非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研

数学三

根据2006年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10套题

赠答疑卡

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列

数学考研

2006 版

模 拟 考 试 试 卷

数学三

（共 10 套，附解答与评分参考）

主编　龚冬保

王寿生　褚维盘　魏战线（高等数学）

崔荣泉（线性代数）　周家良（概率统计）

西安交通大学出版社

· 西安 ·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学三)2006版/龚冬保主编.—西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

Ⅰ.数... Ⅱ.龚... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第082616号

书　　名　数学考研模拟考试试卷(数学三)2006版
主　　编　龚冬保
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷　西安市新城区兴庆印刷厂
字　　数　188千字
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8
版　　次　2005年10月第4版　2005年10月第1次印刷
书　　号　ISBN 7-5605-1591-6/O·191
定　　价　48.00(本卷12.00元)

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上，严格按《2006 年数学考试大纲》的要求，以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用，特作以下提示：

1. 考前演习为实战　模拟试卷认真练

一定要按考试的要求，像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间，可用闹钟定时到 10:45，而于 8:00 打开试卷开始“考试”，闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的 10 套模拟卷，至少隔 3 天，最多隔一周做上一套，效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷　卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者，除了像考试一样做相关的 10 套题之外，还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法，但 10 套试卷题量有限，难免还有遗漏，参考一下其余试卷，可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快　总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法，在不出错的前提下快速完成，这是巧准快的意思。每做完一套试卷后，要认真总结分析，对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白；对于做错的题，检查错在哪里：概念？方法？还是运算？对于做对的题，总结一下还有没有更好的方法，更快的途径。为此，我们特为设计了总结记录表，希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增　沉着应试展才能

每做一套模拟题后，不仅要作解题方法方面的总结，还要从应试策略方面不断做调整。从 2004 年起试卷模式上的重大变化是客观题占 56 分。因此，加强基本运算能力，训练用最简洁的步骤做填空题；加强对基本概念的理解，用最灵活的方法做选择题，力争在 60 分钟内将这 56 分拿到手。作解答题时，要坚持先易后难的原则，即先做那些感到熟悉的、容易得分的题，后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题，再作线性代数题，尤其是数学三、四的试卷中，这两部分解答题占 52 分，仅有 4 道题，一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这 52 分，加上客观题共有 108 分之多！我们模拟试卷估计会比正式考题难些，考前像正式考试一样去做这些题，正式考时，像平时作模拟题一样的心态去应试，方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥，充分展示你的才能，考出理想成绩。

最后，我们强调要反复做模拟题，从做第二遍起，要把练习基本功作为重点，对会做的题一定要一遍做对，不断总结不丢分和多得分的应试策略，这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要，只要会做基本题，临场不慌不乱，也是能考出理想成绩的。

考研成功！

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 2	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 4	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 5	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 6	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 8	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 9	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 10	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试试卷 1

数 学 三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 已知 $\int e^{-x} f(x) dx = \arctan e^{x} + C$,那么 $\int f(x) dx =$ ________.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{\cos x})^{\mathrm{cse}^2 x} =$ ________.

(3) 若幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ax + \frac{1}{2})^k (a > 0)$. 收敛区间为 $(-\frac{1}{2}, b)$. 则 $b =$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}| = |2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}| = |3\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{A}| = 0$,则 $|3\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}^*| =$ ________.

(5) 设 $P(A) = 1, P(B) = 0.7$,则 $P(AB) =$ ________.

(6) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且都服从区间 $[-1, 1]$ 上的均匀分布则 $E|X - Y| =$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 若 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ a e^{x} + b e^{-x}, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 处处可导,则(   ).

(A) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

(B) $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

(C) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$

(D) $a = 1, b = 0$

(8) 设 $f(x)$ 在 $(a-1,a+1)$ 内可导,且 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续,及 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=2$,则(　).

(A) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(B) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) $f(x)$ 在 $(a-1,a+1)$ 是单调函数

(9) 设 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ \sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$,则(　).

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导　　(B) $F(x)$ 在 $x=0$ 不连续

(C) $x=1$ 是 $F(x)$ 的极值点　　(D) $F(\pi)=3\dfrac{2}{3}$

(10) 设 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$,则(　).

(A) $a=-2,b=2$　　(B) $a=2,b=-2$

(C) $a=-3,b=3$　　(D) $a=3,b=-3$

(11) 已知某一阶线性微分方程有两个特解:$y=2\sin x+x\cos x$ 及 $y=x\cos x-\sin x$,则此方程是(　).

(A) $y'\sin x-y\cos x=x\sin x\cos x$　　(B) $y'-y\cos x=\cos x-x$

(C) $y'\sin x-y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x-x$　　(D) $y'-y\cos x=\sin x-x$

(12) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+x_n^2$,则(　).

(A) $|\boldsymbol{A}|>|\boldsymbol{B}|$　　(B) $|\boldsymbol{A}|<|\boldsymbol{B}|$

(C) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　(D) $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 关系无法确定

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$r(\boldsymbol{A})=n-1$,则 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*]=$(　).

(A) n　　(B) $n-1$　　(C) 1　　(D) 0

(14) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ、σ^2 均未知. 现从中随机抽取 11 个零件,测得样本标准差为 3,则 σ^2 的置信度为 0.90 的置信区间是(　).

(A) $\left(\dfrac{30}{\chi^2_{0.1}(10)},\dfrac{30}{\chi^2_{0.9}(10)}\right)$　　(B) $\left(\dfrac{30}{\chi^2_{0.9}(11)},\dfrac{30}{\chi^2_{0.1}(11)}\right)$

(C) $\left(\dfrac{90}{\chi^2_{0.05}(10)},\dfrac{90}{\chi^2_{0.95}(10)}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{90}{\chi^2_{0.9}(11)},\dfrac{90}{\chi^2_{0.1}(11)}\right)$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 计算 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x$.

（16）（本题满分 8 分）某种商品的需求量 Q 是单价 P（单位元）的函数，$Q=12000-8P$，商品的总成本 $C=25000+50Q$；每件商品税费 2 元，求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

（17）（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 可微，且 $f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$. 求 $x^2z'_x+y^2z'_y$.

（**18**）**（本题满分 9 分）** 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且 $f(1)=3\int_{1/3}^{2/3}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

（**19**）**（本题满分 8 分）** 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant\pi\}$.

(20)(本题满分 13 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$

(i) 写出二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(ii) 求一正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,将此二次型化为标准形.

(21)(本题满分 13 分) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, a_1 \neq 0. \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$

(i) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解;

(ii) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值与对应的特征向量.

(22)(本题满分 13 分) 已知二维随机变量的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cx\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求(i)C 的值;

(ii) 关于 X、Y 的边缘概率密度,并判断 X、Y 是否独立;

(iii)$Z=\max(X,Y)$ 的概率密度.

（23）**（本题满分 13 分）** $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$ 是来自总体 $X\sim N(2,16)$ 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}X_i$，令

$$Y=C\frac{\overline{X}-2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{25}(X_i-\overline{X})^2}}$$

确定 C，使 Y 服从 t 分布，并指出自由度.

试卷(一)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C}$. 由所给等式两边求导得 $e^{-x}f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$,故 $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$,$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$.

(2) $\underline{e^{-\frac{1}{4}}}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{2\sin^2x}\ln(1+\cos x-1)}=e^{-\frac{1}{4}}$

(3) $\underline{\frac{1}{6}}$. 由 $-1<ax+\frac{1}{2}<1$,得 $-\frac{3}{2}<ax<\frac{1}{2}$,$-\frac{3}{2a}<x<\frac{1}{2a}$,故 $a=3$,$b=\frac{1}{6}$.

(4) $\underline{-126}$. 由已知等式知 1、-2 和 $-\frac{3}{2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3/2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$. $|\boldsymbol{A}|=3$. 故由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 知 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $3,-\frac{3}{2},-2$,

$$|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|3\boldsymbol{E}-2\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3/2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-3&0&0\\0&6&0\\0&0&7\end{vmatrix}=-126.$$

(5) $\underline{0.7}$. $P(A)=1$,则 $P(\bar{A})=0$,及 $P(\bar{A}\bar{B})\leqslant P(\bar{A})=0$,$P(AB)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-(P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B}))=0.7$.

注 本题的特殊解法:设 A 是必然事件,则 $AB=B$,$P(AB)=P(B)=0.7$.

(6) $\underline{\frac{2}{3}}$. $E|X-Y|=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}|x-y|dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dx\int_{x}^{1}(x-y)dy=\frac{2}{3}$.

二、选择题

(7) (B). 由连续性知 $a+b=1$,再由可导性知 $a-b=-\frac{1}{2}$,解得 $a=\frac{1}{4}$,$b=\frac{3}{4}$.

(8) (A). 由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=2$ 知,$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=0$ 及 $f''(a)=2$. 故 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 选(A).

(9) (D). $F(\pi)=\int_{-1}^{0}(1-t^2)dt+\int_{0}^{\pi}\sin x dx=\frac{5}{3}+2=\frac{11}{3}$,选(D).

(10) (B). **解 1** 由已知 $du=(axy^3dx+3x^2y^2dy)-y^2\cos x dx+by\sin x dy+dy=(\frac{a}{2}y^3dx^2+x^2dy^3)-y^2d\sin x+\frac{b}{2}\sin x dy^2+dy$

因此 $a=2$,$b=-2$ 时 $du=d(x^2y^3-y^2\sin x+y)$ 成立. 选(B).

解 2 由已知得 $u'_x=axy^3-y^2\cos x$,$u'_y=1+by\sin x+3x^2y^2$,显然二阶导数连续,因此 $u''_{xy}=u''_{yx}$ 即

$3axy^2-2y\cos x=by\cos x+6xy^2$. 故 $a=2$,$b=-2$.

(11)(C). **解 1**　由两个特解可知方程通解为 $y = C\sin x + x\cos x, y' = C\cos x + \cos x - x\sin x$. 消去 C 得 $y'\sin x - y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x - x$.

解 2　可知 $C\sin x$ 是齐次方程的通解，$x\cos x$ 是特解，代入方程 $y'\sin x = \cos x\sin x - x\sin^2 x, -y\cos x = -x\cos^2 x$.

故 $y'\sin x - y\cos x = \cos x\sin x - x = \dfrac{1}{2}\sin 2x - x$. 选(C).

(12)(B). $|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| + \boldsymbol{A}_{nn}$. $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\boldsymbol{A}_{nn} > 0$.

故 $|\boldsymbol{B}| > |\boldsymbol{A}|$，选(B).

(13)(D). 由 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$ 知 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$，从而 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*] = 0$.

(14)(C). 从已知知，σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间：应为 $\left(\dfrac{(n-1)\sigma^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)\sigma^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$.

三、解答题

(15) **解**　令 $e^x - 2 = t^2$，则 $x = \ln(2+t^2)$. $e^x dx = 2t dt$.　(3 分)

$$\text{原积分} = 2\int \ln(2+t^2)dt = 2t\ln(1+t^2) - 4\int \frac{t^2}{2+t^2}dt$$

$$= 2t\ln(1+t^2) - 4t + 8\int \frac{dt}{2+t^2} = 2t\ln(1+t^2) - 4t + 4\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= 2x\sqrt{e^x-2} - 4\sqrt{e^x-2} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}} + C.$$　(9 分)

(16) **解**　销售利润额为

$L = (12000-8P)(P-2) - [25000 + 50(12000-80P)]$

$= -80P^2 + 16160P - 649000$　(3 分)

令 $\dfrac{dL}{dP} = -160P + 16160 = 0$，得 $P = 101$. $\dfrac{d^2L}{dP^2} = -160 < 0$

因此 $P = 101$ 是最大值点，即销售单价为 101 元时利润额最大.

最大利润额是 $L = 167080$ 元　(8 分)

(17) **解**　由 $df(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}) = d(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x})$ 得

$$f'(\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}) = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$　(4 分)

故　$z'_x = \dfrac{1}{x^2}(1-f')z^2$；$z'_y = \dfrac{z^2}{y^2}f'$.

因此
$$x^2 z'_x + y^2 z'_y = z^2$$　(8 分)

(18) **解**　由 $\dfrac{f(x)}{x}$ 连续，由积分中值定理知，存在 $\eta \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$，使 $f(1) = \dfrac{f(\eta)}{\eta}$.(3 分)

在 $[\eta, 1]$ 上，令 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$，则 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件　(7 分).

故存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0,1)$，使 $F'(\xi) = 0$. 即 $\dfrac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0$.

即 $$\xi f'(\xi) = f(\xi).$$ （9 分）

（19）解 $$I = \iint\limits_D \sin x \cos y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \cos x \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \int_0^{x} \cos y \mathrm{d}y + \int_0^{\pi} \sin y \mathrm{d}y \int_y^{\pi} \cos x \mathrm{d}x$$ （3 分）

$$= \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \int_0^{x} \cos y \mathrm{d}y + \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \int_x^{\pi} \cos y \mathrm{d}y$$ （6 分）

$$= \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \cdot \int_0^{\pi} \cos y \mathrm{d}y = 0$$ （8 分）

（20）解 (i) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

因此 $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ （4 分）

(ii) $$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$ （7 分）

求对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 的特征向量，即解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

得 2 个正交的单位向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$

而求对应 $\lambda_3 = 0$ 的特征向量方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

得 $\boldsymbol{\xi}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$ （10 分）

因此 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$，

作正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，可化二次型为标准形

$$f = 3(y_1^2 + y_2^2)$$ （13 分）

（21）解 (i) 由 $1 \leqslant r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha\alpha})^{\mathrm{T}} \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}) = 1$，因此方程组等价于方程：$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ $(a_1 \neq 0)$. 从而此方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

方程组的通解为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$ （7 分）

(ii) 由(i) 知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值，因此，其非零的特征值是 $\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.（10 分）

由 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)\boldsymbol{\alpha}$. 故对应于非零特征值 λ_n 的特征向量为 $c\boldsymbol{\alpha}$.（写成 $\boldsymbol{\alpha}$ 不扣分）.

（13 分）

(22) 解 (i) 由 $1=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}cx\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-x(1+y)})\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}x=c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=c$，得 $c=1$. （4 分）

(ii) 当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$

当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(1+y)^2}$.

因为在 $x>0,y>0$ 上

$$x\mathrm{e}^{-x(1+y)}=f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)=\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{(1+y)^2}$$

故 X,Y 不独立. （9 分）

(iii) 当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant z\\0\leqslant y\leqslant z}}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x(1+z)})\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}+\frac{1}{1+z}(\mathrm{e}^{-z(z+1)}-1)$$

故

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}(1-\mathrm{e}^{-z(1+z)})-\dfrac{2z+1}{1+z}\mathrm{e}^{-z(1+z)}, & z>0\\0, & z\leqslant 0\end{cases}$$ （13 分）

(23) 解 由 $EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\dfrac{2}{\theta\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{\sqrt{\pi}}$ 得 $\theta=\sqrt{\pi}EX$，故 θ 的矩估计量为：$\hat{\theta}=\sqrt{\pi}\overline{X}$.

（4 分）

当 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n$ 时

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}}=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^n\frac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$\ln L(\theta) = n\ln\frac{2}{\sqrt{\pi}} - n\ln\theta - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$ （10 分）

令 $\frac{\mathrm{d}\ln(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$，解得 $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$，故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

（13 分）

数学考研模拟考试试卷 2

数 学 三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{\dfrac{n-1}{n+1}}-1\right)=$ ________.

(2) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=3\times 2^t$ 的通解是________.

(3) 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{n^2}x^n\,(a>0)$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$,则 a ________.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^T$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, n 为正整数,则 $|\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{E}|=$ ________.

(5) 设 A、B 是两个随机事件,且 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$,当 A、B 满足条件__________时,$P(AB)$ 取得最小值____________. 当 A、B 满足条件____________时,$P(AB)$ 取得最大值________.

(6) 假设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均为未知参数,从总体 X 中抽取容量为 16 的样本均值为 2.125 0,样本标准差为 0.017 1,则 μ 的置信度为 90% 的置信区间为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 D 是以原点为中心,半径为 r 的圆域,则 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( ).

(A) π　　(B) 1　　(C) $\dfrac{1}{\pi}$　　(D) 0

(8) 若 $0<a_n\leqslant\dfrac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, 则下列级数中肯定收敛的是( ).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{a_n^2}$

(9) 设 $x\in[-2,3]$ 时，$f(x)$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则下列运算正确的是(　).

(A) $\int_{-2}^{x} f(t)\mathrm{d}t = F(x)$　　(B) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t = F'(x)$

(C) $\int_{-2}^{x} F'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{x} f(t)\mathrm{d}t + C$

(10) 设 $y=(x-C_1+C_2\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$ 是某微分方程的通解. 则这个方程是(　).

(A) $y''+y'=-\mathrm{e}^{-x}$　　(B) $y''+y'=\mathrm{e}^{-x}$

(C) $y''+y=-\mathrm{e}^{-x}$　　(D) $y''+y=\mathrm{e}^{-x}$

(11) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x_0 f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}=$(　).

(A) $x_0 f'(x_0)+f(x_0)$　　(B) $x_0 f'(x_0)-f(x_0)$

(C) $f'(x_0)+x_0 f(x)$　　(D) $f'(x_0)-x_0 f(x_0)$

(12) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则(　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆而 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{A}$ 不可逆而 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{A}$ 不可逆且 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 不可逆　　(D) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示交换 n 阶单位矩阵的第 i、j 两行得到的初等矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　).

(A) 合同且相似　　(B) 合同不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 不合同也不相似

(14) 设自由度为 n 的 t 分布的概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，则对任何实数 a，等式成立的是(　).

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $F(-a)=1-\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

(C) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

三、解答题(本题共 9 小题，总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设函数 $f(x)$ 有一阶连续导数，$f''(0)$ 存在，且 $f(0)=0$. 又函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

(1) 确定常数 a 的值，使 $g(x)$ 处处连续；

(2) 对(1)中确定的 a，讨论 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

（16）（本题满分 8 分） 已知 $x^2\sin y + e^x \arctan z - \sqrt{y}\ln z = 3$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

（17）（本题满分 8 分） 设某种商品的单价为 p 时，售出的商品数量为 $Q = \frac{\ln p}{p^2}$.

（1）求 p 在何范围变化时，使相应销售额增加或减少；

（2）要使销售额最大，商品单价 p 应取何值?最大销售额是多少?

（18）**（本题满分 9 分）** 计算 $\int_0^{4\pi}(\sqrt{1+\cos x}+2\sqrt{1-\cos x})\mathrm{d}x$.

（19）**（本题满分 8 分）** 设函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x \leqslant 0 \\ \sqrt{2x-x^2}, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$，求 $I=\int_{-5}^{-1} f(x+2)\mathrm{d}x$.

（20）**（本题满分 13 分）** 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 依次是属于它们的特征向量. 试判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),\ \boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$$

的线性相关性.

（21）**（本题满分 13 分）** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

证明：(1) 若 $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$ 有解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一组解 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 必满足 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$；

(2) $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} \\ 1\end{pmatrix}$ 无解，其中 $\boldsymbol{0}$ 为 m 维零列向量.

(22)**(本题满分 13 分)** 设事件 A、B 相互独立,$AB \subset D$,$\overline{A}\overline{B} \subset \overline{D}$,证明:$P(AD) \geqslant P(A)P(D)$.

(23)**(本题满分 13 分)** 设做一次试验的费用为 1000 元,如果试验失败,则要另外再花 300 元用于对试验设备作调整,才能进行下一次的试验. 各次试验是相互独立的,成功的概率均为 0.2,并假定试验要一直进行到出现成功为止,问整个试验程序所需费用的期望值是多少?

试卷(二)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad -\frac{2}{3} \quad}$. 原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{-2}{n+1}\right)^{1/3}-1}{\dfrac{1}{n}} \left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$

$$\xlongequal{(注)} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{3}\,\dfrac{-2}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\,\frac{n}{n+1}\right) = -\frac{2}{3}$$

注 利用:当 $x\to 0$ 时,$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$,以及等价无穷小代换定理.

(2) $\underline{\quad y_t = (C+\frac{3}{2}t)\cdot 2^t \quad}$ 对应齐次方程的通解 $y_t = C\cdot 2^t$,特解 $y_t^* = b_0 t\cdot 2^t$. b_0 为待定系数,代入原方程后,比较同类项得 $b_0 = \dfrac{3}{2}$,通解 $= C\cdot 2^t + \dfrac{3}{2}t\cdot 2^t = (C+\dfrac{3}{2}t)\cdot 2^t$.

(3) $\underline{\quad <1 \quad}$,因为 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}} = \dfrac{1}{a^{2n+1}}$,当且仅当 $a<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = +\infty$,所以 $a<1$.

(4) $\underline{\quad 2^n - 1 \quad}$. $\boldsymbol{A}^n = 2^{n-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$,

$$|\boldsymbol{A}^n - \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2^{n-1}-1 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}-1 \end{vmatrix} = 2^n - 1$$

(5) $\underline{\quad A\cup B=\Omega \quad}$; $\underline{\quad 0.3 \quad}$; $\underline{\quad A\subset B \quad}$; $\underline{\quad 0.6 \quad}$. 由加法公式可得 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$,故当 $A\cup B = \Omega$ 时,$P(AB)$ 取得最小值 0.3;当 $A\subset B$ 时,$P(AB)$ 取得最大值 0.6.

