图书在版编目(CIP)数据

专转本数学考试必读/杨林主编. —南京:南京大学出版社,2004.12

ISBN 7-305-04385-0

Ⅰ.专… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 124139 号

书　　名　专转本数学考试必读(第二版)
总 主 编　杨　林
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话　025-83596923　025-83592317　传真 025-83328362
网　　址　http://press.nju.edu.cn
电子邮件　editor990@hotmail.com(编辑部)
　　　　　sales@press.nju.edu.cn(销售部)
印　　刷　阜宁人民印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16　印张 10.75　字数 212 千
版　　次　2006 年 9 月第 2 版第 1 次印刷
ISBN 7-305-04385-0/O·294
定　　价　18.00 元

前　　言

对于青年学子来说，有一个时刻是一生中值得期待的，那就是穿上学位袍，戴上学位帽！而期待这样的"人生高潮"，只有专科教育是不够的。

专科教育和本科教育是完全不同的两个教育平台。

本科生不仅在接受教育的系统性方面优于专科生，而且在缔造未来人生的舞台空间方面，也往往有着专科生不可企及的优势。正因为如此，许多在学的专科生渴望能实现人生的跳跃，继续本科教育。现在开通的"专转本"考试则为全日制普通高等专科学校的学生提供了实现跳跃的平台。

人生的路漫长，但关键的就几步！

为了帮助广大考生应战"专转本"考试，我们特别约请了江苏高校曾经参与命题和近几年来一直参与"专转本"考试辅导的资深老师，撰写了这一套"专转本"考试辅导系列：

《专转本英语考试必读》
《专转本英语考试核心密卷》
《专转本英语真题解剖与应试对策》
《专转本日语考试核心密卷》
《专转本数学考试必读》
《专转本数学考试核心密卷》
《专转本计算机应用基础考试必读》
《专转本计算机应用基础考试核心密卷》
《专转本大学语文考试核心密卷》

"必读"主要是梳理考试必须准备的知识体系，突出重点，讲授难点；"必读"配备了相关练习，是针对各个知识单元的；知识单元后，有综合练习，是强调知识的综合运用能力，这也是多数学生的薄弱环节。

"核心密卷"是针对近年来"专转本"考试的命题趋势和规律，为考生最后冲刺考试而提供的核心模拟试卷，是由单元练习到综合练习后的一次整体演练。

我们也特别希望大家多提宝贵意见，并请发 Email 到南京大学出版社编辑部 editor990@hotmail.com，我们将认真对待每一封来信。

编　者

2006 年 9 月于南京大学北园

目　录

第一章　准备知识

本章主要知识点

- ◎　函数表达式的推演
- ◎　整理表达式的几个基本技巧
- ◎　基本概念 奇偶性、有界性
- ◎　常用公式

一、函数表达式的推演

函数求值及函数解析表达式推演是其中两个基本问题，它可以结合导数、积分等内容进行考查.

例 1.1　**已知** $f(x)=x^2+1$，**求** $f(-1)$，$f(2x)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解：$f(-1)=(-1)^2+1=2$；　　$f(2x)=(2x)^2+1=4x^2+1$；

$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$；　　$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{1}{x^2}+1$.

例 1.2　**已知** $f(2x)=x^2+x+1$，**求** $f(x)$，$f(4x)$.

解：令 $u=2x$，即 $x=\frac{u}{2}$，故

$$f(u)=\left(\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u}{2}+1=\frac{u^2}{4}+\frac{u}{2}+1,$$

于是

$$f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1,$$

$$f(4x)=\frac{(4x)^2}{4}+\frac{4x}{2}+1=4x^2+2x+1.$$

例 1.3　**已知** $f(e^x+1)=2\ln x+x+1$，**求** $f(x)$.

解：令 $e^x+1=u$，即 $x=\ln(u-1)$，故

$$f(e^x+1)=f(u)=2\ln[\ln(u-1)]+\ln(u-1)+1,$$

所以，$f(x)=2\ln\ln(x-1)+\ln(x-1)+1$.

二、整理表达式的几个基本技巧

下面介绍的整理表达式的几个基本技巧，对极限、积分计算等内容都是非常重要的.

(1) **技巧一 根式变变型**　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

例 1.4　$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.

解:$f(x)=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

例 1.5 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$.

解:$f(x)=\dfrac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$.

注 这一技巧在某种极限计算中有重要作用.

⑵ 技巧二: 拆分

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{1}{bc-ad}\cdot\frac{c(ax+b)-a(cx+d)}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{1}{bc-ad}\left(\frac{c}{cx+d}-\frac{a}{ax+b}\right).$$

例 1.6 **拆分**$\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$.

解:**原式**$=\dfrac{1}{4}\dfrac{(x+1)-(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

例 1.7 **拆分**$\dfrac{1}{(2x+1)(3x-1)}$.

解:**原式**$=\dfrac{1}{5}\dfrac{3(2x+1)-2(3x-1)}{(2x+1)(3x-1)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{3x-1}-\dfrac{2}{2x+1}\right)$.

注 这一技巧在积分计算、幂级数展开中尤为重要.

⑶ 技巧三: $\dfrac{p_m(x)}{p_n(x)}$ $(m\geqslant n)$ **综合除法,其中** $p_m(x)$ **表示** m **次多项式,则**

$$\frac{p_m(x)}{p_n(x)}=\text{商}+\frac{\text{余数}}{p_n(x)}.$$

例 1.8 **将**$\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+1}$**化为真分式.**

解:

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 0 & & & \leftarrow\text{商}\\
\hline
1\ \ 0\ \ 1\ ) & 1 & 0 & -2 & 1 & \\
 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & & -3 & 1 & \leftarrow\text{余数}
\end{array}$$

所以,原式$=x+\dfrac{-3x+1}{x^2+1}$.

注 竖式中多项式缺项补 0.

例 1.9 **将**$\dfrac{x^5-x^4+x^2+x-1}{x^3+x+1}$**化为真分式.**

解:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & & & & 1 & -1 & -1\\
\hline
1011\ ) & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1\\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & & -1 & -1 & 0 & 1 & \\
 & & -1 & 0 & -1 & -1 & \\
\hline
 & & & -1 & 1 & 2 & -1\\
 & & & -1 & 0 & -1 & -1\\
\hline
 & & & & 1 & 3 & 0
\end{array}$$

所以,原式 $=x^2-x-1+\dfrac{x^2+3x}{x^3+x+1}$.

注 这一技巧在分式积分中经常用到.

三、基本概念:奇偶性、有界性

⑴ 奇偶性

定义 如果 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 称为奇函数 如果 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 称为偶函数.

上述定义即为判断函数奇偶性的方法.

例 1.10　$f(x)=x^2+x$,判断其奇偶性.

解:$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$,所以 $f(x)$ 非奇非偶.

例 1.11　$f(x)=\sin^3 xe^{x^2}$,判断其奇偶性.

解:$f(x)=\sin^3(-x)e^{(-x)^2}=-\sin^3 xe^{x^2}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.12　如果 $f(x)=g(x)+g(-x)$,$g(x)$ 为已知函数,判断其奇偶性.

解:$f(-x)=g(-x)+g[-(-x)]=g(-x)+g(x)=f(x)$,因为 $f(x)$ 为偶函数.

⑵ 有界性

定义 存在常数 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$,其中 $x\in I$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界. $\sin x$,$\cos x$,$\arcsin x$,$\arctan x$,$\operatorname{arccot} x$ 均有界.

例 1.13　判断 $y(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}\sin^2 x$ 是否有界.

解:因为 $|y(x)|=\left|\dfrac{4x}{x^2+1}\right|\sin^2 x\leqslant\dfrac{4|x|}{2|x|}\sin^2 x\leqslant 2$,所以 $y(x)$ 有界.

例 1.14　证明 $y(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\arctan^2(x^2+1)$ 在 $(0,+\quad)$ 上有界.

解:$|y(x)|\leqslant\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}\leqslant\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

例 1.15　判断 $y(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\sin x$ 是否有界.

解:因为 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\quad$,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\quad$,所以 $y(x)$ 在其定义域内无界.

四、常用公式

三角函数的公式很繁杂,要重点熟练掌握以下几个常用公式:

⑴ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

⑵ $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$,$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,$\sin 2x=2\sin x\cos x$;

⑶ $1+\tan^2 x=\sec^2 x$,$1+\cot^2 x=\csc^2 x$.

单元练习题1

1. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,则 $f[f(x)]=$ __________.

2. 将函数的分子有理化,$y(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}=$ ____________.

3. 函数 $y(x)=\dfrac{1}{(2x+1)(5x+1)}$可拆分为____________.

4. 综合除法:$y(x)=\dfrac{x^4-x^3+2x^2+3x+1}{x^2+1}=$ ______________.

5. 下列函数为奇函数的是 ( )

   A. $\sin^2 x\cos x$
   B. $\arctan x\cdot\arcsin x$
   C. $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$
   D. x^2-x+1

6. 下列函数为有界函数的是 ( )

   A. $1+x\sin x$
   B. $\dfrac{1}{\arctan x}$
   C. $\dfrac{x^2}{x^4+1}\cdot\sin(x^2+1)$
   D. $\dfrac{\tan x}{(x+1)(x+2)}$

7. 已知 $y(2x+1)=e^x+x$,求 $y(x)$.

8. $y(\ln x)=x+1$,求 $y(x)$.

9. 将函数 $\sin^4 x$,$\tan^4 x$ 应用倍角公式进行转化.

第二章　极限、连续与间断

本章主要知识点

◎　求极限的 7 类题型

◎　连续性分析

◎　间断点识别及分类

◎　连续函数的介值定理

一、求极限的 7 类题型

求极限问题归纳为 7 类主要题型，这里介绍前 5 类，后两类在相应的章节（洛必达法则，变限积分）再作介绍.

（1）题型 I　$\lim\limits_{x\to}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$.

方法：上下同除以 x 的最高次幂.

例 2.1　**求** $\lim\limits_{x\to}\frac{x^5+1}{x^2+1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to}\frac{1+\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}=$　.

例 2.2　**求** $\lim\limits_{x\to}\frac{(x+1)^2(2x+1)^2}{3x^4+1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to}\frac{\frac{(x+1)^2}{x^2}\frac{(2x+1)^2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(2+\frac{1}{x}\right)^2}{3+\frac{1}{x^4}}=\frac{4}{3}$.

例 2.3　**求** $\lim\limits_{x\to}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\sqrt{2}$.

例 2.4　**求** $\lim\limits_{x\to+}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+}\frac{(x^2-x+1-x^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

$$=\lim_{x\to +}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

例 2.5　**求** $\lim\limits_{x\to +}\frac{3^x+2^x}{3^x-2^x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +}\dfrac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}=1.$

(2) 题型Ⅱ　$\lim\limits_{x\to a}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$.

$$\text{原式}=\begin{cases}\dfrac{P_m(a)}{P_n(a)},P_n(a)\neq 0,\\ \quad ,P_n(a)=0,P_m(a)\neq 0,\\ \text{上下分解因式并代值(用洛必达法则亦可)},P_n(a)=P_m(a)=0.\end{cases}$$

例 2.6　**求** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+1}$.

解：原式 $=2$.

例 2.7　**求** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-2x+1}$.

解：原式 $=$　.

例 2.8　**求** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+2x-3}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x+3}=\frac{1}{4}$.

例 2.9　**求** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{3}{2}.$$

(3) 题型Ⅲ　**若** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$**,** $g(x)$ **有界,则** $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=0$

例 2.10　**求** $\lim\limits_{x\to +}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\sin(x^2+1)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to +}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=0$**,而** $\sin(x^2+1)$ **有界，所以原式** $=0$.

例 2.11　**求** $\lim\limits_{x\to0}\tan x\cos^2\left(\frac{2}{x}\right)$.

解：因为 $\tan x\to0$（$x\to0$），$\cos^2\left(\frac{2}{x}\right)$ **有界，所以原式** $=0$.

例 2.12　**求** $\lim\limits_{x\to +}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}\sin^{2004}\sin 2004x$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}{1+\frac{1}{x}}=0$，$\sin^{2004}\sin 2004x$ **有界，所以原式** $=0$.

(4) 题型Ⅳ　$\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.

识别此类题型尤为重要，主要特征为 1 　**未定式. 步骤如下：**

①1 　**识别；**

②**先得内，再得外；**

③**内一翻，再还原**.

$$\lim(1+u)^{v}=\lim\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{uv}=e^{\lim uv}.$$

例 2.13　**求** $\lim\limits_{x\to}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x-1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{(2x-1)}=\lim\limits_{x\to}\left[\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+1}(2x-1)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to}\frac{-2(2x+1)}{x+1}}=e^{-4}$.

例 2.14　**求** $\lim\limits_{x\to}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+3}\right)^{x+1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to}\left[\left(1+\frac{x-2}{x^2-2x+3}\right)^{\frac{x^2-2x+3}{x-2}}\right]^{\frac{x-2}{x^2-2x+3}(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to}\frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x+3}}=e$.

例 2.15　**求** $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解： $\lim\limits_{x\to1}\left[(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}\right]^{(x-1)\cdot\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$.

(5) 题型Ⅴ　**等价无穷小替换**

替换公式：当 $x\to0$ **时，有**

$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$；

$\ln(1+x)\sim x$；$e^{x}-1\sim x$.

替换原则：乘除可换，加减忌换.

例 2.16　**求** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$.

错解： $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$.

例 2.17 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)\sin 3x}{e^{\frac{x^2}{2}}-1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot3x}{\dfrac{x^2}{2}}=12$.

例 2.18 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin x^2}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot2x^2}{x^2}=1$.

例 2.19 求$\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt[3]{x+19}-3}$.

解：令 $x-8=u$，**则** $x=8+u$.

$$\textbf{原式}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt{16+2u}-4}{\sqrt[3]{27+u}-3}=\lim_{u\to0}\frac{4}{3}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{8}u}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{u}{27}}-1}=\lim_{u\to0}\frac{4}{3}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}u}{\frac{1}{3}\cdot\frac{u}{27}}=\frac{27}{4}.$$

例 2.20 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$.

解：令 $u=\dfrac{\pi}{2}-x$，$x=\dfrac{\pi}{2}-u$.

$$\textbf{原式}=-\lim_{u\to0}u\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=-\lim_{u\to0}u\cot u=-\lim_{u\to0}\frac{u\cos u}{\sin u}=-\lim_{u\to0}\frac{u}{u}=-1.$$

(6) 题型Ⅵ　洛必达法则（见导数相关内容）

(7) 题型Ⅶ　变上限积分（见积分相关内容）

二、连续性分析

定义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

变形：$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，**其中** $f(x_0\pm0)$ **分别表示左、右极限**.

例 2.21 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ **若** $f(x)$ **在** $x=0$ **处连续，求** a.

解：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)=a$，**所以** $a=1$.

例 2.22 $f(x)=\begin{cases}ax\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 2x}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ c\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}, & x>0,\end{cases}$ **若** $f(x)$ **在** $x=0$ **处连续，求** a,b,c.

解：$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[axsin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 2x}\right]=a\lim\limits_{x\to 0^-}xsin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 2x}=1$；

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0}c\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}=c\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-2x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-2x}}\right]^{\frac{-2x}{1+x}\cdot\frac{2}{x}}=ce^{-4},$$

由 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ 得：$1=b=ce^{-4}$，所以 $b=1$，$c=e^4$，a 为任意实数.

例 2.23　$f(x)=\begin{cases}xg\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为有界函数，问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}xg\left(\dfrac{1}{x}\right)=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 2.24　$f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 在 $x=1$ 处可能连续吗？

解：$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$；

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1.$

所以 不论 $f(1)$ 取何值，$f(x)$ 均不能连续.

三、间断点识别及分类

1. 识别方法：可能间断点应是其定义域的端点.

2. 分类方法：

(1)　$f(x_0+0)=f(x_0-0)$，x_0 为可去间断点；

(2)　$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，x_0 为第一类间断点，或称跳跃型间断点；

(3)　$f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 至少有一个不存在，x_0 为第二类间断 特别地，若至少有一个为 ，则为第二类无穷间断点.

例 2.25　识别 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的间断点.

解：间断点为 $x=k\pi$，$k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$.

对于 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in Z)$：因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=0$，所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 为可去间断点.

对于 $x=k\pi\ (k\in Z)$：当 $k=0$，即 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，$x=0$ 为可去间断点；当 $k\neq 0$，

$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=$ 　，$x=k\pi$ 为第二类无穷间断点.

例 2.26　识别 $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ 的间断点.

解：间断点 $x=1$，故

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-}\ \ =0,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{+}\ \ =\ \ .$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处为第二类无穷间断点.

例 2.27　**识别** $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{(x-3)(x+1)(x+2)}$**的间断点.**

解：定义域为 $x\leqslant 2$. **间断点为** $x=-1, x=-2$.

因为 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\quad$，$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\quad$，**所以** $-1,-2$ **均为** $f(x)$ **的第二类无穷间断点.**

例 2.28　**识别** $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,e^{\frac{1}{2-x}}$**的间断点.**

解：定义域为 $-2<x\leqslant 2$，**间断点为** $x=-2,2$.

对于 $x=-2$，$\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=\quad$，$x=-2$ **为第二类无穷间断点；**

对于 $x=2$，$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{2-x}e^{\frac{1}{2-x}}=0$，$x=2$ **为可去间断点.**

注　对 $x=-2,2$ **仅考虑了其一个单侧极限.**

四、连续函数的介值定理

定理：$f(x)$ **在闭区间** $[a,b]$ **上连续，且** $f(a)\cdot f(b)<0$，**则** $f(x)$ **在** (a,b) **内至少有一零点，即存在** $c\in(a,b)$，**使得** $f(c)=0$.

应用此定理需要注意以下几点：

(1)　$[a,b]$ **区间的选择，在证明题过程中有明确的提示；**

(2)　**验证** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上的连续性；**

(3)　**验证** $f(x)$ **在两端的符号；**

(4)　**此定理不能确定** $f(x)$ **是否具有唯一零点，但有唯一性的要求时，应验证** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上的单调性（参见导数应用部分）.**

例 2.29　**证明：**$xe^x=2$ **在** $(0,1)$ **内有一实根.**

证明　构造 $f(x)=xe^x-2$，$x\in[0,1]$，**易知** $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续，且** $f(0)=-2$，$f(1)=e-2>0$，**故** $f(0)\cdot f(1)<0$，**由连续函数介值定理知，**$f(x)=0$ **在** $(0,1)$ **内有实根，即命题得证.**

例 2.30　**证明：**$x^3-2x^2+x=1$ **至少有一正根.**

证明：令 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$，$x\in[0,2]$，**则** $f(x)$ **在** $[0,2]$ **上连续，且** $f(0)=-1$，$f(2)=1$，$f(0)f(2)<0$，**由闭区间连续函数的介值定理得，**$f(x)$ **在** $(0,2)$ **至少有一正根，即命题得证.**

单元练习题 2

1. $\lim\limits_{x\to}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=4$，**则** $a=$________.

2. **如果** $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant 0,\\ a, \quad x=0,\end{cases}$ **在** $x=0$ **处连续，则** $a=$__________.

3. $f(x)=1-\cos 3x\ (x\to 0)$ **与** mx^n **是等价无穷小，**$m=$__________，$n=$__________.

4. $\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-1\ (x\to 0)$ **与** mx^n **是等价无穷小，**$m=$________，$n=$________.

5. $\dfrac{\sqrt{3-x}}{(x-1)(x-4)(x-2)}$ 的间断点为____________.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=2$，则 $a=$__________，$b=$__________.

7. 在下列极限中，正确的是 ( )

A. $\lim\limits_{x\to} x\sin\dfrac{1}{x}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=$

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+2x)}{x-1}=$　　D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=$

8. 若 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$，那么 ( )

A. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$　　B. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-A$

C. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{|f(x)|}=\sqrt{|A|}$　　D. 以上都不正确

9. 在下列极限中，不正确的是 ( )

A. $\lim\limits_{x\to +}\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}\sin(2x+1)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{\frac{1}{x}}=0$

C. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}=\dfrac{2}{3}$

10. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to +}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to +}\dfrac{x^{2003}}{x^{2004}+100\,!}\cos^2(2004x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x+2}\right)^{2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1-2x)}{\tan x\sin 2x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt[3]{4x}-2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi - x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{2}{\pi}x-1\right)}{\frac{2}{\pi}-x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2+2x^4\right)}{\sin^2 x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{2^{3x}-1}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\left(1+2x^2\right)}+1}{3^{x^2}-1}$.

11. **分析** $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$**的间断点,并指明其类型**.

12. **分析** $f(x)=\lim\limits_{n\to}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$**的间断点,并指明其类型**.

13. **分析** $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{(x-1)(x-3)x}\tan x$ **的间断点,并指明其类型**.

14. **分析** $f(x)=\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}$**的间断点,并指明其类型**.

15. **证明:方程** $x^4-3x^2-x=1$ **至少有一正根,有一负根**.

16. **证明:方程** $\ln(x+1)=3$ **至少有一正根**.

第三章　导数计算及应用

本章主要知识点

◎　导数定义
◎　复合函数求导、高阶导数、微分
◎　隐函数、参数方程求导
◎　导数应用
1. 斜率与几何应用
2. 洛必达法则
3. 函数的单调性、极值、凹凸性、拐点及渐近性
4. 最大值、最小值与实际应用
5. 罗尔定理、微分中值定理及其应用
6. 函数不等式证明

一、导数定义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数定义为

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

左导数，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，右导数，$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

导数 $f'(x_0)$ 存在$\Leftrightarrow f'_+(x_0)$，$f'_-(x_0)$ 有限且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$，若 $f'(x_0)$ 存在，则得出一重要结论：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0).$$

例 3.1　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解：先求出 $f'_+(0)$，$f'_-(0)$，即

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-0}{h}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h}{h}=2,$$

则 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在.

例 3.2　$f(x)=2^{|x|}$，求 $f'(0)$.

解：因为 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\geqslant 0,\\ 2^{-x}, & x<0,\end{cases}$ 所以

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{2^{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{e^{h\ln 2}-1}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{h\ln 2}{h}=\ln 2,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{2^{h}-1}{h}=-\ln 2,$$

所以 $f'(0)$ 不存在.

例 3.3　$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解：$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sin\dfrac{1}{h}$，不存在，所以 $f'(0)$ 不存在.

例 3.4　如果 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{e^{2h}-1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{2h}=\dfrac{1}{2}(1-(-2))f'(1)=\dfrac{3}{2}f'(1)=3.$

二、复合函数求导、高阶导数、微分

1. 基本公式

$(c)'=0\ (c=\text{const.})$；　　$(x^{n})'=nx^{n-1}$；

$(e^{x})'=e^{x}$；　　$(a^{x})'=a^{x}\ln a$；

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；　　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

$(\sin x)'=\cos x$；　　$(\cos x)'=-\sin x$；

$(\tan x)'=\sec^{2}x$；　　$(\cot x)'=-\csc^{2}x$；

$(\sec x)'=\tan x\sec x$；　　$(\csc x)'=-\cot x\csc x$；

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$；　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$；

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$；　　$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$.

对上述基本公式一定要熟记.

2. 基本法则

(1)　$(cf(x))'=c(f(x))'\ (c=\text{const.})$；

(2)　$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$；

(3)　$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(4)　$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^{2}(x)}$.

3. 复合函数中的层次关系识别

正确识别复合函数构建的层次，是快速准确求导复合函数的关键. 下面通过几个例子来说明复合函数层次识别问题.

例 3.5　识别 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的构建层次.

解：由外及里 y **分为三层，**$e\to\sin\to\frac{1}{x}$.

例 3.6　**识别** $y=x\sin 2x$ **的构建层次**.

解：y **分为一层，**x.

例 3.7　**识别** $y=\sin^2(\sin^2 x+\tan x)$ **的构建层次**.

解：y **分为三层，平方**$\to\sin x\to +$.

例 3.8　**识别** $y=\sqrt{\sin\ln(\sqrt{2x+1}+x^2)}$ **的构建层次**.

解：y **分为四层，**$\sqrt{\ }\to\sin\to\ln\to +$.

分清层次的同时，要注意每一层符号下的变量是什么，不可混乱.

4. 复合函数的求导原则

我们将教科书求导的所谓“链式规则”等价转化为求导“口诀”：

“外及里，号变号 则用则，层间乘.”

例 3.9　$y=e^{x\sin 2x}$**，求** y'.

解：$y'=e^{x\sin 2x}(x\sin 2x)'=e^{x\sin 2x}(x'\sin 2x+x(\sin 2x)')$

$=e^{x\sin 2x}(\sin 2x+x\cos 2x\cdot 2)=(\sin 2x+2x\cos 2x)e^{x\sin 2x}$.

例 3.10　$y=e^{\arctan(\sin 2x)}$**，求** y'.

解：$y'=e^{\arctan(\sin 2x)}\frac{2\cos 2x}{1+\sin^2 2x}$.

例 3.11　$y=\sqrt{x}e^{x^2}$**，求** y'.

解：$y'=(\sqrt{x})'e^{x^2}+\sqrt{x}(e^{x^2})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x^2}+\sqrt{x}e^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}\right)$.

例 3.12　$y=\sin^2(\ln\sqrt{2x+1}+x^2)$**，求** y'.

解：$y'=2\sin[\ln(\sqrt{2x+1}+x^2)]\cos[\ln(\sqrt{2x+1}+x^2)]\frac{1}{\sqrt{2x+1}+x^2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}+2x\right)$

$=\sin[2\ln(\sqrt{2x+1}+x^2)]\frac{1}{\sqrt{2x+1}+x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+2x\right)$.

分段函数求导时，要切记对于分段点的导数要用定义来做.

例 3.13　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ -x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$**求** $f'(x)$.

解：因为 $f'(x)=\begin{cases}2x, & x>0,\\ -2x, & x<0,\end{cases}$ **所以**

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h}=0,$$

所以 $f'(0)=0$. **综合得，**

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -2x, & x<0.\end{cases}$$

例 3.14 $f(x)=2^{|x-a|}$，**求** $f'(x)$.

解：因为 $f(x)=\begin{cases}2^{x-a}, x>a,\\ 1, \quad x=a,\\ 2^{a-x}, x<a,\end{cases}$ **所以**

$$f'(x)=\begin{cases}2^{x-a}\ln 2, \quad x>a,\\ -2^{a-x}\ln 2, x<a,\end{cases}$$

$$f'_{+}(a)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{2^{h}-1}{h}=\ln 2,$$

$$f'_{-}(a)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{2^{-h}-1}{h}=-\ln 2,$$

故 $f'(a)$ **不存在**.

例 3.15 **已知** $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ (1) **求** $f'(x)$；(2) **研究** $f'(x)$ **在** $x=0$ **处的连续性**.

解：(1) **因为** $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$，**则**

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=-\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ **不存在，故** $f'(x)$ **在** $x=0$ **处不连续，且为第二类间断点**.

5. 高阶导数与微分

(1) 高阶导数

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), y^{(n)}=\frac{d}{dx}\left[y^{(n-1)}\right].$$

几个常用公式：

① $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}a^n$； ② $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

③ $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$； ④ $(e^{\alpha x})^{(n)}=\alpha^n e^{\alpha x}$；

⑤ $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}c_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$.

例 3.16 $y=x^2e^{-x}$，**求** $y''(0)$.

解：$y'=2xe^{-x}+x^2(-1)e^{-x}$，**即** $y'=e^{-x}(-x^2+2x)$，**则**

$$y''=(-2x+2)e^{-x}+(-x^2+x)e^{-x}(-1),$$

$$y''=e^{-x}(x^2-3x+2),$$

所以 $y''(0)=2$.

例 3.17 $y=x^3e^{2x}$，**求** $y^{(100)}$.

解：$y^{(100)}=\sum_{i=0}^{100}c_{100}^{i}(x^3)^{(i)}(e^{2x})^{(n-i)}$，所以

$$y^{(100)}=(x^3)(e^{2x})^{(100)}+c_{100}^{1}(x^3)^{(1)}(e^{2x})^{(99)}+c_{100}^{2}(x^3)^{(2)}(e^{2x})^{(98)}+c_{100}^{3}(x^3)^{(3)}(e^{2x})^{(97)},$$

$$y^{(100)}=2^{100}x^3e^{2x}+300x^2\cdot 2^{99}\cdot e^{2x}+6\cdot 2^{98}\cdot x\cdot c_{100}^{2}\cdot e^{2x}+6\cdot c_{100}^{3}\cdot 2^{97}\cdot e^{2x}.$$

例 3.18　$y=\frac{1}{(2x-1)(x+2)}$，求 $y^{(n)}$.

解：因为 $y=\frac{1}{(2x-1)(x+2)}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(2x-1)-2(x+2)}{(2x-1)(x+2)}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2x-1}$，所以

$$y^{(n)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{(n)}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}+\frac{2}{5}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(2x-1)^{n+1}}\cdot 2^n.$$

例 3.19　$y=\ln(2x+1)$，求 $y^{(n)}$.

解：因为 $y'=\frac{2}{2x+1}$，所以

$$y^{(n)}=\frac{2(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{(2x+1)^n}\cdot 2^{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n\cdot(n-1)!}{(2x+1)^n}(n\geqslant 2).$$

例 3.20　$f(x)=\cos^2 x$，求 $f^{(n)}(x)$.

解：因为 $f(x)=\cos^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$，所以

$$f^{(n)}(x)=-\frac{1}{2}\cdot 2^n\cdot\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

例 3.21　$f(x)=\sin x\cos 2x$，求 $f^{(n)}(x)$.

解：因为 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$，所以

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot 3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(2) 一阶微分

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果存在常数 A，使得

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微.

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导⇔可微成立，且 $dy=f'(x_0)dx$，故 $dy=f'(x)dx$ 可作为微分求解公式.

例 3.22　$y=x\sin x$，求 $dy\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

解：$y'=\sin x+x\cos x$，$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+x\cos\frac{\pi}{2}=1$，$dy=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)dx=dx$.

例 3.23　$y=\frac{\sin 2x}{x}$，求 dy.

解：$y'=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$，所以 $dy=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}dx$.

例 3.24　$f(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ x^3, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $df(x)\big|_{x=0}$.

解：先求出 $f'_+(0)$，$f'_-(0)$，即

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{he^{-\frac{h^2}{2}}}{h}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^3}{h}=0,$$

所以 $f'(0)=0$，所以 $dy\big|_{x=0}=f'(0)dx=0$.

例 3.25　利用微分近似计算 $e^{0.05}$.

解：令 $\Delta x=0.05$，$x_0=0$，$f(x)=e^x$，则

$$e^{0.05}=e^{x_0+\Delta x}\approx e^{x_0}+f'(x_0)\Delta x_0=1+1\times 0.05=1.05.$$

三、隐函数、参数方程求导

1. 隐函数求导

由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$，但 $y=y(x)$ 的显式表达式可能不易得到，但仍要求解导数$\frac{dy}{dx}$，称之为隐函数求导. 隐函数求导可看成复合函数求导的特例. 譬如

$$y^2+e^{xy}=1.$$

对于 y^2，可看成两层：平方$\to y(x)$；对于 e^{xy}可看成两层：$e\to xy(x)$；这样运用复合函数求导法则就可以解决我们的问题，将方程两边对 x 求导，可以得到

$$2yy'+e^{xy}(xy)'=0,2yy'+e^{xy}(y+xy')=0,$$

所以 $y'=\frac{-ye^{xy}}{2y+xe^{xy}}$.

例 3.26　由 $xy^2+\ln y+\sin(3x+2y)=1$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求$\frac{dy}{dx}$.

解：方程两边对 x 求导，得

$$y^2+x\cdot 2yy'+\frac{1}{y}y'+\cos(3x+2y)(3+2y')=0,$$

$$y'=\frac{-y^2-3\cos(3x+2y)}{2xy+\frac{1}{y}+2\cos(3x+2y)}.$$

例 3.27　由方程 $\sin(2x+y)+y^2=1$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 y'，y''.

解：已知 $\sin(2x+y)+y^2=1$，将方程两边对 x 求导，得

$$\cos(2x+y)(2+y')+2yy'=0. \qquad (*)\text{式}$$

$$y'=\frac{-2\cos(2x+y)}{2y+\cos(2x+y)}.$$

由（*）式再对 x 求导，得

$$-\sin(2x+y)(2+y')^2+\cos(2x+y)\cdot y''+2(y')^2+2yy''=0,$$

$$y''=\frac{\sin(2x+y)(2+y')^2-2(y')^2}{2y+\cos(2x+y)}=\frac{4y^2\sin(2x+y)-4\cos^2(2x+y)}{[2y+\cos(2x+y)]^2}.$$

例 3.28　已知 $y=y(x)$ 由方程 $ye^x+xe^{xy}=1$ 确定，求 y'.

解：将 $x=0$ 代入 $ye^x+xe^{xy}=1$，得到 $y=1$. 方程两端对 x 求导，得

$$e^x y + y' e^x + e^{xy} + xe^{xy}(y + xy') = 0,$$

$$y' = \frac{-ye^x - e^{xy} - xye^{xy}}{e^x + x^2 e^{xy}}, y'(0) = \frac{-1-1}{1} = -2.$$

2. 参数方程求导

形式为$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$求$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$；求导公式：$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$.

例 3.29　**已知**$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t, \end{cases}$求$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解：因为$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t, \end{cases}$所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

例 3.30　**已知**$\begin{cases} x = t\sin t + 2, \\ y = 2 + t\cos t, \end{cases}$求$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$，并给出 $t = \frac{\pi}{2}$ 时 $y = y(x)$ 的切线方程.

解：因为$\begin{cases} x = t\sin t + 2, \\ y = 2 + t\cos t, \end{cases}$所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t - t\sin t}{\sin t + t\cos t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2 - t^2}{(\sin t + t\cos t)^3},$$

$$\text{斜率 } k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{1} = -\frac{\pi}{2}, x_0 = x\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 2, y_0 = y\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 2,$$

所以切线方程为 $y - 2 = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2} - 2\right)$.

例 3.31　**已知** $y = y(x)$ 由$\begin{cases} x^2 + y^2 + t^2 = 1, \\ xt + ye^t = 1 \end{cases}$确定，求$\frac{dy}{dx}$.

解：将方程中 x, y 分别看成 t 的函数，分别对 t 求导得

$$\begin{cases} 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2t = 0, \\ t\frac{dx}{dt} + x + e^t\frac{dy}{dt} + e^t y = 0, \end{cases}$$

解得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-te^t + xy + y^2e^t}{xe^t - ty}, \frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - x^2 - xye^t}{xe^t - ty},$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2 - x^2 - xye^t}{-te^t + xy + y^2e^t}.$$

四、导数的应用

1. 斜率与几何应用

函数 $y=y(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $y'(x)$ 为切线斜率 k，即 $k=y'(x)$，过点 $[x_0, f(x_0)]$ 的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

例 3.32 $y=\sqrt{x}$，求过点 $(1,1)$ 的切线方程.

解：$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$k=y'(1)=\frac{1}{2}$，切线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$.

例 3.33 如图 3.1 过点 $(0,0)$ 引抛物线 $y=1+x^2$ 的切线，求切线方程.

解：设切点为 $(x_0, 1+x_0^2)$，因 $y'=2x$，则 $k=y'(x_0)=2x_0$，切线方程为 $y=2x_0x$，因为 $(x_0, 1+x_0^2)$ 亦在切线上，所以 $1+x_0^2=2x_0x_0$，所以 $x_0^2=1$，$x_0=\pm1$，所以，切线方程为 $y=\pm2x$.

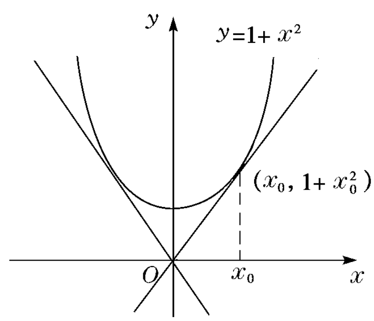


图 3.1

例 3.34 问函数 $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$ 哪一点上的切线与直线 $y=x$ 成 $60°$ 角？

解：设切线斜率为 $k_2<0$，$y=x$，$k_1=1$，$\tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$，$\sqrt{3}=\left|\frac{1-k_2}{1+k_2}\right|$. 解得 $k_2=-2\pm\sqrt{3}$，$y'=-\frac{1}{x^2}=-2\pm\sqrt{3}$，解得 $x=\sqrt{\frac{1}{2\pm\sqrt{3}}}$.

2. 洛必达法则

这是前面在求极限问题的题型Ⅵ. 洛必达法则是导数对极限的应用，这一题型是求极限问题非常重要的一个题型.

洛必达法则 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，且在 a 的邻域附近 $f(x)$，$g(x)$ 可导. 如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 成立，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

注：(1) 洛必达法则处理的形式必须是未定式 $\frac{0}{0}$，—. 对于 $0\cdot$ ，1 ， - 等形式必须变形为 $\frac{0}{0}$，—形式，方可运用该法则.

(2) 洛必达法则是一个充分性的法则，若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则说明此方法失效.

(3) 洛必达法则只要前提正确，可重复使用.

(4) 一般而言，洛必达法则和求极限题型Ⅴ配合使用效果会更佳.

例 3.35 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x\cdot\sin^2x}$ 的极限.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0.5x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$.

例 3.36　**求**$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$**的极限**.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)/(2x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

例 3.37　**求** $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$ **的极限**.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-2}=0$.

例 3.38　**求**$\lim\limits_{x\to}xe^{-x^2}$**的极限**.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to}\dfrac{x}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to}\dfrac{1}{2xe^{x^2}}=0$.

