

● 大学数学试卷剖析系列

高等数学试卷剖析

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社

内 容 简 介

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地,数学教学一直以优秀闻名全国,这与有一套好的题卷也不无关系.本书选编了该校近年的16份本科生高等数学试卷,对每一道试题均作详解,典型题或难题并有题前分析、题后点评和一题多解,试卷末的考核内容分值表和抽样得分率,则可使读者了解考查的重点和试题的难易,有利于学生系统、重点地掌握知识,并帮助教师组织课程教学.

本书可作为高等院校《高等数学》课程师生的教学辅导用书,也可供考研者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试卷剖析/上海交通大学数学系编. —上海:
上海交通大学出版社,2006(2006 重印)

(大学数学试卷剖析系列)

ISBN 7-313-04308-2

I. 高... II. 上... III. 高等数学—高等学校—解
题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 13632 号

高等数学试卷剖析

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

上海颀辉印刷厂印刷. 全国新华书店经销

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:7.125 字数:200 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 3 月第 2 次印刷

印数:5 051—10 100

ISBN7-313-04308-2/O·191 定价:12.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

跨越 3 个世纪的百年高校——上海交通大学是我国“211 工程”和“985 工程”重点投资建设的重点大学。上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地之一，其数学教学一贯坚持“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的传统，使理、工、农、生、医、药、管理等各科学学生都具有扎实的数学基础。

历年来，上海交大的学生在国内外高校的数学竞赛中，屡屡获奖；在历届全国硕士研究生和工程硕士研究生的入学考试中，上海交大考生的数学平均成绩，总是名列榜首。这些成绩的取得，是因为上海交大有一个行之有效的教学及考核体系，有一套先进成熟的优秀教材和辅导材料，有一支充满活力的教学梯队，特别是有一个教学核心。几十年来，他们始终坚持在教学第一线，不断地总结教学经验，搜集教学资料。今天的成绩，是长期积累的结果，是历史的沉淀和升华。

学好一门基础理论课程与顺利地通过这门课程的考试，两者的要求是不同的。前者要求掌握课程的总体概貌，不但要掌握这门课程的基本概念、基本内容以及基本方法，还要了解它们的来龙去脉，知道所学的内容从何处来、用在何处、如何应用；后者是检验所学内容的掌握情况，注重课程内各概念和内容之间的联系，强调基本概念和基本方法，适当顾及应用题。这两者之间没有包含关系，所以顺利地通过考试也是一门学问。本书的编写，就是希望在这方面对读者有所帮助。

常说学生怕考试，其实教师也怕考试，教师怕的是出的考卷不优秀。一份优秀的数学试卷，至少要具备以下几点：

- (1) 基本涵盖课程的所有内容，突出课程的重点；
- (2) 涉及基本内容之间的联系，有检验基本概念掌握情况的客观试题，有掌握基本方法情况的计算题和应用题，还要有考查学生综合能力的综合测试题；

(3) 既要符合课程的基本要求,又要体现学生的真实情况,不仅要使努力学习的学生能顺利地通过考试,还要突出优秀的学生,淘汰较差的学生;

(4) 学生的考试成绩符合总体平均值为 75 分左右的正态分布.

高等数学是大学数学中一门主要的基础理论课程,不仅各高等院校非数学专业的本科生因后继课程所需而必修,而且是硕士研究生、MBA 研究生、工程硕士研究生的入学考试的主要课程之一.本书所收录的 16 份试卷,是近年来上海交大高等数学课程的试卷.每份试卷后有考核内容的分值表,从中读者不难发现该课程考试的重点和对学生的要求.作者在书中除了对每一试题给予详解外,还对解题过程中的常见错误、试题的其他解法、题目涉及的相关知识、本题的得分情况作了精当的点评.编者希望本书对学生顺利地通过考试和教师较好地组织试卷有所帮助.

本书可以作为高等院校高等数学课程学生的教学辅导用书,也可以作为教师的教学参考用书.书中试卷(一)至试卷(四)的剖析由王铭执笔;试卷(五)至试卷(八)的剖析由吴忠英执笔;试卷(九)至试卷(十二)的剖析由郑麒海执笔;试卷(十三)至试卷(十六)的剖析由钱芝蓁执笔.本书的编写和出版得到了上海交大数学系和上海交大出版社的大力支持,出版社的同志并指导了本书的结构和编排工作,编者在此一并表示感谢.最后还要感谢上海交大数学系同仁对历年命题所付出的艰辛劳动.

由于时间紧迫,又囿于编者的水平,书中如有错误或不妥之处,诚恳希望读者提出宝贵意见.

编 者

2005 年 10 月
于上海交通大学

目 录

试卷(一)——第一学期期中试卷	1
试卷(一)详解	5
试卷(二)——第一学期期末试卷	17
试卷(二)详解	20
试卷(三)——第二学期期中试卷	29
试卷(三)详解	33
试卷(四)——第二学期期末试卷	47
试卷(四)详解	50
试卷(五)——第一学期期中试卷	61
试卷(五)详解	64
试卷(六)——第一学期期末试卷	76
试卷(六)详解	79
试卷(七)——第二学期期中试卷	90
试卷(七)详解	93
试卷(八)——第二学期期末试卷	104
试卷(八)详解	107
试卷(九)——第一学期期中试卷	116
试卷(九)详解	119
试卷(十)——第一学期期末试卷	130
试卷(十)详解	133
试卷(十一)——第二学期期中试卷	142
试卷(十一)详解	145
试卷(十二)——第二学期期末试卷	155
试卷(十二)详解	158
试卷(十三)——第一学期期中试卷	169

试卷(十三)详解·····	172
试卷(十四)——第一学期期末试卷·····	182
试卷(十四)详解·····	185
试卷(十五)——第二学期期中试卷·····	196
试卷(十五)详解·····	199
试卷(十六)——第二学期期末试卷·····	209
试卷(十六)详解·····	212

试 卷 (一)

——第一学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $f(x)$ 是单调增函数, $g(x)$ 是单调减函数, 且复合函数 $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ 有意义, 则下列函数组中全为单调减函数的是 ()

- (A) $f(f(x))$, $f(g(x))$; (B) $g(f(x))$, $g(g(x))$;
(C) $f(g(x))$, $g(f(x))$; (D) $g(g(x))$, $f(f(x))$.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则下列极限一定存在的是 ()

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^a$; (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$;
(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)$; (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin f(x)$.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $y = e^x - ax^2 - bx - 1$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则 ()

- (A) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$; (B) $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$;
(C) $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$; (D) $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} & (x > 0), \\ x^2 g(x) & (x \leq 0), \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在

$x = 0$ ()

- (A) 极限不存在; (B) 极限存在, 但不连续;
(C) 连续, 但不可导; (D) 可导.

5. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 在 $(-1, 1)$ 内可导, 且有 $f(0) =$

0, $|f'(x)| \leq M$, 则在 $[-1, 1]$ 上必有 ()

(A) $|f(x)| \geq M$; (B) $|f(x)| > M$;

(C) $|f(x)| \leq M$; (D) $|f(x)| < M$.

二、填空题(每题 4 分,共 20 分)

1. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $df|_{x=0} =$ _____.

2. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的间断点是_____, 它们的类

型分别为_____.

3. $f(a) = 2, f'(a) = 3$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+2h) - f^2(a-h)}{h} =$ _____.

4. 对数螺线 $r = e^\theta$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是_____.

5. 函数 $f(x) = x \ln(x-1)$ 在 $x = 2$ 处的泰勒展开式中, 带 $(x-2)^3$ 的项为_____.

三、计算下列极限(15 分)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

2. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right).$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} (\tan x)^{\tan 2x}.$

四、计算下列函数的导数(18 分)

1. 设 $y = (\cos 2x)^{\arctan x^2}$, 求 y' .

2. 设 $\begin{cases} x = te^t, \\ e^t + e^y = 2, \end{cases}$ 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}.$

3. 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(10)}(x).$

五、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且对任意实数 x, y 满足

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

其中 $g(x) = e^{\sin x} - x \cos x$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f'(x)$.

六、(14 分)

1. 已知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2002}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha}$ 是不为零的有限数, 试求 α 以及极限值.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域 $U(0, \delta)$ 内具有二阶导数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 0.$$

试求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

七、证明题(8 分)

设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $f(a) = f(b) = 0$. 试证: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(\xi)}{\xi} = 2003f'(\xi)$.

试卷(一)考核内容分值表

考核内容	函数	极限和连续	导数和微分	微分中值定理和导数的应用
分值	3	25	39	33

关于试卷(一)的说明

试卷(一)每题点评中提到的得分率, 即考生在该题上的平均得分与该题满分之比, 其取值范围在 0 与 1 之间.

由于不同的考生群体水平是有差异的, 他们在同一题上的平均得分也不同. 因此, 同一题目相对于不同的考生群体的得分率是不同的. 本试卷所给出的得分率是对某一学院考生统计的结果.

得分率是反映试题难易程度的指标,对于数学考试而言,得分率在 0.3 以下的为难题,在 0.3~0.8 之间的为中等难度题,在 0.8 以上的为易题.

试卷(一)详解

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 是单调增函数, $g(x)$ 是单调减函数, 且复合函数 $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ 有意义, 则下列函数组中全为单调减函数的是 ()

- (A) $f(f(x))$, $f(g(x))$; (B) $g(f(x))$, $g(g(x))$;
(C) $f(g(x))$, $g(f(x))$; (D) $g(g(x))$, $f(f(x))$.

解 选 C.

方法1 根据定义验证: 设 $x_1 > x_2$, 则 $f(x_1) \geq f(x_2)$, $g(x_1) \leq g(x_2)$; $f(f(x_1)) \geq f(f(x_2))$, $f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$, $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$, $g(g(x_1)) \geq g(g(x_2))$, 故选 C.

方法2 取特殊函数: 令 $f(x) = x$, $g(x) = -x$, 则 $f(f(x)) = x$, $g(f(x)) = -x$, $f(g(x)) = -x$, $g(g(x)) = x$.

(本题得分率为 0.83)

点评 本题考察函数基本性质.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则下列极限一定存在的是 ()

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^a$; (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$;
(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)$; (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin f(x)$.

解 选 B.

(本题得分率为 0.75)

点评 仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow A} g(x)$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$ 才一定存在.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $y = e^x - ax^2 - bx - 1$ 是比 x^2 高阶的无穷小,

则

()

(A) $a = \frac{1}{2}, b = 1;$

(B) $a = 1, b = \frac{1}{2};$

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = -1;$

(D) $a = -1, b = -\frac{1}{2}.$

解 选 A.

方法 1 $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - ax^2 - bx - 1}{x} = 1 - b \Rightarrow b = 1,$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - ax^2 - x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2ax - 1}{2x} = \frac{1}{2} - a \Rightarrow a = \frac{1}{2},$$

故选 A.

方法 2 利用带皮亚诺余项的泰勒展开式:

$$\begin{aligned} e^x - ax^2 - bx - 1 &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - ax^2 - bx - 1 \\ &= (1-b)x + \left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

仅当 $a = \frac{1}{2}, b = 1$ 时,才成立 $e^x - ax^2 - bx - 1$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

(本题得分率为 0.71)

点评 对无穷小的阶进行估计无论是在计算还是在证明中都很重要,要能熟练地掌握这部分内容.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} & (x > 0), \\ x^2 g(x) & (x \leq 0), \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有界,则 $f(x)$ 在

$x = 0$

()

(A) 极限不存在;

(B) 极限存在,但不连续;

(C) 连续,但不可导;

(D) 可导.

解 选 D.

$$f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续;

$$\text{又} \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x) - 0}{x} = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{2} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导.

(本题得分率为 0.28)

点评 当考察分段函数在分段点处的极限、连续性和可导性时,要分别考察单侧极限和单侧导数.

5. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 在 $(-1, 1)$ 内可导, 且有 $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq M$, 则在 $[-1, 1]$ 上必有 ()

$$(A) |f(x)| \geq M; \quad (B) |f(x)| > M;$$

$$(C) |f(x)| \leq M; \quad (D) |f(x)| < M.$$

解 选 C.

对任何 $x \in [-1, 1]$, 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $|f(x) - f(0)| = |xf'(\xi)| \leq M$; 考察 $f(x) = Mx$ 可知道 $f(x)$ 满足本题题设, 且在 $[-1, 1]$ 上有 $|f(x)| \leq M$, 因此选 C 而不选 D.

(本题得分率为 0.56)

点评 为正确解答本题, 说明选项中的等号可以取到是必须的. 通常这可以通过取特殊函数来加以说明.

二、填空题

1. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $df|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $n dx$.

$$f'(0) = \{(x+1)(x+2)\cdots(x+n) + x[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]\}_{x=0} = n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n = n!$$

$$n) \} \} |_{x=0} = n !,$$

$$df|_{x=0} = f'(0)dx = n \, dx.$$

(本题得分率为 0.87)

点评 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, 且 $g(x_0) = 0$, 则

$$(f(x)g(x))'|_{x=x_0} = f(x_0)g'(x_0).$$

2. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的间断点是 _____, 它们的类型分别为 _____.

解 $x = 0$ 是跳跃间断点, $x = -1$ 是无穷间断点, $x = 1$ 是可去间断点.

$f(x)$ 在 $x = 0, x = -1, x = 1$ 处无定义. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x+1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

因此 $x = 0$ 是跳跃间断点, $x = -1$ 是无穷间断点, $x = 1$ 是可去间断点.

(本题得分率为 0.69)

点评 间断点的类型取决于两个单侧极限存在与否及相互关系.

3. $f(a) = 2, f'(a) = 3$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+2h) - f^2(a-h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 36.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+2h) - f^2(a-h)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} [f(a+2h) + f(a-h)] \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} \\
&= 2f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \left[2 \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right] \\
&= 6f(a)f'(a) = 36.
\end{aligned}$$

(本题得分率为 0.77)

点评 这里用到了 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导, 从而在 $x = a$ 连续这一结论.

4. 对数螺线 $r = e^\theta$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是_____.

解 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}.$

$\begin{cases} x = e^\theta \cos \theta, \\ y = e^\theta \sin \theta, \end{cases} \frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$, 因此切线方程为

$$y - e^{\frac{\pi}{2}} = -(x - 0), \text{ 即 } x + y = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

(本题得分率为 0.34)

点评 此题得分率较低, 原因在于许多同学未意识到只有在直角坐标表示下, 切线方程的公式才是 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$

5. 函数 $f(x) = x \ln(x-1)$ 在 $x = 2$ 处的泰勒展开式中, 带 $(x-2)^3$ 的项为_____.

解 $\frac{1}{6}(x-2)^3.$

令 $t = x - 2$, 则

$$\begin{aligned}
x \ln(x-1) &= (t+2) \ln(t+1) = (t+2) \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \right] \\
&= 2t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \\
&= 2(x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3 + o((x-2)^3).
\end{aligned}$$

(本题得分率为 0.70)

点评 本题直接利用公式计算 $\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$ 较繁,通常这时候可以利用麦克劳林公式进行间接计算.

三、计算下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

解 方法 1 令 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2y} - 2\sqrt{1+y} + 1}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2y}} - \frac{1}{\sqrt{1+y}}}{2y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+y} - \sqrt{1+2y}}{2y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-y}{2y(\sqrt{1+2y} + \sqrt{1+y})} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

方法 2

因为

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = -\frac{1}{4}.$$

(本题得分率为 0.68)

点评 利用变量代换、分子和分母有理化等代数手段对被求极限的式子进行变形是求极限的基本手段之一。

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]}{x^3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(本题得分率为 0.81)

点评 利用带皮亚诺余项的泰勒公式进行替换是求不定型极限的重要手段之一。本题也可用罗必塔法则计算。

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

解 方法 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (\tan x)^{\tan 2x} &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sec^2 x}{-2 \tan x \csc^2 2x}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \sin 2x} = e^{-1}. \end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (\tan x)^{\tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} [1 + (\tan x - 1)]^{\frac{1}{\tan x - 1} \cdot \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} \sin 2x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sec^2 x}{-2 \sin 2x}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

(本题得分率为 0.89)

点评 对于幂指数函数求极限,通常可以转化为求由指数函数和对数函数复合而成的函数的极限.

四、计算下列函数的导数

1. 设 $y = (\cos 2x)^{\arctan x^2}$, 求 y' .

解 $\ln y = \arctan x^2 \ln(\cos 2x)$,

$$y' = (\cos 2x)^{\arctan x^2} \left[\frac{2x \ln(\cos 2x)}{1+x^4} - 2\arctan x^2 \tan 2x \right].$$

(本题得分率为 0.72)

点评 通常可以用对数求导法求幂指数函数的导数.

2. 设 $\begin{cases} x = te^t, \\ e^t + e^y = 2, \end{cases}$ 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$, $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

解 因为 $e^t + e^y \frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = -e^{t-y}$, $\frac{dx}{dt} = (1+t)e^t$, 且 $y|_{t=0} = 0$,

所以 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = - \frac{1}{(1+t)e^y} \Big|_{t=0} = -1$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} &= - \frac{e^y + (1+t)e^y \frac{dy}{dt}}{(1+t)^2 e^{2y}} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1 + (1+t) \frac{dy}{dt}}{(1+t)^3 e^{t+y}} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

(本题得分率为 0.63)

点评 本题是隐函数求导和参数方程求导相结合的一道题目,要求考生对这两类求导公式的实质含义有清晰的认识.

3. 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(10)}(x)$.

解 $(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$,

$$y^{(10)}(x) = C_{10}^0 x^2 (e^{2x})^{(10)} + C_{10}^1 \cdot 2x (e^{2x})^{(9)} + C_{10}^2 \cdot 2 (e^{2x})^{(8)}$$

$$= 512e^{2x}(2x^2 + 20x + 45).$$

(本题得分率为 0.59)

点评 本题考察简单函数的高阶导数的求法以及高阶导数的莱布尼兹求导公式.

五、 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且对任意实数 x, y 满足

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

其中 $g(x) = e^{\sin x} - x \cos x$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. 求 $f(0), f'(0), f'(x)$.

解 取 $x = y = 0$, 有 $f(0) = 2f(0)g(0) = 2f(0)$, $f(0) = 0$;

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1;$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(\Delta x) - 1) + g(x)f(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(\Delta x) - g(0)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= f(x)g'(0) + g(x)f'(0). \end{aligned}$$

由于 $g'(0) = 0, f'(0) = 1$, 因此 $f'(x) = g(x) = e^{\sin x} - x \cos x$.

(本题得分率为 0.61)

点评 此题关键是要会利用导数定义及函数关系式求导.

六、1. 已知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2002}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha}$ 是不为零的有限数, 试求 α 以及极限值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2002}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2002-\alpha}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2002-\alpha}}{1 - \left[1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2003-\alpha} \text{ 是不为零的有限数,} \end{aligned}$$

因此 $\alpha = 2\,003$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2\,002}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \frac{1}{2\,003}$.

(本题得分率为 0.27)

点评 本题较难, 得分率仅为 0.27. 导致学生普遍失分的原因是, 相当多的学生在解本题时不会变形和替换, 只会假设 α 是正整数并利用二项式公式展开 $(n-1)^\alpha$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 $U(0, \delta)$ 内具有二阶导数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 0.$$

试求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

解 方法 1

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[3 + f(0)]x + f'(0)x^2 + \left[-\frac{9}{2} + \frac{f''(0)}{2}\right]x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0,$$

因此 $3 + f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $-\frac{9}{2} + \frac{f''(0)}{2} = 0$,

即 $f(0) = -3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 9$.

方法 2

由

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x + f(x) + xf'(x)}{3x^2} = 0 \end{aligned}$$

可得
于是

$\lim_{x \rightarrow 0} (3\cos x + f(x) + xf'(x)) = 0$, 即 $f(0) = -3$;

$$\begin{aligned}& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x + f(x) + xf'(x)}{3x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos 3x - 1) + [f(x) + 3] + xf'(x)}{3x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x} - \frac{9}{2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{6x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x} - \frac{9}{2} \\&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} - \frac{9}{2} = 0,\end{aligned}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{f'(x)}{x} = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 9.$$

(本题得分率为 0.52)

点评 不顾题设而滥用公式是学生中普遍存在的现象,在本题中表现尤为突出,其表现为只知道使用罗必塔法则,而不顾题设中是否有二阶导函数在 $x = 0$ 连续的条件.

七、证明题

设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $f(a) = f(b) = 0$. 试证: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(\xi)}{\xi} = 2003f'(\xi)$.

证明 令 $F(x) = f(x)x^{-\frac{1}{2003}}$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导且

$$F(a) = F(b) = 0.$$

由罗尔定理可知: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$.

另一方面, $F'(x) = f'(x)x^{-\frac{1}{2003}} - \frac{1}{2003}f(x)x^{-\frac{2004}{2003}},$

因此 $F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \frac{1}{2003}f(\xi)\xi^{-1} = 0$, 即 $\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{1}{2003}f'(\xi).$

(本题得分率为 0.25)

点评 本题关键:要能从结论出发构造辅助函数.

试 卷 (二)

——第一学期期末试卷

一、填空题(每题 3 分,共 30 分)

1. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 确定,则 $\frac{dy}{dx}$ _____.

2. 设 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

3. 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 _____.

4. 曲线 $y = \ln(x+1)$ 在 $\left(\frac{3}{\sqrt{7}}-1, \ln \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$ 点的曲率是 _____.

5. $\int_{-1}^1 (\cos x + x^3) \cos x \, dx =$ _____.

6. $\int \frac{1}{e^x + 1} dx =$ _____.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] =$ _____.

8. 已知曲线由参数方程 $\begin{cases} x = (1 + \cos t) \cos t, \\ y = (1 + \cos t) \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$ 定义,那么这条曲线的弧长是 _____.

9. 函数 $y = \begin{cases} 0 & (x \text{ 是无理数}), \\ x & (x \text{ 是有理数}) \end{cases}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上(是否可积?) _____.

10. $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \, dx =$ _____.

二、计算题(每题 8 分,共 32 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\ln(1 + \sin t) - t] dt}{x^3}.$

2. $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}} dx.$

4. $\int (2x^2 - 1)e^{-x^2} dx.$

三、(8 分)证明:当 $x \geqslant 0$ 时,有

$$(1+x)^2[2\ln(1+x) - 1] + 1 \geqslant 4x \arctan x - 2\ln(1+x^2).$$

四、(10 分)设平面有限区域由曲线 $y = \sqrt[4]{|x - x^2|}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 中部分与三条直线 $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$ 以及 $y = 0$ 所围成,求此区域绕直线 $y = 0$ 旋转所得旋转体的体积.

五、(12 分)已知函数 $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$, 试画出函数的图形.

$$\left[\text{已知 } y' = \left(1 - \frac{x+2}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}, y'' = \frac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}} \right].$$

六、(8 分)设 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的连续函数,且当 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 时,有

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

(1) 证明:对任何正整数 n 及常数 $a \geqslant 0$, 成立

$$\int_{(n-1)a}^{na} f(x) dx = f^{n-1}(a) \int_0^a f(x) dx;$$

(2) 若有 $a_1 > 0$ 使得 $\int_0^{a_1} f(x) dx = 1 - f(a_1)$, 求 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

试卷(二)考核内容分值表

考核内容	导数和微分	微分中值定理和导数的应用	积分
分值	9	23	68

试卷(二)详解

一、填空题

1. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}$

解 $\frac{y \sin(xy) - e^{x+y}}{e^{x+y} - x \sin(xy)}.$

等式两端对 x 求导, 得

$$\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)e^{x+y} - \left(y + x \frac{dy}{dx}\right)\sin(xy) = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin(xy) - e^{x+y}}{e^{x+y} - x \sin(xy)}.$$

点评 在隐函数求导时, 要始终把 y 看作是 x 的函数.

2. 设 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

解 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{2t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2t \cos t + 2 \sin t}{4t^2} = \frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}.$$

点评 本题也可直接套用参数方程二阶求导公式计算.

3. 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 _____.

解 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

$$y' = 1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6};$$

由于 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} < y(0) = 2 < y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$,

因此 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

点评 求最值时不要遗漏考虑端点值.

4. 曲线 $y = \ln(x+1)$ 在 $\left(\frac{3}{\sqrt{7}}-1, \ln \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$ 点的曲率是_____.

解 $\frac{21}{64}$.

因

$$\begin{aligned} K &= \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\left[1 + \frac{1}{(x+1)^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{|x+1|}{[(x+1)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

故

$$K_{\left(\frac{3}{\sqrt{7}}-1, \ln \frac{3}{\sqrt{7}}\right)} = \frac{3}{\sqrt{7}} \frac{7\sqrt{7}}{64} = \frac{21}{64}.$$

5. $\int_{-1}^1 (\cos x + x^3) \cos x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $1 + \frac{1}{2} \sin 2$.

由于 $x^3 \cos x$ 是奇函数, $\cos^2 x$ 是偶函数, 因此

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (\cos x + x^3) \cos x \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^1 (1 + \cos 2x) \, dx = 1 + \frac{1}{2} \sin 2. \end{aligned}$$

点评 当积分区间是对称区间时可以先考虑被积函数的奇偶性.

6. $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{e^x(e^x + 1)} de^x \\ &= \int \frac{1}{e^x} de^x - \int \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1) \\ &= \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C.\end{aligned}$$

点评 当被积函数是 e^x 的有理式时,可通过取 e^x 为积分变量化为有理函数的积分.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned}& \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} \right] \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

点评 定积分可以被用来计算某些和式的极限,本题只是其中的一个简单例子.

8. 已知曲线由参数方程 $\begin{cases} x = (1 + \cos t)\cos t, \\ y = (1 + \cos t)\sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$ 定义,那么这条曲线的弧长是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

解 4.

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{\pi} \left| 2\cos \frac{t}{2} \right| dt = 4.$$

9. 函数 $y = \begin{cases} 0 & (x \text{ 是无理数}), \\ x & (x \text{ 是有理数}) \end{cases}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上 (是否可积?)

解 不可积.

把 $[0, 1]$ 区间分划为 n 等分, 并取有理数 $\xi_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$, 无

理数 $\eta_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} y(\xi_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} y(\eta_i) = 0,$$

因此不可积.

点评 本题学生相对失分较多, 说明学生对可积性掌握较弱.

10. $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\frac{3\pi}{4}.$

由于 $\sin^4 x$ 是以 π 为周期的偶函数, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4 x \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx \\ &= 4 \times \frac{3}{4} \frac{!!}{!!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

点评 合理地利用被积函数的性质 (如周期性、奇偶性等) 可大大简化运算.

二、计算题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\ln(1 + \sin t) - t] dt}{x^3}.$$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\ln(1 + \sin t) - t] dt}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x - x + o(x^2)}{3x^2} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{6x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

点评 本题中在求过一次导后要注意: 由于分母是 x 的两次无穷小, 因此要用 $\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$ 替换 $\ln(1 + \sin x)$, 这是因为 $\sin^2 x$ 会产生 x^2 的一个同阶无穷小.

$$2. \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx.$$

解 由于 $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2},$

因此
$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

点评 这是一题简单的有理函数积分题, 只需将被积函数分解成部分分式之和即可得到答案.

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}} dx.$$

解
$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \\
 &= \ln(\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

点评 对被积函数含有三角函数的积分,三角公式的合理使用往往是至关重要的.

$$4. \int (2x^2 - 1)e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int (2x^2 - 1)e^{-x^2} dx \\
 &= \int -x de^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx \\
 &= -xe^{-x^2} + \int e^{-x^2} dx - \int e^{-x^2} dx \\
 &= -xe^{-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

点评 本题中含有一个无法积出的项 $-\int e^{-x^2} dx$, 因此应该考虑由 $\int 2x^2 e^{-x^2} dx$ 产生 $\int e^{-x^2} dx$ 以抵消 $-\int e^{-x^2} dx$.

三、证明: 当 $x \geq 0$ 时, 有

$$(1+x)^2 [2\ln(1+x) - 1] + 1 \geq 4x \arctan x - 2\ln(1+x^2).$$

$$\text{证明 令 } F(x) = (1+x)^2 [2\ln(1+x) - 1] + 1 - 4x \arctan x + 2\ln(1+x^2),$$

$$\text{则} \quad F(0) = 0,$$

$$F'(x) = 4(1+x)\ln(1+x) - 4\arctan x, \quad F'(0) = 0,$$

$$F''(x) = \frac{4x^2}{1+x^2} + 4\ln(1+x) \geq 0 \quad (\text{当 } x \geq 0 \text{ 时}),$$

因此在 $x \geq 0$ 时, 有 $F'(x) \geq F'(0) = 0$, $F(x) \geq F(0) = 0$, 即得证.

点评 可通过判别函数的单调性和凹凸性、求函数的最值或者是利用中值定理来证明不等式.

四、设平面有限区域由曲线 $y = \sqrt[4]{|x - x^2|}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 中部分与三条直线 $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$ 以及 $y = 0$ 所围成, 求此区域绕直线 $y = 0$ 旋转所得旋转体的体积.

$$\begin{aligned}
 \text{解 体积} &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{|x - x^2|} dx \\
 &= \pi \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x - x^2} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2 - x} dx \right) \\
 &= \pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos^2 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4} \tan^2 t \sec t dt \right) \\
 &= \frac{\pi}{8} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{8} \left[\sec t \tan t - \ln(\sec t + \tan t) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\pi + 4\sqrt{3} - 2\ln(2 + \sqrt{3})}{16} \pi.
 \end{aligned}$$

点评 通常可以通过划积分区间以达到去绝对值号的目的. 对形如 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ 和 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 的被积函数, 可以通过三角变换去除根号.

五、已知函数 $y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$, 试画出函数的图形.

$$[\text{已知 } y' = \left(1 - \frac{x+2}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}, y'' = \frac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}].$$

解 定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

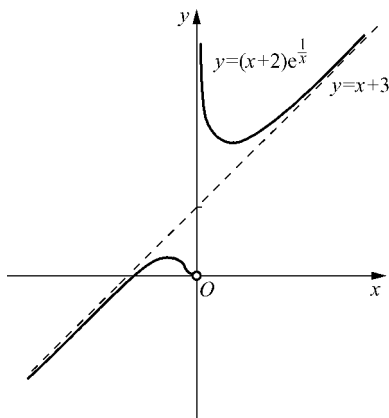
$$y' = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ 或 } x = 2, y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5};$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$, 因此 $x = 0$ 是垂直渐近线;

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = 3$, 因此 $y = x + 3$ 是斜渐近线.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -0.4)$	-0.4	$(-0.4, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	>0		<0		<0	<0		>0
y''	<0		<0		>0	>0		>0
y	单调增, 上凸	极大 值点	单调减, 上凸	拐点	单调减, 下凸	单调减, 下凸	极小 值点	单调增, 下凸

拐点 $\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$, $y_{\min}(2) = 4e^{\frac{1}{2}}$, $y_{\max}(-1) = e^{-1}$.



点评 对渐近线的确定最好是考虑单侧极限. 本题由于相当一部分学生未注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$, 因此无法准确画出图形.

六、 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, 且当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, 有

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

(1) 证明: 对任何正整数 n 及常数 $a \geq 0$, 成立

$$\int_{(n-1)a}^{na} f(x) dx = f^{n-1}(a) \int_0^a f(x) dx;$$

(2) 若有 $a_1 > 0$ 使得 $\int_0^{a_1} f(x) dx = 1 - f(a_1)$, 求 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

证明 (1)
$$\int_{(n-1)a}^{na} f(x) dx = \int_0^a f(x + (n-1)a) dx$$
$$= f^{n-1}(a) \int_0^a f(x) dx.$$

(2) 对任何 $x \geq 0$, 有 $f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, 因此

$$0 \leq \int_0^{a_1} f(x) dx = 1 - f(a_1).$$

如果 $f(a_1) = 1$, 则 $f(x) = 0$ 对任何 $x \in [0, a_1]$ 成立. 特别地, 有 $f(a_1) = 0$, 矛盾, 因此 $0 \leq f(a_1) < 1$.

对于任何充分大的 $b > 0$, 存在正整数 n , 使得

$$(n-1)a_1 \leq b < na_1,$$

因此
$$\int_0^{(n-1)a_1} f(x) dx \leq \int_0^b f(x) dx \leq \int_0^{na_1} f(x) dx.$$

由于
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(n-1)a_1} f(x) dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + f(a_1) + \cdots + f^{n-2}(a_1)] \int_0^{a_1} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{1 - f(a_1)} \int_0^{a_1} f(x) dx = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{na_1} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + f(a_1) + \cdots + f^{n-1}(a_1)] \int_0^{a_1} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{1 - f(a_1)} \int_0^{a_1} f(x) dx = 1,$$

因此
$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = 1.$$

点评 由于得到最后结论所需的条件未直接给出, 故此题较难, 能完整做出的学生极少.

试 卷 (三)

——第二学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, 其中 $\alpha > 0$ 为常数, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点: ()

- (A) 连续, 但不可偏导;
- (B) 可偏导, 但不连续;
- (C) 可微, 且 $df|_{(0,0)} = 0$;
- (D) $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续.

2. 已知三角形的顶点坐标为 $A(0, -1, 2)$, $B(3, 4, 5)$, $C(6, 7, 8)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- (A) $\sqrt{2}$;
- (B) $3\sqrt{2}$;
- (C) $6\sqrt{2}$;
- (D) $9\sqrt{2}$.

