普通高等学校基础课辅导用书

大 学 数 学

典型题解析

（线性代数与概率统计分册）

主编　陈　仲

编者　陈　仲

　　　范红军

南 京 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写.考虑学生考研的要求,编写时参照了教育部制定的考研《数学考试大纲》.全书含两个分册,本册是线性代数与概率统计分册,内容为行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、随机事件和概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步、参数估计和假设检验.

本书从大学数学教材和习题集中,从高校历年期中考试、期末考试试题中,以及从历年硕士研究生入学考试题中,精选了800余例典型题,逐条详细解析,指出可能发生的错误,总结解题方法和技巧,指导学生举一反三,触类旁通.

本书可作为高等学校大学数学课程的教学参考书,习题课教材,以及考研复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学典型题解析.线性代数与概率统计分册/陈仲主编.—南京:南京大学出版社,2006.6
普通高等学校基础课辅导用书
ISBN 7-305-04735-X

Ⅰ.大... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第044198号

书　　名　大学数学典型题解析(线性代数与概率统计分册)
编 著 者　陈　仲　范红军
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　邮编210093
电　　话　025-83596923　025-83592317　传真025-83328362
网　　址　http://press.nju.edu.cn
电子邮件　nupress1@public1.ptt.js.cn
　　　　　sales@press.nju.edu.cn(销售部)
印　　刷　南京京新印刷厂
开　　本　850×1168　1/32　印张10.375　字数258千
版　　次　2006年6月第1版第1次印刷
ISBN　7-305-04735-X/O·377
定　　价　15.80元

前　　言

大学数学是高等学校理、工、文科各系的公共必修基础课. 学习大学数学,除掌握数学的基本概念、基本理论和基本方法外,更重要的是使自己受到良好的科学训练,得到数学思维方法、逻辑推理能力的培养,获得一定的数学素养,为学习专业课和后续课打下扎实的基础. 因此要学好大学数学成了每个大学生的共识.

大学数学是一门系统、严谨的学科,内容多,教学进度快,致使相当多的刚进入大学的大学生感到学习困难. 我们编写这本书的宗旨就是指导大学生学好大学数学.

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写,并参照了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》. 按其内容分为两个分册(高等数学分册,线性代数与概率统计分册),第一分册包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程;第二分册包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、随机事件和概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步、参数估计与假设检验. 全书共 22 章,每章分两部分,第一部分是"基本概念与内容提要",列出主要概念、基本内容,并对其中的重要内容和主要定理作详细叙述,希望读者能掌握这些内容,它是学好大学数学的基础. 第二部分是"典型习题与试题解析",编者从有关教材与习题集中,从历年高校期中考试、期末考试试题中,以及从历年硕士研究生入学考试题(包括统考与单独考试)中,精选出典型题共 800 余例,逐条详细解析,对重要题目深入分析研究,总结出解题方法和技

巧，并指出可能发生的错误. 这些典型题解析内容广、类型多、技巧强，是本书的核心内容. 编者希望通过典型题解析，指导大学生如何解题，做到举一反三，触类旁通. 各类学生可根据自己的专业要求，选学本书；文科学生和对大学数学要求较低的学生，对书中的难题可以删略. 解题能力虽不是大学数学教学的全部内容，但它是学好大学数学的试金石. 读者如能阅读好本书的典型题解析，定能提高分析能力，掌握解题技巧，提升应试水平. 为了帮助读者检测学习效果，全书共设置 11 份阶段复习试题（书末附有试题答案与提示）.

参与本书编写和资料收集整理工作的还有黄卫华、陈庆、李明、吴汀和潘新华.

本书可供高等学校学生作为学习大学数学课程的教学参考书，可供准备考研的人员作为复习备考用书，可供高等学校教师作为习题课教材或教学参考书.

由于编者水平所限，书中缺点和错误难免，恳请读者批评、指正.

陈 仲

目　　录

1

行列式

1.1　基本概念与内容提要

1）行列式的定义

n 阶行列式

$$\det\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为

（1）**当** $n=1$ **时**，$\det(a_{11})\xlongequal{\text{def}}a_{11}$；

（2）**当** $n>1$ **时**，

$$|\boldsymbol{A}|\xlongequal{\text{def}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

这里 M_{ij} **是** $\boldsymbol{A}$ **中元素** a_{ij} **的余子式**，A_{ij} **是** $\boldsymbol{A}$ **中元素** a_{ij} **的代数余子式**.

2）* 行列式的性质[①]

（1）**转置行列式的值不变，即** $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

（2）**两行交换，行列式的值反号**.

（3）**某一行的公因子可提出去**.

① 本书中标“*”的内容为重点.

（4）**某行乘以常数 k 后加到另一行上去，行列式的值不变.**

3）* 几个常用公式

（1）**分块行列式**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

（2）**范德蒙行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

（3）**可按任一行（或列）展开**

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

1.2　典型习题与试题解析

例 1.1　求

$$\boldsymbol{D}_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

解析　按第一行展开得

$$\boldsymbol{D}_4 = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

例 1.2 求

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解析 逐次按第 1 列展开得

$$\boldsymbol{D}_n = n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(n-1)(-1)^{n-1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(n-1)(n-2)(-1)^{n+(n-1)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot (-1)^{n+(n-1)+\cdots+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n!(-1)^{3+4+\cdots+n} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)(n+3)} n!$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)+1} n!.$$

例 1.3　设 a_{ij} 为 1 或 $-1(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}= \qquad (\quad)$$

A. 奇数　　B. 偶数　　C. 0　　D. 不确定

解析　D_n 的展开式中含 $n!$ 项，每一项都是不相同的 a_{ij} 的乘积，所以每一项是 1 或 -1，设 $n!$ 项中有 k 项为 -1，则 $n!$ 项中有 $n!-k$ 项为 1，于是 $D_n=-k+(n!-k)=n!-2k$. 即 D_n 必为偶数，选(B).

例 1.4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，求 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$.

解析　将 $\boldsymbol{A}$ 中每一列逐次与它的前一列对调，直至调为 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的形式，则一共调换了 $m\times n$ 次，故

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}\ |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab.$$

例 1.5　求方程

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}=0$$

的根.

解析　用加边后化零法，

$$f(x)=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix}$$

$$
=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix}
$$

$$
=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ b-a & x-b & 0 \\ b-a & c-b & x-c \end{vmatrix}
$$

$$
=(x+b+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)=0,
$$

故 $f(x)=0$ 的根为 a，b，c，$-(a+b+c)$.

例 1.6 求方程

$$
f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0
$$

的根.

解析 分析题给行列式的特征，可化为下三角分块行列式. 各列减第一列得

$$
f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}.
$$

应用下三角分块行列式的计算公式得

$$
f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=-x(-5x+5)=0,
$$

所以 $x=0$，1 为 $f(x)=0$ 的两个根.

例 1.7　设

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\2&5&8&7\end{vmatrix},$$

$|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的余子式记为 M_{ij}，a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，求

（1）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；

（2）$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

解析　（1）将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 4 行改为（1　1　1　1），并按第 4 行展开得

$$\sum_{j=1}^{4}A_{4j}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}2&1&-3\\1&1&1\\4&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-4\\0&1&0\\2&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-4\\2&1\end{vmatrix}$$

$$=-9.$$

（2）将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 4 行改为（-1　1　-1　1），并按第 4 行展开得

$$\sum_{j=1}^{4}M_{4j}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&-5&1\\1&0&0&0\\4&-2&-1&-7\\0&2&0&3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&-5&1\\-2&-1&-7\\2&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&5&-1\\2&1&7\\2&0&3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -9 & 0 & -36 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -9 & -36 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-45.$$

例 1.8　求行列式

$$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

解析　考虑 5 阶范德蒙行列式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_5 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)\cdot \\ &\quad (c-a)(c-b)(b-a),\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{D}_4$ 为 $\boldsymbol{V}_5$ 中元素 x^3 的余子式 M_{45}. 由于 $\boldsymbol{V}_5$ 中元素 x^3 的代数余子式 A_{45} 为 $\boldsymbol{V}_5$ 的展开式中 x^3 的系数,所以

$$A_{45}=-(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a).$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_4 &= M_{45}=-A_{45} \\ &= (a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a).\end{aligned}$$

例 1.9　求

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解析 第 2 列乘以 2,第 3 列乘以 3,…,第 n 列乘以 n;同时第 2 行除以 2,第 3 行除以 3,…,第 n 行除以 n 得

$$
\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},
$$

第 i 列乘以(-1)加到第 1 列($i=2, \cdots, n$)得

$$
\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2-n.
$$

例 1.10 求

$$
\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}.
$$

解析 加边后按第 1 列展开得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_n &= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{D}_{n-1} + (-1)^{n+1}(-a)a^{n-1} \\
&= \boldsymbol{D}_{n-1} + (-a)^n \qquad \text{(依此类推)}
\end{aligned}
$$

$$= \boldsymbol{D}_{n-2} + (-a)^{n-1} + \cdots + (-a)^n$$
$$= \boldsymbol{D}_2 + (-a)^3 + (-a)^4 + \cdots + (-a)^n$$
$$= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \cdots + (-1)^n a^n.$$

例 1.11 求行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解析 逐次作变换：第 n 列减去第 $n-1$ 列，…，第 2 列减去第 1 列，再按第 1 行展开，

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1} x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^n + (-1)^{n+1}x^n = (1-x)^n - (-x)^n.$$

例 1.12　求行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

解析　(1) **当** $a=b$ **时，用加边后化零法，**

$$\boldsymbol{D}_n = (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

(2) **当** $a\neq b$ **时，**

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)\boldsymbol{D}_{n-1} + a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)\boldsymbol{D}_{n-1} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & x-b & a-b & \cdots & a-b & a-b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-b \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\boldsymbol{D}_{n-1}+a(x-b)^{n-1}.$$

考虑 $\boldsymbol{D}_n$ 的转置行列式，同理可得

$$\boldsymbol{D}_n=(x-b)\boldsymbol{D}_{n-1}+b(x-a)^{n-1}.$$

于是

$$(x-a)\boldsymbol{D}_n-(x-b)\boldsymbol{D}_n=b(x-a)^n-a(x-b)^n,$$

$$\boldsymbol{D}_n=\frac{b(x-a)^n-a(x-b)^n}{b-a}.$$

例 1.13　设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量，记三阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3),$$

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解析　由于

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

所以

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{vmatrix}=2.$$

2

矩 阵

2.1 基本概念与内容提要

1）矩阵的定义，特殊矩阵

对角矩阵，上三角矩阵，下三角矩阵，单位矩阵，对称矩阵，反对称矩阵等.

2）矩阵的运算与运算性质

加法，减法，数乘，乘法，矩阵的幂，矩阵的转置.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是矩阵，满足矩阵乘法对行、列的要求，则有

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$； $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$； $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$； $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

3）* 矩阵的初等变换，初等矩阵

矩阵的初等行（列）变换包括：

（1）对调两行（列）；

（2）用非零常数 k 乘矩阵的某一行（列）；

（3）矩阵的某一行（列）乘以常数 k 后加到另一行（列）上去.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行（或列）变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，称 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$.

任一矩阵经过初等行变换后必可化为阶梯形矩阵或行简化阶梯形矩阵.

任一矩阵经过初等行变换和初等列变换后必可化为单位矩阵或左上角为一单位矩阵而其他元素皆为 0 的矩阵.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行(列)变换,相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左(右)乘一个对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 施行同一变换的初等矩阵.

4)* 逆矩阵

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

初等变换不改变矩阵的可逆性,任一可逆矩阵必等价于单位矩阵.

任一可逆矩阵总可表示为若干个初等矩阵的乘积.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$,$a_{ij}$ 的代数余子式记为 A_{ij},则定义 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$,并称 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

定理 1 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

定理 2 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,且当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,用初等行变换,将 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})$ 化为行简化阶梯形矩阵 $(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,即

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}),$$

与此式类似的求逆有:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \hdashline \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}B),$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \hdashline \boldsymbol{BA}^{-1}\end{pmatrix}.$$

逆矩阵的性质:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆,λ 为非零常数,则

$$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1},\qquad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}},\qquad (\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

5)* 矩阵的秩

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中若存在一个 r 阶子式不等于 0,而 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子

式(如果存在的话)皆等于 0,则定义 A 的秩为 r,记为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$.

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

用初等行变换将 A 化为阶梯形矩阵,该阶梯形矩阵中首非零元的个数即为矩阵 A 的秩.

和秩定理:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

积秩定理:设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times k$ 矩阵,则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})).$$

6) 分块矩阵

分块矩阵的乘法,矩阵分块的原则.

分块矩阵的逆矩阵:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆,则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

2.2　典型习题与试题解析

例 2.1　已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,求 $\boldsymbol{A}^n$.

解析　应用矩阵乘法的结合律,并注意到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 为矩阵,而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为常数 3,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\cdots\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{\beta}\\ &=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 2.2　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

解析 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为数，应用矩阵乘法的结合律，

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A},$$

应用此式可求数 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\\&=3\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$.

例 2.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为 （ ）

A. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解析 设单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 第 1 列与第 2 列交换得到初等矩阵为 $\boldsymbol{E}_1$，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 2 列加到第 3 列得到初等矩阵为 $\boldsymbol{E}_2$. 则

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

于是所求矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.4　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于　　　　(　　)

A. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　B. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　C. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

解析　由于 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 4 列对调,第 2 列与第 3 列对调得到的.应用初等变换与初等矩阵的关系可得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2,\qquad 或\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1.$$

由于 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{1}$,或 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$,且 $\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1$,$\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2$,所以

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1},\qquad 或\ \boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}.$$

例 2.5　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n $(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则　　　　(　　)

A. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$

B. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$

C. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$

D. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$

解析　设单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 1 行与第 2 行交换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{E}_{12}$,则用 $\boldsymbol{E}_{12}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价于交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行,于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A},\qquad |\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_{12}||\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|.$$

由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列等价于用 $\boldsymbol{E}_{12}$ 右

乘 $\boldsymbol{A}^*$,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}_{12} &= |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{12} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{12}^{-1}\\ &= -|\boldsymbol{B}|(\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A})^{-1} = -|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\\ &= -\boldsymbol{B}^*.\end{aligned}$$

例 2.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵,求 $\boldsymbol{B}^{2\,004}-2\boldsymbol{A}^2$.

解析 由矩阵乘法可得

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{E}$,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{2\,004}-2\boldsymbol{A}^2 &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2\,004}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2\\ &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP}-2\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^2\\ &= \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 2.7 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$,$a<0$;$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,求常数 a.

解析 由于 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{E}+\left(\frac{1}{a}-1-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{E}+\left(\frac{1}{a}-1-2a\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$，所以 $\frac{1}{a}-1-2a=0 \Rightarrow a=-1, \frac{1}{2}$. 由于 $a<0$，于是 $a=-1$.

例 2.8 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为 ( )

A. $\boldsymbol{E}$ B. $-\boldsymbol{E}$ C. $\boldsymbol{A}$ D. $-\boldsymbol{A}$

解析 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

例 2.9 对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，求证 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

解析 因

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},$$

故

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}.$$

从而又有

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}.$$

由此得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$

例 2.10 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，其每行元素之和等于常数 a，求证：(1) $a\neq 0$；(2) $\boldsymbol{A}^{-1}$的每行元素之和等于$\frac{1}{a}$.

解析 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和等于 a，用加边方法得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

若 $a=0$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，与条件 $\boldsymbol{A}$ 可逆矛盾. 故 $a\neq 0$.

(2) 记 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}$，由此可得

$$A^{-1}\alpha=\frac{1}{a}\alpha,$$

此式即表示 A^{-1}的每行元素之和为$\frac{1}{a}$.

例 2.11 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$满足 $A^*=A^{\mathrm{T}}$,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵,A^{T} 是 A 的转置矩阵,若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=k>0$,求常数 k.

解析 由 $AA^*=AA^{\mathrm{T}}=|A|E$,考察两边的(1,1)元可得

$$3k^2=|A|\neq 0.$$

又因为$|A|^2=|A|^3$,得$|A|=1$,于是 $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

例 2.12 设 A 是 n 阶矩阵,满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$(E 是 n 阶单位矩阵,A^{T} 是 A 的转置矩阵),$|A|<0$,求$|A+E|$.

解析 由 $AA^{\mathrm{T}}=E$,所以$|A|^2=1$,而$|A|<0$,故$|A|=-1$.因为

$$\begin{aligned}|A+E|&=|A+AA^{\mathrm{T}}|=|A||E+A^{\mathrm{T}}|\\&=|A||(E+A)^{\mathrm{T}}|=|A||E+A|=-|A+E|,\end{aligned}$$

故

$$|A+E|=0.$$

例 2.13 设三阶方阵 A,B 满足$A^2B-A-B=E$,其中 E 为三阶单位矩阵,若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,求$|B|$.

解析 由 $A^2B-A-B=E$ 得

$$(A+E)(A-E)B=A+E,$$

由于

$$|A+E|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}=18\neq 0,$$

所以 $A+E$ 可逆,故 $B=(A-E)^{-1}$,于是$|B|=|A-E|^{-1}$,而

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=2,$$

所以$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{2}$.

例 2.14 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,求$|\boldsymbol{B}|$.

解析 将原式化为

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{E},$$

求行列式得

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{E}|=1,$$

由于$|\boldsymbol{A}|=3$,$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=9$,

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1,$$

所以$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$.

例 2.15 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$. 求行列式$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$的值.

解析 因为$(3\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$,$|\boldsymbol{A}^{-1}|=2$. 所以

$$\begin{aligned}|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|&=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right|\\&=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=-\frac{8}{27}\cdot 2=-\frac{16}{27}.\end{aligned}$$

例 2.16 设 $A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$,求 A^{-1}.

解析 由分块矩阵的求逆公式

$$\begin{pmatrix}O & A_1\\ A_2 & O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O & A_2^{-1}\\ A_1^{-1} & O\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

得

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c:cccc}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ \hdashline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cccc:c}0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a_n}\\ \hdashline \dfrac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0\end{array}\right).$$

例 2.17 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$,$A^*$ 是 A 的伴随矩阵,求$(A^*)^{-1}$.

解析 矩阵 A 的行列式 $|A|=10$,所以 A 可逆,且

$$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{10}A$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{10} & 0 & 0\\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} & 0\\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例 2.18 已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix},$$

试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

解析 因$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=|A^{-1}|A$.

为求 A,将矩阵$(A^{-1}\ \vdots\ E)$施行初等行变换,

$$(A^{-1}\ \vdots\ E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

于是

$$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

计算得 $|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=2$,因此

$$(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.19 设 A 是任一 n ($n\geqslant 3$)阶方阵,A^* 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k\neq 0,\pm 1$,则必有$(kA)^*=$ ( )

A. kA^* B. $k^{n-1}A^*$ C. k^nA^* D. $k^{-1}A^*$

解析 令 $A=(a_{ij})$,a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij},则

$$\boldsymbol{A}^{*}=(A_{ij})^{\mathrm{T}},$$

令 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})$ 中 ka_{ij} 的代数余子式为 B_{ij}，则

$$B_{ij}=k^{n-1}A_{ij},$$

于是

$$(k\boldsymbol{A})^{*}=(B_{ij})^{\mathrm{T}}=(k^{n-1}A_{ij})^{\mathrm{T}}=k^{n-1}(A_{ij})^{\mathrm{T}}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}.$$

注 题设条件中没有 $\boldsymbol{A}$ 可逆的条件，但其结论应对 $\boldsymbol{A}$ 可逆也应成立. 所以可先加强条件，设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则由公式

$$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1},$$

可得

$$(k\boldsymbol{A})^{*}=|k\boldsymbol{A}|(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{n}|\boldsymbol{A}|\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$
$$=k^{n-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}.$$

题设条件 $k\neq0,\pm1$ 是为保证选项的唯一性.

例 2.20 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异 $(n\geqslant2)$，$\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 ( )

A. $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$ B. $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

C. $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$ D. $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

解析 因为 $\boldsymbol{A}$ 非异，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆，以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 右乘等式 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两端，得 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，于是

$$(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$$
$$=|\boldsymbol{A}|^{n}|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}\quad(n\geqslant2).$$

例 2.21 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{*},\boldsymbol{B}^{*}$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^{*}$.

解析 方法 Ⅰ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{C}$ 亦可逆，于是

$$\boldsymbol{C}^{*}=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^{*}\end{pmatrix}.$$

方法Ⅱ　假设

$$\boldsymbol{C}^{*}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^{*}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

则

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{*}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^{*}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

$$=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{E}.$$

故假设(1)**成立.**

例 2.22　设 A 是 n 阶可逆方阵,将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(1) **证明 B 可逆;**

(2) **求 AB^{-1}.**

解析　(1) **因**$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ **及**$|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|\neq 0$,**故 $\boldsymbol{B}$ 可逆.**

(2) **记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是由 n 阶单位矩阵的第 i 行和第 j 行对换后所得到的初等矩阵,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$.**

因而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}.$$

例 2.23　设 $A=E-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 E 是 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,证明

(1) **$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$;**

(2) **当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时,A 是不可逆矩阵.**

解析　注意 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为常数.

（1）
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2 &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 即 $\boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，亦即

$$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-1)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零列向量，$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-1=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$.

（2）用反证法. 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 这与 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{E}$ 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

例 2.24　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为三阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵，已知 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

解析　由 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$ 于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E} \\ &= \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 2.25　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，求 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解析　由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\Rightarrow(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$，

于是

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-2&4&0&0\\0&-4&6&0\\0&0&-6&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}.$$

例 2.26　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

解析　原式等价于

$$k\boldsymbol{A}^2+k\boldsymbol{A}+(1-4k)\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},$$

其中 k 为非零待定常数. 令

$$k\boldsymbol{A}^2+k\boldsymbol{A}+(1-4k)\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{E}),$$

比较系数得

$$\begin{cases}k=l-k,\\1-4k=-l,\end{cases}$$

解得

$$k=\frac{1}{2},l=1.$$

于是，原式 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 化为

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E},$$

故

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}.$$

例 2.27　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数. 记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&b\end{pmatrix},$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ；

(2) 证明：矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

解析　(1) 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，应用分块矩阵乘法得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PQ}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}+b|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由(1)可得

$$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{A}|^2(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha});$$

而 $|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{Q}|$，且 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|\neq 0$，从而

$$|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}).$$

由此可知，$|\boldsymbol{Q}|\neq 0$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$，即矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b.$$

例 2.28　设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有　(　　)

A. $a=b$ 或 $a+2b=0$　　B. $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

C. $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　D. $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

解析　$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3-1=2$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$. 而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1 & b & b\\ 0 & a-b & 0\\ 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}$$

$$= (a+2b)(a-b)^2,$$

故 $a+2b=0$ 或 $a=b$.

当 $a=b$ 时,显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,不合条件.

当 $a=-2b$ 时,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2b & b & b\\ b & -2b & b\\ b & b & -2b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 故 $a\neq b$ 且 $a+2b=0$ 为所求.

例 2.29 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则 ( )

A. 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

B. 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

C. 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

D. 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

解析 应用积秩定理,当 $m>n$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B}))\leqslant\min(m,n)=n<m,$$

因 $\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})<m$,所以 $\boldsymbol{AB}$ 为不可逆矩阵,故 $|\boldsymbol{AB}|=0$,即(B)成立,(A)不成立. 当 $m<n$ 时,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B}))\leqslant\min(m,n)=m,$$

$\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶矩阵,当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=m$ 时 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$;当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})<m$ 时 $|\boldsymbol{AB}|=0$,所以(C),(D)不能成立.

例 2.30 已知 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$.

解析 由 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,于是 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}+\boldsymbol{E}$. 所以

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

例 2.31　已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=E$，其中 E 是三阶单位矩阵，求矩阵 B.

解析　由 $A^2-AB=A(A-B)=E$，及 $|A|=-1\neq0$，知 $A-B=A^{-1}$，即 $B=A-A^{-1}$，应用矩阵的初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1&-2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

从而

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 2.32　设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{B}$.

解析　首先将 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$ 化简，求出 $\boldsymbol{B}$ 的表达式.

$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=6\left[\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.33　设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{B}$.

解析　在题给等式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$ 两端，分别左乘 $\boldsymbol{A}$，右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{B}=8(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^{-1}$. 而

$$2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

于是

$$B=8\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}^{-1}=8\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

例 2.34 设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}, \text{且}$$

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E,$$

其中 E 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 B.

解析 等式

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E,$$

两边左乘 A^{-1},再右乘 A 得

$$B=A^{-1}B+3E, \tag{1}$$

由于$|A^{*}|=8$,$AA^{*}=|A|E$,$|A^{*}|=|A|^{3}$,故$|A|=2$. 应用 $A^{*}=|A|A^{-1}=2A^{-1}$,所以由(1)得

$$2B=A^{*}B+6E,\quad B=(2E-A^{*})^{-1}\cdot 6E=6(2E-A^{*})^{-1}.$$

因为

$$2E-A^{*}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix},$$

施行初等行变换,

$$
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}
\end{array}\right),
$$

所以

$$
(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}
\end{pmatrix},
$$

于是

$$
\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=\begin{pmatrix}
6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 3 & 0 & -1
\end{pmatrix}.
$$

例 2.35　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解析　由原等式得 $(\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘等式两端，得

$$
(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E},
$$

可见 $(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})$ 可逆，从而 $\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}$，由于

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4,\ |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix},
$$

故

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1},$$

下面用初等行变换求逆矩阵，

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right).$$

于是

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 2.36 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，其中 E 是单位矩阵，求矩阵 X.

解析 由题设的关系式得 $AX(A-B)+BX(B-A)=E\Rightarrow(A-B)X(A-B)=E$.

由于

$$|A-B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆，故 $\boldsymbol{X}=((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1})^2$. 下面先用矩阵的初等行变换求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$，

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),$$

故

$$\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

阶段复习试题一

1. **求下列行列式**：

(1) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ x & a & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1+2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2+3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3+4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4+5 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$；

(5) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$；

(6) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(7) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$;

(8) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$;

(9) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

(10) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

(11) $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$;

(12) $D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$ $(a\neq b)$.

2. **设** $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,**求** A^6.

3. **设** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,**求证** $A^n=A^{n-2}+A^2-E$,**并求** A^{100}.

4. **设** A **为** n **阶矩阵**, $|A|<0$, $AA^{\mathrm{T}}=E$, **求证** $E+A$ **不可逆**.

5. **设** A **为** n **阶非零矩阵**, $A^{\mathrm{T}}=A^{*}$, **求证** A **可逆**.

6. **设** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$,

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则必有 ( )

A. $AP_1P_2=B$　　B. $AP_2P_1=B$

C. $P_1P_2A=B$　　D. $P_2P_1A=B$

7. **设** n **阶矩阵** A, B, C **满足** $ABC=E$, **则必有** ( )

A. $ACB=E$　　B. $CBA=E$

C. $BAC=E$　　D. $BCA=E$

8. **设矩阵** A, B **满足** $A+B=AB$,(1) **求证** $A-E$ **为可逆矩阵**;

(2) **若** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，**求矩阵** $\boldsymbol{A}$.

9. **设** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，**求** $\boldsymbol{A}^{-1}$.

10. **设矩阵** $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ **满足** $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，**且** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，**求矩阵** $\boldsymbol{A}$.

11. **设矩阵** $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ **满足** $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，(1) **求证** $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ **可逆**，(2) **若** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，**求矩阵** $\boldsymbol{A}$.

12. **已知** $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\0&1&\cdots&n-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$，**求矩阵** $\boldsymbol{X}$.

13. **已知** $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，**求**$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

14. **设** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，**又矩阵** $\boldsymbol{X}$ **满足**$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$，**求矩阵** $\boldsymbol{X}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,求 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$,求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$,若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$,求常数 a.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,求证:1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n$;2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$;3) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

3 向　量

3.1 基本概念与内容提要

1）n 维向量，线性运算

2）线性组合，线性表示，* 线性相关与线性无关

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量，$\mathbf{0}$ 为零向量，若存在不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}, \tag{1}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. 若当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时，(1)式成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

有关线性相关性的重要性质有：

定理 1　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则其中至少有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ 可由其余向量线性表示.

定理 2　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示式唯一确定.

定理 3　线性无关的向量组的任一部分向量组也线性无关.

定理 4　任一包含有线性相关向量组的向量组也线性相关.

定理 5　若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，对每一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 增加分量变为 l 维向量 $\boldsymbol{\beta}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ $(l > n)$，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

定理 6　n 个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件

是行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$.

3）* 极大线性无关组,向量组的秩

若向量组 S 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,而向量组 S 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 S 的一个极大线性无关组.

向量组 S 的极大线性无关组未必是唯一的,但不同的极大线性无关组所含向量的个数 r 是相同的,称 r 为向量组 S 的秩.

n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大线性无关组的求法:将矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_m)$施行初等行变换化为阶梯形,若 r 个首非零元所在列数为 $m_1, m_2, \cdots, m_r$,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{m1}, \boldsymbol{\alpha}_{m2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{mr}$ 为原向量组的一个极大线性无关组. 求得极大线性无关组后,若欲将其余向量用极大线性无关组线性表示,则须将矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_m)$继续施行初等行变换化为行简化阶梯形,由此可将其余向量用极大线性无关组线性表示,详见后面的例题.

4）向量组的等价

若向量组 $\boldsymbol{S}_1$ 中的每一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{S}_2$ 中的向量线性表示,则称向量组 $\boldsymbol{S}_1$ 可由 $\boldsymbol{S}_2$ 线性表示. 若向量组 $\boldsymbol{S}_1$ 与 $\boldsymbol{S}_2$ 可相互线性表示,则称向量组 $\boldsymbol{S}_1$ 与 $\boldsymbol{S}_2$ 等价.

显见,任一向量组 $\boldsymbol{S}$ 与它的极大线性无关组等价.

定理　若向量组 $\boldsymbol{S}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{S}_2$ 线性表示,则向量组 $\boldsymbol{S}_1$ 的秩 $\leqslant$向量组 $\boldsymbol{S}_2$ 的秩.

5）* 矩阵的行秩和列秩

矩阵的行向量组的秩,称为该矩阵的行秩. 矩阵的列向量组的秩,称为该矩阵的列秩.

定理　任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩,又等于 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

6）线性空间,基,维数和坐标

线性空间的定义. 线性空间的元素称为向量.

若线性空间 V 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,而线性空间 V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为线性空间 V 的基(或基底).

线性空间的基不是唯一的,但不同的基所含向量的个数 r 是相同的,称 r 为线性空间的维数.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性空间 V 的基,V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 唯一地线性表示,设

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = (\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}$,称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是线性空间 V 的另一个基,若

$$(\boldsymbol{\beta}_1 \ \ \boldsymbol{\beta}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\beta}_r) = (\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rr} \end{pmatrix},$$

称矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rr} \end{pmatrix}$ 为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 的过渡矩阵.

特别,当线性空间 V 为 n 维列向量线性空间时,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1 \ \ \boldsymbol{\beta}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\beta}_n)$皆是 n 阶矩阵,则过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

设 V 是 n 维列向量线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是基,且 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j = 0(i \neq j)$,$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 1(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为标准正交基. 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$,并称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

施密特标准正交化方法:任一线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$

总可化为与其等价的标准正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$,它们的内积满足

$$(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 1, (\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = 0\ (i \neq j).$$

7)线性变换

设 V 是 r 维线性空间,σ 是 V 到自身的映射,若 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$,$k$ 为常数,总有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\beta}), \quad \sigma(k\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),$$

则称 σ 是 V 的一个线性变换.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 的一个基,σ 是 V 的线性变换,使得

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) \quad \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) \quad \cdots \quad \sigma(\boldsymbol{\alpha}_r)) = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{A}_{r\times r},$$

这里 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的矩阵.

设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$,则向量 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Ax}$.

设线性变换 σ 在一新基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$,由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,则有 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$.

3.2 典型习题与试题解析

例 3.1 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,三维列向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,求常数 a.

解析 因

$$\boldsymbol{A\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,得 $\dfrac{a}{a} = \dfrac{2a+3}{1} = \dfrac{3a+4}{1}$,解得 $a = -1$.

例 3.2　设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，记向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}, \boldsymbol{\beta}$，则　　(　　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示，也不能由(Ⅱ)线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示，但可由(Ⅱ)线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由(Ⅰ)线性表示，也可由(Ⅱ)线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由(Ⅰ)线性表示，但不可由(Ⅱ)线性表示

解析　按假设，存在常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，所以上式中 $k_m \neq 0$，从而

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \frac{1}{k_m}\boldsymbol{\beta} - \frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}.$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组(Ⅱ)线性表示，据此，可排除(A)，(D).

若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示，即存在 $C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_m = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + C_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1} + k_m(C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + C_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}) \\ &= (k_1 + k_mC_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (k_{m-1} + k_mC_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\end{aligned}$$

这与 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由(Ⅰ)线性表示矛盾. 据此，又排除(C). 故选(B).

例 3.3　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有　　(　　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 + k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

D. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 + k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

解析　由于 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关. 取 $k=0$ 就可看出(C)不成立. 由于 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$

线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. 取 $k=0$ 就可看出(B)不成立.

对下列矩阵作初等列变换，由于 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\rightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_2),$$

秩$(\boldsymbol{A})=4$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故(A)成立. 又

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)\rightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ k\boldsymbol{\beta}_2),$$

当 $k=0$ 时秩$(\boldsymbol{B})=3$，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关；当 $k\neq 0$ 时秩$(\boldsymbol{B})=4$，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故(D)不成立.

例 3.4 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为 ( )

A. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

B. 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

C. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

解析 条件(A)是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分条件，但不是必要条件；条件(B)与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关是无关条件；条件(C)是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分条件，但不是必要条件；条件(D)是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件，这是因为经初等行变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行简阶梯形矩阵都是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m\\0\end{pmatrix}$.

例 3.5 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关，对于任一非零向量 $\boldsymbol{\beta}$，求证：存在不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\beta}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m+k_m\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

解析 因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，故存在不全为零的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 使得

$$C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + C_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}. \tag{1}$$

若存在不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$C_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + k_1\boldsymbol{\beta}) + C_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\beta}) + \cdots + C_m(\boldsymbol{\alpha}_m + k_m\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

由于 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 不全为零，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\beta}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m + k_m\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 由(1)式化简(2)式得

$$(C_1k_1 + C_2k_2 + \cdots + C_mk_m)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$，所以

$$C_1k_1 + C_2k_2 + \cdots + C_mk_m = 0. \tag{3}$$

因 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 不全为零，所以(3)式存在非零解，即存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使(3)式成立.

例 3.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

解析 设有常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 左乘(1)式两边得

$$\boldsymbol{A}^{k-1}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0},$$

从而有 $$\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

由于 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，所以 $\lambda_1 = 0$. 于是

$$\lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \lambda_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

用 $\boldsymbol{A}^{k-2}$ 左乘(2)式两边得

$$\boldsymbol{A}^{k-2}(\lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \lambda_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0},$$

从而有 $\lambda_2\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，所以 $\lambda_2 = 0$，

类似可证得 $\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_k = 0$，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

例 3.7 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关$(m \geqslant 2)$，若 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{m-1} = \boldsymbol{\alpha}_{m-1} + \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\alpha}_1$，试讨论

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的线性相关性.

解析 由于

$$(\boldsymbol{\beta}_1 \ \boldsymbol{\beta}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1 \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

记上式右端的矩阵为 $\boldsymbol{C}$. 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件是 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$. 因

$$|\boldsymbol{C}|=1+(-1)^{m+1},$$

所以当 m 为偶数时, $|\boldsymbol{C}|=0$, 故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关; 当 m 为奇数时, $|\boldsymbol{C}|=2\neq 0$, 故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

例 3.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1, 2, \cdots, r;\ r<n)$ 是 n 维实向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 已知 $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

的非零解向量. 试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

解析 因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 所以它们的转置向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}$ 也线性无关. 令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}+k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

上式两端右乘向量 $\boldsymbol{\beta}$, 得到

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0, \tag{2}$$

由题设条件知 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0\ (i=1, 2, \cdots, r)$, 所以(2) 式化为 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$. 因 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\beta}|^2>0$, 由此推得 $k=0$, 代入(1) 式得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}.$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}$ 线性无关，故有

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0,$$

于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 线性无关，因而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}$ 也线性无关.

例 3.9　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

解析　方法Ⅰ　设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)$ 其中 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量. 若有

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0},$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0},$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，上式左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{Ex}=\mathbf{0}$，于是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 所以 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

方法Ⅱ　因 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$，又因

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{E})=n,$$

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$. 所以 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

例 3.10　若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示. 试证：表示方法是唯一的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

解析　（充分性）设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 若

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

则　$$(k_1-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r-\lambda_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故 $k_1=\lambda_1$，$k_2=\lambda_2$，…，$k_r=\lambda_r$，所以表示方法是唯一的.

（必要性）设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 表示方法唯一. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则有一组不全为零的数 λ_1，λ_2，…，λ_r 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\mathbf{0}=(k_1+\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r+\lambda_r)\boldsymbol{\alpha}_r,$$

得到 $\boldsymbol{\beta}$ 的另一种不同的表示方法，与题设矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 3.11 试证明 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}$ 表示列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的转置，$i=1,2,\cdots,n$.

解析 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 n 阶方阵. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是

$$|\boldsymbol{A}|\neq 0.$$

另一方面，由

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2.$$

故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ **与** $\boldsymbol{D}\neq 0$ **等价. 所以** $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ **线性无关的充分必要条件是** $\boldsymbol{D}\neq 0$.

例 3.12　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关, 向量组** $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n (n\leqslant m)$ **可表示为**

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{P}=(C_{ij})_{m\times n}$, **求证: 向量组** $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ **线性无关的充要条件是矩阵** $\boldsymbol{P}$ **的秩** $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=n$.

解析　向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ **线性无关的充要条件是**

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0},$$

仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ **时成立.** $\Leftrightarrow$

$$k_1\sum_{i=1}^{m} C_{i1}\boldsymbol{\alpha}_i+k_2\sum_{i=1}^{m}C_{i2}\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+k_n\sum_{i=1}^{m}C_{in}\boldsymbol{\alpha}_i$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{n}C_{1j}k_j\Big)\boldsymbol{\alpha}_1+\Big(\sum_{j=1}^{n}C_{2j}k_j\Big)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\Big(\sum_{j=1}^{n}C_{mj}k_j\Big)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ **时成立.** $\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n}C_{1j}k_j=0,\ \sum_{j=1}^{n}C_{2j}k_j=0,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{n}C_{mj}k_j=0,$$

仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ **时成立.** $\Leftrightarrow \boldsymbol{Px}=\mathbf{0}$ **仅有零解**

$$\boldsymbol{x}=(k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}=(0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}.\ \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{P})=n.$$

例 3.13　设有向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, -1, 2, 4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 3, 1, 2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 0, 7, 14)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1, -2, 2, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(2, 1, 5, 10)$, **求该向量组的一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大线性无关组线性表示.**

解析　用初等行变换将矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}})$ **化为行简化阶**

梯形,

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&3&3&-1&3\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_4\ \ \boldsymbol{\beta}_5),$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$, $\boldsymbol{\beta}_5$ 的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_5=2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

例 3.14 设 4 **维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$,问 a 为何值时 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关?当 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关性,求其一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.**

解析 施行初等行变换,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&4+a\\0&a&0&-a\\0&0&a&-a\\0&0&0&a(a+10)\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

于是仅当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

1）当 $a=0$ 时，继续施行初等行变换，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是 $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是其极大线性无关组，此时 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

2）当 $a=-10$ 时，对(1)式继续施行初等行变换，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_4).$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_4=-\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3$，故 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是其一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

例 3.15　设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}},$$

(1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

(2) p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

解析　对其增广矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4 \mid \boldsymbol{\alpha})$ 作初等行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\0 & -2 & -1 & -4 & -3\\0 & 0 & -7 & 0 & -7\\0 & 0 & p-9 & p-2 & -8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\0 & -2 & -1 & -4 & -3\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p\end{array}\right),$$

当 $p\neq2$ **时** $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4$**，向量组** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ **线性无关. 为了将** $\boldsymbol{\alpha}$ **用** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ **线性表示，将上述矩阵继续进行初等行变换化为行简化阶梯形：**

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\0 & -2 & -1 & -4 & -3\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{3p-4}{p-2}\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{1-p}{p-2}\end{array}\right),$$

于是$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=\left(2,\dfrac{3p-4}{p-2},1,\dfrac{1-p}{p-2}\right)^{\mathrm{T}}$**，即**

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

当 $p=2$ **时，向量组** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ **线性相关. 此时，向量组的秩等于** 3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$（**或** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$）**为其一个极大线性无关组.**

例 3.16　**设向量组** Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **可由向量组** Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ **线性表示，则**　（　　）

A. **当** $r<s$ **时，向量组** Ⅱ **必线性相关**

B. **当** $r>s$ **时，向量组** Ⅱ **必线性相关**

C. **当** $r<s$ **时，向量组** Ⅰ **必线性相关**

D. **当** $r>s$ **时，向量组** Ⅰ **必线性相关**

解析　**由于向量组** Ⅰ **可由向量组** Ⅱ **线性表示，则向量组** Ⅰ **的秩** $\leqslant$ **向量组** Ⅱ **的秩. 又向量组** Ⅱ **的秩** $\leqslant s$，$s<r$**，所以向量组** Ⅰ **的秩** $<r$**，于是向量组** Ⅰ **必线性相关，故选**(D).

例 3.17　**确定常数** a**，使向量组** $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解析　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)$，由于 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<3$，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(2+a)(a-1)^2,$$

所以 $a=1$ 或 $a=-2$. 下面分别进行讨论.

当 $a=1$ 时，因

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0,\quad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&1&1\\1&4&1\end{vmatrix}=-9,$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$，故 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 可由 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 线性表示，但 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 不可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性表示，即 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，作初等行变换，

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-2&1&-2&-2\\1&-2&1&1&-2&-2\\-2&1&1&-2&4&-2\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-2&1&-2&-2\\0&1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right),$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}_1)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}_2)=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，于是 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}_3$ 不可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性表示.

又由初等行变换，

$$(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right).$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$线性表示，此与题意不合，所以 $a=-2$ 不合题意.

综上述讨论可得 $a=1$.

例 3.18 设有向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, -1, a+2)^{\mathrm{T}}$ 和向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1=(1, 2, a+3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2, 1, a+6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(2, 1, a+4)^{\mathrm{T}}$，试问：当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价？当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价？

解析 施行初等行变换，将$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)$化为阶梯形，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1\end{pmatrix}.$$

由此可得：当 $a\neq-1$ 时，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=3$，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=3$，此时向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示；当 $a=-1$ 时，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=2$，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=3$，此时向量组(Ⅱ)不由向量组(Ⅰ)线性表示.

同样，施行初等行变换，将$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$化为阶梯形，

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1\\a+3 & a+6 & a+4 & 2 & 3 & a+2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1\\0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3\\0 & 0 & 6 & 2a+9 & 2a & 3-3a\end{pmatrix},$$

由此可得:秩$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=3$,秩$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=3$,所以不论 a 为何值,向量组(Ⅰ)总可由向量组(Ⅱ)线性表示.

综上可得:当 $a\neq-1$ 时向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价;当 $a=-1$ 时向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

例 3.19 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m<n$, $\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位矩阵,下述结论中正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关

B. $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零

C. 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

D. $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换,必可以化为$(\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{O})$的形式

解析 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m=\boldsymbol{A}$ 的行数 $<n=\boldsymbol{A}$ 的列数,所以 $\boldsymbol{A}$ 中"存在"m 个列向量线性无关,$\boldsymbol{A}$ 中"存在"一个 m 阶子式不等于零.通过初等变换(包括行变换与列变换),$\boldsymbol{A}$ 必可以化为$(\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{O})$的形式.下面证明(C)正确.

由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$,这表示 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的每个列向量都是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,但

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\text{ 的行数}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{ 的列数},$$

因而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的每列都是零向量,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 3.20 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩,且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求 a, b 的值.

解析 应用初等行变换,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9\\0&-6&-12\\0&10&20\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 具有相同的秩，故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而行列式 $|\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3|=0$，即

$$\begin{vmatrix}0 & a & b\\1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

由此解得

$$a=3b.$$

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. 于是行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3|=0$，即

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & b\\2 & 0 & 1\\-3 & 1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

解之得

$$2b-10=0.$$

于是得

$$a=15,\ b=5.$$

例 3.21　在 3 维向量空间中已知两个基：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=(0,2,-2)^{\mathrm{T}}.$$

1）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$；

2）求向量 $\boldsymbol{\eta}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 在上述两个基下的坐标.

