非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研

数学一

根据2006年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10套题

赠答题卡

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列

数学考研

2006 版

模拟考试试卷

数学一

（共 10 套，附解答与评分参考）

主编　龚冬保

王寿生　褚维盘　魏战线（高等数学）

崔荣泉（线性代数）　周家良（概率统计）

西安交通大学出版社

·西安·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学一)2006版 / 龚冬保主编.—西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

Ⅰ.数... Ⅱ.龚... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第082616号

书　　名	数学考研模拟考试试卷(数学一)2006版
主　　编	龚冬保
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	西安新视点印务有限责任公司
字　　数	188千字
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	8
版　　次	2005年10月第4版　2005年10月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-5605-1591-6 / O·191
定　　价	48.00(本卷12.00元)

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上，严格按《2006 年数学考试大纲》的要求，以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用，特作以下提示：

1. 考前演习为实战　模拟试卷认真练

一定要按考试的要求，像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间，可用闹钟定时到 10：45，而于 8：00 打开试卷开始“考试”，闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的 10 套模拟卷，至少隔 3 天，最多隔一周做上一套，效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷　卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者，除了像考试一样做相关的 10 套题之外，还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法，但 10 套试卷题量有限，难免还有遗漏，参考一下其余试卷，可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快　总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法，在不出错的前提下快速完成，这是巧准快的意思。每做完一套试卷后，要认真总结分析，对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白；对于做错的题，检查错在哪里：概念？方法？还是运算？对于做对的题，总结一下还有没有更好的方法，更快的途径。为此，我们特为设计了总结记录表，希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增　沉着应试展才能

每做一套模拟题后，不仅要作解题方法方面的总结，还要从应试策略方面不断做调整。从 2004 年起试卷模式上的重大变化是客观题占 56 分。因此，加强基本运算能力，训练用最简洁的步骤做填空题；加强对基本概念的理解，用最灵活的方法做选择题，力争在 60 分钟内将这 56 分拿到手。作解答题时，要坚持先易后难的原则，即先做那些感到熟悉的、容易得分的题，后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题，再作线性代数题，尤其是数学三、四的试卷中，这两部分解答题占 52 分，仅有 4 道题，一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这 52 分，加上客观题共有 108 分之多！我们模拟试卷估计会比正式考题难些，考前像正式考试一样去做这些题，正式考时，像平时作模拟题一样的心态去应试，方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥，充分展示你的才能，考出理想成绩。

最后，我们强调要反复做模拟题，从做第二遍起，要把练习基本功作为重点，对会做的题一定要一遍做对，不断总结不丢分和多得分的应试策略，这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要，只要会做基本题，临场不慌不乱，也是能考出理想成绩的。

考研成功！

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 2	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 4	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 5	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 6	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 8	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 9	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 10	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试试卷 1

数 学 一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f(x+1)=2^{x^2+2x}-x$. 则 $f(x-1)=$ ________.

(2) 若 $f'(\sin x)=\sin 3x$. 则 $f''(x)=$ ________.

(3) 与直线 $L_1: x=1,\ y=t-1,\ z=t+2$ 及 $L_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 均平行且过原点的平面方程为________.

(4) 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解向量,则 $r(\boldsymbol{A})=$ ________.

(5) 设 $P(A)=1, P(B)=0.7$,则 $P(AB)=$ ________.

(6) 已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $P\{X>5 \mid Y\leqslant 3\}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设$\{x_n\}$是无界的数列,$\{y_n\}$是无穷大量,$\{z_n\}$是无穷小量. 则以下结论中正确的是(　).

(A) $\{x_n+y_n+z_n\}$ 是无界数列

(B) $\left\{x_n+\dfrac{1}{y_n}+z_n\right\}$ 是无界数列

(C) $\{x_n + \frac{1}{z_n}\}$ 是无界变量

(D) $\{\frac{1}{x_n + y_n} + z_n\}$ 是无穷小量

(8) 设 $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -2 \\ \frac{1}{2}x^2 + x, & |x| \leqslant 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $x = \pm 2$ 的左、右导数中有(　).

(A) $f'_+(2) = \infty$　　(B) $f'_-(2) = \infty$　　(C) $f'_+(-2) = \infty$　　(D) $f'_-(-2) = \infty$

(9) 级数 $J_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$;$J_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1-x} dx$,则(　).

(A) J_1 收敛,J_2 发散　　(B) J_1 发散,J_2 收敛

(C) 两级数皆收敛　　(D) 两级数皆发散

(10) 设 $f'_x(0,0) = 1$,$f'_y(0,0) = 2$. 则(　).

(A) $df(x,y)\Big|_{(0,0)} = dx + 2dy$.

(B) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(C) $f(x,y)$ 在原点沿 $\{0,1\}$ 方向导数等于 1.

(D) $f(x,y)$ 在原点沿 $\{0,-1\}$ 方向导数为 -2.

(11) 已知某二阶线性非齐次方程的三个特解为 $y_1 = x^2 + x$,$y_2 = 3e^x + x^2$,$y_3 = 2x - e^x + x^2$. 则此方程满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解是 $y =$(　).

(A) $e^x + x - 1 + x^2$　　(B) $x + x^2$　　(C) $e^x - 1 + x^2$　　(D) $x - x^2$

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵,$m \neq n$. 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$,则必有(　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 均是 3 维向量,下列命题正确的是(　).

① 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性相关.

② 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

③ 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

④ 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ①④　　(D) ②④

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,且 $EX = \mu, DX = 2$,则下列结论正确的是(　).

(A) $\overline{X}$ 是 μ 的最大似然估计

(B) $(\overline{X})^2$ 是 μ^2 的无偏估计

(C) $P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{2}{n\varepsilon^2}$

(D) $\frac{\sum_{i=1}^{\infty} (\overline{X} - X_i)^2}{2} = \chi^2(n)$.

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 12 分)设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$.

(16)(本题满分 12 分)设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$.求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}-\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$ 的和 S.

（**17**）**（本题满分 12 分）** 火箭从地面铅直向上发射，燃料的排气速率为 a kg/s（a 是正常数）. 排出气体相对火箭的速率为 b m/s. 若不计空气阻力，并设开始发射时火箭质量为 M_0. 求火箭飞行速度、高度与时间 t 的关系。

（**18**）**（本题满分 12 分）** 设一长度为 1 的非均匀细棒，其上一点 $x \in [0,1]$ 处的线密度分布函数 $\mu = f(x)$，满足关系式：$f(0) = 0, f'(1) = 1$，当 $u = f(xyz)$ 时，$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = x^2 y^2 z^2 f'''(xyz)$. 求此细棒的质心.

（19）（本题满分 10 分） 设 $f(u)$ 连续，计算积分

$$I = \int_C \frac{1 + y^2 f(xy)}{y} \mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1] \mathrm{d}y.$$

其中 C 是抛物线 $y = -\frac{1}{6}(x^2 - 13)$ 从 $(1,2)$ 至 $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ 的弧段.

（20）（本题满分 9 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量，证明方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解.

(21)（本题满分 9 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2ax_2x_3(a>0)$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2.$$

求常数 a、b 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(22)（本题满分 9 分）已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求（Ⅰ）c 的值；

（Ⅱ）关于 X,Y 的边缘概率密度，并判断 X、Y 是否独立；

（Ⅲ）$z=\max(X,Y)$ 的概率密度.

(**23**)(**本题满分 9 分**)设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{Q\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{Q^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

Q 是未知正参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,试求 Q 的矩估计量和最大似然估计量.

试卷(一) 解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 2^{x^2-2x}-x+2 \quad}$. 由 $f(x+1)=2^{(x+1)^2-1}-(x+1)+1$ 得 $f(t)=2^{t^2-1}-t+1$. 令 $t=x-1$ 得 $f(x-1)=2^{x^2-2x}-x+2$.

(2) $\underline{\quad 3-12x^2\text{(}|x|\leqslant 1\text{,不写此定义域不扣分)} \quad}$.

由 $f'(\sin x)=\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$,得 $f'(t)=3t-4t^3$. $|t|\leqslant 1$. 故 $f''(x)=3-12x^2$, $|x|\leqslant 1$.

(3) $\underline{\quad x-y+z=0 \quad}$. $\{1,2,1\}\times\{0,1,1\}=\{1,-1,1\}$ 是所求平面的法向量,故平面方程为 $x-y+z=0$.

(4) $\underline{\quad 1 \quad}$. 因为 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$,又 $\xi_1-\xi_2$ 与 $\xi_1-\xi_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解. 故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$,从而 $r(\boldsymbol{A})=1$.

(5) $\underline{\quad 0.7 \quad}$. 由 $P(A)=1$,得 $P(\bar{A})=0$,于是

$0\leqslant P(\bar{A}\,\bar{B})\leqslant P(\bar{A})=0, P(\bar{A}\,\bar{B})=0$. 故

$P(AB)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\,\bar{B})]=0.7$.

(6) $\underline{\quad \dfrac{3\mathrm{e}^{-5}}{1-\mathrm{e}^{-3}} \quad}$. $P\{X>5\mid Y\leqslant 3\}=\dfrac{P\{X>5,Y\leqslant 3\}}{P\{X\leqslant 3\}}=\dfrac{\int_0^3\mathrm{d}y\int_5^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\int_0^3\mathrm{d}y\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}=\dfrac{3\mathrm{e}^{-5}}{1-\mathrm{e}^{-3}}$.

二、选择题

(7) (B). 由 $\dfrac{1}{y_n}$ 是无穷小知, $\dfrac{1}{y_n}+z_n\to 0$. 因此,对任意 $M>0$,存在 N,当 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{1}{y_n}+z_n\right|<1$,及 $n_0>N$ $|x_{n_0}|>M+1$. 于是有 $\left|x_{n_0}+\dfrac{1}{y_{n_0}}+z_{n_0}\right|>|x_{x_0}|-\left|\dfrac{1}{y_n}+z_n\right|>M$ 成立. 故(B) 正确.

注 令 $x_n=-n, y_n=n$,可知(A)、(D) 不正确;令 $z_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$,知(C) 不正确(此时 $z_{2n-1}=0,1/z_{2n-1}$ 无意义). 无穷小量的倒数是无穷大量的说法一定要加上“不取 0 值的无穷小量”才是正确的.

(8) (A). 由 $f(2)=4$, $f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-3}{x-2}=\infty$. 选(A).

注 在 $x=-2$ 处 $f(x)$ 连续,这时 $f'_-(-2)=-1$; $f'_+(-2)=-2$; $f'_-(2)=2$.

(9) (C). 显然 $\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1\pm x}\mathrm{d}x>0$. $(n=2,3,\cdots)$. 令 $\dfrac{1}{n}=t$ 则

$$\lim_{n\to\infty}n^p\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1\pm x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\frac{\sqrt{x}}{1\pm x}\mathrm{d}x}{t^p}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{t}}{1\pm t}}{pt^{p-1}}=\frac{1}{p}.$$

$p=\dfrac{3}{2}>1$,由 $p-$ 判别法,两个级数皆收敛,选(C).

(10) (D). 本题概念性强,请读者总结.

（**11**）(B). 由 $y_2 - y_1 = 3e^x - x$. $y_2 - y_3 = 4e^x - 2x$ 是相应齐次方程的解，可见此齐次方程两个线性无关的解是 e^x 和 x. 从而非齐次方程的通解是 $y = C_1e^x + C_2x + x^2$.
由 $y(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$，$y'(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$. 故特解为 $x + x^2$. 选(B).

（**12**）(C). **解 1** $m = r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m,n) < n$. 因此选(C).

解 2 若 $\boldsymbol{A} = (1 \quad 0)$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，即可选(C) 而排除(A)、(B)、(D).

（**13**）(C). 显然 ④ 是正确命题；② 是不正确的，故选(C). 特别当 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{O}$ 易排除 ②、③，而选(C).

（**14**）(C). 因为 $D(\overline{X}) = \dfrac{1}{n}D(X) = \dfrac{2}{n}$ 对 $\overline{X}$ 用切比雪夫不等式知应选(C).

三、解答题

（**15**）**解** 将原式写作 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$，两边对 x 求导并化简得

$$(1-x^2)y' - xy - 1 = 0 \tag{1}$$

因此 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$. （4 分）

(1) 式两边对 y 求导得 $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$ （2）

…

继续求导：$(1-x^2)y^{(n)} - (2n-1)xy^{(n-1)} - [\sum\limits_{k=1}^{n-1}(2k-1)]y^{(n-2)} = 0$. $(n = 2,3,\cdots)$ （9 分）

因此 $y'(0) = 1$ （10 分）

$y^{(2k+1)}(0) = 4k^2 \quad (k = 1,2,\cdots)$ （11 分）

$y^{(2k)}(0) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots)$ （12 分）

（**16**）**解 1** （求 a_n）令 $x = n\pi - t$. 则

$$a_n = \int_0^{n\pi}(n\pi - t)\,|\sin t|\,dt = n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt - a_n \quad （4 分）$$

$$= \frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt = \frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = n^2\pi \quad （8 分）$$

解 2 $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x\,|\sin x|\,dx$. （4 分）

而 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x\,|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}(k\pi + t)\,|\sin t|\,dt = (2k+1)\pi$.

故 $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\pi = n^2\pi$ （8 分）

又 $\dfrac{1}{\sqrt{a_n}} - \dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})$.

故 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{a_n}} - \dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}[(1-\dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + \cdots + (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) + \cdots] = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

（12 分）

（**17**）**解** 设 t 时刻火箭质量为 $M = M_0 - at$，上升速度为 v，$t + \Delta t$ 时为 $M + \Delta M, v + \Delta v$.
故从 t 至 $t + \Delta t$ 动量的改变量是 $(M + \Delta M)(v + \Delta v) - \Delta M(v - b) - Mv$.
外力的冲量是 $-gM\Delta t$.

由动量定理知 $(M+\Delta M)(v+\Delta v)-\Delta M(v-b)-Mv=-gM\Delta t$. 两边用 Δt 除，令 $\Delta t\to 0$ 得（M 用 M_0-at 代）

$$(M_0-at)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-ab=-g(M_0-at). \qquad (8\text{ 分})$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{ab}{M_0-at}-g$，$\quad v=-b\ln(M_0-at)-gt+C$

由 $t=0, v=0$ 得 $v=b\ln\dfrac{M_0}{M_0-at}-gt$ （10 分）

用 $h=h(t)$ 表示高程，则

$$h=bt\ln M_0-b\int\ln(M_0-at)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=bt\ln M_0-bt\ln(M_0-at)-ab\int\frac{t}{M_0-at}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=bt\ln M_0-bt\ln(M_0-at)+bt+\frac{bM_0}{a}\ln(M_0-at)-\frac{1}{2}gt^2+C$$

由 $t=0, h=0$ 得 $C=-\dfrac{bM_0}{a}\ln M_0$.

故 $h=bt\ln\dfrac{M_0\mathrm{e}}{M_0-at}-\dfrac{bM_0}{a}\ln\dfrac{M_0}{M_0-at}-\dfrac{1}{2}gt^2$ （12 分）

(18) 解 $\quad u=f(xyz), u_x=yzf', u_{xy}=zf'+xyz^2f''$

$$u_{xyz}=f'+3xyzf''+x^2y^2z^2f''' \qquad (4\text{ 分})$$

由已知等式得 $3xyzf''+f'=0$，记 $xyz=t$，即

$$3tf''+f'(t)=0$$

故 $\dfrac{3\mathrm{d}f'}{f'}=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$，即 $f'^3=\dfrac{C}{t}$，由 $f'(1)=1$ 得 $C=1$

$f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$，$f(x)=\dfrac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C_1$，由 $f(0)=0$ 得 $C_1=0$

即 $\mu=\dfrac{3}{2}x^{2/3}$. （8 分）

对原点的静矩 $I_O=\displaystyle\int_0^1\frac{3}{2}x^{4/3}\mathrm{d}x=\frac{9}{14}$

细棒质量 $M=\displaystyle\int_0^1\frac{3}{2}x^{2/3}\mathrm{d}x=\frac{9}{10}$

质心 $\bar{x}=\dfrac{9}{14}\Big/\dfrac{9}{10}=\dfrac{5}{7}$ （12 分）

(19) 解 $\quad I=\displaystyle\int_C\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$

$$=\int_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_C f(xy)[y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y] \qquad (6\text{ 分})$$

$=\displaystyle\int_C\mathrm{d}\frac{x}{y}+\int_C f(xy)\mathrm{d}xy$（设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数）

$$=\frac{x}{y}\Big|_{(1,2)}^{(3,\frac{2}{3})}+F(u)\Big|_2^2=4. \qquad (10\text{ 分})$$

(**20**) **解** 若 $r(\boldsymbol{A})=n$,则所给方程组有唯一解 (2 分)

以下设 $r(\boldsymbol{A})=r<n$. 则 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=r$,并记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

于是方程组的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组,则

$\boldsymbol{\alpha}_i=k_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{ri}\boldsymbol{\alpha}_r\quad i=r+1,r+2,\cdots,n.$ (5 分)

对上述矩阵作初等行变换:$r_i-(k_{1i}r_1+k_{2i}r_2+\cdots+k_{ri}r_r)$ 并将 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 换为 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$,它们是相等的,于是增广矩阵化为

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{等价}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r$. 从而方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解. (9 分)

(**21**) **解** 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & a\\ 2 & a & b\end{pmatrix}$

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$. 由 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1-2+b$ 及 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|$,

$-28=8-4a+a(-a-4)+4+8,b=-2,a=4.$ (4 分)

以 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入特征方程解得二正交特征单位向量

$\boldsymbol{\xi}_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-\frac{4}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}})^{\mathrm{T}}$.

$\lambda=-7$ 解得 $\boldsymbol{\xi}_3=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$. 于是

$$\boldsymbol{Q}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3).$$ (9 分)

(**22**) **解** (Ⅰ) $1=c\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=c.\ c=1$ (2 分)

(Ⅱ) 当 $x\leqslant 0$, $f_X(x)=0$

当 $x>0$ 时,$f_X(x)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$

当 $y\leqslant 0$ 时,$f_Y(y)=0$

$y>0$ 时,$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x=\frac{1}{(1+y)^2}$.

故此在 $x>0,y>0$ 上 $x\mathrm{e}^{-x(1+y)}=f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+y)^2}$

因此 X,Y 不独立. （6 分）

（Ⅲ）当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant z\\0\leqslant y\leqslant z}} x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z[\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x(1+z)}]\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-z}+\frac{1}{1+z}(\mathrm{e}^{-z(1+z)}-1).$$

故 $f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}(1-\mathrm{e}^{-z(1+z)})-\dfrac{2z+1}{1+z}\mathrm{e}^{-z(1+z)}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$ （9 分）

（23）解 由 $EX=\int_0^{+\infty}x\dfrac{2}{\theta\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{\sqrt{\pi}}$ 得 $\theta=\sqrt{\pi}EX$，

故 θ 的矩估计量为：$\hat{\theta}=\sqrt{\pi}\,\overline{X}$ （3 分）

当 $X_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$ 时

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}}=\left(\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$$ （5 分）

$$\ln L=n\ln\frac{2}{\sqrt{\pi}}-n\ln\theta-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{2}{\theta^3}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=0$ 解得 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$.

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$ （9 分）

数学考研模拟考试试卷 2

数 学 一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\arcsin x}{x\sin^2 x}=$ ________.

(2) $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 方程 $2y''-5y'+2y=5\sin x$ 的通解 $y=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\3&4&5&6\\5&6&7&8\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行各元素的代数余子式之和为________.

(5) 设随机变量 X 和 Y 不相关,X 服从区间$(-3,3)$上的均匀分布,Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{16}y^2, & -2<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 则根据切比雪夫不等式,$P\{|X-Y|<3\}\geqslant$ ________.

(6) 已知二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-3y}+\mathrm{e}^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $P\{\max(X,Y)>1\}=$ ________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

（7）直线 $l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=2z+1$ 与 $l_2: \frac{x+2}{-4}=\frac{y-2}{2}=1-z$ 之间的关系是（　）.

（A）重合　　（B）平行　　（C）相交　　（D）异面

（8）设 $f(x)$ 单调增，且 $f(0)=-2, f(\frac{1}{2})=0, f(1)=1; f'(0)=\frac{1}{2}, f'(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}, f'(1)=0$. $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，则 $g'(0)=$（　）.

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）4

（9）关于积分 $\int_{-2}^{e-1}\frac{\ln|x+1|}{x+1}dx$ 的值为（　）.

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\frac{1}{2}(1-\ln 3)$　　（D）不存在

（10）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}(xy-x)dydz+(yz-z)dzdx+(xyz-2z)dxdy=$（　）.

（A）$-4\pi R^3$　　（B）$4\pi R^3$　　（C）0　　（D）$2\pi R^3$

（11）设 $f(x)=x^2, 0\leqslant x\leqslant 1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx. (n=1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{1}{2})=$（　）.

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{1}{4}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

（12）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的 1、3 行对换后，再将 1、3 列对换得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系是（　）.

（A）等价不相似　　（B）等价且相似　　（C）相似不等价　　（D）不相似也不等价

（13）设 $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必为（　）.

（A）正定矩阵　　（B）实对称但非正定矩阵　　（C）正交矩阵　　（D）反对称矩阵

（14）（A）若 $P(A)=0$，则事件 A 与任意事件 B 相互独立.

（B）若 X 是只取一个常数值 C 的随机变量，即 $X\equiv C$，则 X 和任意随机变量相互独立.

（C）若 $P(A)=1$，则事件 A 与任意事件 B 相互独立.

（D）若 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，则事件 A、B 互不相容.

以上命题不正确的是（　）.

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

（15）（本题满分 12 分）就 k 的取值情况讨论方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 的实根个数.

