一流学校 一流老师 一流资源

三一丛书

复变函数

要点与解题

龚冬保 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交大教学资源文库　三一丛书

复　变　函　数

要点与解题

龚冬保　编著

西安交通大学出版社

内容提要

本书精选了近500道典型的复变函数题。书中对复变函数课程的每部分内容都给出了客观题和非客观题，对每题的解题思路、解题方法以及解法旁注，都简明清晰、一题多解，并大多有独特的解法。

本书适合学习“复变函数”或“数学物理方法”课程的各专业师生。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数要点与解题/龚冬保编著. —西安：西安交通大学出版社，2006.8
(西安交大教学资源文库.“三一”丛书)
ISBN 7-5605-2229-7

Ⅰ.复... Ⅱ.龚... Ⅲ.复变函数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第064453号

书　　名	复变函数要点与解题
编　　著	龚冬保
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668315　82669096(总编办) (029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
字　　数	192千字
开　　本	880mm×1230mm　1/32
印　　张	5.375
版　　次	2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-5605-2229-7/O·243
定　　价	9.00元

丛书总序

为了使普通高等学校理工类专业的大学生更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，我们组织出版了这套“三一”丛书，目的就是**提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果，**为今后的学习打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一，1999 年被国家确定为我国中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。本丛书均由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，**深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。**

本丛书针对中少学时课程的特点和教学要求，**以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结，**取其精华，自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路进行了全面、系统的

总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排。本丛书既可单独使用，也可与其他教材配合使用。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国，并祝您早日成为国家的栋梁之材！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址：http://press.xjtu.edu.cn

http://www.xjtupress.com

理工医事业部信箱：jdlgy31@126.com

西安交通大学出版社

2006 年 6 月

前　言

复变函数对于多数工科专业的数学物理方法课程而言，是一门重要的基础课程。为了帮助读者学好本课程，我们根据原国家工科数学教学委员会制订的“复变函数教学基本要求”及“数学物理方法”课程对复变函数的要求，精选了近500道例题，从分析题目的条件和结论着手，讲清解题思路，做出解答。在多数题的解答过程中就解题所用到的知识、解题的方法、技巧的特点及题与题之间的联系等方面，做了注释。

书中大部分例题是我们自己编制的，不少题的解法在一般教材或参考书中并不常见。因此，读者在使用本书时，要把书中例题当作习题，自己独立做，不会时再看书；看懂了离开书再自己做，反复练习，以便掌握这些方法。通过解题，熟悉和掌握知识的要点；通过解题，学会灵活运用所学知识分析和解决问题的方法；通过解题，培养和训练数学的思维能力，是本书的编写宗旨，希望本书能帮助初学者学好复变函数这门课。

编者衷心感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以问世。欢迎读者指出书中存在的讹误和不足。

编　者

2006.6

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

1.1　复数及复平面

1-1　复数$\dfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=$(　).

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

(C) $1-\mathrm{i}$　　(D) $-1-\mathrm{i}$

解 1　分子分母同乘$-1-\mathrm{i}$得

$$\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}\qquad \text{选(C).}$$

解 2　本题用复数的指数表示式算更简单:$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$,$\mathrm{i}-1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$,故　原式$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=1-\mathrm{i}$.

本题虽不难,但解 2 使人觉得用指数表示式进行复数运算有许多优点.

1-2　若$z^2=\bar{z}^2$,则必有(　).

(A) $z=0$　　(B) $\mathrm{Re}(z)=0$

(C) $\mathrm{Im}(z)=0$　　(D) $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)=0$

解　设$z=x+\mathrm{i}y$,则$z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$.

$z^2=\bar{z}^2=\overline{z^2}$,意味着$\mathrm{Im}(z^2)=0$,即$2xy=0$.

选(D).

本题要求基本运算熟悉,特别是共轭复数的运算与性质.

1-3　设$z=x+\mathrm{i}y$是虚数(即$y\neq 0$),则$\dfrac{z}{1+z^2}$为实数的条件是(　).

(A) $xy=1$　　(B) $x^2-y^2=1$

(C) $x^2+y^2=1$　　(D) $y^2-x^2=1$

解　由条件知

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}.$$

要学会充分运用共轭复数的概念及性质.

即 $$z+|z|^2\bar{z}=\bar{z}+|z|^2 z.$$

$(\bar{z}-z)(|z|^2-1)=0$ 由 $y\neq 0$ 得 $|z|^2=1$. 选(C).

1－4 设 $z=x+\mathrm{i}y$, $|x|\neq|y|$, z^4 为实数,则( ).

(A) $xy=0$ (B) $x+y=0$

(C) $x-y=0$ (D) $x^2-y^2=0$

解 z^4 为实数,故 $z^4=\bar{z}^4$,即

$$(z-\bar{z})(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)=0.$$

或 $8xy(x^2-y^2)=0$. 而 $x^2-y^2\neq 0$. 选(A).

复数 z 为实数的充要条件是 $z=\bar{z}$.

1－5 $\mathrm{Im}[(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7]=($ $)$.

(A) 0 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $-2\sqrt{2}$ (D) $-\sqrt{2}$

解 由 $(1+\mathrm{i})^7=(\overline{1-\mathrm{i}})^7=\overline{(1-\mathrm{i})^7}$

故 $(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7$ 是实数. 选(A).

1－6 $(1+\mathrm{i})^5/(1-\mathrm{i})^4=($ $)$.

(A) $\dfrac{1}{4}(1+\mathrm{i})$ (B) $-\dfrac{1}{4}(1+\mathrm{i})$

(C) $1+\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

解 1 分子分母同乘 $(1+\mathrm{i})^4$,得

$$\text{原式}=\frac{(1+\mathrm{i})^8(1+\mathrm{i})}{2^4}=1+\mathrm{i}.$$ 选(C).

解 2 (用指数表示) $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,

故 $$\text{原式}=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4(1+\mathrm{i})=1+\mathrm{i}.$$

本题用复数的指数形式做更简便.

$(1+\mathrm{i})^4=-2^2$

1－7 $\dfrac{(1-\mathrm{i})^5-1}{(1+\mathrm{i})^5+1}=($ $)$.

(A) $\dfrac{31-32\mathrm{i}}{25}$ (B) $\dfrac{-1-32\mathrm{i}}{25}$

(C) $\dfrac{-1+8\mathrm{i}}{25}$ (D) $\dfrac{31-8\mathrm{i}}{25}$

解 由上题知 $(1+\mathrm{i})^4=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-4$.

$$(1-\mathrm{i})^4=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}=-4.$$

$$\text{原式}=\frac{-5+4\mathrm{i}}{-3-4\mathrm{i}}=\frac{5-4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\frac{(5-4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{25}=\frac{-1-32\mathrm{i}}{25}.$$

选(B).

要熟悉复数的指数形式及其运算.

1-8 $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8}=(\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(C) $\dfrac{1}{8}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$　　(D) $-\dfrac{1}{8}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$

解 1 由 $(1-\mathrm{i})^8=[(1-\mathrm{i})^2]^4=(-2\mathrm{i})^4=2^4$.

及 $$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4=4(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2=-8(1+\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

故 $$\text{原式}=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i}).$$ 选(B).

解 2 $\sqrt{3}-\mathrm{i}=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i})=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$

故 $$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4=2^4\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}},\ (1-\mathrm{i})^8=2^4$$

故 $$\text{原式}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$ 选(B).

1-9 若 $\dfrac{-3-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则(　).

(A) $r=5,\theta=\arctan 3-\pi$

(B) $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\theta=\arctan 3-\pi$

(C) $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\theta=\pi-\arctan 3$

(D) $r=5,\theta=\pi-\arctan 3$

解 由 $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$ 得:原式左边 $=\dfrac{1}{2}(3\mathrm{i}-1)$.

故 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{10},\tan\theta=-3$,故 $\theta=\pi-\arctan 3$.　　选(C).

注意辐角 θ 在第二象限.

1-10 若 $\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{2}}{-1+\frac{\mathrm{i}}{3}\sqrt{2}}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则(　).

(A) $r=\dfrac{1}{3},\theta=\arctan\dfrac{6}{7}\sqrt{2}-\pi$

(B) $r=3,\theta=\pi-\arctan\dfrac{6}{7}\sqrt{2}$

(C) $r=\frac{1}{3}, \theta=\pi-\arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}$

(D) $r=3, \theta=\arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}-\pi$

解 原式 $=-3\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3-\mathrm{i}\sqrt{2}}$,故 $r=3$.

而原式 $=\frac{3}{\sqrt{1}}(-7-6\sqrt{2}\mathrm{i})$,$\theta$ 是第三象限的角,故

$$\theta=\arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}-\pi.$$

选(D).

θ 是第三象限的角.

1-11 若 $|z|=1, w=z^n+\frac{1}{z^n}$($n$ 是正整数),则( ).

(A) $\mathrm{Re}(w)=0$ (B) $\mathrm{Im}(w)=0$

(C) $\arg(w)=0$ (D) $\arg(w)=\pi$

解 由 $|z|=1$ 知 $\frac{1}{z}=\bar{z}$,因此

$z^n+\frac{1}{z^n}=z^n+\overline{z^n}$ 为实数,故 $\mathrm{Im}(w)=0$. 选(B).

$|z|=1$ 时 $\overline{z^n}=\overline{z}^n=1/z^n$.

1-12 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}=$( ).

(A) $(-1)^n 2$ (B) $(-1)^{n-1}2$

(C) 2 (D) -2

解 由 $\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$ 及 $\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{3}\pi}$ 知,等式中两项皆为 1. 选(C).

1-13 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $\frac{1+z}{1-z}=$( ).

(A) $\cot\frac{\theta}{2}$ (B) $\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$ (C) $\tan\frac{\theta}{2}$ (D) $\mathrm{i}\tan\frac{\theta}{2}$

解 $\frac{1+z}{1-z}=\frac{1-|z|^2+(z-\bar{z})}{1+|z|^2-(z+\bar{z})}=\frac{y}{1-x}\mathrm{i}.$

而 $$\frac{y}{1-x}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}.$$ 选(B).

本题也可这样做:原式 $=\frac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{i}=\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$.

1-14 $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^{10}} = (\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{\mathrm{i}}{4}$ (D) $-\dfrac{\mathrm{i}}{4}$

解 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 = 2^3 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 8\mathrm{i}$.

$$(1+\mathrm{i})^{10} = 2^5 e^{\mathrm{i}\frac{5}{2}\pi} = 2^5 \mathrm{i}.$$

故 原式 $= \dfrac{1}{4}$. 选(A).

用复数的指数表示形式.

1-15 $|(1+e^{\mathrm{i}\theta})^n| = (\quad)$.

(A) $2^n \cos^n \dfrac{\theta}{2}$ (B) $2^n \sin^n \dfrac{\theta}{2}$

(C) $2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}$ (D) $2^{\frac{n}{2}}(1+\sin\theta)^{n/2}$

解 $|1+e^{\mathrm{i}\theta}|^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2(1+\cos\theta)$

故 $|(1+e^{\mathrm{i}\theta})^n| = 2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}$. 选(C).

本题容易错选(A)项,因为 $2(1+\cos\theta) = 4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ 得 $|1+e^{\mathrm{i}\theta}| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$. 错在 $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 应加上绝对值.

1-16 $\left|\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-2}}\right| = (\quad)$.

(A) 1 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 4

解 原式 $= \dfrac{|1+\mathrm{i}|^n}{|1-\mathrm{i}|^n} \cdot |1-\mathrm{i}|^2 = 2$. 选(B).

注意 $|(1+\mathrm{i})^n| = |(1-\mathrm{i})^n|$.

1-17 $|\sqrt{8+6\mathrm{i}}| = (\quad)$.

(A) $\sqrt[4]{10}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt[4]{14}$

解 $|8+6\mathrm{i}| = 10$. 选(B).

注意 $|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}$.

1-18 $\max\{|z^4+\mathrm{i}z^2| \mid |z| \leqslant 1\} = (\quad)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\sqrt{\dfrac{11}{4}}$ (C) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ (D) 2

解 由 $|z^4+\mathrm{i}z^2| \leqslant |z|^4 + |z|^2 \leqslant 2$,而当 $z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ 时,

用不等式确定最大值是常用方

$z^4 = e^{i\pi} = -1, iz^2 = ie^{i\frac{\pi}{2}} = -1, |z^4 + iz^2| = 2$,故最大值为 2.

选(D).

法.

1-19 $\arg(\sqrt{3}+i)^{-3} = (\quad)$.

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $-\frac{\pi}{2}$　　(C) $-\frac{5}{2}\pi$　　(D) $\frac{5}{2}\pi$

解　$\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$,因此

$$\arg(\sqrt{3}+i)^{-3} = -\frac{\pi}{2}.$$

选(B).

注意求辐角的方法.

1-20　对任意复数 z_1, z_2,证明不等式

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

证 1　(几何法)　如图 1.1,由三角形两边之和大于第三边,即

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

等号仅当 O、z_1、z_2 三点共线,向量 Oz_1 与 Oz_2 方向一致时成立.只要证了这一个不等式,其余都可由此推得:

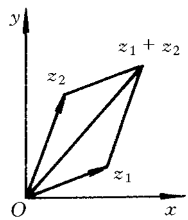


图 1.1

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)|$$
$$\leqslant |z_1|+|-z_2| = |z_1|+|z_2|$$
$$|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \leqslant |z_1+z_2|+|z_2|$$

故　$|z_1|-|z_2| \leqslant |z_1+z_2|$,同理 $|z_2|-|z_1| \leqslant |z_1+z_2|$

即　$-|z_1+z_2| \leqslant |z_1|-|z_2| \leqslant |z_1+z_2|$

也就是　$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1+z_2|$.

证 2　(代数法)　设 $z_k = x_k + iy_k (k=1,2)$

则只要证　$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

即只要证　$x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2}$　(1)

只要证　$(x_1x_2+y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

此不等式等价于　$x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1y_1x_2y_2 \geqslant 0$

由于 x_k, y_k 皆是实数,上式左边是完全平方式,故此不等式成立,也就是

$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ 成立,以下同证 1.

代数方法比几何方法麻烦些,但更具一般性:

$(x_1x_2+y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

本质上是柯西不等式,这就容易推广到一般 n 维欧氏空间.

证 3 （三角法）. 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，

则 $|z_1 + z_2|^2 = (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)^2$

$$= r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \leqslant r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2$$

$$= (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

即 $\quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ 成立，以下同证 1.

用复数的指数表示法，叫做三角表示法. 在一定的场合对复数性质的研究很方便.

1－21 当 x, y 等于什么实数时，等式

$$\frac{x + 1 + i(y - 3)}{5 + 3i} = 1 + i$$

成立？

解 1 左边 $= \dfrac{1}{34}[(x + 1) + i(y - 3)](5 - 3i)$

$$= \frac{1}{34}[5(x + 1) + 3(y - 3) + i[5(y - 3) - 3(x + 1)]]$$

故
$$\begin{cases} 5(x + 1) + 3(y - 3) = 34 \\ -3(x + 1) + 5(y - 3) = 34 \end{cases}$$

两式相减得 $\quad y - 3 = 4(x + 1)$，代入 $x + 1 = 2$，

$x = 1, y = 11$.

解 2 原式化为：$x + 1 + i(y - 3) = (1 + i)(5 + 3i)$

故 $\quad x + 1 = 2, y - 3 = 8$，得 $x = 1, y = 11$.

复数运算与实数基本一样，但除法及共轭的运算有特殊性，值得注意.

解 1 用了共轭运算；解 2 则是用乘法运算.

1－22 证明：

(1) $|z|^2 = z\bar{z}$ $\qquad$ (2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ $\qquad$ (4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0)$

(5) $\bar{z}^n = \overline{(z^n)}$

(6) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

证 此题的证明是十分简单的，但这(6)个小题，今后可作为共轭复数及其运算的基本性质，熟悉它们是很重要的，故我们列举于此. 下面我们仅证(3)和(4).

(3) **证 1** （代数法）. 记 $z_k = x_k + iy_k (k = 1, 2)$

则 $\qquad z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

故 $\qquad \overline{z_1 z_2} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$$= x_1(x_2 - iy_2) - y_1 i(x_2 - iy_2)$$

这是共轭运算的重要性质，共轭运算是复数运算有别于实数的一大特点.

$$= (x_1 - y_1\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})$$
$$= \bar{z}_1\bar{z}_2.$$

证 2 （三角法）. 记 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

则 $\overline{z_1 z_2} = r_1 r_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 e^{-i\theta_1} \cdot r_2 e^{-i\theta_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

（4）利用（3）的结果，记 $\dfrac{z_1}{z_2} = w$.

则 $z_1 = z_2 w$ 故 $\bar{z}_1 = \bar{z}_2\overline{w}, \overline{w} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

即 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

1-23 对任何复数 $z, z^2 = |z|^2$ 是否一定成立？

解 对任何复数 z，这一等式不一定成立，记 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$，而

$|z|^2 = x^2 + y^2$，要使它们相等只有当

$x^2 - y^2 = x^2 + y^2$ 及 $2xy = 0$

只有当 $y = 0$，x 为任意实数时成立，也即只有当 z 是实数时，才有 $|z|^2 = z^2$ 成立.

注意复数运算与实数的差异.

1-24 当 $|z| \leqslant 1$ 时，求 $|z^n + \alpha|$ 的最大与最小值，n 是正整数，α 是复常数.

解 1 （代数法）. 由 1-20 题知.

$$\big|\, |z|^n - |\alpha| \,\big| \leqslant |z^n + \alpha| \leqslant |z^n| + |\alpha| \leqslant 1 + |\alpha|$$

我们知道，当 $|z^n| = 1$，且向量 z^n 与 α 夹角为 0° 时右边不等式等号成立. 故 $|z^n + \alpha|$ 的最大值是 $1 + |\alpha|$.

对左边不等式，要分情况讨论.

（1）若 $|\alpha| > 1$，则 $|z^n + \alpha| \geqslant |\alpha| - |z^n| \geqslant |\alpha| - 1$. 等号当 $|z| = 1$，且 z^n 与 α 方向相反时成立. 这时最小值是 $|\alpha| - 1$.

（2）若 $|\alpha| \leqslant 1$，则由 $|z^n + \alpha| \geqslant 0$，当 $z^n = -\alpha$ 时等号成立，最小值为 0.

总之，不论 α 为何复数，$|z^n + 1|$ 的最大值是 $1 + |\alpha|$；而当 $|\alpha| > 1$ 时，最小值为 $|\alpha| - 1$. 当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时，最小值为 0.

求 $|z^n + \alpha|$ 最小值时，要考虑周密.

解 2 （几何法）．我们仅就 $|\alpha|>1$ 加以证明．由 $|z|\leqslant 1$ 知 $|z^n|\leqslant 1$．即 z^n 是闭单位圆上一点．$|z^n+\alpha|$ 表示 z^n 点到 $-\alpha$ 点的距离．很明显（初等几何）当 z^n 位于如图 1.2 的 w_1 的位置时，z^n 与 $-\alpha$ 距离最大，且最大值就是 $1+|\alpha|$；当 z^n 位于 w_2 点时，$|z^n+\alpha|$ 最小，最小值为 $|\alpha|-1$．

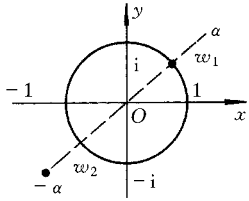


图 1.2

$|\alpha|\leqslant 1$ 的情况请读者自己研究．

从几何上看问题的证明很形象．

令 $z^n=w$，则 $|w+\alpha|$ 表示 w 与 $-\alpha$ 点的距离．w 是单位圆闭区域上的点．

1－25 设 $z=x+\mathrm{i}y$，试证明

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

证 $|z|=|x+\mathrm{i}y|\leqslant|x|+|\mathrm{i}y|=|x|+|y|$．

左边不等式我们可以给出两种证明．

证 1 由 $|x|=|z|\cos\alpha$，$|y|=|z|\sin\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

得

$$\begin{aligned}|x|+|y|&=|z|(\cos\alpha+\sin\alpha)\\&=\sqrt{2}|z|\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\leqslant\sqrt{2}|z|\end{aligned}$$

即 $$|z|\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}.$$

证 2 只要证 $(|x|+|y|)^2\leqslant 2(x^2+y^2)$．

即 $x^2-2|x||y|+y^2\geqslant 0$，是显然成立的．

试解释不等式 $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|$ 的几何意义．

1－26 证明

(1) $|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1-z_2|^2$

(2) $|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1+z_2|^2$

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

证 (1)
$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})\end{aligned}$$

注意 $z\bar{z}=|z|^2$ 的应用．

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

同理可证(2).(1),(2) 两式相加便可证得(3).

1-27 若 $|z_1| = |z_2| = |z_3|$,且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 证明以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是正三角形.

证 1 记 $|z_1| = a$,则

证 1 是证明三角形三边相等.

$$|z_1|^2 = |z_2 + z_3|^2 = 2(|z_2|^2 + |z_3|^2) - |z_2 - z_3|^2$$

得 $|z_2 - z_3|^2 = 3a^2$. 同样 $|z_3 - z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 = 3a^2$

即得 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$. 命题得证.

证 2 设 $z_k = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}(k = 1,2,3)$

证 2 是证明 z_1, z_2, z_3 是圆 $|z| = a$ 上的三等分点.

因而有 $a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}) = 0$,即

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0.$$

不妨设 $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqslant 2\pi$. 则

$$(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 = \cos^2\theta_3, \quad (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2 = \sin^2\theta_3.$$

于是 $2 + 2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) = 1$.

即 $\cos(\theta_2 - \theta_1) = -\dfrac{1}{2}, \theta_2 - \theta_1 = \dfrac{2}{3}\pi$.

同理,$\theta_3 - \theta_2 = \dfrac{2}{3}\pi$,说明 z_1, z_2, z_3 在圆周上且 $\overset{\frown}{z_1 z_2}$, $\overset{\frown}{z_2 z_3}$ 与 $\overset{\frown}{z_3 z_1}$ 的度数均为 $\dfrac{2}{3}\pi$,所以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是正三角形.

1-28 证明复数形式的柯西(Cauchy) 不等式:

在复数域上 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 也是 n 维欧氏空间的向量.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2.$$

证 对任意 n 个复数,由三角不等式. 知

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k||\beta_k|. \text{(见 1-20 题)}.$$

再由关于实数的柯西不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k||\beta_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2.$$

1-29 若复数 z_1, z_2, z_3 满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

证 由已知等式取模可得

$$|z_2-z_1||z_2-z_3|=|z_1-z_3|^2 \tag{1}$$

又由已知等式知

$$\frac{(z_2-z_1)-(z_3-z_1)}{z_3-z_1}=\frac{(z_1-z_3)-(z_2-z_3)}{z_2-z_3}$$

即 $\dfrac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$,从而有

$$|z_1-z_2||z_3-z_1|=|z_2-z_3|^2 \tag{2}$$

(1)、(2) 两式相比得 $\dfrac{|z_2-z_3|}{|z_1-z_3|}=\dfrac{|z_1-z_2|^2}{|z_2-z_3|^3}$

故 $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$,代入(1) 即可得所要证明的结论:

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|.$$

说明它的几何意义.

1-30 设 $z=e^{i\theta}$,证明

(1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$; (2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin\theta$

证 (1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos n\theta$

(2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=e^{in\theta}-e^{-in\theta}=2i\sin\theta$

其实,$|z|=1$,故 $\bar{z}^n=\dfrac{1}{z^n}$.

1-31 求下列各式的值.

(1) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^5}{(1+i)^6}$ (2) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6}{(1-i)^5}$

解 (1) $(\sqrt{3}-i)^5=2^5(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i)^5=2^5e^{-i\frac{5}{6}\pi}$

$$(1+i)^6=\sqrt{2}^6e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

故 $$\frac{(\sqrt{3}-i)^5}{(1+i)^6}=\frac{2^5e^{-i\frac{5}{6}\pi}}{2^3e^{i\frac{3}{2}\pi}}=2^2e^{-i\frac{7}{3}\pi}=2(1-\sqrt{3}i)$$

(2) $(1+\sqrt{3}i)^6=2^6e^{i2\pi}=2^6$.

$$(1-i)^5=\sqrt{2}^5e^{-\frac{5}{4}\pi i}=2^4(-1+i)$$

复数的指数式与代数形式的转换要熟练.

故 $$\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^6}{(1-\mathrm{i})^5}=\frac{4}{-1+\mathrm{i}}=-2(1+\mathrm{i}).$$

1-32 化简：$\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-2}}$.

解 1 原式 $=(1-\mathrm{i})^2\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n=-2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{n}{2}\pi}=-2\mathrm{i}^{n+1}$

解 2 原式 $=\dfrac{(1+\mathrm{i})^{2n-2}}{2^{n-2}}=2(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^{2n-2}=2\mathrm{i}^{n-1}$.

1-33 化简：$(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n$

解 $1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=2\cos\dfrac{\theta}{2}(\cos\dfrac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{2})$.

故 $$(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\frac{n}{2}\theta}.$$

注意将复数写成指数形式的方法.

1-34 设实数 $|r|<1$，求下面级数的和.

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}r^k\cos k\theta$ (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^k\sin k\theta$

解 记 $\alpha_k=r^ke^{\mathrm{i}k\theta}=(re^{\mathrm{i}\theta})^k(k=0,1,\cdots)$

于是 $$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k=\frac{1}{1-re^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{1-r\cos\theta-\mathrm{i}r\sin\theta}$$
$$=\frac{1-r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

故 (1) $$\sum_{k=0}^{\infty}r^k\cos k\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty}r^2\sin k\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

1-35 求 $\sqrt[4]{-\mathrm{i}}$

解 $-\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}$

因此 $$\sqrt[4]{-\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}(\frac{3}{8}\pi+\frac{k\pi}{2})}.$$

分别令 $k=0,1,2,3$ 得
$$z_1=e^{\mathrm{i}\frac{3}{8}\pi},z_2=e^{\mathrm{i}\frac{7}{8}\pi},z_3=e^{\mathrm{i}\frac{11}{8}\pi},z_4=e^{\mathrm{i}\frac{15}{8}\pi}.$$

注意：复数无算术根的概念，因此 $\sqrt[4]{-\mathrm{i}}$ 应当有 4 个值.

1-36 求方程 $x^6+1=0$ 的所有根.

解 1 $x=\sqrt[6]{-1}=e^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)/6}(k=0,1,\cdots,5)$

$k=0, x_1=e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$； $k=1, x_2=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$；

$k=2, x_3=e^{i\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$；

$k=3, x_4=e^{i\frac{7}{6}\pi}=\frac{-1}{2}(\sqrt{3}+i)$；

$k=4, x_5=e^{i\frac{3}{2}\pi}=-i$； $k=5, x_6=e^{i\frac{11}{6}\pi}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$.

解 2 （分解因式）. 方程左边可化为

$$\begin{aligned}x^6-i^2&=(x^3-i)(x^3+i)\\&=(x-i)(x+i)(x^2+ix-1)(x^2-ix-1)\end{aligned}$$

故所求根为 $x_1=i$；$x_2=-i$；$x_{3,4}=\frac{1}{2}(-i\pm\sqrt{3})$；$x_{5,6}=\frac{1}{2}(i\pm\sqrt{3})$. 与解 1 的结果一样.

当 n 较小时 $z^n=\alpha$ 的解可用分解因式法.

1-37 已知 $x^2-x+1=0$. 求 $x^{11}+x^7+x^6$ 的值.

解 由 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 知，x 是 -1 的两个虚数根，因此，$x^{11}=x^9\cdot x^2=-x^2$.

$$x^7=x^6\cdot x=x, x^6=1$$

故 原式 $=-(x^2-x)+1=-(x^2-x+1)+2=2$.

充分利用方程根的形式.

1-38 证明实系数、奇次代数方程：

$$x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+a_2x^{2n-3}+\cdots+a_{2n-2}x+a_{2n-1}=0$$

至少有一实根.

证 由代数基本定理，即在复数域内，凡代数方程必有根；再由因式定理知，$2n-1$ 次的代数方程，有 $2n-1$ 个复数根. 下面，我们再证明实系数代数方程虚根的成对性. 即若 $a+bi$ 是某 k 次代数方程（实系数）.

$$x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_k=0$$

的根，$b\neq0$，则 $a-bi$ 也是此方程的根.

事实上，记 $\alpha=a+bi$，则 $\bar{\alpha}=a-bi$.

而由 $\alpha^k+b_1\alpha^{k-1}+\cdots+b_{k-1}\alpha+b_k=0$.

两边取共轭数得

$$\overline{\alpha^k+b_1\alpha^{k-1}+\cdots+b_{k-1}\alpha+b_k}=0$$

即 $\bar{\alpha}^k+b_1\bar{\alpha}^{k-1}+\cdots+b_{k-1}\bar{\alpha}+b_k=0$.

在实分析中，本题一般都用介值定理来证明.

这时由于$\overline{b}_m = b_m$（b_m 是实数，$m = 1,2,\cdots,k$），因此 $\overline{\alpha}$ 也满足此方程.

下面用反证法. 设 $2n-1$ 次的实系数代数方程没有实根，则 $2n-1$ 个全是虚根，但由虚根成对性，知根的个数应为偶数而导致矛盾. 因此，实系数奇数代数方程至少有一个实根.

1-39 在同一复平面上任意选一点 z，然后在此平面上画出下列各点的位置：$-z, \overline{z}, -\overline{z}, \dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{\overline{z}}, -\dfrac{1}{\overline{z}}, z+\overline{z}$ 及 $z-\overline{z}$.

要熟悉复数的几何意义，特别是 $z, -z, \overline{z}, -\overline{z}, \dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{\overline{z}}$ 等等各点的位置关系.

解 如图 1.3 所示，$-z$ 与 z 关于原点对称；$\overline{z}$ 与 z 关于实轴对称；$-\overline{z}$ 与 z 关于虚轴对称；又 $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{z\overline{z}}$. 因此 $\dfrac{1}{\overline{z}}$ 与 z 的辐角相同，且 $\left|\dfrac{1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{r}$，即 $\dfrac{1}{\overline{z}}$ 与 z 是关于单位圆的对称点. 如图中设 $|z| < 1$，则 $\dfrac{1}{\overline{z}}$ 在单位圆外，且使 O、z 和 $\dfrac{1}{\overline{z}}$ 共一条射线，及 $|z| \cdot \left|\dfrac{1}{\overline{z}}\right| = 1$，这样的点；$\dfrac{1}{z}$ 则是 z 关于单位圆的对称点的关于实轴的对称点，也即是 $\dfrac{1}{\overline{z}}$ 关于实轴的对称点；$-\dfrac{1}{\overline{z}}$ 是 $-z$ 关于单位圆的对称点；$z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2x\,(z = x+\mathrm{i}y)$；$z-\overline{z} = 2y\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

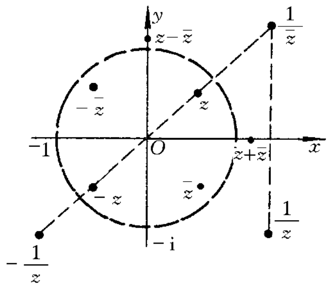


图 1.3

1-40 已知两点 z_1 与 z_2（或加上 z_3），问下列各点 z 的位置如何？

本题实质是定比分点的关系.

（1）$z = \dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$；

（2）$z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$，其中 λ 为实数；

（3）$z = \dfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

解 (1) z 是 z_1 与 z_2 的中点;

(2) z 是在取 z_1 与 z_2 两点所成直线上的点,特别,若 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,则 z 是在以 z_1, z_2 为端点的线段上的点.

(3) 当 z_1, z_2, z_3 不共线时,z 是以此三已知点为顶点的三角形的重心;若 z_1, z_2, z_3 共线,则 z 在此直线上,物理意义仍是重心所在点.

1-41 证明复平面上的直线方程可写成:$\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = C$,其中 α 是不为 0 的复数,C 是实数.

这是复平面直线一般方程.

证 记 $\alpha = a + b\mathrm{i}, z = x + \mathrm{i}y$,则

$\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z) = ax + by$,故 $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z)$. 因此方程等价于 $ax + by = \dfrac{C}{2}$,是直线的一般方程.

1-42 证明复平面上圆的方程可写作

$z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0$.($\alpha$ 为复数,C 为实数).

这是圆的一般方程.

证 设 $\alpha = a + b\mathrm{i}, z = x + \mathrm{i}y$. 如上题知.

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z) = 2ax + 2by.$$

因此,题设的方程等价于

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + C = 0$$

这是圆的一般方程.

1-43 设 t 为实参数,指出下列曲线的名称与图像特点.

(1) $z = t\alpha$ ($\alpha = a + b\mathrm{i} \neq 0$)

(2) $z = z_0 + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$($\theta$ 是实数)

此即曲线的参数方程. 如(1)即 $x = at, y = bt$.

解 (1) 即 $bx = ay$ 是过原点斜率 $k = \dfrac{b}{a}$ 的直线方程.

(2) 设 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

则有 $$x = x_0 + t\cos\theta, y = y_0 + t\sin\theta$$

是过(x_0, y_0)点(即 z_0 点)以 θ 为倾斜角的直线.

1-44 设 t 为实参数,指出下列曲线名称.

(1) $z = a\cos t + \mathrm{i}b\sin t$ (a, b 是不为 0 的实数)

(2) $z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$($a, b$ 是不为 0 的实数)

解 (1) 是椭圆:$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(1) $|a|$, $|b|$ 是椭圆的长、短半轴(若 $|a| > |b|$). (2) 长半轴不一定是

(2) 由 $x=(a+b)\cos t, y=(a-b)\sin t$.

知，当 $a=b$，则方程表示 x 轴上的线段：$[-|a+b|, |a+b|]$；当 $a=-b$，是 y 轴上线段 $[-|a-b|, |a-b|]$；当 $a^2 \neq b^2$ 时，表示椭圆：

$$\frac{x^2}{(a+b)^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1.$$

$|a+b|$，要比较它与 $|a-b|$ 的大小.

1-45 指出下列曲线名称(t 是实参数).

(1) $z=\tan t+\mathrm{i}\sec^2 t$

(2) $z=(1+t)+\mathrm{i}(t^2-1)$

解 (1) 由 $x^2=\tan^2 t=\sec^2 t-1=y-1$. 知此曲线是抛物线：$y=1+x^2$.

(2) 由 $y=(t^2-1)=(t+1)(t+1-2)=x^2-2x$. 知是顶点在 $z_0=1-\mathrm{i}$、经过原点和 $z_1=2$ 点的抛物线.

1-46 说出下列曲线的名称(t 是实参数).

(1) $z=t+\dfrac{\mathrm{i}}{t}$ (2) $z=t^2+\dfrac{\mathrm{i}}{t^2}$

(3) $z=a\operatorname{ch}t+\mathrm{i}b\operatorname{sh}t$ (a,b 是实数) (4) $z=\tan t+\mathrm{i}\sec t$

解 (1) 由 $xy=1$ 知这是双曲线.

(2) 由 $xy=1$，且 $x>0$，知这是双曲线在第一象限的那一支.

(3) 这是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (ab\neq 0).$$

若 $a=0$，曲线为虚轴(y 轴)；若 $b=0$，则表示实轴上一射线，当 $a>0$ 是 $[a,+\infty)$，当 $a<0$ 是 $(-\infty,a]$.

(4) 由 $y^2=x^2+1$ 得双曲线 $y^2-x^2=1$. 是顶点在 $z_1=\mathrm{i}, z_2=-1$ 的等轴双曲线.

注意(1)与(2)的区别.(3)表示消去参数后要注意讨论.

1-47 指出满足下列条件的点集.

(1) $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ (2) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3$

(3) $|z-3|+|z+3|=10$

(4) $|z-1|+|z+1|=2$

解 (1) 由几何意义说，它表示 z 到 i 的距离与 z 到 -1 的

做这一类的

距离相等，因此 z 点在 i 和 -1 的中垂线上，即直线 $y=-x$.

由代数方法解. 即 $(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})=(z+1)(\bar{z}+1)$

得 $\mathrm{i}(z-\bar{z})=z+\bar{z}$，即 $x=-y$.

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\mathrm{i}\bar{z}=y+\mathrm{i}x$，$\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=y$.
故 $y=3$，表示直线 $z=x+3\mathrm{i}$.

(3) 由几何意义这是以 $z=3$ 和 $z=-3$ 为焦点，长半轴为 5 的椭圆：

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

(4) 表示 z 到 1 的距离与 z 到 -1 的距离之和为 2，而 -1 到 1 的距离也为 2. 因此 z 只能在线段 $[-1,1]$ 上，即满足条件

$$|z-1|+|z+1|=2$$

的点集是实轴上的闭区间 $[-1,1]$.

题，要多采用几何与代数相结合的方法.

这只能表示线段. 值得注意.

1-48 指出满足下列条件的点集.

(1) $\mathrm{Im}(z)\leqslant 2$ (2) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$

(3) $0<\arg(z)<\pi$ (4) $0<\arg(z-\mathrm{i})<\dfrac{\pi}{4}$

解 (1) 即 $y\leqslant 2$，是以直线 $y=2$ 为边界的下半平面（含边界 $y=2$）.

(2) 由 $|z-1|\leqslant|z+1|$. 知 $x\geqslant 0$，即右半平面（含边界 $x=0$）.

(3) 上半平面，不含边界 $y=0$.

(4) 以 i 点为顶点，以 $y=1$ 和 $y-1=x$ 为两边的角域，不含边界.

这几题要练习复数的几何意义及代数运算. 与平面解析几何联系.

1-49 画出下列不等式所确定点集的图，并指出是区域还是闭区域，有界还是无界，单连还是多连.

(1) $2\leqslant|z-\mathrm{i}|\leqslant 3$ (2) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)\geqslant 2$

(3) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|>1$

(4) $-1<\arg(z)<-1+\pi$

(5) $|z-1|<2|z+1|$

(6) $|z-1|+|z+2|\leqslant 5$

$|z-\mathrm{i}|\leqslant 3$ 是圆内部，而 $|z-\mathrm{i}|\geqslant 2$ 是圆外部. (1) 这样的圆环域要熟悉.

本题是一些复平面域的表示方法. 它们都是很基

本的,很重要.

(7) $|z-2|-|z+2|>1$ (8) $z\overline{z}+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\overline{z}\leqslant 1$

解 (1) 是以 i 为圆心、在以 2 为半径的圆外,3 为半径的圆内的圆环,是有界闭区域、多连通(图 1.4).

(2) 即 $y\leqslant -2$ 是下半平面,无界单连通闭区域(图 1.5).

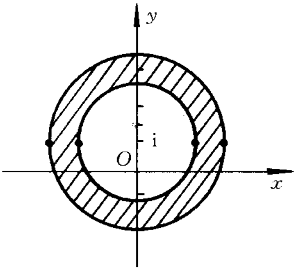


图 1.4

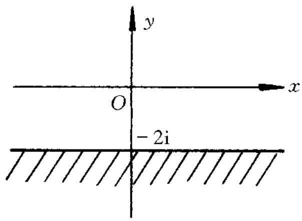


图 1.5

(3) z 到 3 的距离比 z 到 2 的距离大,因此,它是左半平面 $z<2\frac{1}{2}$,去掉 $z=2$ 一点,是无界的多连通的区域(图 1.6).

(4) 在直线 $y=kx$ 的上方,其中 $k=-\tan 1$. 无界单连通区域(图 1.7).

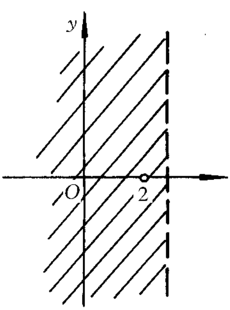


图 1.6

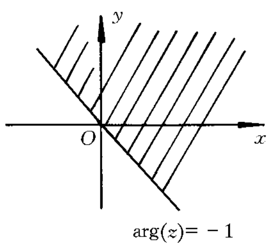


图 1.7

(5) 即 $(z-1)(\overline{z}-1)<4(z+1)(\overline{z}+1)$

$$3z\overline{z}+5z+5\overline{z}+3>0$$

或

$$x^2+y^2+2\frac{5}{3}x+1>0$$

$(x+\frac{5}{3})^2+y^2>\frac{16}{9}$ 是无界多连通区域(图 1.8).

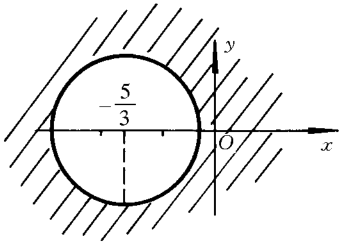


图 1.8

(6) 此不等式是焦点在 $z=1$ 和 $z=-2$ 处,长半轴为 5/2 的椭圆内部,为有界单连通闭区域(图 1.9).

