$

它有三个分支 L_1, L_2, L_3 , 分别被三条渐近线 $x = -1, x = 1, y = 0$ 所分开. 标出零等倾线上及坐标轴上向量场(2.6)的分布(见图 2-10).

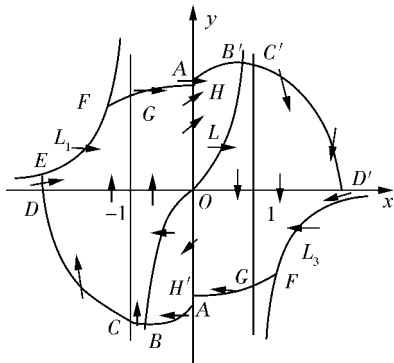


图 2-10

我们在负 y 轴上取一点 $A(0, -y_0)$, 由 A 开始分段作出环域的外境界 C_2 . 过 A 作方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu(1-x^2)y}{y} = \mu(1-x^2) \quad (2.8)$$

的积分曲线, 交 L_2 于点 B , 显然 $\widehat{AB}$ 有正的斜率, 又因

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2.7)} - \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2.8)} = -\frac{x}{y} < 0,$$

故系统(2.6)在 $\widehat{BC}$ 上向量场都是自右向左穿过的. 过 B 作水平直线交 $x = -1$ 于 $C(-1, -y_1)$, 注意到当 y_0 足够大时 (A 点离 O 足够远), 在 $\widehat{BC}$ 上系统(2.6)的第二个方程右端将大于零, 这时 $\widehat{BC}$ 上向量场由下方穿向左上方. 过 C 作以 O 为心的圆弧, 交负 x 轴于 $D(-x_3, 0)$, 注意到沿 $\widehat{CD}$ 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2.7)} - \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\widehat{CD}} &= \frac{-x + \mu(1-x^2)y}{y} - \left(-\frac{x}{y} \right) \\ &= \mu(1-x^2) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中等号仅 C 点成立. 故 $\widehat{CD}$ 上的向量场都是由下向上穿过的 (仅点 C 处相切). 过 D 作铅直线交 L_1 于 E , 由场的连续性知, $\widehat{DE}$ 上除点 D (场与 $\widehat{DE}$ 重合) 外, 向量场均从左穿向右方. 在 L_1 上取一段弧 $\widehat{EF}$, 其上向量场由左水平向右.

过 F 作以 O 为心的圆弧, 交直线 $x = -1$ 于点 G , 因沿 $\widehat{FG}$ 不等式(2.9)也成立, 故其上向量场自左向右穿过 (仅点 G 上相切). 再过 G 作方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \mu y}{y}$$

的积分曲线,交正 y 轴于点 $H(0, y_7)$, 因

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2.7)} - \left. \frac{dy}{dx} \right|_{GH} = -\mu x^2 \leq 0$$

(等号仅在点 H 成立), 故 GH 上向量场都是自左向右穿过的. 至此, 我们得到

曲线弧 $\overline{ABCDEFGH}$, 我们还可调整点 A 适当向下, 调整点 F 适当靠近 E ,

以使 $y_7 < y_0$. 这样, 再将已得弧对 O 作对称曲线弧 $\overline{A'B'C'D'E'F'G'H'}$, 就有 A' 在 H 上面, H' 在 A 的上面. 注意到系统(2.6)是对称于 O 的, 上两段曲线弧补上直线段 $\overline{HA'}$ 和 $\overline{H'A}$ 后构成的闭曲线, 其上每一点的向量场都是指向闭曲线内部的, 它构成了所需环域的外境界 C_2 .

由于系统(2.6)是解析的, 按定理 2.7, 在 C_2 所围的区域中至少有一个环绕 O 的稳定极限环.

定理 2.8(对称原理) 设系统(2.2)满足:

(i) 原点 $O(0,0)$ 是 y 轴(x 轴)上唯一的奇点;

(ii) 当 t 增加或减少时, 存在轨线 Γ 从正 y 轴(正 x 轴)出发绕过 O 到达负 y 轴(负 x 轴):

(iii) 系统(2.2)对应的线素场对称于 y 轴(x 轴), 即有

$$X(-x, y) = X(x, y), \quad Y(-x, y) = -Y(x, y).$$

$$(X(x, -y) = -X(x, y), \quad Y(x, -y) = Y(x, y))$$

则 Γ 继续延伸时必须构成系统(2.2)的一条闭轨线, 它对称于 y 轴(x 轴).

证明 只证括号外情形. 由于线素场关于 y 轴的对称性, 所以 Γ 关于 y 轴的对称曲线 Γ' 也是系统的轨线, Γ 与 Γ' 一起就构成了一条单闭曲线, 条件(i)保证了它们的连接点都是常点, 因此是系统(2.2)的一条闭轨. 证毕.

注 用对称原理来检验闭轨存在时, 一般先验证条件(iii), 当它成立时再验证较困难的条件(ii). 条件(i)是可以减弱的.

定理 2.9(映射的不动点定理) 设系统(2.2)满足:

(i) 原点 $O(0,0)$ 是 y 轴(x 轴)上的唯一奇点;

(ii) 在 y 轴(x 轴)上的某个不含 O 的区间 I 上, 存在一个由环绕 O 的轨线建立的映入自身的点映射 T ;

(iii) 映射 T 把闭区间 $I_1 \subset I$ 映入自身.

则系统(2.2)必存在闭轨线.

证明 首先由轨线的唯一性及对初始点的连续性知, 点映射 T 是个拓扑映射. 再由 Brouwer 不动点定理知, 把一个闭区间映入自身的拓扑映射必有

不动点. 由于 I_1 不包含相应轴上的唯一奇点 O , 因此该不动点不会是奇点, 它对应系统的一条闭轨. 证毕.

二、判定闭轨(极限环)不存在的准则

本节考虑的系统(2.2)要求右端函数满足: $X(x, y), Y(x, y) \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^2$.

定理 2.10 (Bendixson-Dulac 法则) 设在单连通区域 D 内存在函数 $B(x, y) \in C^1(D)$, 且发散量

$$\operatorname{div}(BX, BY) \equiv \frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y}$$

在 D 中定号, 或它在 D 中保持常号但不在 D 的任何子区域中恒为零, 则系统(2.2)不存在全部位于 D 内的闭轨线, 也不存在全部位于 D 内含有有限个奇点的奇异闭轨线.

证明 用反证法先证第一个结论. 若系统(2.2)有闭轨 $\Gamma \subset D$, 以 G 记 Γ 所围的区域, 由 Green 公式得

$$\oint_{\Gamma} BX dy - BY dx = \iint_G \left[\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} \right] dx dy.$$

因 Γ 是轨线, 所以上式左端恒为零, 而右端按所设不等于零, 矛盾.

第二个结论中的**奇异闭轨线**是指由若干个奇点以及两端逼近奇点的轨线所构成的单闭曲线 $\bar{\Gamma}$ (如图 2-11). 要证明它的不存在也是类似的. 只要在 $\bar{\Gamma}$ 的有限个 (图上只画了三个奇点) 奇点附近分别用光滑小弧段 r_i , 代替 $\bar{\Gamma}$ 上相应的轨线段, 联接点处 r_i 与 $\bar{\Gamma}$ 相切, 替代后的曲线为 $\bar{\Gamma}'$, 所围的区域为 G' 替代原来的 G . 对 $\bar{\Gamma}'$ 和 G' 应用 Green 公式, 得

$$\oint_{\bar{\Gamma}'} BX dy - BY dx = \iint_{G'} \left[\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} \right] dx dy.$$

当 r_i 充分逼近 $\bar{\Gamma}$ 上相应的轨线段时, 上式左端趋于零, 右端仍不趋于零, 再得矛盾. 证毕.

推论 (B. ф. Ткачѐв) 若在单连通区域 D 内, 存在函数 $B(x, y), F(x, y) \in C^1(D)$, 使

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial x} + B \left(X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

在 D 中定号, 或在 D 内保持常号但不在 D 的任何子区域内恒等于零. 则系统

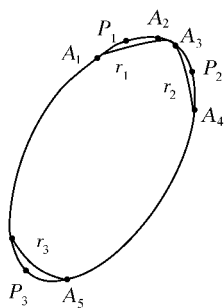


图 2-11

(2.2)不存在全部位于 D 内的闭轨线和含有有限个奇点的奇异闭轨线.

证明 只要以函数 $B(x, y)e^{F(x, y)}$ 代替上面定理证明中的 $B(x, y)$ 即可得证.

定理 2.11 若 $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \equiv 0$, 即方程

$$Xdy - Ydx = 0 \quad (2.10)$$

是全微分方程, 则系统(2.2)无极限环.

证明 设式(2.10)的通积分为

$$\Phi(x, y) = c,$$

则系统(2.2)的轨线也满足它, 且不同的轨线对应不同的常数 c . 设系统(2.2)有极限环 Γ , 它对应的表达式是 $\Phi(x, y) = c^*$, 若 $P_0(x_0, y_0)$ 是 Γ 上的一点, 则有 $\Phi(x_0, y_0) = c^*$. 按极限环的定义知, 至少存在一条轨线

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad \Phi(x(t), y(t)) \equiv c_1 \neq c^*,$$

其上有数列 $\{x(t_k), y(t_k)\} \rightarrow P_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, 当 $t_k \rightarrow +\infty$ 或 $t_k \rightarrow -\infty$. 由 $\Phi(x, y)$ 的连续性, 导出矛盾

$$c_1 \equiv \Phi(x(t_k), y(t_k)) \rightarrow \Phi(x_0, y_0) = c^*.$$

证毕.

推论 若在单连通区域 D 内, 存在函数 $\mu(x, y) \in C^1$, 使

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu y) \equiv 0,$$

即方程(2.10)在 D 内有连续可微的积分因子 $\mu(x, y)$, 则系统(2.2)不存在全部位于 D 内的极限环.

注意 这里 $\mu(x, y)$ 的连续可微性要求不能少, 否则有反例.

例 2.3 对称电子管继电器(触发器)的状态方程组是

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\frac{1}{c_0 R} u_1 - \frac{\beta}{c_0} f(u_2) + \frac{E}{c_0 R} \equiv P(u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 &= -\frac{1}{c_0 R} u_2 - \frac{\beta}{c_0} f(u_1) + \frac{E}{c_0 R} \equiv Q(u_1, u_2), \end{aligned}$$

其中一切参数均是大于零的常数, 试证它在全平面没有闭轨线, 即能保证在适当的电压脉冲下顺利地从一个平衡态跳到另一个平衡态.

证明 用定理 2.10 中 $B(x, y) \equiv 1$ 的特殊情形即可. 因有

$$\frac{\partial P}{\partial u_1} + \frac{\partial Q}{\partial u_2} = -\frac{2}{c_0 R} < 0.$$

例 2.4 非线性振动方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

当函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 上保持定号或恒等于零, 则它不可能存在整个位于该区间内的孤立周期解.

证明 作等价系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y,$$

由

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -f(x),$$

再按定理 2.10 或定理 2.11, 即得结论.

例 2.5 振动方程

$$m\ddot{x} + b\dot{x} - \beta x^2 + ax - ax^2 = 0 \quad (b \neq 0)$$

在参数的任何选择下都不会产生自激振荡.

解 作等价系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \equiv X(x, y), \\ \dot{y} &= -\frac{a}{m}x - \frac{b}{m}y + \frac{\alpha}{m}y^2 + \frac{\beta}{m}y^2 \equiv Y(x, y), \end{aligned}$$

这时因

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{b}{m} + \frac{2\beta}{m}y$$

变号, 必须寻找 **Dulac 函数**

$$B(x, y) = be^{\frac{2\beta}{m^2}x},$$

使

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = -\frac{b^2}{m}e^{\frac{2\beta}{m^2}x} < 0.$$

由定理 2.10 知, 系统没有闭轨, 则原方程不可能产生自激振荡.

例 2.6 考虑两个各具极限增长限制的物种形成的生态系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(ax + by + c) \equiv X(x, y), \\ \dot{y} &= y(dx + ey + f) \equiv Y(x, y), \end{aligned}$$

其中 x 表捕食者, y 表被捕食者. 这样的系统不存在极限环.

解 系统具有两条积分直线 $x=0$ 和 $y=0$, 其上有三个奇点 $O(0, 0)$,

$A(0, -\frac{f}{e}), B(-\frac{c}{a}, 0)$. 因此, 系统若有闭轨, 它不能跨越坐标轴, 而只能位于

可产生新的奇点的象限内.

要产生新的奇点,必须 $\delta \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$, 这时直线

$$ax + by + c = 0, \quad dx + ey + f = 0$$

的交点 $D(x_0, y_0)$ 就是新的奇点, 我们考察 D 所在象限内是否可能有极限环.

取 Dulac 函数

$$B(x, y) \equiv x^{k-1} y^{l-1},$$

其中 k, l 待定. 计算

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = x^{k-1} y^{l-1} [(ka + ld + a)x + (kb + le + e)y + kc + lf],$$

令

$$ka + ld + a = 0, \quad kb + le + e = 0,$$

确定了

$$k = \delta^{-1} e(d - a), \quad l = \delta^{-1} a(b - e).$$

这样

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) = x^{k-1} y^{l-1} \delta^{-1} H,$$

其中常数 $H \equiv ec(d - a) + af(b - e)$. 注意 $x^{k-1} y^{l-1}$ 在任何一个象限内是定号的, 所以常数 H 不是零时上式定号, 系统不存在闭轨; 一旦常数 H 恰是零时则上式恒为零, 按定理 2.11 的推论知, 系统也不存在极限环.

第三节 Liénard 方程周期解的存在唯一性

Liénard 方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.11)$$

的周期解的研究, 由于来自于非线性振动的等幅振荡和他引入了一个特殊而有效的变换而闻名. 研究它的人很多, 特别是在极限环(周期解)的唯一性方面, 近几十年的工作几乎都集中于此类方程.

一、Liénard 方程周期解的存在性

引入 Liénard 变换

$$x = x, \quad y = \dot{x} + F(x),$$

其中 $F(x) \equiv \int_0^x f(x) dx$ 后, 式(2.11)化为系统

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x). \quad (2.12)$$

式(2.11)的周期解对应于式(2.12)的闭轨线.

定理 2.12(А. В. Драгилёв^[6])

(i) $F(x), g(x)$ 连续; $xg(x) > 0 (x \neq 0)$, 且 $G(x) \equiv \int_0^x g(x) dx$ 满足

$G(\pm\infty) = +\infty$;

(ii) 对充分小的 $|x|$ 有 $xF(x) < 0 (x \neq 0)$; 且存在常数 $M > 0$ 及 $k_1, k_2, k_1 > k_2$, 使

$$F(x) > k_1 \text{ 当 } x > M, \quad F(x) < k_2 \text{ 当 } x < -M.$$

则系统(2.12)至少存在一条闭轨线.

证明 证明思想仍是作环域. 我们不妨设 $k_1 > 0$. 否则若 $k_2 < k_1 \leq 0$, 可作变换 $\xi = -x, \eta = -y$, 那么系统(2.12)的形式不变, 条件(i)、(ii)仍满足, 只是其中的 k_1, k_2 分别被 $-k_2, -k_1$ 所取代, 它们满足 $-k_2 > -k_1 \geq 0$.

(1) 作内境界 L_1 .

注意 $O(0, 0)$ 是唯一奇点, 取能量函数

$$\lambda(x, y) \equiv \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(x) dx \equiv \frac{1}{2}y^2 + G(x).$$

沿系统求导得

$$\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.12)} = -g(x)F(x),$$

由条件(i)、(ii)知, 在 O 附近 ($|x|$ 很小) 有 $\frac{d\lambda}{dt} > 0$, 即存在充分小的常数 $c_1 > 0$, 使在闭轨线 L_1 :

$$\lambda(x, y) = c_1$$

上有 $\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.12)} > 0$, 说明轨线由 L_1 的内部走向外部, 我们取这个 L_1 作为环域的内境界.

(2) 作外境界 L_2 .

首先标出坐标轴上曲线 $y = F(x)$ 上及四个象限上向量场的大致分布, 如图2-12所示.

取常数 $D > 0$ 足够大, 使

$$D > \max[k_1, |k_2|, 1 + \max_{|x| \leq M} |F(x)|],$$

下面分三步来作 L_2 .

第一步 在 $x = M$ 上取一点 P , 使该点的纵坐标 $y_P > D$, 考察过 P 的轨线 γ_P , 我们断言: (i) 当 t 增加时 γ_P^+ 向右下方走, 交 $y = F(x)$ 于一点 Q , 然后转

向左下方走,再交直线 $x=M$ 于点 R ; (ii) 当 t 减少时 γ_p^- 向左上方走,在有限时间内交正 y 轴于点 S ,再交直线 $x=-M$ 于点 U ,且有 $y_S > D$ 和 $y_U > D$.

关于(i)只要证明交点 Q 的存在,过 Q 后按向量场的分布, γ_p^+ 再交 $x=M$ 是显然的.事实上,注意到闭曲线族 $\lambda(x, y) = c$ 的性质,当 $c > 0$ 足够大时,该曲线族与 $y = F(x)$ 在 $x > M$ 处相交且覆盖住点 P ,由

$$\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.12)} = -g(x)F(x) < 0 \quad (x \geq M)$$

知 γ_p^+ 必与 $y = F(x)$ 很快相交于 Q .

关于(ii),当 $|x| \leq M, y > D$ 时,沿轨线有

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \left| \frac{-g(x)}{y - F(x)} \right| \leq \max_{|x| \leq M} |g(x)| \frac{1}{y - |F(x)|},$$

按 D 的取法,这时 $y - |F(x)| > D - (D-1) = 1$,即上式右端是个有界数.再结合该区域中向量场的分布知 γ_p^- 与正 y 轴必交在有限处 S ,且 $y_S > D$,同理 γ_p^- 与 $x = -M$ 的交点 U 也是存在的.要使 $y_U > D$ 可作如下处理,若 $y_U \leq D$ 时,在 $x = -M$ 上取另一点 $\bar{U}$ ($y_U = y_S > D$) 来替代 U ,再以 $\gamma_{\bar{U}}^+$ 来代替 γ_U^+ ,这样的 $\gamma_{\bar{U}}^+$ 就完全具有上述的性质(i)和(ii)了.

第二步 在 $x = -M$ 上取一点 P' ,使 $y_{P'} < -D$,考察轨线 $\gamma_{P'}$.因为常数 k_2 有两种可能: $k_2 \leq 0$ 和 $k_2 > 0$ (图上仅画出了后者),我们分别讨论之.

(i) 若 $k_2 \leq 0$.这时仍有

$$\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.12)} = -g(x)F(x) < 0 \quad (x \leq -M),$$

并且这时的点 P' ,曲线 $y = F(x)$,直线 $y = k_2$ 和 $y = -D$ 四者的相关位置与上面讨论 γ_p 时的点 P ,曲线 $y = F(x)$,直线 $y = k_1$ 和 $y = D$ 四者的相关位置完全一样,因而同理可得 $\gamma_{P'}^+$ 必与 $y = F(x)$ 交于 Q' ,再与 $x = -M$ 交于上半平面一点 R' ; $\gamma_{P'}^-$ 交负 y 轴于 S' ,交 $x = M$ 于 U' ,且 $y_{S'} < -D, y_{U'} < -D$.

(ii) 若 $k_2 > 0$ (见图 2-12).这时 $\frac{d\lambda}{dt} < 0$ 不一定成立,对 Q' 点的存在改用反证法.设 x 减小趋于 $-\infty$ 的过程中 $\gamma_{P'}^+$ 均不与 $y = F(x)$ 相交,这时由沿 $\gamma_{P'}^+$.

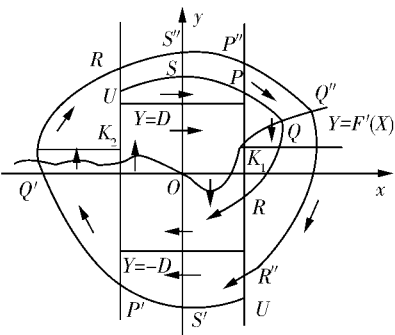


图 2-12

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g(x)}{y - F(x)} \leq \frac{-g(x)}{y_{P'} - k_2} = \frac{g(x)}{k_2 - y_{P'}}$$

或

$$dy \geq \frac{g(x)dx}{k_2 - y_{P'}} > 0,$$

在 $\gamma_{P'}^+$ 上由点 P' 到任一点积分, 得

$$y \geq y_{P'} + \frac{1}{k_2 - y_{P'}} \int_{-M}^x g(x) dx,$$

则由定理条件(i)知, 上式右端 $x \rightarrow -\infty$ 时趋于 $+\infty$, 这与 $\gamma_{P'}^+$ 与 $y = F(x)$ 不相交矛盾, 说明交点 Q' 必存在. 余下的讨论与上面一样.

第三步 观察轨线 γ_U^+ , 若按第二步获得的点 R' 有 $y_{R'} \leq y_U$, 则外境界 L_2 已构成, 它是由轨线弧与两小段直线构成的 $\overline{U'S'P'Q'R'} \cup \overline{R'U} \cup \overline{USPQR} \cup \overline{RU'}$, 其中 $\overline{R'U}$ 可能变为一点. 若 $y_{R'} > y_U$, 则继续延伸 γ_U^+ , 得交点 S'', P'', Q'', R'' (见图 2-12). 这时, 取起始点 U' 使 $-y_{U'} > 0$ 充分大时, 经仔细地估计可证明必有一 $y_{R'} < -y_{U'}$, 即点 R'' 落在点 U' 的上方, 轨线 γ_U^+ 的 U' 到 R'' 的弧段与直线段 $R''U'$ 构成了外境界 L_2 .

注 Драгулёв 的工作虽然较早, 但在以轨线做外境界的作法和定理条件的设计方面, 都是 Liénard 方程周期解存在定理中很有代表性的一个, 在他之后有不少人对定理条件作了各种减弱, 如文献[7]、[8]等, 但基本思想未变. 有较大创造性改变的是下面的工作.

对系统(2.12)引入 Филиппов 变换

$$z = z_1(x) \equiv \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad y = y, \quad x > 0 \text{ 时}; \quad (2.13)$$

$$z = z_2(x) \equiv \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad y = y, \quad x < 0 \text{ 时}.$$

由条件 $xg(x) > 0 (x \neq 0)$ 知, $z = z_i(x) > 0 (i=1, 2)$, 且都是 x 的单调函数. 记它们的反函数分别为

$$x = x_1(z) > 0, \quad x = x_2(z) < 0.$$

代入 $F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$, 分别记为

$$F_1(z) \equiv F(x_1(z)), \quad F_2(z) \equiv F(x_2(z)),$$

这时系统(2.12)在变换(2.13)下等价于方程

$$\frac{dz}{dy} = F_1(z) - y, \quad x > 0 \text{ 时},$$

$$\frac{dz}{dy} = F_2(z) - y, \quad x < 0 \text{ 时},$$

它们都定义在 (z, y) 的正半平面 $z \geq 0$ 上.

定理 2.13 (A. ڤ. ڤилиппов^[9]) 设

(i) $f(x), g(x)$ 连续, $xg(x) > 0 (x \neq 0)$, $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = +\infty$;

(ii) $\exists \delta > 0$, 使 $z \in (0, \delta)$ 时,

$$F_2(z) \geq F_1(z), \text{ 但 } F_2(z) \neq F_1(z);$$

$$F_1(z) < a\sqrt{z}, \quad F_2(z) < -a\sqrt{z},$$

其中正数 $a < \sqrt{8}$;

(iii) $\exists z_0 > \delta$, 使

$$\int_0^{z_0} [F_1(z) - F_2(z)]dz > 0,$$

且当 $z > z_0$ 时有

$$F_1(z) \geq F_2(z), \quad F_1(z) > -a\sqrt{z}, \quad F_2(z) < a\sqrt{z}.$$

则系统(2.12)在 $x-y$ 平面上至少存在一条闭轨线.

注 这个定理中引进了变换(2.13), 把 $x-y$ 平面上轨线转换到 $z-y$ 平面上同一个正半平面 $z \geq 0$ 上去讨论, 这使环域外境界的作出及许多有关量的估计带来了很大方便, 这一创新思想对极限环的存在性、唯一性的研究起了较大影响. 在定理的条件方面, 本定理较大地减弱了阻尼项 $f(x)$ 的强变号性(这是许多闭轨存在定理都要求的), 他所给出的条件对保证轨线都绕原点盘旋来说要求是很低的. 对个别条件的进一步改进可参阅文献[4].

二、Liénard 方程周期解的唯一性

定理 2.14 (Levinson & Smith^[10]) 设

(i) $f(x), g(x) \in C^0$, $g(x)$ 是奇函数, $xg(x) > 0 (x \neq 0)$, $\int_0^{\infty} g(x)dx = +\infty$;

(ii) $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ 是奇函数, 且存在常数 $a > 0$, 使当 $x \in (0, a)$ 时, $F(x) < 0$, 当 $x \geq a$ 时, $F(x) \geq 0$ 且单调递增.

则系统(2.12)有唯一的极限环, 它是稳定的.

证 这是很早的一个结果, 由于条件较强(有两个奇函数的假设), 可以被下面的定理所包含. 但他的证明思路很特殊, 这里略作介绍.

在所设条件下线素场对称于奇点 O , 系统若有闭轨时, 若它过点 $(0, y_0)$, 则必过点 $(0, -y_0)$, 因此我们只需考察半平面 $x \geq 0$. 按照向量场的分布知, 从

正 y 轴上的点 A 出发的轨线必交 $y=F(x)$ 于 B , 再交负 y 轴于 C . (见图 2-13) 由关于 O 的对称性知, $\widehat{ABC}$ 是某闭轨的一部分的充要条件是 $y_A = -y_C$.

设点 B 的坐标是 $(\alpha, F(\alpha))$, 作函数

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(x)dx.$$

考察线积分

$$\varphi(\alpha) \equiv \int_{\widehat{ABC}} d\lambda = \lambda_C - \lambda_A = \frac{1}{2}y_C^2 - \frac{1}{2}y_A^2.$$

因此, 要证明系统有唯一的极限环, 只要证明

图 2-13

$\varphi(\alpha) = 0$ 有且只有唯一的实解, 问题就化为连续函数 $\varphi(\alpha)$ 有唯一的实零点之讨论. 以下只要通过估计, 着力于证明 $\varphi(\alpha)$ 的三个性质:

- (i) $\alpha \leq a$ 时, $\varphi(\alpha) > 0$;
- (ii) $\alpha > a$ 时, $\varphi(\alpha)$ 单调递减;
- (iii) $\alpha \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(\alpha) \rightarrow -\infty$.

即得证明.

例 2.7 试证 Van der Pol 方程.

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (\mu > 0)$$

存在唯一的稳定极限环.

证 从例 2.2 或定理 2.12 知, 对任何 $\mu > 0$, 它存在闭轨线. 再按定理 2.14 检查: $g(x) = x$ 和 $F(x)$ 都是奇函数.

$$F(x) = -\int_0^x \mu(1 - x^2)dx = -\mu x \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \begin{cases} < 0, x \in (0, \sqrt{3}), \\ \geq 0, x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$F'(x) = -\mu(1 - x^2) > 0, \quad x \geq \sqrt{3}.$$

故可取 $a = \sqrt{3}$, 满足定理中一切条件, 存在唯一稳定的极限环.

下面我们引入 G. Sansone 的两个代表性的结果, 他提出了研究极限环唯一性的“比较法”的思路. 他从考察方程

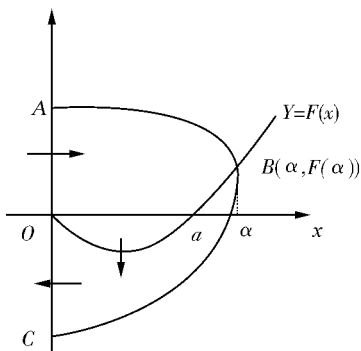
$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0 \tag{2.14}$$

或等价系统

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -x \tag{2.15}$$

开始, 后面可以看到, 所建立的定理可包含定理 2.14.

定理 2.15 (Sansone^[11]) 设



(i) $f(x) \in C^0$, $\exists$ 常数 δ_{-1}, δ_1 : $\delta_{-1} < 0 < \delta_1$, 使

$$f(x) < 0, \quad \text{当 } x \in (\delta_{-1}, \delta_1),$$

$$f(x) > 0, \quad \text{当 } x \in [\delta_{-1}, \delta_1];$$

(ii) $\exists$ 常数 $\Delta > 0$, 使 $F(\Delta) = F(-\Delta) = 0$;

(iii) $F(+\infty) = +\infty$ 或 $F(-\infty) = -\infty$.

则系统(2.15)有唯一的极限环,它是稳定的.

证明 存在性可由定理 2.12 得,现证唯一性,作函数

$$\lambda(x, y) \equiv \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

显然有

$$\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.15)} = x\dot{x} + y\dot{y} = -xF(x) > 0, \quad x \in (-\Delta, \Delta).$$

说明闭轨 Γ 不能整个位于带域 $|x| \leq \Delta$ 中. 进一步容易证明 Γ 必两边跨出此带域,且包围点 $(-\Delta, 0)$ 和 $(\Delta, 0)$. 以下用反证法证明 Γ 的唯一性.

设式(2.15)至少有两个闭轨 Γ_1 和 Γ_2 , Γ_2 在外圈. 沿闭轨 $\Gamma_i (i=1, 2)$ 有

$$d\lambda = F(x)dy,$$

所以

$$\oint_{\Gamma_i} F(x)dy = \oint_{\Gamma_i} d\lambda = 0, \quad i = 1, 2.$$

如果我们能证明

$$\oint_{\Gamma_2} F(x)dy < \oint_{\Gamma_1} F(x)dy, \quad (2.16)$$

则导出了矛盾,唯一性得证.

为估算上面的积分,作直线 $x = \pm \Delta$ 交 Γ_i 于点 $A_i, B_i, C_i, D_i (i=1, 2)$, 再过 A_1, B_1, C_1, D_1 作水平线交 Γ_2 于 E_2, F_2, G_2, H_2 (见图 2-14).

这些点分别将 Γ_1, Γ_2 分成许多段,下面分段估算积分. 在轨线段 A_1B_1 和 A_2B_2 上,可将 y 表成 x 的单值函数 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$, 因此积分换为对 x 进行,即

$$\int_{\widehat{A_i B_i}} F(x)dy = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{-xF(x)}{y_i(x) - F(x)} dx, \quad i = 1, 2.$$

故由

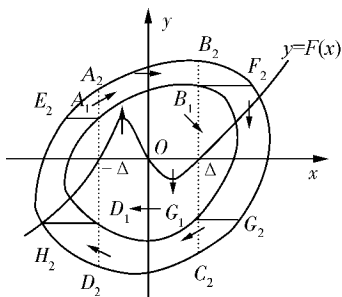


图 2-14

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[\frac{-xF(x)}{y_2(x) - F(x)} - \frac{-xF(x)}{y_1(x) - F(x)} \right] dx \\ &= \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{-xF(x)[y_1(x) - y_2(x)]}{(y_1(x) - F(x))(y_2(x) - F(x))} dx < 0, \end{aligned}$$

可推出

$$\int_{\widehat{A_2 A_2}} F(x) dy < \int_{\widehat{A_1 B_1}} F(x) dy.$$

同理可得

$$\int_{\widehat{C_2 D_2}} F(x) dy < \int_{\widehat{C_1 D_1}} F(x) dy.$$

在轨线段 $\widehat{B_1 C_1}$, $\widehat{F_2 G_2}$ 上, 可将 x 表为 y 单值函数 $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, 且对同一个 y 值有 $x_2(y) > x_1(y)$. 再考虑到 $|x| > \Delta$ 时 $F(x)$ 的单增性, 有

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{F_2 G_2}} F(x) dx &= \int_{y_{F_2}}^{y_{G_2}} F(x_2(y)) dy < \int_{y_{B_1}}^{y_{C_1}} F(x_1(y)) dy \\ &= \int_{\widehat{B_1 C_1}} F(x) dy. \end{aligned}$$

同理可得

$$\int_{\widehat{H_2 E_2}} F(x) dy < \int_{\widehat{D_1 A_1}} F(x) dy.$$

最后, 注意到 $\widehat{E_2 A_2}$, $\widehat{B_2 F_2}$, $\widehat{G_2 C_2}$, $\widehat{D_2 H_2}$ 四段上均有 $F(x) dy < 0$, 将以上这些分段估算合在一起, 就得到了不等式 (2.16). 证毕.

注 1 本定理的证明思想是: 利用任一单值可微函数的全微分沿任何闭轨积分一周均为零的事实, 专找特殊的一个单值可微函数 $\lambda(x, y)$, 比较其全微分 $d\lambda$ 沿两条闭轨积分一周却得不同的值, 从而导出矛盾.

注 2 本定理包含了定理 2.14. 事实上, 满足定理 2.14 条件的系统 (2.12) 可通过变换

$$z = \sqrt{2G(x)} \operatorname{sign}(x)$$

化为满足定理 2.15 的系统 (2.15). 这是因为

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dy} = \frac{g(x)}{z} \cdot \frac{y - F(x(z))}{-g(x)} = \frac{y - \tilde{F}(z)}{-z},$$

其中 $x = x(z)$ 是 $z = \sqrt{2G(x)} \operatorname{sign}(x)$ (单增奇函数) 的反函数, 这时 $\tilde{F}(z) = F(x(z))$ 是 z 的奇函数, 满足定理 2.15 关于 F 的要求.

定理 2.16 对方程 (2.14) 引入通常的等价组

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x - f(x)v, \quad (2.17)$$

设 (i) $f(x) \in C^0$, 且 $\exists$ 常数 $\delta > 0$, 使

$$f(x) < 0, |x| < \delta \text{ 时}; f(x) > 0, |x| > \delta \text{ 时};$$

(ii) $F(+\infty) = +\infty$, 或 $F(-\infty) = -\infty$.

则系统(2.17)有唯一的极限环,它是稳定的.

证明 存在性也由定理 2.12 可得,现证唯一性.作函数

$$\lambda(x, v) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}v^2,$$

有

$$\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{(2.17)} = -f(x)v^2 > 0, |x| < \delta.$$

仿上定理的证法可知,系统的任何闭轨 Γ 必包围点 $(\delta, 0)$ 和 $(-\delta, 0)$ 在其内域,进一步可证 Γ 必整个在圆周 $x^2 + v^2 = \delta^2$ 之外.事实上,若 Γ 在带域 $|x| < \delta$ 内的一段弧上有点 P , 使 $|\overline{OP}| < \delta$, 而该弧延伸与 $x = -\delta, x = \delta$ 的交点 P_1, P_2 上有 $|\overline{OP_i}| > \delta (i=1, 2)$. 从 O 到同一闭轨 Γ 上的三点 P_1, P, P_2 的距离的这种大小的变化,导致了与 $|x| < \delta$ 内 $\frac{d\lambda}{dt} > 0$ 的矛盾.

计算系统(2.17)的发散量

$$\operatorname{div}(2.17) \equiv \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial v} = -f(x).$$

我们若能证明,沿任何闭轨 Γ , 发散量积分一周为负,即

$$\oint_{\Gamma} [-f(x)] dt < 0, \quad (2.18)$$

说明系统(2.17)的任何闭轨 Γ 是稳定的极限环(见闭轨的特征指数一节),由于两个稳定的极限环不能一个套一个相邻并存,这就证明了唯一性.下面证明不等式(2.18).

因为沿 Γ 有

$$O = \oint_{\Gamma} \frac{d(x^2 + v^2 - \delta^2)}{x^2 + v^2 - \delta^2} = \oint_{\Gamma} \frac{-2v^2 f(x) dt}{x^2 + v^2 - \delta^2},$$

又在闭轨的 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{DE}$ 段上(见图 2-15)有 $x^2 \leq \delta^2, x^2 + v^2 > \delta^2$ 和 $f(x) \leq 0$ (等号仅在端点成立,下同),故有

$$\frac{v^2 f(x)}{x^2 + v^2 - \delta^2} = \frac{v^2}{v^2 - (\delta^2 - x^2)} f(x) \leq f(x);$$

在 $\widehat{BCD}$ 和 $\widehat{EFA}$ 段上有 $x^2 \geq \delta^2, x^2 + v^2 > \delta^2$ 和 $f(x) \geq 0$, 故有

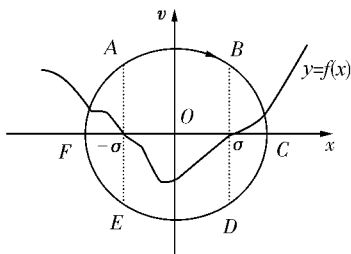


图 2-15

$$\frac{v^2 f(x)}{x^2 + v^2 - \delta^2} = \frac{v^2}{v^2 + (x^2 - \delta^2)} f(x) \leq f(x).$$

因此,当沿 Γ 正向积分一周时,有

$$\oint_{\Gamma} f(x) dt > \oint_{\Gamma} \frac{v^2 f(x) dt}{x^2 + v^2 - \delta^2} = 0.$$

即式(2.18)成立. 证毕.

注 本定理的证明思想主要着眼于估算系统发散量沿闭轨积分一周的符号. 这种思想被许多研究者所重视,张芷芬^[12]的两个定理就是这一思想下的发展,后来又被 Л. А. Черкас 等人所推广.

定理 2.17(Черкас^[13]) 考虑系统

$$\dot{x} = -\phi(y) - F(x), \quad \dot{y} = g(x), \quad (2.19)$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(x) dx$. 设

(i) $f(x), g(x), \phi(y) \in C^0, f(0) < 0 (> 0)$;

(ii) $xg(x) > 0 (x \neq 0), y\phi(y) > 0 (y \neq 0)$ 且 $\phi(y)$ 单调递增;

(iii) 存在实数 α 和 β , 使函数

$$f_1(x) \equiv f(x) + g(x)[\alpha + \beta F(x)]$$

有单零点 $x_1 < 0$ 和 $x_2 > 0$, 且在 $[x_1, x_2]$ 上 $f_1(x) \leq 0 (\geq 0)$;

(iv) 在 $[x_1, x_2]$ 之外, 函数 $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ 不减少(不增加);

(v) 所有闭轨线都包含 x 轴上的区间 $[x_1, x_2]$. 则系统(2.19)最多有一个极限环, 如果它存在, 必是稳定的(不稳定的).

证明 只证括号外情形. 在条件(i)、(ii)下, $O(0, 0)$ 显然是唯一奇点, 且在定正函数

$$\lambda(x, y) \equiv G(x) + \int_0^y \phi(y) dy$$

帮助下, 容易证明 O 是正向离开的不稳定奇点, 其中 $G(x) \equiv \int_0^x g(x) dx$. 以下用反证法证闭轨唯一. 设系统至少存在两个闭轨 Γ_1, Γ_2 , 且 Γ_2 包围着 Γ_1 . 下面分两步导出矛盾.

第一步, 由 $f_1(x)$ 的定义知

$$\oint_{\Gamma_i} f_1(x) dt = \oint_{\Gamma_i} f(x) dt + \alpha \oint_{\Gamma_i} g(x) dt + \beta \oint_{\Gamma_i} g(x) F(x) dt.$$

而沿闭轨 $\Gamma_i (i=1, 2)$ 有

$$\oint_{\Gamma_i} g(x) dt = \oint_{\Gamma_i} dy = 0,$$

$$\oint_{\Gamma_i} g(x) \phi(y) dt = \oint_{\Gamma_i} \phi(y) dy = 0,$$

$$\oint_{\Gamma_i} g(x) F(x) dt = \oint_{\Gamma_i} g(x) [\phi(y) + F(x)] dt = - \oint_{\Gamma_i} g(x) dx = 0.$$

将一、三两式代入前面等式,得

$$\oint_{\Gamma_i} f_1(x) dt = \oint_{\Gamma_i} f(x) dt.$$

于是,系统(2.19)的发散量 $[-f(x)]$ 沿闭轨 Γ_i 的积分满足

$$h_i = \oint_{\Gamma_i} [-f(x)] dt = - \oint_{\Gamma_i} f_1(x) dt, i = 1, 2.$$

我们证明,必有 $h_2 < h_1$.

如图 2-16 所示,我们分段来比较 h_1, h_2 中的积分.

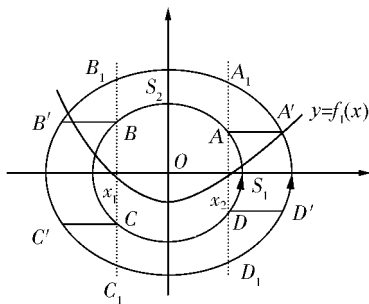


图 2-16

在 $\widehat{D'A'}$, $\widehat{DA}$ 弧段上, x 可表为 y 的单值函数 $x_2(y), x_1(y), y \in (y_D, y_A)$, 且 $x_2(y) > x_1(y)$. 故有

$$\int_{\widehat{D'A'}} f_1(x) dt - \int_{\widehat{DA}} f_1(x) dt = \int_{y_D}^{y_A} \left[\frac{f_1(x_2(y))}{g(x_2(y))} - \frac{f_1(x_1(y))}{g(x_1(y))} \right] dy \geq 0.$$

在弧段 $\widehat{A_1B_1}$, $\widehat{AB}$ 上, y 可表为 x 的单值函数 $y_2(x), y_1(x), x \in (x_B, x_A)$, 且 $y_2(x) > y_1(x)$. 故有

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{A_1B_1}} f_1(x) dt - \int_{\widehat{AB}} f_1(x) dt &= - \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{f_1(x)}{\varphi(y_2(x)) + F(x)} - \frac{f_1(x)}{\varphi(y_1(x)) + F(x)} \right] dx \\ &= - \int_{x_B}^{x_A} \frac{f_1(x) [\varphi(y_2(x)) - \varphi(y_1(x))]}{[\varphi(y_2(x)) + F(x)] [\varphi(y_1(x)) + F(x)]} dx \geq 0, \end{aligned}$$

用到了 ϕ 的单增性和 $[x_B, x_A]$ 内 $f_1(x) < 0$.

同理可证

$$\int_{B'C'} f_1(x) dt - \int_{BC'} f_1(x) dt \geq 0,$$

$$\int_{C_1D_1} f_1(x) dt - \int_{CD} f_1(x) dt \geq 0.$$

又由条件 (iii) 和 (iv) 推出, 在区间 $[x_1, x_2]$ 之外 $f_1(x) > 0$, 从而有

$$\int_{A'A_1} f_1(x) dt > 0, \int_{B_1B'} f_1(x) dt > 0,$$

$$\int_{C'C_1} f_1(x) dt > 0, \int_{D_1D'} f_1(x) dt > 0.$$

综合以上各式, 可得 $h_2 < h_1$.

今设 Γ_1 是最靠近 O 的闭轨, 由于 O 是不稳定奇点, Γ_1 必为内侧稳定极限环, 故 $h_1 \leq 0$. 于是上式导出 $h_2 < 0$, 相邻闭轨 Γ_2 必为稳定的极限环. 若能证明 Γ_1 不是半稳定的而是一个稳定环, 这就导出了矛盾, 唯一性得证.

第二步, 用反证法证明 Γ_1 不是半稳定极限环. 设 Γ_1 是半稳定环, 构造系统

$$\dot{x} = -\phi(y) - \bar{F}(x), \quad \dot{y} = g(x), \quad (2.20)$$

其中

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(x) & x \leq x_2, \\ F(x) + \int_{x_2}^x r(\xi - x_2)g(\xi)d\xi, & x > x_2. \end{cases}$$

它在 $x \leq x_2$ 的半平面与式 (2.19) 完全一样, 而在 $x > x_2$ 半平面上关于参数 r 构成了旋转向量场 (不妨认为 $\beta \geq 0$, 对 $\beta < 0$ 时证明类似), 因而系统 (2.20) 在全平面构成了广义旋转向量场 (见本章第六节). 故对充分小的 $r > 0$ ($r < 0$), 系统 (2.20) 在 Γ_1 外侧存在不稳定环 (稳定环) Γ'_1 , 在 Γ_1 内侧存在稳定环 (不稳定环) Γ_1^* . 容易验证, 函数

$$\bar{f}(x) \equiv \bar{F}'(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_2, \\ f(x) + r(x - x_2)g(x), & x > x_2; \end{cases}$$

及

$$\bar{f}(x) \equiv \bar{f}(x) + g(x)[\alpha + \beta \bar{F}(x)]$$

仍满足本定理的一切条件, 因此也有

$$-\oint_{\Gamma_1^*} \bar{f}(x) dt > -\oint_{\Gamma'_1} \bar{f}(x) dt.$$

这恰好与 Γ'_1, Γ_1^* 的稳定性相矛盾. 证毕.

推论 考虑系统

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x). \quad (2.21)$$

设 f, g 在区间 (α, β) 上连续可微, 其中 $\alpha < 0 < \beta$, 且满足:

$$(i) \quad xg(x) > 0, \quad x \neq 0;$$

$$(ii) \quad \exists x_0 \in (\alpha, 0) (x_0 \in (0, \beta)), \text{ 使}$$

$$f(x) > 0, \quad x \in (\alpha, x_0),$$

$$f(x) < 0, \quad x \in (x_0, \beta);$$

$$(iii) \quad [f(x)/g(x)]' > 0, \quad x \in (\alpha, x_0) \cup (0, \beta)$$

$$([f(x)/g(x)]' < 0, \quad x \in (\alpha, 0) \cup (x_0, \beta)).$$

则系统(2.21)在带域 $\{(x, y): \alpha < x < \beta, -\infty < y < +\infty\}$ 内至多存在一个极限环, 若存在必为稳定的(不稳定的).

证明留作习题.

例 2.8 试证明二次系统

$$\dot{x} = 1 - 4x + x^2 y, \quad \dot{y} = 3x - x^2 y, \quad (2.22)$$

最多存在一个极限环.

证 令 $u = x + y$, 系统(2.22)可化为

$$\dot{x} = 1 - 4x + x^2(u - x), \quad \dot{u} = 1 - x,$$

它有唯一奇点(1, 4). 作平移

$$x = 1 + \xi, \quad u = 4 + \eta,$$

得系统

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi + \xi^2 - \xi^3 + (1 + \xi)^2 \eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\xi,$$

再作时间代换 $ds = (1 + \xi)^2 dt$, 由上式变为

$$\frac{d\xi}{ds} = \eta - F(\xi), \quad \frac{d\eta}{ds} = -g(\xi), \quad (2.22)'$$

其中

$$F(\xi) = \frac{-\xi - \xi^2 + \xi^3}{(1 + \xi)^2}, \quad g(\xi) = \frac{\xi}{(1 + \xi)^2}.$$

式(2.22)'已具有推论中式(2.21)中的形式, 且显然有

$$\xi g(\xi) > 0, \quad \xi \neq 0;$$

$$f(0) = F'(0) = \left[\frac{-1 - \xi + 3\xi^2 + \xi^3}{(1 + \xi)^3} \right]_{\xi=0} = -1 < 0.$$

由

$$f'(\xi) = \frac{2+8\xi}{(1+\xi)^4},$$

知 $\xi = -\frac{1}{4}$ 处对应 $f(\xi)$ 极小, 且 $f(\xi)$ 有两个零点, 又经计算, 可得

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right] = 1 + \frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{(1+\xi)^2} > 0 (\xi \neq 0, -1),$$

故可适当选取 α, β 和 ξ_0 , 使系统 (2.22)' 满足推论的一切条件, 即它最多存在一个极限环.

1982 年曾宪武在 Филиппов 变换的基础上建立了两个很好的唯一性定理, 我们引用其中一个.

首先在变换下把 x 在 (α, β) 区间内 ($\alpha \cdot \beta < 0$) 定义的系统 (2.12) 化为同一半平面 $z \geq 0$ 上的两个方程

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= F_1(z) - y, \quad 0 \leq z < A, \\ \frac{dz}{dy} &= F_2(z) - y, \quad 0 \leq z < B, \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中 $A = G(\alpha), B = G(\beta)$, 又记 $\delta = \min(A, B)$.

定理 2.18 (曾宪武^[14]) 设 $f(x), g(x)$ 在 (α, β) 内连续, $xg(x) > 0 (x \neq 0)$; 且有

(i) $\exists$ 常数 $a \in [0, \delta]$, 使当 $z \in (0, a)$ 时, $F_1(z) \leq 0 \leq F_2(z)$, 但 $0 < z \ll 1$ 时, $F_1(z) \neq F_2(z)$; 当 $z \in (a, \delta)$ 时, $F_1(z) \geq 0$ 且 $F'_1(z) \geq 0$;

(ii) 若 $F_2(x) < 0$, 则有 $F'_2(z) \leq 0, z \in (a, B)$;

(iii) 对任何常数 $k \geq 1$, 在区间 $[a, k^{-2}(A-a)+a]$ 上作函数

$$H_k(z) \equiv k^{-1} F_1(k^2(z-a)+a),$$

当 $u \geq z > a$ 时, 若 $F_2(u) = H_k(z)$, 则有 $F'_2(u) \leq H'_k(z)$. 则系统 (2.12) 在带域 $\alpha < x < \beta$ 内至多有一个极限环, 若它存在必是稳定的.

注 由于 Филиппов 变换将系统 (2.12) 的闭轨 Γ 在 $x \geq 0, x \leq 0$ 两半平面上的部分, 对应地化为同一个半平面 $z \geq 0$ 上两个方程 (2.23) 的在 y 轴上有公共端点的解曲线 Γ_2, Γ_2 . 因此有

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div}(2.12) dt = - \int_{\Gamma} f(x) dt = - \left[\int_{\Gamma_1} F'_1(z) dy - \int_{\Gamma_2} F'_2(z) dy \right].$$

由 $F_i(z) (i=1, 2)$ 在半平面 $z \geq 0$ 上的性质和相关位置, 来估计上式右端括号内两个积分之差大于零, 从而导出系统 (2.12) 的发散量沿闭轨 Γ 积分一周为负的结论. 这是估算发散量积分的又一方法, 它对 $y = F(x)$ 的光滑性要求大

大降低,估算可更为精细,使本定理几乎包含了在此之前关于 Liénard 系统 (2.12) 极限环唯一性的大部分重要定理.

在此之后,1989 年我们又得到了一个很好的唯一性定理,它是直接建立在系统 (2.12) 上的. 定理条件比较简洁,可容许 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近变号,且进一步降低了对 $F(x)$ 的要求,这里仅列出定理,证明可参阅文献[15].

定理 2.19 若系统 (2.12) 满足

(i) $\exists \delta > 0$, 使 $x \in [-\delta, \delta]$ 时 $g(-x) = -g(x)$;

(ii) 当 $x \in [0, \delta]$ 时 $F(-x) - F(x) \geq 0$, 但 $0 < x \ll 1$ 时, $F(x) \equiv F(-x)$. 当 $x > \delta$ 时 $F(-x) - F(x) < 0$;

(iii) 当 $|x| \geq \delta$ 时 $f(x) \geq 0$.

则系统 (2.12) 至多有一个极限环,若存在,它是稳定的.

限于篇幅,还有一些极限环唯一性的工作就不再介绍了,若要更多地了解,可参阅文献[2]. 最后介绍一个对一般的平面自治系统 (2.2) 的极限环唯一性定理.

定理 2.20 在环域 $\mathcal{D}$ 内,若 $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ 定号,或它保持常号但不在 $\mathcal{D}$ 的任何子区域内恒等于零,则系统 (2.2) 在 $\mathcal{D}$ 内至多有一个闭轨.

证明 首先证明 $\mathcal{D}$ 中若有闭轨 Γ , 则 Γ 必围绕着 $\mathcal{D}$ 的内境界. 否则由 Green 公式

$$\oint_{\Gamma} X dy - Y dx = \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中 $D \subset \mathcal{D}$ 为 Γ 所围的区域,导出矛盾.

再用反证法证明定理结论. 设 $\mathcal{D}$ 内有多个闭轨, Γ_1 和 Γ_2 是其中任意相邻两个,都包围着内境界. 则从 Γ_1 上任一点 A 到 Γ_2 上任一点 B 作直线辅助连线 $\overline{AB}$, 再次利用上面 Green 公式,这时左端积分中的 Γ 是 Γ_1, Γ_2 和 $\overline{AB}, \overline{BA}$ (线积分正好抵消),右端积分区域 $\mathcal{D}$ 是 Γ_1 和 Γ_2 所围之 D 中的子域,再次导出矛盾. 证毕.

注 定理条件中“ $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ 不在 $\mathcal{D}$ 的任何子域内恒等于零”,可换为“系统 (2.2) 在 $\mathcal{D}$ 内无奇点,且 $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$ 不在整条轨线上成立”.

推论 (Л. А. Черкас^[17]) 若在环域 $\mathcal{D}$ 内系统 (2.2) 无奇点,并存在函数 $B(x, y)$ 和 $M(x, y) \in C^1(\mathcal{D})$ 及 $B(x, y) > 0$, 使在 $\mathcal{D}$ 上有

$$\frac{\partial}{\partial x}(XB) + \frac{\partial}{\partial y}(YB) + \frac{\partial M}{\partial x}XB + \frac{\partial M}{\partial y}YB \leq 0,$$

而等号不能在整条轨线上成立,则在 $\mathcal{D}$ 内系统(2.2)至多只有一个极限环,如果存在,必是稳定的.

例 2.9 考虑系统

$$\dot{x} = ax + by - x(x^2 + y^2) \equiv P(x, y),$$

$$\dot{y} = cx + dy - y(x^2 + y^2) \equiv Q(x, y).$$

设 $\Delta \equiv (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc < 0$. 试证:当 $a+d \leq 0$ 时,系统不存在闭轨;当 $a+d > 0$ 时,系统存在唯一的极限环,且是稳定极限环.

证明 由 $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ 确定的奇点 (x, y) 应满足

$$by^2 + (a-d)xy - cx^2 = 0.$$

左端的二次型在条件 $\Delta < 0$ 下是一个定号函数,即上式除 $O(0, 0)$ 外没有别的实解. 且因 $\Delta < 0$,故唯一奇点 O 是中心或焦点.

取函数

$$V(x, y) = \begin{cases} by^2 + (a-b)xy - cx^2, & b > 0 \\ -[by^2 + (a-d)xy - cx^2], & b < 0, \end{cases}$$

注意到,在条件 $\Delta < 0$ 下有 $bc < 0$,故 $V(x, y)$ 总是定正函数. 因此

$$V(x, y) = h > 0$$

是一族椭圆,布满全平面. 沿系统对 t 求导,得

$$\frac{dV}{dt} = V[(a+d) - 2(x^2 + y^2)].$$

当 $a+d \leq 0$,有 $\frac{dV}{dt} < 0$,这时 O 为稳定的焦点且吸引区域为全平面,故系统不存在闭轨. 当 $a+d > 0$ 时,在 O 的充分小邻域内 $\frac{dV}{dt} > 0$,所以 O 为不稳定焦点. 这时取 $h > 0$ 充分大,使椭圆

$$V(x, y) = h$$

周上 $x^2 + y^2$ 足够大,使 $\frac{dV}{dt} < 0$,从而使系统的与此椭圆相交的轨线均由外向内,它就构成了 Poincaré 环域的外境界. 故它内域必存在一条内稳定极限环和一条外稳定极限环(可能重合为一条).

取函数 $B(x, y) \equiv V(x, y)^{-1}$,可算得

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = -2(x^2 + y^2)V^{-1},$$

注意 $B(x, y) > 0$ (除点 O 外), 由上述推论 (取 $M \equiv 0$) 知, 系统最多只有一条闭轨.

第四节 奇点的指数和它在极限环存在性位置中的应用

奇点的指数是描述奇点拓扑性质的一个量, 在研究奇点的类型、相互影响及闭轨的存在性、存在位置等方面, 它给人们提供了很好的信息.

一、向量场沿闭曲线的旋转数

在区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上给定了一个连续向量场

$$A(x, y) \equiv (X(x, y), Y(x, y)),$$

L 是 D 内的一条简单闭 Jordan 曲线, 如果在 L 上不含 $A(x, y)$ 的零向量, 则称 $A(x, y)$ 在 L 上非退化. 下面的引理是显然的.

引理 2.4 设 $A(x, y)$ 在 L 上非退化, 则当点 (x, y) 沿 L 按一定方向走一圈回到出发点时, 向量 $A(x, y)$ 可转过角的代数和必是 2π 的整数倍, 即 $A(x, y)$ 转过了整数圈.

定义 2.7 设 $A(x, y)$ 在 L 上非退化, 当点 (x, y) 沿 L 按正方向走一圈回到出发点时, 向量 $A(x, y)$ 可转过圈数的代数和称为 $A(x, y)$ 沿 L 的旋转数. 记为 $I(A, L)$, 它是一个整数 (包括零, 可正可负).

这里所说的“正方向”是指: L 将平面分成内部和外部两个区域, 当点 (x, y) 沿 L 按某方向走时, 如果点 (x, y) 相邻的内部区域总在该点的左侧, 则它前进的方向是正方向.

引理 2.5 设 L 的内部区域被分为 G_1 和 G_2 两个单连通区域, 其边界以 L_1 和 L_2 记, $A(x, y)$ 在 L, L_1 和 L_2 上非退化, 则有

$$I(A, L) = I(A, L_1) + I(A, L_2).$$

证明 我们引进 $\mu(A, \widehat{abc})$ 记 $A(x, y)$ 沿弧段 $\widehat{abc}$ 转过的角的代数和. 显然有 $I(A, L) = \frac{1}{2\pi} \mu(A, L)$.

由图 2-17, 易知有

$$I(A, L) = \frac{1}{2\pi} [\mu(A, abc) + \mu(A, cda)]$$

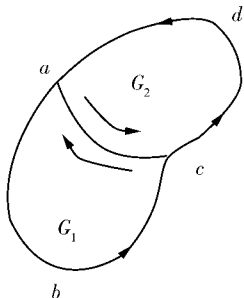


图 2-17

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} [\mu(A, abc) + \mu(A, ca) + \mu(A, ac) + \mu(A, cda)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [\mu(A, L_1) + \mu(A, L_2)] \\
 &= I(A, L_1) + I(A, L_2).
 \end{aligned}$$

证毕.

定理 2.21 设 $A(x, y)$ 在 L 上及其内部区域 G 上均非退化, 则有 $I(A, L) = 0$.

证明 将 G 分为 n 个单连通子区域 G_i , 使

$$\bar{G} = \bigcup_{i=1}^n \bar{G}_i, \quad G_i \cap G_j = \emptyset (i \neq j).$$

让 n 足够大且每个 G_i 足够小, 由 $A(x, y)$ 的连续性可使每个 $\bar{G}_i$ 上任意两点上向量 A 间的夹角足够小, 例如小于 $\frac{\pi}{4}$. 则 A 沿任一 G_i 的边界 L_i 正向走一圈时所转过的角度小于 $\frac{\pi}{4}$, 即 $I(A, L_i) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 所以由上引理得结论. 证毕.

定理 2.22 设 D 内有简单闭曲线 $L, L_1, L_2, \dots, L_n$, 它们的内部区域分别为 $G, G_1, G_2, \dots, G_n$. 满足条件

$$(i) G_i \cap G_j = \emptyset, (i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j),$$

$$\bigcup_{i=1}^n G_i \subset G;$$

$$(ii) A(x, y) \text{ 在闭区域 } (\bar{G} \setminus \bigcup_{i=1}^n G_i) \text{ 上非退化.}$$

则有

$$I(A, L) = \sum_{i=1}^n I(A, L_i).$$

证明 不妨以 $n=3$ 为例来证. 按照图 2-18 提供的思路, 再应用定理 2.21 的结果即可得证.

推论 若 L_1 是 L 内部区域中的任一条简单闭曲线, 它所围的区域为 G_1 , 则只要 $A(x, y)$ 在闭区域 $\bar{G} \setminus G_1$ 上退化, 就有

$$I(A, L) = I(A, L_1).$$

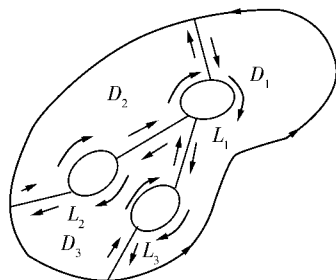


图 2-18

二、平面系统奇点的指数

考虑平面自治系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (2.2)$$

$(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2, X, Y \in C(D)$. 则右端函数定义了 D 上的连续向量场

$$A(x, y) \equiv (X(x, y), Y(x, y)).$$

设 $M_0(x_0, y_0)$ 是系统(2.2)孤立奇点(对应向量场 A 的退化点), 由上面的推论, 我们有

定义 2.8 L 是围绕 M_0 的任何一条简单闭曲线, 在 L 上和 L 的内部区域中除 M_0 外, 不再有系统(2.2)的其他奇点, 则我们将 $I(A, L)$ 定义为系统(2.2)奇点 M_0 的**指数**, 记作 $J_{M_0}(X, Y)$.

注 按本定义和前面的讨论, 显然有计算公式

$$\begin{aligned} J_{M_0}(A) &= \frac{1}{2\pi} \oint_L d[\arctan \frac{Y}{X}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \end{aligned}$$

定理 2.23 初等鞍点的指数为 -1 , 初等焦点、中心、结点(退化结点, 临界结点)的指数均为 1 .

证明 我们可以按上述计算公式推演得

$$J_0(ax + by, cx + dy) = \frac{q}{|q|} = \text{sign } q,$$

其中 $q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. (留作习题)

我们可以正常结点为例给出一个简单的几何观察法: 把结点画出来如图 2-19(a)所示, 以 O 为心作一个很小的圆 S_1 , 保证 S_1 内除 O 外无其他奇点. 在 S_1 圆周上取定一定数量的轨线与它有代表性的交点, 在图 2-19(a)上我们取了 10 个点(第 10 点与第 1 点重合). 观察这些交点上向量场的向量(轨线在该交点的切向量), 把它们按序平行移到图 2-19(b)中的单位圆上, 使向量终(始)端落在 O 点, 看这些向量转过的整圈数就是对应奇点的指数. 显然结点的指数为 1 .

其余的自己试做. 证毕.

同样的办法显然可得

定理 2.24 向量场 $A(x, y)$ 沿系统(2.2)的任何闭轨 Γ 的旋转数等于 1 .

推论 1(定理 2.5) 系统(2.2)任何闭轨所包围的区域内必有奇点.

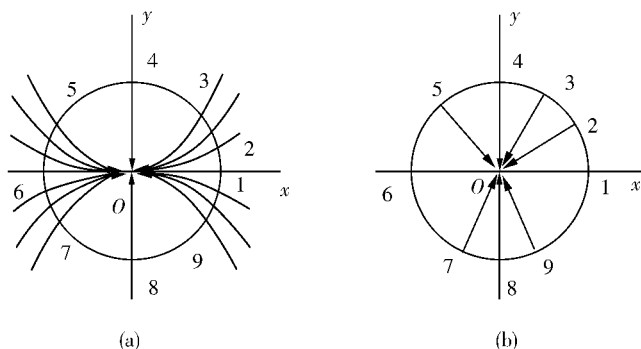


图 2-19

推论 2 若系统(2.2)的闭轨 Γ 所包围的区域内只有孤立奇点,则这些奇点的指数之和等于 1. (用到定理 2.22)

推论 3 若系统(2.2)在某区域 D_1 中只有一个鞍点,则系统不存在全部位于 D_1 中的闭轨;

若系统(2.2)在 D_1 中有一个焦点两个鞍点,则系统(2.2)若在 D_1 中有闭轨时,它只能在焦点的外围,而不能包围其他两个奇点.

第五节 极限环的重次与稳定性

在工程应用中,只有稳定的极限环才代表可以实现的等幅振荡,不稳定的极限环有时是可以回避的等幅振荡,因此在判断了极限环的存在唯一问题之后,进一步判定它的稳定性就具有十分重要的意义. 极限环的重次是反映极限环内在本质的一个重要方面,我们将会看到:它极大地影响了极限环的变化,正如在研究代数方程的根时,根的重次是十分重要的一样.

一、Poincaré 映射与极限环的重次

设 Γ 是系统(2.2)的闭轨线,任取一点 $P \in \Gamma$,过 P 作法线段 $\overline{AB}$ (也可过 P 作系统的无切弧段), A 在外侧, B 在内侧. 任取点 $Q_0 \in \overline{AB}$,以 n_0 记 Q_0 到 P 的有向距离, $\overline{PA}$ 上 n_0 为正, $\overline{PB}$ 上 n_0 为负. 由闭轨线的性质知,只要 $|n_0|$ 足够小,则系统(2.2)过 Q_0 的轨线 $f(Q_0, R^+)$ 也是绕 Γ 盘旋的. 设轨线 $f(Q_0, R^+)$ 在点 Q_0 之后与 $\overline{AB}$ 再次相交的第一个交点为 Q_1 , n 记为 $\overline{PQ_1}$ 的有向距离 (见图

2-20). 我们称点 Q_1 为 Q_0 的**后继点**(也称 Q_0 为 Q_1 的先行点). 这样我们在 P 附近的 $\overline{AB}$ 上, 建立了由 Γ 邻域中轨线给出的点 Q_0 与其后继点 Q_1 之间的连续单值对应关系

$$n = n(n_0), \quad (2.24)$$

函数 $n(n_0)$ 或

$$N(n_0) \equiv n(n_0) - n_0$$

称为**后继函数**. 显然有 $n(0)=0$ 或 $N(0)=0$. 关系式 (2.24) 也定义了 Γ 邻域中由轨线确定的 $\overline{AB}$ 到自身的“点映射”

$$T: n_0 \mapsto n(n_0),$$

称为 Γ 邻域中的 **Poincaré 映射**. 过点 $Q^*(n_0)$ 的轨线 Γ^* 是闭轨线的充分必要条件是, n_0^* 是映射 T 的不动点.

下面讨论后继函数 $N(n_0)$ 的性质时, 要设 $X(x, y), Y(x, y) \in C^m(G), m$ 是按下面展开需要的正整数.

(1) 过点 $Q^*(n_0^*)$ 的 Γ^* 是系统 (2.2) 的闭轨, 充要条件是: n_0^* 是 $N(n_0)$ 的零点;

(2) 若 $N(n_0^*)=0$, 而 $N'(n_0^*) \neq 0$ 则过 $Q^*(n_0^*)$ 的闭轨 Γ^* 是孤立的, 是双侧极限环; 当 $N'(n_0^*) < 0$ 时, Γ^* 是稳定极限环, 当 $N'(n_0^*) > 0$ 时, Γ^* 是不稳定极限环;

(3) 若 $N(n_0^*) = N'(n_0^*) = \dots = N^{(k-1)}(n_0^*) = 0$, 而 $N^{(k)}(n_0^*) \neq 0$. 则称 Γ^* 为 **k 重极限环**. $k=1$ 时, Γ^* 称为**单重极限环**或**简单极限环**; 这时若 k 是奇数且 $N^{(k)}(n_0^*) < 0 (> 0)$, 则 Γ^* 是稳定(不稳定)极限环; 若 k 是偶数, 则 Γ^* 一定是半稳定极限环.

性质(1)是显然的.

性质(2)是基于微分中值定理

$$N(n_0) = N(n_0) - N(n_0^*) = N'(\xi)(n_0 - n_0^*),$$

由 $N'(n_0)$ 的连续性知, 当 $|n_0 - n_0^*|$ 充分小时, 由 $N'(n_0^*) < 0$ 可推出 $N'(\xi) < 0$, 从而由上式导出在 Γ^* 外侧的轨线使 $N(n_0) < 0$, Γ^* 内侧的轨线使 $N(n_0) > 0$, 于是 Γ^* 就是稳定的极限环.

性质(3)是基于 Taylor 展式

$$N(n_0) = \frac{1}{k!} N^{(k)}(n_0^*)(n_0 - n_0^*)^k + o(|n_0 - n_0^*|^k),$$

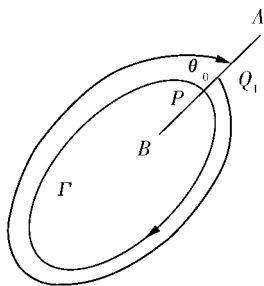


图 2-20

其余论述与上面类似.

由上述性质,显然可得

定理 2.25 若 Γ 是系统(2.2)的一条闭轨,则 $N(0)=0, N'(0)<0(>0)$ 是 Γ 为单重稳定(不稳定)极限环的充要条件; $N(0)=N'(0)=0$ 是 Γ 为多重极限环或 Γ 不是极限环(它是周期环或复合环中的一条闭轨)的必要条件.

注意,半稳定环是多重环.

二、闭轨的特征指数与极限环的稳定性

一般来说,在不知道闭轨 Γ 的表达式的情况下,后继函数是无法求出的,但我们可以得到 $N'(0)$ 依赖于未知闭轨的一个表达式,虽严格地说还是无法具体计算,但借助这个表达式有时可以得到 $N'(0)$ 符号的估计,同时引出理论研究上十分重要的闭轨“特征指数”的概念(在上节中已经用到).

设系统(2.2)是 C^1 类系统,有闭轨 Γ ,它在直角坐标下的参数方程是

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

以 T 为周期,负定向.

在 Γ 的充分小邻域内,我们引入曲线坐标 (s, n) : 过任一点 Q 向 Γ 作垂线,垂足为 P , $|n|$ 表 O 到 P 的距离, Γ 外侧 $n>0$, 内侧 $n<0$; 以 S 表示从 Γ 上某定点算起到点 P 的弧长,顺时针方向为正.下面首先建立点 Q 的两种坐标间的转换式.