（16）**（本题满分 12 分）** 设 $u=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，试作方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$ 所表示曲线的图形.

（17）**（本题满分 12 分）** 设 $f(t)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$，其中 Ω：$0 \leqslant z \leqslant h$，$x^2+y^2 \leqslant t^2$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 及 $\lim\limits_{t \to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

（**18**）**（本题满分 12 分）** 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(0)=1$，$F(x)f(x)=\cos 2x$，求$\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 的值.

（**19**）**（本题满分 10 分）** 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上具有三阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f'(1)=0$，$f(2)=\dfrac{5}{3}$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使 $f'''(\xi)=2$.

（20）（本题满分 8 分） 已知向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的两组基：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$. 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

（21）（本题满分 10 分） 设 n 阶实对称矩阵的秩为 r，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$（称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵）. 求

（1）二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的标准形；

（2）行列式 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|$ 的值.

（22）（本题满分 9 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）X,Y 是否独立？为什么？

（2）X,Y 是否不相关？为什么？

（3）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

（23）（本题满分 9 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 而 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}C^{\frac{1}{\theta}}\ \dfrac{1}{\theta}x^{-(1+\frac{1}{\theta})}, & x\geqslant C\\ 0, & x<C\end{cases}$$

其中未知参数 θ：$0<\theta<1$，C 是已知常数，且 $C>0$，求

（1）随机变量 $Z=\dfrac{1}{n}(\ln X-\ln C)$ 的概率密度.

（2）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$.

（3）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 的概率密度 $f_{\hat{\theta}}(z_1,z_2,\cdots,z_n)$.

试卷(二)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{-\frac{1}{2}}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}3x^2}=-\dfrac{1}{2}$.(用到 $x\sim\sin x$、洛必达法则和 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

(2) $\underline{\arctan\frac{3}{2}}$. 原式 $=\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}=\arctan(x-\frac{1}{x})\Big|_1^2=\arctan\frac{3}{2}$.

(3) $\underline{C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+\cos x}$. 由 $(\sin x)''+\sin x=(\cos x)''+\cos x=0$,知非齐次方程:$2y''-5y'+2y=5\sin x$ 的一个特解是 $y=\cos x$,故通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+\cos x$.

(4) $\underline{0}$. 由于第 2 行元素与第 3 行对应元素对应代数余子式乘积之和为 0,本题第 2 行各元素均为 4,故应填 0.

(5) $\underline{\frac{2}{5}}$. 已知 $EX=0,DX=\dfrac{6^2}{12}=3$,而 $EY=\displaystyle\int_{-2}^2 y\cdot\frac{3}{16}y^2\mathrm{d}y=0,EY^2=\int_{-2}^2 y^2\cdot\frac{3}{16}y^2\mathrm{d}y=\frac{12}{5}$,所以,$DY=EY^2-(EY)^2=\dfrac{12}{5}$,因此 $E(X-Y)=0,D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{cov}(X,Y)=\dfrac{27}{5}$,故 $P\{|X-Y|<3\}=P\{|(X-Y)-E(X-Y)|<3\}\geqslant 1-\dfrac{1}{9}D(X-Y)=1-\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{27}{5}=\dfrac{2}{5}$.

(6) $\underline{\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-5}}$. 易知 X、Y 独立且分别服从参数为 2 和 3 的指数分布,故 $P\{\max(X,Y)>1\}=P(\{X>1\}\cup\{Y>1\})=P\{X>1\}+P\{Y>1\}-P\{X>1\}P\{Y>1\}=\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-5}$.

二、选择题

(7) (B). $\boldsymbol{l}_1=\{2,-1,\frac{1}{2}\}\parallel\boldsymbol{l}_2=\{-4,2,-1\}$,且 l_2 上的点 $(-2,2,1)$ 不在 l_1 上. 选(B).

(8) (D). 由 $f(\frac{1}{2})=0$ 知 $g(0)=\dfrac{1}{2},g'(0)=\dfrac{1}{f'(\frac{1}{2})}=4$. 选(D).

(9) (D). 由 $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{\ln|x+1|}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2|x+1|\Big|_{-2}^{-1}$ 不存在,故这是发散的广义积分. 选(D).

(10) (A). 由高斯公式:原积分 $=\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}[(y-1)+z+xy-2]\mathrm{d}v$,而 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}(y+z+xy)\mathrm{d}v=0$,故原积分 $=-3\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3=-4\pi R^3$. 选(A).

(11) (C). 由表示式知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的富里叶正弦级数的和函数,故 $S(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})$

$=-\dfrac{1}{4}$. 选(C).

(12)(B). 用 $\boldsymbol{E}_{13}$ 表示由 n 阶单位矩阵对换 1、3 行而得到的初等矩阵，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}$，但 $(\boldsymbol{E}_{13})^{-1}=\boldsymbol{E}_{13}$，故 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价且相似. 选(B).

(13)(A). 由 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|\geqslant 0$，等号仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 成立. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定. 选(A).

(14)(D). 由加法公式知 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ 等价于 $P(AB)=0$，但这不能推出 $AB=\varnothing$，即 A、B 不一定互不相容. 应选(D).

注 下面证明选项(A)、(B)、(C) 是正确的，它的类似证明题可能会出现在考研试卷中：

(A)：由 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)=0$ 得 $P(AB)=P(A)P(B)=0$，故 A、B 相互独立.

(B)：对任意 y 和任意 $x\geqslant C$，有 $P\{X\leqslant x\}=P(\Omega)=1$.

$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P(\Omega\cap\{Y\leqslant y\})=P\{Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$.

对任意 y 和任意 $x<C$，$P\{X\leqslant x\}=P(\varnothing)=0$.

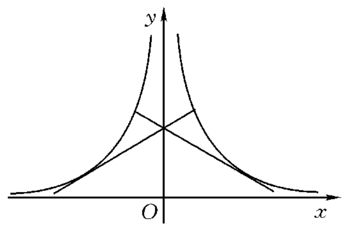
这时，$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{\varnothing\cap(Y\leqslant y)\}=P(\varnothing)=0=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$

故总有 $P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$，即 $X\equiv C$ 的随机变量与任意随机变量 Y 相互独立.

(C)：由 $P(A)=1$ 得 $P(\overline{A})=0$，故由(A) 知 $\overline{A}$ 与任意 $\overline{B}$ 相互独立，从而 A、B 相互独立.

三、解答题

(15)解 1 研究曲线：$y=\dfrac{1}{x^2}$ 和 $y=1-kx$(见图). 若直线与 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 相切，则 $\left|\dfrac{2}{x^3}\right|=|k|$，即 $kx^3=2$ 及 $kx^3+1=x^2=3$



$$x=\pm\sqrt{3},k=\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{9} \qquad (8\ 分)$$

故，当 $|k|>\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，直线与 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 只有一个交点，即这时方程有唯一的实根；当 $|k|=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 时，方程有二实根，其中 $x=\pm\sqrt{3}$ 是重根；当 $0<|k|<\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 时，方程有三个实根；当 $k=0$ 时，方程有两个实根. (12 分)

解 2 $k=0$ 时，方程有两个实根，故只需讨论 $k\neq 0$ 的情况，由 $x\neq 0$ 知方程等价于 $kx^3-x^2+1=0$，令

$$f(x)=kx^3-x^2+1 \qquad (3\ 分)$$

令 $f'(x)=x(3kx-2)=0$ 得驻点 $x_0=0$ 及 $x_1=\dfrac{2}{3k}$，而

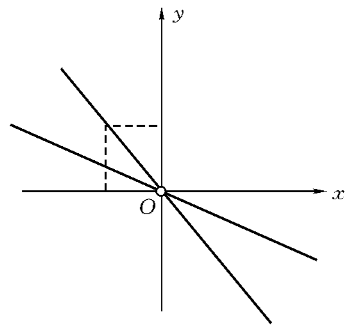
$f''(x)=6kx-2$，x_0 是极大值点，$f''(x_1)=6k\times\dfrac{2}{3k}-2=2>0$，为极小值点. 这时

$$f(x_1)=1-\frac{4}{27k^2} \qquad (8\ 分)$$

由 $f(0)=1>0$，当 $f(x_1)<0$，$0<|k|<\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，方程有三个实根；当 $f(x_1)>0$，即 $|k|>$

$\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，方程有唯一实根；当 $|k| = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，方程有一个单根和一个重根.（12 分）

（**16**）**解**　$u_x = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}, u_y = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$.（2 分）



故　$u_{xx} = \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}, u_{yy} = (\frac{2x}{y^3} + \frac{x^2}{y^4})e^{\frac{x}{y}}$.

$u_{xy} = -(\frac{1}{y^2} + \frac{x}{y^3})e^{\frac{x}{y}}$（2 分）

故　$u_{xx} + u_{yy} - u_{xy} = \frac{1}{y^4}(2y^2 + 3xy + x^2)e^{\frac{x}{y}} = 0$.

等价于　$2y^2 + 3xy + x^2 = 0, y \neq 0$.

因此 $(2y + x)(y + x) = 0$ 是两条相交直线（除原点 O 在外）.

（未去图中原点扣 1 分）

（**17**）**解**　$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} dxdy\int_0^h (z^2 + f(x^2 + y^2))dz$

$$= \frac{\pi}{3}h^3t^2 + 2\pi h\int_0^t rf(r^2)dr \quad (8 分)$$

故

$$F'(t) = \frac{2}{3}\pi h^3 t + 2\pi htf(t^2) \quad (10 分)$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2} = \frac{\pi}{3}h^3 + \pi h\lim_{t\to 0}f(t^2) = \frac{\pi}{3}h^3 + \pi hf(0) \quad (12 分)$$

（**18**）**解**　$f(x) = F'(x)$，故得

$$F(x)F'(x) = \cos 2x \quad (3 分)$$

$\Rightarrow$

$$\int F(x)F'(x)dx = \int\cos 2xdx$$

$$F^2(x) = \sin 2x + C，由 F(0) = 1 知 C = 1$$

$$F(x) = \sqrt{1 + \sin 2x} \quad (6 分)$$

$$|f(x)| = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = |\cos x - \sin x| \quad (8 分)$$

$$\int_0^\pi |f(x)|dx = \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^\pi(\sin x - \cos x)dx$$

$$= \sqrt{2} - 1 + (1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \quad (12 分)$$

（**19**）**解 1**　先作一三次函数 $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$，使 $P(0) = f(0) = 1, P'(1) = f'(1) = 0, P(2) = f(2) = \frac{5}{3}$ 及 $P(1) = f(1)$.

得

$$P(x) = \frac{1}{3}x^3 + [\frac{1}{3} - f(1)]x^2 + [2f(1) - \frac{5}{3}]x + 1$$

令

$$\varphi(x) = f(x) - P(x) \quad (6 分)$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，且 $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$. 因此，在 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上 $\varphi(x)$ 满足罗尔定理条件，故存在 $\xi_1 \in (0,1), \xi_2 \in (1,2)$，使 $\varphi'(\xi_1) = \varphi'(1) = \varphi'(\xi_2) = 0$（其中 $\varphi'(1) = 0$ 是因 $f'(1) - P'(1) = 0$）. 而 $\varphi'(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 和 $[1, \xi_2]$ 上可导，故在此二区间上 $\varphi'(x)$ 满足罗尔定理条件，知存在 $\eta_1 \in (\xi_1, 1), \eta_2 \in (1, \xi_2)$，使 $\varphi''(\eta_1) = \varphi''(\eta_2) = 0$，而 $\varphi''(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上

可导，故 $\varphi''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上满足罗尔定理条件，知存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,2)$，使 $\varphi'''(\xi)=0$，但 $\varphi'''(x)=f'''(x)-2$，因此得

$$f'''(\xi)=2 \tag{12 分}$$

解 2 用泰勒公式

$$1=f(0)=f(1)+\frac{1}{2}f''(1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\qquad ①\qquad \xi_1\in(0,1)$$

$$\frac{5}{3}=f(2)=f(1)+\frac{1}{2}f''(1)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\qquad ②\qquad \xi_2\in(1,2) \tag{6 分}$$

② − ① 得 $\frac{2}{3}=\frac{1}{6}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))=\frac{1}{3}\left(\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\right)=\frac{1}{3}f'''(\xi),\quad \xi\in[\xi_1,\xi_2]$

即

$$f'''(\xi)=2,\quad \xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(0,2) \tag{10 分}$$

(20) 解 由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的变换公式为

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C} \tag{2 分}$$

由此求得过渡矩阵 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&1\\1&4&3\end{bmatrix}$ (5 分)

设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(l_1,l_2,l_3)^{\mathrm{T}}$，由题意

$$\boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&1\\1&4&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(-3,1,8)^{\mathrm{T}}$. (8 分)

(21) 解 因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. (2 分)

(1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{x}$ 为对应的特征向量，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$$

两式相减得 $\lambda\boldsymbol{x}-\lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$，即实对称幂等矩阵的特征只取 0 或 1. (4 分)

由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=r$ 知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 r 个 1，$n-r$ 个 0，适当排列 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的位置，可使

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位矩阵. 因此，二次型的标准形为

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2 \tag{6 分}$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}^{k-2}=\cdots=\boldsymbol{A}$，$(k\geqslant 2)$，所以

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|=|\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}(n\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}|$$

$$=|\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{\Lambda}|=(n+1)^r$$ （10 分）

（22）解 （1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 12y^2\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立. （3 分）

（2）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 12y^3(1-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{5}$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{50}\neq 0$，故 X,Y 相关. （6 分）

$$(3)\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & z<0 \text{ 或 } z\geqslant 2\\ \int_{\frac{z}{2}}^{z}12(z-x)^2\mathrm{d}x, & 0\leqslant z<1\\ \int_{\frac{z}{2}}^{1}12(z-x)^2\mathrm{d}x, & 1\leqslant z<2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{z^3}{2}, & 0\leqslant z<1\\ \frac{z^3}{2}-4(z-1)^3, & 1\leqslant z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ （9 分）

（23）解 （1）因为 $z=\frac{1}{n}(\ln x-\ln C)$ 在 $(C,+\infty)$ 上可导，且 $z'=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x}>0$，所以可用定理. 它的反函数为 $x=Ce^{nz}$，$(\alpha,\beta)=(0,+\infty)$. 故 $Z=\frac{1}{n}(\ln X-\ln C)$ 的概率密度为：

$$f_Z(z)=\begin{cases}C^{\frac{1}{\theta}}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot(Ce^{nz})^{-(1+\frac{1}{\theta})}\cdot Ce^{nz}n, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-\frac{nz}{\theta}}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}.$$ （3 分）

（2）当 $x_i\geqslant C, i=1,2,\cdots,n$ 时

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=C^{\frac{n}{\theta}}\cdot\frac{1}{\theta^n}(x_1x_2\cdots x_n)^{-(1+\frac{1}{\theta})}$$

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{\theta}\ln C - n\ln\theta - (1+\frac{1}{\theta})\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{n\ln C}{\theta^2} - \frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

得
$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \ln C$$

故 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - \ln C$$ （9 分）

（3）因为 $Z_i = \frac{1}{n}(\ln X_i - \ln C)$ $i = 1,2,\cdots,n$ 相互独立，而 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - \ln C = \sum_{i=1}^{n}\frac{\ln X_i - \ln C}{n} = \sum_{i=1}^{n}Z_i$，故由（1）的结论即得 $\hat{\theta}$ 的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(\frac{n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{nz_i}{\theta}}), & z_i > 0, i = 1,2,\cdots,n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{n^n}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}\sum_{i=1}^{n}z_i}, & z_i > 0, i = 1,2,\cdots,n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$ （9 分）

数学考研模拟考试试卷 3

数 学 一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x)>0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f\left(\frac{n}{n}\right)}=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=$ ________.

(3) 微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=3$, $y'(0)=7$ 的特解是________.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 均为 n 维列向量,且行列式 $D=|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|=a$, M 表示 D 的每一列减去其它各列之和得到的行列式,则 $M=$ ________.

(5) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ 0.3, & -3\leqslant x<-1\\ 0.8, & -1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

则 $Y=X^3-1$ 的分布律为________.

(6) 已知随机变量 X、Y 相互独立,且 $DX=2DY$, 则 $2X+Y$ 和 $2X-Y$ 的相关系数为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $f(x)=\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u$, $g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是

$g(x)$ 的(　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价的无穷小

(8) 设 $y=y(x)$ 是方程 $(2xy-\cos x)\mathrm{d}x+(x^2-1)\mathrm{d}y=0$ 及条件 $y(0)=1$ 的解. 则 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(x)\mathrm{d}x=$(　)

(A) $-\ln 3$　　(B) $\ln 3$　　(C) $-\dfrac{1}{2}\ln 3$　　(D) $\dfrac{1}{2}\ln 3$

(9) 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 及 $y\geqslant x$ 所确定,则 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V\neq$(　).

(A) $\pi\int_0^1(1+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\dfrac{4\pi}{3}$　　(B) $2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x$

(C) $\pi\int_0^1[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2]\mathrm{d}y$　　(D) $2\pi\int_0^1(2-x)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x-\dfrac{4}{3}\pi$

(10) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(11) 设 $f(x)$ 为连续的偶函数,则(　).

(A) $f(x)$ 有一个原函数为偶函数　　(B) $f(x)$ 的所有原函数都是偶函数

(C) $f(x)$ 有一个原函数为奇函数　　(D) $f(x)$ 的所有原函数都是奇函数

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,且 $r(\boldsymbol{A})=n$,则下列结论不正确的是(　).

(A) 若有 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(B) 对任何有 n 行的矩阵 $\boldsymbol{B}$,必有 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$

(C) 必存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$

(D) 对任何有 m 列的矩阵 $\boldsymbol{B}$,必有 $r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　).

(A) 合同不相似　　(B) 相似不合同

(C) 合同且相似　　(D) 不相似也不合同

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值,则下列随机变量中服从 t 分布的是(　).

(A) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$　　(B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$

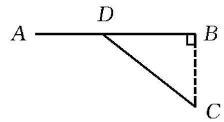
(C) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$　　(D) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2/n}}$

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

（15）**（本题满分 9 分）** 求高为 h，底面半径为 r 的正圆锥体的形心.

（16）**（本题满分 8 分）** 设 $f(u)$ 为连续函数，D 是由 $y=1, y=x^3, x=-1$ 所围成的平面区域. 计算 $I=\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$.

(**17**)(**本题满分 8 分**) 如图,直的铁路线 AB 之长为 $100(\mathrm{km})$,工厂 C 在铁路线的一侧,$BC \perp AB$,BC 之长为 $20(\mathrm{km})$. 已知每单位货物每公里运费,铁路与公路的运费之比为 $3:5$. 现欲在铁路线 AB 上选一点 D,从 D 向工厂 C 修一条直的公路,使得从点 A 经铁路到 D,再从 D 经公路到 C 的货物总运费最小,试求点 D 的位置.



(**18**)(**本题满分 9 分**) 设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$,$f(0) = 0$,求$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

（19）**（本题满分 8 分）** 设数列$\{a_n\}$单调减，$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散. 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$的敛散性.

（20）**（本题满分 13 分）** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$ 是a_{ij} 的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}\neq 0$，试判断$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$ 是否可对角化.

(21)(**本题满分 13 分**)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵. 证明:$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同(即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$).

(22)(**本题满分 13 分**)甲、乙两厂生产同类型的产品,它们的寿命(单位:小时)分别为 X 和 Y,相互独立,概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-460)^2}{3\,200}},f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{360}{y^2} & y>360\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

假定产品寿命超过 460 小时才算合格. 今从两厂的产品中各取一件,问其中至少有一件不合格的概率为多少?

(23)（本题满分 13 分） 设正态总体 X 的数学期望为 μ，方差为 σ^2，又设（$X_1^{(1)}$，$X_2^{(1)}$，…，$X_{n_1}^{(1)}$）和（$X_1^{(2)}$，$X_2^{(2)}$，…，$X_{n_2}^{(2)}$）是从总体 X 中取出的两个独立的简单随机样本，证明

$$S^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i^{(1)}-\overline{X}^{(1)})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)}-\overline{X}^{(2)})^2\right\}$$

是 σ^2 的无偏估计量，其中 $\overline{X}^{(j)}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}X_i^{(j)}$，$j=1,2$.

试卷(三) 解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{e^{\int_0^1 \ln f(x)\,dx}}$ 证 $a_n = \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$

$\because f(x) > 0$，$\therefore \ln a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln f(x)\,dx$　　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\int_0^1 \ln f(x)\,dx}$

(2) $\underline{e^{-1}}$. 原极限 $= \lim\limits_{x\to 0^+}\exp\left\{\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}\right\} = e^{-1}$

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x\cdot(-\csc^2 x)}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\dfrac{x}{\sin x\cos x}\right] = -1.$

(3) $\underline{y = (3+13x)e^{-2x}}$ 常系数微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$，解为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，故通解为 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$，将初始条件代入,解方程组可得 $c_1 = 3$，$c_2 = 13$，故所求特解为 $y = (3+13x)e^{-2x}$

(4) $\underline{(2-n)2^{n-1}a}$

解 $M = \left|(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right| = a\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$= (2-n)2^{n-1}a$

(5)

Y	-28	-2	7
p	0.3	0.5	0.2

由 X 的分布函数可知它的分布律为

X	-3	-1	2
p	0.3	0.5	0.2

故 $Y = X^3 - 1$ 的分布律为

Y	-28	-2	7
p	0.3	0.5	0.2

(6) $\underline{\dfrac{7}{9}}$　　$\mathrm{Cov}(2X+Y, 2X-Y)$

$$= \mathrm{Cov}(2X,2X) - \mathrm{Cov}(2X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,2X) - \mathrm{Cov}(Y,Y)$$
$$= 4DX - DY = 7DY$$

$D(2X+Y) = 4DX + DY = 9DY, D(2X-Y) = 4DX + DY = 9DY$

故
$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(2X+Y,\ 2X-Y)}{\sqrt{D(2X+Y)}\ \sqrt{D(2X-Y)}} = \frac{7DY}{9DY} = \frac{7}{9}.$$

二、选择题

(7)(A) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x dt\int_0^t t\ln(1+u^2)du}{\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\ln(1+u^2)du}{[1-\cos(\sin x^2)]2x\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+u^2)du}{2[1-\cos(\sin x^2)]}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+u^2)du}{\sin^2 x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+u^2)du}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{4x^3}=\infty$$ 选(A).