(7) 这是半支双曲线:$4x^2-\frac{4}{17}y^2>1$,$(x<-\frac{1}{2})$ 部分,是无界单连通区域(图 1.10).

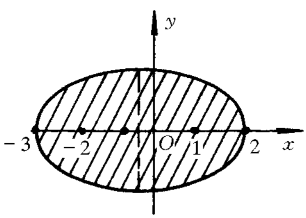


图 1.9

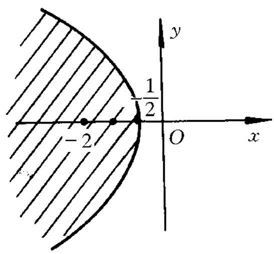


图 1.10

(8) 不等式即 $x^2+y^2-2y\leqslant 1$,
或 $x^2+(y-1)^2\leqslant 0$,只有当 $x=0$,$y=1$ 成立,因此,只代表复平面上一个点 $z=\mathrm{i}$(图略).

1-50 叙述扩充复平面的概念,在扩充复平面上无穷远点与实数中无穷大量有何异同点?

解 扩充复平面也叫复球面,如图 1.11. 作一球面在复平面的原点 O 与复平面相切,切点在球面上记为 S,也称之为南极点. 过 S 作与复平面相垂直的直径 SN,N 称为球面的北

注意,扩充复平面上只有一个 ∞ 点.

极点. 这样,对球面上任一点 P,联 NP 与复平面交于 z 点是唯一的与 P 对应的点;反之,在复平面上任取一点 z_1,联 Nz_1 与球面有唯一交点 P_1. 于是,我们建立了球面上除 N 点外的点集与复平面上的点集间的一一对应的关系. 至于球面的北极点 N,与复平面上任何点不存在这种对应关系,于是我们引进"无穷远"点,这样考虑:当 P 点沿球面逼近 N 时,与 P 对应点 z 的模将无限增大,令 $P \to N$,则 $|z| \to \infty$,故我们说球面的北极点对应于复平面上一个"无穷远"点. 这样,增加一个无穷远点的复平面称为扩充的复平面,它与球面上点一一对应,因此,扩充的复平面也叫复球面,无穷远点记为"∞".

同复球面上点与扩充复平面上点一一对应的方法来考察 ∞ 点与一般点并无大的区别.

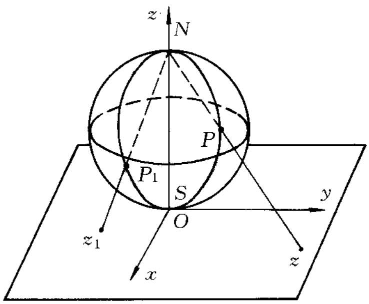


图 1.11

由于扩充复平面上的 ∞ 与北极点对应,因此,只有一个 ∞. 这与实数中"无穷大"不一样,在实数中 $-\infty$ 与 $+\infty$ 是不同的. 例如数列 $\{(-1)^{n-1}n\} = \{1, -2, 3, -4, \cdots\}$. 在实数域内,只能说它是无穷大量,但无法说它是 $-\infty$ 还是 $+\infty$. 而在复数中,就说它的极限为无穷远点:∞. 因此,在实数域中的实轴是开集:$(-\infty, +\infty)$,在复数域中,实数是闭集,可以把直线看作是一个"圆",实轴与过南极 S 和北极 N 的一个大圆上的点一一对应. 再就是从复球面来说,北极点与球面上其它点是一样的点,因此,在扩充的复平面上 ∞ 不是一个符号,而是一个确定的点,故扩充的复平面也称为闭复平面,而不含无穷远点的复平面叫有限平面或开平面.

既然复平面上无穷远点就是北极点,那么它的邻域(对于复球面,是一绕北极点的小圆 C 的内部;对于复平面,是一大

圆 C 的外部）就是无穷远点的邻域，即 $|z| > R$，是 ∞ 的一个邻域.

最后，设 $\alpha \neq \infty$ 是任一复数，我们规定有关运算是：

$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty$

$\alpha \cdot \infty = \infty \ (\alpha \neq 0)$

$\dfrac{\alpha}{\infty} = 0, \dfrac{\infty}{\alpha} = \infty \ (\alpha \neq 0)$

而 $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 均无意义.

1-51 若 $f(\dfrac{1}{z-\mathrm{i}}) = z$，则 $f(1+\mathrm{i}) = (\quad)$.

(A) 1 (B) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ (C) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$ (D) $1-\mathrm{i}$

解 令 $\dfrac{1}{z-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$，则 $z = \mathrm{i} + \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$. 选(B).

注意复变函数与实函数一样，对应关系和定义域是两要素.

1-52 若 $f(z^2+1) = |z|$，则 $f(0) = (\quad)$.

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) 0

解 令 $z^2+1=0, z=\pm\mathrm{i}, |z|=1$. 选(A).

令 $z = \mathrm{i}$ 可得 $f(0) = |\mathrm{i}| = 1$.

1-53 若 $f(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}) = \bar{z}$，则 $\lim\limits_{z\to\mathrm{i}} f(z) = (\quad)$.

(A) i (B) 2i (C) $-$i (D) $-$2i

解 1 令 $\dfrac{1}{z+\mathrm{i}} = w$，则 $\bar{z} = \dfrac{1}{\bar{w}} + \mathrm{i}$.

即 $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} + \mathrm{i}$，故 $\lim\limits_{z\to\mathrm{i}} f(z) = \dfrac{-1}{\mathrm{i}} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}$. 选(B).

解 2 由复合函数的连续性知 $\lim\limits_{z\to\mathrm{i}} f(z) = f(\mathrm{i})$

令 $\dfrac{1}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ 得 $z = -2\mathrm{i}, \bar{z} = 2\mathrm{i}$. 选(B).

求复函数的极限应注意：从复数域看，它与实函数极限的定义是一样的.

1.2 复变函数、极限与连续性

1-54 在 $w = z^2$ 变换下，求

(1) 直线 $x = 2$ 的像；

(2) 扇形域 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}, 0 < r < 2$ 的像.

解 (1) 由 $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, x = 2$ 时有 $u = 4 - y^2, v = 4y$,故 $u = 4 - \frac{v^2}{4}$,是 w 平面上的抛物线:$v^2 = 16 - 4u$(如图1.12).

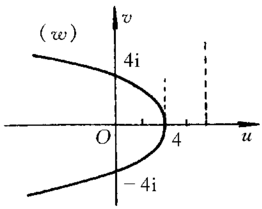


图 1.12

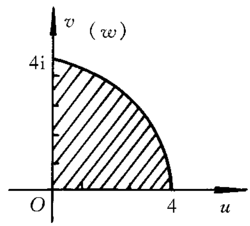


图 1.13

(2) 设 $z = re^{i\theta}$,则 $w = r^2 e^{2i\theta} = \rho e^{i\varphi}$ 故像是 w 平面上的扇形域:

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; 0 < \rho < 4$.(如图 1.13)

一个复函数 $w = f(z)$ 可以看作是从 z 平面到 w 平面上的一个映射(也可称为变换).如(1)表示 $w = z^2$ 将直线 $x = 2$ 映射为 w 平面的抛物线 $u = 4 - \frac{v^2}{4}$.

1-55 已知映射 $w = z^3$,求

(1) 点 $z_1 = i, z_2 = 1 - i, z_3 = -\sqrt{3} + i$ 在 w 平面的像;

(2) 直线 $y = 4x$ 在 w 平面的像;

(3) 区域 $0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}$ 的像.

解 (1) $w(z_1) = -i$;

$$w(z_2) = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi} = -2(1+i);$$

$$w(z_3) = (2e^{i\frac{5}{6}\pi})^3 = 8e^{i\frac{5}{2}\pi} = 8i.$$

(2) $w = (x + iy)^3 = x^3(1 + 4i)^3 = -x^3(47 + 52i)$.

$$u = -47x^3, v = -52x^3.$$

故在 w 平面的像是直线,$52u = 47v$.

(3) 区域在 w 平面的像是 $0 < \arg w < 2\pi$,即除 u 的正半轴外的全 w 平面.

映射、变换在本书中是同义词.

1 - 56　已知映射 $w=\dfrac{1}{z}$,求

(1) 圆周 $|z|=2$ 的像;

(2) 直线 $y=x$ 的像;

(3) 区域 $x>1$ 的像.

到第 6 章,读者便知这是保角、保圆的映射.

解　(1) $|w|=\dfrac{1}{|z|}\Big|_{|z|=2}=\dfrac{1}{2}$,是 w 面上以原点为圆心,$\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆周.

(2) $w=\dfrac{1}{x(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2x}$. 则 $u=\dfrac{1}{2x}$,$v=-\dfrac{1}{2x}$,像是直线 $u=-v$.

(3) 先看直线 $x=1$ 的像. $w=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}y}=\dfrac{1-\mathrm{i}y}{1+y^2}$,则 $u=\dfrac{1}{1+y^2}$,$v=\dfrac{-y}{1+y^2}$,$u^2+v^2=u$,是以 $w=\dfrac{1}{2}$ 为圆心,$\dfrac{1}{2}$ 为半径的偏心圆,而由 $z=0$ 的像是 $w=\infty$,在圆外部,因此,$x>1$ 的像是圆的内部,即 $u^2+v^2<u$.

1 - 57　$\lim\limits_{z\to(1+\mathrm{i})}\dfrac{z^2-\mathrm{i}z-1-\mathrm{i}}{z^2-2\mathrm{i}}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{3-\mathrm{i}}{4}$　(B) $\dfrac{3+\mathrm{i}}{4}$　(C) $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{4}$　(D) $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{4}$

解　由 $2\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})^2$ 得

$$\frac{z^2-\mathrm{i}z-1-\mathrm{i}}{z^2-2\mathrm{i}}=\frac{(z+1)(z-1-\mathrm{i})}{(z+1+\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})}$$

故 $$\lim_{z\to(1+\mathrm{i})}\frac{z^2-\mathrm{i}z-1-\mathrm{i}}{z^2-2\mathrm{i}}=\lim_{z\to(1+\mathrm{i})}\frac{z+1}{z+1+\mathrm{i}}=\frac{3-\mathrm{i}}{4}.$$

选(A).

本题也可用洛必达法则求极限.

1 - 58　设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{Im}^2(z)}{z^2}, & z\neq 0\\ \alpha, & z=0\end{cases}$,则(　).

(A) $\alpha=0$ 时,$f(z)$ 连续

(B) $\alpha=\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ 时,$f(z)$ 连续

(C) $\alpha=1$ 时,$f(z)$ 连续

(D) 不论 α 为何值,$f(z)$ 在 $z=0$ 处均不连续

复函数的极限从实数域的角度看,它与多元函数极限一样,比实函数的一元函数极限更复杂. 视复数 z 为复数域中的

解 记 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$. $\mathrm{Im}^2(z)=y^2$,故当 $z\neq 0$ 时

$$f(z)=\frac{y^2(x^2-y^2)-2xy^3\mathrm{i}}{(x^2+y^2)^2}$$

考虑 $u(x,y)=\dfrac{y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$,令 $y=kx$,得

$$u(x,kx)=\frac{k^2(1-k^2)}{(1+k^2)^2},\quad x\to 0\text{ 时极限不同}$$

故 $z\to 0$ 时,$u(x,y)$ 极限不存在. 因此,不论 α 取何值,$f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续. 选(D).

向量,形成一维线性空间;将复数视为实数域上的向量,便组成二维线性空间.

1-59 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2}{\bar{z}}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ 的连续点集合为( ).

(A) 单连通区域　　(B) 多连通区域

(C) 开集非区域　　(D) 闭集非闭区域

解 当 $z\neq 0$ 记 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$f(z)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}$,处处连续;且 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$,在 $r=0$ 处也连续,故连续点集为全平面. 选(A).

相当于用极坐标研究二元函数的极限.

1-60 求极限:$\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$

解 原极限 $=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\bar{z}(z-1)+2(z-1)}{(z-1)(z+1)}$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{\bar{z}+2}{z+1}=\frac{3}{2}.$$

1-61 证明定理:设 $z=x+\mathrm{i}y$,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$. $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 则

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=u_0+\mathrm{i}v_0$$

的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0$

证 必要性. 由 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=u_0+\mathrm{i}v_0$ 知,对任意 $\varepsilon>0$,$\exists\,\delta>0$,只要

$$0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

便有 $\quad|u(x,y)-u_0+\mathrm{i}(v(x,y)-v_0)|<\varepsilon.$

复函数的极限与实二元函数极限的关系.

即 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)$,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)$ 两问题是等价的.

这时 $|u(x,y)-u_0| \leqslant |u(x,y)-u_0+\mathrm{i}(v-v_0)| < \varepsilon$

$$|v(x,y)-v_0| \leqslant |u(x,y)-u_0+\mathrm{i}(v(x,y)-v_0)| < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$.

充分性. 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 只要

$$\sigma < \rho = |z-z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_1$$

便有 $$|u(x,y)-u_0| < \varepsilon/2 \tag{1}$$

又存在 $\delta_2 > 0$, 只要 $0 < \rho < \delta_2$

便有 $$|v(x,y)-v_0| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

成立. 取 $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, 因此, 只要 $0 < \rho < \delta$, (1)、(2) 便成立, 由三角不等式

$$|(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)| \leqslant |u-u_0| + |v-v_0| < \varepsilon$$

成立. 即 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = u_0+\mathrm{i}v_0$.

1-62 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha$, 证明

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |\alpha|.$$

证 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $0 < \rho < \delta$, 便有

$$||f(z)|-|\alpha|| \leqslant |f(z)-\alpha| < \varepsilon$$

成立.

即 $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |\alpha|$.

本问题的逆问题成立吗?

1-63 证明: 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha \neq 0$, 则存在 z_0 的一个小邻域 $\mathbf{U}$, 对 $z \in \mathbf{U}$ 有 $f(z) \neq 0$.

证 由上题结论知

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |\alpha| > 0.$$

由实变量极限性质知, 存在 z_0 的邻域 $\mathbf{U}$ 使 $z \in \mathbf{U}$ 有 $|f(z)| \neq 0$ 成立.

注意, 复数不可比较大小, 故只能归结为模, 才能比较大小.

1-64 设 $f(z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} + \mathrm{i}xy$, 问此函数在 $(0,0)$ 点的极限是否存在?

解 不存在. 在 $(0,0)$ 点, 对于 $u = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 令 $y = kx$,

$x \to 0$

得 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} u = \dfrac{k}{1+k^2}$,故 u 在(0,0)点极限不存在.

1-65 证明 $f(z) = \left(\dfrac{\bar{z}}{z} - \dfrac{z}{\bar{z}}\right)$ 在(0,0)点的极限不存在.

本题证明方法与证明二元实函数极限不存在的方法相同.

证 1 设 $z = re^{i\theta}$,则 $\dfrac{\bar{z}}{z} - \dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{r^2(e^{-2i\theta} - e^{2i\theta})}{r^2} = -2i\sin 2\theta$,故在 $z=0$ 点的极限不存在.

证 2 记 $z = x + iy$,则 $\dfrac{\bar{z}}{z} - \dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}^2 - z^2}{x^2+y^2} = \dfrac{-4ixy}{x^2+y^2}$,当 $z \to 0$ 时,由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在,知此函数在 $z=0$ 极限不存在.

1-66 证明 $f(z) = \arg z$ 在负实轴上不连续.

这个负实轴包含原点.

证 $z=0$,$f(z)$ 无意义,故不连续.

设 $\mathrm{Im}(z) = y$,则 $\lim\limits_{\substack{y\to 0^+\\x<0}} f(z) = \pi$.

而
$$\lim\limits_{\substack{y\to 0^-\\x<0}} f(z) = -\pi.$$

因此,在负实轴上任一点 x 处 $y\to 0$ 的极限均不存在,即对任意 $x_0 < 0$,$\lim\limits_{z\to x_0} f(z)$ 不存在,故不连续.

注意这个性质,后面常被用到.

1-67 设 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点连续,证明

(1) $\bar{f}(z)$ 在 z_0 点连续;

(2) $|f(z)|$ 在 z_0 点连续.

一个复函数的连续性与两个实二元函数连续性也是等价的问题.

证 (1) 由 $f(z)$ 在 z_0 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均在(x_0, y_0)点连续,故

$\bar{f}(z) = u(x,y) - iv(x,y)$ 在 z_0 点连续.

(2) 由 $|f(z)| = \sqrt{u^2+v^2}$ 在(x_0,y_0)连续便知 $|f(z)|$ 在 z_0 点连续.

1-68 设 $f(z)$ 在 z_0 点连续,且 $f(z_0) \neq 0$.证明存在 z_0 的一个邻域 **U** 对任意 $z \in \mathbf{U}$ 有 $f(z) \neq 0$.

本题是 1-63 题的延续,这个性质是常被用到的

证 由上题之(2),$|f(z)|$ 在 z_0 连续,且 $|f(z_0)| \neq 0$,

由实函数连续性质知，存在 z_0 的一个邻域 $\mathbf{U}$，对任意 $z \in \mathbf{U}$，有 $|f(z)| \neq 0$. 也即 $f(z) \neq 0$.

性质.

1.3 杂例

1－69 求和

（1）$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$

（2）$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$

解 $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\cdots+\mathrm{e}^{n\mathrm{i}x}$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}=\frac{1-\cos(n-1)x-\mathrm{i}\sin(n+1)x}{1-\cos x-\mathrm{i}\sin x}$$

$$=\frac{1-\cos(n+1)x-\mathrm{i}\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}\cdot(1-\cos x+\mathrm{i}\sin x)$$

$$=\frac{1-\cos x+\cos nx-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{\sin x+\sin nx-\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$$

以上实部即本题(1）的结果，虚部是(2）的结果. 即

（1）$1+\cos x+\cdots+\cos nx=\dfrac{1-\cos x+\cos nx-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}$

（2）$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin x+\sin nx-\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$

用复数指数形式可将这种和变为等比数列之和. 而且，往往是一次便求得两个和.

1－70 计算积分

（1）$\displaystyle\int\frac{\sin 9x}{\sin x}\mathrm{d}x$ （2）$\displaystyle\int\frac{\cos 9x}{\cos x}\mathrm{d}x$

解 （1）$\dfrac{\sin 9x}{\sin x}=\dfrac{\mathrm{e}^{9\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-9\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}$

$$=\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x}$$

故 $$\int\frac{\sin 9x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{8\mathrm{i}}\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x}+\frac{1}{6\mathrm{i}}\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+x$$

$$-\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-\frac{1}{6\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}-\frac{1}{8\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x}+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin 8x+\frac{1}{3}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 4x+\sin 2x+x$$

$$+C.$$

这是欧拉公式，或说是复数指数形式的妙用.

(2) $\dfrac{\cos 9x}{\cos x}=\dfrac{e^{9ix}+e^{-9ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$

$=e^{8ix}-e^{6ix}+e^{4ix}-e^{2ix}+1-e^{-2ix}+e^{-4ix}-e^{-6ix}+e^{-8ix}$

故 $\displaystyle\int\frac{\cos 9x}{\cos x}dx=\frac{1}{8i}(e^{8ix}-e^{-8ix})-\frac{1}{6i}(e^{6ix}-e^{-6ix})$

$\displaystyle+\frac{1}{4i}(e^{4ix}-e^{-4ix})-\frac{1}{2i}(e^{2ix}-e^{-2ix})+x+C$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\sin 8x-\frac{1}{3}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 4x-\sin 2x+x$

$+C.$

1-71 证明三点 z_1、z_2、z_3 构成正三角形顶点的充分必要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

证 必要性. 设 $\triangle z_1z_2z_3$ 是正三角形. 则必有

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}.$$

这是因为 z_2-z_1, z_3-z_1, z_3-z_2 的模相等,且夹角相等.

即 $$-(z_1-z_2)^2=(z_3-z_2)(z_3-z_1)$$

即 $$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

充分性. 由 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$

得 $$(z_1-z_2)^2=(z_2-z_3)(z_3-z_1)$$
$$(z_2-z_3)^2=(z_1-z_2)(z_3-z_1)$$
$$(z_3-z_1)^2=(z_1-z_2)(z_2-z_3)$$

取模易得 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

即三角形三边相等,为正三角形.

注意:z_1、z_2、z_3 是点,而 z_2-z_1, z_3-z_2,… 是平面向量.

1-72 证明:若 $w=f(z)$ 在有界闭集上连续,则必有界.

证 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. 在 E 上连续,则 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 均在 E 上连续,从而

$F(x,y)=\sqrt{u^2+v^2}$ 连续,因而有界,即存在正数 M,使 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}<M$ 成立.

这也是一般二元实函数的重要性质.

1-73 证明:若 $w=f(z)$ 在有界闭集 E 上连续,则 $|f(z)|$ 在 E 上能达到其最大值与最小值.

这都是二元实函数在有界闭集

证　如上题. 由 $|f(z)| = \sqrt{u^2+v^2}$ 在 E 上连续,故能达到最大、最小值. 即存在 (x_1, y_1) 及 $(x_2, y_2) \in E$,

$$|f(x_1+\mathrm{i}y_1)| = \sqrt{u_1^2+v_1^2} = M$$

而
$$|f(x_2+\mathrm{i}y_2)| = \sqrt{u_2^2+v_2^2} = m$$

使对任意 $(x,y) \in E$,皆有不等式

$$m \leqslant |f(x+\mathrm{i}y)| \leqslant M$$

成立.

上的重要性质.

第 2 章　解析函数

2.1　解析函数的概念及 C－R 条件

2－1　函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点可导是可微的(　).

(A) 必要但非充分条件

(B) 充分但非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件，也非必要条件

解　复函数与实函数的导数与微分的定义，就形式来说是一致的，即

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \Leftrightarrow \Delta f(z) = f'(z) \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$$

是等价的.　选(C).

复数作为复数域的向量，是一维向量，或复数是复数域上的一维线性空间.

2－2　复变函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点可导是连续的(　).

(A) 必要但非充分条件

(B) 充分但非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件也非必要条件

解　由 $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$

故　$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$

因此，可导必连续，但反之不一定对(反例见后面的题).

选(B).

复数作为实数域上的向量是二维向量，或说复数是实数域上的二维线性空间.

2－3　设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，则在 (x_0, y_0) 点，u，v 均可微是 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 点可微的(　).

(A) 必要但非充分条件

(B) 充分但非必要条件

以后会知道，u，v 均可微，还必须满足柯西－黎

(C) 充分必要条件

(D) 既非必要条件,也非充分条件

解 $f(z)$ 可导,即

$$\Delta f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v=f'(z_0)\cdot\Delta z+o(|\Delta z|)$$

记 $f'(z_0)=a+\mathrm{i}b,\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$,则

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+o(\rho)$$

$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+o(\rho)$$

故 u,v 均可微,但 u,v 均可微时,$f(z)$ 不一定可导. 选(A).

曼方程,$f(z)$ 才可导.

2-4 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 点可导的充分必要条件是( ).

(A) 在(x_0,y_0)点 u,v 可导,且满足 C-R 条件,即$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在(x_0,y_0)成立

(B) $f(z)$ 在(x_0,y_0)点的一个邻域内可导

(C) 在(x_0,y_0)点 u,v 可微,且满足 C-R 条件

(D) 在(x_0,y_0)点 u,v 具有连续的偏导数,且满足 C-R 条件

解 由上题的推导过程知,若 $f(z)$ 在 z_0 点可导,则 u,v 在(x_0,y_0)可微,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a,\quad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=b.$$

在(x_0,y_0)点成立.

反之,若 u,v 在(x_0,y_0)可微,且满足 C-R 条件,则

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}&=\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta z}\\&=\frac{u_x\Delta x+u_y\Delta y+\mathrm{i}(v_x\Delta x+v_y\Delta y)}{\Delta z}+\frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}\\&=\frac{u_x(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+\mathrm{i}(v_x\Delta x+v_x\mathrm{i}\Delta y)}{\Delta z}+\frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}\\&=\frac{(u_x+\mathrm{i}v_x)\Delta z}{\Delta z}+\frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}\end{aligned}$$

故
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=u_x+\mathrm{i}v_x$$
选(C).

复变函数在一点可导的条件是,u、v 可微且满足 C-R 条件.

2-5 设 $f(z)=2xy-\mathrm{i}x^2$,那么( ).

(A) $f(z)$ 处处可微　　(B) $f(z)$ 处处不可导

(C) $f(z)$ 仅在原点可导　　(D) $f(z)$ 仅在 x 轴上可导

解 $u=2xy,v=-x^2$ 均处处可微,而

$$u_x=2y,\ u_y=2x,\ v_x=-2x,\ v_y=0$$

仅当 $y=0$ 时,满足 C-R 条件,故仅在 x 轴上可导. 选(D).

看起来,$f(z)$ 条件很好,但却几乎处处不可导.

2-6 若 $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,$v(x,y)=xy$,$f(z)=u+\mathrm{i}v$,则函数 $f(z)$( ).

(A) 仅在原点可导　　(B) 处处不可导

(C) 除原点外处处可导　　(D) 处处可微

解 $u(x,y)$ 在原点虽有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ 但不可微;而除原点外 u,v 可微但不满足 C-R 条件,因此,$f(z)$ 处处不可导.

选(B).

在 $z=0$ 点要专门讨论.

2-7 若 $f(z)=\bar{z}$,则 $f(z)$( ).

(A) 处处不可导　　(B) 仅在原点可导

(C) 处处解析　　(D) 仅在虚轴上可导

解 很明显 $f(z)=x-\mathrm{i}y$,处处不满足 C-R 条件,故处处不可导. 选(A).

$f(z)=\bar{z}$ 如此简单一个函数却处处连续但不可导!

2-8 若 $f(z)=(x^2-y^2+ax+by)+\mathrm{i}(cxy+3x+2y)$ 处处解析,则$(a,b,c)=$( ).

(A) $(3,2,2)$　　(B) $(-2,-3,2)$

(C) $(2,-3,2)$　　(D) $(-2,3,2)$

解 由 C-R 条件及

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+a,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+b,\ \frac{\partial v}{\partial x}=cy+3,\ \frac{\partial v}{\partial y}=cx+2.$$

故 $c=2,a=2,b=-3$. 选(C).

u,v 均是二次多项式函数,偏导数连续无问题,故只要满足 C-R 方程,便解析了.

2-9 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在(x_0,y_0)点可导且满足 C-R 条件是 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 点可导的( ).

(A) 充分条件

注意二元实函数可导不一定可微.

(B) 必要但非充分条件

(C) 充分但非必要条件

(D) 既非必要也非充分条件

解 $f(z)$ 可导必有 u,v 可导且满足 C-R 条件;但反之,如 u,v 在 (x_0,y_0) 至少一个不可微,则 $f(z)$ 在 (x_0,y_0) 不可导.

选(B).

2-10 若 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$ 则 $f(z)$ ( ).

要熟悉 C-R 条件.

(A) 仅在直线 $y=x$ 上可导

(B) 仅在直线 $y=-x$ 上可导

(C) 仅在(0,0)点解析

(D) 仅在(0,0)点可导

解 $u_x=y^2,u_y=2xy,v_x=2xy,v_y=x^2$,要满足 C-R 条件,要求

$y^2=x^2$ 及 $2xy=-2xy$,只有(0,0)点能满足此条件.

选(D).

2-11 若 $f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$,则关于 $f(z)$ 的导数问题是( ).

要会求解析函数的导函数.

(A) $f(z)$ 仅在原点可导且 $f'(0)=0$

(B) $f(z)$ 处处解析,且 $f'(z)=3x^2-3y^2+\mathrm{i}6xy$

(C) $f(z)$ 处处解析,且 $f'(z)=3x^2-3y^2-\mathrm{i}6xy$

(D) $f(z)$ 处处解析,且 $f'(z)=3y^2-3x^2+\mathrm{i}6xy$

解 $u_x=3x^2-3y^2,u_y=-6xy,$

$v_x=6xy,v_y=3x^2-3y^2$

由 C-R 条件知 $f(z)$ 处处可导即解析,且

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2+\mathrm{i}6xy.$$

选(B).

2-12 用导数的定义证明下列公式:

(1) $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n 是正整数)

(2) $\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}$ $(z\neq 0)$

证 (1) $(z+\Delta z)^n-z^n=$

$$\Delta z[(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}]$$

从复变函数导数定义的形式上看,与实函数是一样的.因此,一些

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=nz^{n-1}$.

(2) $\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{-\Delta z}{z(z+\Delta z)}$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}\right)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{-1}{z(z+\Delta z)}=-\dfrac{1}{z^2}$.

初等函数的求导基本公式也一样.

2-13 用定义证明:若 $f(z)$ 在 z_0 可导,则 $f(z)$ 在 z_0 点连续,反之不一定成立.

证 设 $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

则 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\cdot\Delta z+\alpha\cdot\Delta z$.

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$. 因此,当 $\Delta z\to 0$ 时,有

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\to 0$$

故 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

反之,如 $f(z)=\bar{z}$ 处处连续,但

$$\overline{z+\Delta z}-\bar{z}=\overline{\Delta z}=\Delta x-\mathrm{i}\Delta y.$$

而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\dfrac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\dfrac{1-k\mathrm{i}}{1+k\mathrm{i}}$ (k 为任一实数)

故此极限处处不存在,即 $\bar{z}$ 处处连续,但处处不可导.

可导必连续,这与实函数是一样的.

2-14 证明:函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 可导(在 $z=x+\mathrm{i}y$ 点)的必要条件是,u,v 的一阶导数存在,且满足 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

证 由 $f(z+\Delta z)-f(z)=u(x+\Delta x,y+\Delta y)+$

$\mathrm{i}v(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)$

$=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v]$

由于在 $x+\mathrm{i}y$ 点可导,故,当 $\Delta z=x+\Delta x+\mathrm{i}y-(x+\mathrm{i}y)=\Delta x$ 时,极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{x}$$
$$+\mathrm{i}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v}{\Delta x}$$

u,v 可导,且满足 C-R 条件,仅仅是 $f(z)$ 可导的必要条件.

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} \quad 存在.$$

取 $\Delta x \to 0$,又有

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x+\Delta y)-u(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}$$

$$+ \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y} \ 存在.$$

即 u,v 的偏导数都存在,且 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 的 C-R 条件成立.

2-15 证明 $f(z) = u + \mathrm{i}v$,在 $z = x + \mathrm{i}y$ 点可导的充要条件是 u,v 在 (x,y) 点可微,且满足 C-R 条件.

证 必要性. 即只要在上题证明的基础上,进一步证明 u,v 在 (x,y) 的可微性. 由上题得

$$\Delta f(z) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + \alpha\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \alpha\Delta z$$

其中 $\alpha \to 0$.

当 $\Delta z \to 0$,记 $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$,由 C-R 条件知

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y$$

由 $\alpha_1,\alpha_2 \to 0$,知 $\frac{\alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y}{|\Delta z|} \to 0$ 及 $\frac{\alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y}{|\Delta z|} \to 0$. 由微分定义知,$u,v$ 两函数在 (x,y) 点皆可微.

充分性. 由 $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)$$

得 $\Delta f(z) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) - o(|\Delta z|)$$

即使如此,还要注意复变函数在一点可导与在此点解析的区别.

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta z + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Delta z + o(|\Delta z|)$$

故 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$ 存在，即 $f(z)$ 可微，

且 $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

2-16 导出在极坐标下的 C-R 条件.

解 即设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$u = u(r,\theta)$，$v = v(r,\theta)$，$f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$，$f(z)$ 在 (r,θ) 处可导的 C-R 条件，分两种解法.

要记住在极坐标下的 C-R 条件.

1. 用坐标变换法

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{-y}{r^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 的变化与之一样，故由 C-R 条件

得 $$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{1}$$

及 $$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{2}$$

$x\times(2) - y\times(1)$ 得
$y\times(2) + x\times(1)$

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \end{cases}$$

这便是在极坐标下的 C-R 条件.

2. 直接用定义

$$f(z+\Delta z) - f(z) = u(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta) - u(r,\theta) + \mathrm{i}\Delta v$$
$$= \Delta u + \mathrm{i}\Delta v$$

而 $$\Delta z = (r+\Delta r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\Delta\theta)} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$
$$= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\theta} - 1) + \Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\Delta\theta)}$$

当 $\Delta r \to 0$，$\Delta\theta \to 0$ 时，$\Delta z \sim r\mathrm{i}\Delta\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

故 $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta z}$ 存在，令 $\Delta\theta = 0$ 有

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta r\to 0\\(\Delta\theta=0)}} \frac{u(r+\Delta r,\theta) - u(r,\theta)}{\Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$
$$+ \mathrm{i}\lim_{\substack{\Delta r\to 0\\(\Delta\theta=0)}} \frac{v(r+\Delta r,\theta) - u(r,\theta)}{\Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

$\Delta z \sim r\mathrm{i}\Delta\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 中“$\sim$”表示等价（无穷小）的意思（$\Delta z \to 0$）.
这里由于是极坐标故 $\Delta u = u(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta) - u(r,$

令 $\Delta r=0,\Delta\theta\to 0$ 亦有

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta\theta\to 0\\(\Delta r=0)}}\frac{u(r,\theta+\Delta\theta)-u(r,\theta)}{r\mathrm{i}\Delta\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}+\lim_{\substack{\Delta\theta\to 0\\(\Delta r=0)}}\frac{v(r,\theta+\Delta\theta)-v(r,\theta)}{r\Delta\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\mathrm{i}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

比较上面等式得 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\end{cases}$

与解 1 所得结果一致.

$\theta)$；$\Delta v=v(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)-v(r,\theta)$ 而 $\Delta z=(r+\Delta r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\Delta\theta)}-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 当 $\Delta\theta=0,\Delta z=\Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 令 $\Delta r=0$，$\Delta z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\sin\Delta\theta-1+\mathrm{i}\sin\Delta\theta)\sim r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\Delta\theta(\Delta\theta\to 0)$ “$\sim$”是等价无穷小的等价符号.

2-17 研究下列函数的可导性与解析性.

(1) $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$

(2) $f(z)=2x^3+3\mathrm{i}y^3$

(3) $f(z)=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$

(4) $f(z)=\sin x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}y$

解 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$. 仅当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时 C-R 条件成立，故此函数在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上处处可导. 而在复平面上处处不解析.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=9y^2$，因此，$f(z)$ 仅在两相交直线 $2x^2=3y^2$ 上处处可导，在全平面处处不解析.

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y;\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y$. C-R 条件处处成立，且 u,v 偏导数处处连续，因而处处可微，即 $f(z)$ 处处解析.

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\,\mathrm{ch}y,\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x\,\mathrm{sh}y;\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{sh}y,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\,\mathrm{ch}y$.

u,v 的偏导数处处连续，且 C-R 条件成立，故 $f(z)$ 处处解析.

本题给出的 $\mathrm{Re}f(z)=u$，$\mathrm{Im}f(z)=v$ 均属初等函数，故可微性不成问题，所以只要直接验证 C-R 条件，便可知其可导或解析的性质.

2-18 指出下列函数的解析性区域，并求其导数.

(1) $\dfrac{1}{z^2+1}$　　(2) $\dfrac{az+b}{cz+d}$ (c,d 至少一个不为 0)

解　(1) 除 $z=\pm \mathrm{i}$ 两点外处处解析，且

$$\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'=\frac{-2z}{(z^2+1)^2}$$

(2) 若 $c=0$，则 $d\neq 0$，函数在全平面处处解析，且 $\left(\dfrac{az+b}{d}\right)'=\dfrac{a}{d}$.

若 $c\neq 0$，则在全平面除点 $z=-d/c$ 外处处解析，且

$$\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)'=\frac{1}{(cz+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

有理的复变函数在有定义的点皆解析.

2-19　设 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，问 z_0 是否也是 $f(z)+g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$ 及 $f(z)/g(z)$ 的奇点？

解　z_0 可能是 $f(z)+g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点，也可能不是它们的奇点. 对于 $f(z)+g(z)$，如令 $g(z)=G(z)-f(z)$，其中 $G(z)$ 在 z_0 点解析，那么 z_0 是 $g(z)$ 的奇点，这时 $f(z)+g(z)=G(z)$，在 z_0 点解析.

对于 $f(z)\cdot g(z)$，只要 $f(z_0)\neq 0$，f 是连续函数，那么，令 $g(z)=\dfrac{G(z)}{f(z)}$. $G(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)\cdot g(z)=G(z)$ 在 z_0 点解析.

自然要设 $f(z_0)\neq 0$.

对于 $f(z)/g(z)$，可直接令 $g(z)=f(z)$ 那么在 z_0 点解析.

至于此三个函数在 z_0 点仍不解析的情况更多，例子留给读者自己举.

2-20　如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，而 $g(z)$ 在 z_0 点解析，那么，z_0 是否是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)\cdot g(z)$ 的奇点？

上题与本题与实函数情况相似，请读者自己比较.

解　z_0 一定是 $f(z)+g(z)$ 的奇点，可用反证法，若 $G(z)=f(z)+g(z)$ 在 z_0 点解析，则 $f(z)=G(z)-g(z)$ 也将在 z_0 点解析，与 z_0 是 $f(z)$ 的奇点矛盾.

对于 $f(z)\cdot g(z)$，只要 $g(z_0)\neq 0$，那么 $f(z)\cdot g(z)$ 在 z_0 一定不解析，同样用反证法.

设 $G(z)=f(z)\cdot g(z)$ 在 z_0 解析，则

$f(z)=G(z)/g(z)$ 在 z_0 解析，矛盾. 但若 $g(z_0)=0$，z_0 就有可能不是 $f(z)\cdot g(z)$ 的奇点了，其最简单的例子是令 $g(z)\equiv 0$，则 $f(z)\cdot g(z)$ 处处解析.

2－21 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，在区域 D 内解析，且它的实部(或虚部)u(或 v) 在 D 内为常数，证明 $f(z)$ 在 D 内为常数.

证 由 C－R 条件知 $v_x=v_y=0$，故 v 在 D 内为常数，因此 $f(z)$ 在 D 内为常数.

2－22 若 $u+\mathrm{i}v$ 是区域 D 内的解析函数，那么，$v+\mathrm{i}u$ 在 D 内是否也是解析函数？

解 只有当 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内为常数时，$v+\mathrm{i}u$ 才在 D 内解析，否则 $v+\mathrm{i}u$ 不解析.

由 C－R 条件，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，若 $v+\mathrm{i}u$ 也解析，则有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}$. 于是 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$，故 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，$v\equiv\beta$ 为常数，从而 $u=\alpha$ 也是常数.

结论，若 $u+\mathrm{i}v$ 是 D 内不为常数值的解析函数，则 $v+\mathrm{i}u$ 在 D 内不解析.

$u+\mathrm{i}v$ 解析，$v+\mathrm{i}u$ 不一定解析.

2－23 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，证明

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2.$$

证 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，故

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

由 C－R 条件得 $\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\dfrac{-uv_x+vu_x}{\sqrt{u^2+v^2}}$

故

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(x)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2&=\frac{(u^2+v^2)u_x^2+(u^2+v^2)v_x^2}{u^2+v^2}\\&=u_x^2+v_x^2=|f'(z)|^2.\end{aligned}$$

这前后几道题都是为了熟悉解析函数的充要条件.

注意 $|f(z)|$ 是实的二元函数.

2－24 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，证明

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

证 $\quad |f(z)|^2=u^2+v^2$

故
$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=2(uu_x+vv_x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx}) \tag{1}$$

同样
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=2(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy}) \tag{2}$$

由 C-R 条件,知 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_y=v_y-\mathrm{i}u_y$.

$$|f'(z)|^2=u_x^2+v_y^2=u_y^2+v_y^2$$

及
$$u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$$

将(1)、(2)两式相加得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

2-25 研究 $f(z)=(ax^2+2bxy+cy^2)+\mathrm{i}(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)$ 的解析性,其中 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 是实的常数.

注意 C-R 条件:$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,要牢记.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=2ax+2by,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2bx+2cy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2\alpha x+2\beta y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2\beta x+2\gamma y$$

u,v 可微,由 C-R 条件得

$$ax+by=\beta x+\gamma y,\qquad bx+cy=-\alpha x-\beta y$$

故当且仅当 $a=\beta=-c$ 及 $b=\gamma=-\alpha$ 时,$f(z)$ 解析,因此,选 a 及 b 为参数时,这种解析函数的一般表示式为

$$f(z)=ax^2+2bxy-ay^2+\mathrm{i}(-bx^2+2axy+by^2).$$

2-26 设 $f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}(x^3+lxy^2)$ 解析,求 m,n,l 的值.

要熟悉解析函数的 C-R 条件.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2lxy$$

由 C-R 条件,$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 知 $l=n$.

