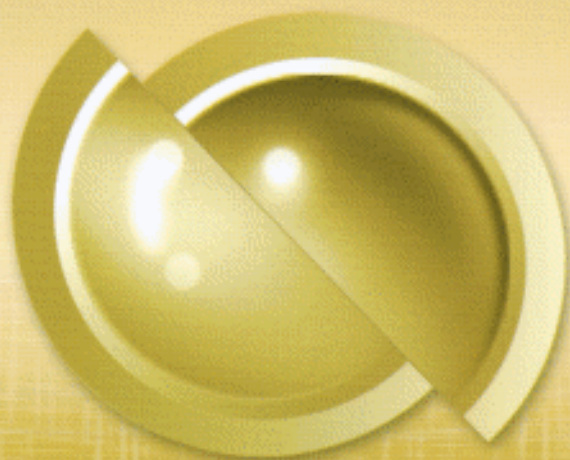


高等数学教材中的 常见瑕疵

—— 献给

一年级大学生和高等数学教师

潘鼎坤



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等数学教材中的常见瑕疵

——献给一年级大学生和高等数学教师

潘鼎坤

西安交通大学出版社

内 容 提 要

作者根据国际上多种著名数学书籍,经过认真的对比、分析、研究,指出我国高等数学教材中的一些常见瑕疵或不妥之处,并且对每个指出的问题提出具体的修改意见。全书通过摆事实、讲道理,阐述了作者的见解,供学习高等数学课程的本科生、大专生及高等数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教材中的常见瑕疵:献给一年级大学生和高等数学教师/潘鼎坤著. —西安:西安交通大学出版社, 2006.4

ISBN 7-5605-2185-1

I. 高... II. 潘... III. 高等数学-教材-研究-高等学校 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 035147 号

- | | |
|------|--|
| 书 名 | 高等数学教材中的常见瑕疵
——献给一年级大学生和高等数学教师 |
| 编 著 | 潘鼎坤 |
| 出版发行 | 西安交通大学出版社 |
| 地 址 | 西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049) |
| 电 话 | (029)82668357 82667874(发行部)
(029)82668315 82669096(总编办) |
| 印 刷 | 西安东江印务有限公司 |
| 字 数 | 73 千字 |
| 开 本 | 850mm×1168mm 1/32 |
| 印 张 | 3 |
| 版 次 | 2006 年 4 月第 1 版 2006 年 4 月第 1 次印刷 |
| 印 数 | 0 001~5 000 |
| 书 号 | ISBN 7-5605-2185-1/O·234 |
| 定 价 | 10.00 元 |

前 言

本书所谓的高等数学,是指大学一年级中高等数学课程的内容,主要是微积分学、无穷级数与常微分方程三部分。

解放前我国大学中微积分教材多直接选用西方著名大学中使用的教材,解放初期多直接使用前苏联教材的中译本,因而四十年前我国公开出版的自编高等数学教材不多。近二十多年,公开出版的自编教材才逐渐增多,但由于国外书籍很贵,多数数学教师日常教学工作中能经常直接参阅国外优秀数学教材的机会甚少,所以多数教师编写教材时多以参阅国内已有自编书籍为主,缺乏对比资料,以致一书有差错,就像传染病似的传染开来,难以制止改正。

二十多年来,笔者有幸常与原全国工科数学课程教学指导委员会主任委员、西安交通大学陆庆乐教授,原全国工科数学课程教学指导委员会委员、西北工业大学孙家永教授等在一起开会、审稿,他们常感叹有的教材差错不少,却长期不改,笔者曾数次建议他们著文公开指正,但他们均忙于完成各自的著述计划,可惜无意及此。近十多年间,西安建筑科技大学多次举办青年数学教师教材教学法研讨班,命笔者负责,因而有责任需认真系统地阅读一些广泛流行的高等数学教材,发现有些教材确有彼此雷同的瑕疵,正因为彼此雷同,青年数学教师每不察觉有瑕。为此,笔者不揣冒昧,自忘谫陋,就所知所见所闻,记述 30 余篇短文,编辑成此小书,其中有少数文章,过去曾公开发表过,或到其他院校作过讲解,读者(或听众)认为读之(或听之)有益,这些小文多是“买货比三家”,参阅多种参考资料后得出的结论,不但指出某些书的瑕疵,同时也提出建设性的修改意见。

希望这本小书能给刚入大学学习的一年级大学生一些启发,即使流行很广、被普遍使用的、认为很成熟的高等数学教材,也有瑕疵之处。尽信书,不如无书。青年学生要探求真知,必须认真阅读,多作比较,找出差异,辨别是非,一入学,便这样去磨砺自己成长。愿此书能引导青年学生如何阅读参考书,如何深入理解教材内容,如何发现教材中的不足与差错。这本小书也让青年学生了解国际上有哪些著名的微积分教材,值得长期参阅。

这本小书也献给担任讲授高等数学课程的教师,书中提供了一些人曾经对某些问题认真思索过留下的烙印,指出曾经遇到过的暗礁。希望现任该课程的教师,备课时少走弯路,讲课时少触暗礁。自然,笔者学识有限,书中所提的问题仅仅是管见所及的一部分,难免挂一漏万,但已足使我们为师者警惕:就是一些十分古典十分普通的问题,稍不谨慎,也会成为教学中的“滑铁卢”,随时随地都要战战兢兢,如履薄冰。笔者在此是抛砖引玉,向同行请教,敬祈不吝赐教。

书名中用了“瑕疵”二字。意谓有些地方笔者确实像吹毛求疵,有些疵比较明显,容易发现,有些疵确实被厚厚的绒毛所覆盖,不吹毛或不拔毛就很难发现皮上有疵,求疵是为了去疵,更臻完善;其次,所以谓之瑕,而不言差或错,窃意瑕不掩瑜,笔者冒昧地指出某些教材有瑕,并不否认瑜的存在,那是瑜上的瑕,只是可惜瑜中有瑕而已,希望加工为无瑕的美瑜!

衷心感谢西安交通大学陆诗娣教授热忱鼓励与大力支持,没有她的推动,这本小书很难面世。还要特别感谢西安交通大学龚冬保教授和吴寿隽教授仔细地审阅了本书原稿,并提了多条建设性的珍贵意见,笔者把他们的意见直接吸收在书中,使本书增色不少。也感谢李敬桃同学在百忙中为笔者制作多幅插图。

最后要特别声明,书中不妥之处,恐不能免,竭诚欢迎多多批评指正,不胜感激。

潘鼎坤

2005年12月15日

目 录

前言	
如何解释“多值函数”这个名词？	1
“分段函数”能自立家门吗？	3
一个会给人以错觉的标题：“函数的几种特性”	5
关于反双曲函数的错误记法剖析	6
无穷小阶的比較的正确解释	9
连续函数的四则运算	11
关于复合函数的连续性	13
如何由切线引出导数概念？	15
一例题解答有疏漏	18
复合函数求导公式的证明	20
微分形式不变性？	23
洛必达法则是谁创立的？	26
函数极值如何定义好？	27
拐点刍议	29
平面曲线曲率的定义	32
曲线与其曲率圆图形间的关系	35
不定积分如何定义？	37
可积函数 $f(x)$ 的变上限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 必可导否？	40
谁创立牛顿-莱布尼茨公式？	42
积分中值定理加强一点好	44
莫把质心叫重心	49

如何消除应用定积分元素法中的疑惑？	53
关于广义积分的名称及定义的几点意见	56
全微分是全增量的线性主部吗？	60
方向导数如何定义较好？	62
二元函数极值问题的一个错误断言	65
求二元函数最值问题的常见差错	66
多元函数无穷小量的特点	69
叫惯性矩比叫转动惯量好	71
平面有界区域边界线的正方向	74
一个有差错的图	77
幂级数的收敛区间	80
简化傅里叶级数的定义和收敛定理的条件	82
如何定义差分方程的阶？	87
关于常微分方程通解的两点误解	89

如何解释“多值函数”这个名词？

目前,在很多数学教材中,关于函数的定义是按下面的方式叙述的:

“设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x) \cdots \cdots$ ”. 定义中“确定的数值”是指有唯一的数值, 现代的函数定义都是作这样的解读的, 也就是说, 所谓函数都是指单值函数. 那末, 为什么在不少数学教材中, 仍出现“多值函数”这一个名词呢? 这个名词不是自相矛盾的吗? 现代函数概念源于德国数学家狄利克雷(Dirichlet)在 1837 年给出的单值函数的定义(实际上 1834 年俄国数学家罗巴契夫斯基(Лобачевский Н. И)已给出同样普遍的函数定义, 但未引起西方学者的注意). 在狄利克雷、罗巴契夫斯基之前, 把函数理解为解析表达式. 欧拉(Euler)区分了显函数与隐函数, 单值函数与多值函数, 并把多值函数当成两个变量的高阶方程的根, 如方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 在欧拉时代确定出一个二值函数, 故多值函数这个名词在 18 世纪和 19 世纪上半叶十分流行, 反映了人们当时对函数的认识状况. 自狄利克雷、罗巴契夫斯基之后, 所谓函数均应理解为单值函数, 多值函数应视为一个过时的、历史上的数学名词了, 像方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 应视为在区间 $[-a, a]$ 上确定了两个单值连续函

数:一为 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, 另一为 $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. 实际上若按狄利克雷的函数定义, 龚冬保指出方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 能确定的函数有无穷多个: 将 $[-a, a]$ 任意分成两无公共点的集合 $M_1 \cap M_2 = \emptyset, M_1 \cup M_2 = [-a, a]$, 作

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2}, & x \in M_1; \\ -\sqrt{a^2 - x^2}, & x \in M_2. \end{cases}$$

显然有 $x^2 + y^2 = a^2$.

现在我们自然明白: 把两个在不同世纪中出现的数学概念混作一谈, 怎能不令人困惑?! 怎么能自圆其说?! 欧拉说的“多值函数”与狄利克雷说的“函数”当然是各说各的一套, 各持各的理, 不求统一. 到了 20 世纪、21 世纪, 凡说函数均指单值函数, 让“多值函数”这个名词进入数学历史博物馆展览, 供人回顾而已.





“分段函数”能自立家门吗？

“分段函数”这个名词现在越来越流行了，请看在一本流行的高等数学教材上如下写着：

“……有时一个函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数。”

具有某一名称的函数，应是指该函数（或函数类）满足某一条十分特殊的性质，如有界函数、单调函数、连续函数、可微函数、有理函数等等，给出一个函数我们总可判断它是或不是某一类函数。但“分段函数”的条件不具备这种属性，如

$$f(x) = 1 \quad (-\infty, +\infty).$$

按上述定义它不是“分段函数”，但这同一个函数又可表示为

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x, & -\infty < x \leq 1; \\ \log_x x, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

这又似乎成为“分段函数”了。

又如
$$f(x) = \sqrt{x^2} \quad (-\infty, +\infty),$$

这应不是“分段函数”，但它又可写成

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\infty < x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

此时又成为所谓的“分段函数”了.

我们通常见到的初等函数,哪一个不可以把它表示为“分段函数”呢?仔细一想,都是可以分段表示的.

确定一个函数的关键是对应关系及定义域,至于用什么式子表示,是分段表示还是不分段表示,甚至用什么方式(图形、式子、语言……)表示,这些都不是本质的,无关重要的.

在此,“分段函数”不能自立家门,它不能把哪一个普通的函数拒之于大门之外,一个可以自由出入的“门”,不能关闭的门,设立这样的“门”有什么意义呢?

存在分段表示的函数,这是表示函数的一种方式.表示同一函数的方式可以多种多样,如正弦函数,可解析表示为 $y = \sin x$,又可用图线表示,也可列表表示,亦可用级数表示为

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty, +\infty),$$

当然,若不怕麻烦,把它分段表示为

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\infty < x \leq 0; \\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

也是没有错的呀!

所以不能用表示函数的方式不同,来区分函数类.在外文(如英文、俄文)中有分段单调函数、分段光滑函数、分段连续函数等词条,但未见把“分段函数”作为专门的数学术语,个中原因或许就是如上所指出的吧.

也要指出,“分段函数”虽不能自立家门,但在数学上,特别地研究分段表示的函数在其定义域的区分点处的连续性和可导性能帮助初学者深入地了解函数极限、连续、导数等概念的实质是不可否认的.



一个会给人以错觉的标题：“函数的几种特性”

不少教材在讲解了函数概念之后,紧接着来一小节,小节的标题为“函数的几种特性”。这一小节中各大段的标题依次为“函数的有界性”,“函数的单调性”,“函数的奇偶性”,“函数的周期性”。

这些大小标题都传达给读者以错误的消息。就字面的涵义来说,以为每个函数都有有界性、单调性、奇偶性以及周期性!以为每个函数都具有这几种特性!众所周知,事实上不是。奇怪的是在中文数学教材中这样的标题十分常见,因而我曾怀疑是否我理解错了。我就把我手头有的外文书翻阅了一遍,发现外文同类书籍讲解同样内容时都未冠以如上的标题。笔者建议把“函数的几种特性”改为“具有某种特性的函数”,“函数的有界性”改为“有界函数”,其余依此类推,这样就准确地表达了书的作者想表达的意思。若标题为“具有某种特性的函数”,则显然为依次去介绍只具有某一种特性的函数,一段介绍一类函数,全小节共介绍具有不同性质的几类函数,可见这两个标题涵义不同,原标题易被理解为每一函数都具有几种特性,新标题才准确表达要介绍的内容为具有不同特性的几类函数,如有界函数、单调函数、周期函数以及奇(偶)函数,这样,标题与内容才相互配合。

关于反双曲函数的错误记法剖析

在华罗庚所著《高等数学引论》的第一卷第一分册 p. 135 上有

$$y = \operatorname{ch} x, \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$x = \operatorname{arcch} y = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}), \quad (y \geq 1)''$$

还有 $\operatorname{arcsch} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1});$

$$\operatorname{arch} y = \frac{1}{2} \log(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad (|y| < 1);$$

$$\operatorname{arccch} y = \frac{1}{2} \log \frac{y+1}{y-1}, \quad (|y| > 1)''$$

等等公式.

以上公式中的 $\operatorname{arcch} y$, $\operatorname{arcsch} y$, $\operatorname{arch} y$, $\operatorname{arccch} y$ 均应分别改为 $\operatorname{arch} y$, $\operatorname{arsh} y$, arthy , arcthy 才对. 这个 ar 是英文 area (面积) 的前两个字母, 过去在反三角函数 $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} x$ 中的 arc 是弧的意思. 如图 1 中, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 记 $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, $\alpha = \operatorname{arcsin} y$, 其中 α 恰为圆心角 α 所对圆弧的弧长 α , 即 $\widehat{\sin \alpha} = BC$ 之长, OA 长 $= 1$, $\alpha = \widehat{AC}$ 之长

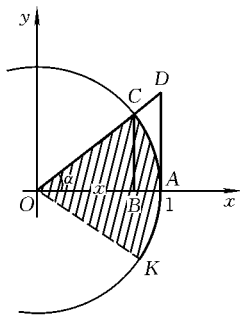


图 1

$=\angle AOC$ 的 α 弧度.

在双曲线理论中,情况就不同了.今设双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 1$, 引入参数 $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, 显然有

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

现在来探求这个参数 t 的几何意义.

