

图书在版编目(CIP)数据

数学建模简明教程 / 杨尚俊编著. —合肥:安徽大学出版社,2006.3
ISBN 7—81110—111—4

I. 数... II. 杨... III. 数学模型—高等学校—教材 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021818 号

数学建模简明教程

杨尚俊 编著

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号 邮编 230039)	印刷	中国科学技术大学印刷厂
联系电话	编辑室 0551—5108438 发行部 0551—5107784	开本	880×1230 1/16
责任编辑	鲍家全	印张	7.5
封面设计	孟献辉	字数	144.4 千
经 销	新华书店	版次	2006 年 3 月第 1 版
		印次	2006 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7—81110—111—4/O • 55

定价 12.50 元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

本书得到安徽大学“211 工程”经费资助

数学建模简明教程

(课件形式)

杨尚俊 编著

安徽大学出版社

中国·合肥

前言

随着科技的进步,数学越来越受到人们的高度重视。大量事实证明,数学已经成为高科技的基础,甚至不少知名学者都说,高科技本质上是数学技术。当今世界,高质量的数学教育已成为各国培养高素质人才的重要组成部分。1985年美国创办了大学生数学建模竞赛。我国大学生热烈参加美国的数模竞赛。1992年起我国也举办大学生数学建模竞赛。受这两大赛事的影响,以及我国教育部面向21世纪课程体系改革,建议把“数学实验”列为基础课(强调数学教学中理论联系实际和学生动手),我国高校近年已广泛开设“数学建模”课,参加大学生数学建模竞赛的高校,全部开设“数学建模培训课”。

近十几年来,我给安徽大学本科生上数学建模课和为安大参加国际、国内大学生数学建模竞赛的学生上培训课*,并为此编写了讲义。我感到这门课面临着大量的矛盾:时间紧而内容多;内容深且广而学生的基础不够;以及内容难于理解而学生渴望弄懂,等等。我以为,解决这些矛盾的一个可行办法是:少而精地处理教材。

本教材本着少而精原则,在多年修改讲义的基础上编成。有以下特点:

- (1) 用课件形式,以期更方便于教与学。
- (2) 以一个个实际问题为主要线索,讲述应用数学知识解决实际问题的整个数学建模过程,不忽略讲述问题的实际背景。
- (3) 求解数学建模时,尽量结合学生已学知识详细讲解有关数学推导。
- (4) 在教学中适时插入思考题,以提高学生兴趣,促进教与学互动。
- (5) 适当介绍数学软件及其编程知识。强调编程在数学建模中的重要性,更给出一些有趣例子和练习题及其参考答案,为上机培训提供一些素材。

作者在编写过程中得到安徽大学曾建军、章权兵、鲍炎红等老师的协助和广大听课学生的支持,思考题参考答案中的一部分就参考了当年学生的作业。作者一直得到安徽大学教务处和数学学院的鼓励与支持。鲍家全编辑为本书做了认真细致的工作。在此一并表示对他们的深切谢意。

由于作者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,恳请读者指正。

杨尚俊

2005年7月于安徽大学

★安徽大学从1993年起,就组队参加全国和国际大学生数学建模竞赛,并取得不错的成绩。例如,2000年在国际大学生数学建模竞赛中,安大3个参赛队个个得奖,其中获一等奖1个,二等奖2个;2002年在全国大学生数学建模竞赛中,安大7个参赛队也是个个得奖,其中获国家一等奖2个,二等奖1个,安徽赛区一等奖、二等奖各2个。杨尚俊也因此获得全国大学生数学建模竞赛优秀指导教师的殊荣。

★本教材配有多媒体教学课件,有需要者请与安徽大学出版社联系。

目 录

引言 (1)

 § 0.1 数学的重要性 (1)

 § 0.2 本书主要内容 (2)

 § 0.3 本课程主要特点 (2)

第 1 章 初等模型 (3)

 § 1.1 例子与定义 (3)

 § 1.2 其他初等模型 (7)

 § 1.3 第 1 章思考题参考答案 (16)

第 2 章 微分方程方法建模 (21)

 § 2.1 人口模型 (21)

 § 2.2 单种群饲养收获模型 (26)

 § 2.3 两种动物的弱肉强食模型 (28)

 § 2.4 万有引力定律 (31)

 § 2.5 盯梢与追逐模型 (32)

 § 2.6 第 2 章思考题参考答案 (36)

第 3 章 层次分析方法建模 (39)

 § 3.1 层次分析是处理决策问题的有效方法 (39)

 § 3.2 层次分析方法的基本步骤 (40)

 § 3.3 层次分析的理论基础 (41)

 § 3.4 层次分析的若干问题 (46)

 § 3.5 层次分析的广泛应用 (48)

 § 3.6 第 3 章思考题参考答案 (50)

第 4 章 矩阵分析方法建模 (52)

 § 4.1 循环联赛的奖金分配及排名问题 (52)

 § 4.2 有限网络的一些有趣问题 (56)

 § 4.3 数据处理的一些有趣问题 (61)

 § 4.4 第 4 章思考题参考答案 (62)

第 5 章 数学规划方法建模 (65)

 § 5.1 引言 (65)

§ 5.2	单纯形法及其理论基础	(67)
§ 5.3	线性规划模型	(70)
§ 5.4	0—1 线性规划模型	(74)
§ 5.5	第 5 章思考题参考答案	(78)
第 6 章	充分发挥智力巧妙建模	(82)
§ 6.1	引言	(82)
§ 6.2	巧妙利用雀巢原理	(82)
§ 6.3	巧妙利用函数的极端性质	(84)
§ 6.4	其他问题	(85)
§ 6.5	第 6 章思考题参考答案	(88)
第 7 章	大学生数学建模竞赛	(91)
§ 7.1	数学竞赛的意义	(91)
§ 7.2	大学生数学建模竞赛的由来	(91)
§ 7.3	数学建模竞赛能培养什么素质	(92)
§ 7.4	怎样参加大学生数学建模竞赛	(94)
第 8 章	Matlab 编程及应用	(95)
§ 8.1	引言	(95)
§ 8.2	M 文件的形式	(95)
§ 8.3	全局变量与局部变量	(96)
§ 8.4	Matlab 的程序结构	(97)
§ 8.5	Matlab 编程练习题	(100)
§ 8.6	第 8 章练习题参考答案	(102)
参考文献		(111)

引 言

- § 0.1 数学的重要性
- § 0.2 本书主要内容
- § 0.3 本课程主要特点

§ 0.1 数学的重要性

新世纪国家间的竞争主要是经济竞争,是人才的竞争;人才培养的关键是素质教育,数学教育在素质教育中占据重要地位.

当今社会正日益数字化,数学是高科技的基础.

数学在工程技术以及国民生产中发挥愈来愈重要的作用,甚至是决定性的作用.

素质教育的重要性

素质教育既是“科教兴国”战略的必然选择,也是教育自身进一步发展的客观需要,更是高校发展的灵魂和动力.

大学最重要的是强调个性化教育,能充分挖掘每个学生的潜力,发挥其个性.而数学建模的教育及实践正符合这方面的要求.

数学是高科技的基础

社会进步依赖于科学的创新.数学对于科学的发展则具有根本的意义.在今天,数学已成为高科技的基础,并且在一定意义上,可以说是现代文明的标志(2002年北京国际数学家大会东道国欢迎词摘录)*.

各行各业日益依赖于数学,可以说,当今社会正日益数字化.数学正在向一切领域渗透,数学正在不停地与别的学科结合产生活跃的新兴学科.“高科技本质上是一种数学技术”的观点正在被越来越多的人接受.

这是李岚清副总理在致大会欢迎词中的一段话.

★2002年8月在中国首都北京举行国际数学家2002年大会,这是国际最高级数学学术会议第一次在一个发展中国家举行.我国政府非常重要和支持这次会议,最高领导人出席了会议开幕式,并为得奖者授奖.

数学在生产中起重要作用的例子

曾经有一家电器公司曾出现成品率只有84%,并仅有50%的发货日期可以兑现的问题,而因此造成严重的亏损.他们应用统计质量控制在很短时间就成功地发现和解决了问题,使成品率稳定在95%以上,按期发货率也达到95%,当年就实现扭亏增盈1200万美元.*

这个故事告诉我们:数学可以在国民生产中发挥重要作用,甚至决定性作用.

★这个例子取自 Glimm 教授主持编撰的代表美国数学科学委员会给美国政府的公开报告: *Mathematical Science, Technology, Economic Competitiveness* (National Academy Press, Washington D. C. 1991).

该公司最先发现电器元件的各种性能波动太大. 他们首先用数学技术找出产生元件性能波动的原因是, 在自动控制的酸洗工序中确定酸洗液 PH 值的机制有问题, 产生校正过度. 他们再用数学技术(优选法)重新校正, 减少了起伏, 从而解决了这个大问题. 这份报告提出的如下结论也颇有启发性: “在经济竞争中数学科学是必不可少的. 数学科学是一种关键性的, 能够实行的技术.”

§ 0.2 本书主要内容

初等方法建模;
微分方程方法建模;
层次分析方法建模;
矩阵分析方法建模;
数学规划方法建模;
依靠智力巧妙建模;
大学生数学建模竞赛和 Matlab 编程及应用.

§ 0.3 本课程主要特点

- ①以讨论具体实际问题为主要线索.
- ②以讲授数学建模的思路与方法为主要目的.
- ③强调启发思路和分析、解决问题的技巧.
- ④按求解所讨论的具体数学模型的需要介绍有关数学背景知识和基本方法, 即实际问题需要什么就介绍什么, 不强求数学知识方面的系统性与完整性.

第 1 章 初等模型

§ 1.1 例子与定义

§ 1.2 其他初等模型

§ 1.3 第 1 章思考题参考答案

§ 1.1 例子与定义

例 1 航行问题

A $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ B

已知:沿长江在相距 750km 的两个码头 A 与 B 之间,顺水航行时间是 30hr;逆水航行时间是 50hr. 试分别求出船和水的平均速度.

解:令船和水的平均速度分别是 x 和 y , 由

$$\text{题意得二元方程组: } \begin{cases} x + y = \frac{750}{30} \\ x - y = \frac{750}{50} \end{cases}$$

求解此方程组得: $x = 20, y = 5$.

答案:船和水的平均速度分别是 20km/hr 和 5km/hr.

必要的简化与说明

①这里,只考虑平均速度是基本的简化*, 因为船和水的速度是随时间、地点而变化的. 严格讲,已知的顺水、逆水航行时间是船在该河段上常年航行的平均时间;而要求的船和水的平均速度也应是该船和水在该河段上常年航行的平均速度.

②解决本问题也需要速度等相关的物理概念.

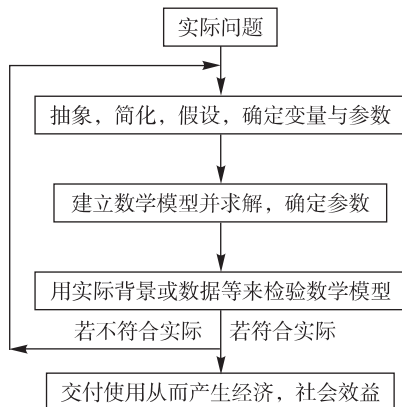
③解决本问题的步骤:按照题意设定未知量并决定未知量满足的数学公式;求出这个方程组的解;并在讨论解的存在性与唯一性之后确定该解就是原问题所需要的解.

④别忘了验证解的正确性.

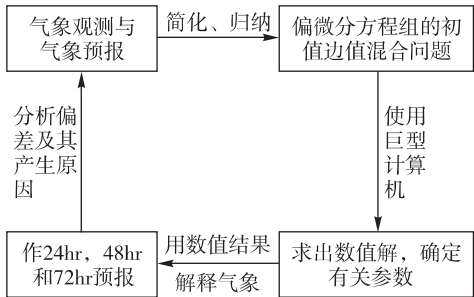
* 若把实际问题看做原型的话,则数学模型是将原型经过简化提炼而构成的替代物. 这里值得注意的是:简化是构造数学模型的必要前提.

什么是数学模型?

如果要下一个定义的话,数学模型是对一个实际问题,按照其内在规律作出一些必要的假设(目的是简化问题和去掉不确定的因素使之能归结为一个确定的数学问题),并应用适当的数学工具导出的一个数学结构. 借助数学的分析与计算全面探讨并求出所得数学模型的解,再利用有关的背景知识可以成功地将所得数学解用来解释和回答原先的实际问题. 这一整个过程称为数学建模. 可用下面的图表直观地表示数学建模过程的各阶段及其联系.



例 2 天气预报问题*



★作为天气现象的数学模型在一百多年前就已经很成功地解决了,它是一个特殊的二阶非线性偏微分方程组的初值、边值混合问题.遗憾的是,这个偏微分方程组的混合问题很难求解,不要说精确解找不到,就是求很粗糙的近似解的计算量也惊人地巨大.在现代巨型电子计算机未出现以前,即使通过求此混合问题很粗糙的近似解来作短期天气预报也是不现实的,因为花一个月甚至更多时间也完成不了所需的计算.直到20世纪80年代出现每秒可完成上亿次运算的巨型计算机以后,这个数值天气预报的多年梦想才得以实现.目前我国也研制成功每秒千亿次运算水平的巨型机,有了先进的计算机才保证了中央气象台每天及时而准确地发布各种天气预报,为国民生产及人民生活作出巨大贡献.

实际问题与其数学模型之间的关系

大家知道原型与模型之间的关系.若把实际问题看做原型的话,则数学模型是将原型经过精致地简化、提炼而构成的替代物.

这里必须强调两点:第一,一般来说,原型总是复杂和困难的,必须把它归结为数学模型才能解决;第二,数学模型不是原型原封不动的复制品,它只是突出反映原型某些方面性质的近似物.这里难免会存在数学模型与原型的差异甚至矛盾、冲突.但对我们来讲,原型是根本的,当二者出现无法解释的矛盾时,必须修改相关的数学模型以适应原型.

例 3 安全过河问题(1)

问题:一位老师带三名小学生甲、乙和丙过河.假设仅有一条小渡船,最多能容纳二人;并且只有老师能划船.此外,学生乙很顽皮,无老师在场时他肯定要欺负甲和丙.老师应如何安排过河方案使四人都到达彼岸并且不发生学生乙与学生甲、丙单独相处而发生打架伤人的事故?



过河问题(1)的解*

一种安全过河方案是:

- ①师乙过去,接着师回;
师甲乙丙
乙
- ②师甲去,接着师乙回;
师甲乙丙
甲
- ③师丙过去,接着师回;
师乙丙
甲丙
- ④师乙过去.
师乙
师甲乙丙

★实际问题及其数学模型不仅可以涉及数量关系,也可以涉及方案、规则、措施等方面,过河问题就是一例。

思考题 1-1

过河问题(1)的答案唯一吗？
不允许重复时有几个答案？
最少渡河次数是多少？
如果每人都能划船结论又是如何？

例 4 安全过河问题(2)*

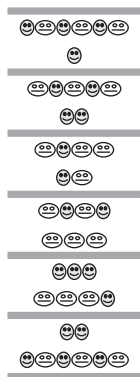
问题：三个商人每人带一随从过河. 假设仅有一条小渡船. 最多能容纳二人；并且因他们正处于偏僻地带，这几个不安分的随从在他们人数超过商人人数时将图谋不轨. 应如何安排过河方案使六人到达彼岸之前都不发生随从数超过商人数情况而引发杀人劫货的事故？



★切莫以为数学建模问题都像例 1、例 3 那么简单. 不信的话, 请你不要看下面一张幻灯片, 对例 4 中的问题, 试着给出一个安全过河方案. 你能不假思索地快速写出一个安全过河方案吗？

一种安全过河方案是

- ①2从过去 接着 1从回来;
- ②2从过去 接着 1从回来;
- ③2商过去 接着 1商1从回来;
- ④2商过去 接着 1从回来;
- ⑤2从过去 接着 1从回来;
- ⑥2从过去.



相关的数学表示与分析

河岸的人员状态可用二维向量 (x, y) 表示, 意指在所考虑的时刻, 该岸有 x 个商人和 y 个随从. x, y 的取值范围是 $\{0, 1, 2, 3\}$. 易见: 每岸共有 $4^2 = 16$ 种可能的人员状态; 两岸人员状态互相唯一决定, 例如, 已知此岸状态向量为 (x, y) , 则彼岸状态向量为 $(3 - x, 3 - y)$.

一岸的安全状态向量 (x, y) 应满足条件: $x \geq y$ 或 $x = 0$. 但当此岸出现 $x > y$ 时, 彼岸状态向量 $(x', y') = (3 - x, 3 - y)$ 将出现 $x' < y'$. 在此情况下, 此岸虽安全, 而彼岸却不安全, 故 $x > y$ 也被认为是不安全的状态.

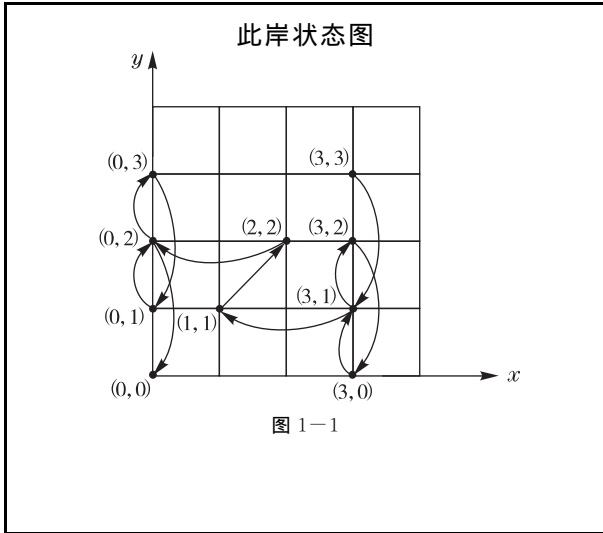
所以, 每岸的 16 种状态中恰有 10 种是安全的, 它们组成的集合是

$$S = \{(x, y) \mid x = 0 \vee x = 3 \vee x = y\}.$$

上述分析也适用于有 n 个商人及 n 个随从的情况, 其中, n 为任意正整数. 此时, 安全集为

$$S = \{(x, y) \mid x = 0 \vee x = n \vee x = y\}.$$

在直角坐标系下安全集 S 的点组成字形, 详见下图.



解决安全过河问题(2)的数学模型

基于前面的分析建立解决 n 商 n 从安全过河问题的 字形棋盘单人跳棋模型: 在此岸安全集 S 组成的 字形棋盘上, 经奇数步从起点 (n, n) 跳到终点 $(0, 0)$ 为成功.

跳棋规则是: ① 每步在水平或垂直方向跳 1 或 2 格; 或在 45° 斜线方向跳 1 格. ② 奇数步向下、向左跳; 偶数步向上、向右跳.

一个成功的跳棋过程将给出 n 商 n 从安全过河问题的一个方案.

例如, 图 1-1 所示的成功跳棋过程正好对应我们前面提出的那个安全过河方案.

关于安全过河问题(2)解的讨论

一般来说, 该问题只要有一个解就有无穷多个解. 因为: 在这个解的第 1 步之前增加两步: “1 随从过去, 接着再回来”, 走完此两步仍回到原状态. 显然, 把这两步作任意次循环, 都将回到原状态. 所以, 由一个已知解可以构造出无穷多个不同的解. 换句话说, 此问题解的唯一性一般不成立.

我们应把两个这样的解看做同一类: 其中一个解除多一个循环之外, 与另一个解完全相同. 这里, 循环指的是偶数步来回过渡, 并保持循环前和循环后两岸状态完全一样. 今后, 同一类的解中恒取那个“不允许重复的解”为代表.

注意: 即使不区别商人随从间的置换, 对于不允许重复的解, 解的唯一性一般地也是不成立的. 例如, 对于安全过河问题(2), 仔细观察图 1-1 不难发现: 从 $(3, 3)$ 出发, 经“2 从过去, 接着 1 从回来”或“1 商 1 从过去, 接着 1 商回来”都达到同样的状态: “1 从在彼岸, 其余人员在此岸”. 因此, 安全过河问题(2)至少有两个不允许重复的解.

每个不允许重复的解的渡河次数称为最少渡河次数. 例如, 对图 1-1 表示的那个不允许重复解最少渡河次数是 11.

思考题 1-2

- ① 你能证明: “对任何正整数 n , n 商 n 从的安全过河问题, 不允许重复的解一定是有限个”吗?
- ② 你能证明: 对 3 商 3 从安全过河问题, 不允许重复的解个数是 4 吗?

安全过河问题(2)的各种推广

- 1. 渡船容量不变(即至多容 2 人), 仅商人、随从人数有所改变.
 - ① 思考题 1-3
 - 对任意正整数 $n \geq 2$, 讨论 n 商人和 n 随从能否安全过河, 若能, 并给出答案.
 - ② 思考题 1-4
 - 对任意正整数 $n \geq 2$, 讨论 $n+1$ 商人和 n 随从能否安全过河? 若能, 请给出答案.

2. 渡船容量和商、从人数都改变 .

①思考题 1—5

假设渡船至多容 3 人,5 商人和 5 随从能否安全过河?若能,请给出答案.并考虑怎样作更一般性的推广?

②思考题 1—6

假设渡船至多容 4 人,能否证明:对任意正整数 n , n 商人和 n 随从都能安全过河?给出你的答案的严格证明.

§ 1.2 其他初等模型

小兔繁殖问题;
汉诺塔问题——一个著名数学游戏;
过圆周上等分点的三角形计数问题;
双层玻璃窗保温功效可行性分析;
代表席位公平分配问题;
最优价格制定问题.

小兔繁殖问题

假设:

一对刚出生的小兔(一公一母)被放到一个水草丰盛的孤岛上;2月龄及以上的每对兔子每个月恰好繁殖一对新兔(也是一公一母);在观察期间没有任何兔子死去.

问题:

试计算在观察期间的第 n 个月岛上兔子总对数.

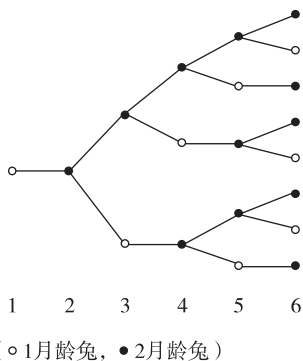
解:记第 n 个月内兔子总对数为 f_n .则显然 $f_1 = 1$;因 1 月龄的兔不能繁殖,故 $f_2 = 1$.

当 $n \geq 3$ 时,为了计算第 n 月兔子对数 f_n ,要把前一个月的兔子对数 f_{n-1} 加上新生兔子对数,而新生兔子对数正好等于 f_{n-2} (因每对兔子一次生一对).这就证明数列 $\{f_n\}$ 满足初始条件: $f_1 = f_2 = 1$ 和递推关系:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3.$$

不难依次求得数列 $\{f_n\}$ 前若干项(参看图 1—2)的值如下:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21



考察期
间月数

(○ 1月龄兔, ● 2月龄兔)

图 1—2

Fibonacci 数列

数列 $\{f_n\}$ 在理论和运用方面都非常有用,被称为 Fibonacci 数列.可以方便地编程计算数列 $\{f_n\}$,也可以证明它满足下列封闭公式:

$$f_n = \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{\sqrt{5}}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

其中, $u = (1 + \sqrt{5})/2, v = (1 - \sqrt{5})/2$.

思考题 1—7

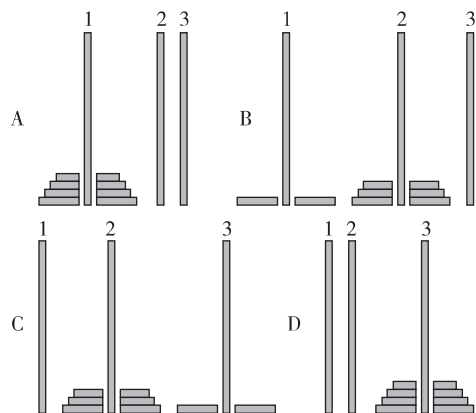
① 试用 Matlab 编程求 f_n , 其中 n 为任意正整数.

② 你能严格证明公式(2.1)吗?

汉诺塔问题——一个著名数学游戏

游戏规则: 今有安装在一块木板上的 3 根柱子和若干中心有孔的盘子. 这些盘子的直径两两不同. 开始时, 它们已按大小的次序套在第一根柱子上, 使得每个盘子的下面没有比它小的盘子. 每一次把 1 个盘子从一根柱子移动到另一根柱子, 但是不允许这个盘子放在任何比它小的盘子上面. 游戏的最终目标是把所有的盘子都放到第三根柱子上, 并保证按大小次序放置, 大盘子在下面.

问题: 令 h_n 表示解 n 个盘子汉诺塔问题所需要的最少移动次数. 试建立关于 h_n 的递推关系并求出 h_n 的封闭公式.



汉诺塔问题的解法

开始时 n 个盘子放在柱 1. 按照游戏规则我们用 h_{n-1} 次移动将上边的 $n-1$ 个盘子移到柱 2. 在这些移动中保留最大的盘子不动, 然后我们用一次移动将最大盘子移动到柱 3. 我们再使用 h_{n-1} 次移动将柱 2 上的 $n-1$ 个盘子移到柱 3, 把它们放到最大的盘子上面(这个最大的盘子一直放在柱 3 的底部). 容易看出, 使用更少的次数是不可能达到目的的. 这就证明了 $h_n = 2h_{n-1} + 1$. 初始条件是 $h_1 = 1$, 因为依照规则一个盘子可以经 1 次移动从柱 1 移到柱 3.

我们可以使用迭代方法求解这个递推关系:

$$\begin{aligned}
 h_n &= 2h_{n-1} + 1 \\
 &= 2(2h_{n-2} + 1) + 1 \\
 &= 2^2 h_{n-2} + 2 + 1 \\
 &= 2^2 (2h_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\
 &= 2^3 h_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
 &= \dots \\
 &= 2^{n-1} h_1 + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \\
 &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \quad \text{用了初始条件 } h_1 = 1 \\
 &= 2^n - 1 \quad \text{用了等比级数公式}
 \end{aligned}$$

一个古老的传说告诉我们, 在汉诺地方有一座塔, 那里的僧侣们严格按照这个游戏规则从一个柱子到另一个柱子移动 64 个金盘子. 他们一秒钟移动一个盘子. 据说当他们结束游戏时世界就到了末日.

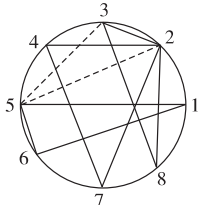
试问: 这个世界在僧侣们开始移动盘子多久以后终结?

答案: $2^{64} - 1$ 秒 > 5000 亿年.

过圆周上等分点的三角形计数问题

假设 $n(>2)$ 为给定的正整数, 并已知圆周上的 n 个等分点. 试计算以这些等分点为顶点的一切可能的锐、直、钝角三角形个数.

例: $n=8$



建立数学模型

用循环数组 (i, j, k) 来刻画所讨论三角形的构形, 其中 i, j, k 分别表示该三角形按反时针方向相邻二点间所夹已知等分点的个数. 易见, 经旋转后能重合的三角形构形相等; 所讨论三角形的构形满足下列条件:

$$i, j, k \geq 0, i + j + k = n - 3. \quad (*)$$

例如, 在上面例子中的锐角三角形 472, 直角三角形 156, 钝角三角形 238 可分别刻画为 $(2, 2, 1), (3, 0, 2)$ 和 $(0, 4, 1)$.

注: 构形 $(0, 4, 1)$ 与 $(0, 1, 4)$ 被视为不同, 因对应三角形 238 与 235 旋转后不重合.

设 ABC 为有构形 (i, j, k) 的三角形, 显然, ABC 为直角三角形 $\Leftrightarrow \max(i, j, k) = n/2 - 1$; ABC 为锐角三角形 $\Leftrightarrow \max(i, j, k) < n/2 - 1$; ABC 为钝角三角形 $\Leftrightarrow \max(i, j, k) > n/2 - 1$.

(i, j, k) 中的 i, j, k 两两不同, 则 (i, k, j) 被视为与 (i, j, k) 构形不同的三角形构形.

在具体计算直、钝角三角形个数时, 只要确定一切满足条件 $(*)$ 的不同 (非等边) 三角形构形 (i, j, k) 的个数 a , 再乘以 n 即可. 计算锐角三角形的个数时, 还要计算等边三角形 ($i = j = k$) 构形的个数 b . 则锐角三角形个数等于 $n(a + b/3)$.

$n=8$ 时三角形计数问题的解

$n=8$ 时共计有:

锐角构形一个: $(1, 2, 2)$;

直角构形 3 个: $(1, 1, 3), (0, 2, 3), (0, 3, 2)$;

钝角构形 3 个: $(0, 0, 5), (0, 1, 4), (0, 4, 1)$.

所以, 锐角三角形个数是 8; 直、钝角三角形个数都是 $3 \times 8 = 24$.

思考题 1-8

① 当 $n=10$ 时分别有多少锐、直、钝角三角形?

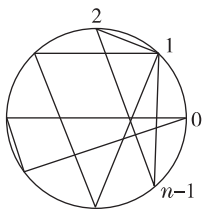
② 当 $n=9$ 时分别有多少锐、直、钝角三角形?

三角形计数问题的另一种解法

在复平面单位圆周上取定的 n 个等分点为 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, 其中, $a_k = e^{2\pi ki/n}, k=0, 1, \dots, n-1$, 以 $(0, j, k)$ 表示顶点为 a_0, a_j, a_k 并满足 $0 < j < k \leq n-1$ 且边 $a_j a_k$ 为最长边的三角形. 易见三角形 (i, j, k) 为直 (锐、钝) 角三角形的充要条件是:

$$k = n/2 (> [n/2], < [n/2])$$

令 n_1, n_2, n_3 分别表示圆内接锐角、直角、钝角三角形的个数.

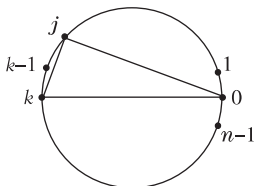


偶数 $n = 2k$ 时三角形计数问题的解

① $n = 2k$ 时, n_2 的计算:

令 $k = n/2$, 则过水平直径的直角三角形是 $(0, j, k)$, $j = 1, 2, \dots, k-1$.

$$\begin{aligned}\therefore n_2 &= n(k-1) \\ &= n(n/2-1) \\ &= n(n-2)/2.\end{aligned}$$



② $n = 2k$ 时, n_3 的计算:

位于上半圆的钝角三角形是 $(0, i, j)$,
 $j = 2, \dots, k-1; i = 1, 2, \dots, j-1$.

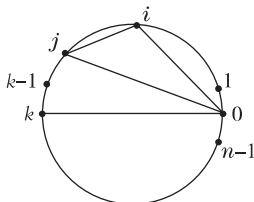
$$\begin{aligned}\therefore n_3 &= n \sum_{j=1}^{k-2} j = n(k-2)(k-1)/2 \\ &= (n/2)(n/2-1)(n/2-2).\end{aligned}$$

③ $n = 2k$ 时, n_1

的计算:

$$n_1 = C_n^3 - n_2 - n_3,$$

其中, n_2, n_3 的公式如上所示.



思考题 1-9

试证: 当 n 为偶数时, 钝角三角形的个数是锐角三角形个数的 3 倍.

$n = 2k+1$ 时三角形计数问题的解

$$n_2 = 0;$$

$$n_3 = (n/2)[(n-1)/2][(n-1)/2-1].$$

$$n_1 = C_n^3 - n_2 - n_3.$$

因为上半圆周上最大的等分点的编号是:

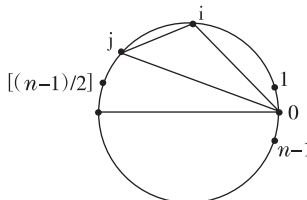
$$[(n-1)/2] = k.$$

位于上半圆的钝角三角形是:

$(0, i, j)$, 其中

$$j = 2, 3, \dots, k;$$

$$i = 1, 2, \dots, j-1.$$



三角形计数的统一公式及应用举例

统一公式:

$$n_3 = n[(n-1)/2][(n-1)/2-1]/2^*$$

$n_2 = 0$, 当 n 为奇数; $n_2 = n(n-2)/2$, 当 n 为偶数.

$$n_1 = C_n^3 - n_2 - n_3$$

举例:

$$\text{① } n = 8 \text{ 时, } n_2 = 8 \times 6/2 = 24; n_3 = 8 \times 3 \times 2/2 = 24;$$

$$n_1 = C_8^3 - n_2 - n_3 = 56 - 24 - 24 = 8.$$

$$\text{② } n = 9 \text{ 时, } n_2 = 0; n_3 = 9 \times 4 \times 3/2 = 54;$$

$$n_1 = C_9^3 - n_2 - n_3 = 84 - 54 = 30.$$

$$\text{③ } n = 10 \text{ 时, } n_2 = 10 \times 8/2 = 40;$$

$$n_3 = 10 \times 4 \times 3/2 = 60;$$

$$n_1 = C_{10}^3 - n_2 - n_3 = 120 - 40 - 60 = 20.$$

★ 当 n 为奇数时, 统一公式已成立. 当 n 为偶数时, 我们已证明

$$n_3 = (n/2)(n/2-1)(n/2-2).$$

易见, 此时成立

$$n/2-1 = [(n-1)/2],$$

$$n/2-2 = [(n-1)/2]-1,$$

$$\text{因此 } n_3 = n[(n-1)/2][(n-1)/2-1]/2$$

所以, 统一公式当 n 为偶数时也成立.

双层玻璃窗保温功效可行性分析

问题:众所周知,住房内外的热交换主要部分是通过门窗的热交换.因此,为了节约空调费用,新式建筑物流行双层玻璃窗的设计,据说保温效果非常好.试从理论上对双层玻璃窗的功效作一个可行性分析.

分析基点:对比有相同玻璃厚度的单、双层玻璃窗的传热过程,即对比两种情形下单位时间内通过玻璃窗单位面积流出去的热量孰多孰少以及相差的程度.

模型假设

- ① 传热只限于通过门窗上玻璃的热传导,即忽略墙、地板及天花板的传热.
- ② 窗户绝对密封不产生对流,也不考虑辐射.
- ③ 只考虑平均稳定热状态.
- ④ 两种情形使用完全一样的均匀的窗玻璃.
- ⑤ 窗玻璃的面积是影响传热的唯一因素,即忽略窗框形状、深度及所用材料等因素对传热的影响.

双层玻璃窗问题使用的符号

如图 1—3 所示,设 S, D 分别代表双层、单层玻璃的情形.对情形 S ,每片玻璃的厚度为 d ;夹层的厚度为 b ;室内、室外近玻璃处的(常)温度、夹层靠室内、夹层近外玻璃处的(常)温度分别为 T_1, T_2, T_a, T_b .对情形 D ,每片玻璃的厚度为 $2d$;室内、室外近玻璃处的(常)温度分别为 T_1, T_2 .

情形 S, D 单位时间内通过单位面积窗户的传热量分别记为 Q_S, Q_D .

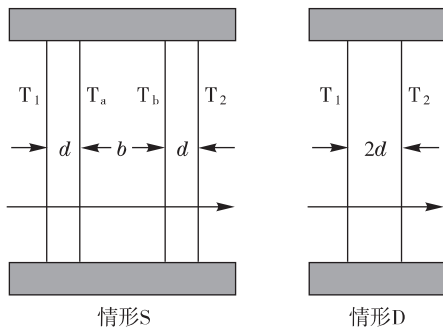
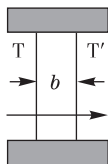


图 1—3

Newton 冷却定律

我们将要应用如下的物理定律——Newton 冷却定律:单位时间内通过厚度为 b , 热传导系数为 k 的介质的单位面积的传热量为:
 $Q = k(T - T')/b$, 其中 T 为介质左方的温度;
 T' 为介质右方的温度, $T > T'$.



双层玻璃窗问题的数学建模

由冷却定律得: $Q_D = k_1(T_1 - T_2)/2d$; $Q_S = k_1(T_1 - T_a)/d = k_2(T_a - T_b)/b = k_1(T_b - T_2)/d$. 其中, k_1, k_2 分别为玻璃、空气的传热系数,可查手册求得; d, b, T_1, T_2 可测量求得; T_a, T_b 未知,但可通过计算求出. 易见

$$T_a - T_b = s(T_1 - T_a); T_b - T_2 = T_1 - T_a \quad (\text{令 } s = k_1 b / (k_2 d))$$

解此联立方程组求得:

$$T_a = ((s + 1)T_1 + T_2) / (s + 2).$$

进而求得:

$$Q_S = k_1(T_1 - T_2) / (d(s + 2)).$$

双层玻璃窗保温功效讨论

由上面求得的公式,得出两种情形下传热量的比值是

$$Q_S/Q_D = 2/(s+2). \quad (*)$$

下面利用此公式,对双层玻璃窗的保温功效作一个详尽讨论. 首先,由 $s > 0$ 推出 $Q_S < Q_D$, 即在任何情况下双层玻璃窗都有保温功效.

查有关手册知: $0.004 < k_1 < 0.008$; 对干燥空气大约 $k_2 = 0.00025$ (焦耳 $\times$ 厘米 / (度 $\times$ 秒)), 由此得

$$s = k_1 b / (k_2 d) \geq 16b/d = 16h \text{ (令 } h = b/d \text{);}$$

$$Q_S/Q_D = 2/(s+2) = f(s).$$

因函数 $f(s)$ 的导数

$$f'(s) = -2/(s+2)^2 < 0,$$

故它是 s 的严格递减函数,从而

$Q_S/Q_D < 2/(16h+2)$. 在通常情况下有 $h = b/d > 4$, 于是

$$Q_S/Q_D = 2/(s+2) < 2/(64+2) = 1/33 = 3\%.$$

这就是说,在通常情况下,双层玻璃窗的传热量仅为单层玻璃窗的 3%. 由此可见,双层玻璃窗的保温效果十分显著. 这真是一个又好又省的技术,目前已开始全面推广.

代表席位公平分配问题

假设有人数分别为 103, 63 和 34 的 3 个单位. 下表显示按通常的人数比例分配方法为此 3 单位分配代表名额的两种分配方案: 一种是 20 席名额; 另一种是 21 席名额. 让我们仔细看一下两种分配结果: 20 席时, 3 单位依次按 10 : 6 : 4 分配; 21 席时, 改为依次按 11 : 7 : 3 分配. 于是, 出现对于单位 3 明显不合理的现象: 21 席时他们得的名额反而少了. 因此提出问题: 如何解释上述不合理现象并提出更合理的代表名额分配方案?

单位	人数	比例 %	20 席		21 席	
			理论 席位	实际 席位	理论 席位	实际 席位
1	103	51.5	10.3	10	10.815	11
2	63	31.5	6.3	6	6.615	7
3	34	17	3.4	4	3.57	3
总和	200	100	20	20	21	21

表 1-1

不合理现象产生原因及其量化

按人数比例分配应该是公平的, 但如何解释上述不合理现象呢? 显然, 其主要原因是代表席位只取整数值, 即必须把公平但不是整数的理论席位值取整, 即将小数尾数舍去或增加为 1. 所以, 执行的实际席位并非理论席位, 从而难保其公平性.

一般地, 考察人数分别为 p_i, p_j 的单位 i 和单位 j , 设按某种分配方案分配给它们实际席位为 n_i, n_j . 让我们来讨论在此分配方案下对它们公平性的衡量.

