

本书出版由上海汽车工业教育基金会资助

汽车车身结构分析

高云凯 编著

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

汽车车身结构分析/高云凯编著. —北京:北京理工大学出版社, 2006.1
ISBN 7 - 5640 - 0631 - 5

I . 汽... II . 高... III . 汽车 - 车体 - 结构设计 IV . U463.820.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 124895 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京圣瑞伦印刷厂

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 14.75

字 数 / 340 千字

版 次 / 2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

印 数 / 1 ~ 3000 册

定 价 / 27.00 元

责任校对 / 陈玉梅

责任印制 / 吴皓云

图书出现印装质量问题,本社负责调换

出版说明

为贯彻汽车工业产业政策,推动和加强汽车工程图书的出版工作,中国汽车工程学会成立了“汽车工程图书出版专家委员会”。委员会由有关领导机关、企事业单位、大中专院校的专家和学者组成,其中心任务是策划、推荐、评审各类汽车图书选题。图书选题的范围包括:学术水平高、内容有创见、在工程技术理论方面有突破的应用科学专著和教材;学术思想新颖、内容具体、实用,对汽车工程技术有较大推动作用,密切结合汽车工业技术现代化,有高新技术内容的工程技术类图书;有重要发展前景,有重大使用价值,密切结合汽车工程技术现代化需要的新工艺、新材料图书;反映国外汽车工程先进技术的译著;使用维修、普及类汽车图书。

出版专家委员会是在深化改革中,实行专业学会、企业、学校、研究所等相互结合,专家学者直接参与并推动专业图书向高水平、高质量、有序发展的新尝试。它必将对活跃、繁荣专业著作的出版事业起到很好的推动作用。希望各位同仁、专家积极参与、关心、监督我们的工作。限于水平和经验,委员会推荐出版的图书难免存在不足之处,敬请广大同行和读者批评指正。

本书由高云凯编著,经专家委员会评审通过,并推荐出版。

汽车工程图书出版专家委员会

前 言

汽车发展的历史已经超过了 100 年,人类在汽车的发展过程中不断改善其性能、结构、造型,以满足使用的需要。相对发动机和底盘总成而言,车身总成发展较晚,但车身工程在现代汽车工业中已越来越占据主要地位。车身工程是汽车换型的关键,车身的生产能力决定着整车的生产能力,车身的质量占整车质量的 20%~50%,车身的成本占整车成本的 30%~60%。

近年来,由于汽车节能和环保主题的研究深入以及汽车车身新材料和工艺的应用,汽车车身轻量化发展的趋势越来越突出,相关研究得到了各汽车厂商和学者的重视。整车质量减小,可以提高汽车的经济性,降低传统汽车的排放。根据试验测定,轿车质量减少 100 kg,其百公里油耗随之降低 0.6 L 左右。同时汽车轻量化直接提高汽车的比功率,使汽车的动力性提高。欧美汽车工业近期的汽车轻量化目标是开发可降低总质量约 30% 的汽车。除材料选择以外,车身轻量化的主要途径是结构优化设计。而车身轻量化的主要限制条件是:

- (1) 要保证车体结构的必要强度指标,以保证汽车可靠性;
- (2) 要保证车体结构有充分的刚度,以保证其上安装的各总成工作正常及车身密封等;
- (3) 要保证车体结构有合理的振动特性参数,以控制振动和噪声。

此外,汽车新材料、新结构的应用和研究,以及任何一个汽车新产品的开发,都需要对汽车车身结构进行分析,如概念设计中的预测分析、产品详细设计工作中的结构分析,以及产品质量攻关中的结构分析等(包括试验分析和模拟分析方法)。汽车车身结构和载荷复杂,不同的分析目的选择的分析方法和模型也不一样。就汽车车身模拟分析方法而言,概念设计中的预测分析多使用梁单元模型,而产品详细设计工作中的结构分析使用板单元或板梁组合单元模型。

本书系统地论述了汽车车身结构分析概念、理论、方法和技术(包括试验方法和技术)。在汽车车身模拟分析内容中,介绍了车身结构分析中常用的梁和板单元模拟分析的理论以及有限元方法的直接法和能量法,补充了车身结构优化分析方面的理论进展,安排了典型分析实例。在汽车车身试验分析内容中,总结了常用的汽车车身结构分析内容,包括实验方法和技术,以及典型的分析实例。本书按大学教科书题材编写,注重基本概念、基本理论、实用方法和工程技术的介绍,并配有思考题。本书以轿车车身结构分析为主编写,不含汽车车身碰撞分析和汽车噪声分析方面的深入内容。

本书为同济大学“十五”规划教材。本书的出版同时得到同济大学教材、学术著作出版基金委员会的资助,在此表示感谢。

作者水平有限,书中的缺点和错误在所难免,不当之处敬请读者指正。

目 录

第一章 绪论.....	(1)
第一节 概述.....	(1)
第二节 有限元方法基本概念.....	(2)
第三节 汽车车身结构试验分析总论.....	(3)
思考题.....	(4)
第二章 汽车车身梁结构模拟计算.....	(5)
第一节 梁结构有限元方法基本原理.....	(5)
第二节 客车车身结构强度与刚度综合分析.....	(30)
第三节 微型电动车车架结构优化分析.....	(35)
思考题.....	(39)
第三章 汽车车身板结构模拟计算.....	(40)
第一节 平面应力问题及其有限元方法.....	(40)
第二节 等参元基本概念.....	(94)
第三节 薄板弯曲问题及其有限元方法.....	(96)
第四节 电动轿车车身结构静态特性综合评价及其优化.....	(107)
思考题.....	(115)
第四章 汽车车身结构动力分析.....	(116)
第一节 结构动力分析的有限元法基础.....	(116)
第二节 汽车车身结构模态分析.....	(130)
第三节 车身结构低阶模态修改灵敏度分析.....	(134)
第四节 SRV 行李架结构动力响应仿真分析.....	(141)
思考题.....	(148)
第五章 汽车车身结构强度和刚度试验.....	(149)
第一节 汽车车身结构试验技术.....	(149)
第二节 汽车车身结构强度与刚度试验方法.....	(172)
第三节 轿车车身结构静态刚度台架试验.....	(185)
思考题.....	(194)
第六章 汽车车身结构模态试验.....	(195)
第一节 概述.....	(195)
第二节 汽车车身结构模态试验技术.....	(195)
第三节 汽车车身结构模态试验方法.....	(203)
第四节 数据处理.....	(207)
第五节 微型电动轿车车身结构试验模态分析.....	(218)
思考题.....	(224)
参考文献.....	(225)

