高等数学
思想方法与解题研究

主　编　郭晓时
副主编　李英英　赵　晶
李晓华　徐兴艾

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是以教育部编写的《高等数学教学基本要求》为依据，与同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版、第五版教材同步的高等数学辅导书. 每章均对基础知识作了归纳、剖析、释疑解惑，对典型例题的解题思路作了分析，对解题方法作了归纳，有助于读者对知识的理解与提高解题能力.

本书可以作为大学一年级学生学习高等数学的参考书，也可以作为高等数学习题课教材，同时还可以供报考硕士研究生的读者作为复习高等数学的参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学思想方法与解题研究/郭晓时主编. —天津:天津大学出版社，2006.9

ISBN 7-5618-2354-1

Ⅰ.高... Ⅱ.郭... Ⅲ.高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 106892 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
短信网址 发送“天大”至 916088
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 148mm×210mm
印　　张 13
字　　数 387 千
版　　次 2006 年 9 月第 1 版
印　　次 2006 年 9 月第 1 次
印　　数 1 - 4 000
定　　价 20.00 元

前　　言

高等数学在理工科院校中是一门重要的基础课.它既为专业课和专业基础课奠定必要的数学基础,也对学生科学思维的形成起着重要作用.由于该课程内容多,学时有限,加之系统的严密逻辑性,知识的高度抽象性,使得学生在课堂上难以完全消化理解.为此,我们编写了这本参考书,旨在帮助学生深入理解课程的知识结构、重要概念、定理、公式、应用等基础知识及思想方法,掌握解题思路、方法与技巧,提高解题能力.

本书知识体系与同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第五版)相符,分为十二章,每章由四部分组成:一、本章知识的作用与意义,目的是使学生从整体上明确这章知识在高等数学体系中的地位、作用及应用价值;二、知识要点及思想方法,这部分内容对每章的主要知识进行了归纳总结、剖析说明,指出了应该注意的问题,有答疑解惑之功效;三、解题研究,这部分内容注重分析思路、归纳方法,可以帮助读者提高解题能力;四、练习题及答案,分为(A)、(B)两部分,难度适中,以备自测之用,并附有答案与提示.该书中标 * 的内容供对数学要求稍高的专业采用.最后附有近两年的全国硕士研究生入学统一考试高等数学部分试题与解答.

参加本书编写的有郭晓时、李晓华、陈成钢、熊春连、赵晶、闫晓红、徐兴艾、杜娟、杨丽萍、李英英、范鹰、刘昊旸、张华、张春英、肖盛宁、万诗敏、罗永平、许新胜等.全书由郭晓时统稿、主编.

本书在编写过程中参阅了近几年国内出版的部分相关教材与教学参考书,在此特向有关作者致谢.同时,本书的出版得到天津大学出版社的大力支持,特此致谢.

由于水平有限,难免有疏漏与不妥之处,恳请读者批评指正.

编者

2006 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

一、本章知识的作用与意义

本章讨论的是函数、极限、连续等基本概念以及它们的性质和运算.这些知识是高等数学的基础,同时也渗透着现代分析数学的基本思想.

高等数学的核心内容是微积分,函数是微积分研究的主要对象.极限是一个主要的基本概念.高等数学中许多重要概念,如导数、微分、积分等都是用极限定义的,微分、积分的很多定理、结论都建立在极限理论的基础上.极限理论是整个微积分理论的逻辑基础,极限的思想方法贯穿微积分的始终.连续是一大类函数的重要特征,连续函数是微积分研究的重点.

二、知识要点及思想方法

(一) 函数

1.定义

设数集 $D\subset R$(实数集),则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,通常记为 $y=f(x)$,$x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域.

注　①定义的含义是指对每个 $x\in D$,按照对应法则 f 总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$.严格地讲,函数 f 与函数值 $f(x)$ 是不同的,但习惯上不加区别,把 $y=f(x)$ 称为函数.

②确定函数的两个要素:定义域和对应法则 f 是函数概念最本质的特征.几个表达形式不同的函数是否为同一函数完全取决于这两个

要素.

③单值性是函数的一个重要特征.但像由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数,对一个 x 有两个值与之对应,所以称为多值函数,一般分为两个单值分支:$y=y_1(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ 与 $y=y_2(x)=-\sqrt{1^2-x^2}$.

2.几种特性

1)有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.若存在数 K_1,使得对任一 $x\in X$ 都有 $f(x)\leqslant K_1$,则称 $f(x)$ 在 X 上有上界.若存在数 K_2,使得对任一 $x\in X$ 都有 $f(x)\geqslant K_2$,则称 $f(x)$ 在 X 上有下界.若存在正数 M,使得对任一 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

不难看出,$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

注　①界 K_1,K_2,M 不唯一.

②函数 $f(x)$ 是否有界与 X 有关,如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界,但在 $[1,+\infty)$ 上有界.

2)单调性　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2,当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(或单调减少的).

3)奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于任一 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

注　若 $f(x)$ 为奇函数,且 $x=0\in D$,则由 $f(-0)=-f(0)$,必有 $f(0)=0$,这个结论在解题中很有用.

4)周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 都有 $x+l\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期,一般周期指最小正周期.

3.反函数、复合函数、初等函数

(1)反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,此映

射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

定义可以理解为:对每个 $y\in f(D)$,都有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有 $x=f^{-1}(y)$,习惯上用 x 表示自变量,记为 $y=f^{-1}(x)$.

注　①在同一坐标系中,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像为同一条曲线,而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

②若 $y=f(x)$ 是单调增加(或减少)的,则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,且反函数也是单调增加(或减少)的.

③关于反函数有结论:$f^{-1}[f(x)]=x$,$f[f^{-1}(x)]=x$.

(2) 复合函数

设函数 $f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 在 D 上有定义,且 $\varphi(x)\subset D_1$,则函数 $y=f[\varphi(x)]$,$x\in D$,称为由函数 $u=\varphi(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,定义域为 D,u 称为中间变量.

(3) 基本初等函数与初等函数

以下五类函数统称为基本初等函数:

幂函数:$y=x^{\mu}$ ($\mu\in R$,是常数);

指数函数:$y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$);

对数函数:$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$,特别当 $a=e$ 时,记为 $y=\ln x$);

三角函数:如 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$ 等;

反三角函数:如 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$ 等.

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

注　分段函数是一个函数,在其定义域的不同部分用不同的式子表示其对应规律.如果不能用一个统一的式子表示,则不能称为初等函数.

(二) 极限

1.概念

(1) 数列 $\{x_n\}$ 的极限

如果存在常数 a,对于任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得

当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称当 $n\to$　时,数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记作 $\lim\limits_{n\to} x_n = a$,或 $x_n \to a\ (n\to\ )$.

注　①定义中 ε 是任意给定的正数,是用来刻画 x_n 与常数 a 接近程度的. ε 具有任意性,这样才能由不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 刻画 x_n 无限接近 a ; ε 又是给定的,只有相对固定下来才有可能找到实实在在的正整数 N,当 $n>N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 得以验证.

②正整数 N 是用来刻画当 x_n 与 a 接近到某程度,即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 时,数列的项数 n 应大到什么程度.因此 N 与 ε 有关,一般来说, ε 越小, N 越大,但并不熄一.如果存在一个 N_1,当 $n>N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$,那么大于等于这个 N_1 的任何正整数都可以取作定义中的 N.

(2) 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1　如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,或称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 收敛于 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$.

注　① ε 的作用同数列极限中的 ε 一样. δ 是用来刻画 x 与 x_0 接近程度的,与数列极限定义中 N 的作用相同. δ 与 ε 有关,但不唯一.

② 极限 A 是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势,与函数在点 x_0 处有无定义无关,如有定义也与函数值 $f(x_0)$ 无关,因此定义中将点 x_0 排出 x 的取值范围之外: $|x-x_0|>0$.

③ 将定义 1 中 $0<|x-x_0|<\delta$ 改成 $0<x_0-x<\delta$ 或 $0<x-x_0<\delta$,则为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左、右极限的定义,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.这是两个独立的极限过程. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在且相等,即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$,是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件.

定义 2　如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 X,使当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当

$x \to$ 　时的极限,记作 $\lim\limits_{x \to} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A\ (x \to \quad)$.

注　①将定义 2 中 $|x| > X$ 改成 $x > X$ 或 $x < -X$,则为 $\lim\limits_{x \to +} f(x) = A$ 或 $\lim\limits_{x \to -} f(x) = A$ 的定义.

② $\lim\limits_{x \to +} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x \to -} f(x) = B$ 是两个独立的极限过程. A 与 B 没有必然的联系,但 $\lim\limits_{x \to +} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to -} f(x)$ 存在且相等可作为 $\lim\limits_{x \to} f(x)$ 存在的充分必要条件,此时 $\lim\limits_{x \to} f(x) = \lim\limits_{x \to +} f(x) = \lim\limits_{x \to -} f(x)$.

上述三个定义是用绝对值、不等式等反映数量关系的数学语言给出的,可以以此进行推理、计算,所以称为精确化定义.从直观来讲,上述三个极限又可表述为:当 n 趋于无穷时,$\{x_n\}$ 无限接近常数 a;当 x 无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A;当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A.这些都是描述性定义.

有人问,极限能达到吗?回答是,有时能达到,有时达不到,但可无限接近.尽管有时达不到,但作为变量的变化趋势,它是客观存在的一个确定数值,具有明显的数学特征 抽象性和确定性.正因为这样,有些确定的结果如运动质点在某时刻的瞬时速度,曲线围成的平面图形的面积等都可以看作(可近似代替它们的)变量变化的趋势,即用极限的思想去解决.极限的思想和方法可以说是微积分的灵魂和基础.

2.性质

1)唯一性　若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \quad)}} f(x)$ 存在,则极限唯一.

2)有界性　若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \quad)}} f(x) = A$,则存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0\ (X > 0)$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta\ (|x| > X)$ 时,有 $|f(x)| \leqslant M$.

3)局部保号性　若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \quad)}} f(x) = A$ 且 $A > 0\ (A < 0)$,那么存在常数 $\delta > 0\ (X > 0)$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta\ (|x| > X)$ 时,有 $f(x) > 0\ (f(x) < 0)$.

推论　如果在 x_0 的某一去心邻域内($|x|$ 充分大)$f(x) \geqslant 0\ (f(x) \leqslant 0)$,而且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \quad)}} f(x) = A$,那么 $A \geqslant 0\ (A \leqslant 0)$.

3.**无穷小与无穷大**

⑴ 无穷小与无穷大的概念

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\ )}} f(x)=0$,**则称** $f(x)$ **为当** $x\to x_0$ $(x\to\ )$ **时的无穷小,即以零为极限的变量为无穷小(量)**.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\ )}} f(x)=\ $,**则称** $f(x)$ **为当** $x\to x_0$ $(x\to\ )$ **时的无穷大,即绝对值无限增大的变量为无穷大(量)**.

注 ①**无穷小与无穷大都是变量,不是很小的数与很大的数,但常数** 0 **特殊,是无穷小**.

② **无穷小与无穷大都与自变量的变化过程有关,如** $f(x)=\frac{1}{x}$,**当** $x\to\ $ **时是无穷小,但当** $x\to 0$ **时是无穷大,当** $x\to a$ $(a\neq 0)$ **时其极限是一个定值** $\frac{1}{a}$.

⑵ 无穷小与函数极限的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,**其中** $\alpha(x)$ **为同一极限过程中的无穷小**.**此结论的意义在于极限问题可以转化为无穷小问题来处理**.

⑶ 无穷大与无界函数的关系

无穷大是指在自变量某种变化趋势下,函数值变化的趋势是无穷大.**无界函数是指自变量在定义域内变化时,函数值可以无限大**.**即若** $f(x)$ **是** $x\to x_0$ **或** $x\to\ $ **时的无穷大,则对任意** $M>0$,**存在** $\delta>0$ **或** $X>0$,**对** $0<|x-x_0|<\delta$ **或** $|x|>X$ **的一切** x **都有** $|f(x)|>M$;**而若** $f(x)$ **为无界函数,则只要求有** x **满足** $|f(x)|>M$ **即可**.**因此,如果** $x\to x_0$ **或** $x\to\ $ **时**,$f(x)$ **是无穷大,则** $f(x)$ **在** x_0 **附近或** $(-\ ,a)$,$(a,+\ )$ **内无界**.**反之则不然**.

例如:$f(x)=x\cos x$ **在** $(-\ ,+\ )$ **内无界,因为对任意** $M>0$,**在** $(-\ ,+\ )$ **内存在** $x_k=2k\pi$ $(k\in N)$,$|f(2k\pi)|=|2k\pi||\cos 2k\pi|=2k\pi$,**只要** $k>\frac{M}{2\pi}$ $(k\in N)$,**就有** $|f(2k\pi)|>M$;**但当** $x\to+\ $ **时**,$f(x)=x\cos x$ **却不是无穷大,因为找不到** $X>0$,**使得当** $|x|>X$ **时都有**

$|f(x)| > M$.比如取 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,对于任意确定的 X,当 k 足够大时,必有 $x > X$,而 $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \left|2k\pi + \frac{\pi}{2}\right|\left|\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 0 < M$.

⑷ 无穷小与无穷大之间的关系

在自变量变化的同一过程中,若 $f(x)$ 为无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,若 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

⑸ 无穷小的比较

设 α 与 β 是在自变量同一变化过程中的无穷小,且 $\alpha\neq 0$,$\lim\frac{\beta}{\alpha}$也是在这个变化过程中的极限.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = 0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta = o(\alpha)$;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} =$ 　,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = c\neq 0$,则称 β 与 α 为同阶无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = 1$,则称 β 与 α 为等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$.

4.极限的法则、公式、定理

⑴ 无穷小的性质与运算法则

①有限个无穷小的和是无穷小.

②有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

③常数与无穷小的乘积是无穷小.

④有限个无穷小的乘积是无穷小.

⑵ 极限的运算法则

四则运算法则　如果 $\lim f(x) = A$,$\lim g(x) = B$,那么

①$\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x)\pm\lim g(x) = A\pm B$.

②$\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot\lim g(x) = A\cdot B$.

特别　$\lim cf(x) = cA$　(c 为常数).

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n \quad (n\text{ 为正整数}).$$

③若 $B\neq 0$,则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

保序性法则 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$,而 $\lim\varphi(x)=a$,$\lim\psi(x)=b$,那么 $a\geqslant b$.

(3) 极限存在准则

夹逼准则 如果

①当 $x\in U(x_0,\delta)$(或 $|x|>X$)时,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立,

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x) = A$,

那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A$.

单调有界准则 单调有界数列必有极限.

(4) 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$(或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$).

注 等式①分子、分母中的 x 必须一致且 $x\to 0$,等式②中底必须是 $(1+\text{无穷小})$,且底中无穷小与指数无穷大互为倒数.等式中的 x 可以推广为关于自变量的函数,即 $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$,$\lim\limits_{u(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{u(x)}\right]^{u(x)} = e$,$\lim\limits_{u(x)\to 0}[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e$.两个极限之所以重要,体现在大量极限运算最终都要归结到这两个极限.特别是在基本初等函数导数公式的推导中,起到了关键作用.因此就成为解决初等函数求导运算的根本,其重要性不言而喻.

(5) 等价无穷小定理

设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta$ 且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\dfrac{\alpha'}{\beta}$.

注 ①这个定理在求 α,β 较复杂的极限 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$ 时很有用.用简单

的无穷小 α'，β 代换，计算 $\lim \frac{\alpha'}{\beta}$ 往往会简单容易.

②$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta$ 是分子、分母作为整体分别与 α'，β 是等价无穷小.因此分子、分母是乘积形式时，可以整体或部分因子作等价无穷小代换，但代数和形式时不能轻易换.即当 $\alpha_1 \sim \alpha'_1$，$\alpha_2 \sim \alpha'_2$，$\beta_1 \sim \beta_1$，$\beta_2 \sim \beta_2$，则 $\lim \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} = \lim \frac{\alpha'_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} = \lim \frac{\alpha'_1\alpha'_2}{\beta_1\beta_2}$.而 $(\alpha_1 \pm \alpha_2)$ 与 $(\alpha'_1 \pm \alpha_2)$ 或 $(\alpha'_1 \pm \alpha'_2)$ 却未必等价，$(\beta_1 \pm \beta_2)$ 与 $(\beta_1 \pm \beta_2)$ 或 $(\beta_1 \pm \beta_2)$ 未必等价.如当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$\sin x \sim y$，但 $\tan x - \sin x$ 与 $x - x$ 不等价.

③ 当 $x \to 0$ 时常用的等价无穷小有：$\sin x \sim x$；$\tan x \sim x$；$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$；$\arcsin x \sim x$；$\arctan x \sim x$；$e^x - 1 \sim x$；$a^x - 1 \sim x\ln a$；$\ln(1 + x) \sim x$；$\sqrt[n]{1 + x^m} - 1 \sim \frac{x^m}{n}$，$x$ 也可以推广为 x 的函数 $u(x)$ $(u(x) \to 0)$.

⑹ 复合函数极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$ 且在 $U(x_0, \delta)$ 内 $\varphi(x) \neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to a} f(u) = A$.

此外，后面要讲的洛必达法则、导数和定积分的定义、泰勒公式等都可用来计算极限.

㈢ 函数的连续性

1.概念

定义 1　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$，其中 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注　①将定义中 $x \to x_0$ 改成 $x \to x_0^-$ 或 $\Delta x \to 0^-$ $[x \to x_0^+$ 或 $\Delta x \to 0^+)$，则为 $f(x)$ 在点 x_0 左连续(右连续)的定义.若函数在某一区间上每一点处都连续，则称函数在该区间上连续.函数在 $[a, b]$ 上连续对端点来说指在点 a 处右连续，在点 b 处左连续.

② 微积分研究的主要对象是连续函数，所以这个概念很重要.这

个概念很简单,即在点 x_0 处极限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 等于函数值 $f(x_0)$,也很直观,即函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $(x_0, f(x_0))$ 处不断开,没有间隙.

若函数在点 x_0 处不连续,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,如果函数 $f(x)$ 有下列三种情况之一:

①在 $x=x_0$ 处没有定义,

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在,

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续,点 x_0 称为 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

间断点通常分成两类:如果 x_0 是 $f(x)$ 的间断点,但左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在,那么称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点,否则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点($\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都不存在或只存在一个).

按间断点 $x=x_0$ 处极限的情况讨论,有以下几种常见类型:若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点;若 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 在某两个值之间无限次变动,则称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点;若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等,则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点;若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,$f(x_0)\neq A$ 或 $f(x_0)$ 不存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.因无论 $f(x_0)$ 存在与否,总可以重新定义 $f(x_0)=A$,则重新定义后的函数在点 x_0 处连续,间断点 x_0 可去掉,所以称为可去间断点.

2.连续函数的运算与初等函数的连续性

①有限个在某点连续的函数的和、差、积、商(分母在该点不为零)是在该点连续的函数.

②如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续,那么它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上单

调增加(或单调减少)且连续.

③对于复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$.

④若 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

注　(二)中复合函数极限的运算法则与上面结论③、④是条件逐渐加强的三个结论.复合函数极限运算法则中仅为 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 存在,$\lim\limits_{u\to a}f(u)$ 存在,③中 $f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续,④中 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,$f(u)$ 在点 $u=\varphi(x_0)$ 处连续.

⑤基本初等函数在它们的定义域内连续.

⑥一切初等函数在其定义区间内都连续.

注　① 定义区间为定义域内除了孤立点外的区间.

② 若已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则给出了一个求极限的方法 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,又有了⑥的结论,就解决了初等函数在定义区间内极限的计算问题.

3.闭区间上连续函数的性质

1)最大值和最小值定理　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

2)有界性定理　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

3)零点定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$　$(a<\xi<b)$.

4)介值定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在区间端点处有不同的函数值 $f(a)=A$ 与 $f(b)=B$,那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=C$　$(a<\xi<b)$.

注　零点定理是介值定理的特殊情形,在讨论方程 $f(x)=0$ 的根时经常用到该定理.

(四) 主要的思想方法

1.**函数的思想**

从实际问题中抽象出变量与变量之间的关系，这是用微积分解决实际问题的第一个步骤．建立实际问题中变量之间的函数关系，这首先是一种数学意识，其次还需要通过现象抽象出本质特征的思维过程，科学的抽象是数学常用的思维方法，也是数学的主要特征之一．

2.**极限的思想**

极限是变量在无限变化过程中的变化趋势，是一个确定的值．把某些实际问题的确定结果看作一系列无限近似数值的变化趋势，即数列或函数的极限，这是一种重要的数学思想方法．极限的思想和方法是微积分的基础，贯穿整个课程，特别是在一些重要概念的引入和定义中体现更深刻．

三、解题研究

(一) 有关函数概念与性质、反函数、复合函数的例题

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$；

(2) $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{3x-x^2}{2}}$．

解　(1) 要使 $f(x)$ 有意义，x 必须满足

$$\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0, \\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1, \end{cases}\text{即}\begin{cases} x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3, \\ -3\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $[-3,-2]\cup[3,4]$．

(2) 要使 $f(x)$ 有意义，x 必须满足

$$\begin{cases} \dfrac{3x-x^2}{2}>0, \\ \lg\dfrac{3x-x^2}{2}\geqslant 0, \end{cases}\quad\text{即}\begin{cases} 0<x<3, \\ \dfrac{3x-x^2}{2}\geqslant 1, \end{cases}\quad\text{亦即}\begin{cases} 0<x<3, \\ 1\leqslant x<2, \end{cases}$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$.

注　求函数的定义域就是要求出在实数范围内使函数有意义的自变量的取值范围.常常考虑以下几点:①分式的分母不能为零;②偶次根号下的式子非负;③对数的真数表达式为正;④函数 $\arcsin\varphi(x)$ 与 $\arccos\varphi(x)$ 中 $|\varphi(x)|\leqslant 1$;⑤初等函数的定义域是组成它的各函数定义域的公共部分;⑥分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例 2　设 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,且 $|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,求 $\varphi(x)$ 的定义域.

分析　先求出 $\varphi(x)$,再讨论 $\varphi(x)$ 的定义域.

解　因为 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$,且 $|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

所以

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

从而 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

例 3　下列各题中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$,$g(x)=1$;

(2) $f(x)=\lg\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$,$g(x)=\lg\varphi(x)-\lg\psi(x)$.

分析　根据函数定义中的两个要素判断.

解　(1) 相同,定义域都是 $(-\quad,+\quad)$,任意 $x\in(-\quad,+\quad)$,$f(x)=g(x)=1$,即对应法则相同.

(2) $f(x)$ 的定义域是使 $\begin{cases}\varphi(x)>0,\\ \psi(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\varphi(x)<0,\\ \psi(x)<0\end{cases}$ 成立的 x 的全体,$g(x)$ 的定义域是使 $\begin{cases}\varphi(x)>0,\\ \psi(x)>0\end{cases}$ 成立的 x 的全体.因此,当 $\begin{cases}\varphi(x)<0,\\ \psi(x)<0\end{cases}$ 有解时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 不同;当 $\begin{cases}\varphi(x)<0,\\ \psi(x)<0\end{cases}$ 无解时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

例 4　设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$ (a 为常数),求 $f(x)$.

解　已知 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$,　(1)

用$\frac{1}{x}$代换式(1)中的x,得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax. \tag{2}$$

式(1)×2-式(1),得$3f(x)=\frac{2a-ax^2}{x}$,即$f(x)=\frac{2a-ax^2}{3x}$.

注　变量代换是数学证明与计算中常用的手段,本题代换的目的是产生一个与已知方程有相同变量$f(x)$与$f\left(\frac{1}{x}\right)$的另一个不同的方程.

例5　设$y=f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<-2,\\ 2x, & x\geqslant -2,\end{cases}$求$f^{-1}(x)$.

分析　求反函数的方法一般是由原表达式将自变量反解出来,函数的值域为其反函数的定义域.分段函数则需分段讨论.注意f在D上单调,则反函数f^{-1}存在且在$f(D)$上也有相同的单调性.

解　当$x<-2$时,$y=-x^2$单调增加且$y<-4$,由$y=-x^2$解得$x=-\sqrt{-y}$,所以

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{-x}\quad(x<-4).$$

当$x\geqslant -2$时,$y=2x$单调增加且$y\geqslant -4$,由$y=2x$解得$x=\frac{1}{2}y$,所以

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x\quad(x\geqslant -4).$$

综上,$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<-4,\\ \frac{1}{2}x, & x\geqslant -4.\end{cases}$

例6　$f(x)$与$\varphi(x)$互为反函数,求$f\left(\frac{x}{2}\right)$的反函数.

解　因为$f(x)$与$\varphi(x)$互为反函数,所以当$y=f(x)$时,$x=\varphi(y)$.

设$y=f\left(\frac{x}{2}\right)$,则有$\frac{x}{2}=\varphi(y)$,所以$f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)=2\varphi(x)$.

例 7　**设** $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$，**求** $f[f(x)]$.

解　**因为** $f(x)=\dfrac{x}{x-2}\quad(x\neq 2)$，

所以
$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-2}=\frac{\dfrac{x}{x-2}}{\dfrac{x}{x-2}-2}=\frac{x}{4-x},$$

故
$$f[f(x)]=\frac{x}{4-x}\quad(x\neq 2, x\neq 4).$$

注　**复合函数定义域不能只由最终表达式确定，要兼顾到整个复合过程都有意义**.

例 8　**设** $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ **求** $f[\varphi(x)]$.

分析　**分段函数复合，可先由** $f(x)$ **的定义域确定** $f[\varphi(x)]$ **中** $\varphi(x)$ **的值域，再与** $\varphi(x)$ **的定义域联立确定**.

解
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1,\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1,\end{cases}$$

①**当** $\varphi(x)<1$ **时**，$\begin{cases}\varphi(x)=x+2<1,\\ x<0,\end{cases}$

即 $x<-1$，**或** $\begin{cases}\varphi(x)=x^2-1<1,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ **即** $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

②**当** $\varphi(x)\geqslant 1$ **时**，$\begin{cases}\varphi(x)=x+2\geqslant 1,\\ x<0,\end{cases}$

即 $-1\leqslant x<0$，**或** $\begin{cases}\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ **即** $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

例9　设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的.证明：

⑴两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数；

⑵两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

分析　根据奇、偶函数的定义证明.

证明　⑴设$f_1(x)$,$f_2(x)$均为偶函数,令

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则
$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x)$,$g_2(x)$均为奇函数,令

$$G(x)=g_1(x)+g_2(x),$$

则
$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故$G(x)$为奇函数.

⑵设$f_1(x)$,$f_2(x)$均为偶函数,令

$$\Phi(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

则
$$\Phi(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=\Phi(x),$$

故$\Phi(x)$为偶函数.

设$g_1(x)$,$g_2(x)$均为奇函数,令

$$\Psi(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$$

则
$$\begin{aligned}\Psi(-x)&=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]\\&=g_1(x)\cdot g_2(x)=\Psi(x),\end{aligned}$$

故$\Psi(x)$为偶函数.

设$f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,令

$$H(x)=f(x)\cdot g(x).$$

则
$$\begin{aligned}H(-x)&=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]\\&=-f(x)\cdot g(x)=-H(x),\end{aligned}$$

故$H(x)$为奇函数.

（二）极限的计算与证明

求极限的方法可以归纳为很多种,常用的有:①用极限的定义证明

某些极限；②利用连续函数的定义直接代入；③利用无穷小的性质与运算法则；④利用极限的四则运算法则、复合函数极限的运算法则；⑤利用极限存在的两个准则；⑥利用两个重要极限及其推广；⑦利用等价无穷小代换及变量替换等手段．此外，还有后面要学的洛必达法则，泰勒公式，导数、定积分定义等．

讨论极限问题时往往首先把自变量变化的趋势代入函数(数列)表达式中看函数变化的趋势．一般利用连续函数定义、无穷小定义和性质及已知收敛数列的结论等可以直接求出的极限称为确定型极限．而有些极限如 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\ )}}\frac{f(x)}{F(x)}$，分子、分母同时趋于零或无穷大，分式的极限可能存在也可能不存在．这两种极限分别称为“$\frac{0}{0}$”型和“—”型不定式．此外，还有五种类型不定式：“$0\cdot$　”，“　-　”，“1　”，“0^0”，“　^{0}”．解题思路通过下面例题分别进行讨论．

1．利用极限定义证明极限

例 10　证明对任意实数 $a>0$，都有 $\lim\limits_{n\to}\sqrt[n]{a}=1$．

分析　根据数列极限的定义，寻找正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$．分 $a>1$，$0<a<1$，$a=1$ 三种情况讨论．

证明　当 $a>1$ 时，$\sqrt[n]{a}>1$，所以 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1$．

任意给定 $\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，只要

$$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon\text{，即}\quad\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon.$$

两边取对数得　$\frac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)$．

故
$$n>\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}.$$

取 $N=\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$，则当 $n>N$ 时，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon\text{，即}\quad\lim_{n\to}\sqrt[n]{a}=1.$$

当 $0<a<1$ 时，必有 $\frac{1}{a}>1$．由上面结论有 $\lim\limits_{n\to}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1$，故由极限

运算法则有

$$\lim_{n\to}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to}\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}}=\lim_{n\to}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

当 $a=1$ 时，$\sqrt[n]{a}=1$. 显然 $\lim_{n\to}\sqrt[n]{a}=1$.

注　一些极限的计算过程中常出现 $\lim_{n\to}\sqrt[n]{a}$，因此这个结果很有意义，可直接应用. 还可以证明 $\lim_{n\to}\sqrt[n]{n}=1$. 这也是经常用到的一个结果，同样可以直接应用.

例 11　若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，证明 $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

证明　任给 $\varepsilon>0$，因为 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，所以存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因为 $||f(x)|-|A||\leqslant|f(x)-A|$，故当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，亦有 $||f(x)|-|A||<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

2. 容易混淆的几个极限

例 12　填空：

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=($　　$)$；　(2) $\lim_{x\to}\frac{\sin x}{x}=($　　$)$；

(3) $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=($　　$)$；　(4) $\lim_{x\to}x\sin\frac{1}{x}=($　　$)$.

解　(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.　　(2) $\lim_{x\to}\frac{\sin x}{x}=0$.

(3) $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.　　(4) $\lim_{x\to}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

注　对初学者来说，这是极易混淆的几个极限，(1)、(4) 是重要极限，(2)、(3) 是无穷小与有界量的乘积.

3. 某些数列的极限

例 13　(1) 求 $\lim_{N\to}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解　(1) $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2}{N(N+1)}$$

$$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\right]$$

$$=2\left(1-\frac{1}{N+1}\right),$$

原式 $=\lim\limits_{N\to\infty}2\left(1-\frac{1}{N+1}\right)=2$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

注　计算数列极限时常用到等差、等比数列求和公式. 乘积拆成两项差或两项差化成乘积，如 $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 都是常用的手段.

4. “$\frac{0}{0}$”型极限

解题思路 消掉分子、分母中的无穷小因子，即“0”因子，化为连续函数或利用 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 等结论. 常用的手段有因式分解、有理化、换元、等价无穷小代换等，特别是等价无穷小代换，可使问题变得简单. 学完第三章还可用洛必达法则.

例 14　计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 2x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

分析 (1) 因式分解；(2) 分子、分母同时有理化；(3) 直接有理化困难，可作代换去掉无理式，再消掉“0”因子，还可用等价无穷小代换；(4)、(5)、(6) 都可用等价无穷小代换.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(4-2x)-(4+x)][\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}]}{[(x+1)-(1-x)][\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x}]}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{3}{4}.$$

(3) 解法 1 令 $\sqrt[4]{1+2x}=t$，则 $x=\dfrac{t^4-1}{2}$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 1$.

$$\text{原式}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{1}{2}(t^4-1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{2}\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{2}(t+1)(t^2+1)=2.$$

解法 2 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+2x}-1\sim\dfrac{2x}{4}$，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{2}{4}x}=2.$$

(4) 当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

(5) 令 $x-a=t$，则 $x=a+t$，当 $x\to a$ 时，$t\to 0$. 当 $t\to 0$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{t}{a}\right)\sim\dfrac{t}{a}$，

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(a+t)-\ln a}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{a}}{t}=\frac{1}{a}.$$

或　　原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)^{\frac{a}{t}}=\frac{1}{a}\ln e=\frac{1}{a}$.

(6) 当 $x\to0$ 时，$\arcsin 2x\sim2x$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{x^2}{2}$，

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot2x}{-\frac{x^2}{2}}=-4.$$

例 15　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

分析　当 $x\to0$ 时，分子 $\sin x\sim x$，$\cos\frac{1}{x}$ 有界，分母 $(1+\cos x)\to2$，$\ln(1+x)\sim x$，所以可用四则运算法则分开计算.

解　$x\to0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{3\sin x}{(1+\cos x)x}+\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{1+\cos x}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}.$$

因为 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)=2$，所以

原式 $=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$.

5. “—”型极限

解题思路 若分子、分母是代数和的形式，可分别除以趋于　最快的项，分离出常数与无穷小代数和的形式，再用四则运算法则求极限.也可用洛必达法则(第三章讲).

$x\to$　时,“—”型有理函数的极限可用上述方法,也可用下列公式直接给出结果

$$\lim_{x\to}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \quad, & n>m.\end{cases}$$

公式反映出来的方法也被称为“抓大头”,即抓住 x 幂次最高的项,其余可忽略.

例 16　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to}\dfrac{(-1)^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}$;　(2) $\lim\limits_{x\to}\dfrac{x-\arctan x}{x+\arctan x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to-}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to}\dfrac{4^n\left[\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n+1\right]}{4^{n+1}\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}+1\right]}=\dfrac{1}{4}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to}\dfrac{x\left(1-\dfrac{\arctan x}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{\arctan x}{x}\right)}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to-}\dfrac{-2x\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}+x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to-}\frac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1.$$

(注意:$x<0$ 时,$\sqrt{x^2}=-x$.)

注　求数列的极限可利用已知结果:当 $|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to}q^n=0$.

例 17　**求下列极限：**

⑴ $\lim\limits_{x\to}\dfrac{2x^4-1}{3x^4-2x+1}$；　⑵ $\lim\limits_{x\to}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$；

⑶ $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

解法 1　⑴ **原式** $=\lim\limits_{x\to}\dfrac{2-\dfrac{1}{x^4}}{3-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{2}{3}$.

⑵ **原式** $=\lim\limits_{x\to}\dfrac{(2x)^{20}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{20}(3x)^{30}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{30}}{(2x)^{50}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$.

⑶ **原式** $=\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}}{\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^4}}}=0$.

解法 2　**根据前面“—”型极限中的公式有**

⑴ **原式** $=\dfrac{2}{3}$.

⑵ **原式** $=\dfrac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$.

⑶ **原式** $=\lim\limits_{x\to}\sqrt[6]{\dfrac{(x^2+3x)^3}{(x^4+1)^2}}=0$.

注　**解法** 1 **中的方法是公式推导所用的方法，这种思想方法常用于求解“—”型极限. 实际上，这种“—”型极限取决于分子、分母中趋向于　速度最快的项.**

6. **“　-　”型极限**

解题思路　**将“　-　”型转化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“—”型，常用有理化，通分等方法化成一个分式.**

例 18　**求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{x\to+}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\quad(x>0)$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　(1) **原式** $=\lim\limits_{x\to+}\dfrac{(x+\sqrt{x})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(2) **原式** $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\overset{\text{令}\,x-\frac{\pi}{2}=t}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{-\sin t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{t^2}{2}}{-t}=0$.

7. “1 ”**型极限**

常用的方法有两种：

①**利用重要极限** $\lim\limits_{x\to}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ **及其推广** $\lim\limits_{u(x)\to}\left(1+\dfrac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$，$\lim\limits_{u(x)\to0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$.

②**取对数化为**“$\dfrac{0}{0}$”**型或**“—”**型,再用前面所讲的方法(或用洛必达法则,第三章介绍)**.

例 19　**求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a>0,b>0)$.

解　(1) **解法** 1　**原式** $=\lim\limits_{x\to}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right]^{\frac{x}{x^2-1}}$

$$=\left[\lim_{x\to}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right]^{\lim\limits_{x\to}\frac{x}{x^2-1}}=e^0=1.$$

解法 2　**原式** $=\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)^x=\lim\limits_{x\to}\dfrac{1}{\left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{-x^2}\right]^{-\frac{1}{x}}}=e^0=1$.

解法 3　**原式** $=\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$

$$=\lim_{x\to}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}\cdot\frac{1}{\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e^{-1}}=1.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{2x}}\cdot\left[\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=e^0\cdot e=e.$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}}\right]^{\frac{\sin 3x}{x}}=e^3.$

(4) 解法 1　利用重要极限，即 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right]^{\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}}$

$$=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$$

解法 2　取对数，作等价无穷小代换，当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left[1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}}$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$$

注　关键是先凑成重要极限的形式 $(1+\text{无穷小})^{\frac{1}{\text{无穷小}}}$，式中两个无穷小要一样，然后指数位置再配平. 再举一例 求 $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

分析　这是“1^∞”型极限，但底中没有 1，所以加 1、减 1，凑成 $(1+\text{无穷小})$ 的形式，再配平指数.

解法 1　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[1+(\sin x+\cos x)-1\right]^{\frac{1}{\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin x+\cos x-1}{x}}.$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=1.$$

所以　　**原式** $= e^1 = e$.

解法 2　**原式** $= \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}(1+\tan x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}}$$

$$= e^0\cdot e^1 = e.$$

8. **“$0\cdot\infty$”型极限**

解题思路：用变量替换、有理化等手段将函数化成一个分式，将所求极限转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限．含对数因子的式子可转化为“1^∞”型极限．

例 20　**求下列极限**：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)[\ln(1+n)-\ln n]$.

解　(1) 令 $1-x=t$，当 $x\to 1$ 时，$t\to 0$，

$$\text{原式} = \lim_{t\to 0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) = \lim_{t\to 0}t\cot\frac{\pi}{2}t = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\tan\frac{\pi}{2}t}\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

(2) **原式** $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}[(x+a)-x]}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \dfrac{a}{2}.$

(3) **原式** $= \lim\limits_{n\to\infty}(1+n)\ln\dfrac{1+n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln e = 1.$

9. **利用极限存在准则求极限**

例 21　**计算下列极限**：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

分析　(1) 是“1^∞”型极限，可以用取对数方法求解，但这里用夹逼

准则比较方便．(2)是无限个无穷小的和，是典型的用夹逼准则求解的题目．使用夹逼准则求解的关键是将变量适当放大和缩小，且放大、缩小后的极限相同．

解　(1)当 $n\geqslant 1$ 时，$\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{1+2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n+3^n}=3\sqrt[n]{3}$，而 $\lim\limits_{n\to}\sqrt[n]{3^n}=3$，$\lim\limits_{n\to}3\sqrt[n]{3}=3$，所以由夹逼准则有

$$\lim_{n\to}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3.$$

(2)当 $n\geqslant 1$ 时，

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，所以由夹逼准则有

$$\lim_{n\to}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

注　(2)中选最小项 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 与最大项 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 分别乘以 n 进行缩小和放大．

例 22　利用极限存在准则证明数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…的极限存在，并求此极限．

证明　记此数列为 $\{x_n\}$，由已知条件有

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+x_1},\ \cdots,\ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\ (n=1,2,\cdots).$$

先用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加．

因为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$x_2>x_1$，假设当 $n=k$ 时有 $x_{k+1}>x_k$ 成立，那么当 $n=k+1$ 时，由于 $x_{k+2}=\sqrt{2+x_{k+1}}>\sqrt{2+x_k}=x_{k+1}$，即当 $n=k+1$ 时，有 $x_{k+2}>x_{k+1}$ 成立，所以数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的．

再用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 有上界．

因为 $x_1=\sqrt{2}<2$，假设 $x_k<2$，由于 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，所以对任意自然数 n，都有 $x_n<2$ 成立，即数列 $\{x_n\}$ 有上界．

根据单调有界必有极限的准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_n},$$

得　　$a=\sqrt{2+a}$,

解得　　$a=2$ 与 $a=-1$(舍去),

所以　　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

例 23　设 $x_1=2, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求之.

分析　给出一数列一般项 x_n 的关系式,讨论其极限问题时一般用单调有界数列必有极限的准则.需证两条:①单调增加(或减少),常证 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1\ (\leqslant 1)$ 或 $x_{n+1}-x_n\geqslant 0\ (\leqslant 0)$;②有上界(下界),即存在 M 使 $x_n\leqslant M\ (\geqslant M)$.

解　因为 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{1}{x_n}}=1$,又 $x_1=2$,所以数列 $\{x_n\}$ 有下界 1.

因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_n+\frac{1}{x_n}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1^2}\right)=1$,所以 $x_{n+1}\leqslant x_n$,即 $\{x_n\}$ 单调减少,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ($a\neq 0$,否则与 $x_{n+1}\geqslant 1$ 矛盾),则由

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$$

得　　$2a=a+\frac{1}{a}$,

解得　　$a=1$(舍 $a=-1$),

所以　　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

10.含有待定常数的极限问题

解题思路　确定极限中的常数是一类常见的题目,可根据极限的类

型讨论,有时还需对常数分情况讨论.如果 $\lim \frac{\alpha(x,a)}{\beta(x)} = b$ (常数),且 $\beta(x)\to 0$,则必有 $\alpha(x,a)\to 0$,特别是 $b=0$ 时,$\alpha(x,a) = o(\beta(x))$.这是一个很重要的观念.

例 24　已知 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3 - x^2 + a}{x-2} = b$　(a,b 为常数),求 a,b 的值.

解　因 $x\to 2$ 时,$x-2\to 0$,b 为有限常数,所以

$\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - x^2 + a) = 0$,即 $2^3 - 2^2 + a = 0$,$a = -4$,

从而

$$原式 = \lim_{x\to 2}\frac{x^3 - x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x^2+x+2) = 8,$$

所以　$b = 8$.

于是,$a = -4$,$b = 8$ 为所求.

11.利用左右极限讨论函数的极限

例 25　设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1, \\ |x-1|, & |x|>1. \end{cases}$

讨论当 $x\to -1$ 与 $x\to 1$ 时函数极限是否存在 若存在试求其值.

分析　分段函数在分段点左、右表达式不同,需要讨论左、右极限.

解

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<-1, \\ \cos\frac{\pi x}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x-1, & x>1. \end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(1-x) = 2$,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi x}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 不存在.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi x}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0,$$

所以 $$\lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

例 26 **求** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|} \right)$.

分析 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, **需要讨论左、右极限,且函数中有绝对值,去掉绝对值也需讨论左、右极限**.

解 $$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1,$$

所以 $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

12. **关于无穷小的阶**

例 27 **写出当** $x \to 0$ **时,下列无穷小量由低阶到高阶的排列顺序**.

①$\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$,②$e^{x^4 - x} - 1$,③$\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}$.

分析 **通过等价无穷小代换都与** x^α **相比较**.

解 **当** $x \to 0$ **时,**

①$$\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x} = \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}}$$

$$= \frac{\tan x (1 - \cos x)}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \sim \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{2} = \frac{x^3}{4},$$

②$$e^{x^4 - x} - 1 \sim x^4 - x = x(x^3 - 1) \sim -x,$$

③$$\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x} = \sqrt[3]{1 + 3x} \left(\sqrt[6]{1 + \frac{3x^2 + 8x^3}{1 + 6x + 9x^2}} - 1 \right)$$

$$\sim \frac{1}{6} \frac{3x^2 + 8x^3}{1 + 6x + 9x^2} = \frac{x^2}{6} \cdot \frac{3 + 8x}{1 + 6x + 9x^2} \sim \frac{x^2}{2}.$$

所以,由低阶到高阶的顺序为②、③、①.

（三）关于函数连续性与间断点的讨论

例 28　已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,求 a 的值.

分析　根据连续的定义,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,$f(0)$ 存在,且二者相等,确定 a.

解　由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,必有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,而

$$f(0)=a,\ \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}ae^{2x}=a,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

所以　$a=-2$.

例 29　指出 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点,并判断其类型.若为可去间断点,则补充或改变函数的定义使其成为连续点.

分析　由初等函数的连续性可知,$f(x)$ 在定义区间内连续,无定义点即为间断点.

解　由函数表达式知 $f(x)$ 在 $x=0$,$x=1$,$x=-1$ 处无定义,是 $f(x)$ 的间断点,在其余点处均连续.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x(x^2-1)}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{(-x)(x^2-1)}=-1,$$

所以 $x=0$ 是第一类跳跃间断点.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$

所以 $x=1$ 是第一类可去间断点.补充定义 $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{(-x)(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{-1}{x+1} = \quad ,$$

所以 $x=-1$ **为第二类无穷间断点**.

例 30　**设** $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0, \\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant 0. \end{cases}$

求 $f(x)$ **的间断点,并说明间断点所属类型**.

分析　**讨论分段函数的连续性是一种重要题型,其方法是在各部分区间内按初等函数连续性讨论,分段点处必须讨论左、右连续性**.

解　**当** $x>0$ **时,** $f(x)$ **在** $x=1$ **处无定义,所以** $x=1$ **是间断点**.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = + \quad ,$$

所以 $x=1$ **是第二类无穷间断点**.

当 $-1<x<0$ **时,** $f(x)=\ln(1+x)$ **,无间断点**.

当 $x=0$ **时,** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}$**,所以** $x=0$ **是第一类跳跃间断点**.

例 31　**讨论函数** $f(x)=\lim\limits_{n\to}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ **的连续性,若有间断点,判别其类型**.

分析　**用极限表示函数是函数的一种表示方法,处理这种函数往往先求极限,得到** $f(x)$ **的解析表达式,再讨论连续性问题.求极限时要分清函数的自变量与极限过程中的变量** n.

解　$f(x)=\lim\limits_{n\to}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -x, & |x|>1, \end{cases}$

当 $x\neq\pm 1$ **时,** $f(x)$ **连续**.

在分段点 $x=-1$ **处,因为** $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(-x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x = -1$**,所以** $x=-1$ **为第一类跳跃间断点**.

在分段点 $x=1$ **处,因为** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$，所以 $x=1$ 为第一类跳跃间断点.

(四) 关于闭区间上连续函数性质的例题

例 32　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上的任意 x 所对应的函数值 $f(x)$ 均有 $0\leqslant f(x)\leqslant1$，证明在 $[0,1]$ 上至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

分析　要证 $f(\xi)=\xi$，即 $f(\xi)-\xi=0$，只需证函数 $f(x)-x$ 有一零点，所以考虑用零点定理.

证明　设 $F(x)=f(x)-x$，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又因为 $0\leqslant f(x)\leqslant1$，所以

$$F(0)=f(0)\geqslant0,F(1)=f(1)-1\leqslant0.$$

(1) 若 $F(0)$，$F(1)$ 中有一个是零，则 0 与 1 中至少有一个可以作为 ξ 使 $f(\xi)-\xi=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

(2) 若 $F(0)>0$，$F(1)<0$，则由零点定理知，在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

综上，在 $[0,1]$ 上至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

例 33　证明方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个小于 3 的正根.

分析　要证明结论，只需证在 $(0,3)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\xi=\sin\xi+2$ 成立，即 $\xi-\sin\xi-2=0$. 为此，设函数 $f(x)=x-\sin x-2$，在 $[0,3]$ 上用零点定理证明.

证明　令 $f(x)=x-\sin x-2$，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续，又 $f(0)=-2<0$，$f(3)=1-\sin3>0$，根据零点定理，在 $(0,3)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi-\sin\xi-2=0$，亦即 ξ 是方程 $x=\sin x+2$ 的一个小于 3 的正根. 因此，方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个小于 3 的正根.

注　欲求方程 $f(x)=g(x)$ 的根，可转化为求 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的零点，因此根据要证明的结论构造适当的函数 $F(x)$ 是关键.

例 34　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

分析 只要能说明$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$是一个介于$f(x)$在$[a,b]$上最小值与最大值之间的数即可.

证明 由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,因此$f(x)$在$[x_1,x_n]$上也连续,故$f(x)$在$[x_1,x_n]$上有最大值M和最小值m,于是

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M,$$

根据闭区间上连续函数的介值定理,存在$\xi\in[x_1,x_n]$,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

例35 设函数$f(x)$在$(-\quad,+\quad)$内连续,且$\lim\limits_{x\to+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-}\frac{f(x)}{x}=0$,证明至少存在一点$\xi$,使得$\xi+f(\xi)=0$.

分析 要证$\xi+f(\xi)=0$,考虑用零点定理,为此要选择一个函数和闭区间.

证明 设$F(x)=x+f(x)$,因$f(x)$在$(-\quad,+\quad)$内连续,所以$F(x)$在$(-\quad,+\quad)$内连续,由题设得

$$\lim_{x\to-}F(x)=\lim_{x\to-}x\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=-\quad,$$

$$\lim_{x\to+}F(x)=\lim_{x\to+}x\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=+\quad,$$

故必存在$X_1<0,X_2>0$,使$F(X_1)<0,F(X_2)>0$.又$F(x)$在$[X_1,X_2]$上连续,所以由零点定理知,在(X_1,X_2)内至少有一点ξ,使得

$$F(\xi)=\xi+f(\xi)=0.$$

例36 证明:若$f(x)$在$(-\quad,+\quad)$内连续,且$\lim\limits_{x\to}f(x)$存在,则$f(x)$必在$(-\quad,+\quad)$内有界.

证明 设$\lim\limits_{x\to}f(x)=A$,根据函数极限的定义,对$\varepsilon=1$,存在$X>0$,当$|x|>X$时,恒有$|f(x)-A|<1$成立,由此可得当$|x|>X$时,$|f(x)|<|A|+1$,又因为$f(x)$在$(-\quad,+\quad)$内连续,所以$f(x)$在$[-X,X]$上连续,根据闭区间上连续函数的有界性定理,必存在$M_1>0$,使得当

$|x| \leqslant X$ 时，$|f(x)| < M_1$.

令 $M = \max\{M_1, |A| + 1\}$，则对任意实数 x，都有 $|f(x)| < M$ 成立，所以 $f(x)$ 在 $(- \quad, + \quad)$ 内有界.

四、练习题及答案

习题(A)

1.判断下列各对函数是否相同.为什么？

(1) $f(x) = x\sqrt{x-1}$，$g(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$；

(2) $f(x) = \lg(x-1) + \lg(x+2)$，$g(x) = \ln(x-1)(x+2)$；

(3) $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$，$g(x) = \arcsin x + \arccos x$.

2.设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$ 及其定义域.

3.设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} + \ln(x-2)$，求 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域 $(a > 0)$.

4.设 $f(x) = \dfrac{1}{2-x^2}$，$g(x) = \dfrac{x}{1+x}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 及其定义域.

5.判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0, \\ -2^{-x}, & x < 0; \end{cases}$　　(2) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$；

(3) $f(x) = x\tan x \cdot e^{|\sin x|}$；　　(4) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

6.求下列函数的反函数：

(1) $f(x) = 2^{x-1}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 0, \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1, \\ \ln x, & x\geqslant 1. \end{cases}$

7. **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to}\dfrac{2n^2+3n+1}{n^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to}\dfrac{6^{n+1}-7^n}{5\cdot 6^n+7^n}$；

(4) $\lim\limits_{n\to}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\quad(|x|<1)$.

8. **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{x\to}\dfrac{x^2+1}{x+2}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x$.

9. **已知** $\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，**求** a，b **的值**.

10. **已知** $\lim\limits_{x\to +}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，**求** a，b **的值**.

11. (1) **求** $\lim\limits_{n\to}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；

(2) **求** $\lim\limits_{n\to}\sqrt[n]{a^n+b^n}\quad(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.

12. **设** $x_1=\sqrt{a}\quad(a>0)$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，$\cdots$，$x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots\sqrt{a}}}}$，$n=1,2,\cdots$，**求** $\lim\limits_{n\to}x_n$.

13. **已知** $0<x_n<1$，$x_{n+1}=2x_n-x_n^2\quad(n=1,2,\cdots)$，**证明** $\{x_n\}$ **收敛并求** $\lim\limits_{n\to}x_n$.

14. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 ax^b 是等价无穷小，试求 a, b.

(1) $f(x)=\tan x-\sin 3x$；　　(2) $f(x)=\sqrt[5]{1+3x}-1$.

15. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\cdot\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\cdot\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，求正整数 n 的值.

16. 指出下列函数的间断点及其类型：

(1) $f(x)=\dfrac{\tan x}{\ln(1+x)}, x\in(-1,\pi)$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

17. 证明方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

18. 证明方程 $x^3+x^2-4x+1=0$ 有三个实根.

习题(B)

一、填空题

1. 设对一切实数 x 和 y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(\sqrt{2})=1$，则 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=$________.

2. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$________.

二、选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+b}{x-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1\end{cases}$ 适合 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$，则以下结论正确的是(　　).

(A) $a=4, b=-3, A=4$

(B) $a=4, A=4$，b 可取任意实数

(C) $b=-3, A=4$，a 可取任意实数

(D) a, b, A 都可取任意实数

2. 若当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，下列各式中(　　)不一定是无穷小.

(A) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$　　(B) $\alpha^2(x)$ 和 $\beta^2(x)$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$　　(D) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

三、计算题

1. **设** $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$**，且** $f[\varphi(x)]=\ln x$**，求** $\varphi(x)$ **及其定义域**.

2. **设** $f\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)=2f(x)-3x$**，求** $f(x)$.

3. **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)\quad(x\neq0)$；

(2) $\lim\limits_{n\to}\left[\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}\right]$；

(3) $\lim\limits_{n\to}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}[\ln\arctan(2x^2)-\ln(1-\cos x)]$；

(5) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

4. **已知** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\cdot\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$**，求** $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

5. **已知** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{2^x-1}=3$**，求** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

6. **证明** $\lim\limits_{n\to}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

7. **设** $0<x_1<3$**，**$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\quad(n=1,2,\cdots)$**，证明数列** $\{x_n\}$ **的极限存在并求此极限**.

8. **设** $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$**，求** $f(x)$ **的间断点并指出其类型**.

9. **讨论** $f(x)=\lim\limits_{n\to}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ **的连续性**.

10. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负的连续函数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：对任意实数 a，只要 $0<a<1$，则在 $[0,1]$ 上必存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

习题(A)答案

1. (1) 相同，定义域都是 $[1,+\quad]$；

(2) 不同，$f(x)$ 定义域为 $(1,+\quad)$，$g(x)$ 定义域为 $(-\quad,-2)\cup(1,+\quad)$；

(3) 不同，$f(x)$ 定义域为 $(-\quad,+\quad)$，$g(x)$ 定义域为 $[-1,1]$.

2. $f[f(x)]=1$，定义域为 $(-\quad,+\quad)$.

3. 当 $0<a\leqslant 1$ 时，定义域为 $(2+a,4-a)$；当 $a>1$ 时，无处有意义. 提示：$f(x)$ 定义域为 $(2,4)$，$f(x+a)$ 与 $f(x-a)$ 定义域分别为 $(2-a,4-a)$ 与 $(2+a,4+a)$，所求定义域为其公共部分.

4. $f[g(x)]=\dfrac{(1+x)^2}{x^2+4x+2}$，定义域为 $x\neq -2\pm 2\sqrt{2}$ 且 $x\neq -1$.

$g[f(x)]=\dfrac{1}{3-x^2}$，定义域为 $x\neq \pm\sqrt{2}$ 且 $x\neq\pm\sqrt{3}$.

5. (1) 奇函数；(2) 非奇非偶；(3) 偶函数；(4) 奇函数.

6. (1) $y=1+\log_2 x, x>0$；

(2) $$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant -1,\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0,\\ e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

7. (1) 2；(2) $\dfrac{3}{2}$；(3) -1；

(4) $\dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$，提示：分子、分母同乘以 $1-x$.

8. (1) 1；(2) 1，提示：分子有理化；(3) $\dfrac{2}{\pi}$，提示：令 $1-x=t$；

(4) $\frac{1}{2}$，提示：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\frac{x\sin x}{2}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$；

(5) 1，提示：当 $x\to 0$ 时，$e^x-e^{\tan x}=e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)\sim e^{\tan x}(x-\tan x)$；

(6) e^{-2a}.

9. $a=1$，$b=-1$.

10. $a=9$，$b=-12$.

提示：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=0$，$a=9$，代回原极限再分子有理化求 b.

11. (1) 1，提示：用夹逼准则

$$\frac{1+1+\cdots+1}{n}\leqslant\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}；$$

(2) 当 $a\geqslant b\geqslant 0$ 时，原式极限为 a，当 $b>a\geqslant 0$ 时为 b，提示：当 $a\geqslant b\geqslant 0$ 时，$a\leqslant\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqslant\sqrt[n]{a^n+a^n}$，用夹逼准则；当 $b>a\geqslant 0$ 时类似.

12. $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 提示：用准则 II，证单调增加，有上界 $\sqrt{a}+1$.

13. 1. 提示：用准则 II，

$$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0，x_{n+1}=2x_n-x_n^2<2x_n<2.$$

14. (1) $a=-2$，$b=1$，提示：$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin x(2\cos^2 x+\cos 2x)$，$f(x)=\frac{\sin x(1-4\cos^3 x+\cos x)}{\cos x}\sim-2x\quad(x\to 0)$；

(2) $a=\frac{3}{5}$，$b=1$，提示：$f(x)\sim\frac{3}{5}x\quad(x\to 0)$.

15. $n=2$.

16. (1) $x=0$ 是第一类可去间断点，$x=\frac{\pi}{2}$ 是第二类无穷间断点；

(2) $x=0$ 是第二类无穷间断点，$x=1$ 是第一类跳跃间断点.

17. 提示：设 $f(x)=x2^x-1$，在 $[0,1]$ 上用零点定理.

18.**提示**：设 $f(x)=x^3+x^2-4x+1$，$f(0)=1$，$f(1)=-1$，$\lim\limits_{x\to -} f(x)=-\quad$，$\lim\limits_{x\to +} f(x)=+\quad$.

习题(B)答案

一、填空题

1.$\frac{1}{2}$.**提示**：$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，而 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f(\sqrt{2})=1$.

2.1.

二、选择题

1.C.　2.D.

三、计算题

1.$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.**提示**：令 $x^2-1=t$，则 $f(t)=\ln\frac{1+t}{t-1}$，$f[\varphi(x)]=\ln\frac{1+\varphi(x)}{\varphi(x)-1}=\ln x$，解出 $\varphi(x)$.

2.$f(x)=\frac{6x^2-2x+1}{3x-2}$.**提示**：令 $\frac{2x+1}{3x-2}=t$，得 $f(t)=2f\left(\frac{2t+1}{3t-2}\right)-3\frac{2t+1}{3t-2}$，将 t 换成 x 与原方程联立即可解出 $f(x)$.

3.(1)$\frac{\sin x}{x}$，**提示**：分子、分母同乘以 $2^n\sin\frac{x}{2^n}$；

(2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$，**提示**：先求和，再分子有理化；

(3)e，**提示**：原式 $=\lim\limits_{n\to}\left(1+\frac{1+n}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{1+n}\cdot\frac{1+n}{n}}$；

(4)$\ln 4$，**提示**：原式 $=\ln\frac{\arctan(2x^2)}{1-\cos x}$，再用等价无穷小代换；

(5)$\frac{1}{2}$，**提示**：分子有理化，再用等价无穷小代换.

4.6.**提示**：当 $x\to 0$ 时，

$$\sqrt{1+f(x)\cdot\sin 2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\cdot\sin 2x,e^{3x}-1\sim 3x.$$

5. $3\ln 2$. **提示**：$x\to 0$ 时，$\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\frac{f(x)}{\sin x}$，$2^x-1\sim x\ln 2$.

6. **提示**：用夹逼准则.

7. $\frac{3}{2}$. **提示**：用数学归纳法证 $\{x_n\}$ 有界，$0<x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{x_n+3-x_n}{2}=\frac{3}{2}$，再证 $\{x_n\}$ 单调增加，$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0$，对 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两端取极限即得结果.

8. $x=0$ 是第一类可去间断点；$x=k\pi\ (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是第二类无穷间断点. **提示**：先求 $f(x)$，再讨论极限. $f(x)=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$.

9. 在 $(-\quad,+\quad)$ 内连续. **提示**：先求 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

10. **提示**：在区间 $[0,1-a]$ 上，考查函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$.

第二章　导数与微分

一、本章知识的作用与意义

微分学是高等数学的重要组成部分，在高等数学中占有重要的地位．微分学的两个最主要的概念是导数与微分．导数反映函数相对于自变量的瞬时变化率，微分给出了自变量有微小变化时函数的近似变化．一般常把求导的过程称为微分．我们可以利用导数求出函数的最大值和最小值，预测和分析曲线的形状和特征，得出函数性态的结论．导数和微分的概念内涵极其丰富，广泛应用于工程、科技、经济、医学、计算机科学等许多领域．

二、知识要点及思想方法

(一) 导数的概念

1．导数的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，此极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

注　①导数定义还有其他不同的形式：

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

②设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，如果当 $h\to\square$ 时，$\lim\limits_{h\to\square}u(h)=0$ 且 $u(h)\neq 0$，则

$$\lim_{h\to\square}\frac{f(x_0+u(h)]-f(x_0)}{u(h)}=f'(x_0).$$

③函数 $f(x)$ 在任意一点 x 的导数为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

这里 $x,\Delta x,\Delta y$ 虽然都是变量，但含义不同：x 和 Δx 是两个独立的变量，Δy 依赖 x 和 Δx. 求极限的过程与 Δx 有关，与 x 无关，这时 Δx 是变量，而 x 是常量. 极限的结果 $f'(x)$ 与 x 有关，与 Δx 无关，它是 x 的函数，也称为导函数.

④导数是函数相对于自变量的瞬时变化率，即导数的绝对值 $|f'(x_0)|$ 的大小反映的是函数值随自变量的变化而变化的快慢程度，而导数值的正负反映的是函数值随自变量的变化而变化的方向是增加还是减少.

⑤若 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ ，为方便起见也经常表述为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数为无穷大.

2. 左导数和右导数

$f(x)$ 在点 x_0 处的左导数为：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，

$f(x)$ 在点 x_0 处的右导数为：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

注 ①正确理解记号的含义：

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{ 与 }f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f'(x),$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{ 与 }f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x).$$

前者是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数，后者是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0

处的左、右极限.

②求分段函数在分段点处的导数时要用导数的定义.

若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都可导,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导.

若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都可导,且 $f'_+(a)$,$f'_-(b)$ 存在,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导.

(二) 导数的几何意义

当 $f(x)$ 在点 x_0 处可导时,导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ $(y_0=f(x_0))$ 处切线的斜率,即

$$f'(x_0)=\tan\alpha,$$

其中,α 为曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处切线的倾角.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad(f'(x_0)\neq 0).$$

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线垂直于 x 轴,为 $x=x_0$.

(三) 求导公式

1.基本初等函数及双曲函数的求导公式

① $(C)'=0$;　② $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$;

③ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;　④ $(e^x)'=e^x$;

⑤ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;　⑥ $(a^x)'=a^x\ln a$;

⑦ $(\sin x)'=\cos x$;　⑧ $(\cos x)'=-\sin x$;

⑨ $(\tan x)'=\sec^2 x$;　⑩ $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

⑪ $(\sec x)'=\sec x\tan x$;　⑫ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

⑬ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　⑭ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

⑮ $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；　⑯ $(\mathrm{arccot}\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$；

⑰ $(\mathrm{sh}\ x)' = \mathrm{ch}\ x$；　⑱ $(\mathrm{ch}\ x)' = \mathrm{sh}\ x$；

⑲ $(\mathrm{th}\ x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$；　⑳ $(\mathrm{cth}\ x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

2.**函数的和、差、积、商的导数**

设 $u = u(x)$，$v = v(x)$ **可导，**C **为常数，则**

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$；　(2) $(Cu)' = Cu'$；

(3) $(uv)' = u'v + uv'$；　(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\quad (v \neq 0)$.

(四) 函数的求导法则

1.**复合函数的求导法则**

设函数 $u = \varphi(x)$ **在点** x **处可导，而函数** $y = f(u)$ **在对应点** u **处可导，则复合函数** $y = f[\varphi(x)]$ **在点** x **处也可导，且**

$$\frac{d}{dx}f[\varphi(x)] = f'(u)\varphi'(x),$$

即
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

对复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ **求导时，要特别注意区别** y' **与** $f'[\varphi(x)]$ **的含义，即** $y' = \dfrac{d(f[\varphi(x)])}{dx}$，$f'[\varphi(x)] = f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$.**前者是对复合函数的自变量** x **求导，后者是对复合函数的中间变量求导**.

对多层的复合函数求导，关键是正确理解函数结构，函数是由哪些基本初等函数构成，怎样构成，要从外层开始至内层，先用导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，再用基本求导公式逐层来求，注意不要漏层.

2.**反函数的求导法则**

若函数 $x = \varphi(y)$ **在区间** I_y **内单调可导，且** $\varphi'(y) \neq 0$，**则它的反函数** $y = f(x)$ **在对应区间** I_x **内也可导，且有**

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},\quad \text{即}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

3.隐函数的求导法则

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $f(x,y)=0$ 所确定的隐函数,将恒等式 $F[x,y(x)]\equiv 0$ 两端对 x 求导(注意:$y=y(x)$ 是 x 的函数),得

$$\frac{d}{dx}F[x,y(x)]=0,$$

从上式中解出$\frac{dy}{dx}$即可.

注　①隐函数求导时,导数$\frac{dy}{dx}$表达式中可以含 y.

②也可以利用微分形式不变性,对方程两端求微分 $dF(x,y)=0$,得到关于 dx、dy 满足的等式,解出$\frac{dy}{dx}$即可.

4.取对数求导法

若函数是由乘、除、乘方、开方多次运算得到(乘积或商的因子较多),或者是幂指函数,求导时采用取对数求导法可以简化计算.

设函数 $y=f(x)$ 可导,且 $f'(x)\neq 0$,则

$$\ln|y|=\ln|f(x)|,$$

上式两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[\ln|f(x)|],$$

即
$$f'(x)=f(x)\frac{d}{dx}[\ln|f(x)|].$$

设幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$,且 $u(x)>0$ 可导,则

$$\ln y=v(x)\ln[u(x)].$$

上式两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}y'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)},$$

即
$$y'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

注　①取对数求导法是将显函数隐化后求导,导数结果只能含 x.

②幂指函数也可表示为 $y=e^{v(x)\ln u(x)}$,利用复合函数求导法则求导.

5.由参数方程确定的函数的求导法则

设$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$对 t 均可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

注 $\frac{dy}{dx}$是用参数 t 表示的,是关于 t 的函数.

(五)高阶导数

①定义 设 $f(x)$在区间 I 内存在 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$,且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为 $f(x)$在区间 I 上的 n 阶导数,记为 $f^{(n)}(x)$或 $\frac{d^n y}{dx^n}$.

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

②求由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$的高阶导数时,如求$\frac{d^2y}{dx^2}$时,$\frac{d^2y}{dx^2}$的结果可以含 y,但不能含$\frac{dy}{dx}$,依此类推.

③求由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定的函数 $y=f(x)$的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$时,若 $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$在区间 I 上二阶可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

具体计算时不要死记公式.可以先求 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,再求$\frac{dy'}{dt}$和$\frac{dx}{dt}$,最后求出

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

④求函数的 n 阶导数时,首先要理解高阶导数的概念

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'\text{，或}\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

最好记住一些简单函数的 n 阶导数公式：

$$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n;$$

$$(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax};$$

$$(\log_a x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln a};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}};$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

还有求乘积函数高阶导数的莱布尼茨公式 若 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均 n 阶可导,则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)},$$

其中 $u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$.

(六) 微分

1.微分定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域 $U(x,\delta)$ 内有定义,且

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

则称 $f(x)$ 在点 x 处可微,$A(x)\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分,记为 dy 或 $df(x)$,即

$$dy=df(x)=A(x)\Delta x.$$

2.微分的性质及运算公式

①函数 $f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x 处可导.

②设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导,则必有 $dy=f'(x)dx$.

③设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 可微,C 为常数,则

$d(u\pm v)=du\pm dv$；　　　　$d(Cu)=Cdu$；

$d(uv)=vdu+udv$；　　$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}\ (v\neq 0)$.

④设 $f(u)$ 可导，则 $df(u)=f'(u)du$，其中 u 不论是自变量还是中间变量，以上微分形式都保持不变，称为微分形式不变性.