例 3.39　**求**$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$**的极限**

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2}{2x}=0$.

例 3.40　**求**$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2x}\right)$**的极限**.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2x-x^2}{x^2\tan^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2x-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x\sec^2x-2x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^4x+2\tan^2x\sec^2x-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sec^4x-2\sec^2x-1}{6x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12\sec^3x\tan x\sec x-2\tan x\sec^2x}{12x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12\sec^4x-2\sec^2x}{12}=\dfrac{5}{6}$.

例 3.41　**求**$\lim\limits_{x\to}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$**的极限**.

解：$\lim\limits_{x\to}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$**不存在，这不说明原式不存在，仅说明洛必达法则对此题无效，所以**

$$\text{原式}=\lim_{x\to}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

例 3.42　**求** $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x\ln x)^{\ln x}$**的极限**.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$**，所以**

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\left\{(1+x\ln x)^{\frac{1}{x\ln x}}\right\}^{x\ln^2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln^2x}.$$

因为

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln^2x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\dfrac{1}{x}\ln x}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{-\dfrac{1}{x}}=0,$$

所以原式 $= e^0 = 1$.

例 3.43　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ 的极限.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$.

例 3.44　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x^x - 1)}{x}$的极限.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x^x)'}{1} = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^{x\ln x})' = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}(\ln x + 1) = \quad$.

3．函数的单调性、极值、凹凸性、拐点及渐进性

⑴ 单调性

如果 $f'(x) > 0, x \in I$,则 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加,$f'(x) < 0, x \in I$,则 $f(x)$ 在 I 上严格单调减少.

满足 $f'(x) = 0$ 的点称为驻点.

⑵ 极大值、极小值

判别Ⅰ　如果在 $x = x_0$ 的附近,当 $x < x_0$,$f(x)$ 单调增加,$x > x_0$,$f(x)$ 单调减少,则$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值,反之取极小值.

判别Ⅱ 如果 $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 的邻域存在,则 $f''(x_0) > 0$ 取极小值,$f''(x_0) < 0$ 取极大值.

极值点可能出现在驻点或导数不存在的点上.

⑶ 凹凸性

$f''(x)$ 在 I 上存在,如果 $f''(x) > 0, x \in I$,则 $f(x)$ 在 I 上向上凹;$f''(x) < 0, x \in I$,则 $f(x)$ 在 I 上向上凸.

⑷ 拐点

凹凸性发生改变的界点称为拐点. 它可能出现在 $f''(x) = 0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点.

⑸ 渐进线

如果$\lim\limits_{x\to} f(x) = A$,则 $y = A$ 为 $y = f(x)$ 的水平渐近线;如果$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \quad$,则 $x = a$ 为 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

有了以上的准备知识,分析函数的单调性、凹凸性、极值、拐点问题的流程则为：

⑴ 求定义域、渐近线；

⑵ 计算 y', y''；

⑶ 求 $y' = 0, y'' = 0$ 的点和找出使 y', y''不存在的点,设为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；

⑷ 列表分析；

⑸ 结论.

例 3.45　分析函数 $y = xe^{-x}$的单调性、凹凸性、极值、拐点及渐近线.

解：⑴ 定义域为 $x \in R$.

渐近线 :因为 $\lim\limits_{x\to} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to +} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to +} \dfrac{1}{e^x} = 0$, 所以 $y = 0$,即 x 轴为水平渐近线.

⑵ $y' = (1 - x)e^{-x}$,$y'' = -1e^{-x} + (1 - x)(-1)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$,由 $y' = 0$ 得 $x = 1$,由 $y'' = 0$ 得 $x = 2$.

⑶ 列表分析：

x	$(-\quad,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\quad)$
y' y''	$+$ $-$		$-$ $-$		$-$ $+$
y	$\uparrow\cap$	极大值 $y(1)=e^{-1}$	$\downarrow\cap$	拐点 $y(2)=2e^{-2}$	$\downarrow\cup$

(4) $y=xe^{-x}$在$(-\quad,1)$上单调上升、向上凸,$(1,2)$上单调下降、向上凸,$(2,+\quad)$上单调下降、向上凹,$(1,e^{-1})$为极大值点,$(2,2e^{-2})$为拐点.

例 3.46　分析$y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$的单调性、凹凸性、极值、拐点及渐近线.

解:(1) 定义域$x\neq\pm1$.

因为$\lim\limits_{x\to+}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$,所以$y=-1$为水平渐近线.

因为$\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\quad$,所以$x=\pm1$为垂直渐近线.

(2) 因为$y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,所以

$$y'=\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)},$$

$$y''=\frac{4(1-x^2)-4x\cdot2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4+12x^2}{(1-x^2)^3},$$

由$y'=0$得$x=0$当$x=\pm1$时,y',y''不存在.

列表分析:

x	$(-\quad,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\quad)$
y' y''	$-$ $-$		$-$ $+$		$+$ $+$		$+$ $-$
y	$\downarrow\cap$	拐点	$\downarrow\cup$	极小值 $y(0)=1$	$\uparrow\cup$	拐点	$\uparrow\cap$

函数$\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$在$(-\quad,-1)$单调下降,向上凸;

在$(-1,0)$单调下降,向上凹,在$(0,1)$单调上升向上凹,在$(1,+\quad)$单调上升向上凸.

在$\{0,1\}$为极小值点,$x=\pm1$为拐点.

例 3.47　已知函数$f(x)=a\ln x+bx^2+x$在$x=1$与$x=2$处有极值,试求a,b的值,并求$f(x)$的拐点.

解:$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$,由题意知$f'(1)=0$,$f'(2)=0$,得

$$\begin{cases}a+2b+1=0,\\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0.\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{6}$. 所以

$$f''=-\frac{a}{x^2}+2b=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}=0,$$

解得 $x=\pm\sqrt{2}$（负号舍去）.

当 $0<x<\sqrt{2}$, $f''(x)>0$,向上凹;当 $x>\sqrt{2}$时, $f''(x)<0$,向上凸,故 $x=\sqrt{2}$为 $f(x)$ 的拐点.

4. 最大值、最小值与实际应用

将导数应用到实际问题的最大、最小或更广泛的最优问题的求解中是非常重要的考点.是考查考生实际应用能力的一个很重要的知识点,它可能涉及到几何学、物理学、经济学等方面的内容.

分析问题的流程为:

(1) 适当假设求解变量 x;

(2) 函数关系 $y=y(x)$ 的确定;

(3) $y'=0$ 的求解,交待 y 最大、最小的理由;

(4) 合理分析.

注:第二步是整个问题的关键步骤,(3) 中的理由部分可能是容易疏忽之处.

例 3.48　(几何问题) 如图 3.2,有半径为 R 的半圆内接梯形,问:

(1) 何时面积最大?

(2) 何时周长最长?

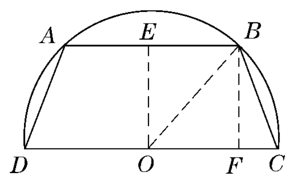


图 3.2

解:设上底长度为 $2x$,即 $OF=x$.

如图 3.2 所示, $OE=\sqrt{R^2-x^2}$.

(1) 因为 $S(x)=(2x+2R)\sqrt{R^2-x^2}/2=(x+R)\sqrt{R^2-x^2}$,所以

$$S'(x)=\sqrt{R^2-x^2}+(x+R)\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}=\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x(x+R)}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

由 $S'(x)=0$ 解得 $x=R/2$ ($x=-R$ 舍去).

因为 $x=\frac{R}{2}$为唯一驻点,即为所求 [或 $S''\left(\frac{R}{2}\right)<0$],此时 $S_{max}=\frac{3}{2}R\sqrt{2}R/2=\frac{3\sqrt{2}}{4}R^2$.

(2) 因为

$$\begin{aligned} l(x)&=2x+2R+2BC=2(x+R)+2\sqrt{CF^2+BF^2}\\ &=2(x+R)+2\sqrt{R^2-x^2+(R-x)^2}\\ &=2(x+R)+2\sqrt{2R^2-2Rx},\end{aligned}$$

$$l'(x)=2+2\frac{-2R}{2\sqrt{2R^2-2Rx}}=2-\frac{2R}{\sqrt{2R^2-2Rx}}.$$

由 $l'(x)=0$ 得 $x=R/2$.

因 $x=R/2$ 为唯一驻点,即为所求 [或 $l''(R/2)<0$],则

$$l_{max}=2\left(\frac{R}{2}+R\right)+2\sqrt{2R^2-R^2}=5R.$$

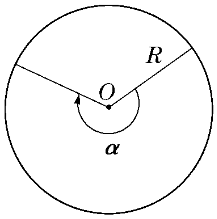


图 3.3

例 3.49　**（几何问题）如图** 3.3**，有半径为** R **的圆板，剪下圆心角为** α **的圆板围成一个圆锥漏斗，问** α **为何角度时，使得漏斗的容积为最大？**

解：如图 3.4**，设圆锥漏斗的下底半径为** x**，则**

$$V(x)=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{R^2-x^2},$$

$$V'(x)=\frac{1}{3}\pi\left(2x\sqrt{R^2-x^2}+x^2\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi x\left(2\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\right),$$

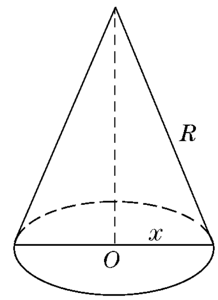


图 3.4

由 $V'(x)=0$ **解得** $x=0$ **（舍去），**$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}R$ **（负号舍去），所以，符合题意的驻点是唯一的** $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R$**，即为所求（或** $V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)<0$**），则**

$$V_{max}=\frac{1}{3}\pi\frac{2}{3}R^2\frac{\sqrt{3}}{3}R=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

由 $2\pi x=\alpha R$**，推知** $\alpha=\frac{2\pi x}{R}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}R}{R}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$

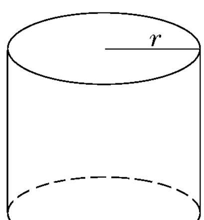


图 3.5

例 3.50　**（几何问题）如图** 3.5 **设计一个容积为** V **的立方体的有盖圆柱贮油桶，已知单位体积造价：侧面是底面的一半，盖又是侧面的一半，问贮油桶的尺寸如何设计造价最低？**

解：设该圆柱形底面半径为 r**，高为** h**，侧面单位造价为** l **（元/平方米）**.

由 $\pi r^2h=V$**，得** $h=\frac{V}{\pi r^2}$**，则总造价函数为**

$$y=y(r)=\pi r^2 2l+2\pi rh\cdot l+\pi r^2\cdot\frac{l}{2},$$

所以

$$y=\frac{5}{2}\pi lr^2+2\pi l\cdot r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=\frac{5}{2}\pi lr^2+2lV/r,$$

$$y'(r)=5\pi lr-\frac{2lV}{r^2}=0.$$

解得 $r=\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$ **为唯一驻点，即为所求**$\left[\text{或 } y''\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}\right)>0\right]$**，此时**

$$h=\frac{V^2}{\pi r^2}=\frac{V}{\pi}\left(\frac{2V}{5\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{25V}{4\pi}}.$$

例 3.51　**已知某厂生产** x **件产品的成本为** $C(x)=25000+200x+\frac{1}{40}x^2$ **(元),产品产量** x **与价格** P **之间的关系为** $P(x)=440-\frac{1}{20}x$ **(元).求:**

(1) 要使平均成本最小,应生产多少件产品?

(2) 当企业生产多少件产品时,企业可获最大利润,并求最大利润?

解:(1) 平均成本为

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{25\,000}{x}+200+\frac{1}{40}x,$$

$$\overline{C}'(x)=-\frac{25\,000}{x^2}+\frac{1}{40}=0.$$

解得 $x=1000$ **(件).因为** $\overline{C}''(1\,000)>0$**,所以** $x=1\,000$ **(件),平均成本** $\overline{C}(x)$ **最小,**$\overline{C}_{min}=250$ **(元/件).**

(2) 利润函数为

$$Q(x)=P(x)-C(x)=440x-\frac{1}{20}x^2-25\,000-200x-\frac{1}{40}x^2$$

$$=-\frac{3}{40}x^2+240x-25\,000,$$

$$Q'(x)=-\frac{6}{40}x+240=0,\quad \text{得 } x=1\,600\ (\text{件}).$$

唯一驻点,即为所求,$Q_{max}=167\,000$ **(元).**

例 3.52　**一租赁公司有** 40 **套设备要出租.当租金每月每套** 200 **元时,该设备可以全部租出;当租金每月每套增加** 10 **元时,租出的设备就会减少** 1 **套;而对于租出的设备,每月需要花** 20 **元的修整费.问:租金定为多少时,该公司可获最大利润?**

解:设每月每套租金定为 $(200+10x)$**,则租出设备总数为** $(40-x)$**,每月的毛收入为** $(200+10x)(40-x)$ **维护成本为** $(40-x)\cdot 20$**,于是利润为**

$$L(x)=(200+10x)(40-x)-(40-x)\cdot 20=7\,200+220x-10x^2\ (0\leqslant x\leqslant 40),$$

$$L'(x)=0\Rightarrow x=11.$$

比较 $L(11)$,$L(0)$,$L(40)$ **处利润:**$L(11)>L(0)>L(40)$**,所以,租金为** $(200+10\times 11)=310$ **元时,利润最大.**

5. 罗尔定理、微分中值定理及其应用

罗尔(Rolle)定理　如果 $f(x)$ **在** (a,b) **内可导,在** $[a,b]$ **上连续,且** $f(a)=f(b)$**,则** $\xi\in(a,b)$ **存在,使得** $f'(\xi)=0$.

拉格朗日(Lagrange)中值定理(即微分中值定理)　如果 $f(x)$ **在** (a,b) **内可导,在** $[a,b]$ **上连续,则存在** $\xi\in(a,b)$**,使得** $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

例 3.53　**下列不满足拉格朗日中值定理条件的函数是**　　(　　)

A. $y=\sin x, x\in[-\pi,\pi]$　　　　B. $y=x|x|, -1\leqslant x\leqslant 1$

C. $y=\sqrt[3]{x}, -1\leqslant x\leqslant 1$　　　　D. $y=x^2+1, -1\leqslant x\leqslant 1$

解：选择 C，因为 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处导数不存在.

例 3.54　**证明** $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

证明：反证法. 如果在 $[0,1]$ 上有两个零点 x_1,x_2（不妨设 $x_1<x_2$），即 $f(x_1)=f(x_2)=0$. $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 满足定理条件，所以存在 $\xi\in(0,1)$ 时，$3\xi^2-3=0$，故矛盾，因此原命题得证.

例 3.55　设 $f(x)$ 可导，求证 $f(x)$ 的两个零点之间定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

证明 构造辅助函数 $F(x)=f(x)e^x$.

设 x_1,x_2 为 $f(x)$ 的两个互异零点，不妨假设 $x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)=0$，所以 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$F'(\xi)=f(\xi)e^{\xi}+f'(\xi)e^{\xi}=0,$$

所以 $f'(\xi)+f(\xi)=0$，命题得证.

例 3.56　$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上二阶可导，$f(2)=0$，设 $F(x)=(x-1)^2f(x)$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F''(\xi)=0$.

证明：由于 $F(1)=0$，$F(2)=0$ 且 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上二阶可导，所以 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 满足罗尔定理，故存在 $\xi_1\in(1,2)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$，所以 $F'(1)=0$.

现在考虑 $g(x)=F'(x)$，$x\in[1,\xi_1]$，其在 $[1,\xi_1]$ 上满足罗尔定理条件，所以存在 $\xi\in(1,\xi_1)\subset(1,2)$，使得 $F''(\xi)=0$.

例 3.57　**证明：**方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证明：(1) 根的存在性：

令 $f(x)=x^5+x-1$，$x\in[0,1]$，$f(0)=-1$，$f(1)=1>0$，由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，故由闭区间连续函数介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即，方程 $f(x)=x^5+x-1=0$ 有正根.

(2) 根的唯一性：

应用反证法. 设有两个不同根 x_1,x_2，$(x_1<x_2)$，则 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理条件，所以，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=5\xi^4+1=0$，这不可能，故矛盾，所以根是唯一的.

综合 (1)(2)，原命题成立.

例 3.58　设函数 $f(x)$ 在 $(0,c)$ 上具有严格单调递减的导数 $f'(x)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $f(0)=0$，试证：对于满足不等式 $0<a<b<a+b<c$ 的 a,b 均有下式成立：

$$f(a)+f(b)>f(a+b).$$

证明：$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上满足拉格朗日定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,a)$ 使得

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a,$$

因为 $f(0)=0$，所以 $f(a)=f'(\xi_1)a$；

$f(x)$ 在 $(b,a+b)$ 内满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi_2\in(b,a+b)$，使得

$$f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)(a+b-b)=f'(\xi_2)a.$$

由于 $\xi_1<a<b<\xi_2$，而 $f'(x)$ 是单调下降的函数，故 $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$，所以 $f(a+b)-f(b)<f(a)$，即 $f(a+b)<f(a)+f(b)$，原命题得证.

例 3.59　$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $(0,a)$ 内可导，$f(a)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,a)$，使得

$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明 构造 $F(x)=xf(x), x\in(0,a)$，$F(x)$ 在 $(0,a)$ 内可导，$[0,a]$ 上连续，且 $F(0)=0$，$F(a)=af(a)=0$，故 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上满足罗尔定理，故存在 $\xi\in(0,a)$，使得

$$F'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)=0,$$

即原命题得证.

例 3.60 已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 (a,b) 内 $f''(x)$ 存在，又过点 $A[a,f(a)]$，$B[b,f(b)]$ 两点直线交曲线 $y=f(x)$ 于 $C[c,f(c)]$，且 $a<c<b$. 试证明：在 (a,b) 内至少存在一个 ξ 使得 $f''(\xi)=0$.

证明 构造 $F(x)=f(x)-f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，由题意可知

$$F(a)=0, F(b)=0, F(c)=0.$$

$F(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别满足拉格朗日定理条件. 故存在 $\xi_1\in(a,c)$，使得 $F'(\xi_1)=0$ 并存在 $\xi_2\in(a,c)$，使得 $F'(\xi_2)=0$；

$F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理条件. 所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$.

因为 $F''(x)=f''(x)$，故 $f''(\xi)=0$，原命题得证.

6. 函数不等式证明

通常证明不等式的方法有两种：应用微分中值定理；应用单调性.

例 3.61 证明 $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|b-a|$.

证明 当 $a=b$ 时，原不等式显然成立.

当 $a\neq b$ 时（不妨设 $a<b$），设 $f(x)=\arctan x$，在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a),$$

两边取绝对值，得

$$|\arctan b-\arctan a|\leqslant|b-a|.$$

例 3.62 证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$ 成立.

证明 构造 $f(x)=x-\sin x$，$f(0)=0$，则

$$f'(x)=1-\cos x>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内严格单调上升，$f(x)>f(0)=0$，即 $x>\sin x$，构造

$$g(x)=\frac{\sin x}{x}, g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

令 $F(x)=x\cos x-\sin x$，$F'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$，所以 $F(x)$ 严格单调下降，$F(0)=0$，故 $F(x)<0$，所以 $g'(x)<0$. 说明 $g(x)$ 严格单调下降，$g(x)>g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$，即，$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$. 结合前面的两结论可知原命题成立.

例 3.63　**证明：当** $0<x<1$ **时，有** $e^{-2x}>\frac{1-x}{1+x}$.

证明：原命题等价于 $e^{-2x}(1+x)>1-x$.

构造函数 $F(x)=e^{-2x}(x+1)-(1-x)$，$F(0)=0$，**则**

$$F'(x)=e^{-2x}+e^{-2x}(x+1)(-2)+1,\ F'(0)=0,$$

$$F''(x)=4xe^{-2x}>0\ (0<x<1),$$

所以 $F'(x)$ **严格单调上升，**$F'(x)>F'(0)=0$，**所以** $F(x)$ **严格单调上升，即** $F(x)>F(0)=0$，**亦即** $e^{-2x}(x+1)-(1-x)>0$，**即原命题得证**.

例 3.64　**证明：当** $0<x<2$ **时，**$4x\ln x-x^2-2x+4>0$.

证明：令 $F(x)=4x\ln x-x^2-2x+4$，**则** $F'(x)=4\ln x-2x+2$，$F'(x)=0$ **有且仅有一根** $x=1$，$F''(x)=\frac{4}{x}-2>0$. **所以** $F(x)$ **在** $x=1$ **取极小值，即有**

$$F(1)=1,\ F(0)=\lim_{x\to0^+}(4x\ln x-x^2-2x+4)=4,$$

$$F(2)=8\ln2-4>0,$$

所以 $F_{min}>0$，**所以，**$F(x)=4x\ln x-x^2-2x+4\geqslant F_{min}>0$，**命题得证**.

例 3.65　**证明：当** $x>0$ **时，**$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$.

证明：原命题等价于 $(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$. **构造函数为**

$$F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x,\ F(0)=0,$$

则

$$F'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>0,$$

所以 $F(x)$ **严格单调上升，**$F(x)>F(0)=0$，**即原命题得证**.

例 3.66　**证明：当** $|x|\leqslant2$ **时，**$|3x-x^3|\leqslant2$.

证明：令 $f(x)=3x-x^3$，$f'(x)=3-3x^2$，**由** $f'(x)=0$，**得** $x=\pm1$，**而**

$$f(-2)=-6+8=2,\ f(2)=6-8=-2,$$

$$f(1)=3-1=2,\ f(-1)=-3+1=-2,$$

所以，当 $|x|\leqslant2$ **时，**$f_{max}=2$，$f_{min}=-2$，**即** $-2\leqslant f(x)=3x-x^3\leqslant2$，**即** $|3x-x^3|\leqslant2$ **成立**.

单元练习题 3

1. $y=x^x$，$dy=$____________.

2. $f'(x)=2$，**则** $\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2+3h)}{h}=$____________.

3. **设** $x^2y+xy^2+2y^3=1$ **确定** $y=y(x)$，**则** $y'=$____________.

4. **若** $y=f(x)$ **在** x_0 **可导，且** $f(x_0)$ **为其极大值，则曲线** $y=f(x)$ **在点** $[x_0,f(x_0)]$ **处的切线方程是**____________.

5. **如果满足** $f(x)=f(0)+x+\alpha(x)$，**且** $\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x}=0$，**则** $f'(0)=$____________.

6. **函数** $y=xe^{-x}$ **的极值点为**____________，**它的图形拐点为**____________.

7. $y=1+\dfrac{2x}{(x-1)^2}$的水平渐近线为：____________，垂直渐近线为__________.

8. 设 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)<0$，$f''(x)<0$，又 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，$dy=f'(x)\Delta x$，则 Δy 与 dy 相比是____________.

9. $y=f(x)$ 由 $\ln(x+y)=e^{xy}$确定，则 $y'(x)|_{x=0}=$____________.

10. 函数 $y=x^3-3x^2+x+9$ 的凹区间为____________.

11. $f(-x)=-f(x)$，且 $f'(-x_0)=k$，则 $f'(x_0)=$____________.

12. $\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$____________.

13. 函数 $f(x)$ 为可导函数，则 $y=\sin\{f[\sin f(x)]\}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$____________.

14. 函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为____________.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处可导，则有 (　　)

A. $a=1$，$b=0$　　B. $a=0$，b 为任意实数

C. $b=0$，$a=0$　　D. $a=1$，b 为任意实数

16. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则函数 $y=f(x)$ 的绝对值在 $x=a$ 处不可导的充分条件是 (　　)

A. $f(a)=0$，$f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$，$f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$，$f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$，$f'(a)<0$

17. $f(x)=3x^2+x^2|x|$，则使存在的最高阶导数 n 为 (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

18. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则下列正确的是 (　　)

A. $dy=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$　　B. $dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

C. $y'=\sqrt{1+x^2}dx$　　D. $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

19. 曲线 $y=6x-24x^2+x^4$ 的凸区间为 (　　)

A. $(-2,2)$　　B. $(-\quad,0)$

C. $(0,+\quad)$　　D. $(-\quad,+\quad)$

20. 函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理的 ξ 为 (　　)

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. π

21. 设 $f(0)=0$，且极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$值为 (　　)

A. $f'(x)$　　B. $f'(0)$　　C. $f(0)$　　D. $\dfrac{1}{2}f'(0)$

22. 设 $y=f(x)$ 可导，则 $f(x-2h)-f(x)$ 等于 (　　)

A. $f'(x)h+o(h)$　　B. $-2f'(x)h+o(h)$

C. $-f'(x)h+o(h)$　　D. $2f'(x)h+o(h)$

23. 若直线 L 与 Ox 轴平行,且与曲线 $y=x-e^x$ 相切,则切点坐标为　(　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(0,-1)$　　D. $(0,1)$

24. 设 $f(x)=e^{3\sqrt{x}}\sin 3x$,则下列式中正确的是　(　　)

A. $f'(0)=3$　　B. $f'(0)=\frac{1}{3}$

C. $f'(0)=1$　　D. $f'(0)$ 不存在

25. 设 $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$,求 y'.

26. $y=e^{\sin(x^2+1)}$,求 dy.

27. $y=x^{\sin x}$,求 y'.

28. 设 $y=y(x)$ 由 $x^y=y^x$ 确定,求 dy.

29. $y=\frac{x-1}{x+1}$,求 $y''(0)$.

30. **设** $f(x)$ **为已知的二阶可导函数,求** $y = f(x^2)$ **的二阶导数**.

31. $f(\ln x+1)=e^x+3x$,求$\frac{df(x)}{dx}$.

32. $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t, \end{cases}$求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

33. 设曲线$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$由方程组$\begin{cases} x=te^t, \\ e^t+e^y=2e \end{cases}$确定,求该曲线在 $t=1$ 时的斜率 k.

34. $y=\frac{x^2}{1-x}$,求 $y^{(n)}$.

35. $y=x^3\ln x$,求 $y^{(n)}$.

36. $y=(1-x^2)\cos x$，求 $y^{(n)}$.

37. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

38. $f(x)=\begin{cases}(x-2)\arctan\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2,\\ 0, & x=2,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

39. $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$，求 y'.

40. $y=2^{|x^2-2x-3|}$，求 y'.

41. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ (1) 求 $f'(x)$；(2) 求 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续.

42. **方程** $\ln y+\frac{x}{y}=0$ **确定** $y=y(x)$**，求**$\frac{dy}{dx}$**，**$\frac{d^2y}{dx^2}$.

43. **设** $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$**求** $f'(x)$.

44. $f(x)=\begin{cases}g(x)-e^{-x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$**其中** $g(x)$ **具有二阶连续导数，且** $g(0)=1$，$g'(0)=-1$.
(1) **求** $f'(x)$；(2) **讨论** $f'(x)$ **的连续性**.

45. **证明曲线** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ **的切线介于坐标轴之间的长度为一常数**.

46. **已知** $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$**，求**$\frac{dy}{dx}$.

47. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$.

(1) 确定 a 值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；(2) 求 $f'(x)$.

48. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0)=0, & x=0,\end{cases}$ 证明：$g(x)$ 有一阶连续导数.

49. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to +}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x\sin^2 x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)x}{\tan x-\sin x}$.

50. **证明下列不等式：**

(1) **当** $x>0$ **时，则** $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

(2) **当** $b>a>0$ **时，则** $3a^2(b-a)<b^3-a^3<3b^2(b-a)$.

(3) **当** $x>0$ **时，则** $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$.

(4) **当** $x>1$ **时，则** $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

(5) 当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时,则 $\cos x \leqslant 1 - \frac{1}{\pi}x^2$.

(6) 设 $0 \leqslant x \leqslant 1$,则 $p > 1$,$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$.

51. 分析函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 的单调性、凹凸性、极值、拐点及渐近线.

52. 分析函数 $y = x^3(1-x)$ 的单调性、凹凸性、极值、拐点及渐近线.

53. 求内接于半径为 R 的半圆的矩形的最大面积.

54. 已知三角形高为 h,底边长为 l,求一边落于底边的内接矩形的最大面积.

55. 把一根长为 a 的铅丝截成两段,一段围成圆形,一段围成正方形. 问这两段铅丝各多长时,圆形面积与正方形面积之和最小?

56. 用面积为 A 的一块铁皮做一个有盖圆柱形油桶,问油桶直径为多长时,油桶的容积最大?这时油桶的高是多少?

57. 已知 A,B 两地相距 30 km,如图 3.6 所示,在它们之间铺设一条管道,由于地质条件不同,在 $y>0$ 地区,铺设管道费用为 10^5 元/km,在 $y\leqslant 0$ 地区,铺设管道费用为 6×10^4 元/km. 求最经济的铺设路线.

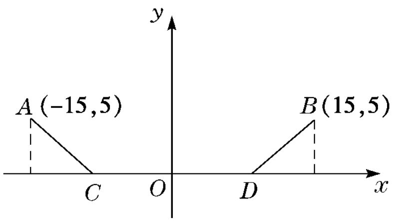


图 3.6

58. 在直角坐标系的第一象限内作 $4x^2+y^2=1$ 的切线,使其与两坐标轴所构成的三角形面积最小,求切点坐标.

59. 一商家销售某种商品,其价格 $p=7-0.2x$,其中 x 为销售量(kg),商品的成本是 $c=3x+1$(百元).

(1) 若每销售 1 kg 商品,政府要征税 t(百元),求商家获得最大利润时的销售量?

(2) 在商家获得最大利润的前提下,t 为何值时,政府的税收总额最大?

第四章　不定积分

本章主要知识点

◎　不定积分的意义、基本公式
◎　求不定积分的三种基本方法
　　1. 凑微分法(第一类变换法)
　　2. 直接变换法
　　3. 分部积分法
◎　不定积分的四类杂例

一、不定积分的意义、基本公式

不定积分是导数的逆运算,基本特点是基本公式较多,灵活善变.复习此章节主要诀窍在于基本公式熟练,基本题型要求运算快捷,辅以一定量的练习,定能学好之.

1. 性质

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x);\ d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx;\ \int dF(x) = F(x) + C.$$

2. 基本公式

(1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\quad (n \neq -1)$，$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$；

(2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$，$\int e^x dx = e^x + C$；

(3) $\int \sin xdx = -\cos x + C$，$\int \cos xd x = \sin x + C$，$\int \sec^2 xdx = \tan x + C$，

$\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$；

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$，$\int \frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；

(5) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

二、求不定积分的三种基本方法

1. 凑微分法(第一类变换法)

一些常见的固定类型：

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)；$$

$$\int f(e^{\alpha x})e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}\int f(e^{\alpha x})d(e^{\alpha x})；$$

$$\int x f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int f(x^2)\,dx^2\;;$$

$$\int x^{n-1} f(x^n)\,dx = \frac{1}{n}\int f(x^n)\,dx^n\;;$$

$$\int \frac{1}{x} f(\ln x)\,dx = \int f(\ln x)\,d(\ln x)\;;$$

$$\int \sin x f(\cos x)\,dx = -\int f(\cos x)\,d(\cos x)\;;$$

$$\int \cos x f(\sin x)\,dx = \int f(\sin x)\,d(\sin x)\;;$$

$$\int \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)\;;$$

$$\int \sec^2 x f(\tan x)\,dx = \int f(\tan x)\,d(\tan x)\;.$$

例 4.1　**求** $\int (2x+1)^{2006}dx$.

解：原式 $= \frac{1}{2}\int (2x-1)^{2005}d(2x-1) = \frac{1}{4012}(2x-1)^{2006} + C$.

例 4.2　**求** $\int e^{3x-1}dx$.

解：原式 $= \frac{1}{3}\int e^{3x-1}d(3x-1) = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$.

例 4.3　**求** $\int x\sin(5x^2-7)\,dx$.

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \sin(5x^2-7)\,dx^2 = \frac{1}{10}\int \sin(5x^2-7)\,d(5x^2-7)$

$= -\frac{1}{10}\cos(x^2-7) + C.$

例 4.4　**求** $\int \frac{1}{x}\frac{\ln x}{2\ln x+1}dx$.

解：原式 $= \int \frac{\ln x}{2\ln x+1}d\ln x \xlongequal{u=\ln x} \frac{1}{2}\int \frac{2u+1-1}{2u+1}du$

$= \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{2u+1}\right)du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\ln|2u+1| + C = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}\ln|2\ln x+1| + C.$

例 4.5　**求** $\int \frac{x}{4+x^4dx}$.

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2^2+(x^2)^2}dx^2 = \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2} + C$.

例 4.6　**求** $\int \frac{1}{\cos^2 x(\tan x+1)}dx$.

解：原式 $= \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx = \int \frac{1}{1+\tan x}d\tan x = \ln|1+\tan x| + C$.

例 4.7　**求** $\int \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解：原式 $= 2\int \sin 2\sqrt{x}\,d\sqrt{x} = \cos 2\sqrt{x} + C.$

例 4.8 **求** $\int e^{e^x+x}dx.$

解：原式 $= \int e^{e^x} \cdot e^x dx = \int e^{e^x} de^x = e^{e^x} + C.$

例 4.9 **求** $\int \frac{x^3+3x+2}{x+2}dx.$

解：利用第一章介绍的综合除法知

$$\frac{x^3+3x+2}{x+2} = x^2 - 2x + 7 - \frac{12}{x+12}.$$

原式 $= \int\left(x^2 - 2x + 7 - \frac{12}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7x - 12\ln|x+2| + C.$

例 4.10 **求** $\int \frac{x^6 - x^3 + x + 3}{x^2+1}dx.$

解：原式 $= \int\left(x^4 - x^2 - x + 1 + \frac{2x+2}{x^2+1}\right)dx$

$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(1+x^2) + 2\arctan x + C.$$

例 4.11 **求** $\int \frac{1}{\sin x}dx$**，**$\int \frac{1}{\cos x}dx.$

解： $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$

$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$

注 此例对于求解三角函数的不定积分相当重要，请熟练掌握.

例 4.12 **求** $\int \frac{1}{2-\cos x}dx.$

解：原式 $= \int \frac{2+\cos x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}dx$

$$= \int \frac{2+\cos x}{4-\cos^2 x}dx = \int \frac{2}{4-\cos^2 x}dx + \int \frac{d\sin x}{3+\sin^2 x}$$

$$= \int \frac{2\sec^2 x}{4\sec^2 x - 1}dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) = 2\int \frac{d\tan x}{4\tan^2 x + 3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \int \frac{d2\tan x}{(2\tan x)^2 + (\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(2\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan x\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

例 4.13 **求** $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx.$

解：原式 $= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin x + \cos x + \sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x} dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{-d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C.$

例 4.14　**求** $\int \tan^4 x dx$.

解：原式 $= \int [\tan^4 x + \tan^2 x - (\tan^2 x + 1) + 1] dx$

$= \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x) dx - \int \sec^2 x dx + \int dx = \int \tan^2 x d(\tan x) - \tan x + x$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + x + C.$

例 4.15　**求** $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 2} dx$.

解：原式 $= \int \frac{2(x - 1) + 5}{(x - 1)^2 + 1} dx = \int \frac{d(x - 1)^2}{(x - 1)^2 + 1} + 5\int \frac{1}{(x - 1)^2 + 1} dx$

$= \ln(x^2 - 2x + 2) + 5\arctan(x - 1) + C.$

例 4.16　**求** $\int \frac{x}{\sqrt{2 - 2x - x^2}} dx$.

解：原式 $= \int \frac{x - 1 + 1}{\sqrt{3 - (x - 1)^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x - 1)^2}{\sqrt{3 - (x - 1)^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{3 - (x - 1)^2}} d(x - 1)$

$= -\sqrt{3 - (x - 1)^2} + \arcsin \frac{x - 1}{\sqrt{3}} + C.$

例 4.17　**求** $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}}}$.

解：原式 $= \int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}{1 + e^{\frac{x}{2}}} dx = x - 2\int \frac{de^{\frac{x}{2}}}{1 + e^{\frac{x}{2}}} = x - 2\ln(1 + e^{\frac{x}{2}}) + C$.

例 4.18　**求** $\int \frac{1}{(2x + 1)(3x + 2)} dx$.

解：原式 $= -\int \frac{3(2x + 1) - 2(3x + 2)}{(2x + 1)(3x + 2)} dx = -\int \frac{3}{3x + 2} dx + \int \frac{2}{2x + 1} dx$

$= -\ln|3x + 2| + \ln|2x + 1| + C$.

例 4.19　**求** $\int \frac{1}{(x - 1)^2(x + 1)} dx$.

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{1 + x + 1 - x}{(x - 1)^2(x + 1)} dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 - x^2} dx$

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C$.

例 4.20　**求** $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$.

解：原式 $= \int \frac{1}{e^x\sqrt{1 - e^{-2x}}} dx = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} dx = -\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} = -\arcsin e^{-x} + C.$

2. 直接变换法

题型 1 $\int f(\sqrt{ax+b})\,dx$.

对于此类根式中的一次项,直接令 $\sqrt{ax+b}=t$ **即可. 令** $t=\sqrt{ax+b}$**,** $x=\dfrac{(t^2-b)}{a}$**,则**

$$\int f(\sqrt{ax+b})\,dx=\frac{2}{x}\int tf(t)\,dt.$$

例 4.21 **求** $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}dx$.

解:令 $t=\sqrt{x}$**,** $x=t^2$**,则**

原式 $=\int\dfrac{1}{t+1}2tdt=2\int dt-2\int\dfrac{dt}{t+1}=2t-2\ln|t+1|+c=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

例 4.22 **求** $\int\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}+1}dx$.

解:令 $t=\sqrt{x-1}$**,** $x=t^2+1$**,则**

$$\text{原式}=\int\frac{1}{t^2+1+t+1}2tdt=\int\frac{2t}{t^2+t+2}dt=\int\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)-1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}dt$$

$$=\ln(t^2+t+2)-\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C.$$

$$=\ln(\sqrt{x-1}+x+2)-\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

例 4.23 **求** $\int\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$.