注 由于 $P(A) = 0.6 \neq P(B) = 0.7$,所以 $AB \neq \varnothing$,故 $P(AB)$ 的最小值不可能为 0.

(6) $\underline{\quad (2.117,\ 2.133) \quad}$;方差未知时,$\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

将 $\bar{x} = 2.1250$,$s = 0.0171$,$\alpha = 0.10$,$t_{0.05}(15) = 1.7531$,$n = 16$ 代入可算得所求置信区间为(2.117, 2.133).

二、选择题

(7)(B). 由二重积分的中值定理知,$\exists(\xi,\eta)\in D$,使

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,dx\,dy = e^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2$$

故

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,dx\,dy = \lim_{r\to 0} e^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi+\eta) = 1$$

(**8**)(A). $a_n^2 < \dfrac{1}{n^2}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛知选(A).

(**9**)(D). $\int_{-2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,故选(D). 注意,(B) 中 $\int f(t)\mathrm{d}t$ 是 t 的函数,不定积分与积分变元是相关的.

(**10**)(A). **解 1.**(消参数法). $y' = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{-x}$, $y'' = -2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} - C_1\mathrm{e}^{-x}$,故 $y'' + y' = -\mathrm{e}^{-x}$. 选(A).

解 2. 从通解 $y = x\mathrm{e}^{-x} - C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2$ 知方程是常系数的二阶线性方程:$y'' + y' = A\mathrm{e}^{-x}$,以 $y = x\mathrm{e}^{-x}$ 代入得 $A = -1$.

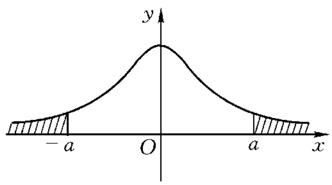
(**11**)(B). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} - f(x_0) = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$. 选(B).

注意. 本题如用洛必达法则作立刻可得 $x_0 f'(x_0) - f(x_0)$ 的结果,但这种作法是不对的:一来用到 $f'(x)$,题中只说 $f(x)$ 在 x_0 点可导故 $f'(x)$ 是否存在已成问题,加以 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f(x_0)$ 更要用到 $f'(x)$ 在 x_0 点连续的条件!

(**12**)(D). 由所给等式得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B}$ 均可逆,这就排除了(A)、(B)、(C),应选(D). 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$,故有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

(**13**)(A). 因$(\boldsymbol{E}_{ij})^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$,$(\boldsymbol{E}_{ij})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_{ij}$,所以选(A).

(**14**)(C). 由 t 分布的概率密度 $f(x)$ 的图形(见图)及概率的几何意义,易判断应选(C).



三、解答题

(**15**)**解** (1) $a = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$. (3 分)

(2) 当 $x \neq 0$ 时,有 $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

而 $$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0) \qquad (6\text{ 分})$$

又 $$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad \left(\begin{array}{l}\text{请读者考虑:这里}\\ \text{能用洛必达法则吗?}\end{array}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x) - xf'(0) + xf'(0) - f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$$

$$\overset{[\text{注}]}{=\!=\!=} f''(0) - \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{2x}$$

$$= f''(0) - \frac{1}{2}f''(0) = \frac{1}{2}f''(0).$$

所以

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，$g'(x)$ 在任意 $x\neq 0$ 处连续是显然的，故 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在而且连续. (9 分)

［注］第一式用导数的定义，第二式用洛必达法则.

(16) 解 1 设 $F(x,y,z)=x^2\sin y+e^x\arctan z-\sqrt{y}\ln z-3$

则 $$F'_x=2x\sin y+e^x\arctan z,\ F'_y=x^2\cos y-\frac{1}{2\sqrt{y}}\ln z,\ F'_z=\frac{e^x}{1+z^2}-\frac{\sqrt{y}}{z}$$ (3 分)

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{z(1+z^2)(2x\sin y+e^x\arctan z)}{e^xz-\sqrt{y}(1+z^2)}$$ (6 分)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{z(1+z^2)(2\sqrt{y}x^2\cos y-\ln z)}{2\sqrt{y}[e^xz-\sqrt{y}(1+z^2)]}$$ (8 分)

解 2 方程两边取微分的

$$2x\sin y\mathrm{d}x+x^2\cos y\mathrm{d}y+e^x\arctan z\mathrm{d}x+\frac{e^x\mathrm{d}z}{1+z^2}-\frac{\ln z}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y-\frac{\sqrt{y}}{z}\mathrm{d}z=0$$ (3 分)

故 $$\frac{(1+z^2)\sqrt{y}-ze^x}{z(1+z^2)}\mathrm{d}z=(2x\sin y+e^x\arctan z)\mathrm{d}x+(x^2\cos y-\frac{\ln z}{2\sqrt{y}})\mathrm{d}y$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z(1+z^2)(2x\sin y+e^x\arctan z)}{(1+z^2)\sqrt{y}-ze^z}$$ (6 分)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z(1+z^2)(2\sqrt{y}x^2\cos y-\ln z)}{2\sqrt{y}[(1+z^2)\sqrt{y}-ze^x]}$$ (8 分)

(17) 解 (1) 销售额 $R=pQ=\dfrac{\ln p}{p}$, (3 分)

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{1-\ln p}{p^2}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p}=0$，得 $p=e$.

当 $0<p<e$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}>0$，销售额 R 增加；当 $p>e$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}<0$，销售额 R 减少. (6 分)

(2) 由(1)知当 $p=e$ 时，销售额取最大值，最大销售额为 $\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$. (8 分)

(18) 解 1 被积函数是以 2π 为周期的周期函数. 故

$$\text{原式 } I=2\int_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{1+\cos x}+2\sqrt{1-\cos x})\mathrm{d}x$$ (3 分)

$$=4\int_0^{\pi}(\sqrt{1+\cos x}+2\sqrt{1-\cos x})\mathrm{d}x$$ (6 分)

$$=4\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=8\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}(\cos t+2\sin t)\mathrm{d}t=24\sqrt{2}$$ (9 分)

解 2 $I=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right|+2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)\mathrm{d}x$ （3 分）

$=8\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t+4\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t$ （6 分）

$=16\sqrt{2}+4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos t\mathrm{d}t-4\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos t\mathrm{d}t$

$=16\sqrt{2}+8\sqrt{2}=24\sqrt{2}$ （9 分）

（19）解 令 $x+2=u$，则

$$I=\int_{-3}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-3}^{0}u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u+\int_0^1\sqrt{2u-u^2}\mathrm{d}u. \qquad （2 分）$$

其中

$$I_1=\int_{-3}^{0}u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\int_{-3}^{0}u\mathrm{d}\mathrm{e}^{-u}=-u\mathrm{e}^{-u}\Big|_{-3}^{0}+\int_{-3}^{0}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=-3\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-u}\Big|_{-3}^{0}=-2\mathrm{e}^3-1. \qquad （5 分）$$

$$I_2=\int_0^1\sqrt{2u-u^2}\mathrm{d}u=\int_0^1\sqrt{1-(u-1)^2}\mathrm{d}u\overset{令\,u-1=\sin t}{=\!=\!=\!=} \qquad （7 分）$$

$$\overset{令\,u-1=\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4},（或直接利用定积分的几何意义得\ I_2=\frac{\pi}{4}）$$

所以
$$I=I_1+I_2=-2\mathrm{e}^3-1+\frac{\pi}{4}. \qquad （8 分）$$

（20）解 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$

$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3$ （4 分）

设 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$

即 $(x_1+\lambda_1x_2+\lambda_1^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+\lambda_2x_2+\lambda_2^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_1+\lambda_3x_2+\lambda_3^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$

（6 分）

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此

$$\begin{cases}x_1+\lambda_1x_2+\lambda_1^2x_3=0\\x_1+\lambda_2x_2+\lambda_2^2x_3=0\\x_1+\lambda_3x_2+\lambda_3^2x_3=0\end{cases} \qquad （9 分）$$

由 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同，范德蒙行列式 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq0$，故上述方程组只有零解，因此，所给三向量线性无关. （13 分）

（21）证 （1）若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 有解向量 $\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量，则有 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=0$，从而结论得证. （6 分）

（2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\neq r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\1\end{pmatrix}$ 无解.

（13 分）

（22）证 因为 $\overline{A}\overline{B}\subset\overline{D}$，所以有 $D\subset A\cup B$，进而还可推得 $\overline{B}D\subset(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}$，

（5 分）

又已知 $AB \subset D$,故 $$\begin{aligned} P(AD) &= P(ADB) + P(AD\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{B}D) \\ &= P(A)P(B) + P(\bar{B}D) \qquad (10 分) \\ &\geqslant P(A)P(BD) + P(A)P(\bar{B}D) \\ &= P(A)P(D) \qquad (13 分) \end{aligned}$$

(23)解 设 X 表示直到试验首次成功所需试验次数,则

$$P\{X = k\} = 0.8^{k-1} \times 0.2,\ k = 1,2,\cdots,n,\cdots$$

且费用 T 为

$$T = \begin{cases} 1\ 000, & X = 1 \\ 1\ 000 + (X-1) \times 1\ 300, & X \geqslant 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1\ 000, & X = 1 \\ 1\ 000 + 1 \times 1\ 300, & X = 2 \\ 1\ 000 + 2 \times 1\ 300, & X = 3 \\ 1\ 000 + 3 \times 1\ 300, & X = 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \qquad (6 分)$$

故

$$\begin{aligned} ET &= 1\ 000 \times P\{X = 1\} + \sum_{k=2}^{\infty} [1\ 000 + (k-1) \times 1\ 300] \times P\{X = k\} \\ &= 1\ 000 + 1\ 300 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \times 0.8^{k-1} \times 0.2 \\ &= 1\ 000 + 260 \left(\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) x^{k-1} \right) \Bigg|_{x=0.8} \\ &= 1\ 000 + 260 \left[x \left(\frac{x}{1-x} \right)' \right] \Bigg|_{x=0.8} \\ &= 1\ 000 + 260 \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) \Bigg|_{x=0.8} \\ &= 6\ 200(元) \qquad (13 分) \end{aligned}$$

数学考研模拟考试试卷 3

数学三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} =$ ________.

(2) 微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=3$, $y'(0)=7$ 的特解是________.

(3) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $f(x)>0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f\left(\frac{n}{n}\right)} = \underline{\qquad\qquad}$$

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 均为 n 维列向量,且行列式 $D=|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|=a$, M 表示 D 的每一列减去其它各列之和得到的行列式,则 $M=$ ________.

(5) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ 0.3, & -3\leqslant x<-1\\ 0.8, & -1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

则 $Y=X^3-1$ 的分布律为________.

(6) 已知随机变量 X、Y 相互独立,且 $DX=2DY$, 则 $2X+Y$ 和 $2X-Y$ 的相关系数为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u$, $g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是

$g(x)$ 的(　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价的无穷小

(8) 设 $y=y(x)$ 是方程 $(2xy-\cos x)\mathrm{d}x+(x^2-1)\mathrm{d}y=0$ 及条件 $y(0)=1$ 的解. 则 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}y(x)\mathrm{d}x=$(　)

(A) $-\ln 3$　　(B) $\ln 3$　　(C) $-\dfrac{1}{2}\ln 3$　　(D) $\dfrac{1}{2}\ln 3$

(9) 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 及 $y\geqslant x$ 所确定,则 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V\neq$(　).

(A) $\pi\int_0^1(1+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\dfrac{4\pi}{3}$　　(B) $2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x$

(C) $\pi\int_0^1[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2]\mathrm{d}y$　　(D) $2\pi\int_0^1(2-x)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x-\dfrac{4}{3}\pi$

(10) 设曲线 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'+(x^2-1)y=\mathrm{e}^y$ 及 $y(1)=0$,则此曲线过 $(1,0)$ 点的法线是(　).

(A) $x-y-1=0$　　(B) $x+y-1=0$

(C) $x+\mathrm{e}y-1=0$　　(D) $x-\mathrm{e}y-1=0$

(11) 设 $f(x)$ 为连续的偶函数,则(　).

(A) $f(x)$ 有一个原函数为偶函数　　(B) $f(x)$ 的所有原函数都是偶函数

(C) $f(x)$ 有一个原函数为奇函数　　(D) $f(x)$ 的所有原函数都是奇函数

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,且 $r(\boldsymbol{A})=n$,则下列结论不正确的是(　).

(A) 若有 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(B) 对任何有 n 行的矩阵 $\boldsymbol{B}$,必有 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$

(C) 必存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$

(D) 对任何有 m 列的矩阵 $\boldsymbol{B}$,必有 $r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　).

(A) 合同不相似　　(B) 相似不合同

(C) 合同且相似　　(D) 不相似也不合同

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值,则下列随机变量中服从 t 分布的是(　).

(A) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$　　(B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$

(C) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$　　(D) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2/n}}$

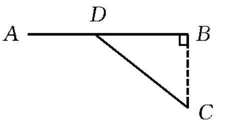
三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设 $f(x)=\begin{cases} ae^{x}+be^{-x}, & x\leqslant 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0 \end{cases}$,

试确定常数 a、b 的值,使 $f(x)$ 处处可导.

(16)(本题满分 8 分) 计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2-2x+3y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（17）（本题满分 8 分）如图，直的铁路线 AB 之长为 100(km)，工厂 C 在铁路线的一侧，$BC \perp AB$，BC 之长为 20(km). 已知每单位货物每公里运费，铁路与公路的运费之比为 3∶5. 现欲在铁路线 AB 上选一点 D，从 D 向工厂 C 修一条直的公路，使得从点 A 经铁路到 D，再从 D 经公路到 C 的货物总运费最小，试求点 D 的位置.



（18）（本题满分 9 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，函数

$$F(x) = \int_0^x (x - 2t) f(t) \mathrm{d}t.$$

证明：(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 也为奇函数；

(2) 若 $f(x)$ 为单调减函数，则 $F(x)$ 为单调增函数.

（19）（本题满分 8 分） 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[5]{1+2x^4}\,\mathrm{d}x}$的敛散性.

（20）（本题满分 13 分） 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}\neq 0$，试判断 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是否可对角化.

（21）（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵．证明：$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同（即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$）．

（22）（本题满分 13 分）甲、乙两厂生产同类型的产品，它们的寿命（单位：小时）分别为 X 和 Y，相互独立，概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-460)^2}{3\,200}},\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{360}{y^2} & y>360\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

假定产品寿命超过 460 小时才算合格．今从两厂的产品中各取一件，问其中至少有一件不合格的概率为多少？

（23）（本题满分 13 分） 设正态总体 X 的数学期望为 μ，方差为 σ^2，又设（$X_1^{(1)}$，$X_2^{(1)}$，…，$X_{n_1}^{(1)}$）和（$X_1^{(2)}$，$X_2^{(2)}$，…，$X_{n_2}^{(2)}$）是从总体 X 中取出的两个独立的简单随机样本，证明

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i^{(1)} - \overline{X}^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_i^{(2)} - \overline{X}^{(2)})^2 \right\}$$

是 σ^2 的无偏估计量，其中 $\overline{X}^{(j)} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} X_i^{(j)}$，$j = 1, 2$.

试卷(三)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad e^{-1}\quad}$. 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\exp\left\{\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}\right\}=e^{-1}$

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x\cdot(-\csc^2 x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\dfrac{x}{\sin x\cos x}\right]=-1.$

(2) $\underline{\quad y=(3+13x)e^{-2x}\quad}$ 常系数微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，解为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，故通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}$，将初始条件代入，解方程组可得 $c_1=3$，$c_2=13$，故所求特解为 $y=(3+13x)e^{-2x}$

(3) $\underline{\quad e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}\quad}$ 证 $a_n=\sqrt[n]{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\cdot f\left(\dfrac{2}{n}\right)\cdots f\left(\dfrac{n}{n}\right)}$

$\because$ $f(x)>0$，$\therefore$ $\ln a_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$ $\qquad\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}$

(4) $\underline{\quad (2-n)2^{n-1}a\quad}$

解 $$M=\left|(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\-1&1&-1&\cdots&-1\\-1&-1&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&1\end{pmatrix}\right|=a\begin{vmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\-1&1&-1&\cdots&-1\\-1&-1&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$=(2-n)2^{n-1}a$

(5)

Y	-28	-2	7
p	0.3	0.5	0.2

由 X 的分布函数可知它的分布律为

X	-3	-1	2
p	0.3	0.5	0.2

故 $Y=X^3-1$ 的分布律为

Y	-28	-2	7
p	0.3	0.5	0.2

(6) $\underline{\quad \dfrac{7}{9}\quad}$ $\quad\mathrm{Cov}(2X+Y,2X-Y)$

$=\mathrm{Cov}(2X,2X)-\mathrm{Cov}(2X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,2X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)$

$=4DX-DY=7DY$

$D(2X+Y)=4DX+DY=9DY$，$D(2X-Y)=4DX+DY=9DY$

故 $$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(2X+Y,\ 2X-Y)}{\sqrt{D(2X+Y)}\ \sqrt{D(2X-Y)}}=\frac{7DY}{9DY}=\frac{7}{9}.$$

二、选择题

(7)(A)因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{[1-\cos(\sin x^2)]2x\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{2[1-\cos(\sin x^2)]}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{\sin^2 x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{4x^3}=\infty \qquad 选(A).$$

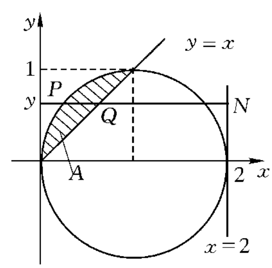
(8)(B). 方程可化为 $y\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}y-\mathrm{d}(\sin x+y)=0$

$$\mathrm{d}x^2y=\mathrm{d}(\sin x+y).$$

$$x^2y=\sin x+y+c.\ 由\ y(0)=1\ 得\ c=-1.$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}y\mathrm{d}x=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1-\sin x}{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{1/2}=\ln 3.$$

(9)(A). 本题可这样做:(A)、(C) 中有一个可能不等于 v;(B)、(D) 中也有一个可能不等于 v. 因此在(A)、(C) 中,只要看:$\int_0^1(2-y)^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(y-2)^3\Big|_0^1=\frac{7}{3}\neq\frac{4}{3}$,因此正确的选项在(A)、(C) 中如图用平面 $y=g$ 去截旋转体,截面域为圆环域,如图,圆环的内、外半径的长分别为



$$r=|QN|=2-y,$$

$$R=|PN|=2-(1-\sqrt{1-y^2})=1+\sqrt{1-y^2},$$

故得圆环域的面积为

$$S(y)=\pi(R^2-r^2)=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2],$$

于是得旋转体的体积为

$$V=\int_0^1 S(y)\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2]\mathrm{d}y,选(A).$$

注 (B) 用的是"薄壳法"即设图中 $P(x,\sqrt{2x-x^2})$. 过 P 作与 y 轴平行线交直线于(x,x)点,"薄壳"的高为 $\sqrt{2x-x^2}-x$,厚为 $\mathrm{d}x$,旋转半径为 $2-x$,故 $\mathrm{d}V=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x$,从而 $V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x$ 是对的.

(10)(B). 由于方程中,令 $x=1$,得 $y'(1)=1$. 故法线的斜率为-1,法线方程是 $x+y-1=0$,选(B).

(11)(C). 事实上,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,且由

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$$

知 $F(x)$ 为奇函数.

而 $f(x)$ 的其它原函数

$$G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C \qquad (C\text{ 为非零常数})$$

不满足 $G(0)=0$，因而 $G(x)$ 不是奇函数.

注 如令 $f(x)=x^2$，则 $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$，取 $C=1$，立刻可排除(A)、(B)、(C) 三个选项！

(12) (D). 如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1,-1)$，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$ 而 $r(\boldsymbol{B})=1$.

由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 只有零解，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，故(A) 正确. 对(B)，虽然 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$，又由于$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{B})$，这表明(B) 也是正确的. 由于 $\boldsymbol{A}$ 满列秩，所以一定可经初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 表 $(m-n)\times n$ 的零矩阵，即存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}_n\ \boldsymbol{O})_{n\times m}\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$，从而(C) 也是正确的.

(13) (C). 因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}$，且$(\boldsymbol{E}_{13})^{-1}=\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{E}_{13}^{\mathrm{T}}$，所以应选(C).

(14) (C). 生成 t 分布时，分子必须服从 $N(0,1)$ 分布，必须有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，所以(B) 不能选. 根号内的服从 χ^2 分布的随机变量必须除以它相应的自由度，但(A) 中 $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ 不服从 χ^2 分布，所以不能选(A)，(D) 中虽上两条都满足，但分子和分母的随机变量不一定独立，所以也不能选，只有选(C)，显然 $\overline{X}$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ 相互独立.