第一章 绪 论

第一节 概 述

从 20 世纪 50 年代开始 ,我国汽车工业从无到有。汽车工业发展至今 ,不论是品种还是规模 ,都极大满足了国内外市场的需要 ,也已成为我国国民经济的支柱产业。车身是汽车的重要组成部分 ,称为车身总成 ,它是指各种汽车底盘上构成的乘坐空间及有关的技术装备。汽车车身属于大型薄壁结构。

在现代轿车的设计开发过程中 ,轿车车身大多数采用全承载式结构 ,这样的结构可以很大程度上满足结构设计轻量化的要求。因为承载式车身几乎承载了轿车使用过程中的所有载荷 ,主要包括扭转和弯曲载荷。因此 ,轿车车身的刚度特性具有举足轻重的作用。车身刚度不合理 ,将直接影响轿车车身的结构可靠性、安全性、NVH(噪声、振动和运转不平顺)性能等关键性指标。上个世纪 ,我国汽车车身结构分析偏重强度指标 ,主要以结构强度试验结果作为关键指标进行产品定型 ;而国外汽车企业则将汽车车身刚度、低阶模态参数也作为产品定型的关键指标。按刚度准则确定的结构一般可充分满足强度准则 ,但反之则不一定。车身结构低阶弹性模态不仅是控制汽车常规振动的关键指标 ,而且反映了汽车车身的整体刚度性能。轻质轿车车身是轿车提高动力性、降低油耗、节约材料、降低成本的关键 ,所以车身轻量化也是汽车工程的重要目标之一。

汽车车身不仅组成零件繁多 ,而且结构复杂。以普通轿车白车身为例 ,它是钢板冲压件焊接成的空间板梁组合壳体 ,由 400 ~ 500 多个冲压件组成 ;汽车车身工作载荷复杂 ,包括驱动、制动、转弯等惯性力 ,还包括各种路面反力和作用于不同位置的发动机等总承载荷 ;汽车车身边界复杂 ,不同的悬架种类在不同的工况下对车身产生不同的约束和支承。因此 ,一般无法获得汽车车身结构的强度、刚度和模态的解析解。

现代汽车车身结构分析方法包括数值模拟与实验分析方法。现代数值模拟分析方法主要是有限元分析方法。这种方法是依据实物等技术资料建立车身结构有限元分析模型 ,应用通用有限元软件计算和分析车身结构的静态、动态等特性指标 ,甚至进行优化设计分析和试验仿真研究。现代数值模拟分析方法可以在车身结构开发初期就预测和优化车身结构的静态和动态特性指标 ,从而在产品生产或试制之前就尽可能避免相关设计缺陷 ,提高产品成功率 ,缩短产品开发周期。有限元分析方法的精度取决于模型、工况和分析方法 ,取决于对有限元基本知识的理解、软件应用和工程经验。现代实验分析方法主要是电测法 ,应用传感器、测量和分析仪器 ,对车身实物零部件或小比例模型进行支承、加载和测试。实验分析方法虽然信息没有数值模拟分析方法充分 ,但它更直观可信 ,是数值分析模型验证的主要手段。汽车车身试验分析的成功与否 ,取决于对车身结构试验技术、试验理论的掌握。

第二节 有限元方法基本概念

有限元方法是随着计算机技术发展而发展起来的用于各种结构分析的数值计算方法。它运用离散概念,把连续体划分为有限个单元的集合,通过单元分析和组合,考虑边界条件和载荷,得到一组方程组,求解此方程组获得相应指标。

有限元方法的基本思想早在 20 世纪 40 年代就提出来了。由于当时计算机的速度和存储量都不够使有限元方法实用化,这一离散化的概念没有引起重视。10 年之后,美国的 R·W·Clough 教授运用三角形单元对飞机结构进行了计算,并在 1960 年首次提出了“有限元”这个概念。随后,有限元方法就经历了力法和位移法的争论,从直接法到虚位移法的完善,从静力分析到动力分析、从固体到场、从弹性体到塑性体的发展,有限元方法越来越成熟,应用领域越来越宽。现在,有限元方法从飞机、汽车、轮船、建筑等固体力学工程领域,到流体和电磁场,几乎在所有工程上得到发展和应用。从独立的求解器,到专门的前后处理软件,在有限元法的基础上发展了许多被广泛应用的工程分析工具。下面以弹性连续体线性静力分析为例介绍有限元方法的基本概念。

首先,把连续体划分成有限个单元的组合,即连续体的离散化。如货车车架,以每根横梁端部为界限,可将包括纵梁在内的车架划分为有限的几段梁。每段梁称为一个单元,赋给一个确定的单元号码,则每段梁的端点称为结点,一般也称为节点,也赋给一个确定的节点号码,在分开点,不同段梁的端点采用一致的节点号码,单元之间以节点相连,单元之间的载荷传递等联系也只通过节点实现。为描述车架所划分的有限的几段梁的集合体就称为网格,故连续体的离散化也称为网格化。在网格基础上,考虑单元几何和材料特征、边界约束和载荷条件,从而获得替代连续体的分析模型。模型的规模可以用单元数目、节点数目和所有节点的自由度之和描述。有限元模型的自由度是指充分描述实际场运动所需的独立坐标个数,能够在力学和工程上连续和合理地反映场(包括结构)的位移和受力情况,以及主要的固有特性等指标。模型的规模决定着分析精度和效率,对具体问题,分析模型的规模是需经过验证的重要工程参数。模型节点的选择与连续体结构特点、载荷和支承位置等有关。

其次,进行单元分析,即应用固体力学的方法对该单元进行力学分析。主要有两种方法:位移法和力法。位移法是现有商业软件中使用最多的方法,它是指在整个力学分析过程中以节点位移为基本未知参数而其他参数如单元应力、应变和应变能等均表达为其广义位移的函数的一种方法。为获得单元应力、应变和应变能等参数,需要假设单元内任意一点的位移与节点位移的关系,这一关系就称为形函数或位移函数,它是单元内任意一点坐标的函数,它决定了单元的阶次和分析误差。汽车车身等工程分析中,不论梁单元模型,还是板单元模型,一般都选择简单的线性形函数,即采用低阶单元。然后在材料力学和弹性力学的基础上,考虑单元位移与应变、应变与应力、应力与外力的关系,分别得到单元几何方程、物理方程和平衡方程。对单元应用虚位移原理,就可获得单元位移与单元外力的关系,即单元刚度矩阵。当然,单元刚度矩阵的维数与单元节点自由度数相等。