计算图 2 中由直线 OK , OC 及一段双曲线弧 $\widehat{CAK}$ 所围成曲边

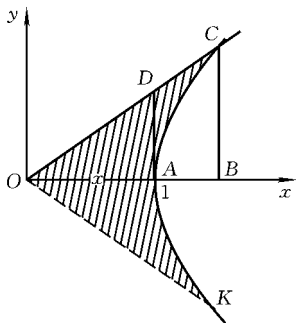


图 2

三角形的面积 S 的一半:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S &= \triangle OBC \text{ 的面积} - \text{曲边三角形 } ABC \text{ 的面积} \\ &= \frac{1}{2}xy - \int_1^x y dx \\ &= \frac{1}{2}x \sqrt{x^2 - 1} - \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx \quad (\text{因 } x^2 - y^2 = 1) \\ &= \frac{1}{2}x \sqrt{x^2 - 1} - \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right] \Big|_{x=1}^{x=x} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= \frac{1}{2} \ln(\sqrt{y^2 + 1} + y) \quad (\text{因 } x^2 - y^2 = 1), \end{aligned}$$

故有 $S = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$ ①

但另一方面, $y = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, 即 $(e^t)^2 - 2ye^t - 1 = 0$, 这个方程的根为

$$e^t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad (\text{因 } e^t > 0, \text{ 根号前的负号舍去}),$$

从而得

$$t = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \operatorname{arsh} y, \quad (2)$$

由①, ②得 $t = s = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. (3)

可见 $y = \operatorname{sh} t$ 中的参数 t 表示双曲线弧段 $x^2 - y^2 = 1$ 与直线 OK , OC 所围成的区域的面积. 由图 2, 有

$$y = \operatorname{sh} t = BC \text{ 之长}, \quad x = \operatorname{ch} t = OB \text{ 之长},$$

$$\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{BC}{OB} = \frac{AD}{OA} = AD = \operatorname{th} t \quad (\text{因 } OA \text{ 长} = 1).$$

其次, 反双曲函数

$$\operatorname{arch} y, \operatorname{arsh} y, \operatorname{arthy}$$

也可分别记作

$$\operatorname{Arch} y, \operatorname{Arsh} y, \operatorname{Arthy}.$$

这两种记号是同一涵义, 没有像反三角函数那样有主值一说, 因 $y = \operatorname{sh} t$ 及 $y = \operatorname{th} t$ 均是在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加函数, 它们的反函数是在 $(-\infty, +\infty)$ 上被唯一确定的, 根本不存在主值一说. 唯有 $y = \operatorname{ch} t$, 对于 $(1, +\infty)$ 上同一 y 值, 有两个 t 值 t_1, t_2 ($t_2 = -t_1$) 与之对应, 亦即它确定了两个连续的单值支的反函数:

$$\operatorname{arch} y = \pm \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad y \geq 1,$$

或写作 $\operatorname{arch} y = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}), \quad y \geq 1.$

可见 $\operatorname{arch} y$ 一般没有被作为该函数的主值. 请参阅《苏联数学百科全书》卷三 p. 1134 (俄文版) 以及柯朗 (Courant) 著的《微积分》卷一 p. 188 (英译本) 等著作.

★ 无穷小阶的比较的正确解释

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 则称变量 $\alpha(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷小量. 若

变量 $\alpha(x), \beta(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 均为无穷小量, 且有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, 则

当 $x \rightarrow x_0$ 时, 称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小. 于是有的教材解释说: “两个无穷小量之比的极限的各种不同情况反映了不同的无穷小量趋于零的‘快慢’程度……”例如“在 $x \rightarrow 0$ 时的过程中, $x^2 \rightarrow 0$ 比 $3x \rightarrow 0$ ‘快些’, 反过来 $3x \rightarrow 0$ 比 $x^2 \rightarrow 0$ ‘慢些’……”. 什么叫“快”? “快”即“速率大”, “慢”即“速率小”. 现设有两个质点, 它的位置函数分别为 $x_1 = 3t, x_2 = t^2$, 其中 t 表示时间变量, 即于某时刻 t 时, 二质点在同一数轴上位置坐标分别为 $3t$ 及 t^2 . 当 $t \rightarrow 0$ 时,

显然 x_1, x_2 均为无穷小, 且因 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_2}{x_1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{3t} = 0$, x_2 是比 x_1 高阶

的无穷小. 但速率 $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = 3, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2t$, 不难发现当 $0 < t <$

$\frac{3}{2}$ 时, $0 < \dot{x}_2 = 2t < \dot{x}_1 = 3$, $\dot{x}_1$ 的数值反比 $\dot{x}_2$ 的数值大. 可见两无

穷小阶的比较, 并不反映两无穷小趋于零的“快慢”程度, 只能说高阶无穷小比低阶无穷小离开零更近一些. 换句话说, 两个无穷小阶的比较只反映两个无穷小与零的差距的远近的比较. 高阶无穷小

与零的差距数值小,而低阶无穷小与零的差距数值大.由高阶无穷小的定义可直接证得这一结论如下:

设当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小,由定义有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0,$$

再据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$ (取 $0 < \varepsilon < 1$), $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \text{亦即 } |\beta(x)| < \varepsilon |\alpha(x)| < |\alpha(x)|.$$

所以只要 $0 < |x - x_0| < \delta$, 便有

$$|\beta(x) - 0| < |\alpha(x) - 0|,$$

即 $\beta(x)$ 与零的距离比 $\alpha(x)$ 与零的距离更近一些.

请参阅下文:

申兰珍. 质疑无穷小比较的一种解释. 高等数学研究, 2004,

(5):26





连续函数的四则运算

有的教材已在它前一节中如下定义了区间上的连续函数：

“在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数……如果区间包括端点，那末函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续。”

然后在紧接着讲连续函数的运算时，给出：

“定理 1 有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数。”

“定理 2 有限个在某点连续的函数的乘积是一个在该点连续的函数。”

“定理 3 两个在某点连续的函数的商是一个在该点连续的函数，只要分母在该点不为零。”

由于在闭区间的端点处给出了上述函数连续的定义，这些定理显然都有问题了。请看下例：

$$f(x)=1, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$g(x)=1, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

按该书规定， $f(x)$ ， $g(x)$ 均在 $x=0$ 处连续，但 $f(x)+g(x)$ ， $f(x)g(x)$ ， $\frac{f(x)}{g(x)}$ 仅在 $x=0$ 处有定义，而在 $x=0$ 的两侧均无定义，因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \pm g(x)], \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)], \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

均无意义(上式中 $x \rightarrow 0$ 时 $x \neq 0$). 于是下列等式

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \pm g(x)] = f(0) \pm g(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)] = f(0)g(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)}$$

均不可能成立,亦即 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=0$ 处均

不连续,与该教材中上述定理 1、定理 2、定理 3 矛盾,可见上述定理中的条件不充分. 查同类书,如菲赫金哥尔茨(Г. М. Фихтенгольц)著的《微积分学教程》第一卷第 67 小节中的相应定理是如下叙述的:

“定理 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二函数在同一区间 $\mathcal{X}$ 上有定义且二者均在点 x_0 处连续,则函数

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(假定分式中的 $g(x_0) \neq 0$) 在点 x_0 处均连续.”

我们给出的反例,显然不满足菲赫金哥尔茨所著书中定理的全部条件,自然就没有 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=0$ 处连续的结论.

上述教材中的定理 1、定理 2、定理 3 可以按照菲赫金哥尔茨所著书的定理那样写,再加一个条件,也可把原定理 1、定理 2、定理 3 中的“某点连续”均改为“某内点连续”,则所述定理 1、定理 2、定理 3 就都成立了.

因为工科院校中的高等数学课程,主要是古典数学分析,判断函数的连续性,应如上考察之.

关于复合函数的连续性

有这样一本教材,先作如下定义:

“在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数……如果区间包括端点,那末函数在右端点连续是指左连续,在左端点连续是指右连续.”

然后,作如下的阐述:

“定理 5 设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\rightarrow x_0$ 时的极限存在且等于 a , 即

$$\lim_{x\rightarrow x_0}\varphi(x)=a$$

而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续,那末复合函数 $y=f[\varphi(x)]$, 当 $x\rightarrow x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$, 即

$$\lim_{x\rightarrow x_0}f[\varphi(x)]=f(a)”$$

接着还有如下的结论:

“定理 6 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续,那末复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也是连续的.”

这两条“定理”对不对呢?请看下例:

设 $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$, $u=\varphi(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, 存在极限 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1$, 按该教材关于函数在区间上连续的定义, $f(u)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, $f(u) = \sqrt{u^2 - 1}$ 在 $u = 1$ 处连续, 可是复合函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sqrt{\sin^2 x - 1}$$

不存在, 因为根据函数极限的定义, 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $x \neq \frac{\pi}{2}$, 而在 $x = \frac{\pi}{2}$ 的两侧 $\sqrt{\sin^2 x - 1}$ 没有定义, 于是 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sqrt{\sin^2 x - 1}$ 没有意义, “定理 5”的结论不成立.

不难检验上例也满足该书“定理 6”的条件, 但“定理 6”的结论不成立.

是什么原因使得上述“定理 5”、“定理 6”不成立呢? 中国有一句老话: 不怕不识货, 只怕货比货. 请看菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》卷一第二章 § 4 第 73 小节中的定理是如何陈述的. 为了便于比较, 按照上述“定理 5”、“定理 6”的记号来陈述:

“定理 设函数 $f(u)$ 在区间 μ 上有定义, $\varphi(x)$ 在区间 $\mathcal{X}$ 上有定义, 同时假设当 x 在 $\mathcal{X}$ 上变化时函数 $\varphi(x)$ 的值不超越出 μ 的范围. 若 $\varphi(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中点 x_0 处连续, 且 $f(u)$ 在对应的点 $a = \varphi(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 将在点 x_0 处连续.”

我们看到菲赫金哥尔茨著的书中多了一个条件, 即“同时假设当 x 在 $\mathcal{X}$ 上变化时函数 $\varphi(x)$ 的值不超越出 μ 的范围”. 上面的例子正是不满足这一条件, 当 x 在 $\frac{\pi}{2}$ 两侧变化时, $\varphi(x) = \sin x$ 的值越出了 $\mu = [1, +\infty)$ 的范围.

上述“定理 5”、“定理 6”中, 若补加一个条件: “ x_0 为复合函数 $f[\varphi(x)]$ 定义区间内的一点”, 其他不变, 这样修改后两个定理均成立. 本文给出的例题, 复合函数 $f[\varphi(x)] = \sqrt{\sin^2 x - 1}$ 的定义域不是定义区间, $x = \frac{\pi}{2}$ 不是它的内点, 故结论不成立.



如何由切线引出导数概念？

为讲导数 $f'(x_0)$ ，一般先讲平面曲线的切线，作为引出抽象概念导数的一个实例。看到有的教材如下定义平面曲线的切线：

“设有曲线 C 及 C 上的一点 M (图 1)，在点 M 外另取 C 上一点 N ，作割线 MN 。当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT ，直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线。这里极限位置的涵义是：只要弦长 $|MN|$ 趋于零， $\angle NMT$ 也趋于零。”

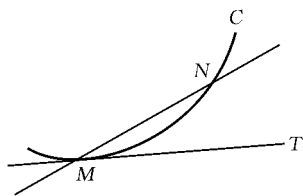


图 1

切线如此定义，事实上，很难检验，原因如下：

(1) 把切线定义为割线的极限位置。一个割线族的极限位置，这句话只能凭几何直觉去感受，而无法用 $\epsilon - \delta$ 语言来表述。上段话的作者也已认识到这一点，因而对“极限位置”加了一个注释：即

$\lim_{|MN| \rightarrow 0} \angle NMT = 0$ 之意。这个极限式，表面上可以用 $\epsilon - \delta$ 语言表达了，即

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，当 $0 < |MN| < \delta$ 时，恒有 $|\angle NMT| < \epsilon$ 。

但实际上，当在一条平面曲线上检验以上一组不等式是否成立

时,由于变量 $\angle NMT$ 与变量 $|MN|$ 之间的数量关系一般说来没有一个直接的显式表达式,给出 $\epsilon > 0$ 后,如何确定 δ 困难甚多,仍只能望式兴叹而已.

(2)一开始就在如此一般的平面曲线上用纯几何直观来定义曲线的切线,不难发现在切点处未必均“光滑”.由于角 $\angle NMT$ 为非负值,在各种各样的尖点处(如图2、图3所示)切线均存在,但在这些点的邻域内,不存在单值函数 $f(x)$,更谈不上导数 $f'(x)$ 的存在问题,用这样的切线定义作为引出函数 $f(x)$ 的导数概念的实例,显得前后呼应不够紧扣,且有整体不完全配套之感.

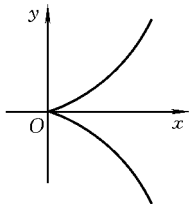


图 2

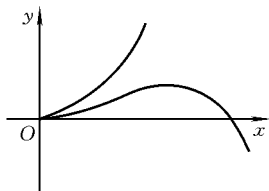


图 3

为了避免以上的缺点,不少微积分名著皆采取如下方式定义平面曲线的切线.

第一步,先定义曲线 $y=f(x)$ 在任一点 $(x_0, f(x_0))$ 处的斜率为过点 $(x_0, f(x_0))$ 的割线斜率的极限,即

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

第二步,定义曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线为过点 $(x_0, f(x_0))$ 且其斜率为 $f'(x_0)$ 的直线:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

利用这样的途径来讲平面曲线的切线,以上所提出疑点、难点和缺点都消失了.理由如下:

为了讲导数 $f'(x)$,使前后一致,不妨只先考虑可用方程 $y=f(x)$ 表示的曲线,把有如图2、图3中尖点的曲线,均暂不在考虑

范围之内,让我们从简单的问题开始研究,即从简着手.对照图4,不难写出割线 MN 的斜率

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,割线斜率的极限

即求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,求这个函数极限问题,这是我们都已十分

熟悉的问题,不会产生任何疑问了,作过已知点 $(x_0, f(x_0))$ 其斜

率为 $f'(x_0)$ 的直线更是轻而易举的事.可见,用引文中方法定义平面曲线的切线是困难重重,关山难越,而先定义曲线的斜率再定义曲线的切线的途径却是一条平坦的大道,这样去讲切线与导数,简单易懂多了.例如欲求曲线

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的切线方程,因 $y'(0)=0$,故立知切线方程为

$$y - 0 = 0(x - 0), \quad \text{即 } y = 0.$$

至于曲线尖点处,以后在讲导数存在与切线存在间异同比较时,再作一些补充分析即可.

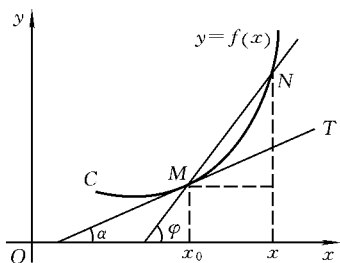


图 4



一例题解答有疏漏

一本普遍流行的教材在叙述导数的几何意义一段中,举了一道解答有疏漏的例题,为了便于了解全貌,把题及解的全文抄录如下:

“例 8 求曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 的通过点 $(5, 11)$ 的切线方程.

解 设切点为 (x_0, y_0) , 则切线的斜率为

$$y' \Big|_{x=x_0} = \frac{3}{2} \sqrt{x} \Big|_{x=x_0} = \frac{3}{2} \sqrt{x_0}.$$

于是所求切线方程可设为

$$y - y_0 = \frac{3}{2} \sqrt{x_0} (x - x_0). \quad (7)$$

切点 (x_0, y_0) 在曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 上, 故有

$$y_0 = x_0^{\frac{3}{2}}. \quad (8)$$

切线(7)通过点 $(5, 11)$, 故有

$$11 - y_0 = \frac{3}{2} \sqrt{x_0} (5 - x_0). \quad (9)$$

求得方程(8)及(9)组成的方程组的解 $x_0 = 4, y_0 = 8$. 代入(7)式并化简, 即得所求切线方程为

$$3x - y - 4 = 0."$$

本题的答案应有两条切线, 上述解答中疏漏掉另一条切线. 在

以上的叙述中(9)式以前没有错,今从(9)式开始重新解答:(8)代入(9)得

$$11 - x_0^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x_0}(5 - x_0),$$

即
$$11 - x_0^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{2} \sqrt{x_0} - \frac{3}{2} x_0^{\frac{3}{2}}.$$

令 $\sqrt{x_0} = t$, 代入上式并化简, 得

$$t^3 - 15t + 22 = 0,$$

分解因式得

$$(t - 2)(t^2 + 2t - 11) = 0.$$

这个方程有三个实根

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 2\sqrt{3} - 1, \quad t_3 = -2\sqrt{3} - 1.$$

因 $t = \sqrt{x_0} \geq 0$, 负根不合题意, 应舍去, 故所求切线为

$$y - 8 = 3(x - 4)$$

及

$$y - (2\sqrt{3} - 1)^3 = \frac{3}{2}(2\sqrt{3} - 1)[x - (2\sqrt{3} - 1)^2],$$

化简后分别为 $3x - y - 4 = 0$

及 $3(2\sqrt{3} - 1)x - 2y - (2\sqrt{3} - 1)^3 = 0.$

附注 1 曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 的图形如图 1 所示.

