非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研

数学四

根据2006年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10套题

赠答疑卡

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列

数学考研

2006 版

模拟考试试卷

数学四

（共 10 套，附解答与评分参考）

主编　龚冬保

王寿生　褚维盘　魏战线（高等数学）

崔荣泉（线性代数）　周家良（概率统计）

西安交通大学出版社

·西安·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学四)2006版/龚冬保主编.—西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

Ⅰ.数...　Ⅱ.龚...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第082616号

书　　名	数学考研模拟考试试卷(数学四)2006版
主　　编	龚冬保
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	西安市新城区兴庆印刷厂
字　　数	188千字
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	8
版　　次	2005年10月第4版　2005年10月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-5605-1591-6/O·191
定　　价	48.00(本卷12.00元)

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上，严格按《2006 年数学考试大纲》的要求，以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用，特作以下提示：

1. 考前演习为实战　模拟试卷认真练

一定要按考试的要求，像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间，可用闹钟定时到 10:45，而于 8:00 打开试卷开始“考试”，闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的 10 套模拟卷，至少隔 3 天，最多隔一周做上一套，效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷　卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者，除了像考试一样做相关的 10 套题之外，还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法，但 10 套试卷题量有限，难免还有遗漏，参考一下其余试卷，可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快　总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法，在不出错的前提下快速完成，这是巧准快的意思。每做完一套试卷后，要认真总结分析，对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白；对于做错的题，检查错在哪里：概念？方法？还是运算？对于做对的题，总结一下还有没有更好的方法，更快的途径。为此，我们特为设计了总结记录表，希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增　沉着应试展才能

每做一套模拟题后，不仅要作解题方法方面的总结，还要从应试策略方面不断做调整。从 2004 年起试卷模式上的重大变化是客观题占 56 分。因此，加强基本运算能力，训练用最简洁的步骤做填空题；加强对基本概念的理解，用最灵活的方法做选择题，力争在 60 分钟内将这 56 分拿到手。作解答题时，要坚持先易后难的原则，即先做那些感到熟悉的、容易得分的题，后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题，再作线性代数题，尤其是数学三、四的试卷中，这两部分解答题占 52 分，仅有 4 道题，一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这 52 分，加上客观题共有 108 分之多！我们模拟试卷估计会比正式考题难些，考前像正式考试一样去做这些题，正式考时，像平时作模拟题一样的心态去应试，方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥，充分展示你的才能，考出理想成绩。

最后，我们强调要反复做模拟题，从做第二遍起，要把练习基本功作为重点，对会做的题一定要一遍做对，不断总结不丢分和多得分的应试策略，这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要，只要会做基本题，临场不慌不乱，也是能考出理想成绩的。

考研成功！

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 2	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 4	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 5	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 6	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 8	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 9	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 10	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试试卷 1

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 已知$\int e^{-x} f(x)\mathrm{d}x = \arctan e^{x} + C$,那么$\int f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{\cos x})^{\mathrm{cse}^2 x} =$ ________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right) =$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}| = |2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}| = |3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}| = 0$,则 $|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^*| =$ ________.

(5) 设 $P(A) = 1, P(B) = 0.7$,则 $P(AB) =$ ________.

(6) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且都服从区间$[-1,1]$上的均匀分布则 $E|X-Y| =$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 若 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ a e^{x} + b e^{-x}, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 处处可导,则(　).

(A) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$　　(B) $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

(C) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$　　(D) $a = 1, b = 0$

(8) 设 $f(x)$ 在$(a-1, a+1)$内可导,且 $f'(x)$ 在 $x = a$ 连续,及$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a} = 2$,则(　).

(A) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(B) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点　　(D) $f(x)$ 在 $(a-1, a+1)$ 是单调函数

(9) 设 $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$,其中 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ \sin x, & x \geqslant 0 \end{cases}$,则( ).

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导　　(B) $F(x)$ 在 $x=0$ 不连续

(C) $x=1$ 是 $F(x)$ 的极值点　　(D) $F(\pi) = 3\frac{2}{3}$

(10) 设 $(axy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y = \mathrm{d}u(x,y)$,则( ).

(A) $a=-2, b=2$　　(B) $a=2, b=-2$

(C) $a=-3, b=3$　　(D) $a=3, b=-3$

(11) 已知某一阶线性微分方程有两个特解:$y = 2\sin x + x\cos x$ 及 $y = x\cos x - \sin x$,则此方程是( ).

(A) $y'\sin x - y\cos x = x\sin x\cos x$　　(B) $y' - y\cos x = \cos x - x$

(C) $y'\sin x - y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x - x$　　(D) $y' - y\cos x = \sin x - x$

(12) 与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 相似的矩阵是( ).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$r(\boldsymbol{A}) = n-1$,则 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*] = $( ).

(A) n　　(B) $n-1$　　(C) 1　　(D) 0

(14) 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$,Y 的分布律为

Y	1	4	8
p	0.2	0.5	0.3

且 X、Y 相互独立,则随机变量 $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布函数( ).

(A) 是连续函数　　(B) 是阶梯函数

(C) 恰有一个间断点　　(D) 恰有两个间断点

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 计算 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 2}}\mathrm{d}x$.

（16）**（本题满分 8 分）**某种商品的需求量 Q 是单价 P（单位元）的函数，$Q=12000-8P$，商品的总成本 $C=25000+50Q$；每件商品税费 2 元，求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

（17）**（本题满分 8 分）**设 $f(x)$ 可微，且 $f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$. 求 $x^2z'_x+y^2z'_y$.

（18）（本题满分 9 分） 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且 $f(1)=3\int_{1/3}^{2/3}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

（19）（本题满分 8 分） 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant\pi\}$.

(**20**)(**本题满分 13 分**)求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,将对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 化为相似的对角矩阵:$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

(**21**)(**本题满分 13 分**)已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$a_1\neq 0$. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$

(i) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解;

(ii) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值与对应的特征向量.

（22）（本题满分 13 分）已知二维随机变量的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cx\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,y>0\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

求(i)C 的值；

(ii) 关于 X、Y 的边缘概率密度，并判断 X、Y 是否独立；

(iii)$Z=\max(X,Y)$ 的概率密度.

（23）**（本题满分 13 分）** 袋中装有 50 枚正品硬币，50 枚次品硬币（次品硬币的两面都印有国徽）

（1）从袋中任取一枚硬币，将它投掷三次，已知每次都出现国徽，问这枚硬币是正品的概率为多少？

（2）若在袋中任取一枚硬币，将它投掷 k 次（$k \geqslant 1$），问至少出现一次国徽的概率为多少？

试卷(一)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C}$. 由所给等式两边求导得 $e^{-x}f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$,故 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$,$\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$.

(2) $\underline{e^{-\frac{1}{4}}}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{2\sin^2 x}\ln(1+\cos x-1)}=e^{-\frac{1}{4}}$

(3) $\underline{\dfrac{1}{3}}$. 此极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3}=\int_0^1 x^2 dx=\dfrac{1}{3}$.

(4) $\underline{-126}$. 由已知等式知 1、-2 和 $-\dfrac{3}{2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3/2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$. $|\boldsymbol{A}|=3$. 故由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 知 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $3,-\dfrac{3}{2},-2$,

$$|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|3\boldsymbol{E}-2\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3/2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-3&0&0\\0&6&0\\0&0&7\end{vmatrix}=-126.$$

(5) $\underline{0.7}$. $P(A)=1$,则 $P(\bar{A})=0$,及 $P(\bar{A}\bar{B})\leqslant P(\bar{A})=0$,$P(AB)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-(P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B}))=0.7$.

注 本题的特殊解法:设 A 是必然事件,则 $AB=B$,$P(AB)=P(B)=0.7$.

(6) $\underline{\dfrac{2}{3}}$. $E|X-Y|=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{4}|x-y|dxdy=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}dx\int_x^1(x-y)dy=\dfrac{2}{3}$.

二、选择题

(7)(B). 由连续性知 $a+b=1$,再由可导性知 $a-b=-\dfrac{1}{2}$,解得 $a=\dfrac{1}{4}$,$b=\dfrac{3}{4}$.

(8)(A). 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=2$ 知,$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=0$ 及 $f''(a)=2$. 故 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 选(A).

(9)(D). $F(\pi)=\int_{-1}^{0}(1-t^2)dt+\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{5}{3}+2=\dfrac{11}{3}$,选(D).

(10)(B). **解 1** 由已知 $du=(axy^3dx+3x^2y^2dy)-y^2\cos x dx+by\sin x dy+dy=(\dfrac{a}{2}y^3dx^2+x^2dy^3)-y^2d\sin x+\dfrac{b}{2}\sin x dy^2+dy$

因此 $a=2$,$b=-2$ 时 $du=d(x^2y^3-y^2\sin x+y)$ 成立. 选(B).

解 2 由已知得 $u'_x=axy^3-y^2\cos x$,$u'_y=1+by\sin x+3x^2y^2$,显然二阶导数连续,因此 $u''_{xy}=u''_{yx}$ 即

$3axy^2-2y\cos x=by\cos x+6xy^2$. 故 $a=2$,$b=-2$.

(11)(C). **解 1** 由两个特解可知方程通解为 $y=C\sin x+x\cos x$,$y'=C\cos x+\cos x-$

$x\sin x$. 消去 C 得 $y'\sin x - y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x - x$.

解 2 可知 $C\sin x$ 是齐次方程的通解，$x\cos x$ 是特解，代入方程 $y'\sin x = \cos x\sin x - x\sin^2 x$，$-y\cos x = -x\cos^2 x$.

故 $y'\sin x - y\cos x = \cos x\sin x - x = \frac{1}{2}\sin 2x - x$. 选(C).

(12)(D). 本题实质是考查一般矩阵的相似对角矩阵问题，这里 $\lambda = 1$ 是二重特征根，只有(D)可对应两个线性无关的特征向量，故选(D).

(13)(D). 由 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$ 知 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$，从而 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*] = 0$.

(14)(D).

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{\frac{X}{Y} \leqslant z\} \\
&= P\{Y=1\}P\{\frac{X}{Y} \leqslant z \mid Y=1\} + P\{y=4\}P\{\frac{X}{Y} \leqslant z \mid Y=4\} \\
&\quad + P\{Y=8\}P\{\frac{X}{Y} \leqslant z \mid y=8\} \\
&= 0.2P\{X \leqslant z \mid Y=1\} + 0.5P\{X \leqslant 4z \mid Y=4\} + 0.3P\{X \leqslant 8z \mid Y=8\} \\
&= 0.2F_Z(z) + 0.5F_X(4z) + 0.3F_Z(8z).
\end{aligned}
$$
应选(D).

三、解答题

(15)解 令 $e^x - 2 = t^2$，则 $x = \ln(2+t^2)$. $e^x dx = 2t dt$. (3 分)

$$
\begin{aligned}
\text{原积分} &= 2\int \ln(2+t^2)dt = 2t\ln(1+t^2) - 4\int \frac{t^2}{2+t^2}dt \\
&= 2t\ln(1+t^2) - 4t + 8\int \frac{dt}{2+t^2} = 2t\ln(1+t^2) - 4t + 4\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C \\
&= 2x\sqrt{e^x-2} - 4\sqrt{e^x-2} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}} + C.
\end{aligned}
$$
(9 分)

(16)解 销售利润额为

$$
\begin{aligned}
L &= (12000-8P)(P-2) - [25000 + 50(12000-80P)] \\
&= -80P^2 + 16160P - 649000
\end{aligned}
$$
(3 分)

令 $\frac{dL}{dP} = -160P + 16160 = 0$，得 $P = 101$. $\frac{d^2L}{dP^2} = -160 < 0$

因此 $P = 101$ 是最大值点，即销售单价为 101 元时利润额最大.

最大利润额是 $L = 167080$ 元 (8 分)

(17)解 由 $df(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}) = d(\frac{1}{z} - \frac{1}{x})$ 得

$$f'(\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}) = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$ (4 分)

故 $z'_x = \frac{1}{x^2}(1-f')z^2$；$z'_y = \frac{z^2}{y^2}f'$.

因此 $$x^2 z'_x + y^2 z'_y = z^2$$ (8 分)

(18)解 由 $\frac{f(x)}{x}$ 连续，由积分中值定理知，存在 $\eta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$，使 $f(1) = \frac{f(\eta)}{\eta}$. (3 分)

在$[\eta,1]$上，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件　　(7 分).

故存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$. 即$\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$.

即
$$\xi f'(\xi)=f(\xi).\qquad(9\text{ 分})$$

(19) 解　$I=\iint\limits_D \sin x\cos y\,dx\,dy+\iint\limits_D \cos x\sin y\,dx\,dy$

$$=\int_0^\pi \sin x\,dx\int_0^x \cos y\,dy+\int_0^\pi \sin y\,dy\int_y^\pi \cos x\,dx\qquad(3\text{ 分})$$

$$=\int_0^\pi \sin x\,dx\int_0^x \cos y\,dy+\int_0^\pi \sin x\,dx\int_x^\pi \cos y\,dy\qquad(6\text{ 分})$$

$$=\int_0^\pi \sin x\,dx\cdot\int_0^\pi \cos y\,dy=0\qquad(8\text{ 分})$$

(20) 解　$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=0$　　(5 分)

求对应 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量，即解方程组

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

得 2 个正交的单位向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})^{\mathrm T},\boldsymbol{\xi}_2=(\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})^{\mathrm T}$

而求对应 $\lambda_3=0$ 的特征向量方程组为

$$\begin{cases}-2x_1-x_2-x_3=0\\ -x_1-2x_2+x_3=0\\ -x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

得　$\boldsymbol{\xi}_3=(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^{\mathrm T}$　　(9 分)

将 $\boldsymbol{A}$ 化为　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　　(13 分)

(21) 解　(i) 由 $1\leqslant r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\alpha})^{\mathrm T}\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})=1$，因此方程组等价于方程：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\ (a_1\neq0)$. 从而此方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^{\mathrm T}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^{\mathrm T}$$

方程组的通解为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$ （7 分）

(ii) 由(i) 知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值，因此，其非零的特征值是 $\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.（10 分）

由 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)\boldsymbol{\alpha}$. 故对应于非零特征值 λ_n 的特征向量为 $c\boldsymbol{\alpha}$.（写成 $\boldsymbol{\alpha}$ 不扣分）.

（13 分）

(22) 解 (i) 由 $1=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}cx\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-x(1+y)})\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}x=c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=c$，得 $c=1$. （4 分）

(ii) 当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$

当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(1+y)^2}$.

因为在 $x>0,y>0$ 上

$$x\mathrm{e}^{-x(1+y)}=f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)=\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{(1+y)^2}$$

故 X,Y 不独立. （9 分）

(iii) 当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant z\\0\leqslant y\leqslant z}}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x(1+z)})\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}+\frac{1}{1+z}(\mathrm{e}^{-z(z+1)}-1)$$

故

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}(1-\mathrm{e}^{-z(1+z)})-\dfrac{2z+1}{1+z}\mathrm{e}^{-z(1+z)}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$ （13 分）

(23) 解 (1) 设 $A=\{$取到一枚正品$\}$，$B=\{$投一枚币 3 次都出现国徽$\}$，则

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3\Big/\Big[\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}\cdot 1\Big]=\frac{1}{9}$$ （7 分）

(2) $P\{$至少出现一次国徽$\}=1-P\{$没出现国徽$\}$

$$=1-(\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^k+\frac{1}{2}\cdot 0)=1-\frac{1}{2^{k+1}}$$ （13 分）

数学考研模拟考试试卷 2

数 学 四

考生注意：(1) 本试卷共三大题，23 小题，满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且满足 $f(\pi)=2$，$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$，则 $f(0)=$ ________.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^n=$ ________.

(3) 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{n}{x}y=\mathrm{e}^x x^n$（$n$ 为常数）的通解是________.

(4) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=$ ________.

(5) $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，若 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{D}|=$ ________.

(6) 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,4;2,16;\frac{1}{4})$，$Z=X-Y$. 则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

(7) 设 $f(x)$、$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是等价无穷小，

则当 $x \to 0^{+}$ 时，$\int_0^x (e^t - 1)^3 f(t)\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^{x^2} \sin t\varphi(\sqrt{t})\mathrm{d}t$ 的（　）.

（A）等价无穷小　　（B）同阶但不等价的无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）低阶无穷小

(8) 设 $f(a) = 0$，则函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 点可导的充要条件是（　）.

（A）$\lim\limits_{h \to \infty} n\left[f(a + \frac{1}{n})\right]$ 存在.　　（B）$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在.

（C）$\lim\limits_{h \to -\infty} h\left[f(a - \frac{1}{h})\right]$ 存在.　　（D）$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h)}{\sin h}$ 存在.

(9) 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y},\ y + \frac{z}{x}) = 0$ 所确定，则 $z - x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} =$（　）.

（A）0　　（B）xy　　（C）z　　（D）yz

(10) 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处（　）

（A）不连续　　（B）连续但不可导

（C）可导但导数不连续　　（D）导数连续

(11) $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} [(x+R)^2 + 2(x-y)^2]\mathrm{d}\sigma =$（　）.

（A）$\dfrac{9\pi R^4}{4}$　　（B）$\dfrac{7\pi R^4}{4}$

（C）$\dfrac{4}{3}\pi R^4$　　（D）$\dfrac{5}{3}\pi R^4$

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = r$，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则（　）.

（A）$m = n$ 时，必有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$　　（B）$r = n$ 时，必有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$

（C）$m < n$ 时，必有 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$　　（D）$r < n$ 时，必有 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$

(13) 设 A,B,C 是三个事件，则与事件 $A\bar{B}$ 互不相容的事件是（　）.

（A）$BC - A$　　（B）$\bar{B}C \cup A$

（C）$\overline{\bar{A} \cup B \cup C}$　　（D）$\overline{A \cap \bar{B} \cap C}$

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 X 和 Y 之间的关系为（　）.

（A）独立同分布　　（B）独立不同分布

（C）不独立但同分布　　（D）不独立也不同分布

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 8 分) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{2+\frac{1}{x}}+e^{2-\frac{1}{x}}-2e^2\right)-\arctan\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x\right]$.

(16)(本题满分 8 分) 某厂生产某种产品 x(百台),总成本为 $C(x)$(万元),其中固定成本为 2 万元,每生产 1 百台的其它成本为 1 万元,销售收入 R 为 x 的函数(单位:万元 / 百台):

$$R(x)=\begin{cases}4x-\dfrac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 8, & x>4\end{cases}$$

(1) 问每年生产多少台产品,可使总利润最大?

(2) 求利润最大时的产品售价.

(17)（本题满分 9 分） 设平面图形 A 由抛物线 $y^2 = 2px$（常数 $p > 0$）和直线 $x = \frac{p}{2}$ 围成.（1）求 A 的面积；（2）求 A 绕直线 $y = p$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

(18)（本题满分 9 分） 求函数 $f(x) = \int_0^x (1 + t)\arctan t\,dt$ 的单调增减区间与极值.

(19)（本题满分 8 分） 设函数 $f(x)$ 是在$[a,b]$上的正值连续函数，试证：

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2,$$ 其中 D 为 $a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b$.

(20)（本题满分 13 分） 对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，已知存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$，$c \neq 0$，求 a、b、c 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(21)（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是线性无关的 n 维实向量，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times l$ 实矩阵（$l\leqslant n-r$），$\boldsymbol{B}$ 的列向量组为正交向量组，记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，试判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 的线性相关性.

(22)（本题满分 13 分）若工厂的机床中车床、钻床、磨床和刨床的台数之比为 9∶3∶2∶1，它们在一定时间内需要修理的概率之比为 1∶2∶3∶1.

(1) 当有一台机床需要修理时，问这台机床是车床的概率是多少？

(2) 某修理工值班，若他能修好车床，但不会修磨床和刨床，而修好钻床仅有 50% 的把握，当一台机床需要修理，问此修理工能修好的概率是多少？

(23)（本题满分 13 分）已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{24x(4-x)}{\pi^2(12-\pi)}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：(1) $Y=\max(X,1)$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

(2) $Z=\mathrm{e}^X+2$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(3) $T=\sin X$ 的数学期望 ET.

试卷(二)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 3 \quad}$. 由题设条件，有

$$5=\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f''(x)\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}\cos x+\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}f'(x)$$

$$=-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos xf'(x)\mathrm{d}x+\sin xf'(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$=-f(\pi)\cos\pi+f(0)\cos 0=2+f(0)$$

由此解得 $f(0)=3$.