3. 设有直线 $L: \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ 和曲面 $z = x^2 - y^2 + z^2$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面 Π , 则直线 L 与平面 Π 的位置关系是 ()

- (A) $L \subset \Pi$;
- (B) $L // \Pi$;
- (C) $L \perp \Pi$;
- (D) L 与 Π 斜交.

4. 设空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在点 $P(-1, 1, 1)$ 处的切线的方向向量为 s , 则函数 $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ 在点 $M(2, -1, -1)$ 处沿方向 s 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_M =$ ()

- (A) $2\sqrt{6}$;
- (B) $-2\sqrt{6}$;
- (C) 12 或 -12 ;
- (D) $2\sqrt{6}$ 或 $-2\sqrt{6}$.

5. 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x \cos x$ 的特解 y^* 的形式是(下列选项中的 a, b 为任意常数) ()

- (A) $xe^x(a \sin x \cos x + b \cos 2x)$;
(B) $axe^x \sin x \cos x$;
(C) $e^x(a \sin x \cos x + b \cos 2x)$;
(D) $ae^x \sin x \cos x$.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 若单位向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a =$ _____.

2. 函数 $u(x, y, z) = e^{-\pi z} \cos \frac{x}{y}$ 在点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)$ 处的全微分 $du =$ _____.

3. 函数 $u(x, y, z) = z^2 - 2xy + y^2$ 在点 $(1, -1, \frac{1}{2})$ 处的方向导数的最小值为 _____.

4. 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ ($x > 0$) 的通解为 _____.

5. 交换二次积分的次序:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy = \text{_____}.$$

三、(本题 8 分)

设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(z^2 - x^2, z^2 - y^2) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 $F(u, v)$ 具有一阶连续偏导数, 试求表达式 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$.

四、计算下列各题(每题 8 分,共 16 分)

1. 计算积分 $\iint_D xy \, dx \, dy$, 其中 D 是由曲线 $x^2 + y^2 = e^{\arctan \frac{y}{x}}$ 及坐

标轴所围成的位于第一象限内的区域.

2. 计算积分 $\iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dV$, 其中 Ω 是 yOz 面上的直线 $z = 2y - 1$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的曲面与平面 $z = 1$ 所围成的空间区域.

五、(每题 9 分,共 18 分)

1. 设常数 $a > 0$, 函数 $f(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$f(t) = e^{at^2} + \frac{1}{4} \iiint_{\Omega_t} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dx dy dz,$$

其中空间区域 $\Omega_t = \left\{ (x, y, z) \mid 4a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4t^2, z \geq 0 \right\}$, 求 $f(t)$.

2. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$, 函数 $u(x, y, z) = f(r)$, 其中 $f(r)$ 具有二阶连续导数.

(1) 把 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 表示成 r 的函数;

(2) 若 u 满足拉普拉斯方程, 即 $\Delta u = 0$, 求 $f(r)$.

六、(每题 10 分,共 20 分)

1. 设常数 $a > 0$, 平面 Π 通过点 $(-4a, 2a, 3a)$, 且在三坐标轴上的截距相等.

(1) 求平面 Π 的方程;

(2) 在平面 Π 位于第一卦限部分求一点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 使函数

$u(x, y, z) = \frac{1}{x\sqrt{y}\sqrt[3]{z}}$ 在 P 点取最小值.

2. 设有直线 $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-2}$.

(1) 验证 L_1 和 L_2 是异面直线;

(2) 求与 L_1 和 L_2 都垂直且相交的直线(即公垂线) L 的方程.

七、(本题 8 分)

若函数 $f(x, y)$ 对任意正实数 t 满足关系 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 则称 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数. 设 $f(x, y)$ 可微, 试证明 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数的充要条件是

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

试卷(三)考核内容分值表

考核内容	向量代数和空间解析几何	多元函数微分学	重积分	微分方程
分值	29	28	28	15

试卷(三)详解

一、选择题

1. 设函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, 其中 $\alpha > 0$ 为常数, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点: ()

- (A) 连续, 但不可偏导;
(B) 可偏导, 但不连续;
(C) 可微, 且 $df|_{(0,0)} = 0$;
(D) $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续.

解 选 D.

当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $f_x(x, y) = (1 + \alpha)x(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}$;

当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $f_x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

$|x|^\alpha = 0$.

由于当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$,

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)^\alpha = 0$,

即 $f_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续. 同样可证明 $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续.

点评 此题概念性很强, 涉及到多元函数微分学中很多理论知识, 而这正是许多学生的薄弱环节, 因此得分率较低.

2. 已知三角形的顶点坐标为 $A(0, -1, 2)$, $B(3, 4, 5)$, $C(6, 7, 8)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- (A) $\sqrt{2}$; (B) $3\sqrt{2}$; (C) $6\sqrt{2}$; (D) $9\sqrt{2}$.

解 选 B.

$$\overrightarrow{AB} = \{3, 5, 3\}, \overrightarrow{AC} = \{6, 8, 6\}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\{6, 0, -6\},$$

$$\text{面积} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2}.$$

点评 向量代数可以用来计算某些几何量以及判断几何对象之间的位置关系.

3. 设有直线 $L: \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ 和曲面 $z = x^2 - y^2 + z^2$

在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面 Π , 则直线 L 与平面 Π 的位置关系是:

()

(A) $L \subset \Pi$;

(B) $L \parallel \Pi$;

(C) $L \perp \Pi$;

(D) L 与 Π 斜交.

解 选 C.

$$L \text{ 的方向向量 } s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{4, -4, 2\}, \text{ 曲面 } F(x, y,$$

$z) = x^2 - y^2 + z^2 - z = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面 Π 的法向量 $n =$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\}_{(1, 1, 1)} = \{2, -2, 1\}. \text{ 由于 } n \parallel s, \text{ 因此 } L \perp \Pi.$$

4. 设空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在点 $P(-1, 1, 1)$ 处的切线

的方向向量为 s , 则函数 $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ 在点 $M(2, -1,$

$-1)$ 处沿方向 s 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_M =$ ()

(A) $2\sqrt{6}$;

(B) $-2\sqrt{6}$;

(C) 12 或 -12 ;

(D) $2\sqrt{6}$ 或 $-2\sqrt{6}$.

解 选 D.

记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2, G(x, y, z) = x + y + z - 1$, 则

$$a = \left\{ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right\}_{(-1, 1, 1)} = \{2, 2, -4\}$$

可以取作空间曲线在点 $P(-1, 1, 1)$ 处的切线的方向向量.

函数 $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ 在点 $M(2, -1, -1)$ 处沿方向 s 的方向导数

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_M &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}_M \left(\pm \frac{a}{|a|} \right) \\ &= \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} \{4, -4, 6\} \cdot \{2, 2, -4\} \\ &= \pm 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

点评 本题中的关键之处是 $a = \left\{ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right\}_{(-1, 1, 1)}$

可以取作空间曲线在点 $P(-1, 1, 1)$ 处的切线的方向向量, 但切线的方向向量 s 不只是 a 一个向量. 一般地, $s = \pm ka (k \neq 0)$.

5. 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x \cos x$ 的特解 y^* 的形式是(下列选项中的 a, b 为任意常数) ()

(A) $xe^x(a \sin x \cos x + b \cos 2x)$;

(B) $axe^x \sin x \cos x$;

(C) $e^x(a \sin x \cos x + b \cos 2x)$;

(D) $ae^x \sin x \cos x$.

解 选 A.

微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的特征方程是 $r^2 - 2r + 5 = 0$, 特征根是 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$.

因 $e^x \sin x \cos x = \frac{1}{2} e^x \sin 2x$, 故特解 y^* 的形式是 $xe^x(A \sin 2x +$

$B \cos 2x)$, 即选 A.

二、填空题

1. 若单位向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a =$

_____.

解 $-\frac{3}{2}$.

由 $(a+b+c) \cdot (a+b+c) = 0 \Rightarrow 3 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 0$,

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}.$$

点评 这里给出的做法技巧比较强. 事实上, 如若对向量代数的几何背景清晰的话, 可以取 a, b, c 分别为起点在坐标原点、终点在单位圆上、并且两两之间夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的三个向量, 那么也不难得到最后结论.

2. 函数 $u(x, y, z) = e^{-\pi z} \cos \frac{x}{y}$ 在点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)$ 处的全微分 $du =$ _____.

解 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(dx - \frac{\pi}{4}dy + dz)$.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)} = -\frac{e^{-\pi z}}{y} \sin \frac{x}{y} \Big|_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)} = \frac{x e^{-\pi z}}{y^2} \sin \frac{x}{y} \Big|_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)} = -\pi e^{-\pi z} \cos \frac{x}{y} \Big|_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}, 0)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,$$

$$du = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(dx - \frac{\pi}{4}dy + dz).$$

3. 函数 $u(x, y, z) = z^2 - 2xy + y^2$ 在点 $(1, -1, \frac{1}{2})$ 处的方向导数的最小值为 _____.

解 $-\sqrt{21}$.

最大值 $= |\text{grad } u|_{(1, -1, \frac{1}{2})}$

$$= |-2y\mathbf{i} + (2y - 2x)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}|_{(1, -1, \frac{1}{2})}$$

$$= \sqrt{21},$$

最小值 $= -\sqrt{21}$.

点评 方向导数的最大值为沿梯度方向的方向导数, 即梯度的模长; 最小值是沿梯度方向的反方向的方向导数.

4. 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ ($x > 0$) 的通解为 _____

解 $C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$.

令 $x = e^t$, 则 $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$, 因此原方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0.$$

这是个二阶常系数齐次线性方程, 特征根是 -2 和 1 , 因此通解为

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}.$$

点评 令 $x = e^t$, 并记 $Dy = \frac{dy}{dt}$, 那么 $x \frac{dy}{dx} = Dy$, $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} =$

$D(D-1)y$. 一般地有 $x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)\cdots(D-n+1)y$.

5. 交换二次积分的次序:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$

点评 交换二次积分次序的步骤: 先还原积分区域, 再改变积分次序.

三、设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(z^2 - x^2, z^2 - y^2) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 $F(u, v)$ 具有一阶连续偏导数, 试求表达式 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由隐函数求导公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_1 \cdot (-2x)}{F_1 \cdot 2z + F_2 \cdot 2z} = \frac{x F_1}{z(F_1 + F_2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_2 \cdot (-2y)}{F_1 \cdot 2z + F_2 \cdot 2z} = \frac{y F_2}{z(F_1 + F_2)},$$

所以

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_1}{z(F_1 + F_2)} + \frac{F_2}{z(F_1 + F_2)} = \frac{1}{z}.$$

点评 这是一道简单的隐函数求导题, 只需按照标准过程求解即可.

四、计算下列各题

1. 计算积分 $\iint_D xy \, dx \, dy$, 其中 D 是由曲线 $x^2 + y^2 = e^{\arctan \frac{y}{x}}$ 及坐

标轴所围成的位于第一象限内的区域.

解 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则曲线 $x^2 + y^2 = e^{\arctan \frac{y}{x}}$ 的极坐标方程为

$$r^2 = e^{\theta},$$

从而

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq e^{\frac{\theta}{2}} \right\},$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{e^{\frac{\theta}{2}}} r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot r \, dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{16} \int_0^{\pi} e^t \sin t \, dt \\ &= \frac{e^{\pi} + 1}{32}. \end{aligned}$$

点评 在计算重积分时,选取合适的坐标是很重要的. 考虑到本题积分区域的边界曲线方程中含有 $x^2 + y^2$ 和 $\arctan \frac{y}{x}$ 项,因此应该选取极坐标表示.

2. 计算积分 $\iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV$, 其中 Ω 是 yOz 面上的直线 $z = 2y - 1$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的曲面与平面 $z = 1$ 所围成的空间区域.

解 方法 1 直线 $z = 2y - 1$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的曲面方程为 $z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2} - 1$, 因为上述曲面与 $z = 1$ 围成 Ω , 故取“+”号. 采用柱面坐标系并结合“截面法”, 则 Ω 可以表示为

$$\Omega = \{(r, \theta, z) \mid (r, \theta) \in D_z, -1 \leq z \leq 1\},$$

其中

$$D_z = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \frac{z+1}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

从而

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV &= \int_{-1}^1 dz \iint_{D_z} \frac{e^z}{r} \cdot r dr d\theta \\ &= \int_{-1}^1 e^z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{z+1}{2}} dr \\ &= \pi \int_{-1}^1 e^z (z+1) dz \\ &= \pi \left(e + \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

方法 2 直线 $z = 2y - 1$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的曲面方程为 $z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2} - 1$, 因为上述曲面与 $z = 1$ 围成 Ω , 故取“+”号.

采用柱面坐标系并结合“柱线法”, 则 Ω 在 xOy 面的投影区域

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

故 Ω 可以表示为

$$\Omega = \{(r, \theta, z) \mid 2r - 1 \leq z \leq 1, (r, \theta) \in D\},$$

从而

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV &= \iint_D r dr \int_{2r-1}^1 \frac{e^z}{r} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{2r-1}^1 e^z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 (e - e^{2r-1}) dr \\ &= \pi \left(e + \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

点评 当三重积分的积分区域由绕坐标轴旋转的旋转面所围成时, 往往采用截面法或柱面坐标表示(当区域边界由球面围成时也可考虑使用球面坐标). 需要注意: 主要出现的错误是在积分限的确定上面.

五、1. 设常数 $a > 0$, 函数 $f(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$f(t) = e^{\pi t^2} + \frac{1}{4} \iiint_{\Omega_t} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) dx dy dz,$$

其中空间区域 $\Omega_t = \{(x, y, z) \mid 4a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4t^2, z \geq 0\}$, 求 $f(t)$.

解 令 $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \varphi$, 则 Ω_t 可以表示为

$$\left\{ (\rho, \varphi, \theta) \mid 2a \leq \rho \leq 2t, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

从而

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\pi t^2} + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2a}^{2t} \frac{1}{\rho} f\left(\frac{\rho}{2}\right) \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= e^{\pi t^2} + \frac{\pi}{2} \int_{2a}^{2t} f\left(\frac{\rho}{2}\right) \rho d\rho. \end{aligned}$$

上式两端对 t 求导, 得 $f'(t) = 2\pi t e^{\pi t^2} + 2\pi t f(t)$, 即 $f'(t) - 2\pi t f(t) = 2\pi t e^{\pi t^2}$, 这是一阶线性微分方程, 所以

$$f(t) = e^{\int 2\pi t dt} \left(\int 2\pi t e^{\pi t^2} \cdot e^{-\int 2\pi t dt} dt + C \right) = e^{\pi t^2} (\pi t^2 + C).$$

又因为 $f(a) = e^{\pi a^2}$, 所以 $C = 1 - \pi a^2$, 从而 $f(t) = e^{\pi t^2} [1 + \pi(t^2 - a^2)]$.

点评 此题是综合题, 要求学生对微分方程、多元函数微分学和重积分的内容有完整的掌握.

2. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$, 函数 $u(x, y, z) = f(r)$, 其中 $f(r)$ 具有二阶连续导数.

(1) 把 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 表示成 r 的函数;

(2) 若 u 满足拉普拉斯方程, 即 $\Delta u = 0$, 求 $f(r)$.

解 (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(r) \left(\frac{x}{r} \right)^2 + f'(r) \frac{r - x \frac{x}{r}}{r^2} \\ &= f''(r) \left(\frac{x}{r} \right)^2 + f'(r) \frac{r^2 - x^2}{r^3}. \end{aligned}$$

类似地, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f''(r) \left(\frac{y}{r} \right)^2 + f'(r) \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= f''(r) \left(\frac{z}{r} \right)^2 + f'(r) \frac{r^2 - z^2}{r^3}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= f''(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + f'(r) \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} \\ &= f''(r) + f'(r) \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

(2) 方法 1

由 $\Delta u = 0$ 得 $f''(r) + f'(r) \frac{2}{r} = 0$, 这是可降阶的二阶微分方程.

令 $p(r) = f'(r)$, 则此方程化为 $\frac{dp}{dr} + p \cdot \frac{2}{r} = 0$, 即 $\frac{dp}{p} = -\frac{2}{r} dr$,

所以

$$\ln |p| = -2 \ln r + C \Rightarrow p = \pm e^C \frac{1}{r^2} = \frac{C_0}{r^2}, \quad f'(r) = \frac{C_0}{r^2},$$

因此

$$f(r) = \int \frac{C_0}{r^2} dr = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

方法 2

由 $\Delta u = 0$ 得 $f''(r) + f'(r) \frac{2}{r} = 0$, 这是一个二阶线性齐次微分方程, $f_1 = 1$ 是它的一个解.

由刘维尔公式可得

$$f_2 = f_1 \int \frac{e^{-\int \frac{2}{r} dr}}{f_1^2} dr = \int e^{-\int \frac{2}{r} dr} dr = \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r},$$

所以通解(也即全部解)

$$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

点评 本题就所用知识来看都是常规内容, 但运算量较大, 对学生的运算能力是个考验.

六、1. 设常数 $a > 0$, 平面 Π 通过点 $(-4a, 2a, 3a)$, 且在三坐标轴上的截距相等.

(1) 求平面 Π 的方程;

(2) 在平面 Π 位于第一卦限部分求一点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 使函数

$$u(x, y, z) = \frac{1}{x\sqrt{y}\sqrt[3]{z}} \text{ 在 } P \text{ 点取最小值.}$$

解 (1) 设平面 Π 的方程为 $\frac{x}{D} + \frac{y}{D} + \frac{z}{D} = 1$, 将点 $(-4a, 2a, 3a)$ 代入上述方程, 得 $D = a$, 所以平面 Π 的方程为 $x + y + z = a$.

(2) 依题意可知, P 点是函数 $u(x, y, z) = \frac{1}{x\sqrt{y}\sqrt[3]{z}}$ 在约束条件 $x + y + z = a$ ($x, y, z > 0$) 下的最小值点. 显然, 上述最小值点存在.

该条件极值问题又等价于求函数 $-\ln u(x, y, z) = \ln x + \frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{3} \ln z$ 在同样约束条件下的最大值点. 作拉格朗日函数

$$F(x, y, z; \lambda) = \ln x + \frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{3} \ln z + \lambda(x + y + z - a).$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2y} + \lambda = 0, \Rightarrow x = 2y = 3z, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{3z} + \lambda = 0, \end{cases}$$

再由约束条件 $x + y + z = a$, 解得 $x = \frac{6a}{11}$, $y = \frac{3a}{11}$, $z = \frac{2a}{11}$, 故 P 点坐标为 $(\frac{6a}{11}, \frac{3a}{11}, \frac{2a}{11})$.

点评 本题(2)中的问题简化可以大大减少运算量.

2. 设有直线 $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-2}$.

(1) 验证 L_1 和 L_2 是异面直线;

(2) 求与 L_1 和 L_2 都垂直且相交的直线(即公垂线) L 的方程.

解 (1) L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $s_1 = \{1, -2, 1\}$, $s_2 = \{1, 2, -2\}$, 又分别过 $P_1(-1, 7, 0)$ 和 $P_2(0, 2, -4)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = \{1, -5, -4\}$. 因为

$$[s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -29 \neq 0,$$

所以 L_1 和 L_2 是异面直线.

(2) 方法 1

公垂线 L 的方向向量 $s = s_1 \times s_2 = \{2, 3, 4\}$.

L 和 L_1 决定的平面 Π_1 的法向量 $n_1 = s \times s_1 = \{11, 2, -7\}$, 又因为 $P_1 \in \Pi_1$, 由点法式得 Π_1 的方程 $11x + 2y - 7z - 3 = 0$.

Π_1 与 L_2 的交点即为 L 与 L_2 的交点. 将 L_2 的参数方程 $x = t$, $y = 2 + 2t$, $z = -4 - 2t$ 代入 Π_1 的方程, 解得 $t = -1$, 所以交点为 $(-1, 0, -2)$.

因此公垂线方程为 $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$.

方法 2

同方法 1 求出 $s = \{2, 3, 4\}$ 和 Π_1 的方程 $11x + 2y - 7z - 3 = 0$.

类似地, L 和 L_2 决定的平面 Π_2 的法向量 $n_2 = s_2 \times s = \{14, -8, -1\}$. 又因为 $P_2 \in \Pi_2$, 由点法式得 Π_2 的方程 $14x - 8y - z + 12 = 0$.

因此公垂线方程为 $\begin{cases} 11x + 2y - 7z - 3 = 0, \\ 14x - 8y - z + 12 = 0. \end{cases}$

方法 3

同方法 1 求出 $s = \{2, 3, 4\}$.

同方法 2 求出 Π_2 的方程 $14x - 8y - z + 12 = 0$.

Π_2 与 L_1 的交点即为 L 与 L_1 的交点. 将 L_1 的参数方程 $x = -1 + t$, $y = 7 - 2t$, $z = t$ 代入 Π_2 的方程, 解得 $t = 2$, 所以交点为 $(1, 3, 2)$.

因此公垂线方程为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$.

方法 4

同方法 1 求出 $s = \{2, 3, 4\}$.

设点 $M(x, y, z)$ 为 L 上的动点, 则 $\overrightarrow{P_1M} = \{x+1, y-7, z\}$, $\overrightarrow{P_2M} = \{x, y-2, z+4\}$. 因为 L 与 L_1 和 L_2 都垂直相交, 故 L 与 L_1

和 L_2 都共面, 因此有

$$[s_1, s, \overrightarrow{P_1M}] = 0, [s_2, s, \overrightarrow{P_2M}] = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ x+1 & y-7 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y-2 & z+4 \end{vmatrix} = 0.$$

化简得 $\begin{cases} 11x + 2y - 7z - 3 = 0, \\ 14x - 8y - z + 12 = 0, \end{cases}$ 此即为 L 的一般式方程.

点评 几何题往往有多种解法. 我们在这里对本题给出了 4 种解法, 希望能对读者有所启示.

七、若函数 $f(x, y)$ 对任意正实数 t 满足关系 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 则称 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数. 设 $f(x, y)$ 可微, 试证明 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数的充要条件是

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y). \quad (*)$$

证明 “必要性”: 对 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ 两端关于 t 求导数, 得

$$xf_x(tx, ty) + yf_y(tx, ty) = nt^{n-1}f(x, y).$$

令 $t = 1$ 即得到所需结论.

“充分性”: 固定 x, y , 在 $(*)$ 式中以 tx, ty 分别代替 x, y , 得

$$txf_{tx}(tx, ty) + tyf_{ty}(tx, ty) = nf(tx, ty).$$

所以

$$\frac{df(tx, ty)}{dt} = x f_{tx}(tx, ty) + y f_{ty}(tx, ty) = \frac{nf(tx, ty)}{t},$$

$$\text{即} \quad \frac{\frac{df(tx, ty)}{dt}}{f(tx, ty)} = \frac{n}{t}.$$

两端对 t 积分得 $\ln|f(tx, ty)| = n \ln t + C$, 其中 C 与 t 无关. 故 $f(tx, ty) = C_1 t^n$, 令 $t = 1$, 得 $C_1 = f(x, y)$, 故 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

$y)$, 即 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数.

点评 本题必要性证明很容易, 但充分性证明则较难. 事实上, 必要性证明是教材上的一道习题, 而充分性则是教材上提出的一个问题. 对平时在学习中主动性强的学生而言, 此题并非“很难”.

试 卷 (四)

——第二学期期末试卷

一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为

()

- (A) $2x + y - 4 = 0$; (B) $x + 2y - 4 = 0$;
(C) $2x + y - z - 4 = 0$; (D) $2x + y - z - 5 = 0$.

2. 记 $I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1$, 则

()

- (A) $I_1 = I_2$; (B) $I_1 > I_2$;
(C) $I_1 < I_2$; (D) 无法比较 I_1, I_2 的大小.

3. 函数 $u(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ 满足 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 的条件极值是

()

- (A) 1; (B) 0; (C) $1/6$; (D) $1/8$.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 那么下列结论中正确的是

()

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$;
(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$.

5. 在下列无穷级数中, 收敛的级数是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \sqrt{n}}{n+1}$.

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 积分 $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x dx =$ _____.

2. 设向量场 $A = xf(x)i - yf(x)j - x(1+x)zk$ 是无源场(即 $\operatorname{div} A \equiv 0$), 其中 $f(x)$ 是可微函数, 且满足 $f(1) = 1$, 则 $f(x) =$ _____.

3. 设 S 是平面 $x + y + z = 4$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截出的有限部分, 则曲面积分 $\iint_S |y| dS$ 的值为 _____.

4. 设 $f(x) = e^{x^2}$, 则 $f^{(2n)}(0) =$ _____.

5. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-3, 3)$, 则幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 _____.

三、(8 分) 设 $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、(1) (本题 8 分) 设 $f(u)$ 是具有连续导数的函数, C 是平面上任一条按段光滑的正向封闭曲线, 求曲线积分 $\oint_C f(xy)(y dx + x dy)$.

(2) (本题 10 分) 求 $\iiint_{\Sigma} y^2 z dx dy + z^2 x dy dz + x^2 y dz dx$, 其中 Σ 为由 $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 0$ 所围成的封闭曲面, 方向取外侧.

五、(1) (本题 6 分) 设向量场 $A = ye^z i + (x^3 - y^2 + z^3)j + xyzk$, 求旋度 $\operatorname{rot} A$.

(2) (本题 10 分) 某二元函数 $u(x, y)$ 在右半平面上 ($x > 0$) 上具

有连续的二阶偏导函数,且它的梯度场为

$$\text{grad } u = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j},$$

试确定常数 λ , 并求函数 $u(x, y)$.

六、(1) (本题 10 分) 将函数 $f(x) = |\sin x| (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开为傅立叶级数, 并求其和函数.

(2) (本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$ 的和函数, 并求数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的和.

七、(本题 8 分) 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则无穷乘积

$\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right) \left(0 < |a_n| < \frac{\pi}{4}\right)$ 收敛.

试卷(四)考核内容分值表

考核内容	多元函数微分学	重积分	曲线积分和曲面积分	级数
分值	14	6	40	40

试卷(四)详解

一、选择题

1. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为

()

- (A) $2x + y - 4 = 0$; (B) $x + 2y - 4 = 0$;
(C) $2x + y - z - 4 = 0$; (D) $2x + y - z - 5 = 0$.

解 选 B.

令 $F(x, y, z) = e^z - z + xy - 3$, 则 $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\}_{(2, 1, 0)} = \{1, 2, 0\}$, 因此切平面方程为 $(x-2) + 2(y-1) = 0$, 即 $x + 2y - 4 = 0$.

2. 记 $I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1$, 则

()

- (A) $I_1 = I_2$; (B) $I_1 > I_2$;
(C) $I_1 < I_2$; (D) 无法比较 I_1, I_2 的大小.

解 选 C.

令 $x = 2 + r \cos \theta$, $y = 1 + r \sin \theta$, 则当 $(x, y) \in D$ 时, 有

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

因此 $x + y = 3 + r(\cos \theta + \sin \theta) \geq 3 - \sqrt{2} > 1$, $(x+y)^2 < (x+y)^3$.

由积分性质可知应该选 C.

点评 此题的关键是比较被积函数在积分区域内的大小.

3. 函数 $u(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ 满足 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ($x >$

0, $y > 0, z > 0$) 的条件极值是 ()

- (A) 1; (B) 0; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{1}{8}$.

解 选 D.

$$u = \sin x \sin y \cos(x+y).$$

$$\begin{aligned} u_x &= \cos x \sin y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) \\ &= \sin y \cos(2x+y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) \\ &= \sin x \cos(x+2y). \end{aligned}$$

当 $x = y = \frac{\pi}{6}$ 时有 $u_x = u_y = 0$.

$$\text{由于 } A = u_{xx} \Big|_{(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})} = -2\sin y \sin(2x+y) \Big|_{(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})} = -1,$$

$$\begin{aligned} B &= u_{xy} \Big|_{(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})} \\ &= [\cos y \cos(2x+y) - \sin y \sin(2x+y)] \Big|_{(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})} \\ &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$C = u_{yy} \Big|_{(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})} = -2\sin x \sin(x+2y) \Big|_{(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})} = -1,$$

则 $AC - B^2 = \frac{3}{4} > 0, A < 0$, 因此 $u_{\min} = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

点评 由于题目条件中未提及函数 $u(x, y, z)$ 是否一定存在极小值, 因此不能用拉格朗日乘数法求条件极值.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 那么, 下列结论中正确的是 ()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$;

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$.

解 选 B.

方法 1 (排除法)

取 $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

取 $a_n = \frac{1}{n \sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = +\infty$;

取 $a_n = n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = +\infty$.

方法 2

设非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$, 则 $\lambda > 0$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$ 可知, 存在 $N > 0$, 使得 $\forall n: n > N$ 时有 $n a_n > \frac{\lambda}{2}$,

即 $a_n > \frac{\lambda}{2n}$. 由比较判别法有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

点评 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 并不意味着级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

5. 在下列无穷级数中, 收敛的级数是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \right)$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \sqrt{n}}{n+1}$.

解 选 A.

方法 1 (排除法) 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 发散;

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ 发散;

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \sqrt{n}}{n+1}$ 发散.

方法2 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-\sqrt{x}}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}} = 6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{e^{\sqrt{x}}} = \cdots = 0,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n e^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = 0$. 由比较判别法的极限形式有 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}}$ 收敛.

点评 学习级数时要注意收集常用的判别级数发散的方法.

二、填空题

1. 积分 $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 π .

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x \, dx &= \int_0^{\pi} x \, dx \int_0^{\sin x} dy \\ &= \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \\ &= (\sin x - x \cos x) \Big|_0^{\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

点评 本题直接做也可以, 但交换次序后运算量小.

2. 设向量场 $A = xf(x)\mathbf{i} - yf(x)\mathbf{j} - x(1+x)\mathbf{zk}$ 是无源场(即 $\operatorname{div} A \equiv 0$), 其中 $f(x)$ 是可微函数, 且满足 $f(1) = 1$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1.$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial(xf(x))}{\partial x} + \frac{\partial(-yf(x))}{\partial y} + \frac{\partial(-x(1+x)z)}{\partial z} \\ &= xf' - x(1+x) = 0, \\ f &= \int (1+x)dx = \frac{1}{2}(x+1) + C.\end{aligned}$$

由 $f(1) = 1$ 有 $C = -1$, 因此 $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1.$

3. 设 S 是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分, 则曲面积分 $\iint_S |y| dS$ 的值为_____.

解 $\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

$$\begin{aligned}\iint_S |y| dS &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |y| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{3} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |y| dx dy = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta \int_0^1 r \cdot r dr \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

点评 此题虽然简单, 但包括了计算第一类曲面积分的全过程.

4. 设 $f(x) = e^{x^2}$, 则 $f^{(2n)}(0) =$ _____.

解 $\frac{(2n)!}{n!}.$

方法 1

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

因此 $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{1}{n!}, \quad f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}.$

方法 2 $f' = 2xe^{x^2} = 2xf$, 两端求 $(n-1)$ 次导数, 得

$$f^{(n)} = 2xf^{(n-1)} + 2(n-1)f^{(n-2)}, \quad f^{(n)}(0) = 2(n-1)f^{(n-2)}(0).$$

因此

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(0) &= 2(2n-1)f^{(2(n-1))}(0) \\ &= 2^2(2n-1)(2n-3)f^{(2(n-2))}(0) \\ &= \cdots = 2^{n-1}(2n-1)!!f''(0) \\ &= 2^n(2n-1)!!f(0) \\ &= 2^n(2n-1)!! \end{aligned}$$

点评 方法 1 是利用幂级数展开式来求高阶导数的巧妙方法, 方法 2 则是单变量微分学中讲过的利用递推公式的方法.

5. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-3, 3)$, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1} \text{ 的收敛区间为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 $(-2, 4)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛区间为 } (-3, 3) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \text{ 的收敛区间为}$$

$$(-3, 3) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \text{ 的收敛区间为}$$

$$(-3, 3) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1} \text{ 的收敛区间为 } (-2, 4).$$

点评 本题的关键: 对一个幂级数逐项求导所得到的新级数与原级数有相同的收敛区间.

三、设 $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y f_1 + 2xf_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^x \cos y f_1 + e^x \sin y (f_{11} e^x \cos y + 2yf_{12}) \\ &\quad + 2x(f_{21} e^x \cos y + 2yf_{22}) \\ &= e^x \cos y f_1 + e^{2x} \sin y \cos y f_{11} + 2e^x (y \sin y \end{aligned}$$

$$+x \cos y) f_{12} + 4xy f_{22}.$$

点评 求复合函数高阶导数时要小心仔细,不要漏项.

四、(1) 设 $f(u)$ 是具有连续导数的函数, C 是平面上任一条按段光滑的正向封闭曲线, 求曲线积分 $\oint_C f(xy)(y dx + x dy)$.

解 令 $P = yf(xy)$, $Q = xf(xy)$, 则 $P_y = f(xy) + xyf'(xy) = Q_x$, 根据格林公式, 曲线积分

$$\oint_C f(xy)(y dx + x dy) = \iint_D (Q_x - P_y) d\sigma = 0,$$

或由积分与路径无关等价命题有

$$\oint_C f(xy)(y dx + x dy) = 0.$$

点评 格林公式是曲线积分部分的必考内容.

(2) 求 $\iiint_{\Sigma} y^2 z dx dy + z^2 x dy dz + x^2 y dz dx$, 其中 Σ 为由 $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 0$ 所围成的封闭曲面, 方向取外侧.

