

运筹学

方法与模型

傅家良 主编

李 枫 郝 勇 孙 焰 吴 晓 编著

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了运筹学中线性规划、目标规划、整数规划、网络规划、网络计划技术、动态规划、排队论、存储论、博弈论、决策分析和排序问题等分支的基本概念和方法,并把各种运筹学求解方法归纳成接近于程序语言的算法步骤.本书特别重视各个运筹学分支对数学模型的建立,配备了相当数量的应用例题,使读者充分理解建立数学模型是一种艺术.本书力求深入浅出,注重应用.每章结尾都配有一定数量的习题,部分习题还附有答案.

本书可作为大专院校交通运输管理类、经济管理类和理工类其他有关专业的本科生、研究生的教材或教学参考书,也可作为各类专业人员的自学参考书.

前言

管理是一门科学. 运筹学是用定量化的方法, 对所研究的各类管理优化问题建立数学模型并进行求解, 然后进行定量和定性分析, 为决策者作出合理的决策提供科学的依据.

本书对运筹学各个组成分支都尽可能地以各种实际问题为背景, 建立起各种类型的数学模型, 然后通过对几何特征的分析或运用其他直观的手段, 给出求解模型的算法思想, 进而导出归纳成接近于程序语言的算法.

运筹学作为一门应用性的学科, 在教学中除了让新学者掌握各个组成分支的计算方法之外, 更重要的目标是帮助新学者学习和训练建立数学模型的技巧. 但这个重要的目标却往往为国内许多《运筹学》的作者所忽视. 本书编写了一定数量的富有建模技巧的典型应用实例, 以培养读者建立数学模型的能力, 并使读者深刻地理解用数学语言描述客观事物是一种“艺术”.

本书从读者认识事物、接受知识的规律出发, 尽可能使各章内容深入浅出、重点突出, 力求使读者感到运筹学是一门可亲可近而生动的应用性学科. 本书对运筹学各个分支的基本概念、基本理论的系统性仍给予足够的重视, 但又不偏于数学方法的严谨论证.

我这次非常高兴邀请了 4 位合作者参加了本书的编写, 他们承担的任务具体如下(扉页署名以此先后为序):

第四章 目标规划 李枫(同济大学交通运输工程学院)

第十章 存储论 郝勇(上海工程技术大学)

第十一章 博弈论 孙焰(同济大学交通运输工程学院)

第十二章 决策分析 吴晓(浙江师范大学交通学院)

其余各章均由本人编写, 并对全书进行了统稿和定稿, 力求全书的风格统一.

我教授运筹学已经有数十年, 这本《运筹学方法与模型》是我多年教学经验的结晶, 在写作风格和内容处理上可能和其他《运筹学》著作有所不同. 这次蒙复旦大学出版社范仁梅编辑的鼎力相助, 使我多年的心愿得以实现.

本书部分章节打上了“*”, 教学时可根据具体情况决定取舍. 由于各章节配备的应用举例比较多, 并且有些例子在建立模型时有一定的难度, 要全部讲掉它们在学时上根本就不允许, 所以也应该在教学时作一定的取舍.

在此,我向复旦大学统计运筹系魏国华教授、上海工程技术大学管理学院徐克绍教授、上海大学吕立生教授、第二工业大学唐国春教授、同济大学官世燊教授表示衷心的感谢。在我长期的教学工作中,我和他们一起交流心得体会,使我学到了许多宝贵的知识和经验。我更要感谢我以前母校西南交通大学的导师苗邦均教授、侯振挺教授、周贤祥教授对我的关心和指导,他们对教学工作和学生的热爱使我终生难忘。我也要感谢我在教学工作岗位上的老领导季令教授对我的长期关怀、支持和帮助,使我各方面的工作能够顺利地开展。我怀念曾经和我一起编写《实用运筹学》的合作者、复旦大学出版社的周仲良教授,他待人宽厚、工作认真,可惜他英年早逝,令人扼腕叹息。

在本书的编写过程中,上海工程技术大学管理学院张伯生教授、徐克绍教授对本书的内容及体系提出了许多宝贵的意见;该校城市轨道交通学院青年教师朱海燕帮助搜集资料供我参考,在此表示深切的感谢。

在成稿工作中,王永秋、朱亚男、傅亚丽给我提供了许多帮助,在此表示衷心感谢。

任何人在他人生的路途上都离不开老师、同事、朋友、领导、亲人的帮助和合作。对那些在我追求知识的道路上曾给我以深切关怀和无私帮助的老师、同事、朋友,我心里面永远保持着对他们的衷心感谢。珍贵的友谊,是人生最美好的回忆。

我希望这本别具风格的《运筹学方法与模型》教材能够得到读者的欢迎,更希望得到运筹学教学工作者的批评指正。

现在我们这些从20世纪70年代末、80年代初就开始从事运筹学教学工作的老教师,都逐渐退出了教学舞台,我们相信未来运筹学的教学工作将更加光辉灿烂。

本书可以作为高等院校交通运输管理类、经济管理类和理工类其他有关专业的本科生、研究生的教材,同时,编者也深盼本书能受到那些孜孜不倦、刻苦追求知识的自学者的欢迎。

由于本人和我的合作者水平有限,本书难免有不当之处,敬请读者批评指正。

傅家良 2005年9月

于同济大学交通运输工程学院

目 录

第一章 线 性 规 划

§ 1.1 线性规划模型	(1)
1.1.1 数学模型	(1)
1.1.2 标准型线性规划	(4)
§ 1.2 线性规划的几何特征	(6)
1.2.1 两个变量的线性规划的图解法	(6)
1.2.2 标准型线性规划的几何特征	(9)
§ 1.3 基本可行解	(11)
§ 1.4 单纯形法	(14)
1.4.1 单纯形表和最优性条件	(15)
1.4.2 转轴	(17)
1.4.3 单纯形法	(20)
1.4.4 关于最优解唯一性的讨论	(23)
§ 1.5 单纯形表的矩阵描述	(25)
§ 1.6 改进单纯形法	(28)
§ 1.7 大 M 法和两阶段法	(32)
1.7.1 大 M 法	(32)
1.7.2 两阶段法	(37)
* 1.7.3 退化情况与勃兰德法则	(44)
§ 1.8 线性规划应用举例	(45)
习题一	(51)

1
.....

第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

§ 2.1 对偶问题	(57)
------------------	--------

§ 2.2	对偶理论	(62)
§ 2.3	对偶单纯形法	(66)
§ 2.4	对偶问题的最优解	(70)
§ 2.5	灵敏度分析	(75)
2.5.1	参数 c_s 的灵敏度分析	(76)
2.5.2	参数 b_s 的灵敏度分析	(79)
2.5.3	变量 x_s 的系数列向量 A_s 的变化	(82)
2.5.4	增加新的约束条件	(85)
2.5.5	增加新的变量	(88)
§ 2.6	影子价格	(89)
习题二		(92)

第三章 运输问题

§ 3.1	运输问题的数学模型	(96)
§ 3.2	表上作业法	(99)
3.2.1	初始基本可行解的寻求	(99)
3.2.2	位势法	(104)
§ 3.3	应用举例	(109)
习题三		(116)

第四章 目标规划

§ 4.1	目标规划原理、概念与数学模型	(118)
4.1.1	目标规划原理与概念	(118)
4.1.2	目标规划数学模型	(121)
§ 4.2	目标规划的图解法	(124)
§ 4.3	目标规划的单纯形法	(126)
§ 4.4	目标规划的灵敏度分析	(129)
习题四		(131)

第五章 整 数 规 划

§ 5.1 整数规划模型	(134)
§ 5.2 纯整数规划的割平面法	(148)
5.2.1 割平面法的几何特征	(148)
5.2.2 柯莫利割	(149)
5.2.3 柯莫利割平面法	(153)
* § 5.3 混合整数规划的割平面法	(155)
§ 5.4 分支定界法	(159)
5.4.1 0-1 背包问题	(160)
5.4.2 分支定界法	(165)
* § 5.5 0-1 规划的分支定界法	(173)
5.5.1 划分和定界	(173)
5.5.2 分支定界算法	(179)
* § 5.6 有界技术在(AIP)分支定界法中的应用	(183)
5.6.1 增广单纯形表	(183)
5.6.2 有界变量的对偶单纯形法	(188)
5.6.3 有界技术在(AIP)分支定界法中的应用	(190)
§ 5.7 最优分配问题	(193)
5.7.1 匈牙利方法	(193)
5.7.2 应用举例	(199)
习题五	(202)

第六章 网 络 规 划

§ 6.1 图的基本概念	(209)
6.1.1 无向图	(210)
6.1.2 有向图	(212)
6.1.3 图的矩阵表示	(214)
6.1.4 树	(216)
§ 6.2 最短路径问题	(216)
6.2.1 狄克斯特拉算法	(217)
* 6.2.2 弗劳德算法	(221)

6.2.3	应用举例	(225)
§ 6.3	最长路径问题	(229)
6.3.1	最长路径算法	(230)
6.3.2	应用举例	(234)
* § 6.4	第 k 短路径问题	(238)
§ 6.5	最小生成树	(241)
6.5.1	破回路法	(242)
6.5.2	克鲁斯卡算法	(242)
* § 6.6	中国邮路问题	(245)
6.6.1	欧拉环游问题	(245)
6.6.2	中国邮路问题	(248)
§ 6.7	运输网络	(251)
6.7.1	运输网络与流	(251)
6.7.2	割、最小割和最大流	(254)
§ 6.8	最大流	(256)
6.8.1	增流链	(256)
6.8.2	最大流算法	(257)
* 6.8.3	最大流算法在最优分配问题中的应用	(262)
6.8.4	应用举例	(264)
* § 6.9	有界容量运输网络及最大流	(269)
§ 6.10	最小代价流问题	(272)
6.10.1	伴随 f 的增流网络	(273)
6.10.2	最小代价流算法	(276)
6.10.3	应用举例	(278)
习题六		(285)

第七章 网络计划技术

§ 7.1	工程网络图	(289)
7.1.1	PERT 网络	(289)
7.1.2	网络图的时间参数和关键路径	(292)
* § 7.2	网络计划的优化问题	(295)
7.2.1	总工期—成本优化问题	(296)

7.2.2 总工期—资源的优化问题	(307)
§ 7.3 非肯定型 PERT 网络	(312)
习题七	(315)

第八章 动态规划

§ 8.1 引例	(318)
§ 8.2 动态规划模型和求解方法	(321)
§ 8.3 动态规划应用举例	(326)
习题八	(349)

第九章 排队论

§ 9.1 泊松过程、生灭过程和负指数分布	(353)
9.1.1 泊松过程	(353)
9.1.2 生灭过程	(358)
9.1.3 负指数分布	(359)
9.1.4 爱尔朗分布	(361)
§ 9.2 一般排队系统结构	(362)
9.2.1 输入过程	(362)
9.2.2 服务机构	(363)
9.2.3 排队规则	(364)
9.2.4 排队模型的符号表示	(365)
9.2.5 排队模型的数量指标和基本公式	(365)
§ 9.3 泊松输入、负指数分布服务的排队模型	(367)
9.3.1 $M/M/S$ 排队模型	(367)
9.3.2 $M/M/1$ 排队模型	(373)
9.3.3 $M/M/\infty$ 排队模型	(379)
9.3.4 $M/M/S/k$ 排队模型	(380)
9.3.5 $M/M/S/m/m$ 排队模型	(385)
§ 9.4 一般服务分布 $M/G/1$ 排队模型	(388)
9.4.1 $M/G/1$ 排队模型	(388)
9.4.2 $M/D/1$ 排队模型	(389)
9.4.3 $M/E_k/1$ 排队模型	(390)

习题九	(391)
-----------	-------

第十章 存 储 论

§ 10.1 存储模型的结构及基本概念	(393)
10.1.1 费用构成	(393)
10.1.2 存储控制的数量指标和参数符号	(394)
10.1.3 存储控制策略	(395)
§ 10.2 确定型存储模型	(395)
10.2.1 不许缺货的经济订货批量模型	(395)
10.2.2 允许缺货的经济订货批量模型	(397)
10.2.3 不许缺货的生产批量模型	(398)
10.2.4 有数量折扣的经济订货批量模型	(400)
§ 10.3 随机型存储模型	(401)
10.3.1 (s, S) 策略存储模型	(401)
10.3.2 (q, Q) 策略存储模型	(404)
习题十	(407)

6

■■■■■

第十一章 博 弈 论

§ 11.1 概述	(409)
§ 11.2 矩阵博弈	(410)
11.2.1 矩阵博弈数学模型	(410)
11.2.2 最优纯策略	(412)
§ 11.3 矩阵博弈基本定理	(415)
11.3.1 混合策略和混合扩充	(415)
11.3.2 矩阵博弈基本定理	(416)
§ 11.4 矩阵博弈的求解	(418)
11.4.1 线性方程组法	(418)
11.4.2 线性规划法	(422)
习题十一	(423)

第十二章 决 策 分 析

§ 12.1 随机型决策方法	(427)
----------------------	-------

12.1.1	期望值准则与报童问题	(428)
12.1.2	决策树	(431)
12.1.3	灵敏度分析	(433)
12.1.4	贝叶斯决策	(435)
§ 12.2	非确定型决策方法	(438)
§ 12.3	效用函数方法	(441)
12.3.1	效用值决策准则	(441)
12.3.2	效用函数曲线	(442)
习题十二		(444)

* 第十三章 排 序 问 题

§ 13.1	车间生产计划排序问题	(447)
13.1.1	一台机器和 n 个工件的排序问题	(447)
13.1.2	两台机器和 n 个工件的排序问题	(450)
13.1.3	3 台机器和 n 个工件的排序问题	(453)
§ 13.2	旅行售货员问题	(460)
13.2.1	旅行售货员问题	(460)
13.2.2	分支定界法	(463)
习题十三		(468)
附录	部分习题答案或提示	(471)
参考书目		(476)

第一章 线性规划

§ 1.1 线性规划模型

1.1.1 数学模型

在经济建设、企业管理和生产实践的各项活动中,我们常常面临把有限的资源分配到若干活动上去的分配问题:

(1) 对有限的资金、材料、设备、场地、能源和劳动力等财力、物力和人力,如何以最佳方式作有效的分配,以期望获得最大的效益.

(2) 在既定的任务之下,如何统筹安排,以做到用最少量的财力、物力和人力来完成任

务. 这些最优分配问题的数学模型在运筹学中处于中心的地位,而线性规划是解决这一类问题的一个理论和方法都比较成熟的运筹学分支.下面我们来看两个实例.

例 1-1 (生产计划问题) 某工厂生产 $1^\#$, $2^\#$ 和 $3^\#$ 三种产品,每种产品需经过 3 道工序.每件产品在每道工序中的工时定额、每道工序在每周可利用的有效工时和每件产品的利润由表 1-1 给出.问每种产品各生产多少,可使这一周内生产的产品所获利润最大?

表 1-1

定额(工时/件)		$j^\#$ 产 品			每周可利用的有效工时
		$1^\#$	$2^\#$	$3^\#$	
工 序	A	1.2	1.0	1.1	5 400
	B	0.7	0.9	0.6	2 800
	C	0.9	0.8	1.0	3 600
利润(元/件)		10	15	12	

解 本问题是要把有限的工时资源合理地分配到 3 种产品的生产活动上去,以期望获得最多的利润.

首先我们引进决策变量:设一周内 $j^\#$ 产品的生产件数为 $x_j (j = 1, 2, 3)$.

然后,根据每件产品的工时定额以及各工序允许的有效工时列出约束条件:

$1^\#$ 产品每生产一件需 A 工序 1.2 工时,现生产 x_1 件,故 $1^\#$ 产品耗费 A 工序的工时数为 $1.2x_1$.类似地,生产 $2^\#$ 产品和 $3^\#$ 产品耗费 A 工序的工时数分别为 $1.0x_2$ 和 $1.1x_3$,

所以 3 种产品对 A 工序的工时总需求量为

$$1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3,$$

它不应超过 A 工序在一周内所允许的工作时间 5 400 工时. 于是, 得工序 A 加工产品的约束条件:

$$1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 \leq 5\,400.$$

类似地, 对工序 B 和 C 有以下约束条件:

$$0.7x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 \leq 2\,800,$$

$$0.9x_1 + 0.8x_2 + 1.0x_3 \leq 3\,600.$$

再者, 变量 x_1 , x_2 和 x_3 只能取非负值, 故有下列非负约束条件:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

最后, 我们来确定产品生产的效益. 若用 f 表示工厂一周内生产 3 种产品所能获得的利润, 则有

$$f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3,$$

现在工厂的目标是希望获得最大利润, 我们写成:

$$\max f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3.$$

综上所述, 我们得本问题的数学模型:

$$\begin{aligned} \max f &= 10x_1 + 15x_2 + 12x_3; \\ \text{s. t. } &1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 \leq 5\,400, \\ &0.7x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 \leq 2\,800, \\ &0.9x_1 + 0.8x_2 + 1.0x_3 \leq 3\,600, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

其中, s. t. 为英文“subject to”(受约束于)的缩写.

例 1-2 (运输问题) 两个发点 A_1 和 A_2 有物资必须运往 3 个收点 B_1 , B_2 和 B_3 . 发点 A_i 对物资的供应量 a_i 、收点 B_j 对物资的需求情况和发点 A_i 至收点 B_j 每输送一吨物资所需的运输费用 c_{ij} 见表 1-2. 为完成发点 A_1 和 A_2 对物资的运输任务, 问运输方案应如何确定, 而使总运费最少?

表 1-2

运价 c_{ij} (元/吨)		收 点 B_j			供应量 a_i (吨)
		B_1	B_2	B_3	
发点 A_i	A_1	20	10	30	60
	A_2	15	20	18	40
需求量 b_j (吨)		恰为 20	至多 30	至少 40	

解 本问题是在完成既定运输任务的条件下而希求花费最少的财力.

设 x_{ij} 为从发点 A_i 运送到收点 B_j 的物资数量.

由于发点 A_i 的 a_i 吨物资必须运走, 因此 a_i 等于发点 A_i 运往各收点 B_j 的运量 x_{ij} 之和. 由此得约束条件:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 60, \\x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 40.\end{aligned}$$

注意到各收点 B_j 对物资的需求情况, 我们有下列约束条件:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &= 20, \\x_{12} + x_{22} &\leq 30, \\x_{13} + x_{23} &\geq 40.\end{aligned}$$

自然, 运量 x_{ij} 都应非负变量:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

总运费为

$$f = 20x_{11} + 10x_{12} + 30x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 18x_{23},$$

我们对 f 求最小值. 故本问题归结为如下数学模型:

$$\begin{aligned}\min f &= 20x_{11} + 10x_{12} + 30x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 18x_{23}; \\ \text{s. t.} \quad &x_{11} + x_{12} + x_{13} = 60, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ &x_{11} + x_{21} = 20, \\ &x_{12} + x_{22} \leq 30, \\ &x_{13} + x_{23} \geq 40, \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

上述建立的两个数学模型, 我们称之为线性规划. 可见, 线性规划模型具有下列 3 个要素:

(1) 决策变量. 这些决策变量的一组定值代表所给问题的一个具体方案. 一般来说, 这些决策变量都是非负变量. 如果在模型中变量 x_j 的符号不受限制, 即变量 x_j 取正值, 取负值或取零都可以, 我们把它写成条件 $x_j \geq 0$, 并称 x_j 为自由变量.

(2) 约束条件. 这些约束条件都为线性等式或线性不等式, 它们反映了所给问题对资源的客观限制及对所要完成的任务的各类要求. 同时, 对决策变量的符号要求也属于约束条件.

(3) 目标函数. 它为决策变量的线性函数. 按所给问题的不同, 可要求目标函数 f 实现最大值或最小值.

为此, 线性规划模型的一般形式为

$$\begin{aligned}\min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\text{或} \max f = \sum_{j=1}^n c_j x_j); \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned} \tag{1-1}$$

其中符号 $\geq$ 表示 $\geq, =, \leq$ 这 3 个符号中的任意一个.

我们给出线性规划的有关术语:

可行解——满足线性规划全部约束条件的解 $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ 称为线性规划的可行解.

可行域——全体可行解的集合称为线性规划的可行域. 用符号 K 表示.

最优解——使目标函数实现最小值(或最大值)的可行解 $\mathbf{X}^* = (x_1, \dots, x_n)^T$ 称为线性规划的最优解.

最优值——最优解的目标函数值

$$f^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

称为线性规划的最优值.

1.1.2 标准型线性规划

由于求解数学模型的算法都是为标准化的模型设计的,所以,为了便于对求解线性规划模型建立一个有效的算法,我们有必要对线性规划模型规定它的标准形式.今后,我们谈到的线性规划模型的标准型,都是指下列形式:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1-2)$$

也就是说,线性规划的标准型,是指:对目标函数一律求最小值;决策变量一律为非负变量;约束条件除变量的非负条件外一律为等式约束.今后,记线性规划模型的标准型为(LP).

若令

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

则(LP)便可写成下列形式:

$$\begin{aligned} \min f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}, \\ \text{s. t. } \mathbf{AX} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{X} &\geq 0. \end{aligned} \quad (1-3)$$

或

$$\min\{C^T X \mid AX = b, X \geq 0\}. \quad (1-4)$$

式(1-3)、式(1-4)中的 $X \geq 0$ 均表示 X 中的各个分量 $x_i \geq 0$ (今后此类符号意义与此相同,不再说明.)对于(LP),其可行域 K 我们常写成:

$$K = \{X \mid AX = b, X \geq 0\}. \quad (1-5)$$

各种形式的线性规划模型都可以化成标准型:

(1) 若线性规划为

$$\begin{aligned} \max z &= C^T X; \\ \text{s. t. } AX &= b, \\ X &\geq 0, \end{aligned}$$

这时,只需要将求目标函数的最大值变换为求另一个目标函数的最小值:

$$\max z = -\min(-z),$$

令 $f = -z$, 于是,得到(LP):

$$\begin{aligned} \min f &= (-C)^T X; \\ \text{s. t. } AX &= b, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

(LP)与原有问题具有同样的可行域和最优解(若存在),只是最优值(若存在)相差一个符号而已. 求解原有问题转化成求解(LP).

(2) 约束条件为不等式.

如果线性规划具有不等式约束 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$,

这时我们可引进一个新变量 x' ,用下面两个约束条件代替这个不等式约束:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x' = b_i, \\ x' \geq 0. \end{cases}$$

我们称 x' 为松弛变量.

如果线性规划具有不等式约束 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$,

这时我们引进一个新变量 x'' ,并用下面两个约束条件代替这个不等式约束:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x'' = b_i, \\ x'' \geq 0, \end{cases}$$

我们称 x'' 为剩余变量.

有时, x' 和 x'' 统称为松弛变量,它们在目标函数中的系数都为零.

(3) 决策变量 x_j 为自由变量: $x_j \geq 0$.

引进两个新的非负变量 x' 和 x'' , 并令 $x_j = x' - x''$, 将其代入约束条件和目标函数中, 消去 x_j , 同时, 在约束条件中加入约束 $x' \geq 0$ 和 $x'' \geq 0$. 由于可能发生 $x' > x''$, 或 $x' = x''$, 或 $x' < x''$, 故 $x_j \geq 0$.

(4) 约束条件中出现 $x_j \leq 0$.

引进新的非负变量 x'_j , 令 $x_j = -x'_j$, 代入约束条件和目标函数中消去 x_j . 这样, $x_j \leq 0$ 化成 $x'_j \geq 0$.

(5) 约束条件中出现 $x_j \geq h_j (h_j \neq 0)$.

引进新的非负变量 x'_j , 令 $x_j = x'_j + h_j$, 将它代入目标函数和约束条件中消去 x_j . 这样, $x_j \geq h_j$ 转化成 $x'_j + h_j \geq h_j$, 即为 $x'_j \geq 0$.

例 1-3 将下列线性规划问题化成标准型:

$$\begin{aligned} \max z &= -2x_1 + x_2 - 3x_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 20, \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ &3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

解 它共有 4 处不符合标准型要求: 对目标函数 z 是求最大值; $x_2 \leq 0$; x_3 为自由变量; 第一、第二、第三个约束条件为不等式. 为此, 我们通过以下步骤把该模型标准化:

- (1) 令 $f = -z$, 把求 $\max z$ 改变为求 $\min f$;
 - (2) 用 $-x_4$ 替换 x_2 , x_4 为非负变量;
 - (3) 用 $x_5 - x_6$ 替换 x_3 , 其中 $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$.
 - (4) 对不等式约束分别引进松弛变量 x_7 和剩余变量 x_8, x_9 .
- 于是, 得本问题的标准型:

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 + x_4 + 3x_5 - 3x_6; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 - 3x_4 - 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 20, \\ &2x_1 + x_4 + 3x_5 - 3x_6 - x_8 = 12, \\ &3x_1 + 4x_4 + 2x_5 - 2x_6 - x_9 = 2, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, 4, \dots, 9. \end{aligned}$$

§ 1.2 线性规划的几何特征

1.2.1 两个变量的线性规划的图解法

让我们先来讨论两个变量的线性规划问题的可行域 K 及最优解的几何特征, 对其最优解可能出现的各类情况作一个几何直观的认识.

例 1-4 求解线性规划:

$$\begin{aligned}
 \min f &= -x_1 + 2x_2; \\
 \text{s. t. } x_1 + x_2 &\leq 5, \\
 2x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\
 -x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1-6}$$

解 因为该线性规划仅有两个变量,我们在 x_1Ox_2 坐标平面内用图解法来求解此问题.

第一步,确定可行域 K .

不等式 $x_1 \geq 0$ 表示以 x_2 轴(直线 $x_1 = 0$)为界的右半平面,不等式 $x_2 \geq 0$ 表示以 x_1 轴(直线 $x_2 = 0$)为界的上半平面,所以该线性规划的可行解 $X = (x_1, x_2)^T$ 必在第一象限.

$x_1 + x_2 = 5$ 是一条直线(选取两个点 $(0, 5)^T$ 及 $(5, 0)^T$ 连成直线即是),它把 x_1Ox_2 坐标平面分成两个半平面.为确定哪一个半平面是符合约束条件 $x_1 + x_2 \leq 5$ 的,我们只要把原点 $(0, 0)^T$ 代入不等式 $x_1 + x_2 \leq 5$ 中:若不等式成立,则我们就取原点所在的那一个半平面(以 $x_1 + x_2 = 5$ 为界)表示 $x_1 + x_2 \leq 5$,否则就取不含原点的那个半平面.我们在直线的两端画垂直箭头指向符合约束条件的半平面.

同样, $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ 和 $-x_1 + x_2 \leq 3$ 各对应着一个半平面.

所以,可行域 K 为上述 5 个半平面之交集,它是一个在第一象限的凸多边形(包括边界),如图 1-1 中的阴影线部分.

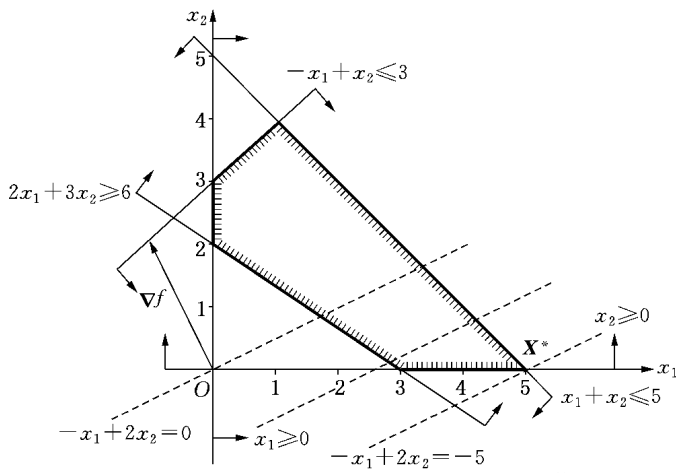


图 1-1

第二步,寻找最优解.

我们结合目标函数 $f = -x_1 + 2x_2 = c_1x_1 + c_2x_2$ 来求线性规划的最优解.对于任一给定的实数 α ,方程

$$-x_1 + 2x_2 = \alpha$$

为一条直线.由于位于该直线上的点都具有相同的目标函数值 α ,故而称它为等值线.当 α

的数值变动时,我们就得到一族相互平行的直线,它们的斜率都为 $-\frac{c_1}{c_2} = -\frac{1}{2}$. 我们知道,目标函数 f 作为 x_1 及 x_2 的函数,它在任一点的梯度都是

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^T = (c_1, c_2)^T = (-1, 2)^T,$$

它与目标函数的等值线垂直. 由高等数学有关知识可知,当点 $(x_1, x_2)^T$ 沿梯度方向移动时, f 的值将随之增大;沿着负梯度方向移动时, f 的值将随之减少. 不妨在原点作梯度 $C = (c_1, c_2)^T = (-1, 2)^T$ (从原点至点 $(c_1, c_2)^T$ 作一向量即为原点的梯度),过原点作向量 C 的垂直线(用虚线表示),它为过原点且 $\alpha = 0$ 的等值线

$$-x_1 + 2x_2 = 0.$$

因为我们的问题是求 $\min f$, 因此让等值线逆梯度方向移动,使 $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ 的值 α 逐步减小. 当它刚要离开 K (此时,与 K 仅有一个交点 $X^* = (5, 0)^T$) 时的等值线

$$-x_1 + 2x_2 = -5,$$

对可行域 K 内各点的 f 值来说,其值 $\alpha = f^* = f(X^*) = -5$ 最小. 所以,顶点 $X^* = (5, 0)^T$ 即为线性规划(1-6)的最优解, $f^* = -5$ 即为最优值.

倘若我们将例 1-4 的目标函数改为求 $\max$, 则我们将等值线沿梯度方向移动,此时 $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ 的值逐步增加,当它刚要离开 K 时的直线 $-x_1 + 2x_2 = 7$ (与 K 的唯一交点 X^{**} 为 $(1, 4)^T$) 对可行域 K 内各点的 f 值来说,其值 $\alpha = f^{**} = f(X^{**}) = 7$ 最大,因此, K 的顶点 $X^{**} = (1, 4)^T$ 为最优解,最优值 $f^{**} = 7$.

例 1-4 从几何直观上告诉我们,若两个变量的线性规划问题的最优解存在且唯一,则最优解必为可行域 K 的一个顶点,而 K 为凸多边形.

对于目标函数求 $\min$ 的两个变量的线性规划,根据目标函数的等值线与可行域 K 的各种关系,我们可以得知它的解可能会出现以下几种情况.

(1) 最优解存在且唯一. 这时, K 是一个非空的、有界或无界的凸多边形,最优解 X^* 必为 K 的一个顶点,最优值 f^* 为一个有限值,如图 1-2 所示.

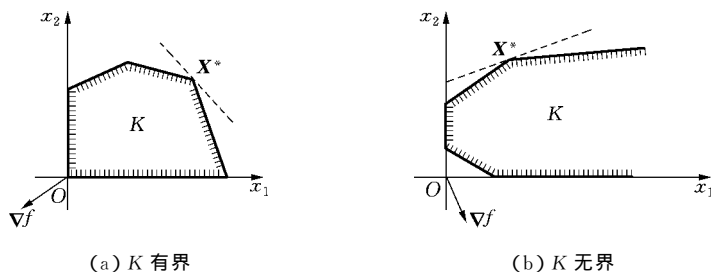


图 1-2

(2) 最优解 X^* 存在但不唯一. 这时, K 是一个非空、有界或无界的凸多边形,最优值 f^* 是一个有限值. f 的等值线 $c_1x_1 + c_2x_2 = f^*$ 与 K 之交是 K 的一个边界,因此该边界

上的点都为最优解,但是,我们至少可以取到 K 的一个顶点为最优解,如图 1-3 所示.

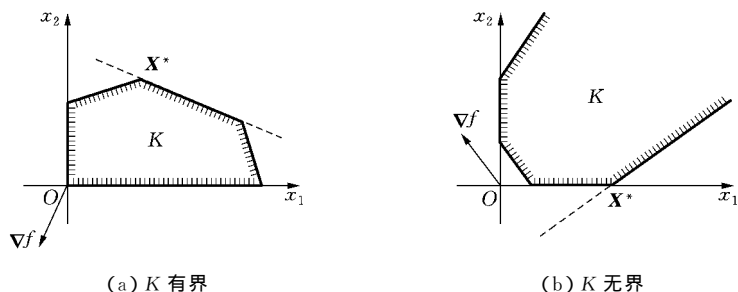


图 1-3

(3) 可行解存在但目标函数值在 K 内无下界(简称线性规划无下界). 这时, K 必是一个非空无界的凸多边形, 最优解不存在, $\min f \rightarrow -\infty$, 如图 1-4 所示.

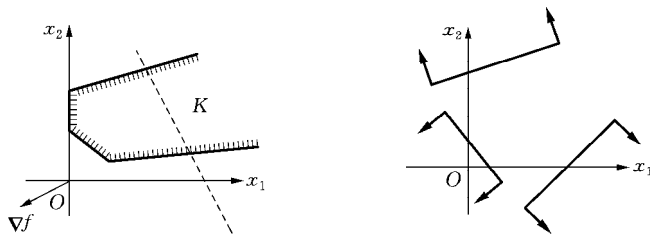


图 1-4

图 1-5

(4) 可行解不存在(或称线性规划不可行). 这时, K 为空集, 如图 1-5 所示.

通过以上各种情况的分析, 关于 2 个变量的线性规划的解, 我们可以得到以下两点结论:

- ① 如果 $K \neq \emptyset$ (空集), 则 K 必是 $x_1 O x_2$ 坐标平面第一象限内的一个凸多边形(今后, 在线性规划理论中, 称为凸集), K 的顶点一定存在.
- ② 如果最优解 X^* 存在, 则最优解中至少有一个为 K 的顶点.

1.2.2 标准型线性规划的几何特征

对标准型线性规划(LP)的解, 我们不打算进行详细的数学论证, 而仅仅用类比法, 给出如下结论:

- (1) 如果可行域 $K \neq \emptyset$, 则 K 必是 $\mathbf{R}^n$ 的第一卦限中的一个凸集, K 的顶点一定存在.
- (2) 如果最优解 X^* 存在, 则最优解中至少有一个为 K 的一个顶点.

这就给我们求解(LP)指出了方向: 我们不必在凸集 K (如果不是空集) 的内部搜索(LP)的最优解, 而只要对 K 的顶点相应的目标函数值进行比较, 就一定能在 K 的顶点中找到最优解(如果最优解存在). 因此, K 的顶点将是我们关心和研究的对象. 下面我们来讨论如何用代数方法确定 K 的顶点.

由图 1-1 知,例 1-4 所给两个变量的线性规划问题(1-6)的 5 个顶点 $(x_1, x_2)^T$ 为

$$(1, 4)^T, (5, 0)^T, (3, 0)^T, (0, 2)^T, (0, 3)^T.$$

现在我们将问题(1-6)标准化:

$$\begin{aligned} \min f &= -x_1 + 2x_2; \\ \text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6, \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 3, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned} \quad (1-7)$$

该模型的可行域 K 为 $\mathbf{R}^5$ 中第一卦限内的凸集. 我们将上述 5 个点的坐标代入方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 3, \end{cases} \quad (1-8)$$

即可解得 x_3, x_4 和 x_5 . 于是 K 在 $\mathbf{R}^5$ 中相应的顶点为

$$\begin{aligned} (1, 4, 0, 8, 0)^T, & (5, 0, 0, 4, 8)^T, & (3, 0, 2, 0, 6)^T, \\ (0, 2, 3, 0, 1)^T, & (0, 3, 2, 3, 0)^T. \end{aligned}$$

我们可以发现,这 5 个点都有两个变量取值为零.

那么,如果没有图 1-1,我们应如何确定问题(1-7)可行域的顶点的坐标呢?这个问题是不难解决的. 问题(1-7)有 $n = 5$ 个变量、 $m = 3$ 个等式约束,我们可在 5 个变量中,任取 $n - m = 5 - 3 = 2$ 个变量为独立变量,并让它们取值为零,代入等式约束方程组(1-8),解出另外 3 个非独立变量的值,这样,我们可得下列 10 组解:

$$\begin{aligned} (0, 0, 5, -6, 3)^T, & (0, 2, 3, 0, 1)^T, & (-0.6, 2.4, 3.2, 0, 0)^T, \\ (0, 3, 2, 3, 0)^T, & (0, 5, 0, 9, -2)^T, & (1, 4, 0, 8, 0)^T, \\ (5, 0, 0, 4, 8)^T, & (9, -4, 0, 0, 16)^T, & (3, 0, 2, 0, 6)^T, \\ (-3, 0, 8, -12, 0)^T. \end{aligned}$$

其中 5 个解就是我们上面所说的可行域 K 的顶点;另外 5 个解没有满足变量都应取非负值的约束条件,不是可行解,当然不可能是 K 的顶点.

推而广之,对于具有 n 个变量、 m 个独立等式约束方程的(LP)来说,它的可行域 K 的顶点可用如下方法来确定:

在 n 个变量中选取 $n - m$ 个变量为独立变量,并对它们取值为零,再将它们代入等式约束方程组,若能唯一地求得另外 m 个非独立变量的值,而且此 m 个变量的值均为非负数,则这 n 个变量的值就是 K 的一个顶点的坐标.

下面我们给出相邻顶点的概念. 由图 1-1 可知,顶点 $X^1 = (1, 4)^T$ 与顶点 $X^2 = (5, 0)^T$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中 K 的两个相邻的顶点,对于问题(1-7)来说,它们相应地成为 $X^1 = (1, 4, 0, 8, 0)^T$ 与 $X^2 = (5, 0, 0, 4, 8)^T$. X^1 是把 x_3 和 x_5 视为独立变量并取值为零而得到的, X^2 是把 x_2 和 x_3 视为独立变量并取值为零而得到的. 可见,对这两个相邻顶点

来说,取值为零的独立变量仅有一个不相同.类似地,在 $\mathbf{R}^n$ 空间中,(LP)的可行域 K 的两个相邻顶点各自相应的 $n-m$ 个独立变量(取值为零)之间,也仅有一个不相同.

§ 1.3 基本可行解

现在我们进一步引进有关的代数知识来阐述顶点.

假设标准型线性规划(1-2)或(1-3)的 m 个等式约束方程:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

是相互独立的.现在从 n 个变量 $x_1, \dots, x_n$ 中选取 m 个变量 $x_{B_1}, \dots, x_{B_m}$,它们在(LP)(1-3)的系数矩阵 A 中相应的系数列向量 $A_{\cdot B_1}, \dots, A_{\cdot B_m}$ 构成矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1B_1} & \dots & a_{1B_m} \\ \dots & & \dots \\ a_{mB_1} & \dots & a_{mB_m} \end{pmatrix}, \quad (1-9)$$

并记

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{1B_1} & \dots & a_{1B_m} \\ \dots & & \dots \\ a_{mB_1} & \dots & a_{mB_m} \end{vmatrix}.$$

基——若 $|B| \neq 0$,则称矩阵 B 为(LP)的一个基.

记

$$\begin{aligned} I &= \{1, \dots, n\}, \quad I_B = \{B_1, \dots, B_m\}, \\ I_D &= \{\dots, j, \dots\} = I - I_B, \\ \mathbf{X}_B &= (x_{B_1}, \dots, x_{B_m})^T \\ \mathbf{X}_D &= (\dots, x_j, \dots)^T \quad (j \in I_D), \end{aligned}$$

我们称变量 $x_{B_1}, \dots, x_{B_m}$ 为(LP)关于基 B 的基本变量,变量 $x_j (j \in I_D)$ 为(LP)关于基 B 的非基本变量.

若对 $j \in I_D$ 取 $x_j = 0$,代入方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$,可得方程组

$$B\mathbf{X}_B = \mathbf{b},$$

由于 $|B| \neq 0$,此方程组能唯一地确定变量 $x_{B_1}, \dots, x_{B_m}$ 的值.设方程组 $B\mathbf{X}_B = \mathbf{b}$ 的解为

$$x_{B_1} = \bar{b}_1, \dots, x_{B_m} = \bar{b}_m,$$

则

$$\mathbf{X}_B = (x_{B_1}, \dots, x_{B_m})^T = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m)^T = \bar{\mathbf{b}},$$

$$\mathbf{X}_D = (\dots, x_j, \dots)^T = (\dots, 0, \dots)^T \quad (j \in I_D)$$

为 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的一个解.我们称

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

为(LP)关于基 B 的一个基本解. 如果基本解又满足非负条件, 即有 $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), 则称它为(LP)关于基 B 的一个基本可行解.

如果将上一节所述的独立变量与非独立变量, 与本节引进的非基本变量与基本变量相对应, 我们可以发现, (LP)的基本可行解就是(LP)可行域 K 的顶点. 我们将前面对(LP)几何特征讨论分析所得结论归纳成下列基本定理.

定理 1-1 (基本定理) 对于标准型线性规划(LP):

- (1) 若(LP)有可行解, 则(LP)必有基本可行解;
- (2) 若(LP)有最优解存在, 则(LP)必有基本最优解(既是基本解又是最优解).

联系我们在分析标准型线性规划(LP)几何特征时对相邻顶点的解释, 可知, 若是两个基本可行解的非基本变量指标集仅有一个指标不同(即基本变量指标集仅有一个指标不同), 那么, 从几何意义上来说, 这两个基本可行解就是相邻的顶点.

下面我们来讨论如何方便地求得(LP)的基本解和其目标函数值.

如果我们把(LP)的目标函数 f 也看成一个变量, 并令 $w = -f$, 则 $f = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ 变换成

$$w + c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0. \quad (1-10)$$

当(LP)的指标集 I_B ($|I_B| \neq 0$) 和 I_D 给定后, 我们对 $(m+1)$ 个方程

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ w + c_1x_1 + \dots + c_nx_n &= 0 \end{aligned} \quad (1-11)$$

12

■■■■■

用消元法作等价变换, 化成下列形式:

$$\begin{aligned} x_{B_i} + 0 \cdot w + \dots + y_{ij}x_j + \dots &= \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ w + \dots + r_jx_j + \dots &= -f_0, \end{aligned} \quad (1-12)$$

其中 $j \in I_D$ (这里 $y_{ij}, \bar{b}_i, r_j, f_0$ 是上述方程组中系数的记号). 此方程组的特点为: 基本变量 x_{B_i} 仅在第 i 个方程出现且系数为 1, 而在其他 m 个方程中均不出现. w 仅在最后一个方程出现且系数为 1, 而在其余方程均不出现. 我们称该方程组(1-12)为(LP)关于基 B 的典型方程组, 它对我们讨论问题会带来许多方便. 因为方程组(1-12)即为下列形式:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in I_D} y_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1-13)$$

$$f(\mathbf{X}) = f_0 + \sum_{j \in I_D} r_jx_j, \quad (1-14)$$

一旦 $n-m$ 个非基本变量 x_j ($j \in I_D$) 的值取定, 则基本变量 $x_{B_1}, \dots, x_{B_m}$ 的值也就取定,

相应地, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_D \end{bmatrix}$ 的目标函数值 $f(\mathbf{X})$ 同时也被确定. 所以方程组(1-13)和方程(1-14)就是用非基本变量 x_j ($j \in I_D$) 来表示基本变量 x_{B_i} ($i = 1, \dots, m$) 和目标函数值 $f(\mathbf{X})$.

特别地, 取 $x_j = 0$ ($j \in I_D$), 即得 $x_{B_i} = \bar{b}_i$ ($i = 1, \dots, m$). 换言之, 我们由方程组

(1-13)和方程(1-14), 可得基本解 $\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}^0$ 的目标函数值 $f(\mathbf{X}^0) = f_0$.

例 1-5 给出(LP):

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 + 6x_2; \\ \text{s. t. } 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (1-15)$$

请对下列 I_B 分别写出基 B , 求出相应基本解和其目标函数值, 并判别该基本解的可行性:

(1) $I_B = \{3, 4\};$

(2) $I_B = \{3, 2\};$

(3) $I_B = \{3, 1\};$

(4) $I_B = \{1, 4\}.$

解 (1) $I_B = \{3, 4\}, B = (A_{\cdot 3}, A_{\cdot 4}) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_D = \{1, 2\}.$ (LP) 关于该

B 的典型方程组为

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8, \\ -2x_1 + 6x_2 + w &= 0. \end{aligned} \quad (1-16)$$

取 $X_D = (x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$, 则 $X_B = (x_3, x_4)^T = (20, 8)^T$, 故基本解 $X^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 0, 20, 8)^T$. 它是可行解, 其目标函数值 $f(X^0) = 0$.

(2) $I_B = \{3, 2\}, B = (A_{\cdot 3}, A_{\cdot 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, I_D = \{1, 4\}.$ 我们用消元法对方程组

(1-16)进行变换, 成为下面的形式:

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_3 - x_4 &= 12, \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 &= 4, \\ x_1 - 3x_4 + w &= -24. \end{aligned} \quad (1-17)$$

取 $x_1 = 0, x_4 = 0$, 则 $x_3 = 12, x_2 = 4$, 基本解 $X^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 4, 12, 0)^T$, 它是可行解, $f(X^0) = f_0 = 24$.

为了说明方程组(1-17)是用非基本变量来表示基本变量和目标函数值, 我们现对 $j \in I_D = \{1, 4\}$, 任取 $x_1 = 2, x_4 = 4$, 代入方程组(1-17), 即得 $x_3 = 4, x_2 = 3$. $\hat{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 3, 4, 4)^T$ 为可行解, $f(\hat{X}) = f_0 + \sum_{j \in I_D} r_j x_j = 24 + 2 - 3 \times 4 = 14$.

若由(LP)的原目标函数 $f = -2x_1 + 6x_2$ 来计算 $f(\hat{X})$, 则 $f(\hat{X}) = -2 \times 2 + 6 \times 3 = 14$.

这说明两者计算结果是一样的.

(3) $I_B = \{3, 1\}, B = (A_{\cdot 3}, A_{\cdot 1}) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, I_D = \{2, 4\}.$ 我们用消元法对方

程组(1-16)进行变换, 得下方程组:

$$\begin{aligned} 12x_2 + x_3 + 5x_4 &= 60, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 &= -8, \\ 2x_2 - 2x_4 + w &= -16. \end{aligned} \quad (1-18)$$

对 $j \in I_D = \{2, 4\}$, 取 $x_2 = 0, x_4 = 0$, 则得

$$x_3 = 60, \quad x_1 = -8,$$

基本解为

$$\mathbf{X}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-8, 0, 60, 0)^T,$$

它不是可行解, $f(\mathbf{X}^0) = 16$.

(4) $I_B = \{1, 4\}$, $B = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $I_D = \{2, 3\}$. 用消元法对方程组(1-16)进行变换, 得下面方程组:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 &= 4, \\ \frac{12}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + x_4 &= 12, \\ \frac{34}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 + w &= 8. \end{aligned} \quad (1-19)$$

14 对 $j \in I_D = \{2, 3\}$, 取 $x_2 = 0, x_3 = 0$, 则得 $x_1 = 4, x_4 = 12$, 基本解 $\mathbf{X}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (4, 0, 0, 12)^T$, 它为可行解, $f(\mathbf{X}^0) = -8$.

§ 1.4 单纯形法

给定标准型线性规划(LP):

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

在没有特别说明的情况下, (LP)满足下列条件:

$$b_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad m < n.$$

m 个等式约束相互独立.

我们已经知悉, 求(LP)的最优解(若存在), 只要在基本可行解中搜索就可, 而基本解的个数至多 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 个. 但是, 用枚举法从基本解中找出全部基本可行解, 再从中寻求最优解, 这个方法是不实用的. 例如, $n = 60, m = 30, \frac{60!}{30!30!} \approx 10^{17}$, 即使电子计算机能以 10^{-6} 秒处理每个 I_B 取法的速度进行工作, 那么, 要将全部取法处理完也要 3 000

年,何况其中有些指标集 I_B 对应的矩阵 B 未必是基,或者相应的基本解不是可行解而使计算徒劳.同时,在这种枚举法中,目标函数是被动的,只有在所有的基本可行解都被确定后才能比较出那一个基本可行解的目标函数值最优.

G·B·丹捷格(G. B. Dantzig)在 1947 年提出了求解线性规划问题的方法——单纯形法.单纯形法的产生,使线性规划在理论上渐趋成熟,在实际中的应用日益广泛与深入,特别是电子计算机使用单纯形法能处理大规模的线性规划,从而使线性规划在现代管理决策中适用的领域更为广泛.

单纯形法的原理是:如果(LP)的可行域 K 不是空集,我们从 K 的某一顶点 X^0 出发,判别它是否为最优解?若不是,沿着边界找它邻近的另一个顶点,它应比原来的顶点优,看它是否为最优解?若不是,再沿着边界找它邻近的顶点.通过逐次迭代,直至找出最优解(参看图 1-6).

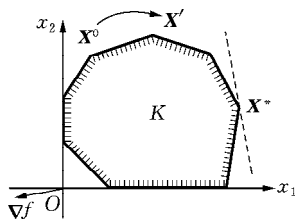


图 1-6

按此原理,单纯形法的基本步骤是:

- (1) 求(LP)的初始基本可行解 X^0 ,并将(LP)的有关信息制成表格(称为单纯形表).
- (2) 判别 X^0 是否为最优解?为此,需要给出一个基本可行解是否为最优解的判别准则.
- (3) 若 X^0 不是最优解,则应另求基本可行解 X' ,且使 $C^T X' < C^T X^0$ (至少 $C^T X' \leq C^T X^0$).同时,我们由 X^0 相应的单纯形表给出 X' 相应的单纯形表.
- (4) 若 X' 不是最优解时,则视 X' 为 X^0 ,重复上述步骤,直至(LP)求得最优解或判定 f 在 K 内无下界.

下面我们逐一来解决各个问题,在此基础上建立单纯形法.

1.4.1 单纯形表和最优性条件

若取初始指标集 $I_B = \{B_1, \dots, B_i, \dots, B_m\}$,相应矩阵 $B (|B| \neq 0)$ 为基,基本解 X^0 可行.对下列 $m+1$ 个方程

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ w + \sum_{j=1}^n c_j x_j &= 0, \end{aligned} \quad (1-20)$$

用消元法将其化成下列关于基 B 的典型方程组:

$$\begin{aligned} x_{B_i} + \sum_{j \in I_D} y_{ij} x_j &= \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ w + \sum_{j \in I_D} r_j x_j &= -f_0, \end{aligned} \quad (1-21)$$

我们把这 $m+1$ 个方程的有关信息制成表 1-3,称它为(LP)关于基 B 的单纯形表,记为 $T(B)$ (变量 w 在 $m+1$ 个方程中的有关系数未在 $T(B)$ 中列出).

表 1-3

X_B	...	x_{B_i}	...	x_j	...	$\bar{b}$
x_{B_1}	...	0	...	y_{1j}	...	$\bar{b}_1$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_i}	...	1	...	y_{ij}	...	$\bar{b}_i$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	...	0	...	y_{mj}	...	$\bar{b}_m$
r	...	0	...	r_j	...	$-f_0$

由 $T(B)$ 可知,关于基 B 的基本可行解 X^0 为

$$\begin{aligned} x_{B_i}^0 &= \bar{b}_i, \quad i=1, \dots, m, \\ x_j^0 &= 0, \quad j \in I_D, \end{aligned}$$

其目标函数值 $f(X^0) = f_0$.

例 1-6 对于线性规划问题(1-15),分别列出下列 I_B 所对应的单纯形表 $T(B)$:

- (1) $I_B = \{3, 4\}$;
- (2) $I_B = \{3, 2\}$;
- (3) $I_B = \{1, 4\}$.

解 根据例 1-5 中的方程组(1-16)、(1-17)和(1-19),我们可得相应的单纯形表如表 1-4,表 1-5 和表 1-6.

表 1-4

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	5	2	1	0	20
x_4	-1	2	0	1	8
r	-2	6	0	0	0

表 1-6

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	2/5	1/5	0	4
x_4	0	12/5	1/5	1	12
r	0	34/5	2/5	0	8

表 1-5

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	6	0	1	-1	12
x_2	-1/2	1	0	1/2	4
r	1	0	0	-3	-24

由方程(1-14)知,对任可行解 $X \in K$,有

$$f(X) = f(X^0) + \sum_{j \in I_D} r_j x_j.$$

因为可行解 X 的非基本变量 $x_j \geq 0$ ($j \in I_D$),所以,当单纯形表 $T(B)$ 对任 $j \in I_D$ 都有 $r_j \geq 0$ 时,则基本可行解 X^0 对应的目标函数值 $f_0 = f(X^0)$ 不大于 (LP) 任一可行解 X 的目标函数值 $f(X)$,于是 X^0 即为 (LP) 的基本最优解, $f(X^0) = f_0$ 即为 (LP) 的最优值.

在单纯形表中,我们称 r_j ($j = 1, \dots, n$) 为检验数.

称各检验数 $r_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) 是基本可行解 X^0 为最优解的最优性条件.

例如,在表 1-6 中,非基本变量 x_2 和 x_3 的检验数 $r_2 = \frac{34}{5} > 0, r_3 = \frac{2}{5} > 0$, 因此, 表 1-6 对应的基本可行解

$$\mathbf{X}^* = (4, 0, 0, 12)^T$$

是问题(1-15)的最优解,最优值 $f^* = -8$.

1.4.2 转轴

若初始指标集 I_B 对应的单纯形表 $T(B)$ 中存在某个 $r_j < 0 (j \in I_D)$, 我们就从这个基本可行解 $\mathbf{X}^0$ 出发, 寻求另一个基本可行解 $\mathbf{X}'$, 使 $\mathbf{C}^T \mathbf{X}' < \mathbf{C}^T \mathbf{X}^0$. 从几何意义来说, 也就是寻找顶点 $\mathbf{X}^0$ 的相邻顶点 $\mathbf{X}'$.

根据相邻顶点的定义, 新的指标集

$$I_{B'} = \{B'_1, \dots, B'_k, \dots, B'_m\} (\text{应有 } |B'| \neq 0)$$

与

$$I_B = \{B_1, \dots, B_k, \dots, B_m\}$$

仅有一个指标不同, 不妨设第 k 个指标不同:

$$B'_i = \begin{cases} B_i, & i \neq k, \\ t, & i = k, \end{cases} \quad (1-22)$$

$$I_{B'} = \{B_1, \dots, t, \dots, B_m\}, \quad (1-23)$$

也即 $\mathbf{X}_B^0$ 中的一个基本变量 x_{B_k} 在新的基本可行解 $\mathbf{X}'$ 中成为非基本变量, $\mathbf{X}_D^0$ 中的一个非基本变量, 例如 x_t , 在新的基本可行解 $\mathbf{X}'$ 中成为基本变量. 这种从 $\mathbf{X}^0$ 及 $T(B)$ 出发, 寻求 $\mathbf{X}'$ 及 $T(B')$ 的运算过程, 我们称它为“转轴”或“转基”, 并称 x_t 为进基变量, x_{B_k} 为出基变量.

现在我们要解决的一系列问题是: 换出指标 B_k 、换进指标 t 怎样选取能使 B' 成为基? 在什么条件下 $I_{B'}$ 对应的基本解 $\mathbf{X}'$ 是可行解, 并使 $f(\mathbf{X}')$ 不大于 $f(\mathbf{X}^0)$? 如何由 $T(B)$ 得到新的 $T(B')$? 这些问题都必须在转轴过程中给以完美的解决.

如果由 $I_{B'}$ 仍能产生一个基本解 ($|B'| \neq 0$), 那么, 对 $I_{B'}$ 来说, 应能从 (LP) 关于基 B 的典型方程组:

$$x_{B_i} + 0 \cdot \omega + \dots + y_{it}x_t + \dots + y_{ij}x_j + \dots = \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m, i \neq k, \quad (1-24)$$

$$x_{B_k} + 0 \cdot \omega + \dots + y_{kt}x_t + \dots + y_{kj}x_j + \dots = \bar{b}_k \quad (j \in I_D), \quad (1-25)$$

$$\omega + \dots + r_t x_t + \dots + r_j x_j + \dots = -f_0, \quad (1-26)$$

用消元法得到关于基 B' 的典型方程组:

$$\begin{aligned} x'_{B_i} + 0 \cdot \omega + \dots + y'_{ij}x_j + \dots &= \bar{b}'_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \omega + \dots + r'_j x_j + \dots &= -f'_0 \quad (j \in I_D), \end{aligned} \quad (1-27)$$

设 $y_{kt} \neq 0$ (保证 B' 也为基), 将方程(1-25)两端除以 y_{kt} , 可得方程(1-29); 将方程

(1-24)减去方程(1-29)乘以 y_{it} , 可得方程(1-28), 将方程(1-26)减去方程(1-29)乘以 r_t , 可得方程(1-30):

$$x_{B_i} - \frac{y_{it}}{y_{kt}} x_{B_k} + 0 \cdot w + \dots + 0 \cdot x_t + \dots + \left(y_{ij} - \frac{y_{kj}}{y_{kt}} y_{it} \right) x_j + \dots = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} y_{it}, \quad (1-28)$$

$$\frac{1}{y_{kt}} x_{B_k} + 0 \cdot w + \dots + x_t + \dots + \frac{y_{kj}}{y_{kt}} x_j + \dots = \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}}, \quad (1-29)$$

$$-\frac{r_t}{y_{kt}} x_{B_k} + w + \dots + 0 \cdot x_t + \dots + \left(r_j - \frac{y_{kj}}{y_{kt}} r_t \right) x_j + \dots = -f_0 - \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} r_t. \quad (1-30)$$

显然, 它就是我们所需要的(LP)关于基 B' 的典型方程组, 将它与方程组(1-27)作比较, 可得如下公式:

$$y'_{ij} = \begin{cases} y_{ij} - \frac{y_{kj}}{y_{kt}} y_{it}, & i \neq k, \\ \frac{y_{kj}}{y_{kt}}, & i = k; \end{cases} \quad (1-31)$$

$$\bar{b}'_i = \begin{cases} \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} y_{it}, & i \neq k, \\ \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}}, & i = k; \end{cases} \quad (1-32)$$

$$r'_j = \begin{cases} r_j - \frac{y_{kj}}{y_{kt}} r_t, & j \in I_{D'}, \\ 0, & j \in I_{B'}; \end{cases} \quad (1-33)$$

$$-f'_0 = -f_0 - \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} r_t. \quad (1-34)$$

于是, 根据这些公式, 就可以由 $T(B)$ 来确定 $T(B')$. 如前所说, 此运算过程称为转轴, 因而, 上述公式称为转轴公式. $T(B)$ 的第 t 列(相应于 x_t 的列)称为枢轴列, 第 k 行(相应于 x_{B_k} 的行)称为枢轴行, y_{kt} 称为枢轴元素.

可见, 如果 I_B 能对应一个基本解, 则 $I_{B'}$ 也能对应一个基本解的充分必要条件为 $y_{kt} \neq 0$.

例 1-7 分析例 1-6 中表 1-4 和表 1-6 的关系.

解 将表 1-4 看作 $T(B)$, 相应的 $I_B = \{3, 4\}$; 将表 1-6 可看作 $T(B')$, 相应的 $I_{B'} = \{1, 4\}$. 由于 $B_1 = 3, B_2 = 4; B'_1 = 1, B'_2 = 4$, 故相应的 $t = 1, k = 1, (B_k = B_1 = 3)$. 我们当然可以通过转轴公式(1-31)至(1-34)来得到 $T(B')$ (利用电子计算机进行计算就是按此方法进行的), 但在进行手工计算时, 我们可以直接通过消元法由 $T(B)$ 来得到 $T(B')$.

为说明问题, 我们再次列出表 1-4 和表 1-6 如表 1-7 和表 1-8.

表 1-7

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	(5)	2	1	0	20
x_4	-1	2	0	1	8
r	-2	6	0	0	0

表 1-8

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	2/5	1/5	0	4
x_4	0	12/5	1/5	1	12
r	0	34/5	2/5	0	8

在 $T(B)$ 表 1-7 中,对枢轴元素 $y_{11} = 5$ 我们用括号给以标出. 将表 1-7 的第一行除以 y_{11} , 便得表 1-8 的第一行; 用表 1-7 的第二行减去表 1-8 第一行乘以 y_{21} (值为 -1), 便得表 1-8 的第二行; 用表 1-7 的第三行减去表 1-8 第一行乘以 r_1 (值为 -2), 便得表 1-8 的第三行.

下面我们来讨论指标 k 的选取.

在转轴过程中, 我们应保持 $I_{B'}$ 对应的基本解 X' 的可行性, 也即要求 $T(B')$ 中 $\bar{b}'_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) 成立. 由式(1-32)可知

$$\bar{b}'_k = \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}},$$

因为在 $T(B)$ 中有 $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), 故为保证 $\bar{b}'_k \geq 0$, 应取枢轴元素

$$y_{kt} > 0.$$

从式(1-32)还可知, 当 $i \neq k$ 时,

$$\bar{b}'_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} y_{it},$$

由于 $\bar{b}_i \geq 0$, $y_{kt} > 0$, $\bar{b}_k \geq 0$, 故当 $y_{it} \leq 0$ 时, 总有 $\bar{b}'_i \geq 0$; 而当 $y_{it} > 0$ 时, 要使 $\bar{b}'_i \geq 0$ 成立, 则下列条件必须成立:

$$\frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} \leq \frac{\bar{b}_i}{y_{it}} \quad (1 \leq i \leq m, y_{it} > 0).$$

因此, 当指标 t 确定后, 应依据下述准则(称为最小比值准则)来确定指标 k :

$$\frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{it}} \mid y_{it} > 0, 1 \leq i \leq m \right\}. \quad (1-35)$$

接下来, 我们考虑指标 t 的选取.

由式(1-34)知:

$$f'_0 = f_0 + \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} r_t, \quad (1-36)$$

其中已知 $y_{kt} > 0$, $\bar{b}_k \geq 0$. 根据迭代要求, 为使 $f'_0 < f_0$ (至少 $f'_0 \leq f_0$), 应要求

$$r_t < 0 \quad (\text{当 } \bar{b}_k > 0 \text{ 时, 一定有 } f'_0 < f_0),$$

这就是确定指标 t 的准则. 一般地, 我们取

$$r_t = \min \{ r_j \mid r_j < 0, j \in I_D \}. \quad (1-37)$$

我们将上述讨论归结为下列定理.

定理 1-2 设 B 为 (LP) 的一个基, 相应的指标集

$$I_B = \{B_1, \dots, B_m\},$$

X 为关于 B 的基本解, 在单纯形表 $T(B)$ 中有 $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), 则

- (1) 若 $T(B)$ 中各检验数 $r_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), 则 X 必为 (LP) 的一个基本最优解;
- (2) 若存在检验数 $r_t < 0$ ($t \in I_D$), 且存在 $y_{it} > 0$ ($1 \leq i \leq m$), 按最小比值准则 (1-35) 确定指标 k , 按式 (1-22) 确定指标集 $I_{B'}$, 则单纯形表 $T(B')$ 中 $\bar{b}' \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) 一定成立, 且 $T(B')$ 中的 f'_0 必不超过 $T(B)$ 中的 f_0 , 特别地, 当 $T(B)$ 中的 $\bar{b}_k > 0$ 时, 必有 $f'_0 < f_0$;
- (3) 如果 $T(B)$ 中存在 $r_t < 0$ ($t \in I_D$), 且对 $i = 1, \dots, m$, 均有 $y_{it} \leq 0$, 则 (LP) 的目标函数值 f 在可行域中无下界.

证 (1)与(2)前面已作了说明, 现证(3).

我们按下列方法在 K 中取可行解 $\hat{X}$.

设 $j \in I_D$, 令

$$\hat{x}_j = \begin{cases} 0, & j \neq t, j \in I_D, \\ \epsilon, & j = t, \end{cases} \quad (1-38)$$

其中 ϵ 为任一正数. 从而, 由方程组 (1-13) 和式 (1-14), 可知

$$\begin{aligned} \hat{x}_{B_i} &= \bar{b}_i - \epsilon y_{it}, \quad i = 1, \dots, m, \\ f'(\hat{X}) &= f_0 + \epsilon r_t, \end{aligned} \quad (1-39)$$

因为 $y_{it} \leq 0, \bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), $\epsilon > 0$, 所以 $\hat{x}_{B_i} \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). 从而, 由此取得的 $\hat{X}$ 是 (LP) 的一个可行解.

因为 $r_t < 0$, 故当 $\epsilon \rightarrow +\infty$ 时, $f(\hat{X}) \rightarrow -\infty$, 所以 (LP) 的目标函数值在 K 中无下界.

1.4.3 单纯形法

我们将单纯形法归纳如下:

① 选定初始基 B (它对应的基本解是 (LP) 的一个可行解, 称此基为原有可行基), 确定指标集 I_B, I_D , 作单纯形表 $T(B)$;

② $T(B)$ 中 $r_j \geq 0$ 对 $j \in I_D$ 是否均成立?

若是, 则得 (LP) 的一个基本最优解

$$X^* = \begin{bmatrix} X_B^* \\ X_D^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix};$$

最优值 $f^* = f_0$, 算法终止.

若否, 则定指标 t :

$$r_t = \min\{r_j \mid r_j < 0, j \in I_D\},$$

转步骤③.

③ 在 $T(B)$ 中 $y_{it} \leq 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 是否均成立?

若是, 则 (LP) 的目标函数值 f 在可行域内无下界, 算法终止;

若否, 则按最小比值准则定指标 k , 使

$$\frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{it}} \mid y_{it} > 0, 1 \leq i \leq m \right\},$$

以 y_{kt} 为枢轴元素进行转轴, 得新的原有可行基 B' 及指标集 $I_{B'}$, $I_{D'}$ 以及相应的单纯形表 $T(B')$ 将 B' , $I_{B'}$, $I_{D'}$ 视为 B , I_B , I_D , 转步骤②.

例 1-8 求解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3; \\ \text{s. t. } x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\leq 6, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

解 首先把它化成标准型:

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 - 3x_2 - 4x_3; \\ \text{s. t. } x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_5 &= 6, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 7, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

执行步骤① 选取初始指标集 $I_B = \{4, 5, 6\}$, $I_D = \{1, 2, 3\}$, 这时 B 为单位阵, 故 $|B| \neq 0$, 易知, 关于 B 的基本解 $(0, 0, 0, 3, 6, 7)^T$ 是一个可行解, 其单纯形表如表 1-9.

表 1-9

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	$\bar{b}_i/y_{it}$
x_4	1	-2	(3)	1	0	0	3	(3/3)
x_5	2	5	-3	0	1	0	6	
x_6	-2	1	1	0	0	1	7	7/1
r	-2	-3	(-4)	0	0	0	0	

执行步骤② 现 $\min\{r_j \mid r_j < 0, j \in I_D\} = -4 = r_3$, 故取 $t = 3$.

执行步骤③ 现 $y_{1t} = y_{13} = 3$, $y_{3t} = y_{33} = 1$ 均大于零, 因而

$$\frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_1}{y_{13}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{33}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{3}, \frac{7}{1} \right\} = \frac{\bar{b}_1}{y_{13}},$$

故取 $k = 1$ (为反映这些步骤, 我们在表 1-7 中, 对检验数 r_3 打上括号, 把有关比值 $\frac{\bar{b}_i}{y_{it}}$ 列

在表 1-9 的最右一列,对最小比值 $\frac{\bar{b}_i}{y_{13}}$ 打上括号).

执行步骤④,以 $y_{kt} = y_{13} = 3$ 为枢轴元素对表 1-9 进行转轴,得表 1-10,继续迭代得表 1-11.

表 1-10

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	$\bar{b}_i/y_{it}$
x_3	1/3	-2/3	1	1/3	0	0	1	
x_5	3	(3)	0	1	1	0	9	(9/3)
x_6	-7/3	5/3	0	-1/3	0	1	6	$\frac{18}{5}$
r	-2/3	(-17/3)	0	4/3	0	0	4	

表 1-11

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_3	1	0	1	5/9	2/9	0	3
x_2	1	1	0	1/3	1/3	0	3
x_6	-12/3	0	0	-8/9	-5/9	1	1
r	5	0	0	29/9	17/9	0	21

由于表 1-11 中 $r_j \geq 0$ 对 $j = 1, \dots, 6$ 均已成立,故算法终止.原规划最优解 X^* 和最优值分别为

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T = (0, 3, 3)^T, \quad z^* = 21.$$

例 1-9 证明下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min f &= -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ &3x_1 - 2x_2 + x_4 = 4, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

在其可行域内无下界,并给出一个可行解 $\hat{X}$, 有 $f(\hat{X}) < -3000$.

证 现取初始指标集 $I_B = \{3, 4\}$. 由于目标函数中 x_3 及 x_4 的系数不为零,而由约束条件可知:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 + x_2, \\ x_4 &= 4 - 3x_1 + 2x_2, \end{aligned}$$

将其代入

$$f = -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

中,得到

$$f = -3x_1 - x_2 + 2,$$

即为方程

$$-3x_1 - x_2 + w = -2.$$

于是,有初始单纯形表如表 1-12.

在表 1-12 中, $r_2 = -1 < 0$, 又 $y_{12} = -1 < 0$, $y_{22} = -2 < 0$, 最小比值准则失效, 所以(LP)的目标函数值在可行域内无下界.

取

$$\hat{x}_2 = \epsilon > 0, \quad \hat{x}_1 = 0,$$

由式(1-39)得

$$\begin{aligned} \hat{x}_3 &= 2 + \epsilon, \\ \hat{x}_4 &= 4 + 2\epsilon, \\ f(\hat{X}) &= 2 - \epsilon. \end{aligned}$$

为使 $f(\hat{X}) < -3\,000$, 取 $\epsilon = 3\,110$, 即得(LP)的一个可行解

$$\hat{X} = (0, 3\,110, 3\,112, 6\,224)^T,$$

其目标函数值

$$f(\hat{X}) = -3\,108.$$

表 1-12

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	3	-2	0	1	4
r	-3	-1	0	0	-2

1.4.4 关于最优解唯一性的讨论

23

在 § 1.2 线性规划的几何特征这一节中, 我们曾经指出, 若线性规划存在最优解, 则可分为最优解唯一和不唯一. 那么, 在用单纯形算法求解所得的最优单纯形表中(基本最优解对应的单纯形表今后称为最优单纯形表, 简称最优表, 相应的基称为最优基), 如何反映这种情况呢? 让我们来看两个例子.

例 1-10 给出下列线性规划的全部基本最优解:

$$\begin{aligned} \min f &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3; \\ \text{s. t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ & x_1 + x_6 = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

解 用单纯形法求解本问题, 得最优单纯形表如表 1-13.

表 1-13

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_3	1/3	2/3	1	1/3	0	0	10/3
x_5	1	(1)	0	0	1	0	5
x_6	1	0	0	0	0	1	1
r	0	0	0	1	0	0	10

在表 1-13 中,非基本变量 x_2 的检验数 $r_2 = 0$,而 $y_{12} > 0, y_{22} > 0$,所以最小比值准则有效. 我们选 x_2 为进基变量、 x_5 为出基变量,转轴后得到另一张最优表表 1-14.

表 1-14

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_3	$-1/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0	0
x_2	1	1	0	0	1	0	5
x_6	(1)	0	0	0	0	1	1
r	0	0	0	1	0	0	10

类似地,我们还可以得最优表如表 1-15 和表 1-16.

表 1-15

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_3	0	0	1	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	$1/3$
x_2	0	1	0	0	(1)	-1	4
x_1	1	0	0	0	0	1	1
r	0	0	0	1	0	0	10

表 1-16

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_3	0	$2/3$	1	$1/3$	0	$-1/3$	3
x_5	0	1	0	0	1	-1	4
x_1	1	0	0	0	0	1	1
r	0	0	0	1	0	0	10

由表 1-13 至表 1-16,我们得到本问题的 4 个基本最优解:

$$\begin{aligned} X^1 &= (0, 0, 10/3, 0, 5, 1)^T, & X^2 &= (0, 5, 0, 0, 0, 1)^T, \\ X^3 &= (1, 4, 1/3, 0, 0, 0)^T, & X^4 &= (1, 0, 3, 0, 4, 0)^T, \end{aligned}$$

它们的目标函数值都是同一个值 $f^* = -10$.

进一步地,我们还可以给出最优解的一般表达式:

$$X^* = \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3 + \lambda_4 X^4,$$

其中 $\lambda_k \geq 0, (k = 1, \dots, 4), \sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$.

例 1-11 对下列线性规划的最优解进行讨论:

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 + x_2 - 3x_3; \\ \text{s. t. } & x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 10, \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 40, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

解 用单纯形法求解本问题,可得最优单纯形表如表 1-17.

表 1-17

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	-2	-1	0	30
x_2	0	1	-7	-2	1	20
r	0	0	0	0	1	40

我们得基本最优解 $X^* = (30, 20, 0, 0, 0)^T$, 最优值为 -40.

现在在表 1-17 中非基本变量的检验数 $r_3 = 0$, 且 $y_{13} = -2 < 0$, $y_{23} = -7 < 0$, 最小比值准则失效, 但我们若取

$$x_3 = \varepsilon \text{ (任一正数)}, x_4 = 0, x_5 = 0,$$

于是, 由式(1-39)可知,

$$x_1 = 30 + 2\varepsilon, \quad x_2 = 20 + 7\varepsilon,$$

且相应可行解

$$\hat{X}^* = (30 + 2\varepsilon, 20 + 7\varepsilon, \varepsilon, 0, 0)^T$$

的目标函数值也为 -40, 所以 $\hat{X}^*$ 也为最优解.

类似地, 由于表 1-17 中非基本变量 x_4 的检验数 $r_4 = 0$, 且 $y_{14} = -1 < 0$, $y_{24} = -2 < 0$, 可知

$$\tilde{X}^* = (30 + \varepsilon, 20 + 2\varepsilon, 0, \varepsilon, 0)^T$$

也为本问题的最优解.

通过例 1-10 和例 1-11 的讨论, 我们有如下结论:

若用单纯形法求解(LP)得最优单纯形表 $T(B^*)$, 相应的最优基为 B^* , 则

(1) 若 $T(B^*)$ 中非基本变量的检验数全大于零, 则(LP)有唯一基本最优解;

(2) 若最优表 $T(B^*)$ 中存在 $t \in I_D$, $r_t = 0$, 且 $y^t = (y_{1t}, \dots, y_{mt})^T$ 中存在大于零的元素, 则按最小比值准则(1-35)选定出基变量, 转轴后可得(LP)的另一个基本最优解;

(3) 若最优表 $T(B^*)$ 中存在 $t \in I_D$, $r_t = 0$, 且 $y_{it} \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$), 则按式(1-38)和式(1-39)所取的可行解

$$\begin{aligned} x_t &= \varepsilon \text{ (任意正数)}, \quad x_j = 0 \quad (j \in I_D, j \neq t), \\ x_{B_i} &= \bar{b}_i - y_{it}\varepsilon, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

也为最优解.

§ 1.5 单纯形表的矩阵描述

本节将利用矩阵运算来描述单纯形表, 并给出 y_{ij} , $\bar{b}_i$, r_j 和 f_0 的计算公式.

现给定(LP):

$$\min f = \mathbf{C}^T \mathbf{X};$$

$$\text{s. t. } \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{X} \geqslant 0,$$

取基 B ($|B| \neq 0$), 指标集 $I_B = \{B_1, \dots, B_m\}$ 和 $I_D = \{\dots, j, \dots\}$, 令

$$D = (\dots, \mathbf{A}_{\cdot j}, \dots) (j \in I_D),$$

于是, 不妨设

$$A = (B, D),$$

运用矩阵分块的方法, 把 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 写成

$$(B, D) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_D \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

即

$$B\mathbf{X}_B + D\mathbf{X}_D = \mathbf{b}.$$

由于 $|B| \neq 0$, 所以 B^{-1} 存在. 我们用 B^{-1} 左乘上式, 得

$$\mathbf{X}_B + B^{-1}D\mathbf{X}_D = B^{-1}\mathbf{b},$$

即

$$\mathbf{X}_B + B^{-1}(\dots, \mathbf{A}_{\cdot j}, \dots) \begin{pmatrix} \dots \\ x_j \\ \dots \end{pmatrix} = B^{-1}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{X}_B + \sum_{j \in I_D} B^{-1}\mathbf{A}_{\cdot j} x_j = B^{-1}\mathbf{b}. \quad (1-40)$$

若记

$$\mathbf{y}^j = (y_{1j}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{mj})^T,$$

$$\bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_i, \dots, \bar{b}_m)^T,$$

则(LP)关于基 B 的典型方程组

$$x_{B_i} + \sum_{j \in I_D} y_{ij} x_j = \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

可写成

$$\mathbf{X}_B + \sum_{j \in I_D} \mathbf{y}^j x_j = \bar{\mathbf{b}}. \quad (1-41)$$

对比式(1-40)和式(1-41), 即得

$$\mathbf{y}^j = B^{-1}\mathbf{A}_{\cdot j} \quad (j \in I_D); \quad \bar{\mathbf{b}} = B^{-1}\mathbf{b}.$$

同时, 不难验证

$$\mathbf{y}^{B_i} = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T = B^{-1}\mathbf{A}_{\cdot B_i} \quad (i = 1, \dots, m).$$

若记

$$\mathbf{C}_B = (c_{B_1}, \dots, c_{B_m})^\top, \quad \mathbf{C}_D = (\dots, c_j, \dots)^\top \quad (j \in I_D),$$

则目标函数方程 $w + \mathbf{C}^\top \mathbf{X} = 0$ 可写成：

$$w + (\mathbf{C}_B^\top, \mathbf{C}_D^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_D \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$w + \mathbf{C}_B^\top \mathbf{X}_B + \mathbf{C}_D^\top \mathbf{X}_D = 0,$$

由式(1-41)可知, $\mathbf{X}_B = \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in I_D} \mathbf{y}^j x_j$, 将其代入上式, 得

$$w + \mathbf{C}_B^\top (\bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in I_D} \mathbf{y}^j x_j) + \sum_{j \in I_D} c_j x_j = 0,$$

即

$$w + \sum_{j \in I_D} (c_j - \mathbf{C}_B^\top \mathbf{y}^j) x_j = -\mathbf{C}_B^\top \bar{\mathbf{b}},$$

对比方程组(1-21)中的方程

$$w + \sum_{j \in I_D} r_j x_j = -f_0,$$

可得

$$r_j = c_j - \mathbf{C}_B^\top \mathbf{y}^j \quad (j \in I_D); f_0 = \mathbf{C}_B^\top \bar{\mathbf{b}}.$$

同时, 不难验证

$$r_{B_i} = 0 = c_{B_i} - \mathbf{C}_B^\top \mathbf{y}^{B_i} \quad (i = 1, \dots, m).$$

于是, 我们即有单纯形表中各元素的计算公式：

$$\mathbf{y}^j = (y_{1j}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{mj})^\top = B^{-1} \mathbf{A}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1-42)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_i, \dots, \bar{b}_m)^\top = B^{-1} \mathbf{b}, \quad (1-43)$$

$$r_j = c_j - \mathbf{C}_B^\top \mathbf{y}^j = c_j - \mathbf{C}_B^\top B^{-1} \mathbf{A}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1-44)$$

$$f_0 = \mathbf{C}_B^\top \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{C}_B^\top B^{-1} \mathbf{b}. \quad (1-45)$$

同时, 有 $\mathbf{y}^{B_i} = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top, \quad i = 1, \dots, m,$

$$r_{B_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

例 1-12 对线性规划：

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 - 2x_2; \\ \text{s. t.} \quad &3x_1 - 2x_2 + x_3 = 16, \\ &-x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \\ &x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

用矩阵运算方法给出 $I_B = \{3, 2\}$ 所对应的单纯形表.

解 现在

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, C_B^T = (0, -2)$$

$$y^1 = B^{-1}A_{.1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}, y^4 = B^{-1}A_{.4} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$r_1 = c_1 - C_B^T y^1 = 3 - (0, -2) \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} = 5/2,$$

$$r_4 = c_4 - C_B^T y^4 = 0 - (0, -2) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = 1/2,$$

$$f_0 = C_B^T \bar{b} = (0, -2) \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = -4.$$

表 1-18

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	5/2	0	1	1/2	20
x_2	-1/4	1	0	1/4	2
r	5/2	0	0	1/2	4

制成单纯形表 $T(B)$ 如表 1-18 所示.

§ 1.6 改进单纯形法

28

在用单纯形法求解(LP)的过程中,我们并不是对单纯形表的全部元素感兴趣的.这自然使我们想到,是否可以对单纯形法加以一定的改进,使电子计算机在实现单纯形算法时,能节省内存单元,并缩短计算时间.为此,我们对单纯形表及算法作进一步分析:

(1) 作基 B 的单纯形表,用到矩阵 B^{-1} 及 $C_B^T B^{-1}$;

(2) 确定算法是否已获得最优解,或在判定未获得最优解需确定进基变量 x_t 的指标 t ,用到检验数 $r_j (j \in I_D)$;

(3) 确定(LP)在 K 内无下界,或确定出基变量 x_{B_k} 的指标 k ,用到 y^t 及 $\bar{b}$.

(4) 当已得最优解 $X_B = \bar{b}$, $X_D = 0$ 及最优值 $f_0 = C_B^T \bar{b}$ 时,用到 $\bar{b}$ 及 f_0 .

故我们对 $T(B)$ 中最感兴趣的元素是 $r_j (j \in I_D)$, y^t , $\bar{b}$ 和 f_0 , 它们是转轴运算的必要信息.而其他元素对转轴运算不起作用.为此,我们考虑缩减单纯形表,建立改进单纯形法.其基本思想为:

对于基 B , 首先计算 B^{-1} , $C_B^T B^{-1}$, $\bar{b} = B^{-1}b$, $f_0 = C_B^T B^{-1}b$, 然后计算检验数

$$r_j = c_j - C_B^T B^{-1}A_{.j} \quad (j \in I_D).$$

当 $r_j \geq 0$ 对 $j \in I_D$ 都成立时,得最优解

$$X_B = \bar{b}, \quad X_D = 0,$$

最优值为 f_0 ;

当 $r_j \geq 0$ 对 $j \in I_D$ 不全成立时,按式(1-37)确定枢轴列指标 t , 计算 $y^t = B^{-1}A_{.t}$. 由 y^t , $\bar{b}$ 按最小比值准则(1-35)确定枢轴行指标 k , 得枢轴元素 y_{kt} 和新基 B' , 视 B' 为新基 B , 重复上述步骤,继续迭代.

剩下的问题是如何求 $(B')^{-1}$. 我们知道, 在计算机上由矩阵直接求逆矩阵, 一般情况下很费时间, 所以我们不采用这个方法, 而采用如下方法:

同单纯形表 $T(B)$ 用枢轴元素 y_{kt} 、枢轴列 y^t 转轴一样, 我们用 y_{kt} 和 y^t 对 B^{-1} 进行转轴运算, 来求得 $(B')^{-1}$.

我们用一个实例来说明上述方法. 例如, 已知

$$B = (A_{B_1}, A_{B_2}, A_{B_3}) = (A_4, A_2, A_5),$$

其逆矩阵为

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

现在 $x_t = x_1$ 为进基变量, $x_{B_3} = x_5$ 为出基变量, $y^t = (2, 0, 3)^T$, 枢轴元素 $y_{31} = 3$. 为新基 $B' = (A_4, A_2, A_1)$ 的逆矩阵, 我们对 B^{-1} 进行转轴运算:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ (3) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$(B')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

若记

$$G = \begin{pmatrix} B^{-1} & \bar{b} \\ -C_B^T B^{-1} & -f_0 \end{pmatrix} = (g_{ij})_{(m+1) \times (m+1)}, \quad (1-46)$$

类似地对 G 用 y^t , r_t 和 y_{kt} 进行转轴运算:

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & \bar{b} \\ -C_B^T B^{-1} & -f_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^t \\ r_t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (B')^{-1} & \bar{b}' \\ -C_{B'}^T (B')^{-1} & -f'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

即可求得 $(B')^{-1}$, $-C_{B'}^T (B')^{-1}$, $\bar{b}'$, $-f'_0$.

若记

$$G' = \begin{pmatrix} (B')^{-1} & \bar{b}' \\ -C_{B'}^T (B')^{-1} & -f'_0 \end{pmatrix} = (g'_{ij})_{(m+1) \times (m+1)},$$

则 G' 与 G 之间的关系可以由下列公式给出:

$$g'_{ij} = \begin{cases} g_{ij} - \frac{g_{kj}}{y_{kt}} y_{it}, & i = 1, \dots, m (i \neq k); j = 1, \dots, m+1, \\ \frac{g_{kj}}{y_{kt}}, & i = k; j = 1, \dots, m+1, \\ g_{ij} - \frac{g_{kj}}{y_{kt}} r_t, & i = m+1; j = 1, \dots, m+1. \end{cases} \quad (1-47)$$

现将改进单纯形法的算法步骤列出如下：

① 选取初始指标集 I_B (基 B 为原有可行基) 和 I_D ; 求 B^{-1} , 计算 $C_B^T B^{-1}$, $\bar{b} = B^{-1}b$, $f_0 = C_B^T \bar{b}$. 按式(1-46)取 $G = (g_{ij})$;

② 对 $j \in I_D$, 计算 $r_j = c_j + (-C_B^T B^{-1})A_{.j}$;

③ 对 $j \in I_D$, 查 $r_j \geq 0$ 是否都成立?

若是, 则 $X_B = \bar{b}$; $X_D = 0$ 即为 (LP) 的一个最优解; f_0 为它的最优值, 算法终止.

若否, 则定指标 $t: r_t = \min\{r_j \mid r_j < 0, j \in I_D\}$;

④ 计算 $y^t = B^{-1}A_{.t}$;

⑤ $y^t \leq 0$ 是否成立?

若是, 则 (LP) 在可行域 K 内无下界, 算法终止;

若否, 则定指标 k :

$$\frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{it}} \mid y_{it} > 0, 1 \leq i \leq m \right\};$$

⑥ 按式(1-47)由矩阵 G 得矩阵 G' . 取 $B = B'$, $I_B = I_{B'}$, $I_D = I_{D'}$, 转步骤②.

例 1-13 用改进单纯形法求解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4; \\ \text{s. t. } & \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 &= 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &+ x_6 = 12, \\ x_1 &+ x_3 + x_4 + x_7 = 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 7. \end{aligned} \end{aligned}$$

解 第一步 取 $I_B = \{5, 6, 7\}$, $B = (A_{.5}, A_{.6}, A_{.7}) = I$, $I_D = \{1, 2, 3, 4\}$. 有

$$\begin{aligned} B^{-1} &= I, \quad C_B^T = (c_5, c_6, c_7) = (0, 0, 0), \\ C_B^T B^{-1} &= (0, 0, 0), \quad \bar{b} = (6, 12, 4)^T, \quad f_0 = 0. \end{aligned}$$

计算非基本变量的检验数:

$$\begin{aligned} (r_1, r_2, r_3, r_4) &= (c_1, c_2, c_3, c_4) + (-C_B^T B^{-1})(A_{.1}, A_{.2}, A_{.3}, A_{.4}) \\ &= (-2, -1, 3, -5). \end{aligned}$$

定指标 t :

$$\min\{r_1, r_2, r_3, r_4\} = -5 = r_4, \quad \text{得 } t = 4.$$

计算 y^t :

$$y^4 = B^{-1}A_{.4} = (-1, 1, 1)^T.$$

定指标 k :

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_2}{y_{24}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{34}} \right\} = \min \left\{ \frac{12}{1}, \frac{4}{1} \right\} = \frac{\bar{b}_3}{y_{34}},$$

得 $k = 3$, 枢轴元素 $y_{34} = 1$.

我们把上述运算列成表 1-19.

表 1-19

$\begin{pmatrix} B^{-1} \\ -C_B^T B^{-1} \end{pmatrix}$	X_B	X_D				$\bar{b}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	x_5				-1	6
	x_6				1	12
	x_7				(1)	4
	r_D	-2	-1	3	-5	0

第二步 ,进行转轴运算 :

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & \bar{b} \\ -C_B^T B^{-1} & -f_0 \end{pmatrix} y^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ (1) \\ -5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

对 $j \in I_D = \{1, 2, 3, 7\}$,计算检验数 r_j :

$$\begin{aligned} (r_1, r_2, r_3, r_7) &= (c_1, c_2, c_3, c_7) + (-C_B^T B^{-1})[A_{.1}, A_{.2}, A_{.3}, A_{.7}] \\ &= (-2, -1, 3, 0) + (0, 0, 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (3, -1, 8, 5). \end{aligned}$$

定指标 t ,计算 y' ,定指标 k ,得表 1-20 :

表 1-20

$\begin{pmatrix} B^{-1} \\ -C_B^T B^{-1} \end{pmatrix}$	X_B	X_D				$\bar{b}$
		x_1	x_2	x_3	x_7	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	x_5		2			10
	x_6		(3)			8
	x_4		0			4
	r_D	3	-1	8	5	20

继续迭代 ,得最优表如表 1-21.

表 1-21

$\begin{pmatrix} B^{-1} \\ -C_B^T B^{-1} \end{pmatrix}$	X_B	X_D				$\bar{b}$
		x_1	x_3	x_6	x_7	
$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 14/3 \end{pmatrix}$	x_5					14/3
	x_2					8/3
	x_4					4
	r_D	10/3	22/3	1/3	14/3	68/3

由表 1-21 得本问题的最优解和最优值分别为

$$\mathbf{X}^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T = (0, 8/3, 0, 4, 14/3, 0, 0)^T,$$

$$f^* = -\frac{68}{3}.$$

当(LP)中变量个数 n 大大超过约束方程的个数 m 时,在电子计算机上使用改进单纯形法,可以节省较多的内存单元和减少计算量.同时,为了避免舍入误差的积累,当计算机求解(LP)迭代了一定的步骤后,可重新由(LP)的原始数据 B, C_B 和 b 直接计算 $B^{-1}, C_B^T B^{-1}, \bar{b} = B^{-1}b, f_0 = C_B^T \bar{b}$,以校正当前的矩阵 G ,保持算法的稳定性.这里我们顺便指出,在用手工作计算时,使用改进单纯形法并没有减少计算量.

§ 1.7 大 M 法和两阶段法

单纯形法要求初始单纯形表对应的基本解为可行解.如果我们求解的线性规划具有下面的形式:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

其中 $b_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). 那么,对每一个不等式约束 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ 都引进一个松弛变量 x_{n+i} 而将本问题化成标准型后,我们可取初始指标集

$$I_B = \{n+1, \dots, n+m\}$$

(这时基 B 为一个单位阵 I),于是,就可非常方便地找到了一个初始基本可行解:

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{b}, \quad \mathbf{X}_D = \mathbf{0}.$$

但是,一般来说,线性规划为下列形式:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

那么,将其标准化后,要从标准型中较快地观察出一个初始基本可行解,就不是一件容易的事了,何况有些线性规划本来就不可行.本节介绍人工变量法(分大 M 法和两阶段法),解决判别线性规划是否有可行解及寻求初始基本可行解这两个问题.

1.7.1 大 M 法

现给标准型线性规划(LP):

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j ; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

对第 i 个等式约束引进一个非负变量 $x_{n+i} (i = 1, \dots, m)$, 我们称它们为人工变量, 得到一个线性规划(LP_M):

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m M x_{n+i} ; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ &x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1-48)$$

其中 M 是一个充分大的正数. 为了今后说明问题方便起见, 记

$$\mathbf{X}_N = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \mathbf{X}_M = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T.$$

显然, 用单纯形法求解(LP_M)时, 我们就取初始指标集 $I_B = \{n+1, \dots, n+m\}$, 其相应基 B 为一个单位阵.

此时, 基本解 $\mathbf{X}_B = \mathbf{b}$, $\mathbf{X}_D = \mathbf{0}$ 是一个可行解.

由于 M 是一个充分大的惩罚数, (LP_M)要实现最优值, 随着迭代的进行必然不断地把人工变量从基本变量中置换出去而成为非基本变量.

下面的定理 1-3 将告诉我们, 当(LP_M)求解结束时, 原有问题(LP)的求解也就同时得到了解决.

定理 1-3 应用单纯形法求解(LP_M), 那么

(1) 如果(LP_M)的基本最优解 $\mathbf{X}^*$ 存在, 人工变量 $x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*$ 都为零, 则 $\mathbf{X}_N^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ 即为(LP)之最优解; 反之, $\mathbf{X}_M^*$ 中存在某个人工变量 $x_{n+k}^* > 0$, 则(LP)不可行.

(2) 如果算法终止时知(LP_M)无下界, 且在此时得到的基本可行解 $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n+m})^T$ 中, 人工变量 $\hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_{n+m}$ 全为零, 则(LP)也无下界; 反之, $\hat{\mathbf{X}}_M$ 中存在某个 $\hat{x}_{n+k} > 0$, 则(LP)不可行.

该定理告诉我们, 在用大 M 法求解(LP)所得的最后一张单纯形表 $T(B)$ 中, 如果基本变量 $\mathbf{X}_B$ 中存在值大于零的人工变量, 则(LP)不可行; 反之, 在基本解中, 若人工变量的值都为零, 则(LP)与(LP_M)或者都有最优解, 或者都无下界.

在大 M 法迭代过程中, 由公式

$$r_j = c_j - \mathbf{C}_B^T \mathbf{y}^j, \quad f_0 = \mathbf{C}_B^T \bar{\mathbf{b}}$$

可知, 单纯形表中 r_j 和 f_0 为 M 的一次多项式. 设它们为

$$\begin{aligned} r_j &= \tilde{r}_j M + \hat{r}_j, \quad j = 1, \dots, n+m, \\ f_0 &= \tilde{f}_0 M + \hat{f}_0. \end{aligned} \quad (1-49)$$

由于 M 是一个充分大的正数, 因此,

当 $\tilde{r}_j > 0$ 时, 无论 $\hat{r}_j$ 取何值, 此时都有 $r_j > 0$;

当 $\tilde{r}_j < 0$ 时, 无论 $\hat{r}_j$ 取何值, 都有 $r_j < 0$;

当 $\tilde{r}_j = 0$ 时, r_j 的正负就取决于 $\hat{r}_j$ 的值. 我们在比较 r_j 和 r_k 的大小时, 主要比较 $\tilde{r}_j$ 和 $\tilde{r}_k$ 的大小, 只有当 $\tilde{r}_j = \tilde{r}_k$ 时, 才比较 $\hat{r}_j$ 和 $\hat{r}_k$ 的大小.

例 1-14 求解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 + 5x_2 + 7x_3; \\ \text{s. t. } \quad &2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 8, \\ &2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 20, \\ &4x_2 - x_3 = 8, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

解 首先将它化成标准型:

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 + 5x_2 + 7x_3; \\ \text{s. t. } \quad &2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ &2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 20, \\ &4x_2 - x_3 = 8, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

因为松弛变量 x_5 可以作为初始基本变量, 所以我们仅对第一、第三个等式约束分别引进人工变量 x_6 及 x_7 , 得 (LP_M) :

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + Mx_6 + Mx_7; \\ \text{s. t. } \quad &2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 8, \\ &2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 20, \\ &4x_2 - x_3 + x_7 = 8, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

用单纯形法求解时, 可取初始指标集

$$I_B = \{6, 5, 7\},$$

这时基 $B = I = B^{-1}$, $C_B^T = (M, 0, M)$.

对初始单纯形表 $T(B)$ 的有关元素计算如下:

$$y^j = B^{-1}A_{\cdot j} = A_{\cdot j}; \quad \bar{b} = B^{-1}b = b;$$

$$f_0 = C_B^T B^{-1}b = (M, 0, M) \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = 16M;$$

由于 $r_j = c_j - C_B^T y^j$, 则

$$\begin{aligned}
 & (r_1, r_2, r_3, r_4) \\
 &= (c_1, c_2, c_3, c_4) - C_B^T(y^1, y^2, y^3, y^4) \\
 &= (3, 5, 7, 0) - (M, 0, M) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (3 - 2M, 5 - 2M, 7, M).
 \end{aligned}$$

或者,我们在初始单纯形表 $T(B)$ 的右边添加一列 C_B ,上端添加一行 C ,利用公式 $r_j = c_j - C_B^T y^j$ 和 $f_0 = C_B^T \bar{b}$ 直接在表上计算 r_j 及 f_0 .

我们得初始单纯形表如表 1-22 所示.

表 1-22

C		3	5	7	0	0	M	M	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
M	x_6	(2)	-2	1	-1	0	1	0	8
0	x_5	2	3	2	0	1	0	0	20
M	x_7	0	4	-1	0	0	0	1	8
r		$3 - 2M$	$5 - 2M$	7	M	0	0	0	$-16M$

我们取 x_1 为进基变量, x_6 为出基变量, $y_{11} = 2$ 为枢轴元素,进行转轴,得表 1-23.

表 1-23

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	-1	1/2	-1/2	0	1/2	0	4
x_5	0	5	1	1	1	-1	0	12
x_7	0	(4)	-1	0	0	0	1	8
r	0	$8 - 4M$	$\frac{11}{2} + M$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2} + M$	0	$-12 - 8M$

继续迭代得表 1-24.

表 1-24

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/4	-1/2	0	1/2	1/4	6
x_5	0	0	9/4	1	1	-1	-5/4	2
x_2	0	1	-1/4	0	0	0	1/4	2
r	0	0	15/2	3/2	0	$-\frac{3}{2} + M$	$M - 2$	-28

由表 1-24 得原规划的最优解和最优值如下:

$$X^* = (x_1, x_2, x_3)^T = (6, 2, 0)^T; \quad f^* = 28.$$

例 1-15 求解下列线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 - x_2 ; \\ \text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 &\geq 6 , \\ x_1 - x_2 &\leq 6 , \\ x_j &\geq 0 , \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

解 上述线性规划问题相应的 (LP_M) 如下：

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 - x_2 + Mx_5 ; \\ \text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 &= 6 , \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 6 , \\ x_j &\geq 0 , \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

取初始 $I_B = \{5, 4\}$, 有 $B = I = B^{-1}$, $C_B = (M, 0)^T$, 整个迭代过程见表 1-25 和表 1-26 (初始单纯形表中的信息 r_j 和 f_0 我们利用公式 $r_j = c_j - C_B^T y^j$ 和 $f_0 = C_B^T \bar{b}$ 直接在表上计算, 转轴过程中的 r_j 和 f_0 我们仍用转轴公式来计算).

表 1-25

C		2	-1	0	0	M	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
M	x_5	2	(3)	-1	0	1	6
0	x_4	1	-1	0	1	0	6
r		$2 - 2M$	$-1 - 3M$	M	0	0	$-6M$

表 1-26

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	2/3	1	-1/3	0	1/3	2
x_4	5/3	0	-1/3	1	1/3	8
r	8/3	0	-1/3	0	$M + 1/3$	2

现在 $r_3 = -\frac{1}{3} < 0$, 而 $y_{13} = -\frac{1}{3} < 0$, $y_{23} = -\frac{1}{3} < 0$, 故 (LP_M) 无下界, 又由于人工变量 $x_5 = 0$, 因此原规划无下界.

例 1-16 求解下列线性规划：

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 ; \\ \text{s. t. } 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 1 , \\ -x_1 + x_2 - 4x_4 &= 1 , \\ x_j &\geq 0 , \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

解 引进人工变量 x_5 和 x_6 , 得 (LP_M) ：

$$\begin{aligned}
& \min f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + Mx_5 + Mx_6; \\
& \text{s. t.} \quad \begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 + x_5 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - 4x_4 + x_6 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}
\end{aligned}$$

现取初始指标集 $I_B = \{5, 6\}$, 此时基 $B = I = B^{-1}$, $C_B^T = (M, M)$, 因而

$$\begin{aligned}
& (r_1, r_2, r_3, r_4) \\
&= (c_1, c_2, c_3, c_4) - C_B^T B^{-1} (A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 3}, A_{\cdot 4}) \\
&= (1, -2, 3, 2) - (M, M) \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
&= (1 - 2M, -2 + 2M, 3 + 3M, 2 - 2M).
\end{aligned}$$

为了在实际计算时避开 M 值, 我们可以采用如下方法来处理: 由式(1-49)知, $r_j = \tilde{r}_j M + \hat{r}_j$, $f_0 = \tilde{f}_0 M + \hat{f}_0$, 于是, 可把单纯形表最后一行(r 所在行)拆成两行($\tilde{r}$ 所在行和 $\hat{r}$ 所在行), 用数对 $(\tilde{r}_j, \hat{r}_j)$ 来代替 r_j , 用 $(\tilde{f}_0, \hat{f}_0)$ 来代替 f_0 . 转轴时 $\tilde{r}$ 所在行与 $\hat{r}$ 所在行一起参加转轴, 使 $\tilde{r}_t$ 和 $\hat{r}_t$ 都化成零.

由此我们得初始单纯形表如表 1-27, 转轴后得表 1-28.

表 1-27

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_5	(3)	-3	-3	6	1	0	1
x_6	-1	1	0	-4	0	1	1
$\tilde{r}$	-2	2	3	-2	0	0	-2
$\hat{r}$	1	-2	3	2	0	0	0

表 1-28

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	-1	-1	2	1/3	0	1/3
x_6	0	0	-1	-2	1/3	1	4/3
$\tilde{r}$	0	0	1	2	2/3	0	-4/3
$\hat{r}$	0	-1	4	0	-1/3	0	-1/3

现在 $r_2 = \tilde{r}_2 M + \hat{r}_2 = -1 < 0$, 而 $y_{12} = -1 < 0$, $y_{22} = 0$, 最小比值准则失效, 故 (LP_M) 无下界. 又由于人工变量 $x_6 = \frac{4}{3} > 0$, 因此原有规划不可行.

1.7.2 两阶段法

对标准型线性规划 $(LP)(1-2)$, 我们引入人工变量构造辅助规划 (LP_1) :

$$\begin{aligned}
 \min d &= \sum_{i=1}^m x_{n+i} ; \\
 \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
 &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{LP_1}$$

仍记 $\mathbf{X}_N = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{X}_M = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$.

所谓两阶段法是把求解(LP)分成两个阶段:

第一阶段用单纯形法求解(LP_1), 根据求解结果来判别(LP)是否可行. 若(LP)可行, 则求得(LP)的一个初始基本可行解;

第二阶段从求得的初始基本可行解出发, 用单纯形法求解(LP).

现在我们仍假设(LP)中 $b_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). 因此, 对于(LP_1)取初始指标集

$$I_B = \{n+1, \dots, n+m\},$$

则 $\mathbf{X}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{X}_M = \mathbf{b}$ 就是(LP_1)关于基 B (为单位阵 I) 的一个基本可行解. 又因为(LP_1)的目标函数 d 中变量的系数均为非负, 故(LP_1)在可行域内一定下有界, 也就是说(LP_1)一定有最优值. 设(LP_1)的基本最优解为

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{X}_N^*, \quad \mathbf{X}_M = \mathbf{X}_M^*,$$

相应的最优基为 B^* , 指标集 I_{B^*} 为 $\{B_1^*, \dots, B_m^*\}$, 最优值为 d^* , 最优表为 $T(B^*)$.

根据 $T(B^*)$ 的有关信息, 可发生下面 4 种情况:

(1) 最优值 $d^* > 0$, $\mathbf{X}_M^* \neq \mathbf{0}$ (即至少存在一个人工变量 $x_{n+i}^* > 0$). 此时, 我们可以断定(LP)不可行(反之, (LP)有可行解 $\mathbf{X}_N^0$, 则 $\mathbf{X}_N = \mathbf{X}_N^0$, $\mathbf{X}_M = \mathbf{0}$, 就是(LP_1)的一个可行解, 而它的目标函数值 $d = 0$, 与(LP_1)的最优值 $d^* > 0$ 矛盾).

(2) 最优值 $d^* = 0$, $\mathbf{X}_M^* = \mathbf{0}$, 且人工变量 x_{n+i} ($i = 1, \dots, m$) 均不是 $T(B^*)$ 的基本变量. 从而, B^* 也是(LP)的一个基, $\mathbf{X}_N^*$ 即为(LP)的一个基本可行解. 我们就以 $\mathbf{X}_N^*$ 作为(LP)的初始基本可行解 $\mathbf{X}^0$, B^* 为初始基 B^0 , 对(LP)进行求解. 在第二阶段, (LP)的初始单纯形表 $T(B^0)$ 可以从 $T(B^*)$ 得到: 从 $T(B^*)$ 中删去人工变量各列元素和检验数 r 行元素, 其余元素保留. 利用公式 $r_j = c_j - \mathbf{C}_B^T \mathbf{y}^j$ 及 $f_0 = \mathbf{C}_B^T \bar{\mathbf{b}}$ 重新计算 r 行元素.

(3) 最优值 $d^* = 0$, $\mathbf{X}_M^* = \mathbf{0}$, 但存在某个人工变量是 $T(B^*)$ 的基本变量 $x_{B_k^*}$: $\bar{b}_k = 0$. 同时, 在 $T(B^*)$ 的第 k 行元素 $y_{k1}, \dots, y_{kn}$ 中存在不为零的元素, 例如 y_{kt} ($t \leq n$, $y_{kt} > 0$ 或 $y_{kt} < 0$). 以 y_{kt} 为枢轴元素进行转轴, x_t 取代 $x_{B_k^*}$ 而成为基本变量.

(4) 最优值 $d^* = 0$, $\mathbf{X}_M^* = \mathbf{0}$, 存在某个人工变量是 $T(B^*)$ 的基本变量 $x_{B_k^*}$: $\bar{b}_k = 0$. 同时 $T(B^*)$ 中第 k 行元素 $y_{k1}, \dots, y_{kn}$ 均为零. 我们知道, $T(B^*)$ 相应的 m 个等式约束方程为

$$x_{B_k^*} + \sum_{j \in I_{D^*}} y_{ij} x_j = \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

它们是(LP_1)的 m 个等式约束方程

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

的变形. 在人工变量

$$x_{n+i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \text{ 时,}$$

就得到(LP)的 m 个等式约束方程:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

其相应的变形为

$$\sum_{j=1}^n y_{ij}x_j = \bar{b}_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

现在 $y_{kj} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$, 故上述 m 个方程中第 k 个方程就成了一个恒等式 $0 = 0$. 它说明(LP)的 m 个方程

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

不是相互独立的, $T(B^*)$ 中第 k 行所相应的方程是一个多余的方程. 所以, 我们可以把 $T(B^*)$ 的第 k 行元素和 $x_{B_k^*}$ 列元素从单纯形表中删去(对 $T(B^*)$ 中 r 行元素按公式(1-44)、(1-45)重新计算).

下面我们给出两阶段法的算法步骤:

① 应用单纯形法求解 (LP_1) (取初始 $I_B = \{n+1, \dots, n+m\}$), 得基本最优解 X_N^* , X_M^* , 最优基 B^* , 指标集 $I_{B^*} = \{B_1^*, \dots, B_m^*\}$, 单纯形表 $T(B^*)$.

② $X_M^* = 0$?

若是, 则转步骤③;

若否, 则(LP)不可行, 算法终止.

③ 在 I_{B^*} 中是否存在 $B_k^* > n$?

若是, 则转步骤④.

若否, 则转步骤⑤.

④ $T(B^*)$ 中是否存在 $y_{kt} \neq 0 \quad (t \leq n)$?

若是, 则以 y_{kt} 为枢轴元素进行转轴, 得新的 $T(B^*)$, I_{B^*} , 转步骤③.

若否, 则从 $T(B^*)$ 中删去第 k 行和第 B_k^* 列, 从 I_{B^*} 中删去 B_k^* , 转步骤③.

⑤ 在 $T(B^*)$ 中删除第 $n+1$ 至第 $n+m$ 列, 用(LP)的目标函数系数 $c_1, \dots, c_n$ 重新计算 $T(B^*)$ 中 r 行元素, 以 I_{B^*} 为初始指标集, 从 $T(B^*)$ 出发, 用单纯形法求解(LP).

例 1-17 用两阶段法求解例 1-14.

解 第一阶段, 引进人工变量 x_6 和 x_7 , 得 (LP_1) :

$$\begin{aligned} \min d &= x_6 + x_7; \\ \text{s. t. } 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &= 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 &= 20, \\ 4x_2 - x_3 + x_7 &= 8, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

取初始 $I_B = \{6, 5, 7\}$, 迭代过程如表 1-29, 表 1-30, 表 1-31 所示.

表 1-29

C		0	0	0	0	0	1	1	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	(2)	-2	1	-1	0	1	0	8
0	x_5	2	3	2	0	1	0	0	20
1	x_7	0	4	-1	0	0	0	1	8
r		-2	-2	0	1	0	0	0	-16

表 1-30

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	-1	1/2	-1/2	0	1/2	0	4
x_5	0	5	1	1	1	-1	0	12
x_7	0	(4)	-1	0	0	0	1	8
r	0	-4	1	0	0	1	0	-8

表 1-31

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/4	-1/2	0	1/2	1/4	6
x_5	0	0	9/4	1	1	-1	-5/4	2
x_2	0	1	-1/4	0	0	0	1/4	2
r	0	0	0	0	0	1	1	0

可知 (LP_1) 的最优值为 0, 出现情况(2). 得 (LP) 的一个初始基本可行解:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (6, 2, 0, 0, 2)^T.$$

第二阶段 将表 1-31 中 r 行和人工变量 x_6 及 x_7 列删去, 重新计算 r 行元素, 得表 1-32.

表 1-32

C		3	5	7	0	0	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	1	0	1/4	-1/2	0	6
0	x_5	0	0	9/4	1	1	2
5	x_2	0	1	-1/4	0	0	2
r		0	0	15/2	3/2	0	-28

由表 1-32 得 (LP) 的最优解和最优值分别为

$$X^* = (x_1, x_2, x_3)^T = (6, 2, 0)^T, f^* = 28.$$

例 1-18 求解 (LP) :

$$\begin{aligned} \min f &= -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 ; \\ \text{s. t.} \quad & x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 , \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 , \\ & 3x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 , \\ & x_j \geqslant 0 , \quad j = 1 , \dots , 5. \end{aligned}$$

解 第一阶段,引入人工变量 x_6 和 x_7 ,得(LP_1)如下:

$$\begin{aligned} \min d &= x_6 + x_7 ; \\ \text{s. t.} \quad & x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 4 , \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 , \\ & 3x_1 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 4 , \\ & x_j \geqslant 0 , \quad j = 1 , \dots , 7. \end{aligned}$$

取初始 $I_B = \{6, 5, 7\}$,迭代过程如表 1-33 表 1-34 所示.

表 1-33

C		0	0	0	0	0	1	1	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	0	1	2	1	0	1	0	4
0	x_5	-1	2	1	1	1	0	0	4
1	x_7	3	0	(3)	1	0	0	1	4
r		-3	-1	-5	-2	0	0	0	-8

表 1-34

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_6	-2	1	0	1/3	0	1	-2/3	4/3
x_5	-2	(2)	0	2/3	1	0	-1/3	8/3
x_3	1	0	1	1/3	0	0	1/3	4/3
r	2	-1	0	-1/3	0	0	5/3	-4/3

在表 1-35 中,出现了情况(3),人工变量 x_6 为基本变量, $x_6 = 0$. 我们取 x_6 所在行的元素 $y_{11} = -1$ 为枢轴元素进行转轴,得表 1-36.

表 1-35

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_6	(-1)	0	0	0	-1/2	1	-1/2	0
x_2	-1	1	0	1/3	1/2	0	-1/6	4/3
x_3	1	0	1	1/3	0	0	1/3	4/3
r	1	0	0	0	1/2	0	3/2	0

表 1-36

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	1/2	-1	1/2	0
x_2	0	1	0	1/3	1	-1	1/3	4/3
x_3	0	0	1	1/3	-1/2	1	-1/6	4/3
r	0	0	0	0	0	1	1	0

于是,成为情况(2),得(LP)的一个初始基本可行解:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (0, 4/3, 4/3, 0, 0)^T.$$

第二阶段,将表 1-36 中 r 行和人工变量 x_6 及 x_7 列删除,重新计算 r 行,得表 1-37,转轴得表 1-38.

表 1-37

C		-4	2	-3	-3	0	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-4	x_1	1	0	0	0	1/2	0
2	x_2	0	1	0	(1/3)	1	4/3
-3	x_3	0	0	1	1/3	-1/2	4/3
r		0	0	0	-8/3	-3/2	4/3

表 1-38

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	1/2	0
x_4	0	3	0	1	3	4
x_3	0	-1	1	0	-3/2	0
r	0	8	0	0	13/2	12

得(LP)最优解 $X^* = (0, 0, 0, 4, 0)^T$,最优值 $f^* = -12$.

例 1-19 求解(LP):

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 2x_4; \\ \text{s. t. } 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 16, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

解 第一阶段,引进人工变量 x_5, x_6 和 x_7 ,得(LP₁):

$$\begin{aligned} \min d &= x_5 + x_6 + x_7; \\ \text{s. t. } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 &= 16, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_7 &= 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

取初始 $I_B = \{5, 6, 7\}, B = I = B^{-1}$,迭代过程如表 1-39 ,表 1-40 ,表 1-41 所示.

表 1-39

C		0	0	0	0	1	1	1	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_5	2	1	1	0	1	0	0	12
1	x_6	1	2	0	1	0	1	0	16
1	x_7	-1	(1)	-1	1	0	0	1	4
r		-2	-4	0	-2	0	0	0	-32

表 1-40

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_5	(3)	0	2	-1	1	0	-1	8
x_6	3	0	2	-1	0	1	-2	8
x_2	-1	1	-1	1	0	0	1	4
r	-6	0	-4	2	0	0	4	-16

表 1-41

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	2/3	-1/3	1/3	0	-1/3	8/3
x_6	0	0	0	0	-1	1	-1	0
x_2	0	1	-1/3	2/3	1/3	0	2/3	20/3
r	0	0	0	0	2	0	2	0

在表 1-41 中 $d^* = 0$,人工变量 x_6 为基本变量 , $x_6^* = 0$, x_6 所在行元素 $y_{21} = y_{22} = y_{23} = y_{24} = 0$,出现情况(4) ,因此 ,应从表 1-41 中删除第二行和 x_6 列 ,重新计算 r 行元素 ,得表 1-42.

表 1-42

C		0	0	0	0	1	1	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	
0	x_1	1	0	2/3	-1/3	1/3	-1/3	8/3
0	x_2	0	1	-1/3	2/3	1/3	2/3	20/3
r		0	0	0	0	1	1	0

于是,成为情况(2),得(LP)一个初始基本可行解

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \left(\frac{8}{3}, \frac{20}{3}, 0, 0\right)^T.$$

第二阶段:对表 1-42,删除 x_5 列和 x_7 列及 r 行元素,重新计算 r 行元素,得表 1-43,转轴后得表 1-44.

表 1-43

$\mathbf{C}$		3	6	6	2	$\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	
3	x_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	$8/3$
6	x_2	0	1	$-1/3$	$(2/3)$	$20/3$
$\mathbf{r}$		0	0	6	-1	-48

表 1-44

$\mathbf{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{\mathbf{b}}$
x_1	1	$1/2$	$1/2$	0	6
x_4	0	$3/2$	$-1/2$	1	10
$\mathbf{r}$	0	$3/2$	$11/2$	0	-38

得(LP)最优解和最优值分别为

$$\mathbf{X}^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (6, 0, 0, 10)^T, f^* = 38.$$

* 1.7.3 退化情况与勃兰德法则

若(LP)的基本可行解 $\mathbf{X}$ 的某个基本变量 $x_{B_k} = 0$,则我们称 $\mathbf{X}$ 为退化的基本可行解,并称(LP)为退化的线性规划问题.

在单纯形法转轴过程中,若已选定进基本量 x_t ,而在按最小比值准则

$$\frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{it}} \mid y_{it} > 0, 1 \leq i \leq m \right\}$$

选择指标 k 时,若有两个指标 k_1 和 k_2 同时满足该准则,则我们可在 k_1 和 k_2 中任选一个作为指标 k .但是在此种情况下,在转轴后的单纯形表中必然有某个基本变量为零(例如,

取 $k = k_1$,则由式(1-32)知, $\bar{b}'_{k_2} = \bar{b}_{k_2} - \frac{\bar{b}_{k_1}}{y_{k_1 t}} y_{k_2 t} = 0$),即对应的基本可行解为退化的.

若(LP)是非退化的线性规划(所有的基本可行解非退化),那么,在用单纯形法求解的过程中,每转轴一次,由式(1-36)知,目标函数值就严格下降.这样,保证了每一个基本可行解不可能在迭代过程中出现两次.由于基本可行解的个数有限,因此,经有限步迭代后,算法一定收敛.

现在的问题是,对于退化的线性规划,是不是也能保证迭代的有限步呢?结论有两种情况:

第一种情况,对某些退化的(LP)问题,虽然在某几次迭代中,目标函数值得不到改善,使收敛速度放慢,但最终还是求到了最优解.

第二种情况,个别例子说明,单纯形法可能无穷无尽地迭代,目标函数值毫不改变.这时候,从某一个指标集 I_B 出发经过多次转轴后又回到原来的指标集 I_B 而产生循环,使

(LP)始终达不到最优解.这种情况叫死循环.由于在实际问题中,死循环情况极少出现,因此在本书中我们不再举例作详细介绍.

为了避免(LP)退化情况死循环的出现,在数学理论上有多种处理方法.例如,摄动法.我们介绍一种勃兰德(Bland)避免循环的方法.

1976年,勃兰德指出,在单纯形法转轴过程中按勃兰德法则来确定指标 t 和 k ,就可以避免退化问题在迭代过程中出现死循环.我们用定理1-3来给出勃兰德法则.

定理 1-4 如果在单纯形法中采用下述勃兰德法则确定指标 t 和 k ,则在迭代过程中不会出现死循环:

$$(1) \quad t = \min\{j \mid r_j < 0, j \in I_D\}; \quad (1-50)$$

$$(2) \quad B_k = \min\left\{B_s \mid \frac{\bar{b}_s}{y_{st}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{it}} \mid y_{it} > 0, 1 \leq i \leq m\right\}\right\}. \quad (1-51)$$

也就是说,按勃兰德法则,在迭代过程中如果有多个检验数 r_j 都是负的,那么选其中下标最小的检验数的相应下标作为指标 t ;如果有几个 $\frac{\bar{b}_s}{y_{st}}$ 同时达到

$$\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{it}} \mid y_{it} > 0, 1 \leq i \leq m\right\},$$

那么,选取诸 B_s 中最小者作为 B_k .

我们完全可以根据勃兰德法则对 t 、 k 指标的选择来修改单纯形法的步骤,但是可能会使收敛的速度放慢.由于大量的实践经验表明,实际问题一般不会发生死循环情形,所以,在现代的计算机程序中并没有考虑退化的问题,而仍采用一般的单纯形法.

§ 1.8 线性规划应用举例

线性规划是运筹学中应用最为广泛的一个主要分支,但是,我们不可能用大量的篇幅去讨论生产实践中的大型问题,而只能列举一些类型不同的简单的例题,以此来介绍一些构建模型的技巧.我们从中可以看到,如何选择适当的决策变量,是我们有效地建立模型的关键之一.至于对现实中错综复杂的客观问题,如何建立一个好的、适当的模型,只能有待应用者通过实践不断地去积累经验.

例 1-20 (生产计划问题) 某工厂明年根据合同,每个季度末向销售公司提供产品,有关信息如表1-45所示.若当季生产的产品过多,季末有积压,则一个季度每积压一

表 1-45

季 度 j	生产能力 a_j (吨)	生产成本 d_j (万元/吨)	需求量 b_j (吨)
1	30	15.0	20
2	40	14.0	20
3	20	15.3	30
4	10	14.8	10

吨产品需支付存储费 0.2 万元. 现该厂考虑明年的最佳生产方案, 使该厂在完成合同的情况下, 全年的生产费用最低. 试建立线性规划模型.

解 现在我们对本问题定义 3 种不同形式的决策变量, 从而从不同的途径来构建模型.

(1) 设工厂第 j 季度生产产品 x_j 吨.

首先, 考虑约束条件: 第一季度末工厂需交货 20 吨, 故应有 $x_1 \geq 20$; 第一季度末交货后积余 $(x_1 - 20)$ 吨; 第二季度末工厂需交货 20 吨, 故应有 $x_1 - 20 + x_2 \geq 20$; 类似地, 应有 $x_1 + x_2 - 40 + x_3 \geq 30$; 第四季度末供货后工厂不能积压产品, 故应有 $x_1 + x_2 + x_3 - 70 + x_4 = 10$; 又考虑到工厂每个季度的生产能力, 故应有 $0 \leq x_j \leq a_j$.

其次, 考虑目标函数: 第一季度工厂的生产费用为 $15.0x_1$, 第二季度工厂的费用包括生产费用 $14x_2$ 及积压产品的存储费 $0.2(x_1 - 20)$; 类似地, 第三季度费用为 $15.3x_3 + 0.2(x_1 + x_2 - 40)$, 第四季度费用为 $14.8x_4 + 0.2(x_1 + x_2 + x_3 - 70)$. 工厂一年的费用即为这 4 个季度费用之和. 整理后, 得下列线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min f &= 15.6x_1 + 14.4x_2 + 15.5x_3 + 14.8x_4 - 26; \\ \text{s. t. } & \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 40, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 70, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 80, \\ 20 \leq x_1 \leq 30, & 0 \leq x_2 \leq 40, \quad 0 \leq x_3 \leq 20, \quad 0 \leq x_4 \leq 10. \end{aligned} \end{aligned}$$

(2) 设第 j 季度工厂生产的产品为 x_j 吨, 第 j 季度初存储的产品为 y_j 吨 (显然, $y_1 = 0$).

因为每季度初的存储量为上季度存储量、生产量之和与上季度的需求量之差, 又考虑到第四季度末存储量为零, 故有

$$\begin{aligned} x_1 - 20 &= y_2, & y_2 + x_2 - 20 &= y_3, \\ y_3 + x_3 - 30 &= y_4, & y_4 + x_4 &= 10. \end{aligned}$$

同时, 每季度的生产量不能超过生产能力: $x_j \leq a_j$; 而工厂 4 个季度的总费用由每季的生产费用与存储费用组成, 于是得线性规划:

$$\begin{aligned} \min f &= 15.0x_1 + 0.2y_2 + 14x_2 + 0.2y_3 + 15.3x_3 + 0.2y_4 + 14.8x_4; \\ \text{s. t. } & \begin{aligned} x_1 - y_2 &= 20, \\ y_2 + x_2 - y_3 &= 20, \\ y_3 + x_3 - y_4 &= 30, \\ y_4 + x_4 &= 10, \\ 0 \leq x_1 \leq 30, & 0 \leq x_2 \leq 40, \\ 0 \leq x_3 \leq 20, & 0 \leq x_4 \leq 10, \\ y_j \geq 0, & j = 2, 3, 4. \end{aligned} \end{aligned}$$

(3) 设第 i 季度生产而用于第 j 季度末交货的产品数量为 x_{ij} 吨. 根据合同要求, 必须有

$$\begin{aligned}x_{11} &= 20, & x_{12} + x_{22} &= 20, \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 30, & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 10.\end{aligned}$$

又每季度生产而用于当季和以后各季交货的产品数不可能超过该季度工厂的生产能力, 故应有

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 30, \\x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 40, \\x_{33} + x_{34} &\leq 20, & x_{44} &\leq 10.\end{aligned}$$

第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的每吨产品的费用 $c_{ij} = d_j + 0.2(j-i)$, 于是, 有线性规划模型:

$$\begin{aligned}\min f &= 15.0x_{11} + 15.2x_{12} + 15.4x_{13} + 15.6x_{14} \\&\quad + 14x_{22} + 14.2x_{23} + 14.4x_{24} + 15.3x_{33} \\&\quad + 15.5x_{34} + 14.8x_{44}; \\s. t. \quad &x_{11} = 20, \\&x_{12} + x_{22} = 20, \\&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30, \\&x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 10, \\&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 30, \\&x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 40, & x_{33} + x_{34} &\leq 20, \\&x_{44} \leq 10, \\&x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 4, j \geq i.\end{aligned}$$

例 1-21 (多阶段投资问题) 某公司现有资金 30 万元可用于投资, 5 年内有下列方案可供采纳:

- 1[#] 方案: 在年初投资 1 元, 2 年后可收回 1.3 元;
- 2[#] 方案: 在年初投资 1 元, 3 年后可收回 1.45 元;
- 3[#] 方案: 仅在第 1 年年初有一次投资机会, 每投资 1 元, 4 年后可收回 1.65 元;
- 4[#] 方案: 仅在第 2 年年初有一次投资机会, 每投资 1 元, 4 年后可收回 1.7 元;
- 5[#] 方案: 在年初贷给其他企业, 年息为 10%, 第二年年年初可收回.

每年年初投资所得收益及贷款本金利息也可用作安排. 问该公司在 5 年内怎样使用资金, 才能在第六年年年初拥有最多资金?

解 设 x_i^j 为 $i^{\#}$ 方案在第 j 年年初所使用的资金数.

显然, 对于 3[#] 及 4[#] 方案, 仅有 x_3^1 和 x_4^2 . 此外, 不考虑 x_1^5, x_2^4, x_2^5 , 因为其相应投资方案回收期超过我们所讨论的期限.

我们将各年的决策变量(表 1-46 中虚线起点)及其相应效益(表 1-46 中虚线终点)列在表 1-46 内.

表 1-46

年 份 j (年初)					
1	2	3	4	5	6
x_1^1 -----→		$1.3x_1^1$			
x_2^1 -----→			$1.45x_2^1$		
x_3^1 -----→				$1.65x_3^1$	
x_5^1 -----→	$1.1x_5^1$				
	x_1^2 -----→		$1.3x_1^2$		
	x_2^2 -----→			$1.45x_2^2$	
	x_4^2 -----→				$1.7x_4^2$
	x_5^2 -----→	$1.1x_5^2$			
		x_1^3 -----→		$1.3x_1^3$	
		x_2^3 -----→			$1.45x_2^3$
		x_5^3 -----→	$1.1x_5^3$		
			x_1^4 -----→		$1.3x_1^4$
			x_5^4 -----→	$1.1x_5^4$	
				x_5^5 -----→	$1.1x_5^5$

显然,第 j 年年初可使用的资金之和应等于第 j 年年初所引用的决策变量之和.于是,根据表 1-46 所示的各种因果关系,我们不难建立如下模型:

$$\begin{aligned}
 \max f &= 1.7x_4^2 + 1.45x_2^3 + 1.3x_1^4 + 1.1x_5^5; \\
 \text{s. t. } &x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 + x_5^1 = 300\,000, \\
 &x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1.1x_5^1, \\
 &x_1^3 + x_2^3 + x_5^3 = 1.3x_1^1 + 1.1x_5^2, \\
 &x_1^4 + x_5^4 = 1.45x_2^1 + 1.3x_1^2 + 1.1x_5^3, \\
 &x_5^5 = 1.65x_3^1 + 1.45x_2^2 + 1.3x_1^3 + 1.1x_5^4, \\
 &x_1^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\
 &x_2^j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \\
 &x_3^1 \geq 0, \quad x_4^2 \geq 0, \quad x_5^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

例 1-22 (混料问题) 某糖果厂用原料 A, B 和 C 按不同比率混合加工而成甲、乙、丙 3 种糖果(假设混合加工中不损耗原料).原料 A, B, C 在糖果甲、乙、丙中的含量、原料成本、加工成本、原料限量及糖果售价如表 1-47 所示.

问该厂对这 3 种糖果各生产多少千克,使得到的利润最大?

表 1-47

含 量		$j^{\#}$ 糖果			原料供应量 a_i (千克)	成本(元/千克)
		甲(1 $^{\#}$)	乙(2 $^{\#}$)	丙(3 $^{\#}$)		
$i^{\#}$ 原料	A(1 $^{\#}$)	$\geq 60\%$	$\geq 15\%$		2 000	2.50
	B(2 $^{\#}$)				2 500	2.00
	C(3 $^{\#}$)	$\leq 20\%$	$\leq 60\%$	$\leq 70\%$	2 200	1.70
加工成本(元/千克)		2.00	1.80	1.60		
售价(元/千克)		12	10	8		

解 设 $i^{\#}$ 原料在 $j^{\#}$ 糖果中的用量为 x_{ij} 千克. 显然 $j^{\#}$ 糖果的产量为 $\sum_{i=1}^3 x_{ij}$. 根据原料供应量情况, 有约束条件

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

根据各种原料在各类糖果中的含量要求, 有约束条件:

$$\begin{aligned} x_{11} &\geq 0.6(x_{11} + x_{21} + x_{31}), \\ x_{31} &\leq 0.2(x_{11} + x_{21} + x_{31}), \\ x_{12} &\geq 0.15(x_{12} + x_{22} + x_{32}), \\ x_{32} &\leq 0.6(x_{12} + x_{22} + x_{32}), \\ x_{33} &\leq 0.7(x_{13} + x_{23} + x_{33}). \end{aligned}$$

又知原料成本为

$$2.5 \sum_{j=1}^3 x_{1j} + 2 \sum_{j=1}^3 x_{2j} + 1.7 \sum_{j=1}^3 x_{3j};$$

糖果加工成本为

$$2 \sum_{i=1}^3 x_{i1} + 1.8 \sum_{i=1}^3 x_{i2} + 1.6 \sum_{i=1}^3 x_{i3};$$

糖果出售收入为

$$12 \sum_{i=1}^3 x_{i1} + 10 \sum_{i=1}^3 x_{i2} + 8 \sum_{i=1}^3 x_{i3},$$

所以产品利润

$$f = 10 \sum_{i=1}^3 x_{i1} + 8.2 \sum_{i=1}^3 x_{i2} + 6.4 \sum_{i=1}^3 x_{i3} - 2.5 \sum_{j=1}^3 x_{1j} - 2 \sum_{j=1}^3 x_{2j} - 1.7 \sum_{j=1}^3 x_{3j}.$$

经过整理, 本问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \max f &= 7.5x_{11} + 5.7x_{12} + 3.9x_{13} + 8x_{21} + 6.2x_{22} + 4.4x_{23} \\ &\quad + 8.3x_{31} + 6.5x_{32} + 4.7x_{33}; \\ \text{s. t.} \quad &x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2\,000, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 2\,500, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 2\,200, \\
 -2x_{11} + 3x_{21} + 3x_{31} &\leq 0, \\
 -x_{11} - x_{21} + 4x_{31} &\leq 0, \\
 -17x_{12} + 3x_{22} + 3x_{32} &\leq 0, \\
 -3x_{12} - 3x_{22} + 2x_{32} &\leq 0, \\
 -7x_{13} - 7x_{23} + 3x_{33} &\leq 0, \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad i, j = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

例 1-23 (下料问题) 造纸厂接到定单,所需卷纸的宽度和长度如表 1-48 所示。(表中具体的单位长度是多少,我们没有给出,视具体问题而定。本教材在一些应用举例中不打算对讨论对象都给出具体的量纲而仅给出数字。例如本题在讨论时,有时连“单位长度”4 个字都省去,就说宽度 5,长度 3 000。以后类似情况,我们不再说明。当然,在同一问题中,同一讨论对象省去的量纲单位应统一。)

表 1-48

卷纸宽度(单位长度)	长度(单位长度)
5	10 000
7	30 000
9	20 000

工厂生长 1[#](宽度 10)和 2[#](宽度 20)两种标准卷纸,其长度未加规定。现按定单要求对标准卷纸进行切割,切割后有限长度的卷纸可连接起来达到所需卷纸的长度。问如何安排切割计划以满足定单需求而使切割损失最小?

解 为了满足定单要求和使切割损失最小,我们可以使用多种切割方法来进行组合。此时,我们不但要考虑对两种标准卷纸的宽度如何进行切割,而且还要确定按某一种方式切割时标准卷纸所耗用的长度。

例如,可以把宽 10 的 1[#] 标准卷纸切割成宽 5 的卷纸 2 卷,根据定单要求,此时需 1[#] 标准卷纸 5 000 单位长度;与此同时,把宽度 20 的 2[#] 标准卷纸切割成宽度 7 和宽度 9 的卷纸各 1 卷,此时为满足定单要求,需 2[#] 标准卷纸 30 000 单位长度。按此切割方案,宽度 9 的卷纸多生产 10 000 单位长度,因此,切割损失的面积为 $(20 - 7 - 9) \times 30\,000 + 9 \times 10\,000$ 。

设 x_{ij} 为第 i [#] 标准卷纸按第 j 种方式切割时所耗用的长度。

各种可能的切割方式及切割损失宽度由下表 1-49 给出(每种方式所产生的切割损失宽度应小于 5)。

表 1-49

切割所得卷数		切割长度 x_{ij}									需求长度
		1# 标准卷纸(宽 10)			2# 标准卷纸(宽 20)						
		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
卷纸	宽度 5	2	0	0	4	2	2	1	0	0	10 000
	宽度 7	0	1	0	0	1	0	2	1	0	30 000
	宽度 9	0	0	1	0	0	1	0	1	2	20 000
切割损失宽度		0	3	1	0	3	1	1	4	2	

按这 9 种切割方式,宽度 9 的卷纸所得长度为

$$x_{13} + x_{23} + x_{25} + 2x_{26}.$$

令

$$x_1 = x_{13} + x_{23} + x_{25} + 2x_{26} - 20\,000,$$

则宽度 9、长度 x_1 的卷纸再可切割成宽度 5(切割损失宽度 4)或宽度 7(切割损失宽度 2)的卷纸,设它们的长度分别为 x_2 及 x_3 .

现在切割所得宽度 7 的卷纸其长度为

$$x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} + x_3.$$

令

$$x_4 = x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} + x_3 - 30\,000,$$

则宽度 7、长度 x_4 的卷纸又可切割成宽度 5 的卷纸(切割损失宽度 2).

在上述切割方式组合的条件下,宽度 5 的卷纸其所得长度为

$$2x_{11} + 4x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} + x_{24} + x_2 + x_4.$$

令

$$x_5 = 2x_{11} + 4x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} + x_{24} + x_2 + x_4 - 10\,000.$$

我们应注意到 $4x_2, 2x_3, 2x_4, 5x_5$ 都为卷纸的切割损失面积.从而,总的切割损失面积

$$f = 3x_{12} + x_{13} + 3x_{22} + x_{23} + x_{24} + 4x_{25} + 2x_{26} + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5.$$

于是,我们得本问题的线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_{12} + x_{13} + 3x_{22} + x_{23} + x_{24} + 4x_{25} + 2x_{26} + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5; \\ \text{s. t. } &2x_{11} + 4x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} + x_{24} + x_2 + x_4 - x_5 = 10\,000, \\ &x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} + x_3 - x_4 = 30\,000, \\ &x_{13} + x_{23} + x_{25} + 2x_{26} - x_1 = 20\,000, \\ &x_2 + x_3 = x_1, \\ &x_{1j} \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ &x_{2j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

习 题 一

1. 某工厂生产 A_1, A_2 两种产品,有关信息由表 1-50 给出.问如何制定生产计划,使工厂获得最大利润.

表 1-50

每件产品的 资源定额 a_{ij}		产 品 A_j		资源上限 b_i
		A_1	A_2	
资源 i	资源 1 [#]	9	4	3 600

(续表)

每件产品的 资源定额 a_{ij}		产 品 A_j		资源上限 b_i
		A_1	A_2	
资源 i	资源 2 [#]	4	5	2 000
	资源 3 [#]	3	10	3 000
利润 c_j (元/件)		70	120	

2. 某厂的一个车间有 B_1, B_2 两个工段可生产 A_1, A_2 和 A_3 3 种产品. 各工段开工一天生产 3 种产品的数量和成本, 以及合同对 3 种产品的每周最低需求量由表 1-51 给出. 问每周各工段对该生产任务应开工几天, 可使生产合同的要求得到满足, 并使成本最低.

表 1-51

生产定额(吨/天)		工 段 B_j		生产合同每周最低需求量 b_i (吨)
		B_1	B_2	
产品 A_i	A_1	1	1	5
	A_2	3	1	9
	A_3	1	3	9
成本(元/天)		1 000	2 000	

3. 一个车间要加工 3 种零件, 其需要量分别为 4 000 件、5 000 件和 3 500 件. 车间内现有 4 台机床, 都可用来加工这 3 种零件, 每台机床可利用的工时分别为 1 600, 1 250, 1 800 和 2 000. 机床 $i^{\#}$ 加工零件 $j^{\#}$ 所需工时和成本由表 1-52 给出, 问如何安排生产, 才能使生产成本最低.

表 1-52

机床 $i^{\#}$	定额(工时/件)			成本(元/件)		
	零件 $j^{\#}$			零件 $j^{\#}$		
	1 [#]	2 [#]	3 [#]	1 [#]	2 [#]	3 [#]
1 [#]	0.3	0.2	0.8	4	6	12
2 [#]	0.25	0.3	0.6	4	7	10
3 [#]	0.2	0.2	0.6	5	5	8
4 [#]	0.2	0.25	0.5	7	6	11

4. 用长度为 7.4 米的圆钢截断成制造某种机床所需要的 3 个轴坯, 长度分别为 2.9 米、2.1 米、1.5 米. 现要制造 100 台机床, 试建立线性规划模型, 以寻求最佳的截断方案使所需圆钢最少.

5. 有 A, B 两种产品, 都需经过两道化学反应过程. 每一单位产品 A 需要在前道过程中花去 2 小时和在后道过程中花去 3 小时; 每一单位产品 B 需要在前道过程中花去 3 小时和在后道工程中花去 4 小时. 可供利用的前道过程的时间有 160 小时、后道过程的

时间有 240 小时. 每生产 1 个单位的产品 B, 同时能得到 2 个单位的副产品 C. 出售产品 A 每单位能获利 400 元、产品 B 每单位能获利 350 元、副产品 C 每单位能获利 200 元. 副产品 C 如果卖不出去, 那么每单位的销毁费是 100 元. 由市场预测可知, 最多能售出 70 个单位的副产品 C. 问如何安排生产计划, 可使获得的利润最大?

6. 某厂月底安排某一产品在下个月 4 周的生产计划. 估计每件产品在第一周与第二周的生产成本为 150 元, 后两周为 170 元. 每周产品需求量分别为 700 件、800 件、1 000 件和 1 200 件. 工厂每周至多生产产品 900 件. 在第二周和第三周可以加班生产. 加班生产时每周可增产 300 件, 但生产成本每件需增加 30 元. 过剩的产品的存储费为每件每周 15 元. 问如何安排生产计划, 使总成本为最小?

7. 某企业年初有现金 30 万元. 该企业有两个方案可供选择:

(1) 年初贷给其他企业, 年息 18%, 第二年年年初可收回;

(2) 本企业投资扩大生产. 若年初投资一定金额, 则第二年还需继续投资第一年投资金额的 60%, 而第三年可有等于两年投资额的 1.4 倍收益.

为使第五年年年初企业对使用这部分资金有最大收益, 试确定企业每年资金的使用方案. 请列出数学模型.

8. 把下列线性规划化成标准型:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4; \\ \text{s. t. } &4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 2, \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 20, \\ &x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

9. 试画出下列线性规划的可行域, 并求最优解和最优值:

$$\begin{aligned} (1) \quad \min f &= 3x_1 + 2x_2; & (2) \quad \max f &= 2x_1 + 5x_2; \\ \text{s. t. } &x_1 + 2x_2 \geq 4, & \text{s. t. } &2x_1 + x_2 \leq 12, \\ &x_1 + 6x_2 \geq 6, & &x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. & &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \min f &= -x_1 + \frac{3}{2}x_2; \\ \text{s. t. } &3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &2x_1 - 3x_2 \geq 3 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

10. 给定线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max f &= 2x_1 + 3x_2; \\ \text{s. t. } &x_1 + x_2 \leq 2 \\ &4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(1) 给出两个最优顶点及其最优值.

(2) 给出它的全部最优解的集合.

11. 给定线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min f &= 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 ; \\ \text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 &= 1 , \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 , \\ x_j &\geq 0 , \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

对下列 I_B 分别求出对应的基本解、判别其可行性,并写出它们的单纯形表：

(1) $I_B = \{1, 2\}$; (2) $I_B = \{3, 2\}$; (3) $I_B = \{1, 3\}$.

12. 用单纯形法求解下列线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min f &= -5x_1 - 4x_2 ; \\ \text{s. t. } x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\geq 0 , \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

13. 对线性规划：

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 - 3x_2 ; \\ \text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 &= 2 , \\ 4x_1 + 6x_2 + x_4 &= 9 , \\ x_j &\geq 0 , \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

已得最优单纯形表如表 1-53 所示,判别该(LP)是否有多个基本最优解?若有,试求出.

表 1-53

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	1/3	0	1	-1/6	1/2
x_2	2/3	1	0	1/6	3/2
r	0	0	0	1/2	9/2

表 1-54

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/3	-2/3	2
x_2	0	1	2/3	-1/3	2
r	0	0	2	0	4

14. 对线性规划：

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 - 4x_2 ; \\ \text{s. t. } -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 , \\ 2x_1 - x_2 - x_4 &= 2 , \\ x_j &\geq 0 , \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

得最优单纯形表(见表 1-54). 讨论该(LP)最优解的情况.

15. 应用单纯形法证明下列问题无最优解：

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 ; \\ \text{s. t. } -2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

试找出一个可行解, 它的目标函数值大于 2 000.

16. 给定线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 - 2x_2; \\ \text{s. t.} \quad 3x_1 + 4x_2 &= 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 12, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

对基 $B_1 = (A_{\cdot 3}, A_{\cdot 1}), B_2 = (A_{\cdot 3}, A_{\cdot 2})$, 用矩阵运算给出其单纯形表.

17. 某极小化线性规划的最优单纯形表如表 1-55 所示, 其中 x_3, x_4 为剩余变量, x_5 为松弛变量. 求原有线性规划.

表 1-55

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	1	0	0	1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	3
x_3	-1	0	1	0	1	1
r	1	0	0	0	2	6

18. 用改进单纯形法求解第 12 题.

19. 某个生产计划问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \max f &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3; \\ \text{s. t.} \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 60 \text{ (资源 1}^\# \text{)}, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 40 \text{ (资源 2}^\# \text{)}, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 80 \text{ (资源 3}^\# \text{)}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

其中 x_j 为产品 $j^\#$ 的产量 ($j = 1, 2, 3$). 已知其最佳生产结构为生产 2[#] 和 3[#] 产品, 1[#] 产品不生产, 且资源 3[#] 有剩余, 1[#] 和 2[#] 资源恰好用完. 求 2[#] 和 3[#] 产品的生产数量.

20. 在极小化问题的表 1-56 中, 6 个常数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ 和 β_6 之值未知 (假定 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$ 且诸 x_j 都不是人工变量), 说出对 6 个未知数的要求, 使以下的说法成立:

表 1-56

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_5	0	0	0	0	1	β_1	β_2
x_2	β_3	1	0	-1/2	0	3/2	21/2
x_3	1/2	0	1	β_4	0	-1/2	1/2
r	β_5	0	0	β_6	0	1/2	

(1) 现在的基本解为最优解, 且存在多个基本最优解;

- (2) 现在的基本解不是可行解 ;
 (3) 线性规划不可行 ;
 (4) 现行解是退化的基本可行解 ;
 (5) 该基本解为可行解 ,但问题无最优解 ;
 (6) 该基本解是唯一最优解 ;
 (7) K 无界 ,线性规划有无穷多个最优解 ;
 (8) 该基本解为可行解 ,但是将 x_1 取代 x_2 后 ,目标函数值能够改进 .在转轴后 ,目标函数值降低多少 ?

21. 用大 M 法求解下列各个线性规划问题 :

- (1) $\min f = -3x_1 + x_2 + x_3 ;$
 s. t. $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 ,$
 $-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 ,$
 $2x_1 - x_3 = -1 ,$
 $x_j \geq 0 , j = 1, 2, 3.$
- (2) $\min f = -x_1 - x_2 ;$
 s. t. $x_1 - x_2 - x_3 = 1 ,$
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 ,$
 $x_j \geq 0 , j = 1, 2, 3, 4.$
- (3) $\min f = -x_1 - 3x_2 + x_3 ;$
 s. t. $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 ,$
 $-x_1 + x_3 - x_5 = 4 ,$
 $x_3 - x_6 = 3 ,$
 $x_j \geq 0 , j = 1, \dots, 6.$
- (4) $\min f = -x_1 - x_2 ;$
 s. t. $x_1 - x_2 - x_3 = 1 ,$
 $-x_1 + x_2 - x_4 = 1 ,$
 $x_j \geq 0 , j = 1, \dots, 4.$

22. 应用两阶段法求解下列各个线性规划问题 :

- (1) $\min f = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 ;$
 s. t. $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 ,$
 $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 ,$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 6 ,$
 $x_j \geq 0 , j = 1, \dots, 5.$
- (2) $\min f = -x_1 - 3x_2 + x_3 ;$
 s. t. $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 ,$
 $-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 ,$
 $3x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 ,$
 $x_j \geq 0 , j = 1, \dots, 4.$

23. 对某一极小化的线性规划问题(LP) ,在用大 M 法求解时最后得到表 1-57 所示的一张单纯形表 , x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_6 不是人工变量 ,问 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \tilde{r}_2, \tilde{r}_4$ 和 $\hat{r}_4$ 各为何值以及变量 x_5 属于哪一类性质变量时 ,使以下说法成立 :

- (1) (LP)有唯一最优解 ;
 (2) (LP)的目标函数值在可行域内无下界 ;
 (3) (LP)不可行 .

表 1-57

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_3	0	3	1	-1	0	-2	4
x_1	1	-4	0	β_1	0	1	1
x_5	0	-2	0	β_2	1	0	β_3
r	0	$2 + M\tilde{r}_2$	0	$\hat{r}_4 + M\tilde{r}_4$	0	4	

第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

§ 2.1 对偶问题

我们考虑下述一个线性规划问题.

例 2-1 (营养问题) 某养鸡场所用的混合饲料由 n 种天然饲料配合而成. 要求在这批配合饲料中必须含有 m 种不同的营养成分, 且第 $i^{\#}$ 种营养成分的含量不低于 b_i . 已知第 i 种营养成分在每单位第 $j^{\#}$ 种天然饲料中的含量为 a_{ij} , 第 $j^{\#}$ 种天然饲料每单位的价格为 c_j . 试问, 应如何对这 n 种饲料配方, 使这批饲料的费用最小?

解 设 x_j 为第 $j^{\#}$ 种天然饲料的用量.

显然 $a_{ij}x_j$ 即为所用第 $j^{\#}$ 种天然饲料中第 $i^{\#}$ 种营养成分的含量, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ 为这批混合饲料中第 $i^{\#}$ 种营养成分的总含量, 它不应低于 b_i . 于是, 我们得下列线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2-1)$$

它即

$$\begin{aligned} \min f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}; \\ \text{s. t. } \quad &\mathbf{A}\mathbf{X} \geq \mathbf{b}, \\ &\mathbf{X} \geq 0. \end{aligned} \quad (2-2)$$

现设想有一个饲料加工厂欲把这 m 种营养成分分别制成 m 种营养丸:

设第 $i^{\#}$ 种营养丸的价格为 $u_i (i = 1, \dots, m)$. 则养鸡场采购一个单位的第 $j^{\#}$ 种天然饲料, 就相当于对这 m 种营养丸分别采购数量 $a_{1j}, \dots, a_{mj}$, 所花费用为 $\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i$. 养鸡场自然希望在用营养丸代替天然饲料时, 在价格上能相对地比较便宜, 故而饲料加工厂为了能与天然饲料供应者竞争, 在制订价格时必然满足下述条件:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

另一方面,养鸡场如果全部采购营养丸来代替天然饲料进行配料,则第 i 种营养丸就需采购 b_i 个单位,所花费用为 $b_i u_i$,总费用为 $z = \sum_{i=1}^m b_i u_i$.

饲料加工厂面临的问题是:应把这 m 种营养丸的单价 u_i ($i = 1, \dots, m$) 定为多少,才能使养鸡场乐意全部采用该厂生产的营养丸来取代这批天然饲料,且使本厂在竞争中得到最大收益.为该问题建立数学模型,即得如下线性规划:

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^m b_i u_i; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ &u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2-3)$$

若令 $U = (u_1, \dots, u_m)^T$, 该问题即为

$$\begin{aligned} \max z &= b^T U; \\ \text{s. t.} \quad &A^T U \leq C, \\ &U \geq 0. \end{aligned} \quad (2-4)$$

我们称问题(2-3)为原问题(记为(P))(2-1)的对偶问题(记为(D)). (P)中第 i 个约束条件 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ 对应(D)中第 i 个变量 u_i , (P)中第 j 个变量 x_j 对应(D)中第 j 个约束条件 $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j$. 即(P)和(D)有如下对应关系:

原问题(P): $\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$	对偶问题(D): $\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^m b_i u_i; \\ \text{s. t.} \quad &u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$
---	--

例 2-2 写出下列线性规划问题(P)的对偶问题(D):

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 + 3x_2; \\ \text{s. t.} \quad &3x_1 - 2x_2 = 6, \\ &x_1 + x_2 \geq 4, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

解 首先把它化成模型(2-1)的形式:

令 $x_2 = x'_2 - x''_2$, 得(P):

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 + 3x'_2 - 3x''_2; \\ \text{s. t.} \quad &3x_1 - 2x'_2 + 2x''_2 \geq 6, \\ &-3x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 \geq -6, \\ &x_1 + x'_2 - x''_2 \geq 4, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0.$$

根据上述(P)的对偶问题的定义,我们即可给出它的对偶问题:

$$\begin{aligned} \max z &= 6v_1 - 6v_2 + 4u_2; \\ \text{s. t.} \quad &3v_1 - 3v_2 + u_2 \leq 2, \\ &-2v_1 + 2v_2 + u_2 \leq 3, \\ &2v_1 - 2v_2 - u_2 \leq -3, \\ &v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{aligned}$$

若令 $u_1 = v_1 - v_2$, 则上述问题即为

$$\begin{aligned} \max z &= 6u_1 + 4u_2; \\ \text{s. t.} \quad &3u_1 + u_2 \leq 2, \\ &-2u_1 + u_2 = 3, \\ &u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{aligned}$$

如果我们来分析一下它们之间的对应关系:

原有问题(P):	对偶问题(D):
$\min f = 2x_1 + 3x_2;$	$\max z = 6u_1 + 4u_2;$
$\text{s. t.} \quad 3x_1 - 2x_2 = 6,$	$\text{s. t.} \quad u_1 \leq 0,$
$x_1 + x_2 \geq 4$	$u_2 \geq 0,$
$x_1 \geq 0$	$3u_1 + u_2 \leq 2$
$x_2 \leq 0.$	$-2u_1 + u_2 = 3.$

可见,在对偶问题(D)中,原有问题(P)中的等式约束对应的变量 u_1 为自由变量,(P)中的自由变量 x_2 对应的约束条件为等式约束.在此基础上,我们给出一般线性规划(P)的对偶问题(D)的定义:

原有问题(P):	对偶问题(D):
$\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j;$	$\max z = \sum_{i=1}^m b_i u_i;$
$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in M_1, \quad (2-5)$	$\text{s. t.} \quad u_i \geq 0, \quad i \in M_1,$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in M_2,$	$u_i \leq 0, \quad i \in M_2,$
$x_j \geq 0, \quad j \in N_1,$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j \in N_1,$
$x_j \leq 0, \quad j \in N_2.$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i = c_j, \quad j \in N_2.$

其中指标集

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset, M_1 \cup M_2 = \{1, \dots, m\},$$

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset, N_1 \cup N_2 = \{1, \dots, n\}.$$

也就是说,由原有问题(P)构造对偶问题(D)的一般规则为:

(1) 在原有问题(P)中,目标函数为求 $\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, 其约束条件统一成 $\geq$ 或 $=$.

(2) 在对偶问题(D)中,目标函数为求 $\max z = \sum_{i=1}^m b_i u_i$.

(3) 在原有问题(P)中与 b_i 相应的一个约束条件,对应着对偶问题(D)的一个变量 u_i : 如果该约束条件为不等式,则 $u_i \geq 0$; 如果该约束条件为等式,则 u_i 为自由变量.

(4) 原有问题(P)的每个变量 x_j 对应着对偶问题(D)的一个约束条件: 如果(P)中 $x_j \geq 0$, 则(D)中为 $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j$; 如果 $x_j \leq 0$, 则 $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i = c_j$.

我们称问题(P)和问题(D)为一组对偶规划.

如果在原有问题(P)(2-5)中无不等式约束(即取 $M_1 = \emptyset$), 且无自由变量(即取 $N_2 = \emptyset$), 则(P)就是标准型线性规划(LP). 此时, 得到这样一组对偶规划:

原有问题(P):

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2-7)$$

对偶问题(D):

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^m b_i u_i; \\ \text{s. t. } u_i &\geq 0, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i &\leq c_j, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2-8)$$

60

也即

原有问题(LP):

$$\begin{aligned} \min f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}; \\ \text{s. t. } \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{X} &\geq 0, \end{aligned} \quad (2-9)$$

对偶问题(LD):

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{b}^T \mathbf{U}; \\ \text{s. t. } \mathbf{U} &\geq 0, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{U} &\leq \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2-10)$$

定理 2-1 对偶问题(D)的对偶问题即为原有问题(P).

证 现将定义中的对偶问题(D)(2-6)变换成下列等价形式:

$$\begin{aligned} \min z' &= \sum_{i=1}^m (-b_i) u_i; \\ \text{s. t. } u_i &\geq 0, i \in M_1, \\ u_i &\geq 0, i \in M_2, \\ \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) u_i &\geq -c_j, j \in N_1, \\ \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) u_i &= -c_j, j \in N_2. \end{aligned}$$

把它视为原有问题, 根据定义它的对偶问题为

$$\max f' = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j;$$

$$\begin{aligned}
\text{s. t. } & \sum_{j=1}^n (-a_{ij})x_j \leq -b_i, i \in M_1, \\
& \sum_{j=1}^n (-a_{ij})x_j = -b_i, i \in M_2, \\
& x_j \geq 0, j \in N_1, \\
& x_j \leq 0, j \in N_2.
\end{aligned}$$

易知,它等价于原有问题(P)(2-5).

该定理告诉我们,可以把(P)和(D)中的任何一个视为原有问题,那么,另一个问题就是它的对偶问题,它们是互为对偶的.

例 2-3 写出下列问题的对偶问题:

$$\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + x'_2 + 4x_3; \\
\text{s. t. } & 2x_1 + 3x'_2 + x_3 \geq 1, \\
& 3x_1 - x'_2 + 2x_3 \leq 4, \\
& x_1 + x_3 = 3, \\
& x_1 \geq 0, x'_2 \leq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

解 首先我们对该问题进行整理.将 $2x_1 + 3x'_2 + x_3 \geq 1$ 变换为 $-2x_1 - 3x'_2 - x_3 \leq -1$,并令 $x'_2 = -x_2$ ($x_2 \geq 0$),得(P):

$$\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 - x_2 + 4x_3; \\
\text{s. t. } & -2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -1, \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4, \\
& x_1 + x_3 = 3, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

它的对偶问题(D)为

$$\begin{aligned}
\min f &= -u_1 + 4u_2 + 3u_3; \\
\text{s. t. } & -2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 2, \\
& 3u_1 + u_2 \geq -1, \\
& -u_1 + 2u_2 + u_3 = 4, \\
& u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

例 2-4 写出下列问题(P)的对偶问题:

$$\begin{aligned}
\max z &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4; \\
\text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\
& 0 \leq x_1 \leq 8, \\
& -4 \leq x_2 \leq 4, \\
& -2 \leq x_3 \leq 4, \\
& 0 \leq x_4 \leq 10.
\end{aligned}$$

解 (P)可以写成:

$$\begin{aligned}
 \max z &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 ; \\
 \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 , \\
 & x_1 \leq 8 , \\
 & x_2 \leq 4 , \\
 & -x_2 \leq 4 , \\
 & x_3 \leq 4 , \\
 & -x_3 \leq 2 , \\
 & x_4 \leq 10 , \\
 & x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 0 , x_4 \geq 0 .
 \end{aligned}$$

它的对偶问题(D)为

$$\begin{aligned}
 \min f &= 8u_1 + 8u_2 + 4u_3 + 4u_4 + 4u_5 + 2u_6 + 10u_7 ; \\
 \text{s. t. } & u_1 + u_2 \geq 1 , \\
 & u_1 + u_3 - u_4 = -1 , \\
 & u_1 + u_5 - u_6 = 1 , \\
 & u_1 + u_7 \geq -1 , \\
 & u_1 \geq 0 , u_j \geq 0 , j = 2 , \dots , 7 .
 \end{aligned}$$

§ 2.2 对偶理论

我们现在对标准型线性规划(LP): $\min\{C^T X \mid AX = b, X \geq 0\}$ 及其对偶问题(LD): $\max\{b^T U \mid A^T U \leq C, U \geq 0\}$ 之间的关系进行讨论,其结论对一般形式的线性规划(P)及其对偶问题(D)同样适用. 我们记(LP)的可行域为 K_{LP} , 记(LD)的可行域为 K_{LD} .

定理 2-2 设 $\hat{X}$ 与 $\hat{U}$ 为(LP)和(LD)的可行解, 则

- (1) $b^T \hat{U} \leq C^T \hat{X}$;
- (2) $b^T \hat{U} = C^T \hat{X}$ 的充要条件为 $\hat{X}^T (C - A^T \hat{U}) = 0$;
- (3) 如果 $b^T \hat{U} = C^T \hat{X}$ 成立, 则 $\hat{X}$ 与 $\hat{U}$ 分别为(LP)和(LD)的最优解.

证 (1) 令 $\hat{V} = C - A^T \hat{U}$, 因为 $\hat{U} \in K_{LD}$, 故 $\hat{V} \geq 0$, 由于

$$\begin{aligned}
 A\hat{X} &= b, A^T \hat{U} = C - \hat{V} \\
 \hat{X} &\geq 0, \hat{V} \geq 0,
 \end{aligned}$$

所以有

$$b^T \hat{U} = (A\hat{X})^T \hat{U} = \hat{X}^T A^T \hat{U} = \hat{X}^T (C - \hat{V}) = C^T \hat{X} - \hat{X}^T \hat{V} \leq C^T \hat{X}. \quad (2-11)$$

- (2) 由式(2-11)可知, $b^T \hat{U} = C^T \hat{X}$ 的充要条件为

$$\hat{X}^T \hat{V} = \hat{X}^T (C - A^T \hat{U}) = 0.$$

- (3) 设 X 为(LP)的任一可行解, 由式(2-11)可知:

$$C^T X \geq b^T \hat{U} = C^T \hat{X},$$

因此, $\hat{X}$ 为 (LP) 的最优解. 同理, $\hat{U}$ 为 (LD) 的最优解.