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 得 $3my^2 + nx^2 = -3x^2 - ly^2$

得 $n = l = -3, m = 1.$

2-27 如果 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 均在 D 内解析，证明 $f(z)$ 是常数.

证 设 $f(z) = u + \mathrm{i}v$，则 $\overline{f(z)} = u - \mathrm{i}v.$

由 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$

得 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$，从而 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$，$u = \alpha$ 是实常数，$v = \beta$ 是实常数，$f(z) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 是常数.

这几道题是解析函数为常数的各种条件.

还是利用 C-R 条件来证明的.

2-28 若 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|$ 在 D 内为常数，证明 $f(z)$ 在 D 内为常数.

证 即 $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ 为常数

故 $$uu_x + vv_x = uu_y + vv_y = 0$$

由 C-R 条件，$u_x = v_y, u_y = -v_x.$

得 $$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ vu_x + uu_y = 0 \end{cases}$$

若 $u^2 + v^2 = 0$，则 $f(z) \equiv 0$，是常数，若 $u^2 + v^2 \neq 0$，则 $u_x = u_y = 0$，同样 $v_x = v_y = 0$，u, v 皆是常数，从而 $f(z)$ 是常数.

2-29 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\arg f(z)$ 在 D 内为一常数，证明 $f(z)$ 为常数.

证 设 $f(z) = u + \mathrm{i}v$，由 $\arg f(z)$ 是常数便可得 $u = kv$（k 是实常数），若 $k = 0$ 或 ∞ 则 $u = 0$，或 $v = 0$，易知 $f(z)$ 是常数.

若 $k \neq 0$，则有 $u_x = kv_x = v_y, u_y = kv_y = -v_x.$

于是 $k(v_x^2 + v_y^2) = 0$，而有 $v_x = v_y = 0$，从而 v 是常数. 即知 u 是常数，故 $f(z)$ 是常数.

2-30 设 $f(z)$ 是 D 内解析函数，且在区域 D 内，有 $au + bv = c$. 其中 a, b, c 是不全为零的实常数，证明 $f(z)$ 是常数.

证 若 $c = 0$，就是上一题的结论设 $c \neq 0$，则 a, b 也不能同时为 0，不妨设 $a \neq 0$，这时如 $b = 0$，u 便是常数，$f(z)$ 也是

在解析函数条件中还要注意 u，v 一定是可微的.

常数.因此,可设 $b \neq 0$,于是

$$u = -\frac{b}{a}v + \frac{c}{a}, u_x = -\frac{b}{a}v_x = v_y, u_y = -\frac{b}{a}v_y = -v_x$$

得 $-\frac{b}{a}(v_x^2 + v_y^2) = 0$.因而 v 是常数,u 也是常数,即 $f(z)$ 是常数.

2-31 设 $f(z)$ 在 z 点可导($z \neq 0$),证明

$f'(z) = \frac{r}{z}(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r})$,其中 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$

证 由 2-16 题的解 2 便知,在极坐标下

$$f'(z) = \frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}}(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}) = \frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}}(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \mathrm{i}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta})$$

(后面的式子是顺便写出来的).故

$$f'(z) = \frac{r}{z}(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}).$$

也可写作 $$f'(z) = \frac{1}{z}(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \theta}).$$

本题是在极坐标下,可导函数的求导公式.

在极坐标下的 C-R 条件见 2-16 题.

2-32 如果 $f(z)$ 是解析函数,证明 $\overline{\mathrm{i}\,\overline{f(z)}}$ 也是解析函数.

证 $\overline{\mathrm{i}\,\overline{f(z)}} = -\mathrm{i}\,\overline{\overline{f(z)}} = -\mathrm{i}f(z)$,故 $\overline{\mathrm{i}\,\overline{f(z)}}$ 是解析函数.

共轭运算.

2.2 初等函数及其解析性

2-33 若 $e^{z_1} = e^{z_2}$,则( ).

(A) $z_1 = z_2$

(B) $z_1 = z_2 + 2k\pi$ (k 为任意整数)

(C) $z_1 = z_2 + \mathrm{i}k\pi$　　(D) $z_1 = z_2 - 2\mathrm{i}k\pi$

解 由于 e^z 的周期为 $2\pi\mathrm{i}$,故有

$z_1 - z_2 = 2m\pi\mathrm{i}$ (取 $m = -k$, k 为任意整数)

得 $z_1 = z_2 - 2k\pi\mathrm{i}$.　　选(D).

复变量的指数函数具有周期性.

2-34 关于复数的对数函数,下面公式正确的是( ).

(A) $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$

(B) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

(C) $\mathrm{Ln}z^2 = 2\mathrm{Ln}z$

(D) $\ln z^2 = 2\ln z$

解 由定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1 z_2) &= \mathrm{Ln}|z_1 z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1 z_2) \\ &= \mathrm{Ln}|z_1| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Ln}|z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z_2 \\ &= \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2.\end{aligned}$$

选(A).

(B) 不正确在于 $\ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\arg(z_1 z_2)$

而当 $\arg z_1 + \arg z_2 > \pi$，或 $\arg z_1 + \arg z_2 \leqslant -\pi$ 时，$\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$，故(B) 不成立.

要注意 $\mathrm{Ln}z$ 与 $\ln z$ 的联系与区别.

2-35 $\mathrm{Ln}(-1)$ 和它的主值分别是(　).

(A) $\mathrm{Ln}(-1) = (k + \frac{1}{2})\pi\mathrm{i}$，($k$ 为整数) 主值 $\ln(-1) = 0$

(B) $\mathrm{Ln}(-1) = (2k-1)\pi\mathrm{i}$，主值 $\ln(-1) = \pi\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{Ln}(-1) = (2k-1)\pi\mathrm{i}$，主值 $\ln(-1) = -\pi\mathrm{i}$

(D) $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(-1)$，主值 $\ln(-1) = \pi\mathrm{i}$

解 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(-1) = \mathrm{i}(2m+1)\pi$.

取 $m = k-1$(m 为整数，k 也是整数) 得

$\mathrm{Ln}(-1) = \mathrm{i}(2k-1)\pi$，　$\ln(-1) = \pi\mathrm{i}$.　　选(B).

2-36 设 k 为整数，则方程 $\sin z = 0$ 的根是(　).

(A) $z = k\pi\mathrm{i}$　　(B) $z = 2k\pi$

(C) $z = k\pi$　　(D) $z = 2k\pi$

解 即 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 0$，即 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1$. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-2y}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) = 1$，故 $y = 0$，$\cos 2x = 1$，$x = k\pi$.

选(C).

注意复变量的三角函数与实变量三角函数的联系与差别.

2-37 若 k 为整数，则 $\cos z = 0$ 的根是(　).

(A) $2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$　　(B) $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

(C) $k\pi + \mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $2k\pi + \mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}$

解 即 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = -1$

$\mathrm{e}^{-2y}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) = -1$

$y=0,\cos 2x=-1$ 及 $\sin 2x=0,x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$. 选(B).

2-38 设 $w=\sqrt{z^2+1}$,则 $w(\mathrm{i}+2)=($ $)$.

(A) $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ (B) $\pm 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$

(C) $2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$ (D) $\pm 2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$

复数开平方一定是两个根.

解 $z^2+1=4+4\mathrm{i}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

故 $$\sqrt{z^2+1}=2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi/4+2k\pi}{2}}\quad(k=0,1)$$

$$=2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} \text{ 或 } 2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{8}+\pi)}=-2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$$

选(D).

2-39 比较$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{i}}$与$\mathrm{e}^{\mathrm{i}^{\mathrm{i}}}$两个数.

$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{i}}$与$\mathrm{e}^{\mathrm{i}^{\mathrm{i}}}$显然不同,举此例还有个指数函数是多值函数问题值得注意.

解 对于$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{i}}$,可令 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}}=z$

有 $$z^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)]}=\mathrm{e}^{-(1+2k\pi)}(k\text{ 是整数})$$

对于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}^{\mathrm{i}}}$,得先算 $\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]}=\mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$($k$是任意整数)

故 $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}^{\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-(\frac{\pi}{2}+2\mathrm{k}\pi)}$$

2-40 判断下列关系是否正确.

(1) $\overline{\mathrm{e}^{z}}=\mathrm{e}^{\bar{z}}$ (2) $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$.

本题说明共轭运算法则对指数函数依旧正确.

共轭运算法则对指数函数正确对三角函数、双曲函数自然也正确.

解 (1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{x}(\cos x+\mathrm{i}\sin y)$$

$$\mathrm{e}^{\bar{z}}=\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{x}(\cos x-\mathrm{i}\sin y)=\overline{\mathrm{e}^{z}}$$

故 $\overline{\mathrm{e}^{z}}=\mathrm{e}^{\bar{z}}$ 正确.

(2) $$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\overline{\cos z}=\frac{\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}+\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{z}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{z}}}{2}=\cos\bar{z}.$$

因此(2)也正确.

2-41 求方程 $\mathrm{e}^{z}+1=0$ 的解

解 $\mathrm{e}^{z}=-1,z=\ln(-1)=\mathrm{i}(\pi+2k\pi)$.

即此方程的解为 $z=(2k+1)\mathrm{i}\pi$ (k 是整数).

解方程要求出通解.

2-42 解方程：$\sin z+\cos z=0$

解 1 即$\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0$

或
$$e^{iz}(1-i)+e^{-iz}(1+i)=0$$
$$e^{2iz}=\frac{-1+i}{1-i}=\frac{-2i}{2}=-i$$
$$2iz=\ln(-i)=i(2k\pi-\frac{\pi}{2})$$
$$z=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

解 2 $\sin z+\cos z=\sqrt{2}\sin(z+\dfrac{\pi}{4})=0$

故
$$\sin(z+\frac{\pi}{4})=0$$
$$z+\frac{\pi}{4}=k\pi,z=k\pi-\frac{\pi}{4}.$$

这都与求三角方程通解很类似.

2-43 求 $\sin(1+i)$ 的值.

解 1 用公式
$$\begin{aligned}\sin(1+i)&=\frac{e^{-i+i}-e^{-i+1}}{2i}\\&=\frac{1}{2i}[e^{-1}(\cos1+i\sin1)-e(\cos1-i\sin1)]\\&=\frac{-i}{2}\cos1(e-e^{-1})+\frac{1}{2}\sin1(e+e^{-1})\\&=\mathrm{ch}1\cdot\sin1+i\cos1\cdot\mathrm{sh}1\end{aligned}$$

解 2 用 $\sin(1+i)=\sin1\cos i+\sin i\cos1$
$$=\sin1\cdot\mathrm{ch}1+i\,\mathrm{sh}1\cdot\cos1$$

$\sin(1+i)=x+iy$ 是复数，要求出它的实部与虚部.

2-44 证明三角函数的下列公式.

(1) $\sin^2z+\cos^2z=1$

(2) $\sin(-z)=-\sin z$

(3) $\cos(-z)=\cos z$

(4) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

(5) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

(6) $\sin(\dfrac{\pi}{2}-z)=\cos z$

对复数而言，这些三角函数的基本公式依旧成立.

证明这些公式，一方面可以熟悉这些重要的函数，另一方面也要

证　(1) $\sin^2 z+\cos^2 z=\dfrac{1}{4}[(e^{iz}+e^{-iz})^2-(e^{iz}-e^{-iz})^2]$
$=1.$

熟悉这些公式.

(2),(3),(6) 的证明留给读者完成.

(4) $\sin(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}]$

$$=\frac{1}{4i}[(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})$$
$$+(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})]$$
$$=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$

(5) $\cos(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}]$

$$=\frac{1}{4}[(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})$$
$$+(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})]$$
$$=\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$
$$=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

2-45　证明(1) $|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y.$

(2) $|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y.\ (z=x+iy).$

从这里也可说明 $\sin z$ 与 $\cos z$ 并非有界函数.

证　(1) $\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\dfrac{1}{2}(e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix})$

$$=\frac{1}{2}[(e^{y}+e^{-y})\cos x+i(e^{-y}-e^{y})\sin x]$$

故　$|\cos z|^2=\dfrac{1}{4}[(e^{y}+e^{-y})^2\cos^2 x+(e^{y}-e^{-y})^2\sin^2 x]$

$$=\frac{1}{4}[\{(e^{y}+e^{-y})^2-(e^{y}-e^{-y})^2\}\cos^2 x+(e^{y}-e^{-y})^2]$$
$$=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y.$$

(2) $\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix})$

$$=\frac{1}{2i}[(e^{y}-e^{-y})\cos x+i(e^{y}+e^{-y})\sin x]$$

故　$|\sin z|^2=\dfrac{1}{4}[(e^{y}-e^{-y})^2\cos^2 x+(e^{y}+e^{-y})^2\sin^2 x]$

$$=\frac{1}{4}\{(e^{y}-e^{-y})^2+[(e^{y}+e^{-y})^2-(e^{y}-e^{-y})^2]\sin^2 x\}$$

$= \mathrm{sh}^2 y + \sin^2 x.$

2-46 证明对数函数的下列性质.

(1) $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2$

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2$

并说明以上性质对于函数 $\ln z$ 未必成立.

这两个公式对 $\ln z$ 也成立吗?这又是 $\mathrm{Ln} z$ 与 $\ln z$ 的差别.

证 (1)
$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1 z_2) &= \mathrm{Ln}|z_1 z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1 z_2)\\ &= \mathrm{Ln}|z_1| + \mathrm{i}\mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Ln}|z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg} z_2\\ &= \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2.\end{aligned}$$

(2) 可用(1) 的结果:

$$\mathrm{Ln} z_1 = \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right) = \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} + \mathrm{Ln} z_2.$$

故 $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2.$

以上等式成立的意思是说

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2)$ 与 $\mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2$ 是相同的集合. 而对于主值:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\arg(z_1 z_2),$$
$$\ln z_1 = \ln|z_1| + \mathrm{i}\arg z_1$$
$$\ln z_2 = \ln|z_2| + \mathrm{i}\arg z_2.$$

不一定总有 $\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 z_2)$.

如 $z_1 = -1 - \mathrm{i}, z_2 = -\mathrm{i}$,则 $z_1 z_2 = -1 + \mathrm{i}$

$$\arg(z_1) = -\frac{3}{4}\pi, \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}, \arg(z_1 z_2) = \frac{3}{4}\pi$$

$$\arg z_1 + \arg z_2 = -\frac{5}{4}\pi \neq \arg(z_1 z_2).$$

故 $\ln z_1 + \ln z_2$ 一般不一定与 $\ln z_1 z_2$ 相等,但当

$\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leqslant \pi$ 时,公式成立,如

$$\ln(-1) = \ln(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}) = \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}\pi \text{ 成立.}$$

但 $\ln(-1) = \ln[(-\mathrm{i})(-\mathrm{i})] = \mathrm{i}\left(-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\pi$ 不成立.

注意 $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ 这个等式成立是有条件的.

2-47 说明下列等式是否正确.

(1) $\mathrm{Ln} z^2 = 2\mathrm{Ln} z$; (2) $\mathrm{Ln}\sqrt{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln} z$

$\ln z^2 \neq 2\ln z$ 这是复函数与实函数不同之处,值得

解 (1) 不正确,因为

$$\mathrm{Ln}z^2 = 2\ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}z^2$$

而 $2\mathrm{Ln}z = 2\ln|z| + 2\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}z$.

由于 $2\mathrm{Arg}z = 2\arg z + 4k_1\pi$,($k_1$ 是整数)

而 $\mathrm{Arg}z^2 = 2\arg z + 2k_2\pi$,($k_2$ 是整数)

两个集合不相同.

(2) 正确 $\arg\sqrt{z}$ 一般有两个值,一个是 $\frac{1}{2}\arg z$,另一个是 $\frac{1}{2}\arg z + \pi$.

故 $\mathrm{Ln}\sqrt{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + \mathrm{i}(\frac{1}{2}\arg z + k\pi)$

而 $$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z = \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{\mathrm{i}}{2}(\arg z + 2\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + \mathrm{i}(\frac{1}{2}\arg z + m\pi). \quad ①$$

而 $\sqrt{2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$ 或 $-1 - \mathrm{i}$.

$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + 2m_1\pi) \quad ②$$

$$\mathrm{Ln}(-1-\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}(2m_2\pi - \frac{3}{4}\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}[(2m_2 - 1)\pi + \frac{\pi}{4}] \quad ③$$

② 式对应于 ① 式 $k = 2m$,为偶数时的值;③ 式对应于 ① 式 $k = 2m_2 - 1$ 即奇数的值,故它们是相等的.

反过来,便可以看出(1) 不成立的原因.

若 $$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})^2 = \ln 2 + 2\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i})$$

$$= \ln 2 + \mathrm{i}(\frac{\pi}{2} + 4k\pi) \quad ④$$

而 $$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})^2 = \ln 2\mathrm{i} = \ln 2 + \mathrm{i}(\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi) \quad ⑤$$

④ 式比 ⑤ 式中的虚部少了“一半”原因是尚有

$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})^2 = \mathrm{Ln}(-1-\mathrm{i})^2$$

而 $2\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})$ 与 $2\mathrm{Ln}(-1-\mathrm{i})$ 是不一样的.

注意.

$$\ln\sqrt{z} = \frac{1}{2}\ln z$$

都是成立的.

2-48 证明双曲函数的下列性质.

(1) $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$

复变函数的双

(2) $\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2$

(3) $\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$

证 (1) $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=\dfrac{(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})^2}{4}-\dfrac{(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})^2}{4}=1$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{sh}(z_1+z_2)&=\frac{\mathrm{e}^{z_1+z_2}-\mathrm{e}^{-z_1-z_2}}{2}\\&=\frac{1}{4}[(\mathrm{e}^{z_1}-\mathrm{e}^{-z_1})(\mathrm{e}^{z_2}+\mathrm{e}^{-z_2})\\&\quad+(\mathrm{e}^{z_1}+\mathrm{e}^{-z_1})(\mathrm{e}^{z_2}-\mathrm{e}^{-z_2})]\\&=\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2.\end{aligned}$$

(3) 可仿(2)的方法,证明略.

曲函数与实双曲函数有相同的基本公式.

2-49 求下列各式的值:

(1) $\exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4]$ (2) 3^{i}

(3) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ (4) $\ln(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$

解 (1) $$\begin{aligned}\exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4]&=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{i}).\end{aligned}$$

(2) $3^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln 3+\mathrm{i}2k\pi)}=\mathrm{e}^{-2k\pi}(\cos\ln 3+\mathrm{i}\,\sin\ln 3)$,($k$ 是整数)

(3) $$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}\\&=\mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\sin\ln\sqrt{2})\end{aligned}$$

(4) $\ln(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=-(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi)+\mathrm{i}\ln\sqrt{2}$ (k 是整数).

注意复函数的多值性与实函数是不一样的.

2-50 讨论指数函数 $w=\mathrm{e}^z$ 的解析性,并求其导数.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$,

则 $$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$$

$u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$,均可微,且满足 C-R 条件:

$$u_x=v_y=\mathrm{e}^x\cos y, u_y=-v_x=-\mathrm{e}^x\cos y.$$

故 e^z 处处可导,即在全平面解析,且

$(\mathrm{e}^z)'=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y=\mathrm{e}^z.$

$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$ 与实函数相同.

2-51 用极坐标的方法导出 $(z^n)'=nz^{n-1}$ 的公式.

$(z^n)' = nz^{n-1}$

解　首先，用 2－16 题的结果，知

$$f'(z)=\frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{re^{i\theta}}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

设 $z=re^{i\theta}$，则

$$f(z)=z^n=r^n\cos n\theta+inr^{n-1}\sin n\theta)$$
$$=nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}=nz^{n-1}$$

也是与实函数相同.

2－52　讨论函数 $\ln z$ 和 $\mathrm{Ln}z$ 的解析性及其导数.

解　$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z$，此函数在 $z=0$ 点和负实轴上不连续，在 $z=0$ 时 $\ln|z|$ 无意义；在负实轴 $y=0$ 上，$x<0$，当 $\lim\limits_{y\to 0^+}\arg z=\pi$；而 $\lim\limits_{y\to 0^-}(\arg z)=-\pi$，故不连续；从而 $\ln z$ 不可导. 而除 $z=0$ 和负实轴外，反函数 $z=e^w$ 存在，且 $z'=e^w\neq 0$，故

$$(\ln z)'=\frac{1}{e^2}=\frac{1}{z}$$

即除原点和负实轴外，$\ln z$ 处处可导，且

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}$$

对于 $\mathrm{Ln}z=\ln z+2k\pi i$（$k$ 为整数），对每个固定的 k，$\mathrm{Ln}z$ 也是除原点和负实轴外处处可导，且

$$(\mathrm{Ln}z)'=(\ln z)'=\frac{1}{z}.$$

即 $\mathrm{Ln}z$ 在它每一个单值的分支上（即对每个固定整数 k），除原点和负实轴外处处可导，且 $(\mathrm{Ln}z)'=\dfrac{1}{z}$.

$\mathrm{Ln}z$ 是多值函数，求导数都只能在等价单值分支上做.

2－53　研究幂函数 $w=z^\alpha$ 的解析性质，并求其导数.

解　$w=e^{\alpha\mathrm{Ln}z}=e^{\alpha(\ln z+i2k\pi)}$

因此，z^α 是多值函数，对应于 $\mathrm{Ln}z$ 的每个单值分支，幂函数也是单值的，且 $\mathrm{Ln}z$ 的每个单值分支上除 $z=0$ 和负实轴外处处解析，因而，幂函数在每个单值分支（即对每个固定的 k），除原点与负实轴外处处解析，且

$$(z^\alpha)'=[e^{\alpha(\ln z+i2k\pi)}]'=z^\alpha\cdot\frac{\alpha}{z}=\alpha z^{\alpha-1}\text{，对每个固定的 }k\text{ 均}$$

成立.

复变函数的初等函数，以指数函数为基础.

2-54 求$(\sqrt{z})'\Big|_{z=-1}$的值.

解 $\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z}=e^{\frac{1}{2}(\ln z+\mathrm{i}2k\pi)}$有2个单值分支,对应$k=0$和$k=1$.

注意$\sqrt{z}$的两个分支不一样.

故 $(\sqrt{z})'_{z=-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\Big|_{z=-1}=\dfrac{1}{\pm 2\mathrm{i}}=\pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

即对应$k=0$的分支$\sqrt{z}\Big|_{z=-1}=e^{\frac{1}{2}(\mathrm{i}\pi)}=\mathrm{i}$

这时$\sqrt{z}'\Big|_{z=-1}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

而对应$k=1$的分支$\sqrt{z}'\Big|_{z=-1}=\dfrac{1}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

2-55 下面说明:1° 函数$w=f(z)$在z_0点解析,即$f(z)$在z_0点可导. 2° $f(z)$在z_0点可导即$f(z)$在z_0可微. 3° $f(z)$在某区域内可导即$f(z)$在此区域内解析,那么( ).

在复变函数中区域是指连通的开集.

(A) 1°,2°,3°都正确　　(B) 只有2°正确

(C) 只有2°,3°正确　　(D) 只有3°正确

解 函数解析的定义是区域的性质,$f(z)$在z_0点解析是指$f(z)$在z_0的一个邻域内处处可导,因此1°不正确,2°、3°皆正确. 选(C).

2-56 $(-1)^{\mathrm{i}}$的主值是( ).

(A) $e^{\frac{\pi}{2}}$　(B) $e^{-\frac{\pi}{2}}$　(C) e^{π}　(D) $e^{-\pi}$

解 $(-1)^{\mathrm{i}}=(e^{\mathrm{i}\pi})^{\mathrm{i}}=e^{-\pi}$. 选(D).

$-1=e^{\mathrm{i}\pi}$.

2-57 设$f(z)$在区域G内解析,则对于命题

1° 若$f(z)$恒取实数值则$f(z)$是常数.

2° 若$\overline{f(z)}$在G内解析,则$f(z)$是常数.

3° $|f(z)|$在G内是常数,则$f(z)$是常数.

4° $f'(z)=0$则$f(z)$是常数.

正确的有( ).

(A) 4个　(B) 3个　(C) 2个　(D) 1个

解 1° 由$f(z)=u+\mathrm{i}v$知$v=0$,$f(z)$解析,由C-R条件知$u_x=u_y=0$,故u为常数即$f(z)$为常数.

2° 若$\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$解析,则有

这4个命题都是正确的命题,2°说明一般$f(z)$解析且不是常数函数,则$\overline{f(z)}$不解析,从而$|f(z)|$也不一定解析.

$u=\dfrac{1}{2}(f(z)+\overline{f(z)})$ 解析，由 1° 知，u 为常数，从而 $v_x=v_y=0$，v 亦为常数，于是 $f(z)$ 为常数.

3° 若 $|f(z)|$ 为常数，则 $u^2+v^2=C$. 从而 $u_x+v_x=u_y+v_y=0$，加上 C-R 条件，知 $u=c_1$，$v=c_2$ 皆是常数.

4° $f'(z)=0$，$f(z)$ 为常数是显然成立的.

故四个命题都正确. 选(A).

2-58 函数 $f(z)=z|z|$ (　).

(A) 在全平面解析　　(B) 仅在原点解析

(C) 在原点可导但不解析　　(D) 处处不可导

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $z|z|=\sqrt{x^2+y^2}(x+\mathrm{i}y)$ 处处不满足 C-R 条件. 选(D).

实函数 $x|x|$ 处处可导，而 $z|z|$ 作为复函数处处不可导！

2-59 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\arg f(z)$ 在 G 内是常数，则(　).

(A) 这样的函数不存在

(B) $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\theta u(x,y)$，$u$ 是任意二阶可导函数，θ 是常实数

(C) $f(z)$ 是不取 0 值的常数

(D) $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}u(y,x)$，$u(x,y)$ 是任一具有二阶导数的实函数

解 由 $\arg f(z)$ 是常数知

$\dfrac{v}{u}=c$，$v=cu$ (c 是不为 0 的实常数)，由 C-R 条件，得 $u_x=v_x=u_y=v_y=0$ 故 $f(z)$ 是不取 0 值的常数. 选(C).

$f(z)$ 取 0 值 $\arg f(z)$ 无意义.

选项(B) 看起来是对的，但还要看 C-R 条件.

2-60 设 $f'(z)=4z-3$，且 $f(1+\mathrm{i})=-3\mathrm{i}$，则 $f(z)=$ (　).

(A) $2z^2-3z-\mathrm{i}$　　(B) $2z^2-3z+3\mathrm{i}$

(C) $2z^2+3z-3+4\mathrm{i}$　　(D) $2z^2-3z+3-4\mathrm{i}$

解 $f(z)=2z^2-3z+\alpha$，令 $z=1+\mathrm{i}$，$z^2=2\mathrm{i}$，

$f(1+\mathrm{i})=4\mathrm{i}-3-3\mathrm{i}+\alpha=-3\mathrm{i}$，$\alpha=3-4\mathrm{i}$. 选(D).

此题类似实函数的积分.

2-61 函数 $f(z)=\sqrt{z}$ 的解析区域是(　).

(A) 全复平面

(B) 除原点外的复平面

(C) 除实轴外的全平面

(D) 除原点与负实轴外的全平面

解 由$\sqrt{z}=(e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z})$知,因为$\mathrm{Ln}z$除原点与负实轴外处处解析. 选(D).

2.3 平面场的复势

2-62 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是平面流速场$v=\rho(x,y)+\mathrm{i}\theta(x,y)$的复势函数,则( ).

(A) $v=f'(z)$ (B) $f=v'(z)$

(C) $f=\overline{v'(z)}$ (D) $v=\overline{f'(z)}$

解 由定义应选(D).

这两题是复势的定义,目的是请读者留意.

2-63 设$f(z)$为平面静电场的复势函数,E为该电场的场强,则( ).

(A) $E=\overline{\mathrm{i}f'(z)}$ (B) $E=\overline{f'(z)}$

(C) $E=-\mathrm{i}\,\overline{f'(z)}$ (D) $E=-\overline{f'(z)}$

解 由定义,应选(C).

2-64 叙述平面场的概念,说明如何用复数表示平面场.

解 平面场是特殊的三维向量场.即它每点的场向量$\boldsymbol{A}$都平行于一个平面,我们一般用xOy面表示此平面,且过此平面上任一点作垂直于xOy面的直线,在此直线上每点的场向量皆相等,即场向量只与点(x,y)有关.因此,研究这种场,只需在xOy面上研究,若$\boldsymbol{A}$是稳定场,即与时间t无关,那么可用复函数来表示场$\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}=A(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y)\quad(z=x+\mathrm{i}y).$$

P、Q是场$\boldsymbol{A}$的两个分量函数.

这样,我们给复变函数赋予物理意义:任一稳定平面场,可用一复变函数表示;反之,任一复变函数也可理解为以P、Q为分量的平面稳定场.

用复函数表示平面场均是稳定场.

2-65 叙述平面场复势的概念.

解 设 $A(z) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$ 是个无源、无旋场.

因为无源,有 $\mathrm{div}A = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$,若 P、Q 是具有一阶连续偏导数的函数,对存在一二元函数 $u = u(x,y)$,使

$$\mathrm{d}u = -Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y.$$

这时,曲线 $u(x,y) = c$(c 是实常数)的法向量为$(u_x, u_y) = (-Q, P)$,垂直于在(x,y)点的场向理,故曲线 $u(x,y) = c$ 上任一点(x,y)的切线与场向量平行,故称此曲线族为场 A 的流线,也称为力线,而称函数 u 为流函数或力函数.

对于无旋场,即 $\mathrm{rot}A = 0$,大家知道,也叫有势场,即存在势函数 $v = v(x,y)$,使

$$\mathrm{d}v = -P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y \quad \text{(一般在静电场中这样用)}$$

曲线 $$v(x,y) = c$$

称为场 A 的等势线也叫等位线或等值线.

$$A = -\mathrm{grad}v$$

由流函数为实部、势函数为虚部的复变函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 称为场 A 的复势函数,简称为复势.

由于 $$u_x = v_y = -P,\ u_y = -v_x = -Q.$$

故 $f(z)$ 是解析函数,而 $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x$,从而有 $A(z) = \overline{\mathrm{i}f'(z)}$.

反之,给定一解析函数,可对应一平面无源、无旋场,$A = \overline{\mathrm{i}f'(z)}$.

以上的复势,多用于平面静电场,而在平面流场中,定义势函数与电场中势函数差一个符号,即

$$\mathrm{d}v = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

$$A = \mathrm{grad}v.$$

这时,复势的实部是势函数,虚部是流函数

$$f(z) = v(x,y) + \mathrm{i}u(x,y)$$

也是解析函数,而 $A = \overline{f'(z)}$.

顺便提及,在 $A \neq 0$ 时,等位线与流线相位正交.

复势对研究平面场的问题带来了方便.

正是在平面流场和电场中的应用,使复变函数得以发展.

2-66 一无限长直线 L 上均匀分布着线密度为 q 的电荷,求所产生的静电场及复势.

解 很明显所求的是平面场，任意作一与 L 垂直的平面为复平面 z，垂足为原点，在 L 上任取二点 h 及 $h+\mathrm{d}h$，与平面距离为 h 和 $h+\mathrm{d}h$，(图2.1). 当 $\mathrm{d}h$ 很小时，将其视为一点，电荷为 $\mathrm{d}Q=q\mathrm{d}h$，由库仑定律，平面上任一点 z 处的电场强度为

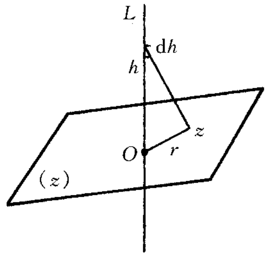


图 2.1

$$\left|\mathrm{d}\boldsymbol{E}\right| = \frac{q\mathrm{d}h}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)}.$$

而 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在 z 平面的投影为

$$\mathrm{d}E = \frac{rq\mathrm{d}h}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}.$$

直线在此点的场强大小为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{rq\mathrm{d}h}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}$$

令 $\dfrac{h}{r}=\tan\varphi$ 得

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

其方向与 r 的指向一致，故

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|z|^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\bar{z}}.$$

求静电场的复势，就是要求函数

$\overline{\mathrm{i}E} = \dfrac{-\mathrm{i}q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{z}$ 的原函数，故复势

$f(z) = -\mathrm{i}\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Ln}z + c$ ($c=c_1+\mathrm{i}c_2$ 是复常数). 其势函数为

$$v(x,y) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{|z|}+c_1.$$

力函数为

$$u(x,y) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Arg}z + c_2.$$

用复势来描述静电场给研究静电场带来了方便.

2-67 设平面流体场的复势为 $f(z)=az$（a 为正实数），求流速、流函数、势函数.

解 $$f(z)=ax+ay\mathrm{i}$$

故势函数为 $u=ax$，流函数 $v=ay$，流速中

$$P=\frac{\partial v}{\partial y}=a, Q=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

流速是常速度 a，方向平行实轴并与实轴方向一致.

解析函数的应用主要是在平面静电场和流场的研究上，请注意它们的物理意义.

2-68 设平面稳定流体场的复势为：

$$f(z)=K\left(z+\frac{a^2}{z}\right)\quad (K>0, a>0).$$

求流速及作出流线的草图.

解 流速 $A=\overline{f'(z)}=K\left(1-\dfrac{a^2}{\bar{z}^2}\right)$.

流函数是 $f(z)$ 的虚部.

$$\begin{aligned}v&=\frac{1}{2\mathrm{i}}[f(z)-\overline{f(z)}]\\&=\frac{K}{2\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}y-\frac{2\mathrm{i}a^2y}{x^2+y^2}\right)\\&=Ky\,\frac{x^2+y^2-a^2}{x^2+y^2}=c\end{aligned}$$

取 $c=0$ 得 $y=0$ 或 $x^2+y^2=a^2$ 均是流线，注意到其每点的切线与 $A=K\left(1-\dfrac{a^2}{\bar{z}^2}\right)$ 平行，且 $\lim\limits_{z\to\infty}A=K$，即当 $|z|\to\infty$ 时，流体以等速 K 沿平行于 x 轴且指向与 x 轴一致的方向流动（如图 2.2）.

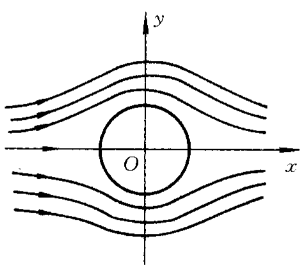


图 2.2

第 3 章 复变函数的积分

3.1 复变函数积分、柯西积分定理与解析函数的导数

3-1 设 C 是 $z = e^{i\theta}$，θ 从 $-\pi$ 至 π 的一周，则 $\int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z = ($ $)$.

(A) $-\pi$ (B) π (C) $-\pi i$ (D) πi

解 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, \mathrm{Re}(z) = \cos\theta, \mathrm{d}z = (-\sin\theta + i\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

故 $\int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z = \int_{\pi}^{-\pi} -\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta + i\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \pi i$.

选(D).

复变函数的积分本质上是二元函数的第二类线积分.

积分时用到 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \pi$; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0$

3-2 设 C 同 3-1 题，则 $\int_C \mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z = ($ $)$.

(A) $-\pi$ (B) π (C) $-\pi i$ (D) πi

解 同上题，$\mathrm{d}z = (-\sin\theta + i\cos\theta)\mathrm{d}\theta, \mathrm{Im}(z) = \sin\theta$，故

原式 $= \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2\theta + i\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta = -\pi$. 选(A).

3-3 积分曲线 C 同上题，则 $\int_C \bar{z}\mathrm{d}z = ($ $)$.

(A) 0 (B) 2π (C) $2\pi i$ (D) -2π

解 同上 $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta, \bar{z} = e^{-i\theta}$

故 原式 $= i\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i$. 选(C).

3-4 设 C 为 $z=e^{i\theta}$，θ 从 $-\dfrac{\pi}{2}$ 至 $\dfrac{\pi}{2}$ 的一段，则 $\int_C |z| dz = (\quad)$.

(A) i (B) $2i$ (C) $-2i$ (D) $-i$

解 在 C 上 $|z|=1$. $dz = ie^{i\theta}d\theta$.

故
$$\text{原式} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} de^{i\theta} = e^{i\theta}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2i. \qquad \text{选(B).}$$

3-5 设 C 是 $z=iy$，$-1\leqslant y\leqslant 1$ 沿虚轴自下而上的线段，则 $\int_C |z| dz = (\quad)$.

(A) i (B) $-i$ (C) $2i$ (D) $-2i$

解 $|z|=|y|$，$dz = idy$，故

原式 $= i\int_{-1}^{1} |y| dy = i$. 选(A).

在 C 上的点应满足 C 的方程，故 $z=iy$，3-5 题及 3-6 题都是如此.

3-6 设 C 是从 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线段，则 $\int_C |z| dz = (\quad)$.

(A) $1+i$ (B) $\dfrac{1+i}{2}$ (C) $e^{-\frac{\pi}{4}i}$ (D) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

解 在 C 上 $z = x+ix = (1+i)x$.

$|z| = \sqrt{2}x \ (0\leqslant x\leqslant 1)$.

故
$$\text{原式} = \sqrt{2}\int_0^1 (1+i)x dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4}i}. \qquad \text{选(D).}$$

3-7 设 C 是由 $z=0$ 到 $z=1$ 再到 $z=1+i$ 的折线段，则 $\int_C |z| dz = (\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{2} + i(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\ln(1+\sqrt{2}))$

(B) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$

(C) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$

(D) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))$

解 C 分两段，从 $z=0$ 到 $z=1$，C_1 的方程是 $z=x$，$|z|$

从 3-4 题至 3-7 题这几题又都说明 $\int_C |z| dz$ 与路径有关.

$= x$，在这段上

$$\int_{C_1} |z| \, dz = \frac{1}{2}.$$

再从 $z = 1$ 到 $z = 1 + i$，C_2 的方程是 $z = 1 + iy$，$|z| = \sqrt{1 + y^2}$，$dz = i dy$，故

$$\begin{aligned}\int_{C_2} |z| \, dz &= i\int_0^1 \sqrt{1 + y^2} dy \\ &= iy\sqrt{1 + y^2}\Big|_0^1 - i\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1 + y^2}} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{i}{2}\int_0^1 \sqrt{1 + y^2} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{i}{2}\ln(y + \sqrt{1 + y^2})\Big|_0^1 \\ &= i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})\right)\end{aligned}$$

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}.$$

选(B).

3－8　设 C 为从 $z = 0$ 到 $z = 2 + i$ 的线段，则 $\int_C \mathrm{Re}(z) dz = (\quad)$.

(A) $2 + i$　(B) $2 - i$　(C) $1 + i/2$　(D) $1 - i/2$

解　直线的方程是 $z = 2y + iy$，$dz = (2 + i)dy$

原式 $= (2 + i)\int_0^1 2y dy = 2 + i.$　选(A).

3－8、3－9 题说明 $\int_C \mathrm{Re}(z) dz$ 与路径有关.

3－9　设 C 是从 $z = 0$ 到 $z = i$ 再到 $z = 2 + i$ 的折线，则 $\int_C \mathrm{Re}(z) dz = (\quad)$.

(A) 2　(B) 2i　(C) $2 + 2i$　(D) $2 - 2i$

解　沿虚轴 C_1 时 $\mathrm{Re}(z) = 0$，故积分为 0；沿 C_2 时，方程是 $z = x + i$，$dz = dx$，$\mathrm{Re}(z) = x$

故　$\int_C = \int_{C_2} = \int_0^2 x dx = 2.$　选(A).

C_2 是平行于实轴的线段.

3－10　设 C 是 $z = (1 + i)t$，t 从 1 到 2 的线段，则 $\int_C \arg z dz = (\quad)$.

以下是给定曲线 C 的参数方程

(A) $\frac{\pi}{4}$　(B) $\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$　(C) $\frac{\pi}{4}(1+\mathrm{i})$　(D) $1+\mathrm{i}$

解　在此直线上 $\arg z=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{d}z=(1+\mathrm{i})\mathrm{d}t$

$\int_C \arg z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}(1+\mathrm{i})$.　选(C).

做 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

3-11　设 C 是 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, θ 从 0 至 π 的一段,则 $\int_C \arg z\mathrm{d}z=$ (　).

(A) $-\pi-2\mathrm{i}$　(B) $-\pi$　(C) $\pi+2\mathrm{i}$　(D) $\pi-2\mathrm{i}$

解　原式 $=\int_0^{\pi}\theta\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

$=-\pi+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big|_0^{\pi}=-\pi-2\mathrm{i}$.　选(A).

这里用了分部积分法.

3-12　设 C 为 $z=(1-\mathrm{i})t$, t 从 1 到 0 的一段,则 $\int_C \bar{z}\mathrm{d}z=$ (　).