解析　令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 又令 $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\alpha}_1\,\boldsymbol{\alpha}_2\,\boldsymbol{\alpha}_3)(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}$. 施行初等行变换，

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{\eta})=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right),$$

所以由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

向量 $\boldsymbol{\eta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}=(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,

设向量 $\boldsymbol{\eta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标 $\boldsymbol{y}$,则

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}=(-1, 2, 0)^{\mathrm{T}}.$$

例 3.22　设 3 **维欧氏空间** V **的基底** $\boldsymbol{l}_1=(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{l}_2=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{l}_3=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. **求一组标准正交基底 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$,使 $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为**

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_{11} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix},$$

其中 $C_{ii}>0$, $(i=1, 2, 3)$,**并求出过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$.**

解析　记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_3)$,则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$. 因

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{l}_1\ \ \boldsymbol{l}_2\ \ \boldsymbol{l}_3)\begin{pmatrix}C_{11} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C_{11}+C_{31} & C_{32} & C_{33} \\ C_{21}+C_{31} & C_{22}+C_{32} & C_{33} \\ C_{11}+C_{31} & C_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $C_{33}^2+C_{33}^2=1$，$\Rightarrow C_{33}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；$C_{32}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+(C_{22}+C_{32})\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$，$C_{32}^2+(C_{22}+C_{32})^2+C_{22}^2=1$，$\Rightarrow C_{32}=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$C_{22}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$；$(C_{11}+C_{31})\dfrac{1}{\sqrt{2}}+(C_{21}+C_{31})\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$，$(C_{11}+C_{31})\dfrac{-1}{\sqrt{6}}+(C_{21}+C_{31})\dfrac{1}{\sqrt{6}}+(C_{11}+C_{31})\dfrac{2}{\sqrt{6}}=0$，$(C_{11}+C_{31})^2+(C_{21}+C_{31})^2+(C_{11}+C_{31})^2=1$，$\Rightarrow C_{11}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$C_{21}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，$C_{31}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **故所求过渡矩阵为**

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

所求标准正交基为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

4

线性方程组

4.1 基本概念与内容提要

1）线性方程组的矩阵表示

设有 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

向量 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{0}=(0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，分别称

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \tag{2}$$

为线性齐次方程组和线性非齐次方程组，并称(1) 为(2) 的导出组，称 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵，称 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$ 为方程组(2) 的增广矩阵.

2）线性方程组解的性质

定理 1 方程组(1)的任意两个解 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 的线性组合 $C_1\boldsymbol{x}_1+C_2\boldsymbol{x}_2$($C_1$ 与 C_2 为任意常数)仍是方程组(1)的解.

定理 2 方程组(2)的任一解$\tilde{\boldsymbol{x}}$与其导出组(1)的任一解 $\boldsymbol{x}$ 的和 $\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{x}}$ 仍是方程组(2)的解.

定理 3 方程组(2)的任意两个解$\tilde{\boldsymbol{x}}_1$ 与$\tilde{\boldsymbol{x}}_2$ 的差$\tilde{\boldsymbol{x}}_1-\tilde{\boldsymbol{x}}_2$ 为其导出组(1)的解，而$\tilde{\boldsymbol{x}}_1$ 与$\tilde{\boldsymbol{x}}_2$ 的均值 $k_1\tilde{\boldsymbol{x}}_1+k_2\tilde{\boldsymbol{x}}_2$($k_1+k_2=1$)仍是方程组

(1)的解.

3）* 线性齐次方程只有零解与有无穷多解的判定

定理 1　当系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 时,方程组(1)只有零解. 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$ 时,方程组(1)有非零解,也即有无穷多解,此时解空间的维数为 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

定理 2　当系数矩阵 A 为方阵时,方程组(1)只有零解的充要条件是 A 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

4）* 线性非齐次方程组有解与无解的判定

定理 1　线性非齐次方程组(2)有解的充要条件是系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 等于增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

定理 2　线性非齐次方程组(2)有唯一解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$（这里 n 表示方程组(2)的未知量的个数).

定理 3　线性非齐次方程组(2)有无穷多解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$.

定理 4(克莱姆法则)　当系数矩阵 A 为方阵时,方程组(2)有唯一解的充要条件是 A 的行列式 $|A|\neq 0$,且其解可表示为

$$x_i=\frac{\boldsymbol{D}_i}{|\boldsymbol{A}|},(i=1,2,\cdots,n)$$

其中 $\boldsymbol{D}_i$ 为以向量 b 代替 A 中的第 i 列所得到的方阵的行列式.

5）* 线性方程组的通解

定理 1　线性齐次方程组(1)有非零解时,方程组(1)的 $k(k=n-\mathrm{r}(A))$ 个线性无关解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 组成基础解系,方程组(1)的通解(即全部解)为

$$\boldsymbol{x}=C_1\boldsymbol{\alpha}_1+C_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+C_k\boldsymbol{\alpha}_k,$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 为任意常数.

定理 2　线性非齐次方程组(2)有无穷多解时,若 $\tilde{x}$ 是方程组(2)的任一特解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是其导出组的基础解系, 则方程组(2)的通解(即全部解)为

$$x = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + C_k\boldsymbol{\alpha}_k + \tilde{\boldsymbol{x}},$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 为任意常数.

4.2　典型习题与试题解析

例 4.1　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，求常数 t.

解析　因 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组是线性齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 因 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组中有非零列向量. 故方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，此结论的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & t+3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7(t+3).$$

故 $$t + 3 = 0 \text{ 得 } t = -3.$$

例 4.2　齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$. 若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则（　　）

A. $\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$　　　B. $\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$

C. $\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$　　　D. $\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$

解析　系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)$，则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 表示 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} =$

$\mathbf{0}$ 的解. 而 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵表示 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\lambda=1$. 由此排除(A)，(B).

又 $\lambda=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，故 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间为 2 维，三个解 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，所以 $|\boldsymbol{B}|=0$，故选(C).

例 4.3 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

D. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

解析 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$，$n\times k$ 矩阵，令

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_k),$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 化为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_k)=(\boldsymbol{A\beta}_1\ \ \boldsymbol{A\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A\beta}_k)=(\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \cdots\ \ \mathbf{0}).$$

由于 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以存在 $\boldsymbol{\beta}_i\neq 0$，此表示线性齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，此等价于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 等价于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，根据上面同样的证明推知线性齐次方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组线性相关，于是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关. 故选(A).

例 4.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ ( )

A. 当 $n>m$ 时仅有零解　　B. 当 $n>m$ 时必有非零解

C. 当 $m>n$ 时仅有零解　　D. 当 $m>n$ 时必有非零解

解析 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times m$ 矩阵，因而线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的未知数个数为 m. 另一方面，由

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant\min(m,\ n),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant\min(m,\ n),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})),$$

当 $m>n$ 时，

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(m, n) < n < m,$$

于是$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$必有非零解，即(D)正确，同时得知(C)是错误的.

同样的推理可知：

(A)是错误的，因为此时$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant m$，当$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) < m$时就有非零解.

(B)是错误的，因为此时$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant m$，当$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = m$时就只有零解.

例 4.5　设$\boldsymbol{A}$为n阶实方阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为它的转置矩阵，求证$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$有相同的秩.

解析　只要证明线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$有相同的解就可以推知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$有相同的秩，这里$\boldsymbol{x}$为$n$维未知列向量.

显然$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解. 反之，设$\boldsymbol{x}_0$为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解，则由$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0 = \mathbf{0}$得

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0 = \mathbf{0},$$

即
$$(\boldsymbol{Ax}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}_0) = \mathbf{0}.$$

因$\boldsymbol{A}$是实方阵，于是$\boldsymbol{Ax}_0 = \mathbf{0}$，即$\boldsymbol{x}_0$也是$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解.

例 4.6　设有齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$和$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$，其中$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为$m \times n$矩阵，现有4个命题：

① 若$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解均是$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$的解，则秩$(\boldsymbol{A}) \geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$；

② 若秩$(\boldsymbol{A}) \geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$，则$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解均是$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$的解；

③ 若$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$同解，则秩$(\boldsymbol{A}) =$秩$(\boldsymbol{B})$；

④ 若秩$(\boldsymbol{A}) =$秩$(\boldsymbol{B})$，则$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$同解.

以上命题中正确的是　　　　(　　)

A. ①②　　B. ①③　　C. ②④　　D. ③④

解析　设$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$的一个基础解系为$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，则

$$r = n - \text{秩}(\boldsymbol{A}), \quad s = n - \text{秩}(\boldsymbol{B}).$$

若$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解均是$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$的解，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$可由$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表示，所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$的秩$\leqslant$向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$的秩，即$r \leqslant s$，于是秩$(\boldsymbol{A}) \geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$，即①成立. 若$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$同解，由

① 成立，推知秩$(\boldsymbol{A}) \leqslant$ 秩$(\boldsymbol{B})$，且秩$(\boldsymbol{B}) \leqslant$ 秩$(\boldsymbol{A})$，故秩$(\boldsymbol{A}) =$ 秩$(\boldsymbol{B})$，故 ③ 成立. 故选(B).

例 4.7　已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

和

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2 x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

同解，求 a，b，c 的值.

解析　记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & 1+c \end{pmatrix},$$

由于方程组(2) 中只有 2 个方程，故方程组(2) 有非零解，故方程组(1) 也有非零解，因而

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a = 0,$$

于是 $a = 2$. 此时对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化为行简化阶梯形，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

同样将 $\boldsymbol{B}$ 化为行简化阶梯形得

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & 1+c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b^2 - b & 1 \\ 0 & b^2 - 2b & 1 - c \end{pmatrix},$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形比较得

$$b^2 - b = 0,\quad b^2 - 2b = 1 - c \neq 0,$$

由此解得 $b = 1$, $c = 2$, **于是** $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$.

例 4.8　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$,讨论实数 t 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

解析　方法 Ⅰ　由于 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合,所以 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

设
$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 + k_4\boldsymbol{\beta}_4 = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的表达式代入(1) **式并化简得**

$$(k_1 + tk_4)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + tk_1)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_3 + tk_2)\boldsymbol{\alpha}_3 + (k_4 + tk_3)\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,因此有

$$\begin{cases} k_1 + tk_4 = 0, \\ k_2 + tk_1 = 0, \\ k_3 + tk_2 = 0, \\ k_4 + tk_3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

考虑方程组(2) **的系数行列式**

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^4,$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关;而 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关的充要条件是方程组(2)**只有零解,即**

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0,$$

又方程组(2)**只有零解的充要条件是 $\boldsymbol{D} \neq 0$,即 $t \neq \pm 1$ 为所求 t 应满足的条件.**

方法Ⅱ 由于$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合,所以$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$均为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解,因此当且仅当$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$线性无关时,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系. 由于

$$(\boldsymbol{\beta}_1 \ \ \boldsymbol{\beta}_2 \ \ \boldsymbol{\beta}_3 \ \ \boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \ \boldsymbol{\alpha}_3 \ \ \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix},$$

故$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$线性无关的充要条件是

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix}=1-t^4\neq 0.$$

即$t\neq\pm 1$为所求t应满足的条件.

例 4.9 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$为线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$,其中$t_1$, t_2为实常数. 试问t_1, t_2满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$也为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

解析 **方法Ⅰ** 由于$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的线性组合,所以$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$均为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解. 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

将$\boldsymbol{\beta}_i$的表达式代入(1)式并化简得

$$(t_1k_1+t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(t_2k_1+t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,因此有

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0, \\ t_2k_1+t_1k_2=0, \\ \qquad\vdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0. \end{cases} \tag{2}$$

考虑方程组(2)的系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix}$$

$$= t_1 \cdot t_1^{s-1} + (-1)^{1+s} t_2 \cdot t_2^{s-1}$$

$$= t_1^s + (-1)^{1+s} t_2^s,$$

欲使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,只要证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关;而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的充要条件是方程组(2)只有零解,即

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0,$$

而方程组(2)只有零解的充要条件是 $\boldsymbol{D} \neq 0$,由此可得:当 s 为偶数时 $t_1 \neq \pm t_2$,当 s 为奇数时 $t_1 \neq -t_2$,此即为所求 t_1, t_2 应满足的条件.

方法 Ⅱ　由于 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合,所以 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 因此当且仅当 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关时,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 由于

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的充要条件是

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{1+s} t_2^s \neq 0.$$

解 $D \neq 0$ 可得：当 s 为偶数时 $t_1 \neq \pm t_2$；当 s 为奇数时 $t_1 \neq -t_2$. 此即为所求 t_1, t_2 应满足的条件.

例 4.10 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0}$. 试证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

解析 设有一组数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k\boldsymbol{\beta}+\sum_{i=1}^{n} k_i(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{0},$$

即

$$\left(k+\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}(-k_i)\boldsymbol{\alpha}_i. \tag{1}$$

上式两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\left(k+\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}(-k_i)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0}$，故

$$k+\sum_{i=1}^{n} k_i=0, \tag{2}$$

从而，由(1)式得

$$\sum_{i=1}^{n}(-k_i)\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}.$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是基础解系，它们是线性无关的，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_i=0,$$

因而由(2)式得 $k=0$. 因此，向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

例 4.11 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系.

解析 将系数矩阵化为行简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

解得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

例 4.12 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\\qquad\qquad\vdots\\nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\quad(n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解析 方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{vmatrix}=\left(a+\frac{n(n+1)}{2}\right)a^{n-1}.$$

由于原方程组有非零解，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，推知 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + C_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1},$$

其中 $C_1, \cdots, Ck_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a = -\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时,对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \quad\vdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta} = (1, 2, \cdots, n)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{\eta}$,其中 C 为任意常数.

例 4.13　已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + \cdots + bx_n = 0, \\ \qquad\vdots \\ bx_1 + bx_2 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, n \geqslant 2)$$

试讨论 a, b 为何值时,方程组仅有零解,有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出全部解(用基础解系表示).

解析　方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

(1) 当 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，此时方程组仅有零解.

(2) 当 $a=b$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行简化阶梯形，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

其基础解系为

$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,　$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, 0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1, 0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$.

故方程组的全部解是

$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$　($c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ 为任意常数).

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行简化阶梯形，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(1-n)b & b & b & \cdots & b & b\\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b\\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,原方程组的全部解为

$$\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{\alpha}\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

例 4.14　已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1+bx_2+cx_3=0,\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0.\end{cases}$$

(1) a,b,c 满足何种关系时,方程组仅有零解?

(2) a,b,c 满足何种关系时,方程组有无穷多组解,并用基础解系表示全部解.

解析　系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(c-b)(c-a)(b-a).$$

(1) 当 a,b,c 互不相等时,$|\boldsymbol{A}|\neq0$,方程组仅有零解.

(2) 当 a,b,c 中至少有 2 个相等时,$|\boldsymbol{A}|=0$,方程组有无穷多组解.下面分四种情况讨论:

1°　当 $a=b\neq c$ 时,施行初等行变换,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故原方程组的全部解为$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = C(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$. C 为任意常数.

2° 当 $a = c \neq b$ 时,施行初等行变换,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故原方程组的全部解为$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = C(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$C$ 为任意常数.

3° 当 $b = c \neq a$ 时,施行初等行变换,

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故原方程组的全部解为$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = C(0,-1,1)$,$C$ 为任意常数.

4° 当 $a = b = c$ 时,施行初等行变换,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故原方程组的全部解为

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = C_1(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + C_2(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 4.15 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + (a_3 + b)x_3 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0, \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. **试讨论** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **和** b **满足何种关系时，**

(1) **方程组仅有零解；**

(2) **方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.**

解析　方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$= \left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$= b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

(1) **当** $b \neq 0$ **且** $b+\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ **时，**$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$**，方程组仅有零解.**

(2) **当** $b=0$ **时，原方程组的同解方程组为**

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

由 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ **可知，**$a_i (i=1, 2, \cdots, n)$ **不全为零，不妨设** $a_1 \neq 0$**，得原方程组的一个基础解系为**

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \cdots, 0\right)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, \cdots, 0\right)^{\mathrm{T}}, \ \cdots,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \left(-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \cdots, 1\right)^{\mathrm{T}}.$$

(3) 当 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时,由题设条件知 $b\neq 0$,原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2=x_1,\ x_3=x_1,\ \cdots,\ x_n=x_1.$$

原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

例 4.16　已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 $(a,\ b,\ c)$,$a,\ b,\ c$ 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解析　因 $a,\ b,\ c$ 不全为 0,所以秩$(\boldsymbol{A})\geqslant 1$. 因 $\boldsymbol{B}\neq 0$,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,故秩$(\boldsymbol{A})<3$,于是秩$(\boldsymbol{A})=1$ 或 2.

1) 当秩$(\boldsymbol{A})=1$ 时,不妨设 $a\neq 0$,则

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系

$$\boldsymbol{\beta}_1=\left(-\frac{b}{a},\ 1,\ 0\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac{c}{a},\ 0,\ 1\right)^{\mathrm{T}},$$

于是所求通解为

$$x = C_1\boldsymbol{\beta}_1 + C_2\boldsymbol{\beta}_2 = C_1\begin{pmatrix} -\dfrac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\dfrac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

2）当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$ 时，因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，于是此时所求通解为

$$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{\alpha}_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

其中 C 为任意常数.

例 4.17 设四元齐次线性方程组（Ⅰ）为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组（Ⅱ）的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, a+2, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 4, \alpha+8)^{\mathrm{T}}.$$

（1）求方程组（Ⅰ）的一个基础解系；

（2）当 α 为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

解析 （1）对方程组（Ⅰ）的系数矩阵作初等行变换化为行简化阶梯形，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

由此可得方程组（Ⅰ）的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (5, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (-3, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

（2）方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解 $\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的常数 k_1, k_2, k_3, k_4，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = k_3\boldsymbol{\alpha}_1 + k_4\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{1}$$

令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2)$，则(1) 式 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{B}|=0$. 由于

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}5 & -3 & 2 & -1\\ -3 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2+a & 4\\ 0 & 1 & 1 & 8+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 0 & 5 & 23+3a\\ -3 & 0 & -3 & -14-2a\\ 1 & 0 & 2+a & 4\\ 0 & 1 & 1 & 8+a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5 & 5 & 23+3a\\ -3 & -3 & -14-2a\\ 1 & 2+a & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -5(1+a) & 3(1+a)\\ 0 & 3(1+a) & -2(1+a)\\ 1 & 2+a & 4\end{vmatrix}$$

$$=(1+a)^2.$$

于是方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解的充要条件是 $a=-1$. 此时，施行初等行变换将 $\boldsymbol{B}$ 化为行简化阶梯形，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & -3 & 2 & -1\\ -3 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 有基础解系：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(-1,\ -1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=(-4,\ -7,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

其通解为

$$\begin{pmatrix}-k_1\\ -k_2\\ k_3\\ k_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-4\\ -7\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

于是 $k_3=C_1$，$k_4=C_2$. 因而方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的全部非零公共解为

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_1+k_4\boldsymbol{\alpha}_2=C_1\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\\ 7\end{pmatrix},$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

例 4.18 已知线性方程组

$$
(\text{I})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}
$$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}}$，$(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$. 试写出线性方程组

$$
(\text{II})\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0,\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0,\\ \qquad\vdots\\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}
$$

的通解，并说明理由.

解析 首先将方程组(I)与(II)表示为矩阵方程. 记

$$
\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i,2n})\quad(i=1,2,\cdots,n),
$$
$$
\boldsymbol{\beta}_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{i,2n})\quad(i=1,2,\cdots,n),
$$
$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix},
$$

则方程组(I)与(II)分别可写为

$$
\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{By}=\boldsymbol{0},
$$

由题意有

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),\text{即 }\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O},
$$

于是

$$
\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O},\text{即 }\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),
$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的转置向量组为方程组(II)的 n 个解.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}$ 是方程组(I)的基础解系，所以 $2n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$

$= n$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$,因而 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$ 为方程组(Ⅱ)的 n 个线性无关解,对于方程组(Ⅱ),因为系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于其行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的秩 n,所以 $2n - \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = n$,故方程组(Ⅱ)的解空间的维数为 n,这说明 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$ 是(Ⅱ)的基础解系,于是方程组(Ⅱ)的通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} + C_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + C_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \\ &= C_1(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{12n})^{\mathrm{T}} + \cdots + C_n(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,2n})^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数.

例 4.19 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可逆矩阵,其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$,1) 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解. 2) 求线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

解析 1) 因 $\boldsymbol{A}$ 不可逆 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$. 因 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 $n-(n-1) = 1$. 由于 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$,所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一个列向量都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 因 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$,所以存在 $A_{ij} \neq 0$,则 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 列向量 $(A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ij}, \cdots, A_{in})^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$. 于是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = C(A_{i1}, \cdots, A_{ij}, \cdots, A_{in})^{\mathrm{T}},$$

其中 C 为任意常数.

2) 因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1 \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 $n-1$. 由于 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的每一列向量都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)$,因 $A_{ij} \neq 0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j-1}, \boldsymbol{\alpha}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,它们组成 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,于是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + C_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1} + C_{j+1}\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + \cdots + C_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{j-1}, C_{j+1}, \cdots, C_n$ 为任意常数.

例 4.20 设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 1, 4, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (5, -1, -8, 9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

解析 因秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 2$,故解空间的维数为 $4-2 = 2$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$

线性无关,故$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$是解空间的基.下面用施密特标准正交化方法求其标准正交基.取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{3}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{10}{3},-2\right)^{\mathrm{T}},$$

记

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2$即是所求的一个标准正交基.

例 4.21 已知方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解,求常数$a$.

解析 方法Ⅰ 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&-a&-1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{pmatrix},$$

当$a^2-2a-3\neq 0$时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$,原方程组有唯一解;当$a^2-2a-3=0$时$a=3$或$a=-1$.当$a=3$时$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$,原方程组有无穷多解;当$a=-1$时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$,此时原方程组无解.故$a=-1$.

注 本题系数矩阵$\boldsymbol{A}$为方阵,也可用$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=0$来判断,由$|\boldsymbol{A}|=0$得$a=2$或$a=-1$,a的值确定为2或-1后,代入增广矩阵中,再由$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,从而求出$a=-1$时成立.

例 4.22 设方程$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多个解,求常数 a.

解析 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}.$$

原方程有无穷多解,其充要条件是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}), \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<3.$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<3$,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$,即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$
$$=(a+2)(a-1)^2=0,$$

于是 $a=1$ 或 -2. 当 $a=1$ 时,用初等行变换化 $\boldsymbol{B}$ 为阶梯形,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $a=1$ 时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$,此时原方程无解;当 $a=-2$ 时,用初等行变换化 $\boldsymbol{B}$ 为阶梯形,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $a=-2$ 时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2<3$,此时原方程组有无穷多解.

例 4.23 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量. 若 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,则线性方程组 ( )

A. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多解

B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解

C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解

D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解

解析 由于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$是 $n+1$ 阶矩阵，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩$\leqslant n$，由条件知$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$的秩$\leqslant n$，而(D)所给出的方程组是含 $n+1$ 个未知数的线性齐次方程组，故它必有非零解.

例 4.24 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}$，则三条直线

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3&=0\end{aligned}$$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0$，$i=1,2,3$) 交于一点的充要条件是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

C. 秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=$秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

解析 题给三条直线交于一点等价于方程组 $\boldsymbol{Ax}=-\boldsymbol{\alpha}_3$ $(\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2))$有唯一解，此等价于

$$\text{秩}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}=\text{秩}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\},\quad \text{秩}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}=2,$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 本题所给条件 A,C 是必要条件，但不是充分条件；B 是既不充分也不必要的条件；D 是充分必要条件.

例 4.25　设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$\boldsymbol{b}=(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，求解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

解析　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

因 A 为正交矩阵，故有

$$1^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1,$$

所以

$$a_{12}=a_{13}=0.$$

又由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，于是所求方程组的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例 4.26　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;\ i, j=1, 2, \cdots, n)$. 求解线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

解析　方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数行列式为范德蒙行列式 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故有唯一解. 按克莱姆法则，

$$x_i=\frac{\boldsymbol{D}_i}{\boldsymbol{D}}=\frac{\boldsymbol{D}_i}{|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|}\quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

其中 $\boldsymbol{D}_i$ 是以向量 b 代替 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的第 i 列所得的行列式. 由行列式的性质得

$$\boldsymbol{D}_1=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|,\quad \boldsymbol{D}_2=\cdots=\boldsymbol{D}_n=0.$$

因而所求解为 $\boldsymbol{x}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

例 4.27 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3, \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3. \end{cases}$$

(1) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 互不相等,证明:此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1=a_3=k$, $a_2=a_4=-k(k\neq 0)$. 且已知 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解,其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

写出此方程组的通解.

解析 (1) 增广矩阵 $\overline{\mathrm{A}}$ 的行列式为范德蒙行列式,于是

$$\begin{aligned}|\overline{\boldsymbol{A}}|&=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}\\&=(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1).\end{aligned}$$

由于 a_1, a_2, a_3, a_4 互不相等,知 $|\overline{\boldsymbol{A}}|\neq 0$,从而秩 $\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=4$. 但系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 3$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$,因此原方程组无解.

(2) 当 $a_1=a_3=k$, $a_2=a_4=-k(k\neq 0)$ 时,原方程组化为

$$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3, \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3, \end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix}1&k\\1&-k\end{vmatrix}=-2k\neq 0$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2$,从而原方程组的导出组的基础解系应含有 $3-2=1$ 个解向量. 因为 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 是原方程组的

两个解,故

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

是其导出组的基础解系. 于是原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_1+C\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

例 4.28 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解,求该方程组的通解.

解析 由于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解,且解不唯一,故 $|\boldsymbol{A}|=0$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$. 由于 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,知 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于 0,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$. 于是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 $n-(n-1)=1$ 个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,且由题意知

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$$

是导出组的基础解系,故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_1=C(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\boldsymbol{\alpha}_1\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

例 4.29 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量,且秩$(\boldsymbol{A})=3$, $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解析 由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$,所以原方程组的导出组的任一非零解为其基础解系. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为原方程组的解,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是其导出组的解, $2\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\right)=2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$ 也是导出组的解. 于是原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C(2,3,4,5)^T+(1,2,3,4),$$

其中 C 为任意常数.

例 4.30 已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 α_2，α_3，α_4 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解析 方法Ⅰ 由于 α_2，α_3，α_4 线性无关，α_1 可由 α_2，α_3，α_4 线性表示，所以线性齐次方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)$的秩等于 3. 又 β 可由 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表示，所以线性非齐次方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵 $B=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4 \mid \beta)$的秩也等于 3. 于是 $Ax=\beta$ 有解. 由于 4－秩(A)＝1，所以 $Ax=\beta$ 有无穷多解，且 $Ax=0$ 的解空间的维数等于 1，即其基础解系中只含一个向量.

由于 $x=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 时，

$$Ax=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0,$$

所以 $x=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系.

由于 $x=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 时

$$Ax=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta,$$

所以 $x=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=\beta$ 的一特解. 于是方程组 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=C\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 C 为任意常数.

方法Ⅱ 令 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则线性非齐次方程组 $Ax=\beta$

可写为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，其充要条件是

$$\begin{cases}2x_1+x_2=3,\\-x_1+x_3=0,\\x_4=1.\end{cases}\tag{1}$$

此方程组的增广矩阵 B_1 经初等行变换化为行简化的阶梯形得

$$(\boldsymbol{A}_1 \vdots \boldsymbol{b})=\boldsymbol{B}_1=\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&0&0&3\\-1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&0&0\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&1\end{array}\right),$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1)=3$，$4-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)=4-3=1$，故 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的特解为 $\boldsymbol{\gamma}=(0,3,0,1)^{\mathrm{T}}$，于是方程组(1)（也即原方程组）的通解为

$$\boldsymbol{x}=C\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 C 为任意常数.

例 4.31 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times3$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，若线性非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=(7,5,1)^{\mathrm{T}}, & (1)\\\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(7,8,0)^{\mathrm{T}}, & (2)\\\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1=(13,5,-10)^{\mathrm{T}}, & (3)\end{cases}$$

试求该线性非齐次方程组的通解.

解析 由于

$$\frac{(1)+(2)+(3)}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-3)^{\mathrm{T}}, \qquad (4)$$

$$(4)-(1) \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-4)^{\mathrm{T}},$$

$$(4)-(2) \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-2,-3)^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{(4)}{3} \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(3,2,-1).$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ **是导出组的两个线性无关解，又因** $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$**，故导出组的解空间的维数为** $3-1=2$**，所以** $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ **是导出组的基础解系，又** $\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ **是原方程组的解，从而所求通解为**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= C_1(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)+C_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)+\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= C_1\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 4.32　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$**，其中** $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ **是** $\boldsymbol{\beta}$ **的转置，求解方程**

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}.$$

解析　注意到 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ **为** 3 **阶矩阵，而** $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ **为常数，**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2.$$

又

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}^4=8\boldsymbol{A}.$$

代入原方程，得

$$16\boldsymbol{Ax}=8\boldsymbol{Ax}+16\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma},$$

即

$$8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}.$$

下面用初等行变换将其增广矩阵化为行简化阶梯形为

$$\left(\begin{array}{ccc:c}-1&\frac{1}{2}&0&0\\2&-1&0&0\\1&\frac{1}{2}&-2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以导出组的基础解系为$(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，原方程组有特解$\left(\frac{1}{2},1,0\right)^{\mathrm{T}}$，故所求方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},$$

C为任意常数.

例 4.33　设$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=1,\\ x_2+ax_3-ax_4=-1,\\ x_1+2x_2+3x_4=3,\end{cases}$

问a为何值时方程组有解？并在有解时求出方程组的通解.

解析　用初等行变换将其增广矩阵化为阶梯形，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&2&1&1\\0&1&a&-a&-1\\1&2&0&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&2&1&1\\0&1&a&-a&-1\\0&-1&-2&2&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&2&1&1\\0&-1&-2&2&2\\0&0&a-2&2-a&1\end{array}\right).$$

当 $a=2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$（这里 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵），所以原方程组无解；当 $a\neq 2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，原方程组有解，将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 进一步化为行简化阶梯形得

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & a-2 & 2-a & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 3 & \dfrac{7a-10}{a-2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2-2a}{a-2}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a-2}\end{array}\right),$$

所以对应的齐次方程组的基础解系为：$\boldsymbol{\alpha}=(-3,\ 0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，原方程组有特解

$$\boldsymbol{\gamma}=\left(\frac{7a-10}{a-2},\ \frac{2-2a}{a-2},\ \frac{1}{a-2},\ 0\right)^{\mathrm{T}},$$

于是原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{7a-10}{a-2}\\ \dfrac{2-2a}{a-2}\\ \dfrac{1}{a-2}\\ 0\end{pmatrix},$$

其中 C 为任意常数.

例 4.34 对于线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2,\end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组无解、有唯一解和有无穷多组解. 在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示全部解.

解析 系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

1）当 $\lambda=1$ 时,施行初等行变换将增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 化为阶梯形,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

此时方程组有无穷多组解,导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

原方程组有特解 $\boldsymbol{\gamma}=(-2,0,0)^{\mathrm{T}}$,故所求全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

2）当 $\lambda=-2$ 时,施行初等行变换将增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 化为阶梯形,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2<\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$,于是原方程组无解.

3）当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时, $|\boldsymbol{A}|\neq0$,此时原方程组有唯一解.

例 4.35 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1.\end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解.

（Ⅰ）用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

（Ⅱ）试求该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解析 将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入原方程组,解得 $\lambda=\mu$. 对导出

组的系数矩阵 A 施行初等行变换,

$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1\\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0\\ 0 & 2-2\lambda & 4-2\lambda & 1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

（Ⅰ）当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,继续施行初等行变换化为行简化阶梯形,

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此可得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}},$$

原方程组的全部解为

$$\boldsymbol{x}=C_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+C_2(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}}+ \tag{2}$$
$$(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时,对(1)式继续施行初等行变换化为行简化阶梯形,

$$A\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

由此可得导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,原方程组的全部解为

$$x = C(-2, 1, -1, 2)^{\mathrm{T}} + (1, -1, 1, -1)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

其中 C 为任意常数.

（Ⅱ）若 $x_2 = x_3$，当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，有 $-3C_1 - 2C_2 - 1 = C_1 + 1$，所以 $C_2 = -2C_1 - 1$，代入(2)式得原方程组的全部解为

$$\begin{aligned} x &= C_1(1, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}} + (-2C_1 - 1)(-1, -2, 0, 2)^{\mathrm{T}} + \\ &\quad (1, -1, 1, -1)^{\mathrm{T}} \\ &= C_1(3, 1, 1, -4)^{\mathrm{T}} + (2, 1, 1, -3)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时，有 $C - 1 = -C + 1$，所以 $C = 1$，代入(3)式得原方程的解为

$$x = (-1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

例 4.36　已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t. \end{cases}$$

讨论参数 p, t 取何值时，方程组有解、无解；当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

解析　对方程组的增广矩阵 B 施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix}.$$

1°　当 $t \neq -2$ 时，$\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}(B)$，原方程组无解；

2°　当 $t = -2$ 时，$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\overline{A})$，原方程组有解.

(a) 若 $p = -8$ 得通解

$$x=C_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

其中 C_1，C_2 为任意常数；

（b）若 $p\neq-8$ 得通解

$$x=C\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

其中 C 为任意常数.

例 4.37　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$. 试讨论当 a，b 为何值时，

（Ⅰ）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

（Ⅲ）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

解析　设数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}.\tag{1}$$

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$. 对矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})$ 施行初等行变换，

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{array}\right).$$

1°　当 $a=0$，b 为任意常数时，有

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -b & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}.$$

可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})$. **故方程组**(1)**无解**,$\boldsymbol{\beta}$ **不能由** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表示**.

2°　**当** $a \neq 0$,**且** $a \neq b$ **时**,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = 3$,**故方程组**(1) **有唯一解**

$$k_1 = 1 - \frac{1}{a}, \quad k_2 = \frac{1}{a}, \quad k_3 = 0,$$

则 $\boldsymbol{\beta}$ **可由** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ **唯一线性表示,其表示式为**

$$\boldsymbol{\beta} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

3°　**当** $a = b \neq 0$ **时,对**$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})$ **施行初等行变换**,

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1-\dfrac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \dfrac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = 2$,**故方程组**(1)**有无穷多解,其全部解为**

$$k_1 = 1 - \frac{1}{a}, \quad k_2 = \left(\frac{1}{a} + C\right), \quad k_3 = C,$$

$\boldsymbol{\beta}$ **可由** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表示,但表示式不唯一,其表示式为**

$$\boldsymbol{\beta} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(\frac{1}{a} + C\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + C\boldsymbol{\alpha}_3,$$ **其中** C **为任意常数**.

例 4.38　**设向量组** $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a, 2, 10)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-2, 1, 5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 1, 4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, b, c)^{\mathrm{T}}$. **试问:当** a, b, c **满足什么条件时**,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ **可由** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表出,且表示唯一?**

(2) $\boldsymbol{\beta}$ **不能由** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表出?**

(3) $\boldsymbol{\beta}$ **可由** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表出,但表示不唯一?并求出一般表**

达式.

解析 考虑线性非齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}, \tag{1}$$

其系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-a-4.$$

(1) 当 $a\neq-4$ 时, $|A|\neq0$, 方程组(1)有唯一解, β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且表示唯一;

(2) 当 $a=-4$ 时, 对增广矩阵作初等行变换,

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-c-1 \end{pmatrix},$$

若 $3b-c\neq1$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$, 所以 $a=-4$, $3b-c\neq1$ 时, 方程组(1)无解, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;

(3) 当 $a=-4$, 且 $3b-c=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$, 方程组(1)有无穷多组解, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 但表示不唯一. 由于方程组(1)的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(b+1) \\ 0 \\ 2b+1 \end{pmatrix},$$

其中 C 为任意常数, 所以

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-C-\frac{1}{2}(b+1)\right)\boldsymbol{\alpha}_1+2C\boldsymbol{\alpha}_2+(2b+1)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

例 4.39 已知下列非齐次线性方程组(Ⅰ), (Ⅱ)

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=3, \end{cases}$$

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}x_1+mx_2-x_3-x_4=-5,\\ nx_2-x_3-2x_4=-11,\\ x_3-2x_4=-t+1.\end{cases}
$$

(1) 求解方程组(Ⅰ),用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 求方程组(Ⅱ)中的参数 m,n,t 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

解析 (1) 设方程组(Ⅰ)的增广矩阵为 $\boldsymbol{B}_1$,对 $\boldsymbol{B}_1$ 施行初等行变换化为行简化阶梯形得

$$
\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix},
$$

由此可得导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,1)$,方程组(Ⅰ)有特解 $\boldsymbol{\gamma}=(-2,-4,-5,0)$,故方程组(Ⅰ)的通解为

$$
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix},
$$

其中 C 为任意常数.

(2) 设方程组(Ⅱ)的增广矩阵为 $\boldsymbol{B}_2$,对 $\boldsymbol{B}_2$ 施行初等行变换化为行简化阶梯形,由于两方程组同解,故它们的行简化阶梯形应全同,

$$
\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&m&-1&-1&-5\\0&n&-1&-2&-11\\0&0&1&-2&1-t\end{pmatrix}\to
$$

$$
\begin{pmatrix}1&0&0&\dfrac{4m}{n}-3&\dfrac{10+t}{n}m-4-t\\0&1&0&-\dfrac{4}{n}&\dfrac{-10-t}{n}\\0&0&1&-2&1-t\end{pmatrix}.
$$

将两个行简化阶梯形比较得

$$1-t=-5,\quad -\frac{4}{n}=-1,\quad \frac{-10-t}{n}=-4,\quad \frac{4}{n}m-3=-1,$$

$$\frac{10+t}{n}m-4-t=-2,$$

由此可解得 $m=2$，$n=4$，$t=6$.

例 4.40 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

解析 方法Ⅰ （必要性）设三直线 l_1，l_2，l_3 交于一点，则线性非齐次方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b \end{cases} \tag{$*$}$$

有唯一解，故系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$ 的秩均为 2，于是 $|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$，由于

$$\begin{aligned} |\overline{\boldsymbol{A}}| &= \begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} \\ &= 6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc] \\ &= 3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2], \end{aligned} \tag{1}$$

但 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故

$$a+b+c=0.$$

（充分性）若 $a+b+c=0$，由(1) 式可知 $|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$，故秩$(\overline{\boldsymbol{A}})<3$.

由于 a, b 不可同时为 0,所以

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2]$$

$$= -2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right] \neq 0,$$

故秩$(\boldsymbol{A})=2$,于是,

$$秩(\boldsymbol{A}) = 秩(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2,$$

因此方程组(*)有唯一解,即三直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

方法Ⅱ (必要性)设三直线交于一点(x_0, y_0),则 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为线性齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{pmatrix}.$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=0$. 而

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}$$

$$= -6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$$= -3(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2).$$

因$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \neq 0$,故 $a+b+c=0$.

(充分性)考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b. \end{cases} \tag{*}$$

将方程组(*)的三个方程相加,并由 $a+b+c=0$ 可知,方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a. \end{cases} \tag{$**$}$$

因为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} &= 2(ac - b^2) = -2[a(a+b) + b^2] \\ &= -[a^2 + b^2 + (a+b)^2] \neq 0, \end{aligned}$$

故方程组($**$)有唯一解,所以方程组($*$)有唯一解,即 l_1, l_2, l_3 三直线交于一点.

例 4.41 设线性齐次方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$. 线性非齐次方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

有特解 $\boldsymbol{\alpha}_0$,这里 b 为非零列向量. 求证

(1) 向量 $\xi_0 = \boldsymbol{\alpha}_0, \xi_1 = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \xi_r = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_r$ 是方程组(1)的线性无关的解.

(2) $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_r$ 适合条件 $k_0 + k_1 + \cdots + k_r = 1$ 的一切线性组合,

$$k_0\boldsymbol{\xi}_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\xi}_r$$

是方程组(1)的全部解.

解析 (1) 由已知条件有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{b}, \ (i = 1, 2, \cdots, r)$$

因此,$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_r$ 是(1)的一组解.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 必可表为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合,于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}$,这与条件 $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ 矛盾. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

令

$$m_0\boldsymbol{\xi}_0 + m_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + m_r\boldsymbol{\xi}_r = \mathbf{0},$$

则

$$(m_0+m_1+\cdots+m_r)\boldsymbol{\alpha}_0+m_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+m_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关知 $m_1=0,\cdots,m_r=0$,从而 m_0 也等于零.所以 $\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_r$ 线性无关.

(2) 当 $k_0+k_1+\cdots+k_r=1$ 时,因

$$\begin{aligned}&k_0\boldsymbol{\xi}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\xi}_r\\=&k_0\boldsymbol{\alpha}_0+k_1(\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_r)\\=&k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+(k_0+k_1+\cdots+k_r)\boldsymbol{\alpha}_0\\=&k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+\boldsymbol{\alpha}_0,\end{aligned}$$

这正是线性非齐次方程组的通解形式.

例 4.42　设线性非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 r,若 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是该方程组的线性无关解,试求其通解.

解析　因 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 是导出组的解,令常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 满足

$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0)=\mathbf{0}\Rightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\alpha}_0=\mathbf{0}$,

因 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性无关,故 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 线性无关,又由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 推知其导出组的解空间的维数为 $n-r$,故上述 $n-r$ 个解 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 是基础解系,因而所求通解为

$$\boldsymbol{x}=C_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0)+C_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0)+\cdots+C_{n-r}(\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0)+\boldsymbol{\alpha}_0.$$

阶段复习试题二

1．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，试问：

1）$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？为什么？

2）$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？为什么？

2．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$，1）$t$ 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？2）t 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？3）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

3．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，求证：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

4．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，求证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

5．已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，但其中任何 $m-1$ 个向量都线性无关，求证：

1）若有等式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则系数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 或者全不为零，或者全为零；

2）若有两个等式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，其中 $l_1\neq 0$，则

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

6．设有 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，求证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是任何 n 维向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

7．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等，求证：向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1})\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

线性无关.

8．设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,-1,-2)$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-3,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,2,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,2,-2,-1)$，求该向量组一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

9．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的 n 维列向量组，$\boldsymbol{P}$ 为 n 阶矩阵，求证：$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

10．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，求证：秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}\leqslant$秩$\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$.

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则下列说法正确的是　　(　　)

A．$\boldsymbol{A}$ 中必有一列(或一行)元素全为零

B．$\boldsymbol{A}$ 中必有两列(或两行)元素成比例

C．$\boldsymbol{A}$ 中必有一列向量是其余列向量的线性组合

D．$\boldsymbol{A}$ 中任何一列向量是其余列向量的线性组合

12．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$的秩为 2，求常数 t.

13．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 3，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩.

14．求 $\boldsymbol{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1)$到基 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2)$的过渡矩阵.

15．已知 $\boldsymbol{R}^3$ 的两个基：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$，(1) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；(2) 求向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 在上述两个基下的坐标.

16．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为零，且秩$(\boldsymbol{A})=n-1$，求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

17．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，$\boldsymbol{A}$ 的 r 个列向量是某一线性齐次方程组的基础解系，$\boldsymbol{B}$ 为 r 阶可逆矩阵，求证 $\boldsymbol{AB}$ 的 r 个列向量也是该线性

齐次方程组的基础解系.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m-n$,若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,求证:存在向量 $\boldsymbol{\beta}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B\beta}$.

19. 设线性齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,求证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

20. 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,求一线性齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,它以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为基础解系.

21. 设有线性齐次方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 为何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

22. 设 4 元线性齐次方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0,\end{cases}$$

又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$. 1) 求方程组(Ⅰ)的基础解系;2) 问方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,求出所有非零公共解,若没有,则说明理由.

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则下列结论正确的是 ( )

A. 若导出组只有零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

B. 若导出组有非零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

C. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解,则导出组只有零解

D. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解,则导出组有非零解

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$m<n$,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ ( )

A. 有无穷多解　　B. 有唯一解

C. 无解　　D. 导出组仅有零解

25. **给定两个线性非齐次方程组：**

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} A_{11}x_1+A_{12}x_2+\cdots+A_{1n}x_n=c_1, \\ A_{21}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{2n}x_n=c_2, \\ \quad\vdots \\ A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+\cdots+A_{nn}x_n=c_n, \end{cases}$$

其中 A_{ij} 是(Ⅰ)中系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中 a_{ij} 的代数余子式，求证：方程组(Ⅰ)有唯一解的充要条件是方程组(Ⅱ)有唯一解.