(2) $\underline{\quad \mathrm{e}^{2f'(a)/f(a)} \quad}$.

$$\text{原极限}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}-1\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]}=\mathrm{e}^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{n}}=\frac{1}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}+\frac{f(a-\frac{1}{n})-f(a)}{-\frac{1}{n}}\right]$$

$$=\frac{2f'(a)}{f(a)}$$

(3) $\underline{\quad y=x^n(\mathrm{e}^x+c) \quad}$. 这是一阶线性非齐次方程，由公式法

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{n}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^x x^n\mathrm{e}^{-\int\frac{n}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=x^n(\mathrm{e}^x+c)$$

(4) $\underline{\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}}$. 上(或下)三角可逆矩阵的逆矩阵仍为上(或下)三角矩阵，利用矩阵乘法直接求得.

(5) $\underline{\quad (-1)^{mn}ab \quad}$. 由 $|\boldsymbol{D}|=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab$

(6) $\underline{\quad 2 \quad}$. $\mathrm{cov}(X,Z)=\mathrm{cov}(X,X-Y)=\mathrm{cov}(X,X)-\mathrm{cov}(X,Y)=DX-\rho_{X,Y}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=4-\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 4=2$.

(7) (B). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^t-1)^3f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{x^2}\sin t\varphi(\sqrt{t})\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^3f(x)}{2x\cdot\sin x^2\cdot\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{1}{2}$

(8) (D). 选项(A)、(C)最多只能保证右导数或左导数存在，故不能选；而(B)与 $f(a)$ 的值无关，故只有(D)正确，选(D).

注:(A)、(C) 可用反解:$f(x)=|x-a|$,显然在 a 点不可导,且 $f(a)$,但 $\lim\limits_{h\to\infty} n \mid \frac{1}{n}=1$;$\lim\limits_{h\to-\infty} h \mid -\frac{1}{h}=1 \mid$ 将存在. 对(C) 可令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq a\\ 0, & x=a\end{cases}$,则 $f(a)$ 在 $x=a$ 点不连续,自然不可导,但 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=0$ 存在.

(9)(B) **解** 将 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 的两边对 x 求导

$$(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})F'_1+(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x})F'_2=0$$

两边同乘以 x^2y,并解出 $x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zyF'_2-x^2yF'_1}{xF'_1+yF'_2}$

同理可求得 $y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zxF'_1-y^2xF'_2}{xF'_1+yF'_2}$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xF'_1+yF'_2}[z(xF'_1+yF'_2)-xy(xF'_1+yF'_2)]=z-xy$

故 $z-xz'_x-yz'_y=xy$ 选(B).

(10)(A) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$,而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-2$,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 还连续. 选(A)

(11)(A). 原积分 $=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(3x^2+2y^2+R^2+2Rx-4xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由对称性后两项积分为零,而 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(3x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{5}{4}\pi R^4$. 故原积分 $=\frac{5}{4}\pi R^4+\pi R^4=\frac{9}{4}\pi R^4$,选(A).

(12)(B). 当 $r=n$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,所以必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,故应选(B).

(13)(A). 因为 $BC-A=BC\overline{A}$,A 和 $\overline{A}$ 互不相容,所以 $A\overline{B}$ 和 $\overline{A}BC$ 互不相容,应选(A).

(14)(C). 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

即 $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同样可解得 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,所以 X、Y 不独立,但同分布,故应选(C).

三、解答题

(15)解 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{x}=0$,而 $\arctan x$ 为有界变量,所以

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0 \qquad (2\text{ 分})$$

从而　原极限$=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-2}{\dfrac{1}{x^2}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\mathrm{e}^2\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}-2}{t^2}=\mathrm{e}^2\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2t}$　（6 分）

$$=\mathrm{e}^2\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}=\mathrm{e}^2$$　（8 分）

（16）解　（1）总利润函数为

$$y(x)=R(x)-C(x)=R(x)-(2+x)=\begin{cases}3x-\dfrac{1}{2}x^2-2, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 6-x, & x>4\end{cases}$$　（2 分）

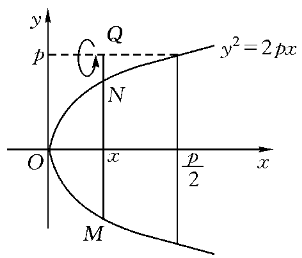
$$y'_x=\begin{cases}3-x, & 0\leqslant x<4\\ -1, & x\geqslant 4\end{cases}$$

由$y'_x=0$，得$x=3$，且当$0\leqslant x<3$时，$y'_x>0$；当$x>3$时，$y'_x<0$，$\Rightarrow \max y(x)=y(3)=2.5$（万元）.　（6 分）

（2）利润最大时，$x=3$（百台），此时产品售价为

$$\left.\left(\frac{4x-\frac{1}{2}x^2}{x}\right)\right|_{x=3}\text{（万元 / 百台）}=\left(4-\frac{3}{2}\right)\text{（万元 / 百台）}=250\text{（元 / 台）}.$$　（8 分）

（17）解　（1）A 的面积为　$2\displaystyle\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}p^2$.　（3 分）



（2）用过 x 点垂直于 x 轴的平面截旋转体，截面为圆环域，其内、外半径的长分别为

$$r=|NQ|=p-\sqrt{2px},\quad R=|MQ|=p+\sqrt{2px},$$

截面面积为

$$S(x)=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)=4\pi p\sqrt{2px},$$

（6 分）

所求体积为

$$V=\int_0^{\frac{p}{2}}S(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{p}{2}}4\pi p\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi p^3.$$　（9 分）

（18）解　$f'(x)=(1+x)\arctan x$，由$f'(x)=0$，得$x=-1$，$x=0$. $f(x)$的单调增减区间及极值点如下表所示：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	<0	0	>0
$f(x)$	单调增	极大值点	单调减	极小值点	单调增

（4 分）

极小值 $f(0)=0$，

极大值 $f(-1)=\displaystyle\int_0^{-1}(1+t)\arctan t\,\mathrm{d}t=\int_0^{-1}\arctan t\,\mathrm{d}\frac{(1+t)^2}{2}$

$$=\arctan t\cdot\left.\frac{(1+t)^2}{2}\right|_0^{-1}-\int_0^{-1}\frac{1+t^2+2t}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{-1}\frac{1}{2}\mathrm{d}t-\int_0^{-1}\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{2(1+t^2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\ln 2) \qquad (9\text{ 分})$$

(19) 证 因为 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上正值连续函数，所以 $f(x)$ 与 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积，又 D 关于直线 $y=x$ 对称，故有

$$\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (3\text{ 分})$$

于是

$$\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\iint_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2 \qquad (8\text{ 分})$$

(20) 解 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ 相似，所以 $\lambda_1=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值，于是 $r(\boldsymbol{A})=2$，由此可得 $|\boldsymbol{A}|=-(b-1)^2=0$，$\Rightarrow b=1$. 又由于 $\lambda_2=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，由此解得 $a=3$. 又由 $\boldsymbol{A}$ 的 3 特征值之和等于 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和，所以 $\lambda_3=c=4$. (6 分)

对于 $\lambda_1=0$，解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，将其规范化得 $\boldsymbol{p}_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$；(8 分)

对于 $\lambda_2=1$，解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，将其规范化得 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$；

(10 分)

对于 $\lambda_3=4$，解 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，将其规范化得 $\boldsymbol{p}_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$；

(12 分)

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$. (13 分)

(21) 解 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\cdots\boldsymbol{\beta}_l)$，由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j=0\ (i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,l)$，即 $\boldsymbol{\beta}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0(i=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,l)$ (6 分)

设有数 $k_1,\cdots,k_r,\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\lambda_l\boldsymbol{\beta}_l=\boldsymbol{0}$$

对等式两边左乘 $\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,l)$，由上述结果及 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 为正交向量组可得 $\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,l)$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 线性无关.

(13 分)

(22) 解 设 B_1、B_2、B_3、B_4 分别表示机床是车床，钻床，磨床和刨床这四个事件，$A=\{$一台机床需要修理$\}$，$C=\{$修理工能修好$\}$，则 B_1、B_2、B_3、B_4 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{4}B_i=\Omega$，即它们构成完全事件组. (4 分)

(1) $P(B_1 \mid A) = \dfrac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)}$

$$= \frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7}}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{7}} = \frac{9}{22}$$ (8 分)

(2) $P(C \mid A) = \dfrac{P(AC)}{P(A)} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B_iAC)}{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B_iA)} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)P(C \mid B_iA)}{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)}$

$$= \frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7} \times 1 + \frac{3}{15} \times \frac{2}{7} \times 0.5 + \frac{2}{15} \times \frac{3}{7} \times 0 + \frac{1}{15} \times \frac{1}{7} \times 0}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{7}} = \frac{6}{11}$$

(13 分)

(23) **证**(1) $F_Y(y) = P\{\max(X,1) \leqslant y\} = P(\{X \leqslant y\} \cap \{1 \leqslant y\})$

当 $y < 1$ 时，$F_Y(y) = P(\{X \leqslant y\} \cap \varnothing) = P(\varnothing) = 0$.

当 $1 \leqslant y < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$F_Y(y) = P(\{X \leqslant y\} \cap \Omega) = P\{X \leqslant y\}$

$$= \int_0^y \frac{24x(4-x)}{\pi^2(12-\pi)}\mathrm{d}x = \frac{8y^2(6-y)}{\pi^2(12-\pi)}$$

当 $y \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，$F_Y(y) = P(\{X \leqslant y\} \cap \Omega) = P\{X \leqslant y\} = 1$ (5 分)

(2) 因为在区间$(0,\dfrac{\pi}{2})$上 $z = \mathrm{e}^x + 2$ 处处可导，且$(\mathrm{e}^x + 2)' = \mathrm{e}^x > 0$，故可用定理。反函数 $x = \ln(z-2)$，$(\alpha,\beta) = (3,\ 2+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}})$. 故

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{24\ln(z-2)\cdot(4-\ln(z-2))}{\pi^2(12-\pi)} \cdot \dfrac{1}{z-2}, & 3 < z < 2+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$ (9 分)

(3) $ET = E\sin X = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{24x(4-x)}{\pi^2(12-\pi}\mathrm{d}x$

$$= \frac{24}{\pi^2(12-\pi)}\left[-x(4-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-2x)\cos x\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{24}{\pi^2(12-\pi)}\left[(4-2x)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2)\sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{24(6-\pi)}{\pi^2(12-\pi)}$$ (13 分)

数学考研模拟考试试卷 3

数学四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 数列“$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$”中数值最大的一项是________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & x<0\end{cases}$,则 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$ ________.

(3) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y=$ ________.

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$(其中 r 为奇数)线性无关,要使 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r-1}=\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+t\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r+t\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关,只需常数 t 满足关系式________.

(5) 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{101}=$ ________.

(6) 已知 $P(A)=0.6,P(B)=0.5,P(C)=0.5,P(AB)=0.3,P(BC)=0.3,P(AC)=0.2,P(ABC)=0.1$,则 $P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+\sin x)f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　).

(A) 不连续　　(B) 不可导

(C) 可导且 $F'(0)=0$　　(D) 可导且 $F'(0)=2f'(0)$

(8) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(2x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x$ 是 $g(x)=\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x$ 的(　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶而非等价的无穷小

(9) 微分方程 $y'=\dfrac{y}{y-x}$ 的通解是(　).

(A) $y^2-2xy=C$　　(B) $y^2+2xy=C$

(C) $x^2-2xy=C$　　(D) $x^2+2xy=C$

(10) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$(　).

(A) 不可导　　(B) 可导但 $f'(0)\neq 0$

(C) 取得极大值　　(D) 取得极小值

(11) 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$(　)

(A) 没有渐近线　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=n-2$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解(其中的 c_1,c_2 为任意实数)为(　).

(A) $\boldsymbol{\beta}_1+c_1\boldsymbol{\beta}_2+c_2\boldsymbol{\beta}_3$　　(B) $c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2-(c_1+c_2)\boldsymbol{\beta}_3$

(C) $c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2-(1-c_1-c_2)\boldsymbol{\beta}_3$　　(D) $c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2+(1-c_1-c_2)\boldsymbol{\beta}_3$

(13) 设 A、B、C 是任意三个事件，事件 D 表示"A、B、C 中至少有两个事件发生"，则下列事件中和事件 D 不相等的是(　).

(A) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$　　(B) $\Omega-(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C})$

(C) $AB+BC+AC$　　(D) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$

(14) 如果存在常数 $a,b(a\neq 0)$，使 $P\{Y=aX+b\}=1$，且 $0<DX<+\infty$，那么 ρ_{XY} 为(　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) $\dfrac{a}{|a|}$　　(D) $|\rho_{XY}|<1$

三、解答题(本大题共 9 小题，满分 94 分)

(15)（本题满分 8 分） 已知某制造商的生产函数为 $f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$，式中 x 代表劳动力的数量，y 为资本数量，每个劳动力与每单位资本的成本分别是 150 元和 250 元，该制造商的总预算是 50 000 元，问他该如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本，以使生产量最高.

(16)（本题满分 8 分）设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，收益函数为 $R=pQ$，其中 p 为产品价格、Q 为需求量（产品的产量），$Q(p)$ 是单调减函数. 如果当价格为 p_0、对应产量为 Q_0 时，边际收益 $\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=a>0$，收益对价格的边际效应 $\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=C<0$，需求对价格的弹性为 $E_p=b>1$，求 p_0 和 Q_0.

(17)（本题满分 9 分）(1) 计算 $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$；

(2) 证明：在任意区间 $[a,b]$ 上，必存在一点 c，使得 $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^c}=\dfrac{1}{b-a}\ln\dfrac{\mathrm{e}^b(\mathrm{e}^a+1)}{\mathrm{e}^a(\mathrm{e}^b+1)}$.

(18)（本题满分 9 分） 在第一象限求曲线 $y=1-x^2$ 上一点，使该点处切线与此抛物线及两坐标轴所围图形面积最小，并求此最小面积.

(19)（本题满分 8 分） 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，试求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^3}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant t^2$.

(20)(本题满分 13 分)(1)证明:若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆;

(2)举一个 $\boldsymbol{AB}$ 为二阶矩阵的例子,说明上述命题的逆命题不成立;

(3)当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵时,证明(1)的逆命题成立.

(21)(本题满分 13 分)设 λ_0 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的一个特征值,$\xi=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是属于 λ_0 的一个特征向量.(1)求 a,b,λ_0 的值;(2)求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵,并写出这个对角阵.

(22)（本题满分 13 分） 设随机变量 X、Y 相互独立，已知 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=a_i(i=1,2)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)$，试求 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

(23)（本题满分 13 分） 设二维随机变量 (X_1,X_2) 在以 $A(-2,0)$，$B(0,-1)$，$C(2,0)$，$D(0,1)$ 为顶点的四边形上服从均匀分布，引入随机变量

$$Y_1=\begin{cases}-1, & \text{若 } X_1\leqslant -1,\\ 1, & \text{若 } X_1>-1;\end{cases}\qquad Y_2=\begin{cases}-1, & \text{若 } X_2\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1, & \text{若 } X_2>\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

试求：(1) Y_1 和 Y_2 的联合分布律.

(2) Y_1 和 Y_2 的联合分布函数.

试卷(三)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\sqrt[3]{3}}$. 令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}, 1\leqslant x<+\infty$

则$\sqrt[n]{n}=f(n), n=1,2,\cdots$. 故来讨论 $f(x)$ 的性态:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$$

可见,当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调增;当 $x>\mathrm{e}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减.

由于 $2<\mathrm{e}<3$,所以

当 $n\leqslant 2$ 时,数列$\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大项为$\sqrt{2}$;

当 $n\geqslant 3$ 时,数列$\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大项为$\sqrt[3]{3}$.

所以,$\sqrt{2}$ 与$\sqrt[3]{3}$ 中较大者、即$\sqrt[3]{3}$ 就是数列$\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的项.

(2) $\underline{1+\ln(1+\mathrm{e}^{-1})}$.

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x-1=t} \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^0\frac{(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\int_{-1}^0\left[1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right]\mathrm{d}x+\ln 2=1-\ln(1+\mathrm{e}^x)\Big|_{-1}^0+\ln 2$$

$$=1+\ln(1+\mathrm{e}^{-1})$$

(3) $\underline{\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})}$.

解 1 交换积分顺序:

原积分 $I=\int_0^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x=\int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$

解 2 分部积分法. 记 $F(x)=\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

$$I=x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\Big|_0^2+\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

(4) $\underline{t\neq -1}$. 要满足需要,只需从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的变换矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & t \\ t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

由此并注意到 r 为奇数可解得 $t\neq -1$.

(5) $\underline{-\boldsymbol{E}}$. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}=-\boldsymbol{PEP}^{-1}=-\boldsymbol{E}$, $\Rightarrow \boldsymbol{A}^{101}=(-\boldsymbol{E})^{101}=-\boldsymbol{E}$.

(6) $\underline{0.5}$.

解 1 $P(C \mid \overline{A}\,\overline{B}) = \dfrac{P(C\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A}\,\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})}{P(\overline{A}\,\overline{B})} = 1 - \dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})}{P(\overline{A}\,\overline{B})}$

$$= 1 - \frac{1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC))}{1-(P(A)+P(B)-P(AB))}$$

$$= 1 - \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

解 2 $P(C \mid \overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(\overline{C} \mid \overline{A}\,\overline{B}) = 1 - \dfrac{P(\overline{C}\,\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A}\,\overline{B})}$,后面计算同上.

二、选择题

(7) (D). 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1+\frac{\sin x}{x})\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+\frac{\sin x}{x})\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 2f'(0)$$

即知 $F'(0)=2f'(0)$,故只有(D) 正确.

(8) (D). 事实上,当 $x\to 0$ 时,

$$f(x) = \ln[\mathrm{e}^{2x}(2x^2\mathrm{e}^{-2x}+1)] - 2x = 2x + \ln(2x^2\mathrm{e}^{-2x}+1) - 2x$$

$$= \ln(2x^2\mathrm{e}^{-2x}+1) \sim 2x^2\mathrm{e}^{-2x} \sim 2x^2$$

$$g(x) = \ln[\mathrm{e}^{x}(\sin^2 x\mathrm{e}^{-x}+1)] - x$$

$$= \ln(\sin^2 x\mathrm{e}^{-x}+1) \sim \sin^2 x\mathrm{e}^{-x} \sim x^2$$

所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

因此,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶而非等价的无穷小,只有选项(D) 正确.

(9) (A). 本题关键是视 x 为 y 的函数.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y-x}{y} = 1 - \frac{x}{y}$$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \dfrac{1}{y}x = 1$ 是一阶线性非齐次方程,由公式法:

$$x = \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}[\int 1\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C_1] = \frac{1}{y}(\frac{1}{2}y^2 + C_1)$$

记 $C=-2C_1$ 得通解 $y^2-2xy=C$.

(10) (C). 由极限的保号性,知在 $x=0$ 的某去心邻域内 $\dfrac{f(x)}{1-\cos x}<0$,又因 $1-\cos x>0$,故 $f(x)<0=f(0)$,因此 $f(0)$ 为 f 的极大值。 选(C)

注: 如取 $f(x)=-x^2$,则 $f(x)$ 满足题设条件,但此时选项(A)、(B) 及(D) 均不对,故本题也可用排除法立即断言(C) 正确.

(11) (D). 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=1$,故曲线有水平渐近线 $y=1$,又由 $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\infty$,知曲线有铅直渐近线 $x=0$,故只有选项(D) 正确.

(12) (D). 由题设条件知 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,故应选(D).

(13) (A). 显然 $D=AB+BC+AC$,而

$$\Omega-(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C})=\overline{\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}}$$
$$=(A+B)(A+C)(B+C)=(A+BC)(B+C)$$
$$=AB+BC+CA$$
$$AB+BC+AC=(ABC+AB\overline{C})+(BCA+BC\overline{A})+(ACB+AC\overline{B})$$
$$=\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$$

这说明(B),(C),(D) 中的事件都和事件 D 相等,所以只能选(A).

(14) (C). 因为 $|\rho_{X,Y}|=1 \rightleftharpoons$ 存在常数 a,b,使 $P\{Y=aX+b\}=1$,且当 $a>0$ 时,$\rho_{X,Y}=1$;当 $a<0$ 时,$\rho_{X,Y}=-1$,故 $\rho_{X,Y}=\dfrac{a}{|a|}$.

三、解答题

(15) 解 问题为:求在条件 $150x+250y=50000$ 下,$f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 的最大值

令 $L(x,y,\lambda)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+\lambda(50000-150x-250y)$ (3 分)

$$\begin{cases}L'_x=75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-150\lambda=0 & (*)\\ L'_y=25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}-250\lambda=0 & (**)\\ 50000-150x-250y=0 & (***)\end{cases}$$ (6 分)

由(*)得 $\lambda=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$,代入(**)式得 $25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}-125x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=0$,将此式两边同乘 $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$,有 $25x-125y=0$ 即 $x=5y$,代入(***)得 $y=50,x=250$.