(A) 1　(B) -1　(C) i　(D) $-\mathrm{i}$

解　$\bar{z}=(1+\mathrm{i})t$, $\mathrm{d}z=(1-\mathrm{i})\mathrm{d}t$

故　原式 $=2\int_1^0 t\mathrm{d}t=-1$.　选(B).

线积分中,z 在曲线上,故 $\bar{z}=(1+\mathrm{i})t$.

3-13　设 C 是 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, θ 从 0 至 2π 的一周,则 $\int_C \bar{z}\mathrm{d}z=$ (　).

(A) 0　(B) 2π　(C) -2π　(D) $2\pi\mathrm{i}$

解　$\bar{z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

原式 $=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}$.　选(D).

本题实质上是 $\int_{|z|}\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi\mathrm{i}$.

3-14　设 C 是单位圆 $|z|=1$ 的上半部分逆时针方向,则 $\int_C(z-1)|\mathrm{d}z|=$ (　).

(A) $2\mathrm{i}-\pi$　(B) $\pi-2\mathrm{i}$　(C) π　(D) $2\mathrm{i}$

解　注意 $|\mathrm{d}z|=\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta$, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

故　原式 $=\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1)\mathrm{d}\theta=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big|_0^{\pi}-\pi=2\mathrm{i}-\pi$.　选(A).

注意 $|\mathrm{d}z|=\mathrm{d}s(|z|=1)$ 化为第一类线积分.

3-15　设 C 是单位圆 $z=e^{i\theta}$，θ 从 2π 至 0，则 $\int_C |z-1|\,|dz| = (\quad)$.

(A) 4　(B) -4　(C) 8　(D) -8

解　$|z-1| = \sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

而　$|dz| = d\theta$

故　原式 $=\int_0^{2\pi} 2\sin\dfrac{\theta}{2}d\theta = 8$.　选(C).

$\int_0^{2\pi}\sin\dfrac{\theta}{2}d\theta = 2\int_0^{\pi}\sin t dt = 4\int_0^{\pi/2}\sin t dt = 4$.

3-16　设 C 为简单闭曲线正向，S 为 C 所围成区域的面积，则 $\oint_C \bar{z}dz = (\quad)$.

(A) $2S$　(B) $-2S$　(C) $2Si$　(D) $-2Si$

解　原式 $=\oint_C (x-iy)(dx+idy)$

$=\oint_C xdx+ydy+i(xdy-ydx)$

$=2i\iint_D d\sigma = 2Si$，(D 是 C 所围成区域).

选(C).

格林公式的应用：

$\oint_C xdx+ydy = 0$

$\oint_C xdy - ydx = 2S$

3-17　C 为简单闭曲线，D 为 C 所围区域，S 表示此区域的面积，则 $\oint_C \mathrm{Im}(z)dz = (\quad)$.

(A) S　(B) $-S$　(C) Si　(D) $-Si$

解　原式 $=\oint_C y(dx+idy) = -\iint_D d\sigma = -S$.　选(B).

$\oint_C ydy = 0$

$\oint_C ydx = -S$.

3-18　C 为简单闭曲线，D 为 C 所围区域，S 是 D 的面积，则 $\oint_C \mathrm{Re}(z)dz = (\quad)$.

(A) S　(B) $-S$　(C) $-Si$　(D) iS

解　原式 $=\oint_C (dx+idy) = i\oint_C xdy = iS$.　选(D).

3-19　设 C 是 $z=e^{i\theta}$，θ 从 0 至 $\dfrac{\pi}{2}$ 的弧段，则 $\oint_C \ln z dz = (\quad)$.

(A) $1-\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{i}$　　　(B) $\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{i}$

(C) $1+\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{i}$　　　(D) $1-\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}$

解　$\ln z = \mathrm{i}\theta$,故

$$\text{原式} = \mathrm{i}\theta e^{\mathrm{i}\theta}\Big|_0^{\pi/2} - \mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2} - e^{\mathrm{i}\theta}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{i} + 1.$$　　选(A).

分部积分法.

3-20　设 C 是从 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 至 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 的一条光滑的可求长的弧段,试比较积分 $\left|\int_C \mathrm{d}z\right|$ 与 $\int_C |\mathrm{d}z|$ 的不同点.

解　$\left|\int_C \mathrm{d}z\right| = |x_1 - x_0 + \mathrm{i}y_1 - y_0|$

$$= \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$$

而　$\int_C |\mathrm{d}z| = \int_C \mathrm{d}s = S$,这里 S 表示弧段 C 的弧长,而 $\left|\int_C \mathrm{d}z\right|$ 表示二点 (x_0, y_0) 与 (x_1, y_1) 间的距离,故 $\left|\int_C \mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |\mathrm{d}z|$.

其中等号当且仅当 C 为直线段时成立.

$\left|\int_C \mathrm{d}z\right|$ 表示弦长;$\int_C |\mathrm{d}z|$ 表示弧长.

3-21　$\mathrm{Re}\left[\int_C f(z)\mathrm{d}z\right]$ 与 $\int_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z$ 相等吗,说明理由.

解　由 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$

知　$$\mathrm{Re}\left[\int_C f(z)\mathrm{d}z\right] = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y$$

而　$$\int_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x + \mathrm{i}u\mathrm{d}y$$

故一般它们不相等,如果要相等,则必有 $\int_C (v + \mathrm{i}u)\mathrm{d}y = 0$.

例如几种情况:1° C 是简单闭曲线时,u、v 是 y 的连续函数,即与 x 无关;2° C 是平行于实轴的直线段;3° 一般情况时 $f(z) = 0$.

在有些情况下 $\mathrm{Re}\left[\int_C f(z)\mathrm{d}z\right] = \int_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z$.

一般它们不相等.

3-22 $\mathrm{Im}\left[\int_C f(z)\mathrm{d}z\right]$ 与 $\int_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z$ 相等吗？说明理由.

解 与上题类似，$\mathrm{Im}\left[\int_C f(z)\mathrm{d}z\right] = \int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$

而 $$\int_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z = \int_C v\mathrm{d}x + \mathrm{i}v\mathrm{d}y$$

一般情况下，它们不相等，而可能相等的三种情况是：1° C 是简单闭曲线，u、v 是 y 的连续函数且与 x 无关；2° C 是平行于实轴的线段；3° $f(z) = 0$.

$\mathrm{Im}\left[\int_C f(z)\mathrm{d}z\right]$ 一般也不等于 $\int_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z$.

3-23 证明 $\left|\int_C (x^2 + \mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi$，$C$ 为 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$ 从 0 至 π 的半圆弧.

证 $$\left|\int_C (x^2 + \mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C \left|x^2 + \mathrm{i}y^2\right| \left|\mathrm{d}z\right|$$
$$= \int_C \sqrt{x^4 + y^4}\,\mathrm{d}s \leqslant \int_C \mathrm{d}s = \pi.$$

$x^4 \leqslant x^2$，$y^4 \leqslant y^2$，故 $\sqrt{x^4 + y^4} \leqslant 1$.

3-24 证明 $\left|\int_C \frac{\sin\bar{z}}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\mathrm{e}$，其中 C 是单位圆 $|z| = 1$ 一周.

证 设 $z = x + \mathrm{i}y$，则
$$|\sin\bar{z}| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x+y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-y}}{2\mathrm{i}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} \leqslant \mathrm{e}$$
故 $$\text{原式} \leqslant \int_C \left|\frac{\sin\bar{z}}{z^2}\right| |\mathrm{d}z| \leqslant \mathrm{e}\int_C |\mathrm{d}z| = 2\pi\mathrm{e}.$$

3-25 设 D 为一区域 $f(z)$ 在 $D\backslash\{z_0\}$ 上处处解析($z_0 \in D$)，在 z_0 的邻域内有界，证明对任意简单闭曲线 $C \subset D$($z_0 \overline{\in} C$) 有
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

证 若 z_0 不在 C 所围区域的内部，则由柯西积分定理知 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$. 若 z_0 在 C 所围区域的内部，则可取充分小的 r，使 C_r：$|z - z_0| = r$，包含在 C 所围区域内部，这时设 $|f(z)| \leqslant M$，则由复合闭路定理有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_r} f(z)\mathrm{d}z$.

对类似问题用复合闭路定理处理的方法都是如此：用 $|z - z_0| = r$“挖”去 z_0 这一

而 $\left|\oint_{C_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant M2\pi r$，令 $r \to 0$ 得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\oint_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

点.

3-26 设 C 是椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$，则 $\oint_C \dfrac{\sin z}{z+2}\mathrm{d}z = (\quad)$.

(A) 0 (B) $-\sin 2$ (C) $2\pi\sin 2$ (D) $-2\pi\mathrm{i}\sin 2$

解 被积函数在 $z=-2$ 不解析，故在椭圆内处处解析，积分为 0. 选(A).

奇点 $z=-2$ 在椭圆的外部.

3-27 设 C 是圆 $z = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\oint_C \dfrac{\sin z}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z = (\quad)$.

(A) $\sin 1$ (B) $2\pi\mathrm{i}\dfrac{\sin 1}{\mathrm{e}}$ (C) $-2\pi\mathrm{i}\dfrac{\sin 1}{\mathrm{e}}$ (D) 0

解 被积函数除 $z=1$ 外处处解析，故此积分值为 0.

选(D).

有了积分曲线的参数方程，可化为定积分，与一般线积分计算一样.

3-28 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z} = (\quad)$.

(A) 不存在 (B) 0 (C) π (D) $-\pi$

解 由 $\dfrac{1}{\cos^2 z}$ 的奇点是 $z = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$（$n$ 是整数）因此，$\dfrac{1}{\cos^2 z}$ 在单位圆内处处解析，故积分值为 0. 选(B).

解析函数的积分性质.

3-29 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\mathrm{d}z}{z+2z+2} = (\quad)$.

(A) $2\pi\mathrm{i}$ (B) $-2\pi\mathrm{i}$ (C) 0 (D) 2π

解 $z^2+2z+2=0$ 的零点是 $-1\pm\mathrm{i}$，故被积函数在 $|z|<1$ 内无奇点，积分为 0. 选(C).

3-30 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{z^2+2}\mathrm{d}z = (\quad)$.

(A) 0 (B) $-\pi\mathrm{i}$ (C) $\pi\mathrm{i}$ (D) $2\pi\mathrm{i}$

解 被积函数在 $|z|<1$ 内处处解析，故积分为 0.

选(A).

3-31 设 C 为椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，从 $(1,0)$ 至 $(-1,0)$ 逆时针方向. 函数 $\sqrt{z}\Big|_{z=1}=1$，则 $\int_C \sqrt{z}\,dz=(\quad)$.

(A) $\dfrac{2}{3}(1+i)$　　(B) $-\dfrac{2}{3}(1+i)$

(C) $\dfrac{2}{3}(1-i)$　　(D) $\dfrac{2}{3}(-1+i)$

解 由 $\sqrt{z}$ 的解析性及原点是奇点，故沿 C 的路经的积分与沿上半圆 $|z|=1$ 的积分相等（如图 3.1），即

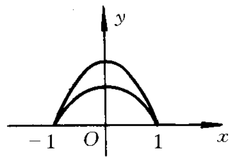


图 3.1

$$\int_C \sqrt{z}\,dz=\int_{\substack{|z|=1\\ y>0}}\sqrt{z}\,dz$$

$$=i\int_0^{\pi} e^{\frac{3}{2}i\theta}d\theta=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}i\theta}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}(-1-i)$$ 选(B).

$\sqrt{z}\Big|_{z=1}=1$ 意味着选了此函数的一支.

3-32 $\int_{-2}^{-2+i}(z+2)^2dz=(\quad)$.

(A) $\dfrac{i}{3}$　(B) $\dfrac{i}{6}$　(C) $-\dfrac{i}{3}$　(D) $-\dfrac{i}{6}$

解 原式 $=\dfrac{1}{3}(z+2)^3\Big|_{-2}^{-2+i}=\dfrac{1}{3}i^3=-\dfrac{i}{3}$. 选(C).

类似于牛顿-莱布尼茨公式.

3-33 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{e^{(z+1)^2}}{z^2+3z+2}dz=(\quad)$.

(A) 0　(B) $\dfrac{2}{3}\pi i$　(C) $2\pi i$　(D) $-2\pi i$

解 $z^2+3z+2=(z+1)(z+2)$，在圆 $|z|<\dfrac{3}{2}$ 内有唯一零点 $z=-1$，由柯西积分定理知

原式 $=2\pi i\left(\dfrac{e^{(z+1)^2}}{z+2}\right)\Bigg|_{z=-1}=2\pi i.$ 选(C).

用柯西积分公式求解.

3-34 $\oint_{|z|=1}(|z|+\bar{z})\cos^2 z\,dz=(\quad)$.

(A) 0　(B) πi　(C) $-2\pi i$　(D) $2\pi i$

解　原式 $=\oint_{|z|=1}\cos^2 z\mathrm{d}z+\oint_{|z|=1}\frac{\cos^2 z}{z}\mathrm{d}z$

$$=2\pi i\cos^2 z\Big|_{z=0}=2\pi i.$$ 选(D).

在 $|z|=1$ 时，$\bar{z}=\frac{1}{z}$.

3-35　$\oint_{|z|=1}\bar{z}\cos\frac{1}{\bar{z}}\mathrm{d}z=(\quad)$.

(A) $2\pi i$　(B) πi　(C) $-2\pi i$　(D) 0

解　原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\cos z\Big|_{z=0}=2\pi i.$

选(A).

3-36　$\oint_{|z|=1}\frac{\sin\pi z}{2z+1}\mathrm{d}z=(\quad)$.

(A) $2\pi i$　(B) $-2\pi i$　(C) πi　(D) $-\pi i$

解　原式 $=2\pi i\frac{\sin\pi z}{2}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=-\pi i.$　选(D).

用柯西积分公式求解.

3-37　$\oint_{|z|=1}\frac{\cos 2\pi z}{8z^2+6z+1}\mathrm{d}z=(\quad)$.

(A) 0　(B) πi　(C) $-\pi i$　(D) $2\pi i$

解　$8z^2+6z+1=(4z+1)(2z+1)$，在 $|z|<1$ 内被积函数有 2 个奇点：$z=-\frac{1}{2}$ 和 $z=-\frac{1}{4}$，故

原式 $=\frac{\pi i}{2}\frac{\cos 2\pi z}{2z+1}\Big|_{z=-\frac{1}{4}}+\pi i\frac{\cos 2\pi z}{4z+1}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\pi i.$

选(B).

这些题均可用留数做，在这里是为了熟悉柯西积分公式及复合闭路定理.

3-38　$\oint_{\left|z+1\right|=\frac{2}{3}}\frac{\sin\pi z}{2z^2+3z+1}\mathrm{d}z=(\quad)$.

(A) 0　(B) πi　(C) $2\pi i$　(D) $-2\pi i$

解　$z=-1$ 和 $z=-\frac{1}{2}$ 都是奇点，故

原式 $=2\pi i\frac{\sin\pi z}{2z+1}\Big|_{z=-1}+\pi i\frac{\sin\pi z}{z+1}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=2\pi i.$ 选(C).

3-38、3-39 题都是在积分曲线内有两个奇点的情况.

3-39 $\oint_{|z|=2}\frac{z}{z^2+1}dz=$ (　).

(A) 0　　(B) $2\pi i$　　(C) $-2\pi i$　　(D) πi

解　原式 $=2\pi i\left.\frac{z}{z+i}\right|_{z=i}+2\pi i\left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=-i}=2\pi i.$

选(B).

3-40 $\oint_{|z|=1}\frac{\cos(2z+1)}{2z+|z|}dz=$ (　).

$2z+|z|=2z+1.$

(A) 0　　(B) πi　　(C) $2\pi i$　　(D) $-\pi i$

解　原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{\cos(2z+1)}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}dz$

$=\pi i\cos(2z+1)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\pi i.$　　选(B).

3-41 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\cos\pi z}{z^2-z-2}dz=$ (　).

(A) 0　　(B) $\frac{2}{3}\pi i$　　(C) $-\frac{2}{3}\pi i$　　(D) $\frac{4}{3}\pi i$

解　原式 $=2\pi i\left.\frac{\cos\pi z}{z-2}\right|_{z=-1}=\frac{2}{3}\pi i.$　　选(B).

3-42 $\oint_{|z|=1}\bar{z}e^{z^2}dz=$ (　).

(A) $2\pi i$　　(B) πi　　(C) $-2\pi i$　　(D) $-\pi i$

解　原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{e^{z^2}}{z}dz=2\pi i e^{z^2}\Big|_{z=0}=2\pi i.$　选(A).

3-43 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2}dz=$ (　).

(A) $2\pi i$　　(B) πi　　(C) 0　　(D) π

解　用导数公式,原式 $=2\pi i(e^z)'\Big|_{z=0}=2\pi i$,　选(A).

解析函数的求导公式.

3-44 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^3}dz=$ (　).

(A) $\frac{\pi}{3}i$　　(B) $\frac{2\pi}{3}i$　　(C) πi　　(D) $2\pi i$

解 原式 $= \pi i(e^z)''\Big|_{z=0} = \pi i.$ 选(C).

高阶导数公式.

3-45 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^2+3z+2)^3} = (\quad).$

(A) 0　(B) $4\pi i$　(C) $6\pi i$　(D) $12\pi i$

解 原式 $= \pi i\left(\dfrac{1}{(z+2)^3}\right)''\Bigg|_{z=-1} = 12\pi i.$ 选(D).

用二阶导数算.

3-46 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \bar{z}^3 e^{\frac{1}{2}z} dz = (\quad).$

(A) $2\pi i$　(B) $16\pi i$　(C) $8\pi i$　(D) $4\pi i$

解 原式 $= 8\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{2}z}}{z^3}dz = 8\pi i(e^{\frac{1}{2}z})''\Big|_{z=0} = 2\pi i.$

选(A).

二阶导数公式及 $\bar{z}^3 = \dfrac{1}{z^3}|z|^3 = \dfrac{8}{z^3}$.

3-47 计算 $I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz$,其中 Γ 是圆环域:$\dfrac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2$ 的边界.

解 原式 $= \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz - \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz$

$$= 2\pi i \frac{e^z}{z^2-1}\Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^z}{z(z+1)}\Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{e^z}{z(z-1)}\Big|_{z=-1} - 2\pi i \frac{e^z}{z^2-1}\Big|_{z=0}$$

$= \pi i(e + e^{-1}).$

$|z| = 2$ 是逆时针方向而在 $|z| = \dfrac{1}{2}$ 上是顺时针方向,构成 Γ 的正向.

3-48 设 $f(z) = \displaystyle\int_{|\zeta|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{4}\zeta}}{\zeta - z}d\zeta$,试求 $f(i)$,$f(-i)$ 及 $f(3-4i)$ 的值.

解 $f(i) = 2\pi i e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\pi(-1+i)$,

$f(-i) = 2\pi i e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\pi(1+i).$

又 $|3-4i| = 5 > 2$,故 $f(3-4i) = 0.$

注意 ζ 是积分变元.

3-49 计算 $I = \displaystyle\oint_{|\zeta|=\rho} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - a|^2}$,其中 $|a| \neq \rho$,$\rho > 0$

是常数.

解 设 $\zeta=\rho e^{i\theta}$,则 $|d\zeta|=\rho d\theta=\rho\dfrac{\rho ie^{i\theta}d\theta}{\rho ie^{i\theta}}=-\rho i\dfrac{d\zeta}{\zeta}$.

于是
$$I=\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{-i\rho d\zeta}{\zeta(\zeta-a)(\bar{\zeta}-\bar{a})}$$
$$=-i\rho\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{d\zeta}{(\zeta-a)(\rho^2-\bar{a}\zeta)}$$
$$=i\rho\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{d\zeta}{(\zeta-a)(\bar{a}\zeta-\rho^2)}$$

若 $|a|<\rho$ 时,原式 $=-2\pi\rho\dfrac{1}{|a|^2-\rho^2}=\dfrac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}$.

当 $|a|>\rho$ 时,原式 $=-2\pi\rho\dfrac{1}{\bar{a}(\zeta-a)}\Big|_{\zeta=\frac{\rho^2}{\bar{a}}}=\dfrac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}$.

$|\zeta|=\rho$,故 $\zeta=\rho e^{i\theta}$ 将 $|d\zeta|$ 化为 $d\zeta$ 再做积分.

3-50 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,在 $|z|\leqslant 1$ 上连续,且 $\mathrm{Re}[f(z)]=u(x,y)$,证明
$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$$

证
$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}if(e^{i\theta})d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(\cos\theta,\sin\theta)+iv(\cos\theta,\sin\theta)]d\theta$$

故
$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\cos\theta,\sin\theta)d\theta.$$

此式是调和函数的平均值公式.

本题其实是调和函数平均值公式的复函数证明法.

3-51 若 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析,则对任一 $r(0<r<R)$,有
$$f'(0)=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$$

证
$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^2e^{2i\theta}}re^{i\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta.$$

用导数公式来证明本题.

3-52 计算 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^z\bar{z}^2dz}{(\bar{z}+2)^2}$

解 在 $|z|=1$ 时,$\bar{z}=\dfrac{1}{z}$,故

当 $|z|=\rho$,即 $(\rho>0)$. $\bar{z}=\dfrac{\rho^2}{z}$.

原式 $=\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z dz}{4(z+\frac{1}{2})^2}=\dfrac{\pi i}{2}(e^z)'\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\dfrac{\pi i}{2}e^{-\frac{1}{2}}.$

3-53 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|\leqslant 1$ 上连续，$f(0)=1$，证明

$$f'(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta-2$$

证 $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2}{4}$，而 $d\theta=\dfrac{de^{i\theta}}{ie^{i\theta}}$，

故 $$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{2}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{f(z)(z+z^{-1}+2)}{4iz}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)(z^2+2z+1)}{z^2}dz$$
$$=[f(z)(z^2+2z+1)]'_{z=0}$$
$$=f'(0)+2f(0)=f'(0)+2$$

因此 $$f'(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta-2.$$

充分运用欧拉公式，将实积分化为复积分，再用柯西公式或导数公式，这是计算实积分的一个技巧.

3.2 解析函数与调和函数

3-54 如果 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，试证：

(1) $\overline{i\overline{f(z)}}$ 也是解析函数.

(2) $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

证 (1) $\overline{i\overline{f(z)}}=-if(z)$ 是解析函数.

(2) $-if(z)=v-iu$ 为解析函数，故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

v 是 u 的共轭调和函数不一定有 u 是 v 的共轭调和函数.

3-55 满足 $|f(z)|=x^2$ 的解析函数是否存在，说明理由.

解 不存在. 否则，当 $x\neq 0$ 时，$\ln f(z)$ 也是解析函数，这时，$\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$ 但 $u=\ln|f(z)|=2\ln|x|$，不是调和函数，故 $f(z)$ 不可能是解析函数.

注意解析函数与调和函数的关系.

3-56 满足 $|f(z)|=e^{x-y}$ 的解析函数是否存在?说明理由.

解 存在.因为 $\ln|f(z)| = x - y$ 是调和函数,例如,$v = x + y$ 是其一个共轭调和函数,因此,$\ln f(z) = x - y + \mathrm{i}(x + y)$.

而 $f(z) = \mathrm{e}^{(x-y)+\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{z(1+\mathrm{i})}$ 就是满足条件的一个调和函数.

e^{x-y} 是调和函数可直接证明.

3-57 满足 $\arg f(z) = xy$ 的解析函数 $f(z)$ 是否存在?说明理由.

解 存在.如上题,xy 是调和函数,例如它是 $u = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ 的共轭调和函数,这时 $\ln f(z) = \dfrac{x^2 - y^2}{2} + \mathrm{i}xy$ 在 $xy \neq 0$ 处解析.因此,$f(z) = \mathrm{e}^{z^2/2}$.就是满足要求的解析函数.

3-58 求 $u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ 的共轭调和函数.

解 $u = x^3 - y^3 + 3xy(x - y)$,故 $u_{xx} = 6x + 6y$,$u_{yy} = -6y - 6x$,故 u 是调和函数,以下求 v.

由 C-R 条件得

$$v_x = 3y^2 - 3x^2 + 6xy;\quad v_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

可用以下三种方程求 v.

1.(凑全微分法)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= (3y^2 - 3x^2 + 6xy)\mathrm{d}x + (3x^2 + 6xy - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3y^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y^2 + 3x^2\mathrm{d}y + 3y\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}(x^3 + y^3) \\ &= 2(3xy^2 + 3x^2y - x^3 - y^3) \end{aligned}$$

故 $v = 3xy(x + y) - x^3 - y^3 + C$.

2.(偏积分法)

$$v = \int v_x\mathrm{d}x + f(y) = 3y^2x - x^3 + 3x^2y + g(y)$$

$$v_y = 6xy + 3x^2 + g'(y) = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

故 $g'(y) = -3y^2$,$g(y) = -y^3 + C$

因此 $v = 3y^2x + 3x^2y - x^3 - y^3 + C$.

3.(线积分法)

由于 $v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y$ 是全微分表示式,故

$$v = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3y^2 - 3x^2 + 6xy\mathrm{d}x) + (3x^2 + 6xy - 3y^2)\mathrm{d}y + C$$

求共轭调和函数的三种方法都应掌握:对一些较简单的函数,应熟悉凑微分法;对稍复杂点的函数,用偏积分法或线积分法.

这个方法与实函数求一个全微分表示式的原函数的方法是一样的.

$$=\int_0^x -3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2+6xy-3y^2)\mathrm{d}y+C$$
$$=-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C.$$

3-59 已知 $f(z)=u+\dfrac{y\mathrm{i}}{x^2+y^2}$ 是解析函数,且 $f(2)=0$,求 $f(z)$.

解 $u_x=\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,$u_y=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,对此,用偏积分法求 u 较方便:

$$u=\int u_y\mathrm{d}y+f(x)=\int\frac{x\mathrm{d}y^2}{(x^2+y^2)^2}+g(x)$$
$$=-\frac{x}{x^2+y^2}+g(x)$$
$$u_x=\frac{-1}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)}+g'(x),g'(x)=0,g(x)=C$$
$$f(z)=-\frac{x}{x^2+y^2}+C+\frac{y\mathrm{i}}{x^2+y^2}$$
$$f(2)=-\frac{1}{2}+C=0\quad 得\ C=\frac{1}{2}$$
$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}.$$

本题实质是已知共轭调和函数,求此调和函数.

已知解析函数的实部或虚部便可求得此解析函数.

3-60 设 $f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}v$ 是解析函数,且 $f(2)=-\mathrm{i}$,求 $f(z)$.

解 $v_x=-2(x-1)$,$v_y=2y$,用凑微分法求 v:

$$\mathrm{d}v=-2(x-1)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}(y^2-x^2+2x)$$
$$v=y^2-x^2+2x+C$$
$$f(z)=2(x-1)y+(y^2-x^2+2x+C)\mathrm{i}$$
由 $f(2)=-\mathrm{i}$ 得 $C=-1$
$$f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2.$$

3-61 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是上半平面的解析函数,$v=\arctan\dfrac{y}{x}$,求 $f(z)$.

解 $u_x = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$u_y = \dfrac{y}{x^2+y^2}$，求 u，用偏积分法：

$u = \displaystyle\int \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + g(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y)$

$u_y = \dfrac{y}{x^2+y^2} + g'(y)$，故 $g'(y) = 0, g(y) = C$

故 $f(z) = \ln r + \mathrm{i}\arctan\dfrac{y}{x} + C$ （C 是实常数）

或 $f(z) = \ln z + C$，其中 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$，$(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$，$C$ 是实常数.

因 $v = \arctan\dfrac{y}{x}$，故设 $f(z)$ 在上半平面解析，如设 $f(z)$ 在下半平面解析 $f(z)$ 将如何？

3-62 若 $f(z) = x^2 + \alpha(y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 解析且 $f(0) = f'(0) = 0$，求实函数 $\alpha(y)$，$v(x,y)$ 及 $f(z)$.

解 $u = x^2 + \alpha(y)$，调和，故

$$u_{yy} = -u_{xx} = -2 = \alpha''(y)$$
$$\alpha(y) = -y^2 + C_1 y + C_2$$

由 C-R 条件，$u_x = 2x = v_y$

而 $\qquad -u_y = 2y + C_1 = v_x$

因此 $\qquad v = 2xy + C_1 x + C_3$

由 $f(0) = 0$ 得 $C_2 = C_3 = 0$

由 $f'(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$，

故，$\alpha(y) = -y^2$；$v(x,y) = 2xy$；$f(z) = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = z^2$.

这里有两个待定的函数.

首先 $u = x^2 + \alpha(y)$ 要是调和函数，而 v 是 u 的共轭调和函数.

3-63 若 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 解析，$g(z) = u^2 + \mathrm{i}v$ 也解析，证明 $f(z)$ 为常数.

证 由 u 及 u^2 皆调和.

$(u^2)_x = 2uu_x$，$(u^2)_{xx} = 2u_x^2 + 2uu_{xx}$.

$$(u^2)_{yy} = 2u_y^2 + 2uu_{yy}$$

$\Delta(u^2) = 2(u_x^2 + y_y^2) + 2u\Delta u = 0$，得

$u_x^2 + y_y^2 = 0$，故 $u = C_1$ 为常数，v 也应为常数，即 $f(z)$ 为常数.

解析函数为常函数的情况很多，请读者加以总结本书中讲的各种有关的例题.

3-64 已知 $f(z),g(z)$ 均为解析函数，且 $e^{\mathrm{Re}[f(z)]}=\mathrm{Re}[g(z)]$，证明 $f(z),g(z)$ 皆为常数值函数.

证 记 $\mathrm{Re}[f(z)]=u,\mathrm{Re}[g(z)]=\bar{u}$.

则由 $e^u=\bar{u}$，两边对 x 求导，

$$e^u u_x=\bar{u}_x,e^u u_x^2+e^u u_{xx}=\bar{u}_{xx}$$

同样 $$e^u u_y^2+e^u u_{yy}=\bar{u}_{yy}$$

由 $\Delta u=\Delta\bar{u}=0$ 及 $e^u\neq 0$ 得

$u_x^2+y_y^2=0$，故 u 为常数，因而 $\bar{u}$ 也是常数，$f(z)$、$g(z)$ 皆为常数.

$u_x^2+u_y^2=0$ 故 $u_x-u_y=0$，u 为常数.

3-65 满足 $f(z)=u(x+xy)+\mathrm{i}v(x,y)$ 非常数的解析函数$f(z)$是否存在?说明你的结论.

解 存在，由 $u_{xx}=u''(1+y)^2,u_{yy}=x^2u''$.

故 $$\Delta u=u''[x^2+(1+y)^2]=0$$

得 $$u''=0,u=C_1t+C_2.$$

即 $u=C_1(x+xy)+C_2$ 是调和函数，我们再求 v

$$u_x=C_1(1+y)=v_y$$

$$u_y=C_1x=-v_x$$

故 $v=\dfrac{C_1}{2}[(1+y)^2-x^2]+C_3$

$$\begin{aligned}z&=C_1(x+xy)+\frac{\mathrm{i}}{2}C_1[(1+y)^2-x^2]+C_2+\mathrm{i}C_3\\&=C_1[(x+\mathrm{i}y)-\frac{\mathrm{i}}{2}(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)]+\alpha\\&=C_1(z-\frac{\mathrm{i}}{2}z^2)+\alpha\end{aligned}$$

其中 C_1 是实常数，α 是复常数，是满足题设条件的 $f(z)$ 的一般形式.

本题可看出 $x+xy$ 是调和函数. 通过证明果然 $u=C_1(x+xy)+C_2$.

3-66 已知 $f'(z)=-y+\mathrm{i}v(x,y)$，求 $f(z)$.

解 先求 v. 因为 $v_x=1,v_y=0$，故 $v=x+C_1$.

即 $$f'(z)=-y+\mathrm{i}x+\mathrm{i}C_1=\mathrm{i}z+\mathrm{i}C_1.$$

$$f(z)=\frac{\mathrm{i}}{2}z^2+C_1\mathrm{i}z+C\quad(C_1\text{ 是实常数},C\text{ 是复常数}).$$

解析函数的导数仍是解析函数.

3-67 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 解析，且 $u_x+u_y=0$，求 $f(z)$.

解析函数的导

解　由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=u_x(1+\mathrm{i})$

于是解析函数 $$\frac{f'(z)}{1+\mathrm{i}}=u_x$$

其虚部为0,由C-R条件,知 $u_x=C_1$,为实常数,$f'(z)=C_1(1+\mathrm{i})$

$f(z)=C_1(1+\mathrm{i})z+C$,其中 C 为复常数.

数仍是解析函数.

3-68　设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 解析,且 $u_x+v_x=0$,求 $f(z)$.

解　$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=u_x(1-\mathrm{i})$

故解析函数 $\dfrac{f'(z)}{1-\mathrm{i}}$ 的虚部为0,从而有

$u_x=C_1$ 是实常数,于是 $f'(z)=C_1(1-\mathrm{i})$

由此　$f(z)=C_1(1-\mathrm{i})z+C$　(C 是复常数)

3-69　设 $f(z)=u(x+y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 解析,求 $f(z)$.

解　由 $u_{xx}+y_{yy}=0$ 得 $u''(t)=0$,

故　$u=C_1t+C_2=C_1(x+y)+C_2$

$u_x=C_1=v_y$,　$u_y=C_1=-v_x$

故　$v=C_1(y-x)+C_3$

$f(z)=C_1[(x+y)+\mathrm{i}(y-x)]+C=C_1(1-\mathrm{i})z+C$

其中 C_1 是实常数,C 是复常数.

通过做这些题,熟悉解析函数与调和函数之间的关系.

3-70　已知 $f(z)=u(xy)+\mathrm{i}v(x,y)$ 解析,求 $f(z)$.

解　由 $\Delta u=u''(t)\cdot(x^2+y^2)=0$,故

$u=C_1t+C_2=C_1xy+C_2$

$$u=-\frac{C_1}{2}(x^2-y^2)+C_3$$

$$f(z)=\frac{C_1}{2}(2xy-\mathrm{i}(x^2-y^2))+C=-\frac{C_1}{2}\mathrm{i}z^2+C$$

其中 C_1 是实常数,C 是复常数.

3-71　设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,在 $|z|\leqslant1$ 上连续,且在 $|z|=1$ 上 $|f(z)-z|\leqslant|z|$,证明 $\left|f'(\frac{1}{2})\right|\leqslant8$.

证　$$\left|f'(\frac{1}{2})\right|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(z-\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}z\right|$$

用导数公式表示导数.从而估计

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z)-z|+|z|}{\left(|z|-\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\theta \qquad (|z|=1)$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2}{\frac{1}{4}}\mathrm{d}\theta = 8.$$

出 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 的取值范围.

3-72 设 $f(z)=u+\mathrm{i}e^{px}\sin y$ 为解析函数,求 $f(z)$.

解 由 $v_{xx}=p^2e^{px}\sin y$ 及 $v_{yy}=-e^{px}\sin y$.

由 $v_{xx}+v_{yy}=0$ 得 $p=\pm 1$.

这时,$u_x=v_y=e^{\pm x}\cos y$,$u_y=-v_x=\mp e^{\pm x}\sin y$.

解得 $u=\pm e^{\pm x}\cos y+C$.

即这样的解析函数有两类,当 $p=1$ 时,

$f(z)=e^x\cos y+\mathrm{i}e^x\sin y+C_1=e^z+C_1$

当 $p=-1$ 时

$f(z)=-e^{-x}\cos y+\mathrm{i}e^{-x}\sin y+C_2=-e^{-z}+C_2$.

其中 C_1,C_2 是实常数.

3-73 如果 u 是区域 D 内的调和函数,C 为 D 内以 z_0 为圆心的正向圆周:$|z-z_0|=r$,它的内部全含于 D,试证:

(1) $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ 即调和函数在任一点(x_0,y_0)的值,等于它在圆周 C 上的平均值.

(2) $u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)r\mathrm{d}y\mathrm{d}r$

证 (1) 由柯西公式:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

在 C 上,$z=z_0+re^{\mathrm{i}\varphi}$,$\mathrm{d}z=r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$,故

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

由于 $u(x_0,y_0)$ 即 $f(z_0)$ 的实部,故有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

用关于解析函数的柯西积分公式来证明调和函数的平均值公式,使证明过程简单.

(2) $u(x_0,y_0) = \dfrac{2}{r_0^2}\displaystyle\int_0^{r_0} u(x_0,y_0) r\mathrm{d}r$

$$= \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

这个积分实际是 $u(x,y)$ 在圆域：$|z - z_0| \leqslant r_0$ 上的平均值.

3 - 74　如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内的正向圆周：$|z| = R$，它的内部全含于 D，设 z 为 C 内一点，证明

$$\oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}\mathrm{d}\zeta = 0$$

证　被积函数为$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - R^2/\bar{z}}$，由于

$\left|\dfrac{R^2}{\bar{z}}\right| = \dfrac{R^2}{|\bar{z}|} > R$，表示$\dfrac{R^2}{\bar{z}}$ 是圆外一点，故$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - R^2/\bar{z}}$ 在圆内处处解析，因此

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - R^2}\mathrm{d}\zeta = \oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}\mathrm{d}\zeta = 0$$

从本题开始，三个题一题扣一题，直至证明 3 - 76 题的 Poisson 公式. 而 Poisson 公式表达调和函数的一个重要公式，关于这个公式有多种证明的方法.

3 - 75　条件如上题，证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}\mathrm{d}\zeta$$

证　由 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

及　$\displaystyle\oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\mathrm{d}\zeta = 0$，得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right]\mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

便是所要证明的结论.

至此，得出 $f(z)$ 的一种积分表示式.

3 - 76　证明泊松(Poisson) 积分公式：

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta$$

这里，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$u(x,y)$ 是调和函数，这个公式表示：调和函数在圆内($r < R$) 任一点的值，可用它在圆周上的值来确定.

证　设 $v(x,y)$ 是 u 的共轭调和函数，则 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是

泊松积分公式作为圆内调和函数，在圆上满足已知条件的泊松问题的解即

解析函数. 由上题的结果知

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\zeta = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$, 则 $\mathrm{d}\zeta = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

而 $z\bar{z} = r^2$, $(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z}) = (\zeta - z)(R^2 - Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$

$$\begin{aligned}
&R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})(R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) \\
&\quad = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - Rr(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})] \\
&\quad = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[R^2 + r^2 - 2Rr(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)] \\
&\quad = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2)
\end{aligned}$$

故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta$$

取实部即得

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta))}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

便是所要证明的结论.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 < R^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=R^2} = f(x, y) \end{cases}$$

（$u(R\cos\theta, R\sin\theta)$ 是已知的）的解.

第4章　级　数

4.1　复数项级数

4-1　数列 $z_n=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{(-1)^n}{2}\mathrm{i}$ 的性质为(　).

(A) 收敛　　(B) 无界但非无穷大

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$　　(D) 有界但发散

解　由 $\dfrac{(-1)^n}{2}$ 发散知数列发散;而

$$|z_n|^2=\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{1}{4}\to\frac{5}{4}$$ 是有界数列.　　选(D).

与实数项级数一样,数列与级数是密切相关的.

4-2　设幂函数 $\alpha^{f(z)}$ 取 $\mathrm{e}^{\alpha\ln f(z)}$ 的分支,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{\mathrm{i}}{n})^n=$(　).

(A) 不存在　　(B) 1　　(C) $\cos1+\mathrm{i}\sin1$　　(D) e

解　$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\mathrm{i}}{n})^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{\mathrm{i}}{n})}$$

而　$$\ln(1+\frac{\mathrm{i}}{n})=\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n^2})+\mathrm{i}\arctan\frac{1}{n}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{\mathrm{i}}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n^2})+\lim_{n\to\infty}n\mathrm{i}\arctan\frac{1}{n}=\mathrm{i}$$

故　$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\mathrm{i}}{n})^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}}=\cos1+\mathrm{i}\sin1.$$　　选(C).

以后我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\dfrac{\alpha}{n})=\alpha$,其中 α 是复常数.

这与实数情况一样.

4-3　极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{\mathrm{i}}{2})^{-n}=$(　).

(A) 不存在但有界　　(B) ∞　　(C) 1　　(D) 0

解　令 $z=1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$,则 $|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}>1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$ 的充要条件是:$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 0$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. 选(D).

4-4 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}} = (\quad)$.

(A) $-1+2\mathrm{i}$ (B) $1+2\mathrm{i}$ (C) $2+\mathrm{i}$ (D) ∞

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\mathrm{i}}{\dfrac{1}{n}-\mathrm{i}} = -1+2\mathrm{i}$. 选(A).

4-5 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{n\pi\mathrm{i}}{2}}$ 的收敛性为( ).