设 Γ 以弧长为参数时的方程是

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$

Γ 的总弧长 l 是它的周期. 由于

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (\varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j}) + n(-\psi'(s)\mathbf{i} + \varphi'(s)\mathbf{j}) \end{aligned}$$

(见图 2-21)推出

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) - n\psi'(s), \\ y &= \psi(s) + n\varphi'(s), \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \frac{dx}{ds} \Big|_{\Gamma} = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}, \\ \psi'(s) &= \frac{dy}{ds} \Big|_{\Gamma} = \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}, \end{aligned}$$

而 $X_0 \equiv X(\varphi(s), \psi(s)), Y_0 \equiv Y(\varphi(s), \psi(s)).$

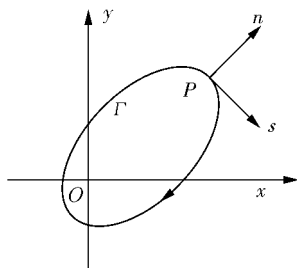


图 2-21

将式(2.25)代入系统(2.2),再从中解出 $\frac{dn}{ds}$,得系统(2.2)在坐标系 (s, n) 中的微分方程.

$$\frac{dn}{ds} = \frac{Y\varphi' - X\psi' - n(X\varphi'' + Y\psi'')}{X\varphi' + Y\psi'} \equiv F(s, n), \quad (2.26)$$

其中

$$\varphi''(s) = -\frac{Y_0}{(X_0^2 + Y_0^2)^2} [X_0^2 Y_{x_0} + X_0 Y_0 (Y_{y_0} - X_{x_0}) - Y_0^2 X_{y_0}],$$

$$\psi''(s) = \frac{X_0}{(X_0^2 + Y_0^2)^2} [X_0^2 Y_{x_0} + X_0 Y_0 (Y_{y_0} - X_{x_0}) - Y_0^2 X_{y_0}],$$

这里 $X_{x_0}, X_{y_0}, Y_{x_0}, Y_{y_0}$ 分别表偏导数 X_x, X_y, Y_x, Y_y 在 $n=0$ (即 Γ 上)的值. 注意 $F(s, n)$ 关于 s 是 l 周期的, 关于 n 有连续偏导数, 且有

$$F(s, 0) = \frac{Y_0 X_0 - X_0 Y_0}{X_0^2 + Y_0^2} = 0, \quad [X\varphi'' + Y\psi'']_{n=0} = 0.$$

因此, 式(2.26)可写成

$$\frac{dn}{ds} = H(s)n + o(|n|),$$

$$\text{其中} \quad H(s) \equiv F'_n(s, n)|_{n=0} = \frac{X_0^2 Y_{y_0} - X_0 Y_0 (X_{y_0} + Y_{x_0}) + Y_0^2 X_{x_0}}{(X_0^2 + Y_0^2)^{3/2}}.$$

这时, 我们考虑 Γ 的邻域内方程(2.26)过点 $(0, n_0)$ 的解 $n = n(s, n_0)$, $n(0, n_0) = n_0$, 将式(2.26)沿此解从 $s=0$ 到 $s=l$ 积分, 得

$$n(l, n_0) - n_0 = \int_0^l F(s, n(s, n_0)) ds.$$

注意到上式左端实际上就是后继函数 $N(n_0)$, 所以有

$$N'(n_0) = \int_0^l F'_n(s, n_0) n'_{n_0}(s, n_0) ds.$$

将解对初值的求导公式

$$n'_{n_0}(s, n_0) = e^{\int_0^s F'_n(\tau, n(\tau, n_0)) d\tau}$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned} N'(n_0) &= \int_0^l F'_n(s, n(s, n_0)) e^{\int_0^s F'_n(\tau, n(\tau, n_0)) d\tau} dp \\ &= e^{\int_0^l F'_n(s, n(s, n_0)) ds} - 1. \end{aligned}$$

注意到 $n(s, 0) \equiv 0$, 因此有

$$N'(0) = [e^{\int_0^l F'_n(s, n(s, n_0)) ds}]_{n_0=0} - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{\int_0^l [F'_n(s, n)]_{n=0} ds} - 1 \\
 &= e^{\int_0^l H(s) ds} - 1.
 \end{aligned}$$

以下计算 $\int_0^l H(s) ds$. 因沿 Γ 有

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{(dx)_0^2 + (dy)_0^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} dt,
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^l H(s) ds &= \int_0^T \frac{1}{X_0^2 + Y_0^2} [X_0^2 Y_{y0} - X_0 Y_0 (X_{y0} + Y_{x0}) + Y_0^2 X_{x0}] dt \\
 &= \int_0^T [X_{x0} + Y_{y0} - \frac{X_0^2 X_{x0} + X_0 Y_0 (X_{y0} + Y_{x0}) + Y_0^2 Y_{y0}}{X_0^2 + Y_0^2}] dt \\
 &= \int_0^T (X_{x0} + Y_{y0}) dt - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{d(X_0^2 + Y_0^2)}{X_0^2 + Y_0^2} \\
 &= \int_0^T (X_{x0} + Y_{y0}) dt.
 \end{aligned}$$

最后, 我们得到了

$$N'(0) = e^{\int_0^T (X_{x0} + Y_{y0}) dt} - 1. \quad (2.27)$$

定义 2.9 沿着系统(2.2)的闭轨 Γ 的积分

$$\begin{aligned}
 h &\equiv \frac{1}{T} \int_{\Gamma} \operatorname{div}(X, Y) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T [X_x(f(t), g(t)) + Y_y(f(t), g(t))] dt
 \end{aligned}$$

称为 Γ 的**特征指数**, 其中 $x=f(t), y=g(t)$ 是 Γ 关于 t 的参数表达式, T 是它的周期.

由定理 2.25 和(2.27)式可得

定理 2.26 C^1 类系统(2.2)的闭轨线 Γ 是单重(简单)极限环的充要条件是: Γ 的特征指数

$$h \equiv \frac{1}{T} \int_{\Gamma} \operatorname{div}(X, Y) dt \neq 0,$$

其中 T 是 Γ 关于 t 的周期. 若 $h < 0$, 则 Γ 是稳定的; 若 $h > 0$, 则 Γ 是不稳定的.

Γ 是多重极限环, 半稳定极限环或 Γ 不是极限环(它是周期环或复合环中的一条闭轨)时, 对应的 $h=0$.

第六节 旋转向量场中的极限环

考虑右端包含一个可变参数的平面系统

$$\dot{x} = X(x, y, \alpha), \quad \dot{y} = Y(x, y, \alpha), \quad (2.28)$$

研究当 α 变化时, 系统轨线的拓扑结构是否会变化? 如何变化? 这不仅是实际问题的需要——因为实际模型常常会保留一个或几个待调的参数, 也是微分方程理论研究的需要——在 α 微小变动下, 轨线拓扑结构保持不变的, 称为结构稳定的, 若发生突变的称为系统有分支现象, 是结构不稳定的. 分支问题是近 30 年来发展的重要理论, 在近代科技中有广泛应用, 我们在第四章中还有专门介绍.

本节我们仅仅研究一类特殊的含参变量的系统——旋转向量场. 它的特点是: 当 α 变化时, 系统(2.28)的奇点个数和位置不变, 但极限环的个数和位置却呈现有规律地变化. 它的理论与规律为极限环的存在唯一性甚至个数等研究提供了一种重要的方法.

先观察一个特殊的例子.

例 2.10 考察系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1)^k \equiv X(x, y), \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1)^k \equiv Y(x, y), \end{aligned} \quad (2.29)_0$$

$k=1, 2$. $k=1$ 时, $r=1$ 是它的单重不稳定极限环, $k=2$ 时, $r=1$ 是它的二重(半稳定)极限环(内稳外不稳). 将系统(2.29)₀ 定义的向量场旋转 α 角, 得到系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha \equiv X(x, y, \alpha), \\ \dot{y} &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha \equiv Y(x, y, \alpha), \end{aligned} \quad (2.29)_\alpha$$

我们研究闭轨 $r=1$ 经向量场均匀旋转后的变化, 即 $r=1$ 在系统(2.29) _{α} 中随 α 改变的变化状况.

取圆族 $C_R: x^2 + y^2 = R^2$. 容易算出 C_R 的切线与系统(2.29) _{α} 定义的向量场交角的正弦.

$$S(R, \alpha) = \frac{\sin \alpha - (R^2 - 1)^k \cos \alpha}{\sqrt{1 + (R^2 - 1)^{2k}}}$$

(这里用极坐标表示, 并注意它与极角 θ 无关). 因此可知: 使 $S(R, \alpha) = 0$ 的实根 R^* 所对应的 C_{R^*} 将是系统(2.29) _{α} 的闭轨线, 而使 $S(R, \alpha) \neq 0$ 的 R 所对应的 C_R 构成了系统(2.29) _{α} 的无切环, 其上各点处系统(2.29) _{α} 的向量场都是

由内指向外,或都由外指向内.具体考察 $S(R, \alpha) = 0$ 的实根,因 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时,
 $0 < \tan \alpha < 1$, 所以当 $k=1$ 时,它有且仅有一个实根

$$R_0 = \sqrt{1 + \tan \alpha};$$

$k=2$, 它有两个实根

$$R_1 = \sqrt{1 + \sqrt{\tan \alpha}}, \quad R_2 = \sqrt{1 - \sqrt{\tan \alpha}}.$$

C_{R_0} 是系统 $(2.29)_\alpha$ 在 $k=1$ 时的闭轨线, C_{R_1} 和 C_{R_2} 是系统 $(2.29)_\alpha$ 在 $k=2$ 时的两个闭轨线, 它们都在 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时存在.

我们再用定理 2.26 来判定它们的稳定性. 由于

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}[X(x, y, \alpha), Y(x, y, \alpha)] \\ &= 2(r^2 - 1)^{k-1} [(k+1)r^2 - 1] \cos \alpha - 2 \sin \alpha, \end{aligned}$$

所以当 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, 有

$$\operatorname{div}(2.29)_\alpha|_{r=R_0} = 2\alpha(\sin \alpha + \cos \alpha) > 0,$$

$$\operatorname{div}(2.29)_\alpha|_{r=R_1} = 4 \sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} (1 + \sqrt{\tan \alpha}) > 0,$$

$$\operatorname{div}(2.29)_\alpha|_{r=R_2} = -4 \sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} (1 - \sqrt{\tan \alpha}) < 0.$$

而 $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$ 时, $\tan \alpha \in (-1, 0)$. 因此 $k=1$ 时, 实根 R_0 仍然存在, 且 $0 < R_0 < 1$, $\operatorname{div}(2.29)_\alpha|_{r=R_0} > 0$; 当 $k=2$ 时, 实根 R_1 和 R_2 不存在, 或者说 R_1, R_2 变为虚根了.

总结以上讨论, 可得:

(1) $k=1$ 时, 均匀旋转向量场 $(2.29)_\alpha$, 在 $\alpha=0$ 时的单重不稳定环 $r=1$, 当 α 于 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 变动时仍变为单重不稳定环 $r=R_0$, α 增加时 $r=R_0$ 扩大, α 减小时 $r=R_0$ 缩小, 直至收缩到奇点 $O(0, 0)$;

(2) $k=2$ 时, 系统 $(2.29)_\alpha$ 在 $\alpha=0$ 时的半稳定二重环(内稳外不稳) $r=1$, 当 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时它分裂成系统 $(2.29)_\alpha$ 的两个单重极限环 $r=R_1, r=R_2$, 前者为不稳定的, 后者为稳定的, 且 α 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 中增加时, $r=R_1$ 扩大, $r=R_2$ 缩小, 直至收缩到 O ; 但当 $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$ 时, 系统 $(2.29)_\alpha$ 没有闭轨线, 也可看做向量场 (2.29) 反向旋转 α 角度后原二重环突然消失了, 或认为变为虚环了.

这个现象可与代数方程根的性质作一类比. 当一个代数方程只有单根时, 变化它的常数项, 方程仍只具有单根, 只有根的大小的变化; 若一个代数方程具有实二重根时, 常数项作微小变动后, 该二重根或者破裂为两个实单根, 或者突然消失转化为复根.

下面转入一般的旋转向量场的讨论, 基本内容来自于 G. F. D. Duff^[18].

考虑平面系统(2.28)所确定的向量场

$$F(\alpha) \equiv (X(x, y, \alpha), Y(x, y, \alpha)),$$

它满足下列基本假设:

$$(i) X(x, y, \alpha), Y(x, y, \alpha), \frac{\partial X}{\partial \alpha}, \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \in C^0(D \times I);$$

(ii) 保证系统(2.28)初值问题解的唯一性;

(iii) $F(\alpha)$ 只有孤立奇点,

其中 $I: 0 \leq \alpha \leq T, D \subset \mathbf{R}^2$.

定义 2.10 若 α 在 $[O, T]$ 中变动时, 向量场 $F(\alpha)$ 的奇点保持不动, 而在一切常点上恒有

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.30)$$

且存在正数 k 使

$$\begin{aligned} X(x, y, \alpha + T) &= -kX(x, y, \alpha), \\ Y(x, y, \alpha + T) &= -kY(x, y, \alpha). \end{aligned} \quad (2.31)$$

则称 $F(\alpha)$ 对一切 $\alpha \in [O, T]$ 构成了一个旋转向量场的完全族.

我们来看此定义的几何意义. 记 $F(\alpha)$ 与 x 轴的夹角为 $\theta(x, y, \alpha)$, 则有

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\arctan \frac{Y}{X}) = \frac{1}{X^2 + Y^2} \begin{vmatrix} X & Y \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} > 0,$$

由条件(2.30)知, 在任何一个常点上, 当 α 增加时向量场 $F(\alpha)$ 总是逆时针方向转动的. 而由条件(2.30)和(2.31)知, 对满足 $0 < |\alpha_1 - \alpha_2| < T$ 的任意两个 α_1, α_2 有

$$0 < |\theta(x, y, \alpha_1) - \theta(x, y, \alpha_2)| < \pi,$$

而对任意 $\alpha \in [O, T)$ 有

$$\theta(x, y, \alpha + T) = \theta(x, y, \alpha) + \pi.$$

即当参数由 α 变到 $\alpha + T$ 时, 常点处的向量恰好转了半周, 但长度不一定保持; 而当参数再增加到 $\alpha + 2T$ 时, 它们转了一周回到原来的方向上. 这就是

Duff 定义中“旋转”与“完全族”的几何含义.

前面例 2.9 中的系统 $(2.29)_\alpha$, 当 α 在 $[0, \pi)$ 中变动时, 它构成了一个旋转向量场的完全族, 并且在每一常点上向量场旋转的角度都是 α , 旋转过程中向量的长度也始终不变, 这样的系统 $(2.29)_\alpha$ 称为均匀旋转向量场族.

下面的一些定理说明, 上例中的大部分性质对任何一个旋转向量场的完全族也都成立.

定理 2.27 (闭轨不相交性) 若 $F(\alpha)$ 是一个旋转向量场的完全族 [简称 $F(\alpha)$ 是完全族], 则对不同的 α_1 和 α_2 , $F(\alpha_1)$ 的闭轨线 [$\alpha = \alpha_1$ 时系统 (2.28) 的闭轨线] 与 $F(\alpha_2)$ 的闭轨线互不相交.

证明 用反证法, 若 $F(\alpha_1)$ 有闭轨线 Γ_{α_1} 与 $F(\alpha_2)$ 的闭轨线 Γ_{α_2} 相交, 我们来导出矛盾. 首先由条件 (2.30) 知 Γ_{α_1} 与 Γ_{α_2} 至少交于两点 A 和 B , 不妨设当 t 增加时 Γ_{α_1} 在 A 点上由 Γ_{α_2} 的外部进入其内部, 又设 Γ_{α_1} 和 Γ_{α_2} 均为负定向 (见图 2-22). 则在点 A , $F(\alpha_1)$ 与 $F(\alpha_2)$ 向量的相关位置表明有 $\alpha_1 < \alpha_2$. 但在点 B 上对应两向量却使 $\alpha_1 > \alpha_2$, 这是矛盾. 证毕.

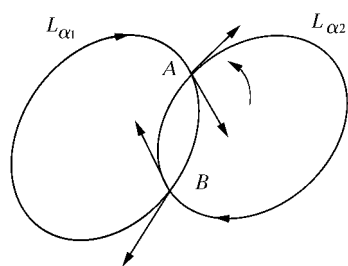


图 2-22

定理 2.28 若 $F(\alpha)$ 是个完全族, 设 $F(\alpha_0)$ 存在外稳定环 Γ_{α_0} 为正 (负) 定向, 对 $\forall \varepsilon > 0$ 足够小, 必 $\exists \alpha_1 < \alpha_0$ ($\alpha_1 > \alpha_0$), 使 $\forall \alpha \in (\alpha_1, \alpha_0)$ ((α_0, α_1)), 在 Γ_{α_0} 的外 ε 邻域中至少存在 $F(\alpha)$ 的一个外稳定环 Γ_α 和一个内稳定环 $\bar{\Gamma}_\alpha$ (它们可能重合); 又存 Γ_{α_0} 的外 δ ($\leq \varepsilon$) 邻域, 它被 $F(\alpha)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_0)$ ($\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$) 的闭轨所充满; 而当 $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \alpha_0$) 时, Γ_{α_0} 的外 ε 邻域中却无 $F(\alpha)$ 的闭轨线.

证明 只证括号外情形, 首先由于 $F(\alpha)$ 的奇点是孤立的, Γ_{α_0} 是外侧稳定的, 故 $\exists \varepsilon > 0$, 使在 Γ_{α_0} 的外 ε 邻域中无 $F(\alpha)$ 的奇点, 也无 $F(\alpha_0)$ 的其他闭轨线, 且使过 Γ_{α_0} 上任一点 P 的外法线与 $S(\Gamma_{\alpha_0}, \varepsilon)$ 之交集 $\overline{PN}$ 是 $F(\alpha_0)$ 的无切线段.

不妨认为定理中任给的 ε 均使上述成立. 取点 $Q_0 \in \overline{PN}$ 充分接近点 P , 使 $F(\alpha_0)$ 的轨线 $f_{\alpha_0}(Q_0, \mathbf{R}^+)$ 整个落在 Γ_{α_0} 的外 $\frac{\varepsilon}{2}$ 邻域中, 以 Q_{α_0} 记 Q_0 关于 $F(\alpha_0)$ 的后继点, 必有 $Q_{\alpha_0} \in \overline{PQ_0}$ (因 Γ_{α_0} 是外稳定的). 由解对参数的连续依赖性知, 取 α_1 满足 $0 < \alpha_0 - \alpha_1 \ll 1$, 可使 $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ 时: ① $\overline{PQ_0}$ 仍是 $F(\alpha)$ 的无切线段, ② $f_\alpha(Q_0, \mathbf{R}^+)$ 整条落在 $F(\alpha_0)$ 的外 ε 邻域中, ③ Q_0 关于 $F(\alpha)$ 的后继点 $Q_\alpha \in \overline{Q_{\alpha_0}Q_0}$. 对一切这样的 $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, 由条件 (2.30) 知, Γ_{α_0} 及 $\widehat{Q_0Q_\alpha} \cup \overline{Q_\alpha Q_0}$ 分别构

成了环域的内、外境界,由环域定理知此环域中至少存在 $F(\alpha)$ 的一个外侧稳定环和一个内侧稳定环,它们也可能重合[见图 2-23(a)].

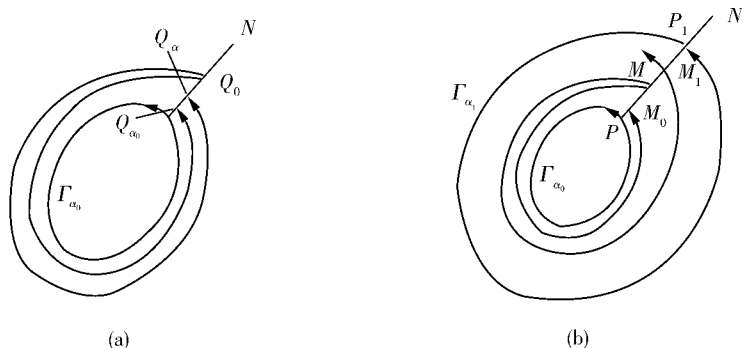


图 2-23

设最靠近 Γ_{α_0} 的 $F(\alpha_1)$ 的内稳定环为 Γ_{α_1} , 它与 $\overline{PN}$ 的交点是 P_1 [见图 2-23(b)], 第二部分要证 Γ_{α_0} 与 Γ_{α_1} 的围成的环域被 $F(\alpha)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_0)$ 的闭轨所充满. 这只要证, 对任意的 $M \in \overline{PP_1}$, 必存在 $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, 使 $F(\alpha)$ 有闭轨通过点 M . 我们记 M_0 为 M 关于 $F(\alpha_0)$ 的后继点, 必有 $M_0 \in \overline{PM}$ [Γ_{α_0} 关于 $F(\alpha_0)$ 是外稳定的]; 记 M_1 为 M 关于 $F(\alpha_1)$ 的后继点, 必有 $M_1 \in \overline{MP_1}$ [Γ_{α_1} 关于 $F(\alpha_1)$ 是内稳定的]; 由解对参数 α 的连续依赖性, 必存在一个 $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_0)$, 使 $F(\alpha)$ 过 M 的轨线是闭的.

第三部分的结论由闭轨不相交性立即可得. 证毕.

同理可证

定理 2.29 若 $F(\alpha)$ 是个完全族. 设 $F(\alpha_0)$ 存在内稳定环 Γ_{α_0} , 正(负)定向, 则 $\forall \epsilon > 0$ 足够小, 必 $\exists \alpha_2 > \alpha_0$ ($\alpha_2 < \alpha_0$), 使 $\forall \alpha \in (\alpha_0, \alpha_2)$ ((α_2, α_0)), 在 Γ_{α_0} 的内 ϵ 邻域中至少存在 $F(\alpha)$ 的一个外稳定环 Γ_α 和一个内稳定环 $\bar{\Gamma}_\alpha$ (它们可能重合); 又存在 Γ_{α_0} 的内 $\delta (\leq \epsilon)$ 邻域, 它被 $F(\alpha)$, $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_2)$ ((α_2, α_0)) 的闭轨所充满; 而当 $\alpha < \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$) 时, Γ_{α_0} 的内 ϵ 邻域中无 $F(\alpha)$ 的闭轨线.

对不稳定极限环 Γ_{α_0} , 我们也可以写出与定理 2.28 和 2.29 相平行的两个定理, 只要注意在 Γ_{α_0} 的定向固定时, α 的变动方向恰好与上面两个定理中的相反.

综合以上所得可知, 一个含参数 α 的平面自治系统所定义的向量, 若对 α 构成了旋转向量场完全族, 则系统的稳定和不稳定极限环随参数 α 的变化是比较规律的: 当 α 单调变化时, 稳定的和不稳定的极限环并不消失, 而是扩大

或缩小. 表 2-1 列出了当 α 单调变化时 Γ_α 的变动状况:

表 2-1

Γ_α 的定向		正	正	负	负
Γ_α 的稳定性		稳定时	不稳定时	稳定时	不稳定时
Γ_α 的变动状况	α 减小时	扩大	缩小	缩小	扩大
	α 增加时	缩小	扩大	扩大	缩小

以表 2-1 中第一列的结果为例, 它说的是: 若 $F(\alpha)$ 有一个正定向的稳定极限环 Γ_α , 当 α 在一定范围内减少(增加)到 $\alpha'(\alpha'')$ 时, 在 Γ_α 的外(内) ϵ 邻域内一定存在 $\Gamma(\alpha')(\Gamma(\alpha''))$ 的一个正定向极限环 $\Gamma_{\alpha'}(\Gamma_{\alpha''})$. 一般来说这个极限环只能保证一侧是稳定的, 后面的定理 2.31 证明了, 只有 Γ_α 是单重极限环时才能保证 $\Gamma_{\alpha'}(\Gamma_{\alpha''})$ 一定也是稳定的单重环.

定义 2.11 $F(\alpha)$ 的一个外稳定环 Γ_α 和一个内稳定环 $\Gamma'_\alpha, \Gamma''_\alpha$ 在 Γ_α 的内部, 且两个环之间的环域 G 被 $F(\alpha)$ 的一系列闭轨所充满, 则 Γ_α 和 Γ'_α 连同 G 一起称为 $F(\alpha)$ 的一个**广义稳定极限环**, 类似地可以定义**广义不稳定极限环**.

定理 2.30 若 $F(\alpha)$ 是个完全族, $F(\alpha_0)$ 有半稳定环 Γ_{α_0} , 则当参数 α 向某个适当的方向(增加方向或减少方向)变化时, Γ_{α_0} 至少分解成一个稳定环(或广义稳定环)和一个不稳定环(或广义不稳定环), 它们分别位于 Γ_{α_0} 的两侧; 而当 α 向该方向的相反方向变化时, Γ_{α_0} 立即消失[在 Γ_{α_0} 邻域内 $F(\alpha)$ 没有极限环].

证明 以 Γ_{α_0} 是外稳内不稳环, 正定向为例来证明. 由定理 2.28 知, 对给定的足够小 $\epsilon > 0$, 存在 $\alpha_1 < \alpha_2$, 当 $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_0)$ 时, 在 Γ_{α_0} 的外 ϵ 邻域内至少存在 $F(\alpha)$ 的一个外稳定环 Γ_α 和一个内稳定环 $\Gamma'_\alpha, \Gamma''_\alpha$ 在 Γ_α 的内部. 这时或者由它俩构成一个广义稳定环, 或者在它俩所界的环域中至少有一个稳定环. 而当 $\alpha > \alpha_0$ 时, Γ_{α_0} 的外 ϵ 邻域中无 $F(\alpha)$ 的闭轨.

再由表第二列结果知, 当 α 减少时存在 $\alpha_2 < \alpha_0$, 当 $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_0)$ 时, 在 Γ_{α_0} 的内 ϵ 邻域内至少存在 $F(\alpha)$ 的一个外不稳定环和一个内不稳定环, 或者由它俩构成一个广义不稳定环, 或者在它俩所界的环域中至少有一个不稳定环. 而当 $\alpha > \alpha_0$ 时, Γ_{α_0} 的内 ϵ 邻域内无 $F(\alpha)$ 的闭轨.

取 $\bar{\alpha} = \max(\alpha_1, \alpha_2)$, 则当 $\alpha \in (\bar{\alpha}, \alpha_0)$ 时, Γ_{α_0} 至少分解成 $F(\alpha)$ 的一个不稳定环(广义不稳定环)和一个稳定环(广义稳定环), 分别位于 Γ_{α_0} 的内外两侧; 而当 $\alpha > \alpha_0$, Γ_{α_0} 单纯消失. 证毕.

我们把半稳定环 Γ_α 的不同定向及不同内外稳定性, 在 α 不同变化时 Γ_α 的变动状况列表 2-2, 其中“分解”是指按定理 2.30 中的含义.

表 2-2

Γ_α 的定向		正	正	负	负
Γ_α 的稳定性		外稳内不稳	外不稳内稳	外稳内不稳	外不稳内稳
Γ_α 的变动	α 减小时	分解	消失	消失	分解
	α 增加时	消失	分解	分解	消失

定理 2.31 若 $F(\alpha)$ 是个完全族, 则当参数 α 单调变化时, $F(\alpha)$ 的单重极限环不分解也不消失, 而是单调地扩大或缩小.

证明 设 Γ_0 是 $F(0)$ 的一个单重极限环, 其总弧长为 l , 关于时间的周期为 T . 像在第五节中一样, 我们在 Γ_0 邻域内建立曲线坐标, 系统 (2.2) 化为

$$\frac{dn}{ds} = F(s, n, \alpha),$$

设 $n = n(s, n_0, \alpha)$ 是它满足 $n = n(0, n_0, \alpha) = n_0$ 的解, 则后继函数

$$\begin{aligned} N(n_0, \alpha) &\equiv n(l, n_0, \alpha) - n_0 \\ &= \int_0^l F(s, n(s, n_0, \alpha), \alpha) ds, \end{aligned}$$

这时 $n = n(s, n_0, \alpha)$ 是 $F(\alpha)$ 的闭轨的充要条件是 $N(n_0, \alpha) = 0$. 闭轨 Γ_0 对应 $N(0, 0) = 0$. 要证明定理结论, 只需在 $(0, 0)$ 的邻域中从 $N(n_0, \alpha) = 0$ 解出 $n_0 = n_0(\alpha)$, 满足 $n_0(0) = 0$ 且使 $\frac{dn_0}{d\alpha}$ 定号即可.

像第五节中一样, 容易得到

$$N'_{n_0}(0, 0) = e^{\int_0^T \operatorname{div}(X, Y)|_{\Gamma_0} dt} - 1, \quad (2.32)$$

也不难得到

$$N'_\alpha(0, 0) = e^{\int_0^l H(s) ds} \int_0^l e^{-\int_0^s H(s) ds} \frac{\partial \theta(s)}{\partial \alpha} ds, \quad (2.33)$$

其中

$$H(s) = F'_n(s, 0, 0).$$

由完全族定义中 (2.30) 式知 $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} > 0$, Γ_0 是单重环, 由 (2.32) 式得 $\left. \frac{\partial N}{\partial n_0} \right|_{(0,0)} \neq 0$.

应用隐函数定理知, 当 $|\alpha|$ 充分小时, 可从 $N(n_0, \alpha) = 0$ 解出 $n_0 = n_0(\alpha)$, 满足 $n_0(0) = 0$, 使 $N(n_0(\alpha), \alpha) \equiv 0$, 且

$$\frac{dn_0}{d\alpha} = -\frac{\partial N}{\partial \alpha} \bigg/ \frac{\partial N}{\partial n_0},$$

则由连续性及式(2.32), 式(2.33)的定号性, 立即得 $|\alpha|$ 充分小时 $\frac{dn_0}{d\alpha}$ 的定号性. 证毕.

下面的例子说明, 在旋转向量场中多重环在 α 变化时, 一般来说将分解成几个极限环, 这些环当 α 继续变化时又会有扩大、缩小分解或消失等复杂的变化, 因此对多重环谈随 α 单调变化是没有意义的.

例 2.11^[4] 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x \tan[(r - r_0)^{2n+1} (\sin \frac{1}{r - r_0} + 2)] \equiv X, \\ \dot{y} &= x + y \tan[(r - r_0)^{2n+1} (\sin \frac{1}{r - r_0} + 2)] \equiv Y.\end{aligned}\quad (2.34)$$

作曲线族

$$V(x, y) \equiv x^2 + y^2 = c^2,$$

它沿系统的全导数是

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.34)} = 2(x^2 + y^2) \tan[(r - r_0)^{2n+1} (\sin \frac{1}{r - r_0} + 2)].$$

显然, $r = r_0$ 使 $\frac{dV}{dt} = 0$, 而 $r \neq r_0$ 时有

$$(r - r_0) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.34)} > 0,$$

故 $r = r_0$ 是系统的不稳定极限环(多重), 记为 Γ_0 .

将式(2.34)均匀旋转 α 角(完全族的特例), 得系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha \equiv X(x, y, \alpha), \\ \dot{y} &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha \equiv Y(x, y, \alpha).\end{aligned}\quad (2.35)$$

已知当 $\alpha = 0$ 时它有不稳定环 Γ_0 , 正定向. $\alpha \neq 0$ 时, 再将上面的曲线族沿式(2.35)求全导数

$$\begin{aligned}\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.35)} &= 2xX(x, y, \alpha) + 2yY(x, y, \alpha) \\ &= 2r^2 \cos \alpha \left\{ \tan[(r - r_0)^{2n+1} (\sin \frac{1}{r - r_0} + 2)] - \tan \alpha \right\},\end{aligned}$$

使 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.35)} = 0$ 的 $r = r^*$ 就是式(2.35)的闭轨, 它也就是

$$\tan \alpha = \tan[(r - r_0)^{2n+1} (\sin \frac{1}{r - r_0} + 2)]$$

的解,当 $|\alpha|$ 充分小时,对给定的 α ,上式的解至少在两个以上,当 $\alpha > 0$ 时它们落在 L_0 的外侧, $\alpha < 0$ 时落在 L_0 的内侧.

定理 2.32 设 $F(\alpha)$ 是个完全族, Γ_α 是它的闭轨线,当 α 在 $[0, T)$ 内变动时 Γ_α 也变动,设其扫过的区域为 D ,则 D 的内外边界线上必都有奇点(无限远点也当作奇点看).

证明 只需就 D 有界的情形来证.任取一常点 $P \in \partial D$ (无常点时结论已真),必有点序列 $\{P_n\} \subset D, P_n \rightarrow P (n \rightarrow +\infty)$,且对每一点 $P_n, F(\alpha_n)$ 有闭轨 Γ_{α_n} 使 $P_n \in \Gamma_{\alpha_n}$,按设有 $\alpha_n \in [0, T)$,因而序列 $\{\alpha_n\}$ 必有极限点 $\bar{\alpha}$.

先证 $\bar{\alpha}$ 是唯一的.若不然,设 $\{\alpha_n\}$ 有两个极限点 $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha} \neq \bar{\alpha}_1$,且 $\alpha_{n_p} \rightarrow \bar{\alpha}, \alpha_{n_q} \rightarrow \bar{\alpha}_1, \alpha_{n_p}, \alpha_{n_q} \in \{\alpha_n\}$.由于向量场对 x, y, α 的连续性,当 n_p, n_q 充分大时,向量 $(X(P_{n_p}, \alpha_{n_p}), Y(P_{n_p}, \alpha_{n_p}))$ 与 $(X(P, \bar{\alpha}), Y(P, \bar{\alpha}))$,向量 $(X(P_{n_q}, \alpha_{n_q}), Y(P_{n_q}, \alpha_{n_q}))$ 与 $(X(P, \bar{\alpha}_1), Y(P, \bar{\alpha}_1))$ 可任意接近.但因 $F(\alpha)$ 是个完全族,有

$$(X(P, \bar{\alpha}), Y(P, \bar{\alpha})) \neq (X(P, \bar{\alpha}_1), Y(P, \bar{\alpha}_1)).$$

故当 n_p, n_q 充分大时,闭轨 $\Gamma_{\alpha_{n_p}}$ 与 $\Gamma_{\alpha_{n_q}}$ 将在点 P 附近相交,这与闭轨不相交定理矛盾.

考察 $F(\bar{\alpha})$ 过点 P 的轨线 $f_{\bar{\alpha}}(P, R)$ 及它的 ω 极限集 Ω_p, α 极限集 A_p ,由对初值和参数 α 的连续依赖性和 $P \in \partial D$,必有

$$f_{\bar{\alpha}}(P, R) \subset \partial D, \Omega_p, A_p \subset \partial D.$$

由设知 $f_{\bar{\alpha}}(P, R)$ 有界,故 Ω_p 和 A_p 非空.下面只要证明 $\Omega_p \cup A_p$ 必有奇点,则定理得证.按定理 2.3 知, $\Omega_p(A_p)$ 只可能是(i)一个奇点,(ii)一个闭轨线,(iii)一个奇异闭集合.我们只要排除情形(ii)即可.因为 ∂D 是 α 变动时 $F(\alpha)$ 的闭轨 Γ_α 扫过的区域 D 的边界,因而是曲线连通的,所以若 $\Omega_p(A_p)$ 是一个闭轨时,必有

$$\Omega_p = A_p = f_{\bar{\alpha}}(P, R) = \partial D,$$

这时若 Ω_p 是 D 的内(外)边界时,则 Ω_p 至少是 $F(\bar{\alpha})$ 的外(内)侧极限环(否则与闭轨不相交性矛盾),但由定理 2.28(定理 2.29)知,当 α 在 $\bar{\alpha}$ 附近适当变动时 Ω_p 将缩小(扩大),它与 Ω_p 是 D 的内(外)边界相矛盾,这说明(ii)不可能出现.证毕

这个定理说明:在完全族中,极限环随参数 α 的变化,除分裂与消失以外,在扩大与缩小过程中只有碰到了奇点就终止了.

最后我们指出,许多带参数 α 的系统不能完全满足 Duff 的“完全族”定义 2.10 中条件(2.30)和(2.31),而根据分析,这两个条件并不是保持旋转向量场主要性质的必要条件,这自然提出了要改进定义 2.10 而引入“广义旋转向

量场”概念,来拓展旋转向量场理论的应用范围的愿望.本书限于篇幅,这里只引入用得较普遍的两个定义,而不作更多的论述.

定义 2.12^[19] 若 α 在 $[0, T]$ 中变动时,向量场 $F(\alpha)$ 的奇点保持不动,而在一切常点上恒有

$$(i) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \geq (\leq 0), \text{ 并沿任一闭曲线上 } \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \neq 0;$$

$$(ii) \text{ 对于 } \alpha_1, \alpha_2 \in (0, T), \alpha_1 < \alpha_2, \text{ 有}$$

$$0 \leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} d\alpha \leq \pi \quad (-\pi \leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} d\alpha \leq 0).$$

则称 $F(\alpha)$ 为 $[0, T]$ 上的**广义旋转向量场**.

定义 2.13^[20] 若参数 α 在 (a, b) 中变动时,向量场 $F(\alpha)$ 的奇点保持不动,且对任意固定的点 $P(x, y)$ 和任何的 $\alpha_1, \alpha_2 \in (a, b), \alpha_1 < \alpha_2$, 恒有

$$\begin{vmatrix} X(x, y, \alpha_2) & Y(x, y, \alpha_2) \\ X(x, y, \alpha_1) & Y(x, y, \alpha_1) \end{vmatrix} \geq 0 (\leq 0),$$

但等号不在 $F(\alpha_i) (i=1, 2)$ 的整条闭轨线上成立. 则称 $F(\alpha)$ 为 (a, b) 上的**广义旋转向量场**, 其中区间 (a, b) 可以有界, 也可以无界.

例 2.12

(1) 容易验证: 系统

$$\dot{x} = -y + \alpha x + x^2 - y^2, \quad \dot{y} = x$$

所定义的向量场 $F(\alpha)$ 是定义 2.12 意义下 $[0, \pi]$ (或 $[-\pi, 0]$) 上的**广义旋转向量场**.

(2) 容易验证: 系统

$$\dot{x} = -2y, \quad \dot{y} = 2x - 2yf(\alpha x),$$

其中 $\alpha \in (0, +\infty)$, $|x|$ 增加时 $f(x)$ 单调递增, 它定义的向量场 $F(\alpha)$ 是定义 2.13 意义下 $(0, \infty)$ 上的**广义旋转向量场**.

我们指出: 对于上面两个定义中的**广义旋转向量场**来说, 前面完全族的前五个定理 (定理 2.27~2.31) 的结论仍然成立, 只有定理 2.32 可能不成立, 下面就是使定理 2.32 不成立的例子.

例 2.13 容易验证: 系统

$$\dot{x} = -y + x[x^2 + y^2 - (1 - \frac{1}{\alpha})], \quad \dot{y} = x,$$

所定义的向量场 $F(\alpha)$ 是定义 2.12 意义下 $[1, +\infty)$ 上的**广义旋转向量场**, 其中 $\alpha \in [1, +\infty)$.

也容易验证 $\Gamma_\alpha: x^2 + y^2 - (1 + \frac{1}{\alpha}) = 0$ 是 $F(\alpha)$ 的极限环, 当 $\alpha \rightarrow +\infty$ 时, $\Gamma_\alpha \rightarrow x^2 + y^2 = 1$, 这是 Γ_α 所扫过的区域 D 的边界, 但其上无所给系统的奇点.

习 题 二

1. 试证明: 若点 q 是 $f(p, t)$ 的 ω 极限点, 当且仅当 $\forall \epsilon > 0$ 任意小, $\forall T > 0$ 任意大, 总 $\exists$ 某 $t > T$, 使 $f(p, t)$ 与 q 的距离

$$d[f(p, t), q] < \epsilon,$$

并讨论这里定义的轨线的极限点与点集的聚点间的关系.

2. 试证明: 正半轨 $L^+ \rightarrow A$, 则点 A 一定是系统(2.2)的奇点.

3. 设点 M 是系统(2.2)的常点, $\overline{AB}$ 是过 M 轨线在 M 点上的法线段. 试证: 对足够小的 $\epsilon > 0$, 必存在 $\delta \in (0, \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$, 使在 t_0 时刻从 $\forall q \in S(M, \delta)$ 出发的轨线 L_q , 当 t 增加或减少时在没走出 $S(M, \epsilon)$ 之前必与 $\overline{AB} \cap S(M, \epsilon)$ 相交. 并说明这个邻域 $S(M, \epsilon)$ 可取代轨线矩形 $\square N_1 N_2$.

4. 设 $[\alpha, \beta]$ 有限, 试证: 系统(2.2)的轨线段 $\{f(p, t) | t \in [\alpha, \beta]\}$ 与任何一个无切线段最多相交有限个点.

5. 若 L_p 是系统(2.2)的开轨线, 常点 M 是它的一个极限点. 试证: $M \in \overline{\Omega_p} \cap A_p$.

6. 试证明定理 2.6 的结论.

7. 设原点 O 是系统(2.2)的唯一奇点, 且是稳定的, 全平面没有闭轨线. 试证: (i) 任何轨线必负向无界; (ii) 任何正向有界的轨线 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋向于 O .

8. 设 Ω_p 有界, 非闭轨线, $q \in \Omega_p$. 试证: Ω_p 与 A_p 必为奇点.

9. 求出下列系统的极限环, 并说明它的稳定性:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = -2x + (x-3y)\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = -2y + (3x+y)\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2)\sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2)\sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = -y + x \tan \left[(\sqrt{x^2+y^2}-2)^3 \cdot \left(\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-2} + 2 \right) \right], \\ \dot{y} = x + y \tan \left[(\sqrt{x^2+y^2}-2)^3 \cdot \left(\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-2} + 2 \right) \right]. \end{cases}$$

10. 试证明系统

$$\dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) - y(x^2 + y^2 - 2x - 8),$$

$$\dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) + x(x^2 + y^2 - 2x - 8)$$

有唯一的极限环 $x^2 + y^2 = 1$, 且它是稳定的.

11. 试证明下列系统(方程)至少存在一个极限环(非平凡周期解):

$$(1) \dot{x} = -3y + x - x(x^2 + y^2),$$

$$\dot{y} = 3x + y - y(x^2 + y^2).$$

$$(2) \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0, \text{ 其中 } f, f'_x \in C, f(0, 0) < 0, \text{ 且当 } x^2 + y^2 > a^2 > 0 \text{ 时 } f(x, y) > 0.$$

$$(3) \ddot{x} + (x^2 + 2\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

$$(4) \ddot{x} + (5x^4 - 9x^2 - 4)\dot{x} - x + x^3 = 0.$$

12. 试证明平面线性自治系统不可能有极限环.

13. 试证明下列系统无闭轨线:

$$(1) \dot{x} = -4x + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = y + y(x^2 + y^2).$$

$$(2) \dot{x} = x + y + \frac{1}{3}x^3 - xy^2, \quad \dot{y} = -x + y + x^2y + \frac{2}{3}y^3.$$

$$(3) \dot{x} = x(y - 1), \quad \dot{y} = x + y - 2y^2.$$

$$(4) \dot{x} = -y + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x(1 + ax), \text{ 其中 } a \neq 0, m \cdot n \neq 0.$$

$$(5) \dot{x} = \dot{y}, \quad \dot{y} = ax - bx^2 + cy - dy^2, \text{ 其中 } a, b, c, d \text{ 均为常数, 且 } c \neq 0.$$

14. 试证: 方程 $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0$ 不存在周期解, 其中 F 连续, 且满足 $uF(u) > 0 (u \neq 0)$.

15*. 试用例 2.2 中证明 Van der pol 方程存在极限环的方法, 来证明 Лтрагилёв 定理 2.12.

16. 试证下列系统(方程)存在唯一的稳定极限环:

$$(1) \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + y - x^3 - 3x^2y;$$

$$(2) \ddot{x} + \alpha(x^{2n} - \beta)\dot{x} + \gamma x^{2m-1} = 0, \text{ 其中 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 为正常数, } m, n \text{ 为正整数.}$$

17. 试证系统

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + xy, \quad \dot{y} = x,$$

至多有一个极限环.

18. 试证明定理 2.21 的推论.

19. 试证明定理 2.31 中式(2.32)和(2.33).

20. 试证明: 经坐标轴的平移或旋转, 连续向量场的旋转数不变.

21. 试证明: 经反射变换 $(x, y) \mapsto (-x, y)$ 或 $(x, y) \mapsto (x, -y)$, 连续向量场的旋转数相差一个符号.

22. 设 M_0 是连续向量场 $(X(x, y), Y(x, y))$ 的孤立奇点, 试证:

$$J_{M_0}(X, Y) = -J_{M_0}(Y, X),$$

$$Y_{M_0}(X + Y, Y) = J_{M_0}(X, Y).$$

23. 试按公式

$$J_{M_0}(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

来计算线性系统

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy,$$

当 $q = ad - bc \neq 0$ 时, 奇点 $O(0, 0)$ 的各种类型的指数.

24. 考虑具参数 α 的系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(\alpha)x + b(\alpha)y + X_2(x, y, \alpha), \\ \dot{y} &= c(\alpha)x + d(\alpha)y + Y_2(x, y, \alpha),\end{aligned}\tag{A}$$

其中 $X_2, Y_2 = o(r), r \rightarrow 0$ 时, 设

(i) $\Delta(0) \equiv a(0)d(0) - b(0)c(0) > 0, a(0) + d(0) = 0$;

(ii) $O(0, 0)$ 是 (A) 当 $\alpha = 0$ 时的稳定焦点;

(iii) 当 $\alpha > 0$ 时, O 立即变为 (A) 的不稳定焦点. 试证: 当 $\alpha > 0$ 且足够小时, 在 O 的邻域内至少存在 (A) 的一个稳定极限环.

补充与问题

1. Hilbert 第 16 问题

极限环的研究是定性理论中最重要、最困难的问题, 它引起了数学家、物理学家和技术科学家们的广泛兴趣. 20 世纪伟大的数学家 D. Hilbert 于 1901 年国际数学家大会上提出了 23 个数学难题^[22], 其中第 16 个问题的后半部分是: n 次多项式微分系统 (简称 n 次系统)

$$\frac{dx}{dt} = X_n(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y_n(x, y)$$

最多有几个极限环? 它们的相对位置如何?

这个问题提出至今已有 100 多年了, 但解决该问题的难度极大、进展甚慢. 迄今为止最好的结果是, 1986 年 Bamón^[23] 发表了 $n=2$ 时的结果: 对于给定的二次系统, 它至多只有有限个极限环; 1990 年 J. Ecalle^[24] 和 Илъяшенко^[25] 的结果: 对于给定的 n 次系统, 它至多只有有限个极限环.

我们用 A_n 表示所有 n 次系统的集合, $a \in A_n$, $N(a)$ 表示 a 的极限环的个数, 并记

$$H(n) = \sup\{N(a) \mid a \in A_n\}.$$

则上述问题可提为: $H(n)$ 是否有限? 如果有限, 则 $H(n)$ 为多少? 它们的相对位置如何? 这个问题远未找到解决的办法, 即使是 $H(2)$ 至今尚未严格解决.

2. $H(2)=3$? 的故事

由于 $H(n)$ 的研究难度极大, 许多数学家开始转入相对最简单的 $H(2)$ 入手. 1955 年, 苏联 Петровский 院士和 Ландис^[26] 用引入复域的办法, 极其困难地证明了二次系统最多有不超过 3 个实极限环. 这在当时是一个突破性的工作. 基于这个结论, 我国数学家秦元勋、董金柱等人不久就完成了二次系统可能出现极限环的各种相对位置的研究, 它们只可能是 $(1, 0), (2, 0), (1, 1), (3, 0), (1, 2)$ 5 种不同的分布, 并证明了这 5 种均可实现^[27~29].

但是,20世纪70年代中期,有人发现 Петровский 工作中有一个引理的证明有误,因此对 $H(2)=3$ 的结论提出质疑.1979年,我国的两个创造性的研究工作^{[30][31]}几乎同时举出了二次系统实现4个极限环的例子,它们的分布是(1,3).

现在,人们相信 $H(2)=4$,但证明的严格性还未被广泛认可.

3. 二次系统的全面研究

对 n 次系统的定性研究除了 Hilbert 第16问题这个数学世界难题外,还要研究对已给定的一个 n 次系统,它是否存在极限环?有几个?它的所有轨线的全局结构如何?对一般的 n 或 n 较大的具体整数时这是一件十分困难和复杂的事.人们自然想到,先从 $n=2$ (二次系统)做起,希望对这相对简单的情形研究得比较彻底,从中总结经验,一方面向更高的 n 推进,另一方面为全面解决 Hilbert 第16问题探索有效的途径与方法.

全面系统地研究二次系统开始于1962年叶彦谦^[3],他把有可能存在极限环的二次系统分成三个类型:

$$\text{I 类: } \dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x;$$

$$\text{II 类: } \dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x(1+ax);$$

$$\text{III 类: } \dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x(1+ax+by).$$

对这三个类型进行分类深入研究.在叶彦谦的领导与影响下,我国的许多常微分方程工作者投入了二次系统的全面定性研究,70年代中后期,国际上也有不少人先后加入了这个分类的研究行列.时至今日这方面的研究已发表了数百篇论文,形成了国际上我国处于领先地位的一个研究方向.

现在,基本上可以说 I 类系统的定性研究已完成了;II 类系统的研究已取得了大量成果,解决了大部分情况,但遗留问题还不少且难度大;III 类系统获得了一批成果,遗留的问题是大量的^[2,3].

人们在研究中发现,二次系统具有一些特殊的性质,例如:

- (1) 它的闭轨线一定是严格的凸闭曲线^[2];
- (2) 它的极限环所围成的区域内有且只有一个奇点,且是初等焦点^[32,35];
- (3) 它的初等焦点与中心的个数之和 ≤ 2 ^[33,27];
- (4) 它有中心时,一定不存在极限环^[34,35];
- (5) 它在三阶细焦点外围不存在极限环^[36];
- (6) 它有第一章补充4中指出的 баутин 和李承治给出的焦点判定量公式.

这些性质在二次系统的研究中起到很大的作用.

4. 三次系统及 $H(3)=?$ 的研究

研究了二次系统以后,自然会提出三次系统的相应问题.但这方面的研究状况,较之二次系统相距甚远,尚未见提出相应的分类研究,文献中比较集中一点的是右端缺少二次项的三次系统的定性研究,而完全三次系统的研究基本停留在一些特例上.究其原因,主要是二次系统所具有的许多重要的结论、性质[例如上面提到的特殊性质(1)~(6)],在三次系统中不成立了,特别是三次系统的焦点判定量公式至今没有找到,虽然对不完全三次

系统有一些这方面的结果^[37~40].

对于 $H(3)=?$ 的研究,文献中已经见到一些出现多个极限环的具体三次系统的例子,有出现 7 个极限环的^[37]或最多出现 11 个极限环的^[41,42].因此,可以肯定 $H(3)\geq 11$.但究竟 $H(3)=?$ 还是一个尚未解决的很困难的问题.

5. 广义 Liénard 系统的研究

由于 Liénard 系统

$$\dot{x} = -y - F(x), \quad \dot{y} = g(x)$$

在极限环的存在性,特别是唯一性研究上所处的地位和重要作用,引起人们对广义 Liénard 系统

$$\dot{x} = \varphi(y) - F(x), \quad \dot{y} = h(y) - g(x);$$

或

$$\dot{x} = \varphi(y) - F(x), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

等的研究.但较多见的是得到一些判定极限环存在的新的充分条件^[43~48],少见关于极限环唯一性方面的工作.因此,这也是一个值得进一步研究的课题.

6. 广义旋转向量场及其应用

在正文中已经说过,Duff 的旋转向量场的定义已被陈翔炎^[19~21]推广为广义旋转向量场,它们在给定系统的极限环个数与相对位置的研究中,已成为十分有力的工具.但在应用这一方法时却有许多技巧与注意点,对我们正确掌握和应用大有帮助.可参考文献^[2~4].

7. 求周期解的渐近方法

在定性研究的基础上,我们介绍几种近似计算周期解(极限环)的方法,这些方法有的也基于物理思考与几何直觉,具有一定的准确性和较大的应用价值.

(1) 小参数法(Poincaré & Lindstedt)

我们以 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + ax = \epsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad (1)$$

为例,其中 $\epsilon > 0$ 很小,视为方程的小参数.

$\epsilon=0$ 时,式(1)的解为

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta), \quad \omega^2 = a,$$

不妨取 $\theta=0$,则此解对应初值

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = A\omega. \quad (1)'$$

$\epsilon \neq 0$ 时,设式(1)的解可展成

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)\epsilon + x_2(t)\epsilon^2 + \cdots,$$

$$a = a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \cdots, \quad a_0 = a = \omega^2.$$

将它们代入式(1),比较 ϵ 的同次幂,得

$$\epsilon^0: \quad \ddot{x}_0(t) + a_0 x_0(t) = 0, \quad (2)_0$$

$$\epsilon^1: \quad \ddot{x}_1(t) + a_0 x_1(t) = -a_1 x_0(t) + (1 - x_0^2(t))\dot{x}_0(t), \quad (2)_1$$

$$\epsilon^2: \quad \ddot{x}_2(t) + a_0 x_2(t) = -a_2 x_0(t) - a_1 x_1(t) +$$

$$(1 - x_0^2(t))\dot{x}_1(t) - 2x_0(t)x_1(t)\dot{x}_0(t), \quad (2)_2$$

.....

它们分别配上初始条件

$$x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = A\omega; \quad (2)'_0$$

$$x_n(0) = 0, \quad \dot{x}_n(0) = 0, \quad n \geq 1, \quad (2)'_n$$

来求解. $n=0$ 时, 解即为

$$x_0(t) = A \sin \omega t,$$

$n=1$ 时, 求解方程

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -a_1 A \sin \omega t + A\omega(1 - \frac{1}{4}A^2)\cos \omega t + \frac{1}{4}A^3\omega \cos 3\omega t, \quad (3)_1$$

为避免引起共振, 充要条件是令

$$a_1 A = 0, \quad A\omega(1 - \frac{1}{4}A^2) = 0.$$

这样, 我们得到

$$a_1 = 0 \quad \text{及} \quad A = 2$$

($A=0$ 是不可取的). 这时, 有

$$x_0(t) = 2 \sin t$$

及式(3)₁ 成为

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 2\omega \cos 3\omega t.$$

它有特解 $-\frac{1}{4\omega} \cos 3\omega t$ 及通解

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t - \frac{1}{4\omega} \cos 3\omega t.$$

由初始条件(2)₁' 确定 A_1, B_1 , 得解

$$x_1(t) = \frac{1}{4\omega} (\cos \omega t - \cos 3\omega t).$$

同样的推理, 得 $a_2 = \frac{1}{8}$ 和式(2)₂ 及式(2)₂' 的解

$$x_2(t) = -\frac{29}{96\omega^2} \sin \omega t + \frac{3}{16\omega^2} \sin 3\omega t - \frac{5}{96\omega^2} \sin 5\omega t.$$

这样, 我们得到了式(1)的解到 ϵ 二次的近似式

$$\begin{aligned} x(t) &\approx x_0(t) + x_1(t)\epsilon + x_2(t)\epsilon^2 \\ &= (2 - \frac{29\epsilon^2}{96\omega^2}) \sin \omega t + \frac{\epsilon}{4\omega} \cos \omega t + \\ &\quad \frac{3\epsilon^2}{16\omega^2} \sin 3\omega t - \frac{\epsilon}{4\omega} \cos 3\omega t - \frac{5\epsilon^2}{96\omega^2} \sin 5\omega t. \end{aligned}$$

及由

$$a \approx a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2$$

$$= \omega^2 + \frac{1}{8}\epsilon^2,$$

得

$$\omega \approx \sqrt{a - \frac{1}{8}\epsilon^2} = a^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{\epsilon^2}{16a}).$$

(2) $K-B$ 平均方法 (A. H. КОЛМОГОРОВ, H. H. БОГОЛЮБОВ)

以方程

$$\ddot{x} + \epsilon f(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0 \quad (4)$$

为例, 其中设 f 对变元连续; $\epsilon > 0$ 很小时 $\epsilon|f(x, \dot{x})|$ 很小.

$\epsilon = 0$ 时, 方程(4)为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

它有解

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \equiv A \sin \psi, \quad \psi \equiv \omega t + \varphi, \quad (5)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos \psi. \quad (6)$$

$\epsilon \neq 0$ 时, 设 $A = A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ 都是 t 的函数, 但变化很慢, 方程(4)的解写成

$$x(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi(t)), \quad (7)$$

则有

$$\dot{x}(t) = \dot{A} \sin \psi + A(\omega + \dot{\varphi}(t)) \cos \psi.$$

它与(6)式比较, 得

$$\dot{A} \sin \psi + A \dot{\varphi}(t) \cos \psi = 0. \quad (8)$$

又把(6)式中 A, φ 看成 t 的函数, 对 t 求导, 得

$$\ddot{x}(t) = \dot{A}\omega \cos \psi - A\omega(\omega + \dot{\varphi}) \sin \psi, \quad (9)$$

将(5)、(6)、(9)式代入方程(4), 便得

$$\ddot{A} \cos \psi - A \dot{\varphi} \sin \psi = -\frac{\epsilon}{\omega} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi). \quad (10)$$

再从(8)和(10)两式中解出 $\dot{A}$ 和 $\dot{\varphi}$, 得

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon}{\omega} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\epsilon}{A\omega} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi.$$

这两个方程的右端都是 ϵ 的一次式, 可见当 ϵ 很小时, A 和 φ 都是变化很慢的 t 的函数, 且知 $\epsilon = 0$ 时 A 和 φ 都是常数. 因此, 我们把 $\dot{A}$ 和 $\dot{\varphi}$ 在关于 t 的 $\frac{2\pi}{\omega}$ 周期内取平均值, 也即在关于 ψ 在 2π 周期内取平均值, 得

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (11)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\epsilon}{2\pi A\omega} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \quad (12)$$

以这两个方程的解来决定方程(4)的解(7)中的 $A(t)$ 和 $\varphi(t)$, 这就是 $K-6$ 平均值方法的思想.

下面用此方法再解 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (13)$$

这里 $\omega=1$, 对应的

$$f(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) = -(1 - A^2 \sin^2 \psi) A \cos \psi.$$

分别由(11)、(12)式, 得

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\epsilon A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \sin^2 \psi) \cos^2 \psi d\psi \\ &= \frac{1}{2} \epsilon A (1 - \frac{1}{4} A^2), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \sin^2 \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi = 0. \quad (15)$$

解方程(14), 得

$$A^2 = 4\epsilon e^{\epsilon t} / (1 + \epsilon e^{\epsilon t}),$$

设 $t=0$ 时 $A=A_0$, 决定常数 $C=A_0^2/(4-A_0^2)$, 则方程(14)的解为

$$A(t) = A_0 e^{\frac{\epsilon t}{2}} / [1 + \frac{1}{4} A_0^2 (\epsilon^{\epsilon t} - 1)]^{\frac{1}{2}},$$

当 $A_0 \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 2.$$

而(15)式说明 $\varphi(t)=\varphi_0$ 为一常数, $\psi=t+\varphi_0$. 因此, 方程(13)的近似解是

$$x(t) \approx \frac{A_0 \epsilon^{\epsilon t/2}}{[1 + \frac{1}{4} A_0^2 (\epsilon^{\epsilon t} - 1)]^{\frac{1}{2}}} \sin(t + \varphi_0),$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 它趋于

$$x(t) \approx 2 \sin(t + \varphi_0),$$

这与小参数法所得结果是一致的.

参考文献

- [1] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math, 1901, 24:1~88, 或数学进展, 1957, 3:1
- [2] 叶彦谦, 等. 极限环论. 上海: 上海科学技术出版社, 1984
- [3] 叶彦谦. 多项式微分系统的定性理论. 上海: 上海科学技术出版社, 1995
- [4] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 2001
- [5] 蔡燧林, 钱祥征. 常微分方程定性理论引论. 北京: 高等教育出版社, 1994
- [6] Драгилёв АВ. Периодические решения дифференциального уравнения Нелинейных

- Колебаний. ПММ, 1952, 16: 85~88
- [7] 黄启昌, 史希福. 关于 Liénard 方程存在极限环的条件. 科学通报, 1982, 27(11): 645~646
- [8] 丁大正. Liénard 方程极限环的存在性. 应用数学学报, 1984, 7(2): 166~174
- [9] Филиппов А. Ф. Достаточное условие существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка. Мат. сб., 1952, 30(72): 171~180
- [10] Levinson N, Smith OK. A General Equation for relaxation oscillations, Duke Math. J., 1942, 9: 382~403
- [11] Sansone G. Sopra l'equazione di A. Liénard delle oscillazioni. Ann. Mat. Pure end Appl., 1949, 28(4): 153~181
- [12] Чжан чжи-фэн(张芷芬). О единственности предельных циклов некоторых уравнений нелинейных колебаний. ДАН СССР, 1958, 119(4): 659~662
- [13] Черкас Л. А., Жулевич, Л. И. Некоторые признаки отсутствия и единственности предельных циклов, Дифференц. уравнения, 1970, 6(7): 1170~1178
- [14] 曾宪武. Liénard 方程极限环的唯一性问题. 中国科学, A 辑, 1982, 1(1): 14~20
- [15] 庚建设, 钱祥征. Liénard 方程极限环的存在性和唯一性定理. 湖南大学学报, 1989, 16(4): 138~144
- [16] 张芷芬, 高素志. 一类非线性方程极限环的唯一性问题. 北京大学学报, 1986, 1: 1~14
- [17] Черкас Л. А. Методы оденки числа предельных циклов автономных систем Дифференц уравнения, 1977, 13(5): 779~802
- [18] Duff G. F. D. . Limit cycles and rotated vector fields. Annals of Math., 1953, 57: 15~31
- [19] 陈翔炎. 旋转向量场理论的应用(I). 南京大学学报(数学版), 1963, 1: 19~25
- [20] 陈翔炎. 旋转向量场理论的应用(II). 南京大学学报(数学版), 1963, 2: 43~50
- [21] 陈翔炎. 广义旋转向量场. 南京大学学报(自然科学), 1975, 1: 100~108
- [22] Hilbert D. Mathematische Probleme. Archiv der Math. u phys., 1901, 1: 213~237
- [23] Barmón R. Quadratic vector fields in the plane have finite number of limit cycles. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1986(64): 111~142
- [24] Ecalle J, Martinet J, Moussu R. Ramis J. P., C. R. Acad. Sci. Paris Ser. Math., 1987, 304: 375~377; Ibid 431~434
- [25] Ильяшенко Ю. С., УМН, 1987, 42(2): 223
- [26] Петровский У. Г., Ландис Е. М. О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P, Q -многочлены 2-й степени, Матем. сб. 1955, 37(79): 209~250
- [27] 董金柱. 方程组 $\frac{dx}{dt} = X_2(x,y), \frac{dy}{dx} = Y_2(x,y)$ 的奇点指数分布与其极限环线之位置.

数学学报,1958,2(8):258~268

- [28] 董金柱. 方程组 $\frac{dx}{dt}=X_2(x,y), \frac{dy}{dt}=Y_2(x,y)$ 的极限环的位置. 数学学报,1959,2(9):156~169
- [29] 秦元勋,等. 在平衡点附近 $\frac{dx}{dt}=P, \frac{dy}{dt}=Q$ 出现三个极限环的例子 (P, Q 为二次多项式). 数学学报,1959,2(9):213~226
- [30] 史松龄. 二次系统 (E_2) 出现至少四个极限环的例子. 中国科学,1979,11:1051~1056
- [31] 陈兰荪,王明淑. 二次系统极限环的相对位置与个数. 数学学报,1979,22(6):751~758
- [32] 余澍祥. 数学学报,1977,20(3):193~205
- [33] 叶彦谦. 科学纪录,1957,1(6):359~361
- [34] Лукашевич Н. А. . Диф. урав. ,1965,1(1):82~95
- [35] 蔡燧林. 工程数学学报,1989,6(1):92~94
- [36] 蔡燧林. 数学年刊,1981,2(4):475~477
- [37] 刘一戎. 一类三次系统的奇点量公式和可积条件, $M(3) \geq 7$
- [38] 刘一戎,李继彬. 论自治微分系统的奇点量. 数学年刊,1990,A11(6):717~724
- [39] 杨世藩,陈军. 缺二次项的三次系统中心焦点的判定(预印本)
- [40] Liu Yirong. Formula of focal value. Condition of centre and central integral for a class of planar cubic system, Kexue Tongbao,1987,2:85~87
- [41] 李继彬,黄其明. $n=3$ 的 Hilbert 第 16 问题, $H(3) \geq 11$. 科学通报,1985(12):958
- [42] Zoladek H. The solution of the center focus problem. Preprint,1992
- [43] 韩茂安. 一类三次系统极限环的个数与分布. 数学年刊,2002,2(23A):143~152
- [44] 韩茂安,范春燕. 一类四次系统极限环的个数与分布. 数学年刊,2005,6(26A):825~834
- [45] 陈海波,刘一戎. 一类五次系统的赤道极限环问题. 数学年刊,2003,2(24A):219~224
- [46] 黄克诚. 微分方程 $\frac{dx}{dt}=\varphi(y)-F(x), \frac{dy}{dt}=-g(x)$ 极限环的存在性. 数学学报,1980,4(23):483~490
- [47] 黄启昌,杨思认. 关于具交变阻尼的 Liénard 方程存在多个极限环的条件. 东北师大学报,1981,1:11~19
- [48] 林立聪. 微分方程 $\frac{dx}{dt}=\varphi(y)-F(x), \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$ 存在极限环的判别准则. 海南师专学报,1981,3:22~28
- [49] 周毓荣. 微分方程 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x), \dot{y}=-g(x)$ 的极限环的存在唯一性和唯二性. 数学年刊,1982,3(1):89~102

-
- [50] 吴开禄. 微分方程 $\dot{x} = \varphi(y) - F(x), \dot{y} = h(y) - g(x)$ 极限环的存在性. 海南大学学报, 1984, 1(2): 1~11
- [51] 詹尊楷. 微分方程 $\frac{dx}{dt} = \varphi(y) - F(x), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$ 极限环的存在性. 会议论文, 1987

第三章 平面系统的全局结构

在研究了轨线的局部性态,大范围性态之后,平面定性理论的理想目标,就是在全平面画出给定系统的全局结构相图.本章前两节就是介绍完成这一目标的步骤、方法和达到了这个目标的一些例子.第三节中我们通过几个实际例子来说明定性理论在现代科技中的应用.

第一节 无穷远奇点

要研究轨线在全平面的分布,自然会提出如何研究“无穷远”的问题. Poincaré 提出了先通过中心投影把无穷投影到单位球面的赤道上,然后再用正投影把下半个单位球面变到相平面的单位圆盘上,以此圆盘作为平面模型型的思路,完美地解决了这个问题.

一、Poincaré 球面与中心投影

作单位球面 C ,切相平面 β 于坐标原点 $S(0,0)$;以 C 的中心 O 为坐标原点作空间直角坐标系 $X-Y-Z$,令 X 轴和 Y 轴分别与相平面 β 上 x 轴和 y 轴平行且同向, Z 轴铅直向上指向北极 N ;称与 X 轴, Y 轴相交且平行于 β 平面的大圆为 C 的赤道(见图 3-1).

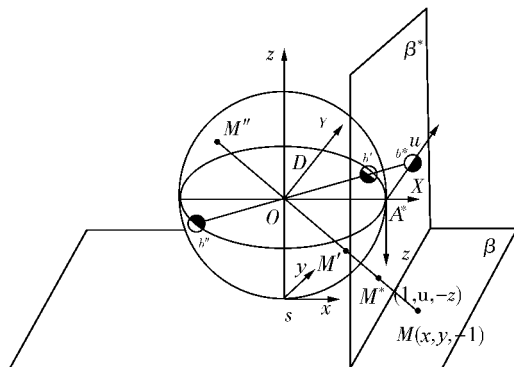


图 3-1

过相平面上任意点 $M(x, y)$ 连接直线 MO , 并延长交球面 C 于一对对径点 M' 和 M'' , 若把 M' 和 M'' 看做一点看待, 则这种“中心投影”建立了 β 上的点与 C 上点的一一对应. 当 β 平面上的点 M 沿 SM 方向离原点 S 越远, 则 M 按上述方式对应的对径点 M' 与 M'' 越接近赤道, 当 M 沿该方向趋于无穷远, 同对径点 M' 与 M'' 成为该方向的赤道上的一对点. 因此相平面 β 上每一个方向都有一个无穷远点, 它们对应赤道上相应方向上的点. 建立了这种对应关系的单位球面称为 **Poincaré 球面**. 要研究相平面上无穷远的邻域, 就化为研究球面 C 上赤道的邻域. 如果我们在球面上点 $A^*(1, 0, 0)$ 处作球面 C 的切平面 B^* , 且以点 A^* 为原点作 β^* 上的直角坐标系 $u-z$, u 轴与 Y 轴平行且同指向, z 轴与 Z 轴平行但反向朝下. 这样, 前述建立中心投影的连线也与平面 β^* 相交; 连接点 M, M', M'' 的直线也交 β^* 于 M^* ; 连接赤道上点 b', b'' 的直线交 u 轴上点 B^* . 于是, 研究赤道的邻域又转化为研究 β^* 平面上 u 轴的邻域了, 研究赤道上点 b', b'' 的邻域转化为研究 u 轴上点 B^* 的邻域了. 我们还应注意到 B^* 的上(下)半邻域对应于 $b''(b')$ 的下半邻域.

下面我们以 $X-Y-Z$ 坐标系为中介, 来建立坐标系 $x-y$ 与 $u-z$ 的关系. 相平面上任意点 $M(x, y)$ 用 $X-Y-Z$ 系表示是 $M(x, y, -1)$; M 点通过中心投影在 β^* 平面上的对应点 $M^*(u, z)$ 也用 $X-Y-Z$ 系表为 $M^*(1, u, -z)$, 由于 O, M^*, M 三点共线, 所以有

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{u} = \frac{-1}{-z},$$

即有

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}. \quad (3.1)$$

平面自治系统(2.2)经变换(3.1)后, 化为 β^* 平面上的系统

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -uzX\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zY\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \\ \frac{dz}{dt} &= -z^2X\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

相平面 β 上斜率为 μ_0 方向的无穷远点, 映射成平面 β^* 上的点 $(u_0, 0)$, 我们的首要任务是研究系统(3.2)的奇点 $(u^*, 0)$ 的邻域.

注意到变换(3.1)只有在 $x \neq 0$ 时双方才是一对一的, 也就是说它遗漏了相平面 β 的 y 轴上的点. 为了弥补, 我们又在球面 C 的点 $D(0, 1, 0)$ 处作 C 的切平面 $\hat{\beta}$, 且以点 D 为原点作用 $\hat{\beta}$ 上的直角坐标系 $v-z$, v 轴与 X 轴平行且同指向, z 轴与 Z 轴平行反向朝下. 与上面同样讨论, 可建立相平面 β 上坐标系

$x-y$ 与 $\hat{\beta}$ 平面上坐标系之间的变换.

$$x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z}, \quad (3.1)'$$

它把平面自治系统化为 $\hat{\beta}$ 平面上系统

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= zX\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) - zvY\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right), \\ \frac{dz}{dt} &= -z^2Y\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

对这个系统我们只需要研究 $D(0,0)$ 是否是奇点,如果它是奇点,再研究它领域中轨线如何分布.我们称变换(3.1)和(3.1)'为 **Poincaré 变换**.

在研究系统(3.2)和(3.2)的奇点 $(u^*, 0)$ 和 $D(0,0)$ 时常常遇到 $z=0$ 出现在分母上,为此我们采取如下的技术措施,这对 $X(x,y), Y(x,y)$ 是不可约多项式时是非常有效和方便的.把式(3.2)写成

$$\frac{du}{dt} = \frac{X^*(u, z)}{z^m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{Y^*(u, z)}{z^m},$$

这里 m 是使 X^*, Y^* 为 u, z 的不可约多项式的非负整数,作时间代换

$$d\tau = \frac{dt}{z^m},$$

则上式化为

$$\frac{du}{d\tau} = X^*(u, z), \quad \frac{dz}{d\tau} = Y^*(u, z). \quad (3.2)'$$

在讨论完式(3.2)'的奇点 $(u^*, 0)$ 的性质后,如何返回到系统(3.2)时我们要注意:

$m=0$ 时,式(3.2)与式(3.2)'一样;

m 是偶数时, τ 与 t 同号,式(3.2)与式(3.2)'无本质区别;

m 是奇数时,在 $(u^*, 0)$ 领域中 $z>0$ 部分 τ 与 t 同号; $z<0$ 部分 τ 与 t 异号,轨线走向倒转.