显然, 若 $p_i/n_i = p_j/n_j$, 则此分配绝对公平. 可惜, 因 n_i, n_j 经过了取整, 上述条件几乎不可能满足, 故或者 $p_i/n_i > p_j/n_j$, 此时, 对单位 i 不公平; 或者 $p_i/n_i < p_j/n_j$, 此时, 对单位 j 不公平.

引进单位 i 的不公平值如下:

$$\begin{aligned} r_i(n_i, n_j) &= (p_i/n_i - p_j/n_j) / (p_j/n_j) \\ &= p_i n_j / (p_j n_i) - 1. \end{aligned}$$

现在讨论如何在已有分配的基础上修改增加 1 席的新方案. 如把 1 席加给单位 i , 则单位 j 的不公平值变为:

$$r_j(n_i + 1, n_j) = p_j(n_i + 1) / (p_i n_j) - 1;$$

如加给单位 j , 则单位 i 的不公平值为

$$r_i(n_i, n_j + 1) = p_i(n_j + 1) / (p_j n_i) - 1.$$

易见

$$r_i(n_i,n_j+1)>r_j(n_i+1,n_j)\Leftrightarrow q_i>q_j\tag{1}$$

其中 $q_i=p_i^2/(n_i(n_i+1))$ 是增加一个代表席位时衡量对单位 i 不公平程度的一个只依赖于 i 的参数.

$$\begin{aligned} r_i(n_i,n_j+1)>r_j(n_i+1,n_j) \\ \Leftrightarrow \frac{p_i(n_j+1)}{p_jn_i}>\frac{p_j(n_i+1)}{p_in_j} \\ \Leftrightarrow \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}>\frac{p_j^2}{n_j(n_j+1)} \end{aligned}$$

增加 1 席的合理分配模型

上面的讨论引向增加 1 席的合理分配模型：把增加的 1 席分配给使比值 q_i 取最大值的对应单位 i (因为,未得到加 1 席的单位中它的不公平值最大,这个分配模型体现照顾矛盾最大者的政策,符合正确处理人民内部矛盾,建立和谐社会的原则).

对所讨论的那个 3 单位实例,先由表 1-1 得到 20 席的实际席位分配后,再按上述加 1 席合理分配模型得出的分配方案是:加 1 席给单位 1,即分配方案向量为(11,6,4)(见表 1-2).

单位	p_i	n_i	$p_i^2/(n_i(n_i+1))$	加 1 席方案
1	103	10	96.4=MAX	10+1=11
2	63	6	94.5	6
3	34	4	57.8	4
总和	200	20		21

表 1-2

结果的分析与讨论

加 1 席合理分配模型照顾可能最吃亏的单位,不言而喻是公平的.应用于上述 3 单位实例,结果将不再发生增加代表名额后出现某些单位反而减少席位的不合理情况,这也是本模型合理性的一个佐证.

表 1-1,1-2 对本例的计算结果也从一个侧面说明原先的 20 席分配方案是不大合理的.这一点也使我们认识到通常的按比例分配的办法并非绝对可靠,在某些特殊情况下,由于取整的影响也会产生显著的误差.

如何用本模型合理分配 20 个代表名额

思路:先用常法分配 19 个代表席位,再用本模型加 1 席即可.

计算结果如表 1-3 所示.此结果与用常法分配 20 个代表席位的结果不同,这一事实说明原先的分配方案其实并不合理.

有趣的是,用本模型分配 21 个代表席位时,无论从 20 个代表席位的原方案或从新方案出发都得出同一正确结果.

单位	p_i	n_i	$p_i^2/(n_i(n_i+1))$	加 1 席方案
1	103	10	96.45=MAX	10+1=11
2	63	6	94.50	6
3	34	3	96.33	3
总和	200	19		20

表 1-3

合理加 1 席模型仍非绝对正确

我们用表 1—4 给出的 5 单位的例子说明：上述模型也不是绝对正确. 因 78 席时理论值小数尾数全相等, 都等于 0.4, 故取整时可选任 2 单位加 1, 其余全舍去尾数. 表 1—4 的两个计算结果说明, 用合理加 1 席模型也得出唯一合理的结果.

下面将提出一个较为公平, 但也较为复杂的模型——方差最小模型.

单位	人数	理论值	取整顿	q_i	加 1 席	取整 2	q_i	加 1 席
1	404	40.4	40	99.5	41	41	94.8	41
2	204	20.4	20	99.1	20	21	90.1	21
3	104	10.4	10	98.3	10	10	98.3	11
4	54	5.4	6	69.4	6	5	97.2	5
5	14	1.4	2	32.7	2	1	98.0	1
总合	780	78	78		79	78		79

表 1—4

代表席位分配的方差最小模型

分析：
要从分别有人数 $p_1, \dots, p_m$ 的 m 个单位中选取 n 个代表. 令 $p = p_1 + \dots + p_m$, 则 p/n 为每个席位平均代表的人数.

先算出每个单位应分配代表数的理论值：
 $n_1, \dots, n_m, n_i = np_i/p, i = 1, \dots, m.$

照例记不大于 x 的最大整数为 $[x]$; 不小于 x 的最小整数为 $\{x\}$, 则 $r_i = n_i - [n_i]$ 为 n_i 的小数尾数.

若 $k = \sum_{i=1}^m r_i$ 为 0, 则每个 n_i 都是整数, 这是理想的绝对公平情况. 一般地, k 为某个正整数, 从而, 总有某些 n_i 不是整数. 选定 k 个 n_i 取整为 $\{n_i\}$, 其余取整为 $[n_i]$. 显然, 对 k 个 n_i 取整时, 有至多 C_m^k 种可能性. 对第 u 种可能性算出对应方差：

$$Q^{(u)} = \sum_{i=1}^m (p_i/n_i - p/n)^2$$

方差 $Q^{(u)}$ 的大小刻画按该可能性取整的情况下每个席位平均代表人数的实际值与其公平值的偏差程度, 其值越小越公平.

方差最小模型

代表席位分配的方差最小模型如下.
对上述 C_m^k 种可能性分别计算方差：
$$q = \sum_{i=1}^m (p_i/n_i - p/n)^2,$$

则 q 的最小值对应最合理的分配方案.

实例：考虑 3 单位 20 席的实例. 各单位人数为： $p_1 = 103, p_2 = 63, p_3 = 34$; n_i 理论值为： $n_1 = 10.3, n_2 = 6.3, n_3 = 3.4$. 因 $k = 1$, 故共有 $C_m^k = C_3^1 = 3$ 种可能情况. 用方差最小模型计算出 20 席和 21 席的公平分配方案(见下表)分别是：11 : 6 : 3 和 11 : 6 : 4, 与从前结果相一致.

用方差最小模型的计算实例

20 席			(1)		(2)		(3)	
单位	人数	理论值	n_i	$(q_i)^2$	n_i	$(q_i)^2$	n_i	$(q_i)^2$
1	103	10.3	11	0.405	10	0.09	10	0.09
2	63	6.3	6	0.250	7	1	6	0.25
3	34	3.4	3	1.778	3	1.778	4	2.25
总和	200	20	20	2.473	20	2.868	20	2.59

21 席			(1)		(2)		(3)	
单位	人数	理论值	n_i	$(q_i)^2$	n_i	$(q_i)^2$	n_i	$(q_i)^2$
1	103	10.815	11	0.026	11	0.026	10	1.094
2	63	6.615	7	0.245	6	0.953	7	0.245
3	34	3.570	3	3.274	4	1.049	4	1.249
总和	200	21	21	3.545	21	2.026	21	2.588

思考题 1—10

试用方差最小模型计算表 1—4 给出的 5 单位 78 名代表的合理分配方案。

最优价格制定问题

背景：

企业负责人若有权根据一种产品的成本及其销售情况指定其价格的话,他自然要寻求能使企业利润最大的所谓最优价格。

为简单起见,我们只讨论产销平衡状态下的最优价格制定问题.这里,我们把“产销平衡”定义为:“产品产量正好等于其销售量”。

最优价格问题建模

设每件产品售价为 p , 成本为 q , 售量与产量相等, 记为 x , 则总收入为 $I = px$, 总支出为 $C = qx$, 从而该产品的利润为 $U = I - C$ 。

按市场规律, 价格决定产量, 即产量是价格的函数: $x = f(p)$ 。因而 I, C, U 都是 p 的函数, 特别地, $U(p) = I(p) - C(p)$ 。

若 $U(p)$ 是 p 的可微函数, 则由微分学知, 使利润 $U(p)$ 达到最大值的最优价格 p^* , 可由

$$(dU/dp) \big|_{p=p^*} = 0, \text{ 或}$$

$$(dI/dp) \big|_{p=p^*} = (dC/dp) \big|_{p=p^*} \quad (1)$$

求得*。

★ 函数 $f(p)$ 称为需求函数, 是 p 的减函数 (因价越贵, 卖出去的数量越少)。这里强调 p 的作用, 把 q 视为与 p 无关的参数。 dI/dp 称为边际收入, 其意义是价格变动一个单位时收入的改变量; dC/dp 称为边际支出 (价格变动一个单位时支出的改变量)。(1) 式的经济含义是: 最大利润在边际收入等于边际支出时达到, 这是计量经济学的一条著名定律。

需求函数 $f(p)$ 是线性函数的情形

为了进一步说明求最优价格的方法, 我们考虑需求函数是线性函数的最简单情形:

$f(p) = a - bp$, $a, b > 0$ 为常数, 并且假定: 每件产品的成本 q 与产量 x 无关*。 则

$$U(p) = (p - q)(a - bp)$$

$U'(p) = a - bp - b(p - q) = 0$ 表明唯一的稳定点是 $p^* = (1/2)(q + a/b)$

$U''(p) = -2b < 0$ 表明 p^* 是唯一的最大值点, 即我们所要求的最优价格。

★ 产品的成本 q 与产量 x 无关的假设与通常的实际情况有偏差, 较好假设应是: q 随 x 的增加而减少。

此外, 公式 $x = a - bp$ 中, 假设 $b > 0$ 系因为 x 应为 p 的减函数; 假设 $a > 0$ 系因为 x 必须取正值。

上式中, 令 $p = 0$ 得 $a = x$, 说明 a 是该产品免费供应时社会的需求量, 称为“绝对需求量”; $b = -dx/dp$ 表示 b 是价格上涨一个单位时销售量下降的幅度 (当然也是价格下跌一个单位时销售量上升的幅度), 它反映市场需求对价格的敏感程度。在实际工作中可由价格和销售量的统计数据用最小二乘法拟合来确定 a 和 b 。

上述最优价格的经济解释

在需求函数为线性及 q 与产量 x 无关的假设下,我们求得最优价格为

$$p^* = (1/2)(q + a/b)$$

由此可见:最优价格 p^* 由两部分组成,一部分($q/2$)是成本的一半;另一部分($a/(2b)$)则与 a (绝对需求量)成正比;与 b (“市场需求对价格的敏感系数”)成反比.

思考题 1-11

在最优价格制定问题中,假设 $x = a - bp$, $a > 0, b > 0$ (需求函数是线性函数),且 q 随 x 的增加而降低,即假设 $q = c - dx$,其中, $c > 0, d > 0$. 试在这些假设下求最优价格.

§ 1.3 第 1 章思考题参考答案

思考题 1-1

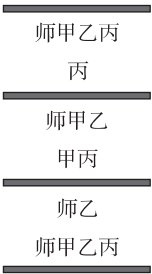
问题:此问题的答案唯一吗?不允许重复时有几个答案?最少渡河次数是多少?如果每人都能划船结论又是如何?

解:不允许重复时有 2 个不同答案. 前面讲过一个答案是(共 7 次):①师乙过去,接着师回;②师甲过去,接着师乙回;③师丙过去,接着师回;④师乙过去. 还有且仅有另一个答案是(甲丙互换):①师乙过去,接着师回;②师丙过去,接着师乙回;③师甲过去,接着师回;④师乙过去.

故问题有 2 个不允许重复答案,7 次渡河.

在每人能划船假设下一种安全过河方案是(共 5 次过渡):

- ① 甲丙过去,接着甲回;
- ② 师甲过去,接着师回;
- ③ 师乙过去



思考题 1-2

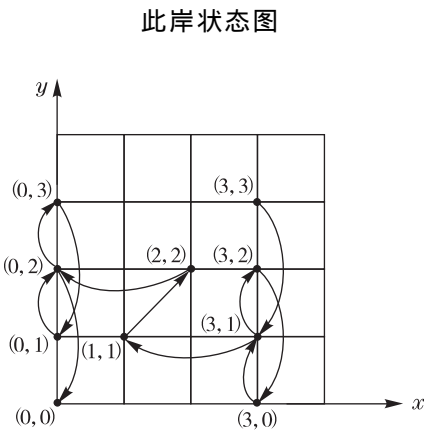
① 对任何正整数 n 的 n 商 n 从安全过河问题,不允许重复的解一定是有限个.

证:对给定的正整数 n ,安全状态集的点数是有限数 $3n + 1$. 显然,经过有限个点,并按跳棋规则从点 (n, n) 跳到点 $(0, 0)$ 的不重复跳棋方案的个数一定有限. 这就证明:不重复安全过河方案必定是有限个.

②在渡船至多容2人条件下,3商3从安全过河问题,不允许重复解的个数是4.

证:下图给出一个无重复的解. 仔细分析此解不难看出:任何一个无重复的解的最先2步除下图给出的方案外,还有且仅有另一个方案是:“商1从1过去,接着商1回来”. 此外,其最后2步除下图给出的方案外,还有且仅有另一个方案是:“商1回来,接着商1从1过去”.

所以,3商3从安全过河问题,不允许重复解的个数是 $2 \times 2 = 4$ 个.



思考题 1—3

船至多容2人时,讨论 $n(\geq 2)$ 商人 n 随从能否安全过河.

解:已讲过, $n = 3$ 存在安全过河方案; $n = 2$ 存在安全过河方案,如图 1—4 所示. 显然,不存在任何无重复安全过河解,便一定不存在任何安全过河解*. 今证: $n \geq 4$ 不存在任何无重复安全过河解. (反证法) 设存在一个无重复安全过河方案. 该方案第一次跳到 y 轴前的状态只能是(如图 1—5 所示): $(2, 2)$ 和 $(1, 1)$, 且都是偶数步. 若为 $(2, 2)$, 则前2步必是从 $(1, 1)$ 到 $(2, 2)$, 从 $(2, 2)$ 到 $(1, 1)$, 产生重复; 若为 $(1, 1)$, 则前一步必来自 y 轴上的点, 都是不可能的.

★不难证明:“若不存在任何不重复安全过河方案,则不存在任何安全过河方案”.

解:我们只须证明其等价命题:“若存在一个安全过河方案,则必存在一个不重复安全过河方案”. 事实上,从一个安全过河方案中去掉一切产生重复的循环之后,便得到一个不重复安全过河方案.

$n = 2$ 时的安全过河方案(共 5 次)

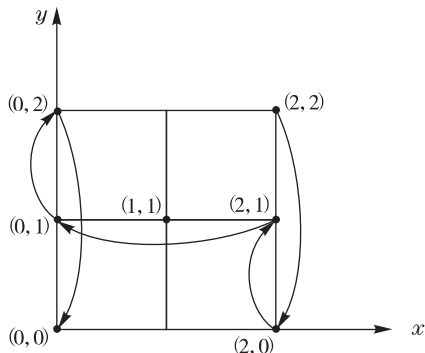


图 1—4

1—3($n \geq 4$)不存在无重复安全过河解

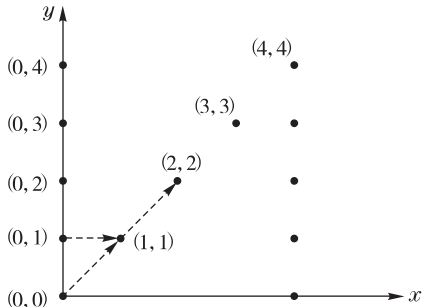


图 1—5

思考题 1—4

问题: 设渡船至多容纳 2 人, $n+1$ 商人 n 随从能否安全过河?

解: 此岸状态图如图 1—6 所示. 用一次“1 商 1 从去, 接着 1 从回; 1 商 1 从去, 接着 1 商回”的循环可使此岸状态从 $(n+1, n)$ 改变到 $(n, n-1)$. 经 $n-1$ 次这种循环之后, 从 $(n+1, n)$ 变到 $(2, 1)$; 再经“1 商 1 从去, 接着 1 从回, 最后 1 商 1 从去”3 次过渡便达到 $(0, 0)$ 状态. 不难看出: 全程共需 $4(n-1) + 3$ 次渡河.

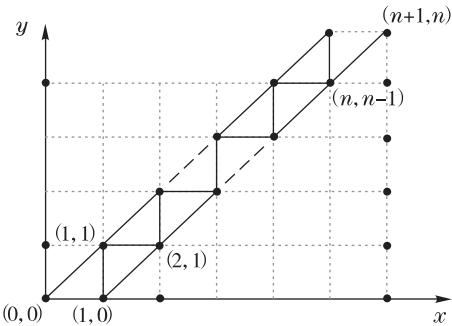


图 1—6 思考题 1—4 的此岸状态图

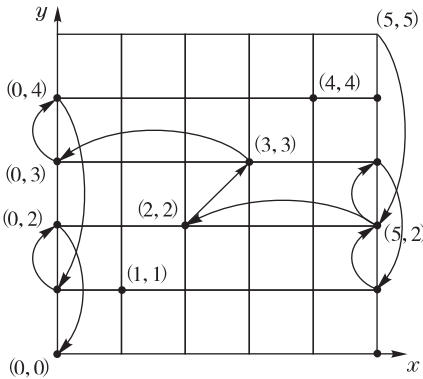
思考题 1—5

(a) 5 商人 5 随从安全过河问题.

解: 假设渡船至多容 3 人, 5 商人和 5 随从能安全过河. 仿照解安全过河问题 (2) 的方法, 一个安全过河方案 (共过渡 11 次, 参看下图) 如下:

- 3 从过去, 接着 1 从回来;
- 2 从过去, 接着 1 从回来;
- 3 商过去, 接着 1 商 1 从回来;
- 3 商过去, 接着 1 从回来;
- 3 从过去, 接着 1 从回来;
- 2 从过去.

此岸状态图



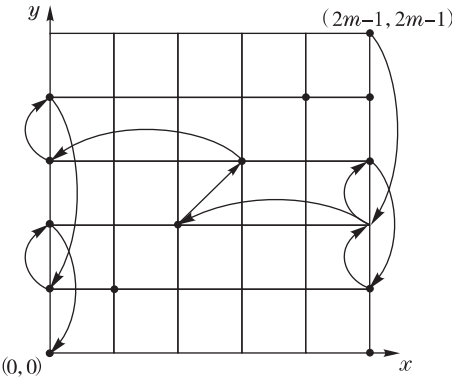
(b) n 商人 n 随从安全过河问题.

问题推广: 假设渡船至多容 $m(> 1)$ 人, $2m-1$ 商人和 $2m-1$ 随从必能安全过河.

证: 仿照解安全过河问题 (2) 和 1—5(a) 的方法, 一个过渡 11 次的安全过河方案如下:

- m 从过去, 接着 1 从回来;
- 2 从过去, 接着 1 从回来;
- m 商过去, 接着 1 商 1 从回来;
- m 商过去, 接着 1 从回来;
- m 从过去, 接着 1 从回来;
- 2 从过去.

1—5(b) 一个解的此岸状态图



思考题 1—6

船可容 4 人必能安全过河.

解:假设渡船至多容 4 人和 $n > 0$, 则 n 商人和 n 随从必能安全过河.

一个安全过河方案如下:

2 商 2 从过去, 接着 1 商 1 从回来, 此岸状态变为 $(n-1, n-1)$;

再重复一次上述循环, 此岸状态变为 $(n-2, n-2)$;

经 $n-2$ 次上述循环, 此岸状态变为 $(2, 2)$;
再 2 商 2 从过去即可. 共过渡 $4(n-2) + 1$ 次.

思考题 1—7

② $\{f_n\}$ 封闭公式 (2.1) 的证明.

证: 考察以 f_n 为系数的形式幂级数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n = f_1 + f_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n.$$

利用已知关系:

$f_1 = f_2 = 1$ 和 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$, 得

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n + f_{n-1}) x^n \\ &= 1 + x + x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} + \\ &\quad x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^{n-2} \\ &= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x). \end{aligned}$$

整理得 $F(x)(1 - x - x^2) = 1$.

由此推出

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - ux)(1 - vx)} \\ &= \frac{1}{u - v} \left(\frac{u}{1 - ux} - \frac{v}{1 - vx} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{u}{1 - ux} - \frac{v}{1 - vx} \right) \end{aligned}$$

其中, $u = (1 + \sqrt{5})/2, v = (1 - \sqrt{5})/2$. 代入

$$\frac{u}{1 - ux} = \sum_{n=0}^{\infty} u(ux)^n, \frac{v}{1 - vx} = \sum_{n=0}^{\infty} v(vx)^n.$$

即得证所需公式 (2.1):

$$f_n = (1/\sqrt{5})(u^{n+1} - v^{n+1}), n = 0, 1, 2, \dots$$

思考题 1—8

① $n = 10$ 时各类三角形个数.

解: 此时有

锐角构形 2 个: $(1, 3, 3), (2, 2, 3)$;

直角构形 4 个:

$(0, 3, 4), (0, 4, 3), (1, 2, 4), (1, 4, 2)$;

钝角构形 6 个: $(0, 0, 7), (0, 1, 6),$

$(0, 6, 1), (1, 1, 5), (0, 2, 5), (0, 5, 2)$.

所以, 锐、直、钝角三角形个数分别是 $2 \times 10 = 20$; $4 \times 10 = 40$; $6 \times 10 = 60$.

② $n = 9$ 时各类三角形个数.

解: 此时有

直角构形 0 个, $\therefore n_2 = 0$;

钝角构形 6 个: $(0, 0, 6), (0, 1, 5),$

$(0, 5, 1), (1, 1, 4), (0, 2, 4), (0, 4, 2),$

$\therefore n_3 = 6 \times 9 = 54$;

$n_1 = 9 \times 8 \times 7 / 6 - n_2 - n_3 = 84 - 54 = 30$.

答案: 锐、直、钝角三角形个数分别是 30, 0 和 54.

注: 锐角构形有 4 个, 其中一个为等边只乘 3.

思考题 1—9

证明 n 为偶数时有 $n_3 = 3n_1$.

解: 前面已证明 $n = 2k$ 时有

$$n_2 = n(n-2)/2;$$

$$n_3 = (n/2)(n/2-1)(n/2-2)$$

$$= n(n-2)(n-4)/8;$$

$$n_1 = C_n^3 - n_2 - n_3$$

$$= n(n-1)(n-2)/6 - n(n-2)/2$$

$$- n(n-2)(n-4)/8$$

$$= n(n-2)(n-4)/24;$$

$$\therefore n_3 = 3n_1.$$

换句话说, n 为偶数时, 钝角三角形个数是锐角三角形个数的 3 倍.

思考题 1—10

5 单位共 780 人,78 代表席 .

解:我们用方差最小模型来计算表 1—4 给出的 5 单位 78 名代表的合理分配方案 .

表 1—5,1—6 和 1—7 给出相关的计算 . 从 5 个小数尾数之和为 2 得出: $k=2$,从而有 $C_5^2=10$ 种可能的取整方案 .

在计算方差中, $n/p=78/780=0.1$;方差平方的最小值是 9.86,对应的最公平代表席位分配方案是:单位 1 到 5 依次分配 41,20,10,5 和 2 席位 .

单位	人数	理论数	取整 1	q_i^2	取整 2	q_i^2	取整 3	q_i^2	取整 4	q_i^2
1	404	40.4	40	0.01	40	0.01	40	0.01	41	0.02
2	204	20.4	20	0.04	20	0.04	21	0.08	20	0.04
3	104	10.4	10	0.16	11	0.30	10	0.16	10	0.16
4	54	5.4	6	1.00	5	0.64	5	0.64	5	0.64
5	14	1.4	2	9.00	2	9.00	2	9.00	2	9.00
合	780	78	78	10.21	78	9.99	78	9.89	78	9.86

表 1—5

单位	人数	理论数	取整 5	q_i^2 10^{-6}	取整 6	q_i^2 10^{-6}	取整 7	q_i^2 10^{-6}	取整 8	q_i^2 10^{-6}
1	404	40.4	40	0.01	40	0.01	41	0.02	40	0.01
2	204	20.4	20	0.04	21	0.08	20	0.04	21	0.08
3	104	10.4	11	0.30	10	0.16	10	0.16	11	0.30
4	54	5.4	6	1.00	6	1.00	6	1.00	5	0.64
5	14	1.4	1	16.00	1	16.00	1	16.00	1	16.00
合	780	78	78	17.35	78	17.25	78	17.22	18	17.03

表 1—6

单位	人数	理论数	取数 9	q_i^2 10^{-6}	取整 10	q_i^2 10^{-6}
1	404	40.4	41	0.02	41	0.02
2	204	20.4	20	0.04	21	0.08
3	104	10.4	11	0.30	10	0.16
4	54	5.4	5	0.64	5	0.64
5	14	1.4	1	16.00	1	16.00
合	780	78	78	17.00	78	16.90

表 1—7

思考题 1—11

解:由假设得 $p=a'-b'x, a'=a/b>0, b'=1/b>0, q=c-dx, c>0, d>0$. 把利润表示为 x 的函数得

$$\begin{aligned} U(x) &= (a'-b'x)x - (c-dx)x \\ &= (d-b')x^2 + (a'-c)x \end{aligned}$$

显然,存在最优价格的充要条件是

$$U''(x) = 2(d-b') \leqslant 0 \quad (\text{即 } d \leqslant b')$$

和方程

$$U'(x) = 2(d-b')x + a' - c = 0$$

有非负解: $x=(c-a')/(2(d-b')) \geqslant 0$ (即 $c \geqslant a'$). 这个 x 就是所要求的最优价格 .

第 2 章 微分方程方法建模

§ 2.1 人口模型

A. 人口问题的特殊重要性

B. 经典人口模型

C. 人口发展方程

§ 2.2 单种群饲养收获模型

§ 2.3 两种动物的弱肉强食模型

§ 2.4 万有引力定律

§ 2.5 盯梢与追逐模型

§ 2.6 第 2 章思考题参考答案

§ 2.1 人口模型

A. 人口问题的特殊重要性

人口的增减与年龄结构对一个国家或地区的经济发展及人民的精神与物质生活都产生巨大影响,使得人口问题成为当今世界人们最为关心的问题之一.

一些发展中国家人口出生率过高,愈来愈严重地影响他们甚至整个人类的正常生活;而一些发达国家,却出现人口零增长甚至负增长和人口老龄化等现象,也给这些国家带来隐患.

我国存在人口问题

旧中国从 1840 年到 1949 年的 109 年间,全国只增加人口 1.3 亿. 而中华人民共和国建立以后的 30 年,却出生了 6 亿多人口,除去死亡,净增 4.3 亿人. 人口增长得这样快,使全国人民在吃饭、穿衣、住房、交通、教育、卫生、就业等方面,都遭遇越来越大的困难,迫使国家不得不采取“一对夫妻一个小孩”的严格控制人口政策. 但人口控制的前松后紧势必带来人口年龄结构不合理及老龄化等诸多问题,是政府和全社会必须认真研究对策的一个大问题.

解决人口问题数学大有作为

目前,许多国家的政府官员及有关专家,甚至整个社会都十分关注人口发展问题. 大家都在考虑如何从根本上解决人口问题. 人们的一个共识是:必须对人口整个发展过程进行深入研究,准确地分析和掌握人口的增长规律,适时地作出人口预测,为政府制定人口政策,以控制人口过快增长,应对老龄化,提供理论依据.

建立数学模型对人口发展过程进行描述、分析和预测,已经取得巨大成功,国内外有关专家(包括数学家)正在继续努力.

B. 经典人口模型

人口预测的一般提法是:从已知(一个特定区域的)人口的有关资料和特性预测将来人口的发展趋势.

我们将介绍两个最基本的人口模型:

- ① 指数增长模型,或 Malthus 模型;
- ② 阻滞增长模型,或 Logistic 模型.

Malthus 人口论

Malthus 是英国经济学家和牧师. 1798 年发表专著《人口模型》. 他从教会的人口出生和死亡登记册中发现人口增长率近似于常数,这正是 Malthus 人口模型的基础.

人类能够违反自然本性,对自己实行“计划生育”政策,归根结底是 Malthus 指出的以个体为存在方式的动物的繁衍规律——依照几何级数增长,与以群体为存在方式的植物的繁衍规律——依照算术级数增长,这两种生命规律之间的不相容性.

Malthus 人口模型

假设：单位时间人口增加量与当时人口量成正比，比例常数称为人口增长率，由历史资料确定。

模型：令 t 时刻人口为 $x(t)$ ，初始时刻人口为 x_0 ， t 时刻单位时间人口增加量为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x(t + \Delta t) - x(t)) / \Delta t = x'(t).$$

于是，Malthus 人口模型对应的数学模型是下列微分方程初始问题：

$$x'(t) = kx(t), \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

(假定人口增长率 $k = x'(t)/x(t)$ ，与 t 无关)

Malthus 人口模型的数学解

用分离变量法求微分方程(1.1)的通解得

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad \int \frac{dx}{x} = \int k dt$$

$$\ln |x| - \ln |C| = kt, \quad x(t) = Ce^{kt}.$$

代入初始条件确定任意常数 C 得

$$x_0 = x(0) = Ce^0 = C.$$

所以，微分方程初始问题(1.1)的解是

$$x(t) = x_0 e^{kt}. \quad (1.2)$$

中国的一个人口公式

根据 1990 年国家统计局公报，我国 1990 年 7 月 1 日人口(不包括港澳台地区)为 11.33 亿，此前 8 年的人口平均增长率为 1.48%。如果近似取我国人口增长率为 $k = 0.0148$ ，则由公式(1.2)可得我国的一个人口公式是

$$x(t) = 11.33e^{0.0148t} \quad (1.3)$$

应用实例

应用中国人口公式(1.3)预报 2000 年，2004 年，2050 年我国人口得

2000 年人口是

$$x(10) = 11.33e^{0.148} = 13.14(\text{亿});$$

2004 年人口是

$$x(14) = 11.33e^{0.2072} = 13.94(\text{亿});$$

2050 年人口是

$$x(60) = 11.33e^{0.888} = 27.53(\text{亿}).$$

上述预报结果准确吗？

前两个预报的准确性可用实际数字加以验证。根据国家统计局公报，2000 年 11 月 1 日，2004 年 12 月我国人口(不包括港澳台地区)分别为 12.66 亿和 13.00 亿。由此可见，第一个预报还算准确(稍稍偏大)；第二个预报则明显偏大。

第三个预报怎样呢？大得邪乎。估计大家都不会相信这个结果。原因何在呢？

人口预报误差的主要原因

根据国家统计局公报，2000 年前 10 年的人口平均增长率为 1.07%，比 1990 前 8 年的人口平均增长率(1.48%)明显减少了，这是预报值比实际值偏大的主要原因。由于 2000 年以后比以前人口增长率进一步下降，这是第二个预报比第一个预报更差的原因。

可以断言，今后若干年我国人口平均增长率还会变得更小，也许不到 0.5% (2004 年净增人口 761 万人，自然增长率为 0.587%，比上年下降 0.14 个百分点)。所以基于 $k = 0.0148$ 的我国人口公式(1.3)往后偏差将急剧增大。

Malthus 人口模型公式极限为无穷

$$\forall k > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{kt} = \infty$$

人口趋向于无穷的结论显然不对, 因为一个国家的土地和所有资源都是有限的, 绝对不可能养活无穷多的人口. 人口过多, 在吃饭、穿衣、住房、交通、教育、卫生、就业等方面, 就会遭遇不可克服的困难, 势必造成部分人口生活没有保障, 增大死亡率, 减少出生率, 使人口增长率 k 显著地下降, 其为常数的基本假设早就完全不能成立了.

Logistic 人口模型假设

假设: 人口 $x(t)$ 是 t 的有界函数, 即存在有限正数 M 使得 $\forall t \geq 0, x(t) \leq M$, 并且人口增长率随 x 的增加而下降, 最后将趋向于 0, 即增长率可假设为 x 的一个线性函数: $k(1-x/M)$, 其中, k, M 为正常数.

现实依据: 任何国家的人口都不会无限地增加. 对发达国家来说, 相当多数的家庭宁愿少生甚至不生, 致使人口出生率不断下降, 出现向零增长的发展趋势; 对不发达国家, 本来就穷, 高生育率造成更穷, 势必导致更高死亡率, 其客观效果并非是人口的增长.

Logistic 人口数学模型

Logistic 人口模型或阻滞增长人口模型对应的数学模型是下列微分方程初始问题:

$$\begin{cases} x'(t) = k(1 - \frac{x(t)}{M})x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Logistic 人口数学模型的解

用分离变量法求(1.4)中微分方程的通解:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mdx}{x(x-M)} &= \int -kdt, \\ \ln |x-M| - \ln |x| - \ln |C| &= -kt, \\ (x-M)/x &= Ce^{-kt}. \end{aligned}$$

代入初始条件确定任意常数 C 得:

$$(x_0 - M)/x_0 = Ce^0 = C.$$

所以, 微分方程初始问题(1.4)的解满足

$$\begin{aligned} (x-M)/x &= (x_0 - M)e^{-kt}/x_0 = -b, \\ b &\equiv (M/x_0 - 1)e^{-kt}, \text{ 或(解出 } x = x(t) \text{ 得)} \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{M}{1+b} = \frac{M}{1 + (\frac{M}{x_0} - 1)e^{-kt}} \quad (1.5)$$

中国的一个 Logistic 人口公式

根据我国情况, 若取 $k = 0.0148, x_0 = 11.33$ 和 $M = 50$ (亿), 则由(1.5)得我国人口公式为 $x(t) = 50/(1 + (50/11.33 - 1)e^{-0.148t})$ (1.6)

由公式(1.6)预报我国 2000 年人口是

$$\begin{aligned} x(10) &= 50/(1 + (50/11.33 - 1)e^{-0.148}) \\ &= 12.68; \end{aligned}$$

2004 年人口是

$$\begin{aligned} x(14) &= 50/(1 + (50/11.33 - 1)e^{-0.2072}) \\ &= 13.25; \end{aligned}$$

2050 年人口是

$$\begin{aligned} x(60) &= 50/(1 + (50/11.33 - 1)e^{-0.888}) \\ &= 20.30. \end{aligned}$$

讨论上述预报的准确性

第一个预报结果 12.68 亿与 2000 年我国实际人口 12.66 亿非常接近.

第二个预报结果 13.25 亿与 2004 年我国实际人口 13.00 亿也很接近, 不过接近程度仍差于前者.

第三个预报结果 20.30 亿仍过于偏大, 因为有人从中国目前的生育率推算出来, 到本世纪中叶 2043 年, 中国的人口将达到峰值 15.57 亿, 其后我国人口将是零增长.

思考题 2—1

- ①按公式(1.3)估计我国人口翻一番大约需要多少年.
- ②上世纪五十、六十年代,我国人口增长率常大于 2%,按增长率 2% 计算人口翻一番大约需要多少年.

思考题 2—2

按“中华人民共和国 2004 年国民经济和社会发展统计公报”,我国 2004 年人口为 13.00 亿,自然增长率为 0.587%.假设从 2004 年起我国人口增长率保持为 0.587%,经济增长率保持为 7.5%.试预测 2024 年我国人均国内生产总值是 2004 年的多少倍(用人口公式(1.5)).

思考题 2—2 的答案是:

按目前我国的情况推算,20 年后我国人均国内生产总值是现在的 4.113 倍,即翻两番有余.但是,我们决不能盲目乐观,下面介绍我国人口方面仍然存在着的一些不平衡问题.

我国人口的一些不平衡问题

出生人口的性别比例持续失衡,达到了惊人的程度,例如,2004 年末我国总人口129 988 万人中,男性 66 976 万人,比女性 63012 万人多了近 4 000 万.

人口老龄化进程不断加快.六十五岁以上的老龄人口,到 2020 年,将占全国总人口的一成多,到本世纪中叶,将占全国总人口的四分之一.更为严重的是,中国农村人口老龄化水平高于城镇,老年人健康和保障问题面临更严峻挑战.

人口增长过快不利于经济可持续发展;反之,人口下降速度过快也会导致人口老化、劳动力短缺等一系列问题,同样不利于可持续发展.中国在今后相当长的一段时间内,人口萎缩的问题也许不突出,但人口平衡的问题依然存在.目前,我国人口增长速度已得到有效控制,人口快速增长而影响可持续发展已不再是主要矛盾,但消费方式升级和消费水平大幅度提高对我国资源环境将产生极大的压力.另外,人口年龄和性别结构的变化和扭曲及贫富差距的扩大也对实现经济可持续发展造成很大的困难.

C. 人口发展方程

以上讨论的经典人口模型只考虑人口总数及总的增长率,不涉及人口的年龄结构.为了更好地研究人口问题,我们需要涉及时间变量和人数变量的人口发展方程,它是一个偏微分方程.

使人口变化的因素是出生、死亡和迁移,为简单计,只考虑自然出生和死亡因素.

为研究任意时刻不同年龄结构的人口数量,我们仿照概率分布函数和概率密度函数的分析方法,引入人口分布函数和人口密度函数.

人口发展方程的推导

先引进若干重要概念和符号. 时刻 t 年龄小于 r 的人口记为 $F(r, t)$, 称为人口分布函数, t, r 均为非负连续变量. 记时刻 t 人口总数为 $N(t)$, 最高年龄为 r_m , 则非负非降函数 $F(r, t)$ 满足

$$F(0, t) = 0, F(r_m, t) = N(t).$$

人口密度函数定义为 $p(r, t) = \partial F / \partial r$, 其含义是: 对很小的 dr , $p(r, t)dr$ 表示时刻 t 在年龄区间 $[r, r + dr)$ 内的人数.

记 $\mu(r, t)$ 为时刻 t 年龄 r 的人的死亡率, 其含义是 $\mu(r, t)dr$ 表示时刻 t 在年龄区间 $[r, r + dr)$ 内单位时间的死亡人数.