(A) 通项不趋于 0 (B) 通项趋于 0,发散

(C) 绝对收敛 (D) 条件收敛

解 由 $\mathrm{e}^{\frac{n\pi\mathrm{i}}{2}} = (\mathrm{i})^n$,当 $n = 4k+1$ 为 $\mathrm{i}(k = 0,1,2,\cdots)$,$n = 4k+3$ 为 $-\mathrm{i}$;$n = 4k+2$ 为 -1,$n = 4(k+1)$ 为 1,故此级数可分为两个交错级数:

实部为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k}$;虚部为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$,均条件收敛. 故此级数条件收敛. 选(D).

分实部、虚部两个数列,便好讨论了.

4-6 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{n}\mathrm{i}}$ 的收敛性为( ).

(A) 实部发散,虚部条件收敛

(B) 实部、虚部皆条件收敛

(C) 实部发散,虚部绝对收敛

(D) 实部、虚部皆发散

解 原级数实部是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}$;虚部是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

当 $n>2$ 时,$\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{n} > 0$ 是正项级数,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n}\Big/\frac{1}{n} = 1.$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}$ 发散;

而 $n\to\infty$ 时,$\sin\dfrac{\pi}{n}\sim\dfrac{\pi}{n}$,故 $\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\sim\dfrac{\pi}{n^2}$. 因此,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ 绝对收敛. 选(C).

复数项级数收敛的充分必要条件是实部与虚部两个实数项级数皆收敛.

4-7 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{n^2}$ 为(　).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 通项不趋于 0　　(D) 通项趋于 0,但发散

解　由 $\left|\frac{e^{2ni}}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$,故级数绝对收敛.　选(B).

4-8 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i}{n}}{n}$ 为(　).

(A) 通项不趋于 0　　(B) 条件收敛

(C) 通项趋于 0 但发散　　(D) 绝对收敛

解　由 $\left|\sin\frac{i}{n}\right|=\left|i\mathrm{sh}\frac{1}{n}\right|=\mathrm{sh}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$,故级数绝对收敛.　选(D).

$\sin\frac{\alpha}{n}\sim\frac{\alpha}{n}$,$\alpha$ 是不为 0 的复常数.

4-9 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{\sqrt{n}}$ 的收敛性为(　).

(A) 通项趋于 0 但发散　　(B) 通项不趋于

(C) 条件收敛　　(D) 绝对收敛

解　由 $|e^{2ni}|=1$,知此级数实际是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 故通项 $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ 但发散.　选(A).

4-10 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(in)}{n2^n}$ 的收敛性为(　).

(A) 通项趋于 0 但发散　　(B) 通项不趋于 0

(C) 条件收敛　　(D) 绝对收敛

解　$\sin(in)=i\mathrm{sh}n=i\frac{e^n-e^{-n}}{2}$.

而　$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n-e^{-n}}{n2^{n+1}}=\infty$,即通项不趋于 0.　选(B).

注意:$\sin z$ 并非是有界函数.

4-11 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sin(in)}$ 收敛性为(　).

(A) 绝对收敛　　(B) 通项不趋于 0

$\sin n$ 有界,但 $\sin(ni)$ 无界且 $\sin(ni)$ 与 e^n 是同

(C) 通项趋于 0 但发散　　(D) 条件收敛

解　$\sin(\mathrm{i}n) = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}n = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{n}-\mathrm{e}^{-n}}{2}$,故此级数绝对收敛.

选(A).

阶的无穷大量($n\to\infty$).

4.2　幂级数、泰勒级数

4-12　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2}z^n$ 的收敛半径为(　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) ∞

解　由检比法 $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2}z^n\right|^{\frac{1}{n}}=|z|$,故收敛半径为 1.

选(B).

检比法与检根法仍旧是复数项级数敛散性的重要判别法,因为它们判断的级数若收敛必为绝对收敛,故应用时取 $|z_n|$,(z_n 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 的通项).这样,在应用时与实数项级数无本质区别.

4-13　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n}z^n$ 的收敛半径为(　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) e　　(D) ∞

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n}|z|^{n}\right]^{1/n}=0$,故收敛半径为 ∞.

选(D).

检根法与实函数级数一样.

4-14　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{i})^n z^n$ 的收敛半径为(　).

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(1-\mathrm{i})^n z^n|}=\lim\limits_{n\to\infty}|1-\mathrm{i}|\,|z|=\sqrt{2}\,|z|$,

收敛半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

选(B).

4 - 15 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(3+4\mathrm{i})^n z^{2n}$ 的收敛半径为(　).

(A) 5　(B) $\frac{1}{5}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(3+4\mathrm{i})^n z^{2n}|}=5\cdot|z|^2$,故收敛半径为$\frac{1}{\sqrt{5}}$.

选(D).

直接用检比法于幂级数的方法更好.读者不妨一试.

4 - 16 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\mathrm{i}}{n}\right)z^n$ 的收敛半径为(　).

(A) 1　(B) 0　(C) e　(D) ∞

解 $\cos\frac{\mathrm{i}}{n}=\mathrm{ch}\,\frac{1}{n}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\cos\frac{1}{n}z^n\right|^{\frac{1}{n}}=|z|$,故收敛半径为 1.　选(A).

4 - 17 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{z}{n}\right)^n$ 的收敛半径是(　).

(A) 1　(B) ∞　(C) 0　(D) e

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)!\left(\frac{|z|}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n}{|z|}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot|z|=\frac{|z|}{\mathrm{e}}$$

故收敛半径为 e.　选(D).

本题也可用检比法,但要知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 这个极限.

4 - 18 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$ 的收敛半径 R 及和函数为(　).

(A) $\frac{1}{(1-z)^2}$,$R=1$　(B) $\frac{z}{1-z}$,$R=1$

(C) $\frac{z}{(1-z)^2}$,$R=1$　(D) $\frac{z}{z-1}$,$R=1$

解 由$\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}z^n$ 得

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\frac{z}{(1-z)^2}$, $|z|<1$.　选(C).

注意 $\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$.

4-19　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^{n+1}}{n}$ 的收敛半径与和函数为(　).

(A) $\ln(1-z), R=1$　　(B) $\ln(1+z), R=1$

(C) $z\ln(1-z), R=1$　　(D) $z\ln(1+z), R=1$

解　由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}=\ln(1+z)$ 知，

原式 $=z\ln(1+z), R=1$.　　选(D).

4-20　级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n+1}$ 的收敛半径与和函数是(　).

(A) $\sin z, R=\infty$　　(B) $\cos z, R=\infty$

(C) $z\cos z, R=\infty$　　(D) $z\sin z, R=\infty$

解　原式 $=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=z\cos z$.　　选(C).

注意初等函数的泰勒展开式.

形式与实函数一样.

4-21　级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}$ 的和函数是(　).

(A) $\begin{cases}\dfrac{e^z-1}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$

(C) $\cos z$　　(D) $\sin z$

解　当 $z\neq 0$ 时，

$$\text{原式}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\frac{1}{z}\sin z.$$

而 $z=0$ 时，直接代入原级数得和为 1.　　选(B).

4-22　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{n!}=$(　).

(A) $z(e^{z^2}-1)$　　(B) $z(e^{2z}-1)$

(C) $ze^{z^2}-1$　　(D) $ze^{2z}-1$

解　原式 $=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(z^2)^n-z=z(e^{z^2}-1)$.　选(A).

4-23　$\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^{n-1}}{n!}\right)=$(　).

(A) $\cos 1$　　(B) $\sin 1$　　(C) $-\cos 1$　　(D) $-\sin 1$

解 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{n!}=-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}=-ie^i=-i\cos 1+\sin 1$.

选(B).

要熟悉初等函数的泰勒展式.

4-24 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i^n}{|n|!}=($ $)$.

(A) 0 (B) $2\cos 1$ (C) $2\cos 1-1$ (D) e^i

解 在$\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{i^n}{|n|!}$中令$n=-m$,则变为

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(i^{-1})^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}=e^{-i}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}=e^i-1$,故原式$=e^i+e^{-i}-1=2\cos 1-1$.

选(C).

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}=e^i$.

4-25 设$f(z)=\ln(1+z^2)$,则$f^{(4)}(0)=($ $)$.

(A) 0 (B) -6 (C) 12 (D) -12

解 $\ln(1+z^2)=z^2-\frac{z^4}{2}+\cdots$

因此,$\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)=-\frac{1}{2}$, $f^{(4)}(0)=-12$. 选(D).

做本题要想到泰勒系数.

4-26 设$f(z)=\cos z^3$,则$f^{(9)}(0)=($ $)$.

(A) C_9^6 (B) $3!$ (C) 0 (D) 1

解 $\cos z^3=1-\frac{1}{2!}z^6+\frac{1}{4!}z^{12}-\cdots$

故 $f^{(9)}(0)=0$. 选(C).

4-27 $f(z)=e^{z^2}-\sin z^2$,则$f^{(6)}(0)=($ $)$.

(A) 240 (B) 60 (C) $\frac{1}{240}$ (D) $\frac{2^6}{6!}$

解 $e^{z^2}=1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\frac{1}{3!}z^6+\cdots$

$-\sin z^2=-z^2+\frac{1}{3!}z^6-\cdots$

故 $e^{z^2}-\sin z^2$ 的泰勒展式中“z^6”项系数为

本题是泰勒系数的应用.

$$\frac{2}{3!}=\frac{f^{(6)}(0)}{6!}\text{ 故 } f^{(6)}(0)=\frac{6!}{3!}\times 2=240.$$ 选(A).

4-28 函数$\frac{z}{z^2+\mathrm{i}}$在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^5 项的系数为( ).

(A) i (B) $-$i (C) 1 (D) -1

解 $$\frac{z}{z^2+\mathrm{i}}=\frac{z}{\mathrm{i}}\frac{1}{1-\mathrm{i}z^2}=\frac{z}{\mathrm{i}}(1+\mathrm{i}z^2+(\mathrm{i}z^2)^2+\cdots)$$

故 z^5 的系数是$\frac{-1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}$. 选(A).

以下各题是直接求泰勒系数,办法都是用泰勒展开式.

4-29 函数$\int_0^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}\mathrm{d}\zeta$在 $z=0$ 点的泰勒展开式中,z^3 项的系数为( ).

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $-\frac{1}{18}$

解 $$\frac{\sin\zeta}{\zeta}=1-\frac{\zeta^2}{3!}+\cdots$$

故 $$\int_0^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=z-\frac{z^3}{3\times 3!}+\cdots$$

因此 z^3 项的$-\frac{1}{18}$. 选(D).

4-30 设$\int_0^z\frac{\ln(1-\zeta^2)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_nz^n$,则$(C_3,C_5)=$( ).

(A) $(-1,-\frac{1}{2})$ (B) $(-\frac{1}{6},-\frac{1}{15})$

(C) $(-\frac{1}{6},\frac{1}{10})$ (D) $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{15})$

解 $$\frac{\ln(1-\zeta^2)}{\zeta^2}=\frac{1}{\zeta^2}\left(\zeta^2+\frac{\zeta^4}{2}+\frac{\zeta^6}{3}+\cdots\right)$$

故 $$\int_0^z\frac{\ln(1-\zeta^2)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta=-z-\frac{1}{6}z^3-\frac{z^5}{15}-\cdots.$$ 选(B).

0 是$\frac{\ln(1-\zeta^2)}{\zeta^2}$的可去奇点.

4-31 $\sin\frac{1}{1-z}$在 $z=0$ 点的泰勒展开式中,z^3 项的系数 C_3 和级数的收敛半径 R 是$(C_3,R)=$( ).

本题也可这样作:$\sin\frac{1}{1-z}=$

(A) $(0,1)$　　(B) $\left(\dfrac{5\cos1-6\sin1}{6},1\right)$

(C) $\left(\dfrac{5\cos1-6\sin1}{6},\infty\right)$　　(D) $\left(\dfrac{-\sin1+2\cos1}{2},1\right)$

解　$\left(\sin\dfrac{1}{1-z}\right)'=\dfrac{1}{(1-z)^2}\cos\dfrac{1}{1-z}$

$\left(\sin\dfrac{1}{1-z}\right)''=\dfrac{2}{(1-z)^3}\cos\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{(1-z)^4}\sin\dfrac{1}{1-z}$

$\left(\sin\dfrac{1}{1-z}\right)'''=\dfrac{6}{(1-z)^4}\cos\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{2}{(1-z)^5}\sin\dfrac{1}{1-z}$

$\qquad-\dfrac{4}{(1-z)^5}\sin\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{(1-z)^6}\cos\dfrac{1}{1-z}$

故　$f'''(0)=5\cos1-6\sin1$，　$C_3=\dfrac{5\cos1-6\sin1}{3!}$

$\sin\dfrac{1}{1-z}$ 只在 $|z|<1$ 内解析，故 $R=1$.　　选(B).

$\sin(1+\dfrac{z}{1-z})=\sin1\cos\dfrac{z}{1-z}+\cos1\sin\dfrac{z}{1-z}$，$\cos\dfrac{z}{1-z}=1-\dfrac{z^2}{2(1-z)^2}+\cdots=1-\dfrac{z^2}{2}(1+2z+\cdots)+\cdots=1-\dfrac{z^2}{2}-z^3+\cdots$ 同样将 $\sin\dfrac{z}{1-z}$ 展开式 z^3 项系数，合起来即得 z^3 的系数.

4-32　$\ln(\cos z)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^2 项的系数是(　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) $-\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

解　$[\ln(\cos z)]'=\dfrac{-\sin z}{\cos z}$，　$[\ln(\cos z)]''=-\dfrac{1}{\cos^2 z}$

故 $f''(0)=-1$

z^2 项的系数为 $-\dfrac{1}{2}$.　　选(C).

同样用 $\ln(\cos z)=\ln[1-(1-\cos z)]=-(1-\cos z)-\dfrac{1}{2}(1-\cos)^2-\cdots$ 而 $1-\cos z=\dfrac{z^2}{2}-\cdots$ 可得 z^2 系数是 $-\dfrac{1}{2}$.

4-33　$\dfrac{1}{1+\cos z}$ 在 z_0 点的泰勒展开式中，z^3 项的系数为(　).

(A) 0　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 2

解　由于在 $z\in\mathbf{R}$ 时，$\dfrac{1}{1+\cos x}$ 是偶函数，故它的泰勒级数中不含 x 的奇次幂项，而实函数是复函数的特殊情况，故此函数 z^3 项的系数为 0.　　选(A).

这些题均可像上面直接展开做.

4-34 $\dfrac{1}{\cos z}$ 在 0 点处的泰勒展开式的收敛半径 R 和 z^2 项的系数为 $(R, C_2) = ($　$)$.

(A) $(\infty, \frac{1}{2})$　　(B) $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$

(C) $(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$　　(D) $(\infty, -\frac{1}{2})$

解　函数 $\dfrac{1}{\cos z}$ 在 $|z| < \dfrac{\pi}{2}$ 时解析，故 $R = \dfrac{\pi}{2}$，

又 $\left(\dfrac{1}{\cos z}\right)' = \dfrac{\sin z}{\cos^2 z}$，

$$\left(\frac{1}{\cos z}\right)'' = \frac{\cos^3 z + 2\sin^2 z \cos z}{\cos^4 z}, f''(0) = 1.$$

故 $C_2 = \dfrac{1}{2}$.　　选(B).

有的题用求导来求泰勒系数方便；有的用展开法求泰勒系数方便．读者可从这些题自行归纳，在什么情况下用展开法好，什么情况下用求导数法好？

4-35 函数 $e^{\sin z}$ 在 $z = 0$ 处泰勒展开式的收敛半径 R 与 z^4 项的系数 C_4 为 $(R, C_4) = ($　$)$.

(A) $(1, \frac{1}{4!})$　　(B) $(1, \frac{2}{3!})$

(C) $(\infty, \frac{1}{4!})$　　(D) $(\infty, \frac{1}{3!})$

解　令 $\sin z = u$，则 $e^u = 1 + u + \dfrac{1}{2!}u^2 + \dfrac{1}{4!}u^4 + \cdots$

而　$\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$

故在 $e^{\sin z}$ 的 0 点处泰勒展式中出现 z^4 项只有 $\dfrac{1}{4!}u^4$ 的第一项，为 $\dfrac{1}{4!}z^4$，而 $e^{\sin z}$ 在全平面解析，故 $R = \infty$.　　选(C).

读者试用求导方法解此题.

4-36 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 能否在 $z = 0$ 收敛，而在 $z = 3$ 发散.

解　不能. 因为 $|0-2| = 2$，说明级数在 $|z-2| < 2$ 时收敛；而 $|3-2| = 1$，说明此级数当 $|z-1| > 1$ 时发散，例如在 $z = 3\dfrac{1}{2}$ 点.

注意幂级数收敛域是圆.

$\left|3\frac{1}{2}-2\right| = 1\frac{1}{2} < 2$,应当收敛,但

$\left|3\frac{1}{2}-2\right| = 1\frac{1}{2} > 1$,应当发散,故矛盾.

4-37 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径为 R,证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(\alpha_n)z^n$ 的收敛半径 $r \geqslant R$.

证 用反证法. 设 $r < R$,那么存在 r_0 使 $r < r_0 < R$,这时

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|r_0^n \text{ 收敛.}$$

而 $|\mathrm{Re}(\alpha_n)| \leqslant |\alpha_n|$,故 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(\alpha_n)\cdot r_0^n$ 收敛,从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(\alpha_n)\cdot r_0^n$ 收敛,但 $r_0 > r$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(\alpha_n)\cdot r_0^n \text{ 应发散,矛盾,故 } r \geqslant R.$$

注意收敛半径的定义.

4-38 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径是 R_1,$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n z^n$ 的收敛半径是 R_2,求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n z^n$ 的收敛半径.

解 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n z^n$ 的收敛半径是 R,我们证明 $R = R_1R_2$. 事实上,设 $|z_0| < R_1R_2$,则存在 $0<\varepsilon<1$,使 $|z_0| = \varepsilon R_1R_2$,取 $z_0 = z_1z_2$ 使 $|z_1| = \sqrt{\varepsilon}R_1 < R_1$; $z_2| = \sqrt{\varepsilon}R_2 < R_2$ 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_1||z_1|^n \text{ 收敛},\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n||z_2|^n \text{ 收敛,从而有 } n \text{ 充分}$$

大 $|\alpha_1||z_1|^n < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n||z_1|^n\cdot|\alpha_2||z_2|^n$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n z^n$ 的收敛半径 $R \leqslant R_1R_2$.

若 $R < R_1R_2$,则存在 z_0,使 $R < |z_0| < R_1R_2$,这时,由上面已证结果知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_1\alpha_2||z_0|^n$ 收敛,而 $|z_0| > R$. 故上面的级数又应发散,矛盾. 故 $R \geqslant R_1R_2$,即 $R = R_1R_2$.

这个题的证明方法是先证 $R \geqslant R_1R_2$.

再证 $R < R_1R_2$,故 $R = R_1R_2$,这是数学的常用方法.

4-39 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{n})^n z^n$ 能否作为一个在原点解析的函数的泰勒展开式，为什么？

解 不能. 否则记

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{n})^n z^n$$

则 $f(z)$ 在 $z=0$ 点的一个邻域内处处解析，但此级数的收敛半径为 0，即 $f(z)$ 仅在 0 点有定义，矛盾.

函数在某点可展为泰勒级数，则它在此点必解析.

4-40 求 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ 的和函数.

解 由 $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z},\ |z|<1.$$

求导得 $$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}=\frac{1}{(1-z)^2}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n=\frac{z}{(1-z)^2},\quad |z|<1$$

为所求和函数.

因此 $\frac{z}{(1-z)^2}$，($|z|>1$) 是 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ 和函数的解析延拓.

4-41 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 的和函数.

解 设 $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$，则

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}=\frac{1}{1-z},\text{且 } S(0)=0,$$

故 $$S(z)=\int_0^z\frac{1}{1-z}\mathrm{d}z=-\ln(1-z),\ |z|<1.$$

这与实函数一致，应记住这个结果.

4-42 求 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n$ 的和函数.

解 由 $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$$

得 $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}=\frac{2}{(1-z)^3}$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n=\frac{2z^2}{(1-z)^3},\ |z|<1.$$

注意，不论题目是否要求，求了幂级数的和函数，应当习惯于同时给出其收敛域.

4-43 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 设 $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$

则 $S'''(z) = S(z)$，且 $S(0) = 1, S'(0) = 0, S''(0) = 0$. 故

$$S(z) = C_1 e^z + C_2 e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z} + C_3 e^{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)z}$$

$$S'(0) = C_1 - C_{2/2} - C_{3/2} + (\frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_3)i = 0$$

$$S''(0) = C_1 - \frac{1}{2}C_2 - \frac{C_3}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2}C_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2)i = 0$$

$C_2 = C_3 = \frac{1}{3}, C_1 = \frac{1}{3}$.

故 $S(z) = \frac{1}{3}e^z + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z, \ |z| < 1$.

4-44 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n!}$ 的和函数.

这个级数在全复平面 $|z| < +\infty$ 上收敛，因此，允许不注明收敛域.

不论解 1，解 2 都用到

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

解 1 记 $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} z^n$

由 $ze^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}$，两边对 z 求导得

$$(1-z)e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{(n-1)!}$$

两边同乘以 z 得：$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{(n-1)!} = (z+z^2)e^z$.

解 2 $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} z^n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)z^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}$$

$$z^2 e^z + ze^z = (z+z^2)e^z.$$

4-45 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!}$ 的值.

解 1 由 $\mathrm{ch}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

故
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}i = \cos 1$$

解 2 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1.$

用到 $i^2=-1$.

4-46 证明:若 $f(z)$ 解析,且 $|f(z)|\leqslant|z|^2$,则 $f(z)=\alpha z^2$,其中 $|\alpha|\leqslant 1$.

证 由 $f(z)$ 解析,有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

而
$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

$$|a_n|=\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2}{R^{n+1}}dS=R^{2-n}.$$

因此,当 $R\to\infty$,有 $n>2$ 时,$a_n=0$,即 $a_3,a_4,\cdots$ 皆为 0,又由 $|f(z)|\leqslant|z|^2$ 令 $z\to 0$ 得 $f(0)=0$,又 $\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant|z|$ 令 $z\to 0$ 得 $f'(0)=0$.

于是 $a_0=a_1=0$,只有 $a_2\neq 0$,即 $f(z)=a_2z^2$,由 $|f(z)|=|a_2||z^2|\leqslant|z^2|$

故 $f(z)=\alpha z^2,\alpha=a_2,|\alpha|=|a_2|\leqslant 1.$

这几个题,巧妙地用到了解析函数的泰勒展开式,即利用展开式来研究和把握解析函数.这个方法,请读者注意.

4-47 证明:若 $f(z)$ 解析,则 $f(z)$ 的泰勒级数:$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 中的所有系数 a_n 为实数的充要条件是 $f(R)\subset R$(R 为全体实数的集合).

证 若 a_n 皆为实数,当 $z\in R$ 时,$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in R$ 是显然的;

反之,设 x 是任意实数,由 $f(x)\in R$ 得

$$\overline{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_nx^n=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

故 $\bar{a}_n=a_n$,即 a_n 为实数($n=0,1,2,\cdots$).

本题说明:实系数的函数作为其泰勒级数的和函数,在收敛区域内是解析函数 $f(z)$ 当 $\mathrm{Im}(z)=0$ 时的特殊情形.

4-48 设 $f(z)$ 在区域 $|z|<1$ 内解析,$f(0)=0$,$f(\frac{1}{2})\neq 0$,证明存在 $0<\delta<1$,使在 $0<|z|<\delta$ 内,$f(z)$ 恒不为 0.

证 由 $f(0)=0, f(\frac{1}{2})\neq 0$ 知，在 $|z|<1$ 内，$f(z)=z^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. 其中 m 是正整数，$a_0\neq 0$，这是因为 $f(0)=0$，故 $f(z)$ 的泰勒展开式中，前几项系数可能为零，常数项必为 0；而 $f(\frac{1}{2})\neq 0$，故 a_n 不全为 0，上式中 a_0 就是第一个不为 0 的项，故设 $a_0\neq 0$.

这时记 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $\varphi(0)$ 不为 0. 因此存在 $z=0$ 的一个邻域 $|z|<\delta$，在其中 $\varphi(z)\neq 0$，因此 $f(z)=z^m\varphi(z)$ 在 $0<|z|<\delta$ 中恒不为 0.

4-49 若 $f(z)$ 解析，且 $|f(z)|\leqslant 1+|z|$，则 $f(z)=az+b$. 且 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$.

遇到解析函数，便要想到其泰勒展开式.

证 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$

则 $$|a_n|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=R}\frac{1+R}{R^{n+1}}dS=\frac{1+R}{R^n}$$

当 $n>1$ 时，令 $R\to\infty$ 得 $|a_n|=0$，故

$$f(z)=a_0+a_1z=az+b$$

由 $|f(z)|\leqslant 1+|z|$，令 $z=0$ 得 $|f(0)|=|b|\leqslant 1$.

又 $\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\left|\frac{b}{z}+a\right|\leqslant 1+\frac{1}{|z|}$

令 $z\to\infty$ 得 $$|a|\leqslant 1.$$

4-50 已知 $f(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$，证明 $f(z)$ 解析，并求 $f^{(10)}(0)$.

解 由 $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$，$|z|<+\infty$.

故 $$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}, 0<|z|<+\infty$$

于是 $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}, |z|<+\infty$$

幂级数的和函数在收敛域内必是解析函数.

因此，$f(z)$ 解析，且 $\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}=\dfrac{(-1)^5}{11!}$，由此，$f^{(10)}(0)=-\dfrac{1}{11}$.

4-51 求 $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 点的泰勒展开式.

解 记 $\dfrac{1}{1+z^2}=\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots \quad |u|<1.$

$$\frac{1}{(1+u)^2}=1-2u+3u^2-\cdots$$

故
$$\frac{1}{(1+z^2)^2}=1-2z^2+3z^4-\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n},\ |z|<1.$$

4-52 求 $e^{z^2}\sin z^2$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解
$$e^{z^2}\sin z^2=\frac{1}{2i}(e^{(1+i)z^2}-e^{(1-i)z^2})$$
$$=\frac{1}{2i}\Big[(1+(1+i)z^2+\frac{1}{2!}(1+i)^2z^4+\cdots)$$
$$-(1-(1-i)z^2+\frac{1}{2!}(1-i)^2z^4+\cdots)\Big]$$

由 $1+i=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$，$1-i=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$$(1+i)^n-(1-i)^n=\frac{1}{\sqrt{2}^n}(e^{\frac{\pi}{4}ni}-e^{-\frac{n}{4}\pi i})=2^{1-\frac{n}{2}}i\sin\frac{n}{4}\pi.$$

故 原式 $=z^2+z^4+\dfrac{1}{3}z^6+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\frac{n}{2}}}{n!}\sin\frac{n\pi}{4}z^{2n}$，$|z|<+\infty$.

用指数函数 e^z 的泰勒公式于三角函数和双曲函数是很方便的.

4-53 求 $\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $z=\dfrac{1}{2}$ 处的泰勒展开式.

解
$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=\frac{-4}{1-4(z-\frac{1}{2})^2}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}4^{n+1}(z-\frac{1}{2})^{2n},\quad |z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$$

$\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 为奇点. 因此在 $|z-\dfrac{1}{2}|<\dfrac{1}{2}$ 解析. 此题也可用指数形式，但得先令 $t=z-\dfrac{\pi}{4}$.

4－54 求 $\sin z-\cos z$ 在 $z=\frac{\pi}{4}$ 处的泰勒展开式.

解 $\sin z-\cos z=\sqrt{2}\sin(z-\frac{\pi}{4})$

$$=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{4})^{2n+1},$$

$$\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<+\infty.$$

4－55 求 $\cos z-\mathrm{i}\sin z$ 在 $z=-1$ 处的泰勒展开式.

也可先令 $t=z+1$.

解 $\cos z-\mathrm{i}\sin z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}-\mathrm{i}(z+1)}$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}(z+1)^n,\quad |z+1|<+\infty.$$

4－56 求 $f(z)=\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\sin^2\zeta}{(z-\zeta)^2}\mathrm{d}\zeta$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

先求出 $f(z)$，再展开.

解 $f(z)=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\sin^2 z, & |z|<1\\ 0, & |z|>1\end{cases}.$

故 $f(z)=\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$，$|z|<1$.

4－57 设 $\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{d}\zeta}{(z\zeta-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，求 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$.

解 $\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{d}\zeta}{(z\zeta-z)^2}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(1-z)^2}$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1},\ |z|<1.$$

$a_n=2(n+1)\pi\mathrm{i}\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

本题是由柯西积分公式求出 $f(z)$ 再将其展开为泰勒级数的例题.

4.3 罗伦级数

4－58 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n\mathrm{e}^{-|n|}z^n$ 的收敛区域为（　）.

(A) $|z|<\mathrm{e}$　　　　(B) $|z|>\mathrm{e}$

(C) $e^{-1}<|z|<e$　　(D) $\varnothing$

解　在 $\sum\limits_{-\infty}^{-1} n e^{-|n|} z^n$ 中,令 $m=-n$,

得 $$-\sum_{m=1}^{+\infty} m e^{-m} z^{-m}=-\sum_{m=1}^{\infty} m(e^{-1} z^{-1})^m$$

故当 $e^{-1}|z|^{-1}<1$ 也即 $|z|>e^{-1}$ 时收敛.

而 $$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n} z^n=\sum_{n=0}^{\infty} n(e^{-1} z)^n$$

当 $e^{-1}|z|<1$,即 $|z|<e$ 时收敛.

故 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} n e^{-|n|} z^n$ 的收敛区域为 $e^{-1}<|z|<e$.　　选(C).

这已经是罗伦级数了,一般罗伦级数收敛域为环形域.

4-59　设 $\dfrac{1}{z(z-1)}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$, $|z-1|>1$,则 $a_{-3}=(\quad)$.

(A) 1　　(B) -1　　(C) 0　　(D) -2

解　$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2\left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)}$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{z-1}+\cdots\right)$$

故 $a_{-3}=-1$.　　选(B).

这又是用展开法求罗伦级数系数的方法.

4-60　函数 $\dfrac{1}{z(z^2+i)}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n (0<|z|<1)$,则 $a_3=(\quad)$.

(A) i　　(B) $-$i　　(C) 1　　(D) -1

解　$$\frac{1}{z(z^2+i)}=\frac{-i}{z}\cdot\frac{1}{1-iz^2}=\frac{-i}{z}(1+iz^2+i^2z^4+\cdots),$$

$a_3=i$.　　选(A).

一般用展开法求罗伦级数的系数更简便.

4-61　$\dfrac{1}{(z-1)(z+1)}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, $|z|>1$,则 $a_{-4}=(\quad)$.

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) -2

解　$$\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

如对变形不熟,可令 $\dfrac{1}{z}=t$.

$$= \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{2z}\left[\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(-1+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots,\qquad 故\ a_{-4}=1.$$

选(B).

则 $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$

$= \frac{t^2}{(1-t)(1+t)}$

$= \frac{t}{2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)$

按 t 的泰勒展开.

4-62 设 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-\frac{1}{2})^n$, $\left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$,则 $a_{-2}=(\quad)$.

(A) 1　(B) 4　(C) -1　(D) -4

解 令 $2z-1=t$,则 $|t|>1$,原式化为

$$\frac{4}{(t+1)(t+3)} = 2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} - \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{3}{t}}\right)$$

$$= \frac{2}{t}\left[\left(1-\frac{1}{t}+\cdots\right)-\left(1-\frac{3}{t}+\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{4}{t^2}+\cdots = \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2}+\cdots,\qquad a_{-2}=1.$$

选(A).

作罗伦级数展开式时,要注意在什么区域展开.

4-63 设 $\frac{1}{1+z^2}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_nz^n$,$(|z|>1)$,则 $C_0=(\quad)$.

(A) 1　(B) 0　(C) -1　(D) 2

解 $\frac{1}{1+z^2}=\frac{1/z^2}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$,$C_0=0$.

选(B).

熟悉了可不变换.

4-64 设 $\frac{z^2}{e^{\frac{1}{z}}}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$, $|z|>0$,则 $a_{-7}=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{7!}$　(B) $-\frac{1}{7!}$　(C) $\frac{1}{9!}$　(D) $-\frac{1}{9!}$

解 $z^2e^{-\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{9!}\frac{1}{z^9}+\cdots\right)$,$a_{-7}=-\frac{1}{9!}$.

选(D).

4-65 设 $e^{\frac{z}{z-1}}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-1)^n$，则 $a_{-3}=(\quad)$.

(A) $\frac{-1}{3}$ (B) $\frac{1}{3!}$ (C) $\frac{e}{3!}$ (D) $-\frac{e}{3!}$

解 $e^{\frac{z}{z-1}}=e^{(1+\frac{1}{z-1})}=e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$

$$=e\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right)$$

$a_{-3}=\frac{e}{3!}$. 选(C).

不熟悉时可令 $\frac{1}{z-1}=t$.

4-66 若 $\frac{1}{1-\cos z}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$，$0<|z|<\frac{\pi}{2}$，则 $a_2=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{2\times5!}$ (B) $\frac{1}{5!}$ (C) $\frac{1}{3!}$ (D) $\frac{1}{2}$

解 由 $1-\cos z=\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots$

故 $$\frac{1}{1-\cos z}=\frac{2}{z^2}\left(\frac{1}{1-\frac{z^2}{2\times3!}+\frac{z^4}{3\times5!}-\cdots}\right)$$

以下，我们用除法来做：

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+\frac{z^2}{2\times3!}+\frac{z^4}{2\times5!}+\cdots \\ \hline
1-\frac{z^2}{2\times3!}+\frac{z^4}{3\times5!}+\cdots & 1 \\
 & 1-\frac{z^2}{2\times3!}+\frac{z^4}{3\times5!}+\cdots \\ \cline{2-2}
 & \frac{z^2}{2\times3!}-\frac{z^4}{3\times5!}+\cdots \\
 & \frac{z^2}{2\times3!}-\frac{z^4}{4\times3!3!}+\cdots \\ \cline{2-2}
 & \frac{z^4}{2\times5!}+\cdots \\
 & \vdots
\end{array}$$

还可以用“除法”来求罗伦展开式.

如令 $\frac{z^2}{2\times3!}-\frac{z^4}{3\times5!}+\cdots=u$，则 $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots=1+(\frac{z^2}{2\times3!}-\frac{z^4}{3\times5!}+\cdots)+(\frac{z^2}{2\times3!}-\frac{z^4}{3\times5!}+\cdots)^2$ 即易得 z^2 的系数是 $2[\frac{1}{6\times4!}-\frac{1}{3\times5!}]=\frac{1}{5!}$

故 $\quad \dfrac{1}{1-\cos z}=\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}z^2+\cdots$

$a_2=\dfrac{1}{5!}$. 选(B).

4-67 若 $\sin\dfrac{1}{z^3}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$，$|z|>0$，则 $a_{-3}=$( ).

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{3!}$ (C) $-\dfrac{1}{3!}$ (D) 1

解 $\sin\dfrac{1}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{z^9}+\cdots$，$a_{-3}=1$. 选(D).

直接按$\dfrac{1}{z}$的泰勒展开.

4-68 若 $\cos(\sin\dfrac{1}{z})=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$，$|z|>0$，则 $a_{-4}=$( ).

(A) $\dfrac{1}{4!}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{5}{24}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

解 $$\cos(\sin\frac{1}{z})=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{z}+\frac{1}{4!}\sin^4\frac{1}{z}-\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots)^2+\frac{1}{4!}(\frac{1}{z^4}-\cdots)+\cdots$$

故 $\quad a_{-4}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4!}=\dfrac{5}{24}$. 选(C).

这几个题也可先令$\dfrac{1}{z}=t$，再展为 t 的泰勒级数.

4-69 $\oint\limits_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}d\zeta=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$，那么 $a_n=0(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的充要条件是( ).

(A) $0<|z|<1$ (B) $|z|>0$

(C) $|z|<1$ (D) $|z|>1$

解 若 $|z|<1$，则$\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}=\cos^3\zeta(1-\zeta^2z^2+\cdots)$，这时 $\oint\limits_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}d\zeta\equiv0$，故 $a_n\equiv0$.

若 $|z|>1$，则$\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}=\dfrac{1}{\zeta z}\cos^3\zeta(1-\dfrac{1}{\zeta z}+\cdots)$，故 $F(z)=\oint\limits_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}dz\neq0$，$a_n$ 不会全为 0.

$|z|<1$，$|\xi z|<1$，$\dfrac{1}{1+\xi z}$ 可展为泰勒级数. $|z|>1$，$|\xi z|>1$，则 $\dfrac{1}{1+\xi z}=\dfrac{\frac{1}{\xi z}}{1+\frac{1}{\xi z}}$ 展为罗伦级数.

$|z|=1$ 时，$\oint\limits_{|\zeta|=1} \dfrac{\cos^3\zeta}{1-\zeta z}\mathrm{d}\zeta$ 无意义. 选(C).

4-70 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+1}{n^2(z+i)^n}$ 的收敛区域为( ).

(A) $|z+\mathrm{i}|>3$ (B) $|z+\mathrm{i}|<3$

(C) $|z+\mathrm{i}|\geqslant 3$ (D) $|z+\mathrm{i}|\leqslant 3$

解 令 $z+\mathrm{i}=\dfrac{1}{u+\mathrm{i}}$,则易知,收敛区域是 $|u+\mathrm{i}|\leqslant 3$,即 $|z+\mathrm{i}|\geqslant 3$. 选(C).

这是罗伦级数,但不含正整数幂的项.

4-71 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1-\mathrm{i})^n z^n}$ 的收敛区域为( ).

(A) $|z|>\sqrt{2}$ (B) $|z|>1$

(C) $|z|<\sqrt{2}$ (D) $|z|>\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

解 由 $|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$,便知. 选(D).

4-72 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{(z+1)^n}$ 的收敛区域为( ).

(A) $|z+1|>\mathrm{e}$ (B) $|z+1|<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(C) $0<|z+1|<1$ (D) $|z+1|>1$

解 由 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}|=1$,便知. 选(D).

以上级数皆是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{(z-z_0)^n}$ 的形式,皆可令 $z-z_0=\dfrac{1}{u}$,换为幂级数来求收敛域.

4-73 级数 $\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(\mathrm{i}n)z^n$ 的收敛区域为( ).

(A) $0<|z|<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (B) $|z|<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(C) $0<|z|<\mathrm{e}$ (D) $0<|z|<\mathrm{e}$

解 由 $\cos(\mathrm{i}n)=\mathrm{ch}n=\dfrac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{2}$,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^n z^n$ 的收敛区域 $|z|<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}z^n$ 是 $|z|<\mathrm{e}$,故此级数的收敛区域是 $0<|z|<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 选(A).

注意复的三角函数与双曲函数的关系.

4-74 函数 $\ln(\sin\frac{1}{z})$ 在区域 $0<|z|<1$ 内能否展成罗伦级数，为什么？

解 不能.

因为取 $z=\frac{1}{k\pi}$ 时，有 $\sin\frac{1}{z}=0$，故这些点全是 $\ln(\sin\frac{1}{z})$ 的奇点. 也就是说，在 z 的任意去心邻域内，$f(z)=\ln(\sin\frac{1}{z})$ 不解析，故不能展为罗伦级数.

能展开为罗伦级数的函数必定在某个环形域内解析.

4-75 函数 $\ln z$ 在 $|z|>0$ 上能否展开为罗伦级数，为什么？

解 不能. 因为负实轴均为 $\ln z$ 的不解析点.

4-76 证明：若 $f(z)$ 在 $|z|>0$ 解析，且 $|f(z)|\leqslant|z|^{-\frac{3}{2}}$，$|z|>0$，则 $f(z)=0$.

证 设 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z_n$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

$$|C_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=R}\frac{dS}{R^{n+1}\cdot R^{3/2}}=\frac{1}{R^{n+3/2}}$$

当 $n>-2$ $\qquad |C_n|\leqslant\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+3/2}}=0$

若 $n\leqslant-2$ $\qquad |C_n|\leqslant\lim\limits_{R\to 0}\frac{1}{R^{n+3/2}}=0$

故 $C_n=0, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 即 $f(z)=0$.

$$\left|\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant\oint_{|z|=R}\frac{dS}{R^{n+1}\cdot R^{3/2}}=2\pi\frac{1}{R^{n+3/2}}.$$

注意令 $R\to\infty$ 和 $R\to 0$ 两种情况.

4-77 设 $f(z)$ 在 $|z|>0$ 上解析，且 $|f(z)|\leqslant|z|^2+|z|^{-\frac{1}{2}}$，证明：$f(z)=C_0+C_1z+C_2z^2$.

证 令 $\quad f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z^n$.