解:原式 $\xlongequal[\sqrt[6]{x}=t]{x=t^6}\int\dfrac{6t^5}{t^2+t^3}dt=6\int\dfrac{t^3}{1+t}dt=6\int\left(t^2-t+1-\dfrac{1}{1+t}\right)dt$

$=2t^3-3t^2+6t-\ln(1+t)+C$

$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.$

例 4.24 **求** $\int\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

解:原式 $\xlongequal[x=\ln(t^2-1)]{t=\sqrt{1+e^x}}\int\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{2t}{t^2-1}dt$

$=2\int\dfrac{1}{t^2-1}dt=\ln\left|\dfrac{1-t}{1+t}\right|+C=\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C.$

题型 2 $\int f(\sqrt{ax^2+b})\,dx$.

$\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,dx$ **,变换** $x=a\sin t$. **(见图** 4.1**)**

$\int f(\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ **,变换** $x=a\tan t$. **(见图** 4.2**)**

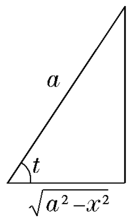


图 4.1

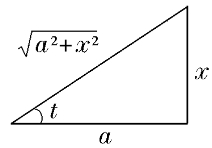


图 4.2

$\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,dx$，变换 $x=a\sec t$.（见图 4.3）

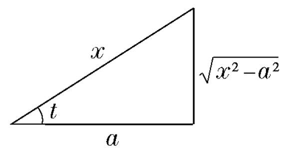


图 4.3

例 4.25　**求** $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$.

解：令 $x=3\sin t$，**则**

$$\text{原式}=\int \frac{3\cos t}{3\sin t}3\cos t dt = 3\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = 3\int \frac{1}{\sin t}dt - 3\int \sin t dt$$

$$=\frac{-3}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + 3\cos t + C = \frac{-3}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}}{1-\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}}\right| + \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C.$$

例 4.26　**求** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$.

解：令 $x=\tan t$，**原式** $=\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\cdot\sec t}dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = -\frac{1}{\sin t}+C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

例 4.27　**求** $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx$.

解：令 $x=\sec t$，**则**

$$\text{原式}=\int \frac{\sec^2 t}{\tan t}\tan t\sec t dt = \int \sec^3 t dt$$

$$=\int \frac{1}{\cos^3 t}dt = \int \frac{\cos t}{\cos^4 t}dt = \int \frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2} \overset{u=\sin t}{=\!=\!=} \int \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$=\int \frac{du}{u^2(u-u^{-1})^2} = -\int \frac{du^{-1}}{(u-u^{-1})^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(u+u^{-1}+u^{-1}-u)}{(u-u^{-1})^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{d(u+u^{-1})}{(u+u^{-1})^2-4} - \frac{1}{2}\int \frac{d(u^{-1}-u)}{(u^{-1}-u)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u+u^{-1}}{1-u-u^{-1}}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{u^{-1}-u} + C.$$ **（还原略）**

例 4.28　**求** $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

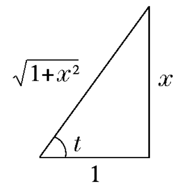


图 4.4

解：令 $x=\tan t$**，则**

原式 $=\int \frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int \cos t\mathrm{d}t = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

3. 分部积分法

公式为 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$.

四种基本题型

题型 1　$\int P_m(x)e^{\alpha x}dx$.

例 4.29　**求** $\int (2x-1)e^{2x}dx$.

解：原式 $=\frac{1}{2}\int (2x-1)\mathrm{d}e^{2x} = \frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}\,2x$

$=\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - e^{2x} + C.$

例 4.30　**求** $\int e^{\sqrt{x-1}}dx$.

解：原式 $\xlongequal{t=\sqrt{x-1}} \int e^t\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}e^t = 2te^t - 2e^t + C$

$=2\sqrt{x-1}e^{\sqrt{x-1}} - 2e^{\sqrt{x-1}} + C.$

例 4.31　**求** $\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}}dx$.

解：原式 $=\int x^2 e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) \xlongequal{u=\frac{x^2}{2}} \int 2ue^u\mathrm{d}u = \int u\mathrm{d}e^u$

$=2ue^u - 2e^u + C = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C.$

题型 2　$\int P_m(x)\cos\beta x\mathrm{d}x$ **或** $\int P_m(x)\sin\beta x\mathrm{d}x$.

例 4.32　**求** $\int 3x\sin(2x-1)dx$.

解：原式 $=\frac{-3}{2}\int x\mathrm{d}\cos(2x-1) = -\frac{3}{2}x\cos(2x-1) + \frac{3}{2}\int \cos(2x-1)\mathrm{d}x$

$=-\frac{3}{2}x\cos(2x-1) + \frac{3}{4}\sin(2x-1) + C.$

例 4.33　**求** $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\int x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)$

$=\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

例 4.34　**求** $\int \sin(\sqrt{x}+1)dx$.

解：原式 $\xlongequal{t=\sqrt{x}} \int \sin(t+1)2t\,dt = -2\int t\,d\cos(t+1) = -2t\cos(t+1) + 2\int \cos(t+1)\,dt$

$= -2t\cos(t+1) + 2\sin(t+1) + C = -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}+1) + 2\sin(\sqrt{x}+1) + C.$

题型 3 $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ **或** $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$.

例 4.35 **求** $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

解：设 $I = \int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x\,de^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int \sin 3x\,de^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx + C$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x + C - \frac{9}{4}I.$

解得 $I = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + C.$

题型 4 $\int P_m(x)\cdot\left[\begin{array}{l}\ln(x)\\ \arctan(x)\\ \arcsin(x)\end{array}\right]dx$

例 4.36 **求** $\int x\ln(x+1)\,dx$.

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \ln(x+1)\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$

例 4.37 **求** $\int \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+1)\,dx$.

解：原式 $\xlongequal{t=\sqrt{x}} \int t\ln(t+1)2t\,dt = \frac{2}{3}\int \ln(t+1)\,dt^3$

$= \frac{2}{3}t^3\ln(t+1) - \frac{2}{3}\int\frac{t^3}{t+1}dt = \frac{2}{3}t^3\ln(t+1) - \frac{2}{3}\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \frac{2}{3}t^3\ln(t+1) - \frac{2}{3}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln(t+1)\right] + C$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}\ln(\sqrt{x}+1) + C.$

例 4.38 **求** $\int (2x-1)\ln^2 x\,dx$.

解：原式 $= \int \ln^2 x\,d(x^2 - x) = (x^2 - x)\ln^2 x - 2\int (x^2 - x)\frac{1}{x}\ln x\,dx$

$= (x^2 - x)\ln^2 x - 2\int (x-1)\ln x\,dx = (x^2 - x)\ln^2 x - 2\int \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2} - x\right)$

$$= (x^2 - x)\ln^2 x - 2\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x + 2\int\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{1}{x}dx$$

$$= (x^2 - x)\ln^2 x - (x^2 - 2x)\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$$

例 4.39　**求** $\int x\arctan 2x dx$.

解：原式 $= \frac{1}{2}\int\arctan 2x dx^2 = \frac{1}{2}x^2\arctan 2x - \int\frac{x^2}{1+4x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan 2x - \frac{1}{4}\int\frac{4x^2+1-1}{1+4x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan 2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\arctan 2x + C.$$

例 4.40　**求** $\int(x-1)\arcsin x dx$.

解：原式 $\xlongequal{x=\sin t}\int(\sin t - 1)t\cos t dt = \frac{1}{2}\int t\sin 2t dt - \int t\cos t dt$

$$= -\frac{1}{4}\int t d(\cos 2t) - \int t d(\sin t)$$

$$= -\frac{t\cos 2t}{4} + \frac{1}{4}\int\cos 2t dt - t\sin t + \int\sin t dt$$

$$= -\frac{1}{4}t\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t - t\sin t - \cos t + C$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin x\cdot(1-2x^2) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - x\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

三、不定积分的四类杂例

1. 含绝对值的不定积分

例 4.41　**求** $\int|x|dx$.

解：原式 $= F(x) = \begin{cases}\frac{x^2}{2}+c_1, & x\geqslant 0,\\ -\frac{x^2}{2}+c_2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $F(x)$ **可导必连续，因为** $c_1 = c_2$**，故原式**

$$F(x) = \begin{cases}\frac{x^2}{2}+c_1, & x\geqslant 0,\\ -\frac{x^2}{2}+c_1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

例 4.42　**求** $\int|x^2-2x-3|dx$.

解： $f(x) = |x^2-2x-3| = |(x-3)(x+1)| = \begin{cases}x^2-2x-3, & x\geqslant -1,\\ -x^2+2x+3, & -1<x<3,\\ x^2-2x-3, & x\geqslant 3,\end{cases}$

$$\text{原式} = F(x) = \int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c_1, & x \geqslant -1, \\ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + c_2, & -1 < x < 3, \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c_3, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

由 $F(x)$ 可导得

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} - 1 + 3 + c_1 = \frac{1}{3} + 1 - 3 + c_2, \\ -\frac{27}{3} + 9 + 9 + c_2 = \frac{27}{3} - 9 - 9 + c_3. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c_2 = -\frac{10}{3} + c_1, \\ c_3 = 18 + c_2 = 18 - \frac{10}{3} + c_1 = \frac{44}{3} + c_1, \end{cases}$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c_1, & x \geqslant -1, \\ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \frac{10}{3} + c_1, & -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{44}{3} + c_1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

2. 分段函数的不定积分

例 4.43 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1, \\ 2x+1, & 1 < x < 2, \\ x+1, & x \geqslant 2, \end{cases}$ 求 $\int f(x)\,dx$.

解：$F(x) = \int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1, & x \geqslant 1, \\ x^2 + x + c_2, & 1 < x < 2, \\ \frac{x^2}{2} + x + c_3, & x \geqslant 2. \end{cases}$

由 $F(x)$ 可导知，$\begin{cases} \frac{1}{2} + c_1 = 2 + c_2, \\ 6 + c_2 = 4 + c_3 \end{cases}$ 成立，解得 $c_2 = -\frac{3}{2} + c_1$，$c_3 = 2 + c_2 = \frac{1}{2} + c_1$，所以

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1, & x \geqslant 1, \\ x^2 + x - \frac{3}{2} + c_1, & 1 < x < 2, \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} + c_1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

3. 递推关系的不定积分

例 4.44　**求** $I_n = \int \sin^n x dx$.

解：$I_n = -\int \sin^{n-1} x d\cos x$；

$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + \int (n-1)\cos^2 x\sin^{n-2} x dx$；

$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$.

$nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1) I_{n-2}$.

所以 $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}\quad (n=1,2,\cdots)$.

例 4.45　**求** $I_n = \int \tan^{2n} x dx$.

解：$I_n = \int (\tan^{2n} x + \tan^{2n-2} x) dx - \int \tan^{2(n-1)} dx$；

$I_n = \int \tan^{2n-2} x d\tan x - \int \tan^{2(n-1)} dx$；

$I_n = \frac{1}{2n-1}\tan^{2n-1} x - I_{n-1}\quad (n=1,2,\cdots)$.

4. 一些特殊变换的不定积分

例 4.46　**求** $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx$.

解：**令** $t = \frac{1}{x}$，**则**

$$\text{原式} = \int \frac{t^6}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^6}{1+t^2} dt$$

$$= -\int\left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = -\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{1}{x^5} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \arctan\frac{1}{x} + C.$$

例 4.47　**求** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

解：**令** $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，**解得** $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$，$t^2 + xt^2 = 1 - x$，$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，**则**

$$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt,$$

$$\text{原式} = -\int \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2} dt \overset{t=\tan u}{=\!=\!=} \int \frac{-4\tan^2 u}{\sec^4 u}\sec^2 u du$$

$$= -4\int \sin^2 u du = -2\int (1-\cos 2u) du = -2u + \sin 2u + C.$$

单元练习题 4

1. $\int d\cos 2x =$ ____________.

2. 已知 $f(\cos x) = \sin^2 x$，则 $\int f(x-1)\,dx =$ ____________.

3. $\dfrac{d}{dx}\left[\int \tan^3 x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx\right] =$ ____________.

4. 已知 $\int f(x)\,dx = \sqrt{1+x^2} + C$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h} =$ ____________.

5. 已知 $\int x f(x^2)\,dx = xe^x$，则 $f(x) =$ ____________.

6. 下列积分正确的是 ( )

A. $\int x^a dx = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ （a 为常数）　　B. $\int x\sin x^2 dx = -\cos^2 x^2 + C$

C. $\int \dfrac{1}{3+2x}dx = \dfrac{1}{2}\ln|3+2x| + C$　　D. $\int \ln x dx = \dfrac{1}{x} + C$

7. 计算下列不定积分：

(1) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$；

(2) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(3) $\int \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$；

(4) $\int \dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx$；

(5) $\int \tan^3 x dx$；

(6) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$；

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$;

(8) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$;

(9) $\int \frac{x^2}{1+x}dx$;

(10) $\int \frac{x^4-x^2+1}{x+2}dx$;

(11) $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$;

(12) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx$;

(13) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$;

(14) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$;

(15) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$;

(16) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$;

(17) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$；　　　(18) $\int \sin x \ln \tan x dx$；

(19) $\int \arctan \sqrt{x} dx$；　　　(20) $\int (\arcsin x)^2 dx$；

(21) $\int x \sin \sqrt{x} dx$；　　　(22) $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$；

(23) $\int \sin(\ln x) dx$；　　　(24) $\int e^{2x} \sin^2 x dx$；

(25) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$；　　　(26) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$；

(27) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$；

(28) $\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}dx$；

(29) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$；

(30) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$；

(31) $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$；

(32) $\int x\ln(4+x^2)dx$；

(33) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$；

(34) $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$；

(35) $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$；

(36) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$；

(37) $\int (|1+x|-|1-x|)\,dx$；　　　　(38) $\int \max(x^2, x^3)\,dx$；

(39) $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$；　　　　(40) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\,dx$；

(41) $\int \left(\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}\right) dx$.

第五章　定积分

本章主要知识点

◎　定积分计算
◎　特殊类函数的定积分计算
◎　变限积分
◎　有关定积分的证明题
◎　广义积分的敛散性
◎　定积分应用
　1. 面积
　2. 旋转体体积
　3. 物理应用

一、定积分计算

定积分计算主要依据牛顿 - 莱布尼兹公式 设 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$**,则**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

其主要计算方法与不定积分的计算方法是类似的,也有三个主要方法,但需要指出的是对于第二类直接变换法,应注意积分限的变化:

$$\int_a^b f(x)\,dx \xlongequal[t=\varphi^{-1}(x)]{x=\varphi(t)} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

例 5.1　**求** $\int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x + 1)\,dx$ **的值.**

解 原式 $= \int_1^2 (\ln x + 1)\,d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x + 1)^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\ln^2 2 + 2\ln 2)$.

例 5.2　**求** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx$ **的值.**

解:原式 $\xlongequal[x=t^2-1]{\sqrt{x+1}=t} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t+1}2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^3-t}{t+1}dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - t^2\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}$

$$= \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3}.$$

例 5.3　**求** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$ **的值.**

解：原式 $= -\dfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}(\cos 2x) = -\dfrac{1}{2}x\cos 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x$

$= \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{4}\sin 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}.$

二、特殊类函数的定积分计算

1. 含绝对值函数的积分

利用函数的可拆分性质，插入使绝对值为 0 的点，去掉绝对值，直接积分即可.

例 5.4 求 $\int_{-1}^{2}|x-1|\mathrm{d}x$ 的值.

解：原式 $= \int_{-1}^{1}(1-x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}(x-1)\mathrm{d}x = 2 + \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{1}^{2} = 2 + 0 - \left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = \dfrac{5}{2}.$

例 5.5 求 $\int_{-2}^{2}(|x+1|+|x-1|)\mathrm{d}x$ 的值.

解：原式 $= \int_{-2}^{-1}(|x+1|+|x-1|)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}(|x+1|+|x-1|)\mathrm{d}x +$

$\int_{1}^{2}(|x+1|+|x-1|)\mathrm{d}x$

$= \int_{-2}^{-1}(-x-1-x+1)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}(x+1+1-x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}(x+1+x-1)\mathrm{d}x$

$= \int_{-2}^{-1}-2x\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}2\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}2x\mathrm{d}x = -x^2\Big|_{-2}^{-1} + 4 + x^2\Big|_{1}^{2}$

$= -(1-4) + 4 + (4-1) = 10.$

2. 分段函数积分

例 5.6 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x>0, \\ x+1, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解：原式 $= \int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(x+1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$

$= \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \dfrac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{1} = -\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}.$

例 5.7 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x>1, \\ x, & x\leqslant 1, \end{cases}$ 求 $\int_{-2}^{1}f(x+1)\mathrm{d}x$ 的值.

解：原式 $= \int_{-2}^{1}f(x+1)\mathrm{d}x \overset{u=x+1}{=\!=\!=} \int_{-1}^{2}f(u)\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u + \int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u$

$= \int_{-1}^{1}u\mathrm{d}u + \int_{1}^{2}(2u+1)\mathrm{d}u = 0 + (u^2+u)\Big|_{1}^{2} = 6 - 2 = 4.$

3. 奇函数积分

如果 $f(x)$ 为定义在 $[-a, a]$ 的奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x \equiv 0$，这是一个很重要的考点.

例 5.8 求 $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x^{10}\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

解：因为被积函数是定义在 $[-\pi, \pi]$ 的奇函数，所以，原式 $=0$.

例 5.9　**求** $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+1}+e^{-x}\right)dx$ **的值**.

解：原式 $=0+\int_{-1}^{1}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{-1}^{1}=e-e^{-1}$.

例 5.10　**求** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x\cos x}{(x^2+1)(x^2+2)}+x^4\sin 2x+xe^x\right]dx$ **的值**.

解：原式 $=0+0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xe^xdx=(xe^x-e^x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$.

4. 三角函数积分

对积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$，**有下式成立：**

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2(n-2)}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1.$$

这个结论应牢记,对于某些三角函数积分可以做到快捷求解.

例 5.11　**求** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^6 xdx$ **的值**.

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^6 xdx$

$$=I_6-I_8=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{256}.$$

例 5.12　**求** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^2 xdx$ **的值**.

解：原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^2 xdx=2(I_7-I_9)$. **(运用上述结论)**

三、变限积分

变上限积分求导公式 $\left[\int_a^x f(t)dt\right]'_x=f(x)$ **(其中** $a=\text{const.}$**)是一个非常重要的公式，对于以变限积分定义的函数来说,这一公式提供了利用导数这一工具来研究它的桥梁**. **更一般的结论是**

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(t)dt\right]=f(\psi_2(x))\psi_2'(x)-f(\psi_1(x))\psi_1'(x).$$

例 5.13　**求** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1-2t)dt}{x^2\sin 2x}$ **的值**.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1-2t)dt}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1-2x)}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(-2x)}{6x^2}=-\frac{1}{3}$.

例 5.14　**求** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t^3\left(e^{-\frac{t^2}{2}}-1\right)dt}{\int_0^{x^2} e^t\sin^2(2t)\,dt}$ **的值.**

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)}{e^{x^2}\sin^2(2x^2)\,2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{4x^4 2x}=-\dfrac{1}{16}$.

例 5.15　**已知** $f(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$**，研究** $f(x)$ **的单调性、凹凸性.**

解：$f'(x)=x^2e^{-x^2}$，$f''(x)=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}(-2x)=2x(1-x^2)e^{-x^2}$.

由 $f'(x)=0$，$f''(x)=0$，**得** $x=0$，$x=\pm1$ **列表有：**

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+		+		+		+
$f''(x)$	+		-		+		-
$f(x)$	↑∪	拐点	↑∩	拐点	↑∪	拐点	↑∩

例 5.16　**若** $p(x)=\int_0^x f(x-t)\,dt$**，其中** $f(x)$ **是已知一阶可导函数，求** $\dfrac{dp}{dx},\dfrac{d^2p}{dx^2}$.

解：因为 $p(x)\xlongequal{u=x-t}-\int_x^0 f(u)\,du=\int_0^x f(u)\,du$**，所以**

$$\frac{dp}{dx}=f(x),\ \frac{d^2p}{dx^2}=f'(x).$$

四、有关定积分的证明题

有关定积分的证明题，主要的方法有：

(1) **线性变换，如** $t=ax+b$；

(2) **变上限求导公式；**

(3) **恒等变形.**

例 5.17　**如果** $f(x)$ **为** $[-a,a]$ **上的奇函数，证明** $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$.

证明：
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx\xlongequal{\text{令 }t=-x}-\int_a^0 f(-t)\,dt+\int_0^a f(x)\,dx$$
$$=-\int_a^0 -f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\,dx=-\int_0^a f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\,dx$$
$$=-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=0.$$

例 5.18　**证明：**$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$**，其中** $f(x)$ **为已知可积函数.**

证明　左边 $\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt$.

例 5.19　**已知** $f(x)$ **是以** $T>0$ **为周期的连续函数，那么对任意实数** a **下式成立：**

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx .$$

证明：因为 $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$，又由于

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx \xlongequal{t=x-T} \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = -\int_a^0 f(x)\,dx ,$$

所以

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx - \int_a^0 f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx .$$

例 5.20　**证明**：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos^2 x)}{f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)} dx = \frac{\pi}{4}$，f **为任一可积函数**.

证明：$I =$ **原式** $\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\sin^2 t)}{f(\sin^2 t) + f(\cos^2 t)} dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin^2 t)}{f(\sin^2 t + f(\cos^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin^2 x)}{f(\sin^2 x + f(\cos^2 x)} dx ,$$

所以

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)}{f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)} dx = \frac{\pi}{2} ,$$

所以 $I = \frac{\pi}{4}$.

例 5.21　**证明**：$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leqslant \frac{1}{10}$.

证明：**当** $0 \leqslant x \leqslant 1$ **时**，$\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant x^9$ **成立，所以**

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}.$$

例 5.22　**证明**：$\int_0^x (x-u) f(u)\,du = \int_0^x \left[\int_0^u f(x)\,dx\right] du .$

证明：$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x (x-u) f(u)\,du\right] = \frac{d}{dx}\left[x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du\right]$

$$= \int_0^x f(u)\,du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)\,du$$

$$\Rightarrow \int_0^x (x-u) f(u)\,du = \int_0^x \left[\int_0^x f(u)\,du\right] dx + C = \int_0^x \left[\int_0^u f(x)\,dx\right] du + C .$$

两边同时取 $x=0 \Rightarrow C=0$，**所以原命题成立**.

五、广义积分的敛散性

定义：$\int_a^{+} f(x)\,dx = \lim\limits_{u\to+} \int_a^u f(x)\,dx$ **存在并有限**.

基本结论：$\int_a^{+} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{收敛}, p > 1, \\ \text{发散}, p \leqslant 1. \end{cases}$ （**其中** $a > 0$）

复习时应着重掌握通过直接计算来研究广义积分的敛散性.

例 5.23　**研究** $\int_1^{+} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ **的敛散性.**

解: $\lim\limits_{u\to +}\int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\lim\limits_{u\to +}\int_1^u \frac{1}{1+x}d\sqrt{x}$

$$=2\lim_{u\to +}\arctan\sqrt{x}\Big|_1^u = 2\lim_{u\to +}\left(\arctan\sqrt{u}-\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $\int_1^{+} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ 是收敛的.

例 5.24　$\int_{-}^{+} \frac{k}{1+x^2}dx = 1$,求 k.

解: 左边 $= k\arctan x\Big|_{-}^{+} = k\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=k\pi=1$,所以 $k=\frac{1}{\pi}$.

例 5.25　**当 k 为何值时,广义积分** $\int_2^{+} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ **收敛?当 k 为何值时,这个广义积分发散?又当 k 为何值时,广义积分取得最小值?**

解: 当 $k\neq 1$ 时,有

$$\int_2^{+} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+} \frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k} = \left[\frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k}\right]\Big|_2^{+} = \begin{cases} + & ,k<1, \\ \frac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1} & ,k>1; \end{cases}$$

当 $k=1$ 时,$\int_2^{+} \frac{1}{x\ln x} = [\ln(\ln x)]\Big|_2^{+} = +$　发散,即,当 $k>1$ 时,广义积分 $\int_2^{+} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛;当 $k\leqslant 1$ 时,广义积分发散.

设 $f(x) = \frac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1}\ (k>1)$,则

$$f'(k) = \frac{-(\ln 2)^{1-k}\ln\ln 2\cdot(k-1)-(\ln 2)^{1-k}}{(k-1)^2} = \frac{(\ln 2)^{1-k}[(1-k)\ln\ln 2-1]}{(k-1)^2}.$$

令 $f'(k)=0$,得驻点 $k_0 = 1-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$. 但当 $k<k_0$ 时,$f'(k)<0$;当 $k>k_0$ 时,$f'(k)>0$. 从而,当 $k=k_0=1-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时,广义积分取极小值,也就是最小值.

注 类似可研究无界函数积分,即瑕积分. 假设 a 为 f

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x$$

存在并有限.

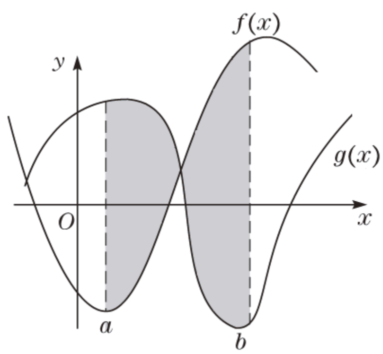


图 5.1

例 5.26　**研究** $\int_0^1 \frac{1}{x(x+2)}dx$ **的敛散性**

解: 原式 $= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)\Big|_0^1$

原式发散.

六、定积分应用

1. 面积

如图 5.1 所示 $S_{阴影}=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$.

求面积首要问题是画出草图，图形的上下位置、交点一定要画得准确. 常用几何线如直线、抛物线、双曲线 $y=\frac{1}{x}$，指数、对数、正弦 $\sin x$，余弦 $\cos x$ 的图像要画得熟练、准确.

例 5.27 如图 5.2，求 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 所围图形的面积.

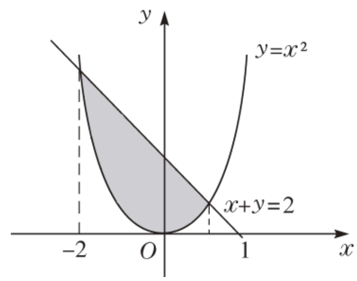


图 5.2

解：由 $x^2=2-x$，解得 $x=1$，$x=-2$，则所围面积

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,dx$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{9}.$$

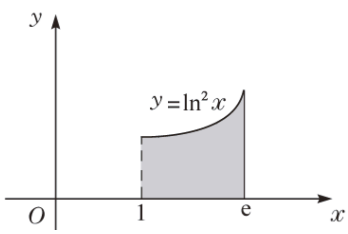


图 5.3

例 5.28 如图 5.3，求 $y=\ln^2 x$，$x=1$，$x=e$，Ox 轴所围图形的面积.

解：$$S=\int_1^e \ln^2 x\,dx$$

$$=x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e \ln x\,dx$$

$$=e-2x\ln x\Big|_1^e+2\int_1^e 1\,dx$$

$$=e-2e+2e-2=e-2.$$

例 5.29 如图 5.4，求 $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$，$y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 所围图形的面积.

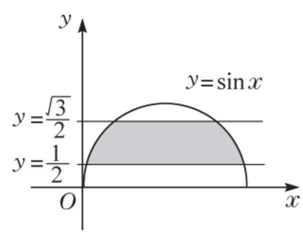


图 5.4

解：$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(\pi-\arcsin x-\arcsin x)\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi-2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arcsin x\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi-2x\arcsin x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{1-x^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{\pi}{6}-1+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}-2}{6}\pi+\sqrt{3}-1.$$

例 5.30 如图 5.5，求由过抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上点 $(1,1)$ 的切线与抛物线本身及 x 轴所围图

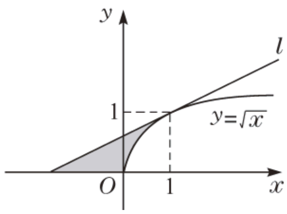


图 5.5

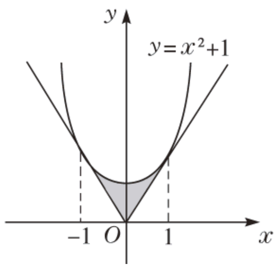


图 5.6

形的面积.

解：切线 l **的方程：**$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$**，则**

$$k=y'(1)=\frac{1}{2},$$

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x=2y-1,$$

$$S=\int_0^1[y^2-(2y-1)]dy=\left(\frac{1}{3}y^3-y^2+y\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

例 5.31　**如图** 5.6，**过点** (0,0) **作抛物线** $y=x^2+1$ **的两切线，求两切线与抛物线本身所围图形的面积**.

解：设切点为 (x_0, x_0^2+1)，**则** $k=y'(x_0)=2x_0$，**切线方程为** $y=2xx_0$.

又切点位于其上，所以 $x_0^2+1=2x_0^2$，$x_0=\pm 1$，**所以切线方程为** $y=\pm 2x$，**则**

$$S=2\int_0^1 (1+x^2-2x)\,dx$$

$$=2\int_0^1 (x-1)^2 dx=\frac{2}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

2. 旋转体体积

绕 x **轴旋转所得图形的体积（见图** 5.7）$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$；

绕 y **轴旋转所得图形的体积（见图** 5.8）$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$.

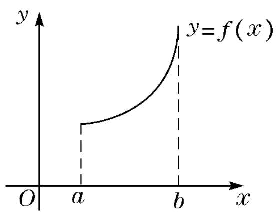


图 5.7

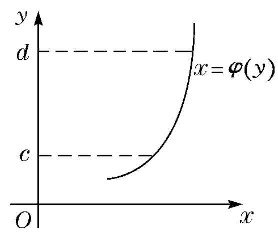


图 5.8

绕 y **轴旋转所得图形的体积（见图** 5.8）$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy$；

绕 x **轴旋转所得图形的体积（见图** 5.8）$V_x=2\pi\int_c^d y\varphi(y)\,dy$.

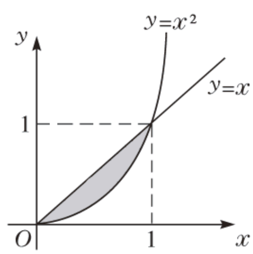


图 5.9

例 5.32　**如图** 5.9，**求** $y=x^2$ **与** $y=x$ **所围部分的体积：**

(1) **绕** x **轴旋转所得图形的体积；**

(2) **绕** y **轴旋转所得图形的体积**.

解：(1) $V_1=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{15}\pi.$$

(2) $V_2=\pi\int_0^1 \left((\sqrt{y})^2-y^2\right)dy$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\pi.$$

例 5.33　**如图** 5.10，**已知抛物线** $y=4x-x^2$，**回答并求解：**

(1) **抛物线上哪一点处切线平行于** x **轴？写出切线方程？**

(2) **求由抛物线与其水平切线及** y **轴所围平面图形的面积**.

(3) **求该平面图形绕轴旋转所成的旋转体的体积**.

解：(1) $y'=4-2x=0$，**得** $x=2$，$y=4$，**切点为** (2,4)，**切线方程为** $y=4$.

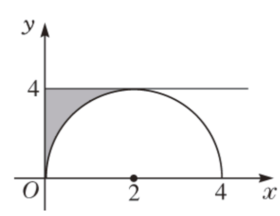


图 5.10

(2) $S = \int_0^2 (4 - 4x + x^2)\,dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx$

$$= \frac{1}{3}(x-2)^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

(3) $V = \pi\int_0^2 [4^2 - (4x - x^2)^2]dx = 32\pi - \pi\int_0^2 (x^4 - 8x^3 + 16x^2)\,dx$

$$= 32\pi - \pi\left(\frac{25}{5} - 2^5 + 2^3\right) = 32\pi - \frac{8}{15}\cdot 32\pi = \frac{224}{15}\pi.$$

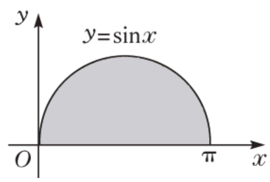


图 5.11

例 5.34　如图 5.11，计算由 $y = \sin x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 和 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴、y 轴分别旋转而得到的旋转体的体积.

解： (1) $V_x = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$；

(2) $V_y = 2\pi\int_0^\pi x\sin x dx = 2\pi^2$.

3. 物理应用

对研究的物理问题的背景有所了解，诸如 功，浮力，万有引力，牛顿第二定律等，采用微元法思想进行研究，最后归结为积分问题.

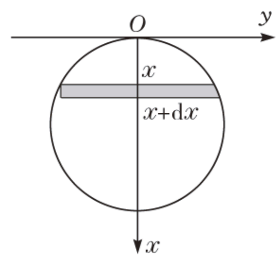


图 5.12

例 5.35　半径为 r 的球沉入水中，球的上部分与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中捞出，需做多少功？

解：过球心作铅垂直线并选取坐标系如图 5.12 所示. 球面与剖面的交线方程为

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2.$$

选取 x 为积分变量，其变化区间为 $[0, 2r]$，任取 $[0, 2r]$ 上区间 $[x, x + dx]$，其上球体薄片随球体离开水面后在水面上的行程为 $2r - x$，由于球的比重与水相同，故在水平面上的行程中才做功：

$$dw = g\pi(2rx - x^2)(2r - x)\,dx,$$

g **为重力加速度，则**

$$w = \int_0^{2r} g\pi(2rx - x^2)(2r - x)\,dx = \frac{4}{3}\pi r^4 g.$$

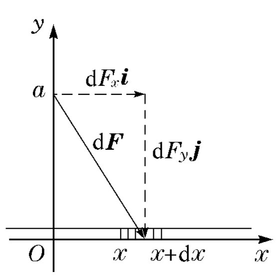


图 5.13

例 5.36　一根长为 l，质量为 M 的均匀细棒，在它的一端垂线上距棒 a 处有一质量为 m 的质点，求棒对质点的引力.

解：建立坐标系如图 5.13，取 x 为积分变量，其变化区间为 $[0, l]$，所以

$$dF = k\cdot\frac{mM\frac{dx}{l}}{x^2 + a^2} = k\frac{mM}{l\cdot(x^2 + a^2)}dx;$$

$$dF_x = k\frac{mM}{l\cdot(x^2 + a^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx;$$

$$dF_y = k\frac{mM}{l\cdot(x^2 + a^2)}\frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}dy.$$

于是

$$F_x = \frac{kmM}{l}\int_0^l \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}dx$$

$$= \frac{kmM}{al\sqrt{l^2 + a^2}}(\sqrt{l^2 + a^2} - a),$$

$$F_y = \frac{kmM}{l}\int_0^l \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}}dx = \frac{kmM}{a\sqrt{l^2 + a^2}}.$$

细棒对质点的引力为(用 F 表示矢量,用 i 和 j 分别表示 x 方向和 y 方向的单位矢量)

$$F = \frac{kmM}{al\sqrt{l^2 + a^2}}(\sqrt{l^2 + a^2} - a)i + \frac{kmM}{a\sqrt{l^2 + a^2}}j.$$

单元练习题 5

1. 设 $\int_0^x f(t)dt = \ln(x^2 + 1)$,则 $f(2) =$ _______________.

2. $\int_{-1}^{1} x^5 \sin x^4 dx =$ _______________.

3. $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{1} \sin t^2 dt =$ _______________.

4. $\int_e^{+} \frac{dx}{x(\ln x)^2} =$ _______________.

5. $\int_0^1 e^{x+e^x}dx =$ _______________.

6. 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a$,$x = b$,$y = 0$ 所围成的封闭图形的面积为 ( )

A. $\int_a^b f(x)dx$ B. $\int_a^b |f(x)|dx$ C. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ D. 不能确定

7. 下列命题正确的是 ( )

A. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}dx = 0$ B. $\int_{-}^{+} x^2 \sin x dx = 0$

C. $\int_{-1}^{1} \sin x^5 dx = 0$ D. $\int_{-}^{+} x^3 dx = 0$

8. $\frac{d}{dx}\int_a^b \arcsin x dx$ 答案是 ( )

A. $\arcsin b - \arcsin a$ B. $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ C. $\arcsin x$ D. 0

9. 在下列关系中,正确的是 ( )

A. $\int_0^1 e^x dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2}dx$ B. $\int_0^1 e^x dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2}dx$

C. $\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 e^{x^2}dx$ D. 以上都不正确

10. $\int_{2}^{+} \frac{1}{(x+1)^{p}} dx$ 在 p 满足条件（　　）时收敛.

A. $p \geqslant 1$　　B. $p \leqslant 1$　　C. $p > 1$　　D. $p < -1$

11. **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_{0}^{x} \cos t^{2} dt}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \frac{\int_{0}^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_{0}^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_{0}^{x} t e^{t} \sin t dt}{x^{3} e^{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x \to +} \frac{\int_{0}^{x} |\sin t| dt}{x^{2}}$.

