非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研

数学二

根据2006年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10套题

赠答疑卡

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列

2006 版

模 拟 考 试 试 卷

数学二

（共 10 套，附解答与评分参考）

主编　龚冬保

王寿生　褚维盘　魏战线（高等数学）

崔荣泉（线性代数）

西安交通大学出版社

· 西安 ·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学二)2006版/龚冬保主编.—西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

Ⅰ.数... Ⅱ.龚... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第082616号

书　　名　数学考研模拟考试试卷(数学二)2006版
主　　编　龚冬保
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷　西安新视点印务有限责任公司
字　　数　188千字
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8
版　　次　2005年10月第4版　2005年10月第1次印刷
书　　号　ISBN 7-5605-1591-6/O·191
定　　价　48.00(本卷12.00元)

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上，严格按《2006 年数学考试大纲》的要求，以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用，特作以下提示：

1. 考前演习为实战　模拟试卷认真练

一定要按考试的要求，像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间，可用闹钟定时到 10:45，而于 8:00 打开试卷开始“考试”，闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的 10 套模拟卷，至少隔 3 天，最多隔一周做上一套，效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷　卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者，除了像考试一样做相关的 10 套题之外，还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法，但 10 套试卷题量有限，难免还有遗漏，参考一下其余试卷，可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快　总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法，在不出错的前提下快速完成，这是巧准快的意思。每做完一套试卷后，要认真总结分析，对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白；对于做错的题，检查错在哪里：概念？方法？还是运算？对于做对的题，总结一下还有没有更好的方法，更快的途径。为此，我们特为设计了总结记录表，希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增　沉着应试展才能

每做一套模拟题后，不仅要作解题方法方面的总结，还要从应试策略方面不断做调整。从 2004 年起试卷模式上的重大变化是客观题占 56 分。因此，加强基本运算能力，训练用最简洁的步骤做填空题；加强对基本概念的理解，用最灵活的方法做选择题，力争在 60 分钟内将这 56 分拿到手。作解答题时，要坚持先易后难的原则，即先做那些感到熟悉的、容易得分的题，后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题，再作线性代数题，尤其是数学三、四的试卷中，这两部分解答题占 52 分，仅有 4 道题，一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这 52 分，加上客观题共有 108 分之多！我们模拟试卷估计会比正式考题难些，考前像正式考试一样去做这些题，正式考时，像平时作模拟题一样的心态去应试，方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥，充分展示你的才能，考出理想成绩。

最后，我们强调要反复做模拟题，从做第二遍起，要把练习基本功作为重点，对会做的题一定要一遍做对，不断总结不丢分和多得分的应试策略，这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要，只要会做基本题，临场不慌不乱，也是能考出理想成绩的。

考研成功！

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1	做题记录：　　月　　日;用时：　　小时　　分;得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 2	做题记录：　　月　　日;用时：　　小时　　分;得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3	做题记录：　　月　　日;用时：　　小时　　分;得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 4	做题记录：　　月　　日;用时：　　小时　　分;得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 5	做题记录：　　　月　　　日；用时：　　　小时　　　分；得分：　　　　分
存在问题总结：	
试卷 6	做题记录：　　　月　　　日；用时：　　　小时　　　分；得分：　　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 8	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 9	做题记录：　　　月　　　日；用时：　　　小时　　　分；得分：　　　　分
存在问题总结：	
试卷 10	做题记录：　　　月　　　日；用时：　　　小时　　　分；得分：　　　　分
存在问题总结：	

龚冬保教授数学考研系列

数学考研模拟考试试卷 1

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+n^2+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n^2+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2+n}\right)=$ ________.

(2) 设 $f(0)=0, f'(\sin x)=\sin 3x$,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x>0\\ ax^2+bx+c, & x\leqslant 0\end{cases}$ 二阶可导,则 $a=$ ________.

(4) 若 $y=\mathrm{e}^x, y=2\mathrm{e}^x$ 及 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 均是某个二阶线性微分方程的解,则此微分方程为 ________.

(5) 设四元线性非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的所有解向量中,最多有三个解向量是线性无关的,则 $r(\boldsymbol{A})=$ ________.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶正交矩阵,$|\boldsymbol{A}|<0$,已知 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$,则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x\sim kx^n$,则( ).

(A) $n=5, k=-2$ (B) $n=3, k=-2$

(C) $n=5, k=-\dfrac{1}{2}$ (D) $n=3, k=-\dfrac{1}{2}$

(8) 设 $f(x)$ 处处可导,则( ).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(9) 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的 3 个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 都存在,则在 D 内必有(　).

(A) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$　　(B) $f(x,y)$ 在 D 内连续

(C) $f(x,y)$ 在 D 内可微　　(D) $f(x,y)$ 在 D 内可导

(10) 方程 $3^x=2x^2+1$ 的实根个数 $n=$(　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

(11) 设(1,3)是曲线 $y=ax^4+bx^3$ 的拐点,则此曲线过(1,3)点的切线方程为(　).

(A) $y+6x-9=0$　　(B) $6y+x-17=0$

(C) $y-6x+3=0$　　(D) $6y-x-17=0$

(12) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=$(　).

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi-1}{4}$　　(C) $\frac{\pi+1}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

(13) 设 $y(1)=1$,且 $xy'-y=0$,则 $y(918)=$(　).

(A) 918　　(B) 459　　(C) 1038　　(D) 2754

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(\geqslant 3)$ 阶矩阵,但 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 0,$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{A})=$(　).

(A) $n-1$　　(B) $n-2$　　(C) $n-3$　　(D) 1

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 计算 $\int_0^{\mathrm{e}}\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

（16）**（本题满分 9 分）** 一质点的运动轨迹是极坐标下的曲线 $r=2\theta$，而角速度 $\omega=\dot{\theta}(t)=t$，出发点为极点. 求当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时质点的速度与加速度的大小.

（17）**（本题满分 9 分）** 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. 求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(18)（本题满分 10 分） 求均匀薄板 $D=\{(x,y)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1\}$ 的质心.

(19)（本题满分 12 分）（Ⅰ）验证 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 是微分方程 $x^4y''+2x^2y'+(1-2x)y=0$ 的一个特解；（Ⅱ）令此方程的解为 $y=z(x)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，求此方程的通解；（Ⅲ）求此方程满足条件 $y(1)=\mathrm{e},y'(1)=2\mathrm{e}$ 的特解 $y=y(x)$ 所表示曲线的渐近线.

(20)（本题满分 12 分）（Ⅰ）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，证明存在一点 $\xi > 0$ 使 $f'(\xi) = 0$.

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，且对 $x > 0$ 皆有 $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$. 证明存在 $c > 0$，使 $f'(c) = \dfrac{1-c^2}{(1+c^2)^2}$.

(21)（本题满分 12 分） 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$F(1) = 3$，且对任意的 $x > 0$，$y > 0$，皆有

$$\int_1^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + y\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

求函数 $xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值.

（**22**）（**本题满分 9 分**）设 $\boldsymbol{P}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&a&-1\\4&-2&b\end{pmatrix}$ 的特征向量.

(i) 求 a,b 的值及 $\boldsymbol{P}_1$ 对应的特征值；

(ii) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵，说明理由.

(23)（本题满分 12 分） 已知向量组（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 与向量组（Ⅱ）：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$ 等价.

(i) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$；

(ii) 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3$，求 $(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}$.

试卷(一)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{3}}$. 由 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{k^2}{n^3+n^2+k}\sim\dfrac{n^2}{n^3}$ 得原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3}=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\underline{\dfrac{3}{10}}$. 由 $f'(x)=3x-4x^3$ 得 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x^4$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

(3) $\underline{-\dfrac{1}{24}}$. 由泰勒公式知 $1-\cos x=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots$. 故 $a=-\dfrac{1}{24}$.$\left(2a=f''_+(0)=-\dfrac{1}{12}\right)$.

(4) $\underline{y''-y=0}$. 由 e^x 和 $2\mathrm{e}^x$ 均是解知，此方程为线性齐次方程；而 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 是方程的解，从而知 e^x 和 e^{-x} 是两个线性无关的解. 因此得方程是 $y''-y=0$.

(5) $\underline{2}$. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个线性无关的解向量，因此 $\boldsymbol{\xi}_1+c_1(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+c_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3)$ 是非齐次方程的通解，而 $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3$ 是齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故 $r(\boldsymbol{A})=4-2=2$.

(6) $\underline{-4}$. 由 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}|$

$=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=(-1)^4|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$.

二、选择题

(7) (C). $\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{x\cos x^2-x}-1)\sim x(\cos x^2-1)\sim-\dfrac{x^5}{2}$. 故 $n=5,k=-\dfrac{1}{2}$. 选(C).

(8) (B). 用举例的排除法：令 $f(x)=x$，可排除(A)、(C)两选项；令 $f(x)=x^2$ 可排除(D)，故选(B).

注 选项(B)这样证，对任意 $M>0$，存在 x_0，当 $x>x_0$ 皆有 $f'(x)>M+|f(x_0)|$. 这时 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$.

故 $f(x)\geqslant(M+|f(x_0)|(x-x_0)-|f(x_0)|>M$ （只要 $x-x_0>1$).

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(9) (D). 本题概念强，请读者注意.

(10) (A). 由观察法知 $x=0,1$，和 2 均满足方程，因此 $n\geqslant 3$；又设 $f(x)=3^x-2x^2-1$. 则 $f'''(x)=3^x(\ln 3)^3\neq 0$. 因此，$f(x)=0$ 不可能有 4 个实根(否则与罗尔定理矛盾)，故选(A).

(11) (C). 曲线过(1,3)点，故 $a+b=3$，$y''=12a+6b=0$，$a=-3,b=6$. 这时 $y'\Big|_{x=1}=-12+18=6$，切线斜率为 6，选(C).

(12) (B). $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)\mathrm{d}x=\frac{\pi-1}{4}$，选(B).

(13) (A). 由 $\dfrac{xy'-y}{x^2}=0$ 得 $\dfrac{y}{x}=c$，$c=1$，$y=x$，$y(918)=918$.

(14) (A). 由各行之和为 0 知 $r(\boldsymbol{A}) < n$,而 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$ 知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant n-1$,故 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$.

三、解答题

(15) 解 $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}dx = \int_0^e \frac{dx}{\ln x} - \int_0^e \frac{1}{\ln^2 x}dx$ (3 分)

$$= \frac{x}{\ln x}\Big|_0^e + \int_0^e x\frac{dx}{x\ln^2 x} - \int_0^e \frac{dx}{\ln^2 x} = e \quad (9\text{ 分})$$

(16) 解 运动轨迹为$x = 2\theta\cos\theta$,其中 $\theta = \dfrac{t^2}{2}$.

$$y = 2\theta\sin\theta.$$

$\dot{x}^2 = 4(\dot\theta\cos\theta - \theta\sin\theta\dot\theta)^2 = 4\dot\theta^2(\cos^2\theta + \theta^2\sin^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta)$.

$\dot{y}^2 = 4(\dot\theta\sin\theta + \theta\cos\theta\dot\theta)^2 = 4\dot\theta^2(\sin^2\theta + \theta^2\cos^2\theta + 2\theta\sin\theta\cos\theta)$.

而 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时 $t = \sqrt{\pi} = \dot\theta$

$\therefore v\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{1+\dfrac{\pi^2}{4}} = \sqrt{4\pi+\pi^3}$ (5 分)

又 $\ddot{x} = 2\ddot\theta(\cos\theta - \theta\sin\theta) - 2\dot\theta^2(2\sin\theta + \theta\cos\theta)$

$\ddot{y} = 2\ddot\theta(\sin\theta + \theta\cos\theta) + 2\dot\theta^2(2\cos\theta - \theta\sin\theta)$

$\ddot{x}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\pi - 4\pi = -5\pi$, $\ddot{y} = 2 - \pi^2$

$\therefore a\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi^4 + 21\pi^2 + 4}$ (9 分)

(17) 解 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^{-x^2y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2y^2}$ (2 分)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy^3e^{-x^2y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = e^{-x^2y^2} - 2x^2y^2e^{-x^2y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3ye^{-x^2y^2}$ (7 分)

故 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{-x^2y^2}$ (9 分)

(18) 解 由对称性知,质心为$(\bar{x},\bar{x})$. (2 分)

$$I_g = \iint_D x\,d\sigma = \int_0^1 x\,dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}dy = \int_0^1(x - 2x\sqrt{x} + x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}. \quad (6\text{ 分})$$

$$S = \iint_D d\sigma = \int_0^1(1 - 2\sqrt{x} + x)dx = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$\bar{x} = \dfrac{I_0}{S} = \dfrac{1}{5}$,质心坐标为$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right)$ (10 分)

(19) 解 (Ⅰ) $y = e^{\frac{1}{x}}$ 时,$y' = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,$y'' = \dfrac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$.

则 $x^4y'' + 2x^2y' + (1-2x)y = 2xe^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - 2e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - 2xe^{\frac{1}{x}} = 0$.

故 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 是此方程的一个解. (3 分)

（Ⅱ）令 $y=z(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，则 $y''=z''\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{2}{x^2}z'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+z(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

$$y'=z'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{z}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

此时，$x^4y''+2x^2y'+(1-2x)y=x^4z''\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，得 $z''=0$，于是

$z=c_1x+c_2$，此方程的通解为 $y=(c_1x+c_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. （8 分）

（Ⅲ）此时，$y(1)=(c_1+c_2)\mathrm{e}=\mathrm{e}$ 得 $c_1+c_2=1$，

$y'=c_1\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}(c_1x+c_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，$y'(1)=-c_2\mathrm{e}=2\mathrm{e}$，$c_2=-2$，$c_1=3$.

特解为　$y=(3x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

由 $\lim\limits_{x\to0^+}(3x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-\infty$，知 $x=0$ 是一铅直渐近线. （10 分）

而由泰勒公式 $(3x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=(3x-2)(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))=3x+1+o(1)$.

故 $y=3x+1$ 是曲线的斜渐近线. （12 分）

（20）解　（Ⅰ）记 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$. 使

$$F(x)=\begin{cases}B, & t=0\text{ 或 }t=\frac{\pi}{2}\\ f(\tan t), & 0<t<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

则 $F(t)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且 $F(0)=F(\frac{\pi}{2})=B$. 由罗尔定理，$\exists\,\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使 $F'(\eta)=0$，即 $f'(\tan\eta)\cdot\sec^2\eta=0$，记 $\xi=\tan\eta>0$，$\sec^2\eta\neq0$，故 $f'(\xi)=0$. （8 分）

（Ⅱ）记 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$. 则

$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}[f(x)-\frac{x}{1+x^2}]=0$，$(0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\frac{x}{1+x^2}]=0$.

$F(x)$ 满足（Ⅰ）中已证明的条件，故存在 $c>0$，使 $F'(c)=0$.

而 $F'(x)=f'(x)-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，即 $f'(c)=\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}$. （12 分）

（21）解　对固定的 x，于等式

$$\int_1^{xy}f(t)\mathrm{d}t=x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t+y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

两边对 y 求导得

$$xf(xy)=xf(y)+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

令 $y=1$ 得　$xf(x)=3x+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ （4 分）

两边对 x 求导得 $xf'(x)+f(x)=3+f(x)$.

即 $f'(x)=\frac{3}{x}$，　$f(x)=3\ln x+c$.

由 $f(1)=3$ 得 $f(x)=3\ln x+3$. （8 分）

又 $xf(x)=3(x\ln x+x)$.

令 $[xf(x)]'=3(2+\ln x)=0$ 得 $x=e^{-2}$ 是唯一驻点.

$$[xf(x)]''=\frac{3}{x}>0$$,因此 $x=e^{-2}$ 是极小点也是极小值点.

故 $xf(x)$ 的最小值为 $-\frac{3}{e^2}$. （12 分）

（22）解 设 $\boldsymbol{P}_1$ 对应的特征值为 λ_1,则由 $\boldsymbol{AP}_1=\lambda_1\boldsymbol{P}_1$ 可解得 $a=1,b=1,\lambda_1=3$.

（3 分）

将 $a=1,b=1$ 代入矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

$|\boldsymbol{A}|=12$,设 $\boldsymbol{A}$ 的另两个特征值为 λ_2,λ_3,由

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}| \quad \text{和} \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=7$$

解得 $\lambda_2=\lambda_3=2$. （6 分）

因对 $\lambda_2=\lambda_3=2$,$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=2$,所以对二重特征值 2,只有一个线性无关的特征向量,即 $\boldsymbol{A}$ 不具备 3 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角阵相似. （9 分）

（23）解 显然向量组（Ⅰ）的秩为 3,从而向量组（Ⅱ）的秩也为 3. （2 分）

(i) $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$ （6 分）

(ii) $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, （10 分）

所以 $\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$. （12 分）

数学考研模拟考试试卷 2

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td colspan="6">一</td><td colspan="8">二</td><td colspan="9">三</td><td rowspan="2">合计</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=$ ________.

(2) 过极坐标下曲线 $\rho=2\sin 3\theta$ 上对应 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 的点作此曲线的切线,则切线在直角坐标下的方程是________.

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}=$ ________.

(4) 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y\sqrt{1-x^2}}$,满足 $y\Big|_{x=0}=2$ 的解是________.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{vmatrix}=$ ________.

(6) 设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的秩 $r(\boldsymbol{Q})=2$ 及 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,则 $t=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(**7**) 使函数 $f(x)=[x]([x]+1)(1-x^2)$ 连续的整数点的个数共有( ).

(A) 0 个　　(B) 1 个

(C) 2 个　　(D) 3 个

(**8**) $\int_1^e (x\ln x)^2 dx=$( ).

(A) $-\frac{1}{27}(7e^3-2)$　　(B) $\frac{1}{27}(3e^3-2)$

(C) $\frac{1}{27}(5e^3-2)$　　(D) $\frac{1}{27}(e^3-2)$

(**9**) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$,则必有( ).

(A) $f(x)$ 在$(0,1)$内恒为 0

(B) $f(x)$ 在$(0,1)$内最多有两个零点

(C) $f(x)$ 在$(0,1)$内最多有一个零点

(D) $f(x)$ 在$(0,1)$内最少有两个零点

(**10**) 设 $f(x,y)=\ln(x+2y)+x\sqrt[3]{y-1}$,则$f'_y(0,1)=$

(A) 1　　(B) 2

(C) 0　　(D) -1

(**11**) 设 $f(x)=\ln|x|-\frac{x}{e}+1$,则 $f(x)$ 的零点个数为( )

(A) 4　　(B) 3

(C) 2　　(D) 1

(**12**) $y=C_1+C_2x+C_2x^2$ 是某微分方程的通解,这个方程是( ).