则（如上题）$\quad |C_n|\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint_{|z|=R}\frac{R^2+\frac{1}{\sqrt{R}}}{R^{n+1}}dS\leqslant\frac{R^2\sqrt{R}+1}{R^n\sqrt{R}}$

当 $n>2$，令 $R\to\infty$ 得 $C_n=0$；当 $n<0$，令 $R\to 0$ 得 $C_n=0$，故

$n>2$ 时 $C_n=0$，$n<0$ 时 $C_n=0$ 故 $f(z)$ 的罗伦级数仅有三项.

$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2$.

4-78 在 $0 < |z| < 1$ 的区域内，将函数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ 展开为罗伦级数.

解 $$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z(z-1)} + \frac{1}{z(z-2)}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2z(1-z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) z^{n-1}.$$

在 $0<|z|<1$ 内 $\dfrac{1}{z-2}$ 是解析的.

4-79 求函数 $\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $|z-1| > 1$ 上的罗伦展开式.

解 $$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1+(z-1)}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3} \frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+3}}.$$

注意展开的区域.

也可令 $z-1 = \dfrac{1}{t}$.

4-80 求函数 $-\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z-i| > 1$ 上的罗伦展开式.

解 令 $w = z - i, z^2 = (w+i)^2$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{w^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{i}{w})^2},$$

令 $\dfrac{i}{w} = u$，而 $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots$

$$\frac{1}{(1+u)^2} = \left[\frac{-1}{1+u}\right]' = 1 - 2u + 3u^2 - \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n u^{n-1}$$

即 $$\frac{1}{(1+\frac{i}{2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} n \left(\frac{1}{w}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} n \frac{1}{(z-i)^{n+1}}.$$

复函数的罗伦展开式的系数一般应是复数.

4-81 求函数$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$在$|z|>1$上的罗伦展开式.

可令$\dfrac{1}{z}=t$再展开.

解 $$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+2}}.$$

4-82 求函数$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$在$|z-\mathrm{i}|>2$上的罗伦展开式.

可令$\dfrac{1}{z-\mathrm{i}}=t$这些都请读者自己试试.

解 $$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{(2\mathrm{i}+z-\mathrm{i})^2}$$
$$=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^4}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{4\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(-2\mathrm{i})^{n-1}n}{(z-\mathrm{i})^{n+3}}.$$

4-83 求函数$\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$在$|z|>1$的罗伦级数(只要写前4项).

解 令$z=\dfrac{1}{w}$,则$\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}=\mathrm{e}^{\frac{w}{w-1}}$

$$\mathrm{e}^{\frac{-w}{1-w}}=1-\frac{w}{1-w}+\frac{1}{2}\frac{w^2}{(1-w)^2}+\frac{1}{3!}\frac{w^3}{(1-w)^3}+\cdots$$
$$=1-w(1+w+w^2+\cdots)$$
$$+\frac{1}{2}w^2(1+2w+3w^2+\cdots)$$
$$-\frac{1}{2\cdot 6}w^3(2+6w+\cdots)+$$
$$=1-w-\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{6}w^3+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\cdots.$$

这个展开式的通项公式无法写出,故只能要求写成有限项.

4-84 求$\displaystyle\oint_{|\zeta|=1}\frac{\sin\zeta}{1-\zeta z^2}\mathrm{d}\zeta$在$|z|>1$上的罗伦展开式.

解 $$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\sin\zeta}{1-\zeta z^2}\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{z^2}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\sin\zeta}{\zeta-\dfrac{1}{z^2}}\mathrm{d}\zeta$$
$$=-2\pi\mathrm{i}\frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z^2}$$
$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4(n+1)}},\ |z|>1.$$

先用柯西积分公式求得由积分表示的函数后,再展开.

4-85 设 $\oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{\zeta}}{(z\zeta-\zeta)^2} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$，求 a_n.

解 $\oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{\zeta}}{\zeta^2(z-1)^2} d\zeta = 2\pi i \frac{1}{(z-1)^2}$

$$= \frac{2\pi i}{z^2} \frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi i}{z^{n+1}}$$

因此 $a_0 = a_1 = 0, a_n = 2(n-1)\pi i \quad (n = 2,3,\cdots)$.

先用导数公式作积分，再展开.

4-86 设 k 是实数，且 $|k| < 1$，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta-k^2}$$

证 1 在 $|z| > k$ 中由

$$\frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{k}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{k}{z}+\frac{k^2}{z^2}+\cdots\right)$$

令 $z = e^{i\theta}$ 得 $\frac{\cos\theta - k - i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n e^{-i(n+1)\theta}$

由实部与实部，虚部与虚部相等得

$$\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta$$

$$\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta$$

证 2 由 $\sum_{n=0}^{\infty} k^n e^{i(n+1)\theta} = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (ke^{i\theta})^n$

$$= e^{i\theta} \frac{1}{1-ke^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1-k\cos\theta+ik\sin\theta)}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

$$= \frac{\cos\theta-k+i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

用复函数的级数展开，证明实函数级数的一些等式，这个例题很典型.

证 2 是直接用等比级数的和来做的.

第 5 章　留　　数

5.1　孤立奇点与留数

5-1　函数$\dfrac{\sin z}{z^2}$在 $z=0$ 点是(　).

(A) 本性奇点　　(B) 可去奇点

(C) 一级极点　　(D) 二级极点

解　$\dfrac{\sin z}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3!}+\cdots$

故 $z=0$ 是它的一级极点.　　选(C).

奇点的分类是计算留数的基础.

5-2　$z=0$ 是函数$\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$的(　).

(A) 本性奇点　　(B) 可去奇点

(C) 一级极点　　(D) 非孤立奇点

解　取 $z=\dfrac{1}{k\pi}$,k 为任意非零整数,皆有 $\sin\dfrac{1}{z}=0$,因而在 $z=0$ 的任一邻域皆有此函数$\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$的无限个奇点.

选(D).

留数研究的是有孤立奇点的积分性质.

5-3　$z=\mathrm{i}$ 是函数$\dfrac{z}{(1+z^2)(1+\mathrm{e}^{\pi z})}$的(　).

(A) 本性奇点　　(B) 二级极点

(C) 一级极点　　(D) 三级极点

解　由 $1+z^2=(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ 及 $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=0$

但$(1+\mathrm{e}^{\pi z})'\Big|_{z=\mathrm{i}}=\pi\mathrm{e}^{\pi z}\Big|_{z=\mathrm{i}}=-\pi\neq 0$,故 i 是此函数的二级极点.　　选(B).

5-4 $z=1$ 是函数 $e^{\frac{z}{1-z}}$ 的(　).

(A) 本性奇点　　(B) 一级极点

(C) 可去奇点　　(D) 二级极点

解 $e^{\frac{z}{1-z}}=e^{(-1+\frac{z}{1-z})}=e^{-1}(1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2}+\cdots)$

故 $z=1$ 是此函数的本性奇点. 选(A).

要分清极点与本性奇点.

5-5 若 $f(z)$ 在 z_0 点的罗伦级数有无限项,但不出现 $z-z_0$ 的正整数幂的项. 则 z_0 点是函数 $\varphi(z)=1/f(z)$ 的(　).

(A) 本性奇点　　(B) 极点

(C) 解析的点　　(D) 可去奇点

解 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{(z-z_0)^n}$,则 $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

从而 $\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=0$,$z_0$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点. 选(D).

$f(z)$ 的奇点与 $1/f(z)$ 的奇点间的关系.

5-6 $\text{Res}(e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z},0)=$(　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

解 $(e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z})=(1+\frac{1}{z}+\cdots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\cdots)$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots$$

故留数为 1. 选(B).

用罗伦级数展开计算留数是基本方法之一.

5-7 $\text{Res}(\tan\frac{1}{1-z},1)=$(　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 1/3

解 $\tan\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z}-\cdots$,故 $C_{-1}=-1$. 选(C).

5-8 $\text{Res}(\frac{\ln(1+z)}{e^z-1},0)=$(　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 1/3

解 由 $\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{e^z-1}=1$,故 $z=0$ 是可去奇点.

选(A).

当 $z\to 0$ 时,$\ln(1+z)\sim\sin z\sim e^z-1\sim z$,这些,均与实函数是

一致的.

5 - 9 $\operatorname{Res}(z^2\tan\frac{1}{z},0)=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $-\frac{1}{6}$

解 $\tan\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3z^3}+\cdots$

因此,$\operatorname{Res}(z^2\tan\frac{1}{z},0)=-\frac{1}{3}$. 选(B).

求留数就是求罗伦展开式的系数 a_{-1}.

5 - 10 $\operatorname{Res}(\cos\frac{1}{z},0)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

解 $\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2z^2}+\cdots$,故 $\operatorname{Res}(\cos\frac{1}{z},0)=0$.

选(A).

$\cos\frac{1}{z}$ 是偶函数 $a_{-1}=0$.

5 - 11 $\operatorname{Res}(z\cos\frac{1}{z},0)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

解 $z\cos\frac{1}{z}=z-\frac{1}{2z}+\cdots$,故 $\operatorname{Res}(z\cos\frac{1}{z},0)=-\frac{1}{2}$.

选(D).

5 - 12 $\operatorname{Res}(e^{\frac{z}{z-1}},1)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) e (D) e^{-1}

解 $e^{\frac{z}{z-1}}=e^{(1+\frac{1}{z-1})}=e(1+\frac{1}{z-1}+\cdots)$,故 $C_{-1}=e$.

选(C).

在 $z=1$ 处的留数,也可令 $z-1=t$.

5 - 13 $\operatorname{Res}((z-1)e^{1/z^2},0)=(\quad)$.

(A) 1 (B) -1 (C) $1/2$ (D) $-\frac{1}{2}$

解 $(z-1)e^{1/z^2}=(z-1)(1+\frac{1}{z^2}+\cdots)$

$$=-1+z+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\cdots$$

故 $C_{-1}=1$. 选(A).

5 - 14 $\text{Res}(\sin\frac{\pi z}{2z-\pi},\frac{\pi}{2})=(\quad)$.

(A) 0 (B) $\pi/4$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

解 $$\sin\frac{\pi z}{2z-\pi}=\sin\frac{\pi z-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}}{2(z-\pi/2)}$$

$$=\sin[\frac{\pi}{2}+\frac{\frac{\pi^2}{4}}{z-\pi/2}]=\cos\frac{\frac{\pi^2}{4}}{z-\pi/2}$$

其罗伦级数不含 $\frac{1}{z-\pi/2}$ 的项,故 $C_{-1}=0$. 选(A).

要注意求 $z=\frac{\pi}{2}$ 点的留数,要展成 $z-\frac{\pi}{2}$ 的罗伦级数.

5 - 15 $\text{Res}(ze^{\frac{1}{1-z}},1)=(\quad)$.

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

解 $$ze^{\frac{1}{1-z}}=(z-1)e^{\frac{1}{1-z}}+e^{\frac{1}{1-z}}$$

$$=(z-1)(1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2(1-z)^2}+\cdots)+1$$

$$+\frac{1}{1-z}+\cdots$$

$$=(z-1)-\frac{1}{2(z-1)}+\cdots.$$ 选(D).

也可令 $z-1=t$ 来作.

5 - 16 $\text{Res}(\sin\frac{z}{z+1},1)=(\quad)$.

(A) cos1 (B) $-$cos1 (C) sin1 (D) $-$sin1

解 $\sin\frac{z}{z+1}=\sin(1-\frac{1}{z+1})=\sin1\cos\frac{1}{z+1}-\cos1\sin\frac{1}{z+1}$,而 $\sin\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\cdots$,$\cos\frac{1}{z+1}$ 的罗伦级数中不出现 $\frac{1}{z+1}$ 的项,故 $C_{-1}=-\cos1$. 选(B).

5 - 17 $\text{Res}(\sin z\sin\frac{1}{z},0)=(\quad)$.

对本性奇点求

(A) 0 (B) 1 (C) e (D) e^{-1}

解 $\sin z \sin\frac{1}{z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right)$，不出现$\frac{1}{z}$的项. 选(A).

留数一般都用罗伦展开，试总结以上各题求留数方法.

5-18 设 $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^3}g(z)$，而 $g(z)$ 在 z_0 点解析，$g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则 $m =$ ( ).

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

解 由 z_0 是 $g(z)$ 的一级零点，故 z_0 是$\frac{1}{(z-z_0)^3}$的二级极点. 选(B).

5-19 设 z_0 是 $f(z)$ 的三级极点，则 $\mathrm{Res}(f(z), z_0) =$ ( ).

(A) $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{3!}[(z-z_0)^3 f(z)]'''$

(B) $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{2!}[(z-z_0)^2 f(z)]''$

(C) $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{3!}[(z-z_0)^4 f(z)]'''$

(D) $\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)^3 f(z)]'''$

解 设 $f(z) = \frac{C_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \cdots$

则 $$(z-z_0)^4 f(z) = C_{-3}(z-z_0) + C_{-2}(z-z_0)^2 + C_{-1}(z-z_0)^3 + \cdots$$

故 $$[(z-z_0)^4 f(z)]''' = 3!C_{-1} + 4!C_0(z-z_0) + \cdots$$

$$C_{-1} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^4 f(z)]'''.$$ 选(C).

本问题是要读者灵活运用求极点处留数的方法，不要硬套公式.

5-20 $\mathrm{Res}\left(\frac{1-\cos z}{z-\sin z}, 0\right) =$ ( ).

(A) 0 (B) 3 (C) 1/3 (D) 1

解 $1-\cos z$ 是 $z=0$ 的二级零点；$z-\sin z$ 是三级零点，因此，$z=0$ 是$\frac{1-\cos z}{z-\sin z}$的一级极点.

先分清极点的级数，再求留数.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1-\cos z}{z-\sin z},0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z(1-\cos z)}{z-\sin z}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{z-\sin z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{3z^2}{1-\cos z}=3.\quad \text{选(B)}.$$

5-21 $\mathrm{Res}\left(\frac{\cos z}{1-e^z},0\right)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

解 $\mathrm{Res}\left(\frac{\cos z}{1-e^z},0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{1-e^z}=-1.$ 选(C).

$z=0$ 是 $\frac{\cos z}{1-e^z}$ 的一级极点.

5-22 $\mathrm{Rez}\left(\frac{3\pi-z}{\sin^2 z},3\pi\right)=(\quad)$.

(A) 1 (B) -1 (C) 3π (D) $-\frac{1}{3\pi}$

解 $\lim_{z\to 3\pi}(z-3\pi)\frac{3\pi-z}{\sin^2 z}=-1.$ 选(B).

$z=3\pi$ 是 $\frac{3\pi-z}{\sin^2 z}$ 的一级极点.

5-23 $\mathrm{Res}\left(\frac{2z-3\pi}{\cos^2 z},\frac{3}{2}\pi\right)=(\quad)$.

(A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4

解 $\lim_{z\to 3\pi/2}\left(z-\frac{3}{2}\pi\right)\frac{2\left(z-\frac{3}{2}\pi\right)}{\cos^2 z}=2.$ 选(A).

5-24 $\left(\mathrm{Res}\,\frac{\mathrm{sh}\pi z}{(z^2+1)^2},\mathrm{i}\right)=(\quad)$.

(A) $\pi/4$ (B) $-\pi/4$ (C) $\pi/2$ (D) $-\pi/2$

解 $\mathrm{sh}\pi z=\frac{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}{2}=-\frac{e^{\pi(z-\mathrm{i})}-e^{-\pi(z-\mathrm{i})}}{2}$

$=-\mathrm{sh}\pi(z-\mathrm{i})$. 故

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{sh}\pi z}{(z^2+1)^2},\mathrm{i}\right)=\lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{-\mathrm{sh}\pi(z-\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i})}=\frac{-\pi}{(2\mathrm{i})^2}=\frac{\pi}{4}.$$

选(A).

$z=\mathrm{i}$ 是 $\frac{\mathrm{sh}\pi z}{(z^2+1)^2}$ 的一级极点.

5-25 $\mathrm{Res}(\tan z+\cot z,0)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

解 $\tan z$ 在 0 点解析,而

$\lim_{z\to 0}z\cot z=1$,故 $C_{-1}=1$. 选(B).

由 $\tan z$ 与 z 是等价无穷小知 $\lim_{z\to 0}z\cot z=1$.

5-26 $\text{Res}\left(\dfrac{1+e^z}{\ln(1+z)},0\right)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

解 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z(1+e^z)}{\ln(1+z)}=2$. 选(D).

$z=0$ 时,$\ln(1+z)\sim z$ 是一级零点.

5-27 $\text{Res}\left(\dfrac{z^3}{1-\cos z^2},0\right)=(\quad)$.

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 0

解 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^4}{1-\cos z^2}=2$. 选(C).

$1-\cos z^2\sim\dfrac{1}{2}z^4$ 是 $z=0$ 的 4 级零点.

5-28 $\text{Res}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}},\dfrac{1}{\pi}\right)=(\quad)$.

(A) π^2 (B) $1/\pi^2$ (C) 1 (D) -1

解 令 $\dfrac{1}{z}=w$,则

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}=\frac{1}{\sin w}=\frac{1}{-\sin(w-\pi)}$$

而 $\lim\limits_{z\to 1/\pi}\left(z-\dfrac{1}{\pi}\right)\Big/\sin\dfrac{1}{z}=\lim\limits_{w\to\pi}\dfrac{1}{w\pi}\cdot\dfrac{\pi-w}{-\sin(w-\pi)}=\dfrac{1}{\pi^2}$.

选(B).

$\sin(w-\pi)$ 在 $w=\pi$ 是一级零点.

5-29 $\text{Res}\left(\dfrac{1}{1-e^z}+\cot z,0\right)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

解 $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{1-e^z}\right)=-1$,而 $\lim\limits_{z\to 0}z\cot z=1$,故留数为 0.

选(A).

$1-e^z$ 在 $z\to 0$ 时是一级零点.

5-30 函数 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 解析,$f(z)$ 以 $z=0$ 为一级极点,且留数为 1,则 $\text{Res}(f(z)\varphi(z),0)=(\quad)$.

(A) $\varphi(0)$ (B) $\varphi'(0)$

(C) $2\pi\varphi(0)$ (D) $2\pi\varphi'(0)$

解 记 $\varphi(z)=a_0+a_1z+\cdots$

$$f(z)=\frac{1}{z}+C_0+C_1z+\cdots$$

直接用 $z=0$ 是 $f(z)\cdot\varphi(z)$ 的

则 $\quad f(z)\cdot\varphi(z)=\dfrac{a_0}{z}+\cdots$ 故

$\mathrm{Res}(f(z)\varphi(z),0)=a_0=\varphi(0).$ 选(A).

一级极点也可得到相同结果.

5-31 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{z^2+1}{(z+\mathrm{i})^3},-\mathrm{i}\right)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

解 $\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}[(z-\mathrm{i})]'=1.$ 选(B).

注意$-\mathrm{i}$是函数的二级极点.

5-32 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\sin z}{z^3},0\right)=(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) 1/3 (D) 1/6

解 $\dfrac{\sin z}{z^3}$是偶函数,罗伦级数中不出现$\dfrac{1}{z}$的项,故$C_{-1}=0.$ 选(A).

这里$f(z)=f(-z)$时也称为偶函数,则偶函数在$z=0$的留数为0.

5-33 $\mathrm{Res}(\cot^3 z,k\pi)=(\quad)$,($k$为一整数).

(A) $(-1)^{k-1}$ (B) -1 (C) $(-1)^k 2$ (D) 2

解 $\cot^3 z=\dfrac{\cos^3 z}{\sin^3 z}=\dfrac{(-1)^k\cos^3(z-k\pi)}{(-1)^k\sin^3(z-k\pi)}$

$$=\frac{\cos^3(z-k\pi)}{\sin^3(z-k\pi)}=\frac{\cos3(z-k\pi)+3\cos(z-k\pi)}{3\sin(z-k\pi)-\sin3(z-k\pi)}$$

$$=\frac{(1-\frac{9}{2}(z-k\pi)^2+\cdots)+3(1-\frac{1}{2}(z-k\pi)^2+\cdots)}{3[(3-k\pi)-\frac{1}{3!}(z-k\pi)^3+\cdots]-[3(z-k\pi)-\frac{3^3}{3!}(z-k\pi)^3+\cdots)]}$$

$$=\frac{4-6(z-k\pi)^2+\cdots}{4(z-k\pi)^3(1-\frac{1}{2}z^2+\cdots)}$$

$$=\frac{1}{(z-k\pi)^3}-\frac{1}{z-k\pi}+\cdots$$

$C_{-1}=-1.$ 选(B).

若令$z-k\pi=w$则$\cot^3 z=\cot^3 w$在$w=0$是三级极点,求留数可得相同结果.

5-34 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{(z-\mathrm{i})(z^2+1)},\mathrm{i}\right)=(\quad)$.

(A) $\dfrac{\mathrm{i}}{4}$ (B) $-\dfrac{\mathrm{i}}{4}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{-1}{4}$

解 $\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}\right)'=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{-1}{(z+\mathrm{i})^2}=\dfrac{1}{4}.$ 选(C).

注意$z=\mathrm{i}$是函数的二级极点.

5-35 $\mathrm{Res}(\dfrac{1}{z\sin z},0)=(\quad)$.

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 1/6

解　$\dfrac{1}{z\sin z}$的罗伦展式中不出现$\dfrac{1}{z}$的项.　　选(A).

偶函数在0点的留数为0.

5-36 $\mathrm{Res}(\dfrac{z^3}{(z+1)^3},-1)=(\quad)$.

(A) -1　　(B) -2　　(C) -3　　(D) -6

解　$\lim\limits_{z\to-1}(z^3)''=-6$,故 $\mathrm{Res}(\dfrac{z^3}{(z+1)^3},-1)=-3$.

选(C).

5-37 $\mathrm{Res}(\dfrac{z-\sin z}{z^6},0)=(\quad)$.

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{5!}$　　(C) $-\dfrac{1}{5!}$　　(D) $\dfrac{-1}{3!}$

解 1　$\lim\limits_{z\to0}\left(\dfrac{z-\sin z}{z^6}\cdot z^6\right)^{(5)}=-1$

故　$\mathrm{Res}(\dfrac{z-\sin z}{z^6},0)=-\dfrac{1}{5!}$.　　选(C).

解 2　$z-\sin z=\dfrac{1}{3!}z^3-\dfrac{1}{5!}z^5+\cdots$

故　$\dfrac{z-\sin z}{z^6}=\dfrac{1}{3!z^3}-\dfrac{1}{5!}\dfrac{1}{z}+\cdots$.　　选(C).

虽然本题函数在$z=0$是三级极点,但这样作更简便.

解2用罗伦展开法作更简便.

5-38 $\mathrm{Res}(\dfrac{1-e^{-z}}{z^4},0)=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{3!}$　　(B) $-\dfrac{1}{3!}$　　(C) $\dfrac{1}{4!}$　　(D) $-\dfrac{1}{4!}$

解　$\lim\limits_{z\to0}(1-e^{-z})'''=1$,故 $\mathrm{Res}(\dfrac{1-e^{-z}}{z^4},0)=\dfrac{1}{3!}$.

选(A).

$z=0$是3级极点但这样作更好.

5-39 $\mathrm{Res}(\dfrac{1}{ze^z\sin z},0)=(\quad)$.

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

解　$\lim\limits_{z\to0}(\dfrac{ze^{-z}}{\sin z})'=\lim\limits_{z\to0}[\dfrac{e^{-z}(\sin z-z\cos z)}{\sin^2 z}-\dfrac{ze^{-z}}{\sin z}]=-1$.

选(B).

5-40 $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z\sin^2 z},0\right)=(\quad)$.

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

解 $$\frac{1}{z\sin^2 z}=\frac{2}{z(1-\cos^2 z)}=\frac{2}{z\left(2z^2-\frac{2}{3}z^4+\cdots\right)}$$
$$=\frac{1}{z^3\left(1-\frac{1}{3}z^2+\cdots\right)}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3z}+\cdots$$

$C_{-1}=\frac{1}{3}$. 选(C).

用罗伦展式作更简单.

5-41 求证,如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点,那么 z_0 是 $f'(z_0)$ 的 $m-1$ 级零点.

证 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

故 $$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)$$
$$=(z-z_0)^{m-1}[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)]$$
$$=(z-z_0)^{m-1}\psi(z)$$

$\psi(z)$ 在 z_0 解析,且 $\psi(z_0)=m\varphi(z_0)\neq 0$,故 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

极点与零点的关系.

5-42 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数,则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\text{(或两端为 }\infty\text{)}.$$

证 设 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$,$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$

$\varphi(z_0)\neq 0$,$\psi(z_0)\neq 0$ 均解析.

若 $m<n$,则 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\infty$

及 $m>n$,$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=0$ 是明显的,故只要证明 $m=n$ 的情况.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}$$

洛必达法则可用于复变函数的极限.

而 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{m\varphi(z_0)}{m\psi(z_0)}=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

5-43 判定$\dfrac{1}{\text{sh}z}-\dfrac{1}{\sin z}$孤立奇点的类型，并求相应奇点处的留数.

解 (1) $z=0$ 是一个孤立奇点.

注意 $z=k\pi$ 和 $k\pi\mathrm{i}$ 皆是函数的孤立奇点.

而 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z-\text{sh}z}{\sin z\,\text{sh}z}=0$，故这是可去的奇点从而 $\text{Res}\left(\dfrac{1}{\text{sh}z}-\dfrac{1}{\sin z},0\right)=0$.

(2) $z\neq 0$，$\text{sh}z=0$ 时，$z=k\pi\mathrm{i}$，$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，$\sin z=0$，$z=k\pi$，$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$

因此，$z=\pm k\pi$ 和 $\pm k\pi\mathrm{i}$ 均是此函数的一级极点，且

$$\text{Res}\left(\frac{1}{\text{sh}z}-\frac{1}{\sin z},k\pi\mathrm{i}\right)=\lim_{z\to k\pi\mathrm{i}}(z-k\pi\mathrm{i})\frac{1}{\text{sh}z}$$
$$=\frac{1}{\text{ch}(k\pi\mathrm{i})}=\frac{1}{\cos(k\pi)}=(-1)^k,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$
$$\text{Res}\left(\frac{1}{\text{sh}z}-\frac{1}{\sin z},k\pi\right)=\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)\frac{-1}{\sin z}$$
$$=\frac{-1}{\cos k\pi}=(-1)^{k+1},(k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

5-44 证明：若 $f(z)$ 以 z_0 为一级极点，则 $\text{Res}(f'(z),z_0)=0$.

证 记 $f(z)=\dfrac{C_{-1}}{(z-z_0)}+\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 是解析函数，

$f'(z)$ 中无 $(z-z_0)^{-1}$ 项.

则 $$f'(z)=\frac{-C_{-1}}{(z-z_0)^2}+\varphi'(z).$$

即 $f'(z)$ 在 z_0 点的罗伦级数中，不含 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 的项，故 $\text{Res}(f'(z),z_0)=0$.

5-45 函数 $\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$ 的奇点类型与留数是什么？

解 由于 $\cos z-\sin z$ 在 $R<z<+\infty$（R 为任意正实数）解析，故且故 $\cos z-\sin z$ 是 ∞ 的本性奇点，而

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty) = -\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$$

故 $\quad \mathrm{Res}(\cos z-\sin z,\infty)=0.$

5-46 求函数 $\frac{e^z}{z^2-1}$ 在 ∞ 点的留数.

解 1 由 $\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$

注意求在 ∞ 点的留数的公式.

而 $\quad f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}$

$$=(1+z^2+z^4+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-3}}{3!}+\cdots)$$

故 $\frac{1}{z}$ 的项系数为 $\quad 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots=\mathrm{sh}1$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{sh}1.$$

解 2 在有限点 $\frac{e^z}{z^2-1}$ 有 $z=\pm1$ 是一级极点

$$\mathrm{Res}(\frac{e^z}{z^2-1},\pm1)=\pm\frac{1}{2}e^{\pm1}.$$

故 $\quad \mathrm{Res}(\frac{e^z}{z^2-1},\infty)=-\left(\frac{1}{2}e-e^{-1}\right)=-\mathrm{sh}1.$

5-47 已知 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析,且 $\lim\limits_{z\to0}zf(z)=1$,证明 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点且 $\mathrm{Res}(f(z),0)=1$.

证 由 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析,知

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_nz^n,0<|z|<1$$

而由 $zf(z)\to1$ 知上述展开的负幂次项有且仅有 $\frac{1}{z}$ 的一项,故 $z=0$ 是一级奇点.

且 $$\mathrm{Res}(f(z),0)=\lim_{z\to0}zf(z)=1.$$

也可用 $\lim\limits_{z\to0}zf(z)=\lim\limits_{z\to0}f(z)/(1/z)=1$,故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点.

5-48 已知 $f(z)$ 以 $z=0$ 为 n 级零点,证明 $\mathrm{Res}(f'(z)/f(z),0)=n$.

证 记 $f(z)=z^n\varphi(z)$,$\varphi(z)$ 在 0 点解析,且 $\varphi(0)\neq0$,于是

注意本题与对数留数的联系.

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{nz^{n-1}\varphi(z)+z^n\varphi'(z)}{z^n\varphi(z)}=\frac{n}{z}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

由 $\varphi(0)\neq 0$，知 $\varphi'(z)/\varphi(z)$ 在 0 点解析，故

$$\operatorname{Res}(f'(z)/f(z),0)=n.$$

5 - 49 已知 $z=0$ 是函数 $f(z)$ 的 n 级极点，证明 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},0\right]=-n$.

证 设 $f(z)=z^{-n}\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 $z=0$ 解析，且 $\varphi(0)\neq 0$，于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-nz^{-n-1}\varphi(z)+z^{-n}\varphi'(z)}{z^{-n}\varphi(z)}=\frac{-n}{z}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

$\varphi'(z)/\varphi(z)$ 在 $z=0$ 解析，故

$$\operatorname{Res}(f'(z)/f(z),0)=-n.$$

应将这些与对数留数相联系(5-48题、5-49题).

5 - 50 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^{n-1}}{z^n+1}dz=(\quad)$，($n$ 是正整数).

(A) 0　　(B) $2\pi i$　　(C) $2n\pi i$　　(D) $\dfrac{2\pi i}{n}$

解 记 $w_0,w_1,\cdots,w_{n-1}$ 是 $z^n+1=0$ 的 n 个根，则这 n 个点皆是被积函数在 $|z|<2$ 内的一级极点，故

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{z^n+1},w_k\right)=\lim_{z\to w_k}(z-w_k)\frac{z^{n-1}}{z^n+1}=\frac{1}{n},(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

故 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^{n-1}}{z^n+1}dz=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=2\pi i.$　　选(B).

注意在 $|z|<2$ 内有 n 个奇点. 即 $z^n+1=(z-w_0)(z-w_1)\cdots(z-w_{n-1})$ 而求 $\displaystyle\lim_{z\to w_k}(z-w_k)\frac{z^{n-1}}{z^n+1}$ 用洛必达法则作更简单.

5 - 51 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z\cos z}=(\quad)$.

(A) $2\pi i$　　(B) 0　　(C) $2\pi i+8i$　　(D) $\cos(2\pi-8)i$

解 在 $|z|<2$ 内被积函数有三个奇点：$z=0$ 是一级极点，$z=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 也是一级极点.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z\cos z},0\right)=1$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z\cos z},\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z-\frac{\pi}{2}}{z\cos z}=\frac{-2}{\pi}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z\cos z},-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-2}{\pi}$$

$\cos z=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)\sim\dfrac{\pi}{2}-z\left(z\to\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $\dfrac{1}{\cos z}$ 的一级极点.

留数和为 $1-\dfrac{4}{\pi}$，积分为 $2\pi i(1-\dfrac{4}{\pi})$. 选(D).

5-52 $\oint_{|z|=3}\tan z\mathrm{d}z=(\quad)$.

(A) $4\pi i$ (B) $-4\pi i$ (C) $8\pi i$ (D) $-8\pi i$

解 在 $|z|<3$ 内 $\tan z$ 有 $\pm\dfrac{\pi}{2}$ 2 个一级极点.

$$\mathrm{Res}(\tan z,\frac{\pi}{2})=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z(z-\frac{\pi}{2})}{\cos z}=-1$$

$$\mathrm{Res}(\tan z,-\frac{\pi}{2})=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z(z+\frac{\pi}{2})}{\cos z}=-1$$

留数和为 -2，积分为 $-4\pi i$. 选(B).

$\tan z=\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-a)}$ 而 $\tan(\frac{\pi}{2}-z)\sim\frac{\pi}{2}-z$ 故 $z=\frac{\pi}{2}$ 是 $\tan z$ 的一级极点.

5-53 $\oint_{|z|=1}ze^{\frac{1-z}{z}}\mathrm{d}z=(\quad)$.

(A) $\pi e^{-1}i$ (B) $2\pi i$ (C) $2\pi e^{-1}i$ (D) $-2\pi i$

解 $ze^{\frac{1-z}{z}}=e^{-1}ze^{\frac{1}{z}}=e^{-1}z(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots)$

$C_{-1}=\dfrac{1}{2}e^{-1}$，故积分值为 $\pi e^{-1}i$. 选(A).

5-54 $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^5-1}=(\quad)$.

(A) 0 (B) $2\pi i$ (C) $5\sqrt{2}\pi i$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}\pi i$

解 设 w_1,w_2,w_3,w_4 和 w_5 是 $z^5-1=0$ 的 5 个不同的根，则在 $|z|<2$ 内被积函数有 5 个一级极点即 $z=w_k(k=1,2,3,4,5)$.

$\mathrm{Res}(\dfrac{1}{z^5-1},w_k)=\lim\limits_{z\to w_k}(z-w_k)\dfrac{1}{z^5-1}=\dfrac{1}{4w_k^4}=\dfrac{w_k}{5}$，$(k=1,2,3,4)$，因此，留数和为 $\sum\limits_{k=1}^{5}\dfrac{w_k}{5}=0$，从而积分为 0.

选(A).

z^5-1 有 5 个根，均分布在单位圆上.

$w_k^5=1$，故 $\dfrac{1}{w_k^4}=w_k$.

5-55 $\oint_{|z|=1} z\cos\bar{z}\mathrm{d}z = (\quad)$.

(A) 0　　(B) 2π　　(C) $-\pi\mathrm{i}$　　(D) $2\pi\mathrm{i}$

解 $z\cos\bar{z} = z\cos\frac{1}{z} = z(1-\frac{1}{2z^2}+\cdots)$

$$\mathrm{Res}(z\cos\frac{1}{z},0) = -\frac{1}{2}$$

积分值为 $2\pi\mathrm{i}(-\frac{1}{2}) = -\pi\mathrm{i}$.　　选(C).

注意 $|z|=1$ 时 $\bar{z}=\frac{1}{z}$,因此 $z=0$ 是 $z\cos\bar{z}$ 的本性奇点.

5-56 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi}{2-\cos\varphi} = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$,则 $f(z) = (\quad)$.

(A) $\frac{\mathrm{i}(z^4+1)}{z^2(z^2-4z+1)}$　　(B) $\frac{-(z^4+1)}{z(z^2+1-4z)}$

(C) $\frac{\mathrm{i}(2z+1)}{(z^2+1-4z)}$　　(D) $\frac{z^4+1}{(z^2-1-4z)^2}$

解 $\frac{\cos2\varphi}{2-\cos\varphi} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}}{4-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}} = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\varphi}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}-1)}$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,

则 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{2-\cos\varphi} = \oint_{|z|=1}\frac{z^4+1}{\mathrm{i}z^2(4z-z^2-1)}\mathrm{d}z$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}(z^4+1)}{z^2(z^2-4z+1)}\mathrm{d}z$$

选(A).

用留数计算定积分,要先将定积分化为相应复变函数的积分.

5-57 计算积分 $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z-\sin z}$.

解 由 $z-\sin z = \frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots$,得

(1) $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点;(2) 在 $0<|z|<1$ 内无零点:

$$|z-\sin z| = |z|^3(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots)$$

$$\geqslant |z|^3[\frac{1}{3!}-(\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots)]$$

$$> |z|^3[\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}\cdots)] > 0$$

而 $\frac{1}{z-\sin z} = \frac{1}{z^3(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\cdots)} = \frac{3!}{z^3}+\frac{3}{10z}+\cdots$

先用留数计算复变量函数的积分.

故 $\mathrm{Res}(\frac{1}{z-\sin z},0)=\frac{3}{10}$.

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z-\sin z}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{5}\pi\mathrm{i}.$$

5-58 计算 $\oint_{|z|=1}z^n\cos\frac{1}{z}\mathrm{d}z$，$n$ 是正整数.

解 在 $|z|<1$ 内，$z=0$ 是 $z^n\cos\frac{1}{z}$ 的唯一的本性奇点，且

$$z^n\cos\frac{1}{z}=z^n(1-\frac{1}{2!z^2}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!z^{2k}}+\cdots)$$

故 $$\mathrm{Res}(z^n\cos\frac{1}{z},0)=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k\frac{1}{(2k)!}, & n=2k-1\end{cases}$$

于是 $$\oint_{|z|=1}z^n\cos\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k\frac{2\pi\mathrm{i}}{(2k)!}, & n=2k-1\end{cases},(k=0,1,2,\cdots).$$

从这里体会用留数计算积分的好处.

5-59 计算积分 $\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$，$C$ 是圆周：$x^2+y^2=2(x+y)$.

解 被积函数在 C 内有两个极点 $z=1$ 和 $z=\mathrm{i}$.

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)},\mathrm{i})=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+1)},1)=\lim_{z\to1}(\frac{1}{z^2+1})'=-\frac{1}{2}$$

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi\mathrm{i}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}.$$

无论积分围线 C 是什么，计算积分只要算在 C 所围域内各奇点留数.

5-60 计算积分 $\oint_{|z|=4}\frac{\mathrm{d}z}{(\mathrm{e}^z+1)^2}$

解 在 $|z|<4$ 内，$\frac{1}{(\mathrm{e}^z+1)^2}$ 有 $\pm\pi\mathrm{i}$ 为其二级极点.

而在 $z=\pi\mathrm{i}$ 点，$\frac{1}{(\mathrm{e}^z+1)^2-2\mathrm{e}^{z-\pi\mathrm{i}}+1}$

$$\mathrm{e}^{2(z-\pi\mathrm{i})}=1+2(z-\pi\mathrm{i})+2(z-\pi\mathrm{i})^2+\frac{4}{3}(z-\pi\mathrm{i})^3+\cdots$$

不能遗漏在 $|z|<4$ 内的孤立奇点.

$$-2e^{z-\pi i}=-2-2(z-\pi i)-(z-\pi i)^2-\frac{1}{3}(z-\pi i)^3+\cdots$$

于是$\dfrac{1}{(e^z+1)^2}=\dfrac{1}{(z-\pi i)^2[1+(z-\pi i)+\cdots]}$

$$=\frac{1}{(z-\pi i)^2}-\frac{1}{z-\pi i}+\cdots$$

$\mathrm{Res}(\dfrac{1}{(e^z+1)^2},\pi i)=-1.$

同理 $\mathrm{Res}(\dfrac{1}{(e^z+1)^2},-\pi i)=-1$

$$\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(e^z+1)^2}=-4\pi i.$$

5-61 计算 $\displaystyle\oint_{|z|=8}\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)}dz$

解 在 $|z|<8$ 内，$z=0$ 是被积函数 $f(z)$ 的可去奇点，留数为 0；而 $z=\pm 2\pi i$ 是一级极点.

本题容易忽略 $z=\pm 2\pi i$ 是 e^z-1 的零点.

$$\mathrm{Res}(\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)},2\pi i)=\lim_{z\to 2\pi i}(z-\pi i)\frac{1-\cos z}{z(e^{z-2\pi i}-1)}$$

$$=\frac{1-\cos 2\pi i}{2\pi i}$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)},-2\pi i)=\frac{1-\cos 2\pi i}{-2\pi i}$$

故，在 $|z|<8$ 内各奇点留数之和为 0，从而所求积分值为 0.

5-62 计算 $\displaystyle\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{zdz}{(z^3+1)^3}$

解 在 $|z+1|<\dfrac{1}{2}$ 内，$z=-1$ 是被积函数唯一的一个三级极点.

$$\mathrm{Res}(\frac{z}{(z^3+1)^3},-1)=\lim_{z\to-1}[\frac{z}{(z^2-z+1)^3}]''=-\frac{4}{3^3}$$

注意求三级极点处留数的公式.

故 $\displaystyle\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{z}{(z^3+1)^3}dz=-\frac{8}{27}\pi i.$

5-63 求 $\displaystyle\oint_{|z|=5}\frac{zdz}{\sin z(1-\cos z)}$ 的值.