12. **计算：**

(1) $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^{x} - 1} dx$；

(2) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^{2} - 1}}$；

(3) $\int_{0}^{3} \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$；

(4) $\int_{0}^{\pi} e^{x} \sin^{2} x dx$；

(5) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$；

(6) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^{2} + x + 1} dx$；

(7) $\int_{1}^{0} x\sqrt[3]{1-x}\,dx$；

(8) $\int_{0}^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^{8}}\,dx$；

(9) $\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^{2}}dx$ ；

(10) $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x<2,\\ (2-x)^{3}, & 2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ ；

(11) $\int_{0}^{2} [e^{[x]}]\,dx$，$[x]$ 表示对 x 取整数；

(12) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(4-x^{2})^{3/2}}$；

(13) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{1+x^4}+x\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1-x^2}\right)dx$；

(14) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+e^{-x}}dx$；

(15) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{x}{2}dx$；

(16) $\int_{0}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(17) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,dx$；

(18) $\int_{1}^{+}\frac{dx}{x(x^2+1)}$；

(19) $\int_{1}^{+}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$；

(20) $\int_{0}^{2}|x-\lambda|\,dx$（$\lambda$ **为常数**）；

(21) $\int_{1/e}^{e}|\ln x|\,dx$；

(22) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx\ (p>0)$；

(23) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geqslant 0, \\ 1+x^2, & x<0, \end{cases}$ 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,dx$；

(24) $\int_{-2}^{2} \max\{2, x^2\}\,dx$.

13. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x \left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\,du\right]dt}{\sin^2 x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 其中 $\varphi(u)$ 为连续函数，试讨论函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

14. 求 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值与拐点.

15. 设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且 $f(x)>0$. 有 $F(x)=\int_{-a}^{a} |x-t| f(t)\,dt$，$-a\leqslant x\leqslant a$：

(1) 证明 $F'(x)$ 是单调递增函数；

(2) 当 x 为何值时 $F(x)$ 取最小值？

16．求 $f(x)=\int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在 $[e,e^2]$ 上的最大值.

17．已知抛物线 $y^2=8x$，求：

(1) 抛物线在点 $(2,4)$ 处的法线方程；

(2) 抛物线 $y\geqslant 0$ 的部分及其在点 $(2,4)$ 处的法线和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

18．将抛物线 $y=x(x-a)$ 的横坐标 O 与 C $(c>a>0)$ 之间的弧段与直线 PC (C 为点 $(c,0)$，PC 垂直于横轴，p 在抛物线上) 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转，问 c 为何值时，旋转体体积 V 等于以三角形 OPC 绕 x 轴旋转所成的锥体的体积.

19．求 $y=|\ln x|$，$y=0$，$x=0.1$，$x=10$ 所围图形面积.

20．求 $y=x$，$y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 所围图形的面积.

21．设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积.

22．若 1 kg 的力能使弹簧伸长 1 cm，现要使弹簧伸长 10 cm，问需要做多少功？

23．设一半球形水池直径为 6 m，水面离开地面 1 m 深，现将水池内的水抽尽，至少要做多少功？

第六章　常微分方程(简记 ODE)

本章主要知识点

- ◎　可分离变量的 ODE
- ◎　一阶线性非齐次 ODE
- ◎　二阶常系数线性齐次与非齐次 ODE
- ◎　特殊类方程

一、可分离变量的 ODE

1. 基本型的解法

基本型：$\frac{dy}{dx}=G(x)H(y)$.

基本解法：$\frac{dy}{H(y)}=G(x)dx$，$\int\frac{dy}{H(y)}=\int G(x)dx$.

例 6.1　**解常微分方程**：$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$，$y(0)=1$.

解：因为 $e^{y}dy=e^{x}dx$，所以 $\int e^{y}dy=\int e^{x}dx$.

又因为通解为 $e^{y}=e^{x}+c$，所以将 $x=0$，$y=1$ 代入通解得 $c=e-1$，得 $e^{y}=e^{x}+e-1$.

例 6.2　**解常微分方程**：$x(1+y^2)y'=y\ln x dx$.

解：因为 $\frac{(1+y^2)dy}{y}=\frac{\ln x}{x}dx$，所以 $\int\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=\int\frac{\ln x}{x}dx$，得

$$\ln|y|+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}\ln^2x+c.$$

例 6.3　**解常微分方程**：$\sqrt{1-x^2}(1+y)dy=x(1+y^2)dx$.

解：因为 $\frac{(1+y)dy}{1+y^2}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$，所以 $\int\frac{(1+y)dy}{1+y^2}=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$，则

$$\arctan y+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

2. 可转化的可分离变量的齐次方程

问题(Problem)：$y'=f\left(\frac{x}{y}\right)$，$f$ 为已知函数，求 $y(x)$.

方法：令 $p=\frac{y}{x}\Rightarrow y=p(x)x\Rightarrow y'=p+xp'$

$$\Rightarrow p + x\frac{dp}{dx} = f(p) \Rightarrow \frac{dp}{f(p) - p} = \frac{dx}{x}$$ **(可分离)**.

例 6.4　**解常微分方程**：$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$.

解：因为 $\frac{dy}{dx}\frac{x - y}{x + y} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$**，则我们可以令**

$$p = \frac{y}{x}, \Rightarrow y = px \Rightarrow y' = p + xp' \Rightarrow p + x\frac{dp}{dx} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

$$\Rightarrow x\frac{dp}{dx} = \frac{1 - p}{1 + p} - p = \frac{1 - 2p - p^2}{1 + p}$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + p)dp}{1 - 2p - p^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{(1 + p)dp}{2 - (1 + p)^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1 - 2p - p^2| = \ln|x| + C,$$

将 $p = \frac{y}{x}$ **代入即可得解**.

例 6.5　**求常微分方程**：$x^2 dy = (x^2 + y^2)dx$.

解：因为 $\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$**，我们可以令**

$$p = \frac{y}{x} \Rightarrow y = px, y' = p + xp'$$

$$\Rightarrow p + x\frac{dp}{dx} = 1 + p^2 \Rightarrow x\frac{dp}{dx} = 1 + p^2 - p,$$

所以

$$\frac{dp}{1 - p + p^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{d\left(p - \frac{1}{2}\right)}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\left(p - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C,$$

即 $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2p - 1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C$**，将** $p = \frac{y}{x}$ **代入即可得解**.

二、一阶线性非齐次 ODE

1. 基本型 $y' + p(x)y = q(x)$

公式：$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$.

例 6.6　**解常微分方程**：$xy' - 3y = x^2$.

解：因为 $y' - \frac{3}{x}y = x$**，其中** $p(x) = -\frac{3}{x}$**，**$q(x) = x$**，所以**

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{-3}{x}dx = -3\ln x;$$

$$e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{x^3},e^{-\int p(x)dx} = x^3;$$

$$\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{x}{x^3}dx = -\frac{1}{x}.$$

由公式得 $y = \left(-\frac{1}{x}+C\right)x^3 = -x^2 + Cx^3$.

例 6.7 解常微分方程：$xy' + y = \sin x, y(\pi) = 1$.

解：因为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$，设 $p = \frac{1}{x}, q = \frac{\sin x}{x}$，则

$$\int p(x)\,dx = \ln x, \int q(x)\,e^{\int p(x)dx} = \int \frac{\sin x}{x}xdx = -\cos x,$$

所以

$$y = (-\cos x + C)\,e^{-\ln x} = \frac{C-\cos x}{x}.$$

将 $x = \pi, y = 1$ 代入得 $1 = \frac{C+1}{\pi}$，所以 $C = \pi - 1$，故 $y = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}$.

2. 伯努利（Bernoulli）方程 $y' + p(x)y = q(x)y^n$

求解方法：令 $y^{1-n} = z$，方程可简化为

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

例 6.8 解常微分方程：$x\frac{dy}{dx} + y = xy^2$.

解：令 $\frac{1}{y} = z$，则 $y = \frac{1}{z}$，得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$.

$$\Rightarrow -x\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{z} = x\frac{1}{z^2} \Rightarrow -x\frac{dz}{dx} + z = x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -1, p = \frac{1}{x}, q = -1.$$

$$\int p(x)\,dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x, \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx = \int -1\frac{-1}{x}dx = \ln x.$$

$$z = (\ln x + c)\,e^{\ln x} = (\ln x + c)\,x,$$

故

$$y = \frac{1}{x(\ln x + c)}.$$

例 6.9 解常微分方程：$y' + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}}$.

解：令 $y^{1-\frac{3}{4}} = y^{-\frac{1}{3}} = z, \Rightarrow y = \frac{1}{z^3}, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{z^4}\frac{dz}{dx}$，代入即得

$$\frac{-3}{z^4}\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}\frac{1}{z^3} = 3x^2\frac{1}{z^4} \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{2}{3x}z = -x^2,$$

即

$$p=\frac{-2}{3x}, q=-x^2, \Rightarrow \int p(x)\,dx=-\frac{2}{3}\ln x.$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int -x^2x^{-\frac{2}{3}}dx=-\int x^{\frac{4}{3}}dx=-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c,$$

$$z=\left(-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C\right)x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y=\frac{1}{x^2\left(-\frac{3}{7}x^{7/3}+C\right)^3}.$$

三、二阶常系数线性齐次与非齐次 ODE

1. 齐次方程 $y''+py'+qy=0$，**(其中** p,q **为常数)**.

(1) **特征方程** $\lambda^2+p\lambda+q=0$，**求根** λ_1,λ_2.

(2) λ_1,λ_2 **为互异实根**，$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$. $\lambda_1=\lambda_2$，$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2xe^{\lambda_2x}$；$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta\ (\beta\neq 0)$，$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$. **(其中** c_1,c_2 **为任意实数)**

例 6.10　**解常微分方程**：$y''-3y'-4y=0$.

解：**由** $\lambda^2-3\lambda-4=0$，**得** $\lambda=4,-1$，**则**

$$y=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}.\ \text{(其中 } c_1,c_2 \text{ 为任意实数)}$$

例 6.11　**解常微分方程**：$y''-2y'+y=0$.

解：**由** $\lambda^2-2\lambda+1=0$，$\lambda_1=\lambda_2=1$，**得** $y=c_1e^x+c_2xe^x$.

例 6.12　**解常微分方程**：$y''+4y=0$.

解：**由** $\lambda^2+4=0$，$\lambda=\pm 2i\ (i=\sqrt{-1})$，**得** $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

2. 非齐次方程 $y''+py'+qy=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x)+P_n(x)\sin(\beta x))$

其中 $P_m(x)$，$P_n(x)$ **表示** m,n **次多项式**.

解的结构：$y=$ **齐次方程通解** $+$ **特解** y^*.

特解 y^* **形式设定如下**：

$\mu=\alpha+i\beta$，$k=\mu$，**与特征根** λ_1,λ_2 **所重个数**，$l=\max(m,n)$.

特解：$y^*(x)=x^ke^{\alpha x}[Q_l(x)\cos(\beta x)+Q_l(x)\sin(\beta x)]$，**其中**，$Q_l(x)$，$Q_l(x)$ **为** l **次多项式**.

注 **这一公式是将通常教科书上若干公式统一而成的，适应很多情形，在解题时要注意仔细辨别** α,β,m,n **等系数**.

例 6.13　**解常微分方程**：$2y''+y'-y=2e^x$.

解：(1) **因为齐次方程为** $2y''+y'-y=0$，**则有**

$$2\lambda_2+\lambda-1=0,\ (2\lambda-1)(\lambda+1)=0,\ \lambda_1=\frac{1}{2},\ \lambda_2=-1,$$

所以齐次通解为 $\bar{y}=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}$.

(2) **因为** $2e^x=e^x[2\cos(0\cdot x)+0\cdot\sin(0\cdot x)]$，$\alpha=1$，$\beta=0$，$m=n=0$，$\mu=\alpha+i\beta=1$，**所以**

$$k=0,\ l=\max(m,n)=0.$$

又设 $y^*=x^0\cdot e^x(A\cos(0\cdot x)+B\sin(0\cdot x))=Ae^x$，**代入原方程得**

$$2Ae^x + Ae^x - Ae^x = 2e^x \Rightarrow A = 1,$$

所以 $y^* = e^x$**,则**

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} + e^x.$$

例 6.14　**解常微分方程**:$y'' - 2y' + y = xe^x$.

解:(1) **因为其齐次方程** $y'' - 2y' + y = 0$**,所以有** $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$,$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

(2) **因为** $xe^x = e^x[x\cos(0 \cdot x) + 0 \cdot \sin(0 \cdot x)]$**,则**

$$\alpha = 1, \beta = 0, m = 1,, n = 0, \mu = \alpha + i\beta = 1;$$

$$k = 2, l = \max(m, n) = 1;$$

$$\begin{aligned} y^* &= x^2 e^x [(Ax + B)\cos(0 \cdot x) + (Cx + D)\sin(0 \cdot x)] \\ &= x^2 e^x (Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2) e^x. \end{aligned}$$

计算得

$$\begin{aligned} y^{*\prime} &= (3Ax^2 + 2Bx) e^x + (Ax^3 + Bx^2) e^x \\ &= [Ax^3 + (3A + B) x^2 + 2Bx] e^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} &= [3Ax^2 + 2(3A + B) x + 2B] e^x + [Ax^3 + (3A + B) x^2 + 2Bx] e^x \\ &= [Ax^3 + (6A + B) x^2 + (6A + 4B) x + 2B] e^x. \end{aligned}$$

代入原方程得 $6Ax + 2B = x \Rightarrow A = \frac{1}{6}$,$B = 0$**,则** $y^* = \frac{1}{6}x^3 e^x$**,所以**

$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x + \frac{1}{6}xe^x.$$

例 6.15　**解常微分方程**:$y'' + 4y = \sin 2x$.

解:(1) **因为原方程的齐次方程为** $y'' + 4y = 0$**,所以** $\lambda^2 + 4 = 0$,$\lambda = \pm 2i$**,则**

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

(2) **因为** $\sin 2x = e^{0 \cdot x}(0 \cdot \cos 2x + 1 \cdot \sin 2x)$,$\alpha = 0$,$\beta = 2$,$m = n = 0$,$\mu = \alpha + i\beta = 2i$,$l = \max(m, n) = 0$**,所以** $k = 1$. **又设** $y^* = xe^{0 \cdot x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$**,则**

$$y^{*\prime} = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) x + A\cos 2x + B\sin 2x,$$

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\ &= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x), \end{aligned}$$

代入原方程得

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} + 4y^* &= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + \\ &\quad 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ &= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \sin 2x. \end{aligned}$$

所以 $A = -\frac{1}{4}$,$B = 0$,$y^* = -\frac{x}{4}\cos 2x$**,所以** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$.

四、特殊类方程

1. $y'' = f(x)$,$y''' = f(x)$ **等**.

　求解方法:**直接积分**.

例 6.16　**解常微分方程**:$y'' = x - e^{2x}$.

解：因为 $y''=x-e^{2x}$，所以积分得

$$y'=\int(x-e^{2x})dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}+c_1,$$

再积分得

$$y=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2.$$

2. $y''=f(y,y')$（不显含 x）.

求解方法：令 $y'=p(y)$，则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

得到 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，降为一阶方程.

例 6.17　解常微分方程：$yy''-(y')^2=0$.

解：令 $y'=p$，　则 $y''=p\frac{dp}{dy}$. 因为 $y\cdot p\frac{dp}{dy}-p^2=0$，所以

$$p\left(y\frac{dp}{dy}-p\right)=0.$$

如果 $p\neq0$，则 $y\frac{dp}{dy}-p=0$，$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln p=\ln y+\ln C_1\Rightarrow p=C_1y$ 或 $y'=C_1y$，因分离积分法得 $y=C_2e^{C_1x}$.

如果 $p=0$，那么 $y=C$（其包含在上述解之中），所以方程通解 $y=C_2e^{C_1x}$（其中 C_1，C_2 为任意实数）.

单元练习题 6

1. 下列微分方程是线性的为　　　　（　　）

　A. $(y')^2=y\sin x$　　　　B. $y'=y^2+x^2$

　C. $y'=y\sin x+\cos x^2$　　　　D. $y'=4y^2$

2. 方程 $y^4+y'+(y'')^2=x^4+1$，它是________阶微分方程.

3. 方程 $y''+y=0$ 的通解是______________.

4. 方程 $y''-2y'-3y=xe^{3x}$的特解可设为____________.

5. 求解下列常微分方程：

(1) $xydx+(x+1)dy=0$；

(2) $x(1+y)+y'(y-xy)=0$；

(3) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$；

(4) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$；

(5) $y' - 2y = e^x - x, y(0) = \frac{5}{4}$；

(6) $1 + yy'' + (y')^2 = 0$；

(7) $2(y')^2 - (y-1)y'' = 0, y(1) = 2, y'(1) = -1$；

(8) $y'' + y = 4\sin x$；

(9) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

6. **求一曲线方程,此曲线在任一点处的切线斜率等于** $2x + y$**,并且曲线通过原点**.

7. **设曲线上任一点** $M(x,y)$ **处切线与** OM **直线垂直,求这个曲线的方程**.

8. **一链条挂在一个无摩擦的钉上,假定运动开始时,链条一边垂下** 8 m**,另一边垂下** 10 m**,试问整个链条滑过钉子需要多少时间?**

第七章　级　数

本章主要知识点

- ◎　级数收敛的定义及性质
- ◎　正项级数敛散性判别法
- ◎　一般项级数敛散法
- ◎　幂级数

一、级数收敛的定义及性质

定义：$\sum\limits_{n=1} a_n$ **收敛** $\Leftrightarrow S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to S$ **(有限)** $(n \to + \quad)$.

性质：(1) **必要条件** $\lim\limits_{n\to} a_n = 0$；

(2) $\sum\limits_{n=1} a_n$ **与** $\sum\limits_{n=1} b_n$ **收敛，则** $\sum\limits_{n=1} (a_n \pm b_n)$ **收敛**；

(3) $\sum\limits_{n=1} a_n$ **收敛，** $\sum\limits_{n=1} b_n$ **发散，** $\sum\limits_{n=1} (a_n \pm b_n)$ **必发散**；

(4) $\sum\limits_{n=1} a_n$ **发散，** $\sum\limits_{n=1} b_n$ **发散，** $\sum\limits_{n=1} (a_n \pm b_n)$ **要具体问题具体分析**；

(5) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛} & p > 1, \\ \text{发散} & p \leqslant 1; \end{cases}$

(6) $\sum\limits_{n=1} q^n$ **收敛，当** $|q| = \text{const.} < 1$.

例 7.1　**计算** $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

解：$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1 \ (n \to \quad)$，**所以**

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

例 7.2　**计算** $\sum\limits_{n=0} q^n \ (|q| = \text{const.} < 1)$.

解：$S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \dfrac{1}{1-q} \ (n \to \quad)$，**所以**

$$\sum_{n=0}^{+} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

二、正项级数敛散性判别法

1. 比值判别法

$$\lim_{n\to}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\begin{cases}l<1, & 收敛,\\ l>1, & 发散,\\ l=1, & 比值判别法失效.\end{cases}$$

例 7.3　**判别** $\sum\limits_{n=1}^{+}\frac{n!}{n^n}$ **的敛散性.**

解: $\lim\limits_{n\to}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$,**所以由比值判别法知原级数收敛.**

例 7.4　**判别** $\sum\limits_{n=1}\frac{n}{2^n}$ **的敛散性.**

解: $\lim\limits_{n\to}\frac{a_{n+1}}{a^n}=\lim\limits_{n\to}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim\limits_{n\to}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$,**收敛.**

例 7.5　**判别级数** $1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}+\cdots$**的敛散性.**

解: $\lim\limits_{n\to}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to}\frac{2^n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2^{n-1}}=0$,**收敛.**

2. 比较判别法

比较判别法有两种形式:一种称为囿级数法;一种称为极限式.

囿级数法:如果 $0\leqslant a_n\leqslant b_n$ **(对充分大** n**)成立且** $\sum b_n$ **收敛,则** $\sum a_n$ **收敛.如果** $a_n\geqslant b_n\geqslant0$,$\sum b_n$ **发散,则** $\sum a_n$ **发散.**

极限式:如果 $\lim\limits_{n\to}\frac{a_n}{b_n}=l$ **(**$l\neq0$ **有限数)**,$\sum a_n$,$\sum b_n$ **(**$a_n,b_n\geqslant0$**)同敛散.特别地,若** $l=0$ **且** $\sum b_n$ **收敛,则** $\sum a_n$ **收敛.若** $l=$ **且** $\sum b_n$ **发散,则** $\sum a_n$ **发散.**

例 7.6　**判别** $\sum\limits_{n=1}\frac{\sin^2 n\pi}{n^2+1}$ **的敛散性.**

解:因为 $0\leqslant\frac{\sin^2 n\pi}{n^2+1}\leqslant\frac{1}{n^2}$,**而** $\sum\frac{1}{n^2}$ **收敛,所以由比较判别法知** $\sum\limits_{n=1}\frac{\sin^2 n\pi}{n^2+1}$ **收敛.**

例 7.7　**判别** $\sum\limits_{n=1}\frac{\arctan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}{3^n+2^n}$ **的敛散性.**

解:因为 $0\leqslant\frac{\arctan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}{3^n+2^n}\leqslant\frac{\pi/2}{3^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$,**而** $\sum\limits_{n=1}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$ **收敛,由比较判别法知原级数收敛.**

例 7.8　**判别** $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ **的敛散性.**

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$发散.

例 7.9　判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{3/2}}$的敛散性.

解：因为$l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\ln n}{n^{3/2}}}{\dfrac{1}{n^{5/4}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{1/4}}$，并考虑到极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{4}x^{-3/4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^{1/4}}=0,$$

所以$l=0$，又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{5/4}}$收敛，所以由比较判别法知原级数收敛.

例 7.10　判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{100}}{e^{0.01n}}$的敛散性.

解：因为$l=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n^{100}}{e^{0.01n}}}{\dfrac{1}{n^{2}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{102}}{e^{0.01n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{102}}{e^{0.01x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{102!}{(0.01)^{102}e^{0.01x}}=0$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2}}$收敛，故由比较判别法知，原级数收敛.

例 7.11　判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2n+1}\sin\dfrac{1}{n}$的敛散性.

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}\cdot\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{2}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，则由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2n+1}\sin\dfrac{1}{n}$发散.

三、一般项级数敛散性判别法

一般项级数有绝对收敛和条件收敛两个概念.

定义 1：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

绝对收敛必收敛.

定义 2：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

我们研究一般项级数的流程应是先判别绝对收敛，若绝对发散则研究级数的条件收敛性. 一般项级数中最重要的一类级数为交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\ (a_n\geqslant 0)$. 关于交错级数我们

有下列莱布尼兹判别法,对于级数 $\sum\limits_{n=1}(-1^n)a_n$：

若(1) $a_n \geqslant 0$,即级数是交错的；(2) a_n 单调下降；(3) $\lim\limits_{n\to} a_n = 0$,则 $\sum\limits_{n=1}(-1)^n a_n$ 收敛.

例 7.12 判别 $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{3n^3+2n+1}}$ 的敛散性.

解：先考虑级数 $\sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{\sqrt{3n^3+2n+1}}$,因为 $\dfrac{\lim\limits_{n\to}\dfrac{1}{\sqrt{3n^3+2n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,而 $\sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ 收敛,所以 $\sum \dfrac{1}{\sqrt{3n^3+2n+1}}$ 收敛,即原级数绝对收敛.

例 7.13 判别 $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 的敛散性.

解：因为 $\sum\limits_{n=1}|a_n| = \sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 发散,绝对发散,而 $\sum\limits_{n=1}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 是交错级数,$\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 单调下降,且 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$,由莱布尼兹判别法知,原级数是条件收敛.

例 7.14 判别级数 $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \sin\dfrac{1}{n^k}$ 的敛散性.

解：$\sum\limits_{n=1}|a_n| = \sum\limits_{n=1}\sin\dfrac{1}{n^k}$ ($k = \text{const.}$),$\lim\limits_{n\to}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n^k}}{\dfrac{1}{n^k}} = 1$,$\sum\limits_{n=1}\sin\dfrac{1}{n^k}$ 与 $\dfrac{1}{n^k}$ 同敛散,故当 $k > 1$ 时,原级数绝对收敛；当 $k \leqslant 1$ 时,原级数绝对发散；

当 $k \leqslant 0$ 时,因为 $\lim\limits_{n\to}\sin\dfrac{1}{n^k}$ 不存在,所以原级数发散；

当 $0 < k < 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^k}$ 为交错级数,且 $\sin\dfrac{1}{n^k}$ 单调下降,且 $\sin\dfrac{1}{n^k}\to 0$ ($n\to +$),故由莱布尼兹判别法知,原级数条件收敛.

四、幂级数

1. 收敛半径和收敛区间

$\sum\limits_{n=1} a_n (x - x_0)^n$ 称为幂级数,对于幂级数首先是收敛半径和收敛区间的计算.

收敛半径 $R = \lim\limits_{n\to}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$,收敛区间：$x_0 - R < x < x_0 + R$,对于 $x = x_0 - R$ 和 $x = x_0 + R$ 等端点处也要考虑.

例 7.15 求 $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \dfrac{1}{2n+1}x^n$ 的收敛半径和收敛区间.

解：$R = \lim\limits_{n\to} \left| \dfrac{\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{2n+3}} \right| = 1.$

当 $x = 1$ 时，原级数 $= \sum (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$ 收敛；当 $x = -1$ 时，原级数 $= \sum \dfrac{1}{2n+1}$ 发散.

所以，收敛区间为 $(-1, 1]$.

例 7.16　求 $\sum\limits_{n+0}^{+} \dfrac{1}{3^n+1}(2x-1)^{2n-1}$ 的收敛半径.

解：令 $y = (2x-1)^2$，原级数 $= (2x-1)^{-1} \sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{3^n+1} y^n$，则

$$R_y = \lim\limits_{n\to} \left| \dfrac{\dfrac{1}{3^n+1}}{\dfrac{1}{3^{n+1}+1}} \right| = \lim\limits_{n\to} \dfrac{3^{n+1}+1}{3^n+1} = 3, R_x = \dfrac{\sqrt{R_y}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. **函数展开为幂级数**

几种常用的幂级数形式：

(1) $e^x = \sum\limits_{n=1} \dfrac{x^n}{n!}, -\quad < x < +\quad$；

(2) $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0} (-1)^n x^n, |x| < 1$；$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0} x^n, |x| < 1$；

(3) $\sin x = \sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in R, \cos x = \sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in R$；

(4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, |x| < 1.$

例 7.17　已知 $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$. (1) 展开为 x 的幂级数；(2) 展开为 $x-1$ 的幂级数.

解：(1) $f(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=0} (-1)^n \left(\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0} (-1)^n \dfrac{1}{2^{n+1}} x^n, |x| < 2$；

(2) $f(x) = \dfrac{1}{3+x-1} = \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}} = \dfrac{1}{3} \sum\limits_{n=0} (-1)^n \left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n$

$$= \sum\limits_{n=0} (-1)^n \dfrac{1}{3^{n+1}} (x-1)^n, |x-1| < 3.$$

例 7.18　将 $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)(x+3)}$ 展开为 x 的幂级数.

解：$f(x) = -\dfrac{1}{7} \dfrac{(2x-1) - 2(x+3)}{(2x-1)(x+3)} = -\dfrac{1}{7(x+3)} + \dfrac{2}{7(2x-1)}$

$$= -\dfrac{1}{21} \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{3}} - \dfrac{2}{7} \dfrac{1}{1-2x}$$

$$= -\frac{1}{21}\sum_{n=0}(-1)^n\frac{x^n}{3^n} - \frac{2}{7}\sum_{n=0}2^n x^n\left(|x| < \frac{1}{2}\right).$$

例 7.19　$f(x) = x\cos^2 x$ **展开为** x **的幂级数**.

解：$f(x) = x\dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\cos 2x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}x\sum\limits_{n=0}^{+}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$= x + \sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{2\cdot(2n)!}2^{2n}\cdot x^{2n},\ (- \quad < x < + \quad).$$

例 7.20　**已知** $f(x) = \arctan x$**，求** $f(x)$ **的幂级数展开式** $\sum\limits_{n=1} a_n x^n$.

解：$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}(-1)^n x^{2n}$**，在区间** $[0,x]$ **上，两边积分，则**

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{+}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ (|x| < 1).$$

单元练习题 7

1. $\lim\limits_{n\to} u_n = 0$ **是级数** $\sum\limits_{n=0}^{+} u_n$ **收敛的**　(　　)

   A. **必要条件**　B. **充分条件**　C. **充要条件**　D. **无关条件**

2. **正项级数** $\sum\limits_{n=1}^{+} u_n$ **收敛的(　　)是前** n **项部分和数列** $\{S_n\}$ **有界**.

   A. **必要条件**　B. **充分条件**　C. **充要条件**　D. **无关条件**

3. **在下列级数中，收敛的是**　(　　)

   A. $\sum\limits_{n=1}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$　B. $\sum\limits_{n=1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　C. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$　D. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{n}{2n+1}$

4. **在下列级数中，条件收敛的是**　(　　)

   A. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$　B. $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

   C. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{2^n+1}}$　D. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n^3+4}}$

5. **在下列级数中，绝对收敛的是**　(　　)

   A. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$　B. $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$

   C. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$　D. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

6. **下列级数发散的是**　(　　)

   A. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$　B. $\sum\limits_{n=1}\dfrac{n}{3n-1}$

C. $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \frac{1}{3^n}$　　　　D. $\sum\limits_{n=1}\frac{n}{\sqrt{3^n}}$

7. **幂级数** $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \frac{x^n}{n}$ **的收敛域是**　　　　(　　)

A. $[-1,1]$　　B. $(-1,1)$　　C. $[-1,1)$　　D. $(-1,1]$

8. **已知级数** $\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p-3}}$，**当**__________**时，级数绝对收敛；当**__________**时，级数条件收敛；当**__________**时，级数发散**.

9. **幂级数** $\sum\limits_{n=0}\frac{x^n}{n!}$ **的和函数** $S(x)=$ __________，$\sum\limits_{n=0}\frac{(-2)^n}{n!}=$ __________，$\lim\limits_{n\to}\frac{(-2)^n}{n!}$ $=$ __________.

10. **判别下列级数的收敛性：**

(1) $\sum\limits_{n=1}(-1)^n \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2+2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}\frac{a^n n!}{n^n}(a>0, a\neq 1, e)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}\ln\frac{n^3+1}{n^3}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{3^n}+\ln\frac{1}{n}\right)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}\frac{n^2}{(n!)^2}$；　　(8) $\sum\limits_{n=1}\frac{\sqrt{n}+\sin n}{n^2-n+1}$；

(9) $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 - 1}$；　　(10) $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{n}$.

11. **求下列幂级数的收敛半径和收敛域：**

(1) $\sum_{n=1} \frac{2^n}{n^2 + 1} x^n$；　　(2) $\sum_{n=1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$；

(3) $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{5^n \sqrt{n+1}}$；　　(4) $\sum_{n=1} \frac{1}{n} (2x+1)^n$.

12. **将** $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ **展开为** x **的幂级数**.

13. **将** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$**展开为** $x - 1$ **的幂级数**.

14. **将函数** $f(x) = \frac{x}{2+x}$**：**(1) **展开为** x **的幂级数；**(2) **展开为** $x - 1$ **的幂级数**.

第八章　矢量与解析几何

本章主要知识点

◎　矢量运算
◎　平面方程
◎　直线方程
◎　常见曲面及方程

一、矢量运算

着重掌握矢量的内积、叉积运算.并深刻理解这两种运算在研究线线、线面、面面之间位置关系时的作用.掌握以矢量为主要线索来建立直线和平面方程的方法和实质.本书用字母黑斜体表示矢量.

1. 矢量的内积

(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\triangleq|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta$,其中 θ 为 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的夹角;

(2) 若 $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$,$\mathbf{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$,$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$　且 $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$;

(3) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ ($\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为非零矢量).

例 8.1　$\mathbf{a}=\{1,1,2\}$,$\mathbf{b}=\{-1,0,3\}$,求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

解:$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1\times(-1)+1\times0+2\times3=5$.

例 8.2　如果 $\mathbf{a}=\{1,\lambda,2\}$,$\mathbf{b}=\{\lambda,2,-1\}$,且 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$,求 λ.

解:$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$,得 $\lambda+2\lambda-2=0$,解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

2. 矢量的叉积 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

如图 8.1 所示,如果 $\mathbf{a}$ 不平行于 $\mathbf{b}$,则 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}$ 又垂直于 $\mathbf{b}$,或者换种说法,$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 垂直于由 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 确定的一平面.它在后面研究平面与直线的关系中起着相当重要的作用.

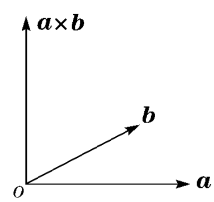


图 8.1

如果 $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$,$\mathbf{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ 那么

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

利用第一行代数余子式展开计算.

若 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 非零,$\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

例 8.3　$\mathbf{a}=\{1,-1,1\}$,$\mathbf{b}=\{1,2,3\}$,求 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

解：$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

$= -5i - 2j + 3k = \{-5, -2, 3\}$.

例 8.4　如果 $a = \{1, \lambda, 1\} \parallel b = \{1, 2, 3\}$，求 λ.

解：因为 $\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{3} = \frac{1}{2}$，所以 $\lambda = \frac{3}{2}$.

3. 单位矢量

$a^0 = \frac{a}{|a|}$ 为矢量 a 的方向上的单位矢量.

4. 矢量 b 在 a 上的投影 $\mathrm{proj}_a(b) = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a$.

二、平面方程

1. 平面方程的基本形式(点法式)

平面 π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，法矢量为 $n = \{A, B, C\}$，那么平面方程为

$$n \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

(1) 点法式有两个基本要素：点 M_0 和法矢量 n.

(2) 如果一平面方程写为 $Ax + By + Cz + D = 0$，那 $\{A, B, C\}$ 就是该平面的法矢量.

(3) 两平面之间的位置矢量由各自的法矢量 n_1, n_2 来决定.

(4) 点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

例 8.5　已知平面过三点 $M_1(1, -1, 1)$，$M_2(-1, 0, 2)$，$M_3(2, -1, -1)$，求平面方程.

解：因为 $a = \overrightarrow{M_1M_2} = \{-2, 1, 1\}$，$b = \overrightarrow{M_1M_3} = \{1, 0, -2\}$，所以

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2i - 3j - k = \{-2, -3, -1\},$$

所以平面方程为 $-2(x - 1) - 3(y + 1) - 1(z - 1) = 0$.

例 8.6　已知平面过点 $M_1(1, -1, 1)$，$M_2(0, 1, -3)$，且平行与矢量 $B = \{1, 1, 1\}$，求平面方程.

解：因为 $a = \overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 2, -4\}$，所以

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6i - 3j - 3k = \{6, -3, -3\},$$

所以平面方程为 $6(x - 1) - 3(y - 1) - 3(z - 1) = 0$.

例 8.7　已知平面过点 $M_1(1, 1, 1)$ 且与平面 $2x - y + 3z = 5$ 平行，求平面方程.

解：$n = \{2, -1, 3\}$，平面方程为 $2(x - 1) - (y - 1) + 3(z - 1) = 0$.

三、直线方程

直线过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **且方向矢量为** $l=\{m,n,l\}$ **，则直线方程（点斜式）的基本形式为**
$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$.

直线点斜式两基本要素为 M_0 **及方向矢量** l.

另外一种常见的直线方程可由两平面相交形式给出.

例 8.8 **如果直线方程为** $\begin{cases}x-y+z-1=0,\\2x-y-2z-2=0,\end{cases}$ **求直线的方向矢量** l **的点斜式方程.**

解：令 $y=0$**，得** $\begin{cases}x+z=1,\\x-z=1,\end{cases}$ **所以** $x=1,z=0$**，故** $M_0=\{1,0,0\}$**，两平面的法矢量为** n_1,n_2**，则**

$$l=n_1\times n_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 1\\2 & -1 & -2\end{vmatrix}=3i+4j+k=\{3,4,1\},$$

所以直线的点斜式方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$.

例 8.9 **求直线** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ **在平面** $x+y-z=4$ **的投影直线的方程.**

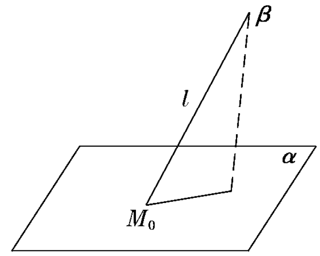


图 8.2

解：令 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}=t$**，即** $x=1+t,y=2t+1,z=t$**，代入平面方程** $x+y-z=4$**，于是得**

$$1+t+2t+1-t=4,t=1,$$

故 $x=2,y=3,z=1$**，即交点** $M_0=(2,3,1)$.

如图 8.2**，直线** l **交线构成平面** β**，则** $\beta\perp\alpha$**，**β **的法线为**

$$n_\beta=l\times n_\alpha=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3i+2j-k$$
$$=\{-3,2,-1\},$$

故平面方程为 $-3(x-2)+2(y-3)-(z-1)=0$**，即** $-3x+2y-z+1=0$.

故直线的方程为

$$\begin{cases}-3x+2y-z+1=0,\\x+y-z=4.\end{cases}$$

例 8.10 **当** a,b **为何值时，直线** $\begin{cases}ax+y+z=1,\\2x+by-z=2,\end{cases}$ **与直线** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$ **平行？**

解：平面 $\alpha: ax+y+z=1$**，**$\beta: 2x+by-z=2$ **的法矢量分别为**

$$n_1=\{a,1,1\},n_2=\{2,b,-1\}.$$

直线方向矢量 $l_2=\{1,2,1\}$**，直线方向矢量**

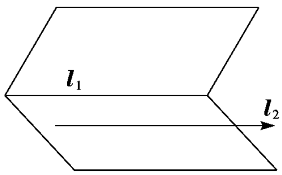


图 8.3

$$l_1 = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 1 & 1 \\ 2 & b & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(-1-b) - j(-a-2) + k(ab-2)$$

$$= \{-1-b, a+2, ab-2\}.$$

如图 8.3,由$l_1 /\!/ l_2$得

$$\frac{-1-b}{1} = \frac{a+2}{2} = \frac{ab-2}{1} = t,$$

则 $b=-1-t, a=2t-2, ab-2=t$,得

$$-(1+t) \cdot 2(t-1) - 2 = t,$$

$$-2(t^2-1) - 2 = t,$$

即 $-2t^2=t$,所以 $t=0, t=-\frac{1}{2}$,于是得到$\begin{cases} a=-2, \\ b=-1, \end{cases}$或$\begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ b=-3, \end{cases}$即为所求.

