线性代数
思想方法与学习指导

主　编　赵　晶
副主编　郭晓时　尚学海　万诗敏
编　者　（以姓氏笔画为序）
　　　　闫晓红　肖盛宁　张　华

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书按同济大学数学系编写的《线性代数》教材的内容及顺序同步阐述,全书共分六章,每章有五个部分,即基本要求概述及主要术语,基本内容剖析,典型例题分析,自测题,自测题答案与提示,并配有两套综合练习题与两套考研试题及其详解.

本书的特点是从线性代数的基本思想方法入手按教学基本要求突出知识的重点与难点,给出了各章知识在课程中的作用与地位,分析各章内容的相互关系,并对各章内容进行剖析.典型例题分析注重强调知识点的具体应用、解题的思想方法,指出学生易忽略、混淆甚至错误的地方.本书剖析理论的精髓,内容深入浅出,例题翔实并配有分析及多种解法,可作为在校大学生及考研学生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数思想方法与学习指导/赵晶主编.—天津:天津大学出版社,2006.8
ISBN 7-5618-2327-4

Ⅰ.线… Ⅱ.赵… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第095017号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网 址 www.tjup.com
电 话 营销部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 148mm×210mm
印 张 8
字 数 230千
版 次 2006年8月第1版
印 次 2006年8月第1次
印 数 1-4 000
定 价 13.00元

前　　言

《线性代数》是我国理工科院校各专业普遍开设的一门重要基础课，随着计算机技术的快速发展，线性代数在理论和应用的层面上越来越显示其重要作用；它也是学习力学、运筹学、计算数学、离散数学等后续课程的必备基础．由于该课程具有较强的抽象性、逻辑性，使得大学一二年级学生在学习线性代数课程中遇到了许多困惑．概念多、术语多、符号多、结论多、定理多、运算多……加之概念与概念之间，概念与术语之间，概念及术语与符号之间，概念与结论之间，定理与定理之间的相互交叉、相互渗透及由理论分析得出的相关运算之繁复等等，使得教师在 30 至 40 个学时的时间教授好这门课程，学生在相应的时间内学好这门课程都产生相当的困难．

线性代数是讨论离散型变量的一门基础数学理论课，它不同于微积分（一般）讨论连续型变量及概率与数理统计讨论随机变量的课程特点，使得初学者极不适应其探究方法及由此产生的理论体系．甚至有的学生学完该课程也没有掌握其基本思想精髓及方法．

为了提高线性代数课程的教学质量，帮助学生掌握并达到线性代数课程的教学基本要求，编者积多年的教学实践，结合学生在学习中容易产生的错误有针对性地剖析课程涉及的重点、难点，使学生更好地全面理解线性代数的理论体系与思想方法及解题规律．

为此目的编者根据教育部高教司颁发的工科本科线性代数教学基本要求，按照同济大学数学系编写的线性代数第四版（高等教育出版社）的教材内容顺序编写本书，以便读者使用．本书共分六章，每章包括以下内容：

一、基本要求概述及主要术语

二、基本内容剖析

三、典型例题分析

四、自测题

五、自测题答案与提示

全书最后附综合练习题及解答两套，考研试题及解答两套.

对于超出教学基本要求的章节内容加“ * ”号，学生可以选读.本书是面向在校本科生及研究生的复习指导书.

由于编者水平有限，疏漏难免，敬请读者指正.

在本书编写过程中蒙数学教研室领导及诸多老师的大力支持与帮助，在此一并致谢.

编者

2006 年 6 月

目　　录

第一章　行列式

一、基本要求概述及主要术语

1. 基本要求概述

①会用对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式.

②掌握 n 阶行列式的定义,熟练掌握行列式的性质.

③知道代数余子式的定义及性质.

④会利用行列式的定义与性质及按行(列)展开定理计算行列式.

⑤知道克拉默法则及相关结论.

2. 主要术语

排列,逆序,逆序数,对换,相邻对换,奇排列,偶排列,n 阶行列式,行列式的元素,行标,列标,主对角线,副对角线,对角线法则,对角行列式,上(下)三角形行列式,转置行列式,余子式,代数余子式,行列式按行(列)展开,范德蒙德(Vandermonde)行列式,克拉默法则,非齐次线性方程组,齐次线性方程组,零解,非零解.

二、基本内容剖析

1. 排列及其逆序

(1) 全排列

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列). n 个不同元素的所有排列的种数用 P_n 表示,$P_n = n!$.

(2) 自然数排列

由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的全排列称为自然数的 n 级排列

(亦简称排列),记作$(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$.如81352746就是一个8级排列.

⑶ 标准排列

按自然数由小到大的标准次序组成的排列称为标准排列.如12345678即为8级标准排列.

⑷ 逆序和逆序数

在一个排列$(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$中,若有两个数与标准排列次序不同,如$i_s > i_t$,则称这两个数构成一个逆序.一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数,排列$(i_1 i_2 \cdots i_n)$的逆序数记作$t = t(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

⑸ 奇排列与偶排列

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

⑹ 对换

将一个排列中某两个元素的位置互相交换其余元素不动,这种交换称为一个对换.

对换改变排列的奇偶性.

逆序数,奇偶排列,对换的概念是n阶行列式定义中用到的概念,应正确理解并掌握.在弄清概念的基础上,学生应着力学会求一个排列的逆序数的方法.求一个排列的逆序数可采用一律“向前看”或一律“向后看”两种方法.均与标准排列比较(见后面典型例题分析).

2.2 阶和3阶行列式的定义

⑴ 2阶行列式

定义1 设有4个数排成二行二列的数表$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$,表达式$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为上面数表所确定的2阶行列式,记作$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

(2) 3 阶行列式

定义 2　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为上面数表所确定的 3 阶行列式.

3 阶行列式含 6 项 (3！项)，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号.

2 阶、3 阶行列式的定义可由对角线法则记忆. 需要注意的是对角线法则只适用于 2 阶，3 阶行列式，4 阶以上的行列式没有此法则.

3. n 阶行列式的定义

$$n\text{ 阶行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

其中 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，求和符号 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有排列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素，位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 叫做 D 的 (i, j) 元. 行列式 D 可简记作 $\det(a_{ij})$ 或 $\Delta(a_{ij})$.

n 阶行列式的定义是线性代数中的一个重要概念. 学习这个定义应着重理解以下几个问题.

①D 等于它的所有取自不同行、不同列 (即两两“不共线”) 的 n 个

元素乘积的代数和. $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是指对所有 n 级排列求和,而 n 级排列共有 $n!$ 种,所以 D 的展开式中共有 $n!$ 个乘积项.

②展开式中各项前的符号由列标构成的 n 级排列的奇偶性决定,偶排列取"+"号,奇排列取"-"号,根据排列的性质在 $n!$ 个 n 级排列中有 $\frac{n!}{2}$ 个偶排列,$\frac{n!}{2}$ 个奇排列,因此 D 的展开式中的乘积项,一半带有正号,一半带有负号.

③对行列式定义 $D=\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中的各项,交换乘积中任两元素的次序,从而行标和列标排列同时做了相应的对换. 这样,行标排列与列标排列的逆序之和并不改变奇偶性. 经一次交换如此,经多次交换仍如此,由此可知 n 阶行列式的两个定义是等价的.

④这一定义与用对角线法则定义的 2 阶、3 阶行列式一致.

⑤特殊地当 $n=1$ 时一阶行列式 $|a|=a$,该记号不要与绝对值记号混淆.

⑥用定义求行列式的值很繁琐,后面通过研究行列式的性质会得到更方便的求法.

利用 n 阶行列式的定义,得如下结论.

①对角行列式等于它的主对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

未写出的元素均为 0,以后亦如此.

②上(下)三角行列式的值等于它的主对角元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{11} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

③副对角线下(上)边的元素全为 0 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & & \iddots & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4.行列式的性质

性质 1　行列式与其转置行列式相等,即 $D = D^T$.

性质 2　互换行列式的两行(或两列)行列式变号.

推论　若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外边来,或者说用数 k 乘行列式某行(列)的所有元素,等于用 k 乘行列式.

第 i 行(列)乘以 k,记作 $r_i \times k$ $(c_i \times k)$.

第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k$ $(c_i \div k)$.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素均为两数之和,如第 i 列元素均是“两数之和”

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$,则 D 等于下列两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注　一般 $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$.

性质 6　将行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

例如,以数 k **乘第** j **列加到第** i **列上(记作** $c_i + kc_j$**)有**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数 k **乘第** j **行加到第** i **行上,记作** $r_i + kr_j$.

注　区别运算 $r_i + r_j$ **与** $r_j + r_i$**,不能将记号** $r_i + kr_j$ **写作** $kr_j + r_i$ **(对** $c_i + kc_j$ **同样如此)**.

5. **余子式与代数余子式**

在 n **阶行列式中,把元素** a_{ij}**所在的第** i **行和第** j **列划去后,余下来的** $n-1$ **阶行列式,称为元素** a_{ij}**的余子式,记作** M_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

称为元素 a_{ij}**的代数余子式**.

6. **子式及其代数余子式**

在 n **阶行列式中,任选** k **行** k **列** $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ **其交叉位置上的** k^2 **个元素(不改变相对位置)组成的** k **阶行列式称为原行列式的一个** k **阶**

子式,而余下的行列所组成的 $n-k$ 阶行列式称为该 k 阶子式的余子式.

记某个 k 阶子式在原来行列式中的所有行数与列数的和为 t,则 $(-1)^t$ 乘以该 k 阶子式的余子式称为该 k 阶子式的代数余子式.

7.行列式按行(列)展开

(1) 按一行(列)展开

① 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为 0,则这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

注　对列也成立.

② 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

③ 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)$$

或
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

②,③可简记为:$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ 或 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

(2) 按某 k 行(列)展开(拉普拉斯定理)

n 阶行列式等于某 $k\ (1\leqslant k\leqslant n-1)$ 个行(列)中的所有 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和.

行列式的性质及行列式的展开定理是计算行列式和讨论行列式一般理论的重要基础,且在第二章矩阵理论中也有着重要的应用,所以对行列式的性质及展开法则一定要理解熟记并会用.行列式的计算在本章是个重点,而按定义计算一般的 n 阶行列式几乎是不可能的事,所以要学会用性质及展开定理计算行列式或证明相关的结论.

行列式的计算基本方法主要有两种.

方法一　消元.将行列式化为上、下三角行列式或其他更简便的

较易计算的行列式．这可通过充分利用行列式的性质来实现．

方法二　降阶．这可通过利用行列式的展开定理，将高阶行列式化成低阶行列式来计算．特别在行列式中零元素较多时，可将行列式降阶化简．

在具体应用中往往消元与降阶结合运用，如果将行列式按某行(列)展开，则常常先将该行(列)中较多的元素化成零后再展开．在使用降阶法时，还常常用到数学归纳法和递推法(具体做法见典型例题分析)．

行列式的计算在本章既是重点又是难点，特别是高阶行列式及元素中含有字母的行列式的计算．因此在计算前要注意分析行列式的特点，根据其特点采用适当的计算方法．注意体会、学习总结例题中的计算方法，并通过大量的练习熟练掌握综合运用消元法和降阶法计算行列式的基本技巧，并注意一题多解．逐步养成认真观察、分析讨论问题，充分利用所学知识，并能将知识转化为能力．

8．克拉默法则

①含有 n 个未知元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{A}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时称方程组(A)为非齐次线性方程组．

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{B}$$

称方程组(B)为齐次线性方程组．

②克拉默法则：

若线性方程组(A)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,

则方程组(A)有唯一解 $x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_j=\frac{D_j}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}$.

其中 $D_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

③若非齐次线性方程组(A)无解或有两个(或两个以上)不同的解,则它的系数行列式必为零.

④若齐次线性方程组(B)的系数行列式 $D\neq 0$,则它只有唯一解,即零解;若齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.这说明系数行列式 $D=0$ 是齐次方程组有非零解的必要条件,在第三章中将证明这条件也是充分的.

⑤克拉默法则除去解决了线性方程组(A)解的存在性、唯一性外,还用行列式给出了求解公式,但必须注意应用克拉默法则有两个条件:一是方程组的系数能构成 n 阶行列式,二是系数行列式不为零.由于受这些条件的限制以及计算高阶行列式的困难,使得克拉默法则主要用于理论问题及较简单方程组的求解.但它是以后讨论的方程的个数与未知数的个数不相同情况的基础,它又可看成行列式理论的应用.学生必须牢固掌握.

9.范德蒙德行列式

n 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式为

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

三、典型例题分析

1. 排列与逆序

例 1　求排列 362514 的逆序数,并指出该排列是奇排列还是偶排列.

分析　求一个排列的逆序数可采用一律"向前看"或一律"向后看"两种方法. 均与标准排列比较.

解法一　若采用"向后看"的方法,数字 3 排在首位,前面没有比它大的数,故逆序数为 0,

数字 6 前面没有比它大的数,故逆序数为 0,

数字 2 前面比 2 大的数字有两个 3,6,故逆序数为 2,

数字 5 前面比 5 大的数字有一个 6,故逆序数为 1,

数字 1 前面比 1 大的数字有四个 3,6,2,5,故逆序数为 4,

数字 4 前面比 4 大的数字有两个 6,5,故逆序数为 2,

于是此排列的逆序数 $t=0+0+2+1+4+2=9$.

解法二　若采用"向后看"的方法,

数字 3 后面有两个比 3 小的数 2,1,故逆序数为 2,

数字 6 后面有四个比 6 小的数 2,5,1,4,故逆序数为 4,

数字 2 后面有一个比 2 小的数 1,故逆序数为 1,

数字 5 后面有两个 5 小的数 1,4,故逆序数为 2,

数字 1 后面没有比它小的数,故逆序数为 0,

数字 4 后面没有数字,故逆序数亦为 0,

于是此排列的逆序数 $t=2+4+1+2+0+0=9$,又因为逆序数为 9 是奇数,故该排列是一个奇排列.

例 2　在 1～8 的自然数排列中选择 i 与 j 使排列 $25i14j86$ 成为奇排列或偶排列.

分析　由排列的定义,i,j 只能在 3 与 7 中选择,故只要看 i、j 选 3 与 7 时排列是否为偶排列即可.

解　这是一个 8 级排列,其中 i 与 j 可选的数字为 3 或 7. 若选 $i=$

$3, j=7$ 则排列 25314786 的逆序数 $t=0+0+1+3+1+0+0+2=7$,此时为奇排列.若选 $i=7, j=3$ 可看成前一排列经一次元素的对换得到的,故此时为偶排列.

例 3　求排列 $2k,1,2k-1,2,2k-2,3,\cdots,k+1,k$ 的逆序数,并确定奇偶性.

解　1 前面有一个比它大的数,故 1 的逆序数为 1,

2 前面有 2 个比它大的数,故 2 的逆序数为 2,

3 前面有 3 个比它大的数,故 3 的逆序数为 3,

……

k 前面有 k 个比它大的数,故 k 的逆序数为 k,

$2k-1$ 前面有 1 个比它大的数,故 $2k-1$ 的逆序数为 1,

$2k-2$ 前面有 2 个比它大的数,故 $2k-2$ 的逆序数为 2,

……

$k+1$ 前面有 $k-1$ 个比它大的数,故 $k+1$ 的逆序数为 $k-1$,

所以原排列的逆序数为

$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+1+2+\cdots+(k-1)=(k-1)k+k=k^2$,且原排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同.

例 4　写出 4 阶行列式 $D_4=\det(a_{ij})$ 展开式中含有因子 $a_{23}a_{42}$ 且带负号的所有项.

解　这样的项应为 $a_{1j_1}a_{23}a_{3j_3}a_{42}$,其中行标已成自然排列,而列标组成 4 级排列 $(j_1 3 j_3 2)$,故 j_1, j_3 只能分别取 1、4 或 4、1,即 $j_1 3 j_3 2$ 只能是 1342 或 4312,对应的逆序数 t 分别为 $0+0+0+2=2$ 或 $0+1+2+2=5$,由于 $(-1)^2=1$, $(-1)^5=-1$,因此满足条件的排列只能是 4312,即所求的项为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

注　本题主要利用了 4 阶行列式展开式中一般项为 $(-1)^{t(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,这里 $j_2=3, j_4=2$,故 (j_1,j_3) 只能是 1、4 的排列,再根据所求项带负号,定出 (j_1,j_3) 只能取 $(4,1)$.

2. 行列式的计算与证明

(1) 利用行列式的定义

例 5　**利用行列式的定义证明：**

$$D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证明　**展开式中的一般项为** $(-1)^{t(j_1,j_2,j_3,j_4,j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$**，其中** j_3,j_4,j_5 **中至少有一个数取到** 3、4、5 **中的某一个，即** $a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$ **中至少有一个数为** 0**，故行列式的展开式中任何一项都为零，因此，** $D_5=0$.

注　**证明本题的关键在于说明展开式中任何一项的取自后** 3 **行的元素中，至少有一个取自后** 3 **列，即展开式中任何一项都含有零因子，因此展开式中任意一项都为零. 此例也可用拉普拉斯定理按后三行展开证之，见例** 21.

例 6　**用行列式定义计算**

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

分析　**此行列式从第二行起，每行每列只有一个元素不为零，故由行列式的定义，只有一项不为零，所以用行列式定义计算是方便的.**

解　**按行列式的定义有** $D_n=(-1)^t b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n$**，其中** $t=t(23\cdots n1)=n-1$ **为行标的逆序数，而列标为自然顺序，因此**

$$D_n=(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n.$$

例 7　**由行列式的定义计算行列式** $\begin{vmatrix} 4x & 1 & 3 & 3 \\ x & x & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3x & 6 \\ x & 2 & 6 & x \end{vmatrix}$ **中** x^4 **和** x^3 **的**

系数.

解　行列式中的每一项为 $(-1)^{t}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中 t 为 $j_1j_2j_3j_4$ 的逆序数.

要出现 x^4,则每个 a_{ij_i} 要取含 x 的元素,故只有 $j_1=1$,$j_2=2$,$j_3=3$,$j_4=4$,即 $(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,$x^4$ 的系数为 12.

要出现 x^3,则 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中要有 3 个含有 x,由行列式定义这样的项有

$(-1)^{t(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-3x^3$,$(-1)^{t(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-9x^3$,于是 x^3 的系数为 -12.

注　本题主要根据行列式定义中展开式中的项是取自行列式的不同行、不同列的 4 个元素的乘积这一结构规律,当展开式中某一项含有元素 a_{ij} 时,该项必不含第 i 行的其他元素,也不含第 j 列的其他元素.

归纳　① 一般而言,利用行列式定义计算行列式,是从一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 入手,将行(列)按标准次序排列,讨论列(行)所有可能取值,从中寻求特点得到结果,并注意相应的符号.

② 当一个 n 阶行列式中等于零的元素多于 n^2-n 个时,此行列式必等于零.

(2) 利用行列式的性质直接计算

例 8　已知 204、527、255 都是 17 的倍数,试证 $D=\begin{vmatrix}2&0&4\\5&2&7\\2&5&5\end{vmatrix}$ 也是 17 的倍数.

证明　$D\xlongequal[c_3+10c_2]{c_3+100c_1}\begin{vmatrix}2&0&204\\5&2&527\\2&5&255\end{vmatrix}\xlongequal{c_3\div 17}17\begin{vmatrix}2&0&12\\5&2&31\\2&5&15\end{vmatrix}$,

由定义知,元素全是整数的行列式必为整数,故证得原行列式为 17 的倍数.

注　要证明行列式能被 k 整除,只要证明行列式有公因子 k,常用的一种方法是证明行列式某行(列)各元素有公因子 k,为此可利用行

列式的性质对行列式进行变换.

例 9 **证明** $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

分析 本题若用对角线法则展开 3 阶行列式,很烦琐. 这里每项都是两个元素之和,且每列元素间都有规律,故可用行列式的性质 5 将行列式拆开.

证明 左式
$$\xlongequal[\text{列拆开}]{\text{按第一}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{并用性质 2 推论}]{\substack{\text{第一个行列式按第三列拆开}\\ \text{第二个行列式按第二列拆开}}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{继续用性质 5 及性质 2 推论}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_1 \leftrightarrow c_3\ \text{后} \\ c_2 \leftrightarrow c_3}]{\text{第二个行列式}} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

注 3 阶行列式尽管阶数不高,但考虑解题的简便,也应根据行列式的结构特点常想到用性质.

例 10 **证明** $D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

证明　$D \xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{成比例}]{c_3,c_4} 0.$$

注　**要证行列式为** 0,**常可考虑用行列式的性质证出一行(列)的元素全为** 0,**或有两行(列)相同或有两行(列)成比例**.

例 11　**如果** n **阶行列式** $D_n=\det(a_{ij})$ **满足** $a_{ji}=-a_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,**则称** D_n **为反对称行列式,证明奇数阶反对称行列式为零**.

证明　D_n **为反对称行列式**,n **为奇数,且** $a_{ii}=-a_{ii}$,**由此得** $a_{ii}=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,**于是**

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因子}(-1)]{\text{各行提取}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{n\text{ 为奇数}} -D_n.$$

所以 $D_n = 0$.

故当 n 为奇数时 $D_n = 0$.

(3) 化为上(下)三角行列式计算

例 12 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

分析 反复应用性质,将原行列式化为上三角形行列式,从而计算出结果.

解
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+(-2)r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times (-3) \times 3 = -9.$$

注 将行列式化为上(下)三角形行列式是行列式计算中的最基本、最常用的方法之一,一定要熟练掌握.

例 13 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

分析　用行列式的性质可将此行列式化为上三角行列式或下三角行列式.

解法一

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_1-r_i} \begin{vmatrix} 1-(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!(2-n).$$

解法二

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i \div i} n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1-c_i} n! \begin{vmatrix} 1-(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n!(2-n).$$

例 14　**计算** n **阶行列式** $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

分析　由该行列式的结构可见,对角线上元素相同为 x,非对角线上元素也相同为 a,因此各列(行)元素之和相同,故可将各列(行)加到第一列(行)后提取公因子,再将行列式化为下三角形行列式.

解 $D_n \xlongequal[c_1 \div [x+(n-1)a]]{c_1+c_2+\cdots+c_n} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i - ac_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

注 1　**本例中的** D_n **属于一类重要的行列式,它的解法很多(后面介绍),但最基本也最方便的方法是此处的解法**.

注 2　**本解法中最后一步也可将第** 1 **行的**(-1)**倍加至第** 2**,第** 3**,…,第** n **行**.

例 15　**计算** $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$(a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

分析　**同例** 14.

解 $D_{n+1} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_i \div a_i} a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1-c_i}\prod_{j=1}^{n}a_j\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}a_j\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

例 16　**计算** n **阶行列式** $D_n=\det(a_{ij})$**，其中** $a_{ij}=|i-j|$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

分析　**由** D_n **的定义，有**

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

其特点为 相邻两行(列)的对应元素相差为 1**，因此相邻两行(列)对应元素相减得** 1 **或** -1**，而元素为** 1 **或** -1 **的行列式是便于计算的。可从最后一行起，每行减去前一行，得到的行列式主对角线下边的元素全为** 1**，而第** n **列除** $(1,n)$ **元素外，其他元素全为** -1**，于是将第** n **列分别加至前面各列，就化成上三角行列式了**.

解　**从最后一行起，每行减去前一行得**

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\cdots,n-1]{c_j+c_n}\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

注 此题提供了相邻两行(列)对应元素差为 1 的行列式的计算方法.

(4) 按行(列)展开计算

例 17 计算 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

分析 注意到此行列式各行元素之和相等,可先将各列加到第 1 列,提出公因子,再将第 1 列除(1,1)元素外化为 0 后,按第 1 列展开,达到了降阶的目的.

解 $D_4 \xlongequal[\text{并提取公因子}]{\text{各列加至第 1 列}} 8\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} 8\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第 1}} 8\times\begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1} 8\times\begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行展开}]{\text{按第三}} -64\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\,024.$$

注　本题的做法很多,可按其他的行(列)展开,或用前面讲过的方法化为上三角形行列式.

例 18　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

分析　D_n 第一列只有两个元素不为零,故可按第一列展开.

解　将 D_n 按第一列展开

$$D_n = (-1)^{1+1}x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} +$$

$$(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= x\cdot x^{n-1} + (-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

注　此题也可按第一行展开,还可按第 n 行或第 n 列展开.

例 19　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解法一　$D_n \xlongequal[i=1,2,4,\cdots,n]{r_i+(-1)r_3} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第三}} (-1)^{3+3}3\cdot \begin{vmatrix} -2 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n-3 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= (-1)^{3+3}\cdot 3\cdot 2\cdot (n-3)! = 6(n-3)!.$$

解法二　**此题也可化为上三角形**.

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+(-1)r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-\frac{1}{2}r_1]{r_i-r_1(i\neq 3)} -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+3r_2} -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$=6(n-3)!.$$

例 20　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

分析　D_4 **中的第二行、第四行中只有一个** 2 **阶子式不为零,故可考虑用拉普拉斯定理按第二行、第四行展开.**

解　**用拉普拉斯定理按第二、第四行展开,**

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+4+2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot 1=1.$$

例 21　计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

分析　**此例前面已用行列式的定义证明过为** 0. **该行列式的后三行中“大片”位置上的元素为零,故可考虑用拉普拉斯定理按后三行展**

开.

解 将 D_5 按后三行展开,后三行的 3 阶子式共有 $C_5^3=10$ 个,每个 3 阶子式 B_i $(i=1,2,\cdots,10)$ 中至少有一列元素为零,故有 $B_i=0$ $(i=1,2,\cdots,10)$,于是 $D_5=B_1A_1+B_2A_2+\cdots+B_{10}A_{10}=0$ (其中 A_i 是 B_i 的代数余子式).

例 22 计算 6 阶行列式

$$D_6=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

解 D_6 的第三、第四、第五列所组成的 3 阶子式只有一个为零,因此可用拉普拉斯定理按第三、第四、第五列展开,得

$$\begin{aligned} D_6 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+5+3+4+5}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

由于 3 阶范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2),$$

所以 $D_6=(x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2.$

例 23 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$,$D$ 的 (i,j) 元的余子式和

代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij}，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解　$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-2&2&0&2\\1&-1&0&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{列展成}]{\text{按第三}}\begin{vmatrix}1&1&-5\\-2&2&2\\1&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}1&2&-5\\-2&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5\\0&2\end{vmatrix}=4.$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}=D_2$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\0&-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行展开}]{\text{按第四}}(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-2r_3}\begin{vmatrix}-1&0&-5\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}=0.$$

注　本题解法灵活，充分利用了代数余子式 A_{ij} 的显著特点：A_{ij} 与 D 的 (i,j) 元本身的数值大小及正负无关，仅与其所在位置有关，注意体会.

(5) 利用递推法、数学归纳法计算

例 24　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&0&\cdots&0&0\\0&1&2&1&\cdots&0&0\\0&0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$.

分析　这是一个三斜线行列式，即在主对角线上元素全为 2，在主对角线上、下两条斜线上的元素全为 1，其余元素全为 0. 此行列式按第一列展开后能得到与原行列式同样的低阶行列式，这样可得到递推公式，然后由递推公式求出 D_n.

解　按第一列展开得

$$D_n=(-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots 0&0&\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{(n-1)阶}+$$

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{(n-1)阶}$$

$$\xlongequal[\text{再按第一行展开}]{\text{第二个行列式}}2D_{n-1}-D_{n-2},$$

得递推公式 $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$.

此时由递推公式求 D_n 方法有两种.

解法一　显然同理有 $D_{n-1}=2D_{n-2}-D_{n-3}$,

$$D_n = 2(2D_{n-2} - D_{n-3}) - D_{n-2} = 3D_{n-2} - 2D_{n-3}$$
$$= 3(2D_{n-3} - D_{n-4}) - 2D_{n-3} = 4D_{n-3} - 3D_{n-4}$$
$$= \cdots = (n-1)D_2 - (n-2)D_1.$$

因为 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，$D_1 = |2| = 2$，所以

$$D_n = (n-1)\cdot 3 - (n-2)\cdot 2 = n+1.$$

解法二　因为 $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$，所以 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$，可见 $\{D_n\}$ 构成一等差数列，$d = D_2 - D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - |2| = 3 - 2 = 1$，

故 $$D_n = D_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\times 1 = n+1.$$

注 1　对于 D_k 和 D_{k+1} $(k = 2,3,\cdots)$ 结构相同的行列式，利用按行(列)展开法可将 D_n 表示成较低阶的同类型的行列式，表示式所得到的等式称为递推公式．它是用递推法或数学归纳法计算行列式的基础．

注 2　由递推公式求出 D_n，一种办法为逐次利用关系式得到一个与 D_2、D_1 有关的等式，D_2、D_1 可具体求出，进而求出 D_n．另一种办法是根据递推公式所具有的特点，借助于初等数学的知识求出 D_n，如本例中解法二．再如：

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix} = 9D_{n-1} - 20D_{n-2},$$

得递推公式

$$D_n = 9D_{n-1} - 20D_{n-2},$$

逐次用此式求 D_n 比较麻烦．但由于 $D_2 = 61$，$D_1 = 9$，而

$$D_n - 5D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 5D_{n-2}) = \cdots = 4^{n-2}(D_2 - 5D_1) = 4^n,$$
$$D_n - 4D_{n-1} = 5(D_{n-1} - 4D_{n-2}) = \cdots = 5^{n-2}(D_2 - 4D_1) = 5^n,$$

所以 $$D_{n-1} = 5^n - 4^n,\ D_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}.$$

例 25 **计算** $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1 & b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & c_1 & d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$.

解法一 **将** D_{2n} **按第一行展开得**

$$D_{2n}=a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & & & d_n \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{2n+1}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix},$$

上式等号右端的两个行列式均按最后一行展开,得

$$\begin{aligned} D_{2n}&=a_nd_n\cdot(-1)^{(2n-1)+(2n-1)}D_{2n-2}+b_nc_n\cdot(-1)^{(2n+1)+(2n-1)+1}D_{2n-2} \\ &=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}, \end{aligned}$$

利用此递推公式可得

$$\begin{aligned} D_{2n}&=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)} \\ &=\cdots=\prod_{i=2}^{n}(a_id_i-b_ic_i)D_2, \end{aligned}$$

而　$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$，

所以　$D_{2n}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.

解法二　利用拉普拉斯定理将 D_{2n} 按第 1、第 2n 行展开得

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)\cdot(-1)^{1+2n+1+2n}D_{2(n-1)}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}\text{，}$$

其余同解法一.

解法三　将第 2n 行依次换到第 2 行，第 2n 列依次换到第 2 列，得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & b_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_n & d_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \iddots & \\ \vdots & \vdots & & & a_1 & b_1 & & \\ \vdots & \vdots & & & c_1 & d_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}D_{2(n-1)}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}.$$

其余同解法一.

注　本例要注意 D_2 的位置.

例 26　证明：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

$$=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

分析 此题的证明方法很多(见例 31),此处仅用数学归纳法.

证明 当 $n=1$ 时,$D_2=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -1 & x \end{vmatrix}=a_0x+a_1$,命题成立.

当 $n=2$ 时,$D_3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}=a_0x^2+a_1x+a_2$,命题成立.

假设当 $n=k-1$ 时,$D_k=a_0x^{k-1}+a_1x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}$,命题成立.

证 $n=k$ 时,命题成立. 事实上,将 D_{k+1} 按第 $k+1$ 列展开得 $D_{k+1}=xD_k+a_k$,由归纳假设,有

$$\begin{aligned} D_{k+1}&=x(a_0x^{k-1}+a_1x^{k-2}+\cdots+a_{k-1})+a_k \\ &=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k, \end{aligned}$$

因此当 $n=k$ 时命题也成立,故原式对任意正整数 n 均成立.

*(6) 利用加边法(升阶法)计算

例 27 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i-x\neq 0, i=1,2,\cdots,n).$$

分析 该行列式除去对角线上元素外均相等,可用所谓"加边法"即增加一行一列元素得到一个与 D_n 相等的 $n+1$ 阶行列式,这个 $n+1$ 阶行列式便于消元. 这里的"加边"实际是运用了行列式按第一列展开.

解 $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\text{阶}}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i - r_1}\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & \cdots & x & x \\ -1 & a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_i \div (a_i - x)}(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{x}{a_1-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \cdots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1 + c_i}(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\cdot\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x}{a_i-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \cdots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\right).$$

(7) 利用范德蒙德行列式计算

例 28　**计算** n **阶行列式** $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

解　**分别从** D_n **的各列中提取公因数** $1,2,\cdots,n$，**得**

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-2} & \cdots & n^{n-2} \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n!\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}(k!).$$

例 29 **计算 4 阶行列式** $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

解法一 $D_4 \xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{依次提取公因子}]{\text{按第一行展开并}} (b-a)(c-a)(d-a)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} (b-a)(c-a)(d-a)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (b+a)(b^2+a^2) & x & y \end{vmatrix},$$

其中

$$x = (c-b)(a^2+b^2+c^2+ac+bc+ab),$$
$$y = (d-b)(a^2+b^2+c^2+ad+bd+ab).$$

将上面行列式按第一行展开得

$$D_4 = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d+b \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

解法二　用“加边法”求 D_4.

考虑下面行列式：

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix},$$

此为 5 **阶范德蒙德行列式**.

按第 5 **列展开得**

$$f(x)=A_{15}+A_{25}x+A_{35}x^2+A_{45}x^3+A_{55}x^4,$$

其中 A_{i5} **是元素** a_{i5} **的代数余子式** $(i=1,2,3,4,5)$，**而** $A_{45}=(-1)^{4+5}D_4$，**所以** $D_4=-A_{45}$，**利用范德蒙德行列式**

$$f(x)=(x-d)(x-c)(x-a)\cdot[(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)],$$

上式中 x^3 **的系数为**

$$-(a+b+c+d)[(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)]=A_{45},$$

故 $D_4=(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

注　解法一采用的方法比较直接，系常用的方法，但不便于推广；解法二的方法可推广到相应的 n **阶行列式** D_n **中**.

* **例** 30　**求** $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ **的值**.

解　将 D_{n+1} **经** $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ **次行的相邻对换，得**

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&a-1&\cdots&a-n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a^{n-1}&(a-1)^{n-1}&\cdots&(a-n)^{n-1}\\a^n&(a-1)^n&\cdots&(a-n)^n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{蒙德行列式}]{\text{成为范德}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}[(a-i+1)-(a-j+1)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(j-i)\quad\left(\text{乘号中有因子}\frac{n(n+1)}{2}\text{个}\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j)=n!\,(n-1)!\cdots2!.$$

3.计算 n 阶行列式的多种方法

计算一个 n 阶行列式有时可有多种解法,前面有些例题已用到,这里再举两例.

例 31　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

解法一　利用各列的元素之和相等,各列加至第一列后提取公因式,化为上三角形.此法已在2.(3)例14中给出.

解法二　各行减去第一行后将各列加至第一列上,就可将 D_n 化为上三角形.

$$D_n\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a-x&x-a&0&\cdots&0\\a-x&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a-x&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

解法三　将 D_n 按第 1 列拆成两个行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第二个行列式各行减第一行}]{\text{第一个行列式按第一列展开}}(-1)^{1+1}(x-a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}$$

$$=(x-a)[(x-a)D_{n-2}+a(x-a)^{n-2}]+a(x-a)^{n-1}$$

$$=(x-a)^2D_{n-2}+2a(x-a)^{n-1}=\cdots$$

$$=(x-a)^{n-1}D_1+(n-1)a(x-a)^{n-1}$$

$$=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]\ (\text{其中 } D_1=|x|=x).$$

解法四　将 D_n 拆成易于计算的行列式之和. 将 D_n 改写为

$$D_n=\begin{vmatrix} (x-a)+a & 0+a & \cdots & 0+a \\ 0+a & (x-a)+a & \cdots & 0+a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+a & 0+a & \cdots & (x-a)+a \end{vmatrix}$$

于是，D_n 可按列拆成 2^n 个 n 阶行列式之和，即

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}+\sum_{j=1}^{n}D(j),$$

其中

$$D(j)=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} x-a & & & a & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & x-a & \vdots & & & \\ & & & a & & & \\ & & & \vdots & x-a & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & a & & & x-a \end{vmatrix} \text{第 } j \text{ 行} \\ \text{第}j\text{列} \end{array}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 } j \text{ 行}} a(x-a)^{n-1},$$

将 $D(j)$ 代入上式，得

$$D_n=(x-a)^n+na(x-a)^{n-1}=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

例 32 **计算** $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$.