解 $z=0$ 是被积函数的二级极点，由于其罗伦级数中无

别忘了 $z=\pm\pi$

z^{2m+1} $(m=-1,0,1,2,\cdots)$ 的项，故

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z}{\sin z(1-\cos z)},0\right)=0$$

在 $|z|<5$ 中，尚有 $z=\pm\pi$ 两个一级极点.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z}{\sin z(1-\cos z)},\pm\pi\right)=\lim_{z\to\pm\pi}\frac{(z\mp\pi)z}{-\sin(z\mp\pi)(1-\cos z)}$$

$$=\frac{\pm\pi}{-2}.$$

故奇点处留数之和为 0，所求积分为 0.

两个奇点.

5-64 计算积分 $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z$

解 本题在 $z=\pm\mathrm{i}$ 有二级极点，在 $z^4=2$ 的 4 个根是三级极点，均在 $|z|<3$ 内，求它们的留数将很麻烦. 因此，我们来计算 ∞ 点的留数.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3},\infty\right)$$

$$=-\mathrm{Res}\left(\frac{z^{-15}}{z^2(z^{-2}+1)^2(z^{-4}+2)^3},0\right)$$

$$=-\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right)=-1.$$

故上述各极点处留数和为 1，从而

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}.$$

当围道 C 内部奇点过多时，用 ∞ 点的留数计算留数和更方便.

5-65 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$

解 1 被积函数 $f(z)=\frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 共 2 个孤立奇点：$z=0$ 是本性奇点；$z=-1$ 是一级极点.

$$\mathrm{Res}(f(z),-1)=-\mathrm{e}^{-1}$$

又 $$\frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=z^3(1-z+z^2-\cdots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots\right)$$

$$=z^3-z^4+\cdots+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+-\cdots\right)\frac{1}{z}+\cdots$$

故 $$C_{-1}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$= e^{-1} - \frac{1}{3}$$

因此,留数之和为 $-\frac{1}{3}$,从而

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^z \, dz = -\frac{2}{3}\pi i.$$

解 2 先求 $\text{Res}(f(z), \infty) = -\text{Res}(\frac{z^{-3}}{z^2(1+z^{-1})} e^z, 0)$

$$= -\text{Res}(\frac{e^z}{z^4(1+z)}, 0)$$

而 $$\frac{e^z}{z^4(1+z)} = \frac{1}{z^4}(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots)(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{z^4} - \cdots (-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) \frac{1}{z} + \cdots$$

故 $C_{-1} = -\frac{1}{3}$. $\text{Res}(f(z), \infty) = \frac{1}{3}$.

从而各奇点的留数之和为 $-\frac{1}{3}$,即

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^z \, dz = -\frac{2}{3}\pi i.$$

解 2 求 $\frac{e^z}{z^4(1+z)}$ 的留数时,$\frac{e^z}{1+z}$ 的展开式中只要求 z^3 的系数.

5-66 计算 $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz$ 其中 C 为圆周 $|z| = r > 1$,n 是正整数.

解 1 设 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 是 $z^n + 1 = 0$ 的 n 个根,则 $\frac{z^{2n}}{z^n+1}$ 在 $|z| < r$ 内有 n 个孤立奇点 $z = w_k (k = 1, 2, \cdots, n)$. 且

$$\text{Res}(\frac{z^{2n}}{1+z^n}, w_k) = \frac{1}{nw_k^{n-1}} = -\frac{w_k}{n}$$

故留数之和:当 $n = 1$ 时为 1,当 $n > 1$ 时为 0,故

$$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

解 2 求 $C_{-1} = \text{Res}(\frac{z^{2n}}{1+z^n}, \infty)$

当 $n = 1$ 可直接由柯西积分定理作,$n > 1$ 时注意 $\sum_{k=1}^{n} w_k = 0$.

用 ∞ 点留数作此题很方便.

$$=-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+2}(1+z^{n})},0\right)$$

而 $$\frac{1}{z^{n+2}(1+z^{n})}=\frac{1}{z^{n+2}}(1-z^{n}+z^{2n}-\cdots)$$

当 $n=1, C_{-1}=-1$,当 $n>1, C_{-1}=0$

故 $$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{z^{2n}}{1+z^{n}},w_k\right)=\begin{cases}1, n=1\\ 0, n>1\end{cases}.$$

结果与解 1 同.

5-67 计算 $\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{z^4+1}$

解 $z^4+1=0$,有 $z=e^{\pm\frac{\pi}{4}i}$ 两根在圆 $|z-1|<1$ 内.

而 $$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1},e^{\pm\frac{\pi}{4}i}\right)=\frac{1}{4e^{\pm\frac{3\pi}{4}i}}=-\frac{1}{4}e^{\pm\frac{3}{4}\pi i}$$

留数和为 $$-\frac{1}{4}(e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i})=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{z^4+1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

在 $z=e^{\frac{\pi}{4}i}$ 点有 $|z-1|=2-\sqrt{2}<1$, $z=e^{\pm\frac{3\pi}{4}i}$ 在三、四象限,肯定不在 $|z-1|<1$ 的圆内.

5-68 设函数 $g(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析,在 $|z|\leqslant 2$ 内连续,且当 $|z|=2$ 时,$g(z)\neq 0$,在圆 $|z|<2$ 内仅有 $g(1)=0$,$g'(1)\neq 0$,求

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{zg(z)}$$

解 被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{zg(z)}$ 有 $z=0$ 和 $z=1$ 两个一级极点

$$\operatorname{Res}(f(z),0)=\frac{1}{g(0)},\operatorname{Res}(f(z),1)=\frac{1}{g'(1)}$$

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{zg(z)}=2\pi i\left(\frac{1}{g(0)}+\frac{1}{g'(1)}\right)$$

5-69 计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+2i\sin\theta}$.

解 令 $z=e^{i\theta}$,则 $2i\sin\theta=z-z^{-1}$, $dz=iz\,d\theta$

本题已算出 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+4\sin^2\theta}=\frac{2\pi}{5}\sqrt{5}$,而

原积分 $= \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{i(z^2+z-1)}$

若 $z^2+z-1=0$，则有 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 两个零点，仅有 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 在 $|z|<1$ 内，

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2+z-1},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

于是 $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+2i\sin\theta}=\frac{2\pi}{5}\sqrt{5}.$$

$\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin\theta d\theta}{1+4\sin^2\theta}=0$ 是明显的.

5-70 计算 $\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{5+3\cos\theta}$.

解 令 $z=e^{i\theta}$，$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$，$3\cos\theta=\dfrac{3(z+z^{-1})}{2}$

原积分 $= \oint\limits_{|z|=1}\dfrac{2dz}{i(3z^2+10z+3)}$

在 $|z|<1$ 内仅 $z=-\dfrac{1}{3}$ 一个一级极点.

$$\text{Res}\left(\frac{1}{3z^2+10z+3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{8}$$

故 $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}=\frac{1}{2}\pi.$$

这是用复变函数积分计算有理三角函数的积分. θ 内 $0\sim 2\pi$ 变化自然想到令 $z=e^{i\theta}$ 的方法.

5-71 计算 $\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

解 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=-2i\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1},\sqrt{3}-2\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

故 $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=-2i\cdot 2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{3}.$$

$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$. $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$

$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$.

5-72 计算 $\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$.

解 原积分 $=-4i\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{zdz}{(z^2+4z+1)^2}$

$$\text{Res}\left(\frac{z}{(z^2+4z+1)^2},\sqrt{3}-2\right)=\left(\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right)'\bigg|_{z=\sqrt{3}-2}$$

请按上面方法自己将对 θ 的积分化为复函数积

$= \dfrac{\sqrt{3}}{18}$

故 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = -4i \cdot 2\pi i \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi.$

分.

5－73 计算 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$,其中 n 是大于 1 的正整数.

解 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$

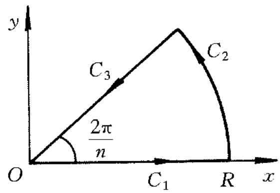


图 5.1

而 $z^n+1=0$ 的零点为 $z = e^{(\frac{1}{n}+\frac{2k}{n})\pi i}$,$k = 0,1,2,\cdots,k-1$,由于当 n 为奇数时 $x=-1$ 为奇点,故我们选择闭路如图 5.1 所示,即沿实轴从 0 至 R 为 C_1;C_2 是角度从 0 至 $\frac{2}{n}\pi$ 的圆弧;C_3 是从圆弧另一端回到原点的直线段,于是在这个扇形域中,函数 $\dfrac{1}{1+z^n}$ 仅有 $e^{\frac{\pi}{n}i}$ 一个 0 点.

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z+z^n}, e^{\frac{\pi}{n}i}\right) = \frac{-e^{\frac{\pi}{n}i}}{n}$$

故
$$\oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{dz}{1+z^n} = -\frac{2\pi i e^{\frac{\pi}{n}i}}{n}$$

而
$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^n} \to 0 \ (R \to \infty)$$

$$\int_{C_3} \frac{dz}{1+z^n} = \int_R^0 \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}} dr}{1+(re^{\frac{2\pi i}{n}})^n} = \int_R^0 \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}} dr}{1+r^n}$$

故
$$\int_{C_1+C_3} \frac{dz}{1+z^n} = (1-e^{\frac{2\pi i}{n}}) \int_0^R \frac{dx}{1+x^n}.$$

令 $R \to \infty$ 得

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{-2\pi i e^{\frac{\pi}{n}i}}{n(1-e^{\frac{2\pi i}{n}})} = \frac{2\pi i e^{\frac{\pi}{n}i}}{ne^{\frac{\pi}{n}i}(e^{\frac{\pi}{n}i}-e^{-\frac{\pi}{n}i})} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

上题是本题的特例.

利用复变函数计算定积分关键是选好围道,本题选角度为 $\frac{2\pi}{n}$ 的扇形的闭路,请读者想一想,是为什么?

用实函数的积分,只有当 $n=2$ 时得 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$,$n=4$ 时 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ 较好算出,验证了本题的结论.

5－74 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+1)}$.

直接用留数公式算.

解 记 $I=\int_0^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2(x^2+1)}$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2(x^2+1)}$$

$$=\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}(\frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+1)},\mathrm{i})$$

$$+\mathrm{Res}(\frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+1)},2\mathrm{i})$$

$$=\pi\mathrm{i}(-\frac{\mathrm{i}}{9\times 2}+\frac{22}{9\times 4^3}\mathrm{i})=\frac{5\pi}{288}.$$

直接用留数公式算.

5-75 计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+6x+10)^3}$.

解 原式$=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\dfrac{1}{(z^2+6z+10)^3},\mathrm{i}-3)$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{(z+3+\mathrm{i})^3}\right]''\Bigg|_{z=\mathrm{i}-3}=\pi\mathrm{i}\,\frac{12}{2^5\mathrm{i}^5}=\frac{3}{8}\pi.$$

在上半平面仅有$(-3+\mathrm{i})$一个奇点，是三级极点.

5-76 计算$\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$.

解 原式$=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x\mathrm{i}}}{x^2+4}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\dfrac{\mathrm{e}^{2z\mathrm{i}}}{z^2+4},2\mathrm{i})$

$$=\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-4}}{4\mathrm{i}}=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-4}.$$

由$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin 2x}{x^2+4}\mathrm{d}x=0$，而得此结论.

5-77 计算$\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x/2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$.

解 原式$=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\mathrm{i}}}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{i}}}{(z^2+4)^2},2\mathrm{i})$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}\mathrm{i}}}{(z+2\mathrm{i})^2}\right]'_{z=2i}=\frac{\pi}{16\mathrm{e}}.$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=0$.

5-78 计算$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 如图5.2记

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

作回路积分. $\oint\limits_{l_1+C_r+l_2+C_R}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0$

这是个重要积分,它的结果可由许多方法推得.

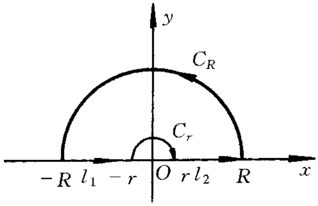


图 5.2

而 $$\int_{l_1+l_2} = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dx\right| \leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta \leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta$$

$$= \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \to 0(R\to\infty)$$

又 $$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2} + \cdots = \frac{1}{z} + \varphi(z).$$

其中 $\varphi(z)$ 解析，且 $\varphi(0) = i$. 故当 $r\to 0$ 时，$|\varphi(z)| < 2$，于是

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{C_r} \frac{dz}{z} + \int_{C_r}\varphi(z)dz$$

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_\pi^0 id\theta = -i\pi$$

而 $$\left|\int_{C_r}\varphi(z)dz\right| \leqslant 2\int_{C_r}dz = 2\pi r$$

故 $r\to 0$ 时，$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = -i\pi$

故 $r\to 0, R\to\infty$ 时，有 $2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi i$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

5 - 79 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}dx$.

解 $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix} - e^{4ix}}{x^2}dx$，为此，取与 5 - 78 题一样的

围道知

$$\oint_{l_1+C_r+C_R+l_2} \frac{e^{2iz}-e^{4iz}}{z^2}dz = 0$$

当 $r\to 0, R\to+\infty$ 便有 $\displaystyle\int_{l_1+l_2} \frac{e^{2iz}-e^{4iz}}{z^2}dz \to 2I.$

又　$R\to\infty$ 时 $\displaystyle\left|\int_{C_R} \frac{e^{2iz}-e^{4iz}}{z^2}dz\right| \leqslant \frac{2}{R} \to 0.$

而
$$\int_{C_r} = -\oint_{|z|=r} \frac{e^{2iz}-e^{4iz}}{z^2}dz$$

$z=0$ 是被积函数的一级极点.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2iz}-e^{4iz}}{z^2},0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}-e^{4iz}}{z} = -2i$$

$$\oint_{|z|=r} = +4\pi, \int_{C_r} = -2\pi.$$

于是令 $r\to 0, R\to+\infty$ 得

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}-e^{4ix}}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}dx = \pi.$$

5-80　计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx$ 和 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$.

解　记 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$，则所求积分一个是 I 的实部，另一个是虚部.

选择如图 5.3 的扇形域围道则

$$\oint_{l_1+C_R+l_2} e^{iz^2}dz = 0$$

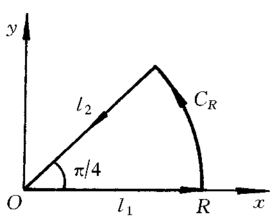


图 5.3

这又是一类著名的广义积分，可见用复函数计算这些积分的优越性，读者关键是要学会选择积分围道的方法. 如本题用 $\pi/4$ 角的扇形的围道是怎样想到的，可与 5-73 题相比较.

而 $R\to\infty$ 时 $\int_{l_1} e^{iz^2}\,dz \to I$.

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz\right| \leqslant \int_0^{\pi/4} Re^{-R^2\sin 2\theta}\,d\theta$$

而 $\dfrac{4}{\pi}\theta \leqslant \sin 2\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{4}{\pi})$，故

$$\left|\int_{C_R}\right| \leqslant \int_0^{\pi/4} Re^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}) \to 0$$

$$\int_{l_2} e^{iz^2}\,dz = \int_R^0 e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-r^2}\,dr$$

$$= -\int_0^R e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-r^2}\,dr \to -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(R\to+\infty)$$

故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx = \int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

5-81 计算 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-2it}\,dt$.

这里又是一种选择围道的方法.

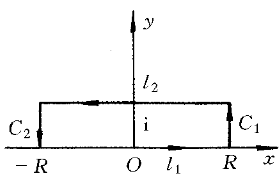


图 5.4

解 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i)^2-1}\,dt = \frac{1}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i)^2}\,dt$

构造如图 5.4 的长方形围道. 则

$$\oint_{l_1+C_1+C_2+l_2} e^{-z^2}\,dz = 0$$

而 $\displaystyle\left|\int_{C_1} e^{-z^2}\,dz\right| \leqslant \int_0^1 \left|e^{-(R+iy)^2}\right|dy \leqslant ee^{-R^2} \to 0$

同理 $\displaystyle\int_{C_2} e^{-z^2}\,dz \to 0 \quad (R\to\infty)$

注意：这里证明了公式 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$，对任意复数 α 均成立.

因此 $\int_{l_1} e^{-x^2}\,dx = -\int_{l} e^{-(x+i)^2}\,dx$

令 $R \to +\infty$ 即$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2ix}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{e}$

注　由上一题及本题的结果知，只要 $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ 是收敛的（α 是复数），那么，用换元法：令$\sqrt{\alpha}x = t$，则

$$I = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$$

同样可以形式上作平移变换

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{i}x^2}\,dx = \sqrt{i}\sqrt{\pi} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$$

从而 $\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

这些形式上的结果的严格证明均可采用这两道题的方法.

5.2* 对数留数、辐角原理

5-82 叙述函数 $f(z)$ 的对数留数的概念及其与 $f(z)$ 的零点与极点的关系.

解　设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析，且在 C 上 $f(z) \neq 0$，则称积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 为 $f(z)$ 关于曲线 C 的对数留数，很明显它是 $f(z)$ 的对数函数在 C 所围区域内部的留数的代数和，关于 $f(z)$ 的对数留数与 $f(z)$ 在 C 所围区域内部的空点与极点的关系可用下面定理来表述.

定理：设在简单闭曲线 C 上解析且不为零的函数 $f(z)$ 在 C 所围区域内有 N 个零点，和 P 个极点（除这些极点外处处解析），在计算零点与极点的个数时，m 级的零点或极点均算作 m 个（重）零点与极点. 则

本节在有的书上作为选学内容，故用 * 表示全节的题均带“*”号.

同时，我们用例题形式介绍有关的基本知识.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

5-83 叙述辐角原理与路西(Rouche)定理.

路西定理很有用,主要证明根的存在性.

解 如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 及其所围区域内解析,且在 C 上 $f(z)\neq 0$,那末,$f(z)$ 在 C 内零点的个数,等于 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以当 z 沿 C 正向绕行一周时 $f(z)$ 辐角的改变量.

路西定理:设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上和 C 内解析,且在 C 上满足 $|f(z)| > |g(z)|$,那么在 C 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 的零点个数相同.

5-84 利用对数留数计算以下各题:

用对数留数作这些积分便显得更方便.

(1) $\oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2-1}dz$　　(2) $\oint_{|z|=3} \tan z dz$

(3) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)}dz$

解 (1) 记 $f(z)=z^2-1, f'(z)=2z, f(z)$ 在 $|z|<3$ 内有 2 个零点,故

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3} \frac{2z}{z^2-1}dz = 2,\ \oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2-1}dz = 4\pi i$$

(2) $f(z)=\cos z, f'(z)=-\sin z, \cos z$ 在 $|z|<3$ 内有两个零点:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3} -\tan z dz = 2$$

$$\oint_{|z|=3} \tan z dz = -4\pi i$$

(3) $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}, f(z)=z, f'(z)=1; g(z)=z+1, g'(z)=1$,而在 $|z|<3$ 中 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均是一个零点,故

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z+1)} = 0.$$

5-85 证明 $z^7+5z^5-z^2+z+1=0$ 在单位圆内有 5 个零点.

路西定理的应用.

证 令 $f(z)=5z^5, g(z)=z^7-z^2+z+1$

则在 $|z|=1$ 上，

$$|f(z)| = |5z^5| = 5$$

而 $|g(z)| = |z^7 - z^2 + z + 1| \leqslant |z^7| + |z^2| + |z| + 1$

$$= 4 < 5 = |f(z)|$$

而 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点，$g(z)+f(z)$ 在 $|z|<1$ 内也有 5 个零点.

5-86 证明 n 次代数方程

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

有 n 个根.

代数基本定理的证明用上复变函数理论是如此的简单.

证 取 R 是充分大的正实数，及 $f(z) = a_n z^n$，$g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_0$，于是

$$|f(z)| = |a_n| R^n$$

$$|g(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_0|$$

$$\leqslant |a_{n-1}| R^{n-1} + |a_{n-2}| R^{n-2} + \cdots + |a_0|$$

$$\leqslant R^{n-1}(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|) \quad (R > 1)$$

于是，取 $R > (\dfrac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|}{|a_n|})$

则在 $|z| = R$ 上，有 $|f(z)| > |g(z)|$

$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 $|z|<R$ 内有相同个数的零点，而 $f(z)$ 有 n 个零点，故 $f(z)+g(z)$ 有 n 个零点，即方程 $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ 有 n 个根.

第 6 章　保角映射

6.1　分式线性映射

6-1　映射 $w=z^2$ 在 $z=-\mathrm{i}$ 处的伸缩率 k 与旋转角 α 是(　).

(A) $k=1,\alpha=\frac{\pi}{2}$　　(B) $k=2,\alpha=-\frac{\pi}{2}$

(C) $k=1,\alpha=-\frac{\pi}{2}$　　(D) $k=2,\alpha=\frac{\pi}{2}$

解　$k=|w'|_{z=-\mathrm{i}}=2,\alpha=\mathrm{Arg}f'(z)|_{z=-\mathrm{i}}=-\frac{\pi}{2}$.

选(B).

导数的几何意义是保角映射的理论基础.

6-2　设 A_1、B_1、C_1 是 z 平面上三个不在同一直线上的点,$\Delta A_1B_1C_1$ 的面积是 S_1,变换 $w=-2z+1$,将 $\Delta A_1B_1C_1$ 变成 $\Delta A_2B_2C_2$,则 $\Delta A_1B_1C_1$ 与 $\Delta A_2B_2C_2$ 的关系及 $S_{\Delta A_2B_2C_2}=S_2$ 与 S_1 的关系是(　).

(A) 全等,$S_1=S_2$

(B) 相似,$S_2=2S_1$

(C) 相似,$S_2=4S_1$

(D) 随 A_1、B_1、C_1 的位置的不同,它们的关系不同.

解　$w=-2z+1$,很明显将直线变成直线,且伸缩率 $|w'|=2$,转角 $\mathrm{Arg}w'=\mathrm{Arg}(-2)=\pi$,故 $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta A_2B_2C_2$,且边长之比为 $1:2$,故 $S_2=4S_1$.　　选(C).

平移变换加伸缩反射得相似图形,　相似比即 $|w'|$.

6-3　在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下,将 $|z-1|<1$ 映射为(　).

(A) 右半平面 $u>0$　　(B) 下半平面 $v<0$

这是简单的分式线性映射,有保圆性.

(C) 半平面 $u > \frac{1}{2}$　　　(D) 半平面 $v < -\frac{1}{2}$

解 1　$w = \frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = u + \mathrm{i}v$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

而　$|z - 1|^2 < 1$,即 $x^2 + y^2 < 2x$,故

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} > \frac{1}{2}.$$

选(C).

解 2　$w = \frac{1}{z}$ 是分式线性变换,具有保圆性. 而 $|z - 1| = 1$,将 $z = 0$ 变到 $w = \infty$,$z = 2$ 变到 $w = \frac{1}{2}$,$z = 1 + \mathrm{i}$ 变到 $w = \frac{1 - \mathrm{i}}{2}$,故 $w = \frac{1}{z}$ 将圆变为直线 $u = \frac{1}{2}$,而圆心 $z = 1$ 变到 $w = 1 > \frac{1}{2}$,故 $w = \frac{1}{z}$ 将 $|z - 1| < 1$ 变为半平面 $u > \frac{1}{2}$.

(C).

6-4　映射 $w = \frac{1}{z}$ 将 $|z - \mathrm{i}| - |z + \mathrm{i}| < 1$ 映射为(　).

分式线性变换的性质.

(A) 无界的单连通区域　　　(B) 有界的单连通区域

(C) 非区域　　　(D) 多连通区域

解　由 $|z - \mathrm{i}| - |z + \mathrm{i}| < 1$ 在 z 平面上是在双曲线 $12y^2 - 4x^2 = 3$ 下面一支的上方,又不含上方那支. 即,不会是 $y = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{3 + 4x^2}$ 的多连通区域,而 $w = \frac{1}{z}$ 是除 $z = 0$ 和 ∞ 外的保角映射,故像集也是无界的多连通区域.

选(D).

6-5　映射 $w = \frac{1}{z}$ 将 $\mathrm{Im}(z) > 1$ 的区域映射为(　).

将 $\mathrm{Im}(z) > 1$ 的上平面映于一个圆内.

(A) $\mathrm{Im}(w) < 1$　　　(B) $\mathrm{Re}(w) < 1$

(C) 圆 $(u + \frac{1}{2})^2 + v^2 < \frac{1}{2}$

(D) $(u + \frac{1}{2})^2 + v^2 > \frac{1}{2}$

解 由 $w=\dfrac{1}{z}$ 的保圆性,知 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $y=1$ 映射为直线或圆,由 $z=\infty$ 映射为 0,$z=1+\mathrm{i}$,映射为 $w=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$,$z=-1+\mathrm{i}$ 映为$\dfrac{-1-\mathrm{i}}{2}$知,将 $\mathrm{Im}(z)=1$ 映射为 w 平面上的圆:

$$\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{2}\text{(图 6.1)}$$

而 $z=2\mathrm{i}$ 映射为$\dfrac{1}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. 故 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $\mathrm{Im}(z)>1$ 映射为圆内.

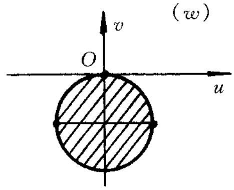


图 6.1

选(C).

6-6 在区域 $D:\mathrm{Im}(z)>0$,映射 $w=z^2$ 的性质及 D 在 w 平面上的像集 D_1 为( ).

(A) 映射是一一对应的,D_1 是全平面

(B) 映射是保角但非一一对应的,D_1 是全平面

(C) 映射是一一对应的,D_1 是全平面不含实轴的区域

(D) 映射是一一对应的,D_1 是全平面除正实轴以外的区域

解 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0<\theta<\pi)$,则 $w=r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$,将半平面映射为全平面,是一一对应的. 因为,记 $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,则 $\rho=r^2$,$0<\varphi<2\pi$,故 w 不含正实轴. 选(D).

此映射是将上半平面映射为全平面,却不含正实轴.

6-7 由三点:$f(1)=\mathrm{i}$,$f(0)=-\mathrm{i}$,$f(-1)=0$ 所确定的分式线性变换是( ).

(A) $\dfrac{z+1}{3z+1}\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{z+1}{3z-1}\mathrm{i}$ (C) $\dfrac{z+1}{3z+1}$ (D) $\dfrac{z+1}{3z-1}$

解 令 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$,

则由 $f(-1)=0$,得 $a=b$,不妨设 $a=b=1$,

则 $f(1)=\dfrac{2}{c+d}=\mathrm{i}$, $d+c=-2\mathrm{i}$

$f(0)=-\mathrm{i}$ 得 $d=\mathrm{i}$,$c=-3\mathrm{i}$

故 $f(z)=\dfrac{z+1}{-\mathrm{i}(3z-1)}=\dfrac{z+1}{3z-1}\mathrm{i}$. 选(B).

三点确定一分式映射.

本题可解得更简单:由保圆性知变换将实轴映为 w 的虚轴且 $f(0)=-\mathrm{i}$ 可令 $f(z)=\mathrm{i}\dfrac{z+1}{cz-1}$,令 $f(1)=\mathrm{i}$ 得 $c=3$.

6-8 分式线性变换 $w=\dfrac{z+1}{3z-1}\mathrm{i}$ 将 z 平面的上半平面映射为 w 平面上的(　).

(A) $\mathrm{Re}(w)<0$　　(B) $\mathrm{Re}(w)>0$

(C) $\mathrm{Im}(w)>0$　　(D) $\mathrm{Im}(w)<0$

解 此题即 6-7 题给出的变换,由于保圆性,及此映射将 $1,0,-1$ 即实轴上三个点,映为 w 面上 $\mathrm{i},-\mathrm{i},0$ 即虚轴上三个点.

可见,此映射将 z 平面上实轴映射为 w 平面上虚轴,再在 z 平面的上半平面上任取一点如 $z=\mathrm{i}$

则 $$w=\frac{\mathrm{i}+1}{3\mathrm{i}-1}\mathrm{i}=\frac{(-1+\mathrm{i})(3\mathrm{i}-1)}{10}=\frac{-2-4\mathrm{i}}{10}=\frac{-1-2\mathrm{i}}{5}$$

由此得 $\mathrm{Re}(w)<0$.

故 z 的上半平面映射到 $\mathrm{Re}(w)<0$.　　选(A).

注意这两道题的联系.

6-9 将 z 平面上 1、3、9 三点依次变到 w 平面上 3、9、0 三点的分式线性变换,将区域 $\mathrm{Im}(z)>0$ 变为 w 平面的(　).

(A) $\mathrm{Im}(w)>0$　　(B) $\mathrm{Im}(w)<0$

(C) $|w|>1$　　(D) $|w|<1$

解 记 $w=\dfrac{z-9}{bz+c}$, $w(1)=\dfrac{-8}{b+c}=3$, $w(3)=\dfrac{-6}{3b+c}=1$, $b=-\dfrac{5}{3}$, $c=-1$,故 $v=\dfrac{3(z-9)}{-5z-3}$

由于实轴映射为实轴,故在上半平面任取一点 $z=\mathrm{i}$,得

$$w(\mathrm{i})=\frac{3(9-\mathrm{i})}{3+5\mathrm{i}}=\frac{3}{34}(9-\mathrm{i})(3-5\mathrm{i}),$$

$$\mathrm{Im}(w)<0.$$　　选(B).

本题一题含以上两题,但可以不求出映射本身.你能判断出正确答案吗?试将 3、9、0 看作从 3 至 9 再到 ∞ 经负实轴至 0,便知结果.

6-10 求将圆 $|z|<2$ 映射到右半平面,且 $w(0)=1$, $\arg w'(0)=\pi/2$ 的分式线性映射.

解 令 $w=\dfrac{az+b}{z+b}$,则 $w'=\dfrac{ab-b}{(z+b)^2}$.由 $\arg w'(0)=\dfrac{\pi}{2}$,可令 $w'(0)=\dfrac{ab-b}{b^2}=\dfrac{a-1}{b}=\mathrm{i}$,得 $a=1+b\mathrm{i}$,

于是 $$w=\frac{(1+b\mathrm{i})z+b}{z+b}.$$

由于圆 $|z|=2$ 应映射为虚轴,故又令 $w(2)=\mathrm{i}$ 得

由 $w(0)=1$ 知 $b=d$,设 $c=1$,便只要确定 a 和 b.

$2+2bi+b=2i+bi$,解得 $b=\dfrac{-2(1-i)}{1+i}=2i$

于是 $\quad w=\dfrac{-z+2i}{z+2i}$(这时圆上点 $z=-2i$ 映射为 ∞ 点,故满足所求).

6-11 求把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射,且满足条件

(1) $w(i)=0, w(-1)=1$;

(2) $w(0)=1, w(i)=\dfrac{1}{2}$.

将单位圆映射为不同区域是分式线性映射的重要性质.

解 (1) 令 $w=\dfrac{z-i}{cz+d}$

$w(-1)=\dfrac{-1-i}{-c+d}=1$,即 $-1-i=-c+d$

令 $z=\infty$ 时,$w=-i$,得 $c=i, d=-1$,于是得到一个满足要求的映射

$$w=\frac{z-i}{iz-1}.$$

(2) 由 $w(0)=1$,可令 $w=\dfrac{az+b}{z+b}$

更令 $w(\infty)=-1$,得 $a=-1$,再由 $w(i)=\dfrac{1}{2}$ 得 $2(-i+b)=i+b$ 故 $b=-3i$,从而

$$w=\frac{-z-3i}{z-3i}.$$

6-12 求把单位圆映射成单位圆的分式线性映射,并满足条件

(1) $w(\frac{1}{2})=0, w(-1)=1$;

(2) $w(\frac{1}{2})=0, \arg w'(\frac{1}{2})=\dfrac{\pi}{2}$.

解 (1) 令 $w=\lambda\dfrac{2z-1}{z-2}$

由 $w(-1)=1$ 得 $\lambda=1$

故 $$w=\frac{2z-1}{z-2}$$

要求 $|z|=1$ 时 $|w|=1$,故取 $w=\lambda\dfrac{2z-1}{z-2}$ 时,$|\lambda|=1$,λ 也可写作 $e^{i\theta}$ 只要定 θ

(2) 令 $w=\lambda\dfrac{2z-1}{z-2}=2\lambda+\dfrac{3\lambda}{z-2}$

$$w'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-3\lambda}{(z-2)^2}=-\frac{4}{3}\lambda=\frac{4}{3}\mathrm{i}\quad(\lambda=-\mathrm{i})$$

故
$$w=\mathrm{i}\,\frac{1-2z}{z-2}.$$

即可.

6-13 求，把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射到上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的分式线性映射.

我们求的是一般变换式.

解 设 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 为所求的映射，则在实轴上三点 $x_1<x_2<x_3$，得对应点 $w_i=w(x_i)$ 也是实数，且 $w_1<w_2<w_3$. 故 a、b、c、d 皆是实数，且在点 x_1 处的变换转角为 0，即 $\arg w'(x)=0$

于是 $w'(x_1)=\dfrac{ad-bc}{(cx_1+d)^2}>0,\quad ad-bc>0$

也就是说，当 a、b、c、d 皆为实数，且 $ad-bc>0$ 时，是将 $\mathrm{Im}(z)>0$，映射为 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的充要条件，我们可以这样再推导

$$\mathrm{Im}(w)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(w-\overline{w})=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right)$$
$$=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\cdot\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}(z).$$

自然，$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射为 w 的下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$ 的充要条件是 a、b、c、d 皆为实数，且 $ad-bc<0$.

6-14 求将上半平面映射为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性变换.

解 设 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射为 $|w|<1$，则它将 $z=-\dfrac{b}{a}$ 映为圆心 $w=0$. 而将 $z=-\dfrac{\overline{b}}{\overline{a}}$ 映为 ∞，记 $\alpha=-\dfrac{b}{a}$，$\overline{\alpha}=-\dfrac{\overline{b}}{\overline{a}}$，而有 $-\dfrac{d}{c}=\overline{\alpha}$，故变换为

$$w=\frac{a}{c}\,\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}.$$

这个结果是一般结果.

由于 $z=0$ 变到 $|w|=1$ 上一点，即 $\left|\dfrac{a}{c}\right|=1$，记 $\dfrac{a}{c}=e^{i\theta}$，

则 $$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\ (\text{其中}\ \mathrm{Im}(\alpha)>0).$$

θ 是待定实数.

6-15 求把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射，并满足条件：

(1) $f(i)=0$；$f(-1)=1$；

(2) $f(i)=0$，$\arg f'(i)=0$；

(3) $f(1)=1$，$f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

将上题的一般结果应用于本题，可以使本题中每个小题计算步骤都简化了.

解 (1) 设 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$，于是

$$\frac{-1-i}{-1+i}e^{i\theta}=1\ \text{即}\ e^{i\theta}=i\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$$

所求映射为 $$w=i\frac{z-i}{z+i}.$$

如果不用一般结果作本题将很麻烦.

(2) 设映射为 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$

$$w'(z)=\frac{2i}{(z+i)^2}e^{i\theta}$$

故 $w'(i)=-\dfrac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

所求映射为 $$w=i\frac{z-i}{z+i}.$$

(3) 设 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$

由 $w(1)=1$ 得

$$e^{i\theta}(1-\alpha)=1-\bar{\alpha}$$

$$\sqrt{5}e^{i\theta}(i-\alpha)=(i-\bar{\alpha})$$

令 $\alpha=x+iy$，上两式相比得

$$\sqrt{5}(i-\alpha)(1-\bar{\alpha})=(i-\bar{\alpha})(1-\alpha) \tag{1}$$

取共轭 $$\sqrt{5}(\overline{i-\alpha})(1-\alpha)=(\overline{i-\bar{\alpha}})(1-\bar{\alpha})$$

上两式两边相乘得 $5|-x+(1-y)i|^2=|-x+(1+y)i|^2$

解得 $$x^2+y^2=3y-1 \tag{2}$$
将(1) 式乘开,比较实部与虚部可得
$$(\sqrt{5}-1)(1-x)=(\sqrt{5}+1)y \tag{3}$$
及 $$(\sqrt{5}-1)(x^2+y^2)=(\sqrt{5}-1)x+(\sqrt{5}+1)y \tag{4}$$
将(2) 代入(4),消去 x^2+y^2 后解得:$y=\dfrac{2}{3}$,$x=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}$,

于是 $$e^{i\theta}=\frac{1+\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2}{3}i}{1+\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{2}{3}i}=\frac{(3+\sqrt{5})+2i}{(3+\sqrt{5})-2i}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}(3+\sqrt{5})+4(3+\sqrt{5})i}{6(3+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{5}+2i)=\frac{3}{\sqrt{5}-2i}.$$
所求映射 $$w=\frac{3z+(\sqrt{5}-2i)}{(\sqrt{5}-2i)z-3}.$$

6-16 求将单位圆 $|z|<1$ 映射为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射.

解 设所求的分式线性变换把 $|z|<1$ 内的点 α 映射为 $w=0$,那么,它将 $\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ 即与 α 关于 $|z|=1$ 的对称点映射为 ∞,故所求的映射为

这也是一般结果.

$$w=\lambda\frac{z-\alpha}{-z+1/\bar{\alpha}}=\lambda\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{-\bar{\alpha}z+1}$$
设 $z=1$ 对应于 $|w|=1$ 上某点,则有
$$1=|\lambda\bar{\alpha}|\left|\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}\right|=|\lambda\bar{\alpha}|,\text{故 }\lambda\bar{\alpha}=e^{i\theta}$$
即 $$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\quad(|\alpha|<1,\theta\text{ 是实数})$$
这时 $$w'(z)=e^{i\theta}\frac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$$
$$w'(\alpha)=e^{i\theta}\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}$$ 故 θ 是 $z=\alpha$ 点变换时的旋转角.

同样,将 z 平面上 $|z|<1$ 映射为 w 平面上 $|w|>1$ 的分式线性变换是

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \quad (|\alpha| > 1, \theta \text{ 是实数})$$

6-17 求将单位圆 $|z|<1$ 映射为单位圆 $|w|<1$,并将 $z=1$ 映为 $w=1$,$1+i$ 映为 ∞ 的分式线性映射.

解 此映射将 $\frac{1}{(1-i)}$ 映为 $w=0$,故所求映射为

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\frac{1+i}{2}}{1-\frac{1-i}{2}z}$$

而由 $w(1)=1$ 得 $\quad e^{i\theta}\frac{1-i}{1+i}=1, e^{i\theta}=i$

所求映射为 $\quad w = i\frac{2z-(1+i)}{2-(1-i)z}$.

6-18 把点 $z=1, i, -i$ 分别映射成点 $w=1, 0, -1$ 的分式线性映射把单位圆 $|z|<1$ 映射成什么?并求这个映射.

解 由于 1、0、-1 在实轴上,且由大而小,知此映射是将单位圆映射为 w 上的下半平面的映射.

设此映射为 $\quad w=\lambda\frac{z-i}{z+d}$

由 $w(1)=1$ 得 $\quad \lambda\frac{1-i}{1+d}=1$

即 $\quad \lambda(1-i)=1+d$

再由 $\quad w(-i)=-1$ 得 $\quad \lambda\frac{-2i}{-i+d}=-1$

$$-2\lambda i = i-d$$

故 $\quad (1-3i)\lambda = 1+i, \quad \lambda=\frac{1+i}{1-3i}$

$$d = i+2i\frac{1+i}{1-3i} = i\left(\frac{3-i}{1-3i}\right) = \frac{1+3i}{1-3i}$$

所以 $\quad w=\frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+1+3i}$

是所求映射.

这里只用到 $w(i)=0$ 一个条件,来确定 λ 和 d 两个待定常数.

6-19 求将右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 映射为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射.

解 1 设 $w=\lambda\dfrac{z+b}{z+d}$,它将 $z=-b$ 映为 $w=0$ 点,而将 $z=-d$ 映为 $w=\infty$ 点. 记 $\alpha=-b$,则 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$,由对称性,$-d=(-\bar{\alpha})$. 因此,$w=\lambda\dfrac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$,且 $|w(0)|=|\lambda|\left|\dfrac{-\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=|\lambda|=1$,故 $\lambda=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 得

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}\quad(\mathrm{Re}(\alpha)>0,\theta\text{ 是实数}).$$

这是将右半平面映射为单位圆的一般映射公式.

解 2 由6-13题,先作旋转 $\zeta=\mathrm{i}z$,将右半平面旋转为上半平面,于是将 $\mathrm{Im}(\zeta)>0$ 变为 $|w|<1$ 的映射是(见 6-13 题)

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\bar{\beta}}\quad(\mathrm{Im}(\beta)>0)$$

故
$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{i}z-\beta}{\mathrm{i}z-\bar{\beta}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z+\mathrm{i}\beta}{z+\mathrm{i}\bar{\beta}}$$

记 $\mathrm{i}\beta=-\alpha$,则 $\mathrm{i}\bar{\beta}=-(\overline{\mathrm{i}\beta})=\bar{\alpha}$ 而 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$

$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$ 与解 1 的结果同.