对系统(3.3)也作同样的处理和讨论.

二、Poincaré 圆盘

在完成了上述讨论后,再将 Poincaré 球面 C 的下半开球面和赤道垂直投影到相平面 β 上,得到一个单位闭圆盘 K ,它的中心是球面 C 的南极,也是相平面 β 的原点,相平面 β 上的无穷远点对应于 K 的边界圆周上的对径点,这样得到的全相平面 β 的一个模型 K 称为 **Poincaré 圆盘**,用它来描述平面动力

系统的全局结构是十分方便的.

在讨论具体例子之前,我们还着重说明一个圆盘 K 的圆周上的奇点与系统(3.2)和(3.3)所在的切平面 $\beta^*, \hat{\beta}$ 上奇点的位置、对应关系. 注意前面说过, β^* 平面上 u 轴上点 B^* 的上(下)半邻域是对应于赤道 $b''(b')$ 的下半邻域的. 因此我们有如图 3-2 所示图像.

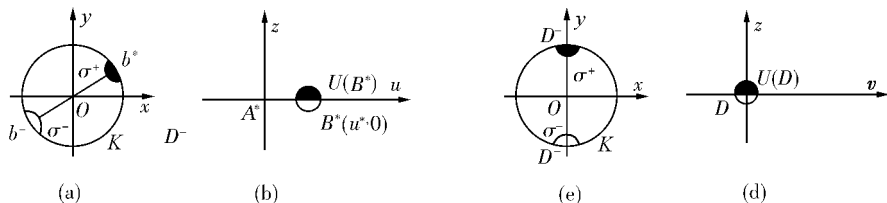


图 3-2

注意这里 $\beta^*, \hat{\beta}$ 平面上的坐标系 $u-z$ 和 $v-z$ 按通常习惯把 z 轴的正向朝上, 与图 3-1 中 z 轴指向相反, 此外, 白色半邻域中对应 $z < 0$, 因此若时间代换 $d\tau = \frac{dt}{z^m}$ 中 m 为奇数时, 该半邻域中的轨线走向要倒转.

例 3.1 求系统

$$\dot{x} = x(x+y-1) \quad \dot{y} = y(2x+\lambda y-3) \quad (3.4)$$

($1 < \lambda < 2$) 的无穷远奇点, 并在 Poincaré 圆盘上画出这些奇点邻域内的局部相图.

解 (1) 作 Poincaré 变换

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}.$$

系统(3.4)变为

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{u}{z}[-2z + (\lambda - 1)u + 1],$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z - u - 1.$$

再令

$$d\tau = \frac{dt}{z},$$

上系统又化为

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u[-2z + (\lambda - 1)u + 1] \equiv X^*(u, z), \\ \frac{dz}{d\tau} &= (z - u - 1)z \equiv Y^*(u, z). \end{aligned} \quad (3.4)'$$

求式(3.4)'的奇点($u^*, 0$), 即从

$$X^*(u, 0) \equiv u[(\lambda - 1)u + 1] = 0,$$

$$Y^*(u, 0) \equiv 0$$

中求得无穷远点 $B_1(0, 0)$ 和 $B_2(\frac{1}{1-\lambda}, 0)$. 由

$$B_1(0, 0) \text{ 对应 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad q = -1;$$

$$B_2(\frac{1}{1-\lambda}, 0) \text{ 对应 } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{-2+\lambda}{1-\lambda} \end{pmatrix}, \quad q = \frac{2-\lambda}{1-\lambda} < 0,$$

知它们都是鞍点.

(2) 再作 Poincaré 变换

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

化式(3.4)为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{z}(2z - v + 1 - \lambda),$$

$$\frac{dz}{dt} = 3z - 2v - \lambda.$$

再令 $d\tau = \frac{dt}{z}$, 得

$$\frac{dv}{d\tau} = v(2z - v + 1 - \lambda) \equiv \hat{X}(v, z), \quad (3.4)''$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(3z - 2v - \lambda) \equiv \hat{Y}(v, z).$$

看 $D(0, 0)$ 是否是式(3.4)''的奇点, 由 $\hat{X}(0, 0) = \hat{Y}(0, 0) = 0$ 知, D 是奇点, 且它对应的

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad q = \lambda(\lambda - 1) > 0, \quad p = 2\lambda - 1 > 0,$$

$$\Delta = p^2 - 4q = 1,$$

知 $D(0, 0)$ 是稳定的结点.

(3) 因为 $z=0$ 是式(3.4)'和式(3.4)''的解, 所以赤道(圆盘 K 的边界圆周)是由轨线和奇点连通构成的. 画出圆盘边界上奇点 $B'_1(0, 0)$, $B'_2(\frac{1}{1-\lambda}, 0)$, $\frac{1}{1-\lambda} < 0$ 和 $D'(0, 0)$ 三点的半邻域(如图 3-3), 先定 D' 半邻域内轨线都是趋

向它的(稳定结点),再由于 B'_1, D' 之间无其他奇点,向量场是连续的,确定鞍点 B'_1 半邻域中在边界圆上的分界线是离开 B'_1 的,同理鞍点 B'_2 的分界线在边界圆上是趋于 B'_2 的.

(4) 由于时间代换 $d\tau = \frac{dt}{z}$ 对应 $m=1$ 是奇数,故 B'_1, B'_2, D' 相应的对径点 B''_1, B''_2, D'' 半邻域中轨线全部倒向.

这样,我们就得到了原系统(3.4)的无穷远奇点在 Poincaré 圆盘模型上的局部相图(图 3-3).

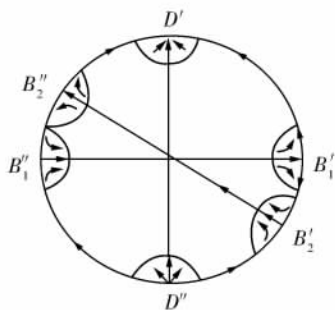


图 3-3

例 3.2 求系统

$$\dot{x} = x + y + x^2y, \quad \dot{y} = -2x - y + xy^2 \quad (3.5)$$

的无穷远奇点,并在 Poincaré 圆盘上画出这些奇点邻域的局部相图.

解 作 Poincaré 变换

$$x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z},$$

化式(3.5)为

$$\frac{du}{dz} = -2 - 2u - u^2, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z}[(1+u)z^2 + u].$$

令 $d\tau = \frac{dt}{z}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= -(2 + 2u + u^2), \\ \frac{dz}{d\tau} &= -[(1+u)z^2 + u]. \end{aligned} \quad (3.5)'$$

这个系统 $(u^*, 0)$ 形的奇点只有 $B_1(0, 0)$, 显然它是鞍点. 注意 $z=0$ 并不是式(3.5)'的解, 此鞍点的 4 条分界线也不是沿坐标轴, 不难求出它们分别沿直线 $u = \sqrt{2}z$ 和 $u = -\sqrt{2}z$. 如图 3-4 所示.

再作变换

$$x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z},$$

化式(3.5)为

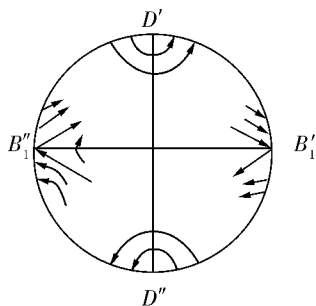


图 3-4

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= 1 + 2v + 2v^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{z}[-(2v+1)z^2 + v].\end{aligned}$$

再令 $d\tau = \frac{dt}{z}$, 得

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau} &= z(1 + 2v + 2v^2), \\ \frac{dz}{d\tau} &= (2v+1)z^2 - v.\end{aligned}\tag{3.5}''$$

显然 $D(0,0)$ 是它的奇点. 注意式 (3.5)'' 在 D 点的线性近似系统是

$$\frac{dv}{d\tau} = z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -v,$$

$D(0,0)$ 是它的中心, 所以对式 (3.5)'' 来说, 判断 D 的类型是中心-焦点判定问题. 由对称原理(线素场对称于 v 轴)知, $D(0,0)$ 是式 (3.5)'' 的中心. 它们在圆盘上的局部相图如图 3-4 所示.

例 3.3 作出系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(3 - x - ny), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-1 + x + y)\end{aligned}\tag{3.6}$$

($n > 3$)

在 Poincaré 圆盘上一切无穷远点邻域的轨线分布.

解 作变换

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z},$$

系统 (3.6) 化为

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= \frac{2u - 4uz + (n+1)u^2}{z}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= 1 + nu - 3z.\end{aligned}$$

令
$$d\tau = \frac{dt}{z},$$

得系统

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= 2u - 4uz + (n+1)u^2, \\ \frac{dz}{d\tau} &= z + nu - 3z^2.\end{aligned}\tag{3.6}'$$

求系统(3.6)'的 $(u^*, 0)$ 形奇点得 $C(0, 0), B(-\frac{1}{n+1}, 0)$. 容易判定 C 是不稳定结点, B 是稳定结点.

再作变换

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

化系统(3.6)为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-(n+1)v + 4vz - 2v^2}{z},$$

$$\frac{dz}{dt} = -1 - v + z.$$

又令 $d\tau = \frac{dt}{z}$, 得

$$\frac{dv}{d\tau} = -(n+1)v + 4vz - 2v^2,$$

(3.6)''

$$\frac{dz}{d\tau} = -z - vz + z^2.$$

显然 $D(0, 0)$ 是它的奇点, 且是稳定结点.

在圆盘的边界圆上先画出 $C'(0, 0), B'(-\frac{2}{n+1}, 0), D'(0, 0)$ 三个半邻域内轨线分布,

注意 $z=0$ 是解, 又时间代换 $d\tau = \frac{dt}{z}$ 中对应的 $m=1$, 故相应的三个对径点半邻域 C'', B'', D'' 内轨线走向倒转, 如图3-5所示.

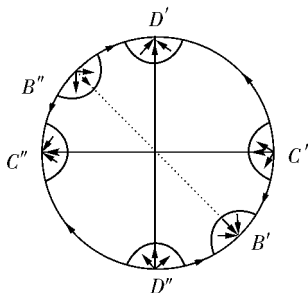


图 3-5

第二节 全局结构的例子

对给定的一个平面自治系统, 画出它在 Poincaré 圆盘上全部轨线的总图像, 称为该系统的全局结构相图. 要完成这个总图像一般来说是十分困难而难以做到的, 本节权以几个较简单的、能实现的例子来说明完成这个总图像的步骤. 它通常分:

- (i) 求出系统有限处奇点及判定其类型;
- (ii) 求出特殊积分直线;

- (iii) 判断有无闭轨及其位置;
- (iv) 求出无穷远奇点及它们邻域中轨线分布;
- (v) 判定特殊的分界线的走向.

把以上所得信息标画在 Poincaré 圆盘上, 再按向量场的连续性连接相关轨线, 基本上就可画出我们所要的全局结构相图了.

例 3.4 研究并确定系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x(1+x^2-2y^2) \equiv X(x,y), \\ \dot{y} &= -y(1-4x^2+3y^2) \equiv Y(x,y)\end{aligned}\quad (3.7)$$

的全局结构相图.

解 (1) 求出有限处奇点并确定类型. 令

$$\begin{aligned}2x(1+x^2-2y^2) &= 0 \\ -y(1-4x^2+3y^2) &= 0,\end{aligned}$$

求出奇点 $O(0,0), A_1(1,1), A_2(-1,1), A_3(-1,-1), A_4(1,-1)$. 按通常的判定法易知, O 是鞍点, 其他 4 点都是稳定焦点.

(2) 显然 $x=0$ (y 轴) 和 $y=0$ (x 轴) 都是解, 系统若有闭轨也不能与坐标轴相交.

(3) 判断闭轨是否存在.

注意到系统对称于 x 轴、 y 轴, 也对称于原点 O , 所以只需讨论第一象限是否存在闭轨即可. 我们用 Dulac 判据, 取 $B(x,y) = -x^{-\frac{3}{2}}y^{-2}$, 通过计算得

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = -x^{-\frac{3}{2}}y^{-2}(x^2+y^2),$$

它在第一象限内恒小于零, 所以系统无闭轨.

(4) 讨论无穷远的性质.

作变换

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{y}{z},$$

系统(3.7)化为

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{2u - 3uz^2 + u^3}{z^2}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{-2 - 4u^2 - 2z^2}{z}.\end{aligned}$$

令 $d\tau = dt/z^2$, 则它化为

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= 2u - 3uz^2 + u^3, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -2z + 4u^2z - 2z^3.\end{aligned}\quad (3.7)'$$

系统(3.7)'在 u 轴上有奇点 $C(0,0)$, 容易判定它是鞍点.

再作变换

$$x = \frac{v}{2}, \quad y = \frac{1}{z},$$

化系统(3.7)为

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{-v + 3vz^2 - 3v^3}{z^2}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{3 - 4v^2 + z^2}{z},\end{aligned}$$

又令 $d\tau = \frac{dt}{z^2}$, 化为

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau} &= -v + 3vz^2 - 3v^3, \\ \frac{dz}{d\tau} &= 3z - 4v^2z + z^3.\end{aligned}\quad (3.7)''$$

系统(3.7)''的奇点 $D(0,0)$ 也是鞍点.

由于 $z=0$ 是系统(3.7)', (3.7)''的解, 坐标轴 $x=0, y=0$ 是系统(3.7)的解, 所以两个无穷远鞍点的分界线明显落在这些解上.

综合以上信息, 作出圆盘上的全局结构图 3-6, 注意 $d\tau = \frac{dt}{z^2}$ 中对应的 $m=2$, C', D' 的对称点 C'', D''

D'' 邻近轨线走向不倒向.

例 3.5 研究 Van der Pol 方程对应的系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu(1 - x^2)y \quad (3.8)$$

($\mu > 0$) 的全局结构.

解 在例 2.2 中已讨论过系统(3.8)的唯一有限奇点 $O(0,0)$ 是不稳定焦点(当 $\mu < 2$ 时), 或不稳定结点(当 $\mu > 2$ 时), 不稳定退化结点(当 $\mu = 2$ 时), 总之, 对一切 $\mu > 0$, O 总是一个负向渐近稳定型的奇点.

考虑无穷远处, 作变换

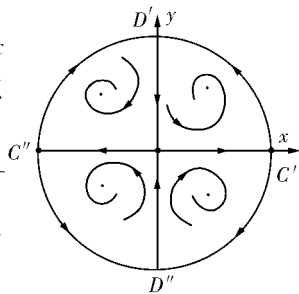


图 3-6

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z},$$

系统(3.8)化为

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{z^2}[-\mu u - (u^2 - \mu u + 1)z^2],$$

$$\frac{dz}{dt} = -uz.$$

令 $d\tau = \frac{dt}{z^2}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -\mu u - (u^2 - \mu u + 1)z^2, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -uz^3. \end{aligned} \quad (3.8)'$$

显然 u 轴($z=0$)上有一个奇点 $B_1(0,0)$, 它是有一个零特征根的 Liapunov 型高次奇点, 按第一章第四节的方法知, B_1 是鞍点. 注意 $z=0$ 是系统(3.8)' 的解, 坐标轴不是解, B_1 的两条分界线在边界圆上.

再作变换

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

化系统(3.8)为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{z^2}[\mu v^3 + (1 - \mu v + v^2)z^2],$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}[\mu v^2 + (v - \mu)z^2].$$

又令 $d\tau = \frac{dt}{z^2}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \mu v^3 + (1 - \mu v + v^2)z^2, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \mu v^2 z + (v - \mu)z^3. \end{aligned} \quad (3.8)''$$

显然 $D(0,0)$ 是它的奇点, 由于系统(3.8)'' 无线性项, 且用 Frömmers 方法判定 D 有困难, 改用如下办法: 作代换 $w = z^2$, 系统(3.8)'' 化为

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \mu v^3 + (1 - \mu v + v^2)w, \\ \frac{dw}{d\tau} &= 2w[\mu v^2 + (v - \mu)w]. \end{aligned} \quad (3.8)^*$$

此系统有线性项,对应的系数矩阵是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,两个特征根均为零,用第一章第四节中方法判定知,系统(3.8)*的 $(0,0)$ 是不稳定结点.所以系统(3.8)''的 $D(0,0)$ 也是不稳定结点.

注意 $d\tau = \frac{dt}{z^2}$ 中对应的 $m=2$ (偶数),故 B_1'', D'' 半邻域中的轨线不倒向.这时,赤道(圆盘边界圆)充分外境界,负向渐近稳定奇点 O 充分内境作用,应用环域定理说明有限处有极限环存在.在第二章第三节中已证明系统极限环唯一.故可画出全局结构相图如图3-7所示(其中 O 以焦点为例).

例 3.6 研究并作出例 3.3 中系统(3.6)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(3-x-ny), \\ \dot{y} &= y(-1+x+y) \end{aligned} \quad (n > 3) \quad (3.6)$$

的全局结构相图.

解 (1) 求出奇点 $O(0,0), A_1(0,1), A_2(3,0)$

和 $A_3(\frac{n-3}{n-1}, \frac{2}{n-1})$,容易判定 O, A_1, A_2 都是鞍点;

A_3 的情况较复杂,将坐标原点移到 A_3 后,得线性部分系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{3-n}{n-1} & \frac{n(3-n)}{n-1} \\ \frac{2}{n-1} & \frac{2}{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} q &> 0 \quad (n > 3 \text{ 时}) \\ p &= \frac{n-5}{n-1}. \end{aligned}$$

故得

$$A_3\left(\frac{n-3}{n-1}, \frac{2}{n-1}\right) \begin{cases} \text{不稳定的焦点或结点, } 3 < n < 5, \\ A_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 中心或焦点, } n = 5, & \text{需进一步判定.} \\ \text{稳定焦点, } n > 5. \end{cases}$$

需进一步解决 $n=5$ 时点 $A_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 的中心-焦点判定.容易验算

$$F(x, y) \equiv xy^3 \left(\frac{x}{3} + y - 1 \right)^2 = c \geq 0$$

是系统(3.6)_{n=5}的解族,这只要验算

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} \right)_{(3.6)_{n=5}} = 0$$

即可.在直线 $x=0, y=0, \frac{x}{3} + y - 1 = 0$ 上有 $F(x, y) = 0$,这三条直线围成的三角

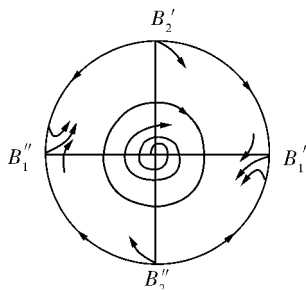


图 3-7

形区域内部 $F(x, y) > 0$, 可证明 $F(x, y)$ 在点 $A_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 处取最大值. 因此 $xy^3 \left(\frac{x}{3} + y - 1 \right)^2 = c \geq 0$ 是一族围绕着 $A_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 的闭轨线, 即 $A_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 是中心, 如图 3-8(a) 所示.

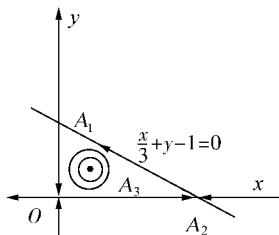
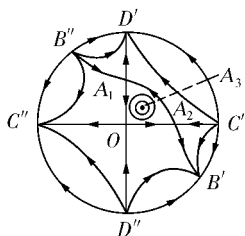
(a) $n=5$ (b) $n=5$

图 3-8

(2) $x=0$ 和 $y=0$ 都是系统 (3.6) 的解, O, A_1, A_2 三个奇点都在坐标轴上, 所以若有闭轨只能在奇点 A_3 所在的第一象限. 取 Dulac 函数

$$B(x, y) = x^{\frac{n-3}{n-1}} y^{\frac{2}{n-1}},$$

经计算有
$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = \frac{5-n}{n-1} x^{\frac{n-3}{n-1}} y^{\frac{2}{n-1}}.$$

当 $n \in (3, 5)$ 及 $n > 5$ 时, 上式右端不变号, 从而在第一象限无闭轨, 也无含有限个奇点的奇异闭轨. $n=5$ 时 $A_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 周围都是闭轨的情形上面已讨论过.

(3) 无穷远奇点的情形已在例 3.3 中讨论过.

我们把有限处的 4 个奇点标在图上, 注意坐标轴是解, 所以鞍点 O 的 4 条分界线在坐标轴上, 标出指向, 鞍点 A_1, A_2 各有 2 条分界线在坐标轴上. 把无穷远点 C (不稳定结点), B, D (都是稳定结点) 也标在圆周上, 画出指向.

(4) 确定 n 在不同取值时鞍点 A_1, A_2 另 2 条分界线的走向.

$n=5$ 时, 在 (1) 中已讨论了. 直线 $\frac{x}{3} + y - 1 = 0$ 是解, 它恰好连接 A_1, A_2 点, 它们的分界线就都落在该直线上, 可作出全局结构如图 3-8(b) 所示.

$n \in (3, 5)$ 时, 第一象限中离开 A_2 的分界线不能趋于 A_1 , 否则它将使

$\overline{OA_3}, \widehat{A_3A_2}, \overline{A_2O}$ 围成一个含 3 个奇点的奇异闭轨, 与 (2) 中的结论矛盾. 这样, 该分界线只能趋于 D' . 这时, 第一象限中趋于 A_1 的分界线只能发自不稳定焦点 A_3 了, 全局结构如图 3-9(a) 所示.

$n > 5$ 时, 第一象限中趋于 A_1 的分界线只能发自无穷远 C' 处. 这时离开 A_2 的分界线在第一象限中只能趋于稳定焦点 A_3 了, 全局结构如图 3-9(b) 所示.

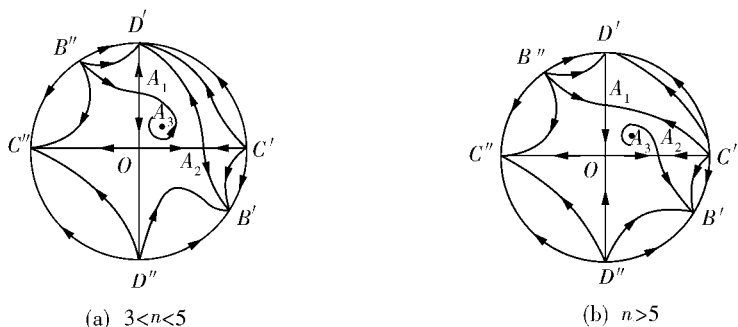


图 3-9

最后, 我们不加证明地引用一个定理.

定理 3.1 Poincaré 圆盘上的平面连续自治系统, 若只有孤立奇点, 且将圆盘边界圆上一对对径奇点看做一个奇点来计数, 则在此圆盘上奇点指数之和等于 1.

这个结论对于平面自治系统的全局结构分析很有用处, 可以用它来检验关于奇点的个数与类型的判定是否有错, 也可用它来预测最后一个奇点的某些特征.

我们用定理结论来检查例 3.4 中奇点部分的计算与判定时, 有限处共 5 个奇点: 4 个焦点, 1 个鞍点, 指数和为 $4 - 1 = 3$; 无穷远处 2 个鞍点, 指数和为 -2 ; 圆盘上总的指数和为

$$4 - 1 - 2 = 1,$$

同理检查例 3.5, 例 3.6 都是对的. 如果按此检查发现不对, 那肯定是在计算奇点个数或判定奇点类型上发生了错误.

第三节 几个应用实例

平面定性理论所建立的向量场分析方法,常常为解决近代科技中的非线性问题提供了有效的手段.前面几章中多处讲到的研究非线性振动

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

的周期解(极限环)问题和全局结构等就是很好的例证.本节还要讲述两个实用的例子,我们除介绍定性方法的运用外,还将介绍数学模型的建立及所得数学结论回归到实际问题时的具体解释.

一、两物种生存竞争模型的定性分析

1. 数学模型

我们先从简单生态方程说起.

两个物种,一个是捕食者,成员数以 y 计;另一个充当食物,成员数为 x ,则首先有

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(x - \sigma_0)y \equiv (Cx - D)y,$$

这里 $\alpha > 0$ 是比例常数, $\sigma_0 > 0$ 是维持 $y(t)$ 增长的最低限度食物数,改变量应与 $(x - \sigma_0)$ 和 y 成正比.另外

$$\begin{aligned} x \text{ 的增长率} &= \text{出生率} - \text{死亡率} = A - \frac{Bxy}{x} \quad \left(\frac{\text{死亡数}}{\text{总数}} \right) \\ &= A - By, \end{aligned}$$

$$x \text{ 的(瞬时)增长率} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} / x(t) = \frac{dx}{dt} / x(t),$$

两式结合,得

$$\frac{dx}{dt} = (A - By)x.$$

它与上面的微分方程一起构成 **Volterra-Lotka 捕食方程**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - By)x, \\ \dot{y} &= (Cx - D)y. \end{aligned} \quad (A, B, C, D \text{ 皆正})$$

如果考虑到**社会摩擦**造成的影响:例如成员多了就有居住拥挤、疾病易于传染……造成成员死亡.即每个物种的成员数有一个极限值 η ,当成员数超过 η 时增长率为负,以 x 为例有

$$x \text{ 的增长率} = \lambda(\eta - x), \lambda > 0,$$

于是它满足**极限增长方程**

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\eta - x)x,$$

即 $\frac{dx}{dt}$ 的右端出现了非线性项 $(-\lambda x^2)$. 对成员 y 也是这样. 那么, 考虑了社会摩擦对物种成员增长的影响, 即让非线性项 $(-\lambda x^2)$ 和 $(-\mu y^2)$ 分别进入上述捕食方程右端, 我们得到**极限增长的捕食方程**

$$\dot{x} = (A - By - \lambda x)x.$$

$$\dot{y} = (Cx - D - \mu y)y,$$

其中常数 A, B, C, D, λ, μ 均为正.

我们这里研究的是, 两物种生存竞争的一般生态模型

$$\begin{aligned}\dot{x} &= M(x, y)x, \\ \dot{y} &= N(x, y)y,\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 x 与 y 的增长率 M 与 N 都是非负变量 x, y 的函数, 有连续一阶偏导数, 且满足下面三个条件:

(i) 一物种成员数增加时, 另一物种的增长率下降. 所以

$$\frac{\partial M}{\partial y} < 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} < 0;$$

(ii) 任一物种的成员数过多, 两物种都不能增长. 所以存在常数 $K > 0$, 使当 $x \geq K$ 或 $y \geq K$ 时,

$$M(x, y) \leq 0, \text{ 且 } N(x, y) \leq 0;$$

(iii) 每一物种自身又受极限增长的限制. 即存在常数 $a > 0, b > 0$, 使

当 $x < a$ 时, $M(x, 0) > 0$; $x > a$ 时, $M(x, 0) < 0$;

当 $y < b$ 时, $N(0, y) > 0$; $y > b$ 时, $N(0, y) < 0$.

2. 定性分析

根据以上条件可知, 当 x_0 满足条件 $0 \leq x_0 \leq a$ 时, 直线 $x = x_0$ 恰与 $M(x, y) = 0$ 交于一点. 再由条件 (i) 和隐函数定理知, 方程 $M(x, y) = 0$ 确定一个非负的, 有连续一阶导数的函数 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq a$), 记它对应的曲线为 α , α 把 R' 分为上下两部分: 上部分 $M < 0$, 下部分 $M > 0$ [见图 3-10(a)].

类似地, 从 $N(x, y) = 0$ 确定出一个非负的, 有连续一阶导数的函数 $x = g(y)$ ($0 \leq y \leq b$). 记它对应的曲线为 β , β 把 R' 分为左右两部分: 左边 $N > 0$, 右边 $N < 0$ [见图 3-10(b)].

以下分两种情况进行讨论:

(1) α, β 不相交.

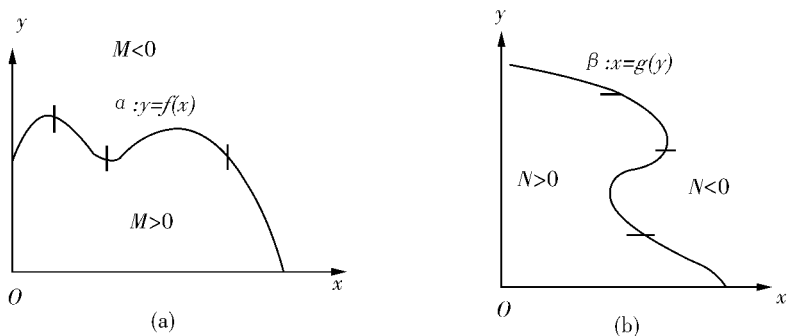


图 3-10

这时平衡点有三个: $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$. 如果 α 在 β 的左边(即 β 在 α 的上边), 分析向量场的分布易知平衡点 $(0,0)$ 是完全不稳定的(负向渐近稳定的); $(a,0)$ 是鞍点; $(0,b)$ 是渐近稳定的. 因此 R' 内一切轨线都趋于 $(0,b)$, 如图 3-11 所示.

如果 β 在 α 下边(即 α 在 β 的右边), 由向量场的分析可知, $(0,0)$ 仍是完全不稳定奇点, $(0,b)$ 是鞍点, $(a,0)$ 是渐近稳定的奇点. 故 R' 内一切轨线都趋于 $(a,0)$, 如图 3-12 所示.

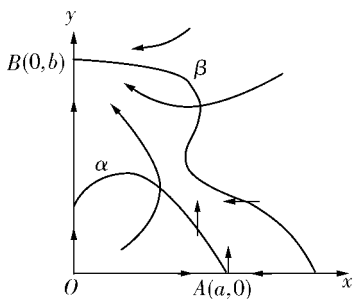


图 3-11

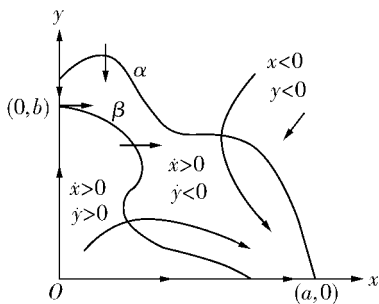


图 3-12

(2) α 与 β 相交. 设只有有限个交点.

这时平衡点除 $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ 外, 还有有限个平衡点(见图 3-13). 曲线 α 和 β 及坐标轴将 R' 分成有限个单连通的区域, 在每一个区域内部 $\dot{x}$ 与 $\dot{y}$ 不变号, 称之为基本区域. 不难看出, 基本区域是正不变集或负不变集. 例如, 某基本区域 Ω 的内部是 $\dot{x} > 0, \dot{y} > 0$ 时, 此 Ω 必在 α 的下面, β 的左边, 从而 Ω 的边界点凡属于 β 者, 轨线通它时是由左向右的($\dot{x} > 0$); 凡属于 α 者, 轨线通过它时是由下向上($\dot{y} > 0$). 总之, 轨线通过 Ω 的边界点(除平衡点外)时均

由内向外,所以 Ω 是负不变集.

命题 方程组(3.9)的每一条轨线,当 $t \rightarrow +\infty$ 时,都趋向于有限个平衡点之一.

证明 考虑方程组(3.9)从 R' 内一点 (x_0, y_0) 出发的轨线 $x = x(t), y = y(t)$,若当 $t \rightarrow +\infty$ 时它总保持在某一基本区域内不离开,则由轨线的单调性和基本区域的有界性,当 $t \rightarrow +\infty$ 时此轨线必有极限点,由极限集的性质,这个极限点是轨线唯一的 ω 极限点——平衡点.

若此轨线从一个基本区域进入到另一个基本区域,则后一个基本区域必是正不变集,即当 $t \rightarrow +\infty$ 时轨线总保持在此基本区域内.同理,它趋于某个平衡点.证毕.

3. 结论的实际解释

我们看着图形对照实际问题来作结论的解释:

对照图 3-11,图 3-12,(1)的结论告诉我们,两物种竞争共同的食物,所以当两物种成员都很少时食物充分,两者都增加;当任何一种成员太多时,两者都减少,减到一定程度后,若 α 到 β 的左边(图 3-11)时,继而 x 物种减少而 y 物种增加,最后 x 灭绝而 y 稳定到一定数量;若 β 在 α 的下边(图 3-12)时,继而 y 物种减少而 x 物种增加,最后 y 灭绝而 x 稳定到一定数量.

对照图 3-13,(2)的结论告诉我们,当两物种成员都很少时,两者都增加,这一点与上面相同.继续发展下去虽理论结论(命题)告诉我们,任何情况下都将稳定到一个平衡点,但从图上告诉我们,绝大多数情况下要么稳定到 P 点—— x 物种稳定在较多数量, y 物种稳定在较少数量;要么稳定到 $(0, b)$ —— x 物种灭绝.此外进一步分析,可以判定图中 q 点是鞍点,设 l 是它的一条分界线(为清楚计画在图 3-14 上).它下侧两点 P_0, P_1 出发的轨线都趋于 P ,上侧 P_2 出发的轨线却趋

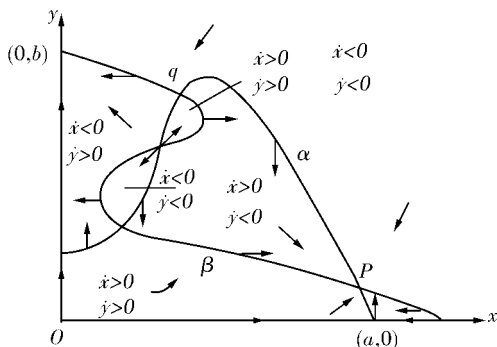


图 3-13

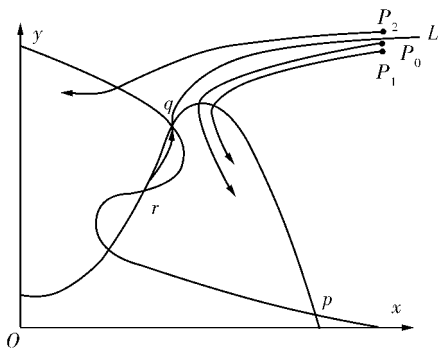


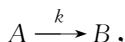
图 3-14

于 $(0, b)$ 点. 这说明, 有时生态的改变不影响两个物种的最后平衡状态, 但也有时, 由于某一突然事件, 例如某物种来了一批新成员, 或一场森林火灾, 或一种疾病流行……改变了原来的生态状况, 使 P_0 跳到邻近的 P_2 , 这样一来后果大不相同, 原来是可以共存下去的(趋于 P), 而现在将以 x 物种灭绝而告终[趋于 $(0, b)$].

二、生化反应中三分子模型的定性分析

1. 数学模型

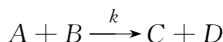
生化反应中, 一种物质 A 经反应生成另一种物质 B 的反应过程常写成 $A \rightarrow B$, 由实验知, 反应过程中 A 的浓度 $[A]$ 随时间的变化率, 即反应速度常常服从正比机理, 又表作



$k > 0$ 是比例系数. 写成微分方程是

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A],$$

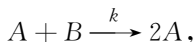
这里的负号表示反应过程中 A 的浓度下降了. 类似地, 反应过程



写成微分方程是

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A][B], \quad \frac{d[B]}{dt} = -k[A][B].$$

反应过程

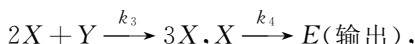
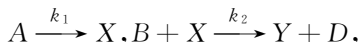


可写成

$$\frac{d[A]}{dt} = k[A][B], \quad \frac{d[B]}{dt} = -k[A][B].$$

这里第一方程中 k 前无负号是因为反应中又生成了 A , 且浓度升高了.

根据这种对应关系, 我们现在研究一种三分子无扩散的反应过程:



这里 A 和 B 是初始反应物质, D 和 E 是生成物质, 它们的浓度都是可以控制的常数, 令 $[A] = a, [B] = b; X$ 和 Y 是中间产物, 它们的浓度是随时间变化的函数, 令 $[X] = x, [Y] = y$, 多个反应过程总和的浓度变化率为各反应过程浓

度变化率的叠加. 于是推得上述反应过程的微分方程表示是

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1 a - k_2 bx + k_3 x^2 y - k_4 x, \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 bx - k_3 x^2 y.\end{aligned}$$

我们作变换

$$\xi = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} x, \quad \eta = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} y, \quad \tau = k_4 t,$$

记常数

$$\frac{k_1 a}{k_2} \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} = \alpha, \quad \frac{k_2 b}{k_4} = \beta,$$

上系统化为(为方便计仍以 x, y, t 记变量)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha - (\beta + 1)x + x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x - x^2 y,\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$, 这就是本问题的数学模型.

2. 定性分析

我们在第二章第三节中讨论极限环唯一性的例 2.8 时, 研究的就是系统 (3.10), 那里已求出 $P(\alpha, \beta/\alpha)$ 是系统 (3.10) 有限处唯一奇点, 且

当 $\beta > 1 + \alpha^2$ 时, P 是不稳定焦点或结点;

当 $\beta < 1 + \alpha^2$ 时, P 是稳定焦点或结点;

当 $\beta = 1 + \alpha^2$ 时, P 是中心或焦点(中心-焦点判定).

现在研究无穷远奇点, 令

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}, \quad d\tau = \frac{dt}{z^2},$$

系统 (3.10) 化为

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= -u + \beta z^2 - u^2 + (1 + \beta)uz^2 - \alpha uz^3, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -uz + (1 + \beta)z^3 - \alpha z^4.\end{aligned}$$

因此求出 u 轴 ($z=0$) 上奇点 $C(0,0)$ 及 $B(-1,0)$. C 点是 Liapunov 型高阶奇点, 用第一章第四节的方法可判定它是鞍点, 注意 $z=0$ 是解, 它的两条分界线在赤道上. 对于奇点 $B(-1,0)$, 在作平移

$$u = u_1 - 1, \quad z = z$$

后,可得

$$\frac{du_1}{d\tau} = u_1 + \text{高次项}, \quad \frac{dz}{d\tau} = z + \text{高次项}.$$

所以 B 是不稳定结点.

再令

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z}, \quad d\tau = \frac{dt}{z^2},$$

系统(3.10)化为

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \alpha z^3 - (\beta + 1)vz^2 + v^2 - \beta v^2 z^2 + v^3, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta v z^3 + v^2 z. \end{aligned}$$

显然 v 轴上的 $D(0,0)$ 是奇点,经判定 D 是高阶半鞍结点.同时 $z=0$ 还是解.

总之,除赤道上的轨线外,无穷远对系统(3.10)的轨线是“排斥”的.因此,当 $\beta > 1 + \alpha^2$ 时,像例 3.5 研究 Van der Pol 系统的全局结构一样,系统(3.10)存在稳定的极限环,而在例 2.8 中已证过,它是唯一的.

下面来证,当 $\beta \leq 1 + \alpha^2$ 时系统(3.10)没有闭轨,因而奇点 $P(\alpha, \frac{\beta}{\alpha})$ 是全局渐近稳定的奇点,平面上一切轨线都趋于 P .

像在例 2.8 中已作过的那样,我们作变换

$$x = x, \quad u = x + y,$$

化系统(3.10)为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha - (1 + \beta)x + x^2(u - x), \\ \dot{u} &= \alpha - x, \end{aligned}$$

再把坐标原点平移到奇点 $(x=\alpha, u=\alpha+\frac{\beta}{\alpha})$ 上,即令

$$x = \alpha + \xi, u = \alpha + \frac{\beta}{\alpha} + \eta,$$

把上面系统化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\beta - 1 - \alpha^2)\xi + \alpha^2\eta + \frac{\beta - 2\alpha^2}{\alpha}\xi + 2\alpha\xi\eta - \xi^3 + \xi^2\eta \equiv P(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= -\xi \equiv Q(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (3.10)'$$

我们把这系统中的 β 看成参变数,可算得

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \beta} & \frac{\partial Q}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p(\xi, \eta) & Q(\xi, \eta) \\ \xi + \frac{1}{\alpha} \xi^2 & 0 \end{vmatrix} = \xi^2 + (1 + \frac{\xi}{\alpha}) > 0,$$

当 $\xi > -\alpha$, 这个限制是可以成立的, 因为在直线 $\xi = -\alpha$ 上, 由式 (3.10)' 的第一式得

$$\left. \frac{d\xi}{dt} \right|_{\xi=-\alpha} = \alpha > 0.$$

说明 $\xi = -\alpha$ 是式 (3.10)' 的无切直线, 闭轨不能跨越它. 所以式 (3.10)' 若有闭轨也只能全部位于直线 $\xi = -\alpha$ 的右侧 (因唯一奇点在这一侧), 即 $\xi > -\alpha$. 这样, 式 (3.10)' 在半平面 $\xi > -\alpha$ 上关于 β 构成了广义旋转向量场.

已知 $\beta > 1 + \alpha^2$ 时系统 (3.10) [从而 (3.10)' 也是] 在半平面 $\xi > -\alpha$ 上存在稳定极限环, 因此若 $\beta \leq 1 + \alpha^2$ 时在该半平面上有闭轨的话, 在参数 β 的变动下必发生与闭轨不相交定理的矛盾, 因为极限环扩大、缩小扫过的区域的边界应有奇点—— P 点或无穷远点.

综合以上所得, 归纳成结论:

当 $\beta > 1 + \alpha^2$ 时, 系统 (3.10) 存在唯一极限环, 它是除唯一奇点 $P(\alpha, \frac{\beta}{\alpha})$ 外一切轨线的 ω 极限集; 当 $\beta \leq 1 + \alpha^2$ 时, 系统不存在闭轨, 奇点 P 是全局渐近稳定的, 一切轨线都趋于 P (见图 3-15).

3. 结论的实际解释

当反应中加入物质 A 与 B 的浓度 (经相似变换后) α 与 β 满足条件 $\beta \leq 1 + \alpha^2$ 时, 反应过程中生成物 X 与 Y 的浓度不产生周期振荡, 它们的浓度迅速趋于稳定平稳态 P ; 当 α 与 β 满足条件 $\beta > 1 + \alpha^2$ 时, 反应过程中 X 与 Y 的浓度产生周期性振荡, 在某瞬时 X 的浓度可达最大, 某时又达最小, Y 亦如此, 成周期状变化. 满足 $\beta = 1 + \alpha^2$ 的 α 与 β (相应的值) 称为物质 A 与 B 的浓度阈值, 在化学反应动力学中有重要意义.

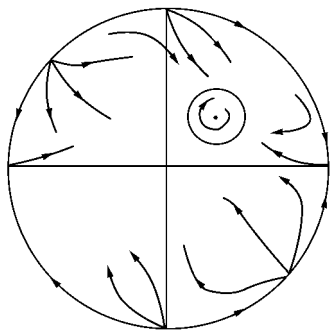


图 3-15

习 题 三

1. 研究并作出系统

$$\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = 1 + y^2 - x^2 + y^2$$

的全局结构相图.

2. 讨论系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \alpha y + \mu x^2 - y^2$$

轨线的全局结构, 其中 $\alpha > 0, \mu > 0$.

3. 分析系统

$$\dot{x} = xy - x^2, \quad \dot{y} = y^2$$

轨线的全局结构, 并画出其相图.

4. 考虑系统

$$\dot{x} = 1 - xy^2, \quad \dot{y} = \beta y(xy - 1), (\beta > 0)$$

试证明: 存在 $\beta^* \in (1, 3]$, 当 $1 < \beta < \beta^*$ 时, 系统存在唯一极限环; 当 $0 < \beta \leq 1$ 或 $\beta \geq \beta^*$ 时, 系统不存在极限环. 并作出全局相图.

5. 讨论系统

$$\dot{x} = x(y - \beta), \quad \dot{y} = \alpha - \beta y - \frac{1}{\alpha}xy$$

($\alpha > 0, \beta > 0$) 的全局结构, 并作图.

补充与问题

1. 球面 S^2 上连续向量场的奇点指数和

球面 S^2 是一个二维紧致曲面, 我们在其上定义一个连续向量场, 设该向量场的奇点都是孤立的, 则奇点个数有限.

在 S^2 上任取一常点 P , 在 P 附近取一约当闭曲线 C , 使 C 内及其上无奇点, 向量场分布如图 I. 再将球面除 C 所围的以外的部分拉缩 (拓扑映射) 成仍以 C 为边界的平面区域 D , 如图 II.

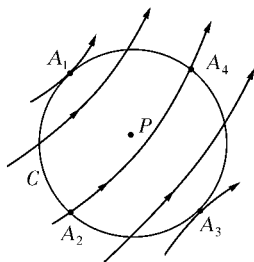


图 I

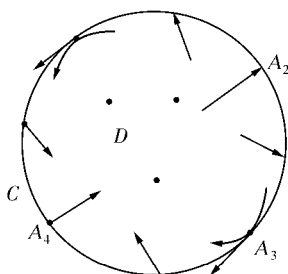


图 II

这样, 球面 S^2 上的所有奇点全部在区域 D 内, 显然它们的指数和等于图 II 上 C 的旋转数 $I(C) = 2$. 于是, 我们有

定理

(i) 球面 S^2 上任何连续向量场, 若只有孤立奇点, 则所有奇点的指数和等于 2.

(ii) Poincaré 圆盘上的平面连续自治系统, 若只有孤立奇点, 且把圆盘边界上对径奇点只看做一个奇点来计算, 则此圆盘上所有奇点的指数和等于 1.

2. 利用无穷奇点的性质来判断极限环的存在

假如我们知道了无穷远奇点都是远离型的, 而在有限处的唯一奇点又是不稳定的焦点或结点, 这时赤道便可充当环域定理中外境界的角色, 就可判定至少有一个稳定极限环的存在. 正文中 Van del Pol 方程就可用这种方法证明其极限环的存在性. 按照这种思路, 我们再举出无穷远处稍复杂一点的几个例子

例 1 系统

$$\dot{x} = -y - (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3), \quad \dot{y} = -x,$$

当 $a_1 a_3 < 0$ 时, 它至少存在一个极限环.

例 2 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + y^2, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y - xy + cy^2 \end{aligned}$$

满足条件:

$$(i) a_{11} < 0, |c| < 2,$$

$$(ii) (a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}),$$

$$(iii) a_{11} + a_{22} > 0$$

时, 至少存在一个极限环.

例 3 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - 3x^2 + xy + y^2, \\ \dot{y} &= x(1 + \frac{1}{6}x - 3y), \end{aligned}$$

至少存在两个极限环.

我们把这 3 个例子留作习题, 仅对例 3 作一些提示:

(i) 有限处它只有两个奇点: $O(0, 0)$ 是稳定焦点, $A(0, 1)$ 是不稳定焦点;

(ii) 只有唯一的无穷远奇点, 是鞍点;

(iii) 直线 $y = \frac{1}{3}$ 上有 $\frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{6} > 0$, 是无切直线.

3. 对系统的全局结构的讨论之复杂性

画出一个给定系统的全局拓扑结构相图, 可以说是对该系统定性研究的终极目标, 但要做到这点对多项式系统来说已经是不容易了, 特别是系统中含有可变参数时, 情况就变得十分复杂而工作量极大. 例如对二次系统中的完全 I 类方程

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x,$$

文献[4]的 12 节证明了, 在参数 δ, l, m, n 不同的取值下它恰好有 47 种不同的全局拓扑结构相图, 且可以画出来. 得到这种确定的、完整的结论, 是花费了巨大劳动的.

对二次系统中 II 类、III 类方程, 情况就更复杂了, 还远没有得到这样完整的结论. 据文

献[5]中说二次系统已经得到超过 1 000 种不同的拓扑结构相图,并估计这个数字有希望超过 2 000.这是多么复杂的一件工作啊!

参考文献

- [1] 秦元勋.微分方程所定义的积分曲线(上册).北京:科学出版社,1959
- [2] 李正元,钱敏.向量场的旋转度理论及其应用.北京:北京大学出版社,1982
- [3] 蔡燧林,钱祥征.常微分方程定性理论引论.北京:高等教育出版社,1994
- [4] 叶彦谦.多项式微分系统定性理论.上海:上海科学技术出版社,1995
- [5] Dumortier F, Roussarie R, Rousseau C. Hillbert 16th problem for quadratic vector fields. (Preprint 1991)

第四章 平面系统的结构稳定性与分支问题

在我们掌握了对给定平面自治系统画出它全平面上轨线分布图的步骤和方法后,新的问题又产生了:如果该系统受到了某种“扰动”(这种扰动也可体现在系统某个参数的微小变动),已得到的轨线分布结构图会发生本质变化吗?这就是本章要讨论的首要问题——系统的结构稳定性.

当系统中某个参数取到或通过某个值时,轨线结构突然发生本质变化(结构不稳定),这种突变称为分支现象.这是当代科技近 30 年来重要的非线性研究课题,本章将在数学上简要、但较系统地介绍平面自治系统分支问题的分类和研究方法.

第一节 结构稳定性

一、基本概念

我们先从三个简单例子说起:

例 4.1 考察系统

$$\dot{x} = -y + \alpha x^3, \quad \dot{y} = x + \alpha y^3, \quad (4.1)_\alpha$$

$\alpha \in (-\epsilon, \epsilon), \epsilon > 0$ 充分小.

当 α 在区间 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上取值时, $\alpha < 0, O$ 是不稳定焦点; $\alpha = 0, O$ 是中心; $\alpha > 0, O$ 是稳定焦点. 奇点 O 这三种性态是有本质区别的, 即它们在拓扑同胚映射下是三种不同的结构, 我们说系统 $(4.1)_0$ 是结构不稳定的.

例 4.2 考察系统

$$\dot{x} = \alpha^2 - x^2, \quad \dot{y} = -y, \quad (4.2)_\alpha$$

$\alpha \in [0, \epsilon), \epsilon > 0$ 充分小.

当 α 在 $[0, \epsilon)$ 上取值, $\alpha = 0$ 时, 我们在第一章第四节中讨论过, O 是鞍结点 [图 4-1(a)]; $\alpha > 0$ 时, 系统 $(4.2)_\alpha$ 有两个初等奇点 $A_1(-\alpha, 0), A_2(\alpha, 0), A_1$ 是鞍点, A_2 是结点 [图 4-1(b)]. α 的这两种取值不仅使奇点性态完全不一样, 而且个数也不一样, 当然系统 $(4.2)_\alpha$ 是结构不稳定的. 而且, 我们还可看到, 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时 A_1 与 A_2 重合而成 O , 所以可把鞍点看成一个鞍点和一个结点不

断靠扰而“挤”成的.

例 4.3 考察系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X_0 \cos \alpha - Y_0 \sin \alpha, \\ \dot{y} &= X_0 \sin \alpha + Y_0 \cos \alpha,\end{aligned}\quad (4.3)_\alpha$$

$\alpha \in (-\epsilon, \epsilon), \epsilon > 0$. 其中

$$X_0 \equiv -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2,$$

$$Y_0 \equiv x + y(x^2 + y^2 - 1)^2.$$

在第二章第六节例 2.8 中已讨论过: $\alpha = 0$ 时, 系统 $(4.3)_0$ 有唯一的半稳定二重极限环 $r=1$ (内稳外不稳); $\alpha > 0$ 时, 系统 $(4.3)_\alpha$ 有且只有两条单重极限环

$$r = \sqrt{1 + \sqrt{\tan \alpha}}, \quad r = \sqrt{1 - \sqrt{\tan \alpha}},$$

前者不稳定, 后者稳定, 它们可以看做二重环 $r=1$ 经扰动后破裂成的; $\alpha < 0$ 时, 系统 $(4.3)_\alpha$ 没有极限环 (消失了). 因此系统 $(4.3)_\alpha$ 是结构不稳定的.

结构不稳定的系统在现实中常常是不可取的. 那么, 什么样的系统是结构稳定的呢? 现在我们转入一般的讨论.

设 B 是相平面 $x-y$ 上的一个有界闭区域, 其边界为简单闭曲线. 在 B 上考虑系统

$$F: \frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (2.2)$$

其中 $X, Y \in C^1(B)$, 并设系统 (2.2) 对 B 的边界 ∂B 是无切的 (不妨设轨线均由外向内). 记

$$\mathcal{F} \equiv \{F \mid F = (X, Y), X, Y \in C^1(B)\},$$

表示满足上述条件的 F 的全体组成的集合. 在 $\mathcal{F}$ 中引入范数

$$\|F\| \equiv \max_{(x,y) \in B} \left[|X| + |Y| + \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial X}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial Y}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial Y}{\partial y} \right| \right],$$

和距离

$$\rho(F, G) \equiv \|F - G\|, F, G \in \mathcal{F}.$$

易知, 在这样的定义下, F 是一个 Banach 空间.

定义 4.1 给定 B 上的系统 F_0 和 F , 如果存在拓扑同胚 $T: B \rightarrow B$, 使 F_0 的轨线经 T 映射成 F 的轨线, 且保持定向不变. 则称在 B 上 F 与 F_0 拓扑等价.

定义 4.2 (Андронов-Понтрягин^[1]) 给定系统 $F_0 \in \mathcal{F}$, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使对满足

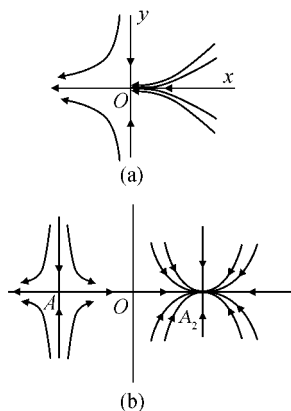


图 4-1

$$\rho(F_0, F) < \delta, \quad F \in \mathcal{F}$$

的每个 F , 存在拓扑同胚 $T: B \rightarrow B$, 使得在 B 上 F 与 F_0 拓扑等价, 且

$$d(p, T(p)) < \epsilon, \quad \forall p \in B.$$

则称 F_0 在区域 B 上是**结构稳定的**, 其中 $d(\cdot, \cdot)$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中的距离.

结构稳定的系统被 A-Π 称之为**粗系统**. 这个定义中的 T 称为 ϵ -拓扑同胚.

定义 4.3 (Peixoto^[4]) 给定系统 $F_0 \in \mathcal{F}$, 如果存在 $\delta > 0$, 使对满足

$$\rho(F_0, F) < \delta, \quad F \in \mathcal{F}$$

的每个 F , 存在拓扑同胚 $T: B \rightarrow B$, 使得在 B 上 F 与 F_0 拓扑等价. 则称 F_0 在区域 B 上是**结构稳定的**.

结构稳定性是一个极其重要而影响深远的概念, Андронов 和 Понтрягин 在 1937 年首先提出了他们称之为“粗系统”的概念是件了不起的事情, 这里写出来是为了了解这段重要的历史. 当时原定义中还要求集合 $\mathcal{F}$ 中系统 F 是解析系统, 这个强要求 1952 年就被 H. DeBaggis^[2] 降低为 $F \in C^1(D)$ 了. 1959~1962 年 M. M. Peixoto 提出了定义 4.3, 并完成了它和定义 4.2 的等价性证明, 使定义 4.3 成为大家公认的结构稳定性标准提法, 以下我们就在此定义下展开讨论.

定义 4.4 若 $F_0 \in \mathcal{F}$ 是结构稳定的. 则满足定义 4.3 中

$$\rho(F_0, F) < \delta, \quad F \in \mathcal{F}$$

的一切 F 都称为 F_0 的**可允许系统**.

若 F 是 F_0 的可允系统, 则在 B 上拓扑等价的意义下, 可以 F 替代 F_0 .

二、结构稳定性基本定理

定理 4.1 设 $F \in \mathcal{F}$, F 在 B 上是结构稳定的充分必要条件是以下三个条件同时成立:

- (i) F 只有有限个奇点, 并且都是双曲的;
- (ii) F 没有连接鞍点到鞍点的轨线;
- (iii) F 只有有限个闭轨, 并且都是单重极限环.

我们用一系列引理来证明此定理.

引理 4.1 F 为结构稳定的系统, 则 F 只有有限个奇点.

证明 设 $F = (X(x, y), Y(x, y))$, $X, Y \in C^1(B)$. 因 F 是结构稳定的, 所以存在 $\delta > 0$, 当 $\rho(F, G) < \delta$, $G \in \mathcal{F}$ 时, G 与 F 拓扑等价. 由 Weierstrass 定理, 可取到多项式系统 $(P_n(x, y), Q_n(x, y)) \equiv G$ 来逼近 F , 使 $\rho(F, G) < \delta$; 且使

P_n 与 Q_n 互质, 因多项式系统 G 只有有限个奇点, 故拓扑等价的 F 也只能有同样多个奇点. 证毕.

引理 4.2 F 为结构稳定系统, 则 F 的奇点必定都是双曲的.

证明 我们分两步来证, 首先证明 F 结构稳定, 则 F 的奇点都是初等的; 第二步证明 F 没有中心, 那么 F 的奇点都是双曲的了.

(1) 用反证法, 不妨设 $O(0,0)$ 不是 F 的初等奇点, 即有

$$\left| \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)} \right|_{(0,0)} = 0,$$

我们来导出矛盾. 作系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x,y) + \varepsilon a_1 x \varphi(x,y), \\ \dot{y} &= Y(x,y) + \varepsilon a_2 y \varphi(x,y),\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中 $\varphi(x,y)$ 是多项式, 满足 $\varphi(0,0)=1$, 在 F 的其他奇点上 $\varphi=0$ (由于已证 F 的奇点只有有限个, 这是做得到的). 已设 F 结构稳定, 容易验证当 $\varepsilon>0$ 足够小时系统 (4.4) 是 F 的可允许系统, 即系统 (4.4) 与 F 有相同个数的奇点, 又显然 F 的奇点都是系统 (4.4) 的奇点, 故它们有完全相同的奇点.

今设 C 是以 O 为心, 半径足够小的圆, 其内部除 O 外不含其他奇点. 当 $\varepsilon>0$ 足够小时可使系统 (4.4) 与 F 在 C 上各自所确定的向量场在同一点上不取相反的方向, 则 O 对 F 及系统 (4.4) 有相同的指数. 但另一方面可算得

$$\begin{aligned}q &\equiv \left| \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)} \right|_{(0,0)} + \varepsilon \left[\frac{\partial X}{\partial x} a_2 + \frac{\partial Y}{\partial y} a_1 + \varepsilon a_1 a_2 \right]_{(0,0)} \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial X}{\partial x} a_2 + \frac{\partial Y}{\partial y} a_1 \right]_{(0,0)} + \varepsilon^2 a_1 a_2.\end{aligned}$$

由此可见, 我们适当地选择 a_1, a_2 , 既可使 $q>0$, 也可使 $q<0$, 这意味着系统 (4.4) 的原点 O 的指数可以是 $+1$, 也可以是 -1 . 这是矛盾.

(2) 设 F 的有限个奇点是 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$. 令

$$\varphi_i(x,y) = y - y_i - m(x - x_i), i = 1, 2, \dots, n,$$

其中常数 m 按如下方法选取: $\varphi_i(x,y)=0$ 是经过某奇点 (x_i, y_i) 的直线, 我们选 m 使该直线不经过其他 $n-1$ 个奇点 $(x_j, y_j), j=1, \dots, n; j \neq i$; 且 $m \neq 1$. 这样的 m 是可以取到的.

作系统 G :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x,y) + \varphi(x,y), \\ \dot{y} &= Y(x,y) + \varphi(x,y),\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中 $\varphi = \varepsilon \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varepsilon > 0$. 容易验证, ε 足够小时, 式 (4.5) 定义的系统 G 是 F 的可允许系统, 因而它的奇点也是 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$. 经计算得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x}(X + \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(Y + \varphi) \right]_{(x_i, y_i)} \\ &= \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]_{(x_i, y_i)} + \epsilon(1 - m)h_i, \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中

$$h_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \varphi_j(x_i, y_i) \neq 0.$$

这时, 若 s 个 ($0 \leq s \leq n$)

$$\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]_{(x_i, y_i)} = 0, i = 1, \dots, s,$$

$n-s$ 个

$$\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]_{(x_i, y_i)} \neq 0, i = s+1, \dots, n.$$

对这 $n-s$ 个不等于零的, 我们再将 ϵ 取得小些, 总可使对一切 $i=1, 2, \dots, n$, (4.6) 式右端皆不等于零, 这样系统 G 就没有中心. 由于 G 是 F 的可允许系统, 故 F 也没有中心. 证毕.

引理 4.3 F 为结构稳定系统, 则 F 没有连接鞍点到鞍点的轨线.

证明 作系统 G_α :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha \equiv X - X(1 - \cos \alpha) - Y \sin \alpha, \\ \dot{y} &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha \equiv Y + X \sin \alpha - Y(1 - \cos \alpha), \end{aligned} \quad (4.7)_\alpha$$

它是系统 F 经逆时针方向旋转 α 角而成, 它与 F 有相同的奇点, 且只要 $\alpha > 0$ 足够小, G_α 就是 F 的可允许系统.

设点 A 是 F 和 G_α 的一个鞍点, 以 L_0 与 L_α 分别表示 F 和 G_α 从 A 出发的轨线, 则在 A 点的两切线的夹角为 α , L_0 的切线在点 D 的垂线延长线与 L_0, L_α 构成的曲边三角形 AP_0P_α 上, 当 α 足够小, 点 D 足够接近 A 时, 除 A 外不再有奇点, 且直线 $\overline{P_0P_\alpha}$ 构成式 (4.7) $_\alpha$ 的无切线段 [图 4-2(a)].

现设 F 有从鞍点 A 到鞍点 B 的轨线 L_0 , 我们来导出矛盾. 这时可允许系统 G_α 也应有从 A 到 B 的轨线 L_α . 在 B 点也与 A 一样, 有曲边三角形 BQ_0Q_α , 其上除 B 外不含其他奇点, 且 $\overline{Q_0Q_\alpha}$ 构成式 (4.7) $_\alpha$ 的无切线段 [图 4-2(b)]. 由于 L_0 上从 P_0 到 Q_0 所需时间有限, 按解对初值与参数的连续性知, 当 α 足够小时可使 L_0 与 L_α 充分靠近, 从而使 L_0 与 L_α 所围的整个月牙形区域上除 A, B 外无其他奇点. 这时, 在 L_0 上系统 G_α 的向量场都指向月牙内部, 故从 L_0 上任一点 M 出发的 G_α 的轨线进入月牙后只能趋于 B 点, 这将导致有无穷多条 G_α 的轨线趋于 B , 这与是鞍点矛盾.

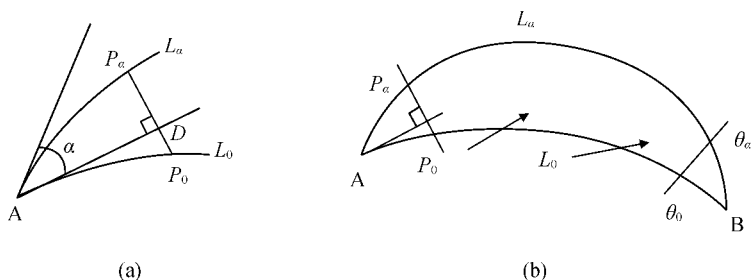


图 4-2

若 A 点与 B 点重合时,证明也相同. 证毕.

引理 4.4 F 是结构稳定的, 则最多只有有限个闭轨, 它们都是单重极限环.

证明 用反证法先证第一个结论. 设 F 在 B 内有无穷多个闭轨, 由于 F 的奇点个数有限, 因此必有无穷多个闭轨 $\{\Gamma_n\}$, $n=1, 2, \dots$ 一个套着一个, 共同包围着相同的一些奇点. 这些闭轨 $\{\Gamma_n\}$ 必有内极限集或外极限集 Ω , 按逻辑上及可能性它只能是 (i) Ω 为一点; (ii) Ω 为一闭轨; (iii) Ω 是由奇点及与奇点相接触的轨线构成的奇异单闭集合; 我们来逐个加以否定.

情形 (i) 只能出现在 $\{\Gamma_n\}$ 的内极限集, 但这将导致出现中心, 所以 (i) 不可能. 情形 (ii) 出现时, Ω 必为最内(外)部的闭轨, 这时在 Ω 内(外)侧任一法线上建立后继函数, 由于 F 结构稳定从而 F 等价于一个多项式微分系统, 它是解析的, 因此该后继函数也是解析的, 它有 $\{\Gamma_n\}$ 对应的无穷多个零点, 这些零点有极限点, 故此后继函数恒为零. 这说明 Ω 内(外)域还有闭轨, 这与 Ω 是最内(外)的闭轨矛盾. 即 (ii) 不可能. 情形 (iii) 导致出现有鞍点到鞍点的轨线, 被引理 4.3 所否定. 这就证明了 F 的闭轨最多只有有限个, 自然它们每个都是极限环.

我们再来证明这些极限环都是单重环. 用反证法, 设其中有一个极限环 Γ , 它的特征指数 $h(\Gamma)=0$, 我们来导出矛盾. 作与 Γ 的距离为 δ 的内、外两条平行的闭曲线, 由它们所界定的环形区域记为 E . δ 取得充分小, 使 E 与 F 的其他极限环没有公共点. 作函数

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \eta(x, y)[\eta^2(x, y) - \delta^2]^3, & (x, y) \in E, \\ 0, & (x, y) \notin E, \end{cases}$$

其中 $|\eta(x, y)|$ 为点 (x, y) 到 Γ 的垂直距离, Γ 内侧 $\eta > 0$, Γ 外侧 $\eta < 0$, 在 Γ 上 $\eta = 0$. 易知 $\varphi(x, y) \in C^2(B)$, $\varphi(x, y)|_{\Gamma} = 0$, 且有

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]_{\Gamma} = \delta^{12} > 0.$$

作系统 G :

$$\dot{x} = X(x, y) + \varepsilon \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\dot{y} = Y(x, y) + \varepsilon \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

其中 $|\varepsilon|$ 充分小时, G 就是 F 的可允许系统, 它与 F 有完全相同的极限环. 计算 G 的极限环 Γ 的特征指数

$$\begin{aligned} h_G(\Gamma) &= \int_{\Gamma} \operatorname{div} G dt = \int_{\Gamma} \operatorname{div} F dt \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Gamma} \varphi(x, y) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] dt \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dt \\ &= \varepsilon \delta^{12} T, \end{aligned}$$

其中 T 是 Γ 的周期. 因此导出, 若 $\varepsilon > 0$, 则 Γ 是 G 的不稳定极限环; $\varepsilon < 0$, 则 Γ 是 G 的稳定极限环. 这与只要 $|\varepsilon|$ 足够小 G 就是 F 的可允许系统相矛盾. 证毕.

以上 4 个引理综合起来就证明了定理 4.1 的必要性部分.

定理 4.1 充分性的证明要点:

首先定义几个概念. 我们称稳定奇点和稳定极限环为**汇**, 邻近轨线均流向它之意; 称负向稳定奇点和不稳定极限环为**源**, 邻近轨线均由它流出之意. 由于假设在有界闭域 B 的边界 ∂B 上的向量场从外向内, 所以 ∂B 也可以看成一个源. 除了奇点和极限环之外, F 只可能还有两类轨线: (i) 连接源与汇的轨线, (ii) 连接鞍点与源(或汇)的轨线.

由解对初值的连续性知, 连接源与汇的轨线, 它附近的轨线也是连接相同的源与汇, 于是 F 的连接相同的源和汇的轨线组成了一个开集, 这个开集连同那源和汇构成一个连通分支, 称为 F 的一个**规范域**. 由于奇点和极限环个数都是有限的, 因此区域 B 被划分为有限个规范域. 按照规范域边界的不同情况, 它只有下列三类:

(1) 边界仅由源和汇组成[图 4-3(a)], 这时又分为

1) 边界由两个极限环组成;

2) 边界由一个极限环和一个奇点组成;

3) 边界由 ∂B 和一个奇点或一个极限环组成.

(2) 边界由源、汇和两个鞍点, 及连接鞍点与源、汇的轨线组成[见图 4-3(b)].

(3) 边界由源、汇和一个鞍点, 及连接此鞍点与源、汇的轨线组成[见图 4-3(c)].

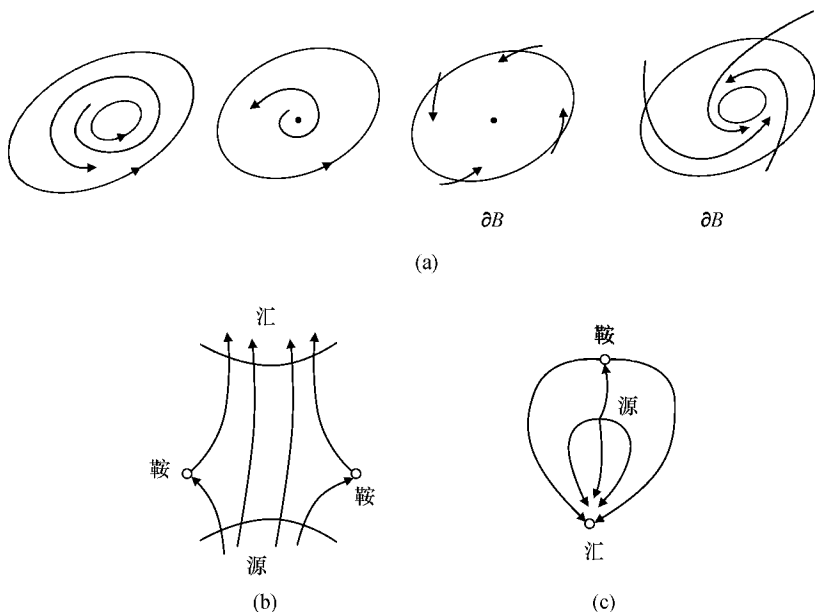


图 4-3

然后证明, 只要 $\delta > 0$ 足够小, 则对满足 $\rho(F, G) < \delta$ 的 G 也可以划分成与 F 同样个数、同样类型的规范域. 再对 G 与 F 的每一对相应的规范域, 构造一个拓扑同胚, 使 F 的规范域映射成对应的 G 的规范域. 最后, 把这些拓扑同胚一个个拼凑连接成一个拓扑同胚 T , 使 $T: B \rightarrow B$. 这样就完成了充分性的证明.

最后, 我们不加证明的引用

定理 4.2 设 $\mathcal{F}$ 是平面有界区域 B 上全体 C^1 类微分系统构成的 Banach 空间, Σ 是 $\mathcal{F}$ 中全体结构稳定系统所构成的子集. 则 Σ 在 $\mathcal{F}$ 中是开的并且是稠密的.

这个定理告诉我们: 在 $\mathcal{F}$ 的任一点 F 的任意邻域内都有 Σ 的点, 即对任意一个 C^1 类微分系统, 总存在 C^1 类中结构稳定的系统无限地逼近它. 所以,

我们可以粗略地说,结构稳定的系统还是大多数.