(A) $y'''=0$　　(B) $(1+x)y''=2y'$

(C) $(1+2x)y''=2y'$　　(D) $(1+2x)y''=y'$

(**13**) 函数 $f(x)=|x|(x^2-3)$ 的极值点的个数为( ).

(A) 3　　(B) 2

(C) 1　　(D) 0

(**14**) 设 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为同阶的反对称矩阵,k 为任一正整数,则( ).

(A) $(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^k$ 为反对称矩阵

(B) $(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^k$ 为对称矩阵

(C) 当 k 为奇数时,$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^k$ 为反对称矩阵

(D) 当 k 为偶数时,$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^k$ 为反对称矩阵

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分)设 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\frac{x}{y}\right)$,其中 $\varphi(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(16)(本题满分 9 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\ln(1+x)-1}{x-\sin x}$.

(17)（本题满分 9 分） 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和直线 $y=x$ 所围成的区域.

(18)（本题满分 10 分） 已知物体冷却率与物体温度与周围介质温度之差成正比. 今有一物体加热到 110℃ 后，置于温度为 10℃ 的空气之中，经一小时后它的温度降至 60℃，问将它降至 35℃ 时还需多少小时？

（19）**（本题满分 12 分）** 求微分方程 $yy''=y^2y'+(y')^2$ 满足条件 $y\Big|_{x=0}=-\dfrac{1}{2}, y'\Big|_{x=0}=1$ 的解.

（20）**（本题满分 12 分）** 证明不等式，（其中 $k\in(0,1)$ 是常数）

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-k}}.$$

(21)(**本题满分 12 分**)A 是半径为 R 的圆内一定点,A 与圆心的距离为 $a(a<R)$. 过圆上任一点 Q 作圆的切线 QP,再过 A 点作此切线的垂线,垂足为 P. 求当 Q 取遍圆周上各点时,P 点的轨迹所围成图形的面积.

(22)(**本题满分 8 分**)设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,试证表示式唯一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

(23)（本题满分 13 分） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$

(1) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵,并写出此对角矩阵.

(2) 求 $\boldsymbol{A}^{n}$(n 为正整数).

试卷(二)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{x-\dfrac{\pi}{3}}{1-2\cos x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\underline{\sqrt{3}x+y-4=0}$. 由 $x=2\sin3\theta\cos\theta,y=2\sin3\theta\sin\theta$ 知 $\dot{x}=6\cos3\theta\cos\theta-2\sin3\theta\sin\theta,\dot{y}=6\cos3\theta\sin\theta+2\sin3\theta\cos\theta$. 以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 代入:$x=\sqrt{3},y=1,\dot{x}=-1,\dot{y}=\sqrt{3}$,故斜率为 $-\sqrt{3}$,直线方程为 $y-1=-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})=-\sqrt{3}x+3$,即$\sqrt{3}x+y-4=0$.

(3) $\underline{\ln(1+\sqrt{2})}$. 原积分 $=-\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}\,\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\ln(1+\sqrt{2})$.

(4) $\underline{y^2=2(3-\sqrt{1-x^2})}$. [$(y>0),|x|\leqslant1$. 不加此不扣分].

由 $y\mathrm{d}y=\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 得 $\dfrac{1}{2}y^2=C-\sqrt{1-x^2}$,以 $y|_{x=0}=2$ 代入得 $C=3$,即得所要求的解.

(5) $\underline{1}$.

(6) $\underline{6}$. 因 $1\leqslant r(\boldsymbol{P})\leqslant3-r(\boldsymbol{Q})=1$,故 $t=6$.

二、选择题

(7) (D). $x=0$ 及 $x=\pm1$,是三个连续整数点,其余整数点处均间断. 事实上,$\lim\limits_{x\to n^+}[x]([x]+1)(1-x^2)=n(n+1)(1-n^2)$,$\lim\limits_{x\to n^-}[x]([x]+1)(1-x^2)=(n-1)\cdot n(1-n^2)$.

当 $n\neq\pm1$ 及 0 时,$\lim\limits_{x\to n^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to n^-}f(x)$. 当 $n=\pm1$ 及 0 时,皆有$\lim\limits_{x\to n}f(x)=0$(函数值 $f(n)$),故选(D).

(8) (C). 原式$=\dfrac{x^3}{3}\ln^2x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}x^2\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^3}{3}-\dfrac{2}{9}x^3\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}+\dfrac{2}{9}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{27}(5\mathrm{e}^3-2)$,

选(C).

(9) (D). 本题最简单的做法是令 $f(x)\equiv0$,而选上(D),当然 $f(x)$ 不一定要恒为0故排除了(A).

注 本题不是证明题,如要证明(D)成立,便是一道难题,我们简证于下:由$\displaystyle\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=0$ 知 $f(x)$ 在$(0,1)$内至少有一个零点 x_0,如 x_0 是唯一一个零点,则 $f(x)$ 在$(0,x_0)$和$(x_0,1)$内必异号. 这样,$(x-x_0)f(x)$ 在$(0,1)$内连续,不变号,不恒为 0,则$\displaystyle\int_0^1(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x\neq0$,与假设矛盾. 故 $f(x)$ 至少还有一个异于 x_0 的零点,即 $f(x)$ 至少有两个不同的零点.

(10) (A). $f'_y(0,1)=(\ln2y)'\Big|_{y=1}=1$. 选(A).

(11) (B). 由 $x\to0$ 和 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to-\infty$,$f(x)\to+\infty(x\to-\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x<0$，$f\downarrow$. 故在 $(-\infty,0)$ 有唯一零点；又. 当 $x=\mathrm{e}$，$f(x)=1>0$ 是极大值，故 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 各有一零点. 选(B).

(12) (C). $y'=C_2(1+2x)$，$y''=2C_2$，消去 C_2 即得所求方程. 选(C).

(13) (A). 注意，$x=0$ 是极大点. 在 $x>0$ 时，$y=x^3-3x$，$y'=3(x^2-1)$，$x=1$ 是极小值点. $x<0$ 时，$y=-x^3+3x$，$y'=3(1-x^2)$，$x=-1$ 是极小值点，选(A).

(14) (C). 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})=-\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$ 是反对称矩阵，而 $(\boldsymbol{C}^k)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^k=(-1)^k\boldsymbol{C}^k$，故选(C).

三、解答题

(15) 解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\varphi'_1+\dfrac{1}{y}\varphi'_2$ （2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x}=-y^2\sin(xy)+\varphi''_{11}+\frac{2}{y}\varphi''_{12}+\frac{1}{y^2}\varphi''_{22} \quad（5 分）$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi''_{12}-\frac{x}{y^3}\varphi''_{22}-\frac{1}{y^2}\varphi'_2 \quad（9 分）$$

(16) 解 1 （泰勒公式） $\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)$

$$x\ln(1+x)=x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3),\quad x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \quad（6 分）$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-x\ln(1+x)-1}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=3 \quad（9 分）$$

解 2 （洛必达法则）

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}-\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{1-\cos x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{2x(1+x)\mathrm{e}^{x^2}-(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{2(1+x)\mathrm{e}^{x^2}+2x\mathrm{e}^{x^2}+4x^2(1+x)\mathrm{e}^{x^2}-\ln(1+x)-2}{2x} \quad（4 分）$$

$$=2\times\frac{3}{2}+\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}=3 \quad（9 分）$$

(17) 解 $\displaystyle\iint_D\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2/2}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ （3 分）

$$=\int_0^2\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \quad（6 分）$$

$$=\frac{\pi}{2}-x\arctan\frac{x}{2}\Big|_0^2+\ln(4+x^2)\Big|_0^2=\ln2 \quad（9 分）$$

(18) 解 由题意，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-k(\theta-10)\ (k>0)$，$\theta$ 表示物体温度. 解此方程得

$$\theta=100\mathrm{e}^{-kt}+10 \quad（5 分）$$

$t=1$ 时，$\theta=60$，故 $\mathrm{e}^{-k}=\dfrac{1}{2}$，解得 $\mathrm{e}^k=2$

而　$\theta = 35$ 时，得 $\frac{1}{4} = e^{-kt} = (\frac{1}{2})^t$，故 $t = 2$.

即再通过 1 小时，物体可冷却到 35℃.　　（10 分）

（19）解　原方程写作

$$y \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y^2 y' + (y')^2$$

由 $y' \neq 0$ 得　$y \frac{dy'}{dy} = y^2 + y'$　　（4 分）

即　$\frac{1}{y} \frac{dy'}{dy} - \frac{1}{y^2} y' = 1$，　或　$d(\frac{1}{y} y') = dy$　　（6 分）

故　$y' = y^2 + Cy$　　由 $y = -\frac{1}{2}, y' = 1$

得 $C = -\frac{3}{2}$，由此得 $\frac{2dy}{y(2y-3)} = dx$　　（10 分）

积分得　$\frac{2y}{2y-3} = C_1 e^{-\frac{3}{2}x}$

由 $x = 0, y = -\frac{1}{2}, C_1 = \frac{1}{4}$，解得　$y = \frac{3e^{-\frac{3}{2}x}}{2(e^{-\frac{3}{2}x} - 4)}$　　（12 分）

（20）解　由 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$，知 $\sqrt{1-k} \leqslant \sqrt{1-kx^2} \leqslant 1$

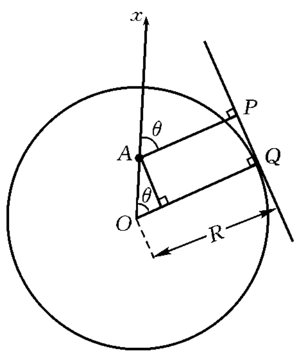
得　$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-kx^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-k}}$　　（6 分）

于是　$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-kx^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-k}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

即　$\frac{\pi}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{1-k}}$　　（12 分）

（21）解　先建立曲线的方程，以极坐标为好. 以 A 为极点，OA 射线为极轴. Q 是圆上动点，P：(ρ, θ) 是轨迹动点. 取 OQ，则由 $AP \parallel OQ$，知 $\angle AOQ = \theta$. 由此，P 点轨迹的极坐标方程为

$$\rho = R - a\cos\theta \qquad (8 \text{ 分})$$



于是所求面积

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R - a\cos\theta)^2 d\theta = \pi R^2 + \frac{a^2}{2}\pi = \frac{\pi}{2}(2R^2 + a^2)$$

（12 分）

注　本题是一个完整的从建立坐标系到计算出面积的好题. 如以 O 为极点，则极坐标不好建立. 说明坐标系的选择对计算影响很大，本题也可用直角坐标系，但较繁.

（22）证　必要性. 设 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r$

这个表示唯一，说明 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = r(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = r$（即方程组有唯一解），故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.　　（4 分）

充分性. 若 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{\alpha}_r$

则　$(x_1 - y_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (x_r - y_r)\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，得 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,r)$.

故表示是唯一的. （8 分）

（23）解

（1）由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -2\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$ （4 分）

对应 $\lambda_1=2$ 得特征向量 $\xi_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$

对应 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 得两线性无关的特征向量

$\xi_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \xi_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$

故 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 可对角化，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ （8 分）

（2）由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$

知 $\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^n & 4^n-2^n & 4^n-2^n\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 2^n-4^n & 2^n\end{bmatrix}$

（13 分）

数学考研模拟考试试卷 3

数学二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}=$ ________.

(2) $(x\ln|1-x|)^{(4)}\big|_{x=2}=$ ________.

(3) $\int_{-\infty}^{1}x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$ ________.

(4) 设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y)=x+y\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $x=\dfrac{1}{y}$,$x=1$ 和 $y=2$ 所围成的区域,则 $f(x,y)=$ ________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=$ ________.

(6) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ 相似,则 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设对任意实数 x 有 $f(1+x)=2f(x)$,且 $f'(0)=4$,则 $f'(-1)$ 为(　).

(A) 不存在　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

(8) 设抛物线 $y^2=2px$ 在与直线 $y=x$ 交点处的曲率半径 $R=5\sqrt{5}$,则此抛物线在这点

处的切线方程是(   )

(A) $x-2y+2=0$ (B) $x+2y-6=0$

(C) $2x-y-2=0$ (D) $2x+y-6=0$

(9) 设曲线 $y=y(x)$ 在$(0,0)$和$(1,0)$点与 x 轴相切,且在$(0,1)$内 $y(x)>0$,y''' 连续.则在$(0,1)$内存在 $x_1<x_2$ 使(   ).

(A) $y''(x_1)=y''(x_2)=0$ (B) $y'(x_1)=y'(x_2)=0$

(C) $y(x_1)=y(x_2)=0$ (D) $y'''(x_1)=y'''(x_2)=0$

(10) 若 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x(x^2+y^2)$,则 $z=$(   )

(A) $(x^2+y^2)^2+C$ (B) $2(x^2+y^2)^2+C$

(C) $(x+y)^2+C$ (D) $2(x+y)^2+C$

(11) 在线性微分方程:$y''+b(x)y'+c(x)y=0$ 中,若 $b(x)+c(x)=-1$,$b(x)=[1-c(x)]\tan x$.则此方程的通解为 $y=$(   ).

(A) $c_1e^{-x}+c_2\cos x$ (B) $c_1e^{-x}+c_2\sin x$

(C) $c_1e^{x}+c_2\cos x$ (D) $c_1e^{x}+c_2\sin x$

(12) 曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a(a>0)$,则此曲线的周长为(   )

(A) $6a$ (B) $4a$

(C) $4a^{\frac{3}{2}}$ (D) $6a^{\frac{3}{2}}$

(13) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 处处连续.则 $f''(0)=$(   )

(A) 0   (B) 不存在

(C) $\dfrac{1}{12}$ (D) $-\dfrac{1}{12}$

(14) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同列的矩阵,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的(   )

(A) 必要非充分的条件   (B) 必要且充分的条件

(C) 充分非必要的条件   (D) 既非充分又非必要的条件

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设 $x_0\in(-1,0)$,而 $x_n=x_{n-1}^2+2x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(16)(本题满分 9 分) 设曲线 $y=y(x)$ 在$\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$点与直线 $4x-4y-3=0$ 相切,且 $y=y(x)$ 满足方程 $y''=6\sqrt{y}$. 求该曲线在相应 $x\in[-1,1]$ 上(x,y)点的曲率.

（17）**（本题满分 9 分）** 已知曲线 $y=y(x)$ 是满足方程 $y'-y=\cos x-\sin x$ 的有界函数.求此曲线 $y=y(x)$ 在$[0,\pi]$一段与 x 轴和 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的形心.

（18）**（本题满分 10 分）** 求抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$ 的切线与二坐标轴所围成三角形面积的最大值.

（19）（本题满分 12 分） 设 $f(x)$ 有二阶连续的导数，$z=f(e^x\sin y)$ 满足方程：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$. 求 $f(x)$.

（20）（本题满分 12 分） 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$a_n=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\cdots+\sqrt{\sin x}}}$

（1）证明数列 $\{a_n\}$ 收敛；（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}a_n\cos x\mathrm{d}x$ 的值.

（21）（本题满分 12 分） 设对任意实数 x,y，有 $f(x+y)=f(x)f(y)\neq 0$，且 $f(2)=4$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（1）证明 $f(x)$ 处处连续；（2）证明 $f(x)$ 处处可导，并求 $f(x)$.

（22）（本题满分 8 分） 问 a、b、c 取何值时，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\a&1&b&0\\0&0&2&0\\2&3&c&2\end{pmatrix}$$

能与对角矩阵相似？此时并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(23)（本题满分 13 分） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，$r(\boldsymbol{CA} + \boldsymbol{DB}) = n$.

（1）证明 $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = n$；

（2）设 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{r_1}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 是 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 证明 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{r_1}, \boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{r_1}$ 线性无关；

（3）证明 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{r_1}, \boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{r_1}$ 是方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系（利用关系式 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n \leqslant r(\boldsymbol{AB})$）.

试卷(三)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 4/\mathrm{e} \quad}$. 原极限 $= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]} = \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = 4/\mathrm{e}.$

(2) $\underline{\quad -4 \quad}$. $(x\ln|1-x|)^{(4)} = -\left(x\dfrac{3!}{(1-x)^4} + 4\dfrac{2!}{(1-x)^3}\right)$

以 $x=2$ 代入得:$(x\ln|1-x|)^{(4)}\Big|_{x=2} = -2\cdot 3! + 4\cdot 2! = -4.$

(3) $\underline{\quad \mathrm{e} \quad}$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{1} - 2x\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{1} + 2\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{1} = \mathrm{e}.$

(4) $\underline{\quad x+\dfrac{1}{2}y \quad}$. 设 $f(x,y) = x + y\cdot A$,其中 $A = \displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

于是:$A = \displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + A\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A\int_1^2 y\mathrm{d}y\int_{1/y}^1 \mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 x\mathrm{d}x\int_{1/x}^2 \mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}.$$

$A = \dfrac{1}{2}$ 从而 $f(x,y) = x + \dfrac{1}{2}y.$

(5) $\underline{\quad \dfrac{1}{324} \quad}$. $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$, $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^2 = 324$, $|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}| = \dfrac{1}{324}.$

(6) $\underline{\quad 4 \quad}$. $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似,故有相同的秩. 而

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0. \text{故 } r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = 4.$$

二、选择题

(7) (C). **解 1.** $f'(-1) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-1+x)-f(-1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(1+(-1+x)) - \frac{1}{2}f(0)}{x}$

$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}f'(0) = 2.$

解 2. (非常规解法). $f'(1+x) = 2f'(x)$. 令 $x=-1$ 得 $f'(0) = 2f'(-1)$, $f'(-1) = \dfrac{1}{2}f'(0) = 2.$

(8) (A). 抛物线写作 $x = \dfrac{y^2}{2p}$,当 $x = y$ 时得 $x = y = 2p$. 这时 $x' = \dfrac{y}{p}\Big|_{y=2p} = 2$. $x'' = \dfrac{1}{p}$,由 $(2p,2p)$ 点的曲率半径为 $R = 5\sqrt{5}p = 5\sqrt{5}$,得 $p=1$. 抛物线方程是 $y^2 = 2x$. 点是 $(2,2)$. 这时 $y' = \dfrac{1}{2}$. 故切线为 $x - 2y + 2 = 0$. 选(A).

(9) (A). 由 $y(0) = y(1) = 0$,及 $y(x) > 0$ 知存在一点 $\eta\in(0,1)$,使 $y(\eta)$ 达到最大值,

即 η 是 $y(x)$ 的极大点. 故有 $y'(\eta)=0$，再由 $y'(0)=y'(\eta)=y'(1)=0$ 及罗尔定理知，$\exists\, 0<x_1<\eta<x_2<1$，使 $y''(x_1)=y''(x_2)=0$.