解 $P = z^2 x$, $Q = x^2 y$, $R = y^2 z$, $P_x = z^2$, $Q_y = x^2$, $R_z = y^2$. 由高斯公式可得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Sigma} y^2 z dx dy + z^2 x dy dz + x^2 y dz dx \\ &= \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dV \\ &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{r^2} (r^2 + z^2) dz \\ &= 2\pi \int_0^1 r \left(r^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_0^{r^2} dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r \left(r^4 + \frac{1}{3} r^6 \right) dr = \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

点评 高斯公式是曲面积分部分的必考内容.

五、(1) 设向量场 $A = ye^z i + (x^3 - y^2 + z^3)j + xyzk$, 求旋度 $\text{rot } A$.

解 旋度

$$\begin{aligned}\text{rot } A &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & x^3 - y^2 + z^3 & xyz \end{vmatrix} \\ &= (xz - 3z^2)i - (yz - ye^z)j + (3x^2 - e^z)k.\end{aligned}$$

(2) 某二元函数 $u(x, y)$ 在右半平面上 ($x > 0$) 上具有连续的二阶偏导函数, 且它的梯度场为

$$\text{grad } u = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda i - x^2(x^4 + y^2)^\lambda j,$$

试确定常数 λ , 并求函数 $u(x, y)$.

解 函数 $u(x, y)$ 的梯度为 $u_x i + u_y j$, 由条件可知

$$P = u_x = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, \quad Q = u_y = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda,$$

且 $P_y \equiv Q_x (x > 0)$. 因

$$P_y = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 4\lambda xy^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1},$$

$$Q_x = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1},$$

令 $P_y = Q_x$, 故得 $4x(1 + \lambda)(x^4 + y^2)^\lambda = 0 (x > 0)$, $\lambda = -1$.

由于当 $\lambda = -1$ 时, 在右半平面上, 曲线积分 $\int_C P dx + Q dy$ 与路径

无关, 故

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C.$$

取 $x_0 = 1, y_0 = 0$, 得

$$u(x, y) = \int_1^x 0 dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy + C$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_0^y \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} d\frac{y}{x^2} + C \\
 &= -\arctan \frac{y}{x^2} + C.
 \end{aligned}$$

点评 此题涉及的都是常规内容,唯计算量较大.

六、(1) 将函数 $f(x) = |\sin x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开为傅立叶级数,并求其和函数.

解 $f(x)$ 为偶函数,所以 $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}; \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0;$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \quad (n \geq 2) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2[(-1)^{n+1} - 1]}{\pi(n^2 - 1)};
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |\sin x| \\
 &= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2[(-1)^{n+1} - 1]}{(n^2 - 1)\pi} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi).
 \end{aligned}$$

点评 注意此题中 a_1 要单独计算.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$ 的和函数,并求数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的和.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} dx \\
&= x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' + \int_0^x \frac{1}{1-x} dx \\
&= \frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x) \quad (-1 < x < 1),
\end{aligned}$$

取 $x = \frac{1}{2}$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 + \ln 2$.

点评 此题关键是把 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$ 化为 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 之和, 然后利用逐项求导、逐项求积分和已知的麦克劳林公式求得最后结果.

七、证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right)$ ($0 < |a_n| < \frac{\pi}{4}$) 收敛.

证明

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan a_n}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan a_n} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2 \tan a_n}{1 - \tan a_n}\right) \\
&= \exp \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2 \tan a_n}{1 - \tan a_n}\right) \\
&= \exp \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2 \tan a_n}{1 - \tan a_n}\right),
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \tan a_n}{1 - \tan a_n} \Big/ |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \tan a_n}{1 - \tan a_n} \right| \Big/ |a_n| = 2.$$

根据比较判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2 \tan a_n}{1 - \tan a_n} \right)$ 收敛, 所以

$\prod_{n=1}^{\infty} \tan \left(\frac{\pi}{4} + a_n \right)$ 收敛.

点评 对无穷乘积, 常用的方法是通过取对数转化为对级数收敛性的判别.

试 卷 (五)

——第一学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 f, g 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都是奇函数, 则 $g(f(x))$ 和 $f(g(x))$ ()

- (A) 都是偶函数;
- (B) 都是奇函数;
- (C) 一个是奇函数,另一个是偶函数;
- (D) 都是非奇非偶函数.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\ln(\cos x + 2x^2)$ 等价的无穷小是 ()

- (A) $\frac{x^2}{2}$;
- (B) x^2 ;
- (C) $\frac{3x^2}{2}$;
- (D) $2x^2$.

3. 设 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = a$ (有限值), 则 ()

- (A) $a = f'(x_0)$;
- (B) $a = 2f'(x_0)$;
- (C) $a = 3f'(x_0)$;
- (D) $f'(x_0)$ 未必存在.

4. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上必有 ()

- (A) 极大值点;
- (B) 极小值点;
- (C) 同时有极大值点和极小值点;
- (D) 未必有极值点.

5. 设 f 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f'' > 0$, 则 $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 在 (a, b) 内为 ()

- (A) 单调增;
- (B) 单调减;
- (C) 下凸;
- (D) 上凸.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + 3}{x - 1} = b$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

2. 函数 $f(x) = (1-x)\tan \frac{\pi}{2}x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ 的第一类间断点 $x =$ _____,

第二类间断点 $x =$ _____.

3. 函数 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的微分 $dy =$ _____.

4. 设 $\begin{cases} x = t + \ln t, \\ y = t^2 e^{2t}, \end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

5. 若曲线 $y = x^2$ 与 $y = a \ln x$ 相切, 则 $a =$ _____.

三、求以下极限(每题 6 分,共 18 分)

1. 用极限定义验证 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\ln(1+x^2)}$.

3. 设 f 是定义在 $(-1, 1)$ 内的正值连续函数, f 在 $x = 0$ 点可导, 又 $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

四、(每题 8 分,共 16 分)

1. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定的隐函数.

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 又设 $g(x) = f(\ln x)e^{f(x)}$, 求 $g'(1)$.

2. 设 $f(x) = \arctan x$.

(1) 证明 $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$);

(2) 求 $f^{(2000)}(0)$, $f^{(2001)}(0)$.

五、(8 分)

设 f 在 $x = 0$ 点可导, 又 $F(x) = (1 + |\sin x|)f(x)$. 问: $f(0)$ 为

何值时, $F(x)$ 在 $x = 0$ 点可导, 并说明理由.

六、(8 分)

设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶连续导数, 证明: $f'' > 0$ 的充分必要条件是

$$f(x+h) + f(x-h) \geq 2f(x) \quad (\forall x, h \in \mathbb{R}).$$

七、(12 分)

全面讨论函数 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ 的性态, 并作出它的图形.

$$\left[\text{已知 } y' = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}, y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \right]$$

八、(8 分, 下列两小题仅选一题)

1. 设有数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n > 0, x_n + \frac{4}{x_{n+1}^2} < 3 \quad (n = 1, 2, \dots)$,

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 证明不等式 $xe^{-x} > \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \quad (0 < x < 1)$.

试卷(五)考核内容

考核内容	函数	极限和连续	导数和微分	微分中值定理和导数的应用
分值	3	29	42	26

试卷(五)详解

一、选择题

1. 设 f, g 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都是奇函数, 则 $g(f(x))$ 和 $f(g(x))$ ()

- (A) 都是偶函数;
- (B) 都是奇函数;
- (C) 一个是奇函数, 另一个是偶函数;
- (D) 都是非奇非偶函数.

解 选 B.

f, g 都是奇函数, 故 $g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x))$, 即 $g(f(x))$ 是奇函数. 同理, $f(g(x))$ 也是奇函数.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\ln(\cos x + 2x^2)$ 等价的无穷小是 ()

- (A) $\frac{x^2}{2}$; (B) x^2 ; (C) $\frac{3x^2}{2}$; (D) $2x^2$.

解 选 C.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(\cos x + 2x^2) \sim \cos x - 1 + 2x^2$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + 2x^2)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 2x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + 2 \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

所以 $\ln(\cos x + 2x^2) \sim \frac{3}{2}x^2 (x \rightarrow 0)$.

3. 设 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = a$ (有限值), 则 ()

- (A) $a = f'(x_0)$; (B) $a = 2f'(x_0)$;
 (C) $a = 3f'(x_0)$; (D) $f'(x_0)$ 未必存在.

解 选 D.

当 $f'(x_0)$ 存在时, 有 $a = 2f'(x_0)$, 但 $f'(x_0)$ 可以不存在.

例如 $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h} = 0$, $f'(0)$ 不存在.

4. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上必有 ()

- (A) 极大值点;
 (B) 极小值点;
 (C) 同时有极大值点和极小值点;
 (D) 未必有极值点.

解 选 D.

f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值, 但未必有极值.

例如 $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ 无极值.

5. 设 f 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f'' > 0$, 则 $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 在 (a, b) 内为 ()

- (A) 单调增; (B) 单调减;
 (C) 下凸; (D) 上凸.

解 选 A.

$$F'(x) = \frac{(x-a)f'(x) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2},$$

根据微分中值定理, 存在 $\xi \in (a, x)$, 使得 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$, 所以

$$F'(x) = \frac{(x-a)[f'(x) - f'(\xi)]}{(x-a)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-a},$$

由于 $f'' > 0$, f' 单调增加, 所以 $F'(x) > 0$, 即 $F(x)$ 单调增加.

二、填空题

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + 3}{x - 1} = b$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

解 4, -2.

由条件有 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + 3) = 4 - a = 0$, 即 $a = 4$. 于是

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) = -2. \end{aligned}$$

2. 函数 $f(x) = (1-x)\tan \frac{\pi}{2}x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ 的第一类间断点 $x =$ _____, 第二类间断点 $x =$ _____.

解 1; 0, $2k+1$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

当 $x = 0$, $x = 2k+1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $f(x)$ 间断.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1-x)\tan \frac{\pi}{2}x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \infty, \quad x = 0 \text{ 为}$$

第二类间断点;

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2k+1 \\ k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} (1-x)\tan \frac{\pi}{2}x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \infty, \quad x_k = 2k+1 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 为}$$

第二类间断点;

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\tan \frac{\pi}{2}x \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\tan \frac{\pi}{2}x \\ &\stackrel{y=1-x}{=} e \lim_{y \rightarrow 0} y \tan \frac{\pi}{2}(1-y) \end{aligned}$$

$$= e \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan \frac{\pi}{2} y} = \frac{2e}{\pi},$$

故 $x = 1$ 为第一类间断点.

3. 函数 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的微分 $dy =$ _____.

解 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} dx.$

因 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}, dy = y' dx,$

故

$$\begin{aligned} y' &= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}. \end{aligned}$$

4. 设 $\begin{cases} x = t + \ln t, \\ y = t^2 e^{2t}, \end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

解 $2t^2 e^{2t}, 4t^2 e^{2t}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{2t}(2t + 2t^2)}{1 + \frac{1}{t}} = 2t^2 e^{2t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(2t^2 e^{2t})'_t}{x'_t} = \frac{4e^{2t}(t+1)t}{1 + \frac{1}{t}} = 4t^2 e^{2t}.$$

5. 若曲线 $y = x^2$ 与 $y = a \ln x$ 相切, 则 $a =$ _____.

解 $2e, 0.$

设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则两函数在 x_0 处有相同的函数值和导数值, 即

$$x_0^2 = a \ln x_0, 2x_0 = \frac{a}{x_0} \Rightarrow a \ln x_0 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 0 \text{ 或}$$

$$x_0 = \sqrt{e} \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } a = 2x_0^2 = 2e.$$

三、求以下极限

1. 用极限定义验证 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$.

分析 $\forall \varepsilon > 0$, 要使得 $\left| \frac{2x-1}{x+1} - 2 \right| = \frac{3}{|x+1|} \leq \frac{3}{|x|-1} < \varepsilon$,

只要 $|x| > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ 即可.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = 1 + \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有

$$\left| \frac{2x-1}{x+1} - 2 \right| = \frac{3}{|x+1|} \leq \frac{3}{|x|-1} < \varepsilon,$$

即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\ln(1+x^2)}$.

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\ln(1+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x \sin x} - 1) + (1 - \cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x \sin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

点评 求 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法较多, 比如罗必塔法则、等价代换、分子有理化等, 可根据需要灵活地使用这些方法. 本题用等价代换或分子有理化较方便.

3. 设 f 是定义在 $(-1, 1)$ 内的正值连续函数, f 在 $x = 0$ 点可导, 又 $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

解 方法 1 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x) - \ln f(0)}{x}}$
 $= e^{[\ln f(x)]' \big|_{x=0}} = e^{\frac{f'(0)}{f(0)}} = e^2.$

方法 2 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{1 + [f(x) - 1]\}^{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 1 + [f(x) - f(0)]^{\frac{1}{f(x) - f(0)}} \right\}^{\frac{f(x) - f(0)}{x}}$
 $= e^{f'(0)} = e^2.$

点评 对幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 通常用指数函数 $e^{g(x) \ln f(x)}$ 表示讨论比较方便.

对 1^∞ 型极限可利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$ [其中 $\alpha(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷小].

四、1. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定的隐函数,

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 又设 $g(x) = f(\ln x)e^{f(x)}$, 求 $g'(1)$.

分析 先用隐函数求导法求出 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$, 再求 $g'(x)$, 并用 $x = 1$ 代入相应的表达式, 求出 $g'(1)$.

解 $xy + \ln y = 1$, 两边求导, 得

$$y + xy' + \frac{1}{y}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{1 + xy}.$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}f'(\ln x)e^{f(x)} + f'(x)f(\ln x)e^{f(x)},$$

$$g'(1) = f'(0)e^{f(1)} + f'(1)f(0)e^{f(1)}.$$

在 $xy + \ln y = 1$ 中取 $x = 0$, 解得 $y(0) = f(0) = e$;

将 $x = 0$, $f(0) = e$ 代入 $f'(x) = -\frac{f^2(x)}{1 + xf(x)}$, 得 $f'(0) = -e^2$.

同样地, 取 $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

将所得的值代入 $g'(1)$, 得 $g'(1) = -e^3 - \frac{1}{2}e^2$.

2. 设 $f(x) = \arctan x$.

(1) 证明 $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$);

(2) 求 $f^{(2000)}(0)$, $f^{(2001)}(0)$.

(1) 证 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)f'(x) = 1$, 两边求导, 得

$$(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0,$$

即当 $n=1$ 时等式成立.

当 $n \geq 2$ 时, 由莱布尼茨公式, 得

$$C_n^0(1+x^2)[f'(x)]^{(n)} + C_n^1(1+x^2)'[f'(x)]^{(n-1)} + C_n^2(1+x^2)''[f'(x)]^{(n-2)} = 0,$$

即

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(2) 解 由题(1)有 $f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), 即有递推式

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0).$$

当 $n=2k$ 时, 由于 $f'(0) = 1$,

$$\begin{aligned} f^{(2k+1)}(0) &= -2k(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = \cdots \\ &= (-1)^k 2k(2k-1) \cdots 2 \times 1 \times f'(0) \\ &= (-1)^k (2k)! \end{aligned}$$

所以

$$f^{(2001)}(0) = 2000!.$$

当 $n=2k-1$ 时, $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f^{(2k-1+1)}(0) &= f^{(2k)}(0) = -(2k-1)(2k-2)f^{(2k-2)}(0) = \cdots \\ &= (-1)^k (2k-1) \cdots 1 \times 0 \times f(0) = 0, \end{aligned}$$

所以

$$f^{(2000)}(0) = 0.$$

点评 本题对 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 直接求高阶导数无一般规律, 无法

得到 $f^{(n)}(x)$ 的表达式, 可将其变形为 $f'(x)(1+x^2) = 1$ 后用莱布尼兹公式求高阶导数. 此题也可用数学归纳法加以证明.

五、 设 f 在 $x = 0$ 点可导, 又 $F(x) = (1 + |\sin x|)f(x)$. 问: $f(0)$ 为何值时, $F(x)$ 在 $x = 0$ 点可导, 并说明理由.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(1 + \sin x)f(x) - f(0)}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\&= f(0) + f'_+(0) = f(0) + f'(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{同理, } F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(1 - \sin x)f(x) - f(0)}{x} = -f(0) + f'(0).\end{aligned}$$

令 $F'_+(0) = F'_-(0) \Rightarrow f(0) = 0$, 故当 $f(0) = 0$ 时, $F(x)$ 在 $x = 0$ 点可导.

点评 本题仅给出 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点可导, 故只能按定义求 $F'(0)$. 又 $F(x)$ 的表达式中含绝对值函数, 所以要分别求左、右导数.

六、 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶连续导数, 证明: $f'' \geq 0$ 的充分必要条件是

$$f(x+h) + f(x-h) \geq 2f(x) \quad (\forall x, h \in \mathbb{R}).$$

分析 必要性可利用 $f(x)$ 的凸性得证. 充分性的证明比较难些. 由条件 $f(x+h) - f(x-h) - 2f(x) \geq 0$ 有 $\frac{f(x+h) - f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0$,

考虑当 $h \rightarrow 0$ 时此 $\frac{0}{0}$ 型极限, 用罗必塔法则及极限的保号性可得 $f''(x) \geq 0$. 此外, $f(x+h)$ 和 $f(x-h)$ 可在 x 处展开为一阶泰勒展开式, 故也可用反证法来证明.

证 必要性: 设 $f'' \geq 0$, 则 f 下凸, 从而 $\forall x, h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} \geq f\left(\frac{x+h+x-h}{2}\right),$$

即 $f(x+h) + f(x-h) \geq 2f(x) \quad (\forall x, h \in \mathbb{R})$.

充分性: 方法 1 用反证法 假设存在一点 x_0 使得 $f''(x_0) < 0$, 则由 f 二阶导数连续, 存在 x_0 的一个邻域 (x_0-h, x_0+h) , 使得 $\forall x \in (x_0-h, x_0+h)$, 有 $f''(x) < 0$.

将 $f(x_0-h), f(x_0+h)$ 在 x_0 处展开, 有

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2, \quad \xi \in (x_0, x_0+h),$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(\eta)h^2, \quad \eta \in (x_0-h, x_0),$$

从而 $f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + \frac{1}{2}[f''(\xi) + f''(\eta)]h^2 < 2f(x_0)$, 这与条件矛盾.

方法 2 用罗必塔法则.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x), \end{aligned}$$

由已知条件有 $\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0$, 根据极限的保号性, 即有 $f''(x) \geq 0$.

七、全面讨论函数 $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ 的性态, 并作出它的图形.

$$\left[\text{已知 } y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \right]$$

分析 讨论函数的性态, 包括函数的定义域、单调性、极值、凹凸

性、拐点及渐近线,可依次进行讨论.

解 函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 过 $(0, 0)$ 点, 为奇函数.

令 $y' = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$, 令 $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$.

以 $x = 0, \pm 1, \pm\sqrt{3}$ 为分点列表如下:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	0	-	-	0	-	-	0	+
y''	-	-	-	+	-	-	+	+	+
y	单调增 上凸	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	单调减 上凸	单调减 下凸	0	单调减 上凸	单调减 下凸	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	单调增 下凸

极大值 $y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 极小

值 $y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 拐点 $(0, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} =$$

∞ , 故 $x = 1$ 和 $x = -1$ 为垂直渐近线;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1,$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$, 故

$y = x$ 为斜渐近线.

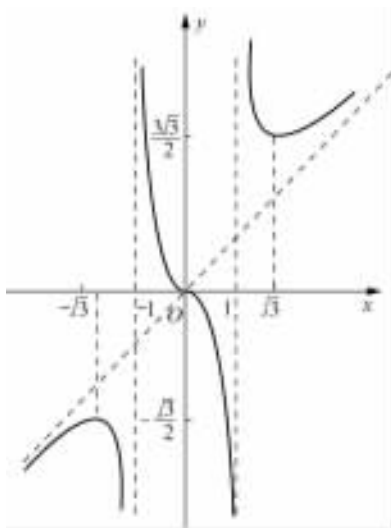
八、1. 设有数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n >$

$$0, x_n + \frac{4}{x_{n+1}^2} < 3 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 显然 $\forall n \in N, 0 < x_n < 3$. 又

$$x_{n+1} - x_n > x_{n+1} - 3 + \frac{4}{x_{n+1}^2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{x_{n+1}^3 - 3x_{n+1}^2 + 4}{x_{n+1}^2} \\
 &= \frac{(x_{n+1} + 1)(x_{n+1} - 2)^2}{x_{n+1}^2} \geqslant 0,
 \end{aligned}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调增且有上界, 必有极限. 记极限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A \geqslant 0$.

对不等式

$$x_n + \frac{4}{x_{n+1}^2} < 3$$

两边取极限, 得 $A + \frac{4}{A^2} \leqslant 3$, 于是

$$0 \leqslant \frac{(A+1)(A-2)^2}{A^2} = A + \frac{4}{A^2} - 3 \leqslant 0,$$

故 $A = 2$.

2. 证明不等式 $xe^{-x} > \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ ($0 < x < 1$).

证 方法 1 原不等式等价于 $x^2 e^{\frac{1}{x}-x} > 1$ ($0 < x < 1$).

令 $F(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}-x} - 1$ ($0 < x \leqslant 1$), 则 $F(1) = 0$. 当 $0 < x < 1$ 时,

$$F'(x) = 2xe^{\frac{1}{x}-x} - \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)x^2 e^{\frac{1}{x}-x} = -(x-1)^2 e^{\frac{1}{x}-x} < 0,$$

故 $F(x)$ 严格单调减, 从而当 $0 < x < 1$ 时, $F(x) > F(1) = 0$, 即原不等式成立.

方法 2 对原不等式两边取对数, 可将不等式变形为

$$2 \ln x - x + \frac{1}{x} > 0 \quad (0 < x < 1).$$

令 $f(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x}$ ($0 < x \leqslant 1$),

$$f(1) = 0, \quad f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 < 0 \quad (0 < x < 1),$$

所以 $f(x)$ 当 $0 < x < 1$ 时严格单调减, 从而 $f(x) > f(1) = 0$.

点评 前一小题利用数列 $\{x_n\}$ 所满足的不等式及极限的保号性得到其极限值, 用此类方法求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 时, 应当先证明该极限存在.

后一小题利用单调性证明不等式是常规的方法, 一般需要将不等式作适当变形, 归结为证明 $f(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$). 若有 $f(c) = 0$, 则当 $c = a$ 时, 可由 $f'(x) \geq 0$ (即 $f(x)$ 单调增) 保证. 当 $c = b$ 时, 则要证 $f'(x) \leq 0$. 而 c 是 (a, b) 内点时, 要证 $f(c)$ 是最小值.

试 卷 (六)

——第一学期期末试卷

一、选择题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设 $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 a 点连续, 则 $f'(a)$ ()

(A) 等于 $[2xg(x) + (x^2 - a^2)g'(x)]|_{x=a}$;

(B) 等于 $2ag(a)$;

(C) 等于 0;

(D) 不存在.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $x_0 \in [a, b]$ 是 $f(x)$ 的最大值点, 则 ()

(A) $f'(x_0) = 0$;

(B) $f'(x_0) \neq 0$;

(C) 当 $x_0 \in (a, b)$ 时, $f'(x_0) = 0$;

(D) 以上(A), (B), (C)都不对.

3. 设 $\forall x \in (a, b)$, 有 $f'(x) = g'(x)$, 则 $\forall x \in (a, b)$, 有 ()

(A) $f(x) = g(x) + C$; (B) $f(x) = g(x)$;

(C) $\int f(x)dx = g(x) + C$; (D) $\int g(x)dx = f(x) + C$.

4. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x^2-1} f(t)dt = x^4$, 则 $f(8) =$ ()

(A) 108; (B) 48; (C) 18; (D) 8.

5. 设 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)}dx =$ ()

(A) $\sqrt{1-x^2} + C$;

(B) $x\sqrt{1-x^2} + C$;

(C) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$;

(D) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

6. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围区域的面积可用定积分表示为 ()

(A) $2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$;

(B) $4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$;

(C) $2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$;

(D) $4 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$.

二、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设 y 是由方程 $\int_0^{xy} e^t dt + ye^x = 2$ 所确定的隐函数, 则

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

2. 函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最大值为 _____.

3. 函数 $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$, 则 $f(x) =$ _____.

4. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, 则 $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) =$ _____.

5. 常微分方程 $xy' \tan \frac{y}{x} = y \tan \frac{y}{x} - x$ 的通解是 _____.

6. 常微分方程 $y' - 3y = e^x \sqrt{y}$ 的通解是 _____.

三、(每题 6 分,共 12 分)

1. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + (1+x^2) \int_0^1 f(x) dx$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x & (x \geq 0), \\ 1+x^2 & (x < 0), \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

四、计算下列积分(每题 6 分,共 18 分)

1. $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx.$

2. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} dx.$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})(1+x)} dx.$

五、(12 分)设曲线 $y = e^x$.

(1) 在此曲线上求一点 A , 使曲线在该点的切线通过坐标原点 O .

(2) 求由曲线 $y = e^x$, 切线 OA 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

(3) 求点 $(0, 1)$ 到点 A 一段曲线弧的长度.

六、(8 分)求解常微分方程 $y'' - 5y' + 6y = (2 + e^x)e^x$.

七、(8 分)设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 以 T 为正周期的连续函数, a 是任一常数.

(1) 证明: 对于任何非负整数 n , 有 $\int_a^{a+nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x}$.

八、(6 分)设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) + f(1) = 0$. 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

试卷(六)考核内容分值表

考核内容	导数和微分	微分中值定理和导数的应用	积分	微分方程
分值	3	6	77	14

试卷(六)详解

一、选择题

1. 设 $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 a 点连续, 则 $f'(a)$ ()

(A) 等于 $(2xg(x) + (x^2 - a^2)g'(x))|_{x=a}$;

(B) 等于 $2ag(a)$;

(C) 等于 0;

(D) 不存在.

解 选 B.

按定义 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a)g(x) = 2ag(a)$.

因为 $g(x)$ 不一定可导, 所以不能选 A.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $x_0 \in [a, b]$ 是 $f(x)$ 的最大值点, 则 ()

(A) $f'(x_0) = 0$;

(B) $f'(x_0) \neq 0$;

(C) 当 $x_0 \in (a, b)$ 时, $f'(x_0) = 0$;

(D) 以上(A), (B), (C)都不对.

解 选 C.

当 x_0 是边界点时, 不能确定 $f'(x_0)$ 的值.

例如, $f(x) = x^3$, 在区间 $[0, 1]$ 上, 其最大值点处的导数 $f'(1) = 3$, 而在区间 $[-1, 0]$ 上, 其最大值点处的导数 $f'(0) = 0$.

当 x_0 是内点时, 根据费马定理可知 C 成立.

3. 设 $\forall x \in (a, b)$, 有 $f'(x) = g'(x)$, 则 $\forall x \in (a, b)$, 有 ()

- (A) $f(x) = g(x) + C$; (B) $f(x) = g(x)$;
 (C) $\int f(x) dx = g(x) + C$; (D) $\int g(x) dx = f(x) + C$.

解 选 A.

对 $f'(x) = g'(x)$ 两边积分, 得 $f(x) = g(x) + C$, 故选 A.

对选项 C, D 两边求导, 得 $f(x) = g'(x)$ 和 $f'(x) = g(x)$, 与条件不符, 故 C, D 都不成立.

又如, $f(x) = \sin x + 1$, $g(x) = \sin x$ 满足 $f'(x) = g'(x)$, 故选项 B 不成立.

4. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x^2-1} f(t) dt = x^4$, 则 $f(8) =$ ()

- (A) 108; (B) 48; (C) 18; (D) 8.

解 选 C.

对 $\int_0^{x^2-1} f(t) dt = x^4$ 两边求导, 得 $2xf(x^2-1) = 4x^3$, 取 $x = 3$, 得 $f(8) = 18$.

5. 设 $\int xf(x) dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)} dx =$ ()

- (A) $\sqrt{1-x^2} + C$; (B) $x\sqrt{1-x^2} + C$;
 (C) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$; (D) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

解 选 D.

对 $\int xf(x) dx = \arcsin x + C$ 两边求导, 得 $xf(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 即有

$\frac{1}{f(x)} = x\sqrt{1-x^2}$, 两边积分可得

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

6. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围区域的面积可用定积分表示为 ()

(A) $2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$;

(B) $4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$;

(C) $2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$;

(D) $4 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$.

解 选 C.

双纽线的极坐标方程为 $r^2 = \cos 2\theta$, 由图形的对称性可知, 其面积

$$4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta.$$

二、填空题

1. 设 y 是由方程 $\int_0^{xy} e^{t^2} dt + ye^x = 2$ 所确定的隐函数, 则

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 -4 .

在方程 $\int_0^{xy} e^{t^2} dt + ye^x = 2$ 中取 $x = 0$, 得 $y(0) = 2$.

对方程两边求导, 得

$$(y + xy')e^{x^2 y^2} + e^x(y + y') = 0,$$

代入 $x = 0, y(0) = 2$, 得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -4$.

2. 函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最大值为

$\underline{\hspace{2cm}}$.

解 0 .

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, 驻点 $x = 1, 3$. 又 $f(1) = f(4) = 0, f(3) = f(0) = -4$, 故最大值为 0 .

3. 函数 $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $2\sqrt{x} + C$.

$$xf'(x^2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}f(x^2) = \int xf'(x^2)dx = x + \frac{1}{2}C$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x} + C.$$

4. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, 则 $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) =$ _____.

解 0.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \text{ 令 } u = \frac{1}{t}, \text{ 则 } f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2} du = f(x).$$

5. 常微分方程 $xy' \tan \frac{y}{x} = y \tan \frac{y}{x} - x$ 的通解是 _____.

解 $\cos \frac{y}{x} = Cx$.

原方程为齐次微分方程. 令 $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$, 则原方程化为

$$-\tan u \, du = \frac{1}{x} dx, \text{ 解得 } \ln(\cos u) = \ln x + \ln C \Rightarrow \cos \frac{y}{x} = Cx.$$

6. 常微分方程 $y' - 3y = e^x \sqrt{y}$ 的通解是 _____.

解 $\sqrt{y} = Ce^{\frac{3}{2}x} - e^x$.

原方程为贝努利方程. 由 $\frac{1}{\sqrt{y}} y' - 3\sqrt{y} = e^x \Rightarrow (\sqrt{y})' - \frac{3}{2}\sqrt{y} =$

$\frac{1}{2}e^x$, 解此线性方程, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= e^{\int \frac{3}{2} dx} \left(\int \frac{1}{2} e^x e^{\int \frac{-3}{2} dx} dx + C \right) \\ &= e^{\frac{3}{2}x} (-e^{\frac{-1}{2}x} + C) = Ce^{\frac{3}{2}x} - e^x. \end{aligned}$$

三、1. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + (1+x^2) \int_0^1 f(x) dx$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

分析 将等式两边在 $[0, 1]$ 上积分, 得到关于 $\int_0^1 f(x) dx$ 的等式, 可解得该值.

解 令 $A = \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + (1+x^2)A$, 两边从 0

到 1 积分,得

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x) dx = \arctan x \Big|_0^1 + A \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} A \Rightarrow A = \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4} \pi. \end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x & (x \geqslant 0), \\ 1+x^2 & (x < 0), \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

分析 先对被积函数作变换 $u = x-1$, 将积分变换为 $\int_{-1}^1 f(u) du$,

再根据 $f(x)$ 的分段表达式分区间积分.

解 作变换 $u = x-1$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x-1) dx &= \int_{-1}^1 f(u) du = \int_{-1}^0 (1+x^2) dx + \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x dx \\ &= x + \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \Big|_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

四、计算下列积分

1. $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$.

分析 对分子通过加项、减项表示成 $(x^2+1)\arctan x - \arctan x$ 后分项积分.

解

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx \\ &= \int \arctan x dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \arctan x d(\arctan x) \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \arctan^2 x + C. \end{aligned}$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} dx.$$

分析 对 $\sqrt{1+x^2}$ 用三角变换消去根号.

解 令 $x = \tan t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan t)\sec t} \sec^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \csc\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln |\sqrt{2} - 1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})(1+x)} dx.$$

解 方法1 令 $\sqrt{x} = \tan t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})(1+x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \tan t \sec^2 t}{\tan t (1 + \tan t) \sec^2 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

方法2 令 $\sqrt{x} = u$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})(1+x)} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)(1+u^2)} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u} du + \int_0^{+\infty} \frac{1-u}{1+u^2} du \\
&= \left[\ln(1+u) - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \arctan t \right]_0^{+\infty} \\
&= \ln \frac{1+u}{\sqrt{1+u^2}} \Big|_0^{+\infty} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

点评 方法 1 在计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \, dt}{\sin t + \cos t}$ 时,利用了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt.$$

五、设曲线 $y = e^x$.

(1) 在此曲线上求一点 A , 使曲线在该点的切线通过坐标原点 O .

(2) 求由曲线 $y = e^x$, 切线 OA 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

(3) 求点 $(0, 1)$ 到点 A 一段曲线弧的长度.