第二节 分支的基本概念与分类

定义 4.5 结构不稳定系统也称为分支系统,就是说,在一个分支系统 F 的任意邻近,总存在扰动系统 G ,使 G 与 F 有不同的轨线拓扑结构.若我们考虑的是含参数的系统

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda), \quad (4.8)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$, 参数 $\lambda \in \mathbf{R}^k$. 某一参数值 $\lambda_0 \in \mathbf{R}^k$, 使系统 $(4.8)_{\lambda=\lambda_0}$ 为一分支系统, 即当 λ 连续变动达到 λ_0 或经过 λ_0 时, 系统 (4.8) 的轨线拓扑结构发生突变, 则值 λ_0 称为系统 (4.8) 的分支值; 它在参数空间 $\mathbf{R}^k$ 上对应的点称为分支点; 这些分支点在 $\mathbf{R}^k$ 上构成的图形称为系统 (4.8) 的分支曲面、分支图.

一个平面分支系统必须使第一节中结构稳定系统所具备的三条性质至少有一条不成立, 因此可以作如下的分类:

1. 分支系统至少有一个奇点, 它对应的线性近似系统有零实部特征根
(1) 有零特征根

例 4.4 考虑下面三个一阶纯量方程

$$\dot{x} = \lambda - x^2, \quad (4.9)$$

$$\dot{x} = \lambda x - x^2, \quad (4.10)$$

$$\dot{x} = \lambda x - x^3. \quad (4.11)$$

它们在 $\lambda=0$ 时对应的线性近似系统为 $\dot{x}=0$, 具有零特征根. λ 变化经过零时, 这三个系统分别出现不同特点的分支, 我们在 $\lambda-x$ 平面上画出它们分支状况如图 4-4 所示, 而在参数轴上以一个点表出的分支图如图 4-5 所示.

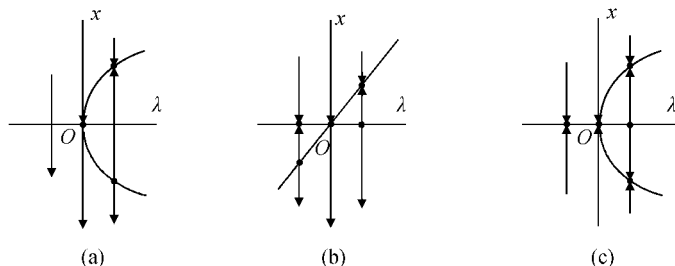


图 4-4

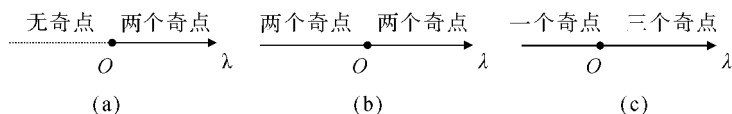


图 4-5

对方程(4.9), 在 $\lambda < 0$ 一侧没有奇点; 而在 $\lambda > 0$ 一侧, 出现两个奇点, 位于 $x^2 = \lambda$ 上, 上面的一个为稳定, 下面的一个不稳定. 这就是 λ 由负变正经过零时所呈现的变化状况, 奇点从没有到一个再分裂为两个, 它们的稳定性也随着有变化, 如图 4-4(a) 所示, 通常称这种分支为**鞍结点分支**.

这种分支为什么叫鞍结点分支, 我们可以从下面的二维鞍结点分支中得到直观的理解. 考虑 $\mathbf{R}^2$ 上的向量场[第一个方程与方程(4.9)相同]

$$\dot{x} = \lambda - x^2, \quad \dot{y} = -y.$$

$\lambda = 0$ 是它唯一的分支值, 按 $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$ 三种情形可作轨线拓扑分类图, 如图 4-6 所示.

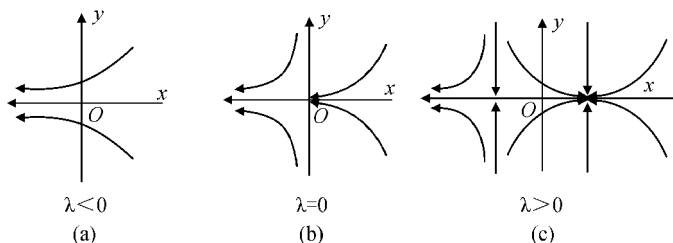


图 4-6

方程(4.10)当 $\lambda = 0$ 时只有一个奇点 $x = 0$; 当 $\lambda \neq 0$ 时它总有两个奇点 $x = 0$ 和 $x = \lambda$, $\lambda < 0$ 时前者稳定, 后者不稳定; $\lambda > 0$ 时前者不稳定, 后者稳定. 其分支状况如图 4-4(b) 所示, 称为**跨临界分支**.

方程(4.11)当 $\lambda = 0$ 时只有一个稳定奇点 $x = 0$, 当 $\lambda < 0$ 时它还是一个稳定奇点 $x = 0$, 而当 $\lambda > 0$ 时突然分裂成三个奇点, 除 $x = 0$ 不稳定外, 还有 $x = \pm\sqrt{\lambda}$ 两个稳定的奇点, 其分支状况如图 4-4(c) 所示, 称为**草叉分支**.

图 4-5 给出的是相应的分支图, $\lambda = 0$ 是唯一的分支点. 图 4-5(a) 表示主要分支方向在 O 的右边; 图 4-5(b) 表示两边都是分支方向, 因此是“跨”临界的; 图 4-5(c) 表示只是 O 的右边才是分支方向.

(2) 有纯虚数的特征根(平面情形即线性近似系统有中心)

例 4.5 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \lambda x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - \lambda y(x^2 + y^2).\end{aligned}\quad (4.12)$$

当 $\lambda=0$ 时, 它以 $O(0,0)$ 为中心; 而 $\lambda \neq 0$ 时, 由系统 (4.12) 的极坐标式

$$\dot{r} = -\lambda r^3, \quad \dot{\theta} = 1,$$

可知, $\lambda < 0$ 时 O 为不稳定焦点, $\lambda > 0$ 时 O 为稳定焦点. $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$ 三种情形下, 对应的轨线拓扑结构是不同的, 因此 $\lambda = 0$ 是分支值.

例 4.4 和例 4.5 说的都是系统的参数 λ 达到或经过某 λ_0 时, 奇点的个数或稳定性发生突变(或两者兼而有之), 这样的分支现象称为**奇点分支**.

例 4.6 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \lambda x - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \lambda y - y(x^2 + y^2).\end{aligned}\quad (4.13)$$

$\lambda < 0$ 时它以 $O(0,0)$ 为稳定的焦点; 由系统 (4.13) 的极坐标式

$$\dot{r} = r(\lambda - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

知, $\lambda = 0$ 时 O 为稳定的细焦点; $\lambda > 0$ 时 O 为不稳定的焦点, 同时在 O 的邻域中出现一个闭轨线 $x^2 + y^2 = \lambda$, 它是一个稳定的极限环. 如图 4-7 所示.

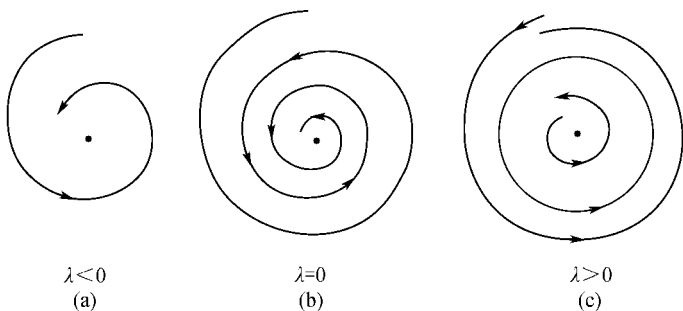


图 4-7

$\lambda = 0$ 是分支系统 (4.13) 的分支值, λ 由零变为正时 O 的稳定性发生突变且在其外围“跳出”一个极限环. 这种分支称为**Hopf 分支**.

例 4.7 考虑 Van der Pol 方程对应的

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \lambda y(1 - x^2). \quad (4.14)$$

当 $\lambda = 0$ 时它有一系列闭轨 $x^2 + y^2 = h^2$, 而当 $\lambda > 0$ 时, 第二章中已证明它有唯一稳定的极限环. 可证明, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时此极限环是以上述系列闭轨中 $x^2 + y^2 = 4$ 那条为极限位置. 这就是说, 当 λ 从 0 变为正时, 构成中心的一系列闭轨除

$x^2 + y^2 = 4$ 外均破裂了,而在 $x^2 + y^2 = 4$ 的邻近产生了一个极限环. 这种从一系列闭轨中某一条邻近能分支出极限环的现象称为 **Poincaré 分支**.

2. 分支系统至少有一个闭轨不是单重极限环

我们在第一节例 4.3 考察过的系统(4.3)_a

$$\dot{x} = X_0 \cos \alpha - Y_0 \sin \alpha,$$

$$\dot{y} = X_0 \sin \alpha + Y_0 \cos \alpha,$$

$\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon) > 0$; 其中

$$X_0 \equiv -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2,$$

$$Y_0 \equiv x + y(x^2 + y^2 - 1)^2.$$

$\alpha < 0$ 时它没有闭轨线; $\alpha = 0$ 时系统(4.3)₀ 有唯一的半稳定二重极限环 $r = 1$ (内稳外不稳); $\alpha > 0$ 时, $r = 1$ 分裂成两条单重极限环 $r = \sqrt{1 + \sqrt{\tan \alpha}}$ (不稳定), $r = \sqrt{1 - \sqrt{\tan \alpha}}$ (稳定的). 这种由参数 α 的微小变化经过某个值时极限环从没有到一条再分裂成两条的分支现象称为 **多重极限环分支**.

3. 分支系统具有鞍点到鞍点的连接轨线

鞍点到鞍点的分界线在扰动下一定会破裂,至少一头会趋向其他奇点造成结构的变化. 但我们最关心的是,这种变化下产生闭轨的可能性.

可以构造出某个系统

$$\dot{x} = X(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Y(x, y, \lambda), \quad (4.15)_\lambda$$

使得当 $\lambda = 0$ 时系统(4.15)₀ 有图 4-8(b)所示的轨线结构: 它具有一条从初等鞍点 S 到 S 的同宿环 L , L 内部是稳定的初等焦点 F 的吸引域; 而当 $\lambda \neq 0$ 时, L 破裂为两条分界线, 它们的相对位置依 λ 的符号而异, 如图 4-8(a) 和图 4-8(c) 所示.

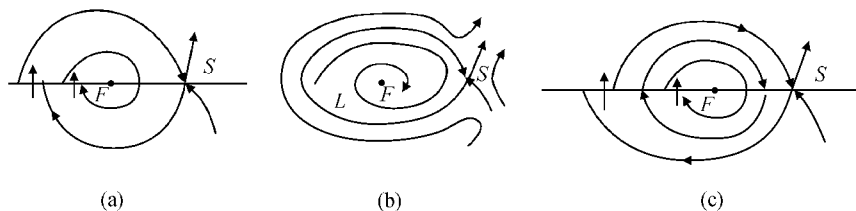


图 4-8

显然, 图 4-8(c) 情形中分界线破裂的方向正好与内部焦点的稳定性相配合, 构成了一个 $P-B$ 环域, 从而系统(4.15) _{λ} 存在极限环. 当 $|\lambda|$ 充分小

时可以使这个环域充分靠近原来的同宿环 L , 因此可以把极限环看成是 L 经扰动破裂而产生的, 这种分支现象称为**同宿环分支**. 类似地也可讨论**异宿环分支**.

由于不具备双曲性而发生在奇点或闭轨的小邻域内的分支(奇点分支、Hopf 分支、多重闭轨分支)属**局部分支**; 发生在同宿环或异宿环的小邻域内, 由于它们破裂而分支出极限环属**半局部分支**; Poincaré 分支一般发生在大范围属**全局分支**.

第三节 多重奇点分支

一、分支理论中几个通用的名词

实际问题中的分支问题常常可以写成

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda), \quad (4.8)$$

其中 $F \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$. 若 $\lambda=0$ 时, 相应系统

$$\frac{dx}{dt} = F(x, 0) \quad (4.8)_0$$

是分支系统(结构不稳定的), 当 $|\lambda| \ll 1$ 时, 我们把式(4.8)称为式(4.8)₀ 的 C^r **开折**(unfolding).

我们以一阶纯量系统

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \quad (4.16)$$

为例, 它是个分支系统. 前面例 4.4 中讨论的式(4.11)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^3 \quad (4.11)$$

是它的一个开折, 当 $|\lambda| \ll 1, \lambda$ 在零的邻域中变动时会带来轨线结构的变化. 另外, 系统

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 x - x^3, \quad (4.17)$$

其中 λ_1, λ_2 是两个独立的参数, $|\lambda_i| \ll 1 (i=1, 2)$ 时也是式(4.16) 的开折, 显然它包含了式(4.11)所能出现的轨线拓扑类型. 同时, 我们可以证明式(4.16) 的任何一个开折(可以含有任意多个参数)所能出现的轨线拓扑结构, 都含于双参数开折(4.17)的轨线拓扑结构类型之中, 我们把这样的开折(4.17)称为

式(4.16)的一个普适开折(universal unfolding).

普适开折一般不唯一,能找到其中含有“最少”参数的普适开折当然对讨论它的各种拓扑结构是十分有利的.这时,这个最少的参数个数称为由式(4.8)₀引出的分支的余维数.

对上例式(4.16)来说,开折(4.11)不是普适的,因它不能包含奇点 $x=0$ 邻近所出现的一切拓扑结构变化情况.而系统(4.17)是普适开折,这是因为

(i) 由 $\lambda_1 + \lambda_2 x - x^3 = 0$ 的根的判别式

$$\frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_2^3}{27} = 0$$

决定了参数平面 $\lambda_1 - \lambda_2$ 上 O 点邻域中两支曲线 l_1, l_2 (见图 4-9) 它们把整个邻域分成两部分,在 $l_1 \cup l_2$ 下面部分,系统(4.17)在 $x=0$ 附近只有一个奇点;在 $l_1 \cup l_2$ 上面部分,系统(4.17)在 $x=0$ 附近有三个奇点;在曲线 $l_1 \cup l_2$ 上,系统(4.17)在 $x=0$ 附近有两个奇点(一个双曲,一个非双曲).

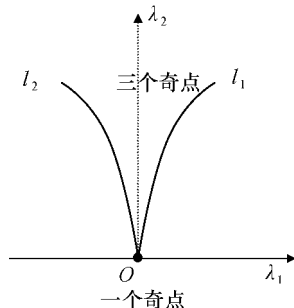


图 4-9

图 4-9 称为系统(4.17)的分支图. 曲线 l_1, l_2 和点 $(0,0)$ 称为分支曲线.

(ii) 任意开折

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i,$$

当 $|\lambda_i|$ 甚小时,在 $x=0$ 附近最多出现三个奇点,其结构包含在上述情况之中. 面系统(4.11)显然不可能出现两个奇点的结构,因而不是普适的,类似可证式(4.16)的任何一个单参数开折都不是普适的,所以说式(4.16)引出的分支是余维 2 的.

二、静态分支

讨论系统的奇点分支时,若我们仅着重于研究分支点附近奇点个数的变化这一侧面,则可以将对系统(4.8)的讨论转化为 C^r 映射 $F(x, \lambda)$ 构成的方程

$$F(x, \lambda) = 0,$$

$F(0,0)=0$, 在 $(0,0)$ 邻域内零点个数的讨论. 这在 1 维和 2 维情形只用到隐函数定理,而在高维情形讨论并不简单,要用到 Liapunov - Schmit 方法或中心流形定理先把维数降低后再使用隐函数定理,有兴趣的读者可参阅文献[5, 6, 8]. 下面只举两个简单的例子.

例 4.8 讨论系统

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2 x - x^3 + x^8 \quad (4.18)$$

的奇点分支问题.

我们已在例 4.4 中讨论过

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2 x - x^3 \quad (4.19)$$

的奇点分支的类似情况(这里以 λ^2 替代那里 λ), 容易得出式(4.19)在 $(0,0)$ 邻域中的分支状况如图 4-10(a)所示.

现系统(4.18)的问题转化为讨论

$$\lambda^2 x - x^3 + x^8 = 0 \quad (4.20)$$

在 $(0,0)$ 邻域内零点个数的变化.

直接求解式(4.20)是不可能的. 我们令 $x = \lambda y$, 代入式(4.20)得

$$\lambda^3 y - \lambda^3 y^3 + \lambda^8 y^8 = \lambda^3 y [1 - y^2 + \lambda^5 y^7] = 0,$$

这时 $y=0$ 对应 $x=0$; 另取

$$g(y, \lambda) \equiv 1 - y^2 + \lambda^5 y^7,$$

显然有 $g(1,0)=0, g(-1,0)=0$, 且

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2y + 7\lambda^5 y^6, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \big|_{(1,0)} = -2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \big|_{(-1,0)} = 2.$$

应用隐函数定理, 我们可从 $g(y, \lambda)=0$ 中解出单值的

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(\lambda), & \varphi_1(0) &= 1; \\ y &= \varphi_2(\lambda), & \varphi_2(0) &= -1; \end{aligned} \quad |\lambda| \ll 1.$$

还可用待定系数的办法求出近似式

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(\lambda) = 1 + \frac{1}{2}\lambda^5 + o(\lambda^5), \\ y &= \varphi_2(\lambda) = -1 + \frac{1}{2}\lambda^5 + o(\lambda^5), \end{aligned} \quad |\lambda| \ll 1,$$

对应

$$\begin{aligned} x &= x_1(\lambda) = \lambda + \frac{1}{2}\lambda^6 + o(\lambda^6), \\ x &= x_2(\lambda) = -\lambda + \frac{1}{2}\lambda^6 + o(\lambda^6), \end{aligned} \quad |\lambda| \ll 1.$$

这样我们就得在 $(0,0)$ 邻域中奇点的分支情况如图 4-10(b)所示, 它与图 4-10(a)是拓扑等价的, 仍然是 1 个 λ 值 ($|\lambda| \ll 1$) 对应 3 个奇点.

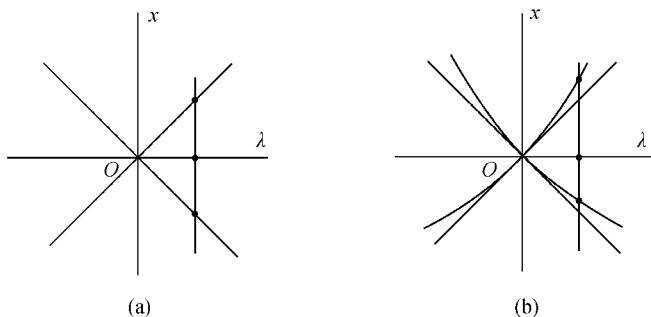


图 4-10

例 4.9 讨论系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x - \lambda y - x^2 + y^2 + x^3 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda y + xy + x^5 + y^8\end{aligned}\quad (4.21)$$

的奇点分支问题.

问题化为讨论

$$\begin{aligned}\lambda x - \lambda y - x^2 + y^2 + x^3 + y^3 &= 0, \\ \lambda y + xy + x^5 + y^8 &= 0\end{aligned}\quad (4.22)$$

在 $\lambda=0$ 邻域中零点个数的变化.

令 $x=\lambda u, y=\lambda v$, 代入式(4.22)得

$$\begin{aligned}\lambda^2[u - v - u^2 + v^2 + \lambda u^3 + \lambda v^3] &= 0, \\ \lambda^2[v + uv + \lambda^3 u^5 + \lambda^6 v^8] &= 0.\end{aligned}$$

又令

$$\begin{aligned}g_1(u, v, \lambda) &\equiv u - v - u^2 + v^2 + \lambda u^3 + \lambda v^3, \\ g_2(u, v, \lambda) &\equiv v + uv + \lambda^3 u^5 + \lambda^6 v^8.\end{aligned}$$

容易求出

$$g_1(u, v, 0) = 0, \quad g_2(u, v, 0) = 0$$

有解 $(u, v) = (0, 0), (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$. 对应点 $(u, v, \lambda) = (0, 0, 0), (1, 0, 0), (-1, 2, 0), (-1, -1, 0)$ 均满足方程

$$g_1(u, v, \lambda) = 0, \quad g_2(u, v, \lambda) = 0. \quad (4.23)$$

计算

$$J \equiv \left| \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 1 - 2u + 3\lambda u^2 & -1 + 2v + 3\lambda v^2 \\ v + 5\lambda^3 u^4 & 1 + u + 8\lambda^6 v^7 \end{vmatrix},$$

显然有

$J(0,0,0) = 1, J(1,0,0) = -2, J(-1,2,0) = -6, J(-1, -1,0) = -3$
均不等于零. 应用隐函数定理, 可在 $\lambda=0$ 的小邻域内从方程(4.23)解出单值的

$$u = \varphi_i(\lambda), \quad v = \psi_i(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

满足

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0, \\ \psi_1(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_2(0) = 1, \\ \psi_2(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_3(0) = -1, \\ \psi_3(0) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_4(0) = -1, \\ \psi_4(0) = -1; \end{cases}$$

代回 x, y 得

$$x = \lambda\varphi_i(\lambda), \quad y = \lambda\psi_i(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

满足 $\lambda=0$ 时 $x=0, y=0$.

这证明了: $\lambda=0$ 是式(4.21)的分支值, 在 $\lambda=0$ 时式(4.21)只有一个多重奇点 $(0,0)$, 当 $\lambda \neq 0, |\lambda|$ 充分小时式(4.21)还有上式给出的 4 个奇点.

最后, 我们要说明的是, 实际上在奇点个数发生变化的同时, 多数系统轨线结构还可能发生其他变化(例如伴随有闭轨、同宿轨、异宿轨的产生或消失), 这将在本章最后一节著名的 Bogdanov - Takens 分支中看到.

第四节 Hopf 分支

考虑含参数 λ 的平面系统

$$\dot{x} = X(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Y(x, y, \lambda), \quad (4.24)$$

其中 $(x, y) \in \mathbf{R}^2, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbf{R}^l, X, Y \in C^r$ 或是解析的, 并设 $\lambda=0$ 时有奇点 $O(0,0)$, 式(4.24)的一次近似系统有特征根 $a(\lambda) \pm ib(\lambda)$, 其中 $a(0)=0, b(0)>0$ [即 $\lambda=0$ 时式(4.24)的一次近似系统以 O 为中心].

定理 4.3 设 $\lambda=0$ 时式(4.24)以 O 为稳定(不稳定)的一阶细焦点, 而当 $\lambda \neq 0$ 且 $|\lambda|$ 充分小时 O 变为不稳定(稳定)的焦点. 则式(4.24)在 O 的外围邻近分支出唯一的闭轨, 它是稳定(不稳定)的极限环.

证明 在上面假设下式(4.24)经线性变换化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(\lambda)x - b(\lambda)y + X_2(x, y, \lambda), \\ \dot{y} &= b(\lambda)x + a(\lambda)y + Y_2(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

再引入极坐标化为

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= a(\lambda)r + O(r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} &= b(\lambda) + O(r). \end{aligned}$$

由 $b(0) > 0$ 知 $|\lambda|$ 充分小时 $b(\lambda) > 0$, 故由第二式知 O 邻域中轨线均绕 O 逆时针旋转.

只证括号外情形. $\lambda = 0$ 时在正 x 轴上 O 邻近取点 A , 由设 O 稳定, 故由 A 出发的轨线逆时针绕 O 一周后与正 x 轴交于 $\overline{OA}$ 内一点 B . 再由解对参数的连续依赖性可知, 当 $\lambda \neq 0$, $|\lambda|$ 充分小时, 从 A 出发的轨线 (图 4-11 中虚线所示) 亦与正 x 轴再交于 $\overline{OA}$ 内一点 B_1 . 由设, 这时的 O 已变为不稳定焦点, 因而当点 C 充分接近 O 时 $\widehat{CD}$ 轨线和 x 轴上 $\overline{DC}$ 线段组成的内境界, AB_1 轨线

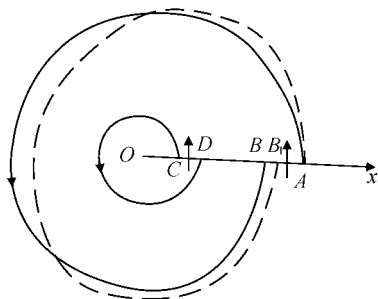


图 4-11

和 BA 线段组成的外境界构成了环域定理的环域, 在其中一定存在绕 O 的稳定极限环. 由于假设 $\lambda = 0$ 时 O 是一阶细焦点, 所以从 O “跳出”的极限环是唯一的. 证毕.

定理 4.4 (广义 Hopf 分支定理) 设 $\lambda = 0$ 时式 (4.24) 以 O 为 m 阶细焦点, 且式 (4.24) 的右端为 C^r ($r \geq 2m+1$) 类函数. 则存在 $\epsilon_0, \delta_0 > 0$, 使对任何 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $|\lambda| < \epsilon_0$, 式 (4.24) 在以 O 为心, δ_0 为半径的圆邻域 $S_{\delta_0}(O)$ 内最多有 m 个极限环; 且对任一 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, 存在 λ , $|\lambda| < \epsilon$, 使对应的系统 (4.24) 在 $S_{\delta_0}(O)$ 内恰有 m 个极限环.

证明 由设 $\lambda = 0$ 时 O 为 m 阶细焦点, 故 O 邻近的后继函数为

$\rho(c) = a_k C^k + o(C^k)$, $a_k \neq 0$, $k = 2m+1$ (a_k 可能相差一个正数因子, 见第一章第三节中心-焦点判定焦点量的定义). 由解对初值和参数的连续依赖性, 当 $\lambda \neq 0$, $|\lambda|$ 充分小时, 式 (4.24) 在 O 邻近的后继函数可表示为

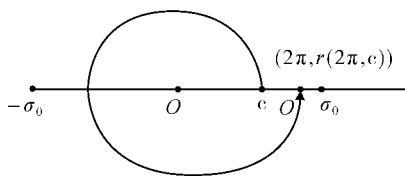


图 4-12

$$\bar{\rho}(c, \lambda) = \bar{a}_1(\lambda)c + \bar{a}_2(\lambda)c^2 + \dots + \bar{a}_k(\lambda)c^k + o(c^k), \quad (4.25)$$

其中 $|\bar{a}_i(\lambda)|$ ($i=1, 2, \dots, k-1$) 均很小, $\bar{a}_k(\lambda) \neq 0$. 式 (4.25) 的在 O 邻近的零点个数由 $\bar{a}_1(\lambda)c + \dots + \bar{a}_k(\lambda)c^k$ 确定, 故存在 $\epsilon_0, \delta_0 > 0$, 使当 $|\lambda| < \epsilon_0$ 时, $\bar{\rho}(c, \lambda)$ 在 $(-\delta_0, \delta_0)$ 内至多存在 $k=2m+1$ 个零点.

现证 $|\lambda| < \varepsilon_0$ 时在 $S_{\delta_0}(0)$ 内式 (4.24) 最多只有 m 个极限环. 反证法, 设有 $m+1$ 个环, 则在 $S_{\delta_0}(0)$ 内每一个环与正负 x 轴 (与极轴共线) 各交于一点 $(c_1, 0), (-c_2, 0), c_1, c_2 \in (0, \delta_0)$. 因此 $c_1, -c_2$ 为 $\bar{\rho}(c, \lambda)$ 的两个零点, $m+1$ 个极限环就对应了 $(-\delta_0, \delta_0)$ 内 $2(m+1)$ 个 $\bar{\rho}(c, \lambda)$ 的零点, 这与上述矛盾.

定理的第二部分要证明 m 个极限环是可以实现的. 作摄动系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X_0(x, y) + \mu_0 x + \mu_1 x(x^2 + y^2) + \cdots + \mu_{m-1} x(x^2 + y^2)^{m-1} \\ &\equiv X(x, y, \mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{m-1}), \\ \dot{y} &= Y_0(x, y) + \mu_0 y + \mu_1 y(x^2 + y^2) + \cdots + \mu_{m-1} y(x^2 + y^2)^{m-1} \\ &\equiv Y(x, y, \mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{m-1}),\end{aligned}\quad (4.26)$$

其中 $X_0(x, y), Y_0(x, y)$ 分别记 $\lambda=0$ 时式 (4.24) 的右端 $X(x, y, 0), Y(x, y, 0)$. 它在 O 邻近的后继函数记为

$$\tilde{\rho}(c, \mu_0, \cdots, \mu_{m-1}), \text{ 有 } \tilde{\rho}(c, 0, \cdots, 0) = \rho(c).$$

由解对初值和参数的连续依赖性知, 对任何的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 存在 μ^* 和 d^* , $\mu^* \in (0, \varepsilon), d^* \in (0, \delta_0)$, 使当 $|\mu_i| < \mu^* (i=0, \cdots, m-1)$ 时, $\tilde{\rho}$ 对一切 $c \in (0, d^*)$ 均有定义且其零点所对应的闭轨线都位于 $S_{\delta_0}(0)$ 内.

由设 $\rho(c)$ 中 $a_k \neq 0$, 即 $\rho^{(2m+1)}(0) \neq 0$, 为确定起见不妨设 $\rho^{(2m+1)}(0) > 0$ 来证, 这时 O 为 $\lambda=0$ 时式 (4.24) $_{\lambda=0}$, 也即 $\mu_0 = \cdots = \mu_{m-1} = 0$ 式 (4.26) 的 m 阶不稳定细焦点. 我们在式 (4.26) 中先取 $\mu_0 = \cdots = \mu_{m-2} = 0$, 设 μ_{m-1} 在 $(-\mu^*, \mu^*)$ 中变动. 这时易计算出后继函数.

$$\tilde{\rho}(c, 0, \cdots, 0, \mu_{m-1}) = 2\pi\mu_{m-1}c^{2m-1} + o(c^{2m-1}).$$

取 $\mu_{m-1} < 0$, 则 O 变为 $m-1$ 阶稳定细焦点, 类似于定理 4.2 中的证明可知, 这时在 O 外围邻近产生一个不稳定的极限环 Γ_1 . 再取 $\mu_0 = \cdots = \mu_{m-3} = 0$, 让 μ_{m-2} 在 $(0, \mu^*)$ 中变动, 且取 μ_{m-2} 适当小使 Γ_1 不消失. 这时 O 变为 $m-2$ 阶不稳定细焦点, 故又在 Γ_1 内域产生一个稳定的极限环 Γ_2 . 这样, 按此步骤相继变动 $\mu_{m-3}, \mu_{m-4}, \cdots, \mu_0$, 让其符号正负交替且 $|\mu_i|$ 足够小, 从而使 O 一次次改变稳定性, 每次细焦点 O 的阶数降低 1 阶, 直至 $\mu_0 \neq 0$ 时 O 变为粗焦点止. 这时分支出 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ 共 m 个极限环. 证毕.

例 4.10 考虑二次系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + dx + x^2 + mxy, \\ \dot{y} &= x + x^2\end{aligned}\quad (4.27)$$

的 Hopf 分支问题.

解 首先注意 $d \neq 0$ 时

$$A = \begin{pmatrix} d & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} q = 1, \\ p = -d, \end{matrix} \quad p^2 - 4q = d^2 - 4.$$

所以 $d > 0 (< 0)$, $|d|$ 适当小时, O 是不稳定 (稳定) 粗焦点.

$d = 0$ 时, O 为式 (4.27) 的细焦点. 这时可以算出^[5] 它的第 1 和第 2 个焦点量 (可能相差一个正数因子) 为

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{(3)}(0, m) &= m - 2, \\ \bar{\rho}^{(5)}(0, m) &= 2m(m - 5); \end{aligned}$$

且有结论: $d = 0$ 时

(1) 若 $\bar{\rho}^{(3)}(0, m) < 0$, 则 O 为一阶稳定细焦点; 若 $\bar{\rho}^{(3)}(0, m) > 0$, 则 O 为一阶不稳定细焦点.

(2) $\bar{\rho}^{(3)}(0, m) = 0$ 时, 若 $\bar{\rho}^{(5)}(0, m) > 0$, 则 O 为二阶稳定细焦点; $\bar{\rho}^{(5)}(0, m) > 0$, 则 O 为二阶不稳定细焦点.

我们就用以上结论和定理 4.3, 在 $m-d$ 参数平面上分析系统 (4.27) 的 Hopf 分支. 先看 $d = 0$ 直线上, 由 $\bar{\rho}^{(3)}(0, m) = m - 2$ 知, $m < 2$ 时 O 为一阶稳定细焦点; $m > 2$ 时 O 变为不稳定的一阶细焦点. 因此参数在 $d = 0, m > 2$ 直线段上时, O 的外围邻近出现一个稳定极限环 Γ_1 .

再让参数从这段直线往下, 即让 d 从 0 变负, 则 O 又变为稳定粗焦点了, 故在 Γ_1 内域又产生一个不稳定极限环 Γ_2 . 当 d 继续减小时按旋转向量场理论, Γ_1 缩小, Γ_2 扩大在一个 d 值时两环重合为一个二重极限环而后消失, 这在参数平面上对应一条二重极限环分支曲线 l .

直线 $d = 0, m < 0$ 上已知 O 为稳定的一阶细焦点, $d > 0$ 时 O 为不稳定粗焦点, 所以 $d > 0$ 时 O 的外围邻近也有一个稳定极限环.

这样我们得到分支图 4-13. 其上 $d = 0$ 是 Hopf 分支曲线, $(2, 0)$ 是二阶 Hopf 分支点, l 是二重极限环分支曲线.

Hopf 分支问题有许多种形式和解法, 下面再给出一个较一般的平面 Hopf 分支定理.

定理 4.5 设开集 $D \subset \mathbf{R}^2$, $f: D \times (-\lambda_0, \lambda_0) \rightarrow \mathbf{R}^2$ 是解析的. 方程

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (4.28)_\lambda$$

有平衡点 $\bar{x}(\lambda)$, $f(x, \lambda)$ 在 $\bar{x}(\lambda)$ 处对 x 的导算子记作 $A(\lambda)$. 若 $A(0)$ 的特征值是纯虚数 $\pm i\omega (\omega > 0)$, 即

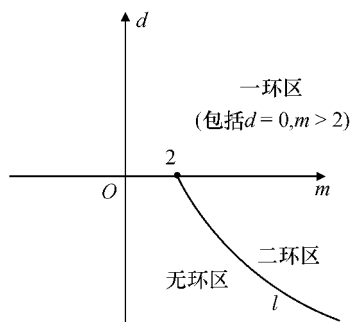


图 4-13

$$\det \mathbf{A}(0) > 0, \quad \text{Tr} \mathbf{A}(0) = 0. \quad (4.29)$$

用等式

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}(0) + \lambda \mathbf{B}(\lambda) \quad (4.30)$$

定义矩阵 $\mathbf{B}(\lambda)$, 若 $\text{Tr} \mathbf{B}(0) \neq 0$. 则或方程 (4.28)₀ 在 $\bar{x}(0)$ 附近全是闭轨, 或方程 (4.28) _{λ} 对 $\lambda > 0$ 或 $\lambda < 0$ ($|\lambda|$ 充分小) 在 $\bar{x}(\lambda)$ 附近有唯一的极限环, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时极限环趋于 $\bar{x}(0)$, 周期趋于 $2\pi/\omega$.

证明 不妨认为 $\bar{x}(\lambda) = 0$, 否则作一平移即可. 对于方程 (4.28) _{λ} 在 O 外围邻近的周期解, 它必过向量 $\mu \mathbf{b}$, 其中 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 是任意取定的向量, μ 是某实数. 取 $\mu \mathbf{b}$ 为初值, 周期解可表示为

$$\mathbf{x}(t, \lambda, \mu), \quad \mathbf{x}(0, \lambda, \mu) = \mu \mathbf{b}.$$

我们不妨设

$$\lambda = \mu d(\mu),$$

因为 O 也可看做方程 (4.28)₀ 的周期解, 所以 $\mu = 0$ 时, 应对应 $\lambda = 0$. 又设方程 (4.28) _{$\lambda = \mu d(\mu)$} 过 $\mu \mathbf{b}$ 的周期解之周期是 T_μ , 令

$$T_\mu = T_0(1 + \mu c(\mu)),$$

这是因为 $\mu \rightarrow 0$ 时应 $T_\mu \rightarrow T_0$.

作变换

$$s = \frac{T_0}{T_\mu} t = \frac{1}{1 + \mu c(\mu)} t, \quad x = \mu y,$$

就可使周期解

$$\mathbf{x}(t, \lambda, \mu) = \mathbf{x}\left(\frac{T_\mu}{T_0} s, \mu d(\mu), \mu\right) = \mu \mathbf{y}(s, \mu),$$

$\mathbf{y}(s, \mu)$ 以 T_0 为周期, $\mathbf{y}(0, \mu) = \mathbf{b}$; 方程 (4.28) _{λ} 化为

$$\begin{aligned} \mu \frac{dy}{ds} &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{T_\mu}{T_0} f(\mu y, \mu d(\mu)) \\ &= (1 + \mu c(\mu)) [\mathbf{A}(\lambda) \mu y + \mu^2 \mathbf{Q}(y, \lambda, \mu)], \end{aligned}$$

再用 (4.30) 式化为

$$\frac{dy}{ds} = A(0)y + \mu G(y, \mu). \quad (4.31)_\mu$$

其中

$$\begin{aligned} G(y, \mu) &\equiv d(\mu) B(\mu d(\mu)) y + c(\mu) A(\mu d(\mu)) y \\ &\quad + (1 + \mu c(\mu)) \mathbf{Q}(y, \mu d(\mu), \mu), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$\mathbf{Q}$ 关于 y 最低为二次幂. 下面来证明: 对充分小的 $\mu \in [0, \mu_0]$, 存在唯一的连

续可微函数 $d(\mu)$ 和 $c(\mu)$, 使当 $\lambda = \mu d(\mu)$, $T_\mu = T_0(1 + \mu c(\mu))$ 时, 方程 (4.31) $_\mu$ 初值为 b 的解 $y(s, \mu)$ 以 $T_0 = 2\pi/\omega$ 为周期, 也就是方程 (4.28) $_{\lambda=\mu d(\mu)}$ 的初值为 μb 的解 $x(t, \lambda)$ 是以 T_μ 为周期的.

首先方程 (4.31) $_0$ 是齐次线性方程

$$\frac{dy}{ds} = \mathbf{A}(0)y.$$

它以 b 为初值的解是

$$\begin{aligned} y(s, 0) &= e^{\mathbf{A}(0)s}b = e^{\mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}s}b, \\ &= \mathbf{P}e^{\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}s}\mathbf{P}^{-1}b \\ &= (\cos \omega s \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} \sin \omega s \mathbf{A}(0))b. \end{aligned} \quad (4.33)$$

这个周期解的周期是 $2\pi/\omega$, 也即 $T_0 = 2\pi/\omega$.

然后, 方程 (4.31) $_\mu$ 以 b 为初值的解是

$$y(s, \mu) = e^{\mathbf{A}(0)s}b + \mu \int_0^s e^{\mathbf{A}(0)(s-\tau)} G(y(\tau, \mu), \mu) d\tau,$$

它以 T_0 为周期的充要条件是

$$\int_0^{T_0} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} G(y(\tau, \mu), \mu) d\tau = 0.$$

将式 (4.32) 代入, 充要条件变为

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} [d\mathbf{B}(\mu d)y(\tau, \mu) + c\mathbf{A}(\mu d)y(\tau, \mu) \\ + (1 + \mu c)Q(y(\tau, \mu), \mu d, \mu)] d\tau = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

这是向量方程, 由两个纯量方程构成. 我们用隐函数定理从中确定出函数 $d(\mu)$ 和 $c(\mu)$ 来完成证明.

先证 $\mu=0$ 时, 从方程组 (4.34) 得唯一的解 $c=d=0$. 因 $\mu=0$ 时式 (4.34) 为

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} [d\mathbf{B}(0)y(\tau, 0) + c\mathbf{A}(0)y(\tau, 0) \\ + Q(y(\tau, 0), 0, 0)] d\tau = 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

其中 $y(\tau, 0)$ 如式 (4.33) 所示. 注意到此方程左端积分号下的第三项积分为零, 这是因 $Q(y(\tau, 0), 0, 0)$ 只包含 $y(\tau, 0)$ 的二次项, 所以被积函数 $e^{-\mathbf{A}(0)\tau}Q$ 是 $\cos \omega \tau$ 与 $\sin \omega \tau$ 的三次齐次式. 又注意矩阵 $\mathbf{A}(0)$ 与 $e^{\mathbf{A}(0)\tau}$ 可交换, 所以

$$\int_0^{2\pi/\omega} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} \mathbf{A}(0) e^{\mathbf{A}(0)\tau} d\tau = \frac{2\pi}{\omega} \mathbf{A}(0).$$

再定义矩阵

$$\bar{\mathbf{B}} \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} \mathbf{B}(0) e^{\mathbf{A}(0)\tau} d\tau,$$

方程组(4.35)就成为线性齐次代数方程组

$$d\bar{\mathbf{B}}\mathbf{b} + c\mathbf{A}(0)\mathbf{b} = 0.$$

可以证明:对一切向量 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 以列向量 $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{A}(0)\mathbf{b}$ 组成的矩阵的行列式

$$\det[\bar{\mathbf{B}}\mathbf{b}, \mathbf{A}(0)\mathbf{b}] \neq 0. \quad (4.36)$$

因此上面的代数方程组只有零解 $c=d=0$.

下面证明在 $\mu=c=d=0$ 处, 方程组(4.34)左端的函数对 d 和 c 的 Jacobian 行列式非零. 式(4.34)左端在 $(0,0,0)$ 处对 d 的偏导数是

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} \mathbf{B}(0) y(\tau, 0) d\tau = \frac{2\pi}{\omega} \bar{\mathbf{B}}\mathbf{b},$$

对 c 的偏导数是

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} \mathbf{A}(0) y(\tau, 0) d\tau = \frac{2\pi}{\omega} \mathbf{A}(0)\mathbf{b}.$$

则由式(4.36)知所求之 Jacobian 行列式

$$\det\left(\frac{2\pi}{\omega} \bar{\mathbf{B}}\mathbf{b}, \frac{2\pi}{\omega} \mathbf{A}(0)\mathbf{b}\right) \neq 0,$$

对一切向量 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

这时, 应用隐函数存在定理知, 存在 $\mu_0 > 0$, 使在 $[0, \mu_0]$ 上从式(4.34)解出唯一单值的函数

$$d = d(\mu), \quad c = c(\mu); \quad d(0) = c(0) = 0.$$

这就是我们所要的结果.

如果在 $[0, \mu_0]$ 上 $d(\mu) \equiv 0$, 则 $\lambda = \mu d(\mu) \equiv 0, \mu \in [0, \mu_0]$, 从而方程(4.28) _{λ} 与(4.28)₀ 是同一个, 这个方程 $\mu \in [0, \mu_0]$ 时, 以 $\mu\mathbf{b}$ 为初值的解都是周期解, 即平衡点 $(0,0)$ 附近全是闭轨.

如果在 $[0, \mu_0]$ 上 $d(\mu) \not\equiv 0$, 则有 $\mu_1 < \mu_0$ 使当 $\mu \in [0, \mu_1]$ 时 $\lambda = \mu d(\mu)$ 随 μ 单调地变化($\lambda > 0$ 或 $\lambda < 0$). 于是方程(4.28) _{λ} 的以 $\mu\mathbf{b}$ 为初值的解是唯一的周期解, 周期为 T_μ . 当 $\mu \rightarrow 0$, 即 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 这周期解趋于平衡点 O , 周期趋于 $T_0 = 2\pi/\omega$. 证毕.

例 4.11 讨论系统

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix} \equiv f(x, \lambda)$$

的 Hopf 分支.

解 系统对任意 λ 值平衡点为 $O(0,0)$. $f(x,\lambda)$ 在 O 处对 x 的导算子

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}(0) + \lambda \mathbf{B}(\lambda).\end{aligned}$$

显然 $\mathbf{A}(0)$ 以 $\pm i$ 为特征值, $\text{Tr} \mathbf{B}(0) = 1 \neq 0$. 此系统满足定理 4.5 的一切条件.

令

$$\lambda = \mu d(\mu), \quad T_\mu = 2\pi(1 + \mu c(\mu)), \quad S = \frac{2\pi}{T_\mu} t, \quad x = \mu y.$$

则解化为

$$x(t, \lambda, \mu) = x\left(\frac{T_\mu}{2\pi} s, \mu d(\mu), \mu\right) = \mu y(s, \mu),$$

系统化为

$$\mu \frac{d}{ds} y = \frac{T_\mu}{2\pi} f(\mu y, \mu d(\mu)),$$

即

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (1 + \mu c(\mu)) \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + \mu d(\mu) y_2 - \mu^2 y_1^2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mu \left\{ c(\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu d(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + d(\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (1 + \mu c(\mu)) \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu y_1^2 y_2 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

由式(4.34)知, 周期解的充要条件是

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} \left\{ d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + (1 + \mu c) \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu y_1^2 y_2 \end{pmatrix} \right\} d\tau = 0,\end{aligned}$$

我们由它来解出函数 $d(\mu)$ 和 $c(\mu)$.

显然 $\mu = d = c = 0$ 满足方程组. 将要确定的 $d(\mu)$ 和 $c(\mu)$ 必须满足 $d(0) = c(0) = 0$, 所以令

$$d(\mu) = \mu d'(\mu) + o(\mu), \quad c(\mu) = \mu c'(\mu) + o(\mu).$$

把两式代入充要条件, 用 μ 除之, 再令 $\mu \rightarrow 0$. 注意到

$$e^{-A^{(0)}s} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}, y(x, 0) = e^{A^{(0)}s} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \mathbf{b},$$

得到 $d'(0)$ 和 $c'(0)$ 应满足方程

$$d'(0)2\mu\bar{\mathbf{B}}\mathbf{b} + c'(0)2\mu\mathbf{A}(0)\mathbf{b} + \int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{A}(0)s} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1^2 y_2 \end{pmatrix}_{(s,0)} ds = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{A}(0)\tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\mathbf{A}(0)\tau} d\tau = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{A}(0)s} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1^2 y_2 \end{pmatrix}_{(s,0)} ds &= -\frac{2\pi}{8} (b_1^2 + b_2^2) \begin{pmatrix} b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

则 $d'(0)$ 和 $c'(0)$ 满足

$$\frac{1}{2} d'(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} + c'(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \frac{1}{8} (b_1^2 + b_2^2) \mathbf{b}.$$

由此得出

$$d'(0) = \frac{1}{4} (b_1^2 + b_2^2), \quad c'(0) = 0.$$

于是对充分小的 μ 有

$$\lambda = \mu d(\mu) \approx \mu^2 d'(0) = \frac{\mu^2}{4} (b_1^2 + b_2^2) \geq 0,$$

从而

$$\mu \approx \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

又 $T_\mu = 2\pi(1 + o(\mu^2)) \approx 2\pi, s \approx t$. 所以对充分小的参数 $\lambda > 0$, 系统有周期解

$$\begin{aligned} x(t, \lambda) &= \mu y(s, \mu) = \mu [e^{A^{(0)}s} \mathbf{b} + o(\mu)] \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} e^{A^{(0)}t} \mathbf{b} + o(\lambda), \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} \cos(t - \alpha) \\ \sin(t - \alpha) \end{pmatrix} + o(\lambda),$$

其中 $\alpha = \arccot \frac{b_2}{b_1}$, 周期 $\approx 2\pi$.

这就是说, $\lambda = 0$ 是分支点, 当 $\lambda > 0$ 充分小时系统有唯一的极限环; 该环当 $\lambda \rightarrow 0$ 时趋于平衡点 O , 周期趋于 2π .

第五节 多重极限环分支和 Poincaré 分支

这是分支理论中难度较大的两个部分,本书这里只作简单的叙述.

一、多重极限环分支

我们在第一节例 4.3 中已经看到, $\alpha=0$ 时系统 $(4.3)_0$ 有一个二重极限环. 经扰动后, $\alpha>0$ 时系统 $(4.3)_\alpha$ 有两个极限环(那二重环分裂成两条单重环); $\alpha<0$ 时系统 $(4.3)_\alpha$ 没有闭轨线. 称系统 $(4.3)_0$ 是个二重环分支系统, $\lambda=0$ 是分支值. 这种分支现象称为多重(极限)环分支. 对它的研究,基本方法是在考察的多重环邻近通过 Poincaré 映射建立后继函数. 当然,在特殊情况下系统对某个参数是个旋转向量场时,可从旋转向量场理论获得分支的某些信息.

设 $\lambda=0$ 时系统 (4.24) 具有一个 k 重极限环 $\Gamma_0, k \geq 2$. 按第二章第五节方法,我们在 Γ_0 上任取一点 P 作 Γ_0 的法线段 l , 在 l 上 P 点邻近建立后继函数

$$N(n_0) = n(n_0) - n_0.$$

则我们有

(i) $N(n_0)$ 的一个零点对应系统的一条闭轨;

(ii) 引入曲线坐标系后可推出

$$N'(0) = \exp \left[\oint_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial X_0}{\partial x} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} \right) dt \right] - 1,$$

当 $N'(0) \neq 0$ 时 Γ_0 为单重极限环.

(iii) 若 $N(n_0) = \frac{1}{k!} N^{(k)}(0) n_0^k + o(|n_0|^k)$, 则对应 Γ_0 是 k 重极限环.

定理 4.6 设式 (4.24) 是 $C^r (r \geq k)$ 系统, $\lambda=0$ 时它有一个 k 重极限环 $\Gamma_0, k \geq 2$. 则有

(1) 存在 $\epsilon_0, \delta_0 > 0$, 使当 $|\lambda| < \epsilon_0$ 时, 式 (4.24) 在 Γ_0 的 δ_0 环域邻域 $U_{\delta_0}(\Gamma_0)$ 内最多存在 k 个极限环;

(2) 对任何正数 $\epsilon < \epsilon_0, \delta < \delta_0$, 存在适当的 $\lambda, |\lambda| < \epsilon$, 必有某个式 (4.24) 型的 C^r 系统, 它在 $U_\delta(\Gamma_0)$ 内恰好有 k 个极限环.

这个定理证明的思路与定理 4.3 的类似, 证明(1)时取代那里的式 (4.25) 考虑

$$\bar{N}(n_0, \lambda) = b_1(\lambda)n_0 + b_2(\lambda)n_0^2 + \cdots + b_k(\lambda)n_0^k + o(|n_0|^k)$$

在 $(-\delta_0, \delta_0)$ 内零点的个数最多为 k 个.

证明(2)时取代那里的系统(4.26)考虑

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, y, 0) + \mu_1 F F'_x + \cdots + \mu_{k-1} F^{k-1} F'_x, \\ \dot{y} &= Y(x, y, 0) + \mu_1 F F'_y + \cdots + \mu_{k-1} F^{k-1} F'_y,\end{aligned}$$

其中 $F(x, y)$ 是按一定方式构造出来的 C^r 函数, 在 $\Gamma_0: x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 上满足

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, F'_x{}^2 + F'_y{}^2 \neq 0.$$

然后, 对上述系统当 $|n_0|, |\mu_i|$ 充分小时, 在 Γ_0 邻近建立的后继函数

$$\tilde{N}(n_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}), \quad \tilde{N}(n_0, 0, \dots, 0) = N(n_0),$$

适当变动 $\mu_i (i=1, \dots, k-1)$ 的符号, 找出 $[-\delta_0, \delta_0]$ 内存在的 $k-1$ 个零点, 加上 Γ_0 对应的一个共 k 个零点对应 k 个极限环.

多重极限环分支的研究要比细焦点分支的问题复杂、且困难得多, 因而研究结果也较少. 除了上面这个一般性的理论结果外, 要对一个给定具体系统作判定时, 首先遇到的困难是几乎无法知道 k 重极限环 Γ_0 的方程, 甚至要判定是否存在一个 k 重环也是很难的.

二、Poincaré 分支

讨论 Poincaré 分支的方法有多种, 例如有 Liapunov 第二方法, Poincaré 方法, 后继函数法等. 我们这里选讲第一种. 讨论的系统带有一定的特殊性, 是

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \lambda f_1(x, y), \\ \dot{y} &= -x + \lambda f_2(x, y).\end{aligned}\tag{4.37}_\lambda$$

我们总假设对一切 λ , 系统(4.37) $_\lambda$ 只以 $O(0, 0)$ 为平衡点, 并且 $\lambda \neq 0$ 时 O 不再是细焦点. 定义一元函数

$$\Phi(A) \equiv \int_0^{2\pi} [x f_1(x, y) + y f_2(x, y)] dt,$$

其中 $x = A \sin t, y = A \cos t$.

定理 4.7 (1) 对充分小的 λ , 系统(4.37) $_\lambda$ 在系统(4.37) $_0$ 闭轨 $\Gamma_{A_0}: x = A_0 \sin t, y = A_0 \cos t$ 附近有闭轨的必要条件是

$$\Phi(A_0) = 0.$$

(2) 若某 $A_0 > 0$, 使 $\Phi(A_0) = 0$, 又 $\Phi(A)$ 在 $A = A_0$ 不取极值, 则对充分小的 $|\lambda|$, 系统(4.37) $_\lambda$ 在 Γ_{A_0} 附近必有闭轨.

(3) 若 $\Phi(A_0) = \cdots = \Phi^{(2k)}(A_0) = 0, \Phi^{(2k+1)}(A_0) < 0$, 则对充分小的 $|\lambda|$, 系统(4.37) $_\lambda$ 在 Γ_{A_0} 附近有极限环, $\lambda > 0$ 时它是稳定的, $\lambda < 0$ 时它是不稳定的;

如果上述条件最后一个不等式改为 $\Phi^{(2k+1)}(A_0) > 0$, 则极限环的稳定性相反.

证明 $\lambda = 0$ 时系统 $(4.37)_0$ 的通积分是

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 = c.$$

它沿系统 $(4.37)_\lambda$ 轨线的全导数

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(4.37)_\lambda} = 2\lambda(xf_1 + yf_2).$$

由于系统 $(4.37)_0$ 的轨线是同心圆, 从 y 轴上点 $(0, A)$ 出发的轨线经过时间 2π 后又返回该点. 按解对参数的连续依赖性, 当 $|\lambda|$ 充分小时系统 $(4.37)_\lambda$ 从 $(0, A)$ 出发的轨线 $x = \varphi_\lambda(t, A)$, $y = \psi_\lambda(t, A)$ 也必绕过 O 经时间 $T_\lambda(A)$ 后又返回到正 y 轴上某点. 这时沿 $x = \varphi_\lambda(t, A)$, $y = \psi_\lambda(t, A)$ 从 $(0, A)$ 转一圈, 函数 $F(x, y)$ 的改变量为

$$\begin{aligned} F(0, \psi_\lambda(T_\lambda(A), A)) - F(0, A) &= \int_0^{T_\lambda(A)} \left. \frac{dF}{dt} \right|_{(4.37)_\lambda} dt \\ &= 2\lambda \int_0^{T_\lambda(A)} [xf_1 + yf_2] dt \equiv 2\lambda \Phi_\lambda(A). \end{aligned} \quad (4.38)$$

这里定义了

$$\Phi_\lambda(A) \equiv \int_0^{T_\lambda(A)} [xf_1 + yf_2] dt,$$

其中积分沿 $x = \varphi_\lambda(t, A)$, $y = \psi_\lambda(t, A)$ 进行.

又根据解对初值和参数的连续依赖性知, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta, \lambda_0 > 0$ 足够小, 使当 $|A_1 - A| < \delta$, $|\lambda| < \lambda_0$ 时有

$$|\varphi_\lambda(t, A_1) - \varphi(t, A)| < \epsilon, |\psi_\lambda(t, A_1) - \psi(t, A)| < \epsilon, t \in [0, 4\pi], \text{ 及 } |T_\lambda(A_1) - 2\pi| < \epsilon, |\Phi_\lambda(A_1) - \Phi(A)| < \epsilon.$$

现依次证明定理的三个结论:

(1) 若 $\Phi(A_0) \neq 0$, 则由上面讨论, 当 $|\lambda|$ 充分小, A 充分接近 A_0 时 $\Phi_\lambda(A) \neq 0$, 也就是说系统 $(4.37)_\lambda$ 从 $(0, A)$ 出发的轨线都不是闭轨, 与假设矛盾.

(2) 若 $\Phi(A_0) = 0$ 但 $\Phi(A)$ 在 $A = A_0$ 处不取极值, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1, \delta_2 \in (0, \epsilon)$ 使

$$\Phi(A_0 - \delta_1) \cdot \Phi(A_0 + \delta_2) < 0.$$

根据上面讨论, 必 $\exists \lambda_0 > 0$ 充分小, 当 $|\lambda| < \lambda_0$ 时也使

$$\Phi_\lambda(A_0 - \delta_1) \cdot \Phi_\lambda(A_0 + \delta_2) < 0.$$

从而存在 $A_\lambda \in (A_0 - \delta_1, A_0 + \delta_2) \subset (A_0 - \epsilon, A_0 + \epsilon)$ 使

$$\Phi_\lambda(A_\lambda) = 0.$$

也即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \lambda_0 > 0$ 充分小, 当 $|\lambda| < \lambda_0$ 时, 系统 $(4.37)_\lambda$ 从 y 轴上区间 $(A_0 -$

$\varepsilon, A_0 + \varepsilon$) 内的点 $(0, A_\lambda)$ 出发的轨线是闭的.

(3) 若 $\Phi(A_0) = \dots = \Phi^{(2k)}(A_0) = 0$, 而 $\Phi^{(2k+1)}(A_0) < 0$, 则由

$$\Phi(A) = \frac{1}{(2k+1)!} \Phi^{(2k+1)}(A_0)(A - A_0)^{(2k+1)} + o(|A - A_0|^{2k+1})$$

知, 存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\Phi(A_0 - \delta_0) > 0, \quad \Phi(A_0 + \delta_0) < 0.$$

从而 $|\lambda| < \lambda_0$ 足够小时

$$\Phi_\lambda(A_0 - \delta_0) > 0, \quad \Phi_\lambda(A_0 + \delta_0) < 0.$$

这时, 若 $\lambda > 0$, 则由式 (4.38) 知, 系统 (4.37) $_\lambda$ 从点 $(0, A_0 - \delta)$ 出发的轨线绕 O 一周再与正 y 轴相交时, 交点在该点上方; 而从 $(0, A_0 + \delta)$ 出发的轨线转一周再与正 y 轴相交, 交在该点下方 (图 4-14). 两段轨线和正 y 轴上连接每段轨线的两小段直线围成了一个环域 R , 按环域定理 R 内一定有系统 (4.37) $_\lambda$ 的稳定极限环.

对 $\lambda < 0$ 及 $\Phi^{(2k+1)}(A_0) > 0$ 的情形同理可证. 证毕.

例 4.12 讨论 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

的等价系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu(1 - x^2)y. \quad (4.39)_\mu$$

解 系统 (4.39) $_\mu$ 具有系统 (4.37) $_\lambda$ 的形式, 系统 (4.39) $_0$ 具有解 $x = A \sin t, y = A \cos t$. 按定理 4.6 步骤, 定义函数

$$\Phi(A) = \int_0^{2\pi} y^2 (1 - x^2) dt,$$

将 $x = A \sin t, y = A \cos t$ 代入计算, 得

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \int_0^{2\pi} A^2 \cos^2 t (1 - A^2 \sin^2 t) dt \\ &= A^2 \pi (1 - \frac{A^2}{4}). \end{aligned}$$

解方程 $\Phi(A) = 0$, 得 $A_0 = 0$ 和 2. 验证

$$\Phi'(2) = -4\pi < 0.$$

由定理 4.7 的结论 (3) 知, $|\mu|$ 很小时系统 (4.39) $_\mu$ 在圆 $x = A \sin t, y = A \cos t$ 的附近有极限环. 当 $\mu > 0$ 时它是稳定环; 当 $\mu < 0$ 时它是不稳定环.

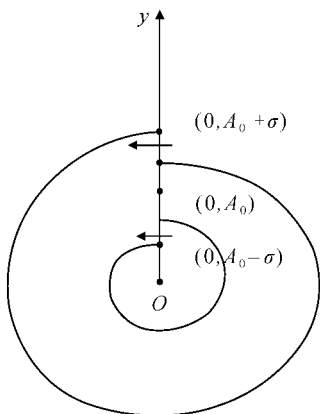


图 4-14

第六节 同宿环分支与 Bogdanov-Takens 分支

一、同宿环分支

同宿环、异宿环分支的讨论比较复杂,有许多基础要重新建立,限于篇幅不便多谈,这里只引用同宿环分支的一个定理作为对这方面研究的初步了解.

为叙述简单计,这里只考虑形如图 4-15 中的同宿环 L_0 .

定义 4.6 如果在 L_0 内侧邻近的轨线均以 L_0 为 $\omega(\alpha)$ 极限集,则称 L_0 为内侧稳定(不稳定)的;若 $D(N) \neq 0$,则称 N 为粗鞍点,若 $D(N) = 0$,称 N 为细鞍点. 其中 $D(N)$ 定义为

$$D(N) \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_N.$$

定理 4.8 设 $\lambda = 0$ 时系统(4.24)具有鞍点 N 的同宿环 L_0 . 则当 $D(N) < 0 (> 0)$ 时, L_0 为内侧稳定(不稳定)的;且 $|\lambda|$ 甚小时,系统(4.24)在 L_0 邻近最多分支出一个极限环,它是稳定(不稳定)的.

证明 只证 $D(N) < 0$ 情形. 这时存在正数 $\delta, \eta > 0$, 足够小,使当 $|\lambda| < \eta$ 时在圆 $S_\delta(N)$ 内有

$$\frac{\partial X}{\partial x}(x, y, \lambda) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y, \lambda) \leq -r < 0.$$

首先证,存在 L_0 的内邻域,其内没有系统(4.24)₀ 的闭轨线. 反证,若不然,在 L_0 的任意小内邻域内总有闭轨线 L . 取点 $A_1, A_2 \in L_0 \cap S_\delta(N)$ (如图 4-15),则在轨线段 $\widehat{A_1 R A_2}$ 上走时所需的时间 T_0 是有限的,而轨线段 $\widehat{N A_1}$, $\widehat{A_2 N}$ 上对应时间为无穷大. 由解对初值和参数的连续依赖性知,当 L 充分接近 L_0 时, L 上有点 A'_1, A'_2 分别在 A_1, A_2 的小邻域内,使 $\widehat{A'_1 R' A'_2}$ 相应时间小于 $2T_0$, 而 $A'_2 A'_1$ 相应时间大于 $\frac{2MT_0}{r}$, 其中 M 是 L_0 所围的区域内

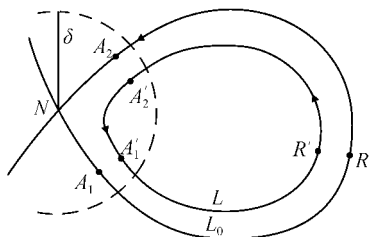


图 4-15

$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ 的上界(由 $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$ 的连续性保证).

因而有

$$\oint_L \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dt = \int_{A_1' R A_2'} + \int_{A_2' A_1'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dt$$

$$< M \cdot 2T_0 - r \cdot \frac{2MT_0}{r} = 0. \quad (4.40)$$

因已设 L_0 的任意邻近总存在系统 (4.24)₀ 的闭轨, 即 L 或为周期环之一, 或为一系列闭轨之一. 在前一情形有

$$\oint_L \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dt = 0;$$

在后一情形, 总可取到 L 为一不稳定环, 因此

$$\oint_L \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dt \geq 0.$$

这两种情形都导出与式 (4.40) 的矛盾. 得证. 故 L_0 的内侧要么是稳定的, 要么是不稳定的.

再排除 L_0 内侧不稳定的可能性. 否则, 在内侧在螺线 $\widehat{BC}$ 交 L_0 的无切线段 l 于 B, C 两点 (图 4-16). 证系统 (4.24)₀ 的右端为 (X_0, Y_0) , 作旋转向量场 $(X_0 - \alpha Y_0, Y_0 + \alpha X_0)$. 取 $\alpha > 0$ 充分小, 使 N 的同宿环 L_0 破裂成如图 4-16 上虚点表示的轨线 $\widehat{NE}$ 和 $\widehat{DN}$, 而过 B 的螺线略变动, 虚线表示的轨线与 l 的交点 C' 仍在 BC 线段上.

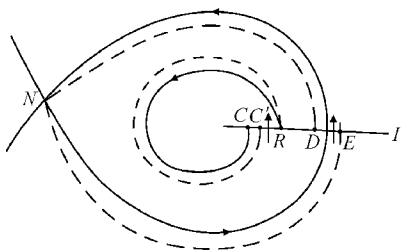


图 4-16

则 $\widehat{BC'}$ 与直线段 $\overline{C'B}$ 和 $\widehat{DN}$, $\widehat{NE}$ 与直线段 $\overline{ED}$ 围成了一个环域, 显然其内应至少有 $(X_0 - \alpha Y_0, Y_0 + \alpha X_0)$ 的一条不稳定极限环 L^* , 但当 $|\lambda|$ 很小时, (4.40) 的不等式对 L^* 仍成立, 这与 L^* 不稳定是矛盾的. 故 L_0 只可能是内侧稳定的.

同样的推理可知, 当 $|\lambda| > 0$ 甚小时, 系统 (4.24) 若在 L_0 邻近分支出极限环, 它必是稳定的. 故这样的环最多只有一个. 证毕.

二、Bogdanov - Takens 分支

B-T (简称) 分支是指 Bogdanov^[16,17] 和 Takens^[18] 两人 1974~1976 年对系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy, \end{aligned} \quad (4.41)$$

分支问题的一个极其重要的研究成果. 我们这里只列出结果并加以说明, 不给

出说明(因其证明极其冗长),让我们看到:(1)一个系统的分支问题怎样才算
是做完整了;(2)在一个系统中常常出现多种分支现象,它们是有联系的.

系统(4.41)是系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2 + xy \quad (4.42)$$

的余维 2 的普适开折.

式(4.42)有唯一奇点 $O(0,0)$,它对应

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A 为 O 为二重特征根,按第一章第四节中分类, O 是结构不稳定的高阶鞍点
(见图 4-17 中右侧标 O 处).

定理 4.9 (1)当 (μ_1, μ_2) 在参数平面的原点附近变动时,系统(4.41)在
相空间 $x-y$ 的原点附近有且只有 9 种不同拓扑结构,它们对应于参数平面
 $\mu_1 - \mu_2$ 原点邻域中分支图的不同分支曲线和他们分割的区域.

(2)分支图是由原点 $(\mu_1, \mu_2) = (0,0)$ 及下列曲线组成:

$$SN^{\pm} = \{\mu \mid \mu_1 = 0, \mu_2 > 0 \text{ 或 } \mu_2 < 0\},$$

$$H = \{\mu \mid \mu_1 = -\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}}), \mu_2 > 0\},$$

$$HL = \{\mu \mid \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}}), \mu_2 > 0\}.$$

其中 $SN^{\pm}$ 表鞍结点分支曲线, H 表 Hopf 分支曲线, HL 表同宿环分支曲线.
见图 4-17 中间.

4 条分支曲线上的点和原点所对应的系统,它们的拓扑结构是结构不稳
定的,分支曲线分割成的 4 个开域中的点所对应的系统的拓扑结构是结构稳
定的.如图 4-17 所示.

(3)系统(4.42)的任意扰动系统在奇点 O 附近可能出现的轨线拓扑结构
都等价于上述 9 种之一.

我们从图 4-17 可以清楚地看到:当 (μ_1, μ_2) 位于分支图上区域 I (即 μ_1
> 0), 系统(4.41)无奇点;当 (μ_1, μ_2) 变动到 SN^+ (即正 μ_2 轴)时,一个鞍结点
突然产生;进入区域 II 后立即分裂为一个鞍点和一个不稳定结点(然后结点转
化为不稳定焦点,结点与焦点的拓扑类型相同); (μ_1, μ_2) 到达 H 上时焦点由
粗焦点变为细焦点为 Hopf 分支做好准备;进入区域 III 时焦点稳定性倒转,发
生 Hopf 分支,从奇点跳出一个不稳定极限环,并随 (μ_1, μ_2) 继续变动而膨胀;
当到达 HL_1 时,它形成了同宿环; (μ_1, μ_2) 进入区域 IV 时同宿环立即破裂,继
续变动下两个奇点又重新靠近;当 (μ_1, μ_2) 到达 SN^- (即负 μ_2 轴)时两个奇点

再次结合成鞍结点;回到区域 I 奇点又消失.

从这个例子中我们可以看到,系统(4.41)的分支问题中随着参数 μ_1, μ_2 的变化出现了奇点分支, Hopf 分支, 同宿环分支, 它们有机地结合起来了. 这个结果是完美的, 所有的拓扑结构都搞清楚了, 准确地确定了分支曲线图, 要做到这一步是极不容易的.

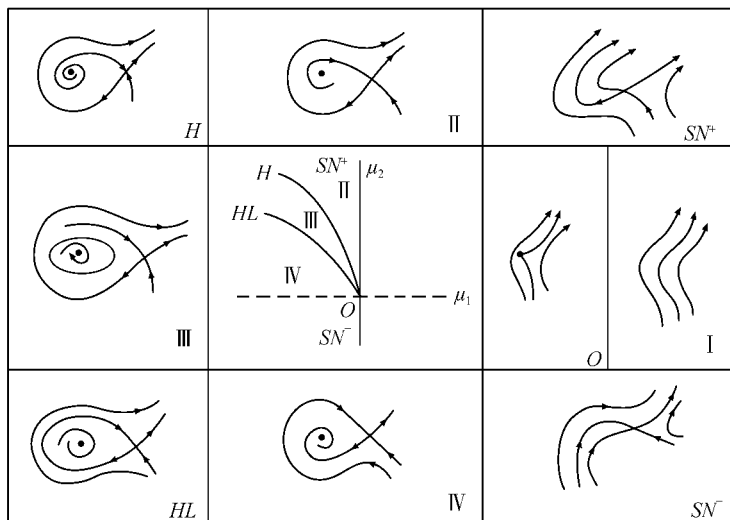


图 4-17

补充与问题

1. $\mathbf{R}^n$ 上向量场的结构稳定性

正文中 $\mathbf{R}^2$ 上向量场的结构稳定性, 可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 上去.

考虑 $G \subset \mathbf{R}^n$ 上的 C^r 映射 f, g 所确定的向量场(动力系统)

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

和

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad (2)$$

$x \in G \subset \mathbf{R}^n, r \geq 1$. 我们记 C^r 映射的全体为

$$\mathcal{F} \equiv \{f \mid f \in C^r(G)\},$$

定义 $g \in \mathcal{F}$ 的范数

$$\|g\| = \max_{x \in G} \left[\sum_{j,k=1}^n \sum_{i=0}^r \frac{\partial^i g_j}{\partial x_k^i} \right]$$

和 f 的 δ 邻域

$$U_\delta(f) \equiv \{g \in \mathcal{F} \mid \|f - g\| < \delta\},$$

则有

定义 给定 $\mathcal{F}$ 上的系统(1), 若存在 $\delta > 0$, 使任意的 $g \in U_\delta(f)$, 系统(2)均与系统(1)拓扑等价, 则我们称系统(1)是结构稳定的.