3.函数 $f(x)$ 在一点有定义、有极限、连续、可导、可微的关系

$$\text{可微}\Leftrightarrow\text{可导}\rightarrow\text{连续}\begin{cases}\nearrow\ \text{有极限}\\ \searrow\ \text{有定义}\end{cases}$$

4.函数 $f(x)$ 的微分与导数的区别和联系

导数与微分是由不同问题引出来的两个不同概念.导数 $f'(x)$ 反映了函数 y 在点 x 处随自变量变化而变化的快慢程度；微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 则是自变量在点 x 处有增量 Δx 时，函数增量 Δy 的近似表示，即 Δy 的线性主部. $f'(x)$ 只与点 x 有关，而微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 不仅与 x 有关，而且与 Δx 有关.

从几何意义上看，导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，而微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 则是曲线 $y=f(x)$ 过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线 L 在点 x_0 处纵坐标相应于 Δx 的增量，见图 2.1.

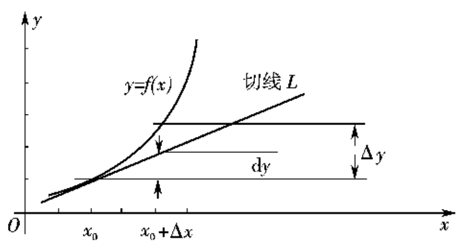


图 2.1

从功能上说，导数多用于研究函数的性态，而微分多用于近似计算.当函数 $y=f(x)$ 的自变量在点 x_0 处发生微小变化时，用函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处切线纵坐标的增量 dy 来估计函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量 Δy，见图 2.1.

导数与微分有密切的联系：$f(x)$在点x处可导是可微的充分必要条件，即可微与可导是等价的，且$dy = f'(x)dx$.

（七）主要的思想方法

1.微分的思想

在导数与微分的概念中充分体现了“以直代曲”（在局部）的微分思想.这是微积分的一个基本思想，理解好这一思想对学习基本概念、基本理论、基本计算方法以及应用大有益处.

2.数形结合的思想

学习导数与微分概念时，讨论了它们的几何意义，以进一步理解这两个概念.通过几何图形直观理解概念以及定理的证明等内容是高等数学常用的方法，这是抽象思维与形象思维的结合，在学习中应予以注意.

3.极限的思想

导数概念的引入与定义深刻体现了极限的思想.

4.逻辑思维方法

归纳法、分类法等逻辑思维方法在本章有充分的体现，理解和掌握这些方法有助于良好理性思维的形成.

三、解题研究

（一）导数概念与性质

1.利用导数定义求导数

例1　设 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 讨论$f(x)$在点$x = 0$处的可导性.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$，

所以$f(x)$在点$x = 0$处可导，且$f'(0) = 0$.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时, $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$,

当 $x>0$ 时, $f'(x)=(x)'=1$.

又 $$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

从而 $f'(0)=1$, 于是 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

例 3 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$, 求 $f'(1)$.

解 因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 所以

$$f(1)=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0,$$

故 $$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2.$$

注 求分段函数在分段点处的导数时要用导数的定义. 当分段函数在分段点两侧表达式不同时, 要用 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ 来求. 当不知道 $f'(x_0)$ 是否存在时, 要用导数的定义来求 $f'(x_0)$.

例 4 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}=a$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(\ln x)-g(0)}{\ln x}=b$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(|\sin x|)-\varphi(0)}{|\sin x|}=c$, 则 $a=\underline{f'(0)}$, $b=\underline{g'(0)}$, $c=\underline{\varphi'_+(0)}$.

注 由于不知道 $\varphi'(0)$ 是否存在, 在 $x\to 0$ 的过程中, $|\sin x|$ 始终保持正号, 因此只能得到 $c=\varphi'_+(0)$.

2. **导数的几何意义**

例 5 若直线 $y=2x+b$ 是抛物线 $y=x^2$ 在某点处的法线, 求 b.

解 在抛物线 $y=x^2$ 某点 (x_0, x_0^2) 处的法线方程为

$$y-x_0^2=-\frac{(x-x_0)}{2x_0},$$

与 $y=2x+b$ 比较,则有

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2x_0}=2, \\ b=\dfrac{1}{2}+x_0^2, \end{cases}$$

解之得　$b=\dfrac{9}{16}$.

3.函数的连续性、可导性及其他

例 6　$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$在点 $x=0$ 处(　　).

(A) 连续且可导　　(B) 连续不可导

(C) 不连续　　(D) 不仅可导,导数也连续

分析　此题可以由简到繁逐项判断,先看连续性,由

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

可知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.再看可导性,由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

不存在,故只有选项 (B) 正确.

例 7　设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x<0, \\ b+\sin 2x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 问 a、b 取何值时 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导?

分析　讨论分段函数在分段点处的导数时,一般先讨论函数在分段点处的连续性,再讨论其可导性,而且要用定义讨论.当分段点两侧函数表达式不同时,要讨论左、右导数.

解　若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,则必有

$$f(0+0)=f(0-0)=f(0),\text{且 } f'_+(0)=f'_-(0),$$

可得　$\lim\limits_{x\to 0^+}(b+\sin 2x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{ax}=1$,即 $b=1$.

且　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+\sin 2x)-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x-0}$,即 $a=2$.

因此,当 $a=2,b=1$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=2$.

例 8 证明可导偶函数的导数为奇函数.

证法 1 利用导数定义.

设 $f(x)$ 可导且 $f(-x)=f(x)$,有

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x-\Delta x)]-f(-x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= -f'(x).
\end{aligned}$$

由此可得 $f'(x)$ 为奇函数.

证法 2 利用求导法则.

设 $f(x)$ 可导且 $f(-x)=f(x)$,该式两边对 x 求导,得

$$f'(-x)\cdot(-1)=f'(x),\text{即 } f'(-x)=-f'(x).$$

由此可得 $f'(x)$ 为奇函数.

例 9 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$,求 $f'(0)=0$.

解法 1 用导数定义求 $f'(0)$.这里 $f(0)=0$,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)-0}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)\\
&= 10!.
\end{aligned}$$

解法 2 用乘积的导数公式求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x)'[(x-1)(x-2)\cdots(x-10)]+x[(x-1)(x-2)\\
&\quad\cdots(x-10)]'\\
&= [(x-1)(x-2)\cdots(x-10)]+x[(x-1)(x-2)\cdots(x\\
&\quad-10)]',
\end{aligned}$$

故

$$f'(0)=(-1)(-2)(-3)\cdots(-10)=10!.$$

(二) 导数的求法

1. 函数求导

例 10　$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{\arccos x}}$，求 $y'(0)$.

解　在 $x=0$ 的充分小邻域内，函数化为 $y=\dfrac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln\arccos x]$ 再求导，

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{\arccos x}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\arccos x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

得
$$y'(0)=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

注　求导数以前先化简，以简化导数运算.

2. 复合函数的导数

例 11　设 $f(x)$ 可导，$y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$，求 y'.

解
$$y'=f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)(\cos^2 x)'$$
$$=f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2 x)(-2\sin x\cos x)$$
$$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)].$$

例 12　设 $f''(x)$ 存在，$y=f(x^2)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解
$$\frac{dy}{dx}=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(2x)'f'(x^2)+2x[f'(x^2)]'$$
$$=2f'(x^2)+2xf''(x^2)(x^2)'$$
$$=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2).$$

注　$f'(x^2)$ 是将 x^2 视为一个整体变量的导数，类似 $f''(x^2)$ 是将 x^2 视为一个整体变量的二阶导数.

例 13　求函数 $y=\sqrt[5]{\dfrac{(x-5)^3}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 的导数.

解　对函数两边先取绝对值再取对数,得

$$\ln|y|=\frac{1}{5}\left[3\ln|x-5|-\frac{1}{5}\ln(x^2+2)\right],$$

两端对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\left[\frac{3}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)}\right].$$

故
$$y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{(x-5)^3}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\frac{3}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)}\right].$$

例 14　求函数 $y=(1+x^2)^{\sin x}$ 的导数.

解　对函数两边取对数,得

$$\ln y=\sin x\ln(1+x^2),$$

两端对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}.$$

故
$$y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right].$$

3.隐函数的导数

例 15　设 $y=y(x)$ 由方程 $e^x+xy=0$ 所确定,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　方程 $e^x+xy=0$ 两边对 x 求导,得

$$e^x+y+xy'=0,\tag{1}$$

故
$$y'=-\frac{e^x+y}{x}.$$

(1)式两边再对 x 求导,得

$$e^x+y'+y'+xy''=0,$$

故
$$y''=-\frac{e^x+2y'}{x}=-\frac{xe^x-2e^x-2y}{x^2}.$$

例 16　设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+\ln y=1$ 所确定,求 $y''(0)$.

解　方程 $xy+\ln y=1$ 两边对 x 求导,得

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0,\tag{1}$$

⑴式两边再对 x 求导，得

$$2y' + xy'' + \frac{1}{y}y'' - \frac{1}{y^2}(y')^2 = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)y'' + 2y' - \frac{1}{y^2}(y')^2 = 0. \qquad (2)$$

将 $x = 0$ 代入原方程得 $y = e$，再代入⑴式得 $y'(0) = -e^2$，最后都分别代入⑵式，即得

$$y''(0) = 3e^3.$$

注　求 $y''(0)$ 时不用从⑵式解出 y''，可以直接将 $x = 0, y = e$，$y'(0) = -e^2$ 分别代入⑵式，这样计算简单.

4. 参数方程求导

例 17　设 $\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{1}{t}$，又 $\dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}$，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{1+t^2}$，

故

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{1+t^2}{t^3}.$$

例 18　求曲线 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 在 $t = 0$ 相应点处的切线方程.

解　曲线方程两端对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6t + 2, \\ e^y \cdot \dfrac{dy}{dt} \cdot \sin t + e^y \cos t - \dfrac{dy}{dt} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6t + 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}, \end{cases}$$

从而
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^y\cos t}{(6t+2)(1-e^y\sin t)}.$$

当 $t=0$ 时，$x(0)=3$，$y(0)=1$，代入上式得 $y'(0)=\frac{e}{2}$，则曲线在 $t=0$ 相应点 $(3,1)$ 处的切线方程为
$$y-1=\frac{e}{2}(x-3),$$
即
$$y=\frac{e}{2}x+1-\frac{3}{2}e.$$

5.高阶导数

例 19　设 $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$，求 $f^{(n)}(x)$.

解　$f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)$
$$=-\cos 2x,$$
从而
$$f'(x)=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right);$$
$$f''(x)=-2^2\cos\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=-2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

注　将 $f(x)$ 变形使得逐次求导后便于归纳 $f^{(n)}(x)$ 的表达式.

例 20　已知 $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

解
$$y^{(50)}=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^k(\sin 2x)^{(50-k)}(x^2)^{(k)}$$
$$=x^2\cdot 2^{50}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 50\right)+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 49\right)$$
$$+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{48}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 48\right)$$
$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1\,225}{2}\sin 2x\right).$$

6.**微分**

例 21　**利用一阶微分形式不变性求函数** $y=e^{-x^2}\cos(3-x)$ **的微分.**

解　$dy=d(e^{-x^2})\cdot\cos(3-x)+e^{-x^2}\cdot d[\cos(3-x)]$

$$=\cos(3-x)\cdot e^{-x^2}d(-x^2)-e^{-x^2}\cdot\sin(3-x)d[(3-x)]$$

$$=e^{-x^2}\cos(3-x)(-2x)dx+e^{-x^2}\cdot\sin(3-x)dx$$

$$=e^{-x^2}[-2x\cos(3-x)+\sin(3-x)]dx.$$

例 22　**设** $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$，**求** $\frac{dy}{dx}$.

解法 1　**利用一阶微分形式的不变性.**

$$dy=d\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)d\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)d\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$$

$$=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)dx,$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right).$$

解法 2　**利用复合函数求导法则.**

$$\frac{dy}{dx}=\left[\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]'$$

$$=2\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\left[\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]'$$

$$=2\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\left[\frac{1-\ln x}{x}\right]'$$

$$=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right).$$

例 23　**若** $\varphi'(x)$ **存在，**$y=\varphi(\sec^2 x)+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$，**求** dy **与** y'.

解　$dy=d[\varphi(\sec^2 x)+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}]$

$$=d\varphi(\sec^2 x)+d\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$= \varphi'(\sec^2 x)\mathrm{d}(\sec^2 x) + \frac{1}{3}(1+\sqrt[3]{x})^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}(1+\sqrt[3]{x})$$

$$= 2\varphi'(\sec^2 x)\sec^2 x\tan x\mathrm{d}x + \frac{1}{3}(1+\sqrt[3]{x})^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$$

$$= \left\{2\varphi'(\sec^2 x)\sec^2 x\tan x + \frac{1}{9}[(1+\sqrt[3]{x})x]^{-\frac{2}{3}}\right\}\mathrm{d}x,$$

所以 $y' = 2\varphi'(\sec^2 x)\sec^2 x\tan x + \frac{1}{9}[(1+\sqrt[3]{x})x]^{-\frac{2}{3}}$.

例 24 **设有一个球体的半径在以** 10 cm/s **的速度增长,求半径为** 10 cm **时,此球的体积和表面积的增长速度**.

解 **由于球半径** r **是时间** t **的函数,因此球体积** V **与球表面积** S **也都是** t **的函数**.**由** $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ **及** $S=4\pi r^2$**,可得**

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 8\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

由题意知 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 10$ cm/s**,故当** $r=10$ cm **时,**

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{r=10} = 4\pi\times 10^2\times 10 = 12\ 566.4\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s};$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{r=10} = 8\pi\times 10\times 10 = 2\ 513.3\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}.$$

例 25 **证明当** $|x|$ **较小时,有近似公式** $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$ **成立,并利用公式计算** $\sqrt[3]{996}$.

证明 **当** $|x|$ **较小时,有近似公式** $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$.

令 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$**,则** $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\big|_{x=0}=\frac{1}{n}$**,代入上面近似公式得**

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x.$$

$$\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1\ 000-4} = \sqrt[3]{1\ 000\left(1-\frac{4}{1\ 000}\right)} = 10\sqrt[3]{1-\frac{4}{1\ 000}}$$

$$= 10\left(1-\frac{1}{3}\times\frac{4}{1\ 000}\right)\approx 9.987.$$

四、练习题及答案

习题(A)

一、填空题

1.函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导的________条件.

2.设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导,则 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} =$ ________.

3.曲线 $y = x - e^x$ 上,点________处的切线与 x 轴平行,切线方程为________.

4.设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$,则 $f'(0) =$ ________.

5.$d\left(\ln \dfrac{1}{1 + x^2}\right) =$ ________ $d(1 + x^2)$.

二、选择题

1.设 $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处可导且 $f'(2) = 1$,则 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 - h) - f(2)}{2h} =$ (　　).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 2　　(D) -2

2.设函数 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$ (　　).

(A) $\dfrac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}}$　　(B) $-\dfrac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}}$　　(C) $-\dfrac{1}{2a\sin^2 \frac{t}{2}}$　　(D) $\dfrac{1}{\sin^4 \frac{t}{2}}$

3.设 $f(x)$ 为可微函数,则在点 x 处,当 $\Delta x \to 0$ 时,$\Delta y - dy$ 是关于 Δx 的(　　).

(A) 同阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 高阶无穷小　　　　(D) 等价无穷小

三、计算题

1. 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$，求 y'.

2. 设 $f(x)$ 可导，$y=f\left(a^x\right)a^{f(x)}$，求 y'.

3. 设 $f'(\cos x)=\cos 2x$，求 $f''(x)$.

4. 求 $\dfrac{d}{d\left(x^3\right)}\left(x^3-5x^6-x^9\right)$.

5. 设 $x^2+xy-2y^2=2x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

6. 设 $y=xe^x$，求 $y^{(n)}$.

7. 求 $y=\ln(2x+1)+x^2$ 在点 $x=-1$ 处的微分.

习题 (B)

一、填空题

1. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微的________条件.

2. 设 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$________.

3. 曲线 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 与 x 轴正半轴的交点是________，该点的切线方程为________.

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

5. $d\left(\sin^2 x\right)=$________ $d\left(\sqrt{x}\right)$.

二、选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^2, & x\leqslant1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处(　　).

(A) 左、右导数都存在

(B) 左导数存在，但右导数不存在

(C) 右导数存在,但左导数不存在

(D) 左、右导数都不存在

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sqrt{1-\cos x})-f(0)}{\sqrt{1-\cos x}}=C$,则 $C=$ (　　).

(A) 0　　(B) $f'(0)$　　(C) $f'_+(0)$　　(D) $f'_-(0)$

3. 设函数 $y=x-\dfrac{1}{2}\sin x$,则 $\dfrac{dx}{dy}=$ (　　).

(A) $1-\dfrac{1}{2}\cos y$　　(B) $1-\dfrac{1}{2}\cos x$　　(C) $1-\dfrac{1}{2}\sin x$　　(D) $\dfrac{2}{2-\cos x}$

4. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 是 (　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

三、计算题

1. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. $y=\sin x^3$,求 $\dfrac{dy}{d(x^2)}$.

3. 设 $y=f[x\varphi(x)]$,其中 $f(x)$、$\varphi(x)$ 有二阶导数,求 y''.

4. 设 $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$,求 dy.

5. 设 $y=(\ln x)^x$,求 y'.

6. 设 $y=\cos^2 x$,求 $y^{(n)}$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}-1, & x<0,\\ \ln(1+x)-x\cos x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的连续区间与可导范围,并求 $f'(x)$.

习题(A)答案

一、填空题

1. 必要.　2. $3f'(x_0)$.　3. $(0,-1)$,$y=-1$.　4. a_{n-1}.

5. $-\frac{1}{1+x^2}$.

二、选择题

1.A.　2.B.　3.C.

三、计算题

1. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.　2. $a^{f(x)}\ln a\,[a^x f'(a^x)+f'(x)f(a^x)]$.

3. $4x, |x|\leqslant 1$.　4. $1-10x^3-3x^6$.　5. $\frac{2-2x-y}{x-4y}$.

6. $(x+n)e^x$.　7. $-4dx$.

习题(B)答案

一、填空题

1. **充要**.　2. 1.　3. $(1,0)$, $y=2(x-1)$.　4. $\frac{3\pi}{4}$.

5. $2\sqrt{x}\sin(2x)$.

二、选择题

1.B.　2.C.　3.D.　4.C.

三、计算题

1. $a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a$.　2. $\frac{3}{2}x\cos x^3$.

3. $[\varphi(x)+x\varphi'(x)]^2 f''[x\varphi(x)]+[2\varphi'(x)+x\varphi''(x)]f'[x\varphi(x)]$.

4. $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$.　5. $\frac{e(2e-3)}{4}$.　6. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

7. $(-\quad,+\quad),(-\quad,+\quad)$,

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0,\\ \frac{1}{1+x}-\cos x+x\sin x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

第三章　中值定理与导数的应用

一、本章知识的作用与意义

导数是刻画函数在一点处变化率的数学模型，它反映了函数在一点处的局部变化性态．但在理论和实际应用中，常常需要把握函数在某区间的整体性质与该区间内某点处导数之间的关系，中值定理正是联系函数局部性质与整体性质的“桥梁”．因此，利用中值定理，可以根据函数的局部性质来推断函数的整体性质．由于这些性质都与自变量在所给区间内的某个中间值有关，因此被统称为中值定理．利用中值定理，可以根据导数符号分析函数的性质及其图形，即曲线变化的各种特征，如函数的单调性、极值、最值及曲线的凹凸性等．

以中值定理为理论基础，以导数为工具，还给出了一种求未定式极限的方法——洛必达法则；中值定理还解决了函数近似表达式和近似计算等问题；在一些最优化理论中，很多实际问题都可以转化为求某个函数的最值．因此，应用中值定理往往可以使许多实际问题迎刃而解，如“历史上行星和彗星围绕太阳旋转的轨道都是圆锥曲线”这一著名论断就是依靠中值定理及微分法根据有关的物理定律而得出的结论．

中值定理不仅可以解决实际问题，而且是微分学自身发展的理论基础，正是由于这一重要性，中值定理又称为微分基本定理，它揭示了可导函数更深刻的性质．

二、知识要点及思想方法

(一) 中值定理

1. 罗尔定理

设函数 $f(x)$ 满足:①在闭区间 $[a,b]$ 上连续,②在开区间 (a,b) 内可导,③ $f(a)=f(b)$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

注 ①罗尔定理的三个条件只是充分条件,不是必要条件,这三个条件不完全满足时,结论也有可能成立.但这三个条件都是不可缺的,缺了其中一个,结论就可能不成立.例如:函数 $f(x)=\begin{cases}x, 0\leqslant x<1,\\ 0, x=1\end{cases}$ 不满足条件①,定理结论不成立;函数 $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$ 不满足条件②,定理结论不成立;函数 $f(x)=x, x\in[0,1]$ 不满足条件③,定理结论不成立.

②罗尔定理中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导这两个条件不能用在 $[a,b]$ 上可导一个条件来代替,因为这样包含了函数 $f(x)$ 在区间端点 a 的右导数 $f'_+(a)$ 与 b 的左导数 $f'_-(b)$ 也都存在,条件被加强,定理适用的范围被缩小.例如,$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上连续,在 $(-1,1)$ 内可导,且 $f(-1)=f(1)=0$,满足罗尔定理的三个条件,于是在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=-\left.\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=\xi}=-\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=0$.解得 $\xi=0\in(-1,1)$.但 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $x=\pm1$ 处 $f'(x)$ 都不存在.

③罗尔定理研究的是导函数方程 $f'(x)=0$ 的根的存在性问题.

2. 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足:①在闭区间 $[a,b]$ 上连续,②在开区间 (a,b) 内可导,那么,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

注　拉格朗日中值定理有如下几种常见形式.

①$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$，$\theta\in(0,1)$，**这个公式与微分不同，它给出了函数增量与其导数关系的精确表达式，所以拉格朗日中值定理也称为有限增量定理.**

②$f(x)-f(x_0)=f'[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)$，$\theta\in(0,1)$.

3.**柯西中值定理**

设函数 $f(x)$、$F(x)$ **满足条件：**①**在闭区间** $[a,b]$ **上连续，**②**在开区间** (a,b) **内可导，**③ $F'(x)\neq0$，$\forall x\in(a,b)$，**则至少存在一点** $\xi\in(a,b)$，**使得**$\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$.

注　**①证明柯西中值定理时，若对** $f(x)$，$F(x)$ **分别用拉格朗日中值定理得到** $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$，**两式相除得** $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，**这是错误的，其错误在于对** $f(x)$，$F(x)$ **应用拉格朗日中值定理时，所得的** ξ **未必是同一个** ξ，**即应有** $f(b)-f(a)=f'(\xi_1)(b-a)$，$F(b)-F(a)=F'(\xi_2)(b-a)$，**两式相除得**$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-f(a)}=\dfrac{f'(\xi_1)}{F'(\xi_2)}$，**不是柯西中值定理的结论.**

②**罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理的中值点是开区间内的某一点，而非区间内的任意点或指定一点，换言之，这三个中值定理都仅"定性"地指出了中值点的存在性，而非"定量"地指明其具体数值.**

4.**泰勒中值定理**

设函数 $f(x)$ **在含** x_0 **的某个开区间** (a,b) **内具有直到** $(n+1)$ **阶的导数，则对任一** $x\in(a,b)$，**有**

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ξ 是介于 x 与 x_0 之间的某个值. 常称 $R_n(x)$ 为拉格朗日型余项.

最常用到的是 $x_0=0$ 的情形,这时的泰勒公式也称为麦克劳林公式. 带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式是

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

注 ①用一次线性函数计算函数值的近似计算公式:$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. 这个公式的思想是"以直代曲",它计算简单(一次函数),但精度不高,而且没给出误差估计,仅知道当 $x\to x_0$ 时其误差是比 $(x-x_0)$ 高阶的无穷小,显然不能够满足近似计算对误差的要求. 泰勒中值定理提供了用多项式逼近函数的一条途径,并且可以估计误差,从而在理论上和应用中起着重要的作用.

②$R_n(x)$ 又常记作 $o((x-x_0)^n)$,称为佩亚诺型余项. 当 $f^{(n+1)}(x)$ 是有界函数时,用拉格朗日型余项可以估计误差:若 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ (M 为常数,$n=1,2,\cdots$),则 $|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. 因此,带拉格朗日型余项的泰勒公式常用来进行近似计算,而带佩亚诺型余项的泰勒公式则常用于求函数极限等.

③常见初等函数的麦克劳林展开式:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+(-1)^n\frac{\sin\left(\xi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1};$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2};$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

$$+(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)}x^{n+1};$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1};$$

ξ 是介于 0 与 x 之间的某个值.

④当 $n=0$ 时,泰勒公式就变成了拉格朗日公式,即泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.从上不难看出这四个中值定理之间的关系 以拉格朗日中值定理为中心,罗尔定理可以看成是拉格朗日中值定理的特殊情形,而柯西中值定理和泰勒中值定理可以看成是拉格朗日中值定理的推广,柯西中值定理还可以看成是拉格朗日中值定理的参数方程形式.

（二）洛必达法则

如果 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足下列条件：

①$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ $,$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\ $）;

②在点 x_0 的某一去心邻域内可导,且 $F'(x)\neq 0$;

③$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大）.

则有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

注　①如果把定理中的所有 x_0 换为　或 x_0^+、x_0^-、-　、+　等,定理仍然成立.

②$\frac{0}{0}$ 与 — 都称为未定式,求 $\frac{0}{0}$ 型或 — 型的极限时都要根据函数的不同类型选用相应的方法.其他如 0·　,1　,0^0,　^{0},　-　都可转化为用 $\frac{0}{0}$ 或 — 的方法去求.

③在运用洛必达法则求极限时，首先要看是不是$\frac{0}{0}$型或—型未定式，或是否可转化为上述两种形式．同时还要验证$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$是否存在．并不是所有$\frac{0}{0}$型、—型未定式都可以用洛必达法则求解．如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$不存在，则不能断定$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}$不存在，只是此时不能用洛必达法则．例如 求极限$\lim\limits_{x\to}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}$，如用洛必达法则有$\lim\limits_{x\to}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to}\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$，极限不存在．这种做法是错误的，正确的解法是

$$\lim_{x\to}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}=\lim_{x\to}\frac{1-\frac{1}{x}\cos x}{1+\frac{1}{x}\cos x}=1.$$

错误的原因在于，在洛必达法则的三个条件中，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在是充分条件而不是必要条件，即$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$不存在，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}$仍可能存在，只不过不能用洛必达法则求解．

④若出现循环，则考虑用其他方法．例如：

$$\lim_{x\to +}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to +}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to +}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

出现循环，而原式$\lim\limits_{x\to +}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to +}\frac{1+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{1}{e^{2x}}}=1.$

⑤若$\lim\limits_{n\to}\frac{f(n)}{F(n)}$为未定式，则可以转化为$\lim\limits_{x\to +}\frac{f(x)}{F(x)}$，即有$\lim\limits_{n\to}\frac{f(n)}{F(n)}=\lim\limits_{x\to +}\frac{f(x)}{F(x)}$，然后考虑对$\lim\limits_{x\to +}\frac{f(x)}{F(x)}$用洛必达法则．

⑥要将前面所介绍过的求极限的方法与洛必达法则结合起来，如在用洛必达法则求极限之前，把函数化简或把较复杂的因式用简单等

价无穷小来替换,也常把非不定式提取出来,以简化计算(见例31、32).

（三）单调性及其判定

①设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则:若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增;若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减.

注　如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$,而只在个别点处 $f'(x)=0$,不影响 $f(x)$ 的增减性.

②使 $f'(x)=0$ 的点称为驻点.

③求函数 $f(x)$ 的单调区间的步骤:

ⓐ求定义域;

ⓑ求 $f'(x)$,驻点及使 $f'(x)$ 不存在的点;

ⓒ以ⓑ中所求得的点为分界点,将定义域分割成部分区间,列表讨论在各区间内 $f'(x)$ 的符号,由此判定增减性.

（四）极值与最值

1.定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,若对任何 $x\in U(x_0,\delta)$,总有 $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$,则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值(极小值);点 x_0 称为 $f(x)$ 的极大(小)值点.

注　①极值是一个局部性的概念,它只与极值点附近的函数值进行比较,所以函数在一个给定的区间上可以有几个极大值和几个极小值,并且某个极大值还可能比极小值小,而最值是一个全局性的概念,是指一个函数在一个确定范围内全体函数值中的最大值和最小值.

②极值可能在驻点与 $f'(x)$ 不存在的点处取得,两者必居其一,但驻点与 $f'(x)$ 不存在的点不一定是极值点.

③在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数,其最值可能在端点、驻点、导数不存在的点处取得,但极值(如存在)只能在区间内部取得.

④若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调,则在端点处取得最值.

⑤若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续且只有一个极值点 x_0,则当 x_0 为极大(小)值点时,$f(x_0)$ 就是最大(小)值.

⑥在实际问题中,需按实际情况进行判断.当表示某实际问题的函数 $f(x)$ 在所讨论的区间内只有一个可能的极值点时,则该实际问题一定在该点取得所求的最大值或最小值.

2.极值判断的充要条件

(1) 第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $U(x_0,\delta)$($\delta>0$ 为常数)内可导且 $f(x_0)=0$,则有以下结论.

若 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 左右两侧同号,则 $x=x_0$ 不是 $f(x)$ 极值点;

当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极小值;

当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极大值.

注 此命题是充分条件,但非必要条件,即使 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极大值,$f(x)$ 在点 x_0 左邻域内也不一定递增,在点 x_0 左邻域内也不一定递减(见例45).

(2) 第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导,且 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则当 $f''(x_0)>0$ 时,$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点;当 $f''(x_0)<0$ 时,$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

注 对于应用二阶导数无法判别的问题,可借助更高阶的导数来判别.

(3) 第三充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导,且 $f^{(k)}(x_0)=0$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则当 n 为偶数时,$f(x)$ 在点 x_0 处取得极值,且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取得极大值,$f^{(n)}(x_0)>0$ 时取得极小值.当 n 为奇数时,$f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

4.求闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的极值的方法和步骤

①求定义域;

②求 $f'(x)$,驻点及 $f'(x)$ 不存在的点;

③以②中所找点为分界点，将定义域分割成部分区间，用第一充分条件或第二充分条件判定.

注　若是求函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最值，则不需判定 $f(x)$ 在以上分界点取极大值还是极小值，只需求出驻点、导数不存在的点处的函数值与端点处的函数值 $f(a)$、$f(b)$，比较得出最大值和最小值.

（五）函数的凹凸性

1.凹凸性的概念

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，对 (a,b) 中任意两点 x_1,x_2，若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内的图形是凹的，反之称为是凸的.

2.函数凹凸性的判定

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的二阶导数存在，那么

①若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的图形是凹的；

②若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的图形是凸的.

3.拐点

若 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 左右两侧的 $f''(x)$ 异号，则称该点为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

4.求函数 $f(x)$ 的凹凸区间及拐点的步骤

①求定义域；

②求 $f''(x)$，$f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$ 不存在的点；

③以②中所找点为分界点，将定义域分割成部分区间，列表讨论在各区间内 $f''(x)$ 的符号，由此判定.

（六）渐近线、弧微分与曲率等

1.渐近线

若 $\lim\limits_{x\to} f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\quad$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to}\frac{f(x)}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to}[f(x)-kx]=b$，则称直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

2.弧微分

对于有向曲线弧 $y=f(x)$,弧微分 $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$;

若曲线方程为 $x=\varphi(y)$,则 $ds=\sqrt{\varphi'^2(y)+1}dy$;

若曲线以参数方程形式 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ 给出,则 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$;

若曲线方程为极坐标形式 $r=r(\theta)$,则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}d\theta$.

3.曲率

曲线 $y=f(x)$ 的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4.函数图形的描绘

函数图形为我们提供了函数直观的几何形象,这对于研究函数很有帮助.以前作函数图形的基本方法是描点法,这种方法的最大缺陷在于选点的盲目性,不能把握整个图形的特点和趋势.将前面介绍的一套用导数研究函数性态的方法应用于函数作图上,可以得到一种更有效和精确的作图方法——微分作图法.作函数图形的一般步骤:

①确定函数的定义域、值域,考查对称性、奇偶性、周期性等;

②列表讨论单调性、极值、极值点、最值、最值点、凹凸性及拐点;

③讨论曲线的渐近线;

④描出特殊点,如极值点、拐点、与坐标轴相交的点等;

⑤描图.

(七)主要的思想方法

中值定理及推导过程用到了演绎、分析、分类等数理逻辑方法以及一些具体的数学方法,如构造辅助函数的种种方法,这对于培养严密的逻辑推理能力,培养直觉思维、发散思维等创新思维都大有益处.

用导数解决实际问题的空间很广,应该树立这种应用数学的意识.

三、解题研究

(一)微分中值定理证明中辅助函数的构造

构造函数是高等数学证明中常采取的技巧,它起着化难为易、化未

知为已知的桥梁沟通作用.在应用中值定理解决问题时,究竟选择什么函数,在什么区间上应用中值定理,是需要着重考虑的问题,这类似于几何问题的辅助线.利用中值定理证明问题时,通常需要构造一个辅助函数,因此构造辅助函数就成了证明问题的关键,也往往是解题的困难所在.下面介绍使用中值定理时常用的一些构造辅助函数的方法.

1.凑导数法

例 1　设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,在 $(1,2)$ 内可导,$f(1)=\frac{1}{2}$,$f(2)=2$.证明存在 $\xi\in(1,2)$,使得 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

分析　结论变形为 $\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0$,不易凑成 $F'(x)\big|_{x=\xi}=0$.将 ξ 换为 x,结论变形为 $\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{2}{x}=0$,即 $(\ln f(x)-2\ln x)'=\left(\ln\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$,从而可设辅助函数为 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$,有 $F(1)=F(2)=\frac{1}{2}$,本题得证.

证明　令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$,则 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,在 $(1,2)$ 内可导,且 $F(1)=F(2)=\frac{1}{2}$,由罗尔定理知,至少存在一点 $\xi\in(1,2)$,使得

$$F'(\xi)=\frac{\xi^2f'(\xi)-2f(\xi)\xi}{\xi^4}=0,$$

从而

$$f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}.$$

注　这种方法主要是把要证明的结论变形为罗尔定理的结论形式,凑出适当的函数作为辅助函数,即将要证的结论中的 ξ 换成 x,变形后用观察法凑成 $F'(x)=0$,由此求出辅助函数 $F(x)$.

2.几何直观法

例 2　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $0<f(x)<1$,对于任何 $x\in(0,1)$,都有 $f'(x)\neq1$,试证在 $(0,1)$ 内有且仅有一点 ξ,使得 $f(\xi)=\xi$.

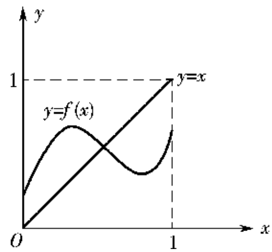


图 3.1

分析　由图 3.1 可看出,此题的几何意义是,连续函数 $y=f(x)$ 的图形曲线必跨越 $y=x$ 这一条直线,而两者交点的横坐标 ξ 恰满足 $f(\xi)=\xi$. 进而,由图还可知道,对 $[0,1]$ 上的同一自变量值 x,这两条曲线纵坐标之差 $f(x)-x$ 构成一个新的函数 $g(x)$,它满足 $g(0)=f(0)>0$, $g(1)=f(1)-1<0$,因而符合介值定理的条件.

证明　令 $g(x)=f(x)-x$,则由题设知,$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $g(0)=f(0)>0$, $g(1)=f(1)-1<0$. 由零点定理知,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $g(\xi)=f(\xi)-\xi=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

用反证法证唯一性. 设有两个点 $x_1, x_2\in(0,1)$,均有 $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=x_2$,在 x_1 与 x_2 所构成的区间上运用拉格朗日中值定理有 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=1$,这与 $f'(x)\neq 1$ 矛盾,故结论成立.

注　上述解题方法的局限性在于,它只针对一些只涉及一阶导数和几何意义比较明确的题目.

3. 常数 k 值法

例 3　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,$0<a<b$,试证存在一点 $\xi\in(a,b)$,使等式 $f(b)-f(a)=\ln\dfrac{b}{a}\xi f'(\xi)$ 成立.

分析　将结论变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$,左边为常数,因此可令 $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}$,则有 $f(b)-k\ln b=f(a)-k\ln a$,令 $b=x$,可得辅助函数 $F(x)=f(x)-k\ln x$.

证法 1　设 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}\ln x$,则可验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件,由罗尔定理得证.

证法 2　将所求证等式的右端恒等变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{\xi}}$.

设函数 $g(x)=\ln x$,则函数 $f(x)$,$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的全部条件,所以存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{\xi}},$$

即

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

例 4　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数,证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.

证法 1　常数 k 值法.

记 $f''(\xi)=k$,则所求证的等式可写为

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{k}{4}(b-a)^2, \tag{1}$$

原题变成了要证明存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $k=f''(\xi)$,注意到 (1) 式关于 a、b 对称,先将其中的 b 改为 x.

作辅助函数

$$F(x)=f(a)-2f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f(x)-\frac{(x-a)^2}{4}k,$$

则易知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且有 $F(a)=F(b)=0$,由罗尔定理知,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $F'(\eta)=0$,即

$$F'(\eta)=-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)+f'(\eta)-\frac{\eta-a}{2}k=0, \tag{2}$$

再对 $f'(x)$ 在 $\left[\dfrac{a+\eta}{2},\eta\right]$ 上用拉格朗日中值定理,得

$$f'(\eta)=f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)+f''(\xi)\left(\eta-\frac{a+\eta}{2}\right), \tag{3}$$

其中,$\xi\in\left(\dfrac{a+\eta}{2},\eta\right)$,比较 (2)、(3) 即得 $k=f''(\xi)$,得证.

证法 2　用泰勒公式.

当所证明的问题中出现高阶导数时,用泰勒公式证明往往有事半功倍的效果.

将 $f(x)$ 在点$\frac{a+b}{2}$处展开成泰勒公式

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right);$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right);$$

两式相加得

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(a-b)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)],$$

$$\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right).$$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数,由介值定理知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$,代入上式得证.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

证法 1 构造辅助函数 $F(x)=x^2[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f(x)$,易得 $F(b)=a^2f(b)-b^2f(a)=F(a)$.

故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件,于是存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$F'(\xi)=2\xi[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f'(\xi)=0.$$

证法 2 将所证等式化为 $f(b)-f(a)=(b^2-a^2)\frac{f'(\xi)}{2\xi}$,设 $f(b)-f(a)=k(b^2-a^2)$,令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-k(x^2-a^2)$,则 $\varphi(x)$ 满足罗尔定理条件.由罗尔定理得,存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=2k\xi$,若 $\xi=0$,则 $f'(\xi)=0$,结论成立.若 $\xi\neq0$,则 $k=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$,从

而有 $2\xi[f(b)-f(a)]=f(\xi)(b^2-a^2)$.

注　在构造函数时,若表达式关于端点处的函数值具有对称性,通常用常数 k 值法来构造辅助函数,这种方法一般选取所证等式中含 ξ 的部分作为 k,即使常数部分分离出来并令其为 k,恒等变形使等式一端为 a 与 $f(a)$ 构成的代数式,另一端为 b 与 $f(b)$ 构成的代数式,将所证等式中的端点值(a 或 b)改为变量 x,移项即为辅助函数 $F(x)$,再用中值定理或待定系数法等方法确定 k.一般来说,当问题涉及高阶导数时,往往考虑多次运用中值定理,更多时要考虑用泰勒公式.

4.倒推法

例 6　设函数 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c,使得 $F(1)=F(0)+(e^{1-c}-e^{-c})F'(c)$.

分析　所要证的结论可变形为

$$F(1)-F(0)=(e^{1-c}-e^{-c})F'(c)=\frac{e-1}{e^c}F'(c),$$

即
$$\frac{F(1)-F(0)}{e-1}=\frac{F'(c)}{e^c},$$

因此可构造函数 $G(x)=e^x$,对 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上应用柯西中值定理即可证明结论.

证明　令 $G(x)=e^x$,由题设知 $F(x)$、$G(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,由柯西中值定理得 $\dfrac{F(1)-F(0)}{e-1}=\dfrac{F'(c)}{e^c}$,整理即得 $F(1)=F(0)+(e^{1-c}-e^{-c})F'(c)$,故结论成立.

注　这种证明方法是从欲证的结论出发,借助于逻辑关系导出已知的条件和结论.

5.乘积因子法

例 7　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 可导,$f(a)=f(b)=0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

分析　e^x 是个恒为正的因子,所证明等式或不等式的两端都乘以或除以这样一个因子,等式或不等式仍然成立,于是想到 e^x 是个理想的乘积因子.

证明 构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,易证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件,故存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$F'(\xi)=\frac{f'(\xi)e^{\xi}-f(\xi)e^{\xi}}{e^{2\xi}}=0,\text{即 } f'(\xi)=f(\xi).$$

注 对于某些要证明的结论,往往出现函数的导数与函数之间关系的证明,直接构造函数往往比较困难.将所证结论的两端都乘以或除以一个恒正或恒负的函数,证明的结论往往不受影响,$e^{\lambda x}$(λ 为常数)是常用的乘积因子.

(二)有关两个或两个以上中值等问题的证明

例 8 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $0\leqslant a<b$,证明:在 (a,b) 内存在 η,ζ,使得 $f'(\zeta)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

分析 所证结论中出现两个点 η,ζ,可以考虑在不同的区间上两次运用中值定理或两次运用不同的中值定理.为证上式成立,只需证 $\frac{f'(\zeta)}{a+b}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$,上式右端可看成 $\frac{f'(x)}{(x^2)'}$ 在 $x=\eta$ 处的值,因此可考虑对 $F(x)=x^2$ 与 $f(x)$ 用柯西中值定理.

证明 令 $F(x)=x^2$,因 $0\leqslant a<b$,故 $F(x)$ 与 $f(x)$ 满足柯西中值定理的条件,由柯西中值定理可得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\eta\in(a,b),$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b),$$

又 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,有 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\zeta),\zeta\in(a,b)$,比较二式即得 $f'(\zeta)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

例 9 (2005 年数学一①)已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$.证明:

(1)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

① (2005 年数学一)系指 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题.

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\xi)=1$.

分析　第一部分显然用闭区间上连续函数的介值定理;第二部分为双介值问题,可考虑用拉格朗日中值定理,但应注意利用第一部分的已得结论.

证明　(1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $F(0)=-1<0$,$F(1)=1>0$,于是由介值定理知,存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理,知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi)$,$\xi\in(\xi,1)$,使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},\quad f'(\xi)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}.$$

于是
$$f'(\eta)f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

例 10　已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$.证明:对任意正数 a,b,在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ 和 η,使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

分析　由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,可以断定必用中值定理,又由于 ξ,η 不同,可知应在不同的区间用中值定理.

证明　因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,由介值定理知,存在 $c\in(0,1)$,使 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$,其中 $f(0)=0<\dfrac{a}{a+b}<1=f(1)$.对 $f(x)$ 分别在区间 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)(c-0),\text{即}\frac{f(c)}{f'(\xi)}=c,0<\xi<c;$$

又
$$f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),\text{即}\frac{1-f(c)}{f'(\eta)}=1-c,c<\eta<1.$$

两式相加得 $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\dfrac{1-\frac{a}{a+b}}{f'(\eta)}=1$,整理得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

注　将中值定理与介值定理或积分中值定理(第五章介绍)结合起来的命题是较常见的命题形式,要证明的结论中出现两个或两个以上

不同的中值,一般需多次使用中值定理或用多个中值定理.只有掌握好基本概念与基本理论,才能以不变应万变,否则,过分追求解题模式会限制我们的思维空间.

(三) 不等式的证明

利用导数证明不等式是常见题型,导数为不等式的证明提供了不少有效的方法,常用方法有:利用微分中值定理(拉格朗日中值定理、泰勒公式等);利用函数的单调性;利用极值(或最值);利用函数的凹凸性;常数变易法等.主要步骤是:构造辅助函数,把不等式的证明转化为利用导数研究函数特性.构造辅助函数通常是从不等式出发,用倒推的方法去探求所需的函数,通常将不等式的一端变号移到另一端,从而给出要寻求的辅助函数.

1.利用中值定理

若函数 $f(x)$ 有一、二阶导数,而要证的不等式两端含有 $f(x)$ 的函数值,特别是当 $f(x)$ 的表达式未知时,或者不等式中含有 $f(x)$ 的导数时,常用拉格朗日中值定理证;若不等式两端或一端是两类不同函数的商,或可写成两类不同函数的商时,常用柯西中值定理证.

例 11 证明不等式 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}\ (0<a<b)$.

分析 把不等式可以改写成 $\frac{1}{b}(b-a)<\ln b-\ln a<\frac{1}{a}(b-a)$. 可见中项是函数 $\ln x$ 在区间 $[a,b]$ 的两端点值之差,而 $(b-a)$ 是该区间的长度,于是可对 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上使用拉格朗日中值定理.

证明 设 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$. 在 $[a,b]$ 上运用拉格朗日中值定理,有 $\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a)\quad(a<\xi<b)$.

又因 $\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$,于是有 $\frac{(b-a)}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$,即

$$\frac{(b-a)}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

例 12 当 $x>0$ 时,$f''(x)$ 存在,且 $|f(x)|\leqslant a$,$|f''(x)|\leqslant b$ $(a,b$

为正常数),证明:$x>0$ 时,$|f''(x)|\leqslant 2\sqrt{ab}$.

分析　利用泰勒公式.若已知函数 $f(x)$(没给 $f(x)$ 的表达式)在某区间上有二阶以上的导数,在证不等式时常用泰勒公式(带拉格朗日型余项).

证明　对 $x>0,h>0$,由泰勒公式可得

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi),x<\xi<x+h,$$

由上式得

$$|hf'(x)|=\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(\xi)\right|$$

$$\leqslant|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(\xi)|\leqslant 2a+\frac{h^2}{2}b,$$

整理得　$|f'(x)|\leqslant\frac{2a}{h}+\frac{hb}{2}$.

因为 $|f'(x)|$ 与 h 无关,所以 $|f'(x)|$ 小于等于 $\frac{2a}{h}+\frac{hb}{2}$ 的最小值,

而　$$\frac{2a}{h}+\frac{hb}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{2a}{h}\frac{hb}{2}}=2\sqrt{ab}.$$

从而结论成立.

例 13　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微,$f(0)=f(1)=0$,且 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$.证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\min\limits_{x\in[0,1]}f''(\xi)\leqslant -16$.

分析　要证的结论中出现高阶导数形式,常常考虑用泰勒公式.问题是将 $f(x)$ 在何处展开,条件中有 $f(0)=f(1)=0$,但条件 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$ 提供的信息更多,不仅给出了函数的最值,而且说明了最值点 x_0 在区间 $[0,1]$ 内取得,从而有 $f'(x_0)=0$.

证明　设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极大值,将 $f(x)$ 在点 x_0 处展开成一阶泰勒公式得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

ξ 在 x_0 与 x 之间,将 $x=0,x=1$ 代入得

$$f(0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x_0)^2,0<\xi_1<x_0,$$

$$f(1)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2,x_0<\xi_2<1,$$

又 $f(x_0)=2,f'(x_0)=0,f(0)=f(1)=0$,故上二式可变为

$$0=2+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x_0^2,0<\xi_1<x_0,\text{即 } f''(\xi_1)=-\frac{4}{x_0^2},$$

$$0=2+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2,x_0<\xi_2<1,\text{即 } f''(\xi_2)=-\frac{4}{(1-x_0)^2}.$$

当 $0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$f''(\xi_1)=-\frac{4}{x_0^2}\leqslant-16\quad(0<\xi_1<x_0)$;

当 $\frac{1}{2}\leqslant x_0<1$ 时,$f''(\xi_2)=-\frac{4}{(1-x_0)^2}\leqslant-16\quad(x_0<\xi_2<1)$.

由上知存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f''(\xi)\leqslant-16$,因而有

$$\min_{x\in[0,1]}f''(\xi)\leqslant-16.$$

注 证明函数不等式时,什么情况下使用泰勒公式呢?一般在不等式中出现高阶导数及其在某点的数值(或已知函数的上下界)或在某点的函数值时,一般考虑用泰勒公式.确定泰勒公式后,下一步是选择展开点,以及多少阶.一般在出现函数值或导数值的点展开,且展开成比题中出现的导数最高阶数低一阶的泰勒展开式,然后利用题设条件中高阶导数的大小或其界对展开式放缩,证明欲证的不等式.当所涉及的区间变化时,余项中的 ξ 一般也要变化.

2.利用函数的单调性

这种方法的思路一般是,如果 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,则 $x>a$ 时,有 $F(x)>F(a)$.如果 $f(a)=\varphi(a)$,要证明当 $x>a$ 时,$f(x)>\varphi(x)$,那么,只要令 $F(x)=f(x)-\varphi(x)$,就可以利用 $F(x)$ 的单调增减性来推导.也就是说,在 $F(x)$ 可导的前提下,只要证明 $F'(x)>0$ 即可.

例 14 证明:$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证明　原式等价于 $\tan x \cdot \sin x > x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

设 $f(x) = \tan x \cdot \sin x - x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则有

$$f'(x) = \sin x(\sec^2 x + 1) - 2x,$$
$$f''(x) = \cos x + \sec x + 2\sec x\tan^2 x - 2.$$

对 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，$\cos x + \sec x > 2\sqrt{\cos x \cdot \sec x} = 2$，$\sec x \cdot \tan^2 x > 0$，所以 $f''(x) > 0$. 从而 $f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，又 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，且 $f'(0) = 0$，所以 $f'(x) > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 于是 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，$f(0) = 0$，所以 $f(x) > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，即

$$\tan x \cdot \sin x > x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. **利用函数的极值与最值**

思路 如果 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 在区间上的最大(小)值，则有 $f(x) \leqslant f(a)$（或 $f(x) \geqslant f(a)$）.

例 15　证明不等式：$x^a - ax \leqslant 1 - a \quad (x > 0, 0 < a < 1)$.

证明　设 $f(x) = x^a - ax - (1 - a)$，则

$$f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1),$$

令 $f'(x) = 0$，得唯一驻点 $x = 1$，又当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$，从而 $f(1)$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\quad)$ 的最大值，即有 $f(x) \leqslant f(1) = 0$. 所以

$$x^a - ax - (1 - a) \leqslant 0，即 \ x^a - ax \leqslant 1 - a \quad (x > 0, 0 < a < 1).$$

例 16　试证 $x > \sin x > \frac{2}{\pi}x, \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

分析　不等式可变为 $1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$，当 $x \to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x} \to 1$；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$. 于是要证的不等式相当于要证函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的值

介于$\frac{2}{\pi}$与1之间.

证明 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$,令 $g(x)=x-\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $g'(x)=-\tan^2 x<0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,故 $g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减,又 $g(x)$在 $x=0$ 处连续,且 $g(0)=0$,故在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内 $g(x)<0$,即 $x-\tan x<0$.所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)<0$.从而 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减,所以 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$在区间的两端取得极大值与极小值.由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,所以

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}<\frac{\sin x}{x}<1,\text{即}\frac{2x}{\pi}<\sin x<x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

4.利用函数图形的凹凸性

由曲线的凹凸性知,在(a,b)内,若 $f''(x)>0$,则函数 $y=f(x)$的图形是凹的,即位于区间$[x_1,x_2]$中点$\frac{x_1+x_2}{2}$处弦的纵坐标不小于曲线的纵坐标,有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.其中,$x_1, x_2$ 为(a,b)内任意两点.等号仅在 $x_1=x_2$ 时成立.

例 17 设 $x>0, y>0$,证明不等式

$$x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln\frac{x+y}{2},$$

且等号仅在 $x=y$ 时成立.

分析 将不等式两边同时除以2,变形为

$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}\geqslant\frac{(x+y)}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

可以看出,左边是函数 $f(t)=t\ln t$ 在两点 x, y 处的值的平均值,而右

边是它在中点$\frac{x+y}{2}$处的函数值，这时只需证 $f''(t)\geqslant 0$ 即可.

证明　设 $f(t)=t\ln t$，则 $f'(t)=1+\ln t$，$f''(t)=\frac{1}{t}>0$，故有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

得
$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{(x+y)}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

即
$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2},$$

当 $x=y$ 时，显然有 $x\ln x+y\ln y=(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$成立，$x>0$，$y>0$，结论得证.

5. 参数变易法

例 18　(2004 年数学一) 设 $e<a<b<e^2$，证明：

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

分析　数值不等式可以借助函数不等式的证明方法来证明，证明函数不等式的常用方法主要有单调性、极值和最值法等.

证法 1　设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以当 $x>e$ 时，$\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调递减，从而当 $e<x<e^2$ 时，$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0$，即当 $e<x<e^2$ 时，$\varphi(x)$ 单调递增.

因此，当 $e<a<b<e^2$ 时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，即

$$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a,$$

故
$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

证法 2　设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以当 $x>e$ 时,$\varphi''(x)<0$,$\varphi'(x)$ 单调递减,从而当 $e<x<e^2$ 时,$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0$. 因此,当 $e<x<e^2$ 时,$\varphi(x)$ 单调递增;$e<a<x<e^2$ 时,$\varphi(x)>\varphi(a)=0$.

令 $x=b$,有 $\varphi(b)>0$,即 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证法 3　对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日定理,得

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),a<\xi<b.$$

设 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$,则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$,当 $t>e$ 时,$\varphi'(t)<0$,所以 $\varphi(t)$ 单调递减,从而 $\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$,即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2},$$

故 $$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

注　此题是数值不等式的证明题型. 由于不能直接利用中值定理证明,所以常用的方法是将数值不等式化为函数不等式,然后借助函数不等式的证明方法加以证明.

例 19　设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上可导,且 $f'(x)$ 单调减少,$f(0)=0$. 证明

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b),0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b.$$

证明　令 $F(x)=f(x+a)-f(x)-f(a)$,$F'(x)=f'(x+a)-f'(x)$,因为 $f'(x)$ 单调减少,又 $a\geqslant 0$,即 $x+a\geqslant x$,$f'(x+a)\leqslant f'(x)$,$F'(a)\leqslant 0$,故 $F(x)$ 单调减少,从而 $F(b)\leqslant F(0)=0$,即

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

例 20　(2006 年数学二) 证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

分析　利用"参数变易法"(即在要证的不等式或恒等式中,把其中一个常数变为变量) 构造辅助函数,再利用函数的单调性证明.

证明　令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x-a\sin a-2\cos a-\pi a$，

$$0<a\leqslant x\leqslant b<\pi,$$

则 $$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi,$$

且 $$f'(\pi)=0.$$

又 $f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$，$0<x<\pi$.

故当 $0<a\leqslant x\leqslant b<\pi$ 时，$f'(x)$ 单调减少，即 $f'(x)>f'(\pi)=0$，所以 $f(x)$ 单调增加，于是 $f(b)>f(a)=0$，即

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

注　证明数值不等式一般需构造辅助函数. 一般通过移项，使不等式一端为"0"，另一端即为所作辅助函数 $f(x)$，当然，若为数值不等式，需把其中一个常数变易为变量来构造辅助函数 $f(x)$，然后求导验证 $f(x)$ 的增减性，并求出区间端点的函数值(或极限值)，作比较即得所证. 本题也可用拉格朗日中值定理结合函数的单调性证明.

6. 形似法

根据要证的不等式形式，构造与之相似的函数，这种作辅助函数的方法称为形似法.

例 21　设 $\alpha>\beta>e$，证明 $\beta^{\alpha}>\alpha^{\beta}$.

证明　因为 $\alpha>\beta>e$，要证 $\beta^{\alpha}>\alpha^{\beta}$，即证 $\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}<\dfrac{\ln\beta}{\beta}$.

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>e$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以当 $x>e$ 时，$f(x)$ 单调减少，当 $\alpha>\beta>e$ 时，有 $\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}<\dfrac{\ln\beta}{\beta}$，即 $\beta^{\alpha}>\alpha^{\beta}$.

7. 其他类型

例 22　设 $f(x)$ 在 (a,b) $(ab<0)$ 内有 $f''(x)<0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\cos x}{\sin^2 x}=2$，证明 $f(x)\leqslant1$，$x\in(a,b)$.

证法 1　由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\cos x}{\sin^2 x}=2$，故当 $x\to0$ 时，$f(x)-\cos x$ 与 $\sin^2 x$ 是同阶无穷小量，即 $f(x)-\cos x$ 与 $2\sin^2 x$ 是等价无穷小量，于是

$$\lim_{x\to0}[f(x)-\cos x]=0,\ \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\cos x=1.$$

又因为 $f''(x)$ 在 (a,b) 内存在,所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,从而 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$,且

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\cos x+\cos x-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.\end{aligned}$$

令 $F(x)=f(x)-1$(考虑要证的不等式),则 $F(0)=0$,$F'(0)=f'(0)=0$.又 $F''(x)=f''(x)<0$,故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值,且 $x=0$ 是 (a,b) 内唯一驻点,于是 $F(0)$ 也是 (a,b) 内最大值.因此,当 $x\in(a,b)$ 时,有 $F(x)\leqslant F(0)=0$,即 $f(x)\leqslant 1$,$x\in(a,b)$.

证法 2 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\cos x}{\sin^2 x}=2$,故 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-\cos x]=0$,又因为 $f'(x)$ 在 (a,b) 内连续,所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}[f(x)-\cos x+\sin x]=\lim_{x\to 0}\sin x=1.$$

且
$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\\&=0.\end{aligned}$$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开为一阶麦克劳林公式(带拉格朗日型余项)有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\quad(0<\theta<1,x\in(a,b)).$$

由于 $f''(x)<0$,$x\in(a,b)$,所以 $f(x)\leqslant 1$,$x\in(a,b)$.

(四)中值定理的其他应用

拉格朗日中值定理与泰勒中值定理等不仅可以用来证明一些等式或不等式,在其他方面也有着十分重要的应用.

1.用拉格朗日中值定理求极限

例 23 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解　函数 $f(t)=e^t$ 在 x 与 $\sin x$ 所构成的区间上运用拉格朗日中值定理得 $\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^{\xi}$，$\xi$ 位于 x 与 $\sin x$ 之间，当 $x\to0$ 时，$\xi\to0$，$\sin x\to0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\xi}=\lim\limits_{\xi\to0}e^{\xi}=1$.

注　本题还可以利用洛必达法则或分子提取 $e^{\sin x}$ 后用等价无穷小代换求极限.

例 24　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)\ (m,n>0)$.

解　令函数 $f(x,y)=\dfrac{y}{1-x^y}$，在 $[m,n]$ 或 $[n,m]$ 上对变量 y 运用拉格朗日中值定理得

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=(m-n)\frac{1-x^{\xi}-\xi x^{\xi}\ln x}{(1-x^{\xi})^2}，\xi \text{ 位于 } m \text{ 与 } n \text{ 之间}.$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^m}\right)&=(m-n)\lim_{x\to1}\frac{1-x^{\xi}+\xi x^{\xi}\ln x}{(1-x^{\xi})^2}\\&=(m-n)\lim_{x\to1}\frac{-\xi x^{\xi-1}+\xi^2x^{\xi-1}\ln x+\xi x^{\xi-1}}{2(1-x^{\xi})(-\xi x^{\xi-1})}\\&=(m-n)\lim_{x\to1}\frac{-\xi\ln x}{2(1-x^{\xi})}=\frac{m-n}{2}.\end{aligned}$$

注　当所求的极限为两个同种形式的函数差或者分子、分母为同种形式的函数差，一般可以考虑用拉格朗日中值定理求极限.

例 25　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1-\sin x^2}{x^4}$.

解　$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$，$\sin x^2=x^2-\dfrac{1}{3!}x^6+o(x^6)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-\sin x^2}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)-\left(x^2-\frac{1}{3!}x^6+o(x^6)\right)}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注　当所求的极限为两个不同函数类型的差或者分子、分母为不

同函数类型的差，而用洛必达法则又比较麻烦，一般可以考虑用泰勒公式求解.本例就是用泰勒公式求极限的方法，这种方法的关键是确定函数展开式的阶数.

2.证明方程根的存在性

例 26 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一零点.

证明 不妨设 $f'(a)>0$，$f'(b)>0$，由 $f'(x)$ 的连续性知，存在 $\delta>0$，使 $f'(x)$ $(a,a+\delta)$ 与 $(b-\delta,b)$ 内大于 0.再根据拉格朗日中值定理，对任意 $x_1\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}=f'(c_1)>0,$$

其中，$a<c_1<x_1$，从而有 $f(x_1)>f(a)=0$.

同理，对任意 $x_2\in(b-\delta,b)$，有

$$\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}=f'(c_2)>0,$$

其中，$x_2<c_2<b$，从而有 $f(x_2)<f(b)=0$.

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续.由零点存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一零点.

3. 证明 e 是无理数

例 27 证明 e 是无理数.

证明 把 e 展开成具有拉格朗日型余项的麦克劳林公式，有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!},0<\xi<1.$$

用反证法，设 e 是有理数，即 $e=\frac{p}{q}$ (p 和 q 为整数)，则有

$$n!e=\text{整数}+\frac{e^{\xi}}{n+1}.$$

对 $\forall n>q$，$n!e=n!\frac{p}{q}$ 也是整数.于是

$$\frac{e^{\xi}}{n+1}=n!\frac{p}{q}-整数=整数-整数=整数.$$

但由 $0<\xi<1\Rightarrow 0<e^{\xi}<e<3$,因而当 $n>3$ 时,$\frac{e^{\xi}}{n+1}$不可能是整数,与前矛盾,从而结论成立.

4.计算常数的近似值

在教材中我们已经学到可以利用泰勒公式求 e 的比较精确的近似值(如精确到 0.000 001).

5.求函数的近似展开式

例 28　把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成含 x^6 项的具有佩亚诺型余项的麦克劳林公式.

解　$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)$,

$$\cos 2x=1-2x^2+\frac{4x^4}{3!}-\frac{2^6x^6}{6!}+o(x^6),$$

(注意,$o(kx)=o(x)$,$k\neq 0$)

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=1-x^2+\frac{2x^4}{3!}-\frac{2^5x^6}{6!}+o(x^6).$$

例 29　把函数 $g(x)=\frac{1}{3+5x}$展开成在点 $x_0=2$ 处具有佩亚诺型余项的泰勒公式.

解　$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$;

$$g(x)=\frac{1}{3+5x}=\frac{1}{13+5(x-2)}=\frac{1}{13}\,\frac{1}{1+\frac{5(x-2)}{13}}$$

$$=\frac{1}{13}\left(1-\frac{5}{13}(x-2)+\left(\frac{5}{13}\right)^2(x-2)^2-\cdots+\right.$$

$$\left.(-1)^n\left(\frac{5}{13}\right)^n(x-2)^n\right)+o((x-2)^n).$$

注　以上二题所采用的方法都是间接展开法,就是利用变形或变量代换等方法将一个较复杂的函数化为由一些简单的初等函数所组成的形式,然后再代入已知的公式.

例 30　(2006 **年数学四**) **试确定** A,B,C **的值,使得**

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中当 $x\to0$ **时**,$o(x^3)$ **是** x^3 **高阶的无穷小**.

分析　**题中等式右边为关于** x **的多项式,此时要联想到** e^x **的泰勒展开式,比较** x **的同次项系数,可得** A,B,C **的值**.

解　**将** e^x **的泰勒展开式** $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ **代入题中等式得**

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right][1+Bx+Cx^2]=1+Ax+o(x^3),$$

整理得　$1+(B+1)x+\left(B+C+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)+o(x^3)$

$$=1+Ax+o(x^3).$$

比较两边同次幂系数得

$$\begin{cases}B+1=A,\\ B+C+\frac{1}{2}=0,\\ \frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}A=\frac{1}{3},\\ B=-\frac{2}{3},\\ C=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

注　**当题设中含有高阶无穷小形式的条件时,要想到用麦克劳林公式或泰勒公式求解,要熟练掌握常用函数的泰勒公式**.

(五) 运用洛必达法则求极限

例 31　**求极限** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}$.

解　**原式** $=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{3}$.

注　**使用洛必达法则时应注意简化求导运算,如恒等变形、等价无穷小代换等都可简化求导运算**.**洛必达法则是分子与分母分别求导数,而不是整个分式求导数**.

例 32　**求极限** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}\cdot x}=-\frac{1}{6}.$$

注　$\sqrt{1-x^2}$**是非不定式,及时排除非不定式可以简化求导运算**.

例 33　**求** $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

例 34　**求** $\lim\limits_{n\to+}\left[n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

分析　**本题中的变量** n **是离散型变量,不能直接求导,应先转化为连续型变量,即求极限** $\lim\limits_{x\to+}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. **本题是求差式的极限,而第一项在** $x\to+$　**时为正无穷大,因此,需要判断第二项是否为无穷大**.

解法 1

$$\lim_{x\to+}x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+}x^2\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+}x=+\quad,$$

所以原极限为　-　**型未定式,令** $x=\dfrac{1}{t}$,**当** $x\to$　**时**,$t\to0^+$,**于是**

$$\lim_{x\to+}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}$.

注 本例为了把 - 型未定式化为$\frac{0}{0}$型未定式,借助了变量代换 $x=\frac{1}{t}$.另外,本题也可以用下面的方法求解.

解法 2

$$\lim_{x\to+}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\ (\ \cdot 0\ \text{型})$$

$$=\lim_{x\to+}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+}\frac{-x}{-2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

解法 3

$$\lim_{x\to+}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+}\left[\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

注 这种通过提取因式把 - 型未定式变形为 0· 型未定式,再想办法计算也是常用的方法.

例 35 **求** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}$.

因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

所以　　**原式** $= e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

例 36　**设** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $g(x)$ **可导且** $g(0) = g'(0) = 0$, $g''(0) = 3$,**求** $f'(0)$.

解　$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{g(x)}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \frac{1}{2} g''(0) = \frac{3}{2}.$$

例 37　**求极限** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ **与** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{(\ln x)^n}$.

分析　**当** $x \to +\infty$ **时**,e^x,x^n,$(\ln x)^n$ **均趋向于** $+\infty$.

解　$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^n}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{(\ln x)^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{n(\ln x)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^n}{n(\ln x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{n(n-1)(\ln x)^{n-2} \cdot \dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n^2 x^n}{n(n-1)(\ln x)^{n-2}} = \cdots$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n^{n-1} x^n}{n(n-1) \cdots 2(\ln x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n^n x^n}{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1} = +\infty.$$

注　**结论表明,当** $x \to +\infty$ **时**,$e^x \to +\infty$ **的速度最快**,$x^n \to +\infty$ **的速度次之**,$(\ln x)^n \to +\infty$ **的速度最慢**.

例 38　**求** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^2 \sin x}$.

解　$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^2 \sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\sin x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x\left(1-\cos x\right)}{x^3}=\frac{1}{4}.$$

注 此题虽然属于$\frac{0}{0}$型未定式极限,但用洛必达法则计算较麻烦,因此,应把多种求极限方法综合使用,并注意随时化简,如 $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)=2$.

例 39 确定常数 a,b,c,使得

$$\ln x=a+b(x-1)+c(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).$$

解法 1 由条件 $\ln x=a+b(x-1)+c(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$,应有

$\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2$ 是无穷小 $(x\to1)$;

$\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2$ 是比 $(x-1)$ 高阶的无穷小 $(x\to1)$;

$\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2$ 是比 $(x-1)^2$ 高阶的无穷小 $(x\to1)$.

根据以上分析,应有

$$\lim_{x\to1}\left[\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2\right]=0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2}{x-1}=0, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2}{(x-1)^2}=0. \tag{3}$$

由 (1) 可得:$a=0$.

对 (2) 用洛必达法则有

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-b-2c(x-1)}{1}=1-b=0,$$

故 $b=1$.

对 (3) 用洛必达法则有

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-a-b(x-1)-c(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-(x-1)-c(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1-2c(x-1)}{2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x^2}-2c}{2}=\frac{-1-2c}{2},$$

从而 $c=-\frac{1}{2}$.

解法2　设 $f(x)=\ln x, x_0=1$,视上式为 $\ln x$ 关于 $x_0=1$ 的二阶泰勒公式,

则 $a+b(x-1)+c(x-1)^2$ 应该为 $f(x)=\ln x$ 在点 $x_0=1$ 处的二阶泰勒多项式,即应有 $a=f(1), b=f'(1), c=\frac{1}{2!}f''(1)$.

$$f(x)=\ln x, f(1)=0;$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}, f'(1)=1;$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}, f''(1)=-1;$$

所以 $a=0, b=1, c=-\frac{1}{2}$,即

$$\ln x=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2).$$

例40　(2006年数学一)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$,

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(2)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析　一般利用单调增加有上界或单调减少有下界数列必有极限的准则来证明数列极限的存在. (2)的计算需利用(1)的结果.