切点的横坐标 x_0 必为非负数, 由图亦可

看出 $t_3 = -2\sqrt{3} - 1$ 应舍去.

附注 2 该教材第四版上的这道例题是从其第三版上例 7 更改过来的(问曲线

$y = x^{\frac{3}{2}}$ 上哪一点处的切线与直线 $y = 3x - 1$ 平行?). 第三版例 7 的解答没有错, 但经第四版一修改反而出现差错了. 可见, 若不小心修改, 未必越改越好, 此即前车之鉴!

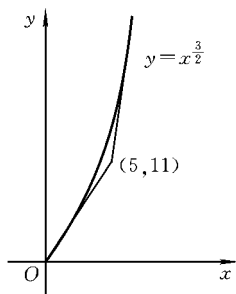


图 1

★ 复合函数求导公式的证明

复合函数求导公式是微分学中一个十分重要的公式,但不少教材中关于这个公式的证明常有一些不正确之处.例如华罗庚著的《高等数学引论》第一卷,第一分册,第131页上的叙述及证明均欠妥,今先抄录原文如下:

“假设 $y=f(x)$ 是区间 $a \leq x \leq b$ 上的连续函数,这函数的数值在区间 $c \leq y \leq d$ 之中.再设 $z=F(y)$ 是一个在区间 $c \leq y \leq d$ 中的连续函数,则得复合函数

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

现在有

$$\begin{aligned} z' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(f(x+h)) - F(f(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(f(x+h)) - F(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

命 $y=f(x)$ 及 $y+k=f(x+h)$, 则当 $h \rightarrow 0$ 时有 $k \rightarrow 0$, 得出

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(y+k) - F(y)}{k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= F'(y) f'(x). \end{aligned}$$

这一段叙述有两处不妥.一是必须假设 $f(x), F(y)$ 均为可导,仅假设连续得不出 $z' = f'(y) f'(x)$ 的结论,也就是说,上文中

那些极限均未必存在,这个差错十分明显.另一不妥处,即一般说来,下式未必成立:

$$\frac{F(f(x+h)) - F(f(x))}{h} = \frac{F(f(x+h) - f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

因当 $f(x+h) - f(x) = 0$ 时,上式右端便没有意义.上式要求 $h \neq 0$ 且 $f(x+h) - f(x) \neq 0$ 才有意义,所以,上面的推导不能普遍成立.在 20 世纪初期及其以前出版的微积分教程中都免不了有这个差错.甚至像 20 世纪上半世纪中的世界数学泰斗剑桥大学教授哈代(G. H. Hardy)在他的名著《纯正数学教程》(《A Course of Pure Mathematics》)中也坦率地说:“在这书的前三版中的这个证明都是不正确的”(见该书第九版第 217 页脚注).直到 1922 年 H. S. Carslaw 教授在《Bulletin of the American Mathematical Society》的 XXIX 卷中指出后,才引起众人的注意.在上述哈代的书和富兰克林著的《高等微积分讲义》(《A Treatise on Advanced Calculus》)中给出的证明都有一点繁,国内数学教材中给出清晰证明的还不多见.这里摘录阿帕斯托尔(T. M. Apostol)所著《微积分》(《Calculus》)一书中给出的证明,供读者参考.其证明如下:

设 $F(x), f(x)$ 可导,现求复合函数 $F(f(x))$ 的导数,记 $y = f(x)$,考察

$$\frac{F(f(x+h)) - F(f(x))}{h} = \frac{F(y+k) - F(y)}{h}, \quad (1)$$

其中 $k = f(x+h) - f(x)$,并定义一个新的函数

$$g(t) = \frac{F(y+t) - F(y)}{t} - F'(y), \quad \text{当 } t \neq 0 \text{ 时.} \quad (2)$$

已知 $F(y)$ 可导,当 $t \rightarrow 0$ 时, $g(t) \rightarrow 0$,所以又定义 $g(0) = 0$,于是函数 $g(t)$ 在 $t = 0$ 处连续.

在 $t \neq 0$ 时,等式②两端乘以 t ,得

$$F(y+t) - F(y) = t[g(t) + F'(y)]. \quad (3)$$

虽然等式③是在条件 $t \neq 0$ 下推导得的,但等式③当 $t = 0$ 时仍然成立,也就是说,当 $t = 0$ 或 $t \neq 0$ 时,等式③均成立.今把③式中的

t 代替以 k , 于是有

$$F(y+k) - F(y) = k[g(k) + F'(y)], \quad (4)$$

④中的 k 不论是零或不是零均成立. 把④的右端代入③的右端分子中, 得

$$\frac{F(f(x+h)) - F(f(x))}{h} = \frac{k}{h}[g(k) + F'(y)],$$

这里 k 不在分母中出现了, 再将 $k = f(x+h) - f(x)$ 代入, 得

$$\begin{aligned} \frac{F(f(x+h)) - F(f(x))}{h} &= \\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} [g(k) + F'(y)]. \end{aligned} \quad (5)$$

不论 $f(x+h) - f(x) = 0$ 或 $\neq 0$, 等式⑤均成立. 因假设 $f(x)$ 可导, 故 $f(x)$ 连续. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 必有 $k = f(x+h) - f(x) \rightarrow 0$. 由等式⑤得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(f(x+h)) - F(f(x))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} [g(h) + F'(y)] \\ &= f'(x) [g(\lim_{h \rightarrow 0} k) + F'(y)] = f'(x) [g(0) + F'(y)] \\ &= f'(x) [0 + F'(y)] = f'(x) F'(y), \end{aligned}$$

亦即
$$\frac{d}{dx} [F(f(x))] = F'(y) f'(x),$$

即
$$\frac{d}{dx} [F(f(x))] = F'(f(x)) f'(x).$$

这就是我们要证明的公式.



微分形式不变性？

设 $y=f(x)$ 可微, 当 x 为自变量时, 有 $df(x)=f'(x)dx$. 当 u 为中间变量且 $u(x)$ 也是可微函数时, 有 $df(u)=f'(u)u'(x)dx=f'(u)du$. 于是不少教材, 常常接着作这样的说明: “无论 u 是自变量还是另一个变量的可微函数, 微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变, 这一性质, 称为微分形式不变性.” 这样的阐述, 不够全面准确. 应当说: 一阶微分形式不变性, 因这个性质只是一阶微分所独有, 二阶与更高阶的微分均不具有微分形式不变性. 下面以二阶微分为例说明之.

设 $y=f(u)$, $u=u(x)$ 均具有二阶导数, 则一阶微分为

$$dy = f'(u)du,$$

再求二阶微分,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(u)du).$$

此时, 设 x 的改变量仍为 dx , 与求一阶微分时 x 的改变量相同, 故视 dx 为常量, $f'(u)=f'(u(x))$, $du=u'(x)dx$ 均为 x 的函数, 继续求 $f'(u)du$ 的微分, 得

$$\begin{aligned} d(f'(u)du) &= f''(u)(du)^2 + f'(u)d(du) \\ &= f''(u)(du)^2 + f'(u)d(u'(x)dx) \\ &= f''(u)(du)^2 + f'(u)u''(x)(dx)^2, \end{aligned}$$

即 $d^2y = f''(u)(du)^2 + f'(u)u''(x)(dx)^2$.

而若 $y=f(x)$, 其中 x 为自变量, 则

$$dy = f'(x)dx.$$

再求 $f'(x)dx$ 的微分时, 由于视 dx 为常数, 有 $d(dx)=0$, 从而有

$$\begin{aligned} d^2y &= d(f'(x)dx) = f''(x)dx dx + f'(x)d(dx) \\ &= f''(x)(dx)^2 + f'(x) \cdot 0 \\ &= f''(x)(dx)^2. \end{aligned}$$

我们看到当 x 为自变量时有

$$d^2y = d^2f(x) = f''(x)(dx)^2,$$

而 $y=f(u)$, $u=u(x)$ 时有

$$d^2y = d^2f(u) = f''(u)(du)^2 + f'(u)u''(x)(dx)^2,$$

二者完全不同, 再不具有微分形式不变性的了. 更高阶的微分可仿上推演, 得知当 $n \geq 2$ 时 n 阶微分 d^ny 均不具有微分形式不变性这一重要性质.

利用一阶微分形式不变性能简化复合函数求导的计算, 这是常用的计算公式, 必须知道一阶二字为关键性的字眼, 万万不要以为任何高阶微分都具有这一性质.

同样, 在多元函数微分学中, 设函数 $z=f(u, v)$ 具有连续偏导数, 则有全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

无论 u, v 是自变量还是具有连续偏导数的中间变量, 上列的全微分形式是一样的, 这个性质应叫一阶全微分形式不变性, 不要叫容易产生不清晰概念的全微分形式不变性, 因为二阶及更高阶的全微分 $d^nz (n \geq 2)$ 的形式均不再具有不变性了.

例如, 设 $z=f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, x, y 为自变量, 则其二阶全微分为

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2. \quad ①$$

若 $z=f(u, v)$, $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 均具有二阶连续偏导数, u, v 为二中间变量, 则其二阶全微分为

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} (du)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} (dv)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2 v. \quad (2)$$

我们看到, ①和②不同, 也就是说, 二阶全微分形式不具有不变性这个性质, 其中详细讨论, 请参阅菲赫金哥尔茨著的《微积分学》第一卷第五章中 § 4 的第 184 小节及熊庆来著的《高等算学分析》第一章的第 41 节.





洛必达法则是谁创立的？

数学史界后来发现，著名的洛必达(L'Hospital)法则的原始作者是 J. 伯努利(John Bernoulli)，不是洛必达。洛必达本是 J. 伯努利的学生。J. 伯努利于 1694 年给洛必达一封信，信中讲述了这个定理、证明及若干算例。洛必达便把这封信的内容编入了以他自己的名义出版的《无穷小分析》(《Analyse des infiniment petits》)一书中，此书于 1696 年出版。当时约定不外传秘密，但每月洛必达要给 J. 伯努利一定的酬金。此书出版后很有影响，久而久之，便出现了名垂千古的洛必达法则，而不知提出此法则的人是洛必达的老师 J. 伯努利。现在看来，这个名称已叫了几百年，一时很难改过来，但这段历史事实不应湮没，教师应传达给学生真实的情况。

参考书：

M. 克莱因. 古今数学思想. 第二册. 上海：上海科学技术出版社，1979.

R. 埃利斯, D. 格里克. 微积分. 潘鹤屏译. 南京：江苏科学技术出版社，1987.

函数极值如何定义好？

单元函数 $y=f(x)$ 的极值,有不同的定义,常见的定义如下:

“设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, x_0 是 (a,b) 内的一个点. 如果存在着点 x_0 的一个邻域,对于邻域内的任何点 x ,除了点 x_0 外, $f(x) < f(x_0)$ 均成立,就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值;如果存在着点 x_0 的一个邻域,对于这邻域内的任何点 x ,除了点 x_0 外, $f(x) > f(x_0)$ 均成立,就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值.”

这个定义的缺点是函数在区间内的最大值未必是该函数的极大值,函数在区间内的最小值未必是该函数的极小值,例如

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & 1 \leq x \leq 2; \\ 3-x, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

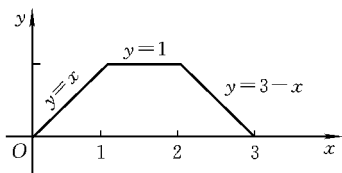


图 1

这个函数在 $[0,3]$ 上有最大值 1,却在 $(0,3)$ 内无极大值,其图形如图 1 所示. 在求解许多实际问题中,要求最大值或最小值. 当用微分法求可微函数最大值或最小值时,常先求极大值或极小值,再与区间边界点及不可导处的函数值比较,就确定出函数的最大值或

最小值. 若函数的极值如上定义, 上述解法就有漏洞了, 并且如下面所述的常见命题: “在 $[a, b]$ 上可微函数 $f(x)$ 的唯一极值点必是最值点” 亦不成立. 如图 2 所表示的函数, 曲线 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处光滑, 对应的函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处可导, 按上述的极值定义 $f(x)$ 在 (a, b) 内只有一个极值点 x_0 (极大值点), 但 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值.

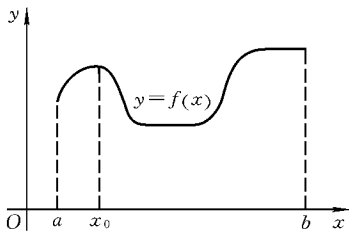


图 2

若函数 $y=f(x)$ 的极值如下定义:

“如果存在点 x_0 的一个邻域, 对于领域内的任意点 x , 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$, 就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值; 如果存在着点 x_0 的一个邻域, 对于这邻域内的任意点 x , 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$ 就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值”.

阿帕斯托尔著的《微积分》和富兰克林著的《高等微积分讲义》以及菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》等著名教材均按后者定义函数的极值. 按照后者定义函数极值, 则下列著名命题均成立:

(1) 可微函数 $f(x)$ 若在 (a, b) 内某点处达到最大(小)值, 则该点必为极大(小)值点.

(2) 可微函数 $f(x)$ 若在 (a, b) 内存在最值, 且 $f(x)$ 在 (a, b) 内只有一个极值, 则此极值必是最值.

利用这两个命题, 求一些实际问题的最值时, 就方便多了, 因此取后者作为极值的定义为好.

拐点刍议

不论国内还是国外的书籍,平面曲线的拐点有多种定义,有的定义明显不合理.

如有的作者定义拐点为:“曲线上凹凸弧的分界点.”按照这个定义,圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上点 $(-1, 0)$ 与点 $(1, 0)$ 都将是圆周的拐点,但圆周上的点具有圆对称性,让直角坐标系适当地转轴,将可使圆周上每一点都满足上述定义的拐点!由于直角坐标系的放置位置不同,曲线上同一点既可在这个直角坐标系下为拐点而在另一直角坐标系下又不是拐点,拐点将不是表征平面曲线内在几何特性的点.因此,这个定义有这样的不合情理的地方.

又如有的作者定义拐点为:“连续曲线 $y = f(x)$ 上凹凸弧段的分界点.”这个定义对上述定义作了一些改进:一是指出连续曲线,把各种各样的间断点排除在外了;二是指出曲线方程为 $y = f(x)$,又把不能表示成单值函数 $f(x)$ 的曲线排除在外了.虽然如此,今考察曲线

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - (x+1)^2}, & -2 \leq x \leq 0; \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

这条连续曲线是由圆心在 $(-1, 0)$ 且半径为 1 的上半圆弧与右半支抛物线拼接而成的(如图 1 所示).这个上半圆弧向下凹,抛物线

向上凹,点 $(0,0)$ 为不同凹向的分界点,按照改进后的拐点定义,该曲线上的点 $(0,0)$ 就应是这曲线的拐点了.但实际上,在数学辞典上称这种点为角点,即在曲线上该点处存在不同的左、右切线的点.角点是与拐点不同的另一类点,在角点处不存在曲线的切线.