解 (1) 设点 A 的坐标为 (a, e^a) , 则过 A 点的切线方程为 $y - e^a = e^a(x - a)$. 又曲线过原点, 故有 $e^a = e^a a \Rightarrow a = 1$, 即 A 点的坐标为 $(1, e)$. 切线方程为 $y = ex$.

$$\begin{aligned}
(2) \quad V_x &= \pi \int_{-\infty}^1 e^{2x} dx - \frac{1}{3} e^2 \pi = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_{-\infty}^1 - \frac{1}{3} e^2 \pi \\
&= \frac{\pi}{2} e^2 - \frac{\pi}{3} e^2 = \frac{1}{6} e^2 \pi.
\end{aligned}$$

(3) $s = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$, 令 $t = \sqrt{1 + e^{2x}}$, 则

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} \ln(t^2 - 1), \quad dx = \frac{t}{t^2 - 1} dt, \\
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt \\
&= \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{1+e^2} - 1)(\sqrt{2} + 1).$$

六、求解常微分方程 $y'' - 5y' + 6y = (2 + e^x)e^x$.

分析 常系数线性非齐次微分方程, 先求对应的齐次方程的通解, 再分别求出对应于自由项为 $2e^x$ 和 e^{2x} 的非齐次方程的特解.

解 对应的齐次线性微分方程的特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 特征根 $r_1 = 2, r_2 = 3$, 齐次线性方程的通解 $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

设方程 $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$ 的特解 $y_1^* = ae^x$, 代入方程解得 $a = 1$, 即 $y_1^* = e^x$.

设方程 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ 的特解 $y_2^* = bx e^{2x}$, 代入方程解得 $b = -1$, 即 $y_2^* = -x e^{2x}$.

因此, 所求非齐次线性微分方程的通解

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^x - x e^{2x}.$$

七、设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 以 T 为正周期的连续函数, a 是任一常数.

(1) 证明: 对于任何非负整数 n , 有 $\int_a^{a+nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x}$.

解 (1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^{a+nT} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^{a+nT} f(t) dt$, $f(x)$ 以 T 为周期, 所以, 对于任何非负整数 k , 有

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt &= \int_{kT}^{(k+1)T} f(t - kT) d(t - kT) = \int_0^T f(t) dt, \\ \int_{nT}^{a+nT} f(t) dt &= \int_{nT}^{a+nT} f(t - nT) d(t - nT) = \int_0^a f(t) dt, \end{aligned}$$

所以

$$\int_a^{a+nT} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt + \int_{nT}^{a+nT} f(t) dt$$

$$= \int_a^0 f(t) dt + n \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt.$$

(2) 对任一充分大的 x , 总有一正整数 n , 使得

$$0 < nT + a \leq x < (n+1)T + a,$$

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= \int_a^{a+nT} f(t) dt + \int_{a+nT}^x f(t) dt \\ &= n \int_0^T f(t) dt + \int_a^{x-nT} f(t) dt. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 为连续的周期函数, 所以在 $[0, T]$ 上有最值, 记

$$M = \max_{a \leq x \leq a+T} |f(x)| = \max_{0 \leq x \leq T} |f(x)|,$$

则

$$\left| \int_a^{x-nT} f(t) dt \right| \leq \int_a^{x-nT} |f(t)| dt \leq \int_a^{a+T} |f(t)| dt \leq M \int_0^T dt = MT.$$

又 $f(x)$ 为正值函数, 于是

$$\frac{n \int_0^T f(t) dt - MT}{a + (n+1)T} \leq \frac{\int_a^x f(t) dt}{x} \leq \frac{n \int_0^T f(t) dt + MT}{a + nT},$$

$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$, 显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \int_0^T f(t) dt - MT}{a + (n+1)T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \int_0^T f(t) dt + MT}{a + nT} = \frac{\int_0^T f(t) dt}{T},$$

由极限定义易证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x} = \frac{\int_0^T f(t) dt}{T}.$$

点评 前一小题利用周期函数的特性将 $[a, a+nT]$ 上积分用一个周期区间 $[0, T]$ 上的积分表示.

后一小题利用前一小题的结论, 再用广义的夹逼定理得证.

八、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) + f(1) = 0$. 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

证 方法 1

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx \\ &= f(1) - \int_0^1 xf'(x) dx \\ &= \int_0^1 f'(x) dx + f(0) - \int_0^1 xf'(x) dx \\ &= f(0) + \int_0^1 (1-x)f'(x) dx, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 f(x) dx &= f(1) + f(0) + \int_0^1 (1-2x)f'(x) dx \\ &= \int_0^1 (1-2x)f'(x) dx, \end{aligned}$$

由于 $x \in [0, 1]$, $|1-2x| \leq 1$, 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^1 (1-2x)f'(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |(1-2x)f'(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)f'(x) dx \\ &= - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)f'(x) dx, \end{aligned}$$

由于

$$x \in [0, 1], \left| x - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

方法3 因 $f(x) = \int_0^x f'(x) dx + f(0) = \int_1^x f'(x) dx + f(1)$,

故

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left[f(1) + f(0) + \int_0^x f'(x) dx + \int_1^x f'(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^x f'(x) dx + \int_1^x f'(x) dx \right], \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^x f'(x) dx + \int_1^x f'(x) dx \right] dx, \\ \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \left[\int_0^x f'(x) dx + \int_1^x f'(x) dx \right] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \left[\int_0^x f'(x) dx \right] dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \left[\int_1^x f'(x) dx \right] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^x |f'(x)| dx + \int_x^1 |f'(x)| dx \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^1 |f'(x)| dx \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

点评 证明的关键是利用 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 积分之间的关系, 例如

$f(x) = \int_0^x f'(x) dx + f(0) = \int_1^x f'(x) dx + f(1)$. 此外对 $\int_0^1 f(x) dx$ 用分部积分也能产生含 $f'(x)$ 的积分.

试 卷 (七)

——第二学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 都存在是函数 $f(x, y)$ 在该点可微的 ()

- (A) 充分条件; (B) 必要条件;
(C) 充分必要条件; (D) 既非充分也非必要条件.

2. 函数 $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz + 2y - 3$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的方向导数的最大值为 ()

- (A) $4\sqrt{2}$; (B) $3\sqrt{2}$; (C) $2\sqrt{2}$; (D) $\sqrt{2}$.

3. 设 f 为连续函数, 又 $F(t) = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dV$, 其中 Ω :

$0 \leq z \leq \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$, 则 $F'(a) =$ ()

- (A) $\pi a^2 f(a)$; (B) $2\pi a^2 f(a)$;
(C) $\pi a f(a)$; (D) $2\pi a f(a)$.

4. 设曲面 $z^2 - xy = 8 (z > 0)$ 上某点的切平面平行于已知平面 $x - y + 2z - 1 = 0$, 则该点的坐标为 ()

- (A) $(-2, 2, 2)$; (B) $(1, -4, 2)$;
(C) $(2, -2, 2)$; (D) $(4, -1, 2)$.

5. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处

()

- (A) 极限存在; (B) 连续;
(C) 可微; (D) 关于 x, y 的偏导数存在.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

2. 函数 $u = x^{yz}$, 则 $du =$ _____.

3. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, -1)$ 处切线的方向向量

$s =$ _____.

4. 设函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$, 则沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3},$

$\gamma = \frac{\pi}{4}$ 的方向 l 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(1, -1, 1)} =$ _____.

5. 交换二次积分的次序: $\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{1-x^2} f(x, y) dy =$ _____.

三、(每题 8 分,共 16 分)

1. 设函数 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy}) + \frac{y}{g(x^2 + y^2)}$, 其中 f 具有二阶连

续偏导数, g 二阶可导, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 设函数 $F(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, $z = z(x, y)$ 是由方程

$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ 所确定的隐函数, 试求表达式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

四、计算下列各题(每题 8 分,共 32 分)

1. 计算二重积分 $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是由圆周 $x^2 +$

$y^2 = 4$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 是由 yOz 平面上抛物

线 $2z = y^2$ 绕 z 轴旋绕而成的曲面与平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

3. 求曲面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $x + z = 0$, $x - z = 0$ 所截有限部分的面积.

4. 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ 上一点 C 的坐标, 使得以点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ 和 C 为顶点的三角形的面积最小.

五、(12 分) 求函数 $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + y^2$ 在闭区域 $x^2 + 2y^2 \leq 3$ 上的最大值和最小值.

六、(10 分) 设二元函数 $f(x, y)$ 在平面闭区域 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上具有二阶连续偏导数. 证明:

$$(1) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(1, y) - f(0, y), \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(x, 1) - f(x, 0);$$

(2) 若 $f(x, y)$ 在 D 的边界上取零值, 且在 D 上有 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq M$, 则

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{M}{4}.$$

试卷(七)考核内容分值表

考核内容	向量代数和空间解析几何	多元函数微分学	重积分
分值	8	50	42

试卷(七)详解

一、选择题

1. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 都存在是函数 $f(x, y)$ 在该点可微的 ()

- (A) 充分条件; (B) 必要条件;
(C) 充分必要条件; (D) 既非充分也非必要条件.

解 选 B.

由定义得知, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0,$

$y_0)$ 都存在, 但反之不对. 例如 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$ 在点

$(0, 0)$ 处不连续, 故不可微, 但 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

2. 函数 $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz + 2y - 3$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的方向导数的最大值为 ()

- (A) $4\sqrt{2}$; (B) $3\sqrt{2}$; (C) $2\sqrt{2}$; (D) $\sqrt{2}$.

解 选 C.

方向导数的最大值即梯度的模. $\text{grad} u|_{(1, -1, 2)} = (u_x, u_y, u_z)|_{(1, -1, 2)} = (-2, 0, -2)$, $|\text{grad} u|_{(1, -1, 2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

3. 设 f 为连续函数, 又 $F(t) = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dV$, 其中

$\Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$, 则 $F'(a) =$ ()

- (A) $\pi a^2 f(a)$; (B) $2\pi a^2 f(a)$;
(C) $\pi a f(a)$; (D) $2\pi a f(a)$.

解 选 B.

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^t \rho^2 f(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho) d\rho,$$

$$F'(t) = 2\pi t^2 f(t) \Rightarrow F'(a) = 2\pi a^2 f(a).$$

4. 设曲面 $z^2 - xy = 8 (z > 0)$ 上某点的切平面平行于已知平面 $x - y + 2z - 1 = 0$, 则该点的坐标为 ()

(A) $(-2, 2, 2)$; (B) $(1, -4, 2)$;

(C) $(2, -2, 2)$; (D) $(4, -1, 2)$.

解 选 C.

记 $F(x, y, z) = z^2 - xy - 8$, 曲面在任意点的法向量 $n = (F_x, F_y, F_z) = (-y, -x, 2z)$, 已知平面的法向量 $n_1 = (1, -1, 2)$, 令 $n \parallel n_1$, 即 $\frac{-y}{1} = \frac{-x}{-1} = \frac{2z}{2}$, 得 $x = z = t, y = -t$, 代入曲面方程 $F = 0$, 得 $t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$, 因为 $z = t > 0$, 舍去负值, 得切点坐标为 $(2, -2, 2)$.

5. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$

在点 $(0, 0)$ 处 ()

- (A) 极限存在; (B) 连续;
(C) 可微; (D) 关于 x, y 的偏导数存在.

解 选 D.

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$, 可

见平面上的点沿不同射线趋向于原点时函数的极限不同, 所以函数在原点的极限不存在, 进而在该点不连续, 不可微. 故选项 A, B, C 都不正确.

另一方面, $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 同理 $f_y(0, 0) = 0$, 即 f 在 $(0, 0)$ 点可导.

二、填空题

1. 设 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

解 z 或 $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 代入表达式即得.

2. 函数 $u = x^{yz}$, 则 $du =$ _____.

解 $du = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz$.

$$u_x = yzx^{yz-1}, u_y = zx^{yz} \ln x, u_z = yx^{yz} \ln x.$$

3. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, -1)$ 处切线的方向向量

$s =$ _____.

解 $(3, -2, -1)$ 或任何平行于它的向量.

令 $F = x^2 + y^2 + z^2 - 6$, $G = x + y + z - 2$, 所求切线的方向向量

$$\begin{aligned} s &= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right) \Big|_{(1, 2, -1)} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (6, -4, -2) // (3, -2, -1). \end{aligned}$$

4. 设函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$, 则沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$,

$\gamma = \frac{\pi}{4}$ 的方向 l 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1, -1, 1)} =$ _____.

解 $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

$$\text{grad } u \Big|_{(1, -1, 1)} = (u_x, u_y, u_z) \Big|_{(1, -1, 1)} = (2, -3, 4),$$

$$l^0 = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1, -1, 1)} = \text{grad } u \Big|_{(1, -1, 1)} \cdot l^0 = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2},$$

5. 交换二次积分的次序: $\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{1-x^2} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

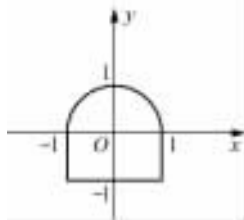
解 $\int_{-1}^0 dy \int_{-1}^1 f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx.$

积分区域 $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 -$

x^2 , 即

$$D: -1 \leq y \leq 0, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{及 } 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y}.$$



三、1. 设函数 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy}) + \frac{y}{g(x^2 + y^2)}$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 二阶可导, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1 + ye^{xy}f_2 - \frac{2xyg'}{g^2},$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x(-2yf_{11} + xe^{xy}f_{12}) + (1 + xy)e^{xy}f_2 \\ &\quad + ye^{xy}(-2yf_{21} + xe^{xy}f_{22}) - 2x \frac{(g' + 2y^2g'')g^2 - yg'2gg'2y}{g^4} \\ &= (1 + xy)e^{xy}f_2 - 4xyf_{11} + 2(x^2 - y^2)e^{xy}f_{12} \\ &\quad + xy e^{2xy}f_{22} - 2x \frac{gg' + 2y^2gg'' - 4y^2(g')^2}{g^3}. \end{aligned}$$

2. 设函数 $F(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, $z = z(x, y)$ 是由方程

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 \text{ 所确定的隐函数, 试求表达式 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $\frac{z - xz_x}{z^2}F_1 - \frac{yz_x}{z^2}F_2 = 0, \Rightarrow z_x = \frac{zF_1}{xF_1 + yF_2}.$

由对称性可得 $z_y = \frac{zF_2}{xF_1 + yF_2}, \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$

点评 也可用公式法求隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数: 令 $u(x, y, z) = F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, 则

$$u_x = \frac{1}{z}F_1, u_y = \frac{1}{z}F_2,$$

$$u_z = \frac{-1}{z^2}[xF_1 + yF_2],$$

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}, z_y = -\frac{u_y}{u_z}.$$

四、计算下列各题

1. 计算二重积分 $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

分析 被积函数为 $f(x^2 + y^2)$ 型, 积分区域为圆型, 适用极坐标变换求二重积分.

解 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned} & \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r \ln(1 + r^2) dr \stackrel{t=r^2}{=} \frac{\pi}{4} \int_0^4 \ln(1 + t) dt \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(1 + t) \ln(1 + t) \Big|_0^4 - \int_0^4 dt \right] = \frac{\pi}{4} (5 \ln 5 - 4). \end{aligned}$$

2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 是由 yOz 平面上抛物线 $2z = y^2$ 绕 z 轴旋绕而成的曲面与平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

分析 被积函数为 $f(x^2 + y^2)$ 型, 积分区域 Ω 为以 z 轴为中心轴的旋转体, 适合用柱面坐标变换求三重积分.

解 方法 1 积分先单后重: Ω 在 xOy 平面上的投影区域 $D: x^2 + y^2 \leq 4$, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV &= \iint_D dx dy \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^2 (x^2 + y^2) dz \\ &= \iint_D (x^2 + y^2) \left[2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{1}{2}r^2 \right) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{12}r^6 \right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

方法 2 积分先重后单: Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[0, 2]$, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV &= \int_0^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = 2\pi \int_0^2 z^2 dz = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

3. 求曲面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $x + z = 0$, $x - z = 0$ 所截有限部分的面积.

分析 计算柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的部分曲面面积, 需将曲面投影到 zOx 平面或 yOz 平面上, 化为关于 z , x 或 y , z 的二重积分, 并尽量利用图形的对称性.

解 方法 1 由对称性可知, 只要计算位于第一卦限部分曲面的面积, 这一部分柱面的方程为 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, 曲面在 zOx 平面上的投影区域 $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq x$, 则

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_D \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx dz \\ &= a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz = a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \int_0^x dz \end{aligned}$$

$$= a \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^a = a^2,$$

所以 $S = 8S_1 = 8a^2$.

方法2 利用曲线积分计算柱面面积.

第一卦限部分圆柱面在 xOy 平面的投影曲线 $C: x = a \cos t, y = a \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 于是

$$\begin{aligned} S &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, ds = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \sqrt{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt \\ &= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 8a^2. \end{aligned}$$

4. 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ 上一点 C 的坐标, 使得以点

$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$ 和 C 为顶点的三角形的面积最小.

分析 用直线的参数式表示 C 的坐标, 再用向量积的模计算三角形的面积.

解 方法1 已知直线的参数式为 $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}$, 设点 C 的坐标为

$(2+t, 2+t, -t)$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (1+t, 2+t, -t), \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \\ \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} &= (t, t, 2t+3), \\ S^2 &= |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|^2 = t^2 + t^2 + (2t+3)^2 = 6(t+1)^2 + 3, \end{aligned}$$

所以, 当 $t = -1$ 时三角形的面积最小, 故点 C 的坐标为 $(1, 1, 1)$.

方法2 显然, 只有当点 A, B, C 所在的平面与已知直线垂直时, 它们所构成的三角形的面积最小. $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, 过点 A, B 的直线为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$, 即 $\begin{cases} x+y=1, \\ z=0, \end{cases}$ 则过此直线的平面束方程是

$x + y + \lambda z - 1 = 0$, 其中与已知直线垂直的平面满足 $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{\lambda}{-1}$, $\Rightarrow \lambda = -1$, 即平面为 $x + y - z - 1 = 0$, 点 C 即此平面与已知直线的交点.

将已知直线的参数式 $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -t \end{cases}$ 代入平面方程, 得 $t = -1$, C 点

的坐标为 $(1, 1, 1)$.

五、求函数 $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + y^2$ 在闭区域 $x^2 + 2y^2 \leq 3$ 上的最大值和最小值.

解 方法 1 在区域内部:

$$\text{令 } \begin{cases} f_x = 4x + 6y = 0, \\ f_y = 6x + 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

即有唯一驻点 $(0, 0)$, 且 $f(0, 0) = 0$.

在区域的边界上:

$$\text{令 } \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \text{ 则在边界上}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 6\cos^2 t + 9\sqrt{2}\cos t \sin t + \frac{3}{2}\sin^2 t \\ &= 3(1 + \cos 2t) + \frac{9\sqrt{2}}{2}\sin 2t + \frac{3}{4}(1 - \cos 2t) \\ &= \frac{15}{4} + \frac{9}{4}\cos 2t + \frac{9\sqrt{2}}{2}\sin 2t \\ &= \frac{15}{4} + \frac{27}{4}\sin(2t + \varphi) \quad \left(\varphi = \arctan \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } -3 \leq f(x, y) \leq \frac{21}{2}.$$

综上, $f(x, y)$ 的最大值为 $\frac{21}{2}$, 最小值为 -3 .

方法 2 在区域内部同方法 1, 有极值 $f(0, 0) = 0$.

在区域的边界上: 求 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + 2y^2 = 3$ 下的极值.

令 $F(x, y, \lambda) = 2x^2 + 6xy + y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 3)$, 解方程组

$$\begin{cases} F_x = 4x + 6y + 2\lambda x = 0, \\ F_y = 6x + 2y + 4\lambda y = 0, \\ F_\lambda = x^2 + 2y^2 - 3 = 0, \end{cases}$$

得 $\lambda = 1, -\frac{7}{2} \Rightarrow$ 驻点 $(\pm 1, \mp 1), (\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}), f(\pm 1, \mp 1) = -3,$

$$(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{21}{2}.$$

$f(x, y)$ 的最大值为 $\frac{21}{2}$, 最小值为 -3 .

方法 3 令 $g(x, y, \lambda) = 2x^2 + 6xy + y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - k), k \in [0, 3]$.

解方程组

$$\begin{cases} g_x = 4x + 6y + 2\lambda x = 0, \\ g_y = 6x + 2y + 4\lambda y = 0, \\ g_\lambda = x^2 + 2y^2 - k = 0, \end{cases}$$

$$\text{得驻点} \begin{cases} \lambda = 1, \\ x_1 = \pm\sqrt{\frac{k}{3}}, \\ y_1 = \mp\sqrt{\frac{k}{3}}, \end{cases} \begin{cases} \lambda = -\frac{7}{2}, \\ x_2 = \pm 2\sqrt{\frac{k}{6}}, \\ y_2 = \pm\sqrt{\frac{k}{6}}, \end{cases} \Rightarrow f(x_1, y_1) = -k, f(x_2, y_2)$$

$$= \frac{7}{2}k, k \in [0, 3],$$

所以 $f(x, y)$ 的最大值为 $\frac{21}{2}$, 最小值为 -3 .

点评 $f(x, y)$ 在闭区域上的最大值和最小值必在区域内的驻点或区域的边界上取得. 在边界上的讨论用条件极值是一般的方法. 也可利用边界曲线将 $f(x, y)$ 表示成一元函数(如方法 1)并讨论它的极值. 方法 3 是将椭圆区域看做椭圆曲线族, 求出 $f(x, y)$ 在 $x^2 + 2y^2 = k$ 上驻点处的值, 再根据 k 的范围得到最大值和最小值, 是个不错的做法.

六、设二元函数 $f(x, y)$ 在平面闭区域 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上具有二阶连续偏导数. 证明:

$$(1) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(1, y) - f(0, y), \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(x, 1) - f(x, 0);$$

(2) 若 $f(x, y)$ 在 D 的边界上取零值, 且在 D 上有 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq M$, 则

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{M}{4}.$$

证 (1) 固定 y , 则 $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, y)} = \frac{df(x, y)}{dx}$, 从而

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_0^1 df(x, y) = f(1, y) - f(0, y);$$

同理可得 $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_0^1 df(x, y) = f(x, 1) - f(x, 0).$

$$(2) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy,$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \int_0^1 f(x, y) dy &= yf(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 yf_y(x, y) dy \\ &= - \int_0^1 y \frac{\partial f}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = - \int_0^1 dx \int_0^1 y \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_0^1 y dy \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} d(1-x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 y \left[(1-x) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx \right] dy \\
&= - \int_0^1 y \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} dy - \iint_D y(1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy \\
&= - \iint_D y(1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy,
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| &= \left| - \iint_D y(1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy \right| \\
&\leq \iint_D \left| y(1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| dx dy \\
&\leq M \iint_D y(1-x) dx dy \\
&= M \int_0^1 y dy \int_0^1 (1-x) dx = \frac{M}{4}.
\end{aligned}$$

点评 本题为了利用条件 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq M$, 需要由 $\iint_D f(x, y) dx dy$

产生 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, 而通过定积分的分部积分可产生偏导数.

试 卷 (八)

——第二学期期末试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $f(x, y) = 3x - x^3 + y^2 + 2y$, 则下列结论正确的是 ()

- (A) $f(1, -1)$ 是函数的极小值;
- (B) $f(1, -1)$ 是函数的极大值;
- (C) $f(-1, -1)$ 是函数的极小值;
- (D) $f(-1, -1)$ 是函数的极大值.

2. 已知平面 $\Pi: x + 2y - z + 1 = 0$, 曲面 $z = xy$ 上点 P 处的法线与平面 Π 垂直, 则点 P 的坐标为 ()

- (A) $(1, 2, 2)$; (B) $(2, 1, 2)$;
- (C) $(-1, -2, 2)$; (D) $(-2, -1, 2)$.

3. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2y$ 所割下的那部分曲面片的面积为 ()

- (A) π ; (B) 2π ; (C) $\sqrt{2}\pi$; (D) 4π .

4. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 2, 则数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是 ()

- (A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;
- (C) 发散; (D) 收敛性不能确定.

5. 已知向量 a 与 b 相互平行, 则下列结论中正确的是 ()

- (A) 存在常数 k , 使得 $a = kb$;
- (B) 存在常数 k , 使得 $b = ka$;

(C) $a \times b = 0$;

(D) 存在常数 k_1 和 k_2 , 使得 $k_1 a + k_2 b = 0$.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设函数 $u(x, y, z) = x^{\frac{z}{y}}$, 则在点 $(e, 1, 1)$ 沿方向 $l = (1, -2, 2)$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(e, 1, 1)} =$ _____.

2. 向量场 $A = (2z - 3y)i + (3x - z)j + (y - 2x)k$ 的旋度 $\text{rot } A =$ _____.

3. 设平面曲线 $C: 2x^2 + y^2 = 1$, 取正向, 则曲线积分 $\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} =$ _____.

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n} x^{2n-1}$ 的收敛域是 _____.

5. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且 $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$, 又 a_n 是 $f(x)$ 的傅立叶系数 ($n = 1, 2, \dots$), 则在 $[-\pi, \pi]$ 上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 的和函数 $S(x) =$ _____.

三、(每题 8 分,共 16 分)

1. 设函数 $z = xyf(u), u = x^2 - y^2$, 且 $f(u)$ 为可导函数, 试求 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 试求区域 $\Omega: z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ 的体积.

四、(8 分)计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (1+x)y^2 dydz + (y+z^2) dzdx + (1+z)x^2 dxdy,$$

其中 Σ 为抛物面 $z + 1 = x^2 + y^2 (-1 \leq z \leq 0)$, 并取上侧.

五、(22 分)

1. (7 分) 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a \neq -1$) 的敛散性.

2. (7 分) 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ 展开成 x 的幂级数, 并写出展开式成立的区间.

3. (8 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

六、(每题 8 分, 16 分)

1. 计算曲线积分 $\int_L ydx - xdy + (x^2 + y^2)dz$, 其中 L 是曲线 $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = 2^t$ 上起点为 $A(e, e^{-1}, 2)$ 终点为 $B(1, 1, 1)$ 的一段弧.

2. 已知 $f(x) = e^x$, 试求方程 $(yf'(xy) + y)dx + (xf'(xy) + x)dy = 0$ 的通解.

七、(8 分)

1. 证明: 对于任意正整数 n , 方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正根, 记之为 x_n ;

2. 试定出 α 的取值范围, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛, 其中 $\{x_n\}$ 为上题中方程的根.

试卷(八)考核内容分值表

考核内容	向量代数和空间解析几何	多元函数微分学	重积分	曲线、曲面积分	无穷级数
分值	3	17	8	33	39

试卷(八)详解

一、选择题

1. 设 $f(x, y) = 3x - x^3 + y^2 + 2y$, 则下列结论正确的是

()

- (A) $f(1, -1)$ 是函数的极小值;
- (B) $f(1, -1)$ 是函数的极大值;
- (C) $f(-1, -1)$ 是函数的极小值;
- (D) $f(-1, -1)$ 是函数的极大值.

解 选 C.

解 $\begin{cases} f_x = 3(1 - x^2) = 0, \\ f_y = 2(1 + y) = 0, \end{cases}$ 得驻点 $(1, -1), (-1, -1)$,

$f_{xx} = -6x, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2$, 记 $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$, 由

$\Delta(1, -1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$ 可知 $(1, -1)$ 非极值点;

$\Delta(-1, -1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0, f_{xx}(-1, -1) = 6 > 0$, 可知

$(-1, -1)$ 是极小值点. 所以 $f(-1, -1)$ 是函数的极小值.

2. 已知平面 $\Pi: x + 2y - z + 1 = 0$, 曲面 $z = xy$ 上点 P 处的法线与平面 Π 垂直, 则点 P 的坐标为

()

- (A) $(1, 2, 2)$;
- (B) $(2, 1, 2)$;
- (C) $(-1, -2, 2)$;
- (D) $(-2, -1, 2)$.

解 选 B.

$z = xy$ 的法向量 $n = (y, x, -1)$, 法线与平面 Π 垂直, 从而与平

面 Π 的法向量 $(1, 2, -1)$ 平行, 故有 $\frac{y}{1} = \frac{x}{2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow z = 2$, 即点 P 的坐标为 $(2, 1, 2)$.

3. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2y$ 所割下的那部分曲面片的面积为 ()

- (A) π ; (B) 2π ; (C) $\sqrt{2}\pi$; (D) 4π .

解 选 C.

解 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2y, \end{cases}$ 得 $x^2 + y^2 = 2y$, 故曲面 Σ 在 xOy 上的投影

区域

$$D: x^2 + y^2 \leq 2y.$$

曲面面积

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} d\sigma \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} d\sigma \\ &= \iint_D \sqrt{2} d\sigma = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

4. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 2, 则数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是 ()

- (A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;
(C) 发散; (D) 收敛性不能确定.

解 选 B.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 2, 则它在 $(-2, 2)$ 内绝对收敛, 取

$x = 1 \in (-2, 2)$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

5. 已知向量 a 与 b 相互平行, 则下列结论中正确的是 ()

- (A) 存在常数 k , 使得 $a = kb$;
 (B) 存在常数 k , 使得 $b = ka$;
 (C) $a \times b = 0$;
 (D) 存在常数 k_1 和 k_2 , 使得 $k_1 a + k_2 b = 0$.

解 选 D.

当 b 为零向量, a 为非零向量时, 选项 A 不成立; 同理, 选项 B 不必成立.

仅当 a 和 b 同为三维向量时有向量积 $a \times b$, 即 $a \times b$ 为向量, 而选项 C 中 $a \times b$ 为数零是不正确的.

二、填空题

1. 设函数 $u(x, y, z) = x^{\frac{z}{y}}$, 则在点 $(e, 1, 1)$ 沿方向 $l = (1, -2, 2)$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(e, 1, 1)} =$ _____.

解 $\frac{1+4e}{3}$.

$$u_x = \frac{z}{y} x^{\frac{z}{y}-1}, u_y = -\frac{z}{y^2} x^{\frac{z}{y}} \ln x, u_z = \frac{1}{y} x^{\frac{z}{y}} \ln x,$$

$$\begin{aligned} \left. \text{grad } u \right|_{(e, 1, 1)} &= (u_x, u_y, u_z) \Big|_{(e, 1, 1)} \\ &= (1, -e, e), \end{aligned}$$

$$l^0 = \frac{1}{3}(1, -2, 2),$$

所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(e, 1, 1)} &= \left. \text{grad } u \right|_{(e, 1, 1)} \cdot l^0 \\ &= (1, -e, e) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \frac{1+4e}{3}. \end{aligned}$$

2. 向量场 $A = (2z - 3y)i + (3x - z)j + (y - 2x)k$ 的旋度 $\text{rot } A =$ _____.

解 $2i + 4j + 6k$.

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z - 3y & 3x - z & y - 2x \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

3. 设平面曲线 $C: 2x^2 + y^2 = 1$ 取正向, 则曲线积分 $\oint_C \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} =$

解 2π .

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$P_y = Q_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$$

取 $C_1: x = \cos \theta, y = \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow 2\pi$, 则

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} &= \left(\oint_C \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} - \oint_{C_1} \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} \right) + \oint_{C_1} \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} \\ &= \oint_{C_1} \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

点评 本题直接计算比较困难, 而沿圆周的曲线积分计算很简单, 并且在不含原点的区域上 P, Q 的偏导数连续, $P_y \equiv Q_x$, 故添加曲线 C_1 , 利用格林公式, 沿曲线 C 的正向的曲线积分减去沿 C_1 (按逆时针方向) 的曲线积分为零, 从而将曲线 C 上的积分转换为 C_1 上的积分.

注意: 原点是曲线 C 所围区域内的一个奇点, 不能由

$$P_y \equiv Q_x \Rightarrow \oint_C \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n} x^{2n-1}$ 的收敛域是_____.

解 $[-2, 2]$.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n}n}} = \frac{1}{4}, R = \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 2, \text{ 当 } x = \pm 2 \text{ 时, 级数为}$$

$$\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}, \text{ 是收敛级数, 故幂级数的收敛域是 } [-2, 2].$$

5. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且 $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$, 又 a_n 是 $f(x)$ 的傅立叶系数 ($n = 1, 2, \dots$), 则在 $[-\pi, \pi]$ 上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ 的和函数 } S(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{解 } x^2 - \frac{\pi^2}{3}.$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, x \in [-\pi, \pi], a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$\text{故 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = x^2 - \frac{a_0}{2} = x^2 - \frac{\pi^2}{3}, -\pi \leq x \leq \pi.$$

三、1. 设函数 $z = xyf(u), u = x^2 - y^2$, 且 $f(u)$ 为可导函数, 试求

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = yf(u) + 2x^2 y f'(u), \frac{\partial z}{\partial y} = xf(u) - 2xy^2 f'(u),$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2) f(u).$$

2. 试求区域 $\Omega: z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ 的体积.

$$\text{解 } \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow z = 0, z = 1.$$

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^1 \pi z dz + \int_1^2 \pi(2z - z^2) dz = \frac{7}{6} \pi.$$

四、计算曲面积分

$$I = \iiint_{\Sigma} (1+x)y^2 dydz + (y+z^2) dzdx + (1+z)x^2 dxdy,$$

其中 Σ 为抛物面 $z+1=x^2+y^2$ ($-1 \leq z \leq 0$), 并取上侧.

解 补充平面 $\Sigma_1: z=0$ ($x^2+y^2 \leq 1$), 方向取下侧, 则 Σ 与 Σ_1 围成闭区域的内侧, 于是

$$\begin{aligned} I &= \left(\iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) (1+x)y^2 dydz + (y+z^2) dzdx + (1+z)x^2 dx dy \\ &= - \iiint_{x^2+y^2-1 \leq z \leq 0} (x^2+y^2+1) dV + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2+1) dx dy \int_{x^2+y^2-1}^0 dz + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2+1)(1-x^2-y^2) dx dy + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^4) r dr = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

点评 通常可利用高斯公式来计算第二类曲面积分. 本题 Σ 不是封闭曲面, 可添上适当的曲面, 使它与 Σ 构成一封闭曲面, 然后利用高斯公式解.