(10)（A）. 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4xy^2$ 得 $z=x^4+2x^2y^2+g(y)$，而由 $x\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xy(x^2+y^2)=4x^3y+xg'(y)$

得　$g'(y)=4y^3$，故 $g(y)=y^4+C$.

$z(x,y)=x^4+2x^2y^2+y^4+C=(x^2+y^2)^2+C$. 选（A）.

(11)（D）. 由 $1+b(x)+c(x)=0$ 知 $y=\mathrm{e}^x$ 是方程的一个解；又由 $-\sin x+b(x)\cos x+c(x)\sin x=0$ 知 $y=\sin x$ 也是方程的解. 故选（D）.

(12)（D）. 令 $x=a^{\frac{3}{2}}\cos^3 t, y=a^{\frac{3}{2}}\sin^3 t$.

则
$$\dot{x}=3a^{\frac{3}{2}}(-\sin t\cos^2 t).\ \dot{y}=3a^{\frac{3}{2}}\cos t\sin^2 t.$$
$$\mathrm{d}s=3a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^4 t+\cos^2 t\mathrm{sn}^4 t}\,\mathrm{d}t.$$

周长　$L=4\int_0^{\pi/2}3a^{\frac{3}{2}}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=6a^{3/2}$. 选（D）.

(13)（D）. 由泰勒公式：$\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4!}x^2+\cdots$

因此 $f''(0)=-\dfrac{2}{4!}=-\dfrac{1}{12}$. 选（D）.

(14)（A）. 当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间才是同维向量空间，即两方程组才有可能同解. 但秩相等时，方程组未必同解，如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 就是这种情形，故应选（A）.

三、解答题

(15) 解　由 $x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1\in(-1,0)$. 设 $x_k\in(-1,0)$，则 $x_{k+1}=(x_k+1)^2-1\in(-1,0)$. 由数学归纳法知 $x_n\in(-1,0)$，即数列 $\{x_n\}$ 有界.　（3 分）

又 $x_n-x_{n-1}=x_{n-1}(x_{n-1}+1)<0$. 故 $\{x_n\}$ 单调减. 因此 $\{x_n\}$ 收敛.　（7 分）

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A^2+A=A(A+1)=0$. 而 $A<0$，故 $A=-1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$.

（9 分）

(16) 解　由 $y''=6\sqrt{y}$. 令 $P=y'$. 得 $P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=6\sqrt{y}$. 解得 $\dfrac{1}{2}P^2=4y^{3/2}+c_1$. 由 $y=\dfrac{1}{4}$ 时，$P=1$，得 $c_1=0$. 从而 $P=\pm 2\sqrt{2}y^{3/4}$（因 $y'(1)=1$，故舍去负根）　（4 分）

解得　　$y=\dfrac{x^4}{4}$

在 (x,y) 点曲率　$\tau=\dfrac{3x^2}{(1+x^6)^{3/2}}$　（9 分）

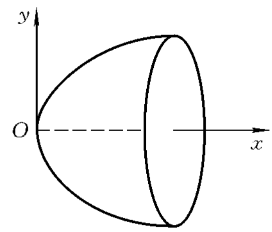
(17) 解　$y'-y=0$ 的通解是 $y=c\mathrm{e}^x$，$y'-y=\cos x-\sin x$ 的一个特解是 $y=\sin x$，故此方程的通解是 $y=c\mathrm{e}^x+\sin x$.

因此，所求曲线是 $y=\sin x$.　（3 分）

如图，所求形心在 x 轴上，任取 $[x,x+\mathrm{d}x]$.

得　$\mathrm{d}v=\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$.

$$v=\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$ （5 分）



对 y 轴的静矩为

$$I_y=\pi\int_0^{\pi/2}x\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\pi x\sin x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\pi\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\mathrm{d}x+\pi\int_0^{\pi/2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{8}-I_y$$

所以 $I_y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi^3}{16}$.

形心 $\bar{x}=\dfrac{1+\dfrac{\pi^2}{4}}{\pi}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{\pi}$. （9 分）

(18) 解 设 (x_0,y_0) 是抛物线上任一点，过此点所作切线方程是

$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0).\ (*)$$ （4 分）

要求 ΔOAB 面积的最大值，令 $(*)$ 式中 $y=0$ 得

$$x_A=\sqrt{x_0y_0}+x_0=\sqrt{x_0}.$$

令 $(*)$ 式中 $x=0$ 得

$$y_B=\sqrt{x_0y_0}+y_0=\sqrt{y_0}.$$

从而只要求 $\dfrac{1}{2}\sqrt{x_0}\sqrt{y_0}$ 的最大值，但 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=1$. 故当 $x_0=y_0=\dfrac{1}{4}$ 时有最大值为 $\dfrac{1}{8}$.

（10 分）

(19) 解 记 $u=\mathrm{e}^x\sin y$，则 $z=f(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\sin y=uf'(u),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos yf'(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y+uf'(u),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-uf'(u)+f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y$$ （6 分）

因此，由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$ 得 $f''(u)-f(u)=0$.

求得 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$ （C_1、C_2 是任意常数） （12 分）

(20) 解 (1) $a_n=\sqrt{\sin x+a_{n-1}}$，且 $a_n>a_{n-1}$. 故数列单调增. 今证明 $a_n<1+\sin x$，$a_1=\sqrt{\sin x}<1+\sin x$ 是显然的，设 $a_{k-1}<1+\sin x$，则 $a_k=\sqrt{\sin x+a_{k-1}}<\sqrt{1+2\sin x}<1+\sin x$ 成立. 由数学归纳法知 $a_n<1+\sin x$ 对一切正整数 n 成立. 因此，数列 a_n 单调增有上界，故收敛. 且

$$(\lim_{n\to\infty}a_n)^2=\sin x+\lim_{n\to\infty}a_{n-1}，记\lim_{n\to\infty}a_n=A.$$

则 $A^2-A-\sin x=0$，$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}$. （6 分）

(2) 由 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}A\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{5}{12}(\sqrt{5}+1)$ $(*)$ （8 分）

而 $0 \leqslant \left| \int_0^{\pi/2} a_n \cos x \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} A \cos x \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^{\pi/2} | a_n - A | | \cos x | \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2} | a_n - A | \mathrm{d}x \to 0$

故 $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\pi/2} a_n \cos x \mathrm{d}x = \frac{5}{12}(\sqrt{5} + 1)$. （12 分）

注 直接做到（*）式，便得出极限者，只能得 8 分.

（21）证 （1）对任意 x，取 $y = \Delta x$. 则 $f(x + \Delta x) = f(x) f(\Delta x)$.

于是 $f(x + \Delta x) - f(x) = f(x)[f(\Delta x) - 1] = f(x)[f(\Delta x) - f(0)]$.

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续知，$\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(\Delta x) - f(0)] = 0$.

故 $f(x)$ 处处连续. （4 分）

（2）由（1），$f(x)$ 连续，因此 $f(x)$ 可积分.

任取积分得 $$\int_0^a f(x + y) \mathrm{d}y = \int_0^a f(y) \mathrm{d}y \cdot f(x) = b f(x)$$

其中 $b = \int_0^a f(x) \mathrm{d}x$ 为常数.

令 $x + y = u$，得 $\int_x^{a+x} f(u) \mathrm{d}u = b f(x)$.

由于 $f(x)$ 连续，故上面等式两边可导，即 $f(x)$ 可导. （8 分）

对 y 求导得 $$f'(x + y) = f(x) f'(y)$$

令 $y = 0$ 得 $f'(x) = c f(x)$. $\therefore f(x) = \mathrm{e}^{cx}$

而由 $f(2) = 4$ 得 $\mathrm{e}^{c2} = 4 = 2^2$ $\therefore \mathrm{e}^c = 2$，即 $f(x) = 2^x$. （12 分）

（22）解 $$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 & 0 \\ -a & \lambda - 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & -3 & -c & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. （1 分）

要使 $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似，只需对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，有两个线性无关的特征向量；对应于 $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$，也有两个线性无关的特征向量，即 $r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$ 且 $r(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$.

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -c & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & -b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -c & -1 \end{pmatrix}$$

当且仅当 $a = 0, b = 1, c$ 任意时，$r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$.

$$2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -c & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c-5 & 0 \end{pmatrix}$$

当且仅当 $c = -5, a = 0, b = 1$ 时，$r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$，即此时，$\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似. （5 分）

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，解 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-3, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (-1, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$，

对于 $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$，解 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_4 = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2\ \boldsymbol{\xi}_3\ \boldsymbol{\xi}_4]$,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵. (8 分)

(23) 证 (1) 因为 $n=r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB})=r\left[[\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{D}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right]\leqslant r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant n$,所以(1)的结论得证. (4 分)

(2) 由 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=n$ 知方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 无非零公共解,又 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\cdots$,$\boldsymbol{\xi}_{r_1}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 分别为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,故(2)的结论得证. (8 分)

(3) 显然 $\boldsymbol{AB\eta}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,r_2$,又 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,所以 $\boldsymbol{AB\xi}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,r_1$,故 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 是方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的 r_1+r_2 个线性无关的解向量.

又 $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n=(n-r_1)+(n-r_2)-n=n-(r_1+r_2)$,所以 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中至多有 $n-[n-(r_1+r_2)]=r_1+r_2$ 个解向量,从而 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 为 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. (13 分)

数学考研模拟考试试卷 4

数学二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)=$ ________.

(2) 设 $f(x)$ 具有连续导数,且

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 点连续,则 $f'(0)=$ ________.

(3) $y''-3y'+\alpha y=-5\mathrm{e}^{-x}$ 有一特解为 $Ax\mathrm{e}^{-x}$ 的形式,则其通解为 $y=$ ________.

(4) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=3t^2-2t+3\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,t+2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,t)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$.若 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示,则 $t=$ ________.

(6) 已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的秩为 3,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_4$,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) $\displaystyle\int\sec x\,\mathrm{d}x\neq$ (　).

(A) $\ln|\sec x+\tan x|+C$

(B) $\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$

(C) $\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C$

(D) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}+C$

(**8**) 设 $y=y(x)$ 是满足微分方程 $(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 和初始条件 $y(0)=1$ 的解，则 $\int_{-1/2}^{1/2}y(x)\mathrm{d}x=(\quad)$.

(A) $-\ln 3$　　(B) $\ln 3$

(C) $\frac{1}{2}\ln 3$　　(D) $-\frac{1}{2}\ln 3$

(**9**) 设 $f(x)$ 有连续的一阶导数，$f(0)=0$，$f'(0)=2$，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=(\quad)$.

(A) 4　　(B) 3

(C) 2　　(D) 1

(**10**) 函数 $u=\sqrt{x^2y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处(　)

(A) 偏导数存在但不连续　　(B) 连续但偏导数不存在

(C) 可微分但偏导数不连续　　(D) 偏导数连续

(**11**) 要使方程 $x^3+3px+q=0$ 有三个不同实根，则 p,q 的关系是

(A) $4p^3<-q^2$　　(B) $4p^3<q^2$

(C) $p^3<-4q^2$　　(D) $p^3<4q^2$

(**12**) 设 $a>0$，$ac-b^2>0$，则曲线 $y=\sqrt{ax^2+2bx+c}$ (　).

(A) 没有渐近线

(B) 仅一条斜渐近线

(C) 有两条斜渐近线

(D) 有一条斜渐近线和一条水平渐近线

(**13**) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，不恒为常数，若 $f(0)=f(1)$，则在开区间 $(0,1)$ 内(　).

(A) $f'(x)=0$

(B) $f'(x)>0$

(C) $f'(x)<0$

(D) 存在 $\xi_1\neq\xi_2$，使 $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$

(**14**) 设 $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -3 & x\end{vmatrix}>0$，则(　).

(A) $x<-6$　　(B) $x<-4$

(C) $-6<x<-4$　　(D) $x>-6$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 10 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足关系 $x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}(n=0,1,\cdots)$,证明:不论 x_0 取什么正数,$\{x_n\}$ 均收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(16)(本题满分 10 分) 汽车制动时,阻力与速度成正比,摩擦力为常数 f,汽车质量为 m,初速为 v_0,求制动时位移、速度与时间的关系.

（17）（**本题满分 10 分**）设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 $f(t)$ 有二阶连续导数，$g(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

（18）（**本题满分 9 分**）计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \frac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}} \mathrm{d}y$.

（19）**（本题满分 10 分）**求过原点的曲线 $y = y(x)$，使曲线上任一点 P 的法线段 PQ（即 Q 是过 P 点所作曲线法线与 x 轴的交点）的中点位于抛物线 $2y^2 = x$ 上.

（20）**（本题满分 12 分）**设 $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$，求$\int f(g(x))\mathrm{d}x$.

（21）（本题满分 12 分） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$，且 $f'(a)\cdot f'(b)>0$. 证明在 (a,b) 内至少存在 ξ，使 $f(\xi)=f(a)$.

（22）（本题满分 8 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零实矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{*}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

(23)（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 是否可与对角矩阵相似,如能,求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

试卷(四)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad\dfrac{1}{3}\quad}$. 由 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

即可得所求答案.

(2) $\underline{\quad -2\quad}$. 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}+3=1$ 得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$. $f(x)$ 连续,故 $f(0)=0$,从而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$.

(3) $\underline{\quad x\mathrm{e}^{-x}+C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2\mathrm{e}^{-x}\quad}$. 易知 $\alpha=-4$ 及方程有一特解 $x\mathrm{e}^{-x}$,即得通解.

(4) $\underline{\quad \mathrm{e}(2\mathrm{e}+3)/4\quad}$. $t=0$ 时,$\dot{x}=-2$,$\ddot{x}=6$,又 $y=1$.

$$\mathrm{e}^y\cos t+\mathrm{e}^y\dot{y}\sin t-\dot{y}=0,\text{故 } \dot{y}\Big|_{t=0}=\mathrm{e}$$

$$2\mathrm{e}^y\dot{y}\cos t+(\mathrm{e}^y\dot{y})\sin t-\ddot{y}=0,\ddot{y}\Big|_{t=0}=2\mathrm{e}^2$$

故 $y''\Big|_{t=0}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}=\mathrm{e}(2\mathrm{e}+3)/4$

(5) $\underline{\quad 2\quad}$.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4\ \boldsymbol{\alpha}]=\begin{bmatrix}1&-2&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&t+2&t&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&t-2&1-t\end{bmatrix}$$

故 $t=2$.

(6) $\boldsymbol{x}=\underline{\quad (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,4)^{\mathrm{T}}\quad}$.

由题设知 $(1,-2,1,4)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组的基础解系,而 $(1,1,1,1)$ 是非齐次方程的一个解,故得所填通解.

二、选择题

(7) (D). 注意选项(A)、(B)、(C) 均是积分 $\int\sec x\mathrm{d}x$ 的基本公式.

(8) (B). 方程可化为 $x^2\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}(-y-\sin x)=0$

即 $\mathrm{d}(yx^2-y-\sin x)=0$,故满足 $y(0)=1$ 的解是

$$y=\frac{1-\sin x}{1-x^2},\quad \int_{-1/2}^{1/2}\frac{1-\sin x}{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\ln3,\text{选(B)}$$

(9) (A). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{kx^{k-2}}$

$$=\frac{2}{k(k-2)}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^{k-3}}=\frac{2}{k(k-2)}f'(0)\quad(k-3=1\text{ 成立})$$

故 $k=4$，选(A).

(10)(C). 在$(0,0)$点$u(x,y)$连续，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$存在，且$0\leqslant\dfrac{u(x,y)-u(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\leqslant|y|\to 0$，$(x,y)\to(0,0)$，故$u$在$(0,0)$点可微. 但当$y\neq 0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,y)}$不存在，同样$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,0)}$不存在$(x\neq 0)$，故偏导数在点$(0,0)$不连续. 选(C).

(11)(A). 设$y=x^3+3px+q$. 则$y'=3(x^2+p)$. 要使方程有三个不同实根，必须$p<0$，且$x=-\sqrt{-p}$和$\sqrt{-p}$分别是极大和极小点，极大值$p\sqrt{-p}-3p\sqrt{-p}+q>0$. 极小值$-p\sqrt{-p}+3p\sqrt{-p}+q<0$.

得 $2p\sqrt{-p}<q<-2p\sqrt{-p}$，即$q^2<-4p^3$. 选(A).

(12)(C). 可用泰勒公式

$$\sqrt{ax^2+2bx+C}=\sqrt{a}|x|\left(1+\frac{2b}{ax}+\frac{c}{ax^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}|x|\left[1+\frac{b}{ax}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

故当$x\to+\infty$时，渐近线为$y=\sqrt{a}x+\dfrac{b}{a}\sqrt{a}$.

$x\to-\infty$时，渐近线为$y=-\sqrt{a}x-\dfrac{b}{a}\sqrt{a}$. 选(C).

(13)(D). 注意：本题是概念题，用排除法. 因$f(x)$非常数，故$f'(x)\not\equiv 0$排除(A)；又若$f'(x)>0$，$f(x)\nearrow$，$f(1)>f(0)$排除(B). 同样$f'(x)<0$则$f(0)<f(1)$排除(C). 只有选(D).

注 以上是作选择题的技巧，请读者留意. 但平时练习可以想法证明选项(D)的正确性：由于$f(0)=f(1)$，由$f(x)$连续且不恒为常数知$M=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)>m=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)$，故最大值与最小值至少有一个为$x_0\in(0,1)$使$f(x_0)=M>f(0)=f(1)$，(或$f(x_0)=m<f(0)=f(1)$). 这时，由拉氏中值定理，在$[0,x_0]$上，$\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi_1)>0$，而在$[x_0,1]$上$\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\xi_2)<0$，即$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$.

(14)(C). 由$\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -3 & x\end{vmatrix}=-(x+4)(x+6)>0$，故选(C).

三、解答题

(15)解 由$0<x_{n+1}=2-\dfrac{2}{2+x_n}<2$，$(n=1,2,\cdots)$故$x_n$上、下均有界， (3分)

又
$$x_{n+1}=2-\frac{2}{2+x_n}$$
$$x_n=2-\frac{2}{2+x_{n-1}}$$

故
$$x_{n+1}-x_n=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)}$$

因此 $$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}>0\ (n=0,1,2,\cdots)$$ （6 分）

这说明若取定 x_0，有 $x_1>x_0$，则由数学归纳法知 $x_n>x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，数列 $\{x_n\}$ 单调增有上界，收敛.