现在来推导 $p(r, t)$ 满足的微分方程及定解条件, 这就是我们要建立的人口发展方程. 考察时刻 t , 年龄在 $[r, r + dr)$ 内的人到时刻 $t + dt$ 的情况, 他们中活着的人将处于年龄区间 $[r + dt, r + dr + dt)$, 而在 dt 时间内死亡的人数为 $\mu(r, t)p(r, t)drdt$, 故有

$$p(r, t)dr - p(r + dt, r + dr + dt)dr = \mu(r, t)p(r, t)drdt \quad (1.7)$$

(1.7) 式可近似地写作 ($dr \approx dt$)

$$\begin{aligned} & [p(r + dt, r + dr + dt) - p(r, t + dt)]dt \\ & + [p(r, t + dt) - p(r, t)]dr \\ & = -\mu(r, t)p(r, t)drdt \end{aligned}$$

由上式推出 $p(r, t)$ 满足的偏微分方程是

$$\partial p / \partial r + \partial p / \partial t = -\mu(r, t)p(r, t),$$

其中 $\mu(r, t)$ 是已知函数. 这个一阶偏微分方程有两个定解条件: ① 初始密度 $p(r, 0) = p_0$; ② 单位时间出生的婴儿数, 或婴儿出生率 $p(0, t) = f(t)$. 所以, 发展方程及定解条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r, t)p(r, t), t, r > 0 \\ p(r, 0) = p_0(r), \quad p(0, t) = f(t) \end{cases}$$

人口发展方程的解

发展方程求解较复杂, 这里限于死亡率与时间无关 ($\mu(r, t) = \mu(r)$) 的特殊情况, 给出它的解为 (读者不难直接验证此解)

$$p(r, t) = \begin{cases} p_0(r - t) \exp(-\int_{-t}^r \mu(s) ds), & 0 \leq t \leq r \\ f(t - r) \exp(-\int_0^r \mu(s) ds), & t > r \end{cases} \quad (1.8)$$

注: 对角线 $r = t$ 把平面 otr 分为两部分, 在 $t < r$ 区域, $p(r, t)$ 由人口初始密度 $p_0(r - t)$ 和死亡率决定; 在 $t > r$ 区域, 则由未来生育状况 $f(r - t)$ 和死亡率决定.

思考题 2-3

验证公式 (1.8) 满足所讨论的一阶偏微分方程及其定解条件.

人口指数

人口密度函数 $p(r, t)$ 可以用来定义下列若干描述人口特征的人口指数.

$$\textcircled{1} \text{ 人口总数 } N(t) = \int_0^{r_m} p(r, t) dr$$

$$\textcircled{2} \text{ 平均年龄 } R(t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^{r_m} r p(r, t) dt$$

③ 平均寿命

$$S(t) = \int_t^\infty \exp(-\int_0^{r-t} p(r, t) dr) dt$$

$$\textcircled{4} \text{ 老龄化指数 } \omega(t) = R(t)/S(t)$$

⑤ 依赖性指数

$$\rho(t) = (N(t) - L(t))/L(t)$$
$$L(t) = \int_{l_1}^{l_2} [1 - k(r,t)] p(r,t) dr + \int_{l_1'}^{l_2'} k(r,t) p(r,t) dr$$

其中, $k(r,t)$ 为女性性别比函数*, 即时刻 t 在年龄区间 $[r, r + dr]$ 的女性人数为 $k(r,t) p(r,t) dr$, $[l_1, l_2]$ 和 $[l_1', l_2']$ 分别是男性和女性有劳动能力的年龄区间, $L(t)$ 是全体人口中有劳动能力的人数, 所以依赖指数 $\rho(t)$ 表示平均每个劳动力要供养的人数.

★ 女性在单位时间内平均每人的生育数记作 $b(r,t)$, 设育龄区间为 $[r_1, r_2]$, 则婴儿出生率为

$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t) k(r,t) p(r,t) dr$$

再将 $b(r,t)$ 定义为: $b(r,t) = \beta(t) h(r,t)$, 其中, $h(r,t)$ 满足 $\int_{r_1}^{r_2} h(r,t) dr = 1$

于是 $\beta(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t) dr$

$$f(r,t) = \beta(t) \int_{r_1}^{r_2} h(r,t) k(r,t) p(r,t) dr$$

由此可见, $\beta(t)$ 是时刻 t 单位时间内每个育龄女性的生育数, 称为总和生育率.

§ 2.2 单种群饲养收获模型

本节研究涉及天然渔场、畜牧场等养殖业可持续发展的一种稳定而合理的收获模型.

典型问题: 天然的孤立渔场如何安排合理的稳定捕捞, 使之能维持高效益的可持续性发展?

- 模型假设:
- ① 与外界水域不相通;
 - ② 不投放鱼苗;
 - ③ 每年按固定季节和固定强度捕捞.

关键词和研究重点

关键词:

收获率(或捕捞强度), 即单位时间(每季度)捕捞鱼的数量: $h(t)$;

稳定收获率指每季度捕捞量是常数, 即满足: $h(t) = h = \text{常数}$.

研究重点:

在上述假设下我们只研究稳定收获率, 特别是探讨能维持高效益可持续性发展的稳定收获率.

存在最优稳定收获率

稳定收获率 h 过小不好, 因为捕捞量小, 经济收益就少; 更有甚者, 少捕会使鱼的密度过大, 造成生长不良, 从而使增长率变低, 实质上导致此“未动用资产”减少. h 是否越大越好呢? 答案也是否定的. 因为过多捕捞会使鱼增长率下降, 长此以往, 存鱼量会越来越少的, 甚至发展到无鱼可捞的地步, 犯下所谓“竭泽而渔”之大忌.

结论: 客观上存在具有最高经济效益的最优稳定收获率, 我们的任务就是建立数学模型, 并利用它分析和确定最优稳定收获率.

数学建模

令 $x(t)$ 为第 t 季度捕捞开始时的存鱼量, $t = 0, 1, 2, \dots, x(0) = x_0$ 为已知; $h(t) = h$ 为第 t 季度稳定收获率(常数); 则由同样适用于鱼的自然增长情形的 Logistic 增长模型得 $x(t)$ 满足下列微分方程的初始问题:

$$\begin{cases} x'(t) = k(1 - x(t)/M)x(t) - h \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, M 为该渔场可养鱼的最大量; k 为该渔场鱼的平均增长率(M, k 可由渔场的历史资料结合统计学、生物学等知识分析而确定).

稳定收获率的性态

在微分方程(2.1)的基础上推导下列结论:

A) 可行性稳定收获率 h 应满足

$$0 < h \leq kM/4. \quad (2.2)$$

证:用配方法将(2.1) 改写为

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{M}\left(x - \frac{M}{2}\right)^2 + \frac{kM}{4} - h. \quad (2.3)$$

由此推出:若 $h > kM/4$, 则 $dx/dt < 0$, 在此(负稳定)收获率下, 渔场存鱼量将越来越少, 故不足取. $h = 0$ 意味着没有捕捞, 显然没有实际经济意义; $h < 0$ 意味着往渔场投放鱼苗, 也不符合模型假设. 所以不等式(2.2) 成立.

注:

当 $x = M/2$ 时, 取 $h = kM/4$, 可保持 $dx/dt = 0$, 从而 $x(t) \equiv M/2$ 保持为常数.

因此

$kM/4$ 就是理想的最大稳定收获率, $x = M/2$ 是对应的理想最大稳定存鱼量.

B) 对应于稳定收获率 h 的存鱼量稳定值为 $x = (1/2)(M + (M^2 - 4hM/k)^{1/2})$.

证:由(2.3) 得

$$dx/dt = -(k/M)(x - \alpha)(x - \beta),$$

其中, $\alpha = (1/2)(M - (M^2 - 4hM/k)^{1/2})$,

$$\beta = (1/2)(M + (M^2 - 4hM/k)^{1/2}) > \alpha.$$

由此可得导数 dx/dt 的零点及为正、为负的区域如下表所示:

x	$x < \alpha$	$x = \alpha$	$\alpha < x < \beta$	$x = \beta$	$\beta < x$
dx/dt	-	0	+	0	-

由上表直接看出:

① 当 $x(t) < \alpha$ 时, 恒有 $dx/dt < 0$ (单减), 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$.

② 当 $\alpha < x(t) < \beta$ 时, 恒有 $dx/dt > 0$ (单增), 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow \beta$.

③ 当 $x(t) > \beta$ 时, 恒有 $dx/dt < 0$ (单减), 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow \beta$.

④ 当 $x(t) = \alpha$ 或 β 时, $dx/dt = 0$, 恒有 $x(t) = \alpha$ 或 β . 但若 $x(t)$ 离 α 稍有偏差, 例如, 比 α 稍小时, 由 ① $x(t)$ 会趋向于 0 而远离 α . 有趣的是: 由 ②, ③ 不难推出, $x(t)$ 从左右两边偏离 β 时, $x(t)$ 都会自动稳定在 β 处. 所以, $x = \beta$ 是唯一的稳定状态.

最大稳定收获率及其计算

我们已经推出:可行的稳定收获率 h 应满足

$$0 = dx/dt = kx(1 - x/M) - h,$$

即 $h = kx(1 - x/M) \equiv h(x)$.

称 $h(x)$ 的最大值 $h(u)$ 为最大稳定收获率. 利用微积分知识, u 应满足:

$$0 = dh(u)/dx = k(1 - 2u/M)$$

和 $0 > d^2h(u)/dx^2 = -2/M$.

由此确定 $u = M/2$, 并断定它对应于最大值, 这个最大值, 即最大稳定收获率是

$$h^* = h(u) = ku(1 - u/M) = kM/4.$$

最大稳定收获率是最理想的

由 A) 的注知:理想最大稳定收获率应该是

$$h^* = kM/4.$$

由 B) 的讨论知:对应于 h^* 的存鱼量稳定值是

$$\begin{aligned} x^* &= (1/2)(M + (M^2 - 4h^*M/k)^{1/2}) \\ &= M/2. \end{aligned}$$

正是我们上面定义的最大稳定收获率. 所以, 最大稳定收获率就是理想最大稳定收获率.

分析有关结论

- ① 理想最大稳定收获率 $h^* = kM/4$ 对应的存鱼量稳定值 $x^* = M/2$ 恰好是最大可能存鱼量 M 的一半.
- ② 如果定义: 捕捞率 $f =$ 收获率 $h/$ 存鱼量 x , 则最大捕捞率是:
 $f^* = h^*/x^* = (kM/4)/(M/2) = k/2$,
即最大捕捞率 f^* 是平均增长率 k 的一半.
- ③ 结论: 在稳定生产条件下, 保持每次捕捞率为平均增长率 k 的一半(相当于保持最大稳定收获率 $h^* = kM/4$), 将保持存鱼数恒为最大可能存鱼量的一半, 而实现良性生态循环.

利润分析与最优收获率

现在转向经济方面. 假设该渔场的鱼单价为 p ; 每次捕捞费为 cf (即与捕捞率成正比, c 为比例常数), 则每季度利润为

$$z = pfx - cf.$$

在稳定情况下有

$$0 = dx/dt = kx(1 - x/M) - fx. (\because h = fx)$$

由此推出 $f = k(1 - x/M)$, 从而

$$z = (px - c)k(1 - x/M) \equiv z(x)$$

(为 x 的二次函数)

称 $z(x)$ 的最大值为最优收获率.

因 $z''(x) < 0$,
和 $z'(x) = pk(1 - x/M) - k(px - c)/M$
的零点为 $u = (pM + c)/(2p)$, 故最优收获率为

$$\begin{aligned} h(u) &= f(u)u = \frac{k}{M}(M - u)u \\ &= \frac{k}{2pM}(pM + c) \frac{pM - c}{2p} \\ &= \frac{k}{4p^2M}(M^2p^2 - c^2) \end{aligned}$$

整理得 $h(u) = \frac{kM}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2M^2}). \quad (2.4)$

最优收获率的剖析

- ① 令 h' 表示最优收获率, 则公式 (2.4) 写成:
 $h' = (1 - c^2/(pM)^2)h^* = rh^*$
(其中 $r = 1 - c^2/(pM)^2 < 1, h^* = kM/4$)
换句话说, 最优收获率与最大收获率 h^* 成正比, 并总是严格小于最大收获率.
- ② 鱼越贵, 即 p 越大, 则 r 越大, 从而 h' 越大, 与“鱼价好时应适当多捕”的常识相符.
- ③ 捕捞费越贵, 即 c 越大, 则 r 越小, 从而 h' 越小, 与“打捞费用贵时不宜多捕”的常识相符.

思考题 2-4

如何解释“最优收获率永远严格小于最大收获率”的正确性?

§ 2.3 两种动物的弱肉强食模型

典型生态平衡问题: 在一个封闭的自然环境下生存有两种动物, 例如在水草丰盛的小岛上只生存有狐和兔两种动物. 兔不缺食物, 狐则以兔为食. 兔靠快速地繁殖和机智地逃避求得生存与发展. 不难看出这个岛上存在如下生态平衡: 兔依靠丰盛水草而大量繁殖; 兔多则狐易得食也随之大量繁殖; 狐多捕食兔也多, 势必造成兔量不断减少; 兔量过少狐就会因觅食困难而减员; 狐量少使幸存的狡兔们相对安全从而兔量又转为回升. 狐兔量就这样交替增减, 稳定地无限循环下去, 形成这个岛上狐与兔的生态平衡.

弱肉强食生态平衡的 Volterra 模型

假设:岛上只有狐兔两种动物;岛上气候温和,水草丰盛,无自然灾害.

令 t 时刻的兔、狐数分别为 $x(t), y(t)$, 意大利数学家 Volterra 建立下列数学模型:

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - by), \\ dy/dt = -y(m - nx), \\ t \geq 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

其中, a, b, m, n 为正的常数(生物含义见后).

Volterra 模型的解释

兔增长率为 $a - by$, 即 y 越小增加越快;反之,则越慢,甚至负增长; $y = 0$ 时,对应于兔的自然增长率 a .

狐增长率为 $nx - m$, 即 x 越大增加越快;反之,则越慢,甚至负增长;特别, $x = 0$ 时,为 $-m < 0$, 对应于在无兔可食时狐的饿死率.

a, b, m, n 可通过观察资料的统计分析而确定.

Volterra 模型的数学解

$x(t), y(t)$ 满足的一阶常微分方程组等价于

$$dx/(x(a - by)) = dt = dy/(-y(m - nx)),$$

分离变量求通解得

$$\int \frac{(a - by)dy}{y} = \int \frac{(m - nx)dx}{x},$$

$$a \ln |y| - by - \ln |C| = -m \ln |x| + nx, \text{ 即}$$

$$y^a x^m = Ce^{nx+by}.$$

代入初始条件决定常数得:

$$C = (y_0)^a (x_0)^m \exp(-nx_0 - by_0).$$

Volterra 的相图分析方法

将含同一变量的项分别移到等式的同一边可把 Volterra 模型的解写成

$$y^a e^{-by} = Cx^{-m} e^{nx}.$$

Volterra 给出一种相图分析方法如下. 令

$$L_1: z = y^a e^{-by};$$

$$L_2: w = Cx^{-m} e^{nx},$$

则上述解为 $L_3: z = w$.

因变量 x, y, z, w 全取正值, 故可在同一张坐标平面上画出曲线 L_1, L_2 和 L_3 , 并由它们确定本模型的解曲线 L , 如下图所示.

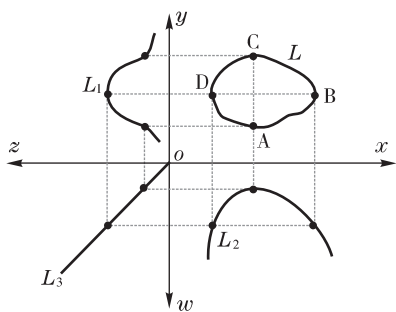


图 2-1

解曲线 L 的生物解释

从最低点 A 开始, 此时狐数减到最少使留下的兔更能存活, 故兔数继续上升, 与此同时, 留下的精英狐更易得食, 狐数也开始上升直到 B 点. 从点 B 到点 C, 兔数处于最多阶段, 狐也因食物丰盛而大量增员直到最高点 C. 从点 C 到点 D, 狐数处于最多阶段, 兔被大量捕杀而继续减员, 狐也因兔的供不应求而减员. 从点 D 到点 A, 兔数处于最少阶段, 因幸存的是能逃会躲者且狐数也较少, 故兔数开始上升而狐数继续下降直到 A 点完成一次四阶段循环. 接着再以同样方式进行新一轮循环. 形成所考察岛上的生态平衡.

进一步的讨论与研究

Volterra 模型的解曲线 L 是封闭曲线表明 $x(t), y(t)$ 都是 t 的周期函数, 周期 T 就是解曲线 L 上任一点, 例如 A , 回到原位置所需的最短时间.

借助周期函数的有关概念, 可以计算岛上兔、狐的平均值 x^*, y^* 为:

$$x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad y^* = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

不难利用已知的微分方程求出兔、狐平均值的显式公式:

$$x^* = m/n, \quad y^* = a/b. \quad (3.2)$$

思考题 2-5

证明: 兔、狐平均值的显式公式 (3.2).

兔、狐平均值公式的应用

我们知道: a, m 分别作为兔、狐的自然增长率, 饿死率是容易确定的. 如果通过观察能求得平均数 x^*, y^* , 则利用兔、狐平均值公式 (3.2):

$$x^* = m/n, \quad y^* = a/b$$

即可进一步确定其他两个参数

$$n = m/x^*, \quad b = a/y^*.$$

有人类介入的数学模型

现在考虑人类介入的情形.

假设: 岛上住有居民, 并且他们对兔、狐都进行捕杀, 固定捕杀率分别为正数 f, g .

令 $\underline{x}, \underline{y}$ 记人类介入情形的兔、狐数, 则它们满足的数学模型是下列微分方程组:

$$\begin{cases} d\underline{x}/dt = \underline{x}((a-f) - b\underline{y}), \\ d\underline{y}/dt = -\underline{y}((m+g) - n\underline{x}), \\ t \geq 0, \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \underline{y}(0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

人类介入导致生态平衡破坏

由此可见, $\underline{x}, \underline{y}$ 与 x, y 满足类似的微分方程(只个别系数不同), 于是, 由上面的结果推出, 在人类介入情形下, 兔、狐(平均)数分别为:

$$\begin{aligned} \underline{x}^* &= (m+g)/n > m/n = x^*; \\ \underline{y}^* &= (a-f)/b < a/b = y^*. \end{aligned} \quad (3.3)$$

其生物含义是: 人类的持续介入不断使兔数增而狐数减, 从而破坏狐、兔的自然生态平衡, 甚至导致有兔无狐.

思考题 2-6

人们对农作物施农药的效果是: 既杀了害虫也杀了害虫的天敌青蛙. 试用上面讨论过的理论, 分析施农药对害虫与青蛙(平均)数的影响, 并由此作出“长期施农药将破坏害虫与青蛙的生态平衡, 导致青蛙的绝灭, 最终对农业不利”的结论.

§ 2.4 万有引力定律

卓越的英国物理学家和数学家牛顿利用他的第二定律,在德国天文学家和数学家开普勒的行星运动三大定律基础上确立了万有引力定律,这是很有名的一条物理学基本定律.

牛顿万有引力定律可以叙述为:“任意两个质点之间都存在万有引力,其大小与它们的质量乘积成正比,与它们距离的平方成反比.”

牛顿的这个成就可以说是历史上最著名的数学模型之一,本节来讨论这个模型.

开普勒行星运动三大定律

开普勒发现哥白尼关于行星绕太阳作圆周运动的假说*与实际情况有出入,经过对观察数据的长期分析之后,他归纳出下面所谓的行星运动三大定律:

- ①各行星分别在不同的椭圆轨道上绕太阳运行,太阳位于这些椭圆的一个焦点上.
- ②每颗行星运行过程中单位时间内太阳一行星向径扫过的面积是常数.
- ③各行星运行周期的平方与其椭圆轨道长半轴的立方成正比.

★简单介绍一下有关的历史背景.15 世纪下半叶,欧洲商品经济的繁荣促进了航海业的发展.哥伦布新大陆的发现,麦哲伦的环球远航,引起社会的普遍关注.当时远洋航行的方位全靠星球的位置来确定.在强大的社会需求推动下,天文观测的精确程度不断提高.在大量实际观测数据面前,一直处于天文学统治地位的“地心说”开始动摇了.波兰天文学家哥白尼在大量观测数据基础上提出了“日心说”,这是天文学乃至整个科学的一大革命.但哥白尼学说仍有其缺点,即错误认为行星绕太阳的运动轨迹总是一个圆周.

万有引力定律

模型假设

如图 2-2 所示,以太阳为坐标原点,以行星 s 的椭圆半长轴方向为极轴方向建立极坐标系 (r, θ) , t 时刻用向径 $(r(t), \theta(t))$ 表示行星的位置.开普勒三定律表示为:

- ① 行星的椭圆轨道方程
 $r = p/(1 + e \cos \theta)$, $p = b^2/a$, $b^2 = a^2(1 - e^2)$
 a, b, e 分别为长、短半轴和离心率.
- ② 单位时间向径扫过的面积是常数 A ,
即 $(1/2)r^2 d\theta/dt = A$

③ 行星运行周期 T 满足(λ 为绝对常数)

$T^2 = \lambda a^3$

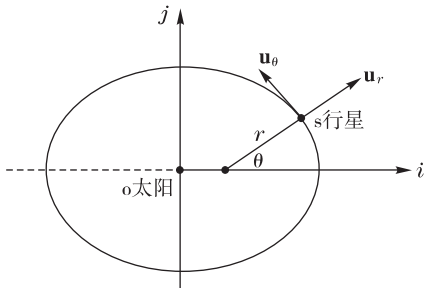


图 2-2

模型假设(续)

④ 牛顿运动第二定律表示为

$f = m \, d^2 r/dt^2$

其中, f 是行星运行时受的作用力,它等于行星质量 m 和加速度 $d^2 r/dt^2$ 的乘积.

注:本节中,用黑体字母表示向量;用非黑体字母表示纯量.

模型建立

万有引力定律研究 f 的方向与大小,可用公式④进行分析.为了计算 r 的二阶导数,先要计算 r 及其一阶导数,为此,我们引入下列方向向量(见图 2-2):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= i\cos\theta + j\sin\theta; \mathbf{u}_\theta = i(-\sin\theta) + j\cos\theta \\ \text{则 } \mathbf{r} &= r\mathbf{u}_r; \\ d(\mathbf{u}_r)/dt &= \mathbf{u}_\theta d\theta/dt; \\ d(\mathbf{u}_\theta)/dt &= -\mathbf{u}_r d\theta/dt; \\ d\mathbf{r}/dt &= \mathbf{u}_r dr/dt + \mathbf{u}_\theta r d\theta/dt; \\ d^2\mathbf{r}/dt^2 &= \mathbf{u}_r (d^2r/dt^2 - r(d\theta/dt)^2) \\ &\quad + \mathbf{u}_\theta (rd^2\theta/dt^2 + 2dr/dtd\theta/dt) \quad ⑤ \end{aligned}$$

由②可得

$$d\theta/dt = 2A/r^2; d^2\theta/dt^2 = -4Adr/dt/r^3 \quad ⑥$$

由⑥可知 $rd^2\theta/dt^2 + 2dr/dtd\theta/dt = 0$,从而⑤式简化为

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{u}_r (d^2r/dt^2 - r(d\theta/dt)^2) \quad ⑦$$

对椭圆轨道方程两边求导并用⑥式得

$$dr/dt = 2Ae\sin\theta/p;$$

$$d^2r/dt^2 = 4A^2e\cos\theta/pr^2 = 4A^2(p-r)/pr^3$$

将上式代入⑦化简得

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{u}_r (-4A^2/pr^2) \quad ⑧$$

最后得

$$\mathbf{f} = md^2\mathbf{r}/dt^2 = (-4mA^2/pr^2)\mathbf{u}_r \quad ⑨$$

其中, $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$ 是向径方向的单位向量.⑨式表明:行星运行时,所受力 f 的方向与向径 r 方向相反,即在太阳—行星连线方向,并指向太阳; f 的大小与行星质量 m 成正比,与太阳—行星距离 r 的平方成反比, f 其实就是太阳对行星的引力.

最后,还需要证明:⑨式中的 A^2/p 是绝对常数,与具体哪一个行星都无关.

因为, A 是单位时间内向径扫过的面积,运行一个周期 T ,向径扫过的面积恰是以 a, b 为长、短半轴的椭圆面积,所以

$$TA = \pi ab$$

由上式及①,③中有关式子不难推出

$$A^2/p = \pi^2/\lambda$$

因 π 和 λ 均为与行星无关的绝对常数,故我们要证的结论成立.将上式代入⑨得

$$\mathbf{f} = (-4\pi^2 m/\lambda r^2)\mathbf{u}_r \quad ⑩$$

此式与熟知的公式

$$\mathbf{f} = (-kMm/r^2)\mathbf{u}_r \quad M \text{ 为太阳质量}$$

相比较应该成立

$$4\pi^2/\lambda = kM$$

思考题 2-7

将上面推导的太阳—地球万有引力公式,即公式⑩与熟知的公式

$$\mathbf{f} = (-kMm/r^2)\mathbf{u}_r \quad M \text{ 为太阳质量}$$

相比较,并查询太阳质量,地球运行椭圆轨道的长半轴,太阳对地球引力常数等数据,说明二者是一致的.

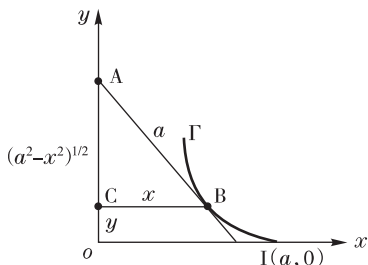
§ 2.5 盯梢与追逐模型

I 盯梢模型

警察盯梢罪犯的一种数学模型可以描述如下:在坐标平面 $o-xy$ 上以点 A, B 分别代表罪犯、警察的位置;盯梢意味着在任何时刻 t , A, B 距离保持为常数 $a > 0$,并且 B 的运动方向都是指向 A 的假设.更假设开始时刻, A 在原点, B 在 $(0, d)$ 处,此后, A 沿 y 轴正方向逃跑.

问题是求作警察 B 的盯梢路径(运动轨迹).

注:某些别的问题也归结为上述模型.例如,长为 a 的金属连杆 AB ,经端点 A 处的滑孔(忽略摩擦)套在 y 轴上;开始时 $A = (0,0)$, $B = (a,0)$,此后 A 沿 y 轴正方向滑动,要求刻画 B 的运动轨迹.



分析与建模

① 令 $B = (x(t), y(t))$. 我们希望寻求 B 的两坐标之间的关系: $y = f(x)$, 此函数的图形就是我们要求的轨迹.

② 由物理常识知:任何时刻都有 $0 \leq x \leq a$.

③ 任何时刻, A 与 B 的距离都等于 a , 并且 B 的运动方向指向 A , 或者说, A 是以 B 为圆心, a 为半径的圆和过 B 的切线的交点. 利用导数的几何性质立即得到 B 的坐标满足下列微分方程初始问题:

$$\begin{cases} dy/dx = -(a^2 - x^2)^{1/2} / x \\ y(a) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

初始问题(5.1)的解

通解

$$\begin{aligned} y &= \int -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} (-x dx) \\ &= \int \frac{u \cdot u du}{a^2 - u^2} = \int \left(\frac{a}{2(a+u)} + \frac{a}{2(a-u)} - 1 \right) du \\ &= \frac{a}{2} (\ln(a+u) - \ln(a-u)) - u + C \\ &= \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

其中,用了积分变换: $u = (a^2 - x^2)^{1/2}$. 用初始条件 $y(a) = 0$ 确定任意常数得: $C = 0 - (a/2)\ln(1) = 0$.

故 B 的运动轨迹的方程为

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

满足方程(5.2)的曲线称为曳线.

$$\begin{aligned} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - x^2})(a + \sqrt{a^2 - x^2})}{(a - \sqrt{a^2 - x^2})(a + \sqrt{a^2 - x^2})} \\ &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - x^2})^2}{x^2} \\ &= \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right)^2 - \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

进一步的讨论与研究

① 由前面的分析知:任何时刻都有

$$dy/dx < 0,$$

即 $y(x)$ 是 x 的单调减函数,其反函数 $x(y)$ 存在,也为单减函数.

② 由公式(5.1)知: $y(x)$ 的定义域是:

$$0 < x \leq a.$$

③ 由前面的分析知:

当 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $y \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$;

从而

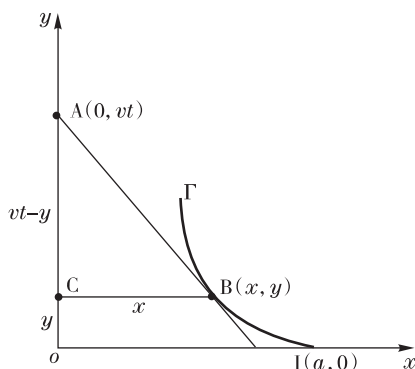
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} x(y) = 0.$$

④ B 的运动趋势描述:当 A 走得足够远以后, B 的 y 坐标将变得足够大, x 坐标则变得足够小(但保持大于0). 由此可见:当 A 走得足够远以后, B 基本上是沿着 y 轴尾随 A 并保持距离 a 的直线运动.

II 追逐模型

追逐问题:如下图所示,在坐标平面 $o-xy$ 上点 A, B 分别表示兔与狐的位置. 设兔从原点出发以常速 v 沿 y 轴正向逃跑, 狐则从点 $(a, 0)$ 出发以常速 w 追逐. 试求狐 B 的运动曲线 Γ , 并分析 v, w 值的相对大小对最后追逐结果的影响.

模型假设: 任何时刻, 狐 B 的运动方向都准确地指向兔 A , 即直线 AB 是曲线 Γ 过点 B 的切线.



数学建模

令在时刻 t 狐的位置为 $B = (x(t), y(t))$, 我们要寻求 B 的两坐标之间的函数关系: $y = f(x)$, 此函数的图形就是所欲求的运动曲线 Γ . 按假设, 时刻 t 兔的位置为 $A = (0, vt)$. 我们已经知道任何时刻, 点 A 都在曲线 Γ 过点 B 的切线上.

由导数的几何性质进一步得曲线 Γ 满足的微分方程是:

$$dy/dx = -(vt - y)/x. \quad (5.3)$$

满足的初始条件是:

$$y(a) = y'(a) = 0. \quad (5.4)$$

数学模型化简

因微分方程 (5.3) 含有参数 t , 很不便于求解, 故先设法简化它. 一种简化方法是将它等价地化为容易求解的高阶方程.

令

$$y' = dy/dx, \quad y'' = d^2y/dx^2,$$

则 (5.3) 可写成

$$xy' - y = -vt.$$

将此式两边对 x 求导得

$$xy'' = -v dt/dx. \quad (5.5)$$

数学模型求解

令 s 是沿曲线 Γ 从点 $I(a, 0)$ 到点 $B(x(t), y(t))$ 的弧长, 则

$$\begin{aligned} ds/dx &= -((dx)^2 + (dy)^2)^{1/2}/dx \\ &= -(1 + y'^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

由假设知 $ds/dt = w$, 从而

$$\begin{aligned} dt/dx &= (dt/ds)(ds/dx) \\ &= (1/w)(-(1 + y'^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

将此式代入 (5.5) 即得与 (5.3) 等价的微分方程:

$$xy'' = k(1 + y'^2)^{1/2}, \quad k = v/w. \quad (5.6)$$

引入新变量 $p(x) = y' = y'(x)$, 则 $y'' = dp/dx$, 从而由 (5.6) 和 (5.4) 得 p 满足下列初始问题:

$$\begin{cases} x dp/dx = k(1 + p^2)^{1/2} \\ p(a) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

不难求得上述问题的通解(积分)是

$$(1 + p^2)^{1/2} + p = C_1 x^k. \quad (5.7)$$

代入初始条件定得 $C_1 = 1/a^k$. 由 (5.7) 又得

$$\begin{aligned} (1 + p^2)^{1/2} - p &= 1/((1 + p^2)^{1/2} + p) \\ &= x^{-k}/C_1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

进而由 (5.7) 和 (5.8) 得

$$p = (C_1 x^k - x^{-k}/C_1)/2.$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{kdx}{x}.$$

$$\text{令 } u = (1+p^2)^{1/2} + p,$$

$$1/u = (1+p^2)^{1/2} - p,$$

$$(1+p^2)^{1/2} = (u+1/u)/2,$$

$$p = (u-1/u)/2, dp = (1/2)(1+1/u^2)du.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} &= \int \frac{(1+1/u^2)du}{u+1/u} = \int \frac{du}{u} \\ &= \ln u - \ln C_1 = \ln \frac{\sqrt{1+p^2} + p}{C_1}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{kdx}{x} = k \ln x + \text{const} = \ln(x^k) + \text{const}.$$

$$\therefore (1+p^2)^{1/2} + p = C_1 x^k \quad (5.7)$$

由此推出：曲线 Γ 满足下列一阶微分方程
初始问题：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{(x/a)^k - (x/a)^{-k}}{2} \\ y(a) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

其中, $k = v/w$ 为已知正数.

初始问题(5.9)的通解

初始问题(5.9)的通解为：

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{x}{a} \right)^k - \left(\frac{x}{a} \right)^{-k} \right] dx \\ &= \begin{cases} \frac{a}{2} \left(\frac{(x/a)^{k+1}}{k+1} - \frac{(x/a)^{-k+1}}{-k+1} \right) + C_2 & \text{当 } k \neq 1 \\ \frac{x^2}{4a} - a \ln(x/a)/2 + C_2 & \text{当 } k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

用初始条件决定 C_2 得追逐曲线 Γ 的方程

$$y = \begin{cases} \left(\frac{x^{k+1}}{2(k+1)a^k} + \frac{a^k x^{1-k}}{2(k-1)} \right) + \frac{ak}{1-k^2} & \text{当 } k \neq 1 \\ \frac{x^2 - a^2}{4a} - a \ln(x/a)/2 & \text{当 } k = 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

思考题 2-8

代入初始条件: $y(a) = 0$, 具体决定常数 C_2 , 并推导公式(5.10).

狐追到兔的充分必要条件

狐追到兔当且仅当追逐曲线 Γ 在某时刻与 y 轴相交, 即存在某 $y_1 > 0$ 使 $(0, y_1)$ 满足方程(5.10); 在此条件下追到的时刻为

$$t_1 = y_1/v.$$

狐永远追不到兔当且仅当追逐曲线 Γ 与 y 轴不相交, 或等价地, $y(0) = \infty$.

v, w 的相对大小对追逐结果的影响

结论分述如下：

情形 ①: $w > v > 0$ (狐比兔快), 此时狐将在时刻 $aw/(\omega^2 - v^2)$ 追到兔.

情形 ②: $v > w > 0$ (狐比兔慢), 狐永远追不到兔.

情形 ③: $w = v$ (狐兔同样快), 狐永远追不到兔.

上述结论的证明

情形 ①: $0 < k = v/w < 1$.

由(5.10)中第一个公式求得

$$y(0) = 0 + 0 + ak/(1 - k^2) < \infty.$$

所以(按狐追到兔的充要条件), 狐能追到兔, 且追到兔的时刻为:

$$ak/(1 - k^2)/v = aw/(w^2 - y^2).$$

情形 ②: $k = v/w > 1$.

由(5.10)中第一个公式求得($k > 1$)

$$y(0) = \infty.$$

所以(按狐追到兔的充要条件), 狐永远追不到兔.

情形 ③: $k = v/w = 1$.

由(5.10)中第二个公式得

$$y(0) = -a/4 - a \ln(0)/2 = \infty.$$

所以, 狐永远追不到兔.

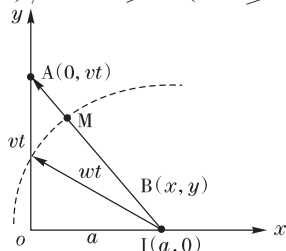
情形②和③的几何证明

t 时刻狐位于以点 $I(a, 0)$ 为圆心, wt 为半径的圆内; 兔位于点 $A(0, vt)$. 设上述圆周与直线 IA 的交点为 M , 则

$$|AM| = |IA| - |IM|$$

$$= ((vt)^2 + a^2)/2 - wt > 0. (\because v \geq w)$$

所以, 任何时刻兔都在上述圆周之外, 这就证明: 狐永远追不上兔.



思考题 2-9

证明: 当 $k = v/w = 1$ 时兔狐之间距离为

$$d(A, B) = (x^2 + a^2)/(2a) > a/2,$$

并且成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(A, B) = a/2.$$

§ 2.6 第2章思考题参考答案

思考题 2-1①

问题: 按公式(1.3)估计我国人口翻一番大约需要多少年.

解: 在公式(1.3)

$$x(t) = 11.33e^{0.0148t}$$

中令 $x(t) = 2(11.33)$, 即得

$$11.33e^{0.0148t} = 22.66,$$

再由上式求得 $t = \ln(2)/0.0148 = 46.8$ 年.

所以, 按公式(1.3)估计我国人口翻一番的时间大约是 47 年.

思考题 2-1②

问题:上世纪五十、六十年代,我国人口增长率常大于 2%,试按增长率 2% 计算人口翻一番大约需要多少年.

解:一般地,在公式(1.2)

$$x(t) = x_0 e^{kt}$$

中令 $x(t) = 2x_0$ 求得翻一番的时间为

$$t = \ln(2)/k.$$

若增长率 $k \geq 0.02$, 则人口翻一番的时间为

$$t \leq \ln(2)/0.02 = 34.7 \text{ 年}.$$

思考题 2-2

解:取 $x_0 = 13, M = 50$ 亿,按人口公式(1.5), 2024 年我国人口为

$$50/(1 + (50/13 - 1)e^{-0.1174}) = 14.16 \text{ 亿};$$

该年生产总值为 2004 年的

$$e^{0.075 \times 20} = 4.48 \text{ 倍}.$$

设 2024 年我国人均生产值是 2004 年的 x 倍,则有 $x : 13 = 4.48 : 14.16$, 从此式解得:

$$x = 4.48 \times 13/14.16 = 4.113.$$

答案:2024 年我国人均生产总值预测是 2004 年的 4.113 倍.(翻两番有余)

思考题 2-3

问题:验证公式(1.8)是所讨论的偏微分方程定解问题的解.

解:当 $0 \leq t \leq r$ 时有

$$p(r, t) = p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}$$

$$\partial p / \partial r = -p'_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}$$

$$- \mu(r-t)p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds} \\ = (-p'_0(r-t) -$$

$$\mu(r-t)p_0(r-t))e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}$$

$$\partial p / \partial r = (p'_0(r-t) - \mu(r)p_0(r-t) +$$

$$\mu(r-t)p_0(r-t))e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}$$

$$\therefore \partial p / \partial r + \partial p / \partial t = -\mu(r)p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds} \\ = -\mu(r, t)p(r, t)$$

当 $t > r$ 时有

$$p(r, t) = f(t-r)e^{-\int_0^r \mu(s) ds}$$

$$\partial p / \partial r = (-f'(t-r) - \mu(r)f(t-r))e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}$$

$$\partial p / \partial t = f'(t-r)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}$$

$$\therefore \partial p / \partial r + \partial p / \partial t = -\mu(r)f(t-r)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds} \\ = -\mu(r, t)p(r, t)$$

定解条件显然满足:

$$p(r, 0) = p_0(r)e^{-\int_r^r \mu(s) ds} = p_0(r)$$

$$p(0, t) = f(t)e^{-\int_0^0 \mu(s) ds} = f(t)$$

思考题 2-4

问题:如何解释“最优收获率永远严格小于最大收获率”的正确性?

解:一方面,最优收获率是一切稳定收获率中最大者. 另一方面,捕捞费用 f , 鱼单价 p 及最大可养鱼量 M 都是正数,从而

$$r = 1 - c^2/(pM)^2 < 1.$$

顺便指出:捕捞量增加意味着捕捞的干净程度相应增加,超过一定量时,其捕捞费用会显著地变大.

思考题 2-5

问题:证明兔、狐平均值的显式公式.