五、1. 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a \neq -1$) 的敛散性.

分析 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ 与 a 的取值有关, 故应对 a 分 $|a| < 1$, $|a| > 1$ 和 $a = 1$ 三种情形讨论级数的敛散性.

解 当 $|a| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = 1 \neq 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 发散.

当 $a = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = \frac{1}{2} \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 也发散.

当 $|a| > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 绝对收敛, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^n}{1+a^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1+a^{-n}} \right| = 1$,

根据比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛, 且为绝对收敛.

综上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a \neq -1$) 当 $|a| > 1$ 时为绝对收敛, 当

$|a| \leq 1$ 时发散.

2. 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ 展开成 x 的幂级数, 并写出展开式成立的区间.

分析 $f(x) = \frac{x-1}{(x-3)(x+1)}$ 可以表示成 $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$, 利用 $\frac{1}{x \pm 1}$ 的展开式可得到 $f(x)$ 的展开式.

解
$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right),$$

由于
$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \left(-1 < \frac{x}{3} < 1\right),$$

所以
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left[(-1)^n - \frac{1}{3^{n+1}} \right] x^n \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

分析 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 可看做幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n}$ 取 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的情形, 而利用对 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}$ 逐项求导以及 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$, 进而求出 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

解 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n}$, 则

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n-2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n-1})' \\
 &= x^2 \left(x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \right)' = x^2 \left(x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right)' \\
 &= x^2 \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = x^2 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad (-1 < x < 1),
 \end{aligned}$$

于是

$$S = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.$$

六、1. 计算曲线积分 $\int_L y \, dx - x \, dy + (x^2 + y^2) \, dz$, **其中** L **是曲线** $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = 2^t$ **上起点为** $A(e, e^{-1}, 2)$ **终点为** $B(1, 1, 1)$ **的一段弧.**

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_L y \, dx - x \, dy + (x^2 + y^2) \, dz \\
 &= \int_1^0 [e^{-t} e^t + e^t e^{-t} + (e^{2t} + e^{-2t}) 2^t \ln 2] \, dt \\
 &= \int_1^0 [2 + (2e^2)^t \ln 2 + (2e^{-2})^t \ln 2] \, dt \\
 &= \left[2t + \frac{(2e^2)^t \ln 2}{\ln(2e^2)} + \frac{(2e^{-2})^t \ln 2}{\ln(2e^{-2})} \right] \Big|_1^0 \\
 &= \ln 2 \left(\frac{1-2e^2}{\ln 2 + 2} + \frac{1-2e^{-2}}{\ln 2 - 2} \right) - 2.
 \end{aligned}$$

2. 已知 $f(x) = e^x$, **试求方程** $[yf'(xy) + y]dx + [xf'(xy) + x]dy = 0$ **的通解.**

解 设 $P = yf'(xy) + y$, $Q = xf'(xy) + x$, 则

$P_y = f'(xy) + xyf''(xy) + 1 = Q_x$, 且 P, Q 的偏导数连续, 故

$$[yf'(xy) + y]dx + [xf'(xy) + x]dy = 0$$

是全微分方程. 设 $u(x, y)$ **是一个原函数, 则**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = yf'(xy) + y \Rightarrow u(x, y) = f(xy) + xy + g(y),$$

由 $Q = xf'(xy) + x = \frac{\partial u}{\partial y} = xf'(xy) + x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow$

$g(y) = C$, 故全微分方程的通解为 $f(xy) + xy = C$, 也即 $e^{xy} + xy = C$.

点评 题 1 为空间曲线 L 上的第二类曲线积分, L 用参数方程表示, 直接将曲线积分化为对参数的定积分即可.

题 2 要解一微分方程, 此方程也可凑成 $df(xy) + d(xy) = 0$, 两边积分即得 $f(xy) + xy = C$, 亦即 $e^{xy} + xy = C$.

七、1. 证明: 对于任意正整数 n , 方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正根, 记之为 x_n ;

2. 试定出 α 的取值范围, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛, 其中 $\{x_n\}$ 为上题方程中的根.

证 1. 对于任意正整数 n , 记 $f_n(x) = x^n + nx - 1$, 则由 $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n > 0$ 可知方程 $f_n(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有实根. 又当 $x > 0$ 时,

$$\frac{df_n(x)}{dx} = nx^{n-1} + n > 0,$$

即 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增, 从而 $f_n(x) = 0$ 存在唯一正根 x_n , 且 $x_n \in (0, 1)$.

2. $x_n^n + nx_n - 1 = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} \Rightarrow 0 < x_n = \frac{(1 - x_n^n)^n}{n^n} < \frac{1}{n^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x_n^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{(1 - x_n^n)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n^n)^\alpha = 1,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 同敛散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 当 $\alpha \in (1, +\infty)$ 时收敛.

点评 本题利用介值定理和严格单调性证明了对任一固定的 n , 方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一的实根, 进而证得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$.

又 $x_n = \frac{1 - x_n^n}{n}$, 故 $x_n^\alpha \sim \frac{1}{n^\alpha}$ ($n \rightarrow \infty$), 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 同敛散.

试 卷 (九)

——第一学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 若 $f(x) = \frac{x^2}{x+1} - ax - b$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小, 则 ()

- (A) $a = 1, b = -1$; (B) $a = 1, b = 1$;
(C) $a = -1, b = -1$; (D) $a = -1, b = 1$.

2. 设 $f'(x_0) = -3$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 3h)}{h}$ 为 ()

- (A) -3 ; (B) -6 ; (C) -9 ; (D) -12 .

3. 曲线 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$ 的拐点为 ()

- (A) 只有 $(1, 4)$ 一点;
(B) 只有 $(1, -4)$ 一点;
(C) 有 $(0, 0), (1, 4), (1, -4)$ 三个点;
(D) 有 $(1, 4), (1, -4)$ 两个点.

4. 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$ ()

- (A) 有且仅有水平渐近线;
(B) 有且仅有垂直渐近线;
(C) 既有水平渐近线, 也有垂直渐近线;
(D) 水平渐近线和垂直渐近线都没有.

5. 已知 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 有 ()

- (A) 分别位于区间 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ 内的三个实根;
 (B) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ 四个实根;
 (C) 分别位于区间 $(0, 1)$ $(1, 2)$ $(2, 3)$ $(3, 4)$ 内的四个实根;
 (D) 分别位于区间 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ 内的三个实根.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.
2. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ 在 $x_0 = 2$ 处的泰勒展开式为 _____.
3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\sin x} - e^x$ 是 x 的 _____ 阶无穷小.
4. 设
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 2x^2 - 2 & (0 < x \leq 1), \\ x & (x > 1), \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的间断点为 _____, 它们的类型为 _____.

5. 设 $y = \ln(1 + x^x)$, 则 $dy =$ _____.

三、(每题 6 分,共 18 分)

1. 用极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{1}{2}$.
2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \sin x)^{2x} - 1}{x^2}$.
3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

四、(每题 6 分,共 18 分)

1. 设 $y = f(x^2) + \ln f(x)$, 其中 $f(x) > 0$, 且 $f''(x)$ 存在, 求 y'' .
2. 设方程 $x^3 + y^3 - 3x + 6y = 2$ 确定了 y 是 x 的函数, 求 $y(x)$ 所表示的曲线在 $x = 2$ 处的曲率.
3. 求曲线 $r = a \sin 2\theta$ (a 为常数) 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线及法线方程.

五、(7 分)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{a(\sqrt{1+x}-1)}{x} & (x < 0), \\ 1 & (x = 0), \\ b(e^{-\frac{1}{x}} + 2) + c \ln(1+x) & (x > 0), \end{cases}$$

试确定常数 a, b, c , 使 $f(x)$ 在 0 点连续且可导.

六、(7 分)

证明不等式 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, 其中 a, b, p, q 都是正数, 且 p, q 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

七、(12 分)

全面研究函数 $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的性态, 并作图.

$$\left[\text{已知 } y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, y'' = \frac{6(x+1)}{(x-1)^4}. \right]$$

八、(8 分, 下面两题任选一题)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$, 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2. 对任意 $x \geq 0$, 试证: 存在 $\theta(x)$, 满足 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 且 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$.

试卷(九)考核内容分值表

考核内容	极限和连续	导数和微分	微分中值定理和导数的应用
分值	27	34	39

试卷(九)详解

一、选择题

1. 若 $f(x) = \frac{x^2}{x+1} - ax - b$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小, 则

()

(A) $a = 1, b = -1$;

(B) $a = 1, b = 1$;

(C) $a = -1, b = -1$;

(D) $a = -1, b = 1$.

解 选 A.

$$\begin{aligned}\text{因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (ax+b)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x - b}{x+1} = 0,\end{aligned}$$

所以有 $\begin{cases} 1-a=0, \\ a+b=0, \end{cases}$ 解得 $a=1, b=-1$.

2. 设 $f'(x_0) = -3$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-3h)}{h}$ 为 ()

(A) -3 ;

(B) -6 ;

(C) -9 ;

(D) -12 .

解 选 D.

$$\begin{aligned}& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)] - [f(x_0-3h) - f(x_0)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-3h) - f(x_0)}{(-3h)} \\ &= 4f'(x_0) = -12.\end{aligned}$$

3. 曲线 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$ 的拐点为 ()

- (A) 只有(1, 4)一点;
(B) 只有(1, -4)一点;
(C) 有(0, 0), (1, 4), (1, -4)三个点;
(D) 有(1, 4), (1, -4)两个点.

解 选 D.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3+3t^2}{2t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6t \cdot 2t - 2(3+3t^2)}{(2t)^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{6(t^2-1)}{8t^3},$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, 得 $t = \pm 1$. 另外, 当 $t = 0$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 不存在.

当 $t < -1$ 时, $y''(x) < 0$, 当 $-1 < t < 0$ 时, $y''(x) > 0$, 故(1, -4)是拐点.

当 $0 < t < 1$ 时, $y''(x) < 0$, 当 $t > 1$ 时, $y''(x) > 0$, 故(1, 4)也是拐点.

而当 $t = 0$ 时, 对应点(0, 0), 由于曲线当 $x < 0$ 无定义, 故(0, 0)不是拐点.

4. 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$ ()

- (A) 有且仅有水平渐近线;
(B) 有且仅有垂直渐近线;
(C) 既有水平渐近线, 也有垂直渐近线;
(D) 水平渐近线和垂直渐近线都没有.

解 选 A.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

故 $y = 1$ 是曲线的水平渐近线. 又因

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

所以曲线无垂直渐近线.

5. 已知 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 有 ()

- (A) 分别位于区间 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ 内的三个实根;
(B) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ 四个实根;
(C) 分别位于区间 $(0, 1)(1, 2)(2, 3)(3, 4)$ 内的四个实根;
(D) 分别位于区间 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ 内的三个实根.

解 选 A.

因为 $f(x)$ 为多项式, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续并且可导, 且满足:

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0.$$

在区间 $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ 上分别运用罗尔定理, 得方程 $f'(x) = 0$ 在区间 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ 内各有一个实根.

二、填空题

1. 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

解 应填 $(2t+1)e^{2t}$.

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx} = t \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{2t} = te^{2t},$$

$$f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = (2t+1)e^{2t}.$$

2. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ 在 $x_0 = 2$ 处的泰勒展开式为 _____.

解 $f(x) = 1 + 8(x-2) + 12(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^4$.

因为 $f(2) = 1, f'(2) = (4x^3 - 6x^2)|_{x=2} = 8,$

$$f''(2) = (12x^2 - 12x)|_{x=2} = 24,$$

$$f'''(2) = (24x - 12)|_{x=2} = 36,$$

$$f^{(4)}(2) = 24, n > 4, f^{(n)}(x) = 0,$$

所以 $f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2$

$$+ \frac{1}{3!}f'''(2)(x-2)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(2)(x-2)^4$$

$$= 1 + 8(x-2) + 12(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\sin x} - e^x$ 是 x 的 _____ 阶无穷小.

解 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\sin x - x} - 1)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x - x} - 1}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{kx^{k-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^{k-1}} \stackrel{k=3}{=} \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$4. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 2x^2 - 2 & (0 < x \leq 1), \\ x & (x > 1), \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的间断点为 _____, 它们的类型为 _____.

解 $x = 0, x = 1$; 第一类跳跃间断点.

在点 $x = 0$ 处, $f(0+0) = -2, f(0-0) = 1, f(0+0) \neq f(0-0)$,

故 $x = 0$ 为第一类跳跃间断点.

在点 $x = 1$ 处, $f(1+0) = 1, f(1-0) = 0, f(1+0) \neq f(1-0)$,

故 $x = 1$ 为第一类跳跃间断点.

5. 设 $y = \ln(1+x^x)$, 则 $dy =$ _____.

解 应填 $\frac{x^x(1+\ln x)}{1+x^x}dx$.

$$\begin{aligned}dy &= y'(x)dx = [\ln(1+x^x)]'dx \\ &= \frac{(1+x^x)'}{1+x^x}dx = \frac{x^x(1+\ln x)}{1+x^x}dx.\end{aligned}$$

三、1. 用极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{1}{2}$.

$$\text{证 由 } \left| x(\sqrt{x^2+1} - x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} - \frac{1}{2} \right| =$$

$$\frac{1}{2(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \leq \frac{1}{2(2x)^2} = \frac{1}{8x^2} < \frac{1}{x^2} < \epsilon, \text{ 得 } x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ 所以}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists X = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} > 0, \text{ 当 } x > X \text{ 时, 有 } \left| x(\sqrt{x^2+1}-x) - \frac{1}{2} \right| < \epsilon,$$

$$\text{即} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \sin x)^{2x} - 1}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \sin x)^{2x} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x \ln(\cos x + \sin x)} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln(\cos x + \sin x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\cos x + \sin x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x + \sin x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2(-\sin x + \cos x) = 2. \end{aligned}$$

点评 解题中第二个等号是用了: 当 $u \rightarrow 0$ 时, $e^u - 1$ 与 u 为等价无穷小; 第四个等号是用了: 当 $u \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+u)$ 与 u 为等价无穷小.

$$3. \text{ 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

点评 “ $\infty - \infty$ ”型不定式, 是分式减分式, 首先应通分, 化为“ $\frac{0}{0}$ ”型不定式.

四、1. 设 $y = f(x^2) + \ln f(x)$, **其中** $f(x) > 0$, **且** $f''(x)$ **存在, 求** y''

$$\text{解} \quad y' = f'(x^2) \cdot 2x + \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

$$y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2) + \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

2. 设方程 $x^3 + y^3 - 3x + 6y = 2$ 确定了 y 是 x 的函数, 求 $y(x)$ 所表示的曲线在 $x = 2$ 处的曲率.

解 由 $x = 2$ 代入方程, 得 $y = 0$.

方程两边对 x 求一阶导数, 得

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3 + 6y' = 0,$$

将 $x = 2, y = 0$ 代入, 得 $y'(2) = -\frac{3}{2}$.

方程两边再求一次导数, 得 $6x + 6yy'^2 + 3y^2 y'' + 6y'' = 0$,

将 $x = 2, y = 0, y'(2)$ 代入, 得 $y''(2) = -2$.

故曲线在 $x = 2$ 处的曲率 $K|_{x=2} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{16}{13^{3/2}}$.

点评 在曲率公式中, 需计算 $y'(2)$ 与 $y''(2)$, 而不需计算导函数

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

3. 求曲线 $r = a \sin 2\theta$ (a 为常数) 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线及法线方程.

解 设 $\begin{cases} x = a \sin 2\theta \cos \theta, \\ y = a \sin 2\theta \sin \theta, \end{cases}$ 则

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{2a \cos 2\theta \sin \theta + a \sin 2\theta \cos \theta}{2a \cos 2\theta \cos \theta - a \sin 2\theta \sin \theta} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a, y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

故所求的切线方程为 $y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, 即 $x + y = \sqrt{2}a$, 所求的

法线方程为 $y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = x - \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 即 $y - x = 0$.

点评 曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出, 它在某点处的切线斜率不是 $r'(\theta_0)$.

五、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{a(\sqrt{1+x}-1)}{x} & (x < 0), \\ 1 & (x = 0), \\ b(e^{-\frac{1}{x}} + 2) + c \ln(1+x) & (x > 0), \end{cases}$

试确定常数 a, b, c , 使 $f(x)$ 在 0 点连续且可导.

解 $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(\sqrt{1+x}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}ax}{x} = \frac{a}{2},$

$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [b(e^{-\frac{1}{x}} + 2) + c \ln(1+x)] = 2b.$

又 $f(0) = 1$, 由 $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ 可得 $a = 2, b = \frac{1}{2}.$

因为 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{x}} + 2) + c \ln(1+x) - 1}{x} = c,$

$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(\sqrt{1+x}-1) - x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{2x\sqrt{1+x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}x}{2x\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{4},$

所以当 $a = 2, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{4}$ 时, 函数在 $x = 0$ 处连续且可导.

点评 函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 必须满足 $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$; 在 x_0 可导必须 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

六、证明不等式 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, 其中 a, b, p, q 都是正数, 且 p, q 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

证 方法1 不妨设 $a \leq b$.

$$\text{设 } f(x) = \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax \quad (x \geq 0),$$

则 $f'(x) = x^{q-1} - a$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = a^{\frac{1}{q-1}}$ 为唯一驻点.

$$\text{因为 } f''(x) = (q-1)x^{q-2} > 0,$$

$$\text{所以 } f(a^{\frac{1}{q-1}}) = \frac{a^p}{p} + \frac{1}{q} a^{\frac{a}{q-1}} - a^{1+\frac{1}{q-1}} = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^p = 0$$

是 $f(x)$ 的最小值. 即当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 故 $f(b) \geq 0$, 因此

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

$$\text{方法2 令 } f(x) = \ln x \quad (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

所以函数 $f(x)$ 为上凸函数, 即对

$$\forall x_1, x_2 (x_1 \neq x_2) \text{ 及 } \forall \alpha \in (0, 1),$$

$$\text{有 } \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2),$$

$$\text{取 } \alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, x_1 = a^p, x_2 = b^q,$$

$$\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right),$$

$$\text{而 } \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q = \ln a + \ln b = \ln ab,$$

$$\text{故 } \ln ab \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right),$$

$$\text{即得 } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

点评 本题证法是利用了函数的最小值或凸函数法. 也可用函数的单调性来证明. 读者可自己试完成.

七、全面研究函数 $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的性态, 并作图.

$$\left[\text{已知 } y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, y'' = \frac{6(x+1)}{(x-1)^4} \right]$$

解 函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

令 $y' = 0$, 解得 $x = -1, x = 5$; 令 $y'' = 0$, 解得 $x = -1$. 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
y'	+	0	+	-	0	+
y''	-	0	+	+	+	+
$y = f(x)$	单调增 上凸	拐点 $(-1, 0)$	单调增 下凸	单调减 下凸	极小值 $y(5) = \frac{27}{2}$	单调增 下凸

渐近线: 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty,$$

所以 $x = 1$ 为垂直渐近线.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} =$$

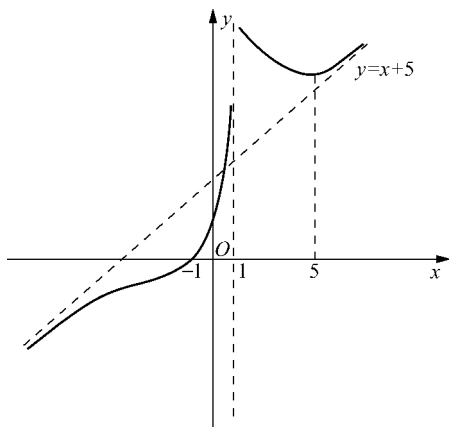
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1 = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = 5,$$

所以 $y = x + 5$ 为斜渐近线.



八、1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$, 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$, 由极限定义可取 $\epsilon = \frac{1-r}{2}$, $\exists N$, 当

$n > N$ 时,

$$\left| \frac{x_n}{x_{n-1}} - r \right| < \frac{1-r}{2}, \text{ 即 } 0 < \frac{x_n}{x_{n-1}} < \frac{1+r}{2} < 1,$$

所以当 $n > N$ 时, $0 < x_n < \frac{1+r}{2} x_{n-1}$, 于是推得

$$0 < x_{n+N} < \frac{1+r}{2} x_{n+N-1} < \left(\frac{1+r}{2} \right)^2 x_{n+N-2} < \cdots < \left(\frac{1+r}{2} \right)^n x_N.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+r}{2} \right)^n x_N = 0$, 由夹逼定理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

点评 正数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$, $\{x_n\}$ 是单调减数列是容

易的. 而此题的关键是能得到 $0 < x_{n+N} < \left(\frac{1+r}{2} \right)^n x_N$, 其中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+r}{2} \right)^n = 0.$$

2. 对任意 $x \geqslant 0$, 试证: 存在 $\theta(x)$, 满足 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 且 $\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

证 令 $f(t) = \sqrt{t}$ 在区间 $[x, x+1]$ 上运用拉格朗日定理, 得

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}} \quad (0 < \theta(x) < 1), \end{aligned}$$

即有 $2\sqrt{x+\theta(x)} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$, 解得 $\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)} - x]$.

当 $x > 0$ 时, $\sqrt{x(x+1)} - x = \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$

单调增, 故 $\theta(x)$ 单调增. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} \right) \right] = \frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2} .$$

点评 其中 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} .$

试 卷 (十)

——第一学期期末试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. $f(x)$ 在 a 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^m} = c > 0$, 其中 m 是偶数,

则

()

(A) a 是 $f(x)$ 的极大值点;

(B) a 是 $f(x)$ 的极小值点;

(C) a 不是 $f(x)$ 的极值点;

(D) 不能判别 a 是否是 $f(x)$ 的极值点.

2. $f(x)$, $g(x)$ 均为恒不为零的可微函数, 且 $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) > 0$, 则当 $x > a$ 时, 成立不等式

()

(A) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$; (B) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$;

(C) $f(a)g(x) > f(x)g(a)$; (D) $f(a)g(a) > f(x)g(x)$.

3. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且

()

(A) 处处可导;

(B) 仅有一个不可导点;

(C) 仅有两个不可导点;

(D) 至少有三个不可导点.

4. $\int_{-1}^1 \frac{1 + x \sin^2 x}{1 + x^2} dx =$

()

(A) $\frac{\pi}{4}$;

(B) $\frac{\pi}{2}$;

(C) π ;

(D) 0.

5. 微分方程 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ 的特解形式可设为

()

(A) $(ax + b)e^{2x}$;

(B) $x(ax + b)$;

(C) $x(ax + b)e^{2x}$;

(D) axe^{2x} .

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. $f(x) = \begin{cases} \ln(1+ax^b) & (x \geq 0), \\ \frac{e^{x^2}-1}{\sin 2x} & (x < 0) \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导, 则 $a =$

_____, $b =$ _____.

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = \int_0^{2x+y} \sin t^2 dt - \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt$ (其中 $x > 0$) 所确定, 则其导数 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

3. $\int_0^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx =$ _____.

4. $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^3} \sin \sqrt[3]{t} dt$ 是 βx^α 的等阶无穷小, 则 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____.

5. $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^{2x} f(x+t) dt$, 则 $F'(x) =$ _____.

三、计算下列积分(每题 6 分,共 18 分)

1. $\int x(e^x + \ln^2 x) dx$.

2. $\int_0^\pi \frac{dx}{2 + \cos x}$.

3. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + x^2 - 1}}$.

四、解下列方程(每题 7 分,共 14 分)

1. $(xy - x^2)y' = y^2$.

2. $y'' + 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.

五、(每题 7 分,共 14 分)

1. 设 $f(x) = \ln x - 2x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$, 求 $f(x)$.

2. 设 $f^2(x) = 2 \int_0^x f(t) \sqrt{1 + f'^2(t)} dt - 2x$, 求 $f(x)$.

六、应用题(18 分)

1. (10 分) 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 上对应 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的弧线段的长度, 且求该弧段与射线 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围图形绕极轴旋转所得旋转体的体积.

2. (8 分) D 是由抛物线 $y = 2x(2 - x)$ 与 x 轴所围成的区域, 直线 $y = kx$ 将区域 D 分为面积相等的两部分, 求 k 的值.

七、(6 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2 + i}$.

试卷(十)考核内容分值表

考核内容	微分中值定理和导数的应用	一元函数积分学	微分方程
分值	12	71	17

试卷(十)详解

一、选择题

1. $f(x)$ 在 a 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^m} = c > 0$, 其中 m 是偶数,

则

()

- (A) a 是 $f(x)$ 的极大值点;
- (B) a 是 $f(x)$ 的极小值点;
- (C) a 不是 $f(x)$ 的极值点;
- (D) 不能判别 a 是否是 $f(x)$ 的极值点.

解 选 B.

因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^m} = c > 0$, 由极限的保号性可知: 在 a 的邻域内 $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^m} > 0$, 当 m 为偶数时, 有 $f(x) - f(a) > 0$, 故 $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

2. $f(x)$, $g(x)$ 均为恒不为零的可微函数, 且 $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) > 0$, 则当 $x > a$ 时, 成立不等式 ()

- (A) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$; (B) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$;
- (C) $f(a)g(x) > f(x)g(a)$; (D) $f(a)g(a) > f(x)g(x)$.

解 选 A.

由 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} > 0$ 可知函数 $F(x) =$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调增加, 当 $x > a$ 时, $F(x) > F(a)$, 即 $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(a)}{g(a)}$, 亦即 $f(x)g(a) > f(a)g(x)$.

3. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且 ()

- (A) 处处可导; (B) 仅有一个不可导点;
(C) 仅有两个不可导点; (D) 至少有三个不可导点.

解 选 C.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1), \\ x^2 & (|x| > 1), \end{cases}$$

当 $x \neq \pm 1$ 时, 函数可导.

在点 $x = -1$ 处, $f'_+(-1) = 0$, $f'_-(-1) = -2$;

在点 $x = 1$ 处, $f'_+(1) = 2$, $f'_-(1) = 0$;

故函数 $f(x)$ 仅在 $x = \pm 1$ 处不可导.

4. $\int_{-1}^1 \frac{1+x\sin^2 x}{1+x^2} dx =$ ()

- (A) $\frac{\pi}{4}$; (B) $\frac{\pi}{2}$; (C) π ; (D) 0.

解 选 B.

因为 $\frac{x\sin^2 x}{1+x^2}$ 为奇函数, 故

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x\sin^2 x}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

5. 微分方程 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ 的特解形式可设为 ()

- (A) $(ax+b)e^{2x}$; (B) $x(ax+b)$;
(C) $x(ax+b)e^{2x}$; (D) axe^{2x} .

解 选 C.

方程中非齐次项 $f(x) = P_1(x)e^{2x}$, 当 2 是特征根时, 应设

$$y^* = xQ_1(x)e^{2x}, \text{ 即设 } y^* = x(ax+b)e^{2x}.$$

二、填空题

1. $f(x) = \begin{cases} \ln(1+ax^b) & (x \geq 0), \\ \frac{e^{x^2}-1}{\sin 2x} & (x < 0) \end{cases}$ 在 $x = 0$ 可导, 则 $a =$

_____, $b =$ _____.

解 $\frac{1}{2}, 1$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x^2} - 1}{x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2};$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + ax^b)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^b}{x} = a \text{ (仅当 } b = 1 \text{)}.$$

$$f'_-(0) = f'_+(0), \text{ 故 } a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程

$$y = \int_0^{2x+y} \sin t^2 dt - \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt \text{ (其中 } x > 0 \text{)}$$

所确定, 则其导数 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

$$\text{解 } \frac{2\sin(2x+y)^2 - 2xe^{-x}}{1 - \sin(2x+y)^2}.$$

方程两边对 x 求导: $y' = \sin(2x+y)^2 \cdot (2+y') - e^{-x} \cdot 2x$, 解得

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2\sin(2x+y)^2 - 2xe^{-x}}{1 - \sin(2x+y)^2}.$$

$$3. \int_0^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx = \text{_____}.$$

解 2π .

令 $x = 2\sin t$,

$$\int_0^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t)^4 \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t dt$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt \\
 &= 2^6 \times \left[\frac{3 \times 1}{4 \times 2} - \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \right] \times \frac{\pi}{2} = 2\pi.
 \end{aligned}$$

4. $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^3} \sin \sqrt[3]{t} dt$ 是 βx^α 的等阶无穷小, 则 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____.

解 4, $\frac{3}{4}$.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \sin \sqrt[3]{t} dt}{\beta x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin x}{\alpha \beta x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{\alpha \beta x^{\alpha-1}} = 1$$

可知 $\alpha - 1 = 3$, $\alpha \beta = 3$, 故 $\alpha = 4$, $\beta = \frac{3}{4}$.

5. $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^{2x} f(x+t) dt$, 则 $F'(x) =$ _____.

解 $3f(3x) - f(x)$.

令 $x+t = u$, 则 $F(x) = \int_x^{3x} f(u) du$,

$$F'(x) = 3f(3x) - f(x).$$

三、计算下列积分

1. $\int x(e^x + \ln^2 x) dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int x(e^x + \ln^2 x) dx &= \int x e^x dx + \frac{1}{2} \int \ln^2 x dx^2 \\
 &= x e^x - e^x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^2 d(\ln^2 x) \\
 &= x e^x - e^x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 \\
 &= x e^x - e^x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} \int x dx \\
 &= x e^x - e^x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.
 \end{aligned}$$

点评 利用分部积分公式: 当被积函数是指数函数与幂函数相乘时, 幂函数作为 $u(x)$; 当被积函数是幂函数与对数函数相乘时, 对数函数作为 $u(x)$.

$$2. \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

解 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{3 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

点评 此题用了三角有理式积分的万能代换.

$$3. \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + x^2 - 1}} &\stackrel{\text{令 } x^2 = u}{=} \int_2^{+\infty} \frac{du}{2u\sqrt{u^2 + u - 1}} \\ &\stackrel{\text{令 } \frac{1}{u} = t}{=} - \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{dt}{2\sqrt{1+t-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

四、解下列方程

$$1. (xy - x^2)y' = y^2.$$

$$\text{解} \quad \text{原方程可化为 } y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}.$$

$$\text{令 } y = xu, \quad y' = u + x \frac{du}{dx}, \quad \text{方程化为 } \frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x},$$

$$u - \ln u = \ln x + \ln C, \quad u = \ln(Cux) = \ln Cy, \quad \frac{y}{x} = \ln Cy,$$

$$\text{故} \quad Cy = e^{\frac{y}{x}}.$$

点评 此题是齐次方程 $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

2. $y'' + 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.

解 $r^2 + 2r + 2 = 0, r_{1,2} = -1 \pm i,$

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

因 $1 \pm i$ **不是特征根,故可令** $y^* = e^x(A \cos x + B \sin x),$

代入方程解得 $A = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, y^* = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x),$

则方程的通解

$$y = \bar{y} + y^* = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x).$$

点评 二阶常系数线性非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$, 当 $f(x) = ae^{\alpha x} \sin \beta x$ 或 $f(x) = be^{\alpha x} \cos \beta x$ 或 $f(x) = e^{\alpha x}(a \sin \beta x + b \cos \beta x)$ 时, 可令 $y^* = x^k e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x)$; 若 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征根, 取 $k = 0$; 若 $\alpha \pm i\beta$ 是特征根, 取 $k = 1$. 本题 $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ 不是特征根, 故取 $k = 0$.

五、1. 设 $f(x) = \ln x - 2x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$, **求** $f(x)$.

解 令 $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = A$, **则** $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} - 2xA$,

$$A = \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} - 2Ax \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln^2 x - Ax^2 \right) \Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{2} - A(e^2 - 1),$$

得 $A = \frac{1}{2e^2}$, **所以** $f(x) = \ln x - \frac{1}{e^2} x^2$.

点评 定积分 $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$ 是数值, 故解题中设 $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = A$, 若

$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ 是 x 的函数, 就不能设为常数.

2. 设 $f^2(x) = 2 \int_0^x f(t) \sqrt{1+f'^2(t)} dt - 2x$, 求 $f(x)$.

解 记 $f(x) = y$, 方程两边对 x 求导, 得

$$2yy' = 2y\sqrt{1+y'^2} - 2, \text{ 即 } yy' + 1 = y\sqrt{1+y'^2},$$

$$2yy' + 1 = y^2, (y^2)' - y^2 = -1,$$

$$y^2 = e^{\int dx} \left(\int -1 \cdot e^{-\int dx} dx + C \right) = e^x (e^{-x} + C) = Ce^x + 1.$$

由 $y(0) = 0$ 可得 $C = -1$, 故 $f(x) = \sqrt{1-e^x}$.

点评 $\int_0^x f(t) \sqrt{1+f'^2(t)} dt$ 是 x 的函数, 不能像上题那样设为常数, 故两边求导后得贝努利方程或可分离变量方程.