26. k **为何值时，线性方程组**

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4, \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2, \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解？在有解时求全部解.

27. λ **为何值时，线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解？在有无穷多解时求其通解.

28. **已知** $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$. **问** a,b **为何值时，**1) $\boldsymbol{\beta}$ **不能由** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表示？**2) $\boldsymbol{\beta}$ **可由** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表示？并写出此表示式.**

29. **设** $\boldsymbol{A}$ **是** $m\times n$ **矩阵，求证：线性齐次方程组** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ **的解全是方程**

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$$

的解的充要条件是：向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ **可由矩阵** $\boldsymbol{A}$ **的行向量组线性表示.**

5

矩阵的对角化

5.1　基本概念与内容提要

1）* 特征值与特征向量

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，λ 为常数，使得

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{1}$$

则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，并称 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，称 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

对于 k 重特征值 λ_i，若线性齐次方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，则 $1\leqslant r\leqslant k$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为不全为零的任意常数. 特别，当 λ_i 是单特征值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 1 个且只有 1 个特征向量属于 λ_i.

关于特征值与特征向量有下列重要性质：

定理 1　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

定理 2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

定理 3 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数.

定理 4 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的(即它们的内积为 0).

定理 5 设 $f(\boldsymbol{A})$是关于 $\boldsymbol{A}$ 的多项式,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则 $f(\lambda)$是 $f(\boldsymbol{A})$的特征值,对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{\alpha}$.

2)* 相似矩阵

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

相似矩阵具有下列性质:

(1) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$,$\boldsymbol{A}^{*}\sim\boldsymbol{B}^{*}$,$f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$($f(\boldsymbol{A})$是关于 $\boldsymbol{A}$ 的多项式).

3)* 矩阵的对角化

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

定理 1 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 2 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值时必可对角化.

定理 3 实对称矩阵必可对角化,且具有两种不同方式:1)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;2)存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

矩阵对角化的步骤:

(1) 解特征方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,求出特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

(2) 解线性方程组$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$($i=1,2,\cdots,n$),求出特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

(3) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$,则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

5.2 典型习题与试题解析

例 5.1 **求矩阵**$\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$**的特征值.**

解析 **记题给矩阵为 A,则特征多项式为**

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-0 & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & \lambda & \lambda\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^2(\lambda-4),$$

于是 A 的特征值为 $4,0,0$.

例 5.2 **设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1,求 A 的全部特征值.**

解析 **方法 Ⅰ** **由题知**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-n)\lambda^{n-1}=0,$$

所以 A 的特征值为 $n,0,\cdots,0(n-1$ 个 $0)$.

方法Ⅱ 记 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,则 $A\boldsymbol{\alpha}=n\boldsymbol{\alpha}$,所以 A 有特征值 $\lambda=n$;由于矩阵 A 的秩等于 1,且 A 为实对称矩阵,所以 A 只有一个非零特征值,故 A 的特征值为 $n,0,0,\cdots,0$.

例 5.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,求 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 的一个特征值.

解析 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$,所以 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$,于是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的多项式 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 有特征值 $\left(\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1$.

例 5.4 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{E}$,$|\boldsymbol{A}|<0$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位阵. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的全部特征值.

解析 由于

$$|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=(-1)^3|-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-|-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-3$. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{E}$,得 $|\boldsymbol{A}|^2=4^3=64$,而 $|\boldsymbol{A}|<0$,所以 $|\boldsymbol{A}|=-8$,于是

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-8\boldsymbol{A}^{-1}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-3$,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $\lambda_1=\dfrac{1}{\lambda}=-\dfrac{1}{3}$,于是 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 $-8\lambda_1=\dfrac{8}{3}$.

其次,由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,因 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 -3,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也有特征值 -3,故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $-\dfrac{3}{4}$,因而 $\boldsymbol{A}^*$ 又有一个特征值 $(-8)\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=6$.

另一方面,$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=(-8)^2=64$,设 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 3 个特征值为 λ_3,则 $|\boldsymbol{A}^*|=\dfrac{8}{3}\times 6\times\lambda_3$,故 $\lambda_3=4$. 于是 $\boldsymbol{A}^*$ 的 3 个特征值为

$\frac{8}{3}$,6,4.

例 5.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$2,4,\cdots,2n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,求行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$ 的值.

解析 设 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,由于

$$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}=(\lambda-3)\boldsymbol{\alpha},$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 有特征值 $\lambda-3$,由题给条件,$\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值 $2,4,\cdots,2n$,所以矩阵 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 有特征值 $-1,1,3,\cdots,2n-1$,由于 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$ 等于 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的 n 个特征值的乘积,所以

$$|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=-[(2n-1)!!].$$

例 5.6 若四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,求行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|$.

解析 因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值与 $\boldsymbol{A}$ 的相同,即为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$. 因此 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 2,3,4,5,从而 $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 1,2,3,4,于是 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=1\times2\times3\times4=24$.

例 5.7 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,$n$ 为正整数,a 为常数,求行列式 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$.

解析 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,由于

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2,$$

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 2,由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,故必可对角化. 因 $\boldsymbol{A}$ 的秩显见为 1,所以 $\boldsymbol{A}$ 的其余 2 个特征值皆为 0,即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda=2,0,0$. 由于 $f(\boldsymbol{A})=a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式,所以 $f(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值为 $a-2^n,a,a$. 因 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$ 等于

其全部特征值的乘积，故

$$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=a^2(a-2^n).$$

例 5.8　已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与三维向量 $\boldsymbol{x}$，使得向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关，且满足

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}.$$

（1）记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$，求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$；

（2）求行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解析　（1）由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ 等价于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$，而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^3x)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}\quad 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}),$$

又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2x)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}.$$

（2）由（1）知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$，故

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1},$$

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 相似，从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

例 5.9 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是（　　）

A. $\lambda_1\neq0$　　B. $\lambda_2\neq0$　　C. $\lambda_1=0$　　D. $\lambda_2=0$

解析 由于

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2))&=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

而向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量，它们必线性无关，所以欲判别向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与向量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$的线性相关性可化为讨论矩阵 $\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$的可逆性. 当其行列式 $\lambda_2\neq0$ 时矩阵 $\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$可逆，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$为线性无关，当 $\lambda_2=0$ 时矩阵 $\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$不可逆，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$为线性相关. 故选(B). $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$的线性相关性与 λ_1 的值无关.

例 5.10 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

A. $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵

D. 对任意常数 t，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似

解析 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，由此可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 若 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$，则必 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，但相似矩阵未必相等，可见 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 未必等于$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$，由此不但排除(A)，而且还得知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量未必相同，因而又排除了(B). 相似矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 未必能对角

化，即未必能与对角阵相似，于是排除(C). 结论(D)是正确的，证明如下：

由 $A\sim B$ 知，存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$. 从而

$$P^{-1}(tE-A)P=tP^{-1}P-P^{-1}AP=tE-B,$$

即 $tE-A$ 与 $tE-B$ 相似.

例 5.11　设 A,B 为同阶方阵，

(1) 如果 A,B 相似，试证 A,B 的特征多项式相等.

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3) 当 A,B 均为实对称矩阵时，试证(1)的逆命题成立.

解析　(1) 由于 A,B 相似，所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，于是其特征多项式

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|\\&=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|,\end{aligned}$$

即 A 与 B 有相同的特征多项式.

(2) 令 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 A,B 显然有相同的特征多项式

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\lambda^2,$$

但这里的 A,B 不相似，因为对任意的可逆矩阵 P，有 $P^{-1}BP=O\neq A$.

(3) A,B 有相同的特征多项式，则以 A 与 B 有相同的特征值. 因 A,B 皆为实对称矩阵，所以 A 与 B 可相似于相同的对角矩阵，其主对角元为其特征值，因而 A 相似于 B.

例 5.12　设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm T}$ 属于特征值 λ 的特征向量是　(　　)

A. $P^{-1}\alpha$　　B. $P^{\mathrm T}\alpha$　　C. $P\alpha$　　D. $(P^{-1})^{\mathrm T}\alpha$

解析　由于 α 是 A 属于 λ 的特征向量，得 $A\alpha=\lambda\alpha$，又由于 A 是实对称的，所以

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}),$$

这表明 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ 的属于特征值 λ 的特征向量. 故选(B).

例 5.13 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. 又矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,求秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$与秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

解析 因 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 也是实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $1,1,-1$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,-1$. 由此可得 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-1,-1,-3$;$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $0,0,-2$. 由于实对称矩阵的秩等于其非零特征值的个数,所以秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$,秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=3$.

例 5.14 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n,记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

（2）验证 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（3）当$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$时，求$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

解析　（1）因 $x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)$，$y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)$. 化简得

$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n,\\y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n,\end{cases}$$

即　$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

（2）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1\ \ \boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}$，则由 $|\boldsymbol{P}|=5\neq0$ 知，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关. 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\eta}_1$，故 $\boldsymbol{\eta}_1$ 为 A 的特征向量，且相应的特征值为 $\lambda_1=1$. 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$，故 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为 A 的特征向量，且相应的

特征值为 $\lambda_2=\dfrac{1}{2}$.

(3) 令

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},$$

易于解得 $k_1=\dfrac{1}{5}$,$k_2=\dfrac{3}{10}$,所以

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2)=k_1\lambda_1^n\boldsymbol{\eta}_1+k_2\lambda_2^n\boldsymbol{\eta}_2$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-\dfrac{3}{2^n}\\2+\dfrac{3}{2^n}\end{pmatrix}.$$

例 5.15　设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是非零向量,且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$. 记 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 求:

(1) $\boldsymbol{A}^2$;

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

解析　(1) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{\alpha}\,0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}.\end{aligned}$$

(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$,则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$

于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}.$$

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,所以 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda=0$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零.

不妨设向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 中分量 $a_1\neq0$,$b_1\neq0$,对齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵施以初等行变换:

$$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

由此可得该方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\cdots,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}.$$

于是,$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为

$$C_1\boldsymbol{\alpha}_1+C_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+C_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$$

($C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$ 是不全为零的任意常数).

例 5.16　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

解析　设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$,于是

$$(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}.$$

由于 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\lambda^2+2\lambda=0$,即 $\lambda=-2$ 或 0. 这表明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能在 -2 与 0 中取得. 由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,且 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,必可对角化,所以

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $-2,-2,0$.

例 5.17　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

解析　设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$),于是

$$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}.$$

由于 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\lambda^2-\lambda=0$,即 $\lambda=0$ 或 1. 这表明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能在 1 与 0 中取得.

因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$,于是 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,由积秩定理得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})-3\leqslant 0$,所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant 3-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1.$$

又因为 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$,由和秩定理得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant 3-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1,$$

于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,因而线性方程 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解. 这表明 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,对应于两个线性无关的特征向量,因而 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 1,1,0.

例 5.18　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,求证 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

解析　设 $\boldsymbol{AB}$ 有特征值 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq 0)$,则 $\boldsymbol{AB\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,两边左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB\alpha})=\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B\alpha})=\lambda(\boldsymbol{B\alpha}),$$

若 $\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,则 λ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{B\alpha}$.

若 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,因 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda=0$,于是 $|\boldsymbol{AB}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{BA}|=0$,因此 $\lambda=0$ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. 同理可得,$\boldsymbol{BA}$ 的特征值也是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值.

例 5.19　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相等,$\boldsymbol{A}$ 的特征向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,求证:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

解析　因 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_i 的特征向量,$\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵,其主对角元为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

因 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,故 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个线性无关的特征向量,因此 $\boldsymbol{B}$ 可对角化,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{D}$,其中 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵,其主对角元是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$. 因 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PC}$, $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{PD}$,

于是

$$BAP=BPC=PDC,\quad ABP=APD=PCD.$$

由于 C,D 都是对角矩阵，所以 $CD=DC$，又 P 可逆，所以 $AB=BA$.

例 5.20 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}.\text{又向量 }\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) 求 $A^n\boldsymbol{\beta}$（n 为自然数）.

解析 (1) 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+2x_2+3x_3=1,\\x_1+4x_2+9x_3=3.\end{cases}$$

将该方程组的增广矩阵施行初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

得唯一解 $x_1=2,x_2=-2,x_3=1$. 故

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(2) 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{A}^n(2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\lambda_2^n\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3^n\boldsymbol{\alpha}_3 \\
&= 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\cdot 2^n\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + 3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

例 5.21 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) **试确定参数 a,b 及特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值;**

(2) **问 A 能否相似于对角阵?说明理由.**

解析 (1) **设特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值为 λ,则**

$$
(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda-a&-3\\1&-b&\lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=0,
$$

即

$$
\begin{cases}\lambda-2+1+2=0,\\-5+\lambda-a+3=0,\\1-b-\lambda-2=0,\end{cases}
$$

解得

$$
a=-3,\ b=0,\ \lambda=-1.
$$

(2) **由于**

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix},
$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+3)^3,$$

知 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值. 但

$$\mathrm{r}(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=2,$$

从而 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量只有一个, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

例 5.22　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 有一个二重特征值, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解析　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).\end{aligned}$$

1) 若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根, 则有 $2^2-16+18+3a=0$, 解得 $a=-2$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 2, 6, 因矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ 的秩显见为 1, 故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个, 从而 $a=-2$ 时 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

2) 若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方, 从而 $18+3a=16$, 解得 $a=-\dfrac{2}{3}$. 此时, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 4, 4, 应用初等行变换,

$$4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-2&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故矩阵 $4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，于是 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

例 5.23　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，

(1) 求 a，b 的值；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解析　矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=2,2,b$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&\lambda-2&2\\\lambda+3-a&\lambda+3-a&\lambda-a\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)(\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1))=0,\end{aligned}\quad(1)$$

因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 因此 $\lambda=2$ 是 $\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)=0$ 的根，由此可得 $a=5$，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)=0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=2,2,6$. 因此 $b=6$.

$\lambda=2$ 时，解方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，施行初等行变换，

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $\lambda=2$ 对应的 2 个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

$\lambda=6$ 时,解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,施行初等行变换,

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $\lambda=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -2,\ 3)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

例 5.24　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$,已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

解析　(1) 由于线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$,有无穷多解,所以 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 0,因

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2),$$

故 $a=1$ 或 -2,当 $a=1$ 时,

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right) \rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1, \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})=2$,此时原方程组无解;当 $a=-2$ 时,

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2\end{array}\right) \rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})=2$,所以原方程组有无穷多解. 故 $a=-2$ 为所求.

(2) $a=-2$ 时,因

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\left|\begin{array}{ccc}\lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1\end{array}\right|=\lambda\left|\begin{array}{ccc}1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1\end{array}\right|$$
$$=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=3,-3,0$.

$\lambda=3$ 时,由

$$3 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc}2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2\end{array}\right) \rightarrow\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$;$\lambda=-3$ 时,由

$$-3 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc}-4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4\end{array}\right) \rightarrow\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$;$\lambda=0$ 时,由

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$. **令**

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 5.25　设 A 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

（1）**求矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}$；**

（2）**求矩阵 A 的特征值；**

（3）**求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.**

解析　（1）**由题设条件，有**

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量,可知矩阵 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆,因(1)得 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 由此可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值,也即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4.$$

(3) 对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$,解齐次线性方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(-2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}};$$

对于 $\lambda_3=4$,解齐次线性方程组$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_3=(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}&=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &=(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad -2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求的可逆矩阵.

例 5.26 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并求行列式 $|A-E|$ 的值.

解析 矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)=0,$$

由此得矩阵 A 的特征值为 $\lambda=1+a,1+a,a-2$.

对于 $\lambda=1+a$，解方程组 $((1+a)E-A)x=O$，施行初等行变换将 $(1+a)E-A$ 化为行简化阶梯形，

$$(1+a)E-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得对应的两个线性无关的特征向量 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_2=(1,\ 0,\ 1)^T$.

对于 $\lambda=a-2$，解方程组 $((a-2)E-A)x=O$，施行初等行变换将 $(a-2)E-A$ 化为行简化阶梯形，

$$(a-2)E-A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得对应的特征向量 $\alpha_3=(-1,\ 1,\ 1)^T$. 令矩阵

$$P=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a+1 & & O \\ & a+1 & \\ O & & a-2 \end{pmatrix},$$

则有 $P^{-1}AP=B$.

由于 A 的特征值为 $\lambda=1+a,1+a,a-2$，所以 $A-E$ 的特征值为 $\lambda=a,a,a-3$，于是 $|A-E|$ 等于其特征值的乘积，即

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=a^2(a-3).$$

例 5.27 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&3&-3\end{pmatrix}$. 问当 k 为何值时，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵？并求出 $\boldsymbol{P}$ 和相应的对角矩阵.

解析 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=-1,-1,1$.

对于 $\lambda=-1$，应用初等行变换，

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当 $k\neq0$ 时，因 $\mathrm{r}(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化；当 $k=0$ 时，因 $\mathrm{r}(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，继续初等行变换，

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}-4&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可得对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ 2,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 0,\ 2)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda=1$，施行初等行变换，

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\k&2&-k\\-4&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可得对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

因此，当 $k=0$ 时，令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}，则\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 5.28　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}(b\neq0)$，

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解析　（1）$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&\cdots&-b\\-b&\lambda-1&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-b&-b&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1-(n-1)b)(\lambda-(1-b))^{n-1}=0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=1+(n-1)b$，$1-b$（$1-b$ 为 $n-1$ 重根）.

当 $\lambda=1+(n-1)b$ 时，施行初等行变换，

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(n-1)b&-b&-b&\cdots&-b\\-b&(n-1)b&-b&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-b&-b&-b&\cdots&(n-1)b\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&-1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

由此可得 $\lambda=1+(n-1)b$ 所对应的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=C(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}},\text{其中 } C \text{ 为任意非零常数}.$$

当 $\lambda=1-b$ 时,施行初等行变换,

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

由此可得 $\lambda=1-b$ 所对应的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=C_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+C_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$ 为任意的不全为零的常数.

(2) 记

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵,主对角元为 $1+(n-1)b,1-b,\cdots,1-b$.

例 5.29 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,试求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角形矩阵.

解析 因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有两个，故 $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$. 施行初等行变换，

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $x=2,y=-2$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=2,2,6$.

当 $\lambda=2$ 时，解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，施行初等行变换，

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda=6$ 时，解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，施行初等行变换，

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -2,\ 3)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

例 5.30　设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,3；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1,2 的特征向量分别是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ -2,\ -1)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解析　(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}},$$

因为实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交，所以

$$\boldsymbol{\alpha}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\quad \boldsymbol{\alpha}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

即

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2-x_3=0,\end{cases}$$

解上列方程组，得其基础解系为 $(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的全部特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=k(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意非零常数）.

(2) 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\text{即 } A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}.$$

由于

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&-1/3&1/3\\1/6&-1/3&-1/6\\1/2&0&1/2\end{pmatrix},$$

所以

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}.$$

例 5.31　设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，

(1) 求 A 的属于特征值 1 的特征向量；

(2) 求矩阵 A.

解析　由于实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交，且对应于 2 重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量 α_2，α_3，它们都与 α_1 正交. 设特征值 1 对应的特征向量为 $(x,y,z)^T$，则有 $y+z=0$，取

$$\alpha_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\alpha_2=(1,0,0)^T,$$

$$\alpha_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

则 α_2,α_3 是 A 的属于特征值 1 的特征向量，令

$$P=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(P 为正交矩阵),则 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,所以

$$\begin{aligned}A&=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{T}\\&=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 5.32 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $B=(kE+A)^2$,其中 k 为实数,E 为单位矩阵. 求对角矩阵 C,使 B 与 C 相似,并求 k 为何值时,B 为正定矩阵.

解析 A 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0,$$

故 A 的特征值为 $\lambda=2,2,0$. 于是 B 的特征值为 $(k+2)^2,(k+2)^2,k^2$. 由于 A 为实对称矩阵,$A^{T}=A$,而

$$\begin{aligned}B^{T}&=((kE+A)(kE+A))^{T}=(kE+A)^{T}(kE+A)^{T}\\&=(kE+A)^2=B,\end{aligned}$$

所以 B 为实对称矩阵,因此 B 必可对角化,令

$$C=\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，当 $k\neq 0$，且 $k\neq -2$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的所有特征值皆为正数，此时 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

例 5.33　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，其行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$，又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解析　根据题设可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha},$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\lambda_0\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},$$

所以

$$\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\lambda_0\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

由此可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1, & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1, & (2) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1, & (3) \end{cases}$$

由(1)和(3)，解得 $\lambda_0=1$.

将 $\lambda_0=1$ 代入(2)和(1)，得

$$b=-3,a=c,$$

由 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 和 $a=c$，有

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1,$$

故 $a=c=2$. 因此

$$a=2,\ b=-3,\ c=2,\ \lambda_0=1.$$

例 5.34 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

解析 方法Ⅰ $\boldsymbol{A}$ 的行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{vmatrix}=7,$$

下面用初等行变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}$,

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}3&2&2&1&0&0\\2&3&2&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&-1&0\\2&3&2&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}\\0&1&0&-\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}\\0&0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{5}{7}\end{array}\right),$$

应用公式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

用初等行变换求 $\boldsymbol{P}^{-1}$,

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right),$$

应用矩阵乘法,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}\\&=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

从而

$$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})|=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&0\\2&\lambda-7&4\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-9)^2(\lambda-3),$$

故 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $9,9,3$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 时，解方程组 $(9\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，用初等行变换，

$$9\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&4\\2&2&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故对应的特征向量可取为　$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，

所以对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数.

当 $\lambda_3=3$ 时，解方程组 $(3\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，用初等行变换，

$$3\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-6&0&0\\2&-4&2\\2&2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_3=(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

所以对应于特征值 3 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\eta}_3=k_3(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_3 是不为零的任意常数.

方法Ⅱ 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}$,即 $\boldsymbol{A\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$. 由于 $|\boldsymbol{A}|=7\neq 0$,所以 $\lambda\neq 0$. 又因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,故有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\eta}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\eta}$. 于是有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta})=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}),$$

$$(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}.$$

因此,$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$ 为 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}$.

由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$,$\lambda_3=7$. 因此 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 9,9,3.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,用初等行变换,

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故对应的特征向量可取为 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\eta}_2=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=7$ 时,解方程组 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,用初等行变换,

$$7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故对应的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_3=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_1=(1,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_2=(-1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_3=(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_2=k_1(1,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数.

对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_3=k_3(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_3 是不为零的任意常数.

6 二次型

6.1 基本概念与内容提要

1）二次型的矩阵，二次型的秩

关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \tag{1}$$

称为 n 元二次型，当系数 a_{ij} 皆为实数时，称为 n 元实二次型. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$（$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵），$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，则（1）式可简化为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，此式为二次型 f 的矩阵表示，称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 f 的矩阵，并称秩（$\boldsymbol{A}$）为二次型 f 的秩.

2）* 合同矩阵，合同变换

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记为 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

合同矩阵具有下列性质：

（1）若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\simeq\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{C}$；

（3）若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$；

（4）若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\simeq\boldsymbol{B}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$），则二次型 f 化为

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

故 f 也是关于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的二次型,它的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$(即 $A\simeq B$),称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 为合同变换(或可逆线性变换).

3)* 二次型的标准形

二次型 f 经合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 时,若 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵,则称 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 为二次型 f 的标准形. 若对角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的主对角元为 1, -1 或 0 时,则称 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 为二次型 f 的规范形. 标准形与规范形中只含平方项,实二次型的标准形中正、负项的个数分别称为二次型 f 的正、负惯性指数.

定理 1 任意二次型总可经合同变换化为标准形或规范形(即任意对称矩阵总可合同于对角矩阵).

在合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 中,若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,则称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 为正交变换.

定理 2 任意实二次型总可经正交变换化为标准形,且标准形中平方项的系数为二次型的矩阵的特征值(即任意实对称矩阵总可合同于以其特征值为主对角元的对角矩阵).

一般的合同变换,可通过配方法获得. 正交变换可通过求特征值、特征向量和标准正交化方法获得.

定理 3(惯性定理) 任意实二次型的标准形中正、负惯性指数是唯一确定的,且它们的和等于该二次型的秩.

实二次型 f 的正、负惯性指数分别等于 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正、负特征值的个数. 两个同阶实对称矩阵合同的充要条件是它们的正、负特征值的个数相同.

4)* 正定(负定)二次型,正定矩阵

若对一切 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0(<0)$,则称 f 为正定(负定)二次型,并称 $\boldsymbol{A}$ 为正定(负定)矩阵.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值大于零.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 合同

于单位矩阵 E.

定理 3 设 A 为 n 阶矩阵,A 为正定矩阵的充要条件是存在可逆矩阵 P,使得 $A=P^{T}P$.

定理 4 设 A 为 n 阶矩阵,A 为正定矩阵的充要条件是 A 为实对称矩阵,且 A 的所有顺序主子式大于零.

6.2 典型习题与试题解析

例 6.1 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,讨论 A,B,C 之间的相似性与合同性.

解析 两个 n 阶实对称矩阵相似的充要条件是它们的 n 个特征值全同;两个 n 阶实对称矩阵合同的充要条件是它们的 n 个特征值的符号全同.

矩阵 B 与 C 为实对角矩阵,B 的特征值为 3, 0, 0, 0, C 的特征值为 4, 0, 0, 0,下面求 A 的特征值,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)\lambda^{3}=0,$$

所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda=4,0,0,0$.

于是 A 与 B 合同但不相似,B 与 C 合同但不相似,A 与 C 相似且合同.

例 6.2 设 A 为 n 阶实对称矩阵,$r(A)=n$,A_{ij} 是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中

元素 a_{ij} 的代数余子式$(i, j=1, 2, \cdots, n)$,二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j.$$

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,把 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$写为矩阵形式,并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 二次型 $f(\boldsymbol{x})$与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形是否相同?说明理由.

解析　(1) 因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 故

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(A^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*,$$

于是 $\boldsymbol{A}^*$ 也是实对称矩阵,二次型 $f(\boldsymbol{x})$可表示为

$$f(\boldsymbol{x})=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

故二次型 $f(\boldsymbol{x})$的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 因为$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同,于是 $f(\boldsymbol{x})$与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形相同.

例 6.3　用合同变换化二次型

$$f=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

为标准形.

解析　令 $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_1-y_2$, $x_3=y_3$,则

$$f=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2,$$

令 $y_1+y_3=z_1$, $y_2=z_2$, $y_3=z_3$,则 $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$ 即为所求的标准形. 合同变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}.$$

例 6.4 **已知实二次型** $f(x_1, x_2, x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ **经正交变换** $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ **可化成标准形** $f=6y_1^2$，**求常数** a **的值.**

解析 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 2 & 2\\2 & a & 2\\2 & 2 & a\end{pmatrix}.$$

由二次型 f 的标准形 $f=6y_1^2$，可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 1. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形，

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}2 & 2 & a\\0 & 2-a & a-2\\a-2 & 0 & 2-a\end{pmatrix}\to\begin{cases}\begin{pmatrix}2 & 2 & a\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 4+a\end{pmatrix}, & \text{当 } a\neq 2,\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, & \text{当 } a=2,\end{cases}$$

显见 $a\neq 2$ 时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，$a=2$ 时秩$(\boldsymbol{A})=1$，故 $a=2$.

例 6.5 **已知二次型** $f(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ **的秩为 2.**

(1) **求参数** c **及此二次型的矩阵的特征值；**

(2) **指出方程** $f(x_1, x_2, x_3)=1$ **表示何种二次曲面.**

解析 (1) 实二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\-1 & 5 & -3\\3 & -3 & c\end{pmatrix},$$

因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得

$$\boldsymbol{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & c-3\end{pmatrix},$$

故 $c=3$,此时 $\boldsymbol{A}$ 的秩确是 2.

由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\1 & \lambda-5 & 3\\-3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9),$$

故所求特征值为 $\lambda=0$, $\lambda=4$, $\lambda=9$.

(2) 由上述特征值的符号(两正一零)可知,二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$通过正交变换可化为 $f=4\xi^2+9\eta^2=1$,表示椭圆柱面.

例 6.6　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,求证:二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值为 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$.

解析　首先存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 使得 f 化为标准形

$$\begin{aligned}f&=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\\&\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}\cdot(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2),\end{aligned}$$

由于 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=1$,

所以 $f\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$. 设 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}=\lambda_j$,取 $\boldsymbol{y}_0=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,其中 1 取在第 j 分量,则 $f(\boldsymbol{y}_0)=\lambda_j$. 故二次型 f 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值为 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$.

例 6.7　已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3,$$

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形,并写出相应的正交矩阵.

解析　(1) f 的矩阵表达式为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0,$$

由此得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-6$. 分别解齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}(i=1, 2, 3)$,得对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0\\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\ \frac{5}{\sqrt{30}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

由此可得正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

对二次型 f 作正交变换 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}=P(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$,则二次型 f 可以化为如下标准形

$$f(x_1, x_2, x_3)=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2.$$

例 6.8 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,把 $f(x_1, x_2, x_3)$化成标准形;

(3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的解.

解析 (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

由于二次型 f 的秩为 2,所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩也为 2. 故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2[(1-a)^2-(1+a)^2]$$

$$=-8a=0.$$

于是 $a=0$.

(2) $a=0$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0,$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=2, \lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时,解线性齐次方程组$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由于

$$\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_3=0$,解线性齐次方程组$(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由于

$$\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以属于特征值 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$,由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$

已经正交,它们与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 又必然正交,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组,将其标准化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}.$$

记

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,此即为所求的正交变换,则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2\\&=2y_1^2+2y_2^2.\end{aligned}$$

(3) 解 $f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1^2+y_2^2)=0$ 得 $y_1=y_2=0,y_3=k$,于是所求的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

其中 C 为任意常数.

例 6.9 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0),$$

其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值.

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换的对应的正交矩阵.

解析 (1) 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$. 由于矩阵的特征值之和等于主对角元素之和,特征值的积等于矩阵的行列式,故有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得 $a=1$, $b=2$.

(2) **由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式**

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$,解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得其基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_3=-3$,解齐次线性方程组 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已是正向量组,为得到规范正交向量组,只需将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,由此得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1\ \ \boldsymbol{\eta}_2\ \ \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵,在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下,有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

例 6.10 已知二次曲面方程

$$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$$

可以经过正交变换 $(x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(\xi,\ \eta,\ \zeta)^{\mathrm{T}}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$,求 a, b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解析 二次型 $f(x,\ y,\ z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$ 的矩阵和标准形 $f(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\eta^2+4\zeta^2$ 的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&&\boldsymbol{O}\\&1&\\\boldsymbol{O}&&4\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,所以它们有相同的特征值 $\lambda=0,\ 1,\ 4$,且有相同的特征多项式

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&-1\\-b&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix},$$

分别将 $\lambda=0,\ 1,\ 4$ 代入,可解得 $a=3,\ b=1$.

特征值 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为线性齐次方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=0$ 的解 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$.

特征值 $\lambda_2=1$ 对应的特征向量为线性齐次方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=0$ 的解 $\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$.

特征值 $\lambda_3=4$ 对应的特征向量为线性齐次方程组 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=0$ 的解 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \dfrac{2}{\sqrt{6}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$.

因此所求的正交矩阵为$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$,即

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

例 6.11　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

(1) **已知** $\boldsymbol{A}$ **的一个特征值为** 3,**试求** y;

(2) **求矩阵** $\boldsymbol{P}$,**使**$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$**为对角矩阵.**

解析　(1) **矩阵** $\boldsymbol{A}$ **的特征方程为**

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda+2y-1]=0,$$

以 $\lambda=3$ **代入上式解得** $y=2$.

(2) **由** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,**得**$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$. **以** $y=2$ **代入** $\boldsymbol{A}$ **并求** $\boldsymbol{A}^2$ **得**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

用配方法将二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ **化为标准形得**

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4$$
$$=x_1^2+x_2^2+5\left(x_3+\frac{4}{5}x_4\right)^2+\frac{9}{5}x_4^2.$$

令 $y_1=x_1$，$y_2=x_2$，$y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4$，$y_4=x_4$，得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

记

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

例 6.12 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，求 t 的取值范围.

解析 考察二次型 f 的矩阵的顺序主子式，显然，$\boldsymbol{D}_1=2>0$，$\boldsymbol{D}_2=1>0$，由

$$\boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix}>0,$$

解得 t 的取值范围是 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

例 6.13　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，求证：当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解析　因为

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵. 对于任意的非零实向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ &=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\geqslant 0$. 因此，当 $\lambda>0$ 时，对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,$$

故 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

例 6.14　设有 n 元实二次型

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

解析　因 f 正定，故对于任意的不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0. \tag{1}$$

(1)成立的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \quad\vdots\\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0,\\ x_n+a_nx_1=0\end{cases} \tag{2}$$

仅有零解. 而方程组(2)仅有零解的充分必要条件是其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

所以,$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时,二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为正定二次型.

例 6.15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,试证:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$.

解析 (必要性) 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵,则对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0,$$

即

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})>0.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 于是,$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 因此,$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$.

(充分性) 因$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵. 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$,则线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 从而对任意实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,所以对于 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 有$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})>0$. 于是 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0$,故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

例 6.16 设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$为正定矩阵,其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶、n 阶对称矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$;

(2) 利用(1)的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵,并证明你的结论.

解析 (1) 由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \end{pmatrix}.$$

（2）矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵. 证明如下：由于 $|\boldsymbol{P}|=1$，故 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

由于 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵，因而与其合同的矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ 也是正定矩阵. 注意到 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵，因而位于其对角线上的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 也都是正定矩阵.

例 6.17　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是同阶正定矩阵，求证：$\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

解析　（必要性）　若 $\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵，所以

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}.$$

（充分性）　若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB},$$

所以 $\boldsymbol{AB}$ 是实对称矩阵. 因 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}).$$

因 $(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})$ 为正定矩阵，其特征值都大于零，而与它相似的矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有相同的特征值，所以 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值也都大于零，故 $\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

例 6.18　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于 a，$\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 b，求证：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 $a+b$.

解析　显见 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 皆为实对称矩阵，设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i，$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\lambda_i>a$，$\mu_i>b$. 于是 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 的特征值 $\lambda_i-a>0$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 的特征值 $\mu_i-b>0$，因此 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 都是正定矩阵，因而 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 也是正定矩阵. 故其特征值均大于零，设 λ 为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的任一特征值，则 $\lambda-(a+b)$ 为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 的特征值，故 $\lambda-(a+b)>0$，即 $\lambda>a+b$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值都大于 $a+b$.

例 6.19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，求证：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D},$$

这里 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵.

解析 因 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}\quad（即\ \boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}），$$

令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}$，故 $\boldsymbol{C}$ 为实对称矩阵，因而存在正交矩阵 $\boldsymbol{G}$，使得

$$\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{D}\quad（即\ \boldsymbol{C}\sim\boldsymbol{D}\ 且\ \boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{D}），$$

这里 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵，令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{D}.$$

例 6.20 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，求证：$\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是存在正定矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}$.

解析 （充分性） 因正定矩阵 $\boldsymbol{S}$ 与正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 皆可逆，所以它们的乘积 $\boldsymbol{A}$ 也可逆.

（必要性） 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n(\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n)$，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix},\tag{1}$$

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & O\\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，则由(1)式可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^2$，

于是
$$A=SS(A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

因 S 合同于正定矩阵 $\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & O\\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$，所以 S 为正定矩阵，令
$$Q=S(A^{\mathrm{T}})^{-1},$$
因
$$\begin{aligned}Q^{\mathrm{T}}Q &= (SS(A^{\mathrm{T}})^{-1})^{\mathrm{T}}(S(A^{\mathrm{T}})^{-1}) = A^{-1}S^{\mathrm{T}}S(A^{\mathrm{T}})^{-1}\\ &= A^{-1}S^2(A^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1}AA^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{-1} = E,\end{aligned}$$
所以 Q 为正交矩阵，使得 $A=SQ$ 成立.

例 6.21 设 $A=(a_{ij})_n$ 为正定矩阵，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，试证：(1) $f(x)=\begin{vmatrix} A & x\\ x^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}$ 为负定二次型；(2) $|A|\leqslant a_{nn}|A_{n-1}|$，其中 $|A_{n-1}|$ 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式.

解析 (1) $\forall\, x\neq 0$，由于
$$\begin{pmatrix} A & x\\ x^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}x\\ 0^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0\\ x^{\mathrm{T}} & -x^{\mathrm{T}}A^{-1}x\end{pmatrix},$$
两边取行列式得 $f(x)=-x^{\mathrm{T}}A^{-1}x|A|$，由于 A 正定，所以 $|A|>0$，且 A^{-1} 正定，故 $x^{\mathrm{T}}A^{-1}x>0$，于是 $f(x)<0$，即 $f(x)$ 为负定二次型。

(2) 令 $y=(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n})^{\mathrm{T}}$，$g(y)=\begin{vmatrix} A_{n-1} & y\\ y^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}$，由于 A_{n-1} 正定，由(1)得 $g(y)<0$. 于是
$$|A|=\begin{vmatrix} A_{n-1} & 0\\ y^{\mathrm{T}} & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_{n-1} & y\\ y^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=a_{nn}|A_{n-1}|+g(y)\leqslant a_{nn}|A_{n-1}|.$$

阶段复习试题三

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$,(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;(2) 求 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值;(3) 求 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1, k, 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征向量,求常数 k 的值.

3. 设 λ_1, λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量,求证:$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,秩$(\boldsymbol{A})=2$,求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$有 3 个线性无关的特征向量,求 x 与 y 应满足的条件.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1, 2, 3)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2, -2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-2, -1, 2)^{\mathrm{T}}$,试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$,试求 a 使 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,并求 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，特征值为$\frac{1}{\lambda_1}$，$\frac{1}{\lambda_2}$，$\frac{1}{\lambda_3}$，λ_i 是互异的正整数 $(i=1, 2, 3)$. 设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2-6\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-5, 1, 7$，求常数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的值.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，试求矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的特征值.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\lambda=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值和特征向量；(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

12. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$可逆，$\boldsymbol{\alpha}=(1, b, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量，对应的特征值为 λ，求 a, b, λ 的值.

13. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，求证$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|$.

14. 用合同变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2+x_3x_4$ 化为标准，并写出合同变换.

15. 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形.

16. 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$经正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求常数 a 及所用的正交变换.

17. 已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2x_1x_3+2\beta x_2x_3$ 经正交变换化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$，试求 α, β.

18. 二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_2^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，求常数 λ 的取值范围.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，求证：1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模等于 1；2) $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于±1；3) 当$|\boldsymbol{A}|=1$ 时 $\boldsymbol{A}$ 有特征值-1；$|\boldsymbol{A}|=-1$ 且 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶时，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 1.

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的行列式大于 1.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$，试求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}.$$

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，求证 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，求证存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵，求证存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}.$$

7

随机事件和概率

7.1　基本概念与内容提要

1）随机事件与样本空间

随机试验,基本事件(样本点),样本空间的概念.

由单个或多个基本事件组成的集合称为随机事件,简称事件.

样本空间包含所有的基本事件,在每次试验中必然发生,称为必然事件;空集$\varnothing$不含有任何基本事件,在每次试验中都不发生,称为不可能事件.

2）*事件的关系与运算

(1) **事件的包含与等价.**

(2) **并:事件** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **中至少有一发生所组成的事件称为** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **的并,记为** $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(3) **交:事件** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **同时发生所构成的事件称为** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **的交,记为** $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(4) **差:事件** A **发生而事件** B **不发生所构成的事件称为** A **与** B **的差,记为** $A-B$.

(5) **互不相容事件:如果事件** A, B **不能同时发生,即** $AB=\varnothing$, **则称** A, B **为互不相容事件(或互斥事件). 若** n **个事件** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **是两两互不相容的事件,即** $A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1, 2, \cdots, n)$, **则称** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **为互不相容事件.**

(6) 对立事件：在试验中，如果事件 A 与 B 必然有一发生且不能同时发生，即 $A \cup B = \Omega$，$AB = \varnothing$，则称 A，B 互为对立事件（互逆事件），记 $B = \overline{A}$ 或 $A = \overline{B}$.

(7) 完备事件组：若 A_1，A_2，…，A_n 互不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称 A_1，A_2，…，A_n 为完备事件组.

事件的运算满足交换律、结合律、分配律和德-摩根（De-Morgan）律.

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2},\ \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

推广：$\overline{\bigcup\limits_{i} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i} A_i} = \bigcup\limits_{i} \overline{A_i}$. 此又称交并对偶原理.

运算顺序：先求“对立”，后求“交”，最后求“并”或“差”，有括号先做括号内的.

3）古典概型

若基本事件共有 n 个，而事件 A 所包含的基本事件数有 m 个，则定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

4）几何概率

设随机试验的样本空间 Ω 对应于测度有限的几何区域 S. 若样本点落在 S 内的某一区域 G 中的事件 A 的概率与区域 G 的测度（长度、面积、体积等）成正比，而与 G 的形状和位置无关，则

$$P(A) = \frac{G\text{ 的测度}}{S\text{ 的测度}}.$$

5）统计概率

在 n 次重复进行的随机试验中，当 n 很大时，事件 A 出现的频率 $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$（n_A 为 n 次重复试验中事件 A 出现的次数）将稳定地在某一数值 p 附近摆动，称此稳定值 p 为事件 A 发生的概率，记为

$P(A) = p$.

6）公理化定义

在随机试验的样本空间 Ω 上，对每个随机事件 A 都对应一个实数 $P(A)$. 如果这样的实值函数 $P(x)$ 满足：

（ⅰ）**非负性**：$P(A) \geqslant 0$；

（ⅱ）**规范性**：$P(\Omega) = 1$；

（ⅲ）**可列可加性**：**当事件 A_1，A_2，…互不相容时，**

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为 A 的概率.

* **利用概率的公理化定义，可导出概率的下列一些主要性质：**

（ⅰ）**对任意事件 A，$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$，$P(A) = 1 - P(\overline{A})$；**

（ⅱ）**对事件 A，B，若 $A \supset B$，则**

$$P(A - B) = P(A) - P(B)\text{，且 } P(A) \geqslant P(B);$$

（ⅲ）**对任意两个事件 A，B，有**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

该公式称为加法公式. 利用归纳法可推出 n 个事件的加法公式：对任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

7）条件概率

对 Ω 中任意两个事件 A，B，若 $P(B) > 0$，则称

$$P(A \mid B) = P(AB) \mid P(B)$$

为在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率.

条件概率具有如下性质：

（ⅰ）$P(\Omega \mid B) = 1$，$P(\varnothing \mid B) = 0$；

（ⅱ）$P(A \mid B) = 1 - P(\overline{A} \mid B)$；

(ⅲ) 若 A_1, A_2 互不相容,则 $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$,对一般事件 A_1, A_2,有 $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 A_2 \mid B)$;

(ⅳ) 若 $A \subset B$,则 $P(A \mid B) = P(A)/P(B)$,

若 $B \subset A$,则 $P(A \mid B) = 1$.

8)* 乘法公式

$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$. ($P(A) > 0$, $P(B) > 0$)

对 n 个事件,若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$,则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) =$$
$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

9)* 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是完备事件组,对任何事件 A,有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i),$$

这就是全概率公式.

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是完备事件组,对任何事件 A,只要 $P(A) > 0$,则有

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)},$$

此称为贝叶斯公式,这里 $P(B_i)$ 称为先验概率.

10) 事件的独立性

(1) 两事件的独立性:对 A, B 两事件,如果 $P(AB) = P(A)P(B)$,就称两事件 A 与 B 相互独立.

当 A 与 B 相互独立,且 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ 时,有

$$P(A \mid B) = P(A),\ P(B \mid A) = P(B),$$

即两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率.

四对事件 A 与 B, $\overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 之中有一对相互独

立，另三对也相互独立.

(2) n 个事件的独立性：对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若满足下面 2^n-n-1 个等式：

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \qquad (1 \leqslant i < j < k \leqslant n)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

就称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

特别对 A_1, A_2, A_3 这 3 个事件，若满足

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3), \ P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

这 4 个式子称 A_1, A_2, A_3 相互独立，仅满足前 3 个式子称 A_1, A_2, A_3 两两独立.