最后,进行模型总体分析,即单元组装成集合体。单元分析后,根据节点位移的一致性和协调性以及节点力与外载的平衡关系,可获得整个模型位移向量与模型外力向量的关系函数,即模型刚度矩阵和刚度方程。模型刚度方程的个数与模型节点自由度数相等。考虑连续体的

载荷和支承约束,消去小部分方程,并完善模型外力向量,用此时的模型刚度方程就可以求解模型位移向量了,进而可求解单元应力等指标。

另外,值得一提的是,现在,以有限元方法为主的计算机辅助工程(CAE)与计算机辅助设计(CAD)的融合越来越密切,软件相互渗透和联系。而且,为提高计算速度,超级计算机、并行计算方式被越来越普遍采用。

第三节 汽车车身结构试验分析总论

一、车身结构试验内容

汽车车身研究和工程中包含大量的试验工作,通过试验来检验设计思想是否正确,如对新设计结构和新材料的检验等。由于汽车车身结构复杂,涉及的技术领域广泛,许多问题的理论研究的可靠性还不高,需要通过试验来检验分析模型是否合理。车身结构试验分析是开发一流车身产品的重要基石,车身工程师需要掌握车身试验技术方面的理论和方法。汽车产品使用条件复杂,对汽车车身的性能、寿命、重量等方面的要求很高。本书主要介绍车身结构基本试验内容,不包括车身空气动力学试验、车身快速疲劳试验和碰撞试验方面的内容。

汽车车身结构试验可以从不同角度予以分类,按试验对象分为实物试验和模型试验,按试验目的分为研究性试验、试制检验性试验和抽样试验,按试验方式分为整车试验和零部件试验,按结构失效类型和理论分为静态强度和刚度试验、动态强度试验和模态试验。汽车车身工程上,主要按结构失效类型和理论划分汽车车身结构试验。

汽车车身结构静态强度和刚度试验研究车身结构在静载荷作用下的强度和刚度特性,包括应力分布和主要刚度参数。汽车车身结构静态强度和刚度试验规范比较成熟,其试验工况主要模拟汽车实际使用中车身承受的弯曲和扭转情况。汽车车身结构静态强度和刚度试验是汽车车身结构动态强度试验和疲劳试验的基础。

汽车车身结构动态强度试验的目的在于测定车身结构在实际行驶过程中所承受的最大动应力或应变。汽车车身结构动态强度试验一般由道路试验来完成,包括鹅卵石路面、山区路面等典型路面。汽车工程中也常常采用路障试验方法代替汽车车身结构动态强度试验,路障试验方法也称典型凸块试验方法,这种方法可以简单、快速、有效地测定车身结构最大动应力和应变。

汽车车身结构模态试验主要测量车身结构的固有频率、固有振型和阻尼等车身结构固有特性,一般在试验台上进行。在车身工程上,主要测定低阶弹性模态,以避免产品在常规工作范围内产生共振和高噪声可能。其试验方法涉及车身支承方法、激振方法、信号识别方法、信号采集和处理方法。

二、车身结构试验技术

总结试验规律,完善试验方法,是车身试验研究的主要目标之一,也是指导车身试验的重要理论基础。如何合理选择试验仪器和设备,怎样处理试验数据,是车身结构试验的关键技术。具体问题包括:选择什么传感器进行信号变换?使用什么仪器进行信号传输与放大?采用什么仪器和软件进行信号记录 and 数据处理?等等。要想完成车身结构试验工作,必须深入

了解要分析的信号的物理特征和基本变化规律,才能选择测试方法和结果分析方法,也必须了解传感器的变换原理和测试仪器的基本特征,才能正确使用试验仪器。

汽车车身结构静态强度和刚度试验传感器和仪器有:电阻应变片、静态电阻应变仪、预调平衡箱、力传感器、位移传感器、千分表及高度尺等。

汽车车身结构动态强度试验传感器和仪器有:电阻应变片、动态电阻应变仪、示波器、磁带机、实时信号采集和处理仪等。

汽车车身结构模态试验传感器和仪器有:加速度传感器、电荷放大器、信号发生器、功率放大器、激振器、阻抗头、示波器、磁带机、实时信号采集和处理仪等。

值得一提的是,现代开发的计算机软件在电测量信号处理方面发挥了很大的作用,增加了数据处理和分析的参数选择范围,使动应力和加速信号处理质量和效率显著提高。

思考题

1. 为什么要进行汽车车身结构分析?其主要分析内容有哪些?
2. 什么叫有限元方法?举例解释单元和节点概念。
3. 如何理解汽车车身结构分析有限元模型规模?
4. 汽车身结构试验分析主要内容有哪些?

第二章 汽车车身梁结构模拟计算

第一节 梁结构有限元方法基本原理

一、基本概念和规定

1. 单元、节点及编号

一般将组成梁结构的每一根梁作为一个单元,梁与梁相连接的交点称之为节点。此外,梁的自由端、集中载荷作用点、支承点以及沿杆长截面突变处等,均应设置节点。为提高计算精确性,也常常在梁中间增加节点,随之也增加了单元。

经过这样离散后的梁结构,就变成由有限个节点和有限个单元所形成的组合结构。单元和节点数确定以后,必须对其分别编号,既不能遗漏,也不能重复,其相邻节点的号码应尽量接近,以压缩刚度矩阵的带宽,减少在计算机中的总存储量及计算量。图 2-1 表示一个平面梁结构,它由 15 个单元组合而成,共有 12 个节点。单元和节点编号见图示。两个节点之间的单元处理为均质等截面的直杆,因为一般有限元计算公式都是以此为基础来推导的。

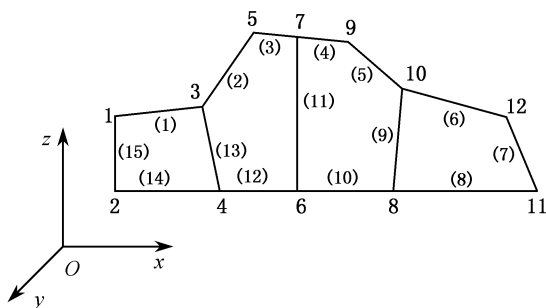


图 2-1 平面刚架结构

2. 坐标系

用有限元法分析结构时,通常要采用两种坐标系,一种是对整体结构而建立的坐标系,称为结构坐标系或总体坐标系,用 $O-xyz$ 表示;另一种是在进行单元分析时,对每个单元建立的坐标系,称为单元坐标系或局部坐标系,用 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 表示,见图 2-2。