解法一 化为上三角形行列式，为此要将主对角下方的 (-1) 全部化为零，从最后一列开始，后一列乘以 $\frac{1}{x}$ 后加到前一列上，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k} & \sum\frac{a_k}{x^{k-1}} & \cdots & a_n \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}$$

$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

解法二　按第一行展开，a_0, a_1, a_{n-1}, a_n **的余子式为三角形行列式，**$a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}$**的余子式再展开一次可化为三角形行列式，于是得**

$$\begin{aligned}D_{n+1} &= a_0x^n + a_1(-1)^{1+2}(-1)x^{n-1} + a_2(-1)^{1+3}(-1)^2x^{n-2} \\ &\quad + \cdots + a_{n-1}(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}x + a_n(-1)^{1+n+1}(-1)^n \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.\end{aligned}$$

解法三　按最后一列展开得递推公式：

$$\begin{aligned}D_{n+1} &= xD_n + a_n(-1)^{1+(n+1)}(-1)^n = xD_n + a_n \\ &= x(xD_{n-1} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2D_{n-1} + xa_{n-1} + a_n = x^2(xD_{n-2} + a_{n-2}) + a_{n-1}x + a_n \\ &= x^3D_{n-2} + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = \cdots \\ &= x^{(n-1)+1}D_1 + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (D_1 = a_0).\end{aligned}$$

解法四　按多零行（列）展开．此题的第 $n+1$ **列仅有两个元素非零，可先将它化成仅有一个非零元素的列，再按此列展开．为此从第一列开始，前列乘** x **后加到后一列上，直到第** n **列乘** x **后加到第** $n+1$ **列，得**

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_0x+a_1 & \cdots & a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1} & a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{一列展开}]{\text{按最后}} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)(-1)^{1+(n+1)}(-1)^n$$

$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

解法五　用数学归纳法．此法已在 2．(6) **例** 26 **给出．**

4.克拉默法则的应用

例 33　求解方程组
$$\begin{cases} \quad\;\; x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1 \quad\;\; +x_3+x_4+x_5=2, \\ x_1+x_2 \quad\;\; +x_4+x_5=3, \\ x_1+x_2+x_3 \quad\;\; +x_5=4, \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \quad\;\; =5. \end{cases}$$

解法一　用克拉默法则

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,5]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{至第一行}]{\text{各行加}} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{后行减前行}]{\text{从第五行起}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+4r_2+3r_3+2r_4+r_5} \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=11.$$

同样可求得 $D_2=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&3&0&1&1\\1&4&1&0&1\\1&5&1&1&0\end{vmatrix}=7$，$D_3=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&2&1&1\\1&1&3&1&1\\1&1&3&0&1\\1&1&5&1&0\end{vmatrix}=3$.

$$D_4=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&2&1\\1&1&0&3&1\\1&1&1&4&1\\1&1&1&5&0\end{vmatrix}=-1,\quad D_5=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&2\\1&1&0&1&3\\1&1&1&0&4\\1&1&1&1&5\end{vmatrix}=-5.$$

故该方程组有唯一的一组解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{11}{4},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{4},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3}{4},\ x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{1}{4},$$

$$x_5=\frac{D_5}{D}=-\frac{5}{4}.$$

解法二　观察方程的特点，每个方程缺少一个不同的未知数，并且方程中所含未知数的系数均为 1. 可先将五个方程相加，得

$$4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=15，即\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{15}{4}.$$

用所得方程分别减去原方程组中的五个方程，得到

$$x_1=\frac{15}{4}-1=\frac{11}{4},\ x_2=\frac{15}{4}-2=\frac{7}{4},\ x_3=\frac{15}{4}-3=\frac{3}{4},$$

$$x_4=\frac{15}{4}-4=-\frac{1}{4},\ x_5=\frac{15}{4}-5=-\frac{5}{4}.$$

注　解法二属初等方法，目的为理解高等解法与初等解法的一致性.

例 34　问 λ 取何值时，齐次方程组 $\begin{cases}(5-\lambda)x+2y+2z=0,\\2x+(6-\lambda)y=0,\\2x+(4-\lambda)z=0\end{cases}$ 有非零解？

解　若齐次方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$，而

$$D=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda),$$

令 $D=0$ 得 $\lambda=2$,$\lambda=5$ 或 $\lambda=8$,此时齐次方程组有非零解.

四、自测题

1.是非题

(1) 若两个行列式相等,则它们的阶数一定相同.( )

(2) 若行列式 D 中有一行(列)的所有元素全为零,则 $D=0$.( )

(3) 若行列式主对角线上的元素全为零,则 $D=0$.( )

(4) 若行列式 D 某两行的所有 2 阶子式全为 0,则 $D=0$.( )

(5) $-a_{21}a_{12}a_{34}a_{55}a_{43}$ 是 5 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 展开式中一项.( )

(6) 记 A_{ij} 为 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式,若 $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则 $D\neq 0$.( )

2.选择题

(1) 4 阶行列式的展开式中含有因子 a_{32} 的项共有______个.

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

(2) 下列等式正确的是______.

(A) $\begin{vmatrix}a+b & b\\ c & c+d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & b\\ c & d\end{vmatrix}$

(B) $\begin{vmatrix}a & 2a & 3a\\ 2a & 3a & a\\ 3a & a & 2a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix}x & y\\ z & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y\\ z & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & y\\ z & -a\end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix}x & y\\ z & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y\\ 0 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & y\\ z & -a\end{vmatrix}$

(3) 设 D 是 n 阶行列式,则下列各式中正确的是______(其中 A_{ij} 是

D 中 a_{ij} 的代数余子式).

(A) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=0, j=1,2,\cdots,n$

(B) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=D, j=1,2,\cdots,n$

(C) $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{2j}=D$

(D) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=0, i=1,2,\cdots,n$

(4) 若行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & x \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2$，则 $x=$______.

(A) 1　　(B) -1　　(C) ±1　　(D) ±2

3. 解下列各题

(1) $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$，求 $f(4)$.

(2) 计算 $D_4=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

(3) 计算 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

(4) $\begin{vmatrix} 2005 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2004 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. **求下列 n 阶行列式**

(1) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x-2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x-n \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & \cdots & 9 \\ 9 & 2 & 9 & \cdots & 9 \\ 9 & 9 & 3 & \cdots & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 9 & 9 & 9 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

(4) $\begin{vmatrix} a+x & a & a & \cdots & a & a \\ -y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y & x \end{vmatrix}$.

5. **求解下列各题**

(1) **求作一个二次多项式** $f(x)$**，使得** $f(1)=1$**，**$f(2)=3$**，**$f(-1)=9$.

⑵ 如果齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解，试求 λ 的值.

6.证明题

⑴ 已知 1 632，2 160，3 696，5 024 都可被 16 整除，不经计算证明

$$\begin{vmatrix}1&6&3&2\\2&1&6&0\\3&6&9&6\\5&0&2&4\end{vmatrix}$$ 也可被 16 整除.

⑵ 证明 $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1\\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2\\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3\end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

⑶ 证明 $D_n=\begin{vmatrix}2\cos\theta&1&0&\cdots&0\\1&2\cos\theta&1&\cdots&0\\0&1&2\cos\theta&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

五、自测题答案与提示

1. ⑴ × ⑵ √ ⑶ × ⑷ √ ⑸ × ⑹ ×

2. ⑴ C； ⑵ D； ⑶ B； ⑷ C.

3. ⑴ 160 提示：先将 $x=4$ 代入行列式中，得一行（或列）和相等的行列式.

⑵ 218 .

⑶ 0 提示：用行列式的性质.

⑷ 2005 !.

4. ⑴ $(x+n-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-n+1)$ 提示：各行加至第

一行提取公因式.

(2) $9!(n-9)!$ 提示:各行减第 9 行,再按第 9 列展开.

(3) $n!(n-1)!\cdots 2!$ 提示:各行提取公因子再利用范德蒙德行列式.

(4) $x^n + a(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

提示:解法一:按第 n 列展开后得递推公式 $D_n = xD_{n-1} + ay^{n-1}$;

解法二:按第一行展开.

5. (1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ 提示:由题意得一个三元一次方程组,用克拉默法则解此方程组.

(2) $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -2$.

6. 提示:(1)、(2) 均用行列式性质;(3) 用数学归纳法.

第二章　矩阵及其运算

一、基本要求概述及主要术语

1.基本要求概述

①理解矩阵的概念.

②掌握单位矩阵,零矩阵,对角矩阵,三角矩阵,对称矩阵及反对称矩阵等特殊矩阵的概念及性质.

③熟练掌握矩阵的线性运算(即矩阵的加法及矩阵与数的乘法),矩阵的乘法,转置,方阵的行列式以及它们的运算规律.

④深刻理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质,以及矩阵可逆的充分必要条件,理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求矩阵的逆矩阵.

⑤了解分块矩阵及其运算规律,熟悉矩阵的行向量组和列向量组.

2.主要术语

矩阵,实矩阵,n 阶矩阵(n 阶方阵),行矩阵(行向量),列矩阵(列向量),同型矩阵,零矩阵,单位矩阵,对角矩阵,负矩阵,可交换矩阵,矩阵的幂,转置矩阵,对称矩阵,反对称矩阵,方阵的行列式,伴随矩阵,共轭矩阵,逆矩阵,奇异矩阵,非奇异矩阵,左乘,右乘,矩阵的多项式,分块矩阵,分块对角矩阵.

二、基本内容剖析

1.矩阵的定义

⑴定义

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵,可简记为 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,$A_{m\times n}$,其中 a_{ij} 为矩阵 A 的第 i 行,j 列处的元素,或称 a_{ij} 为 A 的 (i,j) 元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵(除特别说明,本书均指实矩阵).

(2) 同型矩阵

当两个矩阵的行数与列数分别相等时,称它们为同型矩阵.

(3) 矩阵相等

$A=[a_{ij}]$,$B=[b_{ij}]$为同型矩阵,且 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(4) 负矩阵

设 $A=[a_{ij}]$,记 $-A=[-a_{ij}]$,$-A$ 称为 A 的负矩阵.

(5) 转置矩阵

将矩阵 A 的行列互换,所得的矩阵称为 A 的转置矩阵,记为 A^T 或 A'.

(6) n 阶方阵

行数列数均为 n 的矩阵为 n 阶方阵.

由于矩阵是研究线性变换、线性方程组的重要工具,因此要正确理解矩阵定义等基本概念,特别要认识到矩阵与行列式是完全不同的两个概念,矩阵表示的是一张数表,而行列式表示的是一个数(或代数式);行列式的行数与列数一定相同,但矩阵的行数、列数不一定相同;两个行列式相等只要它们表示的数值(或代数式)相等,而两个矩阵相等则要求两个同型矩阵对应的元素都相等.

2.几种特殊形式的矩阵

(1) 零矩阵

元素全为零,即 $a_{ij}=0\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的矩阵,记为 0.

(2) 行矩阵

只有一行的矩阵 $A=[a_{12}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1n}]$ (有时也记为 $A=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$),亦可称为行向量.

(3) 列矩阵

只有一列的矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$,亦可称为列向量.

(4) 对角矩阵

除主对角线元素外,其他元素均为零的方阵,简称对角阵.

记为 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,

满足 $a_{ij}=0\ (i\neq j)$.

(5) 单位矩阵

主对角线元素均为 1 的对角阵,记为 E 或 E_n,即

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(6) 三角矩阵

主对角线下方或上方元素全为零的方阵.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为上三角阵,满足 $a_{ij}=0\ (i>j)$;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为下三角阵,满足 $a_{ij}=0\ (i<j)$.

⑺ 对称矩阵

若方阵 A 满足 $A=A^T\ (a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,2,\cdots,n)$,则 A 称为对称矩阵.

⑻ 反对称矩阵

若方阵 A 满足 $A=-A^T\ (a_{ij}=-a_{ji},\ i,j=1,2,\cdots,n)$,则 A 称为反对称矩阵.

注 1　对反对称矩阵 $A=[a_{ij}]$,必有 $a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

注 2　任一方阵 A 均可表示为一个对称阵与一反对称阵之和,即

$$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T).$$

3.矩阵的运算

⑴ 加法

两矩阵相加是指两个同型矩阵对应位置上的元素相加,即设矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,$B=[b_{ij}]_{m\times n}$,它们相加得矩阵 C,则

$$C=A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=[c_{ij}]_{m\times n}.$$

由矩阵的加法知 $A+(-A)=0$,由此规定矩阵的减法为

$$A-B=A+(-B).$$

注　两个同型矩阵才能相加、减.

运算规律:① $A+B=B+A$;

② $(A+B)+C=A+(B+C)$;

③ $A+0=A$.

⑵ 数乘

将一个数 λ 乘以一个矩阵 A,等于将这个数乘以矩阵 A 的每一个

元素,即设矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,λ 为数,$\lambda A=\lambda[a_{ij}]_{m\times n}=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.

运算规律:①$\lambda A=A\lambda$;

②$k(A+B)=kA+kB$;

③$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$;

④$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$　(λ,μ 为数).

注　一个数乘以行列式等于这个数乘以行列式的某一行或列的所有元素,而一个数乘以矩阵等于这个数乘以这个矩阵的所有元素,注意两者区别.

(3) 乘法

设矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times s}$,$B=[b_{ij}]_{s\times n}$,则 $AB=[c_{ij}]_{m\times n}=C$,

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$

$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

运算规律(设运算都是可行的):

①$(AB)C=A(BC)$;

②$A(B+C)=AB+AC$;$(B+C)A=BA+CA$;

③$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$(其中 λ 为数).

在矩阵的运算中,矩阵乘法尤为重要,必须注意以下几点.

注 1　只有左矩阵 A 的列数与右矩阵 B 的行数相同时,A 与 B 才能相乘,即 AB 才有意义,否则不能相乘。从这个意义上说:AB 有意义时,不能保证 BA 有意义(因为 B 的列数与 A 的行数不一定相同).

注 2　矩阵乘法与数的乘法在运算规律上有许多不同之处,在矩阵乘法中

①AB 与 BA 不一定同时有意义.

②即使 AB 与 BA 同时有意义,也不能保证 AB = BA,因为 AB 的阶数与 BA 的阶数不一定相等,如:$A=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,$B=[1,2]$,而 $AB=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}\neq BA=2$,

若方阵满足 AB = BA,则称 A 与 B 是可交换的.

③进而即使 A,B 是同阶方阵,AB 与 BA 的阶数亦相同,也不一定有 $AB=BA$.

如:$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$,而 $AB=\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}\neq BA=\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}$.

④如果 $AB=0$,则不能断定 $A=0$ 或 $B=0$,如:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\neq 0,B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\neq 0,\text{但 } AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0.$$

但若 $AB=0$ 且 A 为可逆方阵时则有 $B=0$;或者当 $AB=0$ 且 B 为可逆方阵时,则有 $A=0$.

⑤如果 $AB=AC$,且 $A\neq 0$,未必有 $B=C$,如:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\text{时,}$$

有 $AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$AC=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

则 $AB=AC$,但 $B\neq C$. 但若 $AB=AC$ 且 A 为可逆方阵时有 $B=C$.

注 3　矩阵乘法的关键是"左行乘右列",按矩阵乘法的定义,用一个 $1\times s$ 矩阵左乘一个 $s\times 1$ 矩阵,得到一个 1 阶方阵.

注 4　矩阵运算中没有定义除法,故 $A\div B$,$\frac{A}{B}$这样的写法是错误的.

注 5　对矩阵 $A_{m\times n}$ 有 $E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$.

(4) 方阵的幂

设 A 为 n 阶方阵,定义 $A^1=A,A^2=A^1A^1,\cdots,A^k=A^{k-1}A^1$ (其中 k 为正整数).

注　当 $|A|\neq 0$ 时,定义 $A^0=E$.

运算规律:

① $A^kA^l=A^{k+l}$;$(A^k)^l=A^{kl}$ (k,l 为正整数);

②若方阵 A 与 B 是不可交换的矩阵,则

$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$,$(AB)^k\neq A^kB^k$;当 A 与 B 可交换 (即 $AB=BA$) 时上述等式成立,且有

$$(A+B)^m = C_m^0 A^m + C_m^1 A^{m-1}B + \cdots + C_m^{m-1}AB^{m-1} + C_m^m B^m$$

(m 为正整数).

⑸ 方阵的多项式

设 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$ 为 λ 的 m 次多项式,记 $\varphi(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m$,称 $\varphi(A)$ 为方阵 A 的 m 次多项式.

设 $\varphi(A)$,$f(A)$ 为方阵 A 的两个多项式,则

$$\varphi(A)f(A) = f(A)\varphi(A).$$

⑹ 矩阵的转置

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,则 $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$为 A 的转置矩阵.

运算规律:

① $(A^T)^T = A$;

② $(A+B)^T = A^T + B^T$;

③ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

④ $(AB)^T = B^TA^T$,可推广为 $(A_1A_2\cdots A_m)^T = A_m^TA_{m-1}^T\cdots A_2^TA_1^T$;

⑤ $A^TA = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

⑺ 方阵的行列式

由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式(各元素的位置不变),称为方阵 A 的行列式,记作 $|A|$ 或 $\det A$.

运算规律(设 A,B 为 n 阶方阵,λ 为数):

① $|A^T| = |A|$;

② $|\lambda A| = \lambda^n|A|$;

③ $|AB| = |A||B|$,　$|A^n| = |A|^n$.

注　此处容易出错的是②,往往误认为 $|\lambda A| = \lambda|A|$,或误认为 $|\lambda A| = |\lambda||A|$.

(8) 共轭矩阵

设 $A=[a_{ij}]$ 为复矩阵,用 $\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数,记 $\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]$,称 $\bar{A}$ 为 A 的共轭矩阵.

运算规律(设 A,B 为复矩阵,λ 为复数):

①$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$;

②$\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\bar{A}$;

③$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$.

4.逆矩阵

(1) 定义

对于 n 阶方阵 A,如果存在 n 阶方阵 B,使得 $AB=BA=E$,则称 A 是可逆矩阵(可逆的),称 B 为 A 的逆矩阵并记为 A^{-1},即 $A^{-1}=B$.

注　可逆矩阵 A 必为方阵,其逆必唯一,且 A^{-1} 与 A 为同阶方阵,即
$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

(2) 可逆矩阵的判别

方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\Leftrightarrow$ 有 B 使 $AB=E$ 且 $A^{-1}=B$

$\Leftrightarrow$ 有 B 使 $BA=E$ 且 $A^{-1}=B$.

注　当 $|A|\neq 0$ 时称 A 为非奇异矩阵,否则称 A 为奇异矩阵,因此方阵 A 可逆与方阵 A 非奇异是等价的概念.

(3) 可逆矩阵的性质

①若 A 可逆,则 A^{-1} 也可逆且 $(A^{-1})^{-1}=A$;

②若 A 可逆,则 A^T 也可逆且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$;

③若 A 可逆,数 $\lambda\neq 0$,则 λA 也可逆且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$;

④若 A,B 均可逆,则 AB 也可逆且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 可推广为若 $A_1A_2,\cdots,A_n$ 均可逆,则 $A_1A_2\cdots A_n$ 可逆且
$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

⑤若 A 可逆,则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$;

⑥$A^{-k}=(A^{-1})^k$(k 为正整数).

注 1　若 A,B 为同阶的可逆矩阵,$A+B$ 不一定可逆.

如：$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$均可逆，但 $A+B=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$不可逆.

注2　④的逆命题成立，即若 AB 可逆，则 A，B 也可逆.这是因为：由于 AB 可逆，$|AB|=|A||B|\neq 0$，有$|A|\neq 0$ 且$|B|\neq 0$，所以 A，B 也可逆.

⑷ 伴随矩阵

对于 n 阶方阵 A，以行列式$|A|$的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 为元素所构成的方阵

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=(A_{ij})^T$$

称为方阵 A 的伴随矩阵.

伴随矩阵的性质：

①$AA^*=A^*A=|A|E=\begin{bmatrix}|A|&&&\\&|A|&&\\&&\ddots&\\&&&|A|\end{bmatrix}$；

②若$|A|\neq 0$，则 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，$A^*=|A|A^{-1}$；

③若$|A|\neq 0$，则$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$；

④$|A^*|=|A|^{n-1}$；

⑤$(A^T)^*=(A^*)^T$；

⑥$(kA)^*=k^{n-1}A^*$　$(k\neq 0)$.

⑸ 求可逆矩阵常用的方法

①利用定义.对方阵 A，若存在方阵 B，使 $AB=E$（或 $BA=E$），则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.

利用定义，凑的方法，当条件中有矩阵方程时，通过矩阵运算规律从矩阵方程中凑出 $AB=E$ 的形式，从而可得 $A^{-1}=B$.这一方法适用

于抽象矩阵求逆.

②利用伴随矩阵,$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

注　由于计算 A^* 需计算 n^2 个 $n-1$ 阶行列式,同时还要计算 $|A|$,计算量较大,且容易出错,因此此方法适用于低阶矩阵或较简单的高阶矩阵以及理论问题.

③利用分块矩阵(见下面分块矩阵).

④利用初等变换,此法很重要,见第三章.

5.分块矩阵

(1)定义

用若干条纵线和横线把一个矩阵分成若干小块,每一小块称为矩阵的一个子块或子矩阵,以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.如:

①$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$,

其中　$A_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]$　$i=1,2,\cdots,m$;

②$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[A_1,A_2,\cdots,A_n],A_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

$j=1,2,\cdots,n$;

③$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$,

其中 $B_{11}=b_{11},B_{12}=[b_{12},b_{13}],B_{21}=\begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},B_{22}=\begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$.

(2) 分块矩阵的运算

分块矩阵可进行加、减、数乘、乘法和转置运算,可将子块当作通常矩阵的元素看待,有类似通常矩阵的运算法则,只是进行运算的矩阵的分块要适当.如:

①用分块矩阵作加(减)运算 $A \pm B$ 时,必须对同型矩阵 A,B 作同样的分划.

②用分块矩阵作乘法运算 AB 时,对 A 的列的分法必须与对 B 的行的分法相一致.

③分块转置除了行列互换外,每一子块也需转置,即若

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix},\text{则}\quad A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & A_{2r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{bmatrix},$$

这一点容易被忽视.

(3) 分块对角阵

方阵 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零方阵子块 A_i ($i=1$, $2,\cdots,s$),而其他子块都为零阵,即 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$,则称 A 为分块对角阵.

① $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

②若 A_i 的逆阵 A_i^{-1} ($i=1,2,\cdots,s$) 都存在,则 A 的逆阵 A^{-1} 也存在,且有

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix};$$

③若方阵 $B=\begin{bmatrix} & & & B_1 \\ & & B_2 & \\ & \iddots & & \\ B_s & & & \end{bmatrix}$，且 B_i 的逆阵 B_i^{-1} $(i=1,2,\cdots,s)$ 都存在，则 B 的逆阵 B^{-1} 也存在，且有

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} & & & B_s^{-1} \\ & & B_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ B_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

(这里 $B, B_1, B_2 \cdots B_s$ 均为方阵)；

注　注意这里分块逆阵的位置，以免发生错误.

④对于分块矩阵，$A=\begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 或 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ D & C \end{bmatrix}$，其中当 B 为 $m\times m$ 可逆阵，C 为 $n\times n$ 可逆阵时，A 可逆，且有

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} \text{或 } A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

三、典型例题分析

1. 矩阵的概念及运算规律

(1) 矩阵的乘法

例 1　已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，试问下列符号是否有意义？若有意义，进行计算.

①$A+B$　②$A+C$　③AB　④AC

⑤$AB-2C$　⑥$AC-2C$　⑦$\dfrac{1}{C}$　⑧$\dfrac{1}{|C|}$

解　①$A+B$ 无意义，因为 A, B 不是同型矩阵，A, B 的行、列数

互不相同.

②$A+C$ 无意义,因为 A,C 的列数不相同.

③AB 有意义,因为 A 的列数与 B 的行数相同,且有

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\3&-1\end{bmatrix}.$$

④AC 无意义,因为 A 的列数与 C 的行数不同.

⑤$AB-2C$ 有意义,因为 AB 有意义,其 AB 与 C 为同型矩阵.

$$AB-2C=\begin{bmatrix}2&5\\3&-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5\\3&-5\end{bmatrix}.$$

⑥$AC-2C$ 无意义,因为 AC 无意义.

⑦据矩阵的运算可知$\dfrac{1}{C}$无意义.

⑧若$|C|\neq 0$,则$\dfrac{1}{|C|}$有意义,这里$|C|=2\neq 0$,因此$\dfrac{1}{|C|}$有意义,且$\dfrac{1}{|C|}=\dfrac{1}{2}$.

例 2　设 $A=\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}3&-1\\-6&2\end{bmatrix}$,求 AB,BA,A^2.

解　$$AB=\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix};$$

$$BA=\begin{bmatrix}3&-1\\-6&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&5\\-20&-10\end{bmatrix};$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

注　通过此例说明:

①乘法不满足交换律,$AB\neq BA$;

②若 $A\neq 0$,$B\neq 0$,可以有 $AB=0$,$A^2=0$;

③乘法不满足消去律,$AB=A^2$,$A\neq 0$,但这里 $A\neq B$.

例 3　设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-2&1&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}2&5&4\\4&-2&2\\1&4&1\end{bmatrix}$,

求 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$.

分析 此题若直接计算需做 4 次乘法,而利用加法交换律、结合律、乘法对加法的分配律化简后,只需作 2 次乘法,简化了运算.

解 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB = (4A^2 - 2BA) + (2AB - B^2)$

$$= (2A - B)2A + (2A - B)B = (2A - B)(2A + B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ -8 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{bmatrix}.$$

注 由此例可见,作矩阵运算时先进行必要的化简是重要的.但要注意,化简过程是恒等变形,提取公因子(矩阵)时不能颠倒相乘矩阵左右次序.

例 4 已知 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha} = \left[\frac{1}{2}, 0, \cdots, \frac{1}{2}\right]$,矩阵 $A = E - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$, $B = E + 2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$,其中 E 为 n 阶单位矩阵,求 AB 与 BA.

解 显然 A,B 均为 n 阶方阵,由矩阵运算规律可得

$$AB = (E - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})(E + 2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}) = E + 2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$$

$$= E + \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\alpha}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \left[\frac{1}{2}, 0, \cdots, \frac{1}{2}\right]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

所以 $AB = E + \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\alpha}^T\left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{\alpha} = E + \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = E$.

由于 A,B 为同阶方阵,故由 $AB = E$,可得 $BA = E$.

注 1 本例如果先分别计算出矩阵 A,B,再计算 AB,比较麻烦,此题化简的过程关键是利用 $\alpha\alpha^T$ 为一个数,可将它从矩阵乘法中提来,对 n 维行向量 α 来说,$\alpha\alpha^T$ 与 $\alpha^T\alpha$ 有很大的不同,注意分清那个是数,那个是矩阵,对于简化计算是非常重要的.

注 2 一般地作矩阵运算,应尽量先根据运算规律进行“字母”运

算,最后再将具体数字代入算出的结果.

例 5　设 A,B 为 n 阶矩阵,且 $A=\frac{1}{2}(B+E)$,证明:$A^2=A$ 的充要条件是 $B^2=E$.

证明　必要性.设 $A^2=A$,即 $\left[\frac{1}{2}(B+E)\right]^2=\frac{1}{2}(B+E)$,

$$\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E),B^2+2B+E=2B+2E,$$

由此得　$B^2=E$.

充分性.设 $B^2=E$,由 $A=\frac{1}{2}(B+E)$ 得

$$\begin{aligned}A^2&=\left[\frac{1}{2}(B+E)\right]^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{4}(E+2B+E)\\&=\frac{1}{2}(B+E)=A.\end{aligned}$$

注　对 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 只有在 A 与 B 可交换(即 $AB=BA$)时才成立。而本例中 B 与 E 是可交换的.

(2) 方阵的幂

求方阵的幂常利用的方法有:乘法结合律;递推法;数学归纳法;分块矩阵等方法.

例 6　设 $A=\begin{bmatrix}-9&4\\-25&11\end{bmatrix}$,证明 $A^n=\begin{bmatrix}1-10n&4n\\-25n&1+10n\end{bmatrix}$.

证明　当 $n=2$ 时,$A^2=\begin{bmatrix}-19&8\\-50&21\end{bmatrix}$,显然成立.

假设 $n=k$ 时,等式成立,则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}A^{k+1}&=A^kA=\begin{bmatrix}1-10k&4k\\-25k&1+10k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9&4\\-25&11\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1-10(k+1)&4(k+1)\\-25(k+1)&1+10(k+1)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

等式也成立.所以对任何的自然数 n,有

$$A^n=\begin{bmatrix}1-10n&4n\\-25n&1+10n\end{bmatrix}.$$

例 7　**设** $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,**求** A^n

分析一　**首先直接计算** A^2,A^3,**找出它们的规律,然后由归纳法证明**.

解法一　$A^2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由此猜想:
$$A^n=\begin{bmatrix}1&n&\dfrac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}.\qquad (*)$$

下面用数学归纳法证(*)**式**.

当 $n=2$ **时**(*)**式显然成立,假设当** $n=k$ **时**(*)**式成立,即**

$$A^k=\begin{bmatrix}1&k&\dfrac{k(k-1)}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix},$$

则当 $n=k+1$ **时,有**

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix}1&k&\dfrac{k(k-1)}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&k+1&\dfrac{k(k+1)}{2}\\0&1&k+1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

所以当 $n=k+1$ **时**(*)**式也成立,故**(*)**式对所有正整数** n **都成立**.

分析二　先将 A 化为单位矩阵 E 与对角元素为零的三角矩阵之和,再利用二项式定理及方阵的幂的性质.

解法二　$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=E+B$,

因为单位矩阵 E 与任何同阶方阵可交换,所以有

$$\begin{aligned}A^n&=(E+B)^n\\&=E^n+nE^{n-1}B+\frac{1}{2!}n(n-1)E^{n-2}B^2+\cdots+nEB^{n-1}+B^n\\&=E+nB+\frac{1}{2!}n(n-1)B^2+\cdots+B^n.\end{aligned}$$

而　$B^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$B^3=B^2B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$,

所以　$B^k=0\quad(k=3,4,\cdots,n)$,

得　$$\begin{aligned}A^n&=E+nB+\frac{1}{2!}n(n-1)B^2\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&n&0\\0&0&n\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注　$(A+B)^n=A^n+nA^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2!}A^{n-2}B^2+\cdots+nAB^{n-1}+B^n$ 是在方阵 A 与 B 可交换(即 $AB=BA$)时成立的,但若 $AB\neq BA$ 时,

此式一般不成立.

例8　已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]$，$\boldsymbol{\beta}=\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$，矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\beta}$，求 A^{n}（$n=2,3,\cdots$）.

解法一　$A=\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$，

$$A^{2}=AA=\begin{bmatrix}3&\frac{3}{2}&1\\6&3&2\\9&\frac{9}{2}&3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}=3A.$$

设 $A^{k}=3^{k-1}A$，则

$$A^{k+1}=AA^{k}=A(3^{k-1}A)=3^{k-1}A^{2}=3^{k-1}(3A)=3^{k}A.$$

故由数学归纳法知，对任何自然数 n 有

$$A^{n}=3^{n-1}A=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}.$$

解法二　利用矩阵乘法的结合律：

$$A^{n}=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\beta})}_{n\text{个}}=\boldsymbol{\alpha}^{T}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{T})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{T})}_{(n-1)\text{个}}\boldsymbol{\beta}.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{T}=\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3$，

故
$$A^n=\boldsymbol{\alpha}^T3^{n-1}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}.$$

注　解法二利用矩阵乘法的结合律较简单.此法在矩阵运算中常常用到,应学会掌握.

例 9　设 $A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{bmatrix}$,求 A^{2k}.

分析　A 是一个分块矩阵,考虑用分块矩阵的乘法求解,找规律,结合使用数学归纳法.

解　设 $A_1=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}$,$A_2=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}$,

则
$$A_1^2=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0\\0&25\end{bmatrix},$$
$$A_1^4=A_1^2A_1^2=\begin{bmatrix}25^2&0\\0&25^2\end{bmatrix},$$

由数学归纳法可知
$$A_1^{2k}=\begin{bmatrix}25^k&0\\0&25^k\end{bmatrix},$$

类似可得
$$A_2^{2k}=\begin{bmatrix}4^k&k4^{k+1}\\0&4^k\end{bmatrix}.$$

于是有
$$A^{2k}=\begin{bmatrix}A_1^{2k}&0\\0&A_2^{2k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25^k&&&\\&25^k&&\\&&4^k&k4^{k+1}\\&&&4^k\end{bmatrix}.$$

2.逆矩阵的概念及计算

(1) 求逆矩阵

例 10 下列矩阵是否可逆?若可逆,求出逆矩阵.

①$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&2\end{bmatrix}$ ②$B=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

分析 对于具体矩阵,一般可根据可逆的充要条件中矩阵对应的行列式是否为零来判断矩阵是否可逆.

解 ①因为$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&2\end{vmatrix}=0$,故 A 不可逆.

②因为:$|B|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$,故 B 可逆.

由公式 $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}B^{*}$ 来求 B^{-1},由于 $B^{*}=\begin{bmatrix}-1&4&3\\-1&5&3\\1&-6&4\end{bmatrix}$,

从而 $$B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^{*}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&-4\end{bmatrix}.$$

例 11 求矩阵 $H=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&5\\0&0&1&3\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解法一 由公式 $H^{-1}=\dfrac{1}{|H|}H^{*}$ (略).

解法二 利用分块矩阵求逆方法求.

$$H=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix},$$

其中 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$,$B=C=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$,$D=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$,

则 $H^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$，而 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$D^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，

于是有 $H^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

例 12　求 $A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$的逆阵 A^{-1}，其中 $a_i \neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

解　分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & B \\ a_n & 0 \end{bmatrix}$，其中 $B=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{bmatrix}$为对角阵.

显然 a_n，B 均可逆，由分块矩阵求逆矩阵的方法（见二、5（3））．得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

例 13 **设** $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，求 $(E+B)^{-1}$.

分析 此题直接计算较繁，可巧妙利用 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ 与 $AE=EA=A$，求出 $(E+B)^{-1}$ 的表达式，再代入具体的数据.

解 $(E+B)^{-1}=[E+(E+A)^{-1}(E-A)]^{-1}$

$$=[(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)]^{-1}$$

$$=\{(E+A)^{-1}[(E+A)+(E-A)]\}^{-1}=[(E+A)^{-1}2E]^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}E^{-1}[(E+A)^{-1}]^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}E(E+A)=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}.$$

(2) 求解矩阵方程

例 14 **解下列矩阵方程，求出矩阵** X.

① $AXB=C$，其中 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&4\\0&5&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2\\3&7\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\3&0\end{bmatrix}$；

② $\begin{bmatrix}1&2&-3\\1&1&-1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\end{bmatrix}$.

解 ① $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{5}\\0&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-2\\-3&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -1 \\ \frac{21}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

②**分析**　由于 X 的系数矩阵不是方阵，只能用待定元素法求出 X.

设 $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix}$，则由 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，

得方程组：$\begin{cases} x_1+2x_3-3x_5=3, \\ x_1+x_3-x_5=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_3=3-2x_1, \\ x_5=1-x_1; \end{cases}$

$\begin{cases} x_2+2x_4-3x_6=-1, \\ x_2+x_4-x_6=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_4=1-2x_2, \\ x_6=1-x_2. \end{cases}$

所以　$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 3-2x_1 & 1-2x_2 \\ 1-x_1 & 1-x_2 \end{bmatrix}$，其中 x_1, x_2 为任意数.

例 15　设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$，且满足 $AX=A+2X$，，求矩阵 X.

分析　首先将方程表示成 $CX=D$（或 $XC=D$）的形式，若 C 可逆，则 $X=C^{-1}D$（或 $X=DC^{-1}$）.

解　由 $AX=A+2X$，有 $(A-2E)X=A$，而

$$|A-2E|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

故 $A-2E$ 可逆，且有 $(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

于是有　$X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

注　求解矩阵方程一般需经过移项、合并同类项、提取公因子等步骤将方程化简整理成 $AX = C$，$XB = C$，$AXB = C$ 形式之一.若 X 的系数矩阵可逆，就可用逆矩阵法解出 X（否则要用待定元素法）.求解矩阵方程的过程就是一个同解变形过程，注意相乘矩阵的左右次序不可随意颠倒，如本例中由 $(A - 2E)X = A$ 解出 X，只能用 $(A - 2E)^{-1}$ 左乘该式两端，而不能用 $(A - 2E)^{-1}$ 右乘两端.

例 16　设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $AB + 4E = A^2 - 2B$，求矩阵 B.

解　由 $AB + 4E = A^2 - 2B$ 得 $AB + 2B = A^2 - 4E$，即

$$(A + 2E)B = A^2 - 4E.$$

由于 $|A + 2E| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$，所以 $A + 2E$ 可逆.

所以　$B = (A + 2E)^{-1}(A^2 - 4E) = (A + 2E)^{-1}(A + 2E)(A - 2E)$

$$= A - 2E$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

例 17　设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$，求矩阵 X.

解　由 $A^* X = A^{-1} + 2X$,得 $(A^* - 2E)X = A^{-1}$,两边左乘 A,且由 $AA^* = |A|E$,得

$$(|A|E - 2A)X = E,\text{从而 } X = (|A|E - 2A)^{-1}.$$

因为 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

所以 $X = (4E - 2A)^{-1} = [2(2E - A)]^{-1} = \dfrac{1}{2}(2E - A)^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注　此题也可由 $A^* = |A|A^{-1} = 4A^{-1}$,代入题设方程得 $4A^{-1}X = A^{-1} + 2X$,两边左乘 A 得 $4X = E + 2AX$,$(4E - 2A)X = E$,$X = (4E - 2A)^{-1}$,以下同解答.

(3) 证抽象矩阵可逆及求逆阵表达式

例 18　已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 3A - 2E = 0$,证明 A 可逆,并求 A^{-1}.