解　(1)因为 $0<x_1<\pi$,所以 $0<x_2=\sin x_1\leqslant1<\pi$.

可推得 $0 < x_{n+1} = \sin x_n \leqslant 1 < \pi, n = 1, 2, \cdots$，所以数列 $\{x_n\}$ 有界.

于是 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\sin x_n}{x_n} < 1$，因当 $x > 0$ 时，$\sin x < x$，所以有 $x_{n+1} < x_n$，可见数列 $\{x_n\}$ 单调减少，故由单调减少有下界数列必有极限知极限 $\lim\limits_{n\to} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to} x_n = l$，在 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边令 $n\to$ ，得 $l = \sin l$，解得 $l = 0$，即

$$\lim_{n\to} x_n = 0.$$

(2) 因 $\lim\limits_{n\to}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，由 (1) 知该极限为 1 型.

令 $t = x_n$，则当 $n\to$ ，$t\to 0$，而

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0}\left(1 + \frac{\sin t}{t} - 1\right)^{\frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\left(1 + \frac{\sin t}{t} - 1\right)^{\frac{1}{\frac{\sin t}{t} - 1}}\right]^{\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t} - 1\right)},$$

又

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t} - 1\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t - t}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{3t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

故

$$\lim_{n\to}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

注 对于有递推关系的数列极限的证明问题，一般利用单调有界数列必有极限准则来证明.

(六) 函数的单调性与极值的求法

1. 函数的单调性

例 41 证明：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导，$f''(x) > 0$，且 $f(0) = 0$，则函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, a)$ 内单调增加.

分析 要证函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, a)$ 内单调增加，只需证 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]' =$

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$,为此,令 $F(x)=xf'(x)-f(x)$,则只需证 $F(x)>0,\forall x\in(0,a)$.

证法 1　$F'(x)=xf''(x)>0,\forall x\in(0,a)$,又 $F(0)=0$,所以 $F(x)>0,\forall x\in(0,a)$.即

$$xf'(x)-f(x)>0,$$

从而 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$,故结论成立.

证法 2　$f(x)$在$[0,a]$上可导,所以 $f(x)$在$[0,x]$,$x\in(0,a]$上满足拉格朗日中值定理的条件,故存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$,又 $f(0)=0$,$f''(x)>0$,所以

$$xf'(x)-f(x)=xf'(x)-xf'(\xi)=x[f'(x)-f'(\xi)]>0,$$

结论成立.

证法 3　由泰勒公式有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

取 $x=0,x_0=x$,有

$$f(0)=0=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(-x)^2,$$

由 $f''(x)>0$,得 $xf'(x)-f(x)>0$,命题得证.

注　本题还可以运用函数的凹凸性加以证明,留给读者自己思考.

2.函数的极值

例 42　求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$的极值.

解　$f(x)=(2x-5)x^{\frac{2}{3}}=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}},x\in R$,则

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)=\frac{10(x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$,又当 $x=0$ 时 $f'(x)$ 不存在,列表(表 3.1):

表 3.1

x	$(-\ \ ,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\ \ )$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以 $f(x)$ 的极大值是 $f(0)=0$,极小值是 $f(1)=-3$.

例 43 若 $f(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 n 阶导数,且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$,$f^{(n)}(a)\neq 0$,证明:

(1) 若 n 是奇数,则 a 不是 $f(x)$ 的极值点.

(2) 若 n 是偶数,则 a 是 $f(x)$ 的极值点.当 $f^{(n)}(a)>0$ 时,a 是 $f(x)$ 的极小值点,$f(a)$ 是极小值;当 $f^{(n)}(a)<0$ 时,a 是 $f(x)$ 的极大值点,$f(a)$ 是极大值.

证明 将 $f(x)$ 在点 a 处展开为带有佩亚诺型余项的泰勒公式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o[(x-a)^n],$$

由已知有 $f(x)-f(a)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o[(x-a)^n]$.

因为上式等号右边第二项 $o[(x-a)^n]$ 是比 $(x-a)^n$ 高阶的无穷小 $(x\to a)$,所以,当 x 充分靠近 a 时,即 $\exists\,\delta>0$,$\forall\, x\in(a-\delta,a+\delta)$,有

(1) 若 n 是奇数:$\forall\, x\in(a-\delta,a)$,有 $(x-a)^n<0$;$\forall\, x\in(a,a+\delta)$,有 $(x-a)^n>0$,即在 a 的左右侧 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 异号,也就是 $f(x)-f(a)$ 要变号,所以,a 不是 $f(x)$ 的极值点.

(2) n 是偶数:$\forall\, x\in(a-\delta,a+\delta)$,有 $(x-a)^n\geqslant 0$.当 $f^{(n)}(a)>0$ 时,$\forall\, x\in(a-\delta,a+\delta)$,有 $f(x)-f(a)\geqslant 0$,即 a 是函数 $f(x)$ 的极小值点,$f(a)$ 是极小值.

当 $f^{(n)}(a)<0$ 时,$\forall\, x\in(a-\delta,a+\delta)$,有 $f(x)-f(a)\leqslant 0$,即 a 是函数 $f(x)$ 的极大值点,$f(a)$ 是极大值,证毕.

例 44　试求函数 $f(x)=x^4(x-1)^3$ 的极值.

解　由于 $f'(x)=x^3(x-1)^2(7x-4)$，因此，$x=0,1,\frac{4}{7}$ 是函数的三个驻点，又 $f''(x)=6x^2(x-1)(7x^2-8x+2)$，由此得，$f''\left(\frac{4}{7}\right)>0$，故 $f(x)$ 在 $x=\frac{4}{7}$ 时取得极小值. $f''(0)=f''(1)=0$，用第二充分条件无法判别.

$f'''(x)=6x(35x^3-60x^2+30x-4)$，有 $f'''(1)>0$，由于 $n=3$ 为奇数，根据第三充分条件（即上题的结论）知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处不取得极值. 因 $f'''(0)=0$，需再求 $f(x)$ 的四阶导数，$f^{(4)}(x)=24(35x^3-45x^2+15x-1)$，有 $f^{(4)}(0)<0$. 因为 $n=4$ 为偶数，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

综上所述，$f(0)=0$ 为极大值，$f\left(\frac{4}{7}\right)=-\left(\frac{4}{7}\right)^4\left(\frac{3}{7}\right)^3=-\frac{6\ 912}{823\ 543}$ 为极小值.

例 45　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值，能否保证 $f(x)$ 在点 x_0 的某左邻域递增，右邻域递减.

解　这一结论未必成立，如 $f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ 由定义知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取得极大值 2，但在 $x=0$ 的左右两侧，由于 $\sin\frac{1}{x}$ 是振荡函数，$f(x)$ 在点 $x=0$ 的任意左邻域和右邻域都不是单调的.

3. **函数的最值**

例 46　求函数 $f(x)=|2x^3-9x^2+12x|$ 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上的最大值与最小值.

解　函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上连续，故必存在最大值与最小值. 由于

$$f(x)=|2x^3-9x^2+12x|=|x(2x^2-9x+12)|$$

$$=\begin{cases}-x(2x^2-9x+12), & -\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant 0,\\ x(2x^2-9x+12), & 0<x\leqslant\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12, & -\dfrac{1}{4}<x<0,\\ 6x^2-18x+12, & 0<x<\dfrac{5}{2},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-6(x-1)(x-2), & -\dfrac{1}{4}<x<0,\\ 6(x-1)(x-2), & 0<x<\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

又因 $f'(0-0)=-12$,$f'(0+0)=12$,**所以由导数极限定理推知函数在** $x=0$ **处不可导**.**求出函数** $f(x)$ **在驻点** $x=1,2$,**不可导点** $x=0$ **以及端点** $x=-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}$ **的函数值**.

$$f(1)=5,f(2)=4,f(0)=0,f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{115}{32},f\left(\frac{5}{2}\right)=5.$$

所以,函数 $f(x)$ **在** $x=0$ **处取得最小值** 0,**在** $x=1$ **和** $x=\dfrac{5}{2}$ **处取得最大值** 5.

注　本题也可以设 $\varphi(x)=x(2x^2-9x+12)$,**再加以讨论**.

例 47　**已知** $f(x)=xe^{-x^2}$,$x\in(-\quad,+\quad)$,**求** $f(x)$ **的最大值与最小值**.

解　$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}(1-2x^2)$.**令** $f'(x)=0$,**得**

$$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f''(x)=2xe^{-x^2}(2x^2-3),$$

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}>0,f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}<0,$$

所以 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$是 $f(x)$的极小值点,$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$是 $f(x)$的极大值点.

且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=0$,

于是,最小值为 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2e}}$,最大值为 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

4.函数的最值在实际问题中的应用

在许多实际问题中,常常遇到在一定条件下怎样才能使材料最省、效率最高、性能最好、生产过程最快等实际问题.概括地说,这类问题就是在一定条件下,从各种方案中选择一种最优方案,在许多情况下,问题可以转化为求函数的最大值与最小值.解这类问题,注意要恰当地选择因变量和自变量,通常是待求最值的量选为因变量(目标函数),自变量一般选择能使运算简化的量.

例 48　一艘轮船在航行中的燃料费和它速度的立方成正比.已知当速度为 10(km/h),燃料费为每小时 6 元,而其他与速度无关的费用为每小时 96 元.问轮船的速度为多少时,每航行 1 km 所消耗的费用最少?

解　设船速为 x(km/h),据题意,每航行 1 km 的费用为 $y=\frac{1}{x}(kx^3+96)$.又已知当 $x=10$ 时,$k\cdot 10^3=6$,故得比例系数 $k=0.006$.所以有

$$y=\frac{1}{x}(0.006x^3+96),\ x\in(0,+\infty),$$

令 $y'=\frac{0.012}{x^2}(x^3-8\ 000)=0$,得驻点 $x=20$.

且易知 $x=20$ 是极小值点.由于在$(0,+\infty)$上该函数处处可导,且只有唯一的极值点,当它为极小值点时必为最小值点,所以求得当船速为 20(km/h)时,每航行 1 km 的费用最少,其值为 $y_{\min}=0.006\times 20^2+\frac{96}{20}=7.2$(元).

注　$f(x)$在一个开区间(有限或无限)内可导且只有一个驻点 x_0,并且这个驻点 x_0 是函数 $f(x)$的极值点,那么,当 $f(x_0)$是极大值时,

$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值;当 $f(x_0)$ 是极小值时,$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值.

(七) 曲线的凹凸性与拐点

例 49　求曲线 $x = t^2$,$y = 3t + t^3$ 的拐点.

分析　由于对任意 $x > 0$,对应两个参数 $t = \pm\sqrt{x}$,于是对应两个 y 值,即 y 是 x 的双值函数,因此所给曲线实质上是两个单值函数 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)$ 的曲线,下面求这两条曲线上的拐点.

解　由 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3+3t^2}{2t} = \dfrac{3}{2t} + \dfrac{3}{2}t$ 得 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{3(t^2-1)}{4t^3}$.

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$,得 $t = \pm 1$,即得点 $(1, \pm 4)$,此为曲线上的点.

对点 $(1,4)$,相应于 $t = 1$,于是当 $x < 1$,即 $t = \sqrt{x} < 1$ 时,有 $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$;当 $x > 1$,即 $t = \sqrt{x} > 1$ 时,有 $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$,故点 $(1,4)$ 是拐点.

对点 $(1,-4)$,相应于 $t = -1$,于是当 $x < 1$,即 $t = -\sqrt{x} > -1$ 时,有 $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$;当 $x > 1$,即 $t = -\sqrt{x} < -1$ 时,有 $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$,故点 $(1,-4)$ 也是拐点.

注　本题中曲线是由参数方程给出的,拐点要对自变量 x 讨论,不是对变量 t 讨论.

例 50　求曲线 $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间及拐点.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\quad,+\quad)$,

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}},\quad f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2(5x+2)}{9x^3\sqrt{x}}.$$

令 $f''(x) = 0$,得 $x = -\dfrac{2}{5}$. $x = 0$ 为 $f''(x)$ 不存在的点,用 $x = -\dfrac{2}{5}$,0 将定义区间 $(-\quad,+\quad)$ 分成三个部分区间 (见表 3.2).

表 3.2

x	$\left(-\quad,-\frac{2}{5}\right)$	$-\frac{2}{5}$	$\left(-\frac{2}{5},0\right)$	0	$(0,+\quad)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$+$
$f(x)$	凸	取拐点	凹	不取拐点	凹

由表 3.2 可知,曲线 $f(x)$ 的凸区间是 $\left(-\quad,-\frac{2}{5}\right)$,凹区间是 $\left(-\frac{2}{5},0\right)$ 与 $(0,+\quad)$;点 $\left(-\frac{2}{5},-\frac{12}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\right)$ 是拐点.

例 51　(2006 年数学二) 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=4t-t^2 \end{cases}$ $(t\geqslant 0)$,

(1) 讨论 L 的凹凸性;

(2) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0,y_0) 并写出切线的方程。

分析　(1) 利用曲线凹凸性的定义来判定;(2) 先写出切线方程,然后利用点 $(-1,0)$ 在切线上求之.

解　(1) 因为 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=4-2t \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0\quad(t>0),$$

故当 $t\geqslant 0$ 时曲线 L 是凸的.

(2) 设切点 (x_0,y_0) 对应参量 $t=t_0$,由 (1) 知,切线方程为 $y-0=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(x+1)$,又 $x_0=t_0^2+1$, $y_0=4t_0-t_0^2$,则

$$4t_0-t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2),\text{即 } 4t_0^2-t_0^3=(2-t_0)(t_0^2+2),$$

整理得 $t_0^2+t_0-2=0 \Rightarrow (t_0-1)(t_0+2)=0 \Rightarrow t_0=1$ 和 $t_0=-2$ (舍去).

将 $t_0=1$ 代入参数方程得切点为 $(2,3)$,故切线方程为

$$y-3=\left(\frac{2}{1}-1\right)(x-2)\text{，即 } y=x+1.$$

(八) 利用函数的性质讨论方程根的存在性问题

例 52 讨论方程 $x^3-3x+A=0$ 实根的情况(A 为实数).

解 令 $f(x)=x^3-3x+A$，由 $f'(x)=3x^2-3=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=1$，从而 $(-1,1)$ 是函数的单调递减区间，$(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 是函数的单调递增区间，极大值为 $f(-1)=A+2$，极小值为 $f(1)=A-2$.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，所以①当 $A+2<0$ 时，原方程只有一个实根，位于 $(1,+\infty)$ 内；②当 $A+2=0$ 时，原方程有两个不同的实根，一个为 -1，另一个位于 $(1,+\infty)$ 内；③当 $A+2>0$，$A-2<0$ 时，原方程有三个不同的实根，分别位于 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$ 内；④当 $A-2=0$ 时，原方程有两个不同的实根，一个为 1，另一个位于 $(-\infty,-1)$ 内；⑤当 $A-2>0$ 时，原方程只有一个实根，位于 $(-\infty,-1)$ 内.

例 53 设 $f(x)=x^3-px+q$，p，q 为实数，且 $p>0$，求：

(1) 函数的极值；

(2) 方程 $x^3-px+q=0$ 有三个实根的条件.

解 (1) $f'(x)=3x^2-p$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}$，而 $f''(x)=6x$，故 $f(x)$ 在 $x_1=\sqrt{\frac{p}{3}}$ 处取得极小值，其值为 $-2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+q$，在 $x_2=-\sqrt{\frac{p}{3}}$ 处取得极大值，其值为 $2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+q$.

(2) 由上述讨论可以看出，$f(x)$ 仅有 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)$，$\left(-\sqrt{\frac{p}{3}},\sqrt{\frac{p}{3}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{p}{3}},+\infty\right)$ 三个单调区间，由介值定理及区间单调性知：方程要有三个实根，必须满足在这三个单调区间上各有一个实根，也就是说，极小值应小于或等于 0，同时极大值应大于或等于 0(等于 0 时含重根)，即 $-2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+q\leqslant 0$，$2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+q\geqslant 0$.

所以，当 $-2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \leqslant q \leqslant 2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 时，方程有三个实根.

注　对方程根的存在性的讨论，主要是零点定理、罗尔定理、函数极值、函数单调性等的应用.

（九）曲线渐近线的求法

对于曲线的水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线的求法，一般情况下，如果函数为偶函数，则其斜渐近线（若有的话）一定关于 y 轴对称；若是奇函数，则其斜渐近线（若有的话）一定关于原点对称.

如果 $y = f(x)$ 为分式函数，且分子的次数比分母高一次，则曲线可能有斜渐近线. 求斜渐近线主要有两种方法，一种是公式法，另一种是从给定的函数中分离出一个线性函数，将其改写为 $y = (ax + b) + g(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$，则 $y = ax + b$ 就是所求的渐近线.

例 54　求曲线 $f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}$ 的渐近线.

解　因为 $f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2} = x - \frac{x}{1 + x^2}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1 + x^2} = 0$，故 $y = x$ 为曲线的一条斜渐近线.

例 55　求曲线 $f(x) = \frac{(x - 3)^2}{4(x - 1)}$ 的渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x - 3)^2}{4(x - 1)} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x - 3)^2}{4(x - 1)} = -\infty$，所以 $x = 1$ 是曲线 $f(x)$ 的垂直渐近线.

又　$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x - 3)^2}{4x(x - 1)} = \frac{1}{4}$，

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x - 3)^2}{4(x - 1)} - \frac{x}{4}\right) = -\frac{4}{5}.$$

所以直线 $y = \frac{x - 5}{4}$，即 $x - 4y = 5$ 是曲线的斜渐近线.

例 56　求曲线 $y = x\arctan x$ 的渐近线.

解　当 $x\to+\infty$ 时，有

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\arctan x-\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1.$$

当 $x\to-\infty$ **时,有**

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\arctan x}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left[x\arctan x+\frac{\pi}{2}x\right]=-1.$$

故曲线 $y=x\arctan x$**,当** $x\to+\infty$ **时有渐近线** $y=\frac{\pi}{2}x-1$**;当** $x\to-\infty$ **时有渐近线** $y=-\frac{\pi}{2}x-1$.

例 57 **求曲线** $y=\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$**的渐近线**.

解法 1 **函数** $y=\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$**的定义域为** $(-\infty,+\infty)$**,故没有垂直渐近线**.

当 $x\to+\infty$ **时**

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left(\sqrt[3]{1+t^2+t^3}-\sqrt{1-t+t^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{3}(1+t^2+t^3)^{-\frac{2}{3}}(2t+3t^2)-\frac{1}{2}(1-t+t^2)^{-\frac{1}{2}}(-1+2t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}.$$

所以,有水平渐近线 $y=\frac{1}{2}$.

当 $x \to -$　时

$$k = \lim_{x\to -} \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to -}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = 2,$$

$$b = \lim_{x\to -}\left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{t}\left(\sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} + \sqrt{1 - t + t^2} - 2\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{(1 + t^2 + t^3)^{-\frac{1}{3}} - 1}{t} + \lim_{t\to 0^-}\frac{(1 - t + t^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{t} = -\frac{1}{2}.$$

所以,有斜渐近线 $y = 2x - \frac{1}{2}$.

解法 2　当 $x \to \pm$　时,由泰勒公式得

$$y = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - |x|\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] -$$

$$|x|\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

当 $x \to +$　时,$|x| = x$,所以

$$y = x + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

所以,有水平渐近线 $y = \frac{1}{2}$.

当 $x \to -$　时,$|x| = -x$,所以

$$y = x + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + x\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= 2x - \frac{1}{2} + \frac{17}{24x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

所以,有斜渐近线 $y=2x-\frac{1}{2}$.

注　由水平渐近线的定义和极限的唯一性知,曲线 $y=f(x)$(单值函数)若有水平渐近线,则不可能多于两条;而由斜渐近线的定义知,一个单值函数若有斜渐近线,不可能多于四条.由定义还可以得到判断曲线 $y=f(x)$ 无斜渐近线的方法,若 $\lim\limits_{x\to}\frac{y}{x}\neq a$(其中 a 为非零常数,包括 $x\to+$　与 $x\to-$　),则曲线 $y=f(x)$ 无斜渐近线.

(十) 其他问题

例 58　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,对 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间任意 μ,在 (a,b) 内至少存在一点 c,使 $f'(c)=\mu$.

证明　不妨设 $f'_+(a)<f'_-(b)$ ($f'_+(a)>f'_-(b)$ 时,同法可证),则 $f'_+(a)<\mu<f'_-(b)$,作辅助函数 $F(x)=f(x)-\mu x$,则有 $F'(x)=f'(x)-\mu$.

显然,$F'_+(a)=f'_t(a)-\mu<0$,$F'_-(b)=f'_-(b)-\mu>0$,即

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}<0,$$

$$F'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}>0.$$

根据极限保号性,$\exists x_1\in(a,b)$,使 $\frac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}<0$,从而有

$$F(x_1)-F(a)<0 \text{ 或 } F(x_1)<F(a),$$

$\exists x_2\in(a,b)$,使 $\frac{F(x_2)-F(b)}{x_2-b}>0$.从而有

$$F(x_2)-F(b)<0 \text{ 或 } F(x_2)<F(b),$$

于是 $F(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个极小值点 c,又因为 $f'(c)$ 存在,故 $F'(c)$ 存在且有 $F'(c)=f'(c)-\mu=0$,即 $f'(c)=\mu$,证毕.

注　此例指出,区间 I 的导函数 $f'(x)$ 具有介值性,虽然导函数 $f'(x)$ 在区间 I 可能有间断点,但是它也具有介值性.因此,导函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点(否则,导函数 $f'(x)$ 不具有介值性),只能有第二类间断点.这是导函数的一个重要性质.

例 59　若函数 $f(x)$ 在 a 的邻域 $U(a)$ 内连续，除 a 外可导，且 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=l$，则函数 $f(x)$ 在 a 处可导，且 $f'(a)=l$.

证明　$\forall x\in U(a)$ 且 $x\neq a$，显然 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 或 $[x,a]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故在 a 与 x 之间至少存在一点 c_x，使 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_x)$，当 $x\to a$ 时，有 $c_x\to a$，从而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{c_x\to a} f'(c_x)$，又 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=l$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{c_x\to a} f'(c_x)=l$.

由导数定义知，$f(x)$ 在 a 处可导，且 $f'(a)=l$.

注　此题中的连续条件是不可以省略的，例如：

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\text{求 } f'(0).$$

因为 $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)=-1$，所以 $f'(0)=-1$，这种做法是错误的，因为 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例 60　抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大？

解　由 $y=ax^2+bx+c$ 得，$y'=2ax+b$，$y''=2a$. 代入曲率公式得

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}},$$

显然，当 $2ax+b=0$ 时曲率最大.

曲率最大时 $x=-\dfrac{b}{2a}$，对应的点为抛物线的顶点. 因此，抛物线在顶点处的曲率最大，最大曲率 $K=|2a|$.

四、练习题及答案

习题(A)

一、填空题

1.(2006 年数学二)曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为______.

2.(2006 年数学一)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______.

3.已知函数 $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$,当 $x=$______时,______为极小值;当 $x=$______时,______为极大值.

二、选择题

1.下列函数中,满足罗尔定理条件的是(　　).

(A) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$, $x\in[-1,1]$

(B) $f(x)=(x-4)^2$, $x\in[0,8]$

(C) $f(x)=x^3$, $x\in[-1,3]$

(D) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x\in[-1,1]$

2.对于函数 $f(x)=\dfrac{3-x^2}{3}$,在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的点 ξ 是(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(D) 1

3.设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内可导,且 $f'(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=1$,则(　　).

(A) $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个极大值

(B) $f'(0)$一定是$f'(x)$的一个极大值

(C) $f(0)$一定是$f(x)$的一个极小值

(D) $f'(0)$一定是$f'(x)$的一个极小值

三、计算题

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

2. 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

3. 描绘函数$y=e^{-x^2}$(高斯曲线)的图像.

4. 求$\lim\limits_{x\to +}(\pi-2\arctan x)\ln x$.

5. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

6. 在抛物线$y=4-x^2$上的第一象限部分求一点P,过点P作切线,使该切线与坐标轴所围成的三角形面积最小.

7. 求$f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$的极值点与极值.

四、证明题

1. 设函数$f(x)$在$(-\ \ ,+\ \ )$内可导,且$f'(x)+f(x)>0$,证明$f(x)$在$(-\ \ ,+\ \ )$内至多有一个零点.

2. 设$f(x)$在$[0,1]$上可导,且$0<f(x)<1$,又对于$(0,1)$内的所有点x有$f'(x)\neq -1$,证明方程$f(x)+x-1=0$在$(0,1)$内有唯一实根.

3. 证明:当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,$\sin x+\tan x>2x$.

4. 设函数$f(x)$在点a处有二阶导数,证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

5. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数,且$g''(x)\neq 0$,$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$,证明:

(1) 在(a,b)内$g(x)\neq 0$;

(2) 在(a,b)内至少存在一点ξ,使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

6. 证明：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

习题(B)

1. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

4. 用泰勒公式求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x^2}-e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)[x+\ln(1-x)]}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f(a)=f(b)=0$. 试证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)-f'(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(1) 证明 $x=0$ 是极小值点.

(2) 说明 $f(x)$ 的极小值点 $x=0$ 是否满足极值的第一充分条件或第二充分条件.

7. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f''(x)\leqslant 8$，试证 $\left|f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant(b-a)^2$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$（$A$ 为常数）. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

习题(A)答案

一、填空题

1. $y=\frac{1}{5}$.　2. 2.　3. -1或5时，$y=0$；0.5，$y=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$.

二、选择题

1. B.　2. A.　3. C.

三、计算题

1. $-\frac{e}{2}$.　2. $\frac{1}{2}$.　3. 略.　4. 0.　5. e^{-1}.　6. $P(2,0)$.

7. $x=1$，$f(1)=-3$为极小值.

四、证明题

1. 提示：构造辅助函数$F(x)=e^{x}f(x)$.　2. 略.

3. 提示：令$f(x)=\sin x+\tan x-2x$.　4. 略.　5. 略.

6. 提示：根据待证的不等式形式，构造与之形似的函数$f(x)=\frac{x}{1+x}$.

习题(B)答案

1. $-\frac{1}{4}$. 提示：令$t=\frac{1}{x}$，化为$\frac{0}{0}$型.　2. $\frac{3}{2}$.　3. 连续.

4. $-\frac{3}{2}$. 提示：利用等价无穷小代换与泰勒公式.

5. 略.　6. 略.　7. 略.

8. 提示：作辅助函数$F(x)=\begin{cases} f(x), & a<x<b, \\ A, & x=a,b, \end{cases}$用罗尔定理.

第四章　不定积分

一、本章知识的作用与意义

减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，类似地，本章所讨论的积分法是微分法的逆运算，即已知函数的导数，求原函数问题．积分学和微分学一样，是高等数学的重要组成部分．积分学包括不定积分和定积分两部分，第五章的定积分计算问题通过牛顿—莱布尼茨定理转化为求不定积分问题，因此本章求不定积分是定积分计算的基础．

二、知识要点及思想方法

(一)原函数的定义与性质

1．原函数的定义

若对于区间 I 上任一 x 恒有 $F'(x)=f(x)$（或 $dF(x)=f(x)dx$），则称 $F(x)$ 为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 上的一个原函数．

注　此处的区间可是开区间，闭区间，也可是半开半闭区间．

2．原函数的性质

设 C 是任意一个常数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数．

注　①若 $f(x)$ 存在原函数，则其原函数必有无穷多个．

②函数 $f(x)$ 的任意两个原函数之间只差一个常数．

③若 $f(x)$ 在区间 I 内连续，则 $f(x)$ 在区间 I 内一定存在原函数．原函数必可导，可导必连续．

(二)不定积分的定义与性质

1.不定积分的定义

在区间 I 上,函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 在区间 I 上的不定积分,记作 $\int f(x)dx$.设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分,即

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

因此,$f(x)$ 的不定积分就是 $f(x)$ 的原函数的全体.

注　①不定积分 $\int f(x)dx$ 不是代表一个函数,而是一族函数.因此计算不定积分的过程中不要忘记在求出一个原函数 $F(x)$ 后,加上一个任意常数 C.两个不定积分相等,是指两个函数族相等.

②$F(x)$ 只是原函数的一个代表,只要 $F'(x)=f(x)$ 即可,这也是验证不定积分正确与否的方法.在求不定积分时要养成用求导还原的方法来验证其正确性的习惯,即把积分结果求导,看它的导数是否等于被积函数.

2.不定积分的性质

① $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ (或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$).

② $\int f'(x)dx=f(x)+C$ (或 $\int df(x)=f(x)+C$).

注　由上可见,$\int$ 与 d 连在一起时,或者抵消,或者抵消后差一个常数 C.因此,在忽略常数 C 的情况下,微分运算与积分运算是互逆的.

③ $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

注　此性质对有限个函数仍成立.

④ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ($k\neq 0$,k 为常数).

(三)常用积分表

① $\int kdx=kx+C$　(k 是常数);

②$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq-1)$；

③$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$；

④$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$；

⑤$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$；

⑥$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

⑦$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

⑧$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$；

⑨$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

⑩$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；

⑪$\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

⑫$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$；

⑬$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$；

⑭$\int\mathrm{sh}\, x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\, x+C$；

⑮$\int\mathrm{ch}\, x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\, x+C$；

⑯$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$；

⑰$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$；

⑱$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

⑲$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

⑳$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；

㉑$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$；

㉒$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$；

㉓$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$；

㉔$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$.

注　以上 24 个常用积分公式是求不定积分的基础，必须熟记.

(四) 积分法

1. 直接积分法

直接积分法是指直接或将被积函数恒等变形后利用基本积分公式和不定积分的性质求积分.

2. 换元积分法

(1) 第一类换元法(也叫凑微分法)

(i) 第一类换元法的公式

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，$u = \varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) = \int f(u) du = F(u) + C$$
$$= F[\varphi(x)] + C.$$

注　①此法的思路是把被积函数分成两部分的积，即 $\varphi(x)$ 的函数 $f[\varphi(x)]$ 与 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$ 的积，进而凑成 $d\varphi(x) = du$，且 $\int f(u) du$ 可求得.

②此法的关键是凑微分 $\varphi'(x) dx = d\varphi(x)$.

(ii) 常用的凑微分法的几种类型

①$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}\int f(ax + b) d(ax + b)$，这里 $dx = \frac{1}{a}d(ax + b)$；

②$\int xf(ax^2+b)dx=\frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b)$，

这里 $xdx=\frac{1}{2a}d(ax^2+b)$；

③$\int x^m f(ax^{m+1}+b)dx=\frac{1}{(m+1)a}\int f(ax^{m+1}+b)d(ax^{m+1}+b)$，

这里 $x^m dx=\frac{1}{(m+1)a}d(ax^{m+1}+b)$；

④$\int a^x f(a^x+b)dx=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x+b)d(a^x+b)$，

这里 $a^x dx=\frac{1}{\ln a}d(a^x+b)$，

$\int e^x f(e^x+b)dx=\int f(e^x+b)d(e^x+b)$，这里 $e^x dx=d(e^x+b)$；

⑤$\int f(\sin x)\cos xdx=\int f(\sin x)d\sin x$，这里 $\cos xdx=d\sin x$，

$\int f(\cos x)\sin xdx=-\int f(\cos x)d\cos x$，这里 $\sin xdx=-d\cos x$，

$\int \frac{1}{\cos^2 x}f(\tan x)dx=\int f(\tan x)d\tan x$，这里$\frac{1}{\cos^2 x}dx=d\tan x$，

$\int \frac{1}{\sin^2 x}f(\cot x)dx=-\int f(\cot x)d\cot x$，这里，$\frac{1}{\sin^2 x}dx=-d\cot x$；

⑥$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(\arcsin x)dx=\int f(\arcsin x)d\arcsin x$，

这里$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d\arcsin x$，

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(\arccos x)dx=-\int f(\arccos x)d\arccos x$，

这里$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-d\arccos x$；

⑦$\int \frac{1}{a^2+x^2}f\left(\arctan\frac{x}{a}\right)dx=\frac{1}{a}\int f\left(\arctan\frac{x}{a}\right)d\arctan\frac{x}{a}$，

这里$\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}d\arctan\frac{x}{a}$，

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}f\left(\operatorname{arccot}\frac{x}{a}\right)dx=-\frac{1}{a}\int f\left(\operatorname{arccot}\frac{x}{a}\right)d\operatorname{arccot}\frac{x}{a},$$

这里$\frac{1}{a^2+x^2}dx=-\frac{1}{a}d\operatorname{arccot}\frac{x}{a}$；

⑧$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x$，这里$\frac{1}{x}dx=d\ln x$，$x>0$；

⑨$\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x}$，这里$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x}$.

(2) 第二类换元法

(i) 第二类换元法的换元公式

设 $x=\varphi(t)$ 是单调、可导的函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $G(t)$，则有

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=G(t)+C=G[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

注　$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 求出后必须用 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代回去，故要求 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在且是单值可导的，为此 $x=\varphi(t)$ 在 t 的某一区间(该区间与 x 的积分区间相对应)上应该是单调、可导的函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$. 这种积分方法一般用于无理函数的积分.

(ii) 第二类换元法求不定积分的常见类型

①$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$，可令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$；

②$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$，可令 $x=a\tan t$ 或 $x=a\cot t$；

③$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$，可令 $x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$；

④$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$，可令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$；

⑤$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$，可令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，

$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$，可令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，其中 n 为 n_1 与 n_2 的最小公倍数.

以上各式中,$R(u,v)$表示关于u,v两个变量的有理式.

⑥当某些被积函数分母的最高次数高于分子的最高次数时,可考虑作倒代换 $x=\frac{1}{t}$;

⑦当被积函数是由 a^x(或 e^x)所构成的代数式时,可作指数代换 $t=a^x$($t=e^x$).

注 ①第二类换元法的关键是选择代换 $x=\varphi(t)$.以上代换的方法并不是绝对的,视具体问题灵活运用.

②换元法是求不定积分的两大基本方法之一,应熟练掌握.

3.分部积分法

设函数 $u=u(x)$及 $v=v(x)$具有连续导数,则有分部积分公式

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx,$$

或

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

注 ①在利用分部积分公式时,恰当选取 u 和 dv 是一个关键,选取 u 和 dv 一般要考虑下面两点:$dv=v'\,dx$ 中容易求出 v;若$\int f(x)\,dx$ 中的 $f(x)$能表示为两类函数的乘积 uv',且$\int v\,du$ 要比$\int u\,dv$ 容易积出.

②在具体选择 u 和 dv 时,根据经验,我们可按以下口诀:"反—对—幂—指—三."这里"反"指反三角函数;"对"指对数函数;"幂"本指幂函数,亦可推广为多项式;"指"指的是指数函数 e^x,a^x 这一类;"三"指三角函数.按口诀中函数的先后次序优先取 u,剩余部分为 dv.

③形如$\int e^{kx}\sin(ax+b)\,dx$,$\int e^{kx}\cos(ax+b)\,dx$ 的积分,其中 k,a,b 为常数,u,dv 可任取.但此类积分一般需用两次分部积分法,第二次 u,dv 的取法要与第一次相同,否则等式会还原.

4.几类特殊类型函数的积分

(1)有理函数的积分

若 $P_m(x)$是 x 的 m 次多项式,$P_n(x)$是 x 的 n 次多项式,则称

$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$为 x 的有理函数.若 $m\geqslant n$,则称它为假分式;若 $m<n$,则称它为真分式.

关于有理函数的积分,一般处理步骤如下:

①若 $m\geqslant n$,先进行除法,使$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=$多项式+真分式;

②化真分式为部分分式之和;

③对多项式与部分分式之和分项积分,亦即 x 的有理函数最后都可化为$\frac{A}{x-a}$,$\frac{A}{(x-a)^k}$,$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$,$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}$ $(b^2-4ac<0)$这样四种最简分式的积分.

(2) 三角函数有理式的积分

$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$,其中 $R(u,v)$为 u,v 的有理函数,对这类积分可作万能变换 $\tan\frac{x}{2}=u$,于是

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$dx=2d\arctan u=\frac{2du}{1+u^2},$$

从而有

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left[\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right]\frac{2du}{1+u^2},$$

最后化为关于 u 的有理函数的积分.

注　虽然通过此法,所有三角函数有理式的积分均可转化为有理函数的积分而积出来,但在很多情况下运用此法往往较繁琐.因此,一般的做法是先用其他较此法简单的方法求积分,若无法用其他的方法再考虑用此法.如

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\int\frac{\sec^2x}{a^2\tan^2x+b^2}dx$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{a^2\tan^2x+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C,$$

此题若用上述方法,则会较复杂,而用凑微分的方法很简单.

⑶ 简单无理函数的积分

可参考第二类换元法中 (ii) 中的④、⑤.

5.其他常见的积分方法

①拆项法,如

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int\frac{1}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+3)(x-1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

注 此法为直接积分法.

②加减项法,如

$$\int\frac{kx^2}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=k\int\frac{x^2+a^2-a^2}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=k\left(\int\mathrm{d}x-a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right).$$

③同乘以一因式或同除以一因式法,如

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2x}.$$

④降次法,如

$$\int\sin^2x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x,\int\cos^2x\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x.$$

注 此法适合被积函数为正弦 (或余弦) 函数的偶次幂的情形.

⑤先凑微分后化为同名函数法,如

$$\int\sin^3x\mathrm{d}x=-\int\sin^2x\mathrm{d}\cos x=-\int(1-\cos^2x)\mathrm{d}\cos x.$$

$$\int\cos^5x\mathrm{d}x=\int\cos^4x\mathrm{d}\sin x=\int(1-\sin^2x)^2\mathrm{d}\sin x$$

$$=\int(1-2\sin^2x+\sin^4x)\mathrm{d}\sin x.$$

⑥求 $\int\sin^mx\cos^nx\mathrm{d}x$ 的方法 :若 m,n 均为偶数,则先化为同名函数,再利用倍角公式降次 ;若 m,n 至少有一个为奇数,则先凑微分,再

化为同名函数.如

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\mathrm{d}x - \int \cos^4 x\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x - \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$
$$\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x.$$
$$\int \sin^3 x\cos^5 x\mathrm{d}x = \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}\sin x.$$

⑦先积化和差,再凑微分法,如

$$\int \sin mx\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]\mathrm{d}x.$$
$$\int \sin mx\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x]\mathrm{d}x.$$
$$\int \cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]\mathrm{d}x.$$

三、解题研究

(一)利用直接法求不定积分问题

例 1　用直接积分法计算下列不定积分:

(1) $\int\left(2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{x^6}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

(1) **分析**　把被积函数根式形式化为幂的形式,然后分项积分.

解　原式 $= \int(2-x^{-1})x^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}x = 2\int x^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}x - \int x^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$

$$= \frac{8}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$$

(2) **分析**　利用三角公式 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

解　原式 $= \int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$

$$=\int(\cos x+\sin x)\,dx=\sin x-\cos x+C.$$

⑶ **分析**　**采用加减项法.在分子上加减** 1**,然后分项积分**.

解　**原式** $=\int\frac{x^6+1-1}{1+x^2}dx$

$$=\int\frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\int(x^4-x^2+1)\,dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+x-\arctan x+C.$$

⑷ **分析**　**采用分项法**.

解　**原式** $=\int\frac{1+x^2-2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x^2}dx-2\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}-2\arctan x+C.$$

(二) 利用第一类换元法求不定积分问题

例 2　**利用第一类换元法求下列不定积分:**

⑴ $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$;　　⑵ $\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$;

⑶ $\int\frac{2^x3^x}{9^x-4^x}dx$;　　⑷ $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

⑸ $\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$;　　⑹ $\int x(1-x)^6dx$;

⑺ $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;　　⑻ $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$;

⑼ $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$;　　* ⑽ $\int\frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

⑴ **分析**　**凑微分** $\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x}$.

解　**原式** $=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}+C.$

⑵ **分析　凑微分** $x^3dx=\frac{1}{4}dx^4$.

解　原式 $=\frac{1}{4}\int(x^4+1)^{-\frac{1}{3}}d(x^4+1)=\frac{3}{8}(x^4+1)^{\frac{2}{3}}+C$.

⑶ **解　原式** $=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}dx=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{d\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}$

$$=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}\right|+C.$$

注　这种以指数函数为基本元素且底数不尽相同的被积式,一般首先要将被积式化为同底数幂的形式.

⑷ **分析　凑微分** $e^xdx=de^x$.

解　原式 $=\int\frac{dx}{(1+e^{2x})e^{-x}}=\int\frac{1}{1+(e^x)^2}de^x=\arctan e^x+C$.

⑸ **分析　凑微分** $\frac{1}{\cos^2x}dx=d\tan x$.

解　原式 $=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x\cos^2x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x$

$$=\int\ln\tan x\,d\ln\tan x=\frac{1}{2}\ln^2\tan x+C.$$

⑹ **分析　此题应设法将原式凑成** $\int(1-x)^nd(1-x)$ **的形式,然后用幂函数积分公式求之**.

解　原式 $=\int[1-(1-x)](1-x)^6dx=\int(1-x)^6dx-\int(1-x)^7dx$

$$=-\int(1-x)^6d(1-x)+\int(1-x)^7d(1-x)$$

$$=-\frac{(1-x)^7}{7}+\frac{(1-x)^8}{8}+C.$$

⑺ **分析　凑微分** $\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x}$**,并注意到** $1+x=1+(\sqrt{x})^2$.

解　原式 $=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=\int 2\arctan\sqrt{x}\,d(\arctan\sqrt{x})$

$=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$

(8) **解　因为** $(x\ln x)'=1+\ln x$**，故** $(1+\ln x)dx=d(x\ln x)$**，从而**

原式 $=\int\frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C.$

(9) **解　因为** $\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$**，故** $\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)dx=d\left(\frac{\ln x}{x}\right)$**，从而**

原式 $=\int\frac{1-\ln x}{x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}dx=\int\frac{d\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}=-\int\frac{d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}$

$=\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C.$

(10) **解　因为**

$(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5)'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

所以　原式 $=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}\,d(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5)$

$=\frac{2}{3}(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5)^{\frac{3}{2}}+C.$

(三) 利用第二类换元法求不定积分问题

例 3　利用第二类换元法计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；　(2) $\int\frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ ($a>0$ **且为常数**)；

(3) $\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

(1) **分析　被积函数** $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$**中含有根号，这是本题的难点，引入新变量** t**，去掉根号，再分析新的积分**.

解　令 $x=\sec t\left(t=\arccos\frac{1}{x}\right)$**，则** $dx=\sec t\cdot\tan t\,dt$.

因为 $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域为 $x>1$ 或 $x<-1$，所以当 $x>1$ 时 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 当 $x<-1$ 时，$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$，于是

$$\text{原式}=\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot|\tan t|}dt=\begin{cases}\int dt, & 0<t<\dfrac{\pi}{2}\ (x>1)\\ -\int dt, & \dfrac{\pi}{2}<t<\pi\ (x<-1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}t+C_1, & 0<t<\dfrac{\pi}{2}\ (x>1)\\ -t+C_2, & \dfrac{\pi}{2}<t<\pi\ (x<-1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\arccos\dfrac{1}{x}+C_1, & (x>1)\\ -\arccos\dfrac{1}{x}+C_2, & (x<-1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\arccos\dfrac{1}{x}+C_1, & (x>1)\\ -\left(\pi-\arccos\dfrac{1}{-x}\right)+C_2, & (x<-1)\end{cases}$$

$$=\arccos\frac{1}{|x|}+C\ (\text{其中 } C=C_1 \text{ 或 } C=C_2-\pi).$$

或者　　原式 $=\int\dfrac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\dfrac{1}{x^2}d\left(\sqrt{x^2-1}\right)=\int\dfrac{d\sqrt{x^2-1}}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

$$=\arctan\sqrt{x^2-1}+C.$$

注　求函数 $f(x)$ 的不定积分时，严格来说必须首先考查被积函数的定义域，代换函数要说明自变量的变化范围，求出被积函数在其整个定域上的不定积分，但一般地，代换函数的自变量的变化范围可以不写出，代换时原积分的被积函数的定义域可考虑一部分.

(2) 分析　被积函数含根号 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$，去掉根号.

解　令 $x = a\sin t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$,则 $dx = a\cos t dt$,故

$$\text{原式} = \int \frac{1}{a^3\cos^3 t} a\cos t dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{a^2}\tan t + C$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

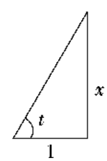
注　此题也可用凑微分的方法.

$$\text{原式} = \int \frac{1}{x^3\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} d\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

(3) **分析**　被积函数含 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 项,可令 $x = a\tan t$,此题中 $a = 1$.



令 $x = \tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$,则 $dx = \sec^2 t dt$,于是

解　$$\text{原式} = \int \frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t + 1)\sec t} dt = \int \frac{dt}{\cos t(2\tan^2 t + 1)}$$

$$= \int \frac{\cos t}{2\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int \frac{1}{1 + \sin^2 t} d\sin t$$

$$= \arctan(\sin t) + C = \arctan\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C.$$

(四) 利用分部积分法求不定积分问题

例 4　求下列不定积分:

(1) $\int x\cos^2 x dx$;　　(2) $\int \frac{x^2}{1 + x^2}\arctan x dx$;

(3) $\int \sin(\ln x)\,dx$；　　(4) $\int (\arctan\sqrt{x})^2 dx$；

(5) $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

(1) **分析**　被积函数为两类不同函数的积，故考虑用分部积分法.

解　原式 $=\int x\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int x\cos 2x dx+\frac{1}{2}\int x dx$.

令 $u=x, dv=\cos 2x dx$，则 $du=dx, v=\frac{1}{2}\sin 2x$，于是

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x dx &= \frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x dx\\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1,\end{aligned}$$

从而 $$\int x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}x^2+C.$$

(2) **分析**　被积函数

$$\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x=\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan x=\arctan x-\frac{1}{1+x^2}\arctan x,$$

其中 $\int \arctan x dx$ 可用分部积分法求，$\int \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$ 可用凑微分法求.

解　原式 $=\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan x dx=\int \arctan x dx-\int \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$

$$\begin{aligned}&= x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}dx-\int \arctan x\, d(\arctan x)\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.\end{aligned}$$

(3) **分析**　此题被积函数 $\sin(\ln x)$ 可看作 $\sin(\ln x)\cdot(x)'$，故采用分部积分法，取 $u=\sin(\ln x)$，$dv=dx$.

解　原式 $=x\sin(\ln x)-\int x d\sin(\ln x)$

$$\begin{aligned}&= x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx\\ &= x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)+\int x d\cos(\ln x)\end{aligned}$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx,$$

则 $$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

(4) **分析** 被积函数 $\arctan\sqrt{x}$ 含根号,为了去掉根号,可令 $\sqrt{x} = t$.

解 令 $\sqrt{x} = t$,则 $x = t^2$, $dx = dt^2$,

原式 $= \int (\arctan t)^2 dt^2$

$$= t^2(\arctan t)^2 - \int t^2 2\arctan t \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= t^2(\arctan t)^2 - 2\int \arctan t\,dt + 2\int \arctan t \cdot \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= t^2(\arctan t)^2 - 2t\arctan t + 2\int \frac{t}{1+t^2}dt + (\arctan t)^2 + C_1$$

$$= t^2(\arctan t)^2 - 2t\arctan t + \ln(1+t^2) + (\arctan t)^2 + C$$

$$= (x+1)(\arctan\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} + \ln(1+x) + C.$$

注 在求不定积分时,往往需要多种方法综合使用,此题为换元法与分部积分法互相配合使用.

(5) **分析** 被积函数 $\frac{\ln x}{(1-x)^2} = \ln x \frac{1}{(1-x)^2}$,为幂函数与对数函数之积,故可采用分部积分法,取 $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{(1-x)^2}$.

解 令 $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{(1-x)^2}$, $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$,

于是 $$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx = \frac{x}{1-x}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x}{1-x}dx$$

$$= \frac{x}{1-x}\ln x + \ln|1-x| + C.$$

注 此题利用了由 dv 求 v,结果是不唯一的(可以相差一个常数),利用这种不唯一性可简化积分.

(五) 求有理函数的不定积分问题

例 5 求下列不定积分:

⑴ $\int \frac{x^3+x+6}{(x^2+2x+2)(x^2-4)}dx$；　⑵ $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx$.

⑴ **分析**　这是有理函数的积分，被积函数是真分式，先把它化成部分分式之和.

解　设 $\frac{x^3+x+6}{(x^2+2x+2)(x^2-4)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2}$，可用待定系数法或赋值法求待定常数 A,B,C,D 的值，下面联合使用这两种方法求之.上式两端去分母，得

$$x^3+x+6=(Ax+B)(x+2)(x-2)+C(x^2+2x+2)(x-2)+D(x^2+2x+2)(x+2),$$

令 $x=-2$，得 $C=\frac{1}{2}$；令 $x=2$ 得 $D=\frac{2}{5}$.

为了求得 A，比较 x^3 的系数，得

$$A+C+D=1,\ A=1-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}.$$

为了求得 B，再比较常数项的系数，得

$$-4B-4C+4D=6,\ B=-\frac{8}{5}.$$

故　原式 $=\int \frac{\frac{1}{10}x-\frac{8}{5}}{x^2+2x+2}dx+\int \frac{\frac{1}{2}}{x+2}dx+\int \frac{\frac{2}{5}}{x-2}dx$

$$=\frac{1}{20}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\frac{17}{10}\int \frac{d(x+1)}{1+(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{2}{5}\int \frac{d(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{20}\ln(x^2+2x+2)-\frac{17}{10}\arctan(x+1)+\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{2}{5}\ln|x-2|+C.$$

⑵ **解**　这是一个真分式，但分母不能化为实的一次因子的乘积(因 $(-6)^2-4\times 13<0$).求解这类不定积分，一般处理如下：

原式 $=\int \frac{\frac{1}{2}(x^2-6x+13)'+5+3}{x^2-6x+13}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{dx}{(x-3)^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+\frac{8}{2}\arctan\frac{x-3}{2}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.$$

注　形如$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$的积分,可将它化成$M\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}$与$N\int\frac{dx}{x^2+px+q}$的和.对$\int\frac{N}{x^2+px+q}dx$的积分,求解方法如下.

①当$p^2-4q>0$时,方法有二:将分母分解因式,分项积分;将分母配成完全平方式再积分.

②当$p^2-4q<0$时,将分母配成完全平方式再积分.

③当$p^2-4q=0$时,上式变为$\int\frac{N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}dx$,显然易积分.

例6　求下列不定积分:

(1) $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$;　　(2) $\int\frac{x^9}{(1-x^2)^6}dx$;

(3) $\int\frac{x^4(x^2-1)}{(x^2+1)^6}dx$.

(1) **分析**　被积函数$\frac{1}{(1+x^2)^2}$为$\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ $(a=1,n=2)$型,而对形如$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (n为整数且$n\geqslant2$)的积分可用分部积分法计算(能导出递推公式).

解　用分部积分法求:

$$\text{原式}=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx, \tag{1}$$

对$\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$用分部积分法求解.

令$u=x$,$dv=\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$,则$v=-\frac{1}{2(1+x^2)}$,从而

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2},$$

代入(1)式得

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right) + C.$$

也可用换元法求：

令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 t dt$，于是

$$\text{原式} = \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C.$$

(2) 分析　这是有理函数的积分，按有理函数积分的一般方法计算显然较复杂，先进行适当的换元，改变积分的形式.

解　令 $x=\sin t$，$dx=\cos t dt$，则

$$\text{原式} = \int \frac{\sin^9 t\cos t dt}{(\cos^2 t)^6} = \int \tan^9 t d\tan t$$

$$= \frac{1}{10}\tan^{10} t + C$$

$$= \frac{x^{10}}{10(1-x^2)^5} + C.$$

(3) 分析　此题同(2)一样，先作适当的换元，改变积分的形式.

$$\int \frac{x^4(x^2-1)}{(x^2+1)^6}dx = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6}dx \xlongequal{\text{令 } t = x+\frac{1}{x}} \int \frac{dt}{t^6}$$

$$= -\frac{1}{5t^5} + C = -\frac{x^5}{5(x^2+1)^5} + C.$$

注　当被积函数为有理函数且次数较高时，可考虑通过适当的变

量代换降低有理函数的次数，以简化计算.

(六) 求三角函数有理式的不定积分问题

例 7　求下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{9\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

(1) 分析　此题为三角函数有理式的积分，可用万能代换将其转化为有理函数的积分来解，但此处也可用其他方法来解.

解　利用万能变换，令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则

$$原式=\int \frac{1}{\left(2+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int \frac{1+u^2}{u(3+u^2)}du=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{2u}{3+u^2}\right)du$$

$$=\frac{1}{3}\ln|u|+\frac{1}{3}\ln(3+u^2)+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{3}\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C.$$

或　$$原式=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}-\frac{2-\cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}-\frac{2}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\left[-\ln(2+\cos x)-2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\ln|\sin x|\right]+C.$$

(2) 分析　此题若利用万能代换将其转化为有理函数的积分来解，显然计算量较大，因此应考虑能否用其他方法，如凑微分法.

解　$$原式=\int\frac{dx}{\cos^2 x(9+4\tan^2 x)}$$

$$=\int\frac{d\tan x}{9+4\tan^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2\tan x)}{3^2+(2\tan x)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2}{3}\tan x\right)+C.$$

注　三角函数有理式的积分，理论上都可通过万能代换转化为有

理函数的积分来解,但对具体的三角函数有理式的积分来说并不一定是最好的方法.因此,解题时要对被积函数作具体的分析.

(七) 求无理函数的不定积分问题

例 8　计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(a-x)^4(b-x)^2}}dx$.

(1) 分析　被积函数为 $R(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b})$ 型的积分,故令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$,n 为 n_1,n_2 的最小公倍数.

解　令 $t=\sqrt[4]{x}$,则 $x=t^4$,$dx=4t^3dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int \frac{4t^3}{t^2+t}dt=4\int \frac{t^2}{1+t}dt=4\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt$$

$$=4\left[\int (t-1)dt+\int \frac{dt}{1+t}\right]=4\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]+C$$

$$=2\sqrt{x}-4\cdot\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C.$$

(2) 分析　化简分母成$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$的形式.

解　$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(a-x)^4(b-x)^2}}dx=\int \frac{1}{(a-x)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{b-x}{a-x}\right)^2}}dx$,

故设$\sqrt[3]{\frac{b-x}{a-x}}=t$,即$\frac{b-x}{a-x}=t^3$,$3t^2dt=\frac{b-a}{(a-x)^2}dx$,即

$$\frac{1}{(a-x)^2}dx=\frac{3}{b-a}t^2dt,$$

从而　　原式 $=\int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{3}{b-a}t^2dt=\frac{3}{b-a}t+C=\frac{3}{b-a}\sqrt[3]{\frac{b-x}{a-x}}+C.$

注　解题过程中并未直接反解出 $x=\frac{b-at^3}{1-t^3}$,而是直接求出了$\frac{1}{(a-x)^2}dx=\frac{3}{b-a}t^2dt$,从而简化了运算.

例 9　求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

分析　被积函数含$\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$，对于此类积分，一般将其中的被开方式配方，化为可直接套用下述公式的情形之一：

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C\quad(a>0),$$

或
$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0).$$

解　**原式**
$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-2^2}}=\int\frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-2^2}}$$
$$=\ln|x+3+\sqrt{(x+3)^2-2^2}|+C$$
$$=\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}|+C.$$

(八) 求被积函数为 e^x 所构成的代数式的积分

例 10　**求** (1) $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}dx$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(1) **分析**　利用代数恒等变形，使分子凑出一个导数因子 e^x 或 e^{-x} 项.常见的有

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^x}{e^x(1+e^x)};$$
$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}};$$
$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}.$$

解法 1
$$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{e^x}{e^x(1+e^x)}dx=\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)de^x$$
$$=\ln e^x-\ln(1+e^x)+C=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C.$$

解法 2
$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\int\frac{1}{1+e^{-x}}de^{-x}$$
$$=-\ln(e^{-x}+1)+C.$$

解法 3
$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=x-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

解法 4　令 $e^x + 1 = u$，则 $du = e^x dx$，$dx = \frac{du}{u-1}$，于是

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{u(u-1)}du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du$$

$$= \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + C = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C.$$

(2) 分析　式中含$\sqrt{1+e^{2x}}$，很难直接积分，换元令 $t = \sqrt{1+e^{2x}}$.

解　设$\sqrt{1+e^{2x}} = t$，则 $x = \frac{1}{2}\ln(t^2-1)$，$dx = \frac{t}{t^2-1}dt$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} + C$$

$$= \ln(\sqrt{1+e^{2x}} - 1) - x + C.$$

(九) 杂题、综合题

例 11　计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$；　　(2) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；

(3) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}dx$；　　(4) $\int \frac{1}{\sin^3 x\cos x}dx$.

(1) 分析　被积函数中分子 $1+\cos x$ 是分母 $x+\sin x$ 的导数，故直接用凑微分法求解.

解　原式 $= \int \frac{1}{x+\sin x}d(x+\sin x)$

$$= \ln|x+\sin x| + C.$$

(2) 分析　由于被积函数分母是分子的导数，故不能凑微分.这里采用分项积分法，第 1 项用分部积分法，第 2 项用凑微分法.

解　原式 $= \int \frac{x}{1+\cos x}dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$$= \int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) - \int \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2} dx - \ln|1+\cos x|$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln|1+\cos x| + C$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C.$$

(3) **分析　先将被积函数分成两项,再分别积分.**

解　原式 $= \int e^{\sin x} x\cos x dx - \int e^{\sin x}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$= \int xe^{\sin x} d\sin x - \int e^{\sin x}\sec x\tan x dx$$

$$= \int x de^{\sin x} - \int e^{\sin x} d\sec x$$

$$= xe^{\sin x} - \int e^{\sin x}dx - e^{\sin x}\sec x + \int \sec x de^{\sin x}$$

$$= xe^{\sin x} - \int e^{\sin x}dx - e^{\sin x}\sec x + \int e^{\sin x}dx$$

$$= e^{\sin x}(x - \sec x) + C.$$

(4) **分析　由于被积函数分子** 1 **可看作** $\sin^2 x + \cos^2 x$**,从而被积函数可分为两项进行积分.**

解　原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}dx = \int \frac{1}{\sin x\cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$$= 2\int \csc 2x dx + \int \cot x\csc^2 x dx$$

$$= \ln|\csc 2x - \cot 2x| - \frac{1}{2}\cot^2 x + C.$$

注　此题提供的方法是处理形如 $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$ **(其中** m, n **为正整数)的不定积分的一般方法.**

(十) 求分段函数的不定积分问题

例 12　**求** $\int \max\{1, |x|\} dx$.

分析　将被积函数表示成分段函数,再分段求积分.

解　设 $f(x)=\max\{1,|x|\}$,则

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$$

因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,故必存在原函数 $F(x)$.

当 $x<-1$ 时,$\int f(x)\,dx=\int -x\,dx=-\frac{1}{2}x^2+C_1$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\int f(x)\,dx=\int 1\,dx=x+C_2$.

当 $x>1$ 时,$\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C_3$.

故

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x^2+C_3, & x>1.\end{cases}$$

因 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,故 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.于是有

$$\lim_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim_{x\to -1^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+C_1\right),$$

即

$$-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1;\tag{1}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_2),$$

即

$$\frac{1}{2}+C_3=1+C_2.\tag{2}$$

联立(1)、(2),并令 $C_1=C$,则得 $C_2=\frac{1}{2}+C$,$C_3=1+C$.

从而
$$\int \max\{1,|x|\}dx=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+C, & x<-1,\\ x+\dfrac{1}{2}+C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}x^2+1+C, & x>1.\end{cases}$$

对于分段函数的不定积分,一般是先求出各区间段上不定积分表达式,然后利用连续函数的连续性确定各区间段上积分常数之间的关系,最后用统一的记号表示各区间段上的积分常数.

(十一) 与求原函数有关的问题

例 13 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$ 有一个原函数为( ).

(A) $1+\sin x$. (B) $1-\sin x$. (C) $1+\cos x$. (D) $1-\cos x$.

解 由题意知,$f'(x)=\sin x$,故 $f(x)=\int \sin x dx=-\cos x+C_1$.

从而 $f(x)$ 的原函数的一般形式为

$$\int f(x)dx=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2.$$

取 $C_1=0$,$C_2=1$ 便得 $f(x)$ 的一个原函数 $1-\sin x$,故应选 B.

注 本题考查对原函数定义的理解,也考查对不定积分与原函数关系的理解.

例 14 已知 $f'(x)$ 的图像是过点 $(0,0)$ 和 $(2,0)$ 的开口向下的二次抛物线,且 $f(x)$ 的极小值是 2,极大值是 6,求曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解 由题意,设 $f'(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$,因 $f'(x)$ 过点 $(0,0)$ 及 $(2,0)$,故

$f'(0)=0$,得 $c=0$,故 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+C_1$.

$f'(2)=0$,得 $4a+2b=0$,又因 $a<0$,故 $b>0$.

又因为 $f''(x)=2ax+b$,$f''(0)=b>0$,$f''(2)=4a+b=-b<0$.故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值,在 $x=2$ 处取极大值.又

$$\begin{cases}f(2)=\dfrac{8}{3}a+2b+C_1=6,\\ f(0)=\dfrac{a}{3}0^3+\dfrac{b}{2}0^2+C_1=2,\end{cases}\quad 故\begin{cases}a=-3,\\ b=6,\\ C_1=2.\end{cases}$$

故 $f(x)=-x^3+3x^2+2$，令 $f''(x)=-6x+6=0$，得 $x=1$. 当 $x<1$ 时，$f''(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f''(x)<0$. 所以曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 $(1,4)$.

注　本题综合考查了原函数的定义、极值点和拐点的求法.

(十二) 已知 $f'[\varphi(x)]=g(x)$，求 $f(x)$ 的问题

例 15　已知 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x+\tan^2 x \quad (0<x<1)$，求 $f'(x)$ 的不定积分.

分析　要求 $\int f'(x)\,dx$，首先应求出 $f'(x)$.

解　令 $\sin^2 x=t$，则 $f'(t)=1-t+\dfrac{t}{1-t}$，

即
$$f'(x)=1-x+\frac{x}{1-x}=-x+\frac{1}{1-x},$$
$$\int f'(x)\,dx=\int\left(-x+\frac{1}{1-x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-\ln(1-x)+C.$$

(十三) 已知 $f(x)$ 的原函数，求与 $f(x)$ 有关的函数问题

例 16　已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\int xf'(x)\,dx$.

分析　因 $\int xf'(x)\,dx=\int x\,df(x)=xf(x)-\int f(x)\,dx$，故只需求 $f(x)$ 和 $\int f(x)\,dx$ 即可.

解　$\int xf'(x)\,dx=xf(x)-\int f(x)\,dx$，

因 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，故
$$\int f(x)\,dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C,$$
$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=f(x),$$

从而
$$\int xf'(x)\,dx=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

例 17 **设** $F(x)$ **是** $f(x)$ **的一个原函数,** $F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. **若当** $x>0$ **时,有** $f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$, **试求** $f(x)$.

分析 **由于** $F(x)$ **是** $f(x)$ **的原函数,故有** $F'(x)=f(x)$, **从而** $F'(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$, **对该等式两边求不定积分,可求得** $F(x)$, **从而求得** $f(x)$.

解
$$\int F(x)\,dF(x)=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)}d\sqrt{x}$$
$$=2\int\arctan\sqrt{x}\,d\arctan\sqrt{x}.$$

即
$$\frac{1}{2}F^2(x)=(\arctan\sqrt{x})^2+C,$$

又 $F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, **得** $C=0$, **故**
$$F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x}.$$

于是得
$$f(x)=(\sqrt{2}\arctan\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}.$$

注 **此题关键是得到** $F'(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$.

四、练习题及答案

习题(A)

一、选择题

1. **设函数** $f(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上的某个原函数为零,则在区间** $[a,b]$ **上,(　　)**.

(A) $f(x)$ 的原函数恒等于 0

(B) $f(x)$ 的不定积分恒等于 0

(C) $f(x)$ 不恒等于 0，但 $f'(x)$ 恒等于 0

(D) $f(x)$ 恒等于 0

2. 若 $f'(x^2)=\frac{1}{x}\ (x>0)$，则 $f(x)=$ (　　).

(A) $2x+C$　　(B) $\ln|x|+C$　　(C) $2\sqrt{x}+C$　　(D) $\frac{1}{\sqrt{x}}+C$

3. $\int xf''(x)\,dx=$ (　　).

(A) $xf'(x)-\int f(x)\,dx$　　(B) $xf'(x)-f'(x)+C$

(C) $xf'(x)-f(x)+C$　　(D) $f(x)-xf'(x)+C$

4. 下列等式中正确的是 (　　).

(A) $d\int f(x)\,dx=f(x)$　　(B) $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$　　(D) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)+C$

二、求下列不定积分

1. $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx$.　　2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

3. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$.　　4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

5. $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}dx$.　　6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}$.

7. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.　　8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

9. $\int (\ln x)^2 dx$.　　10. $\int xe^{-2x}dx$.

11. $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$.　　12. $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

三、解下列各题

1. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

2. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

习题（B）

一、计算下列各积分

1. $\int x\sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

2. $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x$.

3. $\int \frac{1-\ln x}{(x+\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

4. $\int \frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$.

5. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

*6. $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}\mathrm{d}x$.

*7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+1}}$.

*8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

*9. $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

*10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)^2}$.

*11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

二、解下列各题

1. 设 $f'(\ln x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x>1)$，求 $f(x)$.

2. 求 $I=\int |x|e^x\mathrm{d}x$.

习题（A）答案

一、选择题

1. D.　2. C.　3. C.　4. B.

二、求下列不定积分

1. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + C$.

2. $-\cot x - \tan x + C$.

3. $(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + C$.

4. $2\arcsin\sqrt{x} + C$.

5. $-\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C$.

6. $\ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right| + C$.

7. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}\right| + C$.

8. $x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + 6\ln(x^{\frac{1}{6}} - 1) + C$.

9. $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$.

10. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$.

11. $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| + C$.

12. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C$.

三、解下列各题

1. $x - (e^{-x} + 1)\ln(1 + e^x) + C$.

2. $x\cos x\ln x + \sin x - (1 + \sin x)\ln x + C$.

习题(B)答案

一、计算下列各积分

1. $-\frac{1}{12}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{21}(1-3x)^{\frac{7}{3}} + C$. **提示**:可仿照例 2(6).

2. $\frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{2}{3}} + C$. **提示**:利用 $x^2dx = \frac{1}{3}dx^3$.

3. $-\dfrac{x}{x+\ln x}+C$. **提示**:可仿照例2(9).

4. $-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{2(1-x)^2}+C$. **提示**:采用加减项法.

5. $\dfrac{2}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]^{\frac{3}{2}}+C$. **提示**:可仿照例2(10).

6. $\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$. **提示**:因被积函数中有$\sqrt{1-e^{2x}}$,可设 $e^x=\sin t$.

7. $-\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+C$. **提示**:此题可用倒代换,设 $x=\dfrac{1}{t}$.

8. $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$. **提示**:此题被积函数为无理式,可仿照例8(2),设$\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}=t$.

9. $\dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$. **提示**:利用$\dfrac{1}{1+x^2}dx=d\arctan x$,再分部积分.

10. $\ln|x|-\dfrac{1}{10}\ln|1+x^{10}|+\dfrac{1}{10(x^{10}+1)}+C$. **提示**:此题显然不宜用将被积函数分解成部分分式和的方法计算,可先将分子、分母乘以10^9,然后凑微分,再换元.

11. $\tan x-2\cot x-\dfrac{1}{3}\cot^3 x+C$.

二、解下列各题

1. $\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+C$.

2. $I=\begin{cases} xe^x-e^x+C+2, & x\geqslant 0,\\ -xe^x+e^x+C, & x<0.\end{cases}$ **提示**:此题被积函数含有绝对值,其实质仍为分段函数,故可仿照例12.