三、解答题

(15) 解 显然 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处可导，故 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

由于可导的必要条件是连续，得 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

即
$$\lim_{x\to 0^-}(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^x)=a+b=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x},$$

得
$$a+b=1. \qquad (3\text{ 分})$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$ 都存在而且相等，得
$$f'_-(0)=f'_+(0),$$

而
$$\begin{aligned}f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}f'(x)\\&=\lim_{x\to 0^-}(a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x})=a-b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{(1+x)2x}=-\frac{1}{2}\end{aligned} \qquad (7\text{ 分})$$

于是得 $$a-b=-\frac{1}{2} \tag{2}$$

综合(1)、(2)两式,解得 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$. （9 分）

(16) 解 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

因 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 关于 x 轴、y 轴及坐标原点均对称,所以

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4$$

（4 分）

又 $2x$,$3y$ 分别为 x 和 y 的奇函数,故 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

而 $2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^2$, 故 $I=\frac{\pi}{4}R^4+2\pi R^2$ （8 分）

(17) 解 设 $DB=x(\mathrm{km})$, 则总运费为

$$y(x)=3\mathrm{m}(100-x)+5\mathrm{m}\sqrt{x^2+20^2},\ 0\leqslant x\leqslant 100$$ （3 分）

其中 m 为正常数. 由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m\left(-3+\frac{5x}{\sqrt{x^2+20^2}}\right)=0$$

得 $y=y(x)$ 有唯一驻点 $x_0=15$. 再由 （5 分）

$$y''(15)=5m\left.\frac{\sqrt{x^2+20^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+20^2}}}{x^2+20^2}\right|_{x=15}=5m\left.\frac{20^2}{(x^2+20^2)^{3/2}}\right|_{x=15}>0$$

知 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 100} y(x)=y(15)$, 即当 $DB=15(\mathrm{km})$ 时,总运费最小. （8 分）.

(18) 证 (1) 由 $f(-x)=-f(x)$, 得

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令\ u=-t}-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u$$
$$=-\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$$

所以,$F(x)$ 为奇函数. （4 分）

(2) $F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$,

由 $f(x)$ 连续知 $F(x)$ 可导,求导得

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$$
$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^x[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t.$$

若 $x>0$,则当 $0\leqslant t\leqslant x$ 时,由 $f(x)$ 单调减,有 $f(t)\geqslant f(x)$,

故当 $x>0$ 时,有 $F'(x)=\int_0^x[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t\geqslant 0.$

同理，$x<0$ 时，也有 $F'(x)\geqslant 0$. 所以，恒有 $F'(x)\geqslant 0$，因此，$F(x)$ 为单调增函数. （9 分）

（19）解 $\int_0^n \sqrt[5]{1+2x^4}\,\mathrm{d}x > \int_0^n x^{\frac{4}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}n^{\frac{9}{5}}$ （3 分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n \sqrt[5]{1+2x^4\,\mathrm{d}x}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{5n^{\frac{9}{5}}} = \frac{9}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{9}{5}}}$$

后者为 $P=\frac{9}{5}>1$ 的 P 级数. 收敛；由比较审敛法，原级数收敛. （8 分）

（20）解 因 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，$r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 知 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$，因此，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$， （3 分）

$\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值. 而 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中有 $n-1$ 个解向量，所以 $\lambda=0$ 至少是 $\boldsymbol{A}^*$ 的 $n-1$ 重特征值，又 n 个特征值之和等于 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}\neq 0$，因此，$\lambda=0$ 恰是 $n-1$ 重的特征值； （10 分）

再由对应于不同特征值的特征向量线性无关知 $\boldsymbol{A}^*$ 有 n 个线性无关的特征向量，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可对角化. （13 分）

（21）证 必要性. 由 $\boldsymbol{A}$ 实对称知，存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 再由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ （4 分）

令 $\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆，且 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 于是有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{U}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，此即表明 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同. （8 分）

充分性 首先由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$ 容易得知 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵. 另外，对任何 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$，由于 $r(\boldsymbol{U})=n$，有 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$

所以
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|^2>0$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. （13 分）

（22）解 注意 $X\sim N(460,40^2)$，所以 （2 分）

$P\{$至少有一件不合格$\}=1-P\{$两件都合格$\}=1-P\{X>460\}P\{Y>460\}$ （6 分）

$=1-(1-F_X(460))\int_{460}^{+\infty}\frac{360}{y^2}\mathrm{d}y=1-\left(1-\Phi\left(\frac{460-460}{40}\right)\right).\ \left(-\frac{360}{y}\right)\Big|_{460}^{+\infty}$

$=1-(1-\Phi(0)).\ \frac{360}{460}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{23}=\frac{14}{23}.$ （13 分）

（23）证 $ES^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left(E\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i^{(1)}-\overline{X}^{(1)})^2+E\sum\limits_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)}-\overline{X}^{(2)})^2\right)$ （3 分）

$$=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}\left[E\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i^{(1)}-\overline{X}^{(1)})^2}{\sigma^2}+E\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)}-\overline{X}^{(2)})^2}{\sigma^2}\right] \quad (8 分)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}((n_1-1)+(n_2-1))=\sigma^2$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计量. （13 分）

注 证明中用到：如 $X\sim\chi^2(n)$，则 $EX=n$.

数学考研模拟考试试卷 4

数 学 三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$ 确定,则 $\mathrm{d}y=$ ________.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\sin x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=1$,则 $a=$ ________.

(3) 方程 $xy'-y=x^2\cos x$,满足 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 的解 $y=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&s\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,则常数 s 满足的条件是 ________.

(5) ① $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\-1&3&5\end{pmatrix}$,② $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\-1&5&-1\end{pmatrix}$,③ $\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&-2\\-3&0&3\end{pmatrix}$,④ $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$

以上 4 个矩阵中,能与对角矩阵相似的是 ________.

(6) 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $P\{|X-EX|\leqslant DX\}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(**7**) 设 $I=\int_x^{x+2\pi}\sin t e^{\sin t}\mathrm{d}t$. 则 I(　).

(A) 是无界函数　　(B) 是 x 的非常量函数

(C) 是正常数　　(D) 是负常数

(**8**) 设 $f(x)$ 连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则(　).

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+f(a)$　　(B) $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+F(a)$

(C) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+F(a)$　　(D) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

(**9**) 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$,$f(u)$ 可导,则 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$(　).

(A) x　　(B) y　　(C) z　　(D) $yf(x^2-y^2)$

(**10**) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+\lambda x+\mu)=0$,则(　).

(A) $\lambda=-1,\mu=0$　　(B) $\lambda=1,\mu=0$

(C) $\lambda=-1,\mu=1$　　(D) $\lambda=1,\mu=-1$

(**11**) 设 $y=C_1+C_2x+C_2x^2$ 是某微分方程的通解,则此微分方程是(　).

(A) $y'''=0$　　(B) $(1+x)y''=2y'$

(C) $(1+2x)y''=2y'$　　(D) $(1+2x)y''=y'$

(**12**) 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个线性无关的解,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是(　).

(A) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_3-2\boldsymbol{\xi}_2$　　(B) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2-2\boldsymbol{\xi}_3$

(C) $2\boldsymbol{\xi}_1-(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)$　　(D) $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3$

(**13**) 设随机变量 X、Y 互不相关,它们的分布律分别为

X	0	3
p	0.6	0.4

Y	-1	0
p	0.7	0.3

则随机事件 $\{X=0\}$ 和 $\{Y=-1\}$(　).

(A) 互不相容　　(B) 相互独立　　(C) 互为对立　　(D) 没有关系

(**14**) 设随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立,且均服从正态分布 $N(a,a^2)(a>0)$ 记 $\overline{X}=\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)/n$,则 $P\{|\overline{X}-2|\geqslant a\}=$(　).

(A) $\Phi(\frac{2(1-a)}{a})-\Phi(\frac{2}{a})$　　(B) $\Phi(\frac{2(1-a)}{a})+\Phi(\frac{-2}{a})$

(C) $\Phi(\frac{2(1-a)\sqrt{n}}{a})-\Phi(\frac{2\sqrt{n}}{a})$　　(D) $\Phi(\frac{2(1-a)\sqrt{n}}{a})+\Phi(\frac{-2\sqrt{n}}{a})$

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

(15)（本题满分 9 分） 求 $\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^{-y}+1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

(16)（本题满分 8 分） 设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，q 为需求函数，且 $q=\dfrac{1}{k}(d-P)$. P 为单价，a,b,c,d,k 都是正常数. 且 $d>b$. 求

(i) 利润最大时的产量及最大利润；

(ii) 需求对价格的弹性；

(iii) 需求对价格弹性为 1 时的产量.

（17）**（本题满分 8 分）** 设 $z=z(x,y)$，由方程 $x+y-z=\mathrm{e}^z$ 确定，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

（18）**（本题满分 8 分）** 设 $f(x)$ 在$[-1,1]$上二阶可导，且 $f(-1)=-1$，$f(0)=-2$，$f(1)=-5$. 证明存在 $\xi \in (-1,1)$ 使 $f''(\xi)=-2$.

（19）**（本题满分 9 分）** 计算二重积分 $I=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}|xy-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（20）**（本题满分 13 分）** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$.

（i）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

（ii）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

（21）（本题满分 13 分） 证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列（行）向量为两两正交的单位向量.

（22）（本题满分 13 分） 设随机变量 X,Y 的分布律分别为

X	-1	0	1
p	$1/8$	$3/4$	$1/8$

Y	0	1
p	$1/4$	$3/4$

且 $P\{XY=0\}=1$，

（Ⅰ）求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律；

（Ⅱ）求 $Y=0$ 时 X 的条件分布律；

（Ⅲ）X,Y 是否不相关？为什么？

（23）（本题满分 13 分）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 7)$ 相互独立同分布：$P\{X_i = 2\} = p$，$P\{X_i = 0\} = 1 - p$，$0 < p < 1$，令 $X = 2X_1X_2X_3X_4 + 3X_5X_6X_7$，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，

（Ⅰ）求随机变量 X 的概率分布；

（Ⅱ）求 $X_i - \overline{X}$ 和 $X_j - \overline{X}$ $(i \neq j)$ 的相关系数.

试卷(四)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{x+y}{x-y}\mathrm{d}x}$. 方程两边取对数：$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$.

两边取微分得：$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+(\dfrac{y}{x})^2}\ \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}$

$(x-y)\mathrm{d}y=(x+y)\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y=\dfrac{x+y}{x-y}\mathrm{d}x.$

(2) $\underline{\ 4\ }$. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ \dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$. $a=4$

(3) $\underline{x(\sin x-1)}$. 原方程化为$(\dfrac{y}{x})'=\cos x$，故 $y=x\sin x+Cx$.

由 $0=y(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}+C\dfrac{\pi}{2}$，得 $C=-1$，故 $y=x\sin x-x$.

(4) $\underline{s\neq0}$.

由$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}0&s&2s\\1&1&1\\1&1&2s+1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}0&s&0\\1&0&-1\\1&0&2s-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&s&0\\1&0&-1\\0&0&2s\end{pmatrix}$. 故 $s\neq0$.

(5) $\underline{①②③}$. ① 是对称矩阵，② 的三特征值互不相同，③ 对二重特征值 $\lambda=0$ 有两个线性无关特征向量，故均可相似对角化. 而 ④ 的二重特征值 $\lambda=1$ 只有一个线性无关的特征向量与之对应，故不能与对角矩阵相似.

(6) $\underline{\dfrac{27}{125}}$. $EX=\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{3}{2}x^3\mathrm{d}x=0$，$EX^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{3}{2}x^4\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}$. $DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{3}{5}$. $P\{|X-EX|\leqslant DX\}=P\{|X|\leqslant\dfrac{3}{5}\}=\displaystyle\int_{-3/5}^{3/5}\dfrac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=(\dfrac{3}{5})^3$.

二、选择题

(7)(C). 由 $\sin t e^{\sin t}$ 是以 2π 为周期的函数，故

$$I=\int_0^{2\pi}\sin t e^{\sin t}\mathrm{d}t=-\cos t e^{\sin t}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos^2 t e^{\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\cos^2 t e^{\sin t}\mathrm{d}t.$$

被积函数 $\cos^2 t e^{\sin t}$ 连续非负不恒为 0，故 $I>0$ 是正常数. 选(C).

(8)(B). 即牛顿-莱布尼兹公式.

(9)(A). 于方程两边微分：$\mathrm{d}x+\mathrm{d}z=f\mathrm{d}y+2xyf'\mathrm{d}x-2yzf'\mathrm{d}z$

于是$(1+2yzf')\mathrm{d}z=(2xyf'-1)\mathrm{d}x+f\mathrm{d}y$.

$$z'_x=\frac{2xyf'-1}{1+2yzf'},\quad z'_y=\frac{f}{1+2yzf'}$$

$$zz'_x+yz'_y=\frac{2xyzf'-z+yf}{1+2yzf'}=x.$$ 选(A).

(10)(B). 用泰勒公式 $\sqrt[3]{1-x^3}=-x(1-\dfrac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}=-x(1-\dfrac{1}{3x^3}+o(\dfrac{1}{x^3}))=-x+o(1)$，故

$\lambda = 1, \mu = 0$. 选(B).

(11) (C). 由 $y' = C_2(1+2x)$. $y'' = 2C_2 = \dfrac{2y'}{1+2x}$

故 $(1+2x)y'' = 2y'$. 选(C).

(12) (D). 由所给条件知 $r(\boldsymbol{A}) = 1$. 因此基础解系中含 2 个线性无关的解，显然应选(D).

(13) (B). $EX = 3\times 0.2 = 1.2$, $EY = (-1)\times 0.7 = -0.7$, $E(XY) = 3\times(-1)P\{X = 3, Y = -1\}$. 而 X、Y 不相关 $E(XY) = EX \cdot EY$，解得 $P\{X = 3, Y = -1\} = 0.28$. 由联合分布律与边缘分布律间的关系，得 (X,Y) 的分布为

$X \backslash Y$	-1	0	$P\{X = x_i\}$
0	0.42	0.18	0.6
3	0.28	0.12	0.4
$P\{Y = y_j\}$	0.7	0.3	1

故 X、Y 相互独立. 选(B).

(14) (D).
$$\begin{aligned}P\{|\overline{X}-2|\geqslant a\} &= 1 - P\{|\overline{X}-2| < a\}\\ &= 1 - P\{2-a < \overline{X} < 2+a\}\\ &= 1 - F_{\overline{X}}(2+a) + F_{\overline{X}}(2-a)\\ &= 1 - \Phi\left(\frac{(2+a)-a}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right) + \Phi\left(\frac{(2-a)-a}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{-2\sqrt{n}}{a}\right) + \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(2-2a)}{a}\right)\end{aligned}$$
选(D).

三、解答题

(15) 解　原方程乘以 e^{2y} 得 $e^y(dx + xdy) + e^{2y}dy = 0$.

即　$e^y dx + x de^y = -e^{2y}dy$　(5 分)

$d(xe^y) = -\dfrac{1}{2}de^{2y}$　$\therefore xe^y = -\dfrac{1}{2}e^{2y} + C$

通解为　$x = Ce^{-y} - \dfrac{1}{2}e^y$.　(9 分)

注　本题可写成　$\dfrac{dx}{dy} + x = -e^y$ 是以 y 为自变量的一阶线性齐次的微分方程.

(16) 解　(i) 利润 $L = Pq - C = (d - kq)q - (aq^2 + bq + c)$.

令 $\dfrac{dL}{dq} = (d-b) - 2(k+a)q = 0$. 得 $q = \dfrac{d-b}{2(k+a)}$.

由 $\dfrac{d^2L}{dq^2} < 0$ 知，当 $q = \dfrac{d-b}{2(k+a)}$ 时利润最大，最大利润为

$$L_{\max} = \frac{(d-b)^2}{4(k+a)} - c.$$　(5 分)

(ii) $q(P) = \dfrac{1}{k}(d-P)$. $\dfrac{dq}{dP} = -\dfrac{1}{k}$. 需求对价格的弹性为

$$\eta = -\frac{P}{q}\ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}P} = \frac{d-kq}{kq} \tag{7 分}$$

(iii) $\eta = 1$ 时, $q = \dfrac{d}{2k}$ （8 分）

(17) 解 方程两边对 x 求导得

$$1 - z'_x = z'_x \mathrm{e}^z, \quad z'_x = \frac{1}{1+\mathrm{e}^z}.$$

两边对 y 求导得 $z'_y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^z}$. （6 分）

故 $z'_{xy} = \dfrac{-\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^2} z'_y = \dfrac{-\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^3}$ （8 分）

(18) 解 作 $P(x) = -x^2 - 2x - 2$. （3 分）

令 $F(x) = f(x) - P(x)$. （6 分）

则 $F(-1) = F(0) = F(1) = 0$,在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上, $F(x)$ 满足罗尔定理条件,故存在 $\xi_1 \in (-1,0)$, $\xi_2 \in (0,1)$ 使

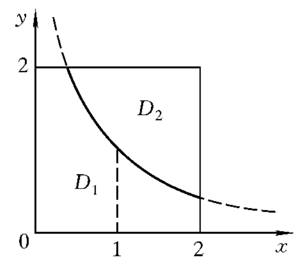
$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上, $F'(x)$ 满足罗尔定理条件. 故存在

$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (-1,1)$,使 $F''(\xi) = 0$.

而 $f''(x) = f''(x) + 2$. 故 $f''(\xi) = -2$. （8 分）

(19) 解 如图. 以 $xy = 1$ 将积分域 D 分为 D_1 和 D_2 两个区域. 则



$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} (xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D} (1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{D_2} (xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (6\ 分) \\ &= 2\left[\int_{1/2}^{2} x\mathrm{d}x \int_{1/x}^{2} y\mathrm{d}y - \int_{1/2}^{2}\mathrm{d}x\int_{1/x}^{2}\mathrm{d}y\right] \\ &= 2\left[\int_{1/2}^{2}\left(2x - \frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{2}\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{3}{2} + 2\ln 2 \end{aligned}$$

（9 分）

(20) 解 (i) 设 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$,由于 $\boldsymbol{A\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i+1}$, $i = 1,2,\cdots,n-1$. 且 $\boldsymbol{A\alpha} = \mathbf{0}$,所以对上式左乘 $\boldsymbol{A}^{n-1}$ 得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0} \tag{4 分}$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_n \neq \mathbf{0}$,所以必须有 $\lambda_1 = 0$,同理,对 $\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$,左乘 $\boldsymbol{A}^{n-2}$ 可得必须有 $\lambda_2 = 0$,类似地,必须有 $\lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. （7 分）

(ii) 由题设

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n\ \ \boldsymbol{0})=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix} \quad (9\text{ 分})$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

相似，从而 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为零，（11 分）

又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=n-1$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量，即对应于 n 重特征值零，特征向量为 $C\boldsymbol{\alpha}_n(C\neq 0)$.（13 分）

（21）解　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 故为 n 维列向量.

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量两两正交且均为单位向量.

（9 分）

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量为两两正交的单位向量.（13 分）

（22）解　（Ⅰ）由 $P\{XY=0\}=1$ 得 $P\{XY\neq 0\}=0$，进而得 $P\{X=-1,Y=1\}=0$，$P\{X=1,Y=1\}=0$. 由 $\frac{3}{4}=P\{Y=1\}=\sum_{i=1}^{3}P\{X=x_i,Y=1\}$ 得 $P\{X=0,Y=1\}=\frac{3}{4}$.

由 $P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{2}P\{X=x_i,Y=y_j\}$ 可解得 $P\{X=-1,Y=0\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{8}$，故 (X,Y) 的联合分布为：

Y \ X	-1	0	1	$P\{Y=y_j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
$P\{X=x_i\}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

(8 分)

(Ⅱ)$Y=0$ 时 X 的条件分布律为

$$P\{X=-1 \mid Y=0\}=\frac{P\{X=-1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2},$$

类此可得:$P\{X=0 \mid Y=0\}=0$, $P\{X=1 \mid Y=0\}=\frac{1}{2}$ (11 分)

(Ⅲ)易算得 $EX=0,EY=\frac{3}{4},EXY=0$,因为 $EXY=EX\cdot EY$,故 X,Y 不相关.

(13 分)

(23)解 (Ⅰ)X 的可能取值为 $0,24,32,56$.

$$\begin{aligned}P\{X=56\}&=P\{X_1X_2X_3X_4=16,X_5X_6X_7=8\}\\&=P(\bigcap_{i=1}^{7}\{X_i=2\})=\bigcap_{i=1}^{7}P\{X_i=2\}=p^7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X=32\}&=P\{X_1X_2X_3X_4=16,X_5X_6X_7=0\}\\&=P\{X_1X_2X_3X_4=16\}P\{X_5X_6X_7=0\}\\&=P(\bigcap_{i=1}^{4}\{X_i=2\})\cdot(1-P\{X_5X_6X_7=8\})=p^4(1-p^3)\end{aligned}$$

类似可得:$P\{X=24\}=(1-p^4)p^3,P\{X=0\}=(1-p^4)(1-p^3)$,故 X 的分布律为

X	0	24	32	56
p	$(1-p^4)(1-p^3)$	$(1-p^4)p^3$	$p^4(1-p^3)$	p^7

(6 分)

(Ⅱ)$\mu=EX_i=2p,EX_i^2=4p,\sigma^2=DX_i=4p(1-p)$.