分析　若能证明 $|A| \neq 0$ 或 $A \cdot (\quad) = E$,则可以说明 A 可逆.

证明一　由 $A^2 + 3A - 2E = 0$ 有 $A(A - 3E) = 2E$,两边取行列式有

$$|A||A - 3E| = |2E| = 2^n \neq 0,$$

于是有　$|A| \neq 0$,所以 A 可逆,且由

$$A(A - 3E) = 2E \text{ 有 } A^{-1}A(A - 3E) = 2A^{-1},$$

所以 $$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E).$$

证明二 $A^2+3A-2E=0$ 有 $A(A-3E)=2E$,即有

$$A\left[\frac{1}{2}(A-3E)\right]=E,$$

于是可知 A 可逆,且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E)$.

注 对于需证 A 可逆,又要求求出 A^{-1}的命题,若由$|A|\neq 0$证出 A 可逆,再求 A^{-1},有些命题仅单独证明$|A|\neq 0$十分困难,所以可利用若 A,B 为方阵,$AB=E$(或 $BA=E$),则 A,B 均可逆,且 $A^{-1}=B$,$B^{-1}=A$ 这一性质找出 $AB=E$ 或 $BA=E$ 的矩阵 B,从而使证 A 可逆及求 A^{-1}两问题一并解决.如本例证明二.

例 19 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,证明 $A-E$ 可逆,并求 $(A-E)^{-1}$.

证明 由 $A^2+A-4E=0$ 有

$$A^2+A-2E=2E,\text{即}(A-E)(A+2E)=2E,$$

或 $$(A-E)\left[\frac{1}{2}(A+2E)\right]=E,$$

所以 $A-E$ 可逆,且

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E).$$

注 利用性质证明 $A-E$ 可逆,就是找同阶方阵 B,使$(A-E)B=E$,如何找出 B,往往用类似于多项式的乘法或因式分解,对矩阵多项式乘以适当的因式或做因式分解.如本例由 $x^2+x-4=(x-1)(x+2)-2=0$,得$(x-1)(x+2)=2$,由此猜想有$(A-E)(A+2E)=2E$.

例 20 设 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$都可逆,证明

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A.$$

分析 如能证明第一个等式成立,则有$(B^{-1}+A^{-1})^{-1}=B(B+A)^{-1}A$,即

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A,$$

因而第二个等式也成立.证第一个等式成立,给出三种证法.

证明一　由逆阵的定义直接验证,因为

$$(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B]=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B$$
$$=(B^{-1}B+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B$$
$$=B^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}B=E,$$

所以
$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B.$$

证明二　左边 $=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1})^{-1}$

$=[B^{-1}(B+A)A^{-1}]^{-1}=A(A+B)^{-1}B=$ 右边.

证明三　右边 $=A(A+B)^{-1}B=(A^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}B$

$=[(A+B)A^{-1}]^{-1}B$

$=(E+BA^{-1})^{-1}B=(BB^{-1}+BA^{-1})^{-1}B$

$=[B(B^{-1}+A^{-1})]^{-1}B$

$=(B^{-1}+A^{-1})^{-1}B^{-1}B=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$ 左边.

3.**方阵的行列式的计算**

例 21　设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&0&3\end{bmatrix}$,求 $|2A^{-1}+E|$.

解　由方阵乘积行列式的性质得

$$|2A^{-1}+E|=|A^{-1}(2E+A)|=|A^{-1}||2E+A|$$
$$=\frac{1}{|A|}|2E+A|.$$

因为 $|A|=18$,$|2E+A|=\begin{vmatrix}4&0&0\\0&5&2\\0&0&5\end{vmatrix}=100$,

所以
$$|2A^{-1}+E|=\frac{1}{18}\times100=\frac{50}{9}.$$

例 22　设 A,B 均为 n 阶方阵,且 $|A|=2$,$|B|=-3$,求 $|2A^{*}B^{-1}|$.

解　因为 $|A^{*}|=|A|^{n-1}=2^{n-1}$,$|B^{-1}|=\dfrac{1}{|B|}=-\dfrac{1}{3}$,

所以 $|2A^*B^{-1}| = 2^n|A^*||B^{-1}| = -\frac{2^{2n-1}}{3}$.

例 23 设 A 是 3 阶方阵，$|A| = \frac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$

分析一 利用 $A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$，化为 A^{-1} 的行列式计算.

解法一 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = \left|\frac{1}{3}A^{-1} - 2|A|A^{-1}\right|$

$$= \left|\frac{1}{3}A^{-1} - A^{-1}\right| = \left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^3|A^{-1}|$$

$$= -\frac{8}{27}|A|^{-1} = -\frac{8}{27}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -\frac{16}{27}.$$

分析二 利用 $A^{-1} = |A|^{-1}A^* = 2A^*$，化为 A^* 的行列式计算.

解法二 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = \left|\frac{1}{3}\times 2A^* - 2A^*\right| = \left|\left(-\frac{4}{3}A^*\right)\right|$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)^3|A^*| = \left(-\frac{4}{3}\right)^3|A|^{3-1} = -\frac{16}{27}.$$

分析三 利用 $AA^* = |A|E$，消去原行列式中的 A^*，为此将原行列式乘以 $|3A|$ 或 $|A|$，可出现矩阵 AA^*.

解法三 因为 $|3A|\left|\left(\frac{1}{3}\right)A^{-1} - 2A^*\right|$

$$= \left|\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 3AA^{-1} - 3\cdot 2\cdot AA^*\right| = |E - 6AA^*|$$

$$= |E - 6|A|E| = |E - 3E| = |-2E| = (-2)^3|E| = -8,$$

所以 $\left|\left(\frac{1}{3}\right)A^{-1} - 2A^*\right| = |3A|\left|\left(\frac{1}{3}\right)A^{-1} - 2A^*\right| \Big/ |3A|$

$$= -8/3^3|A| = -\frac{16}{27}.$$

或 $|A||(3A)^{-1} - 2A^*| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)AA^{-1} - 2AA^*\right|$

$$= \left|\frac{1}{3}E - 2|A|E\right| = \left|\frac{1}{3}E - E\right| = \left|-\frac{2}{3}E\right| = -\frac{8}{27},$$

所以 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = |A||(3A)^{-1} - 2A^*|/|A|$

$$= -\frac{8}{27}\Big/|A| = -\frac{16}{27}.$$

注　一般计算方阵的行列式,先利用方阵行列式的性质将其变形,化为比直接计算简单为止.如例21,计算$\frac{1}{|A|}|2E+A|$显然比直接计算$|2A^{-1}+E|$简单.为此要熟练掌握矩阵及矩阵的行列式的性质.

4.综合题

例24　设A,B均为n阶可逆矩阵,试证下列各等式:

(1) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$;　　(2) $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$;

(3) $(A^*)^T=(A^T)^*$;　　(4) $(kA)^*=k^{n-1}A^*$　$(k\neq0)$;

(5) $[(A^{-1})^T]^*=[(A^*)^T]^{-1}$;　　(6) $(AB)^*=B^*A^*$.

证明　(1) 因为 $A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$,

所以
$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$$

(2) $(A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$,

而
$$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A,$$

故
$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*.$$

(3)
$$\begin{aligned}(A^*)^T&=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^{-1})^T=|A|(A^T)^{-1}\\&=|A^T|\cdot(A^T)^{-1}=(A^T).\end{aligned}$$

(4) 因为 $A^*=|A|A^{-1}$,

所以
$$\begin{aligned}(kA)^*&=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|\frac{1}{k}A^{-1}=k^{n-1}|A|A^{-1}\\&=k^{n-1}A^*.\end{aligned}$$

(5) 由(1)(2)(3)有
$$[(A^{-1})^T]^*=[(A^{-1})^*]^T=[(A^*)^{-1}]^T=[(A^*)^T]^{-1}.$$

(6) 因为A,B可逆　所以AB也可逆,由
$$(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}(AB)^*$$

得
$$\begin{aligned}(AB)^*&=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}\\&=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^*A^*.\end{aligned}$$

例 25 设 A 为 n 阶可逆对称矩阵,B 为 n 阶对称矩阵,当 $E+AB$ 可逆时,试证 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

证明一 $[(E+AB)^{-1}A]^T=A^T[(E+AB)^T]^{-1}$

$$=A(E+B^TA^T)^{-1}=A(E+BA)^{-1}$$

$$=[(E+BA)A^{-1}]^{-1}=(A^{-1}+B)^{-1}=[A^{-1}(E+AB)]^{-1}$$

$$=(E+AB)^{-1}A.$$

故 $(E+AB)^{-1}A$ 亦为对称矩阵.

证明二 由于可逆的对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵,故只需证

$$[(E+AB)^{-1}A]^{-1}=A^{-1}(E+AB)=A^{-1}+B$$

为对称矩阵即可,而由 A,B 均为对称矩阵可知

$$(A^{-1}+B)^T=(A^T)^{-1}+B^T=A^{-1}+B,$$

故 $(E+AB)^{-1}A$ 亦为对称矩阵.

例 26 设 A,B 均为 n 阶方阵,且满足 $A^2=E,B^2=E,|A|+|B|=0$ 证明:$|A+B|=0$.

证明 由 $A^2=E$ 两端取行列式得 $|A|=\pm1$,同理有 $|B|=\pm1$,又 $|A|=-|B|$,故有 $|A||B|=-1$,因为 $A^2=E,B^2=E$,所以有

$$|A+B|=|AE+EB|=|AB^2+A^2B|=|A(B+A)B|$$

$$=|A||B||B+A|=-|A+B|.$$

于是 $|A+B|=0$.

注 行列式的值是一个数,要证 $|A+B|=0$,只需证明 $|A+B|=-|A+B|$,这是一个重要的解题方法.

例 27 设 n 阶方阵 $A=E-\alpha\alpha^T$,其中 α 是 n 维非零列向量,E 是 n 阶单位矩阵.

证明:(1) $A^2=A$ 的充分必要条件是 $\alpha^T\alpha=1$;

(2) 当 $\alpha\alpha^T=1$ 时,A 不可逆.

证明 (1) $A^2=(E-\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-2\alpha\alpha^T+(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)$

$$=E-2\alpha\alpha^T+\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \quad \text{(结合律)}$$

$$=E-2\alpha\alpha^T+(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T \quad (\alpha^T\alpha\ \text{为一个数})$$

$$=E+(\alpha^T\alpha-2)\alpha\alpha^T.$$

若 $A^2=A$,则 $E+(\alpha^T\alpha-2)\alpha\alpha^T=E-\alpha\alpha^T$,得 $(\alpha^T\alpha-1)\alpha\alpha^T=0$.

因为 α 是 n 维非零向量,所以 n 阶方阵 $\alpha\alpha^T \neq 0$,于是 $\alpha^T\alpha - 1 = 0$,即 $\alpha^T\alpha = 1$.

反之,若 $\alpha^T\alpha = 1$,则 $A^2 = E - \alpha\alpha^T = A$.

注　在矩阵运算中常遇到 $\alpha^T\alpha$ 与 $\alpha\alpha^T$ 或 $\alpha\alpha^T$ 与 $\alpha^T\alpha$ 的乘积运算,其中 α 为列向量或行向量.注意分清 $\alpha^T\alpha$ 与 $\alpha\alpha^T$,或 $\alpha\alpha^T$ 与 $\alpha^T\alpha$ 中哪是数,哪是矩阵,对于简化计算是非常重要的.

(2) 证明一　(反证法)

若 A 可逆,因为 $\alpha^T\alpha = 1$,故由(1)知 $A^2 = A$,两边乘 A^{-1} 得 $A = E$,代入 A 的定义得 $\alpha\alpha^T = 0$,这与 $\alpha\alpha^T \neq 0$ 矛盾,故 A 不可逆.

证明二　(利用方程组)

当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时,考察 $A\alpha = (E - \alpha\alpha^T)\alpha = \alpha - \alpha(\alpha^T\alpha) = \alpha - \alpha = 0$,由 $\alpha \neq 0$ 说明齐次线性方程组 $A\alpha = 0$ 有非零解,从而 $|A| = 0$,故 A 不可逆.

四、检测题

1.是非题

(1) 可逆矩阵一定是方阵.　(　)

(2) 若 $AB = 0$,则 $|A| = 0$ 或 $B = 0$.　(　)

(3) 若 A,B 为方阵,$|A| = |B|$,则 $A = B$.　(　)

(4) 若 A,B 为方阵,$A = B$,则 $|A| = |B|$.　(　)

(5) 若 A 是 3 阶方阵,则 $|2A| = 2|A|$.　(　)

(6) 若 $AB = E$,则 A 可逆.　(　)

(7) 方阵 A,B 满足 $AB = BA = A$,则 B 必为单位阵.　(　)

(8) 若 A,B 为同阶可逆方阵,则 AB 仍可逆.　(　)

(9) 可逆的三角矩阵的逆矩阵仍为三角矩阵.　(　)

(10) 若 $A^2 - B^2 = E$,则 $A + B$,$A - B$ 都可逆.　(　)

(11) n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + E = 0$,则 A 可逆.　(　)

(12) 若矩阵 A,B 可交换,且 $|AB| \neq 0$,则 $A^{-1}B = BA^{-1}$.　(　)

2.填空题

(1) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$,非零矩阵 $B_{4\times 3}$ 满足 $BA=0$,则 $t=$ __________.

(2) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$,则 $A^{-1}=$ ________;$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$,则 $B^{*}=$ ________;$C^{*}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$,则 $C=$ ________.

(3) 设 A,B,C 均为 n 阶方阵,且 $ABC=E$,则 $(BC)^{T}A^{T}=$ __________.

(4) 已知 x 是 3 维列向量,且 $A=xx^{T}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$,则 $x^{T}x=$ ____________,$A^{n}=$ ____________.

(5) 已知 $AB-B=A$,其中 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,则 $A=$ ____________.

(6) 设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=\dfrac{1}{3}$,则 $\left|\left(\dfrac{1}{3}A\right)^{-1}-15A^{*}\right|=$ ____________.

3.选择题

(1) 设 A 是 $p\times s$ 矩阵,B 是 $m\times n$ 矩阵,如果 $AC^{T}B$ 有意义,则 C 是______.

(A) $p\times n$　　(B) $p\times m$　　(C) $m\times s$　　(D) $s\times m$

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}x & 1\\ 2 & y\end{bmatrix}$,则 A 与 B 可交换的充要条件是

______.

(A) $x = y + 1$　(B) $x = y - 1$　(C) $x = y$　(D) $x = 2y$

(3) 设 A 为 n 阶矩阵,且有 $A^2 = A$ 成立,则下列命题中正确的是______.

(A) $A = 0$　(B) $A = E$

(C) 若 A 不可逆,则 $A = 0$　(D) 若 A 可逆,则 $A = E$

(4) 设 A, B 均为 n 阶方阵,且 $B^2 = B$, $A = B + E$,则有______.

(A) A 不可逆　(B) A 可逆,且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(3E - A)$

(C) A 可逆,$A^{-1} = 2E - A$　(D) 不能确定

(5) 设 A, B 为 n 阶可逆方阵,且 $AB = BA$,则下列结论中不正确的是______.

(A) $AB^{-1} = B^{-1}A$　(B) $A^{-1}B = BA^{-1}$

(C) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$　(D) $B^{-1}A = A^{-1}B$

(6) 设 A, B 均为 n 阶方阵,则必有______.

(A) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$　(B) $AB = BA$

(C) $(A + B)^T = A^T + B^T$　(D) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

4. 解下列各题

(1) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,求 $|3B|$, BA, $AA^T - 2B$.

(2) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,求 $(A^*)^{-1}$.

(3) 已知 $B = [1,2,1]^T$, $C = [2,-1,2]$,若 $A = BC$,求 A^{100}.

(4) 已知 $A = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,求 A^{-1}.

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&4&3\end{bmatrix}$,求 $|(4E-A)^T(4E-A)|$.

(6) 设 n 阶方阵 A 满足 $AA^T=E$, $|A|<0$,求 $|A+E|$.

(7) 设 A,B 均为 n 阶可逆方阵,$D=\begin{bmatrix}A&0\\C&B\end{bmatrix}$,求 D^{-1}.

5.解矩阵方程

(1) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&4\\0&5&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2\\3&7\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\3&0\end{bmatrix}$, $AXB=C$,求 X.

(2) $XB=2X+B$,其中 $B=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&1&5\end{bmatrix}$,求 X.

(3) $AX=A+2X$,其中 $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$,求 X.

(4) $A^2-AX=E$,其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$,求 X.

6.证明题

(1) 设方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=0$,证明 A 和 $A+4E$ 均可逆,并求其逆.

(2) 设 A 为反对称矩阵,B 为对称矩阵,证明:

① A^2 是对称矩阵;

② $AB-BA$ 是对称矩阵;

③ AB 是反对称矩阵得充要条件是 $AB=BA$.

五、检测题答案与提示

1. (1) √ (2) × (3) × (4) √ (5) × (6) √

(7) × (8) √ (9) √ (10) × (11) √ (12) √

2. (1) $t=-3$;

(2) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{9} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$, $B^{*}=18\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$,

$C=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{bmatrix}18 & 0 & 0\\ -12 & 6 & 0\\ -2 & -5 & 3\end{bmatrix}$;

(3) E; (4) 14, $14^{n-1}A$; (5) $A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$;

(6) $(-2)^{n}\cdot 3$.

3. (1) C; (2) B; (3) D; (4) B; (5) D; (6) C.

4. (1) $|3B|=-81$, $BA=\begin{bmatrix}7 & 12 & -8\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $AA^{T}-2B=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 24\end{bmatrix}$;

(2) $(A^{*})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

提示 利用 $(A^{*})^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$;

(3) $2^{99}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 4\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，

提示：用分块矩阵求逆方法求，注意分块矩阵的逆阵中元素的位置；

(5) $|(4E-A)^T(4E-A)| = |4E-A|^2 = 36$；

(6) $|E+A| = 0$，**提示**：由运算规律得：$|A+E| = |A||E+A|$，再移项.

(7) $D^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$，

提示：设 $D^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$，其中 X_{ij} 均为 n 阶方阵，由 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$ 定出 X_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$.

5. (1) $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -1 \\ \frac{21}{2} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$；

(2) $X = B(B-2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$；

(3) $X=(A+2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}$；

(4) $X=A-A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

6. (1) $A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2E)$，$(A+4E)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-2E)$.

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

一、基本要求概述及主要术语

1.基本要求概述

①了解矩阵的初等变换、初等矩阵的概念及它们之间的联系，熟练掌握用初等行变换把矩阵化成行阶梯形的方法.知道矩阵等价的概念.

②理解矩阵秩的概念，知道初等变换不改变矩阵的秩的原理.掌握用初等变换求矩阵秩的方法.知道矩阵的行阶梯形、行最简形以及标准形与秩的关系.

③理解并掌握非齐次线性方程组有解的充分必要条件及齐次线性方程组有非零解的充分必要条件.

④熟练掌握用矩阵的初等行变换求解线性方程组的方法.

⑤掌握用初等变换求非奇异阵逆矩阵的方法及解矩阵方程的方法.

2.主要术语

初等变换，行阶梯形，行最简形，初等矩阵，等价，矩阵的标准形，矩阵的秩，齐次线性方程组，非齐次线性方程组，通解.

二、基本内容剖析

1.矩阵的初等变换

定义1　下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

①对调两行（对调 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

②以数 $k\neq 0$ 乘某行中的所有元素（第 i 行乘 k，记作 $r_i\times k$）；

③把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行

的 k 倍加到第 i 行，记作 r_i+kr_j）.

把定义中的“行”换成列即是初等列变换的定义（所用记号“r”换成“c”）.矩阵的初等行变换与初等列变换统称初等变换.

矩阵的初等变换是矩阵最常用的概念.本章重点介绍了通过初等行变换把矩阵化为行阶梯形和行最简形.行阶梯形矩阵名字比较形象，其特点是每个非零行左起的第一个非零元的下方元素全为零.

行最简形的特点：

①是行阶梯形矩阵；

②非零行第一个非零元为 1，且所在列的其余元素全为零.

注意，行阶梯形不唯一，行最简形唯一，矩阵的标准型也是唯一的.熟悉了初等行变换，初等列变换也就会了.初等列变换用得较少，能用初等行变换解决的问题一般不用初等列变换.还要注意 r_i+kr_j 的意义是把第 j 行各元素乘以 k 倍加到第 i 行上去，变化的是第 i 行，而不是第 j 行. $r_j\leftrightarrow r_j$ 与行列式运算有区别，这里没有符号的变化.几个变换写在一起时，顺序是从上向下进行的，这与行列式行运算的简略写法相仿.

2.等价

定义 2　如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A\sim B$.

矩阵间的等价关系具有下列三个性质：

①反身性：$A\sim A$；

②对称性 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

③传递性 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

等价是集合中元素之间的一种关系.满足反身性、对称性、传递性的关系称为等价关系.以后还要学习更特殊的等价关系，如矩阵“相似”、“合同”等.注意等价不是相等.与 $F=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{m\times n}$ 等价的所有矩阵归为一类称为一个等价类. F 是这个等价类中形式最简单的矩阵，称为标准形.这一等价类共同的标志，也是最本质的属性可以通过数 r

反映出来，数 r 即是矩阵的秩（二、3 中给出）. 在这里等价这一概念固然重要，但更重要的是等价的矩阵具有相同的秩这一性质. 将行最简形化为标准形一般还需通过列变换实现. 标准形在理论推导中常用.

3. 矩阵的秩

定义 3 若矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D\neq 0$，所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，则 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

显然 $R(A^T)=R(A)$，零阵的秩规定为 0，即 $R(0)=0$.

定理 1 若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$.

结论 n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow R(A)=n$ $(|A|\neq 0)$.

矩阵的秩 $R(A)=r$ 是一个数，定义为矩阵最高阶非零子式的阶数. 而对矩阵初等变换过程中矩阵的子行列式是否为 0 这一结果不变，因而这个数 r 也不变，即定理 1. 由此提供了求矩阵秩的有效方法：用初等行变换化矩阵为行阶梯形矩阵，非零行的行数就是最高阶非零子式的阶数，即矩阵的秩. 这样矩阵的秩就可以通过非零行的行数"数"出来.

同样是 $m\times n$ 矩阵，但秩可能不同. 因而与它们等价的阶梯形矩阵或行最简形甚至标准形非零行的行数也不同. 很多借助矩阵讨论的问题都与这个数 r 有密切关系，如后面要讲的线性方程组解的讨论、最大无关组的讨论等. 秩是线性代数中最重要、最基本的概念之一，这一点在后面的学习中可得到更深刻的领会.

4. 线性方程组的解

定理 2 n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A)<n$.

特别是：

①当 $m=n$ 时，方程组 $A_{n\times n}x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$（这正是克拉默法则已经告诉我们的）；

②当 $m<n$ 时，即方程的个数 m 小于未知量的个数 n 时方程组 $A_{m\times n}x=0$ 一定有非零解（此时 $R(A)\leqslant m<n$）.

定理 3　n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $B=(A\vdots b)$ 的秩.即

①当 $R(A)=R(B)=n$ 时,只有唯一解;

②当 $R(A)=R(B)=r<n$ 时,有无穷多解;

③ 当 $R(A)<R(B)$ 时,无解.

求解线性方程组是线性代数课程的主要内容之一.用初等行变换把系数矩阵或增广矩阵化为行最简形,再写出对应的最简方程组,实质是解方程组的加减消元法,只不过是通过系数矩阵或增广矩阵的行初等变换来实现,简洁方便,通过编制计算机程序,可由计算机代替人工的复杂计算.这里要注意通解的形式可以不唯一.

5.初等矩阵

定义 4　由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有以下三种.

①对调 E 的 i,j 两行(列)而得到的矩阵:

$$E(i,j)=\begin{array}{l}\left[\begin{array}{ccccccccc}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&&1&&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\\leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\\\\\\\\leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\\\\\\\\end{array}$$

②用数 $k\neq0$ 乘 E 的第 i 行(列)而得到的矩阵:

$$E(i(k))=\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

③用数 $k\neq 0$ 乘 E 的第 j 行(或第 i 列)后加到第 i 行(或第 j 列)上去而得到的矩阵：

$$E(i,j(k))=\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}K\\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

初等矩阵均是可逆阵：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j);E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

定理 4　设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

定理 5　设 A 为可逆矩阵，则存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$.

推论　$m\times n$ 矩阵 $A\sim B$ 的充分必要条件是：存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ=B$.

定理 4 把对矩阵 A 的初等变换与初等矩阵和矩阵 A 的乘积联系起来是用两种不同的语言描述同一种关系.这样初等变换的方法就有了矩阵理论的依据.如用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵的方法就是由

该理论推得的.反之,初等变换也是对矩阵理论的一个丰富.初等矩阵主要用于某些理论问题的推导和证明,如定理5及推论.初等变换则侧重于给出具体数值的矩阵进行运算,如求可逆矩阵的逆矩阵,解某些矩阵方程等.

由定理5可得到用初等变换求可逆矩阵及解矩阵方程 $AX = B$ 的方法.

当 A 为方阵时

①若 $(A \vdots E) \overset{r}{\sim} (E \vdots C)$,则 A 可逆且 $A^{-1} = C$,即

$$(A \vdots E) \overset{r}{\sim} (E \vdots A^{-1});$$

②若 $(A \vdots B) \overset{r}{\sim} (E \vdots C)$,则 $X = A^{-1}B = C$,即

$$(A \vdots B) \overset{r}{\sim} (E \vdots A^{-1}B).$$

解矩阵方程 $XA = B$,可取转置,$(XA)^T = B^T$,即 $A^TX^T = B^T$,用上述方法求出 X^T,则 $X = (X^T)^T$.

至此 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件归纳有8种:ⓐ $AB = BA = E$(B 为 n 阶矩阵);ⓑ $AB = E$(或 $BA = E$,B 为 n 阶矩阵);ⓒ $|A| \neq 0$;ⓓ $(A \vdots E) \overset{r}{\sim} (E \vdots C)$;ⓔ $R(A) = n$;ⓕ方程组 $Ax = 0$ 没有非零解;ⓖ $A \sim E$;ⓗ存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$ 使 $A = P_1P_2\cdots P_l$.

三、典型例题分析

1.化矩阵为最简形和标准形

例1　设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & -7 & 19 \end{bmatrix}$,把 A 化为行最简形和标准形.

解　(1)对 A 作初等行变换

$$A \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & -7 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & -7 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\0 & 0 & 3 & -7\\0 & 0 & -3 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{\substack{r_3+r_2\\ r_2\div 3}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \frac{2}{3}\\0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

此即为 A 的行最简形.

(2) 对 A 的行最简形作初等列变换

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \frac{2}{3}\\0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & \frac{2}{3}\\0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-\frac{2}{3}c_1+\frac{7}{3}c_2]{c_3-2c_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

注 化矩阵为行最简形先从第一列开始,然后一列一列地化.一般 a_{11} 的位置要出现 1,所以本题 r_2-r_1,再 $r_1\leftrightarrow r_2$.注意化行最简形不能用列变换或掺杂列变换.

2.关于矩阵秩的问题

例 2 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\3 & -2 & 1 & 0 & 2\\2 & 2 & 4 & -5 & 3\\4 & -1 & 3 & -3 & 2\end{bmatrix}$,求矩阵 A 的秩,并求 A 的一个最高阶非零子式.

分析 由于初等变换不改变矩阵的秩,所以通过初等变换把矩阵 A 化为秩很容易看出来的矩阵——行阶梯形矩阵.

解 把 A 化成行阶梯形矩阵

$$A\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\0 & -2 & -2 & 3 & -1\\0 & 2 & 2 & -3 & 1\\0 & -1 & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&1\\0&-1&-1&1&-2\\0&2&2&-3&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&1\\0&-1&-1&1&-2\\0&0&0&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B.$$

因此 $R(A)=3$.

行阶梯形矩阵 B **中，** $\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}\neq 0$**，是原矩阵** A **的第** 1、2、4 **列，第** 1、3、4 **行交叉点的元素构成的行列式变化来的，则有** $\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&4&-5\\4&3&-3\end{vmatrix}\neq 0$ **是** A **的一个最高阶非零子式.**

注　求矩阵的秩只要将该矩阵化成行阶梯形矩阵，其非零行的行数就是该矩阵的秩，也是 A **的秩. 非零子式的选取可先找阶梯形矩阵非零行第一个非零元所在的列与非零行交叉点处的元素构成的行列式，该行列式为上三角行列式，易知不为** 0**，再取原矩阵对应元素（列相同，行取相应变化前的行）构成的行列式即可.**

例 3　**设** $A=\begin{bmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{bmatrix}$**，问** k **为何值，可使** (1) $R(A)=1$**；** (2) $R(A)=2$**；** (3) $R(A)=3$.

解法一　对 A **作初等行变换，化为行阶梯形矩阵**

$$A\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&2(k-1)&-3(k^2-1)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3k\\0 & 2(k-1) & 3(k-1)\\0 & 0 & -3(k-1)(k+2)\end{bmatrix}$$

于是 (1) 当 $k=1$ 时,$R(A)=1$;

(2) 当 $k=-2$ 时,$R(A)=2$;

(3) 当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时,$R(A)=3$.

解法二　因 A 是 3 阶方阵,故 $R(A)=3\Leftrightarrow |A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3k\\-1 & 2k & -3\\k & -2 & 3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1 & -2 & 3k\\0 & 2(k-1) & 3(k-1)\\0 & 2(k-1) & -3(k^2-1)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1 & -2 & 3k\\0 & 2(k-1) & 3(k-1)\\0 & 0 & -3(k-1)(k+2)\end{vmatrix}$$

$$=-6(k-1)^2(k+2).$$

所以当 $k\neq 1,k\neq -2$ 时,$R(A)=3$.

当 $k=-2$ 时,$R(A)\leqslant 2$,且 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\-1 & -4 & -3\\-2 & -2 & 3\end{bmatrix}$,其中子行列式

$\begin{vmatrix}1 & -2\\-1 & -4\end{vmatrix}=-6\neq 0$,所以 $R(A)\geqslant 2$,于是 $R(A)=2$.

当 $k=1$ 时,$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\-1 & 2 & -3\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,所以 $R(A)$

$=1$.

注　求矩阵的秩两种最基本的方法:

①用初等行变换化矩阵为行阶梯形矩阵,非零行的行数即矩阵的秩;

②找出非零子式最高阶数,当矩阵是方阵时,这种方法也常用,特别是讨论含参数的矩阵秩的问题.

*例 4　设 A 为 $m\times n$ 矩阵,b 为 m 维列向量,B 为 $m\times s$ 矩阵,证

明：

(1) $R(A) \leqslant R(A \vdots b) \leqslant R(A)+1$；

(2) $\max\{R(A), R(B)\} \leqslant R(A, B) \leqslant R(A)+R(B)$.

分析　讨论矩阵秩的问题，可从定义出发，讨论矩阵中最高阶非零子式的阶数，即可证出第一个不等式．还可以讨论将矩阵化成行阶梯形矩阵的非零行的行数．而该题要讨论 $(A \vdots B)$ 的秩，所以讨论列阶梯形矩阵非零列的列数比较方便．由此可证出第二个不等式．

证明　显然 (1) 是 (2) 的特殊情形，下面只证 (2)．

因为 A 的最高阶非零子式总是 $[A, B]$ 的非零子式，所以 $R(A) \leqslant R[A, B]$，同理有 $R(B) \leqslant R[A, B]$，从而有

$$\max\{R(A), R(B)\} \leqslant R[A, B].$$

设 $R(A)=r$，$R(B)=t$，把 A 和 B 分别作列变换化为列阶梯形 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$，则 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 中分别含 r 个和 t 个非零列，故可设

$$A \overset{c}{\sim} \widetilde{A} = [\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_r, 0, \cdots, 0], B \overset{c}{\sim} \widetilde{B} = [\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_t, 0, \cdots, 0],$$

从而　$$[A, B] \overset{c}{\sim} [\widetilde{A}, \widetilde{B}] = [\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_r, 0, \cdots, 0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_t, 0, \cdots, 0],$$

由于 $[\widetilde{A}, \widetilde{B}]$ 中只含 $r+t$ 个非零列，因此 $R[\widetilde{A}, \widetilde{B}] \leqslant r+t$.

而 $R[A, B] = R[\widetilde{A}, \widetilde{B}]$，故 $R[A, B] \leqslant r+t$，即

$$R[A, B] \leqslant R(A)+R(B).$$

注　结论比较显然，但用行变换不好叙述，所以用列变换叙述．

3．关于矩阵等价问题的证明

例5　设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵，证明 $A \sim B$ 的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$.

证明　必要性．即定理1．

充分性．若 $R(A)=R(B)=r$，则 $A \sim \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$，$B \sim \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$，由等价的传递性有 $A \sim B$.

注　讨论等价的问题常常借助于等价类的标准形．

4.解线性方程组

例 6 求解齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3+x_4=0, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-5x_4=0. \end{cases}$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换化为行最简形：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & -5 \end{bmatrix} \underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{r_3-8r_2}{\overset{r_1+2r_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对应的同解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=0, \\ x_3-x_4=0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1=-2x_2+x_4, \\ x_3=x_4. \end{cases}$$

取自由未知数 $x_2=c_1, x_4=c_2$，则

$$x_1=-2c_1+c_2, x_3=c_2,$$

所以
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c_1+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

注 本例是解齐次线性方程组的“标准程序”的范例.解题步骤是：

①将系数矩阵作初等行变换化为行最简形；

②写出行最简形对应的方程组(与原方程组同解)，非零行非零首元对应的未知量取作非自由的，其余为自由未知量，取作不同记号的任意常数；

③写出通解.

例 7 求解非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 5x_1+2x_2+3x_3+6x_4=7. \end{cases}$

解　对增广矩阵 B 施行初等行变换化为行最简形：

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&2&5\\2&1&1&2&1\\5&2&3&6&7\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&1&2&5\\0&1&-1&-2&-9\\0&2&-2&-4&-18\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&2&5\\0&1&-1&-2&-9\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$R(A)=R(B)=2$，所以有无穷多解，对应同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_3+2x_4=5,\\x_2-x_3-2x_4=-9,\end{cases}\quad 或\begin{cases}x_1=-x_3-2x_4+5,\\x_2=x_3+2x_4-9.\end{cases}$$

取自由未知量 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$，则通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c_1-2c_2+5\\c_1+2c_2-9\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\-9\\0\\0\end{bmatrix}\quad(c_1,c_2\in R).$$

注　解非齐次线性方程组步骤是：

①对增广矩阵作初等行变换化为行最简形(不能用列变换或掺杂列变换)；

②由 $R(A)$，$R(B)$ 的关系判断有解还是无解，若有解写出对应的同解方程组，令自由未知量为任意常数，写出通解.

5. 含参数的线性方程组的讨论

例 8　问 a，b 为何值时线性方程组
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$$
有唯一解，无解，有无穷多解？并求有无穷多解时的通解.

解　对方程组的增广矩阵施行行初等变换

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-3r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}.$$

由此可知：

⑴当 $a\neq1$ 时，$|A|\neq0$，有唯一解；

⑵当 $a=1$，$b\neq-1$ 时，$R(A)=2$，$R(B)=3$，$R(A)\neq R(B)$，无解；

⑶当 $a=1$，$b=-1$ 时，$R(A)=R(B)$，有无穷多解，此时

$$B\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

对应同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4-1,\\x_2=-2x_3-2x_4+1.\end{cases}$$

取自由未知量 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$，得通解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2-1\\-2c_1-2c_2+1\\c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

$$=c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad(c_1,c_2\in R).$$

注　讨论非齐次线性方程组解的问题先把增广矩阵化为行阶梯形,再根据定理 3 判断解的存在性.讨论齐次方程组解的问题,若方程的个数与未知数的个数相同,可根据系数矩阵行列式 $|A|$ 是否为零讨论,或将 A 化为阶梯形矩阵,再根据定理 2 判断.

例 9　设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0,\\ \cdots\quad\cdots\\ bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq0,b\neq0,n\geqslant2$,试讨论 a,b 为何值时,方程组仅有零解,有无穷多解?在有无穷多解时求通解.

解　方程组系数矩阵 A 的行列式(见第一章例 14)

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(1) $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时,方程组仅有零解.

(2) $a=b$ 或 $a=(1-n)b$ 时,方程组有无穷多解.

$a=b$ 时,对 A 作初等行变换,注意到 $a\neq0$,则

$$A=\begin{bmatrix}a&a&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

对应同解方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$,取 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量,得通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1-\cdots-c_{n-1} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1} \in R)$.

当 $a=(1-n)b$ 时,对 A 作初等行变换,注意到 $b\neq 0$,则

$$A=\begin{bmatrix} (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & (1-n)b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{各行除以 } b}\begin{bmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\cdots \\ r_{n-1}-r_n}]{\substack{r_1-r_n \\ r_2-r_n}}\begin{bmatrix} -n & 0 & \cdots & n \\ 0 & -n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{并加到第}n\text{行}]{\text{前 } n-1 \text{ 行均除以 } n}\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

对应同解方程组$\begin{cases} x_1 = x_n, \\ x_2 = x_n, \\ \quad \cdots \\ x_{n-1} = x_n, \end{cases}$ 取自由未知量 x_n 则有通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} (c \in R).$$

注　该题是 2002 年考研试题数学 I 中的一道题,解题方向很明确,只是行列式的计算与矩阵的初等行变换有一定的技巧.