单元坐标系中 $\bar{x}$ 的轴规定要和杆单元中性层重合,坐标原点取在杆单元的始端。 $\bar{y}$ 、 $\bar{z}$ 轴取杆截面的两个主惯性轴。这两种坐标系一律遵从右手法则。

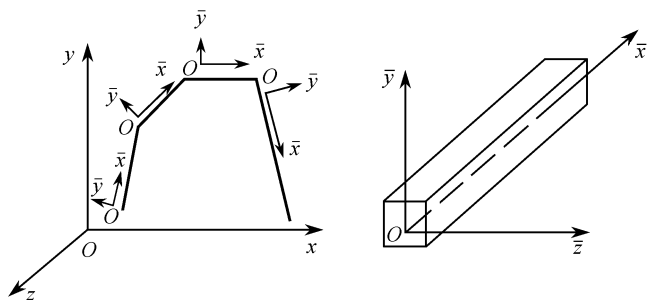


图 2-2 坐标系

3. 符号规则

在有限元分析中,为清晰起见,对所有力学向量(线位移、线力、角位移、力矩等)规定了统一的符号规则。对线位移和线力一律以沿坐标轴的正向为正,反之则为负;对角位移和力矩,先按右手法则定出其矢量

方向,矢量方向与坐标轴正向一致为正,反之为负;对于任意方向的力学向量,应先将其分解为坐标轴方向的分量,再根据上述规定判断正负号。

4. 载荷处理

在有限元分析中,认为单元与单元之间仅通过节点相互联系,求解结构变形的基本方程是节点力的平衡方程。因此,在结构离散化的过程中,如果外载荷不是直接作用在节点上,那么就要按静力等效原则将非节点载荷向节点移置。同时要保证由于移置而引起的应力误差是局部的,不影响整体的应力。移置到节点后的载荷称为等效节点载荷。将等效节点载荷与直接作用在节点上的载荷叠加,称为综合节点载荷,用此综合节点载荷进行有限元分析。

对中间载荷的处理有很多方法,对于杆、梁单元来说,可用比较直观易懂的方法。即求等效节点载荷时,可将单元两端固定,先求出固定端反力(弯矩 M 、剪力 Q 、扭矩 M_k 等),然后,改变它们的符号(正变负、负变正),即可作为等效节点载荷,用以代替杆、梁单元中间所承受的载荷。

例如,图 2-3(a)表示一个支承于节点 A 和 B 并承受各种载荷的梁 ABC,杆长为 $2l$,B 为中点。梁上实际节点载荷为 M_1 、 P_2 (图 2-3(b))。 q 、 P_1 为中间载荷(图 2-3(c)),为了用等效节点载荷代替中间载荷,可将原梁变成两个固端梁(图 2-3(d))。这两个固端梁在中间载荷作用下,将产生一组固端力。这组固端力可利用材料力学公式求出,其值表示在图 2-3(e)中。将两固端梁合并,得到对于结构的约束反力。如将这些约束反力的方向反转,它们就构成一组同中间载荷成等效的力和力偶。这组等效节点载荷再与实际节点载荷(图 2-3(b))相加,就产生图 2-3(f)所示综合节点载荷。

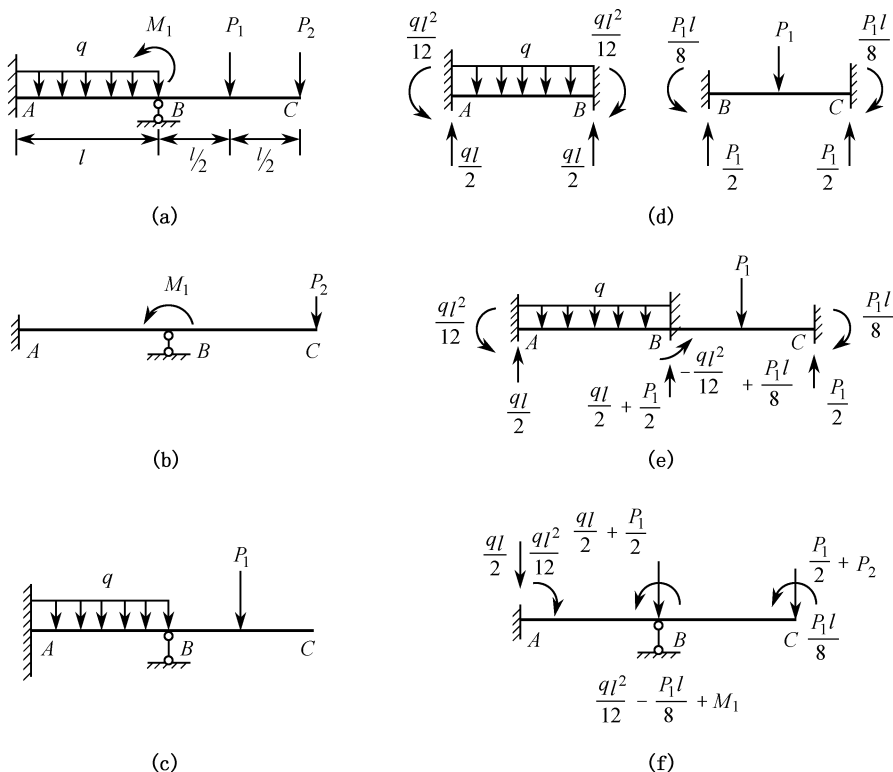


图 2-3 综合节点载荷

综合载荷作用下的结构的位移与实际载荷所产生的位移是否相同?从图中明显可见:综合载荷(图 2-3(f))与结构约束反力(图 2-3(e))叠加,便是梁上的实际载荷(图 2-3(a))。所以可以断定,图 2-3(e)与图 2-3(f)的两个梁的节点位移叠加,必然产生实际梁的节点位移。但因为约束梁的全部节点位移均为零,故可得到梁在实际载荷作用下的节点位移与在综合载荷作用下的节点位移是相同的这一结论。

综合载荷作用下的支座反力与实际载荷产生的反力是相同的。这个结论也可用图 2-3(e)与 2-3(f)梁的各力叠加来证实。图 2-3 梁的全部约束反力是作用于该梁上的等效节点载荷的等值反向的力。因而,综合载荷梁的反力与实际载荷梁的反力是相同的。这个结论以及上述结论对各类梁结构都是适用的。