例 8.11 平面 α 通过直线$\begin{cases} x-y+z=1, \\ x+y+2z=2, \end{cases}$且与平面 β:$3x-y+z=1$ 垂直,求平面 α 的方程.

解:设平面方程为 $x-y+z-1+\lambda(x+y+2z-2)=0$,即平面 α 为

$$(1+\lambda)x + (\lambda-1)y + (2\lambda+1)z - (2\lambda+1) = 0,$$

$$n_\alpha = \{1+\lambda, \lambda-1, 2\lambda+1\};$$

由于 $\alpha \perp \beta \Rightarrow n_\alpha \perp n_\beta \Rightarrow n_\alpha \cdot n_\beta = 0$,即

$$3(1+\lambda) - (\lambda-1) + (2\lambda+1) = 0,$$

得 $4\lambda+5=0, \lambda=-\frac{5}{4}$,即平面 α 的方程为

$$-\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}y - \frac{9}{4}z - \frac{9}{4} = 0 \text{ 或 } x+9y+9z=9.$$

注 此题解法中作设的技巧很特别.

四、常见曲面及方程

方　程	名　称
$F(x,y)=0$	母线平行 z 轴,准线是 xoy 面上曲线 $F(x,y)=0$ 的柱面方程
$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$	yOz 平面上已知曲线 c:$F(y,z)=0$ 绕 Oz 轴旋转的旋转面方程
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$	椭球面
$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ (p,q 同号)	椭圆抛物面
$\frac{-x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ (p,q 同号)	双曲抛物面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	单叶双曲面
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	双叶双曲面

单元练习题 8

1. a, b 为两个非零矢量, λ 为非零常数, 若矢量 $a+\lambda b$ 垂直于矢量 b, 则 λ 等于 (　　)

   A. $\frac{a \cdot b}{|b|^2}$　　B. $-\frac{a \cdot b}{|b|^2}$　　C. 1　　D. $a \cdot b$

2. 设 $a=-i+j+2k$, $b=3i+4k$, 用 b° 表示 b 方向上单位矢量, 则矢量 a 在 b 上的投影为 (　　)

   A. $\frac{5}{\sqrt{6}}b^\circ$　　B. b°　　C. $\frac{-5}{\sqrt{6}}b^\circ$　　D. $-b^\circ$

3. 方程 $x^2+y^2=4x$ 在空间直角坐标系下表示为 (　　)

   A. 圆柱面　　B. 点　　C. 圆　　D. 旋转抛物面

4. 在空间直角坐标系下, 为平面方程的是 (　　)

   A. $y^2=x$　　B. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2y+z=1 \end{cases}$

   C. $\frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{7}=\frac{z}{-3}$　　D. $3x+4z=0$

5. 与平面 $x+y+z=1$ 垂直的直线方程为 (　　)

   A. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+z=0 \end{cases}$　　B. $\frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z}{-3}$

   C. $2x+2y+2z=5$　　D. $x-1=y-2=z-3$

6. 直线 l 与 x 轴平行, 且与曲线 $y=x-e^x$ 相切, 则切点坐标是 (　　)

   A. $(1,1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(0,-1)$　　D. $(0,1)$

7. 点 $M(2,-3,4)$ 到平面 $3x+2y+z+3=0$ 的距离 $d=$__________.

8. 过原点且与直线 l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ 垂直的平面方程为__________.

9. 过点 $M_0(2,0,-1)$ 且平行矢量 $a=\{2,1,-1\}$, $b=\{3,0,4\}$ 的平面方程为____________________________.

10. 过点 $M_0(2,0,-1)$ 且平行于两个已知平面 π_1: $x+y-2z-1=0$; π_2: $x+2y-z+1=0$ 的直线方程为__________.

11. 曲线 c: $\begin{cases} 2y^2+3z=1, \\ x=0, \end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为________________.

12. 判断直线 l_1: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-4}$ 与平面 π: $x+y+z=3$ 的关系.

13. **已知矢量** $a=i+j+5k$**，**$b=2i-3j+5k$**，求与** $a-3b$ **同向的单位矢量**.

14. **求通过原点且垂直于直线** $l:\begin{cases}x-y+z-7=0,\\4x-3y+z-6=0\end{cases}$**的平面方程**.

15. **把直线方程**$\begin{cases}x-3y+5=0,\\y-2z+8=0\end{cases}$**化为标准式（点斜式）与参数形式**.

16. **平面** α **通过直线**$\begin{cases}x+y-2z=1,\\x-y-z=1\end{cases}$**且与直线**$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$**平行，求平面** α **的方程**.

17. **求过点** $P(-1,-2,3)$ **且与直线** $l_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-5}{6}$**和** $l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-8}$**平行的平面方程式**.

18. **确定** $l_1:\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7, \end{cases}$ **与** $l_2:\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ **的平行或垂直关系**.

19. **确定** $l:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{7}=\dfrac{z}{-3}$ **与平面** $\pi:4x-2y-2z-3=0$ **的平行或垂直关系**.

第九章　多元函数微积分

本章主要知识点

- ◎　一阶偏导数计算
- ◎　全微分
- ◎　二阶偏导数
- ◎　累次积分
- ◎　直角坐标系下的二重积分
- ◎　极坐标系下的二重积分

一、一阶偏导数计算

二元函数 $u=f(x,y)$ 或三元函数 $u=f(x,y,z)$，一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$的计算主要集中于下面的几个问题：(1) 显函数的一阶偏导；(2) 复合函数的一阶偏导；(3) 隐函数的一阶偏导.

1. 显函数的一阶偏导

$u=f(x,y)$ 的$\frac{\partial u}{\partial x}$计算是把 y 看成常数，求解方法和公式与一元函数的导数相同. 同理，$\frac{\partial u}{\partial y}$是把 x 看成常数.

例 9.1　$u=xe^{xy}$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}=(1+xy)e^{xy}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{xy}$.

例 9.2　$u=x^y+y^z+(zx)^y$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

解：因为 $u=x^y+y^z+(zx)^y$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}+0+y(zx)^{y-1}z=yx^{y-1}+yz^yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x+zy^{z-1}+(zy)^y\ln(zx);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0+y^z\ln y+x^yyz^{y-1}=y^z\ln y+yx^yz^{y-1}.$$

例 9.3　$u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：因为 $u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}.$$

2. 复合函数的一阶偏导

我们用具体的例子来说明复合函数的求偏导的解题步骤. 例如 $u=f(x+y,xy,\sin x)$，f 为已知的可微三元函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

第一步：作变量 x,y,z 的关系网络图：

$$u\begin{cases}\to 1\left[\begin{array}{ll} x & \vee, \\ y & \Delta,\end{array}\right. \\ \to 2\left[\begin{array}{ll} x & \vee, \\ y & \Delta,\end{array}\right. \\ \to 3\to x \quad \vee.\end{cases}$$

其中 1，2，3 分别表示 $x+y$，xy，$\sin x$；

第二步：寻找与 x 对应的路径（$\vee$），计算的过程可以总结为"路中用乘，路间用加".

$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\cdot 1+f'_2\cdot y+f'_3\cos x=f'_1+f'_2\cdot y+f'_3\cos x$；同理，寻找与 y 对应的路径（Δ），$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_1\cdot 1+f'_2\cdot x=f'_1+f'_2\cdot x$.

例 9.4　$u=f(xy^2,e^{xy})$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\cdot y^2+f'_2\cdot e^{xy}y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2f'_1\cdot xy+f'_2\cdot e^{xy}x$.

例 9.5　$u=f(xz,\sin(2z+y),ze^{xy})$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解：作 x,y,z 关系网络图

$$u=f\begin{cases}\to 1\left[\begin{array}{ll} x & \vee, \\ z & \Delta,\end{array}\right. \\ \to 2\left[\begin{array}{ll} y & *, \\ z & \Delta,\end{array}\right. \\ \to 3\left[\begin{array}{ll} x & \vee, \\ y & *, \\ z & \Delta.\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\cdot z+f'_3\cdot zye^{xy},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_2\cdot\cos(2z+y)+f'_3\cdot xze^{xy},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f'_1\cdot x+f'_2\cdot 2\cos(2z+y)+f'_3\cdot e^{xy}.$$

3. 隐函数的一阶偏导

由方程 $F(x,y,z)=0$ 决定隐函数 $z=z(x,y)$，其求偏导的规则与一元隐函数相类似，此时一定要注意三个变量 x,y,z 各自的地位. x,y 为自变量，而 $z=z(x,y)$ 对 x 求偏导，则 $y=\text{const}$，$z=z(x,y)$ 对 y 求偏导，则 $x=\text{const}$，$z=z(x,y)$.

例 9.6　$z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=e^{x+2y+3z}+1$ 决定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：方程 $x^2+y^2+z^2=e^{x+2y+3z}+1$ 两边对 x 求偏导，则

$$2x+0+2z\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-e^{x+2y+3z}}{3e^{x+2y+3z}-2z}.$$

方程两边也对 y 求偏导得 $0+2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x+2y+3z}\left(0+2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-2e^{x+2y+3z}}{3e^{x+2y+3z}-2z}.$$

例 9.7　$x\sin(2x+y^2+yz)=z^2+1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：方程两边对 x 求偏导得

$$\sin(2x+y^2+yz)+x\cos(2x+y^2+yz)\left(2+0+y\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2z\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\sin(2x+y^2+yz)-2x\cos(2x+y^2+yz)}{xy\cos(2x+y^2+yz)-2z};$$

方程两边对 y 求偏导得

$$x\cos(2x+y^2+yz)\left(0+2y+z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2z\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x(2y+z)\cos(2x+y^2+yz)}{xy\cos(2x+y^2+yz)-2z}.$$

二、全微分

$u=f(x,y)$，全微分 $du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$.

$u=f(x,y,z)$，全微分 $du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$.

例 9.8　$u=\tan\frac{x}{y}$，求 du.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y}\sec^2\frac{x}{y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{-x}{y^2}\sec^2\frac{x}{y}$，所以

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\frac{1}{y}\sec^2\frac{x}{y}dx-\frac{x}{y^2}\sec^2\frac{x}{y}dy.$$

例 9.9　$u=x^y+y^x$，求 du.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}+y^x\ln y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x+xy^{x-1}$，所以

$$du=(yx^{y-1}+y^x\ln y)dx+(x^y\ln x+xy^{x-1})dy.$$

例 9.10 $u=x^2+y^2+x\sin 2y$，**求** $du\big|_{(x=1,y=\frac{\pi}{2})}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+\sin 2y$，$\frac{\partial u}{\partial x}=2y+2x\cos 2y$，**则**

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1,y=\frac{\pi}{2}}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=1,y=\frac{\pi}{2}}=\pi+2\cos\pi=\pi-2,$$

所以

$$du\big|_{(x=1,y=\frac{\pi}{2})}=2dx+(\pi-2)dy.$$

三、二阶偏导数

函数 $u=f(x,y)$，**有四个二阶偏导数** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. **分别定义为**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

在一定条件下 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

例 9.11 **已知** $u=x^3y+\frac{x^2}{y}+\frac{y}{x}$，**求** u **的所有二阶偏导数**.

解：$u_x=3x^2y+\frac{2x}{y}-\frac{y}{x^2}$，$u_y=x^3-\frac{x^2}{y}+\frac{1}{x}$，**则**

$$u_{xx}=6xy+\frac{2}{y}+\frac{2y}{x^3},\ u_{xy}=u_{yx}=3x^2-\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{x^2},\ u_{yy}=\frac{x^2}{y^2}.$$

例 9.12 $u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，**求** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解：**因为** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，**则**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

例 9.13 **已知** $z=z(x,y)$ **由方程** $x^2+y^2=ye^z+z^2$ **决定**，**求** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：**方程两边对** x **求偏导得**

$$2x=ye^z\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$2x=(ye^z+2z)\frac{\partial z}{\partial x},\tag{$*$}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{ye^z+2z}.$$

方程两边对 y **求偏导得**

$$2y=e^z+ye^z\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-e^z}{ye^z+2z}.$$

（*）式两边对 y 求偏导得

$$0=\left(e^z+ye^z\frac{\partial z}{\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+(ye^z+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-e^z\frac{\partial z}{\partial y}-(ye^z+2)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}}{ye^z+2z}.$$

上面式中$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$由已算出值代入.

四、累次积分

累次积分公式$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy\right]dx.$

例 9.14 **计算** $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}xydy$.

解：原式 $=\int_0^1\left[x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{x^2}^{x}\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x^2-x^4)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}.$

例 9.15 **计算** $\int_0^1 dy\int_0^{y^2}\frac{\sin y}{y}dx$.

解：原式 $=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\cdot y^2dy=\int_0^1 y\sin ydy=-\int_0^1 yd\cos y$

$$=-y\cos y\Big|_0^1+\int_0^1\cos ydy=-\cos 1+\sin y\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1.$$

五、直角坐标系下的二重积分

X 型区域

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy.$$

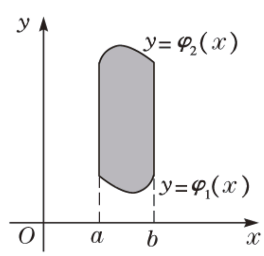
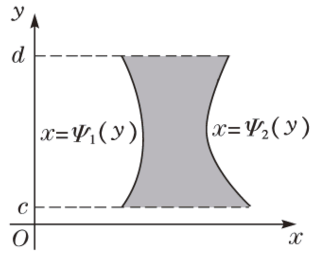


图 9.1

Y 型区域



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

图 9.2

上述 X 型、Y 型区域的定限方法非常重要，将直角坐标系下的二重积分转换为累次积分，更复杂的区域可以看成（拆分）为若干 X 型、Y 型区域组合而成.

例 9.16　如图 9.3，D 为 $y = x^2$，$y = x$ 在第一象限所围的区域，计算 $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy$.

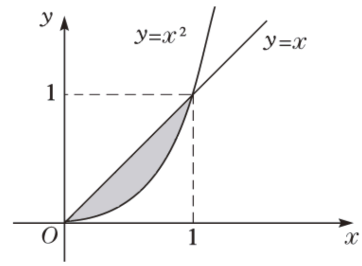


图 9.3

解：$\iint\limits_D (x + y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} (x + y)\,dy$

$= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{x} dx$

$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$

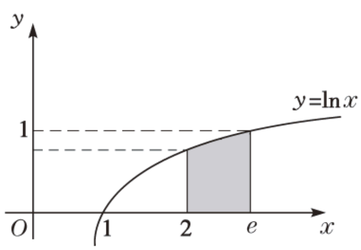


图 9.4

例 9.17　如图 9.4，D 为曲线 $y = \ln x$，$x = 2$，$x = e$，x 轴所围的区域，计算 $\iint\limits_D y\,dxdy$.

解：$\iint\limits_D y\,dxdy = \int_2^e dx\int_0^{\ln x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_2^e y^2\Big|_0^{\ln x} dx$

$= \frac{1}{2}\int_2^e \ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x\ln^2 x\Big|_2^e - \int_2^e \ln x\,dx$

$= \frac{1}{2}e - \ln^2 2 - x\ln x\Big|_2^e + \int_2^e 1\,dx$

$= \frac{1}{2}e - \ln^2 2 - e + 2\ln 2 + e - 2$

$= \frac{1}{2}e - \ln^2 2 + 2\ln 2 - 2.$

例 9.18　如图 9.5，D 为曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 (1，1) 处切线、$y = \sqrt{x}$ 本身、x 轴所围的区域，计算 $\iint\limits_D xy\,dxdy$.

解：因为 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$，$k = y'\big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$，切线方程：$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$，即 $x = 2y - 1$，所以

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{2y-1}^{y^2} xy\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(y \cdot \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{2y-1}^{y^2} \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [y^5 - y(2y-1)^2]\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [y^5 - y(4y^2 - 4y + 1)]\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^5 - 4y^3 + 4y^2 - y)\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

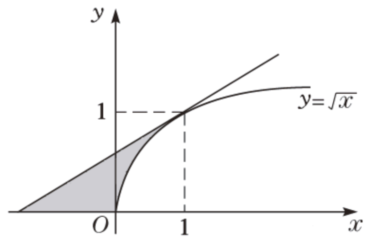


图9.5

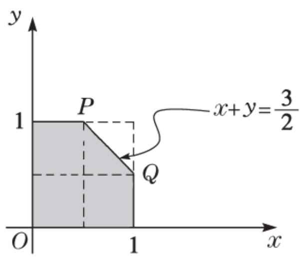


图9.6

例9.19 如图9.6，D为从点$\left(\frac{1}{2},1\right)$到点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$的连线PQ切去正方形$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$右上角的剩余部分，计算$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：设正方形$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$为G，右上角部分为$D_1$，则

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_1} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_G (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Big|_0^1 \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\iint_{D_1} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x\int_{\frac{3}{2}-x}^1 (x+y)\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Big|_{\frac{3}{2}-x}^1 \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[x + \frac{1}{2} - x\left(\frac{3}{2} - x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 \right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) \right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{8} \right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}x \right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{16},$$

所以原式$= 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

改变累次积分的积分顺序，是考查考生对二重积分定理是否掌握及掌握如何的一个重要填空题型. 具体分析的思路应是：

原累次积分$\xrightarrow{\text{还原}}$二重积分$\xrightarrow{\text{改变定限方向}}$新累次积分.

例9.20 如图9.7，变换累次积分$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x+y)\mathrm{d}x +$

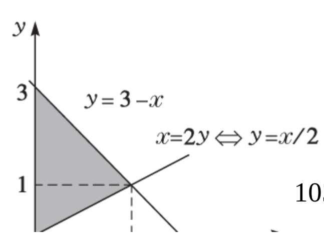


图9.7

$\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x+y)\,dx$ **的积分次序**.

解：　原累次积分 $= \iint\limits_D f(x+y)\,dxdy$

$= \int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,dy$.

例 9.21　**改变下列累次积分的积分次序：**

(1) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$ ；　　(2) $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\ (a>0)$ ；

(3) $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$ ；　　(4) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

解：(1) **如图** 9.8 **所示，原式** $= \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy.$

(2) **如图** 9.9 **所示，**

原式 $= \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

$$= \int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx + \int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx.$$

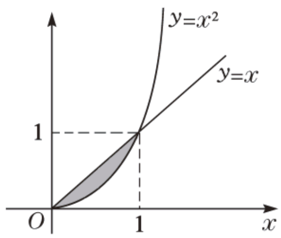


图 9.8

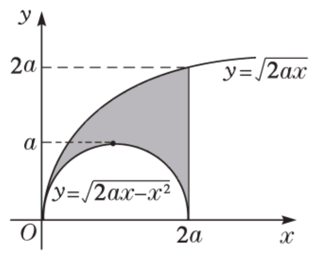


图 9.9

(3) **如图** 9.10 **所示，原式** $= \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x,y)\,dx.$

(4) **如图** 9.11 **所示，原式** $= \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx.$

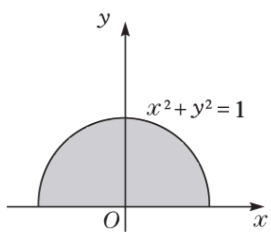


图 9.10

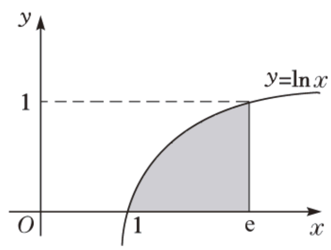


图 9.11

六、极坐标系下的二重积分

公式为 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r dr.$

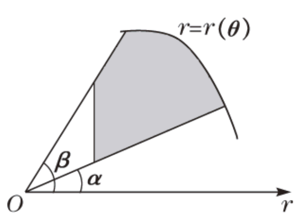


图 9.12

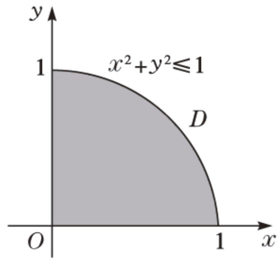


图 9.13

例 9.22　**如图** 9.13，D **为** $x^2+y^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，**所围成的区域，计算** $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{8}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}.$$

例 9.23　**如图** 9.14，D **为** $x^2+y^2\leqslant a^2$ **且** $x\geqslant 0$ **所围的区域，计算** $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

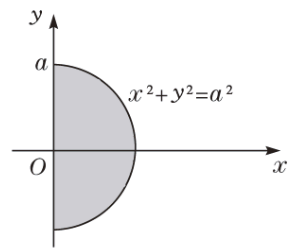


图 9.14

解：原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\frac{a^2}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{3}(I_2-I_4)$$

$$=\frac{a^2}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{48}.$$

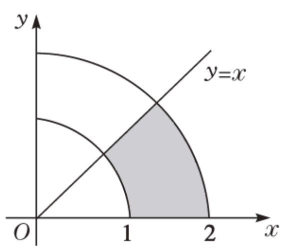


图 9.15

例 9.24　**如图** 9.15，D **为** $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ **且** $0<y\leqslant x$ **所围的区域，计算** $\iint\limits_D \arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\theta\cdot r^2}{2}\right]\Big|_1^2\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{64}\pi^2.$$

例 9.25　**如图** 9.16，D **为圆周** $x^2+y^2=2ax$ **与** x **轴在第一象限所围部分，求** $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

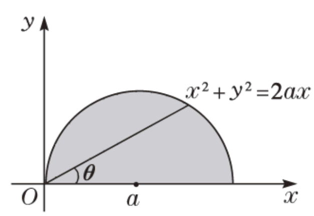


图 9.16

解：将圆周 $x^2+y^2=2ax$ **化为极坐标方程** $r=2a\cos\theta$.

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\cos\theta\sin\theta\right]\Big|_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{(2a)^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= -4a^4 \cdot \frac{1}{6}\cos^6\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a^4}{3}.$$

单元练习题 9

1. $u = x^{\frac{y}{z}}$，则 $du =$ ______________.

2. $x^2 + yz + \sin(x + 2z) = 0$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ______________.

3. $u = f(x^2y^2, e^{xy})$，f 为已知可微函数，则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ ________________.

4. $u = x^y$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$ ________________.

5. 改变积分次序 $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy =$ ________________ .

6. 改变积分次序 $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy =$ ________________.

7. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

8. $u = \arctan\frac{y}{x}$，求所有的二阶偏导数.

9. $u = x\sin(2x + y)$，求 du.

10. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11. $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 $f(2x-y)$，$g(x,xy)$ 二阶可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12. 设方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，确定 $z=z(x,y)$，求 dz.

13. 已知 $\iint\limits_D y\,dxdy$，其中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

14. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}dx$ 的值.

15. 求 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy$ 的值.

16. 求 $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ 的值，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$.

17. 求$\iint\limits_D \sqrt{x}\,dxdy$,$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant x\}$.

18. 求$\iint\limits_D \dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}dxdy$的值,其中 D 是 $x^2 + y^2 = 1$,$x = 0$,$y = 0$ 所围区域的第一象限部分.

综合练习题

一、填空题

1. $y=\sqrt{\lg\frac{4x-x^2}{3}}+\frac{1}{\lg(2x-3)}$的定义域是____________.

2. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|\leqslant 2,\\ \sin x, & 2<x<3\end{cases}$的定义域是__________,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$__________,$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=$__________;

   $\lim\limits_{x\to}\frac{\sin x}{x}=$__________,$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=$__________;

   $\lim\limits_{x\to}x\sin\frac{1}{x}=$__________.

4. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x-3}$的连续区间是__________,间断点是__________.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=$____________.

6. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,则$[f(0)]'=$_________,$f^{(n)}(0)=$__________.

7. $y=x^3+3^x+3^3+x^x$,则$y'=$__________.

8. $y=\cos x$在点$x=\frac{\pi}{2}$处的切线方程________.

9. $\frac{d(\ln x)}{d\sqrt{x}}=$__________.

10. 已知$x=\frac{\pi}{3}$是$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$的极值点,则$a=$__________.

11. $y=x^3-3x^2+5$的拐点是__________.

12. 曲线$y=\frac{x^3}{x^3-1}$的渐近线是__________,$y=2\ln\frac{2x-1}{2x}+1$的水平渐近线是______________.

13. $f(x)$的一个原函数为$\frac{1}{x}$,则$f'(x)=$__________.

14. $\int d(\cos x)=$__________.

15. $\int(x^3e^x)'dx=$_________,$\int_0^1(x^3e^x)'dx=$__________.

16. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0,\end{cases}$则$\int_0^1 f(x)dx=$__________,$\int_{-1}^1 f(x)dx=$__________.

17. $\int_{0} \frac{1}{1+x^2}dx =$ ________，$\lim\limits_{n\to+} \int_0^1 x^n dx =$ ________ .

18. 已知 $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{1-x^2} + c$，则 $\int \sin x f(\cos x)\,dx =$ __________ .

19. 判别级数 $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{p-2}}$ 的敛散性：

当________时，级数绝对收敛；当________时，级数条件收敛；

当________时，级数发散.

20. $f(x) = \frac{1}{1-2x}$，展开为 x 的幂级数为____________.

21. $z = 1 + xy - \sqrt{x^2+y^2}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=3\\y=4}} =$ __________.

22. $z = \arctan\frac{y}{x}$，则 $dz =$ __________.

23. $z = x^2\ln(y+1)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$ __________.

24. 微分方程 $(xy')^3 + x^2y^4 - y = 0$ 的阶数为__________.

25. $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解是____________.

26. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\cos x$ 的特解 y^* 形如____________.

27. 过点 $M(-1,1,1)$ 与平面 $x - 2y + 3z = 1$ 相平行的平面方程是____________.

28. 直线 $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ 的标准式是____________.

29. 将曲线 $y^2 = z$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程是____________.

30. 更换积分次序 $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_2^8 dx \int_x^8 f(x,y)\,dy =$ ____________ .

31. 更换积分次序 $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy =$ ____________.

二、选择题

1. 若 $f(x-a) = x(x-a)$，则 $f(x)$ 等于　　(　　)

A. $x(x-a)$　　B. $x(x+a)$　　C. $(x+a)(x-a)$　　D. $(x-a)^2$

2. 设 $f(x) = \ln x$，$g(x) = x+2$，则 $f[g(x)]$ 的定义域是　　(　　)

A. $(-2, +\ )$　　B. $[-2, +\ ]$　　C. $(-\ , 2)$　　D. $(-\ , 2]$

3. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$，则当 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$ 时，$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ 等于　　(　　)

A. $\frac{x-1}{x}$　　B. $\frac{x}{x-1}$　　C. $1-x$　　D. x

4. 当 $x\to 0$ 时与 $3x^2 + x^4$ 为同阶无穷小量的是　　(　　)

A. x　　B. x^2　　C. x^3　　D. x^4

5. 当 $x\to 1$ 时，不是无穷小量的是　　(　　)

A. $x^2 - 1$　　B. $x(x-2) + 1$

C. $3x^2 - 2x - 1$　　D. $4x^2 - 2x + 1$

6. 设$\lim\limits_{n\to}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}=e^{-3}$,则 k 等于 （　　）

A. $3/2$　　B. $3/2$　　C. $-3/2$　　D. $-2/3$

7. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 点处连续是 $f(x)$ 在 $x=a$ 点有极限的 （　　）

A. 充要条件　　B. 充分条件　　C. 必要条件　　D. 无关条件

8. 函数 $f(x)=\frac{x-3}{x^2-3x+2}$的间断点是 （　　）

A. $x=1,x=2$　　B. $x=3$　　C. $x=1,2,3$　　D. 无间断点

9. 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$的等价无穷小是 （　　）

A. x　　B. $2x$　　C. x^2　　D. $2x^2$

10. $\lim\limits_{n\to}\frac{3\sqrt{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{81n^8+1}}$的解是 （　　）

A. 3　　B. 1　　C.　　D. $\frac{1}{9}$

11. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln(x-1)}, & x>1,x\neq2,\\ 0, & x=1,\\ 1, & x=2\end{cases}$ 的连续区间是 （　　）

A. $[1,\ )$　　B. $(1,\ )$

C. $[1,2)\cup(2,\ )$　　D. $(1,2)\cup(2,\ )$

12. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 有 （　　）

A. 一个实根　　B. 两个实根　　C. 三个实根　　D. 无实根

13. $y=(x-1)^2$ 在 $(-\ \ ,+\ \ )$ 内的极小值为 （　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

14. 函数 $y=e^{-x^2}$ （　　）

A. 没有拐点　　B. 有一个拐点　　C. 有两个拐点　　D. 有三个拐点

15. 函数 $y=\frac{4x-1}{(x-2)^2}$ （　　）

A. 只有水平渐进线　　B. 只有铅直渐近线

C. 没有渐近线　　D. 有水平并有垂直渐近线

16. 函数 $y=|x-1|+2$ 的极小值为 （　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

17. 在区间 $[-1,1]$ 上，不满足罗尔定理的函数是 （　　）

A. $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1$　　B. $f(x)=\ln(1+x^2)$

C. $f(x)=\sqrt[3]{x}$　　D. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

18. $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有极值的一个 （　　）

A. 必要条件　　B. 充要条件　　C. 充分条件　　D. 无关条件

19. $y=|x-2|$在区间 $(0,4)$ 内 （　　）

A. 上凹　　B. 下凹　　C. 既有上凹又有下凹　　D. 直线段

20. 对一切 $x > 1$ 均成立的不等式是　　(　　)

A. $e^x < (e+1)x$　　B. $e^x < (e-1)x$　　C. $e^x > ex$　　D. $e^x < ex$

21. 下列广义积分收敛的是　　(　　)

A. $\int_1^{+} \frac{1}{x^4}dx$　　B. $\int_1^{+} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$　　C. $\int_0^1 \frac{1}{x^4}dx$　　D. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

22. $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$ 收敛,则有　　(　　)

A. $q \geqslant 1$　　B. $q > 1$　　C. $q \leqslant 1$　　D. $q < 1$

23. $y = \int_0^x (t-1)(t-2)\,dt$,则 $y'(0)$ 等于　　(　　)

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

24. 下列级数条件收敛的是　　(　　)

A. $\sum_{n=1}^{+} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum_{n=1} (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

C. $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{2^n+1}}$　　D. $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n^3+4}}$

25. 下列级数发散的是　　(　　)

A. $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$　　B. $\sum_{n=1} \frac{n}{3n-1}$

C. $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$　　D. $\sum_{n=1} \frac{n}{\sqrt{3^n}}$

26. a^x $(a > 0, a \neq 1)$ 展开为 x 的幂函数是　　(　　)

A. $\sum_{n=0}^{+} \frac{x^n}{n!}$　　B. $\sum_{n=0}^{+} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$　　C. $\sum_{n=0}^{+} \frac{(x\ln a)^n}{n!}$　　D. $\sum_{n=1}^{+} \frac{(x\ln a)^n}{n}$

27. $\sum_{n=0}^{+} \frac{3^n}{n+3}x^n$ 的收敛半径 R 等于　　(　　)

A. 1　　B. 3　　C. $\frac{1}{3}$　　D.

28. $\sum_{n=0}^{+} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 在 $-\quad < x < +\quad$ 的和函数 $S(x)$ 为　　(　　)

A. e^{-x^2}　　B. e^{x^2}　　C. $-e^{-x^2}$　　D. $-e^{x^2}$

29. 幂函数 $\sum\left[\frac{(-1)^n}{2^n}x^n + 3^n x^n\right]$ 的收敛半径是　　(　　)

A. 2　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 3

30. 在下列级数中,条件收敛的是　　(　　)

A. $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n n}{n+1}$　　B. $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

C. $\sum_{n=1}^{+}\frac{(-1)^n}{n^2}$　　D. $\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

31. $z=e^{xy}$,则 dz 等于　（　）

A. $e^{xy}dx$　B. $(xdy+ydx)e^{xy}$　C. $xdy+ydx$　D. $(x+y)e^{xy}$

32. 设二重积分的积分域 D 是 $x^2+y^2\leqslant 4$,则$\iint\limits_D dxdy$ 等于　（　）

A. π　B. 4π　C. 3π　D. 5π

33. 设 $y=f(x)$,若 $f'(x_0)$ 存在,且 $f'(x_0)=a$,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$　（　）

A. a　B. 2a　C. -a　D. $\frac{a}{2}$

34. 下列函数在点 $x=0$ 处连续且可导的是　（　）

A. $f(x)=\sqrt[3]{x}$　　B. $f(x)=\frac{1}{x-1}$

C. $f(x)=\begin{cases}2x-1, x\geqslant 0,\\ x^2-1, x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}2x-3, x\geqslant 0,\\ x^2-1, x<0\end{cases}$

35. 微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$的通解是　（　）

A. $\sin\frac{y}{x}=Cx$　B. $\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{Cx}$　C. $\sin\frac{x}{y}=Cx$　D. $\sin\frac{x}{y}=\frac{1}{Cx}$

36. 下列极限存在且有限的是　（　）

A. $\lim\limits_{x\to}\frac{x(x+1)}{x^2}$　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2^x-1}$　C. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$　D. $\lim\limits_{x\to +}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

37. 下面哪条直线与平面 $x-2y+3z-6=0$ 平行　（　）

A. $\begin{cases}x-y+z=1,\\ x-2y+2z=2\end{cases}$　　B. $x-2y+3z-5=0$

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$　　D. $\begin{cases}x=1+2t,\\ y=-1+3t,\\ z=4t\end{cases}$

38. 在下面曲面中,为旋转抛物面的是　（　）

A. $x^2+y^2=z^2$　　B. $x^2+y^2+2z^2=1$

C. $x=\frac{y^2+z^2}{2}$　　D. $x^2+y^2=2x$

三、计算题

1. 分析 $y=\frac{\sqrt{x+3}}{(x+4)(x-1)}$的间断点并分类.

2. $\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a，b.

3. 求 $\lim\limits_{x\to +}\left(\sqrt{(x+p)(x+q)}-x\right)$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\tan 2x}$.

7．求$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$．

8．求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$．

9．求$\lim\limits_{x\to}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$．

10．求$\lim\limits_{x\to} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$．

11．求$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\ln(e^x-1)}}$．

12．求$\lim\limits_{x\to +}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\sqrt{x}}$．

13．求$\lim\limits_{x\to} \dfrac{x^2+\cos^2 x-1}{(x+\sin x)^2}$.

14．设 $f(x)=\begin{cases} a+x+x^2, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0, \end{cases}$求 a 使 f(x) 在 x = 0 处连续.

15．求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

16．设 $f(x)=\begin{cases} 3x+a, & x\leqslant 0, \\ x^2+1, & 0<x<1, \\ \dfrac{b}{x}, & x\geqslant 1, \end{cases}$若 f(x) 在 (- , +) 内连续，求 a , b 的值.

17．$y=\arctan\dfrac{1}{x}$，求 y'.

18．$y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$，求 y'.

19．$y = (1+x^2)^{\arctan x}$，求 y'．

20．$y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$，求 dy.

21．$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x<0, \\ x\arctan x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$．

22．$f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$，求 $f^{(n)}(0)$．

23．$y = \arctan\dfrac{1}{x} + x\ln\sqrt{x}$，求 y''.

24. $y=\ln(1+2x)$，求 $y'''(0)$.

25. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$，求 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

26. $y=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$，求 $y''(1)$.

27. $y=\frac{\arccos x}{x}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$，求 y'.

28. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

29. 求 $\lim\limits_{x\to +}\dfrac{\ln(x\ln x)}{x^a}(a>0)$.

30. 分析 $y=\ln(x^2+1)$ 的单调性、凹凸性、极值、拐点.

31. 讨论函数 $e^{|x|}$ 在点 $x=0$ 处是否可导？有没有极值？如果有求出其极值.

32. 设生产某种产品 x 个单位时，成本函数为 $c(x)=100+\dfrac{1}{4}x^2+6x$（万元/单位）. 当 $x=$？时，平均成本最小？

33. 某厂生产某产品，年产量为 x（百台），总成本 c（万元），其中固定成本为 2 万元，每产 100 台成本增加 1 万元，市场上每年可销售此种产品 4 百台，其销售总收入 $R(x)$ 是 x 的函数，$R(x)=\begin{cases}4x-\dfrac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 8, & x>4.\end{cases}$ 问每年生产多少台时总利润最大？

34. 某工厂每天生产 x 台袖珍收音机总成本为 $c(x)=\frac{1}{4}x^2+x+100$（元），该种收音机独家经营，市场需求规律为 $x=75-3p$，其中 p 为单价，问每天生产多少台时获利最大？此时每台收音机价格如何？

35. 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值与最小值.

36. $f(x)=x^2-\int_0^a f(x)\,dx$，且 a 是不等于 -1 的常数，求证：$\int_0^a f(x)\,dx=\frac{a^3}{3(a+1)}$.

37. $\int_0^x f(t)\,dt=\frac{x^4}{2}$，求 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\,dx$.

38. 求 $\int\left(\tan^2 x+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\right)dx$.

39. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\,dt}{x^3}$.

40．求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$．

41．求 $\int (x+1)\ln x dx$．

42．求 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$．

43．求 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$．

44．求 $f(x)=\int_0^x \frac{t+2}{t^2+2t+2}dt$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

45．求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2})dt}{x^3}$．

46．求 $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

47．设 $f(2x+1)=xe^x$，求 $\int_3^5 f(t)\,dt$.