11) * 独立试验与贝努里(Bernolli)概型

(1) 在相同的条件下进行 n 次重复试验，如果各次试验结果的出现互不影响，则称这 n 次重复试验为 n 重独立重复试验.

在独立重复试验中，最简单的一类随机试验，它具有如下特征：

(ⅰ) 试验在相同的条件下独立重复地进行 n 次；

(ⅱ) 每次试验只有两个可能结果 A 与 $\overline{A}$，且

$$P(A) = p(0 < p < 1), \ P(\overline{A}) = 1 - p = q,$$

这类随机试验就称为 n 重贝努里概型或 n 重贝努里试验.

(2) 在贝努里概型中，事件 A 在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n; \ q = 1 - p).$$

(3)（泊松定理）　设 $np_n \to \lambda$(λ 为正常数)，则对任一确定的正整数 k，有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

该定理中条件 $np_n \to \lambda$ 为常数，故当 n 很大，p 很小时，我们有下列泊松近似公式

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

7.2　典型习题与试题解析

例 7.1　设袋中有 a 只黑球，b 只白球（$a>0$，$b>0$），从中不返回地一只一只摸球，A 表示事件“最后摸出的几个球全是黑球”，B 表示事件“最后摸出的一只是黑球”，试说明 A 与 B 的关系.

解析　显然有：A 的发生必然会导致 B 的发生，即 $A \subset B$. 注意到 A 中所表述的几个表示最少是 1 只，也可以是 2 只，……最多为 a 只，则 B 发生时，A 也必定发生，即 $B \subset A$，所以 $A=B$.

例 7.2　设 A，B，C 是 3 个随机事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

（1）仅有事件 B 发生；　（2）恰有一个事件发生；

（3）至少一个事件发生；　（4）3 个事件都发生；

（5）不多于两个事件发生.

解析　（1）$\overline{A}B\overline{C}$；　（2）$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$；

（3）$A \cup B \cup C$；　（4）ABC；

（5）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$，或 $\overline{ABC}$，或 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

例 7.3　设 X，Y 为随机变量，事件 A 表示 $\{X \geqslant C\}$. 事件 B 表示 $\{Y \geqslant C\}$. 用 A，B 表示下列事件：

D：$\{\max(X, Y) \geqslant C\}$.　E：$\{\min(X, Y) \geqslant C\}$.

F：$\{\max(X, Y) < C\}$.　G：$\{\min(X, Y) < C \leqslant \max(X, Y)\}$.

解析

$D = A \cup B$.　（即 X，Y 中至少有一个 $\geqslant C$）

$E = A \cap B$.　　　(即 X，Y 都要 $\geqslant C$)

$F = \overline{D} = \overline{A}\,\overline{B}$.　　(即 X，Y 都要 $< C$)

$G = A\overline{B} \cup B\overline{A}$.（即 X，Y 中正好有一个 $\geqslant C$,另一个 $< C$)

评注　$\max(X, Y)$，$\min(X, Y)$是两个重要的随机变量的函数.有关它们的概率分布及计算都要利用到上面的正确理解.

例 7.4　在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的.在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电.以 E 表示事件“电炉断电”,而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于事件　　　　(　　)

A. $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$　　　　B. $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$

C. $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$　　　　D. $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$

解析　因为

$$T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)},$$

所以

$$\{T_{(1)} \geqslant t_0\} \subset \{T_{(2)} \geqslant t_0\} \subset \{T_{(3)} \geqslant t_0\} \subset \{T_{(4)} \geqslant t_0\}.$$

于是 $E = \{$电炉断电$\} = \{$只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 $t_0\} = \{T_{(3)} \geqslant t_0, T_{(4)} \geqslant t_0\} = \{T_{(3)} \geqslant t_0\}$.故选(C).

例 7.5　化简(1) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$;(2) $\overline{(\overline{AB} \cup C)\,\overline{AC}}$.

解析　(1)

$$\begin{aligned}(A \cup B)(A \cup \overline{B}) &= AA \cup A\overline{B} \cup BA \cup B\overline{B} \\ &= A \cup A\overline{B} \cup BA \cup \varnothing \\ &= A \cup A\overline{B} \cup AB \\ &= A \cup A(B \cup \overline{B}) \\ &= A \cup A = A.\end{aligned}$$

(2) 所给事件式含有多重“逆”号,反复运用德–摩根律得

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A}\ \overline{B} \cup C)\,\overline{AC}} &= \overline{\overline{A}\ \overline{B} \cup C} \cup AC = \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{C} \cup AC \\ &= (A \cup B)\overline{C} \cup AC = A\overline{C} \cup B\overline{C} \cup AC \\ &= A\overline{C} \cup AC \cup B\overline{C} = A(\overline{C} \cup C) \cup B\overline{C}\end{aligned}$$

$$= A \cup B\overline{C}.$$

例 7.6　设对于事件 A, B, C,**有** $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$, $P(AC) = \frac{1}{8}$, **求** A, B, C **三个事件中至少出现一个的概率.**

解析　由 $ABC \subset AB$ **得** $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0$, $P(ABC) = 0$. **所求概率为**

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - \\ &\quad P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

例 7.7　设当事件 A **与** B **同时发生时** C **也发生,则**　(　　)

A. $P(C) = P(AB)$　　B. $P(C) = P(A \cup B)$

C. $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$　　D. $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

解析　由题设 $AB \subset C$ **得** $P(AB) \leqslant P(C)$,**又由**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leqslant 1$$

知　$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$,

即　$P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.　**所以选**(D).

例 7.8　设 10 件产品中有 4 件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格品,求另一件也是不合格品的概率.

解析　设事件 A **表示所取两件产品中有一件是不合格品,**B **表示另一件也是不合格品,则所求概率为**

$$P(B \mid A) = \frac{C_4^2 / C_{10}^2}{[C_4^2 + C_4^1 C_6^1] / C_{10}^2} = \frac{6}{6 + 24} = \frac{1}{5}.$$

例 7.9　袋内放有两个伍分,3 个贰分,5 个壹分的硬币,从中任取 5 个(假定各个硬币被取到的可能性相同),求总币值超过一角的概率.

解析 基本事件总数 $n=C_{10}^{5}=252$，有利事件 A（取 5 个硬币总币值超过一角）的基本事件数

$$m=C_2^2C_8^3+C_2^1[C_3^2C_5^2+C_3^3C_5^1]=56+2[30+5]=126,$$

故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{126}{252}=\frac{1}{2}.$$

例 7.10 将 k 个不同的球随机地放入 N 个盒子中去（$k\leqslant N$），假设每个盒子能放的球数不限，试求下列事件的概率：

(1) 指定的 k 个盒子中各有一球（事件 A）；

(2) 恰有 k 个盒子，其中各有一球（事件 B）.

解析 将 k 个球放入 N 个盒子中去有 $N\times N\times\cdots\times N=N^k$ 种不同放法，即基本事件总数 $n=N^k$.

(1) 对事件 A，其不同放法相当于这 k 个球在这 k 个指定位置的全排列 k！，所以

$$P(A)=\frac{k!}{N^k}.$$

(2) 对事件 B，先在 N 个盒子中任选 k 个盒子出来，其不同选法有 C_N^k 种；再在选定的 k 个盒子中各放一球，其不同放法由(1)知为 k！种，故有利于事件 B 的不同放法共有 $C_N^k\cdot k$！种，所以

$$P(B)=\frac{C_N^k\cdot k!}{N_k}=\frac{A_N^k}{N^k}.$$

例 7.11 设某班有 n 个学生，求至少有两人生日相同的概率.（设一年为 365 天）

解析 设 A 为所求事件，则 $\overline{A}$ 表示 n 个学生生日全不相同，由上题，将 365 天看作是 N 个盒子，n 个学生看作是 n 个球，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-A_{365}^{n}/365^n.$$

可以算出，当 $n=64$ 时，$P(A)=0.997$，几乎就是 1 了.

例 7.12 将 C，C，E，E，I，N，S 等七个字母随机地排成一

行,求恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率.

解析 所求概率 $p=\dfrac{2\times 2}{7!}=\dfrac{1}{1\,260}$.

例 7.13 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$,其中 B, C 分别是将一枚色子(骰子)接连掷两次先后出现的点数.求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解析 一枚色子(骰子)掷两次,其基本事件总数为 36.方程组有实根的充分必要条件是 $B^2\geqslant 4C$,或 $C\leqslant B^2/4$.

易见

B	1	2	3	4	5	6
使 $C\leqslant B^2/4$ 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
使 $C=B^2/4$ 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

由此可见,使方程有实根的基本事件个数为

$$1+2+4+6+6=19,$$

因此

$$p=\frac{19}{36}.$$

方程有重根的充分必要条件是 $B^2=4C$ 或 $C=B^2/4$,满足此条件的基本事件共有 2 个,因此

$$q=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

例 7.14 从 5 双不同号码的鞋子中任取 4 只,求这 4 只鞋子中至少有两只可配成一双的概率.

解析 设 A 为 4 只鞋子中至少有两只配成一双的事件,则 $\overline{A}$ 为 4 只鞋子中没有任何两只配成一双的事件.

基本事件总数 $n=C_{10}^4=210$.

4 只鞋子中至少有两只配成一双有两种情形:①恰有两只配成

一双,②4只恰配成两双.情形①的取法是先从5双中任选一双,共有C_5^1种选法,把选中的一双的2只都取出有C_2^2种取法,再在剩下的4双中任选2双,有C_4^2种选法,每双任取一只有$C_2^1C_2^1$种取法,于是任取4只恰有2只配成一双的取法共有$C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$种取法.情形②的取法是先从5双中任取2双,有$C_5^2$种选法,把选中的两双4只都取出有$C_2^2C_2^2$种取法,于是所取4只恰配成两双的取法有$C_5^2C_2^2C_2^2$种,从而$A$包含的基本事件数

$$m = C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1 + C_5^2C_2^2C_2^2 = 120 + 10 = 130,$$

故
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{130}{210} = \frac{13}{21}.$$

评注　本题在求m时不能写成$C_5^1C_8^2 = C_5^1[C_4^1 + C_4^2 2^2]$因为这里所取4只恰配成两双的情况为$C_5^1C_4^1 = 20$而不是$C_5^2 = 10$,考虑了所取两双的顺序,所以是错误的.

例 7.15　园丁把3棵桃树,4棵李树,5棵杏树栽成一行,12棵树的排列是随机的,每一种排列都是等可能的,求没有二棵杏树是相邻的概率.

解析　排列总数可按如下分阶段考虑:从12个位置任选3个放桃树,有C_{12}^3种取法,再从余下的9个位置取4个放李树,余下的放杏树,共有

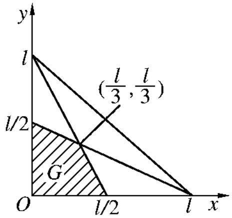
$$C_{12}^3C_9^4 = 12!/3!4!5!$$

种方法.设杏树不相邻事件为A,可如下计算排列数:先把桃树3棵和李树4棵任意排成一列,共有C_7^3种方法,然后在它们的间隔位置(中间6个加上首尾各一个)中任意选出5个位置放杏树(这保证杏树不相邻)共有C_8^5种方法.因此A的排列数为$C_7^3 \cdot C_8^5$,故

$$P(A) = C_7^3C_8^5/C_{12}^3C_9^4 = \frac{7}{99}.$$

例 7.16　有一根长l的木棒,任意折成三段,求中间一段为三段

中最长的概率.



解析　设折得的三段长度依次为 x，$l-x-y$和 y，那么，样本空间 $\Omega=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant l, 0 \leqslant x+y \leqslant l\}$，而随机事件 A：{中间一段为三段最长者}相应的子区域 G(见图)应满足

$$0<x \leqslant (l-x-y),$$
$$0<y \leqslant (l-x-y).$$

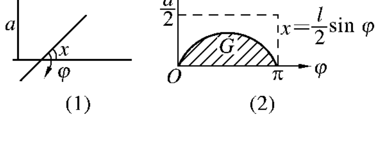
即

$$G=\left\{(x, y) \mid 0<y<l-2x, 0<y<\frac{1}{2}(l-x)\right\}.$$

从图中可以得到 Ω 的面积为$\frac{1}{2}l^2$，G 的面积为$\frac{1}{6}l^2$. 于是相应的概率为 $P(A)=\frac{1}{3}$.

例 7.17　(投针问题)1777 年，法国科学家蒲丰提出下列著名的问题：在平面上画距离分别为 a 的若干平行线，如向平面投掷一枚长为 l 的小针，问它与任一条平行线相交的概率.

解析　以 x 表示从针的中点到最近一条平行线的距离，而 φ 表示该针与平行线的夹角，针与平行线位置如图(1)，



显然，此时样本空间为 $\{(\varphi, x) 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}\}$，而随机事件 A："小针与平行线相交"相应的子区域 G 应满足 $x \leqslant \frac{1}{2}\sin\varphi$，如图(2)所示，$G$ 正是阴影部分，从而

$$P(A)=\frac{G\text{的面积}}{U\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\frac{1}{2}a\pi}=\frac{2l}{\pi a}.$$

例 7.18　设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，则　　（　　）

A. 事件 A 和 B 互不相容　　B. 事件 A 和 B 互相对立

C. 事件 A 和 B 互不独立　　D. 事件 A 和 B 相互独立

解析　由 $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$ 得

$$P(A\mid B)=1-P(\overline{A}\mid\overline{B})=P(A\mid\overline{B}),$$

即

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A-AB)}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}.$$

于是

$$P(AB)[1-P(B)]=P(B)[P(A)-P(AB)],$$

$$P(AB)-P(B)P(AB)=P(B)P(A)-P(B)P(AB),$$

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

故 A 与 B 相互独立，选(D).

例 7.19　设 A，B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明

$$P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$$

是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

解析　由于 A 的概率不等于0和 1，知题中两个条件概率都存在.

(1) 必要性. 由事件 A 与 B 独立，知事件 $\overline{A}$ 与 B 也独立，因此 $P(B\mid A)=P(B)$，$P(B\mid\overline{A})=P(B)$，从而

$$P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A}).$$

(2) 充分性. 由 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$，可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB),$$
$$P(AB)=P(A)P(B),$$

因此 A 和 B 独立.

例 7.20 已知 $0<P(B)<1$ 且 $P((A_1\cup A_2)\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$，则下列选项成立的是 ( )

A. $P((A_1\cup A_2)\mid\overline{B})=P(A_1\mid\overline{B})+P(A_2\mid\overline{B})$

B. $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

C. $P(A_1\cup A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$

D. $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$

解析 由题设 $P((A_1\cup A_2)\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$ 得

$$\frac{P((A_1\cup A_2)B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)},$$

又 $$P(B)>0,$$

所以 $$P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B).$$

故选(B).

例 7.21 证明：对任意事件 A，B 有

$$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B).$$

解析 $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup AB$，所以

$$\begin{aligned}
&P(A\cup B)P(AB)\\
&=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)\\
&\leqslant P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)+\\
&\quad P(B-A)P(AB)+(P(AB))^2\\
&=[P(A-B)+P(AB)][P(B-A)+P(AB)]\\
&=P(A)P(B).
\end{aligned}$$

例 7.22 设 $P(A)=p$，$0<p<1$，$P(B)=1-\sqrt{p}$，证明：$P(\overline{A}\cap\overline{B})>0$.

解析 $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cup\overline{B})$

$$= 1 - p + \sqrt{p} - P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$\geqslant 1 - p + \sqrt{p} - 1 = \sqrt{p}(1 - \sqrt{p}) > 0.$$

例 7.23　设 A, B 相互独立, $P(A) > 0$,证明 A, B, $A \cup B$ 相互独立 $\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1$.

解析　$\Leftarrow$(充分性)　设 $P(A \cup B) = 1$,

因 A, B 独立,所以

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap (A \cup B)) = P(A) = P(A)P(A \cup B),$$

$$P(B \cap (A \cup B)) = P(B) = P(B)P(A \cup B),$$

$$P(A \cap (A \cup B) \cap B) = P(AB) = P(A)P(B)P(A \cup B).$$

$\Rightarrow$(必要性)　设 A, B, $A \cup B$ 相互独立,则

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap (A \cup B)) = P(A)P(A \cup B), \\ P(A \cap (A \cup B)) = P(A), \\ P(A) > 0, \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cup B) = 1.$$

例 7.24　有 n 双不同的皮鞋($2n$ 只)混在一起,现将这些鞋子随机分给 n 个人,每人两只,试求下列事件的概率,$A=\{$每人分到的鞋都成双$\}$,$B=\{$每人分到左、右脚的各一只$\}$.

解析　样本点总数为: $C_{2n}^2 \cdot C_{2n-2}^2 \cdots C_2^2 = \dfrac{(2n)!}{(2)^n}$.

$$P(A) = \frac{n!}{(2n)!/2^n} = \frac{(1 \cdot 2)(2 \cdot 2)(3 \cdot 2)\cdots(n \cdot 2)}{(2n)!}$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n)!},$$

$$P(B) = \frac{(n!)^2}{(2n)!/2^n}.$$

例 7.25　从 1, 2, …, 9 这 9 个数字中,有放回地随机抽出几个数,求这几个数的乘积能被 10 除尽的概率 p.

解析　共有 9^n 种抽法.

其中不含 5 的有 8^n 种，不含偶数的有 5^n 种，不含 5 和偶数的有 4^n 种，所以

$$p=\frac{9^n-8^n+5^n+4^n}{9^n}=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

例 7.26　掷硬币 $2n$ 次，求出现正面的次数多于出现反面次数的概率.

解析　样本空间为 2^{2n}，

正、反面出现次数一样多的场合有 C_{2n}^n 种.

$\Rightarrow$正、反面出现次数一样多的 $p=C_{2n}^n/2^{2n}$.

$\Rightarrow$正、反面次数不同的 $p=1-\dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$.

由对称性，正面次数多的概率 $p=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right)$.

例 7.27　某食品厂把印有西游记 4 个主要人物唐僧、孙悟空、猪八戒、沙和尚的画卡作为赠券，装入某种儿童食品袋，每袋一卡，计算购买 5 袋这种食品，而能收齐全套 4 张画卡的概率？

解析　样本空间为 4^5，

有利场合可这样考虑：$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$，

先从 5 个位置中选出两个放同一张卡，有 $4C_5^2$ 种，

剩下的 3 个位置将其余的三种卡作全排列有 3！种，

所以，所求概率

$$p=\frac{4\cdot C_5^2\cdot 3!}{4^5}=\frac{15}{64}.$$

例 7.28　（小概率事件）设随机试验中，某一事件 A 出现的概率 $\varepsilon>0$，证明：不论 ε 多小，只要不断独立地重复做试验，A 迟早会出现的概率为 1.

解析　A_k 表示：A 于第 k 次试验中出现，则

$$P(A_k)=\varepsilon,P(\overline{A_k})=1-\varepsilon.$$

则在前 n 次试验中，A 至少出现一次的概率为

$$p_n = 1 - P(\overline{A_1}\ \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) = 1 - (1-\varepsilon)^n \to 1 \quad (\text{当 } n \to +\infty).$$

例 7.29 （正确裁定问题）　有两个裁判组，其中一组由 3 人组成，内有两个人独立地以概率 p 作出正确的裁决，第三个人以掷硬币决定，最终裁决以多数人意见决定；另一组有一人单独以概率 p 作出正确的裁决，现问这两个组中哪一组作出正确裁定的概率大？

解析　设 A，B，C 分别表示这三人作出正确的裁决，

则
$$P(A) = P(B) = p,\ P(C) = \frac{1}{2}.$$

设 R 表示这个 3 人组最终裁定正确，

则
$$R = ABC \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC.$$

注意到 A,B,C 独立；ABC，$AB\overline{C}$，$A\overline{B}C$，$\overline{A}BC$ 互不相容，

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(ABC) + P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC) \\
&= P(A)P(B)P(C) + P(A)P(B)P(\overline{C}) + \\
&\quad\ P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) \\
&= pp \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot p \cdot \frac{1}{2} \\
&= p,
\end{aligned}$$

所以一样大.

例 7.30 （配对问题）　某人先写了 n 封投向不同地址的信，再写 n 个标有这 n 个地址的信封，然后在每个信封内随意装入一封信，问：

(1) 每一封信都碰对了地址的概率 $P(A)$；

(2) 至少有一封碰对了地址的概率 $P(B)$.

解析　(1) $P(A) = \dfrac{1}{n!}$.

(2) 设 A_k 表示“第 k 封信碰对了地址”，

则
$$P(A_k) = \frac{1}{n} \Rightarrow B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$P(B) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n),$$

其中

$$P(A_k) = \frac{1}{n}, (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j \mid A_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1},$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i) P(A_j \mid A_i) P(A_k \mid A_i A_j)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2},$$

$$\vdots$$

$$P(A_{i1} A_{i2} \cdots A_{ir}) = P(A_{i1}) P(A_{i2} \mid A_{i1}) \cdots P(A_{ir} \mid A_{i1} \cdots A_{ir-1})$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{n-r+1},$$

$$\Rightarrow P(B) = C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \to \mathrm{e}^{-1}.$$

例 7.31　在空战中,甲机先向乙机开火,击落乙机概率为 0.2, **若乙机未被打中,就进行还击,击落甲机概率为** 0.3; **若甲机未被打中,则再进攻乙机,击落乙机概率为** 0.4. **求在这几个回合中**(1) **甲机被击落概率**;(2) **乙机被击落的概率.**

解析　**设"乙机第一次被击落"为事件** A,**"甲机被击落"为事件** B,**"乙机第二次被击落"为** C,**则按题意有**

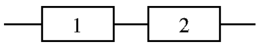
$$P(A)=0.2,\qquad P(B\mid\overline{A})=0.3,\qquad P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})=0.4.$$

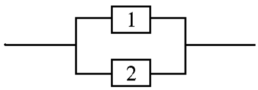
于是乙机被击落事件 $D=A\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

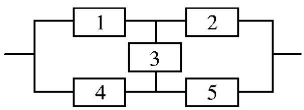
(1) $P(B)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})(B\mid\overline{A})=(1-0.2)\times0.3$
$=0.24.$

(2) $P(D)=P(A\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A)+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$
$=P(A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})$
$=0.32+(1-0.2)(1-0.3)\cdot0.4=0.424.$

例 7.32　系统有多个元件组成,所有元件都独立工作,设每个元件的可靠性,即正常工作的概率都为 $p=0.9$,试求以下系统的可靠性.

(1) 串联系统　S_1:


(2) 并联系统　S_2:


(3) 桥式系统　S_3:


解析　设 S_i 表示第 i 个系统正常工作,A_i 表示第 i 个元件正常工作.

(1) 对串联系统,系统正常工作相当于所有元件正常工作,所以

$$P(S_1)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=p^2=0.81.$$

(2) 对并联系统,系统正常工作相当于至少一个元件正常工作,所以

$$P(S_2)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$
$$=p+p-p^2=0.99,$$

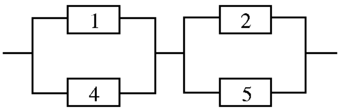
或

$$P(S_2)=1-P(\overline{S_2})=1-P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})$$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=1-(1-p)^2=0.99.$$

(3) 对桥式系统,第 3 个元件是关键,先由全概率公式:

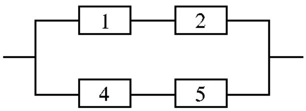
$$P(S_3)=P(A_3)P(S_3\mid A_3)+P(\overline{A_3})P(S_3\mid \overline{A_3}),$$

在第 3 个元件正常工作的条件下,系统成为先并后串系统,



$$P(S_3\mid A_3)=P((A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5))=P(A_1\cup A_4)P(A_2\cup A_5)$$
$$=[1-(1-p)^2]^2=0.9801.$$

在第 3 个元件不正常工作的条件下,系统成为先串后并系统,



$$P(S_3\mid \overline{A_3})=P(A_1A_2\cup A_4A_5)=1-(1-p^2)^2=0.9639.$$

则

$$P(S_3)=p[1-(1-p)^2]^2+(1-p)[1-(1-p^2)^2]=0.9785.$$

例 7.33　某种动物由出生活到 10 岁的概率为 0.8,活到 12 岁的概率为 0.56,问现年 10 岁的这种动物活到 12 岁的概率是多少?

解析　$A=\{$活到 10 岁以上$\}$,$B=\{$活到 12 岁以上$\}$,显然 $B\subset A$.

因为 $P(A)=0.8$,$P(B)=0.56$,又 $B\subset A$,$AB=B$,$P(AB)=P(B)=0.56$,所以所求概率

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.56}{0.8}=0.7.$$

例 7.34　设 10 件产品中有 4 件不合格品,从中任取两件,已知所取的两件产品中有一件是不合格品,求另一件也是不合格品的概率.

解析　设 A 表示所取两件产品中有一件是不合格品的事件,B

表示另一件也是不合格品的事件，则 AB 表示所取两件产品都是不合格品的事件.

$$P(A)=[C_4^1C_6^1+C_4^2]/C_{10}^2,\ P(AB)=C_4^2/C_{10}^2,$$

故所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{C_4^2/C_{10}^2}{[C_4^2+C_4^1C_6^1]/C_4^2}=\frac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}$$

$$=\frac{6}{30}=1/5.$$

例 7.35 （罐子模型） 设罐中有 b 个黑球，r 个红球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，还加进 c 个同色球和 d 个异色球，记 B_i 为“第 i 次取出的是黑球”，R_j 为“第 j 次取出的是红球”，试分别计算 $P(B_1R_2R_3)$，$P(R_1B_2R_3)$，$P(R_1R_2B_3)$.

解析 由乘法公式得

$$p_1=P(B_1R_2R_3)=P(B_1)P(R_2\mid B_1)P(R_3\mid B_1R_2)$$

$$=\frac{1}{b+r}\,\frac{r+d}{b+r+c+d}\,\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$p_2=P(R_1B_2R_3)=P(R_1)P(B_2\mid R_1)P(R_3\mid R_1B_2)$$

$$=\frac{r}{b+r}\,\frac{b+d}{b+r+c+d}\,\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$p_3=P(R_1R_2B_3)=P(R_1)P(R_2\mid R_1)P(B_3\mid R_1R_2)$$

$$=\frac{r}{b+r}\,\frac{r+c}{b+r+c+d}\,\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}.$$

以上概率与黑球在第几次被抽取有关，此罐子模型亦称为波利亚(Polya)模型，它有如下一些情形：

(1) 当 $c=-1$，$d=0$ 时，即为不放回抽样，只要抽取的黑球与红球的个数确定，则结果与抽出球的次序无关，$p_1=p_2=p_3$.

(2) 当 $c=0$，$d=0$ 时，即为放回抽样，$p_1=p_2=p_3$.

(3) 当 $c>0$，$d=0$ 时，称为传染病模型，每次取出球后会增加下一次取到同色球的概率，意即每发现一个传染病患者，以后会增加

再传染的概率，$p_1 = p_2 = p_3$.

(4) 当 $c=0$，$d>0$ 时，称为安全模型，每当事故发生了(取出红球)安全工作就抓紧些，下次再发生事故的概率会减少，而当事故没有发生时(取出黑球)，安全工作就放松，下次再发生事故的概率会增大.

例 7.36　甲、乙两盒内各有一个白球三个红球，经过两次交换，每次交换一球，问经过两次交换后盒内的红、白球个数不变的概率.

解析　由于 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，其中 $A_1 = \{$甲第一次抽出红球，乙第一次抽出白球$\}$，$A_2 = \{$甲第一次抽出白球，乙第一次抽出红球$\}$，$A_3 = \{$甲、乙第一次同时抽出红球或白球$\}$，则 $P(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. $P(A_2) = \frac{3}{16}$. $P(A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{16}$.

设 B 表示“第二次抽球后红、白球个数不变”事件.

$P(B \mid A_1) = 1 \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$(因此时甲盒中有 2 红球 2 白球，乙盒中有 4 红球，然后从甲盒中抽取白球，从乙盒中抽取红球). 同理，

$$P(B \mid A_2) = 1 \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B \mid A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{16}.$$

则由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3) \\ &= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} = \frac{37}{64}. \end{aligned}$$

例 7.37　口袋中有 10 张卡片，其中两张卡是中奖卡. 三个人依次从口袋中摸出一张(不放回)，问中奖概率是否与摸卡的次序有关？

解析　设 A_i 为第 i 个人中奖的事件，显然 $P(A_1) = \frac{2}{10}$，第二个人中奖情况与第一人是否中奖有关，即

$$P(A_2 \mid A_1) = 1/9, \; P(A_2 \mid \overline{A_1}) = 2/9.$$

而 A_1，$\overline{A_1}$ 构成一个完备事件组，所以由全概率公式

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})$$
$$=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{10}.$$

同理,由于$\{A_1A_2,\ \overline{A_1}A_2,\ A_1\overline{A_2},\ \overline{A_1}\ \overline{A_2}\}$是一个完备事件组,故

$$P(A_3)=P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)P(A_3\mid\overline{A_1}A_2)+$$
$$P(A_1\overline{A_2})P(A_3\mid A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\ \overline{A_2})P(A_3\mid\overline{A_1}\ \overline{A_2})$$
$$=\frac{2\times1}{10\times9}\times0+\frac{8\times2}{10\times9}\times\frac{1}{8}+\frac{2\times8}{10\times9}\times\frac{1}{8}+\frac{8\times7}{10\times9}\times\frac{2}{8}$$
$$=\frac{2}{10}.$$

故中奖概率与摸卡次序无关.

例 7.38　玻璃杯成箱出售,每箱 20 只.假设各箱含 0,1,2 只残次品的概率相应为 0.8,0.1 和 0.1.一顾客欲买下一箱玻璃杯,在购买时,售货员随意取出一箱,而顾客开箱随意察看其中的 4 只,若无残次品,则买下该箱玻璃杯,否则退回.试求

(1) 顾客买下该箱的概率 α;

(2) 在顾客买下的一箱中,确实没有残次品的概率 β.

解析　$A_i=\{$一箱中含有 i 只残次品$\}$,$i=0,1,2$,

$B=\{$顾客买下所察看的一箱$\}$,

则

$$P(A_0)=0.8,\ P(A_1)=P(A_2)=0.1,$$
$$P(B\mid A_0)=1,\ P(B\mid A_1)=C_{19}^4/C_{20}^4=\frac{4}{5},$$
$$P(B\mid A_2)=C_{18}^4/C_{20}^4=\frac{12}{19}.$$

于是

$$\alpha=P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)$$
$$=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.943.$$

$$\beta = P(A_0 \mid B) = \frac{P(A_0 B)}{P(B)} = \frac{P(A_0)P(B \mid A_0)}{\alpha}$$

$$= \frac{0.8 \times 1}{0.943} \approx 0.85.$$

例 7.39　甲袋中放有 5 只红球,10 只白球;乙袋中放有 5 只白球,10 只红球. 今先从甲袋中任取一球放入乙袋,然后从乙袋中任取一球放回甲袋. 求再从甲袋中任取两球全是红球的概率.

解析　A_i={从甲袋中任取一球放入乙袋,再从乙袋任取一球放回甲袋后甲袋中含有 i 只红球}, $i=4, 5, 6$.

B={最后从甲袋中任取两球全是红球}.

则　$P(A_4) = P$(先从甲袋中取出红球,后从乙袋中取出白球)

$$= \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{48},$$

$P(A_5) = P$(先从甲袋中取出红球,后从乙袋中取出红球)

$+ P$(先从甲袋中取出白球,后从乙袋中取出白球)

$$= \frac{5}{15} \cdot \frac{11}{16} + \frac{10}{15} \times \frac{6}{16} = \frac{23}{48},$$

$P(A_6) = P$(先从甲袋中取出白球,后从乙袋中取出红球)

$$= \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{16} = \frac{20}{48}.$$

$$P(B \mid A_4) = C_4^2/C_{15}^2 = \frac{6}{105},\ P(B/A_5) = C_5^2/C_{15}^2 = \frac{10}{105},$$

$$P(B \mid A_6) = C_6^2/C_{15}^2 = \frac{15}{105}.$$

于是由全概率公式得所求概率为

$$P(B) = \sum_{i=4}^{6} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

$$= \frac{5}{48} \cdot \frac{6}{105} + \frac{23}{48} \cdot \frac{10}{105} + \frac{20}{48} \cdot \frac{15}{105} = \frac{1}{9}.$$

例 7.40　设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报

名表,其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份.随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) **求先抽到的一份是女生表的概率** p;

(2) **已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率** q.

解析　设 $H_i=\{$报名表是第 i 区考生的$\}(i=1,2,3)$,

$A_j=\{$第 j 次抽到的报名表是男生表$\}(j=1,2)$,

则 $$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3};$$

$$P(A_1\mid H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_1\mid H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_1\mid H_3)=\frac{20}{25}.$$

(1) $$p=P(\overline{A_1})=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}\mid H_j)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(2) 由全概率公式得

$$P(A_1\mid H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_2\mid H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_2\mid H_3)=\frac{20}{25},$$

$$P(\overline{A_1}A_2\mid H_1)=\frac{7}{30},\ P(\overline{A_1}A_2\mid H_2)=\frac{8}{30},\ P(A_1A_2\mid H_3)=\frac{5}{30},$$

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A_2\mid H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

$$P(\overline{A_1}A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}A_2\mid H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{20}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}.$$

因此,

$$q=P(\overline{A_1}\mid A_2)=P(\overline{A_1}A_2)/P(A_2)=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

评注　**本题的第 2 部分是一个难点,它不能用一个贝叶斯公式**

解决.首先应利用条件概率公式 $P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1}\mid A_2)P(A_2)$,然后利用 $H_1\cup H_2\cup H_3$ 构成 Ω 的一个完备事件组,分子、分母分别用全概率公式进行计算.其中,$P(\overline{A_1}A_2\mid H_1)=\dfrac{7}{30}$,即从第一地区抽取考生为先女后男的概率、基本事件总数为 10×9,先男后女共 7×3 种,故概率 $7\times 3/10\times 9=7/30$,其余类推.至于分母,利用 $P(A_2)=P(A_1)=1-p=61/90$,可以得到结果.

例 7.41　设有四箱产品,次品率分别为 0.1,0.2,0.3,0.4,现从任一箱中任取一件产品,检查结果为合格品,并将此产品放回原箱中,试求仍在这箱中任取一件为次品的概率.

解析　设 $A=\{$第一次取出的是合格品$\}$,

$A_i=\{$第一次是从第 i 箱取出的$\}$　$(i=1,2,3,4)$,

$B=\{$再从该箱取出的次品$\}$,

$B_i=\{$第一次取出的合格品来自第 i 箱$\}$　$(i=1,2,3,4)$,

显见 A_1,A_2,A_3,A_4 互不相容,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{4}A_i=\Omega$.

B_1,B_2,B_3,B_4 互不相容,且 $\bigcup B_i=\Omega$.

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=0.25$,

$P(A\mid A_1)=0.9,P(A\mid A_2)=0.8$,

$P(A\mid A_3)=0.7,P(A\mid A_4)=0.6$,

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(A\mid A_i)=0.75,$$

$$P(B_1)=P(A_1\mid A)=P(A_1)P(A\mid A_1)/P(A)=\frac{9}{30},$$

$$P(B_2)=P(A_2\mid A)=P(A_2)P(A\mid A_2)/P(A)=\frac{8}{30},$$

$$P(B_3)=P(A_3\mid A)=P(A_3)P(A\mid A_3)/P(A)=\frac{7}{30}.$$

$$P(B_4)=P(A_4\mid A)=P(A_4)P(A\mid A_4)/P(A)=\frac{6}{30},$$

$P(B \mid B_1) = 0.1$，$P(B \mid B_2) = 0.2$，

$P(B \mid B_3) = 0.3$，$P(B \mid B_4) = 0.4$，

则 $P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(B \mid B_i) = \frac{7}{30}$.

例 7.42　（药效问题）　某疾病自然痊愈率为 0.25，为判断一种新药是否有效，将它给 10 个病人服用，决策规则为：若 10 个病人中至少有 4 人治好了，则认为这种药有效，提高了痊愈率；反之，则认为无效，求(1) 虽然新药有效，并把痊愈率提高到 0.35，但通过试验却被否定的概率；(2) 新药完全无效，通过试验却被判为有效的概率.

解析　本问题属于贝努里概型.

(1) $p_1 = p(\text{否定新药}) = \sum_{k=0}^{3} C_{10}^{k}(0.35)^k(0.65)^{10-k} \approx 0.5136.$

(2) $p_2 = p(\text{肯定新药}) = \sum_{k=4}^{10} C_{10}^{k}0.25^k 0.75^{10-k} \approx 0.224.$

评注　按数理统计的观点，p_1 是犯第一类错误（弃真错误）的概率，p_2 是犯第二类错误（采伪错误）的概率，注意到 $p_2 \neq 1 - p_1$.

例 7.43　对于掷两颗骰子的随机试验 E：

(1) 写出样本空间 Ω；

(2) 记事件$A=\{$点数之和为奇数$\}$，

$H=\{$至少出现 1 个 1 点$\}$，

求 $P(AH)$，$P(A \cup H)$；

(3) 记事件$B=\{$某一颗骰子出现奇数点$\}$，

$C=\{$另一颗骰子出现奇数点$\}$，

讨论 A，B，C 之间的独立性.

解析　(1) $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

(2) $P(A) = \frac{2C_3^1C_3^1}{6^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$，　$P(H) = \frac{2C_6^1 - 1}{6^2} = \frac{11}{36}$，

$$P(AH) = \frac{C_3^1 + C_3^1}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(A\cup H)=P(A)+P(H)-P(AH)$$
$$=\frac{18+11-6}{36}=\frac{23}{36};$$

(3) $P(B)=P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

$$P(AB)=\frac{3\times 3}{36}=\frac{1}{4}=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=\frac{3\times 3}{36}=\frac{1}{4}=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=\frac{3\times 3}{36}=\frac{1}{4}=P(B)P(C),$$

故 A, B, C 两两独立,但是 $P(ABC)=P(\varnothing)=0\neq P(A)P(B)P(C)$,即 A, B, C 三事件不相互独立.

例 7.44 设甲、乙都有 n 个硬币,全部掷完后分别计算掷出的正面数,求甲、乙两人掷出的正面数相等的概率.

解析 甲、乙二人掷出 k 个正面的概率均为

$$P_n(k)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

由于甲、乙两人是独立投掷的,所以两人掷出正面数相等的概率为

$$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)P_n(k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_n^k C_n^{n-k}=C_{2n}^n/2^{2n}.$$

例 7.45 设一昆虫产 i 个卵的概率为 $\frac{\lambda^i}{i\,!}e^{-\lambda}(i=0,1,\cdots)$. 而每个卵能孵化为成虫的概率为 p,且各卵的孵化是相互独立的,试求这昆虫的下一代有 k 只的概率.

解析 设$B_i=\{$昆虫产 i 个卵$\}$,$(i=0,1,\cdots)$

$A=\{$昆虫的下一代有 k 只$\}$,

$$P(B_i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i\,!},\ (i=0,1,\cdots)$$

$$P(A \mid B_i) = C_i^k p^k (1-p)^{i-k}, (i = k, k+1, \cdots)$$

由全概率公式知

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=k}^{\infty} P(B_i)P(A \mid B_i) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \\
&= \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{i-k}}{(i-k)!} \\
&\xlongequal{令 t = i-k} \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^t}{t!} = \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

例 7.46　对任意 n 个随机事件 $A_1, \cdots, A_n$，证明

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

解析　当 $k=2$ 时，

$$\begin{aligned}
P(\bigcap_{i=1}^{2} A_i) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \\
&\geqslant P(A_1) + P(A_2) - 1.
\end{aligned}$$

设当 $k=n-1$ 时公式成立，即

$$P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - (n-2);$$

则当 $k = n$ 时，

$$\begin{aligned}
P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P\left(A_n \cap \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) \geqslant P(A_n) + P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) - 1 \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).
\end{aligned}$$

归纳得证.

8

随机变量及其概率分布

8.1　基本概念与内容提要

1）随机变量

$X=X(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的单值实函数，且对任一实数 x，$\{X(\omega)\leqslant x\}$ 为一随机事件，则称 X 是一个随机变量.

2）* 分布函数

对随机变量 X 和任意实数 x，称

$$F(x)=P\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}=P\{X\leqslant x\}$$

为随机变量 X 的分布函数，记为 $X\sim F(x)$.

分布函数具有下列性质：

(ⅰ) $F(x)$ 是增函数，即若 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

(ⅱ) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，

$$F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1;$$

(ⅲ) $F(x)$ 是右连续的，即 $F(x+0)=F(x)$.

3）离散型随机变量与分布列

(1) 若随机变量 X 的可能取值为有限个或可列无穷多个，则称 X 为离散型随机变量.

(2) 设 $x_k(k=1, 2, \cdots)$ 是离散型随机变量 X 的所有可能取值，而 p_k 是 X 取值 x_k 的概率，即

$$P\{X=x_k\}=p_k\quad(k=1, 2, \cdots).$$

这称为离散型随机变量 X 的分布列或分布律. 通常,可列成下表:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$p\{X=x_k\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

由 X 的分布列可求得其分布函数

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{k:\,x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}=\sum_{k:\,x_k\leqslant x}p_k.$$

(3) 常见的离散型随机变量

(ⅰ) 两点分布(0—1 分布)　若随机变量 X 的分布列为

$$X\sim\begin{pmatrix}0, & 1\\ 1-p, & p\end{pmatrix}\text{或 }P\{X=x\}=p^x q^{1-x},\ x=0,\ 1,\ q=1-p,$$

则称 X 服从两点分布.

(ⅱ) * 二项分布　若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n,\ q=1-p,$$

则称 X 服从二项分布,记为 $X\sim B(n,\ p)$.

(ⅲ) * 泊松分布　若随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k\,!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \lambda>0,$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松(Poisson)分布,记为 $X\sim P(\lambda)$.

(ⅳ) 超几何分布　若随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n),$$

则称 X 服从超几何分布,记为 $X\sim H(n;\ N,\ M)$.

4) 连续型随机变量与概率密度函数

(1) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,若存在非负可积函数 $p(x)$,使得对任意实数 x,有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t,$$

则称 X 为连续型随机变量,而称 $p(x)$ 为 X 的概率密度函数,简称为

密度.

(2) 密度函数的性质

(ⅰ) $p(x) \geqslant 0$;

(ⅱ) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$;

(ⅲ) $P\{a < X \leqslant b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x$;

(ⅳ) 在 $p(x)$ 的连续点处, $p(x) = F'(x)$, 注意到对连续型随机变量 X, $P\{X = x_0\} = 0$,故有 $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = P\{a < X < b\} = P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X \leqslant b\}$.

(3) * 常见的连续型随机变量

(ⅰ) 均匀分布　若随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布,记为 $X \sim U[a, b]$.

(ⅱ) 指数分布　若随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} (\lambda > 0 \text{ 为常数}),$$

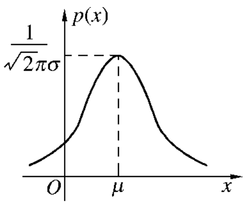
则称 X 服从参数为 λ 的指数分布.

(ⅲ) 正态分布　若随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 μ, $\sigma(\sigma > 0)$ 为常数,则称 X 服从正态分布,记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

正态分布的密度的图形如图所示,曲线关于 $x=\mu$ 对称,且在 $x=\mu$ 处达到其最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$,当 $x \to \pm\infty$ 时, $p(x) \to 0$, 且在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点.



当 σ 固定，而 μ 的值变化时，$p(x)$ 曲线形状不变，只沿着 x 轴平移. 当 μ 固定，而 σ 的值变化时，曲线的中心位置不变，其形状随着最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 和拐点 $\mu\pm\sigma$ 的改变而改变. 可见 σ 的大小决定了 $p(x)$ 曲线的形状，同时也决定了 X 取值的集中程度.

当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，即 $X\sim N(0,\ 1)$ 时，称 X 服从标准正态分布. 标准正态分布的密度和分布函数分别记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\quad(-\infty<x<+\infty).$$

对 $N(0,\ 1)$ 的分布函数 $\Phi(x)$，有

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

若随机变量 X 服从一般正态分布，即 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$F(x)$ 为其分布函数，则

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\quad P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

5）二维随机变量和联合分布函数

由同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量 $X_1(\omega)$，$X_2(\omega)$，…，$X_n(\omega)$ 构成的整体 $X=(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 称为 n 维随机变量或 n 维随机向量. 我们主要讨论二维随机变量 $(X,\ Y)$.