定理 2-3 (对偶性定理)

- (1) 若 (LP) 有可行解, 但目标函数值在可行域上无下界, 则 (LD) 不可行;
- (2) 若 (LD) 有可行解, 但目标函数值在可行域上无上界, 则 (LP) 不可行;
- (3) (LP) 和 (LD) 同时有最优解的充要条件为它们同时有可行解;
- (4) 若应用单纯形法求解 (LP), 得基本最优解 X^* , 相应最优基为 B , 则单纯形因子 $U^* = (C_B^T B^{-1})^T$ 为 (LD) 的最优解, 且 $C^T X^* = b^T U^*$;
- (5) 若 (LP) 有最优解 X^* , 则 (LD) 必有最优解 U^* 存在, 且 $C^T X^* = b^T U^*$;
- (6) 若 (LP) 有可行解, (LD) 无可行解, 则 (LP) 的目标函数值在可行域上无下界;
- (7) 若 (LD) 有可行解, (LP) 无可行解, 则 (LD) 的目标函数值在可行域上无上界.

证 (1) 反之, 若 (LD) 有可行解 $\hat{U}$ 存在, 则任 $X \in K_{LP}$, 都有 $C^T X \geq b^T \hat{U}$, 这与 (LP) 在 K_{LP} 上无下界矛盾, 故 (LD) 不可行.

(2) 与 (1) 的证明类似.

(3) 必要性是显然的, 故只需证充分性.

若 (LP) 有可行解 $\hat{X}$, (LD) 有可行解 $\hat{U}$, 则对任意 $X \in K_{LP}$, 都有 $C^T X \geq b^T \hat{U}$, 故 (LP) 的目标函数值在 K_{LP} 上有下界, 所以 (LP) 有最优解. 类似地可证 (LD) 有最优解.

(4) 由于在最优基 B 的单纯形表 $T(B)$ 中

$$r_j = c_j - C_B^T B^{-1} A_{.j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

即

$$(U^*)^T A_{.j} \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

从而, 有

$$\begin{pmatrix} A_{.1}^T \\ \vdots \\ A_{.n}^T \end{pmatrix} U^* \leq \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \text{即 } A^T U^* \leq C,$$

所以, $U^* \in K_{LD}$. 又

$$b^T U^* = (U^*)^T b = C_B^T B^{-1} b = f_0 = C^T X^*,$$

由定理 2-2(3) 可知 U^* 是 (LD) 的最优解, 且 $C^T X^* = b^T U^*$.

(5) 由于 (LP) 有最优解 X^* , 根据定理 1-1, (LP) 一定有基本最优解. 由本定理 (4) 可知 (LD) 必有最优解 U^* 存在, 且 $C^T X^* = b^T U^*$.

(6) 反之, (LP) 有最优解, 则由本定理 (5) 可知 (LD) 应有最优解, 与 (LD) 无可行解矛盾, 故 (LP) 在 K_{LP} 上无下界.

(7) 与(6)的证明类似.

原有问题和对偶问题解之间的对应关系,除了定理 2-3 告诉我们的各种情况外,也可能两个问题都不可行.例如,下列原有问题(P)和其对偶问题(D)都不可行:

原有问题(P):	对偶问题(D):
$\min f = -2x_1 + 3x_2;$	$\max z = 3u_1 + u_2;$
s. t. $-x_2 \geq 3,$	s. t. $u_1 \geq 0,$
$2x_1 + 3x_2 \geq 1,$	$u_2 \geq 0,$
$x_1 \geq 0$	$2u_2 \leq -2,$
$x_2 \geq 0.$	$-u_1 + 3u_2 \leq 3.$

综合上述讨论可见,一组对偶规划的解之间只有下列 3 种情况:

- (1) 两个规划都有最优解,且最优值相等;
- (2) 两个规划都不可行;
- (3) 一个规划不可行,另一个规划有可行解,但最优解不存在.

原有问题(P)和对偶问题(D)的解之间的关系我们可用表 2-1 来说明.

表 2-1

原有问题(P)	对应关系	对偶问题(D)
有最优解	$\longleftrightarrow$	有最优解
$K_P \neq \emptyset, f \rightarrow -\infty$	$\longleftrightarrow$	不可行
不可行	$\longleftrightarrow$	$K_D \neq \emptyset, z \rightarrow +\infty$

例 2-5 用对偶理论讨论下述一组对偶规划:

原有问题(P):	对偶问题(D):
$\min f = -6x_1 - 4x_2;$	$\max z = 4u_1 + 2u_2;$
s. t. $-x_1 - 2x_2 \geq 4,$	s. t. $-u_1 - 2u_2 \leq -6,$
$-2x_1 + x_2 \geq 2,$	$-2u_1 + u_2 \leq -4,$
$x_1 \geq 0,$	$u_1 \geq 0,$
$x_2 \geq 0.$	$u_2 \geq 0.$

解 显然, $(u_1, u_2)^T = (6, 0)^T$ 是(D)的一个可行解,而(P)的约束条件 $-x_1 - 2x_2 \geq 4$ 在第一象限是不可能实现的,(P)无可行解.所以,由定理 2-3(7)可知,(D)在可行域上无上界.

由定理 2-2(2)和(3)可知,当 $\hat{X}$ 和 $\hat{U}$ 分别为(LP)和(LD)的可行解时,则它们都是最优解的充分必要条件为

$$\hat{X}^T(C - A^T \hat{U}) = 0.$$

同时,对于(LP)和(LD)来说,显然有

$$(A\hat{X} - b)^T \hat{U} = 0.$$

也就是说,

(1) 当 $\hat{x}_j > 0$ 时, 应有 $c_j - \hat{U}^T A_{\cdot j} = 0$ ($j = 1, \dots, n$);

(2) 当 $c_j - \hat{U}^T A_{\cdot j} > 0$ 时, 应有 $\hat{x}_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$).

现在, 我们将该结论推广到一般形式的一组对偶规划(P)和(D)上, 而得到松弛互补定理. 为了更好地理解该定理, 我们再次列出(P)和(D):

原有问题(P): $\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j ;$ s. t. $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b, j \in M_1,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in M_2,$ $x_j \geq 0, j \in N_1,$ $x_j \leq 0, j \in N_2.$	对偶问题(D): $\max z = \sum_{i=1}^m b_i u_i ;$ s. t. $u_i \geq 0, i \in M_1,$ $u_i \leq 0, i \in M_2,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j, j \in N_1,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i = c_j, j \in N_2,$
--	--

定理 2-4 (松弛互补定理) 设 $\hat{X} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_n)^T$ 和 $\hat{U} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_m)^T$ 分别为原有问题(P)和对偶问题(D)的可行解, 则它们分别为(P)和(D)的最优解的充要条件(松弛互补条件)为

$$\begin{aligned} \hat{x}_j (c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{u}_i) &= 0, j = 1, \dots, n, \\ (\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i) \hat{u}_i &= 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2-12)$$

对照(P)和(D)的定义, 可见, 松弛互补条件反映了(P)中变量(或约束条件)与(D)中对应的约束条件(或变量)在最优情况下相互之间的制约关系:

(1) 如果可行解 $\hat{X}$ 中变量 $\hat{x}_j > 0$ ($j \in N_1$) 则(D)中对应的约束 $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j$ ($j \in N_1$)

在最优情况下应成为等式约束: $\sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{u}_i = c_j$ ($j \in N_1$).

(2) 如果可行解 $\hat{U}$ 中变量 $\hat{u}_i > 0$ ($i \in M_1$) 则(P)中对应的约束 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j \geq b_i$ ($i \in M_1$)

在最优情况下应成为等式约束: $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j = b_i$ ($i \in M_1$).

(3) 如果(P)中约束条件为严格不等式 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j > b_i$ ($i \in M_1$), 则(D)中对应的变量在最优情况下有 $\hat{u}_i = 0$.

(4) 如果(D)中约束条件为严格不等式 $\sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{u}_i < c_j$ ($j \in N_1$), 则(P)中对应的变量在最优情况下有 $\hat{x}_j = 0$.

例 2-6 给定一组对偶规划：

$$\begin{aligned} & \text{原有问题}(P): \\ & \max z = 3x_1 + 2x_2 + 8x_3; \\ \text{s. t. } & -4x_1 + 3x_2 - 12x_3 \leq -12, \\ & \quad x_1 + 4x_3 \leq 6, \\ & \quad x_2 - x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{对偶问题}(D): \\ & \min f = -12u_1 + 6u_2 + 2u_3; \\ \text{s. t. } & u_1 \geq 0, \\ & u_2 \geq 0, \\ & u_3 \geq 0, \\ & -4u_1 + u_2 \geq 3, \\ & \quad 3u_1 + u_3 \geq 2, \\ & -12u_1 + 4u_2 - u_3 \geq 8. \end{aligned}$$

试用松弛互补定理证明：

$$\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (6, 2, 0)^T$$

为(P)的最优解,并求出(D)的最优解.

证 不难验证 $\hat{X} = (6, 2, 0)^T$ 是(P)的可行解. 如果它是(P)的最优解,而设 $\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ 是(D)的最优解,则由松弛互补定理可知, $\hat{U}$ 除了应是(D)的一个可行解外,还应满足松弛互补条件：

因为

$$\hat{x}_1 = 6 > 0,$$

所以

$$-4\hat{u}_1 + \hat{u}_2 = 3;$$

因为

$$\hat{x}_2 = 2 > 0,$$

所以

$$3\hat{u}_1 + \hat{u}_3 = 2;$$

又因为

$$-4\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - 12\hat{x}_3 = -4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 0 = -18 < -12,$$

所以

$$\hat{u}_1 = 0.$$

于是我们即可求得

$$\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) = (0, 3, 2)^T.$$

可以验证它是(D)的可行解.

现在 $\hat{X}$ 和 $\hat{U}$ 分别是(P)和(D)的可行解,且又满足松弛互补条件,因此它们分别是(P)和(D)的最优解,最优值 $z^* = f^* = 22$.

§ 2.3 对偶单纯形法

从定理 2-3(3)的证明过程,我们不难得到如下结论：

若 B 为 (LP) 的一个基, 则 $r_j = c_j - C_B^T B^{-1} A_{.j} \geq 0$ 对 $j = 1, \dots, n$ 都成立的充要条件为: 单纯形因子 $U = (C_B^T B^{-1})^T$ 是对偶问题 (LD) 的可行解.

如果基 B 所对应的单纯形因子 $U = (C_B^T B^{-1})^T$ 是对偶问题 (LD) 的可行解, 则基 B 称为对偶可行基.

可见, 如果一个基 B , 既是原有可行基 (有 $B^{-1}b \geq 0$, 基本解 X 为 (LP) 的可行解), 又是对偶可行基 (对 $j = 1, \dots, n$ 都有 $r_j \geq 0$, $U = (C_B^T B^{-1})^T$ 为 (LD) 的可行解), 则基 B 为最优基 (基 B 对应的基本解为 (LP) 的最优解, 单纯形因子 $(C_B^T B^{-1})^T$ 为 (LD) 的最优解).

至此, 根据对偶理论, 我们可以构造一个求解线性规划问题 (LP) 的新方法——对偶单纯形法.

我们知道, 单纯形法的特点是: 迭代一直在基本可行解中进行, 基 B 始终为原有可行基. 换言之, 在单纯形表 $T(B)$ 中, 严格要求 $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), 而检验数 r_j 可为负数 (单纯形因子 $U = (C_B^T B^{-1})^T$ 可以不是 (LD) 的可行解). 如果 (LP) 的最优值 f^* 存在, 则 f^* 必定不超过单纯形表中值 f_0 . 通过转轴, 继续保持 $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), 逐步消除 $r_j < 0$, 使 $r_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) 得到实现. 同时, f_0 不断逐步下降, 直至取得 f^* . 转轴过程中, 先选定进基变量 x_t , 后根据 y^t 和 $\bar{b}$ 按最小比值准则选定出基变量 x_{B_k} .

与此相反, 对偶单纯形法的特点是: 迭代一直在基本解中进行, 基 B 始终为对偶可行基. 换言之, 在单纯形表 $T(B)$ 中严格要求 $r_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) (单纯形因子 $U = (C_B^T B^{-1})^T$ 为 (LD) 的可行解), 而 $\bar{b}_i$ 可为负数 (基本解不是 (LP) 的可行解). 此时, 基本解 X 的目标函数值 f_0 为

$$f_0 = C_B^T \bar{b} = C_B^T B^{-1} b = U^T b = b^T U.$$

根据定理 2-2(1) 知, 如果 (LP) 最优值 f^* 存在, 则 $f^* \geq b^T U$, 即 $f^* \geq f_0$. 我们希望通过转轴, 继续保持 $r_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), 逐步消除 $\bar{b}_i < 0$, 使 $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) 得以实现, 同时, f_0 不断上升, 直至取得 f^* . 转轴过程中, 先选定出基变量 x_{B_k} , 后定进基变量 x_t . 那么, 转轴指标 k 和 t , 应如何选定呢?

首先, 现在 $T(B)$ 中 $\bar{b} \geq 0$ 不成立, 我们就采用准则

$$\bar{b}_k = \min\{\bar{b}_i \mid 1 \leq i \leq m\} \quad (2-13)$$

来定指标 k . 又从转轴公式 (1-34) 可知

$$f'_0 = f_0 + \frac{\bar{b}_k}{y_{kt}} r_t.$$

现在已知 $r_t \geq 0$, $\bar{b}_k < 0$, 故要实现 $f'_0 \geq f_0$, 就必须要求枢轴元素 $y_{kt} < 0$. 又从转轴公式 (1-33) 可知:

$$r'_j = r_j - \frac{y_{kj}}{y_{kt}} r_t, \quad j = 1, \dots, n.$$

现在已知 $r_j \geq 0$, $r_t \geq 0$, $y_{kt} < 0$. 因此, 当 $y_{kj} \geq 0$ 时总能保证 $r'_j \geq 0$ 成立. 但当 $y_{kj} < 0$ 时, 为保证 $r'_j \geq 0$ 成立, 就必须满足:

$$\frac{r_t}{y_{kt}} \geq \frac{r_j}{y_{kj}} \quad (j \in I_D, y_{kj} < 0).$$

换言之, 指标 t 的选择采取下列最大比值准则:

$$\frac{r_t}{y_{kt}} = \max \left\{ \frac{r_j}{y_{kj}} \mid y_{kj} < 0, j \in I_D \right\}. \quad (2-14)$$

在单纯形法中, 当指标 t 确定后, 如果 $T(B)$ 中 $y_{it} \leq 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 都成立, 则 (LP) 在 K 内无下界; 现在如果在对偶单纯形法中, 当指标 k 确定后, $T(B)$ 中 $y_{kj} \geq 0$ 对 $j = 1, \dots, n$ 都成立, 能得到什么结论呢? 此时, $T(B)$ 第 k 行信息所对应的方程为

$$x_{B_k} + \sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j = \bar{b}_k,$$

现在 $y_{kj} \geq 0$ ($j \in I_D$), $\bar{b}_k < 0$, 该方程在第一卦限 (对 $j = 1, \dots, n$ 都有 $x_j \geq 0$) 是不可能实现的, 即可行域 K 为空集. 我们有下述定理.

定理 2-5 设 X 为 (LP) 关于基 B 的基本解, 且 $T(B)$ 中 $r = (r_1, \dots, r_n)^T \geq 0$, 而 $\bar{b}_k < 0, y_{kj} \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), 则 (LP) 无可行解.

下面我们给出对偶单纯形法算法.

① 选取 (LP) 的初始指标集 I_B 和基 B (B 为对偶可行基, $U = (C_B^T B^{-1})^T$ 为 (LD) 的可行解), 作单纯形表 $T(B)$.

② $\bar{b}_i \geq 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 是否都成立?

若是, 则 $X_B = \bar{b}, X_D = 0$ 即为 (LP) 最优解; f_0 为它的最优值 f^* , 算法终止.

若否, 则定指标 $k: \bar{b}_k = \min \{\bar{b}_i \mid \bar{b}_i < 0, 1 \leq i \leq m\}$.

③ $y_{kj} \geq 0$ 对 $j = 1, \dots, n$ 是否都成立?

若是, 则 (LP) 不可行, 算法终止.

若否, 则根据最大比值准则定指标 t :

$$\frac{r_t}{y_{kt}} = \max \left\{ \frac{r_j}{y_{kj}} \mid y_{kj} < 0, j \in I_D \right\}.$$

④ 以 y_{kt} 为枢轴元素进行转轴, 得新的 $T(B), I_B, I_D$, 转步骤②.

例 2-7 用对偶单纯形法求解下列线性规划 (P) :

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3; \\ \text{s. t.} \quad &2x_1 - x_2 + x_3 \geq 10, \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ &2x_2 - x_3 \geq 4, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

解 将它化成标准型 (LD) :

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3; \\ \text{s. t.} \quad &2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 12, \end{aligned}$$

$$2x_2 - x_3 - x_6 = 4,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

取初始指标集 $I_B = \{4, 5, 6\}$, 用对偶单纯形法求解, 迭代过程如表 2-2, 表 2-3, 表 2-4 所示.

表 2-2

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	(-2)	1	-1	1	0	0	(-10)
x_5	1	2	2	0	1	0	12
x_6	0	-2	1	0	0	1	-4
r	2	4	6	0	0	0	0
r_j/y_{kj}	$\left(\frac{2}{-2}\right)$						$\frac{6}{-1}$

表 2-3

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	-1/2	1/2	-1/2	0	0	5
x_5	0	5/2	3/2	1/2	1	0	7
x_6	0	(-2)	1	0	0	1	(-4)
r	0	5	5	1	0	0	-10
r_j/y_{kj}	$\left(\frac{5}{-2}\right)$						

表 2-4

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/4	-1/2	0	-1/4	6
x_5	0	0	11/4	1/2	1	5/4	2
x_2	0	1	-1/2	0	0	-1/2	2
r	0	0	15/2	1	0	5/2	-20

得最优解 $X^* = (6, 2, 0)^T$, 最优值 $f^* = 20$.

例 2-8 用对偶单纯形法求解下列线性规划：

$$\begin{aligned} \min f &= 5x_1 + 3x_2; \\ \text{s. t.} \quad &-2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ &3x_1 - 6x_2 \geq 4, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

解 首先将它化为标准型：

$$\min f = 5x_1 + 3x_2;$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ & 3x_1 - 6x_2 - x_4 = 4, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

取初始 $I_B = \{3, 4\}$, 迭代过程如表 2-5, 表 2-6 所示.

表 2-5

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	2	(-3)	1	0	(-6)
x_4	-3	6	0	1	-4
r	5	3	0	0	0

表 2-6

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	-2/3	1	-1/3	0	2
x_4	1	0	2	1	-16
r	7	0	1	0	-6

在表 2-6 中, $\bar{b}_2 < 0$, 而 $y_{2j} \geq 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), 故该问题不可行.

§ 2.4 对偶问题的最优解

对偶理论告诉我们, 在原有问题和对偶问题的最优解之间存在着密切的关系. 有时, 我们可以从求解原有问题的最优单纯形表中, 得到对偶问题的最优解.

1. 情况一

如果我们考虑的原有问题(P)为下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min f &= C^T X; \\ \text{s. t.} \quad & AX \geq b, \\ & X \geq 0, \end{aligned} \quad (P)$$

它的标准型(LP)为

$$\begin{aligned} \min f &= C^T X; \\ \text{s. t.} \quad & AX - X_M = b, \\ & X \geq 0, \quad X_M \geq 0, \end{aligned} \quad (LP)$$

其中 $X_M = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$.

显然, (P)与(LP)的对偶问题是同一个线性规划(D):

$$\begin{aligned} \max z &= b^T U; \\ \text{s. t.} \quad & A^T U \leq C, \\ & U \geq 0. \end{aligned} \quad (D)$$

若用单纯形法求解(LP), 得最优基 B 和最优单纯形表 $T(B)$. 对(LP)来说, 当 $j = n + i$ ($i = 1, \dots, m$) 时, 有 $A_{\cdot j} = -e_i$, $c_j = 0$, 因此,

$$\begin{aligned} (c_{n+1}, \dots, c_{n+m}) &= (0, \dots, 0), \\ (A_{\cdot (n+1)}, \dots, A_{\cdot (n+m)}) &= (-e_1, \dots, -e_m) = -I, \end{aligned}$$

从而, 在最优表中,

$$\begin{aligned}(r_{n+1}, \dots, r_{n+m}) &= (c_{n+1}, \dots, c_{n+m}) - C_B^T B^{-1} (A_{(n+1)}, \dots, A_{(n+m)}) \\ &= -C_B^T B^{-1} (-I) = C_B^T B^{-1}.\end{aligned}$$

于是

$$U^* = (r_{n+1}, \dots, r_{n+m})^T. \quad (2-15)$$

也就是说,在(LP)的最优单纯形表中,剩余变量对应的检验数 $(r_{n+1}, \dots, r_{n+m})^T$ 即为最优单纯形因子,它是对偶问题的最优解 U^* .

同时,在最优单纯形表 $T(B)$ 中,还有

$$(y^{n+1}, \dots, y^{n+m}) = (B^{-1} A_{(n+1)}, \dots, B^{-1} A_{(n+m)}) = B^{-1} (-I),$$

即

$$B^{-1} = (-y^{n+1}, \dots, -y^{n+m}). \quad (2-16)$$

例 2-9 用对偶单纯形法求解下列线性规划(P):

$$\begin{aligned}\min f &= 6x_1 + 8x_2; \\ \text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 &\geq 20, \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 50, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

解 它的标准型(LP)为

$$\begin{aligned}\min f &= 6x_1 + 8x_2; \\ \text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 &= 20, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 &= 50, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.\end{aligned}$$

用对偶单纯形法求得最优单纯形表如表 2-7.

(P)和(LP)的对偶问题(D)为

$$\begin{aligned}\max z &= 20u_1 + 50u_2; \\ \text{s. t.} \quad u_1 + 3u_2 &\leq 6, \\ 2u_1 + 2u_2 &\leq 8, \\ u_1 &\geq 0, \quad u_2 \geq 0.\end{aligned} \quad (D)$$

表 2-7

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	0	1	-3/4	1/4	5/2
x_1	1	0	1/2	-1/2	15
r	0	0	3	1	-110

由表 2-7 可知,(D)的最优解为

$$U^* = (r_3, r_4)^T = (3, 1)^T.$$

此时,表 2-7 对应的最优基

$$B = (A_{(2)}, A_{(1)}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

由表 2-7 知,最优基 B 的逆矩阵

$$B^{-1} = -(y^3, y^4) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. 情况二

如果我们考虑的原有问题(P)为

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}; \\ \text{s. t. } \quad \mathbf{AX} &\leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{X} &\geq 0. \end{aligned} \quad (P)$$

它的标准型(LP)为

$$\begin{aligned} \min \tilde{z} &= \tilde{\mathbf{C}}^T \mathbf{X} = (-\mathbf{C})^T \mathbf{X}; \\ \text{s. t. } \quad \mathbf{AX} + \mathbf{X}_M &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{X} &\geq 0, \quad \mathbf{X}_M \geq 0, \end{aligned} \quad (LP)$$

其中 $\mathbf{X}_M = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$. (LP)的对偶问题(LD)为

$$\begin{aligned} \max \tilde{f} &= \mathbf{b}^T \mathbf{U}'; \\ \text{s. t. } \quad \mathbf{A}^T \mathbf{U}' &\leq \tilde{\mathbf{C}}, \\ \mathbf{U}' &\leq 0. \end{aligned} \quad (LD)$$

若用单纯形法求解(LP)得最优基 B 、最优表 $T(B)$. 则 $\tilde{\mathbf{U}}' = (\tilde{\mathbf{C}}_B^T B^{-1})^T$ 为(LD)的最优解.

令

$$\mathbf{U}' = -\mathbf{U},$$

(LD)变换为

$$\begin{aligned} \max \tilde{f} &= -\mathbf{b}^T \mathbf{U}; \\ \text{s. t. } \quad \mathbf{A}^T \mathbf{U} &\geq \mathbf{C}, \\ \mathbf{U} &\geq 0. \end{aligned}$$

此时, $\mathbf{U}^* = -\tilde{\mathbf{U}}' = (\mathbf{C}_B^T B^{-1})^T$ 为其最优解, 最优值 $\tilde{f}^* = -\mathbf{b}^T \mathbf{U}^*$.

又(P)的对偶问题(D)为

$$\begin{aligned} \min f &= \mathbf{b}^T \mathbf{U}; \\ \text{s. t. } \quad \mathbf{A}^T \mathbf{U} &\geq \mathbf{C}, \\ \mathbf{U} &\geq 0. \end{aligned}$$

于是, $\mathbf{U}^* = (\mathbf{C}_B^T B^{-1})^T$ 也为其最优解, 最优值 $f^* = \mathbf{b}^T \mathbf{U}^* = -\tilde{f}^*$.

对(LP)来说, 当 $j = n+i$ 时, $\mathbf{A}_{\cdot j} = \mathbf{e}_i$, $\tilde{c}_j = 0$, 因此

$$\begin{aligned} (\tilde{c}_{n+1}, \dots, \tilde{c}_{n+m}) &= (0, \dots, 0)^T, \\ (\mathbf{A}_{\cdot (n+1)}, \dots, \mathbf{A}_{\cdot (n+m)}) &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

从而, 在(LP)的最优表 $T(B)$ 中,

$$\begin{aligned} & (r_{n+1}, \dots, r_{n+m}) \\ &= (\tilde{c}_{n+1}, \dots, \tilde{c}_{n+m}) - (\tilde{\mathbf{C}}_B^T B^{-1})(\mathbf{A}_{\cdot (n+1)}, \dots, \mathbf{A}_{\cdot (n+m)}) \\ &= -(\tilde{\mathbf{C}}_B^T B^{-1}) = \mathbf{C}_B^T B^{-1}, \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{U}^* = (r_{n+1}, \dots, r_{n+m})^T. \quad (2-17)$$

也就是说,在(LP)的最优单纯形表 $T(B)$ 中,松弛变量对应的检验数 $(r_{n+1}, \dots, r_{n+m})^T$,即为最优单纯形因子,它是对偶问题(D)的最优解 U^* 。

同时,在(LP)的最优单纯形表 $T(B)$ 中,还有

$$(y^{n+1}, \dots, y^{n+m}) = (B^{-1}A_{(n+1)}, \dots, B^{-1}A_{(n+m)}) = B^{-1}I,$$

即

$$B^{-1} = (y^{n+1}, \dots, y^{n+m}). \quad (2-18)$$

例 2-10 用单纯形法求解下列线性规划(P):

$$\begin{aligned} \max z &= 20x_1 + 50x_2; \\ \text{s. t. } x_1 + 3x_2 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (P)$$

解 它的标准型(LP)为

$$\begin{aligned} \min \tilde{z} &= -20x_1 - 50x_2; \\ \text{s. t. } x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (LP)$$

用单纯形法求得(LP)的最优单纯形表如表 2-8 所示。

(P)的对偶问题(D)为

$$\begin{aligned} \min f &= 6u_1 + 4u_2; \\ \text{s. t. } u_1 + u_2 &\geq 20, \\ 3u_1 + u_2 &\geq 50, \\ u_1 &\geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (D)$$

表 2-8

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	0	1	1/2	-1/2	1
x_1	1	0	-1/2	3/2	3
r	0	0	15	5	110

由表 2-8 可知 (D)的最优解

$$U^* = (r_3, r_4)^T = (15, 5)^T.$$

此时,表 2-8 对应的最优基

$$B = (A_{(2)}, A_{(1)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

由表 2-8 可知,最优基 B 的逆矩阵

$$B^{-1} = (y^3, y^4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

3. 情况三

如果我们考虑一般形式的线性规划. 首先将它化为标准型,然后用大 M 法进行求解. 假设初始指标集 I_B 和初始基分别为

$$I_B = \{B_1, \dots, B_m\}, \quad B = (A_{(B_1)}, \dots, A_{(B_m)}) = I.$$

现在用单纯形法进行迭代,求得最优单纯形表 $T(\hat{B})$ 、最优基 $\hat{B}$,则初始指标集 $I_B = \{B_1, \dots, B_m\}$ 对应的变量在 $T(\hat{B})$ 中的检验数

$$\begin{aligned} & (r_{B_1}, \dots, r_{B_m}) \\ &= (c_{B_1}, \dots, c_{B_m}) - C_B^T \hat{B}^{-1} (A_{B_1}, \dots, A_{B_m}) \\ &= (c_{B_1}, \dots, c_{B_m}) - C_B^T \hat{B}^{-1} I = (c_{B_1}, \dots, c_{B_m}) - C_B^T \hat{B}^{-1}. \end{aligned}$$

所以,对偶问题的最优解

$$U^* = (C_B^T \hat{B}^{-1})^T = (c_{B_1}, \dots, c_{B_m})^T - (r_{B_1}, \dots, r_{B_m})^T. \quad (2-19)$$

同时,在最优单纯形表 $T(\hat{B})$ 中,还有

$$(y^{B_1}, \dots, y^{B_m}) = (\hat{B}^{-1} A_{B_1}, \dots, \hat{B}^{-1} A_{B_m}) = \hat{B}^{-1} I = \hat{B}^{-1},$$

即

$$\hat{B}^{-1} = (y^{B_1}, \dots, y^{B_m}). \quad (2-20)$$

例 2-11 假设例 1-14 所给的线性规划为 (P) ,用单纯形法求解.

解 在用单纯形法求解它的 (LP_M) 问题时,初始单纯形表为表 1-22,初始指标集 $I_B = \{6, 5, 7\}$;最优单纯形表 $T(\hat{B})$ 为表 1-24,最优基 $\hat{B} = (A_{B_1}, A_{B_5}, A_{B_2})$,指标集 $I_{\hat{B}} = \{1, 5, 2\}$.

由此可知 (P) 的对偶问题的最优解

$$\begin{aligned} U^* &= (c_6, c_5, c_7)^T - (r_6, r_5, r_7)^T \\ &= (M, 0, M)^T - \left(-\frac{3}{2}, 0, M-2\right)^T \\ &= \left(\frac{3}{2}, 0, 2\right)^T. \end{aligned}$$

同时,由表 1-24 可知 $\hat{B}$ 的逆矩阵为

$$\hat{B}^{-1} = (y^6, y^5, y^7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

如果我们计算最优单纯形因子,则

$$C_B^T \hat{B}^{-1} = (3, 0, 5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, 0, 2\right),$$

可见,与上述结果相同.

§ 2.5 灵敏度分析

例 2-12 某工厂生产 3 种产品,有关信息如表 2-9 所示。问如何安排生产计划,使工厂获得最大利润?

表 2-9

单位产品的材料定额 a_{ij}		$j^{\#}$ 产 品			$i^{\#}$ 材料上限 b_i
		1 [#]	2 [#]	3 [#]	
$i^{\#}$ 材料	1 [#]	3	4	2	600
	2 [#]	2	1	2	400
	3 [#]	1	3	2	800
单位产品利润 $\hat{c}_j$		2	4	3	

解 设产品 $j^{\#}$ 的产量为 x_j , 则得线性规划模型:

$$\begin{aligned}
 \max z &= \sum_{j=1}^3 \hat{c}_j x_j = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3; \\
 \text{s. t. } &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 600, \\
 &2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 400, \\
 &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 800, \\
 &x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

将它化成标准型(LP):

$$\begin{aligned}
 \min f &= \sum_{j=1}^3 c_j x_j = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3; \\
 \text{s. t. } &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 600, \\
 &2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 400, \\
 &x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 800, \\
 &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

用单纯形法求解(LP), 得最优单纯形表如表 2-10 所示.

表 2-10

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	200/3
x_3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	500/3
x_6	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	800/3
r	11/6	0	0	5/6	2/3	0	2 300/3

最优解 $X^* = (x_1, x_2, x_3)^T = (0, 200/3, 500/3)^T$, 最优值 $z^* = 2\,300/3$.

这个最优解是在参数 c_j, b_i, a_{ij} 都固定不变的条件下取得的. 但是, 在实际问题中, 对

一个具体的企业来说,参数 c_j, b_i, a_{ij} 不是固定不变的。例如,产品的市场价格可能有所变动;国家分配的原材料可能有所增减;动力供应情况可能随季节而变化;添置新设备而使生产台时增加;由于产品设计结构有所改进,使单位产品的原材料消耗定额有所增减……现实诸因素的种种变化都会引起已建立的数学模型的参数变化。或者,当运用线性规划编制完生产计划并即将付诸应用时,又发生了新的情况,某些原来未加限制的資源现在有了限制,从而出现一个新的追加约束条件。或者,企业准备增加新产品,使工厂的生产计划发生整个变化。

因此,我们面临这样的问题:上述种种情况的发生,将对已求得的最优解产生什么影响?或者说,我们如何在原有的最优单纯形表的基础上用最少的计算量,去获得修改后的线性规划问题的最优解?这就是下面我们要讨论的灵敏度分析问题。

假设线性规划(LP)的基本最优解 $X_B^* = \bar{b}, X_D^* = 0$, 最优基为 B , 指标集 $I_B = \{B_1, \dots, B_m\}$, 我们分下面几个问题来进行灵敏度分析:

(1) 变量 x_s 的目标函数系数 c_s 在何范围内变动,问题(LP)的最优基(最优解)不变?如果超出这个范围,如何求最优解?

(2) 第 s 种资源 b_s 在何范围内变动,最优基不变?如果 b_s 超出这个范围,如何求最优解?

(3) 变量 x_s 在矩阵 A 中的系数列向量 $A_{\cdot s}$ 发生变化,如何求新问题的最优解?

(4) 追加新的约束条件,如何求新的线性规划的最优解?

(5) 增加新的变量 x_s ,如何求新问题的最优解?

76

■■■■■■

2.5.1 参数 c_s 的灵敏度分析

如果 c_s 在某个范围内摄动,这将影响原来问题最优表 $T(B)$ 中 r 行的元素. 设 $c'_s = c_s + \Delta c_s$, 我们的问题是: Δc_s 在何范围内变动,基本最优解不发生变化,也即新的检验数 $r'_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) 仍应成立. 我们先来看一个例子。

例 2-13 对例 2-12, (1) $\hat{c}_1$ 在何范围内变化,最优基不变?若 $\hat{c}_1 = 4$, 求最优解。(2) $\hat{c}_2$ 在何范围内变化,最优基不变?若 $\hat{c}_2 = 9$, 求最优解。

解 (1) 在最优表 2-10 中, x_1 为非基本变量,当 $c_1 = -\hat{c}_1$ 变动时, C_B 没有改变,故受影响的仅是最优表中检验数 r_1 . 此时,

$$r_1 = c_1 - C_B^T y^1 = -\hat{c}_1 - (-4, -3, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = -\hat{c}_1 + \frac{23}{6}.$$

要使最优基保持不变,应有 $r_1 \geq 0$, 即

$$\hat{c}_1 \leq \frac{23}{6} \quad \left(\text{或 } \Delta \hat{c}_1 \leq \frac{23}{6} - 2 = \frac{11}{6} \right).$$

换言之,只要 1# 产品的单位产品利润不超过 $23/6$,则生产 1# 产品就是不经济的.

若 $\hat{c}_1 = 4$, 则 $r_1 = -4 + 23/6 = -1/6$, 于是, 目前的生产计划就不是最优. 我们将表 2-10 修改成表 2-11, 用单纯形法继续迭代, 得表 2-12, 即得最优解 $\mathbf{X}^* = (200, 0, 0)^T$, 最优值 $z^* = 800$.

表 2-11

$\mathbf{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	$1/3$	1	0	$1/3$	$-1/3$	0	$200/3$
x_3	$(5/6)$	0	1	$-1/6$	$2/3$	0	$500/3$
x_6	$-5/3$	0	0	$-2/3$	$-1/3$	1	$800/3$
r	$-1/6$	0	0	$5/6$	$2/3$	0	$2\ 300/3$

表 2-12

$\mathbf{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	0	1	$-2/5$	$2/5$	$-3/5$	0	0
x_1	1	0	$6/5$	$-1/5$	$4/5$	0	200
x_6	0	0	2	-1	1	1	600
r	0	0	$1/5$	$4/5$	$4/5$	0	800

(2) 在表 2-10 中, x_2 为基本变量, 当 $c_2 = -\hat{c}_2$ 摄动时, C_B 改变, 故最优表中非基本变量 x_1, x_4, x_5 的检验数 r_1, r_4, r_5 都要改变, 我们把 r_1, r_4 和 r_5 表示成 $\hat{c}_2$ 的函数:

$$r_1 = c_1 - \mathbf{C}_B^T \mathbf{y}^1 = -2 - (-\hat{c}_2, -3, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \hat{c}_2 + \frac{1}{2},$$

$$r_4 = c_4 - \mathbf{C}_B^T \mathbf{y}^4 = 0 - (-\hat{c}_2, -3, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \hat{c}_2 - \frac{1}{2},$$

$$r_5 = c_5 - \mathbf{C}_B^T \mathbf{y}^5 = 0 - (-\hat{c}_2, -3, 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \hat{c}_2 + 2,$$

为使最优基不变, 则 r_1, r_4 和 r_5 都应非负, 即

$$r_1 \geq 0 \Rightarrow \hat{c}_2 \geq -\frac{3}{2}; \quad r_4 \geq 0 \Rightarrow \hat{c}_2 \geq \frac{3}{2}; \quad r_5 \geq 0 \Rightarrow \hat{c}_2 \leq 6.$$

因此,当

$$\frac{3}{2} \leq \hat{c}_2 \leq 6 \text{ (或 } -\frac{5}{2} \leq \Delta \hat{c}_2 \leq 2)$$

时,最优基保持不变,最优解 X^* 仍为 $(0, 200/3, 500/3)^\top$, 而最优值 $z^* = 200 \hat{c}_2/3 + 500$.

若 $\hat{c}_2 = 9$, 此时有

$$r_1 = \frac{7}{2}, \quad r_4 = \frac{5}{2}, \quad r_5 = -1, \quad f_0 = 1100.$$

我们将表 2-10 修改成表 2-13, 用单纯形法继续迭代, 得表 2-14. 于是, 得最优解 $X^* = (0, 150, 0)^\top$, 最优值 $z^* = 1350$.

表 2-13

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	200/3
x_3	5/6	0	1	-1/6	(2/3)	0	500/3
x_6	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	800/3
r	7/2	0	0	5/2	-1	0	1100

表 2-14

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	3/4	1	1/2	1/4	0	0	150
x_5	5/4	0	3/2	-1/4	1	0	250
x_6	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1	350
r	19/4	0	3/2	9/4	0	0	1350

在上述例子的基础上, 下面我们给出参数 c_s 灵敏度分析的一般公式.

1. 情况一

$s \in I_B$, x_s 是关于 B 的一个非基本变量, $c'_s = c_s + \Delta c_s$, C_B 未变. $T(B)$ 中 r_s 改变:

$$r'_s = c'_s - C_B^\top y^s = c_s + \Delta c_s - C_B^\top y^s = \Delta c_s + r_s.$$

因此, 若要 $r'_s \geq 0$, 则 Δc_s 应满足条件:

$$-r_s \leq \Delta c_s < +\infty. \quad (2-21)$$

2. 情况二

$s \in I_B$, x_s 为关于基 B 的一个基本变量, 不妨设 $s = B_i$, 此时 C_B 有了变化:

$$C'_B = C_B + \Delta c_{B_i} e_i.$$

因此, $T(B)$ 中 f_0 和 $r_j (j \in I_D)$ 都将受到影响:

$$\begin{aligned} f'_0 &= (C'_B)^T \bar{b} = C_B^T \bar{b} + \Delta c_{B_i} e_i^T \bar{b} = f_0 + \Delta c_{B_i} \bar{b}_i, \\ r'_j &= c_j - (C'_B)^T y^j = c_j - C_B^T y^j - \Delta c_{B_i} e_i^T y^j = r_j - \Delta c_{B_i} y_{ij} \quad (j \in I_D). \end{aligned}$$

于是,若要 $r'_j \geq 0$ ($j \in I_D$),则 Δc_{B_i} 应满足条件:

$$\Delta c_{B_i} \leq \frac{r_j}{y_{ij}} \quad (j \in I_D, y_{ij} > 0),$$

$$\Delta c_{B_i} \geq \frac{r_j}{y_{ij}} \quad (j \in I_D, y_{ij} < 0).$$

考虑到 $\{y_{ij} \mid y_{ij} > 0, j \in I_D\}$ 或 $\{y_{ij} \mid y_{ij} < 0, j \in I_D\}$ 可能为空集,所以 Δc_{B_i} 的变化范围为

$$\max \left\{ -\infty, \frac{r_j}{y_{ij}} \mid j \in I_D, y_{ij} < 0 \right\} \leq \Delta c_{B_i} \leq \min \left\{ +\infty, \frac{r_j}{y_{ij}} \mid j \in I_D, y_{ij} > 0 \right\}. \quad (2-22)$$

(上述不等式中,若界为 $-\infty$ 或 $+\infty$,则相应的“ $\leq$ ”应改为“ $<$ ”,下面类似的情况不再说明)。

综上所述可知,如果 Δc_s 没有超出式(2-21)或式(2-22)所给的范围,那么最优基和最优解不变.如果 Δc_s 超出规定的范围,则 $r'_j \geq 0$ 对 $j = 1, \dots, n$ 不全成立,可将最优表中原 r 行元素修改后用单纯形法继续迭代,求得新的最优解.

例 2-14 试问例 2-12 中的 $\Delta \hat{c}_3$ 在何范围内变化,该工厂仍然生产 2[#] 产品和 3[#] 产品.

解 现在 $s = 3$, x_3 为 x_{B_2} ,并注意 $\hat{c}_3 = -c_3$, $\Delta c_3 = -\Delta \hat{c}_3$,利用表 2-10 中 x_3 所在行和 r 行的有关元素和公式(2-22),可知 $\Delta \hat{c}_3$ 的变化范围应为

$$\frac{5}{6} / \left(-\frac{1}{6} \right) \leq -\Delta \hat{c}_3 \leq \min \left\{ \frac{11}{6} / \frac{5}{6}, \frac{2}{3} / \frac{2}{3} \right\},$$

即

$$-1 \leq \Delta \hat{c}_3 \leq 5.$$

2.5.2 参数 b_s 的灵敏度分析

若 $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ 中某个参数 b_s 发生变化 $b'_s = b_s + \Delta b_s$,易知只会影响最优单纯形表 $T(B)$ 中的 $\bar{b}$ 和 f_0 . 因此,若要求最优基保持不变,应使新的 $\bar{b}' = B^{-1} b' \geq 0$.

我们先来看一个例子.

例 2-15 (1) 例 2-12 中 b_1 的改变量 Δb_1 在何范围内变化,最优基保持不变?

(2) 例 2-12 中 b_2 在何范围内变化,最优基保持不变?若 $b_2 = 900$,求最优解.

解 (1) 现在 $b' = b + \Delta b_1 e_1$,由表 2-10 知,

$$B^{-1} = (y^4, y^5, y^6),$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{b}}' &= B^{-1}\mathbf{b}' = B^{-1}\mathbf{b} + B^{-1}\Delta b_1\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{b}} + \Delta b_1 B^{-1}\mathbf{e}_1 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{200}{3} \\ \frac{500}{3} \\ \frac{800}{3} \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{200}{3} + \frac{1}{3}\Delta b_1 \\ \frac{500}{3} - \frac{1}{6}\Delta b_1 \\ \frac{800}{3} - \frac{2}{3}\Delta b_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

为使最优基保持不变,应使 Δb_1 满足条件:

$$\bar{b}'_1 = \frac{200}{3} + \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -200,$$

$$\bar{b}'_2 = \frac{500}{3} - \frac{1}{6}\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 1000,$$

$$\bar{b}'_3 = \frac{800}{3} - \frac{2}{3}\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 400,$$

也即要求

$$-200 \leq \Delta b_1 \leq 400.$$

(2) 现在 $\mathbf{b}' = (600, b_2, 800)^\top$, 于是

$$\bar{\mathbf{b}}' = B^{-1}\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ b_2 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 - \frac{1}{3}b_2 \\ -100 + \frac{2}{3}b_2 \\ 400 - \frac{1}{3}b_2 \end{pmatrix}.$$

为使最优基保持不变,应使 $\bar{\mathbf{b}}' \geq 0$, 即

$$200 - \frac{1}{3}b_2 \geq 0 \Rightarrow b_2 \leq 600,$$

$$-100 + \frac{2}{3}b_2 \geq 0 \Rightarrow b_2 \geq 150,$$

$$400 - \frac{1}{3}b_2 \geq 0 \Rightarrow b_2 \leq 1200,$$

故当

$$150 \leq b_2 \leq 600$$

时,最优基保持不变. 此时有最优解和最优值分别为

$$\mathbf{X}^* = (x_1, x_2, x_3)^\top = \left(0, 200 - \frac{1}{3}b_2, -100 + \frac{2}{3}b_2\right)^\top,$$

$$z^* = \mathbf{C}_B^\top \bar{\mathbf{b}}' = (4, 3, 0)\bar{\mathbf{b}}' = 500 + \frac{2}{3}b_2.$$

如果 $b_2 = 900$, 则 $\bar{\mathbf{b}} = (-100, 500, 100)^\top$, $z' = 1100$. 此时, $B = (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_6)$ 不是最优基. 将表 2-10 修改成表 2-15, 用对偶单纯形法对表 2-15 继续迭代, 得表 2-16.

于是,最优解 $X^* = (0, 300, 0)^T$, 最优值 $z^* = 900$.

表 2-15

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	1/3	1	0	1/3	$(-1/3)$	0	-100
x_3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	500
x_6	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	100
r	11/6	0	0	5/6	2/3	0	1 100

表 2-16

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_5	-1	-3	0	-1	1	0	300
x_3	3/2	2	1	1/2	0	0	300
x_6	-2	-1	0	-1	0	1	200
r	5/2	2	0	3/2	0	0	900

下面我们给出参数 b_s 的灵敏度分析一般公式. 设

$$b'_s = b_s + \Delta b_s \quad (b' = b + \Delta b_s e_s),$$

此时, $T(B)$ 中 $\bar{b}$ 和 f_0 改变. 为了保持 B 仍为最优基, 新的 $\bar{b}' = B^{-1} b' \geq 0$ 仍应成立. 现令

$$B^{-1} = (h_{ij})_{m \times m} = (h^1, \dots, h^m), \quad (2-23)$$

其中 h^i 表示 B^{-1} 的第 i 列. 于是

$$\bar{b}' = B^{-1} (b + \Delta b_s e_s) = \bar{b} + \Delta b_s B^{-1} e_s = \bar{b} + \Delta b_s h^s.$$

为使 $\bar{b}' \geq 0$, 则应有

$$\Delta b_s \geq -\frac{\bar{b}_i}{h_{is}} \quad (h_{is} > 0),$$

$$\Delta b_s \leq -\frac{\bar{b}_i}{h_{is}} \quad (h_{is} < 0).$$

考虑到可能会出现 $h^s \leq 0$ 或 $h^s \geq 0$ 的情况, 所以 Δb_s 的变化范围为

$$\begin{aligned} & \max \left\{ -\infty, -\frac{\bar{b}_i}{h_{is}} \mid h_{is} > 0, 1 \leq i \leq m \right\} \leq \Delta b_s \\ & \leq \min \left\{ +\infty, -\frac{\bar{b}_i}{h_{is}} \mid h_{is} < 0, 1 \leq i \leq m \right\}. \end{aligned} \quad (2-24)$$

当 Δb_s 在式(2-24)所给的范围内变化时, 最优基不变, 最优解为

$$X_B^* = \bar{b}' = B^{-1} b' = \bar{b} + \Delta b_s h^s, \quad X_D^* = 0,$$

最优值 $f^* = C_B^T \bar{b}'$. 当 Δb_s 超出式(2-24)规定的范围时, 则 $\bar{b}' \geq 0$ 不成立, 可用对偶单纯形法继续迭代, 求得最优解.

例 2-16 用公式(2-24)对例 2-12 的 b_1 作灵敏度分析.

解 现在 $s = 1$. 由表 2-10 知: $B^{-1} = (y^4, y^5, y^6)$, $h^s = h^1 = y^4 = (1/3, -1/6, -2/3)^T$, $\bar{b} = (200/3, 500/3, 800/3)^T$. 因此, 为使最优基保持不变, 由公式(2-24)知, Δb_1 的变化范围为

$$-\frac{200}{3} \Big/ \frac{1}{3} \leq \Delta b_1 \leq \min \left\{ -\frac{500}{3} \Big/ \left(-\frac{1}{6} \right), -\frac{800}{3} \Big/ \left(-\frac{2}{3} \right) \right\},$$

即

$$-200 \leq \Delta b_1 \leq 400.$$

2.5.3 变量 x_s 的系数列向量 $A_{\cdot s}$ 的变化

若矩阵 A 的第 s 列 $A_{\cdot s}$ 发生变化, 我们怎样在已有最优单纯形表 $T(B)$ 的基础上去求解修改后的线性规划问题呢? 下面分两种情况来讨论.

1. 情况一

$s \in I_B$. 这时最优基 B 未受影响, 仅 $T(B)$ 中第 s 列 y^s 及 r_s 受到影响. 现设 $A_{\cdot s}$ 变为 $A'_{\cdot s}$, 则将 $T(B)$ 中第 s 列 y^s 用 $B^{-1}A'_{\cdot s}$ 取代, r_s 修改为 $r'_s = c_s - C_B^T B^{-1}A'_{\cdot s}$. 若

$$r'_s = c_s - C_B^T B^{-1}A'_{\cdot s} \geq 0$$

成立, 则 X^* 仍为修改后的问题的最优解, 否则对修改后的单纯形表 $T(B)$ 用单纯形法继续求解.

2. 情况二

$s = B_k \in I_B$. 若以 A' 表示将 A 中第 s 列 $A_{\cdot s}$ 换成 $A'_{\cdot s}$ 后所得的矩阵, 则修改后的线性规划问题为

$$\begin{aligned} \min f &= C^T X; \\ \text{s. t. } A'X &= b, \\ X &\geq 0. \end{aligned} \quad (LP')$$

为了能利用原有 $T(B)$ 中的信息求解 (LP') , 类似于两阶段法, 我们在第一阶段引进一个人工变量 x_{n+1} 而先考察下面一个线性规划 (LP'') :

$$\begin{aligned} \min w &= x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \hat{c}_j x_j; \\ \text{s. t. } A'X + A_{\cdot s} x_{n+1} &= b, \\ X &\geq 0, x_{n+1} \geq 0, \end{aligned} \quad (LP'')$$

其中 $\hat{c}_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$), $\hat{c}_{n+1} = 1$. 于是, 求解 (LP'') 成为求解 (LP') 的第一阶段.

用单纯形法求解 (LP'') 时, 初始指标集可以这样取: 将 (LP) 最优表相应指标集 $\{B_1, \dots, B_k, \dots, B_m\}$ 中第 k 个指标 $B_k = s$ 置换成 $(n+1)$, 即取指标集

$$\{B_1, \dots, B_{k-1}, (n+1), B_{k+1}, \dots, B_m\},$$

(LP'') 关于该指标集相应的基即为原有问题 (LP) 的最优基 B . 我们对 (LP) 的最优表 $T(B)$ 作下列修改即可得到 (LP'') 的初始单纯形表:

(1) 将 $T(B)$ 中第 k 个基本变量 $x_{B_k} = x_s$ 换成 x_{n+1} , 在 $T(B)$ 中增加 x_{n+1} 一列, $y^{n+1} = e_k, r_{n+1} = 0$ (此时 x_s 成为非基本变量, 置入 I_D 中)。

(2) 将 $T(B)$ 中 x_s 所在列 y^s 换成 $B^{-1}A'_{\cdot s} = (y'_{1s}, \dots, y'_{ms})^T$.

(3) 由于 $\hat{C}_B^T = (0, \dots, 1, \dots, 0) = e_k^T$, 所以将 $T(B)$ 中 r 行元素重新计算:

$$r_j = \hat{c}_j - \hat{C}_B^T y^j = 0 - e_k^T y^j = -y_{kj}, \quad j \in I_D, j \neq s.$$

$$r_s = \hat{c}_s - \hat{C}_B^T B^{-1} A'_{\cdot s} = -e_k^T B^{-1} A'_{\cdot s} = -y'_{ks},$$

$$w_0 = \hat{C}_B^T \bar{b} = \bar{b}_k.$$

修改后的单纯形表如表 2-17 所示.

表 2-17

$\hat{C}$		...	0	...	0	...	1	$\bar{b}$
$\hat{C}_B$	x_B	...	x_s	...	x_j	...	x_{n+1}	
0	x_{B_1}	...	y'_{1s}	...	y_{1j}	...	0	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
1	x_{n+1}	...	y'_{ks}	...	y_{kj}	...	1	$\bar{b}_k$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
0	x_{B_m}	...	y'_{ms}	...	y_{mj}	...	0	$\bar{b}_m$
r		...	$-y'_{ks}$	...	$-y_{kj}$	...	0	$-\bar{b}_k$

对表 2-17 我们用单纯形法求解, 得 (LP'') 的基本最优解. 当 (LP'') 的最优值 $w^* = 0$ 时, 即得 (LP'') 的一个基本可行解. 然后在第二阶段从该基本可行解出发, 用单纯形法对 (LP') 求解.

例 2-17 如果在例 2-12 中将 $A_{\cdot 2} = (4, 1, 3)^T$ 换成 $A'_{\cdot 2} = (2, 1, 4)^T$, 求最优解.

解 (LP') 为

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 - 4x_2 - 3x_3; \\ \text{s. t. } \quad &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 600, \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 400, \\ &x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 800, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

由于 x_2 是 (LP) 的最优单纯形表表 2-10 的基本变量 x_{B_1} (此时, $k = 1$), 所以在第一阶段我们先来求解 (LP'') :

$$\begin{aligned} \min w &= x_7; \\ \text{s. t. } \quad &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_7 = 600, \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_7 = 400, \\ &x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 + 3x_7 = 800, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 7.$$

取 $I_B = \{7, 3, 6\}$, 由表 2-10 知

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$B^{-1}A'_{\cdot 2} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right)^T.$$

由表 2-10 和表 2-17, 得 (LP'') 的初始单纯形表, 见表 2-18. 转轴后得表 2-19.

表 2-18

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_7	1/3	1/3	0	(1/3)	-1/3	0	1	200/3
x_3	5/6	1/3	1	-1/6	2/3	0	0	500/3
x_6	-5/3	7/3	0	-2/3	-1/3	1	0	800/3
r	-1/3	-1/3	0	-1/3	1/3	0	0	-200/3

表 2-19

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_4	1	1	0	1	-1	0	3	200
x_3	1	1/2	1	0	1/2	0	1/2	200
x_6	-1	3	0	0	-1	1	2	400
r	0	0	0	0	0	0	1	0

由表 2-19 得到 (LP') 的一个初始基本可行解为

$$X^0 = (x_1, \dots, x_6)^T = (0, 0, 200, 200, 0, 400)^T.$$

第二阶段从这个初始基本可行解相应的单纯形表(见表 2-20)出发, 用单纯形法继续求解. 转轴后得 (LP') 的最优表表 2-21.

表 2-20

C		-2	-4	-3	0	0	0	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	1	1	0	1	-1	0	200
-3	x_3	1	1/2	1	0	1/2	0	200
0	x_6	-1	(3)	0	0	-1	1	400
r		1	-5/2	0	0	3/2	0	600

表 2-21

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	4/3	0	0	1	-2/3	-1/3	200/3
x_3	7/6	0	1	0	2/3	-1/6	400/3
x_2	-1/3	1	0	0	-1/3	1/3	400/3
r	1/6	0	0	0	2/3	5/6	2 800/3

由表 2-21 得 (LP') 的最优解和最优值分别为

$$X^* = \left(0, \frac{400}{3}, \frac{400}{3}\right)^T, \quad z^* = \frac{2\,800}{3}.$$

2.5.4 增加新的约束条件

例 2-18 现对例 2-12 中的 (LP) 增加约束条件

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 250, \quad (2-25)$$

求新的线性规划 $(\hat{LP})$ 的最优解.

解 约束条件(2-25)即为

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -250. \quad (2-26)$$

对其引进松弛变量 x_7 得

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = -250. \quad (2-27)$$

我们知道,新的 $(\hat{LP})$ 含有 4 个等式约束,故它的单纯形表应有 4 个基本变量.为利用 (LP) 的最优表 $T(B)$ 给出 $(\hat{LP})$ 的初始单纯形表,我们除了取表 2-10 的 3 个基本变量 x_2, x_3 和 x_6 为 $(\hat{LP})$ 的基本变量外,再增加一个基本变量 x_7 .因为方程(2-27)中含有变量 x_2 和 x_3 ,所以应通过变换把 x_2 和 x_3 的系数化为零.由表 2-10 中第一行和第二行相应的方程可知:

$$x_2 = \frac{200}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5, \quad x_3 = \frac{500}{3} - \frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{2}{3}x_5,$$

将它代入方程(2-27),整理后得方程

$$\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + x_7 = -\frac{50}{3}, \quad (2-28)$$

将它加到表 2-10 上(在表 2-10 中再增加 x_7 一列)即得表 2-22,以它为 $(\hat{LP})$ 的初始单纯形表,用对偶单纯形法继续求解.

由于在表 2-22 中 $\bar{b}_4 = -50/3 < 0$,而对 $j \in I_D = \{1, 4, 5\}$,都有 $y_{4j} > 0$,于是由定理 2-5 知 $(\hat{LP})$ 无可行解.

下面我们对一般情况进行讨论.

表 2-22

$\mathbf{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{\mathbf{b}}$
x_2	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	0	200/3
x_3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	0	500/3
x_6	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	0	800/3
x_7	1/6	0	0	1/6	1/3	0	1	-50/3
$\mathbf{r}$	11/6	0	0	5/6	2/3	0	0	2 300/3

如果现在对(LP)增加一个约束条件

$$(\mathbf{a}^{m+1})^\top \mathbf{X} \leq b_{m+1}, \quad (2-29)$$

其中向量 $\mathbf{a}^{m+1} = (a_1^{m+1}, \dots, a_j^{m+1}, \dots, a_n^{m+1})^\top$. 若对上述约束条件(2-29)引进松弛变量 x_{n+1} , 则我们面临的问题是: 如何利用(LP)的最优单纯形表 $T(B)$ 来求解下述增加约束条件(2-29)后的线性规划($\hat{LP}$):

$$\begin{aligned} \min f &= (\mathbf{C}^\top, 0) \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}; \\ \text{s. t.} \quad &\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ (\mathbf{a}^{m+1})^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{b}', \\ &\mathbf{X} \geq 0, x_{n+1} \geq 0. \end{aligned} \quad (2-30)$$

86

若令

$$\mathbf{a}^{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_B^{m+1} \\ \mathbf{a}_D^{m+1} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{a}_B^{m+1} = (a_{B_1}^{m+1}, \dots, a_{B_m}^{m+1})^\top$, $\mathbf{a}_D^{m+1} = (\dots, a_j^{m+1}, \dots)^\top$ ($j \in I_D$), 则约束条件(2-29)可以写成:

$$(\mathbf{a}_B^{m+1})^\top \mathbf{X}_B + (\mathbf{a}_D^{m+1})^\top \mathbf{X}_D + x_{n+1} = b_{m+1} \quad (2-31)$$

由式(1-41)知

$$\mathbf{X}_B = \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in I_D} \mathbf{y}^j x_j, \quad (2-32)$$

将它代入约束条件(2-31)可得

$$(\mathbf{a}_B^{m+1})^\top (\bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in I_D} \mathbf{y}^j x_j) + \sum_{j \in I_D} a_j^{m+1} x_j + x_{n+1} = b_{m+1},$$

即

$$x_{n+1} + \sum_{j \in I_D} [a_j^{m+1} - (\mathbf{a}_B^{m+1})^\top \mathbf{y}^j] x_j = b_{m+1} - (\mathbf{a}_B^{m+1})^\top \bar{\mathbf{b}}. \quad (2-33)$$

于是, 我们对线性规划($\hat{LP}$)(2-30)取初始基

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ (\mathbf{a}_B^{m+1})^\top & 1 \end{pmatrix},$$

除了原来(LP)的 m 个最优基本变量 $x_{B_1}, \dots, x_{B_m}$ 仍作为($\hat{L}P$)的基本变量外,又增加第 $n+1$ 个基本变量 x_{n+1} ,此时($\hat{L}P$)的初始指标集

$$I_B = \{B_1, \dots, B_m, n+1\}.$$

我们将方程(2-33)增加到 $T(B)$ 上并增加 x_{n+1} 一列,即可得到($\hat{L}P$)关于基 $\tilde{B}$ 的单纯形表 $T(\tilde{B})$,如表 2-23 所示.

表 2-23

$\tilde{X}_B$	$\dots$	x_{B_i}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_{n+1}	$\tilde{B}^{-1}b'$
X_B	$\dots$	e_i	$\dots$	y^j	$\dots$	0	$\bar{b}$
x_{n+1}	$\dots$	0	$\dots$	$a_j^{m+1} - (a_B^{m+1})^\top y^j$	$\dots$	1	$b_{m+1} - (a_B^{m+1})^\top \bar{b}$
r	$\dots$	0	$\dots$	r_j	$\dots$	0	$-f_0$

若 $\bar{b}_{m+1} = b_{m+1} - (a_B^{m+1})^\top \bar{b} \geq 0$,则原有(LP)的最优解仍为($\hat{L}P$)的最优解(此时 $x_{n+1} = b_{m+1} - (a_B^{m+1})^\top \bar{b}$);否则,以表 2-23 为($\hat{L}P$)的初始表,用对偶单纯形法继续求解.

例 2-19 用上述计算公式求例 2-18($\hat{L}P$)的单纯形表(表 2-22).

解 由约束条件(2-26)知,

$$a^4 = (a_1^4, a_2^4, a_3^4, a_4^4, a_5^4, a_6^4)^\top = (-1, -1, -1, 0, 0, 0)^\top.$$

对于(LP)的最优表表 2-10 来说, $I_B = \{2, 3, 6\}$, $I_D = \{1, 4, 5\}$,所以 $a_B^4 = (a_2^4, a_3^4, a_6^4)^\top = (-1, -1, 0)^\top$.在对 $-x_1 - x_2 - x_3 \leq -250$ 引进松弛变量 x_7 后,我们对($\hat{L}P$)取初始指标集 $I_{\tilde{B}} = \{2, 3, 6, 7\}$,并由表 2-10 对 $j \in I_D = \{1, 4, 5\}$,计算表 2-23 中的 y_{4j} 和 $\bar{b}_4$.

$$y_{41} = a_1^4 - (a_B^4)^\top y^1 = -1 - (-1, -1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6},$$

$$y_{44} = a_4^4 - (a_B^4)^\top y^4 = 0 - (-1, -1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6},$$

$$y_{54} = a_5^4 - (a_B^4)^\top y^5 = 0 - (-1, -1, 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3},$$

$$\bar{b}_4 = b_4 - (a_B^4)^T \bar{b} = -250 - (-1, -1, 0) \begin{pmatrix} \frac{200}{3} \\ \frac{500}{3} \\ \frac{800}{3} \end{pmatrix} = -\frac{50}{3}.$$

于是, 即得 \$(\hat{LP})\$ 的单纯形表, 如表 2-22 所示.

2.5.5 增加新的变量

如果我们对 \$(LP)\$ 增加一个新变量 \$x_{n+1}\$, 新的问题 \$(LP')\$ 为

$$\begin{aligned} \min f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X} + c_{n+1} x_{n+1}; \\ \text{s. t. } \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{A}_{(n+1)} x_{n+1} &= \mathbf{b}, \quad (LP') \\ \mathbf{X} \geqslant 0, x_{n+1} &\geqslant 0. \end{aligned}$$

那么, 我们如何利用 \$(LP)\$ 的最优表 \$T(B)\$ 来求解 \$(LP')\$ 呢?

显然, \$(LP)\$ 的最优基 \$B\$ 仍为 \$(LP')\$ 的一个基, 我们在 \$(LP)\$ 的非基本变量指标集 \$I_D\$ 中增加一个指标 \$n+1\$, 在 \$T(B)\$ 增加 \$x_{n+1}\$ 一列:

$$\mathbf{y}^{n+1} = B^{-1} \mathbf{A}_{(n+1)}, \quad r_{n+1} = c_{n+1} - \mathbf{C}_B^T \mathbf{y}^{n+1},$$

于是, 我们即得到 \$(LP')\$ 关于基 \$B\$ 的单纯形表 \$T'(B)\$. 当 \$r_{n+1} \geqslant 0\$ 时, \$\mathbf{X} = \mathbf{X}^*\$, \$x_{n+1} = 0\$ 即为 \$(LP')\$ 的最优解. 当 \$r_{n+1} < 0\$ 时, 可应用单纯形法对 \$T'(B)\$ 继续迭代.

例 2-20 对例 2-12 增加一个新变量 \$x_7\$, \$\mathbf{A}_{\cdot 7} = (2, 1, 4)^T\$, \$\hat{c}_7 = 4\$. 求增加新变量后的问题 \$(LP')\$ 的最优解.

解 由表 2-10 知, \$B = (\mathbf{A}_{\cdot 2}, \mathbf{A}_{\cdot 3}, \mathbf{A}_{\cdot 6})\$, \$I_B = \{2, 3, 6\}\$.

$$\mathbf{y}^7 = B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot 7} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix},$$

$$r_7 = c_7 - \mathbf{C}_B^T \mathbf{y}^7 = -4 - (-4, -3, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}.$$

我们得 \$(LP')\$ 的初始单纯形表, 如表 2-24 所示. 用单纯形法对表 2-24 进行转轴, 得表 2-25.

于是, 得增加新变量后的问题的最优解和最优值分别为

$$\mathbf{X}^* = (x_1, x_2, x_3, x_7)^T = \left(0, \frac{200}{7}, \frac{900}{7}, \frac{800}{7}\right)^T, \quad f^* = \frac{6700}{7}.$$

表 2-24

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	1/3	200/3
x_3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	1/3	500/3
x_6	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	(7/3)	800/3
r	11/6	0	0	5/6	2/3	0	-5/3	2 300/3

表 2-25

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	4/7	1	0	3/7	-2/7	-1/7	0	200/7
x_3	15/14	0	1	-1/14	5/7	-1/7	0	900/7
x_7	-5/7	0	0	-2/7	-1/7	3/7	1	800/7
r	9/14	0	0	5/14	3/7	5/7	0	6 700/7

§ 2.6 影子价格

若线性规划(LP)的最优单纯形表为 $T(B)$, 最优基为 B , 现在我们来讨论, 如果参数 b_s 的改变量 Δb_s (其他 b_i 均不变) 没有超出式(2-24)规定的范围, 那么, 当 $\Delta b_s = 1$ 时, $\Delta f^* = ?$

由对偶理论知道, 最优基 B 对应的单纯形因子

$$U^* = (C_B^T B^{-1})^T = (u_1^*, \dots, u_m^*)^T$$

为对偶问题(LD)的最优解, 且(LP)的最优值

$$f^* = b^T U^* = \sum_{i=1}^m b_i u_i^*.$$

因为当 b_s 变化而基 B 仍保持最优基地位时, u_s^* 并不改变, 所以若把 f^* 视为 $b_1, \dots, b_m$ 的函数, 则当 $\Delta b_s = 1$ 时, 有

$$\Delta f^* = u_s^*.$$

下面我们对 u_s^* 的经济意义作进一步的解释.

假设有一家工厂利用 m 种资源生产 n 种产品. 已知每单位 $j^{\#}$ 产品的利润为 c_j , $i^{\#}$ 资源供应上限为 b_i , 生产一个单位 $j^{\#}$ 产品所耗费的 $i^{\#}$ 资源的定额为 a_{ij} . 那么, 每种产品各生产多少, 使工厂获利最大?

设 $j^{\#}$ 产品的生产数量为 x_j . 则该问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

若 B 是它的标准化模型(LP)的最优基, $T(B)$ 为最优单纯形表, 由 § 2.4 中式(2-17)知道: $U^* = (C_B^T B^{-1}) = (u_1^*, \dots, u_m^*) = (r_{n+1}, \dots, r_{n+m})^T$ 即为对偶问题(D)的最优解, 且有 $z^* = b^T U^*$.

于是, 当 b_i 发生变化, 且 Δb_i 在式(2-24)范围内取值时, u_i^* 就是 $i^\#$ 资源供应量增加一个单位时, 工厂的最大利润 f^* 所能增加的收益. 我们称 u_i^* 为关于 $i^\#$ 资源(或关于 b_i)的影子价格, 而把向量 $U^* = (C_B^T B^{-1})^T$ 称为影子价格向量.

如果一个单位的 $i^\#$ 资源的 market 价格为 d_i , 当 $u_i^* > d_i$ 时, 则工厂应该买进部分 $i^\#$ 资源用于扩大生产, 工厂将会增加收益; 当 $u_i^* < d_i$ 时, 则工厂可以卖出部分 $i^\#$ 资源而减少生产规模, 此时工厂也会增加收益.

例 2-21 在例 2-12 中, 若 $1^\#$ 资源增加 360 个单位所花费用为 200, 问是否要增加 $1^\#$ 资源?

解 例 2-15 告诉我们, 当 $\Delta b_1 \in [-200, 400]$ 时最优基不变, $1^\#$ 资源的影子价格 $u_1^* = r_4 = 5/6$, 现在 $\Delta b_1 = 360$ 未超出灵敏度分析范围, 所以 $\Delta f^* = u_1^* \Delta b_1 = (5/6) \times 360 = 300 > 200$, 故增加 $1^\#$ 资源 360 个单位对工厂是有利的, 能增加收益 $300 - 200 = 100$.

所以说 u_i^* 是在实现最优值时对于第 i 种资源的一种价格估计, 这种估计是针对具体企业具体产品而存在的一种特殊价格. 影子价格与市场价格既有联系又有区别, 是市场价格从不同角度来看到的“影子”, 可以当作企业的一种经营管理方法, 用于内部核算、分析和决策.

设有一个工业系统, 它拥有 n 种不同类型的生产工厂, 生产 m 种社会所需的产品, 已知一年内社会对 $i^\#$ 产品的最低需求量为 b_i , 又知一年内 $j^\#$ 生产工厂的运行成本为 c_j 、生产 $i^\#$ 产品的数量为 a_{ij} . 那么, 在保证满足社会对 m 种产品需求量的前提下, 每种类型生产工厂各应投入多少家运行, 才能使总成本达到最小?

设 x_j 为投入运行的 $j^\#$ 生产工厂的厂家数量, 则我们得到如下线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

若 B 是它标准化模型(LP)的最优基, $T(B)$ 为最优单纯形表, 由 § 2.4 中的式(2-15)知道: $U^* = (C_B^T B^{-1})^T = (u_1^*, \dots, u_m^*)^T = (r_{n+1}, \dots, r_{n+m})^T$ 即为对偶问题(D)的最优解, 且有 $f^* = b^T U^*$.

如果市场现在对 $i^\#$ 产品的最低需求量 b_i 有变化, 且 Δb_i 是在式(2-24)所规定的范围内取值, u_i^* 就是市场对 $i^\#$ 产品的需求量增加一个单位时, f^* 所增加的运行成本. 我们称 u_i^* 为 $i^\#$ 产品的合理成本, 把向量 $U^* = (C_B^T B^{-1})^T$ 称为合理成本向量.

例 2-22 某工厂有甲、乙两个车间工段可生产 A_1, A_2 和 A_3 3 类产品, 各工段开工一天生产 3 类产品的数量、费用以及合同对 3 类产品的最低需求量由表 2-26 给出. 问各工段开工几天, 能使生产合同的要求得到满足, 并能使费用最低? 试对 b_1 作灵敏度分析, 并求每吨 A_1 类产品的合理成本.

表 2-26

定额 a_{ij} (吨/天)		j^* 工段		生产合同最低 需求量 b_i (吨)
		甲 ($j = 1$)	乙 ($j = 2$)	
产品 A_i	A_1	2	7	20
	A_2	1	1	5
	A_3	8	2	16
费用(元/天)		1 000	2 000	

解 设 x_1, x_2 分别为工段甲、乙开工的天数, 则得模型

$$\begin{aligned}
 \min f &= 1\,000x_1 + 2\,000x_2; \\
 \text{s. t. } &2x_1 + 7x_2 \geq 20, \\
 &x_1 + x_2 \geq 5, \\
 &8x_1 + 2x_2 \geq 16, \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

对上述模型引进剩余变量 x_3, x_4, x_5 并用对偶单纯形法求解, 得如表 2-27 所示的最优表. 最优解

$$\mathbf{X}^* = (x_1, x_2)^T = (3, 2)^T, f^* = 7\,000.$$

即甲、乙工段各需开工 3 天和 2 天, 最低费用为 7 000 元.

表 2-27

$\mathbf{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	0	1	$-1/5$	$2/5$	0	2
x_1	1	0	$1/5$	$-7/5$	0	3
x_5	0	0	$6/5$	$-52/5$	1	12
r	0	0	200	600	0	$-7\,000$

由表 2-27 知, 最优基 $B = (\mathbf{A}_{\cdot 2}, \mathbf{A}_{\cdot 1}, \mathbf{A}_{\cdot 5})$,

$$B^{-1} = (-\mathbf{y}^3, -\mathbf{y}^4, -\mathbf{y}^5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ -\frac{6}{5} & \frac{52}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

为使最优基保持不变, 由式(2-24)知 Δb_1 应满足下列条件:

$$-2/\frac{1}{5} \leq \Delta b_1 \leq \min\left\{-3/\left(-\frac{1}{5}\right), -12/\left(-\frac{6}{5}\right)\right\},$$

即

$$-10 \leq \Delta b_1 \leq 10 \quad (\text{或 } 10 \leq b_1 \leq 30).$$

$$U^* = (C_B^T B^{-1})^T = (r_3, r_4, r_5)^T = (200, 600, 0)^T.$$

所以当 $b_1 \in [10, 30]$ 时, 每吨 A_1 类产品的合理成本为 200 元.

应注意, 在我们上面讨论的问题中, 只有在保持 B 为最优基时, 向量 $U^* = (C_B^T B^{-1})^T$ 才是合理成本向量和影子价格向量. 一般地, 若 B 为线性规划

$$\begin{array}{ll} \min f = C^T X; & \max z = C^T X; \\ \text{s. t. } & AX \geq b, \quad \text{或} \quad \text{s. t. } \quad AX \leq b, \\ & X \geq 0; \quad \quad \quad X \geq 0 \end{array}$$

所相应的标准型线性规划的最优基, 则称向量

$$U^* = (C_B^T B^{-1})^T = (u_1^*, \dots, u_m^*)^T$$

为原有问题的影子价格向量, 称 u_i^* 为关于 b_i 的影子价格. 若 B 为任一个标准型线性规划问题(LP)的最优基, 则也称 $U^* = (C_B^T B^{-1})^T$ 为此(LP)问题的影子价格向量, u_i^* 为关于 b_i 的影子价格.

习 题 二

1. 写出下列线性规划问题的对偶问题:

$$\begin{array}{ll} (1) & \min f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4; \\ & \text{s. t. } \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 2, \\ & \quad -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ & \quad 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 10, \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0. \\ (2) & \max f = 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 8x_5; \\ & \text{s. t. } \quad 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 - 5x_5 \geq -2, \\ & \quad x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -5, \\ & \quad -x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq -5. \\ & \quad x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array}$$

2. 写出下列(P)的对偶问题(D):

$$\begin{array}{ll} \min f = 12x_1 + 8x_2 + 7x_3; \\ \text{s. t. } \quad 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 \geq 60, \\ \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{array}$$

用讨论(D)的方法(不准用单纯形法求解)给出(P)的最优值.

3. 用对偶理论来说明下列线性规划的目标函数无下界:

$$\begin{array}{ll} \min f = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3; \\ \text{s. t. } \quad 2x_1 + 3x_3 \geq 60, \\ \quad 5x_1 + 2x_2 \geq 30, \\ \quad 3x_1 + x_3 \geq 20, \end{array} \quad (P)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

4. 设 $(LP) : \min\{C^T X | AX = b, X \geq 0\}$ 有最优解, 又 $(LP') : \min\{C^T X | AX = b', X \geq 0\}$ 有可行解, 其中 $b \neq b'$. 试用对偶理论证明 (LP') 必有最优解.

5. 现有一个线性规划问题 (P_1) :

$$\begin{aligned} \max f_1 &= C^T X; \\ \text{s. t. } AX &\leq b, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

其对偶问题的最优解 $U^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)$. 另一线性规划 (P_2) :

$$\begin{aligned} \max f_2 &= C^T X; \\ \text{s. t. } AX &\leq b + d, \\ X &\geq 0, \end{aligned}$$

其中 $d = (d_1, \dots, d_m)^T$. 求证 $\max f_2 \leq \max f_1 + d^T U^*$.

6. 给出线性规划 :

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4; \\ \text{s. t. } 2x_1 + x_3 + x_4 &\leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 12, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

用松弛互补定理证明本问题在用单纯形法求解时的最优基本变量是 x_3 和 x_4 .

7. 用对偶单纯形法求解下列线性规划 :

$$\begin{aligned} \min f &= 60x_1 + 40x_2 + 80x_3; \\ \text{s. t. } 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 3, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

8. 某线性规划问题为

$$\begin{aligned} \max z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3; \\ \text{s. t. } AX &\leq b, \\ X &= (x_1, x_2, x_3)^T \geq 0. \end{aligned}$$

将它化成标准型后可得它的一张单纯形表, 如表 2-28 所示. 其中 x_4, x_5 为松弛变量.

表 2-28

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_3	0	-1/2	1	1/2	0	5/2
x_1	1	-1/2	0	-1/6	1/3	5/2
r	0	4	0	4	2	40

- (1) 写出原有线性规划问题；
- (2) 写出对偶问题；
- (3) 根据上述单纯形表求对偶问题的最优解。

9. 若第一章习题一第 1 题的标准型的最优单纯形表如表 2-29 所示(x_3, x_4, x_5 为松弛变量)。

表 2-29

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_3	0	0	1	-3.12	1.16	840
x_1	1	0	0	0.4	-0.2	200
x_2	0	1	0	-0.12	0.16	240
r	0	0	0	13.6	5.2	42 800

- (1) 试问 c_1 和 c_2 各在何范围内变动, 最优解不变?

(2) 若工厂的最优生产计划仍然是两种产品都生产, 试分别确定 3 种资源 b_i 的变化范围及影子价格。

10. 若习题一第 2 题的标准型的最优单纯形表如表 2-30 所示(x_3, x_4, x_5 为剩余变量), 试分别确定 b_i 的变化区间(最优基保持不变)和合理成本。

表 2-30

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	0	0	-4	1	1	2
x_1	1	0	-3/2	0	1/2	3
x_2	0	1	1/2	0	-1/2	2
r	0	0	500	0	500	-7 000

11. 某工厂生产两种产品, 分别需在 A, B, C, D 设备上加工, 有关数据如表 2-31 所列。它的标准型的最优表(x_3, x_4, x_5, x_6 为松弛变量)如表 2-32 所示。假定 B 设备增加 10 个台时所需费用为 12, 问增加 B 设备 10 个台时是否合算? 若能增加利润, 能增加多少?

表 2-31

工 序	产	品	允许台时
	甲(x_1)	乙(x_2)	
A	2	2	22
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	28
单位产品利润	c_1	c_2	

表 2-32

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_3	0	0	1	-1	-1/4	0	10
x_1	1	0	0	0	1/4	0	4
x_6	0	0	0	-2	1/2	1	20
x_2	0	1	0	1/2	-1/8	0	2
r	0	0	0	3/2	1/8	0	14

12. 若线性规划

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 + x_2 - x_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ &-x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

的最优单纯形表如表 2-33 所示.

表 2-33

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10
r	0	3	1	2	0	12

(1) 若 $A_{.2} = (1, 2)^T$ 变为 $A'_{.2} = (2, 5)^T$, 求新问题的最优解.

(2) 若 $A_{.1} = (1, -1)^T$ 变为 $A'_{.1} = (0, -1)^T$, 求新问题的最优解.

13. 若线性规划

$$\begin{aligned} \min f &= -40x_1 - 50x_2; \\ \text{s. t.} \quad &2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ &4x_1 + 2x_2 + x_4 = 2.5, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

的最优单纯形表如表 2-34 所示. 现 $A_{.2} = (3, 2)^T$ 变为 $A'_{.2} = (4, 3)^T$, 求新问题的最优解.

表 2-34

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	0	1	1/2	-1/4	7/8
x_1	1	0	-1/4	3/8	3/16
r	0	0	15	5/2	51 $\frac{1}{4}$

14. (1) 对第 12 题的线性规划增加一个决策变量 x_6 , 相应的 $c_6 = -6$, $A_{.6} = (2, -1)^T$, 求新问题的最优解.

(2) 对第 12 题的线性规划增加一个新的约束条件 $-x_1 + 2x_2 \geq 2$, 求新问题的最优解.

第三章 运输问题

在生产实践中,我们经常会遇到这样一类线性规划问题:其变量与约束条件的个数都非常庞大,因此在计算机上应用单纯形法求解时,可能相当费时或存储单元不能满足要求,但是这些线性规划往往具有另一个特点——系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 中元素 a_{ij} 大多数为零,而非零的元素 a_{ij} 又呈现一定规律,于是,可利用问题的特殊结构而拟制比单纯形法简便得多的特殊解法,使得存储单元减少,节省计算时间和费用.本章讨论的运输问题就是属于这样一类特殊结构的线性规划问题.我们先介绍运输问题的数学模型,然后给出其求解方法——表上作业法,最后介绍一些典型的建立运输问题模型的应用例题.

§ 3.1 运输问题的数学模型

96

运输问题这个名称的获得是因为这类模型首先在物资运输的合理规划中形成并运用的缘故。但是,运输问题及其求解方法所管辖、研究的对象事实上要广义得多,例如,对于生产计划等这类管理问题它也是行之有效的。下面我们给出一般的运输问题的数学模型:

例 3-1 现有 m 个发点 $A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$, 可供应某种物资给 n 个收点 $B_1, \dots, B_j, \dots, B_n$. 发点 A_i 的物资供应量(发量)为 a_i , 收点 B_j 对物资的需求量(收量)为 b_j , 且收发平衡: 即 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. 又设单位物资从 A_i 运往 B_j 的单位运价为 c_{ij} . 问怎样运输这些物资, 以使总运费最小?

解 我们将问题所给的有关信息制成表 3-1, 并称它为运输收发平衡单位运价表(有时简称运输表格).

表 3-1

$A_i \backslash B_j$	B_1	...	B_j	...	B_n	a_i
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	...	b_j	...	b_n	

设发点 A_i 至收点 B_j 的运量为 x_{ij} ,则我们有表 3-2.

表 3-2

$A_i \backslash B_j$	B_1	...	B_j	...	B_n	a_i
A_1	x_{11} c_{11}	...	x_{1j} c_{1j}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_i	x_{i1} c_{i1}	...	x_{ij} c_{ij}	...	x_{in} c_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	x_{m1} c_{m1}	...	x_{mj} c_{mj}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
b_j	b_1	...	b_j	...	b_n	

我们不难建立运输问题的线性规划模型：

$$\begin{aligned}
 \min f &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} ; \\
 \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i , \quad i = 1 , \dots , m , \\
 &\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j , \quad j = 1 , \dots , n , \\
 &x_{ij} \geq 0 , \quad i = 1 , \dots , m ; \quad j = 1 , \dots , n ,
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

其中 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. 今后我们称模型(3-1)为运输问题的标准模型 ,它含有 mn 个变量.

如果我们将全部发量约束 $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ 相加 ,就得到 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i$,将全部收量约束 $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ 相加 ,就得到 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j$,由于收发平衡 ,有 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$,所以模型(3-1)中 $m+n$ 个等式约束不是相互独立的. 但可以证明 ,若这 $m+n$ 个等式约束中任取 $m+n-1$ 个 ,则它们是相互独立的. 如果在 $m+n$ 个等式约束中删除任何一个 ,则运输问题(3-1)的可行域不变. 所以 ,问题(3-1)的基本解仅有 $m+n-1$ 个基本变量.

我们知道 ,单纯形法的基本步骤是 :寻找初始基本可行解 ,由检验数来判别它是不是最优解 ? 若不是最优解 ,则进行转轴. 对于运输问题来说 ,这些步骤可采用简单方法. 在手算时 ,它们可在运输表格上直接进行 ,所以俗称运输问题的求解方法为表上作业法.

那么 ,我们在运输收发平衡表的 mn 个变量中 ,如何选取 $m+n-1$ 个变量使其成为基本变量组呢 ? 为此 ,我们先介绍一些有关的基本概念.

(1) 设 E 是运输问题(3-1)的一组变量. 如果对 E 中变量作适当的排列后能得到下列形式：

$$x_{i_1 j_1} , x_{i_1 j_2} , x_{i_2 j_2} , x_{i_2 j_3} , \dots , x_{i_s j_s} , x_{i_s j_1} ,$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 互不相同 $j_1, j_2, \dots, j_s$ 互不相同, 则称 E 为运输问题(3-1)的一个闭回路. 闭回路中相应变量为闭回路的顶点.

例如, 设 $m=3, n=4, E=\{x_{13}, x_{14}, x_{34}, x_{31}, x_{21}, x_{23}\}$ 是一个闭回路. 若把闭回路中变量作为顶点在运输表格中画出, 并把闭回路中处在同一行或同一列的顶点用线段相连(称为闭回路的边), 那么, 上述 E 就有表 3-3 所示的形状.

表 3-3

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1			x_{13}	x_{14}	
A_2	x_{21}		x_{23}		
A_3	x_{31}			x_{34}	

闭回路的边只能是水平或垂直的, 闭回路的边所通过的行或列都恰有它的两个顶点.

(2) 设 Q 是运输问题(3-1)的一组变量, 若 x_{ij} 为 Q 中一个变量, 且 x_{ij} 是第 i 行或第 j 列中属于 Q 的唯一变量, 则我们称 x_{ij} 为 Q 的一个孤立点.

例如, 如表 3-4 所示, 在变量组

$$Q = \{x_{11}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{26}, x_{23}, x_{31}, x_{42}, x_{43}, x_{45}\}$$

中, x_{31}, x_{14} 和 x_{42} 是 Q 的孤立点. $E = \{x_{15}, x_{16}, x_{26}, x_{23}, x_{43}, x_{45}\}$ 是一个闭回路, E 的顶点都在 Q 中, 我们称 E 为 Q 中的一个闭回路.

表 3-4

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	$\bullet x_{11}$			$x_{14} \bullet$	x_{15}	x_{16}
A_2			x_{23}			x_{26}
A_3	$\bullet x_{31}$					
A_4		$\bullet x_{42}$	x_{43}		x_{45}	

对于运输问题(3-1), 我们给出下列定理.

定理 3-1

(1) 在运输问题(3-1)的 $m+n$ 个等式约束方程中只有 $m+n-1$ 个方程是相互独立的, 而且其中任意一组 $m+n-1$ 个约束方程都是相互独立的.

(2) 在运输问题(3-1)的 mn 个变量中, 选取 $m+n-1$ 个变量构成变量组 Q , 则 Q 能成为基本变量组的充要条件是: Q 中不存在闭回路.

(3) 设 Q 是运输问题(3-1)的一组基本变量, x_{st} 为非基本变量, 则 x_{st} 必对应一条唯

一的闭回路 E . E 除顶点 x_{st} 外, 其余顶点都为基本变量.

(4) 如果在运输问题(3-1)中 $a_i (i = 1, \dots, m)$ 和 $b_j (j = 1, \dots, n)$ 都为整数, 则任一基本解中各变量的取值均为整数.

例如, 表 3-5 所给的变量组

$$Q = \{x_{12}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{26}, x_{35}, x_{41}, x_{43}, x_{45}\}$$

就是一个基本变量组. 此时, x_{11} 为非基本变量(今后用记号“ $\times$ ”表示), 则可见在 $Q \cup \{x_{11}\}$ 中就存在一条闭回路 $E = \{x_{11}, x_{15}, x_{45}, x_{41}\}$.

表 3-5

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	$x_{11} \times$	$\bullet x_{12}$		$\bullet x_{14}$	$\bullet x_{15}$	
A_2			$\bullet x_{23}$			$\bullet x_{26}$
A_3					$\bullet x_{35}$	
A_4	$x_{41} \bullet$		$\bullet x_{43}$		$\bullet x_{45}$	

下面我们来讨论一下, 若 Q 为运输问题的一个基本变量组, x_{st} 为非基本变量, 那么, 我们如何在 $Q \cup \{x_{st}\}$ 中确定闭回路 E 呢?

从闭回路的性质可知, $Q \cup \{x_{st}\}$ 中的孤立点 x_{ij} 一定不是 E 的顶点, 故我们可以通过反复从变量组中删去孤立点来获得 E . 有的变量原来并不是一个孤立点, 但当从变量组中删去一些变量后, 就可能成为由余下变量组成的变量组的孤立点, 它同样应被删去. 最后剩下未被删去的变量便组成闭回路 E , 而 x_{st} 一定是 E 的一个顶点.

例如, 在表 3-5 中, 对于 $Q \cup \{x_{11}\}$ 来说, 现在 $x_{12}, x_{14}, x_{26}, x_{35}$ 是孤立点, 但从 $Q \cup \{x_{11}\}$ 中删去这 4 个点以后得 Q_1 , 则 x_{23} 成为 Q_1 的孤立点, 从 Q_1 中删去 x_{23} 得 Q_2 , 则 x_{43} 又成为 Q_2 的孤立点, 再从 Q_2 中删去 x_{43} , 得 $E = \{x_{11}, x_{41}, x_{45}, x_{15}\}$, 它是一个闭回路.

§ 3.2 表上作业法

3.2.1 初始基本可行解的寻求

求运输问题(3-1)的初始基本可行解有多种方法, 这里介绍西北角法和最小元素法.

1. 西北角法

西北角法按下列规则在 mn 个变量中选择 $m+n-1$ 个基本变量构成变量组 Q : 从运输表格的西北角 x_{11} 开始, 优先安排编号小的发点和收点之间的运输任务.

我们通过实例来说明西北角法.

例 3-2 给出运输问题, 如表 3-6 所示. 试用西北角法确定它的一个基本可行解.

解 将变量 x_{ij} 所在方格记为 (i, j) , 我们的目的是给各空格 (i, j) 填上 x_{ij} 的适当数量, 使之满足发量约束或收量约束. 在表 3-7 中, 我们首先从西北角空格 $(1, 1)$ 开始填写:

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{15, 12\} = 12.$$

表 3-6

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					15
A_2					20
A_3					10
b_j	12	15	10	8	

表 3-7

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	3	×	×	15 3 0
A_2	×	12	8	×	20 8 0
A_3	×	×	2	8	10 8 0
b_j	12 0	15 12 0	10 2 0	8 0	

取 $Q = \{x_{11}\}$. 此时 B_1 所需运量 12 全部从 A_1 运来, B_1 对应的收量约束 $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 12$ 已被满足, 变量 x_{21} 与 x_{31} 都应取值为零, 我们在相应空格 $(2, 1)$ 和 $(3, 1)$ 内打上记号“ $\times$ ”, 表示该两个变量为非基本变量, 其值为 0. 同时, b_1 由 12 变为 0, a_1 变为 $15 - 12 = 3$.

接着, 安排发点 A_1 和收点 B_2 之间的运输任务. 取

$$x_{12} = \min\{a_1, b_2\} = \min\{3, 15\} = 3,$$

于是此时 A_1 的发量已全部运完, a_1 改为 0, x_{13} 与 x_{14} 作为非基本变量取值为 0, 在空格 $(1, 3)$ 和 $(1, 4)$ 内打上记号“ $\times$ ”. b_2 改为 $15 - 3 = 12$. 于是 $Q = \{x_{11}, x_{12}\}$. 接下去再安排 A_2 与 B_2 之间的运输任务. 如此继续进行运量分配, 整个具体运算过程列在表 3-7 中, 可知基本变量组 $Q = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}\}$.

这样, 得到一个基本可行解:

$$X_B = (x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34})^T = (12, 3, 12, 8, 2, 8)^T,$$

$$X_D = (x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{31}, x_{32})^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

例 3-3 对运输表格表 3-8, 用西北角法求初始基本可行解.

解 在表 3-9 中, 取 $x_{11} = 15$, 在 $(2, 1)$ 和 $(3, 1)$ 空格打记号“ $\times$ ”; 取 $x_{12} = 5$, 在 $(1, 3)$ 和 $(1, 4)$ 空格打上“ $\times$ ”, a_1 改为 5, b_1, b_2 分别改为 0, 10.

表 3-8

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					20
A_2					10
A_3					30
b_j	15	15	10	20	

表 3-9

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	5	×	×	20 5
A_2	×				10
A_3	×				30
b_j	15 0	15 10	10	20	

在表 3-9 中我们看到, 当空格 $(2, 2)$ 填上数字 $x_{22} = 10$ 以后, 发量约束和收量约束都得到满足, 发量 a_2 和收量 b_2 都应变为 0. 此时, 我们只能对行或列之一的剩余空格打记

号“ $\times$ ”,然后在剩余空格中再按西北角法运算下去(否则,我们对行和列的剩余空格同时打记号“ $\times$ ”,那么运算结束时我们就会发现基本变量少于 $m+n-1$ 个).

一般地,在算法的迭代过程中,如果对空格 (s, t) 填写数字 x_{st} 后,发量约束和收量约束都得到满足, a_s 与 b_t 都变为 0, 则我们规定:

对 B_t 列的剩余空格打记号“ $\times$ ”,对空格 $(s, (t+1))$ 填写数字 $x_{s(t+1)} = 0$ ($x_{s(t+1)}$ 作为基本变量置入变量组 Q 中), 再对 A_s 行剩余空格打记号“ $\times$ ”,然后继续运算下去.

按此规定,对表 3-9 继续运算,整个过程如表 3-10 所示.

本问题的基本可行解为

$$\begin{aligned} X_B &= (x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34})^T = (15, 5, 10, 0, 10, 20)^T, \\ X_D &= (x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{31}, x_{32})^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

倘若,对例 3-3,如果在表 3-10 中我们不选 $x_{23} = 0$ 作为基本变量,而让 $x_{23} = 0$ 作为非基本变量(用记号“ $\times$ ”表示),那么,我们应在其余非基本变量(表 3-10 中打记号“ $\times$ ”者)中选一个变量作为基本变量并取值为 0,但要保证该变量置入变量组 Q 后, Q 中不应含有闭回路.例如,我们可以选 $x_{14} = 0$ 作为基本变量置入变量组 Q 中.

在运算过程中,若以 I 表示当前还有货物要运送的发点的下标集合, J 表示当前需求量尚未得到满足的收点的下标集合, Q 为基本变量组, H 为非基本变量组,则西北角法算法步骤如下:

- ① 取 $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}, Q = \emptyset$.
- ② I 是否仅含指标 m ?
若是,则 $x_{mj} = b_j, j \in J$.
 $Q = Q \cup \{x_{mj} \mid j \in J\}, H = \{x_{ij} \mid x_{ij} \notin Q, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\};$
 $x_{ij} = 0 (x_{ij} \in H)$,算法终止.
- 若否,则转步骤③.
- ③ J 是否仅含指标 n ?
若是,则 $x_{in} = a_i, i \in I$.
 $Q = Q \cup \{x_{in} \mid i \in I\}, H = \{x_{ij} \mid x_{ij} \notin Q, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\};$
 $x_{ij} = 0 (x_{ij} \in H)$,算法终止.
- 若否,则确定 s 和 t ,取
 $s = \min\{i \mid i \in I\}, t = \min\{j \mid j \in J\}$,转步骤④.
- ④ 取 $\epsilon = \min\{a_s, b_t\}, x_{st} = \epsilon, Q = Q \cup \{x_{st}\}$.
- ⑤ $x_{st} = \epsilon = b_t$?

表 3-10

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	5	$\times$	$\times$	20
A_2	$\times$	10	0	$\times$	10
A_3	$\times$	$\times$	10	20	30
b_j	15 0	15 10 0	10 0	20 0	

若是,则 $b_t = b_t - \varepsilon, a_s = a_s - \varepsilon, J = J - \{t\}$ 转步骤 ②

若否,则 $a_s = a_s - \varepsilon, b_t = b_t - \varepsilon, I = I - \{s\}$ 转步骤 ②.

2. 最小元素法

最小元素法采用如下规则选取 $m+n-1$ 个基本变量: 优先安排单位运价 c_{ij} 小的发点 A_i 与收点 B_j 之间的运输任务.

例 3-4 给运输问题如表 3-11. 用最小元素法求初始基本可行解.

表 3-11

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	7	3	10	20
A_2	2	5	2	6	10
A_3	9	3	8	4	25
b_j	12	16	14	13	

解 现在 $I = \{1, 2, 3\}, J = \{1, 2, 3, 4\}$ 取 $c_{st} = \min\{c_{ij} \mid i \in I, j \in J\} = c_{23} = 2$, 于是, 令

$$x_{st} = x_{23} = \varepsilon = \min\{a_2, b_3\} = \min\{10, 14\} = 10,$$

将 x_{23} 置入变量组 Q 中, a_2 变为 0, b_3 变为 $14 - 10 = 4$. 对 A_2 行的剩余空格打上记号“ $\times$ ”.

现在 $I = \{1, 3\}, J = \{1, 2, 3, 4\}$ 取 $c_{st} = \min\{c_{ij} \mid i \in I, j \in J\} = c_{13} = 3$, 于是, 令

$$x_{st} = x_{13} = \varepsilon = \min\{a_1, b_3\} = \min\{20, 4\} = 4,$$

将 x_{13} 置入变量组 Q 中, a_1 变为 16, b_3 变为 0. 将 B_3 列剩余空格打上记号“ $\times$ ”. 继续运算, 整个过程如表 3-12 所示.

表 3-12

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12 4	$\times$ 7	4 3	4 10	20 16 4 0
A_2	$\times$ 2	$\times$ 5	10 2	$\times$ 6	10 0
A_3	$\times$ 9	16 3	$\times$ 8	9 4	25 9 0
b_j	12 0	16 0	14 4 0	13 4 0	

于是, 得到一个基本可行解:

$$\mathbf{X}_B = (x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{34})^T = (12, 4, 4, 10, 16, 9)^T,$$

$$\mathbf{X}_D = (x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{24}, x_{31}, x_{33})^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

在运用最小元素法求基本可行解的过程中,为保证基本变量的个数为 $m+n-1$,我们要遵循下列两点规定:

① 当运量待分配的运输表格剩下最后一行或最后一列有未填写数值或未打记号“ $\times$ ”的空格时,只准填写数值(包括零)不准打记号“ $\times$ ”;

② 如果空格 (s, t) 填写数量值 x_{st} 后, A_s 行及 B_t 列的约束方程同时满足,修改后的 a_s 及 b_t 均为 0,我们仅对行或列之一的剩余空格打记号“ $\times$ ”。在这里,我们不妨规定对 A_s 所在行的剩余空格打记号“ $\times$ ”。

例 3-5 给运输问题如表 3-13 所示,用最小元素法求初始基本可行解。

表 3-13

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	2	9	7	10
A_2	5	3	4	12	25
A_3	2	8	7	10	15
b_j	15	10	17	8	

解 现在 $I = \{1, 2, 3\}, J = \{1, 2, 3, 4\}$, 取 $c_{st} = \min\{c_{ij} \mid i \in J\} = c_{12} = 2$, 于是,令

$$x_{st} = x_{12} = \min\{a_1, b_2\} = \min\{10, 10\} = 10,$$

a_1 与 b_2 都变为 0,对 A_1 行的剩余空格打记号“ $\times$ ”。

现在 $I = \{2, 3\}, J = \{1, 2, 3, 4\}, c_{st} = \min\{c_{ij} \mid i \in I, j \in J\} = c_{31} = 2$, 于是,令

$$x_{st} = x_{31} = \min\{a_3, b_1\} = \min\{15, 15\} = 15,$$

a_3 与 b_1 均变为 0,对 A_3 行剩余空格打记号“ $\times$ ”。

表 3-14

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$\times$ 6	10 2	$\times$ 9	$\times$ 7	10 0
A_2	0 5	0 3	17 4	8 12	25 0
A_3	15 2	$\times$ 8	$\times$ 7	$\times$ 10	15 0
b_j	15 0	10 0	17 0	8 0	

此时, $I = \{2\}, J = \{1, 2, 3, 4\}$, 我们对 A_2 行的空格均填写数字: $x_{2j} = b_j$. 整个运算过程如表 3-14 所示.

由表 3-14 得基本可行解:

$$X_B = (x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31})^T = (10, 0, 0, 17, 8, 15)^T,$$

$$X_D = (x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{32}, x_{33}, x_{34})^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

我们将最小元素法算法步骤归纳如下:

① 取 $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}, Q = \emptyset$.

② I 是否仅含一个指标?

若是, 则对 $i \in I$ 取 $x_{ij} = b_j$ ($j \in J$). $Q = Q \cup \{x_{ij} \mid j \in J\}$ 转步骤 ③.

若否, 则 J 是否仅含一个指标?

若是, 则对 $j \in J$ 取 $x_{ij} = a_i$ ($i \in I$), $Q = Q \cup \{x_{ij} \mid i \in I\}$ 转步骤 ③.

若否, 则转步骤 ④.

③ 取非基本变量组 $H = \{x_{ij} \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\} - Q$; 对 $x_{ij} \in H$, 令 $x_{ij} = 0$, 算法终止.

④ 取 $c_{st} = \min\{c_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$; $x_{st} = \min\{a_s, b_t\}$, $Q = Q \cup \{x_{st}\}$, $a_s = a_s - x_{st}$, $b_t = b_t - x_{st}$.

⑤ $a_s = 0$?

若是, 则 $I = I - \{s\}$ 转步骤 ②.

若否, 则 $J = J - \{t\}$ 转步骤 ②.

3.2.2 位势法

在求出运输问题的一个基本可行解和基本变量组 Q 以后, 根据单纯形法步骤, 我们应该计算变量 x_{ij} 的检验数 r_{ij} . 下面介绍位势法.

我们引进 $m+n$ 个变量 $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ (其中有一个变量可以自由定值), 对于 $x_{ij} \in Q$, 我们构造方程:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (x_{ij} \in Q). \quad (3-2)$$

因为 Q 有 $m+n-1$ 个基本变量, 所以我们得到了 $m+n-1$ 个方程. 于是这 $m+n$ 个变量中有一个变量可以自由定值, 为了统一起见, 我们不妨令 $u_1 = 0$. 从而, 由

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_i + v_j = c_{ij} \quad (x_{ij} \in Q), \end{cases} \quad (3-3)$$

我们可以求出 $m+n-1$ 个变量的值. 我们把方程组(3-4)的一组解称为位势.

求出位势后, 我们用下列公式来计算变量 x_{ij} 的检验数:

$$r_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \quad (3-4)$$

关于位势法的原理, 我们这里就不作进一步说明了.

例 3-6 对于表 3-14, 求出位势及检验数.

解 由于现在基本变量组

$$Q = \{x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}\},$$

故根据式(3-3), 得下面方程组:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_1 + v_2 = 2, u_2 + v_1 = 5, u_2 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_3 = 4, u_2 + v_4 = 12, u_3 + v_1 = 2. \end{cases}$$

求得位势:

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -2, v_1 = 4, v_2 = 2, v_3 = 3, v_4 = 11.$$

再由式(3-4)便可求得检验数 r_{ij} , 如表 3-15 所示, r_{ij} 置于运输表格 (i, j) 格的左下角. 运输表格中的 u_i 列及 v_j 行所填数值即位势 u_i 和 v_j .

表 3-15

	v_j	4	2	3	11	
u_i	B_j A_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	6 2 ×	2 0 10	9 6 ×	7 -4 ×	10
1	A_2	5 0 0	3 0 0	4 0 17	12 0 8	25
-2	A_3	2 0 15	8 8 ×	7 6 ×	10 1 ×	15
	b_j	15	10	17	8	

在手工计算时, 当基本变量组 Q 确定以后, 位势 u_i 和 v_j 及检验数 r_{ij} 都可在运输表格上直接计算而不必列出方程组及运算步骤.

例如, 对于表 3-15, 现在 $u_1 = 0$, A_1 行中 x_{12} 为基本变量, 则由 $u_1 + v_2 = 2$ 而求得 $v_2 = 2$. 对于 B_2 所在列, x_{22} 为基本变量, 对应一个方程 $u_2 + v_2 = 3$, 求出 $u_2 = 1$, 继续运算, 求得全部位势及检验数.

下面我们来分析一下运输表格中检验数的实际背景.

例如, 在表 3-15 中 $r_{14} = -4$, 非基本变量 x_{14} 对应的唯一闭回路为 $x_{14}, x_{24}, x_{22}, x_{12}$, 现在 $x_{14} = 0$, A_1 处的物资不运输给 B_4 . 如果现在改变一下运输方案, 把 A_1 处的物资输送给 B_4 一个单位, 使 $x_{14} = 1$, 那么为了保持收发平衡, 就要对 x_{14} 对应的闭回路的另外 3 个顶点的运量依次进行调整: $x_{24} = 8 - 1 = 7$, $x_{22} = 0 + 1 = 1$, $x_{12} = 10 - 1 = 9$. 这样的调整自然影响总运费: x_{14} 和 x_{22} 增加运量一个单位, 增加的运费为 $c_{14} + c_{22} = 7 + 3 = 10$; x_{24} 和 x_{12} 减少运量一个单位, 减少的运费为 $c_{24} + c_{12} = 12 + 2 = 14$, 总运费减少 $c_{24} + c_{12} - c_{14} - c_{22} = 14 - 10 = 4$, 它恰为 r_{14} 的相反数.

由于 $r_{14} = -4 < 0$, 对 x_{14} 的闭回路的相应顶点运量调整一个单位可使总运费降低 4 个单位, 现在 $\min\{x_{24} = 8, x_{12} = 10\} = 8$, 故调整量可取为 8. 调整后, 我们让 x_{14} 成为基本变量, $x_{14} = 8$, x_{24} 成为非基本变量, 在 (2, 4) 格打记号“ $\times$ ”, 而 $x_{22} = 8$, $x_{12} = 2$, 如表 3-16 所示.

表 3-16

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$\times$ 6	2 2	$\times$ 9	8 7	10
A_2	0 5	8 3	17 4	$\times$ 12	25
A_3	15 2	$\times$ 8	$\times$ 7	$\times$ 10	15
b_j	15	10	17	8	

基于这一实例, 我们将转轴规则总结如下.

若 Q 是问题 (3-1) 运输表格的一个基本变量组, x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) 是相应基本可行解, 如果相应检验数 $r_{ij} \geq 0$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) 并不都成立, 则选取 r_{st} 满足:

$$r_{st} = \min\{r_{ij} \mid r_{ij} < 0, x_{ij} \in Q\}, \quad (3-5)$$

取 x_{st} 为进基变量.

在 $Q \cup \{x_{st}\}$ 中, x_{st} 对应着一条唯一的闭回路 E , 不妨设 x_{st} 为该闭回路的第一个顶点, 其余顶点 (都为基本变量) 按某个方向顺序编号, 记

$$E^+ = \{x_{ij} \mid x_{ij} \text{ 为 } E \text{ 中编号为奇数的顶点}\}, \quad (3-6)$$

$$E^- = \{x_{ij} \mid x_{ij} \text{ 为 } E \text{ 中编号为偶数的顶点}\}, \quad (3-7)$$

取调整量 d 为

$$d = x_{pq} = \min\{x_{ij} \mid x_{ij} \in E^-\} \quad (3-8)$$

(若有数个 x_{ij} 满足此式, 可任取一个为 x_{pq}) 取 x_{pq} 为出基变量.

转轴以后的基本可行解 X' 为

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + d, & x_{ij} \in E^+, \\ x_{ij} - d, & x_{ij} \in E^-, \\ x_{ij} & \text{其他.} \end{cases} \quad (3-9)$$

此时, 基本变量组 $Q' = Q \cup \{x_{st}\} - \{x_{pq}\}$. X' 的目标函数值 f'_0 由式 (1-36) 知:

$$f'_0 = f_0 + r_{st}x'_{st} = f_0 + r_{st}d. \quad (3-10)$$

例如, 在某运输问题的一张运输表格中, 非基本变量 x_{34} 的闭回路如图 3-1 所示, 则

$$E^+ = \{x_{34}, x_{43}, x_{22}, x_{11}\}, E^- = \{x_{44}, x_{23}, x_{12}, x_{31}\},$$

$$\min\{x_{ij} \mid x_{ij} \in E^-\} = x_{44} = x_{23} = 6.$$

我们如果取 x_{23} 为出基变量, 则调整后, 8 个顶点对应的数值如图 3-2 所示.

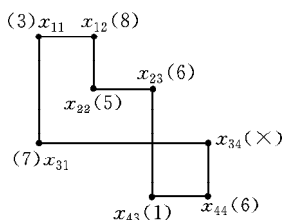


图 3-1

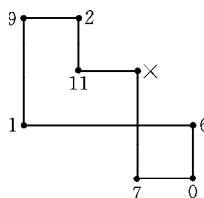


图 3-2

下面列出位势法的算法步骤:

① 应用西北角法或最小元素法求得初始基本可行解 x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) 和相应的基本变量组 Q .

② 由方程组 $u_1 = 0; u_i + v_j = c_{ij}$ ($x_{ij} \in Q$), 求得位势 u_i ($i = 1, \dots, m$) 和 v_j ($j = 1, \dots, n$).

③ 计算 $r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), 取 $r_{st} = \min\{r_{ij} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$.

④ $r_{st} = 0$?

若是, 则 x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) 即为最优解, 算法终止.

若否, 则确定 $Q \cup \{x_{st}\}$ 中的闭回路 E 以及 E^+ 和 E^- .

⑤ 取 $d = x_{pq} = \min\{x_{ij} \mid x_{ij} \in E^-\}$.

⑥ 取

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + d, & \text{当 } x_{ij} \in E^+, \\ x_{ij} - d, & \text{当 } x_{ij} \in E^-, \\ x_{ij} & \text{其他.} \end{cases}$$

取 $Q = Q \cup \{x_{st}\} - \{x_{pq}\}$, 转步骤②.

例 3-7 求解表 3-17 所给的运输问题(用最小元素法求初始基本可行解).

表 3-17

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	7	3	10	25
A_2	2	5	2	6	10
A_3	9	3	8	4	25
b_j	12	16	14	18	

解 整个求解过程如表 3-18, 表 3-19 和表 3-20 所示.

表 3-18

	v_j	4	9	3	10	
u_i	B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	12 4 0	7 -2	3 4	10 9	25
-1	A_2	2 -1	5 -3	10 0	6 -3	10
-6	A_3	9 11	16 0	8 11	4 0	25
b_j		12	16	14	18	

表 3-19

	v_j	4	6	3	7	
u_i	B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	12 4 0	7 1	3 13	10 3	25
-1	A_2	2 -1	5 9	2 1	6 0	10
-3	A_3	9 8	3 7	8 0	4 18	25
b_j		12	16	14	18	

表 3-20

	v_j	4	7	3	8	
u_i	B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	11 4 0	7 0	3 14	10 2	25
-2	A_2	2 0	5 9	2 1	6 0	10
-4	A_3	9 9	3 7	8 9	4 18	25
b_j		12	16	14	18	

本问题的最优解为

$$\mathbf{X}_B^* = (x_{11}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{34})^T = (11, 14, 1, 9, 7, 18)^T,$$

$$\mathbf{X}_D^* = (x_{12}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{33})^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T;$$

最优值为

$$f^* = 4 \times 11 + 3 \times 14 + 2 \times 1 + 5 \times 9 + 3 \times 7 + 4 \times 18 = 226.$$

§ 3.3 应用举例

由于在变量个数相等的情况下,表上作业法的计算比单纯形法简单得多,因此,在求解实际问题时,在条件许可的情况下,人们常常尽可能把某些线性规划问题转化为运输问题的数学模型(简称运输模型).

所谓建立运输模型,就是要给出运输收发平衡单位运价表如表 3-1. 在该表中,要求

$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, 发点 A_i 至收点 B_j 都有单位运价 c_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$). 下面我们来看几个具体的例子.

例 3-8 (1) 运输问题由表 3-21 给出,试建立运输模型.

(2) 如果将表 3-21 中的 b_3 改为 14, 又设 B_1 、 B_2 和 B_3 3 个收点的需求量一旦不能满足时,就要承担缺货损失费. 单位物资的缺货损失费分别为 4, 3 和 7. 试建立运输模型.

解 (1) 在表 3-21 中, $\sum_{i=1}^2 a_i = 25 > \sum_{j=1}^3 b_j = 21$, 供大于需 4 个单位物资, 供需不平衡. 因此,我们要考虑将多余的 4 个单位物资在发点就地存储. 现虚设一个收点 B_4 , 其需求量 $b_4 = 4$, 发点 A_i 至 B_4 的单位运价 $c_{i4} = 0$, 这样我们就得到了一个收发平衡的运输模型如表 3-22 所给. 对表 3-22 求最优解. 如果 A_i 至 B_j 的运量 $x_{ij} > 0$, 则说明发点 A_i 就地存储物资 x_{i4} 个单位.

表 3-21

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	2	10
A_2	6	8	3	15
b_j	8	7	6	

表 3-22

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	5	2	0	10
A_2	6	8	3	0	15
b_j	8	7	6	4	

(2) 现在 $b_1 + b_2 + b_3 = 8 + 7 + 14 = 29$, $a_1 + a_2 = 10 + 15 = 25$, 需大于供 4 个单位物资. 虚设一个发点 A_3 : $a_3 = 4$, A_3 至 B_1 、 B_2 和 B_3 的单位运价就定为各收点 B_j 的单位物资缺货损失费 4, 3 和 7, 得运输收发平衡单位运价表如表 3-23. 若表 3-23 的最优运输方案中运量 $x_{3j} > 0$, 则说明 B_j 缺货 x_{3j} .

例 3-9 (不平衡运输问题) 若发点 A_i 的发量 a_i 必须运走, 具体信息如表 3-24, 试建立运输模型.

表 3-23

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	2	10
A_2	6	8	3	15
A_3	4	3	7	4
b_j	8	7	14	

表 3-24

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	2	3	10
A_2	5	6	4	15
A_3	3	4	5	20
最低需求量 b'_j	10	10	10	

解 现在 $\sum_{i=1}^3 a_i = 45$, 而 3 个收点 B_1, B_2, B_3 的最低需求量的和为 30. 由于发量 45 必须全部运走, 为此虚设一个收点 $B_4, b_4 = 15, A_i$ 至 B_4 的单位运价 c_{i4} 确定如下:

$$c_{14} = \min\{c_{11}, c_{12}, c_{13}\} = \min\{4, 2, 3\} = 2 = c_{12};$$

$$c_{24} = \min\{c_{21}, c_{22}, c_{23}\} = \min\{5, 6, 4\} = 4 = c_{23};$$

$$c_{34} = \min\{c_{31}, c_{32}, c_{33}\} = \min\{3, 4, 5\} = 3 = c_{31}.$$

得运输收发平衡单位运价表如表 3-25 所示.

在求得运输模型表 3-25 的最优解 $x_{ij}^* (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3)$ 后, 本问题的最优解由表 3-26 给出.

表 3-25

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	2	3	2	10
A_2	5	6	4	4	15
A_3	3	4	5	3	20
b_j	10	10	10	15	

表 3-26

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3
A_1	x_{11}^*	$x_{12}^* + x_{14}^*$	x_{13}^*
A_2	x_{21}^*	x_{22}^*	$x_{23}^* + x_{24}^*$
A_3	$x_{31}^* + x_{34}^*$	x_{32}^*	x_{33}^*

例 3-10 (有界发量运输问题) 对表 3-27 给出的运输问题建立运输模型.

表 3-27

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	最低发量 a'_i	最高发量 a''_i
A_1	4	6	7	60	80
A_2	—	7	8	40	40
A_3	5	4	6	40	不限
A_4	4	5	—	0	50
b_j	70	80	50		

解 4 个发点的最低总发量 $\sum_{i=1}^4 a'_i = 140$, 由于 3 个收点的总收量 $\sum_{j=1}^3 b_j = 200$, 所以 A_3 在现有最低发量 40 的基础上, 至多再多发 60, 故 A_3 的最高发量 a''_i 实际上为 100. 于是 $\sum_{i=1}^4 a''_i = 270$, 比 $\sum_{j=1}^3 b_j$ 多 70. 若我们对所讨论的运输问题取发量总和 $\sum_{i=1}^4 a_i$ 为

270,收量总和 $\sum_{j=1}^3 b_j$ 为 200,它是一个收发不平衡的运输问题. 现虚设一个收点 B_4 , 它的收量 $b_4 = 70$.

由于发点 A_1 的发量包括两部分,物资 60 是必须发出的,物资 20 是可发可不发的,为此,将发点 A_1 拆成两个发点 A'_1 和 A''_1 , A'_1 的发量为 60,因为这部分物资不能分配给 B_4 ,所以 A'_1 至 B_4 的单位运价可设为充分大的正数 M ; A''_1 的发量为 20,因为这部分物资可以分配给 B_4 ,所以 A''_1 至 B_4 的运价可视为零. 对于发点 A_3 可按同样的方法处理.

由于发点 A_2 发出的物资恰为 40,所以 A_2 至 B_4 的单位运价取为 M ; 因为发点 A_4 允许不发出任何物资,所以 A_4 至 B_4 的单位运价取为零. 此外,由于表 3-27 规定发点 A_2 至收点 B_1 、发点 A_4 至收点 B_3 不允许运输物资,所以 A_2 至 B_1 、 A_4 至 B_3 的单位运价都取为 M .

这样,我们得到运输模型,如表 3-28 所示. 经计算,最优方案如表 3-29 所示.

表 3-28					
$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A'_1	4	6	7	M	60
A''_1	4	6	7	0	20
A_2	M	7	8	M	40
A'_3	5	4	6	M	40
A''_3	5	4	6	0	60
A_4	4	5	M	0	50
b_j	70	80	50	70	

表 3-29					
$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A'_1	60				60
A''_1				20	20
A_2			40		40
A'_3		40			40
A''_3		40	10	10	60
A_4	10			40	50
b_j	70	80	50	70	

可见, A_1 实际发出 60,由 A_1 运至 B_1 ; A_2 的发量 40 由 A_2 运至 B_3 ; A_3 实际发出 90, A_3 至 B_2 的运量为 80, A_3 至 B_3 的运量为 10; A_4 实际发出 10,由 A_4 运至 B_1 .

例 3-11 (运量有界的运输问题) 表 3-30 给出一个运输问题. 现在规定发点 A_i 至收点 B_j 的运量不能超过 d_{ij} ,由表 3-31 给定. 试建立运输模型.

表 3-30				
$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	5	4	8
A_2	2	6	7	10
b_j	7	5	6	

表 3-31			
d_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	4	3	3
A_2	4	2	5

解 我们虚设 D_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) 6 个点, D_{ij} 既作发点,又作收点,其发量及收量都为 d_{ij} .

发点 A_i 的物资只可运送给 D_{ij} ($j = 1, 2, 3$),而 D_{ij} 的物资只可运送给 B_j ,或者运送给自身. 如果 A_i 至 D_{ij} 的单位运价取为零,则 D_{ij} 和 B_j 的单位运价就等于 A_i 至 B_j 的单位运价,于是,即得本问题的运输模型如表 3-32(表中未注明的单位运价都取充分大的正数 M),其最优解由表 3-33 给出.

于是,本问题的最优运输方案为: A_1 发往 B_1, B_2, B_3 的运量分别为 $3, 3, 2$; A_2 发往 B_1, B_2, B_3 的运量分别为 $4, 2, 4$.

表 3-32

发点 \ 收点	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{21}	D_{22}	D_{23}	B_1	B_2	B_3	a_j
A_1	0	0	0							8
D_{11}	0						3			4
D_{12}		0						5		3
D_{13}			0						4	3
A_2				0	0	0				10
D_{21}				0			2			4
D_{22}					0			6		2
D_{23}						0			7	5
b_j	4	3	3	4	2	5	7	5	6	

表 3-33

发点 \ 收点	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{21}	D_{22}	D_{23}	B_1	B_2	B_3	a_j
A_1	3	3	2							8
D_{11}	1						3			4
D_{12}		0						3		3
D_{13}			1						2	3
A_2				4	2	4				10
D_{21}							4			4
D_{22}								2		2
D_{23}						1			4	5
b_j	4	3	3	4	2	5	7	5	6	

例 3-12 (转运问题) 由表 3-34 给定一个运输问题. 又物资可在 A_2, B_2 和 B_3 处转运, A_1 与 A_2, B_2 与 B_1, B_3 与 B_1, B_2 与 B_3 相互间单位运价分别为 $1, 2, 1$ 和 3 . 试建立运输模型.

表 3-34

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	3	5	10
A_2	4	1	2	20
b_j	10	10	10	

解 由于 A_2, B_2 和 B_3 可以作为转运点, 既可视作发点, 又可视作收点, 因此, 整个问题可当作 4 个发点(A_1, A_2, B_2 和 B_3)和 4 个收点(A_2, B_1, B_2 和 B_3)的运输问题来处理.

由于原问题中 A_2 无收量、 B_2 和 B_3 无发量, 所

以若建立运输模型,如表 3-35 所示,则转运运输不会发生.

我们对表 3-35 作如下修改:对表 3-35 中 A_2 , B_2 和 B_3 的发量和收量都加上一个较大的正数(比原问题表 3-34 所给的 $\sum a_i$ 大的一个数),例如取 100,则得本问题的运输模型如表 3-36 所示,此时,转运运输就会发生,最优解如表 3-37 所给.

表 3-35

运价	A_2	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	1	5	3	5	10
A_2	0	4	1	2	20
B_2	1	2	0	3	0
B_3	2	1	3	0	0
收量	0	10	10	10	

表 3-36

运价	A_2	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	1	5	3	5	10
A_2	0	4	1	2	120
B_2	1	2	0	3	100
B_3	2	1	3	0	100
收量	100	10	110	110	

在表 3-37 所给的运输方案中,排除本地运输给本地的虚构物资运量,于是,本问题的具体运输方案为:

A_1 的发量 10 运至 A_2 (于是 A_2 有发量 30); A_2 的发量 30 分别运至 B_2 和 B_3 , 运量分别为 10 和 20; B_3 收到的运量为 20, 其中运量 10 转运至 B_1 .

表 3-37

运量	A_2	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	10				10
A_2	90		10	20	120
B_2			100		100
B_3		10		90	100
收量	100	10	110	110	

例 3-13 (多品种物资运输问题) 若发点

E_1 有某种原材料的一等品 200, 二等品 300, 发点 E_2 有该种原材料一等品 100, 三等品 150. 收点 F_1 将该种原材料供应给 3 类不同的消费部门: 第一类部门可将这 3 种等级的原材料相互代用, 共需 150; 第二类部门只能用一等品, 需求量是 50; 第三类部门只用二等品或三等品, 需求量是 50. 收点 F_2 供应两类消费部门的需要: 第一类部门使用一等品或二等品, 需求量是 200; 第二类部门只用一等品, 需求量是 300. 发点 E_1 至收点 F_1 , F_2 的单位运价分别为 5, 7; 发点 E_2 至收点 F_1 , F_2 的单位运价分别为 8, 6. 又设有一个该原材料的存储点 Q , 它的输出量与输入量及该原材料的等级均不受限制, Q 点存储的原材料可以输往 F_1 和 F_2 , 单位运价分别为 6 和 9; E_1 和 E_2 的原材料也可以输往 Q 点, 单位运价分别为 2 和 3. 若 F_1 和 F_2 的需求量必须得到满足, E_1 和 E_2 的原材料必须运走. 试建立运输模型.

解

将 E_1 拆为两个发点 A_1 及 A_2 , A_1 输出一等品 200, A_2 输出二等品 300; E_2 拆为两个发点 A_3 及 A_4 , A_3 输出一等品 100, A_4 输出三等品 150. 同样地, 将 F_1 拆为 3 个收点 B_1 , B_2 和 B_3 , B_1 为收点 F_1 的第一类消费部门, 它对原材料的需求量为 150, 可以从 A_1 , A_2 , A_3 和 A_4 处运来; B_2 为 F_1 的第二类消费部门, 它的需求量为 50, 只能够从 A_1 及 A_3 处运来. 为此, 将 A_2 及 A_4 至 B_2 的单位运价设为一个充分大的正数 M ; B_3 为 F_1 的第三类消费部门, 需求量为 50, 只能从 A_2 及 A_4 处运来, 所以 A_1 和 A_3 至 B_3 的单位运价视为 M . F_2 拆为两个收点 B_4 和 B_5 , B_4 为 F_2 的第一类消费部门, 需求量为 200,

只能从 A_1, A_2 及 A_3 处运来, 于是 A_4 至 B_3 的单位运价设为 M ; B_5 为 F_2 的第二类消费部门, 需求量 300, 只可从 A_1 及 A_3 处运来, 所以 A_2 及 A_4 至 B_5 的单位运价取为 M .

注意到本问题中, E_1 和 E_2 具有的一等品总量为 300, 而对一等品的消费量至少需要 350, 所以一等品供应量不能满足需求量. 由于本问题要求 F_1, F_2 的需求量必须得到满足, E_1, E_2 的原材料必须运走, 所以, 让收发量及品种都无限制的存储点 Q 参加运输是必要的. 我们将 Q 点拆为发点 A_5 和收点 B_6 . 由于 E_1 和 E_2 3 种等级的原材料总供应量为 750, 故 B_6 的需求量也设为 750; F_1 和 F_2 的总需求量为 750, 故 A_5 的发量也设为 750. 考虑到 A_5 的原材料仍可在原地 (也即 B_6) 存储, 故设 A_5 至 B_6 的单位运价为零. 结合题中所给的各收发点间的单位运价, 可建立运输模型如表 3-38 所示, 其最优解如表 3-39.

表 3-39 中 A_5 至 B_6 的运量为 700, 事实上, 这是虚设的. 故本问题的最优运输方案为: E_1 输送二等品 100 给 F_1 , 输送一等品 200 和二等品 200 给 F_2 ; E_2 输送三等品 100 给 F_1 , 输送一等品 100 给 F_2 , 输送三等品 50 给 Q 点存储, Q 点输送一等品 50 给 F_1 .

表 3-38

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	5	5	M	7	7	2	200
A_2	5	M	5	7	M	2	300
A_3	8	8	M	6	6	3	100
A_4	8	M	8	M	M	3	150
A_5	6	6	6	9	9	0	750
b_j	150	50	50	200	300	750	

表 3-39

x_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1		0			200		200
A_2	100			200			300
A_3					100		100
A_4	50		50			50	150
A_5		50				700	750
b_j	150	50	50	200		750	

例 3-14 (空车调度问题) 有一辆汽车在 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ 和 A_8 8 个地点之间运送 4 种物品, 具体任务如表 3-40:

已知 A_i 与 A_j 之间的距离为 c_{ij} (单位: 千米), 试确定一个最优的汽车调度方案.

解 如果该辆汽车执行任务从 A_i 运送货物至 A_j , 此时会发生两种情况:

- (1) 若 A_j 还有数项任务未完成, 那么汽车就任选一项任务从 A_j 驶往其到达点;
- (2) 若 A_j 已无货物需要运走, 那么这辆空车从 A_j 开往哪一个地点去执行任务就成

为我们应加以关注的问题.

因此 ,该辆汽车的最优调度 ,其目标就是使空车行驶的吨千米总数最少.

表 3-40

$K^{\#}$ 物品	起运点 A_i	到达点 A_j	运量(车次)
1 [#]	A_1	A_3	12
2 [#]	A_1	A_5	3
3 [#]	A_1	A_6	6
2 [#]	A_2	A_1	14
3 [#]	A_2	A_3	6
1 [#]	A_2	A_6	5
3 [#]	A_3	A_1	9
2 [#]	A_3	A_4	7
1 [#]	A_3	A_6	5
1 [#]	A_3	A_8	2
1 [#]	A_4	A_1	4
4 [#]	A_4	A_2	9
3 [#]	A_4	A_5	3
2 [#]	A_5	A_2	6
4 [#]	A_6	A_4	6
2 [#]	A_7	A_3	4
3 [#]	A_7	A_8	3
4 [#]	A_8	A_4	5

我们先列出 A_i 汽车出车数和来车数的平衡表如表 3-41 ,表中“+”号表示该点产生空车 ,“−”号表示该点需要调进空车.

由表 3-41 可见 , A_1 、 A_4 和 A_6 在运输过程中 ,可多出空车 18 车次 , A_2 , A_3 和 A_7 缺空车 18 车次. 我们建立空车调度运输模型如表 3-42. 对表 3-42 用表上作业法求最优解 ,一旦发生情况(2)时 ,空车就按该最优解来进行调度.

表 3-41

地点	出车数	来车数	平衡情况
A_1	21	27	+6
A_2	25	15	−10
A_3	23	22	−1
A_4	16	18	+2
A_5	6	6	0
A_6	6	16	+10
A_7	7	0	−7
A_8	5	5	0

表 3-42

c_{ij}	A_2	A_3	A_7	a_i
A_1	c_{12}	c_{13}	c_{17}	6
A_4	c_{42}	c_{43}	c_{47}	2
A_6	c_{62}	c_{63}	c_{67}	10
b_j	10	1	7	

若是我们对表 3-42 中的各 c_{ij} 给出具体的数据 ,如表 3-43 所示 ,则得最优解如表 3-44 所示.

由表 3-44 可知 : A_1 产生的空车开往 A_2 有 6 车次 ; A_4 产生的空车开往 A_7 有 2 车次 ;

A_6 产生的空车开往 A_2 有 4 车次、开往 A_3 有 1 车次、开往 A_7 有 5 车次.

表 3-43

c_{ij}	A_2	A_3	A_7	a_i
A_1	3	10	8	6
A_4	13	5	4	2
A_6	9	8	13	10
b_j	10	1	7	

表 3-44

x_{ij}	A_2	A_3	A_7	a_i
A_1	6			6
A_4			2	2
A_6	4	1	5	10
b_j	10	1	7	

例 3-15 对例 1-20 所给的生产计划问题建立运输模型.

解 工厂每季生产产品可视为一个发点,可得 4 个发点 A_1, A_2, A_3 和 A_4 ; A_i 的产量即为工厂每季的生产能力 a_i . 销售公司每季末需要一定数量产品,可视为 4 个收点 B_1, B_2, B_3 和 B_4 ; B_j 的收量即为表 1-45 中的需求量 b_j .

第 i 季度生产用于第 j 季度交货的每吨产品的实际成本被取为单位运价 c_{ij} ($j \geq i$), 显然有 $c_{ij} = d_i + 0.2(j - i)$. 又当 $j < i$ 时,是不可能发生 A_i 供货给 B_j 的,所以对应的 c_{ij} 取充分大的正数 M . 考虑到现在收发不平衡,有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 a_i - \sum_{j=1}^4 b_j &= (30 + 40 + 20 + 10) - (20 + 20 + 30 + 10) \\ &= 100 - 80 = 20, \end{aligned}$$

故虚设一个收点 B_5 , 其收量 $b_5 = 20$, 而 $c_{i5} = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

这样,生产计划问题就化成了一个收发平衡的运输问题,其运输模型如表 3-45 所示.

表 3-45

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	15.0	15.2	15.4	15.6	0	30
A_2	M	14.0	14.2	14.4	0	40
A_3	M	M	15.3	15.5	0	20
A_4	M	M	M	14.8	0	10
b_j	20	20	30	10	20	

习 题 三

1. 对表 3-46 所给运输问题:

(1) 用西北角法求初始解;

(2) 用最小元素法求初始解,并求最优解.

2. 求解表 3-47 所给运输问题(用西北角法求初始解).

表 3-46

$\begin{matrix} ij \\ i \end{matrix} \begin{matrix} j \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
b_j	3	6	5	6	

表 3-47

$\begin{matrix} ij \\ i \end{matrix} \begin{matrix} j \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	6	7	12	4
A_2	16	10	5	9	9
A_3	5	4	10	10	5
b_j	5	3	4	6	

3. 为习题一第 6 题建立运输模型.

4. 若发点 A_1, A_2 及收点 B_1, B_2, B_3 的有关数据如表 3-48 所示. 假定在 B_1, B_2, B_3 处允许物资缺货, A_1, A_2 处允许物资存储, 问怎样调配, 以使总的支付费用最少? 试建立运输模型.

表 3-48

$\begin{matrix} \text{收点} \\ \text{发点} \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	供应量	存储费
A_1	4	6	8	200	5
A_2	6	2	4	200	4
需求量	50	100	100		
缺货费	3	8	5		

5. 对第六章例 6-43 建立运输模型.

6. 对第六章例 6-47 建立运输模型.

7. 对第六章例 6-46 建立运输模型.

第四章 目标规划

§ 4.1 目标规划原理、概念与数学模型

4.1.1 目标规划原理与概念

本章讨论的目标规划均是指线性目标规划. 首先让我们通过下面具体的引例, 来了解目标规划的基本原理和基本概念.

例 4-1 某工厂计划生产甲、乙两种产品, 均需要经过 A, B 两道工序, 有关信息如表 4-1 所示, 问如何确定一周内的生产计划, 使工厂获利最大?

表 4-1

定额(工时/件)	甲产品(件)	乙产品(件)	一周内有效工时
工序 A	1.0	0.6	3 600
工序 B	0.6	0.8	2 400
利润(元/件)	12	8	

解 设 x_1, x_2 分别表示甲、乙两种产品在一周内的生产件数, 则有线性规划模型如下:

$$\begin{aligned}
 & \max f = 12x_1 + 8x_2; \\
 \text{s. t. } & 1.0x_1 + 0.6x_2 \leq 3\,600, \\
 & 0.6x_1 + 0.8x_2 \leq 2\,400, \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

这个模型是在现有资源约束条件下, 追求利润的最大化. 但是, 在现代企业管理决策中, 决策者考虑的目标和因素往往是多方面的, 不仅仅是唯一的利润最大化.

例如, 决策者在现有资源约束的条件下, 可以从这样一个角度来思考这个生产计划问题: 首先确定一个合理的利润目标期望值, 然后寻求优化的生产经营方案, 以实现预期的利润目标. 这里决策者追求的是实现既定利润目标期望值的优化决策方案, 而不是简单、绝对的利润最大化. 比如, 该工厂决策者依据市场需求预测, 综合考虑各方面因素, 希望该周内实现利润值 42 000 元(称它为目标期望值), 则问题转化为如何确定最优生产计划, 实现 42 000 元的利润目标? 由此产生的问题是这一目标期望值能否实现? 如不能实现, 超过的偏差或不足的偏差是多少? 对此类问题, 线性规划模型就有它的局限性. 查恩斯(A. Charnes)和库柏(W. Coopre)于 1961 年创立的目标规划理论, 通过引入偏差变量、

目标约束等概念解决了这方面的问题. 下面, 我们结合本例对目标规划的基本概念逐一进行介绍.

负偏差变量 d^- ——实现值未能达到目标期望值的偏差值, $d^- \geq 0$;

正偏差变量 d^+ ——实现值超过目标期望值的偏差值, $d^+ \geq 0$.

对于例 4-1, 如果我们希望实现利润目标期望值 42 000 元, 那么在引进偏差变量 d^- 和 d^+ 后, 可以把这个要求用下式来表示:

$$12x_1 + 8x_2 + d^- - d^+ = 42\,000,$$

我们将它放入约束条件中, 并称之为目标约束. 相应地, 模型中原来的约束条件称为系统约束. 显然, 在规划实现某一目标期望值时, 对于偏差变量 d^- 和 d^+ , 显然有 $d^- \cdot d^+ = 0$, 即只可能出现下列 3 种情形之一:

- ① 超额完成利润的目标期望值, $d^+ > 0, d^- = 0$;
- ② 未能达到利润的目标期望值, $d^- > 0, d^+ = 0$;
- ③ 恰好完成利润的目标期望值, $d^- = 0, d^+ = 0$.

目标约束相对于系统约束来说是一种“软约束”. 所谓“软约束”, 是指目标约束中目标函数与目标期望值之间没有硬性的约束关系, 目标期望值可能恰好满足, 可能不满足, 也可能过量满足. 其具体满足的程度, 可通过偏差变量 d^- 和 d^+ 的取值加以衡量.

对于函数 f 来说, 根据决策者的期望, 其实现的目标要求可以写成下面 3 种情形之一:

① 要求恰好达到目标期望值, 表达成 $\min f = d^- + d^+$. 如果 $d^- + d^+ = 0$, 就说明恰好实现目标期望值;

② 希望超过目标期望值, 即未达到目标期望值的偏差变量 d^- 为最小, 表达成 $\min f = d^-$. 当 $d^- = 0$ 时, 则完全实现该目标.

③ 希望不超过目标期望值, 即超过目标期望值的偏差变量 d^+ 为最小, 表达成 $\min f = d^+$. 当 $d^+ = 0$ 时, 则完全实现该目标.

为了区别于原来线性规划中目标函数的意义, 上述函数 f 称为目标规划的达成函数.

如果例 4-1 中决策者希望实现超过 42 000 元的利润目标, 引进偏差变量 d_1^- , d_1^+ , 则我们可以建立下列目标规划模型:

$$\begin{aligned} \min f_1 &= d_1^-; \\ \text{s. t. } 12x_1 + 8x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 42\,000, \\ 1.0x_1 + 0.6x_2 &\leq 3\,600, \\ 0.6x_1 + 0.8x_2 &\leq 2\,400, \\ x_1, x_2 &\geq 0, \quad d_1^-, d_1^+ \geq 0. \end{aligned}$$

上述问题为单目标决策优化问题. 在现实问题中, 系统的目标常常是多元化的. 比如例 4-1, 若工厂在制定最优生产计划时, 决策者除了希望实现超过 42 000 元的利润目标外, 根据市场和资源条件又提出如下两个目标: 尽可能扩大甲产品的生产, 使甲产品的数量不低于 3 300 件的目标期望值; 尽可能减少乙产品的生产, 使乙产品的数量不超过 480 件的目标期望值. 问工厂如何确定一周内的最优生产计划?

类似于第一个目标的描述,对于甲产品的产量不低于 3 300 件的目标,引进偏差变量 d_2^- 和 d_2^+ ,我们的要求可以如下体现:

$$\begin{aligned}\min f_2 &= d_2^-; \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ &= 3\,300.\end{aligned}$$

对于乙产品的产量不超过 480 件的目标,引进偏差变量 d_3^- 和 d_3^+ ,我们的要求可以如下体现:

$$\begin{aligned}\min f_3 &= d_3^+; \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 480.\end{aligned}$$

现在问题有了 3 个目标,那么这 3 个目标又怎样同时体现在一个目标规划模型的达成函数中呢?对于这类多目标决策问题,目标规划依据“系统目标分级、赋权,决策问题逐级优化求解”的基本原理,通过引进“目标优先因子”和“相对权重系数”等概念与参数,很好地解决了模型的描述和求解。

比如上述问题的 3 个目标,决策者根据目标的相对重要程度,定性地将它们分成两个层次的优先等级来加以考虑:利润超过 42 000 元的目标作为第一级目标;希望甲产品的生产数量不低于 3 300 件的目标,与乙产品的生产数量不超过 480 件的目标同时属于第二级,但是前者比后者在同一级中又相对重要一些。为了表达上述目标分级要求,我们引入 2 个目标优先因子 P_1 和 P_2 : $P_1 \gg P_2$ 。符号“ $\gg$ ”表示一个定性的优先关系,表示第一级的目标远远重要于第二级的所有目标,它们属于不同层次的目标。另外,由于问题的第二级目标中有 2 个目标,为区别其相对重要程度,引进相对权重系数 w_{22}^- 和 w_{23}^+ 来体现这个要求(这里权重系数 w_{tq}^- 和 w_{tq}^+ 的第一个下标 t 表示所在的优先等级、第二个下标 q 表示偏差变量的排列序号)。于是,我们将上述问题的达成函数表示为 $f = P_1 d_1^- + P_2 (w_{22}^- d_2^- + w_{23}^+ d_3^+)$,相应的目标规划模型如下:

$$\begin{aligned}\min f &= P_1 d_1^- + P_2 (w_{22}^- d_2^- + w_{23}^+ d_3^+); \\ \text{s. t.} \quad &12x_1 + 8x_2 + d_1^- - d_1^+ = 42\,000, \\ &x_1 + d_2^- - d_2^+ = 3\,300, \\ &x_2 + d_3^- - d_3^+ = 480, \\ &1.0x_1 + 0.6x_2 \leq 3\,600, \\ &0.6x_1 + 0.8x_2 \leq 2\,400, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad d_q^-, \quad d_q^+ \geq 0, \quad q = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{4-1}$$

在实际问题中,我们往往给相对权重系数 w_{tq}^- , w_{tq}^+ 以具体的数字。例如对上面这个模型,可取 $w_{22}^- = 5$, $w_{23}^+ = 3$ 。

在求解上述问题时,目标规划按照逐级优化原则,首先考虑第一级目标——利润目标(超过 42 000 元)的实现;其次,在利润目标不退化的前提下,再考虑第二级目标——甲产品产量目标(不低于 3 300 件)和乙产品产量目标(不超过 480 件)的尽可能实现,依此类推,对于第二级中的 2 个目标,假设 $w_{22}^- = 5 > w_{23}^+ = 3$,则首先考虑甲产品产量目标

(不低于 3 300 件)的实现,在其不退化的前提下,再考虑乙产品产量目标(不超过 480 件)的尽可能实现。

通常,目标规划问题中各个目标的优先等级(优先因子)和同级目标中各个目标的相对权重系数,决策者应该经过专家评审讨论来决定。另外,在目标分级时,一般不同等级的目标,其度量单位可以不同,但同一等级的目标,其度量单位应该相同,以便研究确定其相对权重系数。

4.1.2 目标规划数学模型

在建立线性规划模型的基础上,我们建立目标规划模型的基本步骤为

- ① 对各个目标确定目标期望值;
- ② 对各个目标引进偏差变量,建立目标约束方程;
- ③ 确定目标优先等级和相对权重系数,建立达成函数。

这里,目标规划中的达成函数完全是由偏差变量、目标优先因子和相对权重系数组成的,这与线性规划中的目标函数是有区别的。

为了建立目标规划的一般数学模型,我们给出下面一些符号:

Q ——目标规划中目标的个数;

Z_q ——第 q 个目标的目标函数 $Z_q = \sum_{j=1}^n c_{qj}x_j, q = 1, 2, \dots, Q$;

E_q ——第 q 个目标的目标期望值 $q = 1, 2, \dots, Q$;

d_q^-, d_q^+ ——第 q 个目标约束引进的偏差变量 $q = 1, 2, \dots, Q$;

$Z_q + d_q^- - d_q^+ = E_q$ ——第 q 个目标约束 $q = 1, 2, \dots, Q$;

S ——目标规划中目标的优先等级数;

$P_1, \dots, P_t, \dots, P_S$ ——目标优先因子,有 $P_1 \gg \dots \gg P_t \gg \dots \gg P_S$;

w_{tq}^+, w_{tq}^- ——第 q 个目标的正负偏差变量在第 t 个优先级中的相对权重系数(这里,我们需要指出,在同一 t 优先级中一般仅包含数个目标,这些目标的正负偏差变量在该级达成函数中的相对权重系数至少有一个不为零,而那些不属于 t 优先级的目标,其正负偏差变量在该优先级中的相对权重系数均为零);

f_t ——第 t 个优先级的达成函数, $f_t = \sum_{q=1}^Q (w_{tq}^+ d_q^+ + w_{tq}^- d_q^-)$ 。

于是,得到下列目标规划的一般模型:

$$\begin{aligned}
 \min f &= \sum_{t=1}^S P_t f_t; \\
 \text{s. t. } &Z_q + d_q^- - d_q^+ = E_q, q = 1, 2, \dots, Q, \\
 &\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m, \\
 &x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \\
 &d_q^- \geq 0, d_q^+ \geq 0, q = 1, 2, \dots, Q.
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

对于上述目标规划问题,应严格按照“级别较高(同级权重较大)的目标优先实现,在其不退化的前提下,再考虑次级目标(同级权重较小)尽可能实现”的逐级优化原则进行求解。

例 4-2 给出 2 个产地 A_1, A_2 , 3 个销地 B_1, B_2, B_3 的不平衡运输问题如表 4-2 所示。产地 A_1, A_2 的物资必须全部运走。现有如下各级目标:

表 4-2

单位运价 c_{ij}	B_1	B_2	B_3	供应量 a_i
A_1	10	4	12	300
A_2	8	10	3	400
需求量 b_j	200	150	500	

- P_1 ——实际供应每个销地的数量均不超过其需求量;
 - P_2 ——实际供应每个销地的数量至少要满足其需求量的 75%;
 - P_3 ——实际调运方案的总运费不超过当不考虑本例中其他各级目标时的最低总运费的 1.1 倍;
 - P_4 ——基于合同规定,产地 A_2 至少供应 B_1 销地 100 个单位;
 - P_5 ——基于运输安全的考虑,尽量减少 A_1 向 B_3 、 A_2 向 B_2 的调运量(该级目标的相对权重系数为 A_1 至 B_3 、 A_2 至 B_2 的单位运价之比);
 - P_6 ——供给销地 B_1 和 B_2 的实际数量,各自与其需求量的比值应相等;
 - P_7 ——总运输费用最小;
- 试建立该运输问题的目标规划模型。

解 首先采用表上作业法求得最小运费调运方案如表 4-3 所示,总运输费用为 $150 \times 10 + 150 \times 4 + 400 \times 3 = 3\,300$ 。

表 4-3

运量 x_{ij}	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	150	150		300
A_2			400	400
虚设 A_3	50		100	150
b_j	200	150	500	

设 x_{ij} 为产地 A_i 调运至销地 B_j 的产品数量($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$); d_q^+, d_q^- 为有关目标约束的正、负偏差变量,则有约束条件如下:

(1) 供应量约束:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400;$$

(2) 每个销地实现最高需求目标(P_1 级)的目标约束:

$$x_{11} + x_{21} + d_1^- - d_1^+ = 200, \quad x_{12} + x_{22} + d_2^- - d_2^+ = 150, \quad x_{13} + x_{23} + d_3^- - d_3^+ = 500;$$

(3) 每个销地实现最低需求目标(P_2 级)的目标约束:

$$x_{11} + x_{21} + d_4^- - d_4^+ = 150, x_{12} + x_{22} + d_5^- - d_5^+ = 112.5, x_{13} + x_{23} + d_6^- - d_6^+ = 375;$$

(4) 实现总运费目标(不超过最低运费 3 300 的 1.1 倍)(P_3 级)的目标约束:

$$10x_{11} + 4x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 3x_{23} + d_7^- - d_7^+ = 3\,630;$$

(5) 实现合同目标(P_4 级)的目标约束:

$$x_{21} + d_8^- - d_8^+ = 100;$$

(6) 实现安全目标(P_5 级)的目标约束:

$$x_{13} + d_9^- - d_9^+ = 0, x_{22} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 0;$$

(7) 实现等比调入目标(P_6 级)的目标约束:

$$(x_{11} + x_{21})/200 - (x_{12} + x_{22})/150 + d_{11}^- - d_{11}^+ = 0;$$

(8) 实现总运费最低目标(P_7 级)的目标约束:

$$10x_{11} + 4x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 3x_{23} + d_{12}^- - d_{12}^+ = 3\,300.$$

根据本运输问题的目标优先等级和具体要求,其达成函数表示如下:

$$\begin{aligned} \min f = & P_1 d_3^- + P_2 (d_4^- + d_5^- + d_6^-) + P_3 d_7^+ + P_4 d_8^- \\ & + P_5 (6d_9^+ + 5d_{10}^+) + P_6 (d_{11}^- + d_{11}^+) + P_7 d_{12}^+. \end{aligned}$$

其中, P_5 优先级目标中偏差变量 d_9^+ 和 d_{10}^+ 的相对权重系数为 A_1 至 B_2 与 A_2 至 B_2 的单位运价之比 $12:10=6:5$.

综上所述,该运输问题的目标规划模型如下:

$$\begin{aligned} \min f = & P_1 (d_1^+ + d_2^+ + d_3^+) + P_2 (d_4^- + d_5^- + d_6^-) + P_3 d_7^+ + P_4 d_8^- \\ & + P_5 (6d_9^+ + 5d_{10}^+) + P_6 (d_{11}^- + d_{11}^+) + P_7 d_{12}^+; \\ \text{s. t. } & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300, \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400, \\ & x_{11} + x_{21} + d_1^- - d_1^+ = 200, \\ & x_{12} + x_{22} + d_2^- - d_2^+ = 150, \\ & x_{13} + x_{23} + d_3^- - d_3^+ = 500, \\ & x_{11} + x_{21} + d_4^- - d_4^+ = 150, \\ & x_{12} + x_{22} + d_5^- - d_5^+ = 112.5, \\ & x_{13} + x_{23} + d_6^- - d_6^+ = 375, \\ & 10x_{11} + 4x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 3x_{23} + d_7^- - d_7^+ = 3\,630, \\ & x_{21} + d_8^- - d_8^+ = 100, \\ & x_{13} + d_9^- - d_9^+ = 0, \\ & x_{22} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 0, \\ & (x_{11} + x_{21})/200 - (x_{12} + x_{22})/150 + d_{11}^- - d_{11}^+ = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x_{11} + 4x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 3x_{23} + d_{12}^- - d_{12}^+ &= 3\,300, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3; \\ d_q^-, d_q^+ &\geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, 12. \end{aligned}$$

§ 4.2 目标规划的图解法

为深刻理解目标规划模型及其相关基本概念,我们这里给出仅含有 2 个决策变量的目标规划的图解法.

例 4-3 求解目标规划

$$\begin{aligned} \min f &= P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3 (d_3^+ + d_3^-) + P_4 d_4^-; \\ \text{s. t.} \quad &-x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4, \\ &x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 2, \\ &6x_1 - 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 15, \\ &2x_1 + d_4^- - d_4^+ = 7, \\ &3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad d_q^-, d_q^+ \geq 0, \quad q = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

解 (1) 在平面直角坐标系 x_1Ox_2 中,作出系统约束 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 3x_1 + 4x_2 \leq 12$ 所对应的可行域 K ,如图 4-1 中三角形 OEF 所示.

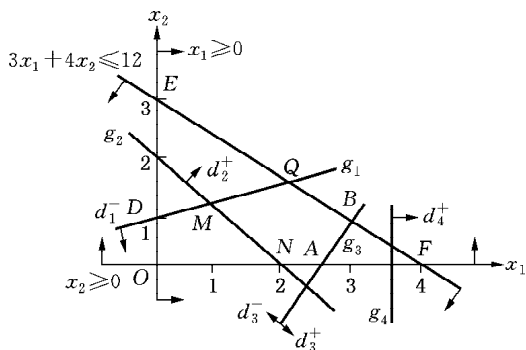


图 4-1

(2) 考虑最高优先级 P_1 级目标的达成函数 $f_1 = d_1^+$ 如何实现最小化:

由于直线 g_1 上的点满足 $-x_1 + 4x_2 = 4, d_1^- = d_1^+ = 0$,其右下半平面满足 $-x_1 + 4x_2 \leq 4, d_1^- \geq 0, d_1^+ = 0$,为了实现 $\min f_1 = d_1^+$,我们在可行域 K 内取四边形 $ODQF$,它使 P_1 级目标的达成函数实现 $f_1^* = 0$. 称四边形 $ODQF$ 为 P_1 级目标的最优解域 R_1 (简称解域). 这里,解域 R_1 是指可行域 K 内使 P_1 级目标完全达成 ($f_1^* = 0$) 的所有可行解的集合.

(3) 考虑 P_2 优先级的达成函数 $f_2 = d_2^-$ 如何实现最小化:

根据目标规划的逐级优化原则,需要在 P_1 级目标不退化的条件下,考虑 P_2 级目标的优化. 因此我们必须在解域 R_1 (四边形 $ODQF$) 中搜索 P_2 级目标的最优解域 R_2 . 目标约束直线 g_2 上的点满足 $x_1 + x_2 = 2$, $d_2^- = d_2^+ = 0$, 其左下半平面满足 $x_1 + x_2 \leq 2$, $d_2^- \geq 0$, $d_2^+ = 0$, 其右上半平面满足 $x_1 + x_2 \geq 2$, $d_2^- = 0$, $d_2^+ \geq 0$, 故图 4-1 中四边形 $NMQF$ 为 P_1 和 P_2 级目标均完全达成 ($f_1^* = 0$, $f_2^* = 0$) 的解域 R_2 .

(4) 考虑 P_3 优先级的达成函数 $f_3 = d_3^+ + d_3^-$ 如何实现最小化:

根据目标规划的逐级优化原则,需要在 P_1 和 P_2 级目标均不退化的条件下,考虑 P_3 级目标的优化. 与前面相同,我们在解域 R_2 (四边形 $NMQF$) 内搜索 P_3 级目标的解域 R_3 . 目标约束直线 g_3 上的点满足 $6x_1 - 4x_2 = 15$, $d_3^- = d_3^+ = 0$, 因此四边形 $NMQF$ 内的线段 AB 上的所有可行解,均在 P_1 和 P_2 级目标不退化的条件下 ($f_1^* = 0$, $f_2^* = 0$), 使 P_3 级目标完全达成 ($f_3^* = 0$), 即线段 AB 为 P_3 级目标的解域 R_3 .

(5) 考虑最后一个 P_4 级的达成函数 $f_4 = d_4^-$ 如何实现最小化:

同理,我们在解域 R_3 (线段 AB) 上搜索 P_4 级目标的解域 R_4 . 目标约束直线 g_4 上的点满足 $2x_1 = 7$, $d_4^- = d_4^+ = 0$, 右半平面 $d_4^- = 0$, $d_4^+ \geq 0$, 这个右半平面已经落在 P_3 级解域 R_3 (线段 AB) 的外面. 于是,在 P_1 , P_2 和 P_3 级目标不退化 ($f_1^* = f_2^* = f_3^* = 0$) 的条件下,使 P_4 级目标完全达成 ($f_4^* = 0$) 的可行解已经不存在,即 $R_4 = \emptyset$.

我们只能在解域 R_3 (线段 AB) 上搜索使 P_4 级目标尽可能达成最小值的可行解,并把它称为 P_4 级目标的满意解. 显然,线段 AB 上离开直线 g_4 距离最近的点是 B 点,它到直线 g_4 的距离是 0.5. 因此 P_4 级目标的满意解是 $B = (3, 3/4)^T$, $\min f_4 = d_4^- = 0.5$.

由上可见,目标规划的求解,一般首先在系统约束的可行域内搜索使 P_1 级各个目标均能够完全达成(偏差变量为零,实现既定的目标期望值)的最优解域 R_1 , 然后再在 R_1 中搜索使 P_2 级各个目标均能够完全达成的解域 R_2 , 以便在保证 P_1 级目标不退化的情况下,实现 P_2 级目标的优化,依次类推. 如果搜索至解域 R_t , 我们给出 P_t 级目标的最优解域 R_t 的定义.

P_t 级目标的最优解域 R_t ——使 $P_1, P_2, \dots, P_t$ 优先级的达成函数值 $f_1^* = f_2^* = \dots = f_t^* = 0$ (今后简称“目标完全达成”)的所有可行解的集合. 显然有 $R_1 \supseteq R_2 \dots \supseteq R_{t-1} \supseteq R_t$.

根据 R_t 非空与否,下面我们给出目标规划最优解和满意解的定义.

最优解——如果 $t = S$, R_S 不为空集,则 R_S 中的任意可行解 X^* 可以使目标规划中的所有目标完全达成,即 $f_1^* = f_2^* = \dots = f_S^* = 0$, 我们称 X^* 为该目标规划的最优解.

满意解——如果 $R_t (t \leq S)$ 为空集,则 P_t 级目标不能够完全达成,此时只能够在 R_{t-1} (不是空集)中搜索使 P_t 级目标的达成函数取得最小值的可行解 $\tilde{X}$, 使得 $f_1^* = f_2^* = \dots = f_{t-1}^* = 0$, 但 $f_t^* > 0$, 我们称 $\tilde{X}$ 为目标规划 P_t 级目标的满意解,通常也称作整个目标规划的满意解(在目前目标规划的有关著作中,有时也把这个满意解称作为该目标规划的最优解).

在这里我们要指出,上述 P_t 级目标的满意解对于低于 P_t 级的个别目标仍然有可能完全达成,详细讨论请参考有关目标规划的著作.

§ 4.3 目标规划的单纯形法

在目标规划模型(4-2)中存在着系统约束(假设它们是相容的),我们引进松弛变量或者剩余变量将它们化成等式约束. 我们知道,对于模型(4-2),共有 S 个优先因子 $P_1, P_2, \dots, P_S$, 表示各个目标分属不同的等级,这些目标之间存在一个定性的优先关系. 如果将 $P_1, P_2, \dots, P_S$ 理解为不同等级的充分大的正数 $M_1, M_2, \dots, M_S$, 定性关系“ $P_t \gg P_{t+1}$ ”等价于“正数 M_t 充分大于 M_{t+1} ”,那么 f 是关于偏差变量的线性函数,于是目标规划模型在形式上完全成为一个标准型的线性规划模型(LP),因而完全可以采用线性规划的单纯形法求解目标规划模型. 只不过在采用单纯形法的求解过程中,必须明确“正数 M_t 充分大于 M_{t+1} ”($t = 1, 2, \dots, S$). 也就是说,应该严格遵守目标规划“级别较高(同级权重较大)的目标优先实现,在其不退化的前提下,再考虑次级目标(同级权重较小)的实现”的求解原则.