48．求 $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$.

49．$\int_a^{2\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=\frac{\pi}{6}$，求 a.

50．设曲线 $y=\sqrt{2x}$：

(1) 求过曲线上点 (2，2) 的切线方程；

(2) 求此切线与曲线 $y=\sqrt{2x}$ 及直线 $y=0$ 所围成的平面图形面积.

51．曲线 $xy=a\ (a>0)$ 与直线 $x=a$，$x=2a$ 及 $y=0$ 围成一个平面图形：

(1) 求此图形绕 x 轴所成的旋转体的体积；

(2) 求此图形绕 y 轴所成的旋转体的体积.

52. 求曲线 $y=x^3-3x+2$ 和它的右极值点处的切线所围区域的面积.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x)<1$,又 $F(x)=(2x-1)-\int_0^x f(t)\,dt$.
证明:$F(x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个零点.

54. 证明:$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$.

55. 设连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,又 $G(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$,$x\in(a,b)$.
试证:$G'(x)$ 在 (a,b) 内非负.

56. 判断 $\sum_{n=1}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 的敛散性.

57. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}\dfrac{x^{2n}}{2^n \cdot n}$的收敛半径和收敛区间 .

58. 设 $p>0$,讨论 p 为何值时,级数 $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^n}{np^{n+1}}$ 收敛.

59. $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$展开为 x 的幂级数,并求出收敛范围.

60. 讨论$\sum\limits_{n=1}\dfrac{1}{1+a^n}$在 $0<a<1$,$a=1$ 和 $a>1$ 三种条件下的敛散性.

61. $x=z\ln\left(\dfrac{z}{y}\right)$,求 dz.

62. 计算$\iint\limits_{D}\dfrac{x}{y}dxdy$. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2ay\}$.

63．设 $z=z(x,y)$ 是 $z^3-3xyz=1$ 所确定的隐函数，求 dz.

64．计算 $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$，其中 D：$e^2\leqslant x^2+y^2\leqslant e^4$.

65．设 $x^2+y^2+2x-2yz=e^z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

66．设 $z=f(x^2+y^2)$ 且 $f(x,y)$ 可微，证明：$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

67．求 $y'=\frac{2y-x^2}{x}$ 的解.

68．在曲线 $y=\ln x$ 上点 $(e,1)$ 处作切线 l：

⑴ 求由曲线的切线、曲线本身及 x 轴所围的面积；

⑵ 求上述所围图形绕 x 轴旋转所得的体积.

69. **计算积分** $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$.

70. **平面** π **通过直线** $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ 2x-y+2z=1, \end{cases}$ **且垂直于平面** $x+2y+3z=1$ **,求平面** π **的方程**.

71. **求** $y''-2y'-3y=e^{3x}$ **的解**.

72. **求** $y''+y=\sin x$ **的解**.

73. **求下列方程的解：**

(1) $yy''-(y')^2=y^2\ln y$ **；**

(2) $y''=\dfrac{1+y'^2}{2y}$.

74. **求下列函数的间断点并判别其类型：**

(1) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ **；**

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0.\end{cases}$

75. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}, & x>0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

76. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，试证：在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

77. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 证明：在 $[0,1]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

78. 证明：$x^5-3x-2=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

79. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f[f(x)]=x$，证明：存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

80. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx=0$,证明:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

81. 试证:若 $m>1,n>1,a>0$,则 $x^m(a-x)^n\leqslant\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$.

82. 设 $x>0$,证明:$\dfrac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$.

83. 证明不等式:$\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}\ (a>1,n\geqslant 1)$.

2006 年普通高校“专转本”统一考试全真题

高　等　数　学

一、选择题(本大题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分. 在每小题给出的 4 个选项中,只有 1 项符合题目要求的,请把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x}=\dfrac{1}{2}$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f\left(\dfrac{x}{3}\right)}$值为　　(　　)

   A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. $\dfrac{1}{3}$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$在 $x=0$ 处　　(　　)

   A. 连续但不可导　　B. 连续且可导

   C. 不连续也不可导　　D. 可导但不连续

3. 下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是　　(　　)

   A. $y=e^x$　　B. $y=1+|x|$　　C. $y=1-x^2$　　D. $y=1-\dfrac{1}{x}$

4. 已知 $\int f(x)\,dx=e^{2x}+C$,则$\int f'(-x)\,dx$ 等于　　(　　)

   A. $2e^{-2x}+C$　　B. $\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$　　C. $-2e^{-2x}+C$　　D. $-\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

5. 设 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 为正项级数,下面说法正确的是　　(　　)

   A. 如果$\lim\limits_{n\to} u_n=0$,则$\sum\limits_{n=1} u_n$ 必定收敛

   B. 如果$\lim\limits_{n\to}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l\,(0\leqslant l<+\quad)$,则$\sum\limits_{n=1} u_n$ 必定收敛

   C. 如果$\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,则$\sum\limits_{n=1} u_n^2$ 必定也收敛

   D. 如果交错级数$\sum\limits_{n=1}(-1)^n u_n$ 收敛,则$\sum\limits_{n=1} u_n$ 必定也收敛

6. 设对一切实数 x 有:$f(-x,y)=-f(x,y)$,$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$,$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,则$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 等于　　(　　)

A. 0　　　　B. $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

C. $2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$　　　　D. $4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

7. 已知 $x\to 0$ 时,$a(1-\cos x)$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$__________.

8. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$,且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义,则当 $A=$__________时,$f(x)$ 在 x_0 处连续.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数且 $f(1)=2$,$\int_0^1 f(x)\,dx = 3$,则 $\int_0^1 xf'(x)\,dx =$ __________.

10. 设:$|a|=1$,$a\perp b$,则 $a\cdot(a+b)=$__________.

11. 设 $u=e^{xy}\sin x$,则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$____________.

12. 计算:$\iint\limits_{D} dxdy =$ __________,其中 D 为以点 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(0,2)$ 为顶点的三角形区域.

三、解答题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,满分 64 分)

13. 计算:$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

14. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定,求 $\dfrac{dy}{dx}$,$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

15. 计算:$\int \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

16. **计算：**$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\mathrm{d}x$.

17. **求微分方程** $x^2y' = xy - y^2$ **的通解**.

18. **将函数** $f(x) = x\ln(1+x)$ **展开为** x **的幂级数**. **（要求指出收敛区间）**

19. **求过点** $M(3,1,-2)$ **且与二平面** $x-y+z-7=0$，$4x-3y+z-6=0$ **都平行的直线方程**.

20. **设** $z = xf(x^2, xy)$，**其中** $f(u,v)$ **的二阶偏导数存在，求**$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

四、证明题（本大题共 1 小题，满分 8 分）

21．证明：当 $|x| \leqslant 2$ 时，$|3x - x^3| \leqslant 2$.

五、综合题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

22．已知曲线 $y = f(x)$ 过原点且曲线在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x + y$，求此曲线方程.

23．已知一平面图形由抛物线 $y = x^2$ 及 $y = -x^2 + 8$ 围成.

(1) 求此平面图形的面积；

(2) 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

24．设 $g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\iint_{D_t} f(x)\,dxdy, & t \neq 0, \\ a, & t = 0, \end{cases}$ 其中 D_t 是由 $x = t$，$y = t$ 以及坐标轴所围的正方形区域，函数 $f(x)$ 连续.

(1) 求 a 的值使得 $g(t)$ 连续；

(2) 求 $g'(t)$.

习题与全真试题详解

单元练习题 1

1．$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$．　2．$\dfrac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$．　3．$\dfrac{5}{3}\,\dfrac{1}{5x+1}-\dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{2x+1}$．　4．$x^2-x+1+\dfrac{4x}{x^2+1}$．

5．C.　6．C.　7．$e^{\frac{x-1}{2}}+\dfrac{x-1}{2}$．　8．$e^x+1$．

9．$\sin^4 x=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\cos^2 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8};$$

$\tan^4 x=\tan^4 x-\tan^2 x+\tan^2 x=\tan^2 x\sec^2 x-\tan^2 x=\tan^2 x\sec^2 x-(\tan^2 x+1)+1$

$$=\tan^2 x\sec^2 x-\sec^2 x+1.$$

单元练习题 2

1．$e^{2a}=4$，$a=\dfrac{1}{2}\ln 4=\ln 2$．　2．$a=0$．　3．$m=\dfrac{9}{2}$，$n=2$．　4．$m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{1}{4}$．　5．$x=1$，2．

6．$a=-4$，$b=3$．　7．C.　8．C.　9．B.

10．**解：**⑴ **原式** $=\lim\limits_{x\to +}\dfrac{4x^2-2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to +}\dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}=-\dfrac{1}{2}$．

⑵ **原式** $=0$．

⑶ **原式** $=\lim\limits_{x\to}\left[\left(1+\dfrac{-x-1}{x^2-x+2}\right)^{\frac{x^2-x+2}{-(x+1)}}\right]^{\frac{-(x+1)}{x^2-x+2}\cdot 2x}=e^{-2}$．

⑷ **原式** $=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}\right]^{\frac{2x^2}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=e^4$．

⑸ **原式** $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2+1}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-2)}=-1$．

⑹ **原式** $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-2x)^2}{x\cdot 2x}=2$．

⑺ **令** $u=x-2$，**得** $x=u+2$．**原式** $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{2u+4}-2}{\sqrt[3]{4u+8}-2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{2}u}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}u}-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}u}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}u}=\dfrac{3}{2}$．

⑻ **令** $u=\pi-x$，$x=\pi-u$，**原式** $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin(\pi-u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$．

⑼ **令** $u=\dfrac{\pi}{2}-x$，**得** $x=\dfrac{\pi}{2}-u$，**原式** $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin\left(1-\frac{2}{\pi}u-1\right)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin\left(-\frac{2}{\pi}u\right)}{u}=-\dfrac{2}{\pi}$．

⑽ **原式** $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x^4}{x^2}=1$．

(11) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{e^{3x\ln 2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{2}}{3x\ln 2}=\dfrac{1}{6\ln 2}$.

(12) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{e^{x^2\ln 3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{3}\cdot 2x^2}{x^2\ln 3}=\dfrac{2}{3\ln 3}$.

11. 解 间断点为 $x=k\pi, k\in Z$;

当 $k=0$,即 $x=0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$,$x=0$ 为可去间断;

当 $k\neq 0$,$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\ $,$x=k\pi$ 为第二类无穷间断.

12. 解 $\begin{cases}-1, x<-1,\\ 0, \quad x=-1,\\ 1, \quad -1<x<1,\\ 0, \quad x=1,\\ -1, x>1,\end{cases}$ 间断点为 $(-1,1)$.

$f(-1-0)=-1$,$f(-1+0)=1$,$x=-1$,第一类跳跃间断点;

$f(1-0)=1$,$f(1+0)=-1$,$x=1$,第一类跳跃间断点.

13. 解 $f(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 2$;

间断点为 $x=0,1,k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$;

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}x}{(x-1)(x-3)x}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,$x=0$ 为可去间断点;

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\ $,$x=1$ 为第二类无穷间断点;

$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\ $,$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 为第二类无穷间断点.

14. 解 $x=1$ 为间断点.

因为 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\sin(x-1)}{1-x}=-1$,$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1)}=1$,所以 $x=1$ 为第一类跳跃间断点.

15. 证明 构造 $f(x)=x^4-3x^2-x-1$,对于 $x\in[0,2]$,$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,且 $f(0)=-1$,$f(2)=16-12-2-1=1>0$,据连续函数介质定理知,在 $(0,2)$ 方程至少有一正根;

同理,对于 $x\in[-2,0]$,$f(-2)=16-12+2-1=5>0$,$f(0)=-1<0$,故在 $(-2,0)$ 方程至少有一负根,命题得证.

16. 证明 构造 $f(x)=x\ln(x+1)-3$,$x\in[0,e^4-1]$,$f(x)$ 在 $[0,e^4-1]$ 连续,且 $f(0)=-3$,$f(e^4-1)=(e^4-1)\ln(e^4)-3=4(e^4-1)-3>0$,

据闭区间连续介值定理得知,在 $(0,e^4-1)$ 内 $f(x)$ 至少有一正根,即命题得证.

单元练习题 3

1. $dy=x^x(\ln x+1)dx$. 2. -12. 3. $y'=\dfrac{-2xy-y^2}{x^2+2xy+6y^2}$. 4. $y=f(x_0)$. 5. 1.

6. $(1,e^{-1})$,$(2,2e^{-2})$. 7. $y=1, x=1$. 8. $\Delta y<dy$. 9. e^2-1. 10. $(1,+\ )$. 11. k. 12. -1.

13. $\cos\{f[\sin f(x)]\}f'(\sin f(x))\cos f(x)f'(x)$. 14. $y=-2x+1$.

15. C. 16. B. 17. C. 18. B. 19. A. 20. C. 21. B. 22. B. 23. C. 24. A.

25. $y'=\dfrac{-1}{1+x^2}$. 26. $dy=2x\cos(x^2+1)e^{\sin(x^2+1)}dx$. 27. $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

28. $dy=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}dx$.　29. $y''(0)=-4$.

30. 解：$y'=2xf'(x^2)$，$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$.

31. 解 设 $y=\ln x+1$，$x=e^{u-1}$，$f(u)=e^{e^{u-1}}+3e^{u-1}$，$\dfrac{df(x)}{dx}=e^{e^{x-1}}e^{x-1}+3e^{x-1}$.

32. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}$.

33. 解：$\dfrac{dx}{dt}=e^t+te^t=(t+1)e^t$，$e^t+e^y\dfrac{dy}{dt}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{e^t}{e^y}=-\dfrac{e^t}{2e-e^t}$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{-(2e-e^t)(t+1)}，k=\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=1}=\frac{1}{-2e}=-\frac{1}{-2e}.$$

34. 解：$y=-x-1+\dfrac{1}{1-x}=-x-1-\dfrac{1}{x-1}$，$y'=-1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$，$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{(x-1)^{n+1}}(n\geqslant 2)$.

35. 用莱布尼兹公式. 解略.

36. $y^{(n)}=(1-x^2)(\cos x)^{(n)}+C_n^1(1-x^2)'(\cos x)^{(n-1)}+C_n^2(1-x^2)''(\cos x)^{(n-2)}$

$$=(1-x^2)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-2nx\cos\left[x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right]-n(n-1)\cos\left[x+\frac{(n-2)}{2}\pi\right]$$

$$=[1-x^2+n(n-1)]\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-2nx\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

37. 解：$f'(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}-xe^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$，$x\neq 0$，则

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=1.$$

所以 $f'(0)$ 不存在.

38. 解：$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x-2}+(x-2)\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^2}=\arctan\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2+1}$，$x\neq 2$，则

$$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\arctan\frac{1}{h}}{h}=\frac{\pi}{2},$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\arctan\frac{1}{h}=-\frac{\pi}{2}.$$

因 $f'_+(2)\neq f'_-(2)$，故 $f'(2)$ 不存在.

39. 解：$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2(x+1)^3, & x\geqslant -1,\\ -(x-1)^2(x+1)^2, & x<-1.\end{cases}$

$$f'(x)\begin{cases}2(x-1)(x+1)^3+(x-1)^2\cdot 3(x+1)^2=(x-1)(x+1)^2(3x+1), & x>-1,\\ -(x-1)(x+1)^2(3x-1), & x<-1,\end{cases}$$

$$f'_+(-1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(-2+h)^2h^3-0}{h}=0,$$

$$f'_-(-1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(-2+h)^2h^3-0}{h}=0.$$

所以 $f'(-1)=0$.

40. **解**：$y=2^{|(x-3)(x+1)|}=\begin{cases}2^{(x-3)(x+1)}, & x<-1,\\ 2^{(3-x)(x+1)}, & -1<x<3,\\ 2^{(x-3)(x+1)}, & x>3,\end{cases}$**则**

$$y'=\begin{cases}2^{x^2-2x-3}\ln 2\cdot(2x-2), & x<-1,\\ 2^{-x^2+2x+3}\ln 2\cdot(-2x+2), & -1<x<3,\\ 2^{x^2-2x-3}\ln 2\cdot(2x-2), & x>3,\end{cases}$$

$$f'_+(-1)=\lim_{h\to -1+0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to -1+0}\frac{e^{(4-h)h}-1}{h}=4,$$

$$f'_-(-1)=\lim_{h\to -1-0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to -1-0}\frac{e^{(-4+h)h}-1}{h}=-4.$$

所以 $x=-1$ **时**，$y(x)$ **不可导**；

$$f'_+(3)=\lim_{h\to 3+0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 3+0}\frac{e^{h(4+h)}-1}{h}=4,$$

$$f'_-(3)=\lim_{h\to 3-0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 3-0}\frac{e^{-h(4+h)}-1}{h}=-4.$$

所以 $x=3$ **时**，$y(x)$ **不可导**.

41. **解**：(1) $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x>0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$**则**

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h}=0,\text{故 } f'(0)=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$**不存在，故** $f'(x)$ **在** $x=0$ **处不连续**.

42. **解**：$y\ln y+x=0$，**方程两边对** x **求导，则** $\ln y\frac{dy}{dx}+y\frac{y'}{y}+1=0$，**所以** $(\ln y+1)y'+1=0$，（$*$）**式**

$$y'=\frac{-1}{\ln y+1}.$$

（$*$）**式两端再次对** x **求导，则** $y''(\ln y+1)+\frac{1}{y}(y')^2=0$，**所以** $y''=-\frac{(y')^2}{y(\ln y+1)}=-\frac{1}{y(1+\ln y)^3}$.

43. **解**：$f(x)=\begin{cases}2-x^2, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2, & x>2\text{ 或 }x<-2,\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}-2x, & -2<x<2,\\ 0, & x>2\text{ 或 }x<-2.\end{cases}$

函数 $f(x)$ **在** $x=\pm 2$ **时间断，故** $x=\pm 2$ **时**，$f(x)$ **不可导**.

44. **解**：(1) $f'(x)=\frac{x(g'(x)+e^{-x})-g(x)+e^{-x}}{x^2}$，$x\neq 0$，**则**

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(h)-e^{h}}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-e^{-h}}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)+e^{-h}}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g''(h)-e^{-h}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2};$$

(2) **当** $x\neq 0$ **时，由** $g'(x)$ **的连续性知** $f'(x)$ **连续，则**

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}+x\left(g''(x)-e^{-x}\right)-g'(x)-e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0).$$

所以 $f'(x)$ **在** $x=0$ **处连续. 综合得** $f'(x)$ **在** $(-\quad,+\quad)$ **内连续**.

45. **证明 设切点为** (x_0,y_0) **且满足** $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$**,** $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$**,** $k=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}$**,**

切线方程为 $y-y_0=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}$. **令** $x=0$ **得** $y=y_0+\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x_0$**,令** $y=0$ **得** $x=x_0+\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{3}}y_0$. **切线与坐标轴之间的长度为**

$$l=\sqrt{\left(y_0+\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}x_0\right)^2+\left(x_0+\sqrt[3]{\frac{x_0}{y_0}}y_0\right)^2}=\sqrt{\left(y_0^{\frac{2}{3}}\left(y_0^{\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}\right)^2+x_0^{\frac{2}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)}$$

$$=\left(y_0^{\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=a.$$

46. **解:** $\dfrac{\frac{xy'-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}\,\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$**,** $\frac{xy'-y}{x^2+y^2}=\frac{x+2yy'}{x^2+y^2}$**,所以** $2y'-y=x+2yy'$**,** $y'=\frac{x+y}{2(1-y)}$.

47. **解:**(1) $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+\sin x}{1}=g'(0)$**,由** $x=0$ **处连续,可知**

$$a=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=g'(0)\text{;}$$

(2) **当** $x\neq 0$ **时,** $f'(x)=\frac{x\left[g'(x)+\sin x\right]-g(x)+\cos x}{x^2}$**,**

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-\cosh}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)+\sin h}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g''(h)-\cos h}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}.$$

48. **解 当** $x\neq 0$ **时,** $g'(x)=\frac{xf'(x)-g(x)}{x^2}$**,** $g'(x)$ **在** $x\neq 0$ **处连续,则**

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(h)}{h}-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f'(0)h}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(h)}{2}=\frac{f''(0)}{2}\text{,}$$

因 $\lim_{h\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}$**, 所以** $\lim_{x\to 0}g'(x)=g'(0)=\frac{f''(0)}{2}$**,故** $g'(x)$ **在** $=0$ **处连续**.

综上所述 $g(x)$ **有一阶连续导数**.

49. (1) **原式** $=\lim_{x\to +}\dfrac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x}=\lim_{x\to +}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to +}\frac{1+x^2}{x^2}=1$**;**

(2) **原式** $=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x,\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^0=1$**;**

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\cdot\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x\left[(\ln x+1)^2+\dfrac{1}{x}\right]}{\dfrac{1}{x^2}}=2$；

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x+1-x}{(1-x)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x+1-x}{(1-x)\ln(1+x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1-1}{-2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-2}=-\dfrac{1}{2}$；

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+1+xe^x-2e^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^x+xe^x-2e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{1}{6}$；

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\cdot x\cdot\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\sin x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x}=\dfrac{1}{4}$.

50. (1) $f(x)=\ln x$ 在区间 $[1,1+x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件,故存在 $\xi\in(1,1+x)$,使得

$$\ln(1+x)-\ln 1=f'(\xi)(1+x-1)=\frac{1}{\xi}x.$$

所以,$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)=\dfrac{1}{\xi}x<x.$

(2) $f(x)=x^3$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理条件,故存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$b^3-a^3=f'(\xi)(b-a)=3\xi^2(b-a),$$

所以,$3a^2(b-a)<b^3-a^3=3\xi^2(b-a)<3b^2(b-a)$；

(3) 令 $F(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$,$F(0)=0$,则

$$F'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\ln1=0\ (x>0).$$

故 $F(x)$ 在 $x>0$ 上严格单调上升,$F(x)>F(0)=0$ 即原命题得证.

(4) 令 $F(x)=2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}$,$F(1)=2\sqrt{1}-3+1=0$,$F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}>0\ (x>1)$,所以 $F(x)$ 在 $x>1$ 时严格单调上升,可知 $F(x)>F(0)=0$,即原命题得证.

(5) 令 $F(x)=1-\dfrac{x^2}{\pi}-\cos x$,$F(0)=0$ 因为 $F(x)$ 是偶函数,故只需考虑 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$,$F'(x)=-\dfrac{2x}{\pi}+\sin x\geqslant0$(由例题结论),故 $F(x)$ 在 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$ 上严格单调上升,$F(x)\geqslant F(0)=0$,故原命题得证.

(6) 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$,则 $f'(x)=px^{p-1}+p(1-x)^{p-1}(-1)=0$,得 $x^p=(1-x)^p$,可得 $x=\dfrac{1}{2}$；$f(0)=1$,$f(1)=1$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^p+\left(\dfrac{1}{2}\right)^p=\dfrac{1}{2^{p-1}}$. 故在区间 $[0,1]$ 上,$f_{max}=1$,$f_{min}=\dfrac{1}{2}$时,$2^{p-1}=f_{min}\leqslant f(x)\leqslant f_{max}=1$.

51. 解:(1) 定义域:$x\neq0$,垂直渐近线:$x=0$；

(2) $y'=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$,则

$$y''=\frac{x^2[e^x+(x-1)e^x]-2x(x-1)e^x}{x^4}=\frac{x^2e^x-2(x-1)e^x}{x^3}=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3};$$

(3) $y'=0$ 得 $x=1$,$y''=0$ 无解,$x=0$ 时,y',y''不存在；

(4) 列表:

x	$(-\quad,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\quad)$
y'	-		-		+
y''	-		+		+
y	↓∩	拐点	↓∪	极小值 $y(1)=e$	↑∪

52. (1) $y'=3x^2(1-x)-x^3=x^2(3-3x-x)=x^2(3-4x)$，$y''=6x-12x^2=6x(1-2x)$，由 $y'=0$，$y''=0$ 解得 $x=\frac{3}{4},\frac{1}{2},0$；

(2) 列表：

x	$-\quad,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4},+\quad\right)$
y'	+		+		+		-
y''	-		+		-		-
y	↑∩	拐点 $y(0)=0$	↑∪	拐点 $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$	↑∩	极大值 $y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{256}$	↓∩

53. 解 如图 11.1，设长为 $2x$，由勾股定理 $h=\sqrt{R^2-x^2}$，则

$$S(x)=2xh=2x\sqrt{R^2-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant R),$$

$$S'(x)=2\left(\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right),$$

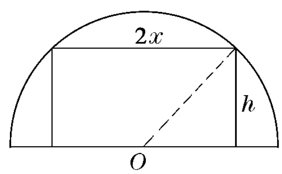


图 11.1

由 $S'(x)=0$ 得 $\sqrt{R^2-x^2}=\frac{x}{\sqrt{R^2-x}}$，解得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}R$ (负舍去)，

$S(0)=0$，$S(R)=0$，故 $S\left(\frac{R}{2}\right)=S_{max}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R\sqrt{\frac{R^2}{2}}=R^2.$

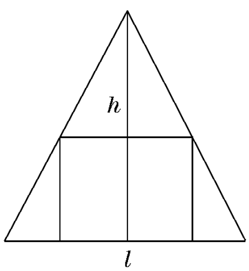


图 11.2

54. 解 如图 11.2，设矩形长为 x，高为 h_1，由相似定理知

$$\frac{h-h_1}{h}=\frac{x}{l}\Rightarrow h_1=h-\frac{h}{l}x,$$

$$S(x)=xh_1=x\left(h-\frac{h}{l}x\right)=hx-\frac{h}{l}x^2\quad(0\leqslant x\leqslant l),$$

$S'(0)=h-\frac{2h}{l}x=0$，得 $x=\frac{l}{2}$，$S(0)=0$，$S(l)=0$，故

$$S\left(\frac{l}{2}\right)=S_{max}=\frac{hl}{2}-\frac{lh}{4}=\frac{lh}{4}.$$

55. 解 设围成圆形的长度为 x，面积记为 S_1，围成正方形的长度为 $a-x$，而面积记为 S_2，则

$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4\pi}x^2+\frac{(a-x)^2}{16}.\quad(0\leqslant x\leqslant a)$$

$S'(x)=\frac{1}{2\pi}x+\frac{1}{8}(x-a)=0$，得 $x=\frac{2\pi a}{8+2\pi}$，$S''\left(\frac{2\pi a}{8+2\pi}\right)<0$，故 $S\left(\frac{2\pi a}{8+2\pi}\right)=S_{max}.$

56. 解 如图 11.3，设圆桶底面半径为 r，油桶高为 h，则

$$2\pi rh+2\pi r^2=A,$$

解得 $h=\frac{A}{2\pi r}-r$，则

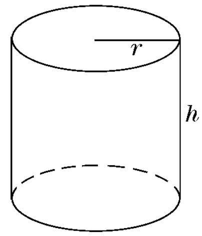


图 11.3

$$V(r)=\pi r^2\cdot h=\pi r^2\left(\frac{A}{2\pi r}-r\right)=\frac{Ar}{2}-\pi r^3,$$

$$V'(r)=\frac{A}{2}-3\pi r^2=0\text{，得 }r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}},$$

$V''\left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\right)<0$，取 $r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ 时容积最大，此时，$h=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

57. 解 设 $BD=x$，则 $OD=15-\sqrt{x^2-25}$，总费用为

$$Z(x)=2\cdot 10^5\cdot x+2\cdot\left(15-\sqrt{x^2-25}\right)\cdot 6\times 10^4=2\cdot 10^4\left(10x+90-6\sqrt{x^2-25}\right).$$

$$Z'(x)=2\cdot 10^4\left(10-6\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\right)=0,$$

解得 $x=\frac{50}{4}=12.5$（千米），唯一驻点即为所求.

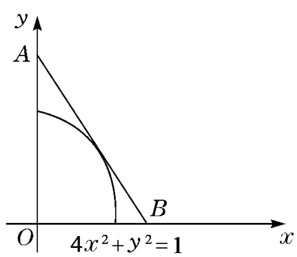


图 11.4

58. 如图 11.4，设切点为 $(X,Y)=\left(X,\sqrt{1-4X^2}\right)$，由 $4x^2+y^2=1$，求导得

$$8x+2y\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{y},\ k=-\frac{4X}{Y}=-\frac{4X}{\sqrt{1-4X^2}}.$$

切线方程为 $y-\sqrt{1-4X^2}=-\frac{4X}{\sqrt{1-4X^2}}(x-X)$.

令 $x=0$ 得 $y=\sqrt{1-4X^2}+\frac{4X^2}{\sqrt{1-4X^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-4X^2}}$.

令 $y=0$ 得 $x=X+\frac{1-4X^2}{4X}=\frac{1}{4X}$，$S(X)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4X^2}}\cdot\frac{1}{4X}$.

求 $S(X)$ 的最小值即求 $X\sqrt{1-4X^2}$ 的最大值，令

$$F(X)=X\sqrt{1-4X^2},$$

$F'(X)=\sqrt{1-4X^2}+X\frac{-4X}{\sqrt{1-4X^2}}=0$，解得 $X=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 唯一驻点，即为所求. 此时切点坐标为 $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

59. 解：(1) 利润函数：

$$R(x)=xp-c(x)-tx=x(7-0.2x)-(3x+1)-tx=-0.2x^2+(4-t)x-1.$$

$$R'(x)=-0.4x+(4-t)=0,$$

得 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 为唯一驻点，即为所求.

(2) 政府税收总额：$Q(t)=tx=\frac{5}{2}(4-t)t$，$Q'=\frac{5}{2}(4-2t)=0$，解得 $t=2$ 为唯一驻点，即为所求.

单元练习题 4

1. $\cos 2x$.　2. $-\frac{x^3}{3}+x^2+C$.　3. $\tan^3 x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.　4. 2.　5. $e^x+\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.　6. C.

7. 解：(1) 原式 $=-\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{1-3x}\,d(1-3x)=-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$.

(2) 原式 $=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}+C$.

(3) **原式** $=\int \arctan x d(\arctan x)=\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$

(4) **原式** $=\int \frac{1+x^{-2}}{x+x^{-2}}dx=\int \frac{d(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{2}}+C.$

(5) $\int (\tan^3 x+\tan x)dx-\int \tan xdx=\int \tan xd\tan x+\int \frac{d\cos x}{\cos x}$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C.$$

(6) $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1+e^{-2x}}}=-\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}=-\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)+C.$

(7) **原式** $=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+c=\arcsin(2x-1)+C.$

(8) **原式** $=\int \frac{d\sin x}{\sqrt{2+1-2\sin^2 x}}=\int \frac{d\sin x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}\sin x)^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{6}\sin x}{3}+C.$

(9) **原式** $=\int \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C.$

(10) **原式** $=\int \left(x^3-2x^2+3x-6+\frac{14}{x+2}\right)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+13\ln|x+2|+C.$

(11) **原式** $=\int \sec^4 xdx=\int (1+\tan^2 x)d\tan x=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$

(12) **原式** $=\int \frac{\sin x}{\cos^{3/2}x}dx=\int -\frac{d\cos x}{\cos^{3/2}x}=2\cos^{-\frac{1}{2}}x+C.$

(13) **原式** $=\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x)\xlongequal{u=\ln x}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}du=\int \left(\sqrt{1+u}-\frac{1}{\sqrt{1+u}}\right)d(u+1)$

$=\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+u}+C=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+\ln x}+C.$

(14) **原式** $=2\int xd\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-2\int \sqrt{e^x-1}dx$

$\xlongequal[x=\ln(t^2+1)]{t=\sqrt{e^x-1}}2x\sqrt{e^x-1}-2\int t\frac{2t}{1+t^2}dt$

$=2x\sqrt{e^x-1}-4\int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$

(15) **令** $\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=u$,**得** $\frac{x}{2a-x}=u^2$,$x=2au^2-xu^2$,$x=\frac{2au^2}{1+u^2}$,$dx=\frac{-4au}{(1+u^2)^2}du$,**则**

原式 $=\int \frac{2au^2}{1+u^2}u\frac{-4au}{(1+u^2)^2}du=-8a^2\int \frac{u^3}{(1+u^2)^3}du$

$\xlongequal{u=\tan t}-8a^2\int \frac{\tan^3 t}{\sec^4 t}\sec^2 tdt$

$=-8a^2\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\cos^4 tdt=-8a^2\int \sin^3 t\cos tdt=-2a^2\sin^4 t+C$ **(代入略)**.