第五章　定积分

一、本章知识的作用与意义

积分是分析数学乃至整个数学领域中最重要的概念之一，它的产生与以下两类问题相关：一是由一个函数的导数求这个函数；二是计算函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图形与 x 轴所界定区域的面积．这两类问题导致积分的两种形式：不定积分与定积分．对这两种相关积分形式的性质和计算的研究构成了积分学的课题．

不定积分侧重于基本积分法的训练，而定积分则完整地体现了积分思想——一种认识问题、分析问题、解决问题的思想方法．定积分的概念是借助极限工具，以结构性的形式而严格定义的．通过“分割”、“近似”、“求和”、“取极限”四个步骤完成．这种数学思想在第九章重积分，第十章曲线积分与曲面积分中反复用到，因此要理解掌握．

本章还给出了重要的微积分基本公式，即牛顿—莱布尼茨公式．此公式是联系定积分与不定积分、微分与积分的纽带，它使计算定积分成为可能（因为利用定义求定积分是很难做到的）．而本章中定积分的换元法、分部积分法又解决了许多求定积分的问题，为解决第九章、第十章的积分问题提供了有力的工具．

定积分在理论上极为重要，应用上极为广泛．它和微分学不仅是高等数学的主要内容，而且是研究近代科学技术相当有利的数学工具．

二、知识要点及思想方法

(一)定积分的概念

1.定积分的定义

区间$[a,b]$上有界函数$f(x)$的定积分记作$\int_a^b f(x)\,dx$,即$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$(若右端和式的极限存在),其中$\Delta x_i$表示任意分$[a,b]$为$n$个子区间$[x_{i-1},x_i]$的长度,$\xi_i$为$[x_{i-1},x_i]$上任一点,$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|$,且$\int_a^b f(x)\,dx$存在时,称$f(x)$在$[a,b]$上可积.

注　①定义中和式极限的存在性和极限值与积分区间$[a,b]$和被积函数$f(x)$有关,而与区间$[a,b]$的分法、ξ_i在$[x_{i-1},x_i]$上的取法无关.

②由于分割的任意性,$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}\to 0$与$n\to$　不等价,原因是后者不能保证使整个区间无限细分.

③定积分是在被积函数有界、积分区间有限的前提下讨论的.如果没有这样的前提,那么和式的极限一定不存在,也就是说这两个前提实际上是定积分存在的必要条件.若这两个前提被破坏了,则有后面的广义积分的概念.

④定积分是一个数,它取决于被积函数和积分区间,与积分变量采用什么字母表示无关,即$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$,这一点为我们求解或证明某些题目提供了很大的方便.

2.函数可积的条件

当$f(x)$满足下列条件之一时,函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

①$f(x)$在$[a,b]$上连续;

②$f(x)$在$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点;

③$f(x)$在$[a,b]$上单调有界.

3.定积分$\int_a^b f(x)\,dx$的意义

⑴ 几何意义

$\int_a^b f(x)\,dx$表示介于 x 轴,曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分图形面积的代数和,在 x 轴上方的面积取正号,x 轴下方的面积取负号.

⑵ 代数意义

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值是$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

(二) 定积分的性质

①$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

②$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　(k 是常数).

③$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

④$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b-a$.

⑤如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$,则$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$,$a<b$.

推论 1　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \quad (a<b).$$

推论 2　$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (a<b)$.

⑥设 M 与 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad (a<b).$$

⑦定积分中值定理.如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

(三) 积分上限的函数及其性质

1.积分上限的函数

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$x \in [a,b]$，则定积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 称为积分上限(变上限)的函数.

注　有时把积分变量也记作 x，写成 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\,dx$，这时一定要在概念上分清函数 $\Phi(x)$ 的自变量 x 与积分变量 x.

2.积分上限的函数及其导数

①若被积函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上连续(未必可导)且 $\Phi(a)=0$.

②若被积函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$，即 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，由此可知连续函数的原函数一定存在.

③若被积函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 可导，则

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

(四) 定积分的计算

1.牛顿—莱布尼茨公式(微积分基本公式)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

注　①此公式架起了联系微分与(定)积分的桥梁.它把函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分的计算转化为求 $f(x)$ 的原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量，从而解决了定积分的计算问题，并且使计算变得十分简单，这样定积分才有了巨大的实用价值.

②此公式成立的条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,疏忽可能出差错.

③积分中值定理与微分中值定理及牛顿—莱布尼茨公式的关系如下:

$$\overbrace{F(b)-\underbrace{F(a)=F'(\xi)}_{\text{微分中值定理}}\underbrace{(b-a)=\int_a^b f}_{\text{积分中值定理}}}^{\text{牛顿—莱布尼茨公式}}(x)\,dx$$

其中,$F'(x)=f(x)$.

2.定积分的换元积分法

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单值且 $\varphi'(t)$ 连续,又 $\varphi(\alpha)=a$,$\varphi(\beta)=b$,$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$,$t\in[\alpha,\beta]$,则有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

注　①用 $t=\bar{\varphi}(x)$ 引入新变量 t 时,一定要注意反函数 $x=\varphi(t)$ 的单值可微条件.

②“换元一定要换限”,即对应于积分下限 a 的变量 t 的值 α 作为下限,对应于积分上限 b 的变量 t 的值 β 作为上限,而不论 α,β 的大小.

③求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后,不必像计算不定积分那样再把 $\Phi(t)$ 变换成原来变量 x 的函数,而只要把新变量 t 的上、下限 α,β 分别代入 $\Phi(t)$ 中,计算 $\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$ 即可.

3.定积分的分部积分法

设 $u=u(x)$,$v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$,$v'(x)$,则有分部积分公式

$$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du.$$

注　恰当地选取 $u(x)$ 和 $dv(x)$ 是关键,其选取的规律与不定积分的分部积分法相同.

4.补充结论

①若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

②若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

③若 $f(x)$ 在 $(-\quad,+\quad)$ 上连续且以 T 为周期，则有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_{0}^{T} f(x)\,dx \quad (n\text{ 为大于 }1\text{ 的自然数}).$$

④当 $f(x)$ 连续时，有

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx;$$

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx;$$

$$\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx;$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ 为偶数}), \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1 & (n\text{ 为奇数}). \end{cases}$$

注 当积分区间为对称区间时，应考虑该积分是否可用奇偶函数的积分性质处理.

(五) 广义积分

1. 无穷区间上的广义积分

设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\quad)$ 上连续，取 $b>a$，如果极限 $\lim\limits_{b\to+}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 存在，则定义 $\int_{a}^{+} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$，此时称广义积分 $\int_{a}^{+} f(x)\,dx$ 收敛 若极限不存在，则称广义积分 $\int_{a}^{+} f(x)\,dx$ 发散，此时 $\int_{a}^{+} f(x)\,dx$ 记号不再表示数值.

设 $f(x)$ 在区间 $(-\quad,b]$ 上连续，$\int_{-}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$；

$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ $= \lim\limits_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx + \lim\limits_{u\to+\infty}\int_{a}^{u} f(x)\,dx$，若这两个极限均存在，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，否则（只要有一个极限不存在）为发散．

注　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx + \lim\limits_{u\to+\infty}\int_{a}^{u} f(x)\,dx$ 不能写作 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\int_{-t}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{t} f(x)\,dx\right]$，这是因为前面所给两个极限不存在时，后一个极限可能存在．

2．无界函数的广义积分（或称瑕积分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 内连续，而 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$（$x=a$ 称为瑕点），取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ 存在，则定义 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$，此时称广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 收敛；若极限不存在，则称广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 发散．

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 内连续，$x=b$ 为瑕点，则定义 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$；设 $f(x)$ 在区间 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 内连续，$x=c$ 为瑕点，则定义

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to0^+}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx,$$

若这两个极限均存在，则称广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 收敛；否则为发散．

注　无界函数的广义积分形式上与常义积分无区别，计算定积分时要检查被积函数在积分区间上是否有无穷间断点（瑕点），否则积分会出现差错．如 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$ 是错误的，因为被积函数 $\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0\in[-1,1]$ 处无界．$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$ 与 $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ 都发散．

(六) 主要的思想方法

"分割"、"代替"、"求和"、"求极限"所反映出来的积分思想是微积分的核心思想. 理解它不但有助于学好微积分,而且有助于认识客观世界.

三、解题研究

(一) 定积分的计算

例 1　求下列定积分:

(1) $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; (2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$; (3) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

解　(1) **原式** $=\int_{-2}^{0}\frac{d(x+1)}{1+(x+1)^2}=[\arctan(x+1)]_{-2}^{0}$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(2) **原式** $=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{4-\cos^2 x}=-\left[\frac{1}{4}\ln\frac{2+\cos x}{2-\cos x}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\ln 3.$

(3) **原式** $=\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{1+e^x}-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right]dx=\int_{0}^{1}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-\int_{0}^{1}\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$

$$=\left[x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}-\ln(1+e)+\frac{1}{1+e}+\ln 2.$$

注　例 1 是牛顿—莱布尼茨公式的直接应用,只需求出被积函数的原函数.

例 2　求下列定积分:

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta d\theta}{\frac{1}{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta}$; (2) $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

(3) $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$; (4) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$;

(5) $\int_{0}^{1}x(1+x^2)\arctan x dx$; (6) $\int_{1}^{e}\sin(\ln x)dx$.

解　(1) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2\theta}{\frac{1}{3}+\tan^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)\left(\frac{1}{3}+\tan^2\theta\right)}$.

令 $t=\tan\theta$，则当 $\theta=0$ 时，$t=0$；当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$t=1$. 于是

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\left[\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}t-\arctan t\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)\pi.$$

(2) 作倒代换，令 $x=\dfrac{1}{t}$，当 $x=-3$ 时，$t=-\dfrac{1}{3}$；当 $x=-2$ 时，$t=-\dfrac{1}{2}$，于是

$$\text{原式}=\int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{-\frac{1}{t^3}\sqrt{1-t^2}}=-\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}}\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\left[\sqrt{1-t^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2)$，于是

$$\text{原式}=\int_0^1 t\,\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=2\left[t-\arctan t\right]_0^1$$

$$=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

(4) 为去掉根号，令 $x=\tan t$，则

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sec^2 t}{(1+5\tan^2 t)\sec t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sec t}{\sec^2 t+4\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{1+4\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}(2\sin t)}{1+(2\sin t)^2}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{8}.$$

(5) 原式 $=\dfrac{1}{4}\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}(1+x^2)^2$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[(1+x^2)^2\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 (1+x^2)\,dx\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

(6) 原式 $= \left[x\sin(\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \cos(\ln x)\,dx$

$$= e\cdot\sin 1 - \left[x\cos(\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \sin(\ln x)\,dx$$

$$= e\cdot\sin 1 - e\cdot\cos 1 + 1 - \int_1^e \sin(\ln x)\,dx,$$

于是 $\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}e(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$

注　例 2 主要用换元法和分部积分法计算定积分,这也是最基本的方法,读者应掌握它并能熟练应用.

例 3　计算 $\int_{-2}^{5} |x^2 - 2x - 3|\,dx$.

分析　如果被积函数带有绝对值符号,应去掉绝对值号,分段积分.去掉绝对值号的方法:令绝对值号里的式子等于零,求出积分区间内部的根,这些根按由小到大的顺序把积分区间分成几个部分区间,在每个部分区间上就去掉了绝对值号.

解　令 $x^2 - 2x - 3 = 0$,得 $x = -1, x = 3$.

原式 $= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\,dx + \int_{-1}^{3} -(x^2 - 2x - 3)\,dx + \int_{3}^{5} (x^2 - 2x - 3)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{3}^{5}$$

$$= \frac{71}{3}.$$

例 4　指出下面解题中的错误,并给出正确的解法.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx = -\left[\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0.$$

解　错误是：当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，将 $\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}$ 写成了 $\sin x-\cos x$. 正确的解法为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-\cos x|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}-[\cos x+\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\sqrt{2}-1).$$

注　在定积分计算过程中，要注意 $\sqrt{f(x)^2}=|f(x)|$，而不是 $\sqrt{f(x)^2}=f(x)$，为不出现这种错误，要注意积分区间.

例 5　计算 $\int_0^2 f(x-1)\,dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^x}, & x<0,\\ \frac{1}{1+x}, & x \geqslant 0.\end{cases}$

解法 1

$$f(x-1)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{x-1}}, & x-1<0\\ \frac{1}{1+(x-1)}, & x-1 \geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{x-1}}, & x<1,\\ \frac{1}{x}, & x \geqslant 1,\end{cases}$$

于是

$$\int_0^2 f(x-1)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{x-1}}dx+\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\int_0^1 \frac{e^{1-x}}{e^{1-x}+1}dx+\ln 2$$

$$=\ln 2-[\ln(e^{1-x}+1)]_0^1=\ln(e+1).$$

解法 2　**令** $t = x - 1$**，则**

$$\int_0^2 f(x-1)\,dx = \int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt + \ln 2$$
$$= [\ln(1+e^t)]_0^1 + \ln 2 = \ln(1+e).$$

注　**解法** 1 **是由所给函数** $f(x)$ **求出被积函数** $f(x-1)$ **再积分，解法** 2 **是利用变量代换将** $f(x-1)$ **在** $[0,2]$ **上的定积分化为** $f(x)$ **在** $[-1,1]$ **上的定积分再计算．比较两种解法，解法** 2 **较方便．**

例 6　**计算** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(1+x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

分析　**被积函数形式上复杂，但实际上是由一个奇函数与一个偶函数之和所构成的．因此只要计算偶函数在对称区间上的积分即可．**

解　**原式** $= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= 0 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

下面可用两种方法求解．

解法 1　**用分部积分法，选** $u = \arcsin x$，$dv = \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$**，得**

原式 $= -2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

解法 2　**用换元法，令** $t = \arcsin x$**，则** $x = \sin t$，$dx = \cos t\,dt$，

原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin t\cdot t\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\sin t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (-t)\,d\cos t$

$$= 2\left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\,dt = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

注　**当积分区间为对称区间时，注意被积函数的奇、偶情况．**

* **例** 7　**求** $I = \int_0^{n\pi} x|\sin x|\,dx$　(n **为正整数**)．

分析　此题不容易直接求，先换元再用周期函数的积分性质求.

解　令 $n\pi - x = t$，则 $x = n\pi - t$，于是

$$I = \int_{n\pi}^{0} (n\pi - t)|\sin t|(-dt) = n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|dt - \int_0^{n\pi} t|\sin t|dt,$$

故
$$2I = n\pi\int_0^{n\pi}|\sin x|dx.$$

由于 $|\sin x|$ 的周期为 π，由周期函数的积分性质 $\left(\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx\right)$ 知

$$\int_0^{n\pi}|\sin x|dx = n\int_0^{\pi}\sin x dx = 2n,$$

于是
$$2I = n\pi\cdot 2n, I = n^2\pi.$$

例 8　(1) 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$；

(2) 求 $\int_0^{\pi} f(x)dx$，其中 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$.

解　(1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx.$$

所以 $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$，故 $I = \frac{\pi}{4}$.

(2) $$\int_0^{\pi} f(x)dx = [xf(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}dt - \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{\pi - x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}dt - \int_0^{\pi} t\frac{\sin t}{\pi - t}dt = \int_0^{\pi}\frac{\pi - t}{\pi - t}\sin t dt$$

$$= \int_0^{\pi}\sin t dt = 2.$$

注　本例巧妙地利用了换元法与分部积分法，将积分变量改写字

母后,合并两个积分求出结果.

*例 9 已知 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)\,dt = 1-\cos x$,求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

解 令 $u = x - t$,于是所给方程化为

$$\int_0^x tf(x-t)\,dt = -\int_x^0 (x-u)f(u)\,du = 1-\cos x,$$

即
$$x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du = 1-\cos x,$$

两边对 x 求导得 $\int_0^x f(u)\,du = \sin x$,令 $x = \frac{\pi}{2}$,有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

注 当定积分或变上限定积分的被积函数含有参变量时,需要通过适当的变换或变形使被积函数不含参变量,然后才可对参变量求导.此外,作积分换元时,要正确理解参变量与新老积分变量之间的区别.

例 10 已知 $f(2) = \frac{1}{2}$,$f'(2) = 0$,$\int_0^2 f(x)\,dx = 1$,求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\,dx$.

分析 解此类抽象函数的题的常用方法为分部积分法.解题过程中又用到了换元法.

解
$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 f''(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,df'(2x) \\
&= \frac{1}{2}\left\{[x^2 f'(2x)]_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,2x\,dx\right\} = -\int_0^1 xf'(2x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 x\,df(2x) = -\frac{1}{2}\left\{[xf(2x)]_0^1 - \int_0^1 f(2x)\,dx\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left[f(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,d(2x)\right] \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\,dt \quad (\text{令 } 2x = t) \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

例 11 利用定积分定义计算 $\int_0^1 e^x\,dx$.

解　将 $[0,1]$ n 等分，分点为 $x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, \cdots, x_i=\frac{i}{n}, x_n=1$，每个小区间长度为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，取 $\xi_i=\frac{i}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)\\ &=\frac{1}{n}\cdot\frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1},\end{aligned}$$

故
$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right]=e-1.$$

(二) 求函数的表达式

例 12　设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=3x^2-x\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$.

分析　由于定积分是一个数值，所以设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，将其代入方程中，通过计算定积分确定 A.

解　设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=3x^2-Ax$，方程两端在 $[0,1]$ 上取定积分，有

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (3x^2-Ax)dx,$$

即
$$A=\left(x^3-\frac{1}{2}Ax^2\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{A}{2},$$

可得 $A=\frac{2}{3}$. 故 $f(x)=3x^2-\frac{2}{3}x$.

例 13　设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt\ (x>0)$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

分析　题设只给出了 $f(x)$ 的表达式，要求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$，可借助于变量替换 $u=\frac{1}{t}$ 先求出 $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解　令 $u=\frac{1}{t}$，则

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt=\int_1^x\frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}du=\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}dt.$$

所以 $$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\ln t\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t(1+t)}\right]dt$$

$$=\int_1^x\frac{1}{t}\ln t\,dt=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

注　若分别计算 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 比较困难,而计算 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 较容易,从解题过程中可体会出积分变形的功能.

例 14　已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,且 $f(x)=\frac{xF(x)}{1+x^2}$,求 $f(x)$.

解　由题意知,$F'(x)=f(x)$,$F(x)=\frac{1+x^2}{x}f(x)$.

所以 $\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{x}{1+x^2}$,两边积分得 $\ln F(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_1$.

故 $F(x)=C_1\sqrt{1+x^2}$,$f(x)=F'(x)=\frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}$ $(C=2C_1)$.

例 15　设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$.

分析　由于 $f(x)$ 为分段函数,故对 $F(x)$ 也要分段进行讨论.

解　当 $x<0$ 时,$F(x)=\int_{-1}^x e^{-t}dt=e-e^{-x}$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$F(x)=\int_{-1}^0 e^{-t}dt+\int_0^x t\,dt=e-1+\frac{x^2}{2}$.

$$F(x)=\begin{cases}e-e^{-x}, & x<0,\\ e-1+\dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(三) 利用定积分的相关概念、性质求极限

例 16　求下列极限:

⑴ $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{\sin^{10}x}$；　　⑵ $\lim\limits_{n\to}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx$，$(p>0)$；

⑶ $\lim\limits_{n\to}\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$.

解 ⑴ $$I=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x^{10}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\cos x^4\cdot 2x}{10x^9}$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^4}{x^8}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^8}{x^8}=\frac{1}{10}.$$

注　此题用了洛必达法则，为简化计算又用了等价无穷小代换，这都是解题常用的方法.

⑵ 分析　这是一个含参数 n 的定积分，且$\dfrac{\sin x}{x}$的原函数不是初等函数，不能直接积分，故求极限时先利用积分中值定理.

解　由积分中值定理得

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p,\xi\in[n,n+p],$$

当 $n\to$　时，$\xi\to+$　.从而 $\lim\limits_{\xi\to+}\dfrac{\sin\xi}{\xi}\cdot p=0$，于是

$$\lim_{n\to}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\xi\to+}\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p=0.$$

⑶ 由 $0\leqslant x\leqslant 1$ 知，$0\leqslant\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^n$，于是由定积分的性质可得

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx\leqslant\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0\ (n\to\quad).$$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx=0.$$

例 17　设函数 $f(x)$ 连续、可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=4$，求

$$\lim_{x\to 0}\left[x^{-2}\int_0^x f(t)dt\right].$$

分析 错误解法:

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}\times4=2.$$

错误原因 第三个等式用到了 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,但题设中没有此条件.这是常出的错误,要引起注意.

正确解法应是先用洛必达法则,再用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数定义.

解 $\text{原式}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{0}=\dfrac{1}{2}f'(0)=\dfrac{1}{2}\times4=2.$

例 18 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $f(a)=0$,求

$$I=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\,dt.$$

解 对于 $\int_a^x f(t+h)\,dt$,令 $u=t+h$,则

$$\int_a^x f(t+h)\,dt=\int_{a+h}^{x+h}f(u)\,du=\int_{a+h}^{x+h}f(t)\,dt.$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\lim_{h\to0}\frac{\int_{a+h}^{a}f(t)\,dt+\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\int_{a+h}^{a}f(t)\,dt+\int_x^{x+h}f(t)\,dt}{h}\\&=\lim_{h\to0}[f(x+h)-f(a+h)]=f(x)-f(a)=f(x).\end{aligned}$$

注 下面的做法是错误的.

$$I=\int_a^x\lim_{h\to0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,dt=\int_a^x f'(t)\,dt=[f(t)]_a^x=f(x).$$

理由是 第一个等号不一定成立,此外,题设中没给 $f(x)$ 可导,因而 $f'(t)$ 也不一定存在.

例 19 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right).$

分析 此类题可利用定积分的定义求,其关键是把极限转化为定积分问题.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$.

令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$**,取积分区间为** $[0,1]$**,** $\xi_i=x_i=\dfrac{i}{n}$**,** $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$**,则上式转化为**

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

注　一般若能把 n **项和的数列转化为** $\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right]\dfrac{b-a}{n}$**,而函数** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上可积,则可用定积分定义求这个数列的极限,即** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right]\dfrac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$.

(四)由变限积分所定义的函数的相关问题

例 20　设方程 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\,dt$ $(x\neq y)$**,确定** y **是** x **的隐函数,求** $\dfrac{dy}{dx}$.

解　方程两边对 x **求导得**

$$2-\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right),$$

解得　$$\frac{dy}{dx}=\sin^2(x-y).$$

例 21　设 $f(x)$ **连续,求** $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt$.

解　令 $x^2-t^2=u$**,则**

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 f(u)\frac{1}{2}(-du)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,du\right)$$
$$=\frac{1}{2}f(x^2)2x=xf(x^2).$$

注　此题被积函数中含有参变量,因此先换元.

例 22　设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{t+4}{t^2+2t+2}dt$**,求** $f(x)$ **在区间** $[0,1]$ **上的最大**

值和最小值.

解 因为 $f'(x)=\dfrac{x+4}{x^2+2x+2}>0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加.

最小值为 $m=f(0)=0$,最大值为

$$
\begin{aligned}
M=f(1)&=\int_0^1 \frac{t+4}{t^2+2t+2}dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t+2}{t^2+2t+2}dt+\int_0^1 \frac{3}{t^2+2t+2}dt\\
&=\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)\Big|_0^1+3\arctan(t+1)\Big|_0^1\\
&=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+3\arctan 2-\frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

例 23 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\neq 0$,证明方程 $\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \dfrac{dt}{f(t)}=0$ 在 (a,b) 内有且仅有一个根.

分析 先由零点定理证根的存在性,再由函数单调性证唯一性.

证明 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \dfrac{dt}{f(t)}$,显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,不妨设 $f(x)>0$,则

$$F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0,$$

由零点定理知,在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $F(\xi)=0$,即方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个根.

又 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{f^2(x)+1}{f(x)}\geqslant\dfrac{2f(x)}{f(x)}=2$,可知在 $[a,b]$ 上 $F(x)$ 单调增加,故方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内只有一个根.

当 $f(x)<0$ 时,同理可证.

(五) 证明等式

例 24 若 $f''(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,$f(0)=2$,$f(\pi)=1$,证明:

$$\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x dx=3.$$

证法 1

因为 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,dx=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx+\int_0^{\pi}f''(x)\sin x\,dx$，

而 $$\int_0^{\pi}f''(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,df'(x)=f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos x\,dx$$

$$=0-\int_0^{\pi}\cos x\,df(x)$$

$$=-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx$$

$$=f(0)+f(\pi)-\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx$$

$$=f(0)+1-\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx,$$

从而 $$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,dx=f(0)+1=2+1=3.$$

证法 2　$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,dx=\int_0^{\pi}[f''(x)\sin x-f(x)(\sin x)'']dx$

$$=\int_0^{\pi}[\sin x f'(x)-f(x)(\sin x)']'\,dx$$

$$=[\sin x f'(x)-f(x)\cos x]_0^{\pi}$$

$$=f(\pi)+f(0)=1+2=3.$$

例 25　**设** $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续，**$(0,1)$ **内可导，且** $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,dx=f(0)$**，证明：在** $(0,1)$ **内存在一点** ξ**，使** $f'(\xi)=0$.

分析　由所证结论易知要用罗尔定理，需先用积分中值定理得出满足罗尔定理的条件.

证明　由积分中值定理知，存在 $\xi_1\in\left[\frac{2}{3},1\right]$**，使** $\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{3}f(\xi_1)$**，从而有** $f(\xi_1)=f(0)$**，故** $f(x)$ **在区间** $[0,\xi_1]$ **上满足罗尔定理的条件，因此存在一点** $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$**，使** $f'(\xi)=0$.

注　此例的证明方法要掌握.

例 26 **设** $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上可导且满足** $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,dx$，**证明：必存在点** $\xi\in(0,1)$，**使** $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

分析 **要证** $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$，**即要证** $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0,\xi\in(0,1)$，**由于** $\xi f'(\xi)+f(\xi)=[xf(x)]'\Big|_{x=\xi}$，**因此引进辅助函数** $F(x)=xf(x)$，**再用中值定理**.

证明 **设** $F(x)=xf(x)$，**显然** $F(x)$ **在** $[0,1]$ **上可导，且** $F(1)=f(1)$. **又由题意知**，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,dx$，**利用积分中值定理有**

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,dx=\eta f(\eta),\ \eta\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

即有 $$F(1)=F(\eta).$$

因此 $F(x)$ **在** $[\eta,1]$ **上满足罗尔定理的条件，故有** $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ **使** $F'(\xi)=0$，**即** $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，**亦即** $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

例 27 **设** $f(x)$ **是以** T **为周期的连续函数，证明：对任意实数** a，**都有** $\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$.

分析 **利用积分区间的可加性及定积分的换元法证明**.

证明 $\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^T f(x)\,dx+\int_T^{a+T}f(x)\,dx$，

对于 $\int_T^{a+T}f(x)\,dx$，**令** $x=t+T$，**则**

$$\int_T^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^a f(t+T)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt=-\int_a^0 f(x)\,dx,$$

于是 $$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx.$$

注 **在长度为一个周期的区间上，周期函数的积分都相等，而与积分区间的起点无关**. **利用这一性质可简化周期函数积分的计算**.

如：$\int_{\pi}^{3\pi}\sin x\mathrm{d}x=\int_{0}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$.

（六）证不等式

例 28　证明下列不等式：

(1) $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{2}$；　　(2) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sin x}{e^x(1+x^2)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{12e}$.

分析　用定积分的性质.

证明　(1) $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 上连续，且 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，比较 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，$f(0)=1$ 的大小得，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 上的最大值为 $M=1$，最小值为 $m=e^{-\frac{1}{2}}$，故由定积分的性质可得 $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{2}$.

(2) 因为当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时，$\sin x\leqslant1$，$e^x\geqslant e$，故 $\frac{\sin x}{e^x(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{e(1+x^2)}$.

所以
$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sin x}{e^x(1+x^2)}\mathrm{d}x\leqslant\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{e(1+x^2)}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{e}\arctan x\right]_{1}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{12e}.$$

例 29　设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=0$，证明
$$\left|\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M(b-a)^2}{2},M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

分析　用拉格朗日中值定理及定积分的性质.

证明　由拉格朗日中值定理及 $f(a)=0$ 可得
$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=|f'(\xi)(x-a)|\leqslant M(x-a),$$
其中 $a<\xi<x$，$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$，故
$$\left|\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{a}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{a}^{b}M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

*例 30　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加且连续，证明：
$$\int_{a}^{b}xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

分析 构造积分上限函数,用积分中值定理及函数单调性;亦可用定积分的性质证之.

证法 1 令 $F(x)=\int_a^x tf(t)\,dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\,dt$(只要证 $F(b)\geqslant 0$),

则
$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,dt-\frac{a+x}{2}f(x)$$
$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,dt$$
$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(\xi)\quad(\xi\in[a,x])$$
$$=\frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)]\geqslant\frac{x-a}{2}[f(x)-f(x)]=0.$$

又 $F(a)=0$,所以 $F(x)\geqslant 0$,$x\in[a,b]$.

因为 $F'(x)\geqslant 0$,所以 $F(x)$ 单调增;又 $F(a)=0$,所以 $F(x)\geqslant 0$,$x\in[a,b]$,所以 $F(b)\geqslant F(x)\geqslant 0$.

故 $\int_a^b xf(x)\,dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$ 成立.

证法 2 $f(x)$ 单调增,所以 $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\geqslant 0$,

从而
$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx\geqslant 0,$$

即
$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\,dx\geqslant\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}x\right]_a^b=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 0=0.$$

故
$$\int_a^b xf(x)\,dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(七) 广义积分

例 31 求下列广义积分:

(1) $\int_{-}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; (2) $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x^2}dx$;

(3) $\int_{1}^{+} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$；　　(4) $\int_{1}^{+} \frac{1}{x^2+x-2}dx$；

(5) $\int_{1}^{2} \frac{x^2}{x^3-3}dx$.

(1) **解**　因为 $\int_{0}^{+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \lim\limits_{b\to+} \int_{0}^{b} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= \lim_{b\to+} \sqrt{1+x^2}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+} (\sqrt{1+b^2}-1) = + \quad .$$

所以 $\int_{-}^{+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 发散.

(2) **分析**　注意到当 $x\to1$ 时，$\frac{1}{1-x^2}\to$ ，即 $x=1$ 为被积函数的瑕点. 此为无界函数的广义积分，分为两个部分后，其中一部分为定积分.

解　$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)dx - \int_0^1 \ln(1-x)dx$，

其中 $\int_0^1 \ln(1+x)dx = [(x+1)\ln(1+x)-x]_0^1 = 2\ln2-1$ 为定积分，

$$\int_0^1 \ln(1-x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \ln(1-x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}[(1-x)\ln(1-x)+x]_0^{1-\varepsilon} = -1.$$

故　$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}dx = -(2\ln2-1)-(-1) = 2(1-\ln2)$.

(3) **分析**　由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x\sqrt{x-1}} =$ ，故 $x=1$ 为瑕点，同时积分又是无穷区间上的广义积分，将原式分成两项，使之成为两类广义积分，再分别讨论与计算.

解　$\int_1^{+} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{+} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

令 $\sqrt{x-1}=t$，则

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{2}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_2^{+} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^{+} \frac{2}{t^2+1}dt = [2\arctan\ t]_1^{+} = \frac{\pi}{2},$$

故 $$\int_1^{+} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

注　计算收敛的广义积分，有与定积分完全类似的换元法与分部积分法.

⑷ **分析**　此积分既有瑕点 $x=1$，又是无穷区间上的广义积分.

解　$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = - \quad ,$$

所以 $\int_1^{+} \frac{1}{x^2+x-2}dx$ 发散.

⑸ **分析**　$x=\sqrt[3]{3}$ 为瑕点，将 $[1,2]$ 分成两个区间 $[1,\sqrt[3]{3}]$ 和 $[\sqrt[3]{3},2]$.

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2}{x^3-3}dx + \int_{\sqrt[3]{3}}^2 \frac{x^2}{x^3-3}dx,$$

由于 $$\int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2}{x^3-3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{\sqrt[3]{3}-\varepsilon} \frac{x^2}{x^3-3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{3}\ln|x^3-3|\right]_1^{\sqrt[3]{3}-\varepsilon} = \quad ,$$

故原广义积分发散.

注　这种瑕点隐藏在积分区间内部的情形极易被忽视，要引起注意.

例 32　当 k 为何值时，广义积分 $\int_2^{+} \frac{dx}{x(\ln\ x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，这个广义积分发散？又当 k 为何值时，这个广义积分取得最小值？

解　当 $k=1$ 时，$\int_2^{+} \frac{dx}{x(\ln\ x)^k} = [\ln(\ln\ x)]_2^{+} = + \quad ,$

当 $k\neq 1$ 时，$$\int_2^{+} \frac{dx}{x(\ln\ x)^k} = \left[\frac{1}{1-k}(\ln\ x)^{1-k}\right]_2^{+}$$

$$= \begin{cases} + \quad , & k<1, \\ \dfrac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}, & k>1. \end{cases}$$

故当 $k\leqslant 1$ 时原积分发散，$k>1$ 时原积分收敛.

当 $k>1$ 时，记 $f(k)=\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{k-1}$，则

$$f'(k)=-\frac{1}{(k-1)^2}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{k-1}+\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{k-1}\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$$
$$=-\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{k-1}+\ln\ln 2\right).$$

令 $f'(k)=0$，得驻点 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$.

当 $k>1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，$f'(k)>0$；当 $1<k<1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，$f'(k)<0$，因而该驻点为极小值点(唯一)，极小值点也是最小值点，即当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，原广义积分取得最小值.

四、练习题及答案

习题(A)

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t\,dt}{x^2}=$ ______.　　2. $\int_{-2}^{2}\left(x^2+\frac{x\cos x}{1+x^2}\right)dx=$ ______.

3. 已知 $\int_1^A \frac{\ln t}{t}dt=1$，则 $A=$ ______.

4. 已知 $f(1)=0$，$\int_0^1 xf(x)\,dx=2$，则 $\int_0^1 x^2 f'(x)\,dx=$ ______.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必有(　　)使

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a).$$

(A) $\xi\in[a,b]$　　　　(B) $\xi=\frac{a+b}{2}$

(C) $\xi=\dfrac{b-a}{2}$ (D) 任取 $\xi\in(a,b)$

2.使 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=1$ 成立的 $f(x)$ 为( ).

(A) $\dfrac{1}{x^2}$ (B) $\dfrac{1}{x}$ (C) e^{-x} (D) $\dfrac{1}{1+x^2}$

3.设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时可导,且 $f(x)=1+\int_1^x \dfrac{1}{x}f(t)\,dt$,则 $f'(x)=$ ( ).

(A) $-\dfrac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,dt$ (B) $\dfrac{1}{x}f(x)$

(C) $\dfrac{1}{x}$ (D) $\dfrac{1}{x^2}f(x)$

4.设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,则 $\int_{-1}^1 f(-x)\,dx$ 等于( ).

(A) 0 (B) $2\int_0^1 f(x)\,dx$

(C) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ (D) $-\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

三、计算题

1.计算下列各题:

(1) $\int_1^8 \dfrac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$; (2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(3) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$; (4) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

2.设 $\int \ln x\cdot f(x)\,dx=\arctan x+C$,求 $\int_1^e \dfrac{1}{f(x)}dx$.

3.设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 1+x^2, & x<0,\end{cases}$ 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,dx$.

4.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$.

5. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\,dt = x$，求 $f(7)$.

6. 设连续函数 $f(x) = \ln x - \int_1^e f(x)\,dx$，求 $\int_1^e f(x)\,dx$.

四、证明题

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,dx$.

2. 证明 $\frac{1}{2} < \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

习题(B)

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right) =$ ______.

2. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\tan x$，则 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} xf'(x)\,dx =$ ______.

3. $\int_2^{+} \frac{1}{x^2+x-2}dx =$ ______.

4. 设 $f(x)$ 为 $[0,+\ \ )$ 上的连续函数，且 $\int_0^{x(1+x^2)} f(t)\,dt = x^2$，则 $f(2)$ = ______.

二、选择题

1. 下列各式中，$f(x)$ 在积分区间上连续，正确的是(　　).

(A) $\int_{-e}^{0} e^{-x}dx < \int_{-e}^{0} e^{x}dx$

(B) $\int_1^2 f(x)\,dx < \int_0^3 f(x)\,dx$

(C) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,dx < \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)^2\,dx$

(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|dx$

2.设 $P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$，$Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx$，$R=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$，则正确的是(　　).

(A) $P=Q=R$　　(B) $P=Q<R$　　(C) $P<Q<R$　　(D) $P>Q>R$

3.设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续的奇函数，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ (　　).

(A) 是奇函数　　(B) 是非奇非偶函数

(C) 是偶函数　　(D) 是周期函数

4.已知 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=$ (　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

三、计算题

1.计算下列各题：

(1) $\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}dx$；　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx$；

(3) $\int_{-3}^{2} \min\{2, x^2\}dx$；　　(4) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$.

2.设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \arcsin x$，$f(2)=\frac{1}{2}$，求 $\int_2^4 f(x)dx$.

3.设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt = 1$，求 a，b 的值.

4.设 a 为常数，求 $\lim\limits_{n\to}\int_n^{n+a} x\sin\frac{1}{x}dx$.

5.设 $f(x)=x^2 - x\int_0^2 f(x)dx + 2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$.

6. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\displaystyle\int_{-\infty}^{c} te^{2t}\,dt$，求常数 c 的值.

四、证明题

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明：$\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\,dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：在 (a,b) 内有且仅有一点 ξ，使得 $\displaystyle\int_a^{\xi} f(x)\,dx=\int_{\xi}^{b}\frac{dx}{f(x)}$.

习题(A)答案

一、填空题

1. $\dfrac{1}{2}$.　2. $\dfrac{16}{3}$.　3. $e^{\sqrt{2}}$.　4. -4.

二、选择题

1. A.　2. C.　3. C.　4. C.

三、计算题

1. (1) $\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{5}{2}$，提示：令 $x=t^3$；

(2) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$，提示：利用奇偶性；

(3) $2-\dfrac{2}{e}$；

(4) $\dfrac{1}{3}\ln 2$，提示：分部积分法.

2. $\dfrac{2}{9}(e^3+5)$. 提示：先求 $\dfrac{1}{f(x)}$ 再分部积分.

3. $\dfrac{37}{24}-\dfrac{1}{e}$.

4. $-\dfrac{1}{6}$. 提示：该极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，分母先用无穷小代换，再用洛必达法则.

5. $\frac{1}{12}$. 提示:两边对 x 求导.

6. $\frac{1}{e}$. 提示:设 $\int_1^e f(x)\,dx = A$.

四、证明题

1. 提示:令 $x^2 = u$,用换元法.

2. 提示:设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,用估值定理.

习题(B)答案

一、填空题

1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi - 2$. 3. $\frac{1}{3}\ln 4$. 4. $\frac{1}{2}$.

二、选择题

1. C. 2. A. 3. A. 4. A.

三、计算题

1. (1) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$,提示:令 $x - 1 = 2\sin t$;

(2) $\frac{3}{16}\pi$,提示:利用原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)]\,dx$;

(3) $10 - \frac{8}{3}\sqrt{2}$,提示:先求出 $\min\{2, x^2\} = \begin{cases} 2, & -3 \leqslant x < -\sqrt{2}, \\ x^2, & -\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{2}, \\ 2, & \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2; \end{cases}$

(4) $\frac{3}{4}\pi - \sqrt{3}$,提示:分部积分法.

2. $\frac{3}{5}$. 提示:先换元,令 $2x - t = u$,等式两边对 x 求导,最后将 $x = 2$ 代入.

3. $a = 4, b = 1$. 提示:该极限为 $\frac{0}{0}$ 型,用洛必达法则.

4. a. 提示:用积分中值定理.

5. $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$. 提示:两边分别对 x 从 0 到 1、从 0 到 2 积分,解代数方程得 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$,$\int_0^2 f(x) = \frac{4}{3}$.

6. $c = \frac{2}{5}$.

第六章　定积分的应用

一、本章知识的作用与意义

定积分的应用实质上是用前面学过的定积分理论来分析和解决一些几何、物理中的问题.定积分解决实际问题的方法一般可分为两种：一般方法是根据定积分的定义,利用分割、近似代替、求和、取极限这四个步骤来导出所求量的积分表达式;另一种方法是“元素法”,它是本章使用的主要方法.

工程技术人员和从事某些专业的研究人员用定积分计算实际问题时都是用元素法将实际问题化为定积分,因此元素法具有广泛的适用性.

通过本章的学习,一方面能够应用元素法将某些几何、物理的问题化成定积分;另一方面,熟练地应用本章给出的公式能够计算平面区域的面积、平面曲线的弧长,用截面面积计算体积、旋转体的体积,计算变力做功等.同时,还可增强应用数学的意识,提高用定积分解决实际问题的能力.

二、知识要点及思想方法

(一)定积分的元素法

1.所求量 U 能用定积分表达的条件

①U 是与一个变量(例如 x)的变化区间 $[a,b]$ 有关的量；

②对于区间 $[a,b]$,U 具有数量的可加性,也就是说,如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间,则 U 相应地分为许多部分量 ΔU,U 等于所有部分量之和；

③部分量 ΔU 的近似值可表示为 $f(x)dx$,其中 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的已知连续函数.

2.求 U 的定积分表达式的步骤

①根据问题的具体情况,选取适当的积分变量(例如 x),并确定它的变化区间 $[a,b]$;

②求出相应于 $[a,b]$ 上任意一个小区间 $[x,x+dx]$ 的部分量 ΔU 的近似值 $dU=f(x)dx$;

③以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式,在区间 $[a,b]$ 上作定积分,得 $U=\int_a^b f(x)dx$.

这就是所求量 U 的积分表达式.这个方法称为定积分的元素法,其中 $dU=f(x)dx$ 称为 U 的元素.

注　①定积分解决的是对区间具有可加性的、连续分布的、非均匀的量的求和问题.

②U 的元素 $dU=f(x)dx$ 是 ΔU 的主部,dU 与 ΔU 之差是关于 Δx 的高阶无穷小(当 $\Delta x\to 0$ 时).严格讲应该验证,但这一过程比较麻烦,所以只要这种近似是合理的,一般应用中都省略证明.

③使用定积分元素法的关键是找出所求量(例如物理量或几何量)的元素,这应根据题中具体条件利用物理或几何知识来确定.

(二)平面图形的面积

在第五章中我们已经知道,应用定积分可以计算曲边梯形面积.另外,应用定积分的元素法还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积.

1.直角坐标

①由直线 $x=a,x=b\ (a<b)$,曲线 $y=f(x),y=g(x)\ (g(x)\leqslant f(x))$ 所围图形(见图 6.1)的面积为

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx.$$

②由直线 $y=c,y=d\ (c<d)$,曲线 $x=f(y),x=g(y)\ (f(y)\leqslant g(y))$ 所围图形(见图 6.2)的面积为

$$A=\int_c^d[g(y)-f(y)]dy.$$

③若曲边梯形的曲边 $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$) 由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 给出, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\psi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上连续,则曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

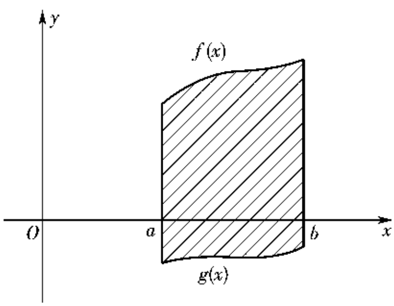


图 6.1

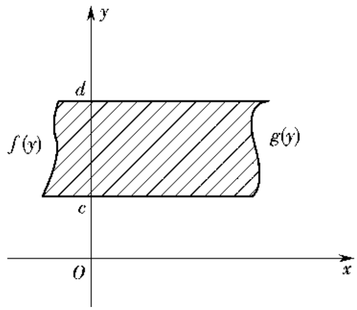


图 6.2

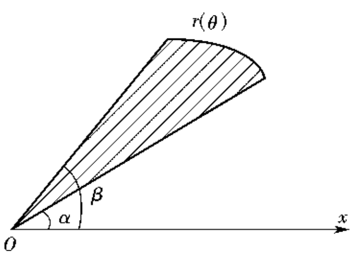


图 6.3

2.极坐标

①由曲线 $r=r(\theta)$ ($r(\theta)\geqslant 0$),射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围的曲边扇形(见图 6.3)的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

②由曲线 $r=r_1(\theta)$, $r=r_2(\theta)$ ($r_1(\theta)\leqslant r_2(\theta)$),射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ ($\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$) 所围平面图形(见图 6.4)的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]d\theta.$$

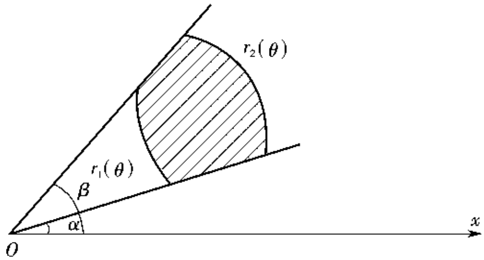


图 6.4

（三）立体的体积

1.旋转体的体积

①由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

②由连续曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$，$y=d$ $(c<d)$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy.$$

注　体积元素 $dV=\pi[f(x)]^2dx$ 是小圆柱体的体积，其中 $f(x)$ 为底圆半径. 若绕直线 $y=b$ 旋转，半径就不是 $f(x)$，而是 $f(x)-b$，则旋转体的体积为 $V=\pi\int_a^b[f(x)-b]^2dx$.

2.平行截面面积已知的立体体积

设立体位于过点 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，过点 x 且垂直于 x 轴的平面与该立体相交的截面面积为 $A(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，它是 x 的已知连续函数，则该立体的体积为

$$V=\int_a^bA(x)dx.$$

（四）平面曲线弧长

1.直角坐标

①设曲线弧的方程为 $y=f(x)$，y' 在 $[a,b]$ $(a<b)$ 上连续，则该曲

线弧的长度为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

②设曲线弧的方程为 $x=\varphi(y)$，$\varphi'(y)$在$[c,d]$ $(c<d)$上连续，则该曲线弧的长度为

$$s=\int_c^d\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,dy.$$

2. 参数方程

设曲线弧由参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$给出，$\varphi'(t)$与$\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，则该曲线弧的长度为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

注　因为$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}>0$，又由于弧长总是正的，所以求平面曲线弧长时积分上限应大于下限.

3. 极坐标

设曲线弧由极坐标方程 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$给出，$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，则该曲线弧的长度为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

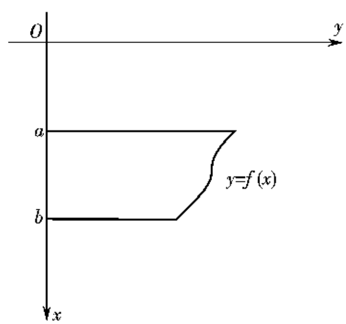


图6.5

(五) 变力沿直线做功

若物体在平行于 x 轴的变力 $F(x)$ 的作用下，沿 x 轴从点 a 移动到点 b，则力 $F(x)$所做的功是

$$W=\int_a^b F(x)\,dx.$$

(六) 液体静压力

设一薄板垂直放在密度为 ρ 的液体里(如图6.5)，则液体对薄板的静压力为

$$P=\int_a^b \rho gxf(x)\,dx,$$

其中 g 为重力加速度.

(七) 引力

一长度为 l 的均匀细棒 (线密度为 μ),对在其延长线上距棒近端距离为 a、质量为 m 的一个质点的引力 (见图 6.6) 为

$$F=\int_0^l k\frac{\mu m}{(l+a-x)^2}\mathrm{d}x.$$

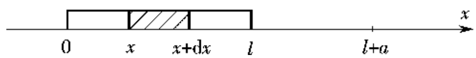


图 6.6

三、解题研究

解题时要注意以下几点:

①求解实际问题时,首先要合理建立坐标系;

②注意利用图形或物理量的对称性,使计算简化;

③尽量画图.

(一) 与平面图形面积有关的问题

计算平面图形面积的步骤:

①画出所求图形面积的草图;

②当图形由若干条曲线围成时,要求出交点;

③由图形特点选择合适的积分变量;

④由题意确定被积函数,写出被积表达式;

⑤计算定积分,得到结果.

例 1　求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x-y=4$ 所围成图形的面积 A.

解　作出图形,如图 6.7 所示. 为了定出图形所在的范围,先求出所给抛物线和直线的交点,解方程组 $\begin{cases}y^2=2x,\\x-y=4,\end{cases}$ 得交点 $(2,-2)$ 与 $(8,4)$.

解法 1　选 x 为积分变量,x 在 $[0,2]$ 上,图形的上边界是抛物线

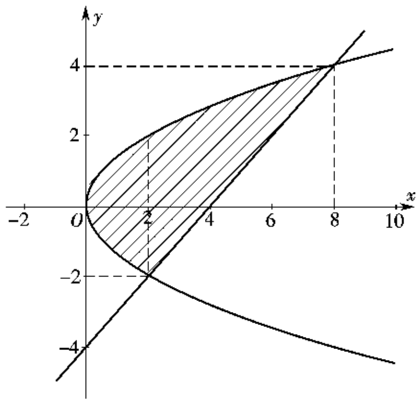


图 6.7

$y=\sqrt{2x}$,下边界是抛物线 $y=-\sqrt{2x}$;而在 $[2,8]$ 上,图形的上边界是抛物线 $y=\sqrt{2x}$,下边界是直线 $y=x-4$,因而必须分成两块来计算面积,此时

$$A=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-\left(-\sqrt{2x}\right)\right]dx+\int_2^8\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx$$

$$=\frac{2}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2+\left[\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+4x\right]\Big|_2^8=18.$$

解法 2　选 y 为积分变量,因为 y 在 $[-2,4]$ 上图形的右边界是直线 $x=y+4$,左边界是抛物线 $x=\frac{y^2}{2}$,于是,所求面积

$$A=\int_{-2}^4\left[(y+4)-\frac{y^2}{2}\right]dy=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^4=18.$$

显然,解法 2 简单.这是由于解法 2 中图形没有分块,且被积函数也较简单;而解法 1 中积分区间分成了两部分,增加了计算过程.

注　当平面曲线可用 $y=f(x)$ 表示,又可用 $x=\varphi(y)$ 表示(可以互相转换)时,选择积分变量的原则是:少分块,这时定积分个数少;被积函数简单(避免含根号或绝对值号),使定积分易于计算.

例 2　求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围成图形的面积 A.

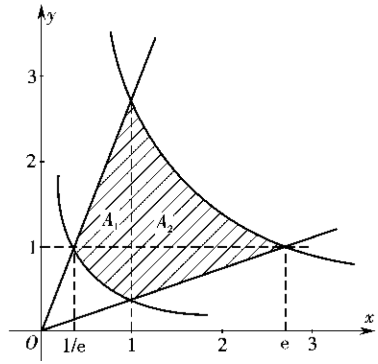


图 6.8

分析　由绝对值的定义,原曲线 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围图形的面积可化为曲线 $xy = e$, $xy = \frac{1}{e}$, $y = ex$ 和 $y = \frac{x}{e}$ 所围成的面积,故可以画出草图,如图 6.8 所示.

解　先求出交点为:$\left(\frac{1}{e},1\right)$, $\left(1,\frac{1}{e}\right)$, $(1,e)$, $(e,1)$. 用 $x = 1$ 将图形分成两个部分 A_1 与 A_2,则 $A = A_1 + A_2$,选 x 为积分变量,所求面积

$$A = A_1 + A_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(ex - \frac{1}{ex}\right)dx + \int_{1}^{e}\left(\frac{e}{x} - \frac{x}{e}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{e}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} = e - \frac{1}{e}.$$

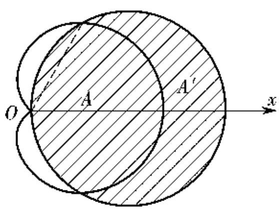


图 6.9

例 3　求由两曲线 $r = 3\cos\theta$, $r = 1 + \cos\theta$ 所围成的图形在圆周内部的面积(两部分都要计算).

分析　$r = 3\cos\theta$ 是圆的方程, $r = 1 + \cos\theta$ 是心形线的方程,由此可画出图形. 设两部分面积分别为 A 和 A',如图 6.9 所示. 由图看出,利用对称性可求出 A,剩余一部分在圆周内的面积 A' 可以用圆面积减去 A 求出.

解　先求出交点为 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{2}\right)$. A 中极轴上面那部分 θ 的变化区间分别为 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, θ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上图形的边界是 $r = 1 + \cos\theta$,而在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上图形的边界是 $r = 3\cos\theta$,故分成两块来计

算. 根据图形的对称性,得

$$A=2\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^{2}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^{2}\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}.$$

两曲线所围图形在圆周内的另一部分面积为

$$A'=\pi\left(\frac{3}{2}\right)^{2}-\frac{5\pi}{4}=\pi.$$

注　由此可见,求平面图形面积时,对于对称图形或周期性图形,利用图形的对称性或周期性,只计算部分即可得到全部,大大减少了计算量.

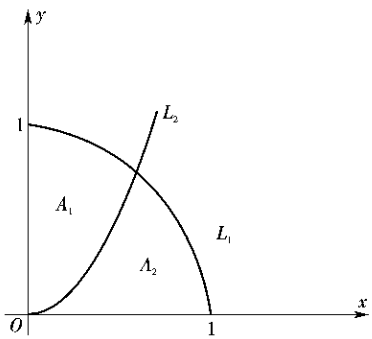


图 6.10

例 4　假设曲线 L_1:$y=1-x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴和 y 轴所围区域被曲线 L_2:$y=ax^2$ 分为面积相等的两部分,其中 a 是大于零的常数,试确定 a 的值.

分析　先求出本题中的面积 A_1,A_2 (见图 6.10),然后令 $A_1=A_2$,即可求出 a 的值.

解　解方程组 $\begin{cases}y=1-x^2,\\ y=ax^2,\end{cases}$ $0\leqslant x\leqslant 1$,得两曲线交点坐标为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\\ y=\dfrac{a}{1+a}.\end{cases}$ 从而有

$$A_1=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left[(1-x^2)-ax^2\right]\mathrm{d}x=\frac{2}{3\sqrt{1+a}},$$

$$A_2=\frac{1}{2}(A_1+A_2)=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

由 $A_1 = A_2$ 可知 $\frac{2}{3\sqrt{1+a}} = \frac{1}{3}$，解得 $a = 3$.

注　计算面积时应适当选择坐标系，以便简化计算. 一般地，曲边梯形宜采用直角坐标系，曲边扇形宜采用极坐标系.

（二）与体积有关的问题

用定积分可以求解两类较简单立体的体积问题，更为复杂的求体积方法要在多元函数积分学中学习.

1. 旋转体的体积

解这类题目，关键是求出平面图形绕旋转轴的旋转半径.

例 5　求曲线 $y^2 = 2px\ (p > 0)$ 和直线 $x = \frac{p}{2}$ 所围成的图形绕直线 $y = p$ 旋转一周所得立体的体积 V.

解　如图 6.11 所示，此旋转体体积可以视为两部分体积之差，即 $V = V_1 - V_2$，其中 V_1 是由曲线 $y^2 = 2px\ (p > 0)$ 在第四象限的部分与 $x = \frac{p}{2}$，$y = p$ 和 y 轴所围成的平面图形绕 $y = p$ 旋转所得立体的体积；V_2 是由 $y = p$，$y^2 = 2px\ (p > 0)$ 在第一象限的部分和 y 轴所围成的平面图形绕 $y = p$ 旋转所得立体的体积.

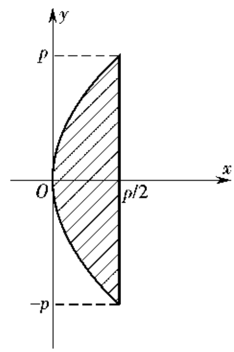


图 6.11

先求 V_1，取 x 为积分变量，$x \in \left[0, \frac{p}{2}\right]$，其旋转半径为 $p + \sqrt{2px}$，体积元素为

$$dV_1 = \pi\left(p + \sqrt{2px}\right)^2 dx,$$

故

$$V_1 = \int_0^{\frac{p}{2}} dV_1 = \pi\int_0^{\frac{p}{2}} \left(p + \sqrt{2px}\right)^2 dx.$$

同理可得 $V_2 = \pi\int_0^{\frac{p}{2}} \left(p - \sqrt{2px}\right)^2 dx$.

所以 $V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^{\frac{p}{2}} \left[\left(p + \sqrt{2px}\right)^2 - \left(p - \sqrt{2px}\right)^2\right] dx$

$$= \pi \int_0^{\frac{p}{2}} 2p \cdot 2\sqrt{2px}\,dx = \frac{4}{3}\pi p^3.$$

注　求旋转体的体积时,第一要明确形成旋转体的平面图形是由哪些曲线围成,这些曲线的方程是什么;第二要明确图形绕哪一条坐标轴或平行于坐标轴的直线旋转.

例 6　设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$, $x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域;D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域(见图 6.12),其中 $0 < a < 2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1;D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2.

(2) 当 a 为何值时,$V_1 + V_2$ 取得最大值?试求此最大值.

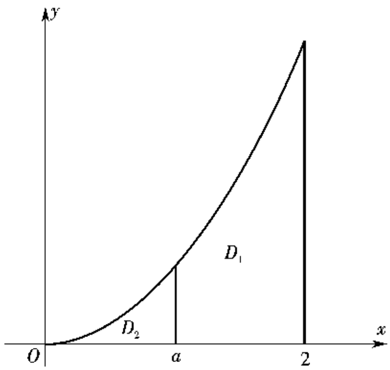


图 6.12

分析　首先要求出 V_1 和 V_2,然后利用导数判定 $V_1 + V_2$ 的极大值点,确定出 a 的值,进而求出 $V_1 + V_2$ 的最大值.

解　(1) 由图 6.12 可知

$$V_1 = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5),$$

$$V_2 = \pi a^2 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

(2) 设 $V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4$,由 $V' = 4\pi a^3(1 - a) = 0$,解得区间 $(0,2)$ 内唯一的驻点是 $a = 1$. 当 $0 < a < 1$ 时,$V' > 0$;当 $a > 1$ 时,$V' < 0$. 因此 $a = 1$ 是极大值点,也是最大值点.

此时,$V_1 + V_2$ 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

例 7　求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 和直线 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围成的图

形绕极轴旋转而成的旋转体的体积.

分析　我们没有给出极坐标方程下求旋转体体积的公式,因此,先要把极坐标化为参数方程,而且要注意曲线与轴的交点.

解　如图 6.13 所示,问题转化为求阴影部分绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

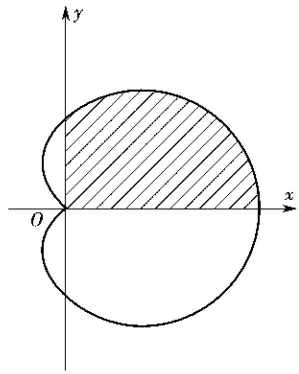


图 6.13

因为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 4(1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y = r\sin\theta = 4(1+\cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

当 $\theta = 0$ 时,$x = 8$;当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,$x = 0$,所以所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \pi\int_0^8 y^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 [4(1+\cos\theta)\sin\theta]^2 [-4\sin\theta(1+2\cos\theta)]\mathrm{d}\theta \\ &= 64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(\sin\theta+\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta = 160\pi. \end{aligned}$$

2.已知平行截面面积的立体体积

解此类题目的关键是恰当地选择积分变量,求出平行截面面积的面积函数,为此,要先画出草图,从中分析用垂直于哪一个坐标轴的平面去截割立体能较容易地表达出截面面积. 因为截立体的方法不同,则积分变量不同,被积函数也不同,计算定积分的难易程度也不同,所以要选择好截立体的方法,再利用定积分表达出所求的体积.

例 8　一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心,并与底面成 α 角,计算该平面截圆柱体所得立体的体积.

解法 1　取如图 6.14 所示的坐标系,设底圆方程为 $x^2 + y^2 = R^2$,用平行于 y 轴的平行平面去截立体,取 x 为积分变量,截面是一个直

角三角形(图 6.14 中的阴影部分),其面积为 $A(x)=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha=\frac{y^2}{2}\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$,因此,所求立体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)\,dx=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\,dx$$
$$=\tan\alpha\int_{0}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

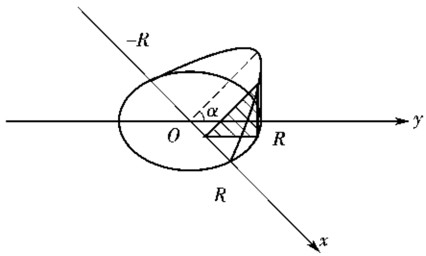


图 6.14

解法 2　如图 6.15 所示,用平行于 x 轴的平行平面去截立体,取 y 为积分变量,过 y 轴上的点 y 且垂直于 y 轴的截面是一个矩形,其面积为

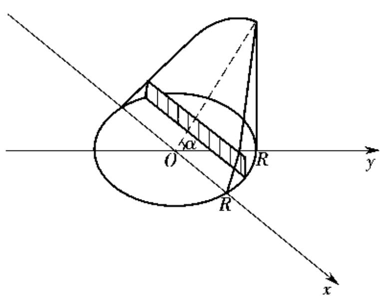


图 6.15

$$A(y)=2x\cdot y\tan\alpha=2\sqrt{R^2-y^2}\cdot y\tan\alpha,$$

故
$$V=\int_0^R A(y)\,dy=2\tan\alpha\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\cdot y\,dy=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

例 9　求如图 6.16 所示立体的体积,该立体的底是介于 $y=x^2-1$ 和 $y=0$ 之间的平面区域,用垂直于 x 轴的任一平面截该立体,其截面是一个等边三角形.

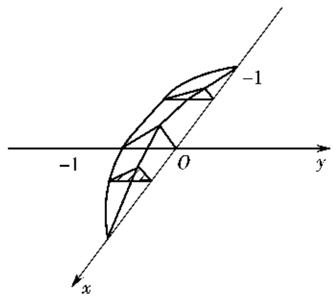


图 6.16

解　等边三角形的面积是

$$A(x)=\frac{1}{2}|x^2-1|^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-1)^2,$$

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^1 A(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^1(x^2-1)^2\,dx\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(x^4-2x^2+1)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{4}{15}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

(三) 与平面曲线弧长有关的问题

例 10　计算曲线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解　作出的图形如图 6.17 所示.

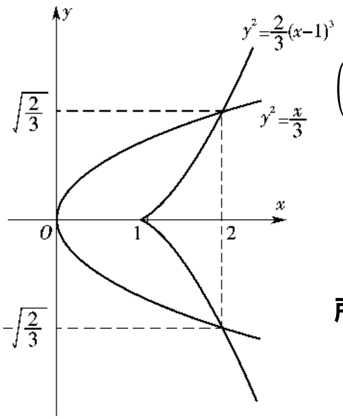


图 6.17

解方程组 $\begin{cases} y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3, \\ y^2 = \frac{x}{3}, \end{cases}$ 得到点 $\left(2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,$\left(2,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

又由 $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ 得

$$2yy' = \frac{2}{3}\cdot 3(x-1)^2,$$

所以

$$y' = \frac{(x-1)^2}{y},$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(x-1)^4}{y^2} = 1 + \frac{\frac{3}{2}y^2(x-1)}{y^2} = \frac{1}{2}(3x-1),$$

而所求弧长关于 x 轴对称,其长度为

$$s = 2\int_1^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_1^2 \sqrt{\frac{1}{2}(3x-1)}\,dx = \frac{9}{8}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

例 11 求曲线 $y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$ 的弧长.

解 因为 $\cos t \geqslant 0$,所以 $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$,即 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,于是

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = 4\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

例 12 证明椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ 的弧长等于正弦曲线 $y = c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长,其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

证明　利用椭圆曲线的对称性，椭圆全长为

$$s_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}\,dt,$$

而正弦曲线 $y = c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长（x 从 0 到 $2\pi b$）为

$$s_2 = 2\int_0^{\pi b}\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,dx = 2\int_0^{\pi b}\sqrt{b^2 + c^2\cos^2\frac{x}{b}}\,d\frac{x}{b}$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{b^2 + c^2\cos^2\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

（令 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$，则 $\sin\theta = \cos t$）

$$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}\,(-dt) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}\,dt,$$

所以有　$s_1 = s_2$.

（四）定积分在物理学中的应用

用元素法解决某些物理问题时，要选择合适的坐标系和积分变量. 因为选择的坐标系不同，得到的被积函数与积分区间也不同，影响计算的繁简.

1. 变力做功问题

应用定积分计算变力沿直线所做的功，包括克服引力做功、克服重力做功、克服阻力做功、克服弹性恢复力做功等等，关键是确定功元素.

例 13　设在底半径为 3 m，高为 2 m 的锥顶朝下的圆锥形水池内装满水，现用抽水机将水全部抽走，需做多少功？

分析　建立合适的坐标系，取 $[x, x + dx] \subset [0,2]$ 相应的柱体薄片，求出其上的水重量，可以得到抽出这部分水外力需要做的功，即功元素.

解法 1　按图 6.18 建立坐标系，AB 的方程为 $y = -\frac{3}{2}x + 3$，取 $x \in [0,2]$ 为积分变量，任取 $[x, x + dx] \subset [0,2]$，设水的比重为 9.8 kN/m³，图中阴影部分的水的重量为 $9.8\pi y^2 dx = 9.8\pi\left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx$，抽走这部

分水外力需要做的功为

$$dW=9.8x\pi y^2dx=9.8\pi x\left(3-\frac{3}{2}x\right)^2dx,$$

所求的功为

$$W=\int_0^2 9.8\pi x\left(3-\frac{3}{2}x\right)^2dx=29.4\pi\approx 92.362\,8\ (\mathrm{kJ}).$$

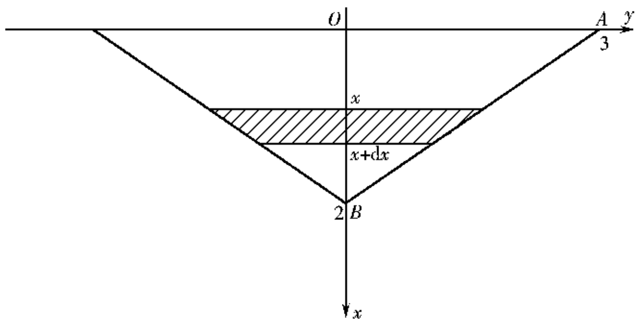


图 6.18

解法 2　按图 6.19 建立坐标系,直线 OA 的方程为 $y=-\frac{3}{2}x$,取 $x\in[-2,0]$ 为积分变量,任取 $[x,x+dx]\subset[-2,0]$,将 $[x,x+dx]$ 扁柱体中的水抽出,移动距离为 $x+2$,则功元素

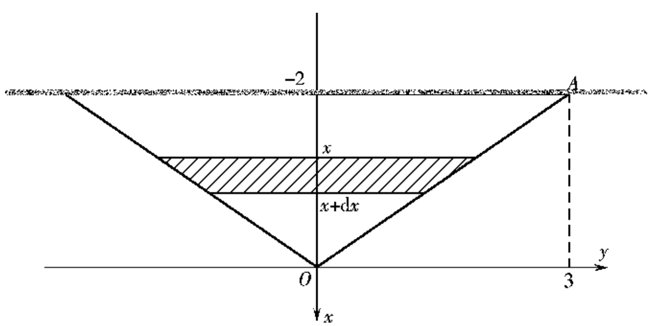


图 6.19

$$dW=9.8\pi y^2(x+2)dx=9.8\pi\frac{9}{4}x^2(x+2)dx,$$

故将水全部抽出需要做的功为

$$W=\frac{9}{4}\int_{-2}^{0}9.8\pi(x^3+2x^2)dx=29.4\pi\approx 92.362\,8\ (\text{kJ}).$$

解法3　按图6.20建立坐标系. 直线OA的方程为$y=\frac{3}{2}x$,取$y\in[0,2]$为积分变量,任取$[y,y+dy]\subset[0,2]$,将$[y,y+dy]$扁柱体中的水抽出,移动距离为$2-y$,则功元素为

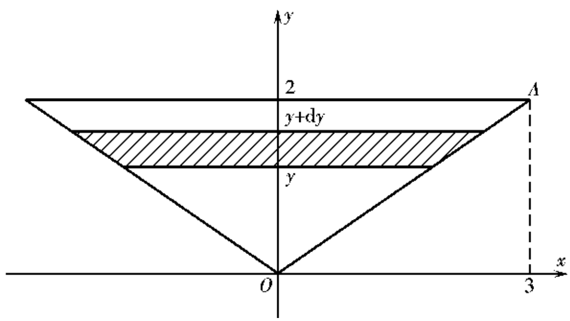


图6.20

$$dW=9.8\pi x^2(2-y)dy=9.8\pi\frac{9}{4}y^2(2-y)dy,$$

故将水全部抽出需要做的功为

$$W=\frac{9}{4}\int_{0}^{2}9.8\pi(2-y)y^2dy=29.4\pi\approx 92.362\,8\ (\text{kJ}).$$

注　从上面的三种方法中看到:坐标系选择得不同,被积函数与积分区间也不同,解法2与解法3比较简单.