即该制造商应该雇用 250 个劳动力而把总预算的其余部分作为资本投入,这时可获得最大生产量 $f(250,50)=16\ 719$ (8 分)

(16) 解 由收益函数 $R=pQ$ 对 Q 求导,有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=p+Q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}=p+\left[-\frac{\frac{\mathrm{d}p}{p}}{\frac{\mathrm{d}Q}{Q}}\right](-p)=p(1-\frac{1}{E_p})$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=p_0(1-\frac{1}{b})=a$$

由此解得 $p_0=\dfrac{ab}{b-1}$. (4 分)

由收益 $R=pQ$ 对 p 求导,有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q+p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=Q-\frac{\frac{\mathrm{d}Q}{Q}}{\frac{\mathrm{d}p}{p}}(-Q)=Q(1-E_p)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=Q_0(1-E_p)=Q_0(1-b)=C$$

由此解得 $Q_0=\dfrac{C}{1-b}$. (8 分)

(17) 解 (1) $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int_a^b\frac{(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$$= b-a-\ln(1+e^x)\Big|_a^b = b-a-\ln\frac{1+e^b}{1+e^a}$$ （4 分）

（2）**证 1** 　由（1）得 $\int_a^b \frac{dx}{1+e^x} = b-a+\ln\frac{1+e^a}{1+e^b} = \ln\frac{e^b(1+e^a)}{e^a(1+e^b)}$

$\xlongequal{\text{又由积分中值定理}} \frac{1}{1+e^c}(b-a)$，其中 $a\leqslant c\leqslant b$ （9 分）

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^c} = \frac{1}{b-a}\ln\frac{e^b(1+e^a)}{e^a(1+e^b)},\ a\leqslant c\leqslant b.$$

证 2 　$\frac{1}{b-a}\ln\frac{e^b(e^a+1)}{e^a(e^b+1)} = \frac{1}{b-a}[b-a-(\ln(e^b+1)-\ln(e^a+1))]$

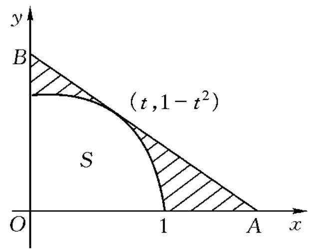
$$= 1-\frac{1}{b-a}[\ln(e^b+1)-\ln(e^a+1)]$$

$\xlongequal{\text{由 Lagrange 中值定理}} 1-\frac{e^c}{e^c+1} = \frac{1}{1+e^c},\ a\leqslant c\leqslant b.$ （9 分）

（18）解 　如图，设所求点是 $(t,1-t^2)$，切线方程为

$y-1+t^2 = 2t^2-2tx$ （4 分）

问题化为只要求 ΔOAB 的面积最小，而切线的截距分别为 $y_0 = 1+t^2$，$x_0 = \frac{1}{2t}(1+t^2)$，故 $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{4}(t^3+2t+\frac{1}{t})$



令 $f(t) = t^3+2t+\frac{1}{t}$ 及 $f'(t) = 3t^2+2-\frac{1}{t^2} = 0$

解得在 $(0,1)$ 内唯一驻点 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$，便是所求的最小点，故所求点是 $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$. （6 分）

这时，
$$\min S_{\Delta OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{16}{9} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

抛物线与两坐标轴围成面积是
$$\int_0^1(1-x^2)dx = \frac{2}{3}$$

所求最小面积为
$$\frac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$$ （9 分）

（19）解 　因为 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r)rdr = 2\pi\int_0^t f(r)rdr$ （3 分）

所以
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(r)rdr}{t^3}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi f(t)t}{3t^2} = \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{2\pi}{3}f'(0) = \frac{2\pi}{3}$$ （8 分）

（20）证 　（1）因 $(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 可逆. （4 分）

（2）设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，显然可逆，但由于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均不是方阵，当然说不上可逆. 故（1）的逆命题不成立. （9 分）

（3）当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵时，由 $\boldsymbol{AB}$ 可逆知 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$，而 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq$

$0,\ |\boldsymbol{B}|\neq 0$,从而 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均可逆,故逆命题成立. (13 分)

(21) 解 (1) 由题意 $\begin{bmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$,即 $\begin{cases}2-b=\lambda_0\\ b-a+1=-\lambda_0\\ \quad 1=\lambda_0\end{cases}$

由此解得 $a=3,b=1,\lambda_0=1$ (5 分)

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,由于 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,再由三个特征值之和等于 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和 5,所以另一个特征值为 $\lambda=4$. (9 分)

对 $\lambda_1=0$,解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,规范化得 $\boldsymbol{p}_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$

对 $\lambda_2=1$,解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,01,1)^{T}$,规范化得 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$

对 $\lambda_3=4$,解 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,规范化得 $\boldsymbol{p}_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$ (13 分)

(22) 解 $\{X=x_1\},\{X=x_2\}$ 构成完全事件组

$F_Z(z)=P\{X+2Y\leqslant z\}$ (3 分)

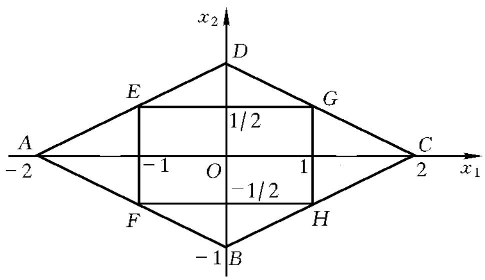
$=P\{X=x_1\}P\{X+2Y\leqslant z\mid X=x_1\}+P\{X=x_2\}P\{X+2Y\leqslant z\mid X=x_2\}$ (6 分)

$=a_1P\{Y\leqslant\frac{1}{2}(z-x_1)\mid X=x_1\}+a_2P\{Y\leqslant\frac{1}{2}(z-x_2)\mid X=x_2\}$ (9 分)

$=a_1P\{Y\leqslant\frac{1}{2}(z-x_1)\}+a_2P\{Y\leqslant\frac{1}{2}(z-x_2)\}$

$=a_1\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}(z-x_1)}f_Y(y)\mathrm{d}y+a_2\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}(z-x_2)}f_Y(y)\mathrm{d}y$ (13 分)

(23) 解 (1) (Y_1,Y_2) 的可能取数对为 $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$,取这些数对的概率分别为:



$P\{Y_1=-1,\ Y_2=-1\}$

$=P\left\{X_1\leqslant -1,\ X_2\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\square ABCD}}=\frac{1}{8}.$

$P\{Y_1=-1,\ Y_2=1\}$

$=P\left\{X_1\leqslant -1,\ X_2>\frac{1}{2}\right\}=0.$

$P\{Y_1=1,\ Y_2=-1\}$

$=P\left\{X_1>-1,\ X_2\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{S_{多边形EFBCG}}{S_{\square ABCD}}=\frac{6}{8}.$

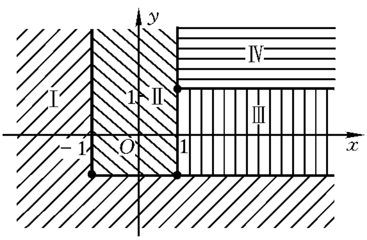
$$P\{Y_1 = 1, Y_2 = 1\}$$

$$= P\left\{X_1 > -1, X_2 > \frac{1}{2}\right\} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\square ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

因此，(Y_1, Y_2) 的联合分布律为

$Y_1 \backslash Y_2$	-1	1
-1	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

(2) (Y_1, Y_2) 的分布函数（参看图），利用概率 $P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$ 的物理解释：表示以 (x, y) 为顶点的左下平面部分上具有的概率质量，易得：



$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x < -1 \text{ 或 } y < -1 \quad (\text{即区域 Ⅰ}) \\ \frac{1}{8}, & \text{若 } -1 \leqslant x < 1, y \geqslant -1 \quad (\text{即区域 Ⅱ}) \\ \frac{7}{8}, & \text{若 } x \geqslant 1, -1 \leqslant y < 1 \quad (\text{即区域 Ⅲ}) \\ 1, & \text{若 } x \geqslant 1, y \geqslant 1 \quad (\text{即区域 Ⅳ}) \end{cases}$$

（13 分）

数学考研模拟考试试卷 4

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$ 确定,则 $\mathrm{d}y=$ ________.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x-\sin x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=1$,则 $a=$ ________.

(3) 方程 $xy'-y=x^2\cos x$,满足 $y(\dfrac{\pi}{2})=0$ 的解 $y=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&s\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,则常数 s 满足的条件是 ________.

(5) ① $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\-1&3&5\end{pmatrix}$,② $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\-1&5&-1\end{pmatrix}$,③ $\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&-2\\-3&0&3\end{pmatrix}$,④ $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$

以上 4 个矩阵中,能与对角矩阵相似的是________.

(6) 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $P\{|X-EX|\leqslant DX\}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(**7**) 设 $I=\int_x^{x+2\pi}\sin t e^{\sin t}\mathrm{d}t$. 则 I(　).

(A) 是无界函数　　(B) 是 x 的非常量函数

(C) 是正常数　　(D) 是负常数

(**8**) 设 $f(x)$ 连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则(　).

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+f(a)$　　(B) $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+F(a)$

(C) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+F(a)$　　(D) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

(**9**) 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$,$f(u)$ 可导,则 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$(　).

(A) x　　(B) y　　(C) z　　(D) $yf(x^2-y^2)$

(**10**) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+\lambda x+\mu)=0$,则(　).

(A) $\lambda=-1,\mu=0$　　(B) $\lambda=1,\mu=0$

(C) $\lambda=-1,\mu=1$　　(D) $\lambda=1,\mu=-1$

(**11**) 设 $y=C_1+C_2x+C_2x^2$ 是某微分方程的通解,则此微分方程是(　).

(A) $y'''=0$　　(B) $(1+x)y''=2y'$

(C) $(1+2x)y''=2y'$　　(D) $(1+2x)y''=y'$

(**12**) 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个线性无关的解,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是(　).

(A) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_3-2\boldsymbol{\xi}_2$　　(B) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2-2\boldsymbol{\xi}_3$

(C) $2\boldsymbol{\xi}_1-(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)$　　(D) $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3$

(**13**) 设随机变量 X、Y 互不相关,它们的分布律分别为

X	0	3
p	0.6	0.4

Y	-1	0
p	0.7	0.3

则随机事件 $\{X=0\}$ 和 $\{Y=-1\}$(　).

(A) 互不相容　　(B) 相互独立　　(C) 互为对立　　(D) 没有关系

(**14**) 设随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立,且均服从正态分布 $N(a,a^2)(a>0)$ 记 $\overline{X}=\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)/n$,则 $P\{|\overline{X}-2|\geqslant a\}=$(　).

(A) $\Phi(\frac{2(1-a)}{a})-\Phi(\frac{2}{a})$　　(B) $\Phi(\frac{2(1-a)}{a})+\Phi(\frac{-2}{a})$

(C) $\Phi(\frac{2(1-a)\sqrt{n}}{a})-\Phi(\frac{2\sqrt{n}}{a})$　　(D) $\Phi(\frac{2(1-a)\sqrt{n}}{a})+\Phi(\frac{-2\sqrt{n}}{a})$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 求 $e^{-y}dx+(xe^{-y}+1)dy=0$ 的通解.

(16)(本题满分 8 分) 设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$,q 为需求函数,且 $q=\frac{1}{k}(d-P)$. P 为单价,a,b,c,d,k 都是正常数. 且 $d>b$. 求

(i) 利润最大时的产量及最大利润;

(ii) 需求对价格的弹性;

(iii) 需求对价格弹性为 1 时的产量.

（17）**（本题满分 8 分）** 设 $z=z(x,y)$，由方程 $x+y-z=e^z$ 确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（18）**（本题满分 8 分）** 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且 $f(-1)=-1$，$f(0)=-2$，$f(1)=-5$. 证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f''(\xi)=-2$.

(**19**)(**本题满分 9 分**)计算二重积分 $I=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}|xy-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(**20**)(**本题满分 13 分**)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$.

(i) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

(ii) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

(21)（本题满分 13 分） 证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列（行）向量为两两正交的单位向量.

(22)（本题满分 13 分） 设随机变量 X,Y 的分布律分别为

X	-1	0	1
p	$1/8$	$3/4$	$1/8$

Y	0	1
p	$1/4$	$3/4$

且 $P\{XY=0\}=1$，

（Ⅰ）求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律；

（Ⅱ）求 $Y=0$ 时 X 的条件分布律；

（Ⅲ）X,Y 是否不相关？为什么？

(23)(本题满分 13 分) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 7)$ 相互独立同分布：$P\{X_i = 2\} = p$，$P\{X_i = 0\} = 1 - p$，$0 < p < 1$，令 $X = 2X_1X_2X_3X_4 + 3X_5X_6X_7$，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，

(Ⅰ)求随机变量 X 的概率分布；

(Ⅱ)求 $X_i - \overline{X}$ 和 $X_j - \overline{X}$ $(i \neq j)$ 的相关系数.

试卷(四)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{x+y}{x-y}\mathrm{d}x}$. 方程两边取对数：$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$.

两边取微分得：$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+(\dfrac{y}{x})^2}\ \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}$

$(x-y)\mathrm{d}y=(x+y)\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y=\dfrac{x+y}{x-y}\mathrm{d}x.$

(2) $\underline{\ 4\ }$. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ \dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$. $a=4$

(3) $\underline{x(\sin x-1)}$. 原方程化为$(\dfrac{y}{x})'=\cos x$，故 $y=x\sin x+Cx$.

由 $0=y(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}+C\dfrac{\pi}{2}$，得 $C=-1$，故 $y=x\sin x-x$.

(4) $\underline{s\neq 0}$.

由$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}0&s&2s\\1&1&1\\1&1&2s+1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}0&s&0\\1&0&-1\\1&0&2s-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&s&0\\1&0&-1\\0&0&2s\end{pmatrix}$. 故 $s\neq 0$.

(5) $\underline{①②③}$. ① 是对称矩阵，② 的三特征值互不相同，③ 对二重特征值 $\lambda=0$ 有两个线性无关特征向量，故均可相似对角化. 而 ④ 的二重特征值 $\lambda=1$ 只有一个线性无关的特征向量与之对应，故不能与对角矩阵相似.

(6) $\underline{\dfrac{27}{125}}$. $EX=\int_{-1}^{1}\dfrac{3}{2}x^3\mathrm{d}x=0$，$EX^2=\int_{-1}^{1}\dfrac{3}{2}x^4\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}$. $DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{3}{5}$. $P\{|X-EX|\leqslant DX\}=P\{|X|\leqslant\dfrac{3}{5}\}=\int_{-3/5}^{3/5}\dfrac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=(\dfrac{3}{5})^3$.

二、选择题

(7)(C). 由 $\sin t\mathrm{e}^{\sin t}$ 是以 2π 为周期的函数，故

$$I=\int_0^{2\pi}\sin t\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t=-\cos t\mathrm{e}^{\sin t}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t.$$

被积函数 $\cos^2 t\mathrm{e}^{\sin t}$ 连续非负不恒为 0，故 $I>0$ 是正常数. 选(C).

(8)(B). 即牛顿-莱布尼兹公式.

(9)(A). 于方程两边微分：$\mathrm{d}x+\mathrm{d}z=f\mathrm{d}y+2xyf'\mathrm{d}x-2yzf'\mathrm{d}z$

于是$(1+2yzf')\mathrm{d}z=(2xyf'-1)\mathrm{d}x+f\mathrm{d}y$.

$z'_x=\dfrac{2xyf'-1}{1+2yzf'},\quad z'_y=\dfrac{f}{1+2yzf'}$

$zz'_x+yz'_y=\dfrac{2xyzf'-z+yf}{1+2yzf'}=x$. 选(A).

(10)(B). 用泰勒公式 $\sqrt[3]{1-x^3}=-x(1-\dfrac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}=-x(1-\dfrac{1}{3x^3}+o(\dfrac{1}{x^3}))=-x+o(1)$，故

$\lambda=1,\mu=0$. 选(B).

(11)(C). 由 $y'=C_2(1+2x)$. $y''=2C_2=\dfrac{2y'}{1+2x}$

故 $(1+2x)y''=2y'$. 选(C).

(12)(D). 由所给条件知 $r(\boldsymbol{A})=1$. 因此基础解系中含 2 个线性无关的解,显然应选(D).

(13)(B). $EX=3\times 0.2=1.2, EY=(-1)\times 0.7=-0.7, E(XY)=3\times(-1)P\{X=3,Y=-1\}$. 而 X、Y 不相关 $E(XY)=EX\cdot EY$,解得 $P\{X=3,Y=-1\}=0.28$. 由联合分布律与边缘分布律间的关系,得 (X,Y) 的分布为

$X \backslash Y$	-1	0	$P\{X=x_i\}$
0	0.42	0.18	0.6
3	0.28	0.12	0.4
$P\{Y=y_j\}$	0.7	0.3	1

故 X、Y 相互独立. 选(B).

(14)(D).
$$\begin{aligned}P\{|\overline{X}-2|\geqslant a\}&=1-P\{|\overline{X}-2|<a\}\\&=1-P\{2-a<\overline{X}<2+a\}\\&=1-F_{\overline{X}}(2+a)+F_{\overline{X}}(2-a)\\&=1-\Phi\left(\frac{(2+a)-a}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right)+\Phi\left(\frac{(2-a)-a}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\Phi\left(\frac{-2\sqrt{n}}{a}\right)+\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(2-2a)}{a}\right)\quad \text{选(D)}.\end{aligned}$$

三、解答题

(15)解 原方程乘以 e^{2y} 得 $e^y(dx+xdy)+e^{2y}dy=0$.

即 $e^ydx+xde^y=-e^{2y}dy$ (5 分)

$d(xe^y)=-\dfrac{1}{2}de^{2y}\quad \therefore xe^y=-\dfrac{1}{2}e^{2y}+C$

通解为 $x=Ce^{-y}-\dfrac{1}{2}e^y$. (9 分)

注 本题可写成 $\dfrac{dx}{dy}+x=-e^y$ 是以 y 为自变量的一阶线性齐次的微分方程.

(16)解 (i) 利润 $L=Pq-C=(d-kq)q-(aq^2+bq+c)$.

令 $\dfrac{dL}{dq}=(d-b)-2(k+a)q=0$. 得 $q=\dfrac{d-b}{2(k+a)}$.

由 $\dfrac{d^2L}{dq^2}<0$ 知,当 $q=\dfrac{d-b}{2(k+a)}$ 时利润最大,最大利润为

$$L_{\max}=\frac{(d-b)^2}{4(k+a)}-c.\qquad (5\text{ 分})$$

(ii) $q(P)=\dfrac{1}{k}(d-P)$. $\dfrac{dq}{dP}=-\dfrac{1}{k}$. 需求对价格的弹性为

$$\eta = -\frac{P}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}P} = \frac{d - kq}{kq} \qquad (7\text{ 分})$$

(iii) $\eta = 1$ 时，$q = \dfrac{d}{2k}$ （8 分）

（17）解 方程两边对 x 求导得

$$1 - z'_x = z'_x \mathrm{e}^z, \quad z'_x = \frac{1}{1+\mathrm{e}^z}.$$

两边对 y 求导得 $z'_y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^z}$. （6 分）

故 $z'_{xy} = \dfrac{-\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^2} z'_y = \dfrac{-\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^3}$ （8 分）

（18）解 作 $P(x) = -x^2 - 2x - 2$. （3 分）

令 $F(x) = f(x) - P(x)$. （6 分）

则 $F(-1) = F(0) = F(1) = 0$，在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上，$F(x)$ 满足罗尔定理条件，故存在 $\xi_1 \in (-1,0)$，$\xi_2 \in (0,1)$ 使

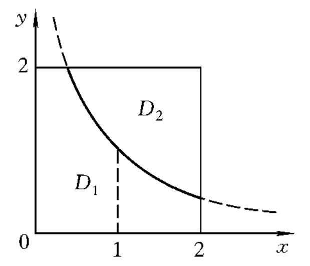
$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上，$F'(x)$ 满足罗尔定理条件. 故存在

$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (-1,1)$，使 $F''(\xi) = 0$.

而 $f''(x) = f''(x) + 2$. 故 $f''(\xi) = -2$. （8 分）

（19）解 如图. 以 $xy = 1$ 将积分域 D 分为 D_1 和 D_2 两个区域. 则



$$I = \iint_{D_1}(1 - xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2}(xy - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D}(1 - xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{D_2}(xy - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (6\text{ 分})$$

$$= 2\left[\int_{1/2}^{2} x\mathrm{d}x \int_{1/x}^{2} y\mathrm{d}y - \int_{1/2}^{2}\mathrm{d}x\int_{1/x}^{2}\mathrm{d}y\right]$$

$$= 2\left[\int_{1/2}^{2}\left(2x - \frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{2}\left(2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{3}{2} + 2\ln 2 \qquad (9\text{ 分})$$

（20）解 (i) 设 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，$i = 1,2,\cdots,n-1$. 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，所以对上式左乘 $\boldsymbol{A}^{n-1}$ 得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0} \qquad (4\text{ 分})$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_n \neq \mathbf{0}$，所以必须有 $\lambda_1 = 0$，同理，对 $\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$，左乘 $\boldsymbol{A}^{n-2}$ 可得必须有 $\lambda_2 = 0$，类似地，必须有 $\lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. （7 分）

(ii) 由题设

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n\quad \boldsymbol{0})=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$ (9 分)

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

相似,从而 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为零, (11 分)

又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=n-1$,所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量,即对应于 n 重特征值零,特征向量为 $C\boldsymbol{\alpha}_n(C\neq 0)$. (13 分)

(21) 解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 故为 n 维列向量.