$E(X_i-\overline{X})=E(X_i-\overline{X})=0$

$$D(X_i-\overline{X})=D(X_i-\overline{X})=D((1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{l\neq i}X_j)$$

$$=(1-\frac{1}{n})^2\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$E(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})=EX_iX_j-EX_i\overline{X}-EX_j\overline{X}+E\overline{X}^2$$

$$=\mu^2-E(\frac{X_i^2}{n}+\frac{1}{n}\sum_{l\neq i}X_iX_l)-E(\frac{X_j}{n}+\frac{1}{n}\sum_{l\neq i}X_iX_l)+E(\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}X_l\sum_{m=1}^{n}X_m)$$

$$=\mu^2-2(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)+\frac{1}{n^2}n(\sigma^2+\mu^2+(n-1)\mu^2)$$

$$=\mu^2-\frac{1}{n}(\sigma^2+n\mu^2)=-\frac{\sigma^2}{n}$$

$X_i-\overline{X}$ 和 $X_j-\overline{X}$ 的相关系数为

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X_i-\overline{X},X_j-\overline{X})}{\sqrt{D(X_i-\overline{X})}\sqrt{D(X_j-\overline{X})}}=\frac{-\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}}=-\frac{1}{n-1}.$$ (13 分)

数学考研模拟考试试卷 5

数 学 三

考生注意:(1)本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2)本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 有连续的一阶导数,$f(0)=0$,且当 $x\to 0$ 时 $\int_0^{f(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ 与 x^2 为等价无穷小,则 $f'(0)=$ ________.

(2) 微分方程 $y'\tan x - y = 5$ 的通解是________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$. 则 $r(\boldsymbol{B})=$ ________.

(5) 设 X、Y 是相互独立的随机变量,且都服从$[0,1]$上的均匀分布,则关于 x 的方程 $x^2+Xx+Y=0$ 有实根的概率为________.

(6) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,则 $p_1=P\{X>1\}$ 的矩估计量 $\hat{p}_1=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$,则必有( ).

(A) $z''_{xx}+z''_{yy}=0$　　(B) $z''_{xx}-z''_{yy}=0$

(C) $z''_{xy}=0$　　(D) $z''_{xx}+z''_{xy}=0$

(8) 设 $C_1\cos^2 x+C_2\cos 2x$ 是某齐次线性微分方程的通解. 则此方程是( ).

(A) $y''\sin 2x-2y'\cos 2x=0$　　(B) $y''+4y=0$

(C) $y''\sin 2x+2y'\cos 2x=0$　　(D) $y''\cos 2x-2y'\sin 2x=0$

(**9**) 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-x^2}}{1+x}$ 在[0,1]区间上(　).

(A) 可导,但导数不连续　　(B) 可导且导数连续

(C) 连续但不可导　　(D) 不连续

(**10**) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+n})=$(　).

(A) 0　　(B) $\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\sqrt{2+x}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^2\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

(**11**) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{x-\sin bx}=1$,则(　).

(A) $a=0,b=1$　　(B) $a=0,b=0$

(C) $a=4,b=1$　　(D) $a=2,b=1$

(**12**) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,而其中任何两个都线性无关,则使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$ 的不全为零的数 k_1,k_2,k_3 中,必有(　).

(A) $k_1=0,\ k_2k_3\neq 0$　　(B) $k_2=0,k_1k_3\neq 0$

(C) $k_3=0,k_1k_2\neq 0$　　(D) $k_1k_2k_3\neq 0$

(**13**) 设有 n 维行向量组(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$;(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$. 则方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解的充分必要条件是(　).

(A) 向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m)^{\mathrm{T}}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_m)^{\mathrm{T}}$ 等价

(C) 向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示

(D) 向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示

(**14**) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布随机变量序列,且都服从参数为 λ 的泊松分布,则对任何 $\varepsilon>0$ 和实数 x 有(　).(其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布随机变量的分布函数).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=1$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n}-\lambda\right|\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\geqslant \varepsilon\right\}=0$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$. 求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(16)(本题满分 8 分) 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售,售价分别为 p_1 和 p_2,销售量分别为 q_1 和 q_2,需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$ 和 $q_2=10-0.05p_2$,总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$,试问:厂家如何确定两个市场的售价,能使其获得的总利润最大?最大总利润为多少?

（17）（本题满分 9 分） 计算$\iint\limits_{D}\left[(x+y)^{2}+\dfrac{x}{x^{2}+y^{2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $x^{2}+y^{2}\geqslant 2x$，$x^{2}+y^{2}\leqslant 4x$ 所确定.

（18）（本题满分 8 分） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)>0$.

证明：(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$，使 $f'(\xi_1)<0$；(2) 存在 $\xi_2\in(a,b)$，使 $f''(\xi_2)<0$.

(19) **(本题满分 8 分)** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

(20) **(本题满分 13 分)** 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k(k>1,\ \boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0})$.

证明:若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关,则必存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant k)$,使 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示,且表示式唯一.

（21）（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 a,b 的值;（2）求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

（22）（本题满分 13 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$ 为来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,（1）要使 $\hat{\sigma}=\frac{1}{k_1}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|$ 是 σ 的无偏估计量（$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$）,$k_1$ 应取何值;（2）要使 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{n}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量,k_2 应取何值.

(23)（本题满分 13 分）试证等式

$P(AB+\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}B+A\overline{B})=(P(A)-P(\overline{A}))(P(B)-P(\overline{B}))$ 成立 的充要条件是事件 A、B 相互独立.

试卷(五)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\sqrt[3]{2}}$. 由 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{f(x)}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[f(x)]f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}f'(0)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[f(x)]}{x}$

$$=\frac{1}{2}f'(0)\lim_{x\to0}f'(f(x)f'(x))=\frac{1}{2}[f'(0)]^3$$

于是得 $f'(0)=\sqrt[3]{2}$.

(2) $\underline{y=C\sin x-5}$. $y'\tan x=y+5\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\mathrm{d}y}{y+5}=\dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x\Rightarrow y=C\sin x-5$

$$y'-\frac{\cos x}{\sin x}y=5\,\frac{\cos x}{\sin x}$$

解 1 用公式法 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x}\cdot[\int5\,\dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{e}^{-\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=C\sin x-5$

解 2 $y=-5$ 是非齐次方程的一个解,而齐次方程通解是 $y=C\sin x$,故所求方程通解是

$$y=C\sin x-5$$

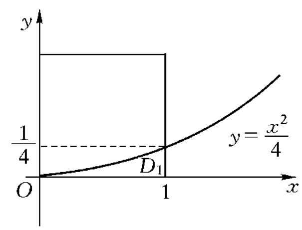
(3) $\underline{3}$. 记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$,则所求极限为 $\dfrac{1}{2}f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$,而 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)x^{2n}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\dfrac{x}{1-x^2}$

所以 $\quad f(x)=(\dfrac{x}{1-x^2})'=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,则 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^{2n}=\dfrac{1}{2}f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{(1-\frac{1}{2})^2}=3$

(4) $\underline{n}$. 由 $n=r(\boldsymbol{E}_n)=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant\min(m,n)=n$

(5) $\underline{\dfrac{1}{12}}$. $P\{有实根\}=P\{X^2-4Y\geqslant0\}$



$$=\iint\limits_{x^2-4y\geqslant0}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{x^2-4y\geqslant0\\0\leqslant x\leqslant1\\0\leqslant y\leqslant1}}1\cdot1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_{D_1}=\int_0^1\frac{x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$$

(6) $\underline{1-\Phi(\dfrac{1-\overline{X}}{\sqrt{B_2}})}$. (其中 $B_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$).

$$p_1=P\{X>1\}=1-P\{X\leqslant1\}=1-F_X(1)=1-\Phi(\frac{1-\mu}{\sigma})$$

因此 p 的矩值计量为 $\quad\hat{p}_1=1-\Phi(\dfrac{1-\overline{X}}{\sqrt{B_2}})$

二、选择题

(**7**)(B). $z'_x = \varphi'(x+y) + \psi'(x-y)$, $z''_{xx} = \varphi''(x+y) + \psi''(x-y)$

$z_y = \varphi'(x+y) - \psi'(x-y)$, $z''_{yy} = \varphi''(x+y) + \psi''(x-y)$

故 $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$. 选(B).

(**8**)(A). $y = C_1\cos^2 x + C_2\cos 2x, y' = -2(\frac{C_1}{2} + C_2)\sin 2x$

$$y'' = -4(\frac{C_1}{2} + C_2)\cos 2x, \text{故} \frac{y''}{y'} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$y''\sin 2x - 2y'\cos 2x = 0$. 选(A).

(**9**)(C). 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=1$ 处导数不存在,但 $f(x)$ 在$[0,1]$ 连续. 故选(C).

(**10**)(A). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n^2}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n+1} + \cdots + \sqrt{n+n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n}(\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{\sqrt{n+n}}{\sqrt{n}}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}})$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}) = \int_6^1 \sqrt{1+x}\,dx$,故原极限值为 0. 选(A).

(**11**)(C). 由洛必达法则,原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{a+x}(1-b\cos bx)}$. 由于分子当 $x\to 0$ 是与 x^2 同阶无穷小,故要使极限存在且不为 0,必须 $\lim\limits_{x\to 0}(1-b\cos bx) = 0$,从而 $b=1, a\neq 0$. 且这时

$1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{a+x}(1-\cos x)} = \frac{2}{\sqrt{a}}$. 于是 $a=4$. 选(C).

(**12**)(D). 由于三个向量线性相关且两两线性无关,所以 k_1, k_2, k_3 中不可能有任何一个(或两个)为零,因若不然,便与两两线性无关矛盾. 故应选(D).

(**13**)(A). 当两向量组等价时,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 中的每一个都是另一个多余方程,因此,应选(A). 选项中的(C)、(D)既不是充分的,也不是必要的. 选项(B)是必要的,但不是充分的. 如

(Ⅰ):$\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0,0) \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0,0)\end{matrix}$ (Ⅱ):$\begin{matrix}\boldsymbol{\beta}_1 = (0,0,1,0) \\ \boldsymbol{\beta}_2 = (0,0,0,1)\end{matrix}$ 就是这种情形.

(**14**)(C). 由于泊松分布的 $EX_i = \lambda, DX_i = \lambda \neq 0$ 都存在,所以 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 既满足大数定律,又满足中心极限定理,由表达式易知,(C) 才是满足中心极限定理的表述,其它选项既不是满足大数定律,又不是满足中心极限定理的表述.

三、解答题

(**15**)**解** 由题设条件,有

$$e^3 = \lim_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}{x}\right]$$

$$= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}{x}$$

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x} \qquad (*)$$ （3 分）

所以有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，于是又有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

及 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$

再由（*）式，并利用：当 $u\to 0$ 时，$\ln(1+u)\sim u$，得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}\quad \text{（注意这里不可再用洛必达法则）}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=1+\frac{1}{2}f''(0)$$

从而得 $f''(0)=4$. 所以，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=4$. （7 分）

而 $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}f''(0)\right\}=e^2$$ （9 分）

（16）解 总收入函数为 $R=p_1q_1+p_2q_2=p_1(24-0.2p_1)+p_2(10-0.05p_2)=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2$

总利润函数为 $L=R-C=p_1q_1+p_2q_2-[35+40(q_1+q_2)]=32p_1-0.2p_1^2+12p_2-0.05p_2^2-1395$

由极值存在的必要条件，得方程组 $\begin{cases}L'_{p_1}=32-0.4p_1=0\\ L'_{p_2}=12-0.1p_2=0\end{cases}$ （3 分）

其解为 $p_1=80$，$p_2=120$. （6 分）

由问题的实际意义知最大利润是存在的，因而当 $p_1=80$，$p_2=120$ 时，厂家获得的总利润最大，最大总利润为 $L\Big|_{\substack{p_1=80\\p_2=120}}=605$. （8 分）

（17）解 由于 $\iint\limits_D xy\,dx\,dy=0$，（积分域关于 x 轴对称）.

故 原积分 $=\iint\limits_D\left[(x^2+y^2)+\frac{x}{x^2+y^2}\right]dx\,dy$ （3 分）

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}(\rho^3+\cos\theta)\,d\rho$$ （6 分）

$$=120\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta+4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=120\,\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{47}{2}\pi$$ （9 分）

(18) 证 (1) $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件，于是存在 $\xi_1 \in (c,b) \subseteq (a,b)$，使 $f'(\xi_1) = \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c} = \dfrac{-f(c)}{b-c} < 0.$ (3 分)

(2) 同样由中值定理，存在 $x_0 \in (a,c)$，使

$$f'(x_0) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)}{c-a} > 0$$ (5 分)

$f'(x)$ 在 $[x_0,\xi_1]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件，于是存在 $\xi_2 \in (x_0,\xi_1) \subseteq (a,b)$，使

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\xi_1)-f'(x_0)}{\xi_1 - x_0}$$

注意 $f'(\xi_1) < 0, f'(x_0) > 0, \xi_1 - x_0 > 0$，所以有 $f''(\xi_2) < 0.$ (8 分)

注 本题还有其它证法. 例如，由题设条件知 f 在 $[a,b]$ 的最大值必在 (a,b) 内某点 x_1 处取到，于是有 $f'(x_1)=0$，且 $f(x_1)>0$，在 $[x_1,b]$ 上对 $f(x)$ 用中值公式，便可得到(1)的证明；在 $[x_1,\xi_1]$ 上对 $f'(x)$ 用中值公式，便可得到(2)的证明.

(19) 解 $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

$$0 < u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3 \cdot n^{\frac{3}{2}}} = v_n$$ (5 分)

因为级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 是 $P = \dfrac{3}{2} > 1$ 的 P 级数. 它收敛，故由比较审敛法知，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. (8 分)

(20) 证 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关，所以方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$$

一定有非零解，而且一定有这样一个非零解 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)^{\mathrm{T}}$，其中必有一个最小下标 i，使 $x_i \neq 0$，而 $x_j = 0\ (j > i)$.（4 分）由 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$ 知 i 满足 $1 < i \leqslant k$. 因此有 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_i\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}\ (x_i \neq 0, 1 < i \leqslant k)$，这表明 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.（8 分）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性相关，则根据上述证明，必还有比 i 小的 t 满足上述要求，产生矛盾. 矛盾表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 的表示式唯一. (13 分)

(21) 解 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,b$，且对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，有两个线性无关的特征向量，即 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 1$，由此可解得 $a = 5$. 再由特征值之和等于 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和得 $b = 6$. (7 分)

(2) 对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，解 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\xi}_2 = (1,0,1)^T$

对 $\lambda_3 = 6$，解 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1,-2,3)^T$.

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. (13 分)

(22) 解 (1) 因为 $Z_i = X_i - \overline{X} = \dfrac{n-1}{n}X_i - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j\neq i} X_j \sim N(0,\dfrac{n-1}{n}\sigma^2)$，所以

$$E\hat{\sigma} = E\left(\frac{1}{k_1}\sum_{i=1}^{n} | X_i - \overline{X} |\right) = \frac{n}{k_1}E | X_i - \overline{X} |$$

$$= \frac{n}{k_1}E | Z_i | = \frac{n}{k_1}\int_{-\infty}^{+\infty} | z | \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2}}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{2\pi}k_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2 \cdot \frac{n-1}{n}\sigma^2}} dz \qquad (4 分)$$

$$\xlongequal{令 \frac{z}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma} = t} \frac{2n}{\sqrt{2\pi}k_1} \cdot \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma = \frac{\sqrt{2n(n-1)}}{\sqrt{\pi}k_1}\sigma \qquad (8 分)$$

要使 $\hat{\sigma}$ 为 σ 的无偏估计量，应有 $\frac{\sqrt{2n(n-1)}}{\sqrt{\pi}k_1} = 1$，故应取 $k_1 = \sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}$

(2) $E\hat{\sigma}^2 = E(\frac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{n}(X_{i+1} - X_i)^2) = \frac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{n}E((X_{i+1} - \mu) - (X_i - \mu))^2$

$= \frac{n}{k_2}(E(X_{i+1} - \mu)^2 - 2E(X_{i+1} - \mu)E(X_i - \mu) + E(X_i - \mu)^2)$

$= \frac{n}{k_2}(\sigma^2 - 0 + \sigma^2) = \frac{2n}{k_2}\sigma^2$

要使 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量，应有 $\frac{2n}{k_2} = 1$，故应取 $k_2 = 2n$. (13 分)

(23) 证 $P(AB + \bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}B + A\bar{B}) - (P(A) - P(\bar{A}))(P(B) - P(\bar{B}))$

$= P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}B) - P(A\bar{B}) - (2P(A) - 1)(2P(B) - 1)$

$= P(AB) + (1 - P(A \cup B)) - (P(B) - P(AB)) - (P(A) - P(AB))$

$- (4P(A)P(B) - 2P(A) - 2P(B) + 1)$ (6 分)

$= 3P(AB) - P(A \cup B) + P(A) + P(B) - 4P(A)P(B)$

$= 3P(AB) - (P(A) + P(B) - P(AB)) + P(A) + P(B) - 4P(A)P(B)$

$= 4P(AB) - 4P(A)P(B)$. (10 分)

所以原等式成立等价于 $P(AB) - P(A)P(B) = 0$，它成立的充要条件是事件 A 和 B 相互独立.

(13 分)

数学考研模拟考试试卷 6

数 学 三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$ ________.

(2) 微分方程 $y'=\mathrm{e}^{2x+y-1}-2$ 的通解为________.

(3) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 前 n 项的和为 S_n,记 $b_n=\dfrac{1}{S_n}$, 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性为________.

(4) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$, 且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}12 & -8 & 0\\ 8 & 28 & 0\\ 0 & 0 & 28\end{pmatrix}$, 则$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

(5) 已知随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $X\sim N(0,4)$, Y 的分布律为

Y	1	2	3
p	0.2	0.5	0.3

则 $P\{X+2Y\leqslant 4\}=$ ________(已知 $\Phi(1)=0.8413$).

(6) 设随机变量 X 和 Y 不相关,且方差分别为 4 和 9,则随机变量 $3X-4Y$ 的方差为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,则以下结论中正确的是( ).

(A) 函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点连续

(B) 函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点存在偏导数

(C) 函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点可微

(D) 函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点有连续的偏导数

(8) 设 $f(x)$ 连续,且$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}f(x)+1$. 则 $f(x)=$( ).

(A) Cx^2+x+2 (B) $Cx+2$ (C) $x+C$ (D) $C(x-1)+2$.

(9) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\int_{-\infty}^{a}xe^{2x}\mathrm{d}x$,则 $a=$( ).

(A) $\dfrac{5}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $-\dfrac{5}{2}$ (D) $-\dfrac{3}{2}$

(10) 设 $f(x)=\int_0^1 t\,|\,x-t\,|\,\mathrm{d}t$,则在$[-1,1]$上,$f(x)$ 最小值 m,与最大值 M 为( ).

(A) $m=\dfrac{1}{6},M=\dfrac{5}{6}$ (B) $m=0,M=\dfrac{5}{6}$

(C) $m=-1,M=1$ (D) $m=\dfrac{1}{6}(2-\sqrt{2}),M=\dfrac{5}{6}$

(11) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{f(x)}=-8$,则在 $x=0$ 处 $f(x)$( ).

(A) 不可导 (B) 可导且 $f'(0)\neq0$ (C) 取得极大值 (D) 取得极小值

(12) 函数 $F(x)=\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3 & 1\\ 1 & 2x & 3x^2 & 0\\ 0 & 1 & 3x & 6x^2\\ 0 & 0 & 1 & 4x\end{vmatrix}$有( ).

(A) 最大值 -1 (B) 最小值 -1 (C) 最大值 1 (D) 最小值 1

(13) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵,则$(\boldsymbol{AB})^{-1}$ 的伴随矩阵$[(\boldsymbol{AB})^{-1}]^*\neq$( ).

(A) $[(\boldsymbol{AB})^*]^{-1}$ (B) $[\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*]^{-1}$

(C) $(\boldsymbol{A}^{-1})^*(\boldsymbol{B}^{-1})^*$ (D) $(\boldsymbol{B}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,且方差 $D(X_i)=\sigma^2$ 存在,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, 则有( ).

(A) S 是 σ 的无偏估计量 (B) S 是 σ 的最大似然估计量

(C) S 是 σ 的一致估计量 (D) S^2 与 $\overline{X}$ 相互独立

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设在 xoy 平面的第一象限内有三条曲线:l_1 为 $y=\frac{1}{2}x^2$,l_2 为 $y=x^2$,l_3 是过原点 O 且在 l_2 上方的一条光滑曲线. 在 l_2 上任取一点 M_2,从点 M_2 作 y 轴的平行线交 l_1 于 M_1 点,从 M_2 作 x 轴的平行线交 l_3 于 M_3 点. 记由$\overset{\frown}{OM_1}$、$\overset{\frown}{OM_2}$ 及线段 M_1M_2 所围平面图形的面积为 A_1,记由$\overset{\frown}{OM_2}$、$\overset{\frown}{OM_3}$ 及线段 M_3M_2 所围平面图形的面积为 A_2,已知恒成立 $A_1=A_2$. 试求曲线 l_3 的方程.

(16)(本题满分 8 分) 计算$\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D:$-1\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1$.

(17)(本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_0\in I$. 证明:f 在 x_0 处可导的充要条件是:存在一个定义在区间 I 上的函数 $\varphi(x)$,使

(1) 对于 $x\in I$,有 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\varphi(x)$;

(2) $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续.

（18）（本题满分 9 分）某商品的需求函数是 $p = 9 - 2x$，其中 p 是价格，x 是产量. 商品的单位成本是 3(元). 若每生产一单位商品，政府要征税 t(元)，试求能使总税收最大的 t 值.