解:我们只证明 $y^* = a/b$, 另一个公式可类似地证明. 由 Volterra 微分方程有:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx}{x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a - by) dt = a - by^*.$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx}{x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx}{x} = \ln x(t) \Big|_0^T \\ = \ln x(T) - \ln x(0) = 0.$$

因而有 $0 = a - by^*$, 由此推出

$$y^* = a/b.$$

思考题 2-6

问题:证明“长期施农药将破坏害虫与青蛙的生态平衡,最终导致青蛙的绝灭”.

解:设不施农药的害虫、青蛙(平均)数为 x^*, y^* ; 施农药的害虫、青蛙(平均)数为 $\underline{x}, \underline{y}$. 则由前面的公式(3.3)得:

$$\underline{x} = x^* + g/n; \quad \underline{y} = y^* - f/b.$$

这样一来,每一季施了农药后,害虫数比上季增加一定量,而青蛙数则减少了一定量. 长此以往,害虫将越来越多,青蛙则越来越少,甚至导致青蛙的最后绝灭.

思考题 2-7

问题:证明 § 2.4 推导的公式 ⑩ 与熟知的公式: $f = (-kMm/r^2)u_r$ 是一致的.

解:将两公式相比较应该有 $4\pi^2/\lambda = kM$. 再将 λ 用 § 2.4 的公式 ③ 代入可把上式化为 $4\pi^2 a^3/T^2 = kM$. (*)

不难查得(在厘米—克—秒单位制下)

$$M = 1.989 \times 10^{33};$$

$$a = 1.521 \times 10^{33};$$

$$k = 6.67 \times 10^{-8};$$

$$T = (365.3 \text{ 天}) = 3.1562 \times 10^7.$$

代入算得(*)式左、右边分别等于 1.39×10^{26} 和 1.33×10^{26} . 可见二公式是一致的.

思考题 2-8

问题:代入初始条件: $y(a) = 0$, 具体决定常数 C_2 并推导公式(5.10).

$$\begin{aligned} \text{解: } 0 = y(a) &= \begin{cases} \frac{a}{2} \left(\frac{(a/a)^{k+1}}{k+1} - \frac{(a/a)^{-k+1}}{-k+1} \right) + C_2 \\ \frac{a^2}{4a} - a \ln(a/a)/2 + C_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{a}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{-k+1} \right) + C_2 \\ a/4 + C_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{ak}{1-k^2} \text{ 当 } k \neq 1 \\ a/4 + C_2 \text{ 当 } k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

由此求得 $C_2 = ak/(1-k^2)$, 当 $k \neq 1$; 或 $-a/4$, 当 $k = 1$. 再代入通解公式(适当化简)即得(5.10).

思考题 2-9

由公式(5.9), 当 $k = 1$ 时,

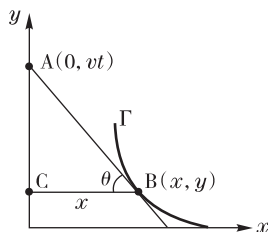
$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{dy}{dx} = -p \\ &= -\frac{\frac{x}{a} - \frac{a}{x}}{2} \\ &= \frac{a^2 - x^2}{2ax}. \end{aligned}$$

$$|BC| = x,$$

$$|AC| = |BC| \tan \theta = (a^2 - x^2)/(2a).$$

$$\begin{aligned} \therefore d(A, B) &= |AB| = (|BC|^2 + |AC|^2)^{1/2} \\ &= (x^2 + a^2)/(2a). \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} x = 0, \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} d(A, B) = a/2.$$



第 3 章 层次分析方法建模

§ 3.1 层次分析是处理决策问题的有效方法

A. 数学科学中三类不同关系及其相应处理方法.

B. 决策问题的特性.

§ 3.2 层次分析方法的基本步骤

§ 3.3 层次分析的理论基础

§ 3.4 层次分析的若干问题

§ 3.5 层次分析的广泛应用

§ 3.6 第 3 章思考题参考答案

§ 3.1 层次分析是处理决策问题的有效方法

A. 数学科学中三类不同关系及其相应处理方法

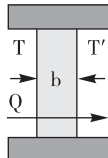
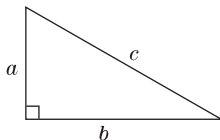
① 严格确定关系与机理分析方法.

例: 商高定理 $a^2 + b^2 = c^2$;

欧姆定律 $v = ri$;

牛顿冷却定律 $Q = k(T - T')/b$.

特点: 涉及各门学科的各种成功范例; 但不是自然界最广泛的关系.



② 随机关系与概率统计方法.

例: 掷骰子一次不一定出现红四; 但掷六次可期望出现一次红四. 在一定条件下可以说, 掷一次出现红四的概率是 $1/6$. 男婴自然出生的概率可以严格证明是 $1/2$. 测量误差服从正态分布规律, 等等.

特点: 既确定又不完全确定.



③ 不确定关系与系统分析方法.

例: 疫情(例如非典, 禽流感等)预测, 股票预测等; 三峡大坝坝高与坝址等的决策; 城市建设规划; 商品进货计划等.

特点: 答案的不确定性与多样性, 即一般地存在若干各有优缺点的答案. 需要用系统分析方法, 从不同的角度对它们进行优缺点分析, 可行性分析, 短期、长期效益分析等, 以权衡利弊, 并结合实际情况作出最满意(注意这个提法)的选择.

层次分析方法是处理这类决策问题的一个行之有效的新方法.

B. 决策问题的特性

① 广泛性: 生活中处处有决策问题.

衣: 或买或做? 款式、颜色、价格、质量(面料、做工等)如何? 等等.

食: (请朋友吃饭)或家宴或上饭馆? 如何备(点)菜? 中餐、西餐或火锅? 包席、点菜或自助餐? 等等.

住: 买房或租房? 价格? 远或近? 大或小? 厅室厨卫配置? 购物、上班、上学是否方便? 邻居与环境如何? 等等.

行: (旅游)旅行社或自主游? 国内或国外? 远或近? 往何方向? 看什么(山、水、洞、古迹、风情)? 等等.

工作: 升学或就业的决策, 个人今后发展的规划, 等等.

机构工作: 研究课题的选择; 为疑难病症确定治疗方案; 招标、招工的最后确定; 购买设备; 上马新产品的最后决定, 等等(涉及多种因素, 背景与知识很广泛).

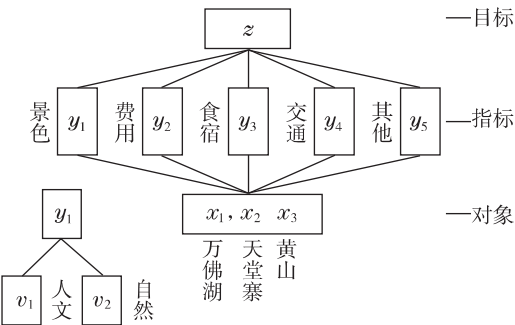
② 答案的不确定性与多样性, 即不存在唯一的毫无争议的答案, 只存在相对满意的答案(满意解).

③ 答案存在较强的主观性, 不同喜好的人会作出不同的决定(穿衣戴帽各有所好).

特性①说明决策问题的重要性。
特性②和③说明决策问题的复杂性。具体来讲,决策问题常常难以量化,结论易犯主观性毛病,不经充分讨论、研究和适当量化,就不能作出有足够说服力的结论。

因决策问题而产生层次分析方法
20 世纪 70 年代后期,针对决策问题的上述特性,力求以较客观的量化方式来分析和解决决策问题,美国学者 T. L. Saaty 提出层次分析方法(简称 AHP,英文全名是: Analytic Hierarchy Process)。
以后的发展证明,此法是解决决策问题的一个行之有效的好方法,一经提出,立即在世界范围迅速传播,产生巨大影响。20 世纪 80 年代初该法也传入我国。

例 旅游选点问题
某小家庭打算在五一黄金周出门旅游,他们拟从万佛湖、天堂寨和黄山三景点中挑选一个作为旅游目的地。如何决策?

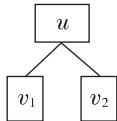


§ 3.2 层次分析方法的基本步骤
层次分析基本步骤
步骤① 建立层次模型
目标层: 就是最后决策。
对象层: 列出可供选择的对象。
指标层(还可细分): 列出影响决策的主要因素。
主要指标的选取是关键,应该仔细列出一切影响决策的因素,并通过认真的分析和比较,从中(按计算能力)选出若干最关键的因素(本旅游问题选了 5 个)。

步骤② 确定指标层对目标的权:
 $W_z(y_1, \dots, y_5) = (w_1, \dots, w_5)$
 $= (0.48, 0.27, 0.05, 0.10, 0.10).$
及对象层对每个指标的权:
 $W_{y_i}(x_1, x_2, x_3), i = 1, \dots, 5.$
步骤③ 确定对象层对目标的组合权(最后答案):
 $W_z(x_1, x_2, x_3) = W_z(y_1, \dots, y_5)A,$
其中的 A 是 5 行 3 列的矩阵,其第 i 行是 W_{y_i} .

用向量表示下层因素的重要性

设要考虑下层因素 $v_1, \dots, v_n$ 对其直接上层因素 u 的重要性贡献。例如： u 为景色； v_1, v_2 分别为人文景色、自然景色。某人认为，人文景色重要性比之自然景色是四六开，即 4:6。自然想到用一个行向量 $W = (0.4, 0.6)$ 来表示这个观点。



权向量的概念

元素全为非负且其和等于 1 的行向量

$W = (w_1, \dots, w_n)$ 称为权向量，满足

$$w_1, \dots, w_n \geq 0, w_1 + \dots + w_n = 1.$$

任何正向量 $W = (w_1, \dots, w_n)$ 乘以正数 $1/(w_1 + \dots + w_n)$ 后所得向量都是一个权向量，这个权向量称为正向量 W 的归一化。

上述旅游问题的组合权向量计算结果

$$W_z(x_1, x_2, x_3) = (0.30, 0.22, 0.47)$$

结论：三景点对旅游选址重要性的大小顺序是：黄山，万佛湖，天堂寨。

$$A = \begin{bmatrix} W_{Y_1}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_2}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_3}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_4}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_5}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.24 & 0.68 \\ 0.63 & 0.19 & 0.18 \\ 0.43 & 0.43 & 0.14 \\ 0.63 & 0.19 & 0.18 \\ 0.17 & 0.17 & 0.66 \end{bmatrix}$$

$$W_z(x_1, x_2, x_3) = W_z(y_1, \dots, y_5)A = (0.30, 0.22, 0.47).$$

组合权向量计算公式：

$$W_z(y_1, \dots, y_5) = (0.48, 0.27, 0.05, 0.10, 0.10)$$

$$A = \begin{bmatrix} W_{Y_1}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_2}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_3}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_4}(x_1, x_2, x_3) \\ W_{Y_5}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.24 & 0.68 \\ 0.63 & 0.19 & 0.18 \\ 0.43 & 0.43 & 0.14 \\ 0.63 & 0.19 & 0.18 \\ 0.17 & 0.17 & 0.66 \end{bmatrix}$$

$$W_z(x_1, x_2, x_3) = W_z(y_1, \dots, y_5)A = (0.30, 0.22, 0.47).$$

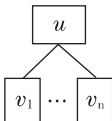
例如第一个对象(万佛湖)对选点重要性贡献是 $0.48 \cdot 0.08 + 0.27 \cdot 0.63 + 0.05 \cdot 0.43 + 0.10 \cdot 0.63 + 0.10 \cdot 0.17 = 0.30$ 。(加权平均)

§ 3.3 层次分析的理论基础

A. 基本工作模式是计算下层因素 $v_1, \dots, v_n$ 对其直接上层因素 u 的权：

$$W_u(v_1, \dots, v_n).$$

这里， $v_1, \dots, v_n$ 可以是对象层(因素层)或其子层； u 可以是目标或因素层的某一个因素。



B. AHP 用成对比较法及 9 级记分法产生比较矩阵作为分析计算的基础

仍以求旅游问题的指标层对目标的权 $W_z(y_1, \dots, y_5) = (w_1, \dots, w_5)$ 为例。即使你心目中已有了关于 5 个指标对目标重要性的一个估计，但你要一下子写出你的权 $(w_1, \dots, w_5)$ 的具体值，哪怕是近似值，也会感到很困难，因为涉及 5 个因素的全面综合比较。

层次分析方法(AHP)所建议的解决办法是一种把困难化整为零的所谓“成对比较法”，即每次只比较两个因素重要性的比值： w_i/w_j ， $i, j=1, \dots, n$.

另外，AHP 还建议估计 w_i/w_j 时，采用 9 级记分法，即：总是取其中小的一个为 1，大的一个只在前 9 个正整数中取值。其尺度及含义如下(8,6,4,2 取相应的中间含义)：

尺度	9	7	5	3	1
含义	绝对强	很强	强	稍强	相同

权 $W_z(y_1, \dots, y_5) = (w_1, \dots, w_5)$ 的一个比较矩阵

该比较矩阵 $A = (a_{ij} \approx (w_i/w_j))$ 的每个对角元均为 1： $w_i/w_i \equiv 1$ ；

先将 y_1 与 $y_2, \dots, y_5$ 成对比较得 A 的第 1 行；一般地，将 y_i 与其他 y_j 比较得 A 的第 i 行*。下面是某人定出的一个比较矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 & 5 \\ 1/2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 2 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

★ 构造比较矩阵其实只需要估定对角线(不包括对角线)以上的元素 $a_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$.

具体操作过程是：先直接写出每个 $a_{ii} = 1$ ；接着定 $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ ；然后直接写出 $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ ；下一步定 $a_{23}, \dots, a_{2n}$ ；然后直接写出 $a_{32}, \dots, a_{n2}$ ；依此类推，直到定完为止。

C. 比较矩阵的一致性

按定义，比较矩阵恒为正矩阵并满足

$$\forall i, j, a_{ij} \in \{1, \dots, 9, 1/2, 1/3, \dots, 1/9\}, a_{ii} = 1, a_{ij}a_{ji} = 1.$$

理想的比较矩阵应满足一致性条件：

$$\forall i, j, k, a_{ik} = a_{ij}a_{jk}.$$

证：所谓理想的比较矩阵应该严格满足：对任意 i, j 都有： $a_{ij} = w_i/w_j$ ，于是对任意 i, j, k 都有

$$a_{ik} = (w_i/w_j)(w_j/w_k) = a_{ij}a_{jk}.$$

提醒注意

比较矩阵体现各因素成对比较的记录，可操作性好，这是其本质方面。

但如果建立比较矩阵时工作不够投入，缺乏全局平衡，弄不好就会产生严重不一致的比较矩阵。我们用下面两个例子加以说明。

比较矩阵一致性好坏的举例

例如，求权 $W_{y_1}(x_1, x_2, x_3)$ 时，两个人分别作出下列两个比较矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 6 \\ 1/2 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}.$$

对这两个比较矩阵， $a_{13} = a_{12}a_{23}$ 都不成立。对 A ，因 $1/8 = a_{13}$ 与 $a_{12}a_{23} = 1/9$ 较为接近，故比较矩阵 A 满足一致性条件较好。但对 A' ， $3 = a_{13}$ 与 $a_{12}a_{23} = 1/3$ 则相差太远，因此 A' 满足一致性条件较差。

稍后,我们要介绍 AHP 为此专门制定的可靠性检验方法,利用这个检验方法,可以有效地发现并摒弃那些因粗制滥造而不合要求的比较矩阵.

一致矩阵的概念

定义:比较矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为一致矩阵,如果它满足一致性条件: $\forall i, j, k, a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$.

性质:若比较矩阵 A 是一致矩阵,则存在权向量 $W = (w_1, \dots, w_n)$ 严格满足:

$\forall i, j, a_{ij} = w_i/w_j$. 于是

$$A = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}.$$

所以,当比较矩阵 A 是一致矩阵时, A 的任一系列的归一化向量正好等于对应的权向量.

D. 从比较矩阵近似计算权向量

假设已有一个通过可靠性检验的比较矩阵 A , 则可由它近似地决定权向量

$W = (w_1, \dots, w_n)$. AHP 给出下列近似公式:

$Wu(v_1, \dots, v_n) = (1/n)(\beta_1 + \dots + \beta_n)$,

其中, β_j 为 A 的第 j 列的归一化, Wu 为 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 的平均值.

$$\beta_j = (1/(a_{1j} + \dots + a_{nj})) \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

计算权向量 $W_{y_1}(x_1, x_2, x_3)$

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{各列归一化}} \begin{bmatrix} 1/12 & 0.33/4.33 & 0.13/1.46 \\ 3/12 & 1/4.33 & 0.33/1.46 \\ 8/12 & 3/4.33 & 1/1.46 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{各行求和}} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.71 \\ 2.05 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{除以 } n=3} \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.24 \\ 0.68 \end{bmatrix}$$

$$\approx W_{y_1}(x_1, x_2, x_3).$$

思考题 3—1

对旅游选点问题假设已构造了下列能通过可靠性检验的有关比较矩阵:

$$A_{y_2}(x) = A_{y_4}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{y_3}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{y_5}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

试求:对应权向量的近似值.

思考题 3—2

求 n 阶全 1 方阵: $J = a_{ij}, \forall i, j, a_{ij} = 1$ 的谱(特征值的集合),并求出对应于最大特征值 $r(J) = n$ 的一个归一化正特征向量.

由思考题 3—2 的答案可见

① 矩阵 J 的谱是 $\sigma(J) = \{n, 0, \dots, 0\}$, 最大特征值是 $r(J) = n$.

② 正向量 $e = (1, \dots, 1)^T$ 是 J 的对应最大特征值 n 的一个特征向量:

$$Je = n(1, \dots, 1)^T = ne.$$

于是, J 的对应最大特征值 n 的一个归一化正特征向量是:

$$(1/n)e = (1/n, \dots, 1/n)^T.$$

正方阵的最大特征值及其特征向量

元素全为正数的实矩阵称为正矩阵. 正矩阵在应用中非常重要, 其原因可以说是基于下面由德国数学家 Perron 在 1908 年得到的一个定理(证明较难, 从略).

定理 1 任何正方阵 A 都有唯一最大特征值 $r(A)$, 其值大于 A 的任何特征值的模数, 并有对应于它的正特征向量.

E. 比较矩阵最大特征值及其特征向量

比较矩阵 A 属于所谓正互反矩阵

$$(\forall i, j, a_{ij} > 0, a_{ij}a_{ji} = 1)$$

的范畴, 它满足定理 1 的条件. 下面的定理 2 对层次分析的理论推导有关键意义, 它可由定理 1 推出.

定理 2 若关于权向量 $W = (w_1, \dots, w_n)$ 得到的比较矩阵 A 是一致矩阵, 则 A 的最大特征值为 $r(A) = n$, 并且权向量 W 就是 A 的对应于 $r(A)$ 的唯一归一化正特征向量.

证: 由定理 1, 只需证正方阵 A 的唯一最大特征值为 $r(A) = n$, 并且权向量 W 是 A 的对应于 $r(A)$ 的特征向量即可(因 $r(A)$ 为单特征值).

$$D = \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & w_n^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A \sim D^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} [1/w_1 \quad \dots \quad 1/w_n] D = J \text{ (全 1 矩阵)}$$

$$\therefore r(A) = r(J) = n; AW^T = n[w_1, \dots, w_n]^T = nW^T.$$

求近似一致矩阵的最大特征值

如果 A 是近似于一致矩阵的比较矩阵, 则可用前面介绍的方法求出 A 所对应的权向量 $W = (w_1, \dots, w_n)^T$, 从而根据定理 2

$$AW^T \approx r(A)W^T,$$

令 $AW^T = (b_1, \dots, b_n)^T$, 则

$$b_i \approx r(A)w_i \quad i = 1, \dots, n.$$

因此, AHP 给出下列求 $r(A)$ 的近似公式:

$$r(A) \approx (b_1/w_1 + \dots + b_n/w_n)/n.$$

求近似一致矩阵最大特征值的例

例 1: 关于旅游选点问题, 我们已对权 $W_{y_1}(x)$ 构造过比较矩阵 A 并求得

$$W_{y_1}(x) \approx (0.082, 0.236, 0.682).$$

现计算矩阵 A 的最大特征值 $r(A)$ 如下:

$$AW = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.082 \\ 0.236 \\ 0.682 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.246 \\ 0.709 \\ 2.046 \end{bmatrix},$$

$$r(A) = \frac{1}{3} \left(\frac{0.246}{0.082} + \frac{0.709}{0.236} + \frac{2.046}{0.682} \right) = 3.001.$$

注: 也不难得到 $r(A)$ 的精确值为 3.0015416.

例 2:

关于旅游选点问题,前面我们也对权 $W_z(y)$ 构造过比较矩阵 A 并求得 $W = W_z(y)$. 现计算 A 的最大特征值如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 & 5 \\ 1/2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 2 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0.474 \\ 0.212 \\ 0.054 \\ 0.099 \\ 0.110 \end{bmatrix} \quad AW = \begin{bmatrix} 2.42 \\ 1.34 \\ 0.27 \\ 0.50 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = \frac{1}{5} \left(\frac{2.42}{0.474} + \frac{1.34}{0.212} + \frac{0.27}{0.054} + \frac{0.50}{0.099} + \frac{0.55}{0.110} \right) = 5.08$$

思考题 3—3

对旅游选点问题假设已构造了下列能通过可靠性检验的有关比较矩阵:

$$A_{y_2}(x) = A_{y_4}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{y_3}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{y_5}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

试求:这些比较矩阵的最大特征值的近似值(提示:利用思考题 3—1 的结果).

F. 比较矩阵的一致性检验指标

检验必要性:通过检验可以做到合格者放心使用,不合格者推倒重来.

检验前提:已知对应权 $Wu(v_1, \dots, v_n)$ 的比较矩阵 A 并已求得最大特征值的近似值 r .

检验步骤:

(1) 计算一致性指标

$$CI = |r - n| / (n - 1);$$

(2) 计算可靠性指标 $CR = CI / RI$;

(3) 检验规则:比较矩阵为可靠,当且仅当 $CR < 0.1$ (相当于小 10 倍以上,可根据重要性调整).

检验指标的解释

$CI(n) = |r - n| / (n - 1)$ 是比较矩阵 A 的最大特征值 r 对同阶一致矩阵最大特征值 ($= n$) 的相对偏差,其值越小越好.

$RI(n)$ 称为随机一致性指标,是不假思索随机地构造出来的比较矩阵的一致性指标平均值, AHP 对不同 n 用 500—1000 个随机样本算出平均值列成下表*:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

★: $RI(2) = 0$ 是因为 2 阶正互反矩阵总是一致的; $RI(n)$ 是 n 的单调增加函数,说明 n 越大比较矩阵偏离一致矩阵的倾向越大.

例:检验下列两个比较矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad r(A) = 3.001, \\ CI = 0.001/2 = 0.005, \quad \text{通过!} \\ CR = 0.0005/0.58 < 0.001.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 6 \\ 1/2 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad r(A) = 3.37, \\ CI = 0.37/2 = 0.185, \quad \text{通不过!} \\ CR = 0.185/0.58 > 0.3.$$

思考题 3—4

对例 2 及思考题 3—3 中的比较矩阵 $A_{y_2}(x)$ 做可靠性检验.

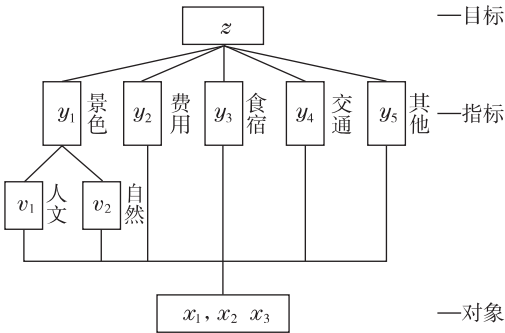
G. 多层指标的处理

可能出现多层指标情形,例如对旅游选点题的景色指标 y_1 可再细分为人文景观 v_1 , 自然景观 v_2 两种(如下一幻灯片所示).

相对于单层指标情形,对多层指标情形的处理仅在求组合权 $W_z(x_1, x_2, x_3)$ 时有所不同. 下面说明如何求这个组合权. 问题的关键是如何求 $W_{y_1}(x_1, x_2, x_3)$? 因求出它后就可按从前的方法求组合权 $W_z(x)$

一个很自然的解决办法是: 把 y_1 视为目标; v_1, v_2 视为指标层; x_1, x_2, x_3 视为对象层得到一个子层次结构,从而可按前面的方法求出 $W_{y_1}(x)$.

例 旅游选点问题



注:

多次使用这个化整为零的办法可以解决任何更复杂的多层次结构问题.

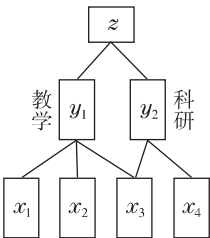
§ 3.4 层次分析的若干问题

本节从应用的角度讨论几个有关问题. 它们是:

- (1) 不完全层次分析(不同于上面讨论过的每个因素都支配着下一层的所有因素的完全层次分析情形);
- (2) 集体层次分析;
- (3) 成对比较矩阵残缺时的处理.

(1) 不完全层次分析实例

以某教研室教师工作考核为例. 该教研室共 4 名教师: x_1, x_2, x_3, x_4 . 不完全性表现在 x_1 , x_2 只教学; x_3 既教学又科研; x_4 只科研.



不完全层次分析组合权的计算

用前面的方法先求出

$$W_z(y_1, y_2) = (\alpha_1, \alpha_2);$$
$$W_{y_1}(x_1, x_2, x_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3);$$
$$W_{y_2}(x_3, x_4) = (\gamma_3, \gamma_4).$$

其次作矩阵

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}.$$

最后仍有

$$W_z(x) = W_z(y)B$$
$$= (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\gamma_3, \alpha_2\gamma_4).$$

(2) 集体层次分析

意义:减少主观性的根本措施.

办法 ①:每个人对同一问题各自作层次分析,再将他们的结果取平均值. 设共有 m 个人,他们各自为决定权 $W = Wu(v_1, \dots, v_n)$ 提供计算结果: $W_j = (w_{1j}, \dots, w_{nj}), j = 1, \dots, m$. 则可综合大家意见得最终结果为

$$Wu(v_1, \dots, v_n) = (1/m)(W^1 + \dots + W^m) \\ = (w_1, \dots, w_n),$$

其中 $w_i = (1/m)(w_{1i} + \dots + w_{mi}), i = 1, \dots, n$.

②:每人只建立比较矩阵,统一由一人取它们的综合平均值得到最后的比较矩阵,再由此人进行 AHP 计算求得权 $W = Wu(v_1, \dots, v_n)$.

值得一提的是:

求综合平均比较矩阵时,只须对任意 $i < j$,求 a_{ij} 的平均值,并用公式 $a_{ji} = 1/a_{ij}$ 决定 a_{ji} 的值即可. 此外,常用发专家咨询表的办法寻求 a_{ij} 的平均值(这个平均值可以是算术平均值或几何平均值).

成对比较矩阵残缺时的处理

专家或有关人士由于某种原因会无法对某两个因素给出相互对比的结果 a_{ij} ,于是成对比较矩阵出现残缺(不能补 0,因为要求 $a_{ij} > 0$). 这就产生如何对此作修正,以便能继续进行权向量计算的问题.

下面通过一个简例,介绍一种处理方法. 设一成对比较矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \theta \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \theta & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

其中,符号 θ 表示残缺.

记由 A 计算的权向量为 $w = (w_1, w_2, w_3)^T$,我们知道,用 w_i/w_j 代替残缺的 a_{ij} 是合理的; $Aw = rw$ 可以代替为 $Cw = rw$,其中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

不难看出: $Cw = rw$ 又可以代替为 $Bw = rw$,其中

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(例如, Cw 的第一元是 $w_1 + 2w_2 + w_1$, Bw 的第一元是 $2w_1 + 2w_2$,它们相等)

注:因 a_{13} 残缺,没有比较 1,3 二因素的直接信息,但可通过 a_{12} 和 a_{23} 获得间接信息.

对比较矩阵有多个残缺元的一般情形
矩阵 B 的作法是

$$\begin{cases} b_{ij} = 0, \text{当 } a_{ij} = \theta, i \neq j; \\ b_{ij} = m_i + 1, m_i \text{ 为第 } i \text{ 行 } \theta \text{ 的个数}, i = j; \\ \text{其他 } b_{ij} = a_{ij}. \end{cases}$$

并非任何残缺矩阵都是可以修补的. 怎样的残缺矩阵才是可以接受的呢?这个问题的答案依赖于比较矩阵中的 0 元的分布情况,已经证明:可以接受的残缺比较矩阵只是属于所谓“不可约矩阵”类* 的比较矩阵.

★ 实方阵 A 称为不可约矩阵,如果把 A 的行列编号做适当调整,可使 A 变为下面分块形式:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中,对角块 A_{11}, A_{22} 都是方阵. 这个条件等价于用一个置换矩阵 P 及其转置矩阵(也是逆矩阵)分别左、右乘 A 之后可使 A 变为上述分块形式.

§ 3.5 层次分析的广泛应用

1980 年文献:

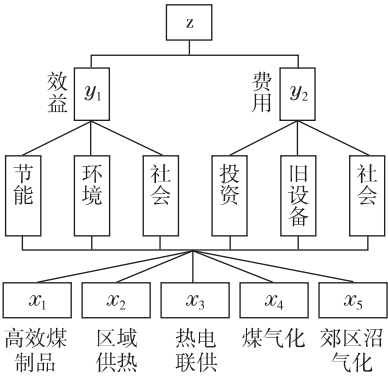
T. L. Saaty, *The Analitic Hierarchy Process*, NcGram—Hill Company, 1980.

问世之后,AHP 方法迅速在全世界得到认可,用于评价、预测、计划与管理等方面,并广为流传. 在军事指挥、运输、农业、教育、医疗、环境等领域都取得了显著的成绩。

AHP 方法 1980 年代初也传入我国并取得很大成绩. 大家今天学过此法以后,在你们今后的学习和工作中也许会派上用场.

下面介绍几个层次分析的应用实例.

实例 1 某城市供热系统改造方案



解:化为分别以效益 y_1 ,费用 y_2 为目标两个层次分析问题,并分别求得组合权向量为 $W_1 = (0.101, 0.264, 0.326, 0.256, 0.053)$ 和 $W_2 = (0.056, 0.326, 0.192, 0.388, 0.040)$.

W_1 的第 3 分量最大说明:热电联供效益最好;而 W_2 的第 5、第 1 分量最小说明:沼气、高效煤制品费用最低. 问题是如何把两个方面结合起来进行分析.

把它们结合在一起进行综合分析时,可利用 W_1, W_2 的特点定义一个综合权向量 W ,其分量是 W_1 的分量除以 W_2 的对应分量.

代入已求出数据得到向量

$$\left(\frac{0.101}{0.056}, \frac{0.264}{0.032}, \frac{0.326}{0.192}, \frac{0.256}{0.388}, \frac{0.053}{0.040} \right).$$

再归一化得

$$W = (0.288, 0.128, 0.268, 0.104, 0.212).$$

综合意见:

推广高效煤炉及煤制品虽然效益不太高,但所需费用很低,少量资金投入即可迅速生效,可优先实施. 待资金积累较多以后再上马热电联供方案.

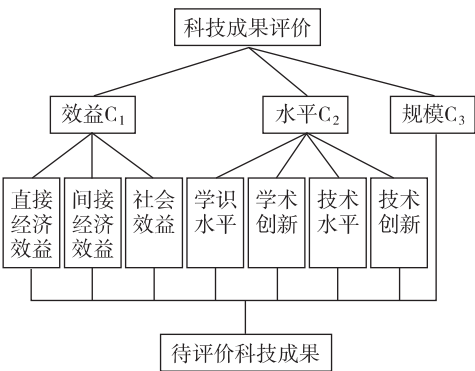
实例 2 科技成果的综合评价

科技成果涉及的领域很广,种类繁多,这里指的是直接应用于国民经济的某个生产部门后,可迅速地转化为生产力,带来可定量计算的经济效益的那一类成果.

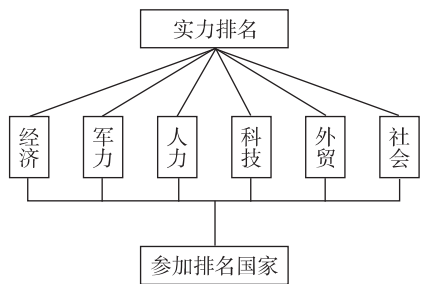
评价准则先分为效益、水平和规模 3 类;再在每类中确定若干具体指标.

如此构造的一个层次结构如下图所示.

实例 2



实例 3 大国综合实力排名次



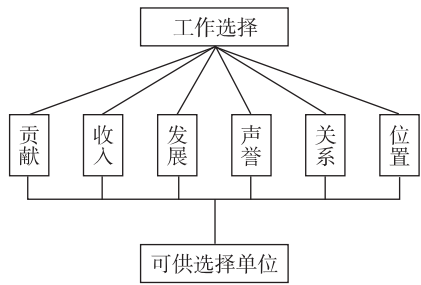
实例 4 个人工作选择

一个本科毕业大学生面临选择工作岗位，他(她)将要考虑的择业原则是：

能够发挥自己才干为国家作贡献；丰厚的收入；适合个人的兴趣及发展；良好的声誉；人际关系和地理位置。

于是可以构成如下图所示的层次结构。

实例 4



思考题 3—5

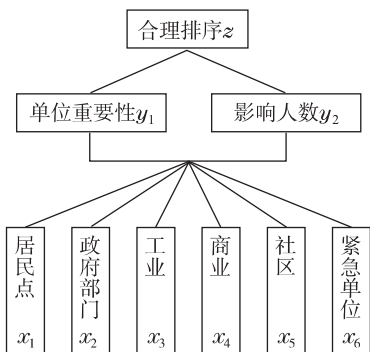
对你将来报考研究生或找工作，取 4 个你最在意的指标因素和 3 个对象，用层次分析作一个定量计算，并检验计算结果的合理性(只求对个别比较矩阵做可靠性检验)。

实例 5 MCM—92B 有关问题

1992 年国际大学生数学建模竞赛 B 题是关于为沿海地区服务的电力公司处理风暴引起电力中断的应急系统修复计划。题中给出具体的计算机数据库，列举了一次事故发生当天，该公司接到的修复请求者及所涉及人数，并把请求者分类为居民点、政府部门、工业、商业、社区和紧急单位等 6 类。该问题要求建立安排工作计划的客观准则，势必涉及按给定数据为各类请求者优先排序。

这里介绍某参赛队用层次分析排序的详情。

先建立如下层次结构：



在第 2 层两个因素之间进行比较,一种观点认为“单位重要性”比之“影响人数”为“强”,从而决定指标层对目标层的权向量为 $w_z(y_1, y_2) = (5/6, 1/6)$.

为了求对象层关于因素 y_1 的权向量,将 6 个对象,即 6 类修复请求者进行成对比较,一种观点给出下列比较矩阵(其中,6 个对象,按居民点、政府部门、工业、商业、社区和紧急单位依次排序,即 $y_1 =$ 居民点, $\dots, y_6 =$ 紧急单位):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1/3 & 1/9 \\ 6 & 1 & 3 & 5 & 3 & 1/7 \\ 6 & 1/3 & 1 & 6 & 4 & 1/6 \\ 4 & 1/5 & 1/6 & 1 & 3 & 1/9 \\ 3 & 1/3 & 1/4 & 1/3 & 1 & 1/9 \\ 9 & 7 & 6 & 9 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

用数学软件求得 A 的最大特征值为 $r(A) = 6.589$,对应归一化特征向量为 $(0.026, 0.188, 0.141, 0.045, 0.051, 0.549)$.

对于这个比较矩阵有 $CI = 0.589/5 = 0.118, CR = 0.118/1.24 < 0.1$,能通过一致性检验.所以上述向量可以取为权 $w_{y_1}(x_1, \dots, x_6)$.

MCM92—B 问题提供的数据有

单位类型	居民点	政府部门	工业	商业	社区	紧急单位
影响人数	1615	5900	1035	75820	3100	395

总共 87865 人,各类型所占比率即为对“影响人数”的权系数:

$w_{y_2}(x_1, \dots, x_6)$

$= (0.018, 0.067, 0.012, 0.862, 0.035, 0.004)$.

最后求得组合权向量为

$w_x(x_1, \dots, x_6) = (5/6)w_{y_1}(x) + (1/6)w_{y_2}(x)$

$= (0.025, 0.168, 0.119, 0.181, 0.048, 0.458)$

请求者类型的优先级即可按此向量排序.

§ 3.6 第 3 章思考题参考答案

思考题 3—1 计算 $W_{y_2}(x_1, x_2, x_3)$

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

各列归一化 $\rightarrow \begin{bmatrix} 0.632 & 3/5 & 2/3 \\ 0.211 & 1/5 & 1/6 \\ 0.158 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$

各行求和 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1.785 \\ 0.830 \\ 0.385 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{除以 } n=3} \begin{bmatrix} 0.633 \\ 0.277 \\ 0.175 \end{bmatrix}$

$\approx W_{y_2}(x_1, x_2, x_3)$.

思考题 3—2

问题:求 n 阶全 1 方阵 J 的谱(特征值的集合),并求出对应于最大特征值 $r(J) = n$ 的一个归一化正特征向量.

解:先计算特征多项式

$\text{Det}(\lambda E - J) = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$ (详细计算见后).

进而求得 J 的谱为

$\sigma(J) = \{n, 0, \dots, 0\}$.

易见方程 $Jx = nx$ 有一个正解: $e = (1, \dots, 1)^T$. 所以,对应 J 的单特征值 n 的唯一归一化正特征向量是 $(1/n)e$.

$$\begin{aligned}
 \text{Det}(\lambda E - J) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 \text{各行加到} &= \begin{vmatrix} \lambda-n & \lambda-n & \cdots & \lambda-n \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 \text{第一行} &= (\lambda-n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 \text{各行加} &= (\lambda-n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\
 \text{第一行} &= (\lambda-n) \lambda^{n-1}.
 \end{aligned}$$

思考题 3-3

已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W_{y_2}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0.633 \\ 0.277 \\ 0.175 \end{bmatrix},$$

求 A 的最大特征值的近似值.解: $AW = (1.91, 0.578, 0.525)^T$,

$$\begin{aligned}
 R(A) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1.91}{0.633} + \frac{0.578}{0.277} + \frac{0.525}{0.175} \right) \\
 &= 3.009.
 \end{aligned}$$

思考题 3-4

问题:对例 2 及思考题 3-3 中的比较矩阵 A 做可靠性检验.解:对例 2, $n = 5$, 我们已求出 $r(A) = 5.08$, 查表得 $RI(5) = 1.12$, 从而

$$CI = (5.08 - 5)/4 = 0.02,$$

$$CR = 0.02/1.12$$

$$= 0.018 < 0.1, \text{通过检验.}$$

对 3-3 中的比较矩阵 A , $n = 3$, $r(A) = 3.009$, 查表得 $RI(3) = 0.58$, 从而

$$CI = 0.009/2 = 0.0045,$$

$$CR = 0.0045/0.58$$

$$= 0.0077 < 0.1, \text{通过检验.}$$

第4章 矩阵分析方法建模

§ 4.1 循环联赛的奖金分配及排名问题

§ 4.2 有限网络的一些有趣问题

§ 4.3 数据处理的一些有趣问题

§ 4.4 第4章思考题参考答案

§ 4.1 循环联赛的奖金分配及排名问题

随着人们生活水平的提高,人们不但喜爱体育,而且喜爱体育比赛,出现千千万万的各种体育比赛迷.