(8)(B). 方程可化为 $y\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}y-\mathrm{d}(\sin x+y)=0$

$$\mathrm{d}x^2y=\mathrm{d}(\sin x+y).$$

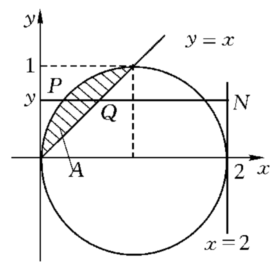
$$x^2y=\sin x+y+c.\ \text{由 } y(0)=1 \text{ 得 } c=-1.$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}y\mathrm{d}x=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1-\sin x}{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{1/2}=\ln 3.$$

(9)(A). 本题可这样做:(A)、(C) 中有一个可能不等于 v;(B)、(D) 中也有一个可能不等于 v. 因此在(A)、(C) 中,只要看:$\int_0^1(2-y)^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(y-2)^3\Big|_0^1=\frac{7}{3}\neq\frac{4}{3}$,因此正确的选项在(A)、(C) 中如图用平面 $y=x$ 去截旋转体,截面域为圆环域,如图,圆环的内、外半径的长分别为

$$r=|QN|=2-y,$$

$$R=|PN|=2-(1-\sqrt{1-y^2})=2+\sqrt{1-y^2},$$



故得圆环域的面积为

$$S(y)=\pi(R^2-r^2)=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2],$$

于是得旋转体的体积为

$$V=\int_0^1 S(y)\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2]\mathrm{d}y,\text{选(A)}.$$

注 (B) 用的是“薄壳法”即设图中 $P(x,\sqrt{2x-x^2})$. 过 P 作与 y 轴平行线交直线于(x,x)点,“薄壳”的高为 $\sqrt{2x-x^2}-x$,厚为 $\mathrm{d}x$,旋转半径为 $2-x$,故 $\mathrm{d}V=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x$,从而 $V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x$ 是对的.

(10)(B). 由曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的形状即得.

(11)(C). 事实上,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,且由

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$$

知 $F(x)$ 为奇函数.

而 $f(x)$ 的其它原函数

$$G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C\qquad(C\text{ 为非零常数})$$

不满足 $G(0)=0$，因而 $G(x)$ 不是奇函数.

注 如令 $f(x)=x^2$，则 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$，取 $C=1$，立刻可排除(A)、(B)、(C) 三个选项！

(12) (D). 如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1,-1)$，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$ 而 $r(\boldsymbol{B})=1$.

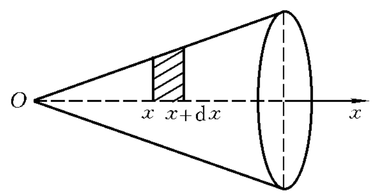
由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 只有零解，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，故(A) 正确. 对(B)，虽然 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$，又由于$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{B})$，这表明(B) 也是正确的. 由于 $\boldsymbol{A}$ 满列秩，所以一定可经初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 表$(m-n)\times n$ 的零矩阵，即存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{O})_{n\times m}\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$，从而(C) 也是正确的.

(13) (C). 因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{AE}_{13}$，且$(\boldsymbol{E}_{13})^{-1}=\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{E}_{13}^{\mathrm{T}}$，所以应选(C).

(14) (C). 生成 t 分布时，分子必须服从 $N(0,1)$ 分布，必须有$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，所以(B) 不能选. 根号内的服从 χ^2 分布的随机变量必须除以它相应的自由度，但(A) 中 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ 不服从 χ^2 分布，所以不能选(A)，(D) 中虽上两条都满足，但分子和分母的随机变量不一定独立，所以也不能选，只有选(C)，显然 $\overline{X}$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ 相互独立.

三、解答题

(15) 解 设形体密度为 1. 如图，以对称轴为 x 轴，则在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 中，



$\mathrm{d}M=\mathrm{d}v=\pi\frac{r^2}{h^2}x^2\mathrm{d}x$. (2 分) $M=\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}r^2h$.

对原点静矩 $I_0=\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^3\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}r^2h^2$. (7 分)

形心 $\bar{x}=\frac{I_O}{M}=\frac{3}{4}h$. (9 分)

(16) 解 1 用 $y=-x^3$ 将 D 分成两部分：D_1 由 $y=x^3$，$y=-x^3$，$y=1$ 围成，D_2 由 $y=x^3$，$y=-x^3$，$x=-1$ 围成. (2 分)

由于 D_1 关于 y 轴对称，所以 $\iint\limits_{D_1}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma=0$

由于 D_2 关于 x 轴对称，所以 $\iint\limits_{D_2}xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=0$ (6 分)

因此 $I=\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{-x^3}x\mathrm{d}y=-2\int_{-1}^{0}x^4\mathrm{d}x=-\frac{2}{5}$. (8 分)

解 2 设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数 (2 分)

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}[x+xyf(x^2+y^2)]\mathrm{d}y \quad (4\text{ 分})$$

$$=\int_{-1}^{1}x(1-x^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x}{2}[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x \quad (6\text{ 分})$$

$$=-\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=-\frac{2}{5} \quad (8\text{ 分})$$

(17) 解 设 $DB=x(\mathrm{km})$，则总运费为

$$y(x)=3\mathrm{m}(100-x)+5\mathrm{m}\sqrt{x^2+20^2},\ 0\leqslant x\leqslant 100 \quad (3\text{ 分})$$

其中 m 为正常数. 由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m\left(-3+\frac{5x}{\sqrt{x^2+20^2}}\right)=0$$

得 $y=y(x)$ 有唯一驻点 $x_0=15$. 再由 (5 分)

$$y''(15)=5m\left.\frac{\sqrt{x^2+20^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+20^2}}}{x^2+20^2}\right|_{x=15}=5m\left.\frac{20^2}{(x^2+20^2)^{3/2}}\right|_{x=15}>0$$

知 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 100}y(x)=y(15)$，即当 $DB=15(\mathrm{km})$ 时，总运费最小. (8 分).

(18) 解 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$ (2 分)

$$=f(1)-\int_0^1(x-1)\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \quad (4\text{ 分})$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)^2 \quad (6\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[t\arcsin t\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \quad (9\text{ 分})$$

(19) 解 由 $\{a_n\}$ 单调减及 $a_n>0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$ 存在，再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散知 $C>0$，$a_n\geqslant C$. (3 分)

$$0\leqslant 1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{1}{C}(a_n-a_{n+1}) \quad (6\text{ 分})$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 收敛. (8 分)

(20) 解 因 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，$r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，又由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 知 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$，因此，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$， (3 分)

$\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值. 而 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中有 $n-1$ 个解向量，所以 $\lambda=0$ 至少是 $\boldsymbol{A}^*$ 的 $n-1$ 重特征值，又 n 个特征值之和等于 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}\neq 0$，因此，$\lambda=0$ 恰是 $n-1$ 重的特征值； (10 分)

再由对应于不同特征值的特征向量线性无关知 $\boldsymbol{A}^*$ 有 n 个线性无关的特征向量，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可对角化. （13 分）

（21）证 必要性. 由 $\boldsymbol{A}$ 实对称知，存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 再由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $\lambda_i > 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$ （4 分）

令 $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆，且 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{CC}^{\mathrm{T}}$ 于是有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{PCC}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{U}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，此即表明 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同.（8 分）

充分性 首先由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$ 容易得知 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵. 另外，对任何 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$，由于 $r(\boldsymbol{U}) = n$，有 $\boldsymbol{Ux} \neq \boldsymbol{0}$

所以
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ux} = \|\boldsymbol{Ux}\|^2 > 0$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. （13 分）

（22）解 注意 $X \sim N(460, 40^2)$，所以 （2 分）

$P\{$至少有一件不合格$\} = 1 - P\{$两件都合格$\} = 1 - P\{X > 460\}P\{Y > 460\}$ （6 分）

$$= 1 - (1 - F_X(460))\int_{460}^{+\infty}\frac{360}{y^2}\mathrm{d}y = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{460-460}{40}\right)\right).\ \left(-\frac{360}{y}\right)\Bigg|_{460}^{+\infty}$$

$$= 1 - (1 - \Phi(0)).\ \frac{360}{460} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{18}{23} = \frac{14}{23}.$$ （13 分）

（23）证 $$ES^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left(E\sum_{i=1}^{n_1}(X_i^{(1)} - \overline{X}^{(1)})^2 + E\sum_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)} - \overline{X}^{(2)})^2\right)$$ （3 分）

$$= \frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}\left[E\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i^{(1)} - \overline{X}^{(1)})^2}{\sigma^2} + E\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)} - \overline{X}^{(2)})^2}{\sigma^2}\right]$$ （8 分）

$$= \frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}((n_1-1)+(n_2-1)) = \sigma^2$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计量. （13 分）

注 证明中用到：如 $X \sim \chi^2(n)$，则 $EX = n$.

数学考研模拟考试试卷 4

数 学 一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k-1)!}=$ ________.

(2) 设 M 是直线 $y=x$ 上任一异于原点的点,O 为原点,$\boldsymbol{l}=\overrightarrow{MO}$,则函数 $f(x,y)=x+y$ 在 M 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}=$ ________.

(3) 设曲线由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定,则此曲线过点$(0,e^{\pi/2})$的切线方程为 ________.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=5$,则行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2|=$ ________.

(5) 设 A、B 是两个事件,$P(A)=0.6$,$P(B)=0.7$,当 A、B 满足条件________时,$P(A\cup B)$ 取得最小值为________;当 A、B 满足条件________时,$P(A\cup B)$ 取得最大值为________.

(6) 设 a 为区间$[0,1]$上的一个定点,随机变量 X 在区间$[0,1]$上服从均匀分布,Y 为点 X 到 a 的距离,则 $E(XY)=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设$[x]$表示不超过 x 的最大整数,则 $x=0$ 点是函数 $f(x)=e^{-\frac{[x]}{x}}$ 的( ).

(A) 有限跳跃间断点 (B) 可去间断点 (C) 无穷型间断点 (D) 无限振荡型间断点

(8) 设 $f(x)$ 有界可积,且满足方程 $f(x)=\cos 2x+\int_0^x f(t)\sin t\,dt$,则 $f(x)=$( ).

(A) $ce^{-\cos x}-4(1-\cos x)$ （c 是待定常数） (B) $e^{-\cos x}+c(1-\cos x)$ （c 是待定常数）

(C) $e^{-\cos x}-4(1-\cos x)$ (D) $c_1e^{-\cos x}+c_2(1-\cos x)$ （c_1,c_2 是待定常数）

(9) 微分方程 $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ 的通解为( )

(A) $\ln|y+2|+2\arctan\dfrac{y+2}{x-3}=C$ (B) $\ln|y+2|-2\arctan\dfrac{y+2}{x-3}=C$

(C) $\ln|y-2|+2\arctan\dfrac{y-2}{x+3}=C$ (D) $\ln|y-2|-2\arctan\dfrac{y-2}{x+3}=C$

(10) 设 $f(x,y,z)$ 连续，$I(R)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}f(x,y,z)\mathrm{d}v$，则当 $R\to 0^+$ 时，$I(R)$ 是( ).

(A) R 的同阶无穷小 (B) R^2 的同阶无穷小

(C) R^3 的同阶无穷小 (D) R^3 的同阶或高阶无穷小

(11) 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\alpha}{n})a_{2n}$( )

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 敛散性与 α 有关

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，秩$(\boldsymbol{A})=n$，秩$(\boldsymbol{B})=r$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则( ).

(A) $0<r<n$ (B) $r>n$ (C) $r=n$ (D) $r=0$

(13) 设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 满秩，则直线 $l_1:\dfrac{x-a_1}{a_2+a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2+b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2+c_3}$ 与 $l_2:\dfrac{x+a_2}{a_3+a_1}=\dfrac{y+b_2}{b_3+b_1}=\dfrac{z+c_2}{c_3+c_1}$( ).

(A) 重合 (B) 异面 (C) 交于一点 (D) 平行

(14) 设事件 A、C 相互独立，事件 B、C 也相互独立，且 A、B 互不相容，则( ).

(A) $A\cup B$ 和 $\overline{C}$ 相互独立 (B) $A\cup B$ 和 C 互不相容

(C) $A\cup B$ 和 $\overline{C}$ 不独立 (D) $A\cup B$ 和 $\overline{C}$ 相互对立

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

(15)（本题满分 12 分） 证明恒等式 $\int_0^{\sin^2x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}\ (x\in[0,\dfrac{\pi}{2}])$.

(16)(本题满分 12 分) 设函数 $f(x,y)$ 二次可微，且 $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$，试证明：对任意的常数 C，方程 $f(x,y)=C$ 表示一直线的充要条件是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(17)(本题满分 12 分) 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 一拱 $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，与 x 轴所围成图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 12 分) 设积分 $\int_L [f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x]y\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，试计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} [f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x]y\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y$ 的值.

(**19**)(**本题满分 10 分**) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调减，证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(**20**)(**本题满分 8 分**) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$),问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化?说明理由.

(**21**)(**本题满分 10 分**) 设有二次型 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

(1) 求一个正交变换,将二次型 f 化为标准形,并指明 $f=a^2$ 表示什么曲面;

(2) 求平面 $x+y+z=b$ 被曲面 $f=a^2$ 所截下部分的面积.

（22）（本题满分 9 分）已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-2x}, & x>0,2<y<6\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求(1) $P\{X\geqslant 3Y-2\}$.

(2) $Z=3X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

（23）（本题满分 9 分）设某针织品的断裂强力服从正态分布，在 70℃ 和 80℃ 下分别重复做了 8 次试验，测得断裂强力数据如下（单位：kg）.

70℃：20.5，18.5，19.5，20.9，21.5，19.5，21.0，21.2

80℃：17.7，20.3，20.0，18.8，19.0，20.1，20.2，19.1

(1) 在显著水平为 $\alpha=0.10$ 下，假定两种温度下的方差相等是否合理？为什么？

(2) 问在这两种温度下的断裂强力有无显著差异？($\alpha=0.10$).

(3) 求在这两种温度下的断裂强力之差的置信度为 0.90 的置信区间.

试卷(四)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 2\mathrm{e}\quad}$. 用 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$,从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{(k-1)!}=x\mathrm{e}^x$,于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{(k-1)!}=(x\mathrm{e}^x)'_{x=1}=2\mathrm{e}$.

(2) $\underline{\quad -\sqrt{2}\operatorname{sgn}x\quad}$ 或 $\underline{\begin{cases}\sqrt{2},\ x<0\\ -\sqrt{2},\ x>0\end{cases}}$ ($\underline{\quad (x,x)\text{ 是 } M \text{ 的坐标}\quad}$).

设 $M(x,x)$,则 $\boldsymbol{l}^0=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\,|x|}(x,x)$. $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{x}{|x|})=\sqrt{2}(-\operatorname{sgn}x)$.

(3) $\underline{\quad x+y=\mathrm{e}^{\pi/2}\quad}$ 于方程两边对 x 求导得:$xy'-y=x+yy'$

令 $x=0$,$y=\mathrm{e}^{\pi/2}$,$y'\Big|_{(0,\mathrm{e}^{\pi/2})}=-1$,于是得切线方程 $y-\mathrm{e}^{\pi/2}=-x$.

(4) $\underline{\quad -2\quad}$. 由$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$两端取行列式即得所求行列式的值.

(5) $\underline{\quad A\subset B\quad}$, $\underline{\quad 0.7\quad}$, $\underline{\quad A\cup B=\Omega\quad}$, $\underline{\quad 1\quad}$.

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 知,当 $A\subset B$ 时,$P(A\cup B)$ 取得最小值0.7.而当 $A\cup B=\Omega$ 时,$P(A\cup B)=P(\Omega)=1$ 为最大值.

(6) $\underline{\quad \dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{3}\quad}$.

$$E(XY)=E(X\,|X-a|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,|x-a|\,f_X(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 x\,|x-a|\cdot 1\mathrm{d}x=\int_0^a x(a-x)\mathrm{d}x+\int_a^1 x(x-a)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

二、选择题

(7)(A). 由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{[x]}{x}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[x]}{x}=0$;故 $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{-\frac{[x]}{x}}=0$;$\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\frac{[x]}{x}}=1$. 选(A).

(8)(C). 本题用排除法极易选到(C):因为两边求导可得 $f'(x)-f(x)\sin x=-2\sin 2x$ 是一阶线性方程,且 $f(0)=1$,故解唯一存在,不应有待定常数,只有选(C).

另解 直接解方程麻烦,可以用解的结构:齐次方程通解加一个非齐次方程特解,故只要求齐次方程通解.

$f'(x)-f(x)\sin x=0$ 即$(\mathrm{e}^{\cos x}f(x))'=0$. 故得通解为 $f(x)=C\mathrm{e}^{-\cos x}$,再验证 $-4(1-\cos x)$ 是非齐次方程的一个特解是十分简单的,由 $f(0)=1$ 知选(C).

注:这就是做客观题与非客观题的区别.

(9)(A). $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\left(\dfrac{y+2}{(x-3)+(y+2)}\right)^2$,

令$\dfrac{y+2}{x-3}=u$. 则　$(y+2)=(x-3)u$. $\mathrm{d}y=(x-3)\mathrm{d}u+u\mathrm{d}(x-3)$.

故
$$(x-3)\mathrm{d}u+u\mathrm{d}(x-3)=2\left(\frac{u}{1+u}\right)^2\mathrm{d}(x-3).$$
$$\frac{(1+u)^2\mathrm{d}u}{u(1+u^2)}=-\frac{\mathrm{d}(x-3)}{x-3}$$
即
$$\ln|u|+2\arctan u+\ln|x-3|=C.$$
即
$$\ln|y+2|+2\arctan\frac{y+2}{x-3}=C.\text{选(A)}.$$

另解　作为选择题,本题由$\dfrac{y+2}{(x-3)+y+2}$即知,这是关于$\dfrac{y+2}{x-3}=u$的齐次函数.因此,它的解中应出现$\dfrac{y+2}{x-3}$的因式.从而排除(C)、(D)两选项,只要对(A)两边对x求导,知它满足方程,故选(A).(否则就选(B)).这是选择题的一种做法.

(10)(D).对任意固定R,由积分中值定理,知存在$(\xi,\eta,\xi)\in\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R\}$,使$I(R)=\dfrac{4}{3}\pi R^3f(\xi,\eta,\xi)$.当$R\to0$时,$f(\xi,\eta,\xi)\to f(0,0,0)$.当$f(0,0,0)\neq0$,$I(R)$与$R^3$是同阶无穷小;而$f(0,0,0)=0$时,则$I(R)$是比$R^3$高阶无穷小.选(D).

(11)(A).由$a_n>0$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$收敛.而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|n\tan\dfrac{\alpha}{n}\right|a_{2n}}{a_{2n}}=\alpha>0$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\tan\dfrac{\alpha}{n}a_{2n}$绝对收敛,选(A).

(12)(D).由$r(\boldsymbol{A})=n$知方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解,令$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$说明$\boldsymbol{B}$的列向量全是$\boldsymbol{0}$,故选(D).

(13)(B).记$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)\ (i=1,2,3)$.

则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,知$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也线性无关.因此,二直线异面,选(D).

(14)(A).
$$\begin{aligned}P((A\cup B)\cap\bar{C})&=P(A\bar{C}\cup B\bar{C})=P(A\bar{C})+P(B\bar{C})\\&=P(A)P(\bar{C})+P(B)P(\bar{C})\\&=(P(A)+P(B))P(\bar{C})=P(A\cup B)P(\bar{C})\end{aligned}$$
故$A\cup B$和$\bar{C}$相互独立,应选(A).