适用于各种类型单元及各种载荷(包括初始应力、体积力等)的更为一般的等效节点力计算公式,可用虚功原理导出,见第三章。

5. 等截面梁刚度系数

用有限元位移法分析梁结构时,需要建立由刚度系数组成的刚度矩阵。为使后面论述方便起见,这一节先来讨论刚度系数问题。由力学知识可知,当杆端产生位移(变形)时,在梁的约束端将会有约束力产生,变形和约束力之间存在着确定的关系。杆端某一方向产生单位位移时,在梁两端各坐标方向所产生的约束力称为相应方向的刚度系数,用 $\bar{k}_{pi,mj}$ 表示,下标 p, m 代表单元坐标系的某一坐标轴方向(即代表 $\bar{x}, \bar{y}$ 或 $\bar{z}$ 方向), i, j 代表单元两端节点号。 $\bar{k}_{pi,mj}$ 表示在 j 节点 m 方向产生单位位移时,在单元的 i 节点 p 方向产生的约束力。例如 $\bar{k}_{x1,y2}$ 就表示在 2 节点 $\bar{y}$ 方向产生单位位移时,在 1 节点 $\bar{x}$ 方向产生的约束力。

在图 2-4 中,用图解方式给出了等截面直杆两端可能发生的 12 种单位位移以及在各单位位移下杆端所产生的各约束力(即刚度系数)。各约束力都是以向量表示,一个单箭头代表力向量,一个双箭头代表一个力矩向量,所有向量都以正方向画出,如果是负值,则就在约束力表达式前加一个负号。图中各约束力表达式的推导见材料力学,此处从略。

下面举例说明如何利用图 2-4 确定各种情况下的刚度系数。

① 当梁 i 端发生沿 $\bar{x}$ 方向的单位位移时,梁两端将产生沿 $\bar{x}$ 方向的约束力(见分图(a))。此约束力即为在此情况下相应方向的刚度系数,即

$$i \text{ 端沿 } \bar{x} \text{ 方向的刚度系数: } \bar{k}_{xi,xi} = EA/l$$

$$j \text{ 端沿 } \bar{x} \text{ 方向的刚度系数: } \bar{k}_{xj,xi} = -EA/l$$

② 当梁 j 端发生沿 $\bar{z}$ 轴单位角位移时,梁两端将产生沿 $\bar{y}$ 方向的约束力以及绕 $\bar{z}$ 轴的约束力矩(见分图(1))。此约束力和约束力矩亦即在此情况下相应的刚度系数为:

$$i \text{ 端沿 } \bar{y} \text{ 方向的刚度系数: } \bar{k}_{yi,zj} = 6EJ_z/l^2$$

$$i \text{ 端沿 } \bar{z} \text{ 轴的刚度系数: } \bar{k}_{zi,zj} = 2EJ_z/l$$

$$j \text{ 端沿 } \bar{y} \text{ 方向的刚度系数: } \bar{k}_{yj,zj} = -6EJ_z/l^2$$

$$j \text{ 端沿 } \bar{z} \text{ 轴的刚度系数: } \bar{k}_{zj,zj} = 4EJ_z/l$$

其他各刚度系数依次类推。

根据图 2-4 中的关系式,即可方便地写出各类梁结构的单元刚度矩阵。

6. 节点自由度、梁结构的分类

由图 2-4 可知,梁一端在直角坐标系中可能产生六个位移,即通常所谓的具有六个运动

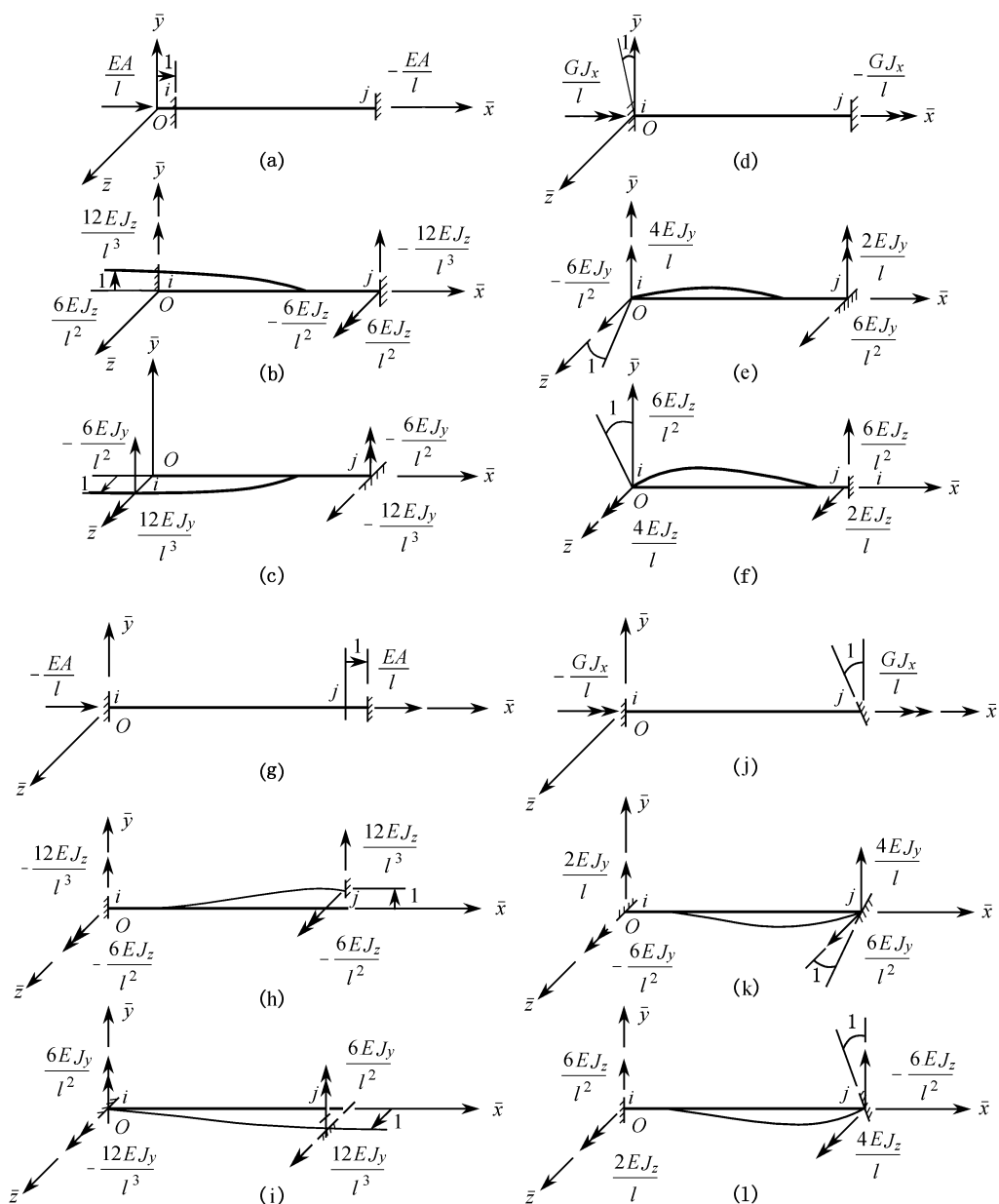


图 2-4 梁刚度示意图

- (a) (b) (c)—i 端分别沿 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 轴方向发生单位线位移；
 (d) (e) (f)—i 端分别沿 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 轴方向发生单位角位移；
 (g) (h) (i)—j 端分别沿 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 轴方向发生单位线位移；
 (j) (k) (l)—j 端分别沿 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 轴方向发生单位角位移