若对取定 x_0 有 $x_0<x_1$，则有 $x_n<x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，$\{x_n\}$ 单调减，有下界亦收敛. 因此，不论 x_0 是何正数，均有 $\{x_n\}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2-\frac{2}{2+\lim\limits_{n\to\infty}x_n},$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可解得 $a=\sqrt{2}$ （10 分）

（16）解 制动的运动方程为

$$m\ddot{x}=-f-k\dot{x},\ x\Big|_{t=0}=0,\ \dot{x}\Big|_{t=0}=v_0$$ （3 分）

以下给出两种解法：

解 1 由 $m\dot{v}+kv=-f$ 是一阶线性方程，得 $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}-\frac{f}{k}$，$C=v_0+\frac{f}{k}$，$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}-\frac{f}{k}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$ （7 分）

再积分 $x=(v_0+\frac{f}{k})\cdot\frac{m}{k}(1-e^{\frac{k}{m}t})-\frac{f}{k}t$ （10 分）

解 2 用二阶常系数方程 $m\ddot{x}+k\dot{x}=-f$

非齐次方程一个特解是 $x=-\frac{f}{k}t$，故通解是

$$x=C_1e^{-\frac{k}{m}t}+C_2-\frac{f}{k}t,\ t=0,\ x=0\text{ 得}$$

$$C_1=-C_2,\ \dot{x}=v_0\text{ 得 }C_1=\frac{-m}{k}(v_0+\frac{f}{k})$$

$$x=\frac{m}{k}(v_0+\frac{f}{k})(1-e^{\frac{k}{m}t})-\frac{f}{k}t$$ （7 分）

$$v=\dot{x}=v_0e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{f}{k}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$$ （10 分）

（17）解 $z_x=2f'(2x-y)+g'_u+yg'_v$

$z_y=-f'(2x-y)+xg'_v$ （2 分）

$z_{xx}=4f''+g''_{uu}+2yg'_{uv}+y^2g''_{vv}$ （5 分）

$z_{xy}=-2f''+xg''_{uv}+g'_v+xyg''_{vv}$ （7 分）

$z_{yy}=f''+x^2g''_{vv}$ （9 分）

（18）解 1 （交换积分顺序）.

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{ye^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{ye^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\mathrm{d}x.$$（积分域请读者画） （6 分）

$$=\int_0^1ye^y=1$$ （9 分）

解 2 （分部积分）. 记 $I(x)=\int_0^{x^2}\frac{ye^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y$，则

$$I=(x-1)\int_0^{x^2}\frac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_0^1 2x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\int_0^1 u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=1 \qquad (9\text{ 分})$$

(19) 解　设曲线上任一点为 (x,y)，则过此点法线方程是

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

令 $Y=0$ 得 $X_0=x+yy'$.

Q 点坐标为 $(x+yy',0)$. （3 分）

故中点为 $\left(x+\frac{yy'}{2},\frac{y}{2}\right)$，它在 $2y^2=x$ 上，

故 $$\frac{y^2}{2}=x+\frac{yy'}{2}$$

或得方程 $$2yy'-2y^2=-4x \qquad (5\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}-2y^2=-4x,\quad (y^2\mathrm{e}^{-2x})'=-4x\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y^2\mathrm{e}^{-2x}=(1+2x)\mathrm{e}^{-2x}+C,$$

由 $y(0)=0$，得 $C=-1$，$y^2=1+2x-\mathrm{e}^{2x}$，为所求曲线方程. （10 分）

(20) 解　$$f(g(x))=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1\\ 1-x, & 0\leqslant x<1\\ x^2, & x<0\end{cases} \qquad (6\text{ 分})$$

故 $$\int f(g(x))\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1)^2+C_1, & x\geqslant 1\\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+C, & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{3}x^3+C_2, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x\geqslant 1\\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+C, & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{3}x^3+C-\frac{1}{2}, & x<0\end{cases} \qquad (12\text{ 分})$$

(21) 解　不妨设 $f'(a)>0$，则 $f'(b)>0$

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$，故存在 a 的一个右邻域 $(a,a+\delta_1)$，使 $x\in(a,a+\delta_1)$ 有 $f(x)>f(a)=f(b)$ （4 分）

$f'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$，存在 $(b-\delta_2,b)$，$x\in(b-\delta_2,b)$，有 $f(x)<f(b)=f(a)$

（8 分）

取 $x_1\in(a,a+\delta_1)$，$x_2\in(b-\delta_2,b)$，使 $x_1<x_2$.

则在 $[x_1,x_2]$ 中 $f(x)$ 连续，且 $f(x_1)>f(a)>f(x_2)$，由连续函数的介值定理知存在

$\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$,使 $f(\xi) = f(a)$ (12 分)

(22)解 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 n 维列向量($i = 1, 2, \cdots, n$). 由 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^*$ 得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}$$ (4 分)

由于 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵至少有 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq \boldsymbol{0}$,则 $|\boldsymbol{A}| = \|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2 > 0$,从而,由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^*$ 两端取行列式,得 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$,故 $|\boldsymbol{A}| = 1$,从而有 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|} \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵. (8 分)

(23)解

(1) $$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 (\lambda - 4)$$

故全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,$\lambda_3 = 4$. (4 分)

(2) $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似 (6 分)

由 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的秩为 2,故相应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的线性无关特征向量只有一个($\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量),故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵. (13 分)

数学考研模拟考试试卷 5

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 曲线 $y=x^n$ 在点 $P(1,1)$ 处的切线段 PQ,Q 的坐标为 $(\xi_n,0)$(Q 是过 P 作曲线的切线与 x 轴的交点),则 $\lim\limits_{n\to\infty} y(\xi_n)$ ________.

(2) 设函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上最大值为 M,最小值为 m,则 $M-m=$ ________.

(3) 方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解是 $y=$ ________.

(4) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=0$,$y=(\mathrm{e}+1)-x$ 所围成的图形的面积是________.

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=$ ________.

(6) 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=m<n$,若 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{B})=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 函数 $y=x+\sin x$ 及其表示的曲线(　).

(A) 没有极值点,有无限个拐点

(B) 有无限个极值点和无限个拐点

(C) 有无限个极值点,没有拐点

(D) 既无极值点,也无拐点

(**8**) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x (x^2-t^2)e^{-t^2}\,dt}{e^{x(x-2a)}-e^{-a^2}}=(\quad)$.

(A) $a^2e^{-a^2}$　　(B) a^2

(C) ae^{-a^2}　　(D) a

(**9**) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}=(\quad)$.

(A) -1　　(B) 0

(C) e　　(D) 1

(**10**) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

则在(0,0)点处,函数 $f(x,y)$(　)

(A) 连续但二偏导数不都存在

(B) 二偏导数存在但不连续

(C) 连续且二偏导数存在但不可微

(D) 可微

(**11**) 设 $f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$,则$\int_{-1}^{2}f(g(x))dx=(\quad)$

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{4}{3}$

(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{5}{3}$

(**12**) 微分方程 $xy\cdot y'=x^2+y^2$ 满足 $y\Big|_{x=e}=2e$ 的特解为(　).

(A) $y^2=2x^2(\ln x+1)$　　(B) $y^2=2x^2(\ln|x|+1)$

(C) $y=x\sqrt{2(\ln x+1)}$　　(D) $y=x\sqrt{2(\ln|x|+1)}$

(**13**) 双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta(a>0)$ 所围图形绕极轴旋转一周所得形体的表面积 $A=(\quad)$.

(A) $2\pi a^2$　　(B) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$

(C) $2\pi a^2(2+\sqrt{2})$　　(D) $2\sqrt{2}\pi a^2$

(**14**) 下列 4 对矩阵中,不相似的是(　).

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

（15）（本题满分 9 分） 计算广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

（16）（本题满分 10 分） 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，当 $x>0$ 时，有 $f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，求 $f(x)$.

（17）（本题满分 9 分） 设 $a_0=0, a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+3(n=0,1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

（18）（本题满分 12 分） 计算积分 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$ 及摆线：$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 一拱（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）所围成的区域.

（19）（本题满分 12 分） 一长为 l，质量为 M 的均匀细棒，在它的一端与棒的垂直线上有一质量为 m 的质点，此点与棒的距离为 a，求棒对此质点的引力.

（20）（本题满分 12 分） 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 (x_0, y_0) 点处相切，且在这一点 $y = f(x)$ 的曲率 k_1 大于 $y = g(x)$ 的曲率 k_2，又 $f''(x_0)$ 和 $g''(x_0)$ 均大于 0，问：在 (x_0, y_0) 点的近旁，曲线 $y = f(x)$ 是在 $y = g(x)$ 的上方还是下方？

（21）（本题满分 12 分） 证明：$\frac{\sqrt{3}}{18}\pi \leqslant \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^6}} \leqslant 2^{-\frac{1}{3}}$.

（22）（本题满分 8 分） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}^*| = -|\boldsymbol{B}^*|$，求 $|\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*|$.

（23）**（本题满分 10 分）** 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明

（1）$\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关.

（2）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\xi_r$ 线性表示，且表示法唯一.

试卷(五)解答与评分参考

一、填空题

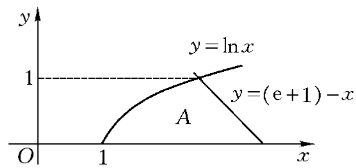
(1) $\underline{\ e^{-1}\ }$. 过(1,1)点切线为 $Y-1=n(X-1)$, 故 $\xi_n=(1-\frac{1}{n})$, $y(\xi_n)=(1-\frac{1}{n})^n\to e^{-1}$.

(2) $\underline{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}$. $f'=1-2\sin x$, 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 有唯一极大值点: $x_0=\frac{\pi}{6}$, 故 $M=f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 最小值点应在端点. 而 $f(0)=2$; $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}<2$, 故 $m=\frac{\pi}{2}$, $M-m=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

(3) $\underline{\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2}$. 简单解法是:方程两边用 x^2 除,得 $(\frac{1}{x}y')'=1$, 故 $y'=x^2+2C_1x$, $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$.

(4) $\underline{\frac{3}{2}}$. 如图, $A=\int_0^1[(e+1)-y-e^y]dy$

$$=e+1-\frac{1}{2}-e+1=\frac{3}{2}.$$



(5) $\underline{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}}$. 解法很多,请读者试作.

(6) $\underline{\ 0\ }$. 由 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{B}^{T}=\boldsymbol{O}$, 说明 $\boldsymbol{B}^{T}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,而 $\boldsymbol{A}^{T}$ 列满秩,故方程组只有零解, $\boldsymbol{B}^{T}=\boldsymbol{O}$, $r(\boldsymbol{B})=0$.

二、选择题

(7) (A). $y'=1+\cos x$, $x=(2k+1)\pi$ 是驻点,但均不是极值点. 而 $y''=-\sin x$, $(k\pi,k\pi)$ 全是拐点, k 是任一整数,故选(A).

(8) (D). 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x e^{-t^2}dt}{(x-a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{e^{x(x-2a)}}=a$

(9) (D). 令 $x=\frac{1}{t}$, 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1+t}{1-t})^t$

若记 $t=\tan y$, 则 $\tan(y+\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan y+1}{1-\tan y}=\dfrac{1+t}{1-t}$

故 $\quad \arctan\dfrac{1+t}{1-t}=y+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+\arctan t$

$$\lim_{t\to 0^-}(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1+t}{1-t})^t=\lim_{t\to 0^-}(-\arctan t)^t=1.$$ 选(D).

(10) (A). $f(x,y)$ 在(0,0)连续,在(0,0)点处 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 不存在,故选(A).

(11) (B). $f(g(x))=\begin{cases}|x-1|, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$, 故

$$\int_{-1}^{2} f(g(x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(1-x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}(x-1)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$ 选(B).

(**12**)(C). 方程可化为：$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x^3}y^2 = \frac{2}{x}$

即$(\frac{y^2}{x^2})' = \frac{2}{x}$，$y^2 = x^2(2\ln|x| + C)$，由 $y\Big|_{x=\mathrm{e}} = 2\mathrm{e}$，知 $y > 0$，及 $C = 2$，且解在 $x = \mathrm{e}$ 的邻域，故 $x > 0$，即得 $y = x\sqrt{2(1+\ln x)}$. 选(C).

(**13**)(B). 解　$A = 2 \cdot 2\pi\int_0^{\pi/4}\rho\sin\theta\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\mathrm{d}\theta$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 2\pi a^2(2-\sqrt{2})$$

(**14**)(C).(A)、(B) 中矩阵是明显的，而(C) 中，$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$的秩是 1，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$秩是 2，故不相似. 选(C).(D) 中两矩阵也相似(其实本题不必用排除法，一眼可看中选(C)).

三、解答题

(**15**)解　原式 $= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(3 分)

而　$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{1}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

而　$\int_0^{1}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{令 x = \frac{1}{t}} \int_1^{+\infty}\frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$　　(7 分)

故　$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$，原式 $= \frac{\pi}{2}$　　(9 分)

(**16**)解　原式即 $F'(x)F(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$

即
$$\mathrm{d}F^2(x) = \frac{2\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$　　(3 分)

$$F^2(x) = 2\arctan^2\sqrt{x} + C$$　　(6 分)

由 $F(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，得 $C = 0$，　$F(x) = \sqrt{2}\arctan\sqrt{x}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}$$　　(10 分)

(**17**)解　$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1})$.$(n = 1,2,\cdots)$

令 $b_n = a_n - a_{n-1}$，则$\{b_n\}$ 是以$\frac{1}{3}$ 为公比的数列，$b_1 = 3$　　(3 分)

而　$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0)$

$= b_1 + b_2 + \cdots + b_n$　　(6 分)

故　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$　　(9 分)

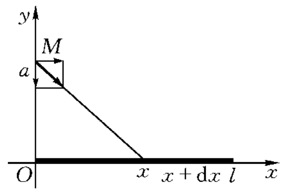
（**18**）**解** $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}y^2\mathrm{d}y$ （3 分）

$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}y^3(x)\mathrm{d}x=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t$ （9 分）

$=\frac{2^4}{3}a^4\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{2^5}{3}a^4\int_0^{\pi}\sin^8 u\mathrm{d}u$

$=\frac{2^6}{3}a^4\int_0^{\pi/2}\sin^8 u\mathrm{d}u=\frac{2^6}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}a^4=\frac{35}{12}\pi a^4$ （12 分）

（**19**）**解** 如图，取坐标系，则质点 m 的坐标是 $(0,a)$，在棒上任取点 x 和 $x+\mathrm{d}x$，当 $\mathrm{d}x$ 很小时，视 $(x,x+\mathrm{d}x)$ 为一质点，这点的质量为 $\mathrm{d}M=\frac{M}{l}\mathrm{d}x$. 它对质点 m 引力的大小为



$|\mathrm{d}F|=\frac{GMm\mathrm{d}x}{l(x^2+a^2)}$，方向为 $\{x,-a\}$ （4 分）

因此，水平分力为（G 是引力常数）.

$$\mathrm{d}F_x=\frac{GMm}{l}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$F_x=\frac{GMm}{l}\int_0^l\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$=\frac{GmM}{al\sqrt{a^2+l^2}}(\sqrt{a^2+l^2}-a)$ （8 分）

铅直分力：$\mathrm{d}F_y=\frac{-GMma}{l}\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{-GmM}{a\sqrt{a^2+l^2}}$ （11 分）

故 $\boldsymbol{F}=\frac{GmM}{al\sqrt{a^2+l^2}}\{\sqrt{a^2+l^2}-a,-l\}$ （12 分）

（**20**）**解** 由 $f(x_0)=g(y_0)=y_0$，及 $f'(x_0)=g'(x_0)=a$.

知 $k_1=\frac{f''(x_0)}{(1+a^2)^{3/2}}>\frac{g''(x_0)}{(1+a^2)^{3/2}}=k_2$ （4 分）

故有 $f''(x_0)>g''(x_0)$. 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ （8 分）

则 $\varphi(x_0)=0$，$\varphi'(x_0)=0$

$$\varphi''(x_0)=f''(x_0)-g''(x_0)>0$$

故 x_0 是 $\varphi(x)$ 的极小值点. 因而在 x_0 的附近有

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)=0 \quad 即\ f(x)\geqslant g(x)$$

说明曲线 $y=f(x)$ 在 $y=g(x)$ 的上方. （12 分）

（**21**）**解** $\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^6}}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{1/3}}$ （3 分）

由泰勒公式 $(1+t^2)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{9}t^4+\cdots\leqslant 1+\frac{1}{3}t^2$

得 $\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{1/3}}\geqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$ （9 分）

又 $(1+t^2)^{\frac{1}{3}}\geqslant(2t^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}$

即 $$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{1/3}} \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$ （12 分）

（22）解 由 $\boldsymbol{A}$ 正交，知 $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^* = \pm \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 故 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

（3 分）

同理 $\boldsymbol{B}^*$ 也是正交矩阵.

故 $$|\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*| = |\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*| = |\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^* + \boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*|$$ （6 分）

$$= |\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^*||(\boldsymbol{B}^* + \boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^*||\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*|$$

即 $|\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*| = -|\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*|$，故 $|\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*| = 0$ （8 分）

（23）解 （1）反证. 若 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 线性相关，则由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\eta}$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次方程的解. 矛盾. （4 分）

（2）由 $$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\eta} + C_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + C_r\boldsymbol{\xi}_r$$
$$= (1 - C_1 - \cdots - C_r)\boldsymbol{\eta} + C_1(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1) + \cdots + C_r(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_r)$$

即 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_r$ 线性表示. （7 分）

要证明表示法唯一，只要证 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关. 令

$$k_0\boldsymbol{\eta} + k_1(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1) + \cdots + k_r(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_r) = \boldsymbol{0}$$

则 $$(k_0 + k_1 + \cdots + k_r)\boldsymbol{\eta} + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\xi}_r = \boldsymbol{0}$$

由（1）已证结果知 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = k_0 = 0$

故 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关，表示式唯一. （10 分）

数学考研模拟考试试卷 6

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 设 $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$,$f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$,给定 $f_{35}(x)=f_5(x)$,则 $f_{29}(x)=$________.

(2) 对于函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{|x|}+[x]$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,当 $x\to 0$ 时的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{|x|}+[x]\right)$ 的结论是________.

(3) $y=\dfrac{x^6-x^5+x^2+1}{1-x^2}$,则 $y^{(8)}=$________.

(4) 方程 $xy'=y[\ln y-\ln x]$ 的通解是________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}=$________.

(6) 设两向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$,(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(5,1,0)^{\mathrm{T}}$. 已知(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩相等,则 $a=$________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=$( ).