6. **关于线性方程组解的讨论**

例 10　设 A 是 $m \times n$ 矩阵,$Ax = 0$ 是非齐次方程组 $Ax = b$ 对应的齐次方程组,那么(　　).

(A) 当 $Ax = 0$ 仅有零解时,$Ax = b$ 有唯一解

(B) 当 $Ax = 0$ 有非零解时,$Ax = b$ 有无穷多解

(C) 当 $Ax = b$ 有无穷多解时,$Ax = 0$ 仅有零解

(D) 当 $Ax = b$ 有无穷多解时,$Ax = 0$ 有非零解

分析　$Ax = 0$ 仅有零解或有非零解只能表明 A 的秩是 n 还是小于 n,不能判定方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩是否相等,故 $Ax = b$ 可能无解,从而选项(A)与(B)不对.又当 $Ax = b$ 有无穷多解时,$R(A) = R(A \vdots b) = r < n$,方程组 $Ax = b$ 有 $n - r$ 个自由未知量,$Ax = 0$ 中同样有 $n - r$ 个自由未知量.自由未知量不全取 0,便得非零解,而不是仅有零解,故选(D).

解　应选(D).

例 11　设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩与 $n+1$ 阶矩阵

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \end{bmatrix}$$

的秩相等,证明:该线性方程组必有解.

证明　注意到系数矩阵 A 是 $n\times n$ 矩阵,其增广矩阵 B 是 $n\times(n+1)$ 矩阵,矩阵 C 是 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵,由矩阵秩的定义,有

A 比 B 少一列 $\Rightarrow R(A)\leqslant R(B)$,

B 比 C 少一列 $\Rightarrow R(B)\leqslant R(C)$,

于是 $R(A)\leqslant R(B)\leqslant R(C)$.

由题设 $R(A)=R(C)$,所以 $R(A)=R(B)$,于是原方程组必有解.

例 12　设 A 是 n 阶方阵,$b\neq 0$ 是 n 维列向量,记 $n+1$ 阶矩阵 $\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 为 C,若矩阵 C 的秩等于矩阵 A 的秩,则线性方程组(　　).

(A) $Ax=b$ 必有无穷多解　　(B) $Ax=b$ 必有唯一解

(C) $Cy=0$ 仅有零解　　(D) $Cy=0$ 必有非零解

解　选(D).由于 $R(C)=R(A)$,所以 $|C|=0$,否则 $R(C)>R(A)$,因此 $Cy=0$ 必有非零解,故选(D).其他选项举例排除,例如

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\text{则 } C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

容易验证 $R(A)=R(C)=2$,而 $Ax=b$ 有唯一解,$Cy=0$ 有无穷多解,于是排除选项(A)与(C).若取

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\text{则 } C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

显然 $R(B)=R(A)=2$(这里 B 是 $Ax=b$ 的增广矩阵),而 $Ax=b$ 有无穷多解,于是排除选项(B).

注　例 11、例 12 基本是一个题目,条件叙述形式不同,提问的角度有所不同.例 11 结论是 $Ax=b$ 必有解,但不一定唯一也不一定无穷多,所以例 12 中考查选项(A)(B)就要慎重.

7.已知线性方程组的通解求线性方程组

例 13　写出一个以 $x=c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\4\\0\\1\end{bmatrix}$ (*) 为通解的齐次线性方程组.

分析　这是解线性方程组的逆问题.由解的形式可看出 $x_3=c_1$,$x_4=c_2$ 是两个自由未知量,则以 $c_1=x_3$,$c_2=x_4$ 代入通解中即可得到满足条件的方程组.

解　将通解改写为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c_1-2c_2\\-3c_1+4c_2\\c_1\\c_2\end{bmatrix}\xlongequal[c_2=x_4\text{代入}]{\text{以}c_1=x_3}\begin{bmatrix}2x_3-2x_4\\-3x_3+4x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix},$$

对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=2x_3-2x_4,\\x_2=-3x_3+4x_4,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x_1-2x_3+2x_4=0,\\x_2+3x_3-4x_4=0.\end{cases}$$

它以(*)为通解.

注　满足条件的方程组不唯一,这里是最简单的一个(因其系数矩阵是行最简形).

8.两个线性方程组公共解的讨论

例 14　设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\end{cases}$ 又已知某齐次线性方程组(Ⅱ)的通解为 $c_1[0,1,1,0]^T+c_2[-1,2,2,1]^T$.

(1) 求方程组 (Ⅰ) 的通解;(2) 问方程组 (Ⅰ) 与 (Ⅱ) 是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解.若没有则说明理由.

解 (1) 方程组 (Ⅰ) 可表示为 $\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_4 = x_2, \end{cases}$ 取自由未知量 $x_2 = c_3$, $x_3 = c_4$, 则得通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_3, c_4 \in R).$$

(2) 分析 讨论两个方程组是否有公共解只需将一个方程组的解代入另一个方程组验证即可.

解 (Ⅰ) (Ⅱ) 有非零公共解,事实上,将方程组 (Ⅱ) 的通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_1 + 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

代入方程组 (Ⅰ) 得 $\begin{cases} -c_2 + (c_1 + 2c_2) = 0, \\ (c_1 + 2c_2) - c_2 = 0, \end{cases}$

解得 $c_1 = -c_2$, 当 $c_1 = -c_2 \neq 0$ 时, 方程 (Ⅱ) 通解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} -c_2 \\ c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 满足方程组 (Ⅰ), 所以是方程组 (Ⅰ) 与 (Ⅱ) 的非零公共解,且为所有非零公共解.

9.**用初等行变换求可逆矩阵的逆矩阵**

例 15　**设** $A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{bmatrix}$,**求** A^{-1}.

分析　**若** A **可逆,则** $A^{-1}(A\vdots E)=(A^{-1}A\vdots A^{-1})=(E\vdots A^{-1})$,**所以只需将** $(A\vdots E)$ **通过行初等变换化成** $(E\vdots C)$,**则** $A^{-1}=C$.

解　**对** $(A\vdots E)$ **化成行最简形**

$$(A\vdots E)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\overset{3r_3+2r_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&9&-4&0&2&3\end{array}\right]$$

$$\overset{2r_3+9r_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right]$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&0&18&9&12\\0&-2&0&-8&-4&-6\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right]$$

$$\underset{r_2\div(-2)}{\overset{r_1\div 3}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right],$$

所以　$A^{-1}=\begin{bmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{bmatrix}$.

注　**给出一个具体的** $n(n>2)$ **阶方阵,求逆矩阵一般采用初等变换的方法**. $(A\vdots E)\sim(E\vdots C)$,**则** $A^{-1}=C$.**即使** A **不可逆,对** $(A\vdots E)$ **施行初等行变换化成行最简形** $\left[\begin{array}{cc:c}E_r&0&\\0&0&C\end{array}\right]$,**通过** $R(A)<n$ **也可看出** A **的逆不存在**.

例 16 **已知** 3 **阶矩阵** A **的逆矩阵为** $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，**求其伴随矩阵** A^* **的逆矩阵**.

解 由 $AA^*=|A|E$，**知** $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$，**又** $|AA^{-1}|=|E|=1$，$|A||A^{-1}|=1$，**故** $\frac{1}{|A|}=|A^{-1}|$，**所以** $(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A$，**其中** $A=(A^{-1})^{-1}$，**用初等行变换求**：

$$(A^{-1}\vdots E)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3\div 2\\ r_1-r_3}]{r_1-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]=(E\vdots A),$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

又 $|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2$，

所以 $$(A^*)^{-1}=2\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

注　讨论 A，A^*，A^{-1} 的问题，常常要从结论 $AA^* = A^*A = |A|E$ 出发，本题推出 $(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A$ 后就转化求 $A = (A^{-1})^{-1}$.

例 17　设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$，$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，$b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$，求线性方程组 $Ax = b_1$，$Ax = b_2$ 的解.

解　设 $Ax_1 = b_1$，$Ax_2 = b_2$，记 $X = (x_1, x_2)$，$B = (b_1, b_2)$，则两个线性方程组可以合成一个矩阵方程 $AX = B$，为求 X，把 $(A \vdots B)$ 化成行最简形：

$$(A \vdots B) = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_3+r_1}{\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2-2r_1}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_3+3r_2}{\overset{\substack{r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

可见 $A \overset{r}{\sim} E$，因此 $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$，即线性方程组 $Ax = b_1$ 和 $Ax = b_2$ 的解依次为 $x_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ 和 $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

注　这是两个非齐次线性方程组，但系数矩阵是同一个矩阵且可逆，此时可看成一个矩阵方程 $AX = B$. 对矩阵方程 $AX = B$ 当 A 可逆时，用类似初等变换求逆矩阵的方法解很方便，它省去了 $A^{-1}B$ 的乘

法过程.前一章解矩阵方程的一些题目也可用这种方法,如解矩阵方程 $AX = A + X$(其中 A 是已知方阵) $X = (A - E)^{-1}A$ 只需 $(A - E \vdots A) \overset{r}{\sim} (E \vdots B)$,则 $B = (A - E)^{-1}A$ 为所求 X.解矩阵方程 $XA = B$ 时,可取转置 $(XA)^T = B^T$ 即 $A^TX^T = B^T$ 按上述方法求出 X^T,则 $X = (X^T)^T$.

10.综合题

例 18 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,$B$ 为 3 阶非零矩阵,且 $AB = 0$,求 t.

分析 A 是 3 阶方阵,若 A 不可逆,则 $|A| = 0$,由此可解出 t.若 A 可逆,由条件可推出矛盾,从而有解法一.另外由 $AB = 0$ 可看作 B 中列向量是 $Ax = 0$ 的非零解,从而由 $|A| = 0$,可解出 t,此即解法二.

解法一 若 $|A| \neq 0$,则 A 可逆.由 $AB = 0$ 有 $B = A^{-1}0 = 0$,这与 B 为非零矩阵矛盾.所以 $|A| = 0$.

由于
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 + c_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & t & t+3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(t+3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7(t+3),$$
由 $|A| = 0$ 得 $t = -3$.

解法二 考虑齐次方程组 $Ax = 0$,由于 $AB = 0$,故 B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解.又因 B 是 3 阶非零矩阵,有非零列向量,所以 $Ax = 0$ 有非零解.从而 A 的行列式必为 0,即
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
解得 $t = -3$.

注 方阵与方阵的行列式是密切相关的,在很多问题中要经常想到,如有关矩阵秩的问题、讨论线性方程组解的问题等.

例 19　设 A 是 n 阶可逆矩阵，A 的第 i 行与第 j 行交换后得到矩阵 B. 证明 B 是可逆矩阵，并求 AB^{-1}.

分析　题目给的条件是矩阵的初等变换，问题是关于矩阵的证明，所以需要用定理 4 将条件转化为矩阵形式.

证明　由矩阵的初等行变换与初等矩阵的关系有 $B = E(i,j)A$，其中 $E(i,j)$ 为单位矩阵对调第 i 行与第 j 行得到的初等矩阵，且 $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$，所以作为两个可逆矩阵的乘积仍为可逆矩阵，且有

$$AB^{-1} = A(E(i,j)A)^{-1} = AA^{-1}E(i,j)^{-1} = E(i,j).$$

注 1　本题证 B 可逆也可这样证：由于 A 可逆，故 $|A| \neq 0$，从而 $|B| = -|A| \neq 0$，所以 B 可逆.

注 2　证明某些抽象的矩阵问题，如果涉及初等变换可用对应的初等矩阵来讨论.

例 20　试证线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ x_4 - x_1 = a_4, \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{4} a_i = 0$，并在有解的条件下，求通解.

解　用初等行变换将增广矩阵化为行阶梯形矩阵

$$B = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4 + r_1 + r_2 + r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{4} a_i \end{array}\right]$$

$R(B)=R(A)=3$ 的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{4} a_i=0$. 故该方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{4} a_i=0$. 此时,

$$B \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_1+r_2}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & a_1+a_2+a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_4+a_1+a_2+a_3, \\ x_2=x_4+a_2+a_3, \\ x_3=x_4+a_3. \end{cases}$$

取 $x_4=c$ 得通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c+a_1+a_2+a_3 \\ c+a_2+a_3 \\ c+a_3 \\ c \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ a_2+a_3 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c\in R).$$

注 系数矩阵的秩与增广矩阵的秩是否相等是判断非齐次线性方程组有解无解的最基本的方法.

例 21 设 A,B 为同阶可逆矩阵,则(　　).

(A) $AB=BA$

(B) 存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=B$

(C) 存在可逆矩阵 C,使 $C^{T}AC=B$

(D) 存在可逆矩阵 P 和 Q,使 $PAQ=B$

解 选 (D). 因 A,B 为同阶可逆矩阵,所以都等价于同阶单位矩

阵 E,从而 $A\sim B$.由定理 5 的推论知(D)正确.存在可逆矩阵 P 和 Q 使 $PAQ=B$,其中 P,Q 没有什么必然的联系,不一定有可逆或转置的关系.故(B)、(C)不正确.A,B 都可逆但不一定互逆,所以(A)不正确.

四、自测题

1.填空题

(1) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$,且 $R(A)=3$,则 $k=$________.

(2) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,则 $PAQ=$________.

(3) 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解,则 $a=$________.

2.选择题

(1) 设 A 为 3 阶方阵,$R(A)=1$,则 $R(A^*)=$________.

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(2) 设 $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,且 $P^mAP^n=A$,则正整数 m,n 为________.

(A) $m=5,n=4$　(B) $m=5,n=5$　(C) $m=4,n=5$　(D) $m=4,n=4$

(3) 设齐次方程组通解为 $x = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，则该方程组的系数矩阵 A 为________.

(A) $[-2,1,1]$ (B) $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\4 & -2 & -2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

3. 解下列各题

(1) 设 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$，求 A.

(2) 设 $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$AX = 2X + A$，求 X.

(3) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & -1\\-1 & 2 & 0\end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\3 & 4 & -1\end{bmatrix}$，求矩阵 X，使 $XA = B$.

(4) 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & -1 & 1 & b\\2 & 3 & a & 4\\3 & 5 & 1 & 7\end{bmatrix}$ 的秩.

(5) 已知 3 阶方阵 $B \neq 0$，且 B 的每个列向量都是下面方程组的解

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0,\\2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0\\3x_1 + x_2 - x_3 = 0,\end{cases}$$

，求 λ 的值.

(6) 求下列方程组通解（用向量表示）：

①$\begin{cases}2x_1-4x_2-3x_3-4x_4=0, \\ -x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+x_3+5x_4=0;\end{cases}$

②$\begin{cases}2x_1-3x_2+6x_3-5x_4=3, \\ 4x_1-5x_2-4x_3+x_4=7, \\ 3x_1-4x_2+x_3-2x_4=5;\end{cases}$

③$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3+x_4=2, \\ 4x_1+2x_2-2x_3-4x_4=3, \\ -2x_1-x_2+3x_3+4x_4=0.\end{cases}$

(7) a,b 取何值时,线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

有唯一解?无解?有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解.

(8) 设$\begin{cases}(3-\lambda)x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-(1+\lambda)x_3=0,\end{cases}$

问 λ 为何值时,此齐次方程组有非零解?并在有非零解时求其通解.

五、自测题答案与提示

1. (1) -3; (2) $\begin{bmatrix}a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$; (3) $a=-1$.

2. (1) (D);

(2) (D) 提示:P 的偶次方为 E_3;

(3) (A) 提示:齐次方程组的通解中含两个任意常数,知方程组有两个自由未知量,未知量的个数 $n=3$,故系数矩阵的秩为 1.

3. (1) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 7 & 8 & 2\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$,提示:先由 $(XA)^T = B^T$ 即 $A^T X^T = B^T$,求 X^T.

(4) 当 $a \neq 1, b \neq -2$ 时,$R(A) = 4$;当 $a \neq 1, b = -2$ 时或 $a = 1, b \neq -2$ 时,$R(A) = 3$;当 $a = 1, b = -2$ 时,$R(A) = 2$.

(5) $\lambda = 1$,提示:由齐次方程组有非零解知系数行列式为 0 可得 $\lambda = 1$.

(6) ① $x = c_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ $(c_1, c_2 \in R)$;

② $x = c_1\begin{bmatrix}21\\16\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-14\\-11\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $(c_1, c_2 \in R)$;

③无解.

(7) $a \neq 1$ 时,有唯一解;$a = 1$ 且 $b \neq -1$ 时,无解;$a = 1$ 且 $b = -1$ 时,有无穷多解,通解 $x = c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $(c_1, c_2 \in R)$.

(8) $\lambda = -1$ 时,$x = c\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$ $(c \in R)$;

$\lambda = 2$ 时,$x = c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $(c_1, c_2 \in R)$.

第四章　向量组的线性相关性

一、基本要求概述及主要术语

1. 基本要求概述

①理解 n 维向量的定义,熟练掌握 n 维向量的线性运算及性质.

②理解向量组的概念及向量组与矩阵的对应关系.

③理解向量组的线性组合的定义,一个向量能由一个向量组线性表示的概念并熟悉这一概念与线性方程组的解之间的关系.

④理解向量组 B 能由向量组 A 线性表示,两向量组等价的概念,熟悉向量组 B 能由向量组 A 线性表示的矩阵表示式,并且知道它与矩阵方程的联系.

⑤深刻理解向量组的线性相关、线性无关的定义,并且熟悉这两个概念与齐次线性方程组的联系.

⑥理解向量组的最大无关组及其等价定义,掌握向量组的秩的概念.知道向量组的秩与矩阵的秩的联系,熟练掌握用矩阵的初等变换求向量组的秩及其最大无关组的方法.

⑦熟练掌握向量组的线性相关性的判别定理,学会运用向量组线性相关性的结论解决问题.

⑧了解向量空间、向量空间的基和维数、子空间、向量生成的空间等概念.

⑨理解齐次线性方程组的解空间,齐次线性方程组的基础解系的概念,知道齐次线性方程组的系数矩阵的秩与全体解向量组的秩之间的关系.

⑩熟练掌握用矩阵的初等行变换求齐次线性方程组的基础解系及通解的方法,熟练掌握用矩阵的初等行变换求非齐次线性方程组的全

部解(通解)及特解的方法.

⑪熟练掌握非齐次线性方程组及其对应的齐次线性方程组解的结构理论并能解决相关问题.

2.主要术语

向量,向量组,线性组合与线性表示,线性相关与线性无关,最大无关组,向量组的秩,两向量组等价,向量空间,维数,子空间,解空间,齐次(非齐次)线性方程组,基础解系,通解,解的结构.

二、基本内容剖析

1.向量及向量的运算

(1)向量的基本概念

n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 n 维向量,其中 a_i 称为这个向量的第 i 个分量,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=[a_1,a_2,\cdots,a_n],$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 分别称为列向量与行向量,也就是列矩阵与行矩阵,并规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算.我们约定:所讨论的向量如未指明是列向量还是行向量,就当作是列向量.

向量相等:如果 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 的对应分量都相等,即 $a_i=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,称两个向量相等.

零向量:所有分量均为零的向量称为零向量,记为

$$0=[0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}.$$

负向量:n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 的各分量的相反数组成的 n 维向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{\alpha}$,即 $-\boldsymbol{\alpha}=[-a_1,-a_2,\cdots,-a_n]^{\mathrm{T}}$.

(2)向量线性运算的运算规律

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是 n 维向量,λ,μ 是实数,则

① $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

② $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$；

③ $\boldsymbol{\alpha}+0=\boldsymbol{\alpha}$；

④ $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=0$；

⑤ $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

⑥ $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$；

⑦ $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$；

⑧ $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$.

2. 向量组的线性相关性

(1) 向量组

若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组.

一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 有 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

它们组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为矩阵 A 的列向量组.

一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 有 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

它们组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵 A 的行向量组.

反之,由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.例如:m 个 n 维列向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成一个 $n\times m$ 矩阵 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$;$m$ 个 n 维行向量组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 构成一个 $m\times n$ 矩阵

$$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

通常我们把 m 个方程 n 个未知量的线性方程组写成矩阵形式 $Ax=b$，从而方程组可以与它的增广矩阵 $B=[A,b]$ 一一对应，这种对应若看成一个方程对应一个行向量，则方程组即与增广矩阵 B 的行向量组对应，若把方程组写成向量形式

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b,$$

则可见方程组与 B 的列向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 之间也有一一对应关系.

(2) 线性组合与线性表示

给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，向量

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合.

给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和向量 b，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$b=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m,$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合，称向量 b 能由向量组 A 线性表示.

由线性组合与线性表示的概念得知：

① 零向量是任何一向量组的线性组合.

② 向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中的任何一向量 $a_j\ (1\leqslant j\leqslant m)$ 都是此向量组的线性组合.

③ 任何一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 都是 n 维基本单位向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,0,0,\cdots,0]^T,\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0,1,0,\cdots,0]^T,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,0,1,\cdots,0]^T,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=[0,0,0,\cdots,1]^T$$

的线性组合，且 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

④ 向量 b 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示，当且仅当下列(i)～(iii)之一成立.

(i) 非齐次线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=b$（或记作 $Ax=b$）有解；

(ii) $R[a_1,a_2,\cdots,a_m]=R[a_1,a_2,\cdots,a_m,b]$,即方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等;

(iii) 向量组 A 与向量组 $B=(A \vdots b)$ 等价.

(3) 向量组 B 能由向量组 A 线性表示与两向量组等价

设有两个向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 及 $B:b_1,b_2,\cdots,b_s$,若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示,则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示.若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示,则称这两个向量组等价.

由以上定义可知:

① 向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_s$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示,当且仅当下列 (i) ~ (ii) 之一成立.

(i) 矩阵方程 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)X=(b_1,b_2,\cdots,b_s)$ 有解;

(ii) $R(A)=R(A \vdots B)$.

② 向量组等价具有性质:反身性,对称性,传递性.

③ 矩阵 A 经初等行变换变成矩阵 B,则 A 的行向量组与 B 的行向量组等价;矩阵 A 经初等列变换变成矩阵 B,则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

注　两矩阵等价与两个向量组等价的区别与联系:

两个同型矩阵 $A_{m\times n}$、$B_{m\times n}$ 等价是指矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B,所以两个不同类型的矩阵谈不上等价关系;两向量组 A 与 B 等价是指它们能够相互线性表示,因此,它们各自所含向量的维数相同,个数可能是不一样的.例如向量组

$A:\boldsymbol{\alpha}=[1,0,0]^T$ 与三维向量组 $B:\{\boldsymbol{\beta}=k[1,0,0]^T \mid k\in R\}$

是等价的,但前者只含一个向量,而后者含有无穷多个向量.

两矩阵的等价与两向量组的等价,两者的联系如下:

①若矩阵 A 经初等行变换变成矩阵 B,则 A 的行向量组与 B 的行向量组等价;若矩阵 A 经初等列变换变成矩阵 B,则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价;若矩阵 A 经初等行变换又经初等列变换变成矩阵 B,即 A 与 B 等价,但 A 的行向量组或列向量组与 B 的行向量组或列

向量组都不等价.

②反过来,假设两个列向量组等价,如果它们所含向量个数不相同,则它们对应的两个矩阵不同型,显然两矩阵不等价 如果它们所含向量个数相同(例如都有 n 个),那么它们对应的两个 $m\times n$ 矩阵(这里 m 为向量的维数)列等价,但不一定行等价.例如:

向量组 A:$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$与向量组 B:$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$等价,它们对应的矩阵

$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$与 $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}$列等价但非行等价.类似地,若两个含向量个数相同的行向量组等价,则它们对应的两矩阵行等价,但不一定列等价.

(4) 线性相关与线性无关

给定向量组 A:$a_1,a_2,\cdots,a_m$,如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0,$$

则称向量组 A 是线性相关的,否则称它线性无关.

由以上定义不难得出:

① 单个非零向量线性无关.

② 含有零向量的向量组一定线性相关.

③ 基本单位向量组一定线性无关.

④ 两个向量线性相关的充要条件是对应元素成比例.

⑤ 向量组 A:$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关有如下结论:

(i) $m\geqslant 2$ 时,向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示;

(ii) 齐次线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=0$(或记作 $Ax=0$)有非零解;

(iii) $R(A)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)<m$.

(5) 向量组线性相关性的判别定理

对于向量组线性相关性的判别定理除了以上所叙述的(i),(ii),

(iii)条结论,还有以下几个常用的重要结论:

① 若向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关,则向量组 $B:a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1}$ 也线性相关,反之,若向量组 B 线性无关,则向量组 A 也线性无关.

② 设有两向量组

$$A:a_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj}]^T,j=1,2,\cdots,m;$$

$$B:b_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj},a_{r+1,j}]^T,j=1,2,\cdots,m.$$

即 b_j 是由 a_j 加上一个分量而得,若向量组 A 线性无关,则向量组 B 线性无关.反之,若向量组 B 线性相关,则向量组 A 也线性相关.

由此定理可得其推论:

r 维向量组的每个向量添上 $n-r$ 个分量,成为 n 维向量组,若 r 维向量组线性无关,则 n 维向量组亦线性无关,反之,若 n 维向量组线性相关,则 r 维向量组亦线性相关.

③ m 个 n 维向量组成的向量组,当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关.

④ 设向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性无关,而向量组 $B:a_1,a_2,\cdots,a_m,b$ 线性相关,则向量 b 必能由向量组 A 线性表示,且表示式是唯一的.

⑤ 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示,则 $R(B)\leqslant R(A)$.

注　线性相关与线性表示这两个概念的区别与联系:

向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关是指齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解,向量 b 能由向量组 A 线性表示是指非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解,齐次方程 $Ax=0$ 是否有非零解与非齐次方程 $Ax=b$ 是否有解,它们是两个不同的问题,由此可知线性相关与线性表示这两个概念之间的区别.对于向量组线性相关性还有一个等价定义:向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m\ (m>2)$ 线性相关的充要条件是向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示,这个等价定义也就把线性相关与线性表示这两个概念联系起来了.对于向量组 A,如果 A 中至少有一个向量能由其余向量线性表示,也就是 A 的 m 个向量至少满足一个线性

关系式,这就是这 m 个向量线性相关的涵义.

由此等价定义,我们不难得出如下结论:

向量组 A 线性无关的充要条件是 A 中任意一个向量均不能由其余向量线性表示.简单形象地描述,即“谁也不能表示谁”,这种“独立”性正是向量组 A 线性无关所包含的内在意义.

(6) 向量组的最大无关组与向量组的秩

设有向量组 A,如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 满足:

①向量组 A_0:$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关;

②向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量(如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话)都线性相关,那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关组(简称最大无关组);最大无关组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩,记作 R_A.

只含零向量的向量组没有最大无关组,规定它的秩为零.

等价定义:在上述定义中将条件②改为

③ 向量组 A 中任一个向量都能由向量组 A_0 线性表示.

由以上定义我们可以得出:

① 含有非零向量的向量组一定存在最大无关组.

② 向量组的最大无关组一般不唯一.

③ 若 A:$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性无关,则其最大无关组就是其本身.

④ 任一向量组与它的最大无关组等价.

⑤ 同一向量组的任意两个最大无关组等价.

⑥ 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同.

⑦ 向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的任意两个最大无关组所含向量的个数相同.

⑧ 只含有限个向量的向量组 A:$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 构成矩阵 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_m]$,那么矩阵 A 的最高阶非零子式所在的列是向量组 A 的一个最大无关组,矩阵 A 的秩等于向量组 A 的秩,即

$$R(A)=R(a_1,a_1,\cdots,a_m)=R_A.$$

⑨ 矩阵的秩等于它的行向量组的秩,也等于它列向量组的秩.

所以,我们通常把求向量组的秩转化为求矩阵的秩,即求向量组的秩可转化为矩阵的行(列)向量的秩,从而可用初等变换求其秩,并能从中得出向量组的一个最大无关组.

注　向量组的最大无关组的重要意义.

设 A_0 是 n 维向量组 A 的一个最大无关组,那么 A_0 与生俱来的良好性质是:

①$A_0 \subset A$,且所含向量个数 $r = R_{A_0} \leqslant n$;

②A_0 组与 A 组等价,从而有 $R_A = R_{A_0} = r$;

③在所有与向量组等价的向量组中,A_0 组含的向量个数最少.

事实上,设 B 是任一与 A 组等价的向量组,由等价的传递性,B 组与 A_0 组等价,从而有 $R_B = R_{A_0} = r$,于是 B 组向量个数 $\geqslant r$.

这样,用 A_0 组来"代表"A 组是最佳不过的了,特别,当 A 组为无限向量组时,就能用有限向量组来"代表";凡是对有限向量组成立的结论,用最大无关组作过渡,即可推广到无限向量组的情形中去,这正是最大无关组的意义所在.

⑺ 向量空间

向量空间 设 V 是 n 维向量的集合,如果集合 V 非空,且集合 V 对于加法及数乘两种运算封闭,那么就称集合 V 为向量空间.

子空间 设有向量空间 V_1 及 V_2,若 $V_1 \subset V_2$,就称 V_1 是 V_2 的子空间.

基与维数 设 V 为向量空间,如果 r 个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_r \in V$,且满足

①$a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关,

②V 中任一向量都可由 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性表示,

那么,向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 就称为向量空间 V 的一个基,r 称为向量空间 V 的维数,并称 V 为 r 维向量空间.

如果向量空间 V 没有基,那么 V 的维数为 0,0 维向量空间只含一个零向量 0.

若把向量空间 V 看作向量组,可知 V 的基就是向量组的最大线性

无关组,V的维数就是向量组的秩.

向量组 A 所生成的向量空间 给定 n 维向量组 A:$a_1, a_2, \cdots, a_m$,集合

$$L(a_1, a_1, \cdots, a_m) = \{x = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m \mid k_1, k_2, \cdots, k_m \in R\}$$

是一个向量空间,称为向量组 A 所生成的向量空间.

向量组 A 与向量组 B 等价⇔A 组与 B 组所生成的向量空间相等.

(8) 线性方程组的解的结构

$$\text{线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{I}$$

称为非齐次线性方程组.

$$\text{矩阵 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

分别称为非齐次线性方程组(I)的系数矩阵和增广矩阵.

令 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,方程组(1)简记为 $Ax = b$.

线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$ (II)

称为非齐次线性方程组(I)的齐次线性方程组或方程组(I)的导出组，简记为 $Ax = 0$.

线性方程组解的判定：

① 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有解的条件：

(i) 当 $R(A) = r = n$ 时，(II)有唯一零解.

(ii) 当 $R(A) = r < n$ 时，(II)有无穷多解，且有 $n - r$ 个线性无关的解向量.

② 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的条件：

(i) 当 $R(A) < R(B)$ 时，(I)无解.

(ii) 当 $R(A) = R(B) = n$ 时，(I)有唯一解.

(iii) 当 $R(A) = R(B) < n$ 时，(I)有无穷多解.

线性方程组解的性质：

① 如果 ξ_1, ξ_2 为(II)的解，则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是(II)的解.

② 如果 ξ_1 为(II)的解，则 $x = k\xi_1$ 也是(II)的解.

③ 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是(I)的一个解，ξ 是(II)的一个解，则 $\xi + \boldsymbol{\eta}$ 是(I)的解.

④ 如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是(I)的两个解，则 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 是(II)的解.

注　设 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 s 个解，$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为实数，满足 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1$，$x = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是它的解.

线性方程组解的结构：

① 齐次线性方程组解的结构.

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组线性无关解，如果方程组 $Ax = 0$ 的任一解都可表示为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 的线性组合，则称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

设 A 为 $m\times n$ 矩阵,若矩阵 A 的秩 $R(A)=r<n$,则齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在基础解系,且基础解系包含 $n-r$ 个线性无关的解向量,此时方程组的通解可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次方程组的一个基础解系.

基础解系的求法 设系数矩阵 A 的秩为 r,并不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关,于是对 A 施以初等行变换,可得 A 的最简形矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\sim\cdots$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=B.$$

与 B 对应,即有方程组

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n, \\ x_2=-b_{21}x_{r+1}-\cdots-b_{2,n-r}x_n, \\ \cdots\quad\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n, \end{cases} \tag{III}$$

因为 A 与 B 的行向量组等价,故方程组(Ⅰ)与(Ⅲ)同解,其中 x_{r+1},x_{r+2},$\cdots$,x_n 为自由未知量,分别取

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{共 } n-r \text{ 个}),$$

得 $Ax=0$ 的 $n-r$ 个线性无关的解：

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{bmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

即为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

② 非齐次线性方程组解的结构.

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解可表示为方程组 $Ax=b$ 的一个特解与其导出组 $Ax=0$ 的通解之和.因此,当非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解时,它的通解可表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \boldsymbol{\eta}^*$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $Ax=b$ 的一个特解,$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

三、典型例题分析

1.线性相(无)关概念的理解

例 1　举例说明下列命题是错误的.

(1) 若向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是线性相关的,则 a_1 可由 $a_2,\cdots,a_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$$

成立,则 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 亦线性相关.

⑶ 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 亦线性相关,则有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m a_m = 0, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$$

同时成立.

解　⑴ 设 $a_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 = [1, 0, 0, \cdots, 0]$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_m = 0$,满足 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关,但 a_1 不能由 $a_2, a_3, \cdots, a_m$ 线性表示.

⑵ 解法一　因 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 不全为零,由题设有

$$\lambda_1 (a_1 + b_1) + \lambda_2 (a_2 + b_2) + \cdots + \lambda_m (a_m + b_m) = 0,$$

所以 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_m + b_m$ 线性相关,但不能由此推得 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 分别线性相关,如取两组 n 维向量:

$$\begin{aligned}
&a_1 = [1, 0, \cdots, 0], && b_1 = [-1, 0, \cdots, 0],\\
&a_2 = [0, 1, \cdots, 0], && b_2 = [0, -1, \cdots, 0],\\
&\cdots\quad \cdots && \cdots\quad \cdots\\
&a_m = [0, 0, \cdots, 1], && b_m = [0, 0, \cdots, -1].
\end{aligned}$$

这时,对于任意一组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,总有

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_m b_m\\
&= \lambda_1 (a_1 + b_1) + \lambda_2 (a_2 + b_2) + \cdots + \lambda_m (a_m + b_m)\\
&= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 + \cdots + \lambda_m 0\\
&= 0,
\end{aligned}$$

但是,向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 亦线性无关.

解法二　由题设能够判断向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 亦线性相关,但其部分向量组不一定线性相关,因而 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 都不一定分别线性相关,可用解法一的两组向量说明之.

⑶ 取 $a_1 = [1, 0]$, $a_2 = [-1, 0]$,易见 a_1, a_2 线性相关.

$b_1 = [0, 3]$, $b_2 = [0, 6]$,易见 b_1, b_2 线性相关.

若使 $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2\\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

与题设矛盾.

注1　对于(3)若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关,$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 亦线性相关,也不能确定 $a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m$ 线性相关,例如取:$a_1=[1,0,1],a_2=[2,0,2]$ 与 $b_1=[0,3,0],b_2=[0,1,0]$,则有 a_1,a_2 线性相关,b_1,b_2 亦线性相关.而,$a_1+b_1=[1,3,1],a_2+b_2=[2,1,2]$ 是线性无关的.

注2　由(2)与(3)可知,一般说来,有 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关和 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 线性相关推不出 $a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m$ 必线性相关,反之由 $a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m$ 线性相关,也推不出 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 分别线性相关.

例2　n 维向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ $(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 中去掉任意一个向量所剩 $s-1$ 个向量都线性无关

(B) 向量 a_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 去掉第 n 个分量为 a'_i 后,向量组 $a'_1,a'_2,\cdots,a'_s$ 线性无关

(C) 存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\neq 0$

(D) 对任意不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\neq 0$

分析　如果向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关,那么它的部分组必然线性无关,但任一个部分组线性无关,不能保证向量组一定线性无关,例如设 $a_1=[1,0,0,0],a_2=[0,1,0,0],a_3=[0,0,1,0],a_4=[1,1,1,0]$,其中任意三个向量都线性无关,但 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关,可见(A)是必要条件,并不充分.

如果向量组 $a'_1,a'_2,\cdots,a'_s$ 线性无关,那么它的延伸组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 必线性无关,但 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关时,其缩短组 $a'_1,a'_2,\cdots,a'_s$ 的线性相关性并不能确定,例如设 $a_1=[1,2,3],a_2=[2,4,5]$,其坐标不成比例,它们是线性无关的,其缩短组 $a'_1=[1,2],a'_2=[2,4]$ 线性相

关,可见(B)是充分条件并不必要.

注 (A)是向量个数的增减,(B)是向量分量的增减,这两种情形不要混淆.

一个向量组不是线性相关就是线性无关,二者必居其一且仅居其一,联系线性相关的定义,我们知道:向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关意味着只要 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零,必有 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\neq 0$,或者说 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0$ 仅在 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才成立.

因此(D)正确,(C)不正确,其实,只要向量组中有非零向量,就不一定有不全为零的数使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\neq 0$.线性无关则是要求任意一组不全为零的数都有 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\neq 0$.

例 3 下列命题中正确的是( ).