随着我国经济的迅速崛起,各种超级联赛也应运而生.大型赛事常常是人们茶余饭后的主要话题.

体育比赛中也有数学建模问题,本节就来介绍循环联赛的奖金分配及排名次所涉及的数学建模问题.

A 循环联赛的奖金分配问题

背景:已有多年的循环比赛历史的 n 支球队:

$$T_1, T_2, \dots, T_n$$

今年照例举行无平局的循环联赛,约定按下列规则发放奖金.

规则:战胜 T_i 得奖金 $x_i a$ 元, a 为待定的奖金单位(换句话说,各队奖金按比例

$x_1 : x_2 : \dots : x_n$ 发放).

问题:如何合理地决定奖金系数向量

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (准确到相差正因子 a),使对每一队来说都保持公平?

问题分析与假设

奖金向量的公平性体现在:

$$T_i \text{ 越强} \Leftrightarrow x_i \text{ 越大.}$$

(战胜强队是衡量球队发挥好的标志)

各队强弱程度用胜负概率矩阵 $F = (f_{ij})$ 来刻画, f_{ij} 表示 T_i 战胜 T_j 的概率.

假设: n 个队中没有特别强或特别弱的队(否则该队早已升级或降级离开了),即

$$\forall i \neq j, 0 < f_{ij} < 1, f_{ij} = 1 - f_{ji};$$

为方便起见,更设 $\forall i, f_{ii} = 0$.

胜负概率矩阵简例

设 $n = 3$; 在过去的十场比赛中

T_1 对 T_2 6 胜 4 负;

T_1 对 T_3 7 胜 3 负;

T_2 对 T_3 2 胜 8 负.

则胜负概率矩阵为:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}.$$

胜负概率矩阵需要精细地确定

仅按过去 T_i, T_j 两队比赛总场数及胜负场数之比确定 f_{ij} , 虽然操作简单,但是过于粗糙,因为比赛有大赛、中赛和小赛之分.对于较大比赛,两队都较重视,比赛成绩较能反映两队的实际情况.反之,他们对于较小比赛一般不够重视,其成绩不能准确代表两队的实际情况.此外,也应把大胜、中胜和小胜加以区分.

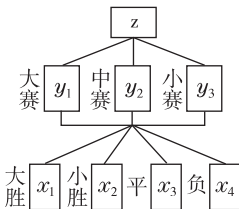
故要精细地确定 f_{ij} , 应区别对待大、中、小赛,和区别对待大胜、中胜和小胜,并用层次分析方法制定相应的权向量.

用层次分析合理决定胜负概率矩阵之例

$$W_z(y) = (4/7, 2/7, 1/7);$$

$$W_{y_i}(x) = (3/6, 2/6, 1/6, 0), i = 1, 2, 3.$$

即,对比赛等级用 4 : 2 : 1 加权;对比赛胜负程度用 3 : 2 : 1 : 0 加权. 例如,某两队的历史记录由下表给定,用此公式算的胜负概率是: $f_{ij} = 4/7$.



场次	1	2	3	4	5
等级	大赛	中赛	小赛	小赛	中赛
$T_i : T_j$	小胜	小负	大负	小负	小胜

合理性讨论

若仅用胜负次数计算 T_i 和 T_j 的胜负概率, 则因 T_i 是 5 场 2 胜; T_j 是 5 场 3 胜, 由此即得: $f_{ji} = 2/(2+3) = 2/5; f_{ij} = 3/(2+3) = 3/5$.

如果用上面介绍的加权办法计算 T_i 和 T_j 的得分 d_i 和 d_j 的话, 则

$$d_i = 4 \times 2 + 0 + 0 + 0 + 2 \times 2 = 12;$$

$$d_j = 0 + 2 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 2 = 9.$$

$$f_{ij} = 12/(12+9) = 4/7;$$

$$f_{ji} = 1 - f_{ij} = 3/7.$$

上述二结果大相径庭, 哪个更合理? 按体育常识而论, 正确的答案应该是后者.

数学建模

$$T_i \text{ 可期望共获奖金数为: } \sum_{j=1}^n f_{ij} x_j a;$$

$$T_i \text{ 可期望共失奖金数为: } \sum_{j=1}^n f_{ji} x_i a.$$

易见奖金向量为公平的充要条件是:

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} x_j a = \sum_{j=1}^n f_{ji} x_i a, i = 1, \cdots, n, \quad (1)$$

令 $u_i = \sum_{j=1}^n f_{ji}, a_{ij} = f_{ij}/u_i$, 则(1) 等价于

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = x_i, i = 1, \cdots, n$$

$$\text{或 } Ax = x. \quad (2)$$

例如对例 1, 上述方程组的系数矩阵计算

如下:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6/7 & 1 \\ 2/7 & 0 & 1/7 \\ 1/3 & 8/9 & 0 \end{bmatrix}.$$

基于上述分析得:

结论: 如果由胜负概率矩阵 F 形成的矩阵 A 以 1 为单特征值, 并且有对应于 1 的正特征向量 x , 则此向量 x 可取为唯一合理的奖金向量.

证: 我们所讨论问题的合理奖金向量, 按所定规则, 必须是满足方程组(2) 的一个正向量, 并要求这样的正向量不计较相差一个任意常数因子是唯一的.

注: 由下面的定理 4-1 与定理 4-2 推出, 上述结论所要求的条件总能满足, 因此, 本问题恒有解.

有关数学背景知识

定义: 实方阵 $A = (a_{ij})$ 称为正(非负) 矩阵, 若 $\forall i, j, a_{ij} > (>=) 0$; 非负方阵 A 称为本原矩阵, 若存在正整数 m 使得 A^m 为正矩阵.

定理 4-1: 任意本原矩阵 A 都恰有一个正特征值 $r(A)$, 其值大于其他特征值的模数(故 $r(A)$ 为单特征值, 任意两个对应于它的特征向量都线性相关), 并且存在对应于 $r(A)$ 的正特征向量 x .

定理 4-2: 当 $n \geq 3$ 时, 奖金分配问题中定义的矩阵 A 是本原矩阵, 并且 $r(A) = 1$.

定理 4-2 的证明

定理 4-2: 奖金分配问题中定义的矩阵 A 是本原矩阵, 并且

$$r(A) = 1.$$

证: 因 $\forall i \neq j, a_{ij} = f_{ij}/u_i > 0$, 故当 $n \geq 3$ 时, A^2 是一个正矩阵, 即 A 是本原矩阵. 从而, 按定理 4-1, 有对应于 $r(A)$ 的正特征向量 x :

$$Ax = r(A)x. \text{ 令 } v = (u_1, \dots, u_n)^T, \text{ 则}$$

$$v^T A = v^T.$$

$$\text{于是 } v^T x = v^T A x = r(A) v^T x.$$

$$\text{因 } v^T x > 0, \text{ 由上式推出 } r(A) = 1.$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$v^T A = (u_1, \dots, u_n) \begin{bmatrix} f_{11}/u_1 & \cdots & f_{1n}/u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}/u_n & \cdots & f_{nn}/u_n \end{bmatrix}$$

$$= (u_1, \dots, u_n) = v^T,$$

$$\text{其中, } u_i = \sum_{j=1}^n f_{ji}.$$

求奖金向量方法与例

方法:

首先由历史记录确定胜负概率矩阵 F ; 其次由 F 确定矩阵 A ; 最后由适当数学软件, 例如 Matlab, 求出对应于 A 的特征值 1 的任一个正特征向量 x , 则此向量 x 可取为合理的奖金向量.

对于前面讨论的例 1, 我们首先由胜负概率矩阵 F 求得矩阵 A 为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6/7 & 1 \\ 2/7 & 0 & 1/7 \\ 1/3 & 8/9 & 0 \end{bmatrix}.$$

其次, 利用数学软件 Matlab 的行命令:

$$A = [0, 6/7, 1; 2/7, 0, 1/7; 1/3, 8/9, 0];$$

$$[V, D] = \text{eig}(A),$$

求得对应于 A 的最大特征值为 1, 对应于 1 的一个特征向量是:

$$x = (0.7910, 0.3020, 0.5321)^T.$$

这个正向量就是我们要求的奖金向量.

如何由奖金总额决定奖金单位 a

方法: 设奖金总额预算值为 S , 则

$$S = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n f_{ij} x_j a) = \sum_{j=1}^n u_j x_j a.$$

由上式立即求得

$$a = S / (x_1 u_1 + \dots + x_n u_n).$$

例如对例 1 有 $a = S / 1.455$.

若循环联赛组委会的奖金总额预算 $S = 3$ (万元) 时, 则 $a = 3 / 1.455 = 2.062$. 所以

$$\begin{aligned} \text{战胜 } T_1 \text{ 得奖金 } x_1 a &= 0.791 \times 2.062 \\ &= 1.631 (\text{万元}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{战胜 } T_2 \text{ 得奖金 } x_2 a &= 0.302 \times 2.062 \\ &= 0.623 (\text{万元}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{战胜 } T_3 \text{ 得奖金 } x_3 a &= 0.532 \times 2.062 \\ &= 1.097 (\text{万元}). \end{aligned}$$

注: 此三数之和为 3.35 万, 并不正好是 3 万元. 如果强队均输, 则奖金总数为: $2 \times 1.632 + 1.097 = 4.36$ (万元); 如果弱队均输, 则奖金总数为 $2 \times 0.623 + 1.097 = 2.34$ (万元), 它们的平均值正是 3.35 万元.

B 循环联赛各队排名次问题

背景:已有多循环比赛历史的俱乐部欲为所属 n 支球队: $T_1, T_2, \dots, T_n$ 按强弱排名次.

方法:根据胜负概率矩阵 $F = (f_{ij})$ 计算各队的得分向量 $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ 和评分向量 $u = (u_1, \dots, u_n)^T$.

规则: $v_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} u_j, i = 1, \dots, n, \quad (1)$
 u_j 的意义是每个战胜 T_j 的队都得分 u_j .

问题:如何决定向量 u 和 v ,使对每一队都保持公平?

问题分析与假设

公平地决定向量 $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ 和 $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ 体现在: $v_1 : \dots : v_n = u_1 : \dots : u_n$, 或存在正数 λ 满足 $\lambda = v_1 / u_1 = \dots = v_n / u_n$ 即 $v = \lambda u. \quad (2)$

将(1)代入(2)得 $Fu = \lambda u. \quad (3)$

结论:胜负概率矩阵 F 是本原矩阵(F^2 为正矩阵),从而由前面的定理 4-1, F 恰有一个正特征值 λ ,其所对应的任何正特征向量(只有倍数差别)都可取为得分向量 v 或评分向量 u . 因向量 v 与 u 相差正常数倍,故可按 v 或 u 的各分量的大小为各队排名次.

例 1

例 1:我们有胜负概率矩阵

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用 Matlab 的行命令:

$$F = [0, 0.6, 0.7; 0.4, 0, 0.2; 0.3, 0.8, 0]; \\ [V, D] = \text{eig}(F)$$

求得对应于 F 的正特征值 0.9414 的一个特征向量是: $v = (0.6985, 0.4199, 0.5794)^T$. 此向量 v 即可取为我们要求的得分向量. 按 v 的分量的大小为各队排名次的结果是:

$$T_1, T_3, T_2.$$

也可用奖金向量为各队排名次

例 1:由合理奖金向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 的性质知:对任二球队 T_i 和 T_j 都有

$$x_i > x_j \Leftrightarrow T_i \text{ 比 } T_j \text{ 强}.$$

因此,也可按 $x_1, \dots, x_n$ 的大小为各队排名次.

例如,对于例 1 我们已求得合理的奖金向量为 $x = (0.7910, 0.3020, 0.5321)^T$.

按 x 的分量的大小为各队排名次的结果是:

$$T_1, T_3, T_2.$$

两个方法的比较

这个结果与前面按得分向量 v 的分量的大小为各队排名次的结果相一致的事实也说明我们以上的分析是正确的.

如果要对这两个方法进行评优的话,应该说,本节的方法较优,因为此方法直接利用矩阵 F 即可求出结果,而用上一个方法,则还需要从 F 再计算矩阵 A 的额外工作量.

一个实例:右表为某个俱乐部的 4 支足球队的比赛记录,试用本节方法为这 4 支球队排名次.

T_2	T_3	T_4	
3:0, 1:1, 2:2	2:1, 2:3, 0:0	2:1, 3:1	T_1
	1:4	3:1, 2:3	T_2
		5:2, 4:2	T_3

规定 $f_{ij} = 0.6u_{ij} + 0.4v_{ij}$, 其中, u_{ij} 为平均场分; v_{ij} 为平均进球分. 场分:胜 2, 平 1, 负 0; 进球分:进 1 球 1 分. 例如,

$$u_{21} = (2 + 1 + 1) / (2 + 2 + 2) = 2/3, \\ (\text{每场总分是 } 2)$$

$$v_{21} = (3 + 1 + 2) / (3 + 2 + 4) = 2/3;$$

$$f_{21} = 0.6u_{21} + 0.4v_{21} = 2/3.$$

首先请大家验证矩阵 F 有如下数值:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 4/35 \\ 2/3 & 0 & 23/25 & 43/90 \\ 1/2 & 2/25 & 0 & 8/65 \\ 31/35 & 47/90 & 57/65 & 0 \end{bmatrix}.$$

其次用 Matlab 算出矩阵 F 的对应于唯一正特征值 1.2263 的一个正特征向量是:

$$U = (0.329, 0.617, 0.242, 0.673)^T.$$

用它为各队排名次得:

$$T_4, T_2, T_1, T_3.$$

§ 4.2 有限网络的一些有趣问题

计算机网、交通网、灌溉网、输电网、电话网等都是常见的有限网络.

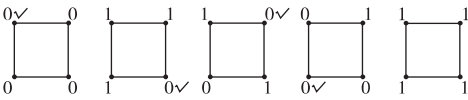
有限网络的数学模型是有限无向图. 无向图 G 是一个二重组: $G = \langle V, E \rangle$, 其中 V 是非空有限集合, 它的元素称为结点, E 也是(非空)有限集合, 它的元素称为边. 图 G 的边 e 是一个结点二重组: $e = (a, b), a, b \in V$, 称 e 与 a, b 关联, 或 a, b 与 e 关联, 或 a 与 b 相邻接. 无向图是一些点和连接两点的连线(边)构成的一个图形.

本节将讨论关于有限网络的两个有趣问题.

问题 1

背景: 设有限网络的各点仅取 0 或 1 两种状态; 开始时刻每点都取 0; 以后每次从各点中任选一点令其改变状态, 同时也令与此点相邻接的所有结点改变状态.

例 1: 下列 4 点网络前几次状态改变情况如下:



问题 1: 对任何网络是否总能经有限次改变状态后使网络从“全 0”状态变为“全 1”状态?

问题 1 的实际意义

问题 1 在一些情况下具有明确的实际意义.

例如: 如果所考虑的有限网络代表照明网络; 0, 1 两种状态分别代表关灯、开灯; 其中某盏灯改变状态时, 与之相邻接的每盏灯也同时改变其状态.

则问题 1 的意义是: 每一次选定一盏灯令它及与之相邻的灯都改变状态, 能否经有限次改变后, 使此有限照明网络从开始时全部关灯过渡到全部开灯?

数学建模准备

用 $(0, 1)$ 向量描述网络状态: 第 k 次改变结束时, 网络状态用向量 $x(k) = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T$ 表示, 其中, $x_i^k = 0$ 或 1 表示第 k 次改变结束时, 网络的第 i 个结点的状态是 0 或 1.

例 1: $x(0) = (0, 0, 0, 0)^T, x(1) = (1, 1, 0, 1)^T, x(2) = (1, 0, 1, 0)^T, x(3) = (0, 0, 0, 1)^T, x(4) = (1, 1, 1, 1)^T$. (结点编号说明见后)

关键是: 寻求 $x(k)$ 与 $x(k+1)$ 的关系. 如能得到从 $x(k)$ 计算 $x(k+1)$ 的公式, 则问题的解决就有了办法.

作网络的邻接矩阵 $A = (a_{ij}), a_{ij} = 0$ 或 1, 由结点 i 与结点 j 邻接或不邻接而定; 并令 $\forall i, a_{ii} = 1$. 对例 1 得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

将该网络的左上角结点编号为 1, 并按顺时针顺序把其余点依次标号为 2, 3, 4. 令 e_i 表示第 i 个元素为 1 其余元素为 0 的 n 维列向量 (n 阶单位矩阵的第 i 列), 则 Ae_i 表示 A 的第 i 列.

易见:

$$x(1) = (1, 1, 0, 1)^T = (0, 0, 0, 0)^T + (1, 1, 0, 1)^T \\ = x(0) + Ae_1 \text{ (上一次选择了第 1 点)};$$

$$x(2) = (1, 0, 1, 0)^T = (1, 1, 0, 1)^T + (0, 1, 1, 1)^T \\ = x(1) + Ae_3 = x(0) + A(e_1 + e_3)$$

(上一次选择了第 3 点, 取按位加: $1+1=0$);

同样可得

$$x(3) = (0, 0, 0, 1)^T \\ = x(0) + A(e_1 + e_3 + e_4);$$

$$x(4) = (1, 1, 1, 1)^T \\ = x(0) + A(e_1 + e_3 + e_4 + e_2).$$

一般地, $x(k+1) = x(k) + Ae_u$, 这里, u 是第 k 次选定点的序数.

证: Ae_u 为 A 的第 u 列, $x(k) + Ae_u$ 的第 i 元是 $x(k)$ 的与 Ae_u 的第 i 元的按位加, 注意当 Ae_u 的第 i 元是 0 时, 表示第 i 结点与选定的第 u 结点不相邻, 按我们的规则, 第 i 点保持原状态, 即与第 k 次的状态相同, 这正与按位加法性质: “0 加何数仍为何数” 的结论相一致; 当 Ae_u 的第 i 元是 1 时, 表示第 i 结点与选定的第 u 结点相邻 (规定: 每个结点都与自己相邻), 按我们的规则, 第 i 点要改变状态, 即与第 k 次的状态不同, 这正与按位加法性质: $1+0=1, 1+1=0$ 的结论相一致.

结论

结论: 令 e 表示元素全为 1 的 n 维向量. 如果方程 $Ax = e$ 在二元域 Z_2^* 中有解

$$x = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_m},$$

则依次选点 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 让网络作 m 次改变状态, 可使网络从全 0 状态变为全 1 状态.

注: 由于域 Z_2 中加法是可交换的, 故结果只与此 m 个点有关, 而与选择它们的顺序无关, 即按任意顺序选择此 m 个点, 让网络改变状态, 其结果都可使网络变为全 1 状态.

★ 二元域定义为代数系统:

$Z_2 = \langle \{0, 1\}, +, \times \rangle$, 其中

加法定义为 $0+1=1+0=1, 1+1=0+0=0$;

乘法定义为 $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0 \times 0 = 0, 1 \times 1 = 1$.

易见: $\{0, 1\}$ 关于上述加法、乘法构成交换群; 满足加法、乘法的分配律; 并且非 0 元 (1) 有乘法逆元 (1), 所以, Z_2 是一个域.

可以像实矩阵一样, 定义 Z_2 上的矩阵 (元素取值于 Z_2 的矩阵) 及其加、乘法运算, 只须注意两点: ① $1+1=0$; ② 结果是 Z_2 上的矩阵.

Z_2 上的线性方程组的理论与实线性方程组的理论完全类似. 解法也差不多. 这个只有两个元素的有限域, 在许多领域都有重要应用.

算法

目的: 寻求方程 $Ax = e$ 在二元域 Z_2 中的解 x .

算法: 为在域 Z_2 中解线性方程组 $Ax = e$, 我们把增广矩阵 $(A \mid e)$ 用域 Z_2 中初等行变换化为 $(E \mid x)$ 的形式, 其中 E 为单位矩阵, 则 x 即为所要求的解.

例 1

$$(A \mid e) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & : & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}.$$

所需要的解为:

$$x = (1, 1, 1, 1)^T = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

$Ax = e$ 在域 Z_2 中恒有解

证:由数域 Z_2 上线性方程组一般理论知:
 $Ax = e$ 在域 Z_2 上无解当且仅当在 Z_2 中可把该方程组化为 $0 = 1$ 的矛盾方程. 因此,若此方程组无解,则可把它的一些方程,不失一般性,假设为前 k 个方程加到一起会得到矛盾方程: $0 = 1$. 于是有 $\sum_{i=1}^k a_{ij} = 0, j = 1, \dots, n$,

$$1 = 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (共 } k \text{ 个)}.$$

因此, k 是奇数,和

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} = 0 \tag{*}$$

但由于 A 是对角元全为 1 的对称矩阵和 k 是奇数,又推出(*)式左边等于 1 的矛盾.

$\therefore Ax = e$ 在域 Z_2 上不可能无解.

★ 矩阵 A 是对称的蕴涵其非 0 对角元的个数必为偶数. (*) 式左边等于 A 的前 k 行 k 列的非 0 元之和在 Z_2 中的值. 因为,在这里非 0 元就是 1; 对角元全为 1; 并且 k 是奇数. 所以, (*) 式左边等于奇数个 1 在 Z_2 中之和,此值必等于 1.

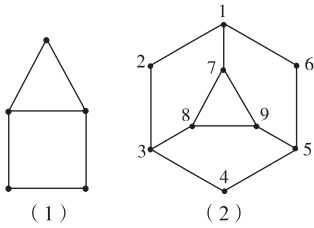
应用于问题 1 得出的结论

结论:

对任意有限网络,适当依次选点作有限次改变状态,都可使网络从全 0 状态变为全 1 状态.

思考题 4—1

对开始为全 0 状态的下列两网络,如何选一些结点,每次改变一点状态使网络最后变为全 1 状态? 你能编一个(例如 Matlab)程序求解有关方程组吗?



思考题 4—2

对任意有限网络及任意初始状态,适当依次选点作有限次改变状态都可使网络变为全 1 状态吗?(提示:以下列网络为例,考虑你的答案)



从任意状态变为全 1 状态的讨论

由思考题 4—2 知:一般不能保证从任意状态都能变为全 1 状态. 自然要提出问题:

网络满足什么条件,才能保证从任意初始状态出发,都能经有限次按规则改变状态后达到全 1 状态?(等价于:从任意初始状态开始变到任意指定的状态结束)

利用前面建立的数学模型不难找到我们需要的答案,其理论依据是下面的定理 4—3.

二元域 Z_2 上线性方程组的一个定理

定理 4-3 在二元域 Z_2 上,若 $\det A \neq 0$,则线性方程组 $Ax = b$ 对任意右端 b 恒有唯一解.

证:设 $\det A \neq 0$,对线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵施行 Z_2 中初等行变换,任何时候都不会变出零列;否则,令变换矩阵的乘积为 P ,便有 $\det(PA) = 0$,蕴涵 $\det A = 0$ 的矛盾.

因此,对增广矩阵 $(A \mid b)$ 在 Z_2 中施行行初等变换,一定可化为 $(E \mid x)$ 的形式(E 为单位矩阵),从而,所唯一确定的 x 就是该方程组的唯一解*.

★ 可用二元数域 Z_2 上的矩阵理论证明定理 4-3,其要点如下:

按 Z_2 上的矩阵理论,当 $\det A \neq 0$ 时, A 在 Z_2 上有逆矩阵 A^{-1} ,满足: A^{-1} 是 Z_2 上的矩阵,并且 $A^{-1}A = E$.以 A^{-1} 左乘线性方程组 $Ax = b$ 的两端即得

$$x = A^{-1}b.$$

这就证明了, $Ax = b$ 对任意右端 b 恒有唯一解 $A^{-1}b$.

应用举例

例如,对于思考题 4-1(1) 中的网络,我们知道它的系数矩阵 A ,经 Z_2 中行初等变换可以化为下列矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

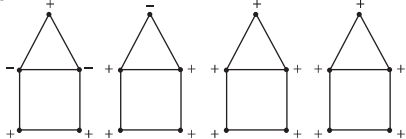
由此可以断定 $\det A \neq 0$,从而按定理 4-3,此网络无论从任何指定状态开始,经有限次改变状态都可以变到全 1 状态.

问题 2

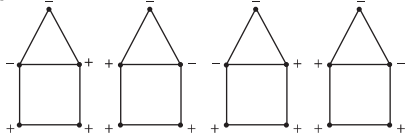
背景:设有限网络的各点仅取“+”或“-”两种状态;已知其开始时刻每点的状态;以后按下列规则,定时改变网络的状态.

规则:对于每点,若上一时刻其邻点取“+”,取“-”的数目相同时维持原状态;否则,将此点改变为其多数邻点的状态.

例 1



例 2



变化规律:例 1 趋于稳定,例 2 趋于交叉循环.

问题 2:对任何网络和任意初始状态,是否总会趋于稳定或趋于交叉循环?换句话说,是否总是成立:当 k 充分大时,第 $k+2$ 时刻的状态恒与第 k 时刻的状态相同?试对你的结论给出严格证明.

数学建模准备

用 $(1, -1)$ 向量描述网络状态:第 k 次改变后,网络状态用向量 $x(k) = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T$ 表示,其中, $x_i^k = 1$ 或 -1 表示第 k 次改变后网络的第 i 个结点的状态是“+”或“-”.

例 1:将该网络的最上面一结点编号为 1,并按反时针顺序把其余结点标号为 2,3,4,5,则

$$x(0) = (1, -1, 1, 1, -1)^T,$$
$$x(1) = (-1, 1, 1, 1, 1)^T,$$
$$x(2) = (1, 1, 1, 1, 1)^T = x(k), k = 3, 4, \dots$$

数学建模

本问题的数学模型归结为证明

定理 4-4: 对任何网络和任意初始状态都存在正整数 N , 使得 $\forall k \geq N, x(k+2) = x(k)$.

(例如, 对例 1, $N = 2$; 对例 2, $N = 0$)

分析与证明

关键仍是求 $x(k+1)$ 与 $x(k)$ 间的关系. 与前面一样,需要巧妙地构造一个网络矩阵 $A = (a_{ij})$,这个矩阵应与网络的邻接结构和问题的游戏(改变状态)规则密切相关.具体作法是: $a_{ij} = 0$ 或 1 ,由结点与结点邻接或不邻接而定; $a_{ii} = 1/2$ ($1/2$ 可代以小于1的任意正数).例如,对例 1,例 2 有

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

几个引理

引理 1:对任意 $k \geq 0, x(k+1)$ 与 $Ax(k)$ 的每个对应分量都同号.

证:这直接由网络矩阵 A 的定义及变化规则推出. 例如,对例 1,

$$Ax(0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \\ + \\ + \end{bmatrix}$$

与 $x(1) = (-1, 1, 1, 1, 1)^T$ 同号. 这里, $0 < 1/2 < 1$ 和 $1/2 \pm 1 = \pm$ 蕴涵: $Ax(k)$ 每个分量当上一时刻对应点的邻点取+,取-的数目相同时与上时刻对应点同号;否则,取多数邻点的符号. 由规则知必与 $x(k+1)$ 同号.

能量函数

定义 k 的下列能量函数:

$$f(k) = x(k+1)^T Ax(k) = x(k)^T Ax(k+1).$$

(因 A 为对称矩阵)

对例 1, $f(0) = 7/2; f(1) = 19/2;$
 $f(k) = e^T Ae = 29/2, k = 2, 3, \dots$

令

$S = \{y = (y_1, \dots, y_n)^T \mid y_1, \dots, y_n \in \{1, -1\}\},$
则 S 是有 2^n 个元素的有限集.

引理 2: 对任何正整数 k 都有

$$f(k) = \max_{y \in S} (y^T A x(k))$$

证: 我们有 $f(k) = x(k+1)^T A x(k)$; 对任何正整数 k , $x(k)$ 每个分量的绝对值都为 1, 并且 S 中的任何向量 y 也是如此. 由引理 1 知, $Ax(k)$ 与 $x(k+1)$ 一样无零分量.

因此, $y^T A x(k)$ 取最大值当且仅当 y 与 $Ax(k)$ 同号, 或等价地 (用引理 1), $y^T A x(k)$ 取最大值当且仅当 $y = x(k+1)$.

引理 3: 极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$ 存在.

证: 因 $\forall k \geq 1, x(k-1) \in S$, 故由引理 2 推出

$$f(k) \geq x(k-1)^T A x(k) = f(k-1).$$

即 $\{f(k)\}$ 是单调不减实数列. 此外, 对任何正整数 k , $x(k)$ 每个分量的绝对值都为 1, A 为元素不大于 1 的非负矩阵, 于是又有 $f(k) = x(k+1)^T A x(k) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} \leq n^2$ (有限数). 换句话说, $\{f(k)\}$ 是有上界的单调不减的实数序列, 由极限理论得证: 这个序列的极限存在.

定理 4-4: 对任何网络和任意初始状态都存在正整数 N , 使得

$$\forall k \geq N, x(k+2) = x(k).$$

证: 令 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = L$ (有限数);

$$W = \{y^T A z \mid y, z \in S\}.$$

则 $f(k) = x(k+1)^T A x(k) \in W$, 从而 $f(k)$ 至多取 $|W| = |S|^2 = (2^n)^2 = 4^n$ 个不同的值, 所以, 一定存在足够大的正整数 N , 使得

$$\forall k \geq N, f(k) = f(k+1) = L.$$

由能量函数 $f(x)$ 的定义及引理 2, 上式等价于 $\forall k \geq N$,

$$\begin{aligned} \max_{y \in S} (y^T A x(k)) &= x(k)^T A x(k+1) \\ &= x(k+2)^T A x(k+1). \end{aligned}$$

所以, $x(k)$ 与 $x(k+2)$ 所有分量必同号, 从而得证

$$\forall k \geq N, x(k+2) = x(k).$$

§ 4.3 数据处理的一些有趣问题

大家知道, 数据处理中的二元数组就是一个实数矩阵 $A = (a_{ij})$. 因此, 下面关于实矩阵的问题 3, 问题 4 所得出的结论是有用的.

问题 3

问题 3: 试证对任意 (任意行列数, 任意取值) 的实矩阵 $A = (a_{ij})$, 施行乘一行或一列以 -1 的运算若干次后, 总能得到所有行和、所有列和都不小于 0 的一个矩阵.

证: 对 A 施行乘一行或一列以 -1 的运算若干次后, 一切可能的结果组成下列有限集:

$$S = \{A = A_1, A_2, \dots, A_k\}, k \leq 2^{mn},$$

其中, m, n 分别为矩阵 A 的行、列数.

(因对同一行、列施行此种运算两次等价于保持不动)

引入下之能量函数 $f: S \rightarrow R$,

$$\forall B = (b_{ij}) \in S, f(B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}.$$

因 k 为有限数, 故存在 $u \in \{1, \dots, k\}$ 使得 $f(A_u) = \max\{f(A_1), \dots, f(A_k)\}$.

下面用反证法证明: 矩阵 A_u 有我们所需要的性质. 如果 A_u 的某一行和, 例如, 第 h 行和 $r_h < 0$. 令 A_t 为以 -1 乘 A_u 第 h 行所得的矩阵, 则

$$f(A_t) = f(A_u) + A_t \text{ 第 } h \text{ 行和} - A_u \text{ 第 } h \text{ 行和} = f(A_u) + 2 |r_h| > f(A_u).$$

便得出矛盾.

$\therefore A_u$ 的任何行(列)和都不小于 0.

思考题 4—3

试证: 对任意的实矩阵 $A = (a_{ij})$, 施行乘一行或一列以 -1 的运算若干次后总能得到一个所有行和、所有列和都不大于 0 的矩阵.

问题 4

问题 4: 已知 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 的每行最大二元素之和都等于 u ; 并且每列最大二元素之和都等于 v . 试证: $u = v$.

证: 用反证法. 不失一般性设

$$u > v. \quad (*)$$

所需结论可通过以下三段推理来完成:

① A 的第 i 行最大元, 第二大元必可表为

$$u/2 + p_i; u/2 - p_i, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

(显然成立)

② A 的行最大元必两两不同列.

因若有两个行最大元 a_{sj}, a_{tj} 都属于第 j 列, 则 $v \geq a_{sj} + a_{tj} \geq u + p_s + p_t \geq u$, 便与假设 $(*)$ 矛盾.

③ 令 $p_k = \min\{p_1, \dots, p_n\}$. 由 ② 知第 k 行第二大元 $u/2 - p_k$ 必与某 i 行最大元 $u/2 + p_i$ 同在一列, 于是有

$$\begin{aligned} v &\geq u/2 - p_k + (u/2 - p_i) \\ &= u + (p_i - p_k) \geq u, \end{aligned}$$

也与假设 $(*)$ 矛盾. 证毕.

思考题 4—4

试对问题 4 给出别的证明.

§ 4.4 第 4 章思考题参考答案

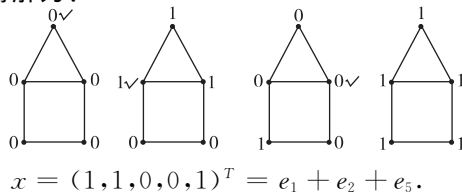
思考题 4—1(1)

$$(A:e) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

所需解为：



$$x = (1, 1, 0, 0, 1)^T = e_1 + e_2 + e_5.$$

思考题 4—1(2)

Matlab 程序

```
a = [1,1,0,0,0,1,1,0,0,1;1,1,1,0,0,0,0,0,0,1;0,0,0,0,1;0,1,1,1,0,0,0,1,0,1;0,0,1,1,1,0,0,0,0,1;0,0,0,1,1,1,0,0,0,1;1,0,0,1,1;1,0,0,0,1,1,0,0,0,1;1,0,0,0,0,0,1,1,1,1;0,0,1,0,0,0,1,1,1,1;0,0,0,0,1,0,1,1,1,1]
k = 1;
接后面
```

```
for i=1:8
    if a(i,i)==0
        for k=i+1:9
            if a(k,i)=1
                v=a(i,:);a(i,:)=a(k,:);
                a(k,:)=v; break; %交换 i,k 行
            end;
        end;
    end;
end;
if k>9 break; end;
for j=1:9
    if j~=i & a(j,i)
        a(j,:)=a(j,:)+a(i,:); %i,k 二行相加
        a(j,:)=mod(a(j,:),2);
    end;
end;
end;
x=a(:,10)*
```

★ 此程序的依据是消元法，在二元数域 Z_2 中， $1+1=0$ 蕴涵二方程相加可以消元。此外，程序中，力图把增广矩阵第 i 列化为单位矩阵第 i 列，或(做不到时)化为对角及以下元全为 0。于是，最后所得增广矩阵最后一列 $a(:,10)$ 便是方程组的一个解。

这里，值得注意的是：我们已经证明了所计算的方程组必然有解，故对于最后所得增广矩阵，当某行对角元是 0 时，该行最后一元(右端)必为 0(否则该行对应于矛盾方程： $0=1$)。

思考题 4—1(2)计算结果

运行上述程序得出计算结果：

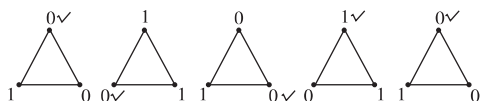
$$x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)^T.$$

表示选第一到第六结点改变状态，可使该网络从全 0 状态变到全 1 状态。请读者按此结论，选前六点进行六次改变状态之后，看看是否达到全 1 状态，以此验证该结论的正确性。

思考题 4—2

问题:对任意有限网络及任意初始状态,适当依次选点作有限次改变状态都可使网络变为全 1 状态吗?

解:答案是否定的,下面是一个反例:
交叉循环不已,总不是全 1 状态!



思考题 4—3

问题:对任意的实矩阵 $A = (a_{ij})$ 施行乘一行或一列以 -1 的运算若干次后总能得到一个所有行和、所有列和都不大于 0 的矩阵.

解:已证,对任意的实矩阵 $A = (a_{ij})$ 施行乘一行或一列以 -1 的运算若干次后能得到一个所有行和、所有列和都不小于 0 的矩阵 B . 再接着将每一行依次乘以 -1 , 其结果等价于将 B 的每一行依次乘以 -1 . 所得矩阵 $-B$ 的所有行和、所有列和显然都不大于 0. 从而得证:对 A 施行乘一行或一列以 -1 的运算若干次后,可得到一个所有行和、所有列和都不大于 0 的矩阵.

思考题 4—4

问题:试对问题 4 给出别的证明.

解:分三种情形进行讨论.

- (1) A 无两行最大元属于同一列;
- (2) A 无两列最大元属于同一行;
- (3) A 有两行最大元同列,并且有两列最大元同行.

对于情形(1),因改变行或列编号不影响问题的假设与结论,故不失一般性可假设:对角元都是每行的最大元并且满足

$$a_{11} \leq a_{22} \leq \cdots \leq a_{mm}.$$

设 a_{1k} 为第 1 行第二大元,则

$$\alpha = a_{11} + a_{1k} \leq a_{kk} + a_{1k} \leq \beta.$$

设 a_{u1}, a_{v1} 为第 1 列最大二元, $u < v$, 则

$$\beta = a_{u1} + a_{v1} \leq a_{uu} + a_{v1} \leq a_{vv} + a_{v1} \leq \alpha.$$

由此两不等式推出 $\alpha = \beta$.

对于情形(2),证明完全类似.

对于情形(3):

$$\text{若有两行最大元同列,则 } \beta \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha;$$

$$\text{若有两列最大元同行,则 } \alpha \geq \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta.$$

所以,若有两行最大元同列,并且有两列最大元同行,则 $\beta \geq \alpha \geq \beta$,从而得证 $\beta = \alpha$.

第 5 章 数学规划方法建模

§ 5.1 引言

§ 5.2 单纯形法及其理论基础

§ 5.3 线性规划模型

A 奶制品生产销售计划

B 自来水输送计划

§ 5.4 0—1 线性规划模型

A 混合接力队最优组合

B 选课策略

§ 5.5 第 5 章思考题参考答案

§ 5.1 引言

线性规划是数学规划学科中研究得最彻底,同时也是应用最广泛的一个分支.

本章简要介绍求解线性规划的单纯形法及 0—1 线性规划的一种解法,以及这些解法在数学软件 Matlab 中的实现.我们仍然以若干实际问题的整个数学建模过程为主要线索来展开.

f 数学规划广泛用于解优化问题

优化问题可以说是人们在科技和经济管理方面最常见的实际问题,而数学规划则是解决优化问题的最基本方法.

对优化问题进行数学建模时,先要设定决策变量,通常有多个决策变量,用 n 维向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 表示;其次要确定被优化的目标函数(x 的函数): $z = f(x)$.

实际问题一般对决策变量有限制,记为 $x \in D$, D 称为可行域,可行域常用一组不等式(包括等式): $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$ 来界定.

数学规划、线性规划的一般形式

一般数学规划模型可以表述为:

$$\begin{cases} \text{Min(或 Max)} z = f(x) \\ s. t. \quad g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, Min(Max) 表示求最大(小)值; $s. t.$ 表示“满足条件”.