（19）（本题满分 8 分）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln^{2}\frac{n}{n+1}\right)$ 的敛散性.

(20)(本题满分 13 分) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=m<n$，设向量组 $\boldsymbol{b}_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,n-m$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，试求出方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}y_j=0$ $(i=1,2,\cdots,n-m)$ 的一个基础解系.

(21)(本题满分 13 分) 设有 3 元实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(2) 问 a 取何值时，二次型 f 为正定二次型？此时，并求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$，将二次型 f 化为规范形.

(22)（本题满分 13 分） 测定某种溶液中的水份，由 10 个测定值得样本均值 $\overline{x} = 0.452\%$，样本标准差 $s = 0.037\%$，设测定对象服从正态分布.

（1）求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

（2）在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验假设 $H_0 : \mu = 0.5\%$，$H_1 : \mu \neq 0.5\%$.

(23)（本题满分 13 分）（1）设一个口袋中有 5 个黑球与 4 个白球，先任取 3 个球放在一只黑色的盒子中，余下的 6 个球放在另一个白色的盒子中. 求恰有 5 个球与它所在的盒子颜色一致的概率 α.

（2）设一个口袋中装 3 个黑球、3 个白球和 2 个红球. 先取出 3 个球放在黑色盒子中，再取出 3 个球放在白盒子中，余下的 2 个球放在红盒子中，求全部球放在与球颜色相同的盒子中的概率 β.

试卷(六)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+2(\sqrt{2}-1)}$. 事实上,设 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = A$

由题设条件,有
$$xf(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+xA$$
上式两端在$[0,1]$上作定积分,得
$$A=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x + A\int_0^1 x\mathrm{d}x=\sqrt{2}-1+\frac{1}{2}A$$
所以,$A=2(\sqrt{2}-1)$,

故 $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+2(\sqrt{2}-1).$$

(2) $\underline{y=1-2x-\ln|c-x|}$. $u=2x+y-1$ 则 $u'=2+y'$

代入原方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2=\mathrm{e}^u-2$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u$

$$-\mathrm{e}^{-u}+c=x$$
$$\mathrm{e}^{-u}=c-x,\quad u=-\ln|c-x|$$
所以 $$y=1-2x+u=1-2x-\ln|c-x|$$

(3) $\underline{\text{发散}}$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=0$知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$.

(4) $\underline{\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}}$. 由题中等式得 $2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{E}=8\boldsymbol{E}$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},$$
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$$

(5) $\underline{0.46587}$. $P\{X+2Y\leqslant 4\}=P\{X\leqslant 4-2Y\}$

$=P\{Y=1\}P\{X\leqslant 4-2Y\mid Y=1\}+P\{Y=2\}P\{X\leqslant 4-2Y\mid Y=2\}$
$\quad+P\{Y=3\}P\{X\leqslant 4-2Y\mid Y=3\}$

$=0.2P\{X\leqslant 2\mid Y=1\}+0.5P\{X\leqslant 0\mid Y=2\}+0.3P\{X\leqslant -2\mid Y=3\}$

$=0.2P\{X\leqslant 2\}+0.5P\{X\leqslant 0\}+0.3P\{X\leqslant -2\}$(利用 X,Y 独立)

$=0.2F_X(2)+0.5F_X(0)+0.3F_X(-2)$

$=0.2\Phi(\dfrac{2-0}{2})+0.5\Phi(\dfrac{0-0}{2})+0.3\Phi(\dfrac{-2-0}{2})$

$=0.2\Phi(1)+0.5\Phi(0)+0.3\Phi(-1)$

$=0.2\times 0.8413+0.5\times 0.5+0.3\times(1-0.8413)=0.46587$

(6) $\underline{180}$. **解 1** $D(3X-4Y)=D(3X)+D(-4Y)+2\mathrm{Cov}(3X,-4Y)$

$\quad=9DX+16DY-24\mathrm{Cov}(X,Y)=180$

解 2 $D(3X-4Y)=\mathrm{Cov}(3X-4Y,3X-4Y)$

$=9\mathrm{Cov}(X,X)-24\mathrm{Cov}(X,Y)+16\mathrm{Cov}(Y,Y)=9DX+16DY=180$

解 3 因为 X,Y 不相关，即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，而

$$\mathrm{Cov}(3X,-4Y)=3\times(-4)\mathrm{Cov}(X,Y)=0.$$

故 $3X$ 和 $-4Y$ 也不相关，故

$$D(3X-4Y)=D(3X)+D(-4Y)=9DX+16DY=180$$

二、选择题

(**7**)(B). 因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续，进而知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微，于是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可能有连续的偏导数. 只能选(B).

(**8**)(B). 令 $xt=u$，则原式化为

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}f(x)+1,\ \Rightarrow xf(x)+2x=2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

$$xf'(x)-f(x)=-2\quad \left[\frac{1}{x}f(x)\right]'=-\frac{2}{x^2},\quad f(x)=Cx+2.$$ 选(B).

(**9**)(A). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{2a}$

故总有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\mathrm{e}^{2a}$.

$$\int_{-\infty}^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^a x\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-\infty}^a-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^a\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a}{2}\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-\infty}^a=\frac{a}{2}\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2a}=\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2a}$$

由题设条件，有 $$\mathrm{e}^{2a}=\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2a}$$

由此解得 $a=\dfrac{5}{2}$. 选(A).

(**10**)(D). 当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，

$$f(x)=\int_0^1 t\,|\,x-t\,|\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x$$

当 $0<x\leqslant 1$ 时，

$$f(x)=\int_0^x t\,|\,t-x\,|\,\mathrm{d}t+\int_x^1 t\,|\,t-x\,|\,\mathrm{d}t=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2}\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$$

即有 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\[2mm] \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

求导 $$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 0\\[2mm] x^2-\dfrac{1}{2}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

由 $f'(x)=0$,得 f 在$(-1,1)$有唯一驻点 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 由(*)式知 $f(x)$ 在$[-1,1]$上连续

比较 $\quad f(-1)=\frac{5}{6},\ f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{6}(2-\sqrt{2}),\ f(1)=\frac{1}{6}$

得 $\quad \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f(-1)=\frac{5}{6},\quad \min\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$. 选(D).

(11) (C). 事实上,由题设条件知,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 与 $1-\cos x$ 为同阶无穷小,再由已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域连续,知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

由题设极限及极限的保号性,知在 $x=0$ 的某去心邻域内,$\frac{1-\cos x}{f(x)}<0$,而 $1-\cos x>0$,从而有 $f(x)<0=f(0)$,因此,$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

(12) (A). 因 $F(x)=-1-2x^4$,所以应选(A).

(13) (D). $(\boldsymbol{AB})^*=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$,故应选(D).

(14) (C). 由辛钦大数定律知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}EX_i^2,\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}EX_i$$

又根据按概率收敛的性质:如 $\hat{\theta}_{1n}\xrightarrow{P}\theta_1,\hat{\theta}_{2n}\xrightarrow{P}\theta_2$,且 $g(x,y)$ 是连续函数,则 $g(\hat{\theta}_{1n},\hat{\theta}_{2n})\xrightarrow{P}g(\theta_1,\theta_2)$ 可得

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)}$$

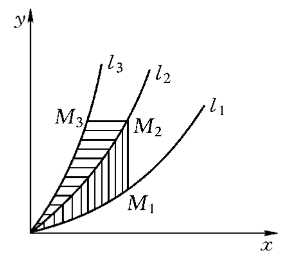
$$=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2}$$

$$\xrightarrow{P}1\cdot\sqrt{EX_i^2-(EX_i)^2}=\sqrt{DX_i}=\sigma$$

故应选(C).

三、解答题

(15)解 设曲线 l_3 的方程为 $x=\varphi(y)$,点 M_3 的坐标为$(\varphi(y),y)$,则点 M_2 的坐标为$(\sqrt{y},y)$,点 M_1 的坐标为$(\sqrt{y},\frac{1}{2}y)$.



$$A_1=\int_0^{\sqrt{y}}(t^2-\frac{1}{2}t^2)\mathrm{d}t=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t$$

$$A_2=\int_0^{y}[\sqrt{t}-\varphi(t)]\mathrm{d}t \qquad (5\text{ 分})$$

由题设条件 $A_1=A_2$,得

$$\int_0^{y}[\sqrt{t}-\varphi(t)]\mathrm{d}t=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t$$

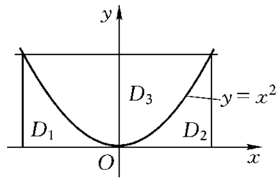
上式两端对 y 求导,得

$$\sqrt{y}-\varphi(y)=\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

由此解得 $\varphi(y)=\frac{3}{4}\sqrt{y}$,故 l_3 的方程为

$x=\frac{3}{4}\sqrt{y}$,或 $y=\frac{16}{9}x^2$. （9 分）

（16）解　用 $y=x^2$ 将 D 分成 D_1、D_2 和 D_3 三块，在 D_1 和 D_2 上，$y-x^2\leqslant 0$；在 D_3 上 $y-x^2\geqslant 0$. （4 分含图）



故 $\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1+D_2}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y-x^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{15}$$ （8 分）

（17）证　充分性：由条件(1)，当 $x\neq x_0$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\varphi(x)$$

上式两端令 $x\to x_0$，并利用条件(2)，得

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$$

故 f 在 x_0 处可导. （4 分）

必要性：设 f 在 x_0 处可导，即有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\quad 或\quad \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right]=0$$

且 f 在 x_0 处连续. 令函数

$$\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0), & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}$$

则有

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0=\alpha(0)$$

故 $\alpha(x)$ 在 x_0 处连续. 令函数

$$\varphi(x)=f'(x_0)+\alpha(x)$$

则 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，且由 $\alpha(x)$ 的定义域可得

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\varphi(x).$$ （8 分）

注　直接由 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\alpha(x)$

则 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)(f'(x_0)+\alpha(x))=(x-x_0)\varphi(x)$ 者扣 3 分，原因是 $\alpha(x)$ 在 $x=x_0$ 无定义！

（18）解　总税额 $T=xt$，而 x 应是使税后利润最大的产量. 因此，先来求使税后利润最大的产量 x.

收入函数　$R(x)=px=(9-2x)x=9x-2x^2$

税后利润函数　$\pi(x)=R(x)-3x-tx=9x-2x^2-(3+t)x$

由　$\dfrac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x}=6-t-4x=0$

得 $\pi(x)$ 有唯一驻点 $x=\frac{1}{4}(6-t)$，且

当 $0<x<\frac{1}{4}(6-t)$ 时，$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x}>0$

当 $x>\frac{1}{4}(6-t)$ 时，$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x}<0$

故 $\quad \max\pi(x)=\pi[\frac{1}{4}(6-t)]$ （5 分）

此时，总税额为 $\quad T=xt=\frac{1}{4}(6t-t^2)$

由 $\quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}(6-2t)=0,\Rightarrow t=3$

且当 $0<t<3$ 时，$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}>0$；当 $t>3$ 时，$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$，故当 $t=3$ 时，总税额 T 取得最大值.

（9 分）

（19）解 因 u_n 比较复杂，先用等价无穷小化简 u_n.

$n\to\infty$ 时：$\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$；

$$\ln\frac{n}{n+1}=\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)\sim\frac{-1}{n+1}\sim\frac{-1}{n}$$

所以 $\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln^2\frac{n}{n+1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(-\frac{1}{n})^2=\frac{1}{n^{5/2}}$ （5 分）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln^2\frac{n}{n+1}}{1/n^{5/2}}=1$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ 是收敛的 $P=\frac{5}{2}>1$ 的 P 级数.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln^2\frac{n}{n+1})$ 收敛. （8 分）

（20）解 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{n-m})$，则由题意 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，由此得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$. 这表明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 m 个列向量，即 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量为方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，即方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}y_j=0,i=1,2,\cdots,n-m$ 的解向量.（6 分）又因 $r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{B})=n-m,r(\boldsymbol{A})=m$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量作为列向量时，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})^{\mathrm{T}}$$

为方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}y_j=0,i=1,2,\cdots,n-m$ 的一个基础解系. （13 分）

（21）解 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{bmatrix}$，其特征多项式为

$$\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$. （4 分）

对 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，解 $[(a+1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得两个正交的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，将其规范化得

$$\boldsymbol{p}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

对 $\lambda_3=a-2$，解 $[(a-2)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，将其规范化得

$$\boldsymbol{p}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，则得二次型的标准形为

$$f=(a+1)y_1^2+(a+1)y_2^2+(a-2)y_3^2$$ （9 分）

（2）显然，当 $a>2$ 时，二次型为正定二次型. 若令

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1/\sqrt{a+1} & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{a+1} & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a-2}\end{bmatrix}$$，作变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，则得二型型 f 的规范形为

$$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$ （13 分）

（22）解 设液体中水份 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，（单位：%）方差未知，所以

（1）μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$\alpha=0.05$，查表得 $t_{0.025}(9)=2.2622$，因此所求置信区间为 $\left(0.452-2.2622\dfrac{0.037}{\sqrt{10}},0.452+2.2622\dfrac{0.037}{\sqrt{10}}\right)=(0.426,0.478)$

（2）该检验问题的拒绝域为 （7 分）

$$|\bar{x}-\mu_0|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

由于 $|\bar{x}-\mu_0|=|0.452-0.5|=0.048>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}=0.026$，故拒绝 H_0，即该溶液中的水份和 0.5% 有显著差异. （13 分）

（23）解 （1）先放在黑盒子中的三个球的颜色只有 4 种可能：3 黑，2 黑 1 白，1 黑 2 白，3 白，而余下的放在白盒子中的 6 个球的颜色分别对应有 4 种情况：2 黑 4 白，3 黑 3 白，4 黑 2 白，5 黑 1 白. 可见必有如下事件等式：{恰有 5 个球与它所在盒子颜色一致} = {先取 3 个球中恰有 2 个黑球}，右边事件中另一个球必为白球不必写出，但计算时必须考虑：$\alpha=\dfrac{C_5^2C_4^1}{C_8^3}=\dfrac{5}{7}$. （6 分）

（2）设 $A_1=$ {第一次取出 3 个黑球放在黑盒中}，$A_2=$ {第二次取出 3 个白球放在白盒中}，$A_3=$ {第三次取出 2 个球放在红盒中}，则

$$\beta=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$$

$$=\frac{C_3^3}{C_8^3}\cdot\frac{C_3^3}{C_5^3}\cdot\frac{C_2^2}{C_2^2}=\frac{1}{560}.$$ （13 分）

数学考研模拟考试试卷 7

数 学 三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\ln(1+\sin x)}=$ ________.

(2) $\left[\dfrac{x^3-4x^2+4x-2}{x^2-3x+2}\right]^{(3)}=$ ________.

(3) 设 $z=z(x,y)$ 由 $x=\ln\dfrac{z}{y}$ 所确定,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

(4) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha\beta}^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=$ ________.

(5) 将一枚骰子重复掷 n 次,则当 $n\to+\infty$ 时,n 次掷出点数的算术平均值依概率收敛于 ________.

(6) 已知二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

则 $E[2\max(X,Y)+3]=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(**7**) 设 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{12}|x|^5$. 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最大整数 $n=$( ).

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 5

(**8**) 设 $f(x)=x^x.(x>0)$,则数 $e^{-\frac{1}{e}}$( ).

(A) 是 $f(x)$ 的极大值但不是最大值.

(B) 是 $f(x)$ 的最大值.

(C) 是 $f(x)$ 的极小值但不是最小值.

(D) 是 $f(x)$ 的最小值.

(**9**) 已知 $a_n=\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$,则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$( ).

(A) 发散 (B) 收敛且其和为 4

(C) 收敛且其和为 2 (D) 收敛且其和为 1

(**10**) 设 $y(x)$ 是方程 $\dfrac{dy}{dx}=1-e^y$ 的解,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=$( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

(**11**) 设 $M=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\cos^3 x dx$,$N=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin^3 x+\dfrac{x^4}{1+x^2})dx$,$P=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(xe^{x^2}-\cos^3 x)dx$,则 M、N、P 的大小关系是( ).

(A) $N<P<M$ (B) $P<M<N$

(C) $M<P<N$ (D) $N<M<P$

(**12**) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非单位矩阵,且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$. 则( ).

(A) $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $|\boldsymbol{B}|=1$

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 1$

(C) $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=0$

(D) $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|\neq 0$

(**13**) 设二次型 $f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成的标准形为 $f=3y_1^2$,则( ).

(A) $a=0$ (B) $a=1$ (C) $a=2$ (D) $a=3$

(**14**) 在假设检验中,记 H_1 为备择假设,则犯第一类错误是指( ).

(A) 如 H_1 真,接受 H_1

(B) 如 H_1 不真,接受 H_1

(C) 如 H_1 真,拒绝 H_1

(D) 如 H_1 不真,拒绝 H_1

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 某风景区一观光船,其每小时燃料成本与船速的立方成正比,当船以 10 km/h 速度航行时,每小时燃料费是 100 元,而经营这艘船的成本费是每小时 675 元,问船以怎样的速度航行时,成本最小?

(16)(本题满分 8 分) 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$,$a_i$ 是常数($i=1,2,\cdots,n$),且 $|f(x)|\leqslant|e^x-1|$.证明: $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$

(17)（本题满分 8 分） 计算 $I=\iint\limits_{D}\sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi$ 所确定.

(18)（本题满分 9 分） 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y'-y}{x}$ 的值.

（19）（本题满分 8 分） 证明$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x < 2\ln 2 - 1$.

（20）（本题满分 13 分） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 均为n维非零列向量，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$是互不相同的常数，已知：如果有数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$ 使得 $\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$ 成立，则成立：

$$\mu_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_k\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

$$\vdots$$

$$\mu_1\lambda_1^{k-1}\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\lambda_2^{k-1}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_k\lambda_k^{k-1}\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

(21)（**本题满分 13 分**）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是不为零的常数，问它们满足什么关系时，方程组

$$\begin{cases} a_1^2x_1+a_1a_2x_2+\cdots+a_1a_nx_n=a_1^2 \\ a_2a_1x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_2a_nx_n=a_2^2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_na_1x_1+a_na_2x_2+\cdots+a_n^2x_n=a_n^2 \end{cases}$$

(1) 无解?(2) 有无穷多个解?并求出方程组的通解.

(22)（**本题满分 13 分**）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{4\pi^2}e^{-\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{4\pi}}$

求(1) $P\{2X\leqslant Y\}$;(2) $E(XY)$.

（**23**）**（本题满分 13 分）**（1）设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量，且 $D(\hat{\theta})>0$，证明 $(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

（2）设总体 X 服从区间 $(0,\theta)$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，证明 $\hat{\theta}=\max(X_1,\cdots,X_n)+\min(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个无偏估计.

试卷(七)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{6}}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(x-\frac{1}{6}x^3)+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

(2) $\underline{\dfrac{12}{(2-x)^4}-\dfrac{6}{(1-x)^4}}$. 原式 $=\left[x-1+\dfrac{-x}{(x-1)(x-2)}\right]^{(3)}=(\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{1}{1-x})^{(3)}$ $=\dfrac{12}{(2-x)^4}-\dfrac{6}{(1-x)^4}$

(3) $\underline{e^x(或\dfrac{z}{y})}$. **解 1.** $x=\ln|z|-\ln|y|$. 两边对 y 求导得 $z_y=\dfrac{z}{y}$,两边对 x 求导得 $z_x=z$. 从而 $z_{xy}=z_y=\dfrac{z}{y}=e^x$.

解 2. 原式即 $z=ye^x$,故 $z_{yx}=e^x$.

(4) $\underline{\ 3\ }$. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,则由已知的

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{T}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=1+1+1=3$.

(5) $\underline{\dfrac{7}{2}}$. 设 X_i 表示第 i 次掷出的点数,$i=1,2,\cdots,n$,它们相互独立且同分布:$P\{X_i=j\}=\dfrac{1}{6}$,$j=1,2,\cdots,6$,$i=1,\cdots,n$,$EX_i=\sum\limits_{i=1}^{6}i\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{2}$ 存在,故由辛钦大数定律可得 $\dfrac{\sum\limits_{x=1}^{n}X_i}{n}$ 依概率收敛到 $\dfrac{7}{2}$.

(6) $\underline{\dfrac{31}{6}}$. $P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\dfrac{1}{6}$,$P\{\max(X,Y)=1\}=P(\{X=0,Y=1\}\cup\{X=1,Y=0\}\cup\{X=1,Y=1\})=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{7}{12}$,$P\{\max(X,Y)=2\}=P(\{X=2,Y=0\}\cup\{X=2,Y=1\})=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{12}$,所以 $E[2\max(X,Y)+3]=2(1\cdot\dfrac{7}{12}+2\cdot\dfrac{3}{12})+3=\dfrac{31}{6}$.

二、选择题

(7) (A). 由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{12}x^5, & x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{12}x^5, & x<0\end{cases}$

得 $f^{(4)}(x)=\begin{cases}5x & x\geqslant 0\\ -5x & x<0\end{cases}=51\,|\,x\,|$. 故 $n=4$. 选(A).