在目标规划的单纯形法中,对于不同等级的 P_t (理解为充分大正数 M_t) 的处理,可以借鉴线性规划大 M 法中对充分大的正数 M 的处理技巧,将达成函数值 f_0 和检验数 r_j 理解为 P_t ($t = 1, 2, \dots, S$) 的多项式,假设

$$f_0 = \sum_{t=1}^S f_t P_t, r_j = \sum_{t=1}^S \hat{r}_{jt} P_t, j = 1, 2, \dots, n,$$

在单纯形表中,类似表 1-27,我们把检验数 r 这一行拆成 S 行,第 t 行为检验数 r_j 和目标函数值 f_0 对应于优先因子 P_t 的系数(转轴时这些行一起参加转轴);类似表 1-22,在初始单纯形表上端添加一行 C 、添加一列 C_B ,利用检验数 r_j 和 f_0 的公式(1-44)和公式(1-45)直接在表上计算 $\hat{r}_{jt}$ ($j = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, S$) 和 f_t , 例如表 4-4.

检验数 r_j 的正负首先看 P_1 的系数 $\hat{r}_{j1}$, 如果它大于零,那么 r_j 就大于零,如果它小于零,那么 r_j 就小于零;只有当 $\hat{r}_{j1} = 0$, r_j 的符号才看 P_2 的系数 $\hat{r}_{j2}$ 的符号,依次类推. 检验数 r_j 和 r_k 的大小比较,首先取决于它们 P_1 的系数 $\hat{r}_{j1}$ 和 $\hat{r}_{k1}$ 的比较结果,如果 $\hat{r}_{j1} = \hat{r}_{k1}$, 则取决于 P_2 的系数 $\hat{r}_{j2}$ 与 $\hat{r}_{k2}$ 的比较结果,依此类推.

下面我们来看一个具体的例子.

例 4-4 求解目标规划:

$$\begin{aligned} \min f &= P_1(d_1^+ + d_2^+) + P_2 d_3^- + P_3 d_4^+ + P_4(d_1^- + 1.5d_2^-); \\ \text{s. t. } \quad x_1 &\quad + d_1^- - d_1^+ = 30, \\ &\quad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15, \\ 8x_1 + 12x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 1\,000, \\ x_1 &+ 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 40, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad d_q^-, d_q^+ &\geq 0, \quad q = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

解 (1) 选取负偏差变量组 $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-$ 作为初始基变量组得表 4-4:

表 4-4

C		0	0	P_4	$1.5P_4$	P_2	0	P_1	P_1	0	P_3	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	
P_4	d_1^-	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	30
$1.5P_4$	d_2^-	0	(1)	0	1	0	0	0	-1	0	0	15
P_2	d_3^-	8	12	0	0	1	0	0	0	-1	0	1 000
0	d_4^-	1	2	0	0	0	1	0	0	0	-1	40
r	P_1	$\hat{r}_{j1}$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
	P_2	$\hat{r}_{j2}$	-8	-12	0	0	0	0	0	1	0	-1 000
	P_3	$\hat{r}_{j3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	P_4	$\hat{r}_{j4}$	-1	-3/2	0	0	0	0	1	3/2	0	-105/2

考察 $r_1: \hat{r}_{11} = 0, \hat{r}_{12} = -8$, 故 $r_1 < 0$, 同理 $r_2 < 0$, 该表不是最优表; 比较 r_1 和 $r_2: \hat{r}_{11} = \hat{r}_{12} = 0, \hat{r}_{12} = -8 > \hat{r}_{22} = -12$, 故 $r_2 < r_1$, 选择 x_2 进基;

(2) 按照最小比值准则 d_2^- 出基, 转轴运算如表 4-5 所示。

表 4-5

X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	$\bar{b}$
d_1^-	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	30
x_2	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	15
d_3^-	8	0	0	-12	1	0	0	12	-1	0	820
d_4^-	(1)	0	0	-2	0	1	0	2	0	-1	10
P_1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
P_2	-8	0	0	12	0	0	0	-12	1	0	-820
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P_4	-1	0	0	3/2	0	0	1	0	0	0	-30

考察 $r_1: \hat{r}_{11} = 0, \hat{r}_{12} = -8$, 故 $r_1 < 0$, 该表不是最优表, 选择 x_1 进基;

(3) 按照最小比值准则 d_4^- 出基, 转轴运算如表 4-6 所示。

表 4-6

X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	$\bar{b}$
d_1^-	0	0	1	2	0	-1	-1	-2	0	(1)	20
x_2	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	15
d_3^-	0	0	0	4	1	-8	0	-4	-1	8	740
x_1	1	0	0	-2	0	1	0	2	0	-1	10
P_1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
P_2	0	0	0	-4	0	8	0	4	1	-8	-740
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P_4	0	0	0	-1/2	0	1	1	2	0	-1	-20

考察偏差变量 d_2^- 和 d_4^+ 的检验数, 均小于零, 该表不是最优表; 比较 d_2^- 和 d_4^+ 的检验数的大小, 选择 d_4^+ 进基;

(4) 按照最小比值准则选择 d_1^- 出基, 转轴运算如表 4-7 所示。

表 4-7

X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	$\bar{b}$
d_4^+	0	0	1	2	0	-1	-1	-2	0	1	20
x_2	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	15
d_3^-	0	0	-8	-12	1	0	8	12	-1	0	580
x_1	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	30
P_1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
P_2	0	0	8	12	0	0	-8	-12	1	0	-580
P_3	0	0	-1	-2	0	1	1	2	0	0	-20
P_4	0	0	1	3/2	0	0	0	0	0	0	0

现在检验数 r_j 全部非负, 故为最优表. 由于 $f_2^* = 580 > 0$, 故目标规划满意解为

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= (x_1, x_2, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+)^T \\ &= (30, 15, 0, 0, 580, 0, 0, 0, 0, 20)^T.\end{aligned}$$

例 4-5 给出目标规划

$$\begin{aligned}\min f &= P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (5d_3^- + 3d_4^-) + P_4 d_1^+; \\ \text{s. t. } &x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 6, \\ &x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 9, \\ &x_1 - 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 4, \\ &x_2 + d_4^- - d_4^+ = 2, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad d_q^-, d_q^+ \geq 0, \quad q = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

已知最优单纯形表 4-8, 请分析目标规划解的情况.

表 4-8

X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	1/2	1/2	0	0	-1/2	-1/2	0	13/2
d_1^+	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	3
d_4^-	0	0	0	-1/4	1/4	1	0	1/4	-1/4	-1	3/4
x_2	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	-1/4	1/4	0	5/4
P_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P_3	0	0	0	3/4	17/4	0	0	-3/4	3/4	3	-9/4
P_4	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	-3

解 从表 4-8 可以看到, P_1 和 P_2 级检验数行中的系数皆为非负, 且其目标达成函数值为零, 这说明目标规划的 P_1 和 P_2 优先因子对应的目标(希望 $x_1 + 2x_2$ 超过目标期望值 6 和不超过目标期望值 9)已经完全实现.

P_3 和 P_4 级相应检验数行中的系数还有负数, 但其上一级检验数行中的对应系数均大于零, 说明 P_3 和 P_4 优先因子对应的目标已经不可能在上面几级目标不退化的条件下, 进一步优化. 目前 P_3 和 P_4 级目标的达成函数值分别为 9/4 和 3, P_3 和 P_4 级目标没

有完全实现. 对于 P_3 优先因子而言, 由于 $d_3^- = 0$, 故目标规划的第 3 个目标 ($x_1 - 2x_2$ 不低于目标期望值 4) 已经完全实现 (在最优解中 $x_1 = 13/2$, $x_2 = 5/4$, $d_3^+ = 0$, 所以 $x_1 - 2x_2 = 4$, $x_1 - 2x_2$ 等于目标期望值 4); 因为 $d_4^- = 3/4$, 所以目标规划的第 4 个目标 (x_2 不低于目标期望值 2) 没有实现, $x_2 = 5/4$ 小于目标期望值 2; 对于 P_4 优先因子而言, $d_1^+ = 3$, 所以希望 $x_1 + 2x_2$ 不超过目标期望值 6 的目标没有实现, 现在 $x_1 + 2x_2 = 9$.

从以上分析, 我们不难发现: 从线性规划角度来说, 表 4-8 已经为最优单纯形表, 得到了 (LP) 的“最优解”, 但是从目标规划问题本身的角度来说, 它只能说是一个“满意解”.

目标规划模型的理论和方法有许多内容值得进行深入的讨论. 在目标规划模型 (4-2) 中存在着系统约束, 我们认为系统约束是“硬约束”, 是“必须满足”的约束条件. 在现实的决策分析中, 由于主客观条件的限制, 在建立模型的过程中, 系统约束条件之间可能出现相互矛盾而不相容的现象, 或者个别约束条件根本就不可行, 使得目标规划没有可行解. 在大 M 法和两阶段法中, 我们已经介绍过如何判别一个线性规划是否具有可行解, 但究竟是哪些约束条件产生了模型的不可行性呢? 线性规划理论没有深入展开讨论. 现在有的目标规划著作就对模型中系统约束相容性的判别问题, 作了不同的介绍和处理: 有的目标规划著作建议对部分 (或者全体) 系统约束引入偏差变量把模型 (4-2) 中的部分 (或者全体) 系统约束转化为“软约束”, 在形式上全部成为相容的等式约束, 使转化后的目标规划模型一定存在可行解. 有些著作建议, 目标规划应该首先将所有系统约束软化过程中引进的正负偏差变量 d^- , d^+ 选择性地 (部分或者全体) 列入最高优先级 (设为 P_0 级), 必须完全达成目标 (选择规则为: “ $\geq$ ”型系统约束条件, 选择 d^- ; “ $\leq$ ”型系统约束条件, 选择 d^+ ; “=”型系统约束条件, 选择 d^- 和 d^+).

在求得相应的最优单纯形表之后, 再分析 P_0 级目标中的正负偏差变量的值是否全部为零 (即 f_0^* 是否为零). 如果 f_0^* 不为零, 即 P_0 级目标中存在某个正 (负) 偏差变量的取值不为零, 则说明其相应的系统约束条件没有能够满足, 即目标规划问题存在不相容的系统约束条件, 还需要对目标规划模型中的相关约束条件和参数进行调整并对模型进一步修正. 详见目标规划有关参考书.

§ 4.4 目标规划的灵敏度分析

在目标规划中, 如果将目标优先因子看作为不同等级的充分大正数, 目标规划模型就是一个线性规划问题, 所以在求得目标规划问题的最优解或满意解之后, 对各个相关参数, 我们也可以进行灵敏度分析. 以下我们仅对目标优先因子 P_i 和相对权重系数 w_{iq}^- , w_{iq}^+ 发生变化时的灵敏度分析各举一例.

例 4-6 若上述例 4-5 中优先因子发生变化, 达成函数变化为要求

$$\min f = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_1^+ + P_4 (5d_3^- + 3d_4^-),$$

试进行灵敏度分析.

解 由于达成函数的变化, 将影响原单纯形表的最优性条件和达成函数值, 即对于表 4-8 来说, 非基变量 d_1^+ , d_3^- 和 d_4^- 的检验数和达成函数值 f_0 将发生变化, 因此应通

过公式 $r_j = c_j - C_B^T B^{-1} A_{.j}$, $f_0 = C_B^T B^{-1} b$ 重新计算相关的检验数和达成函数值,如表 4-9 所示.

表 4-9

C		0	0	P_1	0	$5P_4$	$3P_4$	P_3	P_2	0	0	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	
0	x_1	1	0	0	1/2	1/2	0	0	-1/2	-1/2	0	13/2
P_3	d_1^+	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	3
$3P_4$	d_4^-	0	0	0	-1/4	1/4	1	0	1/4	-1/4	-1	3/4
0	x_2	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	-1/4	1/4	0	5/4
r	P_1	$\hat{r}_{j1}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	P_2	$\hat{r}_{j2}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	P_3	$\hat{r}_{j3}$	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-3
	P_4	$\hat{r}_{j4}$	0	0	0	3/4	17/4	0	0	-3/4	3/4	-9/4

由于 d_2^- 的检验数 $= -P_3 + (3/4)P_4 < 0$, 故单纯形表表 4-9 不是最优表, 选择 d_2^- 进基, 按照最小比值准则 d_1^+ 出基, 转轴运算后得表 4-10.

由表 4-10 可知, $f_1^* = f_2^* = f_3^* = 0$, 但 $f_4^* = 9/2$, 故目标规划的满意解为

$$\tilde{X} = (x_1, x_2)^T = (5, 1/2)^T.$$

表 4-10

X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	-1/2	0	5
d_2^-	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	3
d_4^-	0	0	-1/4	0	1/4	1	1/4	0	-1/4	-1	3/2
x_2	0	1	1/4	0	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1/2
P_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P_4	0	0	3/4	3/4	17/4	0	-3/4	0	3/4	3	-9/2

例 4-7 若例 4-5 中相对权重系数发生变化, 达成函数变化为要求

$$\min f = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (\alpha d_3^- + \beta d_4^-) + P_4 d_1^+ \quad (\text{其中 } \alpha, \beta > 0),$$

试进行灵敏度分析.

解 分析达成函数的变化, 发现 P_3 优先级中偏差变量 d_3^- , d_4^- 的相对权重系数为待定系数 α 和 β .

(1) 与例 4-6 相同, 达成函数的变化仅仅影响原单纯形表表 4-8 的最优性条件和达成函数值, 即非基变量 d_2^- , d_2^+ , d_3^- , d_3^+ , d_4^+ 的检验数和达成函数值将发生变化, 因此首先应通过 $r_j = c_j - C_B^T B^{-1} A_{.j}$, $f_0 = C_B^T B^{-1} b$ 计算相关检验数和 f_0 , 再分析与判断相对权重系数的变化对目标规划解的影响;

(2) 对 P_3 行的部分系数进行重新计算, 计算结果如表 4-11 所示. d_2^+ , d_2^- 和 d_3^+ 的检验数均大于零; 对于 d_3^- 的检验数 $[\alpha - \beta/4]P_3$ 的情况讨论如下:

表 4-11

C		0	0	P_1	0	αP_3	βP_3	P_4	P_2	0	0	$\bar{b}$
C_B	X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	
0	x_1	1	0	0	1/2	1/2	0	0	-1/2	-1/2	0	13/2
P_4	d_1^+	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	3
βP_3	d_4^-	0	0	0	-1/4	1/4	1	0	1/4	-1/4	-1	3/4
0	x_2	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	-1/4	1/4	0	5/4
P_1	$\hat{r}_{j1}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	$\hat{r}_{j2}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P_3	$\hat{r}_{j3}$	0	0	0	$\beta/4$	$\alpha - \beta/4$	0	0	$-\beta/4$	$\beta/4$	β	$-3\beta/4$
P_4	$\hat{r}_{j4}$	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	-3

① 当 $\alpha/\beta > 1/4$ 时, d_3^- 的检验数 > 0 , 原满意解不变: $\tilde{X}^1 = (13/2, 5/4)^T$;

② 当 $\alpha/\beta < 1/4$ 时, d_3^- 的检验数 < 0 , 原满意解发生改变, 选择 d_3^- 进基, d_4^- 出基, 得到新的满意解 $\tilde{X}^2 = (5, 2)^T$;

③ 当 $\alpha/\beta = 1/4$ 时, d_3^- 的检验数 $= 0$, $\tilde{X}^1$ 和 $\tilde{X}^2$ 均为目标规划的满意解, 则 $\tilde{X}^* = \lambda_1 \tilde{X}^1 + \lambda_2 \tilde{X}^2$ ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$) 也是目标规划的满意解。

由此可见, 目标优先因子和相对权重系数的变化常常引起目标规划解的变化, 换句话说, 目标规划的解对这两者的变化反映比较灵敏, 因此按目标规划的求解结果直接进行决策具有一定的风险。故在目标规划建立模型的过程中, 应科学谨慎地确定目标优先级和相对权重系数, 并应对求解结果进行相关的灵敏度分析, 以便为可靠的决策提供更

习 题 四

1. 图解法解下列目标规划问题:

$$\begin{aligned}
 \min f &= P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (2d_3^- + d_4^-); \\
 \text{s. t. } &x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40, \\
 &x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50, \\
 &x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24, \\
 &x_1 + 4x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30, \\
 &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad d_q^- \geq 0, \quad d_q^+ \geq 0, \quad q = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

2. 单纯形法解下列目标规划问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \min f &= P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (5d_3^- + 3d_4^-); \\
 \text{s. t. } &x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80, \\
 &x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 90, \\
 &x_1 + d_3^- - d_3^+ = 70, \\
 &x_2 + d_4^- - d_4^+ = 45, \\
 &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad d_q^-, d_q^+ \geq 0, \quad q = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \min f = P_1(d_1^+ + d_2^+) + P_2d_3^- + P_3d_4^+; \\
 \text{s. t.} \quad & 4x_1 + 5x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80, \\
 & 4x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 48, \\
 & 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 80, \\
 & x_1 + d_4^- - d_4^+ = 5, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, d_q^- \geq 0, d_q^+ \geq 0, q = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

3. 公司决定使用 1 000 万元新产品开发基金开发 A, B, C 3 种新产品. 经过预测, 开发 A, B, C 3 种新产品的投资利润率分别为 5%, 7%, 10%. 由于新产品开发有一定风险, 公司研究后决定了以下优先顺序目标:

- (1) A 产品至少投资 300 万元;
- (2) 为分散风险, 任何一种新产品的开发投资不超过开发基金总额的 35%;
- (3) 至少留有 10% 的开发基金, 以备急用;
- (4) 使总的投资利润最大.

试建立投资分配方案的目标规划模型.

4. 已知目标规划问题:

$$\begin{aligned}
 \min f &= P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2d_3^- + P_3d_4^+; \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10, \\
 & x_1 + d_2^- - d_2^+ = 4, \\
 & 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56, \\
 & x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12, \\
 & x_1, x_2, d_q^-, d_q^+ \geq 0, q = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

最优单纯形表如表 4-12 所示.

表 4-12

X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	$\bar{b}$
x_2	0	1	1	-1	0	0	-1	1	0	0	6
x_1	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	4
d_3^-	0	0	-3	-2	1	1	3	2	-1	0	18
d_4^-	0	1	1	0	0	0	1	0	0	-1	2
P_1	0	0	0	0	0	0	2	3	0	0	0
P_2	0	0	3	2	0	0	-3	-2	1	0	-18
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

(1) 若达成函数发生如下变化

$$\min f = P_1d_3^- + P_2(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_3d_4^+,$$

试分析最优解有何变化?

(2) 若偏差变量 d_2^+ 的相对权重系数待定, 试分析其灵敏度范围.

第五章 整数规划

第一章讨论的线性规划问题的决策变量都是连续型的,但是对某些实际问题而言,问题的全体或部分决策变量被限制为离散型的整数值,我们称这样的线性规划问题为整数线性规划,简称整数规划,简记为(IP).

我们自然很容易地想到,若把整数规划的决策变量的整数约束去掉,得到相应的连续型变量的线性规划,对这个线性规划用单纯形法求解,然后将得到的最优解中要求取整数值的决策变量的值进行舍入处理,从而把所得结果作为整数规划的最优解.但是,实际例子告诉我们这个方法是不可行的.

例 5-1 求解整数规划:

$$\begin{aligned} \min f &= -x_1 - x_2; \\ \text{s. t.} \quad & 14x_1 + 9x_2 \leq 51, \\ & -6x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ & x_j \geq 0, \text{ 整数}, j = 1, 2. \end{aligned}$$

解 我们去掉上述问题中 x_1 、 x_2 为整数这个约束,得到相应的线性规划,用图解法进行求解(如图 5-1),得到线性规划的最优解 $X^* = (x_1, x_2)^T = (1.5, 3.33)^T$,最优值为 -4.83 .

如图 5-1 所示,该整数规划的可行解集合是一些离散的点(今后我们仍用可行域来通称整数规划可行解的集合).

如果我们对 X^* 的变量 x_1 及 x_2 分别作舍入处理,得到 4 个整数解:

$$(2, 3)^T, (1, 3)^T, (2, 4)^T, (1, 4)^T,$$

我们发现,它们都不是整数规划的可行解.事实上,该整数规划的最优解是 $(2, 2)^T$ 或 $(3, 1)^T$.

另一方面,如果我们采用上述处理方法

来求解(IP),那么,当(IP)有 n 个取整数值的变量时,则相应线性规划的最优解中,要求取整数值的变量的值都有舍或入两种可能,总共就有 2^n 种可能的舍入方案.当 $n = 60$ 时 $2^{60} \approx 10^{18}$,这时即使应用高速电子计算机也难以处理全部舍入方案.所以,有必要对整数规划建立一些有效的算法.

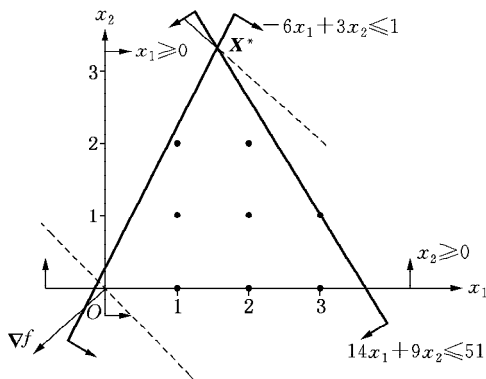


图 5-1

§ 5.1 整数规划模型

人们对整数规划感兴趣,除了有些问题的实际变量必须是整数这个原因外,还因为现实生活中有些问题的解必须满足许多重要的特殊约束条件,或者在建立模型时,必须考虑一些重要的因素,如若不引进附加的整数变量(仅取0或1,称为逻辑变量或0-1变量),那么,要完整地建立模型并把问题说清楚将是十分困难的.下面我们通过一些简单的例题,来介绍建立整数规划模型的一些技巧.

例 5-2 (固定费用问题) 工厂准备生产 A_1, A_2, A_3 3 种产品.若 A_j 产品投产,无论产量大与小,都需要一笔固定费用 d_j (例如装夹具的设计制作费用).而每生产一件产品,其利润为 c_j ,试问固定费用这个因素如何体现在模型中而使总利润最大(其他约束条件暂不列入)?

解 设产品 A_j 的产量为 x_j . 又设 0-1 变量

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_j > 0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3. \quad (5-1)$$

于是,目标函数为

$$\max f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 - d_1 y_1 - d_2 y_2 - d_3 y_3.$$

式(5-1)这个规定可以借助于下列 3 个约束条件并结合目标函数是求最大值来实现:

$$x_j \leq M y_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

其中 M 是充分大的正数.

我们可以看到,若 $x_j > 0$,则要使约束条件 $x_j \leq M y_j$ 成立, y_j 就必须等于 1,此时,产品 A_j 的固定费用 d_j 就考虑在目标函数中了.若 $x_j = 0$,那么 $y_j = 0$ 或 1 都满足约束条件 $x_j \leq M y_j$,但是在最优解中, y_j 一定等于 0.否则,如果 $y_j = 1$,相应的目标函数值就小于 $y_j = 0$ 对应的目标函数值,而我们现在是求 $\max f$.因此,引进逻辑变量 $y_j = 0, 1$ ($j = 1, 2, 3$),固定费用就体现在模型中了.

例 5-3 (选择性约束条件) 某工厂生产第 j 种产品的数量为 $x_j, j = 1, 2, 3$.其使用的材料在材料甲及乙中选择一种.材料消耗的约束条件分别为

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 180 \text{ 及 } 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 240$$

(其他资源约束未列出),试问这类选择性约束条件如何体现在模型中?

解 引进 0-1 变量 y :

$$y = \begin{cases} 0, & \text{选择材料甲,} \\ 1, & \text{否则.} \end{cases}$$

这样,“或此或彼”相互排斥的约束条件就可化成下列两个约束条件:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 180 + M y, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 &\leq 240 + M(1 - y), \end{aligned}$$

其中 M 是充分大的正数.

可以看出,当 $y = 0$ 时,第二个约束变成 $4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 240 + M$,由于 M 是充分大的正数,所以这个约束条件自动满足而不起作用,而第一个约束为 $2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 180$,这意味着选择材料甲;反之,当 $y = 1$ 时,第二个约束起作用,第一个约束变为 $2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 180 + M$ 不起作用,这意味着选择材料乙. 因此,借助于 0-1 变量,材料选择的两种可能性就同时包括在一个模型中了.

一般地,假定在某种情况下要在 p 个约束条件

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p$$

中至少要选择 q 个约束条件得到满足,那么,我们引进 p 个 0-1 变量 y_i , 则选择性的约束条件问题就化为

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i + My_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ \sum_{i=1}^p y_i &\leq p - q, \\ y_i &= 0, 1, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

例 5-4 (可行域描述问题) 如何把图 5-2 中的阴影部分所表示的可行域用联立的线性约束条件来描述?

解 如果阴影部分所表示的可行域用数学语言来描述,就是下列选择性约束条件:

$$\text{或者 } x_1 + x_2 \geq 3, x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$\text{或者 } x_1 + 2x_2 \leq 2.$$

我们先引进第一级 0-1 变量 y_1 , 将它们表达为联立约束条件:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3 - My_1; \\ x_1 + x_2 &\leq 4 + My_1; \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2 + M(1 - y_1). \end{aligned}$$

而当 $x_1 + x_2 \geq 3$ 及 $x_1 + x_2 \leq 4$ 成立(即 $y_1 = 0$)时,

$$\begin{aligned} \text{或者 } x_1 &\leq 1; \\ \text{或者 } x_1 &\leq 2, x_2 \leq 2; \\ \text{或者 } x_2 &\leq 1. \end{aligned} \tag{5-2}$$

我们引进第二级 0-1 变量 y_2 、 y_3 和 y_4 , 上述选择性约束条件(5-2)就成为

$$x_1 \leq 1 + My_1 + My_2,$$

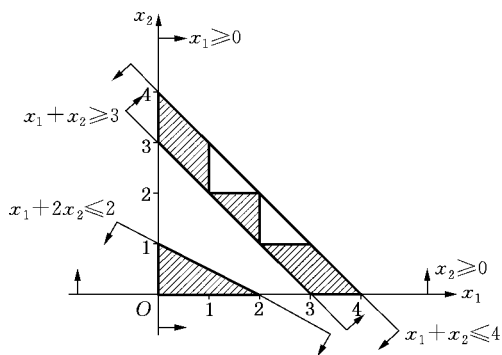


图 5-2

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 2 + My_1 + My_3, \\x_2 &\leq 2 + My_1 + My_3, \\x_2 &\leq 1 + My_1 + My_4, \\y_2 + y_3 + y_4 &= 2(1 - y_1).\end{aligned}$$

联立在一起,该可行域即描述为

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 3 - My_1, \\x_1 + x_2 &\leq 4 + My_1, \\x_1 &\leq 1 + My_1 + My_2, \\x_1 &\leq 2 + My_1 + My_3, \\x_2 &\leq 2 + My_1 + My_3, \\x_2 &\leq 1 + My_1 + My_4, \\y_2 + y_3 + y_4 &= 2(1 - y_1), \\x_1 + 2x_2 &\leq 2 + M(1 - y_1) \\x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \\y_j &= 0, 1, \quad j = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

例 5-5 (非线性整数规划问题线性化) 试将下列非线性整数规划变换成整数规划:

$$\begin{aligned}\max f &= x_1^2 + x_2x_3 - x_3^3; \\s. t. \quad &-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\&x_j = 0, 1, \quad j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

解法一 显然,对任 $k > 0$, 0-1 变量 x_j 总有: $x_j^k = x_j$, 于是目标函数化成

$$f = x_1 + x_2x_3 - x_3.$$

我们引入 0-1 变量 y 来代替 x_2x_3 :

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_2 = x_3 = 1, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (5-3)$$

我们用下述两个约束条件来体现上述规定:

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 - y &\leq 1, \\-x_2 - x_3 + 2y &\leq 0.\end{aligned} \quad (5-4)$$

这是由于:当 $x_2 = x_3 = 1$ 时,约束条件(5-4)化成 $y \geq 1$ 和 $y \leq 1$,从而有 $y = 1$;当 x_2 或 x_3 中至少有一个为零时,由式(5-4)的第二个约束 $y \leq \frac{x_2 + x_3}{2}$ 得知 $y = 0$.

从而,本模型化为:

$$\begin{aligned}\max f &= x_1 + y - x_3; \\s. t. \quad &-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3, \\&x_2 + x_3 - y \leq 1, \\&-x_2 - x_3 + 2y \leq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_j &= 0, 1, \quad j = 1, 2, \\y &= 0, 1.\end{aligned}$$

解法二 在方法一中每有一个 0-1 变量乘积项,就要引入一个整数变量,但计算机求解整数规划的时间随着整数变量个数增加而增加,为避免这种情况,我们引入非负连续变量 y 来代替 x_2x_3 ,式(5-3)的规定用下列 3 个约束条件来体现:

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 - y &\leq 1, \\y &\leq x_2, \\y &\leq x_3.\end{aligned}$$

显然,当 $x_2 = x_3 = 1$ 时,这 3 个约束条件联立在一起,即可得出 $y = 1$;而当 x_2 或 x_3 至少有一个为零时,第二个或第三个约束条件迫使 $y = 0$. 所以说,这 3 个约束条件隐含了 y 是 0-1 变量.

本模型化为

$$\begin{aligned}\max f &= x_1 + y - x_3; \\ \text{s. t.} \quad &-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ &x_2 + x_3 - y \leq 1, \\ &y \leq x_2, \\ &y \leq x_3, \\ &x_1 = 0, 1; \quad x_2 = 0, 1; \quad y \geq 0.\end{aligned}$$

推而广之,当模型中出现 k 个 0-1 变量 x_j 的乘积 $x_1 \dots x_j \dots x_k$ 时,我们用下列两种方法处理:

方法一 引入 0-1 变量 y 取代乘积项 $x_1x_2 \dots x_k$ 并增加下列两个约束条件:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k x_j - y &\leq k - 1, \\ -\sum_{j=1}^k x_j + ky &\leq 0, \\ x_j &= 0, 1, \quad j = 1, \dots, k, \\ y &= 0, 1.\end{aligned}$$

方法二 引入非负变量 y 代替乘积项 $x_1x_2 \dots x_k$ 并增加下列 $(k+1)$ 个约束条件:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k x_j - y &\leq k - 1, \\ y &\leq x_j, \quad j = 1, \dots, k \\ y &\geq 0, \\ x_j &= 0, 1, \quad j = 1, \dots, k.\end{aligned}$$

例 5-6 (最优分配问题) 现有 4 部车床 $A_i (i = 1, \dots, 4)$ 和 4 个零件 $B_j (j = 1, \dots, 4)$, 车床 A_i 加工零件 B_j 所需时间 t_{ij} (小时)由

表 5-1

$\begin{matrix} i \backslash j \\ A_i \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	5	4	1
A_2	7	2	1	3
A_3	3	4	5	1
A_4	6	7	5	2

表 5-1 给出. 问如何安排生产计划, 使每部车床加工一个零件、一个零件由一部车床加工, 且全部零件加工完成的时间最早(假定 4 部车床同时开始加工). 试建立整数规划模型.

解 设 0-1 变量 x_{ij} 为

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{车床 } A_i \text{ 加工零件 } B_j, \\ 0, & \text{否.} \end{cases}$$

因为每部车床仅加工一个零件, 所以有

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 4.$$

因为每个零件仅需一部车床加工, 所以有

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, 4.$$

假设 y 为全部零件完工时间, 则有

$$y = \max\{3x_{11} + 7x_{21} + 3x_{31} + 6x_{41}, 5x_{12} + 2x_{22} + 4x_{32} + 7x_{42}, \\ 4x_{13} + x_{23} + 5x_{33} + 5x_{43}, x_{14} + 3x_{24} + x_{34} + 2x_{44}\},$$

我们将它化为线性约束条件:

$$y \geq 3x_{11} + 7x_{21} + 3x_{31} + 6x_{41}, y \geq 5x_{12} + 2x_{22} + 4x_{32} + 7x_{42}, \\ y \geq 4x_{13} + x_{23} + 5x_{33} + 5x_{43}, y \geq x_{14} + 3x_{24} + x_{34} + 2x_{44}.$$

于是, 得整数规划模型如下:

$$\begin{aligned} \min f &= y; \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 4, \\ & \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, 4, \\ & y \geq 3x_{11} + 7x_{21} + 3x_{31} + 6x_{41}, \\ & y \geq 5x_{12} + 2x_{22} + 4x_{32} + 7x_{42}, \\ & y \geq 4x_{13} + x_{23} + 5x_{33} + 5x_{43}, \\ & y \geq x_{14} + 3x_{24} + x_{34} + 2x_{44}, \\ & x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, 4, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

例 5-7 (选址问题) 现准备从 A_1, A_2, A_3 3 个地点选择两处开设工厂, 它们每

表 5-2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	4	5	3
A_2	2	3	4
A_3	6	4	5

的产量 $a_i (i = 1, 2, 3)$ 分别至多为 70, 80 和 90 个单位, 每月的经营费用 d_i (与产量无关) 分别为 100, 90 和 120. 有 3 家客户 B_1, B_2 和 B_3 , 它们每月的需求量 $b_j (j = 1, 2, 3)$ 分别为 40, 60 和 45 个单位. A_i 至 B_j 的单位运价 C_{ij} (如表 5-2 所示). 问如何选址, 使每月经营和运输费用最低? 试建立整数规划模型.

解 设 $y_i = \begin{cases} 1, & \text{选地点 } A_i \text{ 开设工厂,} \\ 0, & \text{否.} \end{cases}$

又设 x_{ij} 为在地点 A_i 处开设工厂时从 A_i 至客户 B_j 的运量.

显然,有 $y_1 + y_2 + y_3 = 2$.

若在 A_i 处不开设工厂,则 A_i 至 B_j 的运量应为零;若在 A_i 处开设工厂,则每个月 A_i 至 B_j 的运量之和不超过 A_i 处开设工厂的产量 a_i ,写成约束条件就成为

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} \leq a_i y_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

又客户 B_j 的需求量必须得到满足,所以有

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = b_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

每月的费用 f 为

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^3 d_i y_i.$$

则本问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \min f &= 4x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} \\ &\quad + 6x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 100y_1 + 90y_2 + 120y_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 70y_1, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80y_2, \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 90y_3, \\ &x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40, \\ &x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60, \\ &x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45, \\ &y_1 + y_2 + y_3 = 2, \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ &y_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

例 5-8 (排序问题) 用编号为 1[#]、2[#]、3[#]、4[#] 的 4 种机床生产 3 种产品 1[#]、2[#]、3[#]. 这 3 种产品的工艺路线及工序加工时间如表 5-3 所示. 一台机床一次只能加工一个产品. 现要求 2[#] 产品从开始加工到完成, 经历时间不得超过 d 小时. 问如何确定各种产品在机床上的加工顺序, 使在最短时间内制成全部产品. 试建立整数规划模型.

表 5-3

工 艺 路 线		$j^{\#}$ 机床加工时间(小时)			
		1	2	3	4
$i^{\#}$ 产品	1	$a_1 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_4$			
	2	$b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_4$			
	3	$c_2 \longrightarrow c_3$			

解 设 x_{ij} 为 $i^{\#}$ 产品在机床 $j^{\#}$ 上开始加工的时间(从零基准点算起,以小时计).

第一组约束条件为要求 3 种产品都应按照工艺路线的规定顺序来进行加工. 例如对 $1^{\#}$ 产品来说,首先是在 $1^{\#}$ 机床上加工,然后依次在 $3^{\#}$ 和 $4^{\#}$ 机床上加工,因此有

$$x_{11} + a_1 \leq x_{13}, x_{13} + a_3 \leq x_{14},$$

类似地,对 $2^{\#}$ 和 $3^{\#}$ 产品,有

$$x_{21} + b_1 \leq x_{22}, x_{22} + b_2 \leq x_{24} \text{ 和 } x_{32} + c_2 \leq x_{33}.$$

第二组约束条件为一族选择性的约束条件,以保证一台机床一次只能加工一个产品. 例如,对于机床 $1^{\#}$ 来说,或者 $1^{\#}$ 产品先于 $2^{\#}$ 产品加工,或者 $2^{\#}$ 产品先于 $1^{\#}$ 产品加工,即应有

$$\text{或 } x_{11} + a_1 \leq x_{21}, \text{或 } x_{21} + b_1 \leq x_{11}.$$

引进 0-1 变量 y_1 , 上述选择性约束条件就成为

$$x_{11} + a_1 \leq x_{21} + My_1, x_{21} + b_1 \leq x_{11} + M(1 - y_1).$$

类似地,借助于 0-1 变量 y_2, y_3 和 y_4 , 对 $2^{\#}, 3^{\#}$ 和 $4^{\#}$ 机床有

$$\begin{aligned} x_{22} + b_2 &\leq x_{32} + My_2, \\ x_{32} + c_2 &\leq x_{22} + M(1 - y_2), \\ x_{13} + a_3 &\leq x_{33} + My_3, \\ x_{33} + c_3 &\leq x_{13} + M(1 - y_3), \\ x_{14} + a_4 &\leq x_{24} + My_4, \\ x_{24} + b_4 &\leq x_{14} + M(1 - y_4), \end{aligned}$$

其中 $y_j = 0, 1, j = 2, 3, 4$.

$2^{\#}$ 产品从 $1^{\#}$ 机床对它开始加工(在 x_{21} 时刻)到 $4^{\#}$ 机床将其加工完毕(在 $x_{24} + b_4$ 时刻),其经历时间有约束:

$$x_{24} + b_4 - x_{21} \leq d.$$

3 个产品都完工的时间 y 为

$$y = \max\{x_{14} + a_4, x_{24} + b_4, x_{33} + c_3\},$$

我们将它化为线性约束条件

$$y \geq x_{14} + a_4; \quad y \geq x_{24} + b_4; \quad y \geq x_{33} + c_3.$$

综上所述,得整数规划模型如下:

$$\begin{aligned} \min f &= y; \\ \text{s. t.} \quad &x_{11} + a_1 \leq x_{13}, \\ &x_{13} + a_3 \leq x_{14}, \\ &x_{21} + b_1 \leq x_{22}, \\ &x_{22} + b_2 \leq x_{24}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{32} + c_2 &\leq x_{33}, \\
 x_{11} + a_1 &\leq x_{21} + My_1, \\
 x_{21} + b_1 &\leq x_{11} + M(1 - y_1), \\
 x_{22} + b_2 &\leq x_{32} + My_2, \\
 x_{32} + c_2 &\leq x_{22} + M(1 - y_2), \\
 x_{13} + a_3 &\leq x_{33} + My_3, \\
 x_{33} + c_3 &\leq x_{13} + M(1 - y_3), \\
 x_{14} + a_4 &\leq x_{24} + My_4, \\
 x_{24} + b_4 &\leq x_{14} + M(1 - y_4), \\
 x_{24} + b_4 - x_{21} &\leq d, \\
 y &\geq x_{14} + a_4, \\
 y &\geq x_{24} + b_4, \\
 y &\geq x_{33} + c_3, \\
 y_j &= 0, 1, \quad j = 1, \dots, 4 \\
 y &\geq 0, \quad \text{诸 } x_{ij} \geq 0.
 \end{aligned}$$

例 5-9 (利润分段线性问题) 某厂生产甲、乙两种产品,需经过金工和装配两个车间加工,有关数据如表 5-4 所示. 产品乙无论生产批量大小,每件产品生产成本总为 400 元. 试根据产品甲生产成本的下列两种情况分别建立整数规划模型:

表 5-4

工时定额(小时/件)		产 品		总有效工时
		甲	乙	
车间	金工	4	3	480
	装配	2	5	500
售价(元/件)		300	520	

(1) 产品甲的生产成本分段线性:第 1 件至第 30 件,每件成本为 200 元;第 31 件至第 70 件,每件成本为 190 元;从第 71 件开始,每件成本为 195 元.

(2) 产品甲的产量不超过 40 件时,每件成本为 200 元,但若超过 40 件,则甲的全部产品每件成本都为 195 元.

解 设甲、乙产品的生产数量分别为 x_1, x_2 件. 由表 5-4 知产品甲至多生产 120 件.

(1) 令 $x_1 = x_3 + x_4 + x_5$, 其中 x_3, x_4 和 x_5 满足下列约束条件:

当 $0 \leq x_1 \leq 30$ 时,有

$$0 \leq x_3 \leq 30, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0; \quad (5-5)$$

当 $30 \leq x_1 \leq 70$ 时,有

$$x_3 = 30, \quad 0 \leq x_4 \leq 40, \quad x_5 = 0; \quad (5-6)$$

当 $70 \leq x_1 \leq 120$ 时,有

$$x_3 = 30, \quad x_4 = 40, \quad 0 \leq x_5 \leq 50. \quad (5-7)$$

此时,产品甲所获利润为 $100x_3 + 110x_4 + 105x_5$,产品乙所获利润为 $120x_2$.

引进 0-1 变量 y_1 和 y_2 将上述约束条件(5-5)、(5-6)和(5-7)化成下列约束条件:

$$30y_1 \leq x_3 \leq 30, \quad 40y_2 \leq x_4 \leq 40y_1, \quad 0 \leq x_5 \leq 50y_2.$$

这时,如果 $y_1 = 0$,则必有 $y_2 = 0$,从而约束(5-5)成立;如果 $y_1 = 1, y_2 = 0$,则有约束(5-6)成立;如果 $y_1 = 1, y_2 = 1$,则有约束(5-7)成立;而 $y_1 = 0, y_2 = 1$ 这是不可行的.

我们即得本问题的整数规划模型:

$$\begin{aligned} \max f &= 100x_3 + 110x_4 + 105x_5 + 120x_2; \\ \text{s. t.} \quad &4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 3x_2 \leq 480, \\ &2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 5x_2 \leq 500, \\ &30y_1 \leq x_3 \leq 30, \\ &40y_2 \leq x_4 \leq 40y_1, \\ &0 \leq x_5 \leq 50y_2, \\ &x_j \geq 0, \text{ 整数}, \quad j = 2, 3, 4, 5, \\ &y_j = 0, 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

(2) 令 $x_1 = x_3 + x_4$,其中 x_3, x_4 满足下列约束条件:

$$\text{当 } 0 \leq x_1 \leq 40, \text{ 有 } 0 \leq x_3 \leq 40, x_4 = 0; \quad (5-8)$$

$$\text{当 } 40 \leq x_1 \leq 120, \text{ 有 } x_3 = 40, 0 \leq x_4 \leq 80. \quad (5-9)$$

我们引进 0-1 变量 y 将上列约束条件化成:

$$40y \leq x_3 \leq 40, \quad 0 \leq x_4 \leq 80y.$$

此时,如果 $y = 0$,则约束(5-8)成立,产品甲的利润为

$$(300 - 200)x_1 = 100x_3;$$

如果 $y = 1$,则约束(5-9)成立,产品甲的利润为

$$105x_3 + 105x_4 = 100x_3 + 105x_4 + 5x_3 = 100x_3 + 105x_4 + 200.$$

综合这两种情况,可知产品甲的利润为

$$100x_3 + 105x_4 + 200y.$$

我们即得整数规划模型如下:

$$\begin{aligned} \max f &= 100x_3 + 105x_4 + 200y + 120x_2; \\ \text{s. t.} \quad &4x_3 + 4x_4 + 3x_2 \leq 480, \\ &2x_3 + 2x_4 + 5x_2 \leq 500, \\ &40y \leq x_3 \leq 40, \\ &0 \leq x_4 \leq 80y, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 2, 3, 4, \\ &y = 0, 1. \end{aligned}$$

例 5-10 (可靠性问题) 某种仪表由 3 个部件串联而成. $j^{\#}$ 部件的可靠性由所组装的 $j^{\#}$ 元件个数决定, 由表 5-5 给出; 每个 $j^{\#}$ 元件的重量和成本由表 5-6 给出.

表 5-5

元件个数 i	$j^{\#}$ 部件可靠性		
	1 [#]	2 [#]	3 [#]
1	0.6	0.75	0.7
2	0.75	0.85	0.8
3	0.8	0.9	0.85

表 5-6

元 件		成本	重量
$j^{\#}$	1 [#]	30	3
	2 [#]	40	4
	3 [#]	50	6

在设计过程中, 该仪表对 3 个部件的总重量限制为 25, 总成本限制为 240, 问 $j^{\#}$ 部件如何选择 $j^{\#}$ 元件的个数, 使仪表的可靠性最大?

解 设 $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } j^{\#} \text{ 部件选择 } i \text{ 个 } j^{\#} \text{ 元件,} \\ 0, & \text{否.} \end{cases}$

考虑到 $j^{\#}$ 部件或选 1 个, 或选 2 个, 或选 3 个 $j^{\#}$ 元件, 故有约束条件:

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

$j^{\#}$ 部件选择 $j^{\#}$ 元件的个数为 $\sum_{i=1}^3 ix_{ij}$, 故有成本约束和重量约束为

$$\begin{aligned} 30 \sum_{i=1}^3 ix_{i1} + 40 \sum_{i=1}^3 ix_{i2} + 50 \sum_{i=1}^3 ix_{i3} &\leq 240, \\ 3 \sum_{i=1}^3 ix_{i1} + 4 \sum_{i=1}^3 ix_{i2} + 6 \sum_{i=1}^3 ix_{i3} &\leq 25, \end{aligned}$$

$j^{\#}$ 部件的可靠性 R_j 为

$$\begin{aligned} R_1 &= (0.6)^{x_{11}} (0.75)^{x_{21}} (0.8)^{x_{31}}, \\ R_2 &= (0.75)^{x_{12}} (0.85)^{x_{22}} (0.9)^{x_{32}}, \\ R_3 &= (0.7)^{x_{13}} (0.8)^{x_{23}} (0.85)^{x_{33}}. \end{aligned}$$

仪表的可靠性 $R = R_1 R_2 R_3$, 它为非线性函数, 取对数后即可得到一个线性函数, 从而, 目标函数为

$$\begin{aligned} f &= x_{11} \log 0.6 + x_{21} \log 0.75 + x_{31} \log 0.8 + x_{12} \log 0.75 \\ &\quad + x_{22} \log 0.85 + x_{32} \log 0.9 + x_{13} \log 0.7 + x_{23} \log 0.8 \\ &\quad + x_{33} \log 0.85. \end{aligned}$$

我们得到如下线性整数规划模型:

$$\begin{aligned} \max f &= x_{11} \log 0.6 + x_{21} \log 0.75 + x_{31} \log 0.8 + x_{12} \log 0.75 \\ &\quad + x_{22} \log 0.85 + x_{32} \log 0.9 + x_{13} \log 0.7 + x_{23} \log 0.8 \\ &\quad + x_{33} \log 0.85; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & \sum_{i=1}^3 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, \\ & 30 \sum_{i=1}^3 ix_{i1} + 40 \sum_{i=1}^3 ix_{i2} + 50 \sum_{i=1}^3 ix_{i3} \leq 240, \\ & 3 \sum_{i=1}^3 ix_{i1} + 4 \sum_{i=1}^3 ix_{i2} + 6 \sum_{i=1}^3 ix_{i3} \leq 25, \\ & x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

例 5-11 (装配线平衡问题) 若某工厂的产品的装配线由 6 道工序组成,各工序的加工时间及工序的前后顺序如表 5-7 所示.

若这条装配线设若干个工作站.被装配的产品在这些编了号的工作站上流水移动时,每个工作站都要完成一道或几道工序.假设每个工作站加工每个被装配的产品时至多耗时 10 分钟,问最少应设立几个工作站?每个工作站完成哪些工序?

解 显然,需要的工作站不会多于 4 个.这是因为由表 5-7 可以观察到一个解:工序 1, 2, 3 在一个站上完成,而工序 4、5 和 6 各在一个工作站上进行,此时只需 4 个工作站.

表 5-7

工序	加工时间(分)	紧前工序
1	3	
2	5	
3	2	2
4	6	1, 3
5	8	2
6	3	4

令

$$\begin{aligned} w_j &= \begin{cases} 1, & \text{在装配线上有工作站 } j, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, 4 \\ x_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{若工序 } i \text{ 在工作站 } j \text{ 上进行,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 6 \\ j = 1, \dots, 4. \end{matrix} \end{aligned}$$

因此,为使工作站数实现最少,目标函数为

$$\min f = w_1 + w_2 + w_3 + w_4.$$

接下来我们分析约束条件:

第一组约束条件:对工序 i 来说,它应恰在某一个工作站上完成,为此有

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = 1, \quad i = 1, \dots, 6;$$

第二组约束条件:对工作站 j 来说,在该站上完成的各道工序所需时间的总和不得超过 10 分钟,因此有

$$3x_{1j} + 5x_{2j} + 2x_{3j} + 6x_{4j} + 8x_{5j} + 3x_{6j} \leq 10, \quad j = 1, \dots, 4;$$

第三组约束条件:工作站 j 若设立,则在此站上完成的工序不会超过 6 道;若不设立,那么就不能将任何工序分派给该站(换句话说,若 $w_j = 0$,则所有的 $x_{ij} = 0$),从而有

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} + x_{6j} \leq 6w_j, \quad j = 1, \dots, 4;$$

最后我们来考虑关于各道工序前后顺序这组约束条件:首先考虑工序 2 应当在工序

3 之前完成这个要求. 若工序 3 在最后一个工作站 4 上完成, 那显然没有什么问题, 因为所有工序都要在此站前完成或就在此站上完成. 若工序 3 分配在工作站 3 上完成, 则工序 2 就不能分配在工作站 4 上完成, 而必须分配在工作站 1, 2 或 3 上完成, 由此可得:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq x_{33}.$$

它说明, 若 $x_{33} = 1$, 则 x_{21}, x_{22}, x_{23} 中必有一个变量取值为 1, 以保证工序 2 在工序 3 之前完成. 类似地, 若工序 3 分配在工作站 2 或 1 上完成, 则应分别有

$$x_{21} + x_{22} \geq x_{32}, \quad x_{21} \geq x_{31}.$$

同样地, 对于工序表(表 5-7)中列出的每个要求, 都有 3 个(比工作站数少 1)这样的约束条件:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq x_{43}, \quad x_{11} + x_{12} \geq x_{42}, \quad x_{11} \geq x_{41}; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\geq x_{43}, \quad x_{31} + x_{32} \geq x_{42}, \quad x_{31} \geq x_{41}; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\geq x_{53}, \quad x_{21} + x_{22} \geq x_{52}, \quad x_{21} \geq x_{51}; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\geq x_{63}, \quad x_{41} + x_{42} \geq x_{62}, \quad x_{41} \geq x_{61}; \end{aligned}$$

因此, 对于 6 道工序、4 个工作站、5 个工序顺序制约要求的装配线平衡问题, 我们建立的整数规划模型一共有 28 个变量及 29 个约束条件. 可以想见, 当一条装配线的工序个数、工作站数和工序顺序制约要求数很大时, 为它建立的整数规划模型将是极其庞大的.

例 5-12 (货物列车编组计划问题) 某铁路线路有 5 个货物列车编组站 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 . 编组站 A_i 发往前方各编组站 A_j 的车辆数 a_{ij} (或称为车流量) 已知, 如图 5-3 所示. 若始发站 A_i 至到达站 A_j 开行直达列车(按直达列车含义, 应有 $j \geq i + 2$), 在 A_i 站就要消耗一个列车集结时间 c_i 车小时(与车流量 a_{ij} 大小无关). 又设在 A_i 站中转改编一辆车辆所花费的时间为 t_i 小时. 现制订列车编组计划的最优方案, 以使车流集结和车辆改编的车小时总消耗达到最小. 试建立整数规划模型.

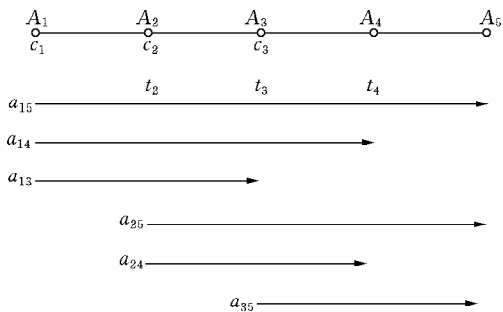


图 5-3

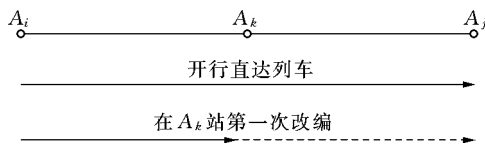


图 5-4

解 根据铁路实际情况, 相邻编组站之间的货物列车(称为直通列车)是一定开行的, 所以对于目标函数来说, 需开行的直通列车的集结时间之和是个常量, 在求模型的最优解时, 不妨把它们从目标函数 f 中略去.

由图 5-4 可知, 车流 a_{ij} 可开行直达列车到达 A_j 站 ($j \geq i + 2$); 也可先开往 A_k 站并

在 A_k 站第一次改编(到达 A_k 站后,如何继续开行,是否还有第二次改编,由 A_k 站决定.在 A_k 站改编的车流,应算作 A_k 站发出的车流).

令

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & A_i \text{ 站至 } A_j \text{ 站开行直达列车,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad j \geq i + 2.$$

又设 x_{ij}^k 为 A_i 站开往 A_j 站的车流在 A_k 站第一次改编的车数 ($i < k < j$). 于是,目标函数 f 为

$$\begin{aligned} f = & c_1(y_{13} + y_{14} + y_{15}) + c_2(y_{24} + y_{25}) + c_3 y_{35} \\ & + t_2(x_{13}^2 + x_{14}^2 + x_{15}^2) + t_3(x_{14}^3 + x_{15}^3 + x_{24}^3 + x_{25}^3) \\ & + t_4(x_{15}^4 + x_{25}^4 + x_{35}^4). \end{aligned}$$

下面我们来讨论有关的约束条件.

第一组约束条件:考虑在 A_1 站发出的车流.

若 A_1 站至 A_5 站开行直达列车,则必然包括车流 a_{15} 的全部;否则,根据客观条件,只能在 A_2 站、 A_3 站、 A_4 站之一第一次改编,因此有

$$x_{15}^2 + x_{15}^3 + x_{15}^4 + a_{15}y_{15} = a_{15}.$$

由于车流 a_{15} 仅可以在 A_2 、 A_3 和 A_4 中一个站第一次改编,因此,引进 3 个 0-1 变量 y_1, y_2 和 y_3 ,并给出下列约束条件:

$$\begin{cases} x_{15}^2 \leq My_1, x_{15}^3 \leq My_2, x_{15}^4 \leq My_3, \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 1, \\ y_j = 0, 1, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (5-10)$$

类似地,有

$$x_{14}^2 + x_{14}^3 + a_{14}y_{14} = a_{14} \quad (5-11)$$

$$\begin{cases} x_{14}^2 \leq My_4, x_{14}^3 \leq My_5, y_4 + y_5 \leq 1, \\ y_j = 0, 1, \quad j = 4, 5, \end{cases} \quad (5-12)$$

$$x_{13}^2 + a_{13}y_{13} = a_{13}. \quad (5-13)$$

第二组约束条件:考虑 A_2 站或 A_3 站发出的车流.

先讨论 A_2 站车流的运行方案.此时, A_2 站要考虑 A_1 站发出的车流若在本站改编而产生的影响.换言之,当 $x_{15}^2 \neq 0$,则 $x_{15}^2 + a_{25}$ 视作 A_2 站发往 A_5 站的车流.因此,有

$$x_{25}^3 + x_{25}^4 + (x_{15}^2 + a_{25})y_{25} = x_{15}^2 + a_{25}. \quad (5-14)$$

$$\begin{cases} x_{25}^3 \leq My_6, x_{25}^4 \leq My_7, y_6 + y_7 \leq 1, \\ y_j = 0, 1, \quad j = 6, 7. \end{cases} \quad (5-15)$$

我们应注意到,式(5-14)是非线性约束条件.不难证明,对模型的最优解来说,它与下列线性约束条件是等价的:

$$x_{25}^3 + x_{25}^4 + (a_{15} + a_{25})y_{25} \geq x_{15}^2 + a_{25}. \quad (5-16)$$

这是因为

① 由于 $a_{15} \geq x_{15}^2$, 所以式(5-14)成立时, 式(5-16)一定成立;

② 反之, 若式(5-16)成立, 当 $y_{25} = 0$, 则

$$x_{25}^3 + x_{25}^4 \geq x_{15}^2 + a_{25}.$$

由于我们的问题是求 $\min f$, 且目标函数 f 中变量的系数都大于零, 所以对最优解来说, 必定有:

$$x_{25}^3 + x_{25}^4 = x_{15}^2 + a_{25},$$

即式(5-14)成立. 当 $y_{25} = 1$, 因为 $a_{15} + a_{25} \geq x_{15}^2 + a_{25}$ 必定成立, 从而对于最优解来说, 必定有:

$$x_{25}^3 + x_{25}^4 = 0,$$

即式(5-14)成立.

类似地, A_2 站至 A_4 站的车流有约束:

$$x_{24}^3 + (x_{14}^2 + a_{24})y_{24} = x_{14}^2 + a_{24};$$

A_3 站至 A_5 站的车流有约束:

$$x_{35}^4 + (x_{15}^2 + x_{25}^3 + a_{35})y_{35} = x_{15}^3 + x_{25}^3 + a_{35}.$$

我们用线性约束条件来取代它们:

$$\begin{aligned} x_{24}^3 + (a_{14} + a_{24})y_{24} &\geq x_{14}^2 + a_{24}, \\ x_{35}^4 + (a_{15} + a_{25} + a_{35})y_{35} &\geq x_{15}^3 + x_{25}^2 + a_{35}. \end{aligned}$$

第三组约束条件:

显然, 如果 $x_{15}^4 > 0$, 则 A_1 站至 A_4 站一定开直达列车, 即 $y_{14} = 1$. 写成约束条件为

$$x_{15}^4 \leq My_{14}.$$

类似地, 如果 $x_{15}^3 > 0$ 或 $x_{14}^3 > 0$, 则应有 $y_{13} = 1$, 我们即得约束条件

$$x_{15}^3 + x_{14}^3 \leq My_{13}.$$

如果 $x_{25}^4 > 0$, 则应有 $y_{24} = 1$, 写成约束条件为

$$x_{25}^4 \leq My_{24}.$$

综合上述讨论, 本问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \min f &= c_1(y_{13} + y_{14} + y_{15}) + c_2(y_{24} + y_{25}) + c_3 y_{35} \\ &\quad + t_2(x_{13}^2 + x_{14}^2 + x_{15}^2) + t_3(x_{14}^3 + x_{15}^3 + x_{24}^3 + x_{25}^3) \\ &\quad + t_4(x_{15}^4 + x_{25}^4 + x_{35}^4); \\ \text{s. t. } &x_{15}^2 + x_{15}^3 + x_{15}^4 + a_{15}y_{15} = a_{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{14}^2 + x_{14}^3 + a_{14}y_{14} &= a_{14}, \\
 x_{13}^2 + a_{13}y_{13} &= a_{13}, \\
 x_{25}^3 + x_{25}^4 + (a_{15} + a_{25})y_{25} &\geq x_{15}^2 + a_{25}, \\
 x_{24}^3 + (a_{14} + a_{24})y_{24} &\geq x_{14}^2 + a_{24}, \\
 x_{35}^4 + (a_{15} + a_{25} + a_{35})y_{35} &\geq x_{15}^3 + x_{25}^3 + a_{35}, \\
 x_{15}^2 &\leq My_1, \quad x_{15}^3 \leq My_2, \quad x_{15}^4 \leq My_3, \\
 y_1 + y_2 + y_3 &\leq 1, \\
 x_{14}^2 &\leq My_4, \quad x_{14}^3 \leq My_5, \\
 y_4 + y_5 &\leq 1, \\
 x_{25}^3 &\leq My_6, \quad x_{25}^4 \leq My_7, \\
 y_6 + y_7 &\leq 1, \\
 x_{15}^4 &\leq My_{14}, \\
 x_{15}^3 + x_{14}^3 &\leq My_{13}, \\
 x_{25}^4 &\leq My_{25}, \\
 x_{ij}^k &\geq 0, \text{ 整数}, \quad i < k < j, \quad i = 1, 2, 3; j = 3, 4, 5, \\
 y_{ij} &= 0, 1, \quad i = 1, 2, 3; j = 3, 4, 5; j \geq i + 2, \\
 y_j &= 0, 1, \quad j = 1, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

在这里,我们可以指出:若把上述建立的模型中的3组约束条件(5-10)、(5-12)和(5-15)删去,从数学上可以证明,所得的新模型在最优解上与原有模型是等价的.

一般来说,整数规划可以分成下列几种类型:

(1) 纯整数规划,简记为(AIP):

$$\min\{C^T X \mid AX = b, X \geq 0, X \text{ 各分量为整数}\};$$

(2) 混合整数规划,简记为(MIP):

$$\min\{C^T X \mid AX = b, X \geq 0, x_j \text{ 为整数 } j \in N_1\}$$

其中 $N_1 \subset \{1, \dots, n\}$;

(3) 0-1 规划:(LP)中 X 的分量或为 0 或为 1,简记为(BIP).

在上述模型中, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, $C = (c_1, \dots, c_n)^T$, 且 a_{ij}, b_i, c_j 均为整数 ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

§ 5.2 纯整数规划的割平面法

5.2.1 割平面法的几何特征

记纯整数规划(AIP)的可行域为 K_{AIP} . 若将(AIP)中要求变量为整数这个约束去掉,则得到相应的线性规划(LP),记(LP)的可行域为 K_{LP} .

割平面法实质上仍然是用解线性规划的方法来求解整数规划问题. 其基本思想是:

我们对 (LP) 求解. 若 (LP) 的最优解 X^* 是一个整数解(整数向量), 那么 X^* 当然是 (AIP) 的最优解; 若 X^* 不是整数解, 我们设法对原线性规划 (LP) 增加一个线性约束条件(称它为割平面), 把包括 X^* 在内的不含整数解的一部分集合从 (LP) 的可行域 K_{LP} 中切割出去, 再求增加了这个约束条件后新的线性规划 (LP_1) 的最优解 X^{**} . 如果 X^{**} 是整数解, 则 X^{**} 就是 (AIP) 的最优解, 否则再次增加线性约束条件而重复上述过程.

下面我们来看一个实例.

例 5-13 求解下列纯整数规划:

$$\begin{aligned} \min f &= -7x_1 - 9x_2; \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 7x_1 + x_2 \leq 35, \\ & x_j \geq 0, \text{ 整数}, j = 1, 2. \end{aligned}$$

解 我们用图解法在 x_1Ox_2 直角坐标平面内求解相应的线性规划 (P) . 由图 5-5 可知, (P) 的最优解 $X^1 = (x_1, x_2)^T = \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)^T$, 它不是整数解.

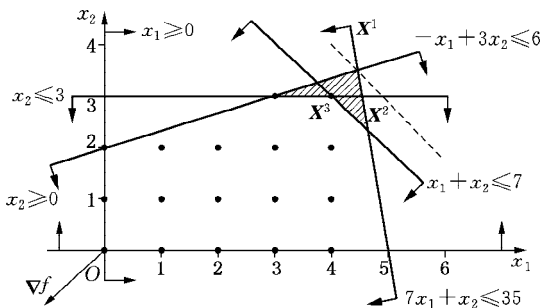


图 5-5

我们对 (P) 增加约束条件, 例如 $x_2 \leq 3$, 新的线性规划 (P_1) 的最优解 $X^2 = \left(\frac{32}{7}, 3\right)^T$, 它仍然不是整数解. 我们对 (P_1) 再设法增加新的约束条件, 例如 $x_1 + x_2 \leq 7$, 得新的线性规划 (P_2) . (P_2) 的最优解 X^3 为 $(4, 3)^T$, 它是整数解, 所以它就是整数规划的最优解了.

5.2.2 柯莫利割

割平面法的关键在于如何寻找适当的切割约束条件, 下面我们来讨论这个问题.

我们引进几个记号:

设 x 为一个实数, 则 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数; $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数;
 $x = x - \lfloor x \rfloor$ (有 $x \geq 0$).

例如, 当 $x = \frac{40}{7}$ 时 $\lfloor x \rfloor = 5$; $\lceil x \rceil = 6$; $x = \frac{5}{7}$. 当 $x = -\frac{40}{7}$ 时 $\lfloor x \rfloor = -6$; $\lceil x \rceil =$

$$-5; x = \frac{2}{7}.$$

设 B 为 (LP) 的一个基, X 为 (AIP) 的一个可行解. 由于 $K_{AIP} \subset K_{LP}$, 所以 X 也是 (LP) 的一个可行解, 因此, X 应满足单纯形表 $T(B)$ 所表示的方程组:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in I_D} y_{ij} x_j = \bar{b}_i; \quad i = 1, \dots, m. \quad (5-17)$$

因为 $X \geq 0$, $\lfloor y_{ij} \rfloor \leq y_{ij}$, 所以

$$x_{B_i} + \sum_{j \in I_D} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j \leq \bar{b}_i. \quad (5-18)$$

由于 $X \in K_{AIP}$, 因而 X 的每个分量均为整数, 故不等式(5-18)的左端是一个整数, 从而应有

$$x_{B_i} + \sum_{j \in I_D} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor. \quad (5-19)$$

将方程(5-17)减去不等式(5-19), 可得:

$$\sum_{j \in I_D} (y_{ij} - \lfloor y_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor, \quad i = 1, \dots, m,$$

即

$$-\sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j \leq -\bar{b}_k, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5-20)$$

该条件(5-20)是 (AIP) 任何一个可行解 X 必须满足的条件, 我们称它为柯莫利(Gomory)割.

假设 B 是 (LP) 的最优基, X^* 是 (LP) 关于基 B 的基本最优解, X^* 不是整数解. 这时, $x_j^* = 0 (j \in I_D)$, $x_{B_i}^* = \bar{b}_i (i = 1, \dots, m)$, 且至少有一个 $\bar{b}_k (1 \leq k \leq m)$ 不是整数, 即有 $\bar{b}_k > 0$.

此时, 对不等式(5-20), 取 $i = k$, 其左端 $-\sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j^* = 0$, 而右端为 $-\bar{b}_k < 0$, 因此不等式(5-20)对 X^* 来说是不能成立的. 换言之, X^* 一定不满足柯莫利割:

$$-\sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j \leq -\bar{b}_k. \quad (5-21)$$

这个柯莫利割可以作为我们所需要的切割约束条件, 它把 X^* 从 K_{LP} 中切割出去.

假设 (LP) 关于基 B 和 X^* 的最优表 $T(B)$ 如表 5-8 所示.

我们对柯莫利割(5-21)引进松弛变量 x_{n+1} , 得方程:

$$-\sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j + x_{n+1} = -\bar{b}_k. \quad (5-22)$$

设对 (LP) 增加柯莫利割(5-22)后所得的新线性规划为 (LP_1) , 我们取 (LP_1) 的初始指标集 $I_{\bar{B}} = I_B \cup \{x_{n+1}\}$ (x_{n+1} 作为第 $m+1$ 个基本变量, 初始基为 $\bar{B}$), 在单纯形表 $T(B)$ 表 5-8 中添加 x_{n+1} 列和 x_{n+1} 行, 则我们即得 (LP_1) 的初始单纯形表 $T(\bar{B})$ 如表 5-9

表 5-8

X_B	...	x_{B_i}	...	x_j	...	$\bar{b}$
X_B	...	e_i	...	y^j	...	$\bar{b}$
r	...	0	...	r_j	...	$-f_0$

(由于 $c_{n+1} = 0$, 因此 r 所在行信息未变)所示.

表 5-9

$X_{\bar{B}}$	$\cdots$	x_{B_i}	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_{n+1}	$\bar{b}'$
X_B	$\cdots$	e_i	$\cdots$	y^j	$\cdots$	0	$\bar{b}$
x_{n+1}	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\langle y_{kj} \rangle$	$\cdots$	1	$-\langle \bar{b}_k \rangle$
r	$\cdots$	0	$\cdots$	r_j	$\cdots$	0	$-f_o$

对表 5-9 ,我们用对偶单纯形法继续求解.

例 5-14 用割平面法求解例 5-13.

解 引进松弛变量 x_3 和 x_4 ,将问题化成标准型 :

$$\begin{aligned} \min f &= -7x_1 - 9x_2 ; \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 , \\ & 7x_1 + x_2 + x_4 = 35 , \\ & x_j \geqslant 0 , \text{整数} , \quad j = 1 , \dots , 4. \end{aligned}$$

因为松弛变量

$$x_3 = 6 + x_1 - 3x_2 , \quad (5-23)$$

$$x_4 = 35 - 7x_1 - x_2 , \quad (5-24)$$

所以当 x_1 和 x_2 为整数时 , x_3 和 x_4 也一定是整数.

应用单纯形法求解相应的线性规划(LP) ,得最优表如表 5-10.

表 5-10

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
r	0	0	28/11	15/11	63

在表 5-10 中 , $\bar{b}_1 = \frac{1}{2}$,故对于柯莫利割(5-21) ,取 $k = 1$,此时 , $y_{13} = \frac{7}{22}$,

$y_{14} = \frac{1}{22}$,得相应的柯莫利割如下 :

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 \leqslant -\frac{1}{2}. \quad (5-25)$$

引进松弛变量 x_5 ,则得

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}. \quad (5-26)$$

由表 5-10 和表 5-9 ,我们得表 5-11.

表 5-11

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	0	1	$7/22$	$1/22$	0	$7/2$
x_1	1	0	$-1/22$	$3/22$	0	$9/2$
x_5	0	0	$(-7/22)$	$-1/22$	1	$-1/2$
r	0	0	$28/11$	$15/11$	0	63

对表 5-11 ,我们用对偶单纯形法转轴 ,得表 5-12.

表 5-12

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	$1/7$	$-1/7$	$32/7$
x_3	0	0	1	$1/7$	$-22/7$	$11/7$
r	0	0	0	1	8	59

对表 5-12 ,取 $k = 3$,得柯莫利割 :

$$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 \leqslant -\frac{4}{7}.$$

引进松弛变量 x_6 ,得

$$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 + x_6 = -\frac{4}{7}. \quad (5-27)$$

对表 5-12 增加柯莫利割(5-27) ,得表 5-13.

表 5-13

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$1/7$	$-1/7$	0	$32/7$
x_3	0	0	1	$1/7$	$-22/7$	0	$11/7$
x_6	0	0	0	$(-1/7)$	$-6/7$	1	$-4/7$
r	0	0	0	1	8	0	59

用对偶单纯形法对表 5-13 进行转轴 ,得表 5-14.

表 5-14

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4
r	0	0	0	0	2	7	55

由表 5-14 可知,我们已得本问题的最优解 $X^* = (x_1, x_2)^T = (4, 3)^T$, 最优值 $f^* = -55$.

如果我们将式(5-23)和式(5-24)代入式(5-26)中,经过整理得

$$x_2 + x_5 = 3,$$

于是

$$x_5 = 3 - x_2. \quad (5-28)$$

将式(5-24)和式(5-28)代入式(5-27)中,经过整理得:

$$x_1 + x_2 + x_6 = 7,$$

即

$$x_6 = 7 - x_1 - x_2.$$

由于 $x_5 \geq 0$ 和 $x_6 \geq 0$, 我们便得到例 5-13 所考虑的两个割平面:

$$x_2 \leq 3 \text{ 和 } x_1 + x_2 \leq 7.$$

5.2.3 柯莫利割平面法

现假设(AIP)相应的(LP)的可行域 K_{LP} 非空有界,我们给出柯莫利割平面法的算法步骤如下:

① 用单纯形算法求解(LP),得基本最优解 X^* , B 为最优基, $T(B)$ 为最优表.

② X^* 是否为整数解?

若是,则(AIP)中变量在 X^* 中的相应数值即为(AIP)的最优解,算法终止.

若否,则取 $\bar{b}_k = \max\{\bar{b}_i \mid 1 \leq i \leq m\}$,把柯莫利割 $-\sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j \leq -\bar{b}_k$ 作为

新的约束条件加入(LP)得到新的(LP),按表 5-9 从 $T(B)$ 得到 $T(\bar{B})$,把 $T(\bar{B})$ 视作新的 $T(B)$.

③ 从 $T(B)$ 出发,应用对偶单纯形法求解(LP),得最优解 X^* 、最优基 B 和最优表 $T(B)$,转步骤②.

按此算法,自然会产生这样的问题:随着柯莫利割的序贯增加,单纯形表会越来越大,基本变量个数会越来越多.此外,也会出现多个基本变量是柯莫利割松弛变量的情况.然而,这种情况完全可以避免.在理论上已经证明,对上述算法我们可作如下补充:在步骤③应用对偶单纯形法求解(LP)的过程中,如果发现转轴后,先前附加在某个柯莫利割的松弛变量 x' 再次成为基本变量,则可以从单纯形表中删去 x' 相应的行和列.被 x' 附加的柯莫利割也从切割可行域 K_{LP} 的约束条件中删去.这样处理后,迭代过程中的单纯形表至多含有 $n+1$ 个基本变量(原问题的 n 个决策变量和一个柯莫利割的松弛变量),切割(LP)的可行域 K_{LP} 的柯莫利割至多 $n+1-m$ 个.

例 5-15 求解下列(AIP):

$$\begin{aligned} \min f &= -2x_1 - 5x_2; \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ & 2x_1 + 8x_2 + x_4 = 31, \\ & x_j \geq 0, \text{ 整数}, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

解 (AIP)相应的线性规划(LP)的最优单纯形表如表 5-15 所示.

现在 $\bar{b}_1 = \frac{13}{18}$, $\bar{b}_2 = \frac{4}{9}$, 取 $k = 1$, 增加的柯莫利割为

$$-\frac{4}{9}x_3 - \frac{1}{18}x_4 \leq -\frac{13}{18},$$

得单纯形表如表 5-16 所示.

表 5-15

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	0	4/9	1/18	103/18
x_2	0	1	-1/9	1/9	22/9
r	0	0	1/3	2/3	71/3

表 5-16

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	4/9	1/18	0	103/18
x_2	0	1	-1/9	1/9	0	22/9
x_5	0	0	(-4/9)	-1/18	1	-13/18
r	0	0	1/3	2/3	0	71/3

对表 5-16, 应用对偶单纯形法进行转轴得表 5-17. 对表 5-17, 即 $k = 3$, 增加的柯莫利割为

$$-\frac{1}{8}x_4 - \frac{3}{4}x_5 \leq -\frac{5}{8},$$

得单纯形表如表 5-18 所示.

表 5-17

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	1	5
x_2	0	1	0	1/8	-1/4	21/8
x_3	0	0	1	1/8	-9/4	13/8
r	0	0	0	5/8	3/4	185/8

表 5-18

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	1	0	5
x_2	0	1	0	1/8	-1/4	0	21/8
x_3	0	0	1	1/8	-9/4	0	13/8
x_6	0	0	0	-1/8	(-3/4)	1	-5/8
r	0	0	0	5/8	3/4	0	185/8

将表 5-18 转轴得表 5-19. 我们发现, 关于第一个柯莫利割 $-\frac{4}{9}x_3 - \frac{1}{18}x_4 \leq -\frac{13}{18}$ 的松弛变量 x_5 再次在表 5-19 中成为基本变量, 故这时可以从表 5-19 中删去 x_5 相应的行和列(柯莫利割 $-\frac{4}{9}x_3 - \frac{1}{18}x_4 \leq -\frac{13}{18}$ 也被删去), 得表 5-20.

表 5-19

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	-1/6	0	4/3	25/6
x_2	0	1	0	1/6	0	-1/3	17/6
x_3	0	0	1	1/2	0	-3	7/2
x_5	0	0	0	1/6	1	-4/3	5/6
r	0	0	0	1/2	0	1	45/2

表 5-20

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	-1/6	4/3	25/6
x_2	0	1	0	1/6	-1/3	17/6
x_3	0	0	1	1/2	-3	7/2
r	0	0	0	1/2	1	45/2

对于表 5-20 ,取 $k = 2$,增加的柯莫利割为

$$-\frac{1}{6}x_4 - \frac{2}{3}x_6 \leq -\frac{5}{6} ,$$

得单纯形表如表 5-21 所示. 对表 5-21 进行转轴得表 5-22.

表 5-21

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	-1/6	4/3	0	25/6
x_2	0	1	0	1/6	-1/3	0	17/6
x_3	0	0	1	1/2	-3	0	7/2
x_7	0	0	0	-1/6	(-2/3)	1	-5/6
r	0	0	0	1/2	1	0	45/2

表 5-22

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	-1/2	0	2	5/2
x_2	0	1	0	1/4	0	-1/2	13/4
x_3	0	0	1	5/4	0	-9/2	29/4
x_6	0	0	0	1/4	1	-3/2	5/4
r	0	0	0	1/4	0	3/2	85/4

在表 5-22 中 ,柯莫利割 $-\frac{1}{8}x_4 - \frac{3}{4}x_5 \leq -\frac{5}{8}$ 的松弛变量 x_6 再次成为基本变量. 故可对表 5-22 删去 x_6 相应的行和列 ,并取 $k = 1$,增加柯莫利割

$$-\frac{1}{2}x_4 \leq -\frac{1}{2} ,$$

得单纯形表如表 5-23. 对表 5-23 进行转轴 ,得表 5-24.

表 5-23

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	x_8	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	-1/2	2	0	5/2
x_2	0	1	0	1/4	-1/2	0	13/4
x_3	0	0	1	5/4	-9/2	0	29/4
x_8	0	0	0	(-1/2)	0	1	-1/2
r	0	0	0	1/4	3/2	0	85/4

表 5-24

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	x_8	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	2	-1	3
x_2	0	1	0	0	-1/2	1/2	3
x_3	0	0	1	0	-9/2	5/2	6
x_4	0	0	0	1	0	-2	1
r	0	0	0	0	3/2	1/2	21

可见 ,已得(AIP)的最优解 $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (3, 3, 6, 1)^T$,最优值 $f^* = -21$.

从数学上我们可以严格地证明 ,使用割平面法对 K_{LP} 经有限次切割后必定能求到(ATP)的最优解. 但是 ,经验证明 ,如果不考虑(AIP)问题的大小 ,是不能使用割平面法来解(AIP)的. 甚至有些相当小的(AIP)问题在应用割平面法求解时 ,其收敛速度都相当慢. 某些例题向我们表明 ,约束条件顺序的随意更改都会大大地影响收敛速度. 所以一般认为 ,不能用割平面法单独有效地求解(AIP). 但是 ,若将割平面法和后面介绍的分支定界法配合使用 ,一般说来 ,能收到比较好的效果.

* § 5.3 混合整数规划的割平面法

给定一个混合整数规划(MIP):

$$\min\{C^T X \mid AX = b, X \geq 0 \text{ 当 } j \in N_1, x_j \text{ 为整数}\},$$

其中 $N_1 \subset \{1, \dots, n\}$. 记指标集 $N_2 = \{1, \dots, n\} - N_1$, (MIP) 的可行域记为 K_{MIP} .

设 B 是 (MIP) 相应的线性规划 (LP) 的一个基, X 是 (MIP) 的一个可行解, $B_k \in N_1$, 则

$$x_{B_k} = \bar{b}_k - \sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j \quad (5-29)$$

为非负整数. 令指标集

$$I_{D_1} = I_D \cap N_1, \quad I_{D_2} = I_D \cap N_2,$$

从而, 式(5-29)可写成下列形式:

$$x_{B_k} = \lfloor \bar{b}_k \rfloor + \bar{b}_k - \sum_{j \in I_{D_1}} (\lfloor y_{kj} \rfloor + y_{kj}) x_j - \sum_{j \in I_{D_2}} y_{kj} x_j,$$

移项后可得

$$\lfloor \bar{b}_k \rfloor - x_{B_k} - \sum_{j \in I_{D_1}} \lfloor y_{kj} \rfloor x_j = \sum_{j \in I_{D_1}} y_{kj} x_j + \sum_{j \in I_{D_2}} y_{kj} x_j - \bar{b}_k. \quad (5-30)$$

又记指标集

$$\begin{aligned} E^+ &= \{j \mid j \in I_{D_1}, \bar{b}_k - y_{kj} \geq 0\}, \\ E^- &= \{j \mid j \in I_{D_1}, \bar{b}_k - y_{kj} < 0\}, \\ G^+ &= \{j \mid j \in I_{D_2}, y_{kj} \geq 0\}, \\ G^- &= \{j \mid j \in I_{D_2}, y_{kj} < 0\}, \end{aligned}$$

则式(5-30)又可以写成下列形式:

$$\begin{aligned} & \lfloor \bar{b}_k \rfloor - x_{B_k} - \sum_{j \in E^+} \lfloor y_{kj} \rfloor x_j - \sum_{j \in E^-} \lfloor y_{kj} \rfloor x_j \\ &= \sum_{j \in E^+} y_{kj} x_j + \sum_{j \in E^-} y_{kj} x_j + \sum_{j \in G^+} y_{kj} x_j + \sum_{j \in G^-} y_{kj} x_j - \bar{b}_k. \end{aligned}$$

等式两旁同时减去 $\sum_{j \in E^-} x_j$, 则得:

$$\begin{aligned} & \lfloor \bar{b}_k \rfloor - x_{B_k} - \sum_{j \in E^+} \lfloor y_{kj} \rfloor x_j - \sum_{j \in E^-} (\lfloor y_{kj} \rfloor + 1) x_j \\ &= \sum_{j \in E^+} y_{kj} x_j + \sum_{j \in E^-} (y_{kj} - 1) x_j + \sum_{j \in G^+} y_{kj} x_j + \sum_{j \in G^-} y_{kj} x_j - \bar{b}_k. \quad (5-31) \end{aligned}$$

令等式的右边为 F . 因为等式的左边为整数, 所以 F 也为整数, 或者 $F \geq 0$, 或是 $F \leq -1$.

若 $F \geq 0$, 由于

$$\sum_{j \in E^-} (y_{kj} - 1) x_j \leq 0, \quad \sum_{j \in G^-} y_{kj} x_j \leq 0,$$

因此有

$$\sum_{j \in E^+} y_{kj} x_j + \sum_{j \in G^+} y_{kj} x_j - \bar{b}_k \geq F \geq 0,$$

也即

$$\sum_{j \in E^+} y_{kj} x_j + \sum_{j \in G^+} y_{kj} x_j \geq \bar{b}_k. \quad (5-32)$$

若 $F \leq -1$, 由于

$$\sum_{j \in E^+} y_{kj} x_j \geq 0, \sum_{j \in G^+} y_{kj} x_j \geq 0,$$

因此有

$$\sum_{j \in E^-} (y_{kj} - 1)x_j + \sum_{j \in G^-} y_{kj} x_j - \bar{b}_k \leq F \leq -1,$$

也即

$$\sum_{j \in E^-} (y_{kj} - 1)x_j + \sum_{j \in G^-} y_{kj} x_j \leq \bar{b}_k - 1. \quad (5-33)$$

以 $\bar{b}_k$ 乘式(5-33)的两边,并注意到 $\bar{b}_k - 1 < 0$,便得下式:

$$\sum_{j \in E^-} \frac{(y_{kj} - 1)\bar{b}_k}{\bar{b}_k - 1} x_j + \sum_{j \in G^-} \frac{y_{kj}\bar{b}_k}{\bar{b}_k - 1} x_j \geq \bar{b}_k. \quad (5-34)$$

由于式(5-32)和式(5-34)之中恰有一个成立,且两式的左端均是非负的,从而,便得到如下结论:当 X 为(MIP)的可行解时,必须满足下列约束条件:

$$-\sum_{j \in E^+} y_{kj} x_j - \sum_{j \in E^-} \frac{(y_{kj} - 1)\bar{b}_k}{\bar{b}_k - 1} x_j - \sum_{j \in G^+} y_{kj} x_j - \sum_{j \in G^-} \frac{y_{kj}\bar{b}_k}{\bar{b}_k - 1} x_j \leq -\bar{b}_k. \quad (5-35)$$

我们称它为柯莫利割。

如果 B 是(MIP)相应线性规划(LP)的一个最优基, X^* 为(LP)的基本最优解,且 $X^* \in K_{MIP}$. 这时,一定存在一个 $B_k \in N_1$, 有 $\bar{b}_k > 0$. 于是,我们就对原线性规划(LP)增加约束条件(5-35)而得一个新的线性规划. 对割平面(5-35)引入松弛变量 x_{n+1} , 我们可由原来的单纯形表 $T(B)$ 得到新的(LP)的一张单纯形表如表 5-25,然后用对偶单纯形法继续求解.

表 5-25

X_B	...	x_{B_i}	...	x_j	...	x_{n+1}	$\bar{b}$
x_{B_1}	...	0	...	y_{1j}	...	0	$\bar{b}_1$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{B_k}	...	1	...	y_{kj}	...	0	$\bar{b}_k$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	...	0	...	y_{mj}	...	0	$\bar{b}_m$
x_{n+1}	...	0	...	$-d_j$	...	1	$-\langle \bar{b}_k \rangle$
r	...	0	...	r_j	...	0	$-f_0$

其中

$$d_j = \begin{cases} y_{kj}, & j \in E^+, \\ \frac{(y_{kj} - 1)\bar{b}_k}{\bar{b}_k - 1}, & j \in E^-, \\ y_{kj}, & j \in G^+, \\ \frac{y_{kj}\bar{b}_k}{\bar{b}_k - 1}, & j \in G^-. \end{cases} \quad (5-36)$$

下面我们给出(MIP)的割平面法(假设(MIP)相应的线性规划的可行域非空有界).

① 应用单纯形法求解(MIP)相应的线性规划(LP). 得(LP)的最优基 B 、 $T(B)$ 和基本最优解 X^* .

② $\bar{b}_i = 0$ 对一切 $B_i \in N_1$ 是否都成立?

若是,则(MIP)中变量在 X^* 中的相应数值即为(MIP)的最优解,算法终止.

若否,则取 $\bar{b}_k = \max\{\bar{b}_i \mid B_i \in N_1\}$,将柯莫利割(5-35)作为新的约束条件加入(LP)得到新的(LP),按表 5-25 从 $T(B)$ 得到新的单纯形表 $T(B)$.

③ 从 $T(B)$ 出发,应用对偶单纯形法求解,得最优解 X^* 、最优基 B 和最优表 $T(B)$,转步骤②(在用对偶单纯形法求解过程中,若有先前附加在某个柯莫利割(5-35)的松弛变量 x' 在转轴后由非基本变量再次成为基本变量,则可以从单纯形表中删去 x' 相应的行和列).

例 5-16 应用割平面法求解下列(MIP):

$$\begin{aligned} \min f &= -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 11x_4; \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + x_5 = \frac{31}{2}, \\ & \frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_6 = \frac{9}{4}, \\ & x_j \text{ 为整数 } (j = 1, 2, 3), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6). \end{aligned}$$

158

解 应用单纯形法求解相应的(LP),得最优单纯形表,如表 5-26 所示. 现在 $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{4, 5, 6\}$, $I_D = \{2, 3, 4, 6\}$, $I_{D_1} = \{2, 3\}$, $I_{D_2} = \{4, 6\}$.

表 5-26

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_5	0	2	1	-1	1	2	20
x_1	1	7/4	1/4	-1	0	2	9/2
r	0	19/2	1/2	1	0	20	45

由于 x_1 行的 $\bar{b}_2 = \frac{9}{2}$ 非整数,取 $k = 2$. 对 $j = 2$,有 $\bar{b}_2 - y_{22} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} < 0$;

对 $j = 3$,有 $\bar{b}_2 - y_{23} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$. 所以

$$E^+ = \{3\}, E^- = \{2\}.$$

对 $j = 4$,有 $y_{24} = -1 < 0$,对 $j = 6$,有 $y_{26} = 2 > 0$. 所以

$$G^+ = \{6\}, G^- = \{4\}.$$

于是,由式(5-33)知:

$$d_2 = \frac{(y_{22} - 1)\bar{b}_2}{\bar{b}_2 - 1} = \frac{\left(\frac{7}{4} - 1\right)\frac{9}{2}}{\frac{9}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{3}{4} - 1\right)\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{4},$$

$$d_3 = y_{23} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$d_4 = \frac{y_{24} \bar{b}_2}{\bar{b}_2 - 1} = \frac{(-1) \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1.$$

$$d_6 = y_{26} = 2.$$

我们即得如下割平面：

$$-\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - x_4 - 2x_6 \leq -\frac{1}{2}.$$

对其引进松弛变量 x_7 ,并将该割平面加入(LP) ,按单纯形表表 5-25 ,从表 5-26 得单纯形表 ,如表 5-27 所示.

表 5-27

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_5	0	2	1	-1	1	2	0	20
x_1	1	7/4	1/4	-1	0	2	0	9/2
x_7	0	-1/4	-1/4	(-1)	0	-2	1	-1/2
r	0	19/2	1/2	1	0	20	0	45

对表 5-27 用对偶单纯形法进行一次转轴 ,得表 5-28.

表 5-28

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_5	0	9/4	5/4	0	1	4	-1	41/2
x_1	1	2	1/2	0	0	4	-1	5
x_4	0	1/4	1/4	1	0	2	-1	1/2
r	0	37/4	1/4	0	0	18	1	89/2

由表 5-28 ,即得(MIP)的最优解：

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = \left(5, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{41}{2}, 0\right)^T,$$

最优值 $f^* = -\frac{89}{2}.$

§ 5.4 分支定界法

假设(AIP)相应的(LP)的可行域有界 ,从而 (AIP)的可行解个数必定有限 ,如果我们把它们对应的目标函数值都求出来 ,然后通过比较大小求出最优解 ,这就是俗称的完全枚举法.但是 ,当问题的规模较大时 ,完全枚举法是不切合实际的.分支定界法则是一

种“灵活”的枚举法,它只明显地考虑一部分(AIP)的可行解,并自动而不明显地清查了其余的可行解,使计算量大大地减少.所以,分支定界法是一种隐式枚举法.

5.4.1 0-1 背包问题

现有资金 b 可用于投资,共有 n 个项目可供决策者选择.假设 $j^{\#}$ 项目所需投资额为 a_j ,投资后第二年年初可得利润 $c_j (j = 1, \dots, n)$. 又设 b, a_j, c_j 均是整数.试问为使第二年年初获得最大利润,决策者应选取哪些项目进行投资?

若令

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{对 } j^{\#} \text{ 项目投资;} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

便得如下整数规划:

$$\begin{aligned} \max f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

上述问题可以解释为一位旅行者在出发前,考虑他的背包内应装哪些物品,使物品重量之和不超过背包允许的负荷,而被装物品的使用价值最大.并因而常称这类问题为 0-1 背包问题.

下面我们通过对一个具体的 0-1 背包问题的求解,来说明分支定界法的基本思想.为讨论方便起见,如果一个问题的可行域为 K ,今后我们就记该问题为 (K) .

例 5-17 求解下列 0-1 背包问题:

$$\begin{aligned} \max f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X} = 12x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 15x_4 + 90x_5 + 26x_6 + 112x_7; \\ \text{s. t.} \quad &\mathbf{a}^T \mathbf{X} = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 15x_5 + 13x_6 + 16x_7 \leq 35, \quad (K_0) \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 7, \end{aligned}$$

其可行域设为 K_0 ,该背包问题记为 (K_0) .

解 若把 (K_0) 的约束条件适当放宽,得到线性规划:

$$\begin{aligned} \max f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}; \\ \text{s. t.} \quad &\mathbf{a}^T \mathbf{X} \leq 35, \quad (\tilde{K}_0) \\ &0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

其可行域设为 $\tilde{K}_0$,该问题简记为 $(\tilde{K}_0)$.

显然, $K_0 \subset \tilde{K}_0$,同时,问题 $(\tilde{K}_0)$ 对 x_j 没有整数约束且 $c_j > 0 (j = 1, \dots, 7)$,所以 $(\tilde{K}_0)$ 求解比较容易.今设想 $j^{\#}$ 物品可以等分成 a_j 份,每一份都是单位重量,其价值为 $c_j/a_j (j = 1, \dots, 7)$. 因而问题 $(\tilde{K}_0)$ 就可以看成在 $\sum_{j=1}^7 a_j = 57$ 份单位重的物品中,选取 35 份价值最大者.因此,只要按照“单位重量的价值最大的物品优先选取”的原则,就可求

得 $(\tilde{K}_0)$ 的最优解. 为此, 我们先列表 5-29.

表 5-29

$j^{\#}$ 物品	重量 a_j	价值 c_j	c_j/a_j
1	3	12	4
2	4	12	3
3	3	9	3
4	3	15	5
5	15	90	6
6	13	26	2
7	16	112	7

根据表 5-29 所列 $\frac{c_j}{a_j}$ 大小顺序, 我们依次取 $x_7 = 1, x_5 = 1, x_4 = 1$, 此时背包负载重量还剩有 $35 - a_7 - a_5 - a_4 = 1$, 因此接下来取 $x_1 = 1/3$, 我们即得 $(\tilde{K}_0)$ 的最优解 X_0 和最优值 f_0 分别为

$$\begin{aligned} X^0 &= (x_1, \dots, x_7)^T \\ &= (1/3, 0, 0, 1, 1, 0, 1)^T, \\ f_0 &= 221. \end{aligned}$$

显然 X^0 不是 (K_0) 的一个可行解, 但因为 $K_0 \subset \tilde{K}_0$, 所以, 我们有

$$\max_{X \in K_0} f(X) \leq 221 = \max_{X \in \tilde{K}_0} f(X),$$

即 $f_0 = 221$ 是 (K_0) 的最优值的一个上界.

由于 X^0 的分量 $x_1 = \frac{1}{3}$ 不是整数, 而 K_0 中可行解 X 的分量 x_1 或为 0 或为 1, 于是, 我们对问题 (K_0) 进行分支, 将 K_0 划分成两个子集 K_1 及 K_2 , 使 $K_0 = K_1 \cup K_2$:

$$K_1 = \{X \mid X \in K_0, x_1 = 0\}, K_2 = \{X \mid X \in K_0, x_1 = 1\},$$

相应地, 问题 (K_1) 和 (K_2) 对应的两个线性规划问题 $(\tilde{K}_1)$ 和 $(\tilde{K}_2)$ 为

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{ll} \max f = C^T X; \\ \text{s. t. } & a^T X \leq 35 \quad (\tilde{K}_1) \\ & x_1 = 0 \\ & 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 2, \dots, 7. \end{array} & \begin{array}{ll} \max f = C^T X; \\ \text{s. t. } & a^T X \leq 35, \quad (\tilde{K}_2) \\ & x_1 = 1, \\ & 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 2, \dots, 7. \end{array} \end{array}$$

类似于求解 $(\tilde{K}_0)$ 的方法, 我们得 $(\tilde{K}_1)$ 和 $(\tilde{K}_2)$ 的最优解:

$$X^1 = (0, 0, 1/3, 1, 1, 0, 1)^T$$

(或者为 $(0, 1/4, 0, 1, 1, 0)^T$, 两个解中可任取一个)和

$$X^2 = (1, 0, 0, 1/3, 1, 0, 1)^T.$$

最优值分别是 $f_1 = 220$ 和 $f_2 = 219$. f_1 和 f_2 分别是问题 (K_1) 和 (K_2) 的目标函数值的上界.

因为 X^1 和 X^2 不是整数解, 故再对问题 (K_1) 和 (K_2) (我们称它们为活问题)进行分支. 现在 220 和 219 分别是 (K_1) 和 (K_2) 的目标函数值的上界, 一般来说, 我们选上界大的活问题先进行分支(含有 (K_0) 好的可行解的可能性大), 现在选 (K_1) 进行分支, 得 (K_3) 和 (K_4) :

$$K_3 = \{X \mid X \in K_1, x_3 = 0\}, K_4 = \{X \mid X \in K_1, x_3 = 1\},$$

(K_3) 和 (K_4) 相应的线性规划问题为 $(\tilde{K}_3)$ 和 $(\tilde{K}_4)$:

$$\tilde{K}_3 = \{X \mid X \in \tilde{K}_1, x_3 = 0\}, \quad \tilde{K}_4 = \{X \mid X \in \tilde{K}_1, x_3 = 1\},$$

重复上述方法,得 $(\tilde{K}_3)$ 和 $(\tilde{K}_4)$ 的解.我们得枚举树,如图 5-6 所示.

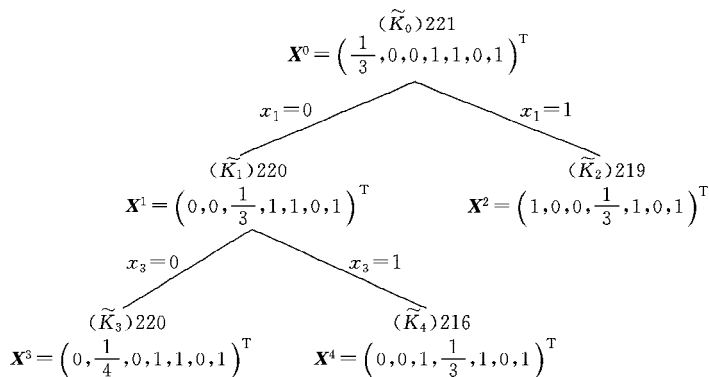


图 5-6

枚举树中列的问题是 $(\tilde{K}_i)$ (以后都如此), $(\tilde{K}_i)$ 旁标的信息是 $(\tilde{K}_i)$ 的最优解 X^i 和最优值 f_i .树中斜线旁 $x_j = 0$ 或 $x_j = 1$ 表示分支过程中变量 x_j 的取值.

不失一般性,我们对上述运算过程总结如下.

假设问题 (K_i) 相应的线性规划问题为 $(\tilde{K}_i)$,我们有

$$K_i \subset \tilde{K}_i; \quad \max_{X \in K_i} f(X) \leq f_i = \max_{X \in \tilde{K}_i} f(X),$$

即 $(\tilde{K}_i)$ 的最优值 f_i 是 (K_i) 最优值的上界.

若 $(\tilde{K}_i)$ 的最优解 X^i 有某一个分量 x_j 为分数,则将 K_i 划分成两个子集 K'_i 和 K''_i ,有

$$K'_i = \{X \mid X \in K_i, x_j = 0\}, \quad K''_i = \{X \mid X \in K_i, x_j = 1\},$$

(K'_i) 和 (K''_i) 相应的线性规划为 $(\tilde{K}'_i)$ 和 $(\tilde{K}''_i)$:

$$\tilde{K}'_i = \{X \mid X \in \tilde{K}_i, x_j = 0\}, \quad \tilde{K}''_i = \{X \mid X \in \tilde{K}_i, x_j = 1\}.$$

图 5-6 告诉我们,目前活问题有 3 个: (K_2) , (K_3) 和 (K_4) .我们选 f_i 大的活问题 (K_3) 进行分支,如图 5-7 所示.

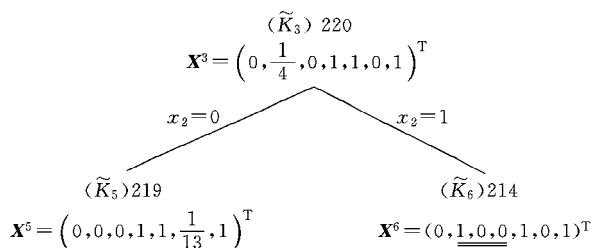


图 5-7

表 5-30

X^*	$\bar{f}$
—	$-\infty$
$(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^T$	214

由于 $(\tilde{K}_6)$ 的最优解 $X^6 \in K_6$,故 X^6 也为 (K_6) 的最优解, $f_6 = 214$ 为 (K_6) 的最优

值.至此, (K_6) 查清.

这样,到目前为止,我们得到 (K_0) 较好的一个可行解 $(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^T$,且有

$$f_6 = 214 \leq f^* = \max_{X \in K_0} f(X),$$

即 214 是 (K_0) 最优值 f^* 的一个下界.我们称 214 为界限或定界,用 $\bar{f}$ 表示.

我们将 X^6 和 f_6 视为当前的 X^* 和 $\bar{f}$ 填入图 5-7 树旁表格中(初始时,取 $\bar{f} = -\infty$)如表 5-30 所示.

接下来,我们对 (K_5) 进行分支,如图 5-8 所示:

显然, X^7 和 f_7 分别是 (K_7) 的最优解和最优值. (K_7) 查清.由于 $f_7 = 217$ 大于目前的定界 $\bar{f}$,说明 X^7 要比现在的 X^* 好,从而改 X^* 为 $(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)^T$,改 $\bar{f}$ 为 217,如表 5-31 所示.

由于 $(\tilde{K}_8)$ 的最优值 $f_8 = 174 < \bar{f} = 217$.同时 f_8 又是 (K_8) 的目标函数值的上界,所以 K_8 中不会有比 $(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)^T$ 更好的可行解,故问题 (K_8) 查清(此过程我们称为剪支).

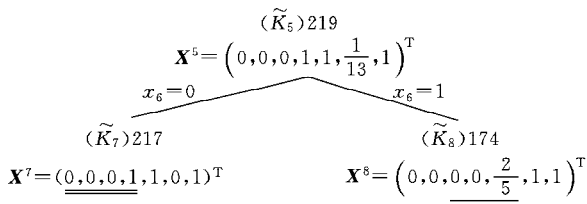


图 5-8

表 5-31

X^*	$\bar{f}$
—	$-\infty$
$(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^T$	214
$(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)^T$	217

(K_8) 被查清,使我们充分理解了为什么说分支定界法是一种隐含枚举法.同时,也使我们进一步认识了定界 $\bar{f}$ 对求解所起的作用,它的应用大大地减少了计算量.

不失一般性,我们有如下结论:

- ① 定界 $\bar{f} (< +\infty)$ 是 (K_0) 最优值的一个下界;
- ② 如果由新分支而得的问题 $(\tilde{K}_i)$ 的最优解 X^i 是整数解,且 $f_i > \bar{f}$,则 X^i 和 f_i 分别作为新的 X^* 和 $\bar{f}$.若 X^i 不是整数解,且 $f_i \leq \bar{f}$,则问题 (K_i) 查清;反之, $f_i > \bar{f}$,则 (K_i) 作为活问题等待分支和清查.

③ 每当新的定界产生,就要对树上原有的活问题(未查清的和未划分的)查视一遍而进行剪支工作.

我们对 (K_2) 继续分支而得问题 (K_9) 和 (K_{10}) ,相应的线性规划为 $(\tilde{K}_9)$ 和 $(\tilde{K}_{10})$.因为 $(\tilde{K}_9)$ 和 $(\tilde{K}_{10})$ 的最优值 $f_9 = f_{10} = 217 = \bar{f}$,所以问题 (K_9) 及 (K_{10}) 也查清.至此,枚举树中一个活问题也没有了,枚举树生长完毕,计算结束.整个运算过程如图 5-9 所示.

由图 5-9 知, $X^* = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)^T$ 为 (K_0) 的最优解, $\bar{f} = 217$ 为 (K_0) 的最优值 f^* (如表 5-32 所示),也就是说,对这个背包问题的最优决策为 4[#]、5[#]和 7[#]物品各带一件,价值为 217.

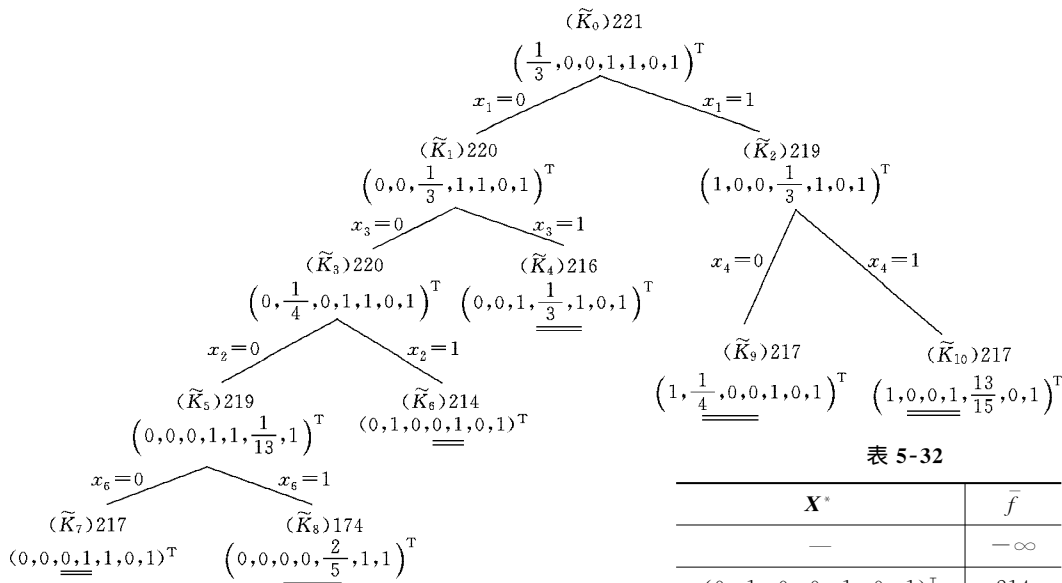


表 5-32

X^*	$\bar{f}$
—	$-\infty$
$(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^T$	214
$(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)^T$	217

图 5-9

下面,我们在求解 0-1 背包问题的基础上,介绍若干分支定界法的术语和记号.这些基本概念对管理中的其他问题建立特定的分支定界法同样也是适用的.

现在我们将讨论的问题转向为:

$$\min\{C^T X \mid X \in K_0\},$$

其中 K_0 的元素个数是有限的.

(1) 划分——把 K_0 的一个子集 K_s 划分成有限个子集 $K_s^1, K_s^2, \dots, K_s^m$ (它们两两互斥或不互斥),即

$$K_s = K_s^1 \cup K_s^2 \cup \dots \cup K_s^m.$$

(2) 松弛问题——将 (K_s) 中的约束条件适当放宽,使得 K_s 扩大为 $\tilde{K}_s$,并且 $(\tilde{K}_s)$ 的求解有现成的算法或者 $(\tilde{K}_s)$ 比 (K_s) 求解容易些.我们称 $(\tilde{K}_s)$ 为 (K_s) 的松弛问题.此时有:

$$K_s \subset \tilde{K}_s,$$

$$\min_{X \in K_s} f(X) \geq \min_{X \in \tilde{K}_s} f(X),$$

即 $(\tilde{K}_s)$ 的最优值 f_s 是 (K_s) 目标函数值的一个下界.

(3) (K_s) 的目标函数值的下界 $\underline{f}_s$ (简称为 (K_s) 的下界)——一般地,我们取 $(\tilde{K}_s)$ 的最优值 f_s 作为 (K_s) 目标函数值的下界 $\underline{f}_s$. 如果有可能,自然希望能对 (K_s) 的下界作更好的估计,我们应尽可能使 $\underline{f}_s$ 接近 (K_s) 的最优值.

(4) 界限或定界 $\bar{f}$ —— $\bar{f}$ 为在生长枚举树的过程中,到当前一步为止, (K_0) 所能搜索到的现有较好的可行解 X^* 的目标函数值,它是 (K_0) 最优值的一个上界:

$$\min_{X \in K_0} f(x) \leq \bar{f}.$$

当枚举树生长完毕, $\bar{f} < +\infty$, 则 $\bar{f}$ 即为 (K_0) 的最优值, 对应的 X^* 即为 (K_0) 的最优解.

在初始时, 一般取 $\bar{f} = +\infty$. 以后每求解一个问题 (K_s) 的松弛问题 $(\tilde{K}_s)$, 一旦它的最优解 $X^s \in K_s$, 且相应的最优值 $f_s < \bar{f}$, 则 f_s 作为新的定界 $\bar{f}$, X^s 作为新的 X^* .

(5) 失去希望的问题——若 $(\tilde{K}_s)$ 的最优值 $f_s \geq \bar{f}$, 这时, K_s 中任何一个可行解 X 的目标函数值 $f(X)$ 都不小于 $\bar{f}$, 而 $\bar{f}$ 是目前找到的 (K_0) 的最优值的一个较好的上界, 故 K_s 中不存在比 X^* 更优的解, 所以不必再对 K_s 进行讨论, 我们称 (K_s) 为失去希望的问题.

(6) 已被查清的问题——若对当前的 $(\tilde{K}_s)$ 已获得下列结论之一:

- ① $\tilde{K}_s = \emptyset$, 则 K_s 也为 $\emptyset$;
- ② $\tilde{K}_s$ 的最优解 $X^s \in K_s$;
- ③ $(\tilde{K}_s)$ 的最优值 $f_s \geq \bar{f}$,

则称 (K_s) 为一个已被查清的问题.

(7) 活问题——若 (K_s) 没有被查清, 也没有被划分, 则称 (K_s) 为活问题.

(8) 剪支——枚举树生长过程中, 一旦获得新定界 $\bar{f}$, 就用它去检查现有活问题, 把失去希望的问题改为已被查清的问题. 这一过程称为剪支.

(9) 分支、父问题和子问题——选择一个活问题 (K_s) 进行划分, 称为分支. (K_s) 称为父问题, K_s 划分后所得的数个分支问题, 称为子问题.

5.4.2 分支定界法

我们先通过求解一个具体的实例来分析一下, 在用分支定界法求解纯整数规划问题时, 如何对活问题进行分支.

例 5-18 应用分支定界法求解下列(AIP):

$$\begin{aligned} \min f &= -8x_1 - 12x_2; \\ \text{s. t.} \quad &2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ &6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ &x_j \geq 0, \text{ 整数}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

解 设(AIP)的可行域为 K_0 , 相应的线性规划的可行域为 $\tilde{K}_0$, 有 $K_0 \subset \tilde{K}_0$. 由于线性规划问题 $(\tilde{K}_0)$ 有单纯形法可以求解, 所以取 $(\tilde{K}_0)$ 作为 (K_0) 的松弛问题. 现在我们用图解法来求解 $(\tilde{K}_0)$, 如图 5-10 所示.

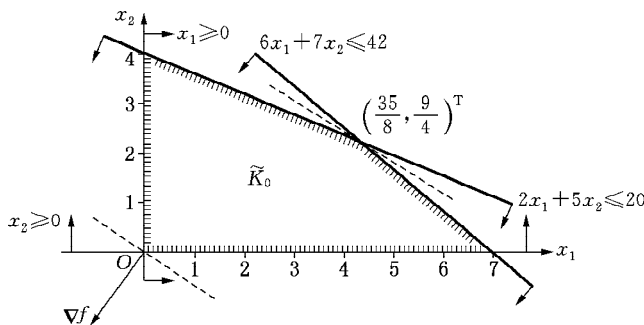


图 5-10

可知 $(\tilde{K}_0)$ 的最优解 $X^0 = (35/8, 9/4)^T$, 最优值 $f_0 = -61$. X^0 不是 (K_0) 的可行解. 由于集合

$$\{X \mid X \in \tilde{K}_0, \lfloor \frac{35}{8} \rfloor < x_1 < \lceil \frac{35}{8} \rceil\}$$

中不可能含有 K_0 的可行解, 我们在 $\tilde{K}_0$ 中删去这部分集合. 于是, 可将 K_0 划分成:

$$K_1 = \{X \mid X \in K_0, x_1 \leq 4\}, \quad K_2 = \{X \mid X \in K_0, x_1 \geq 5\},$$

相应地

$$\tilde{K}_1 = \{X \mid X \in \tilde{K}_0, x_1 \leq 4\}, \quad \tilde{K}_2 = \{X \mid X \in \tilde{K}_0, x_1 \geq 5\}.$$

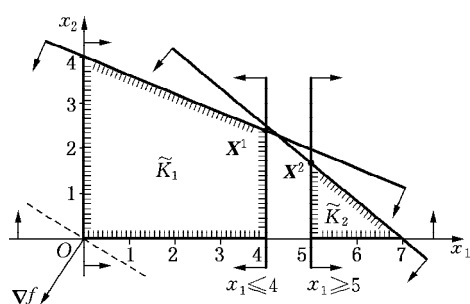


图 5-11

由图 5-11 知 $(\tilde{K}_1)$ 的最优解 $X^1 = (4, \frac{12}{5})^T$, 最优值 $f_1 = -60 \frac{4}{5}$; $(\tilde{K}_2)$ 的最优解 $X^2 = (5, \frac{12}{7})^T$, 最优值 $f_2 = -60 \frac{4}{7}$. X^1 和 X^2 都不是 K_0 的可行解.

因为 $f_1 = -60 \frac{4}{5} < f_2 = -60 \frac{4}{7}$; 所以我

们选 K_1 先进行划分:

$$K_3 = \{X \mid X \in K_1, x_2 \leq 2\}, \quad K_4 = \{X \mid X \in K_1, x_2 \geq 3\},$$

相应地,

$$\tilde{K}_3 = \{X \mid X \in \tilde{K}_1, x_2 \leq 2\}, \quad \tilde{K}_4 = \{X \mid X \in \tilde{K}_1, x_2 \geq 3\}.$$

由图 5-12 知 $(\tilde{K}_3)$ 的最优解 $X^3 = (4, 2)^T$, 最优值 $f_3 = -56$, 现在 $X^3 \in K_3$, 从而, 取 $X^* = X^3$, $\bar{f} = -56$. (K_3) 查清.

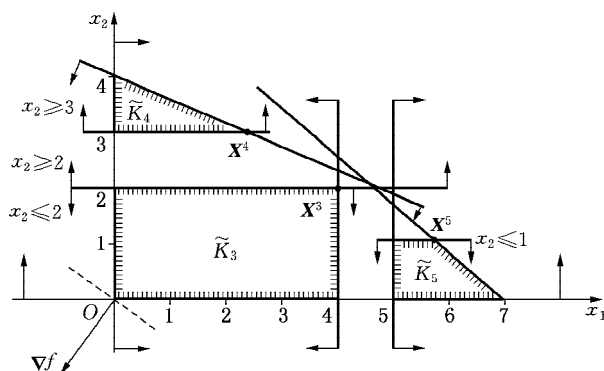


图 5-12

又由图 5-12 知 $(\tilde{K}_4)$ 的最优解 $X^4 = (\frac{5}{2}, 3)^T$, 最优值 $f_4 = -56$. 因为 $f_4 = \bar{f}$, 所以

(K_4) 也被查清.

接下来,我们对 K_2 进行划分:

$$K_5 = \{X \mid X \in K_2, x_2 \leq 1\}, \quad K_6 = \{X \mid X \in K_2, x_2 \geq 2\},$$

相应地,

$$\tilde{K}_5 = \{X \mid X \in \tilde{K}_2, x_2 \leq 1\}, \quad \tilde{K}_6 = \{X \mid X \in \tilde{K}_2, x_2 \geq 2\}.$$

由图 5-12 知, $(\tilde{K}_5)$ 的最优解 $X^5 = \left(\frac{35}{6}, 1\right)^T$, 最优值 $f_5 = -\frac{176}{3}$. 因为 $f_5 < \bar{f} = -56$, 所以 (K_5) 仍为活问题. 又由图 5-12 知, $\tilde{K}_6 = \emptyset$, 所以 (K_6) 查清. 对 (K_5) 需要继续分支, 具体文字步骤和在图 5-12 上的继续划分我们不再细述.

整个运算过程如枚举树图 5-13 和表 5-33 所示. 所有的问题都已被查清, 因而, (K_0) 的最优解 $X^* = (4, 2)^T$, 最优值 $f^* = -56$.

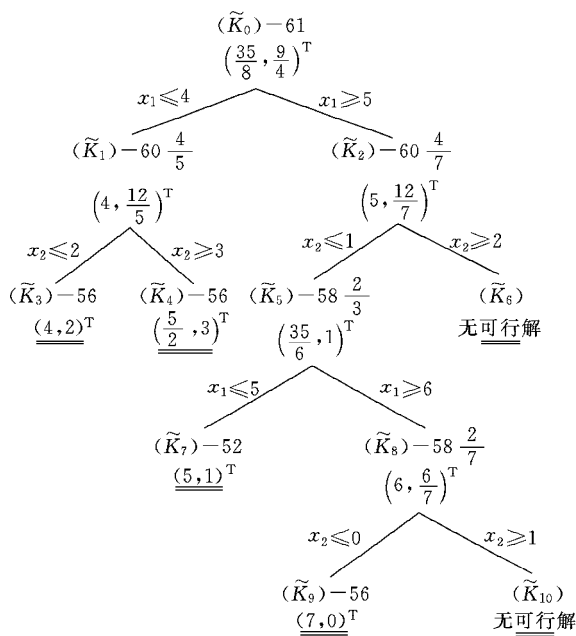


图 5-13

表 5-33

X^*	$\bar{f}$
—	$+\infty$
$(4, 2)^T$	-56

例 5-18 的求解过程告诉我们, 若 (K_0) 的某个子问题 (K_S) 的松弛问题 $(\tilde{K}_S)$ 在用单纯

形法求解时, 具有最优基 B , 而基本最优解 $X^S = \begin{pmatrix} X_B \\ X_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}$ 中存在某个基本变量 $x_{B_k} = \bar{b}_k$ 不是整数 (若有若干个 $\bar{b}_i \neq 0$, 在算法中, 一般情況下取 $\bar{b}_k$ 为: $\bar{b}_k = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{b}_i$), 则我们就以 x_{B_k} 来划分 K_S :

$$K'_S = \{X \mid X \in K_S, x_{B_k} \leq \lfloor \bar{b}_k \rfloor\}, \quad K''_S = \{X \mid X \in K_S, x_{B_k} \geq \lceil \bar{b}_k \rceil\},$$

相应地,

$$\tilde{K}'_S = \{X \mid X \in \tilde{K}_S, x_{B_k} \leq \lfloor \bar{b}_k \rfloor\}, \quad \tilde{K}''_S = \{X \mid X \in \tilde{K}_S, x_{B_k} \geq \lceil \bar{b}_k \rceil\}.$$

那么,在这个分支过程中,我们如何利用 $(\tilde{K}_s)$ 的最优单纯形表 $T(B)$ 的有关信息来进一步求解 $(\tilde{K}'_s)$ 和 $(\tilde{K}''_s)$ 呢?为便于计算具体的例题,我们先作讨论.

对约束条件 $x_{B_k} \leq \lfloor \bar{b}_k \rfloor$ 和 $x_{B_k} \geq \lceil \bar{b}_k \rceil$ 分别引入松弛变量 x' 和剩余变量 x'' 而得方程:

$$x_{B_k} + x' = \lfloor \bar{b}_k \rfloor, \quad (5-37)$$

$$x_{B_k} - x'' = \lceil \bar{b}_k \rceil, \quad (5-38)$$

由 $T(B)$ 可知:

$$x_{B_k} = \bar{b}_k - \sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j,$$

将它代入式(5-37)和式(5-38)后分别得到方程:

$$-\sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j + x' = -\bar{b}_k, \quad (5-39)$$

$$\sum_{j \in I_D} y_{kj} x_j + x'' = \bar{b}_k - 1. \quad (5-40)$$

我们将这两个方程加到 $T(B)$ 上去,即可得到 $(\tilde{K}'_s)$ 和 $(\tilde{K}''_s)$ 的初始单纯形表,如表5-34和表5-35所示.然后利用对偶单纯形法继续求解.

表 5-34

$X_{\tilde{B}}$	...	x_j	...	x'	$\tilde{B}^{-1}b$
X_B	...	y^j	...	0	$\bar{b}$
x'	...	$-y_{kj}$	...	1	$-\langle \bar{b}_k \rangle$
r	...	r_j	...	0	$-f_0$

表 5-35

$X_{\tilde{B}}$	...	x_j	...	x''	$\tilde{B}^{-1}b$
X_B	...	y^j	...	0	$\bar{b}$
x''	...	y_{kj}	...	1	$\langle \bar{b}_k \rangle - 1$
r	...	r_j	...	0	$-f_0$

由于在我们讨论的纯整数规划中,目标函数系数 c_j 均为整数,所以, (K_s) 的最优值应是整数.当 $(\tilde{K}_s)$ 的最优值不是整数时,我们不妨取 (K_s) 的下界 $\underline{f}_s$ 为 $\lceil f_s \rceil$,这样的改进,有时会给剪支带来方便.

例 5-19 用分支定界法求解下列(AIP):

$$\begin{aligned} \min f &= 7x_1 + 3x_2 + 4x_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 8, \\ &3x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ &x_j \geq 0, \text{ 整数}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (K_0)$$

解 (1) 先应用对偶单纯形法求解 (K_0) 的松弛问题 $(\tilde{K}_0)$:

$$\begin{aligned} \min f &= 7x_1 + 3x_2 + 4x_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ &3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 5, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (\tilde{K}_0)$$

得 $(\tilde{K}_0)$ 最优解的单纯形表如表 5-36 所示.

表 5-36

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$-1/5$	$1/5$	$-2/5$	$2/5$
x_2	0	1	$8/5$	$-3/5$	$1/5$	$19/5$
r	0	0	$3/5$	$2/5$	$11/5$	$-71/5$

由表 5-36 知 $(\tilde{K}_0)$ 的最优解 $\mathbf{X}^0 = (2/5, 19/5, 0, 0, 0)^\top$, 最优值 $f_0 = 71/5$.

因为 $\mathbf{X}^0 \in K_0$, 我们取 $\underline{f}_0 = \lceil \frac{71}{5} \rceil = 15$.

(2) 我们用 x_2 来划分 K_0 :

$$K_1 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_2 \leq 3\}, \quad K_2 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_2 \geq 4\},$$

相应地, 有

$$\tilde{K}_1 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \tilde{K}_0, x_2 \leq 3\}, \quad \tilde{K}_2 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \tilde{K}_0, x_2 \geq 4\}.$$

① 求解 $(\tilde{K}_1)$: 将 $x_2 \leq 3$ 附加到表 5-36 上, 按表 5-34 得表 5-37, 并继续迭代, 得表 5-38.

表 5-37

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	$-1/5$	$1/5$	$-2/5$	0	$2/5$
x_2	0	1	$8/5$	$-3/5$	$1/5$	0	$19/5$
x_6	0	0	$(-8/5)$	$3/5$	$-1/5$	1	$-4/5$
r	0	0	$3/5$	$2/5$	$11/5$	0	$-71/5$

表 5-38

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	$1/8$	$-3/8$	$-1/8$	$1/2$
x_2	0	1	0	0	0	1	3
x_3	0	0	1	$-3/8$	$1/8$	$-5/8$	$1/2$
r	0	0	0	$5/8$	$17/8$	$3/8$	$-29/2$

由表 5-34 得 $(\tilde{K}_1)$ 的最优解 $\mathbf{X}^1 = (1/2, 3, 1/2, 0, 0)^\top$, 最优值 $f_1 = 29/2$.

我们取 $\underline{f}_1 = \lceil \frac{29}{2} \rceil = 15$.

② 对 $(\tilde{K}_2)$ 求解: 将 $x_2 \geq 4$ 附加到表 5-36 上, 按表 5-35 得表 5-39, 继续迭代, 得表 5-40.

表 5-39

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	$-1/5$	$1/5$	$-2/5$	0	$2/5$
x_2	0	1	$8/5$	$-3/5$	$1/5$	0	$19/5$
x_7	0	0	$8/5$	$(-3/5)$	$-1/5$	1	$-1/5$
r	0	0	$3/5$	$2/5$	$11/5$	0	$-71/5$

表 5-40

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$
x_2	0	1	0	0	0	-1	4
x_4	0	0	$-8/3$	1	$-1/3$	$-5/3$	$1/3$
r	0	0	$5/3$	0	$7/3$	$2/3$	$-43/3$

由表 5-40, 得 $(\tilde{K}_2)$ 的最优解 $X^2 = (1/3, 4, 0, 1/3, 0)^T$, 最优值 $f_2 = 43/3$.

我们取 $\underline{f}_2 = \lceil f_2 \rceil = 15$.

(3) (K_1) 及 (K_2) 的下界都为 15, 不妨取 (K_2) 进行分支: 用 x_1 将 (K_2) 划分成:

$$K_3 = \{X \mid X \in K_2, x_1 \leq 0\}, \quad K_4 = \{X \mid X \in K_2, x_1 \geq 1\},$$

相应地, 有

$$\tilde{K}_3 = \{X \mid X \in \tilde{K}_2, x_1 \leq 0\}, \quad \tilde{K}_4 = \{X \mid X \in \tilde{K}_2, x_1 \geq 1\}.$$

① 对 $(\tilde{K}_3)$ 求解. 将 $x_1 \leq 0$ 附加到表 5-40 上, 按表 5-34 得表 5-41, 继续迭代, 得表 5-42.

表 5-41

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	$\bar{b}$
x_1	1	0	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	0	$1/3$
x_2	0	1	0	0	0	-1	0	4
x_4	0	0	$-8/3$	1	$-1/3$	$-5/3$	0	$1/3$
x_8	0	0	$-1/3$	0	$1/3$	$(-1/3)$	1	$-1/3$
r	0	0	$5/3$	0	$7/3$	$2/3$	0	$-43/3$

表 5-42

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0
x_2	0	1	1	0	-1	0	-3	5
x_4	0	0	-1	1	-2	0	-5	2
x_7	0	0	1	0	-1	1	-3	1
r	0	0	1	0	3	0	2	-15

由表 5-42 得 $(\tilde{K}_3)$ 的最优解 $X^3 = (0, 5, 0, 2, 0)^T$, 最优值 $f_3 = 15$.

由于 $X^3 \in K_3$, 故取定界 $\bar{f} = 15$, $X^* = X^3$. 如表 5-45 所示, 问题 (K_3) 查清.

由于问题 (K_1) 的下界 $\underline{f}_1 = 15 = \bar{f}$, 因此问题 (K_1) 也查清.

② 对 $(\tilde{K}_4)$ 求解. 将 $x_1 \geq 1$ 附加到表 5-40 上, 按表 5-35 得表 5-43, 继续迭代, 得表 5-44.

表 5-43

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_9	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/3	0	-1/3	1/3	0	1/3
x_2	0	1	0	0	0	-1	0	4
x_4	0	0	-8/3	1	-1/3	-5/3	0	1/3
x_9	0	0	1/3	0	(-1/3)	1/3	1	-2/3
r	0	0	5/3	0	7/3	2/3	0	-43/3

表 5-44

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_9	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	1
x_2	0	1	0	0	0	-1	0	4
x_4	0	0	-3	1	0	-2	-1	1
x_5	0	0	-1	0	1	-1	-3	2
r	0	0	4	0	0	3	7	-19

由表 5-44 得 $(\tilde{K}_4)$ 的最优解 $X^4 = (1, 4, 0, 1, 2)^T$, 最优值 $f_4 = 19$.

由于 $f_4 > \bar{f} = 15$, (K_4) 成为没有希望的问题, (K_4) 查清.

至此, 生长的枚举树如图 5-14 所示, 该树不再有活问题. 因此得 (K_0) 的最优解 $X^* = (0, 5, 0)^T$, 最优值 $f^* = 15$.

在归纳(AIP)的分支定界法的算法以前, 我们先对若干符号作解释以便理解算法:

L ——迭代至某一步时, 枚举树中所有问题的下标集合;

E ——当前枚举树中已查清的问题和已划分的问题的下标集合;

$L - E$ ——当前枚举树中活问题的下标集合;

l ——当前枚举树中问题的最大下标;

S ——在枚举树中, 当前正在划分的问题的下标.

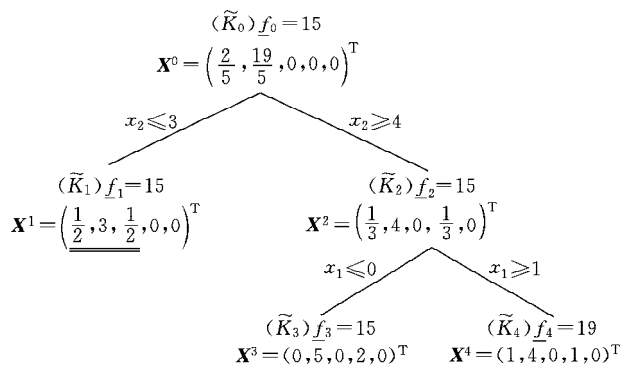


图 5-14

表 5-45

X^*	$\bar{f}$
—	$+\infty$
$(0, 5, 0, 2, 0)^T$	15

设(AIP)的可行域为 K_0 , 相应的线性规划问题的可行域 $\tilde{K}_0$. 非空有界, 求解(AIP)的分支定界法的算法步骤如下:

① 应用单纯形法求解 $(\tilde{K}_0)$, 得最优解 X^0 、最优值 f_0 和最优单纯形表 $T(B)$.

$\bar{b}_i = 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 都成立否?

若是, 则 X^0, f_0 即为 (K_0) 的最优解 X^* 和最优值 f^* , 算法终止.

若否, 则存在 $\bar{b}_i \neq 0$, 则取:

$$\bar{f} = +\infty, \quad \underline{f}_0 = \lceil f_0 \rceil, \quad E = \emptyset, \quad L = \{0\}, \quad l = 0.$$

转步骤②.

② $L - E = \emptyset$?

若是, 则当 $\bar{f} = +\infty$ 时, $K_0 = \emptyset$, 算法终止.

当 $\bar{f} < +\infty$ 时, $\bar{f}$ 即为 (K_0) 的最优值 f^* , 相应的 X^* 即为 (K_0) 的最优解, 算法终止.

若否, 则转步骤③.

③ 定指标 S : 取 $\underline{f}_S = \min\{\underline{f}_j \mid j \in L - E\}$.

划分 K_S : 取 $\bar{b}_k = \max\{\bar{b}_i \mid 1 \leq i \leq m\}$, 令

$$K_{l+1} = \{X \mid X \in K_S, x_{B_k} \leq \lfloor \bar{b}_k \rfloor\},$$

$$K_{l+2} = \{X \mid X \in K_S, x_{B_k} \geq \lceil \bar{b}_k \rceil\},$$

$$\tilde{K}_{l+1} = \{X \mid X \in \tilde{K}_S, x_{B_k} \leq \lfloor \bar{b}_k \rfloor\},$$

$$\tilde{K}_{l+2} = \{X \mid X \in \tilde{K}_S, x_{B_k} \geq \lceil \bar{b}_k \rceil\},$$

$$L = L \cup \{l+1, l+2\}, E = E \cup \{S\}.$$

(4) 求解 $\{\tilde{K}_{l+1}\}$. 若最终单纯形表 $T(B)$ 指出 $\tilde{K}_{l+1} = \emptyset$, 则取 $E = E \cup \{l+1\}$, 转步骤⑤. 否则, 若 $\bar{b}_i = 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 都成立, 则取 $E = E \cup \{l+1\}$, 且当 $f_{l+1} < \bar{f}$ 时, 取 $X^* = X^{l+1}$, $\bar{f} = f_{l+1}$, 转步骤⑤; 若存在 $\bar{b}_i \neq 0$, 则取 $\underline{f}_{l+1} = \lceil f_{l+1} \rceil$, 转步骤⑤.

⑤ 求解 $(\tilde{K}_{l+2})$. 若最终单纯形表 $T(B)$ 指出 $\tilde{K}_{l+2} = \emptyset$, 则取 $E = E \cup \{l+2\}$. 转步骤⑥. 否则, 若 $\bar{b}_i = 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 都成立, 则取 $E = E \cup \{l+2\}$, 且当 $f_{l+2} < \bar{f}$ 时, 取 $X^* = X^{l+2}$, $\bar{f} = f_{l+2}$, 转步骤⑥; 若存在 $\bar{b}_i \neq 0$, 则取 $\underline{f}_{l+2} = \lceil f_{l+2} \rceil$, 转步骤⑥.

⑥ $l = l + 2$.

令 $M = \{j \mid f_j \geq \bar{f}, j \in L - E\}$, $E = E \cup M$, 转步骤②.

本算法在迭代过程中,在若干活问题中选取那个问题先分支,或者在某个问题($\tilde{K}_s$)的最优解中,有若干个基本变量的 $\bar{b}_i \neq 0$,选取那个基本变量 x_{B_k} 来对 K_s 进行划分,都会影响计算的进程.本节介绍的方法对(AIP)采用了下界最小的活问题先分支,除此之外,也可以采用新的活问题先分支的方法

对于混合整数规划(MIP),只要对(AIP)的分支定界法稍作修改,就不难得到(MIP)的分支定界法.

* § 5.5 0-1 规划的分支定界法

5.5.1 划分和定界

本节讨论下列规范形式的 0-1 规划的分支定界法:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5-41)$$

其中 a_{ij} 和 b_i 均为整数, c_j 均为非负整数.

假若在建立的 0-1 规划模型中,有 $c_j < 0$, 或 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$, 或 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ 的情况出现,则不难化成上述规范模型.例如对 $c_j < 0$, 则引进一个新的 0-1 变量 x'_j , 令

$$x_j = 1 - x'_j,$$

代入原模型中,经过整理后,在模型中 x_j 就不再出现而代之以 x'_j , 这时,在目标函数中 x'_j 的系数 $c'_j = -c_j > 0$. 对约束条件

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i,$$

则化成

$$\sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x'_j \leq -b_i.$$

对约束条件

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i,$$

则用

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \leq b_i, \quad \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x'_j \leq -b_i$$

来取代它.

例 5-20 将下列 0-1 规划问题化成规范模型:

$$\begin{aligned} \max z_1 &= 3u_1 + 2u_2 - 5u_3 - 2u_4 + 3u_5 ; \\ \text{s. t.} \quad &u_1 + u_2 + u_3 + 2u_4 + u_5 \leq 4 , \\ &7u_1 + 3u_3 - 4u_4 + 3u_5 \leq 8 , \\ &11u_1 - 6u_2 + 3u_4 - 3u_5 \geq 3 , \\ &u_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

解 先把上述模型进行整理：

$$\begin{aligned} \min f &= -3u_1 - 2u_2 + 5u_3 + 2u_4 - 3u_5 ; \\ \text{s. t.} \quad &u_1 + u_2 + u_3 + 2u_4 + u_5 \leq 4 , \\ &7u_1 + 3u_3 - 4u_4 + 3u_5 \leq 8 , \\ &-11u_1 + 6u_2 - 3u_4 + 3u_5 \leq -3 , \\ &u_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

然后令

$$u_j = \begin{cases} 1 - x_j, & j = 1, 2, 5, \\ x_j, & j = 3, 4, \end{cases}$$

则得规范模型如下：

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 8 ; \\ \text{s. t.} \quad &-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 1 , \\ &-7x_1 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 \leq -2 , \\ &11x_1 - 6x_2 - 3x_4 - 3x_5 \leq -1 , \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

在 0-1 规划问题的规范模型(5-38)中, 引进松弛变量 $y_i (i = 1, \dots, m)$, 可得下述等价的问题：

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j ; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ &y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (K_0)$$

设其可行域为 K_0 . 如果在问题 (K_0) 中删去约束条件 $y_i \geq 0 (i = 1, \dots, m)$, 则得问题 $(\tilde{K}_0)$ ：

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j ; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ &y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (\tilde{K}_0)$$

显然, 由于 $c_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)$, 故 $(\tilde{K}_0)$ 的最优解很容易求得：

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^0 &= (x_1, \dots, x_n)^T = (0, \dots, 0)^T, \\ \mathbf{Y}^0 &= (y_1, \dots, y_m)^T = (b_1, \dots, b_m)^T. \end{aligned}$$

所以我们就将 $(\tilde{K}_0)$ 作为 (K_0) 的松弛问题.

下面我们首先来讨论用分支定界法求解 0-1 规划问题时,在分支过程中如何进行划分.

例 5-21 讨论用分支定界法求解下列 0-1 规划问题时可行域 K_0 的划分:

$$\begin{aligned} \min f &= 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5; \\ \text{s. t.} \quad &-3x_1 + 5x_2 + x_3 - 6x_4 - 3x_5 + y_1 = 2, \\ &2x_1 - x_2 - 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 + y_2 = -5, \quad (K_0) \\ &-4x_1 + 6x_2 + 5x_4 + 3x_5 + y_3 = 8, \quad (5-42) \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 5. \\ &y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

解 将上述问题 (K_0) 中的约束条件 $y_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$ 换成 $y_i \leq 0 (i = 1, 2, 3)$, 则得 (K_0) 的松弛问题 $(\tilde{K}_0)$,其最优解

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^0 &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0)^T = (0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{Y}^0 &= (y_1^0, y_2^0, y_3^0)^T = (2, -5, 8)^T, \end{aligned}$$

最优值 $f_0 = 0$.

现在,由于 $y_2^0 = -5 < 0$,故要消除 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 的不可行性,至少应有一个变量 x_j 的值由 0 提升到 1. 同时,我们注意到 $a_{21} = 2 > 0$,那么当 $\mathbf{X}^0$ 中的 x_1^0 的值由 0 变为 1 而其余分量不变时,则变量 y_2 的值将由 $y_2^0 = -5$ 变为 $y_2^0 - 2 = -7$,因此,约束条件 $y_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$ 仍得不到实现. 所以,对 x_1 我们不必考虑把它的值由 0 变为 1. 为此,我们仅对 $j \in J_0 = \{2, 3, 4, 5\}$ 的变量 x_j 之值由 0 提升为 1,这时,我们得到 $(\tilde{K}_0)$ 的一个可行解:

$$x_k = x_k^0 (k \neq j), \quad x_j = 1, \quad y_i = y_i^0 - a_{ij}.$$

我们给出此时 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 的不可行性度量值:

若有 $y_i = y_i^0 - a_{ij} \geq 0$,则 y_i 的不可行性度量值为 0;

若有 $y_i = y_i^0 - a_{ij} < 0$,则 y_i 的不可行性度量值为 $y_i^0 - a_{ij}$.

我们将 y_1, y_2 和 y_3 的不可行性度量值之和 V_j^0 作为 x_j 由 0 变为 1 时,在 (K_0) 中 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 的不可行性度量值,简称为 (K_0) 关于 x_j 的不可行性指数.

例如, x_2 上升为 1 时,有:

	不可行性度量值:
$y_1 = y_1^0 - a_{12} = 2 - 5 = -3,$	- 3
$y_2 = y_2^0 - a_{22} = -5 - (-1) = -4,$	- 4
$y_3 = y_3^0 - a_{32} = 8 - 6 = 2,$	0
	$V_2^0 = -7$

这些运算也可表达成：

$$\begin{aligned} V_2^0 &= \min\{y_1^0 - a_{12}, 0\} + \min\{y_2^0 - a_{22}, 0\} + \min\{y_3^0 - a_{32}, 0\} \\ &= \min\{2-5, 0\} + \min\{-5-(-1), 0\} + \min\{8-6, 0\} \\ &= -3-4+0 = -7. \end{aligned}$$

一般地,对 $j \in J_0$,当 $x_j = 1$ 时, (K_0) 关于 x_j 的不可行性指数为

$$V_j^0 = \sum_{i=1}^3 \min\{y_i^0 - a_{ij}, 0\}.$$

我们将 $V_j^0 (j \in J_0)$ 的计算列成表 5-46.

表 5-46

$y_i^0 - a_{ij}$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$\min\{y_i^0 - a_{ij}, 0\}$				
$i = 1$	$\begin{matrix} 2-5 \\ -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2-1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2-(-6) \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2-(-3) \\ 0 \end{matrix}$
$i = 2$	$\begin{matrix} -5-(-1) \\ -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5-(-6) \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5-(-3) \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5-(-2) \\ -3 \end{matrix}$
$i = 3$	$\begin{matrix} 8-6 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8-0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8-5 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8-3 \\ 0 \end{matrix}$
$V_j^0 = \sum_{i=1}^3 \min\{y_i^0 - a_{ij}, 0\}$	-7	0	-2	-3

由表 5-46 可知

$$\max\{V_j^0 \mid j \in J_0\} = V_3^0 = 0, \quad (5-43)$$

于是,我们就用 x_3 来划分 K_0 得

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in K_0, x_3 = 0 \right\}, \quad K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in K_0, x_3 = 1 \right\},$$

相应地,

$$\tilde{K}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in \tilde{K}_0, x_3 = 0 \right\}, \quad \tilde{K}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in \tilde{K}_0, x_3 = 1 \right\}.$$

一般地,假设问题 (K_s) 是问题 (K_0) 依次用变量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ 取值 0 或 1 进行划分而得的子问题,将 (K_s) 中的约束条件 $y_i \geq 0 (i = 1, \dots, m)$ 换成 $y_i \geq 0 (i = 1, \dots, m)$, 即得 (K_s) 的松弛问题 $(\tilde{K}_s)$ (如图 5-15 表示依次用 x_p, x_q 和 x_t 取值 0 或 1 进行划分的情况).

我们将 $(\tilde{K}_s)$ 中取值尚未固定的变量 x_j 的下标组成的集合记为 J_s .

显然,由于 $c_j \geq 0 (j \in J_s)$, $(\tilde{K}_s)$ 的最优解很容易求得: $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ 取相应的规定值;

$x_j = 0 (j \in J_s); y_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j (i = 1, \dots, m)$. 假若 X^S , Y^S 不是 (K_s) 的可行解, 那么, 我们该如何对 K_s 进行划分呢?

类似于例 5-21 所指出的, 如果对 $j \in J_s$, x_j 对所有的 $y_i^S < 0$, 都有 $a_{ij} \geq 0$, 那么 x_j 之值由 0 提升为 1 时, 不能改进 (K_s) 关于 Y 的不可行性. 因此, x_j 不适宜作 (K_s) 的划分变量. 记

$$Q_s = \{j \mid j \in J_s, \text{当 } y_i^S < 0 \text{ 时, 总有 } a_{ij} \geq 0 (1 \leq i \leq m)\}.$$

(5-44)

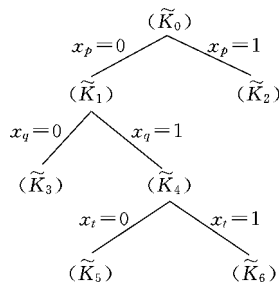


图 5-15

我们知道, 划分活问题 (K_s) 的目的是为了寻找 (K_0) 的一个可行解, 希望它比目前已找到的 (K_0) 的可行解 X^* 要好 (此时, $f(X^*) = \bar{f}$)。因此, 对于 $j \in J_s - Q_s$, 如果我们以 x_j 对 (K_s) 进行划分, 让 x_j 的取值由 0 变为 1 (X^S 中其余分量不变), 那么相应的目标函数将由 f_s 变为 $f_s + c_j$ 。当 $f_s + c_j \geq \bar{f}$ 时, 则说明当 x_j 的取值由 0 变为 1 后, 不能产生一个比目前的 X^* 更好的可行解. 因此, 可以把这种 x_j 排斥在用作划分的变量之外. 令

$$G_s = \{j \mid c_j + f_s \geq \bar{f}, j \in J_s - Q_s\}, \quad (5-45)$$

$$M_s = J_s - Q_s - G_s, \quad (5-46)$$

从而, 仅对于 $j \in M_s$ 的变量 x_j 可以考虑把它的值由 0 变为 1.

对 $j \in M_s$, 令

$$V_j^S = \sum_{i=1}^m \min\{y_i^S - a_{ij}, 0\}, \quad (5-47)$$

V_j^S 作为 x_j 由 0 变为 1 时, 在 (K_s) 中 $Y = (y_1, \dots, y_m)^T$ 的不可行性度量值, 简称为 (K_s) 关于 x_j 的不可行指数.

取

$$V_k^S = \max\{V_j^S \mid j \in M_s\}, \quad (5-48)$$

则我们就以 x_k 对 (K_s) 进行划分:

$$K'_s = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K_s, x_k = 0 \right\}, \quad K''_s = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in K_s, x_k = 1 \right\},$$

相应地

$$\tilde{K}'_s = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \tilde{K}_s, x_k = 0 \right\}, \quad \tilde{K}''_s = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \tilde{K}_s, x_k = 1 \right\}.$$

显然, $(\tilde{K}'_s)$ 的最优解为 X^S , Y^S 最优值为 f_s . $(\tilde{K}''_s)$ 的最优解为: $x_k = 1, x_j = x_j^S (j \neq k), y_i = y_i^S - a_{ik} (i = 1, \dots, m)$ 最优值为 $f_s + c_k$.

接下来, 我们来估计 (K_s) 最优值的下界 $\underline{f}_s$. 自然, $(\tilde{K}_s)$ 的最优值 f_s 是 (K_s) 最优值的下界, 但是, 我们希望把 $\underline{f}_s$ 之值估计得更为精确些, 以利于剪支. 我们分几种情况来讨论.

1. 情况一

若 $M_s = \emptyset$, 说明 (K_s) 中没有更好的可行解, 因此, (K_s) 失去希望, (K_s) 被查清, 我

们不妨取 $\underline{f}_s = \bar{f}$.

2. 情况二

若 $M_s \neq \emptyset$. 如果对某个 i , 有 $y_i^s < 0$, 我们来考虑 M_s 中各指标 j 所相应的变量 x_j 由 0 提升到 1 时对 y_i 的不可行性的改进情况.

自然, 当 $j \in M_s$ 有 $a_{ij} \geq 0$, 则把 x_j 由 0 提升到 1, 不能改进 y_i 的不可行性, 我们可以认为 $x_j = 1$ 对 y_i 改进不可行性的度量值为零, 也即 $\min\{0, a_{ij}\} = 0$; 反之, 当 $j \in M_s$ 有 $a_{ij} < 0$, 则把 x_j 由 0 提升到 1 时, 有 $y_i = y_i^s - a_{ij}$, $x_j = 1$ 对 y_i 改进不可行性的度量值为 $-a_{ij}$. 也即 $-\min\{0, a_{ij}\} = -a_{ij}$.

假若有 $y_i^s - \sum_{j \in M_s} \min\{0, a_{ij}\} < 0$, 也即下式成立:

$$\sum_{j \in M_s} \min\{0, a_{ij}\} > y_i^s. \quad (5-49)$$

那么, 即使 M_s 那些 $a_{ij} < 0$ 的指标所相应的变量 x_j 都由 0 提升到 1, 也不能产生 y_i 的可行性, 因而我们说 (K_s) 是没有希望的, (K_s) 可以被认为查清, 不妨设 $\underline{f}_s = \bar{f}$.

3. 情况三

$M_s \neq \emptyset$, 且式(5-49)不成立. 那么, 为了得到 (K_s) 的一个较好的可行解, 我们就要把一些变量 $x_j (j \in M_s)$ 在 $\mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s$ 中的值由 0 提升到 1. 假若 $V_i^s = \max\{V_j^s \mid j \in M_s\} = 0$, 我们将 x_i 的值由 0 变为 1, 相应的目标函数值由 f_s 变为 $f_s + c_i$. 由于 $c_j \geq 0$, 故 (K_s) 的最优值不可能小于

$$f_s + \min\{c_j \mid j \in M_s\}.$$

假若 $\max\{V_j^s \mid j \in M_s\} < 0$, 则至少要将 M_s 中两个不同的下标 j_1 和 j_2 所对应的变量的值由 0 提升到 1 才能得到 (K_s) 的可行解. 因此 (K_s) 的最优值不可能小于

$$f_s + \min\{c_{j_1} + c_{j_2} \mid j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \in M_s\}, \quad (5-50)$$

从而, 对于 (K_s) , 我们可以取

$$\underline{f}_s = \begin{cases} f_s + \min\{c_j \mid j \in M_s\}, & \text{当 } \max\{V_j^s \mid j \in M_s\} = 0, \\ f_s + \min\{c_{j_1} + c_{j_2} \mid j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \in M_s\}, & \text{否则.} \end{cases} \quad (5-51)$$

例 5-22 用分支定界法求解问题(5-42).

解 第一步, 估计 (K_0) 的下界 $\underline{f}_0$ 和划分 K_0 .

现在 $J_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Q_0 = \{1\}, G_0 = \emptyset$, 于是, $M_0 = \{2, 3, 4, 5\}$.

由例 5-21 式(5-43)知:

$$V_k^0 = \max\{V_j^0 \mid j \in J_0\} = V_3^0 = 0.$$

由式(5-51), 我们取

$$\underline{f}_0 = f_0 + \min\{c_j \mid j \in M_0\} = 0 + 2 = 2.$$

我们用 x_3 来划分 K_0 :

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in K_0, x_3 = 0 \right\}, \quad K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in K_0, x_3 = 1 \right\},$$

相应的松弛问题为 $(\widetilde{K}_1)$ 和 $(\widetilde{K}_2)$.

第二步,求解 $(\widetilde{K}_1)$ 和 $(\widetilde{K}_2)$.

① $(\widetilde{K}_1)$ 的最优解: $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}^0 = (2, -5, 8)^T$, 最优值 $f_1 = f_0 = 0$.

② $(\widetilde{K}_2)$ 的最优解 $\mathbf{X}^2 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{Y}^2 = (1, 1, 8)^T$, 最优值 $f_2 = 5$. $\mathbf{X}^2$ 与 $\mathbf{Y}^2$ 是 (K_0) 的一个可行解, 于是, 取 $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^2$, $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}^2$, $\bar{f} = f_2$. (K_2) 查清.

第三步,估计活问题 (K_1) 的下界 $\underline{f}_1$ 和划分 K_1 .

现在 $J_1 = \{1, 2, 4, 5\}$, $Q_1 = \{1\}$, $G_1 = \{4\}$, 于是 $M_1 = \{2, 5\}$.

对于 $i = 2$, $y_2^1 = -5 < 0$. 我们来分析式(5-49)是否成立. 由于

$$\begin{aligned}\sum_{j \in M_1} \min\{0, a_{2j}\} &= \min\{0, a_{22}\} + \min\{0, a_{25}\} \\ &= \min\{0, -1\} + \min\{0, -2\} \\ &= -1 - 2 = -3 > y_2^1,\end{aligned}$$

所以我们取

$$\underline{f}_1 = \bar{f} = 5.$$

问题 (K_1) 也被查清.

枚举树如图 5-16 所示. 本问题的最优解 $\mathbf{X}^* = (0, 0, 1, 0, 0)^T$, 最优值 $f^* = 5$, 如表 5-47 所示.

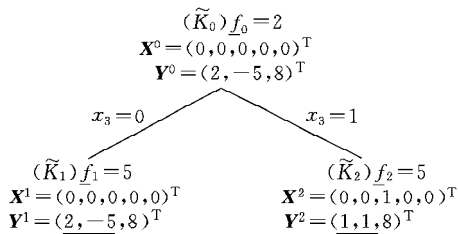


图 5-16

表 5-47

$\mathbf{X}^*$	$\bar{f}$
—	$+\infty$
$(0, 0, 1, 0, 0)^T$	5

5.5.2 分支定界算法

0-1 规划分支定界法的特点是下标大的活问题 (K_S) 先进行划分 ($S = \max\{i \mid i \in L - E\}$), 下面我们给出具体的算法.

① 求解 $(\widetilde{K}_0)$, 得最优解 $\mathbf{X}^0$ 和 $\mathbf{Y}^0$ 为: $x_j^0 = 0$ ($j = 1, \dots, n$), $y_i^0 = b_i$ ($i = 1, \dots, m$); 最优值 $f_0 = 0$.

$y_i^0 \geq 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 都成立否?

若是, 则 $\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0$ 即为最优解, 算法终止.

若否, 则取 $\bar{f} = +\infty$, $L = \{0\}$, $E = \emptyset$, $l = 0$, $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ 转步骤 ②.

② $L - E = \emptyset$?

若是, 则若 $\bar{f} = +\infty$, (K_0) 无可行解, 算法终止;

若 $\bar{f} < +\infty$, $\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*$ 即为 (K_0) 的最优解, $\bar{f}$ 即为 (K_0) 的最优值, 算法终止.

若否,则转步骤③.

③ 取 $S = \max\{i \mid i \in L - E\}$, 对问题 (K_S) 进行下界 $\underline{f}_S$ 估计, 即

$$Q_S = \{j \mid j \in J_S, \text{当 } y_i^S < 0 \text{ 时, 总有 } a_{ij} \geq 0 \ (1 \leq i \leq m)\},$$

$$G_S = \{j \mid c_j + f_S \geq \bar{f}, j \in J_S - Q_S\},$$

$$M_S = J_S - Q_S - G_S,$$

$$M_S = \emptyset?$$

若是,则取 $\underline{f}_S = \bar{f}, E \cup \{S\}$, 转步骤②.

若否,则转步骤④.

④ 对一切 $i \in \{i \mid y_i^S < 0, 1 \leq i \leq m\}$,

$$\sum_{j \in M_S} \min\{0, a_{ij}\} \leq y_i^S \text{ 成立否?}$$

若是,则转步骤⑤.

若否,则取 $\underline{f}_S = \bar{f}, E = E \cup \{S\}$, 转步骤②.

⑤ 对 $j \in M_S$, 计算 $V_j^S = \sum_{i=1}^m \min\{y_j^S - a_{ij}, 0\}$. 求 $\max\{V_j^S \mid j \in M_S\} = V_k^S$.

当 $V_k^S = 0$, 取 $\bar{f}_S = f_S + \min\{c_j \mid j \in M_S\}$;

当 $V_k^S < 0$, 取 $\underline{f}_S = f_S + \min\{c_{j_1} + c_{j_2} \mid j_1 \neq j_2; j_1, j_2 \in M_S\}$.

$$\underline{f}_S \geq \bar{f}?$$

若是,则 $E = E \cup \{S\}$, 转步骤②.

若否,则转步骤⑥.

⑥ 划分 K_S :

$$K_{l+1} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in K_S, x_k = 0 \right\},$$

$$K_{l+2} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in K_S, x_k = 1 \right\},$$

相应的松弛问题为 $(\tilde{K}_{l+1})$ 和 $(\tilde{K}_{l+2})$. 取

$$L = L \cup \{l+1, l+2\}, E = E \cup \{S\},$$

$$J_{l+1} = J_S - \{k\}, J_{l+2} = J_S - \{k\}, \text{转步骤⑦.}$$

⑦ 求解 $(\tilde{K}_{l+1})$ 和 $(\tilde{K}_{l+2})$:

$(\tilde{K}_{l+1})$ 的最优解 $\mathbf{X}^{l+1}, \mathbf{Y}^{l+1}$ 为: $x_j^{l+1} = x_j^S (j = 1, \dots, n), y_i^{l+1} = y_i^S (i = 1, \dots, m)$;
最优值 $f_{l+1} = f_S$.

$(\tilde{K}_{l+2})$ 的最优解 $\mathbf{X}^{l+2}, \mathbf{Y}^{l+2}$ 为: $x_k^{l+2} = 1, x_j^{l+2} = x_j^S (j = 1, \dots, n, j \neq k), y_i^{l+2} = y_i^S - a_{ik} (1 \leq i \leq m)$; 最优值 $f_{l+2} = f_S + c_k$, 转步骤⑧.

⑧ $y_i^{l+2} \geq 0$ 对 $i = 1, \dots, m$ 都成立否?

若是,则转步骤⑨.

若否,则 $l = l + 2$, 转步骤②.

⑨ $f_{l+2} < \bar{f}$?

若是, 则 $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^{l+2}$, $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}^{l+2}$, $\bar{f} = f_{l+2}$, 取

$H = \{h \mid \underline{f}_h \geq \bar{f}, h \in L - E\}$, $E = E \cup H \cup \{l+2\}$, $l = l+2$, 转步骤 ②.

若否, 则 $E = E \cup \{l+2\}$, $l = l+2$, 转步骤 ②.

例 5-23 求解下述 0-1 规划:

$$\begin{aligned} \min f &= 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 8x_5; \\ \text{s. t.} \quad &-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 \leq -2, \\ &2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 0, \\ &x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq -1, \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

解 引入松弛变量 y_1, y_2, y_3 得问题 (K_0) . 删去 (K_0) 中对 $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$) 的要求, 得松弛问题 $(\tilde{K}_0)$. 我们有:

$$\mathbf{X}^0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T, \mathbf{Y}^0 = (-2, 0, -1)^T, f_0 = 0.$$

第一步, 估计 (K_0) 的下界 $\underline{f}_0$ 和划分 K_0 :

此时, $J_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q_0 = \{2, 5\}$, $G_0 = \emptyset$, $M_0 = \{1, 3, 4\}$. 计算

$$\begin{aligned} V_1^0 &= \sum_{i=1}^3 \min\{y_i^0 - a_{i1}, 0\} \\ &= \min\{-2 - (-1), 0\} + \min\{0 - 2, 0\} + \min\{-1 - 0, 0\} \\ &= -1 - 2 - 1 = -4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3^0 &= \sum_{i=1}^3 \min\{y_i^0 - a_{i3}, 0\} \\ &= \min\{-2 - (-5), 0\} + \min\{0 - 3, 0\} + \min\{-1 - (-2), 0\} \\ &= 0 - 3 + 0 = -3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4^0 &= \sum_{i=1}^3 \min\{y_i^0 - a_{i4}, 0\} \\ &= \min\{-2 - (-1), 0\} + \min\{0 - 2, 0\} + \min\{-1 - 1, 0\} \\ &= -1 - 2 - 2 = -5; \end{aligned}$$

$$V_k^0 = \max\{V_1^0, V_3^0, V_4^0\} = \max\{-4, -3, -5\} = V_3^0 = -3.$$

于是, $k = 3$. 由式(5-50)取

$$\begin{aligned} \underline{f}_0 &= f_0 + \min\{c_{j_1} + c_{j_2} \mid j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \in M_0\} \\ &= 0 + 3 + 5 = 8. \end{aligned}$$

我们用变量 x_3 来划分 K_0 , 得问题 (K_1) 和 (K_2) . 它们相应的松弛问题分别为 $(\tilde{K}_1)$ 和 $(\tilde{K}_2)$.

此时, 有 $J_1 = J_2 = \{1, 2, 4, 5\}$.

第二步, 求解 $(\tilde{K}_1)$ 和 $(\tilde{K}_2)$.

① $(\tilde{K}_1)$ 的最优解 $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}^0$, 最优值 $f_1 = f_0$.

② $(\tilde{K}_2)$ 的最优解为: $\mathbf{X}^2 = (0, 0, 1, 0, 0)^T, \mathbf{Y}^2 = (3, -3, 1)^T$, 最优值 $f_2 = 10$.

第三步, 估计 (K_2) 的下界 $\underline{f}_2$ 和划分 K_2 .

现在 $J_2 = \{1, 2, 4, 5\}, Q_2 = \{1, 4\}, G_2 = \emptyset$, 于是 $M_2 = \{2, 5\}$. 计算:

$$\begin{aligned} V_2^2 &= \sum_{i=1}^3 \min\{y_i^0 - a_{i2}, 0\} \\ &= \min\{3 - 3, 0\} + \min\{-3 - (-6), 0\} + \min\{1 - 1, 0\} \\ &= 0 + 0 + 0 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_5^2 &= \sum_{i=1}^3 \min\{y_i^0 - a_{i5}, 0\} \\ &= \min\{3 - 4, 0\} + \min\{-3 - (-2), 0\} + \min\{1 - 1, 0\} \\ &= -1 - 1 + 0 = -2. \end{aligned}$$

$$V_k^2 = \max\{V_2^2, V_5^2\} = \max\{0, -2\} = V_2^2 = 0.$$

于是, $k = 2$, 由式(5-51)取

$$\underline{f}_2 = f_2 + \min\{c_j \mid j \in M_2\} = 10 + 7 = 17.$$

我们用 x_2 来划分 K_2 , 得问题 (K_3) 和 (K_4) . 它们相应的松弛问题为 $(\tilde{K}_3)$ 和 $(\tilde{K}_4)$. 此时, 有 $J_3 = J_4 = \{1, 4, 5\}$.