(A) $\dfrac{3}{16}\pi$　　(B) $\dfrac{3}{8}\pi$

(C) 0　　　　(D) $\frac{3}{4}\pi$

(**8**) 设 $f(x)\geqslant 0$,它在$[a,b]$上的任一子区间上不恒为0,在$[a,b]$上有 $f''(x)\geqslant 0$,则关于方程 $f(x)=0$ 的根的情况为(　).

(A) 最少有一个根　　　　(B) 最少有两个根

(C) 不可能有根　　　　(D) 最多有一个根

(**9**) 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 与 x^3 为同阶无穷小量,则 a、b 的取值为(　).

(A) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$　　　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$

(C) $a=1,b=-1$　　　　(D) $a=-1,b=1$

(**10**) 设 $f(x,y)=x^2+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$,则$f'_x(1,1)$ 为(　)

(A) 2　　　　(B) 1

(C) 0　　　　(D) -1

(**11**) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x^3+6x^2+1})$(　)

(A) 不存在　　　　(B) 等于1

(C) 等于0　　　　(D) 等于-1

(**12**) 设 $y=C_1e^{C_2x}$ 是某方程的通解,则此方程是(　).

(A) $y'''y-y'y''=0$　　　　(B) $y'=y$

(C) $y''y-y'^2=0$　　　　(D) $y''y+y'=0$

(**13**) $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=$(　).

(A) $\frac{b}{a}\pi$　　　　(B) $\frac{a}{b}\pi$

(C) π　　　　(D) $\frac{\pi}{2}$

(**14**) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 $n\times l$ 矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,则(　).

(A) $m=n$ 时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(B) $r(\boldsymbol{A})=m$ 时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(C) $m>n$ 时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(D) $r(\boldsymbol{A})=n$ 时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(**15**)(**本题满分 9 分**)研究函数 $f(x)=\dfrac{(|x|+x^2)(-1)^{[x]}}{x(x^2-1)}$ 的连续性,对间断点应指出所属类型.

(**16**)(**本题满分 9 分**)求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的周长.

（17）**（本题满分 9 分）**计算积分$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$

（18）**（本题满分 12 分）**在 $x=0$ 点，写出函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$的泰勒多项式到含 x^4 的项，并求 $f^{(4)}(0)$ 的值.

(19)（本题满分 12 分） 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，试在 xOy 平面上，作出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ 的曲线.

(20)（本题满分 10 分） 一雨点，受重力自由下落（不计其它力），同时均匀蒸发着. 设开始下降时的质量为 m_0，蒸发速率为 k，问下降到何时，雨点动能最大？

(21)(本题满分 12 分) 证明：$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 在$(-\infty, +\infty)$上有界.

(22)(本题满分 8 分) 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，$|\boldsymbol{A}| = 0$，$A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式，$A_{21} \neq 0$，证明向量$(A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2n})^{\mathrm{T}}$ 为齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

（23）**（本题满分 13 分）** 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 依次是属于这三个特征值的特征向量，试导出向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2), \boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ 线性无关的充要条件.

试卷(六)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1+x}{2-x}}$. 由 $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 严格单增,有反函数. 而 $f_{35}(x)=f_5(x)$,有 $f_{31}(x)=f_1(x)$,$f_{30}(x)=x$,$f_{29}(x)=f_1^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$

(2) $\underline{\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0}$.

$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{|x|}=0$,而 $\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$,$\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$,故得所填.

(3) $\underline{\dfrac{8!}{(1-x)^9}+\dfrac{2\times8!}{(1+x)^9}}$. 原式 $=-x^4+x^3-x^2+x-2+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{1+x}$,求 8 阶导数即得所求结果.

(4) $\underline{y=xe^{1+Cx}}$. **解 1** 令 $y=xu$,化为 $u+xu'=u\ln u$. 解得 $\ln u=1+Cx$,即得 $y=xe^{1+Cx}$

解 2 方程变为$\dfrac{dy}{y}=(\ln y-\ln x)\dfrac{dx}{x}$

$\dfrac{d\ln y}{d\ln x}-\ln y=-\ln x$,是以 $\ln y$ 为函数,$\ln x$ 为自变量的一阶线性方程,解得

$$\ln y=1+\ln x+Cx$$

故 $y=xe^{1+Cx}$.

(5) $\underline{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}}$. 对题给等式左乘 $\boldsymbol{A}$、右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$-2\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}\ (\text{用到 } \boldsymbol{AA}^*=-2\boldsymbol{E})$$

$$\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(6) $\underline{15}$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 知向量组(Ⅰ)的秩为 2,从而(Ⅱ)的秩也是 2. 于是

$$|\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0\quad\text{解得 } a=15.$$

二、选择题

(7)(A). 令 $x=-t$,

原积分 $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\sin^4t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^4t}{1+e^t}dt$,

于是 $2I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^4t\,dt=2\,\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{4}$,$I=\dfrac{3}{16}\pi$,选(A).

(8)(D). 如不把这个题当证明题,则极易选到(D). 原因是 $f''\geqslant0$ 表示曲线 $y=f(x)$ 向上

凹，弦在弧的上方. 如有两个零点：$f(x_1)=f(x_2)=0$，$x_1<x_2$，则过点$(x_1,0)$、$(x_2,0)$的弦是$y=0$. 在$[x_1,x_2]$上，$f(x)\leqslant 0$，但题设$f(x)\geqslant 0$. 故$f(x)\equiv 0$，与题设矛盾. 因此，$f(x)=0$最多只有一个根，而且这个根有可能是$x=b$，或其它点处均与x轴相切，即必定是重根.

(9)（A）. 本题如会作无穷小分析，并用泰勒公式解之很简便：由于$x\to 0$，$1+bx\to 1$，故只要$(1+bx)\mathrm{e}^x-(1+ax)$与$x^3$同阶. 这时$\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$.

$$(1+bx)\mathrm{e}^x=1+(1+b)x+\frac{1}{2}(1+2b)x^2+\frac{1}{6}(1+3b)x^3+o(x^3)$$

由此知$b=-\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{1}{2}$. 选（A）.

(10)（A）. $f'_x(x,y)\Big|_{(1,1)}=f'_x(x,1)\Big|_{x=1}=2$. 选（A）.

(11)（D）. 用泰勒公式. $x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=x(1+\dfrac{1}{x}+o(\dfrac{1}{x}))=x+1+o(1)$.

$$\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}=x[1+\frac{6}{x}+o(\frac{1}{x})]^{\frac{1}{3}}=x[1+\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x})]=x+2+o(1)$$

故$x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}=-1+o(1)$. 选（D）.

(12)（C）. 首先肯定是二阶方程，排除（A）、（B）；再代入：$y=C_1\mathrm{e}^{C_2x}$，$y'=C_1C_2\mathrm{e}^{C_2x}$，$y''=C_1C_2^2\mathrm{e}^{C_2x}$，因此$yy''=y'^2$，选（C）.

(13)（C）. 令$x-a=(b-a)\sin^2 t$，$b-x=(b-a)\cos^2 t$.

原式$=2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t=\pi$，选（C）.（本题解法极多，最简单是这种）.

(14)（D）. 当$r(\boldsymbol{A})=n$时方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解，故$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$时，必有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 选（D）.

三、解答题

(15) 解　首先看$(-1)^{[x]}$在整数点的左、右极限为$+1$和-1不相等，而函数无定义的点只有$x=0$和$x=\pm 1$. 故

$f(x)$在所有的整数点皆间断，此外处处连续.　　（4 分）

在$x=0$点，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1$，此点是可去间断点. 而$x\to\pm 1$时，$\lim\limits_{x\to\pm 1}f(x)=\infty$，此两点是无穷间断点.　　（7 分）

而当$x\neq 0,\pm 1$是整数时

$$\lim_{x\to n^-}f(x)=\frac{|n|+(n^2)}{n(1-n^2)}(-1)^{n-1},\quad \lim_{x\to n^+}f(x)=\frac{|n|+n^2}{n(1-n^2)}(-1)^n$$

是有限跳跃的间断点.　　（9 分）

(16) 解　$\dot{\rho}=-a\sin\theta$

故$\mathrm{d}S=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}=2a\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta$　　（4 分）

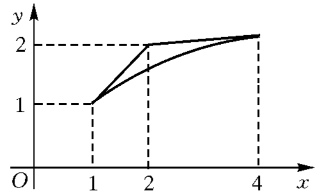
由对称性，只要算$\theta\in[0,\pi]$那段弧长的二倍. 即

$$S=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a$$　　（9 分）

注　如直接算应为：$S=2a\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta=2a\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\right]$

(17) 解　交换积分顺序，相应二次积分的积分域如图.

(3 分)



故 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$

$=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$　(7 分)

$=\int_1^2 -\frac{2}{\pi}y\cos\frac{\pi y}{2}dy=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$　(9 分)

(18) 解　在展开泰勒公式时，可以这样

令 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$

则 $x=(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}-\cdots)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots)$

$=-a_0x-(a_1+\frac{a_0}{2})x^2-(a_2+\frac{a_1}{2}+\frac{a_0}{6})x^3-(a_3+\frac{a_2}{2}+\frac{a_1}{6}+\frac{a_0}{24})x^4$

$-(a_4+\frac{a_3}{2}+\frac{a_2}{6}+\frac{a_1}{24}+\frac{a_0}{120})x^5-\cdots$　(6 分)

故 $a_0=-1,a_1=\frac{1}{2},a_2=-\frac{1}{12},a_3=0,a_4=\frac{1}{720}\cdots$

故 $f(x)=-1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{720}x^4+\cdots$　(10 分)

而 $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{1}{720}$，$f^{(4)}(0)=\frac{1}{30}$　(12 分)

(19) 解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot(\frac{-y}{x^2+y^2})$

$=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$　(3 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}-(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{x}{x^2+y^2}$

$=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}$　(8 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ 即 $y^2-xy-x^2=0$ $(x^2+y^2\neq 0)$.

故此曲线为 2 相交的直线：$y=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})x$.（不含原点）　(12 分)

(20) 解　给定 t 时间：质量为 $m(t)=m_0-kt$　(2 分)

这时的速度为　$v(t)=gt$

动能　$E(t)=\frac{1}{2}(m_0-kt)\cdot g^2t^2$　(6 分)

要求动能最大，可令目标函数为

$$f(t)=(m_0-kt)t^2$$

则令 $f'(t)=t(2m_0-3kt)=0$，解得 $t=\frac{2m_0}{3k}$　(8 分)

且当 $t < \dfrac{2m_0}{3k}$ 时 $f' > 0$，$t > \dfrac{2m_0}{3k}$ 时 $f' < 0$，故

$t = \dfrac{2m_0}{3k}$ 是 $t > 0$ 时唯一的极大值点，亦是最大点.

即当 $t = \dfrac{2m_0}{3k}$ 时，雨点的动能最大. （10 分）

（21）解 由 $f(-x) = -xe^{-x^2}\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt = xe^{-x^2}\int_0^{x} e^{t^2}\,dt = f(x)$

故 $f(x)$ 是偶函数，只要证它在 $(0,+\infty)$ 有界 （4 分）

而
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{xe^{x^2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} + \frac{1}{2} = 1$$

因此，取 $\varepsilon = 1$，$\exists X > 0$，$x > X$ 时，有 $0 < f(x) < 2$，有界. （8 分）

对固定的 X，$f(x)$ 在闭区间 $[0,X]$ 上连续，故有最小值 m 与最大值 M，$m \leqslant f(x) \leqslant M$.

故在 $(0,+\infty)$ 上，$\min(0,m) \leqslant f(x) \leqslant \max(M,2)$ 有界，于是

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界. （12 分）

（22）解 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 及 $A_{21} \neq 0$ 知 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$，因此，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只有一个非零向量. （4 分）

而
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\boldsymbol{A}| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即 $(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^{\mathrm{T}}$ 是一个非零解 $(A_{21} \neq 0)$，故它是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

（8 分）

（23）解 由 $\boldsymbol{A\alpha}_i = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i \quad (i = 1,2,3)$ 有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$

$$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3 \quad （4 分）$$

令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_3\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0}$

得 $(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，得

$$k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = 0,\quad k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = 0,\quad k_3\lambda_3^2 = 0 \quad （8 分）$$

要 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3)$ 线性无关，充要条件是上述关于 k_1,k_2,k_3 的方程组只有零解. 即

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0，得\ \lambda_2\lambda_3 \neq 0 \quad （13 分）$$

数学考研模拟考试试卷 7

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=3$. 则 $a=$ ________.

(2) 设 $z=x^y+f(\sqrt{x}-1)$. 若当 $y=1$ 时, $z=2x$. 则 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=$ ________.

(3) $\left[\dfrac{1+x+x^2}{2-3x+x^2}\right]^{(4)}\Bigg|_{x=0}=$ ________.

(4) 设 $(x^2+y^2)^2=C(x^2-y^2)$ 是某微分方程的通解(C 是待定常数),则此方程是 ________.

(5) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=-3$. 则 $|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}|=$ ________.

(6) 已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)$ 的秩为 3, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 曲线 $y=(1+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\ \dfrac{x}{1-x}$ 的渐近线的条数为(　)

(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 4

(8) 若 $f(x+1)=af(x)$, 且 $f'(0)=b$ (a,b 是非零常数), 则 $f'(-1)=$(　)

(A) $1/ab$　　(B) a/b

(C) ab　　(D) b/a

(9) 设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_{\cos x}^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$（　）

(A) $\sin x f(\cos x)-e^{-x}f(e^{-x})$

(B) $e^{-x}f(e^{-x})-\sin x f(\cos x)$

(C) $f(e^{-x})-f(\cos x)$

(D) $f(\cos x)-f(e^{-x})$

(10) 设 $z=z(y)$ 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 及 $x^2+y^2=1$ 所确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{(1,0,-1)}$ $=$（　）

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $-\sqrt{2}$

(C) 1　　(D) -1

(11) 设 $f(x)=\begin{cases}|x^3-x^2-x+1|+2x, & x\geqslant 1\\ 2, & x<1\end{cases}$，则在 $x=1$ 处函数 $f(x)$（　）

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导但导数不连续　　(D) 导数连续

(12) 设 $y=y(x)$ 是非常数函数，则微分方程 $yy''-(y')^2=y^2y'$ 的通解是（　）

(A) $y=\dfrac{C_1}{C_2e^{-C_1x}-1}$

(B) $y=\dfrac{C_2}{C_2e^{-C_1x}-1}$

(C) $y=C_2e^{-C_1x}-C_1$

(D) $y=\dfrac{C_2e^{-C_1x-1}}{C_1}$

(13) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x+e^x-2}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则关于 $f(x)$ 在 O 点处（　）

(A) 不可导　　(B) $f'(0)=\ln^2 3+1$

(C) $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln 3+1)$　　(D) $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln^2 3+1)$

(14) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r-1}=\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_1$（　）

(A) r 为奇数时线性无关，r 为偶数时线性相关

(B) r 为奇数时线性相关，r 为偶数时线性无关

(C) 对任意的 r 都线性相关

(D) 对任意的 r 都线性无关

三、解答题（本题共 9 小题，总分 94 分）

（15）（本题满分 9 分） 计算 $(x^2 e^x \sin x)^{(4)}$ 在 $x=\pi$ 的值.

（16）（本题满分 9 分） 指出函数 $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$ 的间断点及其所属类型（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）.

(17)（本题满分 9 分） 计算二重积分$\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=1$ 所围成的区域.

(18)（本题满分 10 分） 求点 $P(1,1)$ 到曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 上各点距离的最大值和最小值.

(19) **(本题满分 12 分)** 设曲线 $y=y(x)$ 满足方程：$y''-3y'+2y=2e^{x}$，且与抛物线 $y=x^{2}-x+1$ 相切于$(0,1)$点，试作出此曲线的图形.

(20) **(本题满分 12 分)** 设 $z=f(x,y)$ 满足关系：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2a}{3}\cdot\dfrac{1}{y^{3}}$（$a$ 是正常数），且 $f(0,a)=\dfrac{1}{3a}$，求证：对任意给定的正数 x_0，由迭代公式：

$$x_{n+1}=f(x_n,x_n)\ (n=0,1,2,\cdots)$$

所确定的数列$\{x_n\}$ 收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

(21)（本题满分 12 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内三阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2$，$f(1)=1$，$f(2)=6$，证明存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'''(\xi)=9$.

(22)（本题满分 8 分） 设 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=2,3,\cdots,r)$ 均不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

（23）（本题满分 13 分）λ 取何值时，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多个解，此时并求其通解.

试卷(七)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 4 \quad}$. 由拉氏中值定理：$\sin\ln(1+\frac{a}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})=\cos\xi_1[\ln(1+\frac{a}{x})-\ln(1+\frac{1}{x})]$，其中 ξ_1 在 $\ln(1+\frac{a}{x})$ 与 $\ln(1+\frac{1}{x})$ 之间，故当 $x\to\infty$ 时，$\xi_1\to 0$.

$$\cos\xi_1[\ln(1+\frac{a}{x})-\ln(1+\frac{1}{x})]=\cos\xi_1\cdot\frac{1}{\xi_2}\cdot\frac{a-1}{x}$$

ξ_2 在 $1+\frac{a}{x}$ 与 $1+\frac{1}{x}$ 之间，$x\to\infty$ 时 $\xi_2\to 1$.

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{a}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]=a-1$，故 $a=4$.

(2) $\underline{-\frac{1}{1+x}+C}$. 由 $y=1,z=2x$ 得 $2x=x+f(\sqrt{x}-1)$，故 $f(\sqrt{x}-1)=x$. 令 $\sqrt{x}-1=t$，$x=(1+t)^2$，$f(t)=(1+t)^2$.

故 $\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int(1+x)^{-2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+x}+C$.

(3) $\underline{\frac{267}{4}}$. $\left[\frac{1+x+x^2}{2-3x+x^2}\right]^{(4)}=\left[1+\frac{3}{1-x}-\frac{7}{2-x}\right]^{(4)}=\frac{3\cdot 4!}{(1-x)^5}-\frac{7\cdot 4!}{(2-x)^5}$

故所求值为 $4![3-\frac{7}{2^5}]=\frac{267}{4}$.

(4) $\underline{(3x^2-y^2)yy'=(3y^2-x^2)x}$.

由 $(x^2+y^2)^2=C(x^2-y^2)$，两边对 x 求导得

$2(x^2+y^2)(x+yy')=C(x-yy')$. 消去常数 C 得

$\frac{(x^2+y^2)}{2(x+yy')}=\frac{x^2-y^2}{x-yy'}$ 即 $(3x^2-y^2)yy'=(3y^2-x^2)x$.