2.水压力

用定积分计算水压力(或液体压力)是指平板沉入水(或液体)中,其一侧所受到的水(或液体)的压力,关键是确定压力元素.

例14　边长为a的正方形薄片直立地沉入水中,它的一个顶点位于水平面,而一条对角线与水平面平行,求薄片一侧所受的压力.

解　建立如图 6.21 所示的坐标系，直线 OA 的方程为 $y_1 = x$，$x \in \left[0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right]$，直线 AB 的方程为 $y_2 = -x + \sqrt{2}a$，$x \in \left[\frac{a}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}a\right]$，压力元素分别为

$$dP_1 = 9.8x(2y_1)dx, dP_2 = 9.8x(2y_2)dx.$$

因此所求压力为

$$\begin{aligned}P &= 2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 9.8xy_1 dx + 2\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}a} 9.8xy_2 dx \\ &= 2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 9.8x^2 dx + 2\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}a} 9.8x(-x + \sqrt{2}a)dx \\ &= 4.9\sqrt{2}a^3 \approx 6.929\,6\ (\text{kN}).\end{aligned}$$

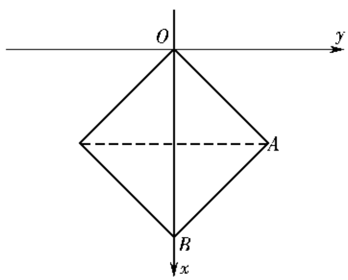


图 6.21

3. **引力**

用定积分计算物体对质点的引力，关键是确定引力元素.

例 15　设有一质量为 M，长度为 l 的均匀直细杆，在中垂线上距杆 a 处有一质量为 m 的质点 N，求杆对质点 N 的引力.

解　建立如图 6.22 所示的坐标系，将引力 F 分解成两个分力 F_x 和 F_y. F_x 与杆平行，由于对称性，$F_x = 0$；F_y 与杆垂直. 取 x 为积分变量，$x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$. 把细杆上相应于 $[x, x + dx]$ 的一段近似看成质点，其质量为 $\frac{M}{l}dx$. 因此，引力元素为

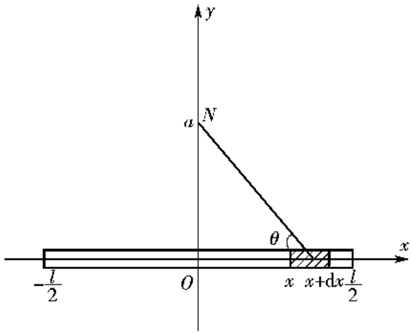


图 6.22

$$dF = k\cdot\frac{m\cdot\frac{M}{l}dx}{r^2} = \frac{kmM}{l(a^2+x^2)}dx,$$

dF 在 y 轴上的分力为 dF_y，故得到引力在垂直方向上的分力元素为

$$dF_y = \sin\theta dF = \frac{a}{r}dF = \frac{kmMa}{l(a^2+r^2)^{3/2}}dx,$$

在垂直方向上的分力为

$$F_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{kmMa}{l(a^2+x^2)^{3/2}}dx = \frac{kmMa}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2kmM}{a\sqrt{l^2+4a^2}}.$$

引力方向为 $\overrightarrow{NO}$（与 y 轴负方向一致）.

四、练习题及答案

习题(A)

1. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 所围成的平面图形的面积为______.

2.由曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积 $A=(\quad)$.

(A) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

(B) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

3.确定 m 的值,使直线 $y=mx$ 和抛物线 $y=2x-x^2$ 所围区域的面积为 36.

4.求由双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 和圆 $r=a$ 所围阴影部分的面积(如图 6.23).

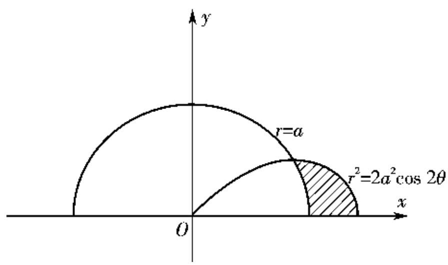


图 6.23

5.一平面图形由抛物线 $x=y^2+2$ 与过点(3,1)处的法线及 x 轴、y 轴所围,求该图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

6.求曲线 $y=2x-x^2$ 及直线 $y=0$,$y=x$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

7.求下列曲线的弧长:

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t$,$y=a\sin^3 t$;

(2) $r=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}\ (0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi)$.

8.设半径为 R 的半球形水池充满着水,将水从池中抽出,当抽出

水所做的功为将水全部抽完所做的功的一半时，问水面下降的高度 h 为多少？

9. 一底为 a，高为 h 的等腰三角形薄板，铅直置于水中，底与水面相齐，两腰中点连线分薄板为上、下两部分，求此两部分所受压力之比.

习题(B)

1. 已知曲线 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公切线，求

(1) a 的值及切点坐标；

(2) 两曲线与 x 轴所围平面图形的面积；

(3) 该平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

2. 有一正方形如图 6.24 所示，顶点为 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$ 和 $C(0,1)$，设抛物线 $a^2y=x^2\ (0<a<1)$ 将该正方形分成左、右两部分，分别记为 S_1、S_2，将 S_1 绕 y 轴旋转一周得体积 V_1，再将 S_2 绕 x 轴旋转一周得体积 V_2，求

(1) 当 a 为何值时 $V_1=V_2$？

(2) 当 a 为何值时 V_1+V_2 取得最小值？

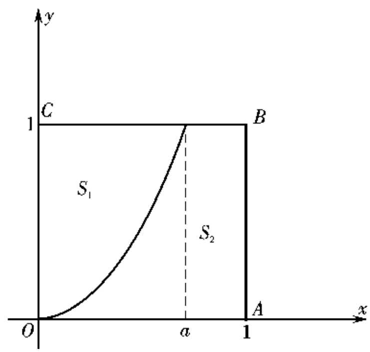


图 6.24

3. 设曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 与 x 轴、y 轴所围面积被曲线 $y=b\sin x$ 等分，试确定 b 的值.

4. 求曲线 $9y^2=4(1+x^2)^3$ 在第一象限内介于 $0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$ 的一段弧长.

5. 设 R 是由曲线 $y=3x^2$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围的图形，求以 R

为底且每个与 x 轴垂直的截面均为等边三角形的立体的体积.

6.半径为 a 的均匀圆薄板,其质量为 M,其中心垂线上到圆心的距离为 b 的点 A 处有一质量为 m 的质点,求圆薄板对该质点的引力.若将该质点沿中心垂线由点 A 移动到点 $B(c)$,$c>b$,求克服引力所做的功.

习题(A)答案

1. $\frac{31}{6}$.

2. C.

3. $m=-4$.

4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}\right)a^2$.提示:利用极坐标.

5. $\frac{105}{2}\pi$.

6. $\frac{5}{2}\pi$.

7. (1) $6a$;(2) $\frac{3}{2}\pi a$.

8. $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}R$.

9. $P_1:P_2=1$.提示:$P_1=P_2=\frac{1}{24}ah^2$.

习题(B)答案

1. (1) $a=\frac{1}{e}$,切点坐标$(e^2,1)$;(2) $\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2}$;(3) $\frac{\pi}{2}$.

2. (1) $a=\frac{-8+\sqrt{264}}{10}$;(2) $a=\frac{4}{5}$,$V_{min}=\frac{17}{25}\pi$.

3. $b=\frac{3}{4}$.

4. $\frac{38}{3}\sqrt{2}$.

5. $\frac{72}{5}\sqrt{3}$.

6. $-2\pi km\frac{m}{\pi a^2}\left[(c-b)+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right]$. **提示：作分割，转化为圆环对质点的引力，然后再积分，由对称性知，引力沿中心垂线方向**.

第七章　空间解析几何与向量代数

一、本章知识的作用与意义

本章包括两部分内容:向量代数与空间解析几何.向量代数除了在科技中有广泛应用外,在高等数学中主要是为空间解析几何服务,作为研究空间图形性质的一个重要工具.空间解析几何是借助于空间坐标,建立空间的曲面曲线方程,利用代数方法研究图形几何性质的一门学科,是高等数学重要组成部分之一.空间解析几何与向量代数放在多元函数微积分之前讲授,其主要目的是为研究多元函数微积分理论提供一个直观的空间几何图形.

二、知识要点及思想方法

(一) 向量代数

1.概念

既有大小又有方向的量称为向量,用字母 a,b,c 等表示.起点为 A、终点为 B 的向量记为$\overrightarrow{AB}$.我们所讨论的向量为自由向量,即认为起点不同而大小、方向相同的向量是同一向量.当向量的大小为零时称为零向量,其方向是任意的.向量 a 的大小称为 a 的模,记作$|a|$.模为 1 的向量称为单位向量,一般与 a 同方向的单位向量记为 $a°$,$a° = \dfrac{a}{|a|}$.与向量 a 长度相等方向相反的向量称为向量 a 的负向量,记为 $-a$.

2.向量的关系与运算

(1) 向量的关系

(i) 相等

若向量 a 与向量 b 的长度相等方向相同,则称 a 与 b 相等,记为 a

$=b$.

(ii) 平行

若将向量 a 与向量 b 的起点重合后,a 与 b 在同一直线上,则称 a 与 b 平行或共线,记为 $a /\!/ b$,这时总有实数 λ 使 $a=\lambda b$.

(2) 向量的线性运算

(i) 向量的加法与减法(几何表示)

向量 a 与 b 的加法服从平行四边形法则(图 7.1)或三角形法则(7.2).

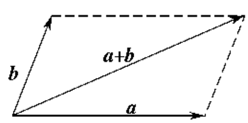


图 7.1

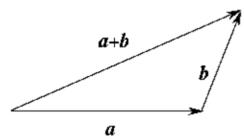


图 7.2

多于两个的向量相加时,可由三角形法则得出,将所加的向量首尾相连,那么以第一个向量的起点为起点,以最后一个向量的终点为终点的向量即为和向量.如:$a+b+c+d$(图 7.3).

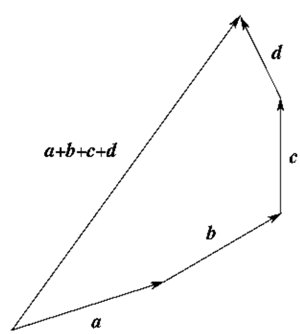


图 7.3

向量的减法可从加法的逆运算得出.向量的加法满足交换律、结合律等运算规律.

(ii) 向量的数乘

设 λ 为一实数,a 为一向量,λ 与 a 的数乘记为 λa.

当 $\lambda>0$ 时,λa 与 a 同向,$|\lambda a|=\lambda|a|$.当 $\lambda<0$ 时,λa 与 a 反向,$|\lambda a|=-\lambda|a|$.

向量与数的乘积满足结合律、分配律等运算规律.

3.向量的坐标

(1) 投影

①过点 A 作平面 π 垂直于数轴 u,则平面 π 与 u 轴的交点称为点 A 在 u 轴上的投影.

②设点 A 和点 B 在 u 轴上的投影分别为 A' 和 B',则向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影.记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$.

③向量 a 与 b 的方向不变而移在同一起点,称 a 与 b 之间的不超过 π 的角为 a 与 b 之间的夹角,记为 $(\widehat{a,b})$,$0\leqslant(\widehat{a,b})\leqslant\pi$.

④在空间直角坐标系中,向量 a 与 x 轴,y 轴,z 轴之间的夹角 α,β,γ 称为向量 a 的方向角,$\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 称为向量 a 的方向余弦.与 x 轴,y 轴,z 轴同方向的单位向量记为 i,j,k.

(2) 投影定理

①设向量 a 与 u 轴的夹角为 φ,则 $\mathrm{Prj}_u a=|a|\cos\varphi$.

②对向量 a 与 b,有 $\mathrm{Prj}_u(a+b)=\mathrm{Prj}_u a+\mathrm{Prj}_u b$.

(3) 向量的坐标

在空间直角坐标系中,设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点为 $A(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表达式为

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\{a_x,a_y,a_z\},$$

其中,$a_x=\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}$,$a_y=\mathrm{Prj}_y\overrightarrow{AB}$,$a_z=\mathrm{Prj}_z\overrightarrow{AB}$.

设 $a=\{a_x,a_y,a_z\}$,$b=\{b_x,b_y,b_z\}$,则

$$a+b=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}.$$

若 λ 为一实数,则 $\lambda a=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

$$|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

向量 a 的方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

4.向量的数量积、向量积与混合积

⑴ 数量积(内积)

ⅰ 定义

设有向量 a、b,夹角为 φ,则 $a\cdot b=|a||b|\cos\varphi$ 称为向量 a 与 b 的数量积.其物理意义是,与位移方向有一夹角的力所做的功.

ⅱ 运算规律

$a\cdot b=b\cdot a$.

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

$(\lambda a)\cdot b=\lambda(b\cdot a)=a\cdot(\lambda b)$,$\lambda$ 为一实数.

ⅲ 坐标表达式

设 $a=\{a_x,a_y,a_z\}$,$b=\{b_x,b_y,b_z\}$,则

$$a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

对基本单位向量 i,j,k,有 $i\cdot j=0$,$j\cdot k=0$,$k\cdot i=0$.

切记两个向量的数量积是一个数值.

⑵ 向量积(外积)

ⅰ 定义

设有向量 a、b,夹角为 φ,向量 c 为 a 与 b 的向量积,则 c 满足:c 的模 $|c|=|a||b|\sin\varphi$,$c\perp a$,$c\perp b$ 且 a,b,c 三向量服从右手坐标系,记为 $c=a\times b$.其几何意义为:$|a\times b|$ 是一个以 $|a|$,$|b|$ 为邻边的平行四边形的面积.

ⅱ 运算规律

$a\times b=-(b\times a)$,不满足交换律.

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$.

$(\lambda a)\times b=a\times(\lambda b)=\lambda(a\times b)$.

(iii) 坐标表达式

设 $a=\{a_x,a_y,a_z\}$，$b=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)i+(a_zb_x-a_xb_z)j+(a_xb_y-a_yb_x)k$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}k.$$

对基本单位向量 i,j,k，有 $i\times j=k$，$j\times k=i$，$k\times i=j$.

(3) 混合积

(i) 定义

设 a,b,c 为三个向量，则 $(a\times b)\cdot c$ 称为三向量的混合积，记为 $[abc]$.

(ii) 几何意义

$[abc]$的绝对值等于以向量 a,b,c 为棱的平行六面体的体积.

(iii) 性质

$[abc]=[bca]=[cab]$，转换对称性.

$[abc]=-[acb]$.

(iv) 坐标表达式

设 $a=\{a_x,a_y,a_z\}$，$b=\{b_x,b_y,b_z\}$，$c=\{c_x,c_y,c_z\}$，则

$$[abc]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

5. 向量之间关系的坐标表示

(1) 平行

$a\parallel b$ 的三个充要条件：

①存在不全为零的实数 λ,μ，使得 $\lambda a+\mu b=0$.

②设 $a=\{a_x,a_y,a_z\}$，$b=\{b_x,b_y,b_z\}$，$a/\!/b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$.

③$a\times b=0$.

⑵ 垂直

$a\perp b \Leftrightarrow a\cdot b=0$ 或 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

⑶ 三个向量 a,b,c 共面的充要条件

①存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得 $\lambda_1a+\lambda_2b+\lambda_3c=0$.

② $[abc]=0$.

(二) 空间的平面与直线

1. 平面方程

⑴ 点法式方程

过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，法线向量为 $n=\{A,B,C\}$ 的平面的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

⑵ 平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

⑶ 截距式方程

若平面过三坐标轴上的点 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$，则平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

⑷ 点到平面的距离

空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2. 直线方程

⑴ 对称式方程

若直线 l 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，以 $s=\{m,n,p\}$ 为方向向量，则 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，称为 l 的对称式方程.

(2) 参数方程：

在上述对称式方程中，令连等式为 t，则得 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

(3) 一般方程（空间直线作为两平面的交线）

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

(4) 点到直线的距离

点 P 到过点 P_0 且以 s 为方向向量的直线的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \times s|}{|s|}.$$

3. 直线与平面间的关系

(1) 平面与平面的夹角

设平面 π_1, π_2 的法线向量分别为 $n_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, n_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$，则 n_1, n_2 所夹的不超过$\frac{\pi}{2}$的角 θ 称为平面 π_1 与 π_2 的夹角，有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow n_1 /\!/ n_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

(2) 直线与直线的夹角

设直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $s_1 = \{m_1, n_1, p_1\}, s_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$，$m_i, n_i, p_i$ 不全为 0 $(i = 1, 2)$，则 s_1 与 s_2 的不超过$\frac{\pi}{2}$的夹角 θ 称为 l_1 与 l_2 的夹角，有

$$\cos\theta = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow s_1 /\!/ s_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

(3) 直线与平面的夹角

设直线 l **在平面** π **上的投影直线为** l_1**,则直线** l **与** l_1 **的夹角** θ **称为直线** l **与平面** π **的夹角,若直线** l **的方向向量为** $s=\{m,n,p\}$**,平面** π **的法线向量为** $n=\{A,B,C\}$**,则**

$$\sin\theta=\frac{|s\cdot n|}{|s||n|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$l /\!/ \pi \Leftrightarrow s \perp n \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

$$l \perp \pi \Leftrightarrow s /\!/ n \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

(4) 平面束的方程

设平面 π_1 **:** $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$**,** π_2 **:** $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$**,** π_1 **不平行于** π_2**,过直线** l **:** $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ **的平面束的方程为**

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

平面束中不含 π_2.

(三) 空间的曲面与曲线

1.**空间曲面的方程**

一般方程为 $F(x,y,z)=0$.

2.**空间的曲线方程**

①**参数方程** **:** $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$

②**一般方程** **:** $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$

3.常见的曲面与曲线

⑴ 柱面

当曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 中缺少一个变量时,就成为柱面的方程,如 $F_1(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面方程,$x^2+y^2=R^2$ 是以 xOy 面上的圆 $\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ z=0\end{cases}$ 为准线,母线平行于 z 轴的圆柱面.

⑵ 旋转面

yOz 面上的曲线 $C:\begin{cases}f(y,z)=0,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

如圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 是 yOz 平面内的直线 $y=z$ 绕 z 轴旋转所得.

⑶ 二次曲面

①椭球面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

②双曲面:单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$,

双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

③抛物面:椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$,双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$.

⑷ 空间的螺旋线

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\\ z=b\theta.\end{cases}$$

4.空间曲线在坐标面上的投影曲线

设曲线 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 在其联立方程消去一个变量 z 后得到曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面 $H(x,y)=0$,则曲线 C 在 xOy 面的投影曲线为 $\begin{cases}H(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

学习这一章首先要建立起明确的三维空间的概念,思想上一定要有一个从平面到空间的拓展.对于一些空间曲面,当有了方程后要想能够正确地去认识出曲面的形状,关键是要会使用截痕法.这样才能够明确知道一个方程表示的曲面及其在平面上和空间中的不同几何图形.对于一些常用的曲面及由一些曲面所围的空间立体,要能画出它们的图形,这样才能为今后学习多元微积分打下良好的基础.

(四) 主要的思想方法

借助向量研究空间图形的性质,建立空间图形的方程,这是一种重要的数学思想方法.向量不仅是研究数学本身的工具,而且是研究力学、物理学以及许多技术科学的重要数学工具.这种思想和现今信息时代的数字化思想都是相通的.

形数结合的思想是本章最基本的思想.

三、解题研究

(一) 向量代数部分

例 1　下列关于向量 a 与 b 的论断正确的是(　　).

(A) $|a| = |b| \Rightarrow a = b$.　　(B) $|a| = |b| \Rightarrow a \parallel b$.

(C) $a \neq b \Rightarrow |a| \neq |b|$.　　(D) $|a| \neq |b| \Rightarrow a \neq b$.

解　正确答案是 D.

例 2　若 $a \neq 0$,$a \cdot b = a \cdot c$,或 $a \times b = a \times c$,则 $b = c$.对吗?

解　不一定,因 $a \cdot b = |a||b|\cos(\widehat{a,b})$,$a \cdot c = |a||c|\cos(\widehat{a,c})$.故 $a \cdot b = a \cdot c$ 的成立与否取决于 $|b|\cos(\widehat{a,b})$ 与 $|c|\cos(\widehat{a,c})$ 是否相等.对于向量积,理由相同.

例 3　对于任意三个非零向量 a,b,c,下列结论正确?不正确?不一定正确?试加以判断,并说明理由.

(1) 如果 $a = b$,那么 $c \times a + b \times c = 0$.

(2) $(a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2$.

(3) $(a \cdot b)a = |a|^2 b$.

(4) $(b\times c)\cdot a=(b\cdot c)a$.

(5) $[(a\cdot b)a]\cdot(a\times b)=0$.

解　(1) 因为 $c\times a=-a\times c$，又 $a=b$，故 $c\times a+b\times c=-a\times c+b\times c=-a\times c+a\times c=0$，故结论正确.

(2) 因为 $(a)^2=a\cdot a=|a|^2$，故有

$$(a\times b)^2=|a\times b|^2=|a|^2|b|^2\sin^2(\widehat{a,b}),$$

又 $(a\cdot b)^2=|a|^2\cdot|b|^2\cos^2(\widehat{a,b})$，故有

$$(a\times b)^2+(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2,$$

结论正确.

(3) 等式左端是与 a 平行的向量，等式右端是与 b 平行的向量，当 $a=b$ 时，等式成立.

进一步，若 $a/\!/b$，这时 $b=\lambda a$，(λ 为实数)，则左端 $=(a\cdot\lambda a)a=\lambda|a|^2a$，右端 $|a|^2\lambda a=\lambda|a|^2a$，结论正确. 显然，$a$ 与 b 不平行时，结论不正确.

(4) 等式左端为数量，右端为向量，结论不正确.

(5) 错解：不一定，仅当 $(a\cdot b)a$ 与 $a\times b$ 垂直时才成立.

分析错因　出现错误的原因是不了解向量 $(a\cdot b)a$ 的性质，事实上 $(a\cdot b)$ 是一个实数，所以 $(a\cdot b)a$ 与 a 共线，而因为 $a\perp(a\times b)$，故有 $(a\cdot b)a\perp(a\times b)$，由此知等式必成立.

例 4　设 $a=2i-j+k$，$b=i+3j-k$，在 a，b 决定的平面上，求一个与 a 垂直的单位向量.

解法 1　设向量 x 在 a 与 b 所决定的平面内，$x=\lambda a+\mu b$　(λ，μ 为常数). 由于 x 垂直于 a，故有 $a\cdot(\lambda a+\mu b)=0$，即 $\lambda|a|^2+\mu(a\cdot b)=0$. 于是 $\dfrac{\lambda}{\mu}=-\dfrac{a\cdot b}{|a|^2}=\dfrac{1}{3}$. 取 $\lambda=1$，$\mu=3$，从而

$$x=2i-j+k+3(i+3j-k)=5i+8j-2k.$$

$$x^\circ=\frac{x}{|x|}=\frac{1}{\sqrt{93}}(5i+8j-2k),$$

当 $\lambda=-1$，$\mu=-3$ 时，得另一解

$$x^\circ = \frac{-1}{\sqrt{93}}(5i + 8j - 2k).$$

解法 2　设向量 x 在 a 与 b 所决定的平面内，则有 $x \perp a$，且 $x \perp (a \times b)$，这时有：$x /\!/ [a \times (a \times b)]$，因 $a \times b = -2i + 3j + 7k$，而 $a \times (a \times b) = -10i - 16j + 4k$，于是 $x^\circ = \mp \frac{1}{\sqrt{93}}(5i + 8j - 2k)$.

例 5　设 $a = i - k$，$b = i + j + k$，问是否存在向量 x，使 $a \times x = b$. 若存在，若存在求出 x.

解　因为 $a \cdot b = 0$，故 a 与 b 垂直，即存在 x，使 $a \times x = b$.

由 $a \times x = b$ 知，x 在垂直于 b 的平面内，且 a 与 b 垂直，所以求 $c = b \times a$，则 x 就在 a 与 c 所确定的平面内，x 可用 a 与 c 线性表示.

由于 $c = b \times a = -i + 2j - k$，令

$$x = \lambda a + \mu c = (\lambda - \mu)i + 2\mu j - (\lambda + \mu)k,$$

这时 $a \times x = 2\mu(i + j + k)$，而 $a \times x = b$，故 $\mu = \frac{1}{2}$，λ 取任意值.

$$x = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)i + j - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)k,$$

令 $\lambda = 0$，则 $x = -\frac{1}{2}i + j - \frac{1}{2}k$.

例 6　已知三点 $A(1, 0, -1)$，$B(1, -2, 0)$，$C(-1, 2, -1)$，试求 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

解法 1　直接求解. $\overrightarrow{AB} = \{0, -2, 1\}$，$\overrightarrow{AC} = \{-2, 2, 0\}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - 2j - 4k, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{24}.$$

解法 2　利用 $|a \times b|^2 + (a \cdot b) = |a|^2 |b|^2$.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{24}.$$

例 7　设 $a = \{3, 2, 1\}$，$b = \left\{2, \frac{4}{3}, r\right\}$，若 a 与 b 垂直，则 $r = ?$ 若 $a /\!/ b$，则 $r = ?$

解　a 与 b 垂直时，$r = -\frac{26}{3}$；$a /\!/ b$ 时，$r = \frac{2}{3}$.

例 8 **设** $a=\{2,-3,1\}$，$b=\{1,-2,5\}$，c **与** a **垂直**，c **与** b **垂直**，**且** $c\cdot(i+2j-7k)=10$，**求** c.

解 **设** $c=\{x,y,z\}$，**由已知得** $\begin{cases}2x-3y+z=0,\\ x-2y+5z=0,\\ x+2y-7z=0,\end{cases}$

解得

$$c=\left\{\frac{65}{12},\frac{15}{4},\frac{5}{12}\right\}.$$

例 9 **设** $a=\{1,1,4\}$，$b=\{1,-2,2\}$，**求** b **在** a **方向上的投影向量**.

解 $\mathrm{Prj}_a b=\dfrac{a\cdot b}{|a|}=\dfrac{7}{\sqrt{18}}$，**故** b **在** a **上的投影向量即为**

$$(\mathrm{Prj}_a b)\,a^\circ=\frac{7}{\sqrt{18}}\frac{1}{\sqrt{18}}\{1,1,4\}=\left\{\frac{7}{18},\frac{7}{18},\frac{14}{9}\right\}.$$

例 10 **利用向量证明不等式**：

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_i，b_i $(i=1,2,3)$ **为任意实数**，**指出等号成立的条件**.

证明 **设** $a=\{a_1,a_2,a_3\}$，$b=\{b_1,b_2,b_3\}$，

$$a\cdot b=|a||b|\cos(\widehat{a,b}),$$

故

$$|a\cdot b|\leqslant|a||b|,$$

即

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

等号只在 $\cos(\widehat{a,b})=1$，**即** $a\,/\!/\,b$ **时成立**.

例 11 **若** $a\cdot c=b\cdot c\neq0$，**且** $a\times c=b\times c\neq0$，**证明**：$a=b$.

证明 **由** $a\cdot c-b\cdot c=0\Rightarrow(a-b)\cdot c=0$，**且** $(a-b)\times c=0$，**说明** $(a-b)$ **既与** c **垂直**，**又与** c **平行**，**故** $a-b=0$，**即** $a=b$.

(二) 空间解析几何部分

例 12 **指出下列二次曲面的名称**：

(1) $4x^2+9y^2+9z^2=36$； (2) $4x^2-9y^2-9z^2=-36$，

(3) $4z=x^2+y^2$； (4) $x^2+y^2=a^2$； (5) $x^2+y^2=z^2$.

解　(1) 方程可写成$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2+z^2}{4}=1$,表示旋转椭球面.

(2) 方程可写成$-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2+z^2}{4}=1$,是一个单叶双曲面.

(3) 方程可写成 $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$,用截痕法知曲面为旋转抛物面.

(4) $x^2+y^2=a^2$ 为圆柱面,是以 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=a^2$ 为准线,以平行于 z 轴的直线为母线形成的(此题强调柱面方程的特点,缺一个变量).

(5) 方程可写成 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$,表示锥面,是以 yOz 平面上的直线 $z=y$ 绕 z 轴旋转而成的.

例 13　设一立体,由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成,求它在 xOy 平面上的投影.

解　半球面与锥面的交线为 $L:\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)},\end{cases}$由方程组消去 z 得 $x^2+y^2=1$,因此交线 L 在 xOy 平面上的投影曲线为$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$所求立体在 xOy 平面上的投影就是投影曲线在 xOy 平面上所围的平面区域:$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0.\end{cases}$

例 14　已知平面过点 $O(0,0,0)$,$A(1,0,1)$,$B(2,1,0)$三点,求此平面.

解法 1　因为 O,A,B 三点不共线,所以三点决定唯一平面.直接利用三点式公式,动点 $M(x,y,z)$ 在 O,A,B 所确定的平面上,向量 $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$共面,有$\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$,即 $x-2y-z=0$.

解法 2　用点法式.

设 n 为所求平面的法向量,则 n 与$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$垂直,即 $n\,/\!/\,(\overrightarrow{OA}\times$

$\overrightarrow{OB}$). 令 $n=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=-i+2j+k$. 过 $O(0,0,0)$,以 $n=\{-1,2,1\}$ 为法向量的平面为 $x-2y-z=0$.

解法 3 用平面方程的一般形式.

设 $Ax+By+Cz+D=0$ 为所求平面. 将 O,A,B 三点的坐标代入,可得:$D=0,A=-C,B=-2A\quad(A\neq0)$,得到平面方程

$$x-2y-z=0.$$

例 15 一直线过点 $A(2,-3,4)$,且与 y 轴垂直相交,求该直线的方程.

解法 1 两点决定一直线,A 点到 y 轴的垂线的垂足为 $(0,-3,0)$,故直线方程为 $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z}{4}$.

解法 2 直线方程作为两平面的交线.

直线过点 $A(2,-3,4)$,且与 y 轴垂直,所以直线必在平面 $y=-3$ 上,又因直线与 y 轴相交,所以它在由点 $A(2,-3,4)$ 和 y 轴确定的平面上,该平面可由 $A(2,-3,4)$,$B(0,1,0)$,$O(0,0,0)$ 三点确定,平面方程为 $2x-z=0$,故直线为 $\begin{cases}2x-z=0,\\ y=-3.\end{cases}$

解法 3 设直线的方向向量为 $s=\{l,m,n\}$,由 $\frac{x-2}{l}=\frac{y+3}{m}=\frac{z-4}{n}=t$ 得直线的参数方程:$x=2+lt,y=-3+mt,z=4+nt$. 因所求直线与 y 轴垂直,y 轴的方向向量为 $j=\{0,1,0\}$,故有 $l\times0+m+n\times0=0\Rightarrow m=0$. 又点 $(0,-3,0)$ 在直线上,有 $0=2+lt=4+nt$,令 $t=1$,则 $l=-2,n=-4$. 直线方程为 $x=2-2t,y=-3,z=4-4t$.

例 16 设平面 π 过点 $P(2,3,-5)$,且与已知平面 $x-y+z=1$ 垂直,又与直线 $15(x+1)=3(y-2)=-5(z+7)$ 平行,求平面 π 的方程.

解法 1 用点法式.

设平面 π 的法向量为 n,已知平面的法向量 $n_1=\{1,-1,1\}$,已知直线的方向向量 $s=\{1,5,-3\}$,由题意知,n 与 n_1 垂直,且 n 与 s 垂直,故取 $n=s\times n_1=2i-4j-6k$. 因过点 $P(2,3,-5)$,用点法式,故平

面 π 的方程为 $2(x-2)-4(y-3)-6(z+5)=0$，即 $x-2y-3z-11=0$.

解法 2　用一般式.

设 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则有

$$\begin{cases} 2A+3B-5C+D=0, \\ A-B+C=0, \\ A+5B-3C=0, \end{cases}$$

解得　$A=-\dfrac{1}{3}C, B=\dfrac{2}{3}C, D=\dfrac{11}{3}C$,

代入方程得平面 π 的方程为 $x-2y-3z-11=0$.

例 17　过直线 $L:\begin{cases} x-2y-z-6=0, \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 作平面 π，使之与已知平面 $\pi_1: x+2y+z=0$ 垂直.

解法 1　用点法式. 因已知直线在平面 π 上，在直线 L 上找一点 $P(3,0,-3)$，则 P 点在平面 π 上，L 的方向向量

$$s=\{1,2,-1\}\times\{1,-2,1\}=\{0,-2,-4\}.$$

取平面 π 的法线向量 $n=\{0,-2,-4\}\times\{1,2,1\}=-2\{-3,2,-1\}$，得 π 的方程为

$$-3(x-3)+2y-(z+3)=0，即\ 3x+2y+z-6=0.$$

解法 2　用一般式. 设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，因 $\pi\perp\pi_1$，$\pi\,/\!/\,L$，点 $P(3,0,-3)$ 在平面 π 上，故有 $\begin{cases} 3A-3C+D=0, \\ A+2B+C=0, \\ B+2C=0, \end{cases}$ 解得 $B=-2C, A=3C, D=-6C$，代入得平面方程：$3x-2y+z-6=0$.

解法 3　用平面束的方法. 由于平面 π 通过平面 $x+2y-z-6=0$ 和 $x-2y+z=0$ 的交线，故设其方程为

$$\lambda(x+2y-z-6)+\mu(x-2y+z)=0,$$

整理得　$(\lambda+\mu)x+(2\lambda-2\mu)y+(-\lambda+\mu)z-6\lambda=0$,

π 与平面 $\pi_1: x+2y+z=0$ 垂直，故

$$(\lambda+\mu)1+4(\lambda-\mu)+(-\lambda+\mu)=0,$$

解得 $2\lambda=\mu$,从而平面方程为 $3x-2y+z-6=0$.

例 18 讨论直线 $L:\begin{cases}3x-z+1=0,\\ x+y-4=0\end{cases}$ 与平面 $2x-y-z+1=0$ 的关系,若平行,求其距离;若相交,求交点.

解 直线的方向向量 $s=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\{1,-1,3\}$.

平面的法线向量 $n=\{2,-1,-1\}$.

由于 $s\cdot n=0$,故直线与平面平行.在直线上找点 $(0,4,1)$,则点到平面的距离为

$$d=\frac{|-4-1+1|}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}.$$

例 19 求直线 $L:\frac{x+2}{3}=\frac{-y+2}{1}=\frac{z+1}{2}$ 在平面 $\pi:2x+3y+3z-8=0$ 上的投影 l 的方程.

解 L 与 π 不平行,L 交 π 于点 $(1,1,1)$,在直线 L 上找一点 $M(4,0,3)$,求 M 在 π 上的投影点 M_0,过点 M 作直线 L_1 与 π 垂直,得 L_1 的方程为 $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{3}$,

再求得 L_1 与 π 的交点为 $M_0\left(\frac{35}{11},-\frac{27}{22},\frac{39}{22}\right)$.过 $(1,1,1)$ 与 M_0 的直线:$\frac{x-1}{48}=\frac{y-1}{-49}=\frac{z-1}{17}$ 即为所求.

例 20 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases}2x+y+2z-5=0,\\ x+y-3=0\end{cases}$ 垂直相交的直线方程.

解 直线 L_1 的方向向量 $s_1=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2i+2j+k$,则过点 M 且与 L_1 垂直的平面为 $\pi:-2(x-2)+2(y-1)+(z-3)=0$,即 $2x-2y-z+1=0$.

解方程组$\begin{cases}2x+y+2z-5=0,\\x+y-3=0,\\2x-2y-z+1=0,\end{cases}$得 L_1 与 π 的交点 $N\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$，所求直线的方向向量 $s=\overrightarrow{NM}=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right\}$，故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{3}}=\frac{y-1}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-3}{\frac{8}{3}}，即\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

例 21　过点 $A(-1,0,4)$ 作直线 L，使其平行于平面 $\pi:3x-4y+z-10=0$，且与直线 $L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$相交，求直线方程.

解　设所求直线 L 的方向向量为 $s=\{l,m,n\}$. 由已知得，所求直线 L 与已知直线 L_1 共面，且点 $P(-1,1,0)$ 在 L_1 上，$\overrightarrow{PA}=\{0,-1,4\}$，有$\begin{vmatrix}l&m&n\\3&1&2\\0&-1&4\end{vmatrix}$，即 $6l-12m-3n=0$. 又所求直线 L 与 π 平行，于是 $3l-4m+n=0$. 比较两式得 $l:m:n=8:5:-4$. 所求直线为

$$\frac{x+1}{8}=\frac{y}{5}=\frac{z-4}{-4}.$$

例 22　设空间立体由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成，求两曲面的交线(用柱面方程与平面方程联立表示)，交线在 xOy 面的投影曲线，空间立体在 xOy 面的投影区域.

解　将两方程联立有$\begin{cases}z=6-x^2-y^2,\\z=\sqrt{x^2+y^2},\end{cases}$解得 $z=2$(为一平面)和 $z=-3$(舍去). 两曲面的交线又可表示为$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=2.\end{cases}$交线在 xOy 面的投影曲线的方程为$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=0.\end{cases}$空间立体在 xOy 面的投影区域为$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\z=0.\end{cases}$

四、练习题及答案

习题(A)

一、填空题

1. **平行于向量** $a = \{6,3,-2\}$ **的单位向量为**______.

2. **已知向量** $|a| = 10$, $|b| = 4$, $a \cdot b = 12$, **则** $|a \times b| =$ ______.

3. **过点**$(2,5,8)$**和点**$(-1,6,3)$**的直线方程为**______.

4. **方程** $2x + y^2 + z^2 = 1$ **表示以**______**为旋转轴的**______**面**.

5. **直线** $L\begin{cases} x = 2z + 5, \\ y = 6z - 7 \end{cases}$**的对称式方程为**______.

二、选择题

1. **设** a **平行于** b, **但方向相反, 且** $|a| > |b| > 0$, **则有**(　　).

(A) $|a + b| = |a| - |b|$　　(B) $|a + b| > |a| - |b|$

(C) $|a + b| < |a| - |b|$　　(D) $|a + b| = |a| + |b|$

2. **已知向量** $|a| = 1$, $|b| = \sqrt{2}$, **且** a **与** b **的夹角** $\theta = \frac{\pi}{4}$, **则** $|a + b| =$ (　　).

(A) 1　　(B) $1 + \sqrt{2}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

3. **平行于** xOy **平面且经过点**$(5,-5,3)$**的平面方程为**(　　).

(A) $y + 5 = 0$　　(B) $y - 5 = 0$　　(C) $x - 5 = 0$　　(D) $z - 3 = 0$

4. **直线** $\frac{x + 3}{-2} = \frac{y + 4}{-7} = \frac{z}{3}$ **与平面** $4x - 2y - 2z = 3$ **的关系是**(　　).

(A) **平行但直线不在平面上**　　(B) **直线在平面上**

(C) **垂直且相交**　　(D) **相交但不垂直**

5. **曲面** $x^2 - y^2 = z$ **在** xOz **面上的截线方程是**(　　).

(A) $x^3 = 3$　　(B) $\begin{cases} y^2 = -z, \\ x = 0 \end{cases}$　　(C) $\begin{cases} x^2 = z, \\ y = 0 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ z = 0 \end{cases}$

三、计算题

1. 设 $a=\{2,1,1\}$，$b=\{1,-2,2\}$，$c=\{3,-4,2\}$，求 $a+b$ 在 c 上的投影.

2. 设 $a=\{1,1,1\}$，$b=\{0,1,1\}$，$c=\{1,1,0\}$，并令 $d=xa+yb+zc$，x,y,z 为常数. 求：

(1) d 的坐标；(2) 如果 $d=0$，证明 $x=y=z=0$.

3. 求直线 $\begin{cases}3x-5y-6=0,\\2x+3z-9=0\end{cases}$ 在平面 $2x+y-3z+5=0$ 上的投影直线的方程.

4. 过点 $(2,4,-3)$ 且平行于方向数分别为 $\{0,2,4\}$ 及 $\{-1,-2,1\}$ 的两直线的平面方程.

5. 求过三点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ 的圆的方程，并求该圆在坐标平面 xOy 上的投影曲线的方程.

习题 (B)

一、填空题

1. 设有作用于一点的三个力 $f_1=\{-2,3,-4\}$，$f_2=\{1,2,3\}$，$f_3=\{3,-4,5\}$，则合力的大小 $|f|=$______，方向余弦 $\cos\alpha=$______，$\cos\beta=$______，$\cos\gamma=$______.

2. 过点 $(-1,2,5)$ 且平行于直线 $\begin{cases}2x-3y+6z-4=0,\\4x-y+5z+2=0\end{cases}$ 的直线是______.

3. 设向量 $2a+5b$ 与 $a-b$ 垂直，$2a+3b$ 与 $a-5b$ 垂直，则向量 a 与向量 b 的夹角 θ 为______.

4. 设圆的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\z=4,\end{cases}$ 则它的圆心坐标是______，半径为______.

5. 过点 $(5,1,7)$，$(4,0,-2)$ 且平行于 z 轴的平面方程为______.

二、选择题

1.设 a,b 为非零向量,且 $a\perp b$,则必有(　　).

(A) $|a+b|=|a|+|b|$　　(B) $|a-b|=|a|-|b|$

(C) $|a+b|=|a-b|$　　(D) $a+b=a-b$

2.设 a,b,c 均为非零向量,且 $a=b\times c,b=c\times a,c=a\times b$,则 $|a|+|b|+|c|=$(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

3.已知平面过点 $(1,1,0)$ 与 $(3,3,0)$,且垂直于 xOy 平面,则该平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的系数必满足(　　).

(A) $A=-B,C=D=0$　　(B) $B=-C,A=D=0$

(C) $C=-A,B=D$　　(D) $C=A,B=D=0$

4.连接点 $M(3,10,-5)$ 和 $N(0,12,c)$ 的线段平行于平面 $7x+4y+z-1=0$,则点 N 的未知坐标 $c=$(　　).

(A) 2　　(B) 6　　(C) -8　　(D) 8

5.方程 $z=1-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ 表示的二次曲面是(　　).

(A) 锥面　　(B) 单叶双曲面

(C) 双叶双曲面　　(D) 椭圆抛物面

三、计算题

1.设 $m=2a+b,n=ka+b$,其中 $|a|=1,|b|=2$,且 $a\perp b$,试问:

(1) k 为何值时 $m\perp n$;

(2) k 为何值时,以 m,n 为邻边的平行四边形面积为 6.

2.设 M_0 是直线 L 外一点,M 是直线 L 上任意一点,且直线的方向向量为 s,试证点 M 到直线 L 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{MM_0}|\times s}{|s|}$.

3.求过直线 $\begin{cases}3x+2y-z-1=0,\\2x-3y+2z+2=0\end{cases}$ 且垂直于平面 $x+2y+3z-5=0$ 的平面方程.

4.求过直线 $L:\begin{cases}2x+y=0,\\4x+2y+3z=6\end{cases}$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的

平面方程.

5.若椭圆抛物面的顶点在原点,z 轴是它的轴,且点 $A(-1,-2,2)$ 和点 $B(1,1,1)$ 在该曲面上,求该曲面的方程.

习题(A)答案

一、填空题

1. $\pm\left\{\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{-2}{7}\right\}$.　2. 16.　3. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-3}{-5}$.

4. x 轴,旋转椭球.　5. $\frac{x-5}{2}=\frac{y+7}{6}=\frac{z}{1}$.

二、选择题

1. A.　2. D.　3. D.　4. A.　5. C.

三、计算题

1. $\frac{19}{\sqrt{29}}$.

2. $d=\{x+z,x+y+z,x+y\}$.

3. $\begin{cases}2x+y-3z+5=0,\\17x-25y+3z-39=0.\end{cases}$ 提示 利用平面束方程 $(3x-5y-6)+\lambda(2x+3z-9)=0$.

4. $5x-2y+z+1=0$.

5. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=1,\end{cases}\begin{cases}x^2+y^2+xy-x-y=0,\\z=0.\end{cases}$

习题(B)答案

一、填空题

1. $\sqrt{21},\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}$.　2. $\frac{x+1}{-9}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-5}{10}$.　3. $\frac{\pi}{3}$.

4. $(0,0,4)$,3.　5. $x-y-4=0$.

二、选择题

1. C.　2. D.　3. A.　4. D.　5. A.

三、计算题

1. (1) $k=-2$;(2) $k=5$.

2. 略.

3. $x-8y+5z+5=0$.

4. $z=2$.

5. $z=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2$.

第八章　多元函数微分学

一、本章知识的作用与意义

多元函数微分学,就其内容而言属于微分学,就其研究对象而言,则是两个或两个以上自变量的函数——多元函数.它是一元函数微分学理论的推广和发展,是高等数学的一个主要内容.很多实际问题往往牵涉到多方面的因素,如空间曲线的切线、空间曲面的切平面问题,多个因素情况下的极值问题等,反映到数学上,就是一个变量依赖于几个变量的情形,因此,多元函数的理论有着重要的实际意义.这就提出了多元函数微分和积分的问题.

二、知识要点及思想方法

(一) 多元函数的极限与连续性

1.多元函数的极限

定义　设函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域) D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点.如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$,都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

或 $f(x,y)\to A\ (\rho\to 0)$,这里 $\rho=|PP_0|$.

注　①所谓二重极限存在,是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数都无限接近于 A.

②若仅知道动点在区域 D 内沿某特定的方向趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 接近于某一确定常数,则不能断定 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的极限存在.只有动点在区域 D 内沿任何方向趋向于 $P_0(x_0,y_0)$,函数的极限都存在且相等,这时函数的极限才存在.

③若能找到某两个特定的方向使 $P\to P_0$ 时 $f(x,y)$ 的极限不相同或不存在,则可断定 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的极限不存在.当 $P_0(x_0,y_0)\to O(0,0)$ 时,常取的方向有 沿 x 轴 $(y=0)$、y 轴 $(x=0)$,沿直线 $y=kx$,沿曲线 $y=kx^2$ 等.

④由极限定义知,多元函数的极限与一元函数的极限本质上相同,所以可以把一元函数求极限的许多方法运用到求多元函数的极限上.但要注意,有时需作变量代换将多元函数转化为新变量的一元函数.

2.多元函数的连续性

定义　设 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 定义域内的点, 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

注　如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每一点都连续,那么 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

3.多元连续函数的性质

性质1(最大值和最小值定理)　有界闭区域 D 上的多元连续函数,在 D 上一定有最小值和最大值.

性质2(介值定理)　有界闭区域 D 上的多元连续函数,如果在 D 上取得两个不同的函数值,则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

注　①一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.所谓定义区域,是指包含在定义域内的区域或闭区域.

②利用多元初等函数的连续性,如果要求函数在点 P_0 处的极限,

而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

（二）偏导数的定义与计算

1.偏导数

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或 } f_x(x_0,y_0).$$

注　①函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数，是 $y=y_0$ 固定时，函数沿 x 轴方向的变化率；同理，函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导数，是 $x=x_0$ 固定时，函数沿 y 轴方向的变化率.

②一元函数中，函数在一点可导一定连续，而这里函数在某点的偏导数存在，函数在该点也不一定连续；反之，也不一定成立.

③由定义知，函数在某区域 D 的每一点偏导数都存在，则在 D 上定义了一个偏导函数，因此函数在一点的偏导数可看作偏导函数在该点的值.

④n 元函数有 n 个偏导数，求函数对某个变量的偏导数时，其余变量暂时看作常量，归结为求一元函数导数的问题.

2.高阶偏导数

定理　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

3.多元复合函数求导法则

定理　如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导,且其导数可用下列公式计算:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

下面列举常见的几种类型复合函数的求导公式.

(1) 三个中间变量、一个自变量的情形

设 $u=\varphi(x),v=\psi(x),w=w(x)$ 在点 x 可导,$y=f(u,v,w)$ 在相应点 (u,v,w) 处有连续偏导数,则复合函数 $y=[\varphi(x),\psi(x),w(x)]$(见图 8.1)在点 x 处可导,且其导数可用下列公式计算:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx},$$

此公式的左端也称为全导数.

(2) 三个中间变量、两个自变量的情形

设 $u=u(x,y),v=v(x,y),w=w(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数,函数 $z=f(u,v,w)$ 在相应点 (u,v,w) 处有连续偏导数(见图 8.2),则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y),w(x,y))$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数都存在,且可用下列公式计算:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

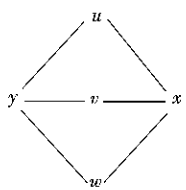


图 8.1

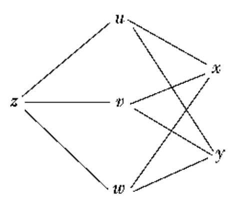


图 8.2

⑶ 某变量是中间变量又是自变量的情形

设 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 处有偏导数，$z=f(u,x)$ 在相应点 (u,x) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x]$ (见图 8.3) 在点 (x,y) 处有偏导数，且可用下列公式计算：

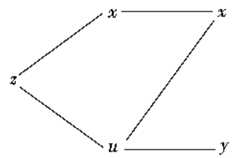


图 8.3

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

4.隐函数求导法则

⑴ 一个方程的情形

①设方程 $F(x,y)=0$ 能确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，则有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

这就是隐函数的求导公式.

注　在上述定理的条件下，一个二元方程能确定一个一元隐函数，它有一个导数.求 F_x 时，y 看作常量;求 F_y 时，x 看作常量.

②设方程 $F(x,y,z)=0$ 能确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

注　一个三元方程能确定一个二元隐函数，它有两个偏导数.求 F_x 时，y,z 都看作常量;求 F_y 时，x,z 都看作常量;求 F_z 时，x,y 都看作常量.

⑵ 方程组的情形

由方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 确定的隐函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，用复合函数求导法则得

$$\begin{cases}F_x+F_uu_x+F_vv_x=0,\\ G_x+G_uu_x+G_vv_x=0.\end{cases}$$

解此方程组可得 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$，同理可得 $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

注 ①含两个方程的四元方程组确定两个二元隐函数,有四个偏导数.

②含两个方程的三元方程组确定两个一元隐函数,可分别求出它们的两个导数.

(三) 全微分

1.全微分的定义

定义 如果函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

可以表示为

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关,只与 x, y 有关,$o(\rho)$ 是当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时比 ρ 高阶的无穷小,则称函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分,记作

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

注 ①若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,则$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$存在,且 $A = \frac{\partial z}{\partial x}$,$B = \frac{\partial z}{\partial y}$,$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$,它是两个偏微分之和,偏导数存在是函数可微的必要而不充分条件.

②若$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$在点 (x,y) 处连续,则函数 $z = f(x,y)$ 在该点可微,偏导数连续是函数可微的充分条件.

③由全微分的定义知,函数在某点可微,函数在该点一定连续,因此有下列关系.

函数的极限存在,函数不一定连续;但函数连续,极限一定存在.

函数的偏导数存在,函数不一定连续;函数连续,偏导数也不一定存在.

函数的偏导数存在并且偏导数连续,则函数一定可微;函数可微,则函数一定连续.

2.一阶全微分形式的不变性

设函数 $z=f(u,v)$ 有连续偏导数,则不论 u,v 是变量还是中间变量,总有 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$.应注意的是,只是形式不变,而内容有区别.若 u,v 是自变量,则 du 和 dv 是独立的;若 u,v 是中间变量,$u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$,且这两个函数都有连续偏导数,则 du 和 dv 分别为 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 的全微分.

3.全微分在近似计算中的应用

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,则函数的全增量与全微分之差是一个比 ρ 高阶的无穷小,因此当 $|\Delta x|$ 与 $|\Delta y|$ 都较小时,全增量可以近似地用全微分代替,即

$$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y.$$

又因为 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$,所以有

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y.$$

(四)方向导数与梯度

1.方向导数的定义与计算

(1)定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义,自点 P 引射线 l.设 x 轴正向到射线 l 的转角为 φ,并设 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为 l 上的另一点且 $P'\in U(P)$,如果

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}\quad\left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

存在,则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 P 沿方向 l 的方向导数,记作 $\frac{\partial f}{\partial l}$.

注　①方向导数是直线 l 上两点距离趋于 0 时的极限,是单侧极限,是 $f(x,y)$ 在点 P 沿 l 方向的变化率.

②前面所讲的偏导数是方向导数的特殊情形,当 $\Delta x>0$ $(\Delta y>0)$ 时,是沿 $x(y)$ 轴正向的方向导数;当 $\Delta x<0$ $(\Delta y<0)$ 时,是沿 $x(y)$ 轴负向的方向导数.或公式中 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 或 $\varphi=\pi$ 和 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

⑵ 计算

定理　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微,则函数在点 P 处沿任一方向 l 的方向导数都存在,且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,$$

其中 φ 为 x 轴到方向 l 的转角.

2.梯度定义与运算

⑴ 定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数,则对于每一点 $P(x,y)\in D$,都可定出一个向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j,$$

该向量称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度,记作 $\operatorname{grad} f(x,y)$.

注　① $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处的梯度 $\operatorname{grad} z$ 是一个向量,即

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j.$$

②方向导数与梯度的关系:$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{Prj}_l\operatorname{grad} f(x,y)$.

③梯度的大小为:$|\operatorname{grad} f(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$,梯度的方向为方向导数取得最大值的方向,即 $|\operatorname{grad} f(x,y)|$ 为方向导数的最大值.

⑵ 计算

利用梯度的表达式:

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j.$$

(五) 微分法在几何上的应用

1.空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$ $\alpha<t<\beta$.曲线上对应于

$t=t_0$ 的点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,设 $x(t),y(t),z(t)$ 可导且 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 不全为零,则曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

注　①求出三个导数值即可得到曲线在点 M_0 处的切向量,从而可写出切线的对称式方程与法平面的点法式方程.

②空间曲线 Γ 由方程 $\begin{cases} y=\varphi(x), \\ z=\psi(x) \end{cases}$ 给出,可看成第一种的特殊情况.此情形下曲线在点 x_0 处的切向量为

$$T=\{1,\varphi'(x),\psi'(x)\},$$

然后按公式写出切线与法平面方程.

③空间曲线 Γ 由方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出,由方程组可确定一组函数 $y=y(x),z=z(x)$,视 x 为参量,求出 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$,得切向量

$$T=\left\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right\},$$

然后按公式写出切线与法平面方程.

2.曲面的切平面与法线

①设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$,$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上的一点,垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的法向量.向量

$$n=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

就是曲面在点 M_0 处的一个法向量.曲面上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$
$$F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

②曲面方程为 $z=f(x,y)$ 时,曲面在点 M_0 的法向量为

$$n=\{f'_x,f'_y,-1\}\text{ 或 }n=\{-f'_x,-f'_y,1\},$$

然后按照第一种情况写出曲面在点 M_0 处的切平面与法线方程.

(六) 多元函数的极值

1.多元函数极值的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义,对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y),如果适合不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

则称函数在点 (x_0,y_0) 有极大值 $f(x_0,y_0)$ 如果适合不等式

$$f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

则称函数在点 (x_0,y_0) 有极小值 $f(x_0,y_0)$.极大值、极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

2.多元函数取得极值的条件

定理 1 (必要条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数,且在点 (x_0,y_0) 处有极值,则它在该点的偏导数必然为零:

$$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0.$$

注 一阶偏导数同时为零的点称为驻点.

定理 2 (充分条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数,又 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$,令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,f_{xy}(x_0,y_0)=B,f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下:

① $AC-B^2>0$ 时具有极值,且当 $A<0$ 时有极大值,当 $A>0$ 时有极小值;

② $AC-B^2<0$ 时没有极值;

③ $AC-B^2=0$ 时可能有极值,也可能没有极值,还需另作讨论.

具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值的求法:

①解方程组

$$f_x(x,y)=0,f_y(x,y)=0,$$

求得一切实数解,即可求得一切驻点.

②对于每一个驻点(x_0,y_0),求出二阶偏导数的值 A、B 和 C.

③定出 $AC-B^2$ 的符号,按定理 2 的结论判定 $f(x_0,y_0)$ 是否是极值、是极大值还是极小值.

注　偏导数不存在的点也可能是极值点,可用定义直接判断.

3.条件极值　拉格朗日乘数法

拉格朗日乘数法　要求函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点,可以先构成辅助函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 为某一常数.求其对 x 与 y 的一阶偏导数,并使之为零,然后与方程 $\varphi(x,y)=0$ 联立,有

$$\begin{cases}f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\\varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

由该方程组解出 x,y 及 λ,则其中 x,y 就是函数 $f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点的坐标.

推广　求函数 $u=f(x,y,z,t)$ 在附加条件

$$\varphi(x,y,z,t)=0,\quad \psi(x,y,z,t)=0,$$

下的极值,可以先构造辅助函数

$$F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t),$$

其中 λ_1,λ_2 均为常数,求其一阶偏导数,并使之为零,然后与附加条件中的两个方程联立起来求解,这样得出的 x,y,z,t 就是函数 $f(x,y,z,t)$ 在附加条件下的可能极值点的坐标.

注　至于如何确定所求得的点是否为极值点,在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

(七)主要的思想方法

多元函数微积分是一元函数微积分的推广和发展,无论在思想体系还是理论体系上,类比的思想方法都占有极其重要的地位.用类比的

方法学习这部分内容会起到事半功倍的效果.类比的思想属于一种创新思维,掌握它无疑会聪明很多.

三、解题研究

(一) 多元函数的极限与连续性

1.多元函数的极限

例 1　**求** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解　**由于** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}=1$**,因此**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y=0.$$

注　**此处用了一元函数中的重要极限公式及极限四则运算法则.**

例 2　**求** $\lim\limits_{\substack{x\to \\ y\to 0}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解　$$\lim_{\substack{x\to \\ y\to 0}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to \\ y\to 0}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}}=e.$$

注　**此处用了一元函数中的重要极限公式.**

例 3　**求** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

解　**注意到** $0\leqslant\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right||y|\leqslant\dfrac{1}{2}|y|$.

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2}|y|=0$**,由夹逼准则知**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$$

注　**此处利用了一元函数极限的夹逼准则.**

例 4　**讨论** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=0$ **是否存在.**

解　当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $O(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

当 k 取不同的值时，极限值也不同，故原极限不存在.

注　求二元函数极限常用的方法：

①利用连续函数的定义及初等函数的连续性；

②转化为一个变量的一元函数极限问题，再用一元函数求极限的方法，如洛必达法则等；

③利用极限性质，如四则运算法则、夹逼准则等.

2.多元函数的连续性

例5　讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2},&(x,y)\neq(0,0),\\0,&(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性，偏导数的存在性以及可微性.

解　函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.因为若令点 (x,y) 沿抛物线 $y=kx^2$ 趋于点 $(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx^2\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx^2\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^4}{x^4(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2},$$

极限值与 k 的取值有关，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在.因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2\cdot0\cdot0}{x^4+y^2}-0}{x}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$.

函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.因为 $\dfrac{\Delta z}{\rho}=\dfrac{\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$，且

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{(x^4+k^2x^2)\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\frac{\pm1}{k\sqrt{1+k^2}},$$

故极限不存在,即不可微.

(二) 偏导数的计算

1.偏导数的求法

从偏导数的定义可以看到,偏导数的实质就是把一个自变量固定,而将二元函数 $z=f(x,y)$ 看成是另一个自变量的一元函数的导数.因此,求二元函数的偏导数,只需用一元函数的求导法,把一个自变量暂时视为常量,而对另一个自变量进行一元函数求导即可.

例6 求 $z=x^2\sin y$ 的偏导数.

解 把 y 看作常量对 x 求导,得$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y$.

把 x 看作常量对 y 求导,得$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$.

例7 求 $z=x^y$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 把 y 看作常量对 x 求导,得$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$.

把 x 看作常量对 y 求导,得$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

例8 求 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解 偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$,在点 $(1,2)$ 处的偏导数就是偏导数在 $(1,2)$ 处的值,所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\frac{2}{3}.$$

例9 设 $f(x,y)=e^{\arctan\frac{y}{x}}\ln(x^2+y^2)$,求 $f_x(1,0)$.

解 如果先求偏导数 $f_x(x,y)$,运算是比较繁杂的,但是若先把函数中的 y 固定在 $y=0$,则有

$f(x,0)=2\ln x$,从而 $f_x(x,0)=\frac{2}{x}$,$f_x(1,0)=2$.

例 10　求 $u=\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{xy}{z}$ 的偏导数.

解　把 y 和 z 暂时看作常量对 x 求导,得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{z}$.

把 z 和 x 暂时看作常量对 y 求导,得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x}{z}$.

把 x 和 y 暂时看作常量对 z 求导,得 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{xy}{z^2}$.

2.**高阶偏导数**

例 11　设函数 $z=x^3y-3x^2y^3$,求它的二阶偏导数.

解　函数的一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-6xy^3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^3-9x^2y^2.$$

二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y-6xy^3)=6xy-6y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y-6xy^3)=3x^2-18xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x^3-9x^2y^2)=3x^2-18xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x^3-9x^2y^2)=-18x^2y.$$

3.**多元复合函数求导**

例 12　求函数 $z=e^{u\cos v}$,$u=xy$,$v=\ln(x-y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　因为 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=e^{u\cos v}\cos v$,　$\dfrac{\partial z}{\partial v}=e^{u\cos v}u(-\sin v)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x-y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-1}{x-y},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=e^{u\cos v}\left(y\cos v-\frac{u\sin v}{x-y}\right)$$

$$=e^{xy\cos(\ln(x-y))}\left[y\cos(\ln(x-y))-\frac{xy\sin(\ln(x-y))}{x-y}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=e^{xy\cos(\ln(x-y))}\left[x\cos(\ln(x-y))+\frac{xy\sin(\ln(x-y))}{x-y}\right].$$

例 13 **设** $z=f(x^2-y^2,xy)$,**求** $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 **令** $u=x^2-y^2,v=xy$,**则** $z=f(u,v)$.**所以**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

例 14 **设** $z=u^2v,u=\cos x,v=\sin x$,**求** $\frac{dz}{dx}$.

解 $$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=2uv(-\sin x)+u^2\cos x$$

$$=\cos^3 x-2\sin^2 x\cos x.$$

例 15 **设** $z=xyf\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)$,**求** $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(xyf\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)\right)=yf\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)+xy\frac{\partial}{\partial x}f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)$$

$$=yf\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)+xy\left[f'_1\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)\frac{1}{y}+f'_2\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]$$

$$=yf\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)+xf'_1\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'_2\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right).$$

上式中的 f'_1、f'_2 **分别表示** $f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)$ **对第一、第二个中间变量,即对** $\frac{x}{y}$、$\frac{y}{x}$ **的偏导数**.

例 16 **已知** $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$,**其中** f **具有二阶连续偏导数,求** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\left(xf'_1+\frac{1}{x}f'_2\right)=x^4f'_1+x^2f'_2.$$

因为 f 具有二阶连续偏导数，所以 $f''_{12}=f''_{21}$，即$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}(x^4 f'_1+x^2 f'_2)\\&=4x^3 f'_1+x^4 yf''_{11}+x^4\left(-\frac{y}{x^2}\right)f''_{12}+2xf'_2+x^2 yf''_{21}+\\&\quad x^2\left(-\frac{y}{x^2}\right)f''_{22}\\&=4x^3 f'_1+2xf'_2+x^4 yf''_{11}-yf''_{22},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=x^4\left(xf''_{11}+\frac{1}{x}f''_{12}\right)+x^2\left(xf''_{21}+\frac{1}{x}f''_{22}\right)\\&=x^5 f''_{11}+2x^3 f''_{12}+xf''_{22}.\end{aligned}$$

4.隐函数求导

例 17　求由方程 $e^z-xyz=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的两个偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1　因为 $e^z-xyz=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，所以方程两边对 x 求导得

$$e^z\frac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy},$$

类似可得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{e^z-xy}$.

解法 2　令 $F(x,y,z)=e^z-xyz$.

因为 $F_x=-yz$，$F_y=-xz$，$F_z=e^z-xy$，于是由定理得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy}.$$

例 18　设 $u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ 是由方程组

$$\begin{cases} u^2 - v + x = 0, \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$$

所确定的隐函数,试求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解 将方程组中方程的两边对 x 求导,得

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

解出 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-2v}{4uv+1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{4uv+1}$.

类似可得$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{4uv+1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2u}{4uv+1}$.

再将所得方程组中方程的两边对 y 求导,得

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{-2}{4uv+1}\left(2v\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{4(2v^2 - u)}{(4uv+1)^3}.$$

例 19 试证明已知函数 $z = -e^{-x-3y}\sin(x+3y)$ 满足关系式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

证明 因$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-x-3y}\sin(x+3y) - e^{-x-3y}\cos(x+3y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{-x-3y}\sin(x+3y) - 3e^{-x-3y}\cos(x+3y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9e^{-x-3y}\sin(x+3y) + 9e^{-x-3y}\cos(x+3y)$$
$$+ 9e^{-x-3y}\cos(x+3y) + 9e^{-x-3y}\sin(x+3y)$$
$$= 18e^{-x-3y}\cos(x+3y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^{-x-3y}\sin(x+3y) + e^{-x-3y}\cos(x+3y)$$

$$+ e^{-x-3y}\cos(x+3y) + e^{-x-3y}\sin(x+3y)$$

$$= 2e^{-x-3y}\cos(x+3y),$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

例 20　**设** $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$，$f$，$g$ **具有二阶连续偏导数，证明**

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

证明 $$\frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= -\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$- \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

(三) 全微分的计算

求函数 $z = f(x, y)$ **的全微分，可直接根据公式** $dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$ **计算，也可利用微分运算法则及全微分形式不变性计算**.

例 21　**求函数** $z = y^x \ln(x^2 + y^2)$ **的全微分** dz.

解法 1　$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y \cdot \ln(x^2 + y^2) + y^x \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}\ln(x^2 + y^2) + y^x \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

故
$$dz=y^x\left[\ln y\cdot\ln(x^2+y^2)+\frac{2x}{x^2+y^2}\right]dx+$$
$$y^{x-1}\left[x\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right]dy.$$

解法 2
$$\begin{aligned}dz&=\ln(x^2+y^2)\,d(y^x)+y^x d(\ln(x^2+y^2))\\&=\ln(x^2+y^2)(y^x\ln y\,dx+xy^{x-1}dy)+\\&\quad y^x\left[\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy\right]\\&=y^x\left[\ln y\cdot\ln(x^2+y^2)+\frac{2x}{x^2+y^2}\right]dx+\\&\quad y^{x-1}\left[x\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right]dy.\end{aligned}$$

(四) 方向导数与梯度的计算

1. 方向导数的计算

例 22　**求函数** $z=xe^{2y}$ **在点** $P(1,0)$ **处沿从点** $P(1,0)$ **到点** $Q(2,-1)$ **方向的方向导数**.

解　**这里方向** l **即** $\overrightarrow{PQ}=\{1,-1\}$，**故** x **轴到方向** l **的转角** $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

因为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1$，　$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)}=2$，

故所求方向导数
$$\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. 梯度的计算

例 23　**求函数** $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$ **在点** $(1,1,2)$ **处的梯度，并问哪些点处梯度为零**.

解　**由梯度计算公式得**
$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\ u(x,y,z)&=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k\\&=(2x+3)i+(4y-2)j+6zk,\end{aligned}$$

故
$$\mathrm{grad}\ u(1,1,2)=5i+2j+12k.$$

在点 $P_0\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$ 处梯度为零,即零向量.

(五) 微分法在几何上的应用

1.空间曲线的切线与法平面

例 24　求曲线 $x=\int_0^t e^u\cos u\,du$,$y=2\sin t+\cos t$,$z=1+e^{3t}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

解　当 $t=0$ 时,$x=0$,$y=1$,$z=2$.由于 $x'=e^t\cos t$,$y'=2\cos t-\sin t$,$z'=3e^{3t}$,可得 $x'(0)=1$,$y'(0)=2$,$z'(0)=3$.故切线方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3},$$

法平面方程为　$x+2(y-1)+3(z-2)=0$,

即　$x+2y+3z-8=0$.