6-20 求一分式线性映射,把由 $|z-3|>9$ 与 $|z-8|<16$ 所确定的区域映射为 w 平面上的同心圆环:$|w|<1$ 与 $|w|>r\quad(0<r<1)$.

解 本题关键在设 $w(z_1)=0,w(z_2)=\infty$,由于0、∞ 关于两个同心圆 $|w|=1$ 与 $|w|=r$ 皆对称;故 z_1 与 z_2 应同时与 $|z-3|=9$ 及 $|z-8|=16$ 皆对称. 从而知 z_1、z_2 应在此二圆圆心的联线上,即 z_1 与 z_2 皆是实数,且有

利用 $w=0$ 与 $w=\infty$ 两点是关于两个同心圆皆对称的点而有保对称性. 从而知 z_1,z_2 皆是实数,及对二圆都有对称性,从而解出 z_1 和 z_2.

$$(z_1-3)(z_2-3)=9^2,\quad(z_1-8)(z_2-8)=16^2$$

即
$$z_1z_2-3(z_1+z_2)=9^2-9$$
$$z_1z_2-8(z_1+z_2)=16^2-8^2$$

得 $z_1+z_2=-24,z_1z_2=0$,取 $z_1=0,z_2=-24$.

则
$$w=\lambda\frac{z}{z+24}$$

由于 $z=0$ 在 $|z-3|<9$ 内部,故此映射将 $|z-3|=9$ 映为 $|w|=r$,而将 $|z-8|=16$ 映为 $|w|=1$

即
$$z=8+16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2z}{z+24}$$

取 $z_1=-24, z_2=0$,则

$$w=\lambda\frac{z+24}{z}$$

这时,由 $z_1=-24$ 在 $|z-8|>16$ 内,而 $w=0$ 在 $|w|<r$ 内,故此映射将 $|z-8|=16$ 映为 $|w|=r$ 而将 $|z-3|=9$ 映为 $|w|=1$,即令 $z=3+9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 便应有

$$|w|=|\lambda|\left|\frac{27+9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{3+9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\right|=1.$$

故 $|\lambda|=\frac{1}{3}, \lambda=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 所求映射为

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z+24}{3z}.$$

6.2 几个初等函数所构成的映射

6-21 试将由 $|z|<1$ 及 $|z-1|<1$ 所确定的区域保角地映射为上半平面.

解 如图 6.2,我们采取如下步骤作映射.

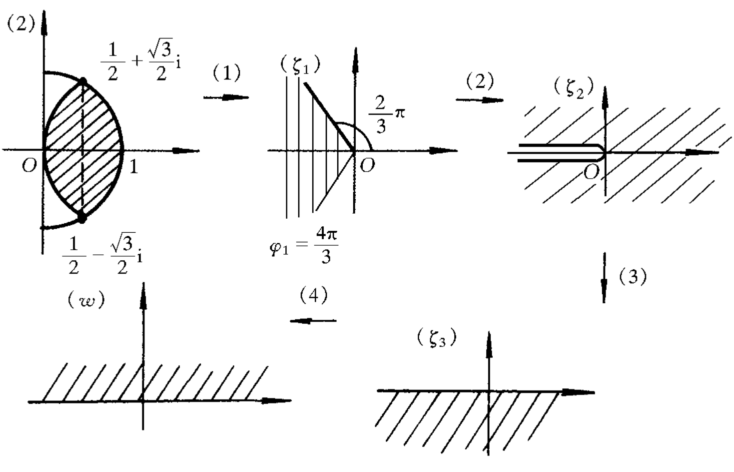


图 6.2

(1) 作分式线性映射,使 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 映射于原点,而 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

映射为 $w=\infty$ 点.

即
$$\zeta_1=\frac{2z-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2z-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

(2) 令 $\zeta_2=\zeta_1^3$,则映射成不含 ζ_2 的负实半轴的全平面,$2\pi\leqslant\varphi_2<4\pi$.

(3) 令 $\zeta_3=\zeta_2^{1/2}$,则映射为下半平面.

(4) 令 $w=-\zeta_3$,则映射为上半平面,故此映射为
$$w=-\left(\frac{2z-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2z-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{3/2}$$

按要求一步一步变,注意每一步的要求.

6-22 试将由 $\mathrm{Im}(z)>1$, $|z|<2$ 所确定的区域保角地映射为上半平面.

解 如图 6.3,分以下步骤:

(1) 将弓形域映射为角形域 $\zeta_1=\dfrac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

(2) $\zeta_2=\zeta_1^3$ 映射为下半平面.

(3) $w=-\zeta_2$,即为所求也就是
$$w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^3$$

请注意每一步所映射的结果.

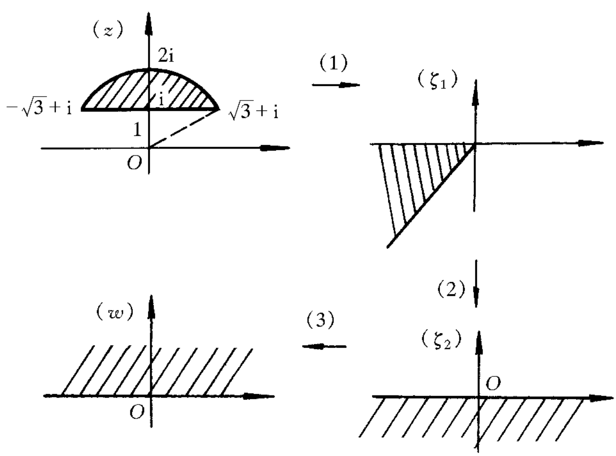


图 6.3

6-23 试将由 $|z|>2, 0<\arg z<\dfrac{3}{2}\pi$ 确定的区域映射为上半平面.

解 如图 6.4,分以下步骤作映射:

(1) 将圆域映射为上半圆的域 $\zeta_1 = z^{2/3}$

(2) 令 $\zeta_2 = \dfrac{\zeta_1 + 2^{2/3}}{\zeta_1 - 2^{2/3}}$

(3) $\zeta_3 = -\zeta_2^2$ 即为所求,也即

$$w = -\left(\frac{z^{2/3}+2^{2/3}}{z^{2/3}-2^{2/3}}\right)^2$$

第一步将图形映为上半圆与实轴的上半部分.

再变成一个角域.

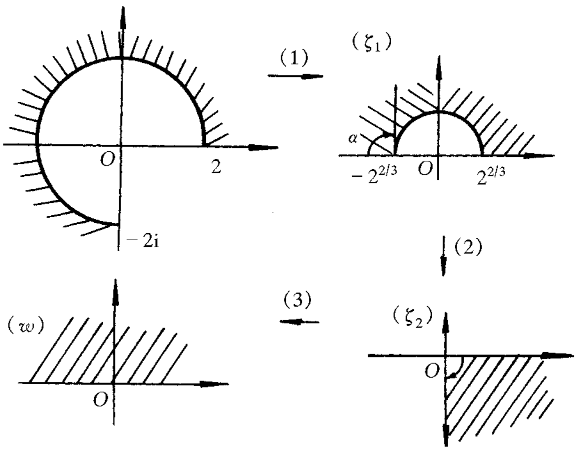


图 6.4

6-24 将虚轴上有 i 到 3i 的割痕的 z 平面,映射成半平面.

解 如图 6.5 分以下步骤:

(1) 将割痕伸长并转到实轴,即令 $\zeta_1 = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z-3\mathrm{i}}$;

(2) 再使割痕的辐角增加一个 π,即 $\zeta_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\zeta_1 = -\zeta_1$;

(3) $w = \zeta_2^{1/2}$ 即为所求即

$$w = \left(-\frac{z-\mathrm{i}}{z-3\mathrm{i}}\right)^{1/2}$$

其实是先将割痕平移伸长成负实轴,再将其转向正实轴,再将之缩为半平面而得所要的结果,割痕在实轴了.

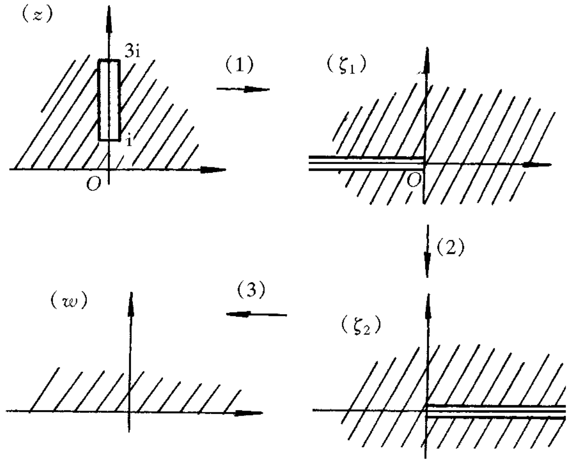


图 6.5

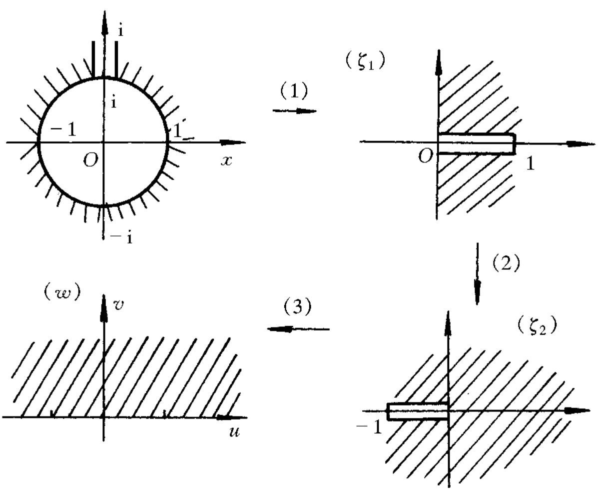


图 6.6

6－25 求把单位圆外部 $|z|>1$,且沿虚轴 $y>1$ 有割痕的域映射为上半平面的一个保角映射.

解 如图 6.6,分以下步骤:

(1) 作分式线性映射,将单位圆外部映射为半平面,并使

割痕转到实轴,即 $\zeta_1=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

(2) 平方且反射,使割痕到$(-1,0)$,$\zeta_2=-\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2$

(3) 平移后开方得 $w=(1+\zeta_2)^{\frac{1}{2}}$

即
$$w=\left[1-\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2\right]^{1/2}.$$
为所求映射.

注意处理割痕的方法,主要是不能将割痕映在所要求的上半平面内.

6-26 将图 6.7 z平面中阴影部分所示区域,即由 $\mathrm{Re}(z)>-1$, $|z|>1$ 所确定区域映射为上半平面.

解 分以下步骤:

(1) 作分式线性映射 $\zeta_1=\dfrac{z-1}{z+1}$,则所给域映射为 $0<\mathrm{Re}(\zeta_1)<1$;

(2) 旋转伸长,即令 $\zeta_2=\pi\mathrm{i}\zeta_1$,得条形域 $0<\mathrm{Im}(\zeta_2)<\pi$;

(3) 作指数映射 $w=\mathrm{e}^{\zeta\mathrm{i}}$ 即得上半平面.即映射为
$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{z-1}{z+1}}$$

(1) 是将所给区域映为带状区域.

(2) 是旋转并扩大的宽度.

(3) 用指数映射将带形域映射为上半平面.

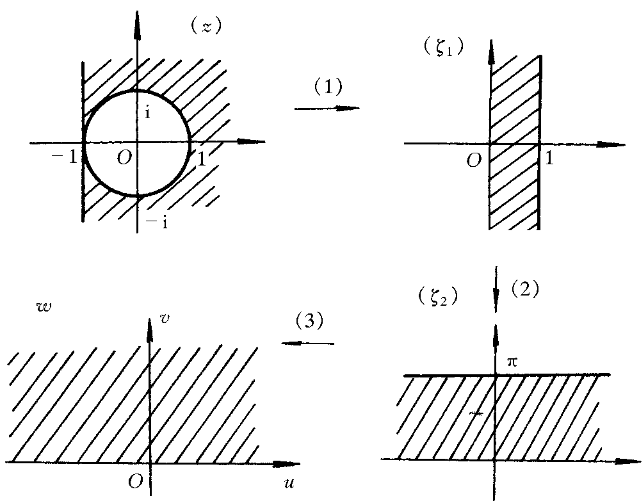


图 6.7

6－27　将如图 6.8 所示的 z 平面区域，即由 $|z|<2$，$|z-1|>1$ 所确定的区域，映射为上半平面.

解　(1) 作分式线性变换：$\zeta_1=\dfrac{z}{z-2}$，将 $|z-1|=1$ 映射为 $\mathrm{Re}(\zeta_1)=0$，而将 $|z|=2$ 映射为 $\mathrm{Re}(\zeta_1)=\dfrac{1}{2}$. 由此，将已知域映射为带状域.

(2) 旋转伸缩：$\zeta_2=2\pi i\zeta_1$. 映射为 $0<\mathrm{Im}(\zeta_2)<\pi$

(3) 取指数函数的映射 $w=e^{\zeta_2}$ 便是本题所求，即 $w=e^{2\pi i\frac{z}{z-2}}$.

(1) 作分式线性映射，将两圆映射为二平行线；

(2) 是旋转并扩大带的宽度.

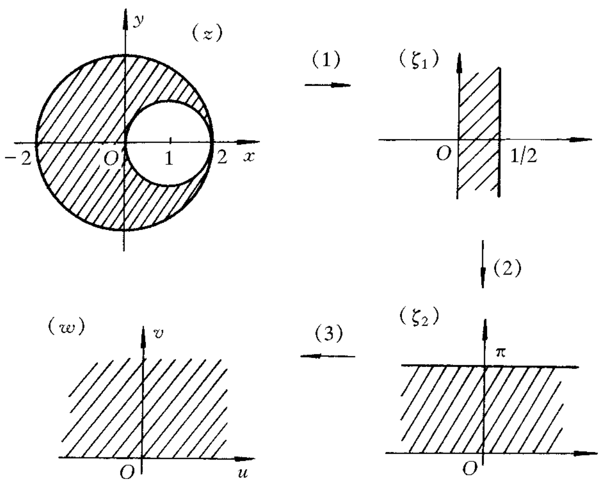


图 6.8

6－28　将沿虚轴有割痕从 $z=0$ 至 $z=2i$ 的上半平面，保角地映射为上半平面.

解　(1) 将上半平面映射为全平面后并平移，使割痕位于实轴的 $\zeta_1=0$ 至 $\zeta_1=4$ 处.

$$\zeta_1=4+z^2.$$

(2) 开方使割痕好似被展平在实轴的 $(-2,2)$ 上：$w=\zeta_1^{\frac{1}{2}}$. 即　$w=(4+z^2)^{1/2}$.（见图 6.9）

本题主要是处理掉“割痕”的方法.

这个比较简单，只要两步就成了.

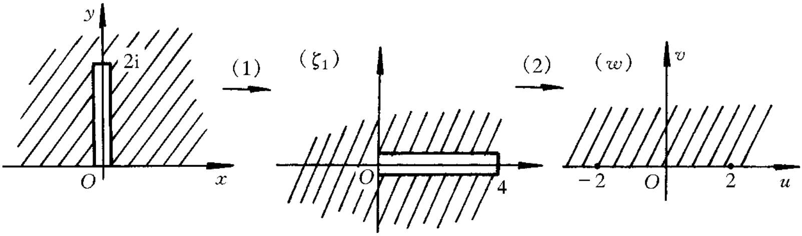


图 6.9

6-29 图 6.10 所示的 z 平面上单位圆 $|z|<1$ 中有割痕:沿实轴从 $z=0$ 至 $z=1$ 的区域,试将其保角地映射为半平面.

解 (1) 开方将圆映射为半圆,割痕仍在 x 轴上:$\zeta_1=z^{\frac{1}{2}}$;

(2) 作分式线性映射,将半圆映射为 1/4 平面:$\zeta_2=\dfrac{\zeta_1+1}{-\zeta_1+1}$;

(3) 平方 $w=\zeta_2^2$ 即 $w=\left(\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2$.

主要也是处理割痕的方法.值得总结.

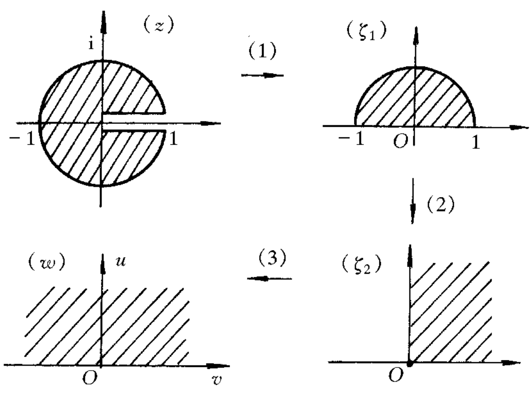


图 6.10

6-30 将图 6.11 所示，由 $\mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{2}$ 确定的 z 平面上的区域，保角映射为上半平面.

解 (1) 将其旋转伸缩于第 4 象限：$\zeta_1 = -2z$

(2) 取指数函数：$\zeta_2 = e^{\zeta_1}$

将 ζ_1 中的区域映射为半圆域：$|\zeta_2| = e^{-2x} < 1, -\pi < \mathrm{Arg}\zeta_2 < 0$

(3) 作分式线性映射：$\zeta_3 = \dfrac{\zeta_2 - 1}{\zeta_2 + 1}$

将半圆映射为 1/4 平面.

(4) 令 $w = \zeta_3^2$ 即为所求的映射，即

$$w = \left(\frac{e^{-2z} - 1}{e^{-2z} + 1}\right)^2.$$

仔细研究一下，为什么要用 4 个步骤？

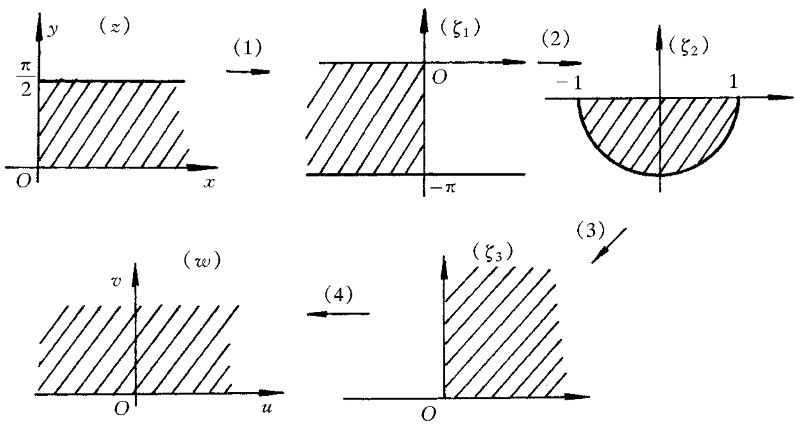


图 6.11

6-31 求将 z 平面上在实轴有两条割痕：$-\infty < x \leqslant -1$ 及 $1 \leqslant x < +\infty$ 的区域映射为上半平面 $\mathrm{Im}(w) > 0$ 的一个保角映射.

解 我们把两个割痕视为在 ∞ 点连起来的"线段"，而用分式线性变换：
$$\zeta = \frac{z+1}{z-1}$$
映射为(ζ) 平面上的有正实轴一条割痕的平面.

两条割痕视为在 ∞ 连结的一条割痕来加以处理，这一方法要学会.

再用映射 $w=\sqrt{\zeta}$，便将此平面变成了 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的半平面，于是 $w=\sqrt{\dfrac{z+1}{z-1}}$ 就是要求的一个映射.（见图 6.12）

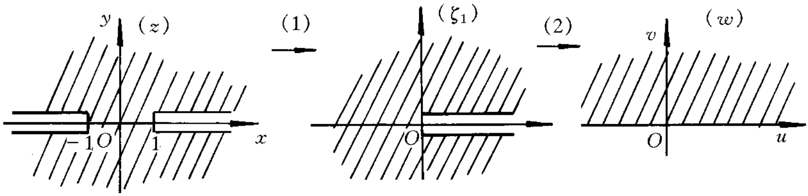


图 6.12

6-32 求把实轴上有割痕：$\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 的单位圆 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$ 的一个映射.

先将割痕的一点平移到原点，故这样做步骤就多了.关键是对割痕的处理.

解 (1) 令 $\zeta_1=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}$，使割痕在 $0\leqslant \mathrm{Re}(\zeta_1)<1$ 上；

(2) 作 $\zeta_2=\sqrt{\zeta_1}$；

(3) 再作 $\zeta_3=\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}$，将半圆映射为 (ζ_3) 的第 Ⅰ 象限部分；

(4) 作 $\zeta_4=\zeta_3^2$，便将此映射为上半平面；

(5) 最后将上半平面映为单位圆：

$$w=\frac{\zeta_4-\mathrm{i}}{\zeta_4+\mathrm{i}}\quad（见图 6.13）$$

经归纳

$$w=\frac{\zeta_4-\mathrm{i}}{\zeta_4+\mathrm{i}}=\frac{\zeta_3^2-\mathrm{i}}{\zeta_3^2+\mathrm{i}}=\frac{[(\zeta_2+1)/(\zeta_2-1)]^2-\mathrm{i}}{[(\zeta_2+1)/(\zeta_2-1)]^2+\mathrm{i}}$$

$$=\frac{(\sqrt{\zeta_1}+1)^2-\mathrm{i}(\sqrt{\zeta_1}-1)^2}{(\sqrt{\zeta_1}+1)^2+\mathrm{i}(\sqrt{\zeta_1}-1)^2}$$

$$=\frac{[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}+1]^2-\mathrm{i}[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}-1]^2}{[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}+1]^2+\mathrm{i}[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}-1]^2}$$

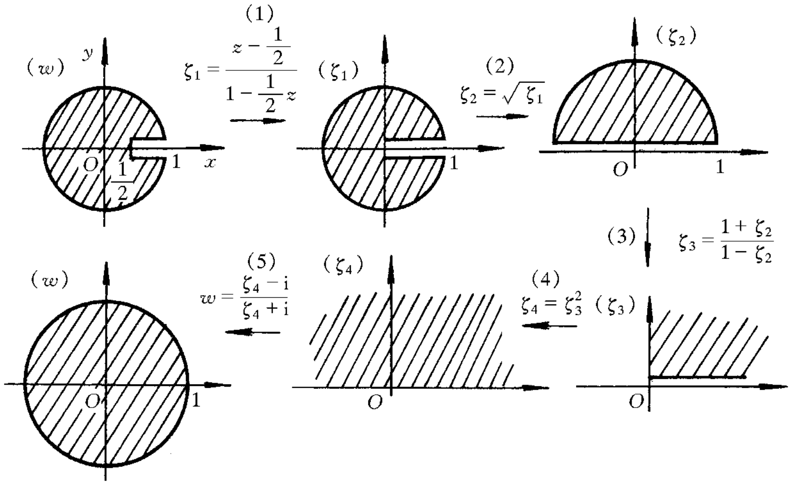


图 6.13

6－33 映射 $w = 1/(z^2 + \mathrm{i})$ 把 z 平面的半圆：$|z| < 1$，$\mathrm{Im}(z) > 0$ 映射成 w 平面的什么区域？

这是上面例题的反问题，要倒过来看.

解 将 $w = 1/(z^2 + \mathrm{i})$ 分解为：

(1) $\zeta = z^2$，将半圆映射为圆 $|\zeta| < 1$；

(2) $\dfrac{1}{\zeta + \mathrm{i}}$ 是分式线性映射，它将圆上点 $\zeta = -\mathrm{i}$ 映为 $w = \infty$ 点，故知它将圆映射为直线，而又将 $\zeta = \mathrm{i}$ 映射为 $w = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，将 $\zeta = 1$ 映为 $w = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$，可知 $|\zeta| = 1$ 映为 $\mathrm{Im}(w) = -\dfrac{1}{2}$，而 $\zeta = \infty$ 映射为 $w = 0$，故 $|\zeta| < 1$ 映射为 $\mathrm{Im}(w) < -\dfrac{1}{2}$ 的半平面.（见图 6.14）

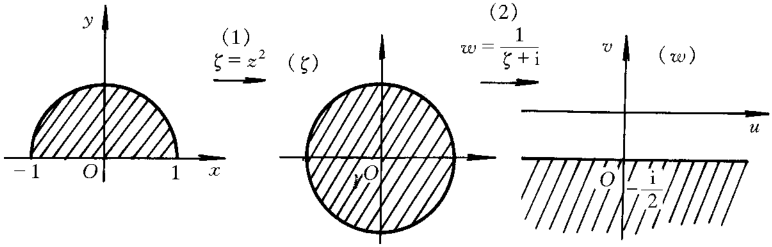


图 6.14

6-34 求把半带形域 $-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(z)<\dfrac{\pi}{2},\mathrm{Im}(z)>0$，映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的映射 $w=f(z)$，使 $f(\pm\dfrac{\pi}{2})=\pm1,f(0)=0$.

解 （1）作旋转与平移：$\zeta_1=\mathrm{i}z+\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}$，使之映为 ζ_1 平面的半带形域：$0<\mathrm{Im}(\zeta_1)<\pi,\mathrm{Re}(\zeta_1)<0$.

（2）作指数映射：$\zeta_2=\mathrm{e}^{\zeta_1}$，将之映为 ζ_2 平面上的半圆域：$|\zeta_2|<1,\mathrm{Im}(\zeta_2)>0$；

（3）作分式线性映射：$\zeta_3=\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}$，将半圆域映为 ζ_3 平面第 1 象限；

（4）$\zeta_4=\zeta_3^2$，将之映为 ζ_4 的上半平面，只是未满足 $f(\pm\dfrac{\pi}{2})=\pm1$ 及 $f(0)=0$ 的条件；

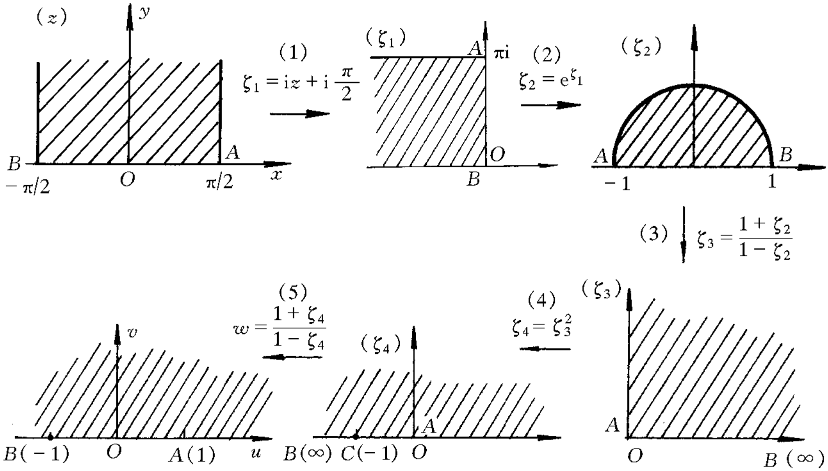
（5）由上半平面映为上半平面，且 ∞ 映为 -1，0 点映为 1 及 -1 映为 0. 即得：$w=\dfrac{1+\zeta_4}{1-\zeta_4}$.（见图 6.15）

这样的题总是旋转平移，再用指数映射化为角域.

归纳 $$w=\frac{1+\zeta_3^2}{1-\zeta_3^2}=\frac{1+\left(\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1+\zeta_2^2}{\zeta_2}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1+\mathrm{e}^{2\zeta_1}}{\mathrm{e}^{\zeta_1}}=-\frac{\mathrm{e}^{-\zeta_1}+\mathrm{e}^{\zeta_1}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}z+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\sin z$$，为所求的映射.



(z)
y
B
$-\pi/2$
O
A
$\pi/2$
x
(1)
$\zeta_1 = \mathrm{i}z + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$
(ζ_1)
A
$\pi\mathrm{i}$
O
B
(2)
$\zeta_2 = \mathrm{e}^{\zeta_1}$
(ζ_2)
A
B
-1
1
(3)
$\zeta_3 = \frac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}$
(5)
$w = \frac{1+\zeta_4}{1-\zeta_4}$
v
B(−1)
O
A(1)
u
(4)
$\zeta_4 = \zeta_3^2$
(ζ_4)
A
B(∞)
C(−1)
O
(ζ_3)
A
O
B (∞)

图 6.15

附录　模拟测试

试卷一

一、单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 函数 $w=\ln z$ 在 $z=e^{i}$ 处的值为(k 为整数)(　).

(A) $(2k\pi+1)i$　(B) $(2k+1)\pi i$　(C) $2k\pi i$　(D) $(2k+\frac{1}{2})\pi i$

2. 设积分路径 C 为从原点到 $2+i$ 的直线段,则积分 $\int_C y\,dz=$(　).

(A) $1-\frac{i}{2}$　(B) $1+\frac{i}{2}$　(C) $1-i$　(D) $1+i$

3. $z=1$ 是函数 $\frac{\ln z}{z^2-1}$ 的(　).

(A) 可去奇点　(B) 极点　(C) 本性奇点　(D) 非孤立奇点

4. 设 C 为圆周 $|z|=1$ 正向,则 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^3\left(\frac{\operatorname{sh} z}{z^4}-\sin\frac{1}{z^2}\right)dz=$(　).

(A) -1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{6}$　(D) 0

5. 将单位圆 $|z|<1$ 映射为单位圆 $|w|<1$ 的映射为(　).

(A) $w=\frac{z+i}{z-i}$　(B) $w=\frac{2z-1}{z-2}$　(C) $w=\frac{z+1}{z-1}$　(D) $w=\frac{z-1}{2z-1}$

二、填空题(1,2 小题 3 分,其余小题 4 分,共 26 分)

1. 所谓扩充复平面是指________________的复平面.

2. $e^{9\pi i}=$ ________________.

3. $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2+1}=$ ________________.

4. 设 $f(z)=\bar{z}\operatorname{Im}(z)$,则 $f'(0)=$ ________________.

5. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-4)^{2n+1}}$ 的收敛范围为________________.

6. 函数 $\frac{1}{1-2z}$ 在 $\frac{1}{2}<|z|<+\infty$ 内的罗伦展开式为________________.

7. 设 z_0 是 $f(z)$ 的 n 级($n>1$) 极点,计算 $f(z)$ 在 z_0 处的留数的方法有两种:(1) ____________;(2) ____________.

三、解下列各题(7 小题,共 36 分)

1. (4 分) 已知 $z=(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$ 求 $\mathrm{Re}(\bar{z})$.

2. (4 分) 求角形域 $1<\arg z<2$ 在映射 $w=\mathrm{i}\ln z$ 的像集.

3. (5 分) 求 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4-2}$ 在 $|z|<3$ 内所有留数之和.

4. (5 分) 求函数$\sqrt[3]{z}$(其中$\sqrt[3]{1}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$) 在 $z_0=1$ 处的泰勒展开式,并求出收敛圆.

5. (6 分) 实数 a、b、c、d 满足什么条件才能使 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 成为调和函数?并求出此调和函数.

6. (6 分) 计算积分 $I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{(z^2-9z+8)\mathrm{e}^z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$.

7. (6 分) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+4^n}{n^2+1}(z+2)^n$ 的收敛圆,并讨论在 $z=-\dfrac{7}{4}$ 和 $z=-\dfrac{9}{4}$ 处的收敛性.

四、证明下列各题(3 小题,共 18 分)

1. (5 分) 证明 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 不连续.

2. (6 分) 证明当 $a\neq 0$ 且 c 为整数时有$(a^b)^c=a^{bc}$ 其中 b 为任意复数.

3. (7 分) 设 z_0 是 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的孤立奇点,则

$$\mathrm{Res}(\alpha f_1(z)+\beta f_2(z),z)=\alpha\mathrm{Res}(f_1(z),z_0)+\beta\mathrm{Res}(f_2(z),z_0).$$

其中 α,β 是常数.

试卷二

一、单项选择题(每小题 4 分,共 16 分)

1. $w=\ln z$ 的解析区域为( ).

(A) 复平面　　(B) 除去原点的复平面

(C) 扩充复平面　　(D) 除原点与负实轴的复平面

2. 设 $f(z)=x^3-y^3\mathrm{i}$,则 $f(z)$ 在复平面上( ).

(A) 处处可导　　(B) 仅在 $z=0$ 处解析

(C) 处处不可导　　(D) 仅在 $z=0$ 处可导

3. $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}dz=(\quad)$.

(A) $\frac{1+i}{2}$　　(B) $1+i$　　(C) $-\frac{\pi}{2}e^{i}(1+i)$　　(D) $-\frac{\pi}{2}$

4. 函数$\frac{e^z}{1+z^2}$以 $z=\infty$ 为(　).

(A) 可去奇点　　(B) 极点　　(C) 本性奇点　　(D) 解析点

二、填空题(5 小题共 21 分)

1. (3 分) $\oint_{|z|=1}(z-2)dz=$ ______________.

2. (3 分) 在 z 平面,点 $1+i$ 关于圆周 $|z|=1$ 的对称点为______________.

3. (5 分) 设 z_1、z_2 为复平面上两个定点,则以 z_1、z_2 为端点的直线段上任一点 $z=$ ______________.

4. (5 分) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n z^n}$ 的收敛范围是______________.

5. (5 分) 函数 $w=\begin{cases}\frac{\sin z-z}{z^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 的伸缩率为__________.

三、解答下列各题(共 49 分)

1. (4 分) 求 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}z^n$ 的收敛半径,并讨论 $z=1$,$z=-1$ 时的敛散性.

2. (5 分) 求函数 $\cot z$ 在它所有有限孤立奇点处的留数.

3. (5 分) 求 $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$.

4. (5 分) 计算 $I=\oint_{|z|=3/2}\frac{2z^5+1}{iz^6+1}dz$.

5. (5 分) 求在 $1+i$ 到 $2+2i$ 有割痕的复平面,在映射 $w=\sqrt{\frac{2+2i-z}{-(1+i)+z}}$ 下的像集(根式取主值支).

6. (6 分) 讨论 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 点的可导性及解析性.

7. (6 分) 将 $\sin^2 z$ 展开为 z 的幂级数.

8. (6 分) 计算实积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\quad(a>0)$.

9. (7 分) 计算 $I=\int_C(1+i-2\bar{z})dz$,其中 C 为联 $z_1=0$,$z_2=1$ 和 $z_3=1+i$ 从 z_1 至 z_2 至 z_3 的折线段.

四、证明下列各题(共 14 分)

1．（6 分）复平面上三点 z_1、z_2、z_3 共线的充要条件是$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$为实数．

2．（8 分）$|\cos z|^2=\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y$．

试卷三

一、单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

1．设 $f(z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$ 是平面流速场的复势函数,$V=v_x+\mathrm{i}v_y$ 为流场的速度,则(　)．

(A) $V=f'(z)$　　(B) $V=-\overline{f'(z)}$　　(C) $V=-\overline{\mathrm{i}f'(z)}$　　(D) $V=\overline{f'(z)}$

2．$z=0$ 是$\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}-\dfrac{1}{z}$的(　)．

(A) 可去奇点　　(B) 极点　　(C) 本性奇点　　(D) 解析点

3．由$\left|z-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$与$\left|z-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right|>\dfrac{1}{2}$所确定的点集是(　)．

(A) 开集,非区域　　(B) 单连通区域　　(C) 多连通区域　　(D) 闭区域

4．$\displaystyle\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}+\frac{z}{\sin z^2}\right)\mathrm{d}z=$(　)．

(A) 0　　(B) $2\pi\mathrm{i}$　　(C) $\pi\mathrm{i}$　　(D) $3\pi\mathrm{i}$

5．将区域$\{z\mid |z-\mathrm{i}|>2,\operatorname{Im}(z)>0\}$映为角形域的映射为(　)．

(A) $w=\dfrac{z+1}{z-1}$　　(B) $w=\dfrac{1}{z-\sqrt{3}}$　　(C) $w=\dfrac{1}{z-3}$　　(D) $w=\dfrac{z-1}{z+1}$

二、填空题(共 22 分)

1．（2 分）$f(z)=\dfrac{z^3-z^2+z+6}{z^2}$,$\operatorname{Res}(f(z),\infty)=$________．

2．（5 分）$\displaystyle\int_0^{2+\mathrm{i}}z^2\,|\mathrm{d}z|=$________积分路径是线段．

3．（5 分）函数 $\ln z$ 在 $z_0=\mathrm{i}$ 处泰勒展开式中,$(z-\mathrm{i})^5$ 的系数为________．

4．（5 分）$\operatorname{Res}\left(\sin\dfrac{z}{1-z},1\right)=$________,$\operatorname{Res}\left(z\sin\dfrac{1}{z-1},1\right)=$________．

5．（5 分）映射 $w=\dfrac{z^2-\mathrm{i}}{z^2+\mathrm{i}}$ 第三象限的像集为________．

三、解答下列各题(共 41 分)

1．（4 分）解方程 $z^2-2(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}=0$．

2．（4 分）讨论 $f(z)=x^2-y^2-3x+2+\mathrm{i}(2x-3)y$ 的解析性,并求在解析点处的导数．

3. （5 分）设 $f(z)=\left(\dfrac{e^z+1}{1-e^z}\right)^4$，求 $f'((2k+1)\pi i)$（k 为整数）.

4. （5 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径，并讨论在收敛圆周上的敛散性.

5. （5 分）求将 -1、∞、i 变为 ∞、i、1 的分式线性变换.

6. （6 分）计算 $I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^2-1}{z^2+1}dz$.

7. （6 分）求 $f(z)=\dfrac{e^{ibz}}{(z^2+a^2)^2}$ 在 $-ai$ 处的留数（a、b 为实数）.

8. （6 分）计算 $I=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$.

四、证明下列各题（共 17 分）

1. （5 分）证明 $z\to 0$ 时，函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$ 的极限不存在.

2. （6 分）设 $u=u(x,y)$ 是调和函数且非常数函数，证明 u^2 不是调和函数.

3. （6 分）用欧拉公式证明

$$\cos^4\theta=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta.$$

试卷一答案

一、1. (A)　2. (B)　3. (A)　4. (D)　5. (B)

二、1. 包括 ∞ 点在内　2. -1　3. 0　4. 0　5. $z\neq 4$

6. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n z^n}$

7. (1) $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$；

(2) $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$

三、1. $\mathrm{Re}(\bar{z})=3$　2. 条形域 $-2<\mathrm{Re}(w)<-1$　3. 0

4. $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n n!}1\times 2\times 5\cdots(3n-4)(z-1)^n\right]$

5. $c=-3a$，$b=-3d$，a、d 为任意实数　6. $-12e\pi i$

7. 收圆 $|z+2|<\dfrac{1}{4}$，在 $z=-\dfrac{7}{4}$ 和 $-\dfrac{9}{4}$ 处绝对收敛.

试卷二答案

一、1. (D)　2. (D)　3. (C)　4. (C)

二、1. $\underline{\quad 0 \quad}$ 2. $\underline{\quad \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}) \quad}$ 3. $\underline{\quad z=z_1+t(z_2-z_1) \quad}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$

4. $\frac{1}{2}<|z| \leqslant 2$ 5. $\underline{\quad \frac{1}{6} \quad}$

三、1. $R=1$，$z=1$ 收敛，$z=-1$ 发散 2. $\operatorname{Res}(\cot z, k\pi)=1$.（$k$ 是整数）

3. $\frac{3}{2}$ 4. $\underline{\quad 4\pi \quad}$ 5. 上半平面：$\operatorname{Re}(w)>0$ 6. 仅在 $z=0$ 可导，不解析

7. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2z)^{2n}$ 8. $\frac{\pi}{4a}$ 9. $-2+\frac{\mathrm{i}}{2}$

试卷三答案

一、1.（D） 2.（A） 3.（C） 4.（B） 5.（B）

二、1. $\underline{\quad -1 \quad}$ 2. $\underline{\quad \frac{\sqrt{5}}{3}(3+4\mathrm{i}) \quad}$ 3. $\underline{\quad -\frac{1}{5} \quad}$

4. $\operatorname{Res}(\sin\frac{z}{1-z},1)=\cos 1$，$\operatorname{Res}(z\sin\frac{1}{z-1},1)=1$ 5. $|w|<1$

三、1. $z_{1,2}=(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}})(1+\mathrm{i})$ 2. 在复平面处处解析，$f'(z)=2x-3+2\mathrm{i}y$

3. -2 4. $R=1$，在 $|z|=1$ 上均绝对收敛 5. $w=\mathrm{i}\left(\frac{z+1-2\mathrm{i}}{z+1}\right)$ 6. 0

7. $\frac{\mathrm{i}}{4a^3}(1-ab)\mathrm{e}^{ab}$ 8. $\frac{\cos 1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sin 1}{4}$