六、应用题

1. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 上对应 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的弧线的长度, 且求该弧段与射线 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围图形绕极轴旋转所得旋转体的体积.

$$\begin{aligned} \text{解 弧长 } s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}a. \end{aligned}$$

又曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta, \\ y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta, \end{cases}$ 旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2a} \pi y^2 dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2 (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta da (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^3 (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta (1 + 2\cos \theta) d(\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{令 } \cos \theta = u}} \int_0^1 \pi a^3 (1+u)^2 (1-u^2) (2u+1) du$$

$$\begin{aligned}
&= \pi a^3 \int_0^1 (1 + 4u + 4u^2 - 2u^3 - 5u^4 - 2u^5) du \\
&= \pi a^3 \left(u + 2u^2 + \frac{4}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^4 - u^5 - \frac{1}{3}u^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2} \pi a^3.
\end{aligned}$$

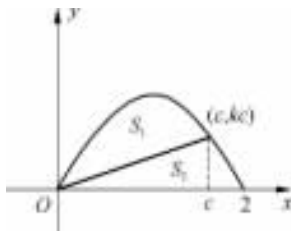
点评 当 $\theta = 0$ 时, $x = 2a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0$, 故旋转体体积 $V =$

$\int_0^{2a} \pi y^2 dx$, 由定积分换元公式得

$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2 (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cdot d(a(1 + \cos \theta) \cos \theta).$$

2. D 是由抛物线 $y = 2x(2-x)$ 与 x 轴所围成的区域, 直线 $y = kx$ 将区域 D 分为面积相等的两部分, 求 k 的值.

解 设直线与抛物线除了原点外的另一个交点为 (c, kc) . 如图所示,



$S_1 = S_2$, 故

$$2S_1 = 2 \int_0^c (4x - 2x^2 - kx) dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx,$$

得
$$2 \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}kx^2 \right) \Big|_0^c = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3},$$

所以
$$2c^2 - \frac{2}{3}c^3 - \frac{1}{2}kc^2 = \frac{4}{3}.$$

又因为 $kc = 2c(2-c)$, 即 $k = 4 - 2c$, 代入上式得 $c = \sqrt[3]{4}$, 因此

$$k = 4 - 2\sqrt[3]{4}.$$

七、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2 + i}$.

解

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2 + i} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n^2}} \frac{1}{n} + \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}.$$

设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x)$ 是连续函数, 利用定积分的定义, 将

$[0, 1]$ 区间 n 等分, 在子区间 $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ 上取 $\xi_i = \sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n^2}}$,

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2 + i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

点评 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n}$, 取 $\xi_i = \sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n^2}}$

不是很容易想到的.

试 卷 (十一)

——第二学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设非零向量 a 与 b 不平行, $c = (a \times b) \times a$, 则 ()

(A) $c = 0$; (B) $(b, c) < \frac{\pi}{2}$;

(C) $c \perp b$; (D) $(b, c) > \frac{\pi}{2}$.

2. 两个平行平面 $2x - 2y + z - 1 = 0$ 与 $4x - 4y + 2z + 3 = 0$ 之间的距离为 ()

(A) 2; (B) $\frac{1}{6}$; (C) 4; (D) $\frac{5}{6}$.

3. 设 $f(x, y) = e^{x+y} [x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$, 则在 $(0, 1)$ 点处的两个偏导数 $f_x(0, 1)$ 和 $f_y(0, 1)$ 的情况为 ()

(A) 两个偏导数均不存在;

(B) $f_x(0, 1)$ 不存在, $f_y(0, 1) = \frac{4}{3}e$;

(C) $f_x(0, 1) = \frac{e}{3}$, $f_y(0, 1) = \frac{4}{3}e$;

(D) $f_x(0, 1) = \frac{e}{3}$, $f_y(0, 1)$ 不存在.

4. $f(x, y) \in C^1$, 若 $f(x, x^2) = x^3$, $f_x(x, x^2) = x^2 - 2x^4$, 则 $f_y(x, x^2) =$ ()

(A) $x + x^3$; (B) $2x^2 + 2x^4$;

(C) $x^2 + x^5$; (D) $2x + 2x^2$.

5. 设 Ω_1, Ω_2 为空间有界闭区域, $\Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2$,

$f(x, y, z)$ 在 Ω_3 上可积, 则 $\iiint_{\Omega_3} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dV +$

$\iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dV$ 的充要条件是 ()

(A) $f(x, y, z)$ 在 Ω_4 是奇函数;

(B) $f(x, y, z) \equiv 0, (x, y, z) \in \Omega_4$;

(C) Ω_4 的体积为零;

(D) $\iiint_{\Omega_4} f(x, y, z) dV = 0$.

二、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

1. 设空间两条直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 和 $x+1 = y-1 = z$ 相交, 则 $\lambda =$ _____.

2. 设 $z = f(x^2 - y^2, \varphi(xy))$, 其中 f, φ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

3. $f(x, y) = x^2 y^3$ 在点 $(1, -1)$ 沿向量 $s = (3, -4)$ 方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial s} =$ _____.

4. 使二重积分 $\iint_D (4 - 4x^2 - y^2) d\sigma$ 达最大的平面闭区域 D 为 _____.

5. 设空间物体占区域 $\Omega: 4x^2 + y^2 \leq 1 (0 \leq z \leq 1)$, 其体密度函数 $\mu(x, y, z) = (1 - y)z$, 则此空间物体的质量为 _____.

三、(10 分) 设方程 $e^{y+z} - x \sin z = e$ 确定了点 $(x, y) = (0, 1)$ 附近的一个隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, 1)}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0, 1)}, \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0, 1)}$.

四、(8 分) 求过直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ 的平面 Π , 使它平行于直线 $L': \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

五、计算下列各题(每题 8 分,共 24 分)

1. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \sin^3 x \, dx .$

2. $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq ax (a > 0) .$

3. 用球面坐标计算

$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \, dV$, 其中 $\Omega: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} .$

六、(10 分)求圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $2z - y = 3$ 所围成的立体的表面积 .

七、(10 分)在曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 上求一点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 使它到平面 $\Pi: x - y + 2z + 6 = 0$ 的距离最短 .

八、(8 分) 设 $F(x, y)$ 可以表示为 $F(x, y) = f(x)g(y) = s(\sqrt{x^2 + y^2})$, 其中 f, g, s 都是 $\mathbb{R}$ 上连续函数 . 证明: $F(x, y) = \overline{C}e^{C(x^2 + y^2)}$, 其中 $C, \overline{C}$ 为任意常数 .

试卷(十一)考核内容分值表

考核内容	向量和空间解析几何	多元函数微分学	多元函数积分学	综合题
分值	17	32	43	8

试卷(十一)详解

一、选择题

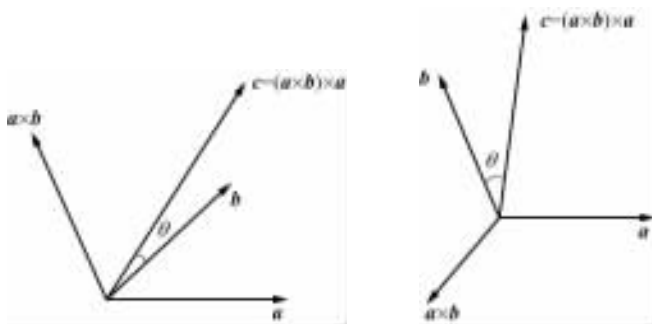
1. 设非零向量 a 与 b 不平行, $c = (a \times b) \times a$, 则 ()

(A) $c = 0$; (B) $(b, c) < \frac{\pi}{2}$;

(C) $c \perp b$; (D) $(b, c) > \frac{\pi}{2}$.

解 选 B.

如下图所示:



因 $(b, c) = \theta < \frac{\pi}{2}$, 故应选 B.

注: 若 $a \perp b$, 则 $(a \times b) \times a = \lambda b$, $(b, c) = 0$.

2. 两个平行平面 $2x - 2y + z - 1 = 0$ 与 $4x - 4y + 2z + 3 = 0$ 之间的距离为 ()

(A) 2; (B) $\frac{1}{6}$; (C) 4; (D) $\frac{5}{6}$.

解 选 D.

在平面 $2x - 2y + z - 1 = 0$ 上取点 $P(0, 0, 1)$, 则 $P(0, 0, 1)$ 到平面 $4x - 4y + 2z + 3 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|4 \times 0 - 4 \times 0 + 2 \times 1 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{5}{6}.$$

3. 设 $f(x, y) = e^{x+y} [x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$, 则在 $(0, 1)$ 点处的两个偏导数 $f_x(0, 1)$ 和 $f_y(0, 1)$ 的情况为 ()

(A) 两个偏导数均不存在;

(B) $f_x(0, 1)$ 不存在, $f_y(0, 1) = \frac{4}{3}e$;

(C) $f_x(0, 1) = \frac{e}{3}$, $f_y(0, 1) = \frac{4}{3}e$;

(D) $f_x(0, 1) = \frac{e}{3}$, $f_y(0, 1)$ 不存在.

解 选 C.

方法 1

$$f_x(x, y) = e^{x+y} [x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}] + e^{x+y} \left[\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} \right],$$

$$f_x(0, 1) = e - \frac{2}{3}e = \frac{e}{3}.$$

$$f_y(x, y) = e^{x+y} [x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}] + e^{x+y} \left[\frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right],$$

$$f_y(0, 1) = e + \frac{1}{3}e = \frac{4}{3}e.$$

方法 2

$$f(x, 1) = e^{x+1}(x-1)^{\frac{2}{3}},$$

$$f'_x(x, 1) = e^{x+1}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}e^{x+1}(x-1)^{-\frac{1}{3}},$$

$$f_x(0, 1) = e - \frac{2}{3}e = \frac{e}{3}.$$

$$f(0, y) = e^y y^{\frac{1}{3}}, \quad f_y(0, y) = e^y y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}e^y y^{-\frac{2}{3}},$$

$$f_y(0, 1) = e + \frac{1}{3}e = \frac{4}{3}e.$$

4. $f(x, y) \in C^1$, 若 $f(x, x^2) = x^3$, $f_x(x, x^2) = x^2 - 2x^4$, 则 $f_y(x, x^2) =$ ()

- (A) $x + x^3$; (B) $2x^2 + 2x^4$;
(C) $x^2 + x^5$; (D) $2x + 2x^2$.

解 选 A.

$f(x, x^2) = x^3$ 两边对 x 求导:

$f_x(x, x^2) + f_y(x, x^2) \cdot 2x = 3x^2$, 将 $f_x(x, x^2) = x^2 - 2x^4$ 代入得

$$x^2 - 2x^4 + 2xf_y(x, x^2) = 3x^2, \text{ 故 } f_y(x, x^2) = x + x^3.$$

5. 设 Ω_1, Ω_2 为空间有界闭区域, $\Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $f(x, y, z)$ 在 Ω_3 上可积, 则 $\iiint_{\Omega_3} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dV +$

$\iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dV$ 的充要条件是 ()

- (A) $f(x, y, z)$ 在 Ω_4 是奇函数;
(B) $f(x, y, z) \equiv 0, (x, y, z) \in \Omega_4$;
(C) Ω_4 的体积为零;
(D) $\iiint_{\Omega_4} f(x, y, z) dV = 0$.

解 选 D.

二、填空题

1. 设空间两条直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 和 $x+1 = y-1 = z$ 相交, 则 $\lambda =$ _____.

解 $\frac{5}{4}$.

因直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 过点 $M(1, -1, 1)$, 直线 $x+1 =$

$y-1=z$ 过点 $P(-1, 1, 0)$, 两条直线相交, 则三个向量 $s_1, s_2, \overrightarrow{MP}$ 共面. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{5}{4}.$$

2. 设 $z = f(x^2 - y^2, \varphi(xy))$, 其中 f, φ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$

解 $2(x^2 + y^2)f_1$.

$$z_x = 2xf_1 + f_2 \cdot \varphi'(xy) \cdot y = 2xf_1 + y\varphi'(xy)f_2,$$

$$z_y = -2yf_1 + x\varphi'(xy)f_2,$$

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= 2x^2 f_1 + xy\varphi'(xy)f_2 + 2y^2 f_1 - xy\varphi'(xy)f_2 \\ &= 2(x^2 + y^2)f_1. \end{aligned}$$

3. $f(x, y) = x^2 y^3$ 在点 $(1, -1)$ 沿向量 $s = (3, -4)$ 方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial s} =$ _____.

解 $-\frac{18}{5}$.

$$\text{grad } f(1, -1) = (-2, 3), s \text{ 的单位向量 } s^0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right),$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(1, -1)} = \text{grad } f \cdot s^0 = -\frac{18}{5}.$$

4. 使二重积分 $\iint_D (4 - 4x^2 - y^2) d\sigma$ 达最大的平面闭区域 D 为 _____.

解 $4x^2 + y^2 \leq 4$.

因为使被积函数 $f(x, y) = 4 - 4x^2 - y^2 \geq 0$ 的区域为 $4x^2 + y^2 \leq 4$.

5. 设空间物体占区域 $\Omega: 4x^2 + y^2 \leq 1 (0 \leq z \leq 1)$, 其体密度函数 $\mu(x, y, z) = (1 - y)z$, 则此空间物体的质量为 _____.

解 $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{因} \quad m &= \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} (1-y)z dV \\ &= \int_0^1 z dz \iint_D (1-y) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (1-y) d\sigma, \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad x = \frac{1}{2} r \cos \theta, y = r \sin \theta, J = \frac{1}{2} r,$$

$$\text{则} \quad m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r \sin \theta) \frac{1}{2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

三、设方程 $e^{y+z} - x \sin z = e$ 确定了点 $(x, y) = (0, 1)$ 附近的一个隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, 1)}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0, 1)}, \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0, 1)}$.

解 以 $x = 0, y = 1$ 代入方程, 得 $z(0, 1) = 0$. 令 $F(x, y, z) = e^{y+z} - x \sin z - e$,

$$\text{则} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{\sin z}{e^{y+z} - x \cos z}, \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, 1)} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{y+z}}{e^{y+z} - x \cos z}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0, 1)} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\cos z \cdot z_y (e^{y+z} - x \cos z) - \sin z \cdot (e^{y+z} - x \cos z)'_y}{(e^{y+z} - x \cos z)^2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0, 1)} = -\frac{1}{e}.$$

点评 也可在方程 $e^{y+z} - x \sin z = e$ 两边对 x 求导:

$$e^{y+z} \cdot z_x - \sin z - x \cos z \cdot z_x = 0,$$

将 $x = 0, y = 1, z(0, 1) = 0$ 代入, 得 $e \cdot z_x(0, 1) = 0$, 即有 $z_x(0, 1) = 0$.

另外两个偏导数也可同样解得.

四、求过直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ 的平面 Π , 使它平行于直线

$$L': \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

解 方法 1 因为所求平面过已知直线 L , 且平行于另一已知直

线 L' , 故所求平面的法向量 n 与直线 L 的方向向量 s_1 , 直线 L' 的方向向量 s_2 都垂直,

$$\begin{aligned}n &= s_1 \times s_2 = (1, 2, -1) \times (3, 2, 1) \\&= (4, -4, -4),\end{aligned}$$

取 $n = (1, -1, -1)$.

点 $(-1, 0, 1)$ 在平面上, 所以所求的平面方程为

$$(x+1) - y - (z-1) = 0,$$

即 $x - y - z + 2 = 0$.

方法 2 直线 L 的一般式方程为 $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ y + 2z - 2 = 0, \end{cases}$

设所求平面 Π 为 $2x - y + 2 + \lambda(y + 2z - 2) = 0$, 法向量 $n = (2, \lambda - 1, 2\lambda)$, $\Pi \parallel L'$, 则 $n \perp s = (3, 2, 1)$, 即得

$$2 \times 3 + (\lambda - 1) \times 2 + 2\lambda \times 1 = 0, \lambda = -1,$$

故所求平面 Π 为 $x - y - z + 2 = 0$.

五、计算下列各题

1. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \sin^3 x \, dx.$

方法 1
$$\begin{aligned}& \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \sin^3 x \, dx \\&= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} \sin^3 x \, dy \\&= \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx \\&= 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

方法 2
$$\begin{aligned}& \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \sin^3 x \, dx \\&= \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} (\cos^2 x - 1) d(\cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3} \cos^3(\arcsin y) + 2\cos(\arcsin y) \right] dy \quad (\text{令 } \arcsin y = \\
&\quad t, y = \sin t) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{2}{3} \cos^3 t + 2\cos t \right) \cos t dt = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\
&\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

2. $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$).

解 利用极坐标, $D: 0 \leq r \leq a \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} \right) (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\
&= \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{a^3}{9} (3\pi - 4).
\end{aligned}$$

点评 曲线 $x^2 + y^2 = ax$ 化为极坐标方程为 $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = ar \cos \theta$, 即 $r = a \cos \theta$.

3. 用球面坐标计算:

$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dV$, 其中 $\Omega: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

解

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dV \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi) r^2 \sin \varphi dr \\
&= \frac{32}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi) \cos^5 \varphi \sin \varphi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi \sin^2 \varphi + 2\pi \cos^2 \varphi) \cos^5 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\
&= \frac{32}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cos^5 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\
&= -\frac{32}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^5 \varphi + \cos^7 \varphi) d(\cos \varphi) \\
&= -\frac{32}{5} \pi \left[\frac{1}{6} \cos^6 \varphi + \frac{1}{8} \cos^8 \varphi \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{101}{60} \pi.
\end{aligned}$$

点评 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为正圆锥面, $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 为球心在 $(0, 0, 1)$, 半径为 1 的球面, 即 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

六、求圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $2z - y = 3$ 所围成的立体的表面积.

解 因交线 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 2z - y = 3 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

故可知立体在 xOy 平面上的投影区域 D 为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

圆锥面部分的表面积

$$\begin{aligned}
S_1 &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{2} \, dx dy \\
&= \sqrt{2} \pi \sqrt{3} \sqrt{4} = 2\sqrt{6} \pi;
\end{aligned}$$

平面部分的表面积

$$S_2 = \iint_D \sqrt{1 + 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \, dx dy = \iint_D \frac{\sqrt{5}}{2} \, dx dy$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \pi \sqrt{3} \sqrt{4} = \sqrt{15} \pi;$$

所以立体的表面积 $S = S_1 + S_2 = (2\sqrt{6} + \sqrt{15})\pi$.

七、在曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 上求一点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 使它到平面 $\Pi: x - y + 2z + 6 = 0$ 的距离最短.

解 方法1 曲面 S 上点 P 到平面 Π 的距离最短(或最长)时, 曲面 S 在 P 点的切平面应平行于平面 Π , 故曲面在 P 点切平面的法向量

$$\mathbf{n} = (2x_0, 4y_0, -1) // (1, -1, 2),$$

即 $\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{-1} = \frac{-1}{2}$, 解得 $x_0 = -\frac{1}{4}$, $y_0 = \frac{1}{8}$, 从而 $z_0 = \frac{3}{32}$.

由几何意义可知 $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{32}\right)$ 到平面 Π 的距离最短.

方法2 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 Π 的距离 $d = \frac{|x_0 - y_0 + 2z_0 + 6|}{\sqrt{6}}$,

由条件极值, 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda) &= (x - y + 2z + 6)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z), \\ \begin{cases} L_x = 2(x - y + 2z + 6) + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -2(x - y + 2z + 6) + 4\lambda y = 0, \\ L_z = 4(x - y + 2z + 6) - \lambda = 0, \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 - z = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

解得 $x_0 = -\frac{1}{4}$, $y_0 = \frac{1}{8}$, $z_0 = \frac{3}{32}$ 是唯一的驻点, 由几何意义可知

$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{32}\right)$ 到平面 Π 的距离最短.

八、设 $F(x, y)$ 可以表示为 $F(x, y) = f(x)g(y) = s(\sqrt{x^2 + y^2})$, 其中 f, g, s 都是 $\mathbb{R}$ 上连续函数. 证明: $F(x, y) = \bar{C}e^{C(x^2 + y^2)}$, 其中 $C, \bar{C}$ 为任意常数.

解 在等式 $F(x, y) = f(x)g(y) = s(\sqrt{x^2 + y^2})$ 两边求偏导, 得

$$f'(x)g(y) = s'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f(x)g'(y) = s'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

从而 $yf'(x)g(y) = xf(x)g'(y), \frac{f'(x)}{xf(x)} = \frac{g'(y)}{yg(y)} = C_1,$

于是 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int C_1 x dx, \ln|f(x)| = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_0,$

$$f(x) = Ae^{\frac{1}{2}C_1 x^2} \quad (A = \pm e^{C_0} \text{ 为任意常数}),$$

$$\int \frac{g'(y)}{g(y)} dy = \int C_1 y dy, \ln|g(y)| = \frac{1}{2}C_1 y^2 + C'_0,$$

$$g(y) = Be^{\frac{1}{2}C_1 y^2} \quad (B = \pm e^{C'_0} \text{ 为任意常数}),$$

所以 $F(x, y) = f(x)g(y) = AB e^{\frac{1}{2}C_1(x^2 + y^2)}$
 $= \bar{C} e^{C(x^2 + y^2)} \quad (\text{其中 } \bar{C} = AB, C = \frac{1}{2}C_1).$

试 卷 (十二)

——第二学期期末试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ 在点 $(1, 3, 4)$ 处的法平面为 Π , 则原点到 Π 的距离为 ()

- (A) $\frac{1}{13}$; (B) $\frac{12}{13}$; (C) $\frac{12}{169}$; (D) 12.

2. 表达式 $(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 $u(x, y) =$ ()

- (A) $x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$; (B) $(x^2 + 1)(\cos y + y^2 \cos x) + C$;
(C) $(x^2 + y^2)(\cos x + \cos y) + C$; (D) $e^x(\cos x + \cos y) + C$.

3. 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有 ()

- (A) $\iint_S x \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS$; (B) $\iint_S y \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS$;
(C) $\iint_S z \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS$; (D) $\iint_S xyz \, dS = 4 \iint_{S_1} xyz \, dS$.

4. 下列命题正确的是 ()

- (A) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (l \neq 0, \infty)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性;

- (B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛域分别为

I_1, I_2 及 I_3 , 则 $I_3 = I_1 \cap I_2$;

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛;

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则 $\rho = 1$.

5. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n =$ ()

(A) 3; (B) 7; (C) 8; (D) 9.

二、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

1. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy =$ _____.

2. 向量函数 $F = (y + z^2, z^2 + x^3, x^3 + y^4)$ 在 $(1, 0, 2)$ 处的旋度 $\text{rot } F =$ _____.

3. 设封闭曲线 C 为 $|x| + |y| = 1$, 取逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_C x^2 y dx + xy^2 dy =$ _____.

4. 若 S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧, 且 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是其外法线向量的方向余弦, 则 $\oiint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{(x^2 + y^2 + z^2)} dS =$ _____.

5. 将 $f(x) = 1 - |x|$ 在 $[-1, 1]$ 上展开为以 2 为周期的余弦级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, 则其中系数 a_3 的值为 _____.

三、(8 分) 设函数 $z = f(x, u, v)$, $u = 2x + y$, $v = x \ln y$,

其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、计算下列曲线积分(每题 9 分, 共 18 分)

1. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dS$, 其中 C 为曲线 $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

2. $\int_C [x \cos y + yf(xy)]dx + \left[xf(xy) - \frac{x^2}{2} \sin y\right]dy$, 其中 C 是从点 $A\left(3, \frac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1, 2)$ 的直线段, f 是在 $(-\infty, +\infty)$ 具有连续导数的函数.

五、(每题 8 分, 共 16 分)

1. 设球面 Σ 的球心在另一球面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上点 $(0, 0, R)$ 处. 问: 当 Σ 的半径 a 为何值时, Σ 在球面 Σ_1 内部的那部分面积最大?

2. 流体的速度函数 $v(x, y, z) = (y^3 - z^3, z^3 - x^3, 2z^3)$, 求流体流过由上半球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体表面的外侧的流量.

六、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径及和函数.

七、(10 分) 将函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

八、证明题(每题 4 分, 共 8 分)

1. 方程 $x = \tan x$ 在 $(0, +\infty)$ 有无穷多个可由小到大排列的正根 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

试卷(十二)考核内容分值表

考核内容	多元函数 微分学	多元函数 积分学	向量分析 和场论	无穷级数	综合题
分值	14	30	11	29	16

试卷(十二)详解

一、选择题

1. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ 在点 $(1, 3, 4)$ 处的法平面为 Π , 则原点到 Π 的距离为

()

(A) $\frac{1}{13}$; (B) $\frac{12}{13}$; (C) $\frac{12}{169}$; (D) 12.

解 选 B.

方法1 因 $\begin{cases} 2x dx + 2y dy = 0, \\ 2y dy + 2z dz = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 3, 4)$ 处 $\begin{cases} 2dx + 6dy = 0, \\ 6dy + 8dz = 0, \end{cases}$

解得 $dx = 4dz$, $dy = -\frac{4}{3}dz$, 即 $\frac{dx}{4} = \frac{dy}{-\frac{4}{3}} = \frac{dz}{1}$, 故曲线在点 $(1,$

$3, 4)$ 法平面的法向量 $n = \lambda \left(4, -\frac{4}{3}, 1 \right) = (12, -4, 3)$, 法平面 Π 的

方程为 $12(x-1) - 4(y-3) + 3(z-4) = 0$, 即 $12x - 4y + 3z - 12 = 0$, 于是原点到 Π 的距离

$$d = \frac{|-12|}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{12}{13}.$$

方法2 曲线在点 $(1, 3, 4)$ 处法平面的法向量

$$\begin{aligned} n &= \lambda \left\{ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right\} \Big|_{(1, 3, 4)} \\ &= \lambda \left(\begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 2y & 2z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2z & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 2y \end{vmatrix} \right) \Big|_{(1, 3, 4)} \\ &= \lambda(48 \quad -16 \quad 12) = (12, -4, 3). \end{aligned}$$

以下同方法 1.

2. 表达式 $(2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 $u(x, y) =$ ()

- (A) $x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$;
(B) $(x^2 + 1)(\cos y + y^2 \cos x) + C$;
(C) $(x^2 + y^2)(\cos x + \cos y) + C$;
(D) $e^x(\cos x + \cos y) + C$.

解 选 A.

方法 1 $u(x, y)$

$$\begin{aligned} &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy + C \\ &= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y \cos x - x^2 \sin y)dy + C \\ &= x^2 + y^2 \cos x + x^2 \cos y - x^2 + C = y^2 \cos x + x^2 \cos y + C. \end{aligned}$$

方法 2 因 $u_x(x, y) = 2x \cos y - y^2 \sin x$,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int (2x \cos y - y^2 \sin x)dx + C(y) \\ &= x^2 \cos y + y^2 \cos x + C(y), \\ u_y(x, y) &= -x^2 \sin y + 2y \cos x + C'(y) \\ &= -x^2 \sin y + 2y \cos x, \end{aligned}$$

则 $C'(y) = 0, C(y) = C$,

所以 $u(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$.

3. 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有 ()

- (A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$; (B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS$;
(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$; (D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS$.

解 选 C.

由对称性可知 $\iint_S z \, dS = 4 \iint_{S_1} z \, dS,$

在第一卦限 $\iint_{S_1} x \, dS = \iint_{S_1} y \, dS = \iint_{S_1} z \, dS,$

所以有 $\iint_S z \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS.$

4. 下列命题正确的是 ()

(A) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ (l \neq 0, \infty)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性;

(B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛域分别为 I_1 , I_2 及 I_3 , 则 $I_3 = I_1 \cap I_2$;

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛;

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则 $\rho = 1$.

解 选 D.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ (l \neq 0, +\infty)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性, 仅适用于正项级数, 故排除 A.

取 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} -x^n$, 两个级数的收敛区域都是 $(-1, 1)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$, 故排除 B.

取 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 两个级数都收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却发散, 故又排除 C.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 若 $\rho < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 若

$\rho > 1$, 则 $a_n \rightarrow \infty$, 所以 $\rho = 1$, 因此选 D.

5. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n =$ ()

(A) 3; (B) 7; (C) 8; (D) 9.

解 选 C.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} 2u_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \\ &= 2 \times 5 - 2 = 8.\end{aligned}$$

二、填空题

1. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy =$ _____.

解 $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$

2. 向量函数 $F = (y + z^2, z^2 + x^3, x^3 + y^4)$ 在 $(1, 0, 2)$ 处的旋度 $\text{rot } F =$ _____.

解 $(-4, 1, 2).$

$$\begin{aligned}\text{rot } F(1, 0, 2) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z^2 & z^2 + x^3 & x^3 + y^4 \end{vmatrix}_{(1, 0, 2)} \\ &= (4y^3 - 2z, 2z - 3x^2, 3x^2 - 1) \Big|_{(1, 0, 2)} \\ &= (-4, 1, 2).\end{aligned}$$

3. 设封闭曲线 C 为 $|x| + |y| = 1$, 取逆时针方向, 则曲线积分

$$\oint_C x^2 y dx + xy^2 dy = \text{_____}.$$

解 0.

因为 $\oint_C x^2 y dx + xy^2 dy$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \right] dx dy \\
&= \iint_D (y^2 - x^2) dx dy,
\end{aligned}$$

其中 D 是由 $|x| + |y| = 1$ 所围的平面区域, $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$,

所以
$$\oint_C x^2 y dx + x y^2 dy = 0.$$

4. 若 S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧, 且 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是其外法线向量的方向余弦, 则 $\oiint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $4\pi R.$

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{x^2 + y^2 + z^2} dS \\
&= \frac{1}{R^2} \oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
&= \frac{1}{R^2} \iiint_V 3dV = \frac{1}{R^2} \times 3 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R.
\end{aligned}$$

5. 将 $f(x) = 1 - |x|$ 在 $[-1, 1]$ 上展开为以 2 为周期的余弦级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, 则其中系数 a_3 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\frac{4}{9\pi^2}.$

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2 \int_0^1 f(x) \cos 3\pi x dx \\
&= 2 \int_0^1 (1-x) \cos 3\pi x dx \\
&= \frac{2}{3\pi} \int_0^1 (1-x) d(\sin 3\pi x) \\
&= \frac{2}{3\pi} (1-x) \sin 3\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{3\pi} \int_0^1 \sin 3\pi x dx
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi x \Big|_0^1 = \frac{4}{9\pi^2}.$$

三、设函数 $z = f(x, u, v)$, $u = 2x + y$, $v = x \ln y$,

其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f_x + 2f_u + \ln y \cdot f_v, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_u + \frac{x}{y} \cdot f_v,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xu} + f_{xv} \cdot \frac{x}{y} + 2 \left(f_{uu} + f_{uv} \cdot \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} f_v +$$

$$\ln y \cdot \left(f_{vu} + f_{vv} \cdot \frac{x}{y} \right)$$

$$= f_{xu} + \frac{x}{y} f_{xv} + 2f_{uu} + \left(\frac{2x}{y} + \ln y \right) f_{uv} + \frac{x \ln y}{y} f_{vv} + \frac{1}{y} f_v.$$

点评 在 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x + f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$, 左端 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是 z 作为 x, y 的函数, 将 y 作为常数对 x 求偏导; 右端 f_x 是 f 作为 x, u, v 的函数, 将 u, v 作为常数对 x 求偏导, 注意领会两者区别.

四、计算下列曲线积分

$$1. \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds, \text{ 其中 } C \text{ 为曲线 } x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

解 曲线 $C: x^2 + y^2 + 2y = 0$, 即 $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

设 $x = \cos \theta$, $y = -1 + \sin \theta$, $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = d\theta$

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \theta + (-1 + \sin \theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sin \theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta \\
&= 8.
\end{aligned}$$

2. $\int_C [x \cos y + yf(xy)]dx + [xf(xy) - \frac{x^2}{2} \sin y]dy$, 其中 C 是从点 $A(3, \frac{2}{3})$ 到点 $B(1, 2)$ 的直线段, f 是在 $(-\infty, +\infty)$ 具有连续导数的函数.

解 因为 $P_y = -x \sin y + f(xy) + xyf'(xy) = Q_x$, 所以积分与路径无关.

$$\begin{aligned}
&\int_C [x \cos y + yf(xy)]dx + [xf(xy) - \frac{x^2}{2} \sin y]dy \\
&= \int_3^1 \left[x \cos \frac{2}{3} + \frac{2}{3} f\left(\frac{2}{3}x\right) \right] dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 \left[f(y) - \frac{1}{2} \sin y \right] dy \\
&= -4 \cos \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \int_3^1 f\left(\frac{2}{3}x\right) dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy + \frac{1}{2} \cos y \Big|_{\frac{2}{3}}^2 \\
&= -4 \cos \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \int_0^1 f\left(\frac{2}{3}x\right) dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy + \frac{1}{2} \left(\cos 2 - \cos \frac{2}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\cos 2 - 9 \cos \frac{2}{3} \right),
\end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{3} \int_3^1 f\left(\frac{2}{3}x\right) dx = \int_3^1 f\left(\frac{2}{3}x\right) d \frac{2}{3}x = \int_{\frac{2}{3}}^2 f(u) du.$

五、1. 设球面 Σ 的球心在另一球面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上点 $(0, 0, R)$ 处. 问: 当 Σ 的半径 a 为何值时, Σ 在球面 Σ_1 内部的那部分面积最大?

解 设 Σ 的方程为 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = a^2,$

两个球面的交线为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 = a^2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4R^2}(4R^2 - a^2), \\ z = R - \frac{a^2}{2R}, \end{cases}$$

故 Σ 在 Σ_1 内的那部分曲面在 xOy 平面上的投影为 D_{xy} :

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4R^2}(4R^2 - a^2) \quad (0 < a < 2R).$$

这部分曲面的面积

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2}} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi a^2 - \frac{1}{R}\pi a^3, \end{aligned}$$

$S' = 4\pi a - \frac{3}{R}\pi a^2 = 0$, 解得在 $(0, 2R)$ 内的唯一驻点 $a = \frac{4}{3}R$.