(5) $\underline{\frac{-3}{2^{n-1}}}$. 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 知 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$. 故 $|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}|=|\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}|=\frac{1}{2^n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=\frac{-3}{2^{n-1}}$

(6) $\underline{x=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}}$.

由 $r(\boldsymbol{A})=3$ 知对应齐次方程组的基础解系只有一个向量，而由 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\xi}=(1,-2,1,0)$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，而由

$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 知 $\boldsymbol{\eta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$ 是非齐次方程组的一个解，故通解为 $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

二、选择题

(7)(C). 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\frac{x}{1-x}=+\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}(1+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\frac{x}{1-x}=\infty$ 知 $x=0,x=1$ 是两条铅直渐近线. 又由泰勒公式，

$x\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$

$$\frac{x}{1-x}=-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

从而$(1+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\ \dfrac{x}{1-x}=-(1+x)\left(1+\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=-x-3+o(1)$.

$y=-x-3$ 是斜渐近线. 选(C).

(8)(D). 令 $x+1=t$. 得 $f(t)=af(t-1)$.

于是 $f'(0)=af'(-1)$. $f'(-1)=\dfrac{b}{a}$.

(9)(A). $F'(x)=-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+\sin x f(\cos x)$. 选(A).

(10)(B). 由方程两边取微分得

$$xy\,\mathrm{d}z+xz\,\mathrm{d}y+yz\,\mathrm{d}x+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

及 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$. 以 $x=1,y=0,z=-1$ 代入得 $\mathrm{d}x=0$,故 $-\mathrm{d}y+\dfrac{-\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}=0$,$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{(1,0,-1)}=-\sqrt{2}$. 选(B).

(11)(B). $f(x)=(x-1)^2(x+1)+2x,x\geqslant 1$;$f(x)=2,x<1$. 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续,但 $f'(1+0)=2,f'(1-0)=0$,故 $f(x)$ 不可导. 选(B).

(12)(A). 令 $y'=P,y''=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}P$,得

$$y\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-P=y^2,\text{即}\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-\frac{P}{y^2}=1.$$

故 $\quad\dfrac{P}{y}=y+C_1,\dfrac{\mathrm{d}y}{y(y+C_1)}=\mathrm{d}x.$

故 $\quad\ln\dfrac{y}{y+C_1}=\ln C\mathrm{e}^{C_1x}$,即$\dfrac{y}{y+C_1}=C\mathrm{e}^{C_1x}$

$$\frac{y+C_1}{y}=C_2\mathrm{e}^{-C_1x}.\text{所以 } y=\frac{C_1}{C_2\mathrm{e}^{-C_1x}-1}\ \left(C_2=\frac{1}{C}\neq 0\right).$$

(13)(D). 由泰勒公式 $3^x=\mathrm{e}^{x\ln 3}=1+x\ln 3+\dfrac{x^2\ln^2 3}{2}+o(x^2)$,$\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

故 $a=1+\ln 3$. $f(x)=(1+\ln 3)+\dfrac{1}{2}(1+\ln^2 3)x+o(x)$

$$f'(0)=\frac{1}{2}(1+\ln^2 3).\text{选(D)}.$$

(14)(A). 从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 变换矩阵的行列式为(r 阶):

$$\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{r+1}.$$

故 r 为奇数时,两向量组等价;r 为偶数时,行列式为 0,即 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的秩小于 r. 故 r 为奇数时线性无关;为偶数时线性相关. 选(A).

三、解答题

(15) 解 设 $y=\mathrm{e}^x\sin x$，则 $y'=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$. $y''=2\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$=2\mathrm{e}^x\cos x$，$y'''=2\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{3}{4}\pi)$，$y^{(4)}=-4\mathrm{e}^x\sin x$. (4 分)

由莱氏公式 $(x^2\mathrm{e}^x\sin x)^{(4)}=x^2(\mathrm{e}^x\sin x)^{(4)}+8x(\mathrm{e}^x\sin x)^{(3)}+20(\mathrm{e}^x\sin x)''$

$=-4x^2\mathrm{e}^x\sin x+16\sqrt{2}x\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{3}{4}\pi)+40\mathrm{e}^x\cos x$. (8 分)

故在 $x=\pi$ 时，$(x^2\mathrm{e}^x\sin x)^{(4)}=-8\mathrm{e}^{\pi}(5+2\sqrt{2}\pi)$. (9 分)

(16) 解 由函数 $g(t)=[t]$ 在所有的整数点间断(2 分).

知. $f(x)=x[\frac{1}{x}]$ 在所有 $x=\frac{1}{k}$ 及 $x=0$ 点的间断($k=\pm1,\pm2,\cdots$)

且. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}^-}x[\frac{1}{x}]=1+\frac{1}{k}$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}^+}x[\frac{1}{x}]=1$. ($k=\pm1,\pm2,\cdots$)

故在 $x=\frac{1}{k}$ 的所有点是 $f(x)$ 的第一类有限跳跃间断点(5 分). 又令 $x=\frac{1}{t}$ 知. $\lim\limits_{x\to0}x[\frac{1}{x}]=$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{[t]}{t}=\lim\limits_{x\to0}\frac{t-(t)}{t}=1$. ($0\leqslant(t)<1$).

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. (9 分)

(17) 解 由积分对称性知

$$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad (2\text{ 分})$$

故
$$\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}x^2\mathrm{d}x \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 y(1+y^2)^{3/2}\mathrm{d}y=\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1) \qquad (9\text{ 分})$$

(18) 解 1 用参数方程：$x=\cos^3t$，$y=\sin^3t$，则目标函数为

$$f(t)=(1-\cos^3t)^2+(1-\sin^3t)^2. \qquad (4\text{ 分})$$

$$f'(t)=6\cos^2t\sin t(1-\cos^3t)-6\sin^2t\cos t(1-\sin^3t)$$
$$=3\sin2t(\cos t-\sin t)(1-\sin t-\cos t)\quad t\in[0,2\pi].$$

令 $f'(t)=0$ 得驻点：$0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{3}{2}\pi$ 和 2π. (7 分)

而 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=f(2\pi)=1$，$f(\frac{\pi}{4})=\frac{9}{4}-\sqrt{2}\approx0.84$

$f(\pi)=f(\frac{3}{2}\pi)=5$，$f(\frac{5\pi}{4})\approx3.66$.

经比较知，$f_M=5$，$f_m=\frac{9}{4}-\sqrt{2}$，从而所求距离的最大值 $d_M=\sqrt{5}$；最小值 $d_m=\sqrt{\frac{9}{4}-\sqrt{2}}\approx$ 0.91. (10 分)

解 2 用条件极值方法，目标函数为 $(x-1)^2+(y-1)^2$，

令 $L(x,y,\lambda)=(x-1)^2+(y-1)^2+\lambda(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-1)$. （4 分）

令 $\frac{1}{2}L_x=x-1+\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=0,\frac{1}{2}L_y=y-1+\frac{\lambda}{3}\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}=0$.

消去 λ 得 $x^{\frac{1}{3}}(x-1)=y^{\frac{1}{3}}(y-1)$. 即 $x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}-(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})=0$.

用到 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，即得 $(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}-1)=0$.

得 $x=y$. 或 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$.

由 $x=y$ 可得两个驻点：$(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}},\pm\frac{1}{2\sqrt{2}})$；由 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$ 可得 4 个驻点：$(0,\pm1)$ 及 $(\pm1,0)$.

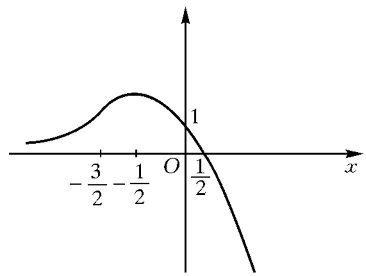
这些与解 1 结果相同，故有 $d_M=\sqrt{5},d_m\approx0.91$. （10 分）

（19）解 先求非齐次方程的特解 $y^*=ax\mathrm{e}^x$，代入方程求得 $a=-2$，于是微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+(C_2-2x)\mathrm{e}^x \quad（4 分）$$

又由题设知 $y(0)=1,y'(0)=-1$. 由此得 $C_1=0,C_2=1$.

从而曲线方程为 $y=(1-2x)\mathrm{e}^x$ （6 分）



这时 $y'=-(1+2x)\mathrm{e}^x,x=-\frac{1}{2}$ 是极大点，

$y''=-(3+2x)\mathrm{e}^x,x=-\frac{3}{2}$ 是拐点的横坐标.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0,y=0$ 是渐近线 （9 分）

列表

x	$(-\infty,-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},+\infty)$
y'	+		+		−
y''	+		−		−
y		$4\mathrm{e}^{-3/2}$		$2\mathrm{e}^{-1/2}$	

曲线如图所示. （12 分）

（20）解 由 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{3}$ 得 $z=\frac{2}{3}x+g(y)$.

而 $z_y=g'(y)=-\frac{2}{3}a\frac{1}{y^3}$，于是 $z=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}\frac{1}{y^2}+C$. 再由 $f(0,a)=\frac{1}{3a}$ 得 $C=0$，于是

$f(x,y)=\frac{1}{3}(2x+\frac{a}{y^2})$. （4 分）

于是 $x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^2})$.（$n=0,1,\cdots$）

由 $x_0>0$ 及 $a>0$ 知 $x_n>0$（$n=1,2,\cdots$）. 故

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^2})\geqslant\sqrt[3]{a}\text{（平均不等式）}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^2})-x_n=\frac{1}{3}(\frac{a}{x_n^2}-x_n)=\frac{1}{3x_n^2}(a-x_n^3)\leqslant 0.$$

因此，$\{x_n\}$ 单调减有下界，故数列收敛. （10 分）

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 得 $A=\frac{1}{3}(2A+\frac{a}{A^2})$，求得 $A=\sqrt[3]{a}$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$ （12 分）

（21）解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2$. 故有 $f(0)=0, f'(0)=2$. （3 分）

作 $P(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ 使 $P(0)=0, P'(0)=2, P(1)=1, P(2)=6$，得 $A=\frac{3}{2}$，$B=-\frac{5}{2}, C=2, D=0$.

令 $\varphi(x)=f(x)-(\frac{3}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x)$ （9 分）

则 $\varphi(x)$ 在 $[0,2]$ 连续，在 $(0,2)$ 可导，且 $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(2)=0$，因此，在 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上 $\varphi(x)$ 均满足罗尔定理条件，故存在 ξ_1,ξ_2 有 $0<\xi_1<1<\xi_2<2$ 使 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$. 因此，在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上 $\varphi'(x)$ 也满足罗尔定理条件，故知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$，使 $\varphi''(\xi)=0$.

但 $\varphi''(x)=f''(x)-9$. 于是得 $f''(\xi)=9$ （12 分）

（22）证 必要性. 用反证法，若有某 $\boldsymbol{\alpha}_i(2\leqslant i\leqslant r)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关. 与已知的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的假设矛盾. （4 分）

充分性. 设 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$.

则必有 $\lambda_r=0$，否则 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表示.

于是 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}=\mathbf{0}$.

同理 $\lambda_{r-1}=\lambda_{r-2}=\lambda_{r-3}=\cdots=\lambda_2=0$. 故得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，因 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，故 $\lambda_1=0$.

于是知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. （8 分）

（23）解 用增广矩阵初等行变换作

$$\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda 3\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)$$

（4 分）

（1）$\lambda=-2$ 时，系数矩阵秩为 2，增广矩阵秩为 3，方程组无解.

（2）$\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，系数矩阵秩为 3，方程组有唯一解. （8 分）

（3）$\lambda=1$，系数矩阵与增广矩阵的秩同为 1，方程组有无穷多组解.

这时方程组实为 $x_1+x_2+x_3=1$.

$(1,0,0)$ 是非齐次方程特解，而 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程基础解系，故通解是

$$x=(1,0,0)^{\mathrm{T}}+C_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}}+C_2(1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$$ （13 分）

数学考研模拟考试试卷 8

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td colspan="6">一</td><td colspan="8">二</td><td colspan="9">三</td><td rowspan="2">合计</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{x^2}-1)^{\sin x}=$ ________.

(2) 设 $A>0,AC-B^2>0$,则在条件 $x^2+y^2=1$ 下,函数 $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 的极大值与极小值之和 $=$ ________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}\right)=$ ________.

(4) 方程 $y''+2y'-3y=6x$ 的通解为________.

(5) 方程 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2-x \\ 2 & 3-x & 1 \\ 1-x & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$ 的实根为________.

(6) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设常数 $p>0$,则抛物线 $y^2=2px$ 上各点的曲率中(　)

(A) 不存在最大值

(B) 最大值为 p

(C) 最大值为$\dfrac{1}{p}$

(D) 最大值为$\dfrac{p^2}{(1+p^2)^{3/2}}$

(**8**) 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\arctan x$，则$\int_0^1 x^2 f(1-x^3)\,dx = ($ $)$.

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $-\frac{\pi}{12}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $-\frac{\pi}{6}$

(**9**) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=-1$，则( )

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点但 $f(0)$ 不是其极值

(**10**) 曲线 $y=2\ln\frac{4}{4-x^2}$ 在相应于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一段的弧长为( )

(A) $2\ln 3+1$ (B) $2\ln 3-1$

(C) $1+\ln 3$ (D) $\ln 3-1$

(**11**) 已知 $y=y(x)$ 在任一点 x 处的增量满足关系：$\Delta y=\frac{e^x\Delta x}{(1+e^x)y}+o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$，且 $y(0)=1$，则 $y(\ln 3)=($ $)$

(A) $\sqrt{1+\ln 2}$ (B) $\sqrt{1+2\ln 2}$

(C) $\pm\sqrt{1+\ln 2}$ (D) $\pm\sqrt{1+2\ln 2}$

(**12**) 设 $I_1=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$，$I_2=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

$I_3=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant\frac{1}{4}}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$，则它们间大小关系是( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_2<I_1<I_3$

(C) $I_3<I_2<I_1$ (D) $I_3<I_1<I_2$

(**13**) 若 $z=y\sin(xy)+(1-y)\sqrt{\frac{\arctan x}{y(1+x)}}+(x-1)e^{-xy}$，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=($ $)$

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4

(**14**) 设向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示：( )

(A) 若 $r>s$，则向量组(Ⅰ)必线性无关

(B) 若 $r\leqslant s$，则向量组(Ⅰ)必线性相关

(C) 若向量组(Ⅰ)线性相关，则必有 $r\geqslant s$

(D) 若向量组(Ⅰ)线性无关，则必有 $r\leqslant s$

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}{1+x}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3^n+|x|^n}}\right]$,求 $f(x)$ 并讨论其连续性与可导性.

(16)(本题满分 9 分) 试比较 $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 与 5 的大小.

（17）（本题满分 9 分） 计算$\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴与曲线$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$（$a>0,b>0$）所围区域.

（18）（本题满分 12 分） 设$(x_0,\ln x_0)$是曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点，试比较由 y 轴、x 轴、$x=x_0$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围图形面积 S_1 和 $x=x_0$、x 轴与曲线所围成面积 S_2 的大小.

（19）（本题满分 10 分） 设洒水车水箱容积为 v_0，其洒水的速率与水箱内存有水的容量的平方根成正比（比例常数为已知正数 k）. 一辆开始装满水的洒水车，在长度为 a 的道路上以匀速率 C 来回行驶并洒水，当回到起点时，水箱之水了洒完. 求洒水车的速率 C.

（20）（本题满分 12 分） 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 的渐近线，并作出此曲线的草图.

（21）（**本题满分 12 分**）已知点 $P(0,a)$（$a \neq 0$）. 试在抛物线 $y = x^2$ 上求点 Q，使 $\overline{PQ}$ 的长为最小.

（22）（**本题满分 8 分**）已知 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1$ 和 1，且 $\boldsymbol{\alpha} = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{A}$.

（23）（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(a_1^2,a_1a_2,\cdots,a_1a_n)^{\mathrm{T}}$，$a_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$. 求方程组 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

试卷(八)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 1 \quad}$. $(\mathrm{e}^{x^2}-1)^{\sin x}=\mathrm{e}^{\sin x\ln(\mathrm{e}^{x^2}-1)}\sim \mathrm{e}^{x\ln(\mathrm{e}^{x^2}-1)}$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(\mathrm{e}^{x^2}-1)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{x^2}-1)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\dfrac{-1}{x^2}}=0$,故所求极限值为 1.

(2) $\underline{\quad A+C \quad}$. **解 1** 令 $L(x,y,\lambda)=Ax^2+2Bxy+Cz^2+\lambda(x^2+y^2-1)$.

令 $\dfrac{1}{2}L_x=Ax+By+\lambda x=0 \qquad (1)$

$\dfrac{1}{2}L_y=Bx+Cy+\lambda y=0 \qquad (2)$

$(1)\cdot x+(2)\cdot y$ 得 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+\lambda=0$,于是极大、极小值为 $-\lambda$,又(1)、(2)式可化为

$$\begin{cases}(A+\lambda)x+y=0\\ Bx+(C+\lambda)y=0\end{cases}$$

是关于 x、y 的线性齐次方程组,$x^2+y^2=1$,故有非零解,于是

$$\begin{vmatrix}A+\lambda & B\\ B & C+\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ 或 } \lambda^2+(A+C)\lambda+AC-B^2=0$$

两根之和 $\lambda_1+\lambda_2=-(A+C)$. 即最大值与最小值之和为 $A+C$.

解 2 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 是正定二次型,它的两个特征值,就是其最大、最小值,而特征值满足方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-A & -B\\ -B & \lambda-C\end{vmatrix}=0,\text{即 } \lambda^2-(A+C)\lambda+AC-B^2=0.$$

$\lambda_1+\lambda_2=A+C$.

(3) $\underline{\quad \dfrac{3}{4} \quad}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}\right)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x+\cdots+nx^{n-1})_{x=\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}(1+x+\cdots+x^n)'_{x=\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$

(4) $\underline{y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-3x}-2x-\dfrac{4}{3}}$. 主要是设特解为 $ax+b$,可定出 $a=-2$,$b=-\dfrac{4}{3}$.

(5) $\underline{\quad x=6 \quad}$. $\begin{vmatrix}0 & 4 & 2-x\\ 2 & 3-x & 1\\ 1-x & 2 & 3\end{vmatrix}=(6-x)\begin{vmatrix}1 & 4 & 2-x\\ 1 & 3-x & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(x-6)(x^2+3)$.