对 $\mathbf{R}^n$ 上向量场的结构稳定性, 文献中虽有一些局部的有关性质与结论, 但没有像正文中定理 4.1 那样深刻的结论.

2. $\mathbf{R}^n$ 上的分支理论

基于结构稳定性概念建立起来的分支理论, 当然可以向 $\mathbf{R}^n$ 推广, 但由于维数的增加, 极大地增加了问题的复杂性. 以奇点分支为例, 首先要解决的是, 把必须讨论的相空间维数尽可能降低, 其次在等价意义下, 再把降维后的微分方程的形式尽可能化简.

当微分方程右端在某一奇点上, 对应的线性部分系数矩阵有 n_1 个零实部特征根, n_2 个非零实部特征根时, 我们可以把奇点分支的研究限制在一个 n_1 维不变的中心流形 W^c 上, 因为那些复杂的分支现象都发生在 W^c 上, 在一定条件下, W^c 外的解都指数型地趋于 W^c 上的解, 而 W^c 上解的性质则可通过对 n_1 维不变子空间 E^c 上诱导的方程的研究而得到, 这样一来, 维数就大大降低了, 这就是中心流形定理的思想. Liapunov - Schmidt 方法或称更替法(alternative method)是另一种降维的方法.

在降维后, 我们还要将限定中心流形 W^c 上解的 E^c 诱导方程的形式, 尽可能化简到便于分支研究的形式, 这一步骤要用到正规形(normal form)理论与方法. 这些都是较深刻的数学工具, 对它们的了解可参阅文献[5, 12, 13].

动力系统降维以后, 若仍然高于 2 维, 则基于约当闭曲线性质的那些平面轨线性质, 不再成立了. 那么, 分支的分类、分支曲面图等许多问题, 都将复杂得多, 除了少数特殊情况外, 尚未见到具体的深刻工作, 这些都将等待人们去研究.

3. 平面二次系统和三次系统的分支研究

本书第二章的补充与问题中提到的二次系统的研究, 从 20 世纪 60 年代开始就致力于对某类含 1 个或多个可变参数的二次系统, 在参数变化下研究奇点个数、类型的变化, 及研究闭轨、极限环、分界线环的产生、消失、个数的变化等问题, 进而尽可能多地画出各种全局结构图. 这种随参数的变化而引起系统轨线的突变实际上就是分支现象, 尽管刚开始的时候并不是每位研究者都十分明确这点, 因为 20 世纪 60 年代初期, 分支理论还处于萌芽阶段. 时至今日, 平面二次系统分支问题的研究已出现了大量优秀的具体工作, 可以说是动力系统分支理论成果最集中的一个领域, 它们被总结在文献[19]的第 14 节, 20 中.

平面三次系统的分支问题研究比起二次系统来说要少得多, 除了少数特殊的平行工作外, 几个优秀的工作是围绕着 $H(3) = ?$ 进行的, 人们构造出有 7 个或 11 个极限环的特殊三次系统的例子, 有些过程也用到了分支理论的概念或方法, 见文献[19]的第 15 节.

总之,平面二次系统的分支问题还有不少遗留问题(特别是Ⅲ类方程),三次系统的分支问题仅仅有了些好的起步,系统地研究还未真正开始.这都将等待人们大力去攻克.

参考文献

- [1]Андронов А. А. Понтрягин Л.С. Глубие системы. ДАН,1937,16(5):247~250
- [2]DeBaggis H. F. Dynamical Systems with Stable Structures, Contributions to nonlinear oscillations,1952,(II):37~59
- [3]Peixoto M. M. On structural stability. Ann Math. ,Princeton,1959,69:199~222
- [4]Peixoto M. M. Structural Stability on two-Dimensional Manifolds. Topology,1962,1:101~120
- [5]张芷芬,李承治,郑志明,等. 向量场的分岔理论基础. 北京:高等教育出版社,1997
- [6]张锦炎,冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京:北京大学出版社,2000
- [7]丁同仁,李承治. 常微分方程教程. 北京:高等教育出版社,2001
- [8]罗定军,张祥,董梅芳. 动力系统的定性与分支理论. 北京:科学出版社,2001
- [9]李继彬,冯贝叶. 稳定性、分歧与混沌. 昆明:云南科技出版社,1995
- [10]韩茂安,朱德明. 微分方程分支理论. 北京:煤炭工业出版社,1994
- [11]韩茂安,顾圣士. 非线性系统的理论和方法. 北京:科学出版社,2001
- [12]Chow S. N, Hale J. K. Methods of Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag,1982
- [13]Hale J. K. Dynamics and Bifurcations. New York:Springer-Verlag,1991
- [14]Andronov A. A. Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane. New York: Witey,1975
- [15]Looss G,Joseph D. D. Elementary Stability and Bifurcation Theory. New York;Springer-Verlag,1990
- [16]Bogdanov R. I. Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. Trudy Sem. Petrovsk. ,1976,2:37~65(in Russian)
- [17]]Bogdanov R. I. Bifurcations of the limit cycle of a family of plane vector fields. Trudy Sem. Petrovsk. ,1976,2:23~35(in Russian)
- [18]Takens F. Forced oscillations and bifurcations; Applications of global analysis I. In Commun. Math. Vol 3 Inst. ,Rijksuniv. Utrecht. ,1974
- [19]叶彦谦. 多项式微分系统定性理论. 上海:上海科学技术出版社,1995
- [20]罗定军. Limit Cycle Bifurcations for Quadratic Differential Systems. 会议报告,2003
- [21]刘兴波,韩茂安. 一类两点异宿环的扰动分支. 数学年刊,2000,6(21A):667~674
- [22]刘一戎,赵梅春. 一类五次系统赤道环的稳定性与极限环分支. 数学年刊,2002,1(23A):75~78
- [23]朱德明,韩茂安. 快变量空间中的同宿轨道分支. 数学年刊,2002,4(23A):429~438
- [24]Jin Yinlai, Zhu Deming, Zheng Qingyu. Bifurcations of Rough 3-Point-Loop With

Higher Dimensions. Chin. Ann. Math. 2003, 1(24B):85~96

[25] 宋燕. 具有全局中心的三次 Hamilton 系统的 Poincaré 分支. 数学学报, 2004, 47(2): 291~298

[26] 金银来. 三点粗异宿环分支. 数学学报, 2004, 47(6):1237~1242

第二篇 非线性系统的稳定性理论及其应用

第五章 Liapunov 稳定性的基本概念与基本定理

Liapunov 首创的稳定性概念和 Liapunov 函数概念,及在这基础上建立的一系列基本定理,为稳定性理论的建立与发展奠定了坚实的基础. 本章叙述的就是这部分内容. 定理的证明及各种概念的表达方式大都采用了近代形式,基本精神是属于 Liapunov 的.

第一节 Liapunov 意义下的稳定性概念

一、稳定性基本定义

考虑系统

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y),$$

其中 $y \in D \subset \mathbf{R}^n, g \in C[I \times D, \mathbf{R}^n], I \equiv [\tau, +\infty], \tau \in \mathbf{R}$; 并保证解是存在唯一的.

设我们考察某个解 $y = \varphi(t; t_0, y_0) \equiv \varphi(t)$ 的性态. 可作变换

$$x = y - \varphi(t),$$

化上述系统为

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x + \varphi(t)) - g(t, \varphi(t)) \equiv f(t, x),$$

且显然有 $f(t, 0) \equiv 0$. 故考察任何一个解的稳定性态, 均可转化为考察系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0 \quad (5.1)$$

的平凡解 $x(t) \equiv 0$ 的稳定性态. 其中 $x \in D \subset \mathbf{R}^n, f \in C[I \times D, \mathbf{R}^n], I \equiv [\tau, +\infty], \tau \in \mathbf{R}$. 式(5.1)过 $(t_0, x_0) \in I \times D$ 的解常表示为 $x = x(t; t_0, x_0) \equiv x(t), x(t_0) = x_0$.

定义 5.1

【5.1.1】 若 $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta = \delta(\epsilon, t_0)$, 使 $\forall x_0$, 只要 $\|x_0\| < \delta$ 时, 对一切 $t \geq t_0$ 总有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon.$$

则称式(5.1)的平凡解 $x=0$ 是(Liapunov 意义下)稳定的.

否则, 它是不稳定的. 即总 $\exists \epsilon_0 > 0, \exists t_0 \in I$, 对不论多么小的 $\delta > 0$, 必有 x_0 , 虽 $\|x_0\| < \delta$, 但 $\exists t_1 \geq t_0$, 使

$$\|x(t_1; t_0, x_0)\| \geq \epsilon_0.$$

【5.1.2】 若上述定义中的 $\delta = \delta(\epsilon)$, 它与 t_0 无关, 则称式(5.1)的平凡解 $x=0$ 是一致稳定的.

这里 $\|x\|$ 表 $x \in \mathbf{R}^n$ 的范数, 若无特殊的声明采用定义

$$\|x\| \equiv \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{或 } \|x\| \equiv \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}).$$

定义 5.2

【5.2.1】 若 $\forall t_0 \in I, \exists \delta(t_0) > 0$, 对 $\forall x_0$, 只要 $\|x_0\| < \delta$ 时, $x(t; t_0, x_0)$ 对一切 $t \geq t_0$ 有定义, 且有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0.$$

则称式(5.1)的平凡解是吸引的.

也可表述为: 若 $\forall t_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta(t_0) > 0$ 及 $T(\epsilon, t_0, x_0) > 0$, 当 $\|x_0\| \leq \delta, t \geq t_0 + T$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon.$$

【5.2.2】 若上述定义中的 T 与 x_0 无关, 即对固定的 t_0 , 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 关于 x_0 ($\|x_0\| < \delta(t_0)$) 一致地有 $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0$. 则称式(5.1)的平凡解是等度吸引的.

【5.2.3】 若定义[5.2.1]中的 $T = T(\epsilon)$ 只依赖于 ϵ , 与 x_0, t_0 无关, 则称式(5.1)的平凡解是一致吸引的.

【5.2.4】 若[5.2.1], [5.2.2], [5.2.3]中的 δ 可以任意大, 则相应地被称为全局吸引, 全局等度吸引, 全局一致吸引.

定义 5.3

【5.3.1】 若式(5.1)的平凡解 $x=0$ 是稳定的, 又是吸引的, 则它是渐近稳定的.

【5.3.2】 若式(5.1)的平凡解 $x=0$ 是稳定的, 又是等度吸引的, 则它是等度渐近稳定的.

[5.3.3] 若式(5.1)的平凡解 $x=0$ 是一致稳定的, 又是一致吸引的, 则它是一致渐近稳定的.

[5.3.4] 若式(5.1)的平凡解 $x=0$ 是稳定的, 又是全局吸引的, 则它是全局渐近稳定的.

[5.3.5] 若式(5.1)的平凡解 $x=0$ 是一致稳定的, 又是全局一致吸引的, 且所有解还是一致有界的(即 $\forall r>0, \exists B(r)>0$, 使当 $\|x_0\| \leq r$ 时, 对一切 $t \geq t_0$ 有 $\|x(t; t_0, x_0)\| \leq B$), 则平凡解是全局一致渐近稳定的.

定义 5.4

[5.4.1] 若 $\exists \alpha > 0, \forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$, 当 $\|x_0\| < \delta$ 时, $\forall t \geq t_0$, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \epsilon e^{-\alpha(t-t_0)},$$

则称式(5.1)的平凡解是指数稳定的.

[5.4.2] 若 $\forall \delta > 0, \exists \alpha > 0, \forall t_0 \in I, \exists M(\delta) > 0$, 当 $\|x_0\| < \delta$ 时, $\forall t \geq t_0$, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq M(\delta) e^{-\alpha(t-t_0)},$$

则称式(5.1)的平凡解是全局指数稳定的.

我们应借助 $t-x$ (x 以一维作代表) 平面示意图, 逐个充分理解上述定义的几何含义. 然后进一步理解稳定性与吸引性是相互独立的概念, 一般不存在蕴含关系(试举例).

根据上述定义不难看出, 平凡解全局指数稳定必为全局一致渐近稳定, 指数稳定必为一致渐近稳定, 一致渐近稳定必为渐近稳定, 一致稳定必为稳定, 一致吸引必为吸引, 反之则不一定成立.

二、函数的定号性与楔函数

设 $H \in (0, +\infty)$, $D \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq H\}$, $G_H \equiv \{(t, x) \in I \times \mathbf{R}^n \mid t \in I, x \in D\}$.

考察函数

$$\begin{aligned} W(x) &\in C[D, \mathbf{R}], \quad W(0) = 0; \\ V(t, x) &\in C[G_H, \mathbf{R}], \quad V(t, 0) \equiv 0. \end{aligned}$$

定义 5.5

[5.5.1] 称 $W(x)$ 是 D 上的常正函数(常负函数), 若在 D 上 $W(x) \geq 0$ ($-W(x) \geq 0$), 且 $W(x) = 0$ 有非零解 $x = x_0 \in D$. 常正、常负函数统称为常号函数.

【5.5.2】称 $W(x)$ 是 D 上的正定函数(负定函数), 若在 D 上 $W(x) \geq 0$ ($-W(x) \geq 0$), 且 $W(x)=0$ 仅有零解 $x=0 \in D$. 正定、负定函数统称为定号函数.

【5.5.3】称 $W(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的无穷大正定函数, 若 $W(x)$ 正定, 且当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时 $W(x) \rightarrow +\infty$.

【5.5.4】称 $V(t, x)$ 是 G_H 上的常正函数(常负函数), 若 $V(t, x) \geq 0$ ($-V(t, x) \geq 0$), 且 $V(t, x)=0$ 有非零解 $x=x_0 \in D$.

【5.5.5】称 $V(t, x)$ 是 G_H 上的正定函数(负定函数), 若存在 D 上的正定(负定)函数 $W(x)$, 使 $V(t, x) \geq W(x)$ ($V(t, x) \leq W(x)$).

【5.5.6】称 $V(t, x)$ 是 $I \times \mathbf{R}^n$ 上的无穷大正定函数, 若存在无穷大正定函数 $W(x)$, 使

$$V(t, x) \geq W(x).$$

这种情形, 有时也称 $V(t, x)$ 具有无穷大下界.

【5.5.7】称 $W(x)$ 、 $V(t, x)$ 为变号函数, 若它们在各自的定义域内可正可负.

例 5.1 函数

$$W(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4, \quad \text{正定};$$

$$W(x, y, z) = x^2 + z^4, \quad \text{常正};$$

$$W(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - z^4, \quad \text{变号};$$

$$W(x, y, z) = -x^2 + 2xy - y^2 - x^4, \quad \text{负定};$$

$$V(t, x, y) = e^{-t}(x^2 + y^2), t \geq 0, \quad \text{常正};$$

$$V(t, x, y) = t(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 \cos t, t \geq 1,$$

是无穷大正定函数.

定义 5.6 称 $V(t, x)$ 具有无穷小上界, 若存在正定函数 $W_1(x)$, 使

$$|V(t, x)| \leq W_1(x).$$

它的作用是: 当 $\|x\| \rightarrow 0$ 时, 对 t 一致地有 $V(t, x) \rightarrow 0$.

例 5.2 函数

$$V(t, x) = \sin[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)t]$$

没有无穷小上界; 函数

$$V(t, x) = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{t} \{2 + \sin[(x_1 + \cdots + x_n)t]\},$$

$t \geq 1$, 具有无穷小上界.

定义 5.7

【5.7.1】 一个连续纯量函数 $\varphi(r) \in C[[0, r_1], \mathbf{R}^+]$ 或 $\varphi(r) \in C[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+]$ 称为是 K 类函数(楔函数, 记为 $\varphi \in K$), 若 $\varphi(0) = 0$ 且是严格递增的. 其中 $\mathbf{R}^+ \equiv [0, +\infty)$.

【5.7.2】 若 $\varphi \in C[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+]$, $\varphi \in K$, 且

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = +\infty,$$

则称 φ 是无界 K 类函数, 记为 $\varphi \in KR$.

引理 5.1 $W(x)$ 是 D 上给定的正定函数, 则必存在两个函数 $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, 使得

$$\varphi_1(\|x\|) \leq W(x) \leq \varphi_2(\|x\|).$$

证明 令

$$\varphi(r) \equiv \inf_{r \leq \|x\| \leq H} W(x).$$

显然有 $\varphi(0) = 0$, $r > 0$ 时, $\varphi(r) > 0$, 且 $\varphi(r)$ 在 D 上单调不减(不一定严格递增).

首先证 $\varphi(r)$ 连续, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 \leq r_2 - r_1 < \delta$ 时, 要证

$$\varphi(r_2) - \varphi(r_1) < \varepsilon.$$

我们有

$$\begin{aligned} \varphi(r_2) - \varphi(r_1) &= \inf_{r_2 \leq \|x\| \leq H} W(x) - \inf_{r_1 \leq \|x\| \leq H} W(x) \leq W(x_1) - W(x_0), \end{aligned}$$

其中 x_0 是 $r_1 \leq \|x\| \leq H$ 上 $W(x)$ 达到下确界的点, 它是一定存在的, 而点 x_1 是按下述方式来取定的: 若 $x_0 \in \{x | r_2 \leq \|x\| \leq H\}$ 时, 取 $x_1 = x_0$; 若 $x_0 \in \{x | r_1 \leq \|x\| \leq r_2\}$ 时, 取 x_1 为射线 Ox_0 与 $\|x\| = r_2$ 的交点(见图 5-1), 这时上面的不等式就成立了. 注意到点 x_1 的取法有 $\|x_1 - x_0\| \leq r_2 - r_1$, 和 $W(x)$ 的连续性, 我们有, 当 $r_2 - r_1 < \delta$ 时

$$\varphi(r_2) - \varphi(r_1) \leq W(x_1) - W(x_0) < \varepsilon,$$

故 $\varphi(r)$ 连续.

再作函数

$$\varphi_1(r) \equiv \frac{r\varphi(r)}{H},$$

显然有 $\varphi_1(r) \leq \varphi(r)$, $\varphi_1(0) = 0$, 且当 $0 \leq r_1 < r_2 \leq H$ 时, 有

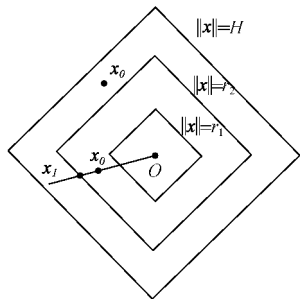


图 5-1

$$\varphi_1(r_1) = \frac{r_1\varphi(r_1)}{H} \leq \frac{r_1\varphi(r_2)}{H} < \frac{r_2\varphi(r_2)}{H} = \varphi_1(r_2),$$

即 $\varphi_1(r)$ 严格递增, 故 $\varphi_1 \in \mathbf{K}$.

另一方面, 令

$$\phi(r) \equiv \sup_{\|x\| \leq r} W(x),$$

显然 $\phi(0)=0$. 用上面类似的方法可证 $\phi(r)$ 也是单调不减的连续函数. 再作

$$\varphi_2(r) \equiv \phi(r) + kr, k > 0.$$

显然有 $\varphi_2(0)=0$, 且 $\forall r_1, r_2$, 当 $0 < r_1 < r_2 < H$ 时, 有

$$\varphi_2(r_1) = \phi(r_1) + kr_1 \leq \phi(r_2) + kr_1 < \phi(r_2) + kr_2 = \varphi_2(r_2),$$

即 $\varphi_2(r)$ 严格递增, 故 $\varphi_2(r) \in \mathbf{K}$.

最后, 对所作的 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{K}$, 有

$$\varphi_1(\|x\|) \leq \varphi(\|x\|)$$

$$\equiv \inf_{\|x\| \leq \|\xi\| \leq H} W(\xi) \leq W(x) \leq \sup_{\|\xi\| \leq \|x\|} W(\xi) \equiv \phi(\|x\|) \leq \varphi_2(\|x\|).$$

证毕.

根据引理 5.1, 我们容易证明

推论 1 若 $W(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上给定的无穷大正定函数, 则必存在两个 $\mathbf{KR}$ 类函数 $\varphi_1(r), \varphi_2(r)$, 使

$$\varphi_1(\|x\|) \leq W(x) \leq \varphi_2(\|x\|).$$

推论 2 若 $V(t, x)$ 是 G_H 上给定的正定函数, 且具有无穷小上界, 则必存在两个函数 $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \in \mathbf{K}$, 使

$$\varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|).$$

最后, 我们来说明一下定义在 D 上的正定函数 $W(x)$ 的几何意义.

D 上的正定函数 $W(x)$, 它对应的曲面族

$$W(x) = c.$$

当 $c > 0$ 充分小时, 它们是一族包围坐标原点 $x=0$ 的彼此互不相交的闭曲面族, 若 $c_2 > c_1 > 0$ 足够小, 则 $W(x) = c_1$ 在 $W(x) = c_2$ 的内部; $c=0$ 时, 即 $W(x)=0$ 对应坐标原点 $x=0$.

以 $W(x, y), |x| + |y| \leq H$ 为例, 它的证明类似于第一章第三节第 1 段引理 1.5 中关于

$$x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} f_k(x, y) = c > 0$$

的证明, 留作习题.

第二节 Liapunov 稳定性基本定理

定理 5.1 若在区域 G_H 上存在正定函数 $V(t, x)$, 使

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}) \leq 0, \quad (5.2)$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是稳定的.

证明 $V(t, \mathbf{x})$ 正定, 由引理 5.1 的推论 2 知, 存在 $\varphi \in \mathbf{K}$, 使

$$V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|). \quad (5.3)$$

由 $V(t_0, \mathbf{x})$ 连续, $V(t_0, \mathbf{0})=0$, 可推出: 对任意取定的 $\varepsilon \in (0, H)$ (这时 $\varphi(\varepsilon)$ 也定了), $\exists \delta(t_0, \varepsilon)$, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) < \varphi(\varepsilon).$$

将式(5.2)沿解由 t_0 到 $t > t_0$ 积分, 得

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0).$$

此式结合式(5.3)及其上式, 有

$$\varphi(\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|) \leq V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) < \varphi(\varepsilon),$$

对一切 $t \geq t_0$ 成立. 因为 $\varphi \in \mathbf{K}$ 是严格单增的, 故有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

这样, 我们证明了: $\forall \varepsilon \in (0, H)$, $\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

按定义 5.1.1, 系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是稳定的. 证毕.

定理 5.2 若在区域 G_H 上存在正定函数 $V(t, \mathbf{x})$, 具有无穷小上界, 它沿系统(5.1)的全导数

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq 0 \quad (\text{或} \equiv 0),$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是一致稳定的.

证明 由假设, 按推论 2 知, $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{K}$, 使得

$$\varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|).$$

$\forall \varepsilon \in (0, H)$, 可取 $\delta = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)) > 0$. 由 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq 0$ (或 $\equiv 0$) 知, 对于满足

$\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 的解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 有

$$\varphi_1(\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|) \leq V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq \quad (\text{或} \equiv)$$

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}_0\|) < \varphi_2(\delta) = \varphi_2(\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon))) = \varphi_1(\varepsilon), \quad t \geq t_0.$$

由于 $\varphi_1 \in \mathbf{K}$, 故有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

注意, 这里的 $\delta(\varepsilon)$ 与 t_0 无关, 故证明了系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是一致稳定的.

注 (1) 定理 5.1 和定理 5.2 的逆都是成立的, 证明可参见文献[1].

(2) 我们不能把 $V(t, \mathbf{x})$ 正定的定义换成

$$V(t, \mathbf{x}) > 0 \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}), \quad V(t, \mathbf{0}) = 0.$$

因为按这样的定义, 定理 5.1 的结论一般不成立, 有反例: 考察系统

$$\dot{x} = \frac{1}{2}x, \quad \dot{y} = \frac{1}{2}y,$$

它显然有解

$$x = x(t_0)e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}, \quad y = y(t_0)e^{\frac{1}{2}(t-t_0)},$$

因而平凡解是不稳定的.

但可作函数

$$V(t, x, y) \equiv (x^2 + y^2)e^{-2t},$$

它满足

$$V(t, 0, 0) = 0, V(t, x, y) > 0 \quad (|x| + |y| \neq 0),$$

经计算

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} \\ &= -e^{-2t}(x^2 + y^2) \leq 0, \end{aligned}$$

也满足定理 5.1 中的条件(5.2), 但定理的结论却不成立.

以上两个定理都要求 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq 0$ (不能取正号), 下面的定理 5.3 是这方面一个很好的推广, 它在一定条件下, 可以允许 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)}$ 变号.

定理 5.3^[2] 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C(I \times D, \mathbf{R}^+)$, $V(t, \mathbf{0}) = 0$, 满足:

(i) $\exists T \gg 1$, 使当 $t \geq T$ 时

$$V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi_1(\|\mathbf{x}\|), \quad \varphi_1 \in \mathbf{K};$$

(ii) $\exists$ 正数 $\rho \ll 1$, 对 $\forall \lambda \in (0, \rho)$ 及 $\forall t \geq T$, 当 $V \in [\lambda, \rho]$ 时,

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq g(t)h(V(t, \mathbf{x})). \quad (5.4)$$

其中 $h(t) \geq 0$, $g(t)$ 均在 I 上有定义且可积, 及

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t) dt < +\infty. \quad (5.5)$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 稳定.

证明 $\forall \varepsilon > 0$ 足够小, 使 $\varepsilon_1 \equiv \varphi_1(\varepsilon) \in (0, \rho)$, 取 $\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_1$, 则对

$$H(s) \equiv \int_{t_0}^s \frac{dt}{h(t)}, \quad (0 \leq s \ll 1),$$

由 $h(t) \geq 0$, 知

$$H(\epsilon_1) - H(\lambda) = \int_{\lambda}^{\epsilon_1} \frac{dt}{h(t)} > 0,$$

由条件(5.5)知, $\exists T > 0$ 足够大, 使 $\forall t', t'' \in [T, +\infty)$ 有

$$\left| \int_{t'}^{t''} g(t) dt \right| < H(\epsilon_1) - H(\lambda). \quad (5.6)$$

我们先证: $\exists \delta_1 \in (0, \lambda)$, 使当 $V_T \equiv V(T, \mathbf{x}(T)) < \delta_1$ 时, 有

$$V(t) \equiv V(t, \mathbf{x}(t)) < \epsilon_1 = \varphi_1(\epsilon), \quad t \geq T. \quad (5.7)$$

若不然, 则必 $\exists t_1, t_2: t_2 > t_1 > T$, 使

$$\lambda = V(t_1) \leq V(t) \leq V(t_2) = \epsilon_1, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

这时由条件(5.4)知

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dV}{h(V(t, \mathbf{x}))} \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \right|.$$

结合式(5.6)及 $H(s)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned} H(\epsilon_1) = H(V(t_2)) &\leq H(V(t_1)) + \left| \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \right| \\ &< H(\lambda) + [H(\epsilon_1) - H(\lambda)] = H(\epsilon_1), \end{aligned}$$

这是个矛盾, 从而式(5.7)成立. 这时, 由(i)得

$$\varphi_1(\|\mathbf{x}(t; T, \mathbf{x}(T))\|) \leq V(t, \mathbf{x}(t; T, \mathbf{x}(T))) < \varphi_1(\epsilon), \quad t \geq T.$$

从而当 $V_T = V(T, \mathbf{x}(T)) < \delta_1$ 时

$$\|\mathbf{x}(t, T, \mathbf{x}(T))\| < \epsilon, \quad t \geq T. \quad (5.8)$$

下面, 我们再在区间 $[t_0, T]$ 上使用解对初值的连续依赖性.

因 $V(t, \mathbf{x})$ 连续, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, 对上面已得的 δ_1 , $\exists$ 正数 $\delta_2 < \epsilon$, 当 $\|\mathbf{x}(T)\| < \delta_2$ 时, 有 $V(T, \mathbf{x}(T)) < \delta_1$. 再在 $[t_0, T]$ 上对这个 δ_2 , 必 $\exists \delta > 0$, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \delta_2 < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

特别 $t = T$ 时, 有 $\|\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \delta_2$, 这时

$$V_T \equiv V(T, \mathbf{x}(T)) < \delta_1,$$

结合式(5.8), 即有: $\forall \epsilon > 0$ 足够小, $\exists \delta > 0$, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

故系统(5.1)的平凡解是稳定的. 证毕.

例 5.3 考虑系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}x(e^{x^2+y^2} + 1) - y\sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x\sin t + \frac{1}{1+t^2}y(e^{x^2+y^2} + 1) \end{cases} \quad (5.9)$$

平凡解的稳定性.

解 作 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 则

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.9)} = \frac{2V(x(t), y(t))}{1+t^2} [e^{V(x(t), y(t))} + 1].$$

我们取 $\varphi_1 = x^2 + y^2$, $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$, $h(V) = V(e^V + 1) \geq 0$. 则 $\frac{1}{h(s)}$, $g(s)$ 均为可积函数, 且 $\int_{t_0}^{\infty} g(s)ds$ 收敛, 满足定理 5.3 的一切条件, 故式 (5.9) 的平凡解是稳定的.

定理 5.4^[3] [M. Marchkoff, 1940] 设系统 (5.1) 右端函数 $f(t, \mathbf{x})$ 在 G_H 上有界, 且在 G_H 上存在正定函数 $V(t, \mathbf{x})$ 使 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)}$ 负定. 则系统 (5.1) 的平凡解渐近稳定.

证明 显然平凡解稳定, 只需证明它还具有吸引力. 若不然, 则必存在序列 $\{t_m\}: t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots, t_m \rightarrow \infty (m \rightarrow \infty)$, 对某个 $\varepsilon > 0$, 有

$$\|\mathbf{x}(t_j; t_0, \mathbf{x}_0)\| \geq \varepsilon, \quad t_j \in \{t_m\}.$$

由 $f(t, \mathbf{x})$ 的有界性知, 存在常数 $K > 0$, 使

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| < K.$$

这里的 K 取得足够大, 使各区间 $I_j \equiv [t_j - \frac{\varepsilon}{2K}, t_j + \frac{\varepsilon}{2K}]$ 互不相交. 这时, 对每个区间 I_j 上沿解用微分中值定理, 得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_j) + \dot{\mathbf{x}}(\xi)(t - t_j), \quad t, t_j \in I_j.$$

则每个 I_j 上有

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \varepsilon - K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)}$ 连续, 负定, 因此在每个 I_j 上必存在常数 $c > 0$, 使

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -c < 0, \quad t \in I_j.$$

这就导出

$$V(t_m + \frac{\varepsilon}{2K}) - V(t_0) = \int_{t_0}^{t_m + \frac{\varepsilon}{2K}} \frac{dV}{dt} dt$$

$$< \sum_{j=1}^m \int_{t_j - \frac{\varepsilon}{2K}}^{t_j + \frac{\varepsilon}{2K}} \frac{dV}{dt} dt \leq -cm \frac{\varepsilon}{K} \rightarrow -\infty$$

(当 $m \rightarrow \infty$ 时), 这与 V 正定矛盾. 故平凡解是吸引的. 证毕.

注 这个定理中, 对 $f(t, \mathbf{x})$ 加了一个较强的“有界”条件, 比起其他稳定性定理这显得有些不太自然, 许多研究者试图取消它, 但未取得完全的成功. 下面的两个定理是做了较好改进的代表.

定理 5.5^[4] 若在 G_H 上存在正定函数 $V(t, \mathbf{x})$, 使 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)}$ 负定, 且在 D 上存在正定函数 $W(\mathbf{x})$, 使 $\left. \frac{dW}{dt} \right|_{(5.1)}$ 在 $[t_0, \infty) \times D$ 上有上界或下界. 则系统 (5.1) 的平凡解渐近稳定.

证明较长, 请参阅指出的文献.

定理 5.6 若在 G_H 上存在函数 $V(t, \mathbf{x})$, 使

(i) $V - \theta(t, \mathbf{x})W(\mathbf{x}) \geq 0$ 或 $=0$, 其中 $W(\mathbf{x})$ 是 D 上的正定函数, $\theta(t, \mathbf{x}) \geq 0$ 在 G_H 上连续, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 它关于 $\mathbf{x}$ 一致趋于 $+\infty$;

(ii) $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq 0$.

则系统 (5.1) 平凡解渐近稳定.

证明 由关于 $\theta(t, \mathbf{x})$ 的条件知, 存在 $t^* > 0$, 当 $t \geq t^*$ 时 $\theta(t, \mathbf{x}) \geq 1$ 关于 $\mathbf{x}$ 一致成立. 即有

$$V(t, \mathbf{x}) \geq (\text{或} \equiv) \theta(t, \mathbf{x})W(\mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}), \quad t \geq t^*.$$

这就是说, 当 $t \geq t^*$ 时 $V(t, \mathbf{x})$ 正定. 加上条件 (ii), 得 $t \geq t^*$ 时式 (5.1) 的平凡解是稳定的. 再对有限区间 $[t_0, t^*]$ 上用解对初值连续依赖性, 即得式 (5.1) 平凡解稳定. 下面证平凡解的吸引力.

由 $W(\mathbf{x})$ 正定, $\exists \varphi \in K$, 使 $W(\mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|)$. 由条件 (ii), 知沿解 $V(t, \mathbf{x}(t))$ 单调不增, 则有界, 即存在常数 $M > 0$, 使

$M \geq V(t, \mathbf{x}(t)) \geq (\text{或} \equiv) \theta(t, \mathbf{x}(t))W(\mathbf{x}(t)) \geq \theta(t, \mathbf{x}(t))\varphi(\|\mathbf{x}(t)\|)$, 也即

$$\varphi(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq \frac{M}{\theta(t, \mathbf{x}(t))}.$$

另一方面, $\forall \varepsilon > 0$ 给定, $\varphi(\varepsilon)$ 亦定, $\frac{M}{\varphi(\varepsilon)}$ 是个定数, 由 $\theta(t, \mathbf{x})$ 的性质知,

$\exists T > 0$, 当 $t > T$ 时有

$$\theta(t, \mathbf{x}(t)) > \frac{M}{\varphi(\varepsilon)}, \quad \text{即} \frac{M}{\theta(t, \mathbf{x}(t))} < \varphi(\varepsilon).$$

与上面不等式结合得

$$\varphi(\|\mathbf{x}(t)\|) < \varphi(\epsilon), \quad t > T,$$

从而有

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon, \quad t > T,$$

即平凡解是吸引的. 证毕.

例 5.4 讨论系统

$$\dot{x} = -x - 3y + 2z + yz,$$

$$\dot{y} = 3x - y - z + xz,$$

$$\dot{z} = -2x + y - z + xy$$

的平凡解 $x=y=z=0$ 的稳定性.

解 作函数 $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, 它是正定的. 沿系统的全导数

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x(-x - 3y + 2z + yz) + y(3x - y - z + xz) \\ &\quad + z(-2x + y - z + xy) \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2) + 3xyz \end{aligned}$$

在 $O(0, 0, 0)$ 充分小的邻域内是负定的. 注意系统是自治的, 右端函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 D 上自然是有界的. 由定理 5.4 知, 平凡解是渐近稳定的.

例 5.5 考虑阻尼单摆运动

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0$$

平衡位置 $\theta=0$ 的稳定性.

解 令 $\theta=x, \dot{x}=y$. 则方程化为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x - y.$$

从力学上考虑自然想到用总能量来构造 Liapunov 函数, 即作

$$V_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \sin x dx = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x),$$

它是正定的. 但沿系统的

$$\frac{dV_1}{dt} = y \sin x + y(-\sin x - y) = -y^2$$

是常负函数, 按定理 5.1 只能得到平衡位置是稳定的结论, 与我们知道的物理事实不符.

但我们把 $V_1(x, y)$ 改为

$$V(x, y) = y^2 + (x + y)^2 + 4(1 - \cos x),$$

则对应的

$$\frac{dV}{dt} = -2(y^2 + x \sin x),$$

它在 $x=\theta=0$ 的小邻域内是负定的,按定理 5.4 平衡位置是渐近稳定的.

这里 V_1 具有明显的物理意义(这也是 Liapunov 函数发现的背景之一),但不符合定理 5.4 的要求,而 V 满足了定理 5.4 的要求,却没有什么直观的物理意义,它是为适应定理的要求在 V_1 的基础上作数学的改造而得.

例 5.6 考察纯量方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t + \sin x}$$

零解 $x=0$ 的稳定性.

解 取 $V(t, x) = (t + \sin x)x^2, W(x) = x^2, \theta(t, x) = t + \sin x, t \geq t_0 \geq 1$. 则沿方程

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x^2 + [x^2 \cos x + 2x(t + \sin x)](-\frac{x}{t + \sin x}) \\ &= -x^2(1 + \frac{x \cos x}{t + \sin x}) \leq 0 \end{aligned}$$

(当 $t \geq t_0 \geq 1, |x| \leq 1$ 时). 故当 $|x| \leq H \leq 1, t \geq t_0 \geq 0$ 时,定理 5.6 的全部条件均成立,从而零解是渐近稳定的.

定理 5.7^[5,6] [Peirsidskii, 1933] 若 G_H 存在正定函数 $V(t, \mathbf{x})$,具有无穷小上界,使得 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)}$ 负定,则式(5.1)的平凡解一致渐近稳定.

证明 由定理条件知,存在函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in K$,使得

$$\varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|),$$

$$\left. \frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -\varphi_3(\|\mathbf{x}\|).$$

由定理 5.2 知,平凡解已是一致稳定的. 下面证明它还是一致吸引的.

$\forall \mathbf{x}_0 \in D$, 有解 $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, 记 $V(t) \equiv V(t, \mathbf{x}(t))$. 由 $V(t, \mathbf{x}(t)) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}(t)\|)$, 只要 $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, 就有

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \varphi_2^{-1}(V(t)) > 0,$$

这时

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -\varphi_3(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq -\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t))) < 0.$$

从 t_0 到 t 积分,得

$$\int_{V(t_0)}^{V(t)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))} \leq -(t - t_0).$$

注意到 $\frac{dV(t)}{dt} < 0$, 有 $V(t_0) > V(t), t > t_0$. 故上式可写成

$$\int_{V(t)}^{V(t_0)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))} \geq t - t_0.$$

又利用 $\varphi_1(\|x(t)\|) \leq V(t)$ 及 $V(t_0) \leq \varphi_2(\|x_0\|) \leq \varphi_2(H)$, 上式左端的积分可放大成

$$\int_{\varphi_1(\|x\|)}^{\varphi_2(H)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))} = \int_{\varphi_1(\|x\|)}^{\varphi_1(\epsilon)} + \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(H)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))},$$

原不等式成

$$\int_{\varphi_1(\|x\|)}^{\varphi_1(\epsilon)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))} \geq t - t_0 - \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(H)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))}.$$

因为在给定 $\epsilon < H$ 后, $\int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(H)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))}$ 是确定的正数. 我们取

$$T = T(\epsilon, H) > \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(H)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))} > 0,$$

则当 $t \geq t_0 + T$ 时, 就有

$$\int_{\varphi_1(\|x\|)}^{\varphi_1(\epsilon)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(v))} > 0.$$

这说明, 这时 $\varphi_1(\|x(t)\|) < \varphi_1(\epsilon)$, 即有

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0 + T.$$

这里的 $T = T(\epsilon, H)$ 与 t_0, x_0 无关, 平凡解是一致吸引的. 证毕.

注 Liapunov 在 1892 年的开创性论文中, 用定理 5.7 同样的条件只证得式(5.1)的平凡解渐近稳定的结论. 有人提出 H: 为什么证不出一致渐近稳定呢? 因为一般都认为, $V(t, x)$ 具无穷小上界总跟稳定性的“一致性”联系在一起, 但要证明它却是困难的. 经过了 40 年, Peirskii 终于满意地回答了这个问题. 此后, 人们又提出了新问题, 那么, “无穷小上界”对解的渐近稳定是否又无足轻重呢? J. L. Massera 在 1949 年举出了一个著名的例子, 说明仅凭 $V(t, x)$ 正定, $\frac{dV}{dt}$ 负定是不足以推出渐近稳定的结论的. 这就说明它对渐近稳定还是重要的条件之一. 定理 5.7 的逆也是成立的, 参见文献[1].

例 5.7 (Massera^[3], 1949) 按下面原则构造函数 $g(t) \in C^1([0, +\infty), \mathbf{R})$:

$$(i) \quad g(n) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad \text{作区间 } I_i = [i - (\frac{1}{2})^i, i + (\frac{1}{2})^i], i = 1, 2, \dots. \text{ 令}$$

$$g^2(t) = e^{-t}, \quad t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i;$$

(iii) 在 $t \in I_i$ 上将 $g(t)$ 补成连续可微的函数, 使

$$e^{-t} \leq g^2(t) \leq 1.$$

按以上原则构造的 $g(t)$, 使 $g^2(t)$ 如图 5-2 所示.

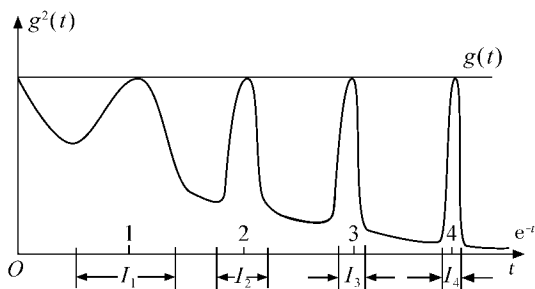


图 5-2

考察一维系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{g}(t)}{g(t)}x.$$

它显然有通解

$$x(t) = \frac{x(t_0)}{g(t_0)}g(t).$$

由图 5-2 容易看出: 只要 $|x(t_0)|$ 足够小, 可使 $|x(t)|$ 任意小. 但当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t)$ 不趋于零, 即系统的平凡解是稳定的, 但不是渐近稳定的.

由于

$$\begin{aligned} \int_0^t g^2(t) dt &\leq \int_0^{+\infty} g^2(t) dt \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{I_i} e^{-t} dt < 3. \end{aligned}$$

我们取

$$\begin{aligned} V(t, x) &\equiv \frac{x^2}{g^2(t)} \left[4 - \int_0^t g^2(s) ds \right] \\ &\geq \frac{x^2}{g^2(t)} \geq x^2 > 0 \quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

它是正定函数. 容易算出沿系统的

$$\frac{dV}{dt} = -x^2 < 0 \quad (x \neq 0),$$

是负定函数. 但找不到正定函数 $W_1(x)$, 使

$$V(t, x) \leq W_1(x).$$

对这个例子来说, 就是 $V(t, x)$ 没有无穷小上界, 才使它的平凡解不是渐近稳定的.

定理 5.8^[2] 若在 G_H 上存在函数 $V(t, x)$ 满足:

$$(i) \varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in K,$$

$$(ii) \exists \tau \gg 1, \text{ 使}$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -g(t)h(V(t, x)), \quad t \geq \tau, \quad (5.10)$$

其中 $h(s) \geq 0$, $\frac{1}{h(s)}$ 及 $g(t)$ 可积, 且

$$\int_{\tau}^{\infty} g(s) ds = +\infty. \quad (5.11)$$

则式(5.1)的平凡解是等度渐近稳定的.

若将式(5.11)改为 $\forall B > 0, \exists b > 0$, 使得

$$\int_t^{t+b} g(s) ds \geq B, \quad \forall t \geq \tau. \quad (5.12)$$

则式(5.1)的平凡解是稳定的且一致吸引.

证明 先证平凡解是等度吸引的. 沿式(5.1)的解 $V(t, x(t)) \equiv V(t)$, 由条件(ii)及 $h(s) \geq 0$, 得

$$\int_{V(\tau)}^{V(t)} \frac{dV}{h(V)} \leq - \int_{\tau}^t g(s) ds, \quad t \geq \tau.$$

由条件(i)中 $\varphi_1(\|x(t)\|) \leq V(t)$ 得

$$\int_{V(\tau)}^{\varphi_1(\|x(t)\|)} \frac{dV}{h(V)} \leq \int_{V(\tau)}^{V(t)} \frac{dV}{h(V)} \leq - \int_{\tau}^t g(s) ds, \quad t \geq \tau, \quad (5.13)$$

再由条件(i)可知, $\forall \epsilon > 0$ 给定, 则 $\varphi_1(\epsilon)$ 确定, 可选 $\delta \in (0, \epsilon]$, 使 $\varphi_2(\delta) \geq \varphi_1(\epsilon)$. 我们考察式(5.1)满足 $\|x_{\tau}\| \leq \delta$ 的那些解, 有

$$V(\tau) \equiv V(\tau, x_{\tau}) \leq \varphi_2(\|x_{\tau}\|) \leq \varphi_2(\delta).$$

从而由式(5.13), 有

$$\int_{\varphi_2(\delta)}^{\varphi_1(\|x(t)\|)} \frac{dV}{h(V)} \leq \int_{V(\tau)}^{\varphi_1(\|x(t)\|)} \frac{dV}{h(V)} \leq - \int_{\tau}^t g(s) ds,$$

再由 $\varphi_1(\epsilon) \leq \varphi_2(\delta)$, 得

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_1(\|x(t)\|)} \frac{dV}{h(V)} &= \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(\delta)} \frac{dV}{h(V)} + \int_{\varphi_2(\delta)}^{\varphi_1(\|x(t)\|)} \frac{dV}{h(V)} \\ &\leq \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(\delta)} \frac{dV}{h(V)} - \int_{\tau}^t g(s) ds, \quad t \geq \tau, \end{aligned}$$

这里 $\int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(\delta)} \frac{dV}{h(V)} > 0$ 是只依赖于 τ, ϵ, δ 的常数, 它与 $\mathbf{x}_\tau$ 无关 (只与 $\|\mathbf{x}_\tau\| \leq \delta$ 对应的一族解有关), 则由上式及式 (5.11) 知, 必存在 $T = T(\tau, \epsilon, \delta)$ 使

$$\int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_1(\|\mathbf{x}(t)\|)} \frac{dV}{h(V)} < 0, \quad t \geq \tau + T.$$

这导出

$$\varphi_1(\|\mathbf{x}(t)\|) < \varphi_1(\epsilon), \quad \text{即 } \|\mathbf{x}(t; \tau, \mathbf{x}_0 \tau)\| < \epsilon, \quad t \geq \tau + T.$$

这说明式 (5.1) 的平凡解是等度吸引的.

再证平凡解是稳定的. 在 $[t_0, \tau + T]$ 上用解对初值的连续依赖性, 对上面的 δ , 必存在 δ_1 , 使 $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta_1$ 时

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}(t_0))\| < \delta, \quad t \in [t_0, \tau + T].$$

与上面结论结合起来, 得式 (5.1) 平凡解是稳定的, 从而得平凡解等度渐近稳定.

若条件 (ii) 中的式 (5.11) 式改为式 (5.12), 则可使 $T(\epsilon)$ 只与 ϵ 有关, 故可得平凡解稳定和一致吸引. 证毕.

推论 1 在上定理条件中加上 $g(t) \geq 0$, 则由式 (5.12) 可导出系统 (5.1) 的平凡解一致渐近稳定.

因为这时有 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq 0$, 按定理 5.2 知, 平凡解是一致稳定的.

推论 2 若定理 5.8 的条件 (i) 成立, 且

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -g(t)\varphi_3(\|\mathbf{x}\|), \quad t \geq \tau \gg 1,$$

$\varphi_3 \in \mathbf{K}$, $g(t)$ 可积, 则式 (5.11) 蕴涵系统 (5.1) 平凡解等度渐近稳定; 式 (5.12) 及 $g(t) \geq 0$ 蕴涵系统 (5.1) 平凡解一致渐近稳定.

因为这时有

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -g(t)\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t))) \equiv -g(t)h(V).$$

定理 5.9 若在 G_H 上存在函数 $V(t, \mathbf{x})$, 它具有无穷小上界和无穷大下界, 且沿系统 (5.1) 的 $\frac{dV}{dt}$ 负定, 则系统 (5.1) 的平凡解是全局一致渐近稳定的.

证明 回顾引理 5.1 的证明过程中 φ_1, φ_2 的构造方法, 在现在的条件下必存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{KR}, \varphi_3 \in \mathbf{K}$, 使

$$\varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|),$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -\varphi_3(\|\mathbf{x}(t)\|).$$

因此由定理 5.7 及注意到 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{KR}$ 知, 平凡解是一致稳定和全局一致吸引的.

现证明系统(5.1)的解是一致有界的.

$\forall r > 0$ 取定, 必可选取 $B = B(r)$, 使

$$\varphi_1(B) > \varphi_2(r).$$

则 $\forall x_0$, 只要 $\|x_0\| \leq r$, 由定理条件可得

$$\begin{aligned} \varphi_1(\|x(t; t_0, x_0)\|) &\leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) \\ &\leq \varphi_2(\|x_0\|) \leq \varphi_2(r) < \varphi_1(B), \end{aligned}$$

故有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < B, \quad t \geq t_0.$$

这 $B = B(r)$ 与 t_0, x_0 无关, 即式(5.1)解一致有界. 因此按定义, 系统(5.1)的平凡解全局一致渐近稳定. 证毕.

例 5.8 考察非定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1 + \sin^2 t)x + (1 - \sin t \cdot \cos t)y, \\ \dot{y} &= -(1 + \sin t \cdot \cos t)x + (1 + \cos^2 t)y \end{aligned}$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

解 作函数

$$V(x, y) = x^2 + y^2,$$

它与 t 无关, 自然具无限小上界, 同时它也是正定无限大函数. 沿系统求导, 有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -2(x^2 + y^2) - 2(x \sin t + y \cos t)^2 \\ &\leq -2(x^2 + y^2) < 0 \quad (x^2 + y^2 \neq 0) \end{aligned}$$

负定. 按定理 5.9 知, 零解全局一致渐近稳定.

定理 5.10^[7] (Chitaev) 我们把 $\mathbf{R}^n$ 中坐标原点邻域中任何由曲面 $V=0$ 限定的, V 在其内取正值的区域称为 $V>0$ 的区域. 若对系统(5.1)存在函数 $V(t, x)$, 满足:

(i) 对 $t \geq t_0$, 在原点任意小邻域内有 $V>0$ 的区域;

(ii) 在 $V>0$ 区域内, $V(t, x)$ 有界;

(iii) 在 $V>0$ 区域内, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} > 0$, 且对 $V(t, x) \geq \sigma$ 的一切 (t, x) , 有 $\frac{dV}{dt} \geq$

l , 其中 σ 是任何正数, l 是某个与 σ 有关的正数. 则式(5.1)的平凡解不稳定.

证明 按条件(i), 总存在充分接近原点的 x_0 , 使 $V(t_0, x_0) > 0$, 要证: 不

论 $\|x_0\|$ 多么小, 当 t 足够大时, 解 $x(t; t_0, x_0)$ 总会越出原点某个 ε 邻域, 即

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon. \quad (5.14)$$

(见图 5-3). 反证法. 设 $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \geq t_0$. 则由条件 (iii) 知, $V(t, x(t; t_0, x_0)) > V(t_0, x_0) \equiv \sigma > 0$. 且由于 $V > 0$ 区域中 $V(t, x(t))$

不下降, 使解一直保持在区域中的

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \geq \sigma > 0$$

部分. 这样, 必存在 $l > 0$, 使

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} \geq l > 0.$$

这就推出

$$V(t, x(t)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt \geq V(t_0, x_0) + l(t - t_0).$$

显然, t 足够大时 $V(t, x(t))$ 可以任意大, 这与条件 (ii) 相矛盾. 说明式 (5.14) 必成立. 证毕.

例 5.9 考察系统

$$\dot{x} = x \sin^2 t + y e^t,$$

$$\dot{y} = x e^t + y \cos^2 t$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

解 取函数 $V(t, x, y) = 2e^{-t}xy$, 它是变号函数, 但在区域

$$B \equiv \{(x, y) \mid xy > 0, x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

上, $V > 0$ 且有界. 沿系统的全导数

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -2e^{-t}xy + 2e^{-t}y(x \sin^2 t + y e^t) \\ &\quad + 2e^{-t}x(x e^t + y \cos^2 t) \\ &= 2(x^2 + y^2) > 0 \quad (x^2 + y^2 \neq 0). \end{aligned}$$

因此在区域 B 上满足定理的一切条件, 零解是不稳定的.

注 定理 5.10 中的条件 (iii) 可以用以下条件替代:

$$(iii)' \text{ 在 } V > 0 \text{ 区域内 } \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \geq \varphi(V(t, x)), \text{ 其中 } \varphi \in K.$$

这个定理推广了 Liapunov 原著中的两个不稳定定理, 即

推论 1 若存在函数 $V(t, x) \in C^1[G_H, \mathbf{R}]$, $V(t, \theta) \equiv 0$, 满足:

(i) 在原点任意邻域内有 $V > 0$ 的区域;

(ii) V 具有无穷小上界;

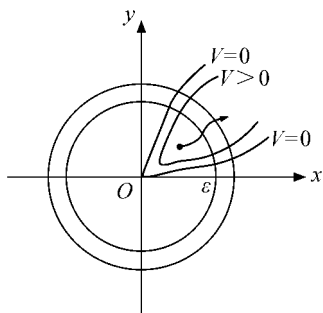


图 5-3

(iii) $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)}$ 正定.

则式(5.1)的平凡解不稳定.

推论 2 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C^1[G_H, \mathbf{R}]$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, 满足:

(i) 在原点任意邻域内有 $V > 0$ 的区域;

(ii) V 有界;

(iii) $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} = \lambda V + W(t, \mathbf{x})$, 其中 $\lambda > 0$, $W(t, \mathbf{x}) \geq 0, t \geq t_0$.

则式(5.1)的平凡解不稳定.

一个更为广泛的不稳定定理是

定理 5.11 若存在函数 $V(t, \mathbf{x})$ 满足:

(i) 对 $t \geq t_0$, 在原点任意小的邻域内有 $V > 0$ 的区域;

(ii) 在 $V > 0$ 的区域内有

$$0 < V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi(\|\mathbf{x}\|), \varphi \in \mathbf{K};$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \geq \eta(V(t, \mathbf{x}), t) \geq 0,$$

其中 $\eta(V, t)$ 满足

$$\eta(\alpha_1, t) \geq \eta(\alpha_2, t), \quad \text{当 } \alpha_1 \geq \alpha_2 \text{ 时};$$

且对任何 $\alpha > 0$, $\int_{t_0}^t \eta(\alpha, t) dt$ 在 I 上无界.

则式(5.1)的平凡解不稳定.

证明 设在 $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$ 内有 $V > 0$ 的区域, 我们取 $\mathbf{x}_0: \|\mathbf{x}_0\| < \delta < \varepsilon$, 使 $V(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$, 来证解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 当 t 足够大时必越出 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$. 反证法, 若对一切 $t \geq t_0$ 均有 $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. 则由条件(ii)知

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \geq V(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv V_0 > 0,$$

即在反证法的假设下整条解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 均落在 $V > 0$ 区域内, 且有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} &\geq \eta(V(t, \mathbf{x}(t)), t) \\ &\geq \eta(V(t_0, \mathbf{x}_0), t) \geq 0. \end{aligned}$$

两边从 t_0 到 t 积分, 得

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) - V(t_0, \mathbf{x}_0) \geq \int_{t_0}^t \eta(V_0, s) ds,$$

因此有

$$\varphi(H) \geq \varphi(\|\mathbf{x}(t)\|) \geq V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t, \mathbf{x}(t)) - V_0$$

$$\geq \int_{t_0}^t \eta(V_0, s) ds.$$

这与 $\int_{t_0}^t \eta(V_0, s) ds$ 无界矛盾. 这说明 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 必越出 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$, 即平凡解不稳定. 证毕.

例 5.10 考察系统

$$\dot{x} = -2g(t) \tan \frac{x}{2} + y,$$

$$\dot{y} = -\sin x - g(t)y$$

(其中 $g(t) \leq 0$, $\int_0^t g(s) ds$ 无界) 的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

解 取函数

$$V(x, y) = (1 - \cos x) + \frac{1}{2}y^2.$$

则当 $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ 时有

$$0 < V(x, y) < \frac{3}{2},$$

沿系统

$$\frac{dV}{dt} = -2g(t) \left[(1 - \cos x) + \frac{1}{2}y^2 \right]$$

$$\equiv \eta(t)V,$$

这里 $\eta(t) \equiv -2g(t) \geq 0$, 由设 $\int_0^t g(t) dt$ 无界, $\varphi(\|(x, y)^T\|) \equiv \frac{3}{2}$, 完全满足定理 5.11 的全部条件. 故零解是不稳定的.

这个例中的 $g(t)$ 若取为 $-\sin^2 t$ 或 $-e^t \sin^2 t$ 时, 它满足本定理的条件而不满足定理 5.10 中“ $V \geq \sigma > 0$ 时 $\frac{dV}{dt} \geq l > 0$ ”的要求.

习 题 五

1. 试判定下列函数的定号性:

(1) $V(x, y) = x^2 y^2$;

(2) $V(x, y, z) = x^2 + 3z^2$;

(3) $V(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + z^2$;

(4) $V(x, y) = x^2 - 2xy^2 + x^4 + y^4$;

(5) $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2yz + z^2$;

$$(6) V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^3 - y^4;$$

$$(7) V(x, y, z) = x \sin x + y^2 + z^2.$$

2. 试用定义说明系统

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = 2x$$

的零解稳定但不吸引.

3. 试举例说明: 某系统虽一切解都渐近地趋于零解, 但零解仍是不稳定的.

4. 设某系统的零解是稳定的, 试问初始点充分接近于 O 的解也是稳定的吗? 举例说明之.

5. 试证明: 若系统满足条件: $\|x(t_0)\| < M$ 的解都一致地趋于零解 $x(t) \equiv 0$, 则满足该条件的每个解都是稳定的.

6. 试证: 线性系统

$$\dot{x} = A(t)x,$$

其中 $A(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵, 若平凡解 $x \equiv 0$ 稳定, 则它的一切解都是稳定的.

7. 用定义说明, 方程

$$\dot{x} = \frac{-2x}{1+t}$$

的零解渐近稳定, 但非一致渐近稳定.

8. 用 V 函数法判定下列系统零解的稳定性:

$$(1) \dot{x} = -xy^4, \quad \dot{y} = x^4y;$$

$$(2) \dot{x} = -x + xy^2, \quad \dot{y} = -2x^2y - y;$$

$$(3) \dot{x} = -x + y - 3y^2 - \frac{1}{4}x^3, \quad \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3;$$

$$(4) \dot{x} = -x - 3y + 2z + yz, \quad \dot{y} = 3x - y - z + xz, \quad \dot{z} = -2x + y - z + xy;$$

$$(5) \dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = x \cos t - y;$$

$$(6) \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \quad \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^2, \quad \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2.$$

9. 用 V 函数法判定下列系统零解的稳定性:

$$(1) \dot{x} = -\sin(xt), \quad x \in \mathbf{R}^1;$$

$$(2) \dot{x} = x - ay, \quad \dot{y} = bx + y;$$

$$(3) \dot{x} = x - xy^4, \quad \dot{y} = y - x^2y^3;$$

$$(4) \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \quad \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3;$$

$$(5) \dot{x} = -tx + 4ty, \quad \dot{y} = tx - 2ty + e^t xy^2;$$

$$(6) \dot{x} = tx + e^t y + ax^2 y, \quad \dot{y} = \frac{t+2}{t+1}x - ty + by^2.$$

10. 用 V 函数法判定下列系统驻定解(平衡点)的稳定性:

$$(1) \dot{x} = -\frac{1}{2}y + (x-1)[(x-1)^2 + y^2],$$

$$\dot{y} = -2 + 2x + y[(x-1)^2 + y^2];$$

$$(2) \dot{x} = -x - y + z - 1 + (x-1)[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2],$$

$$\dot{y} = x - y + 2z - 5 + y[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2],$$

$$\dot{z} = -x - 2y - z + 3 + (z-2)[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2].$$

11. 判定下列二阶方程零解的稳定性;

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续}, f(0) = 0, xf(x) > 0 (x \neq 0);$$

$$(2) \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 + f(x) = 0, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续}, xf(x) > 0 (x \neq 0).$$

12. 系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 连续, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时 $\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})x_i < 0$. 试证零解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是全局渐近稳定的.

13. 考虑二维非线性系统

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y),$$

其中 f, g 连续, $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. 试证: 若存在常数 a, b , 使在原点的邻域内除 $O(0, 0)$ 外 $af(x, y) + bg(x, y) > 0$. 则零解 $x = y = 0$ 不稳定.

14. 根据第 13 题, 试证下列系统的零解不稳定:

$$(1) \dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = x + y + xy;$$

$$(2) \dot{x} = y \sin y, \quad \dot{y} = xy + x^2 + y^2.$$

15. 对系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. 若存在具无限小上界的正定函数 $V(t, \mathbf{x})$, 它沿系统的导数 $\frac{dV}{dt} = \varphi(t)W(t, \mathbf{x})$, 其中 $W(t, \mathbf{x})$ 是负定函数, $\varphi(t)$ 为 t 的非负连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = +\infty$. 试证: 系统的零解是渐近稳定的.

补充与问题

1. 李雅普诺夫第一方法

本章所介绍的解决微分系统解的稳定性的方法, 是基于力学、几何背景很强的李雅普诺夫函数 $V(t, \mathbf{x})$ (作参考系), 考察沿系统的全导数 $\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt}$ 的符号或其他特殊性质来确定系统解的走向, 从而建立了一套判定定理, 这种判定稳定性的思路与方法, 人们称之为李雅普诺夫第二方法或 V 函数法、直接法.

在 1892 年李雅普诺夫的博士论文中^[8], 他首先介绍的是称之为第一方法的幂级数展开法, 这种方法所建立的定理如

定理 设微分方程组

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma}(t)x_\sigma + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sum m_i \geq 2}}^n P_s^{(m_1, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

的第一次近似方程组

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma}(t)x_\sigma$$

是正常系统,且所有的李雅普诺夫示性数是正的,又设

$$\left| P_s^{(m_1, \dots, m_n)} \right| < \frac{M}{A^{m_1 + \dots + m_n}},$$

其中 M, A 均为正常数. 则方程组的零解是渐近稳定的.

第一方法所建立的这种判定定理的特点是:它的证明是用非常精细而严格的分析方法来进行的,一般推理较长,条件也较多,它要确定解的幂级数,判定它的收敛性,确定一次近似系统的李雅普诺夫示性数的符号与性质等. 因此,这类定理的证明与应用较之“第二方法”的定理,在多数情况下要复杂得多. “第一方法”在 20 世纪 60 年代末前还有一些发展,要进一步了解的读者可参阅秦元勋的《运动稳定性的一般问题讲义》或 Г. Н. Дубошин 的《运动稳定性的基本理论》[1952(中译本 1959)].

2. 关于 Liapunov 稳定性基本定理的补充

我们知道 Liapunov 关于稳定与不稳定的基本定理是第二方法的核心,它们在解决稳定性问题时起着重要的作用. 在李雅普诺夫之后,还有不少学者对某些定理的条件作了进一步的研究. 下面介绍的几个定理,有的是将基本定理中的条件减弱,有的是作了些更换.

Малкин 稳定性定理^[9] 若在 G_H 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t, \mathbf{x})$ 和负定函数 $V_1(t, \mathbf{x})$, 使在任何固定域 $0 < \lambda \leq \|\mathbf{x}\| \leq \mu \leq H$ 中,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{dV}{dt} \right)_{(5.1)} - V_1 = 0,$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 稳定.

改进的 Малкин 稳定性定理^[10] 若在 G_H 内存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t, \mathbf{x})$ 和负定函数 $V_1(t, \mathbf{x})$, 使在任何固定域 $0 < \lambda \leq \|\mathbf{x}\| \leq \mu \leq H$ 中, $\forall \delta > 0, \exists t^*(\delta)$, 当 $t \geq t^*$ 时有

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{(5.1)} < V_1(t, \mathbf{x}) + \delta,$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 稳定.

上述两个定理比起 Liapunov 基本定理,不同之处也是允许 $\frac{dV}{dt}$ 是变号的.

例 1 考虑

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t| \right) (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - x_1^3, \\ \frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t| \right) (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) - x_2^3. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 半负定, 则(1)的平凡解稳定.

证明 令 $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} &= \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t| \right) \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_i x_j - x_i^4 \right] \\ &= \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t| \right) \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \sum_{i=1}^2 x_i^4. \end{aligned}$$

令 $V_1 = -(x_1^4 + x_2^4)$, 则 V_1 负定, 且

$$\frac{dV}{dt} = V_1 + \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t| \right) \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

显然 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{dV}{dt} - V_1 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t| \right) \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$

不存在, 不满足 Малкин 定理的条件, 但满足改进的 Малкин 定理的条件. 故(1)的平凡解稳定.

推广的一致稳定性定理^[11] 若在 G_H 上存在可微函数 $V(t, \mathbf{x})$ 和可微正定函数 $W(\mathbf{x})$ 及单调不减函数 $\theta(t)$, 具有 $\theta(t_0) = 1$, 使得

$$V(t, \mathbf{x}) - \theta W(\mathbf{x}) \triangleq U(t, \mathbf{x})$$

满足

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq 0, \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{(5.1)} \geq 0.$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 一致稳定.

若在上述定理的条件中再附加条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty$, 则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 还是吸引的, 从而是渐近稳定的.

推广的渐近稳定性定理^[12] 若在 G_H 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t, \mathbf{x})$ 和负定函数 $\bar{V}(t, \mathbf{x})$ 及连续函数 $\lambda(t) \geq 0$, 使得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} &= \lambda(t) \bar{V}(t, \mathbf{x}), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \lambda(t) dt &= \infty. \end{aligned}$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 渐近稳定.

定义^[13] 设 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{K}$, 若 $\exists \mu > 0, \forall r \in [0, \mu], \exists k_1 > 0, k_2 > 0$, 使得

$$k_1 \varphi_1(r) \leq \varphi_2(r) \leq k_2 \varphi_1(r).$$

则称 φ_1, φ_2 具有局部同级增势. 若上述不等式对 $\forall r \in [0, +\infty)$ 成立, 则称 φ_1, φ_2 具有全局同级增势.

指数稳定性定理^[13] 若在 G_H 上存在 $V(t, \mathbf{x})$ 与 $\|\mathbf{x}\|^\alpha$ 具有同级增势 ($\alpha > 0$) 及具有局部同级增势的 $\varphi_1(r), \varphi_2(r), \varphi_3(r) \in \mathbf{K}$, 使得

$$\varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|),$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -\varphi_3(\|\mathbf{x}\|).$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 指数稳定.

若将上述定理中的 G_H 改为 $I \times \mathbf{R}^n$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ 改为 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{KR}$, 其他条件不变, 则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是全局指数稳定的.

一个与上述定理等价的结论是:

定理^[13] 若在 G_H 上存在 $V(t, \mathbf{x})$ 及常数 $c_1 \geq 1, c_2 > 0$, 使得

$$\|\mathbf{x}\| \leq V(t, \mathbf{x}) \leq c_1 \|\mathbf{x}\|, \\ \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -c_2 \|\mathbf{x}\|,$$

则系统(5.1)的平凡解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 指数稳定.

请读者作为练习完成上述定理的证明.

参考文献

- [1] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及其应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 2001
- [2] Massera J. L., Contributions to Stability Theory. Ann. of Math., 1956, 64
- [3] Massen J. L., On Liapounoffs condition of stability. Ann. of Math., 1949, 50(3)
- [4] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999
- [5] Персидский К. П., К. Теории устойчивости решений Дифференциальных уравнений. УМН. том, 1946, 1: 5~6
- [6] Персидский К. П., К. Теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Чзв физ-мат об-ва прп казанск гос. ун-те, 1936, 8: 47~85
- [7] Четаев И. Г., Устойчивость Движения, Наука, 1965
- [8] Лялунов А. М. Обая задача об устойчивости движения. Гостехиздт, 1950
- [9] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М: Наука, 1976
- [10] 刘自成. 两个稳定性定理的改进. 华中师范大学学报(微分方程专辑), 1986: 135~137
- [11] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用. 北京: 国防工业出版社, 2000
- [12] 许淞庆. 常微分方程稳定性理论. 上海: 上海科学技术出版社, 1980
- [13] 黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992

第六章 线性系统及其扰动系统的稳定性

线性系统是系统模式中最简单但又应用广泛的一种,它的稳定性对整个控制系统的可控、可镇定等起着关键的作用,同时也是一般非线性系统稳定性的基础. 本章将主要讨论常系数、变系数线性系统以及扰动系统的稳定性.

第一节 线性系统稳定性的等价定理

考虑线性系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (6.1)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n, A(t) \in C(I, \mathbf{R}^{n \times n})$.

今取系统(6.1)的任一基解组

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ x_{n2}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

以这基解组的每一个解作为一列构成系统(6.1)的基解矩阵

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

既然矩阵 X 的每一列都满足系统(6.1),因而矩阵 X 本身也满足系统(6.1). 这样一来,系统(6.1)的基解矩阵为矩阵方程

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (6.2)$$

所确定;反之,矩阵方程(6.2)的任何一个非奇异的解都可作为系统(6.1)的基解矩阵. 特别地,满足条件

$$X(t_0) = E \quad (E \text{ 为单位矩阵})$$

的基解矩阵 $X(t)$ 称为标准基解矩阵(或称 Cauchy 矩阵). 当 $X(t)$ 为系统(6.1)的基解矩阵时,我们可以取它的标准基解矩阵为

$$\mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(t_0),$$

则系统(6.1)的通解可表示为

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}_0. \quad (6.3)$$

下面,我们将给出线性系统(6.1)的稳定性的几个等价定理.

定理 6.1 系统(6.1)的平凡解稳定(一致稳定)的充分必要条件是它的Cauchy 矩阵 $\mathbf{K}(t, t_0) (t \geq t_0)$ 有界(一致有界).

证明 必要性. 若系统(6.1)的平凡的解稳定(一致稳定), 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0 (\delta(\epsilon) > 0)$, 当 $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ 时, 有

$$\|\mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0)\| < \epsilon.$$

取 n 组初值 $\mathbf{x}(t_0) = \frac{\delta}{2} \mathbf{e}_k$, 其中 $\mathbf{e}_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ 为第 k 个分量取 1 的 n 维单位列向量, 则 $\mathbf{K}(t, t_0)$ 的第 k 列可表为

$$\mathbf{x}^{(k)}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{2}{\delta} \mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

因

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta,$$

则

$$\|\mathbf{x}^{(k)}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = \frac{2}{\delta} \|\mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0)\| < \frac{2}{\delta} \epsilon \triangleq M \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

即 $\mathbf{K}(t, t_0)$ 的每列有界(一致有界), 从而 $\mathbf{K}(t, t_0)$ 有界(一致有界).

充分性. 设系统(6.1)的满足初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解为

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0),$$

且

$$\|\mathbf{K}(t, t_0)\| \leq m(t_0) \quad (\|\mathbf{K}(t, t_0)\| \leq m).$$

$\forall \epsilon > 0, t \geq t_0$, 取 $\delta(\epsilon, t_0) = \frac{\epsilon}{m(t_0)}$ (取 $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{m}$), 则当 $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\epsilon, t_0)$ ($\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\epsilon)$) 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{K}(t, t_0)\| \|\mathbf{x}(t_0)\| < \frac{m(t_0)}{m(t_0)} \epsilon = \epsilon, \quad t \geq t_0$$

$$(\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \frac{m}{m} \epsilon = \epsilon).$$

从而式(6.1)的平凡解稳定(一致稳定). 证毕.