第四步, 求解 $(\tilde{K}_3)$ 和 $(\tilde{K}_4)$.

① $(\tilde{K}_3)$ 的最优解 $\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^3 = \mathbf{Y}^2$, 最优值 $f_3 = f_2$.

② $(\tilde{K}_4)$ 的最优解:

$$\mathbf{X}^4 = (0, 1, 1, 0, 0)^T, \mathbf{Y}^4 = (0, 3, 0)^T, f_4 = 17.$$

因为 $\mathbf{X}^4, \mathbf{Y}^4$ 已是 (K_0) 的一个可行解, 所以 (K_4) 被查清. 我们取

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^4, \mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}^4, \bar{f} = 17.$$

第五步, 估计活问题 (K_3) 的下界 $\underline{f}_3$ 和划分 K_3 . 此时, 有

$$J_3 = \{1, 4, 5\}, Q_3 = \{1, 4\}, G_3 = \{5\},$$

于是, $M_3 = \emptyset$. 我们取

$$\underline{f}_3 = \bar{f} = 17, (K_3) \text{ 被查清.}$$

第六步, 估计活问题 (K_1) 的下界 $\underline{f}_1$ 和划分 K_1 . 此时, 有

$$J_1 = \{1, 2, 4, 5\}, Q_1 = \{2, 5\}, G_1 = \emptyset.$$

于是, $M_1 = \{1, 4\}$.

对于 $i = 3, y_3^1 = -1 < 0$, 我们来分析式(5-49)成立与否.

因为

$$\sum_{j \in M_1} \min\{0, a_{3j}\} = \min\{0, a_{31}\} + \min\{0, a_{34}\} = \min\{0, 0\} + \min\{0, 1\}$$

$$= 0 + 0 = 0 > y_3^1,$$

所以,我们取

$$\underline{f}_1 = \bar{f} = 17. \quad (K_1) \text{ 被查清.}$$

图 5-17 所给的枚举树中不再存在活问题,所以给定的 0-1 规划问题的最优解和最优值分别为

$$\mathbf{X}^* = (0, 1, 1, 0, 0)^T, f^* = 17,$$

如表 5-48 所示.

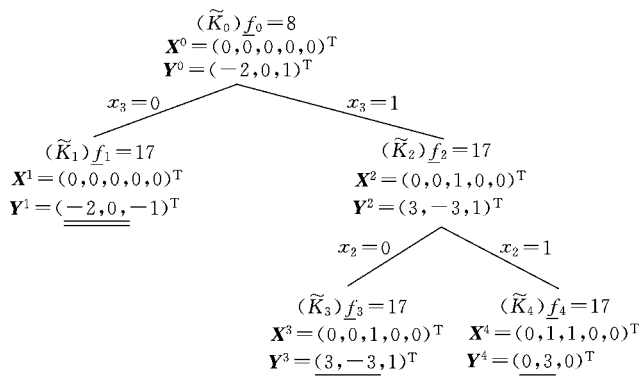


图 5-17

表 5-48

$\mathbf{X}^*$	$\bar{f}$
—	$+\infty$
$(0, 1, 1, 0, 0)^T$	17

* § 5.6 有界技术在(AIP)分支定界法中的应用

在用分支定界法求解纯整数规划的过程中,我们看到,随着枚举树不断的生长,一些划分变量的上下界在起着变化,且子问题的单纯形表随着划分变量上下界约束条件不断的加入而变得越来越庞大,基本变量个数越来越多.本节要介绍的有界技术,将可以使分支定界法在求解过程中,所有单纯形表的基本变量个数始终保持所给问题中 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的方程个数 m ,而给计算带来许多方便.

5.6.1 增广单纯形表

现给变量有上下界的线性规划记为 (LP_{gh}) :

$$\begin{aligned} \min f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}; \\ \text{s. t.} \quad A\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\ g &\leq \mathbf{X} \leq h. \end{aligned} \quad (5-52)$$

其中 $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_j, \dots, g_n)^T$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_j, \dots, h_n)^T$, $A, \mathbf{b}, \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{X}$ 如标准型线性规划 (LP) 所给. 现在我们讨论的有界技术是在不扩大系数矩阵 A 的条件下(基本解中基本变量个数仍为 m)来寻找问题(5-52)的最优解.

假设问题(5-52)的基本变量指标集 I_B 对应的基 $B = (A_{B_1}, \dots, A_{B_m})$, 我们引进下

列定义.

增广基本解——若 $X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_D \end{bmatrix}$ 为 $AX = b$ 的一个解, 且对 $j \in I_D$, 有 $x_j = h_j$ 或 g_j , 则称 X 为问题 (LP_{gh}) 关于基 B 的一个增广基本解.

增广基本可行解——若基本解 X 有 $g_B \leq X_B \leq h_B$ 成立, 则称 X 为问题 (LP_{gh}) 关于基 B 的一个增广基本可行解.

我们知道, 用单纯形法求解 (LP) 时, 在基本解中非基本变量都取为零, 而在增广基本解中非基本变量都取 g_j 或 h_j , 所以, 为了对问题 (LP_{gh}) 建立新的算法, 我们设法对 x_j 进行变换, 使变换后的变量在 $j \in I_D$ 时, 在基本解中取值为零. 令

$$\begin{aligned} x_j^+ &= x_j - g_j, \\ x_j^- &= h_j - x_j. \end{aligned} \quad (5-53)$$

这样, 对增广基本解来说, 当 $j \in I_D$ 时, 出现两种情况:

- (1) 若 $x_j = g_j$, 我们即将该 x_j 变换成 $x_j = x_j^+ + g_j$, 有 $x_j^+ = 0$;
- (2) 若 $x_j = h_j$, 我们即将该 x_j 变换成 $x_j = h_j - x_j^-$, 有 $x_j^- = 0$.

现在假设对每个 $x_j (j=1, \dots, n)$, 都已指定了变换指标 d_j :

$$d_j = \begin{cases} +, & \text{当 } x_j \text{ 变换为 } x_j^+, \\ -, & \text{当 } x_j \text{ 变换为 } x_j^-. \end{cases} \quad (5-54)$$

令

$$d = (d_1, \dots, d_j, \dots, d_n)^T. \quad (5-55)$$

由式(5-53)可知, 若 $g_j \leq x_j \leq h_j$, 则有

$$0 \leq x_j^{d_j} \leq h_j - g_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5-56)$$

令指标集

$$\begin{aligned} I_D^+ &= \{j \mid j \in I_D, d_j = +\}, \\ I_D^- &= \{j \mid j \in I_D, d_j = -\}, \end{aligned} \quad (5-57)$$

我们知道, (LP) 关于基 B 的单纯形表 $T(B)$ 所给的方程组(下述 $(B^{-1}A_{\cdot j})_i$ 表示向量 $B^{-1}A_{\cdot j}$ 之第 i 个分量)

$$\begin{cases} x_{B_i} + \sum_{j \in I_D} (B^{-1}A_{\cdot j})_i x_j = (B^{-1}b)_i, & i = 1, \dots, m, \\ w + \sum_{j \in I_D} (c_j - C_B^T B^{-1}A_{\cdot j}) x_j = -C_B^T B^{-1}b \end{cases} \quad (5-58)$$

是方程组

$$\begin{cases} AX = b, \\ w + C^T X = 0 \end{cases} \quad (5-59)$$

的变形. 那么, 对于问题 (LP_{gh}) 来说, 当基 B 及变换指标向量 d (5-55) 确定后, 我们可将方程组(5-59)的变形(5-58)配置成下列形式(具体的配置过程我们不再列出):

$$\begin{aligned}
& x_{B_i}^+ + \sum_{j \in I_D^-} [-(B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})] x_j^- + \sum_{j \in I_D^+} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i x_j^+ \\
&= (B^{-1} \mathbf{b})_i - \sum_{j \in I_D^-} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i h_j - \sum_{j \in I_D^+} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i g_j - g_{B_i}, \quad (5-60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_{B_i}^- + \sum_{j \in I_D^-} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i x_j^- + \sum_{j \in I_D^+} [-(B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i] x_j^+ \\
&= h_{B_i} - (B^{-1} \mathbf{b})_i - \sum_{j \in I_D^-} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i h_j + \sum_{j \in I_D^+} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i g_j, \quad (5-61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& w + \sum_{j \in I_D^-} [-(c_j - \mathbf{C}_B^T B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})] x_j^- + \sum_{j \in I_D^+} (c_j - \mathbf{C}_B^T B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j}) x_j^+ \\
&= -[\mathbf{C}_B^T (B^{-1} \mathbf{b}) - \sum_{j \in I_D^-} B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j} h_j] - \sum_{j \in I_D^+} B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j} g_j - \sum_{j \in I_D^-} c_j h_j - \sum_{j \in I_D^+} c_j g_j. \quad (5-62)
\end{aligned}$$

上面式子中的有关量之间的关系用表 5-49 ,表 5-50 ,表 5-51 来表示.

表 5-49

	$\bar{b}_i$
$x_{B_i}^+$	$(B^{-1} \mathbf{b})_i - \sum_{j \in I_D^-} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i h_j - \sum_{j \in I_D^+} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i g_j - g_{B_i}$
$x_{B_i}^-$	$h_{B_i} - (B^{-1} \mathbf{b})_i + \sum_{j \in I_D^-} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i h_j + \sum_{j \in I_D^+} (B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i g_j$

(5-63)

表 5-50

y_{ij}	x_j^+	x_j^-
$x_{B_i}^+$	$(B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i$	$-(B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i$
$x_{B_i}^-$	$-(B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i$	$(B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j})_i$

(5-64)

表 5-51

	x_j^+	x_j^-
r_j	$c_j - \mathbf{C}_B^T B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j}$	$-[c_j - \mathbf{C}_B^T B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j}]$

(5-65)

由

$$f_0 = \mathbf{C}_B^T [B^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in I_D^-} B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j} h_j - \sum_{j \in I_D^+} B^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j} g_j] + \sum_{j \in I_D^-} c_j h_j + \sum_{j \in I_D^+} c_j g_j, \quad (5-66)$$

我们得方程组：

$$\begin{aligned}
& x_{B_i}^{d_{B_i}} + \sum_{j \in I_D} y_{ij} x_j^{d_j} = \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m; \\
& w + \sum_{j \in I_D} r_j x_j^{d_j} = -f_0. \quad (5-67)
\end{aligned}$$

从而,我们得问题(LP_{g_h})关于基 B 及指标集 d 的增广单纯形表 $T(B, d)$ 如表 5-52 所示.

表 5-52

X_B^d	...	$x_{B_i}^{d_{B_i}}$	...	$x_j^{d_j}$	...	$\bar{b}$
$x_{B_1}^{d_{B_1}}$	...	0	...	y_{1j}	...	$\bar{b}_1$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$x_{B_i}^{d_{B_i}}$	...	1	...	y_{ij}	...	$\bar{b}_i$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$x_{B_m}^{d_{B_m}}$	...	0	...	y_{mj}	...	$\bar{b}_m$
r	...	r_{B_i}	...	r_j	...	$-f_0$
d	...	d_{B_i}	...	d_j	...	

其中 $X_B^d = (x_{B_1}^{d_{B_1}}, \dots, x_{B_m}^{d_{B_m}})^T$. 若对 $j \in I_D$, 令 $x_j^{d_j} = 0$, 则得

$$x_{B_i}^{d_{B_i}} = \bar{b}_i,$$

相应的基本解 X 为

$$x_j = \begin{cases} g_j, & d_j = + \\ h_j, & d_j = - \end{cases}, \quad j \in I_D,$$

$$x_{B_i} = \begin{cases} \bar{b}_i + g_{B_i}, & d_{B_i} = +, \\ h_{B_i} - \bar{b}_i, & d_{B_i} = -, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m,$$

186

该基本解 X 的目标函数值 $f(X) = f_0$.

若 $0 \leq \bar{b}_i \leq h_{B_i} - g_{B_i}$ 对 $i = 1, \dots, m$ 皆成立, 则该基本解即为问题 (LP_{gh}) 关于 B 和 d 的基本可行解. 我们有下列定理.

定理 5-1 (最优性条件) 设 B 为问题 (LP_{gh}) 的一个基 d 为给定的变换指标向量. 如果单纯形表 $T(B, d)$ 中 $0 \leq \bar{b}_i \leq h_{B_i} - g_{B_i}$ ($i = 1, \dots, m$) 和 $r_j \geq 0$ ($j \in I_D$) 都成立, 则 $T(B, d)$ 对应的基本可行解为问题 (LP_{gh}) 的一个最优解.

如果线性规划 (LP_{gh}) 中关于变量 x_j 的界限为 $g_j \leq x_j < +\infty$, 则 x_j 的变换指标 d_j 只能取“+”; 若关于变量 x_j 的界限为 $-\infty < x_j \leq h_j$, 则 d_j 只能取“-”. 对于增广单纯形表, 我们讨论的问题 (LP_{gh}) 是不允许 $h_j = +\infty, g_j = -\infty$ 同时出现的.

例 5-24 给定线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min f &= -3x_1 - x_3; \\ \text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 &= 6, \\ 2 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4, 1 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq x_4 \leq 12, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

现取 $B = (A_{.2}, A_{.3}), d = (-, -, +, +, +)^T$. 求此线性规划关于 B, d 的增广单纯形表和基本解.

解 现在

$$B = (A_{.2}, A_{.3}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$I_D = \{1, 4, 5\}, \quad I_D^- = \{1\}, \quad I_D^+ = \{4, 5\},$$

$$B^{-1}A_{.1} = (0, 1)^T, \quad B^{-1}A_{.4} = (1/4, 1/2)^T,$$

$$B^{-1}A_{.5} = (-1/4, 1/2)^T, \quad B^{-1}b = (1, 8)^T.$$

由式(5-64)可得:

$$y_{11} = (B^{-1}A_{.1})_1 = 0, \quad y_{21} = -(B^{-1}A_{.1})_2 = -1, \quad y^1 = (0, -1)^T;$$

$$y_{14} = -(B^{-1}A_{.4})_1 = -1/4, \quad y_{24} = (B^{-1}A_{.4})_2 = 1/2, \quad y^4 = (-1/4, 1/2)^T;$$

$$y_{15} = -(B^{-1}A_{.5})_1 = 1/4, \quad y_{25} = (B^{-1}A_{.5})_2 = 1/2, \quad y^5 = (1/4, 1/2)^T.$$

由式(5-63)可得:

$$\bar{b}_1 = h_2 - (B^{-1}b)_1 + (B^{-1}A_{.1})_1 h_1 + (B^{-1}A_{.4})_1 g_4 + (B^{-1}A_{.5})_1 g_5$$

$$= 4 - 1 + 0 \times 4 + 1/4 \times 0 + (-1/4) \times 0 = 3,$$

$$\bar{b}_2 = (B^{-1}b)_2 - (B^{-1}A_{.1})_2 h_1 - (B^{-1}A_{.4})_2 g_4 - (B^{-1}A_{.5})_2 g_5 - g_3$$

$$= 8 - 1 \times 4 - 1/2 \times 0 - 1/2 \times 0 - 1 = 3.$$

由式(5-65)可得:

$$r_1 = -(c_1 - C_B^T B^{-1}A_{.1}) = 2; \quad r_4 = c_4 - C_B^T B^{-1}A_{.4} = 1/2;$$

$$r_5 = c_5 - C_B^T B^{-1}A_{.5} = 1/2.$$

187

由(5-66)可得:

$$f_0 = C_B^T (B^{-1}b - B^{-1}A_{.1}h_1 - B^{-1}A_{.4}g_4 - B^{-1}A_{.5}g_5) + c_1 h_1 + c_4 g_4 + c_5 g_5$$

$$= -16.$$

从而,本问题关于给定的 B, d 的增广单纯形表如表 5-53 所示(在今后的 $T(B, d)$ 中,我们省略 d 行).

表 5-53

X_B^d	x_1^-	x_2^-	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_2^-	0	1	0	-1/4	1/4	3
x_3^+	-1	0	1	1/2	1/2	3
r	2	0	0	1/2	1/2	16
d	-	-	+	+	+	

若取 $x_1^- = 0, x_4^+ = 0, x_5^+ = 0$, 则由表 5-53 可知: $x_2^- = 3, x_3^+ = 3$, 则本问题关于 $B = (A_{.2}, A_{.3})$ 和 $d = (-, -, +, +, +)^T$ 的基本解 X 为

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0,$$

相应的目标函数值 $f(X) = f_0 = -16$.

下面,我们来讨论这样一个问题:如果我们已获得问题 (LP_{gh}) 关于 B, d 的增广单纯形表 $T(B, d)$,那么当某个基本变量 x_{B_i} 的界限有变动时,相应的 $T(B, d)$ 将会有哪些改变?

如果 x_{B_i} 的界限由 $g_{B_i} \leq x_{B_i} \leq h_{B_i}$ 变为 $g'_{B_i} \leq x_{B_i} \leq h_{B_i}$ ($g'_{B_i} \leq h_{B_i}$),则由式(5-63)至式(5-66)可知,这样的变动只会对 $T(B, d)$ 中 $\bar{b}_i$ 这一项信息发生影响.若将变动后的 $\bar{b}_i$ 记为 $\bar{b}'_i$,则

$$\bar{b}'_i = \begin{cases} \bar{b}_i, & \text{当 } d_{B_i} = -, \\ \bar{b}_i + g_{B_i} - g'_{B_i}, & \text{当 } d_{B_i} = +. \end{cases} \quad (5-68)$$

如果 x_{B_i} 的界限由 $g_{B_i} \leq x_{B_i} \leq h_{B_i}$ 变为 $g_{B_i} \leq x_{B_i} \leq h'_{B_i}$ ($g_{B_i} \leq h'_{B_i}$),则同样地仅影响 $T(B, d)$ 中 $\bar{b}_i$ 这一项信息,有:

$$\bar{b}'_i = \begin{cases} \bar{b}_i - h_{B_i} + h'_{B_i}, & \text{当 } d_{B_i} = -, \\ \bar{b}_i, & \text{当 } d_{B_i} = +. \end{cases} \quad (5-69)$$

5.6.2 有界变量的对偶单纯形法

定理 5-2 设 B 为问题 (LP_{gh}) 的一个基, d 为一个变换指标向量,且在增广单纯形表 $T(B, d)$ 中有 $r_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$). 如果存在 k ($1 \leq k \leq m$),使得 $\bar{b}_k < 0, y_{kj} \geq 0$ ($j \in I_D$),则问题 (LP_{gh}) 没有可行解.

下面我们给出有界变量的对偶单纯形法.

① 选取问题 (LP_{gh}) 的一个初始基 B 和初始的变换指标向量 d (在相应的增广单纯形表 $T(B, d)$ 中有 $r_j \geq 0, j = 1, \dots, n$),定 I_B, I_D, I_D^+ 及 I_D^- ,计算出 $T(B, d)$.

② 依次检查 $T(B, d)$ 中 $\bar{b}_i \leq h_{B_i} - g_{B_i}$ ($i = 1, \dots, m$)是否均成立?

若是,则转步骤③.

若否,则若 $\bar{b}_i > h_{B_i} - g_{B_i}$,那么取

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= h_{B_i} - g_{B_i} - \bar{b}_i, \quad y_{ij} = -y_{ij} \quad (j \in I_D), \\ d_{B_i} &= -d_{B_i} \quad \text{转步骤 ②}. \end{aligned}$$

③ $\bar{b} \geq 0$?

若是,则关于 B, d 的基本解即为问题 (LP_{gh}) 的最优解, f_0 即为最优值,算法终止.

若否,则定指标 k :取 $\bar{b}_k = \min\{\bar{b}_i \mid 1 \leq i \leq m\}$.

④ $y_{kj} \geq 0$ ($j \in I_D$)是否均成立?

若是,则问题 (LP_{gh}) 无可行解,算法终止.

若否,则指标 t :取 $\frac{r_t}{y_{kt}} = \max\left\{\frac{r_j}{y_{kj}} \mid y_{kj} < 0, j \in I_D\right\}$.

⑤ 以 y_{kt} 为枢轴元素进行一次转轴,修改 I_B, I_D, I_D^+, I_D^- ,转步骤②.

例 5-25 求解线性规划:

$$\min f = 3x_1 + \frac{5}{2}x_2;$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 40, \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 50, \\ & 0 \leq x_1 \leq 16, \quad 0 \leq x_2 \leq 3, \quad x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

解 取初始基 $B = (A_{\cdot 3}, A_{\cdot 4})$, 初始变换指标向量 $d = (+, +, +, +)^T$, 得初始增广单纯形表 $T(B, d)$ 如表 5-54 所示.

因为

$$h_{B_1} - g_{B_1} = h_3 - g_3 = +\infty, \quad h_{B_2} - g_{B_2} = h_4 - g_4 = +\infty,$$

所以

$$\bar{b}_1 < h_{B_1} - g_{B_1}, \quad \bar{b}_2 < h_{B_2} - g_{B_2},$$

故由算法步骤②转入步骤③, 取 $k = 2$, 再由步骤④确定 $y_{kt} = y_{21}$, 以 y_{21} 为枢轴元素进行转轴得新的增广单纯形表, 如表 5-55 所示.

表 5-54

X_B^{dB}	x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_4^+	$\bar{b}$
x_3^+	-2	-4	1	0	-40
x_4^+	(-3)	-2	0	1	-50
r	3	5/2	0	0	0

表 5-55

X_B^{dB}	x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_4^+	$\bar{b}$
x_3^+	0	-8/3	1	-2/3	-20/3
x_1^+	1	2/3	0	-1/3	50/3
r	0	1/2	0	1	-50

在表 5-55 中,

$$\bar{b}_2 = \frac{50}{3} > h_{B_2} - g_{B_2} = h_1 - g_1 = 16 - 0 = 16,$$

于是执行步骤②, 将 x_1 的变换指标 d_{B_2} 由“+”改变为“-”, 得到增广单纯形表表 5-56. 再由算法步骤③和④, 确定 $y_{kt} = y_{12}$, 以 y_{12} 为枢轴元素进行转轴, 得增广单纯形表, 如表 5-57 所示.

表 5-56

X_B^{dB}	x_1^-	x_2^+	x_3^+	x_4^+	$\bar{b}$
x_3^+	0	(-8/3)	1	-2/3	-20/3
x_1^-	1	-2/3	0	1/3	-2/3
r	0	1/2	0	1	-50

表 5-57

X_B^{dB}	x_1^-	x_2^+	x_3^+	x_4^+	$\bar{b}$
x_2^+	0	1	-3/8	1/4	5/2
x_1^-	1	0	-1/4	1/2	1
r	0	0	3/16	7/8	-205/4

由算法步骤②和③知, 本问题已得最优解:

$$x_1^- = 1, \quad x_2^+ = 5/2, \quad x_3^+ = 0, \quad x_4^+ = 0,$$

即

$$x_1^* = 16 - 1 = 15, \quad x_2^* = 5/2, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 0,$$

最优值 $f^* = 205/4$.

5.6.3 有界技术在(AIP)分支定界法中的应用

例 5-26 用有界技术求解例 5-19.

解 由例 5-19 及表 5-36 知,问题 (K_0) 的松弛问题 $(\tilde{K}_0)$ 的最优基 $B = (A_{.1}, A_{.2})$, 若取 $d = (+, +, +, +, +)^T$ 并注意到现在变量 $x_j (j = 1, \dots, 5)$ 的下界都为零, 所以 $(\tilde{K}_0)$ 关于 B, d 的增广单纯形表为表 5-58. $(\tilde{K}_0)$ 的最优解 $X^0 = (2/5, 19/5, 0, 0, 0)^T$, 最优值 $f_0 = 71/5$ 取 $\underline{f}_0 = 15$.

表 5-58

X_B^{dB}	x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_1^+	1	0	-1/5	1/5	-2/5	2/5
x_2^+	0	1	8/5	-3/5	1/5	19/5
r	0	0	3/5	2/5	11/5	-71/5

(2) 用 x_2 划分 K_0 :

$$K_1 = \{X \mid X \in K_0, x_2 \leq 3\}, \quad K_2 = \{X \mid X \in K_0, x_2 \geq 4\},$$

我们获得两个(AIP):

(K_1)

$$\begin{aligned} \min f &= 7x_1 + 3x_2 + 4x_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ &3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 5, \\ &0 \leq x_2 \leq 3, \text{ 整数}, \\ &x_j \geq 0, \text{ 整数 } j = 1, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

(K_2)

$$\begin{aligned} \min f &= 7x_1 + 3x_2 + 4x_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ &3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 5, \\ &x_2 \geq 4, \text{ 整数}, \\ &x_j \geq 0, \text{ 整数 } j = 1, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

相应的松弛问题为 $(\tilde{K}_1)$ 和 $(\tilde{K}_2)$:

$$\tilde{K}_1 = \{X \mid X \in \tilde{K}_0, x_2 \leq 3\}, \quad \tilde{K}_2 = \{X \mid X \in \tilde{K}_0, x_2 \geq 4\}.$$

① 求解 $(\tilde{K}_1)$. 现在 x_2 的上界由 $+\infty$ 变为 3, 且 $d_2 = +$, 则由式(5-69)知, 表 5-58 仍为 $(\tilde{K}_1)$ 的增广单纯形表. 我们从表 5-58 出发, 用有界变量的对偶单纯形法继续求解.

由表 5-58 知, $\bar{b}_2 = 19/5 > h_2 - g_2 = 3 - 0 = 3$, 执行算法步骤②, 将 x_2 的变换指标 d_2 由“+”改变为“-”, 得表 5-59, 再转轴得表 5-60. 得最优解: $x_1^+ = 1/2, x_2^- = 0, x_3^+ = 1/2, x_4^+ = 0, x_5^+ = 0$, 即最优解 $X^1 = (1/2, 3, 1/2, 0, 0)^T$, 最优值 $f_1 = 29/2$. 取 $\underline{f}_1 = 15$.

表 5-59

X_B^{dB}	x_1^+	x_2^-	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_1^+	1	0	-1/5	1/5	-2/5	2/5
x_2^-	0	1	(-8/5)	3/5	-1/5	-4/5
r	0	0	3/5	2/5	11/5	-71/5

表 5-60

$\mathbf{X}_B^{dB}$	x_1^+	x_2^-	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_1^+	1	-1/8	0	1/8	-3/8	1/2
x_3^+	0	-5/8	1	-3/8	1/8	1/2
r	0	3/8	0	5/8	17/8	-29/2

② 解 $(\tilde{K}_2)$. 现在 x_2 的下界由 $g_2 = 0$ 变为 $g'_2 = 4$, 且 $d_2 = +$, 则由式(5-68)知, 应将表 5-58 中的 $\bar{b}_2$ 修改成

$$\bar{b}'_2 = \bar{b}_2 + g_2 - g'_2 = \frac{19}{5} + 0 - 4 = -\frac{1}{5},$$

我们即得 $(\tilde{K}_2)$ 的初始增广单纯形表如表 5-61 所示.

表 5-61

$\mathbf{X}_B^{dB}$	x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_1^+	1	0	-1/5	1/5	-2/5	2/5
x_2^+	0	1	8/5	(-3/5)	1/5	-1/5
r	0	0	3/5	2/5	11/5	-71/5

对表 5-61 以 y_{24} 为枢轴元素进行转轴得表 5-62. 得 $(\tilde{K}_2)$ 的最优解 $\mathbf{X}^2 = (1/3, 4, 0, 1/3, 0)^T$, 最优值 $f_2 = 43/3$, 取 $\underline{f}_2 = 15$.

表 5-62

$\mathbf{X}_B^{dB}$	x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_1^+	1	1/3	1/3	0	-1/3	1/3
x_4^+	0	-5/3	-8/3	1	-1/3	1/3
r	0	2/3	5/3	0	7/3	-43/3

(3) 用 x_1 划分 K_2 :

$$K_3 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_2, x_1 \leq 0\}, \quad K_4 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_2, x_1 \geq 1\},$$

相应地,

$$\tilde{K}_3 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \tilde{K}_2, x_1 \leq 0\}, \quad \tilde{K}_4 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \tilde{K}_2, x_1 \geq 1\}.$$

① 求解 $(\tilde{K}_3)$. 现在 x_1 的上界由 $+\infty$ 变为 0, 且 $d_1 = +$, 则由式(5-69)知, 表 5-62 仍为 $(\tilde{K}_3)$ 的增广单纯形表. 我们从表 5-62 出发, 用有界变量的对偶单纯形法继续求解.

由表 5-62 知, $\bar{b}_1 = \frac{1}{3} > h_1 - g_1 = 0 - 0 = 0$, 执行算法步骤②, 将 x_1 的变换指标 d_1

由“+”改变成“-”, 得表 5-63, 再转轴得表 5-64. 得 $(\tilde{K}_3)$ 的最优解: $x_1^- = 0, x_2^+ = 1, x_3^+ = 0, x_4^+ = 2, x_5^+ = 0$. 即最优解 $\mathbf{X}^3 = (0, 5, 0, 2, 0)^T$, 最优值 $f_3 = 15$.

表 5-63

X_B^{dB}	x_1^-	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_1^-	1	$(-1/3)$	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$
x_4^+	0	$-5/3$	$-8/3$	1	$-1/3$	$1/3$
r	0	$2/3$	$5/3$	0	$7/3$	$-43/3$

表 5-64

X_B^{dB}	x_1^-	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_2^+	-3	1	1	0	-1	1
x_4^+	-5	0	-1	1	-2	2
r	2	0	1	0	3	-15

因为 $X^3 \in K_3$, 故取定界 $\bar{f} = 15$, $X^* = X^3$. 问题 (K_3) 查清.

由于问题 (K_1) 的下界 $\underline{f}_1 = 15 = \bar{f}$, 因此问题 (K_1) 也查清.

② 求解 $(\tilde{K}_4)$. 现在 x_1 的下界由 $g_1 = 0$ 变为 $g'_1 = 1$, 且 $d_1 = +$, 则由式(5-68)知, 应将表 5-62 中的 $\bar{b}_1$ 修改成

$$\bar{b}'_1 = \bar{b}_1 + g_1 - g'_1 = 1/3 + 0 - 1 = -2/3,$$

我们即得 $(\tilde{K}_4)$ 的初始增广单纯形表, 如表 5-65 所示.

表 5-65

X_B^{dB}	x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_1^+	1	$1/3$	$1/3$	0	$(-1/3)$	$-2/3$
x_4^+	0	$-5/3$	$-8/3$	1	$-1/3$	$1/3$
r	0	$2/3$	$5/3$	0	$7/3$	$-43/3$

对表 5-65 以 y_{15} 为枢轴元素进行转轴而得表 5-66. 得 $(\tilde{K}_4)$ 的最优解 $X^4 = (1, 4, 0, 1, 2)^T$, 最优值 $f_4 = 19$.

表 5-66

X_B^{dB}	x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_5^+	-3	-1	-1	0	1	2
x_4^+	-1	-2	-3	1	0	1
r	7	3	4	0	0	-19

由于 $f_4 > \bar{f}$, (K_4) 成为没有希望的问题, (K_4) 查清.

枚举树如图 5-14 所示. (K_0) 的最优解和最优值分别为

$$X^* = (0, 5, 0, 2, 0)^T, \quad f^* = 15.$$

§ 5.7 最优分配问题

在管理工作中,我们经常会碰到下列分配问题:

例 5-27 n 台机器加工 n 个零件,机器 A_i 加工零件 B_j 的时间为 c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$). 现求一个零件加工分配方案:每台机器加工一个零件,一个零件仅需一台机器加工,而使总加工时间最少.

类似的问题有: n 个人从事 n 项工作以使总成本最低, n 辆车派往 n 个目的地以使总运输距离最少……我们统称这类问题为最优分配问题.

矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 称为费用矩阵. 矩阵 C 的元素 $c_{ij} \geq 0$. 一个最优分配问题的给出,是指给出了矩阵 C . 以后简记该问题为 (C) .

对例 5-27 这类最优分配问题我们不难建立下列整数规划模型:

$$\text{假设} \quad x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{机器 } A_i \text{ 加工零件 } B_j, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

则得 0-1 规划模型:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ &x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5-70)$$

它是运输问题的特例,对它当然可以用已为我们熟知的表上作业法来求解. 但是由于迭代过程的每一步都出现退化情况而使计算显得太麻烦. 为此,在本章我们介绍一个更为简便的方法,通常称为匈牙利方法.

5.7.1 匈牙利方法

匈牙利方法的给出基于定理 5-1.

定理 5-3 若对费用矩阵 $C = (c_{ij})$ 的第 k 行或第 k 列的元素减去同一数值 d , 则对于分配问题 (C) 得到一个等价问题 $(\hat{C})$:

$$\hat{C} = (\hat{c}_{ij})_{n \times n},$$

$$\text{其中} \quad \hat{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - d, & i = k, \\ c_{ij}, & i \neq k, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n, \quad (5-71)$$

或

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - d, & j = k, \\ c_{ij}, & j \neq k, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5-72)$$

证 不妨设 $\hat{c}_{ij}$ 由式(5-71)给出,问题 $(\hat{C})$ 的可行解的目标函数

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \hat{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^n \hat{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \hat{c}_{kj} x_{kj} \\ &= \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n (c_{kj} - d) x_{kj} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - d \sum_{j=1}^n x_{kj} = f - d. \end{aligned}$$

问题 (C) 与 $(\hat{C})$ 具有相同的可行域,对同一可行解,目标函数相差一个常数,所以,问题 (C) 与 $(\hat{C})$ 具有相同的最优解,它们是两个等价的问题.

显然,上述问题 (C) 的最优值 f^* 与问题 $(\hat{C})$ 的最优值 f_1^* 之间有如下关系式:

$$f^* = f_1^* + d. \quad (5-73)$$

约简矩阵——对矩阵 C 用式(5-71)或式(5-72)进行一系列变换,得矩阵 $\hat{C} = (\hat{c}_{ij})$ ($\hat{c}_{ij} \geq 0$),则称矩阵 $\hat{C}$ 为矩阵 C 的约简矩阵.

独立零——若矩阵 C 的约简矩阵 $\hat{C}$ 中含有一定数量的零元素,则矩阵 $\hat{C}$ 中位于不同行不同列的零元素称为独立零.

根据定理 5-3,我们可以把求解问题 (C) 变换成求解问题 $(\hat{C})$:如果由矩阵 C 所得的约简矩阵 $\hat{C}$ 含有较多的零元素,且能在这些零元素中选择到 n 个独立零,那么,我们让这 n 个独立零对应的 $x_{ij} = 1$,其余的 $x_{ij} = 0$,则它们就是问题 $(\hat{C})$ 的最优解(因为 $\hat{c}_{ij} \geq 0$),而最优值为零,当然它们也是问题 (C) 的最优解.

问题是如何寻求这类约简矩阵?下面结合求解例 5-28 来介绍匈牙利方法的具体步骤.

例 5-28 一个“5 台机器、5 个零件”的最优分配问题的费用矩阵由矩阵(5-74)给出:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 11 & 20 & 13 \\ 15 & 20 & 8 & 14 & 15 \\ 6 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 19 & 11 & 14 & 19 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 20 & 11 \end{pmatrix}, \quad (5-74)$$

试求最优分配.

解 步骤①:对矩阵 C 进行约简.

① 对矩阵 C 逐行约简:对矩阵 C 第 i 行选定最小元素 d_i (称为约简常量) ($i = 1, \dots, n$),从该行的每个元素中减去它,得到矩阵 $\hat{C}$.

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 11 & 20 & 13 \\ 15 & 20 & 8 & 14 & 15 \\ 6 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 19 & 11 & 14 & 19 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 20 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5}} \hat{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 13 & 6 \\ 7 & 12 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 8 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

② 对矩阵 $\hat{C}$ 逐列约简:对矩阵 $\hat{C}$ 第 j 列选定最小元素 u_j (称为约简常量),从该列的每

个元素中减去它,得到约简矩阵 $\hat{C}$.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 13 & 6 \\ 7 & 12 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 8 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 12 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 10 & 4 \\ 5 & 12 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

$2 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 | u_j$

可见,在新约简矩阵 $\hat{C}$ 中每行每列都至少含有一个零元素.此时,约简常量之和

$$\sum_{i=1}^5 d_i + \sum_{j=1}^5 u_j = 7 + 8 + 4 + 11 + 8 + 2 + 0 + 0 + 3 + 2 = 45.$$

步骤②:在约简矩阵 $\hat{C}$ 中选择最多个数的独立零(运算过程中用带括号的零表示独立零).若独立零的个数恰为 n ,则令独立零对应的 $x_{ij} = 1$,其余变量为零,即得问题(C)的最优解.若独立零个数小于 n ,则进行步骤③.

例如,对上述矩阵 $\hat{C}$,可以选择到的最多个数的独立零如矩阵(5-75)所示.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 3 & (0) & 4 & 10 & 4 \\ 5 & 12 & (0) & 3 & 5 \\ (0) & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5-75)$$

步骤③:用最少的覆盖线覆盖约简矩阵 $\hat{C}$ 中的全部零元素.寻找未覆盖的元素中的最小数 ϵ (它总是一个正数),再进行矩阵变换,其变换规则为

- ① 未覆盖的元素减去 ϵ ;
- ② 一次覆盖的元素照旧;
- ③ 二次覆盖的元素增加 ϵ .

这样,又得到一个新的约简矩阵 $\hat{C} = (\hat{c}_{ij})$,再转步骤②.

例如矩阵(5-75)的最少覆盖线为3,它恰等于矩阵(5-75)的最多独立零的个数,如矩阵(5-76)所示.

$$\begin{pmatrix} 3 & (0) & 4 & 10 & 4 \\ -5 & 12 & (0) & 3 & 5 \\ -(0) & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5-76)$$

我们有下列定理.

定理 5-4 在约简矩阵 $\hat{C}$ 中能选择到的独立零的最多个数,恰等于覆盖矩阵 $\hat{C}$ 中所有零元素的最少覆盖线.

在矩阵(5-76)中, $\epsilon = 1$,为了说明变换规则的由来,我们分步变换矩阵(5-76).

对约简矩阵(5-76)中未有覆盖线的行的所有元素都减去 $\epsilon = 1$, 得下列矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5-77)$$

在上述矩阵(5-77)第 2 列(在矩阵(5-76)中有列覆盖线)中出现了负数, 对该列元素加上 $\epsilon = 1$, 得约简矩阵 $\hat{C}$:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 9 & 3 \\ 5 & 13 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad (5-78)$$

如果直接按变换规则来变换矩阵(5-76), 所得结果即为矩阵(5-78).

由矩阵(5-76)变换为矩阵(5-78)的过程可见: 若覆盖矩阵零元素的覆盖线数为 m , 其中行覆盖线数为 m_1 , 列覆盖线数为 m_2 , 则此时约简常量为

$$(n - m_1)\epsilon - m_2\epsilon = (n - m_1)\epsilon - (m - m_1)\epsilon = (n - m)\epsilon.$$

196
■■■■■

现在对矩阵(5-76)来说, $n = 5$, $m = 3$, $\epsilon = 1$, 故由矩阵(5-76)变换为矩阵(5-78), 其约简常量为 $(5 - 3) \times 1 = 2$.

对矩阵(5-78)重复步骤② 选择的最多独立零与最少覆盖线如矩阵(5-79):

$$\begin{pmatrix} 2 & (0) & 3 & 9 & 3 \\ -5 & 13 & (0) & 3 & 5 \\ -(0) & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 & 8 & (0) \end{pmatrix}. \quad (5-79)$$

由于矩阵(5-79)中最多独立零个数 4 小于 5, 因此对其重复步骤③, 取 $\epsilon = 2$, 得矩阵(5-80), 此时约简常量 $(n - m)\epsilon = (5 - 4) \times 2 = 2$,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} (0) & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 5 & 15 & (0) & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & (0) & 0 \\ 3 & (0) & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & (0) \end{pmatrix}. \quad (5-80)$$

在矩阵(5-80)中有 5 个独立零, 于是得本问题的最优分配:

$$x_{11} = 1, x_{23} = 1, x_{34} = 1, x_{42} = 1, x_{55} = 1, \text{其余 } x_{ij} = 0.$$

$$\text{最优值 } f^* = c_{11} + c_{23} + c_{34} + c_{42} + c_{55} = 12 + 8 + 7 + 11 + 11 = 49.$$

由式(5-73)可知,问题(C)的最优值 f^* 也等于迭代过程中各步约简常量之和,即

$$f^* = 45 + 2 + 2 = 49.$$

在含有零元素的约简矩阵 $\hat{C}$ 中选择最多个数独立零可按如下方法进行.

步骤①:从矩阵 $\hat{C}$ 的第一行开始依次对每行的零元素加以标记.若行中未加标记的零元素仅为 1 个,则框以括号而取为独立零(若行中有两个以上零元素未加标记,则该行的零元素暂时仍不加以标记),同时对独立零所在列的其他未加标记的零元素打“ $\times$ ”标记.行标记完毕转步骤②.

步骤②:从矩阵 $\hat{C}$ 的第一列开始依次对每列的未加标记的零元素加以标记.若列中未加标记的零元素仅为 1 个,则框以括号而取为独立零(若列中有两个以上零元素未加以标记,则该列的零元素暂时不加以标记),同时对独立零所在行的其他未加标记的零元素给以“ $\times$ ”标记.列标记完毕转步骤③.

步骤③:重复步骤①和②.如果所有零元素都得到了标记,则独立零取毕;如果剩下的未加标记的零元素所在的行与列都有两个以上的零元素,则任取一个为独立零,重复步骤①和②.

例 5-29 对矩阵 $\hat{C}$ 选取最多个数的独立零:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \quad (5-81)$$

解 在矩阵(5-81)中,由于第一行和第二行都有两个以上零元素,故对该两行的零元素暂不打标记.第三行仅有一个零元素,框以括号取为独立零,并对第二列其他零元素给以“ $\times$ ”标记.于是,第四行仅有第六列的一个零元素未加标记,框以括号,并对第 6 列其他零元素给以“ $\times$ ”标记.具体标记过程如下:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0^\times & 2 & 5 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & (0) & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0^\times & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0^\times & 2 & 5 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & (0) & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0^\times & 6 & 4 & 1 & (0) \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0^\times \\ 7 & 3 & 1 & (0) & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ & \longrightarrow \begin{pmatrix} (0) & 0^\times & 2 & 5 & 0^\times & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & (0) & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0^\times & 6 & 4 & 1 & (0) \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0^\times \\ 7 & 3 & 1 & (0) & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5-82)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} (0) & 0^{\times} & 2 & 5 & 0^{\times} & 9 \\ 4 & 2 & (0) & 3 & 0^{\times} & 1 \\ 4 & (0) & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0^{\times} & 6 & 4 & 1 & (0) \\ 2 & 2 & 0^{\times} & 6 & (0) & 0^{\times} \\ 7 & 3 & 1 & (0) & 1 & 6 \end{pmatrix}. \quad (5-83)$$

在矩阵(5-82)中第二行、第四行及第三列、第五列都有两个以上零元素未加标记,我们选第二行第三列的零元素框以括号取为独立零,继续标记.

在矩阵(5-83)中所有零元素都有了标记,标记结束.

在具体标记时,我们不必详细列出每个步骤,而直接由矩阵(5-81)得矩阵(5-83)即可.

对已选得最多个数独立零的矩阵 $\hat{C}$ 寻找最少覆盖线的方法如下:

步骤①:对含有非独立零但不含独立零的行(列)用“*”标记,*行(*列)中非独立零所在的列(行)用覆盖线覆盖.

步骤②:如果所有零元素都已覆盖,最少覆盖线已取得;如果仅剩独立零未覆盖,则对独立零所在的行或列之一用覆盖线覆盖,否则,有非独立零未覆盖,则对剩下的未覆盖的元素(可以把它们取出组成一个新矩阵)重复步骤①.

例 5-30 对下列矩阵用最少的线覆盖全体零元素:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} (0) & 0 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & (0) & 3 & 0 & 1 \\ 4 & (0) & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & (0) \\ 5 & 5 & 5 & (0) & 2 & 8 \end{pmatrix}. \quad (5-84)$$

解 在矩阵(5-84)中第四行无独立零,对该行给以“*”记号,该行两个非独立零所在的第二列和第六列用覆盖线覆盖.在剩余的未覆盖的元素组成的矩阵(5-85)中第四列(原矩阵(5-84)中为第五列)无独立零但含有非独立零,对该列给以“**”标记,该列非独立零所在的第二行用线覆盖.

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} (0) & 0 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & (0) & 3 & 0 & 1 \\ 4 & (0) & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & (0) \\ 5 & 5 & 5 & (0) & 2 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{*} \left[\begin{array}{ccc|c} (0) & 2 & 5 & 6 \\ -4 & (0) & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & (0) & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{**} \quad (5-85)$$

对矩阵(5-85)取出未覆盖的元素组成矩阵(5-86),仅有两个独立零,用覆盖线覆盖.

$$\begin{pmatrix} -(0) & -2 & -5 & -6 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -5 & -5 & -(0) & -2 \end{pmatrix}. \quad (5-86)$$

在具体运算过程中,可以将这些步骤归纳在一个矩阵中:

$$\begin{pmatrix} -(0) & 0 & -2 & -5 & -6 & 9 \\ -4 & 2 & -(0) & -3 & 0 & 1 \\ 4 & (0) & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & (0) \\ -5 & -5 & 5 & -(0) & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

如果我们在约简矩阵中选择到的独立零的个数不是最大,那么在按上述方法选择最少覆盖线时,将出现独立零被覆盖两次(即独立零是两根覆盖线的交叉点),说明运算有错误.

5.7.2 应用举例

199

建立最优分配问题的数学模型,即是给出费用矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ ($c_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, n$),下面我们来看几个例子.

例 5-31 n 个职工分别从事 n 项工作, $i^{\#}$ 职工从事 $j^{\#}$ 工作的收益为 d_{ij} ,问如何进行工作分配,使总收益最大?

解 令

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i^{\#} \text{ 职工从事 } j^{\#} \text{ 工作,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

则得模型:

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}; \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ &x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

令

$$c_{ij} = M - d_{ij},$$

其中 M 为充分大的正数(例如,取诸 d_{ij} 中最大的元素即可).可见,有 $c_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$).

可以指出,最优分配问题(C)(矩阵 $C = (c_{ij})$)与本问题是等价的,这是因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M - d_{ij}) x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ &= nM - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij},\end{aligned}$$

所以,当问题(C)取得最优值 f^* 时,本问题就求得最优值 $nM - f^*$.

例 5-32 考虑把 4 道工序分配到 5 台机床上,每道工序只需一台机床加工,成本矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

求最优分配.

解 在最优分配问题中,费用矩阵 C 是 n 行 n 列,为此,我们对本问题所给矩阵添加第五行,其每个元素都为零,得矩阵 C :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们对最优分配问题(C)求解,即可得本问题的最优解.

例 5-33 机器 A_1, A_2, A_3 加工零件 B_1, B_2, B_3, B_4 的费用矩阵为

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 10 \\ 5 & 4 & 9 & 13 \\ 7 & 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

若每台机器至多可加工两个零件,至少需加工一个零件,试建立最优分配问题数学模型.

解 我们把每台机器 A_i 拆成两台机器 A'_i 和 A''_i ,它们加工零件 B_j 的成本是一样的,于是得矩阵

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 10 \\ 5 & 4 & 9 & 13 \\ 5 & 4 & 9 & 13 \\ 7 & 3 & 6 & 12 \\ 7 & 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

由于上述矩阵行数和列数不相同,我们虚设两个零件 B_5 和 B_6 . 考虑到机器 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 必须加工 B_1, B_2, B_3 和 B_4 中的一个,所以在取 $c_{i5} = c_{i6} = 0 (i = 1, 3, 5)$ 以后,我们取 $c_{k5} = c_{k6} = M (k = 2, 4, 6)$. 于是,得最优分配问题的费用矩阵 C 如下:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 10 & M & M \\ 5 & 4 & 9 & 13 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 13 & M & M \\ 7 & 3 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 6 & 12 & M & M \end{pmatrix}.$$

例 5-34 (铁路列车运行分派问题) A 站与 B 站之间拟开 7 对客车,客车运行图如图 5-18 所示,图中粗实线旁数字表示列车的车次,奇数为下行车(A 站至 B 站),偶数为上行车(B 站至 A 站). 现在要给列车固定乘务组, A 站的乘务组换班地点在 A 站. 现在假定,乘务组在对方折返停留的最短时间为 2 小时. A 站的乘务组如服务全部的 7 对列车,则在 B 站的折返停留时间如矩阵 A (例如, A 站的乘务组固定 5 次车及 10 次车,则该乘务组在 B 站的列车折返停留时间由图 5-18 知为 6 小时,这是因为 5 次车 9 点到达 B 站,10 次车 15 点离开 B 站)所示. 同样,如果 B 站的乘务组服务这 7 对列车,则在 A 站的折返停留时间如矩阵 B 所示. 现在希望 7 个乘务组在折返站的总时耗最小,问如何分派任务?

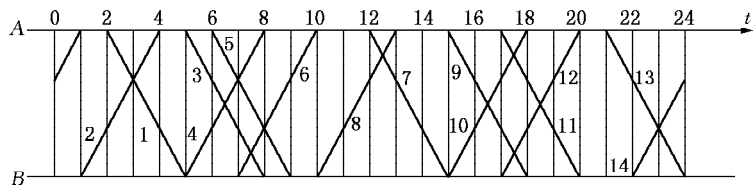


图 5-18

		车 次						
		2	4	6	8	10	12	14
车 次	1	20	24	2	5	10	12	17
	3	17	21	23	2	7	9	14
	5	16	20	22	25	6	8	13
	7	10	14	16	19	24	2	7
	9	7	11	13	16	21	23	4
	11	5	9	11	14	19	21	2
	13	25	5	7	10	15	17	22

$$A = (a_{ij}) =$$

$$B = (b_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{车} \\ \text{次} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{车} \\ \text{次} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 22 & 18 & 16 & 13 & 8 & 6 & 25 \\ 25 & 21 & 19 & 16 & 11 & 9 & 4 \\ 2 & 22 & 20 & 17 & 12 & 10 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 23 & 18 & 16 & 11 \\ 11 & 7 & 5 & 2 & 21 & 19 & 14 \\ 13 & 9 & 7 & 4 & 23 & 21 & 16 \\ 17 & 13 & 11 & 8 & 3 & 25 & 20 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

解 由矩阵 A 和 B 可见,每一对列车的乘务组在折返站的停留时耗与服务的方案有关.例如 1 次车与 6 次车这对客车若由 A 站乘务组服务,则在 B 站的停留时耗为 $a_{16} = 2$ 小时;若由 B 站乘务组服务,则在 A 站的停留时耗为 $b_{16} = 16$ 小时.可见 1 次车与 6 次车这对客车由 A 站乘务组服务为好.由此出发,比较 A 矩阵与 B 矩阵的每一对元素,取

$$c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\},$$

得矩阵 C 如矩阵(5-87)(矩阵(5-87)中元素 c_{ij} 右下角字母 A 或 B 表示 i 次车及 j 次车这对客车由 A 站或 B 站乘务组服务)所示.

$$C = (c_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{车} \\ \text{次} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{车} \\ \text{次} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20_A & 18_B & 2_A^* & 5_A & 8_B & 6_B & 17_A \\ 17_A & 21_{A,B} & 19_B & 2_A^* & 7_A & 9_{A,B} & 4_B \\ 2_B^* & 20_A & 20_B & 17_B & 6_A & 8_A & 5_B \\ 8_B & 4_B & 2_B & 19_A & 18_B & 2_A^* & 7_A \\ 7_A & 7_B^* & 5_B & 2_B & 21_{A,B} & 19_B & 4_A \\ 5_A & 9_B & 7_B & 4_B & 19_A & 21_{A,B} & 2_A^* \\ 17_B & 5_A & 7_A & 8_B & 3_B^* & 17_A & 20_B \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5-87)$$

我们的问题就成为求解最优分配问题(C)(即解决下行车与上行车的配对问题).用匈牙利方法求得本问题的最优配对如表 5-67(在矩阵(5-87)中打 * 记号的数字相应的 $x_{ij} = 1$),总时耗为 20 小时.

表 5-67

车 次	5, 2	9, 4	1, 6	3, 8	13, 10	7, 12	11, 14
乘务组	B	B	A	A	B	A	A
时 耗	2	7	2	2	3	2	2

习 题 五

1. 明年初某工厂准备在甲、乙、丙 3 种产品中选择两种产品投产,它们都需要经过 3

道工序加工,有关数据如表 5-68 所示.

表 5-68

定 额(小时/件)		产 品			生产能力 (小时)
		甲	乙	丙	
工 序	A	3	2	1	1 800
	B	1	1	2	2 000
	C	1	3	1	1 600
成本(元/件)		50	80	60	
售价(元/件)		200	300	250	

若甲、乙、丙产品在投产时,无论生产数量大与小,都需要一笔固定费用(例如装夹具的制作费).假定 3 种产品的固定费用分别为 1 500 元、2 000 元和 1 800 元,问如何安排生产可使工厂获得的利润最大?试建立整数规划模型.

2. 考虑下列数学模型:

$$\max f = 3x_1 + f_1(x_2) + f_2(x_3) + 7x_4,$$

满足约束条件:

(1) 下列条件中至少有一个成立:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\leq 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &\leq 60, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 60; \end{aligned}$$

(2) $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$. 又知:

$$\begin{aligned} f_1(x_2) &= \begin{cases} -12 + 4x_2, & \text{当 } x_2 > 0, \\ 0, & \text{否则;} \end{cases} \\ f_2(x_3) &= \begin{cases} -5 + 6x_3, & \text{当 } x_3 > 0, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \end{aligned}$$

请把该模型修改成线性整数规划模型.

3. 把图 5-19 中阴影部分所表示的可行域用联立的线性约束条件描述.

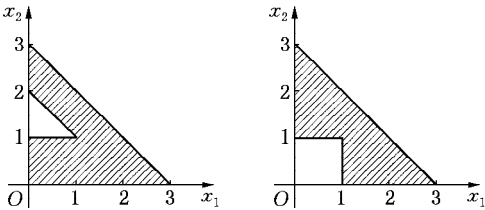


图 5-19

4. 请利用 0—1 变量,将下列情况化成线性约束条件(变量 x_j 都为非负变量):

(1) 或者 $x_1 + x_2 \leq 2$,或者 $2x_1 + 3x_2 \geq 8$;

(2) 若 $x_4 \leq 4$,则 $x_5 \geq 6$ 或 $x_6 \geq 3$;若 $x_4 \geq 6$,则 $x_5 \leq 3$ 或 $x_6 \leq 4$;

(3) x_3 只能取 0, 5, 9, 12 ;

(4) $|x_2 - x_3| = 0$ 或 5 或 10 ;

(5) 下列约束条件中,至少必须满足两个:

$$x_3 + x_6 + x_7 \leq 5; \quad x_6 \leq 3; \quad x_7 \leq 4; \quad x_6 + x_7 \geq 2; \quad x_3 \geq 1;$$

(6) 或 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,或 $x_3 = 0$, $x_4 = 0$;

(7) 或 $x_1 + x_2 = 2$,或 $2x_1 + 3x_2 = 8$.

5. 某车间的车床和刨床分别有 200 工时和 300 工时的时间可供利用. 该车间可以接客户 A 的加工任务,也可以接客户 B 的加工任务,但只能接一个客户的加工任务. 有关信息如表 5-69 所示. 为了确定车间应该接哪一个客户的加工任务及确定其加工的零件的生产数量,以使收益最大,请建立一个线性整数规划模型.

表 5-69

定 额(工时/件)	零 件 $j^{\#}$			
	客 户 A		客 户 B	
	1 [#]	2 [#]	3 [#]	4 [#]
车 床	2	4	8	10
刨 床	3	2	7	11
利润(元/件)	7	9	15	20

6. 请将下列非线性 0-1 规划线性化:

$$\begin{aligned} \max f &= 2x_1^2x_2 - x_3^3; \\ \text{s. t.} \quad &5x_1 + 9x_2x_3 \leq 15, \\ &x_j = 0, 1, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

7. 有如下整数规划:

$$\begin{aligned} \max f &= 30x_1 + 18x_2 + 20x_3; \\ \text{s. t.} \quad &5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 560, \\ &6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 780, \\ &x_j = 0, \text{整数}, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

其中 x_j 为 $j^{\#}$ 产品数量. 请对下列两种情况分别修改模型:

(1) 当 $x_1 > 20$ 时产生一次性费用 200 ;

(2) 当 $20 < x_1 \leq 50$ 时,产生一次性费用 200 ;当 $x_1 > 50$ 时,产生一次性费用 400.

8. 用割平面法求解下列整数规划:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \min f = -3x_1 - 4x_2 ; \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 , \\
 & 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 5 , \\
 & x_j \geq 0, \text{整数}, j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

已知相应的(LP)的最优单纯形表如表 5-70 所示.

表 5-70

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	0	1	1/7	-1/7	10/7
x_1	1	0	1/7	5/14	55/14
r	0	0	1	1/2	35/2

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \min f = -4x_1 - 3x_2 ; \\
 \text{s. t.} \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 = 10 , \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 , \\
 & x_j \geq 0, \text{整数}, j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

相应的线性规划的最优单纯形表如表 5-71 所示.

表 5-71

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	0	3/10	-1/10	11/5
x_2	0	1	-1/5	2/5	6/5
r	0	0	3/5	4/5	62/5

9. 用割平面法求解下列(MIP):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \min f = -7x_1 - 9x_2 ; \\
 \text{s. t.} \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 , \\
 & 7x_1 + x_2 + x_4 = 35 , \\
 & x_1 \geq 0, \text{整数}, x_j \geq 0, j = 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

相应的线性规划的最优单纯形表见表 5-72.

表 5-72

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
r	0	0	28/11	15/11	63

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \min f = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 ; \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 6 , \\
 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 12 , \\
 & x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 4 , \\
 & x_j \geq 0 , \quad j = 1, \dots, 7. \quad x_1, x_2 \text{ 为整数.}
 \end{aligned}$$

相应的线性规划的最优单纯形表如表 5-73 所示.

表 5-73

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_5	4/3	0	19/3	0	1	-2/3	5/3	14/3
x_2	1/3	1	-2/3	0	0	1/3	-1/3	8/3
x_4	1	0	1	1	0	0	1	4
r	10/3	0	22/3	0	0	1/3	14/3	68/3

10. 用分支定界法求解 0-1 背包问题：

$$\begin{aligned}
 \max f &= 12x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 30x_5 ; \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 12 , \\
 & x_j = 0, 1 \quad j = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

11. 用分支定界法求解下列(AIP)(用图解法求解线性规划)：

$$\begin{aligned}
 \min f &= -7x_1 - 9x_2 ; \\
 \text{s. t.} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 6 , \\
 & 7x_1 + x_2 \leq 35 , \\
 & x_j \geq 0, \text{ 整数}, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

12. 用分支定界法求解第 8 题(1).

13. 求解 0-1 规划：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \min z = 2u_1 - 3u_2 + u_3 - 5u_4 ; \\
 \text{s. t.} \quad & 5u_1 - 3u_2 + u_3 + u_4 \geq 2 , \\
 & 2u_1 - u_2 - 6u_3 - 4u_4 \leq -5 , \\
 & u_1 + 3u_2 - 2u_3 + 2u_4 \geq 2 , \\
 & u_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \max z = 5u_1 + 9u_2 + 2u_3 + 7u_4 + 4u_5 + 6u_6 ; \\
 \text{s. t.} \quad & 2u_1 + 7u_2 - 2u_3 + 4u_4 - u_5 + 6u_6 \leq 12 , \\
 & 2u_1 + 6u_2 + 2u_3 + 5u_4 + 5u_5 \leq 14 , \\
 & 3u_1 + 3u_2 - u_3 + 2u_4 + 5u_6 \leq 8 , \\
 & u_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

14. 给出(LP)： $\min f = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 ;$

$$\begin{aligned}
 \text{s. t. } & x_1 + 3x_3 - x_4 = 3, \\
 & x_2 + 2x_3 - x_5 = 5, \\
 & 0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 4, \\
 & x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

其最优解的单纯形表如表 5-74 所示.

表 5-74

X_B^d	x_1^+	x_2^-	x_3^+	x_4^+	x_5^+	$\bar{b}$
x_3	1/3	0	1	-1/3	0	1
x_2	2/3	1	0	-2/3	1	1
r	2	0	0	2	6	-36

(1) 将 x_3 的界改为 $2 \leq x_3 \leq 4$;

(2) 将 x_2 的界改为 $0 \leq x_2 \leq 2$.

试分别用有界技术求最优解与最优值.

15. 用有界技术求解第 12 题.

16. 若最优分配问题由下列矩阵给出,求最优分配:

$$(1) \begin{pmatrix} 11 & 17 & 8 & 16 & 20 \\ 9 & 7 & 12 & 6 & 15 \\ 13 & 16 & 15 & 12 & 16 \\ 21 & 24 & 17 & 28 & 26 \\ 14 & 10 & 12 & 11 & 15 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 25 & 29 & 31 & 42 & 37 \\ 22 & 19 & 35 & 18 & 26 \\ 39 & 38 & 26 & 20 & 33 \\ 34 & 27 & 28 & 40 & 32 \\ 24 & 42 & 36 & 23 & 45 \end{pmatrix}.$$

17. (1) 考虑把 4 道工序分配到 5 台机床上加工,其成本矩阵如下,求最优分配:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & M & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & M \\ 9 & 3 & 5 & M & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) 若有第六台机床可利用,4 道工序在其上加工的成本分别为 2, 1, 2 和 8. 这台新机床代替现有机床中的一台是否合算? 若合算,代替哪一台?

18. 所谓一个 $n \times n$ 矩阵的一条对角线是由 n 个矩阵元素组成的集合,其中没有两个元素处在同一行或同一列上,对角线的权是它的 n 个元素之和. 试找出下列矩阵具有最大权的对角线:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 10 & 14 & 7 & 6 \\ 9 & 16 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 17 & 13 & 11 & 8 & 7 & 10 \\ 11 & 5 & 6 & 13 & 7 & 3 \\ 8 & 7 & 5 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

19. 航空公司的北京—上海航线面临着如何指派驾驶员到合适航次的问题. 这两个城市之间的航次飞行时间表由表 5-75 给出. 要求每两个航次指派一个驾驶员, 使驾驶员从一个城市出发, 又可以回到原来的城市. 如果两个航次之间在对方城市的停留时间至少为 1 小时, 求总停留时间最短的驾驶员指派方案.

表 5-75

航 次	离开北京	到达上海	航 次	离开上海	到达北京
1	7:30	9:00	2	8:00	9:00
3	8:15	9:45	4	8:45	9:45
5	12:00	15:30	6	11:00	12:00
7	17:45	19:15	8	19:00	20:00
9	19:00	20:30	10	20:30	21:30

20. 4 台机器 A_1, A_2, A_3 和 A_4 加工 B_1, B_2, B_3, B_4 和 B_5 5 个零件. A_1, A_2 和 A_3 3 台机器每台机器至多加工 2 个零件, 至少加工一个零件, 机器 A_4 恰可加工一个零件. 机器 A_i 加工零件 B_j 的费用矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

建立最优分配问题模型.

第六章 网络规划

图论是近数十年来得到蓬勃发展的一个新兴的数学分支,它的理论和方法在许多领域中得到广泛的应用并取得了丰硕的成果.我们可以看到,用线性规划、整数规划解决的资源分配问题、运输问题、生产计划问题、设备更新问题和存储问题,有时也可用图论的方法来构造模型并求解,且由于图的结构直观性,更有助于我们分析问题和描述问题.何况有些研究对象,如交通网,它本身就是一个大网络,用图论的方法来研究,更给研究者带来方便.为与一般图论相区别,在这里我们把图论在系统管理决策中卓有成效的一些理论和方法称之为网络规划.

考虑到图论的术语非常不统一,为便于读者对图论的最基本知识有一个初步的了解,我们写了图的基本概念这一节,它仅仅介绍和网络规划内容有关的概念,通过这些基本概念的学习,将有助于读者建立网络模型和加深对算法的理解.

209

§ 6.1 图的基本概念

我们先通过几个直观的例子,来感性认识什么是图.

例 6-1 图 6-1 所画的是某地区的铁路交通图.显然,对于一位只关心自甲站到乙站需经过哪些站的旅客来说,图 6-2 比图 6-1 更为清晰.但这两个图有很大的差异:图 6-2 中不仅略去了对了解铁路交通毫无关系的河流、湖泊,而且铁路线的长短、曲直及铁路上各站间的相对位置都有了改变.不过,我们可以看到,图 6-1 中各站间的连通关系在图 6-2 中丝毫没有改变.

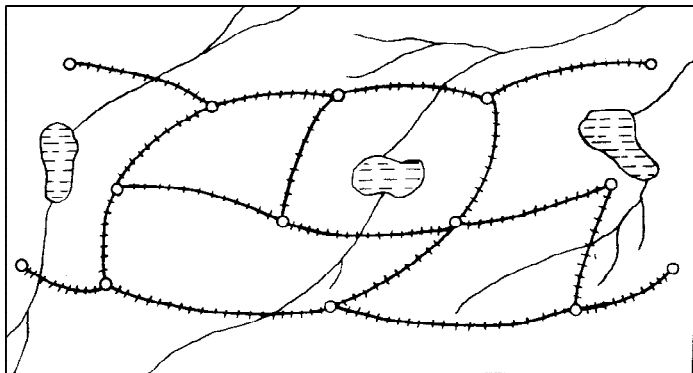


图 6-1

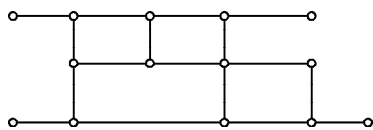


图 6-2

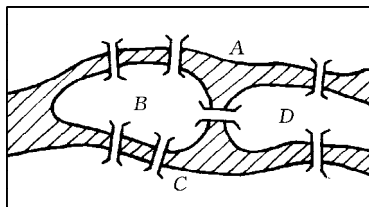


图 6-3

例 6-2 18 世纪的东欧有个哥尼斯堡城,流贯全城的普雷格尔河两岸和河中两个小岛彼此间有 7 座桥相通,如图 6-3 所示.

这个城镇里的居民当时热衷于这样一个问题:从岸上任一地方开始,能否通过每座桥一次且仅仅一次就能回到原地. 1736 年欧拉发表了图论方面的第一篇论文,将此难题化成了一个数学问题:用点表示两岸或小岛,用点之间的连线表示陆地之间的桥,这样就得到了图 6-4 所示的一个图.从而,问题就变为:在这个图中,是否可能从某一点出发只经过各条边一次且仅仅一次而又回到出发点,即一笔画问题.在图 6-4 中可见,两岸和岛的大小形状及桥的长短曲直都被置之一旁,但陆地间的关联情况却依然得到保持.

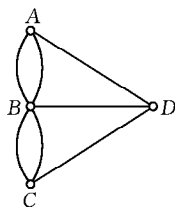


图 6-4

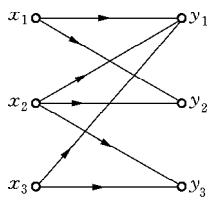


图 6-5

例 6-3 若发点 x_1 可运送物资到收点 y_1 和 y_2 ;发点 x_2 可运送物资到收点 y_1, y_2 和 y_3 ;发点 x_3 可运送物资到收点 y_1 和 y_3 . 现用点表示发点或收点,带方向的边表示物资运送方向,即得图 6-5.

由这几个例子,我们可以得到一个结论:一个图由一个表示具体事物的点(图论中称为顶点)的集合和表示事物之间联系的边的集合组成.

根据边的带方向与否,图又可分为有向图及无向图,下面我们分别对它们介绍有关的概念.

6.1.1 无向图

无向图——设 V 是一个有 n 个顶点的非空集合: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$; E 是一个有 m 条无向边的集合: $E = \{e_1, \dots, e_m\}$,则称 V 和 E 这两个集合组成了一个无向图,记作无向图 $G = (V, E)$.

E 中任一条边 e 若连接顶点 u 和 v ,则记为 $e = [u, v]$ (或 $[v, u]$),并称 u 与 v 为无向边的两个端点,边 e 与顶点 u 及 v 相关联,顶点 u 与顶点 v 相邻.

对于图 G , 有时为说明问题 V 与 E 也可写作 $V(G)$ 及 $E(G)$.

给出图 $G = (V, E)$, 我们可以作出它的几何图. 在以后的讨论中, 我们往往直接对几何图进行讨论.

例 6-4 给无向图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_5\}$, $E = \{e_1, \dots, e_7\}$, 边与顶点的关联情况由表 6-1 给出.

表 6-1

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$e = [u, v]$	$[v_1, v_2]$	$[v_2, v_3]$	$[v_2, v_3]$	$[v_1, v_3]$	$[v_4, v_3]$	$[v_1, v_4]$	$[v_4, v_5]$

根据表 6-1, 可作其几何图, 如图 6-6 所示.

在作几何图时, 仅要求表示出顶点、边以及它们之间的关联状况, 而对于顶点位置的布置以及边的曲直、长短都没有任何规定. 从而, 同一图 $G = (V, E)$, 可以有许多的几何图. 如例 6-4 所给的图, 也可表示成图 6-7. 在图 6-7 中, 边在非端点处可能出现交点, 但这种交点不是顶点.

基于无向图 G 的结构特点, 我们给出下列术语.

平行边——若两条不同的边 e 与 e' 具有相同的端点, 则称 e 与 e' 为 G 的平行边. 如图 6-6 中的边 e_3 与 e_2 即为平行边.

简单图——若图 G 无平行边, 则称图 G 为简单图. 如图 6-8.

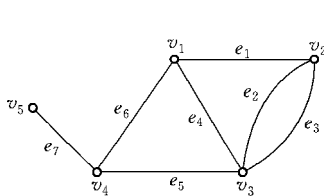


图 6-6

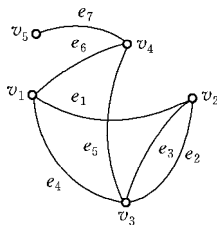


图 6-7

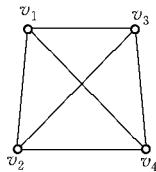


图 6-8

完备图——若图 G 中任两个顶点之间恰有一条边相关联, 则称图 G 为完备图. 如图 6-8.

子图——设 $G = (V, E)$, $G_1 = (V_1, E_1)$ 都是图, 且 $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$, 则称图 G_1 为图 G 的子图, 并记为图 $G_1 \subseteq G$.

生成子图——若 $G_1 \subseteq G$, 且 $V_1 = V$, 则称图 G_1 为图 G 的生成子图.

导出子图——设图 $G = (V, E)$, 非空边集 $E_1 \subseteq E$, 如果 G 中与 E_1 中诸边相关联的顶点全体记为 V_1 , 则子图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 称为图 G 的由 E_1 导出的子图. 记 $G(E_1) = (V_1, E_1) = G_1$.

例如图 6-9 给出的图 G_1 是图 6-6 所给图的子图, 若取 $E_1 = \{e_1, e_7\}$, 则图 6-9 所示图 G_1 是图 6-6 所示图 G 关于 E_1 的导出子图; 图 6-10 所示图 G_2 是图 6-6 所示图 G 的生成子图.

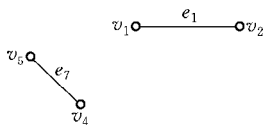


图 6-9

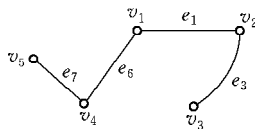


图 6-10

链——无向图 G 中一个由顶点和边交错而成的非空有限序列：

$$Q = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} \dots v_{i_{s-1}} e_{j_s} v_{i_s} \dots v_{i_{k-1}} e_{j_k} v_{i_k}, \quad (6-1)$$

且 $e_{j_s} = [v_{i_{s-1}}, v_{i_s}] (s = 1, \dots, k)$, 则称 Q 为 G 中一条连接 v_{i_0} 与 v_{i_k} 的链.

在简单图中, 链由它的顶点序列确定, 所以简单图中的链可用其顶点表示: $Q = v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$. 若 e 为链 Q 中的边, 可简写为 $e \in Q$. 链 Q 中边的全体记为 $E(Q)$.

若 $k > 1$ 且 $v_{i_0} = v_{i_k}$, 则 Q 称为闭链. 当 $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, 称 Q 为开链.

初等链——若开链 Q 中诸顶点皆不相同, 则称 Q 为一条初等链.

回路——若一个闭链 Q , 除了第一个顶点和最后一个顶点相同外, 没有相同的顶点和相同的边, 则该闭链 Q 称为回路.

例如, 在图 6-6 所示图中,

$Q_1 = v_5 e_7 v_4 e_6 v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_4 v_1 e_6 v_4 e_5 v_3$ 为开链;

$Q_2 = v_5 e_7 v_4 e_6 v_1 e_4 v_3 e_3 v_2$ 为初等链;

$Q_3 = v_4 e_6 v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_5 v_4$ 为回路.

连通图——若图 G 中任意两顶点 u 和 v 之间存在一条链(称 u 与 v 在 G 内连通), 则称图 G 为连通图. 否则, 称为分离图.

例如, 图 6-6 所示图为连通图, 图 6-9 所示图为分离图.

割边——若 G 为连通图, 将 G 中边 e 取走后所得图为分离图, 则称 e 为图 G 的割边.

例如, 图 6-10 为连通图, e_6 为图 6-10 所给图 G_2 的割边.

6.1.2 有向图

有向图——设 V 是一个有 n 个顶点的非空集合: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$; E 是一个有 m 条有向边的集合: $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, 则称 V 和 E 这两个集合组成了一个有向图, 记作有向图 $D = (V, E)$.

若 $e \in E$, u 为有向边 e 的起点, v 为有向边 e 的终点, 则记 $e = (u, v)$.

例 6-5 给有向图 $D = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, \dots, e_7\}$, 边与顶点的关联情况如表 6-2 所示.

表 6-2

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$e = (u, v)$	(v_2, v_1)	(v_1, v_2)	(v_3, v_2)	(v_3, v_2)	(v_2, v_4)	(v_4, v_3)	(v_3, v_1)

对表 6-2 作其几何图,如图 6-11 所示.

类似于无向图,有向图 D 也有下列术语.

平行边——不同的有向边 e 与 e' 的起点与终点都相同,则称边 e 与 e' 为有向图 D 的平行边.如图 6-11 中的边 e_3 与 e_4 .

孤立点—— V 中不与 E 中任一条边关联的点称为 D 的孤立点.例如在图 6-13 中, v_1 为孤立点.

简单图——无平行边的有向图称为简单图.

完备图——图中任两个顶点 u 与 v 之间,恰有两条有向边 (u, v) 及 (v, u) ,则称该有向图 D 为完备图.

基本图——把有向图 D 的每条边除去定向就得到一个相应的无向图 G ,称 G 为 D 的基本图.称 D 为 G 的定向图.

子图——设 $D = (V, E)$ 和 $D_1 = (V_1, E_1)$ 都是有向图,且 $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$,则称 D_1 为 D 的子图,并记为 $D_1 \subseteq D$.

导出子图——若 $V_1 \subset V, E_1 = \{e \mid e = (u, v) \in E, u, v \in V_1\}$,则称有向图 $D_1 = (V_1, E_1)$ 为有向图 D 中关于 V_1 的导出子图.例如,图 6-12 是图 6-11 关于 $V_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$ 的导出子图.

导出生成子图——若 $D_1 = (V_1, E_1)$ 是有向图 D 关于 V_1 的导出子图,则图 (V, E_1) 称为 D 关于 V_1 的导出生成子图,记为 $D(V_1) = (V, E_1)$.例如,图 6-13 是图 6-11 关于 $V_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$ 的导出生成子图.

同构图——如果有向图 $D_1 = (V_1, E_1)$ 和有向图 $D_2 = (V_2, E_2)$ 的顶点集合 V_1 和 V_2 以及边集 E_1 和 E_2 之间在保持关联性质的条件下一一对应,则称图 D_1 和 D_2 为同构图(对无向图也有同样定义).

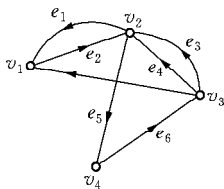


图 6-11

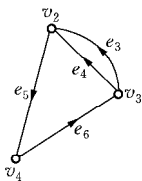


图 6-12

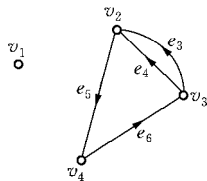


图 6-13

例如图 6-14 和图 6-15 初看是不一样的,但如果令 u_i 与 $v_i (i = 1, \dots, 4)$ 对应, (u_i, u_j) 与 (v_i, v_j) 相对应,由于对应边与对应顶点关联,所以这两个图就是同构的.

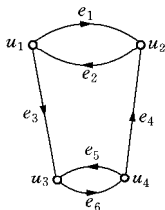


图 6-14

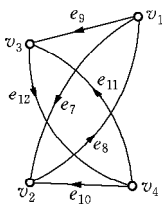


图 6-15

形象地说,若图的顶点可以任意挪动位置,而边是完全弹性的,只要在不拉断的条件下,一个图可以变为另一个图,那么,这两个图就是同构的.

由于同构的图被认为是相同的,这就给我们在网络规划中建立网络模型带来许多方便.当我们用几何图来构建网络模型时,点的位置可以任意布置,边的长短曲直也可任意,故而我们尽量设计那种反映问题清晰、简练的几何图.

链——若 Q 是有向图 D 的基本图 G 中的一条链,则 Q 就称为 D 的一条链.

初等链——若 Q 是有向图 D 的基本图 G 中的一条初等链,则 Q 就称为 D 的一条初等链.

路——若 Q 是有向图 D 的基本图 G 中一条链,且有 $e_{j_s} = (v_{i_{s-1}}, v_{i_s}) (s = 1, \dots, k)$, 则称 Q 为 D 的 v_{i_0} 至 v_{i_k} 的单向路,简称为路.

路径——若有向图 D 的路 Q 中每个顶点都不相同,则称 Q 为 D 的 v_{i_0} 至 v_{i_k} 的单向路径,简称路径,并称 v_{i_0} 可达 v_{i_k} .

回路——若有向图 D 的单向路径 Q 的第一个顶点与最后一个顶点相同,则称 Q 为 D 的单向回路,简称回路.

若 e 为链、路、路径、回路 Q 中的边,则可写为 $e \in Q$.

在简单图中,可用顶点序列来表示相应的链、路、路径.

例如,在图 6-11 中,

$Q_1 = v_1 e_2 v_2 e_4 v_3 e_6 v_4$ 为链;

$Q_2 = v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_2 v_2 e_5 v_4$ 为路,

$Q_3 = v_1 e_2 v_2 e_5 v_4 e_6 v_3$ 为路径,

$Q_4 = v_2 e_5 v_4 e_6 v_3 e_4 v_2$ 为回路.

6.1.3 图的矩阵表示

如何把图的有关信息输入和存储到电子计算机里去呢?我们知道,图的最本质的内容是顶点与边或者顶点与顶点之间的关联关系,我们不难用矩阵来表示这种关联关系.

给无向图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. 若用矩阵的行标号 i 对应图 G 的顶点下标,用列标号 j 对应图 G 的边的下标,可构造一个 $n \times m$ 矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times m}$ 与图 G 对应,其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 关联,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

称矩阵 A 为图 G 的关联矩阵,它描写了无向图 G 的顶点与边的关联情况.

若矩阵的行标号 i 和列标号 j 都对应图 G 顶点下标,则可以构造一个 $n \times n$ 矩阵 $B(G) = (b_{ij})_{n \times n}$ 与图 G 对应,其中

$b_{ij} =$ 连接顶点 v_i 与 v_j 的边的数目.

并称矩阵 B 为图 G 的邻接矩阵,它描写了图 G 的顶点间的邻接情况.

例 6-6 写出图 6-6 的关联矩阵和邻接矩阵.

解 在矩阵 A 外的左边一列标出图 G 诸顶点,在矩阵的上方一行标出图 G 的诸边,得图 6-6 的关联矩阵如下:

$$A(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

显见,矩阵 A 中第 i 行的各元素之和为与 v_i 关联的边数,而 A 的任一列元素之和恒为 2.

在矩阵 B 外的左边一列及上方一行标出图 G 的诸顶点,得图 6-6 的邻接矩阵:

$$B(G) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

邻接矩阵主对角线上的元素都为零,它是一个对称矩阵.显然,若图 G 为简单图,则 $B(G)$ 的元素 b_{ij} 取值不是 0 就是 1.

给有向图 $D = (V, E)$,其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$,可构造它的 $n \times m$ 关联矩阵 $A(D) = (a_{ij})_{n \times m}$,其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联,} \\ 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的起点,} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点.} \end{cases}$$

图 D 的邻接矩阵 $B(D) = (b_{ij})_{n \times n}$ 的元素 b_{ij} 为

$$b_{ij} = \text{以 } v_i \text{ 为起点、} v_j \text{ 为终点的有向边的边数.}$$

例 6-7 写出图 6-11 的关联矩阵和邻接矩阵.

解 图 6-11 的关联矩阵 $A(D)$ 如下:

$$A(D) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

图 6-11 的邻接矩阵 $B(D)$ 如下:

$$B(D) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

显见,对有向图 D , $A(D)$ 的第 j 列各元素之和为零,而 $B(D)$ 的第 i 行元素之和为以 v_i 为起点的有向边的边数, $B(D)$ 第 j 列元素之和为以 v_j 为终点的有向边的边数.

当 V 和 E 中元素的次序固定后,图与矩阵 A 或 B 是一一对应的,故而关联矩阵或邻接矩阵是描述图的另一种方式.

6.1.4 树

树——无回路且连通的无向图 G 称为树. 树中的边称为枝.

生成树——若 T 是无向图 G 的生成子图,且 T 又是树,则称 T 是 G 的生成树.

例如,图 6-10 是图 6-6 的生成树.

对于无向图 $T = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ($n > 1$). 定理 6-1 给出树的等价定义.

定理 6-1 作为树 T 的定义,下列定义是等价的:

- (1) T 连通且无回路;
- (2) T 无回路且有 $n - 1$ 条边;
- (3) T 连通且有 $n - 1$ 条边;
- (4) T 无回路,但不相邻的两个顶点之间连以一边,恰得一个回路;
- (5) T 连通,但去掉 T 的任一条边, T 就不连通;
- (6) T 的任两顶点间恰有一条初等链.

根树——给有向图 T ,若顶点 x 至 T 中其他顶点 u 都恰有一条初等链,则称 T 为以 x 为根的根树. 如图 6-16 即是.

有向树——给有向图 T ,若顶点 x 至 T 中其他顶点 u 都恰有一条路径,则称 T 为以 x 为根的有向树. 如图 6-17 即是.

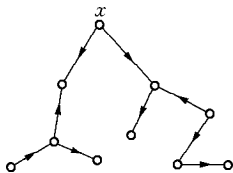


图 6-16

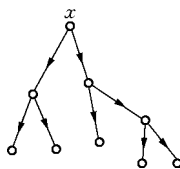


图 6-17

§ 6.2 最短路径问题

在生产实践、运输管理和工程建设的很多活动中,诸如物资的运输线路、各种工艺路

线的安排、厂区及货场的布局、管道线网的铺设及设备的更新等等问题,都与寻找一个“图的最短路径”问题密切相关,它是网络规划中的一个最基本的问题。

假若,现给有向图 $D = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. 设图 D 的每条边 $e = (v_i, v_j)$ 都与一个实数 $W(e) = W(v_i, v_j) = w_{ij}$ 对应, $W(e)$ 称为边 e 的权,图 D 称为赋权图。

这里所说的“权”,是指与边有关的数量指标. 根据实际问题的需要,可以赋予它不同的含义,例如表示距离、时间和费用等等. 以后我们讨论的图都为赋权图,俗称网络。

若 P 为 D 中 u 至 v 的路径,称 $W(P) = \sum_{e \in P} W(e)$ 为路径 P 的长度;

若 P^* 为 D 中 u 至 v 的路径,且有

$$W(P^*) = \min\{W(P) \mid P \text{ 为 } D \text{ 中 } u \text{ 至 } v \text{ 的路径}\},$$

则称 P^* 为 D 中 u 至 v 的最短路径,并记 $d(u, v) = W(P^*)$.

我们的目的就是在图 D 中寻找 u 至 v 的最短路径并求出其长度。

不妨假定 D 为完备图. 不然,若 u 至 v 有平行边,则保留权最小的边;若 u 至 v 不存在有向边,则可设一条 u 至 v 的有向边 e ,其权 $W(e) = +\infty$ (于是,如果原来的图 D 中 u 不能到达 v ,现在修改的图中 u 就可到达 v ,但是 u 至 v 的最短路径长度为 $+\infty$).

显然,若 u 至 v 有最短路径(其长度 $< +\infty$),则最短路径可能不止一条。

下面我们给出最短路径问题的两个算法。

6.2.1 狄克斯特拉算法

给有向图 $D = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$,且任 $e \in E$,有权 $W(e) \geq 0$. 我们称 D 为非负赋权图. 狄克斯特拉(Dijkstra)在 1959 年提出的算法,是目前公认的求最短路径的较好的算法之一. 该算法可求非负赋权图 D 中顶点 v_1 至各顶点 v_j ($1 \leq j \leq n$) 的最短路径及其长度。

假若顶点 v_1 至顶点 v_j 的最短路径为 $P_{1j}^* = v_1 \dots v_i \dots v_j$,其长度记为 d_{1j} : $d_{1j} = W(P_{1j}^*)$.

显然, $P_{1j}^* = v_1 \dots v_i \dots v_j$ 具有性质: P_{1j}^* 的子路 $v_1 \dots v_i$ 及 $v_i \dots v_j$ 分别为 v_1 至 v_i 及 v_i 至 v_j 的最短路径。

根据最短路径这个性质,我们可以这样选取 D 中 v_1 至各顶点的最短路径:若 P_{1j}^* 为 v_1 至 v_j 的最短路径,且顶点 v_i 在 P_{1j}^* 上,则 P_{1j}^* 上 v_1 至 v_i 的子路就作为 v_1 至 v_i 的最短路径 P_{1i}^* (尽管 D 中 v_1 至 v_i 还可能有其他最短路径). 从而, v_1 至各个顶点的最短路径将组成一棵以 v_1 为根的方向树 T .

我们结合具体实例来说明本算法的算法思想. 如图 6-18(a) 给出一个非负赋权有向图 D . 图 6-18(b) 所示图 T 是图 D 的一棵生成树,在这棵以 x 为根的方向树 T 中, v_1 至 v_j 的路径就是 P_{1j}^* , 顶点 v_j 旁带方框的数字即为 d_{1j} .

我们用顶点标号方法,遵循“让 d_{1j} 小的顶点 v_j 优先生长的”原则,逐步生长这棵以 v_1 为根的方向树 T .

初始时, $k = 1$, 令各顶点 v_j 的标号 $l_1(v_j)$ 如表 6-3 所示。

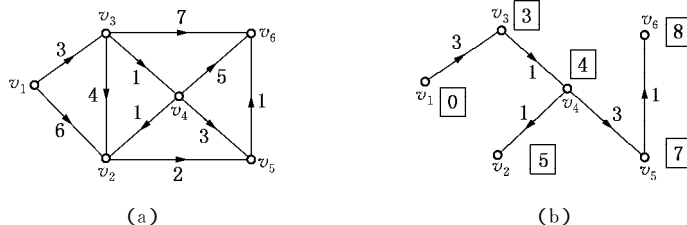


图 6-18

表 6-3

v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$l_1(v_j)$	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

取

$$l_1(v^*) = l_1(v_1) = \min_{v_j \in V} l_1(v_j),$$

将 $v^* = v_1$ (在运算表中在 $l_1(v^*)$ 右上角标以 * 号, 以后类同) 置入树 T 中,

$$A = V(T) = \{v_1\}, \quad d_{11} = l_1(v^*) = 0.$$

第二步, $k = 2$, 对 $v_j \in \bar{A} = V - A$, 令

$$l_2(v_j) = \min\{l_1(v_j), l_1(v^*) + W(v^*, v_j)\},$$

于是得到表 6-4.

表 6-4

v_j	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$l_2(v_j)$	6	3^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

取

$$l_2(v^*) = l_2(v_3) = \min_{v_j \in \bar{A}} \{l_2(v_j)\},$$

有

$$d_{13} = l_2(v_3) = 3.$$

将 $v^* = v_3$ 生长在树 T 上, $A = \{v_1, v_3\}$.

一般地, 如果已迭代至第 k 步, 树 T 上已有 k 个顶点, $A = V(T)$, v^* 为在第 k 步长入树 T 的顶点. 则第 $k+1$ 步, 对 $v_j \in \bar{A}$, 令

$$l_{k+1}(v_j) = \min\{l_k(v_j), l_k(v^*) + W(v^*, v_j)\}, \quad (6-2)$$

$$l_{k+1}(v^*) = \min_{v_j \in \bar{A}} l_{k+1}(v_j), \quad (6-3)$$

将 v^* 长入树 T 中, $l_{k+1}(v^*)$ 即为 v_1 至 v^* 的最短路径长度. 若 $\bar{A}$ 中有两个顶点满足式(6-3), 则任取一个顶点为 v^* .

对 $v_j \in \bar{A}$, 按式(6-2)计算的 $l_{k+1}(v_j)$, 我们称为 v_j 的试探性标号.

对 $l_{k+1}(v_j)$ 我们可以这样理解:若 $v \in \bar{A} = A(T)$, A 中有 k 个顶点,树 T 中 v_1 至 v 有唯一的路径 $v_1 \dots v$,那么 $l_{k+1}(v_j)$ ($v_j \in \bar{A}$) 是 k 条 $v_1 \dots v v_j$ 这类路径中长度最小的路径的长度,为 v_1 至 v_j 的最短路径长度的一个上界.按式(6-3)计算的 $l_{k+1}(v^*)$ 我们称为 v^* 的永久性标号.在以后的迭代过程中,该点的标号不再发生变化.

每迭代一步,总有 $\bar{A}$ 中若干个点的试探性标号得到改进并产生一个得到永久性标号的点 v^* ,于是 v^* 离开 $\bar{A}$ 而进入 A .

对图 6-18(b)所示树 T 的生长标号过程,我们列成运算表格如表 6-5 所示.

表 6-5

$k(v_j) \backslash j$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
1	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2		6	3^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3		6		4^*	$+\infty$	10
4		5^*			7	9
5					7^*	9
6						8^*

现在,我们给出迪奇斯特算法.

① 取 $l_1(v_1) = 0; l(v_j) = +\infty$ ($j = 2, \dots, n$). $d_{11} = 0, v^* = v_1, A = \{v_1\}, \bar{A} = V - A, k = 1$.

② $k = n$?

若是,则算法终止.

若否,则对 $v \in \bar{A}$,取:

$$l_{k+1}(v) = \min\{l_k(v), l_k(v^*) + W(v^*, v)\},$$

$$l_{k+1}(v^*) = \min_{v \in \bar{A}} l_{k+1}(v), d(v_1, v^*) = l_{k+1}(v^*).$$

③ $d(v_1, v^*) < +\infty$?

若是,则取 $A = A \cup \{v^*\}, \bar{A} = \bar{A} - \{v^*\}, k = k + 1$,转步骤②;

若否,则 D 中 v_1 到 v ($v \in \bar{A}$) 的路径不存在,算法终止.

如果只要知道 v_1 至 v_j 的最短路径长度,则当 v_j 有永久性标号时,算法就可终止.

本算法中所说的 $+\infty$,即前面章节中所说的充分大的正数.

若要求出 v_1 到各顶点的具体的最短路径,那么,在算法进行过程中,每当 $\bar{A}$ 中一个顶点 v 的试探性标号 $l_{k+1}(v) = l_k(v^*) + W(v^*, v) < l_k(v)$ 时,则顶点 v^* 就应记录下来.在运算表格中,我们可以把 v^* 的下标 i 记录在 $l_{k+1}(v)$ 数值的右下角.若求 v_1 至 v_j 的最短路径 P_{1j}^* ,由 v_j 逆向追踪 P_{1j}^* 中 v_j 的紧前顶点 v_s ,再由 v_s 逆向追踪 P_{1j}^* 中 v_s 的紧前顶点 v_k ,直至回溯到顶点 v_1 ,串联起来,即得一条具体的最短路径 $P_{1j}^* = v_1 \dots v_k v_s v_j$.

寻求 P_{1j}^* 的方法我们称它为逆向追踪法.

例 6-8 求图 6-19 中 v_1 至 v_8 的最短路径及其长度.

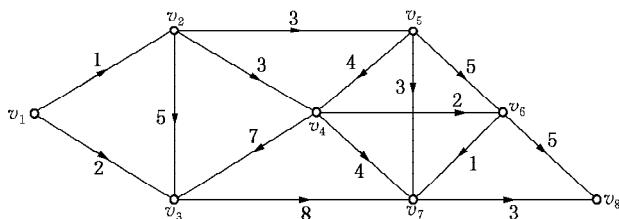


图 6-19

解 我们仅列出运算表格,如表 6-6 所示.

由表 6-6 知: $d_{18} = 10$, 在 P_{18}^* 中 v_8 的紧前顶点为 v_7 ; $d_{17} = 7$, 在 P_{18}^* 中 v_7 的紧前顶点为 v_5 ; $d_{15} = 4$, 在 P_{18}^* 中 v_5 的紧前顶点为 v_2 ; $d_{12} = 1$, 在 P_{18}^* 中 v_2 的紧前顶点为 v_1 . 故 v_1 至 v_8 的最短路径 $P_{18}^* = v_1 v_2 v_5 v_7 v_8$, 其长度为 10.

表 6-6

$k(v_j) \backslash j$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	0*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2		1_1^*	2_1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3			2_1^*	4_2	4_2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4				4_2	4_2^*	$+\infty$	10_3	$+\infty$
5				4_2^*		9_5	7_5	$+\infty$
6						6_4^*	7_5	$+\infty$
7							7_5^*	11_6
8								10_7^*

求顶点 v_1 至 v_j 的最短路径的另一方法是: 结合赋权图来审视哪些顶点的永久性标号之差恰等于关联边的权, 那么把有关的顶点串联起来, 即得 v_1 至 v_j 的最短路径 P_{1j}^* .

例如例 6-8, 结合图 6-19 来分析, 我们还能得到另一条 v_1 至 v_8 的最短路径

$$P_{18}^* = v_1 v_2 v_4 v_6 v_7 v_8.$$

以 v_8 为终点的边为 (v_6, v_8) 及 (v_7, v_8) , 而 $d_{18} - W_{68} = 10 - 5 = 5$, $d_{18} - W_{78} = 10 - 3 = 7$, 仅 $d_{18} - W_{18} = d_{17}$, 即 $d_{18} - d_{17} = W_{78}$, 故 P_{18}^* 中 v_8 的紧前顶点为 v_7 .

以 v_7 为终点的边有 (v_3, v_7) , (v_4, v_7) , (v_5, v_7) 和 (v_6, v_7) , 分别用 $d_{17} = 7$ 减去它们各边的权 8, 4, 3 和 1, 而得 -1, 3, 4 和 6, 其中 4 和 6 恰为 d_{15} 和 d_{16} , 即 $d_{17} - d_{15} = W_{57}$, $d_{17} - d_{16} = W_{67}$, 故 P_{18}^* 中 v_7 的紧前顶点为 v_5 或 v_6 .

继续逆向追踪, 即得 v_1 至 v_8 的两条最短路径.

我们还须指出, 本算法虽然是用来求非负赋权有向图的最短路径的, 但它对于非负赋权无向图的最短路径问题同样适用. 只需把连接顶点 u 和 v 的无向边 $e = [u, v]$ 改为有向 (u, v) 和 (v, u) , 且它们的权 $W(u, v)$ 和 $W(v, u)$ 都为 $W(e)$.

* 6.2.2 弗劳德算法

设有向图 $D = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 若对任 $e = (v_i, v_j) \in E$, 有 $W(e) = W_{ij} \geq 0$, 则称图 D 为实数赋权有向图.

假定 D 中无负回路(若回路 Q 有 $W(Q) < 0$, 则 Q 称为负回路), 即对 D 中任一回路 Q , 有

$$W(Q) = \sum_{e \in Q} W(e) \geq 0.$$

弗劳德(Floyd)算法是求 D 中任意两个顶点 v_i 至 v_j 的最短路径 P_{ij}^* 及其长度 $d_{ij} = W(P_{ij}^*)$.

给出下列记号:

$$V_{ij}^k = \{v_i, v_j\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad (6-4)$$

$$V_{ii}^k = \{v_i\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad (6-5)$$

则 $D(V_{ij}^k)$ 和 $D(V_{ii}^k)$ 分别为 D 关于 V_{ij}^k 和 V_{ii}^k 的导出子图. 令

P_{ij}^k 为 $D(V_{ij}^k)$ 中 v_i 至 v_j 的最短路径, d_{ij}^k 为其长度. 例如, 对图 6-20(a) 给定的图 D 来说:

$$V_{15}^3 = \{v_1, v_5\} \cup \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_2, v_3, v_5\},$$

$$V_{14}^3 = \{v_1, v_4\} \cup \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

则 $D(V_{15}^3)$ 和 $D(V_{14}^3)$ 分别如图 6-20(b) 和 6-20(c) 所示. 而 $D(V_{45}^3)$ 及 $D(V_{15}^4)$ 即为图 6-20(a).

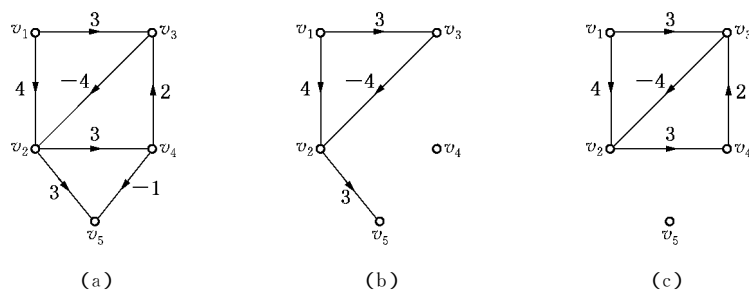


图 6-20

显然, 有

$$D(V_{ij}^{k-1}) \subseteq D(V_{ij}^k), \quad D(V_{ik}^{k-1}) \subseteq D(V_{ij}^k), \quad D(V_{kj}^{k-1}) \subseteq D(V_{ij}^k).$$

因而 $D(V_{ij}^k)$ 中 v_i 至 v_j 的最短路径 $P_{ij}^k = v_i \dots v_j$ 具有如下特点:

① 若 $P_{ij}^k = v_i \dots v_j$ 中不含顶点 v_k ($v_j \neq v_k$), 那么 P_{ij}^k 必为 $D(V_{ij}^{k-1})$ 中 v_i 至 v_j 的最短路径 P_{ij}^{k-1} , 且 $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$;

② 若 $P_{ij}^k = v_i \dots v_k \dots v_j$ 中含有顶点 v_k ($v_k \neq v_j$), 则子路 $P' = v_i \dots v_k$ 必为 $D(V_{ik}^{k-1})$ 中 v_i 至 v_k 的最短路径, 其长度为 d_{ik}^{k-1} ; 子路 $P'' = v_k \dots v_j$ 必为 $D(V_{kj}^{k-1})$ 中 v_k 至 v_j 的最短路径, 其长度为 d_{kj}^{k-1} ;

③ 若 $j = k$, $v_j = v_k$, 则 $P_{ij}^k = P_{ik}^{k-1}$, $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1}$. 由于 D 中无负回路, $d_{kk}^{k-1} = 0$, 因此,

又有

$$d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kk}^{k-1} = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}.$$

综合上述情况,有

$$d_{ij}^k = \min\{d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (6-6)$$

例如,由图 6-20(b)(图 $D(V_{15}^3)$)知,

$$P_{15}^3 = v_1 v_3 v_2 v_5, \quad d_{15}^3 = 2;$$

由图 6-20(c)(图 $D(V_{14}^3)$)知

$$P_{14}^3 = v_1 v_3 v_2 v_4, \quad d_{14}^3 = 2;$$

由图 6-20(a)(图 $D(V_{45}^3)$)知

$$P_{45}^3 = v_4 v_5, \quad d_{45}^3 = -1,$$

则由式(6-6)得: $d_{15}^4 = \min\{d_{15}^3, d_{14}^3 + d_{45}^3\} = \min\{2, 2 - 1\} = 1$,

可见,它等于图 6-20(a)(图 $D(V_{15}^4)$)中 v_1 至 v_5 的最短路径 $P_{15}^4 = v_1 v_3 v_2 v_4 v_5$ 的长度 d_{15}^4 .

由 $D(V_{ij}^0)$ 和 $D(V_{ij}^n)$ 定义,可知:

$$d_{ij}^0 = \begin{cases} W_{ij}, & \text{有}(v_i, v_j) \in E, \\ +\infty, & \text{否则}, \end{cases} \quad (6-7)$$

$$d_{ij}^n = d_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (6-8)$$

从式(6-7)出发,应用式(6-6)进行迭代,便可求得诸 $d_{ij}^n (i, j = 1, \dots, n)$.

为了便于在算法终止时应用逆向追踪法寻求 v_i 至 v_j 的最短路径 P_{ij}^* ,我们在每次迭代中,应及时把 $D(V_{ij}^k)$ 中 v_i 至 v_j 的最短路径 P_{ij}^k 中 v_j 的紧前顶点 v_q 的下标 q 记录下来:令 $\theta_{ij}^k = q$.

由上述分析 $D(V_{ij}^k)$ 中路径 P_{ij}^k 的特点及式(6-6)可知:

$$\theta_{ij}^k = \begin{cases} \theta_{ij}^{k-1}, & \text{若 } d_{ij}^{k-1} \leq d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}, \\ \theta_{kj}^{k-1}, & \text{若 } d_{ij}^{k-1} > d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}, \end{cases} \quad (6-9)$$

从而,当算法终止时,为了求得 v_i 至 v_j 的最短路径 P_{ij}^* ,可由 θ_{ij}^n 得到 P_{ij}^* 中 v_j 的紧前顶点 v_q 的下标 q ,再由 θ_{iq}^n 得到 P_{iq}^* 中 v_q 的紧前顶点的下标,依次逆向追踪,即可求得 P_{ij}^* 中诸顶点.

由于 D 中是否有权为负的回路,往往事先不知道,但这并不妨碍算法的进行.若是在运算过程中,当第 $k-1$ 步时所求得的 $d_{ii}^{k-1} = 0 (i = 1, \dots, n)$,则说明 $D(V_{ij}^{k-1}) (i, j = 1, \dots, n)$ 中无负回路.那么我们继续迭代.用式(6-6)计算得到诸 $d_{ij}^k (i, j = 1, \dots, n)$.如果此时存在某个 $d_{ii}^k < 0$,则说明 $D(V_{ii}^k)$ 中存在一条包含顶点 v_i 的负回路 Q ,且有 $d_{ii}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{ki}^{k-1}$.该负回路由 P_{ik}^{k-1} 和 P_{ki}^{k-1} 合并而成.我们由信息矩阵 $\theta^k = (\theta_{ij}^k)_{n \times n}$ 进行逆向追踪,

即可求得该负回路 Q . 由于 $D(V_{ii}^k) \subseteq D$, Q 自然也是 D 中的负回路, 算法即可终止.

所以判别和寻找 D 中负回路 Q 也是弗劳德算法的一个功能.

弗劳德算法的具体步骤如下:

① 取 $d_{ij}^0 = W_{ij}$, $\theta_{ij}^0 = i$ ($i, j = 1, \dots, n$), $k = 1$.

② 对每一组 i, j ($i, j = 1, \dots, n$), $d_{ij}^{k-1} \leq d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ 成立否?

若是, 则 $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$, $\theta_{ij}^k = \theta_{ij}^{k-1}$;

若否, 则 $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$, $\theta_{ij}^k = \theta_{kj}^{k-1}$.

③ $d_{ii}^k = 0$ 对 $i = 1, \dots, n$ 都成立否?

若是, 则转步骤④;

若否, 则转步骤⑤.

④ $k = n$?

若是, 则取 $d_{ij} = d_{ij}^n$ ($i, j = 1, \dots, n$). 由矩阵 $\theta^n = (\theta_{ij}^n)_{n \times n}$ 的信息, 应用逆向追踪法求得 D 中 v_i 至 v_j 的最短路径 P_{ij}^* ($i, j = 1, \dots, n$), 算法终止 (若 $d_{ij} = +\infty$, 说明 D 中 v_i 至 v_j 不存在路径);

若否, 则取 $k = k + 1$, 转步骤②.

⑤ 若 $d_{ii}^k < 0$, D 中存在一条含有顶点 v_i 的负回路, 则由 $\theta^k = (\theta_{ij}^k)_{n \times n}$ 的信息, 应用逆向追踪法求出此回路 Q , 算法终止.

例 6-9 试用弗劳德算法求图 6-20(a) 所给图 D 任意两点间的最短路径.

解 $d^k = (d_{ij}^k)_{5 \times 5}$ 和 $\theta^k = (\theta_{ij}^k)_{5 \times 5}$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) 由表 6-7 给出.

表 6-7

	$k = 0, 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4, 5$
(d_{ij}^k)	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 3 & 3 \\ \infty & -4 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 7^* & 7^* \\ \infty & 0 & \infty & 3 & 3 \\ \infty & -4 & 0 & -1^* & -1^* \\ \infty & \infty & 2 & 0 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1^* & 3 & 2^* & 2^* \\ \infty & 0 & \infty & 3 & 3 \\ \infty & -4 & 0 & -1 & -1 \\ \infty & -2^* & 2 & 0 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 & 1^* \\ \infty & 0 & 5^* & 3 & 2^* \\ \infty & -4 & 0 & -1 & -2^* \\ \infty & -2 & 2 & 0 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$
(θ_{ij}^k)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2^* & 2^* \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2^* & 2^* \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3^* & 1 & 2^* & 2^* \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3^* & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4^* \\ 2 & 2 & 4^* & 2 & 4^* \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 4^* \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

迭代中, 当 $d_{ij}^{k-1} > d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ 而取 $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ 和 $\theta_{ij}^k = \theta_{kj}^{k-1}$ 时, 我们在矩阵中对 d_{ij}^k 和 θ_{ij}^k 在右上角打上“*”号. 例如, 当 $k = 3$ 时, 对于 $i = 4, j = 2$, 有

$$d_{42}^3 = \min\{d_{42}^2, d_{43}^2 + d_{32}^2\} = \min\{\infty, 2 - 4\} = -2 = d_{43}^2 + d_{32}^2,$$

$$\theta_{42}^3 = \theta_{32}^2 = 3,$$

故在矩阵 d^3 和 θ^3 中对 d_{42}^3 和 θ_{42}^3 在右上角打 * 号.

利用逆向追踪法由 $\theta^5 = (\theta_{ij}^5)_{5 \times 5}$ 可得 v_i 至 v_j 的最短路径 P_{ij}^* ($i, j = 1, \dots, 5$) 如表 6-8 所示, 而 $d = (d_{ij})$ 由表 6-7 中 $d^5 = (d_{ij}^5)$ 给出.

表 6-8

$\begin{matrix} * \\ ij \\ i \end{matrix} \backslash j$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	$v_1 v_1$	$v_1 v_3 v_2$	$v_1 v_3$	$v_1 v_3 v_2 v_4$	$v_1 v_3 v_2 v_4 v_5$
v_2	—	$v_2 v_2$	$v_2 v_4 v_3$	$v_2 v_4$	$v_2 v_4 v_5$
v_3	—	$v_3 v_2$	$v_3 v_3$	$v_3 v_2 v_4$	$v_3 v_2 v_4 v_5$
v_4	—	$v_4 v_3 v_2$	$v_4 v_3$	$v_4 v_4$	$v_4 v_5$
v_5	—	—	—	—	$v_5 v_5$

例如, 在表 6-8 中 P_{15}^* 按逆向追踪法可以这样求得:

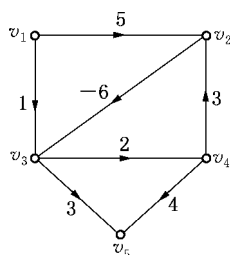


图 6-21

由于 $\theta_{15}^5 = 4$, 故 P_{15}^* 中 v_5 的紧前顶点为 v_4 ;

由于 $\theta_{14}^5 = 2$, 故 P_{15}^* 中 v_4 的紧前顶点为 v_2 ;

由于 $\theta_{12}^5 = 3$, 故 P_{15}^* 中 v_2 的紧前顶点为 v_3 ;

由于 $\theta_{13}^5 = 1$, 故 P_{15}^* 中 v_3 的紧前顶点为 v_1 .

所以 $P_{15}^* = v_1 v_3 v_2 v_4 v_5$, 其长度 $d_{15} = d_{15}^5 = 1$.

例 6-10 试用弗劳德算法求由图 6-21 所给的有向图 D 中一个负回路 Q .

解 经运算得矩阵 $d^k = (d_{ij}^k)$ 和 $\theta^k = (\theta_{ij}^k)$ ($k = 0, 1, 2, 3$)

如表 6-9 所给.

表 6-9

	$k = 0, 1$	$k = 2$	$k = 3$
(d_{ij}^k)	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & -6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1^* & \infty & \infty \\ \infty & 0 & -6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & 3 & -3^* & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1^* & 2^* \\ \infty & 0 & -6 & -4^* & -3^* \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & 3 & -3 & -1^* & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$
(θ_{ij}^k)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2^* & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2^* & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3^* & 3^* \\ 2 & 2 & 2 & 3^* & 3^* \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 3^* & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

由于 $d_{44}^3 = -1 < 0$, 说明 D 中有含有顶点 v_4 的负回路. 由 $\theta_{44}^3 = 3, \theta_{43}^3 = 2, \theta_{42}^3 = 4$, 故负回路 $Q = v_4 v_2 v_3 v_4, W(Q) = -1$.

6.2.3 应用举例

一些初看似乎和最短路径问题不相干的问题, 有时也可以构建成网络模型而用最短路径算法来求解.

例 6-11 (设备更新问题) 某工厂使用一种设备, 每年年初该厂需对该设备的更新与否作出决策. 若购置新设备, 就要支付一定的购置费用; 若继续使用旧设备, 则需支付一定的维修费. 设备使用的年数越长, 每年所需的维修费用就越大. 现若该厂在第一年年初购置了一台新设备, 问在 5 年内应如何制定一个设备更新计划, 以便在使用一台这种设备时“新设备购置费和旧设备维修费”的总费用最小? 若已知该设备在 5 年内购买的价格如表 6-10 所给, 设备使用不同年数的维修费如表 6-11 所列.

表 6-10

第 i 年	1	2	3	4	5
价格 a_i	11	11	12	12	13

表 6-11

使用寿命	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 3]$	$(3, 4]$	$(4, 5]$
费用 b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
	5	6	8	11	18

解 这种设备的更新方案是很多的. 最显然的: 每年年初购买一台设备更换旧的, 故 5 年内购置费为 $11 + 11 + 12 + 12 + 13 = 59$; 工厂每年对这台设备的维修费为 $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$, 所以总费用为 $59 + 25 = 84$.

又如另一个方案: 在第一年、第三年和第五年购买新设备, 购置费为

$$11 + 12 + 13 = 36,$$

维修费为

$$5 + 6 + 5 + 6 + 5 = 27,$$

故总费用为

$$36 + 27 = 63.$$

显然, 第二个方案比第一个方案优越.

若年限在 5 年以上, 要为这类问题穷举出所有可能采取的方案, 费时很大. 现在, 我们建立数学模型, 用最短路径算法来求解.

建立网络模型 D 如图 6-22 所示:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

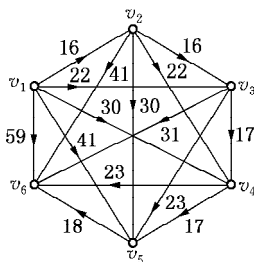


图 6-22

$$E = \{(v_i, v_j) \mid i = 1, \dots, 5; j = 2, \dots, 6, i < j\}.$$

在此, $v_1, v_2, \dots, v_5$ 相当于第 1, 2, $\dots$, 5 年的年初, v_6 相当于第 5 年年末. E 中有向边 (v_i, v_j) 相当于第 i 年年初购买一台设备一直用到第 $j-1$ 年年末.

显然, 对于每一种可能的设备更新方案, 在此图中都有相应的一条从 v_1 至 v_6 的路径. 例如, 路径 $v_1 v_3 v_5 v_6$ 相当于第 1, 3, 5 年年初购买新设备这一方案.

E 中边的权按如下法则给出:

$W(v_i, v_j) = \text{第 } i \text{ 年设备的购置费} + (j-i) \text{ 年里的设备维修费} = a_i + (b_1 + b_2 + \dots + b_{j-i}).$

例如, 边 (v_2, v_5) 表示第 2 年年初购买一台新设备, 使用至第 4 年年底, 故它的购置费为 $a_2 = 11$, 维修费为 $b_1 + b_2 + b_3 = 5 + 6 + 8 = 19$. 于是, 边 (v_2, v_5) 上的权 $w_{25} = 30$.

这样, 制订一个最优的设备更新方案的问题就等价于寻求 D 中 v_1 至 v_6 的最短路径问题. 应用迪奇斯特算法求解, 运算表格如表 6-12 所示.

最短路径为 $v_1 v_3 v_6$, 即第 1, 3 年购买新设备; 或者最短路径为 $v_1 v_4 v_6$, 即第 1, 4 年购买新设备. 5 年的总费用都为 53.

若制订更新计划的期限分成 60 个时段(例如一个月或一个季度为一个时段), 那么, 就有 $2^{60} \approx 1.15 \times 10^{18}$ 个购买策略可供选取. 若一台计算机每秒钟可计算 10^6 种策略, 要将全部策略估算一遍的时间就要 36 599 年, 但构建网络模型用最短路径算法来求解仅需一分钟左右.

表 6-12

$k(v_j) \backslash j$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
1	0*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2		16*	22	30	41	59
3			22*	30	41	57
4				30*	41	53
5					41*	53
6						53*

例 6-12 (多阶段存储问题) 某工厂生产产品所需的原材料分 3 个阶段进货. 根据供货条件, 每次进货量 q 只能从 5, 7 和 10 个单位中选一个方案, 其运费 $Q(q)$ 分别为 120, 138 和 160 个单位. 第 i 阶段对原材料的需求量为 a_i 个单位: $a_1 = 7, a_2 = 8, a_3 = 9$. 已知第一阶段初工厂仓库已存储该原材料 3 个单位. 仓库对该原材料最大库存量允许为 6 个单位. 本阶段进货在本阶段就供应生产的原材料不必进仓库. 每阶段末仓库存储的原材料需付存储费, 每单位原材料的存储费为 1 个单位. 现要求第 3 阶段末库存的原材料至少为 1 个单位.

问在保证生产需求的条件下, 每阶段进货采用何种方案, 能使运费和存储费总和最少?

解 我们作 iOs 平面直角坐标系. 点 (i, s) 表示第 i 阶段末仓库对该原材料的库存量为 s .

建立网络模型如图 6-23 所示. 顶点 $v_i^{s_i}$ 对应 iOs 坐标平面内点 (i, s_i) . 有向边 $(v_i^{s_i}, v_{i+1}^{s_{i+1}})$ 表示第 $i+1$ 阶段初有库存量 s_i , 第 $i+1$ 阶段末有库存量 s_{i+1} . 此时, 第 $i+1$ 阶段的进货量为

$$q_{i+1} = s_{i+1} + a_{i+1} - s_i. \quad (6-10)$$

有向边 $e = (v_i^{s_i}, v_{i+1}^{s_{i+1}})$ 的权

$$W(e) = Q(q_{i+1}) + s_{i+1}. \quad (6-11)$$

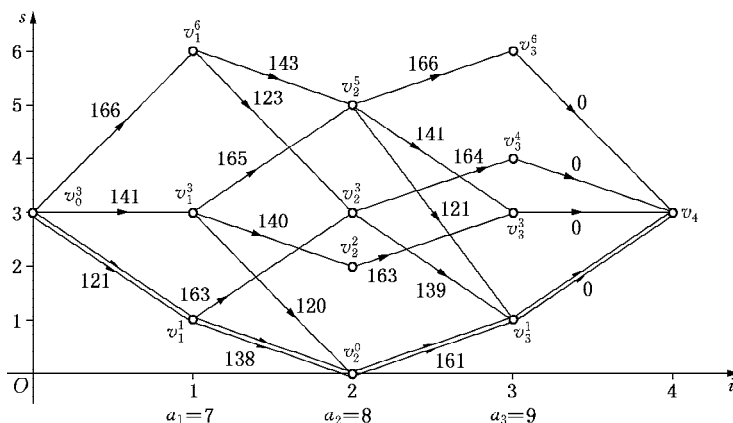


图 6-23

下面我们来讨论图 6-23 的顶点和边是如何设立的.

(1) 顶点 v_0^3 表示第一阶段初有原材料库存量 3.

(2) $s_1 = q_1 + s_0 - a_1 = q_1 + 3 - 7 = q_1 - 4$, 而 q_1 可取 5 或 7 或 10, 所以 s_1 可取 1 或 3 或 6, 故有顶点 v_1^1 、 v_1^3 和 v_1^6 , 并得有向边 (v_0^3, v_1^1) , (v_0^3, v_1^3) 和 (v_0^3, v_1^6) .

(3) $s_2 = q_2 + s_1 - a_2 = q_2 + s_1 - 8$.

当 $s_1 = 1$ 时, 若 $q_2 = 5$, 则 $q_2 + s_1 = 5 + 1 < a_2 = 8$, 故 q_2 不能取 5; 若 q_2 取 7 或 10, 则 s_2 取 0 或 3, 故有顶点 v_2^0 和 v_2^3 , 并得有向边 (v_1^1, v_2^0) 和 (v_1^1, v_2^3) .

当 $s_1 = 3$ 时, q_2 可取 5, 或 7, 或 10, 则 s_2 取 0, 或 2, 或 5, 故又增加两个顶点 v_2^2 和 v_2^5 , 并得有向边 (v_1^3, v_2^0) , (v_1^3, v_2^2) 和 (v_1^3, v_2^5) .

当 $s_1 = 6$ 时, 若 $q_2 = 10$, 则 $q_2 + s_1 - a_2 = 10 + 6 - 8 > \text{最大库存量 } 6$, 故 q_2 不能取 10; 若 q_2 取 5 或 7, 则 $s_2 = 3$ 或 5, 并得有向边 (v_1^6, v_2^3) 和 (v_1^6, v_2^5) .

(4) $s_3 = q_3 + s_2 - a_3 = q_3 + s_2 - 9$.

当 $s_2 = 0$ 时, $s_3 = q_3 - 9$, 由于 s_3 至少为 1, 所以 q_3 只能取 10. 此时 $s_3 = 1$, 故得顶点 v_3^1 和有向边 (v_2^0, v_3^1) .

当 $s_2 = 2$ 时, $s_3 = q_3 - 7$, 由 $s_3 \geq 1$, 可知 $q_3 \geq 8$, q_3 只能取 10. 此时 $s_3 = 3$, 故得到顶点 v_3^3 和有向边 (v_2^2, v_3^3) .

当 $s_2 = 3$ 时, $s_3 = q_3 - 6$, 则 $s_3 \geq 1$, 可知 $q_3 \geq 7$, q_3 可取 7 或 10. 此时 $s_3 = 1$ 或 4, 因而产生一个新顶点 v_3^4 , 并得有向边 (v_2^3, v_3^1) 和 (v_2^3, v_3^4) .

当 $s_2 = 5$ 时, $s_3 = q_3 - 4$, q_3 可取 5 或 7 或 10, 此时 s_3 可为 1 或 3 或 6, 因而又产生一个新顶点 v_3^6 , 并得有向边 (v_2^5, v_3^1) , (v_2^5, v_3^3) 和 (v_2^5, v_3^6) .

按式(6-10)和式(6-11)计算上述各边的权. 例如, 对边 (v_2^5, v_3^6) 来说, $q_3 = s_3 + a_3 - s_2 = 6 + 9 - 5 = 10$, $W(v_2^5, v_3^6) = Q(q_3) + s_3 = Q(10) + 6 = 166$.

(5) v_4 为一个虚设点, 边 (v_3^1, v_4) , (v_3^3, v_4) , (v_3^4, v_4) 和 (v_3^5, v_4) 的权都为 0.

可见, 图 6-23 中任意一条 v_0^3 至 v_4 的路径就代表一个三阶段的进货方案, 我们的问题就成为在图 6-23 中寻求最短路径.

由算法可求得顶点 v_0^3 至 v_4 的最短路径

$$P^* = v_0^3 v_1^1 v_2^0 v_3^1 v_4,$$

其长度为 420. 因而, 各阶段进货方案为

$$q_1 = s_1 + a_1 - s_0 = 1 + 7 - 3 = 5,$$

$$q_2 = s_2 + a_2 - s_1 = 0 + 8 - 1 = 7,$$

$$q_3 = s_3 + a_3 - s_2 = 1 + 9 - 0 = 10,$$

总费用为 420.

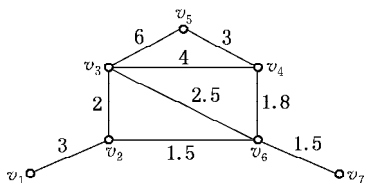


图 6-24

例 6-13 (选址问题) 现准备在 $v_1, v_2, \dots, v_7$ 等 7 个居民点中设置一个售票处, 各点之间的距离由图 6-24 给出. 问售票处设在哪个居民点, 可使最大服务距离为最小? 若要设置两个售票处, 问应设在哪两个居民点?

解 我们求出任意两个顶点 v_i 与 v_j 之间的最短路径长度 $d(v_i, v_j) = d_{ij}$, 得矩阵 $d = (d_{ij})$ 如下:

$$d = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix} & l(v_i) \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6.3 & 9.3 & 4.5 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3.3 & 6.3 & 1.5 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 6 & 2.5 & 4 \\ 6.3 & 3.3 & 4 & 0 & 3 & 1.8 & 3.3 \\ 9.3 & 6.3 & 6 & 3 & 0 & 4.8 & 6.3 \\ 4.5 & 1.5 & 2.5 & 1.8 & 4.8 & 0 & 1.5 \\ 6 & 3 & 4 & 3.3 & 6.3 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 9.3 \\ 6.3 \\ 6 \\ 6.3 \\ 9.3 \\ 4.8 \\ 6.3 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

我们依次对顶点 v_i 求 $l(v_i)$ ($i = 1, \dots, 7$):

$$l(v_i) = \max\{d_{ij} \mid j = 1, \dots, 7\},$$

称 $l(v_i)$ 为 v_i 的最大服务距离, 并将 $(l(v_1), \dots, l(v_7))^T$ 置于矩阵 d 的最右列.

$l(v_i)$ 的实际意义是: 如果我们把售票处设在 v_i , 那么售票处与最远的服务对象间的

距离是 $l(v_i)$. 这样, 最大服务距离越小的点, 设置为售票处就越好. 现在

$$\min\{l(v_1), \dots, l(v_7)\} = \min\{9.3, 6.3, 6, 6.3, 9.3, 4.8, 6.3\} \\ = 4.8 = l(v_6).$$

故若设置一个售票处, 则设在居民点 v_6 处较好.

下面考虑设置两个售票处.

假若设在 v_3 和 v_6 . 那么对点 v_1 来说, 居民可以到 v_3 处购票, 也可以到 v_6 处购票. 由矩阵 d 知 $d_{13} = 5$ 及 $d_{16} = 4.5$, 这样, v_1 处的居民自然选择到 v_6 处购票, 其服务距离为 4.5. 我们依次找出居民点 $v_2, \dots, v_7$ 的服务距离, 将有关信息列成表 6-13.

表 6-13

点 v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$d(v_j, v_3)$	5	2	0	4	6	2.5	4
$d(v_j, v_6)$	4.5	1.5	2.5	1.8	4.8	0	1.5
服务距离	4.5	1.5	0	1.8	4.8	0	1.5

从表 6-13 中可看出, 当售票处设在 v_3 和 v_6 时, 最大服务距离为

$$\max\{4.5, 1.5, 0, 1.8, 4.8, 0, 1.5\} = 4.8.$$

记

$$l(v_3, v_6) = 4.8,$$

我们求任意一对顶点 v_i 和 v_j 的最大服务距离 $l(v_i, v_j)$, 并将它们列成矩阵 $L = (l(v_i, v_j))$:

$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & 6.3 & 6 & 4 & 6 & 4.8 & 6.3 \\ 6.3 & - & 6 & 3 & 3 & 4.8 & 5 \\ 6 & 6 & - & 5 & 5 & 4.8 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & - & 6.3 & 4.5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 6.3 & - & 4.5 & 6 \\ 4.8 & 4.8 & 4.8 & 4.5 & 4.5 & - & 4.8 \\ 6.3 & 5 & 5 & 6 & 6 & 4.8 & - \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

由矩阵 L 可知,

$$l(v_2, v_4) = l(v_2, v_5) = 3.$$

在诸 $l(v_i, v_j)$ 中为最小, 故售票处拟设置在 v_2 及 v_4 或设置在 v_2 及 v_5 .

§ 6.3 最长路径问题

给实数赋权有向图 $D = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 对任 $e = (v_i, v_j) \in E$, 有 $W(e) = w_{ij} \geq 0$.

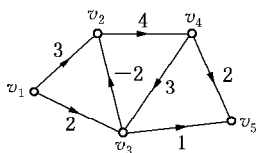


图 6-25

现设 G 中无正回路, 即若 Q 为 D 的一个回路, 则必有 $W(Q) = \sum_{e \in Q} W(e) \leq 0$.

例如在图 6-25 中, 回路 $Q = v_3 v_2 v_4 v_3$ 就是一个正回路, 有 $W(Q) = -2 + 4 + 3 = 5$.

又不妨设 D 为完备图: 若 D 中有平行边, 则保留权最大的边; 若 D 中不存在顶点 u 至顶点 v 的有向边, 则在 E 中增加有向边 (u, v) , 且 $W(u, v) = -\infty$.

若 P^* 为 D 中 u 至 v 的一条路, 且有

$$W(P^*) = \max\{W(P) \mid P \text{ 为 } D \text{ 中 } u \text{ 至 } v \text{ 的路}\},$$

则称 P^* 为 u 至 v 的最长路, 并记 $W(P^*) = h(u, v)$.

由于 D 中无正回路, 则 D 中 u 至 v 的最长路 P^* 具有下列性质:

(1) u 至 v 的最长路 P^* 中若含有回路 Q , 则应有 $W(Q) = 0$ (否则, $W(Q) < 0$, 则 P 中去掉 Q 后所得路 P' 必有 $W(P') > W(P)$, 与 P^* 为 u 至 v 的最长路矛盾).

于是, 若将这样的回路从 P^* 中删去, 则 P^* 就成为一条 u 至 v 的最长路径. 故我们今后求得的 u 至 v 的最长路, 都是指最长路径.

(2) u 至 v 的最长路径至多含有 n 个点, 从而至多含有 $n-1$ 条边.

(3) 若 u 至 v 的最长路径 $P^* = u \dots t \dots v$, 则子路 $u \dots t$ 及 $t \dots v$ 分别为 u 至 t 及 t 至 v 的最长路径.

230

6.3.1 最长路径算法

本算法求 v_1 至顶点 $v_j (j = 1, \dots, n)$ 的最长路径 P_{1j}^* , 记

$$h_{1j} = W(P_{1j}^*) = h(v_1, v_j).$$

算法采用标号方法. 由于迭代过程中标号方法的固有特点, 我们是在 v_1 至 v_j 的路中来寻找 v_1 至 v_j 的最长路径 P_{1j}^* .

若在 v_1 至 v_j 包含边数不超过 k 的所有路中, 最长路的长度用 h_{1j}^k 表示, 即

$$h_{1j}^k = \max\{W(P) \mid P \text{ 为 } v_1 \text{ 至 } v_j \text{ 的路}, |E(P)| \leq k\}.$$

由此定义, 下列两式显然成立:

$$\begin{aligned} h_{1j}^{k+1} &= \max\{h_{1i}^k + w_{ij} \mid i = 1, \dots, n\}, \quad j = 1, \dots, n, \\ h_{1j}^{k+1} &\geq h_{1j}^k, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

定理 6-2 若 $h_{1j}^{k+1} = h_{1j}^k$ 对 $j = 1, \dots, n$ 都成立, 则 v_1 至 v_j 的最长路径长度 $h_{1j} = h_{1j}^k (j = 1, \dots, n)$.

证

$$\begin{aligned} h_{1j}^{k+2} &= \max\{h_{1i}^{k+1} + w_{ij} \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \max\{h_{1i}^k + w_{ij} \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= h_{1j}^{k+1} = h_{1j}^k, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

于是, 有

$$h_{1j}^k = h_{1j}^{k+1} = \dots = h_j^{n-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

又由于

$$h_{1j}^1 \leq h_{1j}^2 \leq \dots \leq h_{1j}^k, \quad j = 1, \dots, n,$$

同时, v_1 至 v_j 的最长路径至多有 $n-1$ 条边, 故 h_{1j}^k 即为 v_1 至 v_j 的最长路径长度 h_{1j} ($j = 1, \dots, n$).

在初始 $k=0$ 时, 可令

$$h_{11}^0 = 0, h_{1j}^0 = -\infty \quad (j = 2, \dots, n) \quad (6-12)$$

然后用公式

$$h_{1j}^{k+1} = \max\{h_{1i}^k + w_{ij} \mid i = 1, \dots, n\} \quad j = 1, \dots, n \quad (6-13)$$

进行迭代, 当 $h_{1j}^{k+1} = h_{1j}^k$, 对 $j = 1, \dots, n$ 都成立时, 即求得了诸 $h_{1j} = h_{1j}^k$.

由于我们事先对 D 中是否有正回路没有进行过判别, 那么, 按式(6-13)迭代至第 n 步, 若存在某个 j , 有 $h_{1j}^n \neq h_{1j}^{n-1}$, 则说明 D 中存在正回路.

例 6-14 求图 6-26 中 v_1 至各点的最长路径长度.

解 从式(6-12)出发, 应用式(6-13)进行迭代, 得运算表格如表 6-14.

表 6-14

$\begin{matrix} k \\ 1j \end{matrix}$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
1	0	3	4	$-\infty$	$-\infty$
2	0	7	5	8	12
3	0	7	4	9	15
4	0	7	4	9	16
5	0	7	4	9	16

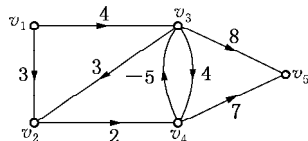


图 6-26

例如, 对 $k=2$,

$$\begin{aligned} h_{12}^2 &= \max\{h_{11}^1 + w_{12}, h_{12}^1 + w_{22}, h_{13}^1 + w_{32}, h_{14}^1 + w_{42}, h_{15}^1 + w_{52}\} \\ &= \max\{0 + 3, 3 + 0, 4 + 3, -\infty - \infty, -\infty - \infty\} = 7; \\ h_{14}^2 &= \max\{h_{11}^1 + w_{14}, h_{12}^1 + w_{24}, h_{13}^1 + w_{34}, h_{14}^1 + w_{44}, h_{15}^1 + w_{54}\} \\ &= \max\{0 - \infty, 3 + 2, 4 + 4, -\infty + 0, -\infty - \infty\} = 8. \end{aligned}$$

由表 6-14 知,

$$h_{1j}^5 = h_{1j}^4 \quad \text{对 } j = 1, \dots, 5 \text{ 都成立,}$$

所以即得

$$h_{11} = 0, h_{12} = 7, h_{13} = 4, h_{14} = 9, h_{15} = 16.$$

为使算法收敛速度加快, 对顶点在各步的标号可作进一步的改进.

我们注意到, 在计算

$$h_{1j}^1 = \max\{h_{1i}^0 + w_{ij} \mid i = 1, \dots, n\}$$

时,对小于 j 的 i , h_{1i}^1 已求得,且 $h_{1i}^1 \geq h_{1i}^0$,而对大于 j 的 i , $h_{1i}^1 = -\infty$,故我们对 $j = 1, \dots, n$,用

$$h_{1j}^1 = \max\{h_{1i}^1 + w_{ij}, | 1 \leq i < j; h_{1j}^0\}$$

来计算 h_{1j}^1 .

而在计算 h_{1j}^2 时,对 $1 \leq i < j$ 来说, h_{1i}^1 在计算 h_{1j}^1 时已用过,故若取 $h_{1n}^2 = h_{1n}^1$,我们对 $j = n, n-1, \dots, 1$,用

$$h_{1j}^2 = \max\{h_{1j}^1; h_{1i}^2 + w_{ij}, j < i \leq n\}$$

来计算 h_{1j}^2 .

同理,取

$$h_{1j}^3 = \max\{h_{1i}^3 + w_{ij}, 1 \leq i < j; h_{1j}^2\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$h_{1j}^4 = \max\{h_{1j}^3; h_{1i}^4 + w_{ij}, j < i \leq n\}, \quad j = n, \dots, 1,$$

依次类推,算法的收敛速度必然加快(自然,修改后的 h_{1j}^k 的含义与原来的 h_{1j}^k 的定义有所区别).

例如,对例 6-14 的图 6-26,我们按上述修改的方法计算的运算表格如表 6-15.

表 6-15

$\begin{matrix} k \\ j \end{matrix}$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
1	0	3	4	8	15
2	0	7	4	8	15
3	0	7	4	9	16
4	0	7	4	9	16

在表 6-15 中,例如

$$h_{14}^1 = \max\{h_{11}^1 + w_{14}, h_{12}^1 + w_{24}, h_{13}^1 + w_{34}, h_{14}^0\}$$

$$= \max\{0 - \infty, 3 + 2, 4 + 4, -\infty\} = 8;$$

$$h_{15}^1 = \max\{h_{11}^1 + w_{15}, h_{12}^1 + w_{25}, h_{13}^1 + w_{35}, h_{14}^1 + w_{45}, h_{15}^0\}$$

$$= \max\{0 - \infty, 3 - \infty, 4 + 8, 8 + 7, -\infty\} = 15;$$

$$h_{12}^2 = \max\{h_{12}^1, h_{13}^2 + w_{32}, h_{14}^2 + w_{42}, h_{15}^2 + w_{52}\}$$

$$= \max\{3, 4 + 3, 8 - \infty, 15 - \infty\} = 7.$$

对于表 6-15 来说,现在 $h_{1j}^3 = h_{1j}^4, j = 1, \dots, 5$,所以

$$h_{11} = 0, h_{12} = 7, h_{13} = 4, h_{14} = 9, h_{15} = 16.$$

我们用逆向追踪法来求 v_1 至 v_j 的最长路径 P_{1j}^* .

首先寻求 P_{1j}^* 中 v_j 的紧前顶点 v_q ,使得 $h_{1q} + w_{qj} = h_{1j}$;然后寻找 P_{1j}^* 中 v_q 的紧前顶点 v_t ,使 $h_{1t} + w_{tq} = h_{1q}$. 依次类推,直至追溯到 v_1 ,即得 v_1 至 v_j 的最长路径 $P_{1j}^* = v_1 \dots v_t v_q v_j$.

例如,我们现在来求表 6-15 中 v_1 至 v_5 的最长路径 P_{15}^* .

现在 $h_{15} = 16$, 由图 6-26 可知, $h_{14} + w_{45} = 9 + 7 = 16$, 故 P_{15}^* 中 v_5 的紧前顶点为 v_4 ; 又知 $h_{12} + w_{24} = 7 + 2 = 9$, 故 P_{15}^* 中 v_4 的紧前顶点为 v_2 ; 又 $h_{13} + w_{32} = 4 + 3 = 7$, 故 P_{15}^* 中 v_2 的紧前顶点为 v_3 ; 又 $h_{11} + w_{13} = 0 + 4 = 4$, 故 P_{15}^* 中 v_3 的紧前顶点为 v_1 . 于是 v_1 至 v_5 的最长路径 $P_{15}^* = v_1 v_3 v_2 v_4 v_5$.

或者我们在第 k 步 ($k = 1, 2, \dots$) 迭代的过程中, 记录产生标号 h_{1j}^k 的具体路径的顶点的下标信息, 将它置于顶点标号的右下角. 例如:

$$h_{1s}^0 + w_{st} = h_{1st}^1, h_{1st}^1 + w_{tq} = h_{1stq}^2, h_{1stq}^2 + w_{qj} = h_{1stqj}^3.$$

这样, 我们在迭代结束时, 同时得到了 v_1 至 v_j 的最长路径 P_{1j}^* 及其长度 h_{1j} .

下面我们给出最长路径算法:

① 取 $h_{11}^0 = 0, h_{1j}^0 = -\infty (j = 2, \dots, n), k = 0$.

② $k+1$ 为奇数否?

若是, 则按 $j = 1, \dots, n$ 的顺序, 取

$$h_{1j}^{k+1} = \max\{h_{1i}^{k+1} + w_{ij}, 1 \leq i < j; h_{1j}^k\}; \quad (6-14)$$

若否, 则按 $j = n, \dots, 1$ 的顺序, 取

$$h_{1j}^{k+1} = \max\{h_{1j}^k; h_{1i}^{k+1} + w_{ij}, j < i \leq n\}. \quad (6-15)$$

③ $h_{1j}^{k+1} = h_{1j}^k$ 对 $j = 1, \dots, n$ 都成立否?

若是, 则 $h_{1j} = h_{1j}^k (j = 1, \dots, n)$, 用逆向追踪法求 v_1 至 v_j 的最长路径 P_{1j}^* , 算法终止;
若否, 则转步骤④.

④ $k+1 = n$?

若是, 则 D 中存在正回路, 算法终止;

若否, 则 $k = k+1$, 转步骤②.

这里需要指出, 若 D 中有正回路, 则在执行本算法时, 在迭代过程中标号 h_{1j}^k 所对应的路中已可能含有正回路, 但按本算法要迭代至第 n 步才能判断出 D 中有正回路. 读者不妨用本算法对图 6-25 一试.

例 6-15 求图 6-19 中 v_1 至 v_8 的最长路径及长度.

解 我们列出运算表格, 如表 6-16 所示.

表 6-16

$\begin{matrix} k \\ 1j \end{matrix}$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
0	0 ₁₁	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
1	0 ₁₁	1 ₁₂	6 ₁₂₃	4 ₁₂₄	4 ₁₂₅	9 ₁₂₅₆	14 ₁₂₃₇	17 ₁₂₃₇₈
2	0 ₁₁	1 ₁₂	15 ₁₂₅₄₃	8 ₁₂₅₄	4 ₁₂₅	9 ₁₂₅₆	14 ₁₂₃₇	17 ₁₂₃₇₈
3	0 ₁₁	1 ₁₂	15 ₁₂₅₄₃	8 ₁₂₅₄	4 ₁₂₅	10 ₁₂₄₅₆	23 ₁₂₅₄₃₇	26 ₁₂₅₄₃₇₈
4	0 ₁₁	1 ₁₂	15 ₁₂₅₄₃	8 ₁₂₅₄	4 ₁₂₅	10 ₁₂₄₅₆	23 ₁₂₅₄₃₇	26 ₁₂₅₄₃₇₈

由表 6-16 知, v_1 至 v_8 的最长路径为 $v_1 v_2 v_5 v_4 v_3 v_7 v_8$, 其长度为 26.

6.3.2 应用举例

例 6-16 (最优分配问题) 有一个仪表公司打算向它的 3 个营业区设立 6 家销售店, 每个营业区至少设一家, 所获利润如表 6-17 所示. 问设立的 6 家销售店数应如何分配, 可使总利润最大?

表 6-17

利 润		营业区		
		A	B	C
销售 店数	1	200	210	180
	2	280	220	230
	3	330	225	260
	4	340	230	280

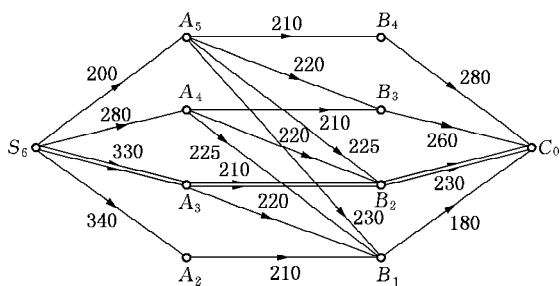


图 6-27

解 作网络图 D 如图 6-27 所示.

顶点 S_6 表示初始时公司拥有 6 家销售店待设置. 顶点 A_i 表示在 A 区设立销售店后还剩有 i 家销售店未设立; 顶点 B_j 表示在对 A、B 区设立销售店后还剩有 j 家销售店未设立; C_0 表示公司已将 6 家销售店设置完. 边 (S_6, A_i) 表示在 A 区设立 $6-i$ 家销售店; 边 (A_i, B_j) 表示在 B 区设立 $i-j$ 家销售店; 边 (B_j, C_0) 表示在 C 区设立 j 家商店. 图 6-27 中边旁的权为表 6-17 中相应参数.

于是, S_6 至 C_0 的任一条路径表示一个具体的销售店的分配方案. 例如 $S_6 A_5 B_3 C_0$ 指在 A 区设立 1 家销售店, 在 B 区设立 2 家销售店, 在 C 区设立 3 家销售店. 我们的问题归结为在图 D 中求 S_6 至 C_0 的最长路径.

由算法可求出 S_6 至 C_0 的最长路径为 $S_6 A_3 B_2 C_0$, 其长度为 770. 故最佳决策为: 在 A, B, C 区分别设立 3、1、2 家销售店, 可获得利润 770.

例 6-17 (货物装载问题) 现有一辆最大装载量 $b = 5$ 吨的卡车装载 3 种货物. 已知 3 种货物单件重量和价值如表 6-18 所给. 问卡车对各种货物装运多少, 使卡车装载的货物总价值最大?

解 设第 j 种货物装载 x_j 件 ($j = 1, 2, 3$), 得整数规划模型:

$$\begin{aligned} \max f &= 30x_1 + 80x_2 + 65x_3; \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ &x_j \geq 0, \text{ 整数}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

建立网络模型 $D = (V, E)$ 如图 6-28 所示.

图 D 的顶点个数 $n = b + 1 = 6$. 当 $V(D)$ 的顶点 v_i 及 v_k 对应的下标差 $(k-i)$ 恰等于 $j^\#$ 货物单件重量 a_j 时, 则给有向边 (v_i, v_k) , 且 $W(v_i, v_k) = C_j$.

表 6-18

$j^{\#}$ 货物	单件重量 a_j (吨)	价值 C_j
1 [#]	1	30
2 [#]	3	80
3 [#]	2	65

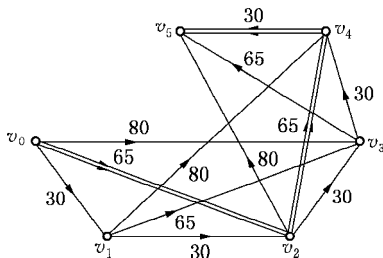


图 6-28

显然,图 D 中任一条 v_0 至 v_5 的路径 P 对应了 3 种货物的一个装载方案:若权为 C_j 的边在路径 P 中出现 d_j 次,则 $j^{\#}$ 货物装运 d_j 件 ($x_j = d_j$). 路径的长度 $W(P)$ 即为该方案所获得的价值 f .

例如,在路径 $P = v_0 v_1 v_3 v_4 v_5$ 中,

$$W(v_0, v_1) = W(v_3, v_4) = W(v_4, v_5) = 30 = a_1,$$

$$W(v_1, v_3) = 65 = a_3,$$

所以 P 对应的方案为 $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1$.

该方案的价值为 $f = 30 \times 3 + 65 = 155 = W(P)$.

如今,我们的问题归结为在图 D 中寻求 v_0 至 v_5 的最长路径 P_{05}^* . 运用算法,可知

$$P_{05}^* = v_0 v_2 v_4 v_5,$$

其长度为 160.

在 P_{05}^* 中有 3 条边,它们对应的权为

$$W(v_0, v_2) = 65, W(v_2, v_4) = 65, W(v_4, v_5) = 30,$$

所以最佳决策为

$$x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 2,$$

即 1[#] 货物装载 1 件, 2[#] 货物不装, 3[#] 货物装载 2 件,其总价值为 160.

例 6-18 (设备更新问题) 某公司明年年初(视为第一年, $i = 1$) 将对它的一辆已使用了 2 年的卡车(记作 0[#] 型)考虑 5 年内的更新问题. 第 i 年年初购进的卡车视作 $i^{\#}$ 型 ($i = 1, \dots, 5$). 现给定有关符号如下:

$r_i(t)$ ——在第 i 年, 一辆已使用了 t 年的卡车所能得到的收益;

$u_i(t)$ ——在第 i 年, 对一辆已使用了 t 年的卡车应花的维修费;

$c_i(t)$ ——对 $j^{\#}$ 型 ($j = 0, 1, \dots, 5$) 卡车, 使用 t 年, 在第 i 年年初的更新费 ($i > j$).

假设各种型号的卡车的有关信息如表 6-19 至表 6-24 所给. 公司每年年初都面临卡车更新与否的决策问题. 问公司从明年起, 在 5 年内如何制定卡车的更新计划, 使总的收益最大?

解 我们作 iOt 直角平面坐标系. 点 (i, t) 意味着在第 i 年初卡车处在已使用 t 年的状态.

表 6-19

车型:0 [#] 型	$i = 1, t = 2$	$i = 2, t = 3$	$i = 3, t = 4$	$i = 4, t = 5$	$i = 5, t = 6$
收益 $r_i(t)$	10	8	8	6	4
维修费 $u_i(t)$	3	3	4	4	5
更新费 $c_i(t)$	25	26	27	28	29

表 6-20

车型:1 [#] 型	$i = 1, t = 0$	$i = 2, t = 1$	$i = 3, t = 2$	$i = 4, t = 3$	$i = 5, t = 4$
收益 $r_i(t)$	14	16	16	14	12
维修费 $u_i(t)$	1	1	2	2	3
更新费 $c_i(t)$		22	24	25	26

表 6-21

车型:2 [#] 型	$i = 2, t = 0$	$i = 3, t = 1$	$i = 4, t = 2$	$i = 5, t = 3$
收益 $r_i(t)$	16	14	14	12
维修费 $u_i(t)$	1	1	2	2
更新费 $c_i(t)$		22	24	25

表 6-22

车型:3 [#] 型	$i = 3, t = 0$	$i = 4, t = 1$	$i = 5, t = 2$
收益 $r_i(t)$	18	16	16
维修费 $u_i(t)$	1	1	2
更新费 $c_i(t)$		22	24

表 6-23

车型:4 [#] 型	$i = 4, t = 0$	$i = 5, t = 1$
收益 $r_i(t)$	18	16
维修费 $u_i(t)$	1	1
更新费 $c_i(t)$		22

表 6-24

车型:5 [#] 型	$i = 5, t = 0$
收益 $r_i(t)$	20
维修费 $u_i(t)$	1
更新费 $c_i(t)$	

点 (i, t) 至点 $(i+1, t+1)$ 的有向边指这样的决策:在第 i 年年初,卡车已使用 t 年,现继续使用,则在第 $i+1$ 年年初,卡车已使用 $t+1$ 年.该有向边的权即相应决策的效益 $r_i(t) - u_i(t)$.

点 (i, t) 至点 $(i+1, 1)$ 的有向边指这样的决策:在第 i 年年初,卡车已使用 t 年,现进行更新,则在第 $i+1$ 年年初,卡车处于使用1年的状态.该有向边的权即相应决策的收益为

$$r_i(0) - u_i(0) - c_i(t).$$

于是,得网络图 D 如图6-29所示,其中点 $(7, 3)$ 为虚设点.点 $(6, i)$ 至点 $(7, 3)$ 的有向边

的权都为 0 ($i = 1, \dots, 5, 7$).

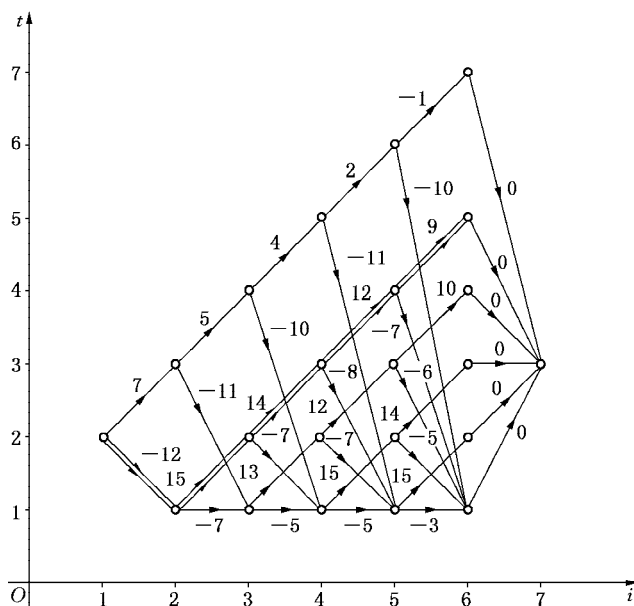


图 6-29

在图 6-29 中,例如点(1,2)至点(2,3)有向边的权为

$$r_1(2) - u_1(2) = 10 - 3 = 7.$$

点(1,2)至点(2,1)有向边的权为

$$r_1(0) - u_1(0) - c_1(2) = 14 - 1 - 25 = -12.$$

又如点(3,1)至点(4,1)有向边的权为

$$r_3(0) - u_3(0) - c_3(1) = 18 - 1 - 22 = -5.$$

点(1,2)至点(7,3)的任一条路径代表一种卡车更新方案.

例如,路径(1,2)(2,1)(3,2)(4,3)(5,1)(6,1)(7,3)代表的卡车更新方案为:第1年年初时卡车已使用2年,更换新卡车,第2、第3年继续使用,第4年年初更换新卡车,使用一年,第5年年初更换新卡车,使用至年底.该路径的长度即为相应的卡车更新方案5年内的收益.

于是,本问题化为求一条点(1,2)至点(7,3)的最长路径 P^* 问题.

由网络图 D 可知:

$$P^* = (1,2)(2,1)(3,2)(4,3)(5,4)(6,5)(7,3),$$

其长度为 38. 所以,最佳决策为:第1年年初对一辆已使用2年的卡车进行更新,一直使用至第5年年末,总收益为 38.

* § 6.4 第 k 短路问题

现给非负赋权有向图 $D = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 任 $e \in E$, 有权 $W(e) \geq 0$.

在很多实际问题中, 由于客观条件的限制, 对图 D (不妨设为完备图), 我们除了关心顶点 v_1 至顶点 v 的最短路外, 还对顶点 v_1 至顶点 v 的第 k 短路感兴趣.

第 k 短路——若 $P^1, P^2, \dots, P^k$ 为顶点 v_1 至顶点 v 的 k 条路径, $W(P^1) \leq W(P^2) \leq \dots \leq W(P^k)$, 现 P 为顶点 v_1 至顶点 v 的任一条路径 $P \in \{P^1, \dots, P^k\}$, 且 $W(P) \geq W(P^k)$, 则称 P^k 为顶点 v_1 至顶点 v 的第 k 短路.

例 6-19 某工厂研制新产品, 研究工作已近尾声, 但要新产品正式投产, 还需 4 个阶段工作, 每个阶段的工作可在不同水准上完成, 所需时间 W 由表 6-25 给出. 有 10 个单位费用可供这些阶段使用. 在不同水准上的费用由表 6-26 给出. 现问: 在预算的限制下, 每个阶段工作按哪一水准进行才能使完成 4 个阶段工作的总时间最小?

表 6-25

工作时间 W		阶 段			
		I	II	III	IV
水 准	1	5			
	2	4	3	4	2
	3	2	2	3	1

表 6-26

费 用		阶 段			
		I	II	III	IV
水 准	1	1			
	2	2	2	3	1
	3	3	3	4	2

解 对此问题我们建立网络模型如图 6-30 所示, 其中顶点 v_2, v_3, v_4 分别表示在水准 1、水准 2、水准 3 条件下进行阶段 I 的工作, 顶点 v_5, v_6 分别表示在水准 2 和水准 3

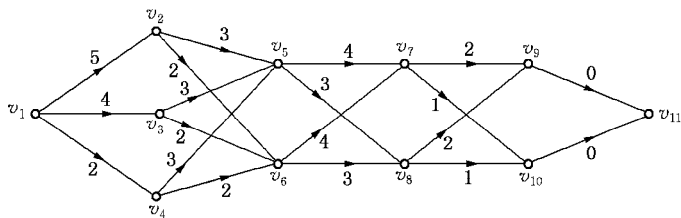


图 6-30

条件下进行阶段 II 工作, 顶点 v_7 和 v_8 分别表示在水准 2 和水准 3 条件下进行阶段 III 工作, 顶点 v_9 和 v_{10} 分别表示在水准 2 和水准 3 条件下进行阶段 IV 工作. 有向边 (v_i, v_j) 旁的权 w_{ij} 表示在某水准下进行某阶段工作所需时间.

显然, 顶点 v_1 至顶点 v_{11} 的一条路径表示一个具体的方案, 其长度为采取该方案时完成 4 个阶段工作所需时间.

可知图 6-30 中顶点 v_1 至 v_{11} 的最短路径为

$$P^1 = v_1 v_4 v_6 v_8 v_{10} v_{11},$$

它的长度为 8, 相应的方案为 4 个阶段工作都在水准 3 的条件下完成, 因此其费用

$$f(P^1) = 3 + 3 + 4 + 2 = 12,$$

显然它超过了可提供的费用 10.

该例子说明, 我们有必要研究第 k 短路径问题.

为建立求第 k 短路径的算法, 下面我们引进一些定义及记号.

偏移——若有路径

$$P = v_1 u_1 u_2 \dots u_j u_{j+1} \dots u_q v,$$

$$Q = v_1 u_1 u_2 \dots u_j t \dots v,$$

其中 $(u_j, t) \neq (u_j, u_{j+1})$ (特殊情况, $u_j = v_1$), 且有 $W(P) \leq W(Q)$, 则称 Q 为 P 的偏移.

例如在图 6-30 中, $v_1 v_3 v_5 v_8 v_{10} v_{11}$, $v_1 v_4 v_5 v_7 v_9 v_{11}$, $v_1 v_4 v_6 v_7 v_{10} v_{11}$, $v_1 v_4 v_6 v_8 v_9 v_{11}$ 都为 $P^1 = v_1 v_4 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$ 的偏移.

若我们已取得顶点 v_1 至顶点 v 的第 1 至第 k 短路径 $P^1, \dots, P^k$, 我们作

$$P^k = v_1 u_1 \dots u_j \dots u_q v$$

的部分偏移集合 $F(P^k)$.

(为了引进一些记号, 我们对以下运算作如此规定:

若 e 为 D 中边, P 为 D 中路径, 则 $D - \{e\}$ 为将 D 中边 e 取走所得图; 而 $D - P$ 为将 D 中属于 P 的边都取走后所得图.)

令 $D_0 = D - \{(v_1, u) \mid (v_1, u) \text{ 为某一条第 } i \text{ 短路径 } P^i \text{ 的边}, 1 \leq i \leq k\}$, 求 D_0 中 v_1 至 v 的最短路径 Q_0 . 显然 Q_0 为 $\{P^1, \dots, P^k\}$ 中任一路径的偏移.

一般地, 令

$$D_j = D - v_1 u_1 \dots u_j - \{(u_j, u) \mid v_1 u_1 \dots u_j u \text{ 为某一条第 } i \text{ 短路径 } P^i \text{ 的子路}, 1 \leq i \leq k\}.$$

求 D_j 中顶点 u_j 至 v 的最短路径 $\tilde{Q}_j$, 并将路径 $v_1 u_1 \dots u_j$ 与路径 $\tilde{Q}_j$ 相衔接, 得路 Q_j .

若 Q_j 中顶点都不相同, 则 Q_j 为 $\{P^1, \dots, P^k\}$ 中任一路径的偏移. 记

$$F(P^k) = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_q\}.$$

自然, 对任一 $Q \in F(P^k)$, 有 $W(Q) \geq W(P^k)$.

算法的迭代过程可如下进行.

若已求得顶点 v_1 至 v 的最短路径 P^1 与 P^1 的部分偏移集合 $F(P^1)$, 记

$$B = F(P^1),$$

取 $\tilde{P}$:

$$W(\tilde{P}) = \min\{W(Q) \mid Q \in B\},$$

此时, 还未确定的从 v_1 至 v 的任一路径 P 必为集合 B 中某一路径 Q 的偏移, 从而有

$$W(P) \geq W(Q) \geq W(\tilde{P}).$$

于是, 路径 $\tilde{P}$ 为第 2 短路径 P^2 .

从集合 B 中去掉 $\tilde{P}$. 我们再做 $F(P^2)$, 并取

$$B = B \cup F(P^2).$$

显然, 还未确定过的顶点 v_1 至 v 的任一路径 P 为 B 中某一条路径 Q 的偏移. 取 $\tilde{P}$

$$W(\tilde{P}) = \min\{W(Q) \mid Q \in B\},$$

则 $\tilde{P}$ 为 D 中顶点 v_1 至 v 的第 3 短路径 P^3 . 我们从集合 B 中去掉 $\tilde{P}$, 作集合 $F(P^3)$, 取

$$B = B \cup F(P^3).$$

如此继续迭代下去, 直至求得我们所需要的顶点 v_1 至 v 的第 k 短路径.

下面我们给出 v_1 至 v 的第 k^* 短路径算法:

① 取一条 v_1 至 v 的最短路径 P^1 .

$$A = \{P^1\}, \quad B = \emptyset, \quad k = 1.$$

② 对 P^k 作 $F(P^k)$.

若 $P^k = v_1 v$, 令 $D_0 = D - \{(v_1, u) \mid (v_1, u) \text{ 为某一条路径 } P \text{ 中的边}, P \in A\}$, 求 D_0 中顶点 v_1 至 v 的最短路径 Q_0 , $F(P^k) = \{Q_0\}$, 转步骤④;

若 $P^k = v_1 u_1 \dots u_j \dots u_q v$, 令 $D_0 = D - \{(v_1, u) \mid (v_1, u) \text{ 为某一条路径 } P \text{ 中的边}, P \in A\}$. 求 D_0 中顶点 v_1 至 v 的最短路径 Q_0 , $F(P^k) = \{Q_0\}$, $j = 0$, 转步骤③.