三、解答题

(15)解　令$F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin^2x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

则
$$F'(x)=2x\sin x\cos x-2x\sin x\cos x=0\quad\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$$
故
$$\int_0^{\sin^2x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=C\qquad(6\text{ 分})$$
令$x=0$得$C=F(0)=\displaystyle\int_0^1\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=t\arccos\sqrt{t}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$

令 $t=\sin^2 u$，则 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}=2\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$

故 $C=\dfrac{\pi}{4}$，即 $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$ （12 分）

（16）证 $f(x,y)=C$ 作为一曲线，也可写为 $f(x,y)-C=0$，它确定隐函数 $y=y(x)$，为一直线的充要条件是

$$y''(x)=0 \qquad (4\text{ 分})$$

而由方程两边对 x 求导得 $f_x+f_y y'=0$.（＊） （6 分）

$$y'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$$

（＊）式两边再对 x 求导. 得

$$f''_{xx}+2f''_{xy}y'+f''_{yy}(y')^2+f_y y''=0$$

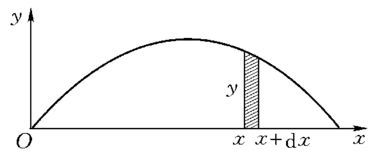
由 $f'_y\neq 0$ 知 $y''=0$ 的充要条件是

$$f''_{xx}+2f''_{xy}\cdot y'+f''_{yy}(y')^2=0.（＊＊） \qquad (10\text{ 分})$$

以 $y'=-\dfrac{f'_x}{f'_y}$ 代入（＊＊）式后，由 $f'_y\neq 0$，而用 $(f'_y)^2$ 乘等式两边得

$$(f'_y)^2 f''_{xx}-2f''_{xy}f'_x f'_y+f''_{yy}(f'_x)^2=0 \qquad (12\text{ 分})$$

（17）解 用柱薄壳法求 $\mathrm{d}v$. 如图. 但 $\mathrm{d}x$ 很小时，将小的阴影部分视为矩形，旋转一周后得小柱壳，再将柱壳展平，近似看作是一长方体，长为 $2\pi x$，高为 y，厚为 $\mathrm{d}x$，故



$$\mathrm{d}v=2\pi xy\mathrm{d}x=2\pi a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t \qquad (4\text{ 分})$$

故 $v=2\pi a^3\left[\displaystyle\int_0^{2\pi}t(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\sin t(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t\right]$

由三角函数系的正交性知

$$\int_0^{2\pi}\sin t(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t=0 \qquad (7\text{ 分})$$

又 $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$，故

$$\int_0^{2\pi}t(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}t-2t\cos t+\frac{t\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t=3\pi^2$$

故 $$v=6\pi^3 a^3 \qquad (12\text{ 分})$$

（18）解 由与路径无关条件知

$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=\mathrm{e}^x \qquad (4\text{ 分})$$

容易看出此方程的一个特解是 $f^*(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$，故得 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$，

由 $f(0)=0$ 及 $f'(0)=1$ 得 $C_1=\dfrac{2}{3}$，$C_2=-\dfrac{1}{6}$，从而

$$f(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x \qquad (8\text{ 分})$$

这时 $$f'(1)=\frac{4}{3}\mathrm{e}^2+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-1}-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

而 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+2f(x)+e^x]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}f''(x)y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$

$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}yf'(x)=yf'(x)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=f'(1)=\frac{4}{3}e^2+\frac{1}{6}e^{-1}-\frac{3}{2}\qquad(12\text{ 分})$$

(19) 解 1 由 $f(x)$ 单调减知

$$(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\leqslant 0\qquad(5\text{ 分})$$

$$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\mathrm{d}x\leqslant 0$$

$$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x=0$$

即

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\qquad(10\text{ 分})$$

解 2 记 $F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.\ (t\in[a,b])$ (4 分)

$F(a)=0,\quad F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)$

$$\leqslant\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{t-a}{2}f(t)=0$$

故 $F(t)$ 单调减,从而 $F(t)\leqslant 0, t\in[a,b]$,故 $F(b)\leqslant 0$

即

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\qquad(10\text{ 分})$$

(20) 解 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{x}$ 为对应的特征向量,则有

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Ax})=\lambda(\boldsymbol{Ax})=\lambda^2\boldsymbol{x}$$

所以 $\lambda(\lambda-1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$,即幂等矩阵的特征值只能为 0 和 1. 设 $r(\boldsymbol{A})=r$,则对应于零特征值,由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中有 $n-r$ 个解向量知,对应于特征值零,有 $n-r$ 个线性无关的特征向量. (3 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n]$,则由 $\boldsymbol{AA}=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A\alpha}_j=\boldsymbol{\alpha}_j$,故 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个线性无关的列向量为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 1 的线性无关特征向量. (6 分)

综上所述,$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. (8 分)

(21) 解 (1) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2},\lambda_3=0$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2}$,解 $(\frac{3}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$\xi_1=(-2,1,1)^{\mathrm{T}},\ \xi_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

由于其正交，只需规范化：$\boldsymbol{p}_1=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$，

对 $\lambda_3=0$，解 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\xi_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，规范化得 $\boldsymbol{p}_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$.

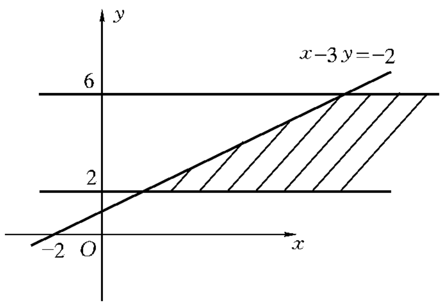
作正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$，则 $f=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{3}{2}y_1^2$，因此 $f=a^2$ 表示圆柱面. （6 分）

（2）由（1），$b=x+y+z=(1,1,1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1,1,1)\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\sqrt{3}z_1$，

故经正交变换，平面为 $\sqrt{3}z_1=b$，因此，平面被 $f=a^2$ 截下部分的面积为 $\frac{2}{3}\pi a^2$. （10 分）

（22）解

（1）
$$\begin{aligned}P\{X\geqslant 3Y-2\}&=P\{X-3Y\geqslant -2\}\\&=\iint\limits_{x-3y\geqslant -2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_2^6\mathrm{d}y\int_{3y-2}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_2^6\frac{1}{4}(-\mathrm{e}^{-2x})\Big|_{3y-2}^{+\infty}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(-\mathrm{e}^{-2(3y-2)})\Big|_2^6\\&=\frac{1}{24}(\mathrm{e}^{-8}-\mathrm{e}^{-32})\end{aligned}$$
（4 分）



（2）**解 1** 因为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}\cdot\frac{1}{4}, & x>0,2<y<6\\0, & 其它\end{cases}$$

易证 X、Y 相互独立，而且 X 服从指数为 2 的指数分布，Y 服从区间$(2,6)$上的均匀分布.

令 $T=3X$，显然 $t=3x$ 在$(0,+\infty)$上可导，且导数恒大于零，反函数为 $x=\frac{t}{3}$，所以 T 的概率密度为

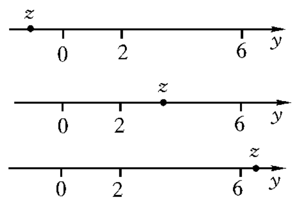
$$f_T(t)=\begin{cases}f_X(\frac{t}{3})\cdot(\frac{t}{3})', & t>0\\0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}, & t>0\\0, & 其它\end{cases}$$

由于 X、Y 独立，所以 T 和 Y 独立，因此 $Z=T+Y$ 的概率密度可用公式计算

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_T(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_2^6 f_T(z-y)\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y$$

注意

$$f_T(z-y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)}, & y<z\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



当 $z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_2^6 0\cdot\dfrac{1}{4}\mathrm{d}y=0$

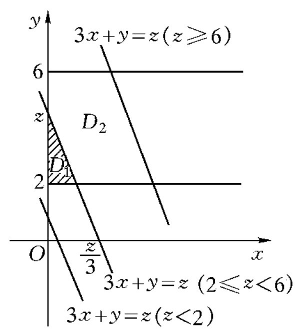
当 $2\leqslant z<6$ 时，$f_Z(z)=\int_2^z\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)}\cdot\dfrac{1}{4}\mathrm{d}y+\int_z^6 0\cdot\dfrac{1}{4}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$$

当 $z\geqslant 6$ 时，$f_Z(z)=\int_2^6\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)}\cdot\dfrac{1}{4}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$

即
$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<2\\ \dfrac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & 2\leqslant z<6\\ \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & z\geqslant 6\end{cases}$$
（9 分）

解 2 用一般方法解



$$F_Z(z)=P\{3X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{3x+y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z<2$ 时，$F_Z=0$ （2 分）

当 $2\leqslant z<6$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_2^z\mathrm{d}y\int_0^{\frac{z-y}{3}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_2^z\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)})\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}(z-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$$

当 $z\geqslant 6$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^6\mathrm{d}y\int_0^{\frac{z-y}{3}}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$$=\int_2^6\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)})\mathrm{d}y=\frac{1}{4}(4-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$$

即
$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<2\\ \dfrac{1}{4}(z-\dfrac{7}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & 2\leqslant z<6\\ \dfrac{1}{4}(4-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & z\geqslant 6\end{cases}$$
（9 分）

在 $f_Z(z)$ 的连续点上用 $f_Z(z)=F'_Z(z)$，即得 $f_Z(z)$ 表达式同解一的结果.

（23）解 （1）设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

假设检验问题为： $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$， $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

它的拒绝域为$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$

经计算，$s_1^2 = \dfrac{1}{n_1-1}\left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - n_1\bar{x}^2\right) = 1.094$，$s_2^2 = \dfrac{1}{n_2-1}\left(\sum_{i=1}^{8} y_i^2 - n_2\bar{y}^2\right) = 0.829$

由于 $F_{1-0.05}(7,7) = \dfrac{1}{3.79} = 0.26 < \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1.320 < F_{0.05}(7,7) = 3.79$

故接受 H_0，即可认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的(这可作为讨论(2)，(3) 的前提). (4 分)

(2) $H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$，由(1) 已证得 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，但未知，(即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知)，拒绝域为

$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right| \geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

其中

$$s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = 0.980$$

因为

$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right| = 1.888 \geqslant t_{0.05}(14) = 1.7613 \qquad (7\text{ 分})$$

所以拒绝 H_0，即两种温度下的断裂强力有显著差异(正因为 μ_1 和 μ_2 有显著差异，才有必要继续讨论(3)).

(3) 在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知的情况下，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

将(2) 中已计算的数据代入，可得所求置信区间为(0.062，1.788). (9 分)

数学考研模拟考试试卷 5

数 学 一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\int_0^1 x\sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x =$ ________.

(2) 若级数 $a-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots$ 发散,则常数 a 与 b 应满足的条件是________.

(3) 设 f 具有二阶连续导数,$u=f(x,xy,xyz)$,则 $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&p+3\\2&2&t\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解,则 t 与 p 满足的关系式是________.

(5) 设甲、乙、丙三人数学考试及格的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5}$,则事件"三人中恰有二人及格"的概率为________.

(6) 已知随机变量 X 服从区间 $(3,4)$ 上的均匀分布,$Y=-\ln(4-X)$,则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 在 $y=2$ 处的值为________.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(7) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{ax^3+bx^2+C}+2x)=\frac{1}{4}$,则( )

(A) $a=-2, b=1, C$ 可为任一实数

(B) $a=-8, b=3, C$ 为任一实数

(C) $a=-8, b$ 为任一实数, $C=3$

(D) $a=-2, b=3, C$ 为任一实数

(8) 设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 则关于 u 的最大值与最小值的情况是( ).

(A) 最大与最小值必定都在 D 的边界上取到

(B) 最大与最小值必定都在 D 的内部取到

(C) 最大值在内部,最小值在边界上取到

(D) 最小值在内部,最大值在边界上取到

(9) 设 $F(x) = \int_0^x \sin^n t \, dt$,则( ).

(A) $F(x)$ 是有界函数

(B) 当 n 为偶数时, $F(x)$ 必定是周期函数

(C) 当 n 为奇数时, $F(x)$ 必定是周期函数

(D) $F(x)$ 不可能是周期函数

(10) 若连续函数 $f(x)$ 对任意正数 a 均满足关系

$\int_0^a x f(x) dx = \dfrac{5}{6} a \int_0^a f(x) dx$,且 $f(1)=2$,则 $f(2)=$( )

(A) 32 (B) 16

(C) 8 (D) 4

(11) 设 $M = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} (x+y)^3 d\sigma$, $N = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \cos x^2 \sin y^2 d\sigma$, $P = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} (e^{-x^2-y^2} - 1) d\sigma$,则必有( ).

(A) $M > N > P$ (B) $N > M > P$

(C) $M > P > N$ (D) $N > P > M$

(12) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则( ).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

(13) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$,则必有( ).

(A) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时 $|\boldsymbol{B}| = 0$ (B) $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = 0$

(C) $|\boldsymbol{A}| = 0$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$ (D) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$

(14) 设随机变量 X 与 Y 都服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$,且 $P\{X \leqslant 4, Y \leqslant -2\} = 0.3$,则 $P\{X > 4, Y > -2\} =$( ).

(A) 0.3 (B) 0.5 (C) 0.7 (D) 1

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

（15）（本题满分 12 分）设 $g(x)$ 二阶可导，且 $g(0)=1$，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}.$$

（1）a 取何值时，$f(x)$ 处处连续；

（2）当 $f(x)$ 连续时，证明 $f'(x)$ 也连续.

（16）（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 连续，且满足关系

$$f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v+|t^3|,\ t\in(-\infty,+\infty)$$

求 $f(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4\pi}})$ 与 $f(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4\pi}})$ 的值.

（17）**（本题满分 12 分）** 由力学知识可知，具有矩形截面的木质横梁的强度与 ah^2 成正比，其中 a 是截面的底边边长，h 是截面的高. 将一直径为 d 的圆木，如何把它做成最坚固的有矩形截面的横梁？

（18）**（本题满分 12 分）** 求 $\int_L \frac{(xe^x + 5y^3x^2 + x - 4)dx - (3x^5 + \sin y)dy}{x^2 + y^2}$，其中 L 为自点 $A(-1,0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 到 $B(1,0)$ 的弧段.

（19）**（本题满分 10 分）** 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，且

$$\int_1^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + y\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x>0, y>0)$$

求 $f(x)$.

（20）**（本题满分 8 分）** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值的乘积等于 $|\boldsymbol{A}|$，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值之和等于 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. 利用此结论解决下列问题：

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|<0$，$|\boldsymbol{B}|<0$，且 $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$. 问 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 是否可对角化？说明理由.

(21)(本题满分 10 分) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{b}$ 为 n 维非零列向量,A_{11} 为 a_{11} 的代数余子式,且 $A_{11}\neq 0$,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.证明:若 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

(22)(本题满分 9 分) 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{7}(1+y+xy), & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

判断 X、Y 是否相互独立?为什么?

（**23**）**（本题满分 9 分）** 已知总体 X 服从参数为 p 的几何分布，即 $P\{Z=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $(k=1,2,\cdots)$，其中 $p>0$ 是未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求未知参数 p 的矩估计量和最大似然估计量.

试卷(五)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{\pi}{16}}$. 令 $x=\sin^2 t$,

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/2}2\sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=2\left(\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{4}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

(2) $\underline{a\neq b}$. 若 $a=b$,级数为 $a\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots\right)$,收敛. 若 $a\neq b$,将级数化为

$b\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots\right)+(a-b)\left(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\cdots\right)$,发散.

(3) $\underline{xf_3+x^2yf_{23}+x^2y^2f_{32}}$. $\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyf_3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=xf_3+x^2yf_{23}+x^2y^2f_{32}$.

(4) $\underline{t=2p}$.

由:$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&3&p+3&2\\2&2&t&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&p-3&0\\0&-2&t-6&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&p-3&0\\0&0&t-2p&1\end{bmatrix}$

(5) $\underline{0.4}$. 以 A、B、C 分别表示甲、乙、丙三人考试及格的事件,易知它们相互独立.
$P\{\text{恰有二人及格}\}=P(\bar{A}BC\cup\bar{B}AC\cup\bar{C}AB)=P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})$
$=P(\bar{A})P(B)P(C)+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(A)P(B)P(\bar{C})=0.4$

(6) $\underline{\mathrm{e}^{-2}}$. $f_X(x)=\begin{cases}1, & 3<x<4\\0, & \text{其它}\end{cases}$

由 $y=-\ln(4-x)$ 得 $x=4-\mathrm{e}^{-y}$. 因此 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(4-\mathrm{e}^{-y})\,|\,(4-\mathrm{e}^{-y})'\,|, & 0<y<+\infty\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<y<+\infty\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

$f_Y(2)=\mathrm{e}^{-2}$.

二、选择题

(7) (B). $\sqrt[3]{ax^3+bx^2+c}=a^{\frac{1}{3}}x\left(1+\dfrac{b}{ax}+\dfrac{C}{ax^3}\right)^{\frac{1}{3}}$. $x\to\infty$ 时,由泰勒公式 $\left(1+\dfrac{b}{ax}+\dfrac{c}{ax^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=1+\dfrac{b}{3ax}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. 知 $\sqrt[3]{ax^3+bx^2+c}=a^{\frac{1}{3}}x+\dfrac{b}{3a^{\frac{2}{3}}}+o(1)$. 故 $a=-8$ 及 $\dfrac{4b}{2}=4$, $b=3$, c 为任意实数. 选(B).

(8) (A). 若 (x,y) 是 D 内部任意一点,则 $\Delta=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2>0$. 由极值判别的充分条件知,$(x,y)$ 不可能是极值点. 因此也不可能是最值点,即 $u(x,y)$ 的最大、最小值只能在边界上取得.

(9)(C). 设 $n=2k+1$,则 $F(x)=\int_0^x(1-\cos^2 t)^k\mathrm{d}(-\cos t)=P(\cos x)$,($P$ 是 $2k+1$ 次多项式),故 $F(x)$ 是周期函数. $n=2$ 时,$\int_0^x \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$ 是无界函数;也不是周期函数,排除了(A)、(B) 选项.

(10)(A). 两边对 a 求导得:$af(a)=\frac{5}{6}af(a)+\frac{5}{6}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

故 $af(a)=5\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$. 两边再求导得 $f(a)+af'(a)=5f(a)$. 于是 $4f(a)-af'(a)=0$

$\frac{1}{a^4}f'(a)-\frac{4}{a^5}f(a)=0$ 即 $\left[\frac{f(a)}{a^4}\right]'=0$,故 $f(a)=Ca^4$ 或 $f(x)=Cx^4$,$C=2$,$f(2)=32$. 选(A).

(11)(B). 易知 $P<0$,$M=0$,$N>0$,故选(B).

(12)(D). 由$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$ 知,选(D).

(13)(C). 反证法:$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中有一满秩时,例如 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,与 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵矛盾,故 $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$.

(14)(A). $P\{X>4,Y>-2\}=1-P(\{X\leqslant 4\}\cup\{Y\leqslant -2\})=1-(P\{X\leqslant 4\}+P\{Y\leqslant 2\})-P\{X\leqslant 4,Y\leqslant 2\}=1-(\Phi(\frac{4-1}{\sigma})+\Phi(\frac{-2-1}{\sigma})-0.3)=0.3$.

三、解答题

(15)解 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=g'(0)$

故 $a=g'(0)$,$f(x)$ 连续. (4 分)

又
$$f'(x)=\frac{(g'(x)+\sin x)}{x}-\frac{g(x)-\cos x}{x^2}\quad(x\neq 0)$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$
$$=\frac{1+g''(0)}{2}$$
(8 分)

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(g'(x)+\sin x)x-g(x)+\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+g(0)}{x^2}+\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-xg'(0)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{xg'(0)-g(x)+g(0)}{x^2}+\frac{1}{2}$$
$$=g''(0)+\lim_{x\to 0}\frac{g'(0)-g'(x)}{2x}+\frac{1}{2}=\frac{1+g''(0)}{2}$$

由此知 $f'(x)$ 处处连续. (12 分)

(16)解 $f(t)=6\pi\int_0^\pi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{|t|}r^2f(r)\mathrm{d}r+|t^3|=12\pi\int_0^{|t|}r^2f(r)\mathrm{d}r+|t|^3$ (3 分)

当 $t\geqslant 0$,两边对 t 求导得
$$f'(t)=12\pi t^2f(t)+3t^2,\quad f(0)=0$$

故 $$f(t)=\frac{1}{4\pi}(e^{4\pi t^3}-1) \qquad ①$$

故 $f(\frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}})=\frac{1}{4\pi}(e-1)$ （8 分）

当 $t\leqslant 0$ 时，得 $f'(t)=-12\pi t^2 f(-t)-3t^2$

这时 $f(-t)=\frac{1}{4\pi}(e^{-4\pi t^3}-1)$ （由 ① 及 $-t\geqslant 0$）

于是 $$f(t)=-3\int_0^t t^2 e^{-4\pi t^3}\,dt=\frac{1}{4\pi}(e^{-4\pi t^3}-1)$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}})=\frac{1}{4\pi}(e-1)$$ （12 分）

（17）解 记横梁的强度为 $y=kah^2$（k 是正常数）. 则 $a^2+h^2=d^2$，$h^2=d^2-a^2$

于是 $$y=ka(d^2-a^2)$$ （6 分）

令 $$y'(a)=k(d^2-3a^2)=0,\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{3}d$$

由 $$y''(a)=-6ka$$

故 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}d$ 为最大点. （10 分）

此时，$h^2=d^2-\frac{1}{3}d^2=\frac{2}{3}d^2$，$h=\sqrt{\frac{2}{3}}d=\frac{\sqrt{6}}{3}d$

即，当 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}d$，$h=\frac{\sqrt{6}}{3}d$ 时，横梁最坚固. （12 分）

（18）解 先看到 L 的方程为 $x^2+y^2=1$，将积分化为

$$I=\int_L (xe^x+(x-4))dx+5y^3x^2dx-3x^5dy-\sin y\,dy$$

其中 $(xe^x+x-4)dx-\sin y\,dy=d[(x-1)e^x+(x-4)^2/2+\cos y]$ 是全微分，这部分积分与路径无关，于是：

$$\int_L (xe^x+x-4)dx-\sin y\,dy=-8+2e^{-1}$$ （6 分）

只要算 $\int_L 5y^3x^2dx-3x^5dy$ 为此补一段 L_1：$y=0$，x 从 1 至 -1，在 L_1 上有

$$\int_{L_1} 5y^3x^2dx-3x^5dy=0$$

从而 $$\int_L=\int_{L+L_1}=\iint_D 15(x^2+y^2)x^2\,dx\,dy$$

$$=15\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\rho^5\cos^2\theta\,d\rho=\frac{5}{4}\pi$$ （11 分）

故 $$I=\int_L=\frac{5}{4}\pi-8+2e^{-1}$$ （12 分）

（19）解 先视 x 为常数，由 $f(x)$ 连续，知等式两边对 y 可导，两边对 y 求导得

$$xf(xy)=xf(y)+\int_1^x f(t)\,dt$$ （4 分）

令 $y=1$，记 $f(1)=C$，两边对 x 求导得

$$xf'(x)+f(x)=C+f(x)$$

解得 $f(x)=C\ln x+C_1$，由 $f(1)=C$，知 $C_1=C$

故　$f(x)=C(\ln x+1)$　（C 是任一常数）　　（10 分）

（20）解　可对角化

$\boldsymbol{C}$ 的 4 个特征值中有两个是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，另两个是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，由 $|\boldsymbol{A}|<0$ 及上述结论知 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值不同；同理，$\boldsymbol{B}$ 的两个特征值也不同（4 分）. 再由 $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$ 及上述结论知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的特征值互不相同，从而 4 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有 4 个互不相同的特征值. 因此，可对角化.　　（8 分）

（21）解　由 $A_{11}\neq 0$ 可知 $r(\boldsymbol{A})\geqslant n-1$，但不可能为 n，否则，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$ 可得 $r(\boldsymbol{A}^*)=n$，与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 矛盾，故有 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，且从 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行到第 n 行的 $n-1$ 个行向量线性无关.　　（4 分）

设 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 得

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}=0$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

作这样的行变换：用非零数 A_{11} 乘第 1 行，再把第 i 行的 A_{i1} 倍加至第 1 行（$i=2,\cdots,n$），则第一行的元素变为

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1},\sum_{i=1}^{n}a_{i2}A_{i1},\cdots,\sum_{i=1}^{n}a_{in}A_{i1},\sum_{i=1}^{n}b_iA_{i1}$$

上述的第 1 个元素即为 $|\boldsymbol{A}|$，由上述分析知其为零，最后一个元素显然为零，其余的 $n-1$ 个元素由行列式的性质也为零.