(A) 如果向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性相关,那么它的任一部分组也线性相关

(B) 如果向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关,那么它的任一部分组也线性无关

(C) 如果向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关,那么 $a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_{s-1}+a_s,a_s+a_1$ 也线性无关

(D) 如果向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性相关,那么与其等价的向量组也线性相关

解 (A)不正确,例如:$a_1=[1,0],a_2=[0,1],a_3=[1,1]$ 线性相关,但它的任一个部分组均线性无关.

(B)正确,因为线性无关的向量组去掉一些向量一定是线性无关的,线性相关的向量组再添加向量一定线性相关.

(C)不正确,例如 s 为偶数时,易见 $(a_1+a_2)-(a_2+a_3)+(a_3+a_4)-(a_4+a_1)=0$,详细讨论见后面的例题.

(D)不正确,向量组等价意味着他们可以互相线性表示,他们有相同的秩,而向量组中向量的个数、线性相关性可以不一样,例如一个向量组与它的极大线性无关组总是等价的.

2．向量组的线性相关性的讨论

给定一向量组 A：$a_1,a_2,\cdots,a_m$，讨论向量组的线性相关性可以采用以下几种方法．

①定义法：一般步骤为假设有 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$，要使该式成立，根据已知条件判断，若 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 至少有一个不为零，则 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关；若当且仅当 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全为零上式才成立，则 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性无关．

②m 个 m 维列向量 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关的充要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 组成的矩阵的行列式 $|a_1,a_2,\cdots,a_m|=0$；$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性无关的充要条件是行列式 $|a_1,a_2,\cdots,a_m|\neq 0$．

③一般地，把向量组的向量作为矩阵的行（或列），得矩阵 $A_{m\times n}$，通过初等变换求出矩阵的秩 $R(A_{m\times n})=r$，若 $r=m(<m)$，则 A 的行向量组线性无关（相关）；若 $r=n(<n)$，则 A 的列向量组线性无关（相关）．

例4　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关，试讨论向量组 $a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_{n-1}+a_n,a_n+a_1$ 的线性相关性．

分析　采用定义法，研究向量组的线性相关性，可归结为齐次线性方程组是否有零解问题．

解　设有 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使

$$k_1(a_1+a_2)+k_2(a_2+a_3)+\cdots+k_{n-1}(a_{n-1}+a_n)+k_n(a_n+a_1)=0,$$

即

$$(k_n+k_1)a_1+(k_1+k_2)a_2+\cdots+(k_{n-2}+k_{n-1})a_{n-1}+(k_{n-1}+k_n)a_n=0,$$

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} k_n+k_1=0, \\ k_1+k_2=0, \\ \quad\cdots \\ k_{n-2}+k_{n-1}=0, \\ k_{n-1}+k_n=0, \end{cases}$$

由于此方程组的系数行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\end{vmatrix},$$

将行列式 D_n 按第 1 行展开为 $D_n=1+(-1)^{n+1}$,当 n 为奇数时,$D_n=2\neq0$,该方程组只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,所以向量组 $a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_{n-1}+a_n,a_n+a_1$ 线性无关;当 n 为偶数时,$D_n=0$,该方程组有非零解,所以向量组 $a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_{n-1}+a_n,a_n+a_1$ 线性相关.

例 5 设 $a_1=[1,1,1]$,$a_2=[1,2,3]$,$a_3=[1,3,t]$,试讨论:

(1) 当 t 为何值时,向量组 a_1,a_2,a_3 线性相关;

(2) 当 t 为何值时,向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关;

(3) 当 a_1,a_2,a_3 线性相关时,将 a_3 表示为 a_1 和 a_2 的线性组合.

解法一 用定义判别.

设有数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0,$$

即有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\k_1+2k_2+3k_3=0,\\k_1+3k_2+tk_3=0,\end{cases}$$

此齐次方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5.$$

(1) 当 $t-5=0$,即 $t=5$ 时,方程组有非零解,所以 a_1,a_2,a_3 线性相关;

(2) 当 $t-5\neq0$,即 $t\neq5$ 时,方程组仅有零解,所以 a_1,a_2,a_3 线性

无关；

(3) 当 $t=5$ 时，设 $a_3=x_1a_1+x_2a_2$，可解得 $x_1=-1$，$x_2=2$，于是

$a_3=-a_1+2a_2$.

解法二　由于 a_1,a_2,a_3 是三个 3 维向量，故由直接计算行列式：
$|a_1,a_2,a_3|=t-5$，可知：

(1) 当 $t=5$ 时，a_1,a_2,a_3 线性相关；

(2) 当 $t\neq5$ 时，a_1,a_2,a_3 线性无关；

(3) 同方法一可得 $a_3=-a_1+2a_2$.

解法三　由于矩阵

$$A=(a_1,a_2,a_3)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{bmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&t-1\end{bmatrix}\overset{r_3-2r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{bmatrix},$$

所以

(1) 当 $t=5$ 时，$R(A)=2$，a_1,a_2,a_3 线性相关；

(2) 当 $t\neq5$ 时，$R(A)=3$，a_1,a_2,a_3 线性无关；

(3) 同方法一得，$a_3=-a_1+2a_2$.

例 6　已知向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关，则下列说法中不正确的是（　）.

(A) $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_1$ 线性相关

(B) $a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_4,a_4-a_1$ 线性相关

(C) $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4-a_1$ 线性无关

(D) $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3-a_4,a_4-a_1$ 线性无关

解　令 $\boldsymbol{\beta}_1=a_1+a_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=a_2+a_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=a_3+a_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=a_4+a_1$，则有 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4$，所以 (A) 中向量组是线性相关的，同理可得，(B)，(D) 的向量组是线性相关的.

设有 k_1,k_2,k_3,k_4 使得

$$k_1(a_1+a_2)+k_2(a_2+a_3)+k_3(a_3+a_4)+k_4(a_4-a_1)=0,$$

即 $$(k_1-k_4)a_1+(k_1+k_2)a_2+(k_2+k_3)a_3+(k_3+k_4)a_4=0.$$

因为 a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关,得

$$\begin{cases} k_1-k_4=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0, \\ k_3+k_4=0, \end{cases}$$

此方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$,所以方程组只有零解,$k_1=k_2=k_3=k_4=0$,故(C)的向量组线性无关.

例7　设 $t_1,t_2,\cdots,t_l$ 是互不相同的数,讨论向量组 $a_i=[1,t_i,t_i^2,\cdots,t_i^{n-1}]$　$(i=1,2,\cdots,l)$ 的线性相关性.

解　当 $l>n$ 时,l 个 n 维向量必线性相关;

当 $l\leqslant n$ 时,将 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 按行排列成矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_l & t_l^2 & \cdots & t_l^{n-1} \end{bmatrix},$$

由 A 的前 l 列构成的 l 阶子式恰是范德蒙德行列式,由于 $t_1,t_2,\cdots,t_l$ 互不相同,所以该子式不为零,故 $R(A)=l$,由于 $R(a_1,a_2,\cdots,a_l)=$ 矩阵的行秩 $=R(A)=l$,所以 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 线性无关.

例8　讨论向量组 $a_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix},a_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的线性相关性.

解法一　令 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$,

$$k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{cases}k_1-k_3=0,\\-2k_1+2k_2=0,\\3k_1-5k_2+2k_3=0.\end{cases}$$

因为方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{vmatrix}=0$，

所以方程组有非零解，故 a_1,a_2,a_3 线性相关.

解法二　令 $A=[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{bmatrix}$，对 A 施行初等变换得

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $R(A)=2<3$，故 a_1,a_2,a_3 线性相关.

3. 向量组线性相(无)关的证明

例 9　试证 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 线性无关的充分必要条件是 a_1,a_2,a_3 线性无关.

证法一　(用定义证明)

充分性. 令 $k_1(a_1+a_2)+k_2(a_2+a_3)+k_3(a_3+a_1)=0$，

整理得　$(k_1+k_3)a_1+(k_1+k_2)a_2+(k_2+k_3)a_3=0$，

由于 a_1,a_2,a_3 线性无关，所以只有

$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0.\end{cases}$$

又因为方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$,所以方程组只有零解,故 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$ 线性无关.

必要性.设有数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$,即

$$\frac{1}{2}[(k_1+k_2-k_3)(a_1+a_2)+(k_2+k_3-k_1)(a_2+a_3)+(k_3+k_1-k_2)(a_3+a_1)]=0,$$

由 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$ 线性无关,必有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(k_1+k_2-k_3)=0, \\ \frac{1}{2}(k_2+k_3-k_1)=0, \\ \frac{1}{2}(k_3+k_1-k_2)=0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} k_1+k_2-k_3=0, \\ -k_1+k_2+k_3=0, \\ k_1-k_2+k_3=0. \end{cases}$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

方程组只有零解:$k_1=k_2=k_3=0$,故 a_1, a_2, a_3 线性无关.

注　可用逆推法导出 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$ 的系数表达式.

证法二　设(Ⅰ):a_1, a_2, a_3,(Ⅱ):$a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$,若令 $\boldsymbol{\beta}_1=a_1+a_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=a_2+a_3$,$\boldsymbol{\beta}_3=a_3+a_1$,则(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 显然可由(Ⅰ)线性表示,从关系式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=a_1+a_2, \\ \boldsymbol{\beta}_2=a_2+a_3, \\ \boldsymbol{\beta}_3=a_3+a_1, \end{cases}$$

可以解出

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3), \\ a_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3), \\ a_3=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3), \end{cases} \qquad (*)$$

由(*)说明(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示,所以(Ⅰ)与(Ⅱ)等价,故 R(Ⅰ) = R(Ⅱ).

若 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$ 线性无关,则 R(Ⅱ) = 3,有 R(Ⅰ) = 3,得 a_1, a_2, a_3 必线性无关;若 a_1, a_2, a_3 线性无关,则 R(Ⅰ) = 3,有 R(Ⅱ) = 3,故 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$ 也线性无关.

证法三　令 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\ a_2+a_3\\ a_3+a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$.

令 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$,故 $B=PA$,因为 $|P|\neq 0$,所以 P 可逆,故 $R(B)=R(PA)=R(A)$,若 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$ 线性无关,则 $R(B)=3$,所以 $R(A)=3$,得 a_1, a_2, a_3 也线性无关;若 a_1, a_2, a_3 线性无关,则 $R(A)=3, R(B)=3$,故 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1$ 也线性无关.

注1　在证法三中,由 $B=PA$,当 P 可逆时,说明 A 经初等行变换可变成 B,B 也可经初等行变换变成 A,即 A 与 B 的行向量组可以相互线性表示,从而推出 A 与 B 的行向量组的线性相关性不变.

注2　本例具有典型意义,它讨论在给定向量组 A:a_1, a_2, a_3 线性无关的条件下,由它们的若干个线性组合所构成的向量组 B:a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1 的线性相关性,因 A 组向量没有给出它们的分量,故而不能具体计算出 B 组向量,也就无从通过初等行变换等方法求 B 组的秩,进而判定它是否线性相关.对于这一类未给出分量的向量组的线性相关性,本例给出的三种方法具有一般意义,其中证法二与证法三更多地使用矩阵语言,是两种最基本而奏效的方法.

例10　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组 n 维向量,已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 能由它们线性表示,证明 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关.

分析　证明 n 个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关,只需证明 $R(a_1, a_2,$

$\cdots,a_n)=n$.

证明 由题设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 能由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示,则有 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=a_{i1}a_1+a_{i2}a_2+\cdots+a_{in}a_n\ (i=1,2,\cdots,n)$,即 $E=AB$,其中 E 为 n 阶单位矩阵,n 个行向量依次为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,$A=[a_{ij}]_{n\times n}$,$B$ 为 n 阶矩阵,其 n 个行向量依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

证法一 由于 A,B 均为 n 阶矩阵及 $AB=E$,可知 B 可逆,所以 $R(B)=n$,等于所含行向量个数,故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关.

证法二 由 $AB=E$ 知,$n=R(E)=R(AB)\leqslant\min\{R(A),R(B)\}$,故 $R(B)\geqslant n$,又 B 为 n 阶方阵,所以 $R(B)=n$,故行向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关.

证法三 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的秩为 r,因 a_i 为 n 维向量,故 $r\leqslant n$,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示,又 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,可得 $n\leqslant r$,从而 $n=r$,故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关.

证法四 因任一 n 维向量都可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示,故 a_i 也可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示,再由题设知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 等价,因 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关.

例 11 已知 A 是 n 阶可逆矩阵,$a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是 n 维线性无关的列向量,证明 $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性无关.

证明 若 $k_1Aa_1+k_2Aa_2+\cdots+k_sAa_s=0$, (1)

由于 A 可逆,用 A^{-1}左乘上式,得 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0$, (2)

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关,(2)式成立的充要条件是 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,因此(1)式成立必须 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,故 $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性无关.

注 在线性无关的证明中,最重要的方法是定义法,设 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0$,然后对此式恒等变形,设法证明必有 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,这样也就证明了 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关.

例 12 设向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为 $[b_1,b_2,\cdots,b_r]=[a_1,a_2,\cdots,a_s]K$,其中 K 为 $s\times r$ 矩阵,且

A 线性无关,证明 B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$.

证明一　记 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_s]$,$B=[b_1,b_2,\cdots,b_r]$,则有 $B=AK$.

先证必要性.设向量组 B 线性无关,可得 $R(B)=r$,又由于 $B=AK$,可得 $R(K)\geqslant R(B)$,但 K 含 r 列,有 $R(K)\leqslant r$,于是 $r=R(B)\leqslant R(K)\leqslant r$,即 $R(K)=r$.

再证充分性.设 $R(K)=r$,要证 B 组线性无关,由于 $Bx=0\Leftrightarrow AKx=0$ (因 $R(A)=s$),所以 $Kx=0$　(因 $R(K)=r$),故 $x=0$,因此向量组 B 线性无关.

证明二　必要性证明同证法一,下证充分性.

不妨设所给两向量组中的向量都是 n 维的,因矩阵 A 的列向量组线性无关,故 $s\leqslant n$.

因为 $R(A^TA)=R(A)=s$,于是 A^TA 为 s 阶可逆矩阵,由 $B=AK$ 式得

$$A^TB=A^TAK\Rightarrow(A^TA)^{-1}A^TB=K\Rightarrow R(K)\leqslant R(B),$$

另一方向的不等式显然可由 $B=AK$ 式得到:$R(B)\leqslant R(K)$.

综上所述,$R(B)=R(K)$,即两矩阵的秩相等,于是 $R(B)=R(K)=r$.

注 1　证明二中实际上已得到更一般的结论:

设 $A_{n\times s}K_{s\times r}=B_{n\times r}$,若 $R(A)=s$,则 $R(K)=R(B)$.

注 2　本题中所给出的两种方法都有一定难度,但本题的结论其意义是重大的.在题设的条件下,一个向量组线性相关与否,这样一个抽象的、不易捉摸的甚至会觉得无从考虑的问题转化为一个矩阵秩的计算问题了.如果进一步把该矩阵化为行阶梯形,则问题也随之转化为矩阵的台阶个数的计数问题,这些问题都是具体的,捉摸得到的.

例 13　假设在向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中,$a_1\neq0$,且每个 a_i $(i=1,2,3,\cdots,m)$ 都不能由 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 线性表出,试证该向量组线性无关.

分析　因为线性相关与线性无关是两个互相对立的概念,在证明

线性相关性的命题中,反证法是常用的有效方法.我们可以假设 a_1,a_2,…,a_m 线性相关,设法找到一个 a_j,它可表示成 $a_1,a_2,\cdots,a_{j-1}$的线性组合,这与题设矛盾,从而证明了该向量组线性无关.

证明(反证法) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关,必存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$,将这些系数从后面向前面排列,得到 $k_m,k_{m-1},\cdots,k_2,k_1$,自左至右,设第一个不为零的系数为 k_j $(1<j\leqslant m)$,即 $k_m=k_{m-1}=\cdots=k_{j+1}=0$ $(k_j\neq 0)$,且 $j\neq 1$,如果 $j=1$,则 $k_1a_1=0$,由 $k_1\neq 0$,得到 $a_1=0$,与题设 $a_1\neq 0$ 矛盾,因 $k_j\neq 0$ $(j>1)$,上式可改写为

$$a_j=-(k_1/k_j)a_1-(k_2/k_j)a_2-\cdots-(k_{j-1}/k_j)a_{j-1},$$

这表明 a_j 可由前面的向量 $a_1,a_2,\cdots,a_{j-1}$线性表出.

4. 一个向量是否可由一个向量组线性表示

给定一向量 a 及向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$,判断 a 是否可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,可用下列两种方法进行讨论.

(1) 解方程组法

$$a=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm T},\boldsymbol{\beta}_i=[\beta_{1i},\beta_{2i},\cdots,\beta_{ni}]^{\mathrm T}\ (i=1,2,\cdots,s),$$

令
$$a=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s,$$

将这个向量等式可改写成分量方程组,得关于 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 的线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}k_1+b_{12}k_2+\cdots+b_{1s}k_s=a_1, \\ b_{21}k_1+b_{22}k_2+\cdots+b_{2s}k_s=a_2, \\ \quad\cdots\quad\cdots \\ b_{n1}k_1+b_{n2}k_2+\cdots+b_{ns}k_s=a_n. \end{cases}$$

① 如果上面方程组无解,则 a 不能由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出.

② 如果有解,则 a 能由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出,且每个解都是线性表示(组合)的系数,如果只有唯一解,则线性表出的方式只有一种,如果无穷多解,线性表示的方式就有无穷多种.

例 14 已知 $\boldsymbol{\beta}=[2,3,-4,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2,2]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1,4]$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,7,10]$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,1,3,5]$.

问：$\boldsymbol{\beta}$ 能否表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

解　设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$，则有方程组

$$\begin{cases} k_1+0k_2+3k_3+k_4=2, \\ -k_1+3k_2+0k_3+k_4=3, \\ 2k_1+k_2+7k_3+3k_4=-4, \\ 2k_1+4k_2+10k_3+5k_4=1. \end{cases}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 能否表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，归结为上述方程组是否有解，解得

$$k_1=31-3k_3,\ k_2=21-k_3,\ k_4=-29,$$

其中 k_3 可任意取值，取 $k_3=0$，得 $\boldsymbol{\beta}=31\boldsymbol{\alpha}_1+21\boldsymbol{\alpha}_2-29\boldsymbol{\alpha}_4$.

这说明 $\boldsymbol{\beta}$ 可以表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，且有无穷多种线性表示式.

(2) 初等行变换法

对于矩阵 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$ 经有限次初等行变换变为矩阵 $B=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]$，则 A 的任意 k 个列向量与 B 中对应的 k 个列向量有相同的相关性（初等行变换不改变列向量之间的线性关系），即

① 当且仅当 B 中 k 个列向量 $\boldsymbol{\beta}_{i1},\boldsymbol{\beta}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{ik}$ 线性无关时，A 中对应的 k 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ik}$ 线性无关.

② 当且仅当 B 中的某个列向量 $\boldsymbol{\beta}_s$ 可表示为某些列向量 $\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的线性组合 $\boldsymbol{\beta}_s=t_i\boldsymbol{\beta}_i+t_j\boldsymbol{\beta}_j+\cdots+t_r\boldsymbol{\beta}_r$ 时，A 中对应列向量 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可表示为列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合 $\boldsymbol{\alpha}_s=t_i\boldsymbol{\alpha}_i+t_j\boldsymbol{\alpha}_j+\cdots+t_r\boldsymbol{\alpha}_r$.

上述命题对行向量有相应结果，请读者补充.

例 15　试将 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,1,1]^T$ 表成 $\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,1,1]^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=[1,1,-1,-1]^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=[1,-1,1,-1]^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=[1,-1,-1,1]^T$ 的线性组合.

解

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4 \vdots \boldsymbol{\alpha})=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$
\sim\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{array}\right]
$$

$$
\sim\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\end{array}\right]
$$

$$
\sim\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&1\\0&0&0&-4&1\\0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\end{array}\right]
$$

$$
\sim\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&0&0&-1&\frac{1}{4}\\0&0&-1&0&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{array}\right]
$$

$$
\sim\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{array}\right].
$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{5}{4}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_4$.

例 16　**设有三维列向量** $\boldsymbol{\alpha}_1=[1+\lambda,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1+\lambda,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1+\lambda]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[0,\lambda,\lambda^2]^{\mathrm{T}}$,**问** λ **取何值时,**

⑴ $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一.

⑵ $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

⑶ $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解法一　用初等行变换解之：

$$A=\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \lambda(1+\lambda^2)\end{bmatrix}=A_1.$$

⑴ 当 $\lambda\neq 0$，且 $\lambda\neq -3$ 时，

$$A_1\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \lambda(2\lambda^2+7\lambda+4)/(\lambda+3)\\ 0 & 1 & 0 & 2(1-\lambda-\lambda^2)/(\lambda+3)\\ 0 & 0 & 1 & -(1+\lambda^2)/(\lambda+3)\end{bmatrix},$$

故当 $\lambda\neq 0$，且 $\lambda\neq -3$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，且

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\lambda(2\lambda^2+7\lambda+4)}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2(1-\lambda-\lambda^2)}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1+\lambda^2}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_3;$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表达式唯一.

⑵ 当 $\lambda=0$ 时，$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，显然有 $\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{\alpha}_1$ 或 $\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{\alpha}_2$ 或 $\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{\alpha}_3$，表达式不唯一.

⑶ 当 $\lambda=-3$ 时，$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 0 & -30\end{bmatrix}$.

因为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\neq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解法二　用解方程组的方法解之，设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix},\text{即 } Ax=b.$$

因为$|A|=\lambda^2(\lambda+3)$,故

(1) 当$\lambda\neq 0$,且$\lambda\neq -3$时,方程组有唯一解,$\boldsymbol{\beta}$可唯一地表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合;

(2) 当$\lambda=0$时,易看出$R(A)=R(\bar{A})=1<3=n$,故原方程组有无穷多组解,即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出,但表达式不唯一;

(3) 当$\lambda=-3$时,$R(A)=2<R(\bar{A})=3$(其中$\bar{A}=[A\vdots b]$),原方程组无解,故$\boldsymbol{\beta}$不能写成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合.

5. 有关向量组线性表示命题的证明

例 17　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关,试证:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出.

(1) 证法一　$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,而$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关,则$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出,从而可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

证法二　如$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出,因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,从而$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,与题设矛盾,故$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

(2) 证法一　由(1)的证法一知$\boldsymbol{\alpha}_4$可表为$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合,设$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,知上式线性表出唯一,从而$k_1=0$,所以$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出.

证法二　设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=0$,下证$k_1=0$.若$k_1\neq 0$,则$\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{k_4}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_4$,又由(1)的证法一知$\boldsymbol{\alpha}_4$可表成$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合,于是由上式知$\boldsymbol{\alpha}_1$可表成$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合,,从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,与题设矛盾,故$k_1=0$,即$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性

表出.

例 18　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维向量，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表示，证明：$\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

证明　因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，设

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

又因为 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表示，则 $k_r\neq 0$，所以

$$\boldsymbol{\alpha}_r=\frac{1}{k_r}(\boldsymbol{\beta}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

6. 求向量组的最大(极大)线性无关组

求一向量组的最(极)大线性无关组，一般有以下几种方法.

(1) 逐个录选法

① 在向量组中任取一个非零向量作为 a_{i1}；

② 取一个与 a_{i1} 的对应分量不成比例的作为 a_{i2}；

③ 取一个不能由 a_{i1},a_{i2} 表出的作为 a_{i3}，连续作下去便可求出向量组的最(极)大线性无关组.

这种方法主要根据最大无关组的定义，对向量组自左至右逐个选择，适用于向量组中向量个数较少的情形.

(2) 初等变换法

将向量组看成某个矩阵的行(列)向量组，然后用初等行(列)变换化成阶梯形.这种方法的依据是以下两个定理.

定理 1　设矩阵 $A_{m\times n}$ 经过有限次初等行变换变成矩阵 $B_{m\times n}$，则 A 的 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列与 B 的 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列的线性关系相同.

定理 2　设矩阵 $A_{m\times n}$ 经过有限次初等列变换变成矩阵 $C_{m\times n}$，则 A 的 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行与 C 的 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行的线性关系相同.

将向量组看成某个矩阵 A 的列(行)向量组，然后利用初等行(列)变换将 A 化为阶梯形矩阵 B，则向量组的秩等于阶梯形矩阵 B 的非零行(列)数，在 B 中划出一个阶数最高的非零子式 D_r，那么与 D_r 中这 r

列(行)相对应的 r 个向量 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir}$ 就是原向量组的一个最大无关组.

例 19　设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2,4]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1,2]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,7,14]^T,\boldsymbol{\alpha}_4=[1,-2,2,0]^T,\boldsymbol{\alpha}_5=[2,1,5,10]^T$,则该向量组的极大无关组为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$　　　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$

解　将所给向量组作为列向量组构成矩阵 A,施行初等行变换,易得到

$$A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5]=B,$$

在 B 中显然 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$;$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$;$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$ 分别为一个极大无关组,且 $\boldsymbol{\beta}_5=2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$,由此得到原向量组的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$,且 $\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,故选(B).

注 1　用矩阵的初等变换法求向量组的最(极)大无关组时,对以列向量组按列构成的矩阵作初等行变换,对以行向量组按行构成的矩阵作初等列变换.

注 2　本题可以采用录选法.

取 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关,添加 $\boldsymbol{\alpha}_2$,由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 显然不成比例,易知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,再添加 $\boldsymbol{\alpha}_3$,由于 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,去掉 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 改添加 $\boldsymbol{\alpha}_4$,由 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=0$,只有唯一零解,$k_1=k_2=k_4=0$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,再添加 $\boldsymbol{\alpha}_5$,由于 $\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$

$+0\alpha_4$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是该向量组的一个最大无关组.

例 20　设向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}7\\0\\14\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}5\\1\\6\\2\end{bmatrix},\alpha_5=\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\1\end{bmatrix}.$$

(1) 求向量组的秩;

(2) 求向量组的一个最大无关组,并把其余向量分别用最大无关组线性表示.

分析　根据矩阵的初等变换不改变矩阵的秩,利用行初等变换将以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为列向量的矩阵化为行阶梯形,然后在每一个阶梯中选取一个列向量即构成此向量组的一个最大无关组,同时求得向量组的秩,当阶梯形化为最简形时,还可直接得到其余向量用此最大无关组的线性表示式.

解　以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为列构成一矩阵 A,然后对其施行初等行变换(且只能作初等行变换):

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&-21&-7&-14&-7\\0&0&-4&-4&0\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&3&1&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=[\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3,\alpha'_4,\alpha'_5]=B,$$

显然 $R(B)=3$,所以 $R(A)=3$.

(2) 在每一个阶梯中选一列向量(注意 α'_2,α'_5 属于同一阶梯)分别为 $\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3$(不唯一,比如 $\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_4$;$\alpha'_1,\alpha'_5,\alpha'_3$;$\alpha'_1,\alpha'_5,\alpha'_4$ 均

可),从而对应的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个最大无关组.进一步把 B 化为最简形($\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3$ 对应的列成为单位列向量),对 B 作初等行变换.

$$A\sim B\sim\begin{bmatrix}1&7&0&3&2\\0&3&0&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5],$$

所以 $$\boldsymbol{\beta}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2+0\boldsymbol{\beta}_3.$$

故 $$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3.$$

注 1 由例 19、例 20 可知最大(极大)无关组不唯一.

注 2 求向量组的秩可以通过求其所构成的矩阵的秩来完成.

例 21 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,3]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,-3,5,1]^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,2,-1,p+2]^T,\boldsymbol{\alpha}_4=[-2,6,10,p]^T.$$

(1) p 为何值时,该向量组线性无关?并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=[4,1,6,10]^T$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示;

(2) p 为何值时,该向量组线性相关?并在此时求出它的秩和一个最大无关组.

解 令矩阵 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}]$,用初等行变换将其化为行阶梯形矩阵:

$$A\sim\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{array}\right]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}]=B.$$

(1) 当 $p-2\neq0$ 时,即 $p\neq2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

这时,对矩阵 B 进行初等行变换将其化为行最简形矩阵

$$B \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (4-3p)/(2-p) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (1-p)/(p-2) \end{array}\right].$$

即得　$\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + [(3p-4)/(p-2)]\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + [(1-p)/(p-2)]\boldsymbol{\alpha}_4$,

或设 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4$,也可解得上述结果.

(2) 当 $p=2$ 时,对 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]$ 进行初等变换,将其化为行最简形矩阵,得

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为其一个最大无关组.

所以其秩为 3 且 $\boldsymbol{\alpha}_4 = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

7. 有关向量组或矩阵秩的计算与证明

例 22　已知向量组 (I):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;(II):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$;(III):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$,如果各向量组的秩分别为 $R(\mathrm{I}) = R(\mathrm{II}) = 3$,$R(\mathrm{III}) = 4$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

分析　证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4,只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

证　因为 $R(\mathrm{I}) = R(\mathrm{II}) = 3$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,故存在 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3. \tag{1}$$

另外,设有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4(\boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4) = 0$,　(2)

将 (1) 式代入 (2) 式化简得

$$(k_1 - \lambda_1 k_4)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 - \lambda_2 k_4)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_3 - \lambda_3 k_4)\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_5 = 0,$$

由 $R(\mathrm{III}) = 4$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,所以

$$\begin{cases} k_1 \qquad - \lambda_1 k_4 = 0, \\ \quad k_2 \quad - \lambda_2 k_4 = 0, \\ \qquad k_3 - \lambda_3 k_4 = 0, \\ \qquad\qquad k_4 = 0. \end{cases}$$

解方程组得 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，即该向量组的的秩为 4.

例 23　设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1，向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2，向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_3，试证：$\max\{r_1, r_2\} \leqslant r_3 \leqslant r_1 + r_2$.

证明　显然 $r_3 \geqslant \max\{r_1, r_2\}$，这是因为向量组 C 中包含了向量组 A 与向量组 B 中的所有向量，故其中线性无关的向量个数不少于 A 或 B 中线性无关的向量个数；取 A 的最大线性无关组，不妨设 $a_1, a_2, \cdots, a_{r_1}$，取 B 的最大线性无关组，不妨设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r_2}$，则向量组 C_1：$a_1, a_2, \cdots, a_{r_1}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 与向量组 C 等价. 如果 C_1 中的 $r_1 + r_2$ 个向量线性相关，则 $R(C) = r_3 \leqslant r_1 + r_2$；如果 C_1 中的 $r_1 + r_2$ 个向量线性无关，则 $R(C) = R(C_1) = r_3 = r_1 + r_2$. 总之，任何情况下均有

$$\max\{r_1, r_2\} \leqslant r_3 \leqslant r_1 + r_2.$$

例 24　设 A 与 B 均为 n 阶方阵，若 $AB = 0$，则

$$R(A) + R(B) \leqslant n.$$

证明　设矩阵 B 的列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$，则由矩阵的乘法有

$$AB = [A\boldsymbol{\beta}_1, A\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, A\boldsymbol{\beta}_n] = [0, 0, \cdots, 0],$$

即 $A\boldsymbol{\beta}_j = 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$，可见 B 的列向量是 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解. 设 $R(A) = r$，则此方程组的基础解系所含解向量的个数为 $n - r$，于是 $R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \leqslant n - r$，即 $R(B) \leqslant n - r = n - R(A)$.

故 $R(A) + R(B) \leqslant n$.

注 1　此结论可推广为：若 $A_{m \times n} B_{n \times s} = 0$，则 $R(A) + R(B) \leqslant n$.

注 2　$AB = 0 \Leftrightarrow B$ 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解.

例 25　设 A 是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明：

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 1, & R(A)=n-1, \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$$

证明　(1) 当 $R(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$，由 $AA^*=|A|E$ 知，$|A||A^*|=|A|^n\neq 0$，于是 A 和 A^* 均是可逆阵，故 $R(A^*)=n$.

(2) 当 $R(A)=n-1$ 时，由矩阵秩的定义可知，A 中存在 $n-1$ 阶子式不等于零，而 A^* 是由 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 组成，于是有 $R(A^*)\geqslant 1$. 而 $R(A)=n-1$，$|A|=0$，$AA^*=|A|E$，由例 24 知 $R(A)+R(A^*)\leqslant n$，又有 $R(A^*)\leqslant 1$，故 $R(A^*)=1$.

(3) 当 $R(A)<n-1$ 时，即 A 中有非零子式的最高阶数 $<n-1$，所以 A 的全部 $n-1$ 阶子式都为零，即 A^* 的全部元素为零，$A^*=0$，故 $R(A^*)=0$.

例 26　证明：$R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$.

证明　设 A,B 是两个 $m\times n$ 矩阵，且设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\beta}_i$ 分别为 A 与 B 的列向量 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $A+B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n)$，于是 $A+B$ 的每个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的线性组合，则有：

$$\begin{aligned} R(A+B) &\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) \\ &\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) \end{aligned}$$

所以 $R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$.

例 27　设向量组 (Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 $r\ (r>1)$，证明向量组 (Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 的秩也为 r.

分析　两组向量组秩相等的充分条件是两组向量等价.

证明　显然，向量组 (Ⅱ) 可由向量组 (Ⅰ) 线性表示，下面证明向量组 (Ⅰ) 也可由向量组 (Ⅱ) 线性表示.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的表示式相加，得

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m=(m-1)(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m),$$

故有 $$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{(m-1)}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m),$$

由此可得 $\boldsymbol{\alpha}_i=\frac{1}{(m-1)}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$.

这表明向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,从而(Ⅰ)与(Ⅱ)是等价的向量组,其秩相同,即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩也为 r.

8. 向量空间

例 28 判断下列向量集合是否构成向量空间:

(1) $V_1=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$;

(2) $V_2=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$;

(3) $V_3=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$;

(4) $V_4=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=0,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$.

分析 判断向量集合 V 是否构成向量空间,只要说明 V 集合非空,并验证 V 对于向量的加法和数乘运算都封闭即可.

解 (1) 显然 V_1 非空,且 $\forall\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in V_1$, $\forall\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\in V_1$ $(a_i,b_i\in R,i=1,2,\cdots,n$,且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$, $b_1+b_2+\cdots+b_n=0)$,有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]$,这里 $a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\in R$,且满足

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=0,$$

所以 $$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1.$$

$\forall\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in V_1,\lambda\in R$,有

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=[\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n]\in V_1,$$

即 V_1 非空,且满足对加法和数乘运算封闭,故 V_1 是向量空间.

(2) 对于 V_2,设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in V_2$, $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\in V_2$,即 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in R$,且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, b_1

$+ b_2 + \cdots + b_n = 1$，这时，

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 + 1 = 2,$$

即 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_2$，亦即 V_2 对加法不封闭，故 V_2 不是向量空间.

(3) 取 $\boldsymbol{\alpha} = [1, 0, \cdots, 0] \in V_3$（因为 $1^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 1$），但

$$2\boldsymbol{\alpha} = [2, 0, \cdots, 0] \notin V_3\ （因为\ 2^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 4），$$

即 V_3 对数乘运算不封闭，故 V_3 不是向量空间.

(4) 取 $\boldsymbol{\alpha} = [1, 0, \cdots, 0] \in V_4$，$\boldsymbol{\beta} = [0, 1, \cdots, 1] \in V_4$，则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = [1, 1, \cdots, 1] \notin V_4,$$

故 V_4 不是向量空间.

例 29　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4 = 0$，

证明：$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = L(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$.

分析　如果 $\boldsymbol{\beta} \in L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，即 $\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，要求 $\boldsymbol{\beta} \in L(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，即要求 $\boldsymbol{\beta} = \mu_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \mu_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \mu_4\boldsymbol{\alpha}_4$，反之亦然，可见要证 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = L(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，实际是要证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是等价向量组.

证明　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4 = 0$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 3\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，又 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是等价向量组，所以它们生成的空间相同，所以

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = L(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4).$$

例 30　证明由 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [0, 1, 1]$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = [1, 0, 1]$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = [1, 1, 0]$ 所生成的向量空间 V 是 R^3.

证明　由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间为

$$V = \{x \mid x = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R^3\},$$

显然，V 是 R^3 的子空间；另外任取三维向量 $x \in R^3$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，可作为 R^3 的一个基，故 x 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即

$$x = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

可见 $x \in V$,由 x 的任意性可知,V 就是 R^3 空间.

注 此题要证 $V = R^3$,应按证明集合相等的两个步骤进行.

例 31 由 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,1,0,0]$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,0,1,1]$ 所生成的向量空间记作 V_1,由 $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,-1,3,3]$,$\boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,-1,-1]$ 所生成的向量空间记作 V_2,试证 $V_1 = V_2$.

证法一 由已知条件知

$$V_1 = \{x = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 = [\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2], \lambda_1, \lambda_2 \in R\},$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \{x = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 \\ &= [2x_1, -x_1+x_2, 3x_1-x_2, 3x_1-x_2], x_1, x_2 \in R\}, \end{aligned}$$

$$\forall x = [\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2] \in V_1.$$

令 $$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 2x_1, \\ \lambda_1 = -x_1+x_2, \\ \lambda_2 = 3x_1-x_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 2x_1, \\ \lambda_1 = -x_1+x_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \\ x_2 = \dfrac{3\lambda_1+\lambda_2}{2}. \end{cases}$$

由此得出 $x \in V_2 \Rightarrow V_1 \subset V_2$;

反之,$\forall x = [2x_1, -x_1+x_2, 3x_1-x_2, 3x_1-x_2] \in V_2$,

当取 $$\begin{cases} \lambda_1 = -x_1+x_2, \\ \lambda_2 = 3x_1-x_2, \end{cases} \Rightarrow x \in V_1 \Rightarrow V_2 \subset V_1,$$

所以 $V_1 = V_2$.