对任意两个实数 x，y，称 $F(x,\ y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}$ 为 $(X,\ Y)$ 的联合分布函数，它具有下列性质：

（ⅰ）$F(x,\ y)$ 对 x 或 y 都是单调不减的；

（ⅱ）$F(-\infty,\ y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,\ y)=0$，

$$F(x,\ -\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,\ y)=0,$$

$$F(-\infty,\ -\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,\ y)=0,$$

$$F(+\infty,\ +\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,\ y)=1;$$

（ⅲ）$F(x,\ y)$ 对 x 或 y 都是右连续的；

(ⅳ) 对任意四个实数 $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$,有

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\}$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

可以证明,任意一个具有上述四个性质的二元函数 $F(x, y)$必是某二维随机变量(X, Y)的联合分布函数.

6) 二维离散型随机变量和联合概率分布

若二维随机变量(X, Y)的可能取值为有限个或可列无穷多个,则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

若 $(x_i, y_i)(i, j = 1, 2, \cdots)$ 是(X, Y) 的所有可能值,而 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots)$,则称 $P\{X = x_i, Y = y_j\}$ 为(X, Y) 的联合概率分布.

(X, Y)的联合概率分布可由下表表示:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

此时有

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j \leqslant y} p_{ij}.$$

7) 二维连续型随机变量和联合密度函数

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为 $F(x, y)$,若存在二元非负可积函数 $p(x, y)$,使得对任意 x, y,有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量,$p(x, y)$称为(X, Y)的分布密度函数或称为(X, Y)的联合密度函数. 它具有下列性质:

(ⅰ) $P(x, y) \geqslant 0$;

(ⅱ) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$;

(ⅲ) $P\{(X, Y) \in G\} = \iint\limits_{G} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 G 是平面上一有界区域,特别

$$P\{x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2\} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(ⅳ) 在 $p(x, y)$的连续点(x, y)处,有

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = p(x, y).$$

常见的二维连续型随机变量有:

(1) 二维均匀分布:设 G 为平面上的一个有界区域,$\mu(G)$为其面积,若(X, Y)的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(G)}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称(X, Y)在区域 G 上服从二维均匀分布 $U(G)$.

(2) 二维正态分布:若(X, Y)的联合密度为:对任意 x, y,

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma \cdot \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$ 均为常数,则称(X, Y)服从二维正态分布,记为$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

8) 边缘分布

设二维随机向量(X, Y)的分布函数为 $F(x, y)$. 称

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, y < +\infty\} = F(x, +\infty),$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X < +\infty, Y \leqslant y\} = F(+\infty, y)$$

分别为 X, Y 的边缘分布函数.

对离散型,若 $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_i\}$, $i, j=1, 2, \cdots$, **分别称**

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= P\{X=x_i\} = \sum_j P\{X=x_i, Y=y_j\} \\ &= \sum_j p_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots), \\ p_Y(y_j) &= P\{Y=y_j\} = \sum_i p\{X=x_i, Y=y_j\} \\ &= \sum_i P_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

为 X, Y **的边缘分布律.**

对连续型,若(X, Y)**的联合密度为**$p(x, y)$**,则分别称**

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}y, \quad p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x$$

为 X, Y **的边缘密度函数.**

9)* 随机变量的独立性

设(X, Y)**的联合分布函数为** $F(x, y)$,X **与** Y **的边缘分布函数分别为** $F_X(x)$ **和** $F_Y(y)$,**若对任意实数** x,y,**均有** $F(x, y)=F_X(x)F_Y(y)$,**则** X **与** Y **是相互独立的.**

(1) **离散型**:X**与**Y**独立**$\Leftrightarrow p_{ij}=p_X(x_i)p_Y(y_j)(i, j=1, 2, \cdots)$.

(2) **连续型**:X **与** Y **独立** $\Leftrightarrow p(x, y)=p_X(x)p_Y(y)$ **对一切** x, y **成立.**

若$(X, Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$,**则**$X$**与**$Y$**独立的充要条件是** $\rho=0$.

10)随机变量函数的分布

设 $g(x)$**是定义在随机变量** X **的一切可能取值** x **的集合上的函数,当** X **取值** x **时,随机变量** Y **取值** $y=g(x)$,**那么** Y **称为随机变量** X **的函数,记作** $Y=g(X)$.

(1) **设离散型随机变量** X **的概率分布为**

$$P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1, 2, \cdots),$$

并且 $g(x_k)(k=1,2,\cdots)$ 的值全不相等，那么 $Y=g(X)$ 的概率分布为

$$P\{Y=g(x_k)\}=p_k \quad (k=1,2,\cdots),$$

若 $g(x_k)(k=1,2,\cdots)$ 中有相等的，则应对它们作适当的并项，即把对应于相等值 $g(x_k)$ 的相应概率相加作为 Y 取 $g(x_k)$ 值的概率.

(2) * 设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$p_X(x)\begin{cases}>0, & a\leqslant x\leqslant b,\\ =0, & \text{其他},\end{cases}$$

这里 a 可以是 $-\infty$，b 可以是 $+\infty$，并且 $g(x)$ 严格单调，那么 $Y=g(X)$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_X[g^{-1}(y)]\cdot|[g^{-1}(y)]'|, & \alpha\leqslant y\leqslant\beta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $g^{-1}(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数，$\alpha=\min\{g(a),g(b)\}$，$\beta=\max\{g(a),g(b)\}$.

一般而言，不论 $g(x)$ 是否为单调函数，可以用下面的所谓分布函数法求出 Y 的密度函数：先求 $Y=g(X)$ 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(x)\leqslant y}p_X(x)\mathrm{d}x,$$

然后在上式两边关于 y 求导数，就得到 Y 的密度函数.

11）两个独立随机变量的简单函数的分布

(1) 设 (X,Y) 是离散型随机变量，$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$，$i,j=1,2,\cdots$，$Z=g(X,Y)$. 若 $g(x_i,y_j)$ 的值均不相同，则将它们依值的大小排成一列，并将对应的概率列于下方，就得到 $Z=g(X,Y)$ 的分布律. 若 $g(x_i,y_j)$ 的值有相同的，则将对应这些相同值的概率相加作为 Z 取这个值的概率.

特别，设 X 与 Y 独立，$Z=X+Y$，则

$$P\{Z=z_k\}=\sum_i P\{X=x_i\}P\{Y=z_k-x_i\}$$

$$= \sum_j P\{Y = y_j\} P\{X = z_k - y_j\}.$$

(2) * 设(X, Y)为连续型随机变量,(X, Y)的联合密度函数为$p(x, y)$, $Z=g(X, Y)$,则 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{g(X, Y) \leqslant z\}$$
$$= \iint\limits_{g(x, y) \leqslant z} p(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Z 的密度函数为 $P_Z(z) = \dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$.

二维随机变量的简单函数主要指 $X \pm Y$, XY, X/Y 等.

8.2 典型习题与试题解析

例 8.1 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = k\} = ap^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

且 X 取奇数的概率为$\dfrac{3}{7}$,求常数 a, p 的值.

解析 由离散型概率分布的性质可知

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} ap^k = \frac{a}{1-p} = 1, \qquad ①$$

又由题意

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 2k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} ap^{2k+1} = \frac{ap}{1-p^2} = \frac{3}{7}, \qquad ②$$

由①②解得 $a = \dfrac{1}{4}$, $p = \dfrac{3}{4}$.

例 8.2 一汽车沿一街道行驶,需经过 3 个设有红绿信号灯的路口,设每个信号灯显示红绿两种信号的时间相等,且各个信号灯工作相互独立,以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口数,试求 X 的概率分布及其分布函数.

解析 记 A_i =“汽车在第 i 个路口遇到红灯”, $i = 1, 2, 3$,

则 A_1, A_2, A_3 相互独立,且 $P(A_i)=P(\overline{A_i})=\dfrac{1}{2}, i=1,2,3$.

由题意,X 可能的取值为 0,1,2,3,则

$$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1\}=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2)=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=2\}=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=\frac{1}{8},$$

$$P\{X=3\}=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=\frac{1}{8},$$

故 X 的分布列如下

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

例 8.3　设 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-Ae^{-x} & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

求 $P\{-2<X<1\}$.

解析　由分布函数的右连续性得

$$F(0+0)=F(0),$$

即

$$1-A=0 \Rightarrow A=1.$$

则
$$\begin{aligned} P\{-2<X<1\} &= F(1)-F(-2) \\ &= (1-\mathrm{e}^{-1})-0=1-\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

例 8.4 下列函数是否为分布函数？若是，则判断是哪种类型随机变量的分布函数.

(1) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ \dfrac{1}{2}, & -2\leqslant x<0, \\ 1, & x\geqslant 0, \end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi, \\ 1, & x\geqslant \pi, \end{cases}$

(3) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x\geqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

(4) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x+\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}, \\ 1, & x\geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

解析 (1) 由题设，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调不减，右连续，并有 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，所以 $F(x)$ 是某一随机变量 X 的分布函数. 因 $F(x)$ 是一阶梯函数，所以 X 是离散型随机变量，其概率分布为：$P\{X=-2\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{X=0\}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因 $F(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调下降，所以 $F(x)$ 不可能是分布函数.

(3) 因为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，单调不减，且有 $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$，$F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$，所以 $F(x)$ 是某一随机变量 X 的分布函数.

设非负函数

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } x \geqslant \pi/2, \\ \cos x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则因为

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

即 $\int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t = F(x)$，所以 $F(x)$ 是连续型随机变量 X 的分布函数.

(4) 因为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调不减，右连续，且有 $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$，$F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$，所以 $F(x)$ 是某一随机变量 X 的分布函数.

因为 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续，$F(x)$ 又不是阶梯函数，故 X 既不是离散型的随机变量，也不是连续型的随机变量.

例 8.5　向半径为 r 的圆内随机抛一点，求此点到圆心之距离 X 的分布函数 $F(x)$，并求 $P\left\{x > \frac{2}{3}r\right\}$.

解析　事件 $X \leqslant x$ 表示所抛之点落在半径为 $x(0 \leqslant x \leqslant r)$ 的圆内，由几何概率知：

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\frac{\pi x^2}{\pi r^2}=\left(\frac{x}{r}\right)^2,$$

从而

$$P\left\{X>\frac{2}{3}r\right\}=1-P\left\{X\leqslant\frac{2}{3}r\right\}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

例 8.6　假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布,平均无故障工作的时间(EX)为 5 小时. 设备定时开机,出现故障时自动关机,而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

解析　设 X 的分布参数为 λ. 由于 $EX=\frac{1}{\lambda}=5$,则 $\lambda=\frac{1}{5}$.

显见

$$Y=\min\{X,2\}.$$

当 $y<0$ 时,$F(y)=0$;当 $y\geqslant 2$ 时,$F(y)=1$.

设 $0\leqslant y<2$,有

$$\begin{aligned}F(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}\\&=P\{X\leqslant y\}=1-e^{-\frac{y}{5}}.\end{aligned}$$

于是,Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & 若\ y<0,\\ 1-e^{-\frac{y}{5}}, & 若\ 0\leqslant y<2,\\ 1, & 若\ y\geqslant 2.\end{cases}$$

例 8.7　设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$,且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,$F(x)$ 是 X 的分布函数,则对任意实数 a,有　(　　)

A. $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)dx$　　B. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx$

C. $F(-a)=F(a)$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

解析　因为 $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)d(x)=-\int_{+\infty}^{a}\varphi(-t)dt$

$$=\int_a^{+\infty}\varphi(-t)dt$$

$$= \int_{a}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-a}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} \varphi(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} \varphi(-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0}^{a} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

而

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}(x) = F(-a) + \int_{-a}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2F(-a) + 2\int_{0}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$F(-a) = \frac{1}{2} - \int_{0}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 8.8　设随机变量 X 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2-x, & 1 \leqslant x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ **求 X 的分布函数** $F(x)$.

解析　$x<0$ **时**，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x = 0$，

$0 \leqslant x < 1$ **时**，$F(x) = \int_{0}^{x} px\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$，

$1 \leqslant x < 2$ **时**，$F(x) = \int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{x} (2-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$，

$x \geqslant 2$ **时**，$F(x) = 1$，

即

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

这个分布叫辛普森分布或三角分布.

例 8.9 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,则随 σ 的增大,概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ ( )

A. 单调增大 B. 单调减小

C. 保持不变 D. 增减不定

解析 由于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

$$y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

$$P\{|X-\mu|<\sigma\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right\} = P\{|y|<1\},$$

可见此概率不随 σ 和 μ 的变化而变化.故选(C).

例 8.10 假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$服从参数为 λt 的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间的时间间隔 T 的概率分布;

(2) 求在设备已无故障工作 8 小时的情形下,再无故障运行 8 小时的概率 Q.

解析 (1) 因为 $N(t)$为时间间隔 $t(t\geqslant 0)$内发生故障的次数,又 T 表示相继两次故障间的时间间隔,所以当 $T>t$ 时,必有 $N(t)=0$(即不发生故障);反之,若 $N(t)=0$,即在时间间隔 t 内尚未发生故障,必有 $T>t$.故事件$\{T>t\}$与事件$\{N(t)=0\}$等价.由于 T 是非负的随机变量,于是当 $t<0$ 时,$F(t)=P\{T\leqslant t\}=0$,当 $t\geqslant 0$ 时,$F(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\} = 1-e^{-\lambda t}$,即 T 服从参数为 λt 的指数分布.

(2) $$Q = P\{T\geqslant 16/T\geqslant 8\} = \frac{P\{T\geqslant 16, T\geqslant 8\}}{P\{T\geqslant 8\}}$$

$$= \frac{P\{T\geqslant 16\}}{P\{T\geqslant 8\}} = \frac{1-P\{T<16\}}{1-P\{T<8\}}$$

$$= \frac{1-F(16)}{1-F(8)} = \frac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-8\lambda}.$$

评注　本例的关键要理解事件$\{T>t\}$与事件$\{N(t)=0\}$是等价的，第(2)问反映了指数分布的无记忆性。

例 8.11　在电源电压不超过 200 V，在 200 V～240 V 之间和超过 240 V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2. 假设电源电压 $X\sim N(220,\ 25^2)$，试求

(1) 该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200 V～240 V 的概率 β.

解析　引进下列事件：

$A_1=\{$电压不超过 200 V$\}$，

$A_2=\{$电压在 200 V ～ 240 V 之间$\}$，

$A_3=\{$电压超过 240 V$\}$，

$B=\{$电子元件损坏$\}$，

则
$$P(A_1)=P(X\leqslant 200)=\Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)=\Phi(-0.8)$$
$$=1-\Phi(0.8)=0.212,$$
$$P(A_2)=P(200<X<240)=\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right)-\Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)$$
$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576,$$
$$P(A_3)=P(X\geqslant 240)=1-\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right)$$
$$=1-\Phi(0.8)=0.212.$$

(1) 依题意 $P(B|A_1)=0.1$，$P(B|A_2)=0.001$，$P(B|A_3)=0.2$，由全概率公式
$$\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$
$$=0.212\times 0.1+0.576\times 0.001+0.212\times 0.2$$
$$=0.064\ 2.$$

(2) 由贝叶斯公式知

$$\beta = P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{\alpha}$$
$$= \frac{0.576 \times 0.001}{0.0642} \approx 0.009.$$

例 8.12 设随机变量 X 在区间$[2, 5]$上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立测量，试求至少有两次观测大于 3 的概率.

解析 因 $X \sim U[2, 5]$，则其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 2 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

以 A 表示事件“对 X 的观测大于 3”，即 $A = \{X > 3\}$，则

$$P(A) = P\{X > 3\} = \int_3^5 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

以 μ 表示三次独立观测中观测值大于 3 的次数，则 $\mu \sim B\left(3, \dfrac{2}{3}\right)$，于是所求概率为：

$$P(\mu \geqslant 2) = P(\mu = 2) + P(\mu = 3)$$
$$= C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) + C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}.$$

例 8.13 使用了 t 小时的电子管在以后的 Δt 小时内损坏的概率等于$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$，其中 λ 是不依赖于 t 的常数，求电子管在 T 小时内损坏的概率.

解析 设 ξ 表示电子管损坏前已使用的时数（即寿命）.

$F(t)$为 ξ 的分布函数，则

$$P\{t < \xi < t + \Delta t \mid \xi > t\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

即
$$\frac{P\{t < \xi < t + \Delta t, \xi > t\}}{P\{\xi > t\}}$$
$$= \frac{P\{t < \xi < t + \Delta t\}}{P\{\xi > t\}} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$
$$F(t + \Delta t) - F(t) = \lambda[1 - F(t)]\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\lambda[1-F(t)],$$

$$F'(t)=\lambda[1-F(t)],$$

$$\frac{\mathrm{d}[1-F(t)]}{1-F(t)}=-\lambda\mathrm{d}t.$$

注意到初始条件 $F(0)=0$,积分则得

$$\ln[1-F(t)]\big|_0^t=-\lambda t\big|_0^t,$$

$$1-F(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\quad(t>0).$$

则 ξ 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

所求概率为

$$F(T)=1-\mathrm{e}^{-\lambda T},$$

ξ 的密度为

$$p(t)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

这可看作是指数分布的来源.

例 8.14　假设一电路装有 3 个同种电气元件,其工作状态相互独立,且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布.当 3 个元件都无故障时,电路正常工作,否则整个电路不能正常工作,试求电路正常工作时间 T 的概率分布.

解析　以 $X_i(i=1,2,3)$表示第 i 个电气元件无故障工作的时间,则 X_1,X_2,X_3 独立同分布,其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

设 $G(t)$ 是 T 的分布函数,当 $t\leqslant 0$ 时,$G(t)=0$,当 $t>0$ 时,

$$\begin{aligned}G(t)&=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}\\&=1-P\{X_1>t,X_2>t,X_3>t\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t)P(X_3 > t)\\
&= 1 - [1 - F(t)]^3\\
&= 1 - \mathrm{e}^{-3\lambda t},
\end{aligned}
$$

即
$$G(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

于是 T 服从参数为 3λ 的指数分布.

例 8.15　假设一厂家生产的每台仪器,以概率 0.7 可以直接出厂,以概率 0.3 需进一步调试.经调试后以概率 0.8 可以出厂,以概率 0.2 定为不合格品不能出厂.现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立).求

(1) 全部能出厂的概率 α;

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β;

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ.

解析　对于新生产的每台仪器,引进事件,$A=\{$仪器需进一步调试$\}$,$B=\{$仪器能出厂$\}$,则 $\overline{A}=\{$仪器能直接出厂$\}$,$AB=\{$仪器经调试后能出厂$\}$.由条件知 $B = \overline{A} \cup AB$,$P(A) = 0.3$,$P(B \mid A) = 0.8$,$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$,$P(B) = P(\overline{A}) + P(AB) = 0.7 + 0.24 = 0.94$.

设 X 为所生产的 n 台仪器中能出厂的台数,则 $X \sim B(n, 0.94)$.因此,

$$
\begin{aligned}
&\alpha = P(X = n) = 0.94^n,\\
&\beta = P(X = n - 2) = C_n^2 (0.94)^{n-2}(0.06)^2,\\
&\theta = P(X \leqslant n - 2) = 1 - P(X = n - 1) - P(X = n)\\
&\quad = 1 - n(0.94)^{n-1}(0.06) - (0.94)^n.
\end{aligned}
$$

例 8.16　设随机变量 X 的绝对值不大于 1,$P(X = -1) = \dfrac{1}{8}$,$P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$.在事件 $\{-1 < X < 1\}$ 出现的条件下,X 在 $(-1, 1)$

内任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比. 试求:(1) X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$;(2) X 取负值的概率.

解析 由题意,在事件$\{-1<X<1\}$出现条件下,X 在$(-1,1)$内任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比,故 $P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}=k[x-(-1)]=k(x+1)$,其中 k 为比例常数. 由于区间$(-1,x]$ 与区间$(-1,x)$ 的长度相等,则有 $P\{-1<X<x\mid -1<X<1\}=P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}=k(x+1)$,当$x=1$ 时,$P(-1<X<1\mid -1<X<1)=1$,从而 $k\cdot 2=1$, $k=\dfrac{1}{2}$,则

(1) 由条件知,当 $x<-1$ 时,$F(x)=0$, $F(-1)=\dfrac{1}{8}$, $P(-1<X<1)=1-P(X=-1)-P(X=1)=1-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$;

事件$\{-1<X\leqslant x\}(-1<x<1)$ 在 X 的值属于区间$(-1,1)$的条件下的条件概率为

$$P(-1<X\leqslant x\mid -1<X<1)=\frac{x+1}{2},$$

于是对于 $-1<x<1$, 有

$$\begin{aligned}&P(-1<X\leqslant x)=P(-1<X\leqslant x,\ -1<x<1)\\&=P(-1<X<1)P(-1<X\leqslant x/-1<X<1)\\&=\frac{5}{8}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16},\end{aligned}$$

故 $F(x)=P(X\leqslant -1)+P(-1<X\leqslant x)$

$$\begin{aligned}&=F(-1)+P(-1<X\leqslant x)\\&=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{7+5x}{16};\end{aligned}$$

对于 $x\geqslant 1$,有 $F(x)=1$,

因此
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & \text{若 } -1\leqslant x<1,\\ 1, & \text{若 } x\geqslant 1.\end{cases}$$

(2) $P(X<0)=P(X\leqslant 0)-P(X=0)=F(0)-0=\dfrac{7}{16}$.

评注　本例中的随机变量 X 既不是离散型,也不是连续型.

例 8.17　设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且
$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$
则必有　(　　)

A. $\sigma_1<\sigma_2$　　B. $\sigma_1>\sigma_2$

C. $\mu_1<\mu_2$　　D. $\mu_1>\mu_2$

解析　两边同时作标准化变换得
$$P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\right\},$$
即
$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right),$$
$$\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}\Rightarrow\sigma_2>\sigma_1 .$$
故选(A).

例 8.18　一整数 n 等可能地在 $1,2,\cdots,10$ 这十个自然数中任取一值,设 $d=d(n)$ 为能整除 n 的正整数的个数,$F=F(n)$ 为能整除 n 的素数的个数,试求 d 与 F 的联合分布律及边缘分布律.

解析　经逐个验算可知 d 与 F 的取值情况如下表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
$F(n)$	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

因为

$$P\{d=1,\ F=0\}=\frac{1}{10},\ P\{d=1,\ F=1\}=0,$$

$$P\{d=1,\ F=2\}=0,\ P\{d=2,\ F=1\}=\frac{4}{10}.$$

其他类似可得,故$(d,\ F)$**的联合分布律及边缘分布律为**:

$F(n)$ \ $d(n)$	1	2	3	4	$p_F(i)$
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	0	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
$p_d(j)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	

例 8.19　设$(X,\ Y)$**的联合分布函数为**

$$F(x,\ y)=G(x)[H(y)-H(-\infty)]\quad(-\infty<x,\ y<+\infty),$$

且 $G(+\infty)$, $H(+\infty)$, $H(-\infty)$ **都存在,问** X **与** Y **之间是否相互独立.**

解析　$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,\ y)$$
$$=F(x,\ +\infty)=G(x)[H(+\infty)-H(-\infty)],$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,\ y)$$
$$=F(+\infty,\ y)=G(+\infty)[H(y)-H(-\infty)],$$

由于 $F(+\infty,\ +\infty)=1$,**所以**

$$G(+\infty)[H(+\infty)-H(-\infty)]=1.$$

于是　$F_X(x)\cdot F_Y(y)$

$$=G(x)[H(+\infty)-H(-\infty)]\cdot G(+\infty)[H(y)-H(-\infty)]$$
$$=G(x)[H(y)-H(-\infty)]\cdot G(+\infty)[H(+\infty)-H(-\infty)]$$
$$=G(x)[H(y)-H(-\infty)]=F(x,\ y)\quad(-\infty<x,\ y<+\infty).$$

从而 X 与 Y 相互独立.

例 8.20 一电子仪器由两个部件构成,以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位:千小时),已知 X 和 Y 的分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & \text{若 } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否独立?(2) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α.

解析 (1) 设 X 与 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则
$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

由于 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ 对一切 x, y 成立,所以 X 与 Y 相互独立.

(2)
$$\begin{aligned} \alpha &= P(X > 0.1, Y > 0.1) = P(X > 0.1)P(Y > 0.1) \\ &= [1 - F_X(0.1)][1 - F_Y(0.1)] \\ &= e^{-0.05} \cdot e^{-0.05} = e^{-0.1}. \end{aligned}$$

例 8.21 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量,X 服从(0, 1)上的均匀分布,Y 的密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases}$$

设有 u 的二次方程 $u^2 + 2Xu + Y = 0$, 求此方程有实根的概率.

解析 由题设知

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

由于 X, Y 相互独立,所以 X 与 Y 的联合密度为

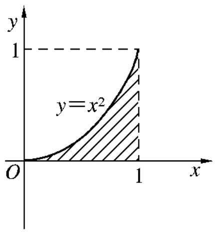
$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & 0 < x < 1, \quad y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$P\{$方程有实根$\}$

$= P\{\Delta = 4X^2 - 4Y^2 \geqslant 0\} = P\{X^2 \geqslant Y\}$

$= \iint\limits_{x^2 \geqslant y} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y$（如图）



$= 1 - \left[\int_{-\infty}^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right]$

$= 1 - \sqrt{2\pi}\left[\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right]$

$= 1 - \sqrt{2\pi}[\Phi(1) - \Phi(0)] = 0.144\,8.$

例 8.22　已知(X,Y)的联合密度函数为

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$.

解析　由于联合密度函数是分块定义的，因此求联合分布函数时应就(x,y)所在的不同区域分别进行计算. 则

(1) 当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时，$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = 0$；

(2) 当 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 时，$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = x^2y^2$；

(3) 当 $x > 1, y > 1$ 时，$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 1$；

(4) 当 $x > 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 时，$F(x,y) = \int_0^1 2u \int_0^y 2v\mathrm{d}v\mathrm{d}u = y^2$；

(5) 当 $y > 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$F(x,y) = \int_0^1 2v \int_0^x 2u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = x^2$.

所以
$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>1,\\ y^2, & x>1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & x>1, y>1.\end{cases}$$

例 8.23 设二维随机变量(X,Y)**在矩形** $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$**上服从均匀分布，试求边长为** X **和** Y **的矩形面积** S **的概率密度** $f(s)$.

解析 (X,Y)的概率密度为 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{若}(x,y)\in G,\\ 0, & \text{若}(x,y)\overline{\in} G,\end{cases}$

设 $F(S)=P\{S\leqslant s\}$为 S 的分布函数，则

当 $s\leqslant 0$ 时， $F(s)=0$;

当 $s\geqslant 2$ 时， $F(s)=1$;

当 $0<s<2$ 时，曲线 $xy=s$ 与矩形 G 的上边交于点$(s,1)$；位于曲线 $xy=s$ 上方的点满足 $xy=s$，位于下方的点满足 $xy<s$，因此

$$\begin{aligned}F(s) &= P\{S\leqslant s\} = P\{XY\leqslant s\} = 1-P\{XY>s\}\\ &= 1-\iint\limits_{xy>s}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 1-\frac{1}{2}\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\mathrm{d}y = \frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).\end{aligned}$$

所以
$$f(s)=F'(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & \text{若 } 0<s<2,\\ 0, & \text{若 } s\leqslant 0 \text{ 或 } s\geqslant 2.\end{cases}$$

例 8.24 已知随机变量 X_1 **和** X_2 **的概率分布**

$$X_1\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix},\qquad X_2\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

而且 $P\{X_1X_2=0\}=1$.

(1) 求 X_1 和 X_2 的联合分布;

(2) 问 X_1 和 X_2 是否独立?为什么?

解析　(1) 由 $P\{X_1X_2=0\}=1$,可见

$$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0.$$

易见

$$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0.$$

于是,得 X_1 和 X_2 的联合分布

X_2 \ X_1	-1	0	1	$\sum$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\sum$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) 由以上结果,可见

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=0,$$

$$P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

于是,X_1 和 X_2 不独立.

例 8.25　设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布:$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$,$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$,则下列各式中成立的是　　(　　)

A. $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　　　B. $P\{X=Y\}=1$

C. $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$　　　　D. $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$

解析
$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}\\&=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=-1\}P\{Y=-1\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

而 $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2}$, $P\{XY=1\}=\frac{1}{2}$. **故选** A.

例 8.26 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间$[0,3]$上的均匀分布,求 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}$.

解析
$$\begin{aligned}&P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}\\&=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}\\&=P\{X\leqslant 1\}\cdot P\{Y\leqslant 1\}=\frac{1-0}{3-0}\cdot\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

例 8.27 设 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}\quad(k=1,2,\cdots),$$

求 $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的概率分布.

解析 因为

$$\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}-1, & k=4n-1,\\0, & k=2n,\\1, & k=4n-3,\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

所以,$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$**只有** 3 **个可能取值**$-1,0,1$,**且**

$$\begin{aligned}P\{Y=-1\}&=P\{X=3\}+P\{X=7\}+P\{X=11\}+\cdots\\&=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{2}{15},\end{aligned}$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\}+P\{X=4\}+P\{X=6\}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},$$
$$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=5\}+P\{X=9\}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15},$$

于是，$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的分布列为

$$\begin{pmatrix}-1, & 0, & 1\\ \frac{2}{15}, & \frac{1}{3}, & \frac{8}{15}\end{pmatrix}.$$

例 8.28　设随机变量 X 在区间$(1,2)$上服从均匀分布，求 $Y=e^{2X}$的密度函数.

解析　X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因为 $y=e^{2x}$是 x 的单调增加函数，其反函数为 $x=\frac{1}{2}\ln y, x'_y=\frac{1}{2y}$.

当 $1<x<2$ 时，$e^2<y<e^4$. 所以 $Y=e^{2X}$的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)\left|\left(\frac{1}{2}\ln y\right)'\right|, & e^2<y<e^4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

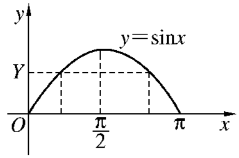
例 8.29　设随机变量 X 的概率密度为

$$f_x(x)=\begin{cases}2x/\pi^2, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

解析　由题意,Y 的取值范围为 $0<y<1$,

当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\varnothing\}=0$,从而 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$.



当 $y\geqslant 1$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{$必然事件$\}=1$,从而 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$.

当 $0<y<1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}\\&=P\{(0\leqslant X\leqslant \arcsin y)\cup(\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant \pi)\}\\&=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{2\arcsin y}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{2(\pi-\arcsin y)}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{2}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}$,

综合即得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 8.30　设随机变量 X 服从标准正态分布,即 $X\sim N(0,1)$,试求(1) $Y=2X^2+1$;(2) $Z=|X|$ 的密度函数.

解析　因为 $X\sim N(0,1)$,所以

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty.$$

(1) $Y=2X^2+1$,Y 的分布函数,

$F_Y(y)=P\{2X^2+1\leqslant y\}$,当 $y\leqslant 1$ 时,$F_Y(y)=0$,

当 $y>1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{2X^2+1\leqslant y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}<X<\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}\\&=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, & y>1.\end{cases}$ 于是Y的概率密度函数为

$$p_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) $Z=|X|$的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant x\}=P\{|X|\leqslant z\},$$

当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$,

当 $z\geqslant 0$ 时,

$$F_Z(z)=P\{|X|\leqslant x\}=P\{-z\leqslant X\leqslant z\}=\int_{-z}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

于是,Z 的概率密度函数为

$$p_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

例 8.31　设 X 与 Y 相互独立,它们分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布,试证 $Z=X+Y$ 服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

解析　因为

$$P\{X=i\}=\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\quad (i=0,1,2,\cdots),$$

$$P\{Y=j\}=\frac{\lambda_2^j}{j!}e^{-\lambda_2}\quad (j=0,1,2,\cdots),$$

所以由 X,Y 的独立性

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\right)$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

即 Z **服从参数为** $\lambda_1+\lambda_2$ **的泊松分布.**

例 8.32　假设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 **相互独立且同分布,** $P\{X_i=0\}=0.6,P\{X_i=1\}=0.4(i=1,2,3,4)$**,求行列式** $X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}$**的概率分布.**

解析　记 $Y_1=X_1X_4,Y_2=X_2X_3$**,则** $X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}=Y_1-Y_2$,

随机变量 Y_1 **与** Y_2 **独立同分布,**

$$P(Y_1=1)=P(Y_2=1)=P(X_2=1,X_3=1)$$

$$=P(X_2=1)P(X_3=1)=0.4^2=0.16,$$

$$P(Y_1=0)=P(Y_2=0)=1-0.16=0.84,$$

随机变量 $X=Y_1-Y_2$ **可能取值**$-1,0,1$.

$$P(X=-1)=P(Y_1=0,Y_2=1)=P(Y_1=0)P(Y_2=1)$$

$$=0.84\times0.16=0.1344,$$

$$P(X=1)=P(Y_1=1,Y_2=0)=P(Y_1=1)P(Y_2=0)$$

$$=0.16\times0.84=0.1344,$$

$$P(X=0)=1-0.1344-0.1344=0.7312,$$

于是,行列式的概率分布为

$$X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{pmatrix}.$$

例 8.33　设 X **与** Y **相互独立,且都服从几何分布:**

$$P\{X=i\}=P(Y=i)=q^{i-1}p,\quad i=1,2\cdots,\quad q=1-p,$$

令 $Z=\max\{X,Y\}$**,试求**(1) Z **的分布律;**(2) (Z,X)**的联合分布列.**

解析　(1) 因为 X 与 Y 独立，所以 Z 的分布律为

$$
\begin{aligned}
P\{Z=k\} &= P\{\bigcup_{i=1}^{k-1}(X=i,Y=k)\cup\bigcup_{j=1}^{k}(X=i,Y=j)\} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} P\{X=i,Y=k\}+\sum_{j=1}^{k} P\{X=i,Y=j\} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p^2 q^{i+k-2}+\sum_{j=1}^{k} p^2 q^{k+j-2} \\
&= pq^{k-1}(2-q^{k-1}-q^k).\ (k=1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

(2) (Z,X) 的联合分布律为

当 $k=i$ 时，$P(Z=k,X=k)$

$$
\begin{aligned}
&= P\{\bigcup_{j=1}^{k}(X=k,Y=j)\}=\sum_{j=1}^{k} P\{X=k,Y=j\} \\
&= \sum_{j=1}^{k} p^2 q^{k+j-2}=pq^{k-1}(1-q^k),k=1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

当 $k<i$ 时，

$$P\{Z=k,X=i\}=P\{\varnothing\}=0;$$

当 $k>i$ 时，

$$
\begin{aligned}
P\{Z=k,X=i\} &= P\{X=i,Y=k\} \\
&= p^2 q^{i+k-2}.\ (i=1,2,\cdots;k=i+1,i+2,\cdots)
\end{aligned}
$$

例 8.34　设 X 与 Y 相互独立，它们都服从指数分布，即

$$
f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0,\end{cases}
$$

$$
f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\geqslant 0, \\ 0 & y<0,\end{cases}
$$

求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数.

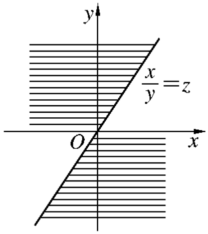
解析　$Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\leqslant z\right\}$$

$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}\leqslant z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{yz}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x+$$

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{yz}^{+\infty}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x,$$



于是,$Z=X/Y$ **的密度函数为**

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_0^{+\infty}f_X(yz)f_Y(y)y\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0}f_X(yz)f_Y(y)y\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(yz)f_Y(y)|y|\mathrm{d}y.$$

当 $z>0$ **时**,

$$f_Z(z)=\lambda^2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda y(1+z)}y\mathrm{d}y=\frac{1}{(1+z)^2};$$

当 $z\leqslant 0$ **时**,

$$f_Z(z)=0.$$

综合起来,有

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

例 8.35　在区间$[0,1]$**上随机地投掷两点,试求这两点间距离的密度函数.**

解析　**设** X **和** Y **分别表示两投点的坐标,那么**(X,Y)**服从均匀分布,其联合密度函数为**

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

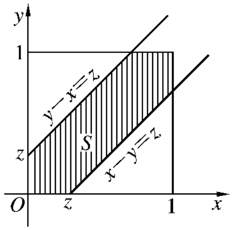
由题意,所求问题即为求 $Z=|X-Y|$**的密度函数.**

Z **的分布函数为**

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X-Y|\leqslant z\}=\iint\limits_{|x-y|\leqslant z} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$.

当 $0\leqslant z<1$ 时，区域 $|x-y|\leqslant z$ 与正方形区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 的公共部分如图所示，用 S 表示其面积，则



$$S=1-(1-z)^2=2z-z^2,$$

于是

$$F_Z(z)=\iint\limits_{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2z-z^2.$$

当 $z\geqslant 1$ 时，区域 $|x-y|\leqslant z$ 包括整个正方形区域：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，于是

$$F_Z(z)=\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

即

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 2z-z^2, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

从而，$Z=|X-Y|$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 8.36　设 X 与 Y 相互独立，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$，求(1) $Z_1=\max(X,Y)$的分布函数；(2) $Z_2=\min(X,Y)$的分布函数.

解析　(1) Z_1 的分布函数

$$\begin{aligned}F_{Z_1}(z)&=P\{Z_1\leqslant z\}=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}\\&=P\{X\leqslant z, Y\leqslant z\}=P\{Z\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}\\&=F_X(z)F_Y(z).\end{aligned}$$

(2) Z_2 的分布函数

$$\begin{aligned}F_{Z_2}(z) &= P(Z_2 \leqslant z) = P\{\min(X,Y) \leqslant z\} \\ &= 1 - P\{\min(X,Y) > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\ &= 1 - [1 - P\{X \leqslant z\}][1 - P\{Y \leqslant z\}] \\ &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].\end{aligned}$$

特别，若 X 与 Y 独立同分布，分布函数为 $F(x)$，则

$$Z_1 \text{ 的分布函数 } F_1(z) = [F(z)]^2,$$

$$Z_2 \text{ 的分布函数 } F_2(z) = 1 - [1 - F(z)]^2.$$

评注　若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，分布函数为 $F(x)$，则
$Z_1 = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$**的分布函数** $F_1(z) = [F(z)]^n$，
$Z_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$**的分布函数** $F_2(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$.

例 8.37　设$(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \cdots, \xi_{(n)})$是 n 维随机向量$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的分量按从小到大重新排列后的向量，它们是否具有相同的分布？

解析　例如，设相互独立的随机变量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 的概率分布均为

ξ_i	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 ξ_1, ξ_2, ξ_3 的各种配合为 $3^3 = 27$ 种等可能情形，即

$$P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j, \xi_3 = k\} = \frac{1}{27}, i, j, k = -1, 0, 1.$$

但按从小到大排列为$\{\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}\}$后，只有 10 种情形（这时不是等可能的了）.

由此例可见它们的分布不同.

阶段复习试题四

1. 以 A,B,C 表示三个随机事件,试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(1) 三个事件都不出现;(2) 不多于一个事件;

(3) A,B 至少有一个出现,C 不出现;(4) 恰好有两个出现.

2. 下列命题是否成立(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$;(2) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$;(3) $(A\cup B)-B=A$;(4) $(A-B)\cup B=A$.

3. 口袋中有 n 只白球,n 只黑球,从中一个一个不返回地摸球,直至摸完为止,求黑白球恰好相间取出的概率.

4. 为减少 16 个队的比赛场次,事先任意分成 4 组,每组 4 队,求上届冠、亚军不在同一组的概率.

5. 5 个人在第一层进入十一层楼的电梯,假设每个人以相同的概率走出任一层(从第二层开始),求此 5 人在不同楼层走出的概率.

6. 在半径为 R 的圆内画平行弦,若这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的,求任意画的弦的长度大于 R 的概率.

7. 已知 $P(\overline{A})=0.3$,$P(B)=0.4$,$P(A\overline{B})=0.5$,求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

8. 设 A,B 为两事件,$P(A)=0.6$,$P(B)=0.7$,问

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值,最小值是多少?

9. 一批零件共 100 个,次品率为 10%,每次从中取一个,求第三次才取得合格品的概率,分不放回和有放回两种情况求解.

10. 设甲袋中有 $N-1$ 个白球和 1 个黑球,乙袋中有 N 个白球.若每次从甲、乙两袋中分别取出一只球交换,记事件 A_i 为经过 i 次交换后黑球仍在甲袋中,求证:

$$P(A_{i+1})=\frac{1}{N}+\left(1-\frac{2}{N}\right)P(A_i).\quad (i=0,1,2\cdots)$$

11. **有两批人员,甲批人员都会英语,乙批中有$\frac{3}{4}$的人会英语,$\frac{1}{4}$的人会法语,现从任意一批中随机地询问一人,知道他会英语,然后从同一批中再随机地询问一人,求他会法语的概率.**

12. **甲、乙两人进行射击比赛,每次胜者得 1 分,已知每 1 次射击中甲胜的概率为 α,乙胜的概率为 β,$\alpha+\beta=1$,比赛进行到有一人比对方多 2 分为止,多 2 分者最终获胜,求甲最终获胜的概率.**

13. **设 A,B,C 为三个事件,且 $P(A)=a,P(B)=2a,P(C)=3a$,$P(AB)=P(AC)=P(BC)=b$,证明:$a\leqslant\frac{1}{4},b\leqslant\frac{1}{4}$.**

14. **甲掷硬币 $n+1$ 次,乙掷 n 次,求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率.**

15. **设二阶行列式的每一个元素均以$\frac{1}{2}$的概率取 0 或 1,各个元素取何值是相互独立的,求这个行列式的值为正数的概率.**

16. **甲、乙两选手进行单打比赛,已知每局中甲胜的概率为 0.6,乙胜的概率为 0.4,可采用三局二胜制或五局三胜制,问哪种赛制对甲更有利.**

17. **设电路由 A,B,C 三个元件组成,若 A,B,C 发生故障的概率分别为 0.3,0.2,0.2,且各元素独立工作,若 A 与两个并联的元件 B 及 C 串联而成,求电路发生故障的概率.**

18. **设随机变量 ξ 的概率密度为** $f(x)\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,1],\\ \frac{2}{9}, & x\in[3,6],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

若 k 使得 $P\{\xi \geqslant k\} = \frac{2}{3}$，求 k 的取值范围.

19．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{x(1+x^2)}$，求 $Y=1-\sqrt[3]{X}$的概率密度.

20．设随机变量 X 与 Y 同分布，X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

已知事件 $A=\{X>a\}$和 $B=\{Y>a\}$相互独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，求常数 a.

21．设 D 是平面上以原点为圆心，以 r 为半径的圆，(X,Y)服从 D 上的二维均匀分布，求概率 $P\{|X|\leqslant\frac{r}{2}\}$.

22．设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1,\ |y| < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求(1) 边际密度函数 $P_X(x)$ 和 $P_Y(y)$；(2) $P\left\{Y > \frac{1}{2}\right\}$.

23．设连续型随机变量 X,Y 相互独立且服从同一分布，证明 $P\{X\geqslant Y\}=\frac{1}{2}$.

24．设 X 与 Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且 $P\{X\leqslant 2,Y\leqslant -2\}=\frac{1}{4}$，求 $P\{x>2,Y>-2\}$.

25．设 X 与 Y 相互独立，且都服从 $0-1$ 分布，$P(X=1)=p$，设

$$Z=\begin{cases} 1, & X+Y\ \text{为奇数}, \\ 0, & X+Y\ \text{为偶数}. \end{cases}$$

试求 $p(0<p<1)$使得 Z 与 X 相互独立.

26. 已知 X 和 Y 相互独立且服从同一(几何)分布：$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=pq^{k-1}, k=1,2,\cdots$，对于 $k=1,2,\cdots n(n\geqslant 2)$，求 $P\{X=k \mid X+Y=n\}$.

27. 一个坛子中装有 8 个白球和 12 个黑球，一个接一个无放回地从坛子中取球，求直到出现五个白球为止的所有可能抽取次数 ξ 的概率分布.

28. 设 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

现对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求 V_n 的概率分布.

29. 设连续型随机变量 X 的密度函数 $p(x)$ 是一个偶函数，$F(x)$ 为 X 的分布函数，求证对任意实数 $a>0$，有

(1) $F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a p(x)\mathrm{d}x$；

(2) $P\{|X|<a\}=2F(a)-1$.