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量两两正交且均为单位向量.

(9 分)

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量为两两正交的单位向量. (13 分)

(22) 解 (Ⅰ) 由 $P\{XY=0\}=1$ 得 $P\{XY\neq 0\}=0$,进而得 $P\{X=-1,Y=1\}=0$, $P\{X=1,Y=1\}=0$. 由 $\frac{3}{4}=P\{Y=1\}=\sum_{i=1}^{3}P\{X=x_i,Y=1\}$ 得 $P\{X=0,Y=1\}=\frac{3}{4}$.

由 $P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{2}P\{X=x_i,Y=y_j\}$ 可解得 $P\{X=-1,Y=0\}=\frac{1}{8}$,$P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{8}$,故$(X,Y)$的联合分布为:

Y \ X	-1	0	1	$P\{Y=y_j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
$P\{X=x_i\}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

(8 分)

(Ⅱ)$Y=0$ 时 X 的条件分布律为

$$P\{X=-1\mid Y=0\}=\frac{P\{X=-1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2},$$

类此可得:$P\{X=0\mid Y=0\}=0$, $P\{X=1\mid Y=0\}=\frac{1}{2}$ (11 分)

(Ⅲ)易算得 $EX=0,EY=\frac{3}{4},EXY=0$,因为 $EXY=EX\cdot EY$,故 X,Y 不相关.

(13 分)

(23) 解 (Ⅰ)X 的可能取值为 $0,24,32,56$.

$$\begin{aligned}P\{X=56\}&=P\{X_1X_2X_3X_4=16,X_5X_6X_7=8\}\\&=P(\bigcap_{i=1}^{7}\{X_i=2\})=\bigcap_{i=1}^{7}P\{X_i=2\}=p^7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X=32\}&=P\{X_1X_2X_3X_4=16,X_5X_6X_7=0\}\\&=P\{X_1X_2X_3X_4=16\}P\{X_5X_6X_7=0\}\\&=P(\bigcap_{i=1}^{4}\{X_i=2\})\cdot(1-P\{X_5X_6X_7=8\})=p^4(1-p^3)\end{aligned}$$

类似可得:$P\{X=24\}=(1-p^4)p^3,P\{X=0\}=(1-p^4)(1-p^3)$,故 X 的分布律为

X	0	24	32	56
p	$(1-p^4)(1-p^3)$	$(1-p^4)p^3$	$p^4(1-p^3)$	p^7

(6 分)

(Ⅱ)$\mu=EX_i=2p,EX_i^2=4p,\sigma^2=DX_i=4p(1-p)$.

$$E(X_i-\overline{X})=E(X_i-\overline{X})=0$$

$$\begin{aligned}D(X_i-\overline{X})&=D(X_i-\overline{X})=D((1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{l\neq i}X_j)\\&=(1-\frac{1}{n})^2\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

$$E(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})=EX_iX_j-EX_i\overline{X}-EX_j\overline{X}+E\overline{X}^2$$

$$\begin{aligned}&=\mu^2-E(\frac{X_i^2}{n}+\frac{1}{n}\sum_{l\neq i}X_iX_l)-E(\frac{X_j}{n}+\frac{1}{n}\sum_{l\neq i}X_iX_l)+E(\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}X_l\sum_{m=1}^{n}X_m)\\&=\mu^2-2(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)+\frac{1}{n^2}n(\sigma^2+\mu^2+(n-1)\mu^2)\\&=\mu^2-\frac{1}{n}(\sigma^2+n\mu^2)=-\frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

$X_i-\overline{X}$ 和 $X_j-\overline{X}$ 的相关系数为

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X_i-\overline{X},X_j-\overline{X})}{\sqrt{D(X_i-\overline{X})}\sqrt{D(X_j-\overline{X})}}=\frac{-\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}}=-\frac{1}{n-1}.$$ (13 分)

数学考研模拟考试试卷 5

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 连续,且 $\int_{x^2}^{x^3+2} f(t)\mathrm{d}t = 2x$,则 $f(1) =$ ________.

(2) 由曲线 $y = \sin x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴所围平面图形绕 y 转旋转一周所成旋转体的体积等于________.

(3) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x - mz = \varphi(y - nz)$ 所确定,φ 可微,则 $m\dfrac{\partial z}{\partial x} + n\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ________.

(4) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1,1)$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (a,-1,3,3)$,$\boldsymbol{\beta}_2 = (0,b,-1,-1)$ 等价,且 $b > \dfrac{1}{3}$,则 $a =$ ________,$b =$ ________.

(5) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵,且 $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{B} =$ ________.

(6) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = ab^k$,$(k = 1,2,3,4)$,其中常数 $b > 0$,则 a 的值为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $f(x)$ 可导,$F(x) = f(x)[1 + |\sin x|]$,则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的(　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分条件而非必要条件

(C) 必要条件而非充分条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

(8) 已知 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处(　).

(A) 连续而不可导　　(B) 可导且 $\varphi'(0)=0$

(C) 可导且 $\varphi'(0)=1$　　(D) 可导且 $\varphi'(0)=2$

(9) 微分方程 $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 满足条件 $y|_{x=-1}=0$ 下的特解是(　).

(A) $y^2=x^2\ln x^2$　　(B) $y=x\sqrt[2]{\ln x^2}$

(C) $y^2=x^2\sqrt[2]{\ln x}$　　(D) $y=\pm x\sqrt{2\ln x}$

(10) 设函数 $f(x)$ 可导，且对任意的 $x_1>x_2$ 都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则(　).

(A) $f'(x)>0$　　(B) $f'(x)<0$

(C) $f(-x)$ 单调增　　(D) $-f(-x)$ 单调增

(11) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 则 $\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=$(　).

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2-1), & x<0 \\ \dfrac{1}{2}(1-2\cos x), & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2-1) \\ -\cos x\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x<0 \\ 1-\cos x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+C, & x<0 \\ -\cos x+C, & x\geqslant 0\end{cases}$

(12) 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=m<n$，则下列结论中不正确的是(　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有 m 个列向量线性无关

(B) 若 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，则必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(C) $\boldsymbol{A}$ 可经行初等变换化为 $(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$，其中 $\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位阵

(D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(13) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

则 $P\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=$(　).

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) 1

(14) 设随机变量 X_1、X_2 相互独立，方差存在，且 $E(X_1)=E(X_2)=0$，记 $Y_1=X_1-X_2$ 和 $Y_2=X_1X_2$，则 Y_1 和 Y_2(　).

(A) 相互独立　　(B) 不独立

(C) $\rho_{Y_1,Y_2}\neq 0$　　(D) 不相关

三、解答题(本大题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 8 分) 设 $x_1 \in (0,2)$,$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$,$n = 1,2,\cdots$,证明数列$\{x_n\}$收敛并求其极限.

(16)(本题满分 8 分) 已知 $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 有连续二阶偏导数,且 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$,试求 u.

(17)（本题满分 9 分） 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明：

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

(18)（本题满分 9 分） 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导且大于零，还满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数）. 又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$，$y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积最小？

(19)（本题满分 8 分）计算$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$.

(20)（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵.

（1）如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，试证 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

（2）举一个 2×3 矩阵的例子，说明(1) 的逆命题不成立.

（3）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的 m 个行向量等价，试证(1) 的逆命题成立.

(21)（本题满分 13 分） 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，$\lambda_1=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值，且属于它的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的另两个特征值；（2）求 $\boldsymbol{A}$.

(22)（本题满分 13 分） 设 X、Y 是相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布的随机变量，求随机变量 $Z=\dfrac{X+Y}{Y}$ 的概率密度.

(23)(本题满分 13 分)将一颗质量分布均匀的骰子重复投掷 n 次,随机变量 X、Y 分别表示其中出现小于 2 点的次数和不小于 2 点的次数,判断 $X+Y$ 与 $X-Y$ 是否不相关?为什么?

试卷(五)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{2}{5}}$. 由题设等式两端对 x 求导,得

$$3x^2f(x^3+2)-2xf(x^2)=2$$

令 $x=-1$,得

$$3f(1)+2f(1)=2,\ f(1)=\frac{2}{5}.$$

(2) $\underline{2\pi^2}$.

$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\cdot\sin x\mathrm{d}x=-2\pi\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\cos x=-2\pi x\cos x\Big|_0^{\pi}+2\pi\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=2\pi^2+2\pi\sin x\Big|_0^{\pi}=2\pi^2$$

(3) $\underline{1}$. 方程两边微分得 $\mathrm{d}x-m\mathrm{d}z=\varphi'\cdot(\mathrm{d}y-n\mathrm{d}z)$.

$(m-n\varphi')\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\varphi'\mathrm{d}y$, $z_x=\dfrac{1}{m-n\varphi'}$, $z_y=\dfrac{-\varphi'}{m-n\varphi'}$, $mz_x+nz_y=1$.

(4) $\underline{a=2,b=1}$. 显然 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{pmatrix}=2$,根据等价的充要条件,必须且只须 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{pmatrix}=2$ 即可,由此可得 $a=2,b=1$.

(5) $\underline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}}$. 由题中所给等式整理得$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$,显然 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆,故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

(6) $\underline{\dfrac{1-b}{1-b^5}}$. 由 $\sum\limits_i p_i=1$ 得 $a(b+b^2+b^3+b^4)=1$ 可得

$$a=\frac{1}{b+b^2+b^3+b^4}=\frac{1-b}{1-b^5}$$

二、选择题

(7) (A). 由 $f(x)$ 可导,由可导的充分必要条件,有

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow F'_-(0)$ 及$F'_+(0)$ 存在而且相等,

而
$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)+f(x)\mid\sin x\mid-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{\sin x}{x}f(x)\right]=f'(0)-f(0)$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{\sin x}{x}f(x)\right]=f'(0)+f(0)$$

由$F'_-(0)=F'_+(0)$,即 $f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)$,即得 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow f(0)=0$.

(8)（C）. 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，知 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$\Rightarrow\varphi(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$. 而当 $x\neq0$ 时，有 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t \xlongequal{xt=u} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

故 $$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=1$$

(9)（A）. 此为齐次方程，令 $\dfrac{y}{x}=u$，则

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+u$$

于是 $u\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，$\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+C_1$ $\quad u^2=\ln x^2+C\ (C=2C_1)$

所以 $y^2=x^2\ln x^2+Cx^2$ 因为 $y|_{x=-1}=0$，所以 $C=0$

所求特解 $y^2=x^2\ln x^2$.

(10)（D）. 当 $x_1>x_2$ 则 $-x_2>-x_1$ $\quad f(-x_2)>f(-x_1)$

（因此（C）不正确）. $-f(-x_1)>-f(-x_2)$ 即 $-f(-x)$ 单调增 选（D）

注：选（A）不对. 如 $y=x^3$ 单调增 但 $y'(0)=0$

(11)（A）. 当 $x<0$ $\int_{-1}^x f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^x x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$.

当 $x\geqslant0$ $\int_{-1}^x f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(1-2\cos x)$. 选（A）.

(12)（C）. 由 $r(\boldsymbol{A})=m$ 知，$\boldsymbol{A}$ 中必有一个 m 阶子式 D 不为零，但 D 未必是由前 m 列构成的子式，所以（C）不正确，故应选（C）.

(13)（D）. $P\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{\substack{x\leqslant\frac{1}{2}\\0\leqslant x\leqslant y\leqslant1}}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^1 2\mathrm{d}y=\dfrac{3}{4}$ 选（D）.

(14)（D）. $EY_1Y_2=E(X_1-X_2)X_1X_2=EX_1^2X_2-EX_1X_2^2$

$$=EX_1^2\cdot EX_2-EX_1\cdot EX_2^2=0$$

$$EY_1=E(X_1-X_2)=EX_1-EX_2=0$$

$$EY_2=E(X_1X_2)=EX_1EX_2=0$$

所以

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=EY_1Y_2-EY_1EY_2=0$$

因此 Y_1 与 Y_2 不相关，应选（D）.

三、解答题

(15) 解 由 $0<x_1<2$，$\Rightarrow0<x_2=\sqrt{2x_1}<\sqrt{2^2}=2$，设 $0<x_n<2$，则 $0<x_{n+1}=\sqrt{2x_n}<\sqrt{2^2}=2$，故 $0<x_n<2$，$n=1,2,\cdots$.

又 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{2x_n}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{2x_n}{x_n^2}}=\sqrt{\dfrac{2}{x_n}}>\sqrt{\dfrac{2}{2}}=1$.

$\Rightarrow x_n < x_{n+1}, n = 1,2,\cdots$，因此数列 $\{x_n\}$ 单调增且有界，$\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛.（5 分）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ 两端令 $n \to \infty$，得 $A = \sqrt{2A}$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = 2$.（8 分）

注 不证明有极限直接求极限不给分.

(16) 解 令 $\sqrt{x^2+y^2} = t$，又 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u'(t) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = u'(t) \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，于是，由

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 \quad (4\text{ 分})$$

得 $\quad u'(t) = t$，解得 $\quad u(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + C = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) + C$（8 分）

(17) 证 (1) 令 $\varphi(x) = f(x) - x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，且 $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0, \varphi(1) = -1 < 0$，由介值定理知，存在 $\eta \in (\frac{1}{2},1)$，使 $\varphi(\eta) = 0$，即 $f(\eta) = \eta$.（3 分）

(2) 要证 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$，即 $\quad [f'(\xi) - 1] - \lambda[f(\xi) - \xi] = 0$

亦即 $\quad \varphi'(\xi) - \lambda\varphi(\xi) = 0$，(其中 $\varphi(x) = f(x) - x$).

因此构造辅助函数

$$F(x) = e^{-\lambda x}\varphi(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x] \quad (7\text{ 分})$$

则 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi \in (0,\eta)$，使

$$F'(\xi) = e^{-\lambda x}[f'(x) - 1 - \lambda(f(x) - x)]\Big|_{x=\xi} = 0$$

即 $\quad f'(\xi) - 1 - \lambda[f(\xi) - \xi] = 0 \quad$ 或 $\quad f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$（9 分）

(18) 解 由题设知，当 $x \neq 0$ 时，有

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}$$

即 $\quad \dfrac{d}{dx}(\dfrac{f(x)}{x}) = \dfrac{3a}{2}$，据此，并由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性，得

$$f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + Cx, \quad x \in [0,1] \quad (4\text{ 分})$$

又由已知条件得

$$2 = \int_0^1 (\frac{3}{2}ax^2 + Cx)dx = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}C$$

故 $C = 4 - a$，因此 $\quad f(x) = \dfrac{3}{2}ax^2 + (4-a)x, \quad x \in [0,1]$（6 分）

所求旋转体体积为

$$V(a) = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 [\frac{3}{2}ax^2 + (4-a)x]^2 dx = \pi(\frac{1}{30}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{16}{3})$$

由 $\dfrac{dV}{da} = \pi(\dfrac{1}{15}a + \dfrac{1}{3}) = 0$，得 $a = -5$

又 $\quad V''(a) = \dfrac{\pi}{15} > 0$，故当 $a = -5$ 时，旋转体体积最小.（9 分）

(19) 解 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 dx\int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{x}}dt = -\int_0^1 [\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{x}}dt]dx$（3 分）

$$=-\int_0^1 [\int_0^{t^2} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{x}} dx] dt = -\int_0^1 2te^{-t^2} dt$$

$$= e^{-t^2} \Big|_0^1 = e^{-1} - 1 \qquad (8 分)$$

(20) 证 (1) 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解全为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解,所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中解向量的个数 $n - r(\boldsymbol{A})$ 不超过 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中解向量的个数 $n - r(\boldsymbol{B})$,即 $n - r(\boldsymbol{A}) \leqslant n - r(\boldsymbol{B})$,由此得 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant r(\boldsymbol{B})$. 同理可得 $r(\boldsymbol{B}) \geqslant r(\boldsymbol{A})$,从而有 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$. (4 分)

(2) 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,显然 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 2$,但 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$,从而二方程组没有任何非零公共解. 因此,(1) 的逆命题不成立. (8 分)

(3) 当 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的 m 个行向量等价时,则必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$,或 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. 故若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,两端左乘 $\boldsymbol{P}$,则有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,两端左乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$,则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解. (13 分)

(21) 解 (1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,由于 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$,所以 $1 - \lambda^2 = 0$,$\lambda = \pm 1$. 由于 $\lambda_1 = -1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值,且实对称矩阵一定可对角化,所以 $\boldsymbol{A}$ 的另两个特征值为 $\lambda_2 = \lambda_2 = 1$. (6 分)

(2) 由实对称矩阵的性质,对应于 $\lambda_2 = \lambda_2 = 1$ 必有两个正交的特征向量,且它们均与 $\boldsymbol{\xi}_1$ 正交,故可取

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$ 规范化分别为

$$\boldsymbol{p}_1 = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}_2 = (1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3 = (0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}. \qquad (9 分)$$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵且有

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是 $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (13 分)$$

(22) 解 $Z = 1 + \dfrac{X}{Y}$,令 $W = \dfrac{X}{Y}$,先求 $f_W(\omega)$:

$$f_W(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(y\omega) f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y f_X(y\omega) \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy \qquad (3 分)$$

注意 $$f_X(y\omega) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y\omega}, & y\omega > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由于积分变量 $y > 0$,因此,当 $\omega \leqslant 0$ 时,$f_X(y\omega) = 0$

当 $\omega > 0$ 时,$f_X(y\omega) = \lambda e^{-\lambda y\omega}$

故当 $\omega \leqslant 0$ 时，$f_W(\omega)=0$ （6 分）

当 $\omega>0$ 时，$f_W(\omega)=\int_0^{+\infty} y\lambda e^{-\lambda y\omega}\cdot\lambda e^{-\lambda y}\,dy=\dfrac{1}{(\omega+1)^2}$

即 $f_W(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\omega+1)^2}, & \omega>0\\ 0, & \omega\leqslant 0\end{cases}$ （10 分）

因为 $Z=1+W$，$z=1+\omega$ 在$(0,+\infty)$上有 $z'=1>0$，所以可用定理，反函数 $\omega=z-1$，故

$$f_Z(z)=\begin{cases}f_W(z-1)\cdot 1, & z>1\text{ 时}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{z^2}, & z>1\text{ 时}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ （13 分）

（23）解 因为 $X+Y=n$，常数 n 和任何随机变量相互独立，所以常数 n 和 $X-Y=2X-n$ 相互独立，（6 分）即 $X+Y$ 和 $X-Y$ 相互独立，由此可得 $X+Y$ 与 $X-Y$ 是不相关的.

（13 分）

数学考研模拟考试试卷 6

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2}\tan x\cdot(1+\cos\sqrt{t})\ln(1+\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{(1-\cos x)(\mathrm{e}^x-1)^2}=$ ________.

(2) 设$\int xf(x)\mathrm{d}x=\ln(1+x^2)+C$,则$\int\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{xy}$ 的通解是________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则行列式 $|(\boldsymbol{A}^*)^*|$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 之间满足关系式________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}=$ ________.

(6) 装有 5 个白球和 6 个黑球的罐中丢失一球,不知其颜色,现随机地从罐中取 2 个球,结果全是白球,则丢失的那个球是白球的概率为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 6 分,共 32 分)

(7) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,则存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=$(　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 2

(8) 设 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y}=1$ 所确定,则 $y''(x)\Big|_{x=0}=($　$)$.

(A) $2e^{2}$　　(B) e^{2}　　(C) $2e$　　(D) 2

(9) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]$,则 $a=($　$)$.

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{1}{2}$

(10) 若 $\int f'(x^{3})dx=x^{6}+C$, 则 $f(x)=($　$)$.

(A) $\frac{1}{2}x^{2}+C$　　(B) $\frac{1}{3}x^{3}+C$　　(C) $\frac{9}{4}x^{\frac{8}{3}}+C$　　(D) $\frac{9}{2}x^{\frac{8}{3}}$

(11) 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续是此函数在这点可导的(　).

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

(12) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组中线性相关的是(　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(13) 下列命题正确的是(　).