(8)(D). $f'(x)=x^x(1+\ln x)$. 有唯一驻点:$x=\mathrm{e}^{-1}$. 且当 $x<\mathrm{e}^{-1}$,$f'(x)<0$;$x>\mathrm{e}^{-1}$,$f'(x)>0$. 故此点是唯一极小值点,也是 $f(x)$ 的最小值点,从而 $f(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 是最小值,选(D).

(9)(C). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$(令$\sqrt{x}=t$).

$$=2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2\left[-(1+t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}=2\text{,选(C).}$$

(10)(A). 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1-\mathrm{e}^y}=\mathrm{d}x$,得 $\ln\dfrac{C\mathrm{e}^y}{1-\mathrm{e}^y}=x$.

故 $\dfrac{1-\mathrm{e}^y}{C\mathrm{e}^y}=\mathrm{e}^{-x}$.($C$ 是不取 0 值的待定常数). 令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\mathrm{e}^y)=0$. 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$,选(A).

(11)(B). 由 $M=0$,$N=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x>0$,$P=-\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3x\mathrm{d}x<0$. 故选(B).

(12)(C). 由 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非单位矩阵无法得到 $|\boldsymbol{B}|$ 是否为 1,故(A)、(B) 均不对,若 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|\neq 0$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,故(D) 也不对,因此,应选(C).

(13)(B). 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$,其特征值显然为 $\lambda_1=3$,$\lambda_2=\lambda_3=0$,由特征之和为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和可得 $a=1$,此时,恰有 $r(\boldsymbol{A})=1$,故 $a=1$,应选(B).

(14)(B). 利用接受(或拒绝)H_0,也就是拒绝(或接受)H_1,由用原假设 H_0 定义的犯第一类错误即可知应选(B).

三、解答题

(15)解 每小时燃料成本为 $C_1(v)=kv^3$,当 $v=10$ 时,$C_1=100$,故 $k=\dfrac{1}{10}$,即 $C_1(v)=\dfrac{1}{10}v^3$. (2 分)

于是每小时的成本费为 $C=\dfrac{1}{10}v^3+675$

t 小时的成本费为 $C=\dfrac{1}{10}v^2s+675t$ ($s=vt$ 为路程). 于是每公里的成本费为

$$\overline{C}=\frac{1}{10}v^2+675/v \qquad (6\text{ 分})$$

而 $\overline{C}'=\dfrac{1}{5}v-675/v^2$,令 $\overline{C}'=0$ 得 $v=15$ 是唯的驻点,且 $\overline{C}''=\dfrac{1}{5}+2\times 675/v^3>0$. 故是极小点也是最小点,因此当以 15 km/h 的速率航行时,成本最小. (9 分)

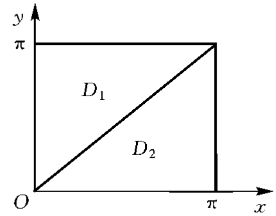
(16)解 由 $f(0)=0$. 知

$$|f'(0)|=\left|\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=|a_1+2a_2+\cdots+na_n| \qquad (4\text{ 分})$$

但 $\quad \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right|$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right| = 1$.

故 $\quad |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$. （8 分）

（**17**）**解** 如图. $\max\{x,y\} = \begin{cases} x, & 当(x,y)\in D_2 \\ y, & 当(x,y)\in D_1 \end{cases}$.



于是 $I = \iint\limits_D \sin x \sin y \max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_{D_1} y\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} x\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （5 分）$$

由对称性知

$$I = 2\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x\int_0^x \sin y\mathrm{d}y = 2\int_0^\pi x\sin x(1-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x - \int_0^\pi x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= -2x\cos x\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi \qquad （8 分）$$

（**18**）**解** 很明显级数收敛域是$(-\infty,+\infty)$. （2 分）

于是 $\quad y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!(n-1)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!(k+1)!} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!(k+1)!}$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!(n-2)!} \qquad (*)$$

故 $\quad xy'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!(n-2)1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{(k+1)!(k-1)1}$

$$xy'' + y' = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} = y$$

即 $xy'' + y' - y = 0$ （7 分）

由$(*)$式知，$y''(0) = \dfrac{1}{2}$，而$\dfrac{y'-y}{x} = -y''$

故 $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y'-y}{x} = -\lim\limits_{x\to 0}y''(x) = -y''(0) = -\dfrac{1}{2}$. （9 分）

（**19**）**证** 易知$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}-1$ （2 分）

故只要证明在$(0,1]$上，$\dfrac{\arctan x}{1+x} < \ln(1+x)$.

或 $\quad \arctan x < (1+x)\ln(1+x)$ （4 分）

为此，令 $\quad f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，$f(0) = 0$.

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad x\in(0,1]$$

故 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调增，从而有

$\arctan x < (1+x)\ln(1+x)$ 成立.

于是便有在$(0,1]$上$\dfrac{\arctan x}{1+x}<\ln(1+x)$.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1 \qquad (8\text{ 分})$$

(20)解 题中的 k 个等式可分别写成

$$(\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k)(1,1,\cdots,1)^T=\mathbf{0}$$
$$(\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k)(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)^T=\mathbf{0}$$
$$\vdots$$
$$(\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k)(\lambda_1^{k-1},\lambda_2^{k-1},\cdots,\lambda_k^{k-1})^T=\mathbf{0} \qquad (4\text{ 分})$$

合起来可写成

$$(\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O} \qquad (7\text{ 分})$$

由于 $\lambda_i\neq\lambda_j,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,k$,所以范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{vmatrix}\neq\boldsymbol{O} \qquad (9\text{ 分})$$

从而有

$$(\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k)=\boldsymbol{O}$$
$$\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0},i=1,2,\cdots,k. \qquad (11')$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0},i=1,2,\cdots,k$,故 $\mu_i=0,i=1,2,\cdots,k$. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关. (13′)

(21)解 方程组的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc:c}a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n & a_1^2\\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n & a_2^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 & a_n^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2-a_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n-a_1\end{array}\right) \qquad (3\text{ 分})$$

(1)当对某个 $i(2\leqslant i\leqslant n)$,使 $a_i\neq a_1$ 时,方程组无解.

(2)当 $a_2=a_3=\cdots=a_n=a_1$ 时,方程组有无穷多个解,此时,同解方程组为

$$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_4+1$$

它有一个解 $\boldsymbol{\eta}=(1,0,\cdots,0)^T$. (8 分)

在对应的齐次方程组中,分别取

$$(x_2,x_3,\cdots,x_n)=(-1,0,\cdots,0),(0,-1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,-1)$$

解得对应齐次方程组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\cdots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^T. \qquad (12\text{ 分})$$

从而,方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+C_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+C_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1},C_i\text{ 为任意常数},i=1,2,\cdots,n-1. \qquad (13\text{ 分})$$

(22) 解 显然(X,Y)服从二维正态分布$N(1,2,(\sqrt{2\pi})^2,(\sqrt{2\pi})^2,0)$，因此，$X\sim N(1,2\pi)$，$Y\sim N(2,2\pi)$，且由$\rho=0$知$X,Y$相互独立.

(1) $2X-Y\sim N(0,10\pi)$，因此

$$P\{2X\leqslant Y\}=P\{2X-Y\leqslant 0\}=F(0)=\Phi\left(\frac{0-0}{\sqrt{10\pi}}\right)=0.5$$

(2) $E(XY)=EX\cdot EY=1\times 2=2$ (13 分)

(23) 解(1) 反证：假设$(\hat{\theta})^2$是θ^2的无偏估计，即$E(\hat{\theta})^2=\theta^2$，则$D(\hat{\theta})=E((\hat{\theta})^2)-(E\hat{\theta})^2=\theta^2-\theta^2=0$和假设$D(\hat{\theta})>0$矛盾，故$(\hat{\theta})^2$不是$\theta^2$的无偏估计. (3 分)

(2) 当$0<x<\theta$时

$$P\{\max(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x\}=(F_X(x))^n$$

所以，$\max(X_1,\cdots,X_n)$的概率密度$f_1(x)$为

$$f_1(x)=\begin{cases}n(F_X(x))^{n-1}f_X(x), & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ (6 分)

$$E(\max(X_1,\cdots,X_n))=\int_0^\theta x\cdot n(F_X(x))^{n-1}f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$=x(F_X(x))^n\Big|_0^\theta-\int_0^\theta(F_X(x))^n\mathrm{d}x$$

$$=\theta-\int_0^\theta(\frac{x}{\theta})^n\mathrm{d}x=\theta-\frac{1}{\theta^n}\ \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta$$

$$=\theta-\frac{\theta}{n+1}=\frac{n}{n+1}\theta.$$

$$P\{\min(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}=1-P\{X_1>x,\cdots,X_n>x\}=1-(1-F_X(x))^n$$

所以，$\min(X_1,\cdots,X_n)$的概率密度$f_2(x)$为

$$f_2(x)=\begin{cases}n(1-F_X(x))^{n-1}f_X(x), & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ (9 分)

$$E(\min(X_1,\cdots,X_n))=\int_0^\theta x\cdot n(1-F_X(x))^{n-1}f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$=-x(1-F_X(x))^n\Big|_0^\theta-\int_0^\theta(1-F_X(x))^n\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^\theta(1-\frac{x}{\theta})^n\mathrm{d}x=-\theta\cdot\frac{1}{n+1}(1-\frac{x}{\theta})^{n+1}\Big|_0^\theta$$

$$=\frac{\theta}{n+1}.$$

故 $E\hat{\theta}=E(\max(X_1,\cdots,X_n)+\min(X_1,\cdots,X_n))$

$$=E\max(X_1,\cdots,X_n)+E\mathrm{im}(X_1,\cdots,X_n)$$

$$=\frac{n\theta}{n+1}+\frac{\theta}{n+1}=\theta$$

所以，$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量. (13 分)

数学考研

数学考研模拟考试试卷 8

数学三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} =$ ________.

(2) 设 $f(1+x)-3f(1-x)=8x(1+|\sin x|)$,且 $f(x)$ 可导,则 $f'(1)=$ ________.

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n2^n}{n^2+1}x^n$ 的收敛域是________.

(4) $D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} =$ ________.

(5) 设 A、B、C 为三个随机事件,$A\supset C$,$B\supset C$,$P(A)=0.7$,$P(A-C)=0.4$,$P(AB)=0.5$,则 $P(AB-C)=$ ________.

(6) 设总体 $X\sim N(1,4)$,X_1、X_2、X_3、X_4 是来自总体 X 的一个简单随机样本,令 $Y=\dfrac{(X_1-X_2)^2}{(X_3-X_4)^2}$,则 Y 服从自由度为________的________分布.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+ax^2+b}{x^2+x+1}-(x+1)\right)=0$. 则实数 a、b 为( ).

(A) $a=1,b=1$　　(B) $a=2$,b 为任意实数

(C) $a=2,b=-2$　　(D) a 为任意实数，$b=2$

(8) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)=(x-b)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 则必定存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=$（　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

(9) 设 $u=f(x,xy,xyz)$. 其中 $f(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数. 则$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=$（　）.

(A) $yf'_3+x^2y(f''_{32}+zf''_{33})$

(B) $xf'_3+x^2y(f''_{23}+zf''_{33})$

(C) $xf'_3+x^2yzf''_{33}$

(D) $yf'_3+xzf''_{33}$

(10) 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y''+4y'+4y=0$ 及初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-4$. 则广义积分$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$（　）.

(A) 发散　　(B) 等于 1　　(C) 等于 -1　　(D) 等于 3

(11) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{2x}-1), & x<0\\ a+b\sin x, & x\leqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处可导，则（　）.

(A) $a=0,b=1$　　(B) $a=1,b=2$

(C) $a=2,b=2$　　(D) $a=2,b=1$

(12) 下列命题正确的是（　）.

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则其任一向量都可由其余 $r-1$ 个向量线性表示

(B) 若存在不全为零的数中 $k_1,\cdots,k_r$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关

(C) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则表示式必唯一

(D) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充分必要条件是表示式唯一

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的实对称矩阵，则二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$（　）.

(A) 必有相同的规范形和相同的标准形

(B) 必有相同的规范形但未必有相同的标准形

(C) 必有不同的规范形和不同的标准形

(D) 必有不同的规范形但有相同的标准形

(14) 下列结论正确的是（　）.

(A) 若 $P(AB)=0$，则 A、B 互不相容

(B) 若 $P(A)=1,P(B)=1$，则 A、B 相互独立

(C) 若 $P(A)=1,P(B)=1$，则 $P(AB)=1$ 不一定成立

(D) 若 $P(A)=1$，则 A 是必然事件

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设 $y=y(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $x\in(0,1)$ 时,$y(x)>0$ 及 $xy'=y+\dfrac{3}{2}ax^2$. 若曲线 $y=y(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围图形 A 的面积 $S=2$.

(1) 求函数 $y(x)$

(2) a 为何值时图形 A 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小?

(16)(本题满分 8 分) 某牧场原有一种牲口 160 头,现欲控制其数量,使其在 $80\sim100$ 头之间,而采用以下的模式:$\dfrac{400\mathrm{d}P}{P\,\mathrm{d}t}=80-P$. 其中 $P(t)$ 表示 t 时刻此牲口头数,t 是时间(以月为单位). 问大约经几个月可将牲口头数控制到 100 头以内?

(17)**(本题满分 9 分)** 设 $f(t)=1-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 且 $f(t)$ 连续,试作出曲线 $y=f(x)$ 的图像.

(18)**(本题满分 8 分)** 证明 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程:$y^{(4)}=y$,并求和函数 $y(x)$.

(19)**(本题满分 8 分)** 当 $x>0$ 时,证明$\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t<\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

(20)(本题满分 13 分) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆,证明:$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 可逆.

(21)(本题满分 13 分) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$r(\boldsymbol{A})=n-1$,$A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式,且 $A_{11}\neq 0$,$\sum_{i=1}^{n}A_{ii}\neq 0$,求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的非零特征值及对应的特征向量.

(22)（本题满分 13 分） 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<2,|y|<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 和条件概率密度 $f_Y(y\mid x)$

(2) X,Y 是否不相关？为什么？

(3) X,Y 是否独立？为什么？

(23)（本题满分 13 分） 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$$

(1) 分别求关于 x 的二次方程 $3x^2-Xx+3=0$ 有二重根的概率 α 和无实根的概率 β.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来知总体 X 的简单随机样本，求未知参数 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_L$.

(3) $\hat{\sigma}_L$ 是否是 σ 的无偏估计量？为什么？

(4) $\hat{\sigma}_L$ 是否是 σ 的相合估计量？为什么？

试卷(八) 解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad e^{-\frac{1}{2}}\quad}$. 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(1+\cos\sqrt{x}-1)} = e^{-\frac{1}{2}}$

(2) $\underline{\quad 2\quad}$. 于等式两边取极限知$(x\to 0)\, f(1)=0$.

用 x 除等式两边并取极限得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)}{x}-3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)}{x}=8$.

即得 $f'(1)=2$.

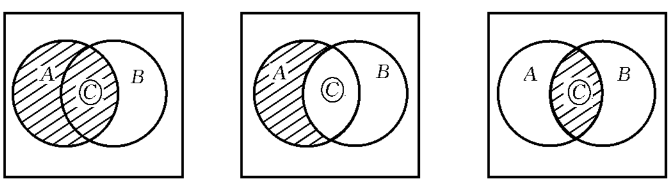
(3) $\underline{\quad [-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\quad}$. 由达朗伯判别法知此级数收敛半径是$\dfrac{1}{2}$,而当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,级数发散;当 $x=-\dfrac{1}{2}$,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{1+n^2}$,显然 $a_n=\dfrac{n}{n^2+1}\to 0(n\to\infty)$,设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,则 $f'(x)=\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0\ (x>1)$,故 a_n 单调减,因此级数收敛.

(4) $\underline{\quad b^{n-1}(b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)\quad}$.

$$D_n \xlongequal[\substack{r_i-r_1\\(i=2,3,\cdots,n)}]{c_1+(c_2+\cdots+c_n)} \begin{vmatrix} b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)$$

(5) $\underline{\quad 0.2\quad}$. **解 1** $P(AB-C)=P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)=0.5-P(AC)=0.5-(P(A)-P(A\bar{C}))=0.5-(0.7-0.4)=0.2$.

解 2 用文氏图把事件的概率看成该事件对应的区域的面积(设 Ω 面积为 1),由图(a) 和(b) 的面积,可得(c) 中的面积,即得 $P(AB-C)=0.2$.



$P(A-C)=0.4$ (a) $P(A)-P(AB)=0.2$ (b) $P(AB-C)=0.2$ (c)

(6) $\underline{\quad (1,1)\quad}$, $\underline{\quad F\quad}$. 因为 $X_1-X_2\sim N(0,8)$, $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{8}}\sim N(0,1)$,所以,$(\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{8}})^2\sim\chi^2(1)$,同量可得$(\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{8}})^2\sim\chi^2(1)$,且它与$(\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{8}})^2$ 独立,故

$$Y=\frac{(X_1-X_2)^2}{(X_3-X_4)^2}=\frac{(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{8}})^2/1}{(\frac{X_3-X_4}{\sqrt{8}})^2/1}\sim F(1,1).$$

二、选择题

(7)(B). 由$\frac{x^3+ax^2+b}{x^2+x+1}-(x+1)=\frac{(a-2)x^2-2x+b-1}{x^2+x+1}$

只要 $a=2$,必有$\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x^3+ax^2+b}{x^2+x+1}-(x+1)]=0$. b 可任意取值. 选(B).

(8)(A). 显然由 $f(x)$ 连续,知 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$可导,且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,故满足罗尔定理条件,地是存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$. 选(A).

(9)(B). $\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3$. 故$\frac{\partial y}{\partial y\partial z}=xf'_3+xy(xf''_{23}+xzf''_{33})$

$=xf'_3+x^2y(f''_{23}+zf''_{33})$. 选(B).

(10)(B). 由特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 知方程的通解为:

$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$. 由 $y(0)=2$ 及 $y'(0)=-4$ 得 $C_1=2,C_2=0$

于是 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1$. 选(B).

(11)(C). 首先由连续性知 $a=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{2x}-1)=2$.

从而$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2\mathrm{e}^{2x}-2}{2x}=2=f'_+(0)=b$. 故 $a=2,b=2$. 选(C).

(12)(D). (A),(C) 显然不对. 对(B),若$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,2)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1)$,$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,0)$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1)$,取 $k_1=1,k_2=-1$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关,而 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,所以(B) 也不对. 故应选(D).

(13)(B). 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同,即

$(\boldsymbol{A}^{-1})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T=(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

所以两个二次型必有相同的规范形. 又因 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的倒数,因此,两二次型未必有相同的标准形,故应选(B).

(14)(B). **解 1** $1\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1=1$,故 $P(AB)=0=P(A)P(B)$,A、B 相互独立,选(B).

解 2 由 $P(\bar{A})=P(\bar{B})=0$ 知,$0\leqslant P(\bar{A}\,\bar{B})\leqslant P(\bar{A})=0$,即 $P(\bar{A}\,\bar{B})=0$ 因此 $P(\bar{A}\,\bar{B})=0=P(\bar{A})P(\bar{B})$,$\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 独立,故 A、B 独立.

三、解答题

(15)解 (1) 于微分方程两边除以 x^2 得

$\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x^2}=\frac{3}{2}a$. 或$(\frac{y}{x})'=\frac{3}{2}a$.

故 $y=\frac{3}{2}ax^2+Cx$. (3 分)

又 $S=\int_0^1(\frac{3}{2}ax^2+Cx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{C}{2}=2$. 得 $C=4-a$.

从而 $y=\frac{3}{2}x[ax+\frac{2}{3}(4-a)]$ (5 分)

(2) $V=\pi\int_0^1 \frac{9}{4}x^2\left[ax+\frac{2}{3}(4-a)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}(a^2+10a+160)$.

令 $f(a)=a^2+10a+160$. $f'(a)=2(a+5)$，令 $f'(a)=0$ 得 $a=-5$ 是最小点，故当 $a=-5$ 时，A 绕 x 转旋转体的体积最小. (9 分)

(16) 解 方程为

$$\frac{80\mathrm{d}P}{P(80-P)}=\frac{1}{5}\mathrm{d}t.\text{ 即 }\ln\frac{CP}{80-P}=\frac{t}{5}$$

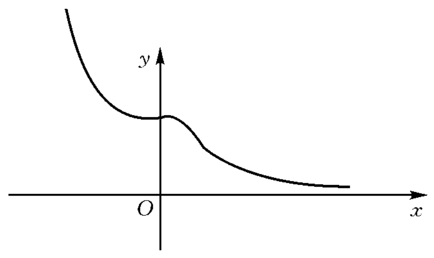
或 $\frac{80-P}{P}=C\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$，由 $t=0$，$P_0=160$，得 $C=-\frac{1}{2}$.

于是 $P=\dfrac{80}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}}$

故 $P\geqslant 80$. 又由 $80\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(80-P)$. 知，当 $P>80$ 时，P 单调减，而 $t\to+\infty$ 时 $P\to 80$. 故此模型可保证牲口在 80 头以上，而令 $P=100$ 时，$1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{5}}=\frac{80}{100}$.