自由度 我们用记号 u, v, w 分别表示沿 x, y, z 三轴的线位移, 用 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 分别表示绕 x, y, z 三轴的转角。与这六个位移相对应的可出现六个广义力, 即三个力 U, V, W 和三个力矩 M_x, M_y, M_z 。

在一个具体结构中,由于结构特点和受力情况,有些位移不会发生,则在计算时就不必去考虑。根据在变形时(因受外载、温度变化、支座沉陷或其他原因)结构中出现的节点位移的种类(也是广义力的种类),可以将梁结构区分为几种主要类型。

(1) 空间刚架结构

这种结构的特点是梁布置于空间而不在同一个平面内,并承受任意方向的外载荷(如客车车身骨架结构),且梁连接处是刚性联结,即要保持转角连续和线位移连续。因此,在计算中需考虑梁抵抗弯曲、剪切、扭转、拉压等多种变形以及相应的广义力。对梁的节点来说要计及如下的广义位移 $\{\delta_i\}$ 和广义力 $\{f_i\}$ 。

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad \{f_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix}$$

即空间刚架结构的节点自由度数目为 6。

(2) 平面刚架结构

这种结构的特点是梁、外力及由此产生的变形和约束力均在同一平面内(图 2-1)。梁连接处(节点处)是刚性联结,即要保持转角连续和位移连续。在这类结构中应考虑梁承受平面内的轴向力、剪力和弯矩。因此,计算中要计及如下三种位移和力:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad \{f_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ M_{zi} \end{Bmatrix}$$

即平面刚架结构的节点自由度数目为 3。

(3) 平板架结构

这类结构的特点是所有梁位于同一平面内,且受到垂直于梁结构平面的外力(见图 2-5)。在这种外力的作用下,结构变形后离开原来的结构平面,这种结构称做平板架结构。汽车车架结构就具有这种特点。在这种结构中,梁间的连接是刚性的,即要保持位移(沿 z 轴的挠度)和转角(绕 x 和绕 y 轴的转角)的连续。结构在变形时,梁发生弯曲、剪切和扭转变形,所以要考虑梁承受弯曲、剪切和扭转的能力。在计算中要计及这三种位移和对应的力:

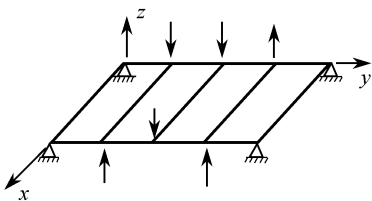


图 2-5 平板架结构受力图

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad \{f_i\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix}$$

(4) 桁架结构

在工程结构中,常会遇到一些比较细长的梁按三角形互相连接所组成的结构,如由细长梁焊接而成的桥梁、起重机像鼻梁架、输电塔等,这类结构可看成桁架结构。

一般说来,在外力作用下,结构内部将产生弯矩、剪力、轴向力等多种广义力,但实验观察

和计算分析发现轴向力是对这类结构强度起决定作用的主要内力。为了简化计算可以不考虑剪力和弯矩,于是考虑节点的转角也就没有意义。因此,计算时可把梁的节点处当作铰链连接,可以自由转动,节点处仅保持线位移连续。实际上有些结构的连接处确实是用铰链或销子的(如四连杆机构、曲柄连杆机构等),这种只考虑梁承受轴向变形的结构称为桁架结构。

当梁布置于空间时,称为空间桁架结构,需计及三个线位移,节点自由度为 3。

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad \{f_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix}$$

当梁都布置在同一平面内时,称为平面桁架结构,需计及两个线位移,节点自由度为 2。

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad \{f_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

二、刚度方程的建立方法

用位移法对梁结构进行分析时,应先建立各单元节点位移与各单元节点内力(即图 2-4 中所示约束力)之间的关系,得到单元刚度方程。然后,考虑节点外力(由外载荷引起的综合节点载荷)与节点内力的平衡条件以及各节点位移协调条件,建立起各节点位移与各节点外力之间的关系,得到结构刚度方程(也称原始基本方程)。再考虑结构边界的约束条件,对结构刚度方程进行必要的约束处理。最后,得到结构各节点的未知位移与已知外力之间的关系式,称此式为基本方程。解此方程即可求出各节点的位移,进而求出各单元的变形、内力和应力。

下面以一简单的平面桁架结构为例来说明刚度方程的建立。

图 2-6(a)为由两根梁组合而成的平面桁架结构。今若以一根梁作为一个单元,则此结构被离散为 2 个单元,有 3 个节点。对单元和节点分别编号,设 O-xy 为结构坐标系。在节点 2 作用有 x、y 方向的外力 P_{x2} 、 P_{y2} (第一个下标表示坐标方向,第二个下标表示节点号,以下同),在节点 1 和节点 3 的 x、y 方向的位移被约束着,因此,在外力作用下,整个结构不会发生刚体位移。在各约束点将有反力 P_{x1} 、 P_{y1} 、 P_{x3} 、 P_{y3} 产生。节点 2 不受约束,在外力作用下将产生位移 u_2 和 v_2 (见图 2-6(b)),导致各梁发生变形,从而有轴向力产生。节点 2 所产生的位移 u_2 和 v_2 就是位移法所要求解的基本未知量。