线性规划模型(限于线性情况)表述为:

$$\begin{cases} \text{Min(或 Max)} z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ s. t. \quad a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \leq (\text{或} \geq) b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq (\text{或} \leq) d_j, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

其中, a_i, b_i, c_i, d_j 为已知常数.

线性规划的标准形式

线性规划的特征是:在满足一组线性约束和变量非负的限制条件下,求多变量线性函数的最小值或最大值.这一特征决定了所有线性规划都可以化为唯一的标准形式:

$$\begin{cases} \text{Min} z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ s. t. \quad a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = b_i, b_i \geq 0, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 (\text{即 } d_j = 0), j = 1, \dots, n \end{cases}$$

因此,可以只限于讨论标准型线性规划的求解.

思考题 5—1

分别论证各种形式的线性规划模型都可以化为标准型.

线性规划的可行解与最优解

满足全部约束(包括非负约束)条件的向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 称为线性规划问题的可行解.

所有可行解的集合称为可行域. 为了保证可行域非空, 一般要求 $n \geq m$.

使目标函数达到最优值的可行解称为该线性规划的最优解. 或者说, 最优值既满足约束条件, 并且使目标函数达到最优值.

线性规划的一个简例(游戏机问题)

游戏机制造商关心的问题: 为了求得最大利润, 下一个周期应该生产两种不同型号的游戏机各多少台?

有关背景信息是: 每台 I 型机可得利润 6 个单位, 每台 II 型机可得利润 4 个单位. 而生产一台 I 型和 II 型游戏机需要原料分别为 2 个单位和 3 个单位, 需工时分别为 4 个单位和 2 个单位. 计划可用原料为 100 个单位, 可用工时为 120 个单位.

游戏机问题的数学模型

令 x_1, x_2 分别表示 I 型和 II 型游戏机的生产台数. 不难看到, 利润函数为 $z = 6x_1 + 4x_2$, 利润最大的要求就是

$$\text{Max } z = 6x_1 + 4x_2.$$

约束条件是

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 (\text{原材料单位}); \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 (\text{工时单位}); \\ x_1, x_2 \geq 0 (\text{非负数限制}). \end{cases}$$

由此可见, 游戏机问题归结为一个线性规划模型.

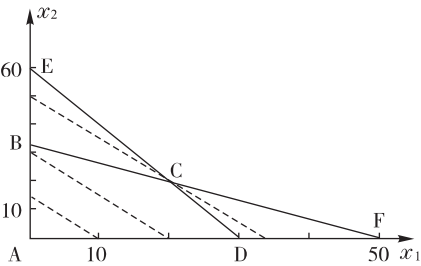


图 5-1

解游戏机数学模型的几何图解法

第 ① 步: 第一个和第三个约束条件确定三角形区域 $\triangle ABF$. 第二个和第三个约束条件确定三角形区域 $\triangle AED$. 因此, 可行域为:

$$D = \triangle ABF \cap \triangle ADE = \text{四边形域 } ABCD.$$

第 ② 步: 对于 $0 \leq \alpha < +\infty$ 考虑目标函数的等高线(平行直线族): $6x_1 + 4x_2 = \alpha$. 易见, 当 $\alpha > 200$ 时, 直线 $6x_1 + 4x_2 = \alpha$ 与可行域无交点; 而当 $\alpha = 200$ 时, 则与可行域交点为凸四边形的顶点 C. 这就证明, 目标函数在点 C 取得最大值, 点 C 的坐标为方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 = 120 \end{cases}$$

的解. 不难看出这个方程组的解是:

$$x_1 = x_2 = 20.$$

所以, 下一个周期安排生产两种型号的游戏机各 20 台, 便能获得最大利润为

$$z = 6(20) + 4(20) = 200 (\text{单位}).$$

注: 上述图解法说明, 线性规划问题的可行域由凸多边形构成, 并且最优解在此多边形的顶点达到.

线性规划可行解的几何性质

定理 5-1 任一线性规划的可行域都由一个凸集(凸多面体)

$$D = \{x \mid p_{i1}x_1 + \cdots + p_{in}x_n = h_i, h_i \geq 0, i = 1, \cdots, k; x_1, \cdots, x_n \geq 0\}$$

构成;如果线性规划存在最优解,则最优解必在可行域的顶点上达到.

证明:略.

§ 5.2 单纯形法及其理论基础

按定理 5-1,线性规划最优解只能在一个凸多面体的可行域的顶点上达到. 由于顶点数目不超过 C_n^m 个,采用"枚举法",即通过比较所有顶点处目标函数的值,最终可以找到最优解. 但在这里,枚举不是好算法. 例如,当 $n = 60, m = 30$ 时, C_n^m 大于 10^{17} ,即使在每秒万亿次浮点运算的超级计算机上也要花上几年才能完成.

本节介绍 1974 年 G. M. Dantzig 提出的一种非常有效的好算法——单纯形法.

单纯形法中数学模型的矩阵表示

将

$$\begin{cases} \text{Min} z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ s. t. a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0 (\text{即 } d_j = 0), j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

中约束等式记为 $Ax = b$, 其中, $A = (a_{ij})$, $b = (b_1, \cdots, b_m)^T$. 为保证可行域非空,一般要求 $n \geq m$;并假设 $\text{秩}(A) = m$ (否则,可删去一些多余的约束等式). 我们更进一步设系数矩阵 A 的前 m 列线性无关. 最后得

$$\begin{cases} \text{Min} z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ Ax = b \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n \end{cases} \quad (1)$$

单纯形法基本思想

根据线性规划的标准型,直接从可行域中的一个基本可行解(定义在下面给出)开始,每一步都转换到另一个新的基本可行解,并且使目标函数值比上一个严格减少,由于基本可行解(凸多面体的可行域顶点)只有有限个,故经有限步后一定得到最优解.

单纯形法的理论推导

令 $A = (a_1, \cdots, a_n)$, a_j 为 A 的第 j 列(向量). 因 $\text{秩}(A) = m$,故不失一般性,可设 A 的前 m 列线性无关(否则存在置换矩阵 P 使 AP 的前 m 列线性无关),即

$A = (B, F)$, B 称为基本解矩阵,令

$$x_B \equiv (x_1, \cdots, x_m)^T, x_F \equiv (x_{m+1}, \cdots, x_n)^T, \\ c_B \equiv (c_1, \cdots, c_m)^T, c_F \equiv (c_{m+1}, \cdots, c_n)^T,$$

则式(1)可写成

$$\begin{cases} \text{Min} z = c_B^T x_B + c_F^T x_F \\ s. t. Bx_B + Fx_F = b \\ x_B \geq 0, x_F \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

对增广矩阵 $(A \ b) = (B \ F \ b)$ 进行初等变换,使 B 化为 m 阶单位矩阵 E :

$$(B \ F \ b) \rightarrow (E \ B^{-1}F \ B^{-1}b)$$

$$\text{令 } b' = B^{-1}b, G = B^{-1}F \equiv (g_{ij})_{m \times (n-m)},$$

$L = c_F^T - c_B^T G \equiv (l_1, \cdots, l_{n-m})$, 则式(1)可等价表示为

$$\begin{cases} \text{Min} z = c_B^T x_B + c_F^T x_F \\ s. t. Bx_B + Fx_F = b \\ x_B \geq 0, x_F \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

上述模型中,若令 $x_F = 0$,则得到

$$x_B = B^{-1}b = b', z' = c_B^T B^{-1}b$$

若 $b' \geq 0$,则 x 为可行解,称为基本可行解.

又若 $L \geq 0$, 则 $Lx_F \geq 0, z = c_B^T B^{-1}b + Lx_F$, $\text{Min } z = z'$ 即为最优解, 且在 $x_B = b', x_F = 0$ 处达到.

若存在 $1 \leq i_1 \leq n-m$, 使 $l_{i_1} < 0$, 若再有 $g_{ii_1} \leq 0$, 只要取 $x_i = 0, n-m+1 \leq i \leq n, i \neq i_1$, 则 $z = z' + l_{i_1} x_{i_1}$ 可以随 x_{i_1} 无限增大而趋向于 $-\infty$, 从而此时无最优解.

若存在 $1 \leq i_1 \leq n-m$, 使 $l_{i_1} < 0$, 并且存在某些 $g_{ii_1} > 0$, 要得到最优解, 现在要做的是: 在 A 的后 $n-m$ 列中取出第 j 列与 A 的前 m 列中第 k 列互换, 构成新的基本解矩阵 B' , j, k 的确定方法如下:

① j 满足 $\min \{l_i \mid l_i < 0\} = l_j$;

② k 满足

$$Q = \min_i \{b'_i / g_{ij} \mid g_{ij} > 0\} = b'_k / g_{kj}.$$

下面说明按上述方式确定 k, j 后可取一组解 x 使新的目标函数 z 值小于 z' . 事实上, 取 $x_j = Q$, 其他 $i = 0, n-m \leq i \leq n, i \neq j$, 于是

$$x_k = b'_k - g_{kj} x_j = b'_k - g_{kj} Q = 0.$$

而 A 的第 k 列与第 j 列互换后得到的新基本解矩阵 $B' = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_j, a_{k+1}, \dots, a_m)^T$, 由初等矩阵变换性质不难看出: 新的基本解矩阵对应的目标函数值比上一步的目标函数值严格减小.

上述过程可重复进行, 直到某步 $L \geq 0$ 时为止.

单纯形法算法的步骤

① 对矩阵 A 作初等变换得到一个基本解矩阵 B , 不妨设 $A = (B, F)$.

② 计算 $b = B^{-1}b, G = B^{-1}F, L = c_F^T - c_B^T G$.

③ 若 $L \geq 0$, 取 $x_B = b, x_F = 0$ 得最优解, 最优值 $\text{Min } z = c_B^T b$, 停止. 否则, 有 $1 \leq i_1 \leq n-m$, 使 $l_{i_1} < 0$. 若所有 $g_{ii_1} > 0$, 则无最优解; 否则, 存在某些 $g_{ii_1} > 0$, 取 $\min \{l_i \mid l_i < 0\} = l_j$, $Q = \min_i \{b'_i / g_{ij} \mid g_{ij} > 0\} = b'_k / g_{kj}$.

令矩阵 A 中 F 的第 j 列与 B 的第 k 列互换构成新基本矩阵 B' , 然后回到第 ① 步再循环.

单纯形法是很有效的迭代算法

在单纯形算法迭代中, 每一步从当前的一个基本可行解出发, 或判定它是最优解, 或找到一个有更小目标函数值的下一个基本可行解, 这个解一定与前面找到过的基本可行解都不同. 由于基本可行解只有有限个, 故单纯形算法最终将找到最优解而圆满结束. 事实证明: 即使对很大的 m , 单纯形算法都能相当快地结束, 它是迄今发现的非常有效的算法之一.

单纯形算法举例

为了说明上述算法, 让我们用此算法解例 1.

例 1 求解下列线性规划问题:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t. } x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 引进松弛变量将它化为等价的标准型:

$$\begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s. t. } x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

系数矩阵 A 的 1, 2, 4 列构成可逆矩阵.

$B = (a_1, a_2, a_4)$, 则 $c_B^T = (-2, -5, 0)$, $c_F^T = (0, 0)$.

用初等行变换将增广矩阵 $(A \mid b)$ 中的 1, 2, 4 列化成单位矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

于是有 $b = (4, 2, 1)^T \geq 0, G = B^{-1}F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$L = c_F^T - c_B^T G = (-1/2, 5/2)$. 因 L 的第 $j = 1$ 元为负, 故对应的基本可行解 $x = (4, 2, 0, 1, 0)^T$ 不是最优解.

$Q = \min_i \{b_i'/g_{ij} \mid g_{ij} > 0\} = 2 = b_3'/g_{3j}, k = 3$

以 F 第 1 列对换 B 第 3 列, 则 $B = (a_1, a_2, a_3)$, 将增广矩阵中的 1, 2, 3 列变换成单位矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

这一次得 $G' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$L = (0, 0) - (-2, -5, 0)G' = (1, 2)$. 因 L 没有负元, 故所得基本可行解 $x = (2, 3, 2, 0, 0)^T$ 是最优解.

去掉松弛变量的值, 即得原问题的最优解为: $x_1 = 2, x_2 = 3$; 最小目标函数值为:

$z = 2x_1 + 5x_2 = -2(2) - 5(3) = -19$.

单纯形法的软件实现

求解线性规划有不少现成的软件, 例如, Matlab 和 Lindo 等. 这些软件甚至不同程度地放宽了标准型的要求. 例如, 不要求全为等式约束, 等等.

下面介绍用 Matlab 软件的函数

`linprog(f, A, b, Aeq, beq)`

求解线性规划的操作方法.

函数 `linprog(f, A, b, Aeq, beq)` 使用范围

函数 `linprog(f, A, b, Aeq, beq)` 用来求解更一般的线性规划(比标准型条件宽):

$$\begin{cases} \text{Min } z = f^T x \\ \text{s. t. } Ax \leq b, \\ Aeq x = beq \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中, 约束条件除若干不等式 $Ax \leq b$ 外, 还有若干等式 $Aeq x = beq$, A, b, Aeq, beq 分别代表二者的系数矩阵及右端向量. 若置 $Aeq x = []$, $beq = []$, 则等式全缺省.

函数 `linprog(f, A, b, Aeq, beq)` 使用方法

首先, (必要的话) 改变 z 中所有系数的符号把“Max”化为“Min”; 把“ $\geq$ ”化为“ $\leq$ ”.

其次, 输入具体的 f, A, b, Aeq, beq .

最后执行行命令:

$[x, z] = \text{linprog}(f, A, b, Aeq, beq)$.

则输出的向量 x 即为最优解; 数 z (或 $-z$) 即为目标函数最小(大)值.

用函数 `linprog` 求解 例 1

归结为执行下列三条行命令:

$f = -[2 \ 5]; A = [1 \ 0; 0 \ 1; 1 \ 2]; b = [4 \ 3 \ 8];$

$Aeq = []; beq = [];$

$[x, z] = \text{linprog}(f, A, b, Aeq, beq)$

(注意每次检查输入数据) 屏幕最后显示:

$x = 2.0000e + 000 \ (x_1 = 2) \ 3.0000e$

$+ 000 \ (x_2 = 3);$

$z = -1.9000e + 001 \ (\text{最大值为 } 19).$

这个举手之劳的结果与前面费了九牛二虎力气才计算出来的结果完全一样. (“取负值”化 Max 为 Min, 最优再取负)

例 2 用 linprog 求解下列线性规划

$$\begin{cases} \text{Min } z = -24x_1 - 16x_2 - 44x_3 - 32x_4 + 3x_5 + 3x_6 \\ s. t. \quad 4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \leq 600 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_5 + 4x_6 \leq 480 \\ x_1 + x_5 \leq 100 \\ x_3 - 0.8x_5 = 0 \\ x_4 - 0.75x_6 = 0 \\ x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

解:归结为执行下列几条行命令:

```
f = [-24 -16 -44 -32 3 3];
A = [4 3 0 0 4 3; 4 2 0 0 6 4; 1 0 0 0 1 0];
b = [600 480 100]';
Aeq = [0 0 1 0 -0.8 0; 0 0 0 1 0 -0.75];
beq = [0 0]';
[x z] = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
```

由屏幕最后显示结果得:
最优解 $x = (0,168,19.2,0,24,0)^T$;
最大值 $z = 3460.8$.

§ 5.3 线性规划模型

本节通过若干个实际的优化问题,说明如何建立这类问题的线性规划数学模型,并用 Matlab 求出最优解及对应的目标函数最优值,同时对结果作一些分析.

优化问题经常面临的问题

在经济管理领域,特别是制定生产计划的最优化决策方面,线性规划十分有用. 企业在制定生产计划时主要面临两方面的考虑. 首先,要根据外部需求和内部设备、人力、原料供应等条件,追求最大利润;其次,要根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等,追求最小成本. 我们在数学建模时,一定要注意满足外部需求和内部能力条件,追求利润最大和成本最小等几个方面.

A 奶制品生产销售计划

某奶制品厂以牛奶为原料生产两种奶制品 A_1, A_2 , 1 桶牛奶用 12 小时可以在设备甲上加工成 3 千克 A_1 , 或者在设备乙上用 8 小时加工成 4 千克 A_2 . 根据市场需求生产的 A_1, A_2 全部能售出, 且每千克 A_1 获利 24 元, 每千克 A_2 获利 16 元. 该厂每天能得到 50 桶牛奶供应, 每天工人总的劳动时间为 480 小时, 并且设备甲每天至多能加工 100 千克 A_1 , 设备乙的加工能力没有限制.

①制定生产计划使每天获利最大.

与此同时,该厂为增加效益,开发了奶制品深加工技术:用 2 小时和 3 元加工费可将 1 千克 A_1 加工成 0.8 千克高级奶制品 B_1 , 也可将 1 千克 A_2 加工成 0.75 千克高级奶制品 B_2 . 每千克 B_1 能获利 44 元, 每千克 B_2 能获利 32 元.

②试为 4 种产品制定新的生产与销售计划使每天获利最大.

奶制品生产计划问题①建模

决策变量:设每天用 x_1 桶牛奶生产 A_1 , 用 x_2 桶牛奶生产 A_2 .

目标函数:设每天获利 z 元. x_1 桶牛奶生产 $3x_1$ 千克 A_1 , 获利 $72x_1$ 元, x_2 桶牛奶生产 $4x_2$ 千克 A_2 , 获利 $64x_2$ 元, 故 $z = 72x_1 + 64x_2$.

原料约束:每天生产所用牛奶不得超过供应量 50 桶: $x_1 + x_2 \leq 50$.

工时约束:每天生产所用工时不得超过 480 小时: $12x_1 + 8x_2 \leq 480$.

设备甲能力约束: $3x_1 \leq 100$.

非负约束: x_1, x_2 不能为负值 $x_1, x_2 \geq 0$.

综上所述,问题①的数学模型是下列线性规划:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 72x_1 + 64x_2 \\ \text{s. t. } x_1 + x_2 \leq 50 \\ 3x_1 \leq 100 \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 480 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

用 Matlab 求得(思考题 5-2)最优解为: $x = (20, 30)$ (20 桶奶生产 A_1 , 30 桶奶生产 A_2); 目标最优值为: $z = 3360$.

思考题 5-2

用 Matlab 求解奶制品生产计划问题①的线性规划模型.

奶制品产销计划问题②建模

决策变量:设每天销售 x_1 千克 A_1 , x_2 千克 A_2 , x_3 千克 B_1 , x_4 千克 B_2 , 并用 x_5 千克 A_1 加工 B_1 , x_6 千克 A_2 加工 B_2 .

目标函数:设每天获利 z 元, 易见 $z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$.

原料约束:每天生产 $x_1 + x_5$ 千克 A_1 用奶 $(x_1 + x_5)/3$ 桶; 生产 $x_2 + x_6$ 千克 A_2 用奶 $(x_2 + x_6)/4$ 桶, 故应满足约束条件 $(x_1 + x_5)/3 + (x_2 + x_6)/4 \leq 50$. 或等价地 $4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \leq 600$.

工时约束:共 480 小时, 生产 1 千克 A_1, A_2 分别需 4, 2 小时, 生产 1 千克 B_1 或 B_2 需 2 小时, 故

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_3 + 2x_4 \leq 480.$$

设备甲能力约束: $x_1 + x_5 \leq 100$.

附加约束:因 1 千克 $A_1 (A_2)$ 加工成 0.8 (0.75) 千克 $B_1 (B_2)$, 故 $x_3 = 0.8x_5, x_4 = 0.75x_6$.

非负约束: $x_1, \dots, x_6 \geq 0$. 所以数学模型是

$$\begin{cases} \text{Max } z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6 \\ \text{s. t. } 4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \leq 600 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_5 + 4x_6 \leq 480 \\ x_1 + x_5 \leq 100 \\ x_3 - 0.8x_5 = 0 \\ x_4 - 0.75x_6 = 0 \\ x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

奶制品产销计划问题② 求解

解:改目标函数为

$$\text{Min } z = -24x_1 - 16x_2 - 44x_3 - 32x_4 + 3x_5 + 3x_6$$

则本数学模型等价于上节末例 2 中的线性规划问题. 在那里我们已用数学软件求得它的解是:

$$x = (0, 168, 19.2, 0, 24, 0)^T, z = 3460.8$$

对应答案是:每天生产销售 168 千克 A_2 和 19.2 千克 B_1 (不出售 A_1, B_2); 可获利 3460.8 元. 为此, 需用牛奶 8 桶加工成 A_1 ; 42 (= 168/4) 桶加工成 A_2 ; 并将得到的 24 桶 A_1 全部加工成 B_1 .

B 自来水输送计划

背景:某市有甲、乙、丙、丁四个区,自来水由三个水库供应,四个区必须得到保证的基本生活用水量分别为 30,70,10,10 千吨.但由于水源紧张,三个水库每天最多只能分别供应 50,60,50 千吨自来水.自来水公司从各水库向各区送水,按地理位置不同分别付出的引水管理费如下:

引水管理费(元/千吨)	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

其中,C 水库与丁区之间没有输水管道.其他管理费用都是 450 元/千吨.公司统一按 900 元/千吨标准收水费.此外四个区都向公司申请额外用水量分别为每天 50,70,20,40 千吨.

问题①:该公司应如何分配供水量,才能获利最大.

与此同时,该公司为了增加供水量正在考虑进行水库改造,使三个水库每天的最大供水量都提高一倍.

问题②:届时供水方案应如何改变?并可增加利润多少?

自来水输送优化问题①建模

分析:分配供水量指安排从三个水库送水的方案,目标是获利最多.从问题给出的条件看,三个水库总供水量 160 千吨小于总需求量 300 千吨,故每天的水总能全部卖出并获利,于是公司每天总收入是 $900(50+60+50)=144000$ 元,与送水方案无关.同样,公司其他管理费用 $450((50+60+50)=72000$ 元也与送水方案无关.所以,要使利润最大,只需使引水管理费用最小即可.当然,送水方案要受水库供应量和四个区的需求量的限制.

决策变量:共 11 个,它们是 A,B,C 三个水库($i=1,2,3$)分别向甲,乙,丙,丁四个区($j=1,2,3,4$)的日供水量

$x_{ij}, i=1,2,3; j=1,2,3,4$,
不考虑 x_{34} (因 C 水库与丁区之间无输水管道).

问题的目标函数从获利最多转化为引水管理费用最少,于是决策目标为

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14} + \\ & 140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} + \\ & 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}. \end{aligned} \quad (1)$$

约束条件:考虑到各区的基本生活用水与额外用水,需求水量限制为

$$\begin{aligned} 30 \leq x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 80, & 70 \leq x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 140, \\ 10 \leq x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 30, & 10 \leq x_{14} + x_{24} \leq 50 \end{aligned}$$

标准化为

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} & \leq 80, -x_{11} - x_{21} - x_{31} \leq -30, & (2) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & \leq 140, -x_{12} - x_{22} - x_{32} \leq -70, & (3) \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & \leq 30, -x_{13} - x_{23} - x_{33} \leq -10, & (4) \\ x_{14} + x_{24} & \leq 50, -x_{14} - x_{24} \leq -10. & (5) \end{aligned}$$

因求大于供,水能全部卖出,故供水为等式约束

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = 50, & (6) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = 60, & (7) \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} & = 50. & (8) \end{aligned}$$

故数学模型是在非负约束及约束(2)—(8)下求目标函数(1)最小值的线性规划.

自来水输送优化问题①求解

解:依次执行下列 Matlab 行命令:

```
f=[160 130 220 170 140 130 190 150 190 220 230];
A=[ 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 ;
    -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 ;
    0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 ;
    0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 ;
    0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 ;
    0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 ;
    0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 ;
    0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 ];
b=[80 -30 140 -70 30 -10 50 -10]';
Aeq=[1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 ;
      0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 ;
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1];
```

$\text{beq}=[50 \ 60 \ 50]'$;

$[x \ z] = \text{linprog}(f, A, b, \text{Aeq}, \text{beq})$

则由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x_{12} = 50, x_{22} = 50, x_{24} = 10, x_{31} = 40, x_{33} = 10$, 其余 x_{ij} 全为 0.

目标函数最小值 $z = 24400$.

最优送水方案是: 每天 A 水库向乙区供水 50 千吨; B 水库向乙、丁区分别供水 50, 10 千吨; C 水库向甲、丙区分别供水 40, 10 千吨. 最小引水管理费 24400 元, 其他管理费用 72000 元, 公司每日最大利润为

$144000 - 72000 - 24400 = 47600$ 元.

自来水输送优化问题②建模

分析: 如果三个水库每天的供水量都翻了一番, 则公司总供水能力为 320 千吨, 大于总需求量 300 千吨, 不会全部卖出, 故需要计算三个水库分别向四个区供应每千吨水的利润, 即从收入 900 元中减去其他管理费 450 元, 再减去相应的引水管理费得下面各水库向各区送水的净利润表:

净利润(元/千吨)	甲	乙	丙	丁
A	290	320	230	280
B	310	320	260	300
C	260	250	220	/

决策变量仍为上面的 11 个 $x_{12}, \dots, x_{33}$, 决策目标改为

$$\begin{aligned} \text{Max } z = & 290x_{11} + 320x_{12} + 230x_{13} + 280x_{14} + \\ & 310x_{21} + 320x_{22} + 260x_{23} + 300x_{24} + \\ & 260x_{31} + 250x_{32} + 220x_{33}. \end{aligned} \quad (1)'$$

由于供水量不能全卖出, 应将约束条件

(6)–(8) 右端增大一倍并改 $=$ 为 $\leq$:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100, \quad (6)'$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 120, \quad (7)'$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 100. \quad (8)'$

另外, 由于每区供水量都能满足, 应将约束条件(2)–(5)改为

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80, \quad (2)'$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 140, \quad (3)'$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30, \quad (4)'$

$x_{14} + x_{24} = 50. \quad (5)'$

所以, 本问题数学模型是在非负约束及约束(2)'–(8)'下, 求目标函数(1)'最大值的线性规划.

自来水输送优化问题②求解

解: 依次执行下列 Matlab 行命令:

$f = [290 \ 320 \ 230 \ 280 \ 310 \ 320 \ 260 \ 300 \ 260 \ 250 \ 220];$

$A = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$

$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0;$

$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1];$

$b = [100 \ 120 \ 100]';$

$\text{Aeq} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0;$

$0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0;$

$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1;$

$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0];$

$\text{beq} = [80 \ 140 \ 30 \ 50]';$

$[x \ z] = \text{linprog}(f, A, b, \text{Aeq}, \text{beq})$

则由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x_{12} = 100, x_{21} = 30, x_{22} = 40, x_{24} = 50, x_{31} = 50, x_{33} = 30$, 其余 x_{ij} 全为 0.

目标函数最大值 $z = 88700$.

最优送水方案是: 每天 A 水库向乙区供水 100 千吨; B 水库向甲、乙、丁区分别供水 30, 40, 50 千吨; C 水库向甲、丙区分别供水 50, 30 千吨. 三个水库每日总利润最大值为 88700 元.

运输问题

上面考虑的问题属于所谓运输问题的范畴,即将物资从若干供应点运往一些需求点,在供需约束条件下,使总运输费用最小或总利润最大. 标准平衡运输问题的数学模型是:

$$\begin{cases} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ s. t. \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \cdots, n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

其中, x_{ij} , c_{ij} 分别是 从供应点 i 到需求点 j 的运量及运费单价, a_i (b_j) 是供应点 i (需求点 j) 的供应(需求)量,约束条件是供需平衡等式.

思考题 5-3

今有某物资从三个供应点 A,B,C 调往四个需求点甲、乙、丙、丁. A,B,C 的供应量分别是 7,4,9;甲、乙、丙、丁的需求量分别是 3,6,5,6,运费单价如下表所示:

	甲	乙	丙	丁
A	3	11	3	12
B	1	9	2	8
C	7	4	10	5

问怎样调运才使总运费最低?

§ 5.4 0—1 线性规划模型

在实际优化问题中存在一类所谓的分派问题,其含义如下:有若干项任务,每项任务必须有一人且只能有一人承担,每人也只能承担其中一项,不同人员承担不同任务的收益(或成本)不同. 优化目标是:怎样分派各项任务使总收益最大(或总成本最小).

本节通过若干个实际的分派问题,说明如何建立这类优化问题的数学模型,并用 Matlab 求出最优解及对应的目标函数最优值,同时对结果作一些分析.

A 混合接力队最优组合

问题:某学院准备从 5 名游泳队员中选择 4 人组成学院的接力队,参加校运动会的 4×100 混合泳接力赛. 5 名队员 $a_1, \cdots, a_5$ 的 4 种泳姿(蝶,仰,蛙,自由) $b_1, \cdots, b_4$ 的百米平均成绩 $c_{ij}, i = 1, \cdots, 5; j = 1, \cdots, 4$ 如下表所示. 应如何选择 4 人组成最优的接力队?

c_{ij} (秒)	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1	66.8	57.2	78	70	67.4
b_2	75.6	66	67.8	74.2	71
b_3	87	66.4	84.6	69.6	83.8
b_4	58.6	53	59.4	57.2	62.4

问题分析

要求从 5 名队员选择 4 人,每人一种泳姿且 4 人泳姿各不相同,使接力队成绩最好.

容易想到的办法是穷举法,组成接力队的方案共 $5! = 120$ 种,逐一计算并作比较即可找出最优方案. 显然,这不是解决这类问题的有效办法,随着问题规模变大,穷举法的计算量将是无法接受的.

一个好的办法是:用 0—1 变量表示一个队员是否入选接力队,从而建立这个问题的 0—1 规划模型,再借助数学软件求解.

建立 0—1 线性规划模型

引入 0—1 变量 x_{ij} ,若队员 b_j 参加泳姿 a_i 的比赛,记 $x_{ij} = 1$,否则记 $x_{ij} = 0$. 根据组成接力队的要求,应满足两个约束条件:

① 每人至多入选 4 种泳姿之一,应有

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1, i = 1, \cdots, 5$$

② 每种泳姿必须有一人入选

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, j = 1, \cdots, 4$$

当队员 b_j 入选泳姿 a_i 时,其成绩为 $c_{ij} x_{ij}$,于是接力队的成绩可表为 $z = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 c_{ij} x_{ij}$.

这就是问题的目标函数.

所以,混合接力队的最优组合问题的数学模型是下列 0—1 线性规划问题:

$$\begin{cases} \text{Min } z = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1, i = 1, \dots, 5 \\ \sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, j = 1, \dots, 4 \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

这类线性规划问题的特点是决策变量只取值 1 或 0,故称为 0—1 线性规划问题.

Matlab 的函数 bintprog 专门用来求解 0—1 线性规划,下面介绍此函数的使用范围及使用方法,其理论基础从略.

函数 bintprog(f,A,b,Aeq,beq)使用范围

函数 linprog(f,A,b,Aeq,beq)用来求解一般的标准型 0—1 线性规划:

$$\begin{cases} \text{Min } z = c^T x \\ \text{s. t. } Ax \leq b, \\ Aeqx = beq \\ x = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

其中,约束条件除若干不等式 $Ax \leq b$ 外,还有若干等式 $Aeqx = beq$, $A, b; Aeq, beq$ 分别代表二者的系数矩阵及右端向量.若置 $A = [], b = []$,则不等式全缺省;若置 $Aeq = [], beq = []$,则等式全缺省.

函数 linprog(f,A,b,Aeq,beq)使用方法

首先,(必要的话)改变 z 中所有系数的符号把“Max z ”化为“Min z ”;把“ $\geq$ ”化为“ $\leq$ ”.

其次,输入具体的 $f(=c), A, b, Aeq, beq$.

最后执行行命令:

$$[x, z] = \text{bintprog}(f, A, b, Aeq, beq)$$

则输出的 x 即为最优解; z (或 $-z$)即为目标函数最小(大)值.

混合接力队优化组合问题求解

解:执行下列 Matlab 行命令:

$$\begin{aligned} f &= [66.8 \ 75.6 \ 87.58.6 \ 57.2 \ 66.66.4 \ 53.78 \\ &\quad 67.8 \ 84.6 \ 59.4 \ 70.74.2 \ 69.6 \ 57.2 \ 67.4 \\ &\quad 71.83.8 \ 62.4]; \\ A &= [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ &\quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ &\quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ &\quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ &\quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]; \\ b &= [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'; \\ beq &= [1 \ 1 \ 1 \ 1]'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Aeq &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0; \\ &\quad 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0; \\ &\quad 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0; \\ &\quad 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]; \end{aligned}$$

$$[x, z] = \text{bintprog}(f, A, b, Aeq, beq)$$

由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x_{14} = x_{21} = x_{32} = x_{43} = 1$,其他 $x_{ij} = 0$

目标函数最小值 $z = 253.2'' = 4'13''2$

即应该选派 b_1, b_2, b_3, b_4 四人组成接力队参加混合泳接力比赛,并分别游自由泳、蝶泳、仰泳和蛙泳.他们的预期成绩(是一切可能组合中最好成绩)为:4 分 13 秒 2.

思考题 5—4

在校运会报名时,发现队员 b_4 的蛙泳成绩有较大退步,只有 $1'15''2$;而队员 b_5 训练努力自由泳有明显进步,达到 $57''5$.

问组成接力队的方案应作如何调整?

B 选课策略

问题:某大学规定,运筹学专业学生毕业时必须至少修过 2 门数学课,3 门运筹学课和 2 门计算机课.这些课的编号及信息如下表所示.

① 给出毕业时选课门数最少的一个方案.

② 给出毕业时选课门数少而学分多的一个方案.

课程编号	课程名称	学分	所属类别	先修课
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学, 运筹	微积分, 线性代数
4	数据结构	3	数学, 计算	计算机编程
5	应用统计	4	数学, 运筹	微积分, 线性代数
6	计算机模拟	3	计算, 运筹	计算机编程
7	计算机编程	2	计算	
8	预测理论	2	运筹	应用统计
9	数学实验	3	计算, 运筹	微积分, 线性代数

选课策略问题的数学模型

用 $x_i = 1(0)$ 表示选修(不选)按上表中编号顺序的 9 门课程的第 i 门课.

问题 ① 决策目标为选修课程门数最少,即

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^9 x_j. \tag{1}$$

其约束条件:首先,每人最少要选 2 门数学课,3 门运筹学课和 2 门计算机课,按表中课程类别划分可将此约束表示为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 2 \tag{2}$$

$$x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 3 \tag{3}$$

$$x_4 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 2 \tag{4}$$

其次,某些课有先修课的要求,例如,数据结构的先修课是计算机编程,这意味着 $x_4 = 1$ 蕴涵 $x_7 = 1$,这个条件可表示为 $x_4 \leq x_7$ 或

$$x_4 - x_7 \leq 0. \tag{5}$$

同理,最优化方法的先修课是微积分和线性代数的条件可表示为 $x_3 \leq x_1, x_3 \leq x_2$,此二式可合并为一个不等式

$$2x_3 - x_1 - x_2 \leq 0. \tag{6}$$

另外有
$$2x_5 - x_1 - x_2 \leq 0 \tag{7}$$

$$x_6 - x_7 \leq 0 \tag{8}$$

$$x_8 - x_5 \leq 0 \tag{9}$$

$$2x_9 - x_1 - x_2 \leq 0 \tag{10}$$

所以,选课策略问题 ① 的数学模型就是:只取值 0 或 1 的 9 个决策变量 $x_1, \dots, x_9$, 满足约束条件 (2) — (10), 并使目标函数 (1) 取最小值的 0 — 1 线性规划模型.

选课策略问题①数学模型求解

首先,把约束条件 (2) — (4) 标准化为

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leq -2 \tag{2}'$$

$$-x_3 - x_5 - x_6 - x_8 - x_9 \leq -3 \tag{3}'$$

$$-x_4 - x_6 - x_7 - x_9 \leq -2 \tag{4}'$$

其次,输入数据

```

A=[-1-1-1-1-10 0 0 0 ;
    0 0-10-1-10-11 ;
    0 0 0-10-1-10-1 ;
    -1-12 0 0 0 0 0 0 ;
    0 0 0 1 0 0-10 0 ;
    -1-10 0 2 0 0 0 0 ;
    0 0 0 0 0 1-10 0 ;
    0 0 0 0-10 0 1 0 ;
    -1-10 0 0 0 0 0 2];
b=[-2-3-2 0 0 0 0 0]';
Aeq=[];
beq=[];
f=[1 1 1 1 1 1 1 1 1];

```

核对输入数据正确之后,键入下列行命令:

```
[x z] = bintprog(f,A,b,Aeq,beq)
```

由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 1$,
 $x_3 = x_4 = x_9 = 0$;

目标函数最小值 $z = 6$.

即应该选修微积分、线性代数、应用统计、计算机模拟、计算机编程、预测理论等 6 门课,最小选课门数是 6.

思考题 5-5

在选课策略问题①中,如果一个学生因对最优化方法特有兴趣而把此课定为必选,仍然希望毕业时所学课程门数尽可能少,试给出他(她)的一个选课方案.

关于解的唯一性

一般来说,线性规划问题,包括 0-1 线性规划问题的解都不是唯一的,例如对选课策略问题①,我们先求出一个最优解 $x = [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0]$; 后又在思考题 5-5 中求得另外一个最优解 $x = [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1]$,它们对应的最优目标函数值相等($= 6$). 说明对应选课策略问题①的 0-1 线性规划至少有两个解*,说明它的解不唯一.

★我们可以证明:此问题恰有两个解.

证:如果我们再把 $x_4 = 1$ 作为约束条件(表示为 $-x_4 \geq -1$),求得最优解 $x = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]$,但对应最优目标值已不是 6,而是 7. 说明,此解与上面二解不同,不是选课策略问题①的最优解. 再注意观察:上面两个最优解恰有一个分量,第 4 分量,同时为 0(没有第 4 分量为 1 的最优解). 由此可见,选课策略问题①只有上述两个解.

思考题 5-6

在选课策略问题中如果一个学生在满足学校有关选课规定条件下,希望毕业时所学课程获得的学分数尽可能多,试给出他(她)的一个选课方案.

选课策略问题②的数学模型

选课策略问题②的数学模型与选课策略问题①的数学模型的约束条件完全一样;只是目标函数不同.要求“选课门数少而学分多”意味着同时要求两个决策目标:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^9 x_i$$

$$\text{Max } w = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

具有多个决策目标的规划称为多目标规划,前面讲的只有一个目标的规划称为单目标规划.所以,选课策略问题②的数学模型是满足约束条件(2)~(10)并有双目标 $\text{Min } z$ 和 $\text{Max } w$ 的 0-1 线性规划.

双目标规划的一种处理方法

把双目标归结为一个单目标,即令 $y = \alpha z + (1-\alpha)w$, α 为闭区间 $[0,1]$ 中任一数,并取决策目标为 $(\text{Max } w = \text{Min}(-w))$

$$\text{Min } y = \alpha z - (1-\alpha)w$$

α 值的大小体现决策者对每个目标的重视程度,例如,某同学觉得学分数和课程数是三七开,故把 α 取为 0.7,决策目标为

$$\begin{aligned} \text{Min } y &= 0.7z - 0.3w \\ &= -0.1(8x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\ &\quad + 5x_5 + 2x_6 - x_7 - x_8 + 2x_9) \end{aligned}$$

用 Matlab 函数 bintprog 求解这个问题时,与前面求解选课策略问题①时的 A, b, Aeq, beq 数据完全一样,只需把 f 改为

$$f = -0.1[8 \ 5 \ 5 \ 2 \ 5 \ 2 \ -1 \ -1 \ 2]$$

后,再执行行命令 $\text{bintprog} = (f, A, b, Aeq, beq)$,即可得出:

$$\text{最优解 } x = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1];$$

$$\text{目标函数最小值 } z = -2.8.$$

即选修除预测理论外的 8 门课,共计 28 学分.