综上所述，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=n-1<n$，因此，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.　　（10 分）

（22）证　当 $0<x<1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{4}{7}(1+y+xy)\mathrm{d}y=\frac{2}{7}(x+3) \qquad (3\text{ 分})$$

当 $0<y<1$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{4}{7}(1+y+xy)\mathrm{d}x=\frac{2}{7}(2+3y) \qquad (6\text{ 分})$$

故在 $0<x<1$，$0<y<1$ 上

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y) \qquad (9\text{ 分})$$

所以 X,Y 不独立.

（23）解　（1）$EX=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\right)\Big|_{x=1-p}$

$$=p\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\mathrm{d}x\right)\Big|_{x=1-p}=p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)\Big|_{x=1-p}$$

$$= p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=1-p} = p \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\Big|_{x=1-p} = \frac{1}{p},$$

所以 p 的矩估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$. （4 分）

（2）X 的概率函数为 $P(x;p) = (1-p)^{x-1}p, x = 1,2,\cdots$. 因此似然函数为：$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i;p) = (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n} p^n$，$\ln L(p) = (\sum_{i=1}^{n} x_i - n)\ln(1-p) + n\ln p$，$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0$，解得 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{x}}$，故 p 的最大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$. （9 分）

数学考研模拟考试试卷 6

数学一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 曲线 $y=\sqrt[3]{1+3x^2-8x^3}$ 的渐近线是 $y=$ ________.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n x^n$ 的收敛域是________.

(3) 方程 $y=x^2+\int_0^x ty\,\mathrm{d}t$ 的解是________.

(4) 设三平面 $a_ix+b_iy+c_iz=d_i(i=1,2,3)$ 重合,则齐次线性方程组 $a_ix+b_iy+c_iz=0(i=1,2,3)$ 的解空间的维数等于________.

(5) 设某种元件的寿命服从指数分布,且平均寿命为 400 小时,则 4 个独立工作的这种元件工作了 800 小时至少有一个损坏的概率为________.

(6) 已知随机变量 Y 服从区间 $[-1,X]$ 上的均匀分布,而随机变量 X 的分布律为

X	2	3	5
p	0.1	0.2	0.7

则 $P\{Y\leqslant 0\}=$ ________.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(7) $\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^n}$ 是某一函数 $u=u(x,y)$ 的全微分,则 $n=$ ( ).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(8) 设 $y=f(x)$ 具有二阶导数，$f(x_1)$ 是函数的一个极小值，$f(x_2)$ 是极大值，且 $x_1<x_2$；$f(x_1)>f(x_2)$，则在 (x_1,x_2) 内(　).

(A) 最多有 $f''(x)$ 的一个零点

(B) 最多有 $f''(x)$ 的两个零点

(C) 最多有 $f''(x)$ 的三个零点

(D) 最少有 $f''(x)$ 的三个零点

(9) 设 L 是 $|x|+|y|\leqslant 1$ 所围成区域的边界正向，则 $\oint_L (x+y^2)\mathrm{d}y+(x^2-y)\mathrm{d}x=$(　).

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 8

(10) 设 $y=(C_1+x)\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 是某微分方程的通解，则此方程是

(A) $y''-y'-2y=-3\mathrm{e}^{-x}$　　(B) $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^{-x}$

(C) $y''-y'-2y=-5\mathrm{e}^{x}$　　(D) $y''+y'-2y=5\mathrm{e}^{-x}$

(11) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且对任意 x 有 $f(x+\pi)=f(x)$，则在其傅氏级数：$f(x)\sim\frac{a}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$ 中的系数必有(　)

(A) $b_k=0\ (k=1,2,\cdots)$　　(B) $a_k=0\ (k=1,2,\cdots)$

(C) $a_{2k-1}=0\ (k=1,2,\cdots)$　　(D) $a_{2k}=0\ (k=0,1,2,\cdots)$

(12) 在向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$ 为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵. $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标为 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为(　).

(A) $(3,2,-1)^T$　　(B) $(6,-2,-2)^T$

(C) $(3,-2,-1)^T$　　(D) $(6,2,2)^T$

(13) 设有 n 维列向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$；$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\ (r\leqslant n)$. 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r]$，则(　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价时，向量组 A、B 必等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价时，向量组 A、B 必不等价

(C) 向量组 A、B 等价时，矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 必等价

(D) 向量组 A、B 等价时，矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 必不等价

(14) 设 $f(x)$、$g(x)$ 分别是随机变量 X 和 Y 的概率密度，则下列函数中是某随机变量概率密度的是(　).

(A) $f(x)g(x)$　　(B) $\frac{3}{5}f(x)+\frac{2}{5}g(x)$

(C) $3f(x)+2g(x)$　　(D) $2f(x)+g(x)-2$

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

(15)（本题满分 12 分） 在力场 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 中，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上一点 $M(\alpha,\beta,\gamma)$，求场力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W，并求 W 的最大值.

(16)（本题满分 12 分） 抛物线 $y=4-x^2$ 与 $y=1+2x$ 交于 A、B 两点，M 是抛物线上任一点，求 MA 与 MB 两弦与抛物线相应两弧段 $\overset{\frown}{MA}$ 和 $\overset{\frown}{MB}$ 所围的弓形面积之和的最小值.

（**17**）（**本题满分 12 分**）在$[1,+\infty)$有连续的二阶导数，$f(1)=0$，$f(1)=1$，且$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最大值.

（**18**）（**本题满分 12 分**）设S为椭球面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分$(z\geqslant 0)$. 点$P(x,y,z)\in S$，$\pi$为过$P$处的切平面，$\rho(x,y,z)$为原点到切平面$\pi$的距离. 求$I=\iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

（19）**（本题满分 10 分）**设在$[0,a]$上，$|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$ 在开区间$(0,a)$内取到最小值，证明 $f'(0)+f'(a)\leqslant Ma$.

（20）**（本题满分 8 分）**设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系 $2(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*+6\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 10 分) 设有向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$,向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)^{\mathrm{T}}$

(1) a、b 取何值时,向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)不等价;

(2) a、b 取何值时,向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)等价,且(Ⅰ)线性无关;

(3) a、b 取何值时,向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)等价,且(Ⅰ)线性相关.

(22)(本题满分 9 分) 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	3
0	α	0.3
1	0.2	β

,记 $Z = \begin{cases} 1, & X+Y \text{ 为偶数} \\ 0, & X+Y \text{ 为奇数} \end{cases}$,

求:(1) Z 的概率分布;

(2) (X,Z) 的联合分布;

(3) α、β 取何值时,能使 X 与 Z 相互独立.

(23)(本题满分 9 分) 已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 判断 X,Y 是否相互独立?

(2) 求 $Z=\max(X,Y)$ 的概率密度.

(3) 随机变量 Y 和 XY 的数学期望分别是否存在?为什么?如存在请求出之.

试卷(六)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad -2x+\dfrac{1}{4}\quad}$.(仅用泰勒公式)

$$y=-2x\left(1-\frac{3}{8x}-\frac{1}{8x^3}\right)^{\frac{1}{3}}=-2x\left(1-\frac{1}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-2x+\frac{1}{4}+o(1)$$

(2) $\underline{\quad(-1,1)\quad}$.用检根法,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n|x|^n}=|x|$,故收敛区间为$(-1,1)$,当$|x|=1$时,由$\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\not\to 0$,知$x=\pm1$均发散.

(3) $\underline{\quad 2(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}-1)\quad}$.两边求导得$y'=2x+xy\ (y(0)=0)$,故$(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}y)'=2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$,解得$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}y=2(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2})$,即得$y=2(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}-1)$.

(4) $\underline{\quad 2\quad}$.矩阵$\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$的秩为1,故齐次方程组解空间维数是2.

(5) $\underline{\quad 1-\mathrm{e}^{-8}\quad}$.设$X$表示元件寿命,服从参数为$\dfrac{1}{400}$的指数分布,$p=P\{X\leqslant 800\}=\displaystyle\int_0^{800}\frac{1}{400}\mathrm{e}^{-\frac{x}{400}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-2}$,又$Y$表示4个独立工作元件工作了800小时损坏的个数.

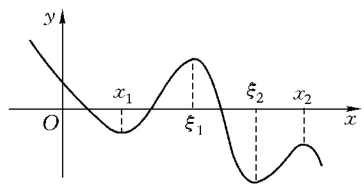
则 $Y\sim B(4,1-\mathrm{e}^{-2})$,故$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(\mathrm{e}^{-2})^4=1-\mathrm{e}^{-8}$

(6) $\underline{\quad 0.2\quad}$.由$\{X=2\},\{X=3\},\{X=5\}$构成完全事件组,故

$$\begin{aligned}P\{Y\leqslant 0\}&=P\{X=2\}P\{Y\leqslant 0\mid X=2\}+P\{X=3\}P\{Y\leqslant 0\mid X=3\}\\&\quad+P\{X=5\}P\{Y\leqslant 0\mid X=5\}\\&=0.1\times\frac{1}{3}+0.2\times\frac{1}{4}+0.7\times\frac{1}{6}=0.2.\end{aligned}$$

二、选择题

(7)(A).$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^n}+\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^n}$,前者不论$n$为何数,皆是全微分;后者仅当$n=1$是全微分,选(A).



(8)(D).由题设条件画草图,可知曲线$y=f(x)$在$[x_1,x_2]$内至少还有一个极大点ξ_1和极小点ξ_2,因此$f'(x_1)=f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(x_2)=0$,由罗尔定理知,$f''(x)$至少有三个零点,选(D).

(9)(C).$y^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}x$是全微分,沿闭路积分为0,而$\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\cdot S_D=4$,选(C).

(10)(A).由通解形式知方程是$y''-y'-y=C\mathrm{e}^{-x}$的形式,以$x\mathrm{e}^{-x}$是方程特解代入得$C=-3$.选(A).

(11)(C).由$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$

在积分$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$中令$x=\pi+t$. 则化为

$$\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt+n\pi)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}-\int_0^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x \\ \int_0^{\pi} f(x)\cos 2kx\,\mathrm{d}x\end{cases},$$

故当$n=2k-1$时$a_{2n-1}=0$. 选(C).

(12)(B). $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$, 记$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$. 则

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(6,-2,-2)^{\mathrm{T}}$, 选(B).

(13)(C). 矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是同型的, 由向量组等价得$r(A)=r(B)$, 即$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 选(C).

(14)(B). $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\neq 1$, 排除(A); 而$3f(x)-2g(x)$及$2f(x)+g(x)-2$均可为负数, 排除(C)、(D), 只能选(B).

三、解答题

(15)解 $W=\int_{(0,0,0)}^{(\alpha,\beta,\gamma)} yz\,\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z=\int_{(0,0,0)}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\mathrm{d}(xyz)=\alpha\beta\gamma$ (4分)

求W的最大值, 即求$\alpha\beta\gamma$在条件$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1$下的极值, $\alpha\beta\gamma>0$, 由对称性, 只需求$\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$的情况.

解1 令$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=\alpha\beta\gamma+\lambda(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1)$

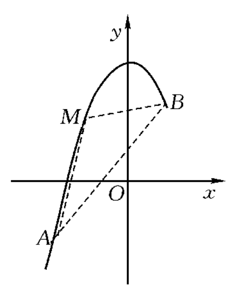
令 $L_\alpha=\beta\gamma+2\lambda\alpha/a^2=0$, $L_\beta=\alpha\gamma+2\lambda\beta/b^2=0$, $L_\gamma=\alpha\beta+2\lambda\gamma/c^2=0$ (8分)

解得$\frac{\alpha^2}{a^2}=\frac{\beta^2}{b^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}=\frac{1}{3}$, 故$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}b$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}c$, 由驻点唯一性, 知$W$的最大值为

$$W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc \qquad (12分)$$

解2 (初等法). 只要求$\frac{\alpha^2}{a^2}\cdot\frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{\gamma^2}{c^2}$的最大值.

由$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1$知, 当$\frac{\alpha^2}{a^2}=\frac{\beta^2}{b^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}=\frac{1}{3}$时最大, 以下同解1.



(16)解 如图. 先求交点得$A(-3,-5)$, $B(1,3)$, 显然$M\in\overset{\frown}{AB}$, 且只要求ΔAMB的最大面积(4分). 由底$AB=4\sqrt{5}$是定值, 故, 只要高最大. 即当过M的切线平行于AB时, ΔABM的面积最大. 设$M(x,y)$, 则$y'=-2x=2$, $\Rightarrow x=-1$, $y=3$, 故M为$(-1,3)$.

故 $$\max S_{\Delta}=8 \qquad (6分)$$

而以AB为弦, $\overset{\frown}{AMB}$为弧的弓形面积为

$$S=\int_{-3}^{1}(4-x^2-1-2x)\mathrm{d}x$$

$$=12-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-3}^{1}-x^2\Big|_{-3}^{1}=\frac{32}{3}\qquad(10\text{ 分})$$

故 $\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}$ 为所求的最小值. (12 分)

(17) 解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(x^2+y^2)+2x(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)$.

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f(x^2+y^2)+8x^2f'(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)$$

$$+4x^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)$$

同理 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(x^2+y^2)+8y^2f'(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)$$

$$+4y^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)\qquad(6\text{ 分})$$

记 $u=x^2+y^2$ 于是由$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 可得 $u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0$.

此为欧拉方程. 令 $u=\mathrm{e}^t$,及初始条件解得:$f(u)=\frac{\ln u}{u}$. (10 分)

而 $u=\mathrm{e}$ 是唯一驻点,且是极大值点,也是最大值点,故 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$的最大值是 $f(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}$. (12 分)

(18) 解 设(X,Y,Z)是 π 上动点,则 π 的方程为

$$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1,\quad \rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}\qquad(4\text{ 分})$$

$$S_{上}:z=\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}}}$$

故 $$\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2z}\mathrm{d}\sigma\qquad(8\text{ 分})$$

$$\iint_S\frac{z\,\mathrm{d}S}{\rho(x,y,z)}=\frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r(4-r^2)\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi\qquad(12\text{ 分})$$

(19) 证 设 $x_0\in(0,a)$ 是 $f(x)$ 的最小值点,则 $f'(x_0)=0$ (4 分)

由此 $$f'(0)+f'(a)\leqslant|f'(x_0)-f'(0)|+|f'(a)-f'(x_0)|$$

$$=|f''(\xi_1)|x_0+|f''(\xi_2)|(a-x_0)$$

(其中 $\xi_1\in(0,x_0)$,$\xi_2\in(x_0,a)$) (8 分)

$$\leqslant M(x_0+(a-x_0))=Ma\qquad(10\text{ 分})$$

(20) 解 等式两边右乘$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ 并整理得

$$[2(\boldsymbol{A}^*)^{-1}-\boldsymbol{E}]\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

再由$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$,代入得

$$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}\qquad(5\text{ 分})$$

$$=3\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-4/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&3/4&0&1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$ (8 分)

(21) 解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，考察方程组

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$$

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}$$

(4 分)

(1) $a=0$ 时，$r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})>r(\boldsymbol{A})$，方程组无解；即，向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)不等价. (6 分)

(2) $a\neq0,b\neq a$ 时，$r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})=3$，方程组有唯一解；向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)等价，且(Ⅰ)线性无关. (8 分)

(3) $a\neq0,a=b$ 时，$r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})=2$，方程组有无限多组解；即向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)等价，且(Ⅰ)线性相关. (10 分)

(22) 解 (1) $P\{Z=0\}=P\{X+Y\text{ 为奇数}\}$

$=P(\{X=0,Y=3\}\cup\{X=1,Y=2\})$

$=P\{X=0,Y=3\}+P\{X=1,Y=2\}=0.5$

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=0.5$

Z 的分布律为

Z	0	1
p	0.5	0.5

(3 分)

(2) (X,Z) 的可能取值数对为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,X+Y\text{ 为奇数}\}=P\{X=0,Y=3\}=0.3$

$P\{X=0,Z=1\}=P\{X=0,X+Y\text{ 为偶数}\}=P\{X=0,Y=2\}=\alpha$

$P\{X=1,Z=0\}=P\{X=1,X+Y\text{ 为奇数}\}=P\{X=1,Y=2\}=0.2$

$P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1,X+Y\text{ 为偶数}\}=P\{X=1,Y=3\}=\beta$

即 (X,Z) 的联合分布为

X \ Z	0	1	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
0	0.3	α	$0.3+\alpha$
1	0.2	β	$0.2+\beta$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	0.5	$\alpha+\beta$	

(6 分)

(3) 要 X、Z 相互独立，必须

$$\begin{cases}(0.3+\alpha)\times0.5=0.3\\(0.2+\beta)\times0.5=0.2\end{cases}$$

解得 $\alpha=0.3,\beta=0.2$,进一步可验证:当取 $\alpha=0.3,\beta=0.2$ 时,$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ 对一切 i、j 成立,即此时 X、Z 独立. (9 分)

(23)解 (1) X、Y 不独立.

(2) $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}(1-e^{-z(z+1)})-\dfrac{(2z+1)e^{-z(z+1)}}{1+z}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$.

(3) Y 的期望不存在,$E(XY)=1$.

(1) X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}0\cdot\mathrm{d}y+\int_0^{+\infty}xe^{-x(1+y)}\mathrm{d}y=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}xe^{-x(1+y)}\mathrm{d}x=\frac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

因为当 $x>0,y>0$ 时,$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$,所以 X,Y 不独立.

(2) $F_Z(z)=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

当 $z\leqslant 0$ 时,$F_Z(z)=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=P(\varnothing)=0$.

当 $z>0$ 时,$F_Z(z)=\int_0^z\int_0^z xe^{-x(1+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^z(e^{-x}-e^{-x(1+z)})\mathrm{d}x$

$$=1-e^{-z}+\frac{1}{1+z}(e^{-z(1+z)}-1)$$

故 $f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}e^{-z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}(1-e^{-z(z+1)})-\dfrac{(2z+1)e^{-z(z+1)}}{1+z}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$

(3) 将(1)中求得的 $f_Y(y)$ 代入下式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{(1+y)^2}\right)\mathrm{d}y$$

该广义积分发散,因此 Y 的数学期望不存在.

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xy\cdot xe^{-x(1+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1$$

因此,XY 的数学期望存在,且为 1.

数学考研

数学考研模拟考试试卷 7

数 学 一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $(x\ln|1-x|)^{(4)}\big|_{x=2}=$ ________.

(2) $\int_{-\infty}^{1}x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y)=x+y\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $x=\dfrac{1}{y}$,$x=1$ 和 $y=2$ 所围成的区域,则 $f(x,y)=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=$ ________.

(5) 设事件 A 与 B 互不相容,且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$,$P(B)=\dfrac{1}{4}$,则 $P(A\mid\overline{B})=$ ________.