(A) 如事件 A、B 互不相容,则 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 也互不相容

(B) 如事件 A、B 互不相容,则 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 相互独立

(C) 如事件 A、B 构成完全事件组,则 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 也构成完全事件组

(D) 如事件 A、B、C 构成完全事件组,则 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 也构成完全事件组

(14) 对任意三个概率不为零的事件 A、B、C,已知 $P(A\mid B)>P(A)$,则下列不等式中正确的是(　).

(A) $P(A\mid\overline{B})>P(A)$　　(B) $P(B\mid A)>P(B)$

(C) $P(A\mid BC)>P(A)$　　(D) $P(BC\mid\overline{A})>P(BC)$

三、解答题(本大题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$,(1) 确定 $f(x)$ 的单调增减区间与极值;(2) 确定曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线;(3) 画出曲线 $y=f(x)$ 的略图.

(16)（本题满分 8 分） 某食品厂生产两种糖果，高级的每千克成本 3.6 元，普通的每千克成本 2.4 元，根据市场调查，糖果的销售量不仅与自身的价格有关，而且两种糖果的价格相互影响，销售量与价格的经验公式是 $Q_1=3750(y-1.5x)$，$Q_2=63000-3750(2y-x)$，其中 Q_1 和 x 是普通糖果的销售量和单价，Q_2 和 y 是高级糖果的销售量和单价，问两种糖果如何定价，才能使工厂获得最大利润？

(17)（本题满分 8 分） 求 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

（18）（本题满分 9 分） 设常数 $a>1$，$f(x)$ 连续，证明：

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

（19）（本题满分 8 分） 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 13 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,证明:对任何 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 都有解的必要充分条件是 $r(\boldsymbol{A}) = m$.

(21)(本题满分 13 分) 设 $\lambda = 2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ 的二重特征值.

(1) 求 x, y 的值;(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 是否可与对角阵相似?说明理由.

(22)（本题满分 13 分） 证明：(1) 若 $P(A \mid B) \geqslant P(A \mid \overline{B})$，则 $P(B \mid A) \geqslant P(B \mid A)$；
(2) 若 $P(A \mid C) \geqslant P(B \mid C)$，$P(A \mid \overline{C}) \geqslant P(B \mid \overline{C})$，则 $P(A) \geqslant P(B)$.

(23)（本题满分 13 分） 设随机变量 X_1, X_2 独立同分布，其公共概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

记 $Y_1 = \min(X_1, X_2)$，$Y_2 = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$，证明：

(1) Y_1 的分布与 $X_1/2$ 分布相同，Y_2 的分布与 X_1 同.

(2) Y_1 和 Y_2 相互独立.

试卷(六)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{8}{3}}$. 由等价无穷小代换定理,及当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\mathrm{e}^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x$,得

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\int_0^{x^2}(1+\cos\sqrt{t})\ln(1+\sqrt{t})\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}(1+\cos\sqrt{t})\ln(1+\sqrt{t})\mathrm{d}t}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{2x(1+\cos x)\ln(1+x)}{3x^2}=\frac{8}{3}.$$

(2) $\underline{\dfrac{1}{6}(3x+x^3)+C}$. 事实上,由题设知 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+x^2)=xf(x)$

即 $$\frac{2x}{1+x^2}=xf(x)$$

故 $$f(x)=\frac{2}{1+x^2},\ \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2}(1+x^2)$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{3}x^3)+C=\frac{1}{6}(3x+x^3)+C$$

(3) $\underline{x-\sqrt{xy}=C}$. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 是齐次方程. 令 $\dfrac{y}{x}=u$, $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2u=2\sqrt{u}$

所以 $$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-u}=\frac{2}{x}\mathrm{d}x,\quad\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-u}=\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

其中左端: $$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-u}\xlongequal{u=t^2}\int\frac{2\mathrm{d}t}{1-t}=-2\ln(1-t)+C_1=-2\ln(1-\sqrt{u})+C_1$$

所以
$$-2\ln(1-\sqrt{u})=2\ln x-2\ln C$$
$$\ln x+\ln(1-\sqrt{u})=\ln C$$
$$x(1-\sqrt{u})=C$$

即所求通解为:$x-\sqrt{xy}=C$

(4) $\underline{|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}}$.

由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A},$$

所以 $$|(\boldsymbol{A}^*)^*|=\left||\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}\right|=(|\boldsymbol{A}|^{n-2})^n|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}$$

(5) $\underline{\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-3&-3&-3\\-3&1&3&3\\-3&3&1&3\\-3&3&3&1\end{bmatrix}}$. $\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}$. 由所给等式整理得 $\boldsymbol{B}=$

$A^{-1}+E-A=\frac{1}{4}A+E-A=E-\frac{3}{4}A=\frac{1}{4}(4E-3A)$，具体代入即得所填结果.

(6) $\underline{\frac{1}{3}}$. 设 $A=\{$丢失的是白球$\}$，$B=\{$取出的二球全是白球$\}$，则

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{5}{11}\times(\frac{4}{10}\times\frac{3}{9})}{\frac{5}{11}\times(\frac{4}{10}\times\frac{3}{9})+\frac{6}{11}\times(\frac{5}{10}\times\frac{4}{9})}=\frac{1}{3}$$

二、选择题

(7) (B). 由积分中值定理，存在 $C\in[\frac{2}{3},1]$，使

$$f(0)=3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=3(1-\frac{2}{3})f(C)=f(C)$$

于是知 $f(x)$ 在$[0,C]$上满足罗尔定理的条件，因此存在 $\xi\in(0,C)\subseteq(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

(8) (A). 方程两边对 x 求导：$y'-\mathrm{e}^{y}-x\mathrm{e}^{y}\cdot y'=0$ (*).

(*) 两边再求导：$y''-2\mathrm{e}^{y}y'-x(\mathrm{e}^{y}y')'_{x}=0$ (* *).

由 $x=0$ 知 $y=1$，代入(*)式得 $y'\Big|_{x}=\mathrm{e}$，以 $x=0$，$y=1$，$y'=\mathrm{e}$ 代入(* *)式得 $y''\Big|_{x=0}$ $=2\mathrm{e}^{2}$　　选(A)

(9) (C). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x}=\mathrm{e}^{2a}$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to\infty}f'(x+\theta)=\mathrm{e}(0<\theta<1).$$

故　$a=\frac{1}{2}$.　　选(C).

(10) (C) 由$\int f'(x^{3})\mathrm{d}x=x^{6}+C$，故 $f'(x^{3})=6x^{5}$.

令　$x^{3}=t$.　得　$f'(t)=6t^{5/3}$　　故　$f(x)=\frac{9}{4}x^{8/3}+C$.　　选(C).

(11) (D). 这是多元函数与一元函数的重要区别之一. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{2}y}{x^{2}+y^{2}}, & x^{2}+y^{2}\neq 0\\ 0, & x^{2}+y^{2}=0\end{cases}$$

在(0,0)的两个偏导数均存在为 0，但不连续.

又　$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^{2}+y^{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}, & x^{2}+y^{2}\neq 0\\ 0, & x^{2}+y^{2}=0\end{cases}$

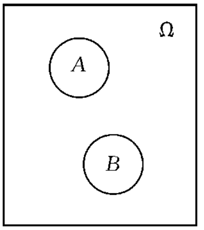
在(0,0)点连续，但两个偏导数均不存在. 选(D).

(12) (D). 考察从($\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$)到所给向量组的变换矩阵，当其满秩时，则相应的向量组线性无关；当其降秩时，则对应的向量组线性相关，由此可得(D).

(13) (C). 因为 A、B 构成完全事件组，所以有 $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$. 由 $AB=\varnothing$ 可得$\overline{AB}$

$=\overline{\varnothing}$,即 $\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$,由 $A\cup B=\Omega$ 可得$\overline{A\cup B}=\overline{\Omega}$,即 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$,故 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 构成完全事件组.

注　(A) 错的原因:已知 $AB=\varnothing$,则由文氏图(见图)只要 $A\cup B\neq\Omega$,可得 $\overline{A}\,\overline{B}=\Omega-A-B\neq\varnothing$.



(B) 当 $P(A)>0$,$P(B)>0$ 时,若 A、B 互不相容,则 A、B 不可能相互独立,故 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 不可能相互独立,故不能选(B).

(D) 因为事件 A,B,C 构成完全事件组,所以 A,B,C 两两互不相容,且 $A\cup B\cup C=\Omega$. 当 $C\neq\varnothing$,则 $A\cup B\neq\Omega$,此时由 A、B 互不相容可得 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 不可能互不相容(上面(A)中已证明),故 $\overline{A}$,$\overline{B}$,$\overline{C}$ 不构成完全事件组.

(14) __(B)__.　已知 $P(A\mid B)>P(A)$,即 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$,故 $P(AB)>P(A)P(B)$.

因此,$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}>\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$.　　选(B).

三、解答题

(15) 解　(1) $f(x)$ 的定义区间为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$,则 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0\ (x\neq 1)$ 得唯一驻点 $x=\mathrm{e}$.

$f(x)$ 的单调增减区间及极值见下表:

x	$(0,1)$	$(1,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调减	单调减	极小值 e	单调增

(3 分)

(2) 由 $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x}=0\ (x\neq 1)$,$\Rightarrow x=\mathrm{e}^2$.

曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点见下表:

x	$(0,1)$	$(1,\mathrm{e}^2)$	e^2	$(\mathrm{e}^2,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$		$-$
$f(x)$	向上凸	向下凸	拐点$(\mathrm{e}^2,\frac{1}{2}\mathrm{e}^2)$	向上凸

(6 分)

又由 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$,

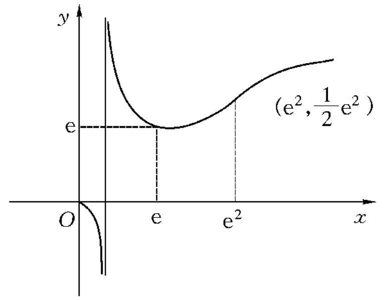
$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$,

知曲线 $y=f(x)$ 有竖直渐近线 $x=1$. 曲线无水平渐近线,也无斜渐近线.

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\ln x}=0$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

曲线 $y=f(x)$ 的略图如右图：　　(9 分)



(16) 解　总利润为 $L=3750(y-1.5x)(x-2.4)+[63000-3750(2y-x)](y-3.6)$　　(3 分)

$L'_x=3750\{-1.5(x-2.4)+(y-1.5x)\}+3750(y-3.6)=3750(-3x+2y)$

$L'_y=3750(x-2.4)+63000-3650(2y-x)-7500(y-3.6)=3750(2x-4y+21.6)$　　(5 分)

令 $L'_x=0, L'_y=0$，得 $-3x+2y=0$，　$2x-4y+21.6=0$

解得 $x=5.4, y=8.1$. 即普通糖果定价每千克 5.4 元，高级糖果每千克 8.1 元时，工厂可获最大利润.　　(8 分)

(17) 解　原式 $=2\int x\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$　　(3 分)

而　$\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x \xlongequal[\text{则 } x=\ln(1+t^2)]{\text{令 } \sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t} \int\frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$=2\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int(1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\arctan t)+C=2(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1})+C \qquad (6\text{ 分})$$

故　原式 $=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$　　(8 分)

(18) 证　左端 $=\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\xlongequal[x=\sqrt{t}]{\text{令 } x^2=t}\frac{1}{2}\int_1^{a^2}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad (3\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{2}[\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_a^{a^2}f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}] \qquad (5\text{ 分})$$

其中

$$\int_a^{a^2}f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}\xlongequal[\text{则 } x=\frac{a^2}{u}]{\text{令 } u=\frac{a^2}{x}}-\int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

故　左端 $=\frac{1}{2}[\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}]$

$$=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}=\text{右端}. \qquad (9\text{ 分})$$

(19) 解　$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r$　　(4 分)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{9}(8-5\sqrt{2}) \qquad (8\text{ 分})$$

(20) 证　必要性. 设对任何 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 都有解，则对 m 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_m$，矩阵方

程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}_m$ 有解，于是有

$$m=r(\boldsymbol{E}_m)=r(\boldsymbol{AX})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant m$$

从而 $r(\boldsymbol{A})=m$. （6 分）

充分性. 设 $r(\boldsymbol{A})=m$，表明 $\boldsymbol{A}$ 满行秩，所以对任何 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$，因此，对任何 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 都有解. （13 分）

(21) 解 （1）由于 3 特征值之和等于 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和，所以 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值为 3. （3 分）

由于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&0\end{vmatrix}=0$，由此可解得 $x=2$，将其代入 $\boldsymbol{A}$，又由 $\lambda_3=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\-2&-1&-y\\3&3&1\end{vmatrix}=0$，由此可解得 $y=-1$. 所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-1\\-3&-3&2\end{bmatrix}$$ （8 分）

（2）由于 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，所以对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，只有 1 个线性无关的特征向量，从而 $\boldsymbol{A}$ 不具有 3 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似. （13 分）

(22) 证 （1）$P(A\mid B)\geqslant P(A\mid\bar{B})\Leftrightarrow\dfrac{P(AB)}{P(B)}\geqslant\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}\Leftrightarrow P(AB)P(\bar{B})\geqslant P(B)P(A\bar{B})\Leftrightarrow P(AB)(1-P(B))\geqslant P(B)(P(A)-P(AB))\Leftrightarrow P(AB)\geqslant P(A)P(B)$. （4 分）

要证 $P(B\mid A)\geqslant P(B\mid\bar{A})\Leftrightarrow\dfrac{P(AB)}{P(A)}\geqslant\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}\Leftrightarrow P(AB)P(\bar{A})\geqslant P(A)P(\bar{A}B)\Leftrightarrow P(AB)(1-P(A))\geqslant P(A)(P(B)-P(BA))$. 利用由已知推得的 $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$ 可得

$$\begin{aligned}P(AB)(1-P(A))&=P(AB)-P(AB)P(A)\\&\geqslant P(A)P(B)-P(A)P(AB)=P(A)(P(B)-P(BA))\end{aligned}$$

故不等式 $P(B\mid A)\geqslant P(B\mid\bar{A})$ 成立. （9 分）

（2）根据条件概率定义，由 $P(A\mid C)\geqslant P(B\mid C)$ 可得 $P(AC)\geqslant P(BC)$，由 $P(A\mid\bar{C})\geqslant P(B\mid\bar{C})$ 得 $P(A\bar{C})\geqslant P(B\bar{C})$，因此

$$P(A)=P(AC)+P(A\bar{C})\geqslant P(BC)+P(B\bar{C})=P(B).$$ （13 分）

(23) 证 （1）$P\{Y_1\leqslant y_1\}=P\{\min(X_1,X_2)\leqslant y_1\}=1-P\{X_1>y_1,X_2>y_1\}$

$$\begin{aligned}&=1-P\{X_1>y_1\}P\{X_2>y_1\}=1-\left(\int_{y_1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_1}\,\mathrm{d}x_1\right)^2\\&=\begin{cases}0, & \text{当 } y_1<0\\1-\mathrm{e}^{-2y_1}, & \text{当 } y_1\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

即 Y_1 服从参数为 2 的指数分布。而对 $Z=\dfrac{X_1}{2}$，由于 $z=\dfrac{x_1}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上处处可导，而且 $\left(\dfrac{x_1}{2}\right)'$

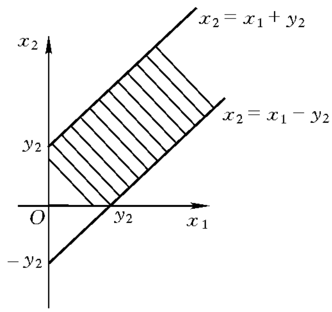
$=\dfrac{1}{2}>0$,所以可用定理。反函数为 $x_1=2z$,$(\alpha,\beta)=(0,+\infty)$,故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2z}\cdot 2, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

即$\dfrac{X_1}{2}$也服从参数为 2 的指数分布,故它与 Y_1 同分布。 (5 分)

$$\begin{aligned}F_{Y_2}(y_2)&=P\{\max(X_1,X_2)-\min(X_1,X_2)\leqslant y_2\}\\&=P\{|X_2-X_1|\leqslant y_2\}\end{aligned}$$

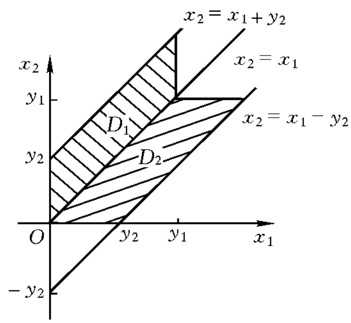
当 $y_2<0$ 时,$F_{Y_2}(y_2)=0$;



$y_2\geqslant 0$ 时,$F_{Y_2}(y_2)=P\{-y_2<X_2-X_1<y_2\}$

$$\begin{aligned}&=\iint\limits_{-y_2<x_2-x_1<y_2} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\int_0^{y_2}\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1+y_2}\mathrm{e}^{-x_1}\mathrm{e}^{-x_2}\mathrm{d}x_2\\&\quad+\int_{y_2}^{+\infty}\mathrm{d}x_1\int_{x_1-y_2}^{x_1+y_2}\mathrm{e}^{-x_1}\cdot\mathrm{e}^{-x_2}\mathrm{d}x_2\\&=\left[(1-\mathrm{e}^{-y_2})-\frac{\mathrm{e}^{-y_2}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2y_2})\right]+\frac{\mathrm{e}^{-2y_2}}{2}(\mathrm{e}^{y_2}-\mathrm{e}^{-y_2})\\&=1-\mathrm{e}^{-y_2}\end{aligned}$$

即 Y_2 服从参数为 1 的指数分布,故 Y_2 与 Y_1 分布相同.



(2) $P\{Y_1\leqslant y_1,Y_2\leqslant y_2\}$

$$\begin{aligned}&=P\{\min(X_1,X_2)\leqslant y_1,\max(X_1,X_2)\\&\quad-\min(X_1,X_2))\leqslant y_2\}\\&=P((\{X_1\leqslant y_1\}\cup\{X_2\leqslant y_1\})\\&\qquad\cap\{|X_2-X_1|\leqslant y_2\})\\&=\iint\limits_{\substack{x_1\leqslant y_1\text{或}x_2\leqslant y_1\\|x_2-x_1|\leqslant y_2}} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\begin{cases}\displaystyle\iint\limits_{D_1\cup D_2} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, & y_1>0,\ y_2>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\\&=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{y_1}\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^{x_1+y_2}\mathrm{e}^{-x_1}\cdot\mathrm{e}^{-x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+\int_0^{y_1}\mathrm{d}x_2\int_{x_2}^{x_2+y_2}\mathrm{e}^{-x_1}\cdot\mathrm{e}^{-x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, & y_1>0,\ y_2>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\\&=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2y_1})(1-\mathrm{e}^{-y_2}), & y_1>0,\ y_2>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}$$

由(1)的结果可知 $F_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)=F_{Y_1}(y_1)F_{Y_2}(y_2)$ 对一切 y_1,y_2 成立,故 Y_1 和 Y_2 相互独立. (13 分)

数学考研模拟考试试卷 7

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本大题共 6 小题,总分 24 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 若 $f(x)$ 处之连续,则 $f'(0)=$ ________.

(2) $\left(\dfrac{x^4+x^2+x}{x^2-1}\right)'''\Big|_{=0}=$ ________.

(3) $(\ln x-\ln y-1)y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$ 的通解是 $y=$ ________.

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & 0 & 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & 0 & 0\\ 0 & b_5 & 0 & 0 & a_5 & 0\\ b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix}=$ ________________.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量,且 $(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,则 $(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^2=$ ________.

(6) 设 $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$,

(1) 又知 $P(A\mid B)=0$ 时,则 $P(A\cup B)=$ ________.

(2) 又知 $P(A\mid B)=P(A)$ 时,则 $P(A\cup B)=$ ________.

(3) 又知 $P(\overline{A} \mid B) = 0$ 时,则 $P(A \cup B) =$ ________.

二、选择题(本大题共 8 小题,总分 32 分)

(7) 设 $x \to 0$ 时,$e^{\tan^2 x} - e^{\sin^2 x}$ 是与 x^n 同阶的无穷小,则 $n =$ ( ).

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

(8) 设常数 $a > 0$,方程 $\ln x = ax$ 仅有一个实根,则 a 必须满足( ).

(A) $a = \dfrac{1}{e}$　　(B) $a = e$　　(C) $a < \dfrac{1}{e}$　　(D) $a > e$

(9) 已知 $y = y(x)$ 满足微分方程:$y''(x) + 3x[y'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$ 及初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,则( ).

(A) 1 是 $y(x)$ 的极大值　　(B) 1 是 $y(x)$ 的极小值

(C) $(0,1)$ 是曲线 $y = y(x)$ 的拐点　　(D) 1 不是 $y(x)$ 极值,$(0,1)$ 也不是曲线的拐点

(10) 设 $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$,则$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} =$ ( ).