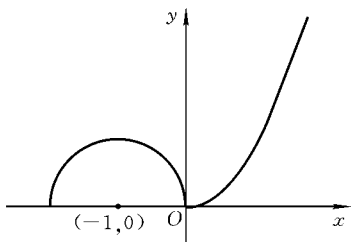


图 1

我们知道,若曲线各点的切线总在曲线的下方,则称此曲线段向上凹,若曲线各点的切线总在曲线的上方,则称此曲线段向下凹.设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线,且在切点两侧近旁曲线凹向不同,这时称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点,过拐点的切线称为拐切线.

很多著名著作都是这样定义拐点的,像柯朗著的《微积分》,哈代著的《纯正数学教程》,菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》,R. Ellis 与 D. Gulick 合著的《微积分》等等.

以上这些著作都是抓住切线与曲线间不同位置关系定义了曲线的凹凸性及拐点,这个拐点定义刻画出了曲线拐点的内在几何特征,与坐标系的选取方式无关.原是拐点,经任何平移或旋转后仍是拐点;原不是拐点,无论如何平移或旋转后仍不是拐点.拐点处必存在拐切线,把拐点与其几何上完全不同性质的其他点(如角点、尖点等)严格区分出来了.对定义与定理的叙述要求是不同的.在叙述定理时,为得同一结论,条件愈弱愈好,使定理应用范围宽广一些.但在叙述定义时,要求要准,要把定义对象的独有特性,准确地掌握,清晰地刻画出来,把定义对象与其他事物一清二楚地区分出来,避免鱼龙混杂,“鸡兔同笼”.如上定义拐点,就使拐点与其他点(如角点等)区分出来了.

在工程中,拐点与拐切线均有实际的应用背景.例如,两端嵌

入墙体内长为 $2l$ 的均匀弹性重力梁的中心线(见图 2)就有两个拐

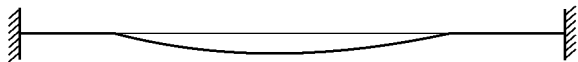


图 2

点,梁的中间部分的中心线向上凹,靠近两端点部分梁的中心线向下凹.给梁做配钢筋设计时,为了充分发挥钢筋的抗拉性能,在两拐点间钢筋应安置在梁的下侧,在拐点与端点间,钢筋应安置在梁的上侧,在梁的中心线拐点处,钢筋应与拐切线重合,这样设计才是正确的.又考察流体在一条玻璃长管内流动,设想玻璃管中间有一细颈,则流体流动的平面剖面中,细颈处即为流线的拐点,拐点处的流线应与其拐切线相切.

应当注意的是,拐点处存在切线,但函数在拐点处的一阶导数未必存在.考察函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 点 $(0, 0)$ 为该函数所表示曲线的一个拐点,该曲线在点 $(0, 0)$ 也存在切线 $x = 0$, 但 $y'(0) = +\infty$, 一阶导数不存在(见图 3).

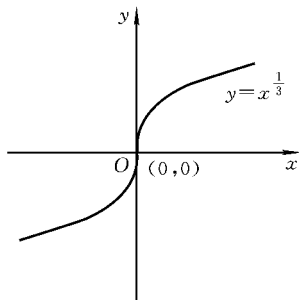


图 3



平面曲线曲率的定义

设给定的平面曲线方程为 $y=f(x)$, $f(x)$ 有连续导数, α 为曲线切线的倾斜角, 即 $\tan\alpha=f'(x)$. 今在曲线上取一点 M_0 作为度量弧长的起点, 并规定 x 增加时作为曲线的正向, 对曲线上任一点 $M(x, y)$, 规定有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的值为 s , s 的绝对值等于这弧段的长度, 当有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的方向与曲线的正向一致时 $s>0$, 相反时 $s<0$, 即 $s=s(x)$ 是 x 的单调增加函数. 平面曲线 $y=f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率 K 常见的有下面三种不同的定义:

(I) 如 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 存在, 则定义 $K = \frac{d\alpha}{ds}$, 其中 $\alpha = \arctan f'(x)$.

(II) 如 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 存在, 则定义 $K = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$.

(III) 如 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$ 存在, 则定义 $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$.

今说明(III)中的规定是错误的.

赵彦晖给出了如下一个例题:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0; \\ 1 - \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

看看这个函数的曲线(图1)在点 $(0, 0)$ 处的性态:

首先, 注意所给曲线实际上是由两段半径为 1 的圆弧拼接而

成,故 $\left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta \alpha \cdot 1} \right| = 1$, 可见 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$ 存在且为 1. 若把曲率 K

定义为 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$, 则该曲线在 $(0,0)$ 处有“曲率”, 且“曲率”将为 1.

下面来说明这是不合理的.

因平面曲线的曲率与曲率圆是形影不离的两个概念, 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有曲率, 则在该点处必存在曲率圆. 曲线的曲率圆就是曲线的密切圆, 而密切圆与原曲线具有二阶吻合度, 故原曲线在 $x=x_0$ 处必存在二阶导数 $f''(x_0)$. 但考察本例在 $x=0$ 处附近情况:

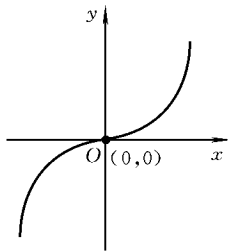


图 1

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

于是

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - 0}{x} = -1,$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 0}{x} = 1,$$

可见 $f''(0)$ 不存在. 前后出现矛盾, 故不能用 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$ 作为曲率的定义.

反之, 上述(I), (II)均可作为曲率的定义, 例如考察本例:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \begin{cases} -\frac{\Delta s}{\Delta s} = -1, & \text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时;} \\ \frac{\Delta s}{\Delta s} = 1, & \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

上式中, 当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) = \tan\alpha$ 为单调减少函数, 当 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) = \tan\alpha$ 为单调增加函数, 故知 $-1 < x < 0$ 时 $\Delta\alpha = -\Delta s < 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $\Delta\alpha = \Delta s > 0$. 故在本例中 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 不存在, 便知该曲线在 $x=0$ 处曲率不存在, 符合实际情况, 没有任何矛盾.

(I) 与 (II) 的区别是: $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$ 只确定曲线在该点附近的弯曲程度, 但不知曲线在该点附近的凹向, 而 $K = \frac{d\alpha}{ds}$ 既描述了曲线在该点附近的弯曲程度又描述了在该点附近曲线的凹向.

附注 1 曲线 Γ 在点 P 的密切圆的定义为: 过 Γ 上三点 P, P_1, P_2 的圆, 当 P_1, P_2 趋近于 P 时的极限. 由于极限存在的唯一性, 若在某点存在平面曲线的密切圆(曲率圆), 则该点处的密切圆(曲率圆)只有一个.

附注 2 对于平面曲线 $y = f(x)$, 很容易推得曲率的计算公式: 因 $\tan\alpha = f'(x), \alpha = \arctan f'(x) = \arctan y'$,

故
$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y'' dx}{1+y'^2} \bigg/ \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

附注 3 为了表达曲率概念主要反映曲线的弯曲程度, 所以不少作者定义

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|,$$

于是在直角坐标系下曲率的计算公式为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

在工程界多采用这个曲率公式.



曲线与其曲率圆图形间的关系

微分法在几何及力学中的重要应用之一是求平面曲线各点的曲率,因而不可避免地要画平面曲线的曲率圆的图形.平面曲线与其曲率圆图形间的关系,在不少教材中见到的图形如图 1 所示.实际上在一般情况下平面曲线与其曲率圆间的位置关系不应如此,只有在非常特殊的情形下才出现平面曲线“拥抱”其曲率圆的情况.那末,在一般情况下正确的图形应是怎样的呢?现来讨论这个问题.

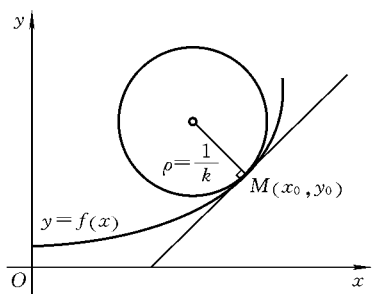


图 1

设平面曲线方程为 $y=f(x)$ 且

$f(x)$ 具有三阶连续导数,并设其在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的曲率圆在点 $(x_0, f(x_0))$ 附近一段圆弧的方程为 $y=g(x)$,由于二弧段相切于同一点 $(x_0, f(x_0))$ 并有相同的曲率和凹向,故有

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0), & f'(x_0) &= g'(x_0), \\ \frac{|f''(x_0)|}{[1+f'^2(x_0)]^{3/2}} &= \frac{|g''(x_0)|}{[1+g'^2(x_0)]^{3/2}}, \end{aligned}$$

由此必有

$$f''(x_0) = g''(x_0).$$

今考察函数 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, 显然 $g(x), \varphi(x)$ 均有连续的三阶导数. $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 邻域内的带拉格朗日 (Lagrange) 余项的二阶泰勒 (Taylor) 公式为

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3,$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间, 且 $\varphi(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \varphi''(x_0) = 0$, 于是有

$$\varphi(x) = \frac{\varphi'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3. \quad (1)$$

若 $\varphi'''(x_0) \neq 0$, 又因 $\varphi'''(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 故在点 $x = x_0$ 的充分小的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内 $\varphi'''(x)$ 有确定的正负号, 即 $\varphi'''(\xi)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内恒为正或恒为负, 由关系式 (1) 推知 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ 在点 x_0 的左右两侧正负号不同. 换句话说, 若在点 $x = x_0$ 的一侧曲线 $y = f(x)$ 在弧段 $y = g(x)$ 之上, 则在点 $x = x_0$ 的另一侧曲线 $y = f(x)$ 必在弧段 $y = g(x)$

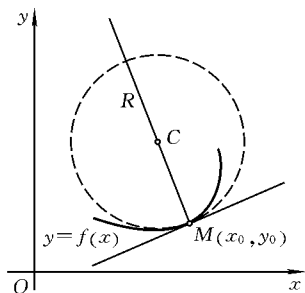


图 2

之下, 即曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的一侧在其曲率圆内, 在点 $x = x_0$ 的另一侧便在其曲率圆之外, 二曲线间的关系如图 2 所示. 若 $\varphi'''(x_0) = 0$ 而 $\varphi^{IV}(x)$ 连续且 $\varphi^{IV}(x_0) < 0$, 在如此等等特殊情况下, 曲线 $y = f(x)$ 将“拥抱”其曲率圆.

不定积分如何定义？

不定积分是微积分学中一个非常基本的概念,什么叫不定积分,凡学过微积分学的人,似乎应毫无问题,都应能准确地回答出来.但令人惊讶的是:对于这个问题,不同的作者,竟有不同的答案,特别在中文教材中,相当多的教材如下定义:

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分.

按照这样的定义,不定积分是全体原函数的集合.

但 Goursat 著的《A Course in Mathematical Analysis》关于不定积分的定义却是:

Every function whose derivative is $f(x)$ is called an indefinite integral of $f(x)$ or a primitive of $f(x)$, and is represented by the symbol $\int f(x)dx$. (译文:导数是 $f(x)$ 的每个函数,叫做 $f(x)$ 的不定积分,或叫 $f(x)$ 的原函数,记作 $\int f(x)dx$).

这里特别值得注意的是:记号 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的每一个原函数,不是全体原函数,亦即 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的全体原函数中的每一个,且 $f(x)$ 的不定积分与 $f(x)$ 的任意一个原函数二者涵

义完全相同. 换言之, $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的任意一个原函数. 在众多著名的外文著作中, 如柯朗著的《微积分》, 哈代著的《纯正数学教程》以及菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》第二卷第一分册中都用记号 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的任一原函数. 这里 $\int f(x)dx$ 表达的是全体还是全体中的任一原函数, 十分清楚.

若定义 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的全体原函数, 这是一个函数集合. 那末在不定积分的一些等式的证明中都应该按照集合相等的方式来证明, 可是从没有一本微积分学的书籍是这样处理的.

若定义 $\int f(x)dx$ 为 $f(x)$ 的全体原函数, 则有些推导将无法解释. 如用分部积分法计算 $\int e^x \sin x dx$, 正确的运算如下:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}\quad (1)$$

$$\text{于是 } 2 \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1. \quad (2)$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (-\cos x + \sin x) + C. \quad (3)$$

针对以上的运算将有:

疑问 1 ① 中左、右两端中的 $\int f(x)dx$ 是同一个函数集合, 两个相同函数集合的并, 仍是同一函数集合, ② 中的因子 2 将无法解释.

疑问 2 ② 中的 C_1 是如何加上去的? 不好解释. 若没有 C_1 , ② 的右端只有一个函数, 同样不好解释.

今把 $\int f(x)dx$ 定义为 $f(x)$ 的任一原函数, 则等式 ① 左、右两

端里的 $\int e^x \sin x dx$ 各是 $e^x \sin x$ 的任一原函数,二者只差一常数 C_1 , 于是 ② 中的因子 2 及常数 C_1 都可解释得清清楚楚.

因此,我们的结论是:不定积分 $\int f(x) dx$ 是 $f(x)$ 的任一原函数. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的某一个原函数,则不定积分 $\int f(x) dx$ 的一般表达式为

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

其中 C 为一任意常数.





可积函数 $f(x)$ 的变上限积分 $\int_a^x f(t) dt$ 必可导否?

若 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$, 亦即 $\int_a^x f(t) dt$ 必为可导函数, 且 $\int_a^x f(t) dt$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数. 这是原函数存在定理或叫微积分学基本定理(第一部分). 显然, 此定理十分重要.

经常看到有人想把上述定理中的条件减弱一点, 有的人不加证明便说: 设 $f(x)$ 可积也有 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$!

我们说, 这个结论不对, 请看下面的例子:

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有界, 且只有一个第一类间断点 $x = 0$, 由定积分存在定理, 知在 $[-1, 1]$ 上 $f(x)$ 为可积函数, 记

$$\varphi(x) = \int_{-1}^x f(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \varphi'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_{-1}^x 0 dt - \int_{-1}^0 0 dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0 \quad (-1 \leq x < 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{-1}^x f(x) dt - \int_{-1}^0 0 dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{-1}^0 0 dt + \int_0^x dt - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1 \\ &\quad (0 < x \leq 1).\end{aligned}$$

可见 $\varphi'_-(0) = 0, \varphi'_+(0) = 1, \varphi(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 故在区间 $[-1, 1]$ 上, $\varphi'(x) = f(x)$ 不成立, 即在 $[-1, 1]$ 上 $\varphi(x)$ 不是 $f(x)$ 的一个原函数. 由此例可知可积函数未必存在原函数.



谁创立牛顿-莱布尼茨公式？

定理 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad \textcircled{1}$$

上述公式, 在大陆上流行的教材中, 几乎都称之为牛顿-莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式. 但实际上, 首先创立这个公式的是牛顿的老师巴罗 (Barrow), 既不是牛顿, 也不是莱布尼茨. 不过, 牛顿和莱布尼茨发掘了这个公式的重要内涵, 并利用这个公式发展了微积分学, 使微积分学成为系统的数学方法, 且借助微积分方法计算一些几何量和物理量十分容易. 因此, 在国外的许多著名教材中, 如 Ellis 与 Gulick 合著的《微积分》, 斯梯瓦特著的《微积分, 超越首篇》(《Calculus—Early transcendentals》), 柯朗著的《微积分与数学分析引论》, 哈代著的《纯正数学教程》, 菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》, 斯米尔诺夫 (В. И. Смирнов) 著的《高等数学教程》, 阿帕斯托尔著的《微积分》等书中均称 $\textcircled{1}$ 为微积分学基本定理 (The fundamental Theorem of Calculus) 或叫积分学基本定理 (The fundamantal Theorem of Integral Calculus). 或详言之, 称

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (\text{设 } f(x) \text{ 连续})$$

为微积分学基本定理第一部分或微积分学第一基本定理. 而称 $\textcircled{1}$

为微积分学基本定理第二部分,或微积分学第二基本定理. 在国外能看到的数学教材中,称①为牛顿-莱布尼茨公式者很少,或因既与历史事实不符,而叫微积分学基本定理,可把这定理的重要意义十分恰当地表达出来.