例 25　求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解　将曲线方程中的 x 看作参数,方程组两边对 x 求导得

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}-3=0,\\[2mm]2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}$$

解得　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4z-10x+15}{10y+6z}$,　$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{6x+4y-9}{-10y-6z}$,

所以　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{9}{16}$,　$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{(1,1,1)}=-\dfrac{1}{16}$,

故　$T=\left\{1,\dfrac{9}{16},-\dfrac{1}{16}\right\}$,

于是切线方程为　$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{\frac{9}{16}}=\dfrac{z-1}{-\frac{1}{16}}$,

即　$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$,

法平面方程为 $(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0$，

即 $16x+9y-z-24=0$.

2.空间曲面的法线与切平面

例26 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$，则

$$n=\{F_x,F_y,F_z\}=\{2x,4y,2z\},$$

已知平面的法向量为 $\{1,-1,2\}$，由所求切平面与已知平面平行得

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2}\text{，即 } x=\frac{1}{2}z, y=-\frac{1}{4}z,$$

代入椭球面方程得 $\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1$，

解得 $z=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$，

则 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$， $y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$，

故切点坐标为 $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\sqrt{\frac{2}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$.

因而所求切平面方程为

$$\left(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即 $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$.

例27 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，则

$$F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z,$$

因点 $(1,2,3)$ 在球面上，故球面在该点处的法向量为

$$n=\{2x,2y,2z\}\Big|_{(1,2,3)}=\{2,4,6\},$$

所以在点 $(1,2,3)$ 处,此球面的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,$$

即

$$x+2y+3z-14=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6},$$

即

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

(六) 多元函数的极值

1. 多元函数极值的求法

例 28　求函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值.

解　先求函数的驻点,令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-8x+2y=0,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x-2y=0,\end{cases}$$

解得驻点为:$P_1(0,0)$, $P_2(2,2)$.又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

对于驻点 $P_1(0,0)$,有 $B^2-AC=2^2-(-8)\times(-2)=-12<0$, $A=-8<0$,故函数在点 $P_1(0,0)$ 处取得极大值,且极大值为 $f(0,0)=\left(x^3-4x^2+2xy-y\right)\Big|_{(0,0)}=0$ 对于驻点 $P_2(2,2)$,有 $B^2-AC=2^2-4\times(-2)=12>0$,故函数在点 $P_2(2,2)$ 处没有极值.

2. 条件极值　拉格朗日数乘法

例 29　在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小,求这个切平面的切点,并求此最小体积.

解　令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$,

则

$$F_x=\frac{2x}{a^2}, F_y=\frac{2y}{b^2}, F_z=\frac{2z}{c^2},$$

故椭球面上点 $M(x,y,z)$ 处的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0,$$

即
$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

此切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $X_0=\frac{a^2}{x}$，$Y_0=\frac{b^2}{y}$，$Z_0=\frac{c^2}{z}$，因而切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$.

问题变为在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的条件下，求 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ 的最小值，也就是求 $f(x,y,z)=xyz$ 在此条件下的最大值，作函数

$$\varphi(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

令
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

解方程组得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}},\lambda=-\frac{abc}{2\sqrt{3}}\quad(x>0,y>0,z>0),$$

故所求切点为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$，此时最小体积为 $V_{min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

例 30 某工厂要用钢板制作一个容积为 a^3 的无盖长方体容器，若不计钢板的厚度，怎样制作材料最省？

解 设长方体的三棱长为 x,y,z，则问题变为在条件 $xyz=a^3$ 下，求表面积

$$A=xy+2xz+2yz\quad(x>0,y>0,z>0)$$

的最大值.作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-a^3),$$

令
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2z+\lambda yz=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2z+\lambda xz=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2x+2y+\lambda xy=0,\\ xyz-a^3=0,\end{cases}$$

将上述方程组的第一个方程乘以 x,第二个方程乘以 y,第三个方程乘以 z,再两两相减得$\begin{cases}2xz-2yz=0,\\ xy-2xz=0,\end{cases}$因为 $x>0,z>0$,所以有 $x=y=2z$,代入第四个方程得唯一的可能极值点 $x=y=\sqrt[3]{2}a$,$z=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}a$.

由问题本身可知最小值一定存在,因此当 $x=y=\sqrt[3]{2}a$,$z=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}a$ 时,容器所需材料最省.

例 31　求从原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

解　从原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 上点 (x,y,z) 的距离 d 的平方为

$$d^2=x^2+y^2+z^2,$$

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1],$$

令
$$\begin{cases}L'_x=2x+2\lambda(x-y)=0,\\ L'_y=2y-2\lambda(x-y)=0,\\ L'_z=2z-2\lambda z=0,\\ (x-y)^2-z^2-1=0,\end{cases}$$

由 $L'_z=0$ 得 $z(1-\lambda)=0$,但当 $\lambda=1$ 时,该方程组不相容,故必有 $z=0$.

由 $z=0$,可解出 $x=\dfrac{1}{2}$,$y=-\dfrac{1}{2}$或 $x=-\dfrac{1}{2}$,$y=\dfrac{1}{2}$.通过坐标系的旋转

可知曲面为双曲柱面,从而最短距离存在,点$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$以及点$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$均给出原点到曲面的最短距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

注　从曲面方程$(x-y)^2-z^2=1$解出 $z=\pm\sqrt{(x-y)^2-1}$,所以要求$(x-y)^2\geqslant 1$,即定义域为$\{(x,y)\mid y\geqslant x+1$ 或 $y\leqslant x-1\}$.从而可知点$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$与$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$均在定义域的边界 $y=x-1$ 与 $y=x+1$ 上.

例 32　抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求原点到该椭圆的最长与最短距离.

解　设(x,y,z)为椭圆上的任一点,则该点到原点的距离的平方为 $d^2=x^2+y^2+z^2$,设

$$F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1),$$

令
$$\begin{cases}F_x=2x+2\lambda x+\mu=0, & (1)\\ F_y=2y+2\lambda y+\mu=0, & (2)\\ F_z=2z-\lambda+\mu=0, & (3)\\ z=x^2+y^2, & (4)\\ x+y+z=1, & (5)\end{cases}$$

(1) - (2)得,$(1+\lambda)(x-y)=0$,所以 $\lambda=-1$ 或 $x=y$.

$\lambda=-1$ 时,$\mu=0$,由(3)得 $z=-\frac{1}{2}$,(4)不成立,故舍去 $\lambda=-1$.

把 $x=y$ 代入(4)得 $z=2x^2$,再代入(5)得 $2x^2+2x-1=0$.所以

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},z=2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2=2\mp\sqrt{3}.$$

求出两个可能条件极值点$\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},2\mp\sqrt{3}\right)$.

$d^2=9\pm5\sqrt{3}$,由问题的几何意义知 d_{min},d_{max}存在,故

$$d_{min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}},\quad d_{max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}.$$

四、练习题及答案

习题(A)

1. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

2. 求 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$的偏导数.

3. 设 $z=\ln(1+x^2+y^2)$,求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}}$,$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}}$.

4. 求 $z=x^y$ 的全微分 dz.

5. 设 $z=u^2v, u=ay+x, v=x-ay$,求偏导数.

6. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $z=f(x,y)$由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$确定,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

8. 求曲线$\begin{cases}x=t,\\ y=t^2,\\ z=t^3\end{cases}$平行于两条直线

$$l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}\text{及 } l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

所决定的平面的切线方程.

9. 求 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

10. 已知一矩形的周长为 $2p$,将它绕其一边旋转而成一柱体,求所得圆柱体体积为最大时矩形的边长.

习题(B)

1. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$不存在.

2.设 $z = ue^v$ 而 $u = x^2 + y^2$,$v = \frac{x^2 + y^2}{xy}$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$及 dz.

3.设 $z = x^2 f\left(\frac{y}{x}, xy\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4.设 $z = f(x^2 - y^2)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5.设 $e^z - xyz = 0$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6.设 $x = e^u \cos v$,$y = e^u \sin v$,$z = uv$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

7.求曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ 上平行于平面 $2x - 3y + 2z + 1 = 0$ 的切平面方程.

8.函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续?偏导数是否存在?是否可微?

9.求函数 $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 的极值.

10.求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

习题(A)答案

1.2.

2.$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.

3.$\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$.

4.$dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$.

5.$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2axy - a^2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ax^2 - 2a^2xy - 3a^3y^2$.

6.$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$,其中 $u = xy$,$v = \frac{y}{x}$.

7.$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z + x}$.

8.$\frac{3x + 1}{3} = \frac{9y - 1}{-6} = \frac{27z + 1}{9}$.

9.极小值 $f(1,1)=-1$.

10.长 $y=\frac{2}{3}p$,宽 $z=\frac{1}{3}p$.

习题(B)答案

1.略.

2.$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^4-y^4+2x^2y}{x^2y}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4-x^4+2xy^2}{xy^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$，

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

3.$f'_1+3x^2f'_2-\frac{y}{x}f''_{11}+x^3yf''_{22}$.

4.$2f'(x^2-y^2)+4x^2f''(x^2-y^2)$.

5.$-\frac{z}{xy(z-1)^3}$.

6.$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v)$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(v\sin v+u\cos v)$.

7.$2x-3y+2z+9=0$.

8.连续,$f_x(0,0)=0$,$f_y(0,0)=0$,不可微.

9.$(0,0)$为极大值点,$f(0,0)=0$.

10.长=宽=高$=\frac{3a}{\sqrt{3}}$.

第九章　重积分

一、本章知识的作用与意义

本章主要讨论二重积分和三重积分,所得到的结果可推广到任意多元函数的情形.本章和第十章关于曲线和曲面积分的理论及计算构成了多元函数积分学的内容.重积分和定积分一样,都是来自实践中非均匀求和的需要.不同积分是不同维数空间的具体表现.重积分同定积分一样,也是某种特殊形式和的极限,基本思想是“分割、近似、求和、取极限”.定积分的被积函数是一元函数,积分区域是一个确定的区间;而二、三重积分的被积函数是二、三元函数,积分区域分别是一个平面有界闭区域和空间有界闭区域,因而是一元函数定积分的推广和发展.重积分可以解决很多与多元函数有关的量的计算问题,如立体的体积,曲面的面积,物体的质量、重心、转动惯量等等.重积分在有关几何体的计算,物理学、力学及工程技术中都有广泛的应用.

二、知识要点及思想方法

(一) 二重积分

1.定义

函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界,若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

其中,$\Delta\sigma_i$ 表示任意分 D 为 n 个小闭区域中的第 i 个 $(i=1,2,\cdots,n)$ 小

闭区域,也表示其面积,(ξ_i,η_i)为$\Delta\sigma_i$中任意一点,λ为n个小闭区域直径中的最大值.

注　①区域D的分割是任意的,(ξ_i,η_i)的选取是任意的.

②在不同坐标系中,面积元素$d\sigma$的表达式不同.

③当$f(x,y)$在闭区域D上连续时,二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$存在.

④几何意义:若$f(x,y)\geqslant 0$,则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$在几何上表示以曲面$z=f(x,y)$为曲顶,以区域$D$为底的曲顶柱体的体积.

⑤物理意义:当区域D对应薄片的面密度为$\rho(x,y)$时,其质量

$$M=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy.$$

2.性质

①设c_1、c_2为常数,则

$$\iint\limits_D [c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)]d\sigma=c_1\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+c_2\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

②如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分闭区域,则在D上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和.例如,D分为两个闭区域D_1与D_2,则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

注　当被积函数为分段函数或含绝对值时,常用该性质(见例7).

③$\iint\limits_D 1\cdot d\sigma=\iint\limits_D d\sigma=\sigma$($\sigma$为$D$的面积).

④如果在D上,$f(x,y)\leqslant g(x,y)$,则有不等式

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地,有

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma.$$

注　利用此性质可比较二重积分之间的大小(见例1).

⑤设 M、m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则有

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,d\sigma \leqslant M\sigma.$$

注　利用此性质可估计二重积分的值(见例 2).

⑥(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) 使得

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\,\sigma.$$

3.计算方法

基本思想：将二重积分化为二次积分.而化为二次积分的关键是由被积函数和积分区域的特性来确定定积分的次序和积分限.

二重积分的积分域 D，一般用两种方法给出：①用 D 的边界线方程给出，如例 3、例 4；②用不等式给出，如例 12、例 13.其实，归根结底还是都由边界线确定.画积分区域主要是画出 D 的边界曲线，积分区域画好以后，再考虑怎样化为二次积分与定限，先对哪个变量积分，是在直角坐标下还是极坐标下计算比较方便.

(1)直角坐标系下二重积分的计算

①若 D：$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$，即 D 为 X-型区域时，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

注　X-型区域的特点：穿过区域 D 且平行于 y 轴的直线与区域 D 边界相交不多于两个交点.D 为 X-型区域时，先对 y 积分，后对 x 积分.

②若 D：$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$，$c \leqslant y \leqslant d$，即 D 为 Y-型区域时，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

注　Y-型区域的特点：穿过区域 D 且平行于 x 轴的直线与区域 D 边界相交不多于两个交点.D 为 Y-型区域时，先对 x 积分，后对 y 积分.

③若 D 既是 X-型区域又是 Y-型区域时,则

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

注　选择哪个公式由被积函数是否容易积分、积分域分块多少而定.

④若 D 是混合型区域,则先将区域分割成有限块,使得每块为 X-型区域或 Y-型区域.而后再利用性质②重复上述①,②,③做法即可.

(2) 极坐标系下二重积分的计算

①当极点在积分区域 D 的外部,即 D:$\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta)$,$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,则有

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr.$$

②当极点在积分区域 D 的边界上,即 D:$0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)$,$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,则有

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr.$$

③当极点在积分区域 D 的内部,即 D:$0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,则有

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr.$$

注　①判断二重积分是否适宜选择极坐标计算,要从积分区域和被积函数两方面考虑,当积分区域为圆形域、环形域、扇形域或被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 或含有因子 x^2+y^2 时,采用极坐标系计算二重积分较为方便.

②利用极坐标计算二重积分时,要先利用直角坐标与极坐标的关系将 D 的边界曲线方程化为极坐标方程,再将被积函数与面积元素在极坐标下表出.

4.应用

(1) 曲顶柱体的体积

以平面区域 D 为底,曲面 $z=f(x,y)\geqslant0$ 为曲顶的曲顶柱体的体积为

$$V=\iint_D f(x,y)\,d\sigma.$$

注　关键是找出曲顶的函数表达式和积分区域 D.

(2) 曲面面积

曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$ **在** xOy **面的投影区域为** D,**则曲面** Σ **的面积为**

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

注　关键是由曲面方程的形式来确定被积函数和积分区域.

(3) 平面薄片的重心

已知面密度 $\rho(x,y)$ **在平面区域** D **上连续,则平面薄片的重心为**

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma}.$$

(4) 转动惯量

平面薄片对 x **轴、**y **轴、坐标原点** O **的转动惯量分别为**

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\,d\sigma,\ I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\,d\sigma,\ I_o=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,d\sigma.$$

(二) 三重积分

1.**定义**

函数 $f(x,y,z)$ **在有界闭区域** Ω **上有界,若** $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ **存在,则** $f(x,y,z)$ **在** Ω **上的三重积分为**

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

其中 Δv_i **表示任意分** Ω **为** n **个小闭区域中的第** i **个** $(i=1,2,\cdots,n)$ **小闭区域,也表示其体积**. (ξ_i,η_i,ζ_i) **为** Δv_i **中任意一点,**λ **为** n **个小闭区域直径中的最大值**.

注　①定义中区域 Ω **的分割是任意的,**(ξ_i,η_i,ζ_i) **的选取也是任意的**.

②不同坐标系下体积元素的表达式不同.三重积分没有直观的几何意义,但却有着各种不同的物理意义.

③当 $f(x,y,z)=1$ 时,区域 Ω 的体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$.

④Ω 的体密度为 $\rho(x,y,z)$ 时,其质量为 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$.

2. 性质

略(与二重积分类似).

3. 计算

基本思想:将三重积分化为三次积分.

计算三重积分可用直角坐标、柱面坐标或球面坐标三种方法,正确进行计算的关键是:在不同坐标系下写出围成 Ω 的边界曲面方程,用该坐标表示出积分区域,而后将被积函数和体积元素相应作代换,确定不同坐标系下三次积分的积分限和体积元素表示法(见例 18).

(1) 直角坐标系下三重积分的计算

直角坐标系下,体积元素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,表达式

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

①投影法. 若 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D\}$,$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$,则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

注　上式是先对 z、次对 y、后对 x 的三次积分,类似地,上式也可以化为其他不同次序的三次积分(见例 14).

②截面法. 若 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,h_1\leqslant z\leqslant h_2\}$,其中 D_z 是介于平面 $z=h_1$,$z=h_2$ 之间的任一平面 $z=c$(c 为常数)交 Ω 所截的平面区域,则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{h_1}^{h_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注　当被积函数缺少某一变量,且平行于某一坐标面(如 xOy 面)

的截面面积 (D_z) 容易求出时,可以用截面法,将一个三重积分化为先计算二重积分,再计算定积分的形式(见例15).

(2) 柱面坐标系下三重积分的计算

柱面坐标系下,体积元素 $dv=rdrd\theta dz$. **若**

$$\Omega:\begin{cases} z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta),\\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\end{cases}$$

则
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz$$
$$=\int_a^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}rdr\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz.$$

注 当 Ω **在** xOy **面上的投影区域符合用极坐标计算二重积分的特点或被积函数为** $f(x^2+y^2,z)$ **形式时,一般用柱面坐标计算较简单.**

(3) 球面坐标系下三重积分的计算

球面坐标系下,体积元素 $dv=r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$. **若**

$$\Omega:\begin{cases} r_1(\varphi,\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi,\theta),\\ \varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta),\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\end{cases}$$

则
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$$
$$=\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin 2\varphi dr.$$

注 对于三重积分,若积分区域是球或球的一部分,被积函数是因子 $x^2+y^2+z^2$ **的函数或含该因子,则宜采用球面坐标.**

总结 ①一般对三重积分积分区域的考虑,从围成积分区域的曲面来分析更清楚.球面与抛物面、球面与锥面围成的区域都是球的一部分,但前者采用柱坐标较好,后者一般采用球坐标.若积分区域是长方体或四面体时,采用直角坐标计算较简便.

②利用柱面坐标或球面坐标计算三重积分时，先将积分区域的边界曲面方程化为相应坐标系下的形式，用该坐标表示出积分区域，再将积分变量 x,y,z 及体积元素 dv 用相应坐标系下的形式去替代（见例16、例17）.

4.应用

可用来计算空间薄板的重心、转动惯量、对质点的引力等，与二重积分类似.

（三）具有对称性质的重积分的计算

①如果积分区域 D 关于 y 轴对称，$D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geqslant 0\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(-x,y)=f(x,y).\end{cases}$$

②如果积分区域 D 关于 x 轴对称，$D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,y\geqslant 0\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

③如果积分区域 D 关于坐标原点 O 对称，$D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geqslant 0\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,-y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

④如果积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(y,x)\,d\sigma.$$

⑤如果积分区域 Ω 关于 xOy 面对称，$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega,z\geqslant 0\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\begin{cases}0, & f(x,y,z)=-f(x,y,-z),\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dv, & f(x,y,z)=f(x,y,-z).\end{cases}$$

注　①利用重积分的对称性时,被积函数与积分区域要同时考虑(见例 11).

②关于三重积分,类似可推导出 Ω 关于 yOz, zOx 面对称的结论(见例 20).

三、解题研究

(一)直角坐标下计算二重积分

关键是根据被积函数与积分区域的特性选积分次序.

例 1　设 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D \ln^2(x+y)\,d\sigma$,其中 D 是三角形闭区域,三顶点分别为 $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$,判断 I_1 与 I_2 的大小关系.

分析　本题考查二重积分的性质④.

解　三角形斜边方程为 $x+y=2$,在 D 内有 $1\leqslant x+y\leqslant 2<e$,故 $0\leqslant\ln(x+y)\leqslant 1$,于是 $\ln(x+y)>[\ln(x+y)]^2$,因此

$$\iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma>\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,d\sigma.$$

例 2　利用二重积分的性质⑤,估计积分 $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$ 的值,其中 D 是圆形区域:$x^2+y^2\leqslant 4$.

解法 1　首先求 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在 D 上的最小值 m 和最大值 M.

由于 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=8y$,令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 得驻点 $(0,0)$, $f(0,0)=9$.

在 D 的边界 $x^2+y^2=4$ 上,

$$f(x,y)=x^2+4y^2+9=4-y^2+4y^2+9=13+3y^2.$$

由 $0\leqslant y^2\leqslant 4$,有 $13\leqslant f(x,y)\leqslant 25$.

所以 $M=\max\{9,13,25\}=25, m=\min\{9,13,25\}=9$，

$$9\leqslant f(x,y)\leqslant 25, 9\sigma\leqslant\iint_D(x^2+y^2+9)\mathrm{d}\sigma\leqslant 25\sigma.$$

又 $\sigma=4\pi$，故 $36\pi\leqslant I\leqslant 100\pi$.

解法 2　由积分中值定理知，在 D 上至少存在 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$I=\iint_D(x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma=(\xi^2+4\eta^2+9)\sigma.$$

其中 $\sigma=4\pi$，且 $\xi^2+\eta^2\leqslant 4$（因 $D:x^2+y^2\leqslant 4$）.

因为 $9\leqslant\xi^2+4\eta^2+9\leqslant 4(\xi^2+\eta^2)+9$.

所以　$9\leqslant\xi^2+4\eta^2+9\leqslant 16+9=25$.

故　$36\pi\leqslant I\leqslant 100\pi$.

例 3　计算 $\iint_D(x-1)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，D 由 $y=(x-1)^2$、$y=1-x$、$y=1$ 所围成.

分析　把抛物线 $y=(x-1)^2$、直线 $y=1-x$ 与 $y=1$ 画出后，可见它们所围成的区域即为图 9.1 中的阴影部分.

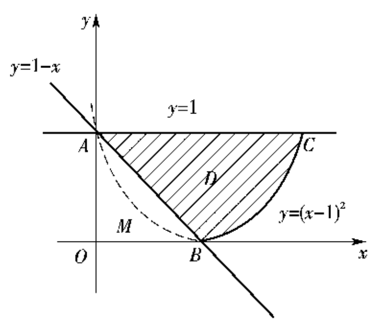


图 9.1

解　由图 9.1 知积分区域 $D:0\leqslant y\leqslant 1, 1-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{y}$ 为 Y-型区域. 故将原积分化为先对 x 后对 y 的二次积分比较方便，于是

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^{1+\sqrt{y}}(x-1)y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(y^2-y^3)\mathrm{d}y=\frac{1}{24}.$$

例 4 计算$\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}dxdy$,区域 D 由 $xy=2$、$y=1+x^2$、$x=2$ 所围成.

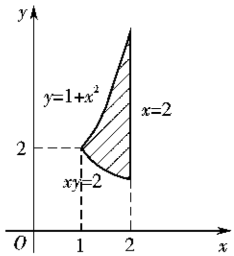


图 9.2

分析 如图 9.2 所示,积分区域 D 画好后就可定限,定限前要结合积分区域和被积函数来考虑,看二次积分中先对哪个变量积分更容易些.从积分区域看,先对 y 积分较方便,如果先对 x 积分要把 D 分成两部分,就要计算两个二次积分.

解 由于积分区域 D:$\frac{2}{x}\leqslant y\leqslant 1+x^2$,$1\leqslant x\leqslant 2$ 为 X-型区域,故将原积分化为先对 y 后对 x 的二次积分比较方便,于是

$$\text{原式}=\int_1^2 dx\int_{\frac{2}{x}}^{1+x^2}\frac{x^2}{y^2}dy=\frac{7}{8}+\arctan 2-\frac{\pi}{4}.$$

例 5 变更 $I=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$ 的积分次序.

错解 $I=\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y}f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.

错因分析 问题发生在 $I_1=\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$ 上,在 I_1 的积分区域(图 9.3)上,由于 y 取负值,即 $-1\leqslant y\leqslant 0$,因而 $\arcsin y\leqslant 0$.于是

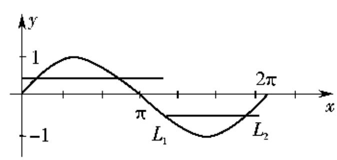


图 9.3

$$L_1: x=\pi-\arcsin y,\quad L_2: x=2\pi+\arcsin y.$$

正确解法　$I=\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx.$

注　**二重积分交换积分次序时首先要找到二重积分的积分区域 D，从而确定换序后的二次积分的上、下限．先对哪个变量积分就画一条平行于该轴的直线（此直线的方向与该轴的正向一致），穿入曲线是下限，穿出曲线是上限．**

例 6　**计算二次积分** $\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx.$

分析　**若先对 x 积分，由于 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不能用初等函数表示，所以二次积分 $\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx$ 直接求不出来，必须要换序．**

解　**先将二次积分 $\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx$ 变回到重积分，找到积分区域 D 然后再化成换序后的二次积分．**

由于积分区域 $D:0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant x$，**于是**

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx&=\iint_{D}\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}dx\int_{x^2}^{x}dy\\&=\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}(x-x^2)dx\\&=\int_{0}^{1}\sin xdx-\int_{0}^{1}x\sin xdx\\&=-\cos x\Big|_{0}^{1}+\left[x\cos x\Big|_{0}^{1}-\sin x\Big|_{0}^{1}\right]\\&=1-\sin 1.\end{aligned}$$

注　**选用积分次序时要注意被积函数易积，同时要注意积分区域的形状．**

例 7　**求** $I=\iint_{D}|y-x^2|d\sigma$，**其中** $D:-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2.$

解　**曲线 $y=x^2$ 把区域 D 分为 D_1 和 D_2，如图 9.4 所示，其中** D_1：$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2$；$D_2$：$-1\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 2.$

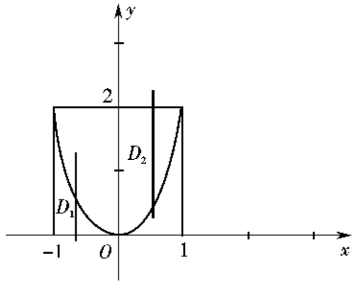


图 9.4

$$I = \iint\limits_{D} |y - x^2| \, d\sigma = \iint\limits_{D_1} (x^2 - y) \, d\sigma + \iint\limits_{D_2} (y - x^2) \, d\sigma$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} (x^2 - y) \, dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} (y - x^2) \, dy = 3\frac{1}{15}.$$

注　**由于被积函数有绝对值,故需要用性质②.**

例 8　**求锥面** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **被柱面** $z^2 = 2x$ **所割下部分的曲面** S **的面积** A.

分析　**本题的立体图形不好画,但曲面的投影区域恰是两曲面的交线** C **的投影曲线围成的区域.**

解　**曲面** S **:** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$**,** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$**,** $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$**,**

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

交线 C **:** $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases}$**,的投影柱面为** $x^2 + y^2 = 2x$**,故在** xOy **面的投影曲线为** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 0, \end{cases}$ **所以曲面** S **在** xOy **面上的投影区域** D **为** $x^2 + y^2 \leqslant 2x$.

因此, $A = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dxdy = \iint\limits_{D} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2}\pi.$

注　求解此类问题的关键是找出所求曲面方程和投影区域.

例 9　求两个底圆半径都等于 R 的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解　设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2,$$

利用立体关于坐标平面的对称性,只要算出它在第一卦限部分的体积 V_1,然后再乘以 8 即可.

第一卦限部分是以 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2},0\leqslant x\leqslant R\}$ 为底,以 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 为顶的曲顶柱体.于是

$$V=8\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma=8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy$$

$$=8\int_0^R\left[\sqrt{R^2-x^2}\,y\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$

$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}R^3.$$

注　求解这类题目的关键是找出曲顶所对应的函数表达式和积分区域 D(即立体在坐标面上的投影).

(二) 利用极坐标计算二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

例 10　计算 $\iint\limits_D(x+y)\,dx\,dy$ 且 D 为 $x^2+y^2\leqslant x+y$ 的内部.

分析　积分区域为图 9.5 所示的圆域.

解法 1　采用极坐标,利用 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 区域 D 的边界化为

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4},\\ 0\leqslant r\leqslant\cos\theta+\sin\theta,\end{cases}$$

所以　　原式 $=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r^2\,dr=\frac{\pi}{2}.$

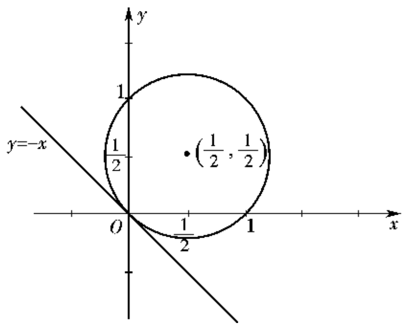


图 9.5

解法 2　**采用广义极坐标,利用** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+r\cos\theta, \\ y=\dfrac{1}{2}+r\sin\theta, \end{cases}$ **区域** D **的边界化为**

$$\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ 0\leqslant r\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

所以

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1+r\cos\theta+r\sin\theta)r\,dr=\frac{\pi}{2}.$$

解法 3　**利用重心公式,令面密度** $\rho(x,y)=1$,**则匀质薄片** D **的重心为** $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,**又因为** $A=\iint\limits_D d\sigma=\pi r^2=\dfrac{\pi}{2}$,**所以**

$$\text{原式}=\iint\limits_D x\,d\sigma+\iint\limits_D y\,d\sigma=\bar{x}A+\bar{y}A=\frac{\pi}{2}.$$

例 11　**计算** $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2-2x+3y+2)\,d\sigma$ **(利用对称性)**.

解　**因为积分区域关于原点对称,且被积函数中** $f_1(x,y)=-2x+3y$ **为** x,y **的奇函数,故**

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(-2x+3y)\,d\sigma=0.$$

而 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2 d\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} y^2 d\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} (x^2+y^2)d\sigma$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{4},$$

又因为 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} 2d\sigma = 2\pi a^2$,

所以 $\quad I = \frac{\pi a^4}{4} + 2\pi a^2.$

例 12　计算$\iint\limits_D x d\sigma$,其中 D 由不等式 $x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}$ 确定.

分析　如图 9.6 所示,积分区域 D 是由直线 $y = x$ 和圆 $y = \sqrt{2x-x^2}$ 所围成,且位于直线之上、圆之内,即图中的阴影部分.分析被积函数和积分区域知,转换成极坐标系下的二次积分计算比较简单.

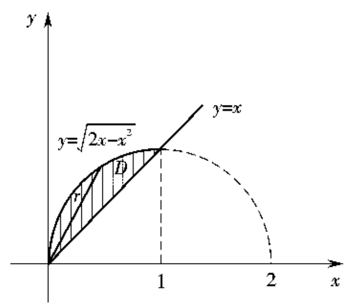


图 9.6

解　因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,从极点出发的射线均从极点进入 D 而从 $r = 2\cos\theta$ 穿出,所以积分区域 D 的极坐标表示是:$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta$.

$$原式 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\cos\theta dr = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

例 13　计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$,D 为由不等式 $\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$ 所确定的域.

分析　本题的积分区域用不等式给出.注意:在不等式中取等号所得曲线是两个半圆,如图 9.7 所示,但它围不成域,不过由 $0\leqslant\sqrt{2x-x^2}\leqslant y$ 易知 $y\geqslant 0$,那么图中第二象限部分的圆扇形是不是积分

区域的一部分？不是，因为要使给出的式子$\sqrt{4-x^2}$及$\sqrt{2x-x^2}$有意义，必须限制变量 $x\in[0,2]$，因此积分区域 D 只能在 $x=0$ 和 $x=2$ 两平行线之间. 所以 D 为图中阴影部分.

确定了积分区域后，再由被积函数和积分区域的特点知，本题转换为极坐标系下的二次积分计算比较简便.

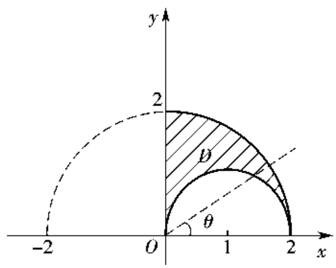


图 9.7

解　因为积分区域 D 的极坐标表示是：$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$2\cos\theta\leqslant r\leqslant 2$，

故　　原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^3dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\theta)d\theta=\frac{5}{4}\pi$.

（三）三重积分的计算

例 14　计算$\iiint\limits_{\Omega}y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 为 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 围成的闭区域.

分析　根据被积函数积分区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D 的特点，选用投影法将三重积分化为三次积分.

解　因为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,z)\in D_y,-\sqrt{1-x^2-z^2}\leqslant y\leqslant 1\}$，且 D_y：$x^2+z^2\leqslant 1$. 所以

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_y}dzdx\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}dy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}(x^2+z^2)\,dz$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}(1+x^2-2x^4)\,dx=\frac{14}{45}.$$

例 15　**计算** $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz$**，其中** Ω **是由锥面** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **和平面** $z=1$**，**$z=2$ **所围成的闭区域**.

分析　**由于被积函数的特点，且截面** D_z **是圆域，故采用截面法较简单**.

解　**因为** $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,1\leqslant z\leqslant 2\}$**，且** $D_z: x^2+y^2\leqslant z^2$.**所以**

$$\text{原式}=\int_{1}^{2}z^2\,dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_{1}^{2}\pi z^4\,dz=\pi\left.\frac{z^5}{5}\right|_{1}^{2}=\frac{31}{5}\pi.$$

例 16　**计算** $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz$**，其中积分区域** Ω **由旋转抛物面** $z=x^2+y^2$ **与平面** $z=1$ **所围成**.

分析　**根据被积函数及** Ω **在** xOy **面的投影区域的特点，选柱面坐标**.

解　**在** z **的变化区间** $0\leqslant z\leqslant 1$ **上，对任意** $z\in[0,1]$**，过该点作平行于** xOy **坐标面的平面且与区域** Ω **相截，得截面为圆域**：$x^2+y^2\leqslant z$.**它在** xOy **面上的投影区域为** $D: x^2+y^2\leqslant z$**，其边界圆周的极坐标方程为** $r=\sqrt{z}$.**因此可得**

$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}r^2\,dr\,d\theta\,dz=\int_{0}^{1}\left[\iint\limits_{D}r^3\,dr\,d\theta\right]dz=\int_{0}^{1}dz\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\sqrt{z}}r^3\,dr$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{z}}dz=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}z^2\,dz=\frac{\pi}{6}.$$

注　**用柱面坐标时要注意的特点：一般被积函数或积分区域含有两项平方和的形式**.

例 17　**计算三重积分** $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$，$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant$

R^2.

错解　原式 $=\iiint\limits_{\Omega} R^2 dxdydz = R^2\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \frac{4}{3}\pi R^5$.

错因分析　由定义知,上述求解过程的错很明显.被积函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ **是在** Ω **上有定义,而不是在球面上定义的.仅当点** (x,y,z) **在球面上时,才有** $x^2+y^2+z^2=R^2$.

正确解法　采用球坐标计算,有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi dr=\frac{4\pi}{5}R^5.$$

例 18　**求** $I=\iiint\limits_{\Omega} xyzdv$,**其中** Ω **是由** $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ **和三个坐标面在第一卦限内所围成的空间闭区域.**

解法 1　**用直角坐标.积分区域** Ω **由不等式** $0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$,$0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$**给出,有**

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy\\&=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2dx=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

解法 2　**用柱面坐标.积分区域** Ω **由不等式** $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant r\leqslant 1$,$0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-r^2}$**给出,有**

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr^2\sin\theta\cos\theta dz\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3dr\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zdz\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\int_0^1 r^3\,\frac{1-r^2}{2}dr\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \mathrm{d}(2\theta) \int_0^1 (r^3 - r^5) \mathrm{d}r = \frac{1}{48}.$$

解法 3　**用球面坐标.积分区域** Ω **由不等式** $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$，$0 \leqslant r \leqslant 1$ **给出，有**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\sin\varphi\cos\theta \cdot r\sin\varphi\sin\theta \cdot r\cos\varphi r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^5 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4}\left[\sin^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

(四) 杂例及应用

例 19　**将** $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f \mathrm{d}z$ **换为先对** y、**次对** x、**后对** z **的三次积分**.

分析　**先将二次积分** $\int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f \mathrm{d}z$ **换序，变为先对** y、**后对** z **的二次积分，再对先对** z、**后对** x **的二次积分换序，变为先对** x、**后对** z **的二次积分**.

解　**因为** $\int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f \mathrm{d}z$ **的积分区域** $D_{yz} = D_1 + D_2$，**如图** 9.8 **所示**.**所以**

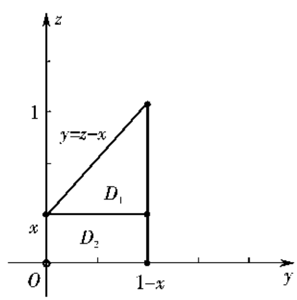


图 9.8

$$\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}fdz=\iint_{D_1}fdydz+\iint_{D_2}fdydz=\int_x^1dz\int_{z-x}^{1-x}fdy+\int_0^xdz\int_0^{1-x}fdy,$$

则
$$I=\int_0^1dx\underbrace{\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}fdz}_{\text{先换序}}=\int_0^1dx\left[\int_x^1dz\int_{z-x}^{1-x}fdy+\int_0^xdz\int_0^{1-x}fdy\right]$$
$$=\underbrace{\int_0^1dx\int_x^1dz}_{\text{再换序}}\int_{z-x}^{1-x}fdy+\underbrace{\int_0^1dx\int_0^xdz}_{\text{再换序}}\int_0^{1-x}fdy.$$

$\int_0^1dx\int_0^xdz$ 的积分区域如图 9.9 中 D_3 所示,故

$$\int_0^1dx\int_0^xdz=\int_0^1dz\int_z^1dx.$$

$\int_0^1dx\int_x^1dz$ 的积分区域如图 9.10 中 D_4 所示,故

$$\int_0^1dx\int_x^1dz=\int_0^1dz\int_0^zdx.$$

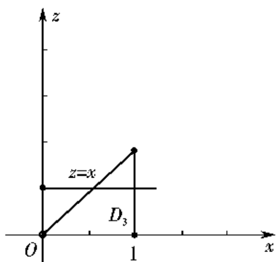


图 9.9

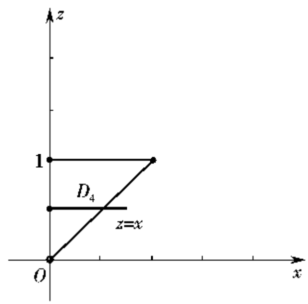


图 9.10

所以　　原式 $=\int_0^1dz\int_0^zdx\int_{z-x}^{1-x}fdy+\int_0^1dz\int_z^1dx\int_0^{1-z}fdy.$

注　求解三重积分换序问题的方法有二:①一般,画出积分区域 Ω 的立体图形后,可根据积分次序的要求直接计算;②当积分区域 Ω 的立体图形画不出时,可从右向左连续对两个二重积分换序(如本题).

例 20　有一半径为 R 的球体,P_0 是球面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$),求球体

的重心位置.

解法 1　设所考虑的球体为 Ω,以 Ω 的球心为原点 O,射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系,则点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$,球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由三重积分的对称性得

$$\bar{y}=0,\bar{z}=0,$$

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} xk\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv}{\iiint\limits_{\Omega} k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv},$$

而

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv&=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv+\iiint\limits_{\Omega}R^2dv\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr+\frac{4}{3}\pi R^5\\&=\frac{32}{15}\pi R^5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}x\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv&=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2dv\\&=-\frac{2}{3}R\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv\\&=-\frac{8}{15}\pi R^6.\end{aligned}$$

所以

$$\bar{x}=-R/4.$$

因此球体 Ω 的重心位置为$\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

解法 2　设所考虑的球体为 Ω,球心为 $\widetilde{Q}$,以定点 P_0 为原点,射线 $P_0\widetilde{Q}$ 为正 z 轴建立直角坐标系,则球面方程为 $x^2+y^2+z^2=2Rz$.设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由三重积分的对称性得

$$\bar{x}=0,\bar{y}=0,$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}kz(x^2+y^2+z^2)\,dv}{\iiint\limits_{\Omega}k(x^2+y^2+z^2)\,dv}.$$

而
$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi\,dr=\frac{32}{15}\pi R^5.$$

$$\iiint_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\,dv=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi\,dr$$
$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6.$$

所以 $\bar{z}=\frac{5}{4}R$.

因此球体 Ω 的重心位置为 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

例 21 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 上，问当 R 取何值时，Σ 在定球面内部的那部分 Σ_1 的面积最大？

解 设 Σ 的方程为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$，从而两球面的交线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2), \\ z=\dfrac{2a^2-R^2}{2a}, \end{cases}$$

于是 Σ_1 的方程为 $z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，Σ_1 在 xOy 面上的投影为

$$D: x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2).$$

Σ_1 的面积为

$$S(R)=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}.$$

因为 $S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi}{a}R^2$，故得驻点 $R_1=0$，$R_2=\frac{4}{3}a$.

又 $S''(R)=4\pi-\frac{6\pi}{a}R$，故 $S''(R_2)=-4\pi<0$.

所以，当 $R=\frac{4}{3}a$ 时，Σ_1 的面积最大.

例 22　设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=a$,若 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z+f(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}v$,其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-x^2-y^2}$,求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{F(t)}{t^3}$.

解　先将三重积分化为 t 的函数,用球面坐标得

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t[r\cos\varphi+f(r^2)]r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{t^4}{16}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r\right],$$

所以

$$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{2\pi}{t^3}\left[\frac{t^4}{16}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\pi(2-\sqrt{2})\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r}{t^3}$$

$$=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to0}\frac{t^2f(t^2)}{3t^2}$$

$$=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to0}\frac{f(t^2)}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a.$$

四、练习题及答案

习题(A)

一、填空题

1.设 $I_1=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$,$I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,D 由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 围成,则 I_1 与 I_2 的大小关系是__________________.

2.设 D 由 $y=x$,$x=2$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$ 围成,则积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为先 y 后 x 的二次积分是________________________.

3. 将积分 $\int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$ 表示为极坐标形式的二次积分是 ________.

4. 设 Ω 为由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ 化为三次积分为 ________.

二、选择题

1. 设 $I=\iint\limits_{D} \sin^2 x \sin^2 y\,d\sigma$，其中 $D: 0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi$，则 I 的估值是(　　).

(A) $1\leqslant I\leqslant\pi$　(B) $0\leqslant I\leqslant\pi^2$　(C) $0\leqslant I\leqslant\pi$　(D) $2\leqslant I\leqslant 2\pi^2$

2. 积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$ 可表示成定积分(　　).

(A) $2\pi\int_0^a f(r)\,dr$　(B) $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta f(\tan\theta)\,d\theta$

(C) $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta f(\tan\theta)\,d\theta$　(D) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta f(\tan\theta)\,d\theta$

3. $I=\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)\,dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)\,dx$，则交换积分次序后得(　　).

(A) $\int_0^2 dx\int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x,y)\,dy$　(B) $\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,dy$　(D) $\int_0^2 dx\int_{3-x}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy$

三、计算题

1. 计算 $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-x)\,d\sigma$，D 为由 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

2. 计算 $\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 \frac{\ln x}{x^2-1}dx$.

3. 计算 $I=\iint\limits_{4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$.

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 Ω 是由柱面 $y^2+z^2=1$，平面 $y=x$，$z=0$ 及 $x=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

5. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，$\Omega$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 围成.

习题(B)

1. 计算$\iint\limits_{D} xy\,d\sigma$，其中区域 D 是由抛物线 $y=x^2-1$ 及直线 $y=1-x$ 所围成的区域.

2. 计算$\iint\limits_{D} e^{x+y}\,d\sigma$，其中 D 是由 $|x|+|y|\leqslant 1$ 所确定的区域.

3. 计算$\iint\limits_{D}|\sin(x+y)|\,dxdy$，其中 D 为正方形区域：$0\leqslant x\leqslant \pi$，$0\leqslant y\leqslant \pi$.

4. 更换积分次序：

(1) $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy$；　　(2) $\int_0^{\pi} dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

5. 计算由平面 $x+y+z=6$，$x=0$，$y=0$ 及 $x+2y=4$ 所围成的立体的体积 .

6. 用二重积分求曲线 $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$ 所围区域的面积 .

7. 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分为一立体，求该立体的体积.

8. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 Ω 为由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域.

9. 分别用柱面坐标、球面坐标和直角坐标计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\,dv$，其中 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 及圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成

(含 z 轴部分).

10. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内的那部分面积 $(a>0)$.

习题(A)答案

一、填空题

1. $I_1 \geqslant I_2$.　2. $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$.

4. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz$.

二、选择题

1. B.　2. C.　3. B.

三、计算题

1. $\frac{13}{6}$.　2. $2\ln 2-1$.　3. $\pi(e^{-4}-e^{-9})$.　4. $\frac{1}{8}$.　5. $\frac{\pi}{10}$.

习题(B)答案

1. $-\frac{27}{8}$.　2. $e-\frac{1}{e}$.

3. 2π. 提示:利用积分区域的可加性,去掉被积函数的绝对值符号.

4. 更换积分次序:

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y)\,dx$;

(2) $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\arcsin y} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx$.

5. $\frac{64}{3}$.　6. 9.　7. $\frac{5}{12}\pi R^3$.　8. $\frac{\pi}{4}$.　9. $\frac{\pi}{12}$.　10. $2a^2(\pi-2)$.

第十章　曲线积分与曲面积分

一、本章知识的作用与意义

本章将把积分概念推广到积分范围为具有有限长度的一段曲线弧或具有有限面积的一片曲面的情形.曲线积分与曲面积分是积分学的重要组成部分.对弧长的曲线积分与对面积的曲面积分是定积分和二重积分的直接推广,因而有类似的作用,对坐标的曲线积分和曲面积分有明显的物理背景,它们在高等数学中占有很重要的地位,对解决几何问题和物理中的应用问题都起着相当重要的作用.在计算上,将平面或空间曲线积分化成定积分的计算;将空间曲面积分化成投影区域上的二重积分的计算.在理论上,建立了平面闭曲线上对坐标的曲线积分与该闭曲线围成的闭区域上的二重积分的关系;建立了闭曲面上对坐标的曲面积分与闭曲面围成的空间闭区域上的三重积分的关系.从而,对掌握高等数学的思想方法有很重要的实际意义.

二、知识要点及思想方法

(一) 曲线积分

1.对弧长的曲线积分与对坐标的曲线积分概念的区别

对弧长的曲线积分:$\int_L f(x,y)\,ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.　(1)

对坐标的曲线积分:$\int_L P(x,y)\,dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$,

$$\int_L Q(x,y)\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.\qquad(2)$$

定义中的共同点:与定积分、重积分定义相似,都有“分割、相乘、求和、取极限”的四个步骤.

不同点:对弧长的曲线积分的积分和式的每一项都是被积函数 $f(x,y)$ 在小弧段上某一点 (ξ_i,η_i) 处的值 $f(\xi_i,\eta_i)$ 与该小弧段长 Δs_i 的乘积,而弧长总是正的,与曲线的方向没有关系.对坐标的曲线积分的积分和式的每一项都是被积函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在小弧段上某点 (ξ_i,η_i) 处的值 $P(\xi_i,\eta_i)$,$Q(\xi_i,\eta_i)$ 分别与 Δx_i,Δy_i 的乘积,而 Δx_i,Δy_i 分别是有向弧段(或说向量)$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 在 x 轴,y 轴上的投影.向量的投影不仅取决于向量的模,而且也取决于向量与坐标轴正向夹角的余弦,起点和终点相反的两个向量在坐标轴上的投影相反,与曲线弧的方向有关.

注 ①对弧长的曲线积分与曲线的方向无关,而对坐标的曲线积分与曲线的方向有关,即 $-L$ 是与 L 相反的曲线弧,则有

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_{-L} f(x,y)\,ds,$$

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{-L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

②以上两种概念都可推广到空间曲线上.

2.两类曲线积分的计算方法

(1) 对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\,ds$

①曲线 L 的方程由参数方程给出,$L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \alpha \leqslant t \leqslant \beta$,则

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

②曲线 L 的方程由直角坐标方程给出,$L:y=\psi(x)$,$a \leqslant x \leqslant b$,则

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,dx.$$

同理,若 $L:x=\varphi(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$,则

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,dy.$$

③曲线 L 的方程由极坐标方程给出，L：$r=r(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，则

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

注　该公式利用了极坐标与直角坐标的关系，将 L 的方程化为参数方程的情形，θ 看作参数.

④对空间曲线积分$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$，若 Γ 的参数方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$　$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt.$$

(2) 对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$

①曲线 L 由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$给出时，当参数 t 单调地从 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 由 L 的起点 A 沿 L 移动到终点 B，则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\\&=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt.\end{aligned}$$

②曲线 L 由直角坐标方程 $y=\psi(x)$ 给出时，则

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\}\,dx$$

其中下限 a 对应于 L 的起点，上限 b 对应于 L 的终点.

③曲线 L 由极坐标方程给出时，利用极坐标与直角坐标的关系，将 L 的方程化为参数方程情形来处理，一般用得较少.

④空间曲线 Γ 由参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$ 给出时，α，β 分别是对应于 Γ 的起点与终点的参数值，则

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz\\&=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+\\&\quad R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\,dt.\end{aligned}$$

注　①两类曲线积分的共同点是都化为定积分计算，当积分曲线

L由参数方程$x=x(t)$，$y=y(t)$给出时，被积函数$f(x,y)$或$P(x,y)$、$Q(x,y)$定义在L上，故x，y实质上是t的函数，且弧微分ds及dx，dy都可以用t，dt表示，故最终都化为积分变量为t的定积分.

②对弧长的曲线积分中，积分下限必须小于积分上限.对坐标的曲线积分中，积分下限不一定小于积分上限，分别对应于L的起点与终点.

③计算公式中用了从一般到特殊的思想方法.

3.两类曲线积分的关系

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds,$$

其中$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$，$\cos\beta=\frac{dy}{ds}$是有向曲线弧L上在点$P(x,y)$处的切向量的方向余弦.

注 ①公式左端把P，Q看成被积函数是对坐标的曲线积分；公式右端把$P\cos\alpha+Q\cos\beta$看成被积函数是对弧长的曲线积分.以上公式是对不同的被积函数而言的.

②L改变方向时，公式左端变号，右端$\cos\alpha$，$\cos\beta$变号，公式右端也变号.

③以上关系可推广到空间曲线Γ的情形：

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds,$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为Γ上点(x,y,z)处的切向量的方向余弦.

（二）格林公式及其应用

1.格林公式及思想方法

设闭区域D由分段光滑的闭曲线L围成，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_L P\,dx+Q\,dy,$$

其中L是D的取正向的边界曲线.

注 格林公式实现了区域D上的二重积分与区域的边界曲线上的曲线积分的转化，可以看作是定积分中的牛顿—莱布尼茨公式的一

个推广.利用格林公式可以将曲线积分化为二重积分来计算,同时也可将二重积分转化为曲线积分计算(见例10).

2.曲线积分与路径无关的等价条件

$P(x,y)$,$Q(x,y)$在单连通开区域D内有一阶连续偏导数,下列四个条件等价:

①$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内恒成立;

②在D内,曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关;

③在D内,对任意闭曲线L,有$\oint_L Pdx+Qdy=0$;

④在D内,$Pdx+Qdy$是某二元函数的全微分.

注　①四个等价条件是针对在P、Q具有一阶连续偏导数的单连通开区域内而言的,条件②、③中的积分曲线L或闭曲线L必须在单连通域内部,否则,结论不一定成立.

②当$Pdx+Qdy$是某二元函数$u(x,y)$的全微分时,即$du=Pdx+Qdy$,则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy,$$

对(x_0,y_0)的选取不同,$u(x,y)$将不同,但仅差一常数.(x_0,y_0)与积分路径的选择应以积分计算简单为准则.一般将(x_0,y_0)取在坐标轴上,积分路径取平行于坐标轴的直线段.

(三)曲面积分

1.对面积的曲面积分与对坐标的曲面积分概念的区别

$f(x,y,z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分:

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

$R(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标x,y的曲面积分:

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy},$$

$P(x,y,z)$及$Q(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标y,z及z,x的曲

面积分分别为

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz},$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

共同点:两类曲面积分的定义都是通过“分割,乘积,求和,取极限”四个步骤得到的.

不同点:对面积的曲面积分定义中的 ΔS_i 是 Σ 上任一小曲面 ΔS_i 的面积;而对坐标的曲面积分定义中的 $(\Delta S_i)_{xy}$,$(\Delta S_i)_{yz}$,$(\Delta S_i)_{zx}$ 分别是 Σ 上任一有向小曲面 ΔS_i 在三个坐标面上的投影,而这些投影是 ΔS_i 在坐标面上投影区域的面积再贯以“+”“-”号.

注 ①在对面积的曲面积分定义中,ΔS_i 所代表的小块曲面的面积是没有方向的.因此决定了对面积的曲面积分的无向性.当曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$ 时,$dS=\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz$;当曲面 Σ 的方程为 $y=y(x,z)$ 时,$dS=\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz$;当曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$ 时,$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$.

②在对坐标的曲面积分定义中,$(\Delta S_i)_{xy}$ 是有向曲面 ΔS_i 在 xOy 坐标面上的投影,该投影为曲面 ΔS_i 在 xOy 面上的投影区域的面积,再根据有向曲面的侧填上正负号.如曲面 Σ 上一小块曲面 ΔS 在 xOy 面上的投影区域的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}$(始终为正),而 ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 是一个带符号的值.即

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0,\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0,\\ 0, & \cos\gamma=0,\end{cases}$$

其中 γ 为 ΔS 上各点处的法向量与 z 轴正向的夹角.同理

$$(\Delta S)_{yz}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{yz}, & \cos\alpha>0,\\ -(\Delta\sigma)_{yz}, & \cos\alpha<0,\\ 0, & \cos\alpha=0,\end{cases}$$

其中 α 为 ΔS 上各点处的法向量与 x 轴正向的夹角．同理

$$(\Delta S)_{zx}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{zx}, & \cos\beta>0,\\ -(\Delta\sigma)_{zx}, & \cos\beta<0,\\ 0, & \cos\beta=0,\end{cases}$$

其中 β 为 ΔS 上各点处的法向量与 y 轴正向的夹角．

2．两类曲面积分的计算

两类曲面积分计算的共同点是用到了曲面在坐标面上的投影，投影区域就是将曲面积分化为二重积分后的积分区域．

注　将曲面投影到哪个坐标面上，在对面积的曲面积分中，一般由曲面的显函数方程决定；在对坐标的曲面积分中，要由对哪些变量积分而决定．具体情况如表 10.1 和表 10.2 所示．

表 10.1

	对面积的曲面积分	
曲面方程	投影坐标面	对不同的方程求出不同的 dS，化成相应坐标面上的二重积分
$z=z(x,y)$	xOy 面	
$y=y(z,x)$	zOx 面	
$x=x(y,z)$	yOz 面	

表 10.2

对坐标的曲面积分			
积分类型	投影坐标面	侧的划分	化为二重积分符号的确定
$\iint\limits_{\Sigma}R\,dx\,dy$	xOy 面	上下之分	上侧取“+”，下侧取“-”
$\iint\limits_{\Sigma}Q\,dz\,dx$	zOx 面	左右之分	右侧取“+”，左侧取“-”
$\iint\limits_{\Sigma}P\,dy\,dz$	yOz 面	前后之分	前侧取“+”，后侧取“-”

封闭曲面有内侧与外侧之分，可用分片可加性，也可用后面的高斯公式．

计算公式：

$$\iint_{\Sigma} R\,dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R\,[x,y,z(x,y)]\,dxdy;$$

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P\,[x(y,z),y,z]\,dydz;$$

$$\iint_{\Sigma} Q\,dzdx = \pm \iint_{D_{xz}} Q\,[x,y(x,z),z]\,dzdx.$$

对坐标的曲面积分的计算,关键是先将曲面投影到坐标面上,再化成二重积分,正负号可由曲面的侧确定.

3.两类曲面积分的关系

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为有向曲面 Σ 指定侧的法线方向的方向余弦.

注　①由上知 $dydz = \cos\alpha dS, dzdx = \cos\beta dS, dxdy = \cos\gamma dS$.

②由以上公式可以实现两类不同的曲面积分之间的转化.

③由以上公式可以实现曲面积分在不同坐标下的转化,如计算左端要将 Σ 分别投影到三个坐标面上,计算三个不同的对坐标的曲面积分.用①中的关系可化为对相同坐标的曲面积分,将 Σ 投影到同一坐标面上,从而简化计算(见例 23 解法 2).

(四) 高斯公式的思想方法

设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成,函数 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在 Ω 上有一阶连续偏导数,则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy,$$

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \oiint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧.

注　①高斯公式描述了在空间立体上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系,它可以看作是牛顿—莱布尼茨公式、格林公式的推广.它是计算曲面积分的一个重要手段.

②利用高斯公式时应注意公式成立的条件,即曲面 Σ“封闭”、“外侧”. 对于曲面不封闭的情况,添补曲面构成封闭曲面,再利用高斯公式,这是计算曲面积分的常用方法,添补的曲面一般选取与坐标面平行的平面,以便于曲面积分的计算,添补曲面的侧应与原曲面的侧一同构成闭曲面的外侧或内侧(见例 22 解法 2 或例 23 解法 3).

三、解题研究

(一)两类曲线积分的计算

例 1　计算 $\int_L x\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 上从 $B(0,a)$ 到 $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 的一段弧(如图 10.1).

分析　曲线 L 的方程是直角坐标方程的隐函数形式,因此先写出 L 的方程的显函数形式,再确定自变量取值区间,求出 $\mathrm{d}s$ 代入公式,再利用分段可加性.

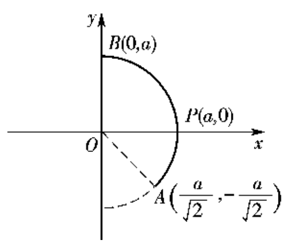


图 10.1

解法 1　由于 $\int_L x\mathrm{d}s=\int_{\widehat{BP}} x\mathrm{d}s+\int_{\widehat{PA}} x\mathrm{d}s$,

在 $\widehat{BP}$ 上,$y=\sqrt{a^2-x^2}$,$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y_x'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

在 $\widehat{AP}$ 上,$y=-\sqrt{a^2-x^2}$,

所以　$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^a \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a a\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}s$$

(这两个积分均为广义积分)

$$=a^2+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^2.$$

分析　由于 L 为圆周的一部分,因此也可以用参数方程形式来计算,先写出 L 的参数方程,再确定参数的取值区间,化成定积分计算.

解法 2　曲线 L 的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$　$\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,故

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=a\mathrm{d}\theta.$$

于是　$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot a\mathrm{d}\theta=a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^2.$$

注　①计算对弧长的曲线积分时应注意曲线方程的单值性.

②对弧长的曲线积分化为定积分时要特别注意下限小于上限.

③该题下面的解法错误:

在 $\overset{\frown}{PA}$ 上,$y=-\sqrt{a^2-x^2}$,$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y_x'^2}\mathrm{d}x=\dfrac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

在 $\overset{\frown}{BP}$ 上,$y=\sqrt{a^2-x^2}$,$\mathrm{d}s=\dfrac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

所以,$\displaystyle\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{ax\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^2.$

错误的原因在于没有注意到曲线积分的单值性(见解法 1).

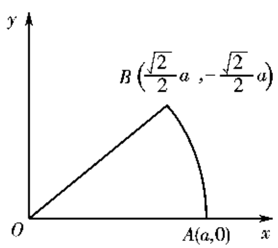


图 10.2

例 2　计算$\displaystyle\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$,$L$ 为由圆周 $x^2+y^2=a^2$,直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限所围图形的边界(如图 10.2).

分析　曲线 L 由三段光滑曲线组成,写出每段的方程,用积分的分段可加性计算.

解　因为$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\left[\int_{\overline{OA}}+\int_{\overset{\frown}{AB}}+\int_{\overline{OB}}\right]e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，

$\overline{OA}$：$y=0$，$0\leqslant x\leqslant a$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$，

$\overset{\frown}{AB}$：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\mathrm{d}s=a\mathrm{d}t$，

$\overline{OB}$：$y=x$，$0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\mathrm{d}s=\sqrt{2}\mathrm{d}x$，

故
$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a e^x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a a\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\mathrm{d}x$$
$$=e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1=2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a.$$

注　本题对曲线的不同部分采用了不同形式的方程.确定曲线的方程时，同时确定参数的取值区间，依据下限小、上限大的原则化为定积分.

例 3　计算曲线积分$\oint_L|y|\mathrm{d}s$，其中 L 为双纽线
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

分析　L 关于 x 轴，y 轴及原点对称，而$|y|$是关于 x 的偶函数，也是关于 y 的偶函数.

$\oint_L|y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1}|y|\mathrm{d}s$，$L_1$ 为 L 位于第一象限的部分.

解　由于 L 关于坐标轴及原点对称，$|y|$为关于 x 或 y 的偶函数，L_1 为 L 在第一象限的部分.

L_1 的方程为 $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$（化为极坐标方程），

故
$$\oint_L|y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1}|y|\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}|r(\theta)\sin\theta|\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{a^2\cos 2\theta+\left(a\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=-4a^2\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

注　计算对弧长的曲线积分时利用被积函数与积分曲线的对称性与计算重积分时利用对称性的道理相同.

例 4　计算 $I=\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$，L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x=y$ 相交的圆周，其中 $a>0$.

分析　先求 L 的方程，再利用 L 的表达式化为定积分计算.

解　L 的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x=y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y^2+z^2=a^2,\\ x=y,\end{cases}$

于是
$$I=\int_L \sqrt{a^2}\,ds=a\int_L ds=a\cdot 2\pi a=2\pi a^2.$$

注　在计算曲线积分时，将 L 的表达式代入被积函数中，这一点与二重积分完全不同，二重积分计算中，区域边界曲线表达式不能代入被积函数中，曲面积分可作类似的处理.请注意这一点.

例 5　计算 $\oint_L \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中曲线 L 为以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 为顶点的正方形的正向.

分析　积分曲线 L 是分段光滑的，利用积分的分段可加性分别计算四条有向线段上的积分，再求和.

解　在曲线 L 上，$\dfrac{1}{|x|+|y|}=1$ 恒成立.

L 由四条有向线段组成闭曲线：

$\overline{AB}$：$y=1-x$，x 从 1 到 0；$\overline{BC}$：$y=1+x$，x 从 0 到 -1；

$\overline{CD}$：$y=-1-x$，x 从 -1 到 0；$\overline{DA}$：$y=-1+x$，x 从 0 到 1.

所以
$$\oint_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\left[\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right]\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$
$$=\int_1^0 [1-1]\,dx+\int_0^{-1} 2dx+\int_{-1}^0 [1-1]\,dx+\int_0^1 2dx$$
$$=-2+2=0.$$

注　虽然题中给出的是两个不同的对坐标的曲线积分（即组合曲线积分），但可以利用变量间的关系化成对同一积分变量的定积分.

例 6　计算 $\oint_L (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$，其中 L 为圆柱

$x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,h>0)$ 的交线，从 x 轴正向看，L 为逆时针方向.

分析　将空间曲线化为参数方程形式，计算时比较方便.

解　L 的参数方程为：$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=h-h\cos t, \end{cases}$

点 $(a,0,0)$ 沿 L 一周回到点 $(a,0,0)$ 时，参数 t 从 0 变到 2π. 所以

$$\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\{[a\sin t-h+h\cos t](a\cos t)'+[h-h\cos t-a\cos t](a\sin t)'$$

$$+[a\cos t-a\sin t](h-h\cos t)'\}dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}[-(a+h)+h\sin t+h\cos t]dt=-2\pi a(a+h).$$

注　计算空间曲线上的积分时，一般用参数方程形式比较简单.

例 7　在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=\alpha\sin x$ $(\alpha>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的曲线积分 $\int_L (1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小.

分析　先求曲线族上的曲线积分，它是 α 的函数，再求函数的最小值.

解　$I(\alpha)=\int_0^{\pi}[1+\alpha^3\sin^3 x+(2x+\alpha\sin x)\alpha\cos x]dx$

$$=\pi-4\alpha+\frac{4}{3}\alpha^3.$$

令 $I'(\alpha)=-4+4\alpha^2=0$，$\alpha=1$，$\alpha=-1$ (舍去).

$\alpha=1$ 是 $I(\alpha)$ 在 $(0,\ )$ 内的唯一驻点. 又 $I''(\alpha)=8\alpha$，$I''(1)=8>0$，所以 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=1$ 时取得最小值.

故所求曲线 L 为 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

（二）两类曲线积分的关系

例 8 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为

(1) 在 xOy 平面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

(2) 沿抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

(3) 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

分析 根据两类曲线积分的关系，先求 L 的方向余弦，再代入两类曲线积分公式中即可得结果.

解 (1) 直线 L 的方向余弦为 $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L \frac{1}{\sqrt{2}}\left[P(x,y) + Q(x,y)\right]ds.$$

(2) L 方程为 $y = x^2$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，有

$$ds = \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx = \sqrt{1 + 4x^2}\,dx,$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\left[P(x,y) + 2xQ(x,y)\right]ds.$$

(3) L 方程为 $y = \sqrt{2x - x^2}$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，有

$$ds = \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx,$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \sqrt{2x - x^2},\ \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}} = 1 - x,$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\ =&\int_L \left[P(x,y)\sqrt{2x - x^2} + Q(x,y)(1 - x)\right]ds.\end{aligned}$$

例 9 设 Γ 为曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲

线弧,把对坐标的曲线积分$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$化为对弧长的曲线积分.

分析　先求出 Γ 的方向余弦,再代入两类曲线积分关系的公式中.

解　$\mathrm{d}s = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+4t^2+9t^4}\,\mathrm{d}t$

$$= \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{2t\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{3t^2\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

从而

$$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s.$$

注　对于两类空间曲线积分的关系,要注意被积函数中 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 仍是 x,y,z 的函数.

(三) 格林公式的应用及曲线积分与路径无关的问题

例 10　计算$\oint_L e^{y^2}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$,其中 L 为椭圆 $4x^2+y^2=8x$ 沿顺时针方向.

分析　L 是闭曲线,但方向是 L 围成的区域边界曲线的负方向,利用格林公式时差一负号.

解　$P(x,y) = e^{y^2}$,$Q(x,y) = x$,$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{y^2}$,$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$.

设 D 为 L 围成的闭区域,则

$$\oint_L e^{y^2}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = -\iint_D \left[1 - 2ye^{y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi\times2\times1 = -2\pi.$$

注　D 关于 x 轴对称,$2ye^{y^2}$ 为 y 的奇函数,$\iint_D 2ye^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

例 11 **计算**$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$,**已知点** $A(-1,-1)$,$B\left(\frac{1}{2},0\right)$,$C(0,1)$**为**$\triangle ABC$**三顶点**,$L$**为**$\triangle ABC$**边界曲线的逆时针方向**.

分析 直接计算比较麻烦,利用格林公式化为二重积分计算.但 P,Q 在三角形区域内的点 $O(0,0)$ 处无定义,因此谈不上偏导数连续,不能直接使用格林公式.格林公式对复连通区域仍适用,为解决问题,考虑从中挖去原点.

解 由于 $P = \frac{y}{x^2 + y^2}$,$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$,作圆周 L_1:$x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$,取逆时针方向(如图 10.3).

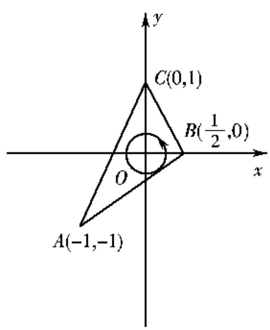


图 10.3

记 $-L_1$ 与 L 所围的区域为 D,在 D 上,$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$,

所以
$$\oint_{-L_1 + L} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D 0\,dxdy = 0.$$

故
$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi \text{(利用圆的参数方程)}.$$

注 在复连通区域上使用格林公式,往往可以实现曲线积分路线的转化,在将一个单连通区域变为复连通区域时,增加的辅助曲线应尽可能有利于曲线积分的计算.

例 12 **计算曲线积分**$\int_L (e^{\sin y} + x)\,dy - \left(y - \frac{1}{2}\right)dx$,**其中** L **是由位**

于第一象限中的直线段 $x+y=1$ 与位于第二象限中的圆弧 $x^2+y^2=1$ 构成的曲线,方向是由 $A(1,0)$ 到 $B(0,1)$ 再到 $C(-1,0)$.