(6) $\underline{\quad \dfrac{3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{8} \quad}$. $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})+8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$

故 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-8\boldsymbol{E}$. $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}}{8}$

二、选择题

(**7**)(C). 用 $x=\dfrac{y^2}{2p}, x'=\dfrac{y}{p}, x''=\dfrac{1}{p}$. $\tau=\dfrac{\frac{1}{p}}{(1+\frac{y^2}{p^2})^{3/2}}$. 当 $y=0$ 时, τ 最大值为 $\dfrac{1}{p}$, 选(C).

(**8**)(A). 由 $\int_0^1 x^2 f(1-x^3)\mathrm{d}x=\dfrac{-1}{3}\int_0^1 f(1-x^3)\mathrm{d}(1-x^3)=\dfrac{1}{3}\arctan(1-x^3)\Big|_1^0=\dfrac{\pi}{12}$. 选(A).

(**9**)(C). 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1$ 知 $f''(0)=0$, 且在 O 点 $f'''(x)=-1\neq 0$. 故 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 选(C).

(**10**)(B). $y=2\ln 4-2\ln(4-x^2)$. $y'=\dfrac{4x}{4-x^2}$

$$1+y'^2=\frac{(4-x^2)^2+16x^2}{(4-x^2)^2}=\frac{(4+x^2)^2}{(4-x^2)^2}.$$

$$S=\int_0^1\frac{4+x^2}{4-x^2}\mathrm{d}x=8\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{4-x^2}-1=2\ln\frac{2+x}{2-x}\Big|_0^1-1=2\ln 3-1.\text{ 选(B).}$$

(**11**)(B). 由已知易得方程 $y\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

$y^2=2\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$. $y(0)=1$ 得 $1=2\ln 2+C$. $C=1-2\ln 2$. 故 $y=\sqrt{2\ln(1+\mathrm{e}^x)+1-2\ln 2}$.

$y(\ln 3)=\sqrt{4\ln 2+1-2\ln 2}=\sqrt{2\ln 2+1}$. 选(B).

注意. 由 $y(0)=1$, 知要求的解有 $y>0$, 不能用 $y<0$ 的解.

(**12**)(B). 由于 $|x|+|y|\leqslant 1\subset x^2+y^2\leqslant 1$, 而 $\ln(x^2+y^2)\leqslant 0$, 故 $0>I_1>I_2$ 而 $I_3>0$. 选(B).

(**13**)(C). $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=\dfrac{\partial z(x,1)}{\partial x}\Big|_{x=0}=(\sin x+(x-1)\mathrm{e}^{-x})'_{x=0}=3$. 选(C).

(**14**)(D). 当向量组(Ⅰ)线性无关且可由(Ⅱ)线性表示时, 必有 $r=r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})\leqslant s$. 选(D).

三、解答题

(**15**)解 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{3}, & |x|<1\\ \dfrac{x^2}{1+x}+\dfrac{1}{3}, & 1\leqslant|x|<3\\ \dfrac{x^2}{1+x}+\dfrac{1}{|x|}, & |x|\geqslant 3\end{cases}$ (5 分)

故在 $x=-1$ 处是无穷性的间断点, 此外处处连续. (7 分)

又在 $x=1$ 处 $f'(1+0)=\dfrac{3}{4}, f'(1-0)=-\dfrac{1}{4}$, 故不可导. 同样, 在 $x=\pm 3$ 处, $f(x)$ 的左、右导数均存在但不相等, 故也不可导. 此外 $f(x)$ 处处可导. (9 分)

(**16**)解 由泰勒公式: $\mathrm{e}^{\sin^2 x}=1+\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin^4 x+\cdots$ (3 分)

故 $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx = 2\int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx > 2\int_0^{\pi/2}(1+\sin^2 x+\sin^4 x)dx$ （7 分）

$= 2[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}] = 2\cdot\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}\pi > \frac{45}{8} > 5.$ （9 分）

（17）解 $I = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \int_0^a dx\int_0^{b(1-\sqrt{\frac{x}{a}})^2} y\,dy = \frac{b^2}{2}\int_0^a (1-\sqrt{\frac{x}{a}})^4 dx.$ （5 分）

令 $t = 1-\sqrt{\frac{x}{a}}$，即 $x = a(1-t)^2$，$dx = -2a(1-t)dt.$

故 $I = ab^2\int_0^1 (t^4-t^5)dt = \frac{ab^2}{30}$ （9 分）

（18）解 $y' = \frac{1}{x}$，故 $(1+y'^2)^{3/2} = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{x^3}.$

在 x 点处曲率 $\tau = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$，$\tau' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$

令 $\tau' = 0$ 得 $1-2x^2 = 0$，故 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 即

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\ln 2)$ 是所求曲率最大的点. （5 分）

于是 $S_1 = -\int_0^{1/\sqrt{2}} \ln x\,dx = x\ln x\Big|_{1/\sqrt{2}}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{1}{2}\ln 2).$

$S_2 = -\int_{1/\sqrt{2}}^1 \ln x\,dx = -\int_0^1 \ln x\,dx - S_1 = 1-(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2)$ （10 分）

由 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2 > \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\sqrt{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{5}{8}\sqrt{2} \approx 0.9 > \frac{1}{2}.$

故 $S_1 > S_2$. （12 分）

（19）解 由题设 $\frac{dv}{dt} = -k\sqrt{v_0 - v}$（$v(t)$ 单调减）（5 分）.

故 $\frac{dv}{\sqrt{v_0 - v}} = -k\,dt$. $2\sqrt{v_0 - v} = C_1 + kt.$

由 $t = 0$ 得 $C_1 = 0$，而当 $v = 0$ 时，有 $T = \frac{2}{k}\sqrt{v_0}.$ （8 分）

而 $CT = 2a$. $C = \frac{ka}{\sqrt{v_0}}$ （10 分）

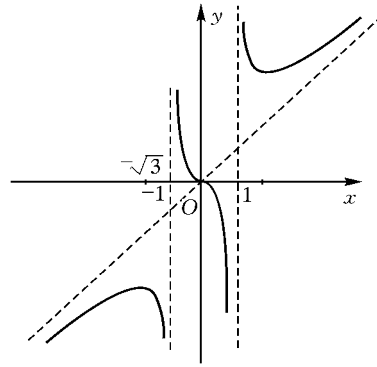
（20）解 由 $\lim\limits_{x\to\pm 1}\frac{x^3}{x^2-1} = \infty$，故 $x = \pm 1$ 是两条铅直的渐近线；又 $\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1})$. 故 $y = x$ 是一斜渐近线. （6 分）

令 $y' = 1-\frac{1}{2}[\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}] = 0$，得 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)^2} = 1.$

而 $x^4-3x^2 = 0$，即 $x = 0$ 或 $\pm\sqrt{3}$. $x = \sqrt{3}$ 是极小点，$-\sqrt{3}$ 是极大点，$y'' = \frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x-1)^3}$ $= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. $x = 0$ 是拐点横坐标.

列表

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$
y'	$+$		$-$	$-$
y''	$-$		$+$	$+$
y		$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$		



$f(x)$ 是奇函数,故 $(0,+\infty)$ 不必填表. (12 分)

(21) 解 若 $a<0$,则 Q 为原点.故设 $a>0$,(3 分).

作目标函数:$f(x)=x^2+(a-x^2)^2$(Q 坐标为 (x,x^2).).

令 $f'(x)=2x-4(a-x^2)x=2x(1-2a+2x^2)=0$.

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$,只有 $x=0$,即 Q 为原点. (6 分)

当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$,$x=\pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$.这时 Q 有二个点,即$\left(\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}},\dfrac{2a-1}{2}\right)$与$\left(-\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}},\dfrac{2a-1}{2}\right)$.

(12 分)

(22) 解 显然 $|\boldsymbol{A}|=(-1)\times1\times1=-1$,又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$,所以

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 -1 的特征向量,记其为 $\boldsymbol{\xi}_1$,又因 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1$ 正交,即 $x_2+x_3=0$,故可取

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}} \tag*{(4 分)}$$

将它们规范化得

$$\boldsymbol{p}_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

则它们为 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个两两正交的单位特征向量,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$ 为正交矩阵,且使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,1,1)$,故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \tag*{(8 分)}$$

(23) 解 对方程组的增广矩阵作初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|c}a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n&a_1^2\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n&a_1a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2&a_1a_n\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}a_1&a_2&\cdots&a_n&a_1\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&\dfrac{a_2}{a_1}&\cdots&\dfrac{a_n}{a_1}&1\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$x_1=1-\frac{a_2}{a_1}x_2-\cdots-\frac{a_n}{a_1}x_n \tag*{(4 分)}$$

令 $x_2=x_3=\cdots=x_n=0$,得非齐次方程组的一个解

$$\boldsymbol{\eta}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \qquad (6\text{ 分})$$

在对应的齐次方程组中，分别取

$$(x_2,x_3,\cdots,x_n)=(-a_1,0,\cdots,0),(0,-a_1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,-a_1)$$

解得对应齐次方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(a_2,-a_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(a_3,0,-a_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(a_n,0,0,\cdots,-a_1)^{\mathrm{T}}$$

(11 分)

因此，方程组的通解为

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+C_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+C_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$，$C_i$ 为任意常数，$i=1,2,\cdots,n-1$. (13 分)

数学考研模拟考试试卷 9

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^{3}}=$ ________.

(2) 记 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_2(x)=f_1(f_1(x))$, $f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$,则 $f_n(x)=$ ________.

(3) 若 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 1-|x|, & |x|>1\end{cases}$,则$\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(4) 微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{y^3+x}$ 的通解为________.

(5) 元素全为 3 的 n 阶矩阵的 n 个特征值为________.

(6) 设向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_1$,两个向量组等价,则数 t 应满足的条件是________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设曲线 $y=f(x)$,其中 $f(x)$ 在(a,b) 内可导. 则与命题"曲线上任一点处切线段在曲线下方"等价的命题是( ).

(A) 在(a,b) 内 $f''(x)\geqslant 0$

(B) 在(a,b) 内 $f''(x)\leqslant 0$

(C) 对(a,b) 内任意两点 x_1、x_2 及任意满足关系 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的两正数 λ_1、λ_2 均有
$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$

(D) 对 $x_1,x_2\in(a,b)$ 及任意满足关系 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的两正数 λ_1、λ_2 均有
$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\geqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$

(**8**) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)\cdot\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的一个必要条件是(　).

(A) $\varphi(x_0)=0$，且 $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续　　(B) $\varphi(x_0)=0$

(C) $f'(x_0)=0$　　(D) $f(x_0)=0$

(**9**) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则(　).

(A) 仅仅可以肯定 $f(x)$ 至少有一个零点

(B) $f(x)$ 和 $f'(x)$ 至少各有一个零点

(C) $f(x)$ 和 $f''(x)$ 至少各有一个零点

(D) $f(x)$ 和 $f''(x)$ 至少各有一个零点，且 $f'(x)$ 至少有两个零点

(**10**) 曲线 $y=\dfrac{x^4}{x^2-1}\arctan\dfrac{1}{x}$ 的渐近线有(　).

(A) 2 条　　(B) 3 条　　(C) 4 条　　(D) 5 条

(**11**) 设 $z=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$(　)

(A) $-3\ln3$　　(B) 3　　(C) $3\ln3$　　(D) -3

(**12**) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x^2}}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 点连续. 则 $f'(0)$ 为(　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 不存在

(**13**) $y=C_1-C_2+C_1\cos2x+C_2\sin^2x$ 是某微分方程的通解，这个微分方程的阶数是(　).

(A) 二阶　　(B) 四阶　　(C) 一阶　　(D) 三阶

(**14**) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，下列结论不正确的是(　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数

(B) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为正数

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵

(D) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵

三、解答题(本题共 9 小题，总分 94 分)

(**15**)(**本题满分 10 分**) 曲线 $y=\cos x$ 与 x 轴、y 轴在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 部分围成面积被曲线 $y=a\sin x$ 及 $y=b\sin x(0<a<b)$ 三等分，求 a、b 的值.

（16）**（本题满分 10 分）** 求方程 $y''-y'=(x-2)^2$ 的通解.

（17）**（本题满分 10 分）** 设 $u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$，其中 f,g 具有二阶连续的导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(18)（本题满分 9 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y+1\}$.

(19)（本题满分 10 分）设平面上一物体（视为质点）被一长为 l 的不可伸长的绳子拉动：绳的一端连着物体，另一端在一定直线上移动. 开始拉时，绳子与定直线相垂直. 求物体运动的轨迹曲线的方程.

(20)（本题满分 12 分） 设 $f(x)=\begin{cases} x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}, & x>0 \\ a\ln(1-x)+b, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点处可导，求 a、b 及不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

(21)（本题满分 12 分） 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\varphi(tx)}{t-\sin t}$ 存在，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导，且 $f(1)=2$，求 $\varphi(0)$，$\varphi'(0)$，$\varphi''(0)$ 及 $f(x)$.

（22）（本题满分 8 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，且其 n 个列向量线性无关，试证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值大于零.

（23）（本题满分 13 分）设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

试卷(九)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad -2 \quad}$. 本题最好的解法是用泰勒公式:

$$\cos(xe^x)=1-\frac{1}{2}x^2e^{2x}+o(x^3),\ \cos(xe^{-x})=1-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+o(x^3)$$

故 $\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})=\frac{1}{2}x^2(e^{-2x}-e^{2x})+o(x^3)$,故

原式 $=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-2x}-e^{2x}}{x}=-2$

(2) $\underline{\quad \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad}$. 用数学归纳法做.

(3) $\underline{\begin{cases}\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{6}+C, & x<-1\\ x-\frac{x^3}{3}+C, & |x|\leqslant 1\\ \frac{-x^2}{2}+x+\frac{1}{6}+C, & x>1\end{cases}}$

以 $|x|\leqslant1$ 时 $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\frac{x^3}{3}+C$ 为中心;当 $x>1$ 时 $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\frac{x^2}{2}+C_1$,使原函数在 $x=1$ 点连续,得 $C_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+C=\frac{1}{6}+C$. 同样可得 $x<-1$ 时 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{6}+C$.

(4) $\underline{\quad x=\frac{y^3}{2}+Cy \quad}$.

解 1 将原方程化为 $y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y^3$,看作 x 关于 y 的函数的一阶线性方程,即可得解.

解 2 将方程化为 $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=y\mathrm{d}y$

即得 $\mathrm{d}\frac{x}{y}=\mathrm{d}\frac{1}{2}y^2$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}y^2+C$ 得所填结果.

(5) $\underline{\quad 0\text{ 是 } n-1 \text{ 重特征值,另一个是 } 3n \quad}$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1,故 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系有 $n-1$ 个解向量,而 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,故 0 是 $n-1$ 重的特征值;又由特征值之和与 $\boldsymbol{A}$ 的迹,即主对角线线元素之和相等,故 $3n$ 是另一个特征值.

(6) $\underline{\quad t\neq-1 \quad}$.

由于(Ⅱ)可由(Ⅰ)表示;要等价只要(Ⅰ)可由(Ⅱ)表示,则从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的变换矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&t\\t&1&0\\0&t&1\end{bmatrix}$ 可逆,即得 $t\neq1$.

二、选择题

(**7**)(C). 说明 $y=f(x)$ 曲线向上凹,但题设中未给 $f''(x)$ 存在,故(A)、(B)不对;(D)表示曲线向下凹,故选(C).

注 (C)正是颜森不等式,读者要记住.

(**8**)(D). **解 1** 由 $\dfrac{f(x)\varphi(x)-f(x_0)\varphi(x_0)}{x-x_0}$

$$=f(x)\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}+\varphi(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad ①$$

$\varphi(x)f(x)$ 可导,等式左边极限存在,而 $f(x)$ 可导,等式右边第 2 项极限存在,而 $x\to x_0$ 若 $f(x)\to f(x_0)\neq 0$,则必有 $\varphi(x)$ 在 x_0 可导,矛盾. 说明 $f(x_0)=0$ 是必要条件. 选(D).

注 由 ① 看出如 $\varphi(x_0)=0$,或 $f'(x_0)=0$ 而 $f(x_0)\neq 0$,都保证不了 $\varphi(x)f(x)$ 可导(否则 $\varphi'(x)$ 存在),容易排除(A)、(B)、(C)三选项.

解 2 (举例). 我们知道,$|x|$ 在 $x=0$ 点不可导,但 $x|x|$,$|x|\sin x$ 等在 0 点可导,又

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 不连续,但

$$x^2\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

在 $x=0$ 可导,它们的共同点是:$x,\sin x,x^2$ 均在 $x=0$ 点的值为 0. 这些例子应牢记,由此可推得选(D). 但要注意 $f(x_0)=0$ 只是必要条件,如 $x\varphi(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 仍不可导. 作完本题后,读者可以深入去思考,可以加深对极限、连续、可导的概念的理解.

(**9**)(A). $f(x)$ 至少有一个零点是由介值定理便可推出. 由函数 $f(x)=e^x+x$ 可以否定(B)、(C)、(D)各选项.

(**10**)(B). $\dfrac{x^4}{x^2-1}\arctan\dfrac{1}{x}$ 有三个间断点,其中 $x=\pm 1$ 是无穷型间断点,曲线有两条铅直的渐近线($x=0$ 非无穷型间断点).

又由泰勒公式:$\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}+o(\dfrac{1}{x^3})$,故

$$\frac{x^4}{x^2-1}\arctan\frac{1}{x}=(x^2+1+\frac{1}{x^2-1})[\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^3})]$$

$$=x+o(1)\quad (x\to\infty)$$

故 $y=x$ 是曲线的斜渐近线,故选(B).

(**11**)(A). $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln\dfrac{1}{3}\;\dfrac{y}{x^2}$,故$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=-3\ln 3$.

(**12**)(C). 显然 $a=0$. 这时由 $1-e^{x^2}=1-(1+x^2+\cdots)$. 故 $f(x)=-x+\cdots$,从而 $f'(0)=-1$. 选(C).

(**13**)(C). 注意 $C_1-C_2+C_1\cos 2x+C_2\sin^2 x$

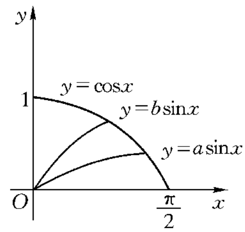
$$= C_1(1+\cos 2x) - C_2\cos^2 x = (2C_1 - C_2)\cos^2 x$$

说明 C_1、C_2 不是独立常数，式中仅有一个任意常数，故它应是一阶方程的通解，选(C).

(14) (B). 本题是向读者提示(A)、(C)、(D) 都是实对称矩阵的重要性质，而(B) 则是正定矩阵的重要性质.