积分中值定理加强一点好

我们见到的高等数学教材,积分中值定理几乎都如下陈述:

“如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则在积分区间 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ ,使下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).”$$

利用这样陈述的积分中值定理,有时去证明一些问题时便增加了不少难度.譬如,有一道全国统考的考研题及原解答如下:

“设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,且在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$.

证明:在 (a, b) 内存在唯一的 ξ ,使曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi), x = a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi), x = b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

证 存在性. 在 $[a, b]$ 上任取一点 t , 令

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_a^t [f(t) - f(x)] dx - 3 \int_t^b [f(x) - f(t)] dx \\ &= \left[f(t)(t-a) - \int_a^t f(x) dx \right] - 3 \left[\int_t^b f(x) dx - f(t)(b-t) \right], \end{aligned}$$

则 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 又 $f'(x) > 0$, 故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加. 在 (a, b) 内取定点 c , 则有

$$F(a) = -3 \int_a^b [f(x) - f(a)] dx$$

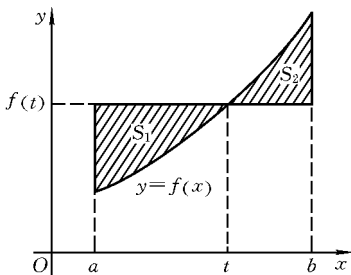


图 1

$$= -3 \int_a^c [f(x) - f(a)] dx - 3 \int_c^b [f(x) - f(a)] dx$$

$$\leq -3 \int_c^b [f(x) - f(a)] dx$$

$$= -3[f(\xi_1) - f(a)](b - c) < 0, \quad c \leq \xi_1 \leq b.$$

$$F(b) = \int_a^c [f(b) - f(x)] dx + \int_c^b [f(b) - f(x)] dx$$

$$\geq \int_a^c [f(b) - f(x)] dx$$

$$= [f(b) - f(\xi_2)](c - a) > 0, \quad a \leq \xi_2 \leq c.$$

由介值定理知, 在 (a, b) 内存在 ξ , $F(\xi) = 0$, 即 $S_1 = 3S_2$.

唯一性. 因 $F'(t) = f'(t)[(t-a) + 3(b-t)] > 0$, 故 $F(t)$ 在 (a, b) 内单调增加, 因此 (a, b) 内只有一个 ξ , 使 $S_1 = 3S_2$."

以上存在性部分的证明有点繁, 也有点难. 今若把积分中值定理的性能加强, 即

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在积分区间 (a, b) 内至少存在一个点 ξ , 使下式成立

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b.$$

在讲 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt$ 之后, 可立得这个强化了积分中值定理.

即记 $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\varphi(a) = 0$. $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上显然满足拉格朗日中值定理的全部条件, 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a) \\ &= f(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b.\end{aligned}$$

利用这个强化了积分中值定理回头去证上述考研题的存在性部分:

仍如上, 令

$$F(t) = \int_a^t [f(t) - f(x)]dx - 3 \int_t^b [f(x) - f(t)]dx.$$

于是 $F(a) = -3 \int_a^b [f(x) - f(a)]dx$
 $= -3[f(\xi_1) - f(a)](b-a) < 0, \quad a < \xi_1 < b;$

$$\begin{aligned}F(b) &= \int_a^b [f(b) - f(x)]dx \\ &= [f(b) - f(\xi_2)](b-a) > 0, \quad a < \xi_2 < b.\end{aligned}$$

由介值定理, 在 (a, b) 内存在 ξ , 使 $F(\xi) = 0$, 即 $S_1 = 3S_2$.

我们看到利用强化了积分中值定理来证明上述题目便显得容易多了, 简单多了, 证明中不需要任何技巧了.

这种情况, 做题时会屡屡碰上.

附记: 强化积分中值定理也可不依赖公式 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

而直接证明之. 为此, 先介绍两个引理.

引理 1 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) \geq 0$ 且在 (a, b) 内至少有一点 η 使 $f(\eta) > 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

证 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 据连续定义:

$\forall \frac{1}{2}f(\eta) > 0$, 存在充分小的 $\delta > 0$, 当 $|x - \eta| < \delta \leq \min\{\eta - a, b - \eta\}$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(\eta)| < \frac{1}{2}f(\eta),$$

$$\text{即 } -\frac{1}{2}f(\eta) < f(x) - f(\eta) < \frac{1}{2}f(\eta), \quad a \leq \eta - \delta < x < \eta + \delta \leq b.$$

$$\text{亦即 } \frac{1}{2}f(\eta) < f(x) < \frac{3}{2}f(\eta), \quad a \leq \eta - \delta < x < \eta + \delta \leq b.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{\eta-\delta} f(x) dx + \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} f(x) dx + \int_{\eta+\delta}^b f(x) dx. \\ &\geq \int_a^{\eta-\delta} 0 dx + \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \frac{1}{2}f(\eta) dx + \int_{\eta+\delta}^b 0 dx \\ &= 0 + \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \frac{1}{2}f(\eta) dx + 0 = \delta f(\eta) > 0. \end{aligned}$$

由此立知有：

引理 2 若 $f(x), g(x), \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上均连续, 恒有

$$f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x), \quad a \leq x \leq b.$$

且若在 (a, b) 内至少有一点 η , 有 $f(\eta) < g(\eta) < \varphi(\eta)$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx < \int_a^b \varphi(x) dx.$$

证 对函数 $g(x) - f(x), \varphi(x) - g(x)$ 各利用引理 1 一次便得.

现来证明强化的积分中值定理.

由于假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上达到最小值 $m = f(\xi_1)$, $a \leq \xi_1 \leq b$ 和最大值 $M = f(\xi_2)$, $a \leq \xi_2 \leq b$.

若 $M - m = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数, 显然在 (a, b) 内的任一点 x 均可作为 ξ , 有

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi) \quad (a < \xi < b).$$

若 $M - m > 0$, 则 $f(x)$ 不是恒为常数, 由介值定理知在 (a, b) 内至少存在一点 η , 使有

$$m < f(\eta) = \mu_1 < M \quad (a < \eta < b),$$

同时还有 $m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b).$

由引理 2 有 $\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx,$

即 $m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a),$

两边除以 $b-a$, 得 $m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M.$

记 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu_2$, 有 $m < \mu_2 < M$, 再利用一次介值定理, 知

在 (ξ_1, ξ_2) 或 (ξ_2, ξ_1) 内至少存在一点 ξ , 有 $f(\xi) = \mu_2$,

即 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu_2 = f(\xi),$

亦即 $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi),$

其中 $a \leq \xi_1 < \xi < \xi_2 \leq b$ 或 $a \leq \xi_2 < \xi < \xi_1 \leq b.$

综上所述, 有 $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi), \quad a < \xi < b.$

这就是欲证的强化的积分中值定理.



莫把质心叫重心

在我国很多数学教材中,几乎都误把质心叫做重心.以下一段文字,摘引自一本发行量很大的高等数学教材:

“设 xOy 平面上有 n 个质点,它们分别位于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处,质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$. 由力学知道,该质点系的重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

其中 $M = \sum_{i=1}^n m_i$ 为该质点系的总质量,

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

设有一平面薄片,占有 xOy 面上的闭区域 D ,在点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$,假定 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续,现在要找该薄片的重心的坐标……

……薄片的质量为

$$M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma,$$

所以,薄片的重心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}."$$

上文中所谓“面密度”是指质量分布面密度. “由力学知道”, 此话不妥, 比较严谨的力学教材不会这样写的, 一般的力学老师在讲课时, 也是在概念上要严格区分重心与质心的不同, 二者决不混作一谈. 上面摘引的文中所有“重心”二字均应改为“质心”才对. 这个差错在近年的中文高等数学教材中太普遍了, 为此, 认真翻阅手头的英文版微积分一类书籍, 如柯朗著的《微积分》(《Differential and Integral Calculus》), 阿帕斯托尔著的《微积分》等书中, 相当于上述引文中“重心”处均用“Center of mass”或“Centroid”(质心)中的二者之一. 在笔者见到的英文版本的微积分书籍中, 质心与重心是严格区分的.

我们看看在力学书籍中究竟是如何陈述的呢? 随机地拿了 Carl Jenness Coe 著的《Theoretical Mechanics》, 此书 p. 82 上这样写着:

“If we have such a set of n particles $p_1, p_2, \dots, p_n$ with radius vectors $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ and corresponding masses $m_1, m_2, \dots, m_n$ then we define the centroid of the set to be the particle p_0 with radius vector $\vec{p}_0$ and mass m_0 where

$$\vec{p}_0 = \frac{m_1\vec{p}_1 + m_2\vec{p}_2 + \dots + m_n\vec{p}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i\vec{p}_i}{\sum m_i}$$

$$m_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_i.$$

Consequently we always have

$$m_0\vec{p}_0 = \sum m_i\vec{p}_i."$$

(译文: 若有一组 n 个质点 $p_1, p_2, \dots, p_n$, 其位置向量为 $\vec{p}_1$,

$\vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, 对应的质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$, 那末, 定义此质点系的质心为位置向量为 $\vec{p}_0$ 、质量为 m_0 的质点 p_0 , 其中

$$\vec{p}_0 = \frac{m_1 \vec{p}_1 + m_2 \vec{p}_2 + \dots + m_n \vec{p}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{p}_i}{\sum m_i},$$

$$m_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_i,$$

因而恒有 $m_0 \vec{p}_0 = \sum m_i \vec{p}_i$.

请注意上文定义的是质点系的质心, 用的英文名词是 centroid, 而不是 center of gravity(重心).

再回头看看我国老一代力学家写的著作中, 在概念上又是如何严格区分重心与质心之不同的. 如范会国著的《理论力学》, 在重心一章中是这样阐述(见该书 p. 139)的:

“设一刚体为 n 质点所组成, 其质量为 $m_1, m_2, \dots, m_n$, 其重量为 $p_1, p_2, \dots, p_n$, 其坐标为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$, 若以 P 及 M 表此刚体之重量及质量, 则有

$$p_k = m_k g,$$

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = Mg.$$

若命 (ξ, η, ζ) 为此刚体之重心之坐标……有

$$\xi = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

或以简单形式表之, 则有

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i z_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

由此三式,可见重心之位置只关于诸点之质量,而可将重心之概念推至‘无重量之一质点组’”.

以上这一段推导和解释,说明质点系重心公式为

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i z_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

质心公式为

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

二者概念不同,但可用“无重量之质点组”的质心公式来计算该质点组的重心,也正因为此,不少数学教材均误将质心叫做重心,虽计算得的数值结果不错,但溯本求源,概念上毕竟错了.

应当指出:严谨地说,只有在物体很小,或质量组的范围很小,各质点所受的重力方向与强度相同的情况下,质心与重心的位置才可看作重合.在失重的情况下,物体无重心,但有质心.对于地球上的巨大物体,如山脉,重心与质心也不一致.

为什么中文数学教材中会普遍地出现这个概念上的错误呢?因 20 世纪 50 年代大家学习前苏联数学教材,而前苏联时代有几本对我国数学教育界影响很大的数学书,如菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》,斯米尔诺夫著的《高等数学教程》中均把质心误称为重心.当时只能“一边倒”地向苏联学习,不能怀疑,不便与西方书籍比较,所以会出现上述情况.



如何消除应用定积分元素法中的疑惑？

今以求面积为例说明之,求其他几何量或物理量可完全类似地解释.

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) \geq 0$, 欲求以曲线 $y = f(x)$ 为曲边、底为 $[a, b]$ 的曲边梯形的面积 A . 若用积分元素法求之, 不少教材如下叙述:

取区间 $[a, b]$ 中任一小区间, 记作 $[x, x + dx]$, 求出相应于这个小区间上以曲线 $y = f(x)$ 为曲边的窄小长条面积 ΔA 的近似值(见图 1)

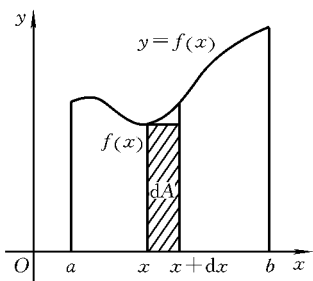


图 1

$$\Delta A \approx f(x)dx,$$

就把 $f(x)dx$ 称为面积 A 的元素, 记作 dA , 即

$$dA = f(x)dx.$$

以所求量 A 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式, 在区间 $[a, b]$ 上的定积分便是所求面积

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

几乎所有初学者读了这一段后, 都会有一个疑问: $f(x)dx$ 本

是 ΔA 的近似值, 即 $\Delta A \approx dA = f(x)dx$, 凭什么由此得到的积分 $\int_a^b f(x)dx$ 竟是 A 的准确值呢? 交代清楚这一点, 应是这一段的关键所在, 可惜不少教材没有把道理讲透. 为此, 必须说明以下几点:

现用 $A(x)$ 表示以曲线 $y=f(x)$ 为曲边, 底为 $[a, x]$ 的曲边梯形面积的函数(见图 1), 从而知 $A(a)=0$. 上述的 ΔA 就是函数 $A(x)$ 的改变量

$$\Delta A = A(x+dx) - A(x),$$

由图 1, 显然存在 $\xi \in [x, x+dx]$, 有

$$A(x+dx) - A(x) = f(\xi)dx,$$

而 $f(x)$ 为连续函数, 当 $dx \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 从而有

$$f(\xi) = f(x) + o(1),$$

$o(1)$ 表示当 $dx \rightarrow 0$ 时的无穷小, 因而

$$f(\xi)dx = [f(x) + o(1)]dx = f(x)dx + o(1)dx.$$

显然

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{o(1)dx}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} o(1) = 0,$$

这说明 $o(1)dx$ 是比 dx 高阶的无穷小, 得

$$\Delta A = f(x)dx + o(dx),$$

即 ΔA 与 $f(x)dx$ 之差为一比 dx 高阶的无穷小, 据函数微分的定义, 知 $f(x)dx$ 是函数 $A(x)$ 的微分, 即

$$dA(x) = f(x)dx.$$

这个关系式是完全准确的, 没有半点含糊不清的地方, 不会引起任何疑惑, 它是实实在在的面积函数 $A(x)$ 的微分, 不像前面说把 $f(x)dx$ “记作” dA , “称为面积 A 的元素”, 十分随意和武断, 这么一“记”一“称”, 为什么将之积分后, 便能得到面积 A 的真正准确值呢? 实在令人十分费解, 难以从心里接受. 我们指明函数 $A(x)$ 的几何意义, 严格地推导出 $f(x)dx$ 确是函数 $A(x)$ 的微分后, 再

积分之,得

$$A(x) = \int_a^x f(x) dx + C,$$

而 $A(a) = \int_a^a f(x) dx + C = 0 + C = 0,$

知 $C=0$, 于是有

$$A(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

我们欲求的底为 $[a, b]$ 的曲边为 $y=f(x)$ 的梯形面积 A 为

$$A = A(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

这样推导所得结果的正确性,便不容有半点怀疑了,因为每一步都是有根有据的.





关于广义积分的名称及定义的几点意见

在一本流行很广的高等数学教材中,如下定义广义积分:

“定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty]$ 上连续,取 $b > a$. 如果极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在,则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty]$ 上的广义积分,记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$,即

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;如果上述极限不存在,函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty]$ 上的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 就没有意义,习惯上称为广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散……”.