分析　直接计算较困难,这里积分曲线不封闭,需增加辅助曲线 $\overline{CA}$,使得 $\overline{CA}+L$ 为封闭曲线,从而利用格林公式计算曲线积分.

解　作辅助曲线 $\overline{CA}$:$y=0$,x 从 -1 到 1.

记 $\overline{CA}+L$ 所围闭区域为 D,故

$$\int_L (x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\overline{CA}}(x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\oint_{L+\overline{CA}}(x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\iint_D[1-(-1)]dxdy=2\times\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1.$$

所以

$$\int_L (x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\int_{\overline{CA}}(x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

注　利用格林公式将原曲线积分化为一个二重积分与所添的辅助曲线上的曲线积分的代数和,辅助曲线上的曲线积分较原曲线积分在计算上要简单容易.

例 13　计算曲线积分 $\int_L e^x\cos y dy+e^x\sin y dx$,其中 L 从 $O(0,0)$ 沿摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 到 $A(\pi a,2a)$(如图 10.4).

分析　直接计算很困难,利用曲线积分与路径无关简化积分路径.

解法 1　因为 $P(x,y)=e^x\sin y$,$Q(x,y)=e^x\cos y$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y,$$

曲线积分与路径无关,故

$$\int_L e^x\cos y dy+e^x\sin y dx$$

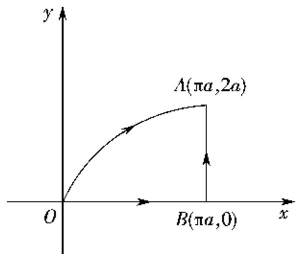


图 10.4

$$= \int_{\overline{OB}} e^x \cos y\,dy + e^x \sin y\,dx + \int_{\overline{BA}} e^x \cos y\,dy + e^x \sin y\,dx$$

$$= 0 + \int_0^{2a} e^{\pi a} \cos y\,dy = e^{\pi a} \sin 2a .$$

解法 2　此题还可用求原函数的方法来计算.

因为 $e^x \cos y\,dy + e^x \sin y\,dx = d(e^x \sin y)$，

所以 $$\int_L e^x \cos y\,dy + e^x \sin y\,dx = \int_L d(e^x \sin y)$$

$$= (e^x \sin y)\Big|_{(0,0)}^{(\pi a,2a)} = e^{\pi a} \sin 2a .$$

注　利用曲线积分与路径无关计算曲线积分时的条件：

①**区域** D **是单连通的开区域；**

②$\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial P}{\partial y}$**在** D **内连续且相等，否则这个方法不能使用.**

例 14　求$\oint_L \frac{xy^2 dy - x^2 y dx}{x^2 + y^2}$，**其中** L **为圆周** $x^2 + y^2 = a^2$ **的顺时针方向.**

分析　此曲线积分中的被积函数在 (0,0) **点不连续，不能直接用格林公式. 先将曲线积分化成满足格林公式条件的形式，然后再用格林公式计算.**

解　在 L **上，**$x^2 + y^2 = a^2$，**所以**

$$\oint_L \frac{xy^2 dy - x^2 y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2} \oint_L - x^2 y dx + xy^2 dy$$

$$= -\frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}-\frac{\partial(-x^2y)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$= -\frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}[y^2+x^2]\,dxdy$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr = -\frac{1}{a^2}\times 2\pi\times\frac{a^4}{4} = -\frac{\pi}{2}a^2$$

注　从本例可看出,虽然有些曲线积分不满足格林公式的条件,但有时可将其化成满足格林公式的曲线积分,再利用格林公式加以计算,化简过程中要注意到被积式中的 x,y 满足曲线 L 的方程,这一点常常很重要.

(四) 变力做功的问题

例 15　设在半平面 $x>0$ 内有力 $F=-\frac{k}{\rho^3}(xi+yj)$ 构成力场,其中 k 为常数,$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.证明在此力场中场力所做的功与所取路径无关.

证明　设 A,B 为半平面 $x>0$ 内任意两点,L 是在 $x>0$ 内从 A 到 B 的任意一条曲线,则场力 F 沿 L 所做的功为

$$W=\int_L\frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{-ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy,$$

其中

$$P=\frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}},Q=\frac{-ky}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3kxy}{(x^2+y^2)^{5/2}},\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3kxy}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

在 $x>0$ 内,$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$且连续,故曲线积分与路径无关,即场力所做的功与所取路径无关.

注　此题还可以用格林公式证明.在 $x>0$ 内,$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

设 A,B 为半平面 $x>0$ 内任意两点.L_1,L_2 为任意两条从 A 到 B 的曲线,且 $L_1+(-L_2)$ 为一个逆时针方向的闭曲线,D 为该闭曲线围成的区域,则

$$\oint_{L_1+(-L_2)} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy = 0,$$

即
$$\int_{L_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{L_2} P\,dx + Q\,dy.$$

故在此力场中场力 F 所做的功与所取路径无关.

例 16 求力 $F = yi + zj + xk$ 沿有向闭曲线 Γ 所做的功,其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截形成的三角形的整个边界,如图 10.5 所示,从 z 轴正向看去,沿顺时针方向.

分析 先将变力所做的功表示为对坐标的曲线积分,再由 L 的方程和方向计算曲线积分.

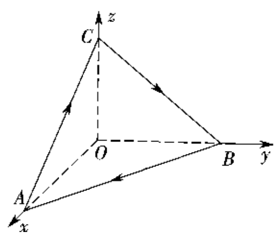


图 10.5

解 F 沿曲线 Γ 所做的功

$$W = \int_{\Gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \left(\int_{\overline{AC}} + \int_{\overline{CB}} + \int_{\overline{BA}}\right) y\,dx + z\,dy + x\,dz.$$

$\overline{AC}$在 xOz 面上,方程为$\begin{cases} z + x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ $dy = 0$.

$\overline{CB}$在 yOz 面上,方程为$\begin{cases} y + z = 1, \\ x = 0, \end{cases}$ $dx = 0$.

$\overline{BA}$在 xOy 面上,方程为$\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ $dz = 0$.

$$W = \int_{\overline{AC}} y\,dx + z\,dy + x\,dz + \int_{\overline{CB}} y\,dx + z\,dy + x\,dz + \int_{\overline{BA}} y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

$$=\int_0^1(1-z)\,dz+\int_0^1(1-y)\,dy+\int_0^1(1-x)\,dx$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 3=\frac{3}{2}.$$

(五) 二元函数的全微分求积问题

例 17　判断曲线积分$\int_L(x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$与积分路径无关,并求被积函数的一个原函数 $u(x,y)$

分析　只要验证$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,则曲线积分与路径无关.选取特殊的路径如平行于坐标轴的折线,求 $u(x,y)$.

解　$P(x,y)=x^4+4xy^3$,$Q(x,y)=6x^2y^2-5y^4$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$,且在整个平面上连续,所以该曲线积分与路径无关,由此可知$(x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$是某二元函数 $u(x,y)$的全微分.

下面求 $u(x,y)$,一般有以下三种方法.

解法 1　取特殊路径,如从$(0,0)$到$(x,0)$再到(x,y)的折线,

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$$

$$=\int_0^x x^4\,dx+\int_0^y(6x^2y^2-5y^4)\,dy$$

$$=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5.$$

解法 2　不定积分法.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=x^4+4xy^3,$$

$$u(x,y)=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$为 y 的任意函数,又

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=6x^2y^2-5y^4,\text{同时}\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y^2+\varphi'(y),$$

所以　$\varphi'(y)=-5y^4$,$\varphi(y)=-y^5+C$.

取 $C=0$**,得到一个原函数**

$$u(x,y)=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5.$$

注　原函数 $u(x,y)$ **的形式不唯一,但仅差一常数.**

解法 3　**凑微分法(观察法).**

$$\begin{aligned}&(x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy\\&=x^4dx-5y^4dy+4xy^3dx+6x^2y^2dy\\&=d\left(\frac{1}{5}x^5-y^5\right)+d(2x^2y^3)\\&=d\left(\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3\right),\end{aligned}$$

所以
$$u(x,y)=\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3+C.$$

$C=0$ **时,求出一个原函数为** $u(x,y)=\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3$.

例 18　**试确定** a,b **的值,使** $\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$ **在** $y>0$ **内是函数** $u(x,y)$ **的全微分,并求出** $u(x,y)$.

分析　验证 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ **在** $y>0$ **内成立,即可求出** a,b.**再利用曲线积分与路径无关求** $u(x,y)$.

解　由 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ax+y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}\right)$ **得**

$$x^2-y^2-2axy=x^2-y^2-2xy+2bx,$$

因此 $a=1,b=0$.

求 $u(x,y)$ **时为方便起点取为** $(0,1)$,**选折线** $(0,1)$ **到** $(0,y)$ **再到** (x,y) **作为积分路径.代入** a,b **的值,得**

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy\\&=\int_1^y\frac{y}{y^2}dy+\int_0^x\frac{x+y}{x^2+y^2}dx\end{aligned}$$

$$= \ln y + \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}dx + \int_0^x \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \ln y + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_0^x + \arctan\frac{x}{y}\Big|_0^x$$

$$= \ln y + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \ln y + \arctan\frac{x}{y}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{x}{y}.$$

(六) 总结曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 的计算方法

计算 $I = \int_L Pdx + Qdy$ **的方法一般有三类**.

①**利用** L **的方程化为定积分计算**.**注意:上、下限分别对应起点与终点的参数值**.

②**利用格林公式**.

解题程序如下:先判断 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ **是否成立**.

当 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ **时**,

$$\begin{cases} L\text{ 为闭合曲线},\oint_L Pdx + Qdy = 0; \\ L\text{ 为非闭合曲线,取特殊的路径,例如}\int_L Pdx + Qdy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy\text{,一般取平行于坐标轴的路径或沿坐标轴的路径,或先求原函数再代值,如例 13 中的方法}. \end{cases}$$

当 $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ **时**,

$$\begin{cases} L\text{ 为闭合曲线,用格林公式 } I=\iint\limits_D\left[\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy; \\ L\text{ 为非闭合曲线,加辅助曲线 } L_1, I=\oint_{L+L_1}Pdx+Qdy-\int_{L_1}Pdx \\ +Qdy=\pm\iint\limits_D\left[\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy-\int_{L_1}Pdx+Qdy\text{,重积分前面的} \\ \text{“}\pm\text{”号,由 } L+L_1 \text{ 构成的 } D \text{ 的边界曲线的正向或负向来确定.} \end{cases}$$

③当被积函数在闭曲线所围区域中有奇点时,在区域内作辅助曲线先去掉奇点,再用格林公式计算,这里辅助曲线的选取要有利于曲线积分的计算.

(七) 关于对面积的曲面积分及利用被积函数奇偶性和积分曲面的对称性计算曲面积分

这类问题解题方法的共同点是将曲面积分化为二重积分求解.

例 19 计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$,其中 Σ 为平面 $x=0$,$y=0$ 及曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,$x\geqslant0$,$y\geqslant0$ 所围的闭曲面.

分析 积分曲面由 Σ_1(yOz 面上的半圆域),Σ_2(xOz 面上的半圆域),Σ_3(第一、五卦限的球面)三部分组成.因此,用曲面积分的分片可加性计算,同时注意变量 x,y,z 满足对应的曲面方程.

解 曲面由 Σ_1(yOz 面上的半圆域),Σ_2(xOz 面上的半圆域),Σ_3(第一、五卦限的球面)组成.

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\left[\oiint\limits_{\Sigma_1}+\oiint\limits_{\Sigma_2}+\oiint\limits_{\Sigma_3}\right](x^2+y^2+z^2)dS.$$

Σ_1 的方程为 $x=0\ (y^2+z^2\leqslant a^2, y\geqslant0)$.$\Sigma_1$ 在 yOz 面上的投影为

$$D_1:\begin{cases} z^2+y^2\leqslant a^2 & (x=0), \\ y\geqslant0, \end{cases}\quad dS=dydz.$$

Σ_2 的方程为 $y=0\ (x^2+z^2\leqslant a^2, x\geqslant0)$.$\Sigma_2$ 在 xOz 面上的投影为

$$D_2:\begin{cases} x^2+z^2\leqslant a^2 & (y=0), \\ x\geqslant0, \end{cases}\quad dS=dxdz.$$

所以
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS$$
$$=\left[\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}\right](x^2+y^2+z^2)\,dS$$
$$=\iint_{D_1}(y^2+z^2)\,dydz+\iint_{D_2}(x^2+z^2)\,dxdy+\iint_{\Sigma_3}a^2dS$$
$$=\frac{\pi}{4}a^4+\frac{\pi}{4}a^4+\pi a^4=\frac{3}{2}\pi a^4.$$

注　本题利用了曲面积分的分片可加性,不同的曲面上被积函数具有不同形式.在 Σ_3 上的积分利用了被积函数 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 使计算简化.

例 20　计算 $\iint_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$.其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

分析　这是一个普通的对面积的曲面积分的计算问题,首先要考虑曲面的方程 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$ 或 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$,曲面分别在 yOz 面或 xOz 面上投影.若将曲面方程写为 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$,曲面分为两块,分别在这两块曲面上计算.同时注意 dS 的代替.

解法 1　曲面 Σ 由 Σ_1:$x=\sqrt{R^2-y^2}$ 与 Σ_2:$x=-\sqrt{R^2-y^2}$ 组成,Σ_1 与 Σ_2 在 yOz 面上的投影均为
$$D:-R\leqslant y\leqslant R,0\leqslant z\leqslant H\quad(x=0).$$
在 Σ_1 与 Σ_2 上,$dS=\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$,
$$\iint_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\left[\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}\right]\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\iint_{D}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz+\iint_{D}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$$
$$=2\int_0^H\frac{R}{R^2+z^2}dz\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

解法 2　曲面关于 yOz 面对称且被积函数是关于 x 的偶函数.

$$\iint_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{\Sigma_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{D}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$$

$$=2\int_0^H\frac{R}{R^2+z^2}dz\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy$$

$$=2\pi\int_0^H\frac{R}{R^2+z^2}dz=2\pi\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^H=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

注　①计算对面积的曲面积分时,当曲面方程为隐函数时先化成显函数形式,以确定向哪个坐标面投影,此题也可用曲面方程为 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ 的情形,这时曲面向 xOz 面投影.

②解法 2 中用了对称性.一般,当曲面关于 yOz 面对称,被积函数是关于 x 的奇函数时,$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=0$;当被积函数是关于 x 的偶函数时,$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=2\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS$.$\Sigma_1$ 为 Σ 在 $x\geqslant 0$ 的部分.Σ 关于 xOz 面、xOy 面对称也有类似的结果.

③计算对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS$ 时,主要依据 Σ 的不同形式,正确写出 dS 的表达式,投影后化为二重积分计算.

例 21　计算 $\iint_{\Sigma}x^2dS$,Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于 $z=0$ 与 $z=h$ 之间的部分.

分析　Σ 在 xOy 面上的投影为一条曲线 $(x^2+y^2=a^2)$,面积为 0,故 Σ 不能向 xOy 面投影,可以向 xOz 面或 yOz 面投影.从被积函数 x^2 看,Σ 向 xOz 面投影较方便,类似于例 20 解法 1.另外,利用被积函数 x^2 是关于 y 的偶函数,Σ 关于 xOz 面对称,见例 20 解法 2.

解　因为 $\iint_{\Sigma}x^2dS=\iint_{\Sigma}y^2dS$ (利用 x 与 y 的对称性),

所以
$$\iint_{\Sigma}x^2dS=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}a^2dS$$

$$=\frac{1}{2}a^2 2\pi ah=\pi a^3h.$$

(八)计算对坐标的曲面积分及高斯公式和两类曲面积分关系的应用

例 22　**计算** $\iint\limits_{\Sigma} y\,dz\,dx + 2\,dx\,dy$，**其中** Σ **是** $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ **的上侧**.

分析　分别计算两个不同的对坐标的曲面积分，将 Σ 分别向 xOz 面和 xOy 面投影，并注意指定的侧.

解法 1　$\iint\limits_{\Sigma} y\,dz\,dx + 2\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} y\,dz\,dx + \iint\limits_{\Sigma} 2\,dx\,dy$，

$$\iint\limits_{\Sigma} y\,dz\,dx = \iint\limits_{\Sigma_1} y\,dz\,dx + \iint\limits_{\Sigma_2} y\,dz\,dx,$$

其中 Σ_1：$y=\sqrt{1-x^2-z^2}$ 取右侧；Σ_2：$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$ 取左侧.

Σ_1、Σ_2 在 xOz 面上的投影区域均为 D_{xz}：$x^2+z^2\leqslant 1$，$z\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} y\,dz\,dx &= \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2-z^2}\,dz\,dx - \iint\limits_{D_{xz}} \left(-\sqrt{1-x^2-z^2}\right) dz\,dx \\ &= 2\iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz \\ &= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr = \frac{2}{3}\pi.\end{aligned}$$

$$2\iint\limits_{\Sigma} dx\,dy = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy = 2\cdot\pi\cdot 1^2 = 2\pi.$$

其中，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant 1\ (z=0)$.

故　$\iint\limits_{\Sigma} y\,dz\,dx + 2\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{8}{3}\pi$.

分析　作辅助曲面 Σ_1：$z=0\ (x^2+y^2\leqslant 1)$，$\Sigma_1$ 取下侧，使 Σ_1 与 Σ 构成封闭曲面，且取外侧，用高斯公式.

解法 2　作辅助曲面 Σ_1：$z=0\ (x^2+y^2\leqslant 1)$，$\Sigma_1$ 取下侧. Σ_1 与 Σ 构成闭曲面且取外侧. 由高斯公式有

$$\iint\limits_{\Sigma} y\,dz\,dx + 2\,dx\,dy = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma_1+\Sigma} y\,dz\,dx + 2\,dx\,dy - \iint\limits_{\Sigma_1} y\,dz\,dx + 2\,dx\,dy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz+2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(0+1+0)\,dxdydz+2\cdot\pi\cdot 1^2$$

$$=\frac{2}{3}\pi+2\pi=\frac{8}{3}\pi.$$

注　**由上可知解法** 2 **比解法** 1 **简单**.

例 23　**已知** Σ **为锥面** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **在** $0\leqslant z\leqslant H$ **之间部分的外侧，计算曲面积分** $\iint_{\Sigma}(y-z)\,dydz+(z-x)\,dzdx+(x-y)\,dxdy$.

分析 1　**分三项计算计算量很大，利用两类曲面积分的关系化为对面积的曲面积分**.

解法 1　**由于曲面** Σ **的外法线指向** z **轴负向，所以外法线方向为** $n=\{z_x,z_y,-1\}=\left\{\frac{x}{z},\frac{y}{z},-1\right\}$**，方向余弦** $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{2}z}$**，**$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{2}z}$**，** $\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

$$\iint_{\Sigma}(y-z)\,dydz+(z-x)\,dzdx+(x-y)\,dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\,dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}\left[(y-z)\frac{x}{z}+(z-x)\frac{y}{z}-(x-y)\right]dS=\sqrt{2}\iint_{\Sigma}(y-x)\,dS$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(y-x)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=2\iint_{D_{xy}}(y-x)\,dxdy=0.$$

其中，Σ **在** xOy **面的投影为** $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant H^2$.

分析 2　**它是对不同坐标的曲面积分，化为对相同坐标的曲面积分，只需要计算一个二重积分就可以**.

解法 2　**由于** $dxdy=\cos\gamma dS$**，**$dS=\frac{1}{\cos\gamma}dxdy$**，所以**

$$dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=-\frac{x}{z}dxdy,$$

$$dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=-\frac{y}{z}dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[(y-z)\left(-\frac{x}{z}\right)+(z-x)\left(-\frac{y}{z}\right)+(x-y)\right]dxdy$$

$$=2\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy=0.$$

分析 3　**作辅助曲面** $\Sigma_1:z=H(x^2+y^2\leqslant H^2)$**,**$\Sigma_1$ **取上侧**.Σ_1 **与** Σ **构成闭曲面且取外侧,用高斯公式**.

解法 3　**作辅助平面** $\Sigma_1:z=H(x^2+y^2\leqslant H^2)$**,**$\Sigma_1$ **取上侧,**Σ_1 **与** Σ **构成闭曲面且取外侧,围成的空间闭区域为** Ω**,故**

$$\iint_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy-$$

$$\iint_{\Sigma_1}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right]dV-\iint_{x^2+y^2\leqslant H^2}(x-y)dxdy=0-0=0.$$

注　①**解法** 1 **的关键是求曲面的法向量,简单之处在于仅考虑曲面在一个坐标面上的投影**.

②**解法** 2 **的关键是化成对相同坐标的曲面积分,这样曲面的投影仅有一个,只需计算一个二重积分**.

③**解法** 3 **是将复杂的曲面积分化成一个简单的三重积分与二重积分的代数和**.**在具体问题中要根据曲面的特征与被积函数的形式选择适当的方法**.

例 24　**已知曲面** Σ **为球面** $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ **的外侧,计算曲**

面积分$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

分析 这是一个闭曲面,似乎可以用高斯公式,但闭曲面围成的空间闭区域(球)内有被积函数的奇点 $O(0,0,0)$,所以不满足高斯公式的条件,可直接计算(见解法1),也可利用在球面上 $r=a$,将积分化简,再用高斯公式(见解法2).

解法1 因为$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{r^3}dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z}{r^3}dxdy+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{z}{r^3}dxdy$,

其中 $\Sigma_1:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,取上侧;$\Sigma_2:z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,取下侧.

Σ_1 与 Σ_2 在 xOy 面的投影均为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2$,所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{r^3}dxdy&=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{a^3}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\\&=\frac{2}{a^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=\frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

同理
$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz=\iint\limits_{\Sigma}\frac{y}{r^3}dxdz=\frac{4}{3}\pi.$$

故
$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=4\pi.$$

解法2
$$\begin{aligned}&\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r^3}[xdydz+ydzdx+zdxdy]\\&=\frac{1}{a^3}\oiint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy\\&=\frac{3}{a^3}\iiint\limits_{\Omega}dv=\frac{3}{a^3}\times\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi\quad\text{(利用高斯公式)}.\end{aligned}$$

注 利用高斯公式时需注意公式成立的条件:

①空间闭区域由分片光滑闭曲面围成;

②被积函数在空间闭区域上具有一阶连续偏导数.

(九)特例

例25 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y^2+z^2)dydz$,其中 Σ 是曲面

$x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

分析　根据曲面关于变量的对称性和曲面关于坐标面的对称性,同时注意曲面的侧的对称性.

解　由于 Σ 关于 yOz 面对称,设 Σ_1 是 Σ 在 $x\geqslant 0$ 的部分,取前侧,Σ_1 的方程为 $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$,Σ_1 在 yOz 面上的投影为 D_{yz}:$y^2+z^2\leqslant R^2$.所以

$$\oiint_{\Sigma} x\,dydz=2\iint_{\Sigma_1} x\,dydz;\quad \oiint_{\Sigma} y^2\,dydz=0;\quad \oiint_{\Sigma} z^2\,dydz=0.$$

曲面 Σ 分为前后两个曲面,由它们的侧确定的投影符号相反,所以

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}(x+y^2+z^2)\,dydz&=2\iint_{\Sigma_1} x\,dydz=2\iint_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,dydz\\&=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr\\&=4\pi\times\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

注　由于对坐标的曲面积分与积分曲面的侧有关,一般不能直接利用被积函数的奇偶性与积分曲面的对称性简化计算.这是与利用对称性计算对面积的曲面积分的重要区别,应当将其化为重积分后再考虑对称性.

小结　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$ 的方法一般有两类:

(1) 计算 $\iint_{\Sigma} P\,dydz$,$\iint_{\Sigma} Q\,dzdx$,$\iint_{\Sigma} R\,dxdy$ 三者其中之一时,直接计算.依据 Σ 的方程及侧、投影化为二重积分来计算.

(2) 若计算的是上面两项或三项之和,则所用方法一般如下.①分项直接计算.②用高斯公式:若 Σ 是封闭曲面,直接用高斯公式;若 Σ 是非封闭曲面,用"补面法"构成闭曲面再用高斯公式.③利用两类曲面积分的关系,将其统一为一种曲面积分再计算.

四、练习题及答案

习题(A)

一、填空题

1. 设曲线 L 的密度为 e^{x+y},则 L 的质量为______;又若 L 为 $y=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,则 L 的质量为______.

2. 曲线积分 $\oint_L \dfrac{dx}{x^2+y^2+z^2}$ 的值为______,其中 L 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5, \\ z=1. \end{cases}$

3. 设曲线 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,周长为 a,则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,ds$ $=$______.

二、选择题

1. L 为从 $A(0,0)$ 到 $B(4,3)$ 的直线,则 $\int_L (x-y)\,ds=$ (　　).

(A) $\int_0^4 \left(x-\dfrac{3}{4}x\right)dx$　　(B) $\int_0^4 \left(x-\dfrac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}\,dx$

(C) $\int_0^3 \left(\dfrac{4}{3}y-y\right)dy$　　(D) $\int_0^3 \left(\dfrac{4}{3}y-y\right)\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}\,dy$

2. 设 L 由 $\rho=R$ 及射线 $\theta=0$ 和 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 所围成,则曲线积分

$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=$ (　　).

(A) $2(e^R-1)+\dfrac{\pi}{4}Re^R$　　(B) $3(e^R-1)+\dfrac{\pi}{4}Re^R$

(C) $2(e^R-1)+\dfrac{\pi}{3}Re^R$　　(D) $4(e^R-1)+\dfrac{\pi}{4}Re^R$

三、计算下列曲线积分

1.计算$\int_L (x-y)^2 ds$,其中 L 由点(0,0)到点(0,1)的直线段和 $y=\sqrt{1-x^2}$上从点(0,1)到点(1,0)的圆弧组成.

2.计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$,其中 L 为螺旋线$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

3.计算$\int_L 2xe^y dx+(x^2+x)e^y dy$,其中 L 为折线 $y=|x|$上从点 A(-1,1) 到 B(1,1)的部分.

4.计算$\int_L ydx+xdy+(x-y)dz$,其中 L 是从点(0,0,0)到点(1,2,3)的直线段(提示:L 的参数方程为$x=t, y=2t, z=3t, 0\leqslant t\leqslant 1$).

5.把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化为对弧长的曲线积分,其中 L 为沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点(0,0)到点(1,1)的曲线弧.

6.设 L 为闭曲线$x^2+y^2=4$,取逆时针方向一周.计算曲线积分:

$$\oint_L (2xye^x-y)dx+2(x-1)e^y dy.$$

7.计算曲线积分$\oint_L \dfrac{(yx^3+e^y)dx+(xy^3-xe^y-2y)dy}{9x^2+4y^2}$,其中 L 为椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$沿顺时针方向一周.

8.计算$\int_L (5xy-e^x\sin y)dy+e^x\cos y dx$,其中 L 为曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$,方向为沿 y 增大的方向.

四、计算下列曲面积分

1.计算$\iint_\Sigma \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+y^2}}dS$,其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$1\leqslant z\leqslant 2$之间的部分.

2. 计算$\iint\limits_{\Sigma} z\,dS$,其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在柱面$x^2+y^2=2x$内的部分.

3. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=4$取外侧,且$z\geqslant 0$,计算

$$\iint\limits_{\Sigma} yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy.$$

4. 设Σ为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$取上侧,计算

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\,dy\,dz+(y^3+ax^2)\,dz\,dx+(z^3+ay^2)\,dx\,dy.$$

5. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$取外侧,计算

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy.$$

6. 计算$\oiint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$,$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2\ (R>0)$取外侧.

7. 计算$\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$,其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$取上侧.

习题(B)

1. 计算$I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$,其中$a$,$b$为正的常数,$L$为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧.

2. 确定常数λ,使在右半平面$x>0$的向量

$$A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}i-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}j$$

为某二元函数$u(x,y)$的梯度,并求出这样一个$u(x,y)$.

3. 证明当L不经过$y=0$时,$\int_L\left(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\,dy$

与路径无关.若曲线 L 的起点和终点分别为 $A(\pi,1)$ 与 $B(\pi,2)$，试计算积分的值.

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 上 $z\geqslant\frac{a}{2}$ 的部分.

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

习题(A)答案

一、填空题

1. $\int_L e^{x+y}ds$，$\frac{\sqrt{2}}{2}(e^2-1)$.　2. $\frac{4}{5}\pi$.　3. $12a$.

二、选择题

1. B.　2. A.

三、计算下列曲线积分

1. $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$.　2. $\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$.　3. 2.　4. $\frac{1}{2}$.

5. $\int_L[P\sqrt{2x-x^2}+Q(1-x)]ds$.　6. 4π.　7. 0.　8. $\frac{5}{2}\pi-1+\cos 2$.

四、计算下列曲面积分

1. $2\sqrt{2}\pi e(e-1)$.　2. $\frac{32}{9}\sqrt{2}$.　3. 12π.　4. $\frac{29}{20}\pi a^5$.　5. $\frac{12}{5}\pi$.

6. $4\pi R^4$.　7. $-2\pi a^2$.

习题(B)

1. $\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$.　2. $\lambda=-1$，$u(x,y)=-\arctan\frac{y}{x^2}$.　3. π.

4. $\frac{3}{4}\pi a^3$.　5. $-\frac{\pi}{2}a^3$.

第十一章　无穷级数

一、本章知识的作用与意义

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分,是一种研究和表示函数及数值计算的专门工具和重要方法,无论是在数学理论本身的研究中,还是在其他科学技术领域中,都有着广泛的应用.

本章讨论了数项级数、幂级数和三角级数.数项级数收敛与发散的概念及收敛与发散的审敛法构成了数项级数理论的主要内容,连同函数项级数收敛域的概念为后面讨论幂级数和三角级数做了必要的准备.由于幂级数的每一项都是一个幂函数且收敛域形状简单,因而成为理论上最简单、应用上最重要的一类函数项级数.三角级数是研究周期现象的有力工具,也常用来研究有限区间上给出的函数,它同样是应用上非常重要的另一类函数项级数.

本章的重要概念 收敛与发散及其重要理论都是建立在极限基础之上的 函数展开成幂级数的主要依据是微分学中的泰勒定理 幂级数的运算中要用到求导数与定积分的计算.由此可见,无穷级数与微积分的其他内容有着千丝万缕的联系.

二、知识要点及思想方法

(一) 常数项级数的概念和性质

1.常数项级数收敛的定义

设有级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$,$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为该级数的部分和.如果

$\lim\limits_{n\to} s_n = s$,则称无穷项级数$\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,s 称为该级数的和,并记 $s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$.如果 $\{s_n\}$ 没有极限,则称无穷级数$\sum\limits_{n=1} u_n$ 发散.

注　①这里需要强调指出,常数项级数是否收敛是由部分和数列 $\{s_n\}$ 是否收敛来定义的,这就建立了无穷级数与数列的基本联系.如后面正项级数收敛的充要条件就是根据数列收敛的一个准则得到的.

②定义也给出了判断级数敛散性以及级数求和的一种方法.

③直接使用定义判别一个级数的敛散性往往是困难的,其原因在于许多级数的部分和 s_n 不好求.所以下面根据收敛定义区别不同情况给出了一些判断级数敛散性的方法.

2.收敛级数的基本性质

性质 1　如果级数$\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛于和 s,则它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数$\sum\limits_{n=1} ku_n$ 也收敛,且其和为 ks.

性质 2　如果级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 分别收敛于 s 和 σ,则级数 $\sum\limits_{n=1} (u_n \pm v_n)$ 也收敛,且其和为 $s \pm \sigma$.

注　①根据性质 1,当 $k \neq 0$ 时,$\sum\limits_{n=1} ku_n$ 与$\sum\limits_{n=1} u_n$ 的敛散性相同.

②性质 2 也可以说成两个收敛级数可以逐项相加与逐项相减,而发散级数则无此性质.这也是有限项和$\sum\limits_{n=1}^{k} u_n$ 与无限项和$\sum\limits_{n=1} u_n$ 的明显区别.

性质 3　在级数中去掉、加上或改变有限项,不会改变级数的收敛性.但当级数收敛时,其和 s 一般要变.

性质 4　如果级数$\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,则对这级数的项任意加括号后所成的级数 $(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots +$

u_{n_k}) + …仍收敛,且其和不变.

推论　如果加括号后所成的级数发散,则原来的级数也发散.

注　加括号后级数收敛,原级数未必收敛.

性质 5　(级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,则它的一般项 u_n 趋于零,即 $\lim\limits_{n\to} u_n = 0$.

注　①本性质为级数收敛的必要条件.学习此性质时容易犯的一个错误是将其作为充分条件使用,验证 $\lim\limits_{n\to} u_n = 0$ 就说 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛.这是不对的.最典型的例子是调和级数 $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n}$.虽然 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{1}{n} = 0$,但是调和级数 $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n}$ 是发散的,尽管它发散得比较慢.

②本性质常用于判别级数发散,即使用其逆否命题.若 $\lim\limits_{n\to} u_n \neq 0$,则 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 一定发散.这是判断级数发散的一个重要方法.

(二) 常数项级数的审敛法

1.正项级数的判敛法

①正项级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

② (比较审敛法) 设 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 都是正项级数,且 $u_n \leqslant v_n$ ($n = 1,2,\cdots$).若级数 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛;反之,若级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 发散.

③ (比较审敛法的极限形式,又称极限审敛法) 设 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 都是正项级数,如果 $\lim\limits_{n\to} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,$0 < l < +$　,则级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 同时

收敛或同时发散.

特别地,如果 $l=0$,若 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛.如果 $l=+$　,若 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 也发散.

注　比较审敛法和极限审敛法的共同特点是它们都需要和已知敛散性的级数比较,所以学习时要注意掌握一些敛散性已知的级数.它们的不同点是比较审敛法要进行级数一般项大小的比较,需证明不等式 $u_n \leqslant v_n$ 或 $v_n \leqslant u_n$;而极限审敛法只需求 $\lim\limits_{n\to} \dfrac{u_n}{v_n}$.显然后一种方法可使用高等数学中已经学过的求极限这一强有力的工具,而前一种方法则常用到初等数学中的方法.

用比较审敛法时,作为比较的对象,常用到的级数有:

$$\text{等比级数} \sum_{n=1} aq^n:\begin{cases}\text{发散}, & |q| \geqslant 1,\\ \text{收敛且和为}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1.\end{cases}$$

$$p\text{ 级数} \sum_{n=1} \frac{1}{n^p}:\begin{cases}\text{收敛}, p>1,\\ \text{发散}, p\leqslant 1.\end{cases}$$

④(比值审敛法)若正项级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 的后项与前项之比值的极限等于 ρ,即 $\lim\limits_{n\to} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,则当 $\rho<1$ 时级数收敛;$\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=$　)时级数发散;$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

注　与比较审敛法和极限审敛法不同,比值审敛法只需用级数本身相邻两项的比,不需借助其他级数.

⑤(根值审敛法)设 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 为正项级数,如果它的一般项 u_n 的 n 次根的极限为 ρ,即 $\lim\limits_{n\to} \sqrt[n]{u_n}=\rho$,则当 $\rho<1$ 时,级数收敛;$\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to} \sqrt[n]{u_n}=+$　)时,级数发散;$\rho=1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

根值审敛法只使用级数的通项 u_n 即可.

注　判别一个正项级数的收敛性，通常可按下列步骤进行.

①先观察是否满足级数收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，不满足则级数发散.

②如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则先试用比值审敛法，特别是 u_n 中含有 n^n，$n!$，a^n 的情况下. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ 易求，则用根值审敛法.

③若比值审敛法与根值审敛法均失效或不好用，再用比较审敛法.

④用级数收敛定义直接判断.

2. 交错级数及其审敛法

定义　交错级数：$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ 或者 $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots$，其中 $u_n > 0$，$n = 1, 2, \cdots$.

莱布尼茨定理　如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件：

① $u_n \geqslant u_{n+1}$，$n = 1, 2, \cdots$，

② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则级数收敛，且其和 $s \leqslant u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

注　①莱布尼茨定理结论中的 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$ 常可用于进行误差估计.

②设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s，s_n 为其前 n 项和，则 $s - s_n = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项，余项仍是交错级数.

③莱布尼茨定理只适用于交错级数，对其他类型的级数不适用.

④当第二个条件不满足时级数一定发散.

3. 绝对收敛与条件收敛

定义　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

定理　如果级数$\sum\limits_{n=1}u_n$绝对收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}u_n$必定收敛.

注　①收敛的任意项级数分为两大类:绝对收敛级数和条件收敛级数,且两者必居其一,故绝对收敛的级数必不条件收敛.

②根据本定理,任意项级数$\sum\limits_{n=1}u_n$敛散性的判断在许多情况下可转化为正项级数$\sum\limits_{n=1}|u_n|$敛散性的判断.

(三)幂级数

1.**幂级数及其收敛性**

定义　函数项级数$\sum\limits_{n=0}a_n(x-x_0)^n$称为$(x-x_0)$的幂级数,当$x=0$时,$\sum\limits_{n=0}a_nx^n$称为$x$的幂级数.易见,任意幂级数$\sum\limits_{n=0}a_nx^n$在$x=0$处都收敛.

阿贝尔定理　如果级数$\sum\limits_{n=0}a_nx^n$当$x=x_0$$(x_0\neq0)$时收敛,则适合不等式$|x|<|x_0|$的一切$x$使该幂级数绝对收敛.反之,如果级数$\sum\limits_{n=0}a_nx^n$当$x=x_0$时发散,则适合不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$使该幂级数发散.

推论　如果幂级数$\sum\limits_{n=0}a_nx^n$不是仅在$x=0$一点收敛,也不是在整个数轴上都收敛,则必有一个完全确定的正数R存在,使得当$|x|<R$时,幂级数绝对收敛,当$|x|>R$时,幂级数发散;当$x=R$与$x=-R$时,幂级数可能收敛也可能发散.

注　阿贝尔定理告诉我们,收敛点与发散点之间应有个边界点.这样的边界点有两个,且关于原点对称.把边界点到原点的距离记为R,则$|x|<R$时级数收敛;$|x|>R$时级数发散;$x=\pm R$时级数可能收敛也可能发散,即上面的推论,从而引进了收敛半径R和收敛区间$(-R,R)$的概念.

关于收敛半径的求法,有下面的定理.

定理　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$,其中 a_n,a_{n+1} 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的相邻两项的系数,则该幂级数的收敛半径 $R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho},\rho\neq 0,\\ +\infty,\rho=0,\\ 0,\rho=+\infty.\end{cases}$

注　①本定理是正项级数的比值审敛法的直接应用.

②若幂级数缺项,则本定理不适用,应直接使用比值审敛法.

③当确定了收敛半径 R 后,应将 $x=R$ 和 $x=-R$ 代入幂级数,由数项级数的审敛法确定在这两点处级数的敛散性,从而确定收敛域.

2.幂级数的运算

①设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-R,R)$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛区间为 $(-R',R')$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,$$

且其收敛区间为 $(-R,R)$ 与 $(-R',R')$ 中较小的一个.

②幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R\,(R>0)$,则其和函数 $s(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内连续.如果幂级数在 $x=R$ (或 $x=-R$) 也收敛,则和函数 $s(x)$ 在 $(-R,R]$ (或 $[-R,R)$) 连续.

注　幂级数只在收敛域内有和函数 $s(x)$,在收敛域外是发散的,故 $s(x)$ 的定义域就是幂级数的收敛域.

③设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R\,(R>0)$,则其和函数 $s(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内是可导的和可积的,且有逐项求导公式和逐项积分公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$\int_0^x s(x)\,dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0} \int_0^x (a_n x^n)\,dx$$

$$= \sum_{n=0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

其中$|x| < R$,逐项求导或逐项积分后所得的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

注　本性质只指出了逐项求导与逐项积分后所得的幂级数和原级数有相同的收敛半径,但并未指出收敛域是否相同.如果需要,应将端点代入进行判定,以得出新级数的收敛区间.

(四) 函数展开成幂级数

1.泰勒级数

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有各阶导数 $f'(x)$,$f''(x)$,…,$f^{(n)}(x)$,…,则可得幂级数

$$\sum_{n=1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

该幂级数称为 $f(x)$ 的泰勒级数.特殊地,当 $x_0 = 0$ 时,称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

注　①泰勒级数的构造直接来自泰勒多项式,但需要更强的条件:$f(x)$ 任意阶可导.

②$f(x)$ 的泰勒级数不一定收敛于 $f(x)$.若要 $f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x)$,需要满足下面的定理.

定理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数,则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to$ 　时的极限为零,即

$$\lim_{n\to} R_n(x) = 0 \quad (x \in U(x_0)).$$

注　①考虑到 $R_n(x)$ 的拉格朗日型表达式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \in U(x_0),$$

定理的条件可弱化为 $f^{(n+1)}(x)$ 对任意 $n \in N$ 有界.

②本定理的前提 $f(x)$ 具有任意阶导数是很强的条件,当 $f(x)$ 不

具备这个条件时定理不能成立.

把一个函数按以上定理展开为泰勒级数和麦克劳林级数,称为直接展开法.

2.函数展开成幂级数

按照泰勒级数、麦克劳林级数及上述定理的要求,可将某些 $f(x)$ 展开成幂级数,并确定其收敛区间.收敛区间非常重要,只有在收敛区间上 $f(x)$ 才能展开为幂级数.

与基本微分公式、基本积分公式一样,我们需记住下面四个主要函数的幂级数展开式,其他一般函数的展开式及收敛区间可根据下面四个公式及幂级数的运算得到,即间接展开法.

①$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}x^n,x\in(-1,1)$,

②$e^x=\sum\limits_{n=0}\dfrac{x^n}{n!},x\in(-\quad,+\quad)$,

③$\sin x=\sum\limits_{n=1}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},x\in(-\quad,+\quad)$,

④$(1+x)^m=\sum\limits_{n=0}\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,x\in(-1,1)$.

由此还可以得到几个基本公式:

⑤$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}(-1)^nx^n,x\in(-1,1)$,

⑥$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)},x\in(-1,1]$,

⑦$\cos x=\sum\limits_{n=0}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\quad,+\quad)$.

间接展开法是学习的重点.它避免了 $\lim\limits_{n\to+}R_n(x)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 的计算,比直接展开法简单方便.间接展开法常常是把一个已知函数的幂级数展开式经过作代换、四则运算或逐项求导、逐项积分而求得新的函数的幂级数展开式,故简化了计算.

(五) 傅里叶级数

1. 三角函数系与三角级数

函数族 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 称为三角函数系. 三角函数系在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是正交函数系,即三角函数系中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零. 三角函数系是我们接触到的首个正交函数系,对它的学习要引起足够的重视. 在今后的学习中,我们还会遇到更多的正交函数系及其性质和应用.

形如 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的级数称为三角级数.

2. 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数. $a_0,a_1,b_1,\cdots$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶系数. 其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,3\cdots.$$

注　如果 $f(x)$ 在一个周期上可积,则一定可以写出 $f(x)$ 的傅里叶级数. 但 $f(x)$ 的傅里叶级数是否收敛,如果收敛是否一定收敛于 $f(x)$,下面的狄利克雷充分条件可以给出结论.

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,如果它满足:

①在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

②在一个周期内至多有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且当 x 是 $f(x)$ 的连续点时,级数收敛于 $f(x)$;当 x 是 $f(x)$ 的间断点时,级数收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

(六) 正弦级数和余弦级数

1. 奇函数和偶函数的傅里叶级数

函数 $f(x)$ 的傅里叶级数只含有正弦项或只含有余弦项,则称为正弦级数或者余弦级数. 出现这种情况与 $f(x)$ 的奇偶性有关.

定理 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数,在一个周期上可积,则

①当 $f(x)$ 为奇函数时,它的傅里叶级数

$$\sum_{n=1} b_n \sin nx,$$

为正弦级数.其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

②当 $f(x)$ 为偶函数时,它的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos nx,$$

为余弦级数.其中

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

2.函数展开成正弦级数或余弦级数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[0,\pi]$ 上且满足收敛定理条件,在开区间 $(-\pi,0)$ 内补充函数 $f(x)$ 的定义,得定义在 $(-\pi,\pi]$ 上的函数 $F(x)$,使得它在 $(-\pi,\pi)$ 上成为奇函数(偶函数).

例如 $f(x) = x+1, 0\leqslant x\leqslant \pi$,则 $F_1(x) = \begin{cases} x+1, & 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ 为奇函数;$F_2(x) = \begin{cases} x+1, & 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ -x+1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ 为偶函数.

可将 $F_1(x)$ 展开成正弦函数,将 $F_2(x)$ 展开成余弦函数,再限制 $x\in[0,\pi]$,此时 $F_i(x)\equiv f(x)\ (i=1,2)$,便得 $f(x)$ 的正弦级数(或余弦级数).

(七)周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

定理 设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理条件,则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中系数 a_n, b_n 为

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,\cdots).$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,

$$f(x) = \sum_{n=1} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 b_n 为

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

当 $f(x)$ 为偶函数时,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 a_n 为

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

三、解题研究

1.数项级数敛散性的判定

例 1　判断级数 $\sum_{n=1}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 的敛散性.

分析　由于级数中有许多相同的项可互相抵消,故可考虑使用级数收敛的定义来判别其敛散性.

解法 1　$s_n = \sum_{k=1}^{n}[(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})]$

$$= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1},$$

$$\lim_{n\to} s_n = \lim_{n\to}\left[1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right] = 1 - \sqrt{2},$$

故级数收敛,且和为 $1 - \sqrt{2}$.

解法 2　使用比较审敛法.

$$u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$=\frac{-2}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})},$$

$u_n<0$,故$\sum\limits_{n=1} u_n$ 为负项级数.只需证明正项级数$\sum\limits_{n=1}(-u_n)$收敛即可.

取$\sum\limits_{n=1} v_n=\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,是 p 级数,$p=\frac{3}{2}>1$,故收敛.

$$\lim_{n\to}\frac{\dfrac{1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=\lim_{n\to}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=\frac{1}{2\times2\times2}=\frac{1}{8}.$$

由比较审敛法的极限形式知原级数收敛.

例 2 讨论级数$\sum\limits_{n=1}\frac{a^n n!}{n^n}$的敛散性.

分析 因为 u_n 中含 a^n,$n!$,n^n,所以采用比值审敛法.

解
$$\lim_{n\to}\frac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to}\frac{an^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}.$$

所以,当 $a<e$ 时,$\frac{a}{e}<1$,级数收敛;当 $a>e$ 时,$\frac{a}{e}>1$,级数发散;

当 $a=e$ 时,因为$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$,而$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$,所以 $u_{n+1}>u_n$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,当 $a=e$ 时,级数发散.

例 3　判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^n n^2}$的敛散性.

分析　因为级数的通项中含因子$(\sqrt{2}-1)^n$,故考虑使用根值审敛法.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[n]{n})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}>1$,

故级数发散.

例 4　讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}\ (p>0)$的敛散性.

分析　此级数是交错级数,首先讨论是否绝对收敛.

解　考虑级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[n+(-1)^n]^p}$,其形式类似于 p 级数,因此用比较审敛法的极限形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{[n+(-1)^n]^p}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{[n+(-1)^n]^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}$$

$$=1.$$

所以,当 $p>1$ 时,级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}$绝对收敛;当 $p\leqslant 1$ 时,级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}\right|$发散.

下面讨论当 $p\leqslant 1$ 时,交错级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}$是否条件收敛.

显然$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{[n+(-1)^n]^p}=0$,但 $u_{n+1}<u_n$,条件不满足.因为不满足莱布尼茨条件的交错级数仍然可能是收敛的,所以我们用收敛的定义来分

析.

令 s_{2n} 表示前 $2n$ 项的部分和,这时

$$s_{2n} = -\frac{1}{3^p} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{5^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots - \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n)^p}$$

$$= \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n+1)^p}\right),$$

或

$$s_{2n} = \frac{1}{2^p} - \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) - \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^p}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right) - \frac{1}{(2n+1)^p}.$$

因为 $\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n+1)^p} > 0\quad(n = 1,2,\cdots)$,所以 s_{2n} 单调递增.

又 $s_{2n} < \frac{1}{2^p}$,所以 s_{2n} 有界,从而有极限.设 $\lim\limits_{n\to} s_{2n} = s$,又

$$s_{2n+1} = s_{2n} - \frac{1}{(2n+3)^n}, \text{即} \lim_{n\to} s_{2n+1} = \lim_{n\to} s_{2n} = s.$$

故 $\lim\limits_{n\to} s_n = s$.当 $p \leqslant 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=2} \frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}$ 条件收敛.

例 5　按定义求级数 $\sum\limits_{n=1} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ 的和.

分析　直接求和有困难,可考虑将通项拆开.

解　
$$u_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{2}{2(n+3)}\right) = \frac{1}{4}.$$

故级数收敛,且和为$\frac{1}{4}$.

例 6　**判断级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$**的敛散性**.

分析　**当** $n\to\infty$ **时,级数通项的分子、分母均趋于无穷大,故其通项可能不趋于** 0.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}}} = 1.$$

所以该级数发散.

例 7　**讨论级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^s}$ ($s>0$,a **为常数**) **的敛散性**.

分析　**因为** a **是常数,可能为正,可能为负,故此级数为任意项级数**.

解　**取级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a^n}{n^s}\right|$**,用比值审敛法得**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^s a}{(n+1)^s}\right| = |a|.$$

所以,当$|a|<1$ **时,级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a^n}{n^s}\right|$**收敛,原级数绝对收敛**.

当$|a|>1$ **时,级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a^n}{n^s}\right|$**发散,因为这时**$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$**,故原级数也发散**.

当$|a|=1$ **时,比值审敛法失效,需用另一种方法讨论**.

当 $a=1$ 时,原级数变为 $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n^s}$,当 $s>1$ 时,级数收敛;当 $s\leqslant 1$ 时,级数发散.

当 $a=-1$ 时,原级数变为 $\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^n}{n^s}$,当 $s>1$ 时,级数绝对收敛;当 $s\leqslant 1$ 时,$u_n=\frac{1}{n^s}$满足莱布尼兹准则的两个条件,故 $\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^n}{n^s}$条件收敛.

结论:级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{a^n}{n^s}$ ($s>0$,a 为常数) 当 $|a|<1$ 时绝对收敛;$|a|>1$ 时发散;$a=1$,$s>1$ 时收敛;$a=1$,$s\leqslant 1$ 时发散;$a=-1$,$s>1$ 时绝对收敛;$a=-1$,$s\leqslant 1$ 时条件收敛.

例 8　若 $a_n\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}a_n$ 收敛,证明 $\sum\limits_{n=1}a_n^2$ 收敛.

证明　因为 $\sum\limits_{n=1}a_n$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to}a_n=0$,按极限定义,给定正数 ε,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $0\leqslant a_n<\varepsilon$,因此有 $0\leqslant a_n^2<\varepsilon a_n$,根据收敛级数的性质有 $\sum\limits_{n=1}\varepsilon a_n$ 收敛,再由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}a_n^2$ 收敛.

例 9　若 $a_n\geqslant 0$ 且 na_n 有界,证明 $\sum\limits_{n=1}a_n^2$ 收敛.

证明　因为 na_n 有界,所以存在正数 M,使得 $na_n<M$,即 $a_n<\frac{M}{n}$,得 $a_n^2<\frac{M^2}{n^2}$,因为 $\sum\limits_{n=1}\frac{M^2}{n^2}$收敛,由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}a_n^2$ 亦收敛.

2.关于幂级数的例题

例 10　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$的收敛域.

分析　由于级数缺项,故直接用比值审敛法.

解　$\lim\limits_{n\to}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to}\frac{10^{2n+2}|2x-3|^{2n+1}}{10^{2n}|2x-3|^{2n-1}}=10^2|2x-3|^2$,

故当 $10^2|2x-3|^2<1$,即 $1.45<x<1.55$ 时,级数收敛.

在端点 $x=1.45$ 和 $x=1.55$ 处,原级数分别成为

$$-10-10-10-\cdots-10-\cdots$$

和 $$10+10+10+10+\cdots+10+\cdots.$$

这显然是两个发散级数,所以级数的收敛域是 $(1.45,1.55)$.

例 11　求幂级数 $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots\ (|x|<1)$ 的和函数.

分析　对幂级数作两次逐项积分即可求和.

解　当 $|x|<1$ 时,令 $s(x)=\sum\limits_{n=1} n(n+1)x^n$,

故 $$\int_0^x s(t)\,dt=\sum_{n=1} nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1} nx^{n-1}.$$

令 $g(x)=\sum\limits_{n=1} nx^{n-1}$,$\int_0^x g(x)\,dx=\sum\limits_{n=1} x^n=\dfrac{x}{1-x}$,

则 $$g(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ -1<x<1.$$

所以 $$s(x)=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3},\ -1<x<1.$$

例 12　把函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数,并求其收敛区间.

分析　需将函数变形,使之在分母上出现项 $x-1$.

解 $$f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{-2+(x-1)}-\frac{1}{3+(x-1)}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}\right).$$

因为 $\dfrac{1}{1-\frac{x-1}{2}}=\sum\limits_{n=0}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2=\sum\limits_{n=0}\dfrac{1}{2^n}(x-1)^n$,

其收敛区间为 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1$,即 $|x-1|<2$.

而
$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\sum_{n=0}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-1)^n,$$
其收敛区间为$\left|\frac{x-1}{3}\right|<1$,即$|x-1|<3$,

所以函数展开成 $x-1$ 的幂级数为
$$\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}\frac{1}{2^n}(x-1)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-1)^n\right]$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,$$
其收敛区间为$|x-1|<2$与$|x-1|<3$的公共部分,即$-1<x<3$.

例 13 将$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$展开成 x 的幂级数,并推出$\sum_{n=1}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

分析 先将$\frac{e^x-1}{x}$写为幂级数,再逐项求导.

解
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$
$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots,x\neq 0.$$
逐项微分得
$$\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{n-1}{n!}x^{n-2}+\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}+\cdots,x\neq 0.$$
又
$$\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'\bigg|_{x=1}=\left(\frac{e^x x-e^x+1}{x^2}\right)\bigg|_{x=1}=1,$$
$$\left(\sum_{n=1}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\right)\bigg|_{x=1}=\sum_{n=1}\frac{n}{(n+1)!},$$
所以
$$\sum_{n=1}\frac{n}{(n+1)!}=1.$$

例 14 求$\sum_{n=1}\frac{x^n}{n^p}$ ($p\geqslant 0$ 且为常数)的收敛区间.

分析 求解本题的关键是要根据 p 的值讨论端点处的敛散性.

解　$\lim\limits_{n\to}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}} = 1$，故收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}\dfrac{x^n}{n^p}=\sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛，当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时发散.

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}\dfrac{x^n}{n^p}=\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$. 当 $p>0$ 时，$\dfrac{1}{(n+1)^p}<\dfrac{1}{n^p}$ 且 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{1}{n^p}=0$，由莱布尼茨定理知级数收敛；当 $p=0$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}(-1)^n$，发散.

所以，当 $p>1$ 时，级数的收敛区间为 $[-1,1]$；当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数的收敛区间为 $[-1,1)$；当 $p=0$ 时，级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

例 15　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛区间及其在收敛区间上的和函数，并求常数项级数 $\sum\limits_{n=0}\dfrac{(2n+1)2^n}{n!}$ 的和.

分析　求常数项级数的和常常通过构造相应的幂级数，求幂级数的和函数来解决.

解　级数缺奇数项，又

$$\lim_{n\to}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to}\left|\frac{\dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)!}x^{2(n+1)}}{\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to}\frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)}x^2=0,$$

故收敛区间为 $(-\quad,+\quad)$，令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$，则

$$\int_0^x s(t)\,dt=\sum_{n=0}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2},$$

所以　$s(x)=(xe^{x^2})'=(1+2x^2)e^{x^2}$.

令 $x=\sqrt{2}$，有

$$s(\sqrt{2}) = \sum_{n=0} \frac{2n+1}{n!} 2^n = 5e^2.$$

例 16 **将** $\ln(1+3x+2x^2)$ **展开为** x **的幂级数**.

分析 **将** $1+3x+2x^2$ **因式分解**.

解 $\ln(1+3x+2x^2) = \ln(1+x)(1+2x) = \ln(1+x) + \ln(1+2x)$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leqslant 1,$$

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n}, -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2},$$

所以 $$\ln(1+3x+2x^2) = \sum_{n=1} (-1)^{n-1} (1+2^n) \frac{x^n}{n}, -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}.$$

例 17 **将** $\int_0^x \sqrt{x} e^x dx$ **展开为** x **的幂级数**.

分析 **先将** $\sqrt{x} e^x$ **展开为** x **的幂级数,再逐项积分**.

解 $$\sqrt{x} e^x = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!} + \cdots + \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} + \cdots,$$

逐项积分得

$$\int_0^x \sqrt{x} e^x dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{2!\,7} x^{\frac{7}{2}} + \cdots + \frac{2}{n!\,(2n+3)} x^{\frac{2n+3}{2}} + \cdots, x \geqslant 0.$$

例 18 **若** $\frac{1}{3+x} = \sum_{n=0} a_n (x-1)^n$,**求** a_n.

分析 **把** $\frac{1}{3+x}$ **展开为** $x-1$ **的幂级数,再观察** $(x-1)^n$ **的系数**.

解 $$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{4+x-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0} (-1)^n \left(\frac{x-1}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-1)^n.$$

所以 $a_n = \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}$.

例 19　**求级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$**的和**.

分析　**可利用求幂级数的和函数来求解**.**设** $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$**,则** $s(1)$ **即为所求**.

解　**由** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}=0$ **得收敛半径** $R=+\infty$**,收敛域为** $(-\infty,+\infty)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right]'=x\left[x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]'$$

$$=x(xe^x)'=(x^2+x)e^x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

所以 $s(1)=2e$**,即** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2e$.

例 20　**求证**:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2$.

分析　**令** $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$**,只需求** $s(1)$ **即可**.

证明　**当** $|x|<2$ **时,令** $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$,

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\,dx=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'dx$$

$$=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}dx=\int_0^x\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln(2-x)\Big|_0^x=\ln 2-\ln(2-x).$$

$$s(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2.$$

3.**关于三角级数的例题**

例 21　**设** $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ **的傅里叶级数为**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

求系数 b_3 的值.

分析　由公式 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 立得.

解　$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\mathrm{d}x$.

$x^2\sin 3x$ 为奇函数,故 $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 3x\mathrm{d}x=0$.

$x\sin 3x$ 为偶函数,故

$$b_3=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\mathrm{d}x=2\left(-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$

例 22　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x\leqslant 0,\\ bx, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ a,b 为常数,且 $a<0<b$,求 $f(x)$ 的傅里叶级数以及该级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函数 $s(x)$,并求级数 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$ 的和.

分析　求 $f(x)$ 的傅里叶级数只需依公式求出傅里叶系数 a_n,b_n;求傅里叶级数的和函数只需依狄利克雷定理,注意不连续点处的取值;最后代入特殊的值.

解　$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\pi$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b-a}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\quad(n\neq 0).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}.$$

$f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{b-a}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{b-a}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}\sin nx\right].$$

级数在不连续点 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于 $\frac{f(\pi+0)-f(\pi-0)}{2}=\frac{b-a}{2}\pi$,和函数 $s(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$s(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x\leqslant 0,\\ bx, & 0<x<\pi,\\ \frac{b-a}{2}\pi, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

在该傅里叶级数中,令 $x=\pi$ 得

$$\frac{b-a}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b-a}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right](-1)^n=\frac{b-a}{2}\pi,$$

即

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^{2n}-(-1)^n\right]=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^2}.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

例 23　将函数 $f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

分析　先进行奇延拓与偶延拓,再依公式求出正弦级数和余弦级数.

解　如图 11.1 所示进行奇延拓:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

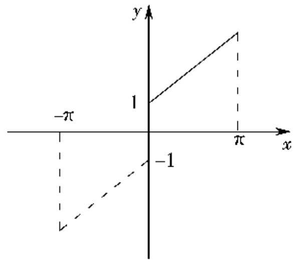


图 11.1

$$
= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{n}, & n=1,3,\cdots \\ -\dfrac{2}{n}, & n=2,4,\cdots \end{cases}
$$

正弦级数为

$$
x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right],0<x<\pi.
$$

在端点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处，级数和为 0，它不代表原来函数 $f(x)$ 的值.

如图 11.2 所示进行偶延拓：

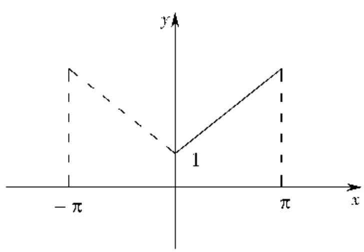


图 11.2

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots\end{cases}$$
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^{\pi}=\pi+2.$$

余弦级数为

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),0\leqslant x\leqslant\pi.$$

例 24　**将如图** 11.3 **所示的函数**

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{px}{2}, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{p(l-x)}{2}, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

展开成正弦级数.

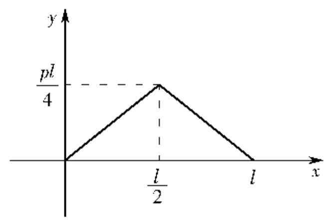


图 11.3

分析　$M(x)$ **是定义在** $[0,l]$ **上的函数,要将它展开成正弦级数,必须对** $M(x)$ **进行奇延拓,再计算延拓后的函数的傅里叶系数** b_n.

解　$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}M(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$
$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{p(l-x)}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

对于上式右端第二项,令 $t=l-x$,**则**

$$b_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{0}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi(l-t)}{l}(-dt)\right]$$
$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi t}{l}dt\right].$$

当 $n = 2,4,6,\cdots$ 时，$b_n = 0$；

当 $n = 1,3,5,\cdots$ 时，$b_n = \frac{4p}{2l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2pl}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$.

故
$$M(x) = \frac{2pl}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l} - \cdots\right), 0 \leqslant x \leqslant l.$$

四、练习题及答案

习题(A)

一、填空题

1. 级数 $\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2\cdot4} + \frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6} + \frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \cdots$ 的一般项 $u_n =$ ______.

2. $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$ 的部分和 $s_n =$ ______.

3. 当 $n\to$ 时，级数 $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 的一般项 u_n 的极限为______，该级数是______的.

4. 级数 $\sum_{n=1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是______的.

5. 由正项级数比较审敛法可知，级数 $\sum_{n=1}\frac{n+1}{n(n+2)}$ 是______的.

6. 幂级数 $1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \cdots$ 的收敛区间是______.

7. 幂级数 $\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n4^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R =$ ______.

8. 由 $e^x = \sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(- \quad , + \quad)$ 可知，$\operatorname{ch} x =$ ______.

9. $\ln(2+x)$ 展开成 x 的幂级数为______，收敛域为______.

二、选择题

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)$（　　）.

(A) 发散　　(B) 收敛　　(C) 敛散性不确定

2. 级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛且其和为 s，则 $\sum\limits_{n=1}(u_n+u_{n+1})$（　　）.

(A) 收敛，和为 s　　(B) 收敛，和为 $s-u_1$

(C) 发散，无和　　(D) 收敛，和为 $2s-u_1$

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$，（　　）.

(A) 当 $p>1$ 时条件收敛　　(B) 当 $0<p\leqslant 1$ 时绝对收敛

(C) 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛　　(D) 当 $0<p\leqslant 1$ 时发散

4. 设 $u_n\geqslant 0$，$v_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to}\frac{u_n}{v_n}=0$，则（　　）.

(A) 若 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 发散

(B) 若 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛

(D) 若 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 发散

5. 幂级数 $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$ 的收敛区间是（　　）.

(A) $(-1,1)$　　(B) $[-1,1)$　　(C) $(-1,1]$　　(D) $[-1,1]$

6. 级数 $\sum\limits_{n=1} nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 上的和函数为（　　）.

(A) $\frac{1}{(1-x)^2}$　　(B) $\frac{2}{1-x}$　　(C) $\frac{1}{1+x}$　　(D) $\frac{1}{(1+x)^2}$

7. 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 关于 x 的幂级数展开式是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=0}(-1)^n x^n$，$(-1,1)$　　(B) $\sum\limits_{n=0} x^{2n}$，$(-1,1]$

(C) $\sum_{n=0} (-1)^n x^{2n}$, $(-1,1)$ (D) $\sum_{n=0} (-1)^n x^{2n}$, $[-1,1]$

8.函数 $f(x)=\cos^2 x$ 在 $x_0=\frac{\pi}{4}$ 处展开成的幂级数是( ).

(A) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$, $(-\quad,\quad)$

(B) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$, $(-\quad,\quad)$

(C) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, $(-\quad,\quad)$

(D) $\sum_{n=1}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$, $(-\quad,\quad)$

三、计算题

1.判别级数 $\sum_{n=1}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ 的敛散性.

2.判别级数 $\sum_{n=1}\frac{1}{[\ln(1+n)]^k}$ 的敛散性.

3.讨论级数 $\sum_{n=1}(-1)^n\frac{1}{na^n}$ $(a>0)$ 的敛散性.

4.求幂级数 $\sum_{n=1}\frac{n}{n+1}x^n$ 在其收敛域 $|x|<1$ 中的和函数.

5.求级数 $\sum_{n=1}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域.

6.将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=3$ 处展开成幂级数并写出其收敛域.

7.将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数,$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=3x^2+1$.

8.将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

9.将周期函数 $f(x)=1-x^2\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 展开成傅里叶级数(所给 $f(x)$ 为在一个周期内的表达式).

习题(B)

一、填空题

1.已知级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 的部分和 $s_n = \dfrac{2n}{n+1}$,则 $u_n =$ ______.

2.如果级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,那么级数 $\sum\limits_{n=1} \left[u_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \right]$ ______,而级数 $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{u_n}\ (u_n \neq 0)$ ______.

3.正项级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是该级数收敛的______条件.

4.若任意项级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 条件收敛,又 $v_n = \dfrac{u_n + |u_n|}{2}$,则级数 $\sum\limits_{n=1} v_n$ ______.

5.若幂级数 $\sum\limits_{n=1} a_n (x+2)^n$ 在 $x = -4$ 处收敛,则此级数在 $x = 1$ 处______.

6.将 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$ 在区间 $(-1,1)$ 展开成 x 的幂级数为______.

二、选择题

1.加括弧后所形成的级数发散是原级数发散的(　　).

(A)必要条件　　(B)充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分又非必要条件

2.级数 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 的前 $2n$ 项和 $s_{2n} \to a\ (n \to\ )$,那么该级数(　　).

(A)收敛于 a　　(B)收敛于 $2a$

(C)发散　　(D)收敛性不能确定

3.已知级数

(1) $\sum\limits_{n=1} \frac{1+n}{1+n^2}$, (2) $\sum\limits_{n=1} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, (3) $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$,

(4) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{na+b}$ $(a>0, b>0)$,则有(　　).

(A) 级数(1)(2)收敛,(3)(4)发散

(B) 级数(1)(2)(3)收敛,(4)发散

(C) 级数(1)(2)发散,(3)(4)收敛

(D) 级数(1)(4)发散,(2)(3)收敛

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1} a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1} \frac{a_n}{n}$(　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 不确定

5. 某交错级数 $\sum\limits_{n=1} (-1)^n u_n$ 不满足莱布尼茨判别法中的条件 $u_n \geqslant u_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$,那么该级数(　　).

(A) 一定发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 可能收敛,也可能发散

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=1} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛区间是(　　).

(A) $(-1,1)$　　(B) $[-1,1)$　　(C) $(-1,1]$　　(D) $[-1,1]$

7. 当 $|x|<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1} \frac{x^n}{n}$ 的和函数是(　　).

(A) $\ln(1-x)$　　(B) $\ln \frac{1}{1-x}$　　(C) $\ln(x-1)$　　(D) $-\ln(x-1)$

8. $f(x) = \arctan x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1,1)$　　(B) $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1,1)$

(C) $\sum\limits_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$, $(-1,1)$　　(D) $\sum\limits_{n=0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$, $(-1,1)$

三、计算题

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1} \frac{nx}{1+n^a x^2}$ $(a>0, x>0)$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{[\ln(1+n)]^n}$ 的敛散性.

3. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln(\ln n)}\right)$ 的敛散性.

4. 将 $f(x)=\dfrac{x-3}{(1+x)^3}$ 展形成 x 的幂级数.

5. 计算极限 $\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}(2n+1)x^n$ 的收敛区间及和函数.

7. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}0, x\in[-\pi,0),\\ e^x, x\in[0,\pi),\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

8. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, h<x\leqslant\pi\end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

习题(A)答案

一、填空题

1. $u_n=\dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}$.