定理 6.2 系统(6.1)的平凡解渐近稳定的充分必要条件是它的平凡解是吸引的[这说明式(6.1)的平凡解的吸引性蕴涵了其稳定性].

证明 必要性是显然的. 我们只证充分性. 设式(6.1)的平凡解是吸引的, 则 $\forall t_0 \in I, \exists \delta(t_0) > 0$, 当 $\|x_0\| \leq \delta(t_0)$ 时, 有

$$x(t; t_0, x_0) = K(t, t_0)x_0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

今选取 $x_0 = x(t_0) = \frac{\delta}{2} e_k$, 其中 $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ 为第 k 个分量取 1 的 n 维单位列向量 ($k=1, 2, \dots, n$), 则 Cauchy 矩阵 $K(t, t_0)$ 的第 k 列

$$x^{(k)}(t, t_0, x_0) = K(t, t_0)e_k = \frac{2}{\delta} K(t, t_0)x_0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty),$$

故 $x^{(k)}(t, t_0, x_0)$ ($k=1, 2, \dots, n$) 有界, 从而 $K(t, t_0)$ 有界. 由定理 6.1 知式(6.1)的平凡解稳定, 从而渐近稳定. 证毕.

容易得到下面的推论.

推论 6.1 系统(6.1)的平凡解一致渐近稳定等价于平凡解一致吸引, 且 $K(t, t_0)$ 一致有界.

推论 6.2 系统(6.1)的平凡解渐近稳定(一致渐近稳定)等价于全局渐近稳定(全局一致渐近稳定).

定理 6.3 系统(6.1)的平凡解渐近稳定(一致渐近稳定)的充分必要条件是它的 Cauchy 矩阵 $K(t, t_0) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) [$K(t, t_0) \xrightarrow[\text{关于 } t_0]{\text{}} 0$ ($t \rightarrow +\infty$) 且 $K(t, t_0)$ 一致有界 ($t \geq t_0$)].

证明 必要性. 若式(6.1)的平凡解渐近稳定, 则由 $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$), 类似于定理 6.2 的证明, 可证得 $K(t, t_0) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$); 若式(6.1)的平凡解一致渐近稳定, 则由推论 6.1 知它的平凡解一致吸引, 且 $K(t, t_0)$ 一致有界, 而由 $x(t; t_0, x_0) \xrightarrow{\text{}} 0$ ($t \rightarrow +\infty$) 关于 t_0 一致, 则有 $K(t, t_0) \xrightarrow{\text{}} 0$ ($t \rightarrow +\infty$).

充分性. 因 $K(t, t_0) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) [$K(t, t_0) \xrightarrow{\text{}} 0$ ($t \rightarrow +\infty$)], 且 $K(t, t_0)$ 一致有界, 故存在正常数 $m(t_0) > 0$ ($m > 0$), 使得

$$\|K(t, t_0)\| \leq m(t_0) (\|K(t, t_0)\| \leq m).$$

由定理 6.1 知式(6.1)的平凡解稳定(一致稳定). 又由 $x(t; t_0, x_0) = K(t, t_0)x_0$ 知式(6.1)的平凡解吸引(一致吸引). 证毕.

定理 6.4 系统(6.1)的平凡解吸引与等度吸引等价, 从而渐近稳定与等度渐近稳定等价.

证明 等度吸引显然是吸引的. 故我们只需证明式(6.1)的平凡解吸引则一定等度吸引. 由定理 6.3 知式(6.1)的平凡解吸引等价于

$$K(t, t_0) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

故对 $\forall \sigma(t_0) > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists T(t_0, \varepsilon, \sigma)$, 当 $t \geq t_0 + T$ 时, 有

$$\| \mathbf{K}(t, t_0) \| < \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

从而当 $\| \mathbf{x}(t_0) \| \leq \sigma(t_0)$ 时, 有

$$\| \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| \leq \| \mathbf{K}(t, t_0) \| \| \mathbf{x}_0 \| < \frac{\varepsilon}{\sigma(t_0)} \sigma(t_0) = \varepsilon.$$

故式(6.1)的平凡解是等度吸引的. 证毕.

定理 6.5 系统(6.1)的平凡解一致渐近稳定的充分必要条件是它的平凡解指数稳定.

证明 由于指数稳定显然是一致渐近稳定的, 故我们只需证明式(6.1)的平凡解一致渐近稳定则一定指数稳定. 由式(6.1)的平凡解一致吸引知, $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $0 < \varepsilon < 1$), $\exists T(\varepsilon) > 0$, 当 $t \geq t_0 + T$ 时, 有

$$\| \mathbf{K}(t, t_0) \| < \varepsilon.$$

又由式(6.1)的平凡解一致稳定知, $\exists m > 0$, 使得

$$\| \mathbf{K}(t, t_0) \| < m \quad (t \geq t_0).$$

设

$$nT \leq t - t_0 < (n+1)T \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

由于 Cauchy 矩阵 $\mathbf{K}(t, t_0)$ 具有性质

$$\mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{K}(t, t_1) \mathbf{K}(t_1, t_0) \quad (t_0 \leq t_1 \leq t).$$

因此有

$$\mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{K}(t, nT + t_0) \mathbf{K}(nT + t_0, (n-1)T + t_0) \cdots \mathbf{K}(T + t_0, t_0).$$

于是

$$\begin{aligned} \| \mathbf{K}(t, t_0) \| &\leq \| \mathbf{K}(t, nT + t_0) \| \| \mathbf{K}(nT + t_0, (n-1)T + t_0) \| \cdots \| \mathbf{K}(T + t_0, t_0) \| \\ &\leq m e^{-\lambda n T} = m e^{\lambda T} e^{-\lambda(n+1)T} \\ &\leq N e^{-\lambda(t-t_0)}, \end{aligned}$$

这里 $N = m e^{\lambda T}$, $e^{-\lambda T} = \varepsilon$. 证毕.

第二节 常系数线性系统稳定性的代数判据

常系数线性系统具有两个最基本的特性:(1)系统是定常的;(2)系统是线性的. 由于这两个性质, 常系数线性系统的稳定性问题几乎都可以通过线性代数的工具来解决.

考虑下面的常系数线性系统:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x, \quad (6.4)$$

这里 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶实常数矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. 人们常用 $\mathbf{x}$ 的二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ 作为 Liapunov 函数来研究系统平凡解的稳定性. 显然

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.4)} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}) \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$$

也是 $\mathbf{x}$ 的二次型. 我们将 $V(\mathbf{x})$ 与 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.4)}$ 所对应的矩阵 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 满足的方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{C} \quad (6.5)$$

称为由系统(6.4)或由矩阵 $\mathbf{A}$ 确定的 Liapunov 方程.

引理 6.1^[1] 若 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ_i 均满足 $\lambda_i + \lambda_j \neq 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则对任意实对称矩阵 $\mathbf{C}$, 存在唯一的实对称矩阵 $\mathbf{B}$ 满足式(6.5).

证明 由 $\forall i, j, \lambda_i + \lambda_j \neq 0$, 特别地有 $2\lambda_i \neq 0$, 从而 $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 因此 $\det \mathbf{A} \neq 0$, 即 $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵. 由线性代数的知识知, 存在非奇异矩阵 $\mathbf{Q}$, 使得

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{D},$$

其中 $\mathbf{E}$ 是 n 阶单位矩阵, 而

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

在式(6.5)两边分别左乘 $\mathbf{Q}^T$ 和右乘 $\mathbf{Q}$, 注意到 $(\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}$, 有

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}.$$

由于 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}^{-1})^T = (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q})^T$, 则上式可化为:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}.$$

令 $\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{C}^* = (c_{ij}^*)_{n \times n}$, $\mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{B}^* = (b_{ij}^*)_{n \times n}$, 则

$$\mathbf{D}^T \mathbf{B}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{D} = \mathbf{C}^*.$$

将上述矩阵方程展开即得到:

$$2\lambda_1 b_{11}^* = c_{11}^*,$$

$$\lambda_1 b_{1j}^* + d_j b_{1,j-1}^* + \lambda_j b_{1j}^* = c_{1j}^*, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

$$d_i b_{i-1,j}^* + \lambda_i b_{ij}^* + d_j b_{i,j-1}^* + \lambda_j b_{ij}^* = c_{ij}^*, \quad i, j = 2, 3, \dots, n,$$

$$d_i b_{i-1,1}^* + \lambda_i b_{i1}^* + \lambda_1 b_{i1}^* = c_{i1}^*, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

即

$$(\lambda_i + \lambda_j) b_{ij}^* = c_{ij}^* - d_i b_{i-1,j}^* - d_j b_{i,j-1}^*, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

其中规定 $d_1=0, b_{i0}^*=0, b_{0j}^*=0$. 由于 $\lambda_i+\lambda_j \neq 0$, 则有

$$b_{ij}^* = \frac{c_{ij}^* - d_i b_{i-1,j}^* - d_j b_{i,j-1}^*}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

从而对任意给定的实对称矩阵 $\mathbf{C}$, 由式(6.6)得到唯一确定的 $\mathbf{B}^*$, 再由等式 $\mathbf{B} = (\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{B}^* \mathbf{Q}^{-1}$ 知 $\mathbf{B}$ 唯一确定.

由于 $\mathbf{C}$ 是实对称矩阵, 则 $\mathbf{C}^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}$ 也是实对称矩阵, 再由式(6.6)可得 $b_{ij}^* = b_{ji}^*$, 即 $\mathbf{B}^*$ 是实对称矩阵, 从而 $\mathbf{B} = (\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{B}^* \mathbf{Q}^{-1}$ 是实对称矩阵. 证毕.

利用引理 6.1 的思想, 对线性系统(6.4)可以先取定一个实对称矩阵 $\mathbf{C}$, 使得 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.4)} = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ 是负定的, 然后由式(6.6)确定出 $\mathbf{B}$, 根据 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ 的符号即可确定式(6.4)的平凡解的稳定性.

例 6.1 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

平凡解的稳定性.

解 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}, \lambda_2 = -2 - \sqrt{3}$. 选取 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\frac{dV}{dt} = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = -(x_1^2 + x_2^2)$ 负定. 由等式(6.6)得到关于 b_{ij} 的方程组:

$$\begin{cases} -2b_{11} + 4b_{12} = -1, \\ b_{11} - 4b_{12} + 2b_{22} = 0, \\ 2b_{12} - 6b_{22} = -1. \end{cases}$$

解之得 $b_{11} = \frac{7}{4}, b_{12} = b_{21} = \frac{5}{8}, b_{22} = \frac{3}{8}$. 即

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

因此 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = \frac{7}{4}x_1^2 + \frac{5}{4}x_1x_2 + \frac{3}{8}x_2^2$. 易验证, 它是正定的. 从而系统(6.7)的平凡解一致渐近稳定.

下面我们将利用线性系统的基解矩阵, 通过 $\mathbf{A}$ 的特征值的符号来确定系

统(6.4)的平凡解的稳定性.

对矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, 引入指数矩阵函数

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n + \cdots,$$

其中 $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 由线性代数理论可知, 对任何方阵 $\mathbf{A}$, 上述级数收敛. 容易证明

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}) = \mathbf{A} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)},$$

因此系统(6.4)的 Cauchy 矩阵为

$$\mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}. \quad (6.8)$$

由矩阵理论知存在非奇异矩阵 $\mathbf{C}$, 使得 $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{J}$, 其中 $\mathbf{J}$ 是 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准型:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{J}_r \end{bmatrix},$$

$\mathbf{J}_j$ 是对应于 $\mathbf{A}$ 的 n_j 重特征值 λ_j 的 n_j 阶 Jordan 块 ($j=1, 2, \cdots, r$):

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, r 为 $\mathbf{A}$ 的初等因子的个数.

于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{C} &= \mathbf{e}^{\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}(t-t_0)} = \mathbf{e}^{\mathbf{J}(t-t_0)} \\ &= \text{diag}(\mathbf{e}^{\mathbf{J}_1(t-t_0)}, \mathbf{e}^{\mathbf{J}_2(t-t_0)}, \cdots, \mathbf{e}^{\mathbf{J}_r(t-t_0)}), \end{aligned} \quad (6.9)$$

其中

$$\mathbf{e}^{\mathbf{J}_j(t-t_0)} = \mathbf{D}_j(t-t_0) \cdot \mathbf{e}^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{D}_j(t-t_0) = \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 & \frac{(t-t_0)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & t-t_0 & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t-t_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

定理 6.6 (1) 系统(6.4)的平凡解稳定 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的所有特征值都具有非正实部,且具有零实部的特征值只对应 $\mathbf{A}$ 的简单初等因子.

(2) 系统(6.4)的平凡解渐近稳定 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的所有特征值均具有负实部.

(3) 系统(6.4)的平凡解不稳定 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 有正实部的特征值,或有对应于多重初等因子的零实部特征值.

证明 (1)由定理 6.1 知系统(6.4)的平凡解稳定 $\Leftrightarrow \mathbf{K}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 有界. 而由式(6.9)知, $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 有界 $\Leftrightarrow e^{\mathbf{J}(t-t_0)}$ 有界 $\Leftrightarrow e^{\mathbf{J}_j(t-t_0)}$ ($j=1, 2, \dots, r$) 有界. 再由式(6.10)知 $e^{\mathbf{J}_j(t-t_0)}$ ($j=1, 2, \dots, r$) 有界 $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ ($j=1, 2, \dots, r$), 且当 $\operatorname{Re} \lambda_{j_0} = 0$ 时, $n_{j_0} = 1$.

(2)由定理 6.2 知系统(6.4)渐近稳定 $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\mathbf{J}(t-t_0)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\mathbf{J}_j(t-t_0)} = 0$ ($j=1, 2, \dots, r$) $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ($j=1, 2, \dots, r$).

(3)由(1)的稳定性的充要条件即可推出.

例 6.2 讨论下列系统零解的稳定性:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k^2 x_1; \end{cases} & (2) \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k^2 x_1 - 2\mu x_2; \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = k^2 x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $k > 0, \mu > 0$ 为常数.

解 各系统系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程是

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0; & (2) \quad & \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -k^2 & -\lambda - 2\mu \end{vmatrix} = 0; \\ (3) \quad & \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

从而求得特征根分别为:

$$(1) \lambda_{1,2} = \pm ki; \quad (2) \lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - k^2}; \quad (3) \lambda_{1,2} = \pm k.$$

由定理 6.6 即知系统(1)是稳定的;系统(2)是渐近稳定的;系统(3)是不稳定的.

由定理 6.6 可知,常系数线性系统(6.4)渐近稳定取决于系统的特征多项式

$$f_n(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$$

的根是否都具有负的实部,因而如何判定一个实系数多项式具有负实部的根是很有意义的.

定义 6.1 若多项式 $f_n(\lambda)$ 的全部根都具有负的实部, 则称 $f_n(\lambda)$ 是**稳定多项式**, 也称为 **Hurwitz(霍尔维茨)多项式**, 记为 $f_n(\lambda) \in H$.

现设系统的特征多项式为

$$f_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

其中 $a_0 > 0$. 作行列式:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1},$$

其中一切 $i > n$ 时, $a_i = 0$.

我们有下面的结论(其证明见[2]):

定理 6.7 (Hurwitz 定理) $f_n(\lambda) \in H \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$.

例 6.3 考察常系数线性系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$$

的稳定性.

解 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3.$$

$$\text{有 } a_0 = 1 > 0, \text{ 且 } \Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 51 > 0.$$

故由 Hurwitz 定理知特征根均有负的实部,从而系统的平凡解渐近稳定.

定理 6.8 $f_n(\lambda) \in H$ 的必要条件是 $a_j > 0 (j=0, 1, 2, \dots, n)$.

定理 6.9 $f_n(\lambda) \in H$ 的必要条件是:

$$a_i a_{i+1} > a_{i-1} a_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2;$$

而充分条件是:

$$a_{i-1} a_{i+2} \leqslant 0.4655 a_i a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2.$$

(当 $n=5$ 时,应去掉上式中的等号)

以上两定理的证明请参阅文献[3].

例 6.4 设特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2.$$

判断是否 $f \in H$.

解 这时 $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 11, a_4 = 7, a_5 = 2$.

$i=1$ 时, $a_0 a_3 = 11 < 0.4655 a_1 a_2 = 23.275$;

$i=2$ 时, $a_1 a_4 = 35 < 0.4655 a_2 a_3 = 51.205$;

$i=3$ 时, $a_2 a_5 = 20 < 0.4655 a_3 a_4 = 35.8435$.

故由定理 6.9 知 $f \in H$, 即 $f(\lambda)$ 的全部特征根都具有负的实部.

现设系统(6.4)的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 是对角线元素全为负的矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{ii} < 0, j = 1, 2, \dots, n).$$

并令

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -a_{11} & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & -a_{22} & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{|a_{12}|}{a_{11}} & \cdots & -\frac{|a_{1n}|}{a_{11}} \\ -\frac{|a_{21}|}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{|a_{2n}|}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{|a_{n1}|}{a_{nn}} & -\frac{|a_{n2}|}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 6.10^[4] 下列五个条件彼此等价,且其中任何一个条件成立,均蕴涵系统(6.4)的平凡解是渐近稳定的.

(1)存在函数

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} \alpha_j > 0, & \text{当 } x_j \geqslant 0 \text{ 时,} \\ -\beta_j < 0, & \text{当 } x_j < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

使得

$$\alpha_j a_{jj} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \varphi_s(x_s) a_{sj} < 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n);$$

$$\beta_j a_{jj} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \varphi_s(x_s) a_{sj} < 0,$$

(2)存在实数 $\xi_j > 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$, 使

$$\xi_j a_{jj} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \xi_s |a_{sj}| < 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n);$$

(3) $\mathbf{A}_1$ 可逆, 且 $\mathbf{A}_1^{-1}$ 是非负矩阵(即所有元素均非负);

(4) $\mathbf{A}_1$ 的所有顺序主子式都大于零;

(5) $\mathbf{A}_2$ 的谱半径 $\rho(\mathbf{A}_2) < 1$ (即 $\mathbf{A}_2$ 的所有特征值的模都小于 1).

其证明可参见文献[4].

第三节 线性系统的扰动理论

对于一个非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

考虑 $\mathbf{F}$ 对 $\mathbf{x}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \mathbf{A}(t),$$

若它与 t 无关, 则系统(6.11)可以写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (6.12)$$

其中 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

我们将常系数线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6.13)$$

称为系统(6.12)的一次近似系统.

现在我们要研究线性近似系统(6.13)零解的稳定性能否保证系统(6.12)零解具有相同的稳定性. 若在某些条件下能保证, 则称系统(6.12)可线性化, 也称系统(6.13)在那些条件下可经受扰动 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

定理 6.11 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 $[t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^n$ 上连续, 关于 $\mathbf{x}$ 满足 Lipschitz 条件, 且对 t 一致地有

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad (6.14)$$

则当 $\mathbf{A}$ 没有零实部的特征值时, 系统(6.12)与系统(6.13)有相同的稳定性.

证明 由于 $\mathbf{A}$ 没有零实部的特征值, 则系统(6.13)的零解是渐近稳定的或不稳定的.

当系统(6.13)的零解渐近稳定时, $\mathbf{A}$ 的特征值都具有负的实部, 由引理 6.1 知, 存在唯一的实对称矩阵 $\mathbf{B}$, 使得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A} = -\mathbf{E},$$

且 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ 必是正定的. 否则, 在原点的任意一个邻域内, 必有 $\mathbf{x}_0$, 使得 $V(\mathbf{x}_0) \leq 0$, 由于 $V(\mathbf{x})$ 沿着系统(6.13)的全导数 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 负定, 则当 $t > t_0$ 时,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) &= V(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) dt \\ &< V(\mathbf{x}_0) \leq 0. \end{aligned}$$

这与 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, 从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = 0$ 矛盾.

用 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ 作为系统(6.12)的 Liapunov 函数, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} \Big|_{(6.12)} &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x})^T \mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{f}(t, \mathbf{x})^T \mathbf{B} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

由于 $\|2\mathbf{f}(t, \mathbf{x})^T \mathbf{B} \mathbf{x}\| \leq 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$, 且由式(6.14)知, 对 $\varepsilon = \frac{1}{4\|\mathbf{B}\|}$, $\exists \delta > 0$, 当 $\|\mathbf{x}\| < \delta$ 时一致地有

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < \varepsilon \|\mathbf{x}\|.$$

从而当 $\|\mathbf{x}\| < \delta$ 时,

$$\dot{V}\Big|_{(6.12)} \leq -\|\mathbf{x}\|^2 + 2\varepsilon\|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x}\|^2 = -\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2,$$

即 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的, 故系统 (6.12) 的平凡解渐近稳定.

当系统 (6.13) 的零解不稳定时, 由于 $\mathbf{A}$ 的特征值均不具有零实部, 则 $\mathbf{A}$ 的特征值中至少有一个具有正实部, 从而对正定的 $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, 存在正常数 α 及非常负的 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$, 使得

$$\dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{(6.13)} = \alpha V(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x}). \quad (6.15)$$

事实上, 由于 $\mathbf{A}$ 有正实部的特征根 λ_0 , $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$, 可选取常数 $\alpha > 0$, 使 $\mathbf{A} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}$ 也具有正实部的特征根 λ_1 , 且 $\mathbf{A} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}$ 的所有特征根满足引理 6.1 的条件, 从而对 $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, 存在唯一的 $\mathbf{B}$, 使得

$$(\mathbf{A} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{E})^T \mathbf{B} + \mathbf{B}(\mathbf{A} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}) = \mathbf{E}.$$

由此得到的二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ 即满足式 (6.15).

$$\dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{(6.12)} = \alpha V(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x})^T \mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

由条件 (6.14) 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $\|\mathbf{x}\| > \delta$ 时,

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})^T \mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < \varepsilon \|\mathbf{x}\|^2.$$

于是 $W(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x})^T \mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 是正定的, 从而由不稳定性定理知, 系统 (6.12) 的平凡解是不稳定的. 证毕.

例 6.5 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_1^2 e^{x_2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \sin x_1 - x_2 + x_1^2 x_2 + x_3^4, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 - x_3 - e^{x_1} (\cos x_3 - 1) \end{cases} \quad (6.16)$$

零解的稳定性.

解 式 (6.16) 在原点线性化系统 (一次近似系统) 的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ 的特征方程为

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0.$$

由 Hurwitz 定理知 $\mathbf{A}$ 的特征方程的根均具有负实部, 且非线性部分满足条件 (6.14), 故由定理 6.11 知, 系统 (6.16) 的零解渐近稳定.

定理 6.11 给出了矩阵 $\mathbf{A}$ 无零实部的特征根时, 扰动系统 (6.12) 的零解的稳定性结果. 但当 $\mathbf{A}$ 有零实部的特征根时, 线性近似系统的稳定性无法决定原非线性系统的稳定性.

例 6.6 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + \alpha x_1^3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \alpha x_2^3 \end{cases} \quad (6.17)$$

零解的稳定性.

解 取 $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, 则 V 是正定的, 且

$$\dot{V}(x_1, x_2) \Big|_{(6.17)} = \alpha(x_1^4 + x_2^4).$$

故当 $\alpha < 0$ 时, 系统 (6.17) 的零解渐近稳定; $\alpha > 0$ 时, 系统 (6.17) 的零解不稳定.

容易看出, 系统 (6.17) 所对应的线性近似系统的两个特征值的实部均为零, 而且线性系统的零解是稳定的, 但非线性系统 (6.17) 可能稳定 ($\alpha < 0$), 也可能不稳定 ($\alpha > 0$).

线性系统的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 具有零实部特征值, 而其余的特征根均具有负实部的情况, 称为临界情形, 这时扰动系统 (6.12) 的平凡解的稳定性依赖于非线性项 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, 稳定性的判定相当复杂.

定理 6.12 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon)$, 当 $\|\mathbf{x}\| < \delta, t \geq t_0$ 时, 有

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < \epsilon \|\mathbf{x}\|,$$

则当系统 (6.13) 的平凡解指数稳定时, 系统 (6.12) 的平凡解也指数稳定.

证明 由系统 (6.13) 的平凡解指数稳定, 则 $\exists m > 0, \lambda > 0$, 使得系统 (6.13) 的 Cauchy 矩阵有估计式

$$\|\mathbf{K}(t, t_0)\| \leq m e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (6.18)$$

今选取 $\epsilon > 0$, 使

$$\epsilon m < \lambda,$$

并取 $\delta(\epsilon) > 0$, 使当 $\|\mathbf{x}\| < \delta(\epsilon)$ 时, 有

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < \epsilon \|\mathbf{x}\|.$$

又系统 (6.12) 的解

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$$

可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{K}(t, t_1) \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) dt_1.$$

选取 $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\epsilon)$, 则由解的连续性知存在 $\delta_1 > 0$, 使在 $[t_0, t_0 + \delta_1]$ 上有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \delta(\epsilon)$, 于是当 $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq m e^{-\lambda(t-t_0)} \|\mathbf{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \epsilon m e^{-\lambda(t-t_1)} \|\mathbf{x}(t_1)\| dt_1.$$

从而有

$$\|\mathbf{x}(t)\| e^{\lambda t} \leq m e^{\lambda t_0} \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{\epsilon m(t-t_0)},$$

即当 $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq m \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0) + \epsilon m(t-t_0)} \\ &= m \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-(\lambda - \epsilon m)(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

因为 $\lambda - \epsilon m > 0$, 故当 $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \frac{\delta}{m}$ 时, 对一切 $t \geq t_0$, (6.19) 式都成立, 从而系统 (6.12) 的平凡解指数稳定. 证毕.

推论 6.3 设系统 (6.13) 的平凡解指数稳定, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 $[t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^n$ 上连续, 且对 t 一致地有

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0,$$

则系统 (6.12) 的平凡解指数稳定.

第四节 周期系数线性系统的稳定性

考虑周期系数线性系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (6.20)$$

其中 $\mathbf{A}(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R}^{n \times n})$, $\mathbf{A}(t + \omega) = \mathbf{A}(t)$, $\omega > 0$ 为周期.

这类系统, 系数虽然是时变的, 但由于它的周期性, 它的解的结构及稳定性理论与常系数线性系统非常类似.

现设 $\mathbf{X}(t) = (x_{ij}(t))_{n \times n}$ 是系统 (6.20) 的某个基解矩阵, 即满足矩阵方程

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t), \quad (6.21)$$

矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 的每一列都是系统 (6.20) 的一个解.

由于 $\mathbf{A}(t)$ 的周期性, 易知 $\mathbf{X}(t+\omega)$ 也是矩阵方程 (6.21) 的解, 因而是系统 (6.20) 的一个基解矩阵. 故存在非奇异矩阵 $\mathbf{C}$, 使得

$$\mathbf{X}(t+\omega) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}. \quad (6.22)$$

作方程

$$f_n(\rho) \equiv \det(\rho\mathbf{E} - \mathbf{C}) = 0, \quad (6.23)$$

其中 $\mathbf{E}$ 是 n 阶单位矩阵. 方程 (6.23) 称为系统 (6.20) 的对应于周期 ω 的特征方程, 或简称为特征方程. 应该指出, 此处的特征方程与常系数线性系统所对应的特征方程有着不同的含义.

关于特征方程的性质有如下的两个定理:

定理 6.13 特征方程与所选择的基解矩阵无关.

证明 设 $\mathbf{Y}(t)$ 是系统 (6.20) 的另一基解矩阵. 则同样存在非奇异矩阵 $\mathbf{C}_1$ 使得

$$\mathbf{Y}(t+\omega) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}_1. \quad (6.24)$$

于是, 问题变为证明矩阵 $\mathbf{C}_1$ 与 $\mathbf{C}$ 相似, 从而由 $\mathbf{C}_1$ 构造的特征方程与由 $\mathbf{C}$ 构成的特征方程相同. 事实上, 由于 $\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)$ 都是基解矩阵, 故存在非奇异矩阵 $\mathbf{P}$, 使

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{P}. \quad (6.25)$$

于是由式 (6.25) 和式 (6.22), 有

$$\mathbf{Y}(t+\omega) = \mathbf{X}(t+\omega)\mathbf{P} = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}.$$

注意到 $\mathbf{Y}(t)$ 是基解矩阵, 故 $\mathbf{Y}(t)$ 是非奇异的, 因此将上式与式 (6.24) 相比较. 即得到

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}.$$

证毕.

定理 6.14 如果对系统 (6.20) 作非奇异的周期为 ω 的周期系数线性变换, 则变换后的系统的特征方程不变.

证明 作变量替换

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{D}(t+\omega) = \mathbf{D}(t), \quad (6.26)$$

则系统 (6.20) 经变换后化为

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \left(\mathbf{D}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{D}^{-1}(t) + \frac{d\mathbf{D}(t)}{dt}\mathbf{D}^{-1}(t) \right) \mathbf{y}. \quad (6.27)$$

同时, 在变换 (6.26) 下, 系统 (6.20) 的基解矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 化为系统 (6.27) 的相应基解矩阵 $\mathbf{Y}(t)$, 满足关系式

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t).$$

由于 $D(t)$ 非奇异, 则

$$X(t) = D^{-1}(t)Y(t),$$

而

$$\begin{aligned} Y(t+\omega) &= D(t+\omega)X(t+\omega) = D(t)X(t)C \\ &= D(t)D^{-1}(t)Y(t)C = Y(t)C. \end{aligned}$$

从而系统(6.27)的特征方程与系统(6.20)的特征方程是一致的. 证毕.

现在, 我们取 $X(t) \equiv \Phi(t)$, $\Phi(t)$ 是系统(6.20)的 Cauchy 矩阵[即 $\Phi(0) = E$]. 在式(6.22)中令 $t=0$, 则

$$\Phi(\omega) = C.$$

于是系统(6.20)的特征方程变为

$$\det(\rho E - \Phi(\omega)) = 0. \quad (6.28)$$

进一步地, 我们有

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\Phi(\omega),$$

且

$$\det \Phi(t+\omega) = \det \Phi(t) \cdot \det \Phi(\omega) \neq 0.$$

设 $n\omega \leq t < (n+1)\omega$, 可令 $t = n\omega + t_1$ ($0 \leq t_1 < \omega$), n 为某个正整数. 则

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi(n\omega + t_1) = \Phi((n-1)\omega + t_1 + \omega) \\ &= \Phi((n-1)\omega + t_1)\Phi(\omega) \\ &= \dots\dots \\ &= \Phi(t_1)\Phi^n(\omega), \end{aligned} \quad (6.29)$$

其中 $\Phi(t_1) \neq 0$ 且有界. 于是我们有:

定理 6.15 (1) 系统(6.20)的平凡解渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 系统(6.20)的特征方程(6.28)的所有特征值的模都小于 1;

(2) 系统(6.20)的平凡解稳定 $\Leftrightarrow$ 系统(6.20)的特征方程(6.28)的所有特征值的模都不超过 1, 且模为 1 的特征值只对应于 $\Phi(\omega)$ 的简单的初等因子;

(3) 系统(6.20)的平凡解不稳定 $\Leftrightarrow$ 系统(6.20)的特征方程(6.28)的特征值中至少有一个的模大于 1 或者有对应于 $\Phi(\omega)$ 的多重初等因子的模为 1 的特征值.

证明 (1) 系统(6.20)的平凡解渐近稳定 $\xLeftrightarrow[\text{定理 6.2}]{\text{}} \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0 \xLeftrightarrow[\text{(6.29)}]{\text{}} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(\omega) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\omega) \text{ 的特征值的模 } |\rho| < 1.$

(2) 系统(6.20)的平凡解稳定 $\xLeftrightarrow[\text{定理 6.1}]{\text{}} \Phi(t) \text{ 有界 } \xLeftrightarrow[\text{(6.29)}]{\text{}} \Phi^n(\omega) \text{ 有界 } \Leftrightarrow |\rho| \leq 1,$

且 $|\rho|=1$ 仅对应于 $\Phi(\omega)$ 的简单初等因子.

(3) 由(2)即可立即推出. 证毕.

对周期系数线性系统(6.20), 由前面的讨论知, 存在非奇异矩阵 $\Phi(\omega)$, 使

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\Phi(\omega).$$

由 $\Phi(\omega)$ 非奇异, 则存在常数矩阵 K , 使

$$\Phi(\omega) = e^{K\omega}$$

(参阅文献[5]). 现设

$$P(t) = \Phi(t)e^{-Kt},$$

则有

$$\begin{aligned} P(t+\omega) &= \Phi(t+\omega)e^{-K(t+\omega)} \\ &= \Phi(t)\Phi(\omega)e^{-Kt}e^{-K\omega} \\ &= \Phi(t)e^{-Kt} = P(t), \end{aligned}$$

即 $P(t)$ 亦为非奇异的周期矩阵.

作变量替换

$$x = P(t)y = \Phi(t)e^{-Kt}y,$$

则有

$$\begin{aligned} A(t)P(t)y &= \frac{dx}{dt} = \frac{dP(t)}{dt}y + P(t)\frac{dy}{dt} \\ &= A(t)P(t)y - P(t)Ky + P(t)\frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

故新变量满足的方程为

$$\frac{dy}{dt} = Ky. \quad (6.30)$$

我们称矩阵 K 的特征值为系统(6.20)的特征指数, 而 $\Phi(\omega)$ 的特征值称为系统(6.20)的特征乘数. 显然系统(6.20)与系统(6.30)具有相同的稳定性, 这样我们将系统(6.20)的平凡解的稳定性问题转化为了常系数线性系统(6.30)的平凡解的稳定性问题.

这似乎已经解决了周期系数线性系统的稳定性问题. 但事实上在计算矩阵 K 时有很大的困难.

下面给出不计算 K , 而直接判定周期系数线性系统(6.20)稳定性的几个充分判据. 某些特殊情况下周期系统(6.20)的稳定性的判定可参阅文献[6].

令

$$\mathbf{B}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{W}^{(1)}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{A}(t), \quad (6.32)$$

$$\mathbf{W}^{(2)}(t) = \mathbf{W}^{(1)}(t)\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{W}^{(1)}(t). \quad (6.33)$$

定理 6.16 若周期系统(6.20)满足

(i) $\mathbf{W}^{(1)}(t) \equiv \mathbf{O}$;

(ii) 矩阵 $\mathbf{B}(\omega) - \mathbf{B}(0) = \int_0^\omega \mathbf{A}(t) dt$ 稳定(即矩阵 $\mathbf{B}(\omega) - \mathbf{B}(0)$ 的所有特征值都具有负的实部), 则系统(6.20)的平凡解指数稳定.

证明 由条件(i)知系统(6.20)的 Cauchy 矩阵解为

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right).$$

设 $n\omega \leq t < (n+1)\omega$, 即 $t = n\omega + t_1$ ($0 \leq t_1 < \omega$), 则由式(6.29)有

$$\Phi(t) = \Phi(t_1)\Phi^n(\omega) = \Phi(t_1)\exp[n(\mathbf{B}(\omega) - \mathbf{B}(0))]. \quad (6.34)$$

再由条件(ii), 则存在常数 $m > 0$ 及 $\lambda > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\| &\leq m e^{-\lambda t} = m e^{-\frac{t-t_1}{\omega} \lambda} \\ &= m e^{\frac{\lambda t_1}{\omega}} e^{-\frac{\lambda}{\omega} t} = m^* e^{-\frac{\lambda}{\omega} t}, \quad (m^* = m e^{\frac{\lambda t_1}{\omega}}). \end{aligned}$$

故系统(6.20)指数稳定. 证毕.

定理 6.17 若周期系统(6.20)满足:

(i) $\mathbf{W}^{(1)}(t) \not\equiv \mathbf{O}$, 但 $\mathbf{W}^{(2)}(t) \equiv \mathbf{O}$;

(ii) $\mathbf{W}^{(1)}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{W}^{(1)}(\tau) d\tau - \mathbf{W}^{(1)}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{W}^{(1)}(\tau) d\tau = \mathbf{O}$;

(iii) $\mathbf{A}(t)\mathbf{W}^{(1)}(t) - \mathbf{W}^{(1)}(t)\mathbf{A}(t) = \mathbf{O}$;

(iv) 矩阵 $\int_0^\omega (\mathbf{A}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{W}^{(1)}(t)) dt$ 稳定.

则系统(6.20)的平凡解指数稳定.

证明 因为 $\mathbf{W}^{(2)}(t) \equiv \mathbf{O}$, 故式(6.20)的 Cauchy 矩阵解为

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right) \mathbf{Y}(t), \quad (6.35)$$

其中 $\mathbf{Y}(t)$ 是系统

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{W}^{(1)}(t)\mathbf{Y} \quad (6.36)$$

的 Cauchy 矩阵解. 由条件(ii)有

$$\mathbf{Y}(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{W}^{(1)}(\tau) d\tau\right).$$

由条件 (iii) 及式 (6.35)、式 (6.36) 可知

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \exp\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{W}^{(1)}(\tau) d\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_0^t [\mathbf{A}(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{W}^{(1)}(\tau)] d\tau\right).\end{aligned}$$

余下的证明与定理 6.16 的证明完全一样, 故略. 证毕.

定理 6.18 若系统 (6.20) 满足定理 6.17 的条件 (i)、(ii), 且矩阵

$$\mathbf{B}(\omega) - \mathbf{B}(0) = \int_0^\omega \mathbf{A}(\tau) d\tau$$

及矩阵

$$\bar{\mathbf{B}}(\omega) - \bar{\mathbf{B}}(0) = \int_0^\omega \frac{1}{2} \mathbf{W}^{(1)}(\tau) d\tau$$

都稳定, 则系统 (6.20) 的平凡解指数稳定.

证明 由定理 6.17 的证明知系统 (6.20) 的 Cauchy 矩阵解为

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau\right) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{W}^{(1)}(\tau) d\tau\right).$$

由给定条件, 可设 $\mathbf{B}(\omega) - \mathbf{B}(0)$ 与 $\bar{\mathbf{B}}(\omega) - \bar{\mathbf{B}}(0)$ 的特征根的实部满足

$$\operatorname{Re} \lambda(\mathbf{B}(\omega) - \mathbf{B}(0)) < -\lambda_1,$$

$$\operatorname{Re} \lambda(\bar{\mathbf{B}}(\omega) - \bar{\mathbf{B}}(0)) < -\lambda_2.$$

则存在常数 $m > 0$, 使得

$$\|\Phi(t)\| \leq m e^{-\frac{\lambda_1}{\omega} t} e^{-\frac{\lambda_2}{\omega} t} = m \cdot e^{-\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\omega} t}.$$

故式 (6.20) 的平凡解指数稳定. 证毕.

例 6.7 讨论下列系统的稳定性:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (a + \cos bt)x_1 - \frac{1}{2}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{2}x_1 + (a + \cos bt)x_2. \end{cases}$$

解

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a + \cos bt & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & a + \cos bt \end{bmatrix}.$$

易验证

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{A}(t), \text{ 即 } \mathbf{W}_1(t) \equiv \mathbf{O},$$

其中

$$\mathbf{B}(t) = \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} at + \frac{1}{b} \sin bt & -\frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t & at + \frac{1}{b} \sin bt \end{pmatrix}.$$

而 $\mathbf{B}(\frac{2\pi}{|b|}) - \mathbf{B}(0) = \begin{pmatrix} a \frac{2\pi}{|b|} & -\frac{\pi}{|b|} \\ -\frac{\pi}{|b|} & a \frac{2\pi}{|b|} \end{pmatrix}$, 易求出它的两个特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{\pi}{|b|}(2a \pm 1)$. 故 $\mathbf{B}(\frac{2\pi}{|b|}) - \mathbf{B}(0)$ 稳定 $\Leftrightarrow a < -\frac{1}{2}$.

从而由定理 6.16 知, 当且仅当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 原周期系统是指数稳定的.

习 题 六

1. 判断下列系统零解的稳定性:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_3 - x_1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_2; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 - x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - 3x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - 5x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

2. 判断下列方程的根是否都具有负实部:

$$(1) x^3 + 5x^2 + 3x + 2 = 0;$$

$$(2) x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 5x + 7 = 0.$$

3. 讨论

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 + x_3 + x_1^3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_1x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_1x_2 \end{cases}$$

零解的稳定性.

4. 试按一次近似理论判别系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{-x-2y} - 1, \\ \frac{dy}{dt} = -x(1-y)^2 \end{cases}$$

零解的稳定性.

5. 证明方程 $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} - x^2$ 的零解是渐近稳定的, 但线性方程 $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t}$ 的零解是不稳定的.

6. 求出周期系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (\lambda + \sin at)x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + (\lambda + \sin at)x_2 \end{cases}$$

零解渐近稳定的条件.

补充与问题

1. 关于变系数线性系统渐近稳定性的补充

考虑线性系统(6.1), 当 $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$ 时, 我们可用 $\mathbf{A}$ 的特征值来判定系统(6.1)的平凡解的稳定性. 但当 $\mathbf{A}(t)$ 为时变情形时, 是否仍可以用 $\mathbf{A}(t)$ 的广义特征值来判定系统(6.1)的平凡解的稳定性呢? 又若 $\det(\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E}) = 0$ 的广义特征值为 $\lambda_i(t)$, 且满足:

$$\lambda_i(t) \leq -\sigma < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

问系统(6.1)的平凡解是否稳定?

我们考虑下面的系统:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 - 9\cos^2 6t + 12\sin 6t \cos 6t & 12\cos^2 6t + 9\sin 6t \cos 6t \\ -12\sin^2 6t + 9\sin 6t \cos 6t & -1 - 9\sin^2 6t - 12\sin 6t \cos 6t \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \quad (2)$$

容易计算 $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}(t)) = \lambda^2 + 11\lambda + 10$, 故 $\mathbf{A}(t)$ 的广义特征值 $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -10 < 0$, 满足(1)式. 直接求出(2)的通解为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos 6t + 2\sin 6t) & e^{-13t}(\sin 6t - 2\cos 6t) \\ e^{2t}(-\sin 6t + 2\cos 6t) & e^{-13t}(\cos 6t + 2\sin 6t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, 显然(2)的平凡解不稳定.

由此可见, 当系统(6.1)是变系数情形时不能用 $\mathbf{A}(t)$ 的广义特征值来判定其平凡解的稳定性, 对满足条件(1)的系统(6.1), 也不能用 $\mathbf{A}(t)$ 的广义特征值来判定系统(6.1)的平凡解的稳定性.

设 $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ 是一个连续的 n 阶实矩阵, 即 $\mathbf{A}(t)$ 的每个元素 $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 在 $t \geq t_0$ 时都连续. 我们称

$$\mathbf{A}^H(t) = \frac{\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)}{2}$$

为 $\mathbf{A}(t)$ 的 Hermit 矩阵.

下面的两个定理来自于文献[7]:

定理 1^[7] 设 $\lambda(t), \Lambda(t)$ 是 $\mathbf{A}^H(t)$ 的最小、最大广义特征值, 则有

(1) 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\int_{t_0}^t \Lambda(t) dt) = 0$, 则系统(6.1)的平凡解全局渐近稳定.

(2) 若存在正数 $\delta > 0$, 使得 $\lambda(t) \geq \delta > 0 (t \geq t_0)$ 或者 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \lambda(t) dt = \infty$, 则系统(6.1)的平凡解不稳定.

定理 2^[7] 若 $\mathbf{A}^H(t)$ 的全部广义特征值满足不等式

$$\lambda_i(t) \leq -\sigma < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

且 $\mathbf{A}^H(t)$ 的每个元素都连续有界, 则系统(6.1)的平凡解渐近稳定.

例 1 讨论系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 - 2\sin t - \sin^2 t & 1 - \sin t \cos t \\ -1 - \sin t \cos t & -3 - 2\sin t - \cos^2 t \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

的平凡解的稳定性.

解 由

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -3 - 2\sin t - \sin^2 t & 1 - \sin t \cos t \\ -1 - \sin t \cos t & -3 - 2\sin t - \cos^2 t \end{pmatrix},$$

有

$$\mathbf{A}^H(t) = \begin{pmatrix} -3 - 2\sin t - \sin^2 t & -\sin t \cos t \\ -\sin t \cos t & -3 - 2\sin t - \cos^2 t \end{pmatrix}.$$

故有

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}^H(t)) &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 + 2\sin t + \sin^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & \lambda + 3 + 2\sin t + \cos^2 t \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 3 + 2\sin t)(\lambda + 4 + 2\sin t). \end{aligned}$$

于是广义特征值为 $\lambda_1(t) = -4 - 2\sin t, \lambda_2(t) = -3 - 2\sin t$.

显然 $\Lambda(t) = \lambda_2(t)$, 有

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_{t_0}^t \Lambda(t) dt\right) &= \exp\left(\int_{t_0}^t (-3 - 2\sin t) dt\right) \\ &= e^{-3(t-t_0) + 2(\cos t - \cos t_0)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由定理 1 知, 系统(3)的平凡解全局渐近稳定.

例 2 讨论线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -(1 + \sin^2 t)x_1(t) + (1 - \sin t \cos t)x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -(1 + \sin t \cos t)x_1(t) - (1 + \cos^2 t)x_2(t) \end{cases} \quad (4)$$

平凡解的稳定性.

解

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 - \sin^2 t & 1 - \sin t \cos t \\ -1 - \sin t \cos t & -1 - \cos^2 t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^H(t) = \begin{pmatrix} -1 - \sin^2 t & -\sin t \cos t \\ -\sin t \cos t & -1 - \cos^2 t \end{pmatrix}.$$

故有

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}^H(t)) &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 + \sin^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & \lambda + 1 + \cos^2 t \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

于是 $\lambda_1(t) = -2 < 0, \lambda_2(t) = -1 < 0$. 故由定理 2 知系统(4)的平凡解是渐近稳定的.

容易看到, 定理 1 和定理 2 的条件都只是充分的但不是必要的. 能否像常系数线性系统那样建立起变系数线性系统(6.1)的稳定性判据, 还有许多工作有待我们去做. 相关的文献可参阅[3, 4].

下面我们考虑线性系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(t))\mathbf{x}, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{A}$ 为常数矩阵, $\mathbf{B}(t)$ 是连续矩阵. 称常系数线性系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (6)$$

为系统(5)的辅助系统(或称为齐次系统). 我们有下面的结论:

定理 3 如果 $\mathbf{B}(t)$ 满足条件

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|\mathbf{B}(t)\| dt < \infty,$$

则当系统(6)的平凡解稳定时, 系统(5)的平凡解也稳定.

详细的证明可参考文献[5].

自然, 人们会提出更广泛的问题: 在系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \quad (7)$$

的平凡解稳定的假设之下, 能否保证系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)]\mathbf{y} \quad (8)$$

的平凡解也是稳定的? 如果只假定 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{B}(t)\| = 0$ 且

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|\mathbf{B}(t)\| dt < \infty,$$

则问题的答案是否定的^[5]. 但在适当的附加条件下, 定理 3 可以推广如下:

定理 4^[5] 如果下列条件满足:

$$(1) \int_{t_0}^t \| \mathbf{B}(t) \| dt < \infty;$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \text{Tr}(\mathbf{A}) dt > -\infty.$$

则当系统(7)的平凡解稳定时,系统(8)的平凡解也稳定.

2. 临界情形的稳定性

在本章的第三节中,我们已经提出了临界情形的概念,即当 $\mathbf{A}$ 的特征方程除有实部为零的根外,其余的根的实部均为负的情形. 并举例说明了在临界情形下,稳定性问题的研究不能仅仅取决于其线性近似系统,而必须同时考虑扰动系统的高次项. 临界情形包括两种:一种是特征方程有零根,而其余各根均具有负的实部,我们称之为第一临界情形;另一种是特征方程有纯虚根,而其余各根均为具有负的实部,我们称之为第二临界情形.

关于临界情形非线性系统稳定性问题,马尔金^[8~11]曾作过深入的研究. 得到了解决临界情形稳定性问题的一般法则,有关的研究工作还可参见文献[5],但其方法非常繁琐. 目前有关临界情形稳定性问题所得到的新结果还不多见,有待广大数学工作者做进一步的探讨.

3. 非线性周期系统的稳定性

考虑具有周期系数的非线性扰动系统

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (9)$$

其中 $\mathbf{A}(t) \in C([t_0, \infty), \mathbf{R}^{n \times n})$, $\mathbf{A}(t+\omega) = \mathbf{A}(t)$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(t+\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\omega > 0$ 为周期.

称周期系数线性系统:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t+\omega) = \mathbf{A}(t) \quad (10)$$

为系统(9)的一次近似系统.

设 $\Phi(t)$ 是系统(10)的 Cauchy 矩阵,则系统(10)的特征方程为

$$\det(\rho \mathbf{E} - \Phi(\omega)) = 0. \quad (11)$$

我们有下面的两个定理:

定理 5^[5] 设 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, 当 $\|\mathbf{x}\| < \delta, t \geq t_0$ 时,有

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < \epsilon \|\mathbf{x}\|.$$

如果系统(10)的特征方程(11)的一切根的模都小于1,则系统(9)的平凡解渐近稳定.

定理 6^[5] 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 满足定理5的条件,如果系统(10)的特征方程(11)具有模大于1的根,则系统(9)的平凡解不稳定.

定理5和定理6告诉我们,当特征方程(11)的特征值的模不等于1时,系统(9)的稳定性可由一次近似系统(10)来确定. 但当特征方程(11)具有模等于1的根,而其余的根的模均小于1时,系统(9)的平凡解的稳定问题便不能取决于它的一次近似系统(10)了,我们把这种情形也称之为临界情形. 而周期系统临界情形稳定性问题的讨论会更加复杂. 有

感兴趣的读者可参见文献[5,8,12].

参考文献

- [1]马知恩,周义仓.常微分方程定性与稳定性方法.北京:科学出版社,2001
- [2]黄琳.稳定性理论.北京:北京大学出版社,1992
- [3]高维炳.运动稳定性基础.北京:高等教育出版社,1985
- [4]廖晓昕.稳定性的数学理论及其应用.武汉:华中师范大学出版社,2001
- [5]许淞庆.常微分方程稳定性理论.上海:上海科学技术出版社,1980
- [6]陆启韶.常微分方程的定性方法和分叉.北京:北京航空航天大学出版社,1989
- [7]衣春林,李美贞.变系数线性系统渐近稳定性的一种判定方法.沈阳工业学院学报, 1994,13(2):79~85
- [8]Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952. 中译本:运动稳定性理论.解伯民等译.北京:科学出版社,1958
- [9]Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. Матема. сб. т. 3, вып. 1, 1938
- [10] Малкин И. Г. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. ПММ, Т. 6, вып. 6, 1942
- [11] Малкин И. Г. Решение некоторых критических случаев валахи устойчивости движения, ПММ, Т. 15, вып. 5, 1951
- [12] 秦元勋,运动稳定性的一般问题讲义.北京:科学出版社,1958

第七章 Liapunov 直接法和稳定性概念的拓广

在第五章中,我们利用 V 函数(Liapunov 函数)来判定 Liapunov 意义下解的稳定性态,建立了一系列基本定理,这种方法通常被称为 Liapunov 直接法. 历史证明这个方法具有极为深刻的内涵,它的应用方式绝非基本定理所体现的一种格局,它的应用对象与功能也绝不限于 Liapunov 稳定性,它可用以研究广泛意义下的各种稳定性问题,也可以研究解的有界性、耗散性、收敛性,甚至周期解的存在性等. 本章就是从直接法的应用方式和应用对象两方面的拓广,来对直接法进行更深一步地探讨.

第一节 Lassalle 不变原理

在 n 维动力系统中,对一个运动的极限集位置的研究,实际上就是考察该运动的渐近行为,把适当选定的 Liapunov 函数与极限集的不变性结合起来,就能更准确地判断极限集的位置,更好地发挥 V 函数的威力,为零解(极限集)吸引域的确定提供了一种很好的方法. 这种“结合”的思想最早出现在 Krasovskii 等的工作中,20 世纪 60 年代 Lassalle 提炼成的著名的“不变原理”达到了更完美的境界.

一、Krasovskii – Barlbasin 定理^[1]

考虑 n 维自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f(0) = 0. \quad (7.1)$$

其中 $f \in [D, \mathbf{R}^n]$, 且保证解的唯一性, $0 \in D \subset \mathbf{R}^n$.

我们要用到第二章第一节中自治系统(动力系统)的如下概念:相空间 $\mathbf{x}$ 、轨线(正半轨)、 ω 极限点、 ω 极限集 Ω 及用到关于 Ω 的性质与构造的如下结论:

若正半轨 $L_{x_0}^+ = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), t \geq t_0\}$ 有界,则它的 ω 极限集 Ω 是非空、不变、连通的有界闭集,且它是系统(7.1)的整条整条轨线构成的.

还要用到定义:

定义 7.1 集合 $S \subset D$ 称为式(7.1)的(轨线)正向不变集,若 $\forall x_0 \in S$, 恒有 $x(t; t_0, x_0) \subset S, t \geq t_0$.

一般称,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t; t_0, x_0) \rightarrow S$, 若 $\forall$ 点 $P \in S$, 必 $\exists \{t_n\}: n \rightarrow \infty$ 时 $t_n \rightarrow \infty$ 时, 使

$$\|x(t_n; t_0, x_0) - P\| \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

定理 7.1^[1] 若在区域 D 上存在正定可微函数 $V(x)$, 使

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} \leq 0, \quad (7.2)$$

但集合

$$M \equiv \left\{ x \left| \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} = 0, x \in D \right. \right\},$$

除 $x=0$ 外, 不含式(7.1)的整条正半轨. 则系统(7.1)的平凡解是渐近稳定的.

证明 所设条件显然保证了平凡解是稳定的. 即 $\forall \epsilon > 0 (0 < \epsilon < H)$, $\exists \delta > 0$, 当 $\|x_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon < H, \quad t \geq t_0,$$

也即正半轨 $x(t; t_0, x_0), t \geq t_0$ 是有界的. 由极限集理论知, 它的 ω 极限集 $\Omega(x_0)$ 非空, 且 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$x(t; t_0, x_0) \rightarrow \Omega(x_0).$$

现证 $\Omega(x_0) = \{0\}$, 则平凡解就是渐近稳定的了.

用反证法, 若不然, 必 $\exists x^* \in \Omega(x_0), x^* \neq 0, \exists \{t_n\}: n \rightarrow +\infty$ 时, $t_n \rightarrow +\infty$, 使

$$x(t_n; t_0, x_0) \rightarrow x^* \neq 0, n \rightarrow +\infty \text{ 时.}$$

由 $V(x)$ 的正定性及沿轨线 $\frac{dV(x(t))}{dt}$ 的常负性知, $V(x(t; t_0, x_0))$ 单调不增连续, 故有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t; t_0, x_0)) = V(x^*) > 0. \quad (7.3)$$

另一方面, 考虑正半轨 $x(t; t_0, x^*)$, 则由式(7.2)知

$$V(x(t; t_0, x^*)) \leq V(x^*), t \geq t_0.$$

我们说, 必 $\exists t_1 > t_0$, 可使

$$V(x(t_1; t_0, x^*)) < V(x^*). \quad (7.4)$$

若不然, 则对一切 $t \geq t_0$, 均有 $V(x(t; t_0, x^*)) \equiv V(x^*)$, 于是有 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{x(t; t_0, x^*)} = 0, t \geq t_0$, 即此正半轨 $x(t; t_0, x^*) \subset M$, 与定理假设矛盾.

因 $\Omega(x_0)$ 是由式(7.1)的整条整条轨线构成的, 由 $x^* \in \Omega(x_0)$ 知, 点

$\mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}^*)$ 也是 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 的 ω 极限点, 故 $\exists \{t_n^*\}: n \rightarrow +\infty$ 时, $t_n^* \rightarrow +\infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_n^*; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}^*),$$

则由式(7.4)得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t_n^*; t_0, \mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}^*)) < V(\mathbf{x}^*),$$

这导致与式(7.3)矛盾, 也即说明必有 $\Omega(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{O}\}$. 证毕.

例 7.1 我们在例 5.5 中考虑过的阻尼单摆运动

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0$$

对应的系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x - y.$$

当我们用能量函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$$

作 V 函数时, 沿系统求得

$$\frac{dV}{dt} = -y^2 \leq 0,$$

常负, 当时对这个 V 函数得不到渐近稳定的结论.

按照本定理, 这时集合

$$M \equiv \left\{ (x, y) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \left\{ (x, y) \Big|_{y=0} \right\} = \{(x, 0)\},$$

它不含除 $x=y=0$ 外的正半轨 ($y=0$ 不是解), 故满足本定理的全部条件, 即能量函数也能决定平凡解是渐近稳定的.

这个结果从物理的角度看也是自然的, 因为有阻尼的单摆运动过程是总能量不断下降的过程, 而 $\frac{dV}{dt}=0$ 只是在一些瞬间发生而已.

推论 若在 $\mathbf{R}^n$ 中存在无穷大正定函数 $V(x)$, 使

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(7.1)} \leq 0,$$

且集合

$$M \equiv \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{dV}{dt} \Big|_{(7.1)} = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \right\}$$

除 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 外不含式(7.1)的整条正半轨, 则系统(7.1)平凡解是全局渐近稳定的.

定理 7.2 若存在可微函数 $V(\mathbf{x}): D \rightarrow \mathbf{R}, V(\mathbf{0})=0$, 在原点的任意邻域内存在 $\mathbf{x}_0$, 使 $V(\mathbf{x}_0) > 0$; 且使

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} \geq 0;$$

要使集合

$$M \equiv \left\{ \mathbf{x} \left| \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} = 0, \mathbf{x} \in D \right. \right\}$$

除 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 外不含式(7.1)的整条正半轨. 则系统(7.1)平凡解是不稳定的.

证明 对某固定的 $\varepsilon \in (0, H)$, 使定理各条件成立, 则首先知, $\forall \delta \in (0, \varepsilon)$, $\exists x_0 \in B_\delta \equiv \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}\| < \delta\}$, 使 $V_0 \equiv V(\mathbf{x}_0) > 0$. 我们来证: $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 在 $t \geq t_0$ 足够大时, 必有

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \varepsilon,$$

这就是平凡解不稳定.

反证, 若不然, 则有

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0. \quad (7.5)$$

即轨线 $\mathbf{x}(t)$ 正向有界, 它的 ω 极限集 $\Omega(\mathbf{x}_0)$ 非空.

另一方面, 由条件 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} \geq 0$, 得

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{x}_0) = V_0 > 0, \quad t \geq t_0,$$

从而导出, 沿轨线 $\mathbf{x}(t)$ 必 $\exists \eta \in (0, \delta)$, 使

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \eta > 0, \quad t \geq t_0.$$

上式说明 $\mathbf{0} \notin \Omega(\mathbf{x}_0)$.

设 $\forall \mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}_0)$, 必 $\exists \{t_n\}: n \rightarrow +\infty$ 时 $t_n \rightarrow +\infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_n; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{y}.$$

另由 $V(\mathbf{x}(t))$ 不减, 有上界, 则 $V(\mathbf{x}(t))$ 必有极限. 因此

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t_n; t_0, \mathbf{x}_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = c > 0. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}_0)$ 是任意的, 奇点 $\mathbf{0} \notin \Omega(\mathbf{x}_0)$, $\Omega(\mathbf{x}_0)$ 是整条整条轨线构成的, 上式说明: 点 $\mathbf{y}$ 沿一条轨线任取时, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} = 0$. 也就是说集合 M 中至少含有一条非平凡的正半轨, 这与假设矛盾, 证毕.

二、Lassalle 不变原理

定理 7.3(不变原理^[2]) 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, 从 $\mathcal{D}$ 内出发的式(7.1)的解 $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ (轨线)永远停留在 $\mathcal{D}$ 中. 若存在 $V(\mathbf{x}) \in C^1[\mathcal{D}]$,

$\mathbf{R}]$, 使

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} \leq 0.$$

记

$$M \equiv \left\{ \mathbf{x} \left| \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.1)} = 0, \mathbf{x} \in \mathcal{D} \right. \right\},$$

设 S 是 M 内最大正向不变集, 则有

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \rightarrow S;$$

特别地, 若 $S = \{O\}$ 时, 式 (7.1) 的平凡解是渐近稳定的.

证明 因 $\mathbf{x}(t) \subset \mathcal{D}$, 则 $\mathbf{x}(t)$ 的 ω 极限集 $\Omega(\mathbf{x}_0)$ 非空、(正向) 不变、且 $\Omega(\mathbf{x}_0) \subset \mathcal{D}$ 及

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega(\mathbf{x}_0).$$

由 $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq 0$, 知 $V(\mathbf{x}(t))$ 单调不增, 在有界闭集 $\mathcal{D}$ 上, 极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t)) = c$$

存在, 也即

$$V(\Omega(\mathbf{x}_0)) \equiv c \text{ 或 } \left. \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{x}_0)} = 0,$$

这就是说 $\Omega(\mathbf{x}_0) \subset M$.

由 $\Omega(\mathbf{x}_0)$ 的正向不变性, S 是 M 中最大的正向不变集, 就有 $\Omega(\mathbf{x}_0) \subset S$. 再由 $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega(\mathbf{x}_0)$, 得

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \rightarrow S.$$

证毕.

注 Lassalle 不变原理比起 Krasovskii - Barlbasin 定理, 它有以下优点:

(i) 理论上更深刻、更一般;

(ii) 不一定要求 $V(\mathbf{x})$ 定号, 只要求 $\frac{dV}{dt}$ 常负;

(iii) 若 $S = \{O\}$ 时, 它理论上给出了吸引区域 $\mathcal{D}$ 的作法思路. 这在应用中很重要.

但不变原理用起来, 困难也正在于构造满足定理条件的有界闭域 $\mathcal{D}$. 在某些问题中, 当作出满足条件的 V 函数时, 常以集合 $\{\mathbf{x} | V(\mathbf{x}) \leq l\}$ 或以它为主体再加上某些简单的线段来分段构造出我们所要的区域 $\mathcal{D}$ 来. 我们看下面的例子.

例 7.2 讨论 Liénard 方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

的等价系统

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x), \quad (7.6)$$

其中 $F(x) \equiv \int_0^x f(s)ds$, $xg(x) > 0$ ($x \neq 0$ 时); 存在 $a > 0$, 当 $0 < |x| \leq a$ 时, $g(x)F(x) > 0$ ($x \neq 0$).

试构造满足定理 7.3 要求的有界闭域 $\mathcal{D}$.

解 令 $G(x) = \int_0^x g(u)du$, 则显然 $G(x) > 0$ ($x \neq 0$ 时), 作函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x),$$

则有

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.6)} = -g(x)F(x).$$

由所给的条件知, 当 $0 < |x| \leq a$ 时, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.6)} < 0$.

这里我们可以看出: 必存在正数 l 和 A , 使当 $V(x, y) \leq l$ 时, 推出 $G(x) \leq A$, 来保证 $\exists a$, 使 $0 < |x| \leq a$. 这样, 在 $V(x, y) \leq l$ 所限定的有界闭域 $\mathcal{D}$ 中就有

$$V(x, y) > 0, \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.6)} < 0.$$

则 $\mathcal{D}$ 中的轨线不走出此闭域. 这时

$$\begin{aligned} M &= \left\{ (x, y) \in \mathcal{D} \mid \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.6)} = -g(x)F(x) = 0 \right\} \\ &= (0, y) \Big|_{y \in \mathcal{D}} = \mathcal{D} \text{ 内的 } y \text{ 轴.} \end{aligned}$$

因 y 轴不是解, 故 M 中的不变集只有 $O(0, 0)$. 由定理 7.3 知, $\mathcal{D}$ 内的每个解都趋于 O , 即区域 $\mathcal{D}$ 就是系统 (7.6) 零解的吸引 (渐近稳定) 区域.

把以上的讨论用到方程

$$\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \epsilon > 0$$

时, 有

$$F(x) = \int_0^x \epsilon(1 - x^2)dx = \epsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right),$$

$$G(x) = \int_0^x xdx = \frac{1}{2}x^2,$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2,$$

$$\frac{dV}{dt} = -\epsilon x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3}\right).$$

由 $\frac{dV}{dt} < 0$ 推出 $0 < x^2 < 3$.

因此, 我们取 $l = \frac{3}{2}$ 时,

$$V(x, y) \equiv \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 < \frac{3}{2},$$

保证了 $x^2 < 3$, 从而得: 圆 $x^2 + y^2 = 3$ 是渐近稳定区域.

顺便指出, 当用 $-t$ 代替方程中的 t 时, 点 O 变成完全不稳定的(源), 而方程变为 Van der Pol 方程.

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \epsilon > 0,$$

在定性理论中讨论过它, 有唯一的稳定极限环. 而由上面的讨论知道, 这个极限环一定在圆 $x^2 + y^2 = 3$ 的外面.

例 7.3 讨论方程

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + x^2 = 0$$

($a > 0, b > 0$) 平凡解 $x = \dot{x} = 0$ 的稳定性和作出稳定区域.

解 化为方程组

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - ay - x^2, \quad (7.7)$$

由线性近似系统对应的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad q = b > 0, \quad p = a > 0,$$

知平凡解 $O(0, 0)$ 是渐近稳定的.

下面来作出渐近稳定区域, 取

$$V(x, y) \equiv \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(它在大范围内不定号), 首先由

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.7)} = (bx + x^2)y - y(bx + ay - x^2) = -ay^2 \leq 0, \quad (7.8)$$

知符合定理 7.3 中对 $\dot{V} \leq 0$ 的要求.

作有界闭区域 $\mathcal{D}$: 由三段构成其边界(图 7-1).

$\overline{ABCD}$: 取 $V = \frac{1}{2}\alpha^2\beta^2$,

$\overline{DE}$: 取 $W_1 \equiv x = -\beta$,

$\overline{EA}$: 取 $W_2 \equiv y + \alpha x = -\alpha\beta$,

其中 $\beta > 0$ 待定.

今证明: $\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, 轨线

$x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0), t \geq t_0$

不走出 $\mathcal{D}$.

由式 (7.8) 知, 该轨线不能从

$\overline{ABCD}$ 上走出 $\mathcal{D}$; 由

$$\left. \frac{dW_1}{dt} \right|_{(7.7)} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{(7.7)} = y > 0 (y \neq 0 \text{ 时}), \quad (7.9)$$

$$\left. \frac{dW_2}{dt} \right|_{(7.7)} = -x(b+x),$$

又注意到 E 点的坐标是 $(-\beta, 0)$, 直线 $\overline{EA}$ 上有 $0 > x > -\beta$, 故当 $\beta \in (0, b)$ 时, 这样的直线族 $\overline{EA}$ (当 E 点向 O 收缩过程中的一系列平行直线) 上有

$$0 > x > -\beta > -b,$$

则使

$$\left. \frac{dW_2}{dt} \right|_{(7.7)} = -x(b+x) > 0. \quad (7.10)$$

这样, 式 (7.8)、式 (7.9)、式 (7.10) 就说明了, $t \geq t_0$ 时轨线不走出我们所构造的闭区域 $\mathcal{D}$.

又注意到

$$\begin{aligned} M &= \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.7)} = -ay^2 = 0\} \\ &= (x, 0) \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

而 M 中只有不变集 $O(0, 0)$ 一点, 故按定理 7.3 知, 式 (7.7) 的平凡解是渐近稳定的, 而当 $\beta \in (0, b)$ 时, 我们作出的 $\mathcal{D}$ 是 O 的吸引 (渐近稳定) 区域.

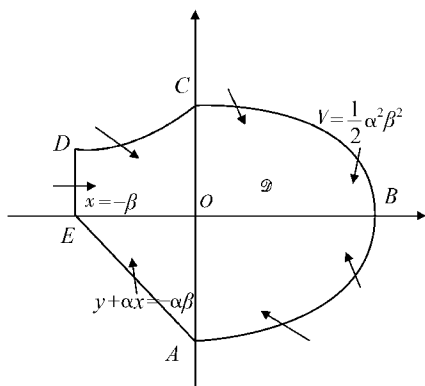


图 7-1

第二节 比较原理

用直接法来判定 n 维系统稳定性问题时, 常常遇到的困难是, 要构造出恰当的 V 函数, 使它和 $\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt}$ 一起满足稳定性基本定理中有关符号的要

求. 在不断地实践中, 人们想到能否利用 $\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt}$ 的不等式估计, 把原本 n 维的问题转换到对纯量函数 $V(t, \mathbf{x}(t))$ 变化的考察? 我们先看一个例子.

例 7.4 考察系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (-3 + 8\sin t)x + (\sin t)y, \\ \dot{y} &= (\cos t)x + (-3 + 8\sin t)y\end{aligned}\quad (7.11)$$

平凡解的稳定性.

解 试取函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} \Big|_{(7.11)} &= (-3 + 8\sin t)x^2 + (\sin t)xy \\ &\quad + (\cos t)xy + (-3 + 8\sin t)y^2,\end{aligned}$$

它是变号的, 套不上基本定理中任何一个的要求. 但我们发现有不等式

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} \Big|_{(7.11)} &\leqslant (-3 + 8\sin t)x^2 + x^2 + y^2 + (-3 + 8\sin t)y^2 \\ &= (-2 + 8\sin t)x^2 + (-2 + 8\sin t)y^2 \\ &= 2(-2 + 8\sin t)V,\end{aligned}$$

从而推出

$$V(t) \leqslant V(t_0)e^{2\int_{t_0}^t (-2+8\sin s)ds}, \quad (7.12)$$

进一步化简, 有

$$V(t) \leqslant V(t_0)e^{4t_0} \cdot e^{16\cos t_0} \cdot e^{-4t} \cdot e^{-16\cos t} \leqslant e^{32+4t_0} V(t_0)e^{-4t}.$$

上式说明, $V(t_0) = \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2)$ 足够小时 $V(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t))$ 可以任意小, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $V(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)) \rightarrow 0$, 从而式 (7.11) 的平凡解是渐近稳定的.

在以上的讨论中, 我们发现不等式 (7.12) 右端函数恰好是纯量微分方程

$$\frac{du}{dt} = 2(-2 + 8\sin t)u \quad (7.13)$$

在初值 $u(t_0) = V(t_0)$ 下的解, 而方程 (7.13) 的平凡解是渐近稳定的.

这个例子提供了一个思路: 通过 V 函数和沿解的导数 $\frac{dV}{dt}$, 将 n 维系统平

凡解稳定性问题,“受控”于一个纯量微分方程平凡解的稳定性问题,从而使问题化简导致解决.这自然使我们联想到常微基础教程中的比较定理了.为此,先介绍一个引理和相关的 Dini 导数概念.

定义 7.2 纯量函数 $f(t): I \rightarrow \mathbf{R}$, 式子

$$D^+ f(t) \equiv \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [f(t+h) - f(t)],$$

$$D_+ f(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [f(t+h) - f(t)]$$

分别定义了 $f(t)$ 的**右上导数**和**右下导数**;还可类似地定义左上导数和左下导数,它们 4 个统称为 $f(t)$ 的 **Dini 导数**.