证法二 令

$$C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然 $R(C) = 2$,又 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是向量组 C 的最大线性无关组,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价,而等价的向量组生成的向量空间相等,所以 $V_1=V_2$.

证法三　$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&1\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&3&3\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}2&0&2&2\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

因为 A 与 B 有相同的标准形,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价,所以

$V_1=V_2$.

证法四　令 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}$,

$$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&3&3\\0&1&-1&-1\end{bmatrix},$$

设 $B=XA$,取 A,B 的前两列得

$$\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix}=X\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},$$

所以　$X=\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}$,

并且　$XA=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&3&3\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}=B$,

由此可见,存在 2 阶方阵 X,使 $B=XA$,即 B 能由 A 线性表示,又因 $|X|=-2\neq0$,所以 X 可逆,得 $A=X^{-1}B$,由此证得 A 能由 B 线性表示,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价,所以 $V_1=V_2$.

9. 线性方程组解的结构

例 32　设线性方程组 $Ax=b$ 有 m 个方程,n 个未知量,且 $R(A)=r$,则此方程组(　　).

(A) $r=m$ 时,有解　　(B) $r=n$ 时,有唯一解

(C) $m=n$ 时,有唯一解　　(D) $r<n$ 时,有无穷多解

分析　(A) 当 $R(A)=r=m$ 时,则 $R(B)=m$,方程组有解,在有解的前提下,当 $m=n$ 时,方程组有唯一解,当 $m<n$ 时,方程组有无穷多解.

(B) 当 $R(A)=r=n$ 时,有 $m\geqslant n$ 时,若 $R(B)=n$ 时,则方程组有唯一解;$R(B)>n$ 时,方程组无解.

(C) 当 $m\geqslant n$ 时,若 $R(A)=R(B)=n$ 时,则方程组有唯一解;当 $R(A)=R(B)<n$ 时,则方程组有无穷多解.

(D) 当 $R(A)=r<n$ 时,若 $R(B)=R(A)$,则方程组有无穷多解;当 $R(B)>R(A)$ 时,则方程组无解.

由以上分析知 (A) 是正确的. (B)、(C)、(D) 不正确的根本原因是均没有说明系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩有何关系.

线性方程组理论是线性代数的重要内容之一,线性方程组的向量形式 $Ax=b$,其中

$$A=(a_{ij})_{m\times n},x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T,$$

解线性方程组常用以下三种方法.

(1) 克拉默法则.

用克拉默法则求解线性方程组有两个前提:①方程个数等于未知量个数;②系数行列式不等于零.实际上,克拉默法则相当于使用逆矩阵方法求解线性方程组,即 $x=A^{-1}b$,它建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系,但在具体求解时,需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式,工作量一般较大,因此,克拉默法则主要是用于理论上.

(2) 消元法.

对于具体地解线性方程组,消元法是一个最有效和最基本的方法.但有时需直接从原方程组来看它是否有解,及解的结构如何,这样消元法就不能用了,于是引入矩阵与向量的语言,把方程组写成矩阵形式,通过研究系数矩阵与增广矩阵来解决上述两个问题,利用矩阵的语言,我们还有如下解线性方程组的方法.

(3) 利用等价标准形.

对于 $Ax=b$，其中 $B=[A,b]$ 当 $R(A)=R(B)=r<n$ 时，则对 B 作初等行变换化为矩阵 B_1，使得矩阵 B_1 的后 $m-r$ 行全是 0，且 B_1 中有 r 个互不相同的单位列向量，称 B_1 为 B 的行等价标准形．利用行等价标准形可以解线性方程组，以 B 为增广矩阵的线性方程组与以 B 的行等价标准形 B_1 为增广矩阵的线性方程组是同解的，将 B_1 中单位列向量对应的未知量视为非自由未知量，而其余的对应的未知量视为自由未知量，最后一列视为常数项，即得线性方程组的解．

例 33　用消元法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=2, \\ x_1+7x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+14x_2+5x_3=3. \end{cases}$$

分析　用消元法解线性方程组分三步进行．第一步对方程组的增广矩阵作初等行变换化为行最简形；第二步，由行最简形矩阵判断方程组解的情况：①若 $R(A)\neq R(B)$，则方程组无解，②若 $R(A)=R(B)=r=n$，则方程组有唯一解，③ 若 $R(A)=R(B)=r<n$，则方程组有无穷多解；第三步，由行最简形矩阵写出方程组的解．

解　$$B=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 14 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{4}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-8r_2]{r_1-3r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -5 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+5r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

因为 $r=3=n$，故有唯一解．

由最后的行最简形矩阵知 $x_1=\frac{31}{4}$，$x_2=-\frac{5}{4}$，$x_3=1$.

例 34 解线性方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=1,\\3x_1+2x_2-2x_3=2,\\5x_1\qquad\ \ -4x_3=4.\end{cases}$

解 求其增广矩阵 B 行最简形矩阵：

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c}2&3&-1&1\\1&2&-1&2\\5&0&-4&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-\frac{4}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&0&0\end{array}\right]=B_1,$$

方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2，小于未知量个数 3，故此方程组有无穷多解，将 B_1 的列单位向量对应的未知量 x_1，x_2 视为非自由未知量，其余的未知量 x_3 视为自由未知量，可以直接写出线性方程组的解 $\begin{cases}x_1=\frac{4}{5}x_3+\frac{4}{5},\\x_2=-\frac{1}{5}x_3-\frac{1}{5},\end{cases}$ 即

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{1}{5}\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\end{bmatrix}\ (k\in R).$$

例 35 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0,\\x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0,\\2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0.\end{cases}$ 的基础解系并用基础解系表示方程组的一般解.

分析 求齐次线性方程组的解，首先利用初等行变换把方程组的系数矩阵 A 的行最简形矩阵求出来，其次根据行最简形矩阵判断方程组有无解. (1) 当 $R(A)=r=n$ 时，方程组仅有零解；(2) 当 $R(A)=r$

$< n$ 时,方程组存在基础解系且有无穷多解,最后由行等价标准形写出基础解系和一般解.

解　对系数矩阵 A 施行行初等变换

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3 - 4r_1 \\ r_4 - 2r_1}}{\overset{r_2 - r_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由于 $R(A) = 3 < 5$,由此得 $\begin{cases} x_1 = -x_3 + \frac{7}{6}x_5, \\ x_2 = x_3 + \frac{5}{6}x_5, \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5. \end{cases}$

令 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,则对应有 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$,

得基础解系：$\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}\frac{7}{6}\\\frac{5}{6}\\0\\\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}$.

故原方程组的通解为

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$$
$$=k_1[-1,1,1,0,0]^T+k_2\left[\frac{7}{6},\frac{5}{6},0,\frac{1}{3},1\right]^T\quad(k_1,k_2\in R).$$

例 36　求非齐次线性方程组$\begin{cases}3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2,\\6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3,\\9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4\end{cases}$的通解.

分析　求非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 的通解的方法：

⑴ 对方程组的增广矩阵 B 施初等行变换化为行最简形矩阵；

⑵ 利用 $R(A)$，$R(B)$ 判断方程组有无解：

① 当 $R(A)<R(B)$ 时，方程组无解，

② 当 $R(A)=R(B)=n$ 时，方程组有唯一解，

③ 当 $R(A)=R(B)=r<n$ 时，方程组有无穷多解.

⑶ 当方程组有唯一解，可从 B 的行最简形矩阵求出方程组的解；当方程组有无穷多解时，先求 $Ax=0$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 和 $Ax=b$ 的一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*$，则非齐次线性方程组的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*,$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

解　⑴ 化方程组的增广矩阵为行最简形矩阵：

$$B=\left[\begin{array}{cccc:c}3&-2&5&4&2\\6&-4&4&3&3\\9&-6&3&2&4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cccc:c}3 & -2 & 5 & 4 & 2\\0 & 0 & -6 & -5 & -1\\0 & 0 & -12 & -10 & -2\end{array}\right]$$

$$\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{7}{18}\\0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

因为 $R(A)=R(B)=2<n=4$,原方程组有无穷多解.

由此得 $\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{18}x_4+\frac{7}{18},\\x_3=\qquad -\frac{5}{6}x_4+\frac{1}{6}.\end{cases}$

令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,得方程组的通解为

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{1}{18}\\0\\-\frac{5}{6}\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{7}{18}\\0\\\frac{1}{6}\\0\end{bmatrix}\quad(k_1,k_2\in R).$$

例 37　λ 取何值时,线性方程组 $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2,\\x_1-2x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有解,并求其通解.

分析　此方程组系数矩阵不含参数,而常数项含参数,只能用初等行变换讨论并求解.

解　对增广矩阵 B 作初等行变换,得

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c}-2 & 1 & 1 & -2\\1 & -2 & 1 & \lambda\\1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}0 & -3 & 3 & -2+2\lambda\\1 & -2 & 1 & \lambda\\0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3}(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{1}{3}(4-\lambda) \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3}(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{array}\right].$$

当 $\lambda=1$ **或** $\lambda=-2$ **时**,$R(A)=R(B)$,**方程组有解**.

$\lambda=1$ **时,由行等价标准形得通解为**

$$x=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad(k\in R).$$

$\lambda=-2$ **时,由行等价标准形得通解为**

$$x=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}\quad(k\in R).$$

例 38　**设三元非齐次方程组** $Ax=b$ **的系数矩阵** A **的秩为** 2,**且方程组的三个解向量** $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ **满足** $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[3,1,-1]^T$,$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=[2,0,-2]^T$,**求** $Ax=b$ **的通解**.

分析　**由** $R(A)=2$ **知** $Ax=0$ **的解空间的维数为** $n-R(A)=3-2=1$,**因此它的任一非零解都可作为基础解系,只要再求出** $Ax=b$ **的一个特解,即可求出非齐次方程组的通解**.

解　**记** $\xi=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)=[1,1,1]^T$,$\boldsymbol{\eta}^*=\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3}{2}=[1,0,-1]^T$,**则容易验证** $\boldsymbol{\eta}^*$ **是** $Ax=b$ **的解向量,由** $R(A)=2$ **知** ξ **是** $Ax=0$ **的基础解系,从而** $Ax=b$ **的通解为**

$$x=\boldsymbol{\eta}+k\xi\quad(k\in R).$$

注　$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}=\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right]^T$ **也是** $Ax=b$ **的解向量,则** $x=$

$\left[\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]^T+k[1,1,1]^T$ 也是 $Ax=b$ 的通解,即通解的形式上可以不同,但它们可以互相线性表出.

例 39　设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 r,线性方程组

$$Ax=b \tag{I}$$

(其中 x,b 为列向量,$b\neq0$)有特解 ξ_0,它的导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$,证明:

(1) 向量 $\boldsymbol{\eta}_0=\xi_0,\boldsymbol{\eta}_1=\xi_0+\xi_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\xi_0+\xi_{n-r}$ 是方程组(I)的线性无关解向量;

(2) $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的一切线性组合 $k_0\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$(其中 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$)是方程组(I)的全部解.

证明　(1) 因为 $A\xi_0=b,A\xi_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n-r)$,

所以　$A\boldsymbol{\eta}_i=A(\xi_0+\xi_i)=A\xi_0+A\xi_i=b\quad(i=1,2,\cdots,n-r)$,

因此 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是方程组(I)的解,令

$$\lambda_0\boldsymbol{\eta}_0+\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=0,$$

则
$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}_0+\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0. \tag{II}$$

因为 $A\boldsymbol{\eta}_0=b\neq0$,由(II)得

$$A[(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}_0+\lambda_1\xi_1\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}]=0,$$

所以
$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})b=0,$$

因为 $b\neq0$,所以 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0$.

于是,$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0$,但 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关,从而 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$,进而有 $\lambda_0=0$,可见 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 由(1)知 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是方程组(I)的解,故当 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$ 时,易知 $k_0\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是方程组(II)的解.因为

$$A(k_0\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r})=(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})b=b,$$

另一方面,令 $\boldsymbol{\eta}$ 为方程组(I)的任一解,则 $\boldsymbol{\eta}-\xi_0$ 为(I)的导出组的解,于是

$$\boldsymbol{\eta} - \xi_0 = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

令 $k_0 = 1 - k_1 - \cdots - k_{n-r}$,即 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 1$.

由于 $\boldsymbol{\eta}_0 = \xi_0, \boldsymbol{\eta}_1 = \xi_0 + \xi_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \xi_0 + \xi_{n-r}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} &= (k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})\xi_0 + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}\\ &= k_0\xi_0 + k_1(\xi_0 + \xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\xi_0 + \xi_{n-r})\\ &= k_0\boldsymbol{\eta}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},\end{aligned}$$

这里 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 1$.

注 1　本题是对非齐次线性方程组 $Ax = b$ 解的结构作进一步分析和讨论,即非齐次线性方程组一定存在着 $n - r + 1$ 个线性无关的解向量.

注 2　对于非齐次线性方程组 $Ax = b$,有时也把题中所给的 $n - r + 1$ 个解称为 $Ax = b$ 的基础解系,所不同的是它的线性组合只有当线性组合系数之和等于 1 时,才是方程组的解.

四、自测题

1.单项选择题

(1) 设向量组 (I) :$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$;(II) :$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s+r}$,则必有(　　).

(A) (I)相关$\Rightarrow$(II)相关　　(B) (I)无关$\Rightarrow$(II)无关

(C) (II)相关$\Rightarrow$(I)相关　　(D) (II)相关$\Rightarrow$(I)无关

(2) 设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$,若存在两组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 和 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得

$$\begin{gathered}(\lambda_1 + k_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\lambda_2 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (\lambda_m + k_m)\boldsymbol{\alpha}_m +\\ (\lambda_1 - k_1)\boldsymbol{\beta}_1 + (\lambda_2 - k_2)\boldsymbol{\beta}_2 \cdots + (\lambda_m - k_m)\boldsymbol{\beta}_m = 0\end{gathered}$$

成立,则下列结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\beta}_m$ 线

性相关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关

(3) 设 A,B 均是 n 阶非零方阵,满足 $R(AB)=0$,则 A,B 的秩必有(　　).

(A) $R(A)=0$ 或 $R(B)=0$　　(B) $R(A)=n$ 或 $R(B)=n$

(C) $R(A)<n$ 且 $R(B)<n$　　(D) $R(A)=n$ 且 $R(B)=0$

(4) 设 A,B 均为 n 阶方阵,且 $R(A)=R(B)$,则

(A) $R(A-B)=0$　　(B) $R(A+B)=2R(A)$

(C) $R(AB)=2R(A)$　　(D) $R(A\vdots B)\leqslant R(A)+R(B)$

(5) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分必要条件是(　　).

(A) A 的列向量线性无关　　(B) A 的列向量线性相关

(C) A 的行向量线性无关　　(D) A 的行向量线性相关

(6) 设 A 为 n 阶方阵,且 $R(A)=n-1$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $Ax=0$ 的两个不同的解,则 $Ax=0$ 的通解为(　　).

(A) $k\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $k\boldsymbol{\alpha}_2$　　(C) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

(7) 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的基础解系,则方程组 $Ax=0$的基础解系还可以表示成(　　).

(A) ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等价向量组

(B) ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等秩向量组

(C) $\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

(D) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

(8) n 阶矩阵 A 可逆的充分条件是(　　).

(A) 任一行向量都是非零向量　　(B) 任一列向量都是非零向量

(C) $Ax=b$ 有解

(D) 当 $x\neq 0$ 时,$Ax\neq 0$ 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

2. 填空题

(1) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[3,5,7,9]$,$\boldsymbol{\beta}=[-1,5,2,0]$,$x$ 满足 $2\boldsymbol{\alpha}+3x=\boldsymbol{\beta}$,则

$x=$________.

⑵ 当 $k=$________时,向量 $\boldsymbol{\beta}=[1,k,5]$ 能由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-3,2]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,1]$ 线性表示.

⑶ 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[2,-1,3,0]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,0,-2]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,-5,3,4]$,$\boldsymbol{\alpha}_4=[-1,3,t,0]$,则 $t=$________时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

⑷ 设 A 是 n 阶方阵,且 $A^2=A$,则 $R(A)+R(E-A)=$________.

⑸ 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,0,-1,2]^{T}$,$\boldsymbol{\beta}=[0,1,0,2]$,矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$,则 $R(A)=$________.

⑹ 若 n 元线性方程组 $Ax=0$ 有解.且其系数矩阵的秩为 r,则当________时,方程组有唯一解;当________时,方程组有无穷多解.

⑺ 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解,若 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 也是 $Ax=b$ 的一个解,则 $c_1+c_2+\cdots+c_s=$________.

⑻ 设 $Ax=b$,其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$,则使方程组有解的所有 b 是________.

3.计算题

⑴ 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,5,3]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,2,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,3,1,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,2,3,2]$,$\boldsymbol{\alpha}_5=[-1,1,-2,-8]$,求该向量组的秩和它的一个最大无关组.

⑵ 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,3]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,3,t]$.

①当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

②当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?并将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

⑶ 已知 3 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}x&y&y\\y&x&y\\y&y&x\end{bmatrix}$,讨论 $R(A)$ 的情况.

(4) 求下列齐次线性方程组的一个基础解系和通解.

① $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0; \end{cases}$

② $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0. \end{cases}$

(5) 下列非齐次线性方程组是否有解？若有解,求出其通解.

① $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$

② $\begin{cases} 6x_1-2x_2-3x_5=3, \\ x_1-x_2+x_4-x_5=1, \\ 2x_1+x_3-x_5=2, \\ x_1-x_2-2x_3-x_4=-2. \end{cases}$

(6) λ 为何值时,线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4, \\ -x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2, \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有唯一解,无解,有无穷多解？在有解的情况下,求出其全部解.

(7) 已知四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2,并且 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解,且 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[3,4,6,7]^{\mathrm{T}}$,求该方程组的通解.

4. 证明题

(1) 已知 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$,证明:$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

(2) 设 A 为 n 阶方阵,且 $A^2=E$,证明:

$$R(A+E)+R(A-E)=n.$$

(3) 设 A 是 n 阶方阵,若存在正整数 k 使线性方程组 $A^kx=0$ 有解向量 α,且 $A^{k-1}x\neq 0$,证明:向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

(4) 设 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解(A 是 $m\times n$ 矩阵),ξ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个非零解,证明:

① 向量组 $\eta_1, \eta_1-\eta_2$ 线性无关;

② 若 $R(A)=n-1$,则向量组 ξ, η_1, η_2 线性相关.

五、自测题答案与提示

1. (1) (A),因为向量组的部分相关,必整体相关.

(2) (C),由已知条件可得

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)+$$
$$k_1(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+k_m(\alpha_m-\beta_m)=0,$$

由于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, k_1, k_2, \cdots, k_m$ 均不全为 0,由定义知,$\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_m+\beta_m, \alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2, \cdots, \alpha_m-\beta_m$ 线性相关.

(3) (C),因为 A, B 均为非零方阵,于是 A, B 中至少有一个非零元素,$R(A)$,$R(B)$ 均不能为 0,又因为 $AB=0$,所以 A, B 均不能满秩,否则若 $R(A)=n$,则 $R(AB)=R(0)=0$,因而 $R(B)=0$,但这与 $R(B)\neq 0$ 矛盾,故选(C).

(4) (D); (5) (A); (6) (C); (7) (C); (8) (D).

2. (1) $x=\left[-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -4, -6\right]$.

(2) $k=-8$.

(3) 任意常数.

(4) $R(A)+R(E-A)=n$,因为 $A(E-A)=A-A^2=0$,所以

$$R(A)+R(E-A)\leqslant n.$$

又因为 $A+(E-A)=E$,而 $R(E)=n$,所以

$$R(A)+R(E-A)\geqslant R[A+(E-A)]=n.$$

(5) $R(A)=1$，因为 $A=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}[0,1,0,2]=\begin{bmatrix}0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&-1&0&-2\\0&2&0&4\end{bmatrix}$.

(6) $r=n$；$r<n$.

(7) $c_1+c_2+\cdots+c_s=1$.

(8) $b=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\quad(k_1,k_2,k_3\in R)$.

3. (1) 秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是它的一个最大无关组.

(2) ①$t\neq5$； ②$t=5$，$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(3) $x\neq y$，$x\neq-2y$，$R(A)=3$；$x=y=0$，$R(A)=0$；$x=y\neq0$，$R(A)=1$；$x=-2y\neq0$，$R(A)=2$.

(4) ①$x=k_1[12,0,-5,2,6]^T+k_2[0,12,7,2,6]^T\quad(k_1,k_2\in R)$.

②$x=k_1[-1,-1,1,2,0]^T+k_2[7,5,-5,0,8]^T\quad(k_1,k_2\in R)$.

(5) ①无解.

② $x=k_1\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1,1,0\right]^T+k_2\left[\frac{1}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{2},0,1\right]^T+$

$$\left[\frac{1}{4},-\frac{3}{4},\frac{3}{2},0,0\right]^T\quad(k_1,k_2\in R).$$

(6) ①当 $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq4$ 时，方程组有唯一解，其解为

$$x_1=\frac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda+1},x_2=\frac{\lambda^2+2\lambda+4}{\lambda+1},x_3=\frac{-2\lambda}{\lambda+1}.$$

②当 $\lambda=-1$ 时，方程组无解.

③当 $\lambda=4$ 时，方程组有无穷多解，其解为

$$x=[0,4,0]^T+k[-3,-1,1]^T\quad(k\in R).$$

(7) $x=\left[\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right]^T+k_1[1,1,1,1]^T+k_2[-1,-1,-2,-2]^T$

$(k_1,k_2\in R)$.

4. (1) 因为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的最大无关组也是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 的最大无关组，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的最大无关组线性表出，故 $\boldsymbol{\beta}$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

(2) 因为 $A^2=E$，所以 $R(A)=n$，

$$A^2-E=0\text{，所以 }(A-E)(A+E)=0,$$

$$R(A+E)+R(A-E)\leqslant n,$$

又 $R[(A+E)+(A-E)]=R(2A)=n$.

(3) 设有常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=0$，则有

$$A^{k-1}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha})=0,$$

所以 $\lambda_1A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=0$，因为 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，所以 $\lambda_1=0$.

同理证明 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$.

(4) ①用定义；②$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性相关，由此可推知结论.

第五章　相似矩阵及二次型

一、基本要求概述及主要术语

1.基本要求概述

①牢固掌握向量的内积,长度(范数),夹角,正交,正交向量组,正交基,规范正交基,正交变换的概念、性质及相关运算.了解施密特正交化方法.

②牢固掌握方阵的特征值与特征向量的概念.理解并掌握其相关性质.熟练掌握方阵的特征值与特征向量的求法.

③理解相似矩阵的概念及性质.了解方阵与对角阵相似的充要条件.

④牢固掌握对称矩阵的特征值与特征向量的性质.掌握利用正交矩阵将对称矩阵化为对角阵的理论及方法.

⑤掌握二次型及其矩阵的概念及表示方法,知道二次型的秩.掌握用正交变换将二次型化为标准型的理论及方法.

⑥了解用配方法化二次型为标准型的方法.

⑦了解惯性定理,知道二次型的正定性及判别方法.

2.主要术语

向量的内积,长度,正交,规范正交基,正交矩阵,正交变换,施密特正交化方法,方阵的特征值和特征向量,相似矩阵,方阵的对角化,对称阵的对角化,二次型,二次型的矩阵,二次型的秩,惯性定理,二次型的正定与负定,霍尔维茨定理.

二、基本内容剖析

1. **向量的内积、长度、夹角、正交**

①**设 n 维实向量**

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

令 $[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$,

称 $[x,y]$ **为向量** x **与** y **的内积.内积是向量的一种运算,用矩阵记号表示:**$[x,y]=x^T\cdot y$.

内积满足下列运算律(其中 x,y,z **为** n **维向量,**λ **为实数):**

(i) $[x,y]=[y,x]$;

(ii) $[\lambda x,y]=\lambda[y,x]$;

(iii) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$;

(iv) $[x,x]$,**且当** $x\neq 0$ **时有** $[x,x]>0$.

②**令** $\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$,

称 $\|x\|$ **为** n **维向量的长度(范数).当** $\|x\|=1$ **时称** x **为单位向量.**

向量的长度具有如下性质:

(i) **非负性,当** $x\neq 0$ **时,**$\|x\|>0$ **当** $x=0$ **时,**$\|x\|=0$;

(ii) **齐次性,**$\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$;

(iii) **三角不等式** $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

③**由施瓦茨不等式** $[x,y]^2\leqslant[x,x][y,y]$,**有当** $\|x\|\,\|y\|\neq 0$ **时,**$\dfrac{|[x,y]|}{|\,\|x\|\,\|y\|\,|}\leqslant 1$.

定义　当 $\|x\|\neq 0$,$\|y\|\neq 0$ **时,**$\theta=\arccos\dfrac{[x,y]}{\|x\|\,\|y\|}$ **为向量** x **与** y **的夹角.**

④**当** $[x,y]=0$ **时,称向量** x **与** y **正交.零向量与任何向量都正交.**

⑤一组两两正交的非零向量称为正交向量组.正交向量组一定线性无关("正交"是"线性无关"的充分条件).

2.向量空间的正交基、规范正交基

向量空间的正交基是指由正交向量组所构成的基.规范正交基是指每个向量都是单位向量的正交基.

①若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V($V\subset R^n$)的一个基,则该组向量线性无关(而且是 V 中所含向量的一个最大无关组).

②若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个正交基,则该组向量是正交向量组.

③若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的规范正交基,则满足 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|=1, i=1,2,\cdots,r$, $[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j]=0, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,r$.

④若 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 V 的一个规范正交基,那么 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 线性表示,且设 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_r e_r$,则 $\lambda_i=[a,e_i]$.这就是向量空间的规范正交基的优点.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基,由此可求 V 的一个规范正交基,也就是求一组两两正交的单位向量 $e_1,e_2,\cdots,e_r$,使 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价.

将 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 规范正交化分两步:

第一步　"正交化".用施密特正交化过程由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 求出正交基 $b_1,b_2,\cdots,b_r$,公式如下:取

$$b_1=a_1,$$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1,$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2,$$

……

$$b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1};$$

第二步　"单位化".将正交基单位化,即取 $e_i=\dfrac{b_i}{\|b_i\|}$ ($i=1,2,$

$\cdots,r)$ $e_1,e_2,\cdots,e_r$,即为 V 的一个规范正交基.

3.正交矩阵及正交变换

设 A 是 n 阶实方阵,若 $A^TA=E$(即 $A^{-1}=A^T$),则称 A 为正交矩阵.

就是说,n 阶实方阵 A 为正交阵 $\Leftrightarrow A^TA=AA^T=E\Leftrightarrow A^T=A^{-1}$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\left(\begin{array}{l}A\text{的行向量组}\\ \text{两两正交且均}\\ \text{为单位向量}\end{array}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\left(\begin{array}{l}A\text{的列向量组}\\ \text{两两正交且均}\\ \text{为单位向量}\end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow A$ 的行(或列)向量组构成 R^n 的一个规范正交基.

若 P 为 n 阶正交阵,则线性变换 $y=Px$ 为正交变换(其中 x,y 均为 n 维实向量).

正交变换是一种非常特殊的线性变换.它首先是可逆线性变换,即其逆变换很容易表示成 $x=P^{-1}y=P^Ty$;其次,经正交变换向量的长度保持不变.这是正交变换的优良性质.

4.方阵的特征值与特征向量

(1)特征值与特征向量的定义

设 A 是 n 阶方阵,若数 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式

$$Ax=\lambda x \tag{5-1}$$

成立,则称数 λ 为方阵 A 的特征值,非零列向量 x 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.关系式 $Ax=\lambda x$ 建立了数、向量和矩阵的一种特殊关系,又可将其写成

$$(A-\lambda E)x=0. \tag{5-2}$$

(2)特征多项式、特征方程

式(5-2)是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组,由第一章 7 节可知该方程组有非零解的充要条件是系数行列式

$$|A-\lambda E|=0, \tag{5-3}$$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

将上式展开是以 λ 为未知数的一元 n 次方程,我们称之为 A 的特征方程.(5-3)左端 $|A-\lambda E|$ 是 λ 的 n 次多项式,记作 $f(\lambda)$,我们称之为 A 的特征多项式.所以 A 的特征方程又可写成 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$. A 的特征值就是特征方程的解,由代数基本定理(n 次方程在复数范围内有 n 个根,其中重根按重数计算)可知,n 阶矩阵 A 有 n 个特征值.

(3)特征值与特征向量的性质

①设 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,由 n 次方程的根与系数之间的关系有

(ⅰ) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(ⅱ) $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=|A|$.

②设 λ 是方阵 A 的特征值,则 λ^2 是 A^2 的特征值.

推论　若 λ 是 A 的特征值,则

(ⅰ) λ^k 是 A^k 的特征值(其中 k 是正整数);

(ⅱ) $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值(其中 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$, $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$).

③属于不同特征值的特征向量一定线性无关.属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这一特征值的特征向量.

(4)特征值和特征向量的求法

①求特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的全部根,即为 A 的全部特征值;

②对于每一个特征值 λ_i,则对应的齐次方程组 $(A-\lambda_iE)x=0$ 的全部非零解就是 A 的属于 λ_i 的全部特征向量,该方程组的基础解系就是 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量.

5.相似矩阵

(1)定义

设 A,B 都是 n 阶方阵,若有可逆方阵 P,使 $P^{-1}AP=B$,则称 A

与 B 相似. 对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换, 可逆矩阵 P 称为将 A 变成 B 的相似变换矩阵.

(2) 相似矩阵的性质

①矩阵的相似关系具有反身性、对称性、传递性;

②相似矩阵的行列式相同;

③若矩阵 A 与 B 相似, 则 A 与 B 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值 (但对应的特征向量一般不同);

④相似矩阵或者同时可逆, 或者同时不可逆, 而且如果 $B=P^{-1}AP$, 那么当 A, B 同时可逆时, 它们的逆也相似, 即 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$;

⑤如果 $B_1=P^{-1}A_1P, B_2=P^{-1}A_2P$, 则

$$B_1+B_2=P^{-1}(A_1+A_2)P,$$

$$B_1B_2=P^{-1}(A_1A_2)P, kB_1=P^{-1}(kA_1)P;$$

⑥如果 $B=P^{-1}AP$, $f(x)$ 是一个多项式, 则 $f(B)=P^{-1}f(A)P$.

如果有可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ (即 A 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 这时称矩阵 A 能相似对角化), 则

① $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值;

② P 的第 i 列 P_i 是 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

n 阶方阵 A 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量. 如果 n 阶方阵 A 的 n 个特征值互不相等 (则它们对应的特征向量一定线性无关), 那么 A 一定与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似.

6. 实对称矩阵及其对角化

(1) 实对称矩阵的主要性质

①实对称矩阵的特征值均为实数;

②实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交;

③对应于实对称矩阵的 r 重特征值一定有 r 个线性无关的特征向量.

综上, 对于实对称矩阵 A 一定存在 n 个线性无关的特征向量, 从而一定存在正交阵 P 使 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

⑵ 实对称阵 A 对角化的方法

①求出 A 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$，它们的重数依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_l$ $(r_1+r_2+\cdots+r_l=n)$；

②对每个 r_i 重特征值 λ_i 求方程 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系，得 r_i 个线性无关的特征向量，再把它们正交化、单位化(如果 $r_i=1$ 就只需单位化)得 r_i 个两两正交的单位特征向量，因 $r_1+r_2+\cdots+r_l=n$，故共可得 n 个两两正交的单位特征向量；

③用这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 P，便有 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$.

7.二次型及其标准形和规范形

⑴ 二次型的概念

含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

为二次型.

令 $a_{ij}=a_{ji}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则二次型可记成

$$f(x)=x^TAx.$$

将实对称矩阵 A 称为二次型 f 的矩阵(也把 f 叫实对称阵 A 的二次型)，实对称阵 A 的秩叫二次型 f 的秩.

⑵ 将二次型化成其标准型

对于二次型 $f(x)$，求可逆线性变换 $x=Cy$，使

$$f(Cy)=y^TC^TACy=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2,$$

这种只含平方项的二次型称为二次型的标准形(或法式).

特别地，如果标准形中的系数 k_i 只有 $1,-1,0$ 三个值，那么这个标准形称为二次型的规范形.经可逆变换 $x=Cy$ 后，二次型 f 的矩阵由 A 变为 C^TAC，且二次型的秩不变，即 $R(A)=R(C^TAC)$.

* ⑶ 矩阵的合同

设 A 与 B 均为 n 阶方阵，若有可逆阵 C 使 $C^TAC=B$，则称 A 与

B 合同.合同关系具有反身性、对称性及传递性.(2)中所述将二次型化成标准形的过程相当于用可逆变换 $x = Cy$ 将实对称矩阵 A 作合同变换成对角阵.

(4) 化二次型为标准形的方法

①正交变换法:

将 6 节的结论用于二次型,可知对于二次型 $f(x) = x^{T}Ax$ 总有正交变换 $x = Py$ 将 $f(x)$ 化成标准形

$$f(x) = x^{T}Ax = y^{T}P^{T}APy = y^{T}\Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 A 的特征值.

②拉格朗日配方法:

(i) 二次型中含有平方项的情况.

若二次型中含有平方项如含 x_i^2 及含有 x_i 因子的交叉项(即乘积项)则集中所有含 x_i 的项用配方法,使余下的项中不含 x_i,对于剩余的 $n-1$ 个变量,继续上述方法,最终使二次型中只含变量的平方项.

(ii) 二次型中不含平方向的情况.

若二次型中只有交叉项,如 x_1x_2,则先作变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \vdots \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

经过这个可逆变换二次型中就含有一个平方项了,然后再用(i)中的方法进行配方.

(5) 化二次型的标准形为规范形的方法

设二次型 $f = k_1 y_1^2 + \cdots + k_t y_t^2 - k_{t+1} y_{t+1}^2 - \cdots - k_r y_r^2$,

其中 $k_i > 0, i = 1, 2, \cdots, t, t+1, \cdots, r\ (r \leqslant n)$.

作可逆变换

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{k_1}\, y_1, \\ z_2 = \sqrt{k_2}\, y_2, \\ \quad\vdots \\ z_r = \sqrt{k_r}\, y_r, \\ z_{r+1} = y_{r+1}, \\ \quad\vdots \\ z_n = y_n, \end{cases}$$

即可将二次型 $f(y)$ 化成规范形:$z_1^2 + \cdots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \cdots - z_r^2$.

8.矩阵的“等价”、“相似”、“合同”、“正交相似”的关系

设 A 与 B 均为 n 阶方阵,如图表示了它们之间“等价”、“相似”、“合同”、“正交相似”的关系:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{等价:}PAQ = B \\ (P,Q\ \text{为非奇异阵})\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\text{合同:}C^{T}AC = B \\ (C\ \text{为可逆阵})\end{array}} \arrow[l, Rightarrow] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{相似:}P^{-1}AP = B \\ (P\ \text{为可逆阵})\end{array}} \arrow[u, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c}\text{正交相似:}P^{T}AP = B \\ (P\ \text{为正交阵})\end{array}} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

以上四种矩阵的关系均是具有自反性,对称性,传递性.

9.二次型的正定性

(1) 惯性定理

设有实二次型 $f = x^{T}Ax$,它的秩为 r,有两个实的可逆变换 $x = Cy$ 及 $x = Pz$,使

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0)$$

及
$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等.该正(负)数的个数为 f 的正(负)惯性指数.

(2) 二次型的正定与负定

设有实二次型 $f(x) = x^{T}Ax$,如果对任何 $x \neq 0$ 都有 $f(x) > 0$,则

称 f 为正定二次型,并称实对称矩阵 A 是正定的(记作 $A>0$).如果对任何 $x\neq 0$ 都有 $f(x)<0$,则称 f 为负定二次型,并称实对称矩阵 A 是负定的(记作 $A<0$).

实二次型 $f=x^TAx$ 为正定的充分必要条件是下列条件之一成立:

①二次型 f 的标准形的 n 个系数全为正;

② A 的特征值全为正;

③ f 的正惯性指数等于 n;

④ A 的各阶主子式全为正,即

$$a_{11}>0,\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}>0,\cdots,\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}>0;$$

⑤ f 的规范形为 $f=y^Ty=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$;

⑥ A 合同于单位阵 E,即存在可逆阵 C 使 $C^TAC=E$.

实二次型 $f=x^TAx$ 为负定的充要条件是 A 的奇数阶主子式为负,而偶数阶主子式为正,即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0 \qquad (r=1,2,\cdots,n).$$

用主子式判断二次型的"正定"与"负定"是较方便的一种方法(相关结论叫霍尔维茨定理).

三、典型例题分析

1. 关于向量的内积、长度、夹角、正交的运算问题

例 1 已知 $x^T=[2,1,3,2]$,$y^T=[1,2,-2,1]$,求 $\|x\|$,$\|y\|$,$[x,y]$,$\cos(x,y)$ 及 $\|x+y\|$ 并验证

(1) $\|[x,y]\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$;

(2) $\|[x+y]\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

分析 此题之目的在于掌握向量的模、内积、夹角余弦的概念,并

熟练运用计算公式.