当 $\mathrm{e}^{\frac{T}{5}}=2.5$ 时，可求得 $[T]+1=5$. 即 5 个月一，牲口头数将不超过 100 头. (8 分)

(17) 解 $f(t)=1-2\pi\int_0^{|t|}\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho$



当 $t>0$ 时，$f'(t)=-2\pi t f(t)$ 及 $f(0)=1$，故 $f(t)=\mathrm{e}^{-\pi t^2}$

当 $t<0$ 时，$f'(t)=2\pi t f(t)$ 及 $f(0)=1$，故 $f(t)=\mathrm{e}^{\pi t^2}$.

故 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\pi x^2}, & \text{当 } x<0\\ \mathrm{e}^{-\pi x^2}, & \text{当 } x>0\end{cases}$ (6 分)

当 $x<0$ 时，$y=f(x)$ 单调减，曲线向上凹；当 $x>0$ 时，$y=f(x)$ 单调减，且 $f''(x)=2\pi(2\pi x^2-1)\mathrm{e}^{-\pi x^2}$，曲线在 $(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ 向下凹，在 $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},+\infty)$ 向上凹. $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{e}})$ 是拐点，$y=0$ 是水平渐近线，因此曲线 $y=f(x)$ 图像如右图所示. (9 分)

(18) 证 显然级数收敛域是 $(-\infty,+\infty)$.

这时，$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$；$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$；$y'''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$

$$y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{(4k)!}=y.$$ (4 分)

求和函数有两种解法：

解 1 $\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $\quad \mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

故 $y=\frac{\cos x+\mathrm{ch}x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ (8 分)

解 2 $y^{(4)}-y=0$ 的通解是 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$ 而 $y(0)=1$，$y'(0)=$

$y''(0)=y'''(0)=0$，代入得

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=1 \\ C_1-C_2+C_4=0 \\ C_1+C_2-C_3=0 \\ C_1-C_2-C_4=0 \end{cases} \quad 故\ C_1=C_2=\frac{1}{4},\ C_3=\frac{1}{2},\ C_4=0$$

故 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{4}+\dfrac{1}{2}\cos x=\dfrac{\operatorname{ch}x+\cos x}{2}$ （8 分）

（19）证 记 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$.（$x>0$）

则 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x$. 有驻点 $x=1$ 及 $x=k\pi$（$k=1,2,\cdots$）很明显，由于 x 从小于 $k\pi$ 经 $k\pi$ 点至大于 $k\pi$ 时，$f'(x)$ 不变号，故这些不是极值点；只有 $x=1$ 是唯一的极大值点，因而也是最大值点. （3 分）

于是 $f(x)\leqslant\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$

而 $t\in(0,1)$ 时，$\sin t<t$. 从而

$$f(x)\leqslant\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt<\int_0^1 (t^{2n+1}-t^{2n+2})\,dt$$

$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$ （8 分）

（20）证 由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆知存在 n 阶矩阵使 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，由此可得 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{CAB}$ （4 分）

于是

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}[\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})]\boldsymbol{A}$$ （6 分）

$$=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{ABC})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{CA}$$ （8 分）

$$=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BAB})\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{BCA}$$

$$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})$$ （12 分）

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 可逆. （13 分）

（21）解 由 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 知 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，所以零为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中有 $n-1$ 个解向量，即属于零特征值有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，知零至少为 $n-1$ 重特征值，再由 n 个特征值之和等于 $\sum_{i=1}^n A_{ii}$，且 $\sum_{i=1}^n A_{ii}\neq 0$ 知 $\boldsymbol{A}^*$ 的非零特征值为 $\sum_{i=1}^n A_{ii}$.（3′）

由 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$ 及 $A_{11}\neq 0$ 知 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列 $(A_{11}\ A_{12}\ \cdots\ A_{1n})^T$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的 n 个列向量的一个极大无关组，从而存在数 $k_2,\cdots,k_n$ 使

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & k_2A_{11} & \cdots & k_nA_{11} \\ A_{12} & k_2A_{12} & \cdots & k_nA_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & k_2A_{1n} & \cdots & k_nA_{1n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix}(1\quad k_2\quad \cdots\quad k_n)$$ （6′）

由此得 $\sum_{i=1}^n A_{ii}=A_{11}+k_2A_{12}+\cdots+k_nA_{1n}$. 又

$$\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix}(1\ k_2\ \cdots\ k_n)\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix}(A_{11}+k_2A_{12}+\cdots+k_{1n}A_{1n})$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}A_{ii})\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix} \qquad (12')$$

从而$(A_{11}\ A_{12}\ \cdots\ A_{1n})^T$（它不是零向量）是$\boldsymbol{A}^*$的对应于非零特征值$\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}$的特征向量，其全部特征向量为

$$C(A_{11}\ A_{12}\ \cdots\ A_{1n})^T(C\neq 0). \qquad (13')$$

（22）解　（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{2+y}{4}, & -2<y<0\\ \int_{y}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{2-y}{4}, & 0\leqslant y<2\end{cases}$$

当$0<x<2$时，$f_Y(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & -x<y<x\\ 0,\text{其它}\end{cases}$.　　（5分）

（2）$EX=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$

$EY=\int_{-2}^{0}y\cdot\frac{2+y}{4}\mathrm{d}y+\int_0^2 y\cdot\frac{2-y}{4}\mathrm{d}y=0$

$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}xy\,\mathrm{d}y=0$

$\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=0$

故X,Y不相关.　　（10分）

（3）由（1）可见，当$0<x<2$，$|y|<x$时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y不独立.

（13分）

（23）解　（1）$\alpha=P\{\text{有二重根}\}=P\{X^2-4\cdot 3^2=0\}=P\{|X|=6\}=0$

$\beta=P\{\text{无实根}\}=P\{X^2-4\cdot 3^2<0\}=P\{-6<X<6\}$

$=\int_{-6}^{6}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\int_0^6\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}})\Big|_0^6=1-\mathrm{e}^{-\frac{6}{\sigma}}$　　（4分）

（2）$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma)=\dfrac{1}{2^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}$

$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\alpha\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=0$

得　$\hat{\sigma}_L = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|$　（7 分）

所以，最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_L = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|$.

（3）$E|X_i| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx = \int_{0}^{+\infty} \dfrac{x}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}} = \sigma$. 所以，$E\hat{\sigma}_L = E(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i| = \sigma$，故 $\hat{\sigma}_L$ 是无偏估计量.

（4）因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，所以 $|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|$ 也独立同分布，又 $E|X_i| = \sigma$ 存在，故由辛钦大数定律可得 $\hat{\sigma}_L = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$ 依概率收敛到 $E|X_i| = \sigma$，因此，$\hat{\sigma}_L$ 是相合估计量.　（13 分）

数学考研模拟考试试卷 9

数 学 三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设$\int \sin x f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}\ln(1+8\cos x)+C$,则$\int \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x =$ ________.

(2) 差分方程 $y_{x+1}-3y_x = 2\cdot 3^x$ 的通解为________.

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 的收敛域是________.

(4) 设 $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}$ 是 4 阶可逆矩阵,则 $|2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2005}\boldsymbol{P}| =$ ________.

(5) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,且 $F(-3)=0$,$F(3)=0.4$,则 $P\{-5<X\leqslant 3\} =$ ________.

(6) 设总体 $X\sim N(\mu,9)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{36}$ 是取自 X 的一个简单随机样本,如果以区间 $(\overline{X}-0.5,\overline{X}+0.5)$ 作为 μ 的置信区间,那么它的置信度应为________.($\Phi(1)=0.8413$).

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续,且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{f'(x)} = -1$,则(　).

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f'(x)$ 在 a 的邻域内单调增

(8) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，作 $\varphi(x)=(x-b)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则知存在 $\xi\in(a,b)$ 使(　).

(A) $f(\xi)=\dfrac{1}{\xi-b}\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t$

(B) $f(\xi)=\dfrac{1}{b-\xi}\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t$

(C) $f(\xi)=\dfrac{1}{\xi-a}\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t$

(D) $f(\xi)=\dfrac{1}{a-\xi}\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t$

(9) 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}+\int_0^{1/x^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\ (x\neq 0)$，要使此函数处处连续，则 $F(0)=$(　).

(A) 0　　(B) π　　(C) $\pi/2$　　(D) $\pi/4$

(10) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则下列三个级数：

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，　② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4$，　③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^6$ 中(　).

(A) ①、②、③ 均收敛

(B) 仅 ②、③ 收敛

(C) 仅 ③ 收敛

(D) ①、②、③ 均未必收敛

(11) 设 $u=\mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程：$x+y+z+zxy=0$ 确定的隐函数，则 $u'_x\big|_{(0,1,-1)}=$(　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) 0

(12) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维实非零列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 一定(　).

(A) 没有零特征值

(B) 只有一个零特征值

(C) 只有两个零特征值

(D) 有三个零特征值

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$，则(　).

(A) 对任意 t，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均线性相关

(B) 对任意 t，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均线性无关

(C) $t\neq 5$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

(D) $t\neq 5$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

(14) 设随机变量 $X\sim F(n,n)$，记 $\alpha=P\{X\geqslant 1\}$，$\beta=P\{X\leqslant 1\}$，则(　).

(A) $\alpha=\beta$　　(B) $\alpha<\beta$

(C) $\alpha>\beta$　　(D) α、β 的大小与 n 的取值有关

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(**15**)(**本题满分 9 分**)计算$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

(**16**)(**本题满分 8 分**)已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数:$D=D(p)=\frac{a}{p^2}$,$S=S(p)=bp$. 其中 a,b 是正常数;而价格 $p(t)$ 满足方程:

$$\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]\ (k \text{ 是正常数}),\text{且 } p(0)=1.$$

求:(1) 需求量等于供给量时的均衡价格 $\bar{p}$.

(2) 价格函数 $p(t)$ 及极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$.

（**17**）（**本题满分 9 分**）设 $\varphi(x)$ 具有二阶连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$. 又，存在二元函数 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=y\varphi(x)\mathrm{d}x+[\sin x-\varphi'(x)]\mathrm{d}y$. 求 $\varphi(x)$.

（**18**）（**本题满分 8 分**）计算二重积分 $\iint\limits_{D} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 $D=\{(x,y)\mid x>0,4x^2\leqslant y\leqslant 9x^2\}$.

（19）**（本题满分 8 分）** 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，且 $|f''(x)|\leqslant M$ $(x\in[0,a])$，又 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取到最大值. 证明 $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

（20）**（本题满分 13 分）** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $a_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，问 λ 取何值时，方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，并求出通解.

(**21**)(**本题满分 13 分**)设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维实的单位向量,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵;

(2) 写出经正交变换将二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化成的标准形;

(3) 问 $\boldsymbol{A}$ 是否为正定矩阵,说明理由.

(**22**)(**本题满分 13 分**)假设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{1+x^2}, & x\geqslant 0\\ b(x+2), & -2\leqslant x\leqslant -1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

已知 $P\{X\leqslant 1\}=3/4$,求

(1) 常数 a,b 的值;(2) X 的分布函数 $F(x)$;(3) $Y=X^3$ 的概率密度函数.

（**23**）**（本题满分 13 分）** 设随机变量 X,Y 相互独立同分布：$P\{X=-2\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，且 $Z=XY$，证明 X,Y,Z 两两独立，但不相互独立.

试卷(九)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad \frac{1}{2}x+4\sin x+C \quad}$. 由已知得 $\sin x f(x)=\frac{2\sin x}{1+8\cos x}$.

因此 $\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int\frac{1}{2}(1+8\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x+4\sin x+C$.

(2) $\underline{\quad 2x3^{x-1}+A3^x \quad}$. 齐次方程的通解是 $A3^x$. 设此方程的一个特解为 $Cx3^x$. 代入方程求得 $C=\frac{2}{3}$. 便得所求的通解.

(3) $\underline{\quad (-1,1) \quad}$. 当 $|x|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|\Big/|x|^n=1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ 绝对收敛;当 $|x|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=1\neq 0$,级数发散;当 $x=1$ 时通项恒为 $1/2$,而 $x=-1$ 时,n 为奇数的项均无意义. 故此级数的收敛域为 $(-1,1)$.

(4) $\underline{\quad -16 \quad}$. 易知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$. 故 $\boldsymbol{A}^{2n+1}=\boldsymbol{A}$. $|2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2005}\boldsymbol{P}|=|2\boldsymbol{A}|=2^4|\boldsymbol{A}|=-2^4$.

(5) $\underline{\quad 0.4 \quad}$. $F(-3)=0$,故 $F(-5)=0$,$P\{-5<X\leqslant 3\}=F(3)-F(-5)=F(3)=0.4$.

(6) $\underline{\quad 0.6826 \quad}$. 由 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{9}{36})$. 故 $1-\alpha=P\{\overline{X}-0.5<\mu<\overline{X}+0.5\}=P\{-1<\frac{\overline{X}-\mu}{1/2}<1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$.

二、选择题

(7) (B). 显然 $f'(a)=0$,而当 $x<a$ 在 a 的一个左邻域时,$\sin(x-a)<0$. 于是 $f'(x)>0$,在 a 的一个右邻域 $f'(x)<0$. 故 $f(a)$ 取极大值.

(8) (B). 由 $\varphi(a)=\varphi(b)$ 知,$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件. 故存在 $\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t+(\xi-b)f(\xi)=0.\quad f(\xi)=\frac{1}{b-\xi}\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t.$$

(9) (C). **解 1.** $F(x)=\arctan x^2+\arctan\frac{1}{x^2}=\arctan x^2+\operatorname{arccot}x^2=\frac{\pi}{2}\ (x\neq 0)$.

故当 $F(0)=\frac{\pi}{2}$ 时,$F(x)\equiv\frac{\pi}{2}$,处处连续.

解 2. $F'(x)=0$,知 $F(x)=C\ (x\neq 0)$. 令 $x=1$,得

$F(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,则 $x\neq 0$ 时 $F(x)=\frac{\pi}{2}$.

(10) (D). 设 $a_n=(-1)\big/n^{\frac{1}{12}}$. 则 $a_n^2=\frac{1}{n^{1/6}}$,$a_n^4=\frac{1}{n^{1/3}}$,$a_n^6=\frac{1}{n^{1/2}}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛但①、②、③均发散.

(11) (A). 由已知方程两边对 x 求导得 $1+z_x+zy+xz_xy=0$ 故 $z_x\big|_{(0,1,-1)}=0$.

从而 $u_x = e^x yz^2 + 2e^x yzz_x$，$u_x\Big|_{(0,1,-1)} = 1$.

(12)（C）. 由 $r(\boldsymbol{A}) = 1$ 及 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，得 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化. 而对应特征值 0 有两个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 有且只有两个 0 特征值.

(13)（C）. 由 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t-3 \end{pmatrix}$；$t \neq 5$ 为满秩. 选（C）.

(14)（A）. 由 $X \sim F(n,n)$ 故 $\dfrac{1}{X} \sim F(n,n)$. 从而 $P\{X \leqslant 1\} = P\{\dfrac{1}{X} \leqslant 1\} = P\{X \geqslant 1\}$，即 $\alpha = \beta$.

三、解答题

(15) **解 1** 原积分 $= 2x\sqrt{e^x - 1} - 2\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$. （3 分）

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - 1}}dx$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 2\int \frac{e^{-\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{1-e^{-x}}} \qquad (7\text{ 分})$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} - 4\arcsin e^{-\frac{x}{2}} + C. \qquad (9\text{ 分})$$

解 2. 令 $e^x - 1 = t^2$. 则 $e^x dx = 2t dt$. （4 分）

原积分 $= 2\int \ln(1+t^2)dt = 2t\ln(1+t^2) - 4\int \dfrac{t^2}{1+t^2}dt$

$$= 2t\ln(1+t^2) - 4t + 4\arctan t + C$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C. \qquad (9\text{ 分})$$

注：我们同时证明了恒等式：$\arctan\sqrt{e^x-1} + \arcsin e^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$ $(x \geqslant 0)$，有兴趣的读者可试用初等方法证明.

(16) **解** (1) 即 $\dfrac{a}{\bar{p}^2} = b\bar{p}$. 故 $\bar{p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/3}$. （2 分）

(2) 即 $\dfrac{dp}{dt} = k(\dfrac{a}{p^2} + bp) = \dfrac{kb}{p^2}(\dfrac{a}{b} - p^3) = \dfrac{kb}{p^2}(\bar{p}^3 - p^3)$.

得 $\quad \dfrac{p^2 dp}{p^3 - \bar{p}^3} = -kb\,dt$.

$$\ln(p^3 - \bar{p}^3) = \ln C - 3kbt$$

或 $p^3 = \bar{p}^3 + Ce^{-3kbt}$，由 $p(0) = 1$，得 $C = 1 - \bar{p}^3$.

$$p(t) = [\bar{p}^3 + (1-\bar{p}^3)e^{-3kbt}]^{1/3} \qquad (6\text{ 分})$$

因此 $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = \bar{p}$ （8 分）

(17) **解** 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\varphi(x)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin x - \varphi'(x)$.

而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \varphi(x)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos x - \varphi''(x)$ 连续. 因此得

$$\varphi(x) = \cos x - \varphi''(x) \text{ 或 } \varphi''(x) + \varphi(x) = \cos x \qquad (4\text{ 分})$$

设此方程一个特解是：$x(a\sin x+b\cos x)$. 代入方程得：$a=\dfrac{1}{2}, b=0$

由此得通解：$\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}x\sin x$.　　(7 分)

由 $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$ 得 $C_1=0, C_2=1$,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(2+x)\sin x \qquad (9\text{ 分})$$

(18) 解 $\displaystyle\iint_D x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}/3}^{\sqrt{y}/2}x\mathrm{d}x$　　(4 分)

$$=\frac{5}{72}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{5}{144}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_{+\infty}^{0}=\frac{5}{144} \qquad (8\text{ 分})$$

(19) 解 设 $f(x_0)$ 是最大值，$x_0\in(0,a)$. 因此 x_0 也是极大值点，从而 $f'(x_0)=0$.

(3 分)

由拉氏中值定理知. 存在 $\xi_1\in(0,x_0)$，使

$$|f'(0)|=|f'(x_0)-f'(0)|=|f''(\xi_1)|x_0\leqslant x_0M$$

存在 $\xi_2\in(x_0,a)$ 使 $|f'(a)|=|f'(a)-f'(x_0)|=(a-x_0)|f''(\xi_2)|\leqslant(a-x_0)M$

因此 $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant x_0M+(a-x_0)M=aM$　　(8 分)

(20) 解 1
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_{n-1} & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_{n-1} & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -a_{n-1}a_1 & -a_{n-1}a_2 & \cdots & \lambda-a_{n-1}^2 & -a_{n-1}a_n\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & -a_na_{n-1} & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^n a_i^2)$$

所以，当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$ 时，方程组有非零解.　　(5 分)

(1) 当 $\lambda=0$ 时，同解方程组为 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$，即

$$a_1x_1=-a_2x_2-a_3x_3-\cdots-a_nx_n$$

由此得方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(\frac{1}{a_1},-\frac{1}{a_2},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=(\frac{1}{a_1},0,-\frac{1}{a_3},\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(\frac{1}{a_1},0,0,\cdots,-\frac{1}{a_n})^{\mathrm{T}}$$

方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}, c_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n-1$.　　(9 分)

(2) 当 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$ 时，方程组的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_{n-1} & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_{n-1} & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} a_1 & -a_{n-1} a_2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_{n-1}^2 & -a_{n-1} a_n \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & -a_n a_{n-1} & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_n^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{r_i}{a_i}\ (i=1,2,\cdots,n-1) \\ r_i - r_1 (i=2,3,\cdots,n-1) \\ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} r_i (i=2,3,\cdots,n-1)}]{a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_1 r_1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_1 = a_1$，解得 $x_2 = a_2, x_3 = a_3, \cdots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$，所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = c(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}},\ c \in \mathbf{R}$$ （4 分）

解 2　由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，所以 $\lambda = 0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重零特征值，再由特征值的性质知 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值为 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$，即当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 时，方程组的系数矩阵的行列式（即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式）$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，亦即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 时，方程组有非零解.

（5 分）

（1）$\lambda = 0$ 时，同解方程组为 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$，即

$$a_1 x_1 = -a_2 x_2 - a_3 x_3 - \cdots - a_n x_n$$

由此得方程组的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, 0, \cdots, 0\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{1}{a_1}, 0, -\frac{1}{a_3}, \cdots, 0\right)^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1} = \left(\frac{1}{a_1}, 0, 0, \cdots, -\frac{1}{a_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

方程组的通解为

$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}, c_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n-1.$ （9 分）

（2）$\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 时，由于 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\boldsymbol{\alpha}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为方程组的一个基础解系，通解 $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{\alpha}, c \in \mathbf{R}$. （13 分）

（21）解　（1）$\boldsymbol{A}$ 显然为实矩阵，又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵. （3 分）

（2）由题设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$，所以

$$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{A\beta} = \boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = 3(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$$

又 $r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant 1+1=2$，所以零是 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的一个特征值，从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，从而 3，1，2 为 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值，于是二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化成的标准形为 $f=3y_1^2+y_2^2+2y_3^2$. （11 分）

（3）由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵且特征值全大于零，所以 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. （13 分）

（22）解 （1）因为 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}b(x+2)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{b}{2}+\frac{a\pi}{2}$. 而且 $\frac{3}{4}=P\{X\leqslant 1\}=\int_{-2}^{-1}b(x+2)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{a}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{b}{2}+a\cdot\frac{\pi}{4}$，联合解上述两个方程，得 $a=\frac{1}{\pi}$，$b=1$.