30. 已知某商场一天来的顾客数 X 服从参数为 λ 的泊松分布而每个来到商场的顾客购物的概率为 p，设此商场一天内购物的顾客数为 ξ，求 ξ 的概率分布.

31. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}6(1-y), & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X>0.5, Y>0.5\}$；(2) 求 $P\{X<0.5\}$ 和 $P\{Y<0.5\}$；(3) 求 $P\{X+Y<1\}$.

32. 在长为 a 的线段的中点的两边随机各取一个点，求两点间的距离小于 $\frac{a}{3}$ 的概率.

33. 设 X 与 Y 相互独立，都服从 $\left(\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}\right)$ 上的均匀分布，

试证明 $X-Y$ 的分布与 θ 无关.

34. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，记 $Y_1=\min(X_1, X_2)$，$Y_2=\max(X_1, X_2)$，试求 (Y_1, Y_2) 的联合密度函数 $f(x, y)$.

9

随机变量的数字特征

9.1 基本概念与内容提要

1）数学期望（均值）与方差

（1）**若 X 为离散型随机变量，其概率分布为**

$$P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots),$$

且 $\sum\limits_k x_k p_k$ 绝对收敛，则称 $E(X)=\sum\limits_k x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望.

（2）**若 X 为连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 为随机变量 X 的数学期望.**

（3）* **若 $Y=g(X)$ 为随机变量 X 的函数，且 $E(Y)$ 存在，则当 X 为离散型随机变量时，有**

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_k g(x_k)p_k;$$

当 X 为连续型随机变量时，有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

（4）**若 $E[X-E(X)]^2$ 存在，称 $D(X)=E[X-E(X)]^2$ 为随机变量 X 的方差，并称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差.**

对离散型和连续型随机变量 X，其方差分别为

$$D(X)=\sum_{k}[x_k-E(X)]^2 p_k \text{ 和 } D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

2）* 数学期望与方差的性质

（ⅰ）若 C 为常数，则 $E(C)=C, D(C)=0$.

（ⅱ）若 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数，则

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} C_k X_k+C\right]=\sum_{k=1}^{n} C_k E(X_k)+C,$$

$$D\left[\sum_{k=1}^{n} C_k X_k+C\right]=\sum_{k=1}^{n} C_k^2 D(X_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} C_i C_j \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

（ⅲ）若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$E(X_1 X_2\cdots X_n)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i),\quad D\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i+C\right)=\sum_{i=1}^{n} C_i^2 D(X_i),$$

特别，当 X_1 与 X_2 独立时，$D(X_1\pm X_2)=D(X_1)+D(X_2)$.

（ⅳ）$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

若 Z 为二维离散型的随机变量，且其关于 X, Y 的概率分布分别为 $p_X(x_i), p_Y(y_i)$，则有

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{i}\sum_{j} x_i P\{X=x_i, Y=y_j\}=\sum_{i}\sum_{j} x_i p_{ij}\\&=\sum_{i} x_i P_X(x_i),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{i}\sum_{j} y_j P\{X=x_i, Y=y_i\}=\sum_{j}\sum_{i} y_j P_{ij}\\&=\sum_{j} y_j P_Y(y_j),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(X)&=\sum_{i}\sum_{j}[x_i-E(X)]^2 P\{X=x_i, Y=y_i\}\\&=\sum_{i}[x_i-E(X)]^2 P_X(x_i),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(Y)&=\sum_{i}\sum_{j}[y_j-E(Y)]^2 P\{X=x_i, Y=y_j\}\\&=\sum_{j}[y_j-E(Y)]^2 P_Y(y_j).\end{aligned}$$

若 Z 是二维连续型随机变量，且 $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ 分别是

Z,X,Y 的密度函数,则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}D(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x-E(X)]^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} [x-E(X)]^2 P_X(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [y-E(Y)]^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} [y-E(Y)]^2 P_Y(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

设 Z 是两个随机变量 X,Y 的函数:$Z=g(X,Y)$,**且** $E(Z)$**存在,则当**(X,Y)**为二维离散型随机变量时,有**

$$\begin{aligned}E(Z)=E[g(X,Y)]&=\sum_i\sum_j g(x_i,y_i)P\{X=x_i,Y=y_j\}\\&=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)P_{ij},\end{aligned}$$

当(X,Y)**为二维连续型随机变量时,有**

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3)协方差

称 $\mathrm{cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$**为随机变量** X,Y **的协方差.**

计算协方差常用公式:$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

协方差具有下列性质:

(1) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$;

(2) $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$;

(3) $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$;

(4) $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$;

(5) $\mathrm{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

$$\Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

4）相关系数

对随机变量 X,Y,若 $D(X)>0,D(Y)>0$ 均存在,则称

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数.

若考虑 X,Y 的标准化随机变量:

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},\quad Y^*=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}},$$

则 $$E(X^*)=E(Y^*)=0,D(X^*)=D(Y^*)=1,$$

而 $$\mathrm{cov}(X^*,Y^*)=\rho_{XY},$$

即相关系数 ρ_{XY} 就是标准化随机变量的协方差.

相关系数具有下列性质:

(1) $|\rho_{XY}|\leqslant 1$;

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 存在常数 a,b,使得 $P\{Y=a+bX\}=1$,即 X 与 Y 具有线性关系的概率为 1;

(3) 若 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ 或 $\rho_{XY}=0$,称 X 与 Y 不相关;

(4) 若 X 与 Y 相互独立,则 X 与 Y 一定不相关,但其逆不真.

但对于二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,不相关性与独立性是等价的.

5）常用分布的数学期望与方差

列表如下:

分布名称	概　率　分　布	数学期望	方　差
0—1 分布 (两点分布)	$P\{X=1\}=p,P\{X=0\}=1-p=q$	p	pq
* 二项分布 $(B(n,p))$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n$	np	npq

续 表

分布名称	概 率 分 布	数学期望	方 差
* 泊松分布 $(P(\lambda))$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$	λ	λ
* 均匀分布 $(U[a,b])$	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{2}$
* 指数分布 $(E(\lambda))$	$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
* 正态分布 $(N(\mu,\sigma^2))$	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

6）切比雪夫不等式

设随机变量 X 的 $E(X),D(X)$ 都存在，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

7）矩

若 $E(X^k)$ 存在 $(k\geqslant 0)$，则称 $v_k=E(X^k)$ 为随机变量 X 的 k 阶原点矩.

若 $E(X),E[X-E(X)]^k$ 存在 $(k\geqslant 0)$，则称 $\mu_k=E[X-E(X)]^k$ 为随机变量 X 的 k 阶中心矩.

显然，$E(X)=v_1,D(X)=\mu_2$.

9.2 典型习题与试题解析

例 9.1 假设十只同种电器元件，其中有两只废品. 装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是废品，则扔掉重新任取一只，如仍是废品，则扔掉再取一只. 试求在取到正品之前已取到的废品只数 X 的概率分布，数学期望与方差.

解析 X 的可能取值为 $0,1,2$.

$$P(X=0)=\frac{8}{10}=0.8,P(X=1)=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{45},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{8}=\frac{1}{45}.$$

即 X 的概率分布为

X	0	1	2
p	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

$$E(X)=0\times\frac{4}{5}+1\times\frac{8}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9},$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{4}{5}+1^2\times\frac{8}{45}+2^2\times\frac{1}{45}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{4}{15}-\frac{4}{81}=\frac{88}{405}.$$

例 9.2　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$$

求 $E(X)$**及** $D(X)$.

解析　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx=0.$

因为$\frac{1}{2}xe^{-|x|}$**为奇函数,由奇函数积分的性质知** $E(X)=0$,

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=-e^{-x}(x^2+2x+2)\Big|_{0}^{+\infty}=2.$$

例 9.3　设 X 服从柯西分布,其密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$,**求** $E(X),D(X)$.

解析　**由于**$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx=+\infty$,**所以** $E(X)$**不存在,故** $D(X)$**更不存在.**

评注　若 n 阶矩存在,则所有的小于 n 阶的矩都存在.

例 9.4　某人用 n 把钥匙去开门,只有一把能打开,今逐个任取一把试开,求打开此门所需开门次数 X 的数学期望及方差. 假设(1)打不开的钥匙不放回;(2)打不开的钥匙仍放回.

解析　(1)打不开门的钥匙不放回的情况下,所需开门次数 X 的可能值为 $1,2,\cdots,n$. 注意到 $X=k$ 意味着从第一次到第 $k-1$ 次均未能打开,第 k 次才打开,$P\{X=k\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\cdot\frac{n-k}{n-k+1}\cdot\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n}$,$k=1,2,\cdots,n$. 于是,随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	$\cdots$	n
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{n+1}{2},$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(X)&=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{12}(n+1)(n-1).\end{aligned}$$

(2)由于打不开的钥匙仍放回,可知 X 的可能取值为 $1,2,\cdots,n,\cdots$,其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1},k=1,2,\cdots,$$

令 $p=\frac{1}{n}$,$q=\frac{n-1}{n}$,则

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)^1$$
$$=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)^1=p\cdot\left(\frac{q}{1-q}\right)^1=\frac{1}{p}=\frac{1}{n}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}-\frac{1}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}$$
$$=\frac{1-p}{p^2}=n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=n(n-1).$$

例 9.5　在一个人数为 N 的人群中普查某种疾病，需抽验 N 个人的血. 若将每个人的血分别检验，则共需检验 N 次. 现按 k 个人一组进行分组，将同组 k 个人的血样混合后检验，若混合血样阴性，说明此 k 个人都正常，这 k 个人相当于每人检验 $\frac{1}{k}$ 次；若混合血样阳性，说明其中至少有一人阳性，则需对此 k 个人的血样分别检验，因而这 k 个人需检验 $k+1$ 次，相当于每人检验 $1+\frac{1}{k}$ 次. 假设该病的发病率为 p，且得此病相互独立，问此方法能否减少平均检验次数？

解析　设 X 表示该人群中每个人需要的验血次数，则 X 的分布列为

X	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

则每人平均验血次数为

$$E(X)=\frac{1}{k}(1-p)^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)[1-(1-p)^k]=1-(1-p)^k+\frac{1}{k}.$$

因此只要选择 k 使 $1-(1-p)^k+\frac{1}{k}<1$，即 $(1-p)^k>\frac{1}{k}$ 即可减少验血次数，而且可适当选择 k 使其达到最小.

例 9.6　一台设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要

调整的概率相应为 0.10,0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数,试求 X 的数学期望 $E(X)$和方差 $D(X)$.

解析 方法Ⅰ 引进事件,设 $A_i=\{$第 i 个部件需要调整$\}$ $(i=1,2,3)$,其概率相应为

$$P(A_1)=0.10, P(A_2)=0.20, P(A_3)=0.30,$$

易见 X 的可能取值为 0,1,2,3. 由于 A_1,A_2,A_3 相互独立,可见

$$\begin{aligned}
P\{X=0\}&=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})=P(\overline{A_1})p(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\\
&=0.9\times0.8\times0.7=0.504,\\
P\{X=1\}&=P\{A_1,\overline{A_2},\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3\}\\
&=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+\\
&\quad P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\
&=0.1\times0.8\times0.9+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3\\
&=0.398,\\
P\{X=2\}&=P\{A_1A_2\ \overline{A_3}\cup A_1\ \overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\}\\
&=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+\\
&\quad P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)\\
&=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3\\
&=0.092,\\
P\{X=3\}&=P\{A_1A_2A_3\}=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\
&=0.1\times0.2\times0.3=0.006.
\end{aligned}$$

于是随机变量 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0.504&0.398&0.092&0.006\end{pmatrix},$$

因此

$$E(X)=1\times0.392+2\times0.092+3\times0.006=0.6,$$

$$E(X^2)=1\times0.398+4\times0.092+9\times0.006=0.820,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.820-0.36=0.46.$$

方法Ⅱ 考虑随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若 } A_i \text{ 出现},\\ 0, & \text{若 } A_i \text{ 不出现},\end{cases}\qquad (i=1,2,3)$$

易见

$$E(X_i)=P(A_i),$$
$$D(X_i)=P(A_i)[1-P(A_i)],$$
$$X=X_1+X_2+X_3,$$

因此,由于 X_1,X_2,X_3 独立,可见

$$E(X)=0.1+0.2+0.3=0.6,$$
$$D(X)=0.1\times0.9+0.2\times0.8+0.3\times0.7=0.46.$$

例 9.7 逐批检查产品,对于一批产品,如果抽查到第 m 件仍未发现废品,则停止检查而认为这批产品的质量合格.反之,若未抽到 m 件已发现废品或抽到第 m 件时发现是废品,则不需再检查而认为这批产品不合格.假设每批产品数量都很大,因而认为每次查到废品的概率都是 p,问平均每批产品要查多少件?

解析 设 ξ 表示检查的件数,则$(q=1-p)$

ξ	1	2	$\cdots$	$m-1$	m
p	p	pq	$\cdots$	pq^{m-2}	q^{m-1}

其中 $$1-(p+pq+\cdots+pq^{m-2})=1-p\,\frac{1-q^{m-1}}{1-q}=q^{m-1},$$

所以 $$E(\xi)=p+2pq+\cdots+(m-1)pq^{m-2}+mq^{m-1}.$$

令 $$S=p+2pq+\cdots+(m-1)pq^{m-2},$$

$$Sq=pq+\cdots+(m-2)pq^{m-2}+(m-1)pq^{m-1},$$

$$\begin{aligned}S-Sq&=p+pq+\cdots+pq^{m-2}-(m-1)pq^{m-1}\\&=p\,\frac{1-q^{m-1}}{1-q}-(m-1)pq^{m-1}\\&=1-q^{m-1}-(m-1)pq^{m-1},\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{p}[1-q^{m-1}-(m-1)pq^{m-1}].$$

所以 $E(\xi)=\frac{1}{p}[1-q^{m-1}-(m-1)pq^{m-1}]+mq^{m-1}=\frac{1}{p}[1-q^{m}].$

即平均每批产品要检查$\frac{1}{p}[1-q^{m}]$件.

例 9.8 设 ξ,η 独立,且有相同的等概率分布

$$P\{\xi=i\}=P\{\eta=i\}=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

设 $\zeta=|\xi-\eta|$,求 $E(\zeta)$ 与 $D(\zeta)$.

解析 $|\xi-\eta|=k$ 时意味着 $\xi=\eta\pm k$,当 $k\neq 0$ 时,共有 $2(n-k)$ 种,当 $k=0$ 时,有 n 种.

而 $P\{|\xi-\eta|=k\}=P\{\xi=i,\eta=i\pm k\}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}$,

$\lvert\xi-n\rvert$	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$
p	$\frac{1}{n^2}\cdot n$	$\frac{1}{n^2}\cdot 2(n-1)$		$\frac{1}{n^2}2(n-k)$		$\frac{1}{n^2}2[n-(n-1)]=\frac{1}{n^2}2$

所以 $E(|\xi-\eta|)=0\cdot\frac{n}{n^2}+\frac{2(n-1)}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)\cdot 2(n-(n-1))}{n^2}$

$$\begin{aligned}&=\frac{2}{n^2}[n-1+2(n-2)+\cdots+k(n-k)+\cdots+\\&\quad(n-1)(n-(n-1))]\\&=\frac{2}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n-1}kn-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right]\\&=\frac{2}{n^2}\left[\frac{n}{2}n(n-1)-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]\\&=\frac{n^2-1}{3n},\end{aligned}$$

$E(|\xi-\eta|^2)=0^2\cdot\frac{1}{n^2}n+1\cdot\frac{1}{n^2}2(n-1)+\cdots+k^2\cdot\frac{1}{n^2}2(n-k)+$

$$\cdots+(n-1)^2\cdot\frac{1}{n^2}2(n-(n-1))$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}2k^2(n-k)}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left[2n\sum_{k=1}^{n-1}k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}k^3\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[2n\cdot\frac{1}{6}(n-1)n\cdot(2n-1)-2(1+2+\cdots+(n-1))^2\right]$$

$$=\frac{1}{6}(n^2-1),$$

$$D(|\xi-\eta|)=E|\xi-\eta|^2-(E|\xi-\eta|)^2=\frac{1}{6}(n^2-1)-\left(\frac{n^2-1}{3n}\right)^2$$

$$=\frac{n^4+n^2-2}{18n^2}.$$

例 9.9　r 个人在一楼进入电梯，楼上有 n 层，设每个乘客在任何一层出电梯的概率相同，试求直到电梯中的乘客出完为止，电梯需停次数的期望.

解析　定义随机变量 $\xi_i(i=1,\cdots,n)$ 表示电梯在第 i 层停的次数，则

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{若电梯在第 } i \text{ 层停},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

注意到每个人在任何一层出电梯的概率均为 $\frac{1}{n}$，若 r 个人同时不在第 i 层出电梯，那么电梯在该层就不停，所以

$$P\{\xi_i=0\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^r,$$

$$P\{\xi_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^r,$$

则电梯需停的次数 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$，所以

$$E(\xi)=E(\xi_1)+\cdots+E(\xi_n)=n\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^r\right].$$

例 9.10 设随机变量 X 与 Y 独立,都在区间$[1,3]$上服从均匀分布,引进事件 $A=\{X\leqslant a\},B=\{Y>a\}$,(1) 已知 $P(A\cup B)=\frac{7}{9}$,求常数 a;(2) 求$\frac{1}{X}$的数学期望.

解析 (1) 设 $P(A)=P\{X\leqslant a\}=p$,由 X 与 Y 同分布知 $P(\overline{B})=P(Y\leqslant a)=P(X\leqslant a)=p$,故 $P(B)=1-p$. 由条件知 $P\{A\cup B\}=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+(1-p)-p(1-p)=p^2-p+1=\frac{7}{9}$,由此得 $p_1=\frac{1}{3},p_2=\frac{2}{3}$,于是问题有两个解,即 a 有两个可能值

$$\int_1^a \frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{a-1}{2}=p_1=\frac{1}{3},a=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$

$$\int_1^a \frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{a-1}{2}=p_2=\frac{2}{3},a=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}.$$

(2) $E\left(\frac{1}{X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^3=\frac{1}{2}\ln 3.$

例 9.11 假设由自动线加工的零件的内径 X(毫米)服从正态分布 $N(\mu,1)$,内径小于 10 或大于 12 的为不合格品,其余的为合格品. 销售每件合格品获利,销售每件不合格品亏损. 已知销售利润 T(单位:元)与销售零件的内径 X 有如下关系

$$T=\begin{cases}-1, & 若\ x<10,\\ 20, & 若\ 10\leqslant x\leqslant 12,\\ -5, & 若\ x>12.\end{cases}$$

问平均内径 μ 为何值时,销售一个零件的平均利润最大?

解析 由条件知,平均利润为

$$\begin{aligned}E(T)&=20P\{10\leqslant X\leqslant 12\}+(-1)P\{X<10\}+(-5)P\{X>12\}\\&=20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-\Phi(10-\mu)-5[1-\Phi(12-\mu)]\\&=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5,\end{aligned}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu),$$

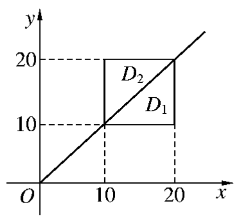
令其等于零得　$$\frac{-25}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}-\frac{(12-\mu)^2}{2}+\frac{21}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}-\frac{(10-\mu)^2}{2}=0.$$

即　$$25\mathrm{e}-\frac{(12-\mu)^2}{2}=21\mathrm{e}-\frac{(10-\mu)^2}{2},$$

$$\frac{25}{21}=\mathrm{e}^{\frac{(12-\mu)^2}{2}-\frac{(10-\mu)^2}{2}}=\mathrm{e}^{2(11-\mu)},\quad 2(11-\mu)=\ln\frac{25}{21}.$$

由此得：$\mu=\mu_0=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx 10.9$. 由题意知，当 $\mu=\mu_0=10.9$ 毫米时，平均利润最大.

例 9.12　一商店经销某种商品，每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $[10,20]$ 上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1 000 元；若需求量超过了进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.



解析　设 Z 表示商店每周所得的利润，则

$$Z=\begin{cases}1\,000Y, & Y\leqslant X,\\ 1\,000X+500(Y-X)=500(X+Y), & Y>X.\end{cases}$$

由于 X 与 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{100}, & 10\leqslant x\leqslant 20,10\leqslant y\leqslant 20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以　$$E(Z)=\iint\limits_{D_1}1\,000y\times\frac{1}{100}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}500(x+y)\times\frac{1}{100}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=10\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{y}^{20}y\mathrm{d}x+5\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{10}^{y}(x+y)\mathrm{d}x$$

$$=10\int_{10}^{20}y(20-y)\mathrm{d}y+5\int_{10}^{20}\left(\frac{3}{2}y^2-10y-50\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{20\ 000}{3}+5\times 1\ 500$$

$$\approx 14\ 166.67(\text{元}).$$

例 9.13　假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2. 机器发生故障时全天停止工作. 若一周 5 个工作日里无故障,可获利润 10 万元,发生一次故障仍可获利润 5 万元,发生两次故障所获利润 0 元,发生三次或三次以上故障就要亏损两万元. 求一周内期望利润是多少?

解析　以 X 表示一周 5 天内机器发生故障的次数,则 $X\sim B(5,0.2)$,

$$P\{X=k\}=C_5^k(0.2)^k(0.8)^{5-k},k=0,1,2,3,4,5,$$

$$P\{X=0\}=0.8^5=0.328,$$

$$P(X=1)=C_5^1(0.2)(0.8)^4=0.410,$$

$$P\{X=2\}=C_5^2(0.2)^2(0.8)^3=0.205,$$

$$P\{X\geqslant 3\}=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$
$$=1-0.328-0.410-0.205=0.057,$$

以 Y 表示所获利润,则

$$Y=f(X)=\begin{cases}10, & \text{若 } X=0,\\ 5, & \text{若 } X=1,\\ 0, & \text{若 } X=2,\\ -2, & \text{若 } X\geqslant 3,\end{cases}$$

$$E(Y)=10\times 0.328+5\times 0.410+0\times 0.205-2\times 0.057$$
$$=5.216(\text{万元}).$$

例 9.14　有 10 000 名同年龄段且同社会阶层的人参加了某保险公司的一项人寿保险,每个投保人在每年初需交纳 200 元保费,而

在这一年中，若投保人死亡，则受益人可从保险公司获得 100 000 元的赔偿费，据生命表可知这类人的年死亡率为 0.001，试求保险公司在这项业务上(1) 亏本的概率；(2) 至少获利 500 000 元的概率.

解析　设 X 表示 10 000 名投保人在一年中的死亡人数，则 $X \sim B(10\,000, 0.001)$.

保险公司在这项业务上一年的盈亏 $= 200 \times 10\,000 - 100\,000X$.

因为 $n = 10\,000$ 很大，$p = 0.001$ 很小，所以用 $\lambda = np = 10$ 的泊松分布进行近似计算.

(1) 亏本的概率 $= P\{X > 20\} = 1 - P\{X \leqslant 20\} \approx 1 - \sum\limits_{k=0}^{20} \dfrac{10^k}{k!} e^{-10}$

$$= 1 - 0.998 = 0.002.$$

可见亏本的可能性很小.

(2) 至少获利 500 000 元的概率 $= P\{X \leqslant 15\} \approx \sum\limits_{k=0}^{15} \dfrac{10^k}{k!} e^{-10}$

$$= 0.951.$$

可见至少盈利 500 000 元的可能性很大.

例 9.15　两台同样的自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布. 首先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自动开动. 试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$、数学期望和方差.

解析　以 X_1 和 X_2 表示先后开动的记录仪无故障工作的时间，则 $T = X_1 + X_2$. 由条件知 $X_i\,(i=1,2)$ 的概率密度为

$$p_i(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & \text{若 } x > 0, \\ 0, & \text{若 } x \leqslant 0. \end{cases}$$

两台仪器无故障工作时间 X_1 和 X_2 显然相互独立.

利用二独立随机变量和的密度公式求 T 的概率密度. 对于 $t > 0$，有

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)p_2(t-x)\mathrm{d}x=25\int_0^t \mathrm{e}^{-5x}\mathrm{e}^{-5(t-x)}\mathrm{d}x$$

$$=25\mathrm{e}^{-5t}\int_0^t \mathrm{d}x=25t\mathrm{e}^{-5t};$$

当 $t\leqslant 0$ 时，显然 $f(t)=0$. 于是，得

$$f(t)=\begin{cases}25t\mathrm{e}^{-5t}, & \text{若 } t>0,\\ 0, & \text{若 } t\leqslant 0.\end{cases}$$

由于 X_i 服从参数为 $\lambda=5$ 的指数分布，知

$$E(X_i)=\frac{1}{5},\quad D(X_i)=\frac{1}{25}(i=1,2).$$

因此，有

$$E(T)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{2}{5}.$$

由于 X_1 和 X_2 独立，可见

$$D(T)=D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)=\frac{2}{25}.$$

例 9.16 设排球队 A 与 B 进行比赛，若有一队胜 3 场，则比赛结束，假定 A 在每场比赛中获胜的概率 $p=\frac{1}{2}$，试求比赛场数 X 的数学期望.

解析 X 的可能取值为 3，4，5.

若以 3 场结束比赛，则或 A 全胜，或 B 全胜，此时概率为 $p^3+q^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，即 $P(X=3)=\frac{1}{4}$. 这里 q 为 B 在每场比赛中获胜的概率，$q=1-p=\frac{1}{2}$.

若以 4 场结束比赛，则或 A 在第 4 场取胜，或 B 在第 4 场取胜，故 A 胜的概率为 $pC_3^2p^2q=\frac{3}{16}$，同样 B 获胜的概率为 $qC_3^2q^2p=\frac{3}{16}$，$P\{X=4\}=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$.

若以 5 场结束比赛，则或 A 在第 5 场取胜，或 B 在第 5 场取胜，

$P\{X=5\}=pC_4^2p^2q^2+qC_4^2q^2p^2=2\times6\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{8}$. 故 X 的分布律为

X	3	4	5
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$E(X)=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{33}{8}=4.125(\text{场}).$$

例 9.17 游客乘电梯从电视塔底层到顶层观光，电梯于每个整点的第 5 分钟、第 25 分钟和第 55 分钟从底层起行. 假设一游客在 8 点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在 $[0,60]$ 上均匀分布，求该游客等候时间的数学期望.

解析 已知 $X\sim U[0,60]$，X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{60}, & 0\leqslant x\leqslant60,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

设 Y 是游客等候电梯的时间（单位：分），则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & \text{若 } 0\leqslant X\leqslant5,\\ 25-X, & \text{若 } 5<X\leqslant25,\\ 55-X, & \text{若 } 25<X\leqslant55,\\ 60-X+5, & \text{若 } 55<X\leqslant60,\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}E(Y)&=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{60}\Big[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\\&\quad\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\Big]\\&=\frac{1}{60}[12.5+200+450+37.5]=\frac{700}{60}=11.67.\end{aligned}$$

例 9.18 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ 概率 \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

求 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{cov}(X^2,Y^2)$.

解析 (X^2,Y^2)的联合概率分布为

X^2 \ 概率 \ Y^2	0	1
0	0.18	0.22
1	0.32	0.28

X^2 与 Y^2 的边缘概率分布分别为

X^2	0	1
p	0.4	0.6

Y^2	0	1
p	0.5	0.5

$$E(X^2)=0.6,\ E(Y^2)=0.5,\ E(X^2Y^2)=0.28,$$

故
$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X^2,Y^2)&=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=0.28-0.6\times0.5\\&=-0.02.\end{aligned}$$

例 9.19 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是在以点$(0,1)$,$(1,0)$,$(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布,试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

解析 **方法Ⅰ** 三角形区域为 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1,x+y\geqslant1\}$,随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & \text{若}(x,y)\in G,\\ 0, & \text{若}(x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$$

以 $f_1(x)$表示 X 的概率密度,则当 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1$ 时,$f_1(x)=0$;当

$0<x<1$ 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1} 2\mathrm{d}y=2x.$$

因此

$$E(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

同理可得 $E(Y)=\frac{2}{3},\quad D(Y)=\frac{1}{18}$.

现在求 X 和 Y 的协方差.

$$E(XY)=\iint\limits_G 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12};$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}.$$

于是

$$\begin{aligned}D(U)&=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.\end{aligned}$$

方法Ⅱ　三角形区域为 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$；随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G,\\0, & 若(x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$$

以 $f(u)$ 表示 $U=X+Y$ 的概率密度，当 $u<1$ 或 $u>2$ 时，显然 $f(u)=0$.

设 $1\leqslant u\leqslant 2$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant u-x\leqslant 1$ 时 $f(x,u-x)=2$，否则 $f(x,u-x)=0$. 由随机变量之和的概率密度公式，有

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,u-x)\mathrm{d}x=\int_{u-1}^{1} 2\mathrm{d}x=2(2-u).$$

因此

$$E(X+Y)=E(U)-\int_{-\infty}^{\infty}uf(u)\mathrm{d}u=2\int_{1}^{2}u(2-u)\mathrm{d}u=\frac{4}{3},$$

$$E(X+Y)^2=E(U^2)=\int_{-\infty}^{\infty}u^2f(u)\mathrm{d}u=2\int_{1}^{2}u^2(2-u)\mathrm{d}u=\frac{11}{6},$$

$$D(U)=D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}.$$

例 9.20 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)],$$

其中 $\varphi_1(x,y)$和 $\varphi_2(x,y)$都是二维正态密度函数,且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为$\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$,它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零,方差都是 1.

(1) **求随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_1(x)$和 $f_2(y)$,及 X 和 Y 的相关系数ρ(可以直接利用二维正态密度的性质).**

(2) **问 X 和 Y 是否独立,为什么?**

解析 (1) **由于二维正态密度函数的两个边缘密度都是正态密度函数,因此 $\varphi_1(x,y)$和 $\varphi_2(x,y)$的两个边缘密度为标准正态密度函数,故**

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}};\end{aligned}$$

同理

$$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

由于 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(0,1)$,**可见** $E(X)=E(Y)=0$,$D(X)=D(Y)=1$.

随机变量 X 和 Y 的相关系数为

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = 0.$$

（2）**由题设**

$$f(x,y) = \frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)} + \mathrm{e}^{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)}\right],$$
$$f_1(x)\cdot f_2(y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}},$$
$$f(x,y) \neq f_1(x)\cdot f_2(y).$$

所以 X **与** Y **不独立**.

评注　**设** $\varphi_1(x,y)$ **与** $\varphi_2(x,y)$ **所对应的二维随机变量分别为** (X_1,Y_1) **与** (X_2,Y_2). **由题设知** $E(X_1)=E(Y_1)=E(X_2)=E(Y_2)=0$, $D(X_1)=D(Y_1)=D(X_2)=D(Y_2)=1$.

所以
$$\rho_{X_1Y_1} = \frac{\mathrm{cov}(X_1Y_1)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(Y_1)}} = E(X_1Y_1)-E(X_1)E(Y_1)$$
$$= E(X_1Y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}.$$

同理
$$\rho_{X_2Y_2} = E(X_2Y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}.$$

例 9.21　**设常数** a **与** b **为随机变量** X **的一切可能取值中的最小值与最大值**, $D(X)$ **为** X **的方差，则** $D(X)\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

解析　**因为** $a\leqslant X\leqslant b$, **所以** $-\frac{b-a}{2}\leqslant X-\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{b-a}{2}$,

即
$$\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\text{于是 } E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

从而 $D(X)=E[(X-E(X))^2]=E\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{a+b}{2}-E(X)\right)\right]^2$

$$= E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2}-E(X)\right)E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{a+b}{2}-E(X)\right)^2$$

$$=E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}-E(X)\right)^2\leqslant E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

例 9.22 假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布,随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & \text{若 } Y\leqslant k,\\ 1, & \text{若 } Y>k.\end{cases}\quad (k=1,2)$$

(1) **求 X_1 和 X_2 的联合概率分布;**

(2) **求 $E(X_1+X_2)$.**

解析 (1) Y **的分布函数为** $F(x)=1-e^{-y}(y>0)$, $F(y)=0(y\leqslant 0)$. (X_1,X_2)**有四个可能值**: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. **易见**

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\leqslant 1,Y\leqslant 2\}=P\{Y\leqslant 1\}=1-e^{-1},$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\leqslant 1,Y>2\}=0,$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\leqslant 2\}=P\{1<Y\leqslant 2\}$$
$$=e^{-1}-e^{-2},$$

$$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=e^{-2}.$$

于是, X_1 **和** X_2 **联合概率分布列如下表**:

X_2 \ P \ X_1	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

（2）易见，$X_k(k=1,2)$服从 0—1 分布：

$$X_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P\{Y \leqslant k\} & P\{Y > k\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mathrm{e}^{-k} & \mathrm{e}^{-k} \end{pmatrix}$$

因此，有

$$E(X_k) = P\{X_k = 1\} = \mathrm{e}^{-k} \quad (k = 1,2).$$

于是

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2}.$$

例 9.23　将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于　　　（　　）

A. -1　　　B. 0　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　D. 1

解析　方法Ⅰ　设掷一枚硬币正面朝上的概率为 $p(0<p<1)$，则反面朝上的概率为 $q=1-p$，若硬币是均匀的，则 $p=q=\dfrac{1}{2}$.

依题意，$X \sim B(n,q)$，$Y \sim B(n,q)$，于是

$$E(X) = np,D(X) = npq,E(Y) = nq,D(Y) = nqp.$$

注意到 $X+Y=n$，从而

$$\begin{aligned} E(XY) &= E[X(n-X)] = nE(X) - E(X^2) \\ &= nE(X) + [D(X) + (E(X))^2] \\ &= n^2p - nqp - n^2p^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= n^2p - npq - n^2p^2 - n^2pq \\ &= n^2p(1-p) - n(1+n)pq \\ &= n^2pq - n(1+n)qp = -npq. \end{aligned}$$

故 X 和 Y 的相关系数为

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\ \sqrt{D(Y)}} = \frac{-npq}{\sqrt{npq}\ \sqrt{npq}} = -1.$$

方法Ⅱ　因为 $X+Y=n$，$Y=-X+n$，即 Y 与 X 存在线性关

系,且一次项的系数$-1<0$,所以$\rho=-1$.

例 9.24 (1) 对某一目标连续射击,直至命中n次为止.设每次射击的命中率为p,求子弹消耗量的数学期望.

(2) 设袋中有n只球,球的编号分别为$1,2,\cdots,n$.从中有放回地抽取k次,求所抽球的号码之和的数学期望与方差.

解析 (1) 设X表示直到命中n次为止所消耗的子弹数,X_i表示第$i-1$次命中到第i次命中之间所消耗的子弹数,则由题意知

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

易知,X_i服从几何分布,即

$$P\{X_i=k\}=q^{k-1}p\quad(k=1,2,\cdots),$$

于是
$$E(X_i)=\frac{1}{p}(i=1,2,\cdots,n),$$

从而
$$E(X)=E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n}{p}.$$

(2) 设X表示k次所抽球的号码之和,X_i表示第i次所抽球的号码,则

$$X=\sum_{i=1}^{k}X_i,$$

因为是有放回地抽取,所以有

$$P\{X_i=j\}=\frac{1}{n}\qquad(j=1,2,\cdots,n),$$

于是
$$E(X_i)=\sum_{j=1}^{n}j\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2},$$

从而所抽球的号码之和的数学期望为

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)=\frac{k(n+1)}{2},$$

因为
$$D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=\sum_{j=1}^{n}j^2\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12},$$

而 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 相互独立,所以所抽球的号码之和的方差

$$D(X)=D\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum_{i=1}^{k}D(X_i)=\frac{k(n^2-1)}{12}.$$

例 9.25　设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2,方差分别为 1 和 4,而相关系数为 -0.5,则根据切比雪夫不等式,$P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant$________________.

解析　由题设 $E(X)=-2,E(Y)=2,D(X)=1,D(Y)=4,\rho_{XY}=-0.5$,于是

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0,$$

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)\\&=D(X)+D(Y)+2\cdot\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=1+4+2\times(-0.5)\cdot 1\cdot 2=3.\end{aligned}$$

故由切比雪夫不等式得

$$\begin{aligned}P\{|X+Y|\geqslant 6\}=P\{|X+Y-E(X+Y)|\geqslant 6\}&\leqslant\frac{D(X+Y)}{6^2}\\&=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

例 9.26　设随机变量 X 与 Y 在圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上服从均匀分布. 求 X 与 Y 的相关系数 ρ,并问 X 与 Y 是否独立.

解析　(X,Y)的联合密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\leqslant r^2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

X 与 Y 的边缘密度函数分别为

$$p_X(x)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\quad(|x|<r),$$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}\qquad(|y|<r),$$

$$E(X)=\int_{-r}^{r}\frac{2x\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2}xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}y\mathrm{d}y=0,$$

从而　$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,\quad \rho=0,$

于是 X **与** Y **不相关.**

因为在 $x^2+y^2<r^2$ **内**,$p(x,y)\neq p_Z(x)p_Y(y)$,**所以** X **与** Y **不相互独立.**

例 9.27　设随机变量 X **的密度函数**

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

(1) **求** X **与** $|X|$ **的协方差,并问** X **与** $|X|$ **是否不相关?**

(2) **问** X **与** $|X|$ **是否独立,为什么?**

解析　(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$

$$E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

于是　$\operatorname{cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=0,$

故 X **与** $|X|$ **不相关.**

(2) **对给定** $0<a<+\infty$,**显然事件** $\{|X|<a\}=\{-a<X<a\}\subset\{X<a\}$,**且** $P\{X<a\}<1$,$P\{|X|<a\}>0$,**故** $P\{X<a,|X|<a\}=P\{|X|<a\}$,

但　$P\{X<a\}P\{|X|<a\}<P\{|X|<a\},$

所以　$P\{X<a,|X|<a\}\neq P\{X<a\}P\{|X|<a\},$

因此 X **与** $|X|$ **不独立.**

例 9.28　设 A,B **是二随机事件,随机变量**

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 出现},\\ -1, & \text{若 } A \text{ 不出现},\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 出现},\\ -1, & \text{若 } B \text{ 不出现}.\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 和 B 相互独立.

解析 记 $P(A)=p_1$,$P(B)=p_2$,$P(AB)=p_{12}$,由数学期望的定义,可见

$$E(X)=P(A)-P(\overline{A})=2p_1-1,\quad E(Y)=2p_2-1.$$

现在求 $E(XY)$. 由于 XY 只有两个可能值 1 和 -1,可见

$$P\{XY=1\}=P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})=2p_{12}-p_1-p_2+1,$$

$$P\{XY=-1\}=1-P\{XY=1\}=p_1+p_2-2p_{12},$$

$$E(XY)=P\{XY=1\}-P\{XY=-1\}=4p_{12}-2p_1-2p_2+1.$$

从而

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=4p_{12}-4p_1p_2.$$

因此,$\operatorname{cov}(X,Y)=0$ 当且仅当 $p_{12}=p_1p_2$,即 X 和 Y 不相关当且仅当事件 A 和 B 相互独立.

例 9.29 已知二维随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 $X\sim N(1,3^2)$,$Y\sim N(0,4^2)$,X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$,设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$.

(1) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$;

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ};

(3) 向 X 与 Z 是否相互独立,为什么?

解析 (1) $E(X)=1$,$E(Y)=0$,$D(X)=3^2$,$D(Y)=4^2$,于是

$$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3},$$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=D\left(\frac{1}{3}Z\right)+D\left(\frac{1}{2}Y\right)+2\operatorname{cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= 1 + 4 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 4 = 3.$$

(2) $$\operatorname{cov}(X,Z) = \operatorname{cov}\left(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right)$$

$$= \operatorname{cov}\left(X, \frac{1}{3}X\right) + \operatorname{cov}\left(X, \frac{1}{2}Y\right)$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,X) + \frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$= \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 4 = 0.$$

故

$$\rho_{XZ} = \frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}} = 0.$$

(3) **因为** X **与** Y **均是正态分布，而** Z **是** X **与** Y **的线性函数，故** Z **也服从正态分布，又** $\rho_{XZ}=0$**，所以** X **与** Z **相互独立.**

例 9.30　某箱装有 100 **件产品，其中一、二和三等品分别为** 80 **件、**10 **件和** 10 **件. 现在从中随机抽取** 1 **件，记**

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

试求(1) **随机变量** X_1 **与** X_2 **的联合分布；**

(2) **随机变量** X_1 **与** X_2 **的相关系数** ρ.

解析　(1) **设事件** $A_i=\{$**抽到** i **等品**$\}, i=1,2,3$ **由题意知** A_1, A_2, A_3 **互不相容**, $P(A_1)=0.8$, $P(A_2)=0.1$, $P(A_3)=0.1$. **易见**

$$P\{X_1=0, X_2=0\} = P(A_3) = 0.1,$$

$$P\{X_1=0, X_2=1\} = P(A_2) = 0.1,$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P(A_1)=0.8,$$
$$P\{X_1=1,X_2=1\}=P(\varnothing)=0.$$

(2) $E(X_1)=0.8, E(X_2)=0.1, D(X_1)=0.8\times0.2=0.16$, $D(X_2)=0.1\times0.9=0.09$,

$$E(X_1X_2)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.1+1\times0\times0.8+1\times1\times0=0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_1,X_2)&=E(X_1,X_2)-E(X_1)E(X_2)\\&=0-0.8\times0.1\\&=-0.08,\end{aligned}$$

$$\rho=\frac{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\ \sqrt{D(X_2)}}=-\frac{0.08}{\sqrt{0.16}\ \sqrt{0.09}}=-\frac{2}{3}.$$

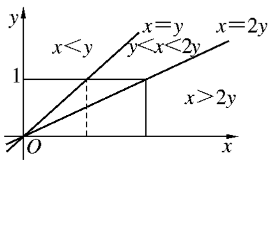
例 9.31　假设二维随机变量(X,Y)**在矩形** $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$**上服从均匀分布. 记**

$$U=\begin{cases}0, & \text{若 } X\leqslant Y,\\ 1, & \text{若 } X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & \text{若 } X\leqslant 2Y,\\ 1, & \text{若 } X>2Y.\end{cases}$$

(1) **求** U **和** V **的联合分布；**

(2) **求** U **和** V **的相关系数** r.

解析　由题设可得



$$P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X>2Y\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4}.$$

(1) (U,V)**有四个可能值**：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\leqslant Y,X\leqslant 2Y\}=P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y,X>2Y\}=0,$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\leqslant 2Y\}=P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=1,V=1\}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) **由以上可见** UV **以及** U **和** V **的分布为**

$$UV\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},\quad V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

于是,有

$$E(U)=\frac{3}{4},D(U)=\frac{3}{16};E(V)=\frac{1}{2},D(V)=\frac{1}{4};E(UV)=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)\cdot E(V)=\frac{1}{8},$$

$$r=\frac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sqrt{DU\cdot DV}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

例 9.32　设随机变量 X **的概率密度为**

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, 0\leqslant x<2,\\ 0,\quad \text{其他},\end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$**为二维随机变量**(X,Y)**的分布函数.求**

(1) Y **的概率密度** $f_Y(y)$;

(2) $\mathrm{cov}(X,Y)$;

(3) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解析　(1) Y **的分布函数为**

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}.$$

当 $y\leqslant 0$ **时**,$F_Y(y)=0$,$f_Y(y)=0$;

当 $0<y<1$ **时**,$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$

$$= P\{-\sqrt{y} \leqslant X < 0\} + P\{0 \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\}$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{8\sqrt{y}};$$

当 $1 \leqslant y < 4$ 时，$F_Y(y) = P\{-1 \leqslant X < 0\} + P\{0 \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{y}};$$

当 $y \geqslant 4$ 时，$F_Y(y) = 1$，$f_Y(y) = 0$.

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leqslant y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_f X(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$,

$E(Y) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$,

$E(XY) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x$

$= \frac{7}{8}$,

故
$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{2}{3}.$$

(3) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) = P\left\{X \leqslant -\frac{1}{2}, Y \leqslant 4\right\}$

$$= P\left\{X \leqslant -\frac{1}{2}, X^2 \leqslant 4\right\}$$

$$= P\{X \leqslant -\frac{1}{2}, -2 \leqslant X \leqslant 2\}$$

$$= P\{-2 \leqslant X \leqslant -\frac{1}{2}\}$$

$$= P\{-1 \leqslant X \leqslant -\frac{1}{2}\}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

例 9.33 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{m+n}(m<n)$ **相互独立且服从同一分布,并有有限的方差,试求随机变量** $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ **和** $Y=X_{m+1}+X_{m+2}+\cdots+X_{m+n}$ **的相关系数** ρ_{XY}.