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\dfrac{z-x}{(y-z)^2}$　　(D) $\dfrac{2z-y-x}{(y-z)^2}$

(11) 已知 $y = \sin x - \cos x + Ce^{-x}$ 是某微分方程的通解,则此方程是( ).

(A) $y + y' = \sin x$　　(B) $y - y' = 2\cos x$　　(C) $y + y' = 2\sin x$　　(D) $y + y' = 2\cos x$

(12) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是( ).

(A) $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵　　(B) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值

(C) $\boldsymbol{A}$ 的每一个重特征值,对应的线性无关特征向量的个数都等于该特征值的重数

(D) $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵

(13) 已知二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

则 X 和 Y 之间的关系是( ).

(A) 独立但不相关　　(B) 独立且相关

(C) 不独立也不相关　　(D) 不独立且相关

(14) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{4}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

且 $Y = aX + b \sim N(0,1)$,则在下列各组数中应取( ).

(A) $a = \dfrac{1}{2}, b = 1$　　(B) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}$

(C) $a = \dfrac{1}{2}, b = -1$　　(D) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, b = -\sqrt{2}$

三、解答题(本大题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 8 分) 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,求$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 9 分) 设 $y=y(x)$ 在$[0,+\infty)$ 连续,$y(1)=2$,且 $x\displaystyle\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t$. 求函数 $y(x)$.

(17)(本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 连续,且$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-2$,求$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_h^h[f(t+h)-f(t-h)]\mathrm{d}t$.

(18)（本题满分 9 分） 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, f'(0)=2$，试求

$$\lim_{t\to 0^+}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\ln(1+t^3)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)（本题满分 8 分） 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，在(a,b)内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，试证：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

(2) 存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=f(\eta)$.

(20)(本题满分 13 分) 设有两个 n 维行向量组 A,B:

$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$;　　$B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$,

它们合起来的向量组 $C:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.

(1) 证明:向量组 A 与向量组 B 等价的必要充分条件是 $r(A)=r(B)=r(C)$;

(2) 举反例说明,仅当 $r(A)=r(B)$ 时,不能推出向量组 A 与向量组 B 等价.

(21)(本题满分 13 分) 设有方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的通解;

(2) 问 a、b 取何值时,方程组(Ⅱ)与(Ⅰ)同解.

(22)（本题满分 13 分） 设 X_1、X_2 相互独立，且具有相同的概率分布：$P\{X_i = 1\} = p$，$P\{X_i = 0\} = 1 - p$，$(0 < p < 1)$，令

$$Y = \begin{cases} 1, & X_1 + X_2 \text{ 为奇数} \\ 0, & X_1 + X_2 \text{ 为非奇数} \end{cases}$$

问 p 取什么值时，X_1 和 Y 不相关？

(23)（本题满分 13 分） 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{-x^2+2x}, & x < 1 \\ B, & 1 \leqslant x < 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

其中 A、B 为大于零的常数，且已知 $P\left\{\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right\} = \frac{1}{4}$. 求：

(1) A、B 的值；

(2) 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$；（结果用 $\Phi(x)$ 表示，$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$）.

(3) 数学期望 EX.

试卷(七)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{2}}$.显然 $a=1$，故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\underline{-6}$. 由$\dfrac{x^4+x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x^4-x^2+2(x^2-1)+x+2}{x^2-1}=x^2+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}=x^2+2+\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}$，故 $\left(\dfrac{x^4+x^2+x}{x^2-1}\right)'''=-\dfrac{18}{2(x-1)^4}+\dfrac{6}{2(x+1)^4}$

令 $x=0$ 得 $\left.\left(\dfrac{x^4+x^2+x}{x^2-1}\right)'''\right|_{x=0}=-6$.

注:以上两题用泰勒公式作更简单.

(3) $\underline{y=xe^{cx}}$. 原式化为 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\ln\dfrac{x}{y}\cdot y\mathrm{d}x$.

两边乘$\dfrac{1}{x^2}$得 $\mathrm{d}\dfrac{y}{x}=\ln\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\ln x$

或 $\dfrac{\mathrm{d}\dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}}=\mathrm{d}\ln x$ $\ln(\ln\dfrac{y}{x})=\ln Cx$.

解得 $y=xe^{Cx}$.

注:本题可用齐次方程中令 $u=\dfrac{y}{x}$ 的一般方法解,读者试解之,我们提供的解说明微积分运算的基本功熟练时,解简单微分方程不必生套公式.

(4) $\underline{(a_1a_6-b_1b_6)(a_2a_5-b_2b_5)(a_3a_4-b_3b_4)}$.

按第1行展开,再将每个元素的代数余子式按最后一行展开得

$$(a_1a_6-b_1b_6)\begin{vmatrix}a_2&0&0&b_2\\0&a_3&b_3&0\\0&b_4&a_4&0\\b_5&0&0&a_5\end{vmatrix}=(a_1a_6-b_1b_6)(a_2a_5-b_2b_5)(a_3a_4-b_3b_4)$$

(5) $\underline{3}$. $(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)^2(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)^2=(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^2(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^2=3\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

所以 $(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^2=3$. (注意$(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})$是数).

(6) $\underline{\dfrac{5}{6}}$, (2) $\underline{\dfrac{2}{3}}$, (3) $\underline{\dfrac{11}{18}}$.

(1) 由 $P(A\mid B)=0$ 两边乘 $P(B)$,则得 $P(AB)=0$,故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$. (2) 由 $P(A\mid B)=P(A)$,两边同乘 $P(B)$,则得 $P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}$，故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{2}{3}$. (3) 由 $P(\overline{A}\mid B)=P(B)$ 两边同乘 $P(B)$

得 $P(\overline{A}B)=(P(B))^2=\frac{1}{9}$，故 $P(A\cup B)=P(A)+(P(B)-P(AB))=P(A)+P(\overline{A}B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}$.

二、选择题

(7) $\underline{\quad(A)\quad}$. 由 $e^{\tan^2 x}-e^{\sin^2 x}=e^{\sin^2 x}(e^{\tan^2 x-\sin^2 x}-1)\sim\tan^2 x-\sin^2 x=(\tan x+\sin x)(\tan x-\sin x)=\tan^2 x(1+\cos x)(1-\cos x)\sim x^4$. 故 $n=4$. 选(A)

(8)(A). 由几何意义知曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=ax$ 相切，故在切点处有 $\frac{1}{x_0}=a$，由此 $1=\ln x_0$，$x_0=e$.

所以 $a=\frac{1}{e}$. 选(A).

(9)(C). 以 $x=0$ 代入方程，得 $y''(0)=0$，于方程两边对 x 求导的 $y'''(x)+[3x(y'(x))^2]'_x=e^{-x}$.

令 $x=0$ 得 $y'''(0)=-1\neq 0$. 故(0,1)是曲线 $y=y(x)$ 的拐点. 选(A).

(10)(B). $\frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{1}{y-z}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z-x}{(y-z)^2}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x-y}{(y-z)^2}$

故 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$. 选(B)

(11)(C). $y'=\cos x+\sin x-Ce^{-x}$. 消去 C 得

$$y'+y=2\sin x.$$ 选(C).

(12)(C).

(13)(D). 首先求边缘分布律：

$X\backslash Y$	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$P\{Y=y_i\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

因为 $P\{X=1,Y=1\}=0\neq P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$，所以 X,Y 不独立. 由联合分布律和边缘分布律易算得 $E(XY)=\frac{2}{3}$，$EX=\frac{1}{3}$，$EY=\frac{5}{3}$，因为 $\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{1}{9}\neq 0$，故 X,Y 相关.

(14)(B). 由 $f(x)$ 和 $X\sim N(-2,2)$，要 $Y=aX+b\sim N(0,1)$，即要求 $\begin{cases}EY=0\\DY=1\end{cases}$，亦即 $\begin{cases}-2a+b=0\\2a^2=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\\b=-\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\b=\sqrt{2}\end{cases}$，由(B)，(D)中 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 知应选(B).

三、解答题

(15) 解 令 $\ln x = t$. 则 $x = e^t$. $f(t) = \dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$ （2 分）

于是 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)dx = -e^{-x}\ln(1+e^x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}$

$$= \ln 2 + \int_0^{+\infty}\frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} \qquad （5 分）$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{e^x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty} = 2\ln 2 \qquad （8 分）$$

(16) 解 由已知等式两边对 x 求导得：

$$\int_0^x y(t)dt + xy(x) = \int_0^x ty(t)dt + x^2y(x) + xy(x)$$

再对 x 求导得 $y(x) = xy(x) + 2xy(x) + x^2y'(x)$. （3 分）

故
$$\frac{dy}{y} = -\frac{3x-1}{x^2}dx$$

$$\ln\frac{y}{C} = 3\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \qquad 令 x=1, y=2 得 C=2e \qquad （5 分）$$

因此，$y = 2ex^{-3}\cdot e^{-\frac{1}{x}}(x>0)$ （7 分）

由假设 $y(x)$ 在$[0,+\infty]$连续，故 $y(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2ex^{-3}e^{-\frac{1}{x}} = 0$

所以，$y(x) = \begin{cases} 2ex^{-3}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ （9 分）

(17) 解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = -2$ 知 $f(0)=0, f'(0)=-2$ （2 分）

又
$$\int_{-h}^{h} f(t+h)dt = \int_0^{2h} f(u)du.\quad \int_{-h}^{h} f(t-h)dt = \int_{-2h}^{0} f(u)du.$$

故
$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-h}^{h}[f(t+h)-f(t-h)]dt}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(-2h)}{h} \qquad （6 分）$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(-2h)-f(0)}{h} = 2f'(0)+2f'(0) = -8. \qquad （8 分）$$

(18) 解 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t \rho f(\rho)d\rho = 2\pi\int_0^t \rho f(\rho)d\rho$ （6 分）

故 原极限 $\displaystyle= \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t \rho f(\rho)d\rho}{t^3} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi f(t)}{3t}$ （6 分）

$$= \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = \frac{2\pi}{3}f'(0) = \frac{4}{3}\pi \qquad （9 分）$$

(19) 证(1) 由 $f'(a)f'(b)>0$，知 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 同号，不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$. 由

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a} > 0$$

及极限的保号性，有 $x_1\in(a, a+\delta_1)$，使 $f(x_1)>0$，同理有 $x_2\in(b-\delta_2, b)$，使 $f(x_2)<0$. 由

连续函数的介值定理，知有 $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$. （4 分）

（2）**分析** $f''(\eta) = f(\eta) \Leftrightarrow [f''(x) - f(x)]\Big|_{x=\eta} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x}[f'(x) + f(x)]\Big|_{x=\eta} = 0$$

故令 $\varphi(x) = \mathrm{e}^x f(x)$，则 $\varphi(a) = \varphi(\xi) = \varphi(b) = 0$，且 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导.

由罗尔定理，有 $\xi_1 \in (a, \xi)$，使 $\varphi'(\xi_1) = \mathrm{e}^x[f(x) + f'(x)]\Big|_{x=\xi_1} = 0$，即 $f(\xi_1) + f'(\xi_1) = 0$

同理，有 $\xi_2 \in (\xi, b)$，使 $f(\xi_2) + f'(\xi_2) = 0$

再令 $F(x) = \mathrm{e}^{-x}[f'(x) + f(x)]$

则 $F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0$，且 $F(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 可导，由罗尔定理，存在 $\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$，使

$$F'(\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x}[f'(x) + f(x)]\Big|_{x=\eta} = 0$$

即 $\quad \mathrm{e}^{-x}[-f'(x) - f(x) + f''(x) + f'(x)]\Big|_{x=\eta} = 0$

即 $\quad f''(\eta) = f(\eta)$. （8 分）

（20）证 （1）设以向量组 A 的向量为行构成的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，类似地，向量组 B 构成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则向量组 C 构成的矩阵 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$. 必要性：当向量组 A 与 B 等价时，由初等行变换：$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \to \boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

所以 $\quad r(\boldsymbol{C}) = r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A})$，即 $r(A) = r(B) = r(C)$. （5 分）

充分性. 用反证法. 假设向量组 A 与 B 不等价，无妨设向量组 A 中至少有一向量不能由向量组 B 线性表示，则其不能由向量组 B 的极大无关组线性表示，从而向量组 C 的秩大于向量 B 的秩，即 $r(C) > r(B)$，与已知矛盾，故反证法假设不正确，从而充分性得证. （10 分）

或证： 当 $r(A) = r(C)$ 时，A 组的极大无关组也是 C 组的极大无关组，从而知 B 组可由 A 组线性表示，同理由 $r(B) = r(C)$ 知 A 组可由 B 组线性表示.

（2）设向量组

$$A: \begin{matrix} \boldsymbol{\alpha}_1 = (0,0,1,0) \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,0,0,1) \end{matrix} \quad , B: \begin{matrix} \boldsymbol{\beta}_1 = (0,0,1,0) \\ \boldsymbol{\beta}_2 = (0,0,0,1) \end{matrix}$$

显然 $r(A) = r(B) = 2$，但向量组 A 与 B 不等价. （13 分）

（21）解 （1） $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}$

显然，$\boldsymbol{\eta} = (-1, 1, 0, 0)^T$ 是它的一个解.

在对应的齐次方程组中，取

$$(x_3, x_4) = (1, 0), (0, 1)$$

解得 $\quad (x_1, x_2) = (1, -2), (1, -2)$，所以对应齐次方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -2, 1, 0)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = (1, -2, 0, 1)^T$$

因此，方程组（Ⅰ）的通解为

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+C_1\boldsymbol{\xi}_1+C_2\boldsymbol{\xi}_2$，$C_i$ 为任意常数，$i=1,2.$ （5 分）

（2）对方程组（Ⅱ）的增广矩阵作初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right)$$ （8 分）

显然，仅当 $a=1$，$b=-1$ 时，方程组(Ⅱ) 才有无穷多个解，且对应齐次方程组的基础解系中有两个解向量，即此时，方程组(Ⅱ) 才有可能与方程组(Ⅰ) 同解. （10 分）

并且，当 $a=1$，$b=-1$ 时，（Ⅱ）的增广矩阵再经初等行变换

如不计零行，则上面最左端矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$ （8 分）

与方程组(Ⅰ) 的增广矩阵完全相同. 因此，当 $a=1$，$b=-1$ 时，方程组(Ⅱ) 与方程组(Ⅰ) 同解.

（13 分）

（22）解 (X_1,Y) 的可能取值数对为 $(1,1)$，$(1,0)$，$(0,1)$，$(0,0)$.

$$\begin{aligned}P\{X_1=1,Y=1\}&=P\{X_1=1,X_1+X_2\text{ 为奇数}\}\\&=P\{X_1=1,X_2=0\}\\&=P\{X_1=1\}P\{X_2=0\}=p(1-p)\end{aligned}$$ （4 分）

类此可得

$$P\{X_1=1,Y=0\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=p^2$$

$$P\{X_1=0,Y=1\}=P\{X_1=0,X_2=1\}=p(1-p)$$

$$P\{X_1=0,Y=0\}=P\{X_1=0,X_2=0\}=(1-p)^2$$ （9 分）

因此

$$E(X_1Y)=p(1-p),EX_1=p,EY=2p(1-p)$$

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=p(1-p)-p\times2p(1-p)=p(1-p)(1-2p)$$

故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时 $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=0$，即 X_1 和 Y 不相关. （13 分）

（23）解 （1）由 $\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1\\P\left\{\dfrac{3}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right\}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{1}A\mathrm{e}^{-x^2+2x}\mathrm{d}x+\int_1^3B\mathrm{d}x=1\\\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}B\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

解得 $\begin{cases}A=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\mathrm{e}}\\B=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ （4 分）

（2）当 $x<1$ 时，$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{\pi}\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-t^2+2t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(t-1)^2}\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{t-1}{\sqrt{1/2}}=y}$

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{2}(x-1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dt = \Phi(\sqrt{2}(x-1))$$

当 $1 \leqslant x < 3$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{\pi}e} e^{-t^2+2t} dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}(x+1)$.

当 $x \geqslant 3$ 时，$F(x) = 1$，故

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(\sqrt{2}(x-1)), & x < 1 \\ \frac{1}{4}(x+1), & 1 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$ （9 分）

（3） $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2x-1} dx + \int_{1}^{3} x \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}) + 1$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. （13 分）

数学考研模拟考试试卷 8

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本大题共 6 小题,总分 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$ ________.

(2) $\left[\dfrac{x^4-12x^2+10x+3}{x^2-4x+3}\right]^{(4)}=$ ________.

(3) 微分方程,$y'\sin x=y\ln y$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$ 的特解是________.

(4) 方程 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 7-x^2\end{vmatrix}=0$ 的实根为________.

(5) 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & t\\ 4 & 9 & t^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}$ 为 3 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{PQ}=O$.若要使 $r(\boldsymbol{Q})=1$,则 $t=$ ________.

(6) 设二维随机变量(X,Y)的分布列为

(X,Y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
p	0.4	0.2	a	b

若 $EXY=0.8$,则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$ ________.

二、选择题(本大题共 8 小题,总分 32 分)

(7) 已知 $f(x)$ 在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内二阶可导,$f'(x)$ 严格单调减少,且 $f(1)=f'(1)=1$,则(　).

(A) 在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内有 $f(x)\leqslant x$

(B) 在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内有 $f(x)\geqslant x$

(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内 $f(x)<x$;在 $(1,1+\delta)$ $f(x)>x$

(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内 $f(x)>x$;在 $(1,1+\delta)$ $f(x)<x$

(8) 已知函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f'(x_0)-f(x_0)}{h^2}=\dfrac{1}{2}$. 则函数 $f(x)$(　).

(A) 在 x_0 某邻域内单调增　　(B) 在 x_0 某领域内单调减

(C) x_0 是 $f(x)$ 极小值点　　(D) x_0 是 $f(x)$ 的极大值点

(9) 已知 $y=y(x)$ 满足条件:$y'=xe^{y-2x}$ 及 $y\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-(1+\ln 2)$. 则 $y(0)=$(　).

(A) $\ln 2$　　(B) $2\ln 2$

(C) $-\ln 2$　　(D) $-2\ln 2$

(10) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导,且 $f(0)=0$, $f'(0)=4$, 函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^u vf(v)\mathrm{d}v}{x^4}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续,则 $a=$(　).

(A) $\dfrac{1}{6}$　　(B) $-\dfrac{1}{6}$　　(C) $-\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

(11) 设 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, 则 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ 在 $x=0$ 处(　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导但导数不连续　　(D) 具有连续的导数

(12) 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中的每一向量都不能由其余 $r-1$ 个向量线性表示是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的(　).

(A) 充分且必要的条件　　(B) 充分非必要的条件

(C) 必要非充分的条件　　(D) 既非必要又非充分的条件

(13) 设 $P(AB)>0, P(C\mid AB)=1$, 则有(　)

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

(14) 现有奖券 10 张,其中 8 张为 2 元,2 张为 5 元,某人从中随机地无放回地抽取 3 张,则此人得奖金的数学期望为(　)

(A) 6.5　　(B) 12　　(C) 7.8　　(D) 9

三、解答题(本大题共 9 小题,满分 94 分)

(15)(本题满分 8 分) 设某商品需求量 $Q=12000-80p$(其中 p 是单价元),商品的总成本 $C=25000-50Q$,每件商品要纳税 2 元,求 p 为何值时,销售利润最大及最大的利润额.

(16)(本题满分 8 分) 设 α 为正常数,且满足 $\int_{\alpha}^{2\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=\frac{\pi}{6}$,求 α.

(17)（本题满分 9 分） 求函数 $z=x^2+y^2$ 在条件：$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 8$ 下的最大与最小值.

(18)（本题满分 8 分） 计算积分 $\mathrm{I}=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 和 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2\geqslant\frac{a^2}{4}$ 所确定的区域.

(19)（本题满分 8 分） 求满足方程

$$y+1=\int_{x}^{\frac{1}{2}}\frac{y\,\mathrm{d}x}{y^{3}-x}$$

的连续函数 $y=y(x)$，并求曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=4$、$y=0$ 所围成图形的面积 A.

(20)（本题满分 13 分） 设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r<n)$ 线性无关，求 $n-r$ 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 线性无关.

(21)（本题满分 13 分） 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$r(\boldsymbol{A})=n$，$A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式，记

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix},\ r<n$$

试写出方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解，说明理由.

(22)（本题满分 13 分） 某种电子元件的使用寿命（单位：小时）服从指数分布，其平均寿命为 150 小时。在一台昼夜连续工作的设备中使用了一件这种电子元件，使用过程中，当这种元件损坏时，立即换一件新的. 问一年（365 天）中最少预备多少件这种元件，才能保证够用的概率不小于0.95（$\Phi(1.65)=0.95$）.

(23)（本题满分 13 分）设事件 A、C 独立，B、C 也独立，证明：

（1）又知 A、B 互不相容，则 $A \cup B$ 与 C 独立.