思考题 5-7

在选课策略问题②中如果一个学生觉得学分数和课程数是二五和七五开,试给出他(她)的一个最优选课方案.

§ 5.5 第 5 章思考题参考答案

思考题 5-1

问题:分别论证各种形式的线性规划模型都可以化为标准型.

解:(1)求最大值问题可通过改变目标函数系数的符号化为求最小值问题:

$$\text{Max}(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) = \text{Min}(-(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n))$$

(2)可通过引入松弛变量 $x'_i \geq 0$ 把不等式化为等式:

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{n1} x_n \leq b_i \Leftrightarrow a_{i1} x_1 + \cdots + a_{n1} x_n + x'_i = b_i;$$

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{n1} x_n \geq b_i \Leftrightarrow a_{i1} x_1 + \cdots + a_{n1} x_n - x'_i = b_i.$$

(3) 如果某决策变量的约束是 $x_j \geq h_j$ (或 $x_j \leq h_j$), 则可引入新变量 y_j , 使 $y_j = x_j - h_j$ (或 $y_j = x_j + h_j$), 则该约束条件化为 $y_j \geq 0$.

(4) 如果某决策变量 x_i 无约束, 此时需引进两个新非负变量 x'_i, x''_i 代替 x_i , 并添加新约束条件: $x_i = x'_i - x''_i, x'_i \geq 0, x''_i \geq 0$.

(5) 如果某 $b_i \leq 0$, 则此式两端乘 -1 , 变为 $b_i \geq 0$.

思考题 5-2

问题: 用 Matlab 求解奶制品生产计划问题①的线性规划模型.

解: $\text{Max}(72x_1 + 64x_2) = \text{Min}(-72x_1 - 64x_2)$

执行下列行命令:

$f = [-72 \ 64];$

$A = [1 \ 1; 3 \ 0; 12 \ 8]; b = [50 \ 100 \ 480]';$

$Aeq = []; beq = [];$

$[x \ z] = \text{linprog}(f, A, b, Aeq, beq)$

从最后显示结果得出答案:

最优解 $x = (20, 30)$; 目标函数最小值 $z = -3360$ (原题最大值 3360)

思考题 5-3

解: 决策变量: $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34}$.

决策目标: $\text{Min}(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij})$

执行下列 Matlab 行命令:

$f = [-3 \ 11 \ 3 \ 12 \ 1 \ 9 \ 2 \ 8 \ 7 \ 4 \ 10 \ 5];$

$A = []; b = [];$

$Aeq = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1;$
 $1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1];$

$beq = [7 \ 4 \ 9 \ 3 \ 6 \ 5 \ 6]';$

$[x \ z] = \text{linprog}(f, A, b, Aeq, beq)$

从最后显示结果得出答案:

最优解: $x_{11} = 2, x_{13} = 5, x_{21} = 1, x_{24} = 3,$
 $x_{32} = 6, x_{34} = 3$, 其余 $x_{ij} = 0$.

目标函数最小值 $z = 85$.

即, 最优运输方案是: A 分别向甲、丙运货 2, 5; B 分别向甲、丁运货 1, 3; C 分别向乙、丁运货 6, 3. 对应最低运费是:

$2(3) + 5(3) + 1(1) + 3(8) + 6(4) + 3(5) = 85$.

思考题 5-4

解: 根据问题修改数据, 把 c_{43} 由原来的 $69''6$ 改为 $75''2$; 把 c_{54} 由原来的 $62''4$ 改为 $57''5$ 并执行下列 Matlab 行命令

$f = [66.8 \ 75.6 \ 87 \ 58.6 \ 57.2 \ 66 \ 66.4 \ 53 \ 78$
 $67.8 \ 84.6 \ 59.4 \ 70 \ 74.2 \ 75.2 \ 57.2 \ 67.4$
 $71 \ 83.8 \ 57.5];$

$A = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1];$

$b = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'; beq = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$

$Aeq = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0;$
 $0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1];$

$[x \ z] = \text{bintprog}(f, A, b, Aeq, beq)$

由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x_{21} = x_{32} = x_{43} = x_{54} = 1$, 其他 $x_{ij} = 0$.

目标函数最小值 $z = 257.7'' = 4'17''7$

即, 应该选派 b_2, b_3, b_4, b_5 四人组成接力队参加混合泳接力比赛, 并分别游蝶泳、仰泳、蛙泳和自由泳. 他们的预期成绩 (是一切可能组合中最好成绩) 为: 4 分 17 秒 7.

思考题 5-5

解:只需要在原来选课策略问题①的基础上增加一个约束条件: $-x_3 \geq -1$,相当于令矩阵 A 增加一行;向量 b 增加一元.
分别执行下列 Matlab 行命令输入数据:

```
A=[-1-1-1-1-10 0 0 0 ;
    0 0-10-1-10-1-1 ;
    0 0 0-10-1-10-1 ;
    -1-12 0 0 0 0 0 0 ;
    0 0 0 1 0 0-10 0 ;
    -1-10 0 2 0 0 0 0 ;
    0 0 0 0 0 1-10 0 ;
    0 0 0 0-10 0 1 0 ;
    -1-10 0 0 0 0 0 2 ;
    0 0-10 0 0 0 0 0 ];
b=[-2 -3 -2 0 0 0 0 0 -1]';
Aeq=[];beq=[];
f=[1 1 1 1 1 1 1 1 1];
```

核对输入数据正确之后键入下列行命令:

```
[x z] = bintprog(f,A,b,Aeq,beq)
```

由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = x_9 = 1$,
 $x_4 = x_5 = x_8 = 0$.

目标函数最小值 $z = 6$.

即,应该选修微积分、线性代数、最优化方法、计算机模拟、计算机编程、数学实验等 6 门课,最小选课门数是 6.

思考题 5-6

解:只需要在原来选课策略问题①的基础上把决策目标(1)改变为

$$\text{Max } w = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

执行下列 Matlab 行命令输入数据:

```
A=[-1-1-1-1-10 0 0 0 ;
    0 0-10-1-10-1-1 ;
    0 0 0-10-1-10-1 ;
    -1-12 0 0 0 0 0 0 ;
    0 0 0 1 0 0-10 0 ;
    -1-10 0 2 0 0 0 0 ;
    0 0 0 0 0 1-10 0 ;
    0 0 0 0-10 0 1 0 ;
    -1-10 0 0 0 0 0 2 ];
b=[-2 -3 -2 0 0 0 0 0 2]';
Aeq=[];
beq=[];
f=-[5 4 4 3 4 3 2 2 3];
```

核对输入数据正确之后键入下列行命令:

```
[x z] = bintprog(f,A,b,Aeq,beq)
```

由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x = [1 1 1 1 1 1 1 1 1]$;

目标函数最大值 $z = 30$.

即,为了使学分最多,应选修所有 9 门课程,毕业时能获得的最大可能学分是 30 分.

注:因所有课全选学分当然最多,故这个结果的正确性是不言而喻的.

思考题 5-7

解:取 $\alpha = 0.75$, 决策目标为

$$\begin{aligned} \text{Max } y &= 0.75z - 0.25w \\ &= -0.25(2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \\ &\quad + x_8) \end{aligned}$$

执行下列 Matlab 行命令输入数据:

```
A=[-1-1-1-1-1 0 0 0 0 ;
    0 0 -1 0 -1-1 0 -1-1 ;
    0 0 0 -1 0 -1-1 0 -1 ;
    -1-1 2 0 0 0 0 0 0 ;
    0 0 0 1 0 0 -1 0 0 ;
    -1-1 0 0 2 0 0 0 0 ;
    0 0 0 0 0 1 -1 0 0 ;
    0 0 0 0 -1 0 0 1 0 ;
    -1-1 0 0 0 0 0 0 2 ];
b=[-2 -3 -2 0 0 0 0 0 0]';
Aeq=[]; beq=[];
f=0.65 * [1 1 1 1 1 1 1 1 1]
    -0.35 * [5 4 4 3 4 3 2 2 3]
```

核对输入数据正确之后键入下列行命令:

```
[x z] = bintprog(f,A,b,Aeq,beq)
```

由屏幕最后显示结果得:

最优解 $x = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$;

目标函数最小值 $z = -1$.

即,选修 9 门课程除计算机模型和预测理论外的 7 门课,对应学分是 25 分.

注:如果选 $\alpha = 0.6$,结果如何?对应取

```
f = 0.75 * [1 1 1 1 1 1 1 1 1]
    -0.35 * [5 4 4 3 4 3 2 2 3],
得 x = [1 1 1 1 1 1 1 1 1])
```

第6章 充分发挥智力巧妙建模

§ 6.1 引言

§ 6.2 巧妙利用雀巢原理

§ 6.3 巧妙利用函数的极端性质

§ 6.4 其他问题

§ 6.5 第6章思考题参考答案

§ 6.1 引言

由于实际问题的多样性与复杂性,在数学建模中常常要针对实际情况,充分发挥人的智力巧妙地解决问题.这里所说的智力包含洞察力、想象力、判断力、正反面思维能力和抓主要矛盾的能力等等.

本章用一些实际例子介绍如何针对具体问题的特点,充分发挥人的智力巧妙地建立数学模型.如果说此前四章所用方法各有一个主要领域的话,那么本章则是一个问题使用一种方法,重在探讨技巧,启迪思维,不必要求方法之间必须有什么联系.

§ 6.2 巧妙利用雀巢原理

雀巢原理: n 个球放入 k 个盒子,如果 $n > k$, 必有一个盒子放入多于一个的球.

雀巢原理是一个不证自明的简单真理,但这丝毫不影响它的潜在能力.我们先举两个问题加以说明.

问题 1: 试证在任何 6 个人中不是有 3 人两两相识,就是有 3 人两两不相识.

问题 2: 试证在任何 $n(\geq 2)$ 个人中必有两人有相同数目的朋友.

无向图的有关概念

设 v 是无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的一个结点,与 v 相关连的边的条数称为 v 的度数,记为 $d(v)$. 简单无向图任一结点的度,至多等于它的结点数减一.

图 $G = \langle V, E \rangle$ 的点边交替序列

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_n v_n$$

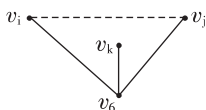
称为 G 的一条从 v_0 到 v_n 的长为 n 的路径,其中 $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E, i = 1, \cdots, n$, 特别,当 $v_0 = v_n$ 时,称 P 为回路. 若 G 为简单无向图,路径 P 可表为 $P = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$.

问题 1 的证明

证: 令此 6 个人为无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的 n 个结点: $v_1, v_2, \cdots, v_6, (v_i, v_j) \in E$ 的充要条件是 v_i, v_j 相识. 则由雀巢原理, v_6 必与其他 5 人中的 3 人相识或不相识*. 不失一般性, 设 v_6 与 v_i, v_j, v_k 三人相识(对不相识的情形可类似地处理, 即适当改变图 $G = \langle V, E \rangle$ 的边集 E 的定义).

若 v_i, v_j, v_k 3 人中有 2 人相识, 例如, v_i, v_j 相识, 则 v_i, v_j, v_6 3 人相识;

否则, v_i, v_j, v_k 3 人两两不相识. 所以, 不论哪种情形结论都成立.



★ v_6 与其他 5 人的每一人, 都不外乎存在相识或不相识两种情况之一. 按雀巢原理, 5 人分属 2 种情况, 必定有 3 人属于同一种情况.

所以, v_6 必与其他 5 人中的 3 人相识或不相识.

思考题 6—1

问题 1 中 6 改为 7, 或改为 5, 其结论还成立? 为什么?

问题 2 的证明

问题 2: 试证在任何 $n (\geq 2)$ 个人中必存在两人有相同数目的朋友.

证: 令此 n 个人为无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的 n 个结点: $v_1, v_2, \dots, v_n$, 且 $(v_i, v_j) \in E$ 的充要条件: v_i, v_j 是朋友. 则 v_i, v_j 有相同的朋友数等价于它们的度相等: $d(v_i) = d(v_j)$. 这样一来, 问题归结于证明: 存在 $i \neq j$, 满足

$$d(v_i) = d(v_j). \quad (*)$$

因 G 是一个简单无向图, 故它的任一结点的度, 至多等于 G 的结点数减一.

我们分 3 种仅有的情形来证明公式 (*).

① $d(v_i) > 0, i = 1, \dots, n$. 在此情形下有 $1 \leq d(v_i) \leq n-1, i = 1, \dots, n$, 于是, 由雀巢原理知 $\exists i \neq j, d(v_i) = d(v_j)$.

② 恰有一个孤立点, 不妨设 $d(v_n) = 0$, 则 $d(v_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 由 ① 的证明推出: 存在 $1 \leq i < j \leq n-1$, 使 $d(v_i) = d(v_j)$.

③ 至少有两点 v_i, v_j 度为 0. 在此情形下已成立 $d(v_i) = d(v_j)$.

问题 3

问题 3 试证: 由 $n^2 + 1$ 个不同实数构成的每个序列都包含一个长为 $n + 1$ 的递增子序列或递减子序列*.

证: 令 $a_1, \dots, a_{n^2+1}$ 是 $n^2 + 1$ 个不同实数的一个序列. 此序列中的每一项 a_k 联系着一个有序对 (i_k, d_k) , 其中 i_k 是从 a_k 开始的最长的递增子序列的长度, d_k 是从 a_k 开始的最长的递减子序列的长度.

★ 一个实数序列 $a_1, \dots, a_m$ 的子序列是指此 m 个实数的一个子集, 按脚标递增排列的一个较短序列; 递增(降)子序列是指该子序列是递增(降)的.

例如, 在序列

$$a_1, \dots, a_m = 3 \ 2 \ 1 \ 6 \ 5 \ 4 \ 9 \ 8 \ 7 \ 0$$

中, 取前 3 个元组成递减子序列: 3, 2, 1; 取第 3, 5, 7 元组成递增子序列: 1, 5, 9; 取前 3 个及最后一个元组成递减子序列: 3, 2, 1, 0, 等等. 不难看出: 此序列的最长递减子序列(共有几个?) 的长度是 4.

例如: $n = 3; n^2 + 1 = 10;$

$$\{a_1, \dots, a_{n^2+1}\} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

考虑一个序列: $P = (3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7, 0)$, 易见, 对 $k = 1, 2, \dots, 10$, 上面所述的 10 个有序对 (i_k, d_k) 是:

$$(3, 4), (3, 3), (3, 2), (2, 4), (2, 3), \\ (2, 2), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1).$$

现在,用反证法证明问题 3:

即,如果没有长为 $n+1$ 的递增子序列或递减子序列,则将导致矛盾.

事实上,在此假设下对 $k=1,2,\dots,n^2+1$, 都有 $1 \leq i_k, d_k \leq n$, 从而至多存在 n^2 个两两不同的有序对 (i_k, d_k) . 根据雀巢原理, n^2+1 个有序对中必有两个相等, 即存在 $s < t$, 使得 $i_s = i_t, d_s = d_t$. 因 $a_s \neq a_t$, 即 $a_s > a_t$ 或 $a_s < a_t$. 若 $a_s > a_t$, 则 $d_s \geq d_t + 1$ 便与 $d_s = d_t$ 相矛盾; 若 $a_s < a_t$, 则 $i_s \geq i_t + 1$ 也同样导致矛盾.

问题 4

试证: 对任意正整数 n , 集合

$\{1, 2, \dots, 2n\}$ 的任一个 $n+1$ 元子集中, 都有两个元素存在整除关系.

证: 考虑 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ 的一个 $n+1$ 元子集

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$$

易知: 任何正整数 a 都可表为 $a = 2^k p$, 其中 k 为非负整数, p 为奇数.

令 $a_i = 2^{k(i)} p_i$, 其中 $k(i)$ 是某个非负整数, $p_i \in \{1, 3, \dots, 2n-1\}, i=1, 2, \dots, n+1$.

因这 $n+1$ 个 p_i 只能取 n 个值, 故由雀巢原理, 它们之中必有两个相同, 即存在 $u < v$, 使得

$$p_u = p_v = p.$$

于是

$$a_u = 2^{k(u)} p_u = 2^{k(u)} p.$$

同理可得

$$a_v = 2^{k(v)} p.$$

所以, 当 $k(u) \leq k(v)$ 时, a_u 整除 a_v , 否则, a_v 整除 a_u . 证毕.

思考题 6-2

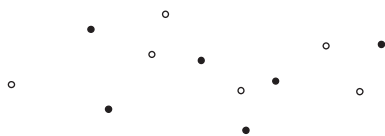
试对问题 4 给出别的证明(提示: 归纳法也是人们经常用来证明问题的好方法, 建议考虑用对 n 的归纳法来证明问题 4).

§ 6.3 巧妙利用函数的极端性质

我们曾经几次针对所考虑的实际问题, 巧妙地引入适当能量函数建立数学模型, 并利用该能量函数的极值点的极端性质来解决有关的问题. 本节再以两个有趣例子, 进一步阐述如何巧妙利用函数的极端性质解决问题的思维方法.

一个几何问题

问题 5: 在平面上任意给定 n 个实点和 n 个虚点, 假设此 $2n$ 个点中任何 4 点都不共线. 试证: 总可以过此 $2n$ 个点划 n 条两两不相交的直线段, 每条连接一实点和一虚点.



问题 5 的证明

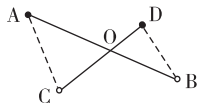
证:将此 $2n$ 个点,按一实点连接一虚点的一切可能方法共有 $k \leq (n!)^2$ 种(为什么?).记这些连接方法的集合为

$$S = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}.$$

我们在集合 S 上定义一个能量函数 f , $f(C_i)$ 为 C_i 的 n 条连线的长度之和.因 S 的元素个数有限,故存在正整数 $m \leq k$,使

$$f(C_m) = \min\{f(C_1), \dots, f(C_k)\}.$$

下面用反证法证明:连接法 C_m 的 n 条连接直线段一定两两不相交.如果 C_m 有两条连线段 AB, CD 相于 O 点(如下图所示).

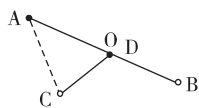


令 C_i 为 S 中的那个连接法,它与 C_m 仅有两条连线不同,并且是改 AB, CD 连接为 AC, BD 连接(如虚线所示).则

$$\begin{aligned} f(C_m) - f(C_i) &= (|AB| + |CD|) - (|AC| + |BD|) \\ &= (|AO| + |OC| - |AC|) + (|OB| + |OD| - |BD|) > 0. \end{aligned}$$

因此, $f(C_m) > f(C_i)$,便与 $f(C_m)$ 的定义相矛盾.

注: O 可能与 C 或 D 重合.例如, O 与 D 重合,即 DAB 共线,根据我们上面所做的假设, A, B, C, D 四点不能共线,从而, C 必在直线 AB 之外,如上图所示.在此情况下,上面的推导仍然有效.



$$f(C_m) - f(C_i)$$

$$\begin{aligned} &= (|AO| + |OC| - |AC|) \\ &\quad + (|OB| + |OD| - |BD|) \\ &= (|AO| + |OC| - |AC|) \\ &\quad + (|OB| - |OB|) \\ &> 0. \end{aligned}$$

一个图论问题

我们介绍过无向图中路径的概念.无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的点边交替序列

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_n v_n$$

称为 G 的一条从 v_0 到 v_n 的长为 n 的路径,其中, $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E, i = 1, \dots, n$.

特别,当 $v_0 = v_n$ 时,称 P 为回路.所含结点两两都不重复的路径为基本路径.

问题 6:试证:每点度数都不小于 2 的有限简单无向图一定包含一条回路.

问题 6 的证明

证:因 G 每点的度不小于 2,故 G 有长度不小于 2 的路径.又因 G 为有限图,故 G 有长度最大的基本路径.设 $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ 是一条这样的最长基本路径.因 $d(v_n) \geq 2$,故有边 $(v_n, v_k) \neq (v_{n-1}, v_n)$.

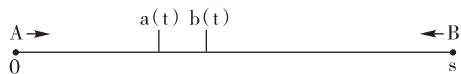
若 $v_k \notin \{0, 1, \dots, n-2\}$,则 $P \cup (v_n, v_k)$ 是 G 的长度比 P 还大的一条路径,便与 P 的定义矛盾.所以 $v_k \in \{0, 1, \dots, v_n\}$,从而得证 $C = (v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ 是 G 的一条回路.

注:长度最大也属于极端性质之列.

§ 6.4 其他问题

问题 7

某甲 8 时从山下旅店出发,沿一条路径上山,17 时到达山顶并留宿.次日 8 时沿同一路径下山,17 时回到旅店.某乙断言:甲必在两天中的同一时间到达经过路径中的同一点.对吗?为什么?



等价问题: 设某甲下(上)山所走那条路径长为 s . 如上图, 令长为 s 的水平线段 AB 表示此路径, 今有二人 8 时分别从左、右两端 A, B 向右、左运动, 17 时到达右、左端点. 在此期间内的时刻 t , 二人分别走到坐标为 $a(t), b(t)$ 的点.

要证: 存在该时段内某时刻 r , 使 $a(r) = b(r)$.

等价问题的证明

证: 考虑 A, B 间的(有向)距离

$$d(t) = a(t) - b(t).$$

$d(t)$ 显然是 t 从 8 时到 17 时这 9 小时闭区间内的连续函数, 并有

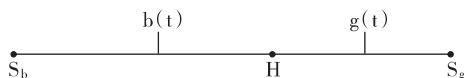
$$d(0) = -s < 0; d(9) = s > 0.$$

于是, 由连续函数性质推出: 必存在某 $r: 0 < r < 9$, 使得 $d(r) = 0$. 从而得证: 存在该时段内某时刻 r 使 $a(r) = b(r)$.

问题 8

一男孩和一女孩分别在离家 2km 和 1km 且方向相反的两所学校 S_b, S_g 上学, 每天同时放学后分别以 4km/h 和 2km/h 的速度步行回家. 一小狗以 6km/h 的速度由男孩处奔向女孩, 又由女孩处奔向男孩, 如此往返直至回到家中, 问小狗共奔跑了多少路程?

又如果男孩和女孩上学时, 小狗也往返奔跑于他们之间, 问当他们到达学校时小狗在何处?

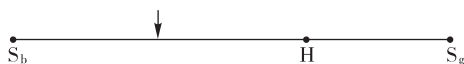


解: 这个问题, 用宏观分析方法解决较为方便. 由题设, 男孩、女孩经半小时同时到家, 小狗也不停地奔跑了半小时与他们同时到家. 因此, 小狗共跑了 $0.5 \times 6 = 3$ 公里. 这正是前一问题的答案.

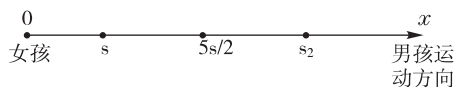
对于后一问题, 先分析小狗伴男、女孩从学校跑回家的过程. 易见: 无论开始时小狗在男、女孩之间(即二学校之间)的任何位置, 其最后结果都是经半小时后三者同时到家.

一种想法是将上述过程颠倒过来考虑, 并由此判断: 如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔跑在他们之间, 则当孩子们到达学校时小狗将处在 S_b 和 S_g 之间的任何位置.

对不对呢? 下面来作一个精细分析, 其结果将给出否定答案.



由于假设男孩、女孩和狗都作匀速运动, 故为方便起见, 可取下之惯性参照系: 取女孩位置为坐标原点, 男孩运动方向为 x 轴正向, 则男孩的相对速度是 $4+2=6$; 狗的相对速度正向是 $6+2=8$, 反向是 $6-2=4$ (单位为 km/h).



假设狗第一次追上男孩的位置坐标为 s , 则狗从此位置返回原点的时间为 $s/4$, 狗到原点时男孩位置是 $s + 6s/4 = 5s/2$. 设狗第 2 次追上男孩的位置是 s_2 , 则 $s_2/8 = (s_2 - 5s/2)/6$, 解得 $s_2 = 10s$. 一般地, 设狗第 k 次追上男孩的位置是 s_k , 则

$$\begin{aligned} s_{k+1}/8 &= (s_{k+1} - 5s_k/2)/6, \text{解得} \\ s_{k+1} &= 10s_k, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

半小时结束时, 男孩到校, 他的位置是 3, 狗总共跑了 3km, 我们要计算此时狗的位置. 设结束时狗的坐标是 x , 并且狗共遇到男孩 k 次, 分两种情况讨论.

情形①: 狗最后离开的是女孩, 则

$$\begin{cases} 2(s + 10s + \dots + 10^{k-1}s) + x = 3 \\ x/8 = (3 - 5s_k/2)/6 \end{cases}$$

由第二式解出 x 代入第一式化简得

$$2s(10^k - 1)/9 + 4 - 10s_k/3 = 3,$$

因 $10^{k-1}s = s_k$ 由上式可求得

$$s_k = 9/10 - s/5,$$

代入第二式求得 $x = 1 - 2s/3$.

情形②: 狗最后离开的是男孩, 则

$$\begin{cases} 2(s + 10s + \dots + 10^{k-1}s) - x = 3 \\ (s_k - x)/4 = (3 - s_k)/6 \end{cases}$$

由此二式可求 $s_k = 9/5 + 2s/5$, 由第二式得

$$x = 5s_k/3 - 2 = (9 + 2s)/3 - 2 = 1 + 2s/3.$$

所以, 当孩子们到校时狗所处的(相对与女孩的)位置是: $1 \pm 2s/3$, 其中, s 是狗第一次追上男孩时的位置(注意, s 越小, k 越大, $s \rightarrow 0$ 时, $k \rightarrow \infty$), s 一般与狗的反应速度有关, 但应该不会超过一米, 相对于一公里而言, 是一个小数.

因此, 答案是: 当孩子们到校时狗所处的位置是在他们家的附近.

问题 9

将 7 个相同的小球放入 4 个不同盒子, 要求每盒都不空, 共有多少种放法?

解: 用简单枚举法不难得到所需答案是:

20. 分别考察下列各种可能情形:

① 3 盒放 1 球 & 1 盒放 4 球: 共 $P_4^1 = 4$ 种

② 3 盒放 2 球 & 1 盒放 1 球: 共 $P_4^1 = 4$ 种

③ 2 盒放 1 球 & 1 盒放 2 球 & 1 盒放 3 球:

共 $P_4^2 = 12$ 种

答案: $4 + 4 + 12 = 20$.

思考题 6-3

7 个相同的小球放入 4 个不同的盒子, 不要求任何条件, 共有多少种放法?

思考题 6-4

n 个相同的小球放入 $m (< n)$ 个不同的盒子, 要求每盒都不空, 共有多少种放法?

思考题 6-5

n 个相同的小球放入 $m (< n)$ 个不同的盒子, 不要求任何条件, 共有多少种放法?

问题 10

3 人入座一排 8 座位的椅子, 要求每人两边都有空位, 共有多少种入座方案?

解: 用简单枚举法不难得到所需答案是:

$$4P_3^3 = 24.$$

$$0 * 0 * 0 * 00 \quad 0 * 0 * 00 * 0$$

$$0 * 00 * 0 * 0 \quad 00 * 0 * 0 * 0$$

问题 11

现将问题 10 推广如下：

对任意正整数 m , m 人入座一排 $n (> 2m)$ 座位的椅子, 每人两边都有空位, 共有多少种入座方案?

问题 11 的解

解: 用空位向量: $(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ 表示 m 人入座一排 $n (> 2m)$ 座位椅子的方案, 其中, x_i 为第 i 人左边的空位数 (x_{m+1} 为第 m 人右边的空位数). 则 $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ 是下列丢番廷方程.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - m \tag{c}$$

的解. 换句话说, 问题 11 的解正是丢番廷方程 (c) 的正整数解的个数 (解思考题 5-4 时, 已证明此数等于 C_{n-m-1}^m), 乘以 m 的排列数 $m!$, 即 $m! C_{n-m-1}^m$.

思考题 6-6

3 人入座一排 8 座位的圆桌席位, 每人两边都有空位, 共有多少种入座方案?

思考题 6-7

m 人入座一排 $2m+1$ 座位的圆桌席位, 每人两边都有空位, 共有多少种入座方案?

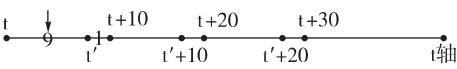
问题 12

甲乙两站之间有电车相通, 每隔 10 分钟甲乙两站相互发一趟车, 但发车时刻不一定相同. 甲乙站之间有一中间站丙. 某人每天在随机的时刻到达丙站, 并搭乘最先经过丙站的那趟车, 结果发现 100 天中约有 90 天到达甲站, 约有 10 天到达乙站. 问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的?



问题 12 的解

解: 由题设条件如: 某人随机时刻到达丙站, 90% 的情况是甲站过来的车刚过, 即将到来的是乙站开来的车 (注意: 10 分钟内分别来一趟甲、乙站过来的车). 所以, 开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是: 甲站来车到丙站 9 分钟之后乙站来车到丙站. 下图中, t, t' 分别表示每个工作日开始时甲、乙站来车到达丙站时刻.



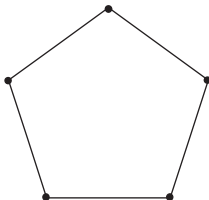
§ 6.5 第 6 章思考题参考答案

思考题 6-1

问题:问题 2 中 6 改为 7 或改为 5 其结论还
成不成立?为什么?

解:6 改为 7 或任何大于 6 的整数 n ,问题 2
都成立,因为,从 n 人中选出 6 人,这 6 人中不是
有 3 人两两相识,就是有 3 人两两不相识. 所
以,原先的 n 人中,不是有 3 人两两相识,就是有
3 人两两不相识.

6 改为 5 或任何小于 5 的整数,问题 2 便不
再成立. 例如,“任何 5 个人中不是有 3 人两两
相识,就是有 3 人两两不相识”不再成立,反例
如下图所示:



思考题 6-2

问题:试对问题 4 给出别的证明.

解:我们用归纳法证明问题 4. $n = 1$ 时结论
显然成立,因 $\{1, 2\}$ 中的 $n + 1 = 2$ 元子集必有一
元整除另一元. 设 $n - 1$ 时结论已成立. 但 n 时
结论不成立,即 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ 有 $n + 1$ 元子集 $S =$
 $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$,它的元素两两互不整除. 则 $2n \in$
 S [否则, $\{1, 2, \dots, 2(n-1)\}$ 中至少含有 S 的 n 个
元两两互不整除,便与归纳假设矛盾]. 令
 $S' = \{a_1, \dots, a_{n-1}, n\} \subseteq \{1, 2, \dots, 2(n-1)\}$.

因 $2n \in S$,故 $n \notin S$,从而 S 的元两两互不
整除,也与归纳法假设相矛盾. 证毕.

思考题 6-5

问题: n 个相同的小球放入 $m (< n)$ 个不同
的盒子,不要求任何条件,共有多少种放法?

解:建立数学模型如下:在一行 m 格的表格
里放进 n 个 * 代表 n 个球,现在用 $m - 1$ 条竖线
把此 n 个球分成至多 m 组. 设第 i 组的球数为
 x_i ,则

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n \tag{a}$$

思考题 6-5 的解显然就是丢番廷方程 (a)
的非负整数解的个数 M . 由上面的作法,这个
整数 M 正好等于在 $n + (m - 1) = n + m - 1$ 个
位置任意放置 $m - 1$ 根竖线的可能方案数,即等
于 $n + m - 1$ 取 $m - 1$ 的组合数: C_{n+m-1}^{m-1} .

注:

(1)例如,对于放入 7 个 * 的情形,下面的
第一张图表示插入 3 条竖线把此 7 个 * 分成 3
组,每组所含 * 数依次是:1,1,1,4. 第二张图
插入的 3 条竖线,各组所含 * 数则依次是:1,0,
1,5.

(2)(a)为丢番廷方程,意味着它的系数和
右端都是整数,并且未知数也只取整数解.

*	*	*	*	*	*	*
(1,1,1,4)						
*	*	*	*	*	*	*
(1,0,1,5)						

思考题 6-3

问题:7 个相同的小球放入 4 个不同的盒
子,不要求任何条件,共有多少种放法?

解:在思考题 6-5 导出的公式中代入 $n =$
 $7, m = 4$ 即得答案:

$$C_{10}^3 = 720/6 = 120.$$

思考题 6-4

问题: n 个相同的小球放入 $m (< n)$ 个不同的盒子, 要求每盒都不空, 共有多少种放法?

解: 建立数学模型如下: 在一个矩形里等距离放进 n 个 * 代表 n 个球, 现在用 $m-1$ 条竖线把此 n 个球分成至多 m 组, 要求每组都不是空集. 设第 i 组的球数为 y_i , 则

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = n, \forall i, y_i > 0 \quad (b)$$

思考题 6-4 的解显然就是丢番廷方程 (b) 的正整数解的个数.

令 $x_i = y_i - 1$, 则 $x_i \geq 0$ 满足丢番廷方程:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n - m. \quad (a)$$

显然, 丢番廷方程 (b) 的正整数解的个数就是丢番廷方程 (a) 的非负整数解的个数.

于是, 利用思考题 6-5 推出的公式得: 思考题 6-4 的解等于 $n - m + (m - 1)$ 取 $m - 1$ 的组合数: C_{n-1}^{m-1} .

例如, 代入 $n = 7, m = 4$ 得问题 7 的答案为 $C_6^3 = 20$.

思考题 6-6

问题: 3 人入座一排 8 座位的圆桌席位, 每人两边都有空位, 共有多少种入座方案?

解: 借助第 1 章“过圆周上等分点的三角形计数问题”中介绍的方法建立数学模型: 用向量 (i, j, k) 来刻画客人席位的构形, 其中 i, j, k 分别表示 3 位客人左边的空位数, 满足条件:

$$i, j, k > 0, i + j + k = 8 - 3 = 5.$$

这样的构形有 $(3, 1, 1)$ 和 $(2, 2, 1)$ 两种, 每种有 8 个不同位置. 于是思考题 6-6 的答案是: $(8 + 8)P_3^3 = 96$.

思考题 6-7

问题: m 人入座一排 $2m + 1$ 座位的圆桌席位, 每人两边都有空位, 共有多少种入座方案?

解: 仍仿思考题 6-6 方法求解. 用向量 $(i_1, \cdots, i_m)$ 来刻画客人席位的构形, 其中 $i_1, \cdots, i_m$ 分别表示 m 位客人左边的空位数, 满足条件:

$$i_1, \cdots, i_m > 0, i_1 + \cdots + i_m = m + 1.$$

这样的构形有 $(2, 1, \cdots, 1), \cdots, (1, \cdots, 2)$ 等 m 种, 每种有 m 个不同位置. 于是本题的答案是:

$$m^2 P_m^m = m^2 (m!).$$

第 7 章 大学生数学建模竞赛

§ 7.1 数学竞赛的意义

§ 7.2 大学生数学建模竞赛的由来

§ 7.3 数学建模竞赛能培养什么素质

§ 7.4 怎样参加大学生数学建模竞赛

§ 7.1 数学竞赛的意义

组织数学竞赛是鼓励年青人学好数学,为国家培养和发现高素质人才的好办法,这是古今中外无数事例所证明了的事实。

下面介绍的大学生数学建模竞赛是一种很有特色的数学竞赛。目前既有国际大学生数学建模竞赛,也有我国的大学生数学建模竞赛,每年 2 月、9 月各举办一次。事实证明,通过这种竞赛,能更有效地培养和发现高素质人才。

§ 7.2 大学生数学建模竞赛的由来

中学生的数学奥林匹克,普遍得到世界各国的认可,已举办了许多届,并取得很大成绩,这是大家都知道的。大家可能不知道,长期以来在美国还有一个名叫“普特南”的大学生数学竞赛,但由于它的彻底闭卷形式和纯理论性,迄今未能得到更大发展,更谈不上形成国际性竞赛的可能。但还有一个影响深远的、正在蓬勃发展的国际性大学生数学建模竞赛。

得到美国科学基金会的资助,于 1985 年在美国创办了一个名为“数学建模竞赛”(Mathematical Contest in Modeling, 下面简称为 MCM)的一年一度的大学生水平的数学竞赛。这是一种彻底公开的、密切联系实际、数学竞赛。它从一开始就得到美国大学生的积极支持,而蓬勃地发展起来,别国大学生也热烈地组队参加,形成了唯一的一个国际性大学生数学竞赛。

中国大学生 1989 年以来一直参加 MCM,参赛人数及获得成绩都仅次于美国。

大学生数学建模竞赛概况

MCM 每年给出三个来自不受限制的任何领域的实际问题 A, B, C (一般地, A 为连续型, B 为离散型, C 为综合型*), 网上开卷竞赛。时间一般在每年二月的第一个星期,从星期五上午 8 点开始直到下星期一上午 12 点交卷。

学生以三人组成一队的形式参赛(由一名教师担任教练),任选一题,完成该实际问题的数学建模的全过程,并就问题的重述、简化和假设及其合理性的论述,数学模型的建立及求解(及软件)、检验和改进,模型的优缺点及其可能的应用范围的自我评述等内容写出论文。

数学建模竞赛论文由专家组成的评阅组进行评阅,评出优秀论文。评分主要看模型及解法的独创性分特、一、二、三等奖,并由组织者给予适当奖励。

MCM 只有一条唯一的禁律——在竞赛期间不得与队外任何人(包括指导教师)讨论赛题,但可以利用任何图书资料,互联网上的资料,任何类型的计算机和软件等等,这就为充分发挥参赛学生的创造性提供了广阔的天地。

★三型的划分并不是十分严格的.大致说来,连续型问题,一般指其中涉及的主要参数是连续变量;离散型问题,一般指其中涉及的主要参数是离散变量;综合型问题除不具连续型或离散型的显著特征外,更要求对题目中附有的极大量数据进行综合分析处理.

1992年起中国举办数学建模竞赛

鉴于数学建模竞赛对培养优秀人才的显著效果,我国教育部门积极鼓励中国大学生参加每年的国际数学建模竞赛(MCM).不仅如此,从1992年起,我国也正式举办中国大学生数学建模竞赛(下面简称为CMCM).1994年,教育部除充分肯定两年来CMCM的成绩外,并决定参与CMCM的组织与指导.政府职能部门的积极态度,使得我国的数学建模竞赛一年比一年兴旺,2005年参赛人数达到2.5万人,并举办研究生的数学建模竞赛*.

★安徽大学从1993年起,就组队参加全国和国际大学生数学建模竞赛,并取得不错的成绩.2000年在国际大学生数学建模竞赛中安大报名参赛的3个队个个得奖,其中获一等奖1队,获二等奖2队.2002年在全国大学生数学建模竞赛中安大报名参赛的7个队也是个个得奖,其中获国家一等奖2队,国家二等奖1队;赛区一等奖、二等奖各2队.1998年以来安大参加国际大学生数学建模竞赛,每年至少有一个队获二等奖.这不仅给安大争得荣誉,更为国家培养了一些优秀人才.