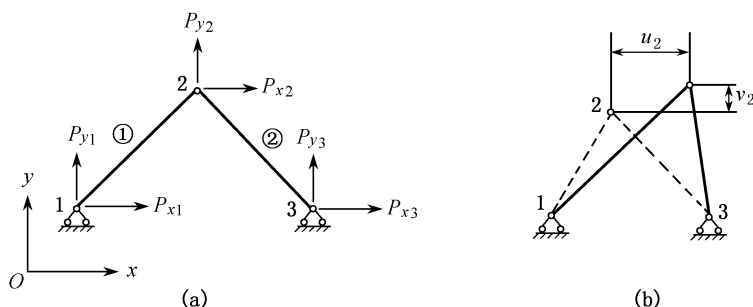


图 2-6 平面桁架结构

(a) 由两根梁组合而成的平面桁架结构 (b) 梁在外力作用下产生变形

1. 建立相对于单元坐标系的单元刚度方程

当结构受外力变形时,各单元两端均有位移和约束力(以后称为内力)产生,今以图 2-6 所示结构的单元①为例来建立其单元刚度方程。对单元

①按规则画出单元坐标系 $O-\bar{x}\bar{y}$,以及由于结构受外力作用,使梁两端产生的线位移和线力(图 2-7)。

将梁两端的线位移和线力写成矩阵形式如下:

$$\text{位移} \quad \{\delta\}^e = [\delta_1 \quad \delta_2]^T = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2]^T$$

$$\text{内力} \quad \{f\}^e = [f_1 \quad f_2]^T = [\bar{U}_1 \quad \bar{V}_1 \quad \bar{U}_2 \quad \bar{V}_2]^T$$

各量的上标表示单元号,上面一杠表示用单元坐标系 $O-\bar{x}\bar{y}$ 度量的量。

前面提到过,单元任一端任一方向的单位位移都能使单元两端产生相应的约束力(内力),如图 2-4 所示。对于平面桁架单元来说,当单元两端产生位移 $\{\delta\}^e$ 时,位移和内力之间的关系可综合写成如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{k}_{x1,x1}^1 \bar{u}_1^1 + \bar{k}_{x1,y1}^1 \bar{v}_1^1 + \bar{k}_{x1,x2}^1 \bar{u}_2^1 + \bar{k}_{x1,y2}^1 \bar{v}_2^1 \\ \bar{V}_1 &= \bar{k}_{y1,x1}^1 \bar{u}_1^1 + \bar{k}_{y1,y1}^1 \bar{v}_1^1 + \bar{k}_{y1,x2}^1 \bar{u}_2^1 + \bar{k}_{y1,y2}^1 \bar{v}_2^1 \\ \bar{U}_2 &= \bar{k}_{x2,x1}^1 \bar{u}_1^1 + \bar{k}_{x2,y1}^1 \bar{v}_1^1 + \bar{k}_{x2,x2}^1 \bar{u}_2^1 + \bar{k}_{x2,y2}^1 \bar{v}_2^1 \\ \bar{V}_2 &= \bar{k}_{y2,x1}^1 \bar{u}_1^1 + \bar{k}_{y2,y1}^1 \bar{v}_1^1 + \bar{k}_{y2,x2}^1 \bar{u}_2^1 + \bar{k}_{y2,y2}^1 \bar{v}_2^1 \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式(2-1)中等号右边各刚度系数 $\bar{k}_{pi,mj}^1$ 的具体意义为: $\bar{k}_{x1,x1}^1$ 表示单元①在节点 1 $\bar{x}$ 方向产生单位位移时,在节点 1 的 $\bar{x}$ 方向产生的力; $\bar{k}_{y2,y1}^1$ 表示单元①在节点 1 $\bar{y}$ 方向产生单位位移时,在节点 2 $\bar{y}$ 方向产生的力。其余刚度系数的意义依次类推。式中各刚度系数与杆端位移的乘积,即表示在此位移值下的总力。例如: $\bar{k}_{pi,mj}^1 \bar{u}_1^1$ 表示在 j 节点 m 方向产生 $\bar{u}_1^1$ 位移时, i 节点的 P 方向产生的总力,如 $\bar{k}_{y2,y1}^1 \bar{v}_1^1$ 表示在节点 1 $\bar{y}$ 方向产生 $\bar{v}_1^1$ 位移时节点 2 $\bar{y}$ 方向产生的总力。其余类推。

由此,公式(2-1)的第 1 行表示节点 1 在 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 方向产生位移 $\bar{u}_1^1$ 和 $\bar{v}_1^1$ 以及节点 2 在 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 方向产生位移 $\bar{u}_2^1$ 和 $\bar{v}_2^1$ 时,在单元①节点 1 的 $\bar{x}$ 方向所产生的力的总和。第 2 行表示单元两端发出上述四个位移时,在节点 1 $\bar{y}$ 方向所产生的力之总和。同理,第 3、第 4 行分别表示由于上述位移时,在节点 2 的 $\bar{x}$ 方向和 $\bar{y}$ 方向的产生的力之总和。将式(2-1)写成矩阵形式如下:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{V}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{V}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{x1,x1}^1 & \bar{k}_{x1,y1}^1 & \bar{k}_{x1,x2}^1 & \bar{k}_{x1,y2}^1 \\ \bar{k}_{y1,x1}^1 & \bar{k}_{y1,y1}^1 & \bar{k}_{y1,x2}^1 & \bar{k}_{y1,y2}^1 \\ \bar{k}_{x2,x1}^1 & \bar{k}_{x2,y1}^1 & \bar{k}_{x2,x2}^1 & \bar{k}_{x2,y2}^1 \\ \bar{k}_{y2,x1}^1 & \bar{k}_{y2,y1}^1 & \bar{k}_{y2,x2}^1 & \bar{k}_{y2,y2}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^1 \\ \bar{v}_1^1 \\ \bar{u}_2^1 \\ \bar{v}_2^1 \end{Bmatrix} \quad (2-2a)$$

将式(2-2a)中的单元号和节点号作相应的变动,即得图 2-6(a)中②单元的单元刚度方程如下:

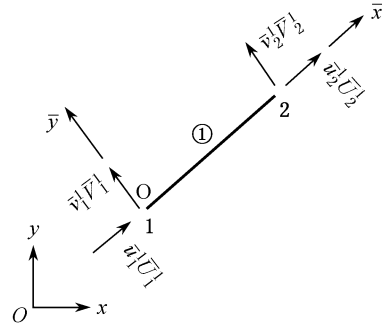


图 2-7 杆端位移向量(力向量与其一一对应,未画出)