$S''\left(\frac{4}{3}R\right) = -4\pi < 0$, 故当 $a = \frac{4}{3}R$ 时, Σ 在 Σ_1 内的面积最大.

点评 本题是积分与微分的综合题, 既用到了求曲面面积的计算, 又用到了求函数最值的方法.

2. 流体的速度函数 $v(x, y, z) = (y^3 - z^3, z^3 - x^3, 2z^3)$, 求流体流过由上半球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体表面的外侧的流量.

解 方法1 由高斯公式有

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_S V \times dS = \oiint_S (y^3 - z^3) dy dz + (z^3 - x^3) dz dx + 2z^3 dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} 6z^2 dV = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 \cos^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{32}{5} \cos^7\varphi \sin\varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{12 \times 32}{5} \times \frac{1}{8} \cos^8 \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = 9\pi.$$

方法 2 前半部分与方法 1 相同.

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S V \times d\mathbf{S} = 6 \iiint_{\Omega} z^2 dV \\ &= 6 \int_0^1 z^2 \pi z^2 dz + 6 \int_1^2 z^2 \pi [1 - (z-1)^2] dz \\ &= 9\pi.\end{aligned}$$

点评 $\oint_S \mathbf{v} \times d\mathbf{S}$ 是 $\oint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ 的向量式. 高斯公式是: 在单位时间内流过封闭曲面外侧的通量等于在封闭曲面内各点散度的总和.

方法 1 的计算用了球面坐标;

方法 2 的计算用了截面法.

六、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径及和函数.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{n3^n} = 3$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n+1} x^{n+1} = S(x)$, $|x| < \frac{1}{3}$,

则

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{n+1} (3x)^{n+1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{n+1} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (3x)^{n+1} \\ &= \frac{3x^2}{1-3x} - \frac{1}{3} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n d(3x) \\ &= \frac{3x^2}{1-3x} - \int_0^x \frac{3x}{1-3x} dx \\ &= \frac{3x^2}{1-3x} + \int_0^x \frac{1-3x-1}{1-3x} dx\end{aligned}$$

$$= \frac{3x^2}{1-3x} + x + \frac{1}{3} \ln |1-3x|, |x| < \frac{1}{3}.$$

点评 求和函数 $S(x)$ 时用到了幂级数的逐项积分和逐项微分.

七、将函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(x) &= \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{1-(x-1)} + \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{1}{1-(x-1)} + \left[\frac{1}{1+(x-1)}\right]' \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n\right)' \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (x-1)^{n-1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (x-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n n - 1] (x-1)^{n-1} \quad (|x-1| < 1). \end{aligned}$$

八、证明题

1. 方程 $x = \tan x$ 在 $(0, +\infty)$ 有无穷多个可由小到大排列的正根

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots.$$

证 设 $f(x) = x - \tan x$, $x \in \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2, \cdots$,

$$\lim_{x \rightarrow n\pi - \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty,$$

且 $f'(x) = 1 - \sec^2 x \leq 0$, $f(x)$ 在 $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 单调减, 故方程

$f(x) = x - \tan x$ 在 $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一正根. 因此方程 $x = \tan x$ 在 $(0, +\infty)$ 有无穷多个可由小到大排列的正根: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

证 由题(1)可知

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

点评 由介值定理及函数的单调性, 可知 $x = \tan x$ 在 $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 有唯一根 x_n , 且 $\frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2}$. 由正项级数比

较判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

试 卷 (十三)

——第一学期期中试卷

一、填充题(每题 3 分,共 30 分)

1. 设函数 $f(x) = \cos x$, $f(\varphi(x)) = 2 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____.

2. 设函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $f'(x)$ 的间断点为_____

(并写出类型).

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{5(x-1)} = 2$, 则 $f'(1) =$ _____.

4. 设 $f'(\cos x) = \cos 2x$, 则 $f''(x) =$ _____.

5. 设函数对任意 x 均满足 $f(1+x) = af(x)$, 且 $f'(0) = b$, 其中 a, b 为常数, 则 $f'(1) =$ _____.

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = (\cos x + \sin x)^{3x} - 1$ 是 x 的_____ (几)阶无穷小.

7. 曲线 $x^3 + y^3 - xy = 7$ 上点 $(1, 2)$ 处的法线方程为_____.

8. 函数 $y = x^{\frac{1}{1-x}}$ ($x \neq 1$), 则 $dy =$ _____.

9. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ 上拐点是_____.

10. 曲线 $y = e^x \sin x$ 在点 $(0, 0)$ 处的曲率为_____.

二、求极限(每题 6 分,共 18 分)

1. 用极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x}{x^2+2} = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin x \ln(1+x^2)}$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}.$

三、(每题 6 分,共 18 分)

1. 设 $\begin{cases} x = \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) + \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right),$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}.$

2. 设周期函数 $f(x)$ 的周期是 6, 而且 $f(x)$ 可导, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-x)}{2x} = 1,$ 试求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-4, f(-4))$ 处的切线方程.

3. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

四、(8 分) 设函数 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} \sin \frac{\pi}{2} x + \cos(a+bx)}{x^{2n} + 1},$ 其中 a, b 为常数, n

为自然数, $0 < a < 2\pi.$

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式(无极限符号);

(2) 试确定常数 $a, b,$ 使 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1).$

五、(8 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$ 且 $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0,$ 证明 $f(x) > x.$

六、(12 分) 全面讨论函数 $y = \frac{x^3}{3(x+2)^2}$ 的性态, 并作其简图.

$$\left[\text{已知 } y' = \frac{x^2(x+6)}{3(x+2)^3}, y'' = \frac{8x}{(x+2)^4}. \right]$$

七、(6 分, 下列两小题任选一题, 且只能选一题)

1. 设有数列 $a_1 = a, a_2 = b (b \neq a), a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} (n = 1,$

$2, \dots),$ 并记 $y_n = a_{n+1} - a_n.$

(1) 证明数列 $\{y_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$

(2) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

2. 设常数 $a, b > 0$, 证明 $2^{a+b}a^ab^b \geq (a+b)^{a+b}$.

试卷(十三)考核内容分值表

考核内容	函数	极限和连续	导数和微分	微分中值定理和导数的应用
分值	3	32	41	24

试卷(十三)详解

一、填充题

1. 设函数 $f(x) = \cos x$, $f(\varphi(x)) = 2 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____.

解 $\arccos(2 - x^2)$, 且 $|2 - x^2| \leq 1$.

2. 设函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $f'(x)$ 的间断点为_____

(并写出类型).

解 $x = 0$, 第一类间断点.

因为 $f'(x) = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}$ ($x \neq 0$),

所以 $x = 0$ 是 $f'(x)$ 的第一类可去间断点.

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{5(x-1)} = 2$, 则 $f'(1) =$ _____.

解 10.

由条件可知 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{5(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{5(x-1)} =$

$\frac{1}{5} f'(1) = 2$, 因此

$$f'(1) = 10.$$

4. 设 $f'(\cos x) = \cos 2x$, 则 $f''(x) =$ _____.

解 $4x$.

事实上 $f'(\cos x) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ($|x| \leq 1$),

即

$$f'(x) = 2x^2 - 1, \text{ 从而 } f''(x) = 4x.$$

5. 设函数对任意 x 均满足 $f(1+x) = af(x)$, 且 $f'(0) = b$, 其中 a, b 为常数, 则 $f'(1) =$ _____.

解 ab .

由题设可知 $f(1) = af(0)$, 从而

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} \\ &= a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \right] = a \cdot f'(0) = ab. \end{aligned}$$

点评 一般地, 对于没有给出具体函数的表达式, 也没有 $f(x)$ 可导的条件, 就不能在所给的等式两边求导, 只能按导数的定义求 $f'(x_0)$.

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = (\cos x + \sin x)^{3x} - 1$ 是 x 的 _____ (几) 阶无穷小.

解 2.

由于

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \sin x)^{3x} - 1}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(\cos x + \sin x)^{3x}} - 1}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \ln(\cos x + \sin x)}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos x + \sin x - 1)}{x^{k-1}}, \end{aligned}$$

若 $k = 2$, 则

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \sin x)^{3x} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos x + \sin x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos x - 1) + 3\sin x}{x} = 3, \end{aligned}$$

从而 $f(x) = (\cos x + \sin x)^{3x} - 1$ 是 x 的 2 阶无穷小.

7. 曲线 $x^3 + y^3 - xy = 7$ 上点 $(1, 2)$ 处的法线方程为_____.

解 $11x - y - 9 = 0$.

因为
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = - \left. \frac{3x^2 - y}{3y^2 - x} \right|_{(1,2)}$$
$$= - \frac{1}{11},$$

所以曲线在点 $(1, 2)$ 处的法线斜率 $k = 11$, 故法线方程为

$$11x - y - 9 = 0.$$

8. 函数 $y = x^{\frac{1}{1-x}} (x \neq 1)$, 则 $dy =$ _____.

解 $x^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1-x+x \ln x}{x(1-x)^2} dx$.

因为

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{\frac{1}{1-x}} \right)' \\ &= x^{\frac{1}{1-x}} \left(\frac{\ln x}{1-x} \right)' \\ &= x^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}(1-x) + \ln x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

9. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ 上拐点是_____.

解 $(1, -2)$.

10. 曲线 $y = e^x \sin x$ 在点 $(0, 0)$ 处的曲率为_____.

解 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由曲率公式 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ 便可得.

二、求极限

1. 用极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x}{x^2+2} = 1$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 由于

$$\left| \frac{4-x}{x^2+2} - 1 \right| = \left| \frac{x^2+x-2}{x^2+2} \right| = \frac{|x+2||x-1|}{x^2+2},$$

令 $|x-1| < 1$, 则 $\left| \frac{4-x}{x^2+2} - 1 \right| = \frac{|x+2||x-1|}{x^2+2} < \frac{4|x-1|}{2} < 2|x-1| < \epsilon$,

故取 $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{2}\right)$, 从而

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{2}\right)$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{4-x}{x^2+2} - 1 \right| < \epsilon$,

于是

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x}{x^2+2} = 1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin x \ln(1+x^2)}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin x \ln(1+x^2)}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} &= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} + \arctan x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{1+x^2}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

三、1. 设 $\begin{cases} x = \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) + \cos t, & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ y = \sin t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{\frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} \sec^2 \frac{t}{2} - \sin t} = \frac{\cos t}{\csc t - \sin t} = \tan t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(\tan t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\csc t - \sin t} = \frac{\sin t}{\cos^4 t}.$$

2. 设周期函数 $f(x)$ 的周期是 6, 而且 $f(x)$ 可导, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-x)}{2x} = 1$, 试求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-4, f(-4))$ 处的切线方程.

解 由题设可知 $f(x) = f(x+6)$, 则有 $f'(x) = [f(x+6)]' = f'(x+6)$, 即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有相同的周期; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f(2-x) - f(2)}{(-x)} = \frac{1}{2} f'(2) = 1$, 故 $f'(2) = f'(-4) = 2$, 从而曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-4, f(-4))$ 处的切线方程为

$$y = 2(x+4) + f(-4).$$

点评 必须注意可导周期函数的导数也是周期函数. 本题由函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数求得了函数在 $x=-4$ 处切线的斜率.

3. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 因为 $[\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n=1, 2, \dots),$

所以由莱布尼兹法则可有

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(x) \\ &= [\ln(1+x)]^{(n)} x^2 + n[\ln(1+x)]^{(n-1)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} [\ln(1+x)]^{(n-2)} \cdot 2 \end{aligned}$$

$$= x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

点评 适当地选择 $u(x)$, $v(x)$ 是求 n 阶导数的关键.

四、设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} \sin \frac{\pi}{2} x + \cos(a+bx)}{x^{2n} + 1}$, **其中** a, b **为常数,**

n **为自然数,** $0 < a < 2\pi$.

(1) **求函数** $f(x)$ **的表达式(无极限符号);**

(2) **试确定常数** a, b , **使** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$.

解 (1) $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} \sin \frac{\pi}{2} x + \cos(a+bx)}{x^{2n} + 1}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{2} x & (|x| > 1), \\ \cos(a+bx) & (|x| < 1), \\ \frac{1}{2} [1 + \cos(a-b)] & (x = -1), \\ \frac{1}{2} [1 + \cos(a+b)] & (x = 1). \end{cases}$$

(2) **因为** $f(-1-0) = 1$, $f(-1+0) = \cos(a-b)$,

故由 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ **可得** $\cos(a-b) = 1$;

又因为 $f(1-0) = \cos(a+b)$, $f(1+0) = 1$,

故由 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ **可得** $\cos(a+b) = 1$.

由
$$\begin{cases} \cos(a-b) = 1, \\ \cos(a+b) = 1, \\ 0 < a < 2\pi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = 2m\pi, \\ a+b = 2k\pi, \\ 0 < a < 2\pi, \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} a = \pi, \\ b = (2k-1)\pi \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

五、 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$, 证明 $f(x) > x (x \neq 0)$.

证 由题设得 $f(0)=0, f'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$.

设 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=0, F'(x)=f'(x)-1$.

方法 1 因为 $F'(0)=f'(0)-1=0$, 所以 $x=0$ 是 $F(x)$ 的驻点.

又 $F''(x)=f''(x)>0, F(x)$ 下凸, $x=0$ 是唯一驻点, 故 $F(0)$ 为最小值, 从而 $F(x)>F(0)=0$, 即 $f(x)>x (\forall x \in \mathbb{R})$.

方法 2 因为 $F''(x)=f''(x)>0$, 故 $F'(x)$ 单调递增.

由于 $F'(0)=f'(0)-1=0$, 故 $F'(x)$ 不保号, 即:

当 $x<0$ 时, $F'(x)<0, F(x)$ 单调递减, 所以有 $F(x)>F(0)=0$;

当 $x>0$ 时, $F'(x)>0, F(x)$ 单调递增, 所以有 $F(x)>F(0)=0$;

从而 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有 $F(x)>F(0)=0$, 即 $f(x)>x$.

点评 利用函数的单调性和凸性证明不等式的成立是高等数学中常用的方法. 本题两种方法的证明都注意到了在 $x=0$ 点处函数 $F(x)$ 取得了最小值 $F(0)$, 即 $F(x)>F(0)=0$.

六、 全面讨论函数 $y = \frac{x^3}{3(x+2)^2}$ 的性态, 并作其简图.

$$\left[\text{已知 } y' = \frac{x^2(x+6)}{3(x+2)^3}, y'' = \frac{8x}{(x+2)^4} \right].$$

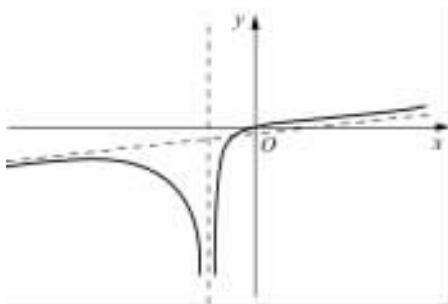
解 定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

令 $y'=0$, 得 $x=0, -6$; 令 $y''=0$, 得 $x=0$, 作表如下:

x	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, -2)$	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	-	+	0	+
y''	-	-	-	-	0	+
y		极大值 $-\frac{9}{2}$			拐点 $(0, 0)$	

因 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$, 故直线 $x = -2$ 是曲线的垂直渐近线; 又因

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x(x+2)^2} = \frac{1}{3}, \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - \frac{x}{3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3(x+2)^2} - \frac{x}{3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 - 4x}{3(x+2)^2} = -\frac{4}{3}, \end{aligned}$$



故直线 $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ 是曲线的斜渐近线.

七、1. 设有数列 $a_1 = a, a_2 = b (b \neq a), a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} (n = 1, 2, \dots)$, 并记 $y_n = a_{n+1} - a_n$.

(1) 证明数列 $\{y_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(2) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解 (1) $y_n = a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n$

$$\begin{aligned} &= \frac{a_{n-1} - a_n}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_n - a_{n-1}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a_{n-1} - a_{n-2}) = \dots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_2 - a_1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b - a), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b - a) = 0.$$

(2) 由于 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n),$$

即

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_1 &= (b-a) + \left(-\frac{1}{2}\right)(b-a) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2(b-a) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a) \\ &= (b-a) \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \\ &= (b-a) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(b-a) \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right], \end{aligned}$$

亦即

$$a_{n+1} = a_1 + \frac{2}{3}(b-a) \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right],$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}(b-a) \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] \\ &= a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{a+2b}{3}. \end{aligned}$$

点评 本题由递推式求得数列 $\{y_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 的表达式, 进而在求得极限值的同时也证明了数列 $\{y_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 收敛, 这又不失为证明数列收敛的一种好方法.

2. 设常数 $a, b > 0$, 证明 $2^{a+b} a^a b^b \geq (a+b)^{a+b}$.

证 将不等式 $2^{a+b} a^a b^b \geq (a+b)^{a+b}$ 改写为

$$a \ln a + b \ln b \geq (a+b) \ln \frac{a+b}{2},$$

或

$$\frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2}.$$

方法 1 设 $y = x \ln x$ (利用凸函数定义证明).

因为

$$y' = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0),$$

故 $y = x \ln x$ 是下凸函数. 由下凸函数的定义

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

可得

$$\frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2},$$

即

$$2^{a+b} a^a b^b \geq (a+b)^{a+b}.$$

方法 2 设 $y = (a+x) \ln \frac{a+x}{2} - a \ln a - x \ln x$ (利用单调性证

明).

因为

$$y' = \ln \frac{a+x}{2} - \ln x,$$

又当 $x=a$ 时, $y=0$, $y'=0$, 即 y' 不保号.

当 $x < a$ 时, $y' > 0$, y 单调递增, 所以有 $y(x) \leq y(a) = 0$;

当 $x > a$ 时, $y' < 0$, y 单调递减, 所以有 $y(x) \leq y(a) = 0$;

故

$$(a+x) \ln \frac{a+x}{2} - a \ln a - x \ln x \leq 0.$$

取 $x=b$, 从而 $(a+b) \ln \frac{a+b}{2} \leq a \ln a + b \ln b$,

即

$$2^{a+b} a^a b^b \geq (a+b)^{a+b}.$$

试 卷 (十四)

——第一学期期末试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,且 $f'(a)=k$ ($k \neq 0$ 常数),则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a-3t)-f(a-5t)}{t} =$ _____.

- (A) k ; (B) $-2k$; (C) $2k$; (D) $8k$.

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f'(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x^2} = 1$, 则 _____.

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点;
(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点.

3. 函数 $y = \frac{2x+1}{x^2+2x+2}$ 在 $[-2, 0]$ 上的平均值是 _____.

- (A) $-\frac{\pi}{4}$; (B) $-\frac{\pi}{2}$; (C) 0 ; (D) $\frac{\pi}{4}$.

4. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$ _____.

- (A) $\frac{\pi}{2}$; (B) $\frac{\pi}{4}$; (C) 发散; (D) π .

5. 二直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 相交,则 $\lambda =$ _____.

- (A) $\frac{5}{4}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) $-\frac{5}{4}$; (D) 1 .

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $y=f(x+y)$, 其中 f 可导, 且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

2. $\frac{d}{dx} \int_x^0 x^2 \cos t^3 dt =$ _____.

3. 设 $f(x) = (x^{667} - 1)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, $g(1) = 3$, 则 $f'(1) =$ _____.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}} =$ _____.

5. 设 $|a| = 1$, $|b| = 1$, a 与 b 的夹角 $(\hat{a}, b) = 30^\circ$, 则以 $a + 2b$ 和 $3a + b$ 为邻边的平行四边形面积 $S =$ _____.

三、计算题(共 32 分)

1. (6 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{-t} - \sin t^2) dt - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3}$.

2. (6 分) 已知 $f''(x)$ 连续, 且 $f(0) = 2$, $f(\pi) = 1$, 求

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx.$$

3. (6 分) 计算 $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$.

4. (8 分) 设连续函数 $f(x)$ 有 $f(x) + f(-x) = \sin^2 x$, 计算

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin^8 x dx.$$

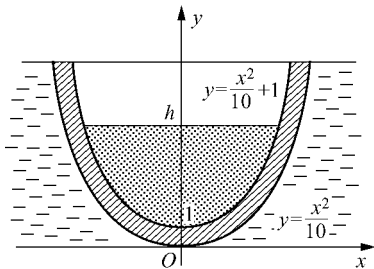
5. (6 分) 计算 $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$.

四、(8 分) 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx$, 求函数 $f(x)$.

五、(10 分) 一个质量密度为 $\frac{25}{19} \times 10^3 (\text{kg/m}^3)$ 的瓷质容器, 内壁和外

壁的形状分别是 $y = \frac{x^2}{10} + 1$ 和 $y =$

$\frac{x^2}{10}$ 绕着 y 轴旋转所得的旋转抛物面, 容器的外高为 10(m), 把它铅直浮在水中, 再注入质量密度为 $3 \times 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ 的溶液. 问: 要保持容器不沉没, 可注入溶液的最大深度是多少米(如图所示)?



六、(14 分)

1. (6 分) 设 L_1 是通过原点和点 $M(1, 1, 1)$ 的直线, 又设 L_2 是通过原点的动直线, 且直线 L_2 与直线 L_1 的夹角始终为 $\frac{\pi}{4}$, 求 L_2 上点的坐标所满足的关系式.

2. (8 分) 求过直线 $L: \begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0, \end{cases}$ 且垂直平面 $\Pi: 4x - y + z = 1$ 的平面方程, 并求直线 L 在平面 Π 上的投影直线方程.

七、(6 分) 记 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (0 \leq i \leq n)$.

(1) 证明 $\prod_{i=0}^n C_n^i = \prod_{i=1}^n \left(\frac{n+1-i}{n+1} \right)^{n+1-2i}$;

(2) 利用题(1)的等式, 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n(n+1)]{\prod_{i=0}^n C_n^i}$ (其中符号 $\prod_{i=0}^n$ 是

连乘记号, $\prod_{i=0}^n C_n^i = C_n^0 C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^n$).

试卷(十四)考核内容分值表

考核内容	导数和微分	积分及其应用	向量代数和空间解析几何
分值	12	68	20

试卷(十四)详解

一、选择题

1. 已知函数 $y = f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 且 $f'(a) = k$ ($k \neq 0$ 常数), 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a-3t) - f(a-5t)}{t} =$ _____.

- (A) k ; (B) $-2k$; (C) $2k$; (D) $8k$.

解 选 C.

因为 $f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = k$,

所以

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a-3t) - f(a-5t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(a-3t) - f(a)] - [f(a-5t) - f(a)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[(-3) \frac{f(a-3t) - f(a)}{-3t} + 5 \frac{f(a-5t) - f(a)}{-5t} \right] \\ &= -3f'(a) + 5f'(a) \\ &= 2f'(a) = 2k, \end{aligned}$$

故选 C.

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x^2} = 1$, 则 _____.

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点;

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点.

解 选 B.

由条件可知: 在点 $x=0$ 邻域内 $f''(x) > 0$, 因此, 在此邻域内曲线下凸, 又因为 $f'(0) = 0$, 故在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)$, 所以选 B.

3. 函数 $y = \frac{2x+1}{x^2+2x+2}$ 在 $[-2, 0]$ 上的平均值是_____.

(A) $-\frac{\pi}{4}$; (B) $-\frac{\pi}{2}$; (C) 0; (D) $\frac{\pi}{4}$.

解 选 A.

事实上, 连续函数在区间上的平均值由定积分便可求得, 即由

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx$$

求得, 故选 A.

4. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$ _____.

(A) $\frac{\pi}{2}$; (B) $\frac{\pi}{4}$; (C) 发散; (D) π .

解 选 B.

5. 二直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 相交, 则

$\lambda =$ _____.

(A) $\frac{5}{4}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) $-\frac{5}{4}$; (D) 1.

解 选 A.

由两直线相交的充要条件

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

得 $\lambda = \frac{5}{4}$, 故选 A.

二、填充题

1. 设 $y = f(x+y)$, 其中 f 可导, 且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

解 $\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}.$

方法 1 因为 $y' = f'(x+y)(1+y')$,

故解得

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}.$$

方法 2 设 $F(x, y) = y - f(x+y)$,

而

$$F_x(x, y) = -f'(x+y), F_y(x, y) = 1 - f'(x+y),$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}.$$

2. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x^2 \cos t^3 dt =$ _____.

解 $2x \int_{x^2}^0 x^2 \cos t^3 dt - 2x^3 \cos x^6.$

注意到积分变量为 t , 与 x 无关, 所以

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x^2 \cos t^3 dt \\ &= \frac{d}{dx} [x^2 \cdot \int_{x^2}^0 \cos t^3 dt] \\ &= 2x \int_{x^2}^0 x^2 \cos t^3 dt - 2x^3 \cos x^6. \end{aligned}$$

3. 设 $f(x) = (x^{667} - 1)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, $g(1) = 3$, 则 $f'(1) =$ _____.

解 2 001.

由题设可知 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 3$,

故

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{667} - 1)g(x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{666} + x^{665} + \cdots + x + 1)g(x) \\ &= 667g(1) = 2\,001. \end{aligned}$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\frac{3}{4}.$

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{3}} + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

5. 设 $|a| = 1$, $|b| = 1$, a 与 b 的夹角 $(\hat{a}, b) = 30^\circ$, 则以 $a + 2b$ 和 $3a + b$ 为邻边的平行四边形面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\frac{5}{2}.$

由向量外积的几何意义可得

$$\begin{aligned} S &= \|(a + 2b) \times (3a + b)\| \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

三、1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{-t} - \sin t^2) dt - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3}.$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{-t} - \sin t^2) dt - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - \sin x^2 - 1 + x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x + \frac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2) - 1 + x}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. 已知 $f''(x)$ 连续, 且 $f(0) = 2, f(\pi) = 1$, 求

$$\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx.$$

解
$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \cdot f''(x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \, df'(x) \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx + \sin x \, f'(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cos x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx - \cos x \, f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx \\ &= 3. \end{aligned}$$

点评 由于被积函数的特点, 故两个积分同时计算则更为快捷, 即

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) d(-\cos x) + \int_0^{\pi} \sin x \, df'(x) \\ &= -f(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x) \cos x \, dx + \sin x \cdot f'(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cos x \, dx \\ &= 3. \end{aligned}$$

3. 计算 $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$.

解 设 $x = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t + 2}{\sin^2 t \cos t} \cos t dt \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} [\csc t + 2\csc^2 t] dt \\ &= [\ln|\csc t - \cot t| - 2\cot t] \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= 2 - \ln|\sqrt{2} - 1| \\ &= 2 + \ln(1 + \sqrt{2}) . \end{aligned}$$

4. 设连续函数 $f(x)$ 有 $f(x) + f(-x) = \sin^2 x$, 计算

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin^8 x dx .$$

解

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin^8 x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} [f(x) + f(-x)] \sin^8 x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

5. 计算 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\ &= \int \frac{de^x}{1+x} - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\ &= \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{e^x}{1+x} + C.$$

四、已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx$, 求函数 $f(x)$.

解 设 $A = \int_0^1 f^2(x) dx,$

则有

$$f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} A,$$

$$f^2(x) = 9x^2 - 6x\sqrt{1-x^2} A + (1-x^2) A^2,$$

因此

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f^2(x) dx \\ &= \int_0^1 [9x^2 - 6x\sqrt{1-x^2} A + (1-x^2) A^2] dx \\ &= 3x^3 \Big|_0^1 + 2A(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) A^2 \Big|_0^1 \\ &= 3 - 2A + \frac{2}{3} A^2, \end{aligned}$$

即

$$2A^2 - 9A + 9 = 0,$$

解得

$$A = 3, \frac{3}{2},$$

从而

$$f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2}$$

和

$$f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

点评 在函数的表达式中, 注意到类似的积分 $\int_a^b \varphi(x) dx$ 为一确定的数值, 则所求便可得到.

五、一个质量密度为 $\frac{25}{19} \times 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ 的瓷质容器,内壁和外壁的形状

分别是 $y = \frac{x^2}{10} + 1$ 和 $y = \frac{x^2}{10}$ 绕着 y 轴旋转所得的旋转抛物面,容器的外高为 10(m),把它铅直浮在水中,再注入质量密度为 $3 \times 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ 的溶液.问:要保持容器不沉没,可注入溶液的最大深度是多少米(如图所示)?

解 因为

$$F_{\text{浮力}} = \pi \rho g \int_0^{10} x^2 dy = \pi \rho g \int_0^{10} 10y dy$$

$$= 500 \times 10^3 g \pi,$$

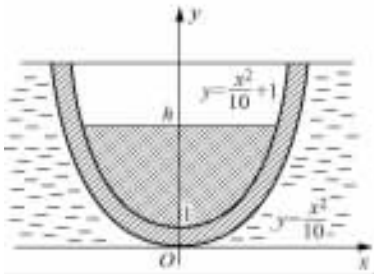
$$P_{\text{重力}} = P_{\text{容器}} + P_{\text{溶液}}$$

$$= \frac{25}{19} \times 10^3 g \left[\pi \int_0^{10} 10y dy - \pi \int_0^{10} 10(y-1) dy \right] + 3 \times 10^3 g \pi \int_1^h 10(y-1) dy$$

$$= \frac{25}{19} \times 10^3 g \pi \left[5y^2 \Big|_0^{10} - (5y^2 - 10y) \Big|_1^{10} \right] + 3 \times 10^3 g \pi (5y^2 - 10y) \Big|_1^h$$

$$= \frac{25}{19} \times 10^3 g \pi (100 + 5 - 10) + 3 \times 10^3 g \pi (5h^2 - 10h + 5)$$

$$= 125 \times 10^3 g \pi + 15 \times 10^3 g \pi (h-1)^2,$$



由 $F_{\text{浮力}} = P_{\text{重力}}$, 得

$$500 \times 10^3 g \pi = [125 + 15(h-1)^2] \times 10^3 g \pi,$$

即解得

$$h = 6, h = -4 \text{ (舍去)},$$

从而注入溶液的最大深度 $H = h - 1 = 5 \text{ (m)}$.

六、1. 设 L_1 是通过原点和点 $M(1, 1, 1)$ 的直线, 又设 L_2 是过原点的动直线, 且直线 L_2 与直线 L_1 的夹角始终为 $\frac{\pi}{4}$, 求 L_2 上点的坐标所满足的关系式.

解 设 L_2 上动点坐标为 (x, y, z) , L_1 的方向向量 $s_1 = (1, 1, 1)$, L_2 的方向向量 $s_2 = (x, y, z)$.

因为

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} &= \frac{s_1 \cdot s_2}{\|s_1\| \cdot \|s_2\|} \\ &= \frac{x+y+z}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

故得

$$(x+y+z)^2 = \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2),$$

所以有

$$x^2+y^2+z^2 = 4(xy+yz+xz).$$

2. 求过直线 $L: \begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0, \end{cases}$ 且垂直平面 $\Pi: 4x-y+z=$

1 的平面方程, 并求直线 L 在平面 Π 上的投影直线方程.

解 通过 L 的平面束方程为 $\Pi_1: (2+3\lambda)x - (4+\lambda)y + (1-2\lambda)z - 9\lambda = 0$,

因为

$$\Pi_1 \perp \Pi \text{ 即 } n_1 \perp n,$$

所以

$$4(2+3\lambda) + 4 + \lambda + 1 - 2\lambda = 0,$$

$$\lambda = -\frac{13}{11},$$

从而平面方程为 $17x + 31y - 37z - 117 = 0$,

而直线 L 在平面 Π 上的投影直线方程为

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0, \\ 4x-y+z-1=0. \end{cases}$$

点评 过直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的平面束方程 $A_1x +$

$B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, 通常是建立空间的平面方程或直线方程的常用方法之一.

七、记 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (0 \leq i \leq n)$.

(1) 证明 $\prod_{i=0}^n C_n^i = \prod_{i=1}^n \left(\frac{n+1-i}{n+1} \right)^{n+1-2i};$

(2) 利用题(1)的等式, 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n(n+1)]{\prod_{i=0}^n C_n^i}$ (其中符号 $\prod_{i=0}^n$ 是

连乘记号, $\prod_{i=0}^n C_n^i = C_n^0 C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^n$).