(6) 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(5,3;3^2,2^2;\rho)$,则当 $\rho=-0.2$ 时,方差 $D(X-2Y+3)=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设抛物线 $y^2=2px$ 在与直线 $y=x$ 交点处的曲率半径 $R=5\sqrt{5}$,则此抛物线在这点处的切线方程是( )

(A) $x-2y+2=0$　　(B) $x+2y-6=0$

(C) $2x-y-2=0$　　(D) $2x+y-6=0$

(**8**) 设 $a_0, a_1, \cdots$,是公差为 2 的等差数列,则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = ($　$)$

(A) $3(a_0 + 1)$　　(B) $\frac{3}{2}(a_0 + 1)$

(C) $\frac{3}{2}(a_0 + 2)$　　(D) $3(a_0 + 2)$

(**9**) 设直线 L 为 $\begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$,平面 Π 为 $4x - 2y + z - 2 = 0$ 则($\quad$)

(A) L 平行于 Π　　(B) L 在 Π 上

(C) L 垂直于 Π　　(D) L 与 Π 斜交

(**10**) 若 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 及 $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2)$,则 $z = ($　$)$

(A) $(x^2 + y^2)^2 + C$　　(B) $2(x^2 + y^2)^2 + C$

(C) $(x + y)^2 + C$　　(D) $2(x + y)^2 + C$

(**11**) 曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a(a > 0)$,则此曲线的周长为($\quad$)

(A) $6a$　　(B) $4a$

(C) $4a^{\frac{3}{2}}$　　(D) $6a^{\frac{3}{2}}$

(**12**) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同列的矩阵,则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解的($\quad$)

(A) 必要非充分的条件　　(B) 必要且充分的条件

(C) 充分非必要的条件　　(D) 既非充分又非必要的条件

(**13**) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆,矩阵 $\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$ 分别为它们的伴随矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 的伴随矩阵 $(\boldsymbol{AB})^* = ($　$)$

(A) $\frac{1}{|\boldsymbol{AB}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$　　(B) $\frac{1}{|\boldsymbol{AB}|}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

(C) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$　　(D) $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

(**14**) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本,则下列各式中正确的是($\quad$)

(A) $\frac{1}{15\sigma}\sum_{i=1}^{15} X_i \sim N(0,1)$　　(B) $\sum_{i=1}^{15} X_i^2 \sim \chi^2(15)$

(C) $\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{\sqrt{\sum_{i=5}^{15} X_i^2}} \sim t(11)$　　(D) $\frac{11\sum_{i=1}^{4} X_i^2}{4\sum_{i=5}^{15} X_i^2} \sim F(4,11)$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 12 分) 已知曲线 $y=y(x)$ 是满足方程 $y'-y=\cos x-\sin x$ 的有界函数.求曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴在 $[0,\pi]$ 内所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(16)(本题满分 12 分) 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{e}^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}v$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,0\leqslant z\leqslant 3\}$.

（**17**）**（本题满分 12 分）** 求抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$ 的所有切线中与此抛物线及二坐标轴所围成面积的最小值.

（**18**）**（本题满分 12 分）** 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 求

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$；（2）和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$

（19）（本题满分 10 分） 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n}$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_n}{k^2+n^2}\right)$ 收敛.

（20）（本题满分 10 分） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB})=n$.

（1）证明 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=n$；

（2）设 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_1}$ 线性无关；

（3）证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_1}$ 是方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系（利用关系式 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})$）.

（21）（本题满分 8 分）问 a、b、c 取何值时，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\a&1&b&0\\0&0&2&0\\2&3&c&2\end{pmatrix}$$

能与对角矩阵相似?此时并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

（22）（本题满分 9 分）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

利用切比雪夫不等式证明：$P\{0<X<2(n+1)\}\geqslant\dfrac{n}{n+1}$.

（**23**）(**本题满分 9 分**) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta-1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>1$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 求

（1）θ 的矩估计量；

（2）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$，并判断 $\hat{\theta}_L$ 是否为 θ 的无偏估计量.

试卷(七)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad -4 \quad}$. $(x\ln|1-x|)^{(4)}=-\left(x\dfrac{3!}{(1-x)^4}+4\dfrac{2!}{(1-x)^3}\right)$

以 $x=2$ 代入得:$(x\ln|1-x|)^{(4)}\Big|_{x=2}=-2\cdot 3!+4\cdot 2!=-4$.

(2) $\underline{\quad e \quad}$. $\int_{-\infty}^{1}x^2e^x dx=x^2e^x\Big|_{-\infty}^{1}-2xe^x\Big|_{-\infty}^{1}+2e^x\Big|_{-\infty}^{1}=e$.

(3) $\underline{\quad x+\frac{1}{2}y \quad}$. 设 $f(x,y)=x+y\cdot A$,其中 $A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

于是:$A=\iint\limits_D x dxdy+A\iint\limits_D y dxdy=A\int_1^2 ydy\int_{1/y}^{1}dx+\int_{1/2}^{1}xdx\int_{1/x}^{2}dy$

$$=\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}.$$

$A=\dfrac{1}{2}$ 从而 $f(x,y)=x+\dfrac{1}{2}y$.

(4) $\underline{\quad \frac{1}{324} \quad}$. $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=-18$, $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=324$, $|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=\dfrac{1}{324}$.

(5) $\underline{\quad \frac{4}{9} \quad}$. $P(A\mid\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}-0}{1-1/4}=\dfrac{4}{9}$.

(6) $\underline{\quad 29.8 \quad}$. $D(X-2Y+3)=DX+4DY+2(-2)\operatorname{cov}(X,Y)=25-4\sqrt{DX}\sqrt{DY}\rho=29.8$.

二、选择题

(7) (A). 抛物线写作 $x=\dfrac{y^2}{2p}$,当 $x=y$ 时得 $x=y=2p$. 这时 $x'=\dfrac{y}{p}\Big|_{y=2p}=2$. $x''=\dfrac{1}{p}$,于是在$(2p,2p)$点的曲率半径为 $R=5\sqrt{5}p=5\sqrt{5}$,故 $p=1$. 抛物线方程是 $y^2=2x$. 点是$(2,2)$. 这时 $y'=\dfrac{1}{2}$. 故切线为 $x-2y+2=0$. 选(A).

(8) (B). 由 $a_n=a_0+2n$. 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}a_0+\frac{2}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'_{x=\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}a_0+\frac{2}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{2}a_0+\frac{3}{2}.\text{选(B)}.$$

(9) (C). L 的方向向量为$\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\{-28,14,-7\}\,/\!/\,\Pi$ 的法向量$\{4,-2,1\}$,故 $L\perp\Pi$.

(10) (A). 由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4xy^2$ 得 $z=x^4+2x^2y^2+g(y)$,而由 $x\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xy(x^2+$

$y^2) = 4x^3y + xg'(y)$

得 $\quad g'(y) = 4y^3$，故 $g(y) = y^4 + C$.

$z(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + C = (x^2+y^2)^2 + C$. 选(A).

(11)(D). 令 $x = a^{\frac{3}{2}}\cos^3 t, y = a^{\frac{3}{2}}\sin^3 t$.

则
$$\dot{x} = 3a^{\frac{3}{2}}(-\sin t\cos^2 t).\ \dot{y} = 3a^{\frac{3}{2}}\cos t\sin^2 t.$$
$$ds = 3a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\,\mathrm{sn}^4 t}\,dt.$$

周长 $\quad L = 4\int_0^{\pi/2} 3a^{\frac{3}{2}}\sin t\cos t\,dt = 6a^{3/2}$. 选(D).

(12)(A). 当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$ 时，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解空间才是同维向量空间，即两方程组才有可能同解. 但秩相等时，方程组未必同解，如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 就是这种情形，故应选(A).

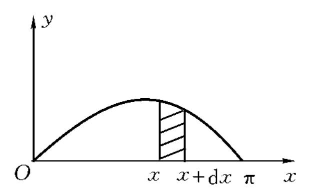
(13)(D). $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*$，$\boldsymbol{AB}$ 可逆，所以 $(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$ 故应选(D).

(14)(D). 因为 $\dfrac{X_i - 0}{\sigma} \sim N(0,1)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(4)$，同理可得 $\sum\limits_{i=5}^{15}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(11)$，且它与 $\sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2$ 独立，故
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2/4}{\sum\limits_{i=1}^{15}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2/11} = \frac{11\sum\limits_{i=1}^{4}X_i^2}{4\sum\limits_{i=5}^{15}X_i^2} \sim F(4,11).$$

三、解答题

(15) 解 $\quad$ 方程所对应齐次方程 $y' - y = 0$ 的通解是 $y^* = Ce^x$，非齐次方程的一个特解是 $\sin x$. 故此方程的通解是 $\quad y = Ce^x + \sin x$. $\qquad$ (4 分).

由 y 有界知 $C = 0$，从而 $y(x) = \sin x$. $\qquad$ (6 分)



在 $(0,\pi)$ 内任取 x 和 $x + dx$(如图). 则所求体积可视为图中阴影部分绕 y 轴旋转体体积的叠加. 故

$dV = 2\pi x \cdot \sin x\,dx$. $\qquad$ (10 分)

于是 $\quad V = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \xlongequal{\text{令 }\pi - x = t} 2\pi\int_0^{\pi}(\pi - t)\sin t\,dt$

$\quad = \pi^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt = 2\pi^2$ $\qquad$ (12 分)

(16) 解 $\quad I = \iiint\limits_{\Omega} z\,e^{(x+y)^2}\,dv = \iint\limits_{D} e^{(x+y)^2}\,d\sigma\int_0^3 z\,dz = \dfrac{9}{2}\iint\limits_{D} e^{(x+y)^2}\,d\sigma$

其中 D 为 Ω 在 xoy 平面的投影区域：$D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x + y \leqslant 2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ $\qquad$ (3 分)

对上述二重积分，采用极坐标. $x + y = 1$ 化为 $r_1 = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$；$x + y = 2$ 化为 $r_2 = \dfrac{2}{\cos\theta + \sin\theta}$，

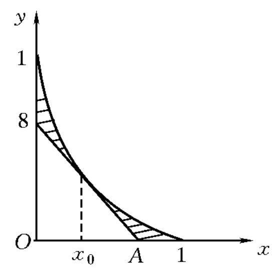
于是

$$I=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{r_1}^{r_2}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r\mathrm{d}r \qquad (8\text{ 分})$$

$$=\frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\Big|_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}\theta=\frac{9}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{9}{8}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2(\theta-\frac{\pi}{4})}\mathrm{d}\theta=\frac{9}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}) \qquad (12\text{ 分})$$

(17)解 如图.设(x_0,y_0)是抛物线上任一点,过此点所作切线方程是



$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0).(*) \qquad (4\text{ 分})$$

要求阴影部分的面积最小,只要求 ΔOAB 面积的最大值.

而令$(*)$式中 $y=0$ 得 $x_A=\sqrt{x_0y_0}+x_0=\sqrt{x_0}$.

令$(*)$式中 $x=0$ 得 $y_B=\sqrt{x_0y_0}+y_0=\sqrt{y_0}$.

从而只要求$\frac{1}{2}\sqrt{x_0}\sqrt{y_0}$的最大值,但$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=1$.故当 $x_0=y_0=\frac{1}{4}$ 时有最大值为 1/8.

(8 分)

而抛物线与二坐标轴所围曲边三角形的面积为

$$S=\int_0^1(1+x-2x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

故所求最小面积值为$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$. (12 分)

(18)解 (1)由 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ $(*)$.于是$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^n}\cdots\cos\frac{n}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$. (5 分)

(2)由$(*)$式:两边取对数得

$$\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{2^2}+\cdots+\ln\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{2^n}=\ln\sin x-\ln(2^n\sin\frac{x}{2^n}).$$

两边对 x 求导:$-(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n})=\cot x-\frac{1}{2^n}\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

两边取极限得 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{x}-\cot x$. (10 分)

(19)证 先考虑和$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{C_n}{k^2+n^2}=\frac{C_n}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2/n^2+1}\cdot\frac{1}{n}$

$$< \frac{C_n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{C_n}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{C_n}{n}\frac{\pi}{4}.$$ （6 分）

而由 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4}\frac{C_n}{n} < M$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{C_n}{n^2+k^2}\right) < \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\pi}{4}\frac{C_i}{i} < M$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{C_n}{n^2+k^2}\right)$ 收敛. （10 分）

（20）证 （1）因为 $n = r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB}) = r\left[[\boldsymbol{C}\quad\boldsymbol{D}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right] \leqslant r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix} \leqslant n$，所以（1）的结论得证.

（3 分）

（2）由 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix} = n$ 知方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解，即 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 无非零公共解，又 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{r_1}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 分别为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，故（2）的结论得证. （6 分）

（3）显然 $\boldsymbol{AB\eta}_i = \boldsymbol{0}, i = 1,2,\cdots,r_2$，又 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{AB\xi}_i = \boldsymbol{0}, i = 1,2,\cdots,r_1$，故 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 是方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的 $r_1 + r_2$ 个线性无关的解向量. （8 分）

又 $r(\boldsymbol{AB}) \geqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n = (n - r_1) + (n - r_2) - n = n - (r_1 + r_2)$，所以 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中至多有 $n - [n - (r_1 + r_2)] = r_1 + r_2$ 个解向量，从而 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 为 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. （10 分）

（21）解 $$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1 & 0\\ -a & \lambda-1 & -b & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & -3 & -c & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. （1 分）

要使 $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似，只需对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，有两个线性无关的特征向量；对应于 $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$，也有两个线性无关的特征向量，即 $r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$ 且 $r(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$.

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ -a & 0 & -b & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -2 & -3 & -c & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ -a & 0 & -b+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -c & -1\end{pmatrix}$$

当且仅当 $a = 0, b = 1, c$ 任意时，$r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$.

$$2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -c & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -c-5 & 0\end{pmatrix}$$

当且仅当 $c = -5, a = 0, b = 1$ 时，$r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$，即此时，$\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似.

（5 分）

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，解 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-3,2,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (-1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$，

对于 $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$，解 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_4 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2\ \boldsymbol{\xi}_3\ \boldsymbol{\xi}_4]$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵. （8 分）

（**22**）证　$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(n+1)\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$=(n+1)\left(-\mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)\right)$$

$$=(n+1)\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\cdots=(n+1)\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(n+1).$$　（3 分）

所以 $P\{0<X<2(n+1)\}=P\{-(n+1)<X-(n+1)<n+1\}=P\{|X-EX|<n+1\}$，为用切比雪夫不等式，再求 DX：

$$EX^2=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(n+2)(n+1)\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(n+2)(n+1).$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=(n+2)(n+1)-(n+1)^2=n+1.$$　（6 分）

故由切比雪夫不等式得

$$P\{0<X<2(n+1)\}=P\{|X-EX|<n+1\}$$

$$\geqslant 1-\frac{DX}{(n+1)^2}=1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}.$$　（9 分）

（**23**）解　（1）$EX=\int_{0}^{1}x\cdot\frac{1}{\theta-1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta-1}\int_{0}^{1}x^{\frac{1}{\theta-1}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\theta-1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\theta-1}+1}(x^{\frac{1}{\theta-1}+1})\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{\theta}.$$

得 $\theta=\frac{1}{EX}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{\overline{X}}$.　（3 分）

（2）当 $0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n$ 时，

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\frac{1}{(\theta-1)^n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{2-\theta}{\theta-1}},$$

$$\ln L(\theta)=-n\ln(\theta-1)+\frac{2-\theta}{\theta-1}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{-n}{\theta-1}+\frac{-1}{(\theta-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

得　$\hat{\theta}=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，所以最大似然估计量为 $\hat{\theta}_L=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$.

因为 $E\ln X_i=\int_{0}^{1}\ln x\cdot\frac{1}{\theta-1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta-1}\frac{1}{\frac{2-\theta}{\theta-1}+1}(x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}+1}\ln x\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}\mathrm{d}x)=1-\theta$. 所以，$E\hat{\theta}_L=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\ln X_i=\theta$，即 $\hat{\theta}_L$ 是无偏估计量.　（9 分）

数学考研模拟考试试卷 8

数学一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 三数:$\dfrac{9^{10}}{e^9},\dfrac{10^{10}}{e^{10}},\dfrac{11^{10}}{e^{11}}$ 中,最大的是________.

(2) 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$,其中 $f(x)$ 可微,则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}+1}+\dfrac{\sqrt{n+2}}{n\sqrt{n}+2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}+n}\right]=$ ________.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\4&5&6&0\\7&8&9&10\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的伴随矩阵$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=$ ________.

(5) 设事件 A 与 B 相互独立,事件 B 与 C 互不相容,事件 A 和 C 互不相容,且 $P(A)=P(B)=0.4,P(C)=0.3$,则事件 A、B、C 中仅 C 发生或仅 C 不发生的概率为________.

(6) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,来自总体的容量为 9 的样本值为:6.0,5.7,6.5,5.8,7.0,6.3,5.6,6.1,5.0.若 $\sigma=0.6$,则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为________.(已知 $\Phi(1.96)=0.975$)

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $f(0)=0,f'(0)=2$,则$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t f(xt)\mathrm{d}x}{t^3}=(\quad)$

(A) 0　　(B) ∞　　(C) 1　　(D) 2

(8) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$,$V$ 是 Ω 在第一卦限部分,则(　)

(A) $\iiint\limits_{\Omega}xy\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{V}xy\,\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{V}z\,\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{V}x\,\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{V}x\,\mathrm{d}v$

(9) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 处处连续.则 $f''(0)=$(　)

(A) 0　　(B) 不存在

(C) $\dfrac{1}{12}$　　(D) $-\dfrac{1}{12}$

(10) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则必有(　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 绝对收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^3$ 条件收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛

(11) 设 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''-y'+y-\mathrm{e}^{\sin x}=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的解.则(　)

(A) 1 是 $y(x)$ 的极大值

(B) 1 是 $y(x)$ 的极小值

(C) $(0,1)$ 是曲线 $y=y(x)$ 的拐点

(D) 1 不是 $y(x)$ 的极值,$(0,1)$ 也不是曲线 $y=y(x)$ 的拐点

(12) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,则下列向量中,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量是(　)

(A) $\boldsymbol{P\alpha}$　　(B) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$

(C) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}$

(13) 设三个不同的平面互相平行,三个平面方程构成的方程组的系数矩阵的秩为 r,增广矩阵的秩为 r_1,则必有(　)

(A) $r=2,r_1=3$　　(B) $r=2,r_1=1$

(C) $r=1,r_1=3$　　(D) $r=1,r_1=2$

(14) 设随机变量 X_n 服从二项分布 $B(n,p)$,$0<p<1$,$n=1,2,\cdots$,则对于任一实数 x,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{\mid X_n-np\mid<x\}=$(　)

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

(C) 0　　(D) 0.5

三、解答题(本题共9小题,总分94分)

(15)(本题满分10分) 设 $z=y^2+f(\sqrt{x}+y)$，当 $y=1$ 时，$z=x$. 试计算定积分 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-f(x)}}$.

(16)(本题满分12分) 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$a_n=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\cdots+\sqrt{\sin x}}}$

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛；(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} a_n\cos x\,\mathrm{d}x$ 的值.

(17)(**本题满分 12 分**)求面密度为 1 的、由曲线 $y^2 = x$ 及 $x = 1$ 所围成的均匀薄板,绕过原点直线 L 的转动惯量的最大值和最小值.

(18)(**本题满分 12 分**)一质量为 m 的物体,以速度 v_0 垂直上升,设空气阻力与物体速度平方成正比(比例常数为 k). 试求物体上升高度 H,及从 H 高处下落至原出发点所用时间.

(19)（本题满分 12 分） 设对任意实数 x,y，有 $f(x+y)=f(x)f(y)\neq 0$，且 $f(2)=4$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(1) 证明 $f(x)$ 处处连续；(2) 证明 $f(x)$ 处处可导，并求 $f(x)$.

(20)（本题满分 8 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵.

(1) 证明：若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$；

(2) 利用上述结果证明 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

(21)（本题满分 10 分） 已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$i=1,2,\cdots,n$ 线性无关，试说明是否存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(c,0,\cdots,0),\ c\neq 0$$

(22)（本题满分 9 分） 某电视机厂每月生产 10 000 台电视机，但它的显像管车间的正品率为 0.8，为了以 0.997 的概率保证出厂的电视机都装上正品的显像管，该车间每月应至少生产多少只显像管？($\Phi(2)=0.997$)

（23）（本题满分 9 分）

（1）已知事件 A、B、C 相互独立，证明 A 和 $B-C$ 相互独立.

（2）已知事件 A 和 C 独立，B 和 C 独立，$A\cup B$ 和 C 也独立，证明：AB 与 C 独立.

试卷(八)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{10^{10}}{e^{10}}}$. 令 $f(x)=x^{10}e^{-x}$. $f'=(10-x)x^9e^{-x}$. 当 $x=10$, $f(x)$ 最大，故 $10^{10}e^{-10}$ 最大.

(2) $\underline{\ x\ }$. 等式两边取微分 $dx+dz=fdy+yf'(2xdx-2zdz)$, $(1+2yzf')dz=(2xyf'-1)dx+fdy$

故 $$z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xyzf'-z}{1+2yzf'}+\frac{yf}{1+2yzf'}=\frac{x(2yzf'+1)}{1+2yzf'}=x.$$

(3) $\underline{\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$. 记 $x_n=\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}+1}+\dfrac{\sqrt{n+2}}{n\sqrt{n}+2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}+n}$

则 $$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\left(\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)<x_n<\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{n}{n}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{n}\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(4) $\underline{\dfrac{\boldsymbol{A}}{180}}$. $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\frac{1}{180}\boldsymbol{A}=\frac{1}{180}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\4&5&6&0\\7&8&9&10\end{pmatrix}.$$

(5) $\underline{0.46}$. 注意：$BC=\varnothing\Rightarrow B\overline{C}=B$, $\overline{B}C=C$; $AC=\varnothing\Rightarrow\overline{A}C=C$，故 $P(\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B}C)+P(AB\overline{C})=P(\overline{A}C\cap\overline{B}C)+P(AB)=P(C)+P(A)P(B)=0.46$.

(6) $\underline{(5.608,6.392)}$. 当 σ_0^2 已知时，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

将 $\bar{x}=6$, $\alpha=0.05$, $u_{0.025}=1.96$, $n=9$, $\sigma_0=0.6$ 代入，得 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(5.608,6.392)$.

二、选择题

(7) (C). 令 $xt=u$. 则原极限 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\int_0^{t^2}f(u)du}{t^4}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t^2)}{2t^2}=1$. 选(C).

(8) (C). 注意选项(A)、(B)、(D)等式的左边积分全为 0.

(9) (D). 由泰勒公式：$\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4!}x^2+\cdots$

因此 $f''(0)=-\dfrac{2}{4!}=-\dfrac{1}{12}$. 选(D).