它有以下性质:

- (i) 当 $f(t)$ 满足局部 Lipschitz 条件时, Dini 导数均存在(有限);
- (ii) $f(t)$ 的导数存在, 等价于 4 个 Dini 导数存在且相等;
- (iii) 当 $f(t)$ 连续时, $D^+ f(t) \geq 0 (\leq 0)$, $\forall t \in I$, 等价于 $f(t)$ 在 I 上单调不减(不增);
- (iv) 当 $f(t)$ 连续时, $D_+ f(t) \geq 0 (\leq 0)$, $\forall t \in I$, 意味着 $f(t)$ 在 I 上单调不减(不增).

引理 7.1 设 $\Phi(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R})$ 满足

$$D^+ \Phi(t) \leq g(t, \Phi(t)) \quad [D_+ \Phi(t) \geq g(t, \Phi(t))], \quad (7.14)$$

其中 $g(t, x) \in C([t_0, +\infty) \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$; 又设 $\bar{\Phi}(t) [\underline{\Phi}(t)]$ 是

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = g(t, u), \\ u(t_0) = \Phi(t_0) \end{cases} \quad (7.15)$$

的右行最大(最小)解, 则有

$$\Phi(t) \leq \bar{\Phi}(t) \quad [\Phi(t) \geq \underline{\Phi}(t)] \quad t \geq t_0.$$

引理的证明可参阅文献[3].

考虑 n 维系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (7.16)$$

其中 $f \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ 保证解的唯一性, $f(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$; 和纯量比较方程

$$\frac{du}{dt} = g(t, u), \quad (7.17)$$

其中 $g \in C[I \times \mathbf{R}^+, \mathbf{R}]$, 当且仅当 $u=0$ 时, $g(t, u)=0$.

定理 7.4(比较原理) 若存在正定的 $V(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+]$, 且关于 $\mathbf{x}$ 满足 Lipschitz 条件, $V(t, \mathbf{0}) = 0$; 它沿系统(7.16)解的右上导数满足

$$D^+ V \Big|_{(7.16)} \leqslant g(t, V). \quad (7.18)$$

则有

(1) 式(7.17)的平凡解稳定(渐近稳定), 蕴涵了系统(7.16)平凡解的稳定(渐近稳定);

(2) 若 V 还具有无穷小上界, 则式(7.17)的平凡解一致稳定(一致渐近稳定), 蕴涵了系统(7.16)平凡解的一致稳定(一致渐近稳定);

(3) 若还存在 $\varphi, \psi \in K\mathbf{R}$, 使

$$\varphi(\|\mathbf{x}\|) \leqslant V(t, \mathbf{x}) \leqslant \psi(\|\mathbf{x}\|),$$

则式(7.17)平凡解全局一致渐近稳定, 蕴涵了系统(7.16)平凡解的全局一致渐近稳定;

(4) 若还存在 $a > 0, b > 0$ 使

$$a\|\mathbf{x}\|^b \leqslant V(t, \mathbf{x}),$$

且 V 有无穷小上界, 则式(7.17)平凡解指数稳定, 蕴涵了系统(7.16)平凡解的指数稳定;

(5) 若定理的条件改为: 存在正定的 $V(t, \mathbf{x}) \in C[I \times D_\sigma, \mathbf{R}^+]$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, 具有无穷小上界; 且有

$$D_+ V \Big|_{(7.16)} \geqslant g(t, V). \quad (7.19)$$

则式(7.17)平凡解不稳定, 蕴涵了系统(7.16)的平凡解不稳定.

证明 (1) V 正定, 故 $\exists \varphi \in K$, 使

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant \varphi(\|\mathbf{x}\|).$$

由式(7.17)平凡解 $u=0$ 稳定, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta^* = \delta^*(t_0, \epsilon)$, 当 $0 < u_0 < \delta^*$ 时, 有

$$u(t; t_0, u_0) < \varphi(\epsilon), t \geqslant t_0.$$

又由 $V(t_0, \mathbf{x})$ 连续, $V(t_0, \mathbf{0}) = 0$, 对此 δ^* , $\exists \delta = \delta(t_0, \delta^*) = \delta(t_0, \epsilon) > 0$, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 有

$$0 < V(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv V_0 < \delta^*.$$

现将满足 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 的系统(7.16)的解 $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 代入 $D^+ V(t)$, 考虑定理条件(7.18)及(7.17)相应的初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = g(t, u), \\ u(t_0) = V_0, \end{cases}$$

其中以 V_0 代替了初值 u_0 , 它俩恰好满足引理 7.1 中的条件(7.14)及(7.15). 故得

$$\varphi(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq u(t; t_0, V_0) < \varphi(\epsilon),$$

从而有 $\|x(t)\| < \epsilon$. 即式(7.16)平凡解稳定.

再若式(7.17)平凡解渐近稳定时, 它首先是稳定的, 我们来导出系统(7.16)的平凡解还是吸引的. 这时上面的讨论均成立, 仍有

$$\varphi(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq u(t; t_0, u_0).$$

式(7.17)的平凡解是吸引的, 即 $\exists$ 适当小的 $\sigma(t_0) > 0$, 当 $0 < u_0 < \sigma(t_0)$ 时, 有 $u(t; t_0, u_0) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ 时. 由上面的不等式知, 这意味着 $\|x_0\| < \sigma^*(t_0)$ 时,

$$x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty \text{ 时}.$$

故系统(7.16)平凡解是渐近稳定的.

(2) 此时 $\exists \varphi, \psi \in K$, 使

$$\varphi(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \psi(\|x\|).$$

由式(7.17)平凡解 $u=0$ 一致稳定, 知 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta^* = \delta^*(\epsilon)$, 当 $u_0 < \delta^*$ 时, 有

$$u(t; t_0, u_0) < \varphi(\epsilon), \quad t \geq t_0.$$

对此 δ^* , 必 $\exists \delta = \delta(\delta^*) = \delta(\epsilon)$, 使当 $\|x_0\| < \delta$ 时,

$$V_0 \equiv V(t_0, x_0) \leq \psi(\|x_0\|) < \delta^*.$$

这意味着, $\|x_0\| < \delta(\epsilon)$ 时, 可取 $u_0 = V_0 < \delta^*$. 其余证明与(1)中一样, 得当 $\|x_0\| < \delta(\epsilon)$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

即系统(7.16)平凡解一致稳定.

当式(7.17)平凡解 $u=0$ 一致渐近稳定时, 显然式(7.16)平凡解是一致稳定的, 只要由式(7.17)的一致吸引导出系统(7.16)的一致吸引.

这时, $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \eta(\epsilon) > 0$ 和 $T(\epsilon) > 0$, 使当 $u_0 < \eta$ 时, 有

$$u(t; t_0, u_0) < \varphi(\epsilon), \quad t \geq t_0 + T(\epsilon).$$

对此 $\eta(\epsilon)$, 一定 $\exists \eta^*(\epsilon)$, 使当 $\|x_0\| < \eta^*$ 时, 有

$$V_0 \equiv V(t_0, x_0) \leq \psi(\|x_0\|) < \eta.$$

这样, 当 $\|x_0\| < \eta^*(\epsilon)$ 时, 取 $u_0 = V_0 < \eta$, 再按(1)中的推理, 得

$$\varphi(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq u(t; t_0, V_0) < \varphi(\epsilon),$$

当 $t \geq t_0 + T(\epsilon)$, 从而

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0 + T(\epsilon),$$

系统(7.16)平凡解一致吸引.

(3) 要证式(7.16)的平凡解全局一致渐近稳定, 需要证明: (i) 它是一致

稳定的; (ii) 式(7.16)的解一致有界; (iii) 它是全局一致吸引的.

(i) 上面已证.

(ii) 由式(7.17)的解一致有界知, $\forall r > 0$ (对应 $\psi(r) > 0$), $\exists \tilde{B}(r) > 0$, 当 $u_0 < \psi(r)$ 时, 有

$$u(t; t_0, u_0) < \tilde{B}.$$

由

$$V_0 \equiv V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \psi(\|\mathbf{x}_0\|)$$

看出, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < r$ 时, 就有 $V_0 < \psi(r)$. 这样, 就可取 $u_0 = V_0 < \psi(r)$, 按(1)中同样推理, 得 $\|\mathbf{x}_0\| < r$ 时,

$$\varphi(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq u(t; t_0, V_0) < \tilde{B}.$$

因 $\varphi \in K\mathbf{R}$, 故不论 $\tilde{B}(r)$ 有多么大, 均有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varphi^{-1}(\tilde{B}(r)) \equiv B(r).$$

这就是式(7.16)的解一致有界.

(iii) 由式(7.17)平凡解 $u=0$ 全局一致吸引知, $\forall \epsilon > 0$ 多么小, $\forall \alpha > 0$ 多么大 [对应 $\varphi(\epsilon) > 0, \psi(\alpha) > 0$], $\forall t_0 \in I$, 都 $\exists T(\epsilon, \alpha) > 0$, 当 $u_0 < \psi(\alpha)$ 时, 有

$$u(t; t_0, u_0) < \varphi(\epsilon), \quad t \geq t_0 + T.$$

又由

$$V_0 \equiv V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \psi(\|\mathbf{x}_0\|)$$

知, 只要 $\|\mathbf{x}_0\| < \alpha$, 就有 $V_0 < \psi(\alpha)$, 这就可取 $u_0 = V_0 < \psi(\alpha)$. 再用(1)中推理得

$$\varphi(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq U(t; t_0, V_0) < \varphi(\epsilon).$$

由此知, $\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0$ (α 不论多么大), $\exists T = T(\epsilon, \alpha) > 0$, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \alpha$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0 + T(\epsilon, \alpha).$$

由于 α 可任意大, 式(7.16)平凡解吸引是全局一致的.

(4) 由式(7.17)平凡解 $u=0$ 指数稳定知, $\exists \alpha > 0, \forall \epsilon > 0, \forall \eta(\epsilon) > 0$, 当 $u_0 < \eta(\epsilon)$ 时, 有

$$u(t; t_0, u_0) \leq \epsilon e^{-a(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

又因 $V(t, \mathbf{x})$ 具有无穷小上界, 故 $\exists \psi \in K$, 使

$$V_0 \equiv V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \psi(\|\mathbf{x}_0\|),$$

同时对上述之 $\eta(\epsilon)$, $\exists \delta = \delta(\epsilon)$, 使

$$\psi(\delta) < \eta.$$

故若取 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 就有

$$V_0 \leq \psi(\|\mathbf{x}_0\|) < \psi(\delta) < \eta.$$

因此可用 V_0 取代 u_0 . 再用定理中条件

$$a \|x\|^b \leq V(t, x),$$

按(1)中的同样推理, 得

$$a \|x(t; t_0, x_0)\|^b \leq V(t, x(t)) \leq u(t; t_0, V_0) \leq \epsilon e^{-a(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

从而得, 当 $\|x_0\| < \delta(\epsilon)$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq (\epsilon/a)^{\frac{1}{b}} e^{-\frac{a}{b}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

即系统(7.16)平凡解指数稳定.

(5) 由式(7.17)的平凡解 $u=0$ 不稳定知, $\exists \epsilon_0 > 0, \forall t_0 \in I$, 不论 $\delta > 0$ 多么小, 必 $\exists u_0 > 0$, 虽 $u_0 < \delta$, 却使解 $u(t; t_0, u_0)$ 在某 $t_1 > t_0$,

$$u(t_1; t_0, u_0) \geq \varphi(\epsilon_0),$$

其中 $\varphi \in K$, 使

$$\varphi(\|x\|) \geq V(t, x).$$

由 $V(t_0, x)$ 的连续性 & $V(t_0, 0) = 0$ 知, $\exists \delta^* > 0$, 当 $\|x_0\| < \delta^* < \delta$ 时, 有

$$V_0 \equiv V(t_0, x_0) < \delta.$$

这时, 可用 V_0 取代 u_0 , 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = g(t, u), \\ u(t_0) = V_0 \end{cases}$$

及将解 $x(t)$ 代入后的条件(7.19), 它们符合引理 7.1 中式(7.15)、式(7.14)括号内的条件. 由引理的结论知

$$V(t, x(t)) \geq u(t; t_0, V_0), \quad t \geq t_0.$$

这样, 结合上面所得, 有 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall t_0 \in I$, 不论 δ^* 多么小, 当 $\|x_0\| < \delta^*$ 时, $\exists t_1 > t_0$ 使

$$\varphi(\|x(t_1; t_0, x_0)\|) \geq V(t_1; x(t_1; t_0, x_0)) \geq u(t_1; t_0, V_0) \geq \varphi(\epsilon_0),$$

即

$$\|x(t_1; t_0, x_0)\| \geq \epsilon_0.$$

故系统(7.16)平凡解不稳定. 证毕.

例 7.5 考察系统

$$\frac{dx}{dt} = (-1 - \frac{3}{2} \cos t)x - xy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = (-2 - \frac{3}{2} \cos t)y - yz^4,$$

$$\frac{dz}{dt} = (-3 - \frac{3}{2} \cos t)z - zx^6$$

零解的稳定性.

解 取函数

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

沿系统求得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \left(-1 - \frac{3}{2}\cos t\right)(x^2 + y^2 + z^2) - y^2 - 2z^2 \\ &\quad - x^2y^2 - y^2z^4 - z^2x^6 \\ &\leq \frac{1}{2}(-2 - 3\cos t)(x^2 + y^2 + z^2) = (-2 - 3\cos t)V. \end{aligned}$$

引入比较方程

$$\frac{dU}{dt} = (-2 - 3\cos t)U.$$

它的解是

$$\begin{aligned} U(t) &= U(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t (-2 - 3\cos \tau) d\tau\right) \\ &= U(t_0) \exp(-2(t - t_0) - 3\sin t + 3\sin t_0), t \geq t_0. \end{aligned}$$

因此

$$|U(t)| \leq |U(t_0)| e^6 e^{-2(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

比较方程的零解 $U=0$ 是渐近稳定的. 故原系统的零解 $x=y=z=0$ 也是渐近稳定的.

注 比较原理的应用, 主要是通过恰当的 V 函数, 将 $\frac{dV(t)}{dt}$ 放大 ($D^+V(t)$) 或缩小 ($D_+V(t)$) 为纯量函数 $g(t, u)$, 由纯量方程 $\frac{du}{dt} = g(t, u)$ 平凡解的稳定性态来导出原 n 维系统平凡解的同类稳定性态. 它最大的好处是常常可以回避 $\frac{dV(t)}{dt}$ 定号、常号等这些困难的判定, 同时它还大大降低了问题的维数, 所以它不失为研究稳定性的理论上完美、应用较广泛的一种好途径. 但具体应用起来也有不少**困难和缺点**:

(1) 要估计出函数 $g(t, x)$, 且判定出 $\frac{du}{dt} = g(t, u)$ 零解的稳定性, 常常也不易做到; (2) 通过放大或缩小后构成的方程 $\frac{du}{dt} = g(t, u)$ 获得的平凡解稳定性的条件, 一般都会强于原系统直接得的稳定性的条件; 特别在 $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$ 下得

到的一类渐近稳定的定理中, 一经放大, 必然得到 $g(t, u) > 0$ ($\frac{du}{dt} = 0$ 只能得稳定的结论), 自然会失掉上式等号下的那部分“信息”.

第三节 系统的有界性和耗散性

Liapunov 直接法的强有力, 不仅体现在判定解的稳定性, 而且也能用以判定解的有界性和耗散性. 本节分别给予介绍.

一、系统的有界性^[5,6]

考虑系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (7.20)$$

其中 $f \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ 保证解的唯一性, 但不必假设 $f(t, \theta) = 0$.

定义 7.3

【7.3.1】我们称系统(7.20)的解有界, 若 $\forall t_0 \in I, \forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \exists B(t_0, x_0) > 0$, 使

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq B, \quad t \geq t_0;$$

【7.3.2】我们称系统(7.20)的解等度有界, 若有 $\forall t_0 \in I, \forall \alpha > 0, \exists B(t_0, \alpha) > 0$, 使 $\forall x_0 \in S_\alpha \equiv \{x \mid \|x\| < \alpha\}$, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq B, \quad t \geq t_0;$$

【7.3.3】我们称系统(7.20)的解一致有界, 若定义[7.3.2]中的 $B = B(\alpha)$ 与 t_0 无关.

符合上述定义的系统(7.20)也分别可称为该系统是有界的、等度有界的、一致有界的.

定理 7.5 系统(7.20)的解有界的充要条件是 $\exists V(t, x): I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 使得

(i) $V(t, x) \geq \varphi(\|x\|)$, $\varphi \in K\mathbf{R}$;

(ii) 对每个解 $x(t; t_0, x_0)$, $V(t, x(t; t_0, x_0))$ 关于 t 不减.

证明 充分性. 在两个条件下, 对每个解有

$$\varphi(\|x(t; t_0, x_0)\|) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0),$$

故得

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \varphi^{-1}(V(t_0, x_0)) \equiv B(t_0, x_0), \quad t \geq t_0.$$

即系统(7.20)有界.

必要性. 设任意解 $x(t; t_0, x_0)$ 有界, 则可作

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}) &\equiv \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t + \tau; t, \mathbf{x})\|^2 \\ &\geq \|\mathbf{x}(t; t, \mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \equiv \varphi(\|\mathbf{x}\|), \end{aligned}$$

即此 $V(t, \mathbf{x})$ 满足定理条件 (i).

又 $\forall t_1, t_2 \in I, t_0 \leq t_1 < t_2$, 由解的唯一性知, $\mathbf{x}(t; t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0)), t \geq t_2$ 是 $\mathbf{x}(t; t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)), t_0 \leq t \leq t_2$ 的延续, 故有

$$\begin{aligned} V(t_1; \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)) &= \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t_1 + \tau; t_1, (\mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)))\|^2 \\ &= \max \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t_2 - t_1} \|\mathbf{x}(t_1 + \tau; t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0))\|^2, \right. \\ &\quad \left. \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t_2 + \tau; t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0))\|^2 \right] \\ &\geq \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t_2 + \tau; t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0))\|^2 \\ &= V(t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0)). \end{aligned}$$

即沿解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 的 V 关于 t 不增, 条件 (ii) 成立, 证毕.

例 7.6 考虑方程

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)f(x) = 0,$$

其中 $p(t) \in C[(0, +\infty), \mathbf{R}], q(t) \in C^1([0, +\infty), \mathbf{R}), f \in C((-\infty, +\infty), \mathbf{R})$. 若满足:

$$(i) 0 < q(t) \leq M;$$

$$(ii) p(t) \geq -\frac{q'(t)}{2q(t)};$$

$$(iii) xf(x) > 0 \quad (x \neq 0), \int_0^{\pm\infty} f(x)dx = +\infty.$$

则方程的解 $x(t)$ 和它的导数 $\dot{x}(t)$ 都是有界的.

证明 所讨论的方程等价于系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -p(t)y - q(t)f(x). \end{aligned}$$

作函数

$$V(t, x, y) = \int_0^x f(x)dx + \frac{y^2}{2p(t)}.$$

由条件 (i) 知

$$V(t, x, y) \geq \int_0^x f(x)dx + \frac{y^2}{2M} \equiv W(x, y).$$

由条件 (iii) 知 W 正定, 且当 $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ 时 $W \rightarrow +\infty$. 故所作的 $V(t, x, y)$ 满足定理 7.5 的条件 (i). 又

$$D^+ V(t, x(t), y(t)) = f(x(t))y(t) + \frac{y(t)}{q(t)}[-p(t)y(t) - q(t)f(x(t))] \\ - \frac{y^2(t)q'(t)}{2q^2(t)} = -\frac{y^2(t)}{q(t)}[p(t) + \frac{q'(t)}{2q(t)}] \leq 0 \quad (\text{由条件(ii)}),$$

它显然蕴含定理 7.5 的条件 (ii). 故由定理 7.5 的结论, 得方程的解 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t) = y(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

定理 7.6 系统(7.20)的解等度有界的充要条件是: $\exists V(t, \mathbf{x}): I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 满足:

- (i) $V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|), \varphi \in KR$;
- (ii) 对每个解 $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), V(t, \mathbf{x}(t))$ 关于 t 不增;
- (iii) $\forall \alpha > 0, \exists B(t, \alpha) > 0$, 使 $\forall \mathbf{x} \in S_\alpha$, 有

$$V(t, \mathbf{x}) \leq B(t, \alpha).$$

证明 充分性. 由条件 (iii) 知, $\forall \alpha > 0, \forall t_0 \in I$ 及 $\forall \mathbf{x}_0 \in S_\alpha, \exists B(t_0, \alpha) > 0$, 使

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq B(t_0, \alpha) \equiv \varphi(B^*(t_0, \alpha)). \quad (7.21)$$

由条件 (i) 和 (ii) 知

$$\varphi(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \varphi(B^*(t_0, \alpha)),$$

故得

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq B^*(t_0, \alpha), t \geq t_0,$$

即系统(7.20)的解等度有界.

必要性. 设解 $\mathbf{x}(t)$ 等度有界, 作

$$V(t, \mathbf{x}) \equiv \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{x}(t + \tau, t, \mathbf{x})\|^2,$$

则对固定的 t , 在任何有界闭集 $\|\mathbf{x}\| \leq \alpha$ 内, $V(t, \mathbf{x})$ 有界, 即条件 (iii) 成立.

再仿照定理 7.5 中必要性的证明, 可推出

$$V(t, \mathbf{x}) \geq \|\mathbf{x}\|^2 \equiv \varphi(\|\mathbf{x}\|) \in KR$$

及 $V(t, \mathbf{x}(t))$ 关于 t 的单调不增性, 即条件 (i) 及 (ii) 均成立. 证毕.

推论 若 $\exists V(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 满足:

- (i) $V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|), \varphi \in KR$;
- (ii) $D^+ V(t, \mathbf{x})|_{(7.20)} \leq 0$.

则系统(7.20)的解等度有界.

证明 由于在 $V(t, \mathbf{x})$ 连续的条件下, 这里的条件 (ii) 可推出定理 7.6 中的条件 (ii), 所以我们只需证明: 满足这里条件 (i) 和 (ii) 的连续的 $V(t, \mathbf{x})$, 能使定理 7.6 充分性证明过程中的式(7.21)成立即可.

首先, $\forall t_0 \in I$ 及 $\forall \mathbf{x}_0 \in S_a$ 取定, 对已知的 $\varphi(r)$, 有

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \varphi(B(t_0, \mathbf{x}_0)).$$

因 $V(t_0, \mathbf{x})$ 对 $\mathbf{x}$ 连续, 故对 $\mathbf{x} \in S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \equiv \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$, ε 足够小, 有

$$V(t_0, \mathbf{x}) \leq \varphi(\bar{B}(t_0, \mathbf{x}_0, \varepsilon)).$$

再对有界闭集 $\bar{S}_a$ 使用有限覆盖定理, 得 $\forall \alpha > 0$, $\forall t_0 \in I$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \bar{S}_a$, $\exists B^*(t_0, \alpha)$, 使

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \varphi(B^*(t_0, \alpha)),$$

即式(7.21)成立.

定理 7.7 系统(7.20)的解一致有界的充要条件是, 存在 $V(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 满足:

$$(i) \varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|), \varphi_1, \varphi_2 \in K\mathbf{R};$$

$$(ii) D^+V(t, \mathbf{x})|_{(7.20)} \leq 0.$$

证明 充分性. $\forall \alpha > 0$ 取定, 选取 $B = B(\alpha)$, 使 $\varphi_2(\alpha) < \varphi_1(B)$. $\forall \mathbf{x}_0 \in S_a$, 由条件(i), (ii)知

$$\begin{aligned} \varphi(\|\mathbf{x}(t)\|) &\leq V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) \\ &\leq \varphi_2(\|\mathbf{x}_0\|) \leq \varphi_2(\alpha) < \varphi_1(B). \end{aligned}$$

故有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < B, \quad t \geq t_0,$$

这个 $B = B(\alpha)$ 与 $t_0, \mathbf{x}_0$ 无关, 即式(7.20)一致有界.

必要性. 作函数

$$V(t, \mathbf{x}) \equiv (1 + e^{-t}) \inf_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})\|^2,$$

它是连续的. 设 $t_0 \leq t_1 < t_2$, 沿任意解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, 有

$$\begin{aligned} V(t_2) &\equiv V(t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0)) \\ &= (1 + e^{-t_2}) \inf_{t_0 \leq \tau \leq t_2} \|\mathbf{x}(\tau; t_2, \mathbf{x}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0))\|^2 \\ &\leq (1 + e^{-t_1}) \inf_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \|\mathbf{x}(\tau; t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0))\|^2 \\ &\equiv V(t_1), \end{aligned}$$

即 $V(t, \mathbf{x})$ 沿解关于 t 单调不减. 在 $V(t, \mathbf{x})$ 连续的情况下, 就有定理的条件(ii)成立.

另外, 对所作的 $V(t, \mathbf{x})$ 显然有

$$V(t, \mathbf{x}) \leq 2 \|\mathbf{x}(t; t, \mathbf{x})\|^2 = 2 \|\mathbf{x}\|^2 \equiv \varphi_2(\|\mathbf{x}\|),$$

而 $V(t, \mathbf{x})$ 是无穷大正定的, 故存在 φ_1 使

$$V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi_1(\|\mathbf{x}\|),$$

这里的 $\varphi_1, \varphi_2 \in KR$. 定理的条件均成立. 证毕.

注 1 定理 7.5, 定理 7.6, 定理 7.7 中的 $V(t, \mathbf{x})$ 的定义域都可改为 $I \times O_K$, 其中 $O_K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \geq K\}$, K 可以是充分大的正数.

注 2 定理 7.6 中条件 (iii) 的 $B = B(\alpha)$ 若与 t 无关, 则该定理是式 (7.20) 一致有界的充要条件.

例 7.7 考虑方程

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = p(t), \quad t \geq 0,$$

设 (i) $f(x, y), g(x)$ 连续, 当 $x^2 + y^2 \gg 1$ 时 $f(x, y) > 0$;

(ii) $p(t)$ 在 I 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} |p(t)| dt < \infty$;

(iii) $xg(x) > 0 (x \neq 0), G(x) \equiv \int_0^x g(t) dt$, 有 $G(\pm\infty) = +\infty$.

则方程的每一个解满足

$$|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2 < M(\alpha) = \text{Const}, \quad \forall x_0 \in S_a.$$

证明 方程等价于系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x, y)y - g(x) + p(t). \quad (7.22)$$

作函数

$$V(t, x, y) \equiv \sqrt{y^2 + 2G(x)} - \int_0^t |p(s)| ds,$$

由条件知, 当 $x^2 + y^2 \gg 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_1(\sqrt{y^2 + 2G(x)}) &\equiv \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + 2G(x)} \leq V(t; x, y) \leq \sqrt{y^2 + 2G(x)} \\ &\equiv \varphi_2(\sqrt{y^2 + 2G(x)}), \end{aligned}$$

($\sqrt{y^2 + 2G(x)}$ 在所给条件下, 具有范数的性质) 这样的 $\varphi_1, \varphi_2 \in KR$. 又

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.22)} = -\frac{f(x, y)y^2}{\sqrt{y^2 + 2G(x)}} - |p(t)| + \frac{p(t)y}{\sqrt{y^2 + 2G(x)}},$$

由条件知, 当 $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ 时

$$-|p(t)| + \frac{p(t)y}{\sqrt{y^2 + 2G(x)}} \leq 0,$$

当 $x^2 + y^2 \gg 1$ 时, $f(x, y) > 0$. 从而使当 $x^2 + y^2 \gg 1$ 时

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.22)} \leq 0.$$

因此, 按注 1 的说明, 定理 7.7 的条件成立, 方程的任何解 $x(t; t_0, x_0), x_0 \in S_a$ 满足

$$|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)| < M(\alpha),$$

其中 $M(\alpha)$ 是仅与 α 有关的常数.

二、系统的耗散性^[5,7]

定义 7.4

[7.4.1] 若存在常数 $B > 0$, 使系统 (7.20) 的每个解 $x(t; t_0, x_0)$ 都 $\exists T(t_0, x_0) > 0$, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T(t_0, x_0).$$

则称式 (7.20) 为耗散系统, 也称式 (7.20) 的解对界限 B 最终 (毕竟) 有界.

[7.4.2] 若存在常数 $B > 0, \forall \alpha > 0$, 每个 $x_0 \in S_\alpha \equiv \{x | \|x\| \leq \alpha\}$, 都 $\exists T(t_0, \alpha) > 0$, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T(t_0, \alpha).$$

则称式 (7.20) 为等度耗散系统, 也称式 (7.20) 的解对界限 B 最终 (毕竟) 等度有界.

[7.4.3] 若定义 [7.4.2] 中存在的 $T(\alpha)$ 与 t_0 无关时, 称式 (7.20) 为一致耗散系统, 也称式 (7.20) 的解对界限 B 最终 (毕竟) 一致有界.

定理 7.8 存在 $B > 0$ 和 $V(t, x) \in C^1[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 满足

(i) $\varphi(\|x\|) \leq V(t, x)$ 对 $\|x\| \geq B$ 成立, $\varphi \in \mathbf{KR}$;

(ii) $\left. \frac{dV(t, x)}{dt} \right|_{(7.20)} \leq -cV(t, x), \quad c = \text{const} > 0.$

则系统 (7.20) 的解对界限 B 最终等度有界.

证明 因 $V(t_0, x)$ 连续, 故对 $\forall x_0 \in S_\alpha \equiv \{x | \|x\| \leq \alpha\}, \exists M(t_0, \alpha) > 0$ 使

$$V(t_0, x_0) < M(t_0, \alpha).$$

取 $T(t_0, \alpha) \equiv \frac{1}{c} \ln \frac{M(t_0, \alpha)}{\varphi(B)}$, 我们只要证明, 当 $t \geq t_0 + T(t_0, \alpha)$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < B, \quad x_0 \in S_\alpha.$$

用反证法. 设 $\exists t_1 > t_0 + T(t_0, \alpha)$, 使

$$\|x(t_1; t_0, x_0)\| \geq B,$$

我们来导出矛盾. 由条件 (ii) 可推出

$$V(t_1, x(t_1; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) e^{-c(t_1 - t_0)},$$

因此由 (i) 得

$$\begin{aligned} \varphi(B) &\leq \varphi(\|x(t; t_0, x_0)\|) \leq V(t_1; x(t_1; t_0, x_0)) \\ &\leq V(t_0, x_0) e^{-c(t_1 - t_0)} < M(t_0, \alpha) e^{-cT(t_0, \alpha)} \end{aligned}$$

$$= M(t_0, \alpha) e^{-\ln \frac{M(t_0, \alpha)}{\varphi(B)}} = \varphi(B),$$

这就导出矛盾 $\varphi(B) < \varphi(B)$. 证毕.

定理 7.9 设存在 $R > 0$ 和存在 $V(t, \mathbf{x}) \in C^1[I \times O_R, R]$, $O_R \equiv \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \geq R\}$, 满足

$$(i) \varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|), \varphi_1, \varphi_2 \in KR;$$

$$(ii) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.20)} \leq -\psi(\|\mathbf{x}\|), \psi \in K.$$

则系统(7.20)的解对界限 $B = \varphi_1^{-1}[\varphi_2(R)]$ 最终一致有界.

证明 $\forall \alpha > 0$ 给定, 选取 β , 使 $\varphi_1(\beta) > \varphi_2(\alpha)$, 则对 $\forall \mathbf{x}_0 \in S_\alpha = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq \alpha\}$, 有

$$\begin{aligned} \varphi_1(\|\mathbf{x}(t)\|) &\leq V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}_0\|) \\ &\leq \varphi_2(\alpha) < \varphi_1(\beta), \end{aligned}$$

所以当 $\mathbf{x}_0 \in S_\alpha$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \beta, \quad t \geq t_0.$$

同理, 对所设的 R , 当 $\mathbf{x}_0 \in S_R$ 时, 也有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < B, \quad t \geq t_0, \quad (7.23)$$

其中 B 满足 $\varphi_1(B) > \varphi_2(R)$.

对上述 B , 若任给定 $\alpha^* > R$, 取

$$T = \frac{\varphi_2(\alpha^*) - \varphi_1(R)}{\psi(R)} = T(\alpha^*),$$

则当 $\mathbf{x}_0 \in S_{\alpha^*}$ 时, 必 $\exists t_1 \in [t_0, t_0 + T]$, 使

$$\|\mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq R. \quad (7.24)$$

若不然, 则对 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| > R, \quad (7.25)$$

则由条件(ii)得

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.20)} \leq -\psi(R),$$

则有

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) - \psi(R)(t - t_0).$$

当 $t = t_0 + T$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_1(\|\mathbf{x}(t)\|) &\leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi_2(\alpha^*) + \varphi_1(R) \\ &\leq \varphi_2(\alpha^*) - \varphi_2(\alpha^*) + \varphi_1(R) = \varphi_1(R), \end{aligned}$$

即

$$\|x(t_0 + T; t_0, x_0)\| \leq R,$$

与式(7.25)矛盾. 因此式(7.24)成立. 故由式(7.23)知, 当 $x_0 \in S_{\alpha^*}$ 时, $\exists T =$

$$\frac{\varphi_2(\alpha^*) - \varphi_1(R)}{\psi(R)} = T(\alpha^*), \text{ 使}$$

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T(\alpha^*).$$

证毕.

例 7.8 考察系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - x^3 - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - x^2y - y^3. \end{cases} \quad (7.26)$$

取

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.26)} &= x^2 + y^2 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 \\ &= (x^2 + y^2)[1 - (x^2 + y^2)] \\ &< 0 \quad (x^2 + y^2 > 1). \end{aligned}$$

从而由定理 7.9 知系统(7.26)是一耗散系统.

例 7.9 验证

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + \frac{1}{2}y - x(x^2 + y^2 - \frac{2t}{1+t^2}\sin t) \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2 - \frac{2t}{1+t^2}\sin t) \end{cases} \quad (7.27)$$

为一耗散系统.

证明 取 $V = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.27)} &= 2x^2 + y^2 - (2x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \frac{2t}{1+t^2}\sin t) \\ &\leq -(2x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1 - \frac{2t}{1+t^2}\sin t) \\ &\leq -(2x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2) < 0 \quad (x^2 + y^2 > 2). \end{aligned}$$

故系统(7.27)是一耗散系统.

第四节 稳定性概念的拓广

Liapunov 稳定性理论建立以后,在科技各领域得到了广泛的应用,但随着科技的不断发展,人们感到 Liapunov 定义的某些方面不能完全适合应用的多种多样性的要求,例如 Liapunov 稳定性只考虑了初始干扰对解的影响是不够的;定义中初始干扰很小,就能保证解的距离永远任意小,其中的“永远”,“任意”也常常不是实际问题的要求等.这就促使实际应用学家和数学家一起建立了一些新的稳定性概念和判据,本节我们选讲其中的一部分.

一、经常干扰下的稳定性与有界性

对一系统来说,干扰分为两类,可归结为初始值扰动和经常作用在系统上的扰动,Liapunov 稳定性仅考虑了前者对解的影响.而后者也常分为两种,一种来自外部作用,一种是系统内部的某些不确定性因素的体现,它们既是时变的又常常与系统的状态有关,人们常以一个摄动项 $g(t, x)$ 为代表,加在系统的右端上.

考虑未受扰动的系统为

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad (7.28)$$

而受经常干扰 $g(t, x)$ 作用的实际系统表为

$$\dot{y} = f(t, y) + g(t, y), \quad (7.29)$$

$f, g \in C[G_H, \mathbf{R}^n]$ 且保证解的唯一性, $G_H \equiv \{(t, x) \in I \times \mathbf{R}^n \mid t \in I, x \in D\}$.

定义 7.5 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1(\epsilon) > 0, \delta_2(\epsilon) > 0$, 当 $\|y_0\| < \delta_1$, 及在 $\|y\| \leq \epsilon$ 上 $\|g(t, y)\| < \delta_2$ 时, 系统(7.29)的解有估计式

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

则称系统(7.28)的平凡解是经常干扰下稳定的. 也称完全稳定的, 工程技术中也称鲁棒(Robust)稳定.

定理 7.10 若存在函数 $V(t, x) \in C[G_H, \mathbf{R}]$ 满足:

- (i) $\varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|), \varphi_1, \varphi_2 \in K$;
- (ii) $D^+V(t, x)|_{(7.28)} \leq -cV(t, x), \quad c = \text{const} > 0$;
- (iii) $|V(t, x) - V(t, y)| \leq L\|x - y\|$.

则系统(7.28)的平凡解是经常干扰下稳定的.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 选取 $\delta_1(\epsilon) < \epsilon$ 使 $\varphi_2(\delta_1) < \varphi_1(\epsilon)$ 再选取 $\delta_2(\epsilon) > 0$ 充分小, 使

$$c\varphi_1(\delta_1) - L\delta_2 > 0 \quad \text{及} \quad \delta_2 < \delta_1.$$

下面证, 当 $\|\mathbf{y}_0\| < \delta_1$ 及在 $\|\mathbf{y}\| \leq \varepsilon$ 上 $\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y})\| < \delta_2$ 时, 有

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0. \quad (7.30)$$

反证法. 若不然, 则 $\exists t_1, t_2: t_0 < t_1 < t_2$, 使得

$$\|\mathbf{y}(t_1; t_0, \mathbf{y}_0)\| = \delta_1, \quad \|\mathbf{y}(t_2; t_0, \mathbf{y}_0)\| = \varepsilon,$$

$$\delta_1 < \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon, \quad t \in (t_1, t_2).$$

注意到 Dini 上右导数的定义, 在条件(III)下有

$$\begin{aligned} D^+ V(t, \mathbf{y}) \big|_{(7.29)} &= \overline{\lim_{h \rightarrow 0^+}} \frac{1}{h} [V(t+h, \mathbf{y} + h(\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}))) - V(t, \mathbf{y})] \\ &= \overline{\lim_{h \rightarrow 0^+}} \frac{1}{h} [V(t+h, \mathbf{y} + h\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + h\mathbf{g}(t, \mathbf{y})) - V(t, \mathbf{y} \\ &\quad + h\mathbf{g}(t, \mathbf{y}))] + \overline{\lim_{h \rightarrow 0^+}} \frac{1}{h} [V(t, \mathbf{y} + h\mathbf{g}(t, \mathbf{y})) - V(t, \mathbf{y})] \\ &\leq D^+ V(t, \mathbf{y}(t)) \big|_{(7.28)} + L \|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t))\|, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了条件(III), $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$.

这样, 利用条件(i)和(ii), 在 $t \in [t_1, t_2]$ 时, 有

$$\begin{aligned} D^+ V(t, \mathbf{y}) \big|_{(7.29)} &\leq -cV(t, \mathbf{y}(t)) + L \|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t))\| \\ &\leq -c\varphi_1(\delta_1) + L\delta_2 < 0. \end{aligned}$$

于是有

$$\varphi_1(\varepsilon) \leq V(t_2, \mathbf{y}(t_2)) \leq V(t_1, \mathbf{y}(t_1)) \leq \varphi_2(\delta_1) < \varphi_1(\varepsilon).$$

这导出了矛盾. 说明论断(7.30)是正确的. 证毕.

推论 1 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C^1[G_H, \mathbf{R}]$, 及 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in K$ 满足:

$$(i) \quad \varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(ii) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.28)} \leq -\varphi_3(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(iii) \quad \left\| \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq M.$$

则系统(7.28)平凡解是经常干扰下稳定的.

推论 2 若系统(7.28)中 $\mathbf{f} \in C^1(G_H, \mathbf{R})$, 且偏导数有界; 又它的平凡解是一致渐近稳定的. 则它的平凡解也是经常干扰下稳定的.

证明 在所设的条件下, 可以证明(Massera^[8])第五章中的定理 5.7 是可逆的, 即在式(7.28)平凡解一致渐近稳定的情况下, 可构造出函数 $V(t, \mathbf{x})$ 满足推论 1 的所有条件, 从而平凡解也是经常干扰下稳定的.

定义 7.6 若 $\forall \alpha > 0, \exists \beta(\alpha) > 0, \gamma(\alpha) > 0$, 使在 $\|\mathbf{y}\| \in (\alpha, \beta)$ 内,

$\|g(t, y)\| < \gamma$ 时, $\forall y_0 \in S_\alpha$, 系统(7.29)的解满足

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < \beta, \quad t \geq t_0.$$

则称系统(7.28)的解是经常干扰下一致有界的. 也称完全有界的.

定理 7.11 若存在函数 $V(t, x) \in C[I \times O_K, \mathbf{R}]$, $O_K \equiv \{x \mid \|x\| \geq K\}$, 满足:

- (i) $\varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in KR$,
- (ii) $D^+V(t, x)|_{(7.28)} \leq -C(\|x\|)$, $C(\cdot)$ 连续, 正定;
- (iii) $|V(t, x) - V(t, x')| \leq L\|x - x'\|$.

则系统(7.28)的解是经常干扰下一致有界的.

证明 $\forall \alpha > 0$, 选取 $\beta(\alpha) > \alpha$ 使 $\varphi_1(\beta) > \varphi_2(\alpha)$. 由条件(ii), 对于 $\|x\| \in [\alpha, \beta(\alpha)]$ 上的 x , 有 $\lambda(\alpha) > 0$, 使

$$D^+V(t, x)|_{(7.28)} \leq -\lambda.$$

这样, 按上一定理证明中推理, 在 $\alpha \leq \|x\| \leq \beta$ 中有

$$\begin{aligned} D^+V(t, y)|_{(7.29)} &\leq D^+V(t, y)|_{(7.28)} + L\|g(t, y)\| \\ &\leq -\lambda + L\|g(t, y)\|. \end{aligned}$$

因此, 我们再选择 $\gamma(\alpha) > 0$, 使

$$\gamma \leq \frac{\lambda}{L},$$

则对于 $\alpha \leq \|y\| \leq \beta$ 中的 $\|g(t, y)\| < \gamma$ 有

$$D^+V(t, y)|_{(7.29)} \leq 0.$$

从而

$$\varphi_1(\|y(t)\|) \leq V(t, y(t)) \leq V(t_0, y_0) \leq \varphi_2(\|y_0\|) \leq \varphi_2(\alpha) < \varphi_1(\beta).$$

归纳以上得, $\forall y_0 \in S_\alpha$, 对 $\|y\| \in (\alpha, \beta)$ 的 $\|g(t, y)\| < \gamma$ 时, 有

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < \beta, \quad t \geq t_0.$$

证毕.

二、实用稳定性

对一个设计的(理想)运动状态 $\varphi(t)$, Liapunov 稳定性是这样提的: 对任意给定的 ε (可充分小), 存在更小的 $\delta(\varepsilon)$, 只要初始时 $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$, 就永远有 $\|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$. 但现实科技中都是存在“容许误差”和“安全系数”的, 并不需要这种数学化了的“任意小”, 因此产生了实用稳定性的概念. 下面的叙述主要来自于 Lasalle & Lefschetz^[2].

我们仍然考虑上一段中的系统(7.28)和(7.29).

定义 7.7 给定正数 δ 和 D 中两个 n 维有界闭集合 Q_0, Q : 原点 $O \in Q_0 \subset Q$. 若 $\forall x_0 \in Q_0, \forall t_0 \geq 0, \forall g(t, y) \in \{g(t, y) \mid \|g(t, y)\| \leq \delta\}$, 系统 (7.29) 的解

$$y(t; t_0, x_0) \subset Q, \quad t \geq t_0.$$

则称为系统 (7.28) 的平凡解关于 δ, Q, Q_0 为实用稳定的.

这种稳定性概念是与 δ, Q, Q_0 有关的. δ 的大小限定了对系统可能经受干扰的强度; Q 的大小规定了真实运动与设计运动之间容许误差; Q_0 的大小表明初始状态可容许的控制程度. 这些都是事先给定的.

实用稳定性与 Liapunov 意义下的稳定性, 以及经常干扰下的鲁棒稳定性是互不包含的, 但仍然可用 Liapunov 函数来研究.

定理 7.12 若存在函数 $V(t, y) \in C[G_H, \mathbf{R}]$, 使 $\forall y \in Q_0^c$ 有

$$D^+ V(t, y) \big|_{(7.29)} \leq 0,$$

且对 $\forall y_1 \in Q_0, \forall y_2 \in Q^c$ 及 $0 \leq t_1 \leq t_2$, 有

$$V(t_1, y_1) < V(t_2, y_2),$$

其中 Q_0^c, Q^c 分别表 Q_0, Q 的余集. 则式 (7.29) 从 Q_0 内出发的解, 在 $t \geq t_0$ 时不越出 Q , 即系统 (7.28) 的平凡解关于 δ, Q, Q_0 是实用稳定的.

证明 设 $\forall x_0 \in Q_0$, 考察式 (7.29) 的解 $y(t; t_0, x_0)$. 若在某时刻 $T > t_0$, 解 $y(T; t_0, x_0) \in Q^c$, 则必 $\exists t_1 \in (t_0, T)$, 使

$$y(t_1) \in Q_0, \quad y(t) \in Q_0^c, \quad t \in (t_1, T].$$

故应有

$$V(t_1, y(t_1; t_0, x_0)) < V(T, y(T; t_0, x_0)).$$

但另一方面, 对 $t \in (t_1, T]$, 由条件

$$D^+ V(t, y) \big|_{(7.29)} \leq 0$$

得

$$V(t, y(t; t_0, x_0)) \geq V(T, y(T; t_0, x_0)),$$

于是有

$$V(t_1, y(t_1; t_0, x_0)) = \lim_{t \rightarrow t_1} V(t, y(t)) > V(T, y(T)).$$

这就导出矛盾, 故 $y(t; t_0, x_0) \in Q, t \geq t_0$. 证毕.

定义 7.8 若系统 (7.28) 的平凡解是关于 δ, Q_0, Q 实用稳定的, 且对每个 $g(t, y): \|g(t, y)\| \leq \delta$, 系统 (7.29) 的任何解 $y(t; t_0, x_0)$ 最终均在 Q 内, 即当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y(t; t_0, x_0)$ 必进入 Q 内. 则称系统 (7.28) 的平凡解是强实用稳定的.

定理 7.13 若存在函数 $V(t, y) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 当 $\|y\| \rightarrow +\infty$ 时 $V(t,$

$y) \rightarrow +\infty$, 并且

(i) $\forall y \in Q_0$ 和满足 $\|g(t, y)\| \leq \delta$ 的任何 $g(t, y)$ 有

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.29)} \leq -\varepsilon < 0,$$

(ii) $\forall y_1 \in Q_0, \forall y_2 \in Q^c$ 及 $0 \leq t_1 \leq t_2$, 有

$$V(t_1, y_1) < V(t_2, y_2).$$

则系统(7.28)的平凡解关于 δ, Q_0, Q 是最强实用稳定的.

证明 这里的条件保证了定理 7.12 条件均成立, 故式(7.28)平凡解关于 δ, Q_0, Q 是实用稳定的.

现只要证: $\forall x_0 \in Q_0$ 系统(7.29)的解 $y(t; t_0, x_0)$ 必存在 $T(t_0, x_0)$, 使当 $t \geq t_0 + T$ 时有

$$y(t; t_0, x_0) \in Q.$$

若不然, 则必 $\exists t_1 \gg 1$, 使

$$y(t_1; t_0, x_0) \in Q^c, \quad (7.31)$$

同时有

$$y(t; t_0, x_0) \in Q_0^c, \quad t \geq t_0.$$

由后者, 按条件(i)得

$$V(t, y(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - \varepsilon(t - t_0) \rightarrow -\infty,$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时. 另一方面, 取 $\bar{x}_0 \in Q_0$, 注意到式(7.31), 由条件(ii)得

$$\text{const} = V(t_0, \bar{x}_0) < V(t_1, y(t_1)),$$

$t_1 \gg 1$, 这是个矛盾. 证毕.

注 按定义 7.8, 在考虑系统(7.28)平凡解强实用稳定性时, 要把系统(7.28)及(7.29)右端函数的定义域和闭集 Q_0, Q 的定义域作适当的扩大, 即 $f, g \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n], Q_0, Q$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集, $O \in Q_0 \subset Q$.

三、非常稳定性^[7]

Liapunov 稳定性是考虑某个特定(已知)解 $\varphi(t)$ 的稳定性态, 但实际上这个 $\varphi(t)$ 常常是无法知道的, 故人们提出了考虑一种更强的, 所有解的稳定性. 它虽然要求的条件较强, 但有实用价值, 特别地, 这类稳定性的研究对考察系统周期解、概周期解的存在性很有用.

考虑系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (7.32)$$

$f \in C[I \times D_H, \mathbf{R}^n]$, $D_H \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq H\}$, 且保证解的唯一性.

定义 7.9

[7.9.1] 若 $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x_0 \in D_h, \forall y_0 \in D_h (h \leq H)$, 当 $\|x_0 - y_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0) - y(t; t_0, y_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

则称系统(7.32)关于 h 是一致非常稳定的.

[7.9.2] 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_0 > 0$ 和 $T(\epsilon) > 0$, 使 $\forall x_0 \in D_h, \forall y_0 \in D_h$, 当 $\|x_0 - y_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0) - y(t; t_0, y_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0 + T.$$

则称系统(7.32)关于 h 是一致非常吸引的.

[7.9.3] 若系统(7.32)关于 h 一致非常稳定, 又一致非常吸引, 则称系统(7.32)关于 h 是一致非常渐近稳定的.

定理 7.14 若存在函数 $V(t, x, y) \in C^1[I \times D_H \times D_H, \mathbf{R}]$ 满足:

$$(i) \varphi_1(\|x - y\|) \leq V(t, x, y) \leq \varphi_2(\|x - y\|); \varphi_1, \varphi_2 \in K;$$

$$(ii) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.32)} \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial y} f(t, y) \leq 0$$

$$(\leq -\varphi_3(\|x - y\|), \varphi_3 \in K).$$

则系统(7.32)关于 h 是一致非常稳定的(一致非常渐近稳定的).

证明 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta(\epsilon) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\epsilon/2))$, 于是有

$$\begin{aligned} \varphi_1(\|x(t) - y(t)\|) &\leq V(t, x(t), y(t)) \leq V(t_0, x_0, y_0) \\ &\leq \varphi_2(\|x_0 - y_0\|) \leq \varphi_2(\delta) = \varphi_1(\epsilon/2), \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

故有

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \epsilon/2 < \epsilon, \quad t \geq t_0,$$

即系统(7.32)关于 h 是一致非常稳定的.

仿照第五章中定理 5.7 关于平凡解一致渐近稳定的证明, 在括号中的条件下, 可找到 $T(\epsilon) > 0$, 使

$$\|x(t; t_0, x_0) - y(t; t_0, y_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0 + T.$$

证毕.

定义 7.10 设 $H = +\infty$, 若 $\forall \alpha > 0, \exists B(\alpha) > 0$, 使当 $\|x_0 - y_0\| < \alpha$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0) - y(t; t_0, y_0)\| < B(\alpha), \quad t \geq t_0.$$

则称系统(7.32)是一致距离有界的.

若 $\exists B > 0, \forall \alpha > 0, \exists T(\alpha) > 0$, 使当 $\|x_0 - y_0\| < \alpha$ 时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0) - y(t; t_0, y_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T.$$

则称系统(7.32)对 B 是最终一致距离有界的.

定理 7.15 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^1[I \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 在 $t \in I$ 和 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq B$ 上满足:

$$(i) \varphi_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \varphi_1, \varphi_2 \in KR;$$

$$(ii) \frac{dV}{dt}|_{(7.32)} \leq 0 \quad (\leq -\varphi_3(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \varphi_3 \in KR).$$

则系统(7.32)是一致距离有界的(对 B 是最终一致距离有界的).

证明方法基本同于本章第三节中定理 7.7 和定理 7.9.

例 7.10 考虑方程

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = e(t, \dot{x}),$$

其中 $f(y)$ 连续, 不减, 且 $e(t, y)$ 连续, 满足

$$(y - v)[e(t, y) - e(t, v) + f(v) - f(y)] \leq 0,$$

则方程(的解)是一致距离有界的.

解 令 $\dot{x} = y$, 则方程化为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - f(y) + e(t, y);$$

并考虑同样形式的系统

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -u - f(v) + e(t, v).$$

作函数

$$V(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

则有

$$\frac{dV}{dt} = -2(y - v)[f(y) - f(v)] + 2(y - v)[e(t, y) - e(t, v)],$$

由给出的条件知上式右端 ≤ 0 , 按定理 7.15 知方程的解是一致距离有界的.

四、部分变元稳定性

n 维系统关于部分变元(部分分量)的稳定性概念很早就被提出过(Liapunov, Mariklin), 但首次较系统地研究并给出严格证明的是在 1972 年, 苏联著名的力学家 Rumentsev(鲁勉采夫)和 Oziraner(沃习拉聂尔). 这里仅作简要介绍.

考虑 n 维系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad (7.33)$$

$\mathbf{f} \in C[G_H, \mathbf{R}^n]$, 且保证解的唯一性.

我们引入下列记号:

$$\mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T, \mathbf{z} = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T, \mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})^T;$$

$$\|\mathbf{y}\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \|\mathbf{z}\| = \left(\sum_{i=m+1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 7.11 若 $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0, \forall \mathbf{x}_0 \in S_\delta \equiv \{\mathbf{x} \in D_H \mid \|\mathbf{x}\| < \delta\}$, 有

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0,$$

则称系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是稳定的; 否则, 称为关于 $\mathbf{y}$ 是不稳定的.

若能找到 $\delta(\epsilon)$ 与 t_0 无关, 使上面的叙述成立, 则称系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是一致稳定的.

定义 7.12 若 $\forall t_0 \in I, \exists \sigma(t_0) > 0, \forall \epsilon > 0, \forall \mathbf{x}_0 \in S_\sigma, \exists T(t_0, \epsilon, \mathbf{x}_0) > 0$, 当 $t \geq t_0 + T$ 时有

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon,$$

则称系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是吸引的;

若上述的 σ 与 t_0 无关, $T(\epsilon)$ 与 $t_0, \mathbf{x}_0$ 无关, 则称系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是一致吸引的.

定义 7.13 若系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是稳定且吸引的, 则称为关于 $\mathbf{y}$ 是渐近稳定的; 若系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是一致稳定且一致吸引的, 则称为关于 $\mathbf{y}$ 是一致渐近稳定的.

类似的, 也有关于 $\mathbf{y}$ 的等度渐近稳定, 全局渐近稳定, 指数稳定, 关于 $\mathbf{y}$ 的有界性, 一致有界性, 耗散性, 一致耗散性等定义.

定义 7.14 称函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n]$ 关于 $\mathbf{y}$ 正定[负定], 若存在 $\varphi \in K$, 使

$$V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{y}\|), \quad [V(t, \mathbf{x}) \leq -\varphi(\|\mathbf{y}\|)]$$

定理 7.16 (1) 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C[G_H, R]$, 满足:

$$(i) V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{y}\|), \varphi \in K;$$

$$(ii) D^+V(t, \mathbf{x})|_{(7.33)} \leq 0.$$

则系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是稳定的.

(2) 若除了上面两条件外, $V(t, \mathbf{x})$ 还具有无穷小上界, 即

$$(iii) V(t, \mathbf{x}) \leq \psi(\|\mathbf{x}\|), \psi \in K,$$

则系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是一致稳定的.

证明 (1) $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in I$, 由 $V(t_0, \mathbf{x})$ 对 $\mathbf{x}$ 的连续性及 $V(t_0, \mathbf{0}) = 0$, 必 $\exists \delta(\epsilon, t_0), \forall \mathbf{x}_0 \in S_\delta$, 有 $V(t_0, \mathbf{x}_0) < \varphi(\epsilon)$.

考虑系统(7.33)的解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in S_\delta$, 由条件 (i) 及 (ii), 得

$$\varphi(\|y(t; t_0, x_0)\|) \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < \varphi(\varepsilon).$$

由 $\varphi \in K$, 故有

$$\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

(2) 由条件 (iii), $\forall \varepsilon > 0$, 可取 $\delta(\varepsilon) = \psi^{-1}(\varphi(\varepsilon))$, 它与 t_0 无关. 当 $x_0 \in S_\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi(\|y(t; t_0, x_0)\|) &\leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) \\ &\leq \psi(\|x_0\|) < \psi(\psi^{-1}(\varphi(\varepsilon))) = \varphi(\varepsilon), \end{aligned}$$

故得

$$\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

由于 $\delta(\varepsilon)$ 与 t_0 无关, 所以平凡解关于 y 是一致稳定的. 证毕.

定理 7.17 若存在函数 $V(t, x) \in C^1[G^H, \mathbf{R}]$, 满足:

$$(i) \quad \varphi_1(\|y\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2\left(\left(\sum_{i=1}^l x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$(ii) \quad \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.33)} \leq -\psi\left(\left(\sum_{i=1}^l x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

其中 $m \leq l \leq n$, $\varphi_1, \varphi_2, \psi \in K$. 则系统 (7.33) 的平凡解关于 y 是渐近稳定的.

证明 这里的条件蕴涵了定理 7.16 的条件 (i), (ii), 所以系统 (7.33) 的平凡解是关于 y 稳定的, 我们只须证零解关于 y 吸引的, 即要证 $\exists \sigma(t_0) > 0$, 当 $\|x_0\| < \sigma$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t; t_0, x_0)) = 0. \quad (7.34)$$

这样, 就可由

$$\varphi_1(\|y(t)\|) \leq V(t, x(t; t_0, x_0))$$

推出

$$\|y(t; t_0, x_0)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

从而定理得证.

现用反证法. 设式 (7.32) 不成立, 则 $\exists t_0 \in I$, $\forall \sigma(t_0) > 0$, 总有某个 $\bar{x}_0$, 虽 $\|\bar{x}_0\| < \sigma$, 却使

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t; t_0, \bar{x}_0)) \neq 0.$$

由条件 (ii) 知 $V(t, x(t; t_0, \bar{x}_0))$ 不增, 故有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t; t_0, \bar{x}_0)) = V_\infty > 0,$$

且

$$V(t, x(t; t_0, \bar{x}_0)) \geq V_\infty > 0, \quad t \geq t_0.$$

再由条件(i)和(ii)得

$$\left(\sum_{i=1}^l x_i^2(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}_0)\right)^{\frac{1}{2}} \geq \varphi_2^{-1}(V_\infty)$$

和

$$\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} \leq -\psi(\varphi_2^{-1}(V_\infty)).$$

这样经 t_0 到 t 积分, 得

$$0 \leq V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}_0)) \leq V(t_0, \bar{\mathbf{x}}_0) - \psi(\varphi_2^{-1}(V_\infty))(t - t_0).$$

这个不等式当 $t \gg t_0$ 时将是个矛盾, 从而证明了式(7.34)成立. 证毕.

定理 7.18 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C[G_H, \mathbf{R}]$, 满足:

$$(i) \varphi_1(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|), \varphi_1, \varphi_2 \in K;$$

$$(ii) D^+V(t, \mathbf{x})|_{(7.33)} \leq -\psi(\|\mathbf{x}\|), \psi \in K.$$

则系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 一致渐近稳定.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 我们取 $\delta(\epsilon) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\epsilon))$, 则定理 7.16(2)中已证, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0,$$

由于 $\delta(\epsilon)$ 与 t_0 无关, 即平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是一致稳定的. 我们只需证明它还是关于 $\mathbf{y}$ 一致吸引的.

取 $\sigma \in (0, H]$, $T(\epsilon) = \varphi_2(\sigma) / \psi(\delta(\epsilon))$, 我们可以证明: $\forall t_0 \in I$, 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \sigma$ 时, 必有 $t^* \in (t_0, t_0 + T)$, 使

$$\|\mathbf{x}(t^*; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \delta(\epsilon). \quad (7.35)$$

若不然, 设 $\|\mathbf{x}_0\| < \sigma$, 却

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \geq \delta, \quad t \in (t_0, t_0 + T).$$

将条件(ii)沿解由 t_0 到 $t_0 + T$ 积分, 得

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(t_0 + T, \mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) - \psi(\delta)T \\ &< \varphi_2(\sigma) - \psi(\delta)T = 0, \end{aligned}$$

这是个矛盾, 故式(7.35)成立. 即当 $\|\mathbf{x}_0\| < \sigma$ (它与 t_0 无关) 时, $\exists T(\epsilon)$ (它与 $t_0, \mathbf{x}_0$ 无关), 使

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0 + T > t^*.$$

从而系统(7.33)的平凡解关于 $\mathbf{y}$ 是一致渐近稳定的. 证毕.

五、集合的稳定性和有界性

由于实际应用上的需要, 产生了许多稳定性、有界性的概念, 它们虽然相

互有区别,但仍有许多内在的联系.能否在数学上把一些稳定性、有界性的概念统一起来呢?集合的稳定性和有界性就是这种统一的尝试.

考虑 n 维系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (7.36)$$

$f \in C[T \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, 且保证解的唯一性, 和在 $I \times \mathbf{R}^n$ 空间考虑一个集合 $M(t)$, 它是一个流形.

$M(t)$ 与超平面 $t = \sigma$ 的交集以 $M(\sigma)$ 记, $M(t)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的投影以 Π_M 记; 如果在 $\mathbf{R}^n$ 中存在紧集 Q , 使 $\Pi_M \subset Q$, 则称 $M(t)$ 是有界的, 我们这里考虑的就是这样的有界集合 $M(t)$. 用

$$d(x, M) \equiv d(x, \Pi_M) \equiv \inf_{y \in \Pi_M} \|x - y\|$$

表示 x 到 Π_M 的最小距离, 如图 7-2 所示. 定义

$$D_\alpha \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x, \Pi_M) \leq \alpha\}.$$

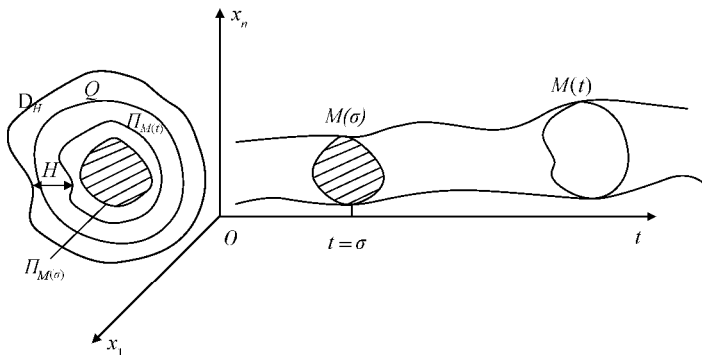


图 7-2

定义 7.15 若 $\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta = \delta(t_0, \epsilon, \alpha) > 0 [\exists \delta = \delta(\epsilon, \alpha) > 0]$, 使 $\forall x_0 \in D_\alpha$, 且 $d(x_0, M(t_0)) < \delta(t_0, \epsilon, \alpha) [< \delta(\epsilon, \alpha)]$ 时, 有

$$d(x(t; t_0, x_0), M(t)) < \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

则称集合 $M(t)$ 关于系统 (7.31) 的解是稳定 (一致稳定) 的. 简称集合 $M(t)$ 是稳定 (一致稳定) 的.

定义 7.16 若 $\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall t_0 \in I$, 使 $\forall x_0 \in D_\alpha, \exists T(t_0, \epsilon, x_0) > 0$, 当 $t \geq t_0 + T$ 时有

$$d(x(t; t_0, x_0), M(t)) < \epsilon.$$

则称集合 $M(t)$ 是全局吸引的;

若 $\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall \eta > 0, \forall t_0 \in I$, 当

$$\forall \mathbf{x}_0 \in D_\alpha, \text{ 且 } d(\mathbf{x}_0, M(t_0)) \leq \eta$$

时, $\exists T(\varepsilon, \eta) > 0$, 使

$$d(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), M(t)) < \varepsilon, \quad t \geq t_0 + T.$$

则称集合 $M(t)$ 是全局一致吸引的.

定义 7.17 若集合 $M(t)$ 稳定且吸引, 则称它是渐近稳定的; 若集合 $M(t)$ 一致稳定且全局一致吸引, 则称它是全局一致渐近稳定的.

定义 7.18 若 $\forall \alpha > 0, \forall \eta > 0, \forall t_0 \in I, \exists B(\eta) > 0$, 使当 $\mathbf{x}_0 \in D_\alpha$, 且 $d(\mathbf{x}_0, M(t_0)) < \eta$ 时, 有

$$d(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), M(t)) < B, \quad t \geq t_0.$$

则称集合 $M(t)$ 是一致有界的.

若 $\exists B > 0, \forall \alpha > 0, \forall \eta > 0, \forall t_0 \in I, \exists T(\eta) > 0$, 使当 $\forall \mathbf{x}_0 \in D_\alpha$ 且 $d(\mathbf{x}_0, M(t_0)) < \eta$ 时, 有

$$d(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), M(t)) < B, \quad t \geq t_0 + T.$$

则称集合 $M(t)$ 对界限 B 是最终一致有界的.

定理 7.19 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C[I \times D_H, \mathbf{R}]$ 满足:

$$(i) \varphi_1(d(\mathbf{x}, M(t))) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(d(\mathbf{x}, M(t))), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in K;$$

$$(ii) D^+V(t, \mathbf{x})|_{(7.36)} \leq 0.$$

则集合 $M(t)$ 是一致稳定的.

证明 $\forall \varepsilon \in (0, \alpha)$, 取 $\delta(\varepsilon) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon))$, 当 $\mathbf{x}_0 \in D_\alpha$, 且 $d(\mathbf{x}_0, M(t)) < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_1(d(\mathbf{x}(t), M(t))) &\leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) \\ &\leq \varphi_2(d(\mathbf{x}_0, M(t))) < \varphi_2(\delta) = \varphi_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

从而

$$d(\mathbf{x}(t), M(t)) < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

故 $M(t)$ 是一致稳定的. 证毕.

注 若 $V(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 则由本定理的条件下也可推出集合 $M(t)$ 是一致有界的.

证明 按 $M(t)$ 一致有界的定义, $\forall \eta > 0$, 取 $B(\eta) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(\eta)) > 0$, 则按上面同样的推理可得 $d(\mathbf{x}_0, M(t_0)) < \eta$ 时, 有

$$d(\mathbf{x}(t), M(t)) < B, \quad t \geq t_0.$$

定理 7.20 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C^1[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 满足:

$$(i) \varphi_1(d(\mathbf{x}, M(t))) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(d(\mathbf{x}, M(t))), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in KR,$$

$$(ii) \left. \frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} \right|_{(7.34)} \leq -\psi(d(\mathbf{x}, M(t))), \quad \psi \in K.$$

则集合 $M(t)$ 是全局一致渐近稳定的.

证明 因这里的条件完全保证了定理 7.19 的条件成立, 故 $M(t)$ 是一致稳定的. 只需证 $M(t)$ 也是全局一致吸引的.

$\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall \eta > 0, \forall t_0 \in I$, 由条件 (ii) 及条件 (i) 导出的

$$d(\mathbf{x}(t), M(t)) \geq \varphi_2^{-1}(V(t, \mathbf{x}(t))),$$

可推出

$$\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}(t)) \leq -\psi(\varphi_2^{-1}(V(t, \mathbf{x}(t)))) < 0,$$

从而

$$\int_{V(t, \mathbf{x}(t))}^{V(t_0, \mathbf{x}(t_0))} \frac{dV}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t, \mathbf{x}(t))))} \geq t - t_0.$$

另一方面, 当 $d(\mathbf{x}_0, M(t_0)) < \eta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_1(d(\mathbf{x}(t), M(t))) &\leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) \\ &\leq \varphi_2(d(\mathbf{x}_0, M(t))) < \varphi_2(\eta), \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} t - t_0 &\leq \int_{V(t, \mathbf{x}(t))}^{V(t_0, \mathbf{x}(t_0))} \frac{dV}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t)))} \leq \int_{\varphi_1(d(\mathbf{x}(t), M(t)))}^{\varphi_2(\eta)} \frac{dV}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t)))} \\ &= \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_1(\epsilon)} \frac{dV}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t)))} + \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(\eta)} \frac{dV}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t)))}. \end{aligned}$$

取

$$T(\epsilon, \eta) > \int_{\varphi_1(\epsilon)}^{\varphi_2(\eta)} \frac{dV}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t)))} > 0,$$

它与 t_0, x_0 无关, 显然当 $t \geq t_0 + T$ 时, 上式有

$$\int_{\varphi_1(d(\mathbf{x}(t), M(t)))}^{\varphi_1(\epsilon)} \frac{dV}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t)))} < t - t_0 - T \leq 0,$$

从而有

$$\varphi_1(\epsilon) > \varphi_1(d(\mathbf{x}(t), M(t))).$$

即有

$$d(\mathbf{x}(t), M(t)) < \epsilon, \quad t \geq t_0 + T.$$

证毕.

最后, 由于集合 $M(t)$ 对界限 B 的最终有界性可视为集合 $M(t) \equiv \{I \times D_B\}$ 的吸引性. 因此有

定理 7.21 集合 $M(t) \equiv \{I \times D_B\}$ 全局吸引, 当且仅当 $\forall B' > B$, 集合 $M(t)$ 对界限 B' 是最终有界的;

集合 $M(t) \equiv \{I \times D_B\}$ 全局一致吸引, 当且仅当 $\forall B' > B$, 集合 $M(t)$ 对界限 B' 是最终一致有界的.

注 集合稳定性的概念涵盖了多种稳定性概念, 例如:

若 $M(t) \equiv \{I \times \mathbf{0}\}$ 时, 它就是 Liapunov 意义下平凡解的稳定性和吸引性;

若 $M(t) \equiv \{I \times \{\mathbf{x} \mid \mathbf{y} = \mathbf{0}\}\}$ 时, 它就是关于部分变元 $\mathbf{y}$ 的稳定性和吸引性;

若 $M(t) \equiv \{\boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi}_0)\}$, 且系统是自治的, 它就是 Poincaré 的关于轨道 $L_0^+ \equiv \{\boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi}_0) : t_0 \leq t < \infty\}$ 的稳定性. 轨道稳定性的一般定义是: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon; t_0) > 0$, 当 $\|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}_0\| < \delta$ 时, 有 $d(\mathbf{x}(t), L_0^+) < \epsilon$, 其中 $d(\mathbf{x}(t), L_0^+) \equiv \inf_{\xi \geq t_0} \|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(\xi)\|$.

习 题 七

1. 讨论系统

$$\dot{x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - 2y, \quad \dot{y} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

2. 讨论系统

$$\dot{x} = y - y^2 x, \quad \dot{y} = -2x + 2x^2 y - y^3$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

3. 考虑二阶方程

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + g(x)f(x) = 0$$

其中 $f(x), g(y), \varphi(y)$ 均为连续函数, 且保证解的唯一性; 且设

$$(i) f(0) = \varphi(0) = 0;$$

$$(ii) xf(x) > 0 (x \neq 0), \quad y\varphi(y) > 0 (y \neq 0), \quad g(y) > 0;$$

$$(iii) \int_0^{\pm\infty} f(x) dx = +\infty, \quad \int_0^{\pm\infty} \frac{y dy}{g(y)} = +\infty.$$

试讨论零解 $x=0$ 的稳定性.