③ $j = q$?

若是, 则转步骤④;

若否, 则令 $D_{j+1} = D - v_1 u_1 \dots u_{j+1} - \{(u_{j+1}, u) \mid v_1 \dots u_{j+1} \text{ 为某路径 } P \text{ 中的子路}, P \in A\}$, 求 D_{j+1} 中 u_{j+1} 至 v 的最短路径 $\tilde{Q}_{j+1}$. 路径 $v_1 u_1 \dots u_{j+1}$ 与路径 $\tilde{Q}_{j+1}$ 相衔接, 得路 Q_{j+1} . Q_{j+1} 中有相同顶点时, $j = j + 1$, 转步骤③;

Q_{j+1} 中顶点都不相同时, $F(P^k) = F(P^k) \cup \{Q_{j+1}\}$, $j + 1 = j$, 转步骤③.

④ $B = B \cup F(P^k)$.

⑤ $B = \emptyset$?

若是, 则算法终止(v_1 至 v 的路径搜索完毕).

若否, 则取 $W(\tilde{P}) = \min\{W(P) \mid P \in B\}$,

$$P^{k+1} = \tilde{P}, \quad A = A \cup \{P^{k+1}\}, \quad B = B - \{P^{k+1}\}, \quad \text{转步骤⑥}.$$

⑥ $k + 1 = k^*$?

若是, 则算法终止, 路径 P^{k+1} 为所求第 k^* 最短路径.

若否,则 $k = k + 1$,转步骤②.

例 6-20 求解例 6-19.

解 我们将具体计算列成表 6-27.

表 6-27

k	P^k	$f(P^k)$	$F(P^k)$		B	
			Q	$W(Q)$	$P \in B$	$W(P)$
1	$v_1 v_4 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	12	$Q_0 = v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10	$v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10
			$Q_1 = v_1 v_4 v_5 v_8 v_{10} v_{11}$	9	$v_1 v_4 v_5 v_8 v_{10} v_{11}$	9*
			$Q_2 = v_1 v_4 v_6 v_7 v_{10} v_{11}$	9	$v_1 v_4 v_6 v_7 v_{10} v_{11}$	9
			$Q_3 = v_1 v_4 v_6 v_8 v_9 v_{11}$	9	$v_1 v_4 v_6 v_8 v_9 v_{11}$	9
2	$v_1 v_4 v_5 v_8 v_{10} v_{11}$	11	$Q_0 = v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10	$v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10
			Q_1 无		$v_1 v_4 v_6 v_7 v_{10} v_{11}$	9*
			$Q_2 = v_1 v_4 v_5 v_7 v_{10} v_{11}$	10	$v_1 v_4 v_6 v_8 v_9 v_{11}$	9
			$Q_3 = v_1 v_4 v_5 v_8 v_9 v_{11}$	10	$v_1 v_4 v_5 v_7 v_{10} v_{11}$	10
3	$v_1 v_4 v_6 v_7 v_{10} v_{11}$	11	$Q_0 = v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10	$v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10
			Q_1 无		$v_1 v_4 v_6 v_8 v_9 v_{11}$	9*
			Q_2 无		$v_1 v_4 v_5 v_7 v_{10} v_{11}$	10
			$Q_3 = v_1 v_4 v_6 v_7 v_9 v_{11}$	10	$v_1 v_4 v_5 v_8 v_9 v_{11}$	10
4	$v_1 v_4 v_6 v_8 v_9 v_{11}$	11	$Q_0 = v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10	$v_1 v_3 v_6 v_8 v_{10} v_{11}$	10
			Q_1 无		$v_1 v_4 v_5 v_7 v_{10} v_{11}$	10*
			Q_2 无		$v_1 v_4 v_5 v_8 v_9 v_{11}$	10
			Q_3 无		$v_1 v_4 v_6 v_7 v_9 v_{11}$	10
5	$v_1 v_4 v_5 v_7 v_{10} v_{11}$	10				

在表 6-25 中第 k 步对 $P \in B, W(P)$ 打 * 者,则在第 $k + 1$ 步时该 P 即为 P^{k+1} .

由表 6-25 求得 $P^5 = v_1 v_4 v_5 v_7 v_{10} v_{11}$,故本问题的最佳方案为

阶段 I 工作取水准 3,阶段 II 工作取水准 2,阶段 III 工作取水准 2,阶段 IV 工作取水准 3,4 个阶段工作总时间为 10,费用为 10.

§ 6.5 最小生成树

若图 6-31 所示的赋权连通无向图 G 中顶点 $v_1, \dots, v_{10}$ 表示某个地区的 10 个乡,边 $[v_i, v_j]$ 旁的权 $W(v_i, v_j) = w_{ij}$ 为 v_i 与 v_j 之间的距离.现欲架设一个通往各乡的电话线网,问应如何架设电话线网而使其总长度最短?

由于树的任意两个顶点之间恰有一条初等链,所以上述问题就是在图 6-31 中寻找一棵生成树 T ,使树 T 各边权之和(电话线总长度)最小.

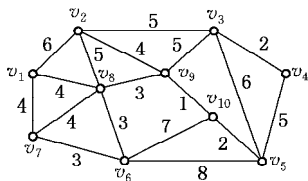


图 6-31

类似地,下水道的铺设、公路网的建设和煤气管道的装置等等都属这类问题。

若给连通赋权无向图 $G = (V, E)$ (不妨设 G 为简单图),其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}, E = \{e_1, \dots, e_m\}$ 。

若 T 为 G 的生成树, T 中边 e 就记为 $e \in T$, 则树 T 的权

$$W(T) = \sum_{e \in T} W(e).$$

最小生成树——若 T^* 为 G 的生成树,且有

$$W(T^*) = \min\{W(T) \mid T \text{ 为 } G \text{ 的一棵生成树}\},$$

则称 T^* 为 G 的最小生成树。

下面我们给出两个求最小生成树的方法。

6.5.1 破回路法

无回路且连通是树的特性,由此出发,我们可用“破回路法”来求最小生成树。

破回路法的基本步骤是:任取 G 中一个回路,删除权最大的边(若有两条以上权最大的边,则删除其中任一条边即可)。按此方法反复进行,直至无回路为止。余下的边的集合 E_1 的导出子图,即为 G 的最小生成树 T^* 。

例 6-21 用破回路法求图 6-31 的一棵最小生成树。

解 在图 6-32 中,任取一个回路如 $v_1 v_8 v_7 v_1$,去边 $\{v_1, v_7\}$;再取一个回路 $v_8 v_9 v_{10} v_8$,去边 $\{v_8, v_{10}\}$;再取一个回路 $v_2 v_9 v_3 v_2$,去边 $\{v_2, v_3\}$;再相继取回路 $v_1 v_2 v_8 v_1$ 和 $v_3 v_4 v_5 v_3$,分别去边 $\{v_1, v_2\}$ 和 $\{v_3, v_5\}$,得图 6-33。

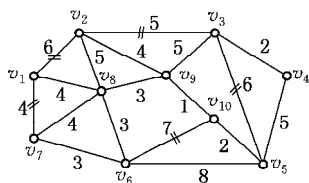


图 6-32

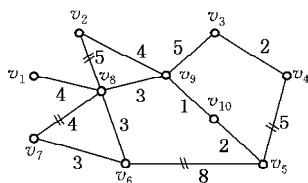


图 6-33

在图 6-33 中相继取回路 $v_8 v_7 v_6 v_8$, $v_2 v_8 v_9 v_2$, $v_8 v_9 v_{10} v_5 v_6 v_8$ 和 $v_3 v_4 v_5 v_{10} v_9 v_3$, 分别去边 $\{v_8, v_7\}$, $\{v_2, v_8\}$, $\{v_6, v_5\}$ 和 $\{v_4, v_5\}$, 得图 6-34, 它即为图 6-31 的一棵最小生成树 T^* ,

$$W(T^*) = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 27.$$

6.5.2 克鲁斯卡算法

由定理 6-1 知,生成树应无回路且边数为 $n-1$ 。克鲁斯

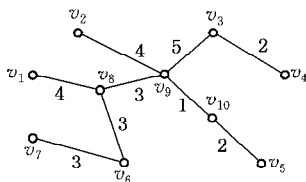


图 6-34

卡(Kruskal)算法根据“在无回路的条件下优先选取权小的边”这一原则,从 G 的 m 条边中逐个挑选出 $n-1$ 条边来.运算过程中,我们记被挑选到的边的集合为 E_1 .

首先,我们把 G 的 m 条边按权的递增顺序进行排列,不妨设为

$$W(e_1) \leq W(e_2) \leq \dots \leq W(e_m).$$

然后,依次逐条检查,以“选入 E_1 不使 E_1 的导出子图有回路”为条件来挑选进入 E_1 的边.

初始时,选 e_1 进入 E_1 .

设当前检查到 e_k .如果 $E_1 \cup \{e_k\}$ 的导出子图没有回路,就将 e_k 选进 E_1 ,否则就不选取 e_k ,而继续检查 e_{k+1} .当 E_1 中含有 $n-1$ 条边时, G 关于 E_1 的导出子图即为我们所求的最小生成树.

为判别 G 关于 $E_1 \cup \{e\}$ 的导出子图是否含有回路,我们可采用对 V 中顶点给以标号的方法来解决.

可知 E_1 的导出子图 G_1 虽然无回路,但不一定是树. G_1 可能是个分离图,由数个连通的子图组成,每个连通子图是树.由此出发,我们对 V 中顶点采取如下的标号方法:

初始时,对任 $v_j \in V$,取 v_j 的标号 $l(v_j) = j$.当 $e_1 = \{u, v\}$ 置入 E_1 时,则取 $l(u) = l(v) = \min\{l(u), l(v)\}$,其余顶点标号不变.

第 k 步时,若 $e = \{s, t\}$ 刚被选入 E_1 .当 e 加入到 $E_1 \cup \{e\}$ 的导出子图的某个连通子图时,则这个连通子图中顶点标号为 $\max\{l(s), l(t)\}$ 者,改其顶点标号为 $\min\{l(s), l(t)\}$.

这样规定的标号方法,具有这样的特性:两个顶点当且仅当属于 G_1 的某个连通子图时,两个顶点具有相同标号(该两顶点间有初等链相连接).换言之, G_1 中两个没有初等链连接的顶点的标号一定不相同.

于是,在运算过程的某一步检查 $e = \{s, t\}$ 是否要被选进 E_1 时,我们只要检查 $l(s)$ 是否与 $l(t)$ 相等.

若 $l(s) = l(t)$,说明 s 与 t 已在当前 E_1 的导出子图 G_1 的某个连通子图中, s 与 t 之间有初等链.这样的 $e = \{s, t\}$,一旦选入 E_1 ,则 $E_1 \cup \{e\}$ 的导出子图中就有回路.所以 $l(s) = l(t)$ 的 e 不可以被选入 E_1 .

若 $l(s) \neq l(t)$,则 $e = \{s, t\}$ 应被选入 E_1 .

下面,我们给出克鲁斯卡算法:

① 将 G 的 m 条边按权的递增顺序进行排列.现不妨设

$$W(e_1) \leq W(e_2) \leq \dots \leq W(e_m).$$

取 $E_1 = \emptyset, l(v_j) = j (j = 1, \dots, n), k = 1$.

② e_k 的端点 u 与 v 的标号 $l(u)$ 与 $l(v)$ 相等否?

若是,则 $k = k + 1$,转步骤②.

若否,则 $E_1 = E_1 \cup \{e_k\}$.

③ 对 V 中顶点 v_j ,若 $l(v_j) = \max\{l(u), l(v)\}$,则取

$$l(v_j) = \min \{l(u), l(v)\}.$$

④ E_1 中边数 $|E_1| = n - 1$?

若是, 则 G 关于 E_1 的导出子图即为最小生成树 T^* , 算法终止.

若否, 则取 $k = k + 1$, 转步骤②.

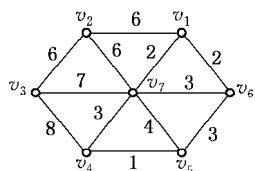


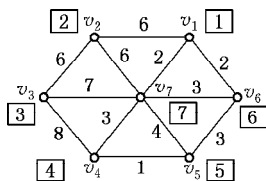
图 6-35

例 6-22 求图 6-35 的一棵最小生成树.

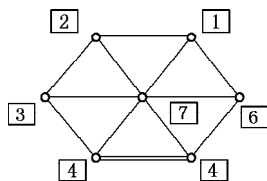
解 整个运算过程由图 6-36(a)~(g)给出. 这些图中顶点旁带方框的数字表示该顶点的标号, 双线边表示当前已在 E_1 内的边. 最小生成树 T^* 由图 6-36(g)中双线边表示. 可知

$$W(T^*) = 1 + 2 + 2 + 3 + 6 + 6 = 20.$$

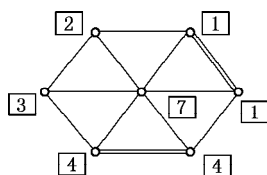
现在我们结合图 6-36 对顶点的标号过程, 来解释算法中的步骤③.



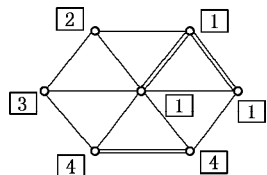
(a)



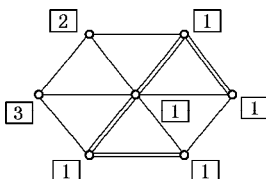
(b)



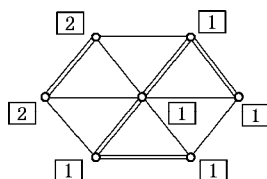
(c)



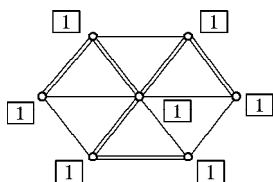
(d)



(e)



(f)



(g)

图 6-36

例如,对图 6-36(d)来说,此时 $E_1 = \{[v_4, v_5], [v_1, v_6], [v_1, v_7]\}$, E_1 的导出子图分成两个连通子图,它们顶点标号分别为 4 和 1. 下一步我们将选边 $e = [v_7, v_4]$ 进入 E_1 , 现在

$$l(v_4) = l(v_5) = \max\{l(v_7), l(v_4)\} = \max\{1, 4\} = 4,$$

因此, $[v_7, v_4]$ 进入 E_1 后, 应取

$$l(v_4) = l(v_5) = \min\{l(v_7), l(v_4)\} = 1.$$

于是 $E_1 = \{[v_4, v_5], [v_1, v_6], [v_1, v_7], [v_7, v_4]\}$ 的导出子图是一个连通图, 其顶点的标号都为 1.

* § 6.6 中国邮路问题

6.6.1 欧拉环游问题

例 6-23 某一料场货物堆放如图 6-37. 每晚有个值班小组沿巡视道路进行巡视检查. 问应如何设置两个休息站及如何确定一条以两个休息站为起终点的巡视路线, 使每条应巡视的道路恰走过一次?

我们将图 6-37 画成图 6-38 的形式. 于是, 该问题成为在图 6-38 中寻找一条开链, 每条边在链中恰出现一次. 这是一个图的一笔画问题, 而起点和终点不相同.

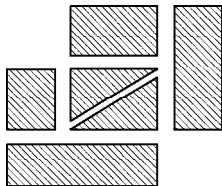


图 6-37

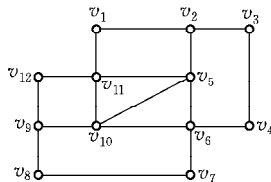


图 6-38

对于例 6-2 七座桥问题, 我们已指出过, 它也是一个图的一笔画问题, 只是该问题要求起点和终点必须相同.

所以从应用出发, 我们有必要从数学上认识一笔画问题.

下面我们先介绍一些有关术语.

欧拉链——若无向图 G 为连通图, Q 为 G 的一条链, G 的每一条边在 Q 中恰出现一次, 则称 Q 为欧拉(Euler)链.

欧拉环游——闭的欧拉链称为欧拉环游.

欧拉图——若无向图 G 含有一条欧拉环游, 则称图 G 为欧拉图.

顶点阶数——若无向图 G 中与顶点 v 关联的边数称为顶点的阶数, 记作 $\delta(v)$.

若 $\delta(v)$ 为偶数, 则称 v 为偶阶顶点; 若 $\delta(v)$ 为奇数, 则称 v 为奇阶顶点.

例如在图 6-38 中,

$$\begin{aligned}\delta(v_1) &= \delta(v_3) = \delta(v_4) = \delta(v_7) = \delta(v_8) = \delta(v_{12}) = 2, \\ \delta(v_5) &= \delta(v_6) = \delta(v_{10}) = \delta(v_{11}) = 4, \\ \delta(v_2) &= \delta(v_9) = 3.\end{aligned}$$

所以在图 6-38 中,除 v_2 和 v_9 为奇阶顶点外,其余顶点皆为偶阶顶点.

定理 6-3 若无向图 $G = (V, E)$ 有 n 个顶点及 m 条边,则

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m.$$

证 设图 G 的关联矩阵为

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & \dots & e_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

由关联矩阵可知,对应于顶点 v_i 的那一行各元素之和 $\sum_{j=1}^m a_{ij}$ 为 $\delta(v_i)$,所以 A 中全体元素之和为 $\sum_{v \in V} \delta(v)$. 又知 A 中对应于边 e 的那一列各元素之和为 2,所以 A 中全体元素之和为 $2m$. 从而得证 $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$.

246
■■■■■

定理 6-4 任一 无向图 G 中奇阶顶点的个数必为偶数.

证 令 $V_1 = \{v \mid v \in V, \delta(v) \text{ 为奇数}\}$, $V_2 = \{v \mid v \in V, \delta(v) \text{ 为偶数}\}$, 从而 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. 所以

$$\sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) = 2m.$$

因为 $\sum_{v \in V_2} \delta(v)$ 与 $2m$ 都为偶数,所以 $\sum_{v \in V_1} \delta(v)$ 也为偶数,但 $\sum_{v \in V_1} \delta(v)$ 中每一个被加项 $\delta(v)$ 都为奇数,故 V_1 中元素个数必为偶数,即 G 中奇阶顶点个数必为偶数.

定理 6-5 (1) 连通无向图 G 为欧拉图的充要条件为 G 中无奇阶顶点.

(2) 连通无向图 G 含有欧拉开链的充要条件为 G 中奇阶顶点个数为 2.

定理 6-5 反映了无向图的一笔画性质. 事实是:一个能一笔画成的图,必须有一个作为起点的顶点和一个作为终点的顶点. 图中其余顶点 v 都只能是“过路”的顶点,若有“到达”就必有“离去”,至于到达 v 点多少次没有关系,只要离去 v 点的次数和到达的次数相同,它便是一个“过路”顶点. 由于规定一笔画中不准有重复的边,故每次到达和离去都选用不同的边. 因而顶点必然与偶数条边相关联,也就是说,一个“过路”的顶点,必然是阶数为偶数的顶点,只有起点和终点才可以允许为奇阶顶点. 从而,本定理为我们提供了一个识别一个图能否一笔画出的极为简单的办法:如果连通无向图 G 无奇阶顶点,则该图能一笔画成,且起点和终点相同;如果连通无向图 G 有 2 个奇阶顶点,则该图也能一笔画成,但起点和终点不相同.

例如 7 座桥问题图 6-4 有 4 个奇阶顶点,所以不能一笔画成. 而图 6-38 有 2 个奇阶

顶点,故可以一笔画成,而在两个奇阶顶点处可以设置休息站。

为给出算法,我们对无向图 G 给如下运算:

若是 $e \in E(G)$, 图 $G_1 = G - \{e\}$ 指:

$E(G_1) = E(G) - \{e\}$, $V(G_1)$ 为 $E(G_1)$ 中边的端点的全体。

现设图 $G = (V, E)$ 为欧拉图, 它的边数为 m . 我们对图 G 建立求欧拉环游的算法。

假设在图 G 中已得链 $Q_k = v_{j_0} e_{j_1} v_{j_1} \dots v_{j_{k-1}} e_{j_k} v_{j_k}$, 其中 $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ 皆不相同, 而且图 $G_k = G - \{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ 仍为连通图, 则从 G_k 中取 v_{j_k} 的关联边时, 有这样两种情况:

第一种情况: G_k 中 v_{j_k} 的关联边不止一条, 它们或者是 G_k 的割边, 或者不是它的割边。

例如, 对图 6-39 所给图 G , 若已得链 $Q = v_7 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3$, 此时, $G_3 = G - \{e_1, e_2, e_3\}$ 如图 6-40 所示。在 G_3 中, 与 v_3 关联的边有 e_4, e_6 和 e_7 。

若在 G_3 中取 $e_7 v_6$ 作为链 Q 的延伸, 则当 Q 延长为 $v_7 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_7 v_6 e_8 v_7$ 时, 就不能再继续延长而得欧拉环游。其原因在于 e_7 是图 6-40 的割边 (图 6-41 所示 $G_3 - \{e_7\}$ 是一个分离图)。若取 $e_4 v_4$ 作为 Q 的延伸, 由于 e_4 不是图 G_3 的割边, $Q = v_7 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4$ 就能继续延长。

第二种情况: G_k 中与 v_{j_k} 关联的边仅有一条, 我们就只能取它作为 $e_{j_{k+1}}$, 作为链 Q 的延伸。

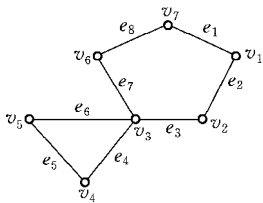


图 6-39

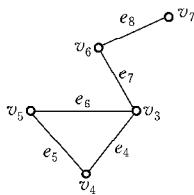


图 6-40

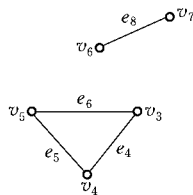


图 6-41

由此得出结论: 在延长链

$$Q_k = v_{i_0} e_{j_1} v_{j_1} \dots v_{j_{k-1}} e_{j_k} v_{j_k}$$

时, 在连通图 $G_k = G - \{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ 中取 $e_{j_{k+1}}$ 时, 除非 G_k 中仅有一条与 v_{j_k} 关联的边, 否则总不取 G_k 的割边为 $e_{j_{k+1}}$ 。

下面我们给出求欧拉环游的弗鲁瑞(Fleury)算法:

① 任取欧拉图 G 中一个顶点 v_{i_0} , $Q_0 = v_{i_0}$, $E = \emptyset$, $k = 0$ 。

② $k = m$?

若是, 则算法终止, Q_k 即为所求的欧拉环游。

若否, 则在 $G_k = G - E$ 中选取 v_{i_k} 的关联边为 $e_{j_{k+1}}$ 。除非 G_k 中仅有一条边与 v_{i_k} 关联, 否则总不取 G_k 的割边为 $e_{j_{k+1}}$ 。若 $e_{j_{k+1}} = [v_{i_k}, v_{i_{k+1}}]$, 令 $Q_{k+1} = Q_k e_{j_{k+1}} v_{i_{k+1}}$, $E = E \cup \{e_{j_{k+1}}\}$, $k = k + 1$, 转步骤②。

我们可以把画出欧拉图的欧拉环游的方法总结成口诀: 画一条边, 原有图中抹一条边, 余下的图形不断掉。

例 6-24 求图 6-42 的欧拉环游。

解 在进行一笔画时,先把要画的那个图画在左边,而在右边进行一笔画.每当在右边画一条边时,就把左边图上相应的一条边抹去,只要抹去的这条边不使左边的图成为分离图即可.这样一直画下去,最后一定会把整个图不重复地一笔画出,即得欧拉环游.图 6-43 和图 6-44 表示求图 6-42 一笔画的过程,图 6-45 为图 6-42 的欧拉环游.

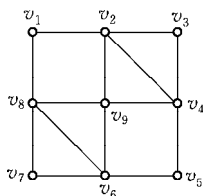


图 6-42

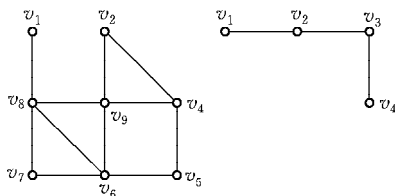


图 6-43

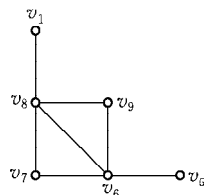


图 6-44

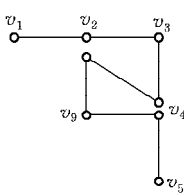


图 6-45

6.6.2 中国邮路问题

“一个邮递员每次送信,从邮局出发,必须至少一次地走过他负责投递的范围的每一条街道,待完成任务后仍回到邮局.问他如何选择一条投递路线,使他所走的路程最短?”这个问题是由我国管梅谷同志在 1962 年首先提出的,因此称为中国邮路问题.

若邮递员管辖的街道图视为无向图 $G = (V, E)$,任 $e = \{v_i, v_j\} \in E$, $W(e) = W(v_i, v_j) = w_{ij}$ 为街道 e 的长度,则中国邮路问题也就是:

在图 G 中寻找一条闭链 Q^* ,使这条闭链 Q^* 的总长度最短,即

$$W(Q^*) = \min\{W(Q) \mid Q \text{ 为 } G \text{ 中一条包含 } G \text{ 全部边的闭链}\}.$$

若图 G 为欧拉图,则我们求 G 的欧拉环游,它即为最佳投递线路 Q^* .

但是,在一般情况下,图 G 不是欧拉图,它具有偶数个奇阶顶点.此时任一条包含 G 全部边的闭链必然有一部分边要重复出现,也即邮递员要完成投递任务,必然有部分街道要重复走.邮递员在他的管辖区内走的路程的长短,就取决于重复走的街道的长短.

设 Q 为一条包含 G 的全部边的闭链,其中部分边重复出现,我们作相应的图 G_Q :

若边 $e = \{u, v\}$ 在 Q 中出现 $k+1$ 次,则我们就在图 G 中添加 k 条 $\{u, v\}$ 边 $e^1, e^2, \dots, e^k$ (称为添加边),且令每条添加边的权和原来边的权相等.于是 G_Q 没有奇阶顶点, G_Q 成为欧拉图, Q 就是 G_Q 中的欧拉环游.

例如,在图 6-46 中取

$$Q = v_1 e_1 v_2 e_{10} v_3 e_9 v_4 e_3 v_5 e_2 v_6 e_{10} v_7 e_9 v_8 e_4 v_9 e_5 v_{10} e_6 v_{11} e_8 v_{12} e_8 v_{11} e_7 v_1 ,$$

其中 e_{10} , e_9 , e_8 各重复一次.

我们即得相应的图 G_Q , 如图 6-47 所示.

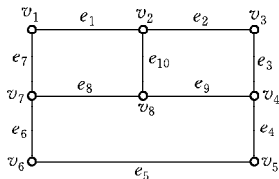


图 6-46

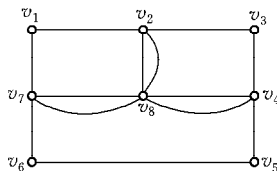


图 6-47

若 Q_1 及 Q_2 为两条投递线路, 则 $W(Q_1)$ 与 $W(Q_2)$ 之差就等于各相应添加边权和的差. 从而, 要找最短邮递线路 Q^* , 就只要找出一组添加边的集合 F , 使它具有下面两个性质:

- (1) 把它添加到图 G 上后, 得到的新图 G_Q 没有奇阶顶点.
- (2) 添加边的权和最小.

我们把具有性质(1)的一组添加边 F 称为一个可行解; 具有性质(2)的可行解称为最优解. 如前面介绍过的各种迭代算法一样, 我们先寻找初始可行解, 然后按最优性判别准则检查这个可行解是不是最优解, 不是, 就把这个可行解调整成另一个更好些的可行解, 再检查新的可行解是否为最优解, 直至找到最优解为止.

下面给出最优解的判别准则.

定理 6-6 若添加边集合 F 为一个可行解, 则 F 为最优解的充分必要条件为

- (1) F 中无平行边.
- (2) 若 C 为 G 的任一回路, 则该回路的具有添加边的边集 C_1 的总长度

$$W(C_1) \leq \frac{1}{2} W(C),$$

其中 $C_1 = \{e \mid e \in C, e \text{ 有相应的添加边 } e' \in F\}$. (6-16)

下面我们结合例题来进一步讲解中国邮路问题的算法步骤.

例 6-25 求图 6-48 所示投递街道图的最短投递线路.

解 (1) 寻求初始可行解. 设无向图 G 的奇阶顶点为 $2q$ 个, 将这 $2q$ 个奇阶顶点随意分成 q 对. 因为 G 是连通图, 故每一对奇阶顶点之间必有一条初等链, 我们把 q 条初等链中的边作为添加边添加到 G 中而得图 G_Q . 这组添加边就是一个可行解.

如图 6-48 有 8 个奇阶顶点 $v_2, v_3, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}$ 和 v_{12} . 将它们分成 4 对: v_3 与 v_{10} , v_2 与 v_5 , v_{11} 与 v_8 , v_{12} 与 v_7 .

在图 6-49 中, 对这 4 对奇阶顶点分别取链为 $v_3 v_2 v_1 v_{10}$, $v_2 v_3 v_4 v_5$, $v_{11} v_8$ 和 $v_{12} v_7$, 把这 4 条链的全部边作为添加边集合 F 而得到一个可行解, 相应的 G_Q 如图 6-49 所示.

此时

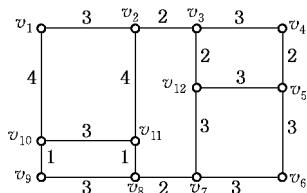


图 6-48

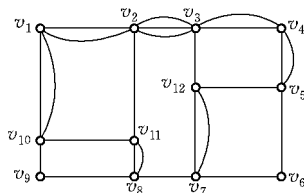


图 6-49

$$W(F) = w_{12} + 2w_{23} + w_{34} + w_{45} + w_{7,12} + w_{8,11} + w_{1,10} = 20.$$

(2) 调整可行解.

① 检查可行解 F 是否符合定理 6-6 条件(1). 若某两个顶点 u 与 v 间有 F 中两条或两条以上平行边, 则从 F 及 G_Q 中删去偶数条 u 与 v 间的添加边, 图 G_Q 显然仍无奇阶顶点, 故剩下的添加边集合 F 还是一个可行解, 但 $W(F)$ 却下降了.

如在图 6-49 中, 顶点 v_2 与 v_3 间有两条添加边, 故可删去它们而得图 6-50. 此时

$$W(F) = 20 - 2w_{23} = 16.$$

② 判别可行解 F 是否为最优解.

对 G 的任一回路 C , 检查定理 6-6 条件(2)是否成立.

可知, 如果 G 中某个回路 C 中边集 C_1 在 F 中有相应的添加边, 那么我们若作一次调整, 在 F 中删去 C_1 的边所相应的添加边, 换成 $C - C_1$ 的边所相应的添加边, 这时图 G_Q 仍无奇阶顶点, F 仍为可行解. 故若对某个回路 C , 有 $W(C_1) > \frac{1}{2}W(C)$, 我们如上所说作一次调整, 那么 $W(F)$ 就必然下降了.

若对 G 的任一回路, 定理 6-6 条件(2)都成立, 则 F 即为最优解. 我们对 G_Q 求欧拉环游, 即得最短投递线路.

如在图 6-50 中, G 的回路 $v_1 v_2 v_3 v_{12} v_7 v_8 v_{11} v_{10} v_1$ 的权为 20, 而相应添加边的权为 11, 大于回路权的一半. 因此, 作一次调整而得图 6-51, 此时, $W(F) = 14$.

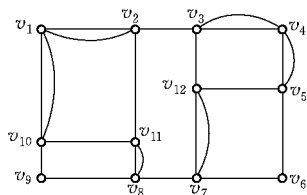


图 6-50

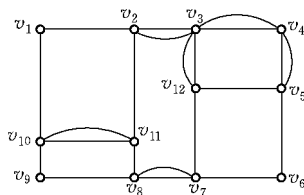


图 6-51

在图 6-51 中, G 的回路 $v_3 v_4 v_5 v_{12} v_3$ 的权为 10, 而相应添加边的权为 7, 大于回路权的一半, 作一次调整而得图 6-52, 此时, $W(F) = 10$.

对图 6-52, 定理 6-6 的条件(2)对 G 的任一回路都成立, 可知 F 为最优解. 求图 6-52 的欧拉环游, 最短投递路线如图 6-53 虚线边所示, 其长度为 52.

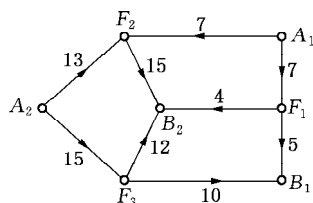


图 6-54

现作图 6-54 的同构图——图 6-55. 以顶点 x_1 及 x_2 (称为源) 分别表示发点 A_1 和 A_2 ; 以顶点 y_1 及 y_2 (称为汇) 分别表示收点 B_1 和 B_2 ; 而 v_1, v_2 和 v_3 (称为中间顶点) 表示转运点 F_1, F_2 和 F_3 . 把发点 A_1 和 A_2 处需要输送的物资数写在顶点 x_1 和 x_2 旁, 数字前加上“+”号; 把 B_1 和 B_2 处需要的物资数写在顶点 y_1 和 y_2 旁, 数字前加上“-”号.

图 6-55 中边旁数字(称为容量)为图 6-54 相应边运送该物资所允许的最大输送量. 我们称图 6-55 这样的网络为运输网络.

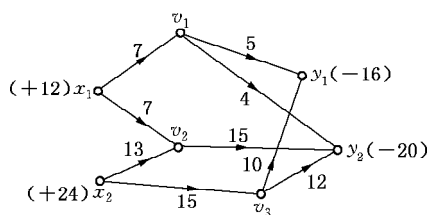


图 6-55

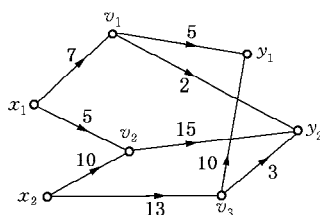


图 6-56

如果对这个运输问题指定了一个具体的运输方案如表 6-28.

如果我们将表 6-28 所给的点与点之间的运量写在运输网络图 6-55 相应边的旁边 (如图 6-56 所示), 并将运输网络中从顶点 u 至顶点 v 的运量视为边 (u, v) 的函数 $f(u, v)$, 则该运输方案就可以视为运输网络的一个流 f .

表 6-28

发 点	A_1	A_1	A_2	A_2	F_1	F_1	F_2	F_3	F_3
收 点	F_1	F_2	F_2	F_3	B_1	B_2	B_2	B_1	B_2
运 量	7	5	10	13	5	2	15	10	3

下面我们给出运输网络和流的数学定义.

运输网络——给有向图 $N = (V, E)$, 若对任一边 $e \in E$, 有相应的一个非负整数 $C(e)$, 且已取定 V 的两个非空子集 X 及 Y , $X \cap Y = \emptyset$, 则称 $N = (V, E, C, X, Y)$ 为一个运输网络. X 中顶点 x 称为 N 的源, Y 中顶点 y 称为 N 的汇, $I = V - (X \cup Y)$ 中顶点称为中间顶点, $C(e)$ 称为边 e 的容量.

设 $f(e)$ 为一个以 E 为定义域、取值为非负整数的函数, 又记 $f^+(v)$ 为以 v 点 ($v \in V$) 为起点的所有有向边 (v 点的输出边) 的相应函数值之和, $f^-(v)$ 为以 v 点为终点的所有有向边 (v 点的输入边) 的相应函数值之和.

网络流——若对于网络 N , 其上非负整数函数 $f(e)$ 满足以下两条件:

$$\textcircled{1} 0 \leq f(e) \leq C(e), \quad \text{任 } e \in E; \quad (6-17)$$

$$\textcircled{2} f^+(v) = f^-(v), \quad \text{任 } v \in I, \quad (6-18)$$

则称 f 为 N 上一个网络流, 简称流. 并称 $f(e)$ 为流 f 在边 e 上的流量. 条件 (6-17) 称为容量约束条件, 条件 (6-18) 称为守恒条件 (直观上说, 在每一个中间点 v 上, v 的流入量之

和等于 v 的流出量之和,中间点的流量是守恒的)。

显然,任一个运输网络 N ,至少存在一个流: $f(e) \equiv 0, e \in E$. 我们称它为零流。

例如图 6-57 为一个石油管道输送系统图,它是一个运输网络,其中源 x_1 和 x_2 为油井,汇 y_1 和 y_2 为油库,中间点 v_1, v_2, v_3 和 v_4 为泵油站。有向边为石油输送管道,边 e 旁第一参数为管道 e 在单位时间内允许的最大输送量 $C(e)$,第二参数为管道 e 在单位时间内具体的流量 $f(e)$ 。

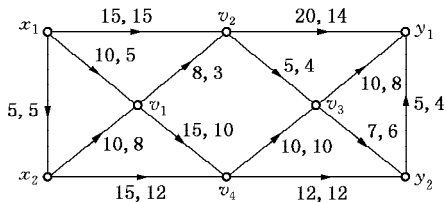


图 6-57

为了方便算法的使用,我们用下列方法将多源和多汇的运输网络 N 化成单源和单汇的运输网络 N' :

① 在 N 中添加两个新的顶点 x 和 y , 分别成为 N' 中的源和汇, N 的顶点集 V 成为 N' 的中间顶点集;

② 对 $x' \in X$, 用有向边 (x, x') 连接顶点 x 和 x' , 边 (x, x') 的容量 $C(x, x')$ 视具体问题为 $+\infty$ 或某一数值;

③ 对 $y' \in Y$, 用有向边 (y', y) 连接顶点 y' 和 y , 边 (y', y) 的容量 $C(y', y)$ 视具体问题为 $+\infty$ 或某一数值。

若 f 是 N 上一个流, 定义 N' 上函数 f' :

$$f'(e) = \begin{cases} f(e), & \text{当 } e \in E(N), \\ f^+(x') - f(x'), & \text{当 } e = (x, x'), x' \in X, \\ f^-(y') - f^+(y'), & \text{当 } e = (y', y), y' \in Y. \end{cases}$$

可知, f' 是 N' 上的一个流(反之,若在 N' 上有一个流 f' , 把它限制到 N 上, 即得 N 上一个流 f)。

例 6-27 将图 6-55 所给运输网络 N 化成单源和单汇的运输网络 N' , 且由图 6-56 中的流 f 给出 N' 上相应流 f' 。

解 对 N 添加顶点 x 和 y 。

由于 x_1 及 x_2 的发量分别为 12 和 24, 故在 N' 中 (x, x_1) 的容量为 12, (x, x_2) 的容量为 24。由图 6-56 知, f' 在 (x, x_1) 上流量为 12, 在 (x, x_2) 上流量为 23。

由于 y_1 及 y_2 的收量分别为 16 和 20, 故在 N' 中 (y_1, y) 的容量为 16, (y_2, y) 的容量为 20。由图 6-56 知, f' 在 (y_1, y) 上流量为 15, 在 (y_2, y) 上流量为 20。

N' 和其上流 f' 由图 6-58 给出。边 e 旁参数为 $(C(e), f(e))$ (以后都如此, 不再说明)。

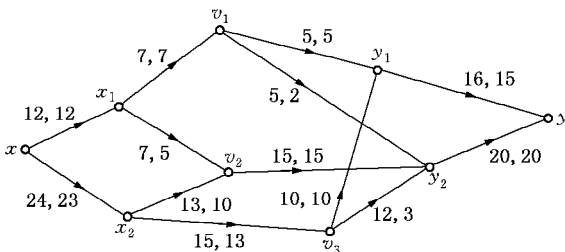


图 6-58

例 6-28 将图 6-57 所给运输网络 N 化成单源和单汇运输网络 N' , 并由 N 上流 f 给出 N' 上流 f' .

解 对图 6-57 添加顶点 x 和 y .

由于油井 x_1 和 x_2 处石油输出量未加限制, 故在 N' 中, 容量

$$C(x, x_1) = C(x, x_2) = +\infty,$$

流量

$$f'(x, x_1) = f^+(x_1) - f^-(x_1) = 15 + 5 + 5 - 0 = 25,$$

$$f'(x, x_2) = f^+(x_2) - f^-(x_2) = 8 + 12 - 5 = 15.$$

由于油库 y_1 和 y_2 的石油需求量未加限制, 故在 N' 中, 容量:

$$C(y_1, y) = C(y_2, y) = +\infty,$$

流量:

$$f'(y_1, y) = f^-(y_1) - f^+(y_1) = 14 + 8 + 4 - 0 = 26,$$

$$f'(y_2, y) = f^-(y_2) - f^+(y_2) = 12 + 6 - 4 = 14.$$

N' 和其上流 f' 由图 6-59 给出.

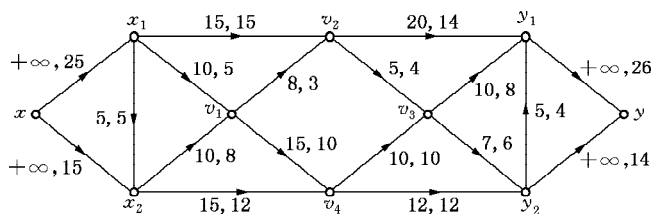


图 6-59

今后我们讨论的运输网络 N 都为具有单源 x 和单汇 y 的网络: $N = (V, E, C, x, y)$.

流值 $\text{Val}f$ ——称 $f^+(x)$ 为流 f 在 N 上的流值, 记为 $\text{Val}f$.

显然, 有

$$\text{Val}f = f^+(x) = f^-(y). \quad (6-19)$$

例如图 6-58 中, 流 f 的流值 $\text{Val}f = 35$, 该运输方案为: 从发点 x_1 输出物资 12 吨, 从发点 x_2 输出物资 23 吨.

对于图 6-59 来说, $\text{Val}f = 40$, 油井 x_1 在单位时间内输出石油 25 个单位, 油井 x_2 在单位时间内输出石油 15 个单位.

6.7.2 割、最小割和最大流

割——对于运输网络 $N = (V, E, C, x, y)$, 若 S 为 V 的一个子集, $\bar{S} = V - S$, $x \in S, y \in \bar{S}$, 则称边集

$$K = (S, \bar{S}) = \{e \mid e = (u, v), u \in S, v \in \bar{S}\} \quad (6-20)$$

为网络 N 的一个割, 并称

$$C(S, \bar{S}) = \sum_{e \in K} C(e) \quad (6-21)$$

为割 $(S, \bar{S})$ 的容量.

也就是说, 如果我们将网络 N 的顶点集 V 分成两个集合 S 和 $\bar{S} : x \in S, y \in \bar{S}$, 则割 $(S, \bar{S})$ 为 E 中起点在 S 、终点在 $\bar{S}$ 的全体有向边的集合.

例 6-29 给运输网络如图 6-60 所示.

试求下列给定的 S_j 所对应的割及其容量:

- (1) $S_1 = \{x, v_1\}$;
- (2) $S_2 = \{x, v_1, v_2, v_4\}$;
- (3) $S_3 = \{x, v_1, v_2, v_4, v_5\}$.

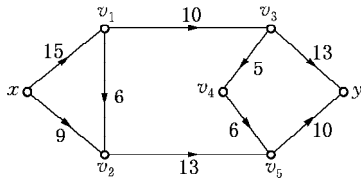


图 6-60

解

- (1) $S_1 = \{x, v_1\}, \bar{S}_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, y\}$,
 $(S_1, \bar{S}_1) = \{(v_1, v_3), (v_1, v_2), (x, v_2)\}$,
 $C(S_1, \bar{S}_1) = C(v_1, v_3) + C(v_1, v_2) + C(x, v_2) = 10 + 6 + 9 = 25$.
- (2) $S_2 = \{x, v_1, v_2, v_4\}, \bar{S}_2 = \{v_3, v_5, y\}$,
 $(S_2, \bar{S}_2) = \{(v_1, v_3), (v_4, v_5), (v_2, v_5)\}$,
 $C(S_2, \bar{S}_2) = 10 + 6 + 13 = 29$.
- (3) $S_3 = \{x, v_1, v_2, v_4, v_5\}, \bar{S}_3 = \{v_3, y\}$,
 $(S_3, \bar{S}_3) = \{(v_1, v_3), (v_5, y)\}$,
 $C(S_3, \bar{S}_3) = 10 + 10 = 20$.

若把割 $(S, \bar{S})$ 的边全部从 N 中移去, 余下的图不一定分离成两部分 (如在例 6-29 图 6-60 中, $N - (S_3, \bar{S}_3) = N - \{(v_1, v_3), (v_5, y)\}$ 就没有分离成两个子图), 但是它一定把 N 的全部自源 x 至汇 y 的路径断开, 也就是说此时流不能在 N 上发生. 故从直观上不难理解, N 的任一流 f 的流值 $Val f$ 不能超过任一割的容量.

最大流——若 f^* 为网络 N 上流值最大的流, 即

$$Val f^* = \max\{Val f \mid f \text{ 为 } N \text{ 上流}\},$$

则称 f^* 为 N 的最大流.

最小割——若 $(S^*, \bar{S}^*)$ 为容量最小的割, 即

$$C(S^*, \bar{S}^*) = \min\{C(S, \bar{S}) \mid (S, \bar{S}) \text{ 为 } N \text{ 的一个割}\},$$

则称割 $(S^*, \bar{S}^*)$ 为 N 的最小割.

设 f 为 N 上一个流, 对任 $e \in E$, 若 $f(e) = C(e)$, 则称边 e 为 f 饱和边; 若 $f(e) < C(e)$, 则称边 e 为 f 不饱和边; 若 $f(e) > 0$, 则称边 e 为 f 正边; 若 $f(e) = 0$, 则称边 e 为 f 零边.

定理 6-7 设 f 和 $(S, \bar{S})$ 分别为网络 N 的流和割, 那么

- (1) $Val f \leq C(S, \bar{S})$;
- (2) 若 $Val f = C(S, \bar{S})$, 则 f 和 $(S, \bar{S})$ 分别为 N 的最大流和最小割;
- (3) $Val f = C(S, \bar{S})$ 的充要条件为: 任 $e \in (S, \bar{S})$, 边 e 为 f 饱和边; 任

$e \in (\bar{S}, S)$, 边 e 为 f 零边.

§ 6.8 最大流

6.8.1 增流链

设 $Q = x \dots uv \dots t$ 为 N 的一条初等链.

若 N 中有 u 到 v 的有向边 (u, v) , 则称边 (u, v) 为 Q 的前向边;

若 N 中有 v 到 u 的有向边 (v, u) , 称边 (v, u) 为 Q 的后向边.

若 f 为 N 上流, 对 $e \in Q$, 令:

$$l(e) = \begin{cases} C(e) - f(e), & \text{当 } e \text{ 是 } Q \text{ 的一条前向边,} \\ f(e), & \text{当 } e \text{ 是 } Q \text{ 的一条后向边;} \end{cases} \quad (6-22)$$

$$l(Q) = \min\{l(e) \mid e \in Q\}. \quad (6-23)$$

当 $l(Q) = 0$, 称 Q 为 f 饱和链; 当 $l(Q) > 0$, 称 Q 为 f 不饱和链.

例 6-30 对图 6-60 给一个流 f , 如图 6-61 所示.

取 $Q_1 = xv_2v_1v_3y$, 边 (x, v_2) , (v_1, v_3) 和 (v_3, y) 为 Q_1 的前向边, $l(x, v_2) = 2$, $l(v_1, v_3) = 0$, $l(v_3, y) = 6$; 边 (v_1, v_2) 为 Q_1 的后向边, $l(v_1, v_2) = 0$, 故 $l(Q_1) = 0$, Q_1 为 f 饱和链.

取 $Q_2 = xv_2v_5v_4v_3y$, 边 (x, v_2) , (v_2, v_5) , (v_3, y) 为 Q_2 的前向边, $l(x, v_2) = 2$, $l(v_2, v_5) = 6$, $l(v_3, y) = 6$; 边 (v_4, v_5) , (v_3, v_4) 为 Q_2 的后向边, $l(v_4, v_5) = 3$, $l(v_3, v_4) = 3$, 故 $l(Q_2) = 2$, Q_2 为 f 不饱和链.

f 增流链——一条从源 x 至汇 y 的 f 不饱和链, 称为 f 增流链.

若网络 N 中存在一条 f 增流链 Q , 我们可得 N 上一个新流 $\hat{f}$:

$$\hat{f}(e) = \begin{cases} f(e) + l(Q), & \text{当 } e \text{ 是 } Q \text{ 的前向边,} \\ f(e) - l(Q), & \text{当 } e \text{ 是 } Q \text{ 的后向边,} \\ f(e), & \text{其他.} \end{cases} \quad (6-24)$$

此时, 有

$$\text{Val} \hat{f} = \text{Val} f + l(Q). \quad (6-25)$$

我们称 $\hat{f}$ 为 f 基于 Q 的修改流.

例如, 对于图 6-61 中流来说, $Q_2 = xv_2v_5v_4v_3y$ 是一条 f 增流链, 我们可得 f 基于 Q_2 的修改流 $\hat{f}$, 如图 6-62 所示.

定理 6-8 若 f 为运输网络 N 上流, 则

(1) 流 f 为 N 上最大流的充要条件为 N 中不存在

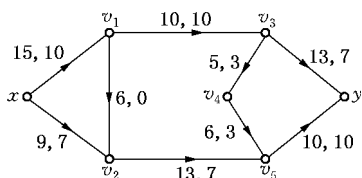


图 6-61

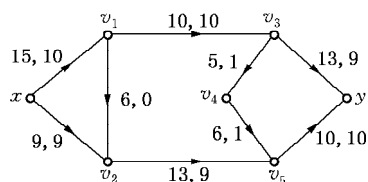


图 6-62

f 增流链.

(2) 若 f 为最大流, 则其流值等于最小割的容量.

6.8.2 最大流算法

现在我们关心的问题是, 当网络 N 给定后, 如何求得它的一个最大流.

定理 6-8 为我们提供了寻求运输网络中最大流的一个方法. 若给网络 N 上一个初始流 (例如零流), 我们判别一下 N 中是否有 f 增流链: 若无 f 增流链, 则 f 即为最大流; 若有 f 增流链 Q , 则可得 f 基于 Q 的修改流 $\hat{f}$, 有

$$\text{Val} \hat{f} = \text{Val} f + l(Q).$$

再将 $\hat{f}$ 视为 f 继续迭代.

但是, 到此算法还不能说已经建立成功了, 因为如何寻求 f 的增流链这个问题还没有解决. 故下面我们先讨论寻求 f 增流链的方法, 然后建立求最大流的算法. 我们采用标号的方法来寻求 x 至 y 的 f 增流链.

若 f 为网络 N 的一个流, N 中满足下列条件的树 T 称为以 x 为根的 f 不饱和树:

① $x \in V(T)$;

② 任 $v \in V(T)$, $v \neq x$, T 内有唯一的一条初等链 $Q = x \dots v$ 为 f 不饱和链, $l(Q) > 0$.

每个点 $v \in V(T)$, 都按下述方法给以标记:

若 T 中 x 至 v 的初等链为 $Q_v = x \dots uv$:

① 如果 (u, v) 为 N 中边, 则给 v 以标号 $(u, +, l(v))$, 其中第一个标号 u 表明在链 Q_v 中 u 为 v 的紧前顶点; 第二个标号表明 (u, v) 在 Q_v 中为前向边; 第三个标号 $l(v) = l(Q_v) \setminus l(Q_v)$ (由式(6-23)给出). 显然, 有

$$l(v) = \min\{l(u), C(u, v) - f(u, v)\}. \quad (6-26)$$

② 如果 (v, u) 为 N 中边, 则给 v 以标号 $(u, -, l(v))$, 其中第一个标号 u 表明在链 Q_v 中 u 为 v 的紧前顶点; 第二个标号表明 (v, u) 在 Q_v 中为后向边; 第三个标号 $l(v) = l(Q_v) \setminus l(Q_v)$ (由式(6-23)给出). 显然, 此时有

$$l(v) = \min\{l(u), f(v, u)\}. \quad (6-27)$$

例如, 图 6-63 为图 6-61 的一棵 f 不饱和树.

我们通过以 x 为根的 f 不饱和树 T 的不断“生长”以及“标记法”来探寻 N 中 f 增流链.

初始时, 先给 x 以标号 $(0, +, \infty)$.

一般地, 若已得以 x 为根的 f 不饱和树 T (如图 6-63), T 中每个顶点都有标号, 而 $y \in V(T)$. 可将 $S = V(T)$ 中点分成两部分: 一部分点已查视过, 即已生长了枝的点 (例如 图 6-63 中的点 x , v_2 和 v_5), 或判定不能生长枝的点 (如

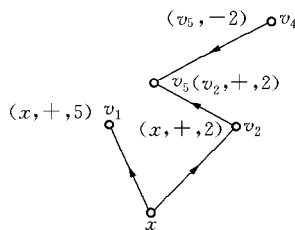


图 6-63

图 6-63 中的点 v_1). 另一部分点未查视过(如图 6-63 中的点 v_4). 我们将 T 中全部未查视过的点记为 A (A 为有顺序的集合, 先标记的点排在前面. 本算法的特点为: 先标记的点先查视, 即先生长枝).

我们查视 A 中第一个顶点 u 能否生长枝? 关心下列边:

$$e = (u, v), v \in \bar{S}, \text{有 } f(e) < C(e);$$

$$e = (v, u), v \in \bar{S}, \text{有 } f(e) > 0.$$

令

$$M^+(u) = \{v \mid \text{存在 } e = (u, v), v \in \bar{S}, f(e) < C(e)\}; \quad (6-28)$$

$$M^-(u) = \{v \mid \text{存在 } e = (v, u), v \in \bar{S}, f(e) > 0\}. \quad (6-29)$$

若 $M^+(u)$ 及 $M^-(u)$ 都为空集, 则 u 点不能生长枝, u 点查视完毕, 将点 u 从 A 中取出. 若 $M^+(u)$ 或 $M^-(u)$ 非空, 则将 $M^+(u)$ 中所有的点 v 及有向边 $e = (u, v)$ 都生长在点 u 上而成为 T 的枝; 将 $M^-(u)$ 中所有的点 v 及有向边 $e = (v, u)$ 都生长在点 u 上而成为 T 的枝. 同时, 对这些 $M^+(u)$ 及 $M^-(u)$ 中的点都按我们在上面介绍过的方法给以标号. 至此, 点 u 查视完毕, 从 A 中删去. 而 $M^+(u)$ 及 $M^-(u)$ 中的点 v 按标号前后顺序先后进入 A , 此时, $S \cup M^+(u) \cup M^-(u)$ 成为新的点集 S .

倘若 u 在生长过程中得到边 (u, y) , 则我们求得了 x 至 y 的 f 增流链 Q_y . 我们用逆向追踪法来求 f 增流链 Q_y : 首先根据点 y 的标号 $(u, +, l(y))$, 可得 Q_y 中 y 的紧前顶点 u , 再根据点 u 的标号, 依次逆向追踪, 直至回溯到点 x , 即可得一条 f 增流链 Q_y (由 Q_y 中各点标号的第二部分知链中各边是为前向边还是后向边), 且 $l(y) = l(Q_y)$.

若 y 未进入 T , 重复上述步骤继续运算.

若 T 不能再生长 (即 $A = \emptyset$, T 中点已全部查视完毕), 而 $y \in V(T)$, 则 N 中无增流链, f 即为最大流, 算法即可终止. 此时, $S = V(T)$ 为全部已标号的点, $\bar{S}$ 为全部未标号的点, 可知 S 即为定理 6-8(1) 充分性证明中的顶点集合 S , 于是, $(S, \bar{S})$ 即为最小割. 所以我们说, 最大流算法不仅可求得网络 N 的一个最大流, 同时也可求得一个最小割.

为了运算上的方便, 我们可将 T 的生长过程列成表格形式. 例如对图 6-61, 寻找 f 增流链的过程可列成表 6-29 (表的第一行为查视某个顶点能否生长枝, 第二、三行为被生长的顶点及其标号).

表 6-29

查视 u		x	x	v_1	v_2	v_5	v_4	v_3
标记 v	x	v_1	v_2	—	v_5	v_4	v_3	y
标号 $l(v)$	$+\infty$	$+5$	$+2$		$+2$	$+2$	$+2$	$+2$

对表 6-29 的运算过程我们作如下说明:

(1) 给 x 以标号 $(0, +, \infty)$, x 置入 S 和 A 中. 查视 x : 可知 $M^+(x) = \{v_1, v_2\}$, $M^-(x) = \emptyset$. 给 v_1 和 v_2 分别以标号 $(x, +, l(v_1))$ 和 $(x, +, l(v_2))$, 其中

$$l(v_1) = \min\{l(x), C(x, v_1) - f(x, v_1)\} = \min\{+\infty, 5\} = 5;$$

$$l(v_2) = \min\{l(x), C(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{+\infty, 2\} = 2.$$

v_1 和 v_2 先后进入 A 和 S 中,从 A 中去掉 x .

(2) 查视 A 中第一元素 v_1 ,知 $M^+(v_1) = M^-(v_1) = \emptyset$, v_1 不能生长, v_1 查视完毕,从 A 中取出.

(3) 查视 A 中第一元素 v_2 ,知 $M^+(v_2) = \{v_5\}$, $M^- = \emptyset$. 给 v_5 以标号 $(v_2, +, l(v_5))$,其中

$$l(v_5) = \min\{l(v_2), C(v_2, v_5) - f(v_2, v_5)\} = \min\{2, 6\} = 2.$$

v_5 进入 A 和 S 中, v_2 从 A 中取出.

(4) 查视 A 中元素 v_5 ,知 $M^+(v_5) = \emptyset$, $M^-(v_5) = \{v_4\}$. 给 v_4 以标号 $(v_5, -, l(v_4))$,其中

$$l(v_4) = \min\{l(v_5), f(v_4, v_5)\} = \min\{2, 3\} = 2.$$

其他以此类推.最后,我们运用逆向追踪法,由表 6-29 得到一条 x 至 y 的 f 不饱和链

$$Q_y = xv_2v_5v_4v_3y, l(y) = l(Q_y) = 2,$$

基于 Q_y 的修改流 f 如图 6-62 所示.

下面我们给出求 N 中流值为指定值 λ 的流 f 的算法(若要求 N 的最大流,则只要在这一算法中将事先给定的数值 λ 取为 $+\infty$ 即可):

① 取 N 的一个初始流 f (例如零流),计算 $Valf$.

② $Valf = \lambda$?

若是,则 f 即为所求之流,算法终止;

若否,则给 x 以标号 $l(x) = +\infty$, $S = \{x\}$, $\bar{S} = V - S$, $A = \{x\}$.

③ $A = \emptyset$?

若是,则 N 中无 f 增流链, f 即为最大流,算法终止;

若否,则取 A 中第一元素 u ,作

$$M^+(u) = \{v \mid \text{存在 } e = (u, v) \in E, v \in \bar{S}, f(e) < C(e)\}$$

④ $M^+(u) = \emptyset$?

若是,则取 $M^-(u) = \{v \mid \text{存在 } e = (v, u) \in E, v \in \bar{S}, f(e) > 0\}$,转步骤⑤;

若否,则转步骤⑥.

⑤ $M^-(u) = \emptyset$?

若是,则 $A = A - \{u\}$,转步骤③;

若否:对 $M^-(u)$ 中点 v 都给以标号 $(u, -, l(v))$,其中 $l(v) = \min\{l(u), f(v, u)\}$.

$$S = S \cup M^-(u), \bar{S} = \bar{S} - M^-(u), A = A - \{u\} \cup M^-(u)$$

($M^-(u)$ 中点按标号的先后给以顺序),转步骤③.

⑥ $y \in M^+(u)$?

若是:给 y 以标号 $(u, +, l(y))$,其中 $l(y) = \min\{l(u), C(u, y) - f(u, y)\}$,运用逆向追踪法求得 N 中 x 至 y 的 f 增流链 Q_y . 取

$$\delta = \min\{l(y), \lambda - Valf\},$$

$$\text{令 } \hat{f}(e) = \begin{cases} f(e) + \delta, & \text{当 } e = (u, v) \in E, (u, v) \in Q_y, \\ f(e) - \delta, & \text{当 } e = (v, u) \in E, (v, u) \in Q_y, \\ f(e), & E \text{ 中其他边.} \end{cases}$$

$Val \hat{f} = Val f + \delta, f = \hat{f}$, 转步骤②.

若否: 对 $M^+(u)$ 中顶点 v 都给以标号 $(u, +, l(v))$, 其中

$$l(v) = \min\{l(u), C(u, v) - f(u, v)\}.$$

取 $S = S \cup M^+(u), \bar{S} = \bar{S} - M^+(u), A = A \cup M^+(u)$

($M^+(u)$ 中点按标号的先后给以顺序). 按式(6-29)取 $M^-(u)$ 转步骤⑤.

若运用上述算法求 N 的最大流, 则算法终止时的顶点集合 S 与 $\bar{S}$ 对应的割 $(S, \bar{S})$, 即为最小割.

例 6-31 求运输网络图 6-64 的最大流及最小割.

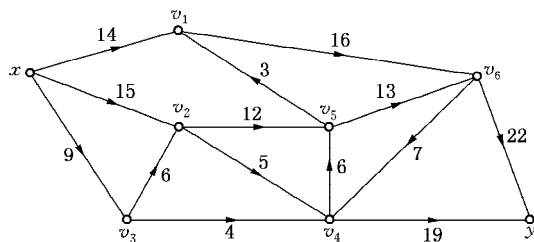


图 6-64

解 第一步, 给初始流 f 如图 6-65 所示. 对其寻找 f 增流链, 标号过程如表 6-30 所示.

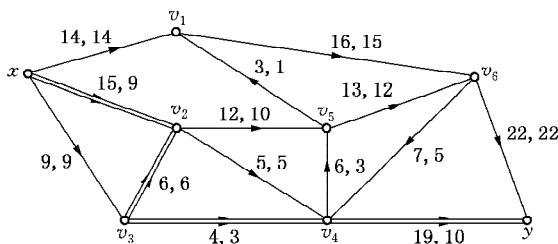


图 6-65

表 6-30

查视 u		x	v_2	v_2	v_3	v_5	v_5	v_4
标记 v	x	v_2	v_3	v_5	v_4	v_1	v_6	y
标号 $l(v)$	$+\infty$	$+6$	-6	$+2$	$+1$	$+2$	$+1$	$+1$

由表 6-30 得 N 的 f 增流链 $Q_y = xv_2v_3v_4y$ (在图 6-65 中用双线示之), $l(Q_y) = l(y) = 1$. Q_y 中边 $(x, v_2), (v_3, v_4)$ 和 (v_4, y) 为前向边, 边 (v_3, v_2) 为后向边. 得基于 Q_y

的修改流如图 6-66 所示.

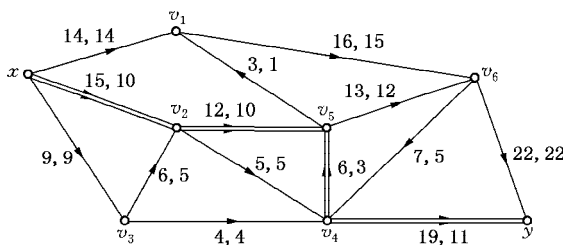


图 6-66

第二步,对图 6-66 寻找 f 增流链,标号过程如表 6-31 所示.

表 6-31

查视 u		x	v_2	v_2	v_3	v_5	v_5	v_5	v_1	v_4
标记 v	x	v_2	v_3	v_5	—	v_1	v_4	v_6	—	y
标号 $l(v)$	$+\infty$	$+5$	-5	$+2$		$+2$	-2	$+1$		$+2$

由表 6-31 得 f 增流链 $Q_y = xv_2v_5v_4y$ (在图 6-66 中用双线示之). 得基于 Q_y 的修改流如图 6-67 所示.

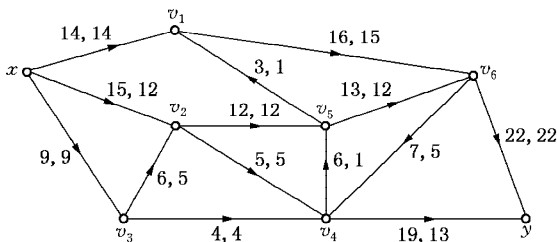


图 6-67

第三步 对图 6-67 寻找 f 增流链,标号过程如表 6-32 所示.

由表 6-32 可知,图 6-67 中不存在 f 增流链,故图 6-67 中流 f 即为最大流 f^* ,有

$$Val f^* = 35.$$

由表 6-32 知,已标号的点集 $S = \{x, v_2, v_3\}$,未标号的点集 $\bar{S} = \{v_1, v_4, v_5, v_6, y\}$,故最小割

$$\begin{aligned} (S^*, \bar{S}^*) &= \{(x, v_1), (v_2, v_5), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}, \\ C(S^*, \bar{S}^*) &= C(x, v_1) + C(v_2, v_5) + C(v_2, v_4) + C(v_3, v_4) \\ &= 14 + 12 + 5 + 4 = 35. \end{aligned}$$

可见,最小割的容量的大小影响最大流的流值. 因此,为提高图 6-67 中最大流的流值,就必须提高最小割 $(S^*, \bar{S}^*)$ 中边的容量. 另一方面,一旦最小割中边的容量被降低,则最

大流的流值也同时降低.

* 6.8.3 最大流算法在最优分配问题中的应用

我们应用最大流算法来寻找约简矩阵 $\hat{C}$ 的最多个数独立零和最少覆盖线.

设 Z 为约简矩阵 $\hat{C} = (\hat{c}_{ij})$ 中全体零元素 $\hat{c}_{ij} = 0$ 对应的下标组成的集合:

$$Z = \{(i, j) \mid \hat{c}_{ij} = 0, i, j = 1, \dots, n\}. \quad (6-30)$$

关于 $\hat{C}$ 所确立的集合 Z , 可以构造一个网络 $N = (V, E, C, x, y)$:

$$\begin{cases} V = \{x, y, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}, \\ E = \{(x, u_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(v_j, y) \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \\ \quad \{(u_i, v_j) \mid (i, j) \in Z\} \\ C(e) = 1, \text{任 } e \in E. \end{cases} \quad (6-31)$$

例 6-32 对下列约简矩阵(6-32)按式(6-31)构造网络 N :

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (6-32)$$

262

解 由矩阵(6-32)可知

$$Z = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\},$$

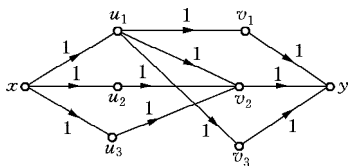


图 6-68

因此, 关于 Z 的网络 N 如图 6-68 所示.

我们对约简矩阵关于 Z 的网络 N 用最大流算法求最大流 f^* 和最小割 $(S, \bar{S})$. 然后, 由最大流 f^* 构造 Z 的子集 R , 由最小割 $(S, \bar{S})$ 构造集合 I 和 J :

$$R = \{(i, j) \mid f^*(u_i, v_j) = 1, (i, j) \in Z\}, \quad (6-33)$$

$$I = \{i \mid u_i \in \bar{S}\} \cup \{i \mid \text{存在 } v_j, \text{有 } (u_i, v_j) \in (S, \bar{S})\}, \quad (6-34)$$

$$J = \{j \mid v_j \in S\}. \quad (6-35)$$

可以证明:

集合 R 中的元素个数等于最大流 f^* 的流值, 集合 I 与 J 的元素个数之和等于最小割 $(S, \bar{S})$ 的容量.

我们由 R 中的元素来选取约简矩阵中最多个数的独立零:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in R, \\ 0, & (i, j) \notin R. \end{cases}$$

即当 $(i, j) \in R$ 时, 约简矩阵 $\hat{C}$ 中第 i 行第 j 列的零元素被选为独立零, 带上括号.

我们由集合 I 和 J 给定约简矩阵 $\hat{C}$ 的最少覆盖线: 当 $i \in I$ 时, 对矩阵第 i 行给行覆

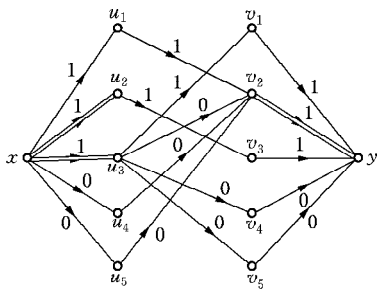
盖线,当 $j \in J$ 时,对矩阵第 j 列给列覆盖线.

由于 $Val f^* = C(S, \bar{S})$,对约简矩阵按此方法选定的独立零个数与覆盖线数是相等的.

例 6-33 对矩阵(5-75)、矩阵(5-78)用上述方法分别选取最多个数独立零和最少覆盖线.

解 约简矩阵(5-75)的最多个数独立零和最少覆盖线的选取如表 6-33 所示.

表 6-33

$(\hat{c}_{ij}), R, I, J$	$N, f^*, S, \bar{S}, (S, \bar{S})$
$\begin{pmatrix} 3 & (0) & 4 & 10 & 4 \\ -5 & -12 & -(0) & -3 & -5 \\ -(0) & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ $I = \{2, 3\}$ $J = \{2\}$	 $S = \{x, u_1, u_4, u_5, v_2\}$ $\bar{S} = \{y, u_2, u_3, v_1, v_3, v_4, v_5\}$

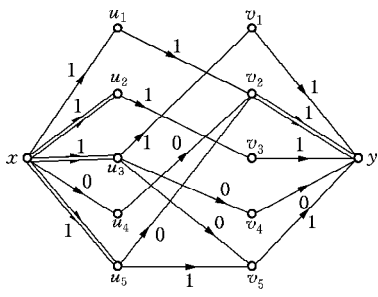
在表 6-33 中,有向边旁的参数为最大流 f^* 的流量 $f^*(e)$. 由于 N 中容量 $C(e) \equiv 1$,故表中均不再标出容量 $C(e)$. N 中双线边表示最小割 $(S, \bar{S})$ 中的边. 由于 $f^*(u_1, v_2) = f^*(u_2, v_3) = f^*(u_3, v_1) = 1$, 所以有

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\},$$

于是在矩阵 $\hat{C}$ 中 $\hat{C}_{12}$ 、 $\hat{C}_{23}$ 、 $\hat{C}_{31}$ 取为独立零. 同时, $u_2 \in \bar{S}$, $u_3 \in \bar{S}$, $v_2 \in S$, 所以 $I = \{2, 3\}$, $J = \{2\}$, 在 $\hat{C}$ 中第 2 行、第 3 行和第 2 列给覆盖线.

约简矩阵(5-78)的最多个数独立零和最少覆盖线的选取如表 6-34 所示.

表 6-34

$(\hat{c}_{ij}), R, I, J$	$N, f^*, S, \bar{S}, (S, \bar{S})$
$\begin{pmatrix} 2 & (0) & 3 & 9 & 3 \\ -5 & -13 & -(0) & -3 & -5 \\ -(0) & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -6 & -8 & -(0) \end{pmatrix}$ $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (5, 5)\}$ $I = \{2, 3, 5\}$ $J = \{2\}$	 $S = \{x, u_1, u_4, v_2\}$ $\bar{S} = \{y, u_2, u_3, u_5, v_1, v_3, v_4, v_5\}$

这里我们指出:由于独立零不可能被两次覆盖,所以在由矩阵(5-75)变换为矩阵(5-78)时,矩阵(5-75)中的独立零在矩阵(5-78)中仍为零元素.因此对表 6-34 所示的网络 N 求最大流时,可取初始流 f 为

$$\begin{cases} f(x, u_i) = f(u_i, v_j) = f(v_j, y) = 1, & \text{当 } (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}, \\ f(e) = 0, & N \text{ 中其他边.} \end{cases}$$

6.8.4 应用举例

例 6-34 用最大流算法求解第五章例 5-6 最优分配问题.

解 显然,车床 A_1, A_2, A_3 和 A_4 分别加工零件 B_1, B_2, B_3 和 B_4 , 就是一个可行方案,它的全部零件最早完工时间为

$$\max\{t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{44}\} = \max\{3, 2, 5, 2\} = 5.$$

表 6-35

B_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_i				
A_1	✓		✓	✓
A_2		✓	✓	✓
A_3	✓	✓		✓
A_4				✓

现问:是否存在使完工时间早于 5 小时的加工方案?加工时间 t_{ij} 小于 5 小时的加工方式由表 6-35 给出.

我们建立运输网络模型,用最大流算法对表 6-35 寻求一种指派方案.

用顶点 x_1, x_2, x_3, x_4 代表 4 部车床;用顶点 y_1, y_2, y_3, y_4 表示 4 个零件.若在表 6-35 中车床可以加工零件 y_j , 则在运输网络中给有向边 (x_i, y_j) , 其容量为 1. 又给源 x 和汇 y 有向边 (x, x_i) 及 (y_j, y) 的容量皆为 1 (这是由于一部车床只能加工一个零件,一个零件只要一部车床加工),得运输网络如图 6-69 所示.

对网络图 6-69 用最大流算法求得最大流 f^* 如图 6-70 所示,有 $Val f^* = 4$.

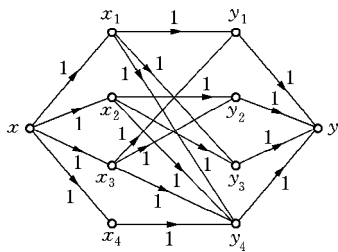


图 6-69

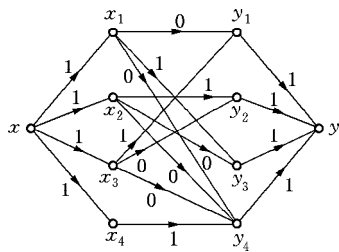


图 6-70

由图 6-70 可知:

$$f(x_1, y_3) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_1) = f(x_4, y_4) = 1,$$

因此,我们即找到一个全部零件最早完工时间小于 5 小时的一个加工方案: A_1, A_2, A_3 和 A_4 分别加工零件 B_3, B_2, B_1 和 B_4 , 最早完工时间为 $\max\{t_{13}, t_{22}, t_{31}, t_{44}\} = \max\{4, 2, 3, 2\} = 4$.

现问还可以再提前吗?加工时间 t_{ij} 小于 4 小时的加工方式由表 6-36 给出.

对表 6-36 作相应的运输网络并求得它的最大流如图 6-71 所示。

表 6-36

B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_i				
A_1	✓			✓
A_2		✓	✓	✓
A_3	✓			✓
A_4				✓

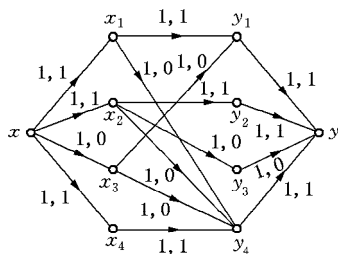


图 6-71

图 6-71 有最大流流值为 3, 即不存在完工时间早于 4 小时可行加工计划。所以, 使全部零件最早完工的加工方案为

车床 A_1, A_2, A_3 和 A_4 分别加工零件 B_3, B_2, B_1 和 B_4 , 最早完工时间为 4 小时。

例 6-35 (船只调度问题) 有 5 批货物, 要用船只从发点 x_1 和 x_2 分别运往收点 y_1, y_2 和 y_3 。规定的出发日期如表 6-37 所给, 表中 x_2 到 y_3 有两批货物, 一批在第一天出发, 另一批在第 8 天出发。又知船只从 x_i 到 y_j 的航行时间(天)如表 6-38 所给。设每批货物只要一条船装运, 且船只在空载和重载时的航行时间相同。问如何编制航行计划, 以最少的船只完成这 5 批货物的运输任务?

表 6-37

y_j	y_1	y_2	y_3
x_i			
x_1	5	10	—
x_2	—	12	1, 8

表 6-38

y_j	y_1	y_2	y_3
x_i			
x_1	2	3	2
x_2	1	1	2

解 设 5 项运输任务分别为 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 , 它们的开船时间 a_j 分别为 5, 10, 12, 1 和 8; 它们的任务完成时间 b_i (为船只到达目的地时间, 卸货时间不计) 分别为

表 6-39

t_{ij}		A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
			$x_1 \rightarrow y_1$	$x_1 \rightarrow y_2$	$x_2 \rightarrow y_2$	$x_2 \rightarrow y_3$	$x_2 \rightarrow y_3$
A_i		b_i	5	10	12	1	8
A_1	$x_1 \rightarrow y_1$	7	—	2	1	1	1
A_2	$x_1 \rightarrow y_2$	13	3	—	1	1	1
A_3	$x_2 \rightarrow y_2$	13	3	3	—	1	1
A_4	$x_2 \rightarrow y_3$	3	2	2	2	—	2
A_5	$x_2 \rightarrow y_3$	10	2	2	2	2	—

7, 13, 13, 3 和 10. 船只在完成任务 A_i 后接着去执行任务 A_j 时, 它所需要的船只转移时间 t_{ij} 由表 6-39 给出. 例如, $t_{32} = 3$ 是船只在完成任务 $A_3(x_2 \rightarrow y_2)$ 后去执行任务 $A_2(x_1 \rightarrow y_2)$ 时, 它从 y_2 运行到 x_1 所需的转移时间.

若船只在完成任务 A_i 后去执行任务 A_j (用 $A_i \rightarrow A_j$ 表示), 则必须有 $b_i + t_{ij} \leq a_j$, 于是, 可选的船只调度运输方式由表 6-40 给出.

类似于例 6-34, 也把表 6-40 看成一个指派问题: 用顶点 u_1, u_4 和 u_5 与表 6-40 中的行 A_1, A_4 和 A_5 相对应; 用顶点 v_1, v_2, v_3 和 v_5 与表 6-40 中的列 A_1, A_2, A_3 和 A_5 相对应; 若表 6-40 中允许 $A_i \rightarrow A_j$, 则给有向边 (u_i, v_j) , 即得运输网络并得其最大流如图 6-72 所示.

表 6-40

$A_i \rightarrow A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		✓	✓		✓
A_2					
A_3					
A_4	✓	✓	✓		✓
A_5			✓		

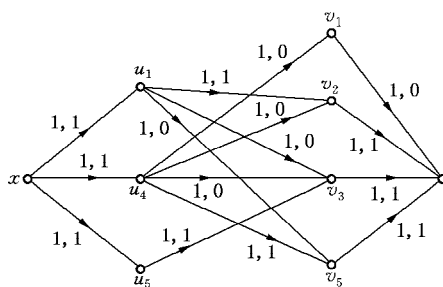


图 6-72

图 6-72 的最大流流值为 3, 且有

$$f(u_1, v_2) = f(u_4, v_5) = f(u_5, v_3) = 1.$$

因此, 任务 A_1 完成后, 船只可去执行任务 A_2 ; 任务 A_4 完成后, 船只可去执行任务 A_5 ; 任务 A_5 完成后, 船只可去执行任务 A_3 . 从而 5 项任务只需 2 条船: 一条船执行任务 A_1 和 A_2 , 从 x_1 驶往 y_1 运送一批货物, 再开回 x_1 运送第二批货物驶往 y_2 ; 另一条船依次执行任务 A_4, A_5 和 A_3 , 从 x_2 运送第四批货物到 y_3 , 返回 x_2 运送第五批货物到 y_3 , 再返回 x_2 运送第三批货物到 y_2 .

例 6-36 (调运计划问题) 某运输系统下属 4 个发点 v_1, v_2, v_3 和 v_4 , 分别有 80, 20, 80 及 60 个空集装箱急需调运到收点 t , 其运输线路如图 6-73 所示 (每次运输集装箱只能从一条有向边 (u, v) 的起点 u 输送到该边的终点 v 后, 再由发点 v 作安排), 边旁容量为沿该边每次输送该类型集装箱的最大输送能力. 从发点到收点所需单位时间如表 6-41 所给. 现每隔一个单位时间各发点可向关联的点发送一次空集装箱, 问应如何制订调运计划?

表 6-41

收点 \ 发点	v_1	v_2	v_3	v_4	t
v_1	0	2	1	—	—
v_2	—	0	—	1	—
v_3	—	—	0	1	2
v_4	—	—	—	0	1

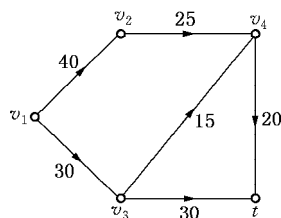


图 6-73

解 我们建立运输网络. 令 x 为源, y 为汇.

设 y_j 为收点 t 处于第 j 个单位时间时的状态点 ($j = 1, \dots, 5$), v_i^j 视作 v_i 处于第 j 个单位时间时的状态点 ($j = 0$, 为初始时刻).

由于发点 v_4 输送空集装箱到 t 地需 1 个单位时间, 同时我们又仅考虑 5 个单位时间内的空集装箱最大流, 故发点 v_4 可分设为 $v_4^0, v_4^1, v_4^2, v_4^3$ 和 v_4^4 5 个顶点, 给有向边 $(v_4^0, y_1), (v_4^1, y_2), (v_4^2, y_3), (v_4^3, y_4)$ 和 (v_4^4, y_5) , 各边的容量都取为 20.

由于发点 v_3 输送集装箱到收点 v_4 和 t 分别需要 1 个和 2 个单位时间 (注意: 集装箱再从发点 v_4 到收点 t 又需 1 个单位时间), 故发点 v_3 可以分设为 v_3^0, v_3^1, v_3^2 和 v_3^3 4 个顶点, 得有向边 (v_3^j, v_4^{j+1}) 及 (v_3^j, y_{j+2}) ($j = 0, 1, 2, 3$), 且 $C(v_3^j, v_4^{j+1}) = 15, C(v_3^j, y_{j+2}) = 30$.

由于发点 v_2 输送集装箱到收点 v_4 需 1 个单位时间 (再注意: 集装箱再从 v_4 到 t 需 1 个单位时间), 故发点 v_2 可分设为 v_2^0, v_2^1, v_2^2 和 v_2^3 4 个点, 得有向边 (v_2^j, v_4^{j+1}) ($j = 0, 1, 2, 3$), 且 $C(v_2^j, v_4^{j+1}) = 25$ ($j = 0, 1, 2, 3$).

由于发点 v_1 输送集装箱到收点 v_2 或 v_3 分别需 2 个或 1 个单位时间, 再结合 v_2 或 v_3 输送空集装箱到 t 的方式及时间, 故发点 v_1 可以分设为 v_1^0, v_1^1 和 v_1^2 3 个顶点, 得有向边 (v_1^j, v_2^{j+2}) ($j = 0, 1$) 和 (v_1^j, v_3^{j+1}) ($j = 0, 1, 2$), 且 $C(v_1^j, v_2^{j+2}) = 40$ ($j = 0, 1$), $C(v_1^j, v_3^{j+1}) = 30$ ($j = 0, 1, 2$).

由于发点 v_1, v_2, v_3 和 v_4 分别有 80, 20, 80 和 60 个空集装箱待发, 故有向边 $(x, v_1^0), (x, v_2^0), (x, v_3^0)$ 和 (x, v_4^0) 的容量分别为 80, 20, 80 和 60. 由于发点 t 对空集装箱的需求量未加限制, 故有向边 (y_j, y) ($j = 1, \dots, 5$) 的容量都取为 $+\infty$.

考虑到发点 v_i 处的空集装箱不在某个单位时间运走, 就要停留在发点 v_i 待运, 故还应有下列有向边: (v_1^j, v_1^{j+1}) ($j = 0, 1$); (v_2^j, v_2^{j+1}) ($j = 0, 1, 2$); (v_3^j, v_3^{j+1}) ($j = 0, 1, 2$); (v_4^j, v_4^{j+1}) ($j = 0, 1, 2, 3$); 容量分别为 80, 20, 80 和 60.

综合上述讨论, 我们得运输网络 N 如图 6-74.

我们用最大流算法对图 6-74 求最大流, 得最大流 f^* 如图 6-75 所示. 于是, 本问题的空集装箱调运计划为:

在初始时刻 ($j = 0$): v_1 向 v_3 发 30 个, v_2 向 v_4 发 5 个, v_3 向 v_4 发 15 个, v_3 向 t 发 30 个, v_4 向 t 发 20 个.

在第 1 个单位时间 ($j = 1$): v_1 向 v_3 发 30 个, v_2 向 v_4 发 5 个, v_3 向 v_4 发 15 个, v_3 向 t 发 30 个, v_4 向 t 发 20 个.

在第 2 个单位时间 ($j = 2$): v_1 向 v_3 发 20 个, v_2 向 v_4 发 10 个, v_3 向 v_4 发 10 个, v_3 向 t 发 30 个, v_4 向 t 发 20 个.

在第 3 个单位时间 ($j = 3$): v_3 向 t 发 30 个, v_4 向 t 发 20 个.

在第 4 个单位时间 ($j = 4$): v_4 向 t 发 20 个.

因此, 在 5 个单位时间里, 运送到收点 t 的空集装箱最多为 220 个, 还有 20 个留在发点 v_4 .

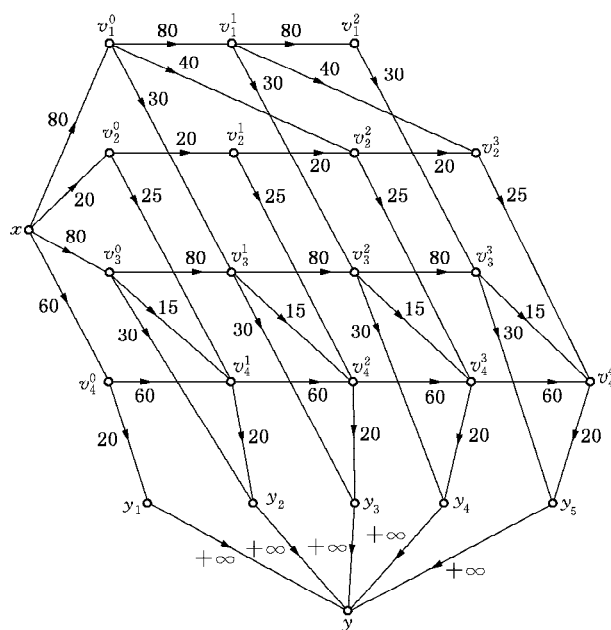


图 6-74

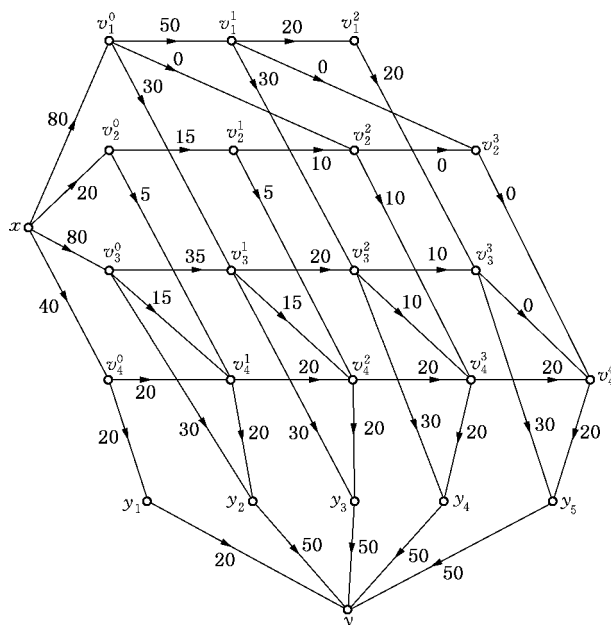


图 6-75

* § 6.9 有界容量运输网络及最大流

在从发点 u 到收点 v 的物资输送中,常常会遇到这样一类问题: u 点至 v 点的物资运量至多为 $C(u, v)$,至少为 $b(u, v)$,即物资流量不但有容量上界约束,而且有容量下界约束.为此,我们有必要来讨论容量有下界的运输网络的最大流算法.

若对运输网络 $N = (V, E, C, x, y)$,又给一个容量参数:任 $e \in E$,有非负整数 $b(e): b(e) \leq C(e)$,则称 $N = (V, E, C, b, x, y)$ 为有界容量运输网络(这里,对 $e \in E$, $b(e)$ 不全为零).对 $e \in E$,称 $b(e)$ 为边 e 的下界容量,称 $C(e)$ 为边 e 的上界容量.

有界容量运输网络 N 上的网络流 $f(E$ 上非负整数函数)应满足约束:

$$\textcircled{1} \quad b(e) \leq f(e) \leq C(e), \quad e \in E,$$

$$\textcircled{2} \quad f^+(v) = f^-(v), \quad v \in I.$$

对于任意给定的一个有界容量运输网络 N , N 上的网络流不一定存在.例如对图 6-76 这样的网络,边 $e_1 = (x, u)$ 的下界容量 $b(x, u) = 0$,上界容量 $C(x, u) = 1$;边 $e_2 = (u, y)$ 的下界容量 $b(u, y) = 2$,上界容量 $C(u, y) = 3$,那么,在这个网络 N 中显然是不可能发生流的.所以,对于有界容量运输网络 N ,首要的问题是判断它是否有流 f 存在.

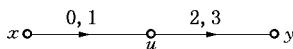


图 6-76

为此,我们对有界容量运输网络

$$N = (V, E, b, C, x, y),$$

作辅助网络

$$\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{C}, R, t),$$

然后由下界容量为零的运输网络 $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{C}, R, t)$ 作为媒介来判别 N 中是否有流 f 存在.

对于有界容量运输网络

$N = (V, E, C, b, x, y)$ ($e \in E$, $b(e)$ 不全为零),我们构造 N 的辅助网络 $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{C}, R, t)$ 如下:

$$\textcircled{1} \quad \tilde{V} = V \cup \{R, t\} (R, t \text{ 分别为 } \tilde{N} \text{ 的源和汇});$$

$$\textcircled{2} \quad \tilde{E} = E \cup \{(y, x)\} \cup \{(R, v), (v, t) \mid v \in V\},$$

$$\textcircled{3} \quad \tilde{C}(e) = \begin{cases} C(e) - b(e), & e \in E, \\ b^-(v), & e = (R, v), v \in V, \\ b^+(v), & e = (v, t), v \in V, \\ +\infty, & e = (y, x), \end{cases} \quad (6-36)$$

其中 $b^-(v)$ 为 N 中以 v 点为终点的全部有向边 e (v 点的输入边)的下界容量 $b(e)$ 之和;
 $b^+(v)$ 为 N 中以 v 点为起点的全部有向边 e (v 点的输出边)的下界容量 $b(e)$ 之和.

对于运输网络 $\tilde{N}$, 满足约束:

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq g(e) \leq \tilde{C}(e) \quad (e \in \tilde{E});$$

$$\textcircled{2} g^+(v) = g^-(v) \quad (v \in \tilde{V} - \{R, t\})$$

的网络流 g 显然是存在的(例如零流 $g \equiv 0$ 就是其中之一),因而可用上节所叙述的最大流算法来求得 $\tilde{N}$ 的最大流 g^* .

我们不加证明给出下述定理 6-9.

定理 6-9 给定有界容量运输网络

$$N = (V, E, C, b, x, y),$$

其辅助网络 $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{C}, R, t)$, 那么

(1) 网络 N 中有流 f 存在的充分必要条件为: 若 g^* 为 $\tilde{N}$ 的最大流, 则对任 $v \in V$, 有 $g^*(R, v) = \tilde{C}(R, v)$ 成立;

(2) 若 g^* 为 $\tilde{N}$ 的最大流, 则对任 $v \in V$, 有 $g^*(R, v) = \tilde{C}(R, v)$ 成立的充要条件为: $Valg^* = \sum_{e \in E} b(e)$;

(3) 若 g^* 为 $\tilde{N}$ 的最大流, 且 $Valg^* = \sum_{e \in E} b(e)$, 则 $f(e) = g^*(e) + b(e) (e \in E)$ 为 N 上流.

本定理给我们指出了判别有界容量运输网络 N 是否有流存在的一个方法:

首先用上节介绍的最大流算法求网络 $\tilde{N}$ 的最大流 g^* , 然后验证 $Valg^*$ 是否等于 N 中全部有向边的下界容量之和 $\sum_{e \in E} b(e)$? 也即验证是否对任 $v \in V, (R, v)$ 都为饱和边: $g^*(R, v) = \tilde{C}(R, v)$ 若 $Valg^* < \sum_{e \in E} b(e)$ (即存在一条边 $(R, v) (v \in V)$, 有 $g^*(R, v) < \tilde{C}(R, v)$), 则 N 中不存在流; 反之, 若 $Valg^* = \sum_{e \in E} b(e)$, 则网络 N 中存在流, 与此同时, 我们也就得到了 N 中一个流 f :

$$f(e) = g^*(e) + b(e), \text{ 任 } e \in E. \quad (6-37)$$

我们就以该流 f 作为网络 N 的一个初始流, 然后再利用上一节所给的最大流算法(个别步骤应作修改)即可求得 N 的最大流 f^* .

下面我们给出有界容量运输网络 $N = (V, E, C, b, x, y)$ 的最大流算法:

① 作 N 的辅助网络 $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{C}, R, t)$.

② 求 $\tilde{N}$ 的最大流 g^* .

③ $Valg^* = \sum_{e \in E} b(e)$ 成立否?

若是, 则令 $f(e) = g^*(e) + b(e) (e \in E)$, 转步骤④;

若否, 则 N 中不存在流, 算法终止.

(4) 以 f 作为 N 的初始流, 求 N 的最大流.

在求 N 的最大流时, 由于对 N 中任一边 e , 要求 $b(e) \leq f(e) \leq C(e)$ 成立, 所以对上一节所给的最大流算法作如下修改: 在算法步骤中, $M^-(u)$ 都应改为

$$M^-(u) = \{v \mid \text{存在 } e = (v, u) \in E, v \in \bar{S}, f(e) > b(e)\}.$$

对 $M^-(u)$ 中点 v 的标号 $l(v)$ 改为

$$l(v) = \min\{l(u), f(v, u) - b(v, u)\}.$$

例 6-37 求有界容量运输网络 $N = (V, E, C, b, x, y)$ 图 6-77 的最大流, 边旁参数为 $C(e), b(e)$.

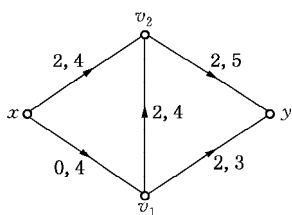


图 6-77

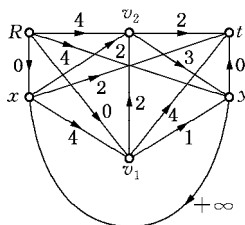


图 6-78

解 作辅助网络 $\tilde{N}$ 如图 6-78.

在 $\tilde{N}$ 中, 各边的容量按式(6-36)得到:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(x, v_2) &= C(x, v_2) - b(x, v_2) = 4 - 2 = 2, \\ \tilde{C}(x, v_1) &= C(x, v_1) - b(x, v_1) = 4 - 0 = 4, \\ \tilde{C}(v_1, v_2) &= C(v_1, v_2) - b(v_1, v_2) = 4 - 2 = 2, \\ \tilde{C}(v_2, y) &= C(v_2, y) - b(v_2, y) = 5 - 2 = 3, \\ \tilde{C}(v_1, y) &= C(v_1, y) - b(v_1, y) = 3 - 2 = 1, \\ \tilde{C}(R, x) &= 0, \\ \tilde{C}(R, v_1) &= b(x, v_1) = 0, \\ \tilde{C}(R, v_2) &= b(x, v_2) + b(v_1, v_2) = 2 + 2 = 4, \\ \tilde{C}(R, y) &= b(v_1, y) + b(v_2, y) = 2 + 2 = 4, \\ \tilde{C}(x, t) &= b(x, v_1) + b(x, v_2) = 0 + 2 = 2, \\ \tilde{C}(v_1, t) &= b(v_1, v_2) + b(v_1, y) = 2 + 2 = 4, \\ \tilde{C}(v_2, t) &= b(v_2, y) = 2, \\ \tilde{C}(y, t) &= 0, \\ \tilde{C}(y, x) &= +\infty.\end{aligned}$$

用最大流算法求得 $\tilde{N}$ 的最大流 g^* 如图 6-79. 由于

$$\begin{aligned}Val g^* &= 8 \\ \sum_{e \in E} b(e) &= b(x, v_2) + b(x, v_1) + b(v_1, v_2) + b(v_1, y) + b(v_2, y) \\ &= 2 + 0 + 2 + 2 + 2 = 8\end{aligned}$$

可知, $Val g^* = \sum_{e \in E} b(e)$, 故 N 中存在流. 由式(6-37) 我们得 N 中流 f 如图 6-80 所示.

$$\begin{aligned}f(x, v_1) &= g^*(x, v_1) + b(x, v_1) = 4 + 0 = 4, \\ f(x, v_2) &= g^*(x, v_2) + b(x, v_2) = 0 + 2 = 2, \\ f(v_1, v_2) &= g^*(v_1, v_2) + b(v_1, v_2) = 0 + 2 = 2, \\ f(v_1, y) &= g^*(v_1, y) + b(v_1, y) = 0 + 2 = 2,\end{aligned}$$

$$f(v_2, y) = g^*(v_2, y) + b(v_2, y) = 2 + 2 = 4.$$

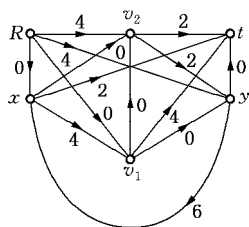


图 6-79

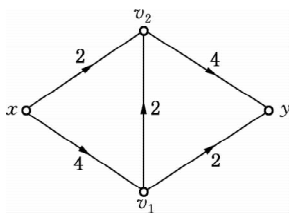


图 6-80

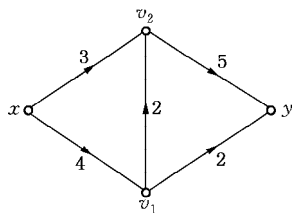


图 6-81

以图 6-80 中的流 f 为初始流,求得图 6-77 的最大流 f^* 如图 6-81 所示,有

$$Val f^* = 7.$$

§ 6.10 最小代价流问题

在例 6-26 图 6-55 中,若每吨物资从顶点 u 沿边 (u, v) 运输到顶点 v , 运行 $W(u, v)$ 千米,问如何调运物资,使从 x_1 及 x_2 处运送最多的物资到 y_1 及 y_2 处,而所费总吨千米数最少?这样,我们在建立运输网络时,除了每条边有容量外,又对应了另外一个参数——边的起点到终点的距离.在求最大流时,一方面要考虑每条边的流量符合容量约束和流量守恒条件,另一方面还要考虑流的流程大小.

一般地,给运输网络 $N = (V, E, C, x, y)$,又设非负实数 $W(u, v)$ 为一个单位的流量从顶点 u 沿边 (u, v) 流到顶点 v 所花的代价(或仍称 $W(u, v)$ 为边的权,可指距离、时间和费用等各种指标),这样的网络称为带代价的运输网络,或赋权的运输网络,常用 $N = (V, E, C, W, x, y)$ 表示.

设 f 为 N 上一个流, $Val f = \lambda$, 则

$$W(f) = \sum_{e \in E} W(e)f(e)$$

表示 N 内按照网络流 f 运送流量 λ 个单位从源 x 到汇 y 所花的代价,称 $W(f)$ 为流 f 的代价.

最小代价流——设 N 为带代价的网络, f^* 为 N 上流,若 $Val f^* = \lambda$, 且有

$$W(f^*) = \min\{W(f) \mid f \text{ 为 } N \text{ 上流, } Val f = \lambda\}, \quad (6-38)$$

则称 f^* 为 N 上一个流值为 λ 的最小代价流.

最小代价的最大流——若 λ 为 N 上最大流的流值,则称满足条件(6-38)的流 f^* 为最小代价的最大流.

本节旨在建立流值为 λ 的最小代价流和最小代价的最大流算法.当然,这类问题可以归结为我们熟悉的线性规划模型.但考虑到网络模型的直观性、形象性及求解的整数性,本节建立的算法自有它的优点.

6.10.1 伴随 f 的增流网络

如图 6-82(a)所示: $C(u, v) = 6, f(u, v) = 4, W(u, v) = 3$. 我们来考虑流量在边 (u, v) 上的增减情况.

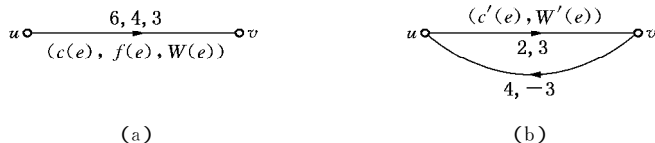


图 6-82

边 $e = (u, v)$ 至多可以再多输送 $C(e) - f(e) = 6 - 4$ 个单位流量,至多可以少输送 $f(e) = 4$ 个单位流量. 此时,若自顶点 u 至顶点 v 沿边 (u, v) 减少一个单位的流量,则可以理解为:在从顶点 u 沿边 (u, v) 输送 4 个单位流量到顶点 v 的同时,有 1 个单位流量自顶点 v 沿一条虚设边 (v, u) (以后用弧边来表示这类虚设的有向边)输送到顶点 u . 故有向边 (u, v) 上流量目前所能增减的情况如图 6-82(b)所示:沿 (u, v) 至多能增送 2 个单位流量,沿 (v, u) 至多能增送 4 个单位流量. 在图 6-82(b)中,我们令

$$\begin{aligned} C'(u, v) &= C(u, v) - f(u, v) = 6 - 4 = 2, \\ C'(v, u) &= f(u, v) = 4. \end{aligned}$$

显然,在图 6-82(b)中,沿边 (u, v) 运送一个单位流量,相当于在图 6-82(a)沿边 (u, v) 增送一个单位流量,因而,要增加代价 $W(u, v) = 3$;在图 6-82(b)中,沿边 (v, u) 运送一个单位流量,相当于在图 6-82(a)沿边 (u, v) 减送一个单位流量,因而要减少代价 $W(u, v)$,在图 6-82(b)中,我们令

$$\begin{aligned} W'(u, v) &= W(u, v), \\ W'(v, u) &= -W(u, v), \end{aligned}$$

设 f 为带代价的运输网络 $N = (V, E, C, W, x, y)$ 上一个网络流,现构造一个伴随 f 的增流网络 $N_f = (V_f, E_f, C', W', x, y)$ 如下:

$$\textcircled{1} \quad V_f = V(N); \quad (6-39)$$

$$\textcircled{2} \quad E_f = E_f^+ \cup E_f^-, \quad (6-40)$$

$$\text{其中} \quad E_f^+ = \{(u, v) \mid (u, v) \in E(N), f(u, v) < C(u, v)\}, \quad (6-41)$$

$$E_f^- = \{(u, v) \mid (v, u) \in E(N), f(v, u) > 0\}; \quad (6-42)$$

$\textcircled{3}$ 取

$$C'(u, v) = \begin{cases} C(u, v) - f(u, v), & \text{若 } (u, v) \in E_f^+, \\ f(v, u), & \text{若 } (u, v) \in E_f^-; \end{cases} \quad (6-43)$$

$$W'(u, v) = \begin{cases} W(u, v), & \text{若 } (u, v) \in E_f^+, \\ -W(v, u), & \text{若 } (u, v) \in E_f^-. \end{cases} \quad (6-44)$$

我们称 E_f^+ 中的边为正规边, E_f^- 中的边为非正规边.

例 6-38 对下列网络 N 及其上流 f 分别作伴随 f 的增流网络 N_f .

(1) 网络 N_1 如图 6-83 所示;

(2) 网络 N_2 如图 6-84 所示(边旁参数为 $C(e), f(e), W(e)$).

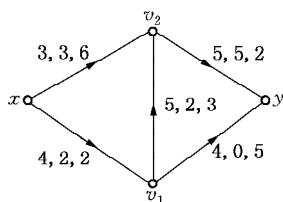


图 6-83

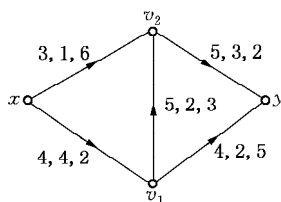


图 6-84

解 网络 N_1 的伴随 f 的增流网络如图 6-85 所示, 网络 N_2 的伴随 f 的增流网络如图 6-86 所示.

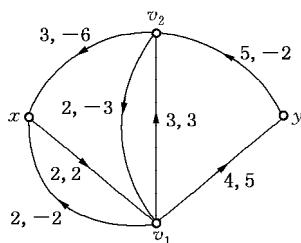


图 6-85

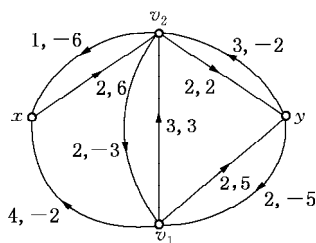


图 6-86

若 f 为带代价的网络 $N = (V, E, C, W, x, y)$ 上的流, 其伴随 f 的增流网络为 N_f . 若 P 为 N_f 中一条 x 到 y 的路径, 令 $C'(P)$ 为 P 中各边容量之最小值, 即

$$C'(P) = \min\{C'(e) \mid e \text{ 为 } P \text{ 中有向边}\},$$

则称 $C'(P)$ 为路径 P 的容量.

若取 δ 为一个不超过 $C'(P)$ 的正整数, 我们作 N 上流 $\hat{f}$ (可以验证如下取法的 $\hat{f}$ 为流):

$$\hat{f}(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \delta, & \text{若 } (u, v) \in E \text{ 且 } (u, v) \in P \cap E_f^+, \\ f(u, v) - \delta, & \text{若 } (u, v) \in E \text{ 且 } (v, u) \in P \cap E_f^-, \\ f(u, v), & \text{其他,} \end{cases} \quad (6-45)$$

则称 $\hat{f}$ 为关于 P, δ 的修改流. 可知

$$\text{Val } \hat{f} = \text{Val } f + \delta. \quad (6-46)$$

若 Q 为 N_f 中一个回路, 令 $C'(Q)$ 为 Q 中各边容量之最小值, 即

$$C'(Q) = \min\{C'(e) \mid e \text{ 为 } Q \text{ 中有向边}\},$$

我们称 $C'(Q)$ 为回路 Q 的容量.

若取 δ 为一个不超过 $C'(Q)$ 的正整数, 我们作 N 上流 $\tilde{f}$ (可以验证如下取法的 $\tilde{f}$ 为流):

$$\tilde{f}(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \delta, & \text{若 } (u, v) \in E \text{ 且 } (u, v) \in Q \cap E_f^+ \\ f(u, v) - \delta, & \text{若 } (u, v) \in E \text{ 且 } (v, u) \in Q \cap E_f^- \\ f(u, v), & \text{其他} \end{cases} \quad (6-47)$$

我们称 $\tilde{f}$ 为 f 关于 Q, δ 的修改流.

容易验证: $Val \tilde{f} = Val f$ (6-48)

又 $W'(Q) = \sum_{e \in Q} W'(e)$, 则不难知道有如下结论:

$$W(\tilde{f}) = W(f) + \delta W'(Q) \quad (6-49)$$

例如, 在图 6-85 中, $Q = xv_1yv_2x$ 是一个回路, 且

$$\begin{aligned} C'(Q) &= \min\{C'(x, v_1), C'(v_1, y), C'(y, v_2), C'(v_2, x)\} \\ &= \min\{2, 4, 5, 3\} = 2, \\ W'(Q) &= W'(x, v_1) + W'(v_1, y) + W'(y, v_2) + W'(v_2, x) \\ &= 2 + 5 - 2 - 6 = -1. \end{aligned}$$

取 $\delta = C'(Q) = 2$, 则可知, 图 6-84 中流 $\tilde{f}$ 就是图 6-83 中流 f 关于 Q, δ 的修改流.

经计算, 可知图 6-83 中流 f 的代价

$$W(f) = 38,$$

图 6-84 中流 $\tilde{f}$ 的代价

$$W(\tilde{f}) = 36,$$

可见 $W(f) + \delta W'(Q) = 38 + 2 \times (-1) = 36 = W(\tilde{f})$.

由此可知, 若 f 为 N 上流, $Val f = \lambda$, 且 N_f 中存在一个 $W'(Q) < 0$ 的负回路, 则 f 一定不是流值为 λ 的最小代价流.

我们有如下定理

定理 6-10 设 f 为网络 N 上流, $Val f = \lambda$, 则

- (1) f 为 N 中流值为 λ 的最小代价流的充分必要条件为: 在 N_f 中不存在负回路.
- (2) 如果 f 为 N 中流值为 λ 的最小代价流, P 为 N_f 中一条从 x 到 y 的最短路径, δ 为任一不超过 $C'(P)$ 的正整数, 则 f 关于 P, δ 的修改流 $\tilde{f}$ 为 N 中流值为 $\lambda + \delta$ 的最小代价流.

- (3) f 为 N 中最大流的充分必要条件为: N_f 中不含一条从源 x 至汇 y 的路径.

例如, 网络 N_2 图 6-86 的伴随 f 的增流网络图 6-86 中无负回路, 所以, 根据定理 6-10(1), 图 6-86 中的流 f 是流值为 5 的最小代价流.

例 6-39 求网络 N_2 图 6-84 中流值 λ 为 6 的最小代价流.

解 我们已经知道, 图 6-84 中流 f 是流值为 5 的最小代价流.

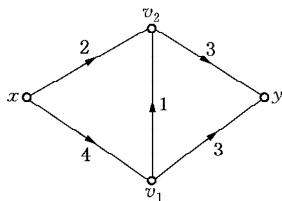


图 6-87

在 N_f 图 6-86 中, 最短路径

$$\begin{aligned} P &= xv_2v_1y, \\ C'(P) &= \min\{C'(x, v_2), C'(v_2, v_1), C'(v_1, y)\} \\ &= \min\{2, 2, 2\} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{取 } \delta = \min\{C'(P), \lambda - \text{Val}f\} = \min\{2, 6 - 5\} = 1.$$

f 关于 P, δ 的修改流 $\hat{f}$ 如图 6-87 所示. $\hat{f}$ 为流值为 6 的最小代价流.

6.10.2 最小代价流算法

对于给定的带代价的网络 $N = (V, E, C, W, x, y)$, 定理 6-10 给我们指出了如何在 N 中寻求流值为 λ 的最小代价流的两种方法:

方法之一是先在 N 中任取一个流值为 λ 的流 f (可利用本章 § 6.8 的算法), 在其 N_f 中寻找一个负回路 Q . 若 Q 不存在, 则 f 即为所求的最小代价流; 否则取 $\delta = C'(Q)$, 作 f 关于 Q, δ 的修改流 $\tilde{f}$. 视 $\tilde{f}$ 为新的 f , 再在新的 N_f 中寻找一个负回路. 这样反复迭代, 直到找到最小代价流为止.

方法二是在 N 中任取一个流值小于 λ 的最小代价流 f (例如, 取 f 为零流), 在其 N_f 中寻求一条 x 至 y 的最短路径 P , 取 $\delta = \min\{C'(P), \lambda - \text{Val}f\}$, 作 f 关于 P, δ 的修改流 $\hat{f}$, $\hat{f}$ 为流值是 $\text{Val}f + \delta$ 的最小代价流. 视 $\hat{f}$ 为新的流 f , 重复上述步骤继续进行迭代, 直至找到所求的最小代价流.

下面我们给出这两个算法.

求流值为 λ 的最小代价流算法一:

- ① 在 N 中任取一个流值为 λ 的流 f .
- ② 作 $N_f = (V_f, E_f, C', W', x, y)$.
- ③ 在 N_f 中是否存在一个负回路 Q ?

若是, 则取 $\delta = C'(Q)$, 作 f 关于 Q, δ 的修改流 $\tilde{f}$, 取 $f = \tilde{f}$, 转步骤②;

若否, 则 f 即为所求的最小代价流, 算法终止.

求流值为 λ 的最小代价流算法二:

- ① 取初始流 f 为零流.

- ② $\text{Val}f = \lambda$?

若是, 则 f 即为 N 中流值为 λ 的最小代价流, 算法终止;

若否, 则作 $N_f = (V_f, E_f, C', W', x, y)$.

- ③ N_f 中是否存在一条 x 至 y 的路径?

若是, 则求 N_f 中一条 x 至 y 的最短路径 P . 取 $\delta = \min\{C'(P), \lambda - \text{Val}f\}$, 作 f 基于 P, δ 的修改流 $\hat{f}$, $\text{Val}\hat{f} = \text{Val}f + \delta$. 取 $f = \hat{f}$, 转步骤②;

若否, 则 N 中不存在流值为 λ 的流, f 为 N 中最小代价的最大流, 算法终止.

如果我们要求 N 上的最小代价的最大流, 则在应用上述算法时取 $\lambda = +\infty$ 即可.

例 6-40 (最优分配问题) 设有 x_1, x_2 和 x_3 3 辆卡车, 需指派到 y_1, y_2 和 y_3 3 个

不同的目的地,各种指派的运送成本见表 6-42,试求能使总成本最低的最优指派。

表 6-42

成本 d_{ij}		目的地 y_j		
		y_1	y_2	y_3
车辆 x_i	x_1	40	—	37
	x_2	24	31	39
	x_3	29	37	—

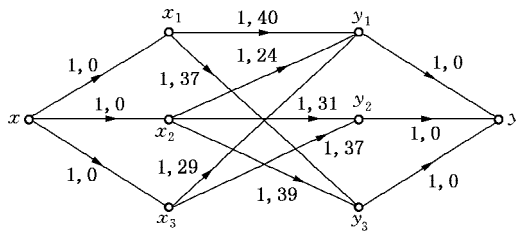


图 6-88

解 建立网络模型如图 6-88,边旁参数为 $C(e), W(e)$ 。

由于一辆车只能派往一个目的地,一个目的地仅需分配一辆车,故图 6-88 中各边的容量都为 1。因为 x 及 y 都为虚设的点,故 $W(x, x_i)$ 及 $W(y_j, y)$ 都为零, $W(x_i, y_j)$ 由表 6-42 中相应成本 d_{ij} 给出。由于车辆 x_1 不能派至目的地 y_2 , 车辆 x_3 不能派至目的地 y_3 , 故图 6-88 中顶点 x_1 至顶点 y_2 及顶点 x_3 至顶点 y_3 无有向边。

第一步,给初始流为零流,如图 6-89 所示(边旁参数为 $C(e), f(e)$)。

作它的伴随 f 的增流网络 N_f ,如图 6-90 所示(边旁参数为 $C'(e), W'(e)$)。在图 6-90 中, x 至 y 的最短路径 $P = xx_2y_1y$ (用双线表示),取 $\delta = C'(P) = \min\{C'(e) \mid e \in P\} = 1$ 。作 f 关于 P, δ 的修改流,如图 6-91 所示。

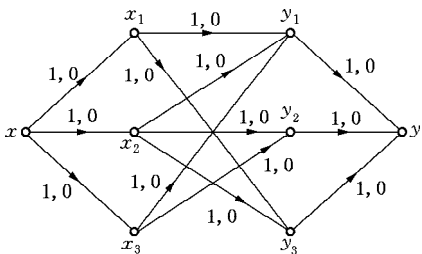


图 6-89

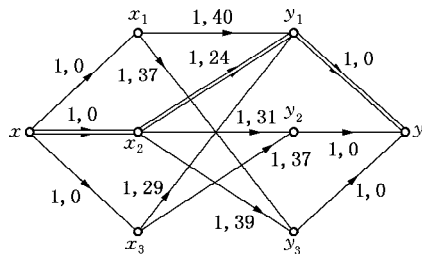


图 6-90

第二步,作图 6-91 的伴随 f 的增流网络 N_f ,如图 6-92 所示,其 x 至 y 的最短路径 $P = xx_3y_1x_2y_2y$,取 $\delta = C'(P) = 1$,对图 6-91 中流进行修改,得 f 关于 P, δ 修改流,如图 6-93 所示。

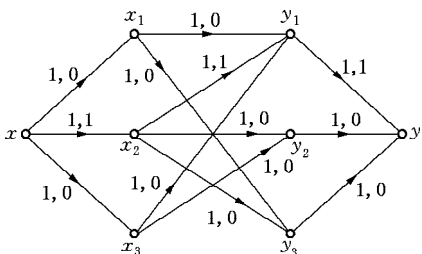


图 6-91

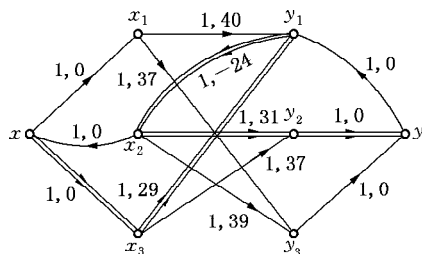


图 6-92

第三步,作图 6-93 的 N_f 网络,如图 6-94 所示.在 N_f 中 x 至 y 的最短路径 $P = xx_1y_3y$,取 $\delta = C'(P) = 1$,对图 6-93 中流进行修改,得修改流如图 6-95 所示.

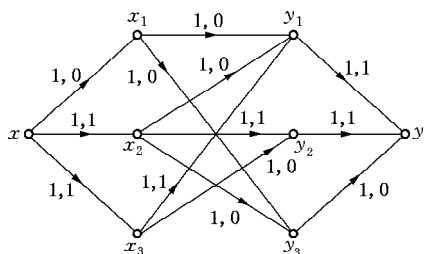


图 6-93

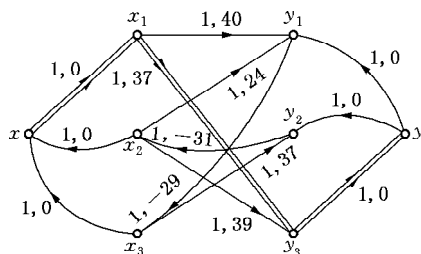


图 6-94

显然,图 6-95 中流已为最大流.本问题的最优指派如表 6-43 所给.

表 6-43

车辆	目的地	成本
x_1	y_3	37
x_2	y_2	31
x_3	y_1	29
总成本		97

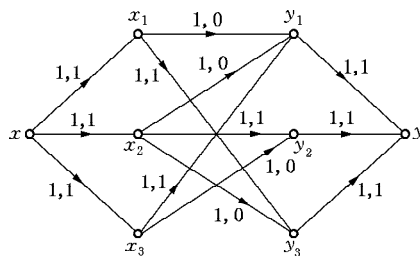


图 6-95

6.10.3 应用举例

最小代价流算法,不仅可以对运输问题建立网络模型进行求解,而且也可以对生产计划问题、多阶段存储问题等一类决策问题建立网络模型并进行求解.下面介绍几个典型例子,从中可见采用网络方法来建立模型时给我们描述问题所带来的方便.

例 6-41 (运输问题) 现有两个煤矿 x_1 和 x_2 ,每月分别能生产煤 13 及 15 个单位,每单位煤的生产费用分别为 5 及 3 个单位;另有两个电站 y_1 及 y_2 ,每月需用煤分别为 12 及 15 个单位.从 x_i 至 y_j 每单位煤的运费 w_{ij} 如表 6-44 所示.问每个煤矿应生产多少单位煤并如何运输,才能满足 y_1 及 y_2 的需求并使生产和运输总费用最低?

表 6-44

w_{ij}		y_i	
		y_1	y_2
x_i	x_1	3	6
	x_2	5	7

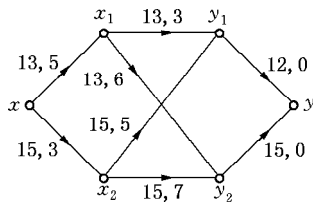


图 6-96

解 作网络 $N = (V, E, C, W, x, y)$ 如图 6-96 所示(边旁参数为 $C(e), W(e)$, 以下各例同)。

由于在 x_1 及 x_2 处分别有 13 及 15 个单位的煤可以发出, 故边 (x, x_1) 及 (x, x_2) 的容量分别为 13 及 15, $W(x, x_1)$ 和 $W(x, x_2)$ 分别为 x_1 及 x_2 处每单位煤的生产费用 5 及 3。显然,

$$C(x_1, y_1) = C(x_1, y_2) = 13, \quad C(x_2, y_1) = C(x_2, y_2) = 15,$$

而 $w_{ij} (i, j = 1, 2)$ 由表 6-44 给定。由于煤运送到 y_1 或 y_2 后本问题没有进一步考虑其他费用, 故 $W(y_1, y) = W(y_2, y) = 0$ 。因为 y_1 及 y_2 分别需要煤 12 和 15 个单位, 所以 $C(y_1, y) = 12, C(y_2, y) = 15$ 。

这样, 我们的问题就归结为求图 6-96 中 x 至 y 的最小代价的最大流。

例 6-42 (缺货问题) 现有 3 个汽车配件厂 x_1, x_2, x_3 , 欲将配件运往 3 个汽车修配厂 y_1, y_2, y_3 。若修配厂需要的配件得不到满足, 就要形成缺货损失费。设 y_1 处不能缺货, y_2, y_3 处每缺一个单位配件就分别造成缺货损失费 2 和 3。其他有关参数如表 6-45 所给。

问如何调配, 使总的费用最低? 试建立网络模型。

表 6-45

单位运价 w_{ij}		y_j			供应量 a_i
		y_1	y_2	y_3	
x_i	x_1	2	1	3	5
	x_2	2	—	4	3
	x_3	—	4	3	5
需求量 b_j		4	6	5	

解 建立网络模型如图 6-97 所示。

对 $i = 1, 2, 3$, 取 $C(x, x_i) = a_i$, $W(x, x_i) = 0$; 对 $j = 1, 2, 3$, 取 $C(y_j, y) = b_j$, $W(y_j, y) = 0$ 。

若表 6-45 中, x_i 处不能有配件运至 y_j , 则网络中就没有有向边 (x_i, y_j) 。对 $i, j = 1, 2, 3$, 若有边 $(x_i, y_j) \in E$, 则取 $C(x_i, y_j) = a_i$ (或 b_j), $W(x_i, y_j) = w_{ij}$ 。

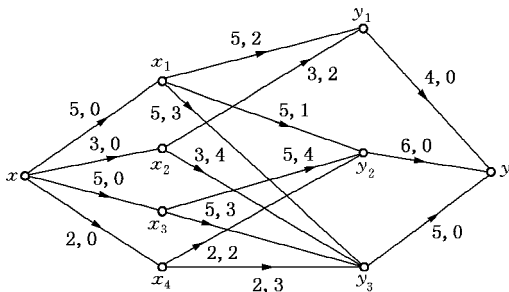


图 6-97

考虑到供应量之和 $\sum_{i=1}^3 a_i = 13$, 需求量之和 $\sum_{j=1}^3 b_j = 15$, 供需不平衡, 缺少两个单位配件的供应量并需考虑 $y_j (j = 2, 3)$ 的缺货损失费, 为此虚设一个发点 x_4 , 其供应量 a_4 为缺货量 2, 于是 $C(x, x_4) = 2$, 而 $W(x, x_4) = 0$ 。因为 y_2 和 y_3 处允许缺货, 所以给有向边 (x_4, y_2) 及 (x_4, y_3) , 其容量都为 2, 而 $W(x_4, y_2)$ 和 $W(x_4, y_3)$ 分别为 y_2 及 y_3 处的单位配件缺货损失费 2 和 3。因为 y_1 处不允许缺货, 所以没有边 (x_4, y_1) 。

对图 6-97,若用最小代价的最大流算法求得最大流 f^* ,自然,有 $Val f^* = 15$.

若是 $f^*(x_4, y_2) > 0$,这意味着 y_2 处缺货 $f^*(x_4, y_2)$, y_2 处实际收量为 $6 - f^*(x_4, y_2)$;

若是 $f^*(x_4, y_2) = 0$,这意味着 y_2 处不缺货.对于 y_3 可以作类似的分析.

例 6-43 设有 x_1, x_2 和 x_3 3 个化肥厂供应 y_1, y_2 和 y_3 3 个地区的农用化肥,有关参数如表 6-46.假设 3 个化肥厂的化肥供应量 a_1, a_2 和 a_3 必须全部运完.试建立网络模型,以使总运费最省.

表 6-46

单位运价 w_{ij}		y_j			供应量 a_i
		y_1	y_2	y_3	
x_i	x_1	16	13	22	50
	x_2	14	—	19	60
	x_3	—	20	23	40
最低需求量 b'_j		70	0	30	
最高需求量 b''_j		70	30	不限	

解 由于 3 个化肥厂的化肥供应量之和 $\sum_{i=1}^3 a_i = 150$,而 3 个地区的化肥最低需求

量之和 $\sum_{j=1}^3 b'_j = 100$,故 y_3 的化肥最高需求量

$$b''_3 = b'_3 + \left(\sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{j=1}^3 b'_j \right) = 30 + 50 = 80.$$

又 3 个地区的化肥最高需求量之和

$$\sum_{j=1}^3 b''_j = 70 + 30 + 80 = 180,$$

所以若要同时满足 y_1, y_2 和 y_3 的化肥最高需求量,尚缺化肥 $180 - 150 = 30$ 单位.为此,我们虚设一个发点 x_4 ,取其供应量 $a_4 = 30$ (缺货量).

设 x 和 y 分别为源和汇.取 $C(x, x_i) = a_i, W(x, x_i) = 0$.

因为 y_1 需要量恰为 70 且 x_3 不能运输化肥给 y_1 ,故 y_1 仅和 x_1, x_2 相关联,同时取 $C(y_1, y) = 70, W(y_1, y) = 0$.

y_2 最低需求量可为零,最高需求量为 30(不一定非要全部满足),且 x_2 无化肥运输给 y_2 ,故没有边 (x_2, y_2) ,而有有向边 $(x_1, y_2), (x_3, y_2)$ 和 (x_4, y_2) ,同时取 $C(y_2, y) = 30, W(y_2, y) = 0$.

y_3 的最低需要量为 30,最高需要量为 80,所以 y_3 有 50 单位化肥是不一定非要全部得到满足的.我们将 y_3 点拆成 y'_3 和 y''_3, y'_3 的需求量为 y_3 的最低需求量 $b'_3 = 30$,它必须得到满足,故 y'_3 仅与 x_1, x_2 和 x_3 相关联,给有向边 $(x_i, y'_3)(i = 1, 2, 3)$; y''_3 的需求量为 y_3 的最高与最低需求量之差 $b''_3 - b'_3 = 80 - 30 = 50$,它不一定非要得到满足,故给有向边 $(x_i, y''_3)(i = 1, 2, 3, 4)$.取 $C(y'_3, y) = 50, C(y''_3, y) = 30, W(y'_3, y) = 0$,

$$W(y_3'', y) = 0.$$

对网络中有向边 (x_i, y_j) 取 $C(x_i, y_j) = a_i$ 、 $W(x_i, y_j) = w_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), 而 $W(x_4, y_2) = 0, W(x_4, y_3'') = 0$.

把有关点相关联并给出有关参数, 即得网络模型如图 6-98.

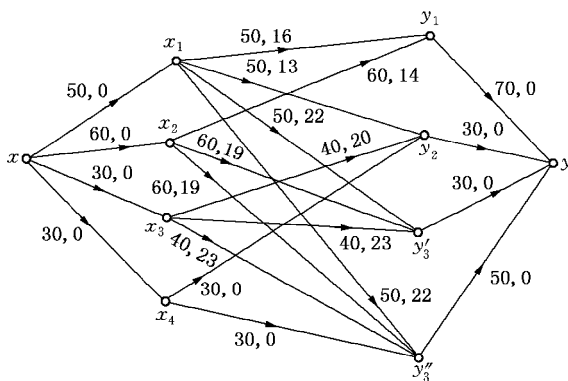


图 6-98

例 6-44 对例 1-20 所给的生产计划问题建立网络模型.

解 设 x 为源(工厂), y 为汇(销售公司). 又设 v_i 为第 j 季度产品的存储与供货点 ($j = 1, 2, 3, 4$).

第一季度工厂的生产能力为 30, 生产的产品输入到 v_1 点, 所以给边 (x, v_1) 取 $C(x, v_1) = 30, W(x, v_1) = 15$. 第一季度末销售公司需产品 20, 所以给边 (v_1, y) 取 $C(v_1, y) = 20, W(v_1, y) = 0$. 又考虑到第一季度生产的产品有部分可能要存储到第二季度末供货, 故给边 (v_1, v_2) 其容量不妨设为 $+\infty$, 同时由所给条件知, 单位产品每积压一个季度需付存储费 0.2, 故有 $w(v_1, v_2) = 0.2$.

同理给其他有向边及有关参数, 我们

得网络模型如图 6-99. 显然, 本模型的最小代价的最大流的流值必为 80.

例 6-45 (生产计划问题) 某工厂与客户签订合同, 当月起连续 3 个月每月末向客户提供某型号产品. 有关信息如表 6-47 所示.

表 6-47

月份	正常生产能力 a_j	加班生产能力 $\hat{a}_j$	需求量 b_j	单位产品正常生产成本
1	30	15	30	50
2	40	10	30	60
3	15	10	30	55

已知在加班生产时间内,单位产品生产成本比正常生产时高出 7. 又知单位产品每积压 1 个月需支付存储费 2. 在签订合同时,工厂有该产品的库存量 5,工厂希望在第 3 个月的月末完成合同后还能存储该产品 10 个单位. 问工厂应如何安排生产计划,使在满足上述条件的情况下,总的费用为最少?

解 设 x_1 为工厂处于正常生产状态, x_2 为工厂处于加班生产状态. v_j 为第 j 月生产的产品的存储与供货点, x 与 y 分别为源和汇.

由于工厂月初已有库存产品 5,它要在 1 月末才能交货,而单位产品积压 1 个月的存储费为 2,因此给有向边 (x, v_1) 取 $C(x, v_1) = 5, W(x, v_1) = 2$ (本问题假设签订合同前库存的产品的生产成本不核算在本次生产计划的费用内).

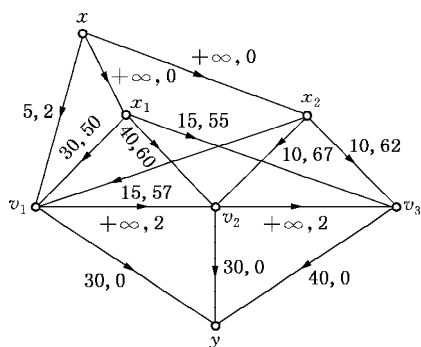


图 6-100

不妨设 $C(x, x_1) = +\infty, C(x, x_2) = +\infty$, 而 $W(x, x_1) = 0, W(x, x_2) = 0$.

工厂在当月既可正常生产,又可加班生产,所以给边 (x_1, v_1) 和 (x_2, v_1) 取 $C(x_1, v_1) = 30, C(x_2, v_1) = 15, W(x_1, v_1) = 50, W(x_2, v_1) = 50 + 7 = 57$.

v_1 点的产品若在 1 月末未交货,就留存在 2 月末未交货,故给边 (v_1, v_2) 取 $C(v_1, v_2) = +\infty, W(v_1, v_2) = 2$.

同理,给出其他有向边和有关参数,得网络模

型如图 6-100.

例 6-46 (多阶段存储问题) 某厂部件车间每月生产的部件必须存入备品库,以备以后各月月初组装车间向备品库领取一定数量的部件进行组装使用. 由于生产条件的变化,该部件车间在各个月份中生产每个部件所耗费的工时不同. 设已知第 2 至第 5 个月期间各个月月初组装车间对部件的需求量及各个月部件车间生产每个部件所需的工时如表 6-48 所给(设 1 月初该部件库存量为零).

表 6-48

月份 k	1	2	3	4	5
需求量 b_k	—	8	5	7	4
工时 d_k	11	16	13	17	—

假设备品库的容量限制为 9,并要求 5 月末备品库的部件库存量为零. 现考虑 1 月至 5 月的总耗费工时最少的逐月生产计划,试建立网络模型.

解 (1) 先假定备品库容量没有限制.

设 x 为源(部件车间), y 为汇(组装车间). 又设 v_k 为第 k 个月月初部件的存储与供货点(即备品库). 1 月生产的部件沿边 (x, v_2) 输入 v_2 ,在 2 月初沿边 (v_2, y) 供给组装车间 y ,剩余的部件可沿边 (v_2, v_3) 输入 v_3 ,同时,3 月生产的部件沿边 (x, v_3) 也输入 v_3 ,在 3 月初沿边 (v_3, y) 供应部件给组装车间,剩余部件沿边 (v_3, v_4) 输入 v_4 ,依次类推,即得

网络图 6-101. 在图 6-101 中,取 $C(x, v_k) = +\infty, W(x, v_k) = d_{k-1}; C(v_k, y) = b_k, W(v_k, y) = 0; C(v_k, v_{k+1}) = +\infty, W(v_k, v_{k+1}) = 0$.

(2) 现假定备品库容量有限制,也即顶点 v_k 有容量约束.

显然顶点有容量约束的网络可以化为仅有边的容量约束的网络,具体方法是:

把具有容量约束的顶点 v 拆为两个顶点 v' 和 v'' ,同时从 v' 到 v'' 给有向边 (v', v'') ,该边的容量即为顶点 v 的容量,并且原来所有以 v 为终点的有向边现都改为以 v' 作为终点,原来以 v 为起点所有有向边现都改为以 v'' 作为起点,同时这些边的容量都不变.

按此方法,我们将图 6-101 中的顶点 v_k 拆成两个顶点 u_k 及 t_k ,取 $C(u_k, t_k) = 9$,即得图 6-102,运用最小代价的最大流算法求解,即可得到最优生产计划.

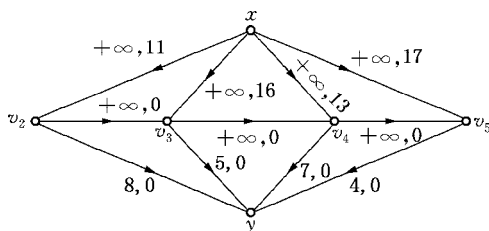


图 6-101

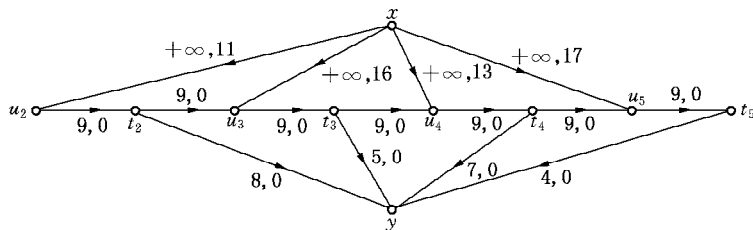


图 6-102

例 6-47 (生产计划问题) 工厂甲和乙皆生产产品 A 和 B. 该两个工厂对产品 A 和 B 的工时定额分别定为 1 和 2(工时/件). 表 6-49 和表 6-50 给出有关信息. 试制订最优生产计划,以使总成本最低.

表 6-49

需求量(件)	一月 ($i = 1$)	二月 ($i = 2$)
产品 A	100	110
产品 B	150	190

表 6-50

工厂	生产能力(工时)		产品生产成本(元/件)		产品每月存储费(元/件)	
	1 月	2 月	A	B	A	B
甲	$a_{甲}^1 = 230$	$a_{甲}^2 = 245$	3	6.4	0.2	0.6
乙	$a_{乙}^1 = 260$	$a_{乙}^2 = 225$	3.1	6.2	0.32	0.5

解 产品的需要量之单位为件数,而工厂的生产能力的单位为工时,两者单位不统一. 为建立网络模型,我们将单位统一为工时. 于是,产品需求量(工时)=需求件数 $\times$ 定额工时,我

表 6-51

需要量(工时)	1 月 ($i = 1$)	2 月 ($i = 2$)
产品 A: b_A^i	100	110
产品 B: b_B^i	300	380

们得表 6-51 :

相应地 ,每件产品的生产成本化为产品每工时成本 ,每月每件产品的存储费化为每工时的存储费 ,我们得表 6-52.

表 6-52

工厂	生产成本(元/工时)		每月存储费(元/工时)	
	A	B	A	B
甲	$d_{甲A}=3$	$d_{甲B}=3.2$	$h_{甲A}=0.2$	$h_{甲B}=0.3$
乙	$d_{乙A}=3.1$	$d_{乙B}=3.1$	$h_{乙A}=0.32$	$h_{乙B}=0.25$

建立网络模型如图 6-103 ,其中顶点和参数为 :

$x_{甲}(x_{乙})$ ——甲(乙)工厂 ;

$v_{甲}^i(v_{乙}^i)$ ——甲(乙)工厂在第 i 月的生产状态.

$v_{甲A}^i(v_{乙A}^i)$ 和 $v_{甲B}^i(v_{乙B}^i)$ ——甲(乙)工厂在第 i 月生产产品 A 和 B.

y_A^i 和 y_B^i ——第 i 月末对产品 A 和 B 的需求点.

$C(x_{甲}, x_{甲}^i) = a_{甲}^i, C(x_{乙}, x_{乙}^i) = a_{乙}^i, C(v_{甲A}^i, y_A^i) = C(v_{乙A}^i, y_A^i) = b_A^i,$

$C(v_{甲B}^i, y_B^i) = C(v_{乙B}^i, y_B^i) = b_B^i, C(y_A^i, y) = b_A^i, C(y_B^i, y) = b_B^i.$

$W(v_{甲}^i, v_{甲A}^i) = d_{甲A}, W(v_{甲}^i, v_{甲B}^i) = d_{甲B}, W(v_{乙}^i, v_{乙A}^i) = d_{乙A}, W(v_{乙}^i, v_{乙B}^i) = d_{乙B},$

$W(v_{甲A}^1, v_{甲A}^2) = h_{甲A}, W(v_{甲B}^1, v_{甲B}^2) = h_{甲B}, W(v_{乙A}^1, v_{乙A}^2) = h_{乙A}, W(v_{乙B}^1, v_{乙B}^2)$

$= h_{乙B}.$

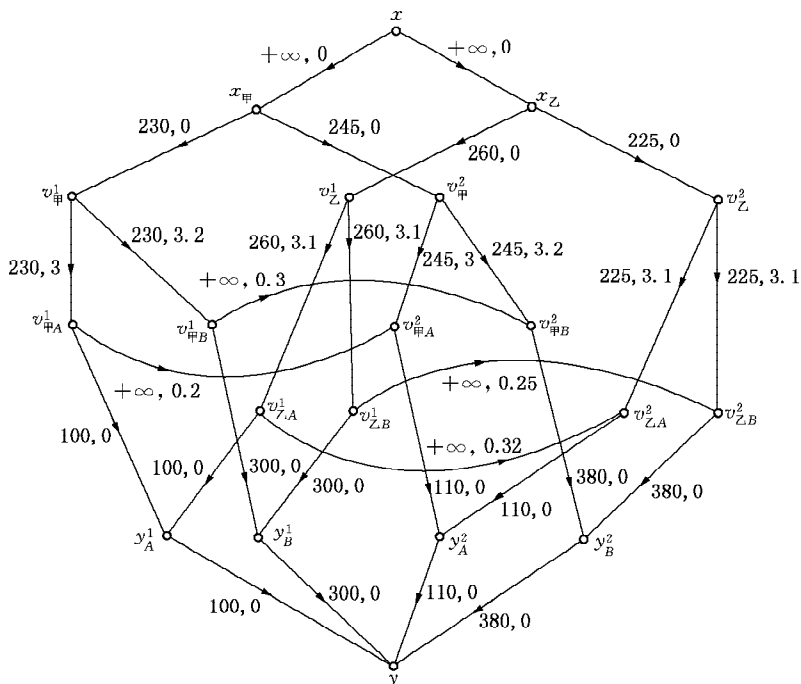


图 6-103

习 题 六

1. 求图 6-104 中 v_1 至 v_{10} 的最短路径和长度.

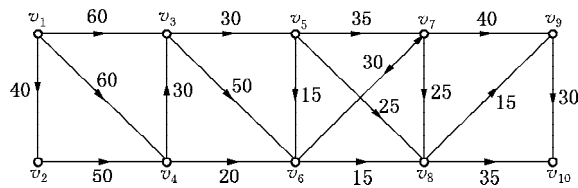


图 6-104

2. 某厂正在制订 5 年里购买某种设备的计划. 表 6-53 给出从第 1 年到第 5 年的设备价格.

表 6-53

年 号	1	2	3	4	5
购买价格	20	21	23	24	26

表 6-54 给出设备使用维修费.

表 6-54

设备寿命	(0, 1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]	(4, 5]
使用维修费	8	13	19	23	30

该工厂可以采用的最优策略是什么？

3. 对图 6-105(a)和 6-105(b)用弗劳德算法求任意两点间的最短路径及长度.

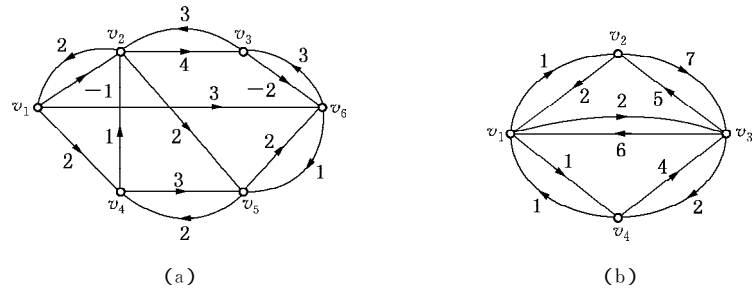


图 6-105

- 4. 用弗劳德算法求图 6-106 中的一条负回路.
- 5. 求图 6-103 中 v_1 至 v_{10} 的最长路径及其长度.
- 6. 求图 6-107 中 v_1 至 v_7 的最短路径及其长度.

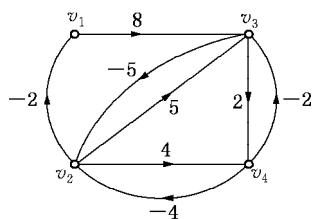


图 6-106

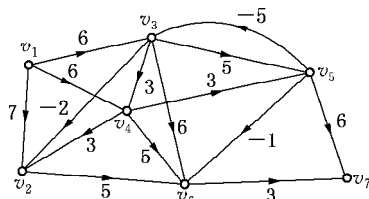


图 6-107

7. (1) 某公司有 3 家工厂, 每一个工厂都可以考虑扩建, 分配在扩建方面的总投资是 5 个单位, 对各厂扩建投资后的收益如表 6-55 所示. 问如何决策可使公司得到的总收益最大?

表 6-55

收益 a_{ij}		投资数 j				
		0	1	2	3	4
工厂 i	1	0	5	6	—	—
	2	0	—	8	9	12
	3	0	3	5	—	—

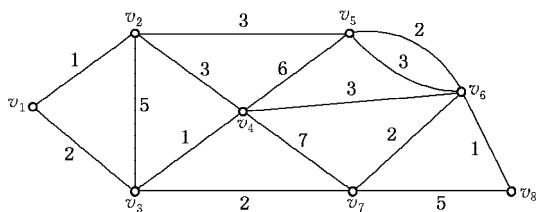


图 6-108

(2) 求解 $\max\{3x_1 + 4x_2 \mid 2x_1 + 3x_2 \leq 6, x_j \geq 0, \text{整数 } j = 1, 2\}$.

8. 对图 6-108 求最小生成树和最大生成树.

9. 判断图 6-109 和图 6-110 中是否具有欧拉链, 若有, 请写出一条.

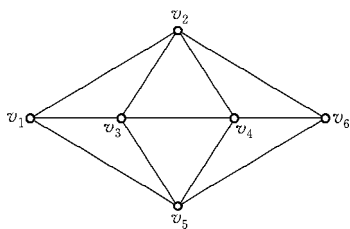


图 6-109

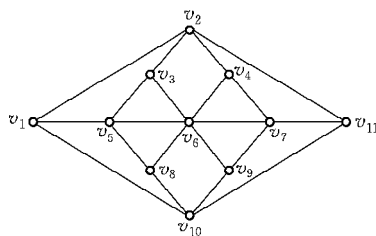


图 6-110

10. 求图 6-111 的欧拉环游.

11. 某邮递员的投递范围如图 6-112, 设计一条最优投递路线并求其长度.

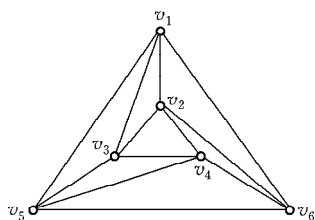


图 6-111

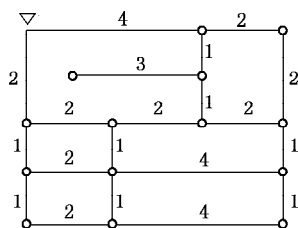


图 6-112

12. 某车站货场的货位及其货运员办公室(用 $\triangle$ 表示)布置如图 6-113 所示. 试为货运员设计一条巡视路线, 以保证对每个货位的货物四周进行检查, 并要求走行的路程为最短. 计算该线路巡视一次的路程.

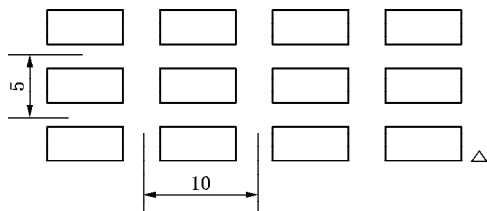


图 6-113

13. 上题如场地不限制, 允许按最短巡视路线调整货位布置, 试设计一个 12 个货位的布置图, 并计算巡视一次的路程.

14. 求图 6-104 中 v_1 至 v_{10} 的第 4 短路径.

15. 网络图 6-114 中边旁的参数为 $(C(e), f(e))$, 将它化成单源和单汇网络. 并以所给的流为初始流, 然后求最大流及其流值, 并求最小割.

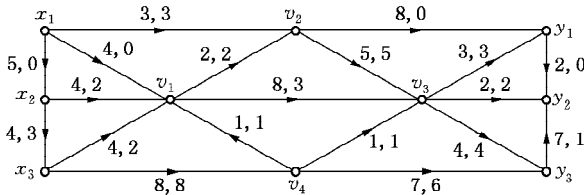


图 6-114

16. 要从 3 个仓库 x_1, x_2, x_3 运送某种商品到 4 个市场 y_1, y_2, y_3 和 y_4 去, 仓库的供应量分别是 20, 20 和 100 件, 市场的需求量分别是 20, 20, 60 和 20 件. 表 6-56 给出了各仓库到各市场运送线路上的容量. 问利用现有的运送条件, 市场的需求量能否得到满足?

表 6-56

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	30	10	—	40
x_2	—	—	10	50
x_3	20	10	40	5

17. 如图 6-115 所示网络各边都有容量限制, 顶点旁带括号的数字为各顶点处的容量限制. 作出一个与此等价的网络, 它只有边的容量而无顶点处的容量, 并求出 x 到 y 的最大流及流值.

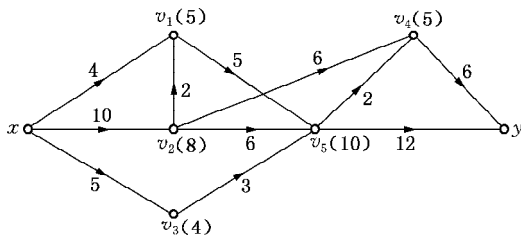


图 6-115

18. 有甲、乙、丙 3 个车站, 工人住宅在车站甲, 工厂区在车站丙. 工人上班从

甲地到丙地有两条线路: 甲 $\rightarrow$ 丙, 甲 $\rightarrow$ 乙 $\rightarrow$ 丙. 每天上午 7:00 到 9:00 为高峰. 每个工人不早于上午 7:00 离开甲地, 不迟于 9:00 到达丙地. 火车平均行驶时间是: 甲地到乙地为 60 分钟, 甲地到丙地为 60 分钟, 乙地到丙地为 30 分钟. 在车站甲和乙规定发车的时间间

隔为 30 分钟. 每次最大的运输量是(百人):甲 $\rightarrow$ 乙为 7;甲 $\rightarrow$ 丙为 9;乙 $\rightarrow$ 丙为 8. 问上午 7:00 至 9:00 从甲地最多可输送多少工人到丙地?

19. 求图 6-116 中流值为 6 的最小代价流. 边旁参数为 $C(e), W(e)$.

20. 有 3 个电站 y_1, y_2, y_3 , 每个电站每月需用煤 3 万吨;另有两个煤矿 x_1, x_2 , 每月供应这 3 个电站的煤各为 5 万吨. 煤矿到电站每万吨煤的运费由表 6-57 给出. 试求运费最省的运输方案及总运费.

表 6-57

运费	y_1	y_2	y_3
x_1	23	62	33
x_2	15	77	21

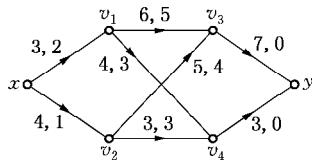


图 6-116

21. 某贸易公司估计市场在第 n 个月对某产品的需求量为 u_n , 又知在第 n 月该产品的订购价格为 $d_n (n = 1, 2, \dots, 6)$. n, u_n, d_n 的信息如表 6-58 所示. 上个月月底未销完的每件产品(即本月初仓库已存储的产品)要付存储费 6 个单位. 假定第一个月月月初的库存量为零, 第六个月月底库存量也为零. 问每月应如何订购和存储产品, 可使成本最低? (不允许缺货, 每月月初订购, 订购后产品能立刻到货、进库并供应市场, 若于当月被售掉, 则不必付存储费)试建立网络模型. 又若每月仓库存储限量为 120, 那又如何修改已建立的模型?

表 6-58

n	1	2	3	4	5	6
u_n	50	55	50	45	40	30
d_n	80	70	80	85	70	80

22. 试为习题一第 6 题建立网络模型.

23. 试为习题三第 4 题建立网络模型.

24. 试为第三章例 3-10 建立网络模型.

25. 判断在图 6-117 和图 6-118 中是否存在网络流. 若存在, 求最大流. 边旁参数为 $(b(e), C(e))$.

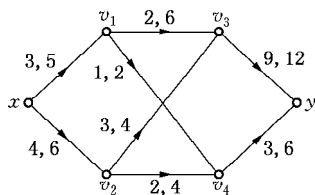


图 6-117

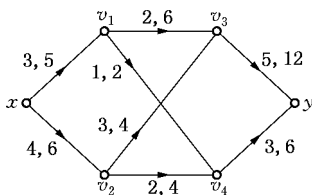


图 6-118

第七章 网络计划技术

计划评审法和关键路线法是 20 世纪 50 年代在美国彼此独立地发展起来的一种组织生产和进行计划管理的科学方法,这两种方法虽有差异,但基本原理是一样的,所以,人们已将它们合在一起,称作网络计划技术.1965 年,著名数学家华罗庚教授在全国各地许多部门开始推广和应用这类生产计划管理的科学方法,称之为统筹方法,并在生产实践中取得了丰硕成果.

网络计划技术的基本原理是:利用网络图来表达工程(例如,国防和建设工程,企业的产品生产,设备的维修等)的进度安排及其组成的各项活动(也称为作业或工序)之间的制约关系,计算各项活动的有关时间参数,使管理者在对全局工作有一个比较完整清晰的了解后进行网络分析,制定任务进展的日程计划以求得完工期、资源和成本的优化方案.在计划执行过程中,通过信息反馈对各项活动的进度进行监督和控制,以求按预定的计划目标出色地完成任务.

所以,网络计划技术在实施时,主要是分 4 个步骤:第一步编制网络图,第二步确定问题各项活动的持续时间,第三步决定关键路线,第四步结合资源费用等因素制定工程的最优日程进度.下面对此进行一一介绍.

289

§ 7.1 工程网络图

7.1.1 PERT 网络

一项工程总是由许多相互独立的活动组成的,今后称这些活动为工序.各道工序之间有着一定的先后次序上的联系,且完成各道工序都需要耗费一定的时间(不妨设单位时间为天),称它们为工序的长度或工序时间.我们可以采用一个赋权有向图来描述工程各道工序之间相互依存的逻辑关系:

- ① 以一条有向边来表示一道工序,有向边的权即为此工序的长度;
- ② 有向边的起点和终点分别表示相应工序的开工和完工,称为事项;
- ③ 前接工序的完工事项即为后继工序的开工事项.

我们称这种赋权有向图为计划网络图,简称网络图.

下面给出网络图的绘制规则和方法:

(1) 若工序 D 和 E 必须在工序 A 、 B 和 C 完成后才能开工,可用图 7-1 表示.称工序 A 、 B 和 C 为工序 D 或工序 E 的紧前工序,工序 D (或 E)称为工序 A (或 B 或 C)的

紧后工序.

(2) 若工序 C 需工序 A 及 B 完工后始能开工, 而工序 D 在工序 B 完工后就可开工, 此时, 在工序 B 和 C 之间虚设一个长度为 0 的“虚工序”, 如图 7-2 所示. 这种虚工序在任务实施中实际上是不存在的, 只表示工序之间的逻辑关系, 它不耗费时间和资源.

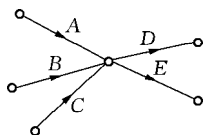


图 7-1

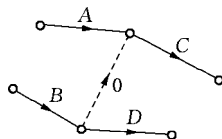


图 7-2

(3) 网络图中不允许出现平行边.

在使用电子计算机对网络图进行有关的时间参数计算时, 一般都利用有向边的起点及终点的编号来表示有向边. 因此, 在具有平行边的网络图中, 当起点、终点的编号给定后, 边不能唯一地确定. 所以, 图 7-3 的形式在网络图中是不允许的. 我们可以利用虚工序的技巧, 用图 7-4 来表示图 7-3 中工序之间的逻辑关系.

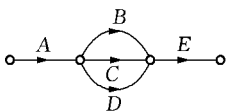


图 7-3

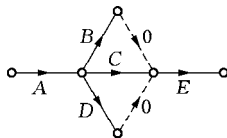


图 7-4

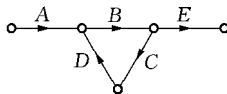


图 7-5

(4) 网络图中不允许出现回路.

例如, 图 7-5 中存在回路, 工序流程出现循环, 这是逻辑上的错误, 不允许出现.

(5) 网络图中只能具有一个源(工程的始点, 它只具有输出边)和一个汇(工程的终点, 它只具有输入边), 即自网络图的源出发经由任何路径都可以到达汇.

例如图 7-6 这种形式是错误的. 如果图 7-6 作如此解释: 工序 A 和 B 可以同时开工, 工序 F 和 H 完工后工程即告完成, 则应画成图 7-7 形式.

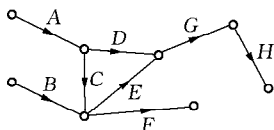


图 7-6

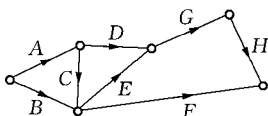


图 7-7

于是, 一个工程就可用一个网络 $N = (V, E, W, x, y)$ 来描述, 它没有平行边, 没有回路, 源 x 表示工程的总开工事项, 汇 y 表示工程的总完工事项, $W(e)$ 表示工序 e 的长度. 我们称这一网络 N 为该工程的 PERT 网络.

对 PERT 网络 N 的每个顶点需用数字进行编号. 若 N 中有一条以 u 为起点、 v 为终

点的有向边 (u, v) , 则顶点 u 的编号 i 应小于顶点 v 的编号 j , 并且就以边 (i, j) 表示该工序 (u, v) , 其长度记为 W_{ij} .

我们可按如下方法对顶点进行编号: 首先给源 x 以编号1(以后用①表示源), 接着设想把以源为起点的边都从网络 N 中删去, 这样得到一个或数个没有输入边且未编号的顶点, 对它们逐一编上号(对这些顶点来说, 编号的前后顺序无关紧要). 然后再从 N 中把这些新编上号的顶点为起点的边删去, 又得到一些没有输入边的未编号的点, 再逐一地编号. 如此继续进行, 直至最后一个顶点汇 y 被编上号(假设为 n , 以后就以②来表示汇).

今后, 我们将直接用顶点的编号来称呼顶点或事项.

在绘制一项工程的 PERT 网络时, 首先要将整个工程分解成若干道工序(工序是在工艺上和生产组织管理上具有相对独立性的活动)并确定工序的长度, 然后根据工艺流程确定各工序之间的顺序关系.

由于工程设计的图纸一般总有总图和分图等不同的层次. 因此, 对于规模较大的工程, 在编制网络图时, 同样地也应分成层次, 区分为网络总图和网络分图. 网络分图在网络总图中可以用一道工序来表示, 其长度为网络分图中最长路径的长度.

有时, 为了加快工程进度, 对于相邻的工序, 可以不必待紧前工序全部完工后才开始下一道工序, 可以先完成前道工序的一部分作业, 然后就开始紧后工序的一部分作业. 换言之, 在条件许可下, 把一些相邻的若干工序进行分解, 采用交叉作业.

例如: ①原工序 B 紧接工序 A , 现在 A 工序分解成 A_1, A_2 和 A_3 , B 工序分解成 B_1, B_2 和 B_3 , 则可画成图 7-8.

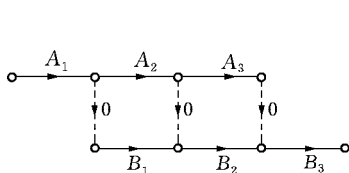


图 7-8

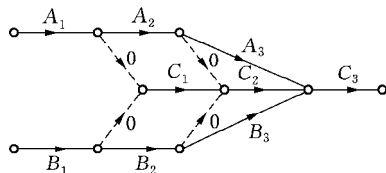


图 7-9

②原工序 C 紧接工序 A 和 B , 现在 A 分解成 A_1, A_2 和 A_3 , B 分解成 B_1, B_2 和 B_3 , C 分解成 C_1, C_2 和 C_3 , 则可画成图 7-9.

③原工序 A, B, C, D 为依次前后紧接的 4 道工序, 现在 A, B, C, D 分别分解成 A_i, B_i, C_i 和 $D_i (i = 1, 2, 3)$. 则可画成图 7-10.

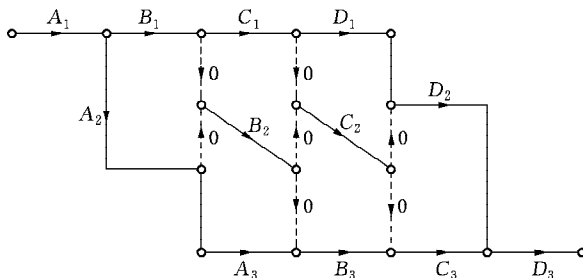


图 7-10

例 7-1 某工程各工序的顺序关系及各工序的工序时间如表 7-1 所给,画出它的 PERT 网络.