解　$\|x\| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\|y\| = \sqrt{[y,y]} = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{10}$,

$[x,y] = 2\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot(-2)+2\cdot 1 = 0$,

$$\cos(x,y) = \frac{[x,y]}{\|x\|\,\|y\|} = 0,$$

$\|x+y\| = \sqrt{[x+y,x+y]} = \sqrt{3^2+3^2+1^2+3^2} = 2\sqrt{7}$.

验证　(1) 因为 $0 \leqslant \sqrt{18}\sqrt{10} = \sqrt{180}$,

所以　$\|[x,y]\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

(2) 因为 $\sqrt{28} \leqslant \sqrt{18}+\sqrt{10}$,

所以　$\|[x+y]\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

注　验证(2)用到不等式 $28 \leqslant 28+2\sqrt{180}$.

例 2　由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 构造 R^3 的一组正交规范基.

分析　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三个三维向量,它们是 R^3 的一组基,只要再将其正交规范化即可.

解法一　先用施密特法正交化,再单位化.

取　$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是一组 R^3 的正交基,再将其单位化,得一组正交规范基为

$$e_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},e_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$$e_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

解法二　边正交化边单位化.

令　$$e_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-[\boldsymbol{\alpha}_2,e_1]e_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$$e_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-[\boldsymbol{\alpha}_3,e_1]e_1-[\boldsymbol{\alpha}_3,e_2]e_2\\&=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$e_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

注　一般来说,解法二较解法一的计算稍简便一些.此题的解法具

有一般性,可推广至 n 维的情况.

例 3　已知 R^3 中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$正交,求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

分析　此题若设 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{bmatrix}$,则所求 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 应满足齐次方程 $Ax=0$,由 $R(A)=2$ 知方程组 $Ax=0$ 的基础解系含一个向量,该向量即可作为 $\boldsymbol{\alpha}_3$.

解　由$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$,对系数矩阵作行初等变换,有

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\div(-3)}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

得
$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=0,\\x_3=x_3,\end{cases}$$

方程组的全部解为 $x=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $(k\in R)$,取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$即为所求.

2. 关于正交阵的证明问题

例 4　(1) 设 A 是正交矩阵,证明:A^{-1}也是正交矩阵.

(2) 设 A,B,A + B 均为 n 阶正交矩阵,证明:

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}.$$

分析　此题只需由正交阵的定义出发,即可得出证明.

证明　(1) 因为 A 是正交阵,所以 $AA^T=A^TA=E$.

故
$$A^{-1}(A^{-1})^T=A^{-1}(A^T)^{-1}=(A^TA)^{-1}=E^{-1}=E,$$

所以 A^{-1}是正交阵.

(2) 因为 $A,B,A+B$ 均为正交阵,所以

$$A^{-1}=A^T,B^{-1}=B^T,(A+B)^{-1}=(A+B)^T,$$

故 $$(A+B)^{-1}=(A+B)^T=A^T+B^T=A^{-1}+B^{-1}.$$

例 5 若 A 是实对称矩阵且满足 $A^2+6A+8E=0$,证明:$A+3E$ 是正交阵.

分析 一般地,证明一个矩阵是正交阵只要将该阵与其转置阵相乘利用已知条件得单位阵即得证.

证明 由 $A^T=A$,

所以 $$\begin{aligned}(A+3E)^T(A+3E)&=[A^T+(3E)^T](A+3E)\\&=(A+3E)(A+3E)=A^2+6A+9E\\&=A^2+6A+8E+E=E,\end{aligned}$$

故 $A+3E$ 是正交阵.

3. 关于方阵的特征值、特征向量的问题

例 6 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$的全部特征值与特征向量.

分析 此题之目的在于掌握求方阵特征值与特征向量的方法,并具有一般性.

解 $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-4&-1-\lambda&0\\4&-8&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$,

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解齐次方程组 $(A-1\cdot E)x=0$,即

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&-8&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

由
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{20} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以　$x = k_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{20} \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k_1 \in R, k_1 \neq 0)$ 为对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_3 = -2$ 时,解齐次方程组 $(A + 2 \cdot E)x = 0$,即
$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

由
$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以 $x = k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k_2 \in R, k_2 \neq 0)$ 为对应于 $\lambda_3 = -2$ 的全部特征向量.

注　对应于二重特征根 1 只有一个线性无关的特征向量.对于矩阵 A 不存在三个线性无关的特征向量(这样的矩阵 A 不能对角化).

例 7　设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值;

(2) 利用 (1) 的结果求矩阵 $A^{-1}+E$ 的特征值 (其中 E 为 3 阶单位阵).

解 (1) A 的特征方程为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix},$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+5),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$.

(2) 若 $\lambda\neq0$ 是 A 的特征值,则由 $Ax=\lambda x$ 有 $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$,即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值,可见 A^{-1} 的特征值为 $1,1,-\frac{1}{5}$,因此有 $|A^{-1}-E|=0$ 及

$$\left|A^{-1}-\left(-\frac{1}{5}\right)E\right|=0,$$

所以有 $|(A^{-1}+E)-2E|=0$ 及 $\left|(A^{-1}+E)-E+\frac{1}{5}E\right|=0$.

由此可知,$A^{-1}+E$ 的特征值为 $2,2,\frac{4}{5}$.

注 此题 (2) 问利用非奇异矩阵特征值的性质及特征值的定义,而不是通过计算 $A^{-1}+E$ 再去求其特征值具有一定的技巧.

例 8 若方阵 $A=A^2$ (这样的方阵叫幂等阵),证明 A 的特征值只能是 0 或 1.

证明 设 A 的特征值为 λ,对应的特征向量为 x,则有 $Ax=\lambda x$.

由假设有 $\lambda x=Ax=A^2x=A(\lambda x)=\lambda^2x$,故 $(\lambda-\lambda^2)x=0$,

因为 x 为非零向量,所以有 $\lambda-\lambda^2=0$,由此得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

注 此题所证出的结论是幂等阵的重要性质.

例 9 设 λ 是 A 的特征值,试征 λ^m 是 A^m 的特征值 (m 为正整数),若 $x\neq0$ 是 A 的关于 λ 的特征向量,求 A^m 对应于 λ^m 的特征向量.

解法一 因为 λ 是 A 的特征值,所以有 $Ax=\lambda x$,其中 $x\neq0$ 是 A 的关于 λ 的特征向量.

上式两边左乘 A 得 $A^2x=\lambda Ax=\lambda^2x$，说明 λ^2 是 A^2 的特征值且 $x\neq0$ 即为 A^2 的对应于 λ^2 的特征向量，类推可得 $A^mx=\lambda^mx$，说明 λ^m 是 A^m 的特征值且 $x\neq0$ 即为 A^m 的对应于 λ^m 的特征向量.

解法二

$$
\begin{aligned}
&|A^m-\lambda^mE|\\
&=|(A-\lambda E)(A^{m-1}+\lambda A^{m-2}+\lambda^2A^{m-3}+\cdots+\lambda^{m-2}A+\lambda^{m-1}E)|\\
&=|A-\lambda E|\,|A^{m-1}+\lambda A^{m-2}+\lambda^2A^{m-3}+\cdots+\lambda^{m-2}A+\lambda^{m-1}E|.
\end{aligned}
$$

因为 $|A-\lambda E|=0$，所以 $|A^m-\lambda^mE|=0$.

因此 λ^m 是 A^m 的特征值，又

$$
(A^m-\lambda^mE)x=(A^{m-1}+\lambda A^{m-2}+\lambda^2A^{m-3}+\cdots+\lambda^{m-2}A+\lambda^{m-1}E)\cdot(A-\lambda E)x=0
$$

所以 x 是 A 的关于 λ 的特征向量也是 A^m 的关于特征值 λ^m 的特征向量.

注　此题结论是方阵的幂的特征值、特征向量的一般性质，具有应用性.

例 10　设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，试证 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 A 的特征向量.

证明　反证法. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 A 的特征向量，并设其对应的特征值为 λ，于是有

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2),$$

由题设有 $A\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，

可得　$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，

即　$(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_2=0$，

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 于是属于 A 的不同特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，于是由上式推出 $\lambda_1-\lambda=0,\lambda_2-\lambda=0$，即得 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$，这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 假设矛盾！结论得证.

注　方阵 A 的不同特征值对应的特征向量一定线性无关这一性质的应用很重要.

4.方阵的对角化问题

例 11 设有矩阵(1) $A_1=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$,(2) $A_2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$,(3) $A_3=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\2&1&3\end{bmatrix}$,判断它们能否对角化,如果可以对角化求出可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 (1) 因为 A_1 是实对称矩阵,所以 A_1 一定能对角化.

可求出 A_1 的特征值为 $\lambda_1=0$,$\lambda_2=\lambda_3=3$,对应的特征向量分别是

$$x_1=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\ (k_1\in R, k_1\neq 0),$$

$$x_2=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\ (k_2,k_3\in R, k_2,k_3\text{ 不同时为 }0),$$

取 $$P=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\text{可使 } P^{-1}A_1P=\boldsymbol{\Lambda}_1=\begin{bmatrix}0&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}.$$

(2) 可求出 A_2 的特征值为 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=\lambda_3=2$.

对应的特征向量分别是 $x_1=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\ (k_1\in R, k_1\neq 0)$,

$$x_2=k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\ (k_2,k_3\in R, k_2,k_3\text{ 不同时为 }0),$$

因为对于 A_2 存在三个线性无关的特征向量,所以 A_2 能对角化.

取 $P=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$可使 $P^{-1}A_2P=\boldsymbol{\Lambda}_2=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

(3) 可求出 A_3 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$.

对于二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 特征向量为

$$x_1=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\ (k_1\in R,k_1\neq 0),$$

对于特征值 $\lambda_3=4$ 特征向量为 $x_2=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}\ (k_2\in R,k_2\neq 0)$，

所以对于 A_3 不存在三个线性无关的特征向量，故 A_3 不能对角化.

注　对于非对称矩阵，且有重特征根的情况，要注意只有对应于 s 重特征根有 s 个线性无关的特征向量时，这样的矩阵才能对角化.

例 12　已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似.

(1) 求 x 与 y；

(2) 求一个可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=B$.

解　(1) 解法一　因为 A 与 B 相似，所以 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，

即
$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&1&x-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&y-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix},$$

可得　$(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)[\lambda^2+(1-y)\lambda-y]$，

比较上式两边系数得 $x=0$，$y=1$.

解法二　因为 A 与 B 相似，所以 A 与 B 的特征值相同，故

$$2+0+x=2+y-1,$$

又 $|A|=|B|$，即 $-2=-2y$，所以 $x=0$，$y=1$.

(2) 由 (1) 的结果可知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，又由 B 可知 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$（相似矩阵有相同的特征值）.

当 $\lambda_1=2$ 时,可得对应的特征向量 $p_1=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}(k_1\in R,k_1\neq 0)$,

当 $\lambda_2=1$ 时,可得对应的特征向量 $p_2=k_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}(k_2\in R,k_2\neq 0)$,

当 $\lambda_3=-1$ 时,可得对应的特征向量 $p_3=k_3\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}(k_3\in R,k_3\neq 0)$.

所以取可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$,即可使 $P^{-1}AP=B$.

注　(1)中的解法二用到相似矩阵的迹数相等、行列式相等这些应熟知的性质.

例 13　矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$能否相似于某个对角阵?若能,写出所相似的对角阵;若不能,说明理由.

解　A 的特征方程 $|A-\lambda E|=(1-\lambda)(\lambda^2-2)=0$,
所以有三个不同的特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_3=-\sqrt{2}$,可知 A 有三个线性无关的特征向量,故 A 可对角化,且与 A 相似的对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&-\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

例 14　证明:可逆的相似矩阵的伴随矩阵也相似.

证明　设 A 与 B 为同阶可逆阵且 A 与 B 相似,则有 A^{-1} 与 B^{-1} 相似,即存在可逆阵 P 使 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$,两边同乘 $|A|$ 有 $|A|P^{-1}A^{-1}P=|A|B^{-1}$,又因为 A 与 B 相似,所以 $|A|=|B|$,$P^{-1}(|A|A^{-1})P=|B|B^{-1}$ 即 $P^{-1}A^{*}P=B^{*}$,故 A^{*} 与 B^{*} 相似.

注　这里用到可逆方阵的伴随矩阵的性质：$A^* = |A|A^{-1}$.

例 15　设 n 阶方阵 $A \neq 0$，如果存在正整数 k 能使 $A^k = 0$，证明 A 不能与对角阵相似.

证明　反证法.若 A 与对角阵相似即存在可逆阵 P 使 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵），则 $\boldsymbol{\Lambda}^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = 0$，由此可知对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = 0$，于是 $A = P\boldsymbol{\Lambda}P^{-1} = 0$ 这与 $A \neq 0$ 矛盾！故 A 不能相似于对角阵.

例 16　已知 $A = \begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix}$，求正交阵 T，使 $T^{-1}AT = B$ 为对角阵.

解

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 14 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 0 & 18 - \lambda & \lambda - 18 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 4 & 2 \\ 2 & \lambda - 10 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 18 \end{vmatrix} = (\lambda - 18)\begin{vmatrix} \lambda - 17 & 4 \\ 2 & \lambda - 10 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 18)[(\lambda - 17)(\lambda - 10) - 8] = (\lambda - 18)^2(\lambda - 9) = 0,$$

得特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18$.

当 $\lambda_1 = 9$ 时，对应的特征向量满足方程

$$\begin{bmatrix} 9 - 17 & 2 & 2 \\ 2 & 9 - 14 & 4 \\ 2 & 4 & 9 - 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

解得特征向量为 $x_1 = k_1\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k_1 \in R, k_1 \neq 0)$.

取特征向量 $p_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{bmatrix}$,单位化得 $e_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$;

当 $\lambda_2=\lambda_3=18$ 时,对应的特征向量满足方程

$$\begin{bmatrix}18-17&2&2\\2&18-14&4\\2&4&18-14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得特征向量为

$$x_2=k_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\ (k_2,k_3\in R,k_2、k_3\text{ 不同时为 }0).$$

取两个线性无关的特征向量 $p_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$,$p_3=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$.

将 p_2,p_3 正交规范化得 $e_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix}$,$e_3=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\\-\frac{4}{\sqrt[3]{5}}\\\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\end{bmatrix}$

于是 $$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{4}{\sqrt[3]{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}9&&\\&18&\\&&18\end{bmatrix},$$

可验证 $T^{-1}AT=B$.

注　所求的正交矩阵 T 不是唯一的.如当 $\lambda_2=\lambda_3=18$ 时,取正交

的特征向量 $p_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$，$p_3=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$时，再单位化可得

$$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

亦有　　$T^{-1}AT=T^{T}AT=B$.

5.二次型及其标准形及二次型的正交性问题

例17　将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 用正交变换化为标准形.

解　二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$，

于是　　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)=0$，

所以 $\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$ 为 A 的特征值.

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时解方程组 $(5E-A)x=0$，即$\begin{cases}4x_1+2x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+x_2+2x_3=0,\\ 4x_1+2x_2+4x_3=0.\end{cases}$

因为该方程组系数矩阵的秩为1，所以其基础解系含 $3-1=2$ 个解向量，求得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix},$$

经正交化后得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-2\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

单位化后得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{6}\\-\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{6}\end{bmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-4$ 时解方程组 $(-4E-A)x=0$,即

$$\begin{cases}-5x_1+2x_2+4x_3=0,\\2x_1-8x_2+2x_3=0,\\4x_1+2x_2-5x_{.3}=0.\end{cases}$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$,

单位化后得 $\gamma_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$

于是得正交阵 $T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$

令 $x = Ty$，即

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \end{cases}$$

于是原二次型化为 $f = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$.

例 18　设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 24x_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $x = Py$ 化为标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$，其中 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$，$y = [y_1, y_2, y_3]^T$，P 是 3 阶正交阵，试求常数 α, β.

解　将变换前后的二次型的矩阵分别记为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

于是二次型可写成 $f = x^TAx$，$f = y^TBy$.

由假设知 $P^TAP = B$，因为 P 为正交阵，所以 $P^{-1}AP = B$，说明 A 与 B 相似，因此它们有相同的特征多项式 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，

即
$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\alpha & -1 \\ -\alpha & \lambda - 1 & -\beta \\ -1 & -\beta & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix},$$

所以　$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - \alpha^2 - \beta^2)\lambda + (\alpha - \beta)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$，

比较系数得

$$2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2, \alpha - \beta = 0, \text{解得 } \alpha = \beta = 0.$$

例 19　用配方法将下列二次型化成标准形.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$；

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

分析　(1) 此题含平方项 (如 x_1^2) 故先将含 x_1 的各项并在一起配成完全平方项，再将余下的含 x_2 的项合并在一起配成完全平方项.

解 (1) $f = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

$$= [x_1^2 - 2x_1(x_2 - x_3)] - 3x_2^2 - 6x_2x_3$$
$$= [x_1^2 - 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - (x_2 - x_3)^2 - 3x_2^2 - 6x_2x_3$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2.$$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3, \end{cases}$,则$\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$

即有 $C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

令 $x = Cy$,使原二次型化为 $f = y_1^2 - y_2^2$.

此为 f 的一个标准形,它的矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 可验证

$$C^TAC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 此二次型不含平方项,故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases} C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

于是 $f = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$$= -4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 + 2(y_1 - y_2)y_3$$
$$= -4y_1^2 + 4y_1y_3 + 4y_2^2 = -4\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 + 4y_2^2 + y_3^2.$$

再令$\begin{cases} z_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$则$\begin{cases} y_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$ $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

于是原二次型化为 $f = -4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2$.

此为 f 的一个标准形，它的矩阵为$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

令 $C = C_1C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，可验证 $C^TAC = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

例 20　判断二次型 $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 是否正定.

解法一　将 f 化为标准形(如用配方法).

$$\begin{aligned} f &= 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ &= 6\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - \frac{2}{3}x_2^2 - \frac{2}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 \\ &= 6\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{13}{3}x_2^2 + \frac{19}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 \\ &= 6\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{13}{3}\left(x_2 + \frac{2}{13}x_3\right)^2 + \frac{19}{3}x_3^2 - \frac{3}{13}\cdot\frac{4}{9}x_3^2 \\ &= 6\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{13}{3}\left(x_2 + \frac{2}{13}x_3\right)^2 + \frac{243}{39}x_3^2. \end{aligned}$$

这时可见当 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$ 时 $f > 0$，故二次型为正定二次型.

又令$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{2}{13}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$二次型 f 可化为标准形

$$f=6y_1^2+\frac{13}{3}y_2^2+\frac{243}{39}y_3^2,$$

其正惯性指数为 3,故 f 为正定二次型(或标准形中三个系数均为正).

解法二　用霍尔维茨定理判断 f 对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{bmatrix}$,

$$a_{11}=|6|=6>0,\ \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-2\\-2&5\end{vmatrix}=26>0,$$

$$|A|=\begin{vmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&-19\\0&5&7\\2&0&7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2&-19\\5&7\end{vmatrix}=162>0,$$

故 f 为正定二次型.

解法三　求出 A 的所有特征值均大于 0,可判定二次型为正定的(略).

例 21　设有二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$,问 a 为何值时 f 是正定的.

解法一　二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$,由霍尔维茨定理 f 为正定时顺序阶主子式均大于 0,故 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&a\end{vmatrix}=a-1>0$,故当 $a>1$ 时 f 为正定.

解法二　化二次型为标准形(如用配方法)

$$f=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+(a-1)x_3^2,$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3,\\y_2=x_2,\\y_3=x_3,\end{cases}$

可化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+(a-1)y_3^2$,当且仅当系数 $a-1>0$ 即 $a>1$ 时,f 为正定.

例 22　设 A 是 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位阵，证明 $A+E$ 的行列式大于 1.

证明　因为 A 是正定矩阵，故存在正交阵 P 使

$$P^{T}AP=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的特征值，因此

$$P^{T}(A+E)P=P^{T}AP+P^{T}P=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}+E$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1\end{bmatrix}.$$

取行列式得 $\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)=|P^{T}(A+E)P|=|P^{T}||A+E||P|$

$$=|A+E|>1.$$

四、自测题

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=[1,1,2,-1]^{-T}$，$\boldsymbol{\beta}=[2,1,1,-1]^{T}$，$\boldsymbol{\gamma}=[2,2,1,2]^{T}$，求与向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都正交的向量.

2. 求下列矩阵的特征值及特征向量：

(1) $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，(2) $A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$.

3.证明：

(1)若 $A^2=E$,则 A 的特征值只能是 1 或 -1；

(2)若 $A^2=E$ 且 A 的特征值都等于 1,则 $A=E$.

4.说明 2 题中的矩阵是否能对角化？原因是什么？如果能对角化,求相似变换将矩阵对角化.

5.证明若 λ_0 是正交阵 A 的一个非零特征值,则 $\frac{1}{\lambda_0}$ 也是 A 的一个特征值.

6.设 A 为正交阵且 $|A|=-1$,证明 A 一定有特征值 -1.

7.设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\2&1&0\\1&1&x\end{bmatrix}$与 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&y&2\\1&-3&z\end{bmatrix}$相似,求 x,y,z.

8.设 $A=\begin{bmatrix}0&10&6\\1&-3&-3\\-2&10&8\end{bmatrix}$,问 A 是否能对角化？若能,求可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

9.求一个正交变换将二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 化成标准形.

10.问 λ 取何值时二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型.

五、自测题解答与提示

1.解方程组$\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$,

得 $x = k\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}(k \in R, k \neq 0)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 都正交.

2. (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 8$,

$$x = k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(k_1, k_2 \in R, k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0),$$

$$x = k_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}(k_3 \in R, k_3 \neq 0).$$

(2) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$,

$$x = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}(k_1 \in R, k_1 \neq 0),$$

$$x = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(k_2, k_3, k_4 \in R, k_2, k_3, k_4 \text{ 不同时为 } 0).$$

3. (1) 因为 $Ax = \lambda x$,其中 λ 是 A 的特征值,x 是对应于 λ 的特征向量,两边左乘 A 得 $A^2 x = \lambda^2 x$,由 $A^2 = E$ 得 $\lambda^2 x = x$ 所以 $(\lambda^2 - 1)x = 0$ 所以 $\lambda = \pm 1$.

(2) 因为 1 是 A 的特征值,所以 $Ax = 1 \cdot x$ 即 $(A - E)x = 0$ 有非零解,$|A - E| = 0$,而 -1 不是 A 的特征值,所以 $Ax \neq -1 \cdot x$,即 $(A + E)x = 0$ 没有非零解,所以 $|A + E| \neq 0$,

即 $(A + E)$ 可逆,由 $A^2 = E$ 有 $A^2 - E = (A + E)(A - E) = 0$,两边乘 $(A + E)^{-1}$ 得 $(A - E) = 0$,即有 $A = E$.

4. (1)、(2) 中矩阵均能被对角化,因为 A 均为实对称阵或因它们

线性无关的特征向量的个数与 A 的阶数一致.

(1) 令相似变换 $x = Py$, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,可使

$$P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{bmatrix}.$$

(2) 令 $x = Py$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,可使

$$P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} -3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

5. 因为 λ_0 是正交阵 A 的一个非零特征值,所以 $Ax = \lambda_0 x$, $\lambda_0 \neq 0$,有 $\frac{1}{\lambda_0}x = A^{-1}x = A^{T}x$,说明 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^T 的一个特征值,而 A^T 的特征值即为 A 的特征值,故而得证.

6. 因为 A 为正交阵,又

$|A + E| = |A + A^TA| = |(E + A^T)A| = |A + E|\cdot|A|$.

由 $|A| = -1$,有 $|A + E| = -|A + E|$,所以,$|A + E| = 0$,这说明 A 有特征值 -1.

7. 因为 A 与 B 相似,故有相同的特征多项式.

因为 $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & x-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & y-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & z-\lambda \end{vmatrix}$

即 $\quad (x-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-6]$

$= (1-\lambda)[(y-\lambda)(z-\lambda)+6] - 4x + (4-3x)\lambda + (x+3)\lambda^2 - \lambda^3$

$= (yz+6) - (y+z+yz+6)\lambda + (y+z+1)\lambda^2 - \lambda^3$.

比较 λ 的系数有

$$\begin{cases}-4x=yz+6,\\-4+3x=y+z+yz+6,\\x+3=y+z+1,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=1,\\y=-2,\\z=5,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1,\\y=5,\\z=-2.\end{cases}$$

8. $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 10 & 6\\1 & -3-\lambda & -3\\-2 & 10 & 8-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-1),$$

所以　$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

$x=k_1\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ $(k_1\in R,k_1\neq0)$ 为对应于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量，

$x=k_2\begin{bmatrix}5\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $(k_2,k_3\in R,k_2,k_3$ 不同时为 $0)$ 为对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量，

因为存在三个线性无关的特征向量，所以 A 可以对角化.

令 $P=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\-1 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，可使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}.$

9. $$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\-2 & 4 & -4\\2 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\-2 & 4-\lambda & -4\\2 & -4 & 4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-9),$$

$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9,$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，得 $x=k_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ $(k_1,k_2\in R,k_1,k_2$ 不全

为 0)，

取 $a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，$a_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$，

对 $\lambda_3=9$，得 $x=k_3\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{bmatrix}$ $(k_3\in R, k_3\neq 0)$，取 $a_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$.

用施密特法正交化

令 $b_1=a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，$b_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{8}{5}\\\frac{4}{5}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix}$，

$b_3=a_3$.

再单位化得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

令 $T=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，可使 $T^TAT=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{bmatrix}$.

10. $A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1\\\lambda & 4 & 2\\-1 & 2 & 4\end{bmatrix}$，因为 $\begin{vmatrix}1 & \lambda\\\lambda & 4\end{vmatrix}=4-\lambda^2>0$ 所以 $|\lambda|<2$.

所以
$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ 0 & \lambda+2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 12 - \lambda(\lambda+2) - 2(\lambda+2) - 3\lambda^2.$$
$$= 12 - \lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda - 4 - 3\lambda^2 = 8 - 4\lambda - 4\lambda^2 > 0,$$

即 $\lambda^2 + \lambda - 2 < 0$，$(\lambda-1)(\lambda+2) < 0$，所以 $-2 < \lambda < 1$

由 $\begin{cases} -2 < \lambda < 2, \\ -2 < \lambda < 1, \end{cases}$ 解得 $-2 < \lambda < 1$.

第六章　线性空间与线性变换

一、基本要求概述及主要术语

1.基本要求概述

①了解线性空间的定义及其性质,会判断一个集合是否是线性空间;了解子空间的定义及判断方法.

②理解线性空间的基、维数及元素在基下的坐标概念.

③了解两个线性空间同构的概念.

④了解一个线性空间的两个基之间的变换——基变换公式及过渡矩阵的概念;了解一个元素在两组基下的坐标变换公式及求法.

⑤理解集合之间的变换(映射)的概念,知道什么是源集什么是像集;理解线性变换的概念及主要性质.

⑥了解线性变换的矩阵表示;了解线性变换的概念.

2.主要术语

线性空间,线性运算封闭,子空间,基,维数,坐标,同构,基变换,过渡矩阵,映射,源集,像集,线性变换,线性变换的矩阵,线性变换的秩.

二、基本内容剖析

本章知识是前面各章相关知识的提升和推广,虽然本章划有 ※ 号,但对于学完前五章的学生来说,如果不学习本章的知识好像是只学习了线性代数的主干内容,但没涉及线性代数的理论精髓.其实,有前面各章内容作为基础,学懂本章知识并不是困难的.

1.线性空间的定义

设 V 是一个非空集合,R 为实数域,如果对于任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$

$\in V$,总有唯一的一个元素 $\gamma\in V$ 与之对应,称为 α 与 β 的和,记作 $\gamma=\alpha+\beta$;又对于任一数 $\lambda\in R$ 与任一元素 $\alpha\in V$,总有唯一的元素 $\delta\in V$ 与之对应,称为 λ 与 α 的积,记作 $\delta=\lambda\alpha$;并且这两种运算满足以下八条运算规律(设 $\alpha,\beta,\gamma\in V,\lambda,\mu\in R$):

①$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

②$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③在 V 中存在零元素 0,对任何 $\alpha\in V$,都有 $\alpha+0=\alpha$;

④对任何 $\alpha\in V$,都有 α 的负元素 $\beta\in V$,使 $\alpha+\beta=0$(设 $\beta=-\alpha$);

⑤对于实数 1,$1\cdot\alpha=\alpha$;

⑥$\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$;

⑦$(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$;

⑧$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$.

那么,V 就称为(实数域 R 上的)向量空间(线性空间),V 中的元素不论其本来的性质如何,统称为(实)向量.

注　掌握这一定义的关键是:不论非空集合 V 是何元素构成的,只要在该集合上定义了具有封闭性且满足八条运算律的线性运算(加法及数乘运算),就是线性空间.这是将第四章中由 n 维数组(n 维向量)作为元素定义的线性空间的概念加以推广得出的一个更一般的定义.

2.线性空间的性质

①零元素是唯一的;

②任一元素的负元素是唯一的;

③$0\alpha=0$,　$(-1)\alpha=-\alpha$,　$\lambda 0=0$;

④如果 $\lambda\alpha=0$,则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=0$.

3.子空间

设 L 是线性空间 V 的一个非空子集,如果 L 对于 V 中所定义的加法和数乘运算也构成一个线性空间,则 L 叫 V 的一个子空间.

线性空间 V 的非空子集 L 构成 V 的子空间的充分必要条件是 L 对 V 中定义的线性运算封闭.

这里要注意“子集合”与“子空间”两概念之间的区别.

4.线性空间的基、维数

将第四章中讨论的 n 维数组向量构成的向量组中关于线性组合、线性相关与无关、向量组的秩、向量空间的基与维数、向量在基下的坐标等概念都可以移植到现在讨论的(不一定是 n 维数组向量)更一般的向量构成的向量空向中来,就是说对于一般的线性空间 V,我们可以定义,如果存在 n 个元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足:

①$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

②V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,那么就称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一个基,基中向量的个数 n 为线性空间的维数,维数为 n 的线性空间记作 V_n.这里要注意的是线性空间 V 的基可能不止一个,但基中向量个数(即空间 V 的维数)是唯一的.

5.元素在基下的坐标及同构的概念

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V_n 的一个基,对于 V_n 中的任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$,总有且仅有一组有序实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$,有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 叫元素在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

这就是说在 V_n 的一组基下,V_n 的任一元素与 n 维数组向量 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in R^n$ 有一一对应的关系.这时 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\cdot x$,此时亦称数组向量 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 x 的一一对应关系,记作 $\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow x$,也可记 $\boldsymbol{\alpha}=x$.

对于 V_n 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下,若 $\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$,$\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T$,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T+[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T$,$\lambda\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow\lambda[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$,其中 $\lambda\in R$.

就是说,这个对应关系保持线性组合的对应,这时称 V_n 与 R^n 同构,这样 V_n 中的线性运算就可转化为 R^n 中的线性运算.

一般地,若 V 与 U 是两个线性空间,如果在它们的元素之间有一一对应的关系,且这个对应关系保持线性组合的对应关系,那么就称线性空间 V 与 U 同构.

6. **基变换与坐标变换**

①设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V_n 中的两个基，

且
$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \qquad\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases} \tag{6-1}$$

将上式表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix}p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1}\\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn}\end{matrix}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} = P^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ a_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix},$$

或
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)P, \tag{6-2}$$

其中
$$P = \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix},$$

我们将式(6-1)或式(6-2)叫基变换公式，称矩阵 P 为由基(旧基) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基(新基) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵. 由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，故过渡矩阵 P 是可逆阵.

②设 V_n 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $[x'_1,x'_,\cdots,x'_n]^T$，若两个基满足基变换公式

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n] = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]P,$$

则有坐标变换公式

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_n\end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_n\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

反之，V_n 中的任一元素在两个不同基下的坐标均满足如上坐标变换公式，则这两个基满足基变换公式.

这就是说，有了过渡矩阵（或有了基变换公式）我们就可以将 V_n 中的任一元素在不同基下进行坐标变换.

7.变换（映射）及线性变换

(1) 变换

设有两个非空集合 A,B，如果对于 A 中任一元素 α 按照某一规则，总有 B 中一个确定的元素 β 与之对应，那么这个对应规则称集合 A 到集合 B 的变换（或映射），将该变换用 T 表示，则可记为 $\beta = T(\alpha)$，并称 β 为 α 在变换 T 下的像，称 α 为 β 在变换 T 下的源，A 叫变换 T 的源集，像的全体构成的集合为像集记作 $T(A)$，就是 $T(A) = \{\beta = T(\alpha) \mid \alpha \in A\}$，显然 $T(A) \subset B$.

注　映射的概念不一定是一一对应，它是函数概念的推广.

(2) 线性变换

设 V_n，U_m 分别是实数域上的 n 维和 m 维线性空间，T 是一个从 V_n 到 U_m 的变换，如果变换 T 满足：

①任给 $\alpha_1,\alpha_2 \in V_n$，有 $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2)$；

②任给 $\alpha \in V_n$，$k \in R$ 有 $T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

那么，T 就称为从 V_n 到 U_m 的线性变换.

这就是说两个线性空间之间的线性变换是指“保持线性组合的对应关系”的一种变换.

特别地，若 $U_m = V_n$，那么 T 是一个从线性空间 V_n 到其自身的线性变换，称之为线性空间 V_n 中的线性变换.

(3) 线性空间 V_n 中的线性变换 T 的主要性质

①$T(0) = 0$，$T(-\alpha) = -\alpha$；

②若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, + \cdots + k_m\alpha_m$，则

$$T(\beta) = k_1 T(\alpha_1) + k_2 T(\alpha_2) + \cdots + k_m T(\alpha_m)；$$

③若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_m)$ 亦线性相关（注意该命题的逆命题不成立）；

④线性变换 T 的像集 $T(V_n)$ 是一个线性空间(该线性空间是 V_n 的一个子空间)称之为线性变换 T 的像空间;

⑤使 $T(\alpha)=0$ 的 α 的全体 $S_T=\{\alpha \mid \alpha\in V_n, T(\alpha)=0\}$ 也是 V_n 的子空间,S_T 称为线性变换 T 的核.

(4)齐次线性方程组的解空间

设有 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n],$$

其中 $$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}(i=1,2,\cdots,n).$$

定义 R^n 中的变换 $y=T(x)$ 为 $T(x)=Ax\ (x\in R^n)$,则 T 是线性变换,T 的像空间就是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 所生成的向量空间,

$T(R^n)=\{y=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$;

T 的核 S_T 就是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间.

注　这一定义可以推广到更一般的矩阵 $A_{m\times n}$ 的情况,可得出一般线性方程 $A_{m\times n}x=0$ 的解空间的概念(此时的线性变换 T 是由 R^n 到 R^m 的线性变换).

8.线性变换的矩阵表示式

设 T 是线性空间 V_n 中的线性变换,在 V_n 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,如果这个基在变换 T 下的像为

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ T(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \qquad\cdots\cdots \\ T(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n, \end{cases}$$

并记 $T[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)]$,
上式可表示为

$$T[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A,$$

其中 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,并称 A 为线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵.

在 V_n 中取定一个基以后,由线性变换 T 可唯一地确定一个矩阵 A;反之,由一个矩阵 A 在 V_n 中也可唯一地确定一个线性变换 T,这样在线性变换与矩阵之间就有一一对应的关系.

(1) 线性变换在不同基下的矩阵

设线性空间 V_n 中取定两个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 P,V_n 中的线性变换 T 在这两个基下的矩阵依次为 A 和 B,那么 $B=P^{-1}AP$.

这说明 B 与 A 是相似矩阵,两个基之间的过渡矩阵 P 就是相似变换矩阵.

(2) 线性变换的秩

称线性变换 T 的像空间 $T(V_n)$ 的维数为线性变换 T 的秩.显然,若 A 是 T 的矩阵,则 T 的秩就是 $R(A)$;若 T 的秩 $R(A)=r$,则 T 的核 S_T 的维数为 $n-r$.

三、典型例题分析

1.关于向量空间、子空间、基、维数等概念的问题

例 1 验证 2 阶方阵的全体 S_2 对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间.

证明 任取 $\alpha,\beta\in S_2$,并设 $\alpha=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,$\beta=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

则 $$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}=\boldsymbol{\gamma}\in S_2 .$$

又设 $\lambda\in R$,则 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}\in S_2$,

这说明 S_2 对于矩阵的加法和数乘运算封闭,又可验证线性空间定义中八条运算律均对 S_2 成立(略),故 S_2 对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间.

注　此题着重考查学生对线性空间这一定义的掌握,具有一般性.

例 2　验证 2 阶对称方阵的全体 L_2 对于矩阵的加法和数乘运算构成题 1 中线性空间 S_2 的子空间.

解　设 A,B 是 L_2 中任意两个元素,不妨令 $A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$,则 $A+B=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & a_2+b_2 \end{bmatrix}\in L_2\subset S_2$.

任取 $\lambda\in R$,则 $\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda a_2 \end{bmatrix}\in L_2\subset S_2$.

故 L_2 对矩阵的加法和数乘运算封闭,L_2 是线性空间而且是 S_2 的子空间.