（2）已知 AB、C 也独立，则 $A \cup B$ 与 C 独立.

试卷(八)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\sqrt{e}}$. 原极限 $= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\ln(1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1))}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}$$

(2) $\underline{48}$.

$$\frac{x^4-12x^2+10x+3}{x^2-4x+3}=\frac{x^4-4x^3+3x^2+4(x^3-4x^2+3x)+(x^2-4x+3)+2x}{x^2-4x+3}$$

$$=x^2+4x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{3-x}.$$

故 $\left[\frac{x4-12x2+10x+3}{x2-4x+3}\right]^{(4)}=\frac{4!}{(x-1)^5}+\frac{3.4!}{(3-x)^5}$,以 $x=2$ 代入得 $-4!(1-3)=48$

(3) $\underline{y=e^{\tan\frac{x}{2}}}$.

方程化为 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$.

两边积分得 $\ln(\ln y)=\ln C\tan\frac{x}{2}$. 以 $x=\frac{\pi}{2}$, $y=e$ 得 $C=1$

故 $y=e^{\tan\frac{x}{2}}$

(4) $\underline{\pm1,\pm\sqrt{2}}$.

$$0=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&7-x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&1-x^2&0&0\\2&3&1&5\\0&0&0&2-x^2\end{vmatrix}=(1-x^2)(2-x^2)\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}$$

所以,方程的实根为 $\pm1,\pm\sqrt{2}$.

(5) $\underline{t=2\text{ 或 }3}$. 由 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$ 及 $\boldsymbol{Q}$ 为非零矩阵得

$$1\leqslant r(\boldsymbol{Q})\leqslant 3-r(\boldsymbol{P})$$

要使 $r(\boldsymbol{Q})=1$, 必须 $r(\boldsymbol{P})=2$, 因此,$t=2$ 或 3.

(6) $\underline{0.1}$. 首先由 $\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1\\EXY=0.8\end{cases}$, 即 $\begin{cases}0.4+0.2+a+b=1\\0.2+2b=0.8\end{cases}$,

解得: $a=0.1$, $b=0.3$. 由(X,Y)的分布列可得关于 X 和 Y 的边缘分布列为

X	1	2
p	0.6	0.4

Y	0	1
p	0.5	0.5

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=0.8-(0.6+2\cdot0.4)\cdot0.5=0.1$

二、选择题

(7) (A). 令 $\varphi=f(x)-x$,则 $\varphi(1)=0$, $\varphi'(x)=f'(x)-1$, $\varphi'(1)=0$

由 $f'(x)$ 单调减知 $\varphi'(x)>0$, $x\in(1-\delta,1)$ 及 $\varphi'(x)<0$, $x\in(1,1+\delta)$,从而 $\varphi(x)$

在$(1-\delta,1)$单调增，在$(1,1+\delta)$单调减，$\varphi(1)$是最大值，故$\varphi(x)\leqslant\varphi(1)=0$

(8)（C）．由$h\to 0$知，$\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f'(x_0)-\rho(x_0)]=-f'(x_0)=0$.

其次 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f'(x_0)-f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{2h}=\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{2}$$

$f''(x_0)=1>0$，故x是$f(x)$的极小值点． 选（C）

(9)（B）．原方程化为 $e^{-y}dy=xe^{-2x}dx$

解得 $e^{-y}=e^{-2x}(\frac{x}{2}+\frac{1}{4})+C$．以$y(\frac{1}{2})=-(1+\ln 2)$

代入得 $C=0$，再以$x=0$代入得$e^{-y}=\frac{1}{4}$，$y=2\ln 2$. 选（B）

(10)（D）．由$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x du\int_0^u vf(v)dv}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x vf(v)dv}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{12x}=\frac{1}{12}f'(0)=\frac{1}{3}$$ 选（D）

(11)（D）．$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du\ (x\neq 0)$

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$知$f(0)=0$，$f'(0)=2$，从而$\varphi(0)=0$.

当$x\neq 0$时，$\varphi'(x)\ \frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du$

而 $$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big|_0^x f(u)du=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}f(x)=1$$

又 $$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{u^2}\int_0^x f(u)du\right]=2-1=1$$

故 $\varphi'(x)$连续． 选（D）

(12)（A）．（排除选项（B）、（C）、（D）请读者自己完成）。

(13)（B）．因为$1=P(C\mid AB)=\dfrac{P(ABC}{P(AB)}$，所以$P(ABC)=P(AB)$，故$P(C)\geqslant P(ABC)$
$=P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$. 选（B）

(14)（C）．**法1** 令X_i表示第i张的奖金数（单位：元），$i=1,2,3$，则X_1,X_2,X_3同分布：$P\{X_i=2\}=\frac{8}{10}$，$P\{X_i=5\}=\frac{2}{10}$，所以$EX_i=\frac{8}{10}\cdot 2+\frac{2}{10}\cdot 5=2.6$，此人得的奖金$X$的数学期望为$EX=E(\sum\limits_{i=1}^3 X_i)=\sum\limits_{i=1}^3 EX_i=7.8$.

法2 此人得的奖金X的分布律为

X	6	9	12
p	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

，

故$EX=6\cdot\frac{7}{15}+9\cdot\frac{7}{15}+12\cdot\frac{1}{15}=7.8$. 选（C）

三、解答题

(15)解 总收入为 $R=Qp-C$

故总利润为　　$L = R - 2Q = -80p^2 + 16160p - 625000$　　(4 分).

令　$\frac{dL}{dp} = 160(101 - p) = 0$,得　$p = 101$. 由于 L 是二次函数,故　$p = 101$(元)就是最大值点. 即当 $p = 101$ 元 / 件时取得最大利润

最大利润:$L(101) = -80 \times 101^2 + 16160 \times 101 - 625000 = 191080$(元)　　(8 分)

(16) 解　令 $\sqrt{e^x - 1} = t$,则 $x = \ln(1 + t^2)$,$dx = \frac{2t}{1 + t^2}dt$,得

$$\frac{\pi}{6} = \int_{\sqrt{e^\alpha - 1}}^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{(1 + t^2)t} = \int_{\sqrt{e^\alpha - 1}}^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1 + t^2} \quad (4 分)$$

$$= 2\arctan t\Big|_{\sqrt{e^\alpha - 1}}^{\sqrt{3}} = 2(\frac{\pi}{3} - \arctan\sqrt{e^\alpha - 1})$$

$\Rightarrow \arctan\sqrt{e^\alpha - 1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \ln 2$　　(8 分)

(17) 解　很明显在(0,0)点 $z = x^2 + y^2$ 取得最小值 0　　(2 分)

且(0,0)是 $z = x^2 + y^2$ 在圆内:$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 8$ 唯一的驻点. 所以最大值必须在边界:$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ 上达到.　　(4 分)

令　　$x = 2\sqrt{2}\cos t + 1$,$y = 2\sqrt{2}\sin t + 1$, 则

$$x^2 + y^2 = 10 + 4\sqrt{2}(\cos t + \sin t) = 10 + 8\sin(t + \frac{\pi}{4})$$

故当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时,$x^2 + y^2 = 18$ 为最大值　　(9 分)

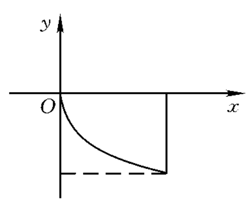
注:本题可用条件极值的方法来求最大值,请读者一试.

(18) 解　$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy - \iint\limits_{(x-\frac{a}{2})^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{4}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$　　(2 分)

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 d\rho \quad (6 分)$$

$$= \frac{2}{3}a^3(\pi - \frac{2}{3}) \quad (8 分)$$

(19) 解　由 $y(x)$ 连续,故方程两边可导,求导得



$$y' = \frac{y}{x - y^3}$$

此方程可写作 x 对 y 的红性方程:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -y^2 \quad (3 分)$$

两边用 y 除得　　$\frac{1}{y}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y^2}x = -y$ 或 $\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right) = -y$

于是　　$x = -\frac{y^3}{2}$　　或　　$y = -(2x)^{1/3}$

故如图所求面积　　$A = \int_0^4 2^{1/3}x^{1/3}dx = \frac{3}{4} \cdot 2^{1/3}x^{4/3}\Big|_0^4 = 6$　　(9 分)

(20) 解　记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r^T\end{pmatrix}$$ 则 $\boldsymbol{A}$ 为 $r\times n$ 矩阵，且其秩为 r，故方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系中有 $n-r$ 个解向量. 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 的方程组的一个基础解系，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$$

线性无关.

事实上，设有 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\mu_1,\cdots,\mu_{n-r}$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r+\mu_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots\mu_{n-r}\boldsymbol{\beta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\beta}_j=0(i=1,2,\cdots,r,\ j=1,\ 2,\ \cdots,n-r)$，用 $(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r)^T$ 左乘上式两端得

$$(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r)^T(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r)=\|\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r\|^2=0$$

从而 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关

得 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$，于是

$$\mu_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\mu_{n-r}\boldsymbol{\beta}_{n-r}=\boldsymbol{0} \qquad (10\text{ 分})$$

而 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 线性无关，故 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{n-r}=0$，由此便得

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$$

线性无关. （13 分）

(21) 解 由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 n，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的 n 个列向量线性无关，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的后 $n-r$ 个列向量线性无关：

$$\boldsymbol{\xi}_1=(A_{r+1,1}\ A_{r+1,2}\ \cdots\ A_{r+1,n})^T$$
$$\boldsymbol{\xi}_2=(A_{r+2\ 1}\ A_{r+2,2}\ \cdots\ A_{r+2,n})^T$$
$$\boldsymbol{\xi}_{n-r}=(A_{n1}\ A_{n2}\ \cdots\ A_{nn})^T \qquad (6\text{ 分})$$

而由行列式的性质 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0,j\neq i,\ i、j=1,2,\cdots,n$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0,i=1,2,\cdots,r;\ j=r+1,r+2,\cdots,n \qquad (8\text{ 分})$$

从而 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解向量.

又 $r(\boldsymbol{B})=r$，所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，从而，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$x=C_1\boldsymbol{\xi}_1+C_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+C_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},C_i\text{ 为任意常数},\ i=1,2,\cdots,n-r. \qquad (13\text{ 分})$$

(22) 解 设最少要预备 n 件，每件元件的寿命为 X_i（小时），$i=1,2,\cdots,n$，它们相互独立，有相同的指数分布，且 $EX_i=150,DX_i=150^2$，故应满足

$$0.95\leqslant P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 365\times 24\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i<8760\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-150n}{150\sqrt{n}}<\frac{8760-150n}{150\sqrt{n}}\right\}$$

$$\doteq 1-\Phi\left(\frac{8760-150n}{150\sqrt{n}}\right)=1-\Phi\left(\frac{292-5n}{5\sqrt{n}}\right) \qquad (7\text{ 分})$$

即 $$\Phi\left(\frac{292-5n}{5\sqrt{n}}\right)\leqslant 1-0.95=1-\Phi(1.65)=\Phi(-1.65)$$

故得 $$\left(\frac{292-5n}{5\sqrt{n}}\right)\leqslant -1.65$$

即 $$5n-8.25\sqrt{n}-292\geqslant 0$$

解得 $$\sqrt{n}\geqslant\frac{8.25+\sqrt{8.25^2+5840}}{10}=8.411$$

$$n\geqslant 70.74$$

所以应至少预备 71 件. （13 分）

（23）证 （1）因为 A、B 互不相容，所以 $P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)=P(A)P(C)+P(B)P(C)=(P(A)+P(B))P(C)=P(A\cup B)P(C)$，

故 $A\cup B$ 和 C 相互独立. （6 分）

（2）$P((A\cup B)C)=P((\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB)C)$

$$=P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(ABC)$$

已知 AB 与 C 独立，所以 $P(ABC)=P(AB)P(C)$，又由 B、C 独立知 $P(\overline{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=P(B)P(C)-P(AB)P(C)=(P(B)-P(AB))P(C)=P(B-A)P(C)=P(\overline{A}BC)$，同理，由 A、C 独立可证 $P(A\overline{B}C)=P(A\overline{B})P(C)$，故

$$\begin{aligned}P(A\cup B)C&=P(\overline{A}B)P(C)+P(A\overline{B})P(C)+P(AB)P(C)\\&=(P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(AB))P(C)\\&=P(A\cup B)P(C)\end{aligned}$$

故 $A\cup B$ 和 C 独立. （13 分）

数学考研模拟考试试卷 9

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$,而 $f'(x)=\arctan x$,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

(2) 已知 $f(x)$ 连续,且 $\displaystyle\int_0^{x^2+1}f(t)\mathrm{d}t=x$,则 $f(5)+\displaystyle\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 方程 $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$ 的通解为________.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的属于特征值 0 的线性无关的特征向量的个数为________.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&-2&2&-2\\2&1&4&3\\7&8&9&10\end{vmatrix}$ 中第 3 行各元素的余子式之和等于________.

(6) 已知随机变量 X 与 Y 相互独立,其分布函数分别为:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{1}{3}, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases};\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{2+y}{2}, & 0\leqslant y\leqslant 2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}.$$

则 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(**7**) 设 $f(x)$ 连续, $F(x)=\int_{e^{-x}}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ (a 是负常数),则 $F'(x)=$ (　).

(A) $f(x^2)-f(e^{-x})+f(a)$　　(B) $f(x^2)+f(e^{-x})+f(a)$

(C) $2xf(x^2)-e^{-x}f(e^{-x})$　　(D) $2xf(x^2)+e^{-x}f(e^{-x})$

(**8**) 设 $f(x)$、$\varphi(x)$ 连续,且 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是等价无穷小,则当 $x\to 0$ 时, $\int_0^x f(t)\ln(1+2t)\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x (3^t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的(　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶而非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

(**9**) 设 $f(x,y)=x\ln(\sqrt{1+y^2}-y)+y^y\ln x$. 则 $f'_y(1,y)=$ (　).

(A) $-\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

(C) $\dfrac{-1}{\sqrt{1+y^2}}+y^y(1+\ln y)$　　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+y^y(1+\ln y)$

(**10**) 设 $y=y(x)$ 由 $x=\int_0^y \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 所确定. 则 $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=0}=$ (　).

(A) 1　　(B) $4-\sqrt{5}$　　(C) -1　　(D) $4+\sqrt{5}$

(**11**) 设 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 内有二阶连续的偏导数,且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则(　).

(A) u 在 D 上的最大值与最小值均在 D 的内部取到

(B) u 在 D 上的最大值与最小值只能在 D 的边界上取到

(C) u 的最大值在内部而最小值只能在边界取到

(D) u 的最大值只能在边界上取到而最大值在内部取到

(**12**) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶非零矩阵,则下列命题正确的是(　).

(A) 若 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

(B) 若 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 或 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$.

(D) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$.

(**13**) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且同分布, X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

如果实数 $a(0\leqslant a\leqslant 1)$ 满足 $P\{X+Y\leqslant a\}=\dfrac{1}{20}$,则必有(　).

(A) $a<1$　　(B) $a=1$　　(C) $1<a<2$　　(D) $a=2$

(**14**) 设随机变量 $X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(3,4)$, $EXY=5$,则下列结论成立的是(　).

(A) X,Y 不相关　　(B) X,Y 相互独立

(C) $D(X-Y)=2$　　(D) $D(X-Y)=10$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(**15**)(**本题满分 8 分**)求函数 $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$ 的增、减区间与极值.

(**16**)(**本题满分 8 分**)某公司在两个地区销售同一产品,两地区的需求函数(价格 p 与销售量 Q 的关系)分别是:

$$p_1 = 20 - 2Q; \quad p_2 = 14 - Q.$$

而这种产品的总成本函数是 $C=2Q+6$(单位:万元/吨).在公司统一售价策略下,问售价 p 为多少(万元/吨)时,总利润最大?

（17）**（本题满分 9 分）** 计算二重积分：$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y$.

（18）**（本题满分 9 分）** 设 $y = x\mathrm{e}^x$ 是方程 $y' + a(x)y = \mathrm{e}^x$ 的一个解. 而 $y = y(x)$ 是此方程 $y' + a(x)y = \mathrm{e}^{-x}$ 满足 $y\Big|_{x=0} = 0$ 的解. 求此函数所表示曲线的凹、凸区间与拐点.

(19)（本题满分 8 分） 证明 $x>0$ 时，有不等式 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

(20)（本题满分 13 分） 设有向量组

（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,-2,-6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$

（Ⅱ）：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,m,-1,-1,-5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,n,-1,-2,-11)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1,-2,-t+1)^{\mathrm{T}}$

问：m,n,t 取何值时，向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价.

(21)（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{\alpha}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

(22)（本题满分 13 分）设随机变量 X 与 Y 独立，都服从区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布，试求：

(1) $Z=|X-Y|$ 的分布函数和概率密度；

(2) 概率 $P\{|Z-EZ|<\sqrt{2DZ}\}$.

（23）（本题满分 13 分） 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<1\\ \dfrac{2}{9}, & 3\leqslant x<6\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

定义随机变量 Y 为

$$Y=\begin{cases}-1, & X\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 0, & \dfrac{1}{2}<X\leqslant 4\\ 1, & X>4\end{cases}$$

（1）试确定常数 A；

（2）试求 Y 的分布律；

（3）求 $E(Y)$.

试卷(九)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{-\dfrac{3}{4}\pi}$. $y' = f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2} = \arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}$.

故 $y'\Big|_{x=0} = -\dfrac{3\pi}{4}$.

(2) $\underline{\dfrac{9}{4}}$. 方程两边令 $x=2$ 得 $\int_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 2$;方程两边求导得 $2xf(x^2+1)=1$. 用 $x=2$ 代入得 $f(5)=\dfrac{1}{4}$.

(3) $\underline{x = C\mathrm{e}^{\sin y} - 2(1+\sin y)}$. 原方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - x\cos y = 2\sin y\cos y$, 即 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\sin y}x) = 2\sin y\cos y\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y$

$$\mathrm{e}^{-\sin y}x = 2\int \sin y\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}\sin y = -2(1+\sin y)\mathrm{e}^{-\sin y} + C.$$

即
$$x = C\mathrm{e}^{\sin y} - 2(1+\sin y).$$

(4) $\underline{1}$. 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 而 $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ 知 $r(\boldsymbol{A}) = 2$. 故相应 0 的线性无关特征向量仅有一个.

(5) $\underline{0}$. 将第 3 行各元素换成 $(1,-1,1,-1)$, 则行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0$. 即相应第 3 行各元素余子式之和为 0.

(6) $\underline{F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<1 \\ \dfrac{1+z}{6}, & 1\leqslant z<3 \\ \dfrac{z}{3}, & 3\leqslant z<5 \\ 1, & z\geqslant 5 \end{cases}}$.

显然 X 是离散型, 且 $\begin{array}{c|cc} X & 1 & 3 \\ \hline p & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{array}$, $\{X=1\}$ 与 $\{X=3\}$ 构成完全事件组,

故
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X+Y\leqslant z\} \\ &= P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant z \mid X=1\} + P\{X=3\}P\{X+Y\leqslant z \mid X=3\} \\ &= \frac{1}{3}P\{Y\leqslant z-1 \mid X=1\} + \frac{2}{3}P\{Y\leqslant z-3 \mid X=3\} \\ &= \frac{1}{3}P\{Y\leqslant z-1\} + \frac{2}{3}P\{Y\leqslant z-3\} \end{aligned}$$

当 $z<1$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $1\leqslant z<3$，$F_Z(z)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2+(z-1)}{2}=\dfrac{1+z}{6}$

当 $3\leqslant z<5$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2+(z-3)}{2}=\dfrac{z}{3}$

当 $z\geqslant 5$ 时，$F_Z(z)=1$.

二、选择题

(7)（D）. $F'(x)=2xf(x^2)-(\mathrm{e}^{-x})'f(\mathrm{e}^{-x})$ 故选（D）.

(8)（C）. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\ln(1+2t)\mathrm{d}t}{\int_0^x(3^t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\ln(1+2x)}{\varphi(x)(3^x-1)}=\dfrac{2}{\ln 3}$. 故选（C）.

(9)（A）. $f'_y(1,y)=[\ln(\sqrt{1+y^2}-y)]'=-\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

(10)（A）. 由 $\sqrt{1+4t^2}>0$，知 $x=0$ 时，$y=0$. 而方程两边对 x 求导得 $1=\dfrac{y'}{\sqrt{1+4y^2}}$，故 $y'=\sqrt{1+4y^2}$；两边再求导 $y''=\dfrac{4y}{\sqrt{1+4y^2}}\cdot y'=4y$. 故 $(y''+y')\Big|_{x=0}=1$.

(11)（B）. 由 $(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^2-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^2+(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2>0$. 知 D 内任一点不可能为 $u(x,y)$ 的极值点. 从而最大值、最小值只能在边界上取得.