表 7-1

工 序	紧前工序	工序时间	工 序	紧前工序	工序时间
A	—	12	N	D, E	3
B	—	3	M	E	8
C	B	5	X	H	3
D	B	7	P	F	7
E	B	8	R	N	3
F	C	5	W	M	2
G	C	6	Z	X, P, R	2
H	A, G	4			

解 该工程的 PERT 网络如图 7-11 所示.

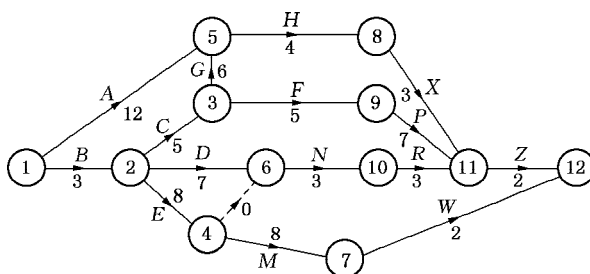


图 7-11

7.1.2 网络图的时间参数和关键路径

如果在图 7-11 的 12 个事项中任取一个事项,例如取事项 5,那么它作为工序 (5, 8) 的开工事项,最早可在整个工程开工几天后执行呢?显然,事项 5 作为开工事项一定要等工序 (1, 5) 和 (3, 5) 都完工后才能执行,仅工序 (1, 5) 完工后还不能执行开工事项 5.从图上可以看出,事项 5 最早可在开工 14 天后(第 15 天)执行.

为此,我们对于网络图中任一个事项 k 引进第一个时间参数:

事项 k 的最早时间 $t_E(k)$ ——从顶点 1 到顶点 k 的最长路径长度称为事项 k 的最早时间,记以 $t_E(k)$.

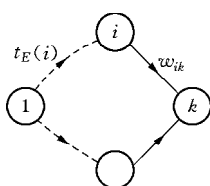


图 7-12

$t_E(k)$ 的实际意义是指:以事项 k 为起点的工序必须等它的紧前工序都完工后才能开工,它们的预期最早执行时间在整个工程开工 $t_E(k)$ 天后(即在第 $t_E(k) + 1$ 天).

在图 7-12 中,工序 (i, k) 是以 k 为终点的工序之一(根据编号原则,有 $i < k$), w_{ik} 为工序 (i, k) 之长度, $t_E(i)$ 为顶点 1 至顶点 i 的最长路径长度,虚线表示相应的最长路径.由图 7-12 不难得到下列

递推公式：

$$\begin{cases} t_E(1) = 0, \\ t_E(k) = \max\{t_E(i) + w_{ik} \mid i < k, (i, k) \in E\}. \end{cases} \quad (7-1)$$

总工期——事项 n 的最早时间 $t_E(n)$ 称为工程的总工期, 记作 T_E .

T_E 表示整个工程从开工到完工所需的最少时间.

由图 7-11 可知, $t_E(12) = 23$, $t_E(7) = 19$, 事项 7 作为工序(7, 12)的开工事项, 如果在整个工程开工 21 天后工序(7, 12)还不开工, 那么整个工程的完工时间就将超过 23 天, 因为执行工序(7, 12)需要 2 天时间. 为此, 我们引进事项 k 的第二个时间参数:

事项 k 的最迟时间 $t_L(k)$ ——总工期 T_E 与顶点 k 至顶点 n 的最长路径长度之差称为事项 k 的最迟时间, 记为 $t_L(k)$.

$t_L(k)$ 的实际意义是指: 在不误总工期 T_E 的前提下, 以事项 k 为开工事项的工序最迟应在整个工程开工 $t_L(k)$ 天后执行, 也即以事项 k 为完工事项的工序最迟完工的时间为第 $t_L(k)$ 天.

在图 7-13 中, 工序(k, i)是以 k 为起点的工序之一, $T_E - t_L(i)$ 为顶点 i 至顶点 n 的最长路径长度, 虚线表示相应的最长路径. 由图 7-13 可得下列递推公式:

$$\begin{cases} t_L(n) = T_E, \\ t_L(k) = T_E - \max\{T_E - t_L(i) + w_{ki} \mid i > k, (k, i) \in E\}. \end{cases} \quad (7-2)$$

由于

$$\begin{aligned} & T_E - \max\{T_E - t_L(i) + w_{ki} \mid i > k, (k, i) \in E\} \\ &= \min\{T_E - (T_E - t_L(i) + w_{ki}) \mid i > k, (k, i) \in E\} \\ &= \min\{t_L(i) - w_{ki} \mid i > k, (k, i) \in E\}, \end{aligned}$$

所以式(7-2)化成下列形式:

$$\begin{cases} t_L(n) = T_E, \\ t_L(k) = \min\{t_L(i) - w_{ki} \mid i > k, (k, i) \in E\}. \end{cases} \quad (7-3)$$

关键路径——PERT 网络 N 中从顶点 1 至顶点 n 的最长路径为网络的关键路径(可能不止一条), 其长度即为 T_E . 关键路径上的工序称为关键工序.

关键事项——若对于事项 k 有 $t_E(k) = t_L(k)$, 则称事项 k 为关键事项.

例 7-2 求图 7-11 所示 PERT 网络各事项的最早时间、最迟时间及关键路径.

解 应用公式(7-1)从 $t_E(1) = 0$ 出发逐个求出 $t_E(2)$, $t_E(3)$, ..., $t_E(12)$. 再应用公式(7-3)从 $t_L(12) = T_E$ 出发, 逐个求出 $t_L(11)$, $t_L(10)$, ..., $t_L(1)$. 具体计算结果见图 7-14(顶点 k 旁正方形框中标出的数字为 $t_E(k)$, 三角形框中标出的数字为 $t_L(k)$). 例如:

$$\begin{aligned} t_E(5) &= \max\{t_E(1) + w_{15}, t_E(3) + w_{35}\} \\ &= \max\{0 + 12, 8 + 16\} = 14; \\ t_E(11) &= \max\{t_E(8) + w_{8,11}, t_E(9) + w_{9,11}, t_E(10) + w_{10,11}\} \\ &= \max\{18 + 3, 13 + 7, 14 + 3\} = 21; \end{aligned}$$

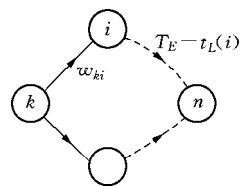


图 7-13

$$\begin{aligned}
 t_L(3) &= \min\{t_L(9) - w_{39}, t_L(5) - w_{35}\} \\
 &= \min\{14 - 5, 14 - 6\} = 8; \\
 t_L(2) &= \min\{t_L(6) - w_{26}, t_L(4) - w_{24}, t_L(3) - w_{23}\} \\
 &= \min\{15 - 7, 13 - 8, 8 - 5\} = 3.
 \end{aligned}$$

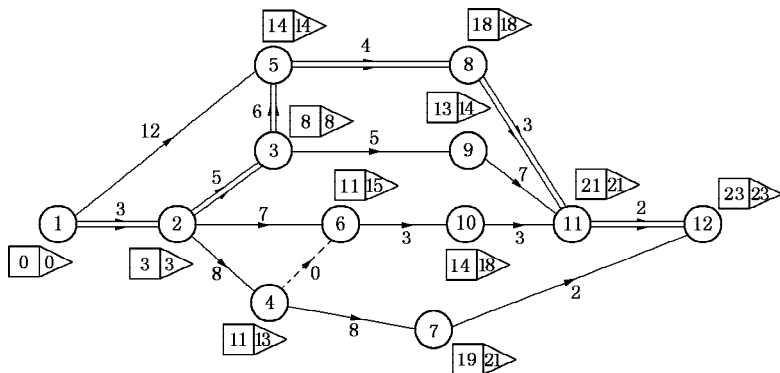


图 7-14

图 7-14 中双线所示路径(1,2)(2,3)(3,5)(5,8)(8,11)(11,12)即为关键路径.

利用事项的最早时间和最迟时间,我们给出工序 (i, j) 的 6 个时间参数:

工序 (i, j) 的最早开工时间—— $t_E(i)$ 即为工序 (i, j) 的最早开工时间.

工序 (i, j) 的最早完工时间—— $t_E(i) + w_{ij}$ 即为工序 (i, j) 的最早完工时间.

工序 (i, j) 的最迟完工时间—— $t_L(j)$ 即为工序 (i, j) 的最迟完工时间.

工序 (i, j) 的最迟开工时间—— $t_L(j) - w_{ij}$ 即为工序 (i, j) 的最迟开工时间.

工序 (i, j) 的总时差——在不延长总工期的前提下,工序 (i, j) 完工期的机动时间称为工序 (i, j) 的总时差,记为 $R(i, j)$.

显然 $R(i, j)$ 是工序 (i, j) 的最迟完工时间与最早完工时间之差(或为最迟开工时间与最早开工时间之差),因此,有

$$R(i, j) = t_L(j) - t_E(i) - w_{ij} \quad (7-4)$$

工序 (i, j) 的单时差——在不影响紧后工序最早开工时间的前提下,工序 (i, j) 的完工期的机动时间称为工序 (i, j) 的单时差,记为 $r(i, j)$.

显然 $r(i, j)$ 为工序 (i, j) 的紧后工序的最早开工时间 $t_E(j)$ 与工序 (i, j) 的最早完工时间之差,因此,有

$$r(i, j) = t_E(j) - t_E(i) - w_{ij}. \quad (7-5)$$

关于工序 (i, j) 的 6 个时间参数之间的关系可用图 7-15 来说明.

下列结论显然成立.

定理 7-1 工序 (i, j) 为关键工序的充分必要条件为 $R(i, j) = 0$.

例 7-3 计算图 7-14 各工序的 6 个时间参数.

解 具体计算结果由表 7-2 给出(表中总时差打 * 者相应的工序为关键时序).

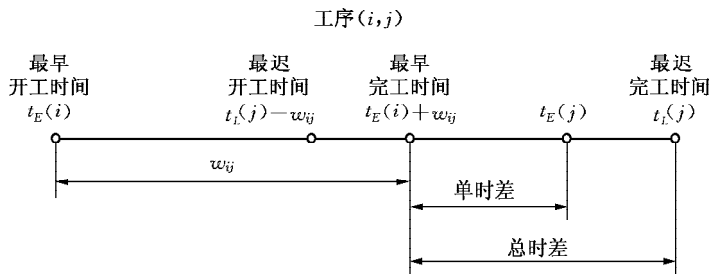


图 7-15

表 7-2

工 序	工时	最早开工时间	最早完工时间	最迟开工时间	最迟完工时间	总时差	单时差
(1, 5)	12	0	12	2	14	2	2
(1, 2)	3	0	3	0	3	0*	0
(2, 3)	5	3	8	3	8	0*	0
(2, 6)	7	3	10	8	15	5	1
(2, 4)	8	3	11	5	13	2	0
(3, 9)	5	8	13	9	14	1	0
(3, 5)	6	8	14	8	14	0*	0
(5, 8)	4	14	18	14	18	0*	0
(6, 10)	3	11	14	15	18	4	0
(4, 7)	8	11	19	13	21	2	0
(8, 11)	3	18	21	18	21	0*	0
(9, 11)	7	13	20	14	21	1	1
(10, 11)	3	14	17	18	21	4	4
(7, 12)	2	19	21	21	23	2	2
(11, 12)	2	21	23	21	23	0*	0

* § 7.2 网络计划的优化问题

在绘制网络图、计算时间参数和确定关键路径后,我们得到工程的一个初始计划方案,进一步的工作就是综合地考虑进度、成本和资源等数量指标,实现网络计划的优化。

网络计划的优化,主要包括以下两类问题:

第一类问题是总工期—成本的优化问题。它又分成两个方面的问题:一是在总工期固定的条件下,确定一个总成本最低的计划方案;二是根据总成本最低的要求,确定最优总工期。

第二类问题是总工期—资源的优化问题。它也分成两个方面的问题:一是在总工期

固定的条件下,寻求资源的合理使用方案,以取得最优的经济效益;二是当资源有限制时,寻求最优总工期。

这两类问题又是相互关联的。一般是根据任务的具体要求,对上述各类问题进行优化,然后进行综合考虑,完善网络计划,使之获得最佳的总工期、最低的成本和对资源的最有效的利用。

7.2.1 总工期—成本优化问题

一项工程的成本,一般可分为直接成本和间接成本两大类:

(1) 直接成本:如人工、原材料、燃料和机械设备租用等直接与工序工作有关的费用。直接成本要分摊到每道工序上。

(2) 间接成本:如管理员工资、行政办公费、采购费、劳保福利费等。间接成本不分摊到每道工序上而作为整个工程的成本。显然,总工期 T_E 短,间接成本就低。

对某些工程问题,在确定总工期后,常常需要对某些工序考虑赶工的措施(例如增加人员或增添设备、改进原材料及采用新技术等),以缩短这些工序的施工时间,从而使总工期缩短。此时,虽然由于工序赶工而增加赶工费用使工序成本增加,从而使直接成本增加,但因为总工期的缩短,又使间接成本减少,从整体来说经济效益可能会更好些。

直接成本、间接成本和总成本(直接成本与间接成本之和)与总工期的关系如图 7-16 所示。可见,图中总成本曲线是一个马鞍形曲线,其中,最低点(鞍点)所对应的总工期为总成本最低的总工期,称为最优总工期,记为 T_E^* 。所以,若要求最低成本的最优总工期,不妨先固定总工期 T_E ,然后确定成本最低的计划方案,再让 T_E 在某一个范围内变化,比较不同总工期 T_E 所对应的总成本,即可求得 T^* 。

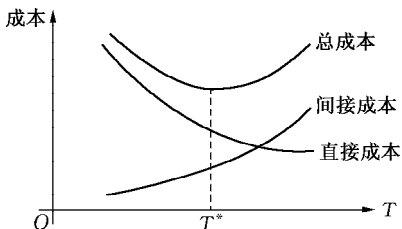


图 7-16

1. 指定总工期的成本优化问题

若 PERT 网络确定的总工期为 T_E ,现指定一个总工期 $\hat{T}_E (< T_E)$,我们来考虑成本优化问题。

由于总工期固定为 $\hat{T}_E$ (称为指定总工期),所以间接成本是固定的,故成本最低意味着各工序的直接成本总和最低。又由于每道工序成本由正常成本及赶工费用组成,所以直接成本总和最低也就是意味着各工序的赶工费用总和最低。对于指定总工期的成本优化问题,我们介绍枚举法、负时差法和线性规划法。

为了估算的方便,常常假定在工序成本与工序时间之间有着线性的关系,如图 7-17 所示,其中 w_{ij}^g 和 c_{ij}^g 分别表示在正常情况下工序 (i, j) 的作业时间和所需成本(分别称为工序的正常工序时间和正常成本); w_{ij}^b 和 c_{ij}^b 分别表示工序 (i, j) 的赶工时间限度和相应的成本。

赶工成本斜率——工序 (i, j) 缩短一个单位时间所

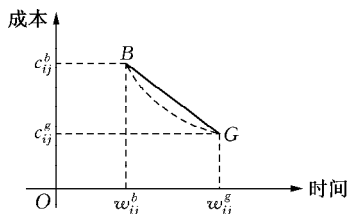


图 7-17

增加的直接成本称为该工序的赶工成本斜率,记为 c_{ij}^* . 即工序 (i, j) 的赶工成本斜率.

$$c_{ij}^* = \frac{c_{ij}^b - c_{ij}^g}{w_{ij}^g - w_{ij}^b}. \quad (7-6)$$

下面我们给出总工期指定为 $\hat{T}_E$ 时的成本优化问题的求解方法(若每道工序 (i, j) 都采用它的时间限度 w_{ij}^b 作为它的长度,求得相应网络的总工期为 T'_E ,则应有 $\hat{T}_E \geq T'_E$).

(1) 枚举法. 我们首先对网络图中各工序的工序时间在取为正常时间时求出工程的总工期 T_E ,若 T_E 大于指定总工期 $\hat{T}_E$,则就要采取赶工措施. 我们面临的问题是,应该在哪些工序上赶工,被赶工的工序的施工时间为多少,才能使所增加的赶工费用最少. 下面通过具体的例子来说明枚举法的赶工思想.

例 7-4 某工程的有关信息由表 7-3 给出. 已知间接成本每天 500 元,若指定总工期 $\hat{T}_E = 21$ 天,试由赶工成本和间接成本来考虑本工程的最优赶工方案.

表 7-3

工序	紧前工序	正常工序时间(天)	赶工的极限时间(天)	赶工成本斜率(元/天)
A	—	10	7	400
B	—	5	4	200
C	B	3	2	200
D	A, C	4	3	300
E	A, C	5	3	300
F	D	6	3	500
G	E	5	2	100
H	F, G	5	4	400

解 如果所有工序都以正常时间完工,我们给出本工程的网络图 7-18,此时总工期 $T_E = 25$ 天,赶工成本与间接成本之和

$$f = 0 + 500 \times 25 = 12\,500(\text{元}).$$

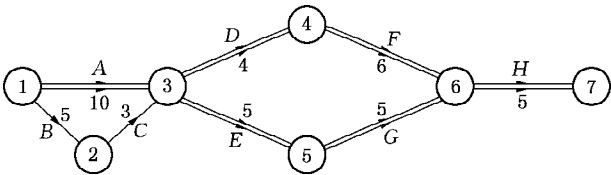


图 7-18

在图 7-18 中,有两条关键路径 $P_1 = A-D-F-H$ 和 $P_2 = A-E-G-H$. 若先将总工期 25 天压缩为 24 天. 为此,我们就要采取赶工措施分别缩短关键路径 P_1 和 P_2 的长度 1 天. 换言之,必须压缩关键工序的工序时间,对关键工序进行赶工. 显然,我们首先应考虑对两条关键路径的共同工序中赶工成本斜率最小的关键工序进行赶工. P_1 和 P_2 有两道共同工序 H 和 A ,赶工成本斜率都为 400 元. 我们取关键工序 H 进

行赶工,对其工序时间 w_{67} 压缩至它的极限时间 4 天.此时,赶工的成本为 400 元,另一方面,由于总工期从 25 天压缩至 24 天,间接成本可节省 500 元.

由于指定总工期 $\hat{T}_E = 21$ 天,我们必须再对关键工序进行赶工.现在我们考虑对两条关键路径的共同工序 A 进行赶工.但是工序 A 不能压缩到它的极限时间 7 天,否则路径 $P_3 = B-C-D-F-H$ 和路径 $P_4 = B-C-E-G-H$ 上升为关键路径,它们的长度为 8 天,而原关键路径 P_1 和 P_2 不再是关键路径,这样的赶工将是不经济的.所以,我们仅对工序 A 的工序时间压缩 2 天,其赶工成本为 800 元.此时,工序 B 和 C 也都成了关键工序,路径 P_1, P_2, P_3 和 P_4 都是关键路径(如图 7-19),它们的长度都为 22 天,间接成本节省 1 000 元.

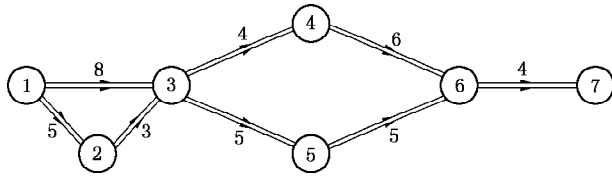


图 7-19

为了实现工程的总工期 $\hat{T}_E = 21$ 天,我们必须继续赶工,将现有的总工期 22 天压缩至 21 天.表 7-4 给出了各种可能的组合方案,可见 3[#] 方案最经济.于是,我们将 D 和 G 这两道工序都压缩 1 天,赶工成本为 400 元,间接成本节省 500 元.

298
■■■■■

表 7-4

$j^{\#}$ 方案	赶工措施	增加的赶工成本(元)
1 [#]	A, B(或 C)工序各压缩 1 天	$400+200=600$
2 [#]	D 和 E 工序各压缩 1 天	$300+300=600$
3 [#]	D 和 G 工序各压缩 1 天	$300+100=400$
4 [#]	F 和 E 工序各压缩 1 天	$500+300=800$
5 [#]	F 和 G 工序各压缩 1 天	$500+100=600$

综上所述,在 $\hat{T}_E = 21$ 天时,我们将最合理的赶工方案列成表 7-5.此时,赶工成本和间接成本之和

$$f = 800 + 300 + 100 + 400 + 500 \times 21 = 12\,100(\text{元}).$$

表 7-5

工 序	A	B	C	D	E	F	G	H
正常工序时间	10	5	3	4	5	6	5	5
赶工的天数	2	0	0	1	0	0	1	1
赶工后的工序时间	8	5	3	3	5	6	4	4
赶工成本(元)	800	—	—	300	—	—	100	400

总工期 $\hat{T}_E = 21$ 天的网络图由图 7-20 给出.

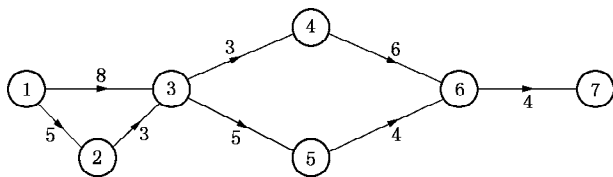


图 7-20

通过上述实例的分析,可见,指定总工期为 $\hat{T}_E$ 的成本优化问题,可通过对各工序长度都为正常时间的网络进行合理赶工来求解。赶工措施的原则为:

- ① 在关键路径上,对赶工成本斜率最低的工序采取赶工措施;
- ② 在关键路径赶工后,其他非关键路径有可能上升为关键路径。在今后赶工中,则对新的关键路径的有关工序也应进行赶工,但必须应使原有的关键路径继续保持为关键路径。
- ③ 数条关键路径同时赶工时,应首先考虑共同工序赶工,并以支付最低的赶工成本为目的。

例 7-5 现给网络如图 7-21。各工序的正常工序时间、正常成本、赶工的极限时间、赶工成本斜率如表 7-6 所示(表 7-6 中“*”表示无论投入多少资金,亦无法缩短该工序的工序时间)。现在取指定总工期 $\hat{T}_E = 23$ 天,问如何赶工以使赶工成本最低。

解 第一步,在图 7-21 中关键路径为(1,2)(2,3)(3,5)(5,6),其长度为 26 天,大于指定总工期 $\hat{T}_E = 23$ 天。于是,我们采取赶工措施。

首先选择关键路径上赶工成本斜率最低的工序(2,3)压缩 2 天(由表 7-6 知,工序(2,3)至多压缩 2 天),增加赶工成本 $60 \times 2 = 120$ 元,得新的网络如图 7-22,它有 3 条关键路径:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (1,2)(2,5)(5,6), \\
 P_2 &= (1,2)(2,3)(3,5)(5,6), \\
 P_3 &= (1,3)(3,5)(5,6).
 \end{aligned}$$

它们的长度都为 24 天。

表 7-6

工 序	正常工序时间(元)	正常成本(元)	赶工的极限时间(天)	赶工成本斜率(元/天)
(1,2)	5	220	4	80
(1,3)	10	480	8	90
(1,6)	8	440	6	100
(2,3)	7	600	5	60
(2,5)	11	560	9	40
(3,4)	5	600	2	200
(3,5)	6	150	5	100
(4,6)	4	180	4	*
(5,6)	8	600	7	160
$T_E = 26$ 天		总计 3 830 元		

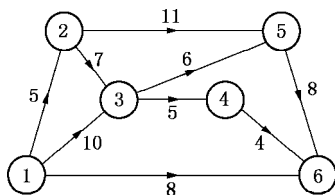


图 7-21

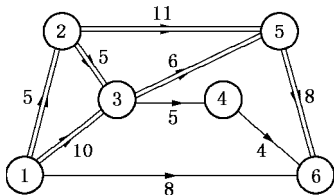


图 7-22

第二步,对网络图 7-22 来说, $T_E = 24$ 天,为实现指定总工期 $\hat{T}_E = 23$ 天,必须对关键路径 P_1 , P_2 和 P_3 的长度都压缩 1 天.我们将这 3 条关键路径的有关工序及其赶工成本斜率列成表 7-7.

表 7-7

关键路径 P_1		关键路径 P_2		关键路径 P_3	
工 序	赶工成本斜率	工 序	赶工成本斜率	工 序	赶工成本斜率
(1, 2)	80 元	(1, 2)	80 元	(1, 3)	90 元
(2, 5)	40 元	(2, 3)*	60 元	(3, 5)	100 元
(5, 6)	160 元	(3, 5)	100 元	(5, 6)	160 元
		(5, 6)	160 元		

(* : P_2 的关键工序 (2, 3) 不能再压缩)

300
■■■■■

现在将这 3 条关键路径长度各压缩 1 天,对关键工序赶工一天的组合情况及其赶工成本列成表 7-8.可见, $2^\#$ 方案赶工成本最少.此时,工序 (2, 5) 压缩 1 天,赶工成本 40 元,工序 (3, 5) 为关键路径 P_2 与 P_3 的共同工序,压缩 1 天,其赶工成本为 100 元,合计 140 元.按 $2^\#$ 方案所得的网络如图 7-23.

表 7-8

$j^{\#}$ 方案	关键路径中压缩 1 天的关键工序及其赶工成本			合 计
	P_1	P_2	P_3	
1 $^{\#}$	(2, 5), 40 元	(1, 2), 80 元	(1, 3), 90 元	210 元
2 $^{\#}$	(2, 5), 40 元	(3, 5), 100 元		140 元
3 $^{\#}$	(1, 2), 80 元		(1, 3), 90 元	170 元
4 $^{\#}$	(1, 2), 80 元	(3, 5), 100 元		180 元
5 $^{\#}$	(5, 6), 160 元			160 元

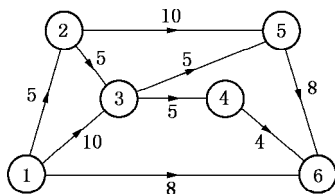


图 7-23

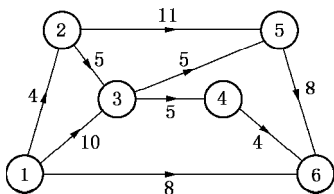


图 7-24

从表 7-8 看, 4# 方案不如 2# 方案. 如果采用 4# 方案赶工, 其网络图如图 7-24.

第三步, 现若由网络图 7-21 的总工期 26 天直接压缩为 23 天, 则当为图 7-23 时, 赶工成本为 $40 + 60 \times 2 + 100 = 260$ (元), 而为图 7-24 时, 赶工成本为 $80 + 60 \times 2 + 100 = 300$ (元).

但在图 7-24 中, 我们可以发现, 图 7-21 中的关键路径 $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 6)$ 此时已不是关键路径, $(2, 3)$ 不再是关键工序, 可知工序 $(2, 3)$ 的总时差 $R(2, 3) = 1$, 故在图 7-24 中工序 $(2, 3)$ 的工序时间取为 6 天也不影响工程在 23 天完成. 所以总工期由 26 天直接压缩为 23 天时, 我们将图 7-24 中工序 $(2, 3)$ 的工序时间改为 6 天, 相应的网络如图 7-25 所示, 它的赶工成本为 $300 - 60 = 240$ (元). 显然, 网络图 7-25 相应的赶工措施要比图 7-23 和图 7-24 相应的赶工措施来得好.

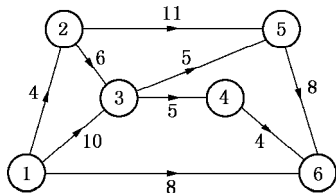


图 7-25

因此, 当指定总工期为 23 天时, 赶工成本最低的最佳赶工措施是从图 7-21 化为图 7-25: 工序 $(1, 2), (2, 3), (3, 5)$ 分别压缩 1 天, 赶工成本分别为 80 元, 60 元和 100 元, 总的赶工成本为 $80 + 60 + 100 = 240$ (元).

从上述两个例题的求解过程可看出, 枚举法只适用于小型工程计划, 对于庞大的工程计划, 枚举法就无能为力了.

(2) 负时差法. 给 PERT 网络 $N = (V, E, W, \textcircled{1}, \textcircled{n})$, 若对 $(i, j) \in E$, 在取 w_{ij} 为正常工序时间 w_{ij}^g 时, 工序 (i, j) 的总时差为 $R(i, j)$, 工程的总工期为 T_E .

现在对网络 N 指定总工期为 $\hat{T}_E (\hat{T}_E < T_E)$. 令

$$\Delta T_E = T_E - \hat{T}_E.$$

现对汇 $\textcircled{n}$ 取 $t'_L(n) = \hat{T}_E$, 则由式(7-2)可知

$$\begin{aligned} t'_L(j) &= \hat{T}_E - \max\{T_E - t_L(i) + w_{ji} \mid i > j, (j, i) \in E\} \\ &= \hat{T}_E - T_E + T_E - \max\{T_E - t_L(i) + w_{ji} \mid i > j, (j, i) \in E\} \\ &= -\Delta T_E + t_L(j). \end{aligned}$$

此时, 在 $t'_L(n) = \hat{T}_E$ 的条件下, 由式(7-4)可知工序 (i, j) 的开工日期(或完工日期)可推迟的天数为

$$\begin{aligned} \hat{R}(i, j) &= t'_L(j) - t_E(i) - w_{ij} \\ &= t'_L(j) - t_L(j) + t_L(j) - t_E(i) - w_{ij} \\ &= R(i, j) - \Delta T_E. \end{aligned} \quad (7-7)$$

由于 $\Delta T_E > 0$, 所以必有一些工序的 $\hat{R}(i, j)$ (在 $t'_L(n) = \hat{T}_E$ 时的总时差) 小于零, 这时, 称其为负时差.

在诸负时差中, 最小的负时差为关键工序 (i, j) 的总时差 $\hat{R}(i, j) = -\Delta T_E$. 在非关键路径上, 有的工序也可能为负时差. 所以, 对网络 N , 要实现新的总工期, 必须对 $\hat{R}(i, j) < 0$ 的工序 (i, j) 进行赶工, 而对 $\hat{R}(i, j) \geq 0$ 的工序 (i, j) 赶工是没有意义的.

我们构造辅助网络 $N_1 = (V, E_1, C^1, \textcircled{1}, \textcircled{n})$:

$$E_1 = \{(i, j) \mid (i, j) \in E, \hat{R}(i, j) < 0\}, \quad (7-8)$$

$$c_{ij}^1 = \begin{cases} c_{ij}^*, & \text{若 } w_{ij}^b < w_{ij}, \\ M, & \text{若 } w_{ij}^b = w_{ij}, \end{cases} \quad (i, j) \in E, \quad (7-9)$$

其中 M 为一个充分大的正数.

显然,在以 w_{ij} 为权的赋权有向图 $D = (V, E_1)$ 中,任一条从顶点 1 到顶点 n 的路径之长度都超过 $\hat{T}_E$. 现设法对 E_1 中某些工序的工序时间压缩一天,使得 D 中顶点 1 至顶点 n 的所有路径的长度都比原来减少 1,而且赶工的成本又最小.

设 $(S, \bar{S})$ 为 N_1 中的一个割. 我们知道,若把割中的边都移掉,则顶点 1 至顶点 n 就没有路径. 所以,若把割 $(S, \bar{S})$ 中的每道工序都赶工一天,则 D 中顶点 1 至顶点 n 的路径的长度就都可减少 1,而赶工的成本恰为割 $(S, \bar{S})$ 的容量 $C^1(S, \bar{S})$. 于是,我们的问题就化为求网络 N_1 的最小割.

若求得 N_1 的最小割 $(S^*, \bar{S}^*)$,我们将 $(S^*, \bar{S}^*)$ 中的每一工序都赶工一天,于是, N 的工期就由 T_E 变为 $T_E - 1$,因而相应的 ΔT_E 也比原来减少 1. 从而,原来确定的边集 E_1 中每道工序 (i, j) 的 $\hat{R}(i, j)$ 应比原来增大 1. 重复上述过程,直至 $\Delta T_E = 0$.

在此算法中,我们对 N_1 中割 $(S^*, \bar{S}^*)$ 的每道工序在 N 中的工序时间压缩量可按下列方法给出. 令

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \max\{\hat{R}(i, j) \mid (i, j) \in E_1\} \text{ (有 } \delta_1 < 0), \\ \delta &= \max\{\delta_1, w_{ij}^b - w_{ij} \mid (i, j) \in (S^*, \bar{S}^*)\} \text{ (有 } \delta < 0), \end{aligned}$$

于是,在 N 中,对 $(i, j) \in (S^*, \bar{S}^*)$,取

$$\text{新 } w_{ij} = \text{原有 } w_{ij} + \delta.$$

此时,有新 $T_E = \text{原有 } T_E + \delta$, 新 $\Delta T_E = \text{原有 } \Delta T_E + \delta$, 新 $\hat{R}(i, j) = \text{原有 } \hat{R}(i, j) - \delta ((i, j) \in E_1)$.

下面我们给出具体的算法:

① 计算 $N = (V, E, W, \textcircled{1}, \textcircled{n})$ 的时间参数,取 $\Delta T_E = T_E - \hat{T}_E$, $\hat{R}(i, j) = R(i, j) - \Delta T_E ((i, j) \in E)$, $E_0 = E$, $k = 1$.

② 取

$$\begin{aligned} E_k &= \{(i, j) \mid (i, j) \in E_{k-1}, \hat{R}(i, j) < 0\}, \\ \delta_1 &= \max\{\hat{R}(i, j) \mid (i, j) \in E_k\} \text{ (有 } \delta_1 < 0), \\ c_{ij}^k &= \begin{cases} c_{ij}^*, & \text{若 } w_{ij}^b < w_{ij}; \\ M, & \text{若 } w_{ij}^b = w_{ij}, \end{cases} \quad (i, j) \in E_k. \end{aligned}$$

③ 应用最大流算法求网络 $N_k = (V, E_k, C^k, \textcircled{1}, \textcircled{n})$ 的最小割 $(S_k^*, \bar{S}_k^*)$, 取

$$\delta = \max\{\delta_1, w_{ij}^b - w_{ij} \mid (i, j) \in (S_k^*, \bar{S}_k^*)\} \text{ (有 } \delta < 0)$$

在 N 中取

$$w_{ij} = \begin{cases} w_{ij} + \delta, & \text{在 } E_k \text{ 中 } (i, j) \in (S_k^*, \bar{S}_k^*), \\ w_{ij}, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$T_E = T_E + \delta, \quad \Delta T_E = \Delta T_E + \delta.$$

④ $\Delta T_E = 0$?

若是, 则 $T_E = \hat{T}_E$, 算法终止.

若否, 则对 $(i, j) \in E_k$, 取 $\hat{R}(i, j) = \hat{R}(i, j) - \delta, k = k + 1$, 转步骤②.

例 7-6 给网络图如图 7-26, 工序 (i, j) 旁参数为正常工序时间 w_{ij}^g 及赶工成本斜率 $\hat{c}_{ij}$, 而带括弧的参数为工序 (i, j) 的总时差 $R(i, j)$. 可知正常总工期 $T_E = 30$ 天. 现指定 $\hat{T}_E = 24$ 天. 假设各工序的赶工极限时间 $w_{ij}^b = w_{ij}^g - 2$ (即各工序至多赶工 2 天). 问应如何赶工, 可使赶工成本最小?

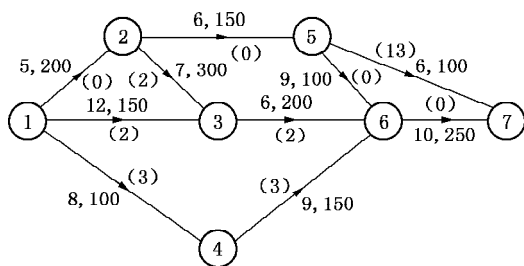


图 7-26

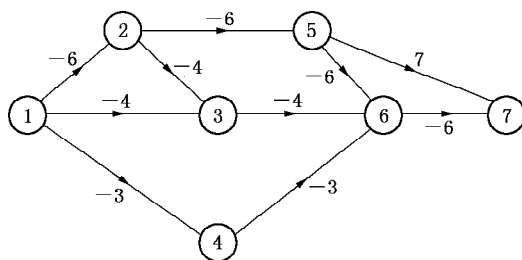


图 7-27

解 若对网络各工序的工序时间都取为 $w_{ij}^g - 2$, 则此时总工期 $T'_E = 22$ 天. $\hat{T}_E = 24$ 天 $> T'_E$, 所以 $\hat{T}_E$ 是可以实现的. 于是

$$\Delta T_E = 30 - 24 = 6,$$

由此可得各工序 (i, j) 的 $\hat{R}(i, j)$, 如图 7-27 所示.

图 7-28 给出了网络 N_1 , 其中每条有向边旁所标的两个参数为 $\hat{R}(i, j)$ 与 c_{ij}^1 , 相应的 $\delta_1 = -3$. 可知

$$(S_1^*, \bar{S}_1^*) = \{(6, 7)\}, \quad C^1(S_1^*, \bar{S}_1^*) = 250.$$

由于工序 $(6, 7)$ 至多压缩 2 天, 故取 $\delta = -2, w_{67} = 10 - 2 = 8$, 其赶工成本 $250 \times 2 = 500$. 这时, $\Delta T_E = 4$.

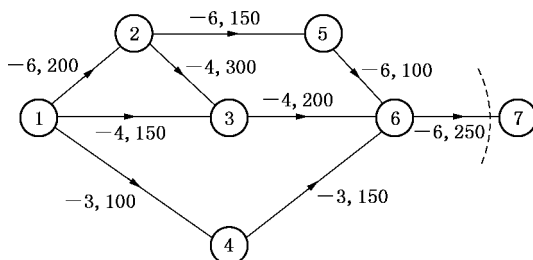


图 7-28

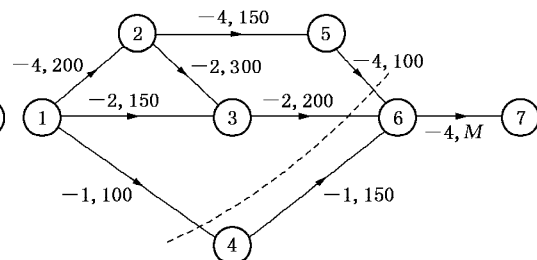


图 7-29

图 7-29 给出了网络 N_2 (由于现在 N 中 $w_{67} = 8 = w_{ij}^b$, 已为赶工极限时间, 不能再赶工, 所以在 N_2 中取 $c_{67}^2 = M$, 类似情况, 以后不再说明), 相应的 $\delta_1 = -1$. 可知

$$(S_2^*, \bar{S}_2^*) = \{(5, 6), (3, 6), (1, 4)\},$$

$$C^2(S_2^*, \bar{S}_2^*) = 100 + 200 + 100 = 400.$$

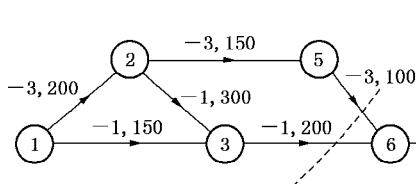
现取 $\delta = -1$, 在 N 中取 $w_{56} = 8, w_{36} = 5, w_{14} = 7$, 其赶工成本为 400. 这时, $\Delta T_E = 3$.

图 7-30 给出了网络 N_3 , 相应的 $\delta_1 = -1$. 可知

$$(S_3^*, \bar{S}_3^*) = \{(5, 6), (3, 6)\},$$

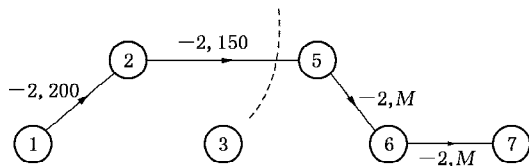
$$C^3(S_3^*, \bar{S}_3^*) = 100 + 200 = 300.$$

现取 $\delta = -1$, 在 N 中取 $w_{56} = 7, w_{36} = 4$, 其赶工成本为 300. 这时, $\Delta T_E = 2$.



④

图 7-30



④

图 7-31

图 7-31 给出了网络 N_4 , 相应的 $\delta_1 = -2$. 可知

$$(S_4^*, \bar{S}_4^*) = \{(2, 5)\}, \quad C^4(S_4^*, \bar{S}_4^*) = 150.$$

现取 $\delta = -2$, 在 N 中取 $w_{25} = 4$, 其赶工成本为 $150 \times 2 = 300$. 这时, $\Delta T_E = 0$.

所以, 当 $\hat{T}_E = 24$ 时, 在采用最佳赶工方案后, 各工序的工序时间如图 7-32 所示, 赶工

成本 = $500 + 400 + 300 + 300 = 1500$.

在这个例子中, 所选取的赶工工序 (6, 7) 是 4 条关键路径的共同工序, 工序 (3, 6) 是 2 条关键路径的共同工序, 可见共同工序经常在最小割中.

但是, 这里要指出, 用上述算法求解某些指定工期成本优化问题时, 得到的不一定是最优赶工方案. 这是因为 N_k 中的最小割不一定唯一, 且最小割中边的负时差未必相同. 感兴趣的读者可对此算法作进一步探讨.

例如, 如果用上述算法对例 7-5 的图 7-21 进行赶工, 则得网络图 7-23, 赶工成本为 260 元 (请读者作为习题求解).

(3) 线性规划法. 对于大型 PERT 网络的总工期—成本优化问题, 可以通过建立线

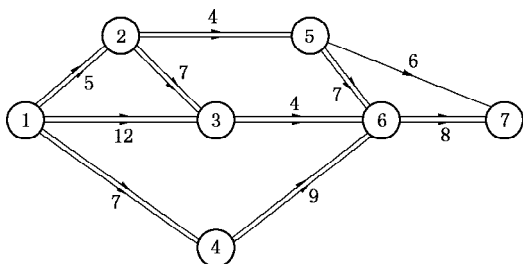


图 7-32

性规划模型来进行最优决策. 让我们先来讨论一个简单的例题, 分析一下线性规划模型是如何对 PERT 网络求关键路径及总工期的.

例 7-7 给 PERT 网络如图 7-33 所示. 试用线性规划方法求该网络的关键路径及总工期.

解 设 t_i 为事项 i 发生的时间 (例如 t_1 表示工程开始的时间, t_5 表示工程完工的时间, t_4 表示工序 (2, 4) 及 (3, 4) 都完工的时间. 即 t_i 是以顶点 i 为终点的工序的完工时间中的最大值).

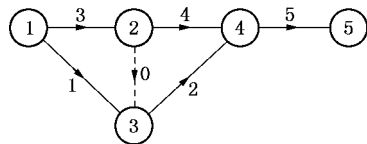


图 7-33

显然, 对于网络中的每条边 (i, j) 都有一个相应的约束条件 $t_j - t_i \geq w_{ij}$, 以保证工序 (i, j) 安排作业的可用时间不小于该工序的工序时间 w_{ij} . 于是, 我们得下列线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min f &= t_5 - t_1; \\ \text{s. t. } t_2 - t_1 &\geq 3, \\ t_3 - t_1 &\geq 1, \\ t_3 - t_2 &\geq 0, \\ t_4 - t_2 &\geq 4, \\ t_4 - t_3 &\geq 2, \\ t_5 - t_4 &\geq 5, \\ t_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

用单纯形法对该模型求解, 最优解和最优值分别为

$$t_1^* = 0, \quad t_2^* = 3, \quad t_3^* = 3, \quad t_4^* = 7, \quad t_5^* = 12; \quad f^* = 12.$$

因此, 该 PERT 网络的总工期 $T_E = 12$ 天. 在最优解中, 使约束条件取等式的相应工序意味着该工序的开工日期没有机动时间, 所以这些工序即为关键工序. 例如:

$$\begin{aligned} t_2^* - t_1^* &= 3 - 0 = 3 = w_{12}, \quad t_4^* - t_2^* = 7 - 3 = 4 = w_{24}, \\ t_5^* - t_4^* &= 12 - 7 = 5 = w_{45}, \end{aligned}$$

因此, 工序 (1, 2), (2, 4), (4, 5) 为该网络的关键工序. 令

- k_{ij} ——工序 (i, j) 的正常工序时间;
- l_{ij} ——工序 (i, j) 赶工的极限时间;
- c_{ij} ——工序 (i, j) 赶工一天的成本;
- w_{ij} ——工序 (i, j) 的实际工作时间;
- t_j ——事项 j 的发生时间.

对 PERT 网络的总工期—成本优化问题, 我们根据不同的目标, 给出下列 3 个线性规划模型.

例 7-8 现要求工程的总工期应不迟于 T . 为使赶工总成本最小, 问如何安排各工序的进度?

解 本问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}(k_{ij} - w_{ij}); \\ \text{s. t. } t_j - t_i &\geq w_{ij}, & \text{对一切 } (i, j) \in E, \\ l_{ij} &\leq w_{ij} \leq k_{ij}, & \text{对一切 } (i, j) \in E, \\ t_n - t_1 &\leq T, \\ t_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

例 7-9 为使总工期压缩, 现增加投资 b , 问对哪些工序进行赶工, 以使总工期最小?

解 本问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min f &= t_n - t_1; \\ \text{s. t. } t_j - t_i &\geq w_{ij} & \text{对一切 } (i, j) \in E, \\ l_{ij} &\leq w_{ij} \leq k_{ij}, & \text{对一切 } (i, j) \in E, \\ \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}(k_{ij} - w_{ij}) &\leq b, \\ t_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

例 7-10 若工程每天的间接成本为 d 元. 为使间接成本和赶工成本之和最小, 问如何安排各工序的进度.

解 本问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min f &= d(t_n - t_1) + \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}(k_{ij} - w_{ij}); \\ \text{s. t. } t_j - t_i &\geq w_{ij}, & \text{对一切 } (i, j) \in E, \\ l_{ij} &\leq t_{ij} \leq k_{ij}, & \text{对一切 } (i, j) \in E, \\ t_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2. 最低成本的最优总工期问题

求总成本最低的最优总工期 T_E^* , 一般可按如下步骤来进行:

① 对 PERT 网络各工序都取正常的工序时间, 求出总工期 T_E ; 再对网络各工序的工序时间取赶工的极限时间, 求出总工期 T_E' . 则显然有 $T_E^* \in [T_E', T_E]$. 我们在 T_E' 与 T_E 之间估计一个值 $\hat{T}_E$ 作为 T_E^* 的初始值.

② 通过求解指定总工期分别为 $\hat{T}_E - 1, \hat{T}_E, \hat{T}_E + 1$ 的成本优化问题, 得到直接成本 (或赶工成本) 最小的 3 个赶工方案, 然后加上总工期为 $\hat{T}_E - 1, \hat{T}_E, \hat{T}_E + 1$ 时相应的间接成本, 即得总工期为 $\hat{T}_E - 1, \hat{T}_E, \hat{T}_E + 1$ 时的总成本 $f(\hat{T}_E - 1), f(\hat{T}_E), f(\hat{T}_E + 1)$.

③ 若有 $f(\hat{T}_E) \leq f(\hat{T}_E - 1), f(\hat{T}_E) \leq f(\hat{T}_E + 1)$, 则 $\hat{T}_E$ 就是所求的最优总工期 T_E^* , 否则取 $f(\hat{T}_E - 1)$ 和 $f(\hat{T}_E + 1)$ 中小者所相应的总工期作为 $\hat{T}_E$ 的新值, 再重复步骤②.

例 7-11 给出例 7-5 不同总工期的赶工方案并计算相应的直接成本.

解 我们将有关计算结果列成表 7-9 (若各工序都取其赶工的极限时间, 则可知相应的总工期为 21 天, 直接成本为 5 350 元, 我们没有列进表 7-9 中).

表 7-9

工序(i, j)的实际工序时间 及其赶工成本(元)	总 工 期 (天)					
	26	25	24	23	22	21
工序(1, 2)	5	5	5	4(+80)	4(+80)	4(+80)
工序(1, 3)	1	1	10	10	10	10
工序(1, 6)	10	10	8	8	8	8
工序(2, 3)	7	6(+60)	5(+120)	6(+60)	6(+60)	6(+60)
工序(2, 5)	11	11	11	11	11	11
工序(3, 4)	5	5	5	5	5	5
工序(3, 5)	6	6	6	5(+100)	5(+100)	5(+100)
工序(4, 5)	4	4	4	4	4	4
工序(4, 6)	8	8	8	8	7(+160)	7(+160)
直接成本(元)	3 830	3 890	3 950	4 070	4 230	4 420

例 7-12 对例 7-11,若在 $T_E = 26$ 时,知其间接成本为 1 830 元.当总工期每压缩 1 天,间接成本可节省 80 元,求总成本最低的最优总工期.

解 利用表 7-9 的有关信息并计算不同总工期时的间接成本,我们可算得不同总工期相应的总成本,如表 7-10 所示,可见总成本最低的最优总工期 $T_E^* = 24$ 天.

表 7-10

成本(元)	总 工 期 (元)					
	26	25	24	23	22	21
直接成本	3 830	3 890	3 950	4 070	4 230	4 420
间接成本	1 830	1 750	1 670	1 590	1 510	1 430
总 成 本	5 660	5 640	5 620	5 660	5 740	5 850

7.2.2 总工期—资源的优化问题

我们不对总工期—资源的优化问题作全面的介绍与深入的讨论,而仅仅探讨一下当资源有限时,如何合理地安排资源.

例 7-13 某工程的网络图由图 7-34 给出.图中有向边旁第一个参数为工序的工序时间 w_{ij} (单位:天),第二个参数为该工序每天所需要的作业人数.现在假设该项工程由一个工程队承包,全队共有人员 12 名,且设每个人员都可以胜任各工序的工作.试问,该队对各工序的进度如何安排及如何合理

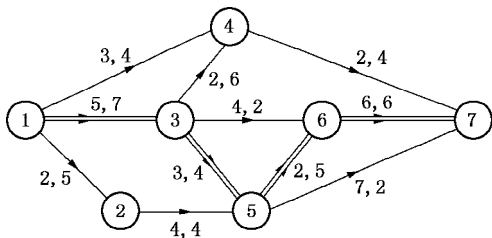


图 7-34

地调配人员 ,以使工程尽早地完工.

该网络图的关键路径为(1,3)(3,5)(5,6)(6,7),其长度 $T_E = 16$ (天). 各事项的最早时间和最迟时间经计算由表 7-11 给出 ,各工序的总时差由表 7-12 给出.

表 7-11

事项 k	1	2	3	4	5	6	7
$t_E(k)$	0	2	5	7	8	10	16
$t_L(k)$	0	4	5	14	8	10	16

表 7-12

工 序	总时差	工 序	总时差	工 序	总时差
(1, 2)	2	(3, 4)	7	(5, 6)	0
(1, 3)	0	(3, 5)	0	(5, 7)	1
(1, 4)	11	(3, 6)	1	(6, 7)	0
(2, 5)	2	(4, 7)	7		

将各工序所需的工作日(每天需要的人员乘以该工序的工序时间)相加 ,可知该工程共需 173 个工作日 ,因此如用 16 天完成(承包这项工程所需的时间不能小于总工期 16 天) ,则平均每天需要投入的人员数为 $173/16 \approx 11 < 12$. 所以 ,适当安排各道工序的进程 ,整个工程有可能在 16 天内完成(反之 ,要是平均每天需要投入的人员数超过 12 ,则不论如何安排整个工程各工序的进度 ,均无可能在 16 天内完成该项工程).

如果将每道工序(i, j)都安排在第 $t_E(i) + 1$ 天开始执行 ,可得一张表示工程进度的横道图 ,如表 7-13 所示. 表中“——”表示关键工序的进度 ;“——”表示非关键工序的进度 ;横道线上的数字表示执行该工序时每天所需的人员数 ;“.....”表示在不误总工期的条件下 ,非关键工序的执行时间所允许的变动范围(例如 ,工序(3,4)所需的两天时间可安排在第 6 天初至第 14 天末这个时间区间内任何持续的两天的).

表 7-13

日期 工序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1, 2)	5	5														
(1, 3)	7	7	7	7	7											
(1, 4)	4	4	4													
(2, 5)			4	4	4	4										
(3, 4)						6	6									
(3, 5)						4	4	4								
(3, 6)						2	2	2	2							
(4, 7)								4	4							
(5, 6)									5	5						
(5, 7)									2	2	2	2	2	2	2	
(6, 7)											6	6	6	6	6	6
需求人员数	16	16	15	11	11	16	12	10	13	7	8	8	8	8	8	6

$$\begin{cases} s_{ij} + 1 \leq t_B, \\ s_{ij} + w_{ij} > t_A. \end{cases}$$

$(t_A, t_B]$ 内的工序 (i, j) 如图 7-37 所示,这些工序有

$$(t_A, t_B] \cap (s_{ij}, s_{ij} + w_{ij}] \neq \emptyset. \quad (7-10)$$

在图 7-37 所示的这些工序中,我们若能利用工序 (i, j) 的总时差,把工序 (i, j) 的开工日期后移到第 $t_B + 1$ 天(即取 $s_{ij} = t_B$),则将减少 $(t_A, t_B]$ 时间区间内对资源的需求量.但是,这样做时应尽可能不影响总工期(或使总工期延长时间最少),故要求

$$t_B + w_{ij} \leq t_L(j). \quad (7-11)$$

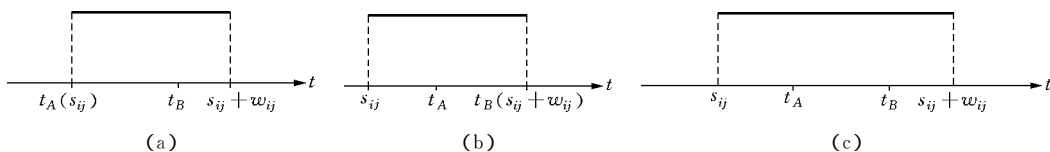


图 7-37

现令

$$\mu_{ij} = t_L(j) - t_B - w_{ij}, \quad (7-12)$$

由图 7-38 可知:当 $\mu_{ij} < 0$ 时,取 $s_{ij} = t_B$ 将会影响整个工程按原定总工期完工,这时 $|\mu_{ij}|$ 表示新的完工期比总工期延长的天数.当 $\mu_{ij} \geq 0$ 时,说明取 $s_{ij} = t_B$ 将不影响总工期,这时 $|\mu_{ij}|$ 表示取 $s_{ij} = t_B$ 后,工序 (i, j) 的开工日期还剩余的机动天数.我们对式(7-12)进行变换:

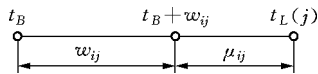


图 7-38

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= [t_L(j) - t_E(i) - w_{ij}] + t_E(i) - t_B \\ &= R(i, j) + t_E(i) - t_B, \end{aligned} \quad (7-13)$$

其中

$$R(i, j) = t_L(j) - t_E(i) - w_{ij}.$$

那么,在满足式(7-10)的各道工序 (i, j) 中,应挑选哪些工序,使其开工日期后移到第 $t_B + 1$ 天呢?

一般来说遵循如下 3 条原则:

① 优先挑选 μ_{ij} 大的工序 (i, j) ,使它的开工时间 $s_{ij} = t_B$. 因为当 $\mu_{ij} \geq 0$ 时, μ_{ij} 越大说明工序 (i, j) 的开工时间后移后仍有较多的开工剩余机动时间;当 $\mu_{ij} < 0$ 时, μ_{ij} 越大,则 $|\mu_{ij}|$ 越小,说明工序 (i, j) 的开工时间后移后使总工期拖延的天数越小.

② 为了减轻工程后期施工对资源需求的压力,一般不宜把过多的资源需求量推迟.最好是在满足资源限额的条件下,使资源的利用尽量均衡些.

③ 当 s_{ij} 的数值改变后,对于以事项 j 为开工事项的工序 (j, k) 来说,若 $s_{jk} < s_{ij} + w_{ij}$,则 (j, k) 工序已不能按原订的日期第 $s_{jk} + 1$ 天开工,这时,应取 $s_{jk} = s_{ij} + w_{ij}$. 同样地,对于以事项 k 为开工事项的工序,其开工日期也应作相应改变,其余工序依次类推.

有时,我们可将某些满足式(7-10)的工序 (i, j) 在时间区间 $(t_A, t_B]$ 内中断工作,或延长其工序时间,以达到使资源需求量减少的目的。

我们根据上述原则来改变一些工序的开工日期,并修改原来的进度表,得到新的资源需求曲线。再重复上述步骤,直到资源需求曲线的所有阶梯的高度都不超过 $\lambda_{\max}$ 为止。

本方法的计算工作量十分繁重。对于大中型网络,只能依靠电子计算机来进行。

下面我们来求解例 7-13。

我们用表 7-13 所示的进度表,用上述方法逐步调整一些工序的进度。在调整过程中,进度表的修改可以在原来的基础上进行。资源需求曲线的引入,是为了直观地分析超出资源限额的情况。在实际调整过程中,不一定要画出资源需求曲线。事实上,时间区间 $(t_A, t_B]$ 和 $\lambda_{\max}$ 都可以直接从横道图相应的进度表中得到。利用表 7-13,我们对调整过程中时间区间 $(t_A, t_B]$ 中满足式(7-10)的工序 (i, j) 相应的 μ_{ij} 进行计算,并把有关计算过程列成表 7-14,其中 λ_{ij} 为工序 (i, j) 每天所需人员数。例如表 7-14 的第二行 $(t_A, t_B] = (2, 5]$,此时满足式(7-10)的工序有 $(1, 3), (1, 4), (2, 5)$,因此:

$$\begin{aligned}\mu_{13} &= R(1, 3) + t_E(1) - t_5 = 0 + 0 - 5 = -5, \\ \mu_{14} &= R(1, 4) + t_E(1) - t_5 = 11 + 0 - 5 = 6, \\ \mu_{25} &= R(2, 5) + t_E(2) - t_5 = 2 + 2 - 5 = -1,\end{aligned}$$

此时,有

$$\mu_{14} = \max\{\mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}\} = 6.$$

故取 $s_{14} = 5$ 。又 $s_{47} = t_E(4) = 7 < s_{14} + w_{14} = 5 + 3 = 8$,故取 $s_{47} = s_{14} + w_{14} = 8$ 。

又例如在表 7-14 中,第三行 $(t_A, t_B] = (5, 6]$,此时满足式(7-10)的工序有 $(1, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$ 和 $(3, 6)$ 相应的 $\mu_{14}, \mu_{25}, \mu_{34}, \mu_{35}$ 和 μ_{36} 分别为 $5, -2, 6, -1, 0$,而 $\lambda_{AB} = 20$ 。因 μ_{34} 最大,故取 $s_{34} = t_B = 6$ 。此时 $\lambda_{AB} = 20 - \lambda_{34} = 20 - 6 = 14 > 12$,所以再取 $s_{14} = 6$ 。而 $s_{47} = s_{14} + w_{14} = 6 + 3 = 9$ 。

表 7-14

$(t_A, t_B]$	满足式(7-10)的 (i, j)	相应的 λ_{ij}	λ_{AB}	由式(7-13)算出的 μ_{ij}	取新值的 s_{ij}
$(0, 2]$	$(1, 2), (1, 3), (1, 4)$	5, 7, 4	16	0, -2, 9	$s_{14} = 2$
$(2, 5]$	$(1, 3), (1, 4), (2, 5)$	7, 4, 4	15	-5, 6, -1	$s_{14} = 5, s_{47} = 8$
$(5, 6]$	$(1, 4), (2, 5), (3, 4)$ $(3, 5), (3, 6)$	4, 4, 6 4, 2	20	5, -2, 6, -1, 0	$s_{14} = s_{34} = 6$ $s_{47} = 9$
$(6, 7]$	$(1, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$	4, 6, 4, 2	16	4, 5, -2, -1	$s_{14} = 7, s_{47} = 10$
$(7, 8]$	$(1, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$	4, 6, 4, 2	16	3, 4, -3, -2	$s_{14} = 8, s_{47} = 11$
$(8, 9]$	$(1, 4), (3, 6), (5, 6), (5, 7)$	4, 2, 5, 2	13	2, -3, -1, 0	$s_{57} = 9$

由表 7-14 可知,应取 $s_{14} = 8, s_{34} = 6, s_{57} = 9, s_{47} = 11$,其他 $s_{ij} = t_E(i)$ 。对表 7-13 进行修改,可得新的横道图如表 7-15。由这张进度表可知,总工期仍为 16 天。

表 7-15

日期 工序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1, 2)	5	5														
(1, 3)	7	7	7	7	7											
(1, 4)									4	4	4					
(2, 5)			4	4	4	4										
(3, 4)							6	6								
(3, 5)						4	4	4								
(3, 6)						2	2	2	2							
(4, 7)												4	4			
(5, 6)									5	5						
(5, 7)										2	2	2	2	2	2	2
(6, 7)											6	6	6	6	6	6
需求人员数	12	12	11	11	11	10	12	12	11	11	12	12	12	8	8	8

那么,如何评价一个工程进度表对资源利用的均衡性呢?下面我们来讨论此问题.

若工程进度计划表确定后,用 λ 表示第 t 天对资源的需求量, T 为进度表相应的总工期,则日资源利用量的均值为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_t \quad (7-14)$$

令

$$S^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\lambda_t - \bar{\lambda})^2, \quad (7-15)$$

可知

$$S^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 - \bar{\lambda}^2. \quad (7-16)$$

我们的问题就成为在计划工期 T 固定的条件下,找到一种进度计划使 S^2 取极小值.一般可采用如下的试探法:

先求出网络图的时间参数,把每道工序 (i, j) 的开工日期都安排在第 $t_E(i) + 1$ 天.于是得到一张初始进度计划表,计算相应的 S^2 .然后利用非关键工序的总时差,依次对每道非关键工序的执行时间作试探性调整,若调整后的 S^2 值减少,则接受这个调整措施,从而获得一张新的进度计划表.重复上述过程,直到求得某一进度计划时,对每道非关键工序的试探性调整已无法使 S^2 减小,此时,即终止调整工作.

对于图 7-34 网络所示工程来说,表 7-13 所给的进度计划表相应的 $S^2 = 11.40$,可见该进度计划的资源利用是很不均衡的.表 7-15 所给的进度计划表相应的 $S^2 = 2.15$,可见,该进度计划的资源利用就比较均衡了.

§ 7.3 非肯定型 PERT 网络

前面我们所阐述的 PERT 网络的每道工序的工序时间都是预先确定的.工程组织者

参考以前相仿的网络计划的历史资料(例如同类工序的工时定额统计资料),用分析对比的方法对本工程各道工序的作业时间作一个估计.我们称采用这种单一时间估计法估计各道工序作业时间的 PERT 网络为肯定型网络.

但对随机因素较多的网络计划或无先例可循的网络计划(例如新开发的大型建设工程和科研项目等),其计划实施的技术条件和组织条件的不可知因素较多,不具备各道工序定额工时统计资料,因此,很难确定各工序的工序时间究竟是多少.

工序时间是随机变量的 PERT 网络被称为非肯定的 PERT 网络.

我们采用 3 种时间估计法来估算非肯定型网络各工序的工序时间,即对每道工序的工序时间估计 3 种时间:

- ① 乐观时间 a :在最顺利的情况下完成工序的时间;
- ② 保守时间 b :在最不利的情况下完成工序的时间;
- ③ 最可能的时间 m :在正常情况下完成工序的最可能需要的时间.

假设工序时间这个随机变量服从取值范围从 a 到 b 的 β 分布,因而,此随机变量的期望值 μ 和方差 σ^2 分别为

$$\mu = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad (7-17)$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6} \right)^2. \quad (7-18)$$

我们就将按式(7-17)确定的工序 (i, j) 的工序时间期望值作为该工序的长度 w_{ij} ,它的方差记为 σ_{ij}^2

网络计划的总工期 T_E 是关键路径 P 中所有工序的工序时间的和,由于工序时间是随机变量,因此 T_E 也是随机变量.现假定各工序的工序时间是彼此独立的随机变量.当关键路径 P 上工序较多时,根据概率论中的中心极限定理可知,总工期 T_E 服从正态分布,它的数学期望和方差分别为

$$E(T_E) = \sum_{(i,j) \in P} w_{ij}, \quad (7-19)$$

$$D(T_E) = \sum_{(i,j) \in P} \sigma_{ij}^2. \quad (7-20)$$

例 7-14 考虑由 9 道工序组成的某项工程,有关信息如表 7-16 所给(时间单位:天).试求总工期 T_E 的期望值和方差,以及总工期在 50 天内完成的概率.

表 7-16

工 序	紧前工序	乐观时间 a	最可能时间 m	保守时间 b
A	—	2	5	8
B	A	6	9	12
C	A	6	7	8
D	B, C	1	4	7
E	A	8	8	8
F	D, E	5	14	17

(续表)

工 序	紧前工序	乐观时间 a	最可能时间 m	保守时间 b
G	C	3	12	21
H	F, G	3	6	9
M	H	5	8	11

解 经计算,可知各道工序的工序时间期望值和方差如表 7-17 所示.

表 7-17

工 序	A	B	C	D	E	F	G	H	M
工序时间期望值	5	9	7	4	8	13	12	6	8
工序时间方差	1	1	1/9	1	0	4	9	1	1

本问题的网络图如图 7-39 所示,边 (i, j) 旁参数为该工序的工序时间期望值 w_{ij} .

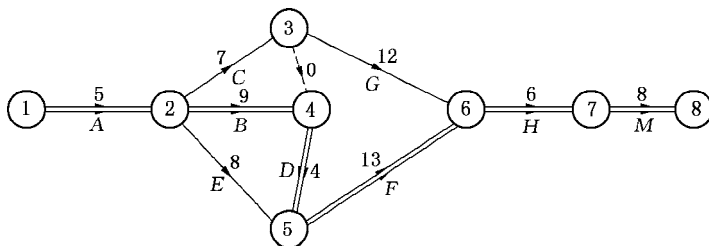


图 7-39

可知,关键路径为 $(1, 2)(2, 4)(4, 5)(5, 6)(6, 7)(7, 8)$. 由式(7-19)和式(7-20)可得

$$E(T_E) = 5 + 9 + 4 + 13 + 6 + 8 = 45,$$

$$D(T_E) = 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 = 9.$$

于是,总工期 T_E 服从正态分布 $N(45, 9)$. 由正态分布特性可知,随机变量位于距离数学期望一个标准差以内的概率是 0.68,因此

$$P(42 \leq T_E \leq 48) = 0.68.$$

由于随机变量

$$X = \frac{T_E - E(T_E)}{\sqrt{D(T_E)}} = \frac{T_E - 45}{3}$$

服从标准正态分布 $N(0, 1)$,所以总工期在 50 天内完成的概率

$$P(T_E \leq 50) = P\left(X \leq \frac{50 - 45}{3}\right) = \Phi(1.67) \approx 0.95,$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

习 题 七

1. 某工程各工序关系及各工序所需时间如表 7-18 所示,试绘制网络图,计算事项及工序的 6 个时间参数的表格,并指出关键路径。

表 7-18

工 序	紧前工序	工序时间	工 序	紧前工序	工序时间
A	—	8	F	B, N	3
B	—	7	G	C	6
C	—	10	H	C	4
N	A	1	Q	E, F, G	5
D	A	9	M	Q, D	7
E	A	2	L	E, F, G, H	6

2. 某工程各工序的前后关系及工序时间由表 7-19 给出,试绘制网络图,计算各事项的时间参数和给出各工序的 6 个时间参数的表格,指出关键路径。

表 7-19

工 序	工 时	紧前工序	工 序	工 时	紧前工序
K	3	—	R	5	L, M
L	4	K	S	7	Q
M	3	K	D	18	N, P, R
N	18	L	G	10	S
P	21	L	V	4	D
Q	15	L, M			

3. 现有某项工程,其网络图如图 7-40,边旁参数为该工序正常工序时间。有关信息如表 7-20 所示。

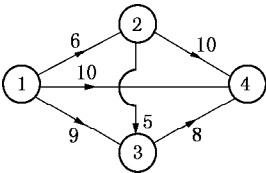


图 7-40

表 7-20

工序(i, j)	w_{ij}^g (天)	w_{ij}^b (天)	c_{ij}^g	c_{ij}^b
(1, 2)	6	5	100	160
(1, 3)	9	5	200	360
(1, 4)	10	6	400	500
(2, 3)	5	3	60	120
(2, 4)	10	5	300	650
(3, 4)	8	6	240	360

若该工程于 14 天内完工,则间接成本总计为 400;若超过 14 天,每超过一天增加间接成本 70。试求最佳赶工方案使总成本最少。

- (1) 用枚举法;
- (2) 用负时差法;

- (3) 建立线性规划模型.
4. 用负时差法求解例 7-4.
5. 考虑图 7-41 所示的网络计划.

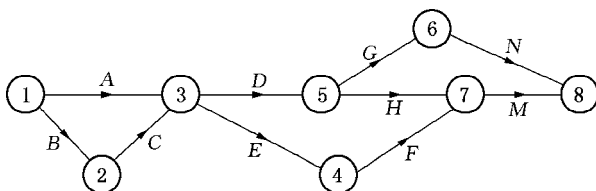


图 7-41

有关信息由表 7-21 给出.

- (1) 求总工期的最大值和最小值 ;
- (2) 若指定总工期 $\hat{T}_E = 21$ 天 ,问如何赶工以使赶工成本最低 ,试建立线性规划模型.
- (3) 若指定总工期 $\hat{T}_E = 21$ 天 ,试用枚举法和负时差法求赶工费用最小的进度计划.
- (4) 若间接成本为每天 5 元 ,试求总成本最低的最优总工期.

表 7-21

工序	w_{ij}^s (天)	w_{ij}^b (天)	c_{ij}^* (元/天)
A	10	7	4
B	5	4	2
C	3	2	2
D	4	3	3
E	5	3	3
F	6	3	3
G	5	2	1
H	6	4	4
M	6	4	3
N	4	3	3

6. 某工程的网络图如图 7-42 所示. 有向边旁第一个参数为工序时间 ,第二个参数为该工序一天所需人数. 假设该工程限定每天的工人人数不得超过 22 个. 问如何调配人员 ,可使该工程按图 7-42 所给总工期如期完成.

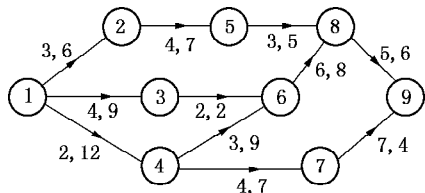


图 7-42

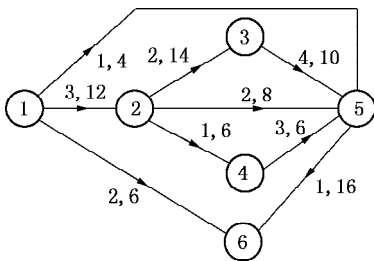


图 7-43

7. 某工程的网络图如图 7-43 所示. 有向边旁第一参数为工序时间(周) ,第二参数为该工序每周每天所需人数. 假设该工程限定每天的工人人数不得超过 20 人. 问如何调配人员 ,使每天出勤的工人数尽可能保持均匀 ,而工程按图 7-43 所给总工期如期完成.
8. 某工程的工序关系和时间估计值如表 7-22 所示.
 - (1) 绘制网络图并计算每个工序的工序时间期望值和方差 ;
 - (2) 总工期的期望值和方差是多少 ?

- (3) 分别计算出现以下两种情况的概率；
 (a) 比总工期的期望值至少提前 3 天；
 (b) 比总工期的期望值延迟不多于 5 天。

表 7-22

工 序	紧前工序	乐观时间 a	最可能时间 m	保守时间 b
A	—	2	5	8
B	A	6	9	12
C	A	5	14	17
D	B	5	8	11
E	C, D	3	6	9
F	—	3	12	21
G	E, F	1	4	7

第八章 动态规划

管理决策中的某些问题,可以从时间的流动或空间的转移上,将问题划分为若干个相互联系的阶段,每一个阶段都有若干种方案可供选取,决策的任务则是为每个阶段选择一个适当的方案,以使整个过程取得最优的效益.动态规划就是解决这类多阶段决策问题的一个运筹学分支.

在本章中,我们先通过最短路径问题这个简单的引例来阐述动态规划的基本概念以及求解的基本思想,然后给出动态规划的一般模型和求解方法,最后介绍若干应用实例.

§ 8.1 引 例

例 8-1 (最短路径问题) 一个旅行者由始点 A 出发,需经过 4 个阶段到达终点 E . 前面 3 个阶段分别有 3 个、4 个和 2 个中转点,旅行者在每一阶段只能选择一个中转点作为本阶段的到达点,具体线路如图 8-1 所示,边旁参数为该边起点到终点的距离.求 A 至 E 的最短路径.

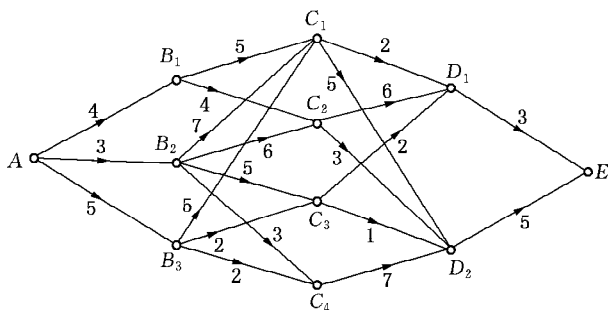


图 8-1

对本问题我们可以用网络规划中的最短路径算法,求得图 8-1 中任一顶点至顶点 E 的最短路径及其长度,如图 8-2 所示(图中顶点旁括号中的数字为该顶点至 E 的最短路径长度).

现在我们用动态规划方法来求 A 至 E 的最短路径及其长度,通过其求解过程来说明动态规划的基本思想并给出有关的术语.

若第 k 阶段旅行者的出发点记为 s_k ,我们称 s_k 为第 k 阶段的状态变量.第 k 阶段状态变量 s_k 可取的顶点的全体记为 S_k ,我们称 S_k 为第 k 阶段的状态集合.例如在本问题

中, $S_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$. 状态变量取定某一个顶点, 就说旅行者处于某个状态.

若第 k 阶段旅行者从状态 s_k 出发, 本阶段所选择的到达点记为 $x_k(s_k)$, 我们称 $x_k(s_k)$ 为决策变量, 并简写为 x_k , x_k 依赖于 s_k . 当 s_k 选定, 决策变量 x_k 取点的全体记为 $D_k(s_k)$, 我们称 $D_k(s_k)$ 为决策集合. 当状态变量 s_k 取不同的点时, 所得决策集合也可能不同. 例如, 取 $s_2 = B_1$, 有 $D_2(B_1) = \{C_1, C_2\}$; 取 $s_2 = B_2$, 有 $D_2(B_2) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

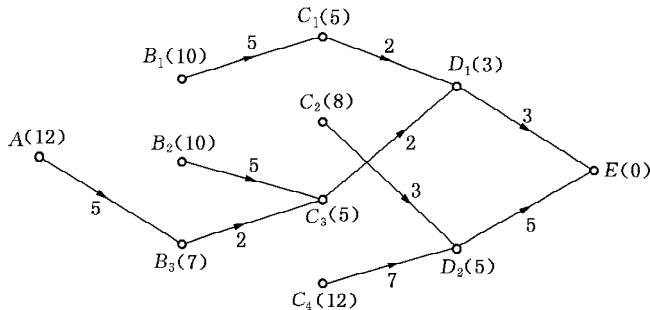


图 8-2

显然, 若第 k 阶段的状态变量 s_k 及相应的决策变量 $x_k(s_k)$ 一经确定, 则第 $k+1$ 阶段的状态变量 s_{k+1} 也就完全确定. 例如, 第 2 阶段出发点 s_2 取为 B_3 , 该阶段的到达点 x_2 取为 C_3 , 则第 3 阶段的出发点 s_3 也就确定, $s_3 = C_3$; 因此, 我们说 s_{k+1} 与 s_k, x_k 有函数关系, 并以 $s_{k+1} = T_k(s_k, x_k)$ 表示之, 通常称它为状态转移方程. 在本问题中, 显然, $s_{k+1} = x_k$.

第 k 阶段出发点 s_k 至本阶段到达点 x_k 的距离记为 $w_k(s_k, x_k)$, 我们称它为权函数. 本问题的权函数由图 8-1 中边旁参数给出.

在网络规划这一章中我们已经介绍过最短路径的几何特征, 它告诉我们, 如果 A 至 E 的最短路径 P 在第 k 阶段以 s_k 为出发点, 则 P 中 s_k 至终点 E 的子路 P_1 , 对于 s_k 至终点 E 的所有可供选择的路线来说, 必定也是最短路径, 且路径 P_1 及其长度与旅行者在 s_k 以前所经历的路线无关. 我们把这个几何特征称为这最短路径问题的最优化原理, 并称状态 s_k 具有无后效性.

动态规划方法解本问题的基本思想就是利用了最短路径问题的最优化原理: 要求最短路径 P , 则先求子路 P_1 , 由 P_1 往前逐阶段延伸, 直至始点 A . 确切地说, 如图 8-2 那样, 先求出第 4 阶段状态变量 s_4 (可取 D_1 或 D_2) 至 E 的最短路径, 接着求第 3 阶段状态变量 s_3 (可取 C_1, C_2, C_3 或 C_4) 至 E 的最短路径, 再求第 2 阶段状态变量 s_2 (可取 B_1, B_2 或 B_3) 至 E 的最短路径, 最后求得第 1 阶段状态 s_1 (取 A) 至 E 的最短路径.

在递推过程中, 求第 k 阶段 s_k 至 E 的最短路径时, 利用了第 $k+1$ 阶段 s_{k+1} 至 E 的最短路径的信息.

例如, 假设第 3 阶段状态变量 s_3 (可取 C_1, C_2, C_3 或 C_4) 至 E 的最短路径已求得, 现在旅行者在第 2 阶段所处的状态 s_2 为 B_1 , 他面临两个决策: $x_2(B_1) = C_1$ 或 C_2 . 如果此时旅行者选定本阶段的到达点为 C_1 , 那么, 他在第 3 阶段所处的状态 s_3 为 C_1 , 他以 C_1 为出发点继续行走. 由图 8-2 知, 他必选 C_1 至 E 的最短路径 $C_1 D_1 E$ (路径 $C_1 D_2 E$ 比路径 $C_1 D_1 E$ 长, 因此被自动淘汰). 因为状态 $s_3 = C_1$ 具有无后效性, 所以路径 $B_1 C_1 D_1 E$ 的长

度 = $w_2(B_1, C_1)$ + 路径 C_1D_1E 的长度 = $5 + 5 = 10$; 如果旅行者选本阶段的到达点为 C_2 , 那么 , 他在第 3 阶段以 C_2 为出发点继续行走 , 由图 8-2 知 , 他必选 C_2 至 E 的最短路径 C_2D_2E , 由状态 $s_3 = C_2$ 的无后效性 , 路径 $B_1C_2D_2E$ 的长度 = $w_2(B_1, C_2)$ + 路径 C_2D_2E 的长度 = $4 + 8 = 12$. 可见 , 旅行者在 $s_2 = B_1$ 时的最佳决策 $x_2^*(B_1) = C_1$, 从而 , 由 B_1 至 E 的最短路径为 $B_1C_1D_1E$, 其长度为 10 .

若旅行者在第 k 阶段由状态 s_k 出发至终点 $s_5 = E$ 的最短路径长度记为 $f_k(s_k)$, 则由最短路径问题的最优化原理及状态的无后效性可知 :

$$f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 4, 3, 2, 1.$$

加上初始条件 $f_5(s_5) = 0$ ($s_5 = E$) , 我们称它们为本问题的动态规划模型的递归方程 . 取得 $f_k(s_k)$ 值的相应 x_k , 我们记为 x_k^* .

由递归方程和状态转移方程 , 我们就可以求解本问题 . 下面我们采用表格形式逐步计算 .

第一步 , $k = 4$, 有方程

$$\begin{cases} f_5(s_5) = 0, s_5 = E, \\ f_4(s_4) = \min_{x_4 \in D_4(s_4)} \{w_4(s_4, x_4) + f_5(s_5)\}, \\ s_5 = x_4. \end{cases}$$

现在状态集合 $S_4 = \{D_1, D_2\}$, 决策集合 $D_4(s_4) = \{E\}$, 计算过程如表 8-1 所示 .

表 8-1

s_4	$w_4(s_4, x_4) + f_5(s_5), x_4 = E$	$f_4(s_4)$	x_4^*
D_1	$3 + 0$	3	E
D_2	$5 + 0$	5	E

第二步 , $k = 3$, 有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{w_3(s_3, x_3) + f_4(s_4)\}, \\ s_4 = x_3. \end{cases}$$

现在 $S_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, $D_3(C_j) = \{D_1, D_2\}$ ($j = 1, 2, 3$) , $D_3(C_4) = \{D_2\}$. 计算过程如表 8-2 所示 .

表 8-2

s_3	$w_3(s_3, x_3) + f_4(x_3)$		$f_3(s_3)$	x_3^*
	$x_3 = D_1$	$x_3 = D_2$		
C_1	$2 + 3$	$5 + 5$	5	D_1
C_2	$6 + 3$	$3 + 5$	8	D_2
C_3	$2 + 3$	$1 + 5$	5	D_1
C_4	—	$7 + 5$	12	D_2

第三步, $k = 2$, 有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \min_{x_2 \in D_2(s_2)} \{w_2(s_2, x_2) + f_3(s_3)\}, \\ s_3 = x_2. \end{cases}$$

现在 $S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$, $D_2(B_1) = \{C_1, C_2\}$, $D_2(B_2) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, $D_2(B_3) = \{C_1, C_3, C_4\}$, 计算过程如表 8-3 所示.

表 8-3

s_2	$w_2(s_2, x_2) + f_3(x_2)$				$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = C_1$	$x_2 = C_2$	$x_2 = C_3$	$x_2 = C_4$		
B_1	5 + 5	4 + 8	—	—	10	C_1
B_2	7 + 5	6 + 8	5 + 5	3 + 12	10	C_3
B_3	5 + 5	—	2 + 5	2 + 12	7	C_3

第四步, $k = 1$, 有方程

$$\begin{cases} f_1(s_1) = \min_{x_1 \in D_1(s_1)} \{w_1(s_1, x_1) + f_2(s_2)\}, \\ s_2 = x_1. \end{cases}$$

现在 $S_1 = \{A\}$, $D_1(A) = \{B_1, B_2, B_3\}$. 计算过程如表 8-4 所示.

表 8-4

s_1	$w_1(s_1, x_1) + f_2(x_1)$			$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = B_1$	$x_1 = B_2$	$x_1 = B_3$		
A	4 + 10	3 + 10	5 + 7	12	B_3

根据状态转移方程及表 8-1 至表 8-4, 我们用顺序追踪法, 即可求得本问题的最优决策序列:

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 = A & \longrightarrow & s_2 = B_3 & \longrightarrow & s_3 = C_3 & \longrightarrow & s_4 = D_1, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = B_3 & & x_2^* = C_3 & & x_3^* = D_1 & & x_4^* = E. \end{array}$$

由此可知, 旅行者的最佳路线为 $AB_3C_3D_1E$, 行程为 12.

由上述求解过程可见, 本方法是把求 A 至 E 的最短路径问题, 嵌入到“求各个点至 E 的最短路径”这一族最短路径问题中, 这一族问题与原来的问题是同类型的. 这种方法在数学上称为不变嵌入法. 同时可见, 上述方法所求得解也是一族, 如图 8-2 那样.

这里, 我们应该指出, 如果一个实际问题可以归结为最短路径问题, 那么, 一般都采用网络规划中有关的算法而决不会运用动态规划方法来求解. 本节详尽地介绍用动态规划方法来求解最短路径问题, 仅仅是以此作为认识和理解动态规划方法的入门.

§ 8.2 动态规划模型和求解方法

现在我们在上一节引例的基础上引入动态规划的一些基本概念并给出一般模式.

(1) 阶段. 如果一个问题确定能用动态规划方法求解时, 那么必须恰当地把问题的过程划分为若干个相互联系的阶段. 通常根据时间和空间的自然特征来划分阶段. 阶段的编号采取顺序编号, 阶段的个数 N 称为历程. 例如对于例 8-1 最短路径问题来说, $N = 4$.

历程 N 可以是确定的, 也可以是不确定的. 在本章研究的问题中, N 都是确定且有限的.

(2) 状态. 第 k 阶段的状态是指过程在该阶段所处的各种可能情况. 它为问题的某种特征. 描述过程在第 k 阶段状态的变量, 称为状态变量, 用 s_k 表示. s_k 通常以一个数或一个向量(多维情形)来描述. s_k 取值的全体记作 S_k , 称作第 k 阶段的状态集合.

状态的定义在动态规划中往往是最重要的概念. 它必须具备 3 个特性:

① 描述性. 各阶段状态的演变能描述决策过程. 例如最短路径问题引例中, 状态的演变 $A \rightarrow B_3 \rightarrow C_3 \rightarrow D_1 \rightarrow E$ 描述了整个决策过程.

② 无后效性. 如果第 k 阶段的状态给定, 则在这阶段以后过程的发展不受这阶段以前各个阶段状态的影响. 也就是说, 过程未来的发展, 只与过程的现在状态有关, 而与过程的过去状态无关.

例如, 在最短路径问题引例中, 若旅行者在第 3 阶段处在状态 $s_3 = C_3$, 以后的问题就只是旅行者如何从 C_3 出发走到 E , 至于第 1、第 2 阶段所处状态(即旅行者从起点 A 如何走到 C_3), 对以后各阶段旅行者如何选择到达点已无直接的影响.

在对实际问题建立动态规划模型时, 如果状态的规定方式不能满足无后效性, 这时, 就必须改变状态的定义而使之满足无后效性.

③ 可知性. 各阶段状态变量的取值, 直接或间接是可知的, 也就是说, 第 k 阶段的状态集合 S_k 是给定的.

可以说, 过程在第 k 阶段的状态概括了对本阶段及以后各阶段作出一个可行决策所需要的全部信息.

(3) 决策. 当第 k 阶段的状态 s_k 给定后, 从该状态演变为第 $k+1$ 阶段状态时所作的选择称为决策. 描述决策的变量称为决策变量, 用 $x_k(s_k)$ 表示, 简记为 x_k . x_k 通常用一个数或一个向量来描述. $x_k(s_k)$ 取值的全体记为 $D_k(s_k)$, 称为第 k 阶段的决策集合. s_k 取值不同, 相应的决策集合也可能不同.

状态变量 s_k 与决策变量 x_k 可为离散型变量, 也可为连续型变量.

(4) 策略. 由过程的第 1 阶段初始状态 s_1 开始, 逐阶段演变至终止状态 s_{N+1} 的过程称为问题的全过程. 由每阶段的决策 $x_k(s_k)$ ($k = 1, \dots, N$) 组成的序列 $\{x_1(s_1), x_2(s_2), \dots, x_N(s_N)\}$ 称为策略.

由第 k 阶段状态 s_k 开始逐阶段演变至终止状态 s_{N+1} 的过程称为 $k \sim N$ 子过程, 其决策序列 $\{x_k(s_k), x_{k+1}(s_{k+1}), \dots, x_N(s_N)\}$ 称为子策略.

全体策略称为策略集合. 策略集合中使目标实现最优的策略, 称为最优策略.

(5) 状态转移方程. 第 $k+1$ 阶段的状态 s_{k+1} 与第 k 阶段的状态 s_k 、决策 x_k 之间有函数关系

$$s_{k+1} = T_k(s_k, x_k), \quad (8-1)$$

并称其为状态转移方程.

(6) 权函数. 在第 k 阶段, 当状态取定 s_k 、决策取定 x_k 时, 该阶段所实现的效益指标 (例如距离、时耗、利润、成本等) 称为权函数, 以 $w_k(s_k, x_k)$ 表示之.

$w_k(s_k, x_k)$ 不一定有解析式.

(7) 指标函数. 若第 k 阶段的状态为 s_k , 当采用了最优子策略 $\{x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*\}$ 后, 从阶段 k 到阶段 N 可获得的效益, 称为指标函数, 记为 $f_k(s_k)$. 实现 $f_k(s_k)$ 值的 x_k 记为 x_k^* .

若第 k 阶段状态为 s_k , 本阶段决策为 x_k (于是第 $k+1$ 阶段状态为 s_{k+1}), 从第 $k+1$ 阶段开始采用最优子策略 $\{x_{k+1}^*, \dots, x_N^*\}$, 则第 k 阶段至第 N 阶段可获得的效益函数为

$$w_k(s_k, x_k) \odot f_{k+1}(s_{k+1}),$$

其中, 符号 $\odot$ 表示加法或乘法运算. 我们称此含义下的效益函数具有可加性或可乘性, 即该效益函数为可分函数.

(8) 递归方程. 称下列方程为递归方程:

$$\begin{cases} f_{N+1}(s_{N+1}) = 0 \text{ 或 } 1, \\ f_k(s_k) = \underset{x_k \in D_k(s_k)}{\text{opt}} \{w_k(s_k, x_k) \odot f_{k+1}(s_{k+1})\}, k = N, N-1, \dots, 1. \end{cases} \quad (8-2)$$

其中, 符号 opt 视问题性质可取 $\min$ 或 $\max$, 同时, 当符号 $\odot$ 取加法运算时, 取 $f_{N+1}(s_{N+1}) = 0$; 当符号 $\odot$ 取乘法运算时, 取 $f_{N+1}(s_{N+1}) = 1$.

动态规划递归方程的建立, 是基于下述动态规划的最优化原理 (R·贝尔曼 (R. Bellman) 提出):

作为整个过程的最优策略具有这样的性质: 无论过去的状态和决策如何, 对前面的决策所形成的状态而言, 余下的诸决策必须构成最优策略. 简言之, 最优策略的子策略, 构成最优子策略.

根据最优化原理建立的递归方程, 把原问题嵌入到一族相互联系的同类型的子问题中, 使求解变得可能和容易.

由于用递归方程 (8-2) 和状态转移方程 (8-1) 求解动态规划的过程, 是由第 N 阶段向递归至第 1 阶段, 故这种方法称为逆序解法.

综上所述, 如果一个问题能用动态规划方法求解, 那么, 我们可以按下列步骤建立动态规划的数学模型:

① 划分阶段, 并正确地定义各阶段状态变量使之具有描述性、无后效性和可知性 3 个特性, 同时确定状态集合;

② 定义决策变量, 确定决策集合;

③ 确定权函数;

④ 建立状态转移方程;

⑤ 确定指标函数;

⑥ 建立递归方程.

由状态转移方程和递归方程, 用逆序解法对动态规划模型求解, 在求得 $f_1(s_1)$ 和 $x_1^*(s_1)$ 后, 则按下列方法寻找最优策略:

当 s_1 仅取一个值时,由状态转移方程采用顺序追踪法来寻找最优策略:

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 & \longrightarrow & s_2 = T_2(s_1, x_1^*) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & s_N = T_N(s_{N-1}, x_{N-1}^*); \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ x_1^* & & x_2^* & & & & x_N^* \end{array}$$

当 s_1 可取一个以上值时,取 s_1^* 满足:

$$f_1^*(s_1^*) = \text{opt}\{f_1(s_1) \mid s_1 \in S_1\},$$

然后采用顺序追踪法来寻找最优策略:

$$\begin{array}{ccccccc} s_1^* & \longrightarrow & s_2^* = T_2(s_1^*, x_1^*) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & s_N^* = T_N(s_{N-1}^*, x_{N-1}^*). \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ x_1^* & & x_2^* & & & & x_N^* \end{array}$$

例 8-2 (投资问题) 现有资金 5 百万元,可对 3 个项目进行投资,投资额均为整数(单位为百万元).假设 2[#] 项目的投资不得超过 3 百万元,1[#] 和 3[#] 项目的投资均不得超过 4 百万元,3[#] 项目至少要投资 1 百万元.投资 5 年后每个项目预计可获得的收益由表 8-5 给出.问如何投资可获得最大的收益.

表 8-5

$w_k(x)$		投 资 额 x				
		0	1	2	3	4
项 目 k	1 [#]	0	3	6	10	12
	2 [#]	0	5	10	12	—
	3 [#]	—	4	8	11	15

解 本问题是一个静态问题,但可以把它转化成动态问题:将这个投资问题分成 3 个阶段,在第 k 阶段要对项目 $k^{\#}$ 进行投资决策.令

s_k ——对 $k^{\#}, \dots, 3^{\#}$ 项目允许的投资额;

x_k ——对 $k^{\#}$ 项目的投资额;

$w_k(s_k, x_k)$ ——对 $k^{\#}$ 项目投资 x_k 后的收益: $w_k(s_k, x_k) = w_k(x_k)$;

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k+1} = s_k - x_k$;

$f_k(s_k)$ ——当第 k 至第 3 项目允许的投资额为 s_k 时所能获得的最大收益.

为了获得最大收益,必须将 5 百万元资金全部用于投资.故假想有第 4 阶段存在时,必有 $s_4 = 0$.对于本问题,有下列递归方程:

$$\begin{cases} f_4(s_4) = 0, \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 3, 2, 1. \end{cases}$$

下面由状态转移方程和递归方程,用逆序解法求解.

第一步, $k = 3$, 有方程

$$\begin{cases} f_4(s_4) = 0, s_4 = 0, \\ f_3(s_3) = \max_{x_3 \in D_3(s_3)} \{w_3(x_3) + f_4(s_4)\}, \\ s_4 = s_3 - x_3. \end{cases}$$

由于 $s_4 = 0$, 且 3# 项目至少投资 1 百万元, 至多投资 4 百万元, 因此

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4\}, D_3(s_3) = \{s_3\}.$$

计算过程如表 8-6 所示.

第二步, $k = 2$, 有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{w_2(x_2) + f_3(s_3)\}, \\ s_3 = s_2 - x_2. \end{cases}$$

因为 $s_3 \geq 1$, 所以 $s_2 \geq 1$, 有 $S_2 = \{1, \dots, 5\}$: 当 $s_2 = 1, 2, 3, 4$ 时, $D_2(s_2) = \{0, \dots, s_2 - 1\}$; 当 $s_2 = 5$ 时, 由于 2# 项目至多投资 3 百万元, 且 $s_4 = 0$, 因此, 有 $D_2(5) = \{1, 2, 3\}$. 计算过程如表 8-7 所示.

表 8-7

s_2	$w_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)$				$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$		
1	0 + 4	—	—	—	4	0
2	0 + 8	5 + 4	—	—	9	1
3	0 + 11	5 + 8	10 + 4	—	14	2
4	0 + 15	5 + 11	10 + 8	12 + 4	18	2
5	—	5 + 15	10 + 11	12 + 8	21	2

第三步, $k = 1$, 有方程

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{x_1 \in D_1(s_1)} \{w_1(x_1) + f_2(s_2)\}, \\ s_2 &= s_1 - x_1. \end{aligned}$$

现在 $s_1 = 5$, 又 1# 项目至多投资 4 百万元, 因此有 $D_1(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 计算过程如表 8-8 所示.

表 8-8

s_1	$w_1(x_1) + f_2(s_1 - x_1)$					$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$		
5	0 + 21	3 + 18	6 + 14	10 + 9	12 + 4	21	0, 1

由状态转移方程和顺序追踪法, 得本问题的最优策略:

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 = 5 & \longrightarrow & s_2 = 5 & \longrightarrow & s_3 = 3 & \text{或} & s_1 = 5 \longrightarrow s_2 = 4 \longrightarrow s_3 = 2, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 0 & & x_2^* = 2 & & x_3^* = 3 & & x_1^* = 1 \quad x_2^* = 2 \quad x_3^* = 2 \end{array}$$

即最优投资方案有 2 个：

方案 I：1[#] 项目不投资，2[#] 项目投资 2 百万元，3[#] 项目投资 3 百万元。

方案 II：1[#] 项目投资 1 百万元，2[#] 项目投资 2 百万元，3[#] 项目投资 2 百万元。

最大收益均为 21 百万元。

在动态规划用逆序解法求解时，计算 $k \sim N$ 子过程的方程利用了 $k+1 \sim N$ 子过程的方程的计算信息，所以，一些非优的可行策略就被淘汰，在全体策略集合中，只明显地考虑一小部分可行的策略，因此说它也是一种隐式枚举法，它的计算量自然要比完全枚举法大大地减少。但是，动态规划方法只是解决多阶段决策过程的一个手段，而不是一种算法。不同的动态规划问题，递归方程的形式及复杂程度大不一样，同时，对 $k \sim N$ 子过程的处理方法也不统一，需根据问题的各种特性来运用各类数学技巧。故而，判明一个实际问题能否建立动态规划模型以及对它怎样求解，需要我们相当的创造力及丰富的想象力。要培养这方面的能力，最好的途径是多多接触各种类型的动态规划的应用问题，研究这些问题的共同特征，通过知识的积累来提高构造动态规划模型的艺术技巧。动态规划方法的另一个不足之处是所谓“维数障碍”，当状态变量或决策变量是多维向量时，由于状态集合的庞大使可行的策略大大地增加，于是计算机的存储量及计算量都大大地增加，从而使得解状态维数很高的大型动态规划问题变得十分困难。

最后，我们还要指出，对某些动态规划问题，也可采用顺序解法求解，即递归方程的计算是从阶段 $k=1$ 开始，到阶段 $k=N$ 终止。此时，状态转移方程和递归方程分别是：

$$\begin{cases} s_{k-1} = T_k(s_k, x_k), k = 1, \dots, N, \\ \begin{cases} f_0(s_0) = 0 \text{ 或 } 1, \\ f_k(s_k) = \displaystyle \operatorname{opt}_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(s_k, x_k) \odot f_{k-1}(s_{k-1})\}, k = 1, \dots, N. \end{cases} \end{cases}$$

下一节我们将用具体的例题来说明当用顺序解法解时，如何建立动态规划模型。

§ 8.3 动态规划应用举例

这一节介绍若干个动态规划例题，目的在于通过这些例题使我们初步了解动态规划方法的计算细节和各类技巧。当然，要想得心应手地使用动态规划方法，仅仅掌握这几个例子的求解技巧还是远远不够的。

表 8-9

货物 $k^{\#}$	重量 a_k (吨)	收费 c_k
1 [#]	3	4
2 [#]	4	5
3 [#]	5	6

例 8-3 (载货问题) 现有载重量为 20 吨的卡车，装用 3 种不同的货物。已知这 3 种货物的单件重量和装载收费如表 8-9 所示，又规定 2[#] 货物和 3[#] 货物都至多装两件。问如何装载这 3 种货物，可使该车一次运输的货物收费最多？

解 设 x_k 为 $k^{\#}$ 货物的装载件数。于是我们

可得下列整数规划：

$$\begin{aligned} \max f &= 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 ; \\ \text{s. t. } 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 20 , \\ x_2 &\leq 2 , \quad x_3 \leq 2 , \\ x_j &\geq 0 , \text{ 整数 } , \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

现在,我们应用动态规划方法来求解. 我们把这个装载问题分成 3 个阶段,在第 k 阶段需要确定 $k^{\#}$ 货物的装载件数. 令

s_k ——对 $k^{\#}, \dots, 3^{\#}$ 货物允许的装载重量；

x_k —— $k^{\#}$ 货物的装载件数；

$w_k(s_k, x_k)$ —— $k^{\#}$ 货物装载 x_k 件时的收益： $w_k(s_k, x_k) = c_k x_k$ ；

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k+1} = s_k - a_k x_k$ ；

$f_k(s_k)$ ——对 $k^{\#}, \dots, 3^{\#}$ 货物允许载重 s_k 时采取最佳决策所能获得的最大收益.

递归方程为

$$\begin{cases} f_4(s_4) = 0 , \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{c_k x_k + f_{k+1}(s_{k+1})\} , \quad k = 3, 2, 1. \end{cases}$$

下面我们用逆序解法求解.

第一步, $k = 3$, 有方程

$$\begin{cases} f_4(s_4) = 0 , \\ f_3(s_3) = \max_{x_3 \in D_3(s_3)} \{6x_3 + f_4(s_4)\} , \\ s_4 = s_3 - 5x_3 . \end{cases}$$

显然, $S_3 = \{0, 1, \dots, 20\}$, 由于 $3^{\#}$ 货物至多装载 2 件, 因此, 决策集为

$$D_3(s_3) = \left\{ x_3 \mid 0 \leq x_3 \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{s_3}{a_3} \right\rfloor, 2 \right\} , x_3 \text{ 为整数} \right\} ,$$

由表 8-10 给出.

表 8-10

s_3	0~4	5~9	10~20
$D_3(s_3)$	{0}	{0, 1}	{0, 1, 2}

$f_3(s_3)$ 的计算过程如表 8-11 所示.

表 8-11

s_3	$6x_3 + f_4(s_3 - 5x_3)$			$f_3(s_3)$	x_3^*
	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$		
0~4	0+0	—	—	0	0
5~9	0+0	6+0	—	6	1
10~20	0+0	6+0	12+0	12	2

第二步, $k = 2$, 有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{5x_2 + f_3(s_3)\}, \\ s_3 = s_2 - 4x_2. \end{cases}$$

显然, $s_2 = \{0, 1, \dots, 20\}$. 由于 $2^\#$ 货物至多装载 2 件, 且 $a_2 = 4$, 因此, 决策集合为

$$D_2(s_2) = \left\{ x_2 \mid 0 \leq x_2 \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{s_2}{a_2} \right\rfloor, 2 \right\}, x_2 \text{ 为整数} \right\},$$

它由表 8-12 给出.

表 8-12

s_2	0~3	4~7	8~20
$D_2(s_2)$	{0}	{0, 1}	{0, 1, 2}

在列举本阶段的可能状态时, 我们希望将那些具有相同 $f_2(s_2)$ 值的状态合并成一类, 以减少计算次数. 如果只孤立地考虑阶段 2, 则根据表 8-12, 我们将 $S_2 = \{0, 1, \dots, 20\}$ 划分成 3 个子集 $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$ 和 $\{8, \dots, 20\}$ (我们称 0, 4 和 8 为划分点), 各个子集中的状态的决策集合相同, 但是我们发现, 同一个子集中的状态 s_2 相应的 $f_2(s_2)$ 值并不相同. 例如 $s_2 = 4$ 和 $s_2 = 5$ 在同一个子集中, 而表 8-13 告诉我们, $f_2(4) \neq f_2(5)$.

表 8-13

s_2	$5x_2 + f_3(s_2 - 4x_2)$		$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$		
4	0 + 0	5 + 0	5	1
5	0 + 6	5 + 0	6	0

所以, 对 S_2 的划分, 要同时结合 S_3 的划分来考虑. 由表 8-10 和表 8-12 知:

S_3 划分点向量 $(t_1, t_2, t_3) = (0, a_3, 2a_3) = (0, 5, 10)$,

S_2 划分点向量 $(u_1, u_2, u_3) = (0, a_2, 2a_2) = (0, 4, 8)$.

表 8-14

$t_i + u_j$		u_1	u_2	u_3
		0	4	8
t_1	0	0	4	8
t_2	5	5	9	13
t_3	10	10	14	18

于是, 我们计算 S_2 关于 $f_2(s_2)$ 的划分点 $t_i + u_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) 如表 8-14 所示. 因此, 我们将 $S_2 = \{0, \dots, 20\}$ 划分成 9 个子集:

$\{0, 1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6, 7\}, \{8\}, \{9\}, \{10, 11, 12\}, \{13\}, \{14, 15, 16, 17\}, \{18, 19, 20\}$.

$f_2(s_2)$ 的计算过程由表 8-15 给出.

第三步, $k = 1$, 有方程

$$\begin{cases} f_1(s_1) = \max_{x_1 \in D_1(s_1)} \{4x_1 + f_2(s_2)\}, \\ s_2 = s_1 - 3x_1. \end{cases}$$

表 8-15

s_2	$5x_2 + f_3(s_2 - 4x_2)$			$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$		
0~3	0+0	—	—	0	0
4	0+0	0+5	—	5	1
5~7	0+6	5+0	—	6	0
8	0+6	5+0	10+0	10	2
9	0+6	5+6	10+0	11	1
10~12	0+12	5+6	10+0	12	0
13	0+12	5+6	10+6	16	2
14~17	0+12	5+12	10+6	17	1
18~20	0+12	5+12	10+12	22	2

显然, $S_1 = \{20\}$, $D_1(20) = \{0, 1, \dots, 6\}$, $f_1(s_1)$ 的计算过程如表 8-16 所示.

表 8-16

s_1	$4x_1 + f_2(s_1 - 3x_1)$							$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$		
20	0+22	4+17	8+17	12+12	16+10	20+6	24+0	26	4, 5

由顺序追踪法可知, 本问题的最优策略为

$$\begin{array}{ccccccc}
 s_1 = 20 & \longrightarrow & s_2 = 8 & \longrightarrow & s_3 = 0, & \text{或} & s_1 = 20 \longrightarrow s_2 = 5 \longrightarrow s_3 = 5, \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 x_1^* = 4 & & x_2^* = 2 & & x_3^* = 0; & & x_1^* = 5 & x_2^* = 0 & x_3^* = 1.
 \end{array}$$

即最优装载方案有 2 个:

方案 I: 1[#] 货物装 4 件, 2[#] 货物装 2 件, 3[#] 货物不装;

方案 II: 1[#] 货物装 5 件, 2[#] 货物不装, 3[#] 货物装 1 件,

装载收费 26.

例 8-4 (生产与存储问题) 某工厂安排明年 4 个季度某种产品的生产计划. 市场对该厂该产品的需求量及工厂在各个季度的生产能力如表 8-17 所示.

表 8-17

季度 k	需求量 a_k	生产能力 b_k
1	2	6
2	3	4
3	4	5
4	2	4

每季度生产这种产品的固定成本 $F = 3$ (与产品批量无关, 不生产时则 $F = 0$), 每件产品的成本 $c = 1$. 本季度产品当季如不能出售, 则需运到仓库存储, 每季度每件产品的存储费 $g = 0.5$. 每个季度仓库的最大库存量 $E = 3$. 假设明年年初和年末的库存量均应为零, 试问该厂应如何安

排 4 个季度的生产,以保证在满足市场需求的前提下,使生产和存储的总费用最小?

解 将每一个季度看作一个阶段,本问题就是一个 4 阶段的决策问题. 令

s_k ——第 k 季度初的仓库库存量;

x_k ——第 k 季度的生产量;

$w_k(s_k, x_k)$ ——第 k 季度的生产和存储费:

$$w_k(s_k, x_k) = \begin{cases} 0.5s_k, & \text{当 } x_k = 0, \\ 3 + x_k + 0.5s_k, & \text{当 } x_k > 0; \end{cases}$$

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k+1} = s_k + x_k - a_k$;

$f_k(s_k)$ ——在第 k 季度初库存量为 s_k 的条件下,为满足市场需求,从第 k 季度至年末生产和存储该产品的最低费用.

递归方程为

$$\begin{cases} f_5(s_5) = 0, \\ f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 4, 2, 3, 1, \\ s_1 = 0, s_5 = 0, 0 \leq s_k \leq 3 \quad (k = 2, 3, 4). \end{cases}$$

现在我们用逆序解法求解.

第一步, $k = 4$, 有方程

$$\begin{cases} f_5(s_5) = 0, s_5 = 0, \\ f_4(s_4) = \min_{x_4 \in D_4(s_4)} \{w_4(s_4, x_4) + f_5(s_5)\}, \\ s_5 = s_4 + x_4 - 2. \end{cases}$$

因为 $s_5 = 0$, 所以 $x_4 = 2 - s_4$. 由于 $x_4 \geq 0$, 所以有 $0 \leq s_4 \leq 2, S_4 = \{0, 1, 2\}$. 计算过程如表 8-18 所示.

表 8-18

s_4	$w_4(s_4, x_4)$			$f_4(s_4)$	x_4^*
	$x_4 = 0$	$x_4 = 1$	$x_4 = 2$		
0	—	—	$5 + 0$	5	2
1	—	$4.5 + 0$	—	4.5	1
2	$1 + 0$	—	—	1	0

第二步, $k = 3$, 有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{w_3(s_3, x_3) + f_4(s_4)\}, \\ s_4 = s_3 + x_3 - 4. \end{cases}$$

因为 $0 \leq s_4 \leq 2$, 所以有 $4 \leq s_3 + x_3 \leq 6$. 又根据问题假设条件 $0 \leq s_3 \leq E = 3, 0 \leq x_3 \leq b_3 = 5$, 因此 $S_3 = \{0, 1, 2, 3\}$, 决策集合 $D_3(s_3)$ 由表 8-19 给出. 计算过程如

表 8-20 所示.

表 8-19

s_3	0	1	2	3
$D_3(s_3)$	$\{4, 5\}$	$\{3, 4, 5\}$	$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3\}$

表 8-20

s_3	$w_3(s_3, x_3) + f_4(s_3 + x_3 - 4)$					$f_3(s_3)$	x_3^*
	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$x_3 = 5$		
0	—	—	—	$7 + 5$	$8 + 4.5$	12	4
1	—	—	$6.5 + 5$	$7.5 + 4.5$	$8.5 + 1$	9.5	5
2	—	$6 + 5$	$7 + 4.5$	$8 + 1$	—	9	4
3	$5.5 + 6$	$6.5 + 4.5$	$7.5 + 1$	—	—	8.5	3

第二步, $k = 2$, 有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \min_{x_2 \in D_2(s_2)} \{w_2(s_2, x_2) + f_3(s_3)\}, \\ s_3 = s_2 + x_2 - 3. \end{cases}$$

因为 $0 \leq s_3 \leq 3$, 所以有 $3 \leq s_2 + x_2 \leq 6$. 根据题设 $0 \leq s_2 \leq E = 3, 0 \leq x_2 \leq b_2 = 4$, 因此 $S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$, 决策集合 $D_2(s_2)$ 由表 8-21 给出. 计算过程如表 8-22 所示.

表 8-21

s_2	0	1	2	3
$D_2(s_2)$	$\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$

表 8-22

s_2	$w_2(s_2, x_2) + f_3(s_2 + x_2 - 3)$					$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$		
0	—	—	—	$6 + 12$	$7 + 9.5$	16.5	4
1	—	—	$5.5 + 12$	$6.5 + 9.5$	$7.5 + 9$	16	3
2	—	$5 + 12$	$6 + 9.5$	$7 + 9$	$8 + 8.5$	15.5	2
3	$1.5 + 12$	$5.5 + 9.5$	$6.5 + 9$	$7.5 + 8.5$	—	13.5	0

第四步, $k = 1$, 有方程

$$\begin{cases} f_1(s_1) = \min_{x_1 \in D_1(s_1)} \{w_1(s_1, x_1) + f_2(s_2)\}, \\ s_2 = s_1 + x_1 - 2, s_1 = 0. \end{cases}$$

显然, $s_2 = x_1 - 2$, 据题设 $0 \leq s_2 \leq E = 3$, 所以有 $0 \leq x_1 - 2 \leq 3$, 即 $2 \leq x_1 \leq 5$. 因此 $D_1(0) = \{2, 3, 4, 5\}$. 计算过程如表 8-23 所示.

表 8-23

s_1	$w_1(s_1, x_1) + f_2(s_1 + x_1 - 2)$				$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$		
0	5 + 16.5	6 + 16	7 + 15.5	8 + 13.5	21.5	2, 5

由顺序追踪法可知本问题的最优策略为

$$\begin{array}{cccc} s_1 = 0 & \longrightarrow & s_2 = 0 & \longrightarrow & s_3 = 1 & \longrightarrow & s_4 = 2, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 2 & & x_2^* = 4 & & x_3^* = 5 & & x_4^* = 0; \end{array}$$

或者

$$\begin{array}{cccc} s_1 = 0 & \longrightarrow & s_2 = 3 & \longrightarrow & s_3 = 0 & \longrightarrow & s_4 = 0, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 5 & & x_2^* = 0 & & x_3^* = 4 & & x_4^* = 2. \end{array}$$

即最优生产方案有 2 个：

方案 I：4 个季度生产的产品件数分别为

$$2, 4, 5, 0;$$

方案 II：4 个季度生产的产品件数分别为

$$5, 0, 4, 2.$$

总的费用为 21.5.

例 8-5 (仪器置换问题) 某科学实验可用 $1^\#$, $2^\#$, $3^\#$ 不同仪器中的任一套去完成. 每做完一次试验后, 如果下次仍用原来的仪器, 则需对该仪器进行检查整修而中断试验; 如果下次换用另外一套仪器, 则需拆装仪器, 也要中断试验. 假定一次试验时间比任何一套仪器的整修时间都长, 因此一套仪器换下来隔一次再重新使用时, 不会由于整修而影响试验. 设 $i^\#$ 仪器换成 $j^\#$ 仪器所需中断试验的时间 t_{ij} 如表 8-24 所示. 现要做 4 次试验, 问应如何安排使用仪器的顺序, 使总的中断

表 8-24

t_{ij}		$j^\#$ 仪器		
		$1^\#$	$2^\#$	$3^\#$
$i^\#$ 仪器	$1^\#$	10	9	14
	$2^\#$	9	12	10
	$3^\#$	6	5	8

试验的时间最小?

解 假设每次中断试验为一个阶段, 则本问题为 3 阶段的决策过程. 令

s_k ——第 k 次中断试验前所使用的仪器;

x_k ——第 k 次中断试验而恢复试验时采用的仪器;

$w_k(s_k, x_k)$ ——第 k 次中断试验所需时间: $w_k(s_k, t_k) = t_{s_k x_k}$;

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k+1} = x_k$;

$f_k(s_k)$ ——当第 k 次中断试验前使用仪器为 s_k 时, 从第 k 次中断试验直至做完第 4 次试验所花费的最短中断时间.

递归方程为

$$\begin{cases} f_4(s_4) = 0, \\ f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 3, 2, 1. \end{cases}$$

显然,第 k 阶段的状态集合 S_k 和决策集合 $D_k(s_k)$ 都为 $\{1, 2, 3\} (k = 1, 2, 3)$.

现在我们用逆序解法来求解.

第一步, $k = 3$, 有方程

$$f_3(s_3) = \min\{t_{s_3 x_3} \mid x_3 = 1, 2, 3\},$$

计算过程如表 8-25 所示.

表 8-25

s_3	$t_{s_3 x_3}$			$f_3(s_3)$	x_3^*
	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$		
1	10	9	14	9	2
2	9	12	10	9	1
3	6	5	8	5	2

第二步, $k = 2$, 有方程

$$f_2(s_2) = \min\{t_{s_2 x_2} + f_3(x_2) \mid x_2 = 1, 2, 3\},$$

计算过程如表 8-26 所示.

表 8-26

s_2	$t_{s_2 x_2} + f_3(x_2)$			$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$		
1	10 + 9	9 + 9	14 + 5	18	2
2	9 + 9	12 + 9	10 + 5	15	3
3	6 + 9	5 + 9	8 + 5	13	3

第三步, $k = 1$, 有方程

$$f_1(s_1) = \min\{t_{s_1 x_1} + f_2(x_1) \mid x_1 = 1, 2, 3\},$$

计算过程如表 8-27 所示.

表 8-27

s_1	$t_{s_1 x_1} + f_2(x_1)$			$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$		
1	10 + 18	9 + 15	14 + 13	24	2
2	9 + 18	12 + 15	10 + 13	23	3
3	6 + 18	5 + 15	8 + 13	20	2

由于本问题有

$$S_1 = \{1, 2, 3\},$$

因此取

$$f_1^*(s_1^*) = \min\{f_1(s_1) \mid s_1 = 1, 2, 3\} = \min\{24, 23, 20\} = 20 = f_1(3),$$

于是 $s_1^* = 3$. 由顺序追踪法得本问题的最优策略:

$$\begin{array}{ccccc} s_1^* = 3 & \longrightarrow & s_2^* = 2 & \longrightarrow & s_3^* = 3, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 2 & & x_2^* = 3 & & x_3^* = 2. \end{array}$$

所以 4 次试验的仪器安排顺序为: 3[#] 仪器, 2[#] 仪器, 3[#] 仪器, 2[#] 仪器, 总的中断时间为 20.

例 8-6 (背包问题) 用动态规划方法求解下列 0-1 背包问题:

$$\begin{aligned} \max f &= \sum_{k=1}^4 c_k x_k = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4; \\ \text{s. t. } \sum_{k=1}^4 a_k x_k &= 8x_1 + 13x_2 + 6x_3 + 9x_4 \leq 24, \\ x_k &= 0, 1, \quad k = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

解 本问题分为 4 个阶段. 令

s_k —— $a_k x_k + \dots + a_4 x_4$ 的允许值;

x_k ——第 k 阶段 x_k 的取值, $x_k = 0, 1$;

$w_k(s_k, x_k)$ —— x_k 产生的价值: $w_k(s_k, x_k) = c_k x_k$;

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k+1} = s_k - a_k x_k$;

$f_k(s_k)$ ——在 $a_k x_k + \dots + a_4 x_4 \leq s_k$ 的条件下, $c_k x_k + \dots + c_4 x_4$ 能取得的最大值.

递归方程为

$$\begin{cases} f_5(s_5) = 0, \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{c_k x_k + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 4, 3, 2, 1. \end{cases}$$

我们用逆序解法对本模型求解.

第一步, 对 $k = 4$, 有方程

$$f_4(s_4) = \max_{x_4 \in D_4(s_4)} \{4x_4\}.$$

显然, $S_4 = \{0, 1, \dots, 24\}$, 将 S_4 划分成两个子集 $\{0, 1, \dots, 8\}$ 和 $\{9, 10, \dots, 24\}$ (S_4 的划分点 $t_1 = 0$ 和 $t_2 = 9$). 对于 $s_4 \in \{0, 1, \dots, 8\}$, 有 $D_4(s_4) = \{0\}$. 对于 $s_4 \in \{9, 10, \dots, 24\}$, 有 $D_4(s_4) = \{0, 1\}$.

$f_4(s_4)$ 的计算过程如表 8-28 所示.

第二步, 对 $k = 3$, 有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \max_{x_3 \in D_3(s_3)} \{2x_3 + f_4(s_4)\}, \\ s_4 = s_3 - 6x_3. \end{cases}$$

显然, $S_3 = \{0, 1, \dots, 24\}$. 由 $a_3 = 6$ 可知 S_3 的划分点 $u_1 = 0, u_2 = 6$. 对于 $s_3 \in \{0, \dots, 5\}$, 有 $D_3(s_3) = \{0\}$; 对于 $s_3 \in \{6, \dots, 24\}$, 有 $D_3(s_3) = \{0, 1\}$. 根据 $f_3(s_3)$ 和 $f_4(s_4)$ 取值的情况, 我们由表 8-29 给出 S_3 关于 $f_3(s_3)$ 的划分点: $t_i + u_j (i, j = 1, 2)$.

表 8-28

s_4	$4x_4$		$f_4(s_4)$	x_4^*
	$x_4 = 0$	$x_4 = 1$		
0~8	0	—	0	0
9~24	0	4	4	1

表 8-29

$t_i + u_j$		u_1	u_2
		0	6
t_1	0	0	6
t_2	9	9	15

我们将 $S_3 = \{0, \dots, 24\}$ 划分成 4 个子集: $\{0, \dots, 5\}, \{6, \dots, 8\}, \{9, \dots, 14\}$ 和 $\{15, \dots, 24\}$.

$f_3(s_3)$ 的计算过程如表 8-30 所示.

表 8-30

s_3	$2x_3 + f_4(s_3 - 6x_3)$		$f_3(s_3)$	x_3^*
	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$		
0~5	0 + 0	—	0	0
6~8	0 + 0	2 + 0	2	1
9~14	0 + 4	2 + 0	4	0
15~24	0 + 4	2 + 4	6	1

第三步, 对 $k = 2$, 有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{5x_2 + f_3(s_3)\}, \\ s_3 = s_2 - 13x_2. \end{cases}$$

显然, $S_2 = \{0, \dots, 24\}$ 的划分点为 $v_1 = 0, v_2 = 13$. 对于 $s_2 \in \{0, \dots, 12\}$, 有 $D_2(s_2) = \{0\}$.

对于 $s_2 \in \{13, \dots, 24\}$, 有 $D_2(s_2) = \{0, 1\}$.

由第二步知, S_3 关于 f_3 的划分点 $q_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 分别为 0, 6, 9, 15. 于是, 为计算 $v_i + q_j$, 我们列出表 8-31, 由该表可知, S_2 关于 $f_2(s_2)$ 的划分点分别为 0, 6, 9, 13, 15, 19, 22 (由于 $v_2 + q_4 = 13 + 15 = 28 > 24$, 故 $v_2 + q_4 = 28$ 不作为划分点).

表 8-31

$v_i + q_j$		q_1	q_2	q_3	q_4
		0	6	9	15
v_1	0	0	6	9	15
v_2	13	13	19	22	28

$f_2(s_2)$ 的计算过程如表 8-32 所示.

表 8-32

s_2	$5x_2 + f_2(s_2 - 13x_2)$		$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$		
0~5	0 + 0	—	0	0
6~8	0 + 2	—	2	0
9~12	0 + 4	—	4	0
13~14	0 + 4	5 + 0	5	1
15~18	0 + 6	5 + 0	6	0
19~21	0 + 6	5 + 2	7	1
22~24	0 + 6	5 + 4	9	1

第四步,对 $k = 1$,有方程

$$\begin{cases} f_1(s_1) = \max_{x_1 \in D_1(s_1)} \{3x_2 + f_2(s_2)\}, \\ s_2 = s_1 - 8x_1, \quad s_1 = 24. \end{cases}$$

336
■■■■■

显然, $D_1(s_1) = \{0, 1\}$. $f_1(s_1)$ 的计算过程如表 8-33 所示. 于是,根据顺序追踪法可知, 0-1 背包问题有 2 个最优解 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^T$, 最优值 $f^* = 9$:

表 8-33

s_1	$3x_1 + f_2(s_1 - 8x_1)$		$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$		
24	0 + 9	3 + 6	9	0, 1

$$\begin{array}{cccc} s_1 = 24 & \longrightarrow & s_2 = 16 & \longrightarrow & s_3 = 16 & \longrightarrow & s_4 = 10, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 1 & & x_2^* = 0 & & x_3^* = 1 & & x_4^* = 1; \end{array}$$

或者

$$\begin{array}{cccc} s_1 = 24 & \longrightarrow & s_2 = 24 & \longrightarrow & s_3 = 11 & \longrightarrow & s_4 = 11, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 0 & & x_2^* = 1 & & x_3^* = 0 & & x_4^* = 1. \end{array}$$

例 8-7 (可靠性问题) 某种仪表由 3 种不同的元件串联而成,任一个元件的故障将造成整台仪表的故障. 每种元件又都有 3 种规格,设 $k^{\#}$ 元件 $j^{\#}$ 规格的可靠性为 R_{kj} ,所需费用为 C_{kj} . 生产每台仪表的费用限额 E 为 10. 试问如何选用各种元件的规格,使得仪表的可靠性最大? R_{kj} 及 C_{kj} 分别由表 8-34 和表 8-35 给出.

表 8-34

R_{kj}		$j^{\#}$ 规格		
		1 [#]	2 [#]	3 [#]
$k^{\#}$ 元件	1 [#]	0.5	0.7	0.9
	2 [#]	0.7	0.8	0.9
	3 [#]	0.6	0.8	0.9

表 8-35

C_{kj}		$j^{\#}$ 规格		
		1 [#]	2 [#]	3 [#]
$k^{\#}$ 元件	1 [#]	2	4	5
	2 [#]	3	5	6
	3 [#]	1	2	3

解 我们把这个问题分成 3 个阶段. 在第 k 阶段要确定 $k^{\#}$ 元件的规格. 对本问题我们采用顺序解法来解. 令

s_k ——仪表上配备 1[#], ..., $k^{\#}$ 元件时允许使用的费用;

x_k —— $k^{\#}$ 元件所选用的规格;

$w_k(s_k, x_k)$ —— $k^{\#}$ 元件采用规格 x_k 时的可靠性, 有

$$w_k(s_k, x_k) = R_{kx_k};$$

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k-1} = s_k - C_{kx_k}$;

$f_k(s_k)$ ——在费用限额为 s_k 的条件下, 1[#], ..., $k^{\#}$ 元件串联时相应部分可获得的最大可靠性.

递归方程为

$$\begin{cases} f_0(s_0) = 1, \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(s_k, x_k) \cdot f_{k-1}(s_{k-1})\}, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

下面我们用顺序解法求解.

第一步, 对 $k = 1$, 有方程

$$f_1(s_1) = \max_{x_1 \in D_1(s_1)} \{R_{1x_1}\}.$$

由于仪表是由 3 种元件串联而成, 每一种元件都不可缺少, 而由表 8-35 知, 配备 $k^{\#}$ 元件的最小费用为 C_{k1} , 因此 s_1 应满足条件

$$2 = C_{11} \leq s_1 \leq E - C_{21} - C_{31} = 10 - 3 - 1 = 6,$$

即状态集合 $S_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. 而决策集合 $D_1(s_1)$ 由下式给出:

$$D_1(s_1) = \{x_1 \mid x_1 = 1, 2, 3, C_{1x_1} \leq s_1\},$$

由此, 我们得表 8-36.

表 8-36

s_1	2	3	4	5	6
$D_1(s_1)$	{1}	{1}	{1, 2}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}

$f_1(s_1)$ 的计算过程如表 8-37 所示.

表 8-37

s_1	R_{1x_1}			$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$		
2	0.5	—	—	0.5	1
3	0.5	—	—	0.5	1
4	0.5	0.7	—	0.7	2
5	0.5	0.7	0.9	0.9	3
6	0.5	0.7	0.9	0.9	3

第二步,对 $k = 2$,有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{R_{2x_2} \cdot f_1(s_1)\}, \\ s_1 = s_2 - C_{2x_2}. \end{cases}$$

同 $k = 1$ 时对状态 s_1 的讨论一样, s_2 应满足条件:

$$C_{11} + C_{21} \leq s_2 \leq E - C_{31},$$

即有 $S_2 = \{5, \dots, 9\}$. 由于 $2 = C_{11} \leq s_1 = s_2 - C_{2x_2}$, 所以, 决策集 $D_2(s_2)$ 由下式给出:

$$D_2(s_2) = \{x_2 \mid x_2 = 1, 2, 3, C_{2x_2} \leq s_2 - 2\},$$

我们即可得表 8-38. $f_2(s_2)$ 的计算过程如表 8-39 给出.

表 8-38

s_2	5	6	7	8	9
$D_2(s_2)$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$

表 8-39

s_2	$R_{2x_2} \cdot f_1(s_2 - C_{2x_2})$			$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$		
5	$0.7 \cdot 0.5$	—	—	0.35	1
6	$0.7 \cdot 0.5$	—	—	0.35	1
7	$0.7 \cdot 0.7$	$0.8 \cdot 0.5$	—	0.49	1
8	$0.7 \cdot 0.9$	$0.8 \cdot 0.5$	$0.9 \cdot 0.5$	0.63	1
9	$0.7 \cdot 0.9$	$0.8 \cdot 0.7$	$0.9 \cdot 0.5$	0.63	1

第三步,对 $k = 3$,有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \max_{x_3 \in D_3(s_3)} \{R_{3x_3} \cdot f_2(s_2)\}, \\ s_2 = s_3 - C_{3x_3}, \quad s_3 = 10. \end{cases}$$

现在 $S_3 = \{10\}$. 由于 $5 \leq s_2 = 10 - C_{3x_3}$, 因此, 有

$$D_3(10) = \{x_3 \mid x_3 = 1, 2, 3, C_{3x_3} \leq 5\} = \{1, 2, 3\}.$$

$f_3(s_3)$ 的计算由表 8-40 给出.

表 8-40

s_3	$R_{3x_3} \cdot f_2(s_3 - C_{3x_3})$			$f_3(s_3)$	x_3^*
	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$		
10	$0.6 \cdot 0.63$	$0.8 \cdot 0.63$	$0.9 \cdot 0.49$	0.504	2

此时, 运用逆序追踪法, 由状态转移方程可知最优策略为

$$\begin{array}{ccccc} s_3 = 10 & \longrightarrow & s_2 = 8 & \longrightarrow & s_1 = 5, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_3^* = 2 & & x_2^* = 1 & & x_1^* = 3. \end{array}$$

因此, 最佳设计方案为: 1[#] 元件选 3[#] 规格, 2[#] 元件选 1[#] 规格, 3[#] 元件选 2[#] 规格. 此时, 仪表的可靠性为 0.504.

例 8-8 (生产计划问题) 用动态规划方法求解第一章例 1-20 (假设每季度对产品的需求量和生产能力都是 10 的倍数).

解 将每一个季度看作一个阶段, 本问题就是一个 4 阶段的决策过程. 令

s_k ——第 k 季度初的库存量;

x_k ——第 k 季度的产量;

$w_k(s_k, x_k)$ ——第 k 季度的生产成本和存储费之和: $w_k(s_k, x_k) = 0.2s_k + d_kx_k$;

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k+1} = s_k + x_k - b_k$;

$f_k(s_k)$ ——当 k 季度初的库存量为 s_k 时, 从第 k 季度到年末, 厂方为完成合同所需支付的最少的生产费用.

递归方程为

$$\begin{cases} f_5(s_5) = 0, s_5 = 0, s_1 = 0, \\ f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 4, 3, 2, 1. \end{cases}$$

下面用逆序解法求解.

第一步, 对 $k = 4$, 有方程

$$\begin{cases} f_4(s_4) = \min_{x_4 \in D_4(s_4)} \{0.2s_4 + 14.8x_4\} \\ 0 = s_5 = s_4 + x_4 - 10. \end{cases}$$

由于前 3 个季度至多生产

$$a_1 + a_2 + a_3 = 30 + 40 + 20 = 90,$$

而前 3 个季度合同的需求量

$$b_1 + b_2 + b_3 = 20 + 20 + 30 = 70.$$

所以, $s_4 \leq 90 - 70 = 20$. 又 $x_4 = 10 - s_4, 0 \leq x_4 \leq a_4 = 10$, 从而 $0 \leq s_4 \leq 10, S_4 = \{0, 10\}$. 当 $s_4 = 0$ 时, $D_4(0) = \{10\}$; 当 $s_4 = 10$ 时, $D_4(10) = \{0\}$. $f_4(s_4)$ 的值由表 8-41 给出.

第二步, 对 $k = 3$, 有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{0.2s_2 + 15.3x_3 + f_4(s_4)\}, \\ s_4 = s_3 + x_3 - 30. \end{cases}$$

由于

$$a_1 + a_2 = 70, \quad b_1 + b_2 = 40,$$

因此 $s_3 \leq 30$. 据题设 $30 - s_3 \leq x_3 \leq 20$, 因此有 $s_3 \geq 10$. 故状态集合 $S_3 = \{10, 20, 30\}$. 决策集合由表 8-42 给出.

表 8-41

s_4	x_4^*	$f_4(s_4) = 0.2s_4 + 14.8x_4^*$
0	10	148
10	0	2

表 8-42

s_3	10	20	30
$D_3(s_3)$	$\{20\}$	$\{10, 20\}$	$\{0, 10\}$

在表 8-42 中, 当 $s_3 = 30$ 时, 因为 $s_4 \leq 10$, 而 $s_4 = s_3 + x_3 - 30$, 所以 $x_3 \leq 10$. $f_3(s_3)$ 的计算过程如表 8-43 所示.

表 8-43

s_3	$0.2s_3 + 15.3x_3 + f_4(s_3 + x_3 - 30)$			$f_3(s_3)$	x_3^*
	$x_3 = 0$	$x_3 = 10$	$x_3 = 20$		
10	—	—	$308 + 148$	456	20
20	—	$157 + 148$	$310 + 2$	305	10
30	$6 + 148$	$159 + 2$	—	154	0

第三步, $k = 2$, 有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{0.2s_2 + 14x_2 + f_3(s_3)\}, \\ s_3 = s_2 + x_2 - 20. \end{cases}$$

因为 $a_1 = 30, b_1 = 20$, 所以 $s_2 \leq 10$. 又因为 $a_2 + a_3 + a_4 = 70 > b_2 + b_3 + b_4 = 60$, 所以允许 $s_2 = 0$. 从而, 状态集合 $S_2 = \{0, 10\}$.

由于 $10 \leq s_3 \leq 30, s_3 = s_2 + x_2 - 20$, 因此有 $30 - s_2 \leq x_2 \leq 50 - s_2$, 又考虑到 $x_2 \leq a_2 = 40$, 于是对 $s_2 = 0$ 或 10 来说, 应有

表 8-44

s_2	0	10
$D_2(s_2)$	$\{30, 40\}$	$\{20, 30, 40\}$

$$30 - s_2 \leq x_2 \leq 40. \quad (8-3)$$

决策集合 $D_2(s_2)$ 由表 8-44 给出. $f_2(s_2)$ 的计算由表 8-45 给出.

表 8-45

s_2	$0.2s_2 + 14x_2 + f_3(s_2 + x_2 - 20)$			$f_2(s_2)$	x_2^*
	$x_2 = 20$	$x_2 = 30$	$x_2 = 40$		
0	—	$420 + 456$	$560 + 305$	864	40
10	$286 + 456$	$422 + 305$	$562 + 154$	716	40

第四步,对 $k = 1$,有方程

$$\begin{cases} f_1(s_1) = \min_{x_1 \in D_1(s_1)} \{0.2s_1 + 15x_1 + f_2(s_2)\}, \\ s_2 = s_1 + x_1 - 20, \quad s_1 = 0. \end{cases}$$

由于 $s_1 = 0$,故根据题设应有

$$20 = b_1 \leq x_1 \leq a_1 = 30,$$

即 $S_1 = \{0\}, D_1(0) = \{20, 30\}$.

表 8-46 给出了 $f_1(s_1)$ 的计算.

表 8-46

s_1	$0.2s_1 + 15x_2 + f_2(s_1 + x_1 - 20)$		$f_1(s_1)$	x_1^*
	$x_1 = 20$	$x_1 = 30$		
0	$300 + 865$	$450 + 716$	1 165	20

用顺序追踪法即得本问题的最优策略:

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 = 0 & \longrightarrow & s_2 = 0 & \longrightarrow & s_3 = 20 & \longrightarrow & s_4 = 0, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 20 & & x_2^* = 40 & & x_3^* = 10 & & x_4^* = 10. \end{array}$$

即明年的最优生产计划为各季度分别生产 20, 40, 10 和 10(吨),总费用为 1 165 万元.

在上述求解过程中,我们可以发现,在第 k 阶段,无论 s_k 取 S_k 中何值, $w_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})$ 或随 x_k 增大而增大(如 $k = 3, 1$),或随 x_k 的增大而减少(如 $k = 2$),如果进一步经过变换(见下面分析),可知 $w_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})$ 是 x_k 的线性函数,这使我们想到,如果把 x_k 和 s_k 视作连续型变量,是否可以利用微积分中的方法,来求 $f_k(s_k)$ 及 x_k^* ? 下面我们来探索这一方法.

第一步,对 $k = 4$,有

$$0 \leq s_4 \leq 10, x_4 = 10 - s_4,$$

$$f_4(s_4) = 0.2s_4 + 14.8x_4 = 0.2s_4 + 14.8(10 - s_4) = 148 - 14.6s_4.$$

第二步,对 $k = 3$,有

$$10 \leq s_3 \leq 30, 30 - s_3 \leq x_3 \leq 20,$$

$$f_3(s_3) = \min_{30-s_3 \leq x_3 \leq 20} \{0.2s_3 + 15.3x_3 + f_4(s_3 + x_3 - 30)\}$$

$$= \min_{30-s_3 \leq x_3 \leq 20} \{0.2s_3 + 15.3x_3 + 148 - 14.6(s_3 + x_3 - 30)\}$$

$$= \min_{30-s_3 \leq x_3 \leq 20} \{0.7x_3 - 14.4s_3 + 586\}.$$

显然,当 $x_3^* = 30 - s_3$ 时, $0.7x_3 - 14.4s_3 + 586$ 取得极小值 $f_3(s_3)$:

$$f_3(s_3) = 607 - 15.1s_3.$$

第三步,对 $k = 2$,由式(8-3)知

$$30 - s_2 \leq x_2 \leq 40.$$

又 $0 \leq s_2 \leq 10$,

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min_{30-s_2 \leq x_2 \leq 40} \{0.2s_2 + 14x_2 + f_3(s_2 + x_2 - 20)\} \\ &= \min_{30-s_2 \leq x_2 \leq 40} \{0.2s_2 + 14x_2 + 607 - 15.1(s_2 + x_2 - 20)\} \\ &= \min_{30-s_2 \leq x_2 \leq 40} \{-1.1x_2 - 14.9s_2 + 909\}. \end{aligned}$$

显然,当 $x_2^* = 40$ 时,

$$-1.1x_2 - 14.9s_2 + 909,$$

取得极小值 $f_2(s_2)$:

$$f_2(s_2) = -14.9s_2 + 865.$$

第四步,对 $k = 1$,有

$$s_1 = 0, \quad 20 \leq x_1 \leq 30,$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \min_{20 \leq x_1 \leq 30} \{15x_1 + f_2(x_1 - 20)\} \\ &= \min_{20 \leq x_1 \leq 30} \{15x_1 + 865 - 14.9(x_1 - 20)\} \\ &= \min_{20 \leq x_1 \leq 30} \{0.1x_1 + 1163\}. \end{aligned}$$

显然

$$x_1^* = 20, f_1(0) = 1163.$$

运用顺序追踪法可得本问题的最优策略:

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 = 0 & \longrightarrow & s_2 = 0 & \longrightarrow & s_3 = 20 & \longrightarrow & s_4 = 0, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 20, & & x_2^* = 40, & & x_3^* = 30 - s_3 = 10, & & x_4^* = 10 - s_4 = 10. \end{array}$$

例 8-9 (机器负荷问题) 设某种机器可以在高、低两种不同的负荷下进行生产.若年初有 x 台机器在高负荷下进行生产,则产品年产量 $a = 8x$,机器的年折损率 $\beta = 0.3$;若年初有 y 台机器在低负荷下进行生产,则产品年产量 $b = 5y$,机器的年折损率 $\alpha = 0.1$.若初始时有性能正常的机器 1000 台,要求制定机器负荷的 4 年分配计划,每年年初分配正常机器在不同负荷下工作的台数,使 4 年内产品总产量最大.

解 这是一个 4 阶段决策过程,阶段 k 表示第 k 年度.令

s_k ——第 k 年度初正常机器台数;

x_k ——第 k 年度初分配在高负荷下工作的机器台数;

$w_k(s_k, x_k)$ —— s_k 台机器在第 k 年的产品产量:

$$w_k(s_k, x_k) = 8x_k + 5(s_k - x_k) = 5s_k + 3x_k;$$

$$T_k(s_k, x_k) \longrightarrow s_{k+1} = 0.7x_k + 0.9(s_k - x_k) = 0.9s_k - 0.2x_k;$$

$f_k(s_k)$ ——当第 k 年初有 s_k 台正常机器时,从第 k 年至第 4 年的产品最高产量.

递归方程为

$$\begin{cases} f_5(s_5) = 0, \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{5s_k + 3x_k + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 4, 3, 2, 1. \end{cases}$$

在这里,我们假设 s_k, x_k 均为连续变量.例如 $s_k = 0.8$ 为一台机器在第 k 年度正常工作时间占 $\frac{8}{10}$, $x_k = 0.4$ 为一台机器在第 k 年的 $\frac{4}{10}$ 时间处于高负荷下工作.显然,有

$$D_k(s_k) = [0, s_k].$$

下面用逆序解法求解本问题.

第一步,对 $k = 4$,有方程

$$f_4(s_4) = \max_{x_4 \in [0, s_4]} \{5s_4 + 3x_4\},$$

可知: $x_4^* = s_4, f_4(s_4) = 8s_4$.

第二步,对 $k = 3$,有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \max_{x_3 \in [0, s_3]} \{5s_3 + 3x_3 + f_4(s_4)\}, \\ s_4 = 0.9s_3 - 0.2x_3. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \max_{x_3 \in [0, s_3]} \{5s_3 + 3x_3 + 8(0.9s_3 - 0.2x_3)\} \\ &= \max_{x_3 \in [0, s_3]} \{12.2s_3 + 1.4x_3\}, \end{aligned}$$

可知:

$$x_3^* = s_3, \quad f_3(s_3) = 13.6s_3.$$

第三步,对 $k = 2$,有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{x_2 \in [0, s_2]} \{5s_2 + 3x_2 + f_3(s_3)\}, \\ s_3 = 0.9s_2 - 0.2x_2. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{x_2 \in [0, s_2]} \{5s_2 + 3x_2 + 13.6(0.9s_2 - 0.2x_2)\} \\ &= \max_{x_2 \in [0, s_2]} \{17.24s_2 + 0.28x_2\}, \end{aligned}$$

可知:

$$x_2^* = s_2, \quad f_2(s_2) = 17.52s_2.$$

第四步,对 $k = 1$,有方程

$$\begin{cases} f_1(s_1) = \max_{x_1 \in [0, s_1]} \{5s_1 + 3x_1 + f_2(s_2)\}, \\ s_2 = 0.9s_1 - 0.2x_1, \quad s_1 = 1000. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{x_1 \in \{0, s_1\}} \{5s_1 + 3x_1 + 17.52(0.9s_1 - 0.2x_1)\} \\ &= \max_{x_1 \in \{0, s_1\}} \{20.768s_1 - 0.504x_1\}. \end{aligned}$$

显然

$$x_1^* = 0, \quad f_1(s_1) = 20.768s_1.$$

根据状态转移方程和顺序追踪法可知最优策略为

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 = 1000 & \longrightarrow & s_2 = 900 & \longrightarrow & s_3 = 630 & \longrightarrow & s_4 = 441, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 0, & & x_2^* = 900, & & x_3^* = 630, & & x_4^* = 441. \end{array}$$

即 4 年内机器负荷分配的最佳方案为:第一年年初把全部正常机器投入低负荷生产,后 3 年每年年初把正常机器投入高负荷生产,4 年内产品的最高产量 $f_1(1000) = 20718$.

例 8-10 (生产计划问题) 工厂在 3 个季度中安排某种产品的生产计划. 若该季度生产此种产品 x (吨), 则成本为 x^2 . 当季生产的产品未销售掉, 则进库后, 季末需付存储费, 每吨产品每季的存储费为 1. 现估计 3 个季度对该产品的需求量 a_k 分别为 100(吨), 110(吨)和 120(吨), 又设第一季度初及第三季度末库存量为零. 假设各季度产品的生产量不受限制, 试问如何安排 3 个季度的生产计划, 使产品的生产成本和存储费之总和最低?

解 本问题为一个 3 阶段的决策问题, 现用顺序解法求解. 令

s_k ——第 k 季度末的库存量;

x_k ——第 k 季度的产品生产量;

$w_k(s_k, x_k)$ ——第 k 季度的生产成本和存储费之和: $w_k(s_k, x_k) = x_k^2 + s_k$;

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k-1} = s_k + a_k - x_k$;

$f_k(s_k)$ ——第 k 季度末库存量为 s_k 时, 从第一季度至第 k 季度的最低生产费用.

递归方程为

$$\begin{cases} f_0(s_0) = 0, s_0 = 0, s_3 = 0, \\ f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{w_k(s_k, x_k) + f_{k-1}(s_{k-1})\}, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

下面用顺序解法求解.

第一步, 对 $k = 1$, 由 $s_0 = s_1 + a_1 - x_1$, 可知 $s_1 + 100 - x_1 = 0$, 所以有

$$\begin{aligned} x_1^* &= 100 + s_1, \\ f_1(s_1) &= (x_1^*)^2 + s_1 = (100 + s_1)^2 + s_1. \end{aligned}$$

第二步, 对 $k = 2$, 有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{x_2^2 + s_2 + f_1(s_1)\}, \\ s_1 = s_2 + 110 - x_2. \end{cases}$$

于是

$$f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{x_2^2 + s_2 + (s_2 + 210 - x_2)^2 + s_2 + 110 - x_2\}.$$

现在, x_2 为连续变量, 且对 x_2 的大小没有限制, 为此, 我们运用微积分中求极值的方法求 x_2^* . 由

$$\frac{d[w_2(s_2, x_2) + f_1(s_1)]}{dx_2} = 2x_2 - 2(s_2 + 210 - x_2) - 1 = 0,$$

求得

$$x_2^* = \frac{1}{2}(s_2 + 210) + \frac{1}{4}.$$

于是, 有

$$f_2(s_2) = \left[\frac{1}{2}(s_2 + 210) + \frac{1}{4} \right]^2 + s_2 + \left[\frac{1}{2}(s_2 + 210) - \frac{1}{4} \right]^2 + \frac{1}{2}(s_2 + 10) - \frac{1}{4}.$$

第三步, 对 $k = 3$, 有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \max_{x_3 \in D_3(s_3)} \{w_3(s_3, x_3) + f_2(s_2)\}, \\ s_2 = s_3 + 120 - x_3, \quad s_3 = 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} w_3(s_3, x_3) + f_2(s_2) &= x_3^2 + \left[\frac{1}{2}(330 - x_3) + \frac{1}{4} \right]^2 + 120 - x_3 \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}(330 - x_3) - \frac{1}{4} \right]^2 + \frac{1}{2}(130 - x_3) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} &\frac{d[w_3(s_3, x_3) + f_2(s_2)]}{dx_3} \\ &= 2x_3 - \left[\frac{1}{2}(330 - x_3) + \frac{1}{4} \right] - 1 - \left[\frac{1}{2}(330 - x_3) - \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{2} = 0, \end{aligned}$$

求得

$$x_3^* = 110.5.$$

由状态转移方程及逆序追踪法, 求得最优策略:

$$\begin{array}{ccccc} s_3 = 0 & \longrightarrow & s_2 = 9.5 & \longrightarrow & s_1 = 9.5, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_3^* = 110.5, & & x_2^* = 110, & & x_1^* = 109.5. \end{array}$$

故最优生产计划为: 3 个季度分别生产 110.5(吨), 110(吨), 109.5(吨), 此时总费用为

$$f^* = 109.5^2 + 9.5 + 110^2 + 9.5 + 110.5^2 = 36\,319.5.$$

例 8-11 (最优划分问题) 把正数 a 划分为 N 个部分, 使这 N 个部分的乘积最大.

解 设 x_k 为 a 划分后的第 k 个部分, 则得如下数学模型:

$$\begin{aligned} \max f &= x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N; \\ \text{s. t. } &x_1 + \dots + x_k + \dots + x_N = a, \\ &x_k > 0, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

我们把它视为 N 个阶段的决策问题,用动态规划的顺序解法来求解. 令

s_k —— a 划分后前 k 个部分和 $x_1 + \dots + x_k$ 的允许值;

x_k —— a 划分后第 k 部分取值;

$w_k(s_k, x_k)$ ——第 k 阶段权函数:

$$w_k(s_k, x_k) = x_k;$$

$T_k(s_k, x_k)$ —— $s_{k-1} = s_k - x_k$;

$f_k(s_k)$ ——当 $x_1 + \dots + x_k$ 的允许值为 s_k 时, $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ 可取得的最大值.

递归方程为

$$\begin{cases} f_0(s_0) = 1, \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{x_k \cdot f_k(s_{k-1})\}, \quad k = 1, \dots, N. \end{cases}$$

显然, $0 < s_k < a$, $0 < x_k < s_k$, s_k 、 x_k 都为连续变量.

下面用顺序解法解之.

第一步,对 $k = 1$,有方程

$$f_1(s_1) = \max_{x_1 \in D_1(s_1)} \{x_1\}.$$

现在 $D_1(s_1) = (0, s_1]$,故有

$$x_1^* = s_1, \quad f_1(s_1) = s_1.$$

第二步,对 $k = 2$,有方程

$$\begin{cases} f_2(s_2) = \max_{0 < x_2 < s_2} \{w_2(s_2, x_2)f_1(s_1)\}, \\ s_1 = s_2 - x_2. \end{cases}$$

现在 $w_2(s_2, x_2)f_1(s_1) = x_2(s_2 - x_2)$,由

$$\frac{d[x_2(s_2 - x_2)]}{dx_2} = s_2 - 2x_2 = 0,$$

求得

$$x_2^* = \frac{s_2}{2}, \quad f_2(s_2) = \frac{s_2}{2} \left(s_2 - \frac{s_2}{2} \right) = \frac{s_2^2}{4}.$$

第三步,对 $k = 3$,有方程

$$\begin{cases} f_3(s_3) = \max_{0 < x_3 < s_3} \{w_3(s_3, x_3)f_2(s_2)\}, \\ s_2 = s_3 - x_3. \end{cases}$$

现在

$$w_3(s_3, x_3)f_2(s_2) = x_3 f_2(s_3 - x_3) = \frac{x_3(s_3 - x_3)^2}{4},$$

由

$$\frac{d[w_3(s_3, x_3)f_2(s_2)]}{dx_3} = \frac{(s_3 - x_3)^2}{4} - \frac{x_3(s_3 - x_3)}{2} = 0,$$

求得

$$x_3^* = \frac{s_3}{3}, \quad f_3(s_3) = \left(\frac{s_3}{3} \right)^3.$$

我们用归纳法证明：

$$x_k^* = \frac{s_k}{k}, \quad f_k(s_k) = \left(\frac{s_k}{k}\right)^k.$$

假设上述结论成立, 则在第 $k+1$ 步时, 有

$$\begin{aligned} f_{k+1}(s_{k+1}) &= \max_{0 < x_{k+1} < s_{k+1}} \{x_{k+1} f_k(s_{k+1} - x_{k+1})\} \\ &= \max_{0 < x_{k+1} < s_{k+1}} \left\{ x_{k+1} \cdot \left(\frac{s_{k+1} - x_{k+1}}{k} \right)^k \right\}, \end{aligned}$$

对 $0 < x_{k+1} < s_{k+1}$, 由

$$\frac{d[s_{k+1} f_k(s_{k+1} - x_{k+1})]}{dx_{k+1}} = \frac{(s_{k+1} - x_{k+1})^k}{k^k} - \frac{x_{k+1} (s_{k+1} - x_{k+1})^{k-1}}{k^{k-1}} = 0,$$

求得

$$x_{k+1}^* = \frac{s_{k+1}}{k+1}, \quad f_{k+1}(s_{k+1}) = \left(\frac{s_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}.$$

因此, 当 $k = N$ 和 $s_N = a$ 时, 有

$$x_N^* = \frac{a}{N}, \quad f_N(a) = \left(\frac{a}{N}\right)^N.$$

由状态转移方程和逆序追踪法, 即得本问题的最优策略：

$$\begin{array}{ccccccc} s_N = a & \longrightarrow & s_{N-1} = \frac{(N-1)a}{N} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & s_2 = \frac{2a}{N} \longrightarrow s_1 = \frac{a}{N}, \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow \\ x_N^* = \frac{a}{N}, & & x_{N-1}^* = \frac{a}{N}, & & & & x_2^* = \frac{a}{N}, & x_1^* = \frac{a}{N}. \end{array}$$

即本问题的最优划分为

$$x_1^* = x_2^* = \dots = x_N^* = \frac{a}{N},$$

$$\text{最优值 } f^* = \left(\frac{a}{N}\right)^N.$$

例 8-12 用动态规划方法解下列问题：

$$\begin{aligned} \max f &= 3x_1 + 5x_2 = c_1x_1 + c_2x_2; \\ \text{s. t. } x_1 &\leq 4, \\ x_2 &\leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

解 本问题可以视为两个阶段的决策过程, 在第 k 阶段给出决策变量 x_k 的值. 我们用逆序解法解之.

若把 3 个不等式约束视为 3 个资源约束, 于是, 第 k 阶段状态变量 s_k 是一个三维向量: $s_k = (s_k^1, s_k^2, s_k^3)$ ($k = 1, 2$), 其中 s_k^i 为第 i 种资源在第 k 阶段的允许值 ($i = 1, 2$,

3), s_k^i 为连续型变量.

现在,我们不仅要考虑一个状态变量 s_k^i 的所有可能取值,而且必须考虑 3 个状态变量所取值的一切可能组合. 因此,计算量势必大大地“膨胀”. 但是,由于现在考虑的变量是连续型的,所以又使问题变得简单. 现在,有

$s_2 \text{——} S_2 = (s_2^1, s_2^2, s_2^3)$, 其中 s_2^2 为 x_2 的允许值, s_2^3 为 $2x_2$ 的允许值;

$s_1 \text{——} S_1 = (s_1^1, s_1^2, s_1^3)$, 其中 s_1^1 为 x_1 的允许值, s_1^2 为 x_2 的允许值, s_1^3 为 $3x_1 + 2x_2$ 的允许值;

$x_k \text{——}$ 第 k 阶段决策变量;

$w_k(s_k, x_k) \text{——}$ $c_k x_k$;

$T_k(s_k, x_k) \text{——}$ 有方程如下:

$$s_2^1 = s_1^1 - x_1, \quad s_2^2 = s_1^2, \quad s_2^3 = s_1^3 - 3x_1;$$

$f_k(s_k) \text{——}$ 在 s_k 的条件下, $\sum_{i=k}^2 c_i x_i$ 可取的最大值.

递归方程为

$$\begin{cases} f_3(s_3) = 0, \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{c_k x_k + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 2, 1. \end{cases}$$

显然,决策集合为

$$\begin{aligned} D_2(s_2) &= \{x_2 \mid x_2 \leq s_2^2, 2x_2 \leq s_2^3, x_2 \geq 0\}, \\ D_1(s_1) &= \{x_1 \mid x_1 \leq s_1^1, 3x_1 \leq s_1^3, x_1 \geq 0\}. \end{aligned}$$

下面我们对本问题来求解.

第一步,对 $k = 2$, 有

$$f_2(s_2) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{5x_2\},$$

可知:

$$\begin{aligned} x_2^* &= \min \left\{ s_2^2, \frac{s_2^3}{2} \right\}, \\ f_2^*(s_2) &= 5x_2^*. \end{aligned}$$

第二步,对 $k = 1$, 有方程:

$$\begin{cases} f_1(s_1) = \max_{x_1 \in D_1(s_1)} \{3x_1 + f_2(s_2)\}, \\ s_2^1 = s_1^1 - x_1, \quad s_2^2 = s_1^2, \quad s_2^3 = s_1^3 - 3x_1. \end{cases}$$

若取 $s_1 = (4, 6, 18)^T$, 则

$$\begin{aligned} s_2 &= (4 - x_1, 6, 18 - 3x_1), \\ D_1(s_1) &= \{x_1 \mid 0 \leq x_1 \leq 4\}, \\ f_2(s_2) &= 5 \min \left\{ 6, 9 - \frac{3}{2}x_1 \right\}. \end{aligned}$$

再注意到

$$\min\left\{6, 9 - \frac{3}{2}x_1\right\} = \begin{cases} 6, & \text{当 } 0 \leq x_1 \leq 2, \\ 9 - \frac{3}{2}x_1, & \text{当 } 2 \leq x_1 \leq 4. \end{cases}$$

因而

$$3x_1 + 5\min\left\{6, 9 - \frac{3}{2}x_1\right\} = \begin{cases} 3x_1 + 30, & \text{当 } 0 \leq x_1 \leq 2, \\ 45 - \frac{9}{2}x_1, & \text{当 } 2 \leq x_1 \leq 4. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 3x_1 + 5\min\left\{6, 9 - \frac{3}{2}x_1\right\} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{0 \leq x_1 \leq 2} \{3x_1 + 30\}, \max_{2 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 45 - \frac{9}{2}x_1 \right\} \right\}, \end{aligned}$$

而 $\max_{0 \leq x_1 \leq 2} \{3x_1 + 30\}$ 和 $\max_{2 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 45 - \frac{9}{2}x_1 \right\}$ 都在 $x_1 = 2$ 处实现它们的极大值 36. 所以, 有

$$x_1^* = 2, \quad f_1(s_1) = 36.$$

由状态转移方程及顺序追踪法, 可知最优策略:

$$\begin{array}{ccc} s_1 = (4, 6, 8)^T & \longrightarrow & s_2 = (2, 6, 12)^T, \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_1^* = 2, & & x_2^* = 6. \end{array}$$

于是, 线性规划的最优解和最优值分别为

$$\mathbf{X}^* = (x_1, x_2)^T = (2, 6)^T, \quad f^* = 36.$$

习 题 八

1. 有一艘远洋轮计划在 A 港装货后驶往 F 港, 中途需靠港加燃油、淡水 4 次, 而从 A 港到 F 港的全部可能的航运路线及每两港之间的距离如图 8-3 所示. 试用动态规划方法求最合理的停靠港口的方案, 以使航程最短.

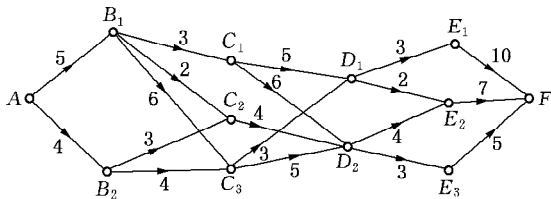


图 8-3

2. 某公司有资金 4 百万元向 A, B 和 C 3 个项目追加投资, 各个项目可以有不同的投资额(以百万元为单位), 相应的效益值如表 8-47 所示. 问怎样分配资金, 使总效益值最大?

表 8-47

项 目	投 资 额				
	0	1	2	3	4
A	—	41	48	60	66
B	40	42	50	60	—
C	—	64	68	78	84

3. 用动态规划方法求解例 6-16.

4. 用动态规划方法求解下列模型：

$$\begin{aligned} \max f &= 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 ; \\ \text{s. t. } 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 15 , \\ 0 \leq x_1 \leq 2 , \quad 0 \leq x_2 \leq 2 , \quad x_3 &\geq 0 , \\ x_j &\text{ 为整数 } , \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

5. 用动态规划方法解下列 0—1 背包问题：

$$\begin{aligned} \max f &= \sum_{j=1}^5 c_j x_j = 12x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 30x_5 ; \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^5 a_j x_j &= 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 12 , \\ x_j &= 0, 1 , \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

6. 用动态规划方法求解下列问题：

$$\begin{aligned} \max f &= 3x_1(2 - x_1) + 2x_2(2 - x_2) ; \\ \text{s. t. } x_1 + x_2 &\leq 5 , \\ x_j &\geq 0 \text{ , 整数 } , \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

7. 用动态规划方法求解下列问题：

$$\begin{aligned} \max f &= x_1 x_2 x_3 x_4 ; \\ \text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 11 , \\ x_j &> 0 \text{ , 整数 } , \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

8. 用动态规划方法求解下列问题：

$$\begin{aligned} \max f &= (x_1 - 2)^2 - 2x_2 + x_3(4 - x_4) ; \\ \text{s. t. } x_1 x_2 x_3 &\leq 4 , \\ x_j &> 0 \text{ , 整数 } , \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

9. 用动态规划方法求解下列问题：

$$\begin{aligned} \max f &= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 ; \\ \text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 15 , \\ x_1 \geq 2 , \quad x_2 \geq 1 , \quad x_3 \geq 1 , \quad x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

10. 根据合同某厂明年每个季度末应向销售公司提供产品,有关信息见表 8-48. 若产品过多,季末有积压,则一个季度每积压一个单位产品需支付存储费 2. 现需制订明年该产品的最佳生产计划,使该厂能在完成合同的情况下全年的生产费用最低,试用动态规划方法求解. 假设生产量和需求量都是 10 的倍数.