(16) **原式** $\xlongequal{x=a\sin t}\int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos tdt=\frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(17) **原式** $\xlongequal{t=\sqrt{x}}\int t\ln^2 t^2 2t dt=8\int t^2\ln^2 t dt=\frac{8}{3}\int \ln^2 dt^3=\frac{8}{3}t^3\ln^2 t-\frac{16}{3}\int t^2\ln t dt$

$$=\frac{8}{3}t^3\ln^2 t-\frac{16}{9}\int \ln t dt^3=\frac{8}{3}t^3\ln^2 t-\frac{16}{9}t^3\ln t+\frac{16}{9}\int t^2 dt$$

$$=\frac{8}{3}t^3\ln^2 t-\frac{16}{9}t^3\ln t+\frac{16}{27}t^3+C.$$

(18) **原式** $=-\int \ln\tan x d\cos x=-\cos x\ln\tan x+\int \cos x\cdot\cot x\cdot\sec^2 x dx$

$$=-\cos x\ln\tan x+\int\frac{1}{\sin x}dx$$

$$=-\cos x\ln\tan x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$$

(19) **原式** $\xlongequal{t=\sqrt{x}}\int \arctan t\cdot 2t dt=\int \arctan t dt^2=t^2\arctan t-\int\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$$=t^2\arctan t-t+\arctan t+C=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C.$$

(20) **原式** $\xlongequal{\arcsin x=t}\int t^2\cdot\cos t dt=\int t^2 d\sin t=t^2\sin t-2\int t\sin t dt$

$$=t^2\sin t+2\int t d\cos t=t^2\sin t-2t\cos t-2\int\cos t dt$$

$$=t^2\sin t-2t\cos t-2\sin t+C=x\arcsin^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

(21) **原式** $\xlongequal{\sqrt{x}=t}\int t^2\cdot\sin t\cdot 2t dt=2\int t^3\sin t dt$

$$=-2\int t^3 d\cos t=-2t^3\cos t+6\int t^2\cdot\cos t dt=-2t^3\cos t+6\int t^2 d\sin t$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t-12\int t\sin t dt=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12\int t d\cos t$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12t\cos t-12\sin t+C$$

$$=-2x^{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{x}+6x\sin\sqrt{x}+12\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-12\sin\sqrt{x}+C.$$

(22) **原式** $I\xlongequal[t=\tan x]{\arctan x=t}\int\frac{\tan t e^t}{\sec t}dt=\int\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos t\cdot e^t dt=\int e^t\sin t dt$

$$=\int\sin t de^t=e^t\sin t-\int e^t\cos t dt=e^t\sin t-\int\cos t de^t$$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin t dt=e^t\sin t-e^t\cos t-I.$$

所以 $I=\frac{1}{2}e^t\sin t-\frac{1}{2}e^t\cos t+C=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\cdot\sin(\tan x)-\frac{1}{2}e^{\arctan x}\cdot\cos(\tan x)+C.$

(23) $I=\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin x\ln x dx=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)+C-I.$$

所以 $I=\frac{1}{2}(x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x))+C.$

(24) **原式** $=\int e^{2x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx$，**令** $I=\int e^{2x}\cos 2x dx.$

$$I=\frac{1}{2}\int\cos 2x de^{2x}=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x+\int e^{2x}\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x+\frac{1}{2}\int \sin 2x de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{2x}+C-\int e^{2x}\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x+\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x+C-I,$$

则 $I=\frac{1}{4}e^{2x}\cos 2x+e^{2x}\sin 2x+C.$ 所以原式 $=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{2x}\cos 2x-\frac{1}{8}e^{2x}\sin 2x+C.$

(25) 原式 $=\int e^{-x}\arctan e^x dx=-\int \arctan e^x de^{-x}=-e^{-x}\arctan e^x+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$$=-\frac{\arctan e^x}{e^x}+\int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=-\frac{\arctan e^x}{e^x}+x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$$

(26) 原式 $=\int x d\tan x=x\tan x-\int \tan x dx=x\tan x+\ln|\cos x|+C.$

(27) 原式 $=\int e^x\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx=\int \frac{e^x}{1+x}dx+\int e^x d\frac{1}{x+1}$

$$=\int \frac{e^x}{1+x}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int \frac{e^x}{1+x}dx=\frac{e^x}{x+1}+C.$$

(28) 原式 $=\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=-\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos^4 x}$

$$\xlongequal{u=\cos x}-\int \frac{du}{(1-u^2)u^4}=-\int \frac{(1-u^2+u^4)du}{(1-u^2)u^4}=-\int \frac{1}{u^4}du-\int \frac{1}{(1-u^2)u^2}du$$

$$=-\int \frac{1}{u^4}du-\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)du=\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$$

(29) 原式 $\xlongequal[x=t^4]{\sqrt[4]{x}=t}\int \frac{1}{t^2(1+t)^3}4t^3 dt=4\int \frac{t}{(1+t)^3}dt$

$$=4\int\left(\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\right)dt=-\frac{4}{1+t}+2\frac{1}{(1+t)^2}+C$$

$$=\frac{-4}{1+\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}+C.$$

(30) 原式 $=\int \frac{\tan x\cdot\sec^2 x}{\tan^3 x+1}dx=\int \frac{\tan x}{\tan^3 x+1}d\tan x\xlongequal{u=\tan x}\int \frac{u du}{1+u^3}$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{(u+1)(u+1)-(u^2-u+1)}{(u+1)(u^2-u+1)}du=\frac{1}{3}\int \frac{u+1}{u^2-u+1}du-\frac{1}{3}\int \frac{1}{u+1}du$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{u-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}du-\frac{1}{3}\ln|1+u|$$

$$=\frac{1}{6}\ln(u^2-u+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}\cdot 2-\frac{1}{3}\ln|1+u|+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln(\tan^2 x-\tan x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{3}\ln|1+\tan x|+C.$$

(31) 原式 $\overset{x=\sin t}{=}\int \frac{\sin t+2}{\sin^2 t\cos t}\cdot\cos t dt=-\int \frac{d\cos t}{\sin^2 t}+2\int \csc^2 t dt$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| - 2\cot t + C.$$

(32) **原式** $= \frac{1}{2}\int \ln(4+x^2)\,dx^2 \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int \ln(4+u)\,du = \frac{1}{2}u\ln(4+u) - \int \frac{u}{4+u}du$

$$= \frac{1}{2}u\ln(4+u) - u + 4\ln(4+u) + C = \frac{1}{2}x^2\ln(4+x^2) - x^2 + 4\ln(4+x^2) + C.$$

(33) **原式** $= \int \arctan x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int \arctan x d\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\arctan^2 x$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{(1+x^2)}dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C.$$

(34) **原式** $= \int e^{2x}(\tan^2 x + 1 + 2\tan x)\,dx = \int e^{2x}d\tan x + 2\int e^{2x}\tan x dx$

$$= e^{2x}\tan x - 2\int \tan x e^{2x}dx + 2\int e^{2x}\tan x dx + C = e^{2x}\tan x + C.$$

(35) **原式** $= -\frac{1}{2}\int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)x}dx$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$$

(36) **原式** $= \int \frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}}d\sin^2 x = -\int \frac{d\cos^2 x}{\sqrt{1+(\cos^2 x)^2}} = -\ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right) + C.$

(37) **令** $f(x) = |1+x| - |1-x| = \begin{cases} -x-1-(1-x) = -2, & x \leqslant -1, \\ 1+x-(1-x) = 2x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1+x-(x-1) = 2, & x > 1. \end{cases}$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \begin{cases} -2x + C_1, & x \leqslant -1, \\ x^2 + C_2, & -1 < x \leqslant 1, \\ 2x + C_3, & x > 1, \end{cases}$$

由连续特性知 $2 + C_1 = 1 + C_2$，$1 + C_2 = 2 + C_3$，**所以** $C_2 = 1 + C_1$，$C_3 = -1 + C_2 = C_1$，**所以**

$$F(x) = \begin{cases} -2x + C_1, & x \leqslant -1, \\ x^2 + 1 + C_1, & -1 < x \leqslant 1, \\ 2x + C_1, & x > 1, \end{cases}$$

(38) $f(x) = \max(x^2, x^3) = \begin{cases} x^3, & x \geqslant 1, \\ x^2, & x < 1, \end{cases}$ **则原式** $= \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + C_1, & x \geqslant 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12} + C_1, & x < 1. \end{cases}$

(39) **原式** $= \int e^x \cdot \frac{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^x\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int e^x\left(\sec^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx=e^x\tan\frac{x}{2}-\int e^x\tan\frac{x}{2}dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx+C$$

$$=e^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(40) **原式** $=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)=\ln|xe^x|-\ln|1+xe^x|+C.$

(41) **令** $u=\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$，$u^2=\frac{x+3}{x-1}$，$xu^2-u^2=x+3$，**所以** $x=\frac{u^2+3}{u^2-1}$，$dx=\frac{-8u}{(u^2-1)^2}du.$

原式 $=\int\left(u-\frac{1}{u}\right)\frac{-8u}{(u^2-1)^2}du=-8\int\frac{u^2-1}{(u^2-1)^2}du=-8\int\frac{1}{u^2-1}du$

$$=4\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=4\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}\right|+C.$$

单元练习题 5

1. $\frac{4}{5}$　2. 0　3. $-2x\sin x^4$　4. 1　5. e^e-e　6. B　7. C　8. D　9. B　10. C

11. **解**：(1) **原式** $=\lim\limits_{x\to0}\cos^2x=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{\tan(\sin x)}\cos x\right)/\left(\sqrt{\sin(\tan x)}\sec^2x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\tan(\sin x)/\sin(\tan x)}=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x te^t\sin t dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$

(4) $\lim\limits_{x\to+}\frac{|\sin x|}{x^2}=0.$

12. **解**：(1) **原式** $\xlongequal{t=\sqrt{e^x-1}^2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$

(2) **原式** $=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{2\pi}{3}.$

(3) **原式** $=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\int_0^3 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\left(\frac{1}{(1+x)}\right)^2dx$

$$=\pi-\int_0^3\frac{x+1-1}{(1+x)^{3/2}}dx=\pi-\int_0^3\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{(1+x)^{3/2}}\right)dx$$

$$=\pi-2\sqrt{1+x}\Big|_0^3-2\frac{1}{\sqrt{1+x}}\Big|_0^3=\pi-1.$$

(4) **原式** $=\int_0^\pi e^x\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\cos 2xdx=\frac{1}{2}(e^\pi-1)-\frac{1}{2}I$，**记**

$$I=\int_0^\pi e^x\cos 2xdx,$$

$$I=\int_0^\pi e^x\cos 2xdx=\int_0^\pi\cos 2xde^x=e^x\cos 2x\Big|_0^\pi+2\int_0^\pi e^x\sin 2xdx$$

$$=e^\pi-1+2e^x\sin 2x\Big|_0^\pi-4\int_0^\pi e^x\cos 2xdx=e^\pi-1-4I,$$

所以 $I=\frac{1}{5}(e^\pi-1)$，**故原式** $=\frac{1}{2}(e^\pi-1)-\frac{1}{10}(e^\pi-1)=\frac{2}{5}(e^\pi-1).$

(5) **原式** $\xlongequal{t=\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^1 \arcsin t\,dt = 2\arcsin t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$=2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1-t^2}\Big|_0^1 = \pi - 2.$

(6) **原式** $= \int_{-1}^1 \frac{x-\frac12+\frac12}{\left(x-\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}dx = \left[\frac12\ln(x^2+x+1)+\frac12\cdot\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}\right]\Big|_{-1}^1$

$=\frac12\ln 3+\frac{\pi}{2\sqrt3}.$

(7) **原式** $\xlongequal[x=1-t^3]{t=\sqrt[3]{1-x}} \int_0^{-2}(1-t^3)\,t\,(-3t^2)\,dt = 3\int_{-2}^0 (t^3-t^6)\,dt = 3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right)\Big|_{-2}^0 = -\frac{468}{7}.$

(8) **原式** $= \frac18\int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}\,dx^8 \xlongequal{u=x^8} \frac18\int_0^1 u\sqrt{1+3u}\,du \xlongequal[u=\frac{w^2-1}{3}]{w=\sqrt{1+3u}} \frac18\int_1^2 \frac{w^2-1}{3}\cdot w\cdot\frac23 w\,dw$

$=\frac1{36}\int_1^2(w^4-w^2)\,dw = \frac1{54}.$

(9) **原式** $= -\int_0^1 \ln(x+1)\,d\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{x-2}\ln(x+1)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+1}dx$

$=\ln 2+\frac13\int_0^1\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)(x-2)}dx = \ln 2+\frac13\int_0^1\left(\frac1{x-2}-\frac1{x+1}\right)dx$

$=\ln 2+\frac13(\ln|x-2|-\ln|1+x|)\Big|_0^1 = \ln 2+\frac13(-\ln 2-\ln 2) = \frac13\ln 2.$

(10) **原式** $= \int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx = \int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^2 0dx+\int_2^3(2-x)^3dx$

$= -\frac12(1-x)^2\Big|_0^1 - \frac{(2-x)^4}{4}\Big|_2^3 = \frac12-\frac14+0=\frac14.$

(11) **原式** $= \int_0^{\ln 2}[e^x]\,dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}[e^x]\,dx+\int_{\ln 3}^{\ln 4}[e^x]\,dx+\int_{\ln 4}^{\ln 5}[e^x]\,dx+\cdots+\int_{\ln 7}^{2}[e^x]\,dx$

$=\ln 2+2\ln\frac32+3\ln\frac43+\cdots+6\ln\frac76+7(2-\ln 7) = 14+\frac{1}{7!}.$

(12) **原式** $\xlongequal{x=2\sin t}\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi3}\frac{2\cos t}{8\cos^3 t}dt = \frac14\tan t\Big|_{\frac\pi6}^{\frac\pi3} = \frac14\left(\sqrt3-\frac{\sqrt3}{3}\right)=\frac{\sqrt3}{6}.$

(13) **原式** $= \int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx \xlongequal{x=\sin t}\int_{-\frac\pi2}^{\frac\pi2}\cos^2t\,dt = \frac12\int_{-\frac\pi2}^{\frac\pi2}(1+\cos 2t)\,dt$

$=\frac\pi2+\frac14\sin 2t\Big|_{-\frac\pi2}^{\frac\pi2}=\frac\pi2.$

(14) **令** $I=\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\frac{\cos x}{1+e^{-x}}dx \xlongequal{\text{令 } t=-x}\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\frac{\cos t}{1+e^t}dt=\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\frac{\cos x}{1+e^x}dx=\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\frac{e^{-x}\cos x}{1+e^{-x}}dx$，**所以**

原式 $=\frac12\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\frac{(e^{-x}+1)\cos x}{1+e^{-x}}dx=\frac12\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\cos x\,dx=\frac12\sin x\Big|_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}=\frac12\left(\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2\right)=\sqrt2.$

(15) **原式** $\xlongequal{u=\frac x2}2\int_{-\frac\pi2}^{\frac\pi2}\sin^4u\,du=4\int_0^{\frac\pi2}\sin^4u\,du=4\cdot\frac34\cdot\frac12\cdot\frac\pi2=\frac34\pi.$

(16) **原式** $\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac\pi2}\frac{\sin^n t}{\cos t}\cos t\,dt=\int_0^{\frac\pi2}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\frac\pi2\cdot\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, & n=2k,\\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1.\end{cases}$

(17) **原式** $I \xlongequal{x=\pi/4-u} -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$，

所以 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

(18) **原式** $=\frac{1}{2}\int_{1}^{+}\frac{dx^2}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int_{1}^{+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx^2=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}\Big|_{1}^{+}$

$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2.$

(19) **原式** $\xlongequal[x=t^2+1]{t=\sqrt{x-1}}\int_{0}^{+}\frac{1}{(t^2+1)t}2tdt=2\arctan t\Big|_{0}^{+}=\pi.$

(20) **当** $\lambda\leqslant 0$ **时，原式** $=\int_{0}^{2}x(x-\lambda)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{\lambda}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{8}{3}-2\lambda.$

当 $0<\lambda<2$ **时，原式** $=\int_{0}^{\lambda}|\lambda-x|dx+\int_{\lambda}^{2}|x-\lambda|dx=\int_{0}^{\lambda}x(\lambda-x)dx+\int_{\lambda}^{2}x(x-\lambda)dx$

$=\left(\frac{\lambda}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{\lambda}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{\lambda}{2}x^2\right)\Big|_{\lambda}^{2}$

$=\frac{\lambda^3}{2}-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{8}{3}-2\lambda-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda_3}{2}=\frac{8}{3}-2\lambda+\frac{\lambda^3}{3}.$

当 $\lambda\geqslant 2$ **时，原式** $=\int_{0}^{2}x(\lambda-x)dx=\left(\frac{\lambda}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{2}=2\lambda-\frac{8}{3}.$

(21) **原式** $=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|dx+\int_{1}^{e}|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx+\int_{1}^{e}\ln xdx$

$=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx+x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}dx=-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}.$

(22) **原式** $\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-u}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^p u}{\sin^p u+\cos^p u}du=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p u}{\sin^p u+\cos^p u}du=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p u+\cos^p u}{\sin^p u+\cos^p u}du=\frac{\pi}{4}.$

(23) **原式** $=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx\xlongequal{u=x-1}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(u)du+\int_{0}^{1}f(u)du=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+u^2)du+\int_{0}^{1}e^{-u}du$

$=\left(u+\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-e^{-u}\Big|_{0}^{1}=\frac{37}{24}-e^{-1}.$

(24) **原式** $=\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\max\{2,x^2\}dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\max\{2,x^2\}+\int_{\sqrt{2}}^{2}\max\{2,x^2\}dx$

$=\int_{-2}^{-\sqrt{2}}x^2dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}2dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}x^2dx=4\sqrt{2}+\frac{2}{3}(8-2\sqrt{2})=\frac{16}{3}+\frac{8\sqrt{2}}{3}.$

13. **解** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{0}^{x}\left[(t-1)\int_{0}^{2}\varphi(u)du\right]dt}{\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-1)\int_{0}^{x^2}\varphi(u)du}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{0}^{x^2}\varphi(u)du+(x-1)\varphi(x^2)\cdot 2x}{2}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，**所以** $f(x)$ **在** $x=0$ **处连续**.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\int_{0}^{h}\left[(t-1)\int_{0}^{t^2}\varphi(u)du\right]dt}{\sin^2 h}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(h-1)\int_{0}^{h^2}\varphi(u)du}{3h^2}=\lim_{h\to0}\frac{\int_{0}^{h^2}\varphi(u)du+(h-1)\varphi(h^2)\cdot 2h}{6h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{h^2}\varphi(h)\,du}{6h}+\lim_{h\to 0}\frac{(h-1)\varphi(h^2)}{3}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h^2)\cdot 2h}{6}-\frac{1}{3}\varphi(0)=-\frac{1}{3}\varphi(0).$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=-\frac{1}{3}\varphi(0)$.

14. 解：$\frac{dy}{dx}=(x-1)(x-2)^2$，$\frac{d^2y}{dx^2}=(x-2)^2+2(x-1)(x-2)=(x-2)(3x-4)$.

由 $y'=0$，$y''=0$，得 $x=1,2,\frac{4}{3}$. 列表：

	$(-\ ,1)$	1	$\left(1,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$	2	$(2,+\ )$
y'	-		+		+		+
y''	+		+		-		+
y		极小值		拐点		拐点	

极小值 $y(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)^2dt=\int_0^1((t-2)+1)(t-2)^2dt$

$$=\frac{1}{4}(t-2)^4\Big|_0^1+\frac{1}{3}(t-2)^3\Big|_0^1=\frac{1}{4}(1-16)+\frac{1}{3}(-1+8)=-\frac{15}{4}+\frac{7}{3}=-\frac{17}{12}.$$

15. 解：$F(x)=\int_{-a}^{x}|x-t|f(t)\,dt+\int_x^a|x-t|f(t)\,dt=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)\,dt+\int_x^a(t-x)f(t)\,dt$

$$=x\int_{-a}^{x}f(t)\,dt-x\int_x^a f(t)\,dt-\int_{-a}^{x}tf(t)\,dt+\int_x^a tf(t)\,dt,$$

(1) $F'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-\int_x^a f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)-xf(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\,dt-\int_x^a f(t)\,dt.$

$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)>0$，故 $F'(x)$ 是单调递增函数.

(2) $F'=0\Rightarrow\int_{-a}^{x}f(t)\,dt=\int_x^a f(t)\,dt$，由偶函数性质知 $x=0$，又由 F' 的严格单调性知，$x=0$ 为唯一解，由 $F''(x)>0$ 知其为最小值，$F_{\min}=\int_{-a}^{a}|t|f(t)\,dt=2\int_0^a tf(t)\,dt.$

16. 解：$\frac{df}{dx}=\frac{\ln x}{x^2-2x+1}>0$，$x>1$，所以 $f(x)$ 在 $[e,e^2]$ 上的最大值为

$$F_{\max}=\int_e^{e^2}\frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt=\int_e^{e^2}\frac{\ln t}{(t-1)^2}dt=-\int_e^{e^2}\ln t\,d\left(\frac{1}{t-1}\right)$$

$$=-\frac{\ln t}{t-1}\Big|_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{dt}{t(t-1)}=\ln(e+1)-\frac{e}{e+1}.$$

17. 解 如图 11.5，$y=\sqrt{8x}$：

(1) $2yy'=8$，$y'=\frac{4}{y}$，$k=y'(2)=\frac{4}{4}=1$，$k_{法}=-1$，

法线方程为 $y-4=-(x-2)$，即 $x+y-6=0$.

(2) $V=\pi\int_0^4(6-y)^2dy-\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{8}\right)^2dy$

$$=\pi\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(6-y)^3\Big|_0^4-\frac{\pi}{64}\cdot\frac{1}{5}y^5\Big|_0^4$$

$$=-\frac{\pi}{3}(8-6^3)-\frac{\pi}{64}\cdot\frac{1}{5}\cdot 4^5=\frac{208}{3}\pi-\frac{\pi}{5}\cdot 16$$

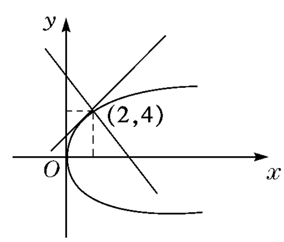


图 11.5

$$=\left(\frac{208}{3}-\frac{16}{5}\right)\pi=\frac{992}{15}\pi.$$

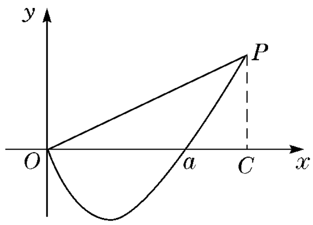


图 11.6

18. **解** 如图 11.6，$V=\pi\int_0^a x^2(x-a)^2dx+\pi\int_a^c x^2(x-a)^2dx$

$$=\pi\int_0^c x^2(x-a)^2dx$$

$$=\pi c^3\left(\frac{1}{5}c^2-\frac{1}{2}ac+\frac{1}{3}a^2\right),$$

$$V_{OPC}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(PC)^2\cdot OC$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot c^2\cdot(c-a)^2\cdot c,$$

得到 $V=V_{OPC}\Rightarrow\frac{1}{5}c^2-\frac{1}{2}ac=\frac{1}{3}c^2-\frac{2}{3}ac\Rightarrow c=\frac{5}{4}a.$

19. **解** 如图 11.7，$S=\int_{0.1}^{10}|\ln x|dx$

$$=-\int_{0.1}^{1}\ln xdx+\int_{1}^{10}\ln xdx$$

$$=-x\ln x\Big|_{0.1}^{1}+\int_{0.1}^{1}dx+x\ln x\Big|_{1}^{10}-\int_{1}^{10}dx$$

$$=0.1\ln 0.1+0.9+10\ln 10-0.9$$

$$=10\ln 10+0.1\ln 0.1-8.1$$

$$=9.9\ln 10-8.1.$$

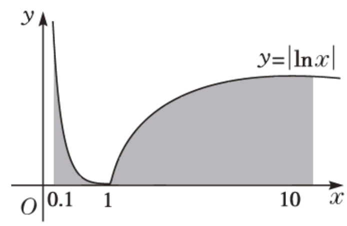


图 11.7

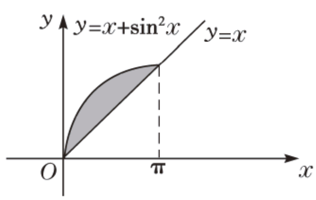


图 11.8

20. **解** 如图 11.8，$S=\int_0^{\pi}(x+\sin^2x-x)dx$

$$=\int_0^{\pi}\sin^2xdx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

21. **解** 如图 11.9，设切点为 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$，切线斜率 $k=y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$，切线方程为：$y=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x$，切点在切线上，故

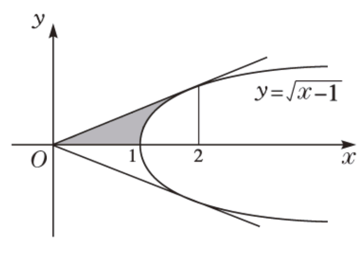


图 11.9

$$\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x_0\Rightarrow 2(x_0-1)=x_0\Rightarrow x_0=2,$$

则切线方程为：$y=\frac{1}{2}x$，所以

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x\right)^2dx-\pi\int_1^2(\sqrt{x-1})^2dx\\&=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2-\pi\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2\\&=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

22. **解** 如图11.10，弹簧伸长 x cm，需力大小为 x kg，

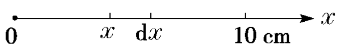


图11.10

$$dw=g\cdot xdx,$$

$$W=\int_0^1 gxdx=\frac{g}{2}x^2\Big|_0^1=50g\times0.01=0.5g\text{（焦耳）}.$$

23. 建立如图11.11的坐标系.

$dw=g\cdot(\sqrt{9-x^2})^2\pi\cdot dx\cdot x=g\pi(9-x^2)xdx$，则

$$\begin{aligned}W&=\int_1^3 g\pi(9-x^2)xdx\\&=\frac{g\pi}{2}\int_1^3(9-x^2)dx^2=-\frac{g\pi}{4}(9-x^2)^2\Big|_1^3\\&=\frac{g\pi}{4}\times64=16g\pi\text{（J）}.\end{aligned}$$

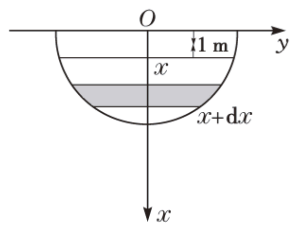


图11.11

单元练习题6

1. C.

2. 二阶.　3. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.　4. $Y^*=xe^{3x}(Ax+B)$.

5. （1）**解**：$\frac{dy}{y}=\frac{-x}{x+1}dx$，$\int\frac{dy}{y}=-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\Rightarrow\ln|y|=-x+\ln|x+1|+C$.

（2）$\frac{ydy}{1+y}=\frac{x}{x-1}dx\Rightarrow\int\frac{y}{1+y}dy=\int\frac{x}{x-1}dx\Rightarrow\int\left(1-\frac{1}{1+y}\right)dy=\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$\Rightarrow y-\ln|1+y|=x+\ln|x-1|+C$.

（3）令 $P=\frac{y}{x}$，$y=Px\Rightarrow\frac{dy}{dx}=P+x\frac{dP}{dx}\Rightarrow P+x\frac{dP}{dx}=P+\frac{1}{P}$，所以 $PdP=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1}{2}P^2=\ln|x|+C$，即$\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}=\ln|x|+C$.

（4）$p=2x$，$q=xe^{-x^2}$，$\int pdx=x^2$，则 $\int qe^{\int p(x)dx}dx=\int xe^{-x^2}e^{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2$，所以 $y=\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)e^{-x^2}$.

（5）$P=-2$，$q=e^x-x$，$\int Pdx=-2x$，则

$$\begin{aligned}\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx&=\int(e^x-x)e^{-2x}dx=-e^{-x}+\frac{1}{2}\int xde^{-2x}\\&=-e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}.\end{aligned}$$

$$y=\left(-e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+C\right)e^{2x}=-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+Ce^{2x},$$

将 $x=0$，$y=\frac{5}{4}$代入，得 $-1+\frac{1}{4}+C=\frac{5}{4}\Rightarrow C=2$，所以 $y=-e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+2e^{2x}$.

(6) 令 $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$，$\Rightarrow 1 + yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$，所以 $p\frac{dp}{1+p^2} = \frac{-1dy}{y} \Rightarrow \int \frac{pdp}{1+p^2} = -\int \frac{dy}{y}$，

$$0.5\ln(1+p^2) = -\ln|y| + C,$$

所以 $1 + p^2 = C_1 y^{-2} = \frac{C_1}{y^2}$，即 $y' = \sqrt{\frac{C_1}{y^2} - 1} = \frac{\sqrt{C_1 - y^2}}{y}$，所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C_1 - y^2}}{y}$，即 $\frac{ydy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = dx \Rightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{C_1 - y^2}}$ $= \int dx$，所以 $-\sqrt{C_1 - y^2} = x + C_2$. 即 $y^2 + (x + C_2)^2 = C_1$，(C_1，C_2 为任意常数).

(7) 令 $y' = p, 2p^2 - (y-1)p\frac{dp}{dy} = 0$，$\Rightarrow p\left[2p - (y-1)\frac{dp}{dy}\right] = 0$.

若 $p = 0$，即 $y = C$ （不合定解条件）.

若 $p \neq 0$，$\frac{1}{2}\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln p = \ln(y-1) + C_1 \Rightarrow p = C_1(y-1)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2$.

将 $x = 1, y(1) = 2, y'(1) = -1$ 代入，$C_1 = -1$，所以

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 \Rightarrow -\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2 \Rightarrow C_1 x + \frac{1}{y-1} = C_1,$$

$x = 1, y(1) = 2$ 代入，得 $C_2 = 0$，即 $x(y-1) = 1$.

(8) 解：(1) $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$. 齐次方程通解为 $y = c_1\cos x + c_2\sin x$，则

$$4\sin x = e^{0\cdot x}(0\cdot\cos x + 4\sin x), \alpha = 0, \beta = 1, m = n = 0, \mu = \alpha + i\beta = i, K = 1, l = \max(m,n) = 0.$$

又设 $y^* = xe^{0\cdot x}(A\cos x + B\sin x) = x(A\cos x + B\sin x)$，则

$$y^{*\prime} = (A\cos x + B\sin x) + x(-A\sin x + B\cos x),$$

$$y^{*\prime\prime} = (-2A\sin x + 2B\cos x) + (-A\cos x - B\sin x)x.$$

代入原方程得 $y^* + y^{*\prime\prime} = -2A\sin x + 2B\cos x = 4\sin x$，$\Rightarrow A = -2, B = 0$. 得到：$y^* = -2x\cos x$. 所以 $y = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x$.

(9) 解：(1) $y'' - 6y' + 9y = 0, \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 3$，齐次方程通解为 $y = ce^{3x} + c_2xe^{3x}$.

(2) $e^{3x} = e^{3x}[\cos(0\cdot x) + \sin(0\cdot x)]$，所以 $\alpha = 3, \beta = 0, m = n = 0, \mu = \alpha + i\beta = 3, l = 0, k = 2$.

可设 $y^* = Ax^2e^{3x}$，则 $y^{*\prime} = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$，故

$y^{*\prime\prime} = (6Ax + 2A)e^{3x} + (9Ax^2 + 6Ax)e^{3x} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x}$，

$y^{*\prime\prime} - 6y^{*\prime} + 9y^* = (9Ax^2 + 12Ax + 2A - 6(3Ax^2 + 2Ax) + 9Ax^2)e^{3x}$

$= 2Ae^{3x} = e^{3x}$，

得到 $A = \frac{1}{2}$，所以 $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

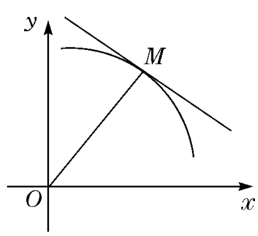


图 11.12

6. 解：$y' = 2x + y$ 且 $y(0) = 0$，即 $y' - y = 2x, p = -1, q = 2x$.

$$\int pdx = -x.$$

$$\int qe^{\int pdx}dx = \int 2xe^{-x}dx = -2\int xde^{-x}$$

$$= -2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

$$y = (-2xe^{-x} - 2e^{-x} + c)e^x = 2x - 2 + ce^x.$$

由 $y(0) = 0$ 得 $0 = -2 + c$，则 $c = 2$. 所以 $y = 2e^x - 2x + 2$.

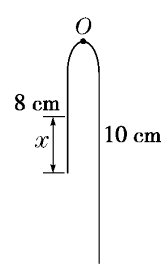


图 11.13

7. 如图 11.12，设原曲线的方程为 $y = f(x)$，$M = M(x,y)$，则

$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{x} = -1$，即 $ydy = -xdx$，则 $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$，所以 $x^2 + y^2 = c$.

8. 如图11.13,设左边链条 x 处在 t 时刻滑过钉子,此时,$18x''=(2+2x)g$,且满足定解条件 $x(0)=0$,$x'(0)=0$,解得 $x=\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}-1$.

令 $x=8$,得到 $e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}=18$,解得 $t=\frac{3}{\sqrt{9}}\ln(9+\sqrt{80})$.

单元练习题7

1. A. 2. C. 3. C. 4. A. 5. D. 6. B. 7. D.

8. $p>4$;$3<p\leqslant 4$;$p\leqslant 3$. 9. $S(x)=e^x$;e^{-2};0.

10. 解:(1) 绝对收敛. 因为 $\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2+2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2+2}\leqslant\frac{1}{n^2}$,而 $\sum\frac{1}{n^2}$收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}a\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=ae^{-1}=\frac{a}{e}$,所以 当 $\frac{a}{e}>1$ 时,发散;当 $\frac{a}{e}<1$ 时,收敛.

(3) 因为 $\left|(-1)^{n+1}\ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\leqslant\frac{1}{n^3}$,而 $\sum\frac{1}{n^3}$收敛,故原级数绝对收敛.

(4) 发散. 因为 $\sum\frac{1}{3^n}$收敛,所以 $\sum\ln\frac{1}{n}=-\sum\ln n$ 发散.

(5) 收敛. 因为 $\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$,所以 $\lim\frac{\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}{\frac{1}{n^{3/2}}}=1$,而

$\sum\frac{1}{n^{3/2}}$收敛,所以原级数收敛.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}\cdot\frac{\sqrt{n^n}}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$,所以原级数收敛.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=0$,所以原级数收敛.

(8) $\left|\frac{\sqrt{n}+\sin n}{n^2-n+1}\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}+1}{n^2-n+1}\leqslant\frac{2\sqrt{n}}{n^2-\frac{n^2}{2}}$ (n 充分大) $=\frac{4}{n^{3/2}}$,而 $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$收敛,所以原级数收敛.

(9) $\sum\left|\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\right|=\sum\frac{n}{n^2-1}$发散,而 $\sum(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{n^2-1}$为交错级数,且$\frac{n}{n^2-1}$单调下降趋于0,所以 $\sum(-1)^n\cdot\frac{n}{n^2-1}$条件收敛.

(10) $\sum\left|(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}\right|=\sum\arcsin\frac{1}{n}$,而$\frac{\arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to+\infty)$,故绝对发散.

而 $\sum(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}$为交错级数. 且 $\arcsin\frac{1}{n}$单调下降趋于0,故 $\sum(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}$条件收敛.

11. 解:(1) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2+2}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$.

当 $x=\frac{1}{2}$时,$\sum\limits_{n=1}\frac{2^n}{n^2+1}x^n=\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n^2+1}$,收敛;

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}\frac{2^n}{n^2+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$，收敛，收敛区间为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2) 令 $y=x^2$，$\sum\limits_{n=1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}=x^{-1}\sum\limits_{n=1}\frac{y^n}{(2n-1)(2n-1)!}$，$R_y=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=$ ，所以 $R_x=$ ，收敛区间为 $(-\ \ ,+\ \ )$.

(3) 令 $y=x^2$，原级数 $=x^{-1}\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{y^n}{5^n\sqrt{n+1}}$，则 $R_y=\lim\limits_{n\to}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to}\left(\frac{5^{n+1}\sqrt{n+2}}{5^n\sqrt{n+1}}\right)=5$，所以 $R_x=\sqrt{5}$. 当 $x=\pm\sqrt{5}$，原级数 $=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{5^n}{5^n\sqrt{n+1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，条件收敛，所以收敛区间为 $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$.

(4) 令 $y=2x+1$，原级数 $=\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n}y^n$，$R_y=1$，$R_x=\frac{R_y}{2}=\frac{1}{2}$. 当 $y=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n}$ 发散；当 $y=-1$ 时，收敛，故 y 的收敛区间为 $[-1,1)$，相应的 x 的收敛区间为 $[-1,0)$.

12. 解：令 $g(x)=\ln(1+x)$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}(-1)^nx^n$，$|x|<1$，积分得 $g(x)=\sum\limits_{n=0}\frac{(-1)^n}{1+n}x^{n+1}$，所以 $f(x)=(1+x)g(x)=(1+x)\sum\limits_{n=0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$，$|x|<1$.

13. 解：
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{2}\frac{x+3-(x+1)}{(x+3)(x+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{2+x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{4+x-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}(-1)^n\frac{1}{2^n}(x-1)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}(-1)^n\frac{1}{4^n}(x-1)^n\\&=\sum_{n=0}(-1)^n\left[\frac{1}{4\cdot2^n}-\frac{1}{8\cdot4^n}\right](x-1)^n,\ |x-1|<2.\end{aligned}$$

14. 解：(1) $f(x)=1-\frac{2}{2+x}=1-\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=1-\sum\limits_{n=0}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$，$|x|<2$.

(2)
$$\begin{aligned}f(x)&=1-\frac{2}{2+x}=1-\frac{2}{3+x-1}\\&=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}(-1)^n\frac{1}{3^n}(x-1)^n,\ |x-1|<3.\end{aligned}$$

单元练习题 8

1. B 2. B 3. A 4. D 5. D 6. C

7. $\frac{\sqrt{14}}{2}$. 8. $2x-y+3z=0$. 9. $4(x-2)-11y-3(z+1)=0$. 10. $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$.

11. $2(x^2+y^2)+3z=1$.

12. 解：$l_1=\{3,1,-4\}$，平面 π 法矢量 $n=\{1,1,1\}$，由于 $n\cdot l_1=0$ 所以 $n\perp l_1$，所以 $l_1/\!/\pi$.

13. 解：$a-3b=\{1,1,5\}-3\{2,-,3,5\}=\{-5,10,-10\}$，

$|a-3b|=\sqrt{5^2+10^2+10^2}=15$ 与 $a-3b$ 同向单位矢量 $c^0=\frac{a-3b}{|a-3b|}=\left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}$.

14. 解：l 的方向矢量 $l=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-1&1\\4&-3&1\end{vmatrix}=2i+3j+k=\{2,3,1\}$.

所求平面的法矢量：$n /\!/ l$，可取 $n=\{2,3,1\}$，平面方程为：$2x+3y+z=0$.

15. 解：取 $z=0$ 由 $\begin{cases} x-3z+5=0, \\ y-2z+8=0, \end{cases}$ 解得：$x=-5, y=-8$，故直线通过点 $M_0(-5,-8,0)$，故

$$l=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3i+2j+k=\{3,2,1\}.$$

标准式（点斜式）方程为 $\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=\frac{z}{1}$，则参数形式方程为 $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=2t-8, \\ z=t. \end{cases}$

16. 解：设平面 α 方程为：$x+y-2z-1+\lambda(x-y-z-1)=0$，即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y-(\lambda+2)z-(\lambda+1)=0$，$n=\{1+\lambda,1-\lambda,-(\lambda+2)\}$. 由于 $\alpha /\!/ l$，所以 $n\cdot l=0$，即 $(1+\lambda)+2(1-\lambda)-(\lambda+2)=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以平面 α 方程为：$3x+y-5z=3$.

17. $n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}=20i+30j+10k=\{20,30,10\}$.

平面方程为 $20(x+1)+30(y+2)+10(z-3)=0$，即 $2(x+1)+3(y+2)+(z-3)=0$.

18. $l_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3i+j-5k$，$l_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-9i-3j-15k$.

由于 $-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}=-\frac{5}{15}$，故直线 l_1 与 l_2 平行.

19. $l_1=\{2,7,-3\}$，$n=\{4,-2,-2\}$，$n\cdot l_1=8-14+6=0$，所以 $n\perp l_1$，故平面 π 与直线 l_1 平行.

单元练习题 9

1. $du=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx+\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x dy+x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{-y}{z^2}dx$.

2. $2x+y\frac{\partial z}{\partial x}+\cos(x+2z)\left(1+2\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x-\cos(x+2z)}{y+2\cos(x+2z)}$.

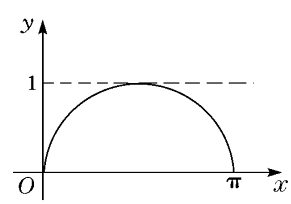


图 11.14

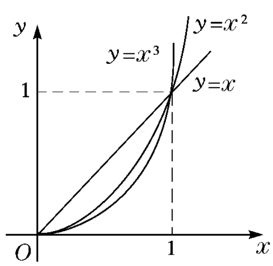


图 11.15

3. $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\cdot 2xy^2+f'_2\cdot e^{xy}\cdot y$.

4. $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$.

5. 如图 11.14 所示.

原式 $=\int_0^1 dy\int_{\arcsin x}^{\pi-\arcsin x}f(x,y)dx$.

6. 如图 11.15，原式 $=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx$.

7. 解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{zx^{z-1}}{y^z}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^z(-z)y^{-z-1}=-\frac{zx^z}{y^{z+1}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

8. 解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

9. 解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(2x+y)+2x\cos(2x+y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(2x+y)$，所以

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=[\sin(2x+y)+2x\cos(2x+y)]dx+x\cos(2x+y)dy.$$

10. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot 2x+f'_2 y$；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x(f''_{11}\cdot(-2y)+f''_{12}\cdot x)+f'_2+y(f''_{21}(-2y)+f''_{22}\cdot x)$$

$$=-4xyf''_{11}+2x^2f''_{12}+f'_2-2y^2f''_{21}+xyf''_{22}.$$

11. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot 2+g'_1+g'_2\cdot y$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2f''\cdot(-1)+g''_{12}\cdot x+g'_2+y(g''_{22}x)=-2f''+xg''_{12}+g'_2+xyg''_{22}.$$

12. 解：$x=z(\ln z-\ln y)$，对 x 求偏导：$1=\frac{\partial z}{\partial x}(\ln z-\ln y)+z\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-0\right)$，$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\ln\frac{z}{y}+1\right)=1$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{x}{z}+1\right)=1$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$. 对 y 求偏导：$0=\frac{\partial z}{\partial y}\ln\frac{z}{y}+z\left(\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{y}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{x}{z}+1\right)=\frac{z}{y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$，所以 $du=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy$.