解析 由题意可设 $D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots,m+n)$,

则
$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=n\sigma^2,$$

$$D(Y)=D(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i)=\sum_{i=m+1}^{m+n} D(X_i)=n\sigma^2,$$

于是 $\operatorname{cov}(X,Y)$

$$\begin{aligned}
&= E(XY)-E(X)E(Y) \\
&= E[(X_1+X_2+\cdots+X_n)(X_{m+1}+X_{m+2}+\cdots+X_{m+n})]- \\
&\quad E[X_1+X_2+\cdots+X_n]E[X_{m+1}+X_{m+2}+\cdots+X_{m+n}] \\
&= E(\sum_{k=m+1}^{n} X_k^2+\sum_{i\neq j} X_iX_j)-\sum_{k=m+1}^{n}[E(X_k)]^2-\sum_{i\neq j} E(X_i)E(X_j) \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} E(X_k^2)+\sum_{i\neq j}E(X_i)E(X_j)-\sum_{k=m+1}^{n}[E(X_k)]^2-\sum_{i\neq j}E(X_i)E(X_j) \\
&= \sum_{k=m+1}^{n}\{E(X_k^2)-[E(X_k)]^2\}=\sum_{k=m+1}^{n} D(X_k) \\
&= (n-m)\sigma^2,
\end{aligned}$$

从而随机变量 X **与** Y **的相关系数**

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{(n-m)\sigma^2}{\sqrt{n\sigma^2}\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{n-m}{n}.$$

例 9.34　设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 独立同分布，$E(X_{ij})=2$，求行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $E(X)$.

解析　因为 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 独立同分布，所以由行列式的定义有

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\Big[\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}X_{1j1}X_{2j2}\cdots X_{njn}\Big] \\ &= \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}E(X_{1j1})E(X_{2j2})\cdots E(X_{njn}) \\ &= \begin{vmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & \cdots & E(X_{1n}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & \cdots & E(X_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & \cdots & E(X_{nn}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

例 9.35　设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a,b,c 为常数，且 X 的数学期望 $E(X)=-0.2$，$P\{Y\leqslant 0\mid X\leqslant 0\}=0.5$，记 $Z=X+Y$. 求

(1) a,b,c 的值；

(2) Z 的概率分布；

(3) $P\{X=Z\}$.

解析 (1) 由概率分布的性质知，

$$a+b+c+0.6=1,$$

即
$$a+b+c=0.4.$$

由 $E(X)=-0.2$，可得

$$-a+c=-0.1.$$

再由
$$P\{Y\leqslant 0 \mid X\leqslant 0\}=\frac{P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}}{P\{X\leqslant 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5,$$

得
$$a+b=0.3.$$

解以上关于 a,b,c 的三个方程得

$$a=0.2,\ b=0.1,\ c=0.1.$$

(2) Z 的可能取值为 $-2,-1,0,1,2$，

$P\{Z=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=0.2$，

$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=-1\}$
$=0.1$，

$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}+$
$P\{X=1,Y=-1\}=0.3$，

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.3$，

$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1$，

即 Z 的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(3) $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}$

$=0+b+0.1=0.1+0.1$

$=0.2.$

例 9.36　设随机变量 X 和 Y 相互独立，试证

$$D(XY)=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X).$$

解析　因为随机变量 X 与 Y 独立，所以

$$E(XY)=E(X)E(Y),\ E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2),$$

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2$$

$$=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2,$$

又因为　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2,$

所以　$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2,E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2,$

从而　$D(XY)=\{D(X)+[E(X)]^2\}E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2$

$$=D(X)E(Y^2)+[E(X)]^2\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\}$$

$$=D(X)\{D(Y)+[E(Y)]^2\}+[E(X)]^2D(Y)$$

$$=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X).$$

10

大数定律和中心极限定理

10.1 基本概念与内容提要

1）大数定律

设$\{X_i\}(i=1,2,\cdots)$为随机变量序列，若对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X_i)]\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0,$$

则称随机变量序列$\{X_i\}$服从大数定律.

大数定律常用的几种情形：

(1) **切比雪夫大数定律** 设$\{X_i\}(i=1,2,\cdots)$为相互独立的随机变量序列，若存在常数C，使$D(X_i)\leqslant C(i=1,2,\cdots)$，则$\{X_i\}$服从大数定律.

(2) **辛钦大数定律** 设$\{X_i\}(i=1,2,\cdots)$为相互独立且服从同一分布的随机变量序列，且数学期望$E(X_i)=\mu(i=1,2,\cdots)$存在，则$\{X_i\}$服从大数定律.

(3) **贝努里大数定律** 设在n次重复独立试验中事件A发生μ_n次，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

2）中心极限定理

设$\{X_i\}(i=1,2,\cdots)$为相互独立的随机变量序列，且都有有限

的数学期望与方差，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y_n=\frac{\overline{X}-E(\overline{X})}{\sqrt{D(\overline{X})}}$（$n=1$，2，…），若对 $x\in(-\infty,+\infty)$，一致地有

$$\lim_{n\to\infty}P\{Y_n\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

则称随机变量序列 $\{X_i\}$ 服从中心极限定理.

（1）林德伯格-列维定理（独立同分布的中心极限定理）　设 $\{X_i\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i)=m$，$D(X_i)=\sigma^2$（$i=1,2,\cdots$），则 $\{X_i\}$ 服从中心极限定理.

此定理表明，当 n 充分大时，随机变量 $Y_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)$ 近似服从标准正态分布.

（2）德莫佛-拉普拉斯定理　设 μ_n 为 n 重贝努里试验中事件 A 发生的次数，$p=P(A)$，则对 $x\in(-\infty,+\infty)$，一致地有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)\text{（其中 }q=1-p\text{）}.$$

此定理表明二项分布以正态分布为极限分布. 若 $X\sim B(n,p)$，则

（ⅰ）$P\{a<X<b\}\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$；

（ⅱ）$P\{|X|<\varepsilon\}\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)-1$.

10.2　典型习题与试题解析

例 10.1　（切比雪夫不等式）设随机变量 X 有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，求证对 $\forall\varepsilon>0$，恒有

$P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sigma^2/\varepsilon^2$，或 $P(|X-\mu|<\varepsilon)\geqslant 1-\sigma^2/\varepsilon^2$.

解析　（1）若 X 为离散型，其分布列为

$$P(X=k)=p_k,(k=1,2,\cdots)$$

则 $$P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)=\sum_{|x_k-\mu|\geqslant\varepsilon}p_k\leqslant\sum_{|x_k-\mu|\geqslant\varepsilon}\frac{(x_k-\mu)^2}{\varepsilon^2}p_k$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-\mu)^2p_k=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

(2) X 为连续型,其密度为 $p(x)$,

则 $$P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)=\int\limits_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon}p(x)\mathrm{d}x\leqslant\int\limits_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon}\frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}p(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

例 10.2 设 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ m 为正态数,求 $P(0<X<2(m+1))$(用切比雪夫不等式估计).

解析 $$E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{x^m\mathrm{e}^{-x}}{m!}\mathrm{d}x=\frac{1}{m!}\int_0^{+\infty}x^{m+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{m!}\Gamma(m+2)$$

$$=\frac{1}{m!}\cdot(m+1)!=m+1,$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\frac{x^m\mathrm{e}^{-x}}{m!}\mathrm{d}x=\frac{1}{m!}\Gamma(m+3)=(m+1)(m+2),$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=m+1.$$

在 $P(|X-\mu|<\varepsilon)\geqslant 1-\sigma^2/\varepsilon^2$ 中取 $\varepsilon=m+1$,

$$P(|X-(m+1)|<m+1)\geqslant 1-\frac{m+1}{(m+1)^2},$$

即 $$P(0<X<2(m+1))\geqslant m/m+1.$$

例 10.3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布,$E(X_i)=\mu,D(X_i)=8$ $i=1\cdots n$,则 $P\{\mu-4<\overline{X}<\mu+4\}\geqslant$ __________.

解析 $E(\overline{X})=\mu,D(\overline{X})=\dfrac{8}{n}.$

则 $P(\mu-4<\overline{X}<\mu+4)=P(|\overline{X}-\mu|<4)\geqslant 1-\dfrac{D(\overline{X})}{4^2}$,

即
$$P(\mu-4<\overline{X}<\mu+4)\geqslant 1-\frac{1}{2n},$$

而
$$P(\mu-4<\overline{X}<\mu+5)\geqslant P(|\overline{X}-\mu|<4)\geqslant 1-\frac{1}{2n}.$$

评注　切比雪夫不等式只能估计方差存在的随机变量在以期望为中心的对称区间上取值的概率,而对一般的区间 $P(a<x<b)$ **可先缩小区间再估计,当然结果很粗略.**

例 10.4　设随机变量 X **的数学期望** $E(X)=\mu$,**方差** $D(X)=\sigma^2$,**利用切比雪夫不等式,估计概率** $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}$.

解析　令 $\varepsilon=3\sigma$,**则由切比雪夫不等式** $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ **得** $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant\dfrac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\dfrac{1}{9}$.

例 10.5　设事件 A **在第** k **次试验中发生的频率为** p_k,$k=1,2,\cdots$ **设** μ **表示** A **在** n **次独立试验中发生的次数,则对** $\forall\varepsilon>0$,**求证**
$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

解析　令
$$\mu_k=\begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 次试验中 } A \text{ 发生},\\ 0, & \text{第 } k \text{ 次试验中 } A \text{ 不发生}.\end{cases}$$

则
$$E(\mu_k)=p_k,D(\mu_k)=p_k(1-p_k)=p_kq_k,$$
其中
$$q_k=1-p_k.$$
因为
$$p_k+q_k=1,(p_k+q_k)^2-4p_kq_k\geqslant 0,$$
所以
$$p_kq_k\leqslant\frac{1}{4},\text{即 } D(\mu_k)\leqslant\frac{1}{4}.$$

由题意 $\mu=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k$,**根据切比雪夫大数定律:**
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\mu_k)\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

例 10.6 设$\{X_k\}$为相互独立的随机变量序列,且

$$X_k\sim\begin{pmatrix}-2^k & 0 & 2^k\\ \dfrac{1}{2^{2k+1}} & 1-\dfrac{1}{2^{2k}} & \dfrac{1}{2^{2k+1}}\end{pmatrix},(k=1,2,\cdots)$$

试证$\{X_k\}$服从大数定律.

解析 $E(X_k)=(-2^k)\times\dfrac{1}{2^{2k+1}}+0\times\left(1-\dfrac{1}{2^{2k}}\right)+2^k\cdot\dfrac{1}{2^{2k+1}}=0,$

$$D(X_k)=E(X_k^2)=(-2^k)^2\times\frac{1}{2^{2k+1}}+(2^k)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=1,$$

$(k=1,2,\cdots)$ 依切比雪夫大数法则知随机变量序列$\{X_k\}$服从大数定律.

例 10.7 某保险公司多年的统计资料表明,在索赔户中被盗索赔户占 20%,以 X 表示在随意抽取的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(1) 写出 X 的概率分布;

(2) 利用德莫佛-拉普拉斯定理,求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率.

解析 (1) 易见 $X\sim B(100,0.2)$,

$P\{X=k\}=C_{100}^k(0.2)^k(0.8)^{100-k}.(k=0,1,2,\cdots,100)$

(2) $E(X)=np=100\times0.2=20$, $D(X)=np(1-p)=100\times0.2\times0.8=16$, 所求概率为

$$P\{14<X<30\}=\Phi\left(\frac{30-20}{4}\right)-\Phi\left(\frac{14-20}{4}\right)$$
$$=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1$$
$$=0.994+0.933-1=0.927.$$

例 10.8 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$,证明当 n 充分大时,随机变量 $Z_n=$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数.

解析 依题意 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，可见 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也独立同分布. 由 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$ 有

$$E(X_i^2)=\alpha_2,$$

$$D(X_i^2)=E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2=\alpha_4-\alpha_2^2,$$

$$E(Z_n)=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\alpha_2,$$

$$D(Z_n)=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i^2)=\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2),$$

因此，根据中心极限定理，$U_n=\frac{Z_n-\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4-\alpha_2^2)/n}}$ 的极限分布是标准正态分布，即当 n 充分大时，Z_n 近似服从参数为 $\left(\alpha_2,\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)\right)$ 的正态分布.

例 10.9 试利用(1) 切比雪夫不等式；(2) 中心极限定理分别确定投掷一枚均匀硬币的次数，使得出现“正面向上”的频率在 0.4 到 0.6 之间的概率不小于 0.9.

解析 设 X 表示投掷一枚均匀硬币 n 次“正面向上”的次数，则 $X\sim B(n,0.5)$，$E(X)=np=0.5n$，$D(X)=np(1-p)=0.25n$.

(1) $P\left\{0.4<\frac{X}{n}<0.6\right\}$

$$=P\{0.4n<X<0.6n\}=P\{-0.1n<X-0.5n<0.1n\}$$

$$=P\{|X-0.5n|<0.1n\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{(0.1n)^2}$$

$$=1-\frac{0.25n}{0.01n^2}=1-\frac{25}{n}\geqslant 0.9,\ \frac{25}{n}\leqslant 0.1,\ n\geqslant 250.$$

(2) $P\left\{0.4<\frac{X}{n}<0.6\right\}=P\{0.4n<X<0.6n\}$

$$= \Phi\left(\frac{0.6n-0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right)-\Phi\left(\frac{0.4n-0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right)$$

$$= \Phi(0.2\sqrt{n})-\Phi(-0.2\sqrt{n})$$

$$= 2\Phi(0.2\sqrt{n})-1 \geqslant 0.9, \Phi(0.2\sqrt{n}) \geqslant 0.95.$$

查表得 $0.2\sqrt{n} \geqslant 1.645, n \geqslant 67.65$，**取** $n=68$.

评注　估计概率时，一般情况下，用中心极限定理要比用切比雪夫不等式精确得多.

例 10.10　甲乙两个戏院在竞争 1 000 **名观众，假定每个观众完全随机地选择一个戏院，问每个戏院应该设有多少个座位才能保证因缺少座位而使观众离去的概率小于** 1%？

解析　因两个戏院情况一样，故只需考虑甲戏院，即可设甲戏院需设 M **个座位，定义随机变量** ξ_i **如下：**

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{若第 } i \text{ 个观众选择甲戏院,}\\ 0, & \text{否则,}\end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,1\,000)$$

则
$$P(\xi_i=1)=P(\xi_i=0)=\frac{1}{2},$$

$\xi_1,\cdots,\xi_{1\,000}$ **是独立同分布的随机变量.**

以 ξ **表示选择甲戏院的观众总数，则** $\xi=\xi_1+\cdots+\xi_{1\,000}$，**按题意，要决定** M **使** $P(M\geqslant\xi)\geqslant 99\%$，**注意到** $E(\xi_i)=\frac{1}{2}, D(\xi_i)=\frac{1}{4}$. **由独立同分布的中心极限定理**

$$P\{\xi \leqslant M\} = P\left\{\sum_{i=1}^{1\,000}\xi_i \leqslant M\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{1\,000}(\xi_i-0.5)}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000}} \leqslant \frac{M-500}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{M-500}{5\sqrt{10}}\right) \geqslant 99\%,$$

$$\frac{M-500}{5\sqrt{10}} \geqslant 2.33, M \geqslant 2.33 \times 5\sqrt{10}+500 \approx 537.$$

即每个戏院应设 537 **个以上的座位.**

例 10.11　(1) **一个复杂系统由** 100 **个相互独立的元件组成,在系统运行期间每个元件损坏的概率为** 0.10,**又知为使系统正常运行,至少必须有** 85 **个元件工作,求系统的可靠度(即正常运行的概率);**(2) **上述系统假如由** n **个相互独立的元件组成,而且又要求至少有** 80%**的元件工作才能使整个系统正常运行,问** n **至少为多大时才能保证系统的可靠度为** 0.95**?**

解析　(1) **设** $X_k=\begin{cases}1, \text{第 } k \text{ 个元件正常工作}, \\ 0, \text{第 } k \text{ 个元件损坏},\end{cases}$ X **为系统正常运行时完好的元件数,**

$$X=\sum_{i=1}^{100} X_i,$$

由题设可知 $X_k(k=1,2,\cdots,100)$ **服从** 0—1 **分布,**$X=\sum\limits_{i=1}^{100} X_i \sim B(100,0.9)$,**于是**

$$E(X)=np=100 \times 0.9=90,$$
$$D(X)=npq=100 \times 0.9 \times 0.1=9,$$

故所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X>85\} &= 1-P\{X \leqslant 85\}=1-\Phi\left(\frac{85-90}{\sqrt{9}}\right) \\ &= 1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=\Phi(1.67)=0.9525. \end{aligned}$$

(2) $P\{X \geqslant 0.8n\}=0.95, E(X)=0.9n, D(X)=0.09n,$

而　$P\{X \geqslant 0.8n\}=1-\Phi\left(\dfrac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{3}\right),$

故　$\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.95, \dfrac{\sqrt{n}}{3}=1.645, n=24.35$,**即** n **至少为** 25.

例 10.12 某车间有 200 台车床，由于各种原因，每台车床只有 60%的时间在开动，每台车床开动期间耗电量为 E，问至少供应此车间多少电量才能以 99.9%的概率保证此车间不因供电不足而影响生产.

解析 以 X 表示工作的机床台数，则 $X \sim B(200, 0.6)$. 设要向车间供电 x 千瓦才能满足要求，即

$$P\{0 < X \leqslant x\} = \sum_{k=1}^{x} C_{200}^{k}(0.6)^{k}(0.4)^{200-k} \geqslant 0.999.$$

由德莫佛-拉普拉斯中心极限定理得

$$\begin{aligned} P\{0 < X \leqslant x\} &= P\left\{\frac{0-np}{\sqrt{npq}} < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{x-120}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{-120}{\sqrt{48}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{x-120}{\sqrt{48}}\right) \geqslant 0.999 = \Phi(3.1), \end{aligned}$$

$$\frac{x-120}{\sqrt{48}} \geqslant 3.1 \Rightarrow x \geqslant 141.$$

因此至少要向该车间供电 141 千瓦.

例 10.13 某厂有 400 台同类机器，各机器发生故障的概率为 0.02，设各台机器工作是相互独立的，试求出故障的台数不少于 2 的概率.

解析 设出故障的台数为 X，$X \sim B(400, 0.02)$，

$$E(X)=8,\ D(X)=7.84,\ \sqrt{D(X)}=2.8.$$

由中心极限定理：$P\{X \geqslant 2\} = 1 - P\{X < 2\}$

$$\begin{aligned} &= 1 - P\left\{\frac{X-8}{2.8} \leqslant \frac{2-8}{2.8}\right\} \\ &= 1 - \Phi(-2.1429) \approx 0.9842. \end{aligned}$$

例 10.14 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机

的.假设每箱平均重 50 千克,标准差为 5 千克,若用最大载重量为 5 吨的汽车承运,试用中心极限定理说明每辆车可以装多少箱才能保证不超载的概率大于 0.977($\Phi(2)=0.977$).

解析　设 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$是装运的第 i 箱的重量,n 是所求箱数.由条件可把 $x_1,\cdots,x_n$ 视为独立同分布.

$$T_n=x_1+\cdots+x_n,$$

$$E(x_i)=50,\sqrt{D(x_i)}=5,E(T_n)=50n,\sqrt{D(T_n)}=5\sqrt{n}.$$

由林德伯格-列维中心极限定理：$T_n\sim N(50n,25n)$.

$$P\{T_n\leqslant 5\,000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5\,000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2),$$

$$\frac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}>2,n<98.019\,9.$$

即最多可装 98 箱.

例 10.15　计算机做加法运算时,要对每个加数取整(即取最接近它的整数),设所有的取整误差是相互独立的,且它们都服从均匀分布 $U[-0.5,0.5]$,如果将 1 500 个数相加,求误差总和的绝对值超过 15 的概率.

解析　以 X_k 表示第 k 个数的取整误差($k=1,2,\cdots,1\,500$),它们相互独立,且都服从 $U[-0.5,0.5]$,有

$$E(X_k)=0,D(X_k)=\frac{1}{12}.$$

由林德伯格-列维定理,$\sqrt{\dfrac{12}{1\,500}}\sum\limits_{k=1}^{1\,500}X_k$ 渐近服从 $N(0,1)$ 分布,于是

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{1\,500}X_k\right|>15\right\}=2P\left\{\sqrt{\frac{12}{1\,500}}\sum_{k=1}^{1\,500}X_k>\sqrt{\frac{12}{1\,500}}\times 15\right\}$$

$$\approx 2[1-\Phi(1.34)] = 2[1-0.9099]$$
$$= 0.1802.$$

例 10.16 某调查公司受委托，调查某电视节目在 S 市的收视率 p，调查公司将所有调查对象中收看此节目的频率作为 p 的估计 $\hat{p}$，现在要保证有 90%的把握，使调查所得的收视率 $\hat{p}$ 与真实收视率 p 之间的差异不大于 5%，问至少要调查多少对象？

解析 设共调查 n 个对象，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个调查对象收看此电视节目}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个调查对象不看此电视节目}, \end{cases}$$

则 X_i 独立同分布，且 $P\{X_i = 1\} = p$，$P\{X_i = 0\} = 1 - p$.（$i = 1, 2, \cdots, n$）

设 n 个被调查对象中收看此电视节目的总人数为 Y_n，则

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,\ p).$$

由大数定律知，当 n 很大时，频率 Y_n/n 与概率 p 很接近即用频率去估计 p 是合适的，由题意：

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| < 0.05\right\} \approx 2\Phi\left(0.05\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1 \geqslant 0.90,$$

$$n \geqslant p(1-p)\frac{1.645^2}{0.05^2} = p(1-p) \times 1\,082.41,$$

又因为 $p(1-p) \leqslant 0.25$，所以 $n \geqslant 270.6$.

即至少调查 271 个对象.

阶段复习试题五

1. 试证：对任意的常数 $C \neq E(X)$ 有 $D(X) < E(X-C)^2$.

2. 设一袋中有编号从 1 到 N 的 N 个球，现随机地从中有放回地抽取 n 个，求 n 个球的最大编号的数学期望.

3. 设某元件的寿命服从参数为 λ 的指数分布，一个线路由两个元件串联而成，两个元件工作是相互独立的，试求该线路寿命的数学期望.

4. 某产品上的缺陷数 X 服从分布：$P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^{k+1}}$，$(k=0,1,\cdots)$

求此产品上的平均缺陷数.

5. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E|X-\mu|$.

6. 设有三个球，随机等可能地放到四个编号为 1，2，3，4 的盒子中去，设 ξ 表示至少包含有一个球的最小号码盒子的号码数，求 $E\xi$.

7. 某种圆盘的直径在区间 (a,b) 上服从均匀分布，试求此种圆盘的平均面积.

8. 某射手每次击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，他有 10 发子弹，一旦击中目标或子弹打完就停止，求他在停止前平均射击几次.

9. 在长为 a 的线段上任取两个点 X 与 Y，求此两点间的平均长度.

10. 设 X_1 和 X_2 相互独立，都服从参数为 λ 的指数分布，令 $Y=\max(X_1,X_2)$，求 $E(Y)$.

11. 一汽车载有 20 位旅客自起点站开出，途中有 10 个车站可以下车，若到达一个车站没人下车就不停车，以 X 表示停车次数，设每个人在每个车站下车是等可能的，且各人是否下车独立，求 $E(X)$.

12. 设 X 与 Y 分别表示将一颗骰子连接抛两次先后出现的点数,试求齐次方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2Yx_3 = 0, \\ x_1 + Xx_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + X^2 x_3 = 0 \end{cases}$ 的解空间的维数的数学期望与方差.

13. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 1)$ 独立同分布,且其方差 $\sigma^2 > 0$,令 $Y = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$,求 $\mathrm{cov}(X_1, Y)$.

14. 设 X 服从参数为 1 的指数分布,求 $E(X + \mathrm{e}^{-2X})$.

15. 将一个骰子独立地掷 n 次,求 1 点出现的次数与 6 点出现次数的协方差及相关系数.

16. 设 X 与 Y 独立,都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,试证 $E[\max(X, Y)] = \mu + \dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

17. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次击中目标的概率为 0.4,求 $E(X^2)$.

18. 将 n 只球($1 \sim n$ 号)随机地放入 n 只盒子($1 \sim n$ 号)中去,一只盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中称为一个配对,设 X 表示总的配对数,求 EX.

19. 设 X 服从参数为$\lambda > 0$ 的指数分布,证明使 $E(|X - C|)$ 取得最小值的参数 C 是$\dfrac{1}{\lambda}\ln 2$,且 C 满足 $P\{X \leqslant C\} = P\{X > C\} = \dfrac{1}{2}$.

20. 设$\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列,$E(X_n^4) < +\infty$,令 $E(X_n) = \mu, D(X_n) = \sigma^2, Y_n = (Z_n - \mu)^2$,求证序列$\{Y_n\}$ 服从大数定律.

21. 设 $X \sim N(1,1), Y \sim N(0,1), E(XY) = -0.1$,由切比雪夫不等式估计 $P\{-4 < X + 2Y < 6\}$.

22. 选修某门课程的学生人数是均值为 100 的泊松随机变量,

若选修人数不少于 120 人,就分成两个班;若少于 120 人就集中在一个班,求分成两个班的概率.

23. 设贝努里试验成功的概率为 5%,试估计进行多少次试验才能以概率 80%使成功的次数不少于 5 次.

24. 质检员逐个检查某产品,每次花 10 秒钟检查一个,但也有可能有的产品需再花 10 秒钟复检一次,假设每个产品需要复检的概率为 0.5,求在 8 小时内质检员检查产品个数多于 1 900 个的概率.

25. 掷一枚骰子,为至少有 95%的把握使 2 点出现的频率与概率之差落在 0.01 范围之内,需掷多少次?(分别用中心极限定理和切比雪夫不等式计算)

11 数理统计初步

11.1 基本概念与内容提要

1）总体　个体

研究对象的全体元素组成的集合称为总体或母体，总体中的每个元素称为个体. 值得注意的是，总体中的元素常常不是指元素本身，而是指元素的某一项或某几项数量指标 X 和该指标在总体中的分布情况，故 X 是个随机变量. 对总体的研究就是对相应的随机变量 X 分布的研究.

2）样本

设对总体进行了 n 次观察，得到一组数值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中每个 x_i 是一次抽样观察的结果，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为容量 n 的样本观察值. 就一次观察结果而论，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是完全确定的一组值，但它又是随每次抽样观察而改变的，具有随机性，这就是样本的两重性. 因而我们在考虑问题时，就不能把 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成确定的数值，而应看作 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. 称它是容量为 n 的样本.

满足下述两点性质的样本称为简单随机样本，简称样本. (1) 代表性：样本的每个分量 X_i 与所考察的总体 X 具有相同的分布 $F(x)$；(2) 独立性：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为相互独立的随机变量.

3）统计量与样本矩

(1) 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的一个样本. 称不含任何未

知参数的样本的函数 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ **为统计量.**

(2)* **称统计量** $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ **为样本均值**；$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ **为样本方差**；$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$ **为样本** k **阶原点矩**；$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=1, 2, \cdots)$ **为样本** k **阶中心矩.**

4)* χ^2 **分布，**t **分布和** F **分布**

(1) χ^2 **分布：设** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **是相互独立且同服从于** $N(0, 1)$ **分布的随机变量，则称随机变量** $\chi_n^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ **服从自由度为** n **的** χ^2 **分布，记作** $\chi_n^2\sim\chi^2(n)$.

$\chi^2(n)$**的密度函数为**

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

性质：(ⅰ) **若** $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，**且相互独立，则** $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$.

(ⅱ) **若** $\chi^2\sim\chi^2(n)$，**则** $E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$.

(2) t **分布：设** $X\sim N(0, 1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，**且** X **与** Y **独立，则称随机变量** $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ **服从自由度为** n **的** t **分布，记作** $T\sim t(n)$. **其密度函数为**

$$p(t)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}, -\infty<t<+\infty.$$

t **分布关于** Y **轴对称，当** n **充分大时，**t **分布近似于** $N(0, 1)$

分布.

(3) F 分布：设 $U \sim \chi^2(n_1)$，$V \sim \chi^2(n_2)$，且两者独立，则称 $F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为(n_1, n_2)的 F 分布，记为 $F \sim F(n_1, n_2)$. 其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1-1}{2}}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x \leqslant 0. \end{cases}$$

若 $X \sim F(n_1, n_2)$，则$\dfrac{1}{X} \sim F(n_2, n_1)$.

5）* 分位数

设 $X \sim N(0, 1)$，对于给定的 α，$0 < \alpha < 1$. 称满足 $P\{X \geqslant u_\alpha\} = \int_{u_\alpha}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha$ 的数 u_α 为 $N(0, 1)$ 分布的上侧 α 分位数（或分位点）.

类似地，设 $T \sim t(n)$，称满足 $P\{T \geqslant t_\alpha(n)\} = \alpha$ 的数 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上侧 α 分位数；设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，称满足 $P\{\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$ 的数 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 的上侧 α 分位数；设 $F \sim F(n_1, n_2)$，称 $P\{F \geqslant F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$ 的数 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 $F(n_1, n_2)$ 的上侧 α 分位数，它具有性质：

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$

6）* 正态总体某些常用统计量的分布

(1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$U = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是已知的常数，则 U 也服从正态分布，且 $E(U) = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i$，$D(U) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

（2）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，则有

（ⅰ）$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立；

（ⅱ）$U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$；

（ⅲ）$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

（ⅳ）$T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

（3）设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是从正态总体 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 中抽取的一个样本；$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的样本，且假定 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立. 记 $\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$，$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$. 则有

（ⅰ）$F = \dfrac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$，特别当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时，$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

（ⅱ）当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 时，

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \sim t(m+n-2).$$

11.2　典型习题与试题解析

例 11.1　设有样本 $X_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}_n)^2$.

求证：(1) $\overline{X}_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i=\dfrac{n}{n+1}\overline{X}_n+\dfrac{x_{n+1}}{n+1}$；

(2) $S_{n+1}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n+1}(x_i-\overline{X}_{n+1})^2=\dfrac{n-1}{n}S_n^2+\dfrac{1}{n+1}(x_{n+1}-\overline{X}_n)^2$.

解析 (1)
$$\begin{aligned}\overline{X}_{n+1}&=\frac{1}{n+1}(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})\\&=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot(x_1+\cdots+x_n)+\frac{x_{n+1}}{n+1}\\&=\frac{n}{n+1}\overline{X}_n+\frac{x_{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}S_{n+1}^2&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\overline{X}_{n+1})^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}\left(x_i-\frac{n}{n+1}\overline{X}_n-\frac{x_{n+1}}{n+1}\right)^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\overline{X}_n)+\left(\frac{\overline{X}_n}{n+1}-\frac{x_{n+1}}{n+1}\right)\right]^2+\\&\quad\frac{1}{n}\left(x_{n+1}-\frac{n}{n+1}\overline{X}_n-\frac{x_{n+1}}{n+1}\right)^2\\&=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X}_n)^2+\frac{2}{n}\frac{(\overline{X}_n-x_{n+1})}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\\&\quad\overline{X}_n)+\frac{(\overline{X}_n-x_{n+1})^2}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+1)^2}(\overline{X}_n-x_{n+1})^2\\&=\frac{n-1}{n}S_n^2+\frac{1}{n+1}(\overline{X}_n-x_{n+1})^2.\end{aligned}$$

评注 如果样本容量增加一个，其 $n+1$ 个数据构成的新样本的平均数与方差的计算无需从头重新做起，而可根据前几个数据已求出的均值与方差加上新的一个数据由本例的公式求得. 类似地，当数据减少一个时，也可推出相应的递推公式.

例 11.2 设某车站一天内的候车的人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求$(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布律；

(2) 求 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律.

解析　总体 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},(k=0,1,2\cdots)$$

(1) 由于样本$(X_1,\cdots,X_n)$是简单随机样本,所以其联合分布律为：

$$\begin{aligned}&P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}\\&=\prod_{k=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{x_k}}{x_k!}e^{-\lambda}\\&=\frac{\lambda^{\sum_{k=1}^{n}x_k}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}.\end{aligned}$$

(2) 由于 $X_1,\cdots,X_n$ 独立且与总体 X 都服从参数为 λ 的泊松分布,注意到泊松分布的可加性可知 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从参数为 $n\lambda$ 的泊松分布,所以

$$\begin{aligned}P\left\{\overline{X}=\frac{k}{n}\right\}&=P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right\}\\&=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}.(k=0,1,2\cdots)\end{aligned}$$

例 11.3　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值,记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\quad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是　　　　(　　)

A. $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　　B. $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

C. $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　D. $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

解析　因 $\xi=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，$\eta=\dfrac{ns_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 ξ 与 η 相互独立，于是

$$\frac{\xi}{\sqrt{\eta/n-1}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)\text{，故选 B.}$$

例 11.4　设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，当 a, b 为何值时，统计量 $X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 服从 χ^2 分布，其自由度是多少？

解析　依题意 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布，

$E(X_1-2X_2)=0$，$D(X_1-2X_2)=D(X_1)+4D(X_2)=20$，

$E(3X_3-4X_4)=0$，$D(3X_3-4X_4)=9D(X_3)+16D(X_4)=100$.

则
$$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1),\ \frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1),$$

又 X_1-2X_2 与 $3X_3-4X_4$ 独立，于是

$$\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}\sim\chi^2(2),$$

所以，当 $a=\dfrac{1}{20}$, $b=\dfrac{1}{100}$ 时，统计量 X 服从 χ^2 分布，自由度为 2.

例 11.5　设 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,3^2)$，而 $X_1, X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 分别是来自 X 与 Y 的简单随机样本，求统计量

$$U=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$$

的分布.

解析　$X_i\sim N(0,3^2)$, $Y_j\sim N(0,3^2)$, $i, j=1,\cdots,9$. X_1,

$\cdots, X_9; Y_1, \cdots, Y_9$ 独立. $X_1+\cdots+X_9 \sim N(0, 9^2)$, $\dfrac{Y_i}{3} \sim N(0, 1)$,

$$\frac{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}{9} = \sum_{i=1}^{9}\left(\frac{Y_i}{3}\right)^2 \sim \chi^2(9).$$

因 X_i 与 Y_j 独立($i, j=1, \cdots, 9$),从而 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9}$ 与 $\dfrac{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}{9}$ 独立,由 t 分布之定义知

$$U = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}} = \frac{(X_1+\cdots+X_9)/9}{\sqrt{\dfrac{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}{9}/9}} \sim t(9).$$

例 11.6　设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本,S^2 为其样本方差,求 $E(S^2)$.

解析　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = 0$,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2, \end{aligned}$$

则
$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=2.$$

因为 S^2 是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计,所以

$$E(S^2)=D(X)=2.$$

例 11.7　设($X_1, \cdots, X_n$)是从服从 $B(1, p)$ 的总体 X 中的抽得的样本,则

$$Z=\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$$

近似服从 $N(0, 1)$ 的一个充分条件是　　　　(　　)

A. $p=p_0$ 且 $0<p_0<1$

B. n 充分大且 $P(X=0)=1-p_0$

C. n 充分大且 $\lim\limits_{n\to\infty}np=\lambda$

D. n 充分大且 $P(X=0)=p_0$

解析　当(B)成立时,由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p_0)$. 故当 n 充分大时,$\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$ 近似服从 $N(0,1)$. 故(B)正确.

(A)缺少 n 充分大条件,(D)中 $p=1-p_0$ 不符要求,(C)显然不对.

例 11.8　若随机变量 X 具有自由度为 n_1, n_2 的 F 分布,求证(1) $Y=\dfrac{1}{X}$ 具有自由度为 n_2, n_1 的 F 分布;(2)证明 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$.

解析　(1)因 $X\sim F(n_1,n_2)$,故可设 $X=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$,其中 $U\sim\chi^2(n_1)$, $V\sim\chi^2(n_2)$,且 U 与 V 相互独立,于是 $\dfrac{1}{X}=\dfrac{V/n_2}{U/n_1}$,由 F 分布之定义知 $Y=\dfrac{1}{X}\sim F(n_2,n_1)$.

(2)由上侧 α 分位数的定义知:

$P\{X\geqslant F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\}=1-\alpha$, $P\left\{\dfrac{1}{X}\leqslant\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}=1-\alpha$,

即 $P\left\{Y\leqslant\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}=1-\alpha$,$1-P\left\{Y>\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}=1-\alpha$,

$$P\left\{Y>\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}=\alpha,$$

而 $P\{Y\geqslant F_\alpha(n_2,n_1)\}=\alpha$. 又 Y 为连续型随机变量,故

$$P\left\{Y\geqslant\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}=\alpha.$$

从而 $$F_{\alpha}(n_2, n_1) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)},$$

即 $$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}.$$

例 11.9 若 $X \sim t(n)$，试求 X^2 的分布.

解析 因 $X \sim t(n)$，由 t 分布之定义，设 $X = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中 $U \sim N(0, 1)$，$V \sim \chi^2(n)$，且 U 与 V 独立，于是 $U^2 \sim \chi^2(1)$，$X^2 = \frac{U^2}{V/n} = \frac{U^2/1}{V/n}$，由 F 分布之定义知 $X^2 \sim F(1, n)$.

例 11.10 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的总体中抽取的样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别表示它的样本均值与样本方差. 又设 $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$，且与 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立. 试求统计量

$$\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

的概率分布.

解析 因 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$，$i = 1, 2, \cdots, n+1$，

故 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$，$\overline{X}$ 与 X_{n+1} 独立，$E(X_{n+1} - \overline{X}) = \mu - \mu = 0$，

$D(X_{n+1} - \overline{X}) = D(X_{n+1}) + D(\overline{X}) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n+1}{n}\sigma^2$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且 $X_{n+1} - \overline{X}$ 与 S^2 相互独立，由 t 分布之定义知，因此 $\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}} \sim N(0, 1)$.

$$\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{(X_{n+1} - \overline{X}) \Big/ \sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}} \sim t(n-1).$$

例 11.11 在天平上重复称量一重为 a 的物品,设各次称量结果相同独立且都服从 $N(a,\ 0.2^2)$,以 X 表示称量结果的算术平均值,求使得 $P\{|X-a|<0.1\}\geqslant 0.95$ 成立的自然数 n 的范围.

解析 $X_i\sim N(a,\ 0.2)^2$,则 $\overline{X}\sim N(a,\ 0.2^2/n)$,

$$P\{|\overline{X}-a|<0.1\}=P\left\{\frac{|\overline{X}-a|}{0.2/\sqrt{n}}<\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right\}$$

$$=2\Phi\left(\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right)-1\geqslant 0.95,$$

$$\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\geqslant 1.96,\text{即 } n\geqslant 15.366.$$

故 n 的范围为 $n\geqslant 16$.

例 11.12 设 $X_1,\ \cdots,\ X_{10},\ Y_1,\ \cdots,Y_{15}$ 相互独立且都为 $N(20,(\sqrt{3})^2)$ 分布,求 $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3\}$.

解析 因为 $X_1,\ \cdots,\ X_{10},Y_1,\cdots,Y_{15}$ 独立且都服从 $N(20,\ 3)$ 分布,所以 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 独立,且

$$\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N\left(20,\ \frac{3}{10}\right),\ \overline{Y}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}Y_i\sim N\left(20,\ \frac{3}{15}\right),$$

因此
$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\ \frac{1}{2}\right),$$

则
$$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3\}=P\left\{\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{1/2}}>\frac{0.3}{\sqrt{1/2}}\right\}=P\left\{\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{1/2}}>0.3\sqrt{2}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{1/2}}<0.42\right\}=2[1-\Phi(0.42)]$$

$$=2[1-0.662\,8]=0.674\,4.$$

12

参数估计与假设检验

12.1　基本概念与内容提要

1）* 点估计

设总体的分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 θ 为未知参数. 参数的点估计问题是根据样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 构造一个统计量 $\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ 来估计未知参数 θ，称 $\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ 为 θ 的估计量，如果 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是样本的一组观察值，称 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 为 θ 的点估计值. 常用的点估计方法有矩估计法与极大似然估计法.

(1) 矩估计法　矩估计法的基本思想是用样本矩代替相应的总体矩.

设总体 X 的分布中含有 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$. 假定总体 X 的 α 阶矩

$\nu_\alpha = E(X^\alpha) = h_\alpha(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 存在，$(\alpha = 1, 2, \cdots, k)$

令　$h_\alpha(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^\alpha \ (\alpha = 1, 2, \cdots, k)$，解得　$\hat{\theta}_\alpha = \hat{\theta}_\alpha(X_1, X_2, \cdots, X_n)(\alpha = 1, 2, \cdots, k)$，分别取 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量，这就是求估计量的矩估计法，所得估计量称为矩估计量.

(2) 极大似然估计法　设总体 $X \sim P(x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$，连续型时为密度函数，离散型时为 X 取值 x 时的概率，$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 为未知参数. 又设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的观察

值.称样本的联合密度(或联合概率)

$$L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

为似然函数.

极大似然估计法就是求样本的函数$\hat{\theta}_\alpha = \hat{\theta}_\alpha(x_1, \cdots, x_n)(\alpha=1, 2, \cdots, k)$,使

$$L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \max_{\theta_1, \cdots, \theta_k} L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k),$$

称 $\hat{\theta}_\alpha(x_1, \cdots, x_n)(\alpha = 1, 2, \cdots, k)$ 为极大似然估计值,把$\hat{\theta}_\alpha$ 中的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 换成 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 就得到极大似然估计量.

由于 $\ln x$ 是 x 的单调增加函数,因而 $\ln L$ 与 L 有相同的极大值点,称

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)}{\partial \theta_j}\right|_{\theta_j=\hat{\theta}_j} = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, k)$$

为似然方程,求解似然方程,可得$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$.

2)估计量的优良性的评选标准

(1) 无偏性:若 θ 的估计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$满足

$$E(\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)) = \theta,$$

则称$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

(2) 有效性:设$\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$都是 θ 的无偏估计量,若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$,则称$\hat{\theta}_1$ 较$\hat{\theta}_2$ 有效.

(3) 一致性:设$\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为参数 θ 的估计量,若对任意正数 ε,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

则称$\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一致估计量(也称相合估计量).

3)区间估计

(1) 设总体 $X \sim F(x; \theta)$含有一个未知参数 θ, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的样本.若对于事先给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$,存在两个统计量 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$与$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,使得

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha,$$

则称区间($\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$)是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间,$1-\alpha$ 称为置信度. $\hat{\theta}_1$ 称为置信下限,$\hat{\theta}_2$ 称为置信上限.

(2) * **单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$中均值 μ 和方差 σ^2 的置信区间:**

(ⅰ) **σ^2 已知,μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为**

$$\left(\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

(ⅱ) **σ^2 未知,μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为**

$$\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

(ⅲ) **μ 未知,σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是**

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

(3) **两个正态总体的均值差与方差比的置信区间:**

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本,且两者独立. 记

$$\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i, \overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2.$$

(ⅰ) **若 σ_1^2, σ_2^2 已知,$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是**

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \overline{X}-\overline{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

(ⅱ) **若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$,但 σ^2 未知,$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是**

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, \overline{X}-\overline{Y}+\right.$$

$$\left.t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right),$$

其中 $$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

（ⅲ）σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)}\right).$$

4）假设检验的基本概念

（1）**假设检验问题**：若总体的分布类型为已知，对分布的一个或几个参数的值作出“假设”，此称为参数的假设检验问题；若总体的分布类型未知，对总体 X 的分布函数假设为某个指定的函数$F_0(x)$，此称为非参数的假设检验问题. 随机变量 X 与 Y 的相关性或独立性的假设检验也属于非参数假设检验. 这种对总体分布的未知参数或分布类型提出的假设称为原假设或零假设，用 H_0 表示. 当对某个问题提出原假设 H_0 时，事实上也同时给出了另外一个假设，称为备择假设或对立假设，用 H_1 表示.

（2）**假设检验的基本思想**：首先假设 H_0 是真的，在 H_0 成立的条件下，求已经观察到的样本信息出现的概率. 如果这个概率很小，就表明小概率事件在一次试验中发生了，这与实际推断原理（小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的）矛盾，故拒绝 H_0，否则不能拒绝 H_0.