解 (1) 方法 1

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n C_n^i &= \prod_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{(n!)^{n+1}}{(1! 2! \cdots n!)^2} \\ &= \frac{1^{n+1} \times 2^{n+1} \times \cdots \times n^{n+1}}{(1^n \times 2^{n-1} \times \cdots \times n^{n-(n-1)})^2} = \frac{\prod_{i=1}^n i^{n+1}}{\left(\prod_{i=1}^n i^{n+1-i} \right)^2} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (n+1-i)^{n+1}}{\left[\prod_{i=1}^n (n+1-i)^i \right]^2} = \prod_{i=1}^n (n+1-i)^{n+1-2i}, \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{i=1}^n (n+1-2i) = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n C_n^i &= \prod_{i=1}^n \frac{(n+1-i)^{n+1-2i}}{(n+1)^{n+1-2i}} \\ &= \prod_{i=0}^n \left(\frac{n+1-i}{n+1} \right)^{n+1-2i}. \end{aligned}$$

方法 2 因为等式左边

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n C_n^i &= \prod_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{n!} \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdots \frac{n!}{(n-1)!1!} \cdot \frac{n!}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n!)^{n-1}}{[(n-1)!]^2 [(n-2)!]^2 \times \cdots \times (3!)^2 \times (2!)^2 \times (1!)^2} \\
&= n^{n-1} (n-1)^{n-3} \times \cdots \times 2^{(n-1)-2(n-2)} \times 1^{(n-1)-2(n-1)} \\
&= n^{n-1} (n-1)^{n-3} \times \cdots \times 2^{3-n} \times 1^{1-n},
\end{aligned}$$

等式右边

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=0}^n \left(\frac{n+1-i}{n+1} \right)^{n+1-2i} \\
&= \left(\frac{n+1}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n-1} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-3} \cdots \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-n} \\
&= \frac{n^{n-1} (n-1)^{n-3} \times \cdots \times 1^{1-n}}{(n+1)^{(n-1)+(n-3)+\cdots+(1-n)}} \\
&= n^{n-1} (n-1)^{n-3} \times \cdots \times 2^{3-n} \times 1^{1-n},
\end{aligned}$$

所以等式成立.

$$\begin{aligned}
(2) \lim_{n \rightarrow \infty}^{n(n+1)} \sqrt{\prod_{i=0}^n C_n^i} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} \ln \prod_{i=0}^n C_n^i} \\
&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n+1-2i) \ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right)} \\
&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - 2\frac{i}{n+1} \right) \ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right)} \\
&= e^{\int_0^1 (1-2x) \ln(1-x) dx} = e^{\int_0^1 (2u-1) \ln u du} \\
&= e^{\left[(u^2-u) \ln u - \frac{1}{2} u^2 + u \right]_0^1} = e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

试 卷 (十五)

——第二学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 函数 $u = u(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个偏导数至少有一个不连续是此函数在该点全微分存在的 _____ 条件.

- (A) 充分; (B) 必要;
(C) 充要; (D) 既非充分又非必要.

2. 设 $0 < a < b$, $V_1: a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2 (z \geq 0)$, $V_2: a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 为两个空间区域, 则 _____.

- (A) $\iiint_{V_1} x \, dV = 4 \iiint_{V_2} x \, dV$; (B) $\iiint_{V_1} y \, dV = 4 \iiint_{V_2} y \, dV$;
(C) $\iiint_{V_1} z \, dV = 4 \iiint_{V_2} z \, dV$; (D) $\iiint_{V_1} xyz \, dV = 4 \iiint_{V_2} xyz \, dV$.

3. 数量场 $u = x^2 - xy + y^2$ 在 $M(1, 1)$ 处的 $\text{grad } u|_{(1, 1)} =$ _____.

- (A) $i + j$; (B) $2i + j$; (C) $i - j$; (D) $2i - j$.

4. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy^2 + \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, D 由

$x = 1, y = 0, y = x^2$ 所围, 则 $f(x, y) =$ _____.

- (A) $xy^2 + \frac{1}{8}$; (B) $3xy^2 + \frac{1}{8}$;
(C) $3xy^2 + \frac{1}{16}$; (D) $xy^2 + \frac{1}{16}$.

5. $I = \iint_D |2 - x^2 - y^2| \, dx \, dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $I =$ _____.

$$(A) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2 - 2)r dr;$$

$$(B) \int_2^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2 - 2) dy;$$

$$(C) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^2 (r^2 - 2)r dr;$$

$$(D) \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2 - 2) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2 - 2) dy.$$

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $z = x^y$, 则 $dz|_{(2, 1)} =$ _____.

2. 交换积分次序: $\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx =$ _____.

3. 曲面 $2z - e^z + 2xy - 3 = 0$ 在点 $P(1, 2, 0)$ 处的切平面方程为 _____.

4. 曲线积分 $I = \int_C (4x^3y^3 - 3y^2 + 4y + 1)dx + (3x^4y^2 - 6xy + 5x + 2)dy$, C 为 $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 沿逆时针方向, 则 $I =$ _____.

5. $I = \int_C (x^2 + y^2)ds$, $L: x = 3\cos t, y = 3\sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), 则 $I =$ _____.

三、1. (8 分) 设 $z = f\left(2x - \frac{y}{x}\right) + g(u, e^{xy})$, 而其中由方程 $ue^x + y \sin u = 0$ 确定 u 为 x, y 的隐函数, 且 $f(t)$ 一阶可导, $g(u, v)$ 具有一阶偏导数, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

2. (8 分) 设函数 $z = f\left(x^2y, \frac{y^2}{x}\right) + xg(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 二阶可导, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

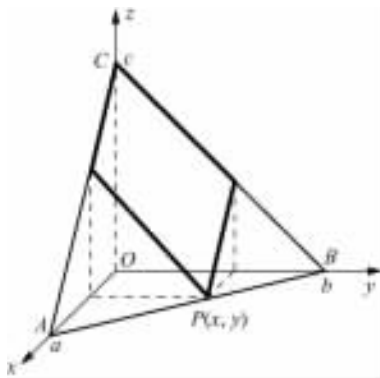
四、1. (6 分) 计算积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, D 由 $x = 0, x^2 + y^2 = a^2$,

$x^2 - 2ax + y^2 = 0$ ($a > 0$) 所围成在第一象限区域.

2. (10 分) 求柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截部分的曲面面积.

3. (10 分) 计算 $I = \oiint_S (xy^2 + yz^2) dydz + y|z| dzdx - (y^2z + x^2y) dxdy$, 其中 S 为由在 yOz 平面上的曲线 $y^2 - 4z^2 = 4$ 绕着 z 轴旋转所生成的曲面与平面 $z+1=0, z-1=0$ 所围成空间域的整个边界曲面的外侧.

五、(10 分) 在平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 与三坐标面所围成的四面体内, 作一个以该平面为顶面, 在 xOy 坐标面上的投影为长方形 (与 AB 相接) 的六面体 (如图所示), 求最大六面体的体积 (其中 $a, b, c > 0$).



六、(10 分) 计算 $\int_L [f(y)e^x - 4y] dx + [f'(y)e^x - 4] dy$, 其中 L 为曲线 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ($x \geq 0$) 上从 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的弧段, 且 $f'(y)$ 为连续函数, $f(0) = 0, f(1) = 1$.

七、(8 分) 设函数 $f(x)$ 是连续函数, 试证 $\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-a}^a (a-|u|) f(u) du$, 其中 D 由 $|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}$ 所确定的闭区域.

试卷(十五)考核内容分值表

考核内容	多元函数微分学	重积分及其应用	曲线、曲面积分
分值	28	46	26

试卷(十五)详解

一、选择题

1. 函数 $u = u(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个偏导数至少有一个不连续是此函数在该点全微分存在的_____条件.

- (A) 充分; (B) 必要;
(C) 充要; (D) 既非充分又非必要.

解 选 D.

2. 设 $0 < a < b$, $V_1: a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ ($z \geq 0$), $V_2: a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 为两个空间区域, 则_____.

- (A) $\iiint_{V_1} x \, dV = 4 \iiint_{V_2} x \, dV$; (B) $\iiint_{V_1} y \, dV = 4 \iiint_{V_2} y \, dV$;
(C) $\iiint_{V_1} z \, dV = 4 \iiint_{V_2} z \, dV$; (D) $\iiint_{V_1} xyz \, dV = 4 \iiint_{V_2} xyz \, dV$.

解 选 C.

注意到空间域 V_2 在 xOy 面的上方且关于 xOz 面和 yOz 面对称.

3. 数量场 $u = x^2 - xy + y^2$ 在 $M(1, 1)$ 处的

$$\text{grad } u|_{(1, 1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A) $i + j$; (B) $2i + j$; (C) $i - j$; (D) $2i - j$.

解 选 A.

4. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy^2 + \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, D 由 $x = 1, y = 0, y = x^2$ 所围, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) $xy^2 + \frac{1}{8}$; (B) $3xy^2 + \frac{1}{8}$;

$$(C) 3xy^2 + \frac{1}{16};$$

$$(D) xy^2 + \frac{1}{16}.$$

解 选 D.

可设 $A = \iint_D f(x, y) dx dy$, **则** $f(x, y) = xy^2 + A$,

所以

$$\begin{aligned} & \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (xy^2 + A) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (xy^2 + A) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^7}{3} + Ax^2 \right) dx = \frac{1}{24} + \frac{A}{3}, \end{aligned}$$

即 $A = \frac{1}{24} + \frac{A}{3},$

解得 $A = \frac{1}{16},$

从而

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy^2 + \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= xy^2 + A \\ &= xy^2 + \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

故选 D.

5. $I = \iint_D \left| 2 - x^2 - y^2 \right| dx dy, D: x^2 + y^2 \leqslant 4$, **则** $I = \underline{\hspace{2cm}}.$

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2 - 2)r dr;$

(B) $\int_2^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2 - 2) dy;$

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^2 (r^2 - 2)r dr;$

$$(D) \int_2^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2 - 2) dy + \int_2^2 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2 - 2) dy.$$

解 选 C.

事实上,

$$|2 - x^2 - y^2| = \begin{cases} 2 - x^2 - y^2 & (x^2 + y^2 \leq 2), \\ x^2 + y^2 - 2 & (x^2 + y^2 > 2), \end{cases}$$

所以 $D = D_1 + D_2$, **其中** $D_1: 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $D_2: 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$,

即

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \sqrt{2} \leq r \leq 2, \end{cases}$$

因此选 C.

二、填充题

1. 设 $z = x^y$, **则** $dz|_{(2,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $dx + 2\ln 2 dy$.

2. 交换积分次序: $\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y) dy$.

事实上, 积分区域 D **由** $x + y = 0$, $y = 1$ **和** $x^2 + y^2 = 2y$ ($0 \leq y \leq 1$) **所围.**

3. 曲面 $2z - e^z + 2xy - 3 = 0$ **在点** $P(1, 2, 0)$ **处的切平面方程为** $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 $4x + 2y + z - 8 = 0$.

设 $F(x, y, z) = 2z - e^z + 2xy - 3$.

由于 $F_x = 2y$, $F_y = 2x$, $F_z = 2 - e^z$, **所以曲面在点** $P(1, 2, 0)$ **处的切平面的法向量** $n = (4, 2, 1)$, **因此切平面方程为**

$$4(x-1) + 2(y-2) + z = 0,$$

即

$$4x + 2y + z - 8 = 0.$$

4. 曲线积分 $I = \int_C (4x^3y^3 - 3y^2 + 4y + 1)dx + (3x^4y^2 - 6xy + 5x + 2)dy$,

C 为 $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 沿逆时针方向, 则 $I =$ _____.

解 $1 + \frac{\pi}{4}.$

由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, 故补直线 $C_1: x = 0$ ($0 \leq y \leq 1$) 和 $C_2: y = 0$

($0 \leq x \leq 1$), 使

$$\begin{aligned} I &= \iint_D d\sigma - \int_{C_1+C_2} (4x^3y^3 - 3y^2 + 4y + 1)dx + (3x^4y^2 - 6xy \\ &\quad + 5x + 2)dy \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx - \int_1^0 2dy = 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5. $I = \int_C (x^2 + y^2)ds$, $L: x = 3\cos t, y = 3\sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), 则

$I =$ _____.

解 $\frac{27}{2}\pi.$

因为

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 3dt,$$

所以

$$I = \int_C (x^2 + y^2)ds = \int_0^{\pi/2} 3^2 \times 3dt = \frac{27}{2}\pi.$$

三、1. 设 $z = f\left(2x - \frac{y}{x}\right) + g(u, e^{xy})$, 而其中由方程 $ue^x + y \sin u = 0$

确定 u 为 x, y 的隐函数, 且 $f(t)$ 一阶可导, $g(u, v)$ 具有一阶偏导数,

试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 设 $F(x, y, u) = ue^x + y \sin u, v = e^{xy}$,

因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_u} = -\frac{ue^x}{e^x + y \cos u},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(2 + \frac{y}{x^2}\right)f' + g_u \frac{\partial u}{\partial x} + g_v \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(2 + \frac{y}{x^2}\right)f' - \frac{g_u u e^x}{e^x + y \cos u} + g_v y e^{xy}.\end{aligned}$$

点评 对于函数的复合关系比较复杂时,必须理清它的复合结构,再求其偏导数.事实上,利用全微分形式不变性,通过求函数的全微分来求较复杂的多元复合函数的偏导数不失为一种好方法.即由方程

$$u e^x + y \sin u = 0,$$

得 $e^x du + u e^x dx + \sin u dy + y \cos u du = 0,$

即

$$du = -\frac{u e^x dx + \sin u dy}{e^x + y \cos u},$$

因此
$$\begin{aligned}dz &= f' \cdot \left(2dx - \frac{x dy - y dx}{x^2}\right) + g_u du + g_v e^{xy} (y dx + x dy) \\ &= \left(2 + \frac{y}{x^2}\right)f' dx - \frac{f'}{x} dy + g_u \left(-\frac{u e^x dx + \sin u dy}{e^x + y \cos u}\right) \\ &\quad + y g_v e^{xy} dx + x g_v e^{xy} dy \\ &= \left[\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)f' - \frac{g_u u e^x}{e^x + y \cos u} + y g_v e^{xy}\right] dx \\ &\quad + \left(-\frac{f'}{x} - \frac{g_u \sin u}{e^x + y \cos u} + x g_v e^{xy}\right) dy,\end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(2 + \frac{y}{x^2}\right)f' - \frac{g_u u e^x}{e^x + y \cos u} + g_v y e^{xy}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= g_v x e^{xy} - \frac{f'}{x} - \frac{g_u \sin u}{e^x + y \cos u}.\end{aligned}$$

2. 设函数 $z = f\left(x^2 y, \frac{y^2}{x}\right) + xg(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 二阶可导, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xyf_1 - \frac{y^2}{x^2}f_2 + g + 2x^2g',$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{2x2y} &= 2xf_1 + 2xy\left(x^2f_{11} + \frac{2y}{x}f_{12}\right) - \frac{2y}{x^2}f_2 \\ &\quad - \frac{y^2}{x^2}\left(x^2f_{12} + \frac{2y}{x}f_{22}\right) + 2yg' + 4x^2yg'' \\ &= 2xf_1 - \frac{2y}{x^2}f_2 + 2x^3yf_{11} + 3y^2f_{12} \\ &\quad - \frac{2y^3}{x^3}f_{22} + 2yg' + 4x^2yg''. \end{aligned}$$

四、1. 计算积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, D 由 $x = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ ($a > 0$) 所围成在第一象限区域.

$$\text{解 由} \begin{cases} r = a, \\ r = 2a \cos \theta, \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3},$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \int_{2a \cos \theta}^a r^2 dr \\ &= \frac{a^3}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - 8\cos^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{6} - 8 \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) \right) \\ &= \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{16}{3} + 3\sqrt{3} \right). \end{aligned}$$

2. 求柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) **被球面** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ **所截部分的曲面面积.**

解 所截部分的曲面往 xOz 面上投影, 有 $D: ax \leq a^2 - z^2$, 且柱面: $y = \sqrt{ax - x^2}$ (第一象限), 设 $D_1: ax \leq a^2 - z^2$ ($z \geq 0$).

因为

$$y_x = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}, y_z = 0,$$

$$\begin{aligned} dS &= 4\sqrt{1+y_x^2+y_z^2} dzdx \\ &= 4\sqrt{1+\frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} dzdx \\ &= \frac{2a dzdx}{\sqrt{ax-x^2}}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{D_1} \sqrt{1+y_x^2+y_z^2} dzdx \\ &= 2a \iint_{D_1} \frac{dzdx}{\sqrt{ax-x^2}} \\ &= 2a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-ax}} dz \\ &= 2a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-ax} dx \\ &= 2a \int_0^a \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} dx \\ &= 4a \sqrt{a} \sqrt{x} \Big|_0^a = 4a^2. \end{aligned}$$

3. 计算 $I = \oiint_S (xy^2 + yz^2) dydz + y|z| dzdx - (y^2z + x^2y) dx dy$, 其

中 S 为由在 yOz 平面上的曲线 $y^2 - 4z^2 = 4$ 绕着 z 轴旋转所生成的曲面与平面 $z+1=0$, $z-1=0$ 所围成空间域的整个边界曲面的外侧.

解 旋转曲面方程为 $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4, \Leftrightarrow r^2 - 4z^2 = 4$.

方法 1 用截面法, 有

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} |z| dV = \int_{-1}^1 |z| dz \iint_D d\sigma = 2 \int_0^1 z \pi r^2 dz \\ &= 2\pi \int_0^1 z(4+4z^2) dz \end{aligned}$$

$$= 8\pi \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_0^1 = 6\pi.$$

方法 2 用柱面坐标, 有

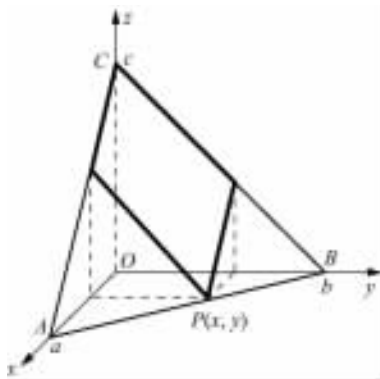
$$I = \iiint_D |z| dV = \int_{-1}^1 |z| dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4+4z^2}} r dr = 6\pi.$$

点评 对于三重积分的被积函数只与 z 有关, 且用 $z = z_0$ 去截空间积分区域 Ω 时, 截面只是 z 的函数, 则一般用截面法去求三重积分的值比直接计算(化为累次积分)更为便捷.

五、在平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 与三坐标面所围成的四面体内, 作一个以该平面为顶面, 在 xOy 坐标面上的投影为长方形(与 AB 相接)的六面体(如图所示), 求最大六面体的体积(其中 $a, b, c > 0$).

解 因为六面体体积

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dV = \iint_D c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dx dy \\ &= \int_0^x dx \int_0^y c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dy, \end{aligned}$$



所以设

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= \int_0^x dx \int_0^y \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dy + \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right) \\ &= xy - \frac{x^2 y}{2a} - \frac{xy^2}{2b} + \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right). \end{aligned}$$

因

$$\begin{cases} L_x = y - \frac{xy}{a} - \frac{y^2}{2b} + \frac{\lambda}{a} = 0, \\ L_y = x - \frac{x^2}{2a} - \frac{xy}{b} + \frac{\lambda}{b} = 0, \Rightarrow x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, \\ L_\lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \end{cases}$$

驻点唯一,故

$$\begin{aligned} V_{\max} &= c \int_0^{a/2} dx \int_0^{b/2} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy \\ &= c \int_0^{a/2} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{b}{2} - \frac{1}{2b} \frac{b^2}{4} \right] dx \\ &= c \left(\frac{1}{4} ab - \frac{1}{16} ab - \frac{1}{16} ab \right) \\ &= \frac{1}{8} abc . \end{aligned}$$

六、计算 $\int_L [f(y)e^x - 4y]dx + [f'(y)e^x - 4]dy$, 其中 L 为曲线 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ($x \geq 0$) 上从 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的弧段, 且 $f'(y)$ 为连续函数, $f(0) = 0, f(1) = 1$.

解 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4$, 故补直线

$$\overline{AB}: y = 1 \ (0 \leq x \leq 1), \overline{BO}: x = 0 \ (0 \leq y \leq 1),$$

则 D 由 $x^2 + (y-1)^2 = 1, x = 0 (0 \leq y \leq 1)$ 和 $y = 1 (0 \leq x \leq 1)$ 所围. 所以

$$\begin{aligned} I &= \oint - \int_{\overline{AB}} - \int_{\overline{BO}} \\ &= \iint_D 4 d\sigma - \int_1^0 (f(1)e^x - 4) dx - \int_1^0 (f'(y) - 4) dy \\ &= 4 \times \frac{1}{4} \pi + \int_0^1 [f(1)e^x + f'(x) - 8] dx \\ &= \pi + (e^x + f(x) - 8x) \Big|_0^1 \\ &= \pi + e - 8 . \end{aligned}$$

七、设函数 $f(x)$ **是连续函数, 试证** $\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-a}^a (a-|u|) f(u) du$,

其中 D 由 $|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}$ 所确定的闭区域.

$$\begin{aligned}
 \text{证 左} &= \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} f(x-y) dy \quad (\text{设 } u = x-y) \\
 &= \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{x+a/2}^{x-a/2} [-f(u)] du = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{x-a/2}^{x+a/2} f(u) du \\
 &= \int_{-a}^0 f(u) du \int_{-a/2}^{u+a/2} dx + \int_0^a f(u) du \int_{u-a/2}^{a/2} dx \\
 &= \int_{-a}^0 (u+a) f(u) du + \int_0^a (a-u) f(u) du,
 \end{aligned}$$

$$\text{右} = \int_{-a}^0 (a+u) f(u) du + \int_0^a (a-u) f(u) du,$$

左=右,得证.

点评 从证明过程可知,证明重积分等式或不等式的成立,换元法与交换积分次序是不可或缺的.

试 卷 (十六)

——第二学期期末试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ 是定义在 D 域 $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ 上的函数,则 ()

- (A) $f(-1, -1)$ 不是极值;
(B) $f(-1, -1)$ 是最大值;
(C) $f(-3, 0), f(0, -3)$ 是最小值;
(D) $f(-3, 0), f(0, -3)$ 是最大值.

2. 已知 $F(x, y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $F(x, y)(y dx + x dy)$ 为某一函数的全微分,则 ()

- (A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$; (B) $x \frac{\partial F}{\partial x} = y \frac{\partial F}{\partial y}$;
(C) $-x \frac{\partial F}{\partial x} = y \frac{\partial F}{\partial y}$; (D) $y \frac{\partial F}{\partial x} = x \frac{\partial F}{\partial y}$.

3. 设 $\Sigma: z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4$ 的部分,则 $\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4z}} dS =$ ()

- (A) 6π ; (B) 3π ;
(C) $(\sqrt{17} - \sqrt{5})\pi$; (D) $\frac{\sqrt{17} - \sqrt{5}}{2}\pi$.

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性,下列说法正确的是 ()

- (A) $1 + \frac{1}{n} > 1$, 收敛; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = 0$, 收敛;

(C) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n}$, 收敛; (D) A, B, C 都不对.

5. 设 l 是由 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 三点连成的三角形边界曲线, 则 $\oint y \, ds =$ ()

(A) $2 + 2\sqrt{2}$; (B) $2 + \sqrt{2}$; (C) $2\sqrt{2}$; (D) $\sqrt{2}$.

二、填充题(共 15 分, 每小题 3 分)

1. 设 $u(x, y, z) = x^y z$, 则 $du|_{(1, 2, 3)} =$ _____.

2. 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$, 则该方程的特解(形式) $y^* =$ _____.

3. 设向量场 $A(x, y, z) = (x^3 + 3y^2 z)\mathbf{i} + 6xyz\mathbf{j} + 3xy^2\mathbf{k}$, 则 $\operatorname{div} A =$ _____.

4. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n} x^{2n-3}$ 的收敛半径 $R =$ _____.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} -x - \pi & (-\pi < x < 0), \\ x + \frac{\pi}{2} & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于 _____.

三、1. (9 分) 设 $F(u, v)$ 具有一阶连续偏导数, 且由 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定 $z = z(x, y)$, 求 $xz'_x + yz'_y$.

2. (8 分) 求几何体 $z \leq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \geq x$, $x^2 + y^2 \leq 2x$ 及 $z \geq 0$ 的体积.

四、(8 分) 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \left[\frac{z}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + xy^2 \right] dy dz + \left[\frac{z}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 y + e^x \right] dz dx + z(x^2 + y^2) dx dy,$$

其中 $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 1$ ($1 \leq z \leq 5$) 曲面的上侧.

五、1. (7 分) 将函数 $f(x) = x \ln(1+x)$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数, 并指出收敛域.

2. (7 分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ 的收敛域.

3. (7 分) 设 $I_n = \int_0^{\pi/3} \sin^n x \cos x \, dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 求级数

$\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ 的和.

六、1. (8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) dx dy,$$

试求 $f(t)$.

2. (8 分) 求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = e^x + x$ 的通解.

七、(8 分) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 试证:

当 $a_0 = a_1 = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 必收敛.

试卷(十六)考核内容分值表

考核内容	多元函数微分学	重积分及其应用	曲线、曲面积分	微分方程	无穷级数
分值	15	8	20	19	38

试卷(十六)详解

一、选择题

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ 是定义在 D 域 $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ 上的函数, 则 ()

- (A) $f(-1, -1)$ 不是极值;
- (B) $f(-1, -1)$ 是最大值;
- (C) $f(-3, 0), f(0, -3)$ 是最小值;
- (D) $f(-3, 0), f(0, -3)$ 是最大值.

解 选 D.

$f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且点 $(-1, -1)$ 在 D 内, 由极值的充分条件可知点 $(-1, -1)$ 为极小值, 当然不可能为最大值, 故排除 A 和 B. 又由比较可选定 D.

2. 已知 $F(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $F(x, y)(y dx + x dy)$ 为某一函数的全微分, 则 ()

- (A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$;
- (B) $x \frac{\partial F}{\partial x} = y \frac{\partial F}{\partial y}$;
- (C) $-x \frac{\partial F}{\partial x} = y \frac{\partial F}{\partial y}$;
- (D) $y \frac{\partial F}{\partial x} = x \frac{\partial F}{\partial y}$.

解 B.

3. 设 $\Sigma: z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4$ 的部分, 则 $\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4z}} dS =$ ()

- (A) 6π ;
- (B) 3π ;
- (C) $(\sqrt{17} - \sqrt{5})\pi$;
- (D) $\frac{\sqrt{17} - \sqrt{5}}{2}\pi$.

解 A.

因为 $ds = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$, 且 $D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 2$, 故

$$\iint_D \frac{2}{\sqrt{1+4z}} dS = 2 \iint_D dxdy = 6\pi.$$

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^n \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性, 下列说法正确的是 ()

(A) $1 + \frac{1}{n} > 1$, 收敛; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = 0$, 收敛;

(C) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n}$, 收敛; (D) A, B, C 都不对.

解 D.

事实上, 利用比较法的极限形式, 由于极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 发散, 因此 A, B, C 都不对.

5. 设 l 是由 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 三点连成的三角形边界曲线, 则 $\oint_l y ds =$ ()

(A) $2 + 2\sqrt{2}$; (B) $2 + \sqrt{2}$; (C) $2\sqrt{2}$; (D) $\sqrt{2}$.

解 D.

二、填空题

1. 设 $u(x, y, z) = x^y z$, 则 $du|_{(1, 2, 3)} =$ _____.

解 $6dx + dz$.

2. 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$, 则该方程的特解(形式) $y^* =$ _____.

解 $x e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$.

3. 设向量场 $A(x, y, z) = (x^3 + 3y^2 z)\mathbf{i} + 6xyz\mathbf{j} + 3xy^2\mathbf{k}$, 则

$\operatorname{div} \mathbf{A} =$ _____.

解 $3x^2 + 6xz$.

4. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n} x^{2n-3}$ 的收敛半径 $R =$ _____.

解 $\sqrt{3}$.

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} x^{2n+1}}{(-1)^n \frac{1}{3^n n} x^{2n-3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} x^2 = \frac{x^2}{3},$

故得 $R = \sqrt{3}$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} -x - \pi & (-\pi < x < 0), \\ x + \frac{\pi}{2} & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$ 是以 2π 为周期的周

期函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于 _____.

解 $\frac{3}{4}\pi$.

在点 $x = \pi$ 处收敛于 $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{0 + \frac{3}{2}\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$.

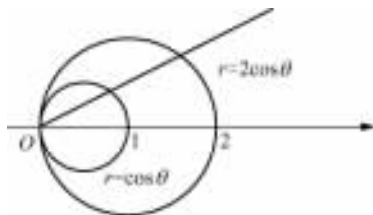
三、1. 设 $F(u, v)$ 具有一阶连续偏导数, 且由 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定 $z = z(x, y)$, 求 $xz_x + yz_y$.

解 因为 $z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yzF_v - x^2yF_u}{x^2F_u + xyF_v}$, $z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xzF_u - xy^2F_v}{xyF_u + y^2F_v}$,

故 $xz_x + yz_y = \frac{(xz - x^2y)F_u + (yz - xy^2)F_v}{xF_u + yF_v}$.

2. 求几何体 $z \leq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \geq x$, $x^2 + y^2 \leq 2x$ 及 $z \geq 0$ 的体积.

解 $V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{\cos \theta}^{2\cos \theta} r^3 dr \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15 \cos^4 \theta d\theta = \frac{45}{32} \pi.
\end{aligned}$$

四、设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 计算曲面积分

$$\begin{aligned}
I = \iint_{\Sigma} \left[\frac{z}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + xy^2 \right] dy dz + \left[\frac{z}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 y + e^x \right] dz dx \\
+ z(x^2 + y^2) dx dy,
\end{aligned}$$

其中 $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 1$ ($1 \leq z \leq 5$) 曲面的上侧.

解 补加平面 $\Sigma_1: z = 5$ 下侧, 则

$$\begin{aligned}
I &= \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \\
&= - \iiint_{\Omega} \left[\frac{z}{y^2} f' - \frac{z}{y^2} f' + 2(x^2 + y^2) \right] dV - \iint_{\Sigma_1} z(x^2 + y^2) dx dy \\
&= - \iiint_{\Omega} 2(x^2 + y^2) dV + \iint_{D_{xy}} 5(x^2 + y^2) dx dy \\
&= - 2 \int_1^5 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z-1}} r^3 dr + 5 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \\
&= - \pi \int_1^5 (z-1)^2 dz + 40\pi \\
&= - \frac{\pi}{3} (z-1)^3 \Big|_1^5 + 40\pi = \frac{56}{3} \pi.
\end{aligned}$$

五、1. 将函数 $f(x) = x \ln(1+x)$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数, 并指出收敛域.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &x \ln(1+x) \\
&= [(x-1)+1] \ln[2+(x-1)] \\
&= [(x-1)+1] \left[\ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x-1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(x-1)] + 1 \left[\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{2^n n} \right] \\
&= \ln 2 + (x-1) \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n+1}}{2^n n} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{2^n n} \\
&= \ln 2 + (x-1) \ln 2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n-1} (n-1)} + \frac{x-1}{2} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{2^n n} \\
&= \ln 2 + \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) (x-1) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\frac{-1}{n-1} + \frac{1}{2n} \right) (x-1)^n \\
&= \ln 2 + \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n n (n-1)} (x-1)^n \\
&\hspace{15em} (-1 < x \leq 3).
\end{aligned}$$

点评 由本题的求解过程可以看出,函数 $f(x)$ 展开为 $(x-x_0)$ 的幂级数,应尽量采用间接展开法,即通过代数运算,将 $f(x)$ 变化为其级数及收敛域已知的函数,从而得到 $f(x)$ 在 x_0 处的幂级数.

2. 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ 的收敛域.

解 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1,$

故 $R = 1.$

当 $x = 1$ 时,级数为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, 因为 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) \Big|_2^{+\infty} =$

$+\infty$, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散;

当 $x = -1$ 时,为级数交错 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0, \quad \frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)},$$

所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ 收敛;

从而幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ 的收敛域为 $-1 \leq x < 1$.

3. 设 $I_n = \int_0^{\pi/3} \sin^n x \cos x \, dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ 的和.

$$\text{解} \quad I_n = \int_0^{\pi/3} \sin^n x \cos x \, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} I_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1}, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \\ &= -\ln(1-x) \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \ln(4+2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

六、1. 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) dx dy,$$

试求 $f(t)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{由于} \quad f(t) &= e^{4\pi t^2} + \iint_{r^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{r}{2}\right) r \, dr d\theta \\ &= e^{4\pi t^2} + 2\pi \int_0^{2t} f\left(\frac{r}{2}\right) r \, dr, \end{aligned}$$

故 $f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 2\pi \cdot 4t f(t)$,
即为一阶微分方程

$$f'(t) - 8\pi t f(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2},$$

从而

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\int 8\pi t \, dt} \left(\int 8\pi t e^{4\pi t^2} \cdot e^{-\int 8\pi t \, dt} \, dt + C \right) \\ &= e^{4\pi t^2} \left(\int 8\pi t \, dt + C \right) \\ &= e^{4\pi t^2} (4\pi t^2 + C). \end{aligned}$$

由 $f(0) = 1$ 可得 $C = 1$,

因此 $f(t) = e^{4\pi t^2} (4\pi t^2 + 1)$.

2. 求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = e^x + x$ 的通解.

解 由特征方程 $r^2 + 2r - 3 = 0$, 得 $r_1 = -3, r_2 = 1$,

故 $Y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

设 $y^* = Ax e^x + Bx + C$,

则 $y^{*'} = Ae^x + Ax e^x + B, y^{*''} = 2Ae^x + Ax e^x$,

代入方程得 $4Ae^x - 3Bx + 2B - 3C = e^x + x$,

解得 $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{9}$,

故 $y^* = \frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{3} \left(x + \frac{2}{3} \right)$.

从而方程的通解 $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{3} \left(x + \frac{2}{3} \right)$.

七、设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 试证:

当 $a_0 = a_1 = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 必收敛.

解 由题设可知 $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 且 $|a_n| <$

M . 因为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

且 $a_0 = a_1 = 0$, 故

$$\begin{aligned}\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| &= \left| \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots + \frac{a_n}{n^n} + \cdots \right| \\ &< \frac{M}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots \right) \\ &= \frac{M}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{M}{n(n-1)},\end{aligned}$$

级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{M}{n(n-1)}$ 收敛, 所以由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 必收敛.