13. 解法一：

$$原式=\int_0^2 dy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}ydy=\int_0^2 y\left(-\sqrt{2y-y^2}+2\right)dy$$

$$=\int_0^2 2ydy-\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1-(1-y)^2}d(y-1)=y^2\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\sqrt{1-u^2}du$$

$$=4-\frac{1}{2}\int_{+\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=4-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=4-\frac{\pi}{2}.$$

解法二：

$$原式=\int_{-2}^2 dx\int_0^2 ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot rdr$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3\theta\sin\theta d\theta=4-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=4-\frac{\pi}{2}.$$

14. 解 如图 11.16 变换积分次序

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx\int_0^x\frac{\cos x}{x}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}\cdot xdx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}.$$

15. 解 如图 11.17 所示，

$$原式=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$

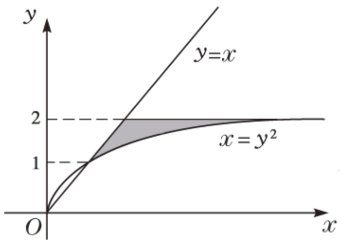


图 11.17

$$= \int_1^2 \left(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\right)\Big|_y^{y^2} dy$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_1^2 \left(y\cos\frac{\pi y}{2} - y\cos\frac{\pi}{2}\right)dy = -\frac{\pi}{2}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\mathrm{d}\sin\frac{2}{\pi}y$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}y\sin\frac{\pi}{2}y\Big|_1^2 + \frac{4}{\pi^2}\int_1^2 \sin\frac{\pi}{2}y\,dy$$

$$= \frac{4}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{2}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi y}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{\pi^2}-\frac{8}{\pi^3}=\frac{4\pi-8}{\pi^3}.$$

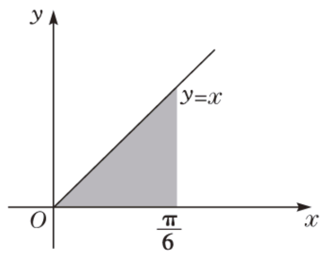


图 11.16

16. **解** **原式** $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,rdr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac12\cdot\frac23(1-r^2)^{\frac32}\Big|_0^{\cos\theta}\right]d\theta$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac13-\frac13\sin^3\theta\right)d\theta=\frac23\left(\frac{\pi}{2}-\frac23\right).$$

17. **原式** $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\,rdr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\cos\theta}\cdot\frac25\cdot r^{\frac52}\Big|_0^{\cos\theta}\right]d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac25\cdot\cos^3\theta d\theta$

$$=\frac45\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\cos^3\theta d\theta=\frac45\cdot\frac23\cdot1=\frac{8}{15}.$$

18. **原式** $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\frac{1-r^2}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left(\frac{2r}{1+r^2}-r\right)dr=\frac{\pi}{2}\left[\ln(1+r^2)\Big|_0^1-\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right]=\frac{\pi}{2}\left(\ln 2-\frac12\right).$

综合练习题答案

一、 1. $\left(\frac32,2\right)\cup(2,3]$ 2. $[2,3)$，$\sqrt{4-\pi^2/4}$ 3. 1，$\frac{2}{\pi}$，0，0，1 4. $[1,3)\cup(3,+\infty)$，$x=3$ 5. $\frac12$ 6. 0，$a_0n!$ 7. $3x^2+3^x\ln 3+x^x(\ln x+1)$ 8. $x+y=\frac{\pi}{2}$ 9. $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 10. $a=2$ 11. $(1,3)$. 12. $y=1$ **水平渐近**；$x=1$ **垂直渐近**；$y=1$. 13. $\frac{2}{x^3}$. 14. $\cos x+C$. 15. x^3e^x+C；e. 16. $\frac23$，$\frac16$. 17. $\frac{\pi}{2}$，0. 18. $-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}+C=-\cot^2x+C$. 19. $p>3$；$2<p\leqslant3$；$p\leqslant2$. 20. $\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n$. 21. $\frac{17}{5}$. 22. $\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$. 23. $\frac{2x}{y+1}$. 24. **一阶**. 25. $C_1e^x+C_2e^{2x}$. 26. $y^*=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$. 27. $(x+1)-2(y-1)+3(z-1)=0$. 28. $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. 29. $x^2+y^2=z$.

30. $\int_1^4dy\int_{\sqrt{y}}^{y}f(x,y)dx+\int_4^8dy\int_2^{y}f(x,y)dx.$

31. $\int_{\frac{a}{2}}^{a}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^{\frac{a}{2}}dy\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx.$

二、 1. B 2. A 3. C 4. B 5. D 6. C 7. B 8. A 9. A 10. A 11. D 12. B 13. A 14. C 15. D 16. C 17. C 18. C 19. A 20. C 21. A 22. D 23. D 24. A 25. B 26. C 27. C 28. A 29. B 30. B 31. B 32. B 33. B 34. B 35. A 36. A 37. C 38. C

三、 1. **定义域** $x\geqslant3$，**间断点为** $x=1$ **且为第二类无穷间断点**.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(a+b)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0$，

则 $a=1$，$a+b=0$，即 $a=1$，$b=-1$.

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to}\dfrac{(p+q)x+pq}{\sqrt{(x+p)(x+q)}+x}=\dfrac{p+q}{2}$.

4. 原式 $\xlongequal{u=x+8}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sqrt{1-(u-8)}-3}{2+\sqrt[3]{u-8}}=-\dfrac{3}{2}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{u}{9}}-1}{\sqrt[3]{1-\dfrac{u}{8}}-1}=-\dfrac{3}{2}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{u}{9}\right)}{\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{u}{8}\right)}=-2$.

5. 原式 $=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+1}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\left\{(1+e^x+x-1)^{\frac{1}{e^x-x+1}}\right\}^{(e^x-x-1)\cdot\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2(e^x+x-1)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2(e^x+1)}{1}}=e^4$.

8. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{2}=0$.

9. 原式 $=\lim\limits_{x\to}\left\{\left(1+\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right\}^{\frac{2}{x^2-1}x^2}=e^2$.

10. 原式 $=\lim\limits_{x\to}x^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\ln(e^x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln(e^x-1)\ln x}=e^{+}=$ ，原式 $=0$.

12. 原式 $=\lim\limits_{x\to}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}\sqrt{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+}\frac{\sqrt{x}}{x-1}}=e^0=1$.

13. 原式 $=\lim\limits_{x\to}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}\cos^2x-\dfrac{1}{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\sin x\right)^2}=1$.

14. $f_-(0)=\lim\limits_{x\to0}(a+x+x^2)=a$，$f_+(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}=3$，$f(0)=a$，由 $f_-(0)=f_+(0)=f(0)$ 得，$a=3$.

15. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{x\ln x+x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+1}=-\dfrac{1}{2}$.

16. $f_-(0)=a$，$f(0)=a$，$f_+(0)=1$，$f_-(1)=2$，$f_+(1)=b$，由连续性可知 $f_-(0)=f_+(0)=f(0)=1=a$，$f_-(1)=f_+(1)=b=2$，所以 $a=1$，$b=2$.

17. $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

18. $y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

19. $\ln y=\arctan x\ln(1+x^2)$，$\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^2)+\arctan x\frac{2x}{1+x^2}$，则

$$y'=(1+x^2)^{\arctan x}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}\arctan x\right].$$

20. $y'=2^{\frac{1}{\cos x}}\ln 2\cdot\sec x\cdot\tan x$，$dy=2^{\sec x}\sec x\cdot\tan x\cdot\ln 2dx$.

21. $f'(x)=\begin{cases}-2x, & x<0,\\ \arctan x+\frac{x}{1+x^2}, & x>0,\end{cases}$ 则

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\arctan h-0}{h}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-0}{h}=0, \text{所以 } f'(0)=0.$$

22. $f(x)=\sum_{n=0}^{+}(-1)^n2^nx^n$，而 $f(x)=\sum_{n=0}^{+}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，则 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n2^n$，所以 $f^{(n)}(0)=(-1)^n2^nn!$

23. $y=\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x\ln x$，$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}$，则

$$y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{2x}.$$

24. $y'=\frac{2}{1+2x}$，$y''=-\frac{4}{(1+2x)^2}$，$y'''=\frac{16}{(1+2x)^3}$，所以 $y'''(0)=16$.

25. $\ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$，$\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$，

$$y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right],$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\ln(1+2)-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{3}\left(\ln 3-\frac{2}{3}\right).$$

26. $y'=\frac{1}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+\frac{x}{2}\left[\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]$

$=\frac{1}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+\frac{1}{2}\cos\ln x+\frac{1}{2}\sin\ln x=\sin\ln x.$

$y''=\frac{\cos\ln x}{x}$，所以 $y''(1)=\frac{\cos 0}{1}=1$.

27. $y'=\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-\arccos x}{x^2}-\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x}=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arccos x}{x^2}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}+\frac{1}{x}$.

28. **原式** $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

29. **原式** $=\lim\limits_{x\to +}\frac{\frac{1}{x\ln x}(\ln x+1)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to +}\frac{\ln x+1}{ax^a\ln x}=0$.

30. $y'=\frac{2x}{1+x^2}$，$y''=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$.

$y'=0$，$y''=0$，解得 $x=0$，$x=\pm 1$. 列表如下：

x	$(-\ \ ,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\ \ )$
y'	-		-		+		+
y''	-		+		+		-
y	$\downarrow\cap$	拐点 $y(-1)=\ln 2$	$\downarrow\cup$	极小值 $y(0)=0$	$\uparrow\cup$	拐点 $x(1)=\ln 2$	$\uparrow\cap$

31. 解：$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^h-1}{h}=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-h}-1}{h}=-1$，所以 $f'(0)$ 不存在，即不可导.

由 $f'(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ -e^{-x}, & x<0\end{cases}$ 可知，$x=0$ 时，y 取极小值 $y(0)=1$.

32. 解：平均成本 $\bar{c}(x)=\dfrac{100}{x}+\dfrac{x}{4}+6$，则

$$\bar{c}'(x)=\frac{-100}{x^2}+\frac{1}{4}=0,\ x=\pm 20\ (\text{负号舍去}),$$

$\bar{c}''(20)>0$，所以当 $x=20$ 时，有 $\bar{c}(x)$ 的最小值

$$\bar{c}_{\min}=100+\frac{1}{4}\times 20^2+6\times 20=320\ (\text{万元/单位}).$$

33. 解：设销售量为 x 百台，$c(x)=2+x$，则利润函数

$$L(x)=R(x)-c(x)=\begin{cases}4x-\dfrac{1}{2}x^2-2-x=3x-\dfrac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 8-2-x=6-x, & x>4,\end{cases}$$

所以 $L'(x)=\begin{cases}3-x, & 0<x<4,\\ -1, & x>4,\end{cases}$ 由 $L'(x)=0$ 得 $x=3$.

计算 $L(0)=-2$，$L(3)=9-\dfrac{9}{2}-2=2.5$，$L(4)=2$，$L(+\ \ )=-\ \ $.

由此可得 $L_{\max}=2.5=L(3)$，所以每年生产 3 百台时总利润最大.

34. 解：利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=x\cdot p(x)-c(x)=\left(25-\dfrac{x}{3}\right)x-\dfrac{1}{9}x^2-x-100$

$$=-\frac{4}{9}x^2+24x-100\ (0\leqslant x\leqslant +\ \ ).$$

$L'(x)-\dfrac{8}{9}x+24=0$ 得 $x=27$，$L(0)=-100$，$L(+\ \ )=-\ \ $，所以

$$L_{\max}=L(27)=-\frac{4}{9}\times 27^2+24\times 27-100=224.$$

此时 $p=25-27/3=16$（元/台）.

35. 解：$\ln f(x)=\dfrac{1}{3}[\ln 2+\ln x^2+\ln(x-6)]$，$\dfrac{f'}{f}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x-6}\right)$，则

$$f'(x)=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}\cdot\frac{2(x-6)+x}{x(x-6)}=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}\cdot\frac{3x-12}{x(x-6)},$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x=4$，当 $x=0$，$x=6$ 时 $f'(x)$ 不存在，端点 $x=-2$，4，计算

$$f(0)=0,\ f(6)=0,\ f(4)=\sqrt[3]{32\times(-2)}=-4,\ f(-2)=\sqrt[3]{2^3\times(-8)}=-4.$$

比较上述函数值，故 $f_{max}=0$，$f_{min}=-4$.

36. 设 $\int_0^a f(x)\,dx=A$，则 $f(x)=x^2-A$，两边在 $[0,a]$ 上作定积分得到

$$A=\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a (x^2-A)\,dx=\frac{a^3}{3}-Aa,$$

则 $A=\dfrac{a^3}{3(1+a)}$，所以 $\int_0^a f(x)\,dx=A=\dfrac{a^3}{3(a+1)}$.

37. $2\int_0^4 f(\sqrt{x})\,d\sqrt{x}\xlongequal{u=\sqrt{x}}2\int_0^2 f(u)\,du=2\cdot\dfrac{u^4}{2}\Big|_0^2=16$.

38. 原式 $=\int(\tan^2x+1-1)\,dx-\int\sin\dfrac{1}{x}d\dfrac{1}{x}+2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=\tan x-x+\cos\dfrac{1}{x}+2e^{\sqrt{x}}+C$.

39. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

40. 原式 $=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=\arcsin x\Big|_0^{1/2}-\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{\pi}{6}-\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}-1\right)=\frac{\pi}{6}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

41. 原式 $=\int\ln x\,d\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\cdot\dfrac{1}{x}dx$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x+C.$$

42. 原式 $\xlongequal{u=\sqrt{x}}\int\dfrac{\ln u^2}{u}2udu=4\int\ln udu=4u\ln u-4u+C$

$$=4\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-4\sqrt{x}+C.$$

43. 如图 11.18 原式 $\xlongequal{x=2\sin t}\int\dfrac{1}{4\sin^2t\cdot2\cos t}\cdot2\cos tdt$

$$=\frac{-1}{4}\cot t+C=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$$

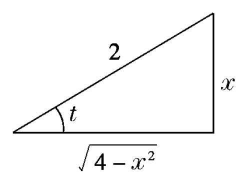


图 11.18

44. 解：$f'(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)>0$，所以

$$f_{max}=f(1)=\int_0^1\frac{t+2}{(t+1)^2+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(t+1)^2}{(t+1)^2+1}+\int_0^1\frac{1}{1+(t+1)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2+2t+t^2)\Big|_0^1+\arctan(t+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln5-\ln2)+\arctan2-\frac{\pi}{4},$$

$f_{min}=f(0)=0$.

45. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

46. 原式 $=\int x d\tan x=x\tan x-\int\tan xdx=x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

47. 原式 $=\int_3^5 f(t)\,dt\xlongequal[u=\frac{t-1}{2}]{t=2u+1}2\int_1^2 f(2u+1)\,du=2\int_1^2 ue^u du=2(2e^2-e-e^u)\Big|_1^2=2e^2$.

48. 原式 $=\int\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2x}dx=2\int\dfrac{\sin x}{\cos x}dx=-2\ln|\cos x|+C$.

49. 令 $u=\sqrt{e^t-1}$，则 $t=\ln(u^2+1)$，则原式 $=\int_{\sqrt{e^a-1}}^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{2u}{1+u^2}du=2\arctan u\Big|_{\sqrt{e^a-1}}^{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$，故

$2\left(\frac{\pi}{3}-\arctan\sqrt{e^a-1}\right)=\frac{\pi}{6}$,所以 $\arctan\sqrt{e^a-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}$,所以 $\sqrt{e^a-1}=1$,所以 $e^a=2$,即 $a=\ln 2$.

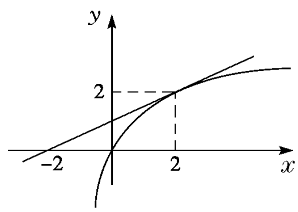


图 11.19

50. 解 如图 11.19,(1) $y'=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$,$k=y'(2)=\frac{1}{2}$,切线方程为

$$y-2=\frac{1}{2}(x-2).$$

(2) $y=0$,$x=-2$,故 $p=(-2,0)$,故

$$S=\int_0^2\left[\frac{y^2}{2}-(2y-2)\right]dy$$

$$=\left(\frac{y^3}{6}-y^2+2y\right)\Big|_0^2=\frac{8}{6}-4+4=\frac{4}{3}.$$

51. 解 如图 11.20 所示

(1) $V_x=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{a}{x}\right)^2dx=\pi a^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{2a}=\pi a^2\left(-\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi a}{2}$.

(2) $V_y=2\pi\int_a^{2a}xydx=2\pi\int_a^{2a}x\cdot\frac{a}{x}dx=2\pi a(2a-a)=2\pi a^2$.

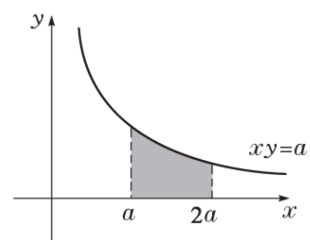


图 11.20

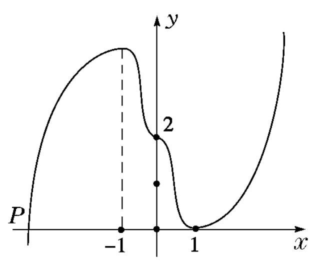


图 11.21

52. 解 如图 11.21,$y'=3x^2-3=0$,$x=\pm1$,故

$y''=6x$,$y''(1)=6$,$y''(-1)=-6$.

右极值点为 $x=1$,$y=1-3+2=0$,右极值点切线为 x 轴.

当 $x^3-3x+2=0$ 时,解得

$x^3-1-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)=0$.

得到 $x=-2$,于是有

$$S=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{2^4}{4}-\frac{3}{2}\times4-4\right)=\frac{27}{4}.$$

53. 解:$F(0)=-1-0=-1$,$F(1)=1-\int_0^1f(t)\,dt$,又 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(t)<1$,则 $\int_0^1f(t)\,dt<1$,所以 $F(1)>0$,又因为 $F(x)=2x-1-\int_0^xf(t)\,dt$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,故由闭区间上连续函数的介值定理知,存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$,即 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 0 点,又 $F'=2-f(x)>1>0$,即 $F(x)$ 是严格单调递增函数,故 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个 0 点.

54. 左式 $=\int_0^1\frac{dx}{\arccos x}\xlongequal[x=\cos t]{t=\arccos x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=$ 右式.

55. 证明:$G'(x)=\frac{(x-a)\left(\int_a^xf(t)\,dt\right)'-(x-a)'\int_a^xf(t)\,dt}{(x-a)^2}=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^xf(t)\,dt}{(x-a)^2}$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,故 $\int_a^xf(t)\,dt\leqslant\int_a^xf(x)\,dt=f(x)\cdot(x-a)$.

所以 $(x-a)f(x)-\int_a^xf(t)\,dt\geqslant0$,故 $G'(x)\geqslant0$,$x\in(a,b)$,证毕.

56. 解:$\sum\limits_{n=1}a_n=\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,$\sum\limits_{n=1}|a_n|=\sum\limits_{n=1}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

由于 $\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$，故 $\sum_{n=1} |a_n|$ 发散，即不绝对收敛. $\sum a_n$ 为交错级数且 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 单调减少且趋于 0，由莱布尼兹法则知，原级数条件收敛.

57. 令 $y=x^2$，$\sum_{n=1}\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n}=\sum_{n=1}\frac{y^n}{2^n\cdot n}$，故

$$R_y=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\left|\frac{1}{2^n\cdot n}\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)\right|=2,\ R_x=\sqrt{R_y}=\sqrt{2}.$$

当 $y=2$ 时，$\sum_{n=1}\frac{2^n}{2^n\cdot n}=\sum_{n=1}\frac{1}{n}$ 发散，所以原级数收敛区域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

58. 当 $0<p<1$ 时，$\left|\frac{(-1)^n}{np^{n+1}}\right|=\frac{1}{np^{n+1}}\to$ ，故原级数发散；

当 $p=1$ 时，$\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛；

当 $p>1$ 时，$\left|\frac{(-1)^n}{np^{n+1}}\right|=\frac{1}{np^{n+1}}$，对于 $\sum_{n=1}\frac{1}{np^{n+1}}$，$\lim_{n\to}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to}\frac{np^{n+1}}{(n+1)p^{n+2}}=\frac{1}{p}<1$.

所以 $\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{np^{n+1}}$ 绝对收敛.

59. 解：$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln(1-x)-\ln(1+x)\xlongequal{\text{define}}S_1(x)-S_2(x)$，故

$$S_1'(x)=-\frac{1}{1-x}=(-1)\sum_{n=0}x^n,\ S_2'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}(-1)^n x^n,$$

分别将 $S_1'(x)$，$S_2'(x)$ 在区间 $(0,x)$ 上积分得

$$\ln(1-x)=(-1)\sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{1+n},\ \ln(1+x)=\sum_{n=0}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+n}.$$

所以 $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\sum_{n=0}\frac{-1+(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$. $\quad(|x|<1)$

60. 当 $0<a<1$ 时，$\lim_{n\to}\frac{1}{1+a^n}=1\neq0$，发散；当 $a=1$ 时，$\lim_{n\to}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}\neq0$，发散；

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$，而 $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

61. 解：$1=\frac{\partial z}{\partial x}\ln\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot z\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$，$1=\left(\ln\frac{z}{y}+1\right)\frac{\partial z}{\partial x}$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\ln\frac{z}{y}}$，故

$$0=\frac{\partial z}{\partial y}\ln\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot z\cdot\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\ln\frac{z}{y}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y}}{1+\ln\frac{z}{y}}\text{，所以 } dz=\frac{1}{1+\ln\frac{z}{y}}dx+\frac{z}{y\left(1+\ln\frac{z}{y}\right)}dy.$$

62. 原式 $=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta}rdr=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}\cot\theta rdr=\int_0^{\pi}\cot\theta r^2\Big|_0^{2a\sin\theta}$

$$=\int_0^{\pi}\cot\theta 4a^2\sin^2\theta d\theta=4a^2\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=2a^2\sin^2\theta\Big|_0^{\pi}d\theta=0.$$

63. 解：$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz}{3z^2+3xy}$，同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xz}{3z^2+3xy}$，所以

$$dz=\frac{3yz}{3z^2+3xy}dx+\frac{3xz}{3z^2+3xy}dy.$$

64. **原式** $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_e^{e2}\ln(2r)\,rdr=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_e^{e2}\ln r^2dr^2=\pi\int_{e2}^{e4}\ln udu$

$$=\pi\left[ulnu\Big|_{e2}^{e4}-\int_{e2}^{e4}du\right]=\pi\left[4e^4-2e^2-e^4+e^2\right]=\pi(3e^4-e^2).$$

65. **解**:$2x+2-2y\frac{\partial z}{\partial x}=e^z\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+2}{e^z+2y}$,$2y-2\left(z+\frac{\partial z}{\partial y}y\right)=e^z\frac{\partial z}{\partial y}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-2z}{e^z+2y}$.

66. **解**:$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot 2x$,$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot 2y$,**所以** $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf'-2xyf'=0$.

67. **解**:$y'-\frac{2}{x}y=-x$,$p=-\frac{2}{x}$,$q=-x$,$\int p(x)dx=-\int\frac{2}{x}dx=-2\ln x=\ln\frac{1}{x^2}$,**故**

$e^{\int p(x)dx}=e^{\ln\frac{1}{x2}}=\frac{1}{x^2}$,$e^{-\int p(x)dx}=e^{-\ln\frac{1}{x2}}=x^2$.$\int q(x)e^{\int p(x)dx}=\int -x\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\ln x.$

所以 $y=(-\ln x+c)x^2=-x^2\ln x+cx^2$.

68. **解**:(1) $y'=\frac{1}{x}$,$k=y'(e)=\frac{1}{e}$,$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ **或** $y=\frac{x}{e}$,**故**

$$S=\int_0^1(e^y-ey)dy=\left(-\frac{e}{2}y^2+e^y\right)\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1.$$

(2) $V=\pi\int_0^e\left(\frac{x}{e}\right)^2dx-\pi\int_1^e(\ln x)^2dx=\frac{\pi}{e^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^e-\pi\left(x\ln^2x\Big|_1^e-\int_1^e2x\ln x\frac{1}{x}dx\right)$

$$=\frac{e\pi}{3}-e\pi+2\pi\int_1^e\ln xdx=-\frac{2e\pi}{3}+2e\pi-2\pi(e-1)=2\pi\left(1-\frac{e}{3}\right).$$

69. **原式** $=\int_0^1dy\int_{y2}^1e^{-\frac{y2}{2}}dx=\int_0^1(1-y^2)e^{-\frac{y2}{2}}dy=\int_0^1e^{-\frac{y2}{2}}dy-\int_0^1y^2e^{-\frac{y2}{2}}dy$

$$=ye^{-\frac{y2}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1y(-1)ye^{-\frac{y2}{2}}dy-\int_0^1y^2e^{-\frac{y2}{2}}dy=e^{-\frac{1}{2}}.$$

70. **解** **设** π **方程为** $(x-2y+z-1)+\lambda(2x-y+2z-1)=0$,**即**

$(1+2\lambda)x+(-2-\lambda)y+(1+2\lambda)z+(-1-\lambda)=0$,$n=\{1+2\lambda,-2-\lambda,1+2\lambda\}$,

由于 π **垂直于** $x+2y+3z=1$,**所以** $(1+2\lambda)+2(-2-\lambda)+3(1+2\lambda)=0$. **解得** $\lambda=0$,**即平面** π **的方程为** $x-2y+z=1$.

71. **解**:$y''-2y'-3y=0$,$\lambda^2-2\lambda-3=0$,$\lambda=3$,$\lambda=-1$,$\bar{y}=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$,**设**

$y^*=Axe^{3x}$,$y^{*\prime}=A(e^{3x}+3xe^{3x})=A(1+3x)e^{3x}$,

$y^{*\prime\prime}=A\times 3e^{3x}+(1+3x)\times 3e^{3x}=A(6+9x)e^{3x}$.

$y^{*\prime\prime}-2y^{*\prime}-3y^*=A(6+9x)e^{3x}-2A(1+3x)-3Axe^{3x}=4Ae^{3x}=e^{3x}$.

$A=\frac{1}{4}$,$y^*=\frac{1}{4}xe^{3x}$. **原方程的解为** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{3x}$.

72. **解**:(1) $y''+y=0$,$y=c_1\cos x+c_2\sin x$.

(2) **设** $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$,$y^{*\prime}=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+b\cos x)$,**故**

$$y^{*\prime\prime}=-2A\sin x+2B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x),$$

代入得 $-2A\sin x+2B\cos x=\sin x$,$A=-\frac{1}{2}$,$B=0$,**则**

$$y^*=-\frac{1}{2}x\cos x,Y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

73. **解**:(1) $\frac{yy''-y'^2}{y^2}=\ln y\Rightarrow\left(\frac{y'}{y}\right)'=\ln y\Leftrightarrow(\ln y)''=\ln y$,**令** $u=\ln y$,**则**

$$u''=u, u=c_1e^x+c_2e^{-x}, y=e^{c_1e^x+c_2e^{-x}}.$$

(2) 令 $y'=u, y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}u \Rightarrow u\frac{du}{dy}=\frac{1+u^2}{2y} \Rightarrow \frac{u}{1+u^2}du=\frac{1}{2y}dy.$

积分得 $\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\frac{1}{2}\ln y+c, 1+u^2=c_1y, y'=\pm\sqrt{c_1y-1}$**，积分** $\frac{\pm dy}{\sqrt{c_1y-1}}=dx$**，得** $\pm\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=x+c_2, \frac{4}{c_1^2}(c_1y-1)=(x+c_2)^2$ **或** $4(c_1y-1)=c_1^2(x+c_2)^2$**，其中** c_1, c_2 **为任意实数**.

74. **解**：(1) **间断点为** $x=0, f_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1, f_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$**，所以** $x=0$ **为第一类跳跃型间断点**.

(2) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1,\\ 0, & x=-1,\\ x, & -1<x<1,\\ 0, & x=1,\\ -x & x>1,\end{cases}$ **间断点为** $x=\pm1, f(1+0)=-1, f(1-0)=1, f(-1+0)=-1,$ $f(-1-0)=1$. $x=\pm1$ **均为第一类跳跃型间断点**.

(3) **间断点为** $x=\pm1$；$k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$；$x=0$.

$\lim\limits_{x\to\pm1}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm1}\sin\frac{1}{x^2-1}=$ **不存在**，$x=\pm1$ **为第二类间断点**；

对于 $x=-\frac{\pi}{2}$**，即** $k=-1$ **时**，$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=-\frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{2}{-\sin x}=\frac{\pi}{2}$，$x=-\frac{\pi}{2}$ **为可去间断点**；**当** $k\neq-1, k\in Z, x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ **时**，$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=$ **，为第二类间断点**；

$$f(0+0)=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x^2-1}=\sin(-1)=-\sin1, f(0-0)=\lim_{x\to0}\frac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=0,$$

$x=0$ **为第一类跳跃型间断**.

75. **解**：$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2dt=\lim\limits_{x\to0}\cos x^2=1, f(0-0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$**，故** $f(0+0)=f(0-0)=f(0)=1$**，即** $f(x)$ **在** $x=0$ **处连续**.

$$f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1}{h}\int_0^h\cos t^2dt-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{\int_0^h\cos t^2dt-h}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{\cos h^2-1}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{-\sin h^2\cdot2h}{2}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{2(1-\cos h)}{h^2}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2(1-\cos h)-h^2}{h^3}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\sin h-2h}{3h^2}=\frac{2}{3}\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{2h}=\frac{2}{3}\lim_{h\to0}\frac{-\sin h}{2}=0.$$

$f'_+(0)=f'_-(0)=0, x=0$ **处可导且** $f'(0)=0$.

76. **证明**：**令** $F(x)=x-f(x)$**，则** $F(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，且** $F(a)=a-f(a)>0, F(b)=b-f(b)<0$**，由闭区间上连续函数的介值定理知，在** (a,b) **内至少存在一点** ξ**，使** $F(\xi)=0$**，即** $f(\xi)=\xi$.

77. **证明**：**令** $F(x)=x-f(x)$**，则** $F(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续，且** $F(0)=-f(0)\leqslant0, F(1)=1-f(1)\geqslant0$, $F(0)=0$ **或** $F(1)=0$ **成立，那么就相应地有** $\xi=0$ **或** 1. **否则，可假设** $F(0)<0, F(1)>0$**，则由闭区间上连**

续函数的介值定理可知,在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

综上所述,得到题设结论.

78. 证明:$F(x)=x^5-3x-2$,则 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,且 $F(1)=1-3-2=-4<0$,$F(2)=2^5-3\times2-2>0$,故由连续函数的介值定理得到,存在 $\xi\in(1,2)$ 使得 $F(\xi)=0$,即完成命题.

79. 证明:$F(x)=x-f(x)$,任取一点 a,若 $F(a)=0$,即 a 为所求,否则不妨假设 $F(a)>0$,即 $a>f(a)$,现在考虑区间 $[f(a),a]$,在此区间内由已知条件知 $F(x)$ 连续,且 $F(f(a))=f(a)-f(f(a))=f(a)-a<0$,$F(a)=a-f(a)>0$,故由连续函数的介值定理知,在 $(f(a),a)$ 存在一点使得 $F(\xi)=0$,即 $\xi=f(\xi)$,命题得证.

80. 证明:令 $F(x)=xf(x)$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,又 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,dx=\eta f(\eta)$,$\eta\in(0,1)$,$F(1)=f(1)$,$F(\eta)=\eta f(\eta)=f(1)$,即 $F(1)=f(1)$,$0<\eta<1$,故在区间 $[\eta,1]$ 上,$F(x)$ 满足罗尔定理的条件,故存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使得 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

81. 证明:$f(x)=x^m(a-x)^n$,则

$$f'(x)=mx^{m-1}(a-x)^n+x^mn(a-x)^{n-1}(-1)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m(a-x)-nx]=0,$$

得到 $x=0$,$x=a$,$x=\dfrac{ma}{m+n}$,因为

$$f(0)=0,f(a)=0,f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\left(a-\frac{ma}{m+n}\right)^n=\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n},$$

所以 $f_{max}=\dfrac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$,故 $f(x)\leqslant f_{max}=\dfrac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$.

82. 证明:令 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$,则 $u=\dfrac{1}{x}$,$\dfrac{u}{\sqrt{1+u}}-\ln(1+u)=\overline{F}(u)$,有 $\overline{F}(0)=0$,故

$$\overline{F}'(u)=\frac{\sqrt{1+u}-\dfrac{u}{2\sqrt{1+u}}}{1+u}-\frac{1}{1+u}=\frac{1+u-\dfrac{u}{2}-\sqrt{1+u}}{(1+u)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1+\dfrac{u}{2}-\sqrt{1+u}}{(1+u)^{\frac{3}{2}}}.$$

对于 $u>0$,$1+\dfrac{u}{2}>\sqrt{1+u}$成立,故 $\overline{F}'(u)>0$,继而 $\overline{F}(u)$ 严格单调递增,故 $\overline{F}(u)>F(0)=0$,$(u>0)$,即 $F(x)>0$,$(x>0)$ 即 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$.

令 $G(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2}{2x+1}=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\dfrac{2}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}=\ln(1+u)-\dfrac{2u}{2+u}=\overline{G}(u)$.

$$\overline{G}(0)=0,\overline{G}'=\frac{1}{1+u}-\frac{2(2+u)-2u}{(2+u)^2}=\frac{1}{1+u}-\frac{4}{(2+u)^2}.$$

由于 $(2+u)^2=4+4u+u^2>4+4u$,所以$\dfrac{1}{1+u}-\dfrac{4}{(2+u)^2}>0$,即 $\overline{G}'>0\ (u>0)$,即 $\overline{G}(u)$ 在 $u>0$ 时严格单调上升,故 $\overline{G}(u)>\overline{G}(0)=0$,$(u>0)$,即 $G(x)>0$,即 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{2}{2x+1}\ (x>0)$.

综合可得:对 $x>0$,有$\dfrac{2}{2x+1}<\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)<\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}}$成立.

83. 证明:令 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$在区间 $[n,n+1]$ 上连续可导,由拉格朗日定理知,存在 $\xi\in(n,n+1)$ 使得 $f(n+$

1) $-f(n)=f'(\xi)=a^{\frac{1}{\xi}}\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)\ln a$，$a^{\frac{1}{n+1}}-a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{\xi}}\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)\ln a$.

所以 $\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{n+1}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=\frac{a^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$，即原式成立.

2006 年普通高校"专转本"统一考试全真题参考答案

1. C 2. B 3. C 4. C 5. C 6. A 7. 2 8. $f(x_0)$ 9. -1 10. 1 11. $e^{xy}(\cos x+y\sin x)$ 12. 1

13. 解：这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}$.

14. 解：$\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$，$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1+t^2}{4t}$.

15. 解：$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\int\sqrt{1+\ln x}\,d\ln x=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$.

16. 解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx=(x^2\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\left[(-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right]=\frac{\pi^2}{4}-2(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

17. 解：这是齐次方程. 令 $p=\frac{y}{x}$，则原方程化为 $xp'=-p^2$，用分离变量得

$$-\frac{dp}{p^2}=\frac{dx}{x}，\frac{1}{p}=\ln|x|+C.$$

通解为 $y=xp=\frac{x}{C+\ln|x|}$.

18. 解：因为 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$，$|x|<1$，所以

$$x\ln(1+x)=x\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}，|x|<1.$$

19. 解：所求直线的方向向量

$$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}=2i+3j+k.$$

故直线方程为 $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$.

20. 解：$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_2$；$\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=2xf_2+x^2(2xf_{21}+yf_{22})$.

21. 证明：记 $f(x)=3x-x^3$，则 $f(x)$ 在 $|x|\leqslant2$ 时连续，在 $|x|<2$ 时可导.
令 $f'(x)=3-3x^2=0$，解得驻点 $x=\pm1$，而 $f(-2)=2$，$f(-1)=-2$，$f(1)=2$，$f(2)=-2$，即 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上最大值 2，最小值 -2，所以 $|x|\leqslant2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant2$.

22. 解：由题设可得 $y'=2x+y$，这是一阶线性方程 $y'-y=2x$，通解为 $y=Ce^x-2(x+1)$.
根据题意，曲线过 $(0,0)$ 点，即 $0=C-2$，所以 $C=2$，所求曲线方程为 $y=2e^x-2(x+1)$.

23. **解：**(1) **平面图形的面积为** $S=2\int_0^2(8-x^2-x^2)dx=2\left(8x-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{64}{3}$；

(2) **旋转体的体积为** $V=\int_0^4\pi ydy+\int_4^8\pi(8-y)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4-\pi\left[\frac{(8-y)^2}{2}\right]\Big|_4^8=16\pi$.

24. **解：因为** $\iint\limits_{D_t}f(x)dxdy=\int_0^t dx\int_0^t f(x)dy=t\int_0^t f(x)dx$，**所以** $g(t)=\begin{cases}\int_0^t f(x)dx, & t\neq 0,\\ a, & t=0.\end{cases}$

(1) **因为** $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t f(x)dx=0$，**所以** $a=0$；

(2) $t=0$ **时**，$g'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(x)dx}{t}=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=f(0)$.

$t\neq 0$ **时**，$g'(t)=\left(\int_0^t f(x)dx\right)'=f(t)$. **所以** $g'(t)=f(t)$.