按照这个定义的前半段,只有当极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 存在时,才有记号 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$,才叫 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 为广义积分.依照一般的逻辑思维,当极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 不存在时,应当既没有广义积分这

个名称,也应没有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 这个记号.但通常仍称 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$,

$\int_0^{+\infty} \sin x dx$ 为广义积分,这类记号也到处可见,这个定义的后半段与前半段有不能自圆其说的地方,这就是这个定义存在的瑕疵.

那末,如何改正这个缺点呢?为了能把问题解释得清楚一些,首先回顾一下通常的定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是如何定义的.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义.通常的定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为如下的极限:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

其中 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,
 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 是在 $[a, b]$ 内任意的 $n-1$ 个点, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ξ_i
 为区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意取的一点, $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$,

不管点 x_i 及 ξ_i 如何选取,只要当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 总趋于一个与 x_i, ξ_i 无关的确定的值,才说极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在.如此

定义的积分 $\int_a^b f(x)dx$ 叫黎曼(Riemann)积分.黎曼积分 $\int_a^b f(x)dx$

存在的必要条件是 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 上为有界函数.若积分区间不是有限区间,则 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ 中至少有一个不是有限数,而为 ∞ ;同样,若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不是有界函数,则总可适当选取某个 ξ_i 使 $f(\xi_i)$ 的数值任意地大,在这两种情况中的任一种

情况下,极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 必不存在,即定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 必不

存在.通常微积分中的定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 都是指上述黎曼意义下的积分.

通常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的这两个必要条件, 是两个很重要的约束. 为了拓展积分的研究范围, 十分自然地会探索去掉这些约束后会出现什么样的情况.

今考察当 $b \rightarrow +\infty$ 时 $\int_a^b f(x)dx$ 的情况, 这样就自然地引出了无穷积分的概念和记号 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. 这是第一类非正常积分, 英文名词为 improper integral of the first kind, 中文数学书中一般译为第一类瑕积分. 这个 improper 是“不标准”、“非正常”的意思, 为此我们便可了解为什么叫它为 improper integral 了. 第一类瑕积分的正确定义如下:

若对于每一个 $b \geq a$, 正常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在, 定义一个新的函数

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx \quad (\text{对于每一个 } b \geq a),$$

规定
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = I(+\infty),$$

不论极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b)$ 是否存在, 均称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为第一类瑕积分. 若

极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b)$ 存在, 则称第一类瑕积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 若极限

$\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b)$ 不存在, 则称第一类瑕积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

关于 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 可类似定义. 而 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 定义为

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

再来介绍第二类瑕积分, 它的定义如下: 设 $f(x)$ 在半开区间 $(a, b]$ 上有定义, 并设对于满足 $a < x \leq b$ 的每一个 x , 积分

$\int_x^b f(x)dx$ 存在. 如下定义一个新的函数

$$I(x) = \int_x^b f(x) dx \quad (a < x \leq b),$$

规定
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a^+} I(x) = I(a+0),$$

不论极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} I(x)$ 是否存在, 均称 $\int_a^b f(x) dx$ 为第二类瑕积分. 若

极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} I(x)$ 存在, 则称第二类瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} I(x)$ 不存在, 则称第二类瑕积分发散.

上文中所谓极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^+} I(x)$ 存在, 均指存在确定的有限值为其极限, 若 $\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \infty$, 我们仍谓 $\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b)$ 不存在.

上文中定义的第二类瑕积分, 比一般教材上定义的被积函数为无界函数的瑕积分, 范围更广一些.

如上定义的两类瑕积分, 有以下一些优点:

(1) 定义本身没有矛盾, 虽然 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx$ 均不存在, 但 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ 等是名正言顺的瑕积分.

(2) 在不少教材中, 若 $f(x)$ 仅在 $(a, b]$, 或 $[a, b)$, 或 (a, b) 上有定义且为有界函数, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 常常没有给出明确定义, 留下一些空白地带, 上述定义没有这个缺点.

(3) 称瑕积分比称呼广义积分好. 广义积分这个名词有什么不好呢? 如 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 不收敛, 按一般定义常说“不收敛的广义积分为无意义.” 这又是一句不能自圆其说的话. 收敛的瑕积分的确赋予“广义”, 对于发散的瑕积分, 哪有什么“广义”? 所以英文中称瑕积分为 improper integral, 德文为 uneigentliches Integral, 俄文为 несобственный интеграл, 它们都是“非正常积分”的意思, 译为瑕积分, 比译为“广义积分”要恰当得多.

全微分是全增量的线性主部吗？

若 $f'(x) \neq 0$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 函数的微分 $df(x) = f'(x)dx$ 是函数增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 中的线性主部. 若 $f'(x_0) = 0$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时函数微分 $df(x_0) = 0$, 它就不再是函数增量 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 中的线性主部. 不论 $f'(x_0)$ 是否为零, 恒可说函数微分 $f'(x_0)dx$ 是函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 中 Δx 的线性部分. 无穷小量与无穷小量中的主部, 二者是等价无穷小, 所以零不能作为无穷小量的主部.

对于多元函数来说, 今以二元函数为例, 不能再有函数的全微分 $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ 是函数全增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 中的线性主部的可能性 (当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时), 为什么呢?

因为若设 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处具有一阶连续偏导数, 则函数 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的全微分为

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy,$$

当 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$ 时, 函数的全微分 $df(x_0, y_0) = 0$, 零不能作为无穷小量中的主部. 即使 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 不全为零, 而在点 (x_0, y_0) 的任意小的邻域内, 总存在点 (x, y) 使有

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

从而在点 (x_0, y_0) 的任意小邻域内恒存在点 (x, y) , 使

$$f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = 0.$$

换句话说, 在过点 (x_0, y_0) 的直线 $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ 上的点处均有

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = 0.$$

所以, 当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, 多元函数的全微分恒不能作为全增量的主部, 因此全微分是全增量的线性主部的提法是不妥的. 正确的提法是: 函数的全微分是函数全增量的线性部分, 它与全增量之差是 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小.

人们对函数微分概念的认识经过了十分曲折漫长的过程. 17 世纪时期微分被视作一个很小的“不可分量”, 是一个很不清的概念. 在 18 世纪中, 把函数微分看作“极微小的非零常量”, 这就是当时理解的“无穷小”的概念. 到了 19 世纪正确建立极限理论后, 在近代分析中才清晰地定义函数 $f(x)$ 的微分是有限的量并且与 Δx 成比例, 它与函数增量之差是关于 Δx 的高阶无穷小, 不过也不是一步到位的. 在 19 世纪末 20 世纪初风行全世界的古尔萨(Goursat)著的《数学分析教程》中称函数微分为函数增量的主部. 该书英译本的译者黑德里克(E. R. Hedrick)在这句话下便加了一个注脚: “严格地说, 此处应把 $f'(x) = 0$ 的情形排除在外. 不过为了方便, 在此情况下, 仍保留 $dy = f'(x)\Delta x$ 的同样定义, 虽然它不是 Δy 的主部”. 到了 20 世纪上半世纪, 不少教材称函数微分当 $f'(x) \neq 0$ 时为函数增量的线性主部. 但后来认识到在多元函数微分理论中, 在点 (x_0, y_0) 的任意小的邻域内, 恒有点使 $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = 0$, 说全微分是全增量的“线性主部”显然不妥. 在菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》1951 年俄文第三版中(该书俄文第一版为 1947 年)准确地说: 全微分是全增量的线性部分. 函数微分由函数增量的主部到“线性主部”, 再到“线性部分”的更改, 反映了人们对无穷小量中“主部”及 $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ 二者的认识逐步深入、逐渐明确的曲折过程.



方向导数如何定义较好？

很多教材如下定义方向导数：

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义，自点 P 引射线 l ，并设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为 l 上的另一点，记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ，当 P' 沿着 l 趋于 P 时，如果极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 P 沿方向 l 的方向导数，记作 $\frac{\partial f}{\partial l}$ ，即

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\rho}. \quad ①$$

这样定义方向导数有什么缺点呢？即偏导数 $f'_x(x,y)$ 与函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿着 x 轴正向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ (按照①的规定)不是一回事，它们之间有差别。

例如考虑函数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ，若视 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)}$ 为在原点处沿着 x 轴正向的方向导数，则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+0} - \sqrt{0+0}}{\sqrt{(\Delta x)^2+0}} = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x}{\Delta x} \right| = 1.$$

但函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处对 x 的偏导数

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + 0} - \sqrt{0 + 0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

不存在, 而记号 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)}$ 通常恒视作函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处对 x

的偏导数, 即 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)}$ 与 $f'_x(0, 0)$ 为同义的, 今却出现自相矛盾了. 如

何消灭这个矛盾呢? 欲使函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 沿 x 轴正方向的方向导数与函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 对 x 的偏导数完全一致, 也使函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 沿 y 轴正方向的方向导数与函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 对 y 的偏导数完全一致, 方向导数应如下定义:

仍以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例. 点 P_0 坐标为 (x_0, y_0) , 过点 P_0 作有向直线 l (不是射线), 在有向直线 l 上取单位向量 $u = \cos\theta i + \sin\theta j$, 再在 l 上任取一点 $P(x, y)$ (见图 1), 则

$$\overrightarrow{P_0 P} = tu = t(\cos\theta i + \sin\theta j) \quad (t \text{ 可正可负}).$$

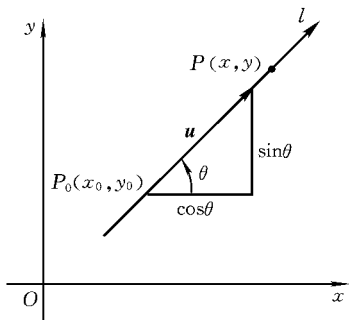


图 1

当 P 沿着 l 趋于 P_0 时, 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

存在, 则称这极限为函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 沿方向 $u = \cos\theta i + \sin\theta j$

的方向导数,记作 $D_u f(x_0, y_0)$, 亦即

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

与偏导数定义比较,当 $u = i = 1i + 0j$ 时,有

$$D_i f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)};$$

当 $u = j = 0i + 1j$ 时,有

$$D_j f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}.$$

换言之,函数 $f(x, y)$ 关于 x 的偏导数恰好就是函数 $f(x, y)$ 沿 x 轴正向的方向导数,函数 $f(x, y)$ 关于 y 的偏导数恰好就是函数 $f(x, y)$ 沿 y 轴正向的方向导数. 记号 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 既可看作偏导数记

号,又可看作方向导数记号,与方向导数记号 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 不矛盾,即偏导数是方向导数的特殊情况.

对于三元函数 $f(x, y, z)$ 可以同样地定义方向导数,设点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$,过点 P_0 的有向直线 l 上单位向量 $u = \cos(l, x)i + \cos(l, y)j + \cos(l, z)k$ 其中 $(l, x), (l, y), (l, z)$ 分别表示有向直线与正向 x 轴、 y 轴、 z 轴间夹角,则 $f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿 u 方向的方向导数定义为

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos(l, x), y_0 + t \cos(l, y), z_0 + t \cos(l, z)) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

当等号右端的极限存在时.

关于一般的多元函数的方向导数,若用向量记号来表示,可统一表示为

$$D_u f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t},$$

其中 x_0 表示位置向量 $\{x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0}\}$, t 可正可负, u 为通过点 x_0 的有向直线 l 上的单位向量.



二元函数极值问题的一个错误断言

经常看到有这样的论断:若函数 $f(x, y)$ 在经过点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的每条直线上都达到极值, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 必达到极值. 实际上, 这个论断是错误的. 著名的意大利数学家皮亚诺(Peano)举出了如下一个例子:

$$z = (y - x^2)(y - 2x^2). \quad ①$$

考察这个函数所表示的曲面与平面 $y = bx/a$ 的交线. 今令 $x = at$, $y = bt$, 代入①便得平面 $y = bx/a$ 上交线的函数为

$$\begin{aligned} z(x, y) &= z(at, bt) = \varphi(t) = (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2t^2) \\ &= b^2t^2 - 3a^2bt^3 + 2a^4t^4. \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = 2b^2t - 9a^2bt^2 + 8a^4t^3, \varphi''(t) = 2b^2 - 18a^2bt + 24a^4t^2.$$

因 $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 2b^2 > 0$, 故函数 $\varphi(t)$ 于 $t = 0$ 处达到极小值, 亦即函数 $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 在通过原点 $(0, 0)$ 的每一条直线 $x = at, y = bt$ 上于 $t = 0$ (即原点 $(0, 0)$) 处取得极小值 0. 但该函数 $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 在任意小邻域内存在点 $\{(x, y) | y > 2x^2\}$ 或 $\{(x, y) | y < x^2\}$ 使 $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 取得正值, 也存在点 $\{(x, y) | x^2 < y < 2x^2\}$ 使 $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 取得负值, 而 $z(0, 0) = 0$, 可见点 $(0, 0)$ 不是 $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 的极值点, 数值 0 不是 $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 的极小值.

★ 求二元函数最值问题的常见差错

有的教材在多元函数微分法中这样陈述：“与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值”。这句话不好，让人思想麻木，不去探讨二者间是否有差异。实际上，多元函数的最值问题远比单元函数最值问题复杂。例如，在单元函数中，我们可以这样说：“ $f(x)$ 在一个区间（有限或无限，开或闭）内可导且只有一个驻点 x_0 ，并且这个驻点 x_0 同时也是函数 $f(x)$ 的极值点，那末，当 $f(x_0)$ 是极大值时， $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值；当 $f(x_0)$ 是极小值时， $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值。”以上这个命题不能推广到多元函数，梁宗巨曾于 1965 年第 10 期的《数学通报》上给出下列反例：

例 1 $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ ，定义域 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 1\}$ 。

解 $f(x, y)$ 在 D 上连续，并有一阶、二阶连续偏导数：

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 8x + 2y,$$

$$f'_y(x, y) = 2x - 2y.$$

令 $f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0$ ，求得两组解 $(0, 0), (2, 2)$ 。点 $(2, 2)$ 在定义域之外，在定义域 D 上只有一个驻点 $(0, 0)$ 。再求二阶偏导数：

$$f''_{xx}(x, y) = 6x - 8, \quad f''_{xy}(x, y) = 2, \quad f''_{yy}(x, y) = -2.$$

在驻点处: $A = f''_{xx}(0,0) = -8$, $B = f''_{xy}(0,0) = 2$, $C = f''_{yy}(0,0) = -2$, 得 $B^2 - AC = 2^2 - (-8) \times (-2) = -14 < 0$, 知点 $(0,0)$ 为极值点. 又因 $A = -8 < 0$, 可见 $f(x,y)$ 在唯一驻点 $(0,0)$ 处达到极大值, 极大值 $f(0,0) = 0$.

那末这个极大值是否为函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值呢? 不难求得这个函数在区域 D 上的最大值是 $f(4,1) = 7$, 可见该可微函数在区域 D 内即使只有一个驻点 $(0,0)$, 且在驻点处为极大值, 但这极大值不是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值.

梁宗巨在同一文中还举了另一个反例:

$$\text{例 2 } f(x,y) = 8\arctan^3 x - 8\arctan^2 x + \arctan x \arctan y - \frac{1}{8}\arctan^2 y,$$

定义域为 $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

解 该函数在全平面上有一阶和二阶连续的偏导数.

$$f'_x(x,y) = [24\arctan^2 x - 16\arctan x + \arctan y] \frac{1}{1+x^2},$$

$$f'_y(x,y) = [\arctan x - \frac{1}{4}\arctan y] \frac{1}{1+y^2}.$$

令 $f'_x(x,y) = 0$, $f'_y(x,y) = 0$, 在全平面上得唯一驻点 $(0,0)$ (另一组解 $\arctan x = \frac{1}{2}$, $\arctan y = 2$ 不合理, 舍去). 继续求二阶偏导数,

$$f''_{xx}(x,y) = (48\arctan x - 16) \frac{1}{(1+x^2)^2} + (24\arctan^2 x - 16\arctan x + \arctan y) \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+y^2},$$

$$f''_{yy}(x,y) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(1+y^2)^2} + \left[\arctan x - \frac{1}{4}\arctan y \right] \frac{-2y}{(1+y^2)^2}.$$

在驻点 $(0,0)$ 处,

$$A = f''_{xx}(0,0) = -16, \quad B = f''_{xy}(0,0) = 1,$$

$$C = f''_{yy}(0,0) = -\frac{1}{4},$$

得 $B^2 - AC = 1^2 - (-16) \times (-\frac{1}{4}) = -3 < 0$. 知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处达到极值, 又因 $A < 0$, 知 $f(x, y)$ 在驻点 $(0, 0)$ 处达到极大值, 极大值为 $f(0, 0) = 0$. 但另一方面, $f(\tan 1, \tan 1) = 8 - 8 + 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. 可见函数 $f(x, y)$ 在极大值点 $(0, 0)$ 处未达到最大值.