(12)（C）. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$，若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 满秩，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是零矩阵矛盾. 故 $|\boldsymbol{A}|=0$，同样 $|\boldsymbol{B}|=0$.

(13)（B）. $P\{X+Y\leqslant a\}=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}9x^2y^2\mathrm{d}y=\dfrac{a^6}{20}=\dfrac{1}{20}$. 故 $a=1$.

(14)（C）. $\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=2$，$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{cov}(X,Y)=2$.

三、解答题

(15) 解　$f(x)=\begin{cases}-x\mathrm{e}^{x-1}, & -\infty<x<0\\ x\mathrm{e}^{x-1}, & 0\leqslant x<1\\ x\mathrm{e}^{1-x}, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$　　（2 分）

$f'(x)=\begin{cases}-(1+x)\mathrm{e}^{x-1}, & -\infty<x<0\\ (1+x)\mathrm{e}^{x-1}, & 0<x<1\\ (1-x)\mathrm{e}^{1-x}, & x>1\end{cases}$. 在 $x=0,1$ 点不可导.

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$f'(x)>0$，单增

在 $(-1,0)$，$f'(x)<0$，单减

在 $(0,1)$，$f'(x)>0$，单增

在 $(1,+\infty)$，$f'(x)<0$，单减　　（6 分）

极大值为：$f(-1)=\mathrm{e}^{-2}$ 与 $f(1)=1$；极小值 $f(0)=0$.　　（8 分）

(16) 解　记总利润为 L. 两地需求量分别为

$$Q_1=10-\frac{1}{2}p;\quad Q_2=14-p.$$

则 $L=(Q_1+Q_2)p-2(Q_1+Q_2)-6=-\frac{3}{2}p^2+27p-54.$ （4 分）

$L'=-3p+27.\qquad p=9.$

即以 9 万元 / 吨的价格出售可使利润最大. （8 分）

（17）解 交换积分顺序得 原积分 $=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$ （5 分）

$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$ （9 分）

（18）解 以 $y=xe^x$ 代入方程得

$e^x+xe^x+axe^x=e^x$ 故 $a=-1$. （2 分）

因此 $y=y(x)$ 是 $y'-y=e^{-x}$ 的解. 其通解为

$y=Ce^x-\frac{1}{2}e^{-x}$. 由 $y(0)=0$ 得 $C=\frac{1}{2}$. 解为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ （6 分）

$y''=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，故当 $x=0$ 时 $y''=0$，而在 $(-\infty,0)$ 内 $y''<0$，曲线向下凹，在 $(0,+\infty)$

$y''>0$ 曲线向上凹，故 $(0,0)$ 是拐点. （9 分）

（19）证 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，$x\in[0,+\infty)$ （4 分）

则 $f(0)=0$，$f'(x)=1+\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}$

$f'(0)=0$，$f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}>0.$

因此，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增. 故 $f'(x)>0$.（$x\in(0,+\infty)$）.

从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增. 即 $f(x)>0$. 而当 $x>0$ 时，$1+x>1$.

故有 $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$ （8 分）

（20）解 作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&4&3&1&0&0\\1&-1&-1&m&n&0\\0&-1&-1&-1&-1&1\\-2&-1&0&-1&-2&-2\\-6&1&3&5&-11&-t+1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&3&1&0&0\\0&-1&-1&-1&-1&1\\0&0&1&m+4&n+5&-5\\0&0&0&m-2&n-4&0\\0&0&0&0&0&-t+6\end{pmatrix}$$ （5 分）

由于 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，所以当 $m-2=0,n-4=0,-t+6=0$，即 $m=2,n=4,t=6$ 时，$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 均有唯一解. （9 分）

此时，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，所以存在 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$$

这就表明，$m=2,n=4,t=6$ 时，向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价. （13 分）

(21) 解　显然 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为单位向量且正交，即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，所以

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\alpha}\tag{3 分}$$

由此得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$，这表明，$1,-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量.　（7 分）

又 $r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\leqslant 1+1=2$，所以 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值.　（10 分）

因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $\boldsymbol{\gamma}=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 可作为对应于特征值零的特征向量.

总之，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$，对应的特征向量分别为

$C_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),C_2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}),C_3\boldsymbol{\gamma},C_i\in\mathbf{R},C_i\neq 0\ (i=1,2,3)$.　（13 分）

(22) 解　(1) $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(\varnothing)=0$；

$0\leqslant z<2$ 时，$F_Z(z)=\displaystyle\iint\limits_{\substack{|x-y|\leqslant z\\-1\leqslant x\leqslant 1\\-1\leqslant y\leqslant 1}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=z-\frac{z^2}{4}$；

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

所求分布函数 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z-\dfrac{z^2}{4}, & 0\leqslant z<2.\\ 1, & z\geqslant 2\end{cases}$　（6 分）

概率密度　$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　（8 分）

(2) $EZ=\dfrac{2}{3}$，$DZ=\dfrac{2}{9}$，$P\{|Z-EZ|<\sqrt{2DZ}\}=P\{|Z-\dfrac{2}{3}|<\dfrac{2}{3}\}$

$$=F_Z(\frac{4}{3})-F_Z(0)=\frac{8}{9}\tag{13 分}$$

(23) 解　(1) 由 $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 A\mathrm{d}x+\int_3^6\frac{2}{9}\mathrm{d}x=A+\frac{2}{3}$ 可得

$$A=\frac{1}{3}\tag{4 分}$$

(2) Y 的可能取值为 $-1,0,1$.

$P\{Y=-1\}=P\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\}=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$

$P\{Y=0\}=P\{\dfrac{1}{2}<X\leqslant 4\}=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_1^3 0\cdot\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{7}{18}$

$P\{Y=1\}=P\{X>4\}=\displaystyle\int_4^6\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{4}{9}$

故 Y 的分布律为　（10 分）

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{4}{9}$

(3) $EY=-1\cdot\dfrac{1}{6}+0\cdot\dfrac{7}{18}+1\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{18}$.　（13 分）

数学考研模拟考试试卷 10

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 可导,$f(1)=0$, $f'(1)=2$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{\sqrt{1+x^2}-1}=$ ________.

(2) 设 $y=y(x)$ 由 $\ln(x+y)=x^2y+2\sin x$ 所确定,则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

(3) 曲线 $y=y(x)$ 满足条件 $xy'+y=x\mathrm{e}^x$,并经过点$(1,0)$,则 $y(x)$ 在该点的切线方程是________.

(4) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于________.

(5) 设向量 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,a)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,2,b)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但表示式不唯一,则 $a=$ ________,$b=$ ________.

(6) 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立,且和 X 有相同分布,则用中心极限定理计算概率 $P\{80<\sum\limits_{i=1}^{100}X_i<80+\sqrt{10}\}$ 的近似值为________.(已知 $\Phi(2.5)=0.9938$)

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $x=\displaystyle\int_0^y\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+4t^2}}$,则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-4y=$ ( ).

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) $\dfrac{4}{1+4y^2}-4\sqrt{1+4y^2}$

(8) 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$，(m 为常数)，则由曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 及直线 $x=a$、$x=b$ 所围成的平面图形绕直线 $y=m$ 旋转一周而成的旋转体的体积 V 等于(　).

(A) $\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

(B) $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$

(C) $\int_a^b \pi[2m+f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

(D) $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

(9) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax+b)=0$，则(　).

(A) $a=1,\ b=-\dfrac{1}{2}$　　(B) $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$

(C) $a=\dfrac{1}{2},\ b=-1$　　(D) $a=-1,\ b=\dfrac{1}{2}$

(10) 函数 $f(x)=(x^2+x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数是(　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(11) 设 D 是以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形域，D_1 是 D 在第一象限部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma=$(　).

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}\sigma$

(C) $2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$　　(D) $4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$

(12) 设 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且 $1\leqslant r(\boldsymbol{A})<n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(　).

(A) 只取 0　　(B) 只取 1　　(C) 只取 0,1　　(D) 只取 ±1

(13) 设 $F(x)$ 和 $G(y)$ 分别是随机变量 X 和 Y 的分布函数，则下列函数中不是某个随机变量的分布函数是(　).

(A) $3F(x)-2G(x)$　　(B) $\dfrac{1}{4}F(x)+\dfrac{3}{4}G(x)$

(C) $F(x)G(x)$　　(D) $G(2x+1)$

(14) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$$

则服从标准正态分布的随机变量是(　).

(A) $\dfrac{X+3}{2}$　　(B) $\dfrac{X+3}{\sqrt{2}}$　　(C) $\dfrac{X-3}{2}$　　(D) $\dfrac{X-3}{\sqrt{2}}$

三、解答题(本大题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 8 分) 某公司生产的产品用 A、B 两种原料,需求关系为 $R(x,y)=0.005x^2y$,现有资金 150 万元,并知 A、B 两种原料单价分别为每吨 1 万元和 2 万元,问确定怎样的购入数量,才能使生产的产品数量最多?

(16)(本题满分 8 分) 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-|x+2|$,

(1) 确定 $f(x)$ 的单调增减区间与极值;

(2) 确定曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点;

(3) 画出曲线 $y=f(x)$ 的略图.

(17)（本题满分 9 分） 求由心形线 $r = 1 + \cos\theta$ 与圆 $r = 3\cos\theta$ 所围公共平面区域的面积.

(18)（本题满分 9 分） 设 $f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$，求函数 $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 的表达式.

(19)（本题满分 8 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}|x^2+y^2-2x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 4$.

(20)（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$
且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{A}^2$.

（21）（本题满分 13 分） 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+5,5)^{\mathrm{T}}$.

（1）问 a、b 取何值，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

（2）问 a、b 取何值，$\boldsymbol{\beta}$ 可表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合且表示式唯一？

（3）问 a、b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，但表示式不唯一？并求出一般表达式.

（22）（本题满分 13 分） 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$，求 $Z=\max(|X|,|Y|)$ 的概率密度.

(23)（本题满分 13 分） 设某射手参加射击比赛，共打 4 发子弹，他的命中率为0.9，假设各次射击是相互独立的，击中目标射击就结束. 求直到射击结束所打的次数 X 的概率分布和数学期望.

试卷(十)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad -2 \quad}$.

原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{\dfrac{1}{2}x^2}$

$$=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\right]$$

$$=2\lim_{u\to 0^+}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$=2f'(1)\cdot(-\frac{1}{2})=-2.$$

(2) $\underline{\quad 1 \quad}$. 方程两边对 x 求导得：$\dfrac{1}{x+y}(1+y')=2xy+x^2y'+2\cos x$

由 $x=0$ 知 $y=1$，代入上面等式得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1$.

(3) $\underline{\quad y=\mathrm{e}(x-1) \quad}$. 原方程化为 $y'+\dfrac{1}{x}y=\mathrm{e}^x$，其通解为 $y=\dfrac{1}{x}[(x-1)\mathrm{e}^x+C]$

由 $y|_{x=1}=0$ 得 $C=0$，因此所求特解是 $y=\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^x$

而 $\quad y'=(\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x})'=\mathrm{e}^x-\dfrac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x^2}$

所以 $y'|_{x=1}=\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}$，切线方程是 $y=\mathrm{e}(x-1)$.

(4) $\underline{\quad n-1 \quad}$. 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1，得 $r(\boldsymbol{A})<n$ 和 $r(\boldsymbol{A})\geqslant n-1$，因此，$\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$.

(5) $\underline{\quad a=3,b=6 \quad}$. $\begin{bmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&2&1\\3&0&b&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2&-1\\0&-3&6&3\\0&0&b-6&a-3\end{bmatrix}$,

由此得 $a=3,b=6$.

(6) $\underline{\quad 0.4938 \quad}$. $EX=\int_0^1 x\cdot 4x^3\mathrm{d}x=\dfrac{4}{5}$, $EX^2=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75}$$

都存在，满足独立同分布中心极限定理条件，故

$$P\{80<\sum_{i=1}^{100}X_i<80+\sqrt{10}\}=P\left\{\frac{80-80}{10\sqrt{\dfrac{2}{75}}}<\frac{\sum\limits_{I=1}^{100}X_i-100EX}{\sqrt{100DX}}<\frac{80+\sqrt{10}-80}{10\sqrt{\dfrac{2}{75}}}\right\}$$

$$\approx\Phi(2.5)-\Phi(0)=0.9938-0.5=0.4938$$

二、选择题

(7)（A）.

由
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}}=\sqrt{1+4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\sqrt{1+4y^2}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$=\frac{8y}{2\sqrt{1+4y^2}}\ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}}=4y$$

所以有 $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=0$.

(8)（D）.

用 $x=x(a\leqslant x\leqslant b)$ 截旋转体，截面域为圆环域，圆环域的内、外半径之长分别为

$$r=m-f(x),\quad R=m-g(x)$$

截面面积为

$$S(x)=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)$$
$$=\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]$$

所求面积为 $V=\int_a^b S(x)dx$，可见只有（D）正确.

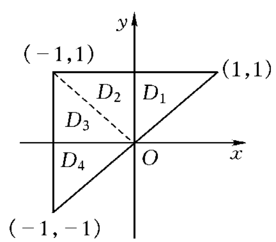
(9)（A）. $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=1$

$$b=-\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=-\frac{1}{2}.\qquad 选（A）$$

(10)（B）. 由 $f(x)=(x+2)(x-1)\mid x(x-1)(x+1)\mid$.

由于 $|x|$ 在 $x=0$ 点不可导，$|x+1|$ 在 $x=-1$ 点不可导，而 $(x-1)|x-1|$ 处之可导，故 $f(x)$ 的不可导的点为 $x=0$ 和 $x=-1$ 两个点. 选（B）

(11)（A）. 由积分域 D 关于 $y=-x$ 为对称，故在 D_1+D_2 上，xy 的积分为 0；在 D_3+D_4 上，xy 的积分也是 0. 在 D_1、D_2 上 $\cos x\sin y$ 的积分相等；在 D_3+D_4 上，$\cos x\sin y$ 的积分为 0，故 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y d\sigma$，选（A）.



(12)（C）. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{Ax}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只取 0,1，故应选（C）.

(13)（A）. 由于 $3F(x)-2G(x)$ 不一定是不减的，故应选（A）.

(14)（B）. 由 $f(x)$ 知 $X\sim N(-3,\sqrt{2}^2)$，所以 $\frac{X-(-3)}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，故应选（B）.

三、解答题

(15) 解 考虑函数 $R(x,y)=0.005x^2y$ 在条件 $x+2y=150$ 的最大值.

引入拉格朗日函数 $L(x,y;\lambda)=0.005x^2y+\lambda(x+2y-150)$ （4 分）

解方程组 $\begin{cases}L'_x=0.01xy+\lambda=0\\L'_y=0.005x^2+2\lambda=0\\L'_\lambda=x+2y-150=0\end{cases}$

得 $x=100,y=25$. 由于 $x=100,y=25$ 是唯一驻点，而问题必有最大值，故购入 A 原料 100 吨，B 原料 25 吨，生产的产品数量最多. （8 分）

(16) 解 (1) $f(x)=\begin{cases}e^x+x+2, & x<-2\\e^x-x-2, & x\geqslant-2\end{cases}$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，求导得

$$f'(x)=\begin{cases}e^x+1, & x<-2\\e^x-1, & x>-2\end{cases}$$ （3 分）

因为 $f'_-(-2)=\lim\limits_{x\to-2^-}(e^x+1)=e^{-2}+1$

$f'_+(-2)=\lim\limits_{x\to-2^+}(e^x-1)=e^{-2}-1$

$f'_-(-2)\neq f'_+(-2)$，故 $f'(-2)$ 不存在.

由 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=0$.

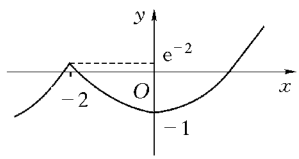
$f(x)$ 的单调增减区间与极值见下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调增	极大值 e^{-2}	单调减	极小值 -1	单调增

（5 分）

(2) $f''(x)=e^x>0\ (-\infty<x<-2,-2<x<+\infty)$.

故曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 及 $(-2,+\infty)$ 上向下凸，曲线没有拐点.



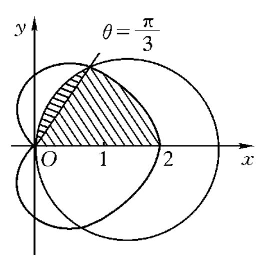
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x-2)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x+2)=-\infty$，曲线 $y=f(x)$ 的略图如右图 （8 分）

（图 3 分）

(17) 解 由 $\begin{cases}r=1+\cos\theta\\r=3\cos\theta\end{cases}$ 解得两曲线在第一象限交点的极坐标为

$$r=\frac{3}{2},\theta=\frac{\pi}{3}$$ （3 分）



所求面积为

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\right]$$ （6 分）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+2\cos\theta+\frac{\cos2\theta+1}{2}\right)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}9\,\frac{\cos2\theta+1}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{5}{4}\pi. \qquad (9 分)$$

(18) 解　当 $-1 \leqslant x < 0$ 时，

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \arcsin t \mathrm{d}t = t\arcsin t \Big|_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$$

$$= x\arcsin x - \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-t^2}\Big|_{-1}^{x} = x\arcsin x - \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2} \qquad (3 分)$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，

$$F(x) = \int_{-1}^{0} \arcsin t \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2} \mathrm{d}t = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_{0}^{x} t \mathrm{d}\, \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} - \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_{0}^{x} + \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int_{0}^{x} \frac{(1+\mathrm{e}^t)-\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1} \mathrm{d}t$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + x - \ln(\mathrm{e}^t+1)\Big|_{0}^{x}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + \ln 2 \qquad (8 分)$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} x\arcsin x - \dfrac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} + x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + \ln 2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \qquad (9 分)$$

(19) 解　用 $x^2+y^2-2x=0$ 即 $(x-1)^2+y^2=1$ 将 D 分成两部分：

$D_1: 2x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$；　$D_2: x^2+y^2 \leqslant 2x$　(3 分)

则　$$I = \iint_D |x^2+y^2-2x| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} (x^2+y^2-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} (2x-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D-D_2} (x^2+y^2-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} (2x-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D} (x^2+y^2-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{D_2} (2x-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (6 分)$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 (r^2 - 2r\cos\theta) r\mathrm{d}r + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} (2r\cos\theta - r^2) r\mathrm{d}r$$

$$= 9\pi \qquad (8 分)$$

(20) 解　将所给等式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再右乘 $\boldsymbol{A}$ 并进行整理得

$$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E} \qquad (6 分)$$

所以

$$\boldsymbol{A}^2 = [(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13 分)$$

(21) 解　设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)$，考察方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的相容性.

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+5\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b+2\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right]$$

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a+1=0\\b+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow a=-1,b\neq-2.$　(4 分)

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合且表示式唯一 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=4\Leftrightarrow a+1\neq 0\Leftrightarrow a\neq-1.$　(7 分)

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合但表示不唯一 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多个解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})<4\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow a=-1,b=-2.$

此时，一般表达式为

$$\boldsymbol{\beta}=(-2c_1+c_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+c_1-2c_2)\boldsymbol{\alpha}_2+c_1\boldsymbol{\alpha}_3+c_2\boldsymbol{\alpha}_4$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.　(13 分)

(22) 解　显然 (X,Y) 是服从二维正态 $N(0,0;\sigma^2,\sigma^2,0)$，由 $\rho=0$ 知 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim N(0,\sigma^2)$.

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max(|X|,|Y|)\leqslant z\}$$
$$=P\{|X|\leqslant z,|Y|\leqslant z\}=P\{|X|\leqslant z\}P\{|Y|\leqslant z\}\qquad(4\text{ 分})$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(\varnothing)=0$　(6 分)

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{-z<X<z\}P\{-z<Y<z\}$

$$=(F_X(z)-F_X(-z))(F_Y(z)-F_Y(-z))$$
$$=(\Phi(\frac{z}{\sigma})-\Phi(\frac{-z}{\sigma}))(\Phi(\frac{z}{\sigma})-\Phi(\frac{-z}{\sigma}))=(2\Phi(\frac{z}{\sigma})-1)^2$$

故 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{4}{\sigma}(2\Phi(\dfrac{z}{\sigma})-1)\varphi(\dfrac{z}{\sigma}), & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}\qquad(13\text{ 分})$$

(23) 解　X 的可能取值为 1,2,3,4. 令 $A_i=\{$第 i 次射击击中目标$\}$，$i=1,2,3,4$，它们相互独立.　(3 分)

$$P\{X=1\}=P(A_1)=0.9$$
$$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=0.09\qquad(5\text{ 分})$$
$$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=0.009\qquad(7\text{ 分})$$
$$P\{X=4\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$$
$$=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0.001\qquad(9\text{ 分})$$

即 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	0.9	0.09	0.009	0.001

(11 分)

$$EX=1\times0.9+2\times0.09+3\times0.009+4\times0.001=1.111\qquad(13\text{ 分})$$