(10) (A). 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=0$ 知，n 充分大时，$|a_n|<1$. 故 $|a_n^3|<a_n^2$，由比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$ 收敛. 选(A).

(11) (C). 由 $y(0)=1, y'(0)=0$ 代入知 $y''(0)=0$，方程两边对 x 求导得：$y'''-y''+y'-\cos x e^{\sin x}=0$. 令 $x=0$ 得 $y'''(0)=1\neq 0$，故 $(0,1)$ 是拐点. 选(C).

(12) (B). 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$，而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 选(B).

(13) (D). 由平面平行知系数矩阵的秩 $r=1$，对 3 行 4 列的矩阵，当方程组无解且系数矩阵的秩为 1 时，增广矩阵的秩不能为 3，选(D).

(14) (C). 当 $x\leqslant 0$ 时，显然 $P\{|X_n-np|<x\}=P(\varnothing)=0$，当 $x>0$ 时，由棣莫佛—拉普拉斯中心极限定理得：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}P\{|X_n-np|<x\}&=\lim_{n\to+\infty}P\{-x<X_n-np<x\}\\&=\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{-x}{\sqrt{npq}}<\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}<\frac{x}{\sqrt{npq}}\right\}\\&=\Phi(0)-\Phi(0)=0\end{aligned}$$

三、解答题

(15)解 令 $y=1$ 得 $f(\sqrt{x}+1)=x-1$. 令 $\sqrt{x}+1=t$，得 $x=(t-1)^2$，从而 $-f(t)=2t-t^2=t(2-t)$. （6 分）

$$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-f(x)}}=\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

令 $x=2\sin^2 t$. $2-x=2(1-\sin^2 t)=2\cos^2 t$. $\mathrm{d}x=4\sin t\cos t\mathrm{d}t$.

原式 $=\int_0^{\pi/2}2\mathrm{d}t=\pi$. （10 分）

(16)解 (1) $a_n=\sqrt{\sin x+a_{n-1}}$，且 $a_n>a_{n-1}$. 故数列单调增. 今证明 $a_n<1+\sin x$，$a_1=\sqrt{\sin x}<1+\sin x$ 是显然的，设 $a_{k-1}<1+\sin x$，则 $a_k=\sqrt{\sin x+a_{k-1}}<\sqrt{1+2\sin x}<1+\sin x$ 成立. 由数字归纳法知 $a_n<1+\sin x$ 对一切正整数 n 成立. 因此，数列 a_n 单调增有上界，故收敛. 且

$(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^2=\sin x+\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}$，记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

则 $A^2-A-\sin x=0$，$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}$. （6 分）

(2) 由 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}A\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{5}{12}(\sqrt{5}+1)$ （*） （8 分）

而 $\displaystyle 0\leqslant\left|\int_0^{\pi/2}a_n\cos x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/2}A\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{\pi/2}|a_n-A||\cos x|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi/2}|a_n-A|\mathrm{d}x\to 0$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}a_n\cos x\mathrm{d}x=\frac{5}{12}(\sqrt{5}+1)$. （12 分）

注 直接做到(*)式，便得出极限者，只能得 8 分.

(17)解 设直线方程为 $y=kx$，则薄板上一点 (x,y) 到直线的距离平方为

$$\frac{(kx-y)^2}{1+k^2}=\frac{k^2x^2-2kxy+y^2}{1+k^2}$$

转动惯量 $\quad I=\iint\limits_{D}\frac{k^2x^2-2kxy+y^2}{1+k^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （4 分）

$$=\frac{1}{1+k^2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}(k^2x^2+y^2)\mathrm{d}x \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{1+k^2}\left(\int_{0}^{1}k^2x^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y+2\int_{0}^{1}y^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{2}{1+k^2}\left[\frac{2}{7}k^2+\frac{1}{15}\right]=\frac{4}{(1+k^2)105}(15k^2+7) \qquad (8\text{ 分})$$

$$=\frac{4}{7}-\frac{32}{105}\cdot\frac{1}{1+k^2}$$

当 $k=0$ 时，I 最小，即绕 x 轴的转动惯量最小，最小值为 $I_m=\frac{60}{105}-\frac{32}{105}=\frac{4}{25}$. （10 分）

当 $k\to\infty$ 时，即绕 y 轴的转动惯量最大，最大值为 $I_M=\frac{4}{7}$. （12 分）

注 本题如看出绕 x 轴最小，绕 y 轴最大，而直接算出 I_M 和 I_m 者最多给 6 分.

(18) 解 当物体上升时，取开始运动的点为原点，x 轴铅直向上，则运动方程为 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-kv^2$. 记 $a^2=g$，$b^2=k/m$，则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-(a^2+b^2v^2) \qquad (2\text{ 分})$$

于是解得 $\quad\frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}v=-t+c_1$，$t=0$ 时 $v=v_0$ 故有 $\quad\arctan\frac{b}{a}v=\arctan\frac{b}{a}v_0-abt$.

上升至最高点时 $v=0$，故上升的时间是 $t_1=\frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}v_0$.

物体作上抛运动的速度与时间关系是：

$$v=\frac{a}{b}\tan(abt_1-abt)\quad(0\leqslant t\leqslant t_1) \qquad (6\text{ 分})$$

上升的高度 $\quad H=\int_{0}^{t_1}v\mathrm{d}t=\frac{-1}{2b^2}\ln\frac{1}{\sec^2abt_1}=\frac{1}{2b^2}\ln(1+\frac{b^2}{a^2}v_0^2)$.

下落运动时，选最高点为原点，x 轴铅直向下，于是运动方程是 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv^2$ 或 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a^2-b^2v^2$

解得 $\quad\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bv}{a-bv}\right|=t+c_2\ t=0$ 时 $v=0$，得 $c_2=0$，从而 $v=\frac{b}{a}\mathrm{th}(abt)$. （8 分）

设下降时间为 t_2，则

$$H=\int_{0}^{t_2}v\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\ln(\mathrm{ch}abt_2)$$

故

$$t_2=\frac{1}{ab}\ln(\mathrm{e}^{a^2H}+\sqrt{\mathrm{e}^{a^2H}-1})$$

故：物体上升的高度 $H=\frac{1}{2b^2}\ln(1+\frac{b^2}{a^2}v_0^2)=\frac{m}{2k}\ln(1+\frac{k}{mg}v_0^2)$.

从 H 下落到出发点的时间为

$t_2=\frac{1}{ab}\ln(\mathrm{e}^{a^2H}+\sqrt{\mathrm{e}^{a^2H}-1})$.（其中 $a^2=g$，$b^2=k/m$，H 即已求出的高程） （12 分）

(19) 证 (1) 对任意 x，取 $y=\Delta x$. 则 $f(x+\Delta x)=f(x)f(\Delta x)$.

于是 $f(x+\Delta x)-f(x)=f(x)[f(\Delta x)-1]=f(x)[f(\Delta x)-f(0)]$.

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-f(0)]=0$.

故 $f(x)$ 处处连续. (4 分)

(2) 由(1)，$f(x)$ 连续，因此 $f(x)$ 可积分.

任取积分得 $$\int_0^a f(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^a f(y)\mathrm{d}y\cdot f(x)=bf(x)$$

其中 $b=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 为常数.

令 $x+y=u$，得 $\int_x^{a+x} f(u)\mathrm{d}u=bf(x)$.

由于 $f(x)$ 连续，故上面等式两边可导，即 $f(x)$ 可导. (8 分)

对 y 求导得 $$f'(x+y)=f(x)f'(y)$$

令 $y=0$ 得 $f'(x)=cf(x)$. $\therefore f(x)=\mathrm{e}^{cx}$

而由 $f(2)=4$ 得 $\mathrm{e}^{c2}=4=2^2$ $\therefore \mathrm{e}^c=2$，即 $f(x)=2^x$. (12 分)

(20) 证 (1) 由题设知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的子空间，由于前者的维数是 $n-r(\boldsymbol{A})$，后者的维数是 $n-r(\boldsymbol{B})$，所以 $n-r(\boldsymbol{A})\leqslant n-r(\boldsymbol{B})$，从而 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$. (4 分)

(2) 显然 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

另一方面，设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，则有
$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=0,\ \|\boldsymbol{A\xi}\|^2=0$$
于是 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，从而 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{A})$.

综合上述两方面的结果得 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$. (8 分)

(21) 解 存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(c,0,\cdots,0),c\neq 0. \quad (2\text{ 分})$$
事实上，设 $\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i2},a_{i3},\cdots,a_{in})$，$i=1,2,\cdots,n$，则它们为 n 个 $n-1$ 维的向量，必线性相关，即存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使
$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=(0,\cdots,0). \quad (7\text{ 分})$$
对这 n 个数 $k_1,\cdots,k_n$，必有
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(c,0,\cdots,0),c\neq 0.$$
因若 $c=0$，则与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关矛盾. 因此，结论成立. (10 分)

(22) 解 设车间每月生产 n 只显像管，令
$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 只显像管是正品}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 只显像管是次品}\end{cases}$$
则 X_i，$i=1,2,\cdots,n$ 相互独立同分布，$P\{X_i=1\}=0.8$，$P\{X_i=0\}=0.2$，$EX_i=0.8$，$DX_i=0.16$ 都存在，满足中心极限定理条件. (2 分)
$$0.997=\Phi(2)\leqslant P\{\sum_{i=1}^n X_i\geqslant 10000\}=P\{\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i-n\cdot 0.8}{\sqrt{n}0.4}\geqslant\frac{10000-0.8n}{\sqrt{n}0.4}\}$$
$$\doteq 1-\Phi(\frac{10000-0.8n}{0.4\sqrt{n}})$$

即 $\Phi(\frac{10000-0.8n}{0.4\sqrt{n}})\leqslant 1-\Phi(2)=\Phi(-2)$

得 $\quad \frac{10000-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\leqslant -2$ （7 分）

即 $\quad (\sqrt{n})^2-\sqrt{n}-12500\geqslant 0, \sqrt{n}\geqslant \frac{1+\sqrt{1+50000}}{2}$

$$n\geqslant \frac{1}{4}(1+2\sqrt{50001}+50001)=12612.3$$

车间每月应至少生产 12613 只. （9 分）

（23）解 （1）$P(A\cap(B-C))=P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)$

$$=P(A)P(B)-P(A)P(B)P(C)=P(A)(P(B)-P(BC))$$

$$=P(A)P(B\bar{C})=P(A)P(B-C)$$

故 A 和 $B-C$ 相互独立. （4 分）

（2）已知 $P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C), P((A\cup B)C)=P(A\cup B)P(C)$. 注意由

$$\begin{aligned}P((A\cup B)C)&=P((\bar{A}B\cup A\bar{B}\cup AB)C)\\&=P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(ABC)\\&=(P(BC)-P(ABC))+(P(AC)-P(ABC))+P(ABC)\end{aligned}$$

可得 $P(ABC)=P(BC)+P(AC)-P((A\cup B)C)$

$$\begin{aligned}&=P(B)P(C)+P(A)P(C)-P(A\cup B)P(C)\\&=(P(B)+P(A)-P(A\cup B))P(C)\\&=P(AB)P(C)\end{aligned}$$

故 AB 和 C 相互独立. （9 分）

数学考研模拟考试试卷 9

数学一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}=$ ________.

(2) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(4) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ 相似,则 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $=$ ________.

(5) 设 A、B 是两个随机事件,$P(A)=0.6$,$P(A\overline{B})=0.3$,$P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$,则 $P(A+B)=$ ________.

(6) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(0,1)$ 的样本,则统计量 $\dfrac{2}{n-2}\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{X_k^2}{X_1^2+X_2^2}$ 服从的分布为(需写出分布的自由度) ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设对任意实数 x 有 $f(1+x)=2f(x)$,且 $f'(0)=4$,则 $f'(-1)$ 为(　).

(A) 不存在　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

(8) 设曲线 $y=y(x)$ 在 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 点与 x 轴相切，且在 $(0,1)$ 内 $y(x)>0$，y''' 连续．则在 $(0,1)$ 内存在 $x_1<x_2$ 使（　）．

(A) $y''(x_1)=y''(x_2)=0$　　(B) $y'(x_1)=y'(x_2)=0$

(C) $y(x_1)=y(x_2)=0$　　(D) $y'''(x_1)=y'''(x_2)=0$

(9) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}\ (-\infty<x<+\infty)$，则 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=$（　）．

(A) $\dfrac{1}{2}[f(x)+1]$　　(B) $\dfrac{1}{2}[f(x)-1]$

(C) $\dfrac{1}{2}[1-f(x)]$　　(D) $-\dfrac{1}{2}[f(x)+1]$

(10) 设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，Ω 是由 Σ 和 $z=0$ 所围成的空间区域，则 $\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不等于（　）．

(A) $-\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$　　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r$

(C) $-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(11) 在线性微分方程：$y''+b(x)y'+c(x)y=0$ 中，若 $b(x)+c(x)=-1$，$b(x)=[1-c(x)]\tan x$．则此方程的通解为 $y=$（　）．

(A) $c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\cos x$　　(B) $c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\sin x$

(C) $c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\cos x$　　(D) $c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\sin x$

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，现有 4 个命题：

① 若秩$(\boldsymbol{A})=n$，则秩$(\boldsymbol{A}^*)=n$

② 若秩$(\boldsymbol{A})=n-1$，则秩$(\boldsymbol{A}^*)=n$

③ 若秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{A}^*)<n$，则 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$

④ 若 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$，则秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{A}^*)<n$

以上命题中，正确的是（　）．

(A) ①③　　(B) ①④　　(C) ②④　　(D) ③④

(13) 设 a,b,c 是互不相同的数，则 $a+b+c=0$ 是行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$ 的（　）．

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分且必要条件　　(D) 既非必要又非充分条件

(14) 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant\alpha\\ 0, & x<\alpha\end{cases}\quad(\alpha\text{ 为正常数}).$$

则 $P\{\alpha<X<\alpha+\beta\}\ (\beta>0)$ 的值（　）．

(A) 与 β 无关，随 α 单调增　　(B) 与 β 无关，随 α 单调减

(C) 与 α 无关，随 β 单调增　　(D) 与 α 无关，随 β 单调减

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 12 分) 设 $x_0 \in (-1,0)$,而 $x_n = x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(16)(本题满分 12 分) 设曲线 $y=y(x)$ 在 $(1,\dfrac{1}{4})$ 点与直线 $4x-4y-3=0$ 相切,且 $y=y(x)$ 满足方程 $y''=6\sqrt{y}$. 求该曲线在相应 $x\in[-1,1]$ 上各点曲率的平均值(平均曲率).

(17)（本题满分 12 分） 设 $f(x)$ 有二阶连续的导数，$z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$. 求 $f(x)$.

(18)（本题满分 12 分） 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=4$ 被 $z=0$ 和 $z=2$ 截下部分的外侧.

（19）（本题满分 10 分） 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，且对任意实数 x 有 $f(x+\pi)=-f(x)$，证明：$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅氏级数中，系数 $a_0=a_{2n}=b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$.

（20）（本题满分 8 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5×4 矩阵，秩$(\boldsymbol{A})=2$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 均是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量，求对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一组标准正交基.

(21)(本题满分 10 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化成的标准形为 $f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,且向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

(22)(本题满分 9 分) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,令

$$Y=\begin{cases}X, & |X|\leqslant 1\\ -X, & |X|>1\end{cases}$$

求:(1) $P\{X+Y=0\}$;(2) Y 的分布函数;(3) EY.

(**23**)(**本题满分 9 分**) 已知某厂生产的某型号灯泡的寿命(单位:kh)服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,要求寿命的标准差不超过 2.1.某天从产品中任取 5 个灯泡进行试验,得结果为

$$12.5,\quad 11.0,\quad 11.2,\quad 12.8,\quad 10.5$$

试问这天生产的灯泡寿命的标准差是否符合要求(显著水平 $\alpha = 0.10$).

试卷(九)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 4/\mathrm{e} \quad}$. 原极限 $= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]} = \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = 4/\mathrm{e}$.

(2) $\underline{\quad 4\sqrt{2}-4 \quad}$.

解 1 原积分 $= \displaystyle\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} = 4\sqrt{2}-4$.

解 2 原积分 $= \displaystyle\int_0^\pi \left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2}|\cos t-\sin t|\,\mathrm{d}t$

$$= 2\left[\int_0^{\pi/4}(\cos t-\sin t)\mathrm{d}t + \int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin t-\cos t)\mathrm{d}t\right] = 4\sqrt{2}-4.$$

(3) $\underline{\quad -\dfrac{1}{3} \quad}$.

解 1 于方程两边取微分得 $2(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y-3\mathrm{d}z)\cos(x+2y-3z) = \mathrm{d}x+2\mathrm{d}y-3\mathrm{d}z$,于是得 $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y-3\mathrm{d}z=0$. 故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{3}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{3}$,$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{3}$.

解 2 由 $2\sin u = u$ 知有三个解:$u_1\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$,0 及 $u_2\in(\dfrac{\pi}{2},0)$. 于是所给方程有解 $x+2y-3z=u_i$(u_i 是常数).

从而 $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y-3\mathrm{d}z=0$. 以下同解 1.

(4) $\underline{\quad 4 \quad}$. $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似,故有相同的秩. 而

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0. \text{故 } r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = 4.$$

(5) $\underline{\quad 0.8 \quad}$. $\because P(A\mid\bar{B})+P(\bar{A}\mid\bar{B})=1$,又已知 $P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid\bar{B})=1$,$\therefore P(A\mid\bar{B})=P(A\mid B)$,故 A,B 相互独立. $P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.3$,$P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.5$,$\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8$.

(6) $\underline{\quad F(n-2,2) \quad}$. 因为 $X_1^2+X_2^2\sim\chi^2(2)$,$\sum\limits_{k=3}^n X_k^2\sim\chi^2(n-2)$,且它们相互独立,故

$$\frac{2}{n-2}\sum_{k=3}^n\frac{X_k^2}{X_1^2+X_2^2} = \frac{\sum\limits_{k=3}^n X_k^2\Big/(n-2)}{(X_1^2+X_2^2)\big/2}\sim F(n-2,2).$$

二、选择题

(7) (C). **解 1.** $f'(-1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-1+x)-f(-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(1+(-1+x))-\frac{1}{2}f(0)}{x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=2.$$

解 2.（非常规解法）. $f'(1+x)=2f'(x)$. 令 $x=-1$ 得 $f'(0)=2f'(-1)$，$f'(-1)=\frac{1}{2}f'(0)=2$.

(8)（A）. 由 $y(0)=y(1)=0$，及 $y(x)>0$ 知存在一点 $\eta\in(0,1)$，使 $y(\eta)$ 达到最大值，即 η 是 $y(x)$ 的极大点. 故有 $y'(\eta)=0$，再由 $y'(0)=y'(\eta)=y'(1)=0$ 及罗尔定理知，$\exists\, 0<x_1<\eta<x_2<1$，使 $y''(x_1)=y''(x_2)=0$.

(9)（B）. $f(x)=e^{x^2}$，故 $\int_0^x te^{t^2}dt=\frac{1}{2}(e^{x^2}-1)=\frac{1}{2}[f(x)-1]$.

(10)（B）. 由 $\iint\limits_{\Sigma}z\,dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$.

(11)（D）. 由 $1+b(x)+c(x)=0$ 知 $y=e^x$ 是方程的一个解；又由 $-\sin x+b(x)\cos x+c(x)\sin x=0$ 知 $y=\sin x$ 也是方程的解. 故选(D).

(12)（A）. 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 知：当 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=n$；当 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$；当 $r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$，则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$. 只要 $r(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$ 便有 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$. 故只有 ①、③ 正确.

(13)（C）. $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b(b^2-a^2)&c(c^2-a^2)\end{vmatrix}$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

由于 a、b、c 互不相等，故 $\Delta=0$ 的充分条件是 $a+b+c=0$.

本题也可用范德蒙行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x&a&b&c\\x^2&a^2&b^2&c^2\\x^3&a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$ 展式：$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)$ 中 x^2 项的系数，即 $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(14)（C）. 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得 $A=2e^{-2\alpha}$.

$P\{\alpha<X<\alpha+\beta\}=\int_\alpha^{\alpha+\beta}2e^{-2\alpha}e^{-2x}dx=1-e^{-2\beta}$.

三、解答题

(15) 解 由 $x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1\in(-1,0)$. 设 $x_k\in(-1,0)$，则 $x_{k+1}=(x_k+1)^2-1\in(-1,0)$. 由数学归纳法知 $x_n\in(-1,0)$，即数列 $\{x_n\}$ 有界. (5 分)

又 $x_n-x_{n-1}=x_{n-1}(x_{n-1}+1)<0$. 故 $\{x_n\}$ 单调减. 因此 $\{x_n\}$ 收敛. (10 分)

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A^2+A=A(A+1)=0$. 而 $A<0$，故 $A=-1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$.

(12 分)

(16) 解 由题设是给定 $y(1)=\frac{1}{4}$，$y'(1)=1$. 求解方程

$$y''=6\sqrt{y}\quad 即\ 2y'dy'=12\sqrt{y}dy.$$

$y'^2=8y^{3/2}+C_1$. 由 $y'\big|_{(1,\frac{1}{4})}=1$ 得 $C_1=0$.

再由初始条件知 $y>0$，$y'>0$. 从而

$$y' = 2\sqrt{2}y^{3/4} \qquad (4\text{ 分})$$

即 $4y^{1/4} = 2\sqrt{2}x + C_2$. 由 $x = 1, y = \frac{1}{4}$ 得 $C_2 = 0$

从而曲线方程为 $\quad y = \frac{1}{4}x^4$ （8 分）

由此曲率为：$\tau = \frac{3x^2}{(1+x^6)^{3/2}}$.