（2）当 $x<-2$ 时，$F(x)=0$；当 $-2\leqslant x<-1$ 时，$F(x)=\int_{-2}^{x}(t+2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x+2)^2$；当 $-1\leqslant x<0$ 时，$F(x)=\int_{-2}^{-1}(t+2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$；当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-2}^{-1}(t+2)\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t$ $=\frac{1}{2}+\frac{\arctan x}{\pi}$.

$$\text{因此，}F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ \dfrac{(x+2)^2}{2}, & -2\leqslant x<-1\\ \dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\arctan x}{\pi}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

（3）因为 $y=x^3$ 在 $(0,-1)$ 上可导，且 $y'>0$，所以用定理得 $f_Y(y)=f_X(h(y))\,|\,h'(y)\,|$.

$$\text{故 }f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\pi y^{2/3}(1+y^{2/3})}, & y\geqslant 0\\ \dfrac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}, & -8\leqslant y<-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（23）证 Z 的可能取值为 -4、4，且 $P\{Z=-4\}=P\{XY=-4\}=P(\{X=2,Y=-2\}\cup\{X=-2,Y=2\})=P\{X=2\}P\{Y=-2\}+P\{X=-2\}P\{Y=2\}=1/2$，同理 $P\{Z=4\}=1/2$. （5 分）

已知 X、Y 独立，下证 X 和 Z 独立：$P\{X=-2,Z=-4\}=P\{X=-2,Y=2\}=P\{X=-2\}P\{Y=2\}=1/4=P\{X=-2\}P\{Z=-4\}$. 同理可证另外三个等式 $P\{X=x_i,Z=z_i\}=P\{X=x_i\}P\{Z=z_i\}$ 也成立，故 X 与 Z 独立；同理可证 Y 和 Z 独立，所以 X,Y,Z 两两独立. （10 分）

但 $P\{X=2,Y=2,Z=-4\}=0\neq 1/8=P\{X=2\}P\{Y=2\}P\{Z=-4\}$，故 X,Y,Z 不相互独立. （13 分）

数学考研模拟考试试卷 10

数 学 三

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导且 $f'(a)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(a+3x)-f(a-5x)}=$ ________.

(2) 微分方程 $xy'-y=x^2\sin x$ 的通解是________.

(3) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}(a>0,b>0)$ 的收敛域为________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$,则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ ________.

(5) 设一批零件共有 50 件,其中有 7 件次品,其余为合格品,每次从中任取一件,取出的不再放回,则第三次才取到合格品的概率为________.

(6) 掷两颗骰子,Y 表示两颗出现向上点数较大者,则 $EY=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为有二阶连续偏导数的某函数的全微分,则 $a=$ ( ).

(A) -1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) 5

(8) 设 $f(x)$ 连续,且满足条件 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2+\dfrac{1}{2}$,则关于 $f(x)$ 的极值问题有( ).

(A) 存在极小值$\frac{1}{2}\ln 2$　　(B) 存在极大值$-\frac{1}{2}\ln 2$

(C) 存在极小值$\frac{1}{2}$　　(D) 有极小值$-\frac{1}{2}$

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　).

(A) 二阶可导　　(B) 一阶导数连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导但导数不连续

(10) 设曲线 $y=y(x)$ 在$(0,1)$点处与直线 $y=1$ 相切,且函数 $y(x)$ 满足方程:$y''+y'+y=e^{\sin x}$,则(　).

(A) $x=0$ 是 $y(x)$ 的极小值点

(B) $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点

(C) $(0,1)$ 是曲线 $y=y(x)$ 的拐点

(D) 0 点不是 $y(x)$ 的极值点,$(0,1)$ 也非曲线拐点

(11) 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0\\ 1-x^2, & x>0\end{cases}$,$C$ 为任意常数,则 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=$(　).

(A) $\begin{cases}\frac{1}{\ln 2}2^x, & x\leqslant 0\\ x-\frac{1}{3}x^3, & x>0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\frac{1}{\ln 2}2^x+C, & x\leqslant 0\\ x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{\ln 2}+C, & x>0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\frac{1}{\ln 2}(2^x-\frac{1}{2}), & x\leqslant 0\\ \frac{1}{2\ln 2}+x-\frac{1}{3}x^3, & x>0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}(2^x-1)\ln 2, & x\leqslant 0\\ x-\frac{1}{3}x^3, & x>0\end{cases}$

(12) 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 为正定二次型,则参数 a 应满足(　).

(A) $a<-3$　　(B) $a>3$　　(C) $-3<a<3$　　(D) $a=3$

(13) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,则与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵为(　).

(A) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

(14) 假设总体 X 的均值 $EX=\mu$ 和方差 $DX=\sigma^2$ 都存在,X_1,X_2,X_3 是来自总体 X 的简单随机样本,μ 有下列 3 个估计量:$\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}(X_1+2X_2+X_3)$,$\hat{\mu}_2=\frac{1}{6}(2X_1+3X_2+X_3)$,$\hat{\mu}_3=\frac{1}{8}(X_1+X_2+X_3)$,则下列结论成立的是(　).

(A) $\hat{\mu}_3$ 比 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ 有效　　(B) $\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_3$ 有效

(C) $\hat{\mu}_1$ 比 $\hat{\mu}_2$ 有效　　(D) $\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1$ 有效

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导,且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$.

证明:存在 $\xi > 0$,使 $f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

(16)(本题满分 8 分) 计算 $I = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin \dfrac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin \dfrac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y$.

(17)（本题满分 9 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且有 $f'(x)>0$. 证明：在 (a,b) 内存在唯一一点 t，使由曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $x=a$、$y=f(t)$ 所围图形的面积 S_1 是由曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(t)$、$x=b$ 所围平面图形的面积 S_2 的 3 倍.

(18)（本题满分 8 分） 设抛物线 $y^2=2px$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的非原点的交点为 A、B，其中 a 为定值且 $a>p>0$. 求 p 的值，使抛物线 $y^2=2px$ 与弦 $\overline{AB}$ 所围平面图形的面积最大，并求最大面积.

(19)（本题满分 8 分） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

（20）（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{b}$ 均为 m 维列向量，$\boldsymbol{y}$ 为 n 维列向量．证明：$\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$ 有解的必要充分条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均满足 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$.

（21）（本题满分 13 分）设 $t_1,t_2,\cdots,t_r(r\leqslant n)$ 是 r 个互不相同的数，试判断 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(1,t_i,t_i^2,\cdots,t_i^{n-1})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r)$ 的线性相关性.

（22）**（本题满分 13 分）** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{14}$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，令 $Y_1 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$，$Y_2 = \frac{1}{5}\sum_{i=10}^{14} X_i$，$Z_1 = \sum_{i=1}^{5}(X_i - Y_1)^2$，$Z_2 = \sum_{i=10}^{14}(X_i - Y_2)^2$，$Z_3 = \sum_{i=6}^{9} X_i^2$，$U = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_3}$，证明统计量 U 服从自由度为（8,4）的 F 分布.

（23）**（本题满分 13 分）** 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x+y), & 0 < x < 1, \mid y \mid < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：（1）概率 $P\{X > 2Y\}$；（2）数学期望 EX；（3）$Z = XY$ 的概率密度.

试卷(十)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{8f'(a)}}$. 由导数的定义

$$原极限=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(a+3x)-f(a-5x)}{x}\right]^{-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[3\frac{f(a+3x)-f(a)}{3x}+5\frac{f(a-5x)-f(a)}{-5x}\right]^{-1}$$

$$=\left[3\lim_{x\to 0}\frac{f(a+3x)-f(a)}{3x}+5\lim_{x\to 0}\frac{f(a-5x)-f(a)}{-5x}\right]^{-1}$$

$$=[3f'(a)+5f'(a)]^{-1}=\frac{1}{8f'(a)}.$$

(2) $\underline{x(C-\cos x)}$ $y'-\dfrac{1}{x}y=x\sin x.$

解 1 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int x\sin x e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x(C-\cos x)$

解 2 $\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{1}{x^2}y=\sin x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x}y\right)'=\sin x \Rightarrow \dfrac{1}{x}y=C-\cos x$

$$y=x(C-\cos x)$$

(3) $\underline{|x|<\max(a,b)}$ 不妨设 $a>b$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}$$

$\therefore R=a$

当 $x=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\neq 0$

同理　$x=-a$ 时，$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{(-a)^n}{a^n+b^n}\neq 0$

$\therefore$ 原级数的收敛域为 $|x|<\max(a,b)$.

(4) $\underline{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}}$，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$

(5) $\underline{\dfrac{43}{2\,800}}$ 设 $A_i=\{$第 i 次取出的一件为合格品$\}$，$i=1,2,3$，

则
$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{7}{50}\,\frac{6}{49}\,\frac{43}{48}=\frac{43}{2\,800}$$

(6) $\underline{\dfrac{161}{31}}$ 设两颗骰子掷出向上点数分别为 X_1、X_2，显然它们相互独立. 则 $Y=$

$\max(X_1,X_2)$，且 Y 的可能取值为：1，2，3，4，5，6.

$$\begin{aligned}P\{Y=k\}&=P\{Y\leqslant k\}-P\{Y\leqslant k-1\}\\&=P\{\max(X_1,X_2)\leqslant k\}-P\{\max(X_1,X_2)\leqslant k-1\}\\&=P\{X_1\leqslant k,\ X_2\leqslant k\}-P\{X_1\leqslant k-1,X_2\leqslant k-1\}\\&=P\{X_1\leqslant k\}P\{X_2\leqslant k\}-P\{X_1\leqslant k-1,\ X_2\leqslant k-1\}\\&=\left(\frac{k}{6}\right)^2-\left(\frac{k-1}{6}\right)^2=\frac{2k-1}{36},\ (k=1,2,3,4,5,6.)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}EY&=\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{2k-1}{36}=\frac{1}{36}(2\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k)\\&=\frac{1}{36}\left(2\times\frac{6\times7\times13}{6}-\frac{6\times7}{2}\right)=\frac{161}{36}\end{aligned}$$

二、选择题

(7)（C）．$P=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}$，$Q=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{(x+y)[(a-2)x-ay]}{(x+y)^4}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-y2(x+y)}{(x+y)^4}$$

$$由\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow a=2\ 选(\mathrm{C})$$

(8)（A）．于等式两边求导得 $f'(x)+2f(x)=2x$.

即 $$(\mathrm{e}^{2x}f(x))'=2x\mathrm{e}^{2x},\quad \mathrm{e}^{2x}f(x)=(x-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{2x}+C$$

$f(x)=C\mathrm{e}^{-2x}+(x-\dfrac{1}{2})$．由 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 得 $C=1$.

$f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+x-\dfrac{1}{2}$．令 $f'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}+1=0$ 的唯一驻点 $x=\dfrac{1}{2}\ln2$.

$f''(x)=4\mathrm{e}^{-2x}>0$ 故是极小点．极小值是

$$f(\frac{1}{2}\ln2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln2\quad 选(\mathrm{A}).$$

(9)（B）．由 $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，知导数在 0 点连续，故选（B）. 而在 0 点，由于

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(3x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$ 不存在，故此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶导数不存在.

(10)（C）．由 $y(0)=1$ 及 $y'(0)=0$ 知 $y''(0)=0$，而于方程两边求导得 $y'''+y''+y'=\cos x\mathrm{e}^{\sin x}$，令 $x=0$ 得 $y'''(0)=1\neq0$，故(0,1) 是曲线 $y=y(x)$ 的拐点. 选（C）.

(11)（C）．事实上，当 $x\leqslant0$ 时，有

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-1}^{x}2^t\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln2}2^t\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{\ln2}\left(2^x-\frac{1}{2}\right).$$

当 $x>0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} 2^t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} (1-t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln 2} 2^t \Big|_{-1}^{0} + \left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{\ln 2}(1-\frac{1}{2}) + x - \frac{1}{3}x^3 \\
&= \frac{1}{2\ln 2} + x - \frac{1}{3}x^3.
\end{aligned}
$$

故只有(C)正确.

(12)(C). 二次型的矩阵

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{a}{3} r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 - \frac{a^2}{3} \end{pmatrix}
$$

由此可见,当 $3 - \frac{a^2}{3} > 0$ 时,二次型的实对称矩阵的各阶顺序主子式均大于零,即 $a^2 < 9$, $-3 < a < 3$, 故应选(C).

(13)(D). 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,则由题设条件有 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, 得 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, 再由 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2 知 $\lambda_1 = 0$ 是单特征值. 由于实对称矩阵一定相似于对角阵,故 $\lambda_2 = -2$ 为二重特征值,应选(D).

(14)(C). 因为 $E\hat{\mu}_1 = \mu$, $E\hat{\mu}_2 = \mu$, $E\hat{\mu}_3 = \frac{3}{8}\mu$, 所以 $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计,又因为 $D\hat{\mu}_1 = \frac{3}{8}\sigma^2 < D\hat{\mu}_2 = \frac{7}{18}\sigma^2$,故 $\hat{\mu}_1$ 比 $\hat{\mu}_2$ 有效,应选(C).

三、解答题

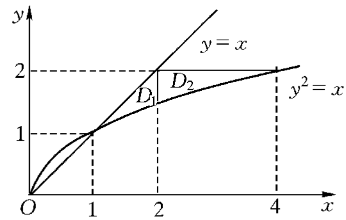
(15)证 由题设不等式
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{1+x^2} \qquad (*)$$
得 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, 又因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,故有 $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

再由(*)式两端令 $x \to +\infty$,得 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. (4 分)

令函数
$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x^2} - f(x), \qquad (6\text{ 分})$$
则 $\varphi(x)$ 在$[0, +\infty)$上可导,且有 $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$. 若 $\varphi(x) \equiv 0$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - f'(x) = 0$, 此时,取任意的 $\xi > 0$,则有 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$. 若 $\varphi(x) \not\equiv 0$, 则由 $\varphi(x) \geqslant 0$ 知,存在 $x_0 > 0$, 使 $\varphi(x_0) > 0$, 由介值定理知存在 $x_1 \in (0, x_0)$, 使 $\varphi(x_1) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$,再由 $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$,知存在 $x_2 \in (x_0, +\infty)$, 使 $\varphi(x_2) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$. 于是 $\varphi(x)$ 在区间$[x_1, x_2]$上满足罗尔定理的条件,因此,存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, +\infty)$,使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$. (9 分)

(16)解 见图,右边两个积分的积分域所对应的不等式组

$$
D_1 : \begin{cases} \sqrt{x} \leqslant y \leqslant x \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}, \quad D_2 : \begin{cases} \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2 \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}
$$



$$I=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}dy$$

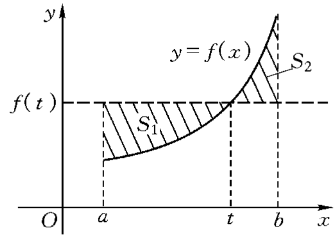
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\left(\cos\frac{\pi}{2}y-\cos\frac{\pi}{2}\right)dy=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}y\,dy$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\int_1^2 y\,d\left(\sin\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\left(y\sin\frac{\pi}{2}y\Big|_1^2-\int_1^2\sin\frac{\pi}{2}y\,dy\right)$$

$$=\frac{4}{\pi^3}(\pi+2)$$ （8 分）

注　计算和图各 4 分



（17）证　如图，可知

$$S_1=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx,$$

$$S_2=\int_t^b[f(x)-f(t)]dx,$$

令函数

$$F(t)=S_1-3S_2=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx-3\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$$

则本题就是要证明 $F(t)$ 在 (a,b) 内有唯一零点. （4 分）

$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由

$$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]d,$$

因 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 单调增，故当 $a<x\leqslant b$ 时，有 $f(x)>f(a)$，从而有 $F(a)<0$. 同理可知

$$F(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]dx>0$$

由介值定理，知 $F(x)$ 在 (a,b) 内存在零点. （7 分）

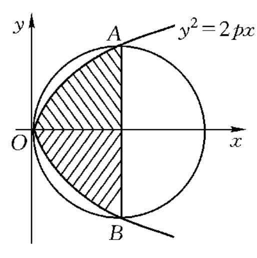
又由 f 在 (a,b) 内可导及 $f'(x)>0$，有

$$\frac{d}{dt}F(t)=\frac{d}{dt}\left[(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)dx-3\int_t^b f(x)dx+3(b-t)f(t)\right]$$

$$=f(t)+(t-a)f'(t)-f(t)+3f(t)-3f(t)+3(b-t)f'(t)$$

$$=[(t-a)+3(b-t)]f'(t)>0.\ (a<t<b)$$

因此，$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增，所以 $F(t)$ 在 (a,b) 内的零点是唯一的. 综上可知，$F(t)$ 在 (a,b) 内存在唯一一个零点. （9 分）



（18）解　见图，交点 A、B 的横坐标为 $x=2(a-p)$. 由对称性，得所求面积为

$$S(p)=2\int_0^{2(a-p)}\sqrt{2px}\,dx=\frac{16}{3}p^{\frac{1}{2}}(a-p)^{\frac{3}{2}}$$ （5 分）

由 $$\frac{dS}{dp}=\frac{8}{3}p^{-\frac{1}{2}}(a-p)^{\frac{1}{2}}(a-4p)=0$$

得 $S(p)$ 有唯一驻点 $p=\dfrac{a}{4}$，而且

当 $0<p<\dfrac{a}{4}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}>0$；当 $p>\dfrac{a}{4}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}<0$，

所以，$\max S(p)=S\left(\dfrac{a}{4}\right)=\sqrt{3}a^2$. （8 分）

注 亦可用正数的平均值不等式求函数 $S(p)$ 的最大值，请读者完成.

（19）证

$\because$ $\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1})=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}$$ （4 分）

$\because$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$

$\therefore$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_{n+1}=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_k=a_{k+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛且等于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ （8 分）

（20）证 必要性 设 $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$ 有解向量 $\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则必有 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$. （5 分）

充分性 显然 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，而当 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的解时，也必然为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\geqslant r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，由此得 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$，因此 $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$ 有解. （13 分）

（21）解 当 $r=n$ 时，由于 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 互不相同，所以范德蒙行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$，因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. （5 分）

当 $r<n$ 时，由上述结论，$\boldsymbol{\beta}_i=(1,t_i,t_i^2,\cdots,t_i^{r-1})$，$i=1,2,\cdots,r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是由 $\boldsymbol{\beta}_i$ 填加 $n-r$ 个坐标得到的，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

因此，$r\leqslant n$ 时，n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. （13 分）

（22）证 因为 $X\sim N(0,\sigma^2)$，所以 $\dfrac{Z_1}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(X_i-Y_1)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(4)$，

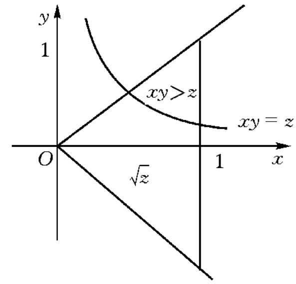
$\dfrac{Z_2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=10}^{14}(X_i-Y_2)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(4)$. （4 分）又因为 $\dfrac{Z_1}{\sigma^2}$ 和 $\dfrac{Z_2}{\sigma^2}$ 相互独立，故 $\dfrac{Z_1+Z_2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)$，又有

$\dfrac{Z_3}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=6}^{9}(X_i-0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(4)$，且它和 $\dfrac{Z_1+Z_2}{\sigma^2}$ 相互独立， （9 分）

故由 F 分布的生成可得 $\dfrac{\dfrac{Z_1+Z_2}{\sigma^2}\Big/8}{\dfrac{Z_3}{\sigma^2}/4}=\dfrac{Z_1+Z_2}{2Z_3}=U\sim F(8,4).$ （13 分）

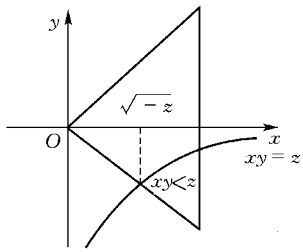
（23）解　（1）$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{\frac{x}{2}}\frac{3}{2}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{9}{16}.$$ （3 分）



（2）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}x\,\frac{3}{2}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$ （6 分）



（3）当 $z>1$ 时，$F_Z(z)=1$.

当 $0<z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{XY\leqslant z\}$

$$=1-P\{XY>z\}$$

$$=1-\int_{\sqrt{z}}^1\mathrm{d}x\int_{\frac{z}{x}}^{x}\frac{3}{2}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=1-\int_{\sqrt{z}}^1\frac{3}{2}\left(\frac{3x^2}{2}-z-\frac{z^2}{2x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=1-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-z+\frac{z^2}{2}\right).$$ （9 分）

当 $-1<z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{XY\leqslant z\}$

$$=\int_{\sqrt{-z}}^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{\frac{z}{x}}\frac{3}{2}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\sqrt{-z}}^1\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}+z+\frac{z^2}{2x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}+z-\frac{z^2}{2}-\frac{4z}{3}\sqrt{-z}\right).$$

当 $z<-1$ 时，$F_Z(z)=0$.

故 $Z=XY$ 的概率密度为：

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z+2\sqrt{-z}), & -1\leqslant z<0\\ \frac{3}{2}(1-z), & 0\leqslant z<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ （13 分）