三、解答题

(15) 解 由 $\int_0^{\pi/2}\cos t\mathrm{d}t = 1$，知只要使 $y = b\sin x$ 与 $y = \cos x$ 及 $x = 0$ 围成图形面积为 $\frac{1}{3}$. 这时交点处横坐标满足 $\tan x = \frac{1}{b}$，故



$$\int_0^{\arctan\frac{1}{b}}(\cos x - b\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \sin(\arctan\frac{1}{b}) + b\cos(\arctan\frac{1}{b}) - b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{1+b^2}} - b = \sqrt{1+b^2} - b = \frac{1}{3}，得\ b = \frac{4}{3} \qquad (5\ 分)$$

又 $y = a\sin x$ 与 $y = \cos x$ 的交点横坐标是 $x_0 = \arctan\frac{1}{a}$，故又只要

$$a\int_0^{\arctan\frac{1}{a}}\sin x\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{aretan}\frac{1}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

即 $$a - \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = a + 1 - \sqrt{a^2+1} = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{5}{12}. \qquad (10\ 分)$$

(16) 解 1 记 $y' = P$，则 $(\mathrm{e}^{-x}P)' = (x-2)^2\mathrm{e}^{-x}$

积分得 $\mathrm{e}^{-x}P = -(x-2)^2\mathrm{e}^{-x} - 2(x-2)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C_1$ (5 分)

$$P = C_1\mathrm{e}^x - (x-2)^2 - 2(x-2) - 2$$

两边再积分 $y = C_1\mathrm{e}^x - \frac{1}{3}(x-2)^3 - (x-2)^2 - 2(x-2) + C_2$ (10 分)

解 2 容易验证 $\bar{y} = -\frac{1}{3}(x-2)^3 - (x-2)^2 - 2(x-2)$ 是非齐次方程的一个特解.

(4 分)

而齐次方程的通解是 $y^* = C_1\mathrm{e}^x + C_2$ (7 分)

故所求通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 - \frac{1}{3}(x-2)^3 - (x-2)^2 - 2(x-2)$ (10 分)

(17) 解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}g'(\frac{y}{x})$ (2 分)

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}f''(\frac{x}{y}) - \frac{y}{x^2}g'(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x^2}g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x})$$

$$= \frac{1}{y}f''(\frac{x}{y}) + \frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x}). \qquad (5\ 分)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''(\frac{x}{y})+\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})-\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$

$$=-\frac{x}{y^2}f''(\frac{x}{y})-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$ (8 分)

故 $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$ (10 分)

(18) 解 1 积分域是圆$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{3}{2}$

令 $x-\frac{1}{2}=\rho\cos\theta, y-\frac{1}{2}=\rho\sin\theta$ (4 分)

则 $$I=\iint\limits_D(2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\rho^2(2\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\rho+\frac{3}{4}\pi$$ (7 分)

$$=\frac{3}{4}\pi+\int_0^{2\pi}(2\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3/2}}\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{3}{4}\pi$$ (9 分)

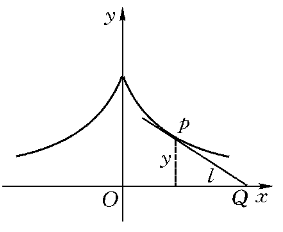
解 2 由 x、y 的对称性知 $I=\iint\limits_D(2y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (3 分)

而由形心公式：$$\frac{1}{2}=\frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\frac{3}{2}\pi}$$ (8 分)

故 $I=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi$ (9 分)

(19) 解 取固定直线为 x 轴，则 $y\Big|_{x=0}=l$，$P(x,y)$ 是曲线上任一点，过 P 的切线与 x 轴交于 Q，则 Q 的坐标为$(x+\sqrt{l^2-y^2},0)$（仅就 $x>0$ 考虑）. 故切线斜率

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{\sqrt{l^2-y^2}}$$ (5 分)



所以 $$\frac{\sqrt{l^2-y^2}}{y}\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$$

即 $$\int\frac{l^2-y^2}{y\sqrt{l^2-y^2}}\mathrm{d}y=-l\ln\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{y}+\sqrt{l^2-y^2}+C=-x$$

由 $x=0, y=l$ 得 $C=0$ 知

$$x=-\sqrt{l^2-y^2}+l\ln\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{y}$$ (8 分)

另一支是 $$x=\sqrt{l^2-y^2}-l\ln\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{y}$$ (10 分)

(20) 解 易知 $$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3\\ 3x, & 0<x<3\\ a\ln(1-x)+b, & x\leqslant 0\end{cases}$$ (3 分)

由在 $x=0$ 连续，知 $b=0$；由可导，得 $a=-3$ (6 分)

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+C_1, & x\geqslant 3\\ \dfrac{3}{2}x^2+C, & 0<x<3\\ 3x+3\ln(1-x)-3x\ln(1-x)+C_2, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{9}{2}+C, & x\geqslant 3\\ \dfrac{3}{2}x^2+C, & 0<x<3\\ 3x+3\ln(1-x)-3x\ln(1-x)+C, & x\leqslant 0\end{cases}$$ （12 分）

（21）解 用泰勒公式. 对固定 x，当 $t\to 0$ 时

$$\varphi(xt)=\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot xt+\frac{1}{2}\varphi''(0)x^2t^2+o(t^2)$$

而 $t-\sin t=\dfrac{1}{6}t^3+o(t^3)$ （5 分）

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(0)+xt\varphi'(0)+\dfrac{1}{2}x^2\varphi''(0)t^2+o(t^2)}{\dfrac{1}{6}t^2+o(t^2)}\text{ 存在.}$$

故 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ （8 分）

而 $f(x)=3x^2\varphi''(0)$，由 $f(1)=2=3\varphi''(0)$ 得

$$\varphi''(0)=\frac{2}{3},\ f(x)=2x^2$$ （12 分）

（22）解 设 λ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的任一特征值；由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 对称知，λ 为实数，而 $\boldsymbol{x}$ 是对应的一个特征向量，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\quad\text{则}\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

即得 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2=\lambda\|\boldsymbol{x}\|^2$ （5 分）

又 $r(\boldsymbol{A})=n$，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$（当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$）

由 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda=\dfrac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}>0$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全大于 0. （8 分）

（23）解 由 $|\boldsymbol{A}^*|=8$ 及 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^3$ 知 $|\boldsymbol{A}|=2$ （3 分）

由题设等式两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=7\boldsymbol{A}^{-1}$

而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^*$ 得 $(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=7\boldsymbol{A}^*$ （9 分）

$$\boldsymbol{B}=7(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^*$$

$$=7\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\-1&0&-1&0\\0&-\dfrac{3}{7}&0&\dfrac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 8 \end{bmatrix}
$$

（13 分）

数学考研模拟考试试卷 10

数 学 二

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是________.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n^3+1}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^4+n}}\right]=$ ________.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

(4) 通解为 $C_1\mathrm{e}^x+C_2x$ 的常微分方程是________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,若存在正整数 k $(k\geqslant 2)$ 使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为________.

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x=($ $)$.

(A) $\begin{cases}(x-1)\mathrm{e}^x+(C+2), & x\geqslant 0\\(1-x)\mathrm{e}^{-x}+C, & x<0\end{cases}$

(B) $\begin{cases}(x-1)\mathrm{e}^x+(C+2), & x\geqslant 0\\(x+1)\mathrm{e}^{-x}+C, & x<0\end{cases}$

(C) $(x-1)\mathrm{e}^{|x|}+C$

(D) $(1-x)\mathrm{e}^{|x|}+C$

(8) 方程 $x-e\ln|x|=1$ 的实根的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(9) 若 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可导,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$(　　).

(A) $f'_x(a,b)$　　(B) $f'_x(2a,b)$

(C) $\dfrac{1}{2}f'_x(a,b)$　　(D) $2f'_x(a,b)$

(10) 方程 $\displaystyle\int_x^{\frac{1}{2}}\frac{y\,\mathrm{d}x}{y^3-x}=y+1$ 的解是(　　).

(A) $y^3=2x+Cy$　　(B) $y^3=-2x$

(C) $y^3=-2x+Cy$　　(D) $y^3=2x$

(11) 设 D 是第二象限中的一个有界闭区域,且 $0<y<1$. $I_1=\displaystyle\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma$, $I_2=\displaystyle\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma$, $I_3=\displaystyle\iint_D \sqrt{y}x^3\,\mathrm{d}\sigma$. 则(　　).

(A) $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　　(B) $I_2\leqslant I_1\leqslant I_3$

(C) $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$　　(D) $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$

(12) 函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点处(　　).

(A) 不连续　　(B) 偏导数不存在

(C) 可微　　(D) 偏导数连续

(13) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & x\geqslant 1\\ \dfrac{x^2}{2}, & x<1\end{cases}$,则在 $x=1$ 处 $f(x)$(　　).

(A) 可导

(B) 左导数不存在,右导数存在

(C) 左导数存在,右导数不存在

(D) 左、右导数均不存在

(14) 设有向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$;(Ⅲ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$;(Ⅳ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\alpha}_5+\boldsymbol{\alpha}_4$. 其中向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩均为 3,(Ⅲ)的秩为 4,则下列命题正确的是(　　).

(A) 对任意实数 $k\neq 0$,向量组(Ⅳ)的秩为 4

(B) 对任意实数 k,向量组(Ⅳ)的秩小于 4

(C) 对任意实数 $k\neq 0$,向量组(Ⅳ)的秩小于 4

(D) 对任意实数 k,向量组(Ⅳ)的秩为 4

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 设当 $x \in [0,1]$ 时,$|f(x)| \leqslant \ln(1+x)$. 其中

$$f(x) = a_1\ln(1+x) + a_2\ln(1+2x) + \cdots + a_n\ln(1+nx).$$

($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是已知实数). 证明:$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

(16)(本题满分 9 分) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,$F(0)=0$,且 $f(x) = \dfrac{2x(1-F(x))}{1+x^2}$,求 $f(x)$.

（**17**）（**本题满分 9 分**）设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$. 其中 f、g 均有二阶连续的导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（**18**）（**本题满分 10 分**）设曲线 $y=y(x)$ 过 $(0,0)$ 点，M 是曲线上任意一点，MP 是法线段，P 点在 x 轴上，已知 MP 的中点在抛物线 $2y^2=x$ 上，求此曲线的方程.

（19）（本题满分 12 分） 计算二重积分：$\iint\limits_{D} \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \arctan \frac{y}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 D 由不等式 $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}$ 确定.

（20）（本题满分 12 分） 计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \mid \sin x \cos x \mid}{1+\sin^4 x} \mathrm{d}x$.

(21)（本题满分 12 分） a、b 为何值时，点$(1,3)$是曲线 $y=ax^4+bx^3$ 的拐点？这时曲线的凹凸区间是什么？

(22)（本题满分 8 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5×4 矩阵，秩$(\boldsymbol{A})=2$，已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 均是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

证明 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示且表示式唯一，并将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交规范化.

(23)（本题满分 13 分） 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是对应于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

试卷(十)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]}$. 由$\frac{|x|}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{4}$,知此答案.

(2) $\underline{\frac{1}{3}}$. **解 1**　由$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n^4+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^6+n^3+1}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^4+n}}\leqslant$ $\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n^3+1}}$及夹逼定理知此极限为 1/3.

解 2　由 $n\to\infty$ 时,$\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn^2+k}}\sim\frac{k^2}{n^3}$ 故此极限等于极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

(3) $\underline{\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}}$. 由$\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{1-x}-1$ 得 $f^{(n)}(x)=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$.

(4) $\underline{(1-x)y''+xy'-y=0}$. 由 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x,y'=C_1\mathrm{e}^x+C_2,y''=C_1\mathrm{e}^x$ 消去 C_1、C_2 即得所求的微分方程.

(5) $\underline{\text{全是 }0}$. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是相应特征向量. 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\lambda^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 故 $\lambda^k=0$ 即 $\lambda=0$.

(6) $\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=3$ 及于已知等式两边右乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $3\boldsymbol{AB}=6\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

二、选择题

(7) (A). $x\geqslant0$ 时,$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^x+C_1$.

$x<0$ 时,$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(1-x)\mathrm{e}^{-x}+C_2$. 由连续性知,$-1+C_1=1+C_2$

$C_1=C_2+2$. 记 $C_2=C$. 知(A)正确.

(8) (C). 记 $f(x)=x-\mathrm{e}\ln|x|-1$. $f'(x)=1-\frac{\mathrm{e}}{x}$.

当 $x<0$ 时 $f'>0$,$f(x)$ 由 $-\infty$ 增至 $+\infty$,因此方程有一负根;
当 $0<x\leqslant\mathrm{e}$ 时 $f'<0$,$f(x)$ 由 $+\infty$ 减至 -1,在 $(0,\mathrm{e})$ 内有一根;
$\mathrm{e}<x<+\infty$ 时 $f'>0$,$f(x)$ 由 -1 增至 $+\infty$,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 有一根. 共有 3 个实根.

(9) (D). $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x,b)-f(a,b)+[f(a,b)-f(a-x,b)]}{x}=2f'_x(a,b)$.

(10) (B). 方程两边求导得:$-\frac{y}{y^3-x}=y'$

即　$y^3\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 即 $y\mathrm{d}y+\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=0$

或　$\mathrm{d}(\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{x}{y})=0$ 故 $\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{x}{y}=C$. 由 $y\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-1$.

得 $C=0$，于是 $y^3=-2x$ 为所求方程的解.

(11)(C). 由 $0<y<1$ 知 $y^2<y<\sqrt{y}$. 而在第2象限，故 $x<0$，于是 $y^2x^3>yx^3>\sqrt{y}x^3$. 从而 $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$ 选(C).

(12)(C). 易知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$. 而 $f(0,0)=0$.

这时 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 而知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

(13)(B). 由 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{3}}{x-1}=1$；而 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3}}{x-1}$ $=\infty$ 故选(B).

(14)(A). 由已知知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关；而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 故当 $k\neq0$ 时，(Ⅳ)的秩为 4.

三、解答题

(15)解 1　由 $f(0)=0$ 知，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=f'_+(0)$.　(3 分)

于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right|$$

$$\left|\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\right|=1\qquad(6\text{ 分})$$

而 $f'_+(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，即得 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$.　(9 分)

解 2　由 $|f(x)|\leqslant\ln(1+x)$ 知，对 $x\in(0,1)$ 有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{\ln(1+x)}{x}\qquad(5\text{ 分})$$

故　$\lim\limits_{x\to0^+}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

但　$\lim\limits_{x\to0^+}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=\left|\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}\right|=|a_1+2a_2+\cdots+na_n|$

于是 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$　(9 分)

(16)解　由 $F'(x)=f(x)$. 知

$$F'(x)=\frac{2x-2xF(x)}{1+x^2}\qquad(3\text{ 分})$$

即　$(1+x^2)F'(x)+2xF(x)=2x$

或　$[(1+x^2)F(x)]'=2x$　(6 分)

故　$(1+x^2)F(x)=x^2+C$　由 $F(0)=0$ 知 $C=0$.

于是 $F(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}$

从而 $f(x)=F'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ （9 分）

（17）解 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'(2x-y)+xg'_2$ （4 分）

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''(2x-y)+g'_2+xg''_{12}+xyg''_{22}$ （9 分）

（18）解 设 $M(x,y)$，则法线方程为

$Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$ 令 $Y=0$ 得 $X=yy'+x$.

由此，P 点为$(yy'+x,0)$. （3 分）

MP 的中点坐标为$(\dfrac{1}{2}yy'+x,\dfrac{y}{2})$，它在抛物线上.

于是得方程 $y^2=yy'+2x$ （7 分）

即 $\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}-2y^2=-4x$

或 $\mathrm{d}(y^2\mathrm{e}^{-2x})=-4x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$y^2\mathrm{e}^{-2x}=2x\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-2x}+C$. 由 $y(0)=0$ 得 $C=-1$

所求曲线方程为 $y^2=1+2x-\mathrm{e}^{2x}$. （10 分）

（19）解 用极坐标计算：$I=\displaystyle\iint_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi/4}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\frac{1-\gamma^2}{1+r^2}\mathrm{d}r$$ （6 分）

$$=\frac{\pi^2}{64}\int_0^1(\frac{2}{1+r^2}-1)\mathrm{d}r^2$$

$$=\frac{\pi^2}{64}[2\ln(1+r^2)-r^2]\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi^2}{64}[2\ln2-1].$$ （12 分）

（20）解 令 $\pi-x=t$，

则 $$I=\int_0^{\pi}\frac{x\mid\sin x\cos x\mid}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\mid\sin t\cos t\mid}{1+\sin^4t}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\frac{\mid\sin t\cos t\mid}{1+\sin^4t}\mathrm{d}t-I.$$

故 $$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mid\sin x\cos x\mid}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x$$ （6 分）

而此时的被积函数是以 π 为周期的偶函数，故

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mid\sin x\cos x\mid}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x$$ （10 分）

$$=\frac{\pi}{2}\arctan(\sin^2x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}.$$ （12 分）

（21）解 点$(1,3)$在曲线上故

$$a+b=3$$

又 $y''=12ax^2+6bx$，故 $2a+b=0$. 解得 $a=-3,b=6$. （4 分）

于是 $y''=-36x^2+36x=36x(1-x)$. $(0,0)$，点$(1,3)$是 2 个拐点，而当 $x<0$ 时，$y''<$

0 即在$(-\infty,0)$向下凹. (7 分)

在$(0,1)$上$y''>0$曲线向上凹. (9 分)

在$(1,+\infty)$上$y''<0$曲线向下凹. (12 分)

(22)证 因$\boldsymbol{A}$的秩为2,所以$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中只有两个解向量,又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量,且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,因此,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$可作为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系,$\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示且表示式唯一. (4 分)

$$令\ \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{5}{15}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\\-2\end{pmatrix}$$

则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$正交,将其再规范化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{39}},\frac{1}{\sqrt{39}},\frac{5}{\sqrt{39}},-\frac{3}{\sqrt{39}}\right)^{\mathrm{T}}$$ (8 分)

(23)证 由题设$\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,3$,设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \qquad (1)$$ (4 分)

等式两边左乘$\boldsymbol{A}$得 $$x_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \qquad (2)$$

再左乘$\boldsymbol{A}$得 $$x_1\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \qquad (3)$$

将式(1),(2),(3)合写成

$$(x_1\boldsymbol{\alpha}_1\quad x_2\boldsymbol{\alpha}_2\quad x_3\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0})$$ (10 分)

由于$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互不相同,所以$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq0$,因此$x_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,3$,而特征向量$\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$,$i=1,2,3$,故$x_i=0,i=1,2,3$,从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. (13 分)