例 3　验证主对角线上元素之和为 0 的 2 阶方阵的全体 S_2 对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间,并写出该空间的一个基,指出其维数.

解　验证从略.

S_2 的一个基为$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,$S_2$ 的维数为 3.

注　此题着重考查学生对空间的基和维数概念的掌握.

2. 关于同构的概念

例 4　验证题 3 中 S_2 与 R^3 同构.

解　任取 $A\in S_2$,不妨设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix}$,A 在基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$下的坐标为$[a_{11},a_{12},a_{21}]^T$.

同理设$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&-b_{11}\end{bmatrix}\in S_2$，则 B 在该基下的坐标为$[b_{11},b_{12},b_{21}]^T$，所以 $A+B$ 在该基下的坐标为$[a_{11}+b_{11},a_{12}+b_{12},a_{21}+b_{21}]^T$，

λA 在该基下的坐标为$[\lambda a_{11},\lambda a_{12},\lambda a_{21}]^T$ $(\lambda\in R)$，故 S_2 与 R^3 同构.

3. 关于向量在基下的坐标、过渡矩阵、线性变换及其矩阵问题

例 5 在 R^3 中求向量 $\boldsymbol{\alpha}=[3,-5,2]$在基 $e_1=[1,0,0]$，$e_2=[1,1,0]$，$e_3=[1,1,1]$下的坐标.

解 设 $a=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\ \qquad x_2+x_3=-5,\\ \qquad\qquad x_3=2,\end{cases}\text{解之得}\begin{cases}x_1=8,\\x_2=-7,\\x_3=2.\end{cases}$$

故有 $\boldsymbol{\alpha}=8e_1-7e_2+2e_3$.

例 6 在 R^3 中，设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

解 $$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=P^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix},$$

故由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0&2&3\\1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

例 7 设 R^3 中有两个基 $e_1=[1,0,0]$，$e_2=[0,1,0]$，$e_3=[0,0,1]$；$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,3]$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,7,1]$.求坐标变换公式.

解 $$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&7&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}=P^T\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}\text{，故 }P=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}.$$

坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

例 8　在 V_3 中的如下变换是不是线性变换？

(1) $T[x_1, x_2, x_3] = [x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1]$；

(2) $T[x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_2 - 1, x_3 - 2]$；

(3) $T[x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_3, x_1 - x_2 - x_3]$；

(4) $T[x_1, x_2, x_3] = [x_2, x_3 - x_1, x_1^2]$.

解　(1) (3) 是，(2) (4) 不是.

例 9　求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2, x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ **的解空间.**

解　先求得该方程组的基础解系为 $\zeta_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \zeta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

故 $S_r = \{c_1\zeta_1 + c_2\zeta \mid c_1, c_2, \in R\}$ 即为该线性方程组的解空间.

例 10　在 R^3 中取两个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,1]^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = [2,3,3]^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = [3,7,1]^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = [3,1,4]^T, \boldsymbol{\beta}_2 = [5,2,1]^T, \boldsymbol{\beta}_3 = [1,1,-6]^T,$$

求坐标变换公式.

解　设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

则　$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3] A,$$

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]B$$

$$=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]A^{-1}B$$

(这里 $P=A^{-1}B$ 即为过渡矩阵).

为求 $B^{-1}A$,将矩阵 $(B \vdots A)$ 中的 B 用初等行变换变成 E,则相应地 A 即变成 $B^{-1}A$,即

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&5&1&1&2&3\\1&2&1&2&3&7\\4&1&-6&1&3&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&13&19&\frac{181}{4}\\0&1&0&-9&-13&-\frac{63}{2}\\0&0&1&7&10&\frac{99}{4}\end{array}\right],$$

故坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&19&\frac{181}{4}\\-9&-13&-\frac{63}{2}\\7&10&\frac{99}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}Ax=P^{-1}x,$$

或
$$x=Py=\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}y.$$

例 11 在 R^4 中取两个基

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,0,0,0]^T,\\\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0,1,0,0]^T,\\\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,0,1,0]^T,\\\boldsymbol{\varepsilon}_4=[0,0,0,1]^T,\end{cases}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,-1,1]^T,\\\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1,0]^T,\\\boldsymbol{\alpha}_3=[5,3,2,1]^T,\\\boldsymbol{\alpha}_4=[6,6,1,3]^T.\end{cases}$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵;

(2) 求向量 $[x_1,x_2,x_3,x_4]$ 在基(II)下的坐标;

(3) 求在两个基下有相同坐标的向量.

解　(1) 由 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_4, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = 3\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3, \\ \boldsymbol{\alpha}_3 = 5\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 3\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_4, \\ \boldsymbol{\alpha}_4 = 6\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 6\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3 + 3\boldsymbol{\varepsilon}_4,\end{cases}$

即
$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

故过渡矩阵 $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

(2) 为求 P^{-1}，对 $(P \mid E)$ 做初等行变换得

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{11}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{27} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{23}{27} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{26}{27} \end{array}\right],$$

故
$$P^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{bmatrix},$$

所以
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

即为向量$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$在基(II)下的坐标.

(3) 设向量$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$在基(I)下的坐标为$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$,由题意

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}\text{,且由}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

故
$$\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

有方程组
$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 - 27x_3 - 33x_4 = 27x_1, \\ x_1 + 12x_2 - 9x_3 - 23x_4 = 27x_2, \\ 9x_1 - 18x_4 = 27x_3, \\ -7x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 26x_4 = 27x_4, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -15x_1 + 9x_2 - 27x_3 - 33x_4 = 0, \\ x_1 - 15x_2 - 9x_3 - 23x_4 = 0, \\ 9x_1 - 27x_3 - 18x_4 = 0, \\ -7x_1 - 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

解得
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} (k \in R).$$

4. **关于映射、像、线性变换的秩等概念**

例 12　**若线性空间** R^n **中的一个线性变换为** $T[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T = [0, x_1, \cdots, x_{n-1}]^T$.

(1) **求** T **对应的矩阵** A；

(2) **求** T **的像空间** $T(R^n)$，**并指出线性变换** T **的秩**；

(3) **求** T **的核** S_T，**并指出** S_T **的维数**.

解　(1) **取** R^n **的一组基**：

$e_1 = [1, 0, \cdots, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, \cdots, 0, 0]^T, \cdots, e_n = [0, 0, \cdots, 0, 1]^T$，**则**

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_2, \\ T(e_2) &= e_3, \\ \cdots\ &\cdots \\ T(e_{n-1}) &= e_n, \\ T(e_n) &= 0, \end{aligned} \quad \text{，所以 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) $T(R^n) = \{[0, x_1, \cdots, x_{n-1}]^T \mid x_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n-1\}$，**由** $R(A) = n-1$，**故** $T(R^n)$ **的维数即线性变换** T **的秩为** $n-1$.

(3) $S_T = \{[x, 0, \cdots, 0]^T \mid x \in R\}$，$S_T$ **的维数等于** 1.

四、自测题

1. **证明** n **阶方阵的全体** M_n **在矩阵的加法和数乘运算下构成一个线性空间.写出** M_n **的一个基并指出** M_n **的维数**.

2. **设** M_n **是所有** n **阶矩阵的加法和数乘运算下构成的线性空间.下列集合中，哪一个是** M_n **的子空间？若是，写出它的一个基，并指出其维数. 若不是说明原因**.

(1) $W_1=\{$全体 n 阶可逆矩阵$\}$；

(2) $W_2=\{$全体 n 阶对称矩阵$\}$.

3. 设 4 维线性空间 V_4 的两个基：

$$\begin{cases} e_1=[1,0,0,0]^T, \\ e_2=[0,1,0,0]^T, \\ e_3=[0,0,1,0]^T, \\ e_4=[0,0,0,1]^T, \end{cases} \text{和} \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}=[1,2,-1,0]^T, \\ \boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,1,1]^T, \\ \boldsymbol{\alpha}_3=[-1,2,1,1]^T, \\ \boldsymbol{\alpha}_4=[-1,-1,0,1]^T. \end{cases}$$

(1) 求由基 $\{e_i\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 的过渡矩阵；

(2) 求由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 到基 $\{e_i\}$ 的过渡矩阵.

4. 设 R^3 中的两个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，求 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

5. 设 M_2 是所有 2 阶方阵在矩阵的线性运算下构成的线性空间. 它的两个基①和②分别是

① $E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$；

② $A_1=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix}6&6\\1&3\end{bmatrix}$.

(1) 求从基 (1) 到基 (2) 的过渡矩阵；

(2) 求 $A=\begin{bmatrix}4&0\\2&-1\end{bmatrix}$ 在基 (1) 和基 (2) 下的坐标.

6. 设 R^3 中线性变换

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y-2z\\2x-y+z\\x-2y+3z\end{bmatrix},$$

求 T 的像空间 $T(R^3)$ 及核 S_T 的基与维数.

五、自测题答案与提示

1. 任取 $A_n\in M_n$，$B_n\in M_n$，则 $A_n+B_n\in M_n$.

任取 $\alpha \in R$，$A_n \in M_n$. 则 $\alpha A_n \in M_n$，所以 M_n 对线性运算封闭，且满足所有八条运算律，由线性空间的定义知 M_n 对于矩阵的加法和数乘构成一个线性空间.

令 E_{ij} 是 (i, j) 元素为 1，其余元素均为零的 n 阶矩阵，则集合 $S = \{E_{ij} \mid i, j = 1, 2, \cdots, n\}$ 即为 M_n 的一个基. 事实上：

(1) 集合 S 线性无关，因若有 $\sum_{i,j} k_{ij} E_{ij} = 0$，$k_{ij} \in R$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$，则由 n 阶矩阵 $K = (k_{ij}) = 0$ 可得，$k_{ij} = 0$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$.

(2) 对于任意的 $A_n = (a_{ij}) \in M_n$，有 $A_n = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$，即 A_n 可由 S 线性表示. 又由 S 中的向量为 n^2 个，故 M_n 的维数是 n^2.

2. (1) W_1 不是 M_n 的子空间.

如设 A_n 是可逆阵，则 $-A_n$ 仍为可逆阵，而 $A_n + (-A_n) = 0$ 不是可逆阵，故 W_1 对矩阵的加法不封闭，所以它不是 M_n 的子空间.

(2) W_2 是 M_n 的子空间. 事实上，$W_2 \subset M_n$ 且任取 $A_n \in W_2$，$B_n \in W_2$，$k \in R$，有

$$(A_n + B_n)^T = A_n^T + B_n^T = A_n + B_n \in W_2, \quad (kA_n)^T = kA_n^T \in W_2,$$

说明 W_2 对矩阵的线性运算封闭，所以 W_2 是 M_n 的子空间.

令 T_{ij} 是元素 (i, j) 和 (j, i) 为 1，其余元素均为零的 n 阶矩阵 $(i \leqslant j, j = 1, 2, \cdots, n)$，则 $T_{ij} \in W_2$，且向量组 $T = \{T_{ij} \mid i = 1, 2, \cdots, j; j = 1, 2, \cdots, n\}$ 线性无关，任取 $A_n = (a_{ij}) \in W_2$，A_n 必可由向量组 T 线性表示. 事实上，因为 $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} k_{ij} T_{ij} = 0$，则 $k = (k_{ij}) = 0$（这里 $k_{ij} = k_{ji}$），故 $k_{ij} = 0$，$i = 1, 2, \cdots, j; j = 1, 2, \cdots, n$，故向量组 T 线性无关，又因 $A_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} T_{ij}$，故向量组 T 是 W_2 的一个基，其维数等于

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. (1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $Q=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}3&2&-6&5\\5&-1&3&4\\-2&3&4&1\\-3&-2&-7&8\end{bmatrix}$.

4. $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $[1,-8,-4]^T$.

5. (1) 过渡矩阵 $P=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$.

(2) A 在基①下的坐标为 $[4,0,2,-1]^T$,

A 在基②下的坐标为 $P^{-1}[4,0,2,-1]^T=\left[1,\frac{1}{3},2,-\frac{4}{3}\right]^T$.

6. 取 R^3 的标准正交基 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

由已知得 $T(e_1)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, T(e_2)=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}, T(e_3)=\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$.

令 $A=[T(e_1),T(e_2),T(e_3)]=\begin{bmatrix}1&1&-2\\2&-1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}$,

于是像空间 $T(R^3)$ 是矩阵 A 的列向量组所生成的空间,由

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\2&-1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-3&5\\0&-3&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-\frac{5}{3}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{5}{3}\\0&0&0\end{bmatrix},$$

知 A 的秩为 2,且第 1 列与第 2 列线性无关(不唯一),故像空间 $T(R^3)$ 的维数等于 2,且 $T(e_1)=[1,2,1]^T$,$T(e_2)=[1,-1,-2]^T$,$T(e_3)=[-2,1,3]^T$ 是 $T(R^3)$ 的一个基(基不唯一).

设 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in S_T$,由定义 $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$,即 x,y,z 应满足

$$\begin{cases} x+y-2z=0, \\ 2x-y+z=0, \\ x-2y-3z=0, \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵即为 A,其基础解系为 $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3},1\right]^T$,它即是核 S_T 的一个基且 S_T 的维数为 1.

综合练习题(一)

一、填空题

1. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix} =$ ______.

2. 设 $f(x) = \begin{bmatrix} 5x & 1 & 2 & 3x \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{bmatrix}$,则 $f(x)$ 展开式中常数项为______.

3. 设 5 阶方阵 A 的秩为 3,则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为______.

4. 设 n 阶方阵 A 的元素全为 -1.则 A 的 n 个特征值是______.

二、选择题

1. 以下说法不正确的是(   ).

(A) 若 A,B 为同阶方阵,则 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(B) 若 A,B 为同阶可逆阵,则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(C) 若 $|A_n| \neq 0$,则 A_n 可经初等变换化成 E_n

(D) 若 A,B 为同阶可逆阵,则 $AB = BA$

2. 设 A 是一方阵,则下列结论不正确的是(   ).

(A) $A + A^T$ 为对称阵　　(B) $A - A^T$ 为对称阵

(C) AA^T 为对称阵　　(D) $A - A^T$ 为反对称阵

3. 设 n 阶方阵 A 和 B 满足 $A + B = AB$,则下列结论正确的是(   ).

(A) $A - E$ 可逆,$B - E$ 不可逆

(B) $A - E$ 不可逆,$B - E$ 可逆

(C) $A-E$ 可逆,$B-E$ 亦可逆

(D) $A-E$ 不可逆,$B-E$ 亦不可逆

4.下列向量集合中构成向量空间的是(　　).

(A) $V_1=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1,x_i\in R\}$

(B) $V_2=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_i\in R\}$

(C) $V_3=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=0,x_i\in R\}$

(D) $V_4=\{x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,x_i\in R\}$

三、判断题

1.若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关.(　　)

2.5 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 是相关向量组.(　　)

3.若 A,B 为同阶对称阵,则 AB 亦为对称阵.(　　)

4.二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 为正定二次型.(　　)

5.设 A,B 是同阶方阵,若 A,B 可交换(即 $AB=BA$),则 AB 与 BA 可交换.(　　)

四、解下列各题

1.计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$.

2.设 A 为 n 阶正交阵,且 $|A|\neq1$,求 $|A+E|$.

3.设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$,且 3 阶方阵 X 满足

$A^*X=A^{-1}+2X$,求 X.

4.讨论 λ 为何值时线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=\lambda,\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2,\\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$$

无解？有解？在有解时求全部解.

5.设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\2&-3&-2\\-2&2&1\end{bmatrix}$,问 A 是否能对角化？若能,求出可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$,并求 A^{100} 及 A^{101}.

五、证明题

1.设 A,B 都是 n 阶方阵,且 $|A|\neq 0$,证明 AB 与 BA 具有相同的特征值.

2.设 A 是 $m\times n$ 矩阵,试证 A^TA 是正定矩阵的充要条件是 A 的列向量组线性无关.

综合练习题(二)

一、填空题

1.设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\7&8&9&10\\-63&54&-41&32\\200&-99&103&81\end{vmatrix}$,

则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=$______(其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式).

2.设 A 为 3 阶方阵且 A 的秩 $R(A)=2$.则 $R(A^*)=$______.

3.设 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&k\\-1&2&3\end{bmatrix}$,B 为 3 阶非零矩阵,且 $AB=0$,则 $k=$______.

4.若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性______.

二、选择题

1.设 A,B 为同阶对称阵,则下列结论不正确的是(　　).

(A) kA(k 为任意数)亦为对称阵　(B) A+B 亦为对称阵

(C) AB 亦为对称阵　(D) A^k(k 为正整数)亦为对称阵

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 则下列说法中正确的是(　　).

(A) α_1 必可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示

(B) α_2 必不可由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示

(C) α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

(D) α_4 必不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = 0$ 是非齐次方程组 $Ax = b$ 所对应的齐次方程组, 则必有(　　)成立.

(A) 若 $Ax = 0$ 有解, 则 $Ax = b$ 有解

(B) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 有无穷多解

(C) 若 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解

(D) 若 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 有非零解

4. 设 n 阶方阵 A 经初等变换化成 B, 则必有(　　)成立.

(A) $|A| = |B|$　　(B) $|A| \neq |B|$

(C) $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解　　(D) $R(A) = R(B)$

三、判断题

1. 设 A 是非奇异方阵, 则 $(A^*)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$. (　　)

2. 若 A 与 B 是同阶方阵, 则 $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. (　　)

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & x & y \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 相似, 则 $x = 46$, $y = 12$. (　　)

4. 设 n 阶方阵 A 与 B 的秩相等, 则必存在 n 阶可逆阵 P, Q, 使得 $PAQ = B$. (　　)

5. 如果向量空间 V 的向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关. (　　)

四、解下列各题

1. **计算行列式** $D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. **已知** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,**使** $2AX = X + B^2$ **成立,求** X.

3. **设线性方程组** $\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$ **问** a,b **为何值时该方程组无解?有唯一解?有无穷多解?并在有解的情况下求出方程组的解**.

4. **设** $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,**问** A **是否可以相似对角化?若能求出可逆变换阵** P **使** $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda}$.

5. **设** R^3 **中的两组基分别为** $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **及** $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

⑴ **求由基** $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ **到基** $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$ **的过渡矩阵;**

⑵ **求** $\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ **在基** $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ **下的坐标**.

五、证明题

1. 设 $A^2 = B^2 = E$，且 $|A| + |B| = 0$，证明 $A + B$ 为奇异矩阵.

2. 设 A 为正交矩阵，证明 A 的伴随矩阵 A^* 也是正交矩阵.

综合练习题(一)解答

一、填空题

1. $x^n + (-1)^{n+1} y^n$.

分析 此行列式按第一行展开，用上(下)三角行列式的计算即可.

2. 0.

分析 $f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

3. 0.

分析 因为 $A^* = 0$(所有 4 阶子式为 0)，所以 $R(A^*) = 0$.

4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$，$\lambda_n = -n$.

分析

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+n & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda+n & \lambda+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda+n & 1 & \cdots & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + n)\lambda^{n-1},$$

所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = -n$.

二、选择题

1. (D) 2. (B)

3. (C)

分析 **由** $A + B = AB$,**有** $AB - A - B + E = E$,

即 $A(B - E) - (B - E) = E$,

$(A - E)(B - E) = E$,**故** $A - E$,$B - E$ **均可逆**.

4. (B)

三、判断题

1. × 2. √ 3. × 4. √ 5. √

四、解下列各题

1. **解**

$$D_4 \xlongequal[r_4 - r_3]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \end{vmatrix}$$

$$= (-x)(-y)\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_2]{r_1 - r_4} xy\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1+y & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

2.**解** 因为 A 是正交阵,故 $AA^T=E$,所以

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||E+A^T|$$
$$=|A|\cdot|(E+A)^T|=|A|\cdot|E+A|,$$

所以 $(1-|A|)\cdot|E+A|=0$,又因为 $|A|\neq1$,所以 $|E+A|=0$.

3.**解** 由 $A^*X=A^{-1}+2X$,有 $(A^*-2E)X=A^{-1}$,

$$X=(A^*-2E)^{-1}A^{-1}=[A(A^*-2E)]^{-1}$$
$$=[|A|\cdot E-2A]^{-1}=\left[\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&2&2\\2&-2&2\\2&2&-2\end{bmatrix}\right]^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}6&-2&-2\\-2&6&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}^{-1}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}6&-2&-2&1&0&0\\-2&6&-2&0&1&0\\-2&-2&6&0&0&1\end{array}\right]$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&2&2&1&1&1\\-2&6&-2&0&1&0\\-2&-2&6&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&2&2&1&1&1\\0&8&0&1&2&1\\0&0&8&1&1&2\end{array}\right]$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\0&0&1&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&\frac{3}{8}&\frac{3}{8}&\frac{2}{8}\\0&1&0&\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{1}{8}\\0&0&1&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{2}{8}\end{array}\right]$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{2}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\0&1&0&\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{1}{8}\\0&0&1&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{2}{8}\end{array}\right],$$

所以 $$X=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

4.解 $$B=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&2-3\lambda\\0&1&-2&3-4\lambda\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&2-3\lambda\\0&0&0&1-\lambda\end{array}\right].$$

当 $\lambda\neq1$ 时,$R(A)=2\neq R(B)=3$,方程组无解;

当 $\lambda=1$ 时,$R(A)=R(B)=2$,$n=3$,方程组有无穷多解,这时

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1\\4&1&2&3\\6&1&4&5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

所以 $\begin{cases}x_1=-x_3+1,\\x_2=2x_3-1,\\x_3=x_3,\end{cases}$ 即 $x=k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ $(k\in R)$ 为全部解.

5.解 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-1&2&2\\-2&\lambda+3&2\\2&-2&\lambda-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-1&2&2\\0&\lambda+1&\lambda+1\\2&-2&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{bmatrix}\lambda-1&2&2\\0&1&1\\2&-2&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{bmatrix}\lambda-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&\lambda+1\end{bmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$,$\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$;

对于 $\lambda_3=1$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$.

因为有三个线性无关的特征向量,所以 A 可以对角化,令

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix},\text{则有 } P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

故有
$$A=P\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1},\text{所以}$$

$$A^{100}=P\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}^{100}P^{-1}=P\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}=E,$$

$$A^{101}=P\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}^{101}P^{-1}=P\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}=A.$$

五、证明题

1.证明　因为 $|A|\neq0$ 所以 A 可逆,且 0 不是 A 的特征值.

设 λ 是 AB 的特征值,x 是 λ 对应的特征向量,则 $ABx=\lambda x$,即

$$A(Bx)=\lambda x,$$

这里 $Bx\neq0$,如不然,$\lambda x=0$,则 $\lambda=0$ 与假设矛盾.

将式 $ABx=\lambda x$,两边左乘 B,得 $BA(Bx)=\lambda Bx$,说明 λ 是 BA 的特征值,而 Bx 是对应的特征向量.

2.证明　必要性.设 n 维列向量 x 使 $Ax=0$,则 $(x^TA^T)(Ax)=0$,即 $x^T(A^TA)x=0$.

由 A^TA 正定知 $x=0$,故 $Ax=0$ 只有零解,所以 A 的列向量组线性无关.

充分性.设 x 是非零的 n 维列向量,由 A 的列向量组线性无关,知 $Ax\neq 0$,从而 $(Ax)^{T}(Ax)=x^{T}A^{T}Ax>0$,故 $A^{T}A$ 是正定矩阵.

综合练习题(二)解答

一、填空题

1.分析　由拉氏定理的推论知 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}=0$,

这里 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=1$,故 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=0$.

2.1.

分析　因为 $R(A)=2$,所以 A 有 2 阶非零子式,且 $|A|=0$,说明 A^{*} 的秩至少为 1.

又因为 $AA^{*}=|A|E=0$ $(|A|=0)$,因为若 $AB=0\Rightarrow R(A)+R(B)\leqslant n$,这里 $n=3$,故 $R(A^{*})=1$.

3.1.5.

分析　因为　$AB=0$,若 $|A|\neq 0$,则存在 A^{-1} 使

$$A^{-1}AB=A^{-1}0\Rightarrow B=0,$$

与 $B\neq 0$ 矛盾,故 $|A|=0$,而 $|A|=15-10k$,所以 $k=1.5$.

4.相关.

二、选择题

1.(C)　2.(C)　3.(D)　4.(D)

三、判断题

1.√　2.×　3.√　4.√　5.√

四、解下列各题

1.解　第一列加至第二列,然后第二列加至第三列...,第 n 列加至第 $n+1$ 列,有

$$D=\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n.$$

2.**解** 由已知可得 $(2A-E)X=B^2$，即 $\left(\frac{2A-E}{3}\right)X=\frac{B^2}{3}$，

$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，而 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}=C$ 为正交阵，由 $C^{-1}=C^T$，

则 $$X=C^T\cdot\frac{B^2}{3}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}^T\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&2\\2&2&-1\end{bmatrix}.$$

注 本题化为 $(2A-E)X=B^2$，可用 $X=(2A-E)^{-1}B^2$ 求 X. 这样要算 $(2A-E)^{-1}$ 较繁. 这里用到正交阵的逆等于其转置，计算较为简单.

3.**解**

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\1&a&1&b\\1&1&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&a&2&b-1\\0&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&a&2&b-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&2-a&b-1\end{array}\right].$$

(1) 当 $a=2, b\neq 1$ 时，$R(A)=2\neq R(B)=3$，无解；

(2) 当 $a\neq 2$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解，且

$$B\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&\frac{b-1}{2-a}\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1+\frac{b-1}{2-a}\\0&1&0&-\frac{b-1}{2-a}\\0&0&1&\frac{b-1}{2-a}\end{array}\right],$$

所以 $x_1=\frac{1-a+b}{2-a}$，$x_2=\frac{1-b}{2-a}$，$x_3=\frac{b-1}{2-a}$.

(3) 当 $a=2$，$b=1$ 时，$R(A)=R(B)=2<3$，有无穷多解，

$$B\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right],\begin{cases}x_1=x_3+1,\\x_2=-x_3,\\x_3=-x_3,\end{cases}$$

所以 $$x=k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ (k\in R).$$

4.解　因为 A 是实对称阵，所以 A 可以相似对角化，

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-5&4&2\\4&\lambda-5&-2\\2&-2&\lambda-2\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$$E-A=\begin{bmatrix}-4&4&2\\4&-4&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $x=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ 为对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量　($k_1,k_2\in R$，k_1,k_2 不同时为 0)；

对于 $\lambda_3=10$，$10E-A=\begin{bmatrix}5&4&2\\4&5&-2\\2&-2&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$，

所以 $x=k_3\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$ $(k_3\in R, k_3\neq 0)$ 为对应于 $\lambda_3=10$ 的全部特征向量，

令 $P=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{bmatrix}$.

5.解　(1) 设过渡阵为 P，由 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]P$，

所以

$$P=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

(2) 设 ζ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 x_1,x_2,x_3，则

$$\zeta=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}\zeta=\begin{bmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix}.$$

五、证明题

1.证明　由 $A^2=B^2=E$，知 $|A|=|B|=\pm 1$，又

$$|A+B|=|AE+EB|=|AB^2+A^2B|=|A|\cdot|B+A|\cdot|B|,$$

因为 $|A|+|B|=0$，所以 $|A|=-|B|$，故 $|A+B|=-|B|^2\cdot|A+B|$.

故 $|A+B|(1+|B|^2)=0$，而 $1+|B|^2\neq 0$，有 $|A+B|=0$，所以 $A+B$ 为奇异矩阵.

2. **证法一** 因为 $AA^T=E$，$|A|=\pm 1$，$A^{-1}=A^T$，所以

$$A^*=\pm A^{-1}=\pm A^T.$$

而 $(A^*)^T A^*=(\pm 1)^2(A^T)^T A^T=AA^T=E$，所以 A^* 是正交阵.

证法二 因为 $A^T=A^{-1}$，$A^*=\pm A^T$，所以

$$(A^*)^{-1}=(\pm A^T)^{-1}=\pm A=(\pm A^T)^T=(A^*)^T,$$

所以 A^* 是正交阵.

研究生考题(一)

一、填空题

从 R^2 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的过渡矩阵为________.

二、选择填空题

1.设向量组 I:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则________.

(A) 当 $r<s$ 时,向量组 II 必线性相关

(B) 当 $r>s$ 时,向量组 II 必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时,向量组 I 必线性相关

(D) 当 $r>s$ 时,向量组 I 必线性相关

2.设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$,其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵,现有 4 个命题:

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解,则秩(A)$\geqslant$秩(B);

② 若秩(A)$\geqslant$秩(B),则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解;

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解,则秩(A)=秩(B);

④ 若秩(A)=秩(B),则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是________.

(A) ①② (B) ①③ (C) ②④ (D) ③④

三、计算题

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$,$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$B=P^{-1}A^*P$,求 $B+2E$ 的特征值与特征向量,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵,E 为 3 阶单位矩阵.

四、证明题

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$

$l_2: bx+2cy+3a=0$,

$l_3: cx+2ay+3b=0$.

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$. $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=P^{-1}A^{*}P$,求 $B+2E$ 的特征值与特征向量. 其中 A^{*} 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵.

研究生考题(二)

一、填空题

矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 B 满足 $ABA^{*}=2BA^{*}+E$,其中 A^{*} 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵,则 $|B|=$________.

二、选择填空题

1. 设 A 是 3 阶方阵,将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B,再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C,则 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为________.

(A) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

2. 设 A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵,则必有________.

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

三、计算题

1. 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\quad (n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

2.设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 A 是否可相似对角化.

研究生考题(一)解答

一、解　根据定义,从 R^2 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 的过渡矩阵为 $P=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{bmatrix}$.

二、1.解　用排除法 如 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1=0\cdot\boldsymbol{\beta}_1+0\cdot\boldsymbol{\beta}_2$,但 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,排除(A);$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$ 线性表示,但 $\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关,排除(B);$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示,但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关,排除(C).故正确选项为(D).

2.解　浏览四个命题,④显然错误,如 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$,则 $R(A)=R(B)$,但 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 不同解.而④又可以作为②的特

例,所以命题②不成立.所以选(B).

三、分析 可先求出 A^*,P^{-1},进而确定 $B=P^{-1}A^*P$ 及 $B+2E$,再按通常方法确定其特征值和特征向量.或先求出 A 的特征值与特征向量,再相应地确定 A^* 的特征值与特征向量,最终根据 $B+2E$ 与 A^*+2E 相似求出其特征值与特征向量.

解法一 经计算可得

$$A^*=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$B=P^{-1}A^*P=\begin{bmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{bmatrix}.$$

从而,$B+2E=\begin{bmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{bmatrix}$,

$$|(B+2E)-\lambda E|=\begin{vmatrix}9-\lambda&0&0\\-2&7-\lambda&-4\\-2&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-9)^2(\lambda-3),$$

故 $B+2E$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=9$,$\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 时,解 $((B+2E)-9E)x=0$,得基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

所以属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 的所有特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数.

当 $\lambda_3=3$ 时,解 $((B+2E)-3E)x=0$,得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$,

所以属于特征值 $\lambda_3=3$ 的所有特征向量为 $k_3\boldsymbol{\eta}_3=k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$,其中 $k_3\neq0$ 为任意常数.

解法二　设 A 的特征值为 λ,对应特征向量为 $\boldsymbol{\eta}$,即 $A\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$. 由于 $|A|=7\neq0$,所以 $\lambda\neq0$.

又因 $A^*A=|A|E$,故有 $A^*\boldsymbol{\eta}=\dfrac{|A|}{\lambda}\boldsymbol{\eta}$.

于是有　$B(P^{-1}\boldsymbol{\eta})=P^{-1}A^*P(P^{-1}\boldsymbol{\eta})=\dfrac{|A|}{\lambda}(P^{-1}\boldsymbol{\eta})$,

$$(B+2E)P^{-1}\boldsymbol{\eta}=\left(\frac{|A|}{\lambda}+2\right)P^{-1}\boldsymbol{\eta}.$$

因此,$\dfrac{|A|}{\lambda}+2$ 为 $B+2E$ 的特征值,对应的特征向量为 $P^{-1}\boldsymbol{\eta}$.

由于 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)$,

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$,$\lambda_3=7$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解方程 $(A-E)x=0$,得基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

当 $\lambda_3=7$ 时,解方程 $(A-7E)x=0$,得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

由 $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,得

$$P^{-1}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},P^{-1}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},P^{-1}\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

因此,$B+2E$ 的三个特征值分别为 9,9,3.

对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1P^{-1}\boldsymbol{\eta}_1+k_2P^{-1}\boldsymbol{\eta}_2=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数;

对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3P^{-1}\boldsymbol{\eta}_3=k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

其中 k_3 是不为零的任意常数.

四、分析 三条直线相交于一点,相当于对应线性方程组有唯一解,进而转化为系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2.

解法一 必要性.

设三条直线 l_1,l_2,l_3 交于一点,则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b,\end{cases}\tag{*}$$

有唯一解,故系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $B=\begin{bmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{bmatrix}$ 的秩均为 2,于是 $|B|=0$.

由于 $|B|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}$

$$=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$,故

$$a+b+c=0.$$

充分性.由 $a+b+c=0$,则从必要性的证明可知,$|B|=0$,故 $R(B)<3$.

由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]$$
$$=-2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\neq 0,$$

故秩 $R(A)=2$.于是

$$R(A)=R(B)=2.$$

因此方程组(*)有唯一解,即三直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

解法二　必要性.

设三直线交于一点 (x_0, y_0),则 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的非零解,其中

$$A=\begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{bmatrix}.$$

于是　$|A|=0$.

而　$|A|=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}$

$$=-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$,故

$$a+b+c=0.$$

充分性.考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \qquad (*)$$

将方程组（*）的三个方程相加，并由 $a+b+c=0$ **可知，方程组（*）等价于方程组**

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \qquad (**)$$

因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2]$

$$= -[a^2+b^2+(a+b)^2] \neq 0,$$

故方程组（* *）有唯一解，所以方程组（*）有唯一解，即三直线 l_1, l_2, l_3 **交于一点**.

研究生考题（二）解答

一、分析　可先用公式 $A^*A=|A|E$ **进行化简**.

解　已知等式两边同时右乘 A**，得**

$$ABA^*A=2BA^*A+A,$$

而 $|A|=3$**，于是有**

$$3AB=6B+A, \text{即} (3A-6E)B=A,$$

再两边取行列式，有　$|3A-6E||B|=|A|=3$.

而 $|3A-6E|=27$**，故所求行列式为** $|B|=\dfrac{1}{9}$.

二、1. 解　由题设，有

$$A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C,$$

于是，　$A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C.$

可见,应选(D).

2.解法一　设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times s$ 矩阵,则由 $AB=0$ 知,

$$R(A)+R(B)<n.$$

又 A,B 为非零矩阵,必有 $R(A)>0,R(B)>0$. 可见 $R(A)<n$,$R(B)<n$ 即 A 的列向量组线性相关,B 的行向量组线性相关,故应选(A).

解法二　由 $AB=0$ 知,B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解,而 B 为非零矩阵,即 $Ax=0$ 存在非零解,可见 A 的列向量组线性相关.

同理,由 $AB=0$ 知,$B^TA^T=0$,于是有 B^T 的列向量组,从而 B 的行向量组线性相关,故应选(A).

三、1.分析　本题是方程的个数与未知量的个数相同的齐次线性方程组,可考虑对系数矩阵直接用初等行变换化为阶梯形,再讨论其秩是否小于 n,进而判断是否有非零解;或直接计算系数矩阵的行列式,根据题设行列式的值必为零,由此对参数 a 的可能取值进行讨论即可.

解法一　对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换,有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时,$R(A)=1<n$,故方程组有非零解,其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^T,\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,\cdots,0]^T,\cdots,$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^T,$$

于是方程组的通解为

$x = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}$，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a \neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B \sim \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

可知 $a = -\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，$R(A) = n-1 < n$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots\cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

由此得基础解系为 $\boldsymbol{\eta} = [1, 2, \cdots, n]^T$，于是方程组的通解为

$x = k\boldsymbol{\eta}$，其中 k 为任意常数.

解法二　方程组的系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$= \left[a + \frac{n(n+1)}{2}\right] a^{n-1}.$$

当 $|A| = 0$，即 $a = 0$ 或 $a = -\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a = 0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^T,\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,\cdots,0]^T,\cdots,$$
$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}$，其中 $k_1,k_2\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2a&a&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-na&0&0&\cdots&a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

由此得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=[1,2,\cdots,n]^T$,

于是方程组的通解为

$x=k\boldsymbol{\eta}$,其中 k 为任意常数.

2.**分析** 先求出 A 的特征值,再根据其二重根是否有两个线性无关的特征向量,确定 A 是否可相似对角化即可.

解 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 4-\lambda & -3 \\ 1 & a & 5-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & -3 \\ 1 & a & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根,则有 $2^2-16+18+3a=0$,解得 $a=-2$.

若 $a=-2$ 时,A 的特征值为 2,2,6,矩阵 $A-2E=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 1,故 $\lambda=2$,对应的线性无关的特征向量有两个,从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根,则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方,从而 $18+3a=16$,解得 $a=-\dfrac{2}{3}$.

当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时,A 的特征值为 2,4,4,矩阵 $A-4E=$

$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$秩为 2,故 $\lambda = 4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个,从而 A 不可相似对角化.