例 2 告诉我们: 即使可微函数在全平面上只有一个驻点, 且该驻点为极大值点, 但 $f(x, y)$ 在极大值点处仍未必达到最大值.

那末, 正确的命题应是如何的呢?

有一本高等数学教材在多元函数微分学及其应用一章中这样写道: “如果根据问题的性质, 知道函数 $f(x, y)$ 的最大值(最小值)一定在 D 的内部取得, 而函数在 D 内只有一个驻点, 那末可以肯定该驻点处的函数值是函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值(最小值).” 这段话太离谱了, 对函数 $f(x, y)$ 竟没有加任何条件, 函数的最大值(或最小值)点未必就是驻点! (这个反例非常容易举出, 这里不举了.) 实际问题中出现的函数有时也很复杂, 因此一定要假定函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上可微, 这是一个十分关键的条件, 决不能忽视.

综合以上的讨论, 可知正确的命题应为: 若已知可微函数 $f(x, y)$ 在区域内达到最大值(或最小值), 且 $f(x, y)$ 在 D 内只有一个驻点, 则 $f(x, y)$ 在此驻点处的极大值(或极小值)就是 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值(或最小值).

把例 1、例 2 给出的函数与这个命题中的条件对比, 知例 1 中的函数在 D 上的最大值是在其边界上达到的, 而例 2 中的函数在全平面上根本不存在最大值, 例 1 与例 2 中的函数均不满足这个命题中函数应具的条件.

因此, 在解二元函数最值的应用问题时必须注意函数在区域 D 上是否可微, 函数是否在区域 D 内存在最值, 函数在 D 内的驻点是否唯一, 当这三者均“是”时, 才可以断定区域 D 内函数的极值点就是函数的最值点.

多元函数无穷小量的特点

设 $f(h, k)$ 为连续函数, 若 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ 时有 $f(h, k) \rightarrow 0$, 便称 $f(h, k)$ 为当 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

若存在与 h, k 无关的常数 C , 对于充分小的 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, 总有

$$\left| \frac{f(h, k)}{\rho} \right| \leq C,$$

便说无穷小量 $f(h, k)$ 当 $\rho \rightarrow 0$ 时至少与 ρ 同阶.

若有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(h, k)}{\rho} = 0,$$

称 $f(h, k)$ 为比 ρ 高阶的无穷小量, 记作 $f(h, k) = o(\rho)$.

一般, 若无穷小量 $\omega(h, k)$ 在原点的充分小的圆内当 $h^2 + k^2 \neq 0$ 时均不等于零, 且存在常数 C 有关系式

$$\left| \frac{f(h, k)}{\omega(h, k)} \right| \leq C,$$

则称函数 $f(h, k)$ 如同 $\omega(h, k)$ 当 $\rho \rightarrow 0$ 时至少是同阶的无穷小量. 同样, 若有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(h, k)}{\omega(h, k)} = 0,$$

则称 $f(h, k)$ 是比 $\omega(h, k)$ 高阶的无穷小量. 例如

$$|ah^2 + 2bhk + ch^2| \leq (|a| + |b| + |c|)(h^2 + k^2),$$

故二次式 $ah^2 + 2bhk + ck^2$ 至少与 ρ^2 是同阶的无穷小量.

虽然多元函数无穷小量有上述与单元函数无穷小量类似地定义至少同阶、高阶等概念,但多元函数无穷小量有它自己的特殊性,并未引起有的作者的充分注意.例如,若把一个无穷小量按多元函数的麦克劳林(Maclaurin)公式展开,该函数的正负号未必由低次幂的项的正负号确定之,而是在不同的点处有不同的情况.孙家永提供了如下的一个反例,设

$$f(h, k) = hk - (h^2 + k^2)^2.$$

我们看到第一项是二次式,第二项是四次式,当 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ 时,第一项 hk 至少是 ρ 的二阶无穷小量,而 $(h^2 + k^2)^2$ 是 ρ 的四阶无穷小量,但这个函数 $f(h, k)$ 的正负号并不一定都由低次幂项 hk 确定之,考察曲线 $k = h^3$ 上及其附近的点:

$$\begin{aligned} f(h, k) &= f(h, h^3) = h \cdot h^3 - (h^2 + h^6)^2 \\ &= h^4[1 - (1 + h^4)^2], \end{aligned}$$

当 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ 时,在曲线 $k = h^3$ 上及其附近点处,高次幂的项的值反而比低次幂的项的值大.由此可看出上文中,在同阶无穷小量定义中,为什么会有至少二字的涵义了,同时看到多元函数无穷小量的特殊性质:当 $\rho \rightarrow 0$ 时,一个与 $\omega(h, k)$ 比至少同阶的无穷小量 $f(h, k)$,在 origin 附近某些局部处可能是比 $\omega(h, k)$ 高阶的无穷小量.讨论多元函数的麦克劳林展开式中的舍去项时要特别小心.

叫惯性矩比叫转动惯量好

惯性矩,在我国出版的高等数学教材中多数都称为转动惯量,而称惯性矩者却不多见(华罗庚著的《高等数学引论》第一卷第二分册,孙念增译的斯米尔诺夫著的《高等数学教程》卷二第二分册等书中用惯性矩这个名词).笔者认为用惯性矩这个名词比用转动惯量要好一些.理由如下:

(1) 惯性矩或转动惯量在英文中都是同一个术语,即 *moment of inertia*,它的原意就是惯性矩.这个英文术语中并无“转动”之意.在俄文中也是同一个术语叫 *момент инерции*,在德文中仍是同一个术语叫 *Trägheitsmoment*,这些术语直译都是惯性矩,都不含有“转动”的意思.可见在英文、俄文、德文等文献中并没有一个可以被直译为“转动惯量”的专门术语,但是上列术语常常被译作“转动惯量”.

(2) 从惯性矩(即所谓转动惯量)的定义来看:一质点系对于一轴(或一平面,或一点)的惯性矩是指质点系中各质点与这轴(或这平面,或这点)的距离 δ_i 的平方与其质量 m_i 的乘积的和

$$\sum_{i=1}^n m_i \delta_i^2.$$
由这个定义可以看到,惯性矩所表示的量只与各质点的质量和各质点到给定轴(或给定平面,或给定点)的距离二者有关.换句话说,若我们求的是对某坐标轴(或某坐标平面,或坐标原

点)的惯性矩,那末惯性矩这个量只与质点系在坐标系中的质量分布状态有关,而与质点系统绕轴转动的运动情况无关.所以,惯性矩是用来描述质点系的物质分布状态的量,而不是用来表达质点系的运动情况的量.如果求的是一段曲线,或一片曲面,或一空间区域对某轴(或某平面或某点)的惯性矩,那末惯性矩这个量便是描述图形在空间中的分布状态,这时它实际上就是一个几何量,不是表示图形运动情况的量,更不是表示图形绕轴转动情况的量.

(3) 一个质点系可以有对坐标面的惯性矩,但一个给定的质点系在通常的现实空间中却无法围绕该坐标面“转动”.一个质点系总可有对一定点的惯性矩,但它围绕一已知点“转动”的途径是无穷无尽的,又怎么指定其中的一种呢?可见,一个质点系对某坐标面或已知点的惯性矩以不叫转动惯量为好,否则,学生将问老师是怎样的“转动”才引出的转动惯量?如叫惯性矩,学生便不会望文生义多此一问.退一步说,就是对某坐标轴的惯性矩,也是以不叫转动惯量为好.因为转动惯量这个术语很容易使人产生如下的错觉:以为它是一个描述质点系统绕轴转动时的运动状态的量,以为一个质点系对轴转动得越快它的转动惯量必将越大,不转动时转动惯量便将为零等等误解.但是,事实上,一个给定的质点系对已知直线的转动惯量是一个常数,它的大小与围绕已知直线转动的快慢毫不相干.如果不叫转动惯量而叫惯性矩,也不会产生以上的种种错觉和误解.

(4) 惯性矩这个概念之所以重要,是由于它在质点系动力学的许多问题中以及结构工程中都有广泛的应用.惯性矩在动力学中的重要应用在普通物理学和理论力学中阐述甚详.一个众所周知的著名例子就是:一个与 x 轴的距离为 y 、质量为 m 的质点绕 x 轴以角速度 ω 作匀速旋转时,质点的动能为 $\frac{m}{2}(y\omega)^2$,它可以写作 $\frac{1}{2}(my^2) \cdot \omega^2$,可见在匀速转动中求质点的动能时 my^2 的作用有如求质点在直线运动中的动能时质量 m 的作用一样,这里的 my^2

就是这个质量关于 x 轴的惯性矩,这是一个用以引出惯性矩这种量最容易使人接受的经典例子.但是决不能把惯性矩概念本身与曾作为引出惯性矩这种量的一个例子本身混作一谈.正如我们经常用计算曲边梯形面积来引出定积分的概念,但不能说定积分只在计算曲边梯形面积问题中才有用.所以转动运动的研究是惯性矩的重要应用领域之一,但是惯性矩的应用不只限于此.我们知道,在材料力学中,在研究一定材料的梁的刚度时也出现惯性矩这种量(梁的弯曲刚度与梁的横截面关于物质中心线的惯性矩成正比).由于把惯性矩叫做转动惯量,常常使得有的人只知道惯性矩在动力学中的应用,而不知它在其他力学中的重要应用,甚至有的人把动力学中的惯性矩(在那里经常被叫做转动惯量)与其他力学(如材料力学)中的惯性矩(在那里经常被叫做惯性矩)对立起来,认为转动惯量与惯性矩截然不同!这就是引用转动惯量这个不够确切的术语所出现的片面性:认为转动惯量天经地义地只能在一些旋转运动研究中才有用,于是把一个好端端的惯性矩竟分成两个东西,一为转动惯量(用在动力学中),另一为惯性矩(用在结构工程方面的材料力学等学科中).实际上,这样地去区分是没有必要的.我认为著名学者柯朗的名著《微积分》一书是我们的好老师,仔细地读一下这部书中有关惯性矩的全部论述,就能使我们正确理解和掌握惯性矩的实质,并能使我们把动力学中的某些人所谓的转动惯量与材料力学中的惯性矩统一成为一个概念——惯性矩.

综上所述,可见惯性矩是一个仅仅从属于质点系自身分布状态属性的量,这个量的大小与质点系的运动状态无关,这个量在转动问题的研究中有很重要的应用,而且是引出惯性矩概念的一个最浅显、最常用的例子,但是它的应用不限于此,惯性矩概念本身是与质点系的运动状态无关的.基于以上种种理由,在数学教材和讲课中,采用惯性矩这一术语要比采用转动惯量为好.采用惯性矩这个术语进行教学,根据笔者经验,初学者经常会发生的某些疑问也就不再存在了.



平面有界区域边界线的正方向

在格林(Green)公式

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma \quad ①$$

中(其中 C 是平面有界区域 D 的正向边界线)如何定义平面有界区域的边界线的正方向?不少教材规定如下:当观察者沿边界 C 的这个方向行走时区域 D 中与 C 相毗连的那部分总在观察者的左侧.在复变函数论中这样定义是正确的,因为复平面上由实轴(x 轴)到虚轴(y 轴)总是按右手系方向.在实平面的直角坐标系中, x 轴与 y 轴的安置不是唯一的,而是有左手系与右手系之分.在没有坐标系的平面上,如图 1 所示,给出如上的平面闭曲线正方向的定义就不妥了,特别在介绍格林公式时,对 C 作这样的陈述就有问题了.我们将指出在左手系的平面直角坐标系中若 C 的正向如上所指,则格林公式将不再是如上所列的形式.今说明如下:

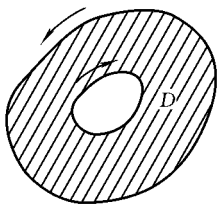


图 1

在图 2 中,曲线 $\widehat{MLP}$ 的方程设为 $y = y_1(x)$, $a \leq x \leq b$; 曲线 $\widehat{MNP}$ 的方程设为 $y = y_2(x)$, $a \leq x \leq b$. 再设 $P(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 均为连

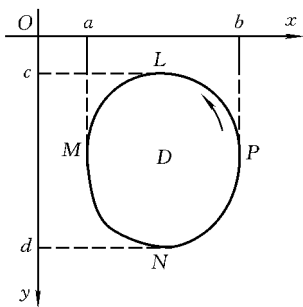


图 2

续函数, 曲线 C 为 D 的边界线, 并设为一分段光滑的闭曲线. 考察

二重积分 $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma$ 与曲线积分 $\oint_C P(x, y) dx$ 之间的关系:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\
 &= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx \\
 &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \\
 &= \int_{\widehat{MNP}} P(x, y) dx - \int_{\widehat{MLP}} P(x, y) dx \\
 &= \int_{\widehat{MNP}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{PLM}} P(x, y) dx \\
 &= \oint_{\widehat{MNPLM}} P(x, y) dx = \oint_C P(x, y) dx,
 \end{aligned}$$

即
$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \oint_C P(x, y) dx. \quad (2)$$

在图 2 中, 再设曲线 $\widehat{LMN}$ 的方程为 $x = x_1(y), c \leq y \leq d$. 曲线 $\widehat{LPN}$ 的方程为 $x = x_2(y), c \leq y \leq d$. $Q(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}$ 均为连续函数, 考察二重积分 $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma$ 与曲线积分 $\oint_C Q(x, y) dy$ 之间的关系:

数, 考察二重积分 $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma$ 与曲线积分 $\oint_C Q(x, y) dy$ 之间的关系:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma &= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy \\
 &= \int_c^d Q(x_2(y), y) dy - \int_c^d Q(x_1(y), y) dy \\
 &= \int_{LPN} Q(x, y) dy - \int_{LMN} Q(x, y) dy \\
 &= - \int_{NPL} Q(x, y) dy - \int_{LMN} Q(x, y) dy \\
 &= - \oint_{NPLMN} Q(x, y) dy = - \oint_C Q(x, y) dy,
 \end{aligned}$$

即

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = - \oint_C Q(x, y) dy. \quad (3)$$

②—③ 得

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma \quad (4)$$

比较①与④,等式的左端相同,而右端相差一个负号.为使格林公式的表述与平面直角左手还是右手坐标系的选取无关,则平面区域 D 的边界线 C 的正方向的选取应与平面直角坐标系是右手坐标系还是左手坐标系密切相关.

作了上列分析后,便知我们应有如下的结论:在平面直角右手坐标系中,区域 D 的边界线的正方向即按照本文开头那样地规定.在平面直角左手坐标系中,平面区域 D 的边界的正方向应如下规定:当观察者沿区域边界正方向前进时,与边界相毗连的区域的那部分应恒在观察者的右侧.作如此规定后,格林公式便是①的形式.

龚冬保建议平面区域边界曲线正向如下定义:即曲线上流动坐标系 (n, τ) 的右(左)手系与固定坐标 (x, y) 的右(左)手系一致即可.其中 n 表示曲线的单位外法线向量, τ 表示曲线正向的单位切线向量.这个定义的优点即斯托克斯(Stokts)公式中空间曲线正向亦可仿此确定之,谨录此以增辉.