所求平均曲率 $\bar{\tau} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3x^2}{(1+x^6)^{3/2}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}}$.

令 $t = \tan u$ 得 $\bar{\tau} = \int_0^{\pi/4}\cos u\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ （12 分）

（17）解 记 $u = \mathrm{e}^x\sin y$，则 $z = f(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\mathrm{e}^x\sin y = uf'(u), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{e}^x\cos yf'(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y + uf'(u), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -uf'(u) + f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y \qquad (6\text{ 分})$$

因此，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{2x}z$ 得 $f''(u) - f(u) = 0$.

求得 $f(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$ （C_1、C_2 是任意常数） （12 分）

（18）解 1 设 $D = \{(z,x) \mid 0 \leqslant z \leqslant 2, -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ 是 Σ 在 zox 面上的投影域.

则 $I = \iint\limits_{\Sigma} -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint\limits_{D}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ （10 分）

$= -2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z = -8\pi$. （12 分）

解 2 补两个面：$\Sigma_1 : z = 0\,(x^2 + y^2 \leqslant 4)$ 下侧；$\Sigma_2 : z = 2\,(x^2 + y^2 \leqslant 4)$ 上侧. （2 分）

则由高斯公式：$\iint\limits_{\Sigma} + \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} = \iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0$（$\Omega$ 是三曲面所围柱体）. （10 分）

故 $\quad I = \iint\limits_{\Sigma} = -\iint\limits_{\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_2} = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -8\pi$. （12 分）

（19）解 $a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[\int_{\pi}^{0}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x]$ （2 分）

令 $x = t - \pi$，则 $\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}f(t-\pi)\cos 2nt\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi}f(t)\cos 2nt\mathrm{d}t$.

故 $\quad a_{2n} = 0, (n = 0,1,2,\cdots)$ （8 分）

同理 $\quad b_{2n} = 0, (n = 1,2,\cdots)$ （10 分）

（20）解 因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. （2 分）

由秩$(\boldsymbol{A}) = 2$ 知 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 $4 - 2 = 2$ 维向量空间，又 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$

的解向量，所以

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-2,4)^{\mathrm{T}}=2(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\beta}_1$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3=(2,2,2,4)^{\mathrm{T}}=2(1,1,1,2)^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\beta}_2$$

也就是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一组基. （5 分）

令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(\frac{1}{3},1,\frac{5}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}},$$

再令 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(\frac{1}{\sqrt{39}},\frac{3}{\sqrt{39}},\frac{5}{\sqrt{39}},\frac{2}{\sqrt{39}})^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 即为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一组标准正交基. （8 分）

（21）解　由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-1,-1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=2\times(-1)\times(-1)=2$.

对 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$，并利用 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得

$$\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha} \quad （3 分）$$

这表明 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 2 的特征向量.

取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交，将它们分别规范化为

$$\boldsymbol{q}_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{q}_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{q}_3=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}} \quad （6 分）$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \boldsymbol{q}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix} \quad （8 分）$$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$. （10 分）

（22）解　(1) $P\{X+Y=0\}=P\{Y=-X\}=P\{|X|>1\}=P\{X>1\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$. （3 分）

(2)
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant y,X>0\}+P\{Y\leqslant y,X\leqslant 0\}\\&=(P\{Y\leqslant y,0<X\leqslant 1\}+P\{Y\leqslant y,X>1\})+0\\&=P\{X\leqslant y,0<X\leqslant 1\}+P\{X\geqslant -y,X>1\}\end{aligned}$$

当 $y<-1$ 时，$F_Y(y)=0+P\{X\geqslant -y\}=\mathrm{e}^{-\lambda y}$

当 $-1\leqslant y<0$ 时，$F_Y(y)=0+P\{X>1\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{0<X\leqslant y\}+P\{X>1\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}+\mathrm{e}^{-\lambda}$

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P\{0<X\leqslant 1\}+P\{X>1\}=1$. （6 分）

(3)
$$\begin{aligned}EY&=\int_{|x|\leqslant 1}xf_X(x)\mathrm{d}x+\int_{|x|>1}(-x)f_X(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}(-x)\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\&=(-\mathrm{e}^{-\lambda}-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda}+\frac{1}{\lambda})-(\mathrm{e}^{-\lambda}+\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda})=\frac{1}{\lambda}-2\mathrm{e}^{-\lambda}(1+\frac{1}{\lambda})\end{aligned} \quad （9 分）$$

（23）解　设这批灯泡的寿命为 X，已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

检验问题为
$$H_0:\sigma^2\leqslant 2.1^2,\quad H_1:\sigma^2>2.1^2$$

它的拒绝域为 $$\frac{(n-1)s^2}{2.1^2} > \chi_{\alpha}^2(n-1) \qquad (3 分)$$

由 $n=5$ 的样本值可算得

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 11.6,\ s^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = 0.995$$

查表得 $$\chi_{0.10}^2(4) = 7.779 \qquad (6 分)$$

所以 $$\frac{(n-1)s^2}{2.1^2} = 0.9025 < \chi_{0.10}^2(4) = 7.779$$

故接受 H_0，即在 $\alpha = 0.1$ 下，可以认为这天生产的灯泡寿命的标准差符合要求. (9 分)

数学考研模拟考试试卷 10

数 学 一

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=$ ________.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5$ 所确定,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,0,4)}=$ ________.

(3) 方程 $(1-2x)y''-y'=0$ 在 $\dfrac{1}{2}<x<+\infty$ 处的通解为 $y=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 则 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=$ ________.

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $X\sim N(2,3)$,$Y\sim N(3,5)$,则随机变量 $Z=3X-2Y+4$ 的概率密度 $f_Z(z)=$ ________.

(6) 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3\mathrm{e}^{-4y}, & 0<x<2,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $P\{X\leqslant 1\mid Y\geqslant 3\}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 已知空间域 Ω 由 $x^2+y^2\leqslant z$ 及 $1\leqslant z\leqslant 2$ 所确定,函数 $f(z)$ 连续,则 $\iiint\limits_{\Omega}f(z)\mathrm{d}v=$ ( ).

(A) $\pi\int_1^2 z^2 f(z)\mathrm{d}z$ (B) $2\pi\int_1^2 z^2 f(z)\mathrm{d}z$

(C) $2\pi\int_1^2 zf(z)\mathrm{d}z$ (D) $\pi\int_1^2 zf(z)\mathrm{d}z$

(8) 设 $g(x)$ 可导,且 $x\to 0$ 时,$g(x)$ 是 x 的高阶无穷小,则当 $x\to 0$ 时,必有( ).

(A) $g'(x)$ 是无穷小量

(B) $\dfrac{x}{g(x)}$ 是无穷大量

(C) $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 是 x^2 的高阶无穷小

(D) 若 $G'(x)=g(x)$,则 $G(x)$ 是 x 的高阶无穷小

(9) 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点处有( )

(A) 连续不可导 (B) 可导不连续

(C) 可导且连续但不可微 (D) 可微

(10) 设 $f(x,y)$ 连续,使等式:$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 成立的是( )

(A) $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 且 $f(-x,y)=f(x,y)$

(B) $f(-x,-y)=f(x,y)$

(C) $f(-x,y)=f(x,y)$ 且 $f(x,-y)=f(x,y)$

(D) $f(-x,-y)=-f(x,y)$

(11) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-|a_k|)}{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|)}$ ( ).

(A) 不存在 (B) 等于 -1 (C) 等于 1 (D) 等于 0

(12) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\delta}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量. 则三平面 $a_ix+b_iy+c_iz=d_i(i=1,2,3)$ 交于一条直线的充分必要条件是( ).

(A) $r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})=2$ (B) $r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})=1$

(C) $r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=2,r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})=3$ (D) $r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})=3$

(13) 与矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 相似的矩阵是( ).

(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

(14) 设事件 A 和 B 互不相容,且 $0<P(A)P(B)<1$,则必有( ).

(A) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 互不相容 (B) $\overline{A}$、$\overline{B}$ 不是互不相容

(C) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相互独立 (D) $\overline{A}$、$\overline{B}$ 不相互独立

三、解答题（本题满分 9 分，总分 94 分）

（15）（本题满分 12 分）证明 $0<\int_{0}^{\sqrt{2\pi}}\sin t^{2}\,\mathrm{d}t<\sqrt{\pi}$.

（16）（本题满分 12 分）计算曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$，$\Sigma$ 是由 $x^{2}+y^{2}\leqslant R^{2}$ 及 $-R\leqslant z\leqslant R$ 所确定形体表面的外侧.

（**17**）（**本题满分 12 分**）研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ 的敛散性；若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

（**18**）（**本题满分 12 分**）设面密度为 1 的均匀平面薄板 D 由抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 和两坐标轴围成，求 D 关于过原点的直线的转动惯量的最大值和最小值.

(19)(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，$f'(0)=1$，$f'(2)=-1$ 及 $f(0)=f(2)=1$. 试证明 $2\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3$.

(20)(本题满分 8 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $(m-1)\times m$ 矩阵，D_j 是去掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列所得 $m-1$ 阶矩阵的行列式. 证明：

(1) 向量 $(D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量；

(2) 当 $D_1,D_2,\cdots,D_m$ 不全为零时，$(D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

(21)（本题满分 10 分） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵.

（1）利用“实矩阵为正定矩阵的充分必要条件，是其与单位矩阵合同”，证明：$\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零；

（2）举 2 阶矩阵的例子，说明正定矩阵的乘积未必是正定矩阵.

(22)（本题满分 9 分） 袋中装有 50 枚正品硬币，50 枚次品硬币（次品硬币的两面都印有国徽）

（1）从袋中任取一枚硬币，将它投掷三次，已知每次都出现国徽，问这枚硬币是正品的概率为多少？

（2）若在袋中任取一枚硬币，将它投掷 k 次（$k \geqslant 1$），问至少出现一次国徽的概率为多少？

（23）（本题满分 9 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$$

其中 μ 和 $\theta(\theta>0)$ 均为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求

（1）总体 X 的分布函数；

（2）μ 和 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

试卷(十) 解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad \frac{1}{4} \quad}$. 本题用泰勒公式最好：$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$，$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$，故所求极限为$\frac{1}{4}$.

(2) $\underline{\quad -3/4 \quad}$. 方程两边对 x 求导得

$$yz + xyz_x + \frac{x + z \cdot z_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

用(3,0,4)代入即得 $z_x \Big|_{(3,0,4)} = -3/4$.

(3) $\underline{\quad C_1(\sqrt{2x-1})^3 + C_2 \quad}$. 令 $y' = p$，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}x}{2x-1} \quad 得\ y' = \frac{C}{\sqrt{2x-1}}, \quad x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$$

故 $\quad y = C_1(\sqrt{2x-1})^3 + C_2$.

(4) $\underline{\quad (1,1,1) \quad}$. 因实对称矩阵的特征值均为实数，且满足方程 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0$，即 $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$，只有 $\lambda = 1$ 一个实根.

(5) $\underline{\quad \frac{1}{\sqrt{94\pi}} e^{-\frac{(z-4)^2}{94}} \quad}$. 由 $Z \sim N(4,47)$ 即得.

(6) $\underline{\quad \frac{1}{16} \quad}$. **法 1**：由于 $0 < x < 2, y > 0$ 时 $f(x,y) = \frac{1}{4}x^3 \cdot 4e^{-4y}$，其它处 $f(x,y) = 0$，故易证 X 和 Y 相互独立，且 X 的概率度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3, & 0 < x < 2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，$Y$ 服从 $\lambda = 4$ 的指数分布. 所以，$P\{X \leqslant 1 \mid Y \geqslant 3\} = P\{X \leqslant 1\} = \int_0^1 \frac{1}{4}x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{16}$.

法 2：$P\{X \leqslant 1 \mid Y \geqslant 3\} = \frac{P\{X \leqslant 1, Y \geqslant 3\}}{P\{Y \geqslant 3\}} = \frac{\int_0^1 \int_3^{+\infty} x^3 e^{-4y} \mathrm{d}y \mathrm{d}x}{\int_0^1 \int_3^{+\infty} x^3 e^{-4y} \mathrm{d}y \mathrm{d}x}$ 经计算化简得 $P\{X \leqslant 1 \mid Y \geqslant 3\} = \frac{1}{16}$.

二、选择题

(7) (D). 由“先二后一”法知：原积分 $= \int_1^2 f(z) \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_1^2 z f(z) \mathrm{d}z$

(8) (C). 由洛必达法则 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x g(t) \mathrm{d}t}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{2x} = 0$. 选(C).

注 (A)、(B) 不正确. 可令 $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$，显然是比 x 高阶的无穷小. 但 $x \to 0$ 时，

$g'(x)$ 无极限，且 $g(x)$ 有无限个零点，$x/g(x)$ 无意义.(D) 不成立是明显的.

(9)(C).由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0,0)$，故此函数在 $(0,0)$ 处连续.

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$ 存在.

故在 $(0,0)$ 可导.选(C).

注 在 $(0,0)$ 点，$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y = \sqrt{|xy|}$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在.故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

(10)(C).要使等式成立，$f(x,y)$ 对 x、y 均应为偶函数.故选(C).

(11)(B).由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = +\infty$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有界，分子分母用 $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ 除即知选(B).

(12)(A).由 $r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = 2$ 知齐次方程组的基础解系仅一非零向量 $(l,m,n)^{\mathrm{T}}$，而 $r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) = 2$ 说明非齐次方程组通解为 $(x,y,z)^{\mathrm{T}} = (x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}} + C(l,m,n)^{\mathrm{T}}$，这是过点 (x_0,y_0,z_0) 且与 (l,m,n) 平行的直线.

注 (B)表示三平面重合；(C)表示无交点；(D)表示三平面交于一点(请务必搞清楚线性代数与几何之间的类似联系).

(13)(D).本题实质是考查一般矩阵的相似对角矩阵问题，这里 $\lambda = 1$ 是二重特征根，只有(D)可对应两个线性无关的特征向量，故选(D).

(14)(D).$P(\bar{A}\bar{B}) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+P(AB) = 1-P(A)-P(B)$

$P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-P(A))(1-P(B)) = 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$

因为 $P(A)P(B) > 0$，所以 $P(\bar{A}\bar{B}) \neq P(\bar{A})P(\bar{B})$，即 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 是不相互独立的，应选(D).

注 不能选(A)、(B)可举反例：由 $P(A)P(B) > 0$ 可知 $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$.

若 $A\cup B \neq \Omega$，则 $\bar{A}\bar{B} = \overline{A\cup B} \neq \varnothing$，所以不能选(A).若 $A\cup B = \Omega$，则 $\bar{A}\bar{B} = \overline{A\cup B} = \varnothing$，所以 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 是互不相容，因此不能选(B).

三、解答题

(15)证 右边不等式由 $\sin t^2$ 在 $[\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$ 中取负值，知

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin t^2 \mathrm{d}t + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 \mathrm{d}t < \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin t^2 \mathrm{d}t < \int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi} \qquad (4\text{ 分})$$

再证左边不等式，为此令 $t = \sqrt{u}$，$\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$，则

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right) \qquad (8\text{ 分})$$

在 $\int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ 中，令 $u = x + \pi$，则

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = -\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\pi}}\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+\pi}}\mathrm{d}u$$

故

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\mathrm{d}u > 0 \qquad (12\text{ 分})$$

(16)解 (直接计算法)记 S_1，S_2，S_3 依次为 S 的下底、上底和圆柱面，则由对称性知

$$\iint_{S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{S_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=0$$

及 $\iint_{S_1}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=-\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$，$\iint_{S_2}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$

因此 $\iint_{S_1+S_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$ （6 分）

在 S_3 上 $\iint_{S_3}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$ （8 分）

记 S_3 在 yoz 面上的投影域为 D_{yz}：$-R\leqslant y\leqslant R$；$-R\leqslant z\leqslant R$，则

$$\iint_{S_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y\int_0^R\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=\frac{\pi^2}{2}R$$

故 $\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\pi^2}{2}R$ （12 分）

（17）解 记 $a_n=(-1)^n(\cos\frac{1}{n})^{n^3}$，则 $|a_n|=(\cos\frac{1}{n})^{n^3}$ （2 分）

$$\sqrt[n]{|a_n|}=(\cos\frac{1}{n})^{n^2}=e^{n^2\ln(\cos\frac{1}{n})}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\cos\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln(1+\cos\frac{1}{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\cos\frac{1}{n}-1)$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{2}$$ （10 分）

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=e^{-\frac{1}{2}}<1$

由柯西检根判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故原极数绝对收敛. （12 分）

（18）解 设过原点的直线为 $y=kx$，则 D 内任一点到此直线距离平方为

$$d^2=\frac{(kx-y)^2}{1+k^2}=\frac{k^2x^2+y^2-2kxy}{1+k^2}$$ （3 分）

故转动惯量为 $J=\iint_D\frac{k^2x^2+y^2-2xyk}{1+k^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由 D 关于 x、y 的对称性知 $\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因此

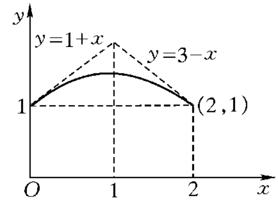
$$J=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{2k}{1+k^2}\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （6 分）

只要求 $\frac{2k}{1+k^2}$ 的最大、最小值. 当 $k>0$，$\frac{2k}{1+k^2}\leqslant1$，等号仅当 $k=1$ 时成立，即 $k=1$ 时 $\frac{2k}{1+k^2}$ 最大；$k<0$ 时，$k=-1$ 时 $\frac{2k}{1+k^2}$ 最小. （8 分）

故 $J_{\max}=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{84}+\frac{1}{280}=\frac{13}{840}$

$J_{\min}=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{84}-\frac{1}{280}=\frac{7}{840}$ （12 分）

（**19**）**证**　如图，曲线 $y=f(x)$ 向下凹，故切线 $y=1+x$ 和 $y=3-x$ 在曲线上方，而弦 $y=1$ 在曲线下方，即先证明 $f(x)\geqslant 1$.



由 $f''(x)<0$，故，在 $[0,2]$ 上，$f(x)$ 不可能在 $(0,2)$ 内取最小值，故 $f(0)=f(2)=1$ 是最小值，故 $f(x)\geqslant 1$，从而

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 2 \qquad (3\text{ 分})$$

再证在 $[0,1]$ 上，$f(x)\leqslant 1+x$，只需用泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2\leqslant 1+x \qquad (5\text{ 分})$$

同样，在 $[1,2]$ 上，$f(x)\leqslant 3-x$，亦可用泰勒公式

$$f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-2)^2\leqslant 3-x \qquad (8\text{ 分})$$

于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

即

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3 \qquad (10\text{ 分})$$

（**20**）**解**　（1）在 $\boldsymbol{A}$ 的最上方加一行 m 个元素构成的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，则 $D_1,D_2,\cdots,D_m$ 恰为 $\boldsymbol{B}$ 的第一行各元素的余子式，而 $D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的第一行各元素的代数余子式，由行列式的性质，从 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行（即从 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行）开始，每行元素与 $D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m$ 对应乘积之和均为零，因此

$$\boldsymbol{A}(D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

此即表明 $(D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m)^{\mathrm{T}}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.　(4 分)

（2）由题意，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 $m-1$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量，而 $(D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m)^{\mathrm{T}}$ 为非零解向量，所以 $(D_1,-D_2,\cdots,(-1)^{m+1}D_m)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.　(8 分)

（**21**）**解**　（1）由题设，存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$$

于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$，令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CQ}$，而 $\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{CQ})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{QC}$，所以 $\boldsymbol{CQ}$ 与 $\boldsymbol{QC}$ 相似，即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{QC}$ 相似，从而有相同的特征值，又

$$\boldsymbol{QC}=\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$$

这表明 $\boldsymbol{QC}$ 与单位矩阵合同，所以 $\boldsymbol{QC}$ 为正定矩阵，其特征值全大于零，于是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零.　(6 分)

（2）令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$，显然它们均为正定矩阵，由于 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix}$ 不是对称矩阵，所以 $\boldsymbol{AB}$ 不是正定矩阵.　(10 分)

（**22**）**解**　（1）设 $A=\{$取到一枚正品$\}$，$B=\{$投一枚硬币 3 次都出现国徽$\}$，则

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3\Big/\left[\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}\cdot 1\right]=\frac{1}{9}\qquad（6 分）$$

（2）$P\{$至少出现一次国徽$\}=1-P\{$没出现国徽$\}$

$$=1-(\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^k+\frac{1}{2}\cdot 0)=1-\frac{1}{2^{k+1}}\qquad（9 分）$$

（23）解　（1）当 $x\leqslant\mu$ 时 $F_X(x)=0$，

当 $x>\mu$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_Z(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{x}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}$　（3 分）

（2）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=\mu+\theta$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\ \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=\mu^2+2\theta(\mu+\theta)$　（5 分）

$DX=EX^2-(EX)^2=\theta^2$

所以由方程 $EX=\mu+\theta,DX=\theta^2$ 联立解得 $\theta=\sqrt{DX}$，$\mu=EX-\sqrt{DX}$，故 θ 和 μ 的矩估计量分别为：$\hat{\theta}=\sqrt{B_2}$，$\hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{B_2}$（其中 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$）

写出似然函数 $\ln L(\mu,\theta)$ 后，令$\frac{\partial\ln L(\mu,\theta)}{\partial\theta}=0$ 解得 $\hat{\theta}=\bar{x}-\hat{\mu}$，由$\frac{\partial\ln L(\mu,\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}>0$，经分析可得 $\hat{\mu}=\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}x_i$，故 μ 和 θ 的最大似然估计量为 $\bar{\mu}=\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}X_i$，$\bar{\theta}=\overline{X}-\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}X_i$.

（9 分）