表 8-48

季度 k	生产能力 a_k	单位生产成本 d_k	需求量 b_k
1	100	70	60
2	100	72	70
3	100	80	120
4	100	76	60

11. 今设计一种由 4 个元件串联而成的部件. 为提高部件的可靠性,每一元件可以由 1 个、2 个或 3 个并联的单位元件组成. 关于元件 k ($k = 1, 2, 3, 4$) 配备 j 个并联单位元件 ($j = 1, 2, 3$) 后的可靠性 R_{kj} 和成本 C_{kj} 由表 8-49 给出. 假设该部件的总成本允许为 15 个单位,试问如何确定各元件的单位元件配备数目,使系统的可靠性最高?

表 8-49

j	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	R_{1j}	C_{1j}	R_{2j}	C_{2j}	R_{3j}	C_{3j}	R_{4j}	C_{4j}
1	0.7	4	0.6	2	0.9	3	0.8	3
2	0.75	5	0.8	4			0.82	5
3	0.85	7						

12. 某工厂有 100 台机器,拟分 4 个周期使用. 在每一周期有两种生产任务. 据经验,把机器 x 台投入第一种生产任务,则在一个生产周期中将有 $\frac{1}{3}x$ 台机器报废;余下的机器全部投入第二种生产任务,则有 $\frac{1}{10}$ 台机器报废. 如果干第一种生产任务每台机器可收益 10,干第二种生产任务每台机器每周可收益 7. 问每周如何分配机器任务,使 4 个周期总收益最大?

13. 用动态规划方法求解下列线性规划:

$$\begin{aligned}
 \max f &= 4x_1 + 14x_2; \\
 \text{s. t. } 2x_1 + 7x_2 &\leq 21, \\
 7x_1 + 2x_2 &\leq 21, \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

第九章 排队论

在现实生活中,存在着如表 9-1 所示的各种类型的服务系统.

表 9-1

顾 客	服务内容	服务机构
病人	诊治	医生
购买商品的顾客	售货服务	服务员
进港的船舶	装卸货物	泊位
等待着陆的飞机	降落	跑道
待修的机器	机器维修	机修工
旅客	购买火车票	售票处
文件稿	打字	打字员
电话呼唤	通话	交换台
入侵的敌机	我方高射炮还击	我方高射炮
来到水库的上游河水	水的泄放	水库调度员

在这些服务系统中,提出某种服务需求的对象统称为“顾客”(离散的或连续的). 实现服务的工具、设备和人员统称为服务机构. 显然,对某些服务系统来说,如果要求服务的顾客的数量超过服务机构的能力,就会发生拥挤现象——顾客为获得某种服务而排队等待.

例如,对火车站售票处为旅客售票这一服务系统来说,当旅客到达售票处时,如果售票窗口有空,他就能马上接受售票员的服务;如果售票窗口已有其他旅客在购票,他就要按照一定的排队规则加入到等待服务的队伍中去,直到能接受服务. 不同的旅客接受服务时所花的购票时间不相同. 待旅客购得票后便离开售票处. 我们可用图 9-1 所示的模型来描述这一过程.

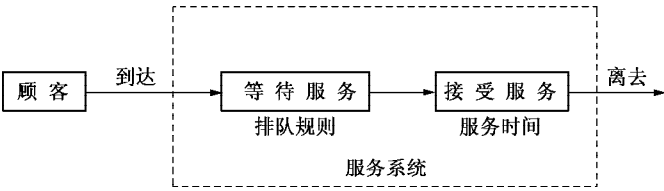


图 9-1

由于在大多数服务系统中,顾客到达的时刻以及所需要的服务时间在事先都无法确

定而呈现随机性,因而服务系统的排队状况也是随机的.排队论就是一门研究处理随机服务系统排队现象的学科.它的任务是考察服务系统随机现象的规律,建立数学模型,为决策者正确地设计与有效地运营服务系统而提供必要的科学依据,使决策者在系统服务费用和顾客的有关等待费用之间达到经济上的平衡.

本章首先讨论与排队模型有关的随机过程,如泊松过程和生灭过程,接着介绍一般排队系统的具体结构,然后再对一些常用的排队模型进行分析和讨论.

§ 9.1 泊松过程、生灭过程和负指数分布

9.1.1 泊松过程

若用 $N(t)$ 表示在 $[0, t)$ 时间内到达某服务系统的顾客数,则对于每个给定的时刻 t , $N(t)$ 都是一个随机变量.我们称依赖于连续参数时间 t 的随机变量族 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$ 为一个随机过程.称 $N(t)$ 的值为在时刻 t 时过程所处的状态, $N(t)$ 取值的全体称为状态集,记作 $I, I = \{0, 1, 2, \dots\}$.

假设对于任意的 $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$, 有

$$\begin{aligned} P(N(t_{n+1}) = i_{n+1} | N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(t_n) = i_n) \\ = P(N(t_{n+1}) = i_{n+1} | N(t_n) = i_n), \end{aligned} \quad (9-1)$$

则称随机过程 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$ 为马尔柯夫(Markov)过程.式(9-1)所表示的性质称为“马尔柯夫性”或“无后效性”.它的实际背景就是说,如果以 t_n 表示现在时刻, t_{n+1} 表示未来时刻, $t_1, \dots, t_{n-1}$ 表示过去的一系列时刻,则顾客到来的过程在 t_n 以前所处的状态,对预言过程在 t_n 以后的状态不起直接的作用.或者说,在已知“现在”的条件下,“将来”与“过去”是独立的.

下面我们着重介绍马尔柯夫过程之一——泊松(Poisson)过程.

若状态集 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ 的随机过程 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$ 具有所谓的独立增量性:对任一组 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($n \geq 3$),随机变量

$$N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立.同时,对任意 $t \in [0, A)$, 有

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9-2)$$

其中参数 $\lambda > 0$, 则称这个过程为泊松过程.

独立增量性说明在互不相交的时间区间 $[t_1, t_2), [t_2, t_3), \dots, [t_n, t_{n+1})$ 内顾客来到系统的情况是相互独立的.不难验证,“独立增量性”这个条件比“马尔柯夫性”来得强.

由概率论有关知识知道,

$$E(N(t)) = \lambda t,$$

它为在时间区间 $[0, t)$ 内到达的顾客的平均数.从而 λ 即为单位时间间隔内到达顾客的

平均数.

在排队论里,人们常把泊松过程称为最简单流,参数 λ 称为最简单流的强度.在具体的实际问题中, λ 是不难由统计资料求得的.

下面我们给出使泊松过程得以实现的比较广泛的条件.

定理 9-1 若随机过程 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$ 满足下列 3 个条件:

(1) 独立增量性:对任一组 $t_1 < t_2 < \dots < t_n (n \geq 3)$,随机变量 $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ 相互独立.

(2) 平稳性:对于 $[s, s+t) \subset [0, A)$,总有

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = P(N(t) - N(0) = k) = P(N(t) = k)$$

(设 $P(N(0) = 0) = 1, \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) = 1$).

(3) 普通性:令 $\phi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} P(N(t) = k)$,则有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t)}{t} = 0;$$

则 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$ 是一个泊松过程.

我们现在对上述定理中的 3 个条件给出直观上的解释:

由独立增量性可知,在 $[0, A)$ 中的区间 $[s, s+t)$ 内来到 k 个顾客这一事件与区间 $[0, s)$ 内来到的顾客的情况相互独立.换言之,对在 $[0, s)$ 内顾客来到的情况所作的任何假定下,计算出来的在 $[s, s+t)$ 内来到 k 个顾客的条件概率都相等.过程具有独立增量性,必然具有马尔柯夫性.

平稳性说明在 $[s, s+t)$ 内来到的顾客数只与区间的长度 t 有关而与起点 s 无关.换言之,过程的统计规律不随时间的推移而改变,在同样长度的时间间隔内来到 k 个顾客的概率是一个常数.

普通性表明,在同一瞬时到达两个或两个以上顾客实际上是不可能的,换言之,在充分小的时间间隔中,最多到达一个顾客.

下面我们来证明

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} (\lambda > 0), k = 0, 1, 2, \dots$$

证 若记 $P_k(t) = P(N(t) = k)$,对 $\Delta t > 0$,由全概率公式、 $N(t)$ 的非减性及独立增量性、平稳性可知:

$$\begin{aligned} P_k(t + \Delta t) &= P(N(t + \Delta t) = k) = P\left(\bigcup_{i=0}^k (N(t + \Delta t) = k, N(t) = i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^k P(N(t + \Delta t) - N(t) = k - i, N(t) - N(0) = i - 0) \\ &= \sum_{i=0}^k P(N(t + \Delta t) - N(t) = k - i) P(N(t) = i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k P(N(\Delta t) = k-i)P(N(t) = i) \\
&= P_k(t)P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_1(\Delta t) + P_{k-2}(t)P_2(\Delta t) + \dots + P_0(t)P_k(\Delta t) \\
&= P_k(t)P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_1(\Delta t) + \sum_{i=2}^k P_{k-i}(t)P_i(\Delta t) \\
&= P_k(t)P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_1(\Delta t) + \sum_{i=2}^{\infty} P_{k-i}(t)P_i(\Delta t),
\end{aligned}$$

其中假设 $P_{-1}(t) = P_{-2}(t) = P_{-3}(t) = \dots = 0$.

特别地, $P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t)$.

$P_0(t) = P(N(t) = 0)$ 表示在长度为 t 的时间间隔中没有顾客到来的概率, 因此 $P_0(t)$ 关于 t 单调减少. 又由数学分析中的有关定理 (若 $f(x)$ 是 x 的单调函数, 且对一切 $x \geq 0, y \geq 0$, 均有 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 成立, 则 $f(x) = a^x$, 其中常数 $a \geq 0$) 可知:

$$P_0(t) = a^t,$$

其中 $a \geq 0, a$ 为某一常数.

若 $a = 0$, 则 $P_0(t) \equiv 0$, 这说明在不管怎么短的时间间隔内都要来顾客, 因此, 在有限时间间隔中来要无穷多个顾客, 这种情形不在我们的考虑之列.

此外, 因为 $P_0(t)$ 是概率, 故应有 $a \leq 1$. 而当 $a = 1$ 时, $P_0(t) \equiv 1$, 这说明永远不来顾客, 此时问题失去意义. 所以, 应有 $0 < a < 1$, 从而, 存在 $\lambda > 0$, 使 $a = e^{-\lambda}$. 于是, 有

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

因此, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
P_0(\Delta t) &= e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\
P_1(\Delta t) &= 1 - P_0(\Delta t) - \phi(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\
\sum_{i=2}^{\infty} P_{k-i}(t)P_i(\Delta t) &\leq \sum_{i=2}^{\infty} P_i(\Delta t) = \phi(\Delta t) = o(\Delta t).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
P_k(t + \Delta t) &= P_k(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_{k-1}(t) \cdot \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (k \geq 1), \\
P_k(t + \Delta t) - P_k(t) &= \lambda \Delta t (P_{k-1}(t) - P_k(t)) + o(\Delta t), \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} &= \lambda (P_{k-1}(t) - P_k(t)),
\end{aligned}$$

即有

$$P'_k(t) = \lambda [P_{k-1}(t) - P_k(t)], \quad k \geq 1.$$

由于 $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, 故有

$$P'_1(t) = \lambda [e^{-\lambda t} - P_1(t)],$$

由它可求得 $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

继续迭代, 可解得一切 $P_k(t)$:

$$P_k(t) = P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

泊松过程在排队论中的地位与正态分布在概率论中的地位相同.但是,我们需要指出,独立增量性、平稳性和普通性在实践中并不是经常能够满足的.例如平稳性对电话呼唤流就显然不成立,白天的呼唤就比晚上多.虽然如此,最简单流仍然可以认为是实际现象相当程度上的近似,特别如巴尔姆-辛钦(Палм-Хинчин)极限定理断言:大量相互独立小强度的随机流之和近似于一个最简单流,只要每个加项流都是平稳与普通,同时满足一些足够普通的条件.

概率论的中心极限定理告诉我们:足够多的独立随机变量之和近似于正态分布,而不管这些随机变量是什么分布.

而巴尔姆-辛钦极限定理正如中心极限定理一样,向我们阐明了为什么最简单流正如正态分布那样,经常会在实际生活中出现.

例如,到达电话局的总呼唤流是个别用户(强度相对地很小)发出电话呼唤的总和,而每一个别用户的呼唤可近似地看成平稳普通的流,且它们之间相互独立,因此,到达电话局的呼唤流就近似地视为最简单流.

正由于最简单流这种足够接近实际的性质,以及其简单而易于处理,因而在排队论中把它作为研究实际问题的一个起点.

例 9-1 某天上午,从 10:30 到 11:47,每隔 20 秒钟统计一次来到某火车站售票处的旅客数,共得 230 个记录.整理后得到如表 9-2 所示的统计结果.试用一个泊松过程来描述售票处的旅客的到达过程.

表 9-2

旅客数目	0	1	2	3	4
频 数	100	81	34	9	6

解 要描述这个到达过程只要求出参数 λ 即可.根据 λ 的意义,我们先求出每 20 秒钟内到达售票处的旅客的平均数

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{230} [0 \times 100 + 1 \times 81 + 2 \times 34 + 3 \times 9 + 4 \times 6] \approx 0.87.$$

于是,每分钟平均到达的旅客数为

$$\lambda = 3 \times 0.87 = 2.61 (\text{人/分钟}).$$

故有

$$P(N(t) = k) = \frac{(2.61t)^k}{k!} e^{-2.61t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

对于描述顾客到达情况的随机过程 $\{N(t) | t \in [0, T]\}$,我们也可以用随机变量序列

$$\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$$

来描述,其中

$$T_n = t_n - t_{n-1}$$

为第 n 位顾客到达时刻 t_n 与第 $n-1$ 位顾客到达时刻 t_{n-1} 之间的时间间隔(设 $t_0 = 0$)。

对于泊松过程,我们有如下定理。

定理 9-2 顾客到达过程 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$ 是一个参数为 λ 的泊松过程的充分必要条件为:相应的顾客到达间隔 $T_n (n = 1, 2, \dots)$ 是一族相互独立同分布的随机变量,它们的分布函数为负指数分布:

$$P(T_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (9-3)$$

由此定理可知,“顾客流是最简单流”与“顾客到达间隔相互独立且服从相同的负指数分布”是等价的两种描述方式。

由于负指数分布的数学期望

$$E(T_n) = \frac{1}{\lambda},$$

所以对于最简单流,顾客到达时间间隔的平均长度为 $\frac{1}{\lambda}$ 。

例 9-2 在某个交叉路口观察了 25 辆向北行驶的汽车到达路口的时刻,其记录如下(开始观察时刻为 0,单位为秒):

1	8	12	15	17	19	27	43	58	64	70	72	73
91	92	101	102	103	105	109	122	123	124	135	137	

试用一个泊松过程来描述该到达过程。

解 该车流是一个最简单流,因此汽车相继到达的时间间隔 $T_n, n = 1, 2, \dots$ 相互独立,服从同一分布——负指数分布。现在估计负指数分布的参数 λ 。

汽车相继到达路口的时间间隔为

1	7	4	3	2	2	8	16	15	6	6	2	1
18	1	9	1	1	2	4	13	1	1	11	2	

它们的和为 137。故平均间隔 $\frac{1}{\lambda}$ 的估计值为

$$\frac{137}{25} = 5.48(\text{秒}),$$

从而,

$$\lambda = 0.1825(\text{辆/秒}).$$

所以,服从如下分布的独立同分布随机变量族 $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ 描述了该车流:

$$P(T_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.1825t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

换言之,汽车到达路口的过程是一个以每秒来到 0.1825 辆汽车的最简单流 $\{N(t) | t \geq 0\}$:

$$P(N(t) = k) = \frac{(0.1825t)^k}{k!} e^{-0.1825t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

9.1.2 生灭过程

现在我们介绍马尔柯夫过程的另一特例——生灭过程.

设有一堆细菌,每个细菌在 Δt 时间内分裂成两个细菌的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$;而在 Δt 时间内死亡的概率为 $\mu \Delta t + o(\Delta t)$,各个细菌在任一段时间内分裂或死亡都是相互独立的.如果将细菌的分裂或死亡都看成发生一个事件,那么易知,在 Δt 时间内发生两个或两个以上事件的概率为 $o(\Delta t)$.设在时刻 t 有 i 个细菌,则在时刻 $t + \Delta t$ 有 $i + 1$ 个细菌的概率为 $\lambda i \Delta t + o(\Delta t)$,在时刻 $t + \Delta t$ 有 $i - 1$ 个细菌的概率为 $\mu i \Delta t + o(\Delta t)$.现用 $\xi(t)$ 表示这堆细菌在时刻 t 的个数,并考察在 $[0, A)$ 时间内细菌个数的变化情况.

因为对每个固定的 t , $\xi(t)$ 都是随机变量,故 $\{\xi(t) | t \in [0, A)\}$ 为一个随机过程.又因为它具有无后效性,故它也是一个马尔柯夫过程.

上述细菌分裂和死亡的过程是一种典型的生灭过程的例子.下面我们给出生灭过程的具体定义.

生灭过程——若随机过程 $\{\xi(t) | t \in [0, A)\}$ 的状态集 $I = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ 或 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$.设在时刻 t 时 $\xi(t) = j$,那么在时刻 $t + \Delta t$ 时 (j 和 $j + 1 \in I$), $\xi(t + \Delta t) = j + 1$ 的概率为 $\lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$ (其中 $\lambda_j > 0$ 为与 t 无关的常数);在时刻 $t + \Delta t$ 时 (j 和 $j - 1 \in I$), $\xi(t + \Delta t) = j - 1$ 的概率为 $\mu_j \Delta t + o(\Delta t)$ (其中 $\mu_j > 0$ 也为与 t 无关的常数);在时刻 $t + \Delta t$ 时, $\xi(t + \Delta t)$ 为 I 中其他元素的概率均为 $o(\Delta t)$.则称该随机过程 $\{\xi(t) | t \in [0, A)\}$ 为生灭过程(在下面将要讨论的一些生灭过程中,取 $A = +\infty$).

对一些生灭过程来说,我们常常关心下列概率:

$$P_j(t) = P(\xi(t) = j) \quad (\text{称为瞬时解});$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi(t) = j) = P_j \quad (\text{称为极限解}).$$

排队论中的很多模型都是生灭过程,故我们把生灭过程关于 $P_j(t)$ 的微分方程组及其极限解和有关定理介绍于下.在分析排队模型时,我们就直接应用这些结论来计算有关的数量指标.

生灭过程关于 $P_j(t) = P(\xi(t) = j)$ 的微分方程组为

(1) 当 $I = \{0, 1, \dots, m\}$ 时,

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t);$$

$$P'_j(t) = \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_j(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t) \quad (0 < j < m),$$

$$P'_m(t) = \lambda_{m-1} P_{m-1}(t) - \mu_m P_m(t).$$

(2) 当 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ 时,

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t);$$

$$P'_j(t) = \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_j(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t) \quad (0 < j < m).$$

求解这组方程,即可得到在时刻 t 时过程的状态概率分布 $\{P_j(t), j \in I\}$,即得到生灭过程的瞬时解.

但是,一般说来,要从微分方程组求得瞬时解是极其困难的,只有个别问题才能求得

瞬时解. 因此, 在实际应用中, 我们关心 $\lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t)$. 若它存在, 常常把它当作任一时刻(过程运行一段时间后)过程处于状态 j 的概率. 关于生灭过程微分方程组的极限解我们有如下定理.

定理 9-3 令

$$\pi_0 = 1, \pi_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

则对 $I = \{0, 1, \dots, m\}$ 的生灭过程, 或对 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ 且满足条件

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j < +\infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \pi_j} = +\infty \quad (9-4)$$

的生灭过程, 对于任意正数 s 和任意 $i \in I, j \in I$, 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi(t) = j) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi(s+t) = j \mid \xi(s) = i) = P_j > 0. \quad (9-5)$$

当状态集 $I = \{0, 1, \dots, m\}$ 时,

$$P_0 = \left(\sum_{j=0}^m \pi_j \right)^{-1}, \quad (9-6)$$

$$P_j = \pi_j P_0 = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} P_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m; \quad (9-7)$$

当然态集 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ 时,

$$P_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \right)^{-1}, \quad (9-8)$$

$$P_j = \pi_j P_0 = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} P_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots. \quad (9-9)$$

我们称 $P_j (j \in I)$ 为生灭过程在统计平衡时的概率, 或称稳态概率.

定理 9-3 告诉我们, 对于满足定理条件的生灭过程, 当过程运行了很长时间后, 初始状态的影响将消失, 过程的状态的概率分布 $P_j (j \in I)$ 与时间无关. 在实际应用中, 过程不可能等到 $t \rightarrow \infty$. 事实上, 对于绝大多数实际问题, 过程很快会趋于统计平衡.

9.1.3 负指数分布

若用 V_n 表示第 n 位顾客所需的服务时间, 则 $\{V_n, n = 1, 2, \dots\}$ 也是一族随机变量. 假定 $\{V_n, n = 1, 2, \dots\}$ 中各个随机变量相互独立, 且服从相同的负指数分布:

$$P(V_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (9-10)$$

其中参数 $\mu > 0$. 因而, 其概率密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (9-11)$$

V_n 的数学期望和方差分别为

$$E(V_n) = \frac{1}{\mu}, \quad D(V_n) = \frac{1}{\mu^2}. \quad (9-12)$$

因此

$$\mu = \frac{1}{E(V_n)}.$$

从而, $\frac{1}{\mu}$ 为每位顾客所需要的平均服务时间, μ 为在单位时间内受到服务的顾客平均数.

基于负指数分布在排队论中的重要性, 下面我们对负指数分布的性质作进一步的讨论(用随机变量 V 表示顾客的服务时间).

性质 9-1 负指数分布的密度函数 $f(t)$ 是 t ($t \geq 0$) 的一个严格单调减函数.

因此, 对任 $\Delta t > 0, t > 0$, 有

$$P(0 \leq V \leq \Delta t) > P(t \leq V \leq t + \Delta t).$$

可知

$$\begin{aligned} P\left(0 \leq V \leq \frac{EV}{2}\right) &= 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.393, \\ P\left(\frac{EV}{2} \leq V \leq \frac{3EV}{2}\right) &= (1 - e^{-\frac{3}{2}}) - (1 - e^{-\frac{1}{2}}) = 0.383, \end{aligned}$$

因此, V 取小值(小于期望值的一半)要比 V 取接近 EV 的值更有可能性.

又可知:

$$\begin{aligned} P(0 \leq V \leq EV) &= 1 - e^{-1} = 0.632, \\ P(V > 2EV) &= e^{-2} = 0.135, \\ P(V > 4EV) &= e^{-4} = 0.0183, \end{aligned}$$

所以, 若一个顾客的服务时间服从负指数分布, 则当顾客开始接受服务后, 服务结束得较短的可能性较大, 而服务时间较长的可能性却是相当小的. 也就是说, 如果某种服务的服务时间具有如下性质: 有大量的顾客要求较短时间的服务, 只有少量麻烦顾客需要长时间的服务, 则一般地可以认为服务时间服从负指数分布(当然, 需用数理统计中分布假设检验方法进行检验).

性质 9-2 无记忆性.

我们来求顾客已经被服务了时间 s 的条件下, 再需服务 t 以上时间的条件概率—— $P(V \geq s+t | V \geq s)$:

$$\begin{aligned} P(V \geq s+t | V \geq s) &= \frac{P(V \geq s+t, V \geq s)}{P(V \geq s)} = \frac{P(V \geq s+t)}{P(V \geq s)} \\ &= \frac{e^{-\mu(s+t)}}{e^{-\mu s}} = e^{-\mu t} = P(V \geq t). \end{aligned}$$

可见, 剩余服务时间的分布独立于已经服务过的时间而与原来的分布相同. 我们将这类特性称之为“无记忆性”.

同时可以指出, 具有无记忆性

$$P(V \geq s+t | V \geq s) = P(V \geq t) \quad (9-13)$$

的分布,也只有负指数分布.

对于最简单流,由于顾客到达间隔时间服从负指数分布,因而,不论取哪一时刻为起点,剩余的到达间隔时间仍为同一参数的负指数分布.

性质 9-3 对于 $t > 0$, 当 Δt 充分小时,有

$$\begin{aligned} P(V \leq t + \Delta t | V \geq t) &= 1 - P(V \geq t + \Delta t | V \geq t) \\ &= 1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t. \end{aligned} \quad (9-14)$$

性质 9-3 告诉我们:若顾客的服务时间 V 服从负指数分布,那么,当顾客在服务了 t 时间后,事件“顾客服务完毕”在下一个时段 Δt 内发生的概率近似于 $\mu \Delta t$.

类似地,对于最简单流来说,由于到达间隔 T 服从负指数分布(参数 $\lambda > 0$),因此对任 $t > 0$, Δt 充分小,有

$$P(T \leq t + \Delta t | T \geq t) \approx \lambda \Delta t. \quad (9-15)$$

换言之,经过 t 时间下一个顾客仍未到达,那么,在 Δt 时段内来一个顾客这件事的概率近似于 $\lambda \Delta t$.

9.1.4 爱尔朗分布

爱尔朗(Erlang)分布的密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (9-16)$$

其中参数 $\mu > 0$, k 称为阶数.

若顾客服务时间 V 服从爱尔朗分布,则 V 的数学期望和方差分别为

$$E(V) = \frac{1}{\mu}, \quad D(V) = \frac{1}{k\mu^2}. \quad (9-17)$$

可以证明,如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 是 k 个相互独立的随机变量,且服从同一参数 $k\mu$ ($\mu > 0$) 的负指数分布,则随机变量

$$V = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k$$

服从 k 阶爱尔朗分布.

例如,如果顾客要连续接受串联的 k 个服务台的服务,各服务台服务时间相互独立,且服从相同的负指数分布(参数 $k\mu > 0$),那么顾客被这 k 个服务台服务完所需的总时间就服从爱尔朗分布(当然,对顾客连续服务时,这里假设:必须在所有 k 个服务台完成对某一顾客的服务后,下一个顾客才能进入第一个服务台).

由于负指数分布的特性说明顾客服务时间短的可能性比服务时间长的可能性大,所以,在实际应用中负指数分布受到一定的限制,而爱尔朗分布却具有较大的适应性.

图 9-2 给出 n 个不同 k 值的爱尔朗分布的密度函数.

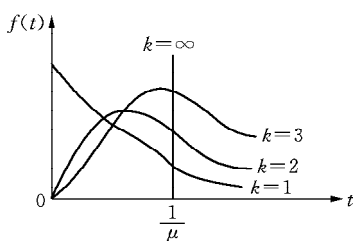


图 9-2

事实上,当 $k=1$ 时,爱尔朗分布即为负指数分布;当 k 增大时,爱尔朗分布的图形逐渐变为对称的;当 $k \geq 30$ 时,爱尔朗分布近似于正态分布;当 $k \rightarrow +\infty$ 时,由式(9-17)可知 $D(V) \rightarrow 0$,因此,这时爱尔朗分布化为确定型分布(参看图 9-2).所以 k 阶爱尔朗分布可看成完全随机型与完全确定型之间的中间型,能对现实世界提供更广泛的适应性.

§ 9.2 一般排队系统结构

图 9-1 给出了一般排队模型的结构.各个顾客由顾客源(总体)出发,以恒定的或变化的到达率来到服务机构(服务台)要求服务.如果服务机构空闲,到达的顾客就接受服务,如果服务机构正在忙着服务,顾客就按某种排队规则加入到等待服务的队伍中去,直到能接受服务.顾客进入服务台就以恒定的或变化的服务率被服务,服务完后顾客就离开排队系统.排队规则和服务规则反映了顾客在排队系统中按怎样的规则参加排队、按怎样的次序接受服务.

所以,一般的排队系统都有 3 个组成部分:输入过程、排队规则、服务机构.下面我们一一介绍.

9.2.1 输入过程

输入过程指各种类型的顾客按怎样的规律到达.要完全描述一个输入过程需要如下 3 方面信息:

① 顾客源数.顾客的总体可能是有限集(例如工厂内出故障的待修机器),也可能是无限可数集合(例如乘公共汽车的乘客),甚至可能是无限不可数集合(例如上游流入水库的河水).

② 到达类型.顾客来的方式可以是单个到达,也可是成批地到达(例如金属板材进仓库就是成批地到达).本章仅讨论顾客单个到达这种类型.

③ 顾客相继到达的时间间隔分布.我们已经知悉,描述顾客到达过程有两种方式:一种为随机过程 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$,其中 $N(t)$ 为 $[0, t)$ 内到达的顾客数;另一种描述方式为随机变量序列 $\{T_n, n \geq 1\}$,其中 $T_n = t_n - t_{n-1}$, t_n 为第 n 个顾客到达时刻, $t_0 = 0$.后一种方式通过给定 T_n 的分布来描述顾客流.由于假设 $\{T_n, n \geq 1\}$ 为相互独立且具有相同分布的随机变量序列,所以,只需给出 T_n 的共同分布函数 $F(t) = P(T_n \leq t)$ 就可以了.有各种输入过程,下面介绍几种常见的情况:

(1) 定长输入.顾客有规则地到达,每隔时间 α 到达一位顾客.此时,顾客相继到达的时间间隔 T_n 的分布函数为

$$F(t) = P(T_n \leq t) = \begin{cases} 0, & t < \alpha, \\ 1, & t \geq \alpha. \end{cases}$$

例如生产自动流水线传送带输送成品进入包装箱就是定长输入的例子.

(2) 最简单流. 独立随机变量序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ 服从同一负指数分布:

$$P(T_n \leq t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

或者说, 随机过程 $\{N(t) | t \in [0, A)\}$ 是一个泊松过程, $N(t)$ 的概率分布为

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$.

(3) k 阶爱尔朗输入. 独立随机变量序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ 服从相同的爱尔朗分布, 其密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k\lambda (k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

(4) 一般独立输入. 独立随机变量序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ 具有相同的分布.

9.2.2 服务机构

363

服务机构应反映如下信息: 服务台的个数(当服务台个数为多个时, 又分成串联与并联结构, 参看图 9-3)、接受服务的方式(单个服务或成批服务, 如公共汽车一次就装载大批乘客. 本章仅讨论单个服务)、服务时间 V 的分布.

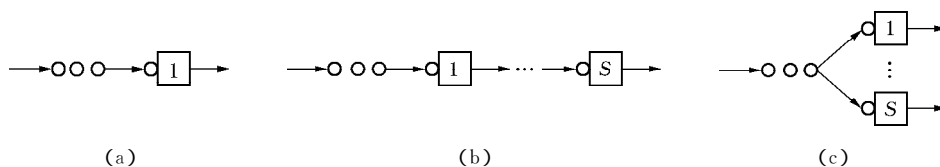


图 9-3

下面介绍几种经常遇到的服务时间分布:

(1) 定长分布. 每位顾客的服务时间 V_n 均为常数 β . V_n 的分布函数为

$$P(V_n \leq t) = \begin{cases} 0, & V_n < \beta, \\ 1, & V_n \geq \beta. \end{cases}$$

(2) 负指数分布. 各个顾客的服务时间 V_n 相互独立, 具有相同的负指数分布:

$$P(V_n \leq t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中参数 $\mu > 0$.

(3) k 阶爱尔朗分布. 各个顾客的服务时间 V_n 相互独立, 具有相同的 k 阶爱尔朗分布. 其密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

其中参数 $\mu > 0$.

(4) 一般独立分布. 各个顾客的服务时间 V_n 相同独立, 具有相同的概率分布.

9.2.3 排队规则

排队规则体现到来的顾客按怎样的方式和顺序接受服务. 一般可分为损失制、等待制和混合制.

(1) 损失制. 当一个顾客到达时, 若所有服务台均被占用, 该顾客就自动消失. 具有这种特点的排队规则称为损失制.

例如, 一位旅客到达某一旅馆, 如果全部床位都已满员, 他即离开该旅馆往别处投宿.

(2) 等待制. 当顾客到达时, 若所有服务台均被占用, 顾客就排成队伍等待服务, 具有这种特点的排队规则称为等待制. 顾客接受服务的次序可以采用下列各种规则:

① 先到先服务. 即按顾客到达的先后次序接受服务. 这是最通常的情形. 本章仅讨论先到先服务的服务系统.

② 后到先服务. 例如将金属板材放入仓库看成是顾客的到来, 需要使用时将它们陆续取走看作是服务, 则一般都是取用放在最上面的板材, 即后到先服务.

③ 随机服务. 当服务台得空时, 在等待的顾客中随机地选取一名进行服务, 每一位等待的顾客被选到的概率相同. 例如乘客(视为服务台)在停车场上随机选乘(乘车视为服务)一辆出租汽车(被视为等候服务的顾客).

④ 优先权服务. 对于不同的顾客规定了不同的优先权. 例如医院对于病情严重的患者给予优先治疗, 加急电报比普通电报优先服务.

(3) 混合制. 为损失制与等待制兼而有之的情况. 有下列情况:

① 队长有限制. 如果系统空间的容量有限, 最多只能容纳 k 个顾客(包括正在接受服务的和参加等待的顾客), 那么当顾客到达时, 如果系统内已有 k 个顾客, 该顾客就自动离去, 如果系统内顾客数小于 k , 该顾客就进入服务系统.

② 等待时间有限制. 顾客在队伍中的等待时间不能超过规定的时间. 超过规定时间顾客就离去.

③ 逗留时间(等待时间与被服务时间之和)有限制. 顾客在服务系统中的逗留时间不能超过规定时间, 否则就离去.

例如高射炮射击敌机. 当敌机飞越该防空系统火力范围的总时间为 t_0 时, 若在此 t_0 时间内敌机还未被击落, 则敌机就消失.

9.2.4 排队模型的符号表示

一个排队模型由 6 个主要特性所确定:输入过程(顾客到达时间间隔分布);服务时间分布;服务台个数(多个服务台时,假设各个服务台是并联的,每个服务台只对单个顾客进行服务);系统容量(服务台个数加上可容纳的等待顾客数);顾客源数;服务规则。

在应用中,使用符号来表示不同的排队模型是较为方便的:我们将这 6 个特征按上述顺序用各自的符号列出,并用斜线“/”隔开,即

输入过程/服务分布/服务台个数/系统容量/顾客源数/服务规则。

由于本章讨论的问题都采用先到先服务的服务规则,所以我们在模型的符号表示中不再列出服务规则的符号。当系统容量或顾客源数为无限时,我们也将它们从模型的符号表示中省略。

表示顾客到达时间间隔分布和服务时间分布的常用符号有:

M ——输入过程为最简单流,或服务时间为负指数分布;

D ——定长输入或定长服务;

E_k ——顾客到达时间间隔分布或服务时间分布为 k 阶爱尔朗分布;

GI ——一般独立输入;

G ——一般服务分布。

服务台的个数用 S 表示,系统容量用 k 表示,顾客源数用 f 表示。

例如 $M/M/S/k$ 表示输入过程为最简单流、服务时间为负指数分布、 S 个服务台、系统容量为 k ($S < k$)、顾客源数无限的混合制排队模型。

例如 $M/G/3/3$ 表示输入过程为最简单流、一般服务分布、3 个服务台、系统容量为 3、顾客源数无限的损失制排队系统。

又如 $GI/E_k/2$ 表示一般独立输入、服务时间为 k 阶爱尔朗分布、2 个服务台、系统容量和顾客源数无限的等待制排队模型。

9.2.5 排队模型的数量指标和基本公式

对于一个随机服务系统来说,如果服务机构过小,不能满足众多顾客的服务需要,那么就会产生排队现象而使服务质量降低。因此,对要求服务的顾客来说,总希望服务机构越大越好。但是,如果服务机构过大,人力、物力方面的支出也就相应增加,有时就会造成不必要的浪费。因此,在排队现象中产生了服务质量的提高与系统的设备的利用率提高之间的矛盾。换言之,产生了顾客的需求和服务机构规模之间的合理平衡问题。如何合理地设计与控制随机服务系统,使得它既能满足顾客的需要,又能使服务机构的花费最为经济,这是排队论的研究目的。

排队论研究的问题,从大的方面来说,可以分成两类问题:第一类问题是在服务机构未设置之前就根据顾客输入过程与服务过程的要求,结合对系统的一定数量指标要求(如规定服务质量的必要水平),对服务机构规模(例如车站股道数、机场跑道数、港口泊位数等等)进行最优设计,我们称它们为静态最优问题;第二类问题是对已有的服务系统

如何实行最优控制,称为动态最优问题.我们可以对给定的排队系统进行分析,建立合适的排队模型并计算有关的数量指标,然后寻求最优运营策略或适当地调整服务机构(例如食堂就餐职工排队过长,可以增设服务窗口,又如公交公司在客流高峰时增开区间车或封闭某些停靠站).

排队系统的优化问题,首要的问题是在对系统作定量分析后,计算队长、等待时间和忙期 3 个数量指标的分布或数学期望:

(1) 队长.队长是指在系统中的顾客数目(包括正在接受服务的顾客和等待服务的顾客),它是一个随机变量,应确定其分布,至少应当知道它的平均值及有关各矩.队长分布是顾客与服务台都很关心的一个问题,特别对系统设计人员来说更为重要,因为知道了队长分布,就能确定队长超过某个数值的概率,这对于设计等待空间的大小将是很有意义的,否则空间小了无法容纳足够多的顾客,空间大了会造成浪费.而等待队长是指系统中等待服务的顾客数.

(2) 等待时间和逗留时间.从顾客到达时刻起到他接受服务时止这段时间称为等待时间,它是个随机变量,是顾客最为关心的数量指标,因为顾客总是希望他的等待时间越短越好.

从顾客到达时刻起,到他接受服务结束止这段时间称为逗留时间(等待时间加上服务时间),它也是一个随机变量.知道了逗留时间分布,就能知道一个顾客在系统中停留时间超过某个数值的概率,如果该概率太大,那么增加服务台个数或提高服务率可能是有意义的.因为在这种情况下虽然增加了服务机构的费用,但由于减少了顾客的逗留时间费用,故综合平衡后还是可取的决策.

(3) 忙期.对多个服务台的排队模型,从服务系统开始无空闲的服务台这一时刻起,到有一个服务台开始空闲这一时刻止,这段时间称为系统的忙期.

对于单服务台的排队模型来说,从顾客到达空闲的服务台这一时刻起,到服务台再次变为空闲这个时刻止,这段时间(即服务台连续繁忙的时期)称为服务台的忙期,它是一个随机变量.忙期的均值是服务台最为关心的数量指标,因为这关系到服务台的工作强度.

此外,在不同类型的问题中,还会注意到其他一些数量指标,如损失制与混合制随机服务系统中的损失率及单位时间内平均损失的顾客数目.

由于排队模型一般都存在一个“初始”时期,在这个时期中,队长分布、等待时间分布和忙期分布均依赖于系统已运营的时间 t 和初始状态(顾客数),然而,服务系统运营充分长的时间后,系统趋于统计平衡,这些分布不再随时间变化且初始状态的影响也消失(但并不意味着系统失去了随机性).今后,我们基本上只研究统计平衡时的有关状况.

为今后讨论具体的数学模型的方便,我们给出下列数量指标的符号:

λ ——单位时间内平均到达的顾客数,即平均到达率;

$\frac{1}{\lambda}$ ——平均到达间隔;

μ ——单位时间内受到服务的顾客平均数,即平均服务率;

$\frac{1}{\mu}$ ——每位顾客的平均服务时间;

S ——服务台个数;

ρ ——每个服务台的服务强度(利用率),表示每个服务台在单位时间内的平均负荷;

P_j ——在统计平衡时,系统中具有 j 个顾客的概率;

D ——顾客等待的概率;

Q ——忙期;

L ——队长(正在接受服务的和排队等待的顾客总数)的期望值;

L_q ——等待队长的期望值;

W ——逗留时间(顾客在系统中的等待时间和被服务时间的和)的期望值;

W_q ——等待时间的期望值.

对于损失制和混合制的排队系统,顾客在到达服务系统时,发现服务台无空或系统容量已满,就自动消失而不再进入系统,因此到达的顾客不一定能全部进入系统,为此引入有效到达率 λ_e :

有效到达率 λ_e ——单位时间内平均进入服务系统的顾客数.

对于等待制的排队系统来说,有 $\lambda_e = \lambda$.

下面我们给出 3 个基本公式,它们对各类排队模型在处于统计平衡时都适用.

首先,根据逗留时间的含义,我们有下述公式:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}. \quad (9-18)$$

其次,我们给出下述两个李特尔(Liter)公式:

$$L_q = \lambda_e W_q, \quad (9-19)$$

$$L = \lambda_e W. \quad (9-20)$$

例如对于 $GI/G/S$ 排队系统来说,该两个公式可以如此来解释(此时有 $\lambda_e = \lambda$):

某一顾客到达时,如果服务台都忙着,那么在他被接受服务前所需的平均等待时间为 W_q ,在这段时间内平均到来的顾客数为 λW_q (排在此顾客后),当该顾客被接受服务时,系统中等待平均队长即为 λW_q ,因此有 $L_q = \lambda W_q$.

一个正在离去的顾客在系统中平均逗留时间为 W ,这期间来到的顾客平均数为 λW (这些顾客有接受服务的,有排队等待的),所以,系统中平均队长 $L = \lambda W$.

§ 9.3 泊松输入、负指数分布服务的排队模型

输入过程为最简单流、服务时间为负指数分布的随机服务系统,是排队论中最简单的模型,对于这种模型的各项数量指标,排队论具有比较漂亮的结论.本节介绍输入为最简单流、服务时间为负指数分布的随机服务系统在服务台、系统容量及顾客源数不同时的各类排队模型,并通过实例说明如何根据实际问题提供的数据建立排队模型以及如何设计系统或改进系统的效能.

9.3.1 $M/M/S$ 排队模型

$M/M/S$ 排队模型为泊松输入、负指数分布服务、 S 个服务台、系统容量不受限制、顾

客源数为无限的等待制排队模型,如图 9-4 所示.

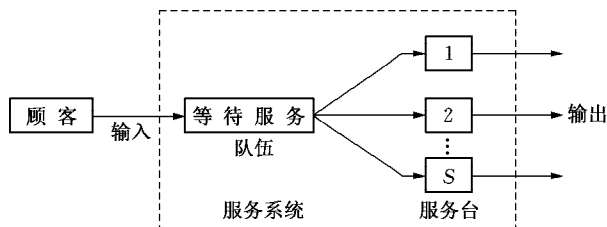


图 9-4

假定到达率为 λ 的最简单流来到 S 个服务台的服务系统. 一个顾客来到时, 如果有一个以上的服务台空闲着, 顾客就被随机地指派给任何一个有空的服务台进行服务; 若所有服务台均在服务, 则顾客排成一个队伍等待服务, 顾客服务时间与顾客到达间隔时间相互独立, 遵从参数为 μ 的负指数分布.

设 $\xi(t)$ 为系统在时刻 t 时的队长, 它是一个随机变量. 若 $\xi(t) = j \leq S$, 表示在时刻 t 有 j 个服务台正在进行服务, 而剩下的 $S - j$ 个服务台空闲着; 若 $j > S$, 则表示在时刻 t 所有的 S 个服务台均在服务, 且有 $j - S$ 个顾客正在排队等待. 可以证明 $\{\xi(t) \mid t \geq 0\}$ 是一个生灭过程, 其状态集 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$.

由于顾客到达间隔 T 和顾客服务时间 V 分别服从参数为 λ 和 μ 的负指数分布, 由式(9-14)和式(9-15)知, 当 $t > 0$, 对充分小的 Δt , 有

$$P(T \leq t + \Delta t \mid T \geq t) \approx \lambda \Delta t,$$

$$P(V \leq t + \Delta t \mid V \geq t) \approx \mu \Delta t,$$

换言之, 在 Δt 时间内来一个顾客的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$; 在 Δt 时间内一个服务台服务完一个顾客的概率为 $\mu \Delta t + o(\Delta t)$. 于是, 若 j 个服务台都在服务, 那么 j 个服务台服务完一个顾客的概率为

$$\mu j \Delta t + o(\Delta t) \quad (j \leq S).$$

我们有状态转移图(见图 9-5). 可见, 对该生灭过程来说, 有 $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots$,

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1, 2, \dots, S; \\ S\mu, & j = S+1, S+2, \dots. \end{cases}$$

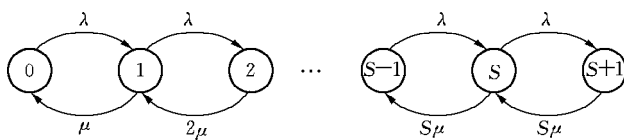


图 9-5

正如我们在前面已指出过的, 我们关心的是此生灭过程的稳态概率. 我们来考虑定理 9-3 的条件式(9-4). 易知有

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{S^j}{j!} \rho^j, & 1 \leq j \leq S; \\ \frac{S^S}{S!} \rho^j, & j > S, \end{cases}$$

其中

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}, \quad (9-21)$$

我们称 ρ 为服务强度,表示每个服务台在单位时间内的平均负荷,也即每个服务台的利用率.

可知,当 $\rho < 1$ 时,式(9-4)成立:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j &< +\infty, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \pi_j} &= +\infty. \end{aligned}$$

因此,在 $\rho < 1$ 条件下,根据定理 9-3 使得系统队长的稳态概率:

$$P_0 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \right)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{S-1} \frac{(S\rho)^j}{j!} + \frac{(S\rho)^S}{S!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}, \quad (9-22)$$

$$P_j = \begin{cases} \frac{(S\rho)^j}{j!} P_0, & 1 \leq j \leq S; \\ \frac{S^S \rho^j}{S!} P_0, & j > S. \end{cases} \quad (9-23) \quad \begin{matrix} 369 \\ \text{.....} \end{matrix}$$

显然, P_0 即该系统的空闲系数.

所有服务台均被占用,以致来到一个顾客需要等待的概率 D 为

$$D = \sum_{j=S}^{\infty} P_j = \frac{1}{1-\rho} P_S. \quad (9-24)$$

若 S 较小时,也可采用下式来计算 D :

$$D = 1 - \sum_{j=0}^{S-1} P_j. \quad (9-25)$$

根据 L 和 L_q 定义,可得:

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j P_j = S\rho + \frac{\rho}{(1-\rho)^2} P_S, \quad (9-26)$$

$$L_q = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{S+j} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} P_S, \quad (9-27)$$

设 U_q 为顾客等待时间,则该随机变量的分布函数为

$$F(t) = P(U_q \leq t) = \begin{cases} 1 - \frac{P_S}{1-\rho} e^{-(S\mu-\lambda)t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (9-28)$$

特别

$$P(U_q > 0) = \frac{P_s}{1-\rho}.$$

它与等待概率的表达式相同,这是很自然的.

又可知

$$W_q = E(U_q) = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2} P_s, \quad (9-29)$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2} P_s, \quad (9-30)$$

对于 $\rho \geq 1$ 的系统,可知 $P_j = 0$ 对一切 j 成立,这表示如果将这一系统维持一段很长的时间,系统中的顾客队伍就会无限长.

例 9-3 某超级市场,顾客从货架上挑选各类商品,出门前到柜台前付款.现有两个收款柜台,若都不空闲,顾客就排成一队,否则,顾客可在任一个柜台付款.设此服务系统是 $M/M/2$ 排队模型.为了估计该系统的效能,现在柜台前作了如下统计:以两分钟作为一个时段,依次记下各个时段里来的顾客数,并记下了这些顾客在柜台旁付款所花费的时间.下面给出有关数据:

(1) 顾客来到数:在相继的 26 个时段里依次来到付款柜台前的顾客数为:1 3 0 1 0 0 1 1 2 1 0 1 3 2 5 1 2 2 1 0 0 1 0 3 3 1;

(2) 付款时间(分:秒):4:35, 3:02, 5:27, 4:33, 2:35, 1:45, 0:15, 3:45, 0:15, 4:20, 2:39, 4:51, 5:45, 0:23, 2:30, 3:26, 1:48, 1:16, 1:24, 4:17, 3:07, 1:40, 5:53, 2:31, 3:28, 0:54, 0:38, 6:55, 1:33, 6:20, 0:59, 2:03, 1:29, 5:24, 3:50.

试估计该系统的效能.

解 由已知数据可知每时段(2 分钟)平均到来顾客 $\frac{35}{26} = 1.346$,从而,该最简单流的参数

$$\lambda = 0.673(\text{顾客/分钟}),$$

顾客的平均服务时间

$$\frac{1}{\mu} = \frac{105.58}{35} = 3.017(\text{分钟}),$$

于是,该负指数分布的参数

$$\mu = 0.331(\text{顾客/分钟}).$$

本问题为 $M/M/2$ 排队模型,所以

$$\rho = \frac{0.673}{2 \times 0.331} = 1.017 > 1,$$

它表明这一系统运营一段时间后,系统中的顾客队伍长度会趋于无穷大.

为了使这系统能趋于稳定,现增设一个付款柜台,于是,问题成为 $M/M/3$ 排队模型,因此有

$$\rho = \frac{0.673}{3 \times 0.331} = 0.678 ,$$

由式(9-22)和式(9-23)知：

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{(3 \times 0.678)^1}{1!} + \frac{(3 \times 0.678)^2}{2!} + \frac{(3 \times 0.678)^3}{3!} \cdot \frac{1}{1 - 0.678}} = 0.106 ,$$

$$P_1 = \frac{(3 \times 0.678)^1}{1!} \times 0.106 = 0.216 ,$$

$$P_2 = \frac{(3 \times 0.678)^2}{2!} \times 0.106 = 0.219 ,$$

$$P_3 = \frac{(3 \times 0.678)^3}{3!} \times 0.106 = 0.148 .$$

顾客到达系统后必须等待的概率

$$D = 1 - \sum_{j=0}^2 P_j = 1 - 0.106 - 0.216 - 0.219 = 0.459 ,$$

系统中顾客平均等待队长

$$L_q = \frac{0.678}{(1 - 0.678)^2} \times 0.148 = 0.968(\text{顾客}) .$$

系统中顾客平均队长

$$L = L_q + S\rho = 0.968 + 3 \times 0.678 = 3.002(\text{顾客}) .$$

顾客平均等待时间

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.968}{0.673} = 1.438(\text{分钟}) ,$$

顾客平均逗留时间

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 1.438 + 3.017 = 4.455(\text{分钟}) .$$

柜台的利用率为 0.678 ,系统的空闲系数为 0.106.

例 9-4 平均每小时有 6 列货车到达某货站 ,服务率为每小时 2 列 ,问要多少站台才能使货车等待卸车的概率不大于 0.05 ? 设该系统为 $M/M/S$ 排队模型.

解 现系统为 $M/M/S$, $\lambda = 6$, $\mu = 2$,要使 $\rho = \frac{6}{2S} = \frac{3}{S} < 1$,可见站台数不能少于 4.

我们对 $S = 4, 5, 6$ 和 7 分别求出相应的 ρ, P_0, P_S 和 D ,如表 9-3 所示.

表 9-3

S	4	5	6	7
ρ	0.75	0.6	0.5	0.43
P_0	0.037 7	0.046 6	0.048 9	0.049 5
P_S	0.127 2	0.094 5	0.049 5	0.021 5
D	0.509 0	0.236 3	0.099 0	0.0377

可见,应设置 7 个站台.

下面我们来讨论 $M/M/S$ 排队系统的静态优化问题——系统设计的最优化.

我们建立系统的有关费用模型(考虑在单位时间内使服务费用和顾客等待(或逗留)费用之和最小),然后对有关的参数的优化进行决策.

服务费用是与服务水平(例如:代表服务机构能力的平均服务率,设备条件如服务台个数、系统容量)密切相关的,一般说来,它是可以确切计算或估计的,而顾客的等待费用对大部分排队模型就很难估算.

例 9-5 若 $M/M/S$ 排队系统的服务台个数可以调整,每个服务台在单位时间内的服务费用为 C_1 (无论服务与否),顾客等待一个单位时间的费用为 C_2 ,求使总费用最低的最佳服务台个数.

解 等待队长是在变化的,而等待队长的期望值为 L_q ,因此,在单位时间内总费用期望值为

$$f = C_1 S + C_2 L_q,$$

其中 $L_q = L_q(S)$ 为 S 的函数.

现在求最优解 S^* 使 $f(S^*) = \min_S \{C_1 S + C_2 L_q\}$. 由于 S 只能取整数值, $f(S)$ 不是连续型变量的函数,所以不能用微分方法求解.我们采用边际分析法来求 S^* . 根据 $f(S^*)$ 是最小值的特点,应有

$$\begin{cases} f(S^*) \leq f(S^* - 1), \\ f(S^*) \leq f(S^* + 1). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} C_1 S^* + C_2 L_q(S^*) \leq C_1(S^* - 1) + C_2 L_q(S^* - 1), \\ C_1 S^* + C_2 L_q(S^*) \leq C_1(S^* + 1) + C_2 L_q(S^* + 1). \end{cases}$$

于是,有

$$\begin{aligned} C_1 &\leq C_2 [L_q(S^* - 1) - L_q(S^*)], \\ C_1 &\geq C_2 [L_q(S^*) - L_q(S^* + 1)], \end{aligned}$$

即

$$L_q(S^*) - L_q(S^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_q(S^* - 1) - L_q(S^*). \quad (9-31)$$

我们对 $S = 1, 2, \dots$ 分别求 $L_q(S)$, 计算相邻两个 $L_q(S)$ 值之差, 因为 $\frac{C_1}{C_2}$ 是已知数, 我们根据这个数落在哪个不等式的区间内来定出 S^* .

例 9-6 一个服务台经营费用每小时 15 元, 顾客等待单位时间费用 50 元, 顾客到达为最简单流, 每小时 16 个顾客, 服务时间为负指数分布, 服务率为每小时 4 个顾客, 求单位时间总费用最低的服务台个数.

解 现在 $\lambda = 16$, $\mu = 4$, 于是 $\rho = \frac{16}{4S} = \frac{4}{S}$. 为满足条件 $\rho < 1$, 应有 $S \geq 5$. 又

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{15}{50} = 0.3,$$

我们用边际分析法来求 S^* , 计算过程见表 9-4.

表 9-4

S	$L_q(S)$	$[L_q(S) - L_q(S+1), L_q(S-1) - L_q(S)]$
5	2.22	
6	0.58	$[0.4, 1.64]$
7	0.18	$[0.12, 0.4]$
8	0.06	

由于 $0.3 \in [0.12, 0.4]$, 因此最优解 $S^* = 7$.

如果我们采用枚举法, 则得表 9-5. 所以, 最佳服务台个数为 7, 单位时间最低费用为 114 元.

表 9-5

S	5	6	7	8
ρ	0.8	0.67	0.57	0.5
P_0	0.013	0.0167	0.0179	0.0182
L_q	2.22	0.58	0.18	0.06
$C_2 L_q$	111	29	9	3
$C_1 S$	75	90	105	120
f	186	119	114*	123

373

例 9-7 对于 $M/M/S$ 模型, 若顾客在系统逗留一个单位时间的费用为 C_3 , 每个服务台在单位时间的服务费用为 C_1 , 求使总费用最低的最佳服务台个数.

解 单位时间总费用的期望值

$$f = C_1 S + C_3 L(S).$$

类似于例 9-5, 最佳服务台个数 S^* 应满足下列不等式:

$$L(S^*) - L(S^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_3} \leq L(S^* - 1) - L(S^*).$$

9.3.2 $M/M/1$ 排队模型

$M/M/1$ 排队模型为 $M/M/S$ 在 $S = 1$ 时的特例. 现设

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

由式(9-22)和式(9-23)可知

$$\begin{cases} P_0 = 1 - \rho, \\ P_j = (1 - \rho)\rho^j, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9-32)$$

因此, 有

$$D = \rho, \quad (9-33)$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}, \quad (9-34)$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad (9-35)$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}, \quad (9-36)$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad (9-37)$$

可以证明,若顾客在系统中的逗留时间为随机变量 U , 则

$$F(t) = P(U \leq t) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)t} (t \geq 0). \quad (9-38)$$

下面我们来计算 $M/M/1$ 排队模型忙期 Q 的平均长度 EQ .

对服务台来说,整个时间轴可以分成两部分:忙期与闲期. 当一个顾客到达空着的服务台时忙期就开始,一直到服务台再一次变成空闲(就是说,系统中没有等待的顾客),忙期才结束. 所谓闲期,就是指以服务台变成空闲开始到新的顾客到达为止这段时期. 由最简单流性质可知,闲期长度遵从参数为 λ 的负指数分布,故闲期平均长度为 $\frac{1}{\lambda}$. 另一方面, $P_0 = 1 - \rho$, 因此在相当长的时期 T_0 内,服务台空闲的时间总长度为 $T_0(1 - \rho)$, 所以在 T_0 时期内闲期的平均个数为 $T_0(1 - \rho) / \frac{1}{\lambda} = (1 - \rho)\lambda T_0$, 它也等于 T_0 内忙期的平均个数. 又知 T_0 时期内服务台忙碌时间总长度为 $T_0\rho$, 因此忙期平均长度

$$EQ = \frac{T_0\rho}{\lambda(1 - \rho)T_0} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad (9-39)$$

可见有

$$EQ = W,$$

忙期的平均长度即为顾客在系统中逗留时间的期望值 W . 于是,一个忙期中所服务的顾客的平均数为

$$\frac{1}{\mu - \lambda} \cdot \mu = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (9-40)$$

例 9-8 为估计某邮局服务系统的效能,现以 3 分钟为一个时段,统计了 100 个时段中顾客到达的情况及对 100 位顾客的服务时间,有关数据列于表 9-6 和表 9-7. 设此服务系统为 $M/M/1$ 排队模型. 求系统有关的数量指标.

表 9-6

到达人数	0	1	2	3	4	5	6
时段数	14	27	27	18	9	4	1

表 9-7

服务时间(秒)	(0, 12]	(12, 24]	(24, 36]	(36, 48]	(48, 60]	(60, 72]	(72, 84]
顾客人数	33	22	15	10	6	4	3

(续表)

服务时间(秒)	(84, 96]	(96, 108]	(108, 120]	(120, 150]	(150, 180]	(180, 200]
顾客人数	2	1	1	1	1	1

解 先求出每时段内到达顾客的平均数

$$\frac{0 \times 14 + 1 \times 27 + 2 \times 27 + 3 \times 18 + 4 \times 9 + 5 \times 4 + 6 \times 1}{100} = 1.97,$$

故顾客的平均到达率为

$$\lambda = \frac{1.97}{3} \approx 0.657(\text{顾客 / 分钟}).$$

再计算每位顾客所需的平均服务时间,采用表 9-5 中时间区间的中值进行计算,可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{100} [6 \times 33 + 18 \times 22 + 30 \times 15 + 42 \times 10 + 54 \times 6 + 66 \times 4 + 78 \times 3 + \\ &\quad 90 \times 2 + 102 \times 1 + 114 \times 1 + 135 \times 1 + 165 \times 1 + 190 \times 1] \\ &= 31.72(\text{秒}) \approx 0.53(\text{分钟 / 顾客}), \end{aligned}$$

所以此排队系统的服务率

$$\mu = 1.89(\text{顾客 / 分钟}).$$

于是,服务台服务强度为

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.348.$$

系统的空闲系数

$$P_0 = 1 - \rho = 0.652,$$

顾客需要等待的概率

$$D = 1 - P_0 = 0.348.$$

系统中平均队伍长度和平均等待队伍长度分别为

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 0.533(\text{顾客}), \\ L_q &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.186(\text{顾客}), \end{aligned}$$

顾客平均逗留时间和平均等待时间分别为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\mu - \lambda} = 0.811(\text{分钟}), \\ W_q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.282(\text{分钟}). \end{aligned}$$

服务台忙期的平均长度

$$EQ = W = 0.811(\text{分钟}).$$

例 9-9 设某医生的私人诊所平均每隔 20 分钟有一位病人前来就诊,医生给每位病人诊断的时间平均需要 15 分钟.现设它为一个 $M/M/1$ 排队模型.医生希望有足够的座位给来就诊的病人坐,使到达就诊的病人站着概率不超过 0.01.试问至少应为病人准备多少个座位(包括医生诊病时病人就座的一个座位)?

解 设 k 为需要的座位数.因而到达的病人站着概率

$$P_k + P_{k+1} + \dots \leq 0.01.$$

于是,应要求

$$\sum_{j=0}^{k-1} P_j = (1-\rho) \sum_{j=0}^{k-1} \rho^j = 1 - \rho^k \geq 0.99,$$

即要求

$$\begin{aligned} \rho^k &\leq 0.01, \\ k \lg \rho &\leq \lg 0.01 = -2. \end{aligned}$$

现在 $\frac{1}{\lambda} = 20$, $\frac{1}{\mu} = 15$, $\rho = \frac{15}{20} = 0.75$, $\lg 0.75 = -0.1249$, 故 k 应满足

$$k \geq \frac{2}{0.1249} \approx 16.$$

即至少应为病人准备 16 个座位.

例 9-10 设人们到售票口购买球赛票的平均到达率为每分钟 1 人,售票员卖一张票平均需 20 秒(到达间隔与服务时间都为负指数分布).

(1) 如果比赛开始前 2 分钟某球迷到达,若他买好票,估计他寻到其座位大约需 1.5 分钟,那么球迷能期望在球赛开始前坐好吗?

(2) 该球迷在球赛开始前坐好的概率为多少?

(3) 为了在球赛开始前坐好的把握为 99%,该球迷应多早到达?

解 (1) 本问题为 $M/M/1$ 排队模型,如果以分钟为时间单位,则 $\lambda = 1$, $\mu = 3$, $\rho = \frac{1}{3}$. 于是,有

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 1} = 0.5(\text{分钟}),$$

得到票的平均时间 W 与到达座位的时间之和恰为 2 分钟,所以球迷能期望在球赛开始前坐好.

(2) 该问题即球迷在服务系统逗留时间 U 不超过半分钟的概率.有

$$P(U \leq 0.5) = 1 - e^{-(3-1)0.5} = 1 - e^{-1} \approx 0.63.$$

(3) 我们先求时间 t ,使 $P(U \leq t) = 0.99$. 即要求

$$P(U > t) = e^{-(\mu-\lambda)t} = e^{-(3-1)t} = e^{-2t} = 0.01,$$

$$-2t = \ln 0.01, t = -\frac{1}{2} \ln 0.01 = 2.3(\text{分钟}).$$

因此,该球迷能以 99% 的把握在 2.3 分钟内(等待和购票)得到一张票. 因为在买到票以后他需要用 1.5 分钟找座位,所以该球迷必须提前 $2.3 + 1.5 = 3.8$ 分钟到达,才能以 0.99 概率在球赛开始前就入座.

例 9-11 若对于例 9-3(取 $S = 3$),如果对排队方式加以改变,在各个柜台前排成一个队列,且进入队列后不再变换,于是,得到 3 个 $M/M/1$ 子系统. 设每个队列的平均到达率

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\lambda}{3} = \frac{0.673}{3} = 0.224.$$

试将 3 个 $M/M/1$ 排队模型与 $M/M/3$ 排队模型作比较.

解 现按 3 个 $M/M/1$ 排队模型计算有关数量指标,并与例 9-3 有关数据进行比较,得表 9-8. 从表 9-8 中各指标的对比可看出,单排队比 3 个队列有显著优越性. 所以在安排排队方式时应加以注意.

表 9-8

模型 数量指标	$M/M/3$	$M/M/1$
λ	0.673	0.224
μ	0.331	0.331
ρ	0.678	0.678
P_0	0.106	0.322
L	3.002	2.093
L_q	0.968	1.417
W	4.560	9.344
W_q	1.438	6.325
D	0.459	0.678

例 9-12 表 9-9 给出了 $\lambda = 8, \mu = 10$ 的 $M/M/1$ 和 $M/M/2$ 模型以及服务率提高为 $\mu = 20$ 的 $M/M/1$ 模型的有关数量指标,试讨论服务台的增减和服务率的增减对系统效能的影响.

表 9-9

模型 数量指标	$M/M/1$	$M/M/2$	$M/M/1$
λ	8	8	8
μ	10	10	20
ρ	0.8	0.4	0.4
P_0	0.2	0.429	0.6
L	4	0.95	0.667
L_q	3.2	0.152	0.267
W	0.5	0.119	0.083
W_q	0.4	0.019	0.033
D	0.8	0.229	0.4

解 由表 9-7 可见,如果用增加服务速度的办法使服务能力增加一倍,则系统中的

队长 L 由 4 减为 0.667, 顾客在系统中的逗留时间 W 由 0.5 减为 0.083, 为原值 0.5 的 16.7%; 如果采用增加一个服务台的方法提高服务质量, 则系统中的队长 L 由 4 减为 0.95, 顾客在系统中的逗留时间 W 由 0.5 减为 0.119, 为原值 0.5 的 23.8%.

比较这两种改进系统服务质量的方法(一种方法可以理解为采用大设备, 提高 μ , 另一种方法可以理解为采用两台小设备, 各台小设备的 μ 不变), 可以明显看出, 一台大设备的服务质量较好. 尽管采用一台大设备时, 等待队长 L_q 要比采用两台小设备时大一些, 等待时间相应地要长些, 但是可由服务速度较快来得到补偿, 使系统中平均队长和顾客逗留时间比两台设备的相应值小.

例 9-13 某工厂卸货台装卸设备的设计方案中, 有 3 个方案可供选择, 有关信息如表 9-10 所示. 设货车按最简单流到达, 平均每天(按 10 小时计算)到达 15 车, 每车平均装货 500 袋. 卸货时间服从负指数分布, 每辆车在系统停留一小时的损失费为 20 元. 试问该选择哪一个方案, 使总费用最少.

表 9-10

方案 $i^{\#}$	每天固定费用 a_i (元)	每天可变操作费 c_i (元)	每小时装卸率(袋)
1	120	200	1 000
2	260	300	2 000
3	500	400	6 000

378
■■■■■

解 现在是对 3 个 $M/M/1$ 模型进行选优, 它们的平均到达率 λ 都一样: $\lambda = 1.5$ (车/小时). 平均服务率依赖于方案, 分别为: $\mu_1 = \frac{1\,000}{500} = 2$ (车/小时), $\mu_2 = \frac{2\,000}{500} = 4$ (车/小时), $\mu_3 = \frac{6\,000}{500} = 12$ (车/小时). 一辆车在各系统平均逗留时间分别为

$$W_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{1}{2 - 1.5} = 2 \text{ (小时/车)},$$

$$W_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{1}{4 - 1.5} = 0.4 \text{ (小时/车)},$$

$$W_3 = \frac{1}{\mu_3 - \lambda} = \frac{1}{12 - 1.5} = 0.095 \text{ (小时/车)}.$$

一辆车在系统逗留时间的平均损失费为 $20W_i$, 因为每天到达 15 辆车, 所以每天到达的车辆在系统的平均逗留损失费为 $300W_i$ ($i = 1, 2, 3$), 分别为 600, 120, 28.5.

系统的利用率 $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别为 0.75, 0.375, 0.125.

系统每天的可变操作费用为 c_i , 因此系统每天的实际操作费用为 $c_i\rho_i$ ($i = 1, 2, 3$), 分别为

$$200 \times 0.75 = 150, 300 \times 0.375 = 112.5, 400 \times 0.125 = 50.$$

显然, 有

$$\text{每天总费用} = \text{固定费用} + \text{实际操作费用} + \text{平均逗留损失费},$$

于是,我们得表 9-11. 可见 2[#] 方案费用最低,是 3 个方案中的最优方案.

表 9-11

方案 $i^{\#}$	每天固定费用	每天实际操作费	每天平均逗留损失费	每天总费用
1 [#]	120	150	600	870
2 [#]	260	112.5	120	492.5 [*]
3 [#]	500	50	28.5	578.5

例 9-14 若排队模型 $M/M/1$ 的平均服务率 μ 可以调整,服务台提供服务的费用每单位时间为 $C_1\mu$,顾客在系统中逗留单位时间的费用为 C_3 ,求最优服务率.

解 单位时间内系统总费用的期望值为

$$f = C_1\mu + C_3L = C_1\mu + \frac{C_3\lambda}{\mu - \lambda},$$

现在求 $\min f$, 因而取

$$\frac{df}{d\mu} = C_1 - C_3 \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = 0,$$

可得

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C_3\lambda}{C_1}} \quad (9-41)$$

(根号前取“+”号,是因为要保证 $\mu > \lambda$; $\rho < 1$). 又知 $\frac{d^2f}{d\mu^2} > 0$, 所以 μ^* 即为所求的最优解.

379

9.3.3 $M/M/\infty$ 排队模型

$M/M/\infty$ 为泊松输入、负指数分布服务、无限个服务台的服务系统.

假定参数为 λ 的最简单流到达无限个服务台的系统,则顾客一到达立即就可接受空闲着的服务台的服务. 服务时间与到达间隔相互独立, 服务时间是参数为 μ 的负指数分布.

若系统在时刻 t 时正在进行服务的服务台台数为 j ,我们就说在时刻 t 系统所处的状态 $\xi(t) = j$, 其状态集 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$.

可以证明 $\{\xi(t) \mid t \geq 0\}$ 为一个生灭过程,其状态转移图见图 9-6. 所以,对该生灭过程来说,有

$$\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, \dots,$$

$$\mu_j = j\mu, j = 1, 2, \dots,$$

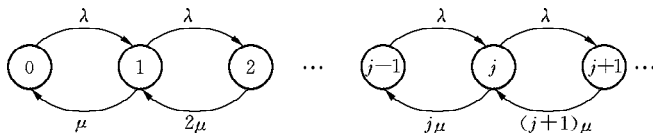


图 9-6

此时定理 9-3 的条件(9-4)总成立,则由式(9-8)和式(9-9)得:

$$P_j = \frac{\rho^j}{j!} e^{-\rho}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9-42)$$

其中 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. 于是,可知系统中在服务的服务台平均数

$$L = \rho. \quad (9-43)$$

例 9-15 某航运公司有一个装卸码头,外轮按最简单流到达,平均每天有 6 艘船到达. 每艘船的卸货时间服从负指数分布,每个装卸作业队平均每天卸船 2 艘. 由于外轮在港内停留时间超过期限罚款极重,因此公司成立了较多的装卸作业队,基本上使外轮一到码头就能得到服务,问正在工作的装卸作业队平均数为多少? 需要 7 个以上装卸作业队工作的概率为多少?

解 本问题为 $M/M/\infty$ 排队模型. 现在 $\lambda = 6$, $\frac{1}{\mu} = 0.5$, 因此 $\rho = 3$. 所以正在卸货的平均作业队数 $L = 3$. 而需要 7 个以上作业队卸货的概率

$$\begin{aligned} P &= 1 - \sum_{j=0}^6 P_j = 1 - \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^6}{6!} \right] e^{-\rho} \\ &= 1 - [1 + 3 + 4.5 + 4.5 + 3.375 + 2.025 + 1.0125] e^{-3} \\ &= 1 - 19.412 \times 0.0498 = 0.0333. \end{aligned}$$

380

9.3.4 $M/M/S/k$ 排队模型

$M/M/S/k$ 排队模型为泊松输入、负指数分布服务、 S 个服务台、系统容量为 k 的混合制系统 ($S < k$).

假定参数为 λ 的最简单流到达 S 个服务台的系统,若顾客到达时有空闲的服务台,则顾客在任一个空闲服务台接受服务,服务时间与到达间隔相互独立,遵从参数为 μ 的负指数分布;若顾客到达时所有 S 个台都在进行服务,则当系统中的顾客数(包括正在服务的 S 个顾客)小于指定数 k 时,新来的顾客就排入队伍等待,而当系统中的顾客数等于 k 时,新来的顾客就被拒绝而损失.

若 $\xi(t)$ 为在时刻 t 时系统内的顾客数,则 $\{\xi(t) | t \geq 0\}$ 是一个随机过程,可以证明它是一个状态集为有限集 $I = \{0, 1, \dots, k\}$ 的生灭过程. 其状态转移图如图 9-7 所示. 所以,对该生灭过程来说,有

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \\ \mu_j &= \begin{cases} j\mu, & j = 1, 2, \dots, S, \\ S\mu, & j = S+1, \dots, k. \end{cases} \end{aligned}$$

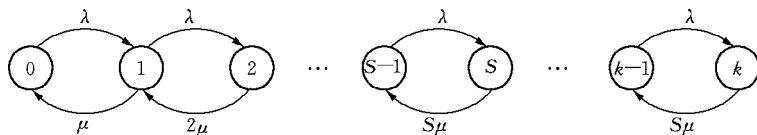


图 9-7

令

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu},$$

则由定理 9-3 可得系统的稳态概率

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{s-1} \frac{(S\rho)^i}{i!} + \sum_{i=s}^k \frac{S^s \rho^i}{S!} \right]^{-1}, \quad (9-44)$$

$$P_j = \begin{cases} \frac{(S\rho)^j}{j!} P_0, & j = 1, 2, \dots, S, \\ \frac{S^s \rho^j}{S!} P_0, & j = S+1, \dots, k. \end{cases} \quad (9-45)$$

显然, P_k 就是顾客被拒之于系统之外的概率, 称为损失率.

L 和 L_q 可根据其定义直接计算, 即

$$L = \sum_{j=0}^k j P_j,$$

$$L_q = \sum_{j=0}^{k-S} j P_{s+j} = \sum_{j=s}^k (j-S) P_j.$$

可以验证:

$$L = L_q + S - \sum_{j=0}^{s-1} (S-j) P_j. \quad (9-46)$$

或者根据下列公式来计算:

$$L_q = \frac{\rho(S\rho)^s P_0}{S!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{k-S} - (k-S)\rho^{k-S}(1-\rho)] (\rho \neq 1), \quad (9-47)$$

$$L = L_q + S\rho(1-P_k). \quad (9-48)$$

显然, 顾客到达且能进入系统的概率为 $1 - P_k$, 故系统的有效到达率 λ_e 为

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_k), \quad (9-49)$$

不难验证,

$$\lambda_e = \mu \left[S - \sum_{j=0}^{s-1} (S-j) P_j \right] \quad (9-50)$$

因此, 根据李特尔公式(9-19)和(9-20)即可求得

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_k)}, \quad (9-51)$$

$$W = \frac{L}{\lambda(1 - P_k)}. \quad (9-52)$$

当 $S = 1$ 时, 对于 $M/M/1/k$ 排队模型, 我们有:

$$P_j = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1, \\ \frac{1}{k+1}, & \rho = 1, \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k; \quad (9-53)$$

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1, \\ \frac{k}{2}, & \rho = 1, \end{cases} \quad (9-54)$$

$$L_q = \begin{cases} \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{(k+\rho)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1, \\ \frac{k(k-1)}{2(k+1)}, & \rho = 1. \end{cases} \quad (9-55)$$

由式(9-46)和式(9-50)可知:

$$L = L_q + (1 - P_0), \quad (9-56)$$

$$\lambda_e = \mu(1 - P_0). \quad (9-57)$$

例 9-16 两位理发师经营的理发馆有 5 把椅子供顾客排队等待使用. 当 5 把椅子都坐满时, 后来的顾客就不再进入理发店而离开. 假若顾客流为最简单流, 平均到达率为 3.763 4 顾客/小时, 顾客理发时间为负指数分布, 平均需要 15 分钟. 求:

- (1) 顾客一到理发店就能理发的概率;
- (2) 等待理发的顾客的平均数;
- (3) 有效到达率;
- (4) 一位顾客在理发店内预期花费的时间;
- (5) 在可能到达的顾客中不等待就离开的顾客的百分比.

解 本问题为 $M/M/2/7$ 排队模型, $S = 2, k = 7$. 现在 $\lambda = 3.7634, \mu = 4, \rho = 0.47$.

(1) 这相当于求理发店内不多于一位顾客的概率 $P_0 + P_1$. 经计算可知 $P_0 = 0.36133, P_1 = 0.33996$, 于是

$$P_0 + P_1 = 0.70129.$$

(2) 由式(9-47)可知

$$L_q = 0.2447.$$

(3) 由式(9-50)可知:

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \mu(S - 2P_0 - P_1) = 4[2 - 2 \times 0.36133 - 0.33996] \\ &= 3.7495. \end{aligned}$$

(4) 由式(9-46)可知

$$\begin{aligned} L &= L_q + S - 2P_0 - P_1 = 0.2447 + 2 - 2 \times 0.36133 - 0.33996 \\ &= 1.182083, \end{aligned}$$

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = 0.3153(\text{小时}) \approx 19(\text{分钟}).$$

或者

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda_e} + \frac{1}{\mu} = \frac{0.2447}{3.7495} + \frac{1}{4} = 0.3153(\text{小时}).$$

(5) 即求 P_7 .

$$P_7 = \frac{S^7 \rho^7}{S!} P_0 = 0.003\ 68 = 0.368\%.$$

例 9-17 某汽车加油站只有一台加油泵,且场地至多只能容纳 3 辆车,当站内场地占满车时,到达的汽车只能去别处加油.输入为最简单流,每 8 分钟一辆,服务为负指数分布,每 4 分钟一辆.加油站有机会租借毗邻的一块空地,以供多停放一辆前来加油的车.租地费用每周 120 元,从每个顾客那里期望净收益 10 元.设该站每天开放 10 小时,问租借场地是否有利?

解 本问题为 $M/M/1/3$ 排队模型.现在已知 $\frac{1}{\lambda} = 8$ 分钟/辆 $= \frac{2}{15}$ 小时/辆, $\frac{1}{\mu} = 4$ 分钟/辆 $= \frac{1}{15}$ 小时/辆,因此 $\rho = 0.5$.于是,到达顾客损失率

$$P_3 = \frac{(1-\rho)\rho^3}{1-\rho^4} = \frac{(1-0.5) \times 0.5^3}{1-0.5^4} = 0.067.$$

若租借场地,则问题成为 $M/M/1/4$ 排队模型,到达顾客损失率

$$\hat{P}_4 = \frac{(1-\rho)\rho^4}{1-\rho^5} = \frac{(1-0.5) \times 0.5^4}{1-0.5^5} = 0.032.$$

从而,租借场地后加油站每周将可增加的服务车辆数为

$$\begin{aligned} & \lambda(P_3 - \hat{P}_4) \times 10 \text{ 小时/天} \times 7 \text{ 天/每周} \\ &= 7.5 \times (0.067 - 0.032) \times 10 \times 7 = 18.34, \end{aligned}$$

于是,每周将增加收入

$$10 \text{ 元} \times 18.34 = 183.4 \text{ 元} > 120 \text{ 元},$$

所以,租借场地是合算的.

例 9-18 现有 $M/M/1/2$ 服务系统,其平均到达率 $\lambda = 10$ 人/小时,平均服务率 $\mu = 30$ 人/小时.管理者想增加收益,拟采用两个方案:方案 A 为增加等待空间,取 $k = 3$;方案 B 为提高平均服务率,取 $\mu = 40$ 人/小时.设对每个顾客服务的平均收益不变,问哪一个方案将获得更大的收益?当 λ 增加到每小时 30 人,又应采用哪一个方案?

解 由于对每个顾客服务的平均收益不变,因此,服务机构单位时间的平均收益,与单位时间实际进入系统的顾客平均数 λ_e 成正比.所以本问题即为比较两个方案的有效到达率 λ_e .

(1) 方案 A 为 $M/M/1/3$ 排队模型:

$$\text{由 } \lambda = 10 (\text{人/小时}), \mu = 30 \text{ 人/小时}, \rho = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故 } \lambda_e = \mu(1 - P_0) = 30 \times \left[1 - \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4} \right] = 9.75.$$

方案 B 为 $M/M/1/2$ 排队模型:

由 $\lambda = 10$ 人/小时 $\mu = 40$ 人/小时 $\rho = \frac{1}{4}$.

$$\text{故} \quad \lambda_e = \mu(1 - P_0) = 40 \times \left[1 - \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3} \right] = 9.5.$$

可见,采用方案 A 能获得更多的收益.

(2) 当 $\lambda = 30$ 人/小时,对方案 A 来说,此时 $\rho = 1$. 因此

$$\lambda_e = \mu(1 - P_0) = 30 \times \left(1 - \frac{1}{3+1} \right) = 22.5.$$

对方案 B 来说,此时 $\rho = \frac{3}{4}$, 因此,

$$\lambda_e = \mu(1 - P_0) = 40 \times \left[1 - \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3} \right] = 22.7.$$

可见,当 $\lambda = 30$ 人/小时,应采用方案 B.

例 9-19 若 $M/M/1/k$ 排队模型的平均服务率可以调整,服务台提供服务的费用每单位时间为 $C_1\mu$ 元,每服务一位顾客可收益 C_4 元,求最优服务率 μ^* .

解 由于有效到达率 $\lambda_e = \mu(1 - P_0)$ 为单位时间实际进入服务机构的顾客平均数,那么,在稳定状态下,它也等于单位时间内实际服务完的顾客平均数. 因此在单位时间内系统的纯利润

$$\begin{aligned} f &= C_4\mu(1 - P_0) - C_1\mu = C_4\mu \left(1 - \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} \right) - C_1\mu \\ &= C_4\lambda\mu \frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu^{k+1} - \lambda^{k+1}} - C_1\mu. \end{aligned}$$

令 $\frac{df}{d\mu} = 0$, 得

$$\rho^{k+1} \frac{k - (k+1)\rho + \rho^{k+1}}{(1 - \rho^{k+1})^2} = \frac{C_1}{C_4},$$

此方程的解即为最优解 μ^* .

当 $k = S$ 时,作为 $M/M/S/k$ 的特例,我们得 $M/M/S/S$ 排队模型,它是损失制的服务系统,若顾客到达时 S 个服务台都正在进行服务,则该顾客就自动离去并不再回来. 这时,有关的计算公式如下:

$$P_0 = \left[\sum_{j=0}^S \frac{(S\rho)^j}{j!} \right]^{-1}, \quad (9-58)$$

$$P_j = \frac{(S\rho)^j}{j!} P_0, \quad j = 1, \dots, S, \quad (9-59)$$

$$L_q = 0, \quad W_q = 0, \quad W = \frac{1}{\mu},$$

$$L = S\rho(1 - P_S). \quad (9-60)$$

L 即为系统中正在服务的服务台期望值. P_S 为 S 个服务台均被占用的概率, 即顾客到达时遭到拒绝的概率(损失率).

例 9-20 设某火车站的电话问讯处有 3 架电话, 可以看作是一个 $M/M/3/3$ 服务系统, 平均每隔 2 分钟有一次问讯电话(包括接通的和未接通的), 每次通话的平均时间为 3 分钟. 试问打到问讯处的电话能接通的概率为多少?

解 现在 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{3}, S = 3$, 故 $\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{1}{2}$. 代入式(9-58)和式(9-59), 得

$$P_0 = \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right]^{-1} \approx 0.239,$$

$$P_3 = \frac{(3\rho)^3}{3!} P_0 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{3}{2} \right)^3 \times 0.239 \approx 0.134.$$

因此, 接通的概率为 $1 - P_3 = 0.866$.

9.3.5 $M/M/S/m/m$ 排队模型

$M/M/S/m/m$ 是顾客源有限的排队模型, 即至多只有有限个(m 个)顾客来到服务系统. 一旦系统中已有 m 个顾客, 就不会再有新顾客到达. 除非系统中的一些顾客得到服务又返回顾客源, 系统才可能有顾客继续到来(参看图 9-8).

有限源服务系统的典型例子是机器看管问题. 假定有 S 个工人共同看管 m 台机器($m \geq S$, m 台机器就是顾客源). 每当机器发生故障时, 就需要有一位工人负责修理, 使其

恢复生产. 所以, 出故障的机器就是要求获得服务的顾客, 工人就是服务台. 当 S 个工人分别正在修理 m 台出故障的机器时, 新发生故障的机器就只能等待工人来修理. 我们假定:

(1) 每台机器连续正常运转时间都服从参数为 λ 的负指数分布, 每台机器平均连续运转的时间为 $1/\lambda$, λ 就是一台机器在单位运转时间内发生故障的平均次数(应注意 λ 不是一台机器单位时间内发生故障的平均次数, 因为一台机器一旦发生了故障, 在修复之前不会再发生故障).

(2) 每台机器的修复时间都服从参数为 μ 的负指数分布, 工人修理一台机器的平均时间为 $1/\mu$.

(3) 各台机器在任意时段内连续运转的时间与工人修复机器的时间彼此独立.

若以 $\xi(t)$ 表示在时刻 t 不在正常运转的机器数, 它是一个随机变量, 因而 $\{\xi(t) | t \geq 0\}$ 是一个随机过程, 它的状态集合为有限集 $I = \{0, 1, \dots, m\}$. 可以证明,

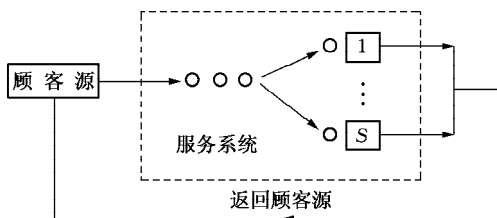


图 9-8

$\{\xi(t) | t \geq 0\}$ 为一个生灭过程, 其状态转移图如图 9-9 所示. 所以, 对该生灭过程来说, 有

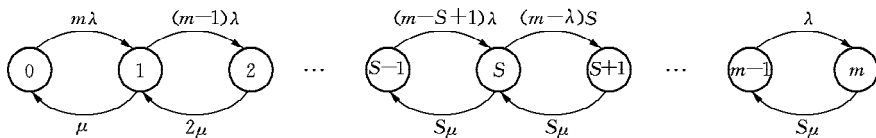


图 9-9

$$\lambda_j = (m-j)\lambda, \quad j = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1, \dots, S; \\ S\mu, & j = S+1, \dots, m. \end{cases}$$

于是, 根据定理 9-3 便可得到系统的稳态概率:

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^S \binom{m}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i=S+1}^m \binom{m}{i} \frac{i!}{S! S^{i-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right]^{-1}, \quad (9-61)$$

$$P_j = \begin{cases} \binom{m}{j} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0, & j = 1, \dots, S, \\ \binom{m}{j} \frac{j!}{S! S^{j-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0, & j = S+1, \dots, m. \end{cases} \quad (9-62)$$

386

(由于 P_0, P_j 计算公式过于复杂, 有专书列成表格可供使用). 由此我们即可计算 L, L_q 及 D :

$$L = \sum_{j=0}^m jP_j, \quad L_q = \sum_{j=0}^{m-S} jP_{S+j}, \quad D = \sum_{j=S}^m P_j.$$

有效到达率 λ_e 的计算公式为:

$$\lambda_e = \lambda(m-L). \quad (9-63)$$

直观上可以如此来理解该公式: 每台机器在单位运转时间内发生故障的平均次数为 λ , 而系统外平均只有 $m-L$ 台机器在运转, 所以 m 台机器在单位时间内实际发生故障的平均次数 $\lambda_e = \lambda(m-L)$.

应用李特尔公式和式(9-63), 即可计算 W 和 W_q .

特别当 $S=1$ 时, 有

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{m!}{(m-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right]^{-1}, \quad (9-64)$$

$$P_j = \frac{m!}{(m-j)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0, \quad (9-65)$$

$$L = m - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0), \quad (9-66)$$

$$L_q = L - (1-P_0), \quad (9-67)$$

$$W = \frac{m}{\mu(1-P_0)} - \frac{1}{\lambda}, \quad (9-68)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}. \quad (9-69)$$

例 9-21 4 名工人看管 10 台机器, 每台机器平均每运转 30 分钟就要修理一次, 每次修理平均需要 10 分钟. 设机器连续运转时间和修理时间均为负指数分布. 求:

- (1) 需要修理的机器平均数;
- (2) 一分钟内 10 台机器平均出现故障的次数;
- (3) 机器的平均停工时间.

解 本问题为 $M/M/4/10/10$ 排队模型, 现在 $\lambda = 1/30$, $\mu = 1/10$, $\lambda/\mu = 1/3$. 经计算, 稳态概率分别为

$$\begin{aligned} P_0 &= 0.0542, & P_1 &= 0.1807, & P_2 &= 0.2710, & P_3 &= 0.2409, \\ P_4 &= 0.1405, & P_5 &= 0.0703, & P_6 &= 0.0293, & P_7 &= 0.0098, \\ P_8 &= 0.0024, & P_9 &= 0.0004, & P_{10} &= 0.00003. \end{aligned}$$

$$(1) L = \sum_{j=0}^{10} jP_j = 2.6261.$$

$$(2) \text{即求 } \lambda_e: \lambda_e = \lambda(m - L) = \frac{1}{30}(10 - 2.6261) = 0.2458.$$

$$(3) W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{2.6261}{0.2458} = 10.684(\text{分钟}).$$

例 9-22 某厂有若干台机器, 它们连续工作时间服从同一参数 λ 的负指数分布. 工人修理时间服从同一参数 μ 的负指数分布. 设 $\lambda/\mu = 0.1$. 今有两个方案: 方案 I 为 3 个工人各自独立看管机器, 每人看管 6 台机器. 方案 II 为 3 个工人共同看管 20 台机器. 试比较两个方案的优劣.

解 方案 I 为 $M/M/1/6/6$ 模型, $\lambda/\mu = 0.1$, 经计算可知系统的稳态概率为

$$\begin{aligned} P_0 &= 0.48, & P_1 &= 0.29, & P_2 &= 0.15, & P_3 &= 0.058, \\ P_4 &= 0.018, & P_5 &= 0.0035, & P_6 &= 0.0003. \end{aligned}$$

从而可得

$$L = 0.855, \quad L_q = 0.335.$$

方案 II 为 $M/M/3/20/20$ 模型, $\lambda/\mu = 0.1$. 经计算可求得系统的稳态概率如下:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0.14, & P_1 &= 0.27, & P_2 &= 0.26, & P_3 &= 0.16, & P_4 &= 0.088, \\ P_5 &= 0.047, & P_6 &= 0.023, & P_7 &= 0.011, & P_8 &= 0.0048, & P_9 &= 0.0019, \\ P_{10} &= 0.0007, & P_{11} &= 0.0002, & P_{12} &= 0.00007, & \text{而 } P_{13}, P_{14}, \dots, P_{20} & \text{都近似于零.} \end{aligned}$$

从而可得

$$L = 2.13, \quad L_q = 0.337.$$

但在 $M/M/1/6/6$ 模型中, 有效到达率 $\lambda_e^I = \lambda(6 - 0.855) = 5.145\lambda$; 在 $M/M/3/20/20$ 模型中, 有效到达率 $\lambda_e^{II} = \lambda(20 - 2.13) = 17.87\lambda$. 故方案 I 和 II 中有机器需等待修理的平均时间 W_q^I 和 W_q^{II} 之比为

$$\frac{W_q^I}{W_q^{II}} = \frac{L_q^I}{\lambda_e^I} \div \frac{L_q^{II}}{\lambda_e^{II}} = \frac{0.335}{5.145\lambda} \div \frac{0.377}{17.87\lambda} = 3.45.$$

由此可知方案 II 要比方案 I 好.

事实上我们能证明如下一般的结论:系统 $M/M/S/Sm/Sm$ 的服务要比 S 个 $M/M/1/m/m$ 系统来得好. 它的直观解释是:当 S 个工人各自独立看管 m 台机器时,工人甲单独看管的 m 台机器,某个时候可能同时有多于一台的机器发生故障,他只能在一台机器上排除故障,其他停止运转的机器只能停产等待修理;但可能另一个工人乙看管的 m 台机器,这时全处于正常运行,如是共同看管,则这时工人乙就可去排除由工人甲看管的等待修理的机器的故障.

例 9-23 设在工人看管机器问题 $M/M/1/m/m$ 模型中,我们可以采用不同的工艺和设备来检修机器. 工艺和设备先进,服务率 μ 增大,但相应的检修费用也增大. 设单位时间检修费为服务率 μ 的函数 $C_5\mu$ (C_5 为一常数),每台正常运转的机器单位时间可获利 C_6 ,试确定最优服务率 μ^* 以使系统在单位时间内获得的纯利润最大.

解 由于单位时间内正常运转的机器平均台数为 $m - L$,由式(9-66)知

$$m - L = \mu(1 - P_0)/\lambda,$$

所以,单位时间内系统的纯利润 f 为

$$f = C_6(m - L) - C_5\mu = C_6\mu(1 - P_0)/\lambda - C_5\mu.$$

求 f 的极值,即可求得最优服务率 μ^* .

§ 9.4 一般服务分布 $M/G/1$ 排队模型

388
■■■■■

9.4.1 $M/G/1$ 排队模型

$M/G/1$ 排队模型是 1 个服务台的等待制服务系统,输入过程是以 λ 为参数的最简单流,各顾客的服务时间是相互独立且具有相同分布的随机变量,其数学期望和方差分别为 $1/\mu$ 和 σ^2 . 服务台的服务强度

$$\rho = \lambda/\mu. \quad (9-70)$$

当 $\rho < 1$ 时,我们有如下的结论:

$$P_0 = 1 - \rho, \quad (9-71)$$

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1 - \rho)}, \quad (9-72)$$

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1 - \rho)}, \quad (9-73)$$

$$W_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\lambda(1 - \rho)}. \quad (9-74)$$

同时还可知,忙期的平均长度

$$EQ = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad (9-75)$$

在忙期内被服务的顾客的平均数为 $\frac{1}{1 - \rho}$.

可见,在平均服务时间不能缩减时,也能用减少服务时间方差的办法来减少平均队长和降低顾客的等待时间.

例 9-24 在某重型机器厂,桥式吊车的效率为 80%. 根据统计资料知物品吊运时间的平均值为 8 分钟,标准差为 5 分钟. 又假设需要吊运的物品为最简单流. 试问:

(1) 物品需要等待的平均时间为多少?

(2) 若物品的平均吊运时间缩减为 7 分钟,物品的平均等待时间为多少?

(3) 若物品的平均吊运时间仍为 8 分钟,但标准差降为 3 分钟,物品的平均等待时间为多少?

解 本问题为 $M/G/1$ 排队模型. 吊车的利用率为 80%, 即 $\rho = 0.8$. 又 $1/\mu = 8$ 分钟/次, 因此

$$\lambda = 0.1 \text{ 次/分钟.}$$

(1) 由式(9-74)可知

$$W_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\lambda(1-\rho)} = \frac{0.8^2 + 0.1^2 \times 5^2}{2 \times 0.1 \times (1-0.8)} = \frac{0.89}{0.04} = 22.25(\text{分钟}).$$

(2) $1/\mu$ 变为 7 分钟/次, 而 λ 仍为 0.1 次/分钟, 所以, 此时

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.7.$$

于是, 可知

$$W_q = \frac{0.7^2 + 0.1^2 \times 5^2}{2 \times 0.1 \times (1-0.7)} = \frac{0.74}{0.06} = 12.3(\text{分钟}).$$

(3) 此时 $1/\mu = 8$ 分钟/次, $\lambda = 0.1$ 次/分钟, $\rho = 0.8$. 于是

$$W_q = \frac{0.8^2 + 0.1^2 \times 3^2}{2 \times 0.1 \times (1-0.8)} = \frac{0.73}{0.04} = 18.25(\text{分钟}).$$

9.4.2 $M/D/1$ 排队模型

$M/D/1$ 排队模型的服务时间为确定的常数 $1/\mu$, 其方差 $\sigma^2 = 0$. 于是, 当 $\rho = \lambda/\mu < 1$ 时, 有下列公式:

$$L = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}, \quad (9-76)$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}, \quad (9-77)$$

$$W_q = \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}. \quad (9-78)$$

例 9-25 某种实验仪器每次使用时间均为 3 分钟, 实验者的到达过程为泊松过程, 平均每小时来到 18 人, 求此服务系统的 L , L_q , W 和 W_q .

解 本问题为 $M/D/1$ 排队模型. $1/\mu = 3$ 分钟/人, $\lambda = 18/60 = 0.3$ (人/分钟),

因而 $\rho = 0.9$. 于是,由式(9-76)、式(9-77)和式(9-78)知:

$$L = 0.9 + \frac{0.9^2}{2 \times (1 - 0.9)} = 4.95,$$

$$L_q = \frac{0.9^2}{2 \times (1 - 0.9)} = 4.05,$$

$$W_q = L_q / \lambda = 4.05 / 0.3 = 13.5(\text{分钟})$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 13.5 + 3 = 16.5(\text{分钟})$$

9.4.3 M/E_k/1 排队模型

在 M/E_k/1 排队模型中,顾客的服务时间 V 服从爱尔朗分布,此时有

$$EV = \frac{1}{\mu}, \quad DV = \frac{1}{k\mu^2}.$$

因此,当 $\rho < 1$ 时,有下列各式:

$$L = \rho + \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}, \quad (9-79)$$

$$L_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}, \quad (9-80)$$

$$W_q = \frac{(k+1)\rho}{2k(\mu - \lambda)}. \quad (9-81)$$

例 9-26 某单人裁缝店做西服,每套衣服需要 4 道不同的工序,4 道工序完工后才开始做另一套衣服,每道工序所需时间服从同参数 4μ 的负指数分布,平均需要 2 小时.又设顾客前来定制西装的过程为泊松过程,平均每周末到 5.5 人(每人定制一套西服,且设每周工作 6 天,每天工作 8 小时).试问一位顾客从订货到做好一套西服平均需要多少时间?

解 设 $V_n^1, V_n^2, V_n^3, V_n^4$ 分别为裁缝为第 n 位顾客缝制西服时在各道工序上所花的时间,它们是相互独立且服从同参数 4μ 的负指数分布的随机变量,故为第 n 位顾客缝制西服所需的总时间

$$V_n = V_n^1 + V_n^2 + V_n^3 + V_n^4$$

是服从参数为 μ 的 4 阶爱尔朗分布.

设单位时间为小时.由题设可知, $E(V_n^i) = \frac{1}{4\mu} = 2 \text{ 小时/套}$, 因此得 $\mu = 1/8 \text{ 套/小时}$. 于是,有

$$E(V_n) = \frac{1}{\mu} = 8, \quad D(V_n) = \frac{1}{4\mu^2} = 16.$$

又从题设可知

$$\lambda = \frac{5.5}{48} \approx 0.115 (\text{套/小时}), \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.115 \times 8 = 0.92,$$

代入式(9-79),得

$$L = 0.92 + \frac{(4+1) \times (0.92)^2}{2 \times 4 \times (1-0.92)} \approx 7.53.$$

于是,顾客从订货到做好一套西服平均需要的时间:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{7.53}{0.115} \approx 65.48 (\text{小时}).$$

习 题 九

1. 某汽车修理站只有一个工人,一天(8小时)平均可修理12辆汽车,已知修理时间服从负指数分布.汽车来到修理站是一个泊松过程,平均每小时有一辆汽车来到修理站要求修理.

(1) 若一位司机愿意在修理站等候,以便在汽车修理好后能立即去执行任务,那么他要取回汽车平均需要等待多长的时间?

(2) 若平均每小时有1.2辆汽车去修理.由于这一改变,这位工人平均每天的空闲时间减少了多少?这对修理站里的汽车数及修理站向顾客交货的时间又有怎样的影响?

2. 在一个百货商店中,包扎礼品的工作由两人负责.设该服务系统为 $M/M/2$ 排队模型.要求包扎的礼品平均每小时有20件,服务员包扎一件礼品平均需要5分钟.试问,一个顾客为了包扎一件礼品平均需要等待多长的时间?假若仅有一个服务员包扎礼品,他的工作速度是前面提到的那两个人的工作速度的两倍.这对顾客的等待时间会产生怎样的影响?

3. 某电信局准备在新国际机场装设电话亭,而电信局的目标是每一个人等候打电话的概率不超过0.10,使用电话的平均需求率为每小时30人,使用电话的平均时间为5分钟.设该服务系统为 $M/M/S$ 排队模型.试问:应该设置多少个电话亭?

4. 病人到达某医生开设的诊所的平均时间间隔为20分钟,每次诊断平均需要15分钟,两种时间都为负指数分布.若候诊室只能放9个座位(包括医生身旁问诊的座位),求到达的一个病人找不到座位的概率.

5. 某设备修理站打算在甲和乙两人中聘用一人.甲要求工资每小时15个单位,他每小时平均能修理4台设备;乙要求工资每小时12个单位,他每小时平均能修理3台设备.一台设备停留在修理站里1小时(等待修理或正在修理),修理站要支付费用5个单位.若每小时平均有两台设备送来修理,修理站应使用哪一位工人(服务为负指数分布,输入为最简单流)?

6. 机器送到某修理厂是一个泊松过程.来到率为每小时6台,每台机器的平均修理时间需要7分钟,可认为修理时间为负指数分布.该厂经理获悉,有一种新的检验设备可使每台机器的修理时间减到5分钟,但每分钟这台设备需要费用10个单位.如果机器坏了,估计每台机器在一分钟里造成的损失费为5个单位.试问,这台新的检验设备要否购置?

7. 顾客进入一个食品店是平均每分钟2个人的泊松过程.顾客自行选购食品,选购

时间服从平均值为 10 分钟的负指数分布. 在一段长时间后, 预计有多少个顾客在挑选食品(不包括那些已经选好食品而在等待付款的顾客)?

8. 某理发店只有一名理发师, 他理一个头平均需要 15 分钟, 理发时间为负指数分布. 该店有 6 个等候理发的座位. 来的顾客发现无空闲的座位就自动离去. 假定顾客到来是一个泊松过程, 每小时来 3 个人. 试问:

- (1) 一个顾客来到时发现系统客满的概率为多少?
- (2) 有效到达率为多少?
- (3) 一位顾客在店中理发预期要花费多少时间?

9. 一台无线电发报机经常需要修理. 经过修理后, 它的工作时间服从平均值为 40 小时的负指数分布, 修理时间也属于负指数分布, 但平均值为 2 小时. 经过一段时间以后发报机处于可以发报的状态的概率为多少?

10. 有一个加油站的场地可供 4 辆汽车同时加油. 顾客将不排队等候, 如场地不空, 他们就去别处加油. 一个顾客平均要用 4 分钟可将汽车的油箱加满. 若每分钟来到加油站的汽车为 2 辆, 问被拒绝服务的汽车的百分比是多少? 若平均 2 分钟来一辆汽车, 问被拒绝服务的汽车的百分比是多少(服务为负指数分布, 输入为最简单流)?

11. 顾客来到付款处是一个泊松过程, 每小时平均来到 20 个. 为了保证顾客排队等候的平均时间不超过 5 分钟, 问收款员工作的平均速度应该是多少(服务为负指数分布)?

12. 某种零件在装入真空管之前, 必须清除油污再组装. 设零件按泊松流生产出来, 平均每小时生产出 50 件, 清除油污和组装的时间为负指数分布, 平均服务率 μ (件/小时) 待定. 如零件生产出来后, 在装入真空管前会氧化而造成损失. 每个零件逗留 1 小时的损失费 C_1 为 1 元, 清洗和组装费为每小时平均 μC_2 元, $C_2 = 2$ 元. 求使每小时总费用最小的平均服务率.

13. 某公司的中心试验室为各工厂服务. 设要求做试验的人按最简单流到来, 平均每天来 48 人次. 每次顾客在系统中逗留单位时间所造成的损失费为 $C_1 = 6$ 元, 做试验的时间服从负指数分布, 平均服务率为 25 人次/天, 单位时间的服务成本为 $C_2 = 4$ 元. 求最优的试验设备数 S .

14. 设有两个修理工人, 其责任是保证 5 台机器能正常运行, 每台机器平均损坏率为每小时一次. 这两个工人修复一台机器的平均时间都为 0.25 小时. 求:

- (1) 等待修理的机器平均数;
- (2) 机器在系统中的平均逗留时间.

15. 对于 $M/M/1/k$ 排队模型, 求证:

- (1) $\lambda_e = \mu(1 - P_0)$;
- (2) $\lambda_e = \mu(L - L_q)$.

16. 对于单服务台模型和相同的最简单流输入过程, 试证: 平均服务时间相等的定长分布的 $\hat{L}_q$ 是负指数分布的 L_q 的一半.

17. 设某电话间顾客按泊松流到达, 平均每小时到达 6 人, 每次通话时间平均为 8 分钟, 方差为 16 分钟, 通话时间服从爱尔朗分布. 那么, 平均等待长度是多少? 顾客的平均等待时间是多少?

第十章 存 储 论

人们在生产经营和商品销售的活动中,常常需要把购买的原料、生产的产品和销售的商品存储起来,以备使用和销售。但是,由于种种原因,需求与供应、消费与存储之间存在着不协调性,其结果将会产生两种情况:一种情况是供过于求,由于原料、产品或者商品的积压,造成资金周转的缓慢和成本的提高而带来经济损失;另一种情况是供不应求,由于原料或者商品短缺,引起生产停工或者无货销售,使经营单位因利润降低而带来经济损失。为了使经营活动的经济损失达到最小或者收益实现最大,于是人们在供应和需求之间对于存储这个环节,开始研究如何寻求原料、产品或者商品合理的存储量以及它们合适的存储时间,来协调供应和需求的关系。

存储论研究的基本问题是,对于特定的需求类型,讨论用怎样的方式进行原料的供应、商品的订货或者产品的生产,以求最好地实现存储的经济管理目标。因此,存储论是研究如何根据生产或者销售活动的实际存储问题建立起数学模型,然后通过费用分析求出产品、商品的最佳供应量和供应周期这些数量指标。

存储模型分为确定型和随机型两大类,供需完全可以预测的模型称为确定型模型,否则就是随机型模型。

§ 10.1 存储模型的结构及基本概念

一般存储系统的结构模式可以表示为如图 10-1 的形式。由于生产或销售的需求,从存储点取出一定数量的库存货物,这就是存储系统的输出。由于存储货物的不断输出而减少,则必须及时作必要的补充,这就是存储系统的输入。

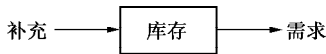


图 10-1

需求的方式可以是均匀连续的或间断批量的,需求的数量可以是确定性的或是随机性的。补充的形式可以由经营单位向外订货或者自身安排生产活动。研究补充的主要数量指标为:确定订货周期或生产周期(补充间隔期)和确定订购批量或生产批量。

10.1.1 费用构成

费用是评价存储系统库存控制优劣的主要标准。存储系统有关的主要费用可以分为以下 3 类。

1. 订货费

订货费是从每次订货到货物入库所需的全部费用. 它主要包括两项费用:

(1) 订购费. 如手续费、交通费、出差费、检验费等固定费用, 它仅与订购次数有关, 而与订购数量无关.

(2) 货物成本费. 包括货物的价格、运输费、运输的损耗等可变费用, 它因订购数量的不同而变化.

2. 存储费

存储费是货物从入库到出库阶段内由于库存保管所需要的费用. 它主要包括仓库场地的租借费、货物的保管费、资金占用的利息费、货物的损耗费等, 它因存储数量的增加而增加.

3. 缺货费

缺货费是指库存货物供不应求时所造成的经济损失. 如生产中断的经济损失、失去销售机会的利润损失、没有完成合同的处罚等.

在建立存储模型的过程中, 根据不同存储问题的实际背景, 首先应该弄清楚哪些费用必须纳入模型, 然后选择确定运用哪种存储控制方法, 使建立的模型中各项费用之和达到最小.

由于研究的存储系统的实际背景存在许多差异, 所以给研究者建立数学模型留下许多创造空间, 许多研究者建立了不同的数学模型和存储策略, 本书只介绍有限的方法让读者对于存储论的知识有一个初步了解, 感兴趣的读者可以参阅相关的存储论专著.

10.1.2 存储控制的数量指标和参数符号

在介绍存储模型以及选择控制方法前, 我们先给出几个数量指标.

1. 订购点 q

订购点是指当库存量减少至某一数量指标时, 应立即补充购货的系统最低存储量. 订购点选择过大, 将会使库存货物增加, 相应地增加货物的存储成本; 订购点选择过小, 将会使货物短缺, 而造成利润损失. 所以, 确定订购点实质是如何选择补充购货的最佳时机.

2. 订购批量 Q

订购批量是指库存量达到订购点时, 决定一次补充购货的数量. 若订购批量过多, 则可能增加货物的存储成本; 若订购批量过少, 则可能造成缺货, 会导致订购次数增多而增加订货成本. 所以, 订购批量是存储模型中最为关心的一个数量指标.

3. 拖后时间 L

从开始订货到存储的实现(入库)需要经历一段时间. 这段时间我们既可以称它为拖后时间, 也可以称它为提前时间.

如果这段时间是从开始订货到何时能够实现补充的角度出发, 这段时间就可称为拖后时间; 如果从为了按时实现补充需要应该提前多少时间去订货的角度看, 就可以称它

为提前时间.事实上,在同一个存储问题中,拖后时间和提前时间是一致的,只是观察的角度不同而已.由于不同的书关于这个名称有不同的叫法,所以在这里特地强调一下,请读者注意.本书采取拖后时间这个术语.

在实际存储问题中,如果拖后时间很短,即瞬时到达,以致可以忽略,我们就说拖后时间为零.如拖后时间较长,则它可以是确定性的,也可以是随机性的.

为建立模型方便,在讨论具体的存储模型前,我们首先给出各类存储模型有关参数符号如下:

- a ——每批货物的订购费;
- e ——单位货物成本费;
- b ——单位时间内单位货物的存储费;
- c ——单位时间内单位货物的缺货费;
- P ——单位时间内货物的补充量;
- u ——单位时间内货物的需求量;
- t ——订货周期或者生产周期(也可称为补充时间间隔);
- Q ——每批货物的订购批量;
- q ——存储系统必须立即进货的最低存储量;
- L ——拖后时间,从开始订货到存储实现(入库)的间隔时间.

10.1.3 存储控制策略

395

在存储控制中,需求是服务的对象,补充是控制的对象.因此,控制并确定输入过程中订货周期和订购批量的不同方法,则形成存储模型不同的控制策略.最常见的存储策略有以下3种.

- (1) t 循环策略.每经过一个循环时间 t 就补充存储量 Q .这一方法也称为经济批量法.
- (2) (s, S) 策略.每隔一定的时间检查库存量 Y ,当库存量 Y 低于某一规定的最低库存量 s 时就补充库存量 $S-Y$,从而把库存量提高到 S ,反之,就不作补充.
- (3) (q, Q) 策略.对库存进行连续性检查,当库存量减少到订购点水平 q 以下,就即刻订货,且每次的订货批量都为 Q .

§ 10.2 确定型存储模型

10.2.1 不许缺货的经济订货批量模型

这个存储模型的基本假设前提是:

- (1) 订购点 q 为零,库存量减少到零时立即补充,瞬间到货,补充一次性完成;
- (2) 需求均匀连续,需求速率 u 为常数,在订货周期 t 内的需求量为 ut ,显然,它即为每次订购批量 Q ,有 $Q = ut$;
- (3) 每次订购费 a 相同,单位时间内单位货物的存储费 b 不变.

该模型的存储状态变化如图 10-2 所示.

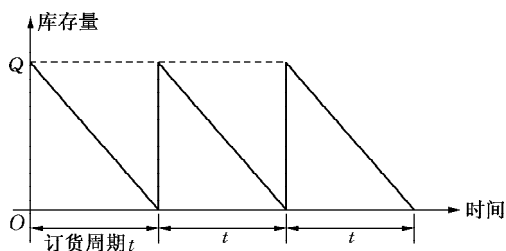


图 10-2

存储模型费用的评价标准是单位时间内存储货物的平均总费用,设它为函数 f . 在订货周期 t 内总费用为订货费与存储费之和.

根据假设,每次订购费为 a ,货物单价为 e ,则一次订货费为 $a + eut$. 所以,单位时间的订货费为 $eu + a/t$.

由图 10-2 知,在订货周期 t 内的存储量为一个三角形的面积: $Qt/2 = ut^2/2$,因此,单位时间内的平均存储量为 $ut/2$,单位时间内的存储费为 $but/2$.

由此,可知单位时间内存储货物的平均费用函数

$$f = \frac{a}{t} + eu + \frac{1}{2}but.$$

根据微积分求极值的方法,我们将 f 对 t 求一阶导数,并令其为零,即有

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}bu - \frac{a}{t^2} = 0.$$

解该方程得, $t = \pm \sqrt{2a/bu}$, 由于 $t > 0$, 并且 f 对 t 的二阶导数在 $t = \sqrt{2a/bu}$ 时大于零, 因此最优订货周期

$$t^* = \sqrt{\frac{2a}{bu}}, \quad (10-1)$$

由 $Q = ut$, 于是最优订购批量

$$Q^* = \sqrt{\frac{2au}{b}}, \quad (10-2)$$

所以,最小平均费用

$$f^* = \sqrt{2abu} + eu. \quad (10-3)$$

例 10-1 某电器厂平均每个月需要购入某种电子元件 100 件,每件电子元件的价格为 4 元,每批货物的订购费为 5 元. 每次货物到达后先存入仓库,则平均每月每件电子元件的存储费用为 0.4 元. 试求电器厂对该电子元件的最佳订购批量、每月的最佳订货次数、每月的费用.

解 由已知条件, $a = 5$ 元, $e = 4$ 元/件, $b = 0.4$ 元/(月·件), $\mu = 100$ 件/月. 由式(10-1)、式(10-2)和式(10-3)得出:

$$\text{最佳订货周期 } t^* = \sqrt{\frac{2a}{bu}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{0.4 \times 100}} = 0.5(\text{月});$$

$$\text{最佳订购批量 } Q^* = \sqrt{\frac{2au}{b}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 100}{0.4}} = 50(\text{件});$$

最小平均费用 $f^* = \sqrt{2abu} + eu = \sqrt{2 \times 5 \times 0.4 \times 100} + 4 \times 100 = 420(\text{元/月})$;

每月最佳订货次数 $\frac{1}{t^*} = 2$.

例 10-2 对于例 10-1,若因生产规模扩大,电子元件每月的需求量为 400 件,即增加到原来需求量的 4 倍,其他条件没有改变.问这时最佳订购批量是否也增大到原来的 4 倍?

解 $Q^* = \sqrt{\frac{2au}{b}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 400}{0.4}} = 100(\text{件/月})$,

即现在最佳订购批量仅为原来订购量的 2 倍.

由该例分析可知,需求速率与订购批量并不是同步变化的,可见存储模型的重要作用.

10.2.2 允许缺货的经济订货批量模型

在有些情况下,存储系统允许缺货现象存在.在存储水平变为零以后,还要等一段时间后再去订货,此时,由于缺货就要带来一定的缺货损失费.但是,该存储系统库存量比不允许缺货时要少,从而存储费相对就可节省,同时,不必经常地去订货,也会使订购费用减少.当降低的成本大于造成的缺货经济损失时,存储系统自然就采取缺货的策略了.

这个存储模型的基本假设前提是:

(1) 当库存量减少到零时,延迟一段时间再进行补充.但一旦进行补充,瞬时就能到货,补充一次性完成;

(2) 需求均匀连续,需求速率 u 为常数,在订货周期 t 内的需求量为 ut ,每次订购批量 Q ,有 $Q = ut$;

(3) 每次订购费 a 相同,单位时间内单位货物的存储费 b 不变,单位货物的缺货费 c 不变.

该模型的存储状态变化如图 10-3 所示.

如图 10-3 所设,每一个订货周期 t 内的最大缺货量为 Q_2 ,实际进库量为 Q_1 ,当进货时,每批的订购批量为

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

在这里,我们假定采用“缺货预约”的办法:未能满足的需求量作为缺货予以登记,待进货后立即进行补偿.或者在实际问题中也可以如此处理:该存储系统有一个安全库存量 Q_2 (需要支付超存储费,也即缺货损失费),一旦缺货就动用安全库存量 Q_2 .当进货时,被动用的安全库存量 Q_2 应该得到补偿.

同前面一个模型一样,我们设单位时间内存储货物总费用的平均值为函数 f .在订货周期 t 内总费用为订货费、存储费与缺货费之和.

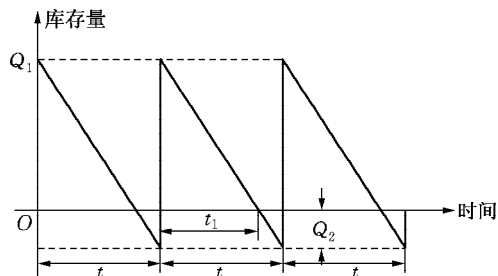


图 10-3

根据假设,单位时间的订货费为 $eu + (a/t)$.

由图 10-3 可知,在订货周期 t 内的存储量为一个三角形的面积 $:Q_1 t_1 / 2$,因此,单位时间内的存储费为 $bQ_1 t_1 / (2t)$. 在订货周期 t 内的缺货量为一个三角形的面积 $:Q_2 (t - t_1) / 2$,因此,单位时间内的缺货费为 $cQ_2 (t - t_1) / (2t)$. 根据相似三角形对应边关系,有 $(t - t_1) / t = Q_2 / Q$,又 $Q = ut$, $Q_2 = Q - Q_1$,故单位时间内的缺货费为 $c(ut - Q_1)^2 / (2ut)$.

综上所述,单位时间内存储货物的平均总费用函数为

$$f = \left(a + eut + \frac{bQ_1^2}{2u} + \frac{c(ut - Q_1)^2}{2u} \right) \cdot \frac{1}{t}.$$

我们将 f 对 t 和 Q_1 分别求一阶偏导数,并令其为零,即 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial Q_1} = 0$,解此方程组,可得:

$$\text{最佳订货周期} \quad t^* = \sqrt{\frac{2a(b+c)}{bcu}}, \quad (10-4)$$

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2acu}{b(b+c)}}. \quad (10-5)$$

$$\text{由 } Q = ut \text{ 可得,最佳订购批量 } Q^* = \sqrt{\frac{2au(b+c)}{bc}}, \quad (10-6)$$

$$\text{由 } Q_1 = ut_1 \text{ 得} \quad t_1^* = \sqrt{\frac{2ac}{bu(b+c)}}, \quad (10-7)$$

$$\text{最小平均费用} \quad f^* = \sqrt{\frac{2abcu}{b+c}} + eu. \quad (10-8)$$

例 10-3 若在例 10-1 中,其他条件不变,现可以考虑允许缺货,每月的缺货损失费 c 为 1.5 元/件. 试计算这时的最佳订购批量、最佳订货周期、最小平均费用.

解 根据式(10-6)、式(10-4)和式(10-8),可得:

$$\text{最佳订购批量 } Q^* = \sqrt{\frac{2au(b+c)}{bc}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 100 \times (0.4 + 1.5)}{0.4 \times 1.5}} = 56(\text{件});$$

$$\text{最佳订货周期 } t^* = \sqrt{\frac{2a(b+c)}{bcu}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times (0.4 + 1.6)}{0.4 \times 1.6 \times 100}} = 0.56(\text{月});$$

$$\begin{aligned} \text{最小平均费用 } f^* &= \sqrt{\frac{2abcu}{b+c}} + eu = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 0.4 \times 1.6 \times 100}{0.4 + 1.6}} + 4 \times 100 \\ &= 417.89(\text{元/月}). \end{aligned}$$

10.2.3 不许缺货的生产批量模型

如果补充的存储货物是企业内部生产的产品,那么由于生产过程是连续性的,因此补充过程是均匀连续的,我们把这种模型称为生产批量模型. 设 p 代表单位时间内生产的数量,在本模型中它也就是单位时间内入库的数量.

该存储模型的基本假设前提是：

(1) 生产和需求都是均匀连续的,且生产速率 p 大于需求速率 u ;

(2) 订购点为零,即库存量减少到零时就开工生产进行产品补充,边补充边输出,库存量以 $p-u$ 的速率增长.当生产批量 Q 完成以后,就停止生产,然后库存量按照需求速率 u 减少,到时刻 t 时库存量为零.

(3) 生产时间为 t_1 ,生产批量为 Q ,
 $Q = pt_1$.

该模型的存储状态变化如图 10-4 所示.

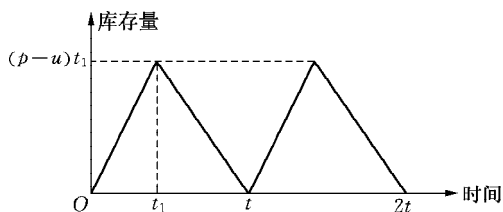


图 10-4

由图 10-4 可见,生产周期 t 分为两个时期,在 t_1 时期是边生产边输出,生产结束时存储量达到最大量 $(p-u)t_1$,并有 $Q = ut$. 显然 $t_1 = ut/p$. 在生产周期 t 内的存储量为一个三角形的面积: $(p-u)t_1 t/2$, 因此,单位时间内的平均存储量为 $(p-u)t_1/2$,单位时间内的存储费为 $b(p-u)ut/(2p)$. 而 t 时间内的生产费用为 $a + eut$ (在企业自己安排生产来补充库存,订购费 a 可理解为生产准备费,单位货物成本费 e 可理解为生产成本). 由此,可知单位时间内存储产品所需费用的平均值

$$f = \frac{a}{t} + eu + \frac{b(p-u)u}{2p}t.$$

与前面方法类似,令 $\frac{df}{dt} = 0$,解得:

$$\text{最佳循环周期} \quad t^* = \sqrt{\frac{2a}{bu} \cdot \frac{p}{p-u}}, \quad (10-9)$$

$$\text{最佳生产时间} \quad t_1^* = \sqrt{\frac{2au}{b} \cdot \frac{1}{p(p-u)}}, \quad (10-10)$$

$$\text{最佳生产批量} \quad Q^* = \sqrt{\frac{2au}{b} \cdot \frac{p}{p-u}}, \quad (10-11)$$

$$\text{最小平均费用} \quad f^* = \sqrt{2abu \cdot \frac{p-u}{p}} + eu. \quad (10-12)$$

当进货是均匀连续的时候,该模型同样适用于订货批量模型.

例 10-4 若在例 10-1 中,电器厂对该电子元件的需求不变,但购货方式由批量改为均匀连续进货,进货的速率 p 为每月 500 件.在其他条件不变的情况下,试求电器厂对该电子元件的最佳订货周期、每周期内的最佳订购量、每月的最小费用.

解 由有关公式,可知:

$$\text{最佳循环周期 } t^* = \sqrt{\frac{2a}{bu} \cdot \frac{p}{p-u}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{0.4 \times 100} \cdot \frac{500}{500-100}} = 0.56(\text{月}),$$

$$\text{最佳订购量 } Q^* = \sqrt{\frac{2au}{b} \cdot \frac{p}{p-u}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 100}{0.4} \cdot \frac{500}{500-100}} = 56(\text{件}),$$

$$\begin{aligned} \text{最小平均费用 } f^* &= \sqrt{2abu \cdot \frac{p-u}{p}} + eu = \sqrt{2 \times 5 \times 0.4 \times 100 \cdot \frac{500-100}{500}} + 4 \times 100 \\ &= 417.89(\text{元/月}). \end{aligned}$$

10.2.4 有数量折扣的经济订货批量模型

我们仅对不许缺货的经济订货批量模型,来讨论有数量折扣情况存在时的订货批量

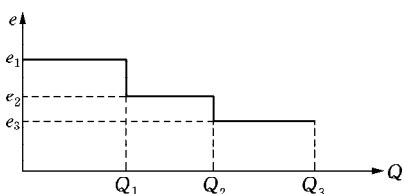


图 10-5

问题.所谓数量折扣,就是提供存储货物的企业为鼓励用户多购货物,对于一次购买较多数量的用户在价格上给予一定的优惠.这样一来,单位货物购置费 e 应看作是订购量 Q 的函数 $e(Q)$.通常 $e(Q)$ 是阶梯函数,如图 10-5 所示.

设价格折扣率为 β , $0 < \beta < 1$, 有

$$e(Q) = \begin{cases} e, & \text{若是 } 0 < Q < Q_0; \\ e(1-\beta), & \text{若是 } Q \geq Q_0. \end{cases}$$

其中 Q_0 为折扣点.

我们将 $t = Q/u$ 代入式 $f = a/t + eu + but/2$, 可得费用函数

$$f(Q) = \frac{au}{Q} + e(Q)u + \frac{1}{2}bQ. \quad (10-13)$$

它也是 Q 的分段函数,因此不能运用令导数为零的方法确定极值点.

由前面分析可知,在没有折扣的情况下,最佳订购量 Q^* 与 e 是无关的.因此,在一个连续区间内,可以应用式(10-2), $Q^* = \sqrt{2au/b}$.于是,分段函数 f 出现图 10-6(a), 图 10-6(b), 图 10-6(c) 所示的 3 种情况.

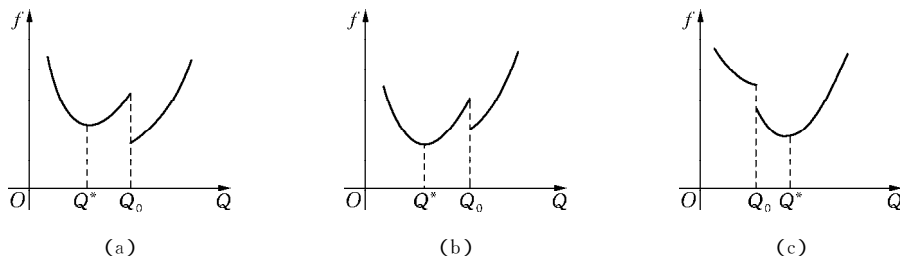


图 10-6

当 $Q_0 < Q^*$ 时,由图 10-6(c)得 Q^* 就是我们讨论问题的最优解.当 $Q^* < Q_0$ 时,就会出现如图 10-6(a)和图 10-6(b)所示的两种情况.如果 $f(Q^*) < f(Q_0)$, 则 Q^* 为问题的最优解,否则 Q_0 为问题的最优解.

在实际问题中,单位货物购置费 e 可能会有多个分界点, $0 \leq Q_0 < Q_1 < \dots < Q_n$,在不同的区段 $[Q_i, Q_{i+1})$ 可以有不同的折扣,讨论的方法和上面的情况相似,我们不再作介绍,感兴趣的读者可参阅其他有关著作.

例 10-5 设 $a = 50$ 元/次, $b = 3$ 元/(年·件), $\mu = 18\,000$ 件/年,货物单价

$$e(Q) = \begin{cases} 3, & Q < 1\,500; \\ 2.9, & 1\,500 \leq Q < 3\,000; \\ 2.8, & Q \geq 3\,000. \end{cases}$$

试计算最佳订购量、最佳订货周期和最小费用.

解 将 $Q^* = \sqrt{2au/b} = \sqrt{2 \times 50 \times 18\,000 \div 3} \approx 775$ 代入 $f(Q) = \frac{au}{Q} + e(Q)u + \frac{1}{2}bQ$,得到

$$f(Q^*) = 3 \times 775 \div 2 + 3 \times 18\,000 + 50 \times 18\,000 \div 775 \approx 56\,324.$$

同理, $f(1\,500) = 3 \times 1\,500 \div 2 + 2.9 \times 18\,000 + 50 \times 18\,000 \div 1\,500 \approx 55\,050$,

$$f(3\,000) = 3 \times 3\,000 \div 2 + 2.8 \times 18\,000 + 50 \times 18\,000 \div 3\,000 \approx 55\,200.$$

因为 $Q^* = 775 < Q_0 = 1\,500$,且 $f(1\,500) < f(Q^*)$, $f(1\,500) < f(3\,000)$.所以,最佳订购量为1 500件,最佳订货周期 $t = Q/u = 1\,500/18\,000 = 1/12$ 年,最小费用为55 050元.

§ 10.3 随机型存储模型

10.3.1 (s, S) 策略存储模型

现在我们假设供需过程可以分成若干阶段(每个阶段的时间长度相同,例如1个月或者1周),拖后时间 L 为零,每个阶段对存储货物的需求量 u 是一个随机变量.如果对于不同的阶段来说,销售、需求只是一种重复性的活动,我们就只要研究一个阶段的存储问题就可以了,因此称它为单阶段的随机存储模型,采用 (s, S) 策略.

现设 u 是一个离散型的随机变量,它取的数值分别为 $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m$. u 的概率分布为

$$P(u = i_k) = p_k, k = 1, 2, \dots, m,$$

自然,应有 $\sum_{k=1}^m p_k = 1$.

在每阶段初检查库存,若发现库存量低于规定的数量 s ,就立即补充货物并把库存量提高到规定的数值 S .在下面讨论中,我们就以一个阶段的时间长度作为单位时间.

1. S 值的确定

设在阶段初未进货时的库存量为 g ,阶段初补充的数量为 Q ,因而补充后的库存量 $y = g + Q$.假设这阶段的存储费按这阶段末的库存量来计算,我们就可算得这阶段存储

费的期望值为

$$\sum_{i_k \leq y} b(y - i_k) p_k.$$

假设这阶段缺货损失费也按这阶段末的缺货量来计算,于是我们可算得这阶段缺货损失费的期望值为

$$\sum_{i_k > y} c(i_k - y) p_k.$$

因此,这个阶段(单位时间)内总费用的期望值为

$$a + eQ + \sum_{i_k \leq y} b(y - i_k) p_k + \sum_{i_k > y} c(i_k - y) p_k.$$

我们采用边际分析法来确定 S 的值. 现设阶段初进货后库存量为 y 件是合理的,我们来分析一下再多进一件货物而使库存量为 $y + 1$ 件的合理性. 对于多进的这一件货物,实际需要用它的概率为 $1 - \sum_{i_k \leq y} p_k$, 费用为购置费 e ; 实际不需用它的概率为 $\sum_{i_k \leq y} p_k$, 费用为购置费 e 与存储费 b 之和 $e + b$. 所以多进这件货物的费用期望值为

$$e(1 - \sum_{i_k \leq y} p_k) + (e + b) \sum_{i_k \leq y} p_k.$$

若不多进这件货物,则需承担的缺货费的期望值为

$$c(1 - \sum_{i_k \leq y} p_k).$$

所谓多进一件货物是合理的,是指相应的费用期望值小于不进这件货物时的费用期望值,即

$$e(1 - \sum_{i_k \leq y} p_k) + (e + b) \sum_{i_k \leq y} p_k < c(1 - \sum_{i_k \leq y} p_k),$$

也就是

$$\sum_{i_k \leq y} p_k < \frac{c - e}{c + b}. \quad (10-14)$$

因此, S 应是满足上述不等式的最大的 y 值再加 1, 或者是满足下列不等式的最小的 y :

$$\sum_{i_k \leq y} p_k \geq \frac{c - e}{c + b}. \quad (10-15)$$

但是 u 的取值集合为 $\{i_1, \dots, i_j, \dots, i_m\}$, 故 y 应取满足上述不等式的最小 i_j .

2. s 值的确定

设阶段初库存量为 y , 而且决定不进货. 于是, 当这阶段的实际需要量低于 y 时, 要支付存储费; 当实际需要量高于 y 时, 要承担缺货费. 因而这阶段内总费用的期望值为

$$\sum_{i_k \leq y} b(y - i_k) p_k + \sum_{i_k > y} c(i_k - y) p_k.$$

若阶段初库存量为 y , 现决定补充货物, 把库存量提高到 S . 这时, 这阶段总费用的期望值为

$$a + e(S - y) + \sum_{i_k \leq S} b(S - i_k)p_k + \sum_{i_k > S} c(i_k - S)p_k.$$

若不进货时的费用期望值小于进货时的费用期望值,即下列不等式成立,则不进货是合理的:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_k \leq y} b(y - i_k)p_k + \sum_{i_k > y} c(i_k - y)p_k \\ & \leq a + e(S - y) + \sum_{i_k \leq S} b(S - i_k)p_k + \sum_{i_k > S} c(i_k - S)p_k, \end{aligned} \quad (10-16)$$

所以 s 为满足下列不等式的最小 y 值:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_k \leq y} b(y - i_k)p_k + \sum_{i_k > y} c(i_k - y)p_k + ey \\ & \leq a + eS + \sum_{i_k \leq S} b(S - i_k)p_k + \sum_{i_k > S} c(i_k - S)p_k. \end{aligned} \quad (10-17)$$

这一计算 s 值的公式虽比计算 S 的公式复杂些,但并非像看上去的那样困难.当 S 确定后,该不等式右端的数值即可求得.不难发现,当 $y = S$ 时,该不等式一定成立,故这个不等式的解总存在.我们对 $y = i_1, y = i_2, \dots, y = S$ 逐个计算该不等式左端的值,并与右端的值进行比较,使不等式成立的最小 y 值就是 s .

例 10-6 某企业对于某种材料每月需求量的概率分布如表 10-1 所示.每次订货费为 60 元,每月每吨存储费为 40 元,每月每吨缺货费为 1 015 元,每吨材料的购置费为 800 元.该企业欲采用 (s, S) 策略来控制库存量,请求出 s 和 S 的值.

表 10-1

需求量 i_k (吨)	30	40	50	60
$P(u = i_k) = p_k$	0.2	0.2	0.4	0.2

解 先建立表 10-2.

表 10-2

需求量 i_k	$i_1 = 30$	$i_2 = 40$	$i_3 = 50$	$i_4 = 60$
$P(u = i_k) = p_k$	0.2	0.2	0.4	0.2
$\sum_{j=1}^k p_j$	0.2	0.4	0.8	1

现在 $\frac{c-e}{c+b} = \frac{1\,015-800}{1\,015+40} = 0.204$,

观察表 10-2 可知, $\sum_{i_k \leq 40} p_k = 0.4 > 0.204$,则根据式(10-15)得, $S = 40$ 吨.

计算式(10-17)的右端,得

$$60 + 800 \times 40 + 40 \times (40 - 30) \times 0.2 + 1\,015 \times (50 - 40) \times 0.4 + 1\,015 \times (60 - 40) \times 0.2 = 40\,260,$$

取 $y = 30$,计算式(10-17)的左端,得

$$40 \times (30 - 30) \times 0.2 + 1\,015 \times (40 - 30) \times 0.2 + 1\,015 \times (50 - 30) \times 0.4 + 1\,015 \times (60 - 30) \times 0.2 + 800 \times 30 = 40\,240.$$

因为 $40\,240 < 40\,260$, 所以 $s = 30$. 即该企业采取 $(30, 40)$ 策略.

在实际使用这种存储策略时, 如存储量不易清点, 因而实际存储量很难随时得知时, 可将存储货物分两堆存放. 一堆数量为 s , 其余的另放一堆. 平时从后一堆取货以满足需求. 当后一堆取完, 需要动用前一堆时, 期末就订货; 如至期末, 前一堆仍未动用, 则本阶段不订货. 因此, 这种存储策略俗称双堆法(或两堆法).

10.3.2 (q, Q) 策略存储模型

(q, Q) 策略的基本内容是: 对库存水平进行连续检查, 当库存水平减少到订购点 q 以下时, 提出订购量为 Q 的订货请求. 经过拖后时间 L 后, 数量为 Q 的货物一定入库. 应用该策略的存储模型需要寻求订货点 q 和订购批量 Q . 这个存储模型具有下列几点基本假设.

(1) 拖后时间 $L (L > 0)$ 为固定常数. 在拖后时间内, 需求量为随机变量 X , 其概率密度函数 $r(x)$ 为已知, 且数学期望 $E(X) = \mu$.

(2) 在拖后时间 L 结束前, 当实际需求超过 q 时, 允许出现缺货现象. 当库存量减少到零以后, 将未能满足需求的缺货累积起来, 待到货后再补交, 也就是说它为缺货有预约.

(3) 每次订购费为 a , 单位时间内单位货物的存储费为 b , 单位时间内单位货物的缺货费为 c .

该模型存储状态变化如图 10-7 和图 10-8 所示.

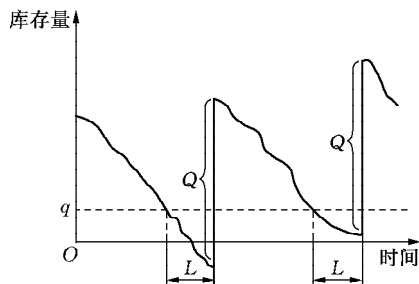


图 10-7

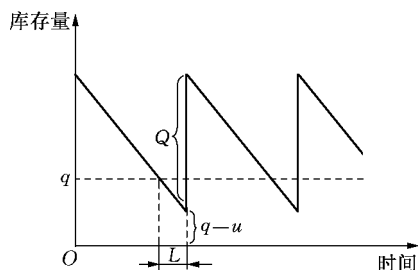


图 10-8

从图 10-7 可以看出, 虽然每次的订货批量 Q 及拖后时间 L 均保持不变, 但相继两次补充的时间间隔 t 却并不一定相等. 同时可以看到, 补充进货后的库存水平也不一定相等.

我们来考虑单位时间内货物存储的平均总费用 f . 显然, 同前面模型一样,

$$f = \text{订购费} + \text{存储费} + \text{缺货费}.$$

由于模型中存在随机变量, 所以我们关心 f 的数学期望 $E(f)$.

如果假设单位时间需求量为随机变量 u , 则 u 的数学期望 $E(u)$ 与拖后时间 L 内需求量 X 的数学期望 $E(X) = \mu$ 之间有如下关系式 $\mu = LE(u)$.

现每次订货批量为 Q , 则单位时间订货次数的期望值为 $E(u)/Q = \mu/(LQ)$, 于是单位时间订购费的数期望值 $a\mu/(LQ)$.

从存储状态图 10-7 中可以看出, 缺货情况只可能出现在拖后时间 L 这段时间内, 而这段时间开始时有存货量 q , 实际需求量为随机变量 X , 因此缺货量也为随机变量, 则当 $X \leq q$ 时, 缺货量为零; 当 $X > q$ 时, 缺货量为 $(X - q)$, 则在拖后时间 L 内缺货量的期望值为

$$\alpha = \int_0^q 0 \cdot r(x)dx + \int_q^\infty (x - q)r(x)dx = \int_q^\infty (x - q)r(x)dx.$$

因为单位时间内订货次数的期望值为 μ/LQ , 则单位时间内缺货费用的期望值为 $c\alpha\mu/(LQ)$.

存储费用的分析同确定型模型相似. 由图 10-8 知, 在订货周期 t 内的存储量为一个梯形面积. 该梯形的左边边长的期望值为 $Q + q - \mu$, 梯形的右边边长的期望值为 $q - \mu$, 因此, 梯形的面积为 $(Q + q - \mu + q - \mu)t/2$. 于是单位时间存储费的期望值为 $e(Q/2 + q - \mu)$.

从而, 我们求得单位时间内货物存储的总平均费用的期望值

$$E(f) = a\mu/LQ + e(Q/2 + q - \mu) + c\alpha\mu/(LQ).$$

与前面方法相同, 将上式分别对 q 和 Q 求一阶偏导, 令其等于零, 解方程组得:

$$Q = \sqrt{\frac{2u(a + c\alpha)}{bL}}; \quad (10-18)$$

$$\int_q^\infty r(x)dx = \frac{bQL}{c\mu}, \quad (10-19)$$

$$\text{其中, } \alpha = \int_q^\infty (x - q)r(x)dx. \quad (10-20)$$

但是, 在 Q 和 q 的计算公式中, 因包含有相互关联的未知量, 而不能直接求出最终结果, 为此采用逐步逼近的迭代法求解. 具体算法步骤如下.

- ① 令 $\alpha_0 = 0$, $Q_0 = +\infty$, $q_0 = +\infty$, $k = 1$;
 - ② 取 $\alpha = \alpha_{k-1}$, 代入式(10-18), 计算 Q_k ;
 - ③ 取 $Q = Q_k$, 代入式(10-19), 计算 q_k ;
 - ④ 取 $q = q_k$, 代入式(10-20), 计算 α_k ;
 - ⑤ 判断 $|Q_k - Q_{k-1}| < \varepsilon_1$, $|q_k - q_{k-1}| < \varepsilon_2$ 是否成立?
- 若是, 则 Q_k 和 q_k 即为所求的最优订购批量和最优订购点, 算法终止;
- 若否, 则取 $k = k + 1$, 转步骤②继续计算.

在这个算法中, α 的计算比较困难. 在实际问题中, 拖后时间 L 内的需求量 X 多数服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 不失一般性, 我们给出正态分布情况下 α 的计算方法.

由概率论知, 若随机变量 Y 服从正态分布 $N(0, 1)$, 概率密度函数为 $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 分布函数为 $\Phi_0(x)$; 随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 概率密度函数为

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, 分布函数为 $\Phi(x)$ 则有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \Phi(x) = \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

我们令 $d = \frac{bQL}{c\mu} = \int_q^\infty \varphi(x)dx$, 并把 α 写成下列形式:

$$\alpha = \int_q^\infty (x-q)\varphi(x)dx = \int_q^\infty (x-\mu) \cdot \varphi(x)dx + \int_q^\infty (\mu-q) \cdot \varphi(x)dx,$$

其中, 第二项 $= (\mu-q) \int_q^\infty \varphi(x)dx = (\mu-q)d$. 若令 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$\begin{aligned} \text{第一项} &= \int_q^\infty \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)dx = \int_{\frac{q-\mu}{\sigma}}^\infty \sigma y \cdot \varphi_0(y)dy = \sigma \int_{\frac{q-\mu}{\sigma}}^\infty \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{y^2}{2}}\right] \Big|_{\frac{q-\mu}{\sigma}}^\infty = \sigma \varphi_0\left(\frac{q-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad \alpha = \sigma \varphi_0\left(\frac{q-\mu}{\sigma}\right) + (\mu-q)d, \quad (10-21)$$

$$\text{其中} \quad d = \frac{bQL}{c\mu}. \quad (10-22)$$

所以, 当 q, Q 给定并计算 d 后, 可以通过查标准正态分布表来计算 α . 我们再指出:

$$\Phi_0\left(\frac{q-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(q) = 1 - \int_q^\infty \varphi(x)dx = 1-d, \quad (10-23)$$

在 Q 给定并计算 $(1-d)$ 后, 通过查表求得 q .

例 10-7 某宾馆与一家饮料公司签订了长期订购瓶装矿泉水的合同. 合同规定, 每次订货的提前时间为 3 天, 在此期间, 宾馆的需求呈正态分布, 其均值为 1 000 瓶, 标准差为 250 瓶. 一次订货的手续费为 100 元, 存储费用是每月每瓶 0.15 元, 假定拖后时间内的缺货在下次到货后要补齐, 缺货损失费用为每瓶 1 元. 试根据上述条件确定最佳订货批量和最佳订货点(假定一个月为 30 天).

解 本问题的单位时间为月. 由已知条件可知: $\mu = 1\,000$ 瓶, $\sigma = 250$ 瓶, $L = 0.1$ 月, $a = 100$ 元, $b = 0.15$ 元, $c = 1$ 元.

(1) $k = 1$, 取 $\alpha_0 = 0$, 由式(10-18)和式(10-22)有

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\mu a}{bL}} = \sqrt{\frac{2 \times 1\,000 \times 100}{0.15 \times 1}} \approx 3\,651.5,$$

$$d = \frac{bQ_1L}{c\mu} = \frac{0.15 \times 3\,651.5 \times 0.1}{1 \times 1\,000} \approx 0.0548.$$

由式(10-23)知, $\Phi_0\left(\frac{q_1 - \mu}{\sigma}\right) = 0.9452$,

查表得 $\frac{q_1 - 1\,000}{250} = 1.6$, 则 $q_1 = 1\,400$. 由式(10-21)知,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 250 \times \varphi_0(1.6) + 0.054\,8 \times (1\,000 - 1\,400) \\ &= 250 \times 0.110\,9 - 0.054\,8 \times 400 = 5.81.\end{aligned}$$

(2) $k = 2$, 有

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\mu(a + c\alpha_1)}{bL}} = \sqrt{\frac{2 \times 1\,000 \times (100 + 1 \times 5.81)}{0.15 \times 0.1}} \approx 3\,756,$$

$$d = \frac{bQ_2L}{c\mu} = \frac{0.15 \times 3\,756 \times 0.1}{1 \times 1\,000} \approx 0.056\,34.$$

由式(10-23)知, $\Phi_0\left(\frac{q_2 - \mu}{\sigma}\right) = 0.943\,66$, 查表得 $\frac{q_2 - 1\,000}{250} = 1.586$, 则 $q_2 = 1\,396.5$.

由式(10-21)知,

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 250 \times \varphi_0(1.586) + 0.056\,34 \times (1\,000 - 1\,396.5) \\ &= 250 \times 0.113 - 0.056\,34 \times 396.5 = 5.91.\end{aligned}$$

(3) $k = 3$, 可知

$$Q_3 = 3\,759, q_3 = 1\,396.6, \alpha_3 = 6.$$

迭代至此结束, 因为 Q_3 和 q_3 的变化都已相当小. 所以, 我们取最佳订购批量 $Q^* = 3\,760$ 瓶, 最佳订购点 $q^* = 1\,370$ 瓶.

407

事实上, 由于需求的变化受到社会、经济等多种因素的综合影响, 常常独立于人们的主观控制能力以外, 因此其在数量上、时间上一般无法精确确定, 而其呈现出的随机性却使库存控制变得复杂和困难. 所以, 为了探讨研究存储问题的方法, 为了提炼存储问题中共同的、本质的内容, 本章所介绍的确定型和随机型存储问题中的基本模型, 都是在一定的假设条件下进行探讨的, 这样的条件在现实生活中是比较难以找到的, 应用时要根据问题的实际背景加以修正. 经过数学抽象和概括的存储模型, 虽然不可能与实际存储问题完全等同, 但是对于模型的探讨会加深对存储问题的认识, 模型的求解可以为存储系统的决策提供定量依据.

习 题 十

1. 某货物每周的提取量为 2 000 件, 每次订货的固定费用为 15 元, 每件产品每周的存储费用 0.30 元, 求最佳订货批量和订货时间.
2. 某工厂每年对某种零件的需要量为 10 000 件, 订货的固定费用为 2 000 元, 采购一个零件的单价为 100 元, 存储费用为每年每个零件 20 元, 求最优订购批量和最低成本.
3. 某企业每天可以生产某种产品 14 000 件, 生产的固定成本为 1 000 元, 每件产品每年的存储费用为 28 元. 已知市场一年对该产品的需要量为 1 440 000 件, 若一年以 360 天计算, 试求生产的最佳批量.

4. 某公司每月需要某种机械零件 2 000 个,每个零件的订购单价为 150 元,每次订货的固定费用为 100 元,每个零件每年的存储费用为 24 元、每月的缺货费用为 30 元,求最优订货批量和最大缺货量.

5. 某公司每年需要电感器 5 000 个,每次的订购费为 50 元,每年每个电感器的存储费用为 1 元,不得缺货.若采购量较少时每个电感器的成本为 2 元,若采购量在 1 500 个以上时,则每个成本为 1.9 元,请分析该公司每次应该采购多少个电感器.

6. 某医院药房每年需某种药 1 000 瓶,每次的订购费用为 5 元,每瓶药的单价为 2.50 元,每年的保管费用为 0.40 元.制药厂提出订购 100 瓶时,折扣率为 0.05;订购 300 瓶时,折扣率为 0.10 的价格折扣条件.试决定医院是否接受该折扣率的条件.若其他条件不变,该医院每年对这种药品的需求量为 100 瓶或者 4 000 瓶,试确定应该分别采取什么样的存储策略.

7. 某企业对于某种材料每月需求量的概率分布表如表 10-3 所示.每次订购费用为 500 元,每吨材料订购单价为 1 000 元,每月每吨的存储费用为 50 元,每月每吨的缺货费用为 1 500 元.现在决定采取 (s, S) 存储策略,试求 s 和 S .

表 10-3

需求量 i_k	50	60	70	80	90	100	110	120
$P(u = i_k)$	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.10	0.10	0.05

8. 现有一批订货业务问题.订购费用为每次 15 元,每吨货物每年的存储费用为 0.5 元.允许缺货,缺货要补齐,每吨货物每年的缺货损失费用为 50 元.年需求量期望值为 365 吨,拖后时间为 15 天,拖后时间内的需求服从 $N(15, 2^2)$ 的正态分布.试确定 (q, Q) 存储策略.

第十一章 博 弈 论

§ 11.1 概 述

带有竞争性质的活动,称为博弈现象.博弈论是研究博弈现象的数学理论与方法,它应用数学方法和优化理论研究两个或两个以上的参加者在某种对抗性或竞争性的场合下如何各自作出决策,使自己的一方得到尽可能有利的结果.博弈论也称为对策论.

博弈现象是人类日常生活活动(如体育竞赛)、社会政治活动(如军事行动、国际外交谈判)和经济领域(如贸易谈判、经营投标)中常见的一种现象.

在我国古代,“齐王赛马”就是一个典型的博弈论研究的例子.

例 11-1 齐王赛马.战国时期,齐王与大将田忌各从自己的 3 个等级马群中抽上、中、下 3 匹马,进行单匹对抗赛,比赛 3 场,每场赌 1 千两黄金.田忌为取胜,请教谋士孙臆.孙臆发现同等级的马,田忌的不如齐王的强,但要比齐王下一等级的强.于是孙臆献策:比赛时根据齐王出马的等级来选定自己的策略:要田忌以下马对齐王的上马,以上马对齐王的中马,以中马对齐王的下马.在这样的策略下,结果田忌二胜一负,赢得 1 千两黄金.

博弈现象可以千差万别,但本质上都必须包括以下 3 个基本要素.

1. 局中人

在一局博弈中,有决策权和自身利益的参加者称为局中人.

而那些在一局博弈中,既不决策而结局又和他的得失无关的人(如棋赛时的公证人等),就不算局中人.显然,前面提到的齐王与田忌赛马的竞赛中,局中人就是齐王和田忌,而不是参加比赛的马,也不是田忌的谋士.

局中人除了理解为个人外,还可理解为集体(如球队、交战国、企业公司等),也可以把大自然理解为局中人(因为人类经常处于和大自然的斗争状态中).

在博弈现象中,我们假定任一局中人都不存在利用其他局中人决策的失误来扩大自身利益的可能性.

同时,为研究问题清楚起见,把那些利益完全一致的参加者们看作一个局中人.例如桥牌游戏中,东西双方利益一致,南北两面得失相当,所以虽有 4 人参加,只能算有两个局中人.

只有两个局中人的博弈现象为“两人博弈”(如象棋、桥牌),而多于两个局中人的博弈称为“多人博弈”.根据局中人之间是否允许合作来分,还有“结盟博弈”、“不结盟博弈”等.

2. 策略集

一局博弈中,每个局中人都有供他选择的完整的行动方案.必须指出,此方案不是某一步的行动方案,而是指导博弈现象中自始至终通盘筹划如何行动的一个方案.我们把这样的行动方案称为这个局中人的一个策略.而把这个局中人的策略全体,称为这个局中人的策略集合.

如果在一局博弈中,各个局中人都有有限个策略,称之为“有限博弈”,否则称之为“无限博弈”.

3. 支付函数(赢得函数)

一局博弈结束之后,对每个局中人来说,无外乎是胜利或失败、名次的前或后以及物质的收入或支出等等,这些统称之为“得失”.

实际上,每个局中人在一局博弈结局时的得失,是与局中人所选定的策略有关的.一局博弈结束时,每个局中人的“得失”是全体局中人所取定的一组策略的函数,称为支付函数或赢得函数.

在博弈论中,从每个局中人的策略集中各取一个策略,组成的策略组,称作“局势”.于是“得失”是“局势”的函数.如果在任一“局势”中,全体局中人的“得”与“失”相加总是等于零时,这个博弈就称为零和博弈.否则称为“非零和博弈”.例如齐王赛马就是一个零和博弈.

对一个博弈现象建立博弈模型,就是确定局中人、策略集和赢得函数这3个基本要素.当这3个基本要素确定后,一个博弈模型也就给定了.

根据策略与时间的关系、结盟与不结盟的情况、局中人的两个或多个、策略集有限或无限,得失总数之和是否为零,博弈模型可以分成许多种类.在众多博弈模型中,占有重要地位的模型是有限两人零和博弈,本书仅对这个模型进行讨论.

§ 11.2 矩 阵 博 弈

11.2.1 矩阵博弈数学模型

称有限两人零和博弈为矩阵博弈.即参加博弈的局中人只有两个,双方的利益是完全对抗的.而每个局中人都有有限个可供选择的策略.而且在任一局势中,一个局中人的所得即为另一个局中人的所失,两个局中人的得失之和总等于零.

矩阵博弈是理论研究和求解方法都比较完善的一类博弈模型,而且这类博弈的研究思想和理论结果又是研究其他类型博弈模型的基础.

对于一个矩阵博弈,设局中人Ⅰ有 m 个策略 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,记策略集合为 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$;局中人Ⅱ有 n 个策略,策略集合为 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$.局中人Ⅰ从 S_1 中选一个策略 α_i ,而局中人Ⅱ从 S_2 中选一个策略 β_j ,构成了一局博弈的一个局势 (α_i, β_j) .

也称 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为局中人Ⅰ的一个纯策略, $\beta_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为局中人Ⅱ的一个纯策略, (α_i, β_j) 为一个纯局势.若对应于 (α_i, β_j) ,局中人Ⅰ的“得”设为 a_{ij} .我们知道 S_1 和 S_2 一共有 $m \times n$ 个纯局势,于是局中人Ⅰ对应的支付矩阵(有时也称为赢得

矩阵)为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

在支付矩阵中,局中人 I 的策略 α_i 对应支付矩阵 A 的第 i 行,局中人 II 的策略 β_j 对应支付矩阵 A 的第 j 列.当局中人 I 选定策略 α_i 、局中人 II 选定策略 β_j ,对应的支付值 a_{ij} 代表局中人 II 应付给局中人 I 的支付值.如果支付值是正数,局中人 I 从局中人 II 处赢得若干个单位.反之,如果支付值是负数,局中人 I 失去若干个单位,这若干个单位被局中人 II 赢得.由于博弈是零和的,所以局中人 II 的支付矩阵是 $-A$.

对于给定的一个矩阵博弈,如果局中人 I, II 的纯策略集合分别为 S_1, S_2 ,局中人 I 的支付矩阵为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$,则我们把这个矩阵博弈记为

$$G = \{I, II, S_1, S_2, A\} \text{ 或 } G = \{S_1, S_2, A\}.$$

例如,对于齐王赛马这样一个矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$,我们将局中人 I 设为齐王,其中 S_1 和 S_2 分别都取{(上、中、下),(上、下、中),(中、上、下),(中、下、上),(下、中、上),(下、上、中)}.由于同等级的马,齐王的马都要比田忌的马强,因此,齐王的策略(上、中、下)对付田忌的策略(上、中、下),齐王就有 $a_{11} = 3$,其他的 a_{ij} 也能够用同样的方法求得.我们就得到齐王的支付矩阵 A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

显然田忌的支付矩阵为 $-A$.

例 11-2 (配钱币游戏) 两个局中人 I 和 II 各出示一枚钱币,在不让对方看见的情况下,将钱币放在桌上,若两个钱币都呈正面或都呈反面,则局中人 I 得 1 分,局中人 II 得 -1 分.若两个钱币一正一反,则局中人 II 得 1 分,局中人 I 得 -1 分.取 $S_1 = \{\text{正}, \text{反}\}$, $S_2 = \{\text{正}, \text{反}\}$,则局中人 I 的支付矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 11-3 (“石头、剪刀、布”游戏) 我们每个人都可能玩过这种游戏.石头击败剪刀,剪刀战胜布,而布又胜过石头.这里也是两个局中人:局中人 I 和 II,双方各有 3 个策略,策略 1 代表出石头,策略 2 代表出剪刀,策略 3 代表出布.假定胜者得 1 分,负者得 -1 分.策略一样,就算“平局”,双方都无分.取 $S_1 = \{\text{石头}, \text{剪刀}, \text{布}\}$, $S_2 = \{\text{石头}, \text{剪刀}, \text{布}\}$,则局中人 I 的支付矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.2.2 最优纯策略

为求一个矩阵博弈的最优策略,我们先分析下面一个例子.

例 11-4 对于一个矩阵博弈 $G = \{I, II, S_1, S_2, A\}$, 其中 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 16 & -1 & -9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

求双方的最优策略.

解 由 A 可以看出,局中人 I 的最大赢得值是 16,就是说局中人 I 十分希望自己取得 16,就会出 α_3 加入博弈.然而,局中人 II 也在考虑,因为局中人 I 有出 α_3 的心理状态,于是局中人 II 就想出 β_3 进行博弈,这样不仅不能使 I 得到 16,反而要输 9(即赢得值 -9).同样, I 也会这样想, II 有出 β_3 的心理状态,于是 I 就会出 α_2 ,结果 II 不但得不到 9,反而要输 5.同样,如果 I 出 α_2 ,则 II 会出 β_2 ,使 I 的赢得值达到最小 2.而对于 I 来说,如果 II 出 β_2 , I 的最优策略仍然是 α_2 ,可获得最大赢得值 2. α_2 和 β_2 分别是双方的最优策略, $a_{22} = 2$ 称为矩阵博弈 G 的值.它是第 2 行中最小值,也正好是第 2 列中的最大值.

一般地,对于给定的 $G = \{S_1, S_2, A\}$,局中人 I 希望支付值 a_{ij} 越大越好,局中人 II 希望支付值 a_{ij} 越小越好.双方都必然要考虑不冒风险,考虑到对方会设法使自己收益最小,因此,都应当从最坏处着想,去尽量争取最好的结果.

如果局中人 I 采用他的第 i 个策略,则他至少可以得到第 i 行的最小元素 $\min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$. 由于局中人 I 希望 a_{ij} 越大越好,因此他可选择 i 使 $\min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$ 达到最大,即局中人 I 可选择策略 α_i ,使他得到的支付不少于 $\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$.

同样,局中人 II 可以选择策略 β_j ,保证他失去的支付不大于 $\min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$,即如果局中人 II 处理得当,局中人 I 得到的支付不会大于 $\min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$.