（3）**两类错误**：第一类错误是原假设 H_0 成立，而检验结果是否定 H_0，这犯了“以真作假”即弃真错误，犯第一类错误的概率不大于显著水平 α. 第二类错误是原假设 H_0 不真，而检验结果接受 H_0，这又犯了“以假作真”即采伪错误.

（4）* **假设检验的步骤**：

（ⅰ）根据所提的问题提出原假设 H_0 及备择假设 H_1；

（ⅱ）由样本构造合适的统计量 T，并在 H_0 为真的条件下求出统计量 T 的分布；

（ⅲ）给定显著水平 α，查有关分布的表得到临界值，从而确定拒绝域 W；

（ⅳ）由样本算出统计量 T 的值；

（ⅴ）作判断：若 $T\in W$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

5）正态总体均值与方差的检验

正态总体均值与方差的检验方法列表如下（显著水平为 α）：

	原假设 H_0	对总体的要求	检验统计量	在 H_0 为真时统计量的分布	备择假设 H_1	拒绝域
*1	$\mu=\mu_0$	正态总体方差 σ^2 已知	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$u\geqslant u_\alpha$ $u\leqslant -u_\alpha$ $\lvert u\rvert\geqslant u_{\alpha/2}$
*2	$\mu=\mu_0$	正态总体方差 σ^2 未知	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$
*3	$\sigma^2=\sigma_0^2$	正态总体 μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2\geqslant\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2\leqslant\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
4	$\mu_1=\mu_2$	两正态总体方差 σ_1^2，σ_2^2 已知	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\mu_1>\mu_2$ $\mu_1<\mu_2$ $\mu_1\neq\mu_2$	$u\geqslant u_\alpha$ $u\leqslant -u_\alpha$ $\lvert u\rvert\geqslant u_{\alpha/2}$
5	$\mu_1=\mu_2$	两正态总体方差 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 但未知	$T=$ $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_W=$ $\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\mu_1>\mu_2$ $\mu_1<\mu_2$ $\mu_1\neq\mu_2$	$t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

续 表

	原假设 H_0	对总体的要求	检验统计量	在 H_0 为真时统计量的分布	备择假设 H_1	拒绝域
6	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	两正态总体 μ_1, μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(n_1-1, n_2-1)$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geqslant F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F\geqslant F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F\leqslant F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu=\mu_1-\mu_2=0$(成对数据)	两正态总体 X 与 Y,令 $Z=X-Y$	$T=\dfrac{\overline{Z}}{S_Z/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\mu>0$ $\mu<0$ $\mu\neq0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$

注 表中一个总体的样本为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$;两个总体的样本分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$, $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$, $\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}Y_i$, $S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$, $S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$;对成对数据,$n_1=n_2=n$,$Z_i=X_i-Y_i$,$\overline{Z}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i$, $S_Z^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2$.

6)分布的 χ^2 拟合检验法

(1) 设 $F(x)$是总体 X 的未知的分布函数,$F_0(x)$是某个已知的分布函数,$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 X 的样本观察值,检验 H_0: $F(x)=F_0(x)$.

适当选取 $k-1$ 个实数 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}<+\infty$,把$(-\infty, +\infty)$分成 k 个互不相交的区间 $(-\infty, a_1]$, $(a_1, a_2]$, $\cdots$, $(a_{i-1}, a_i]$, $\cdots$, $(a_{k-1}, +\infty)$,以 n_1 表示样本观察值落在$(-\infty, a_1]$内的频数,n_i 表示样本观察值落在$(a_{i-1}, a_i]$内的频数($i=2, 3, \cdots$,

$k-1$)，n_k 表示样本观察值落在$(a_{k-1}, +\infty)$内的频数(一般要求 $n_i \geqslant 5$，$i=1, 2, \cdots, k$)，记

$$p_1 = F(a_1),$$
$$p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}) \quad (i = 2, \cdots, k-1),$$
$$p_k = 1 - F(a_{k-1}),$$

构造统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \text{则 } \chi^2 \sim \chi^2(k-1).$$

计算统计量 χ^2 的值，如果 $\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2(k-1)$，那么拒绝 H_0，即可以认为 $F(x)$与 $F_0(x)$有显著差异；如果 $\chi^2 < \chi_\alpha^2(k-1)$，则不拒绝 H_0，即可以认为 $F(x)$与 $F_0(x)$无显著差异.

(2) 设 $F(x)$是总体 X 的未知的分布函数，$F_0(x; \theta_1, \cdots, \theta_s)$是某个已知的分布函数，但含有未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 X 的样本观察值，检验 H_0：$F(x)=F(x; \theta_1, \cdots, \theta_s)$.

首先在 $F_0(x; \theta_1, \cdots, \theta_s)$中用 s 个未知参数的极大似然估计 $\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_s$ 来代替 $\theta_1, \cdots, \theta_s$，然后作统计量 χ^2，当 H_0 成立时，

$$\chi^2 \sim \chi^2(k-s-1),$$

再按类似于(1)的方法进行检验.

12.2　典型习题与试题解析

例 12.1　求总体均值 μ 与方差 σ^2 的矩估计量.

解析　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的样本，又设总体的二阶矩存在，则由矩估计，

$$\mu_1 = E(X) = \mu, \quad \mu_2 = E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \sigma^2 + \mu^2,$$

令　$\hat{\mu}_1 = \overline{X}$，　　$\hat{\mu}_2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$，

得

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S_n^2.$$

可见这两个矩估计量的表达式与总体分布无关.

例 12.2　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 和 σ^2 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本，求 μ 与 σ^2 的极大似然估计量.

解析　X 的密度函数为 $P(x; \mu, \sigma^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$，似然函数为

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{2\sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0, \end{cases}$$

由前式解得 $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$，代入后式得　$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = S_n^2$. 则 μ, σ^2 的极大似然估计量分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = S_n^2,$$

它们与相应的矩估计量相同.

例 12.3　设在 n 次独立试验中事件 A 发生 k 次，求事件 A 发生的概率 p 的矩估计量与极大似然估计量.

解析　令 X 表示在一次随机试验中事件 A 发生的次数，即

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 发生}, \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生}, \end{cases}$$

则 $P(X=1) = P(A) = p$，$P(X=0) = P(\bar{A}) = 1-p$. 重复 n 次试验，设 X_i 为第 i 次试验中事件 A 发生的次数 $(i=1, \cdots, n)$，则 $k =$

$\sum_{i=1}^{n} X_i$. 因为 $E(X)=p$,故得 p 的矩估计量为

$$\hat{p}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{k}{n}.$$

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是相应于样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观察值,$X\sim B(1, P)$,其分布律为

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x},(x=1, 2)$$

故似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i},$$

$$\ln L(p)=\sum x_i \ln p+(n-\sum x_i)\ln(1-p),$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum x_i}{p}-\frac{n-\sum x_i}{1-p}=0,$$

解得 p 的极大似然估计值为$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum x_i=\overline{x}$,$p$ 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum X_i=\overline{X}$.

例 12.4　设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数$(0<\theta<1)$. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,记 N 为样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中小于 1 的个数. 求

(1) θ 的矩估计;

(2) θ 的最大似然估计.

解析　(1) 由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \theta x \mathrm{d}x + \int_1^2 (1-\theta) x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{2}(1-\theta)$$

$$= \frac{3}{2} - \theta,$$

令 $\frac{3}{2} - \theta = \overline{X}$,**解得** $\theta = \frac{3}{2} - \overline{X}$, **所以参数** θ **的矩估计为**

$$\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \overline{X}.$$

（2）**似然函数为**

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N},$$

取对数,得

$$\ln L(\theta) = N\ln\theta + (n-N)\ln(1-\theta),$$

两边对 θ **求导,得**

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}(\theta)} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0$,**得** $\theta = \frac{N}{n}$,

所以 θ **的最大似然估计为**

$$\hat{\theta} = \frac{N}{n}.$$

例 12.5　设总体 X **在**$[\theta_1, \theta_2]$**上服从均匀分布,** θ_1, θ_2 **未知. 试由样本** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **求** θ_1 **与** θ_2 **的矩估计量与极大似然估计量.**

解析　(1) $\mu_1 = E(X) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$,

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12} + \frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4},$$

令

$$\hat{\mu}_1 = \overline{X},\ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

即 $$\overline{X}=\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2),\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_x^2=\frac{(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1)^2}{12}+\overline{X}^2,$$

$$\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2=2\overline{X},$$

$$\frac{(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1)^2}{12}=\frac{1}{n}\sum X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^2=S_n^2,$$

$$\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1=2\sqrt{3}S_n,$$

解得 θ_1 与 θ_2 的矩估计量为

$$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3}S_n,\ \hat{\theta}_2=\overline{X}+\sqrt{3}S_n.$$

(2) 因为 X 的密度函数

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1\leqslant x\leqslant\theta_2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以 θ_1 与 θ_2 的似然函数为

$$L(\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n, & \theta_1\leqslant x_i\leqslant\theta_2,(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

似然方程为 $$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=\dfrac{n}{\theta_2-\theta_1}=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_2}=\dfrac{-n}{\theta_2-\theta_1}=0,\end{cases}$$

从似然方程不可能解得 θ_1 与 θ_2 的极大似然估计量. 由极大似然原理，欲使似然函数非零，必须要求：$\theta_1\leqslant x_i\leqslant\theta_2$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而 $\theta_1\leqslant x_1^*=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\theta_2\geqslant x_n^*=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

由于 $$L(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{x_n^*-x_1^*}\right)^n,$$

取 $\hat{\theta}_1=x_1^*=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\hat{\theta}_2=x_n^*=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

则有 $$L(\theta_1,\theta_2)\leqslant L(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2),$$

故得 θ_1 与 θ_2 的极大似然估计量分别为

$$\hat{\theta}_1=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\ \hat{\theta}_2=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

例 12.6　设$(X_1,\cdots,X_n)$是抽自正态总体$N(0,\sigma^2)(\sigma^2>0)$的一个样本,证明$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$是$\sigma$的无偏估计.

解析　首先计算$E(|X|)$.

$$E(|X|)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\left(令\ t=\frac{x}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\cdot(-e^{-t^2/2})\Big|_0^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

所以$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|)=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sigma=\sigma$,即$\hat{\sigma}$是$\sigma$的无偏估计.

例 12.7　设总体X的方差$D(X)=\sigma^2$是有限的,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体X的样本. 记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则$S_n^2$不是$\sigma^2$的无偏估计量,而$S^2$是$\sigma^2$的无偏估计量.

解析　设$\mu=E(X)$,则$E(\overline{X})=\mu$,$D(\overline{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$.

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2,$$

$$E(S_n^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\overline{X})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[D(X_i)+(EX_i)^2]-[D(\overline{X})+(E\overline{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2,$$

因此 S_n^2 不是 σ^2 的无偏估计,而

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right] = E\left[\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$$

$$= \frac{n}{n-1}E(S_n^2) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2,$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计.

例 12.8　设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ **为总体 X 的简单随机样本,其样本方差为** S^2,**则** $E(S^2)=$________.

解析　由例 9.2 **可知** $D(X)=2$,**又由上例可知** $E(S^2)=D(X)=2$.

例 12.9　设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$,$(X_1, \cdots, X_n)$ **是取自 X 的容量为 n 的样本. 试确定常数 C,使得** $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ **是 σ^2 的无偏估计.**

解析　由于 $X_{i+1}-X_i\sim N(0, 2\sigma^2)$,**故**

$$E\left(C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right) = C\cdot\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2 = C\cdot(n-1)\cdot 2\sigma^2.$$

要使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ **是 σ^2 的无偏估计,只须** $C\cdot 2(n-1)\sigma^2=\sigma^2$,

故
$$C=\frac{1}{2(n-1)}.$$

例 12.10　设随机变量 $X_i(i=1, \cdots, n)$ **两两不相关,且具有相同均值 μ 和方差 σ^2. 求在形如** $\sum_{i=1}^{n}C_iX_i$ **的估计中达到最小方差的无偏估计.**

解析　为使估计是无偏的,要求 $E\left(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}C_i\right)\mu=\mu$,

所以$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$. 由 $X_1, \cdots, X_n$ 两两不相关，

它的方差为
$$D\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma^2.$$

记
$$J(C_1, \cdots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} C_i - 1\right).$$

由 $\frac{\partial J}{\partial C_i} = 0$ 得到 $2C_i + \lambda = 0 (i = 1, \cdots, n)$，$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$，所以 $C_1 = \cdots = C_n = \frac{1}{n}$，即$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$ 是在上述估计类中达到最小方差的无偏估计.

例 12.11 设$\hat{\theta}$是参数 θ 的无偏估计. 且有 $D(\hat{\theta}) > 0$. 试证$\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计.

解析 （反证法）若$\hat{\theta}^2$ 是 θ^2 的无偏估计，且$\hat{\theta}$也是 θ 的无偏估计，则有 $D(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E\hat{\theta})^2 = \theta^2 - \theta^2 = 0$ 与 $D(\hat{\theta}) > 0$ 矛盾，所以$\hat{\theta}^2$ 一定不是 θ^2 的无偏估计.

例 12.12 设总体 $X \sim U(0, \theta)$，$X_1, \cdots, X_n$ 是抽自该总体的一个样本.

（1）证明$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$，$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}X(n)$都是 θ 的无偏估计；

（2）$\hat{\theta}_1$ 和$\hat{\theta}_2$ 哪一个有效（$n \geqslant 2$ 时）？

解析 （1）由 $U(0, \theta)$的密度函数 $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

知
$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

所以
$$E(2\overline{X}) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2}\theta = \theta.$$

$$E\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\frac{n+1}{n}\int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\theta=\theta.$$

即$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 均为 θ 无偏估计.

（2）$D(\hat{\theta}_1)=D(2\overline{X})=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$. 由 $E(X_{(n)}^2)=\int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2$ 得

$$D(\hat{\theta}_2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}[E(X_{(n)}^2)-(EX_{(n)})^2]=\frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

从而当 $n\geqslant 2$ 时，$D(\hat{\theta}_2)<D(\hat{\theta}_1)$. 即$\hat{\theta}_2$ 比$\hat{\theta}_1$ 有效.

评注　这里$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 同样是 θ 的无偏估计，但证明方法有所不同. 对于$\hat{\theta}_1=2\overline{X}$，它是样本 X_1，…，X_n 的线性函数. 可利用数学期望的运算性质 $E\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_1^n E(X_i)$ 求得，并不要求出$\hat{\theta}_1$ 的分布.

而$\hat{\theta}_2=X_{(n)}$ 则一定要先求出 $X_{(n)}$ 的分布密度. 然后利用期望定义进行计算. 计算方差也如此.

例 12.13　设 n 个随机变量 X_1，X_2，…，X_n 独立同分布，

$$D(X_i)=\sigma^2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2,$$

则　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. S 是 σ 的无偏估计量

B. S 是 σ 的最大似然估计量

C. S 是 σ 的相合估计量（即一致估计量）

D. S 与$\overline{X}$相互独立

解析　n 个随机变量 X_1，X_2，…，X_n 独立同分布，且 $D(X_i)=\sigma^2$，则 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，但 S 不是 σ^2 的无偏估计量；若 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的极大似然估计，从而

$$S_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}S$$

是 σ 的极大似然估计，但 S 不是 σ 的极大似然估计. 若 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，且各随机变量均服从正态分布，则 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，但本题中无正态分布这一条件. 故(A)，(B)，(D) 均为干扰项，应选(C). 事实上，由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计，则可证 S^2 是 σ^2 的相合估计，再由相合估计量的性质知 S 是 σ 的相合估计量.

例 12.14　设分别自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$和 $N(\mu_2,\sigma^2)$中抽取容量为 n_1,n_2 的两独立样本. 其样本方差分别为 S_1^2,S_2^2. 试证，对于任意常数 $a,b(a+b=1)$，$Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计，并确定常数 a,b 使 $D(Z)$达到最小.

解析　由于　$E(S_1^2)=\sigma^2,E(S_2^2)=\sigma^2$,

另外　$\dfrac{(n_1-1)}{\sigma^2}S_1^2\sim\chi^2(n_1-1),\dfrac{(n_2-1)}{\sigma^2}S_2^2\sim\chi^2(n_2-1)$

且相互独立. 所以

$$D(S_1^2)=\frac{2\sigma^4}{(n_1-1)},D(S_2^2)=\frac{2\sigma^4}{(n_2-1)}.$$

因此当 $a+b=1$ 时，$E(Z)=aE(S_1^2)+bE(S_2^2)=\sigma^2$，$Z$ 是 σ^2 的无偏估计. 由 S_1^2,S_2^2 相互独立，

$$\begin{aligned}D(Z)&=D(aS_1^2+bS_2^2)=(a^2/(n_1-1)+b^2/(n_2-1))\cdot 2\sigma^4\\&=\left(\frac{a^2}{n_1-1}+\frac{(1-a)^2}{n_2-1}\right)\cdot 2\sigma^4,\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}D(Z)}{\mathrm{d}a}=2\sigma^4\cdot\left[\frac{2a}{n_1-1}-\frac{2(1-a)}{n_2-1}\right]=0,$$

又
$$\frac{\mathrm{d}^2D(Z)}{\mathrm{d}a}=2\sigma^4\left(\frac{2}{n_1-1}+\frac{2}{n_2-1}\right)>0,$$

所以当 $a=\dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-2},b=\dfrac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$ 时，$Z=\dfrac{1}{n_1+n_2-2}\cdot[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2]$具有最小方差.

关于参数 θ 点估计的几点评注：

（1）参数 θ 的矩估计不一定存在.

矩估计法的前提是总体的相应阶的矩要存在，例如：

柯西分布的密度函数为

$$f(x,\ \theta)=\frac{1}{n[1+(x-\theta)^2]}.$$

其各阶矩都不存在，故矩法不能使用.

（2）矩估计可能不唯一.

例如：X 服从参数为 λ 的泊松分布，因为 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$，所以 $\overline{X}$ 和 S^2 都是 λ 的矩估计.

（3）不是任何参数都存在无偏估计量.

例如：X 服从两点分布

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},(x=0,\ 1,\quad 0<p<1)$$

则 $\frac{1}{p}$ 不存在无偏估计量.

（4）参数 θ 的一致估计量不唯一.

设 $T_n(x_1,\ \cdots,x_n)$ 是未知参数 θ 的一致估计量，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ 是两个常数列，且 $c_n\to 0$，$d_n\to 1$，则 T_n+c_n 和 d_nT_n 都是 θ 的一致估计量.

（5）参数 θ 存在无偏估计，但可能并不合理.

例如，X 服从参数为 λ 的泊松分布，x_1 是从总体 X 中抽取的一个容量为 1 的样本，则 $T(x_1)=(-2)^{x_1}$ 是 $g(\lambda)=\mathrm{e}^{-3\lambda}$ 的一个无偏估计量，

$$E(T(x_1))=\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2\lambda)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-3\lambda},$$

而当 x_1 取奇数时，$(-2)^{x_1}<0$，$\mathrm{e}^{-3\lambda}$ 却恒大于 0.

（6）似然方程的解不一定是最大似然估计.

（7）最大似然估计可能不唯一.

例 12.15　设由来自正态总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 的容量为 9 的简单随机样本算得样本均值 $\overline{X}=5$，求未知参数 μ 的 95% 的置信区间.

解析　$\sigma^2=0.9^2$，$1-\alpha=95\%$，$\alpha=0.05$，查标准正态分布表得 $u_{\alpha/2}=1.96$，得

$$\text{置信下限}=\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5-1.96\,\frac{0.9}{\sqrt{9}}=4.412,$$

$$\text{置信上限}=\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5+1.96\,\frac{0.9}{\sqrt{9}}=5.588,$$

故 μ 的置信度为 95% 的置信区间是 $(4.412, 5.588)$.

例 12.16　设总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本，测得样本均值为 5，求 X 的数学期望 μ 的置信度近似于 95% 的置信区间.

解析　总体 X 的分布未知，但注意到 $n=100$，由中心极限定理知当 n 很大时，$\overline{X}$ 近似服从正态分布，故仍可按上例的方法求解（在方差未知时亦可用样本方差 S^2 代替）.

$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$u_{\alpha/2}=1.96$. 从而有

$$\text{置信下限}\ \overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5-1.96\,\frac{1}{\sqrt{100}}=4.804,$$

$$\text{置信上限}\ \overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5+1.96\,\frac{1}{\sqrt{100}}=5.196,$$

故得 μ 的置信度近似于 95% 的置信区间是 $(4.804, 5.196)$.

例 12.17　为估计制造某种零件所需的平均工时（单位：小时），现制造 5 件，记录每件所需工时如下：10.5，11，11.2，12.5，12.8.

设制造单件产品所需工时服从正态分布，给定置信度为 0.95，试求平均工时的单侧置信上限（$t_{0.975}(5)=2.5706$，$t_{0.975}(4)=2.7764$，$t_{0.95}(5)=2.0150$，$t_{0.95}(4)=2.1318$）.

解析　由题设可知 $n=5$，且可算得 $\overline{x}=11.6$，$S^2=0.995$，而 $t_{0.95}(4)=2.1318$.

$$\bar{\mu} = \bar{x} + t_{1-\alpha}(n-1) \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 11.6 + 2.131\,8 \times \frac{\sqrt{0.995}}{\sqrt{5}} = 12.55.$$

因此，平均工时 μ 在置信度 0.95 下的单侧置信上限是 12.55 小时.

例 12.18　设炮弹速度服从正态分布，取 9 发炮弹做试验，得样本方差 $S^2=11(\mathrm{m/s})^2$，分别求炮弹速度方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为 90% 的置信区间.

解析　据题意 $n=9$，自由度 $n-1=8$，$1-\alpha=0.90$，$\alpha=0.10$，查 χ^2 分布表得 $\chi^2_{\alpha/2}(8)=15.507$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(8)=2.733$. 则

$$\text{置信下限}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=\frac{8\times 11}{15.507}=5.675,$$

$$\text{置信上限}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}=\frac{8\times 11}{2.733}=32.199,$$

故 σ^2 的置信区间是 $(5.675,\ 32.199)$，而 σ 的置信区间是 $(2.382,\ 5.674)$.

例 12.19　假设 0.50，1.25，0.80，2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,\ 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$（记 $E(X)$ 为 b）；

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

解析　(1) Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(y-\mu)^2}{2}},\ -\infty < y < +\infty.$$

于是，$b = E(X) = E(e^Y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^y e^{\frac{(y-\mu)^2}{2}} \mathrm{d}y$

$$\xlongequal{t=y-\mu} e^{\mu+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} \mathrm{d}t = e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

(2) 当置信度 $1-\alpha=0.95$ 时,标准正态分布的 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.975}=1.96$. 故由$\overline{Y}\sim N\left(\mu,\ \frac{1}{4}\right)$,可得

$$P\left\{\overline{Y}-1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}<\mu<\overline{Y}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right\}=0.95,$$

将 X_i 的观察值代入得到

$$\bar{y}=\frac{1}{4}(\ln 0.5+\ln 0.8+\ln 1.25+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 1=0.$$

从而$(-0.98,\ 0.98)$就是 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

(3) 由 e^x 的严格递增性,可见

$$b=e^{\mu+\frac{1}{2}}\text{ 的 }0.95\text{ 置信区间为}\left[e^{\overline{Y}-0.98+\frac{1}{2}},\ e^{\overline{Y}+0.98+\frac{1}{2}}\right],$$

因此 b 的置信度为 0.95 的置信区间为$(e^{-0.48},\ e^{1.48})$.

评注 本题关键将 x_i 观测值变形为 $y_i=\ln x_i$,然后利用 Y 的分布求出 $b=E(X)=E(e^Y)$以及 μ 的置信区间,而 b 是 μ 的单值函数. 作等价变形求出 b 的置信区间.

例 12.20 设某厂生产的一种钢索,其断裂强度 $X(\text{kg/cm}^2)$服从正态分布 $N(\mu,\ 40^2)$. 从中选取一个容量为 9 的样本,得$\overline{X}=780\ \text{kg/cm}^2$. 能否据此认为这批钢索的断裂强度为 $800\ \text{kg/cm}^2$ $(\alpha=0.05)$?

解析 H_0: $\mu=800$, H_1: $\mu\neq 800$.

因为 $\sigma^2=40^2$ 已知,故选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-800}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,\ 1)$, $\alpha=0.05$, $u_{\alpha/2}=1.96$, $|U|=\left|\dfrac{780-800}{40/\sqrt{9}}\right|=1.5<1.96$. 故可接受 H_0,即可认为这批钢索的断裂强度为 $800\ \text{kg/cm}^2$.

例 12.21 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体$N(\mu,\ \sigma^2)$的简单随机样本,其中参数 μ 和 σ^2 未知. 记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

则假设 $H_0: \mu = 0$ **的** t **检验使用统计量** $t =$ ________.

解析　在 H_0 成立时,检验统计量

$$t = \frac{\overline{X} - 0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

其中　$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}Q^2, S = \frac{Q}{\sqrt{n-1}},$

所以

$$t = \frac{\overline{X}}{Q/\sqrt{n(n-1)}} = \frac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}.$$

例 12.22　**设某次考试的考生成绩服从正态分布,从中随机地抽取** 36 **位考生的成绩,算得平均成绩为** 66.5 **分,标准差为** 15 **分. 问在显著水平** $\alpha=0.05$ **下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为** 70 **分?**

解析　设该次考试的考生成绩为 X,则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 样本均值记为 $\overline{x}$,样本标准差记为 S. 检验假设

$$H_0: \mu = 70, \qquad H_1: \mu \neq 70.$$

拒绝域为 $|t| = \frac{|\overline{x}-70|}{S}\sqrt{n} \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$,由 $n=36, \overline{x}=66.5, S=15$,

$t_{0.025}(15)=2.030\,1$,算得　$|t| = \frac{|66.5-70|}{15}\sqrt{36} = 1.4 < 2.030\,1$,

故接受假设 $H_0: \mu=70$,即在水平 $\alpha=0.05$ 下,可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

例 12.23　**某化工厂为了提高某种化工产品的得率,提出了两种方案,为了研究哪一种方案好,分别用两种工艺各进行了** 10 **次试验,数据如下:**

方案甲得率(%)	68.1	62.4	64.3	64.7	68.4	66.0	65.5	66.7	67.3	66.2
方案乙得率(%)	69.1	71.0	69.1	70.0	69.10	69.1	67.3	70.2	72.1	67.3

假设得率服从正态分布,问方案乙是否比方案甲显著提高得率(取显著水平 $\alpha=0.01$)?

解析 设用甲方案和乙方案的得率分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

首先检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$;$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

对于显著性水平 $\alpha=0.5$,查 F 分布表得 $F_{0.75}(9, 9)=1.59$,从而可得 $F_{0.25}(9, 9)=\dfrac{1}{1.59}$. 假设 H_0 拒绝域为

$$W=\left\{\frac{s_1^2}{s_2^2}\leqslant\frac{1}{1.59}\text{ 或 }\frac{s_1^2}{s_2^2}\geqslant 1.59\right\}.$$

由样本值算得两总体的样本均值和样本方差为

$$\overline{X_1}=65.96, \overline{X_2}=69.43, S_1^2=3.3511, S_2^2=2.2244, \frac{S_1^2}{S_2^2}=1.51.$$

因为$\dfrac{1}{1.59}<1.51<1.59$,所以接受假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

再检验假设 $H_0:\mu_1\geqslant\mu_2$;$H_1:\mu_1<\mu_2$. 由 $t_{0.99}(18)=2.5524$,假设 H_0 的拒绝域为 $W=\{t\leqslant-2.5524\}$. 由样本值算得

$$t=\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{\sqrt{\dfrac{9s_1^2+9s_2^2}{10+10-2}}\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}}=\frac{65.96-69.43}{\sqrt{\dfrac{9(363511+2.2244)}{18}}\sqrt{\dfrac{1}{5}}}$$

$$=-4.647.$$

因为 $t=-4.647<-2.5524$,所以拒绝 H_0,即认为采用乙方案可以比甲方案提高得率.

评注 对于两总体的数学期望的检验 $H_0:\mu_1\geqslant\mu_2$($H_1:\mu_1<\mu_2$)(当 σ_1^2, σ_2^2 未知时),只有当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时才能进行,因此当方差未知时一定要先作检验 $H'_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$($H'_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$). 此时一般对 H'_0 不予以保护,因此 α 取为 0.50,如果接受 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的结论,再作 $H_0:\mu_1\geqslant\mu_2$的检验,否则 μ_1 和 μ_2 是无法比较的.

例 12.24 一细纱车间纺出某种细纱支数标准差为 1.2. 从某日

纺出的一批细纱中,随机地抽 16 **缕进行支数测量,算得样本标准差** $S=2.1$,**问纱的均匀度有无显著变化**($\alpha=0.05$)**?假定总体分布是正态的.**

解析 **纱的支数服从正态分布.检验假设** $H_0:\sigma^2=1.2^2$,$H_1:\sigma^2\neq1.2^2$.

因为 $$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{15\times2.1^2}{1.2^2}=45.94,\chi^2\sim\chi^2(16-1),$$

$\chi^2_{0.975}(15)=6.262$,$\chi^2_{0.025}(15)=27.488$,$\chi^2=45.94>27.488$,**拒绝** H_0,**因而这天细纱均匀度有显著变化.**

例 12.25 **设** α **是假设检验中犯第一类错误的概率**,β **是犯第二类错误的概率,那么** $\alpha+\beta=1$ **吗?**

解析 **在原假设** H_0 **给定后,具体做假设检验时,要么发生第一类错误,要么发生第二类错误,决不可能两类错误在同一次假设检验中同时存在,更不能把两者当作相互对立事件.另外,当样本容量**$n\to+\infty$**时**,α **与** β **可同时变小,因此一般而言**,$\alpha+\beta\neq1$.

例 12.26 **某市某年进行月人均收入抽查调查,得数据如下:**

每月每人收入(元)	<40	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100)$	>100
人数	5	16	40	27	12

计算这 100 **户的月人均收入**$\overline{X}=72.3$,**样本方差** $S^2=20^2$,**问该市人均收入是否服从** $N(72.3,20^2)$**?**

解析 **令人均月收入为** X,**设** $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,**参数** μ,σ^2 **未知.**

由样本估计$\hat{\mu}=72.3$,$\hat{\sigma}^2=20^2$,**这是** μ **和** σ^2 **的极大似然估计值.**

$$F(y_1)=\Phi\left(\frac{40-72.3}{20}\right)=\Phi(-1.615)=0.0532,$$

$$F(y_2)=\Phi\left(\frac{60-72.3}{20}\right)=0.2693,$$

$$F(y_3)=\Phi\left(\frac{80-72.3}{20}\right)=0.6499,$$

$$F(y_4)=\Phi\left(\frac{100-72.3}{20}\right)=0.9170.$$

$\hat{p}_1=F(y_1)=0.053$，$\hat{p}_2=F(y_2)-F(y_1)=0.2161$，

$\hat{p}_3=F(y_3)-F(y_2)=0.3806$，

$\hat{p}_4=F(y_4)-F(y_3)=0.2671$，$\hat{p}_5=1-F(y_4)=0.0830$.

作统计假设 H_0：$X\sim N(72.3, 20^2)$.

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，查自由度为 $5-2-1=2$ 的 χ^2 分布点 $\chi^2_{0.95}(2)=5.991$，故拒绝域为$[5.991, +\infty)$.

列出各类观测值与期望值

	<40	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 100)$	>100
观测值 n_i	5	16	40	27	12
期望值 $n\hat{p}_i$	5.32	21.61	38.06	26.71	8.30

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{n\hat{p}_i}-n=3.226<5.991.$$

接受零假设，认为该市月人均收入服从 $N(72.3, 20^2)$.

阶段复习试题六

1. 在总体 $N(52, 6.3^2)$ 中随机抽一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率.

2. 从正态总体 $N(3.4, 6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本，若要求样本均值位于区间 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95，问 n 至少取多大？

3. 设 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots, X_{10}$ 是 X 的样本，求

(1) $P\left\{0.26\sigma^2 \leqslant \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2 \leqslant 2.3\sigma^2\right\}$；

(2) $P\left\{0.26\sigma^2 \leqslant \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2 \leqslant 2.3\sigma^2\right\}$.

4. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$X$ 与 Y 独立，$X_1, X_2 \cdots, X_n$；$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别来自 X 与 Y 的一个样本，$\overline{X}, \overline{Y}$；$S_1^2, S_2^2$ 分别是两个样本均值与方差，试求统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(S_1^2+S_2^2)/n}}$ 的分布.

5. 分别从方差为 20 和 35 的正态总体抽取容量为 8 和 10 的两个样本，求第一个样本方差不小于第二个样本方差两倍的概率 p.

6. 设总体 X 的密度函数为 $f(x, \theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 试利用样本 $x_1, \cdots, x_n$ 求参数 θ 的极大似然估计.

7. 设随机变量 X 在数集 $\{0, 1, 2, \cdots, N\}$ 上等可能分布，求 N 的极大似然估计.

8. 设总体 X 的密度函数为 $f(x, \theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试证明 $\overline{X}$ 与

$nZ=n\cdot\min\{x_1, \cdots, x_n\}$都是 θ 的无偏估计.

9. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$为未知参数,利用总体 X 的样本值 3,1,2,0,3,1,2,3,求 θ 的矩估计和极大似然估计值.

10. 在一批货物中随机抽取 80 件,发现有 11 件不合格品,试求这批货物的不合格率的 0.90 的置信区间.

11. 设从总体 $X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$和总体 $Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$中分别抽取容量为 $n_1=10$, $n_2=15$ 的独立样本,计算得$\overline{x}=82$, $S_x^2=56$, $\overline{y}=76$, $S_y^2=52.4$.

(1) 若已知 $\sigma_1^2=64$,$\sigma_2^2=49$,求 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%的置信区间.

(2) 若已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$,求 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%的置信区间.

(3) 求 σ_1^2/σ_2^2 的 95%的置信区间.

12. 设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$,σ^2 未知,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 X 的样本值,现对 μ 进行假设检验,若在显著水平 $\alpha=0.05$ 下接受了 $H_0: \mu=\mu_0$,则当显著水平改为 $\alpha=0.01$ 时,是否接受 H_0?

13. 某电池的平均使用寿命至少为 21.5 小时,现测得一批电池的寿命为 19, 18, 22, 20, 16, 25(小时),这些结果是否表明这批电池的寿命低于要求的 21.5 小时?(显著水平 $\alpha=0.05$)

14. 标准差 σ 是衡量机床加工精度的重要指标,正常情况下加工出的零件的尺寸 X 服从正态分布,假定设计要求 σ 不得超过 0.5 mm,为控制生产精度,定时对产品抽检,每次抽检 5 件,测其标准差 S,试制定一种规则,以便根据 S 的值判断机床的精度是否降低.(取显著水平 $\alpha=0.05$)

15. 某厂在引进一项新工艺前后,分别抽取 10 个产品进行寿命

检测，之前的产品的样本均值为2 460小时，标准差为56小时；之后的样本均值为2 550小时，标准差为48小时，设产品寿命服从正态分布，新工艺是否提高了产品的寿命？（显著水平$\alpha=0.01$）

16. 两家银行分别对21个储户和16个储户的年存款余额抽查，测得$\overline{x}=650$元，$\overline{y}=800$元，$S_1=50$元，$S_2=70$元，设年存款余额服从正态分布，试问在显著水平$\alpha=0.1$下可否认为两家储户的方差相等？

17. 某厂生产的产品有10 000件，按规定次品率不得超过3%，现从中任抽出100件检验，发现有5件次品，问这批产品是否符合要求？

18. 按孟德尔遗传定律，让开粉红花的豌豆随机交配，子代可区分为红花、粉红花和白花三类，其比例为1∶2∶1. 为检验这个理论，安排了一个试验：100株中开红花的30株，开粉红花的48株，开白花的22株，问这些数据与孟德尔遗传定律是否一致？（显著水平$\alpha=0.05$）

阶段复习试题答案与提示

试题一

1. (1) $(a+(n-1)x)(a-x)^{n-1}$； (2) $(a-b)^3$； (3) $4\,!$； (4) $1+a+b+c$； (5) $x+(n-2)a(x-2a)^{n-1}$； (6) $(-2)(n-1)\,!$； (7) $\prod_{k=1}^{n} k\,!$； (8) 0； (9) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$； (10) $n+1$； (11) 0； (12) $\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$. **2.** $-2^{10}\boldsymbol{A}$. **3.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}$. **6.** 选(C). **7.** 选(D).

8. (2) $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

11. (2) $\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$. **13.** $\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$. **16.** 2. **17.** $\dfrac{1}{1-n}$.

19. $n-1$.

试题二

1. 能,不能. **2.** $t \neq 5$;$t = 5$;$-\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$. **8.** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = -5\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_5 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_4$. **11.** 选(C). **12.** 3. **13.** 4. **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. **15.** (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;(2) $(-1, 1, 2)^T$, $(-5, -1, 3)^T$. **16.** $C(1, 1, \cdots, 1)^T$. **17.** (提示)设 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_r)$,首先证明 $\boldsymbol{A\beta}_i$ 是线性齐次方程组的解,再证 $\boldsymbol{A\beta}_1$, $\boldsymbol{A\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{A\beta}_r$ 线性无关. **18.** (提示)设 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n)$,先证 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. **20.** $x_1 - x_2 = 0$, $x_4 = x_5 = \cdots = x_n = 0$. **21.** $a = 0$ 时,$\boldsymbol{x} = C_1(-1, 1, 0, 0)^T + C_2(-1, 0, 1, 0)^T + C_3(-1, 0, 0, 1)^T$;$a = -10$ 时,$\boldsymbol{x} = C(1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$. **22.** $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$,有,$k(-1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. **23.** 选(D). **24.** 选(A). **26.** $k \neq -1$,且 $k \neq 4$ 时有唯一解,$x_1 = \dfrac{k(2+k)}{1+k}$, $x_2 = \dfrac{4+2k+k^2}{1+k}$, $x_3 = \dfrac{-2k}{1+k}$;$k = -1$ 时无解;$k = 4$ 时有无穷多解,$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = k(-3, 1, 1)^{\mathrm{T}} + (0, 4, 0)^{\mathrm{T}}$. **27.** $\lambda \neq 1$,且 $\lambda \neq -\dfrac{4}{5}$ 时有唯一解;$\lambda = -\dfrac{4}{5}$ 时无解;$\lambda = 1$ 时有无穷多解,$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = k(0, 1, 1)^{\mathrm{T}} + (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ **28.** (1) $b \neq 2$;(2) $b = 2$, $a \neq 1$ 时 $\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$;$b = 2$, $a = 1$ 时 $\boldsymbol{\beta} = -(1+2k)\boldsymbol{\alpha}_1 + (2+k)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$($k$ 为任意常数). **29.** (提示)设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解.

试题三

1. (1) $\lambda = 1, 1, -5$;(2) $2, 2, \dfrac{4}{5}$;(3) $-5, -5, 1$. **2.** -2 或 1. **4.** $\lambda = -3, -3, 0, 0$. **5.** $\lambda = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}, 0, \cdots, 0$;令 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $a_1 \neq 0$,特征向量为:$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $(-a_2, a_1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $(-a_3, 0, a, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $(-a_n, 0, \cdots, 0, a_1)^{\mathrm{T}}$. **6.** $x + y = 0$. **7.** $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(\dfrac{7}{3}, 0, -\dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \left(0, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, 2\right)^{\mathrm{T}}$. **8.** $a =$

0，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. **9.** $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$.

10.（提示）令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{E}_n\\-\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&-\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

11.（1）$\lambda=0$，$\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$. **12.** $(a,b,\lambda)=(2,1,1)$ 或 $(2,-2,4)$. **13.**（提示）（1）当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，由 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$ 证明；（2）当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，$|\boldsymbol{A}|=0$，且 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 只有有限个根，故当 ε 的绝对值充分小时，$|\varepsilon\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $\varepsilon\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{E}$ 可逆，由证明(1)得 $|\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{E})|$，此式两端是关于 ε 的多项式，它们是 ε 的连续函数，令 $\varepsilon\to 0$ 即得所求.

14. $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2$. **15.** $f=9y_1^2$. **16.** $a=2$. $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. **17.** $\alpha=\beta=0$. **18.** $-1<\lambda<1$. **21.** $\boldsymbol{P}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&-\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$. **22.**（提示）因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 是方程 $f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3=0$ 的根. 所以 λ 只能在 1 或 3 中取，因此 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值皆大于 0.

23.（提示）参见例 6.20 的证明. **24.**（提示）参见例 6.19 的证明.

试题四

1.（1）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；（2）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$；

(3) $(A\cup B)\overline{C}$;(4) $\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$. **2.** 只有(2)成立. **3.** $2/C_{2n}^{n}$.

4. $\frac{4}{5}$. **5.** $P_{10}^{5}/10^{5}$. **6.** $\sqrt{3}/2$. **7.** 0.25. **8.** (1) $P(AB)=P(A)$ 时, $P(AB)$ 达到最大值 0.6;(2) $P(A\cup B)=1$ 时 $P(AB)$ 达到最小值 0.3.

9. 0.008 3, 0.009. **10.** 略. **11.** $\frac{3}{28}$. **12.** $\alpha^2/1-2\alpha\beta$. **13.** 略. **14.** 0.5.

15. $\frac{3}{16}$. **16.** 五局三胜制. **17.** 0.328. **18.** $k\in[1,3]$. **19.** $f_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$. **20.** $\sqrt[3]{4}$. **21.** $\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right]$. **22.** (1) $P_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $P_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0,\\ 1-y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ (2) $\frac{1}{8}$. **23.** 略.

24. $\frac{1}{4}$. **25.** $\frac{1}{2}$. **26.** $\frac{1}{n-1}$. **27.** $P\{\xi=k\}=(56C_{12}^{k-5}/C_{20}^{k})\cdot\frac{5}{k}$, $k=5,6,\cdots,17$. **28.** $P\{V_n=k\}=C_n^k(0.01)^k(0.99)^{n-k}$. $(k=0,1,\cdots n)$ **29.** 略.

30. $\xi\sim P(\lambda p)$. **31.** (1) $\frac{1}{8}$; (2) $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{3}{4}$. **32.** $\frac{2}{9}$. **33.** 略.

34. $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\geqslant y,\\ \frac{1}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}, & x<y.\end{cases}$

试题五

1. 略. **2.** $N-\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{(k-1)^n}{N^n}$. **3.** $\frac{1}{2\lambda}$. **4.** 1. **5.** $\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. **6.** $\frac{25}{16}$.

7. $\frac{\pi(a^2+b^2+ab)}{12}$. **8.** $\frac{1}{p}[1-(1-p)^{10}]$. **9.** $\frac{a}{3}$. **10.** $\frac{3}{2\lambda}$.

11. $10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]$. **12.** $\frac{2}{9}$, $\frac{37}{162}$. **13.** $\frac{1}{n}\sigma^2$. **14.** $\frac{4}{3}$. **15.** $-\frac{n}{36}$, $-\frac{1}{5}$. **16.** 略. **17.** 18.4. **18.** 1. **19.** 略. **20.** 略. **21.** $\geqslant 0.816$.

22. $1-\Phi(2)\approx 0.022\,7$. **23.** 至少 146 次. **24.** $\approx 0.915\,59$. **25.** 5 336, 27 780.

试题六

1. 0.829 3. **2.** 35. **3.** (1) 0.98; (2) 0.97. **4.** $t(2n-2)$.

5. $0.025 \leqslant p \leqslant 0.05$.　**6**. $\hat{\theta} = \min\{x_1, \cdots, x_n\} = x_{(1)}$.　**7**. $\hat{N} = \max\{x_1, \cdots, x_n\} = x_{(n)}$.　**8**. 略.　**9**. $\frac{1}{4}$, $\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.　**10**. $[0.074\,16, 0.200\,8]$.

11. (1) $[-0.093\,9, 12.093\,9]$；(2) $[-0.206\,3, 12.206\,3]$；(3) $[0.335\,9, 4.097\,3]$.　**12**. 是.　**13**. 不低.　**14**. $S > 0.77$ 时认为精度降低.　**15**. (提示)先检验 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，再检验 $\mu_1 = \mu_2$，提高了.　**16**. 相等.　**17**. 符合.(提示)大样本场合，由中心极限定理按正态分布处理.　**18**. 一致.