4. 研究质点振动方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0, \quad (a > 0, b > 0)$$

的零解 $x=0$ 的稳定性.

5. 试用 Lassaile 不变原理来分析第一节中例 7.1 平凡解的稳定性.

6. 试用 Lassalle 不变原理来分析系统

$$\dot{x} = -x |y|^2, \quad \dot{y} = -y |x|^3$$

的渐近性质.

7. 考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad (\text{E})$$

$\mathbf{f} \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, 且保证解的唯一性. 设存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C^1[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 满足:

$$(i) a \|\mathbf{x}\| \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b \|\mathbf{x}\|;$$

$$(ii) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(E)} \leq -cV(t, \mathbf{x}),$$

其中 $a > 0, b > 0, c > 0$ 均为常数. 试用比较原理的思想, 证明系统 (E) 的任意解 $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| e^{-c(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

8. 再考虑第 7 题中的系统 (E), 若设函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C^1[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$ 是正定的, 且

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(E)} \leq p(t)q(V(t, \mathbf{x})),$$

其中 $p(t) > 0$ 连续, 且有 $\int_0^{+\infty} p(s)ds = +\infty$. 试用比较原理的思想, 找出函数 $q(u): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 应满足什么条件, 就可保证系统 (E) 的平凡解是渐近稳定的.

9. 试证系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y + \sin x + 2\cos y, \\ \dot{y} &= 3x - 2y + 2\cos x + 3\sin y \end{aligned}$$

的任何解都有界.

10. 考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in [I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, 且

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq \lambda(t)\varphi(\|\mathbf{x}\|),$$

其中 $\lambda(t) (0 < t < \infty)$ 和 $\varphi(r) (0 < r < \infty)$ 正定, 连续, 满足:

$$\int_0^\infty \lambda(t)dt < \infty, \quad \int_0^\infty \frac{dr}{\varphi(r)} = \infty.$$

试证: 该系统的解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 一致有界.

11. 考虑方程

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t),$$

其中 $f(x, \dot{x}) \in C[\mathbf{R}^2, \mathbf{R}]$, $g(x) \in C[\mathbf{R}, \mathbf{R}]$, $e(t) \in C[I, \mathbf{R}]$. 若

$$(i) f(x, \dot{x}) \geq 0,$$

$$(ii) G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi > 0, \text{ 当 } x \neq 0, \text{ 且 } G(x) \rightarrow \infty, \text{ 当 } |x| \rightarrow \infty.$$

$$(iii) \int_0^\infty |e(t)|dt < \infty.$$

试证 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 是耗散的. [提示: 作函数 $V(t, x, y) = \sqrt{\frac{y^2}{2} + G(x)} - \int_0^t |e(s)| ds$]

补充与问题

1. 比较原理的应用

作为比较原理的一个应用, 我们再给出下面的一个定理, 其证明见文献[9, 10]:

定理 1 若存在可微函数 $V(t, x)$ 及 $\lambda(t)$, 满足:

$$(1) V(t, x) \geq \varphi(\|x\|), V(t_0) = 0, \quad \varphi \in K;$$

$$(2) \lambda(t) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(7.16)} + \frac{d\lambda(t)}{dt} \cdot V(t, x) \leq g(t, \lambda(t)V(t, x));$$

$$(3) \lambda(t) > 0 \text{ 且 } \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty.$$

则式(7.17)的平凡解稳定蕴涵了系统(7.16)的平凡解等度渐近稳定.

正如前面我们指出的, 比较原理是研究稳定性的理论上完美、应用较广泛的一种好的途径, 但也有不少的困难和缺点, 为了充分发挥比较原理的优点, 克服缺点, 还有待人们去进一步发展和完善这种方法.

2. 条件稳定与 Lipschitz 稳定

建立在能量函数基础上发展起来的 Liapunov 直接法, 有着普遍而深刻的理论意义和应用价值, 它不仅用来研究 Liapunov 意义下的稳定性, 而对于研究动力系统的其他渐近行为时, 往往也可以借助于 Liapunov 函数及直接法的基本思想. 在本章中我们介绍了一些新的稳定性概念和判据, 包括鲁棒稳定、实用稳定、非常稳定、部分变元稳定、集合稳定等. 下面我们再来补充介绍两个新的稳定性概念.

(1) 条件稳定^[11, 12]

Liapunov 稳定性, 其初始扰动是在未被扰动的初始值的一个 n 维邻域内变化, 如果对初始扰动的区域再加以约束限制, 则有所谓的条件稳定性.

考虑一般系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

$f \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, 且保证解的存在唯一性.

定义 1 称(1)的解 $\xi = \xi(t)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时条件稳定, 如果在 $\mathbf{R}^n$ 内存在 k 维流形 $S_k(\xi(t_0)) \in S_k, 1 \leq k \leq n$. 对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, 当初始扰动 $x(t_0) \in S_k$, 且

$$\|x(t_0) - \xi(t_0)\| < \delta(\epsilon)$$

时, 有

$$\|x(t; t_0, x_0) - \xi(t; t_0, \xi_0)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0,$$

其中 $x(t_0) = x_0, \xi(t_0) = \xi_0$.

定义 2 称(1)的解 $\xi = \xi(t)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时条件渐近稳定, 如果它是条件稳定的, 且存在

常数 $\mu > 0$, 当 $\mathbf{x}(t_0) \in S_k$, $\|\mathbf{x}(t_0) - \xi(t_0)\| < \mu$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t) - \xi(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

一般来说, 条件稳定要弱于通常的 Liapunov 稳定性.

考虑下面的拟线性系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}). \quad (2)$$

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 是常数阵矩, 具有 $k (1 \leq k \leq n)$ 个负实部特征值, $\boldsymbol{\varphi} \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) = o(\mathbf{x})$ 关于 t 一致成立.

我们有下面的结论:

定理 2^[11] 设矩阵 $\mathbf{A}$ 有 k 个负实部特征值, 其他特征值实部非负, $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})$ 关于 t 连续, 当 $t \geq 0$ 时, 关于 $\mathbf{x}$ 满足 Lipschitz 条件:

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}') - \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})\| \leq L \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|.$$

($\|\mathbf{x}'\| < \delta$, $\|\mathbf{x}\| < \delta, t > 0$) 其中 $L = L(\delta) \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$. 则系统 (2) 的零解关于某个 k 维始值流形 S_x 是条件渐近稳定的.

(2) Lipschitz 稳定^[11, 13]

Lipschitz 稳定性是近来提出的一种新型稳定性, 可以看成是线性系统稳定性的推广. 考虑非线性系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \quad (3)$$

定义 3 (1) 若 $\exists M > 0, \delta > 0$, 使当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta, t \geq t_0 > 0$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq M \|\mathbf{x}_0\|,$$

则称 (3) 的零解是一致 Lipschitz 稳定的, 其中 M 称为 Lipschitz 常数.

(2) 若 (1) 中 $\delta = +\infty$, 则称为全局一致 Lipschitz 稳定.

由定义立即可知, (3) 的零解一致 Lipschitz 稳定, 则一定一致 Liapunov 稳定, 但反之不一定成立.

下面是关于 Lipschitz 稳定性判据的两个定理:

定理 3^[11] 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件, 且关于 t 是一致的. 则 (3) 的零解一致 Lipschitz 稳定 $\Leftrightarrow \exists$ 连续函数 $V(t, \mathbf{x})$, 满足:

$$(1) \|\mathbf{x}\| \leq V(t, \mathbf{x}) \leq L \|\mathbf{x}\|, L = \text{const} > 0;$$

$$(2) |V(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{y})| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall t \geq 0, \|\mathbf{x}\| < \delta, \|\mathbf{y}\| < \delta;$$

$$(3) D^+ V|_{(3)} \leq 0.$$

定理 4^[11] 若 $\exists V(t, \mathbf{x}) \in C[G_H, \mathbf{R}]$ 和 $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, 使得

$$(1) \varphi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \varphi_2(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_1^{-1} \varphi_2(s)}{s} \leq M = \text{const} (M \geq 1);$$

$$(3) \frac{dV}{dt}|_{(3)} \leq 0.$$

则系统(3)的零解一致 Lipschitz 稳定.

参考文献

- [1] Красовский Н. Н. ,Некоторые Задачи об Устойчивости Движения,Наука,1959
- [2] Lasalle JP,Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press,1971
- [3] Michel A. N. 大型动态系统的定性分析. 郑应平译. 沈阳:辽宁科学技术出版社,1985
- [4] 贺建勋,王志成. 常微分方程(下). 长沙:湖南科学技术出版社,1981
- [5] Yoshizawa T. Stability Theory by Lyapunov's Second Method. The Math. Soc. of Japan,Takyo,1996
- [6] Rouche N,Habets P and Laloy M. Stability Theory by Lyapunov's Direct Method. New York:Springer-Verlag,1977
- [7] Димидович Б. П. Пектяии по математический теория устойчивости М. Наука,1967
- [8] Massera JL. Contributions to stability theory. Ann. of Math. ,1956,64
- [9] Bhatia NP and Lakshmikantham V. An extension of Liapunov's direct method. Mich. Math. J. ,1965,12
- [10] 黄琳. 稳定性理论. 北京:北京大学出版社,1992
- [11] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用. 北京:国防工业出版社,2000
- [12] Ляпунов АМ. Общая залача об устойчивости лвижения. М:физматтиз,1959
- [13] Fu Yuli. On Lipschitz Stability for F. D. E. Proc. Ordinary Differential Equations and Control Theory. 武汉:华中师范大学出版社,1987

第八章 Liapunov 函数的构造和应用实例

对一个给定的系统,针对问题的需要作出一个好的 V 函数,是稳定性理论中的一个核心问题.但是,100 年来尽管人们作出了不懈的努力,迄今为止,对一般的非线性系统还没有构造 V 函数的通用、有效的方法.本章将通过一些简单而又较典型的例子,介绍这方面人们积累起来的一些技巧与思路,它将有助于达到我们的目的.

我们还将介绍稳定性理论与方法在科技中几个较典型的应用,引起人们进一步学习与研究的兴趣.

第一节 Liapunov 函数的某些作法

构造 V 函数时,至少要考虑两个问题:(1)首先要使它满足前几章介绍的某个稳定性定理的条件,例如是针对稳定时,那就要找到一个正定的 $V(t, x)$,在“某些条件”下,使沿系统的 $\frac{dV}{dt}$ 常负或负定;(2)进一步调整 $V(t, x)$,使上述的“某些条件”尽可能接近相应稳定性成立的必要条件或最接近实际问题的需要(例如稳定区域尽可能大等).因此,在作 V 函数时,通常总是要兼顾对 V 和 $\frac{dV}{dt}$ 的要求,经过反复调整来选择它们的具体表达式.作为步骤来说,常常是先给定 $\frac{dV}{dt}$ 为一个简单的定负函数,或先给出 V 或 $\frac{dV}{dt}$ 的一部分,然后根据 V 和 $\frac{dV}{dt}$ 间的关系式,结合其他要求再调整、决定 V 或 $\frac{dV}{dt}$ 的其余部分.

从前人的工作中看到, V 函数最常见的形式有,“二次型”,“二次型加非线性函数的积分”,“广义总能量”等.此外,对有线性部分的非线性系统,通常是先对线性近似系统作出 V 函数,然后再针对非线性部分作调整修改,使之适用于该非线性系统.

一、常系数线性系统 V 函数的公式

考虑常系数线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (8.1)$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 常数矩阵.

在第六章中已经证明过, 当 $\mathbf{A}$ 稳定时, 对任何正定对称的矩阵 $\mathbf{C}$, 必存在唯一正定对称矩阵 $\mathbf{B}$, 满足矩阵方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A} = -\mathbf{C}. \quad (8.2)$$

也就是说, 当 $\mathbf{A}$ 稳定时, 对系统 (8.1) 可确定二次型正定 V 函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$, 使它沿系统的导数 $\frac{dV}{dt} = -\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ (给定的负定二次型).

由给定的 $\mathbf{C}$ 来求出 $\mathbf{B}$, 实际上是一个 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个线性代数方程组成的方程组求解问题, 前苏联的 E. A. Barlbashin 和我国的蔡燧林等, 经过艰辛的计算都给出了具体的公式. 下面我们介绍 $n=2$ 和 3 时的 **Barlbashin 公式**, 一般情形的公式可参阅文献[1, 2].

设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T [\omega_{ij}] \mathbf{x}$ 已给定, 求 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^T [v_{ij}] \mathbf{x}$.
令

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8.1)} = 2W,$$

则 $n=2$ 时

$$V(x_1, x_2) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 \\ \omega_{11} & a_{11} & a_{21} & 0 \\ 2\omega_{12} & a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ \omega_{22} & 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (8.3)$$

其中 Δ 为上面行列式中去掉第一行和第一列后余下的三阶行列式, 也即方程组 (8.2) 左端关于 v_{ij} 的系数行列式, $\Delta = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.

当 $n=3$ 时, 有

$$V = (x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1 x_2 & 2x_1 x_3 & x_2^2 & 2x_2 x_3 & x_3^2 \\ \omega_{11} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 2\omega_{12} & a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ 2\omega_{13} & a_{13} & a_{23} & a_{11} + a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ \omega_{22} & 0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0 \\ 2\omega_{23} & 0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22} + a_{33} & a_{32} \\ \omega_{33} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其中 Δ 为上述行列式中去掉第一行和第一列后余下的 6 阶行列式的值.

我们对 $n=2$ 情形给出如下证明:

这时系统(8.1)为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (8.1)_1$$

对事先给定的二次型

$$W \equiv w_{11}x_1^2 + 2w_{12}x_1x_2 + w_{22}x_2^2,$$

要求出二次型

$$V \equiv v_{11}x_1^2 + 2v_{12}x_1x_2 + v_{22}x_2^2,$$

使

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \equiv 2W,$$

即

$$\begin{aligned} & 2v_{11}x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + 2v_{12}x_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ & + 2v_{12}x_1(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + 2v_{22}x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \\ & \equiv 2(w_{11}x_1^2 + 2w_{12}x_1x_2 + w_{22}x_2^2). \end{aligned}$$

比较等式两端关于 x_1^2, x_1x_2, x_2^2 的系数得

$$\begin{cases} a_{11}v_{11} + a_{21}v_{12} = w_{11}, \\ a_{12}v_{11} + (a_{11} + a_{22})v_{12} + a_{21}v_{22} = 2w_{12}, \\ a_{12}v_{12} + a_{22}v_{22} = w_{22}. \end{cases}$$

这个方程组的系数行列式是

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11} + a_{22}),$$

它在系统(8.1)₁ 的 A 为稳定时,即特征根都具负实部时,有

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} < 0.$$

这时有 $\Delta < 0$,故可唯一解得

$$\begin{aligned} v_{11} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} w_{11} & a_{21} & 0 \\ 2w_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ w_{22} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ v_{12} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & w_{11} & 0 \\ a_{12} & 2w_{12} & a_{21} \\ 0 & w_{22} & a_{12} \end{vmatrix}, \quad v_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & w_{11} \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & 2w_{12} \\ 0 & a_{12} & w_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

将它们代入 $V(x_1, x_2)$ 的待定式,整理后即得前述的公式(8.3)了.

例 8.1 试用 Barlbashin 公式作线性常系数系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

的 V 函数.

解 这时系数矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ 是稳定的, 该公式一定可用. 取

$$V(x_1, x_2) = v_{11}x_1^2 + 2v_{12}x_1x_2 + v_{22}x_2^2,$$

$$W(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2,$$

则按公式(8.3)有

$$V(x_1, x_2) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix},$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -10 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -160,$$

所以可算出二次型的 V 函数是

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{20} [7x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2].$$

它是正定无限大函数, $\frac{dV}{dt} = 2W = -2(x_1^2 + x_2^2)$ 是负定的. 因此, 零解是全局渐近稳定的.

例 8.2 试用 Barlbashin 公式求出方程

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

的等价系统的 V 函数, 并讨论零解的稳定性.

解 令 $x = x_1, \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2, \dot{x}_2 = \ddot{x} = -ax_2 + x_3,$

则

$$\dot{x}_3 = \ddot{x} + a\ddot{x} = -cx_1 - bx_2.$$

故得等价三阶系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

取

$$V(x_1, x_2, x_3) = v_{11}x_1^2 + v_{22}x_2^2 + v_{33}x_3^2 + 2v_{12}x_1x_2 + 2v_{13}x_1x_3 + 2v_{23}x_2x_3,$$

$$W(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2.$$

则按前面 $n=3$ 时的 Barlbashin 公式, 有

$$V(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -b & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

其中 Δ 为上面的行列式中画去第一行和第一列后剩下的 6 阶行列式. 经计算可得

$$\Delta = -c(ab - c).$$

展开上面行列式, 最后得

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{ab - c} [acx_1^2 + 2cx_1x_2 + bx_2^2 + x_3^2].$$

经判定, 这个二次型在 $a > 0, c > 0, ab > c$ 时是无穷大正定的. 而沿系统

$$\frac{dV}{dt} = 2W = -2x_2^2 \leq 0;$$

$x_2 = 0$ 不是系统的解, 故零解是全局渐近稳定的.

二、用类比法构造特殊非线性系统的 V 函数

我们用下面的例子来说明类比法的思路.

例 8.3 考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + by, \quad \dot{y} = cx + dy, \quad (8.4)$$

其中 $f(0)=0, f(x)$ 是连续的非线性函数. 试作出该系统使零解全局渐近稳定的 V 函数.

分析 该系统是在线性常系数系统

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy \quad (8.1)_2$$

中, 以非线性函数 $f(x)$ 替代 ax 而得.

当系统 $(8.1)_2$ 对应的特征方程

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

的两个根均具负实部时,充要条件是

$$a + d < 0, \quad ad - bc > 0;$$

这就有

$$\delta \equiv (a + d)(ad - bc) < 0.$$

这时若取($b \neq 0$)

$$W(x, y) = W_{11}x^2 \equiv \delta x^2,$$

则按 Barlashin 公式,保证系统(8.1)₂ 零解全局稳定的 V 函数可取为($\frac{dV}{dt} =$

$$2W = 2\delta x^2)$$

$$\begin{aligned} V(x, y) &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ \delta & a & c & 0 \\ 0 & b & a+d & c \\ 0 & 0 & b & d \end{vmatrix} \\ &= (dx - by)^2 + (ad - bc)x^2 \\ &= (dx - by)^2 + d(ax^2) - b(cx^2), \end{aligned} \quad (8.5)$$

($\Delta = \delta$). 我们注意到,其中 ax^2 是系统(8.1)₂ 中 ax 项积分所得,即

$$ax^2 = 2 \int_0^x ax \, dx.$$

类比 对系统(8.4),由于 $f(x)$ 取代了 ax ,我们试想以 $2d \int_0^x f(x) \, dx$ 取代式(8.5)中的 $d(ax^2)$ 项,取 V 函数为

$$\begin{aligned} V(x, y) &= (dx - by)^2 + 2d \int_0^x f(x) \, dx - bcx^2 \\ &= (dx - by)^2 + 2 \int_0^x \left[\frac{d \cdot f(x)}{x} - bc \right] x \, dx. \end{aligned} \quad (8.6)$$

导出充分条件:为使上述 V 函数合用,计算出

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8.4)} = -2 \left(\frac{f(x)}{x} + d \right) \left(bc - \frac{d \cdot f(x)}{x} \right) x^2.$$

因此,只要满足

$$(i) \frac{d \cdot f(x)}{x} - bc > 0 \quad (x \neq 0),$$

$$(ii) \frac{f(x)}{x} + d < 0 \quad (x \neq 0),$$

$$(iii) \int_0^x [d \cdot f(x) - bcx] \, dx \rightarrow \infty \quad (\text{当 } |x| \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

则当 $b \neq 0$ 时, 式(8.6)给出的 V 函数保证了系统(8.4)零解全局渐近稳定.

因为这时式(8.6)给出的 V 正定 [$b \neq 0$ 及条件(i)], 无穷大 [条件(iii)],
 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ [条件(i)及(ii)], $x=0$ 中不含系统整条正半轨.

注 当把上面所得条件(i)和(ii)中的 $f(x)$ 换回 ax 则分别是

$$ad - bc > 0 \text{ 和 } a + d < 0,$$

它们是线性系统(8.1)₂ 零解渐近稳定的充要条件(Hurwitz 条件). 这说明这里导出的充分条件是最接近稳定的必要条件的. 这种以类比的思想构造 V 函数的方法首先由前苏联的 E. G. Marlgin 和 N. N. Krasovskii 在 20 世纪 50 年代提出的.

例 8.4 考虑非线性系统

$$\dot{x} = f_1(x) + by, \quad \dot{y} = f_2(x) + dy, \quad (8.7)$$

$f_1(0) = f_2(0) = 0$. 试作保证它零解全局渐近稳定的 V 函数及充分条件.

解 这里由非线性函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分别替代了系统(8.1)₂ 中的 ax 项和 cx 项, 按上例分析, 试作

$$V(x, y) = (dx - by)^2 + 2d \int_0^x f_1(x) dx - 2b \int_0^x f_2(x) dx,$$

计算得

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8.7)} = -2 \left(\frac{f_1(x)}{x} + d \right) (bf_2(x) - df_1(x))x.$$

所以只要

$$(i) \frac{f_1(x)}{x} + d < 0 \quad (x \neq 0),$$

$$(ii) [bf_2(x) - df_1(x)]x < 0 \quad (x \neq 0),$$

$$(iii) \int_0^x [d \cdot f_1(x) - bf_2(x)] dx \rightarrow \infty \quad (\text{当 } |x| \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

及 $b \neq 0$ 时, 上面写出的 V 函数将保证系统(8.7)零解全局渐近稳定.

按同样的思路, 我们用类比法推出非线性系统

$$\dot{x} = ax + f(y), \quad \dot{y} = cx + dy \quad (f(0) = 0);$$

$$\dot{x} = ax + f_1(y), \quad \dot{y} = cx + df_2(y), \quad f_1(0) = f_2(0) = 0;$$

及方程 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ 的等价系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y \quad (g(0) = f(0) = 0)$$

相应的 V 函数. 作为习题请读者自己做.

例 8.5 考虑三阶非线性方程

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0,$$

其中 $\varphi(\cdot), f(\cdot)$ 为非线性连续可微函数, $\varphi(0) = f(0) = 0$. 试作出保证它零解全局渐近稳定的 V 函数.

解 作等价系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ay + z, \\ \dot{z} &= -f(x) - \varphi(y).\end{aligned}\quad (8.8)$$

考虑相应的线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ay + z, \\ \dot{z} &= -cx - by.\end{aligned}\quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ -c & -b & 0 \end{bmatrix}.\quad (8.9)$$

系数矩阵 $\mathbf{A}$ 稳定的充要条件是

$$a > 0, \quad ab - c > 0. \quad (8.10)$$

我们取 $W(x, y, z) = \frac{1}{2}(c - ab)y^2$, 则使

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8.9)} = 2W = (c - ab)y^2$$

的 V 函数, 按 $n=3$ 的 Barbashin 公式可计算得

$$\begin{aligned}V(x, y, z) &= \frac{ac}{2}x^2 + cxy + \frac{b}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \\ &= a \int_0^x cx \, dx + cxy + \int_0^y by \, dy + \frac{1}{2}z^2.\end{aligned}$$

按“类比”思路, 对系统(8.8)试用

$$V(x, y, z) = a \int_0^x f(x) \, dx + f(x)y + \int_0^y \varphi(y) \, dy + \frac{1}{2}z^2,$$

计算出

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8.8)} = \left[f'(x) - a \frac{\varphi(y)}{y} \right] y^2.$$

这时, 我们注意到与条件(8.10)相对应的是

$$a > 0, \quad a \frac{\varphi(y)}{y} - \frac{f(x)}{x} > 0.$$

将上式中 $\frac{f(x)}{x}$ 换为 $f'(x)$, 则可以证明: 在 $a > 0$ 时, 条件

$$(i) f'(x) > 0,$$

$$(ii) a \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0 \quad (y \neq 0),$$

(iii) $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} U(x, y) = \infty$, 其中

$$\begin{aligned} U(x, y) &\equiv a \int_0^x f(x) dx + f(x)y + \int_0^y \varphi(y) dy \\ &\equiv aF(x) + f(x)y + \Phi(y) \end{aligned}$$

成立下, 函数 $V(x, y, z) = U(x, y) + \frac{1}{2}z^2$ 是正定的, 它正是我们所要的无限大 V 函数.

这是因为, 由 $f(x)$ 连续, $f(0)=0$ 及条件(i), 可推出 $f(x)x > 0 (x \neq 0)$; 再由(i)和(ii)推出 $\frac{\varphi(y)}{y} > 0 (y \neq 0)$; 从而 $F(x) > 0, \Phi(y) > 0$. 因为 $U(x, y)$ 可写成

$$U(x, y) = \frac{[2\Phi(y) + yf(x)]^2}{4\Phi(y)} + \frac{4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x)}{4\Phi(y)}.$$

可见, 要证 $V(x, y, z)$ 正定, 只要证明

$$4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x) > 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

由于

$$\begin{aligned} &4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x) \\ &= 4 \int_0^x f(x) \left[\int_0^y \left(a \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) \right) y dy \right] dx, \end{aligned}$$

条件(ii)保证上式右端方括号中的积分是大于零的, 从而再由(i)保证整个右端大于零($x \neq 0, y \neq 0$). 其余的讨论是明显的.

三、二次型 V 函数的进一步应用

二次型函数由于有较强的代数与几何背景, 因此不仅在判定常系数线性系统稳定性时, 常用它作 V 函数, 有时对某些变系数线性系统、某些非线性系统, 也可按一定的步骤作出适用的二次型 V 函数.

(1) 关于变系数线性系统

考虑变系数线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

若取 $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B}(t) \mathbf{x}$, 则它沿系统的导数

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{x}^T (\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{B}) \mathbf{x}.$$

我们令上式右端等于 $-\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$, $\mathbf{C}$ 为给定的正定(负定)对称常数矩阵(一般就取为 $\pm$ 单位阵 $\mathbf{E}$), 于是有

$$\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{B} = -\mathbf{C}, \quad (8.11)$$

这是一个矩阵微分方程,只要能找到它的一个对称特解 $\mathbf{B}(t)$,就得到了二次型的 $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$.

例 8.6 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1-t}{2t}x + \frac{1-t}{t}y, \\ \dot{y} &= \frac{1+t}{t}x + \frac{1+t^2}{2t(1-t)}y.\end{aligned}$$

我们取 $\mathbf{C}=\mathbf{E}$,则式(8.11)为

$$\begin{aligned}\dot{b}_{11} + \frac{1-t}{t}b_{11} + \frac{2(1+t)}{t}b_{12} &= -1, \\ \dot{b}_{12} + \left[\frac{1-t}{2t} + \frac{1+t^2}{2t(1-t)}\right]b_{12} + \frac{1-t}{t}b_{11} + \frac{1+t}{t}b_{22} &= 0, \\ \dot{b}_{22} + \frac{2(1-t)}{t}b_{12} + \frac{1-t^2}{t(1-t)}b_{22} &= -1.\end{aligned}$$

这个方程组有特解

$$b_{11} = 1 + \frac{1}{t}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = 1 - \frac{1}{t},$$

对应的

$$V(t, x, y) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{t}\right)y^2.$$

当 $t \geq 2$ 时,这个 V 是正定无限大函数,且具无穷小上界,而 $\frac{dV}{dt}$ 负定,故系统零解是全局一致渐近稳定的.

例 8.7 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \sin^2 t + y e^t, \\ \dot{y} &= x e^t + y \cos^2 t.\end{aligned}$$

这时取 $\mathbf{C}=-\mathbf{E}$,则式(8.11)为

$$\begin{aligned}\dot{b}_{11} + 2\sin^2 t b_{11} + 2e^t b_{12} &= 1, \\ \dot{b}_{12} + b_{12} + e^t b_{11} + e^t b_{22} &= 0, \\ \dot{b}_{22} + 2e^t b_{12} + 2\cos^2 t b_{11} &= 1.\end{aligned}$$

它有特解

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = \frac{1}{2}e^{-t}, \quad b_{22} = 0,$$

对应的

$$V(t, x, y) = e^{-t}xy.$$

这时 $\frac{dV}{dt}$ 正定, 而 $V(t, x, y)$ 变号且具有无限小上界, 故系统的零解不稳定.

(2) 关于非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

我们试取 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{B}$ 为对称常数矩阵, 计算它沿系统的全导数,

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{f}^T(t, \mathbf{x}) \mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

我们将 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 改写成积分形式

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = [\mathbf{f}(t, s\mathbf{x})]_{s=0}^{s=1} = \left(\int_0^1 \left[\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=s\mathbf{x}} ds \right) \mathbf{x},$$

这样, 上式就可写成

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \mathbf{x}^T \left[\left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=s\mathbf{x}} ds \right)^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=s\mathbf{x}} ds \right] \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \left\{ \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=s\mathbf{x}} \right)^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=s\mathbf{x}} \right] ds \right\} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

花括号内的函数

$$\mathbf{Q}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=s\mathbf{x}} \right)^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=s\mathbf{x}} \right] ds$$

是一个对称矩阵, 若能判定它的定号性, 就能决定 $\frac{dV}{dt}$ 的符号了.

例 8.8 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + x^3 e^t, \\ \dot{y} &= -x + y + y^3 e^{-t}, \end{aligned}$$

零解的稳定性.

解 取 $\mathbf{B} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 即取正定函数

$$V(t, x) = x^2 + y^2.$$

计算

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3x^2 e^t & 1 \\ -1 & 1 + 3y^2 e^{-t} \end{pmatrix},$$

因此按上述公式, 可算得

$$\mathbf{Q}(t, x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2x^2 e^t & 0 \\ 0 & 2 + 2y^2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

这样

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = (2 + 2x^2 e^t)x^2 + (2 + 2y^2 e^{-t})y^2,$$

这是正定的,故系统的零解是不稳定的.

四、用能量函数作 V 函数

人们知道,单位质量的质点在恢复力 $f(x)$ 作用下的运动方程是

$$\ddot{x} + f(x) = 0,$$

其等价系统是

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x).$$

它有首次积分

$$\frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(x)dx = h,$$

其中 h 为常数. 右端第一项 $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ 代表系统的动能,第二项 $\int_0^x f(x)dx$ 代表势能,整个式子表示此系统的总能量是守恒的. 从物理学知道,此系统在原点处总能量达到极小值. 在此启示下我们取它为 V 函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(x)dx, \quad (8.12)$$

它在条件(均符合物理意义)

$$f(0) = 0, \quad xf(x) > 0 (x \neq 0)$$

下是正定的,沿系统的全导数

$$\frac{dV}{dt} \equiv 0,$$

故平衡点 $(0, 0)$ 稳定.

若设此质点还受到阻尼的作用,如

$$\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x}) + f(x) = 0,$$

它的等价系统为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x) - \varphi(x, y).$$

注意到阻尼力应满足条件

$$\varphi(x, 0) \equiv 0, \quad y\varphi(x, y) > 0 (y \neq 0).$$

即此系统的总能量是耗散的. 我们仍取能量函数(8.12)为 V 函数,则此时沿系统的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = -y\varphi(x, y) \leqslant 0.$$

而 $y=0$ 除平衡点外不含系统的整条半轨, 故系统的零解是渐近稳定的.

例 8.9 考虑方程

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0, \quad f(0) = \varphi(0) = 0$$

零解的稳定性.

解 作 Liénard 变换

$$x = x, \quad y = \dot{x} + \int_0^x \varphi(x) dx.$$

则得等价系统

$$\dot{x} = y - \int_0^x \varphi(x) dx, \quad \dot{y} = -f(x).$$

我们仍取能量函数 (8.12) 作 V 函数, 则它沿此系统的全导数

$$\frac{dV}{dt} = -f(x) \int_0^x \varphi(x) dx.$$

这时, 我们只要设

$$(i) \quad xf(x) > 0 \quad (x \neq 0),$$

$$(ii) \quad x \int_0^x \varphi(x) dx > 0 \quad (x \neq 0),$$

$$(iii) \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty.$$

则 $V(x, y)$ 是正定无限大, $\frac{dV}{dt} \leq 0$, 而使 $\frac{dV}{dt} = 0$ 的 $x=0$ 上除平衡点外不含系统的整条半轨. 故上述条件保证了系统零解全局渐近稳定.

注 这个例子中, 如果我们用通常的等价系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x) - \varphi(x)y,$$

则对同样的 $V(x, y)$, 得

$$\frac{dV}{dt} = -\varphi(x)y^2.$$

这样, 要以更强的 $\varphi(x) > 0 (x \neq 0)$ 来替代 $x \int_0^x \varphi(x) dx > 0 (x \neq 0)$, 同时两个非线性函数 $f(x), \varphi(x)$ 出现在系统的同一个方程中, 对有些讨论是不利的.

例 8.10 研究系统

$$\dot{x}_i = m_i y_i,$$

$$\dot{y}_i = -\lambda_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) \quad (8.13)$$

($i=1, 2, \dots, n; 1 \leq k \leq n$). 设

(i) $\lambda_i(0) = f_i(0) = \varphi_{ik}(0) = 0, m_i > 0$ 为常数;

(ii) $y_i \lambda_i(y_i) > 0 (y_i \neq 0), x_i f_i(x_i) > 0 (x_i \neq 0)$;

(iii) $\xi \varphi_{ik}(\xi) > 0 (\xi \neq 0), \varphi_{ik}(-\xi) = -\varphi_{ik}(\xi), \varphi_{ik}(\xi) = \varphi_{ki}(\xi)$.

这个系统可看做质量为 m_i 的 n 个质点 $P_i(x_i)$ 的质点组, 受到恢复力 $f_i(x_i)$ 和耗散力(阻尼) $\lambda_i(\frac{\dot{x}_i}{m_i})$ 的作用外, 还受到与其他质点有关的作用力

$\sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k)$ 之下的运动方程. 我们讨论它零解的稳定性.

解 按照取能量函数作 V 函数的方法, 我们取广义能量函数.

$$V(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} f_i(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \int_0^{x_i - x_k} \varphi_{ik}(\xi) d\xi$$

沿系统(8.13)计算 $\dot{V}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i) m_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) (m_i y_i - m_k y_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n m_i y_i \left[-\lambda_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) \right], \end{aligned}$$

但由条件(iii), 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) (m_i y_i - m_k y_k) \\ &= \sum_{i < k} \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) (m_i y_i - m_k y_k) \\ &= \sum_{i < k} \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) m_i y_i + \sum_{i < k} \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) m_k y_k \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x_i - x_k) m_i y_i. \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{dV}{dt} = - \sum_{i=1}^n m_i y_i \lambda(y_i) \leq 0, \quad (\text{条件(ii)})$$

但使上式等于零的 $y_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 上, 除平衡点外无系统整条的半轨, 故在上述假设下系统的零解是渐近稳定的.

五、变量分离型 V 函数的构造思路

考虑方程

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + g(\dot{x})f(x) = 0,$$

或等价的系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(y)f(x) - \varphi(y),$$

其中 $f(0)=\varphi(0)=0$.

试作变量分离型的 V 函数

$$V(x, y) = F(x) + \Phi(y),$$

则有

$$\frac{dV}{dt} = F'(x)y - \Phi'(y)[g(y)f(x) + \varphi(y)],$$

我们令

$$F'(x)y - \Phi'(y)g(y)f(x) = 0,$$

即

$$\frac{F'(x)}{f(x)} = \frac{\Phi'(y)g(y)}{y}.$$

这达到了变量分离的目的:左边为 x 的函数,而右边为 y 的函数,只有两边都等于同一个常数,等式才可能成立. 最简单的令此常数为 1, 即得

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \quad \Phi(y) = \int_0^y \frac{y}{g(y)}dy.$$

故确定出

$$V(x, y) = \int_0^x f(x)dx + \int_0^y \frac{y}{g(y)}dy,$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{y\varphi(y)}{g(y)}.$$

因此,在 $f(x), g(y), \varphi(y)$ 均连续情况下,若

$$(i) \quad xf(x) > 0 \quad (x \neq 0), g(y) > 0;$$

$$(ii) \quad y\varphi(y) > 0 \quad (y \neq 0);$$

$$(iii) \quad \int_0^x f(x)dx \rightarrow +\infty \quad (|x| \rightarrow \infty \text{ 时}), \int_0^y \frac{y}{g(y)}dy \rightarrow +\infty \quad (|y| \rightarrow \infty \text{ 时})$$

时, 保证 $V(x, y)$ 正定无限大, $\frac{dV}{dt} \leq 0$ ($y=0$ 上除平衡点外无整条半轨), 这样的 V 判定了系统零解是全局渐近稳定的.

例 8.11 讨论系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -a \sin 2x - (1 + bz) \sin x, \\ \dot{z} &= -cz + by \sin x \end{aligned}$$

零解的稳定性.

解 设 $V(x, y, z) = F(x) + G(y) + H(z)$,

它沿系统的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = F'(x)y - G'(y)[a \sin 2x + (1 + bz) \sin x] + H'(z)[-cz + b \sin x]$$

为凑出 $\frac{dV}{dt}$ 定号或常号, 同时兼顾 $F'(x), G'(y), H'(z)$ 都只与自己的一个变量有关, 我们令

$$F'(x) = a \sin 2x + \sin x,$$

$$G'(y) = y, \quad H'(z) = z.$$

这样就有

$$V(x, y, z) = 1 - \cos x + \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

$$\frac{dV}{dt} = -cz^2.$$

当 $a > 0$ 和 $c > 0$ 时, $V(x, y, z)$ 在 $O(0, 0, 0)$ 的足够小的邻域内正定[其常数 $1 + \frac{a}{2}$ 是为 V 正定而取的 $F(x)$ 的积分常数], $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (使它等于零的 $z=0$ 上除平衡点外不含系统整条半轨), 故系统零解渐近稳定.

六、利用梯度概念来构造 V 函数

对非线性自治系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

若存在 V 函数 $V(\mathbf{x})$, 则沿系统的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \equiv (\text{grad} V(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

$\text{grad} V(\mathbf{x})$ 是纯量函数 $V(\mathbf{x})$ 的梯度, 是个向量

$$\text{grad} V(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T.$$

若令 $\text{grad} V(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x})$, 则必有

$$\text{rot} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \text{rot}(\text{grad} V(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

止式成立的充要条件是

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j. \quad (8.14)$$

这样, 我们归纳出下面的构造 V 函数的步骤:

(1) 利用这个充要条件先从 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的待定形式(常取线性形式)中确定某些

系数;

(2) 再从要求 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ (或 < 0), 又定出某些系数或关系式;

(3) 最后由式 (8.14) 保证的线积分与路径无关性, 知

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} g_1(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, x_2, 0, \dots, 0) dx_2 + \dots \\ + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n,$$

来求出所要的 V 函数, 这个过程可能需要反复调整.

例 8.12 考虑系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -kx^3 - y \quad (*)$$

零解的稳定性.

解 取特定的 $g(x, y)$ 为

$$g_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y,$$

$$g_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y.$$

由 $n=2$ 时的条件 (8.14)

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x},$$

推出 $a_{12} = a_{21}$, 为简单计, 取为

$$a_{12} = a_{21} = 1.$$

这样有

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(*)} = \mathbf{g}(x, y)^T \cdot \mathbf{f}(x, y) = (a_{11}x + y)y + (x + a_{22}y)(-kx^3 - y) \\ = (a_{11} - 1 - ka_{22}x^2)xy + (1 - a_{22})y^2 - kx^4.$$

为了使 $\mathbf{g}(x, y)^T \cdot \mathbf{f}(x, y) < 0$, 最简单的, 可取

$$a_{11} - 1 - ka_{22}x^2 = 0, \quad a_{22} = 2, \quad k > 0.$$

即有

$$a_{11} = 1 + 2kx^2, \quad a_{22} = 2, \quad k > 0.$$

则得

$$\mathbf{g}(x, y) = (x + 2kx^3, x + 2y)^T.$$

这样

$$V(x, y) = \int_0^x g_1(x, 0) dx + \int_0^y g_2(x, y) dy \\ = \int_0^x (x + 2kx^3) dx + \int_0^y (x + 2y) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{2}x^4 + xy + y^2 \\
 &= \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^4.
 \end{aligned}$$

而沿系统的

$$\frac{dV}{dt} = -y^2 - kx^4.$$

在 $k > 0$ 时, $V(x, y)$ 是正定无限大的, $\frac{dV}{dt}$ 是负定的, 这时系统的零解是全局渐近稳定的.

第二节 几个应用实例

一、非线性控制系统的绝对稳定性

在现代科技(例如飞机的控制)中, 提出了一类非线性控制系统

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\sigma)\mathbf{b}, \\
 \frac{d\xi}{dt} &= \varphi(\sigma), \sigma = \mathbf{e}^T \mathbf{x} - \gamma \xi,
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 是常数矩阵, $\mathbf{x}$ 是 n 维向量, 是系统的状态变量; ξ 是一维控制变量, $\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\sigma)$ 是控制机构忽略了加速度和恢复力后的简化运动方程, $\varphi(\sigma)$ 反映了控制机构的非线性特征, 通过 $\varphi(\sigma)\mathbf{b}$ 控制着系统的运动; $\mathbf{b}, \mathbf{e}$ 是 n 维向量, 它们的分量及纯量 γ 都是可调的控制参数.

$\varphi(\sigma)$ 有非线性特征:

(i) 连续, $\sigma\varphi(\sigma) > 0 (\sigma \neq 0)$;

(ii) $\Phi(\sigma) \equiv \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma \rightarrow +\infty$ (当 $|\sigma| \rightarrow \infty$). (8.16)

问题 对满足式(8.16)的任何 $\varphi(\sigma)$, 在什么条件下, 控制系统(8.15)的零解是全局渐近稳定的. 这样的稳定性称为系统(8.15)是**绝对稳定的**.

为了对控制系统(8.15)有一个初步的了解, 我们先看下例.

例 8.13 液压装置控制机构的一个自由度的运动系统是

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 3 \frac{dz}{dt} + 2z = \frac{1}{4} \xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\sigma), \sigma = 2z + k \frac{dz}{dt} - \xi.$$

系统运动方程中有控制力 $\frac{1}{4}\xi$ 起作用, 它受控制变量 ξ 的运动方程 $\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\sigma)$ 的制约; $\varphi(\sigma)$ 是控制作用函数, 它通过系统运动变量 z 和速度分量 $\frac{dz}{dt}$ 及控制变量 ξ 的线性组合 σ 起作用, 且满足条件 (8.16); σ 中的 $2, k, -1$ 是控制机构的调节参数.

我们作变换

$$y_1 = z, \quad y_2 = \frac{dz}{dt},$$

将上系统化为

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -2y_1 - 3y_2 + \frac{1}{4}\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \varphi(\sigma), \sigma = 2y_1 + ky_2 - \xi. \end{aligned}$$

再令

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = -2y_1 - 3y_2 + \frac{1}{4}\xi,$$

进一步将上面系统化为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 - 3x_2 + \frac{1}{4}\varphi(\sigma), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \varphi(\sigma), \sigma = (k-3)x_1 - x_2 - \frac{3}{4}\xi, \end{aligned} \quad (8.17)$$

从而化成了具有式 (8.15) 形式的系统, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} k-3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{3}{4}.$$

下面再回到对控制系统 (8.15) 的讨论, 注意到

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{e}^T \mathbf{x} - \gamma \xi) = \mathbf{e}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \varphi(\sigma) \mathbf{b}) - \gamma \frac{d\xi}{dt} \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + (\mathbf{e}^T \mathbf{b} - \gamma) \varphi(\sigma), \end{aligned}$$

可以把式(8.15)写成

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + \varphi(\sigma)b, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= e^T A x + \rho\varphi(\sigma), \sigma = e^T x - \gamma \xi,\end{aligned}\quad (8.18)$$

其中 $\rho = e^T b - \gamma$ 是只与各控制参数有关的纯量. 这时, 问题化为: 讨论 $n+1$ 个变量 x, σ 的系统(8.18), 对满足条件(8.16)的任意函数 $\varphi(\sigma)$, 它的零解 $x=0, \sigma=0$ 的全局渐近稳定性.

定理 8.1 对系统(8.18), 设矩阵 A 稳定, 且 $\gamma > 0$; 对一个负定的对称矩阵 C , 由

$$A^T B + BA = C \quad (8.19)$$

确定的对称矩阵 B , 满足条件

$$\rho < d^T C^{-1} d,$$

其中 $d = Bb + \frac{1}{2}A^T e$. 则系统(8.18) [(8.15)] 是绝对稳定的.

证明 A 稳定时, 按定理中所述确定的 B 是正定对称的, 即 $x^T B x$ 是正定的二次型.

作 V 函数

$$V(x, \sigma) = x^T B x + \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma \equiv x^T B x + \Phi(\sigma), \quad (8.20)$$

由 $\varphi(\sigma)$ 满足条件(8.16)知,

$$\Phi(\sigma) > 0 (\sigma \neq 0), \quad \Phi(\sigma) \rightarrow +\infty (|\sigma| \rightarrow \infty),$$

从而 V 正定, 且 $V(x, \sigma) \rightarrow +\infty$, 当 $\|x\| + |\sigma| \rightarrow \infty$ 时, 即 V 是无穷大正定函数.

$$\begin{aligned}\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8.18)} &= \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^T B x + x^T B \frac{dx}{dt} + \varphi(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} \right]_{(8.18)} \\ &= x^T (A^T B + BA) x + 2b^T B x \varphi(\sigma) \\ &\quad + \varphi(\sigma) (e^T A x + \rho\varphi(\sigma)) \\ &= x^T C x + 2(b^T B + \frac{1}{2}e^T A) x \varphi(\sigma) + \rho\varphi^2(\sigma) \\ &= x^T C x + 2d^T x \varphi(\sigma) + \rho\varphi^2(\sigma).\end{aligned}$$

其中 $d = Bb + \frac{1}{2}A^T e$. 这是 $x, \varphi(\sigma)$ 的二次型. 为确定它的定号性, 可将它改写为

$$\frac{dV}{dt} = (\mathbf{x}^T + \mathbf{d}^T \mathbf{C}^{-1} \varphi(\sigma)) \mathbf{C}(\mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} \varphi(\sigma)) + (\rho - \mathbf{d}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}) \varphi^2(\sigma).$$

因 $\mathbf{C}$ 是对称负定矩阵, 故上式负定的充要条件是

$$\rho < \mathbf{d}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}.$$

定理证毕.

下面我们用定理 8.1 来讨论例 8.13 中控制系统(8.17)的绝对稳定性问题, 看看为使其绝对稳定, 应如何调节参数 k .

首先像定理中一样, 把系统(8.17)改写成式(8.18)型.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2 + \frac{1}{4}\varphi(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2x_1 + kx_2 - \varphi(\sigma), \sigma = (k-3)x_1 - x_2 - \frac{3}{4}\xi.$$

这时对应式(8.18)中的

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} k-3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{3}{4}, \quad \rho = -1.$$

$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 是稳定的. 若取对称负定的

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

按式(8.19)求出对称正定的

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

按照定理 8.1, 作 V 函数(8.20), 要系统绝对稳定, 充分地使条件 $\rho < \mathbf{d}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}$ 成立.

我们计算 $\mathbf{d}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{B}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k-3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{k}{2} + \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

计算

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

代入 $\rho < \mathbf{d}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}$ 中,得

$$-1 < -\frac{1}{4} \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{8}\right)^2,$$

或

$$\left(k + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4}\right) \left(k + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{39}}{4}\right) < 0.$$

故得结论:当调节参数 k 满足

$$-\frac{\sqrt{39}+1}{4} < k < \frac{\sqrt{39}-1}{4}$$

时,系统(8.17)是绝对稳定的.

注 k 的范围的确定是依赖于 $\mathbf{C}$ 的选取的,例如, $\mathbf{C}$ 改取为 $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 时, k 的可调节范围将缩小成

$$k < \frac{3\sqrt{94}-4}{24}.$$

这也反映了所作 V 函数的质量.

二、Hopfield 型神经网络的稳定性^[3~7]

20 世纪 80 年代,美国生物物理学家 Hopfield 提出了连续型的人工神经网络模型^[3~6]

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} V_j + I_i, \quad (8.21)$$

$$V_i = g_i(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $u_i(t)$ 表示第 i 个神经元的状态(输入); T_{ij} 表示第 i 个神经元与第 j 个神经元的连接权值,模拟神经元之间互连的突触特征,一般假设突触连接是对称的,即 $T_{ij} = T_{ji}$; $V_i(t) = g_i(u_i(t))$ 表示以运算放大器模拟的神经元的非线性

特征,它是状态与输出 V_i 之间的一个单调上升的 S 形有界函数;电流 I_i 代表外界的刺激;电阻 R_i 和电容 C_i 是常数.

显然,系统(8.21)的平衡点集为

$$\Omega \equiv \left\{ \mathbf{u} \left| \frac{u_i}{R_i} = \sum_{j=1}^n T_{ij} V_j + I_i, i = 1, 2, \dots, n \right. \right\}. \quad (8.22)$$

令 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ 为任意一点,

$$\rho(\mathbf{u}, \Omega) = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \}$$

表示点 $\mathbf{u}$ 到 Ω 的距离.

定义 8.1 称系统(8.21)的平衡点集 Ω 是吸引的. 如果 $\forall k > 0, \forall \mathbf{u}_0 \in S_k = \{\mathbf{u}; \|\mathbf{u}\| \leq k\}$, 过初始值 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ 的系统(8.21)的解 $\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0)$ 满足

$$\rho(\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0), \Omega) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

定义 8.2 若集合 Ω 对系统(8.21)的所有解都是吸引的, 则称神经网络为 **Hopfield 意义下稳定的**, 简称为 **H 稳定**.

这种稳定性的定义是符合神经网络的实际的: 任何给定的一个输入, 都会迅速地稳定到网络中的某个平衡位置, 有一个确定的输出结果.

下面, 我们首先用上节介绍的梯度法, 构造出判定 H 稳定中需要的能量函数.

设能量函数为 $E(\mathbf{V})$, 则它沿系统(8.21)的导数为

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{(8.21)} = (\text{grad} E)^T \cdot \mathbf{f},$$

其中 $\mathbf{f}$ 表式(8.21)的右端向量. 若令

$$\text{grad} E = -\mathbf{f},$$

则

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{(8.21)} = - \sum_{i=1}^n f_i^2 \leq 0, \quad (8.23)$$

且等号仅当 $f_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时成立. 因有

$$\frac{\partial f_i}{\partial V_j} = T_{ij} = T_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial V_i},$$

即广义旋度条件成立, 从而由式(8.23)求 $E(\mathbf{V})$ 时, 可以与积分路径无关. 即

$$\begin{aligned} E(\mathbf{V}) &= - \int_0^{V_1} f_1(\xi_1, 0, \dots, 0) d\xi_1 - \int_0^{V_2} f_2(V_1, \xi_2, 0, \dots, 0) d\xi_2 \\ &\quad - \dots - \int_0^{V_n} f_n(V_1, \dots, V_{n-1}, \xi_n) d\xi_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \int_0^{V_i} g_i^{-1}(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} V_i V_j - \sum_{i=1}^n I_i V_i \end{aligned} \quad (8.24)$$

其中 $g_i^{-1}(V_i)$ 表 $V_i = g_i(u_i)$ 的反函数.

我们将它沿式(8.21)求导,有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE}{dt} \right|_{(8.21)} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{u_i}{R_i} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n T_{ij} V_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n T_{ji} V_j - I_i \right] \frac{dV_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (T_{ji} - T_{ij}) V_j - \left(\sum_{j=1}^n T_{ij} V_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i \right) \right] \frac{dV_i}{dt} \\ &= - \sum_{i=1}^n C_i \frac{du_i}{dt} \frac{dV_i}{dt} = - \sum_{i=1}^n C_i \frac{d}{dV_i} g_i^{-1}(V_i) \left(\frac{dV_i}{dt} \right)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

等号当且仅当 $\frac{dV_i}{dt} = 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时成立, 这等价于

$$-\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} V_j + I_i = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

即 $u \in \Omega$. 这说明系统(8.21)是 H 稳定的. 可写成如下定理

定理 8.2 若神经元间的突触连接是对称的, 即 $T_{ij} = T_{ji}$, 非线性特征函数 $g_i(u_i)$ 是单调递增的, 则系统(8.21)是 H 稳定的.

我们还可证明

定理 8.3^[7] 若 $|g_i(u_i)| \leq K_i (i=1, 2, \dots, n; K_i \text{ 为一些常数})$, 则式(8.21)是一个耗散系统, 所有的解最终要进入紧集

$$\begin{aligned} D \equiv & \left\{ u \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[|u_i| - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right) \right]^2 \right. \right. \\ & \left. \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

内, 特别从 $u_0 \in D$ 出发的解恒停留在 D 内.

证明 取函数

$$W(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i u_i^2,$$

沿系统(8.21)的

$$\begin{aligned} \left. \frac{dW}{dt} \right|_{(8.21)} &= \sum_{j=1}^n C_j u_j \frac{du_j}{dt} = \sum_{i=1}^n u_i \left[-\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} g_j(u_j) + I_i \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[-\frac{u_i^2}{R_i} + \sum_{j=1}^n K_j |T_{ij}| |u_i| + |I_i| |u_i| \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{R_i} \left[u_i^2 - \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i |u_i| + |I_i| |u_i| R_i \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4R_i} \left[\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right]^2 \\
& + \frac{1}{R_i} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right) \right]^2 \Big\} \\
& = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[|u_i| - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right) \right]^2 \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right) \right]^2.
\end{aligned}$$

于是当 $u \in R^n/D$ 时, 即

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[|u_i| - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right) \right]^2 \\
& > \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}| K_j R_i + |I_i| R_i \right) \right]^2
\end{aligned}$$

时, 有

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{(8.21)} < 0.$$

结论得证.

定理 8.4^[8] 设 $u = u^*$ 是系统 (8.21) 的一个孤立平衡位置, 若

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_{v=v^*} = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V_i \partial V_j} \right)_{v=v^*}$$

正定, 则系统 (8.21) 的平衡位置 $u = u^*$ 是 Liapunov 意义下渐近稳定的. 其中

$$V^* = (V_1^*, \dots, V_n^*), V_i^* = g_i(u_i^*), i = 1, 2, \dots, n.$$

证 令

$$\begin{aligned}
E^*(V) & \equiv E(V) - E(V^*) \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} V_i V_j + \sum_{i=1}^n \int_{V_i^*}^{V_i} \frac{g_i^{-1}(\xi)}{R_i} d\xi \\
& \quad - \sum_{i=1}^n I_i (V_i - V_i^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} V_i^* V_j^*.
\end{aligned}$$

显然有

$$E^*(V^*) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial E^*}{\partial V_i} \right|_{v=v^*} = \left. \frac{\partial E}{\partial V_i} \right|_{v=v^*}$$

$$= -\sum_{j=1}^n T_{ij} V_j^* + \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(V_i^*) - I_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 E^*}{\partial V_i^2} \right|_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^*} &= \left. \frac{\partial^2 E}{\partial V_i^2} \right|_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^*} \\
&= -T_{ij} + \frac{1}{R_i} (g_i^{-1})'(V_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
\left. \frac{\partial^2 E^*}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^*} &= \left. \frac{\partial^2 E}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^*} = -T_{ji} \\
&= \left. \frac{\partial^2 E}{\partial V_j \partial V_i} \right|_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^*} = \left. \frac{\partial^2 E^*}{\partial V_j \partial V_i} \right|_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^*}, \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

因为 $\left[\frac{\partial^2 E^*}{\partial \mathbf{V}^2} \right]_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^*}$ 正定, 由多元函数的 $\mathbf{V}=\mathbf{V}^*$ 达到极小值的判别法可知, $E^*(\mathbf{V})$ 在 $\mathbf{V}=\mathbf{V}^*$ 的充分小领域内是正定的.

沿系统(8.21)对 $E^*(\mathbf{V})$ 求导, 则 $C_i > 0, g_i^{-1}(V_i) > 0$, 知

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dE^*}{dt} \right|_{(8.21)} &= \sum_{i=1}^n \left[- \sum_{j=1}^n T_{ij} V_j + \frac{g_i^{-1}(V_i)}{R_i} - I_i \right] \frac{dV_i}{dt} \\
&= - \sum_{i=1}^n C_i g_i^{-1}(V_i) \left[\frac{dV_i}{dt} \right]^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

其中等号当且仅当 $\mathbf{V}=\mathbf{V}^*$ 时成立, 即它在 $\mathbf{V}=\mathbf{V}^*$ ($u=u^*$) 的某邻域内负定. 由渐近稳定的基本定理知, 平衡位置 $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*$ 是 Liapunov 意义下渐近稳定的.

三、商品市场的平衡

市场的供求关系是一个非常复杂的问题, 它受到许多因素的制约和影响. 这里, 我们假定市场仅受自由竞争规律的制约, 来讨论商品市场平衡问题.

在自由竞争的市场中, 一个时期由于某种商品过剩, 可引起该商品价格下跌, 生家厂家为了避免利润过多就减少生产; 过一段时间该商品又会供不应求, 而导致价格上涨, 这又吸引更多的厂家竞相增加生产以赚取高额利润, 从而再导致过剩, 如此循环. 人们关心的是, 这样的循环继续下去, 商品的数量和价格的波动是会越来越小而趋于平衡, 还是波动会永远持续下去, 甚至会越来越大呢?

我们用 x 表商品的单价, $\varphi(x)$ 表相应的需求函数, $\psi(x)$ 表供应函数, $x, \varphi, \psi \in R_+^n$, 即都是 n 维向量, 且 $x, \varphi, \psi \geq 0$. 我们规定 $\varphi \geq \psi$ 表 $\varphi_i \geq \psi_i$, 对一切 $i = 1, 2, \dots, n$, 且其中至少有一个不等式是严格的. 函数 φ 和 ψ 有性质: $x < y$ 时, 有

$$\varphi(x) \geq \varphi(y), \quad \psi(x) \leq \psi(y).$$

前者表示价格高时, 需求少; 后者表示价格高时, 生产厂家提供多.

引入需超函数

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \quad f \in \mathbf{R}^n.$$

市场对商品有正的需超($f(x) > 0$, 即供不应求)时, 价格 x 将上升, 且 $f(x)$ 大时 x 上升快; 当市场有负的需超($f(x) < 0$, 即供过于求)时, 价格 x 将下降. 这可以 $\frac{dx}{dt}$ 与 $f(x)$ 成正比来描述, 表示为

$$\frac{dx}{dt} = \lambda f(x),$$

其中 $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 于是均衡价格 $\tilde{x}$ 是方程组

$$f_i(x) \equiv \varphi_i(x) - \psi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

的解, 而价格调整过程就以微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.25)$$

$\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 来描述. 因而讨论价格调整过程的稳定性, 就成为研究微分方程组(8.25)的平衡解 $x = \tilde{x}$ 的稳定性问题了.

下面以 $n=3$ 为例来研究此问题.

定理 8.5 设 $n=3$ 时系统(8.25)满足

(i) $x_i > 0, i = 1, 2, 3$;

(ii) $\exists \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ 使 $f_i(\tilde{x}) = 0, i = 1, 2, 3$;

(iii) $\forall \tau > 0$, 有 $f_i(\tau x) = f_i(x), i = 1, 2, 3$ (需超函数不依赖于价格比);

(iv) $\forall x > 0$, 有 $\sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i(x) = 0$;

(v) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ (后两条件是 Walras 法则).

则系统(8.25)₃ 的平衡解 $x = \tilde{x}$ 是全局渐近稳定的.

证明 由条件(iv)知, 当 $f_1(x) = f_2(x) = 0$ 时, 必有 $f_3(x) = 0$. 这意味着, 当第一、第二种商品达到市场均衡时, 第三种商品的市场自动地达到均衡. 这样, 我们只要考虑前两种商品的市场均衡问题就够了; 同时, 不妨把第三种商品的价格 x_3 作基价, 且令 $x_3 = 1$ (价格规范化). 这时, 我们的问题化为, 考虑

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 f_1(x_1, x_2, 1) \equiv \bar{f}_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_2 f_2(x_1, x_2, 1) \equiv \bar{f}_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (8.26)$$

的解 $\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_0 \in R_+^2$, 是否收敛于均衡价格 $\tilde{\mathbf{x}}$ 即可.

注意到, 由条件(III)的(零次)齐次性及齐次函数的欧拉公式知, $\forall \mathbf{x}$ 有

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_k} x_k = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

再由条件(V)和(I)及上式, $\forall \mathbf{x}$ 可得

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.27)$$

(我们这里只用到 $\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} < 0, \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_2} < 0$).

在 $x_1 - x_2$ 坐标平面上, 考虑曲线

$$l_1: \bar{f}(x_1, x_2) = 0.$$

由全微分

$$\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

得

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} / \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} > 0$$

[条件(V)及式(8.27)], 说明曲线 l_1 是向上倾斜的; 类似地, 可知曲线 $l_2: \bar{f}_2(x_1, x_2) = 0$ 也是向上倾斜的(图 8-1).

曲线 l_1 和 l_2 把第一象限划分成四个部分, 考虑每个部分中 $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ 的符号: 因 $\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} > 0$, 所以 l_1 的左边 $\bar{f}_1 > 0$; $\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_1} > 0$, 所以 l_2 的右边 $\bar{f}_2 > 0$. 这样, 我

们确定了这四个部分的每个部分中, 水平分量 $\frac{dx_1}{dt}$, 垂直分量 $\frac{dx_2}{dt}$ 的符号, 从而定出了如图 8-1 所示的向量场的分布.

我们如能证明: 曲线 l_1 与 l_2 只有一个交点 $\tilde{\mathbf{x}}$ (即均衡价格是唯一的), 且只能是图 8-1 所示, l_2 从左边过来与 l_1 相交. 这时, 由向量场的分布显然 $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ 是全局渐近稳定的.

若不然, 设有一个交点 $x^*(x_1^*, x_2^*)$, 使

$$\bar{f}_1(x_1^*, x_2^*) = \bar{f}_2(x_1^*, x_2^*) = 0.$$

它是曲线 l_1 从左边过来与曲线 l_2 相交的(图 8-2). 则不论它是 l_1 和 l_2 的唯一交点或是除 $\tilde{\mathbf{x}}$ 外的第二个交点, 我们都将导出矛盾.

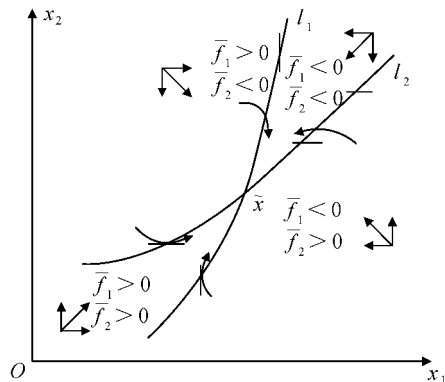


图 8-1

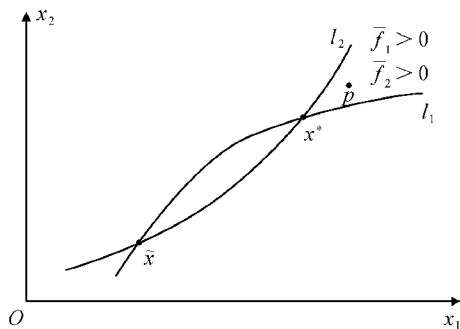


图 8-2

这时将存在图 8-2 中所示的 $P(x_{1p}, x_{2p})$ 点, 有

$$x_{1p} > x_1^*, \quad x_{2p} > x_2^*, \quad (8.28)$$

且

$$\begin{aligned} f_1(x_{1p}, x_{2p}, 1) &= \bar{f}_1(x_{1p}, x_{2p}) > 0, \\ f_2(x_{1p}, x_{2p}, 1) &= \bar{f}_2(x_{1p}, x_{2p}) > 0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

另由条件(iv)知, $f_1(x_1^*, x_2^*, 1) = f_2(x_1^*, x_2^*, 1) = 0$ 时

$$f_3(x_1^*, x_2^*, 1) = 0, \quad (8.30)$$

而全微分

$$df_3(x_1, x_2, 1) = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2.$$

由条件(v)及由点 x^* 进入点 P 所在的区域 S 时, $dx_1 > 0, dx_2 > 0$, 知

$$df_3(x_1, x_2, 1) > 0. \quad (8.31)$$

这样, 结合式(8.30), 式(8.31), 式(8.28), 可得

$$f_3(x_{1p}, x_{2p}, 1) > 0.$$

而这个结果和式(8.29)一起是与条件(iv)矛盾的. 证毕.

补充与问题

1. Barlbashin 公式

利用 barlbashin 公式来构造常系数线性系统的 Liapunov 函数 $V(x)$ 实际上是一个确定的计算过程, 这可以借助于 Maple 软件来实现. 下面是 $n=2$ 和 $n=3$ 时计算 $V(x)$ 的 Maple 子程序, 来自于文献[9]:

(1) $n=2$ 的子程序

```
f2:=proc(a11,a12,a21,a22,w11,w12,w22)
local delta,A,V;
with(linalg):
delta:=(a11+a22)*(a11*a22-a12*a21);
A:=matrix(4,4,
[0,X1^2,2*X1*X2,X2^2,
W11,a11,a21,0,
2*W12,a12,a11+a22,a21,
W22,0,a12,a22]);
V:=-det(A)/delta;
end;
```

其中参数 $a11,a22,a21,a22$ 为系统矩阵 A 的元素, $w11,w12,w22$ 为所选的 $w(x_1,x_2)$ 中的系数.

(2) $n=3$ 的子程序

```
f3:=proc(a11,a12,a13,a21,a22,a23,
a31,a32,a33,w11,w12,w13,w22,w23,w33)
local delta,A,B,V;
with(linalg):
A:=matrix(6,6,
[a11,a21,a31,0,0,0,
a12,a11+a22,a32,a21,a31,0,
a13,a23,a11+a33,0,a21,a31,
0,a12,0,a22,a32,0,
0,a13,a12,a23,a22+a33,a32,
0,0,a13,0,a23,a33]);
delta:=det(A);
B:=matrix(7,7,
[0,X1^2,2*X1*X2,2*X1*X3,X2^2,2*X2*X3,X3^2,
w11,a11,a21,a31,0,0,0,
2*W12,a12,a11+a22,a32,a21,a31,0,
2*W13,a13,a23,a11+a33,0,a21,a31,
w22,0,a12,0,a22,a32,0,
2*W23,0,a13,a12,a23,a22+a33,a32,
w33,0,0,a13,0,a23,a33]);
V:=-det(B)/delta;
```

end;

2. Лурье 问题

绝对稳定性最早是由前苏联学者 Лурье 和 Постников 于 1944 年提出来的^[10]. 他们从许多实际控制系统出发,特别是飞机自动驾驶仪的 Булгаков 问题^[11,12],先将系统的非线性部分孤立出来,视为反馈控制,使系统具有闭环控制系统形式,并提出著名的 Лурье 问题. 正如美国著名数学家 Lefschitz 的专著^[13]提到的:所谓 Лурье 问题,其本质就是寻找系统(8.15)绝对稳定的充要条件. 到目前为止,围绕这个问题进行研究的专著多本,论文数百篇. 其中最具代表的要数罗马尼亚数学家 V. M. Popov 给出的频率判据^[14].

Айзерман 在 A, b, e 的参数空间中定义集合 M ,他认为寻找系统(8.15)的零解绝对稳定的充要条件等价于把 $M \subset \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 找出来,使 $A, b, e \in M$,系统(8.15)的零解绝对稳定,他认为这个问题至今仍未解决. 显然,若按他的提法这个问题能够解决当然是很理想的,但现在已有的绝对稳定的较一般充分条件对应的 M 是一个怎样的集合尚不清楚,何况充要条件呢? 因此,我们认为任何有助于推动 Лурье 问题的研究的方法都是有意义的.

3. 人工神经网络模型

人工神经网络模型的研究最初始于 1943 年由 McCulloch 和 Pitts 发表的研究论文. 但在 20 世纪 60 年代末期到 20 世纪 70 年代曾经有过一段低迷. 再次带来人工神经网络模型兴盛的是 J. Hopfield 于 1982 年和 1984 年发表的两篇论文^[3,4]. 至今,人们已建立了许多具备不同信息处理能力的人工神经网络模型. 本章所介绍的仅是其中最典型最富有代表性的 Hopfield 连续型神经网络模型. 我们首先给出了 Hopfield 意义下的稳定性的一个严格的数学定义,把它和某集合吸引的概念建立了联系,然后我们指出了当神经元间的突触连接是对称的(即 $T_{ij} = T_{ji}$),非线性特征函数是单调递增时, Hopfield 模型是 H 稳定的. 事实上,我们通过构造一个广义的 Hopfield 型计算能量函数可以给出更加一般的能判定一类权矩阵为非对称的神经网络系统的 Hopfield 稳定性的结果.

定理^[15] 若存在常数 $\beta_i (i=1, 2, \dots, n)$,使得 $(\beta_i T_{ij})_{n \times n}$ 为一对称矩阵,则系统(8.21)的平衡点集 Ω 是吸引的. 即系统(8.21)是 H 稳定的.

详细的证明参见文献[7]. 显然在上述定理中,如果取 $\beta_i = 1 (i=1, 2, \dots, n)$,则得到我们在本章已经给出的定理 8.2.

关于神经网络模型还有一项十分有意义的研究工作,便是讨论模型的全局指数稳定性和吸引区域的估计,有兴趣的读者可参阅文献[7].

参考文献

- [1] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用. 武汉:华中理工大学出版社,1999
- [2] 贺建勋,王志成. 常微分方程(下). 长沙:湖南科学技术出版社,1981
- [3] Hopfield JJ. Neural networks and physical systems with emergent collective computational ability. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 1982,79:2554~2558

- [4] Hopfield JJ. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. ,1984,81:3088~3092
- [5] Hopfield JJ and Tank DW. Neural computation of decisions optimization problems, Biol Cybern,1985,52:141~152
- [6] Hopfield JJ and Tank DW. Computing with neural circuits model. Science,1986,233:3088~3092
- [7] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用. 北京:国防工业出版社,2000
- [8] 廖晓昕,吴新余. 关于非线性 CAM 神经网络的稳定性分析. 南京邮电学院学报,1993,13(2)
- [9] 马知恩,周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法. 北京:科学出版社,2001
- [10] Лурье А. И., Постников В. Н. , К Теории устойчивости регулируемых систем ПММ, 1944,8(3):246~248
- [11] Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат,1951
- [12] Лурье АМ. 李惠译. 北京:科学出版社,1959
- [13] Lefschitz S. Stability of Nonlinear Control Systems. Academic Press, New York-London,1965
- [14] R. Reissing, G. Sansone, R. Conti. Nonlinear differential equations of higher order nwdrho. Internatinal publishing legder,1974
- [15] 杨叔子,廖晓昕,史铁林,等. 人工神经网络有关理论与应用的研究. 1997 年中国神经计算科学大会论文集(一). 北京:人民邮电出版社,1997:25~30