一个有差错的图

某本高等数学教材在其第三版、第四版中加了如下一个图(见图 1),这是很好的修改意见,它可以让读者更深刻地理解函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数时用级数的部分和来近似代替 $f(x)$ 的几何直观形象是什么情景. 可惜这个图有一些差错,它不是规范的图示. 理由如下:

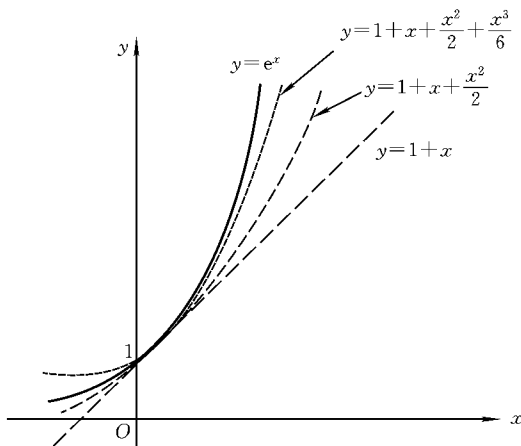


图 1

(1)就整个图的布局来说,没有给人一个完整的几何形象.因为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的一个邻域内的展开式,一般是在邻域 (x_0-R, x_0+R) 内展开,不是只在或偏重在 (x_0, x_0+R) 内展开.但该图主要显示 $x=0$ 处右侧级数的部分和来近似代替 e^x 的情形,容易使读者产生所谓展开将只在 $x=x_0$ 右侧展开的错觉.事实上,初学者的确常有这个错觉.

(2)就每一条近似曲线来说, $y=e^x$ 在 $x=0$ 处近旁的幂级数展开式,当 $x>0$ 时是一个正项级数,当 $x<0$ 时是一个交错级数,显然级数在 $x=0$ 近旁左侧比右侧收敛快一些,亦即同一条近似曲线在 $x=0$ 的左侧近旁应比右侧近旁更加贴近曲线 $y=e^x$,但该图适得其反.特别如 $y=e^x$ 的近似曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的图像在 $x=0$ 右侧近旁显得十分贴近曲线 $y=e^x$,但在 $x=0$ 左侧近旁却与曲线 $y=e^x$ 迅速离开,相差很大,这是不符合实际情况的.

(3)就相邻的几条近似曲线来比较,也有不妥之处.显然曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 比曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}$ 在 $x=0$ 两侧近旁更接近曲线 $y=e^x$.但在 $x=0$ 的左边曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 反比曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}$ 离开曲线 $y=e^x$ 更远,这也不是真实的.

(4)更失真的是当 $x<0$ 时,曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 竟在曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}$ 的上方!二者相差的一项是 $\frac{x^3}{6}$,当 $x<0$ 时,它是一负数项,前者的图像应在曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}$ 的下方才对!

(5)就吻合曲线与曲线 $y=e^x$ 的相互关系看,由交错级数的误差估计公式,不难断定:当 $x<0$ 时,曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}$ 应在曲线 $y=e^x$ 的上方,而曲线 $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 应在曲线 $y=e^x$ 的下方.

该书的图,在这方面也把关系搞颠倒了.

该教材上的图像是不是只在 $x < 0$ 一侧的虚线长短画错了? 不止如此而已,只把 $x = 0$ 的左侧的虚线长短改变一下,仍不能避免本文前三条中所指出的不妥之处.

那末正确的图是什么呢? 请看图 2.

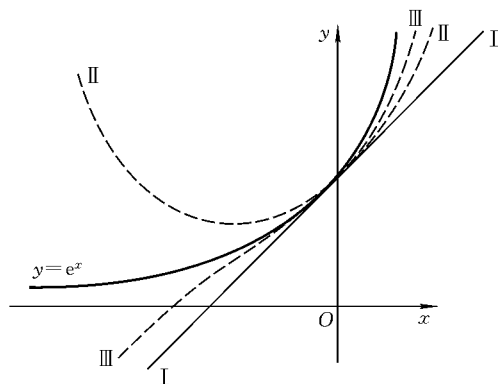


图 2

注: 图中 I 表示方程 $y = 1 + x$ 的图像, II 表示方程 $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ 的图像, III 表示方程 $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ 的图像.

幂级数的收敛区间

有的教材如下定义幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间:

设当 $|x| < R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛, 而当 $|x| > R$ 时, 该幂级数发散, 正数 R 通常叫做该幂级数的收敛半径. 由幂级数在 $x = \pm R$ 处的收敛性就可以决定它在区间 $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ 或 $[-R, R]$ 上收敛, 这区间叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间.

幂级数的收敛区间如此定义, 缺点如下:

(1) 幂级数的收敛区间与其收敛域混作一谈了. 本来这是两个不同的概念, 今却把幂级数的收敛域误作收敛区间了.

(2) 如下一些重要命题均不成立:

① 幂级数在其收敛区间上绝对收敛;

② 幂级数在其收敛区间上可以逐项求导、逐项积分, 且逐项求导、逐项积分后收敛区间不变;

(3) 在复变函数论里, z 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛圆为一不包

含其圆周 $|z| = R$ 在内的开圆域 $|z| < R$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的

特殊情况,即在 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 中令 $y = 0$ 时便得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 相应地,其收

敛圆 $|z| < R$ 在 $y = 0$ 的特殊情况下便蜕化为开区间 $(-R, R)$. 为

了保持数学领域内各分支间的和谐性, x 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛

区间只能定义为开区间 $(-R, R)$. 但目前某些高等数学教材,竟

把幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域定义为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间,其

收敛区间居然既可能是 $(-R, R)$, 又可能是 $(-R, R]$, 或 $[-R, R)$,

或 $[-R, R]$, 复分析(即复变函数论)与实分析(微积分学属于实分析)间便有矛盾了,一般将不包含特殊的了,这是不应该有的现象.

综上所述,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间应定义为开区间 $(-R,$

$R)$, 则上述种种不合理现象均自然地烟消云散了. 幂级数在收敛

区间上绝对收敛,对幂级数逐项求导,逐项积分后收敛区间不变等重要性质均成立无疑.

国际上一些著名著作,如古尔萨的《数学分析教程》,柯朗的

《微积分》及阿帕斯托尔的《微积分》等都定义幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收

敛区间为开区间 $(-R, R)$.



简化傅里叶级数的定义和收敛定理的条件

有的教材如下定义傅里叶(Fourier)系数和傅里叶级数:

“设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 上可积, 则

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots),\end{aligned}$$

称为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数, 以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数……”

接着给出如下的收敛定理:

“设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数. 如果它满足条件: 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点, 并且至多只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $(f(x-0) + f(x+0))/2$.”

翻阅我们手头的教材, 差不多都是如上定义傅里叶级数并如上介绍收敛定理的, 讨论傅里叶级数时始终是在周期函数的前提下进行的. 不错, 若 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 那末它的和函数必是周期函数. 但是我们遇到的更多的情况是已知 $f(x)$ 仅在 $(-\pi, \pi]$ (或 $(0, 2\pi]$, 或 $[a, b]$) 上有定义且满足某些条件 (如狄利克雷条件) 时如何写出 $f(x)$ 的傅里叶级数? 如何写出傅里叶级数的和函数? 为此, 不免先搭一个脚手架 (使函数周期性的延拓), 即作一个辅助函数满足上述定义、定理中的条件, 再把辅助函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上展为它的傅里叶级数, 然后又拆掉脚手架, 写出原函数 $f(x)$ 在给定区间上对应的傅里叶级数及其和函数. 每次做题, 都要如此迂迴一个大圈圈, 深感不胜繁琐. 傅里叶系数和收敛定理中这个周期函数的条件, 是强加在它们之上的枷锁, 让不少人应用傅里叶级数时, 瞻前顾后, 疑虑重重, 每次做题似乎不走一趟冤枉路, 就唯怕犯什么错误, 或总感不能自圆其说, 为了简化手续、便于做题, 建议去掉这副枷锁, 如下定义 $f(x)$ 的傅里叶级数:

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 若级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

中的系数 a_n, b_n 满足如下关系式

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则称 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 级数①为对应于 $f(x)$ 的傅里叶级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

这个定义可以推广到任意区间 $[a, b]$ 上, 设 $b-a=2l$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 若级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (2)$$

中 a_n, b_n 满足如下关系式

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则称级数②为在区间 $[a, b]$ 上对应于 $f(x)$ 的傅里叶级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [a, b].$$

收敛定理可如下叙述:

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点, 并且至多只有有限个严格极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 且

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ = & \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi) \text{ 内 } f(x) \text{ 的连续点处;} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \in (-\pi, \pi) \text{ 内 } f(x) \text{ 的间断点处;} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

关于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的傅里叶级数的收敛定理可如下叙述:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点, 并且至多只有有限个严格极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \text{ 内 } f(x) \text{ 的连续点处;} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \in (a, b) \text{ 内 } f(x) \text{ 的间断点处;} \\ \frac{f(a+0) + f(b-0)}{2}, & x = a \text{ 或 } x = b. \end{cases}$$

如上定义 $f(x)$ 的傅里叶系数, 如上阐述傅里叶级数的收敛定理, 都不把周期函数这个条件作为大前提, 解题时将简化许多.

例如, 有一本教材原是如下解答一道例题的.

“将函数 $f(x) = 10 - x$ ($5 < x < 15$) 展开成傅里叶级数.

解 作变量代换 $z = x - 10$, 则区间 $5 < x < 15$ 变换成 $-5 < z < 5$, 而 $f(x) = f(z + 10) = -z = F(z)$. 补充函数 $F(z) = -z$ ($-5 < z < 5$) 的定义, 令 $F(-5) = 5$, 然后将 $F(z)$ 作周期延拓 (周期为 10), 这拓广的周期函数满足收敛定理的条件, 它的傅里叶级数在 $(-5, 5)$ 内收敛于 $F(z)$.

计算拓广的周期函数的傅里叶系数如下:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{5} \int_0^5 (-z) \sin \frac{n\pi z}{5} dz = (-1)^n \frac{10}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

于是

$$F(z) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi z}{5} \quad (-5 < z < 5).$$

从而

$$\begin{aligned} 10 - x &= \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{5} (x - 10) \\ &= \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{5} x \quad (5 < x < 15). \end{aligned}$$

请看上面的解法, 迂迴了多大的一个圈圈, 变换来, 变换去, 计算思路多繁琐! 而且变换多了, 也容易出错.

利用我们介绍的傅里叶级数的定义和收敛定理, 便不需要变换来, 变换去, 可直接在原来给定的函数区间 $(5, 15)$ 上求 $f(x)$ 的

傅里叶级数展开式:

这里 $2l = 15 - 5 = 10$, 故 $l = 5$.

$$a_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = (-1)^n \frac{10}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

又易知 $f(x) = 10 - x$ 在 $[5, 15]$ 上满足狄里克雷条件且在 $(5, 15)$ 上 $f(x)$ 连续, 由收敛定理有

$$\frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{5} = 10 - x \quad (5 < x < 15).$$

相比之下, 利用本文推荐的解法, 解题的思路显然要简易多了.

顺便指出, 函数展为傅里叶级数的充分条件中的“有限个严格极值点”改为“分段单调”亦可.

可参阅福特(Fort)所著的《无穷级数》(《Infinite Series》).



如何定义差分方程的阶？

常有教材把差分方程中含有未知函数的最高阶差分的阶数定义为差分方程的阶数，依此“定义”，则差分方程

$$\Delta^3 y_x + \Delta^2 y_x - \Delta y_x - y_x = 0 \quad ①$$

便是三阶差分方程的了。但因

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x,$$

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x,$$

代入差分方程①将有

$$y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x + (y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) - (y_{x+1} - y_x) - y_x = 0,$$

整理化简得 $y_{x+3} - 2y_{x+2} = 0$. ②

今对差分方程②作自变量变换 $x+2=t$ ，即作横坐标平移变换，方程②将成为

$$y_{t+1} - 2y_t = 0, \quad ③$$

方程③又可改写为

$$y_{t+1} - y_t - y_t = \Delta y_t - y_t = 0, \quad ④$$

按照上述“定义”，④将是一个一阶差分方程的了。差分方程的阶应是差分方程本身的固有性质，是方程的一个特征数，它应具有在一

定变换下的不变性,今在作最简单的变换(横坐标平移)的情况下,“阶”数居然不能保持不变,显然这个差分方程阶的“定义”不能刻画方程的固有性质,据此定义得出的“阶”数不能作为差分方程的一个特征数,实际上是一个没有意义的数,因此上述差分方程阶的定义是不可取的.

那末差分方程的阶应如何定义呢?请看:

含有自变量、未知函数和未知函数在 $x+1, x+2, \dots, x+n$ 各点函数值的函数方程叫做差分方程,其一般形式为

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0,$$

称方程中未知函数下标之差(即自变量的最大值与最小值之差)为差分方程的阶数. 据此,差分方程②中未知函数下标之差为

$$x+3-(x+2)=1,$$

差分方程③中未知函数脚标之差

$$t+1-t=1$$

也是1,因而差分方程①,②,③,④的阶数相同,是一个坐标平移下的不变量,所以它们是一阶差分方程. 如上定义差分方程的阶便不会产生任何矛盾.

参考书:

C. H. Richardson. An Introduction to The Calculus of Finite Differences. New York: D. Van Nostrand Company, Inc. 1954.



关于常微分方程通解的两点误解

有的教材说:常微分方程的通解是指包含该方程所有解的解.或者说:常微分方程的解中包含任意常数的个数与微分方程的阶数相等,则称此解为该方程的通解.

实际上,这两种说法均不对.

如常微分方程 $y' = y^{\frac{2}{3}}$, 该方程的通解是

$$27y = (x + C)^3.$$

但 $y=0$ 显然仍是该微分方程的解. 而通解中并不包含这个解, 因此不能说, 微分方程的通解是包含该方程所有解的解.

又如微分方程 $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$, 当 $y \neq 0, y \neq e$ 时, 含有两个任意常数 C_1, C_2 的函数

$$\ln y = \frac{x + C_1}{x + C_2}$$

直接代入不难验证, 它是该微分方程的解. 但是从这个解案得不到由初始条件 $x = x_0, y = y_0 (\neq 0, \neq e), y'_0 = 0$ 确定的特解. 这些特解是由 $y = C$ 给出. 在这种情况下, 我们不得不说, 通解是由两个方程: $\ln y = \frac{x + C_1}{x + C_2}, y = C$ 给出的, 而 $\ln y = \frac{x + C_1}{x + C_2}$ 中虽然含有两个任意常数, 与微分方程的阶数相同, 但它却不是该微分方程的通解. 值得注意的是 $y = C (\neq 0, \neq e)$ 是该微分方程的一个通常解. 即

满足微分方程柯西(Cauchy)问题解的存在唯一性定理的解,它不是奇解.

那末,如何定义微分方程 $y' = f(x, y)$ 的通解呢? 设点 (x_0, y_0) 属于 $y' = f(x, y)$ 的柯西问题解的存在唯一性区域内的任意一点, 若对常数 C 的任意允许值, 函数 $\varphi(x, C)$ 都是方程 $y' = f(x, y)$ 的解, 且对任意初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 都可以选取 C 的值 C_0 使解 $y = \varphi(x, C_0)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$, 便称函数 $y = \varphi(x, C)$ 为微分方程 $y' = f(x, y)$ 的通解. 在该通解中的 C 取任一确定数值时, 所得到的解均称为 $y' = f(x, y)$ 的特解.

关于高阶常微分方程通解定义, 请参阅 B. B 史捷班诺夫著的《微分方程教程》一书(高等教育出版社出版). 笔者在此只想引起读者注意: 常微分方程通解的概念是由微分方程柯西问题解的存在唯一性定理引伸出来的.