2. $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

3. 发散. 提示：令 $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$，由洛必达法则可得 $\lim\limits_{n\to}u_n\neq 0$，所以原级数发散.

4. 发散. 提示：级数为 $p=\dfrac{1}{2}<1$ 的 p 级数.

5. 发散. 提示：$\dfrac{n+1}{n(n+2)}=\dfrac{n+1}{n^2+2n}>\dfrac{n+1}{n^2+2n+1}=\dfrac{1}{n+1}$，而 $\sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{n+1}$ 是去掉第一项的调和级数.

6. $[-1,1]$. 提示：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，$R=1$，$x=1$ 时为收敛的交错级数；$x=-1$ 时为 $p=2>1$ 的 p 级数，收敛.

7. 2. 提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\dfrac{|x|^2}{4}$，当$\dfrac{|x|^2}{4}<1$ 时，即$|x|<2$ 时，收敛，$R=2$.

8. $\sum\limits_{x=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，$(-\infty,+\infty)$. 提示：

$$\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n},\ (-\infty,+\infty).$$

9. $\ln 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$；$(-2,2]$. 提示：

$$\ln(2+x)=\ln\left[2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}},$$

收敛域为 $-1<\dfrac{x}{2}\leqslant 1$，即 $-2<x\leqslant 2$.

二、选择题

1. A. 提示：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n}$发散，故和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$发散.

2. D. 提示：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=2s-u_1$.

3. C. 提示：当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\dfrac{1}{n^p}$ 发散，而交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛.

4.C. 提示:此时必存在自然数 N,使得当 $n > N$ 时,$u_n < v_n$,由比较法知,$\sum\limits_{n=1} v_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 也收敛.

5.A. 提示:$R = 1$,令 $x = 1$ 和 $x = -1$,原级数分别为 $\sum\limits_{n=1} n$ 和 $\sum\limits_{n=1} (-1)^n n$,均不满足级数收敛的必要条件.

6.A. 提示:$s(x) = \left(\int_0^x s(x)\,dx\right)'_x = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x^2)}$.

7.C. 提示:$\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=1} (-1)^n x^{2n}$,$(-1,1)$.

8.B. 提示:$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

三、计算题

1.收敛.提示:使用根值审敛法.

2.发散.提示:使用极限判别法.

3.绝对收敛.提示:考虑 $\lim\limits_{n\to 0}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

4.$s(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x}$,$|x| < 1$.提示:当 $|x| < 1$ 时,令

$$s(x) = \sum_{n=1} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1} x^n - \sum_{n=1} \frac{1}{n+1} x^n.$$

5.收敛域为 $\left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.提示:$\lim\limits_{n\to}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{3}$,故 $R = \dfrac{1}{3}$,将 $x = -\dfrac{4}{3}$ 及 $x = -\dfrac{2}{3}$ 代入级数.

6.$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0} (-1)^n \left(\dfrac{x-3}{3}\right)^n$;$0 < x < 6$.提示:$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1 + \dfrac{x-3}{3}}$.

7.$f(x) = \pi^2 + 1 + 12\sum\limits_{n=1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi$,$(-\quad,+\quad)$.

8. $\frac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}\sin nx$, $(0,\pi]$.

9. $f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x$, $(-\quad, +\quad)$.

习题(B)答案

一、填空题

1. $\frac{2}{n(n+1)}$. 提示:$u_n = s_n - s_{n-1}$.

2. 收敛,发散. 提示:根据收敛级数的性质及收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to} u_n = 0$ 判断.

3. 充分必要条件.

4. 发散. 提示:因为 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 条件收敛,故 $\sum\limits_{n=1} |u_n|$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1} \frac{u_n}{2}$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=1} \frac{|u_n|}{2}$ 发散,由此知 $\sum\limits_{n=1} v_n$ 发散.

5. 不能确定. 提示:$x = -4$,即 $x+2 = -2$,由阿贝尔定理知,当 $|x+2| < |-2|$ 时,即 $-4 < x < 0$ 时,级数绝对收敛,今 $x = 1 \notin (-4, 0)$,但也不能判断级数在 $x = 1$ 处发散.

6. $f(x) = (1-x)\sum\limits_{n=0} x^{8n} = 1 - x + x^8 - x^9 + x^{16} - x^{17} + \cdots$.

提示:$\frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} = \frac{1-x}{1-x^8}$.

二、选择题

1. B.

2. D. 提示:还需要条件 $\lim\limits_{n\to} s_{2n-1} = a$ 或 $\lim\limits_{n\to} u_n = 0$,级数才收敛于 a,否则尚不能确定其敛散性.

3. D. 提示:$\frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{n+n^2} = \frac{1}{n}$,$\lim\limits_{n\to} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{2^n n!}{n^n}$

$=\frac{2}{e}<1$，故级数(2)收敛；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{9}$，故级数(3)收敛，$\frac{1}{na+b}>\frac{1}{na+nb}=\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{n}$，而$\frac{1}{a+b}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数(4)发散.

4. A. 提示：考虑$\left(|a_n|-\frac{1}{n}\right)^2\geqslant 0$.

5. D. 提示：考查级数

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}.$$

6. D. 提示：考虑$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right|=|x^2|$.

7. B. 提示：$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$
$=-\ln(1-x)$.

8. B. 提示：$\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'\,dx=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx$.

三、计算题

1. 当 $a>2$ 时原级数收敛，$a\leqslant 2$ 时发散.

提示：使用极限判别法，考虑$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{nx}{1+n^a x^2}}{\frac{1}{n^{a-1}}}$.

2. 原级数收敛. 提示：当 $n>1$ 时，$\ln(1+n)>2$，$\frac{1}{[\ln(1+n)]^n}<\frac{1}{2^n}$.

3. 条件收敛. 提示：因为

$$u_n=\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln(\ln n)}\right)=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln(\ln n)},$$

考虑$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\ln(\ln n)}}{\frac{1}{\ln(\ln n)}}=1$，故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln(\ln n)}$发散.

再考虑交错级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln(\ln n)}$：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{\ln(\ln n)} = 0$；

(2) 考虑 $f(x) = \ln(\ln x)$，可得 $y = \sin\dfrac{1}{\ln(\ln n)}$ 单调下降，故有 $u_{n+1} < u_n$，这说明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi + \dfrac{1}{\ln(\ln n)}\right)$ 满足莱布尼茨准则，故为条件收敛.

4. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(2n+1)x^{n-1}$，$-1 < x < 1$. 提示：

$$\frac{x-3}{(1+x)^3} = \left(\frac{-1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2}\right)' = \left(\frac{-1}{1+x}\right)' + \left(\frac{-2}{1+x}\right)''.$$

5. 该极限为 3. 提示：令 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$，$|x| < 1$，则

$$s(x) = \left(\int_0^x \sum(2n+1)x^{2n}dx\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'$$

$$= \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},$$

取 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.$$

6. $(-1,1)$，$s(x) = \dfrac{3x - x^2}{(1-x)^2}$. 提示：

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|，令\ x = t^2，$$

$$s(t^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)t^{2n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n+1}\right)'$$

$$= \left(\frac{t^3}{1-t^2}\right)' = \frac{3t^2 - t^4}{(1-t^2)^2},$$

故 $$s(x) = \frac{3x - x^2}{(1-x)^2}.$$

7. $f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}\left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^2 + 1}\cos nx + \frac{n((-1)^{n+1}e^{\pi} + 1)}{n^2 + 1}\sin nx\right]$，$- \quad < x < + \quad$，且 $x \neq n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

8. **正弦级数** $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\frac{1 - \cos nh}{n}\sin nx$，$x \in (0, h) \cup (h, \pi]$；

余弦级数 $f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\frac{\sin nh}{n}\cos n\pi$，$x \in [0, h) \cup (h, \pi]$.

第十二章 常微分方程

一、本章知识的作用与意义

常微分方程,是指含有一元未知函数及其导数或微分的方程.本章主要研究某些类型微分方程的解法,常微分方程是高等数学的一个重要组成部分,是研究函数的重要工具.

建立常微分方程要用到导数的概念,而解常微分方程则要用到积分法,因此常微分方程是在微积分基础上的发展和应用,在各个领域内有广泛的应用.

二、知识要点及思想方法

(一) 常微分方程的基本概念

1.定义

(1) 常微分方程

含有自变量、未知函数与未知函数导数(或微分)的方程叫做微分方程.未知函数为一元函数的,叫做常微分方程;未知函数为多元函数的,叫做偏微分方程.本章研究的是常微分方程,其一般形式为

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

(2) 常微分方程的阶

方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为常微分方程的阶.

(3) 常微分方程的解

使常微分方程成为恒等式的函数是常微分方程的解.

(4) 常微分方程的通解

如常微分方程的解所含独立任意常数的个数与该常微分方程的阶

数相等,则这个解称为常微分方程的通解.

⑸ 初始条件

确定通解中任意常数的条件叫做初始条件.

⑹ 常微分方程的特解

满足初始条件的解叫做常微分方程的特解.

(二) 一阶常微分方程

1.可分离变量的方程

形如$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$的方程称为可分离变量的方程.

先分离变量方程式为$\frac{1}{\psi(y)}dy=\varphi(x)dx$,两边同时积分,得其通解为

$$\int\frac{1}{\psi(y)}dy=\int\varphi(x)dx+C.$$

2.齐次方程

形如$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$的方程称为齐次方程.

注　"齐次"是指对于二元函数 $f(x,y)$,若有正整数 k 对任意实数 t,都有 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$,则称 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数,因此形如 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的函数为零次齐次函数.

作变换 $u=\frac{y}{x}$,$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$,则方程可化为$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$,两边进行积分得到通解为

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln Cx.$$

3.一阶线性微分方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的方程称为一阶线性微分方程.若 $Q(x)=0$,方程为齐次的;若 $Q(x)\neq 0$,方程为非齐次的.

我们通常用常数变易法来求解非齐次线性方程.步骤如下.

首先,求解相应的齐次方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解,分离变量得

$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$,可得到其通解 $y=Ce^{\int -P(x)dx}$,利用常数变易法,令 $y=u(x)e^{\int -P(x)dx}$,将其代入到非齐次方程中,得 $u'(x)e^{\int -P(x)dx}=Q(x)$,则 $u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$,积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$.

由此可得到方程的通解为

$$y=e^{\int -P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right).$$

4.伯努利方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$的方程称为伯努利方程.

将方程两端除以 y^n,得 $y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,由于$\frac{d}{dx}(y^{1-n})=(1-n)y^{-n}y'$,假设 $z=y^{1-n}$,则方程可化为

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x),$$

变为一阶线性微分方程,根据一阶线性微分方程的解法可求其通解.

5.全微分方程

方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$,若$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,则方程为全微分方程.其通解为

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C.$$

但是,在某些情况下,$Pdx+Qdy=0$ 不是全微分方程,即不满足$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,但用 $\mu(x,y)\neq 0$ 乘方程两边,能使 $\mu Pdx+\mu Qdy=0$ 化为全微分方程,此时,函数 $\mu(x,y)$ 称为积分因子.

注　一些常见的全微分形式:

①$ydx+xdy=d(xy)$;　　②$xdx+ydy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$;

③$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$;　　④$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$;

⑤$\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\frac{x}{y}\right)$；　⑥$\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$；

⑦$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$；　⑧$\frac{ydx - xdy}{x^2-y^2} = d\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y}\right)$.

(三) 二阶微分方程

1.**可降阶的微分方程**

(1) 不显含变量 y 的二阶方程 $y'' = f(x, y')$

解法：令 $\frac{dy}{dx} = p$，则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$，将其带入原方程可化为 $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$，变为一阶微分方程，再求解.

(2) 不显含变量 x 的二阶方程 $y'' = f(y, y')$

解法：令 $\frac{dy}{dx} = p$，则 $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$，将其带入原方程可化为 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$，变为一阶微分方程，再求解.

注　上面两种二阶常微分方程解法的特点是通过变量代换将其降阶，变为一阶微分方程再求解.

2.**二阶线性微分方程**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

称为二阶线性微分方程，当 $f(x) \equiv 0$ 时，称为二阶线性齐次微分方程；当 $f(x) \neq 0$ 时，称为二阶线性非齐次微分方程.

(1) 齐次方程解的结构

设 y_1, y_2 是齐次方程的两个线性无关的特解，则其通解为 $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

注　对于两个函数，只需要看它们的比，若比不恒等于常数，则其线性无关，否则线性相关.

(2) 非齐次方程的解的结构

设与之对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1y_1 + C_2y_2$，非齐次方程的一个特解为 y^*，则非齐次方程的通解为

$$y = Y + y^*.$$

(3) 非齐次线性方程的解的叠加原理

若方程右端 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ **且** y_1^*, y_2^* **分别是方程** $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ **和** $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ **的特解，则** $y_1^*+y_2^*$ **是方程** $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ **的特解.**

3. **二阶常系数线性微分方程**

若方程 $y''+py'+qy=f(x)$ **中，**p, q **为常数，则该方程称为二阶常系数线性微分方程.**

当 $f(x)=0$ **时，方程** $y''+py'+qy=0$ **为二阶常系数齐次线性微分方程.**

对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$**，写出与之对应的特征方程** $r^2+pr+q=0$**，解出特征根** r_1, r_2**，即得通解** y.

r_1, r_2 **有三种不同的情形：**

r_1, r_2 **是不相等的实根，则** $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$**；**

r_1, r_2 **是相等的实根，**$r_1=r_2=r$**，则** $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$**；**

r_1, r_2 **是一对共轭复根** $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$**，则**

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

当 $f(x)\neq 0$ **时，方程** $y''+py'+qy=f(x)$ **称为二阶常系数线性非齐次微分方程.**

对于二阶常系数线性非齐次微分方程，先求与之对应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ **的通解** Y**，再求出非齐次方程的一个特解** y^***，则非齐次方程的通解为** $y=Y+y^*$.

求特解的方法:待定系数法.步骤如下所述.

① $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$**，其中** λ **为常数，**$P_m(x)$ **为** x **的** m **次多项式.设方程的特解为** $y^*=x^ke^{\lambda x}Q_m(x)$**，其中** $Q_m(x)$ **为** x **的** m **次多项式，即**

$$Q_m(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,$$

当 λ **不是特征根时，**$k=0$**；当** λ **是特征单根时，**$k=1$**；当** λ **是二重特征根时，**$k=2$**，代入方程可求得** $Q_m(x)$ **的系数，即可求出方程的特解.**

② $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x]$**，设方程的特解为** $y^*=x^ke^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x]$**，其中** $R_n(x), T_n(x)$ **为** x **的** n **次多项式，**$n=\max\{l, m\}$.

若 $\alpha + i\beta$ 不是特征根时，$k = 0$，若 $\alpha \pm i\beta$ 是特征根时，$k = 1$.

将 y^* 代入方程中，利用待定系数法求得 y^*，则可得方程的特解.

(四) 建立微分方程，求解应用题

①利用物理、化学等学科的特点和理论，直接给出未知函数变化率描述的方程，常用到导数的几何意义、物理意义，例如：$v = \frac{ds}{dt}$，$a = \frac{dv}{dt}$，等等.

②利用元素法，从变量在一个微小区间 $[t, t + \Delta t]$ 上的变化入手，根据几何、物理、化学等方面的知识取微元，用

增量 = 输入量 - 输出量

的方法，建立关系式，再取极限，利用微分的意义建立方程.

③建立积分方程，再求导.例如曲边梯形面积、积分上限函数求导法则等.

(五) 主要的思想方法

每种类型的微分方程都有广泛的实际背景，建立数学模型求解微分方程已成为人们认识客观世界的一个重要手段.因此要有应用数学的意识，掌握(四)中的方法.

本章中用到的变量替换法、常数变易法、待定系数法等是常用的数学方法，掌握它们大有益处.

三、解题研究

在解常微分方程的过程中，第一步首先要分析出所解的常微分方程是哪一种类型的方程，只有在明确方程类型的情况下，才能找到相应的解法，得到通解.另外，同一个方程可能属于不同的类型，应选择较简便的方法进行求解.

(一) 一阶微分方程

例 1　试证：$y = C_1 e^{C_2 - 3x} - 1$ 是方程 $y' - 9x = 9$ 的解，但不是通解，其中 C_1, C_2 是任意常数.

证　记 $C = C_1 e^{C_2}$，则

$$y = C_1 e^{C_2 - 3x} - 1 = Ce^{-3x} - 1,$$

将其代入方程,得

$$\begin{aligned}\text{左边} &= (Ce^{-3x} - 1)'' - 9(Ce^{-3x} - 1) \\ &= 9Ce^{-3x} - 9Ce^{-3x} + 9 = 9 \\ &= \text{右边}.\end{aligned}$$

因此,$y = C_1 e^{C_2 - 3x} - 1$ 是方程的解,但因为解中只含有一个独立的任意常数,因此不是方程的通解.

例 2　求以下列函数为通解的微分方程.

(1) $x^2 + Cy^2 = 1$;　　(2) $y = C_1 x^2 + C_2$.

分析　这类问题的解法是先求导,再消去任意常数,若所给的函数中含有两个任意常数,则需求二阶导数.

解　(1) 等式两边分别对 x 求导数,得

$$2x + 2Cyy' = 0,$$

代入原方程消去 C,得

$$xy + (1 - x^2) y' = 0$$

即为所求的方程.

(2) 对 x 求两次导数,得

$$y' = 2C_1 x, y'' = 2C_1,$$

消去 C_1,得 $xy'' = y'$ 即为所求方程.

例 3　求 $y' = x\ln x$ 的通解.

解　分离变量 $dy = x\ln x dx$,方程两边同时求积分,得

$$y = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

即为所求的通解.

例 4　求 $ydx + (x^2 - 4x) dy = 0$ 的通解.

解　分离变量$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x - x^2}$,方程两边同时求积分,得

$$\ln |y| = \frac{1}{4}[\ln|x| - \ln|4 - x|] + \ln C_1,$$

则可得方程的通解为 $y^4 (4 - x) = Cx$.

例 5　求 $(x^2-2y^2)dx+xydy=0$ 的通解.

解　方程两边同时除以 x^2，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\frac{y}{x}},$$

可见方程为齐次方程.

令 $u=\frac{y}{x}$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-1}{u}$.

分离变量得 $\frac{u}{u^2-1}du=\frac{dx}{x}$，两边积分，得 $u^2-1=\pm C_1^2x^2$，将 $u=\frac{y}{x}$ 带入得到通解为 $y^2=x^2+Cx^4\ (C=\pm C_1^2)$.

例 6　求 $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解　对应的齐次方程 $y'-\frac{2y}{x+1}=0$ 的通解为 $y=C(x+1)^2$，利用常数变易法，令 $y=u(x)(x+1)^2$，代入原方程得

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

即
$$u(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C,$$

方程的通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right].$$

例 7　求 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$ 的通解.

解　将方程变形得 $\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{y}$，有 $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=1$.

以 x 为未知函数的一阶线性微分方程的通解为

$$x=e^{\int-\frac{1}{y}dy}\left[\int e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{2}y+\frac{C}{y},$$

即
$$xy-\frac{1}{2}y^2=C.$$

注　在微分方程中，通常将 y 看成 x 的函数，这样本题不是关于 y

$=y(x)$的线性方程.但如果将 x 看成 y 的函数,则方程可化为关于 $x=x(y)$ 的线性方程.这种思想在判断一个微分方程是否为线性方程时非常重要.

例 8 求 $2yy'-2xy^2=xe^{-x^2}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解 令 $z=y^2$,则$\frac{dz}{dy}=2y$,方程化为

$$\frac{dz}{dx}+2xz=xe^{-x^2},$$

此时方程变成一阶线性微分方程,因此利用一阶线性微分方程的解法可以解得方程的通解为 $z=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$,将初始条件代入,得 $C=1$.则方程的特解为

$$y^2=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right).$$

例 9 求 $(y-x\sin x)dx+xdy=0$ 的通解.

解法 1 将方程化为线性方程 $y'+\frac{1}{x}y=\sin x$.相应的齐次方程 $y'+\frac{1}{x}y=0$ 的通解为 $xy=C$,利用常数变易法,得 $xy=C(x)$,代入原方程中,可得通解为

$$y=\frac{1}{x}(\sin x-x\cos x+C).$$

解法 2 设 $P=y-x\sin x$,$Q=x$,$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$,方程为全微分方程,由$\int_0^x(0-x\sin x)dx+\int_0^y xdy=C$,得到通解

$$x\cos x-\sin x+xy=C.$$

例 10 求 $(x^2+y^2+y)dx-(x^2+y^2+x)dy=0$ 的通解.

解 由于$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$,因此方程不是全微分方程,重新组合可得

$$(x^2+y^2)(dx-dy)+(ydx-xdy)=0,$$

两边同时乘以积分因子$\frac{1}{(x^2+y^2)}$,得 $dx-dy+\frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)}=0$,得到方

程的通解为

$$x - y + \arctan\frac{x}{y} = C.$$

注　求积分因子是一个较灵活的过程,但应该记住前文中提到的一些基本函数的全微分形式,从中找到积分因子.分项重组是解全微分方程的一种重要方法,在解题过程中要注意积分因子不唯一.

(二)二阶微分方程

例 11　求 $xy'^2y'' - y'^3 = \frac{x^4}{3}$ 的通解.

解　本题为不显含变量 y 的二阶方程.

令 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$,原方程化为 $xp^2\frac{dp}{dx} - p^3 = \frac{x^4}{3}$,即

$$\frac{d}{dx}(p^3) - \frac{3}{x}p^3 = x^3,$$

则根据求解一阶线性方程的解法,得

$$p^3 = e^{\int\frac{3}{x}dx}\left[\int x^3 e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx + C_1\right] = x^3(x + C_1),$$

即
$$p = \frac{dy}{dx} = x\sqrt[3]{x + C_1},$$

则
$$y = \int x\sqrt[3]{x + C_1}\,dx + C_2.$$

方程通解为

$$y = \frac{3}{7}(x + C_1)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}C_1(x + C_1)^{\frac{4}{3}} + C_2.$$

例 12　求 $yy'' - y'^2 = y^2y'$ 的通解.

解　本题为不显含变量 x 的二阶方程.

令 $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$,原方程化为 $yp\frac{dp}{dx} - p^2 = y^2p$,可得 $p = 0$ 或 $\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = y$,则 $y = C$ 或 $p = \frac{dy}{dx} = y(y + C_1)$,由上式可得 $\frac{dy}{y(y + C_1)} = dx$,由此可解出通解为

$$\ln\frac{C_2y}{y + C_1} = C_1x \quad (y = C \text{ 含在通解中}).$$

例 13 **求下列齐次方程的解.**

(1) $y''+4y'+4y=0$,$y(0)=3$,$y'(0)=2$.

(2) $y'''-2y''+y'-2y=0$.

(3) $y''=1+y'^2$.

解 (1) 特征方程为 $r^2+4r+4=0$,得到特征根 $r_1=r_2=-2$,此时方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x},$$

将初始条件代入得 $C_1=3$,$C_2=8$.方程的特解为

$$y=(3+8x)e^{-2x}$$

(2) 特征方程为 $r^3-2r^2+r-2=0$,得到特征根 $r_1=2$,$r_{2,3}=\pm i$.

因此通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

(3) 该方程既不含 x 也不含 y,一般情况下按照不含 x 的方法来解.

令 $y'=p$,则 $y''=p'$,代入原方程,得 $p'=1+p^2$,分离变量,得

$$\frac{dp}{1+p^2}=dx,$$

两边积分,得

$$\arctan p=x+C_1,$$

则

$$y'=p=\tan(x+C_1).$$

两边再积分可得通解为

$$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2.$$

例 14 **求** $y''+2y'+5y=e^{-x}(x^2-3)$ **的通解.**

解 与之相对应的齐次方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为 $r^2+2r+5=0$,特征根为 $r_{1,2}=-1\pm 2i$.

因此,齐次方程的通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

令 $y^*=e^{-x}(A+Bx+Cx^2)$,将其代入原方程,根据待定系数法得

$$A=-\frac{7}{8},B=0,C=\frac{1}{4}.$$

通解为　$y=Y+y^{*}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{7}{8}$.

例 15　**求** $y''-y=x\sin 2x$ **的通解**.

解　**对应的齐次方程** $y''-y=0$ **的特征方程为** $r^2-1=0$,**因此其特征根为** $r_{1,2}=\pm 1$,**由此可得齐次方程的通解为** $Y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$,**并且** $\lambda+\omega i=2i$ **不是特征方程的根,方程的特解设为**

$$y^{*}=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x,$$

代入方程,由待定系数法,可得

$$A=0,B=-\frac{4}{25},C=-\frac{1}{5},D=0.$$

则

$$y^{*}=-\frac{4}{25}\cos 2x-\frac{1}{5}x\sin 2x.$$

方程的通解为

$$y=Y+y^{*}=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\frac{4}{25}\cos 2x-\frac{1}{5}x\sin 2x.$$

例 16　**求方程** $y''-4y'+5y=e^{2x}(1-\cos 2x)$ **的通解**.

解　**方程右端** $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=e^{2x}+(-e^{2x}\cos 2x)$.

对应的齐次方程 $y''-4y'+5y=0$ **的特征方程为** $r^2-4r+5=0$,**因此其特征根为** $r_{1,2}=2\pm i$.**故齐次方程的通解为**

$$Y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

求 $y''-4y'+5y=e^{2x}$**的特解**.**设** $y_1^{*}=Ae^{2x}$,**代入方程得** $A=1$.**故**

$$y_1^{*}=e^{2x}.$$

求 $y''-4y'+5y=-e^{2x}\cos x$ **的特解**.**设** $y_2^{*}=xe^{2x}(A\cos x+B\sin x)$,**代入方程得** $A=0,B=-\dfrac{1}{2}$,**故** $y_2^{*}=-\dfrac{1}{2}xe^{2x}\sin x$.

根据叠加原理,可得原方程的特解为 $y^{*}=y_1^{*}+y_2^{*}$.

故原方程的通解为

$$y=Y+y^{*}=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}\sin x.$$

(三)变量代换

例 17　**求** $x(e^{y}-y')=2$ **的通解**.

解　方程可化为 $1-e^{-y}y'=\frac{2}{x}e^{-y}$，即 $(e^{-y})'-\frac{2}{x}e^{-y}=-1$，令 $u=e^{-y}$，则 $du=-e^{-y}dy$，代入方程 $\frac{du}{dx}-\frac{2}{x}u=-1$. 这是一个一阶线性非齐次微分方程，根据公式得到

$$u=e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left[\int(-1)e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx+C\right].$$

故通解为 $e^{-y}=Cx^2+x$.

例 18　求 $y'=(4x+y+1)^2$ 的通解.

解　设 $u=4x+y+1$，则 $y=u-4x-1$，因此 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-4$，代入方程得

$$\frac{du}{dx}=u^2+4.$$

解得　$$\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}=x+C_1.$$

方程的通解为

$$4x+y+1=2\tan(2x+C).$$

注　形如 $y'=f(ax+by+c)\ (b\neq 0)$ 的方程，作代换 $u=ax+by+c$.

例 19　求 $x+yy'=x(x^2+y^2)^2$ 的通解.

解　设 $u=x^2+y^2$，则 $x+yy'=\frac{u'}{2}$，代入方程得 $\frac{u'}{2}=xu^2$，解得

$$-\frac{1}{u}=x^2+C.$$

通解为　$$x^2+y^2=-\frac{1}{x^2+C}.$$

注　上面的例题中都需要变量代换才能解得通解，变量代换是解微分方程常用的数学方法. 某些题目可以通过规律来找到，但是有些题目的变量代换过程是很复杂的，只能通过大量的练习才能达到比较熟练的结果.

（四）应用

例 20　设 $y=f(x)$ 满足 $\int_0^x tf(t)dt=x^2+f(x)$，求 $f(x)$.

解　当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，方程两边对 x 求导，得微分方程

$$f'(x)-xf(x)=-2x.$$

该方程是一阶线性微分方程，具有初始条件 $f(x)=0$.

由公式有　$f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int(-2x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx+C\right]=Ce^{\frac{x^2}{2}}+2$，且 $C=2$.

故方程的特解为

$$f(x)=2(1-e^{\frac{x^2}{2}}).$$

注　该题是积分方程，其解法是根据积分上限函数求导法则，对方程两边求导，化为微分方程，并要特别注意该题隐含初始条件，即当 $x=0$ 时，$f(0)=0$.

例 21　质量为 m 的物体从空中落下，空气阻力的大小与物体的速度成正比(系数 $k>0$)，试求物体的运动规律.

解　由牛顿定律，有 $\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2}=mg-k\dfrac{ds}{dt}, \\ s(0)=0, s'(0)=0. \end{cases}$

方程可化为 $\dfrac{d^2s}{dt^2}+\dfrac{k}{m}\dfrac{ds}{dt}=g$，此方程为二阶常系数非齐次微分方程，其特征方程为 $r^2+\dfrac{k}{m}r=0$，其特征根为 $r_1=0$，$r_2=-\dfrac{k}{m}$.

齐次方程的通解为 $s=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$.

设非齐次方程的特解为 $s^*=At$，代入方程得 $A=\dfrac{mg}{k}$，则方程通解为

$$s=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t,$$

将初始条件代入，得

$$C_1=-\frac{m^2g}{k^2}, C_2=\frac{m^2g}{k^2}.$$

故物体运动规律为

$$s=\frac{m^2g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)+\frac{mg}{k}t.$$

例 22　某车间 CO_2 的浓度为 0.12%，新鲜空气的浓度 0.04%，假

定输入与输出的流量相等,问流量为多少时,30 min 后 CO_2 的浓度不超过 0.06%(假定该车间的容积 $V=5\,400\ m^3$).

解 设空气的流量为 u,t 时刻该车间 CO_2 的含量为 $x=x(t)$(取浓度的单位为 0.01%),则由题设有

$$\Delta x=4u\Delta t-\frac{x}{V}u\Delta t.$$

上式两边同除以 Δt,并让 $\Delta t\to 0$,得

$$\frac{dx}{dt}=4u-\frac{u}{V}x.$$

又 $x(0)=12V$,因此 $x=8Ve^{-\frac{u}{V}t}+4V$,则 30 min 后该车间 CO_2 的浓度为

$$\frac{x}{V}=8e^{-\frac{u}{V}\times 30}+4.$$

令 $8e^{\frac{u}{V}\times 30}+4\leqslant 6$,求得 $u\geqslant\frac{V}{30}\ln 4=\frac{5\,400}{30}\ln 4\approx 250\ (m^3/min)$.

故流量约为 $250\ m^3/min$ 时,30 分钟后该车间 CO_2 的浓度不超过 0.06%.

例 23 设函数 $f(x)$ 有一阶连续导数且 $f(0)=2$,若对平面上任意简单闭合曲线 L 恒有

$$\oint_L 2xyf(x^2)\,dx+[f(x^2)-x^4]\,dy=0,$$

求 $f(x)$.

分析 由条件可知,曲线积分与路径无关,故可由曲线积分与路径无关的等价条件得到 $f(x)$ 所满足的微分方程,解方程并由初始条件 $f(0)=2$ 可求得 $f(x)$.

解 令 $P(x,y)=2xyf(x^2)$,$Q(x,y)=f(x^2)-x^4$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xf(x^2),\frac{\partial Q}{\partial x}=2xf'(x^2)-4x^3,$$

由条件可知曲线积分与路径无关,故有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,即

$$2xf(x^2)=2xf'(x^2)-4x^3,$$

可化为

$$f'(x^2) - f(x^2) = 2x^2.$$

令 $z = x^2$，则 $f'(z) - f(z) = 2z$ 是一阶线性方程，通解为

$$f(z) = e^{\int dz}\left[\int 2ze^{-\int dz}dz + C\right] = Ce^z - 2z - 2.$$

由 $f(0) = 2$ 得 $C = 4$，故 $f(x) = 4e^x - 2x - 2$ 为所求.

例 24　设函数 $y = y(x)(x \geqslant 0)$ 二阶可导，且 $y'(x) > 0$，$y(0) = 1$，过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $M(x, y)$ 作该曲线的切线以及 x 轴的垂线，所作直线与 x 轴所围成的三角形面积记为 S_1，区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积记为 S_2，并设 $2S_2 - S_1$ 恒为 1，求此曲线的方程.

解　先建立微分方程，因为 $y'(x) > 0$，所以 $y = y(x) \geqslant y(0) = 1 > 0$，于是

$$S_1 = \frac{1}{2}y \cdot y\cot\alpha, S_2 = \int_0^x y dx,$$

其中 α 是曲线 $y = y(x)(x \geqslant 0)$ 上点 $M(x, y)$ 处的切线的倾角，即 $\tan\alpha = y'$. 由 $2S_2 - S_1 = 1$ 得

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)dx = 1.$$

两边对 x 求导并化简得 $yy'' = (y')^2$. 令 $p = y'$，故方程化为 $yp\frac{dp}{dy} = p^2$，由于 $y' > 0$，故 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$，解之得 $p = C_1 y$，即 $y' = C_1 y$，于是 $y = e^{C_1 x + C_2}$. 注意到 $y(0) = 1$，并由 $\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)dx = 1$ 知，$y'(0) = 1$，从而 $C_1 = 1$，$C_2 = 0$.

所以所求曲线方程为 $y = e^x$.

四、练习题及答案

习题(A)

一、求下列方程的通解

1. $xy' = x\sin x - y$.
2. $dy + (2y - 4x)dx = 0$.
3. $r(s^2+1)\dfrac{dr}{ds} = sr^2 - s$.
4. $(x - y)dy + ydx = 0$.
5. $(x^2 + y^2)dx = xydy$.
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4 - 2x - y}{x + y - 1}$.
7. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y^2 - 2x}{2y}$.

二、求下列方程的特解

1. $3xy' = y(1 + 3xy^3\ln x)$，$y(1) = 1$.
2. $xdy - ydx = (1 + y^2)dy$，$y(1) = 0$.

三、求下列二阶微分方程的通解

1. $xy'' + y' = 0$.
2. $y'' + \dfrac{2}{1-y}y'^2 = 0$.

四、求下列二阶微分方程在初始条件下的特解

1. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 1$，$y(0) = 2$，$y'(0) = 3$.
2. $2yy' = 1 + y'^2$，$y(1) = y'(1) = 1$.

五、求下列常微分方程的通解

1. $2y'' + y' - 6y = 0$.
2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$.
3. $y''' = 5y'' - 4y'$.
4. $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$.
5. $y'' + 3y' + 2y = \sin x$，$y(0) = y'(0) = 0$.

习题(B)

一、填空题

1. $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$是$y''+2y'+y=0$的通解，则常数C_1，C_2应满足条件______.

2. 微分方程$y''-2y'=2\sin^2 2x$用待定系数法确定的特解(不必求出)$y^*=$______.

二、求解下列微分方程

1. $(x^3-3xy^2)dx=(3x^2-y^2)ydy$.

2. $ye^y dx-(y^3+2xe^y)dy=0$.

3. $y'=\dfrac{1}{x-y}+1$.

4. $(x^2y-1+y-x^2)dy+(xy-6+2x-3y)dx=0$.

5. $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$.

6. $3y''^2-y'y'''=0$，$y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

7. $y'''+2y''-4y'-8y=0$.

8. $y''+6y'+9y=2e^{3x}+4e^{-3x}$.

9. $y'''+3y''+3y'+3y=e^{-x}(x-5)$.

10. $y''+y=4\sin x+2xe^x$，$y(0)=y'(0)=0$.

三、应用题

已知函数$f(x)$的图像在原点处与曲线$y=x^3-2x^2$相切，并满足关系$f'(x)+2\int_0^x f(t)dt=-3f(x)-3xe^{-x}$，求$f(x)$.

习题(A)答案

一、求下列方程的通解

1. $y=\dfrac{1}{x}(\sin x+C)-\cos x$.　2. $y=Ce^{-2x}+2x-1$.

3. $1+s^2=C(1-r^2)$.　　4. $y^2=2xy+C$.

5. $y^2=x^2(C+2\ln|x|)$.　　6. $2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C$.

7. $\frac{1}{3}y^3-2xy=C$.

二、求下列方程的特解

1. $y^{-3}=\frac{1}{4x}+\frac{3}{4}x(1-2\ln x)$.　　2. $y^2+y+x-1=0$.

三、求下列二阶微分方程的通解

1. $y=C_1\ln x+C_2$.　　2. $y=1-\frac{1}{C_1x+C_2}$.

四、求下列二阶微分方程在初始条件下的特解

1. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+3\arctan x+2$.　　2. $y=\frac{1}{2}(1+x^2)$.

五、求下列常微分方程的通解

1. $y=C_1e^{\frac{3}{2}x}+C_2e^{-2x}$.

2. $y=e^{-t}(C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t)$.

3. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{4x}$.

4. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(\frac{5}{36}+\frac{x}{6}\right)e^{-x}$.

5. $y=-\frac{1}{5}e^{-2x}+\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$.

习题(B)答案

一、填空题

1. C_1,C_2 相互独立.　　2. $Ax+B\cos 4x+C\sin 4x$.

二、求解下列微分方程

1. $x^4-6x^2y^2+y^4=C$.　　2. $x=(C-e^{-y})y^2$.

3. $(x-y)^2=-2x+C$.　　4. $y+\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{(y+2)^6}-3\arctan x=C$.

5. $y=\left(x^2+\frac{1}{C_1^2}\right)\arctan(C_1 x)-\frac{x}{C_1}+C_2$.

6. $y=2-\sqrt{1-2x}$.

7. $y=(C_1+C_2 x)e^{-2x}+C_3 e^{2x}$.

8. $y=(C_1+C_2 x+2x^2)e^{-3x}+\frac{1}{18}e^{3x}$.

9. $y=(C_1+C_2 x+C_3 x^2)e^{-x}+\frac{x^3}{24}(x-20)e^{-x}$.

10. $y=(x-1)e^x+(1-2x)\cos x+2\sin x$.

三、应用题

$$f(x)=6e^{-x}-6e^{-2x}+\left(\frac{3}{2}x-6\right)xe^{-x}.$$

附录
2005年全国硕士研究生入学统一考试高等数学部分试题与解答

数学一

一、填空题

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}}$.

2. 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为 $\underline{y=\dfrac{1}{3}x\ln x-\dfrac{1}{9}x}$.

3. 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}=\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

4. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{2\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)R^3}$.

二、选择题

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 (C).

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　　　　　(D) 至少有三个不可导点

2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”,则必有(A).

(A) $F(x)$ 是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

3. 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,dt$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有(B).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

4. 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$,根据隐函数存在定理,存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域,在此邻域内该方程(D).

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

三、解答题

1. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,dxdy$.

分析　为了去掉取整函数符号,将积分区域分为两部分.

解　记 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant0,y\geqslant0\}$,

$$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\}.$$

则有
$$[1+x^2+y^2]=1,\ (x,y)\in D_1,$$
$$[1+x^2+y^2]=2,\ (x,y)\in D_2.$$

于是
$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]\,dxdy=\iint_{D_1} xydxdy+2\iint_{D_2} xydxdy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3dr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}} r^3dr$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

2.求幂级数 $\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

分析 先求收敛半径,进而确定收敛区间.函数可分为两部分求和函数,$\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 可利用逐项求导求和函数.

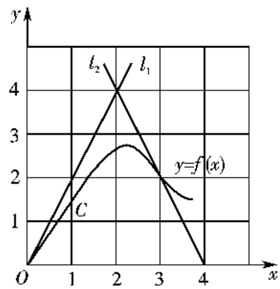
解 因为 $\lim_{n\to}\frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1}=1$,所以当 $x^2<1$ 时,原级数绝对收敛;当 $x^2>1$ 时,原级数发散.因此原级数的收敛半径为 1,收敛区间为 $(-1,1)$.

记
$$s(x)=\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n},x\in(-1,1),$$
则
$$s'(x)=\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},x\in(-1,1),$$
$$s''(x)=\sum_{n=1}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

由于 $s(0)=0,s'(0)=0$,所以
$$s'(x)=\int_0^x s''(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,$$
$$s(x)=\int_0^x s'(t)dt=\int_0^x\arctan t\,dt=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

又
$$\sum_{n=1}(-1)^{n-1}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2},x\in(-1,1),$$
从而
$$f(x)=2s(x)+\frac{x^2}{1+x^2}$$
$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

3.如图所示,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分



$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,dx.$$

分析　计算所求定积分,应该用分部积分法,所需要的 $f(x)$,$f'(x)$,$f''(x)$ 在 $x=0$,$x=3$ 处的值可从题设中找.

解　由题设图形知,$f(0)=0$,$f'(0)=2$;$f(3)=2$,$f'(3)=-2$,$f''(3)=0$.

利用分部积分法有

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,dx &= \int_0^3 (x^2+x)\,df''(x)\\ &= (x^2+x)f''(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 f''(x)(2x+1)\,dx\\ &= -\int_0^3 (2x+1)\,df'(x)\\ &= -(2x+1)f'(x)\Big|_0^3 + 2\int_0^3 f'(x)\,dx\\ &= 16+2[f(3)-f(0)] = 20.\end{aligned}$$

4.已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$.证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

分析　问题(1)显然应该用闭区间上连续函数的零点定理;问题(2)为双介值问题,可考虑用拉格朗日中值定理,但区间的选取应注意利用第一部分已得结论.

解　(1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且

$$F(0)=-1<0,\ F(1)=1>0.$$

于是由零点定理知,存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$F(\xi)=0,\text{即 } f(\xi)=1-\xi.$$

(2) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理,知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi)$,$\zeta\in(\xi,1)$,使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}.$$

于是
$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

5. 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

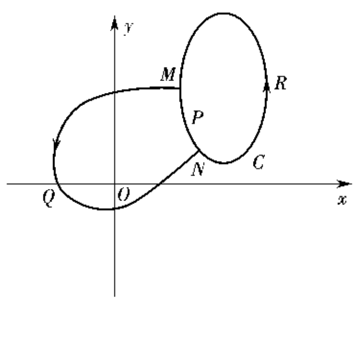
(1) 证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0;$$

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

分析 证明(1)要用到题设,所以需要将封闭曲线 C 与围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 相联系,利用曲线积分的可加性将 C 分解进行讨论;而问题(2)显然应该用(1)的结论,即曲线积分与路径无关.

解 (1) 如下图所示,在 C 上取两点 M,N,将 C 分解为 $\overset{\frown}{NRM}$ 与 $\overset{\frown}{MPN}$,另作一条围绕原点且与 C 相接于 M、N 的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNRM}$. 由题设知



$$\oint_C \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4}$$
$$= \oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overset{\frown}{MQNPM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} = 0.$$

(2) $P = \dfrac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$，$Q = \dfrac{2xy}{2x^2 + y^4}$，$P$，$Q$ 在单连通区域 $x > 0$ 内具有一阶连续偏导数，由（Ⅰ）知，曲线积分 $\int_L \dfrac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关，故当 $x > 0$ 时，总有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x\cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2}, \qquad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2}$$
$$= \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2}. \qquad ②$$

比较①、②两式的右端，得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y, & ③\\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5. & ④\end{cases}$$

由③得 $\varphi(y) = -y^2 + C$，将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5 - 4Cy^3 = 2y^5$，所以 $C = 0$，从而 $\varphi(y) = -y^2$.

数学二

一、填空题

1．设 $y = (1 + \sin x)^x$，则 $dy|_{x=\pi} = \underline{-\pi dx}$.

2．曲线 $y = \dfrac{(1 + x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{y = x + \dfrac{3}{2}}$.

3．$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \underline{\dfrac{\pi}{4}}$.

4．同数学一填空题2.

5. 当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,则 $k=\underline{\frac{3}{4}}$.

二、选择题

1. 同数学一选择题 1.

2. 同数学一选择题 2.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是(A).

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$

(C) $-8\ln 2+3$　　(D) $8\ln 2+3$

4. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数,则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$(D).

(A) $ab\pi$　　(B) $\frac{ab}{2}\pi$　　(C) $(a+b)\pi$　　(D) $\frac{a+b}{2}\pi$

5. 同数学一选择题 3.

6. 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$ 则(D).

(A) $x=0$, $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$, $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

三、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$.

分析　这是“$\frac{0}{0}$”型极限,典型方法是用洛必达法则,但分子、分母

求导前应先变形.将被积函数中的 x 提到积分号外面,与积分变量 t 分开.

解　由于 $\int_0^x f(x-t)\,dt \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)\,du$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt} = \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt}{x\int_0^x f(u)\,du}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du + xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x f(u)\,du + xf(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt/x}{\int_0^x f(u)\,du/x + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}.$$

2.如下图所示,C_1 和 C_2 分别是 $y=\frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图像,过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$;C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$.如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$,求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

分析　利用定积分的几何意义可确定面积 $S_1(x)$,$S_2(y)$,再根据 $S_1(x)=S_2(y)$ 建立积分等式,进而可从中解出所需函数关系 $x=\varphi(y)$.

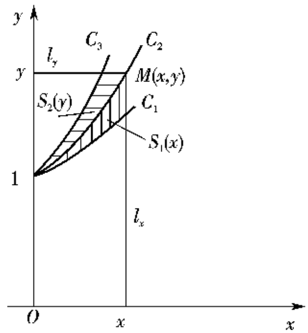
解　如下图所示,有

$$S_1(x) = \int_0^x \left[e^t - \frac{1}{2}(1+e^t)\right]dt = \frac{1}{2}(e^x - x - 1),$$

$$S_2(y) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t))\,dt,$$

由题设得

$$\frac{1}{2}(e^x - x - 1) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t))\,dt,$$



而 $y=e^x$，于是

$$\frac{1}{2}(y-\ln y-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))\,dt.$$

两边对 y 求导得

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{y}\right)=\ln y-\varphi(y),$$

故所求的函数关系为

$$x=\varphi(y)=\ln y-\frac{y-1}{2y}.$$

3. 同数学一解答题 3.

4. 用变量代换 $x=\cos t\ (0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 的特解.

分析 根据代换 $x=\cos t$，将 $y'=y'(x)$，$y''=y''(x)$ 转化为 $\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dt^2}$，进而再解关于 $y=y(t)$ 的微分方程.

解 $y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$，

$$y''=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$

代入原方程，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

这是二阶常系数齐次线性微分方程,解此微分方程,得

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t = C_1 x + C_2\sqrt{1-x^2}.$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 代入,有 $C_1=2, C_2=1$. 故满足条件的特解为 $y=2x+\sqrt{1-x^2}$.

5. 同数学一解答题4.

6. 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$,并且 $f(1,1)=2$,求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

分析　可由全微分和初始条件先确定 $f(x,y)$ 的表达式. 而 $f(x,y)$ 在椭圆域上的最大值和最小值可能在区域的内部达到,也可能在区域的边界上达到,且在边界上的最值应该是条件极值问题.

解　在区域 D 内部,由题设知,$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \frac{\partial f}{\partial y}=-2y$,于是 $f(x,y)=x^2+C(y)$,且 $C'(y)=-2y$,从而 $C(y)=-y^2+C$,再由 $f(1,1)=2$ 得 $C=2$,故

$$f(x,y)=x^2-y^2+2.$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0$,得可能极值点为 $x=0, y=0$,且 $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2$, $B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0$, $C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-2$,故 $AC-B^2=-4<0$.

所以点 $(0,0)$ 不是极值点,从而也非最值点.

再考虑其在边界曲线 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的情形. 令拉格朗日函数为

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=\frac{\partial f}{\partial x}+2\lambda x=2(1+\lambda)x=0, \\ F'_y=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\lambda y}{2}=-2y+\frac{1}{2}\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0, \end{cases}$$

得可能极值点 $x=0,y=2,\lambda=4$；$x=0,y=-2,\lambda=4$；$x=1,y=0,\lambda=-1$；$x=-1,y=0,\lambda=-1$. 代入 $f(x,y)$ 得 $f(0,\pm2)=-2,f(\pm1,0)=3$，可见 $z=f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant1\right\}$内的最大值为 3，最小值为 -2.

7. 计算二重积分$\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$.

分析　被积函数含有绝对值，应该利用积分的可加性分区域积分.

解　记 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant1,(x,y)\in D\}$，

$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1,(x,y)\in D\}$，

于是

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma\\
&=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r\mathrm{d}r+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi}{8}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r\mathrm{d}r\\
&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

数学三

一、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ $\underline{\ \ 2\ \ }$.

2. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为 $\underline{xy=2}$.

3. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,0)}=\underline{2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y}$.

二、选择题

1. 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰好有两个不同的零点.(　B　)

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

2. 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$, $I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则(　A　).

(A) $I_3>I_2>I_1$　　(B) $I_1>I_2>I_3$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$

3. 设 $a_n>0$, $n=1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}a_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是(　D　).

(A) $\sum\limits_{n=1}a_{2n-1}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}a_{2n}$ 发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}a_{2n}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}a_{2n-1}$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛

4. 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是(　B　).

(A) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值

(B) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

(C) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值

(D) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

5. 以下四个命题中,正确的是(　C　).

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

三、解答题

1.求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

分析 这是“ - ”型未定式,一般先通分,再用洛必达法则.

解
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

2.设 $f(u)$ 具有二阶连续导数,且 $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$,求 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

分析 先求出二阶偏导数,再代入相应表达式计算.

解 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right).$$

所以 $$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$
$$=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

4.同数学二解答题7.

5.求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数$s(x)$.

分析 所给幂级数可分为两部分,其中$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$可乘以$x$后逐项求导求和函数.

解 设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$,

$$s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n},\quad s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n},$$

则
$$s(x)=s_1(x)-s_2(x),\quad x\in(-1,1).$$

由于
$$s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

$$(xs_1(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad x\in(-1,1),$$

因此
$$xs_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

又由于$s_1(0)=0$,故

$$s_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

所以
$$s(x)=s_1(x)-s_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

6.设$f(x),g(x)$在$[0,1]$上的导数连续,且$f(0)=0$,$f'(x)\geqslant 0$,$g'(x)\geqslant 0$.证明:对任何$a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\geqslant f(a)g(1).$$

分析 参阅本书第三章不等式证明的讨论,可用参数变易法转化为函数不等式证明,或根据被积函数的特点,通过分部积分讨论.

证法 1

设 $F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\,dt+\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt-f(x)g(1)$,

则 $F(x)$ **在** $[0,1]$ **上的导数连续,并且**

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)],$$

由于当 $x\in[0,1]$ **时**, $f'(x)\geqslant 0$, $g'(x)\geqslant 0$, **因此** $F'(x)\leqslant 0$, **即** $F(x)$ **在** $[0,1]$ **上单调递减**.

注意到

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)\,dt+\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt-f(1)g(1),$$

而
$$\int_0^1 g(t)f'(t)\,dt=\int_0^1 g(t)\,df(t)=g(t)f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt$$
$$=f(1)g(1)-\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt,$$

故 $F(1)=0$. **因此当** $x\in[0,1]$ **时**, $F(x)\geqslant 0$, **由此可得,对任何** $a\in[0,1]$, **有** $F(a)\geqslant 0$, **即**

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dxdx\geqslant f(a)g(1).$$

证法 2

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx=g(x)f(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)g'(x)\,dx$$
$$=f(a)g(a)-\int_0^a f(x)g'(x)\,dx,$$

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx$$
$$=f(a)g(a)-\int_0^a f(x)g'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx$$
$$=f(a)g(a)+\int_a^1 f(x)g'(x)\,dx.$$

由于当 $x\in[0,1]$ **时**, $g'(x)\geqslant 0$, $f'(2)\geqslant 0$, **因此**

$$f(x)g'(x)\geqslant f(a)g'(x),\ x\in[a,1],$$

$$\int_a^1 f(x)g'(x)\,dx\geqslant\int_a^1 f(a)g'(x)\,dx=f(a)[g(1)-g(a)],$$

从而 $$\int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx$$
$$\geqslant f(a) g(a) + f(a)[g(1) - g(a)] = f(a) g(1).$$

数学四

一、填空题

1. 同数学三填空题 1.

2. 同数学三填空题 2.

3. 同数学三填空题 3.

二、选择题

1. 同数学三选择题 1.

2. 同数学三选择题 2.

3. 下列结论中正确的是(D).

(A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛

(B) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 都发散

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 发散, $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛

(D) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛, $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 发散

4. 同数学三选择题 4.

5. 同数学三选择题 5.

三、解答题

1. 同数学三解答题 1.

2. 同数学三解答题 2.

3. 同数学二解答题 7.

4. 同数学二解答题 6.

5. 同数学三解答题 6.

附录
2006 年全国硕士研究生入学统一考试高等数学部分试题与解答

数学一

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ __2__.

2. **微分方程** $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ **的通解是** $y=Cxe^{-x}\ (x\neq 0)$.

3. **设** Σ **是锥面** $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ **的下侧,则**

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\ 2\pi\ }.$$

4. **点** $(2,1,0)$ **到平面** $3x+4y+5z=0$ **的距离** $d=$ __$\sqrt{2}$__.

二、选择题

1. **设函数** $y=f(x)$ **具有二阶导数,且** $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx **为自变量** x **在点** x_0 **处的增量,**Δy **与** $\mathrm{d}y$ **分别为** $f(x)$ **在点** x_0 **处对应的增量与微分,若** $\Delta x>0$**,则(　A　).**

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

2. **设** $f(x,y)$ **为连续函数,则** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ **等于(　C　).**

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

3. **若级数** $\sum_{n=1} a_n$ **收敛,则级数(　D　).**

(A) $\sum_{n=1} |a_n|$ **收敛**　　(B) $\sum_{n=1} (-1)^n a_n$ **收敛**

(C) $\sum_{n=1} a_n a_{n+1}$ **收敛**　　(D) $\sum_{n=1} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ **收敛**

4. **设** $f(x,y)$ **与** $\varphi(x,y)$ **均为可微函数,且** $\varphi'_y(x,y) \neq 0$**,已知** (x_0, y_0) **是** $f(x,y)$ **在约束条件** $\varphi(x,y)=0$ **下的一个极值点,下列选项正确的是(　D　).**

(A) **若** $f'_x(x_0,y_0)=0$**,则** $f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) **若** $f'_x(x_0,y_0)=0$**,则** $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) **若** $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$**,则** $f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) **若** $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$**,则** $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

三、解答题

1. **设区域** $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$**,计算二重积分** $\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy$.

解　**因为区域** D **关于** x **轴对称,函数** $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ **是变量** y **的偶函数,函数** $g(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ **是变量** y **的奇函数,则**

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr = \frac{\pi \ln 2}{2},$$

$$\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy = 0,$$

故
$$\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy + \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

2.设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解　(1) 因为 $0<x_1<\pi$,故 $0<x_2=\sin x_1\leqslant 1$.因当 $x>0$ 时,$\sin x<x$,可推得 $0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n$,$n=1,2,\cdots$,可见数列 $\{x_n\}$ 单调减少.又 $x_n\geqslant 0$,即 $\{x_n\}$ 有下界,故由单调减少有下界数列必有极限知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$,在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边令 $n\to\infty$,得 $l=\sin l$,解得 $l=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,为“$1^\infty$”型极限.

令 $t=x_n$,则 $n\to\infty$ 时,$t\to 0$,而

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\sin t}{t}-1}}\right]^{\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)},$$

又

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}=-\frac{1}{6}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

3.将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解　$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{(2-x)(1+x)}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{1+x}$.

去分母,比较两边不同次幂系数可得 $A=\dfrac{2}{3}$,$B=-\dfrac{1}{3}$,即

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x}\right).$$

而
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}(-1)^{n}x^{n},x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}\left(\frac{x}{2}\right)^{2},x\in(-2,2).$$

故
$$f(x)=\frac{2}{2+x-x^{2}}=\frac{1}{3}\left[-\sum_{n=0}(-1)^{n}x^{n}+\sum_{n=0}\frac{1}{2^{n}}x^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}\left[(-1)^{n+1}+\frac{1}{2^{n}}\right]x^{n},x\in(-1,1).$$

4.设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\quad)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^{2}+y^{2}})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}=0$.

(1)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(2)若 $f(1)=0$,$f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

解　(1)设 $u=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}.$$

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}=f''(u)\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}+f'(u)\frac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}-\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}}{x^{2}+y^{2}}$$

$$=f''(u)\frac{x^{2}}{x^{2}+y^{2}}+f'(u)\frac{y^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}=f''(u)\frac{y^{2}}{x^{2}+y^{2}}+f'(u)\frac{x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}.$$

将$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$代入$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,得 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(2) 令 $f'(u)=p$,则 $p'+\frac{p}{u}=0$,$\frac{dp}{p}=-\frac{du}{u}$,两边积分得 $\ln p=-\ln u+\ln C_1$,即 $p=\frac{C_1}{u}$,亦即 $f'(u)=\frac{C_1}{u}$.

由 $f'(1)=1$ 可得 $C_1=1$,所以有 $f'(u)=\frac{1}{u}$,两边积分得 $f(u)=\ln u+C_2$,由 $f(1)=0$ 可得 $C_2=0$,故 $f(u)=\ln u$.

注　该题也可看作欧拉方程或全微分方程来解.

5. 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内,函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明:对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)\,dx-xf(x,y)\,dy=0.$$

证明　方程 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得

$$xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y).$$

令 $t=1$,则

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-2f(x,y). \tag{1}$$

$P(x,y)=yf(x,y)$,$Q(x,y)=-xf(x,y)$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf'_x(x,y),\ \frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf'_y(x,y).$$

由(1)式可得$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,故由曲线积分与路径无关的定理可知,对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)\,dx-xf(x,y)\,dy=0.$$

数学二

一、填空题

1. 曲线 $y=\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$的水平渐近线方程为 $\underline{\ y=\frac{1}{5}\ }$.

2.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$.

3.广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x dx}{(1+x^2)^2}=\underline{\frac{1}{2}}$.

4.微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{y=Cxe^{-x}\ (x\neq 0)}$.

5.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\underline{-e}$.

二、选择题

1.同数学一选择题1.

2.设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x=0$ 外处处连续,$x=0$ 是其第一类间断点,则 $\int_0^x f(t)dt$ 是(B).

(A) 连续的奇函数　(B) 连续的偶函数

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数　(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数

3.设函数 $g(x)$ 可微,$h(x)=e^{1+g(x)}$,$h'(1)=1$,$g'(1)=2$,则 $g(1)$ 等于(C).

(A) $\ln 3-1$　(B) $-\ln 3-1$　(C) $-\ln 2-1$　(D) $\ln 2-1$

4.函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是(D).

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$　(B) $y''-y'-2y=3e^x$

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$　(D) $y''+y'-2y=3e^x$

5.设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r dr$ 等于(C).

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

6.同数学一选择题 4.

三、解答题

1.试确定 A,B,C 的值,使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中 $o(x^3)$是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

分析　题设方程右边为关于 x 的多项式 $1+Ax+o(x^3)$,左边也应该是 x 的三次多项式加上 $o(x^3)$.为此应将 e^x 按三阶麦克劳林公式展开.通过比较 x 的同次项系数,可得 A,B,C 的值.

解　将 e^x 的麦克劳林展开式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ 代入题设等式得

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right][1+Bx+Cx^2]=1+Ax+o(x^3).$$

整理得

$$1+(B+1)x+\left(B+C+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)+o(x^3)$$
$$=1+Ax+o(x^3).$$

比较两端 x 的同次幂系数得

$$\begin{cases}B+1=A,\\ B+C+\frac{1}{2}=0,\\ \frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}A=\frac{1}{3},\\ B=-\frac{2}{3},\\ C=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

2.求 $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

分析　被积函数是指数函数与反三角函数的乘积,利用分部积分法.

解　$$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\int\arcsin e^x de^{-x}$$
$$=-e^{-x}\arcsin e^x+\int e^{-x}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$$

$$= -e^{-x}\arcsin e^{x} + \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx.$$

令 $t=\sqrt{1-e^{2x}}$，则 $x=\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$，$dx=-\frac{t}{1-t^2}dt$，所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right| + C.$$

于是 $$\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}dx = -\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right| + C.$$

注 $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ 有多种解法.

3.同数学一解答题1.

4.同数学一解答题2.

5.证明 当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

分析　利用函数单调性证明.

证明　令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x-a\sin a-2\cos a-\pi a$，$0<a\leqslant x\leqslant b<\pi$，则

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi,$$

且 $f'(\pi)=0$. 又

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0,\ (0<x<\pi),$$

故当 $0<a\leqslant x\leqslant b<\pi$ 时，$f'(x)$ 单调减少，即 $f'(x)>f'(\pi)=0$，所以 $f(x)$ 单调增加，于是 $f(b)>f(a)=0$，即

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

6.同数学一解答题4.

7.已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=4t-t^2, \end{cases}$ $(t\geqslant 0)$.

(1) 讨论 L 的凹凸性；

(2) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程；

(3) 求此切线与 L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

分析　问题(1)根据$\dfrac{d^2y}{dx^2}$的符号讨论;问题(2)先求切点(x_0,y_0)对应的 t_0;问题(3)根据切线、曲线与 x 轴交点及切点画所围的平面图形,再求面积.

解　(1)因为$\dfrac{dx}{dt}=2t$,$\dfrac{dy}{dt}=4-2t$,故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0\quad(t>0),$$

故当 $t\geqslant 0$ 时曲线 L 是凸的.

(2) 设切点(x_0,y_0)对应参量 $t=t_0$,由(1)知,切线方程为

$$y-0=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(x+1),$$

又　$x_0=t_0^2+1,y_0=4t_0-t_0^2$,

则　$4t_0-t_0^2=\left(\dfrac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2)$,

即　$4t_0^2-t_0^3=(2-t_0)(t_0^2+2)$.

整理得　$t_0^2+t_0-2=0,(t_0-1)(t_0+2)=0$,

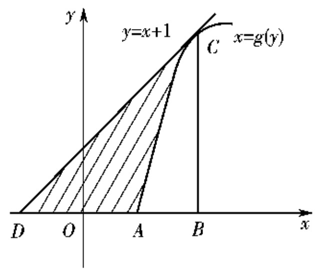
所以　$t_0=1,-2$(舍去).

将 $t_0=1$ 代入参数方程,得切点为(2,3),故切线方程为

$$y-3=\left(\frac{2}{1}-1\right)(x-2),\text{即 } y=x+1.$$

(3) 由 L 的参数方程得$t=\sqrt{x-1}$,$y=4\sqrt{x-1}-x+1$.曲线 L、切线与 x 轴的交点分别为(1,0),(-1,0),再由切点坐标(2,3)可知,所求平面图形如下图所示,其中各点坐标为 $A(1,0)$,$B(2,0)$,$C(2,3)$,

$D(-1,0)$.



$$S=\frac{1}{2}\times 3\times 3-\int_1^2\left(4\sqrt{x-1}-x+1\right)dx$$
$$=\frac{9}{2}-\left[\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$
$$=\frac{7}{3}.$$

数学三

一、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ __1__.

2. **设函数** $f(x)$ **在** $x=2$ **的某邻域内可导，且** $f'(x)=e^{f(x)}$**，**$f(2)=1$**，则** $f'''(2)=$ __$2e^3$__.

3. **设函数** $f(u)$ **可微，且** $f'(0)=\frac{1}{2}$**，则** $z=f(4x^2-y^2)$ **在点** $(1,2)$ **处的全微分** $dz|_{(1,2)}=$ __$4dx-2dy$__.

二、选择题

1. **同数学一选择题** 1.

2. **设函数** $f(x)$ **在** $x=0$ **处连续，且** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$**，则**（　C　）.

(A) $f(0)=0$ **且** $f'_-(0)$ **存在**　　(B) $f(0)=1$ **且** $f'_-(0)$ **存在**

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在

3.同数学一选择题3.

4.设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$,$y_2(x)$,C为任意常数,则该方程的通解是(B).

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

5.同数学一选择题4.

三、解答题

1.设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$,$x>0$,$y>0$,求:

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to +} f(x,y)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)$.

分析　问题(1)求极限时注意将 x 作为常量,此问中含—,0· 型未定式,解问题(2)需利用问题(1)中的结果,是一个 - 未定式.

解　(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to +} f(x,y)$

$$=\lim_{y\to +}\left[\frac{y}{1+xy}-\frac{1}{\arctan x}\left(1-y\sin\frac{\pi x}{y}\right)\right]$$

$$=\lim_{y\to +}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{y}+x}-\frac{1}{\arctan x}\left(1-\frac{\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\dfrac{1}{y}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0^{+}} g(x)=\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 + 2\pi x(1 + x^2)}{2x(1 + x^2)}$$

$$= \pi.$$

3.同数学二解答题5.

4.在 xOy 坐标平面上,连续曲线 L 过点 M(1,0),其上任意点 P(x,y)(x≠0)处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax(常数 a > 0).

(1)求 L 的方程;

(2)当 L 与直线 y = ax 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

分析 问题(1)可利用导数的几何意义建立微分方程,并求解;问题(2)可利用定积分计算平面图形的面积,并利用已知条件确定参数.

解 (1)设曲线 L 的方程为 y = f(x),则由题设可得

$$y' - \frac{y}{x} = ax,$$

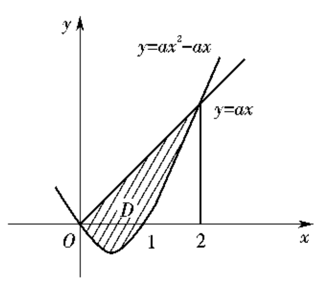
这是一个一阶线性微分方程,其中 $P(x) = -\frac{1}{x}$,$Q(x) = ax$,代入通解公式得

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int axe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = x(ax + C) = ax^2 + Cx,$$

又 f(1) = 0,所以 C = -a.

故曲线 L 的方程为 $y = ax^2 - ax\ (x \neq 0)$.

(2)由方程组 $\begin{cases} y = ax^2 - ax, \\ y = ax \end{cases}$ 得交点(0,0)与(2,2a).L 与直线 y = ax(a > 0)所围平面图形如右图所示.面积



$$A = \int_0^2 [ax - (ax^2 - ax)]dx$$

$$= a\int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{4}{3}a.$$

由$\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$,得 $a=2$.

5.求幂级数$\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$的收敛域及和函数 $s(x)$.

分析　因为幂级数缺少偶次幂的项,根据比值审敛法求级数收敛域 级数系数为$\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$,应两次利用逐项求导并结合已知函数的幂级数展开式计算和函数.

解　记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$,则

$$\lim_{n\to}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}}\right|=x^2.$$

当 $x^2<1$,即$|x|<1$时,所给幂级数收敛 ;当$|x|>1$时,所给幂级数发散;当 $x=\pm 1$ 时,所给幂级数分别为$\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$,$\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$,均收敛,故所给幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

令　$s(x)=\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2x\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)(2n)}$,$|x|<1$.

令　$s_1(x)=\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)(2n)}$,$|x|<1$,则 $s(x)=2xs_1(x)$.

而　$s'_1=\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$,$s''_1(x)=\sum\limits_{n=1}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$,

所以　$s'_1(x)-s'_1(0)=\int_0^x s''_1(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$,

又 $s'_1(0)=0$,于是 $s'_1(x)=\arctan x$.再积分得

$$s_1(x)-s_1(0)=\int_0^x s'_1(t)\,dt=\int_0^x\arctan t\,dt$$

$$=t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

又 $s_1(0)=0$，所以 $s_1(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，故

$$s(x)=2x^2\arctan x - x\ln(1+x^2),\ x\in(-1,1).$$

由于所给幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛，且 $s(x)=2x^2\arctan x - x\ln(1+x^2)$ 在 $x=\pm1$ 处连续，所以等式在 $x=\pm1$ 时成立，即

$$s(x)=2x^2\arctan x - x\ln(1+x^2),\ x\in[-1,1].$$

数学四

一、填空题

1. 同数学三填空题1.
2. 同数学三填空题2.
3. 同数学三填空题3.

二、选择题

1. 同数学三选择题1.
2. 同数学三选择题2.
3. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\leqslant g(x)$，对任何 $c\in(0,1)$，则（　D　）.

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\,dt \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\,dt$　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\,dt \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\,dt$

(C) $\int_{c}^{1} f(t)\,dt \geqslant \int_{c}^{1} g(t)\,dt$　　(D) $\int_{c}^{1} f(t)\,dt \leqslant \int_{c}^{1} g(t)\,dt$

4. 同数学三选择题4.
5. 同数学三选择题5.

三、解答题

1. 同数学三解答题1.
2. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}\,dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$，$x=0$ 所围成的平面区域.

解　$$\iint\limits_D \sqrt{y^2 - xy}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{y}\left(y^2 - xy\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}.$$

3. **同数学二解答题** 5.

4. **同数学三解答题** 4.

5. **同数学二解答题** 1.