在一般的情形下,可以证明必有如下不等式成立(见习题 3):

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}.$$

矩阵博弈 G 的值——一个矩阵博弈 G ,如果它的支付矩阵 A 的元素满足:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}, \quad (11-1)$$

则称这个值 V 为博弈 G 的值.

矩阵博弈 G 的鞍点——如果纯局势 (α_i^*, β_j^*) 使

$$a_{i^* j^*} = G \text{ 的值 } V, \quad (11-2)$$

则称 (α_i^*, β_j^*) 为博弈 G 的鞍点,也称它是博弈 G 在纯策略中的解,此时 α_i^* 与 β_j^* 分别为局中人I和局中人II的最优纯策略.

例如,在例11-4中,对于局中人I,求矩阵 A 每行的最小值:

$$\begin{aligned}\min\{-5, 1, -7\} &= -7, \min\{3, 2, 5\} = 2, \\ \min\{16, -1, -9\} &= -9, \min\{-4, 0, 4\} = -4,\end{aligned}$$

再从这些数中取最大值,即 $\max\{-7, 2, -9, -4\} = 2$,因此局中人I的 $\alpha_i^* = \alpha_2$.

对于局中人II,求矩阵 A 每列的最大值:

$$\max\{-5, 3, 16, -4\} = 16, \max\{1, 2, -1, 0\} = 2, \max\{-7, 5, -9, 4\} = 5,$$

再从这些数中取最小值,即 $\min\{16, 2, 5\} = 2$,因此,局中人II的 $\beta_j^* = \beta_2$.

2是博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$ 的值,即 $V = 2$, α_2 与 β_2 分别为局中人I和局中人II的最优纯策略.

同理,我们可知,在例11-1(齐王赛马)中,有

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = -1 < 3 = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij},$$

在例11-2和例11-3中,有

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = -1 < 1 = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}.$$

可见,并不是所有的矩阵博弈都有鞍点存在,从而矩阵博弈可能不存在最优纯策略.

定理 11-1 (α_i^*, β_j^*) 为博弈 G 的鞍点的充要条件是对于任意的 i, j ,有

$$a_{ij}^* \leq \alpha_i^* \leq a_{i^*j}^*. \quad (11-3)$$

即鞍点 (α_i^*, β_j^*) 具有这样的性质: $a_{i^*j^*}$ 是第 j^* 列的最大元素,是第 i^* 行的最小元素.也就是说,对于纯局势 (α_i^*, β_j^*) ,有下式成立:

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_{i^*j} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}^*. \quad (11-4)$$

例 11-5 求矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$ 的解,其中 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 11 & 6 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 我们在矩阵上直接进行运算:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 11 & 6 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \min \\ (6) \\ -2 \\ (6) \\ -1 \end{matrix}.$$

$$\max \begin{matrix} 11 & (6) & 9 & (6) \end{matrix}$$

先求每行的最小值,在这些值中取最大值,并带上括号.接下来求每列的最大值,再从这些值中取最小值,并带上括号.现在有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 6.$$

因此 4 个局势 $(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_1, \beta_4), (\alpha_3, \beta_2), (\alpha_3, \beta_4)$ 都是博弈 G 的解, G 的值 $V = 6$.

该例说明一个矩阵博弈如果有鞍点,鞍点可能不止一个,但在不同的鞍点处,支付值都相等,都等于博弈的值.由定理 11-1 不难证明以下定理.

定理 11-2 若 (α_i, β_j) 和 (α_k, β_t) 都是矩阵博弈 G 的鞍点,则 (α_i, β_t) 和 (α_k, β_j) 也都是 G 的鞍点(称为鞍点的可交换性),且在鞍点处的值都相等(称为鞍点的无差别性).

例 11-6 甲、乙双方谈判签订一项合同,甲方的“要价”是 25 万元,而乙方的“出价”是 20 万元,谈判陷于僵局.为打破僵局,双方约定,再各报一个价.以下述价格成交:谁让步多,取谁出的价;如果双方让步相同,则取双方报价的中间值.问甲、乙双方应如何报价?最后的成交价是多少?

解 显然,甲、乙双方的报价都在 20 万元到 25 万元之间.不妨取整数值,甲、乙各有 6 个策略:报价 20, 21, ..., 25(单位:万元).由约定知,甲的支付矩阵可用表 11-1 所示.(如 $\alpha_1 = 20, \beta_6 = 25$,则意味着局中人 I 现在报价 20,他让步 5;局中人 II 现在报价 25,他让步 5,所以双方让步相同,因此 $a_{15} = 22.5$.其余 a_{ij} 求法相同)这是一个矩阵博弈.

表 11-1

甲 \ 乙	20	21	22	23	24	25	min
20	20	20	20	20	20	22.5	20
21	21	21	21	21	22.5	25	21
22	22	22	22	22.5	24	25	22
23	23	23	22.5	23	24	25	22.5
24	24	22.5	22	23	24	25	22
25	22.5	21	22	23	24	25	21
max	24	23	22.5	23	24	25	22.5

由上表有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 22.5.$$

(23, 22)是鞍点.甲方的最优纯策略是要价 23 万元,乙方的最优纯策略是出价 22 万元,双方的让步相同(甲方降低 2 万元,乙方提高 2 万元),最后的成交价是 22.5 万元.

在矩阵博弈中,若所给支付矩阵中第 i 行的各个元素都不超过第 k 行相应的各元素,即 $a_{ij} \leq a_{kj} (j = 1, 2, \dots, n)$,则对局中人 I 来说策略 α_i 明显不如策略 α_k ,我们称纯策略 α_k 优超纯策略 α_i ,于是,局中人 I 可把 α_i 从策略集 S_1 中删去,并把 A 的第 i 行抹去;同理,若第 k 列的元素都不小于第 j 列的对应元素,即 $a_{ik} \geq a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m)$,则对局

中人Ⅱ来说策略 β_j 优超策略 β_k , 可把 β_k 从策略集 S_2 中删去, 并把 A 的第 k 列抹去. 利用这个方法有可能降低 A 的阶数. 这种利用优超策略降低支付矩阵 A 的阶数的原理称为优超原理, 使用这个方法可以减少求解矩阵博弈的计算量.

例 11-7 降低下列支付矩阵 A 的阶数:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 8 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

解 $a_{i1} \geq a_{i2} (i = 1, 2, 3)$, 我们把 A 的第 1 列抹去, 然后继续利用优超原理降低支付矩阵的阶数:

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 8 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (6).$$

可知, 最优策略为 (α_2, β_2) , 其值为 6.

例 11-8 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量. 已知在正常气温条件下需要煤 15 吨, 在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 10 吨和 20 吨. 假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化, 在较暖、正常、较冷气温条件下每吨煤的价格分别为 500 元、750 元和 1 000 元. 又设秋季时每吨煤的价格为 500 元, 在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下, 秋季时应采购多少吨煤能使总支出最少?

解 这个问题可看成一个博弈问题, 把采购员看为局中人Ⅰ, 他有 3 个策略: 在秋天时购买 10 吨、15 吨或 20 吨煤, 分别记为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 本对策的另一局中人可看成是大自然, 它也有 3 个策略: 出现较暖、正常或较冷的冬季, 分别记为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

现把该单位冬季用煤的全部费用(秋季购煤费用与冬季不够时再补购的费用之和)作为采购员的支付值, 得到支付矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} -5\,000 & -8\,750 & -15\,000 \\ -7\,500 & -7\,500 & -12\,500 \\ -10\,000 & -10\,000 & -10\,000 \end{pmatrix}.$$

可知 $V = -10\,000$, 最优策略为 (α_3, β_3) , 即秋季购煤 20 吨较好.

§ 11.3 矩阵博弈基本定理

11.3.1 混合策略和混合扩充

我们已经知道, 矩阵博弈的两个局中人不一定存在最优纯策略. 那么, 当矩阵博弈不存在鞍点时, 局中人应如何选择策略参加博弈呢? 若博弈要重复进行多次, 显然局中人不应该始终坚持采用某一种策略, 而应以适当的概率采用多个策略. 因此对于鞍点不存在的矩阵博弈, 需研究局中人选取各个策略可能性的大小来进行博弈.

混合策略——对于矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是 S_1 上的一个概率分布 ($x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1$), 局中人 I 分别以概率 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 采用策略 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 则我们称 $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是局中人 I 的一个混合策略.

同样, 局中人 II 的一个混合策略 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是 S_2 上的一个概率分布 ($y_j \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1$), 局中人 II 分别以概率 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 采用策略 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

纯策略可以看作是混合策略的特例. 如纯策略 α_1 相当于混合策略 $(1, 0, 0, \dots, 0)$.

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 分别为局中人 I 和局中人 II 的混合策略, 则局中人 I 选择策略 α_i , 局中人 II 选择策略 β_j , 由于他们各自选择策略相互独立, 因此赢得是 a_{ij} 的概率为 $x_i y_j$, 于是局中人 I 的期望赢得为: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, 局中人 I 希望这个期望赢得越大越好, 而局中人 II 则希望它越小越好.

混合局势——称数学期望 $E(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ 为局中人 I 的赢得, $-E(X, Y)$ 为局中人 II 的赢得, 而 (X, Y) 称为混合局势.

混合扩充——给定一个矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$. 设 S_1^* 是 S_1 上一切混合策略的集合, S_2^* 是 S_2 上一切混合策略的集合:

$$S_1^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1 \text{ 且 } x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \right\},$$

$$S_2^* = \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_n) \mid \sum_{j=1}^n y_j = 1 \text{ 且 } y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$$E = \{E(X, Y) \mid X \in S_1^*, Y \in S_2^*\},$$

称 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 为 G 的混合扩充.

11.3.2 矩阵博弈基本定理

对于局中人 I, 若他采取混合策略 X , 则他只能希望赢得 $\min_{Y \in S_2^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, 因此他

应选取 X , 使赢得最大 $\max_{X \in S_1^*} \min_{Y \in S_2^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = V_1$.

同样, 对于局中人 II, 若他采取混合策略 Y , 则他可能支出 $\max_{X \in S_1^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, 因此

他应选取 Y , 使支出最小 $\min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = V_2$.

混合策略解——设 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 为矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$ 的混合扩充, 如果有混合局势 (X^*, Y^*) 使下式成立:

$$\max_{X \in S_1^*} \min_{Y \in S_2^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = E(X^*, Y^*),$$

则混合局势 (X^*, Y^*) 称为 G 的最优混合局势,简称最优局势. X^* 与 Y^* 分别称为局中人 I 和局中人 II 的最优混合策略,简称为矩阵博弈 G 的最优解. $V = E(X^*, Y^*)$ 称为矩阵博弈的值.

定理 11-3 对于给定的矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$, $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 为其混合扩充. 设 $X^* \in S_1^*$, $Y^* \in S_2^*$, 则 X^*, Y^* 为 G 的最优解的充要条件是下列 3 个条件中的一个成立:

(1) 对任 $X \in S_1^*, Y \in S_2^*$, 有 $E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$;

(2) 对任 $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq E(X^*, Y^*) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^*; \quad (11-5)$$

(3) 存在数 V , 使得 X^* 和 Y^* 是下列两组不等式的解, 且 $V = E(X^*, Y^*)$:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq V \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (11-6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq V \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (11-7)$$

定理 11-4 (基本定理) 任何一个矩阵博弈 G , 一定存在混合策略解 X^*, Y^* .

证 由定理 11-3 条件(2)知, 只要证明存在 $X^* \in S_1^*, Y^* \in S_2^*$, 使得式(11-5)成立. 我们考虑下面两个线性规划问题:

$\begin{aligned} & \max d = W; \\ \text{s. t. } & \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq W, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (P')(11-8) \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & W \text{ 为自由变量.} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \min g = V; \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq V, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad (D')(11-9) \\ & y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & V \text{ 为自由变量.} \end{aligned}$
---	---

显然, (P') 和 (D') 是一组对偶线性规划.

取 $X = (1, 0, \dots, 0)$, $W = \min\{a_{1j} \mid j = 1, 2, \dots, n\}$, 它是 (P') 的可行解; 取 $Y = (1, 0, \dots, 0)$, $V = \max\{a_{i1} \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, 它是 (D') 的可行解. 由第二章定理 2-3(对偶性定理)知, 这两个线性规划有最优解, 且它们最优值相等: $d^* = g^*$.

设 (P') 的最优解为 X^*, W^* , 最优值 $d^* = W^*$; (D') 的最优解为 Y^*, V^* , 最优值 $g^* = V^*$. 因为 $d^* = g^*$, 所以 $W^* = V^*$.

由这两个线性规划的约束条件可知, 对任意 $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq V^* \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^*.$$

又 $E(X^*, Y^*) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j^* x_i^*$, 则

$$E(X^*, Y^*) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \right) y_j^* \geq V^* \sum_{j=1}^n y_j^* = V^*,$$

$$E(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \right) x_i^* \leq V^* \sum_{i=1}^m x_i^* = V^*.$$

得到 $V^* = E(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$, 定理证毕.

定理 12-3 的证明, 不仅证明了矩阵博弈混合策略解的存在性, 而且这个证明的过程是构造性的, 给出了利用线性规划方法求解矩阵博弈的思路. 我们在下一节再进一步介绍.

定理 11-5 设混合局势 $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$ 是矩阵博弈 G 的最优解, 博弈值 $V = E(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$, 则

$$(1) \text{ 若 } x_i^* > 0 \text{ 则 } \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* = V; \quad (11-10)$$

$$(2) \text{ 若 } y_j^* > 0 \text{ 则 } \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* = V; \quad (11-11)$$

$$(3) \text{ 若 } \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* < V \text{ 则 } x_i^* = 0; \quad (11-12)$$

$$(4) \text{ 若 } \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* > V \text{ 则 } y_j^* = 0. \quad (11-13)$$

定理 11-6 设 $G_1 = (S_1, S_2, A)$ 和 $G_2 = (S_1, S_2, B)$ 为两个矩阵博弈, 博弈值分别为 V_1 和 V_2 , 其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 满足:

$$b_{ij} = a_{ij} + d \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, d \text{ 为一常数},$$

则 G_1 和 G_2 的混合策略解相同, 且 $V_2 = V_1 + d$.

证 设 G_1 和 G_2 的混合扩充分别为 $G_1^* = \{S_1^*, S_2^*, E_1\}$ 和 $G_2^* = \{S_1^*, S_2^*, E_2\}$, 对所有的 $\mathbf{X} \in S_1^*$ 及 $\mathbf{Y} \in S_2^*$, 有

$$E_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d) x_i y_j = E_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + d,$$

$$\text{得} \quad \max_{\mathbf{X} \in S_1^*} \min_{\mathbf{Y} \in S_2^*} E_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \max_{\mathbf{X} \in S_1^*} \min_{\mathbf{Y} \in S_2^*} E_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + d.$$

由此可见, $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$ 是 G_1 的解当且仅当 $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$ 是 G_2 的解, 且 $V_2 = V_1 + d$. 定理证毕.

§ 11.4 矩阵博弈的求解

对于所给矩阵博弈 G , 我们首先利用优超原理降低支付矩阵 A 的阶数, 然后检查它是否有鞍点. 如果有鞍点, 则鞍点所对应的策略就是最优解. 如果没有鞍点, 我们可以采用线性方程组法和线性规划法求解.

11.4.1 线性方程组法

对于给定的矩阵博弈 $G(S_1, S_2, A)$, 我们先判断它的最优混合策略解中 x_i^*, y_j^*

$(i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ 是否均大于零, 如果均大于零, 则由定理 11-5 知, 可通过下列线性方程组求矩阵博弈的解, 其中 V 为矩阵博弈 G 的值.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i = V, j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1. \end{cases} \quad (11-14)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = V, i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1. \end{cases} \quad (11-15)$$

例如, 齐王赛马的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

由于 A 没有鞍点, 且各个策略出现的可能性均不为零, 令 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, 则有线性方程组:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = V, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = V, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = V, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 = V, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 = V, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = V, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1. \end{cases} \quad (11-16)$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 = V, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 - y_5 + y_6 = V, \\ y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = V, \\ -y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 + y_6 = V, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 3y_5 + y_6 = V, \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + 3y_6 = V, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1. \end{cases}$$

将式(11-16)的前 6 个方程相加, 得

$$6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 6V.$$

因为 $\sum_{i=1}^m x_i = 1$, 所以 $V = 1$, 代入式(11-16)可解得: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1/6$, 同理可解得 $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 1/6$. 即齐王赛马的最优混合策略是 $X^* = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6) = Y^*$, 博弈值为 1, 也就是齐王和田忌都应以相同的概率采用每一个策略, 齐王平均应可赢得一千金. 而我们前面所说的田忌能在比赛中赢得一千金, 是因为赛前齐王的策略已被田忌知道. 可见, 如果给定的博弈没有鞍点, 则局中人双方在出策略前要互相保密, 否则, 不保密的一方是要吃亏的.

例 11-9 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ 无鞍点. 容易证明, 最优混合策略中的各分量均大于零. 求该矩阵博弈的解.

解 令

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = V, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = V, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \quad (11-17)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = V, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \quad (11-18)$$

由线性方程组(11-17)可解得:

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}, \quad (11-19)$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}. \quad (11-20)$$

由线性方程组(11-18)可解得

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}. \quad (11-21)$$

式(11-19)、式(11-20)及式(11-21)可作为两阶矩阵博弈的通用计算公式.

在用方程组方法求解矩阵博弈时, 显然矩阵 A 中的零元素越多, 所对应的方程组越容易求解. 由定理 11-6 知, 若两个矩阵博弈的赢得矩阵值都相差一个常数, 则对其中一个矩阵博弈的求解可通过求另一个矩阵博弈得到. 因此对于某些矩阵博弈, 把它的元素尽可能多地化成零, 可使博弈的解集合不变, 且求解比较简单.

我们用一个例子说明具体的计算过程.

例 11-10 给定一个矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$, 求博弈 G 的值与解. 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 该矩阵不能降低阶数, 同时可以验明它没有鞍点. 我们准备采用方程组法来求解. 先简化矩阵 A , 将 A 中各元素加 1, 得

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

建立线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 = V, \\ 4x_2 = V, \\ 3x_3 = V, \\ \sum_{i=1}^3 x_i = 1, \\ x_i \geq 0. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 2y_1 = V, \\ 3y_2 = V, \\ 4y_3 = V, \\ \sum_{j=1}^3 y_j = 1, \\ y_j \geq 0. \end{array}\right.$$

将第一组方程组的前 3 个等式两端分别相加,得

$$12x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 6V + 3V + 4V = 13V,$$

所以 A_1 博弈值为 $V_1 = 12/13$, 得最优混合策略为

$$x_1^* = \frac{6}{13}, \quad x_2^* = \frac{3}{13}, \quad x_3^* = \frac{4}{13}, \quad y_1^* = \frac{6}{13}, \quad y_2^* = \frac{4}{13}, \quad y_3^* = \frac{3}{13}.$$

A 的博弈值为 $V = V_1 - 1 = -1/13$.

可见博弈 G 与博弈 G_1 的解相同, 博弈值相差 1, 而显然 G_1 的求解过程较为方便.

例 11-11 给定一个矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$, 求博弈 G 的值与解, 其中:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

421

解 对局中人 I 来说, 策略 3 优越于策略 2, 删除第二行后得

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

对于 A_1 , 此时对局中人 II 来说, 策略 2 优越策略 3, 可将 A_1 的第 3 列删除, 得

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

A_2 为一个二阶方阵, 它显然没有鞍点, 应用式(11-19)、式(11-20)和式(11-21)进行计算, 得

$$V = 23/5, \quad x_1 = 3/5, \quad x_3 = 2/5, \quad y_1 = 1/5, \quad y_2 = 4/5,$$

即局中人 I 和局中人 II 的最优混合策略分别为 $X^* = (3/5, 0, 2/5)$, $Y^* = (1/5, 4/5, 0)$, 博弈值 $V = 23/5$.

在这里, 我们必须指出, 线性方程组法只是一种试算法. 这种方法由于事先假定 x_i^* 和 y_j^* 均不为零, 故当最优策略的某些分量实际为零时, 方程组(11-14)和(11-15)可能无解, 因此, 这种方法在实际应用中有一定的局限性.

11.4.2 线性规划法

线性规划法可以求解任一矩阵博弈.不妨设 A 中所有的元素 $a_{ij} > 0$. 否则就要进行变换,对 A 的每一个元素加上同一个足够大的常数,使新的矩阵中每一个元素均大于零,但是这不会影响博弈的解.

由定理 11-4 的证明过程我们已经知道,对于扩充后的矩阵博弈 G 来说,求 G 的最优混合策略就是解线性规划 (P') (11-8)和 (D') (11-9).

因为当所有的 $a_{ij} > 0$ 时,显然有 $W > 0, V > 0$. 我们对于线性规划 (P') (11-8)和 (D') (11-9)作变换:

$$\hat{x}_i = x_i / W, i = 1, 2, \dots, m \text{ 及 } \hat{y}_j = y_j / V, j = 1, 2, \dots, n,$$

则 (P') (11-8)和 (D') (11-9)变换为

$$\begin{array}{l|l} \max d = W; & \min g = V; \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{x}_i \geq 1, j = 1, 2, \dots, n, & \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{y}_j \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \hat{x}_i = \frac{1}{W}, & \sum_{j=1}^n \hat{y}_j = \frac{1}{V}, \\ \hat{x}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. & \hat{y}_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

422
■■■■■

于是,求博弈 G 的解等价于求解下列线性规划 (P) 和 (D) :

$$\begin{array}{l|l} \min f = \sum_{i=1}^m \hat{x}_i; & \max z = \sum_{j=1}^n \hat{y}_j; \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{x}_i \geq 1, j = 1, 2, \dots, n, (P) & \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{y}_j \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, (D) \\ \hat{x}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. & \hat{y}_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

若设线性规划 (P) 的最优解为 $\hat{X}^* = (\hat{x}_1^*, \dots, \hat{x}_i^*, \dots, \hat{x}_m^*)$; (D) 的最优解为 $\hat{Y}^* = (\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_j^*, \dots, \hat{y}_n^*)$,最优值 $f^* = z^*$,则矩阵博弈的值为 $V = 1/f^*$,最优混合策略为

$$X^* = (V\hat{x}_1^*, \dots, V\hat{x}_i^*, \dots, V\hat{x}_m^*); Y^* = (V\hat{y}_1^*, \dots, V\hat{y}_j^*, \dots, V\hat{y}_n^*)$$

因为上面两个线性规划 (P) 和 (D) 是一组对偶规划,故只需解出一个,另一个的解可从最优单纯形表中得到.例如我们用对偶单纯形法求解 (P) ,则如第二章 § 2.4 指出的, (P) 的最优单纯形表中剩余变量的检验数就是 (D) 的最优解.

例 11-12 给定一个矩阵博弈 $G = \{S_1, S_2, A\}$,求博弈 G 的值与解,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 矩阵不能利用优超原理降低它的阶数,同时又无鞍点,我们用线性规划法求解.

由于矩阵中存在负元素,我们对矩阵进行变换,对其每个元素加上 2,得到下列矩阵 A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

建立线性规划模型 :

$$\begin{array}{lcl} \min f = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 ; & & \max z = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 ; \\ \text{s. t. } 3\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \geq 1, & & \text{s. t. } 3\hat{y}_1 + \hat{y}_2 \leq 1, \\ \hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \geq 1, & (P) & \hat{y}_1 + 4\hat{y}_2 \leq 1, \quad (D) \\ \hat{x}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 & & 2\hat{y}_1 + 3\hat{y}_2 \leq 1, \\ & & \hat{y}_j \geq 0, \quad j = 1, 2. \end{array}$$

对于问题(P)引进剩余变量 $\hat{x}_4$ 和 $\hat{x}_5$,将(P)化成标准模型,用对偶单纯形法求解,得最优单纯形表,如表 11-2 所示.

表 11-2

X_B	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$\bar{b}$
$\hat{x}_1$	1	-5/7	0	-3/7	2/7	1/7
$\hat{x}_3$	0	11/7	1	1/7	-3/7	2/7
r	0	1/7	0	2/7	1/7	-3/7

可知 : $\hat{x}_1^* = 1/7, \hat{x}_2^* = 0, \hat{x}_3^* = 2/7, f^* = 3/7, V_1 = 7/3$; 由第二章 § 2.4 式 (2-15) 知,最优单纯形表中剩余变量和 $\hat{x}_4$ 和 $\hat{x}_5$ 的检验数 r_4 和 r_5 就是(D)的最优解 :

$$\hat{y}_1^* = 2/7, \quad \hat{y}_2^* = 1/7.$$

因此 A_1 对应的矩阵博弈的解为

$$x_1^* = V_1 \hat{x}_1^* = 1/3, \quad x_2^* = V_1 \hat{x}_2^* = 0, \quad x_3^* = V_1 \hat{x}_3^* = 2/3,$$

$$y_1^* = V_1 \hat{y}_1^* = 2/3, \quad y_2^* = V_1 \hat{y}_2^* = 1/3.$$

则矩阵 A 对应局中人 I 和局中人 II 的最优混合策略分别为 $X^* = (1/3, 0, 2/3), Y^* = (2/3, 1/3)$, 博弈值 $V = -2 + 7/3 = 1/7$.

习 题 十 一

1. 已知矩阵博弈局中人 I 的赢得矩阵如下,求最优纯策略及博弈值.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. 甲乙两国进行乒乓球团体赛,每国由 3 个人组成一个队参加比赛.甲国的人员根

据不同的组合可组成 4 个队,乙国的人员可组成 3 个队,根据以往的比赛记录,已知各种组成队法相遇后甲国的得分如表 11-3 所示.问双方应各派哪个队上场是最优决策?

表 11-3

乙 \ 甲	1 队	2 队	3 队
1 队	-5	1	-7
2 队	3	2	4
3 队	8	-1	-8
4 队	-2	-1	6

3. 对任意一个 m 行 n 列的实数矩阵 $A = (a_{ij})$, 试证有下式成立:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}.$$

4. 某城区有 A, B, C 3 个居民小区,分别居住着 40%, 30%, 30% 的居民,有两个公司甲和乙都计划在区内建造超市,公司甲计划建两个,公司乙计划建一个,每个公司都知道,如果在某个小区内设有两个超市,那么这两个超市将平分该区的消费,如果在某个小区只有一个超市,则该超市将独揽这个小区的消费.如果在一个小区没有超市,则该小区的消费将平分给 3 个超市.每个公司都想使自己的营业额尽可能地多.试把这个问题表示成一个矩阵博弈,写出公司甲的赢得矩阵,并求两个公司的最优策略以及各占有多大的市场份额.

5. 一个病人的症状说明他可能患 a, b, c 3 种病中的一种,有两种药 C, D 可用,这两种药对这 3 种病的治愈率如表 11-4 所示.问医生应开哪一种药才能最稳妥?

表 11-4

药 \ 病	a	b	c
C	0.5	0.4	0.6
D	0.7	0.1	0.8

6. 设矩阵博弈局中人 I 的赢得为

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 当局中人 I 采用策略 $X = (0.2, 0.5, 0.3)$ 时, II 应采用什么策略?

(2) 当局中人 II 采用策略 $Y = (5/7, 2/7)$ 时, I 应采用什么策略?

(3) X 和 Y 是否是最优策略?为什么?若是,试给出另一个局中人的最优策略和博弈值.

7. 给定矩阵博弈局中人 I 的赢得为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

试验证 $X^* = (1/2, 1/2, 0)$ 和 $Y^* = (1/4, 0, 3/4)$ 分别是局中人 I 和 II 的最优混合策略, 并求博弈值.

8. 已知矩阵博弈的赢得矩阵如下:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

试用线性方程组法求最优混合策略及博弈值.

9. 用简便方法(降阶或化零元)求给定矩阵博弈的解与值, 赢得矩阵如下:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 5 & 5 & 0 \\ 9 & 9 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 4 & 7 \\ 8 & 3 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. 用线性规划求下述矩阵博弈的混合策略解及博弈值, 已知其赢得矩阵为

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

11. 甲、乙两方交战. 乙方用 3 个师守城, 有两条公路通入该城, 甲方用两个师攻城, 可能两个师各走一条公路, 也可能从一条公路进攻. 乙方可用 3 个师防守某一条公路, 也可用两个师防守一条公路, 用第三个师防守另一条公路. 哪方军队在一条公路上数量多, 哪方军队就控制住这条公路. 如果双方在同一条公路上的数量相同, 则乙方控制住公路和甲方攻入城的机会各半, 试把这个问题构成一个博弈模型, 并求甲、乙双方的最优策略以及甲方攻入城的可能性.

12. 设矩阵博弈 $G_1 = (S_1, S_2, A)$ 和 $G_2 = (S_1, S_2, B)$, 其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. 如果

$$b_{ij} = ka_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $k > 0$, 试证明 G_1 和 G_2 具有相同的最优策略且它们的博弈值 V_1 和 V_2 之间有关系:

$$V_2 = kV_1.$$

13. 甲、乙两人游戏, 每人出一个或两个手指, 同时又把猜测对方所出的指数叫出来. 如果只有一个人猜测正确, 则他所赢得的数目为两人所出指数之和, 如果两个人都猜对或都猜错, 则算平局, 都不得分. 写出该博弈中各局中人的策略集合及甲的赢得矩阵.

14. 甲、乙两个企业生产同一种产品, 两个企业都想通过改革管理获取更多的市场销售份额.

甲企业的策略措施有 3 条:降低产品价格;提高产品质量;延长保修年限;推出新产品.

乙企业考虑的措施也有 3 条:增加广告费用;增设维修网点;扩大维修服务;改进产品性能.

假定市场份额一定,由于各自采取的策略措施不同,通过预测,今后两个企业的市场占有率变动情况如表 11-5 所示(正值为甲企业增加的市场占有份额,负值为减少的市场占有份额).试通过博弈分析,确定两个企业各自的最优策略.

表 11-5

乙企业策略 甲企业策略			
	1	2	3
1	10	-1	1
2	12	10	-5
3	6	8	5

15. 某企业有甲、乙两个公司,每年的税额分别是 400 万元和 1 200 万元.对于每个公司,企业可以如实申报税款,或者篡改账目,称税额为零.而国家税务局由于人力所限,对该企业每年只能检查一个公司的账目.如果税务局发现有偷税现象,则该公司不但要如数缴纳税款,而且将被处以相当于一半税款的罚金.

(1) 试将此问题写成一个矩阵博弈模型,并求出税务局和企业的最优策略及税务局从该企业收到的平均税款(含罚金).(见附录中的提示)

(2) 税务局应将罚金提高到税款的多少倍,才能迫使该企业不敢漏税?

第十二章 决策分析

人们在社会实践的各个领域,经常会遇到各种各样的决策问题.对于某一决策问题,一般总有多个可行方案可供决策者选择.当我们采取某一可行方案后,可能会出现事先不能确切预知的状态.作为决策者,自然希望在若干可供选择的可行方案中能够作出决策,选择出最佳的可行方案,以达到预期的目标.

作为决策问题,一般应该具备下列条件:

- (1) 存在一个明确的目标;
- (2) 存在至少两个及以上可供选择的可行方案(下面称为策略);
- (3) 存在一种或几种不以人的意志而改变的自然状态;
- (4) 各可行方案在各自然状态下可计算相应的收益值.

决策分析就是研究这种不确定性的决策问题的科学方法,旨在完善决策过程.学习和掌握科学的决策分析方法,对管理决策者提高决策水平是十分必要的.科学的决策一般遵循这几条原则:定量分析与定性分析相结合;个人决策与集体决策相结合;现实与创新相结合.

决策问题可以按照决策内容的重要性、决策时间的长短、决策目标的性质、决策问题所处的条件和性质等不同角度分成许多类型.本章仅按决策问题所处的条件和性质所分的类型来进行讨论.我们将决策问题的类型分为确定型决策、非确定型决策和随机型决策.

确定型决策是指决策问题的条件和性质完全确定,作出的某项选择的结果也是确定的.

随机型决策指在决策过程中选择某项策略时,可能有若干个自然状态出现,并可根

据统计规律知道这些自然状态出现的概率分布.

非确定型决策是指在决策问题过程中,选择某项策略时,引发的自然状态不可预测.

下面我们对随机型决策和非确定型决策介绍相关的方法.

§ 12.1 随机型决策方法

随机型决策又称为风险型决策,主要应用于产品开发、技术改造、风险投资等决策问题.

设 S_i 为可能选择的第 i 个策略, N_j 为可能出现的第 j 个自然状态,那么随机型决策问题一般可用下述 5 个要素来描述:

- (1) 策略集 $\bar{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\} (m \geq 2)$;
- (2) 自然状态集 $\bar{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_n\} (n \geq 2)$;

- (3) 收益函数 $f(S_i, N_j) = a_{ij}$ ——采取 S_i 策略而出现状态 N_j 时的收益值；
 (4) 自然状态的概率分布 $P(N_j)$ ——状态 N_j 出现的概率 ($N_j \in \bar{N}$)；
 (5) 决策目标 V 。

收益函数 $f(S_i, N_j)$ 可以由矩阵 $A = (a_{ij})$ 给定, 我们称矩阵 A 为收益矩阵。也可描述成如表 12-1 所示的决策收益表。

表 12-1

$f(S_i, N_j)$		状态 N_j 以及概率分布 $P(N_j)$			
		N_1	N_2	...	N_n
		$P(N_1)$	$P(N_2)$	...	$P(N_n)$
策略 S_i	S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

下面我们来介绍随机型决策问题的方法。

12.1.1 期望值准则与报童问题

例 12-1 某企业为了提高经济效益, 决定开发某种新产品, 产品开发生产需要对设备投资规模作决策。设有 3 种可供选择的策略:

S_1 : 购买大型设备; S_2 : 购买中型设备; S_3 : 购买小型设备。

未来市场对这种产品的需求情况也有 3 种:

N_1 : 需求量较大; N_2 : 需求量中等; N_3 : 需求量较小。

经估计, 各种方案在不同的需求情况下收益值见表 12-2。表中数据 $f(S_i, N_j)$ 出现负数, 表示该企业将亏损。现问企业应选取何种策略, 可使其收益最大?

表 12-2

$f(S_i, N_j)$	N_1 $P(N_1) = 0.3$	N_2 $P(N_2) = 0.4$	N_3 $P(N_3) = 0.3$
S_1	50	20	-20
S_2	30	25	-10
S_3	10	10	10

解 根据收益值表 12-2, 可以分别求出采用策略 S_1, S_2, S_3 的效益期望值 $E(S_1), E(S_2), E(S_3)$:

$$E(S_1) = 50 \times 0.3 + 20 \times 0.4 + (-20) \times 0.3 = 17,$$

$$E(S_2) = 30 \times 0.3 + 25 \times 0.4 + (-10) \times 0.3 = 16,$$

$$E(S_3) = 10 \times 0.3 + 10 \times 0.4 + 10 \times 0.3 = 10.$$

如果我们采用“收益期望值”最大作为决策的准则, 那么就选取策略 S_1 , 即购买大型

设备作为决策方案.

这种通过计算各个策略的收益期望值,按照大小作为决策标准的决策准则,我们称为期望值准则.期望值准则一般分两步:

- ① 根据各种策略在不同的自然状态下的收益值和各种自然状态出现的概率,求出收益期望值 $E(S_i), i = 1, 2, \dots, m$;
- ② 比较收益期望值的大小作出决策.

下面我们期望值准则来解决一个存储问题.

例 12-2 已知顾客对商店中某种食品每天需求量 N_j 的概率分布如表 12-3 所示.每出售一件食品,商店可获利 4 元;若当天卖不掉,每件食品将损失 3 元.试问商店对这种食品每日应进货多少?

表 12-3

需求量 N_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(N_j)$	0.05	0.10	0.10	0.25	0.20	0.15	0.05	0.05	0.05

解 我们来计算需求量的期望值

$$\begin{aligned}
 E &= 1 \times 0.10 + 2 \times 0.10 + 3 \times 0.25 + 4 \times 0.20 + 5 \times 0.15 \\
 &\quad + 6 \times 0.05 + 7 \times 0.05 + 8 \times 0.05 = 3.65.
 \end{aligned}$$

于是,我们采取 3 个策略,进货量分别取 $S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 4$. 表 12-4 给出了这 3 种策略的期望值.所谓纯利润就是从出售的获利中减去因未能出售而遭受的损失,负的利润表示损失.

表 12-4

需求量 N_j	概率 $P(N_j)$	$f(S_i, N_j)$		
		$S_1 = 2$	$S_2 = 3$	$S_3 = 4$
0	0.05	-6.50	-9.75	-13.00
1	0.10	-0.75	-4.00	-7.25
2	0.10	5.00	1.75	-1.50
3	0.25	5.00	7.50	4.25
4	0.20	5.00	7.50	10.00
5	0.15	5.00	7.50	10.00
6	0.05	5.00	7.50	10.00
7	0.05	5.00	7.50	10.00
8	0.05	5.00	7.50	10.00
期望值 $E(S_i)$		3.85	4.912 5	4.537 5

显然,最优策略为每天进货 3 件.

关于例 12-2 实际上就是存储论中著名的报童问题.我们对它再作进一步的讨论.不

失一般性,我们给出报童问题如下.

例 12-3 (报童问题) 报童每天要到邮局去订报,出售一份报纸可获得利润 a (分),但如卖不出退回邮局,每份报纸要损失 b (分). 根据以往经验,得知每天需求量为 k 份的概率为 p_k . 问报童每天应订购多少份报纸,才能使他获利的期望值最大?

解 设报童每天订购的份数为 n 份,顾客每天需求量 X 是一个随机变量,于是,有 $P(X = k) = p_k$,报童每天的利润 $f(X)$ 可用下列公式来表示:

$$f(X) = \begin{cases} an, & \text{若 } X \geq n; \\ aX - (n - X)b, & \text{若 } X < n. \end{cases}$$

因此报童获利的期望值为

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} [ak - (n - k)b]p_k + \sum_{k=n}^{\infty} anp_k. \quad (12-1)$$

报童需要做出的决策:确定一个订购数 n ,使得 $E(f(X))$ 最大.

我们采用边际分析法来求解报童问题例 12-3,也即利用价格结构来检验和判断在什么情况下,再多订一份报纸是合算的.

假设报纸订购数取 n 份是合算的,现考察再多订一份报纸是否合算,也就是考察第 $n+1$ 件报纸的利润期望值. 第 $n+1$ 份报纸售出时,获利为 a 分,售不出去时获利为 $(-b)$ 分. 因此,此时多订一份报纸的利润期望值为

$$ap + (-b)(1 - p) = (a + b)p - b,$$

其中 $p = P(X \geq n + 1)$. 所谓合算,就是利润期望值大于零. 故由 $(a + b)p - b > 0$,可解得售出概率 p 应满足下述不等式:

$$p > \frac{b}{a + b}, \quad (12-2)$$

其中 $p = P(X \geq n + 1) = 1 - \sum_{i=0}^n P(X = i)$.

于是,我们取满足下式的 n^* 为报纸的最佳订购量:

$$P(X \geq n^*) = \min \left\{ P(X \geq n) \mid P(X \geq n) > \frac{a}{a + b}, n = 0, 1, 2, \dots \right\}. \quad (12-3)$$

下面我们用边际分析法来求解例 12-2. 因为我们引进了需求量随机变量 X ,所以我们将表 12-3 作一点修改并就在表中进行计算,如表 12-5 所示. 现在本问题中, $a = 4$, $b = 3$, 所以 $\frac{a}{a + b} \approx 0.43$, 在 $n = 3$ 时, $P(X \geq 3 + 1) = 0.50$ 满足式(12-3),所以最佳订购量 $n^* = 4$ 件.

表 12-5

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = n)$	0.05	0.10	0.10	0.25	0.20	0.15	0.05	0.05	0.05
$P(X \leq n)$	0.05	0.15	0.25	0.50	0.70	0.85	0.90	0.95	1.00
$P(X \geq n + 1)$	0.95	0.85	0.75	0.50	0.30	0.15	0.10	0.05	0.00

如果报童问题中的顾客每天需求量 X 是一个连续型随机变量, 它的概率密度函数为 $f(x)$, 则式(12-1)成为

$$E(f(x)) = \int_0^n [ax - (n - x)]f(x)dx + an \int_n^\infty f(x)dx. \quad (12-4)$$

从 $\frac{dE(f(X))}{dn} = 0$ 中解出 n , 可知 n 应该满足下式:

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{a}{a+b}. \quad (12-5)$$

满足此式的 n^* 即为报纸的最佳订购量. 虽然 n^* 的值没有能够以显式的形式给出, 但是如果概率密度函数知道了, 便可通过计算或者查表得到 n^* 的值.

例如, $a = 3, b = 1$, 现在 x 是 $[2\,000, 4\,000]$ 上均匀分布的连续型随机变量, 它的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1/2\,000, & 2\,000 \leq x \leq 4\,000, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由(12-5)知, $\int_{2\,000}^n f(x)dx = \frac{a}{a+b} = \frac{3}{3+1} = 0.75$, 于是, 有 $n - 2\,000 = 1\,500$, 因此, 报童的最优策略是订购 3 500 份.

12.1.2 决策树

431

在实际问题当中碰到的随机型决策问题, 往往是一类多阶段决策问题, 这类问题在应用期望值准则作决策时, 还可以借助于决策树的方法来解决. 决策树就是将问题中有关策略、自然状态、概率及收益值等, 通过线条和图形用类似于树状的形式表示出来. 例如, 图 12-1 就是例 12-1 决策问题的决策树. 其中 $\square$ 表示决策点, 由此引出的分支称为策略分支; $\circ$ 表示自然状态结点, 由此引出的分支称为概率分支, 分支旁标明的数字就是各个状态的概率; $\triangle$ 表示决策终点, $\triangle$ 旁所标的数字表示各个策略在相应的状态下的收益值; $\circ$ 上面的数字为相应策略的收益期望值. 在图 12-1 的决策树中, 策略 S_1 的期望值最大, 故选取 S_1 .

借助于决策树, 利用期望值准则作决策, 具体步骤如下:

- ① 绘制决策树: 自左至右绘制;
- ② 计算期望值: 自右向左计算各策略的期望值, 并将结果标在相应的状态结点处;
- ③ 选择策略: 根据期望值最大准则从后向前进行“剪枝”决策, 直到开始的决策点, 选出期望值最大的策略.

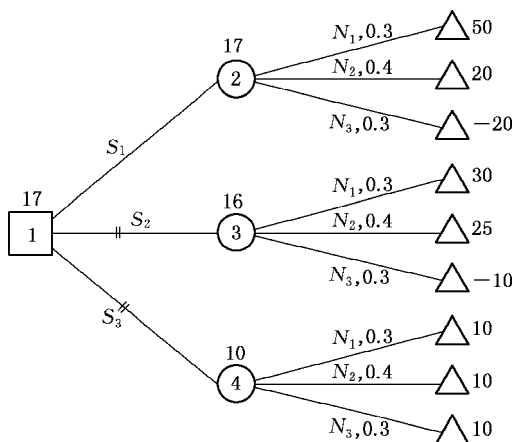


图 12-1

例 12-4 某化工厂原料车间,欲对旧工艺进行革新,采用新工艺.取得新工艺有两种策略:一是自行研究,成功的可能性为 0.6;二是买专利,估计谈判成功的可能性为 0.8.无论研究成功或谈判成功,生产规模都考虑两种方案:一是产量不变;二是增加产量.如果研究或谈判都失败,则仍采用旧工艺进行生产,并保持原产品产量不变.

根据市场预测,估计今后几年内这种产品价格下跌的概率是 0.1,价格中等的概率是 0.5,价格上升的概率是 0.4.经过分析计算,得到各个策略在不同价格的情况下的收益值,收益情况如表 12-6 所示.试用决策树方法寻找最优策略.

表 12-6

(单位:百万元)

收 益	旧 工 艺	买专利成功		自行研究成功	
		产量不变	增加产量	产量不变	增加产量
价格下跌	-100	-200	-300	-200	-300
价格中等	0	50	50	0	-150
价格上升	100	150	250	200	600

解 (1) 绘制决策树.如图 12-2 所示.

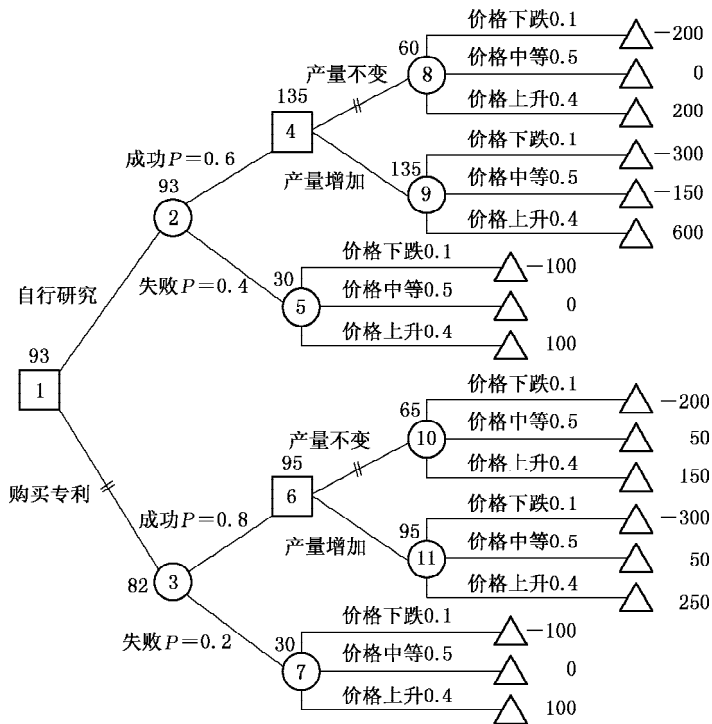


图 12-2

(2) 计算各结点的收益期望值.

$$\text{结点 } ⑧ : E_8 = (-200) \times 0.1 + 0 \times 0.5 + 200 \times 0.4 = 60 ;$$

$$\text{结点 } ⑨ : E_9 = (-300) \times 0.1 + (-150) \times 0.5 + 600 \times 0.4 = 135 ;$$

$$\text{结点 } ⑩ : E_{10} = (-200) \times 0.1 + 50 \times 0.5 + 150 \times 0.4 = 65 ;$$

结点⑩: $E_{11} = (-300) \times 0.1 + 50 \times 0.5 + 250 \times 0.4 = 95$;

结点⑤⑦: $E_5 = E_7 = (-100) \times 0.1 + 0 \times 0.5 + 100 \times 0.4 = 30$.

因为结点④是决策点,通过以上计算可知,结点⑨的收益期望值大于结点⑧的收益期望值,所以决策点④的收益期望值取 135,即采用增加产量的方案.同样,对决策点⑥,由于结点⑪收益期望值大于结点⑩的收益期望值,所以决策点⑥的收益期望值取 95,即采用增加产量的方案.

继续计算结点②,③的收益期望值:

结点②: $E_2 = 135 \times 0.6 + 30 \times 0.4 = 93$,

结点③: $E_3 = 95 \times 0.8 + 30 \times 0.2 = 82$.

(3) 选择策略.通过比较后进行“剪支”,结点②的收益期望值大,所以应选取自行研究的方案.

例 12-5 某电子厂根据需要对应用某种新技术生产市场所需的某种产品的生产和发展前景作决策.现有 3 种可供选择的策略:一是先只搞研究;二是研究与发展结合;三是全力发展.如果先只搞研究,有突破的可能性为 60%,突破后又有两种方案:一是变为研究与发展结合;二是变为全力发展.如果研究与发展结合,有突破的可能性为 50%,突破后有两种方案:一是仍为研究与发展结合;二是变为全力发展.无论采用哪一种策略,都将对产品的价格产生影响.据估计,今后 3 年内,这种产品价格下降的概率是 0.4,产品价格上升的概率是 0.6.

经过分析计算,得到各方案在不同的情况下的收益值,收益情况如表 12-7 所示.试画出决策树,寻找最优策略.

表 12-7 (单位:百万元)

收 益	只搞研究			研究与发展结合			全力 发展
	无突破	有突破		无突破	有突破		
		变研究与 发展结合	变为全 力发展		仍研究与 发展结合	变为全 力发展	
N_1 (产品价格下降)	－100	－200	－250	－200	－150	－200	－400
N_2 (产品价格上升)	100	200	300	200	250	350	400

解 按照决策树方法,绘出决策树如图 12-3 所示.根据“决策树”图可知,应采用“研究与发展相结合,如有突破,再全力发展”的策略.

12.1.3 灵敏度分析

在例 12-5 当中,我们应该注意到结点③与结点④处的两个收益期望值非常接近:

$$E_3 = (-400) \times 0.4 + 400 \times 0.6 = 80,$$

$$\begin{aligned} E_4 &= [(-200) \times 0.4 + 350 \times 0.6] \times 0.5 + [(-200) \times 0.4 + 200 \times 0.6] \times 0.5 \\ &= 130 \times 0.5 + 40 \times 0.5 = 85. \end{aligned}$$

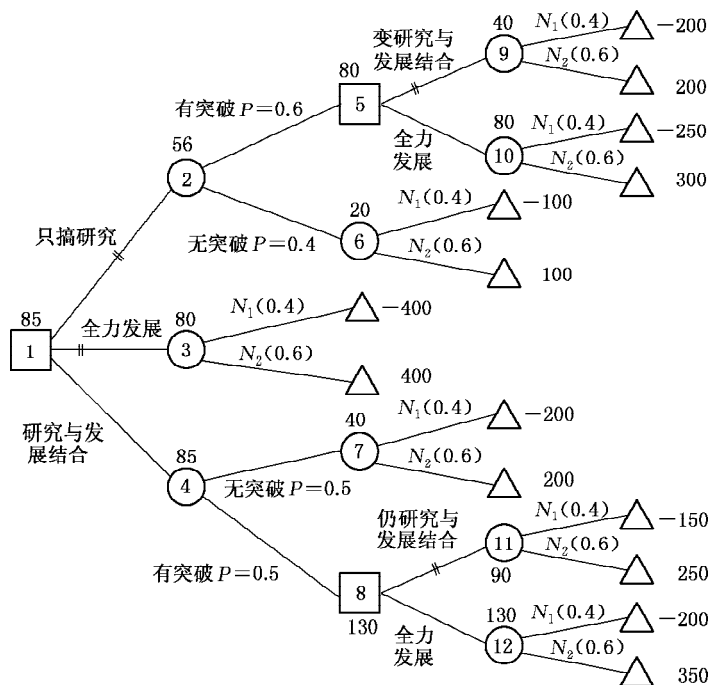


图 12-3

434

如果状态的概率稍为发生变化或者收益情况表中的数据稍作变动时, E_3 与 E_4 的值就会发生变化, 这时决策也随之改变。

事实上, 如果在“研究与发展结合”的方案中, 由于该电子厂的技术研究力量比较弱, 要有突破的可能性只有 40%(或更低), 则

$$\begin{aligned} E_4 &= [(-200) \times 0.4 + 350 \times 0.6] \times 0.4 + [(-200) \times 0.4 + 200 \times 0.6] \times 0.6 \\ &= 130 \times 0.4 + 40 \times 0.6 = 76(\text{或更低些}), \end{aligned}$$

即 $E_4 < E_3$, 这时决策方案就要选择“全力发展”策略了。

在实际工作中, 可把状态概率和收益值等参数在可能的范围内做几次变动, 仔细分析这些参数变动后给期望值和决策结果带来的影响。如果参数稍加变动而最优策略不变, 则这个策略比较稳定; 如果参数稍加变动而最优方案改变, 则这个方案是不稳定的, 还需要进一步分析, 这就是所谓的灵敏度分析。

例 12-6 某投资公司有一投资决策问题的收益表, 如表 12-8 所示。试问两个策略哪个是最优? 并进行灵敏度分析。

表 12-8

(单位: 万元)

$f(S_i, N_j)$	状态 N_1 $P(N_1) = 0.7$	状态 N_2 $P(N_2) = 0.3$
策略 S_1	1 000	-400
策略 S_2	-300	2 000

解 先计算两方案的收益期望值:

$$E(S_1) = 1000 \times 0.7 + (-400) \times 0.3 = 580,$$

$$E(S_2) = (-300) \times 0.7 + 2000 \times 0.3 = 390,$$

根据期望值准则,应选择策略 S_1 作为最优策略.

下面对这一决策问题进行灵敏度分析.

(1) 假设状态 N_1 出现的概率由 0.7 变化到 0.8,此时两个策略的收益期望值相应变化为

$$E(S_1) = 1000 \times 0.8 + (-400) \times 0.2 = 720,$$

$$E(S_2) = (-300) \times 0.8 + 2000 \times 0.2 = 160.$$

根据期望值准则,最优策略仍为 S_1 .

(2) 假设状态 N_1 出现的概率由 0.7 变化到 0.6,此时两个策略的收益期望值相应变化为

$$E(S_1) = 1000 \times 0.6 + (-400) \times 0.4 = 440,$$

$$E(S_2) = (-300) \times 0.6 + 2000 \times 0.4 = 620.$$

根据期望值准则,最优策略变为 S_2 .

由(1)和(2)不难发现,当概率 $P \in (0.7, 0.8)$ 变动时,收益期望值 $E(S_1) > E(S_2)$ 的情况没有发生改变,而当概率 P 在 $(0.6, 0.7)$ 内变动时,情况就可能发生根本性改变,最优策略可能由 S_1 转变为 S_2 . 因此,在区间 $(0.6, 0.7)$ 内,存在一个参数 α ,当概率 $P = \alpha$ 时发生策略转折.

现在,我们不妨假设状态 N_1 出现的概率为 α ,两策略的收益期望值分别为

$$E(S_1) = 1000 \times \alpha + (-400) \times (1 - \alpha),$$

$$E(S_2) = (-300) \times \alpha + 2000 \times (1 - \alpha).$$

为观察 α 的变化如何对决策产生影响,令 $E(S_1) = E(S_2)$,得

$$1000 \times \alpha + (-400) \times (1 - \alpha) = (-300) \times \alpha + 2000 \times (1 - \alpha),$$

解得 $\alpha = 0.65$,称 $\alpha = 0.65$ 为转折概率.

可以看出,当 $\alpha > 0.65$ 时, $E(S_1) > E(S_2)$,应选择策略 S_1 ;当 $\alpha < 0.65$ 时, $E(S_1) < E(S_2)$,应选择策略 S_2 .

12.1.4 贝叶斯决策

在随机型决策中,对自然状态 N_j 的概率分布 $P(N_j)$ 所作估计的精确性,直接影响到决策的收益期望值.我们称概率分布 $P(N_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 为先验概率.为了提高先验概率的精确性,我们可以对决策系统进行一次试验或者调查,并根据试验或者调查的结果来修改先验概率,以便我们在计算新的各个相关收益期望值时可以把新的信息体现在模型中.我们称这些新的概率分布为后验概率.

在这里我们必须指出,在试验或者调查前出现的自然状态,和试验或者调查后出现的结果 $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ 未必相同.

例如,工厂生产的批量产品的自然状态有两种: N_1 表示为“好”的批量产品, N_2 表示

为“不理想”的批量产品. 现在知道先验概率 $P(N_1) = 0.95$, $P(N_2) = 0.05$. 但是这样的概率分布可信吗? 为此工厂进行抽样检查, 决定从某一批量产品中检验两件产品样本. 于是结果有 3 种:

Z_1 为两件都是好的, Z_2 为有一件是好的, Z_3 为两件都是次品.

根据统计资料, “好”的批量产品中的次品率是 4%, 而“不理想”的批量产品中的次品率是 10%. 因为样本不是从“好”的批量产品中抽取, 就是从“不理想”的批量产品中抽取, 由于“好”的批量产品和“不理想”的批量产品中的次品率我们都已经估计, 因此根据二项分布, 条件概率 $P(Z_k | N_j)$ 完全可以计算出来. 然后, 我们通过贝叶斯公式来计算条件概率 $P(N_j | Z_k)$. 如果抽样后的结果是 Z_k , 我们就用 $P(N_j | Z_k)$ 代替先验概率 $P(N_j)$. 这就是后验概率的意义.

我们再来看另一个实例. 某公司对一块已经确定有石油资源的土地是否进行开采需要作出决策(自己开采或者出租). 估计该地出油量状态有 N_1, N_2, N_3 3 种, 概率分布已经进行了估算. 现在公司希望对概率分布作进一步的修正, 为此可以考虑是否进行一次“地震试验”. 如果进行试验, 那么地质结构的状态有 Z_1 (好), Z_2 (较好), Z_3 (一般), Z_4 (差) 4 种. 而条件概率 $P(N_j | Z_k)$ 由统计资料完全可以确定. 由于试验需要一笔费用, 这样的试验是否需要做呢?

有了这样的准备知识以后, 我们现在来给出贝叶斯决策方法.

为了使我们在利用期望值准则做决策的时候能够更加正确, 我们考虑是否应花一笔费用进行试验或者调查, 以得到有关新信息. 然后利用这些新信息修正原先对 $P(N_j)$ 所作的估计, 并利用经过修正的概率分布再作决策.

我们假定试验或者调查后出现的结果是 $Z_1, Z_2, \dots, Z_l$, 并且条件概率 $P(Z_k | N_j)$ 能够估算出来. 贝叶斯决策的基本步骤是:

(1) 验前分析. 决策者根据自己的经验和判断估计 $P(N_j)$, 然后凭借这种验前概率分布和收益函数 $f(S_i, N_j)$, 计算 $E(S_i)$, 利用期望值准则作出决策. 假定相应得出的收益期望值为 $E^* = \max\{E(S_i) | i = 1, 2, \dots, m\}$.

(2) 预验分析. 在实际试验或者调查前, 可先对是否值得花一笔费用进行试验或者调查以获得新信息进行研究分析, 从而作出是否试验或者调查的抉择.

(3) 验后分析. 在实际问题中, 如果确实进行了试验或者调查, 我们根据所得结果对验前概率分布作修正, 得出验后概率分布, 由新的概率分布和效益函数, 计算新的 $E(S_i)$, 利用期望值准则重新作决策. 假定试验或者调查后相应决策所得的效益期望值为 $E^{**} = \max\{\text{新的 } E(S_i) | i = 1, 2, \dots, m\}$.

(4) 阶段分析. 为了提高决策的正确性, 我们将试验或者调查搜索信息的过程划分为若干阶段, 在每一阶段都作预验分析和验后分析.

那么在预验分析中如何进行抉择呢?

如果试验或者调查结果 Z_k , 我们利用概率论中的贝叶斯公式, 可以算出在结果为 Z_k 的条件下, 自然状态为 N_j 的条件概率 $P(N_j | Z_k)$:

$$P(N_j | Z_k) = \frac{P(Z_k | N_j)P(N_j)}{\sum_{j=1}^n P(Z_k | N_j)P(N_j)}, \quad (12-6)$$

$$k = 1, 2, \dots, l; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

假设试验或者调查结果为 Z_k , 由此用(12-6)算出概率 $P(N_j | Z_k)$ 后, 用它取代 $P(N_j)$, 与收益函数 $f(S_i, N_j)$ 一起, 利用期望值准则可以算出新的 $E(S_i)$:

$$\text{新的 } E(S_i) = \sum_{j=1}^n f(S_i, N_j) P(N_j | Z_k), \quad i = 1, \dots, m, \quad (12-7)$$

然后计算 β_k :

$$\beta_k = \max\{\text{新的 } E(S_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}.$$

利用概率论中的全概率公式, 可知试验或者调查结果为 Z_k 的概率是:

$$P(Z_k) = \sum_{j=1}^n P(Z_k | N_j) P(N_j). \quad (12-8)$$

因此, 估算出试验或者调查后决策所得的效益期望值为

$$E^{**} = \sum_{k=1}^l \beta_k P(Z_k). \quad (12-9)$$

而 $E^{**} - E^*$ 就是如果进行试验或者调查使效益期望值增大的数值. 显然, 如果 $E^{**} - E^*$ 大于试验或者调查的费用, 那就可以认为试验或者调查是合算的.

如果在决策的过程中确实进行了试验或者调查, 并出现结果 Z_k , 那么 $P(N_j | Z_k)$ 就是验后概率, $\beta_k - E^*$ 就是这次试验或者调查真正增加出来的收益期望值. 此时, 如果考虑再作一轮新的试验或者调查, 那么这次试验或者调查算得的验后概率可以作为下一次的试验或者调查的验前概率来使用.

例 12-7 在例 12-1 的基础上, 我们考虑对市场进行调查, 现假设调查结果为

Z_1 (当前需求量较大), Z_2 (当前需求量中等), Z_3 (当前需求量较小).

已知 $P(Z_k | N_j)$ 如表 12-9 所示. 问在什么条件下可以进行市场调查? 请作贝叶斯决策.

表 12-9

$P(Z_k N_j)$	N_1	N_2	N_3
Z_1	0.6	0.2	0.2
Z_2	0.3	0.5	0.2
Z_3	0.1	0.3	0.6

解 先根据式(12-8)求出 $P(Z_1)$, $P(Z_2)$, $P(Z_3)$, 如表 12-10 所示. 再应用式(12-6)计算出 $P(N_j | Z_k)$, 见表 12-11.

表 12-10

$P(Z_k N_j) P(N_j)$	N_1	N_2	N_3	$P(Z_k)$
Z_1	0.18	0.08	0.06	0.32
Z_2	0.09	0.20	0.06	0.35
Z_3	0.03	0.12	0.18	0.33

表 12-11

$P(N_j Z_k)$	N_1	N_2	N_3
Z_1	0.56	0.25	0.19
Z_2	0.26	0.57	0.17
Z_3	0.09	0.36	0.55

最后,可得到如图 12-4 所示的决策树.由图 12-4 可知, $E^{**} = 19.99$ 万元, $E^* = 17$ 万元.因此,当调查费用不超过 $E^{**} - E^* = 19.99$ 万元 $- 17$ 万元 $= 2.99$ 万元的时候,可以进行调查.

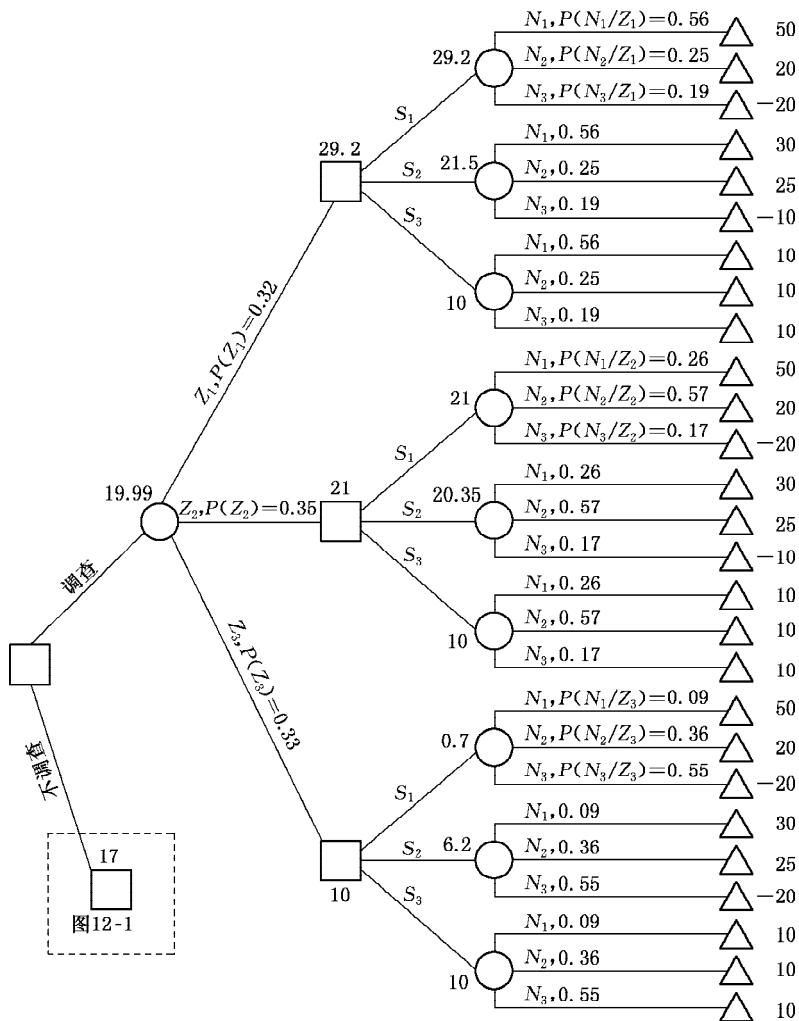


图 12-4

§ 12.2 非确定型决策方法

有时我们关于自然状态的信息掌握得很少,无法估算出自然状态的概率分布,因而

难以运用随机型决策方法. 因此, 这类非确定型决策, 就要依据决策者的决策偏向进行决策, 也就是说在这种情况下主要取决于决策者的主观意志和素质.

常用的处理这类非确定型决策问题的方法有: 乐观值准则、悲观值准则、折中值准则、后悔值准则和等可能准则. 我们结合实例来说明这 5 个准则.

例 12-8 某电视机厂为下一年度作广告宣传需要进行投资. 现考虑了 4 个方案: S_1 (维持今年水平); S_2 (增加 5 万元); S_3 (增加 10 万元); S_4 (增加 20 万元). 未来电视机市场可能出现 4 种情况: N_1 (有较大上升); N_2 (略有上升); N_3 (与今年持平); N_4 (有所下降). 收益 $f(S_i, N_j) = a_{ij}$ 如表 12-12 所示, 由于没有认可关于销售量的预测资料, 试用各种不同的决策准则求出最优策略.

表 12-12 (单位: 万元)

a_{ij}	N_1	N_2	N_3	N_4
S_1	20	10	0	-5
S_2	40	20	10	10
S_3	60	30	20	15
S_4	100	60	30	5

解 (1) 乐观值决策准则. 采用乐观值决策准则的决策者, 属于敢担风险的进取型人才, 对未来结果往往持乐观的态度, 总是假设出现最有利的状态, 认为即使出现不利的情况也未必会有多大的损失, 但是一旦出现最有利的情况却能得到很大的收益. 乐观值决策准则又称大中取大的准则. 该准则为:

- ① 根据效益矩阵 $A = (a_{ij})$, 确定每一个策略可能获得的最好结果 M_i :

$$M_i = \max\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

- ② 选取 S_k , 使得 $M_k = \max\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$.

我们用乐观值决策准则来求解例 12-8. 决策过程可以用表 12-13 来说明, 其中用黑体字加括号标出的数是 M_i 中的最大值 M_4 , 因此应采用策略 S_4 .

表 12-13

a_{ij}	N_1	N_2	N_3	N_4	M_i
S_1	20	10	0	-5	20
S_2	40	20	10	10	40
S_3	60	30	20	15	60
S_4	100	60	30	5	(100)

(2) 悲观值决策准则. 采用悲观值决策准则的决策者, 决策比较谨慎, 不希望因为决策失误而造成失误, 是从每一个可能出现的最差结果出发, 通过分析多种最坏的可能结果, 从中选择最好者, 即从最不利的结果中选择最有利的结果. 悲观值决策准则又称小中取大的准则. 该准则为:

- ① 根据效益矩阵 $A = (a_{ij})$, 确定每一个策略可能得到的最坏结果 m_i :

$$m_i = \min\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}, i = 1, 2, \dots, m.$$

② 选取 S_k 使得 $m_k = \max\{m_1, m_2, \dots, m_m\}$.

我们用悲观值决策准则来求解例 12.8. 决策过程见表 12-14, 其中用黑体字加括号标出的数是诸 m_i 中的最大值 m_3 , 因此采用策略 S_3 .

表 12-14

a_{ij}	N_1	N_2	N_3	N_4	m_i
S_1	20	10	0	-5	-5
S_2	40	20	10	10	10
S_3	60	30	20	15	(15)
S_4	100	60	30	5	5

(3) 折中值决策准则. 折中值决策准则是介于悲观和乐观之间的决策准则, 认为乐观值决策准则太冒险, 悲观值决策准则太保守, 那么考虑折中一下. 即既不完全乐观, 也不完全悲观, 而是采用引进一个乐观系数 λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) 来反映; 而 $1-\lambda$ 就称为悲观系数. 该准则为:

① 根据乐观值准则中的 M_i 和悲观值中的 m_i 计算折中值:

$$u_i = \lambda M_i + (1-\lambda)m_i, i = 1, 2, \dots, m.$$

② 选取 S_k , 使得

$$u_k = \max\{u_1, u_2, \dots, u_m\}.$$

我们用 $\lambda=0.3$ 时的折中值决策准则来求解例 12-8. 决策过程见表 12-15, 可见应采用策略 S_4 .

表 12-15

a_{ij}	N_1	N_2	N_3	N_4	λM_i	$(1-\lambda)m_i$	u_i
S_1	20	10	0	-5	6	-3.5	2.5
S_2	40	20	10	10	12	7	19
S_3	60	30	20	15	18	10.5	18.5
S_4	100	60	30	5	30	3.5	(33.5)

(4) 后悔值决策准则. 在决策过程中, 当某种状态可能出现时, 决策者必然要选择使收益最大的策略, 但决策者由于决策失误而没有选择收益最大的策略, 就会感到后悔. 后悔值决策准则的思想就是尽量减少决策后的后悔程度. 衡量决策者后悔程度的一个指标, 称为后悔值. 事实上, 相应于每对 (S_i, N_j) 都可以定义一个后悔值 r_{ij} :

$$r_{ij} = \omega_j - a_{ij},$$

其中 ω_j 为决策者在状态 N_j 时可获得的最大收益, 即

$$\omega_j = \max\{a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\}. \text{ 该准则为:}$$

① 计算出后悔值 r_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$);

② 对每个 S_i 可能产生后悔最大的数值 R_i :

$$R_i = \max\{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}\} (i = 1, 2, \dots, m).$$

③ 选取 S_k ,使得

$$R_k = \min\{R_1, R_2, \dots, R_m\}.$$

我们用后悔值决策准则求解例 12-8. 决策过程见表 12-16 ,采用策略 S_4 .

表 12-16

a_{ij}	N_1	N_2	N_3	N_4	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	r_{i4}	R_i
S_1	20	10	0	-5	80	50	30	20	80
S_2	40	20	10	10	60	40	20	5	60
S_3	60	30	20	15	40	30	10	0	40
S_4	100	60	30	5	0	0	0	10	(10)
ω_j	100	60	30	15					

(5) 等可能决策准则. 在各种自然状态发生的概率总是相同的条件下 ,我们采用等可能决策准则来选择最优策略. 该准则为 :

① 计算各策略在各自然状态等概率条件下的效益期望值 :

$$E(S_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

② 由期望值中的最大者 $E(S_k)$,来确定相应的 S_k 作为最优策略.

我们用等可能决策准则求解例 12-8. 计算期望值 :

$$E(S_1) = \frac{1}{4}(20 + 10 + 0 - 5) = \frac{25}{4}, E(S_2) = \frac{1}{4}(40 + 20 + 10 + 10) = 20 ,$$

$$E(S_3) = \frac{1}{4}(60 + 30 + 20 + 15) = \frac{125}{4}, E(S_4) = \frac{1}{4}(100 + 60 + 30 + 5) = \frac{195}{4} ,$$

因此采用策略 S_4 .

对非确定型决策问题 ,是因入、因时、因地选择的决策原则. 在实际决策时 ,可根据具体情况同时选用几个不同的准则 ,然后将所得的结果进行分析比较 ,从而作出最后的选择. 一般来说 ,总是在若干准则中 ,被选中多的策略应予以优先考虑. 比如 ,例 12-8 求解中有 4 次决策为策略 S_4 ,所以 S_4 应该是最优策略.

§ 12.3 效用函数方法

12.3.1 效用值决策准则

由于地位、经验和性格的不同 ,决策者对于随机型决策带来的风险所取的态度往往存在着很大的差异.

例如 ,某投资公司在某项投资问题上有两种投资策略 : S_1 为开辟新的投资领域 , S_2 为维持原投资领域. S_1 成功的概率为 0.7 ;成功可获 500 万元 ,失败将损失 300 万元. S_2

成功的概率为 1, 可获 50 万元. 于是

$$E(S_1) = 500 \times 0.7 + (-300) \times 0.3 = 240(\text{万元}),$$

$$E(S_2) = 50 \times 1 = 50(\text{万元}).$$

若按期望值准则应选择 S_1 为决策方案, 但是, 由于这是一次性的、利害关系重大的决策, 于是有的决策者敢于冒风险选择策略 S_1 ; 有的决策者可能会不愿冒着损失 300 万元的风险, 而情愿选择策略 S_2 稳得 50 万元. 这就说明不同的决策者对待风险的态度会有差异. 每个决策者都有他自己的评价标准. 如果决策准则不能反映决策者的评价标准, 那么这样的决策方法就很难被决策者接受.

应当指出, 对于同一期望收益, 不同的决策人自然会有不同的反映; 同时, 即使同一个决策者, 对于这个同一期望收益, 在不同的情况下, 也会有不同的反映. 好比一瓶矿泉水, 在泰山顶上和泰山脚下, 对于一个人的效用是不一样的. 我们把某个收益值在人们心目中的价值称为这个收益值的效用. 为了反映决策者对待风险的态度, 我们应用“效用”这个概念来体现它们.

效用值是一个相对的指标, 它的大小表示决策者对于风险的态度, 对某事物的倾向和偏差等主观因素的强弱程度. 在一个决策问题中, 通常情况下, 我们将可能得到的最大收益值 b 的效用值取为 1, 而把可能得到的最小收益值 a 的效用值取为 0. 为此, 在对某个问题提供决策的咨询意见时, 我们可以通过与决策者进行对话, 来建立相应的效用函数. 此效用函数应能在一定的程度上反映决策者在决策问题上的决策偏向和评价标准. 于是, 利用这种效用函数作决策, 依据的原则就称为效用值准则.

12.3.2 效用函数曲线

如何通过与决策者对话建立相应的效用函数呢? 对于一个决策问题, 如果最小收益值为 a , 最大收益值为 b , 我们以收益 x 为自变量, $[a, b]$ 上的效用函数设为 $u(x)$, 并有 $u(a) = 0, u(b) = 1$. 对于 $x \in [a, b]$, $u(x)$ 称为 x 的效用值, $u(x) \in [0, 1]$.

例如, 在上面一个问题中, 最大收益为 500 万元, 最小收益为 (-300) 万元, 我们就规定 $u(x)$ 定义在 $[-300, 500]$ 上, 而且 $u(-300) = 0, u(500) = 1$. 下面我们先来看, 对于 $x = 50 \in [-300, 500]$, $u(50)$ 如何确定? 我们采用对比提问法.

如前面所讲, 决策者宁愿采用稳得 50 万元的策略, 而不愿采用收益期望值为 240 万元的策略. 它说明在决策者心目中, 稳得 50 万元的策略 S_2 的效用值, 比策略 S_1 的效用值要大. 为了确定收益为 50 万元的效用值, 可以适当提高 S_1 成功的概率并继续询问: 如果现在获利 500 万元的概率为 0.8, 损失 300 万的概率为 0.2, 那么你是否愿意冒一下风险, 还是仍然宁可稳拿 50 万元呢? 如果决策者这时愿意冒一下风险, 则说明在决策者的心目中现在所提出的假想方案的效用值大于稳得 50 万元方案的效用值. 这时再适当减小 S_1 成功的概率再问: 如果获利 500 万元的概率为 0.75, 获利 (-300) 万元的概率为 0.25 时, 你是否愿意冒一下风险, 还是宁可稳拿 50 万元? 如果决策者这时认为这两者对他来说无所谓, 都可以, 这就说明在决策者的心目中“这两个方案的效用值相等”, 那么我们就

停止询问. 由于已知 $u(-300) = 0, u(500) = 1$, 我们就可以确定 50 万元的效用值:

$$u(50) = 1 \times 0.75 + 0 \times 0.25 = 0.75.$$

一般可以用插值方法来确定 $[a, b]$ 中其他 x 的效用值 $u(x): \alpha, \beta \in [a, b]$, 若已知 $u(\beta)$ 和 $u(\alpha), \alpha < x < \beta$, 如果通过对话不断修改 p_β 之值, 直至最后发现决策者心目中“稳获利 x 的假想方案与获利 β 的概率为 P^* 、获利 α 的概率为 $(1 - P^*)$ 之假想方案的效用值是相等”的时候, 则令

$$u(x) = P^* u(\beta) + (1 - P^*) u(\alpha). \quad (12-10)$$

若已确定 $[a, b]$ 中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 对应的效用值 $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$, 那么就可以用一条光滑曲线把这些点 $(x_i, u(x_i)) (i = 1, 2, \dots, n)$ 连接起来, 这就是效用函数曲线(见图 12-5).

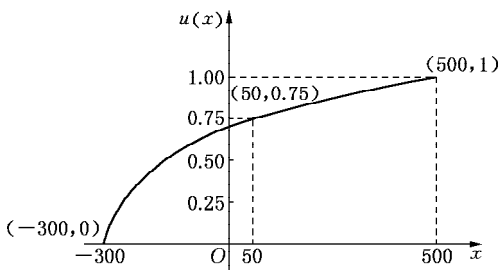


图 12-5

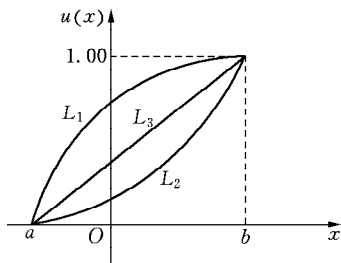


图 12-6

不同的决策者对待风险的态度有所不同, 因此会得到形状不同的效用曲线. 一般有保守型(避险型)、冒险型(进取型)和中间型(无关型)3 种类型. 其对应的曲线如图 12-6 所示.

1. 保守型

其对应的曲线如图 12-6 所示的曲线 L_1 , 这是一条向上凸起的曲线. 它的特点是: 当收益值较小时, 效用值增加较快; 而随着收益值的增大, 效用值增加的速度越来越慢. 它反映出相应的决策者讨厌风险、谨慎从事的特点, 这是一个避免担风险的保守型决策者.

2. 冒险型

其对应的曲线如图 12-6 所示的曲线 L_2 , 这是一条向下凹进的曲线. 它的特点是: 当收益值较小时, 效用值增加较为缓慢; 而随着收益值的增大, 效用值增加的速度越来越快. 它反映出相应的决策者是一位喜欢冒险、锐意进取的决策者.

3. 中间型

其对应的曲线如图 12-6 中的曲线 L_3 , 这是一条直线. 它的特点是: 收益值与效用值成正比例上升. 它反映出相应的决策者是一位严格按照期望值准则的循规蹈矩的决策者.

但是, 在实际决策过程中, 决策者效用曲线可能是 3 种类型兼而有之, 当收益变化时, 决策者对待风险的态度也会发生变化.

例 12-9 某农场考虑是否提早种植某种作物的决策问题. 如果提早种, 又不遇霜冻, 则收入为 45 万元; 如遇霜冻, 则收入仅为 10 万元, 遇霜冻的概率为 0.4. 如不提早种, 又不遇霜冻, 则收入为 35 万元; 即使遇霜冻, 受灾也轻, 收入为 25 万元, 遇霜冻的概率为

0.2. 问今年是否提早种植？

解 (1) 绘制效用曲线.

现在 $a = 10, b = 45$. 于是, 我们取 $u(45) = 1, u(10) = 0$. 我们采用对比提问法, 得到效用曲线, 如图 12-7 所示.

由图 12-7 可知 $u(35) = 0.5, u(25) = 0.25$.

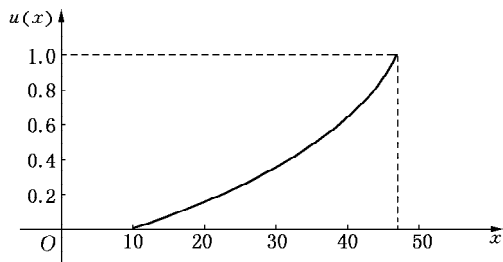


图 12-7

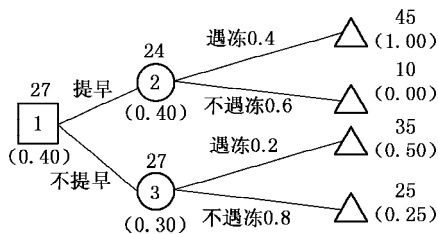


图 12-8

(2) 绘制决策树. 如图 12-8 所示, $\triangle$ 旁同时注上了收益和对应的效用值(带括号).

在图 12-8 中, 点②的期望效用值 $= 1 \times 0.4 + 0 \times 0.6 = 0.4$; 点③的期望效用值 $= 0.50 \times 0.2 + 0.25 \times 0.8 = 0.30$, 按期望效用值最大的准则, 应选取“提早种”的策略, 这是冒险型决策者所作的最优决策, 而从决策树中我们不难看出根据收益期望值最大的原则是应该采用“不提早种”的策略.

444
■■■■■

习 题 十 二

1. 某工厂准备生产甲、乙两种产品, 根据对市场需求调查, 可知不同需求状态出现的概率及相应的获利(单位: 万元)情况如表 12-17 所示. 试根据期望最大原则进行决策分析, 并进行灵敏度分析和算出转折概率.

表 12-17

收 益	高需求量 $p_1 = 0.7$	低需求量 $p_2 = 0.3$
甲产品	40	30
乙产品	70	20

2. 某水果商店以每千克 2.4 元的价格购进每筐 100 千克的香蕉, 第一天以每千克 4 元的价格出售, 当天销售余下的香蕉再以平均每千克 1.6 元的处理价出售. 需求情况(以筐为单位)由表 12-18 列出. 为获取最大的利润, 该店每天应购进多少筐香蕉?

表 12-18

需求量	1	2	3	4	5	6	7
概 率	0.10	0.15	0.25	0.25	0.15	0.05	0.05

3. 某公司经销某种食品, 可每周进货一次, 无需订货费. 该食品为每箱 30 袋包装, 每

箱进价 12 元,每袋售价 0.6 元,食品保存期为一周,到周末未售出的只能以每袋 0.3 元大酬宾,这时一定可售完.据以往资料,每周对该食品的需求如表 12-19 所示.

表 12-19

需求箱数	100	200	300	400	500	600	700
概率 p	0.1	0.15	0.2	0.2	0.15	0.12	0.08

- (1) 问该公司对该食品每周应进货多少最佳?
- (2) 若一次进货 ≥ 500 箱时,由于有批量折扣,每箱进价只需 11 元.问在此种情况下,公司对该食品每周进货多少为好?公司期望获利多少?

4. 某科研所考虑是否要向某企业提出开发一种新产品的建议.如果打算提出建议,在提建议前先需要作一些初始科研工作,估计需要花费 2 万元.该科研所认为,如果一旦提出建议,60%有可能签上合同,40%可能签不成合同.如果签不成合同,2 万元的初始科研费就损失掉了.

签订合同后科研所开发新产品有两种方法,方法一需要花费 30 万元,成功概率为 0.8,方法二只需要花费 18 万元,成功概率为 0.5.

科研所签订合同并成功开发新产品,企业给科研所 80 万元技术转让费,若研制开发失败,科研所赔偿企业 15 万元.问科研所是否需要向企业提出研制开发新产品的建议?请用决策树方法求解.

5. 工厂考虑是否生产一种新产品,也即有两种方案: S_1 (生产新产品), S_2 (继续生产老产品).管理者对市场销售的状况进行了预测,认为可能出现 3 种不同的状态: N_1 (销路好), N_2 (销路一般), N_3 (销路差).相应的概率分布与两种方案的收益由表 12-20 给出.

表 12-20

$f(S_i, N_j)$	N_1	N_2	N_3
	$P(N_1) = 0.25$	$P(N_2) = 0.30$	$P(N_3) = 0.45$
S_1	15	10	-6
S_2	6	4	1

根据某咨询站免费提供的市场调查的报告,得知在市场实际状态为 N_j 的条件下调查结果为 Z_k 的概率如表 12-21 所示.试问:

表 12-21

$P(Z_k N_j)$	N_1	N_2	N_3
Z_1	0.65	0.25	0.10
Z_2	0.25	0.45	0.15
Z_3	0.10	0.30	0.75

- (1) 如果调查费用为 1,那么调查是否合算?
- (2) 如果调查结果为 Z_3 ,那么验前和验后的最优方案各是什么?

6. 某厂为了扩大生产提高效益,计划生产新产品. 现有 5 种生产方案 : S_1 (新建一条大型生产线) , S_2 (新建一条中型生产线) , S_3 (对原有的生产线进行改造) , S_4 (部分零件与外厂协作生产) , S_5 (和其他厂家联营). 由于缺乏有关资料,对该产品的市场需求只能估计为好、较好、一般和较差等 4 种状态,而对每种状态出现的概率无法预测,每种方案在各种自然状态下的收益值如表 12-22 所示. 试用各种不同的非确定性决策准则求出最优策略(用折中值准则决策时取 $\lambda = 0.3$).

表 12-22

收益值	市场需求好 : N_1	市场需求较好 : N_2	市场需求一般 : N_3	市场需求较差 : N_4
S_1	1 000	800	500	-220
S_2	850	680	420	-150
S_3	600	520	400	-100
S_4	350	300	200	50
S_5	450	400	250	90

7. 有一个面临带有风险的投资问题. 在可供选择的投资方案中可能出现的最大收益为 200 万元,可能出现的最少收益为 -100 元. 为了确定该投资者在某次决策问题上的效用函数,对投资者进行了以下一系列询问,现将询问结果归纳如下:

① 投资者认为:“以 50% 的机会得到 200 万元,50% 的机会损失 100 万元”和“稳获 0 万元”两者对他来说没有差别;

② 投资者认为:“以 50% 的机会得到 200 万元,50% 的机会损失 0 万元”和“稳获 80 万元”两者对他来说没有差别;

③ 投资者认为:“以 50% 的机会得到 0 万元,50% 的机会损失 100 万元”和“肯定失去 60 万元”两者对他来说没有差别.

要求:(1)根据上述询问结果,计算该投资者关于 200 万元,80 万元,0 万元,-60 万元,-100 万元的效用值;

(2)画出该投资者的效用曲线,并说明该投资者是敢于冒险还是回避风险的决策者.

* 第十三章 排序问题

§ 13.1 车间生产计划排序问题

在工厂里,当一个车间要完成若干项不能同时进行的生任务时,就会出现一个排序问题.在这种情况下,这若干项生产任务必须按照某一顺序序贯地进行.当车间调度员按不同的顺序安排生产任务时,生产效果往往不一样.因此,在众多的排序方案中,如何运用数学方法找出最优的排序方案,这是车间生产管理中调度员应该关切的一个问题.下面我们按加工设备及生产任务的不同情况分几个问题来讨论.

13.1.1 一台机器和 n 个工件的排序问题

例 13-1 设一个机修车间(可以把它看作一台机器)有 n 台不同的机床(可以看作是工件)要进行大修.它们的维修时间已知为 $t_1, t_2, \dots, t_n$.而机床 A_i 在车间逗留的过程中,每单位时间的损失费为 $w_i (i = 1, \dots, n)$.试求一种排序,使得 n 台机床在修理完毕时,总的损失费为最小.

我们知道, n 台机床有 $n!$ 种不同的排序.此数可能会相当大.例如 $n = 15$, 则 $n! \approx 1.3 \times 10^{12}$.因此,要将所有可能的排序列出来并对它们逐个地加以分析,是不切合实际的.

令集合

$$H = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \mid (k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ 为 } 1, 2, \dots, n \text{ 的一种排序}\}.$$

若现在 n 台机床维修的排序为 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, 则机床 A_{k_s} 维修完毕的时间 $T_{k_s} = \sum_{i=1}^s t_{k_i}$, n 台机床按此排序维修完毕时总的损失费为 $\sum_{s=1}^n w_{k_s} \cdot T_{k_s}$. 因此,本问题即为寻找一种排序 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 满足条件:

$$\sum_{s=1}^n w_{r_s} T_{r_s} = \min \left\{ \sum_{s=1}^n w_{k_s} T_{k_s} \mid (k_1, k_2, \dots, k_n) \in H \right\}. \quad (13-1)$$

定理 13-1 若在排序 $(k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_n)$ 中,有

$$\frac{t_{k_m}}{w_{k_m}} > \frac{t_{k_{m+1}}}{w_{k_{m+1}}},$$

则排序 $(k_1, \dots, k_{m+1}, k_m, \dots, k_n)$ 比 $(k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_n)$ 为优.

由此可知,满足下列条件的排序 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 即为本问题的最优排序:

$$\frac{t_{r_1}}{w_{r_1}} \leq \frac{t_{r_2}}{w_{r_2}} \leq \dots \leq \frac{t_{r_n}}{w_{r_n}}. \quad (13-2)$$

表 13-1

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4
t_i	4	6	7	9
w_i	0.5	1	0.8	1.2
t_i/w_i	8	6	8.75	7.5

总损失费

$$f = 6 + 18 + 9.5 + 20.8 = 54.3.$$

例 13-2 设有 n 个工件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 需要在一台机器上加工,加工时间分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$. 试求一种加工排序,使得工件在这台机器上平均停留的时间为最短.

解 令

$$T_{k_s} = \sum_{i=1}^s t_{k_i}, \quad (13-3)$$

则按 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 顺序加工时,工件平均停留时间为 $\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n T_{k_s}$.

本问题即求满足下列条件的最优排序 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$:

$$\sum_{s=1}^n \frac{T_{r_s}}{n} = \min \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{T_{k_s}}{n} \mid (k_1, \dots, k_n) \in H \right\}. \quad (13-4)$$

显然,本问题即为例 13-1 中 $w_i = 1/n$ 的特例. 故由式(13-2)知,满足下列条件的排序 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 即为最优排序:

$$t_{r_1} \leq t_{r_2} \leq \dots \leq t_{r_n}. \quad (13-5)$$

设 $n = 7$,工件 A_i 的加工时间 t_i 由表 13-2 给出.

表 13-2

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
t_i	2.5	0.25	0.7	1.8	2.75	1.25	0.75

表 13-3

A_i	A_2	A_3	A_7	A_6	A_4	A_1	A_5
T_i	0.25	0.95	1.7	2.95	4.75	7.25	10

因为 $t_2 < t_3 < t_7 < t_6 < t_4 < t_1 < t_5$,故最优排序为 $(2, 3, 7, 6, 4, 1, 5)$. 此时, T_i 经计算由表 13-3 给出. 故平均停留时间为

$$\frac{1}{7} \sum_{s=1}^7 T_{r_s} = \frac{1}{7} (0.25 + 0.95 + 1.7 + 2.95 + 4.75 + 7.25 + 10) = 3.98.$$

例 13-3 设有 n 个工件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 要在一台机器上加工, 加工时间分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 要求的交货日期分别为 $D_1, D_2, \dots, D_n$, 试求一种加工排序, 使得误期交货的工件最少.

我们给出定理 13-2.

定理 13-2 若 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 为满足 $D_{\omega_1} \leq D_{\omega_2} \leq \dots \leq D_{\omega_n}$ 的一种排序, $T_{\omega_s} = \sum_{i=1}^s t_{\omega_i}$ 为在这种排序下工件 A_{ω_s} 的交货日期 ($1 \leq s \leq n$). 若 k 为满足下列条件的正整数 ($1 \leq k \leq n-1$):

$$T_{\omega_1} \leq D_{\omega_1}, T_{\omega_2} \leq D_{\omega_2}, \dots, T_{\omega_k} \leq D_{\omega_k}, T_{\omega_{k+1}} > D_{\omega_{k+1}}.$$

又设

$$t_{\omega_m} = \max\{t_{\omega_i} \mid 1 \leq i \leq k+1\},$$

则有(1) 对于 $1, 2, \dots, n$ 的任一种排序 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $A_{\omega_1}, A_{\omega_2}, \dots, A_{\omega_{k+1}}$ 中必有一个工件不能按时交货.

(2) 按 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}, \omega_{m+1}, \dots, \omega_n)$ 排序加工 $n-1$ 个工件的误期工件个数不大于按 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \dots, \omega_n)$ 排序加工 $n-1$ 个工件的误期工件个数 ($1 \leq j \leq k+1$).

根据定理 13-2 我们对本问题可以建立如下算法:

① 取初始排序 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 满足:

$$D_{\omega_1} \leq D_{\omega_2} \leq \dots \leq D_{\omega_n}.$$

取 $T_{\omega_s} = \sum_{i=1}^s t_{\omega_i}$ ($s = 1, \dots, n$), $R = \emptyset$.

② 是否存在正整数 k , 使得 $\omega_{k+1} \in R$ 且有:

$$T_{\omega_1} \leq D_{\omega_1}, T_{\omega_2} \leq D_{\omega_2}, \dots, T_{\omega_k} \leq D_{\omega_k}, T_{\omega_{k+1}} > D_{\omega_{k+1}}?$$

若是, 则取 $t_{\omega_m} = \max\{t_{\omega_i} \mid 1 \leq i \leq k+1\}$, $R = R \cup \{\omega_m\}$. 令 $\beta = \omega_m$. 取 $\omega_j = \omega_{j+1}$

($j = m, \dots, n-1$), $\omega_n = \beta$, $T_{\omega_s} = \sum_{i=1}^s t_{\omega_i}$ ($s = m, \dots, n$). 转步骤 ②.

若否, 则算法终止. 集合 R 中元素个数为误期工件个数 (R 为有序集合).

例如 $n = 8$, t_i 及 D_i 由表 13-4 给出.

表 13-4

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
t_i	10	6	3	1	4	8	7	6
D_i	35	20	11	8	6	25	28	9

按算法步骤①, 取 $R = \emptyset$, 初始排序 $(5, 4, 8, 3, 2, 6, 7, 1)$, 得表 13-5.

表 13-5

i	1	2	3	4	5	6	7	8
A_{ω_i}	A_5	A_4	A_8	A_3	A_2	A_6	A_7	A_1
t_{ω_i}	4	1	6	3	6	8	7	10
D_{ω_i}	6	8	9	11	20	25	28	35
T_{ω_i}	4	5	11	14	20	28	35	45

在表 13-5 中,可知

$k = 2, t_{\omega_m} = \max\{t_{\omega_i} \mid i = 1, 2, 3\} = \max\{4, 1, 6\} = t_{\omega_3} = 6 = t_8$, 故 $m = 3$, $\omega_m = 8$, 取 $R = \{8\}$, 得表 13-6.

表 13-6

i	1	2	3	4	5	6	7	8
A_{ω_i}	A_5	A_4	A_3	A_2	A_6	A_7	A_1	A_8
t_{ω_i}	4	1	3	6	8	7	10	6
D_{ω_i}	6	8	11	20	25	28	35	9
T_{ω_i}	4	5	8	14	22	29	39	45

在表 13-6 中,可知

$k = 5, t_{\omega_m} = \max\{t_{\omega_i} \mid i = 1, \dots, 6\} = \max\{4, 1, 3, 6, 8, 7\} = t_{\omega_5} = 8 = t_6$, 故 $m = 5, \omega_m = 6$, 取 $R' = R \cup \{6\} = \{8, 6\}$, 得表 13-7.

表 13-7

i	1	2	3	4	5	6	7	8
A_{ω_i}	A_5	A_4	A_3	A_2	A_7	A_1	A_8	A_6
t_{ω_i}	4	1	3	6	7	10	6	8
D_{ω_i}	6	8	11	20	28	35	9	25
T_{ω_i}	4	5	8	14	21	31	37	45

由表 13-7 可知,按排序(5, 4, 3, 2, 7, 1, 8, 6)加工零件的误期工件最少,有 2 个工件误期.

13.1.2 两台机器和 n 个工件的排序问题

例 13-4 现有 n 个零件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 这些工件都必须先经机器 B_1 加工, 再在机器 B_2 上加工, 且规定机器 B_1, B_2 加工工件的排序必须一致. 已知机器 B_i 加工工件 A_j 的时间为 $t_{ij} (i = 1, 2; j = 1, \dots, n)$. 问这 n 个工件应如何排序(假设机器 B_1 开始加工第一个零件的时刻为零), 使机器 B_2 加工完最后一个工件的总完工时间 T 最早?

解 设 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ 为一种排序, $T_{\omega_j}^i$ 表示机器 B_i 完成 j 个工件 $A_{\omega_1}, A_{\omega_2}, \dots,$

A_{ω_j} 加工时的完工时间,显然有

$$T_{\omega_j}^1 = T_{\omega_{j-1}}^1 + t_{1\omega_j}, \quad (13-6)$$

$$T_{\omega_j}^2 = \max\{T_{\omega_j}^1, T_{\omega_{j-1}}^2\} + t_{2\omega_j}, \quad (13-7)$$

其中 $T_{\omega_0}^1 = 0, T_{\omega_0}^2 = 0$.

式(13-7)告诉我们:只有当机器 B_1 完成了工件 A_{ω_j} 的加工任务、机床 B_2 完成了工件 $A_{\omega_{j-1}}$ 的加工任务后,机器 B_2 才能加工工件 A_{ω_j} .

我们有定理 13-3.

定理 13-3 对于排序 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \omega_j, \omega_{j+1}, \omega_{j+2}, \dots, \omega_n)$ 及排序 $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \omega_j, \omega_{j+2}, \dots, \omega_n)$,若有

$$t_{1\omega_{j+1}} = \min\{t_{1\omega_j}, t_{2\omega_j}, t_{1\omega_{j+1}}, t_{2\omega_{j+1}}\},$$

或

$$t_{2\omega_j} = \min\{t_{1\omega_j}, t_{2\omega_j}, t_{1\omega_{j+1}}, t_{2\omega_{j+1}}\},$$

则排序 ω' 的总完工时间 $T(\omega')$ 不大于排序 ω 的总完工时间 $T(\omega)$.

定理 13-3 说明,若 $t_{1\omega_j}, t_{2\omega_j}, t_{1\omega_{j+1}}, t_{2\omega_{j+1}}$ 中最小者为 $t_{1\omega_j}$ 或 $t_{2\omega_{j+1}}$,则排序 ω 比排序 ω' 好,工件 A_{ω_j} 应比工件 $A_{\omega_{j+1}}$ 优先加工.

若最小者为 $t_{1\omega_{j+1}}$ 或 $t_{2\omega_j}$,则排序 ω' 比排序 ω 好, $A_{\omega_{j+1}}$ 应比 A_{ω_j} 优先加工.

对于 $n = 5$, t_{ij} (单位:小时) 由表 13-8 给出. 我们来求该问题的最优排序.

表 13-8

t_{ij} \ A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	1.5	2.0	1.0	1.25	0.75
B_2	0.5	0.25	1.75	2.5	1.25

表 13-8 中列出的诸加工时间 t_{ij} 的最小值为 $t_{22} = 0.25$, 它为机器 B_2 加工工件 A_2 的加工时间,所以我们将工件 A_2 放在加工排序的末尾,如表 13-9 所示,并从表 13-9 中删去工件 A_2 所在列.

表 13-9

t_{ij} \ A_j	A_1	$\times$ A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	1.5	2.0	1.0	1.25	0.75
B_2	0.5	0.25	1.75	2.5	1.25
排序					2

接着我们求表 13-9 剩余 t_{ij} 中最小值,得 $t_{21} = 0.5$,它是机器 B_2 对工件 A_1 的加工时间,因此将工件 A_1 填入表 13-9 中排序一行最后一个空格,并从表 13-9 中删去工件 A_1 所在列,如表 13-10 所示.

表 13-10

t_{ij} \ A_j	$\times$ A_1	$\times$ A_2	A_3	A_4	A_5
B_i					
B_1	1.5	2.0	1.0	1.25	0.75
B_2	0.5	0.25	1.75	2.5	1.25
排序				1	2

在表 13-10 剩余 t_{ij} 中求最小值, 得 $t_{15} = 0.75$, 它是机器 B_1 对工件 A_5 的加工时间, 因此将工件 A_5 填入表 13-10 中排序一行第一个空格, 删去工件 A_5 所在列, 如表 13-11 所示.

表 13-11

t_{ij} \ A_j	$\times$ A_1	$\times$ A_2	A_3	A_4	$\times$ A_5
B_i					
B_1	1.5	2.0	1.0	1.25	0.75
B_2	0.5	0.25	1.75	2.5	1.25
排序	5			1	2

表 13-11 剩余 t_{ij} 中最小值为 $t_{13} = 1$, 故将工件 A_3 填在排序行工件 A_5 后面. 此时剩下唯一的工件是 A_4 , 故 A_4 置于排序的第三位. 所以本问题的最优排序为 $(5, 3, 4, 1, 2)$. 它的加工进度表如图 13-1 所示, 它的总加工时间为 7 个小时, 如果机器 B_1 在 8:00 开始加工工件 A_5 , 则 15:00 所有工件加工完毕.

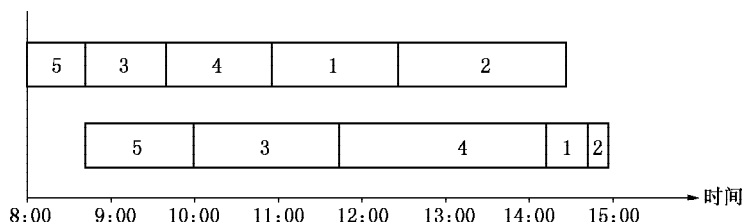


图 13-1

对于排序 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, 我们可构造一个赋权有向图 $D(\omega)$ 如图 13-2 所示.

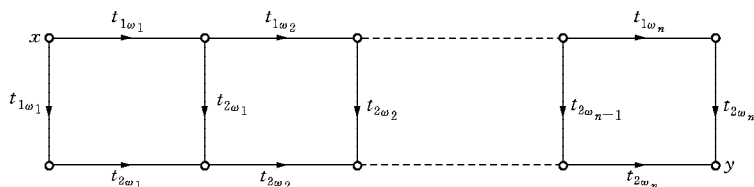


图 13-2

定理 13-4 图 $D(\omega)$ 中顶点 x 至顶点 y 的最长路径的长度即为按排序 ω 加工工件的

总完工时间 T .

例如,表 13-8 所给问题的最优排序 $\omega = (5, 3, 4, 1, 2)$ 所对应的 $D(\omega)$ 如图 13-3 所示. 其最长路径 $P = xv_1v_2v_4v_6v_8y$, 长度为 7.

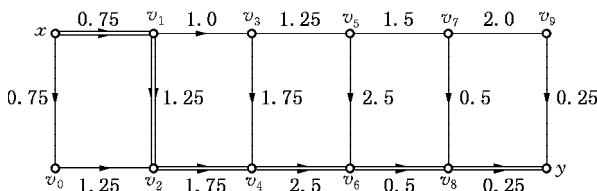


图 13-3

我们将两台机器加工 n 个工件的排序问题的算法归纳如下.

① 取初始排序

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = (1, 2, \dots, n), R = \emptyset, M = \emptyset, l = 0.$$

② $l = n - 1$?

若是,则算法终止. $R \cup \{\omega_n\} \cup M$ 即为所求($\{\omega_n\}$ 仅含一个序号):

$$\{\omega_n\} = \{1, 2, \dots, n\} - (R \cup M);$$

若否,则取 $t_{i\omega_k} = \min\{t_{1\omega_j}, t_{2\omega_j} \mid 1 \leq \omega_j \leq n, \omega_j \notin R \cup M\}$, $l = l + 1$, 转步骤 ③.

③ 若 $t_{i\omega_k}$ 的指标 $i = 1$, 则 $R = R \cup \{\omega_k\}$,

若 $t_{i\omega_k}$ 的指标 $i = 2$, 则 $M = \{\omega_k\} \cup M$, 转步骤 ②.

在本算法中, R 及 M 都为有序集.

453

13.1.3 3 台机器和 n 个工件的排序问题

3 台机器 B_1 、 B_2 和 B_3 加工 n 个工件 $A_1, \dots, A_n$. 每个工件先经机器 B_1 加工, 然后由机器 B_2 加工, 再由机器 B_3 加工, 且 3 台机器加工此 n 个工件的顺序必须一致. 设机器 B_i 加工工件 A_j 的时间为 t_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, n$). 问这 n 个工件应如何排序, 使总完工时间 T 最小?

对这类排序问题我们采用分支定界法来求解.

若 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 为 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 则 3 台机器按照排序 ω 加工 n 个工件时的总完工时间记为 $T(\omega)$. 对排序 ω , 我们可构造一个赋权有向图 $D(\omega)$ 如图 13-4 所示.

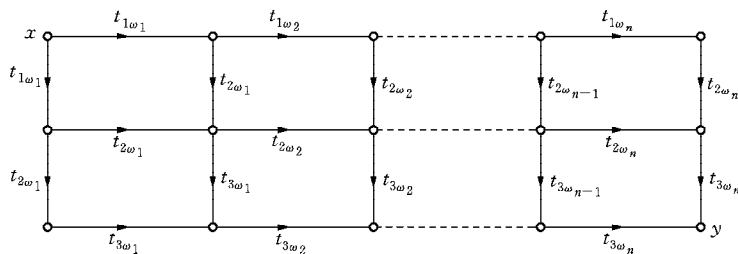


图 13-4

定理 13-5 $D(\omega)$ 中顶点 x 至顶点 y 的最长路径长度为 $T(\omega)$.

下面我们通过一个实例来说明求解该排序问题的分支定界法的基本步骤.

例 13-5 一个“3 台机器加工 5 个零件的排序问题”的有关信息由表 13-12 给出. 求最优排序, 使总完工时间最小.

表 13-12

工件 A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
机器 B_1 加工时间 a_j	1	2	5	2	9
机器 B_2 加工时间 b_j	8	10	9	6	3
机器 B_3 加工时间 c_j	2	4	6	12	7

解 令 $K_0 = \{\omega \mid \omega = (\omega_1, \dots, \omega_5) \text{ 为 } 1, \dots, 5 \text{ 的一种排列}\}$. 记问题 $\min\{T(\omega) \mid \omega \in K_0\}$ 为 (K_0) .

第一步, 我们将 K_0 分成 5 个子集 $K_i (i = 1, \dots, 5)$:

$$K_0 = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5,$$

其中

$$K_i = \{\omega \mid \omega_1 = i, \omega = (\omega_1, \dots, \omega_5) \in K_0\}.$$

显然, 有 $K_i \cap K_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, \dots, 5)$. 记问题 $\min\{T(\omega) \mid \omega \in K_i\}$ 为 (K_i) .

我们不求出每一个 (K_i) 问题的最优排序, 而是估计

$$\min\{T(\omega) \mid \omega \in K_i\} = T_i^* \quad (i = 1, \dots, 5)$$

的下界.

若问题 (K_i) 的最优排序为 ω^i , T_i^* 为相应网络图 $D(\omega^i)$ (见图 13-5) 中源 x 至汇 y 的最长路径的长度.

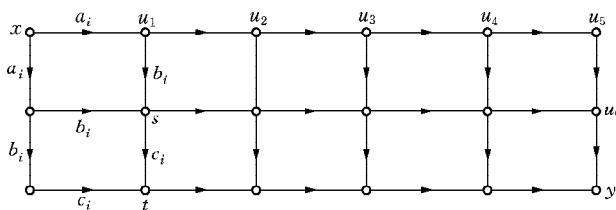


图 13-5

我们有结论:

$$\textcircled{1} T_i^* \geq d_i = \sum_{j=1}^5 a_j + \min\{b_j + c_j \mid j \neq i, j = 1, \dots, 5\}.$$

这是因为由图 13-5 可知:

$$\begin{aligned} T_i^* &\geq \text{路径 } xu_1u_2u_3u_4u_5 \text{ 的长度} + \text{路径 } u_5u_6y \text{ 的长度} \\ &\geq \sum_{j=1}^5 a_j + \min\{b_j + c_j \mid j \neq i, j = 1, \dots, 5\}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} T_i^* \geq g_i = a_i + b_i + \text{机器 } B_2 \text{ 和 } B_3 \text{ 加工工件 } A_j (j \neq i, j = 1, \dots, 5) \text{ 之最优排}$$

序的完工时间. 这是因为由图 13-5 可知 :

$T_i^* \geq x$ 至 S 的最长路径长度 + S 至 y 的最长路径长度 $\geq a_i + b_i +$ 机器 B_2 和 B_3 加工工件 $A_j(j \neq i, j = 1, \dots, 5)$ 之最优排序的完工时间.

③ $T_i^* \geq h_i = a_i + b_i + \sum_{j=1}^n c_j.$

这是因为由图 13-5 可知 :

$T_i^* \geq x$ 至 t 的最长路径长度 + t 至 y 的路径的长度 $= a_i + b_i + \sum_{j=1}^n c_j.$

我们取

$r_i = \max\{d_i, g_i, h_i\}$

作为 T_i^* 的下界估计 ($i = 1, \dots, 5$). r_i 的计算过程由表 13-13 至表 13-17 给出. 我们仅对表 13-13 作一个说明 ,其他类同.

表 13-13

表(*)						
A_j	A_1	A_5	A_4	A_3	A_2	$d_1 = 1 + 9 + 2 + 5 + 2 + 3 + 7 = 29$
a_j	1	9	2	5	2	$g_1 = 1 + 8 + (3 + 7 + 12 + 6 + 4) = 41$
b_j	8	3	6	9	10	$h_1 = 1 + 8 + 2 + (7 + 12 + 6 + 4) = 40$
c_j	2	7	12	6	4	$r_1 = 41$

在表 13-13 的表(*)中指出 ,工件 A_1 固定为第一位加工 ,而 A_5, A_4, A_3, A_2 这个排序的给出 ,是用前面所给的算法对两台机器 B_2, B_3 加工 4 个工件 $A_j(j = 2, 3, 4, 5)$ 这个排序问题求最优排序而得到的 ,其完工时间即相应网络中源 x 至汇 y 的最长路径长度 ,在表(*)中我们是用折线标明.

表 13-14

A_j	A_2	A_5	A_4	A_3	A_1	$d_2 = 19 + 3 + 7 = 29$
a_j	2	9	2	5	1	$g_2 = 2 + 10 + (3 + 7 + 12 + 6 + 2) = 42$
b_j	10	3	6	9	8	$h_2 = 2 + 10 + 4 + 7 + 12 + 6 + 2 = 43$
c_j	4	7	12	6	2	$r_2 = 43$

表 13-15

A_j	A_3	A_5	A_4	A_2	A_1	$d_3 = 19 + 3 + 7 = 29$
a_j	5	9	2	2	1	$g_3 = 5 + 9 + (3 + 7 + 12 + 4 + 2) = 43$
b_j	9	3	6	10	8	$h_3 = 5 + 9 + 6 + 7 + 12 + 4 + 2 = 45$
c_j	6	7	12	4	2	$r_3 = 45$

表 13-16

A_j	A_4	A_5	A_3	A_2	A_1	
a_j	2	9	5	2	1	$d_4 = 19 + 3 + 7 = 29$
b_j	6	3	9	10	8	$g_4 = 2 + 6 + (3 + 9 + 10 + 8 + 2) = 40$
c_j	12	7	6	4	2	$h_4 = 2 + 6 + 12 + 7 + 6 + 4 + 2 = 39$
						$r_4 = 40$

我们得枚举树如图 13-6 所示. 由于问题 (K_4) 的下界最小, 故先对 (K_4) 进行分支.

表 13-17

A_j	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	
a_j	9	2	5	2	1	$d_5 = 19 + 8 + 2 = 29$
b_j	3	6	9	10	8	$g_5 = 9 + 3 + (6 + 9 + 10 + 8 + 2) = 47$
c_j	7	12	6	4	2	$h_5 = 9 + 3 + 7 + 12 + 6 + 4 + 2 = 43$
						$r_4 = 47$

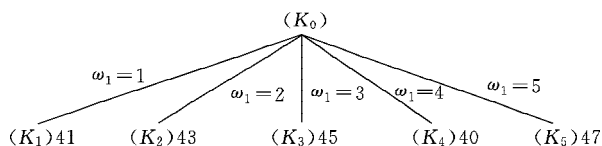


图 13-6

第二步 将 K_4 划分为 4 个子集:

$$K_{4i} = \{\omega \mid \omega_2 = i, \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in K_4\}, \quad i = 1, 2, 3, 5,$$

$$K_4 = K_{41} \cup K_{42} \cup K_{43} \cup K_{45}.$$

记问题 $\min\{T(\omega) \mid \omega \in K_{4i}\}$ 为 (K_{4i}) .

若问题 (K_{4i}) 的最优排序为 ω^{4i} , T_{4i}^* 为相应网络图 $D(\omega^{4i})$ (见图 13-7) 中源 x 至汇 y 的最长路径的长度, 我们对问题 (K_{4i}) 的最优值 T_{4i}^* 的下界进行估计.

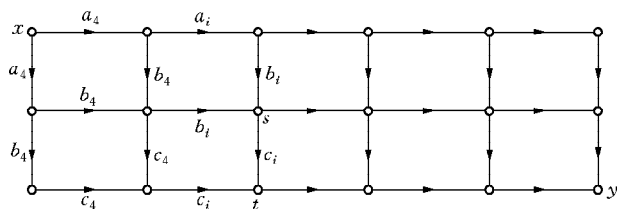


图 13-7

类似于第一步中对 T_i^* 的下界估计的讨论, 我们有如下结论:

$$\textcircled{1} T_{4i}^* \geq d_{4i} = \sum_{j=1}^5 a_j + \min\{b_j + c_j \mid j \in \{1, 2, 3, 5\}, j \neq i\};$$

② $T_{4i}^* \geq g_{4i}$ = 图 13-7 中 x 至 S 的最长路径长度 + 机器 B_2 、 B_3 加工工件 A_j ($j \neq i$, $j \in \{1, 2, 3, 5\}$) 的最优排序的完工时间;

$$\textcircled{3} T_{4i}^* \geq h_{4i} = \text{图 13-7 中 } x \text{ 至 } t \text{ 的最长路径长度} + \sum_{j \neq i, 4} c_j.$$

我们取 T_{4i}^* 的下界估计

$$r_{4i} = \max\{d_{4i}, g_{4i}, h_{4i}\} \quad (i = 1, 2, 3, 5),$$

具体的计算过程由表 13-18 至表 13-21 给出. 同前面一样, 图 13-7 中 x 至 S 或 t 的最长路径在表中用折线表示.

表 13-18

A_j	A_4	A_1	A_5	A_3	A_2	
a_j	2	1	9	5	2	$d_{41} = 19 + 3 + 7 = 29$
b_j	6	8	3	9	10	$g_{41} = (2 + 6 + 8) + (3 + 9 + 10 + 4) = 42$
c_j	12	2	7	6	4	$h_{41} = (2 + 6 + 12 + 2) + (7 + 6 + 4) = 39$
						$r_{41} = 42$

表 13-19

A_j	A_4	A_2	A_5	A_3	A_1	
a_j	2	2	9	5	1	$d_{42} = 19 + 3 + 7 = 29$
b_j	6	10	3	9	8	$g_{42} = (2 + 6 + 10) + (3 + 9 + 8 + 2) = 40$
c_j	12	4	7	6	2	$h_{42} = (2 + 6 + 12 + 4) + (7 + 6 + 2) = 39$
						$r_{42} = 40$

表 13-20

A_j	A_4	A_3	A_5	A_2	A_1	
a_j	2	5	9	2	1	$d_{43} = 19 + 3 + 7 = 29$
b_j	6	9	3	10	8	$g_{43} = (2 + 6 + 9) + (3 + 10 + 8 + 2) = 40$
c_j	12	6	7	4	2	$h_{43} = (2 + 6 + 12 + 6) + (7 + 4 + 2) = 39$
						$r_{43} = 40$

表 13-21

A_j	A_4	A_5	A_3	A_2	A_1	
a_j	2	9	5	2	1	$d_{45} = 19 + 8 + 2 = 29$
b_j	6	3	9	10	8	$g_{45} = (2 + 9 + 3) + (9 + 10 + 8 + 2) = 43$
c_j	12	7	6	4	2	$h_{45} = (2 + 6 + 12 + 7) + (6 + 4 + 2) = 39$
						$r_{45} = 43$

由于问题 (K_{42}) 的下界是现有活问题 $(K_1), (K_2), (K_3), (K_5), (K_{41}), (K_{42}), (K_{43}), (K_{45})$ 的下界中最小者, 所以我们对问题 (K_{42}) 先进行划分.

第三步, 将 K_{42} 划分成 3 个子集:

$$K_{42i} = \{\omega \mid \omega_3 = i, \omega = (4, 2, i, \omega_4, \omega_5) \in K_{42}\} (i = 1, 3, 5),$$

$$K_{42} = K_{421} \cup K_{423} \cup K_{425}.$$

记问题 $\min\{T(\omega) \mid \omega \in K_{42i}\}$ 为 (K_{42i}) .

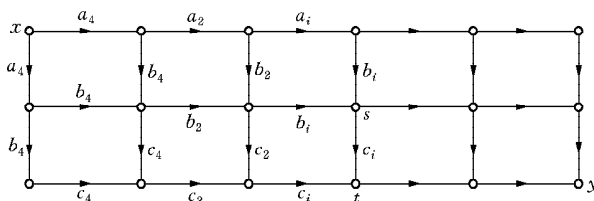


图 13-8

若问题 (K_{42i}) 的最优排序为 ω^{42i} , T_{42i}^* 为相应网络图 $D(\omega^{42i})$ (见图 13-8)中源 x 至汇 y 的最长路径的长度, 我们对问题 (K_{42i}) 的最优值 T_{42i}^* 的下界进行估计. 我们有如下结论:

$$\textcircled{1} T_{42i}^* \geq d_{42i} = \sum_{j=1}^5 a_j + \min\{b_j + c_j \mid j \in \{1, 3, 5\}, j \neq i\};$$

$\textcircled{2} T_{42i}^* \geq g_{42i}$ = 图 13-8 中 x 至 S 的最长路径的长度 + 机器 B_2, B_3 加工工件 A_j ($j \neq i, j \in \{1, 3, 5\}$)最优排序的完工时间;

$$\textcircled{3} T_{42i}^* \geq h_{42i} = \text{图 13-8 中 } x \text{ 至 } t \text{ 的最长路径的长度} + \sum_{j \neq i, 4, 2} c_j.$$

我们取 T_{42i}^* 的下界估计

$$r_{42i} = \max\{d_{42i}, g_{42i}, h_{42i}\}.$$

具体的计算过程由表 13-22 至表 13-24 给出.

表 13-22

A_j	A_4	A_2	A_1	A_5	A_3	
a_j	2	2	1	9	5	$d_{421} = 19 + 3 + 7 = 29$
b_j	6	10	8	3	9	$g_{421} = (2 + 6 + 10 + 8) + (3 + 9 + 6) = 44$
c_j	12	4	2	7	6	$h_{421} = (2 + 6 + 10 + 8 + 2) + (7 + 6) = 41$
						$r_{421} = 44$

表 13-23

A_j	A_4	A_2	A_3	A_5	A_1	
a_j	2	2	5	9	1	$d_{423} = 19 + 3 + 7 = 29$
b_j	6	10	9	3	8	$g_{423} = (2 + 6 + 10 + 9) + (3 + 8 + 2) = 40$
c_j	12	4	6	7	2	$h_{423} = (2 + 6 + 10 + 9 + 6) + (7 + 2) = 42$
						$r_{423} = 42$

表 13-24

A_j	A_4	A_2	A_5	A_3	A_1	
a_j	2	2	9	5	1	$d_{425} = 19 + 8 + 2 = 29$
b_j	6	10	3	9	8	$g_{425} = (2 + 6 + 10 + 3) + (9 + 8 + 2) = 40$
c_j	12	4	7	6	2	$h_{425} = (2 + 6 + 12 + 4 + 7) + (6 + 2) = 39$
						$r_{425} = 40$

现在诸活问题中下界最小者为问题(K_{425}),我们对(K_{425})进行划分.

第四步 将 K_{425} 划分为 2 个子集

$$K_{42513} = \{(4, 2, 5, 1, 3)\},$$

$$K_{42531} = \{(4, 2, 5, 3, 1)\}.$$

我们得到(K_0)的两个可行解(4, 2, 5, 1, 3)和(4, 2, 5, 3, 1),这两个排序相应的网络如图 13-9 和图 13-10 所示,可知它们的总完工时间 $T_{42513}^* = 44$ 和 $T_{42531}^* = 40$.

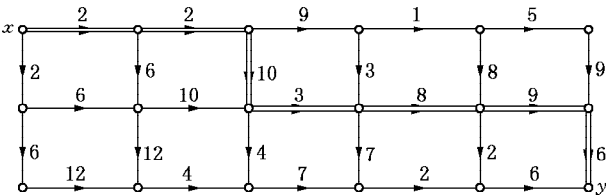


图 13-9

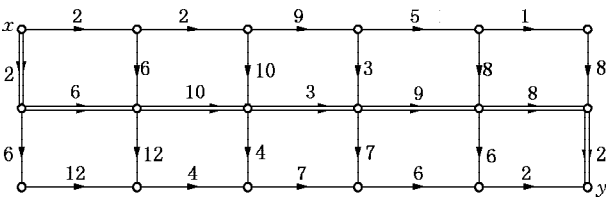


图 13-10

我们取定界 $\bar{f} = 40$, $\omega^* = (4, 2, 5, 3, 1)$. 枚举树(见图 13-11)上所有活问题的下界都不小于 $\bar{f}$, 都可剪支, 枚举树生长完毕. 最优排序 $\omega^* = (4, 2, 5, 3, 1)$, 总完工时间 $T^*(\omega^*) = 40$, 见表 13-25.

表 13-25

ω^*	$\bar{f}$
(4, 2, 5, 1, 3)	44
(4, 2, 5, 3, 1)	40

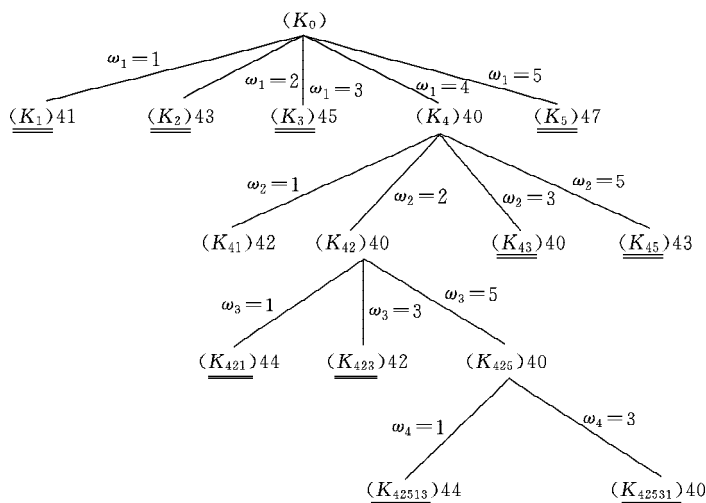


图 13-11

§ 13.2 旅行售货员问题

13.2.1 旅行售货员问题

460

例 13-6 (旅行售货员问题) 现有一位旅行售货员欲到城市 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 进行商品销售. 已知从城市 v_i 到城市 v_j 旅途所需时间为 $w_{ij} = W(v_i, v_j)$ ($i \neq j, i, j = 1, \dots, n$) (如表 13-26 所示). 今他从 n 个城市中的某一个城市出发, 试问他应如何计划他的旅行路线, 使他对每个城市恰好进行一次访问后又返回出发城市, 而旅途所花费的时间最少?

表 13-26

$W(v_i, v_j)$ $v_i \backslash v_j$	v_1	v_2	$\dots$	v_n
v_1	—	$W(v_1, v_2)$	$\dots$	$W(v_1, v_n)$
v_2	$W(v_2, v_1)$	—	$\dots$	$W(v_2, v_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$W(v_n, v_1)$	$W(v_n, v_2)$	$\dots$	—

解 我们给出启发性算法.

首先在诸 $W(v_i, v_j) = w_{ij}$ 中选取最小元素 $W(v_{i_1}, v_{i_2})$. 在表 13-26 中划去 v_{i_1} 行及 v_{i_2} 列和元素 $W(v_{i_2}, v_{i_1})$. 然后从 v_{i_2} 出发, 在 v_{i_2} 行未划去的元素中选取最小元素 $W(v_{i_2}, v_{i_3})$, 划去 v_{i_2} 行、 v_{i_3} 列和元素 $W(v_{i_3}, v_{i_2})$. 再从 v_{i_3} 出发, 在 v_{i_3} 行未划去的元素中选取最小元素 $W(v_{i_3}, v_{i_4})$, 依次类推, 直至得到一条旅行售货员路线.

最近邻点启发性算法步骤如下:

① 取 $W(v_{i_1}, v_{i_2}) = \min\{W(v_i, v_j) \mid i \neq j, i, j = 1, \dots, n\}$. 令 $S = \{v_{i_1}, v_{i_2}\}$,

$f = W(v_{i_1}, v_{i_2}), R = \{1, 2, \dots, n\} - \{i_1, i_2\}, k = 2.$

② $k < n$?

若是,取 $W(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) = \min\{W(v_{i_k}, v_j) \mid j \in R\}, S = S \cup \{v_{i_{k+1}}\}, f = f + W(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}), R = R - \{v_{i_{k+1}}\}, k = k + 1$ 转步骤 ②.

若否,转步骤 ③.

③ $f = f + W(v_{i_n}, v_{i_1})$,算法终止.

例 13-7 某仓库 v_1 的发货员接到 6 家商店 $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ 的零件订货单. 他从 v_1 出发,到各家商店送货,再回到 v_1 . 从 v_i 至 v_j 的送货时间 $W(v_i, v_j)$ (单位:分钟) 由表 13-27 给出. 试求一条较好的路线,使他在途中花费的时间最少.

解 由表 13-27 知: $\min\{W(v_i, v_j) \mid i, j = 1, \dots, 7\} = W(v_6, v_7) = 10 = W(v_{i_1}, v_{i_2})$,划去第 6 行、第 7 列及元素 $W(v_7, v_6)$.

在第 7 行未划去的元素中选取最小元素 $W(v_7, v_1) = 35$,令 $W(v_{i_2}, v_{i_3}) = W(v_7, v_1)$,划去第 7 行、第 1 列及元素 $W(v_1, v_7)$,在第 1 行未划去的元素中选 $W(v_1, v_3)$,继续迭代. 我们将运算过程列成表 13-28.

表 13-27

$W(v_i, v_j)$ $v_i \backslash v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	—	35	20	25	40	30	35
v_2	35	—	15	50	45	65	70
v_3	20	15	—	25	45	50	55
v_4	25	50	25	—	65	45	40
v_5	40	45	45	65	—	35	45
v_6	30	65	50	45	35	—	10
v_7	35	70	55	40	45	10	—

表 13-28

$k + 1$	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_{i_{k+1}}$	v_6	v_7	v_1	v_3	v_2	v_5	v_4	v_6
$W(v_{i_k}, v_{i_{k+1}})$		10	35	20	15	45	65	45
f		10	45	65	80	125	190	235

我们得一条回路 $v_6 v_7 v_1 v_3 v_2 v_5 v_4 v_6$, 它的等价的送货路线为 $v_1 v_3 v_2 v_5 v_4 v_6 v_7 v_1$. 送货路上花费的总时间为 235 分钟.

对于用最近邻点启发性算法求得的旅行售货员问题的较优回路,可以用下列调整算法作进一步的改进. 但应注意,这种调整算法仅适用于对任 $v_i \neq v_j$, 有 $W(v_i, v_j) = W(v_j, v_i)$ 的一类旅行售货员问题.

如图 13-12 所示的旅行售货员回路 P :

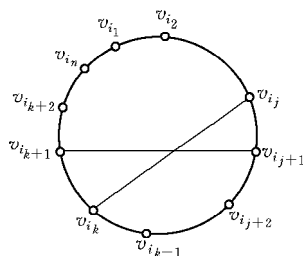


图 13-12

$$P = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_j} v_{i_{j+1}} v_{i_{j+2}} \dots v_{i_{k-1}} v_{i_k} v_{i_{k+1}} v_{i_{k+2}} \dots v_{i_n} v_{i_1}, \quad (13-8)$$

若有

$$W(v_{i_j}, v_{i_k}) + W(v_{i_{j+1}}, v_{i_{k+1}}) < W(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) + W(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}), \quad (13-9)$$

则显然,回路

$$P' = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_j} v_{i_k} v_{i_{k+1}} \dots v_{i_{j+2}} v_{i_{j+1}} v_{i_{k+2}} \dots v_{i_n} v_{i_1} \quad (13-10)$$

比回路 P 好.

于是,我们有如下调整算法:

① 取一条初始回路 P (13-8) (可用最近邻点法得到).

② 是否存在 $j, k (1 < j+1 < k < n)$, 有式 (13-9) 成立?

若是, 则取回路 P' (13-10), 令 $P = P'$, 转步骤 ②;

若否, 则算法终止.

我们对例 13-7 求得的回路 $P = v_1 v_3 v_2 v_5 v_4 v_6 v_7 v_1$ 进行调整. 由图 13-13 可知

$$W(v_5, v_7) + W(v_4, v_1) < W(v_5, v_4) + W(v_7, v_1),$$

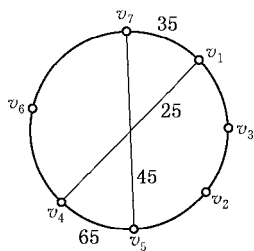


图 13-13

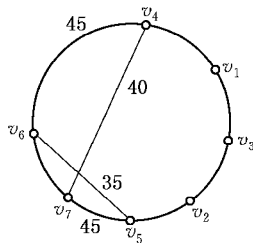


图 13-14

故图 13-13 所给回路 P 可以调整为图 13-14 所示的回路 $P' = v_1 v_3 v_2 v_5 v_7 v_6 v_4 v_1$. 由图 13-14 可知

$$W(v_5, v_6) + W(v_4, v_7) < W(v_5, v_7) + W(v_6, v_4),$$

故对 P' 又可以调整, 得回路 $P^* = v_1 v_3 v_2 v_5 v_6 v_7 v_4 v_1$, 它所花费的总时间为

$$20 + 15 + 45 + 35 + 10 + 40 + 25 = 190(\text{分钟}).$$

我们都知道, 当不同型号的产品在某部机床上进行机械加工时, 若机床对某种型号产品加工完毕而要对另一种型号的产品进行加工时, 通常, 工艺装备需要更换, 换言之, 需要花费一定的工艺装备更换时间. 产品的加工顺序不同, 所花费的工艺装备更换时间的总和也就不同. 因此, 这个排序问题就是要找一个不同类型产品的最优加工排序, 使工艺装备更换时间的总和最少. 这个问题好似机床(旅行售货员)要对每个型号产品(城市)访问一次, 但不要求再回到起始点(被首先加工的产品).

例 13-8 有 4 种产品在某种设备上加工. 产品 v_i 加工完毕后若接下来准备加工产品 v_j , 则更换工艺装备需更换时间 w_{ij} 分钟, 由表 13-29 给出. 寻求一种加工排序, 使总的更换时间较短.

解 对本问题我们采用另一种启发
性算法.

第一步,选表 13-29 中最小元素(同
时有几个最小元素,可随便选取其中一
个).如现在选 $w_{12} = 10$,将 v_1 行及 v_2 列划
去,同时还划去元素 w_{21} ,见表 13-30.

第二步,继续选取表 13-30 中未划去
的元素中的最小元素,可知为 $w_{31} = 10$.

这时,我们要检查一下,将边 (v_3, v_1) 加到集合 $\{(v_1, v_2)\}$ 中会不会产生回路? 这里得路
径 $v_3 v_1 v_2$,没有产生回路,故划去 v_3 行及 v_1 列(元素 w_{13} 已被划去),得表 13-31.

表 13-29

w_{ij}	v_j				
		v_1	v_2	v_3	v_4
v_i					
v_1		—	10	30	20
v_2		30	—	20	30
v_3		10	20	—	40
v_4		50	30	20	—

表 13-30

w_{ij}	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	—	10	30	20
v_2	30 *	—	20	30
v_3	10	20	—	40
v_4	50	30	20	—

表 13-31

w_{ij}	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	—	10	30	20
v_2	30 *	—	20	30
v_3	10	20	—	40
v_4	50	30	20	—

第三步,选表 13-31 中留下的元素中的最小元素.若选 w_{23} ,那么,将边 (v_2, v_3) 加入到
集合 $\{(v_1, v_2), (v_3, v_1)\}$ 中可得回路 $v_2 v_3 v_1 v_2$,故不能选 w_{23} .我们在其他元素中选最小
元素,例如选 $w_{43} = 20$.可知将边 (v_4, v_3) 加入集合 $\{(v_1, v_2), (v_3, v_1)\}$ 中不会产生回路.

于是,我们得加工排序为 v_4, v_3, v_1, v_2 ,所花费的工艺装备替换时间总和为
 $10 + 10 + 20 = 40$ (分钟).

13.2.2 分支定界法

现在我们对旅行售货员问题例 13-6 建立整数规划模型. 设

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若在旅行路线中有从 } v_i \text{ 至 } v_j \text{ 的行程,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

因此,问题的目标函数为

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij},$$

其中 $w_{ii} = M$ (充分大的正数).

由于旅行售货员在旅途中到达和离开每个城市恰好一次,因此,有约束条件:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

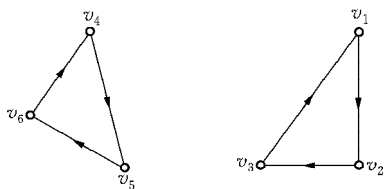


图 13-15

但是,满足这些约束条件的解不一定是旅行售货员的一条旅行路线.例如在一个 6 个城市的旅行售货员问题中,按上述约束条件定出的解,可能会形成两个分离的子回路,如图 13-15 所示.由于它们不是一个单一的回路,所以不能作为旅行售货员问题的一个可行解.

为了避免出现多子回路的“分离”现象,必须追加一些约束条件.例如要防止 $n = 6$ 时旅行售货员问题出现图 13-15 这样的解,就可以附加下列约束条件:

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 1,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{61} + x_{62} + x_{63} \geq 1.$$

这两个不等式保证在旅行路线中把集合 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 同集合 $\{v_4, v_5, v_6\}$ 联系起来.

因为旅行售货员问题要求任意两个城市 v_i 和 v_j 之间都应有相应的旅行路线把它们连接起来,所以,若把 n 个城市任意分成两组: $\{v_i \mid i \in Q\}$ 及 $\{v_j \mid j \in \bar{Q}\}$ (其中 Q 为 $\{1, \dots, n\}$ 的非空真子集, $\bar{Q}$ 为 $\{1, \dots, n\} - Q$),则在旅行路线中一定要存在以城市 v_i ($i \in Q$) 为起点、以城市 v_j ($j \in \bar{Q}$) 为终点的一个行程.我们可以用下列约束条件来体现这个要求:

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1.$$

由于 Q 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任一非空真子集,共有 $2^n - 2$ 个,因此这类附加的约束条件共有 $2^n - 2$ 个.于是,我们得旅行售货员问题的 0-1 规划模型:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ &\sum_{i \in Q} \sum_{j \in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1, \quad \text{任 } Q \subset \{1, \dots, n\}, Q \neq \emptyset, \\ &x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13-11)$$

设其可行域为 K_0 ,该问题记为 (K_0) .

我们现在用分支定界法求解 (K_0) . 取其松弛问题为

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}; \\ \text{s. t. } \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ &x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

记它的可行域为 $\tilde{K}_0$,该问题记为 $(\tilde{K}_0)$. 显然,有 $K_0 \subset \tilde{K}_0$.

问题 $(\tilde{K}_0)$ 为一个最优分配问题,其费用矩阵 $W = (w_{ij})$,因此可用匈牙利方法求解.

现记 $\mathbf{X} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})^\top$. 若用匈牙利方法求解 $(\tilde{K}_0)$,得最优解 $\mathbf{X}^*$,且 $\mathbf{X}^* \in K_0$. 于是,在 $\mathbf{X}^*$ 中存在子回路. 不妨设其中一个为

$$(x_{i_1 i_2}, x_{i_2 i_3}, \dots, x_{i_k i_1}) = (1, 1, \dots, 1).$$

现令

$$B_1 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_1 i_2} = 1\},$$

$$B_2 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_2 i_3} = 1\},$$

.....

$$B_k = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_k i_1} = 1\},$$

由于 K_0 中任一可行解不允许存在子回路,因此,有

$$B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k = \emptyset.$$

从而,有

$$\overline{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k} = \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \dots \cup \bar{B}_k = K_0.$$

而

$$\bar{B}_1 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_1 i_2} = 0\},$$

$$\bar{B}_2 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_2 i_3} = 0\},$$

.....

$$\bar{B}_k = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_k i_1} = 0\},$$

所以,我们在 K_0 中取 k 个子集:

$$K_1 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_1 i_2} = 0\},$$

$$K_2 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_2 i_3} = 0\},$$

.....

$$K_k = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in K_0, x_{i_k i_1} = 0\},$$

且有

$$K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k = K_0.$$

问题 $(K_1), (K_2), \dots, (K_k)$ 相应的松弛问题的可行域分别为

$$\tilde{K}_1 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \tilde{K}_0, x_{i_1 i_2} = 0\},$$

$$\tilde{K}_2 = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \tilde{K}_0, x_{i_2 i_3} = 0\},$$

.....

$$\tilde{K}_k = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \tilde{K}_0, x_{i_k i_1} = 0\}.$$

在用匈牙利方法对 $(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2), \dots, (\tilde{K}_k)$ 分别求解时,应将费用矩阵 W 中元素 $w_{i_1 i_2}, w_{i_2 i_3}, \dots, w_{i_k i_1}$ 分别改为 M (充分大的正数).

初始时,不妨取 K_0 中的一个可行解: $x_{12} = 1, x_{23} = 1, \dots, x_{n1} = 1$, 其余 $x_{ij} = 0$, 取该可行解的目标函数值为定界 $\bar{f}$:

$$\bar{f} = w_{12} + w_{23} + \dots + w_{n1}.$$

下面我们来看一个具体的旅行售货员问题.

例 13-9 一个 $n = 5$ 的旅行售货员问题的费用矩阵 $W = (w_{ij})$ 给定如下:

$$W = \begin{pmatrix} M & 8 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & M & 7 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & M & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & M & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 2 & M \end{pmatrix}$$

试用分支定界法求解.

解 取问题 (K_0) 的一个可行解

$$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = x_{51} = 1, \quad \text{其余 } x_{ij} = 0.$$

于是,初始定界

$$\bar{f} = w_{12} + w_{23} + w_{34} + w_{45} + w_{51} = 8 + 7 + 8 + 6 + 2 = 31.$$

466
■■■■■

第一步,用匈牙利方法对最优分配问题 $(\tilde{K}_0)$ (即问题 (W)) 求解:

$$\begin{pmatrix} M & 8 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & M & 7 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & M & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & M & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 2 & M \end{pmatrix} \xrightarrow{d_i} \begin{pmatrix} M & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & M & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & M & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & M & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & M \end{pmatrix},$$

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} M & 7 & 0 & 2 & (0) \\ 1 & M & 2 & (0) & 6 \\ 3 & (0) & M & 4 & 5 \\ 0 & 6 & (0) & M & 4 \\ (0) & 5 & 2 & 0 & M \end{pmatrix},$$

得 $(\tilde{K}_0)$ 的最优解 X^0 和最优值 f_0 分别为

$$x_{15} = x_{51} = 1, x_{24} = x_{43} = x_{32} = 1, \quad \text{其余 } x_{ij} = 0,$$

$$f_0 = w_{15} + w_{24} + w_{32} + w_{43} + w_{51} = 1 + 4 + 4 + 3 + 2 = 14.$$

f_0 为问题 (K_0) 的一个下界, $\bar{f}$ 为其一个上界.

由于 X^0 中存在两个子回路. 我们破其中一个子回路 $x_{15} = x_{51} = 1$ 来对 (K_0) 进行分支 (应理解为 K_0 的可行解中不允许出现回路 $x_{15} = x_{51} = 1$):

$$K_1 = \{X \mid X \in K_0, x_{15} = 0\}, K_2 = \{X \mid X \in K_0, x_{51} = 0\}.$$

第二步 ① 求解 $(\tilde{K}_1)$:

$$\tilde{K}_1 = \{X \mid X \in \tilde{K}_0, x_{15} = 0\},$$

其费用矩阵(取 $w_{15} = M$)为

$$W_1 = \begin{pmatrix} M & 8 & 2 & 3 & M \\ 5 & M & 7 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & M & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & M & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 2 & M \end{pmatrix}.$$

用匈牙利方法求解最优分配问题 (W_1) :

$$\begin{pmatrix} M & 8 & 2 & 3 & M \\ 5 & M & 7 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & M & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & M & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 2 & M \end{pmatrix} \xRightarrow{d_i} \begin{pmatrix} M & 6 & 0 & 1 & M \\ 1 & M & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & M & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & M & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & M \end{pmatrix},$$

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} M & 6 & (0) & 1 & M \\ 1 & M & 3 & (0) & 2 \\ 3 & (0) & M & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & M & (0) \\ (0) & 5 & 3 & 0 & M \end{pmatrix},$$

得 $(\tilde{K}_1)$ 的最优解 X^1 和最优值 f_1 :

$$x_{13} = x_{32} = x_{24} = x_{45} = x_{51} = 1, \text{ 其余 } x_{ij} = 0,$$

$$f_1 = 2 + 4 + 4 + 6 + 2 = 18.$$

由于 $X^1 \in K_0$ 且 $f_1 < \bar{f}$ 因此取 $\bar{f} = 18$.

(2) 求解 $(\tilde{K}_2)$:

$$\tilde{K}_2 = \{X \mid X \in \tilde{K}_0, x_{51} = 0\},$$

其费用矩阵(取 $w_{51} = M$)为

$$W_2 = \begin{pmatrix} M & 8 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & M & 7 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & M & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & M & 6 \\ M & 7 & 5 & 2 & M \end{pmatrix}.$$

用匈牙利方法求解最优分配问题 (W_2) :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & \underline{d_i} \\ \begin{pmatrix} M & 8 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & M & 7 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & M & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & M & 6 \\ M & 7 & 5 & 2 & M \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} & \Rightarrow & \begin{pmatrix} M & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & M & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & M & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & M & 4 \\ M & 5 & 3 & 0 & M \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & u_j \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} -M-7-(0)-2-0- \\ 1 \quad M \quad 2 \quad (0) \quad 6 \\ -3-(0)-M-4-5- \\ -(0)-6-0-M-4- \\ M \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad M \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{pmatrix} M & 7 & 0 & 3 & (0) \\ (0) & M & 1 & 0 & 5 \\ 3 & (0) & M & 5 & 5 \\ 0 & 6 & (0) & M & 4 \\ M & 4 & 1 & (0) & M \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

得 $(\tilde{K}_2)$ 的最优解 $\mathbf{X}^2$ 和最优值 f_2 分别为

$$x_{15} = x_{54} = x_{43} = x_{32} = x_{21} = 1, \text{ 其余 } x_{ij} = 0;$$

$$f_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

468
■■■■■

因为 $\mathbf{X}^2 \in K_0$, 且 $f_2 < \bar{f}$, 所以取 $\bar{f} = 15$.

现在枚举树(如图 13-16 所示)上已无活问题, 得 (K_0) 的最优解和最优值分别为

$$x_{15} = x_{54} = x_{43} = x_{32} = x_{21} = 1, \text{ 其余 } x_{ij} = 0;$$

$$f^* = 15,$$

见表 13-32, 即该旅行售货员问题的最佳旅行路线为

$$v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1.$$

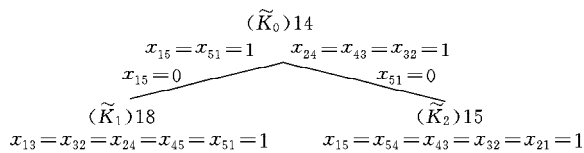


图 13-16

表 13-32

$\mathbf{X}^*$	$\bar{f}$
$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = x_{51} = 1$	31
$x_{13} = x_{32} = x_{24} = x_{45} = x_{51} = 1$	18
$x_{15} = x_{54} = x_{43} = x_{32} = x_{21} = 1$	15

习 题 十 三

1. 在一台车床上要加工 7 个零件, 每个零件的加工时间(单位:分钟)由表 13-33 给出. 试确定其加工顺序, 以使零件在这台车床上平均停留时间最短. 同时, 计算平均停留时间.

表 13-33

零件 A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
加工时间 t_i	10	11	4	8	14	6	5

2. 设有 6 台机床来到机修车间进行大修. 它们的维修时间 t_i 和机床 A_i 在车间逗留过程中单位时间的损失费 W_i 由表 13-34 给出. 试求一种排序, 使得 6 台机床修理完毕时, 总的损失费最小, 并求出总损失费.

表 13-34

机床 A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
t_i	6	5	7	10	4	8
W_i	0.4	0.2	0.5	0.8	0.3	1

3. 现有 10 个工件 $A_1, \dots, A_{10}$ 要在一台机器上加工, 工件 A_i 的加工时间 t_i 及其交货时间 D_i 由表 13-35 给出. 试求一种加工排序, 使得误期交货的工件最少.

表 13-35

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
t_i	8	6	4	2	5	7	10	3	6	4
D_i	40	18	12	8	6	28	35	45	10	21

4. 有 7 个零件 $A_1, \dots, A_7$, 每个零件 A_j 先要在钻床 B_1 上加工, 然后在磨床 B_2 上加工. 机床 B_i 加工零件 A_j 的加工时间 t_{ij} 由表 13-36 给出. 试确定这 7 个零件的加工排序, 以使零件都加工好的总完工时间 T 最短, 并将 T 求出.

表 13-36

零件 A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
钻床 B_1 加工时间 t_{1j}	6.7	2.3	5.1	2.3	9.9	4.7	9.1
磨床 B_2 加工时间 t_{2j}	4.9	3.4	8.2	1.2	6.3	3.4	7.4

5. 一个“3 台机器 B_i ($i = 1, 2, 3$) 加工 5 个零件 A_j ($j = 1, \dots, 5$) 的排序问题”的有关信息由表 13-37 给出. 试用分支定界法求最优排序, 使总完工时间最小.

表 13-37

工件 A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
机器 B_1 加工时间 a_j	4	2	8	10	5
机器 B_2 加工时间 b_j	6	2	3	3	4
机器 B_3 加工时间 c_j	5	6	7	9	7

6. 有一位旅行售货员住在 v_1 城市, 他必须走访 $v_2, \dots, v_7$ 等城市, 然后回到 v_1 . 城市 v_i 与城市 v_j 间的汽车行驶路程 w_{ij} 如表 13-38 所示. 试给出一条较优的旅行路线.

表 13-38

$w_{ij} \backslash v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_i							
v_1	—	25	58	36	72	55	36
v_2	25	—	37	26	65	59	49
v_3	58	37	—	30	49	62	68
v_4	36	26	30	—	39	35	38
v_5	72	65	49	39	—	32	55
v_6	55	59	62	35	32	—	38
v_7	36	49	68	38	55	38	—

7. 一个车工今天要车 5 个零件 v_j ($j = 1, \dots, 5$). 每个零件 v_j 加工的生产准备时间 t_{ij} 取决于上次加工的零件 v_i , t_{ij} 的有关信息由表 13-39 给出. 试确定这些零件的加工顺序, 以使总的生产准备时间较短.

表 13-39

$t_{ij} \backslash v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_i					
v_1	—	10	5	10	8
v_2	9	—	11	1	9
v_3	11	7	—	10	9
v_4	16	8	12	—	2
v_5	3	13	13	13	—

8. 有个配制油漆的车间要配 500 千克红漆、750 千克蓝漆、1 000 千克白漆、900 千克黑漆、200 千克黄漆. 清洗配制油漆的机器所需的时间取决于上一次所配油漆的颜色与下一次欲配油漆的颜色, 有关时间在表 13-40 中列出. 试求一种配制顺序, 使配制完这 5 种油漆时机器所花的清洗时间总和最短.

表 13-40

清洗时间 t_{ij}		欲配漆 v_j				
		v_1 (红)	v_2 (蓝)	v_3 (白)	v_4 (黑)	v_5 (黄)
已配漆 v_i	v_1 (红)	—	30	90	20	40
	v_2 (蓝)	33	—	85	15	35
	v_3 (白)	22	27	—	18	25
	v_4 (黑)	100	95	120	—	110
	v_5 (黄)	38	39	80	28	—

9. 用分支定界法求例 13-9(破 X^0 中的子回路 $x_{24} = x_{43} = x_{32} = 1$ 来对 (K_0) 进行分支).

10. 用分支定界法求例 13-7.

附录 部分习题答案或提示

习 题 一

5. 设产品 A, B 的产量分别为 x_1 和 x_2 , 副产品 C 的销售量和销毁量分别为 x_3 和 x_4 .
12. $\mathbf{X}^* = (12/7, 15/7)^\top, f^* = -120/7$.
19. $x_2^* = 20/3, x_3^* = 50/3$. 总收益 $230/3$.
21. (1) $\mathbf{X}^* = (4, 1, 9)^\top, f^* = -2$;
 (2) 线性规划在可行域 K 内无下界;
 (3)和(4)线性规划无可行解.
22. (1) $\mathbf{X}^* = (9/5, 0, 9/5, 0, 3/5)^\top, f^* = 0$;
 (2) $\mathbf{X}^* = (4/3, 8/3, 0, 0)^\top, f^* = -28/3$.

习 题 二

471

7. $\mathbf{X}^* = (5/6, 2/3, 0)^\top, f^* = 230/3$.
8. (1) $\max z = 6x_1 - 12x_2 + 10x_3$;
 s. t. $-x_2 + 2x_3 \leq 5$,
 $3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.
9. (1) $c_1 \in [36, 96]; c_2 \in [175/2, 700/3]$;
 (2) $b_1 \geq 2\,760, 1\,500 \leq b_2 \leq 2\,269.2; 2\,275.9 \leq b_3 \leq 4\,000$.
10. $b_1 \in [4.5, 9], b_2 \in [0, 11], b_3 \in [5, 11]$
11. $\Delta b_2 \in [-4, 10]$
12. (1) $\mathbf{X}^* = (6, 0, 0, 0, 10)^\top$;
 (2) f 在可行域上无下界.
13. $\mathbf{X}^* = (0.1, 0.7, 0, 0)^\top, f^* = -39$.
14. (1) $\mathbf{X}^* = (0, 0, 0, 0, 7, 3)^\top, f^* = -18$;
 (2) $\mathbf{X}^* = (10/3, 8/3, 0, 0, 2)^\top, f^* = -4$.

习 题 三

1. $f^* = 85$.
2. $f^* = 119$.

习 题 四

- $\mathbf{X}^* = (24, 26)$.
- (1) 满意解 $(x_1, x_2, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+)^T = (70, 10, 0, 10, 0, 35, 0, 0, 0, 0)^T$;
(2) $\mathbf{X}^* = (x_1, x_2, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+)^T = (0, 8, 40, 32, 0, 5, 0, 0, 0, 0)^T$.
- (1) 满意解不受影响; (2) $w_{12}^+ > 0$.

习 题 五

- (1) $\mathbf{X}^* = (2, 2, 1, 5)^T, f^* = -14$;
(2) $\mathbf{X}^* = (2, 1, 1, 1)^T, f^* = -11$.
- (1) $\mathbf{X}^* = (4, 10/3, 0, 11/3)^T, f^* = -58$;
(2) $\mathbf{X}^* = (0, 2, 0, 4, 6, 2, 0)^T, f^* = -22$.
- $\mathbf{X}^* = (1, 0, 1, 0, 1)^T, f^* = 51$.
- $\mathbf{X}^* = (4, 3)^T, f^* = -55$.
- (1) $\mathbf{X}^* = (1, 1, 1, 1)^T, z^* = -5$;
(2) $\mathbf{X}^* = (0, 1, 1, 0, 1, 1)^T, z^* = 21$.
- (1) $\mathbf{X}^* = (0, 1, 2, 3)^T, f^* = 42$;
(2) $\mathbf{X}^* = (0, 2, 1/2, 3/2)^T, f^* = 39$.
- (1) 60; (2) 125.
- (1) 13; (2) 合算.
- 77.
- 最优值 24.75 小时.

习 题 六

- v_1 至 v_{10} 的最短路径长度 130.
- 第 1 年及第 3 年购买新设备.

$$3. (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 275.
- 10.
- (1) 最佳收益 18. (2) $\mathbf{X}^* = (3, 0)^T, f^* = 9$.
- $Val f^* = 21$.

16. 不能.

19. 29.

20. 302.

习 题 七

3. 最佳赶工方案成本为 1 960.

5. (1) $T_{\max} = 27, T_{\min} = 18$; (4) $T^* = 22$ 天.

8. (2) 期望值 32, 方差 5; (3) (a) 0.096; (b) 0.987.

习 题 八

1. 最短航程 19.

2. A 投资 3, B 不投资, C 投资 1, 总收益 164.

3. 770.

5. $\mathbf{X}^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1, 0, 1, 0, 1)^T, f^* = 51$.

6. $\mathbf{X}_1^* = 1, \mathbf{X}_2^* = 1, f^* = 5$.

7. $\mathbf{X}^* = (1, 1, 2, 2)^T$ 或 $(1, 1, 4, 1)^T$ 或 $(2, 1, 2, 1)^T, f^* = 4$.

8. $x_1^* = 1, x_2^* = 4, x_3^* = 1, f^* = 12$.

9. $x_1^* = 4, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 0, f^* = 54$.

10. 1 月生产 100, 2 月生产 100, 3 月生产 50, 4 月生产 60, 总费用 22 980.

11. 元件 1 为 2 个, 元件 2 为 2 个, 元件 3 为 1 个, 元件 4 为 1 个, 可靠性为 0.432.

12. 总收益 2 680.

习 题 九

1. (1) 2 小时; (2) 空闲时间减少 1.07 小时, 站里汽车数为 4 辆, 交货时间增长 1.33 小时.

2. 11.3 分钟. 等待时间增长, 逗留时间减少.

3. 设置 6 个.

4. 0.056.

5. 使用甲.

6. 不要.

7. 20 个.

8. (1) 0.037; (2) 2.89; (3) 43.8 分钟.

9. 0.95.

10. 0.58; 0.095

11. 每小时不少于 29 人.

12. $u^* = 55$ 件/小时.

13. $S^* = 3$.

14. (1) 0.118; (2) 0.28 小时.

17. 平均等待队长是 2 人, 平均等待时间为 0.3 小时.

习 题 十

1. $Q^* = 447$ 件, $t^* = 1.6$ 天.
2. $Q^* = 1\,414$ 件, $f^* = 1\,028.284$ 元.
3. $Q^* = 11\,967$ 件.
4. $Q^* = 462$ 件, $Q_2^* = 29$ 件.
5. 1 500 件.
6. 接受折扣率 0.1 的条件, 订购 300 瓶.
7. $s = 70$, $S = 80$.
8. $q = 20$ 吨, $Q = 148$ 吨.

习 题 十 一

1. (1) (α_3, β_1) , $V = 5$; (2) (α_1, β_3) , (α_1, β_5) , (α_3, β_3) , (α_3, β_5) , $V = -2$.
2. 均派第 2 队出场.
4. 甲选 (A, B) 或 (A, C) , 占 70% 份额. 乙选 A , 占 30% 份额.
5. C 药.
6. (1) $(0, 1)$, $V = -0.3$; (2) $(0, \alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, $V = 4/7$;
(3) $(0.2, 0.5, 0.3)$ 不是 I 的最优解, $(5/7, 2/7)$ 是 II 的最优解, 对应 I 的最优策略为 $(0, 2/7, 5/7)$, $V = 4/7$.
7. $V = 2$.
8. (1) $X^* = (6/13, 3/13, 4/13)$, $Y^* = (4/13, 3/13, 6/13)$, $V = 50/13$.
(2) $X^* = (1/3, 1/3, 1/3)$, $Y^* = (1/3, 1/3, 1/3)$, $V = 1$.
9. (1) $X^* = (0, 3/5, 0, 2/5)$, $Y^* = (0, 0, 2/5, 3/5)$, $V = 6/5$.
(2) $X^* = (0, 0, 3/7, 4/7, 0)$, $Y^* = (0, 0, 0, 4/7, 3/7)$, $V = 37/7$.
10. (1) $X^* = (1/3, 0, 2/3)$, $Y^* = (1/3, 1/3, 1/3)$, $V = 4/3$.
(2) $X^* = (0, 0, 1)$, $Y^* = (2/5, 3/5, 0)$, $V = 2$.
11. 甲均以 $1/3$ 的概率取两个师同走第一条路、各走一条路及同走第二条路. 攻入城的机会为 $2/3$. 乙分别以 $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$ 的概率取 3 个师同守第一条路、两个师守第一条路和另一师守第二条路、一个师守第一条路和两个师守第二条路, 以及 3 个师同守第二条路.
13. 设甲或者乙的策略为 (i, j) , 其中 i 为此人出的指数, j 为叫的数目.
14. 甲乙均采用策略 3.

$(T, T) \quad (F, F) \quad (T, R) \quad (F, T)$

$$15. (1) \begin{matrix} \text{查甲} \\ \text{查乙} \end{matrix} A = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 4 & 18 \\ 16 & 18 & 22 & 12 \end{pmatrix},$$

其中矩阵上面一行每个括弧中第一字母表示甲公司, 第二个字母代表乙公司, T 表示如实申报, F 表示偷税, $X^* = (1/3, 2/3)$, $Y^* = (0, 1/3, 0, 2/3)$, $V = 14$ 百万元;

(2) 罚金不少于应缴税款.

习题十二

1. 选择生产乙产品. $\alpha = 0.5$.
2. 应选取自行开采为决策方案.
3. 每天应购进 4 筐香蕉.
4. (1) 500 箱; (2) 500 箱, 1 445 元.
5. 应该提出建议, 可获得收益 16.6 万元.
6. (1) 不合算; (2) 验前最优策略为 S_1 , 验后最优策略为 S_2 .
8. $U(-100) = 0$; $U(200) = 1$; $U(-60) = 0.25$; $U(0) = 0.5$; $U(80) = 0.75$.

习题十三

5. 最优排序为 $(2, 5, 1, 4, 3)$, $T^* = 40$.

参 考 书 目

- [1] 魏国华,傅家良,周仲良.实用运筹学.复旦大学出版社,1987.
- [2] 胡运权主编.运筹学教程.清华大学出版社,1998.
- [3] 徐光辉.随机服务系统.科学出版社,1980
- [4] [美]哈姆迪·阿·塔哈著,吴立熙等译.运筹学.上海人民出版社,1985.
- [5] L·库珀等著,魏国华,周仲良译.运筹学模型概论.上海科学技术出版社,1987.