数学建模竞赛为何受到学生欢迎

大学生数学建模竞赛为什么会受到广大学生的热烈欢迎?为什么各级教育部门要鼓励并希望有更多大学生参加这项竞赛?

其根本原因在于这个竞赛活动能培养大学生许多优良的素质.可以说,大学生数学建模竞赛是对大学生进行素质教育的一个理想的战场.在这个战场上经受过洗礼的人,在他们的品质与能力方面都会得到用别的训练难以得到的提高.

§ 7.3 数学建模竞赛能培养什么素质

经过十多年来广大参赛同学、指导教师和有关教育行政部门的总结,大学生数学建模竞赛至少从下列几个方面可以显著地提高参赛大学生的素质.

① 科学创新能力

社会进步依赖于科学的创新.近年不少科学家从不同角度研究了创造力这个课题,并把创造力解释为:“对已知的知识和经验进行科学的加工与创造,产生新概念、新知识、新思想的能力,大体由感知力、记忆力、思考力、想象力、洞察力几种能力构成.”他们的共识是:人的创造力不是与生俱来,而是需要一点一点的培养的.

参加大学生数学建模竞赛,经过三天三夜紧张的集体劳动,立竿见影地解决一个相当复杂的问题,这无疑是对参与者创造力最有效的培养.

②理论联系实际本领

参加大学生数学建模竞赛,可以培养应用数学进行分析、推理和计算的能力,特别是“双向翻译”的能力.一方面,要把用普通语言表述的实际问题的主要方面翻译成明确的数学问题(数学模型),才能用数学方法去加以解决.另一方面,当解数学模型得到结果后,又要把它用普通人能懂的语言翻译出来,才能用于实际.显然,这种本领是新型科技人才最需要具备的.

③群策群力的团队精神

数学建模竞赛是以队为单位的团队竞赛,要取得成功不仅依赖于队员个人的条件和努力,更依赖于他们的团队精神.这包括组织、管理、协调、合作以及及时妥协的能力.

经验证明,三个优秀的队员并不是取得好成绩的充分条件.学习好的同学可能有其负面,比如,好强,过于自信,不容易耐心听取别人意见,坚持己见,不能及时妥协等,从而造成战机贻误,成绩不佳的结果.相反的,取得优异成绩的,毫无例外都是成员团结协作好,即配合默契的队.

④竞争意识与坚忍不拔品质

大学生数学建模竞赛不但能培养队员的竞争意识,更能培养他们的坚强意志和吃苦耐劳的品质.

数模竞赛总是时间紧、任务重和困难大.工作不但强度大,特别是持续时间长,三天睡不到十小时是常有的事.竞赛中如果不能知难而进,往往会原谅自己说这次没有准备好,下次再干,实际上就是认输.相反地,如果不气馁,分秒必争地奋斗到最后一分钟,就会取得比预期好的成绩,队员也从中得到锻炼.

⑤快速收集与掌握信息能力

大学生数学建模竞赛能培养队员快速收集与掌握信息能力.因为竞赛题总是一个有相当应用前景,且尚未完全解决的热点课题,常常涉及现有书籍中找不到的最新知识和信息.队员们只能从因特网上去寻求所需的信息,从而提高了他们使用因特网查信息并设法下载的能力.此外,还需要尽快把下载的资料读懂并应用到当前的工作中去.不言而喻,这种快速收集与掌握信息能力,对于信息时代的青年是尤为可贵的.

⑥急中生智与快速反应能力

大学生数学建模竞赛时间紧、任务重的特点,也最能培养参赛队员的应变能力.在大量问题与困难面前,适时地想出办法,百折不挠地向前推进.不言而喻,这种急中生智和快速反应的能力对新世纪人才也是十分宝贵的.

⑦利用计算机的综合能力

大学生数学建模竞赛的所有赛题几乎都要涉及大量的计算或逻辑运算,参赛队员不掌握计算机和相应数学软件的使用是难以胜任的.

此外,作为数学建模竞赛答卷的论文还需要好的排版、编程计算和绘图制表等能力.这种使用计算机的综合能力也是新时代优秀人才必须具备的.

⑧准确表述与宣传广告的写作能力

大学生数学建模竞赛的最后答卷是一篇论文,这就要求队员具有逻辑严格,且准确清晰的文字表述能力。

数学建模竞赛题中有时也要求写一篇宣传你的观点与结论的通俗文字或广告,从中也培养了队员们在文字宣传方面的写作能力。这样的写作能力,显然在同学们今后的事业中极为有用。

一次参赛,终身受益

大学生数学建模竞赛的全过程在相当程度上“模拟”了同学们今后将参与的高科技攻关的实际情况,以及为取得攻关成功所需要的能力。正因为参加数学建模竞赛培养了这种能力,许多参赛队员毕业后在工作或在深造中都作出了优异成绩,他们都用不同的方式表达了同一个体会:

“一次参赛,终身受益”。

§ 7.4 怎样参加大学生数学建模竞赛

①赛前培训

包括正规的数学建模课和专为参赛队员开设的培训课。后者含优秀论文讨论、相关数学内容介绍、学习与掌握常用软件,等等。

②竞赛三天的拼搏

以“人生能有几次搏”的心态全力以赴,勇于创新,团结协作;按“假设合理性,建模创造性,结果正确性,表述清晰性”标准做好。

③赛后继续

平常心态对待获奖;总结经验,以利再战。

第 8 章 Matlab 编程及应用

§ 8.1 引言

§ 8.2 M 文件的形式

§ 8.3 全局变量与局部变量

§ 8.4 Matlab 的程序结构

§ 8.5 Matlab 编程练习题

§ 8.6 第 8 章练习题参考答案

§ 8.1 引言

Matlab 是一个高性能的科学计算软件,它将计算、可视化和编程功能集成于一个使用非常方便的环境。

Matlab 是一个强有力的操作环境,提供完整而易于使用的语言,这是一个很方便的解释性编程语言,与 C 语言等兼容。因而,Matlab 程序语法简单,容易调试,人机交互性强。

此外,Matlab 有一系列非常强有力的工具箱和函数,除可用来解决各种各样复杂计算问题之外,更可给编程带来简化,是公认最好的第四代计算机语言。

由于大学生数学建模竞赛的竞赛题要涉及相当分量的计算,因而必须借助计算机及各种软件的帮助才能完成任务。一般来说,参加数模竞赛的同学一定要在某种程度上学习掌握某些数学软件,并在竞赛中尽量使用自己熟悉的数学软件解决有关的计算与分析问题。目前,有不少数学软件可供选择,我们推荐 Matlab。

本章只讲 Matlab 编程,并用有一定意义的实际例子简要介绍 Matlab 编程方法,特别给出若干实际问题作为编程练习。

Matlab 的工作方式

Matlab 有两种工作方式,它们是:直接交互的命令行操作方式,和 M 文件的编程工作方式。

第一种方式对计算不复杂的问题十分方便,但不能适应计算复杂的问题。对于后一类问题必须用第二种方式来解决。

Matlab 编程与 C 语言编程很相近,学过后者的同学,将会发现 Matlab 编程更为简便,函数功能更强(C 语言更灵活,而 Matlab 与之兼容)。

§ 8.2 M 文件的形式

Matlab 程序,即 M 文件,有两种类型,它们是:命令文件和函数文件。

命令文件是直接交互指令行操作方式的发展,非常容易编写,只要把有关的指令按顺序写出来组成一个 M 文件即可。但此类文件不能适应计算复杂的问题。

函数文件相当于 C 语言的“函数”,可灵活调用。Matlab 编程也提倡尽量多编函数文件作为子程序,以求程序更清晰,层次更分明,便于调试和阅读。

命令文件举例

编写命令文件,只要把有关的指令用“;”隔开,并按顺序写出来即可。

例 1:编一个求前 100 个正整数之和的命令文件:example1.m。

解:example1.m 的内容如下:

```
s=0;
for i=1:100
    s=s+i;
end;
s
```

函数文件

函数文件一般形式如下:

Function[输出参数 1, ..., 输出参数 n]
=函数名(输入参数 1, ..., 输入参数 m) {函数体}

注:(1)给该函数文件命名时须与函数名一致.

(2) $n = 1$ 时,第一行简化为

Function 输出参数 = 函数名(输入参数)

(3)输入、输出参数可以是任意类型的量、字符、不同维数组或数据结构等.

(4)输入参数是已知量,输出参数则要进行计算,其最后值是函数调用时的返回值.

例 2: 编一个求一维数组的平均值与方差的函数文件:tongji. m.

解:tongji. m 的内容如下:

```
function [p,q]=tongji(x)
[m,n]=size(x); % x 的行列数
if m~=1
    error('不是行向量!');
end;
p=sum(x)/n; q=0;
for i=1:n
    q=q+(x(i)-p)*(x(i)-p);
end;
调用方法 x=[1:100];[a,b]=tongji(x)
```

例 3: 编一个函数文件 sushu. m, 判定数 x 是否素数,若是,返回 1,否则,返回 0.

内容如下:

```
function y=sushu(x)
if ((mod(x,1)~=0)|(x>0))
    error('不是正整数');
elseif x==2|x==3
    y=1;
elseif x==1
    y=0;
else
    B=ceil(sqrt(x))+1;
    for i=2:B
        if mod(x,i)==0
            break;
        end;
    end;
    if i==B
        y=1;
    else
        y=0;
    end;
end;
```

例 4: 编一个函数对随机输入的一个大于 1 的正数 n , 输出不大于 n 的所有素数.

```
function a=sushubiao(n);
if n<2
    error('输入不合要求!');
end;
k=1;
for i=1:n
    if sushu(i) %是否素数
        a(k)=i;k=k+1;
    end;
end;
调用方法 n=100*rand;sushubiao(n)
```

例 5: 编一个函数对随机输入的一个正偶数 $2n$, 验证 $2n$ 是两个素数之和.

```
function y=goldbach(n)
a=ceil(sqrt(n));y=0;
if rem(n,2) | n<4
    error('输入不合要求')
end;
for i=2:a
    if sushu(i)&sushu(n-i)
        y=1;break;
    end;
end;
调用方法 n=ceil(10^10*rand);
goldbach(2*n)
```

§ 8.3 全局变量与局部变量

在 M 文件中,命令文件的所有变量都是全局变量.

在函数文件中,可用(例如)

```
global X Y Z;
```

将 X、Y 和 Z 定义为全局变量.

如果在几个函数中都把某一变量定义为全局变量,它们就可公用这个变量,这是在函数之间传递信息的一个手段.

但使用全局变量却破坏了函数对变量的封装,降低程序可读性与可靠性,不足取.

§ 8.4 Matlab 的程序结构

原则上,只要有顺序、循环和分支结构的计算机语言,即可编程解决任何计算问题. Matlab 有这三种结构,故可用它编程解决任何计算问题.

Matlab 虽然没有 C 语言那样丰富的控制结构,但 Matlab 自身的强大功能(众多的函数及命令)弥补了这个不足,使用户几乎感觉不到困难. 人们评价说:Matlab 语言是一种完善而易用的高水平编程语言.

顺序结构

顺序结构实际上就是用复合表达式构成的. 复合表达式定义为用“;”号连接在一起的若干表达式:

复合表达式 = 表达式 1; 表达式 2; ...; 表达式 n;

Matlab 程序按一行一行从上往下顺序执行;同一行则按从左往右顺序执行.

Goto 语句虽可强行改变执行顺序,但可读性差,不足取. 后面将要介绍的 Break 语句才是 Matlab 编程中经常用来改变执行顺序的手段.

循环结构

计算机的优势之一在于它能按设定的方案以高速度重复执行若干运算,求得用手工很难实现的计算结果.

当编程中涉及运行有规律的重复运算时,要用循环结构,即将某些语句重复执行. 一组被重复执行的语句称为循环体. 它每循环一次,都必须做出是继续重复或是停止的判断,其依据称为终止条件.

Matlab 语言提供两种循环方式:for — end 和 while — end.

for—end 循环

for—end 循环允许一组命令以预定的固定次数重复.

其一般形式为:

for i = 某一维数组

{ 循环体 }

end;

求前 n 个正整数平方之和

例 6:随机输入一个正整数 n , 计算前 n 个正整数平方之和,并用反复执行此程序的办法验证此和都等于 $(1/6)n(n+1)(2n+1)$

解:程序为

```
n=ceil(100 * rand) %不大于 100 的随机数
s=0;
for i=1:n
    s=s+i*i;
end;
s,s-n*(n+1)*(2n+1)/6
```

for—end 循环可嵌套

例 7:求给定 $m \times n$ 实矩阵 A 元素的平均值 p , 和各元素与平均值的偏差组成的矩阵 B .

解:程序为: $m=3; n=4; p=0;$

$A=\text{rand}(m,n)$ % 3×4 随机矩阵

```
for i=1:m
    for j=1:n
        p=p+A(i,j);
    end;
end;
p=p/m/n;
for i=1:m
    for j=1:n
        B(i,j)=A(i,j)-p;
    end;
end;
p,B %显示结果
```

while-end 循环

while-end 循环以不定的循环次数求一组语句的值。

其一般形式为：

while 某一逻辑表达式

{ 循环体 }

end;

当逻辑表达式所有元素为真,就执行循环体中所有命令,否则,就跳出循环。

例 8:对随机输入的一个正数 n ,输出大于 n 的第一个素数。

解:

$n=10000 * \text{rand}$ % 不大于 10000 的随机数

$i=\text{floor}(n+1)$; % 不小于 $n+1$ 的最小整数

while $\text{sushu}(i) == 0$ % i 不是素数

$i=i+1$;

end;

i % 显示 i

分支结构

为了完成所需的计算任务,命令序列经常须按关系的检验结果有条件地执行,这就是分支结构的任务.在 Matlab 编程语言里,由

if-end

结构来解决。

分支结构共有三种形式,分别叙述如下。

if-end 分支结构

结构形式: if 逻辑表达式

{ 命令序列 }

end

例 9:求一维整数数组 x 中所有奇数之和 y

function $y=\text{jishuhe}(x)$

$n=\text{length}(x)$; $y=0$;

for $i=1:n$

if $\text{mod}(x(i),2)$ % 是否奇数

$y=y+x(i)$;

end;

end;

if-else-end 分支结构

结构形式: if 逻辑表达式

{ 为真时执行的命令序列 }

else

{ 为假时执行的命令序列 }

end

例 10:对输入的一个正整数 $n \geq 2$,输出第 n 个 Fibonacci 数。

解: function $f=\text{fibodt}(n)$

if $n < 2$

error('输入不合要求!');

else

$a=0$; $b=1$;

for $i=1:n-1$

$f=a+b$;

% $f_1=1$; $f_2=1$; $f_i=f_{i-1}+f_{i-2}$

$a=b$; $b=f$;

end;

end;

if—elseif—…—else—end 分支结构

结构形式:

if 逻辑表达式 ex1

{ex1 为真时执行的命令序列 1}

elseif 逻辑表达式 ex2

{ex2 为真时执行的命令序列 2}

elseif 逻辑表达式 ex3

{ex3 为真时执行的命令序列 3}

else

{ex1—ex3 全为假时执行的命令序列}

end

例 11:求分段函数的值: $f(x)=0, \text{ if } x<0;$

$f(x)=x, \text{ if } 0\leq x<2; f(x)=x^2, \text{ if } 4\leq x<6;$

$f(x)=36, \text{ if } x>6.$

解: $x=10 * \text{rand}$ %不大于 10 的随机数

if $x<0$

$f=0;$

elseif $x>=0 \& x<2$

$f=x;$

elseif $x>=4 \& x<6$

$f=x * x;$

else

$f=36;$

end;

$\text{sprintf}('f(\%d)=\%d', x, f)$ %显示 $f(x)=f$

Break 指令

功能:前面讲过, Break 指令是改变执行顺序的一种手段. 它的功能就是导致最内层的 while, for 等语句终止.

一般形式:在循环体内另设条件(通常用 if—end 语句), 达到适时退出循环的目的.

例 12:鸡兔同笼问题:已知一笼鸡兔共有头 36, 和

脚 100, 求鸡数 j 和兔数 t.

解 1:

$g=1;$

while $\text{mod}(100-2 * g, 4) \neq 0 \& (g+(100-2 * g)/4-36$

$g=g+1;$

end;

$\text{sprintf}(\text{'鸡数是 \%d; 兔数是 \%d'}, g, 36-g)$

注: $\text{mod}(100-2 * g, 4) \neq 0$ 表示 $100-2 * g$ 只脚不全是兔脚; 在 $\text{mod}(100-2 * g, 4) = 0$ 条件下

$g+(100-2 * g)/4-36 \neq 0$ 进一步判定 $100-2 * g$ 只脚不全是兔脚, 故当前的 g 不对应任何解.

解 2:

for $j=1:50$

if $\text{rem}(100-j * 2, 4) == 0 \& (j+(100$

$-j * 2)/4) == 36$

break;

end;

$j=j+1;$

end;

$\text{sprintf}(\text{'鸡数是 \%d, 兔数是 \%d'}, j, 36-j)$

注:若满足判定条件时, 当前的 j 便是问题的解.

例 13:输入不大于 10000 的正随机数 x, 输出不小

于 x 的最小偶数 Fibonacci 数.

解:

$x=10000 * \text{rand}$

for $n=2:100$ %100 为 10000 的平方根

if $\text{fibodt}(n) > x$ %第 n 个 Fibonacci 数 $> x$

break;

end;

end;

while $\text{mod}(\text{fibodt}(n), 2) \neq 0$ %第 n 个 Fibonacci 数是偶

$n=n+1;$

end;

$\text{sprintf}(\text{'不小于 \%f 最小偶 Fibonacci 数是 \%d'}, x, \text{fibodt}(n))$

§ 8.5 Matlab 编程练习题

(1)用递归函数算法编一个求第 n 个 Fibonacci 数的函数.

提示:令 $\text{fibo}(n)$ 表示第 n 个 Fibonacci 数. 按定义,

$$\text{fibo}(0)=0, \text{fibo}(1)=1,$$

$$\text{fibo}(n)=\text{fibo}(n-1)+\text{fibo}(n-2),$$

$$n=2,3,4,\dots$$

(2)随机输入不大于 30 的正整数 n , 输出前 n 个 Fibonacci 数(从 $\text{fibo}(0)=1$ 开始).

提示:利用例 10 给出的函数 $\text{fibodt}(n)$.

(3)利用函数 fibodt 编一个判断已知数 x 是否 Fibonacci 数的函数 befibo .

提示:当 x 是 Fibonacci 数时, 输出

$$\text{befibo}(x)=1;$$

当 x 不是 Fibonacci 数时, 输出

$$\text{befibo}(x)=0.$$

(4)输出不大于 10^8 的且为素数的所有 Fibonacci 数.

提示:利用例 3 给出的函数 sushu , 例 10 给出的函数 fibodt 或习题(3)给出的函数 befibo

(5)输出大于 10^9 且为素数的最小 Fibonacci 数.

提示:利用例 3 给出的函数 sushu , 例 10 给出的函数 fibodt 或习题(3)给出的函数 befibo .

(6)用递归算法或迭代算法编一个求阶乘 $n!$ 的函数 jiecheng .

提示: $\text{jiecheng}(0)=1$;

$$\text{jiecheng}(n)=n * \text{jiecheng}(n-1)$$

(7)求使 $n!$ 不超过 $m=10^{305}$ 的最大正整数 n .

提示:利用习题(6)给出的函数 jiecheng .

(8)用二叉搜索算法, 编一个从已知不减数列中搜索数 x 的位置的函数.

提示:二叉搜索算法的递归形式要义如下: 欲在不减数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

中搜索数 x 的位置, 比较 x 与中间项 $a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$ ($\lfloor y \rfloor$ 记不大于 y 的最大整数), 若相等则停止; 否则, 把搜索归约到更小的范围, 即当 x 较小时归约到序列的前半段; 否则, 归约到后半段.

(9)编一个输出已知实数列的最大(小)值, 和该最大(小)值位置的程序.

提示:使用 Matlab 函数 $\text{max}(a)$ 较为简便.

(10) 用迭代算法求解下列递推关系

$$a(n) = c_1 a(n-1)^2 + c_2 a(n-2) + 2n;$$

$$a(1) = 1, a(2) = 2$$

提示: 可编一个函数 dtgx(n) 对输入的 n 输出 a(1), a(2), ..., a(n) 的值.

(11) 用迭代算法求解下列递推关系组

$$\begin{cases} u(n+1) - u(n) + v(n) = n; \\ u(n) + 2v(n+1) - v(n) = 2; \\ u(0) = 1, v(0) = 0 \end{cases}$$

(12) 编一个求已知置换 f 之逆置换的函数.

提示: 用二维数组表示置换, 置换及其逆置换如下列矩阵所示:

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \\ f^{-1} &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(13) 输出全部不含连续两个 0 的 6 位二进制串.

(14) 在二元域 $Z = \{0, 1\}$ (其运算定义为

$$0+0=1+1=0; 0+1=1+0=1$$

$$0*0=0*1=1*0=0; 1*1=1)$$

上解线性方程组, 其增广矩阵如下所示.

提示: 在二元域 Z 上的运算仅 $1+1=0$ 与实数运算不同, 但可通过先作实数加法运算再对所得结果取模 2 的剩余即可: $\text{mod}(1+1, 2) = \text{mod}(2, 2) = 0$.

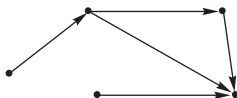
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(15) 已知前 n 个正整数 (例如, $n=10$) 的一个排列 L, 编一个程序输出 L 的一个最长递降 (升) 子序列, 并输出此递降 (升) 子序列的位置

提示: 参看第 6 章 § 6.3 问题 3 的有关知识.

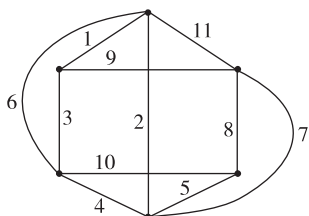
(16) 用 Wallshall 算法或布尔运算通过下列已知有向图的邻接矩阵求它的可达性矩阵.

提示: 有关概念参看方世昌编著的《离散数学》第 8 章 § 8.3.



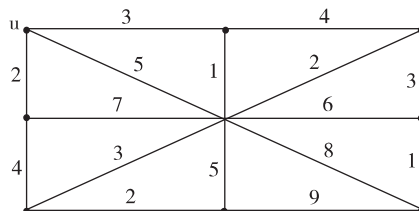
(17) 用 Kruskal 算法求下列已知无向赋权图的最小生成树.

提示:有关概念参看方世昌编著的《离散数学》第8章 § 8.6.3. 关联矩阵按权从小到大对边排序.



(18) 用 Dijkstra 算法求下列已知无向赋权图的从源点 u 到所有点的最短路及其路长.

提示:有关概念参看方世昌编著的《离散数学》第8章 § 8.2.3. 赋权图邻接矩阵的值是对应权值.



§ 8.6 第 8 章练习题参考答案

(1)用递归函数算法编一个求第 n 个 Fibonacci 数的函数.

```
% 第 n 个 Fibonacci 数的递归算法
```

function f=fibodg(n) % n 为非负整数

if $n = 0$

```
f=0;      % fibodg(0)=0
```

```
elseif n==1
```

```
f=1;      % fibodg(1)=1
```

```
else f=fibodg(n-1)+fibodg(n-2);
```

% 基于递归公式: $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

end;

(2) 随机输入不大于 30 的正整数 n , 输出前 n 个 Fibonacci 数(从 $\text{fib}(0)=0$ 开始).

% 显示前 n 个 Fibonacci 数, $n \leq 30$ 为随机正整数

```
clear; n=floor(30 * rand)
```

$$a(1)=1; \quad a(2)=1;$$

if $n < 2$

```
error( '输入不合要求!' );
```

end;

```
for i=3:n
```

$$a(i) = \text{fibodt}(i);$$

end;

a

(3)判断输入数 n 是否 Fibonacci 数的函数.

```
function y=befibo(n)
```

```
if mod(n,1) | (n>0)
```

```
error('Not positive integer');
```

```
elseif n<4
```

```
y=1;    %先处理前 3 个整数
```

else

 $i = 3;$

```
while fibodt(i) < n
```

```
i=i+1;
```

end;

```

if fibodt(i) == n

```

$$y=1;$$

```
else y=0;
```

end;

end;

(4) 输出不大于 10^8 的素数 Fibonacci 数 .
 % 求不大于 m 且为素数的 Fibonacci 数
 m=10^8;
 i=3; k=3;
 f(1)=2; f(2)=3;
 while fibodt(i)<m
 if sushu(fibodt(i))
 f(k)=fibodt(i); k=k+1;
 end;
 i=i+1;
 end;
 sprintf('%d 以内是素数的 Fibonacci 数是',
 m)
 f % f 数组表示所需的结果

(5) 输出大于 10^9 的最小素数 Fibonacci 数 .
 % 求比已知数 m 大的最小素数 Fibonacci 数
 clear; u=1; v=1; m=10^9;
 while v<m
 w=u+v; u=v; v=w;
 end; % 结束时 w 为比 m 大的 Fibonacci
 数
 while sushu(v)==0
 w=u+v; u=v; v=w;
 end; % 结束时 w 既是素数又是 Fibonacci 数
 sprintf('大于 %d 的最小素数 Fibonacci 数
 是 %d', m, v)
 v

(6) 用递归算法或迭代算法编一个求阶乘 $n!$ 的函数 jiecheng.
 % 这是阶乘 $n!$ 的函数, n 必须是非负整数
 function y=jiecheng(n)
 if mod(n,1)|n<0 % 不是非负整数
 error('输入不合要求!');
 end;
 y=1;
 for i=1:n
 y=i*y;
 end;

(7) 求满足 $n!$ 不超过 $m=10^{305}$ 的最大正整数 n .
 % 求满足 $n!$ 不超过已知正整数 m 的 n 的最大值
 m=10^305;
 n=1;
 while jiech(n)<m
 n=n+1;
 end;
 n=n-1;
 jiech(n-1)
 注: 当 $m>10^{305}$ 时, 本程序可能出错

(8) 从已知不减数列中搜索数 x 的位置 .
 % 在已知增数列 a 里二叉搜索数 x 的位置
 function wz=ecss(x,i,j)
 a=[-11,-5,-3,-1;9,11,13,17,23]
 m=floor((i+j)/2);
 if x==a(m)
 wz=m;
 elseif x<a(m) & i<m
 wz=ecss(x,i,m-1);
 elseif x>a(m) & j>m
 wz=ecss(x,m+1,j);
 else wz=0; % x 不在序列里时输出 0
 end;

(9) 求已知实数组最大(小)数及其出现的位置 .
 clear;
 a=[0,-1;4,0,11,-3,5,11,7,9,11,-3]
 b=max(a); % min(a)
 fprintf('最大数是: %d, 其出现的位置是:', b)
 n=length(a);
 k=1; u(k)=0;
 % 数组 u 存最大数出现的位置
 for i=1:n
 if a(i)==b
 u(k)=i; k=k+1;
 end;
 end;
 disp(u)

(10) 用迭代算法求解下列递推关系.

$$a(n) = c_1 a(n-1)^2 + c_2 a(n-2) + 2n;$$

$$a(1) = 1, a(2) = 2$$

解: function a=dtgx(m)

```
if m<3
```

```
    error('出错!')
```

```
end
```

```
a(1)=1;a(2)=2;
```

```
c1=2;c2=-1;
```

```
for n=3:m
```

```
    a(n)=c1 * a(n-1) * a(n-1) + c2
```

```
    * a(n-2) + 2 * n;
```

```
end;
```

```
a    %显示前 m 次递推的解
```

(11) 用迭代算法求解下列递推关系组.

$$u(n+1) - u(n) + v(n) = n;$$

$$u(n) + 2v(n+1) - v(n) = 2;$$

$$u(0) = 1, v(0) = 0$$

解: clear; m=3; %求第 m 次迭代结果

```
n=1;
```

```
u(n)=1+1;v(n)=1-1/2;
```

```
%先求 u(1),v(1)
```

```
while n<=m & m>1
```

```
    u(n+1)=u(n)-v(n)+n;
```

```
    v(n+1)=1-(u(n)-v(n))/2;
```

```
    n=n+1;
```

```
end;
```

```
u,v
```

(12) 求逆置换的函数.

解: function g=nizhanshu(x)

```
n=length(x);
```

```
a=[1:n];
```

```
if n>length(intersect(a,x))
```

```
    error("不是置换!");
```

```
end;
```

```
k=1;
```

```
for i=k:n
```

```
    for j=1:n
```

```
        if x(j)==i
```

```
            g(k)=j;k=k+1;
```

```
        end;
```

```
    end;
```

```
end;
```

(13)编程输出全部不含连续两个 0 的 6 位二进制串。

解 1:

```
function Q=shu01zu(N)
if N<1
    error('Invalid input !');
end;
k=1;p=zeros(2^N,N);    %数组 p 放从 0 到 2^N-1 的前 2^N 个非负整数,先冲零;
Q=zeros(2,N);          %数组 Q 放将来结果
for i=0:2^N-1           %将十进制化为二进制
    j=N;
    n=i;
    while(n>0)
        p(k,j)=mod(n,2);
        n=floor(n/2);
        j=j-1;
    end;
    k=k+1;
end;
m=0;
for i=1:2^N
    for j=1:N-1
        if p(i,j)+p(i,j+1)==0;
            p(i,1)=2;break;    %有连续 0 的行标记 2
        end;
    end;
end;
m=0;
for i=1:2^N
    if p(i,1)~=2
        m=m+1;
        Q(m,1:N)=p(i,1:N);    %没有连续 0 的行依次放进 Q
    end;
end;
fprintf('全部不包含连续两个 0 的 %d 位二进制串的个数为 %d\n',N,m)
```

解 2:

```
clear;
n=6;                                % n 为串的长度
m=21;%21=f(6)+f(5)=13+8 % m=|S|=f(n+2) 等于第 n+2 个 Fibonacci 数
a=ones(n,m);                        %矩阵 a 中将生成答案,其每一列表示一元,先置初态为全 1
d=[13 8 5 3 2 1 1];
% d 为反序的 Fibonacci 数列长度为 n+2 即 d(1)=f(n+2)=|S|
a(1,1:d(2))=zeros(1,1:d(2));
```

```

%置 a 的第一行的前 f(n+1)个元为 0(其余元为 1)
for j=2:n
    k=1; h=1;
    while k<=m
        if a(j-1,k)==0
            h=1;a(j,k)=1;    %前一行对应元为 0 时置新行的对应元为 1: 0->1
        elseif h<=d(j+1)
            h=h+1;a(j,k)=0;    %置前 f(j-1)个元为 0
        elseif h<=d(j-1)
            h=h+1;a(j,k)=1;    %置后跟的 f(j-1)个元为 1
        else h=1;k=k-1;    %若后面还有 1 时重新开始上面的过程
        end;
        k=k+1;
    end;
end;
sprintf('答案由下列矩阵的列表示')
disp(a)
% 看答案了解算法思路:上一行为 0 下一行对应元为 1;上一行有 f(n)个连续个 1,
% 时,下一行的前 f(n-2)个元为 0、后 f(n-1)个为 1.

```

(14)在二元域 $Z=\{0,1\}$ 上解线性方程组,已知其增广矩阵.

解:

```

%在二元域上解线性方程组  $Ax=b$ , 增广矩阵(A,b)为下面的 a
a=[1 1 0 0 0 1 1 0 0 1; 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1; 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1;
    0 0 1 1 1 0 0 0 0 1; 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1; 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1;
    1 0 0 0 0 0 1 1 1 1; 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1; 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1]
[n,m]=size(a);
for i=1:n-1
    if a(i,i)==0 & i<n
        for k=i+1:n
            if a(k,i)==1
                v=a(i,:);a(i,:)=a(k,:);a(k,:)=v;
            end;    %a(i,i)下面全为 0 时不要交换两行,否则要交换两行
        end;
    end;
    for j=1:n
        if j~=i & a(j,i)==1
            a(j,:)=a(j,:)+a(i,:);a(j,:)=mod(a(j,:),2);
        end;
        %把第 i 行与第 j 行相加消去所有非对角元 a(j,i)
    end;
end;
disp('方程组的一个解是')

```

```
x=a(:,n+1)
```

```
% 增广矩阵的最后一列是方程组的一个解
```

(15) 已知前 n 个正整数(例如, $n=10$)的一个排列 L , 编一个程序输出 L 的一个最长递降(升)子序列, 并输出此递降(升)子序列的位置.

解:

```
%对已知前 n 个正整数的一个排列 a, 求它的最长递降子序列 d
```

```
clear; a=[4 10 5 3 2 9 1 6 7 8]; %令 a=10-a 可求递增子序列
```

```
n=length(a); b=ones(1,n);
```

```
%b(i)表第 i 个数结尾的最长递降子序列长度, 先置 b(i)=1
```

```
for i=2:n
```

```
    j=i-1; ind=0;
```

```
    while j>0
```

```
        if a(j)>a(i)
```

```
            b(i)=max([b(j), b(i)]); ind=1;
```

```
        end;
```

```
        j=j-1;
```

```
    end; %当 a(j)>a(i)时, b(i)=max{b(j) | j<i} + 1
```

```
    if ind==1
```

```
        b(i)=b(i)+1;
```

```
    else b(i)=1; %ind=0 表示前面的数都小, 故 b(i)=1
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
m=max(b); %m 是所有递降子序列的最大长度
```

```
p=1;
```

```
while b(p)<m
```

```
    p=p+1;
```

```
end; %p 是一个最长子序列的结尾的位置
```

```
c=ones(1,m);
```

```
j=p-1; c(m)=p; x=m; k=m-1;
```

```
%c 是一个向量表示此最长子序列的位置, 先置 c(m)=p
```

```
while j>0
```

```
    if b(j)==x-1 %开始找 b(j)=m-1 的脚标 j, 下一步找 b(j)=m-2 的 j 等等
```

```
        c(k)=j; x=x-1; k=k-1;
```

```
    end;
```

```
    j=j-1;
```

```
end;
```

```
for i=1:m
```

```
    d(i)=a(c(i)); % d 是所需的答案, 即最大递降子序列的脚标
```

```
end;
```

```
a
```

```
disp('最大递降子序列及其位置是')
```

```
d, c
```

(16) 用 Wallshall 算法或布尔运算通过下列已知有向图的邻接矩阵求它的可达性矩阵。

解:

% 求可达性矩阵的 Warshall 算法

clear;

A=[0 1 1 0 0;0 0 1 0 0;0 0 0 0 0;0 0 1 0 0;1 0 0 0 0]

% A 为已知图的邻接矩阵

n=size(A,1); % n 为 A 的第一行的维数即 A 或图的阶

R=A; % R 为可达矩阵初始值置为 A

for k=1:n

for i=1:n

for j=1:n

R(i,j)=R(i,j)|(R(i,k)&R(k,j));

end;

end;

end;

disp('可达矩阵为:')

disp(R)

% 另一种方法: $R=A|A^2|\dots|A^n$, 其中 $|$ 为布尔加法, $^$ 为布尔乘法

b=0*eye(n); R=A

p=A;

for k=1:n-1

p=p*A; R=R|p;

end;

disp('另一解的可达矩阵是:')

disp(R)

(17) 用 Kruskal 算法求下列已知无向赋权图的最小生成树。

解:

% 用避圈法 (Kruskal) 求最小生成树——Kruskal 算法

clear;

a=[1 1 0 0 0 0;1 0 0 1 0 0;0 1 1 0 0 0;0 0 1 1 0 0;0 0 0 1 1 0;1 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 1;0 0 0 0 1 1;
0 1 0 0 0 1;0 0 1 0 1 0;1 0 0 0 0 1]

a=a'; [n,m]=size(a);

% a 为关联矩阵, 边按权从小到大顺序排好, n 为点数, m 为边数

t(:,1:2)=a(:,1:2);

k=3; zb(1)=1; zb(2)=2; % zb 为输出生成树的指标集

u=t(:,1)|t(:,2); lt=sum(u)-sum(t(:,2));

while k<n

for i=zb(k-1)+1:m

if sum(u|a(:,i))-sum(u)>0

break; % 条件满足时边 e(i) 与已选的边集不组成圈故 e(i) 能选入该边集

end;

```

if lt==2
    break;          %条件满足时已选的边集不连通且加进 e(k)后
                    %成连通故下一边 e(k)无条件可选入该边集
end;
end;
t(:,k)=a(:,i);zb(k)=i; k=k+1;
lt=sum(u|a(:,i))-sum(u);u=u|a(:,i);          %将 e(i) 选入该边集
end;
sprintf('最小生成树所含边集为:')
zb
t

```

(18)用 dijkstra 算法求下列已知无向赋权图的从第一(源)点 u 到所有点的最短路及其路长.

解:

% 求最短路的 Dijkstra 算法,已知 a 为邻接矩阵。

```

a=[0 3 0 2 5 0 0 0 0;0 0 4 0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 2 3 0 0 0;0 0 0 0 7 0 4 0 0;0 0 0 0 0 6 3 5 8;
   0 0 0 0 0 0 0 0 1;0 0 0 0 0 0 0 2 0;0 0 0 0 0 0 0 0 9;0 0 0 0 0 0 0 0 0];
                    %为减少输入数据工作只输入上三角部分

```

```

a=a+a'          %产生邻接矩阵

```

```

n=size(a,1);u=ones(1,n);    % n 为图的阶

```

```

hou=u;len=zeros(1,n);qian=len;qian(1)=NaN;

```

```

                    %len 的第 i 分量表示第 i 点到源点的距离. qian(i),

```

```

                    %hou(i)分别表示前一点后一点的脚标. hou 先置为 1

```

```

u=10^8 * u;      %开始时把 u 的每一分量都置为很大

```

```

mini=-1;k=2;

```

```

while k<=n

```

```

    m=hou(k-1);

```

```

    for i=2:n

```

```

        if a(m,i)&.(u(i)>=mini)&.u(i)~=10^9

```

```

            u(i)=min(u(i),len(m)+a(m,i));

```

```

        end;

```

```

    end ;

```

```

    mini=min(u);

```

```

    j=1;

```

```

    while u(j)~=mini

```

```

        j=j+1;

```

```

    end;          %找到最小点的下标并存放在 hou 中

```

```

    hou(k)=j;

```

```

    len(j)=mini;    %最小点到起点的距离存放在 len 中

```

```

    u(j)=10^9;

```

```

    for i=1:k-1

```

```

        if a(hou(i),j)&.(a(hou(i),j)==mini-len(hou(i)))

```

```

            qian(k)=hou(i); break;

```

```
end;  
end;          %按当前最小点求其前一点的下标并存放在 qian 中  
k=k+1;  
end;  
disp('最小距离、每一点的前后点分别由下列三向量表示:')  
disp(len)  
disp(qian)  
disp(hou)      %输出 3 张表,由它们可以获得所需的信息
```

参考文献

- [1] 姜启源,谢金星,叶俊:《数学模型》,(第三版),高等教育出版社,2003。
- [2] 吴翊,吴孟达,成礼智:《数学建模的理论与实践》,国防科技大学出版社,1999。
- [3] 《大学生数学建模竞赛辅导教材(一)》,湖南教育出版社,1993。
- [4] 《大学生数学建模竞赛辅导教材(四)》,湖南教育出版社,2001。
- [5] 李尚志:《数学建模竞赛教程》,江苏教育出版社,1996。