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_2^2 \\ \bar{V}_2^2 \\ \bar{U}_3^2 \\ \bar{V}_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{x2,x2}^2 & \bar{k}_{x2,y2}^2 & \bar{k}_{x2,x3}^2 & \bar{k}_{x2,y3}^2 \\ \bar{k}_{y2,x2}^2 & \bar{k}_{y2,y2}^2 & \bar{k}_{y2,x3}^2 & \bar{k}_{y2,y3}^2 \\ \bar{k}_{x3,x2}^2 & \bar{k}_{x3,y2}^2 & \bar{k}_{x3,x3}^2 & \bar{k}_{x3,y3}^2 \\ \bar{k}_{y3,x2}^2 & \bar{k}_{y3,y2}^2 & \bar{k}_{y3,x3}^2 & \bar{k}_{y3,y3}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2^2 \\ \bar{v}_2^2 \\ \bar{u}_3^2 \\ \bar{v}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (2-2b)$$

式(2-2)即为相对于单元坐标系的单元刚度方程。可缩写成下面统一的形式：

$$\{\bar{f}\}^e = [\bar{k}] \{\bar{\delta}\}^e \quad (2-3)$$

式中 $[\bar{k}]$ 为相对于单元坐标系的单元刚度矩阵,刚度矩阵中的刚度系数 $\bar{k}_{pi,mj}^1$ 可利用图2-4得到。

对于平面桁架结构来说,其单元只能承受轴向位移和轴向力,因此,由图2-4中的(a)、(g)分图,即可得(2-2)式中有关刚度系数的数学表达式：

对单元①

$$\bar{k}_{x1,x1}^1 = \bar{k}_{x2,x2}^1 = EA/l; \quad \bar{k}_{x1,x2}^1 = \bar{k}_{x2,x1}^1 = -EA/l \quad (2-4)$$

对单元②

$$\bar{k}_{x2,x2}^2 = \bar{k}_{x3,x3}^2 = EA/l; \quad \bar{k}_{x2,x3}^2 = \bar{k}_{x3,x2}^2 = -EA/l \quad (2-5)$$

式(2-2)中的其他刚度系数均为零。

将式(2-4)和式(2-5)代入式(2-2a),式(2-2b)可知,不同单元的刚度矩阵是相同的。因此,若把梁两端节点号改用 i, j 表示,则式(2-2a)和式(2-2b)可写成统一的形式如下：

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (2-6)$$

式(2-6)即为桁架结构相对于单元坐标系的单元刚度方程。

2. 坐标变换,建立相对于结构坐标系的单元刚度方程

实际结构中,各单元往往朝着各不相同的方向,因而各单元的单元坐标系的方向亦不相同,不同单元在同一节点处的位移和节点力的方向也就不一致,见图(2-9(a))(图中只标出节点位移,节点力与其一一对应,未画出)。这样,要建立各节点力的平衡方程式是一件相当麻烦的工作。因此,有必要先把沿单元坐标系方向的节点位移和节点力均变换成沿结构坐标系方向,见图(2-9(b))。这样的变换称为坐标变换。

以单元①两端节点的位移(和力)的变换为例加以说明。将沿单元坐标 Ox 和 Oy 方向的位移分别分解到结构坐标 Ox 和 Oy 方向。见图2-8,得到下面关系式(图中只画出一个节点的变换关系,另一点相同)。

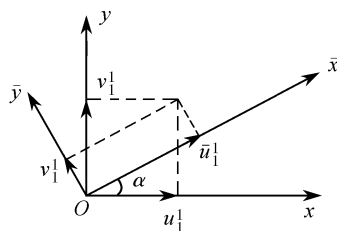


图2-8 坐标变换

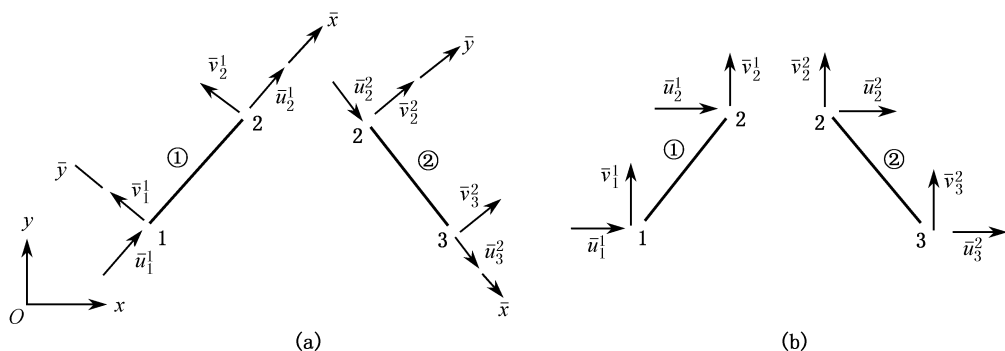


图 2-9 节点位移向量的转换(力向量与其一一对应,未画出)

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1^1 &= u_1^1 \cos \alpha + v_1^1 \sin \alpha \\ \bar{v}_1^1 &= -u_1^1 \sin \alpha + v_1^1 \cos \alpha \\ \bar{u}_2^1 &= u_2^1 \cos \alpha + v_2^1 \sin \alpha \\ \bar{v}_2^1 &= -u_2^1 \sin \alpha + v_2^1 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

将式(2-7)写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1^1 \\ \bar{v}_1^1 \\ \bar{u}_2^1 \\ \bar{v}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

由于节点力和节点位移一一对应,故可写出与式(2-8)相同的节点力的变换关系如下:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1^1 \\ \bar{V}_1^1 \\ \bar{U}_2^1 \\ \bar{V}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ V_1^1 \\ U_2^1 \\ V_2^1 \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

令

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

$[T]$ 称为平面桁架单元的坐标变换矩阵。式(2-8)和式(2-9)即为单元①的位移向量和力向量的坐标变换方程。其他单元的坐标变换方程只需换上相应单元的上标和下标即可。坐标变换矩阵 $[T]$ 相同,因此,可将平面桁架单元的坐标变换方程缩写成统一的形式如下:

$$\{\bar{\delta}\}^e = [T][\delta]^e \quad (2-11)$$

$$\{\bar{f}\}^e = [T][f]^e \quad (2-12)$$

将式(2-11)和式(2-12)代入式(2-3)得

$$[T][kf]^e = [\bar{k}][T][\delta]^e \quad (2-13)$$

等号两边左乘 $[T]^{-1}$

$$[T]^{-1}[T][k]f^e = [T]^{-1}[k][T]\delta^e$$

因 $[T]$ 是正交矩阵,故 $[T]^{-1} = [T]^T$,则有

$$\{f\}^e = [T]^T[k][T]\delta^e \quad (2-14)$$

$$\text{令} \quad \{k\}^e = [T]^T[k][T] \quad (2-15)$$

$$\text{则} \quad \{f\}^e = [k]\{\delta\}^e \quad (2-16)$$

式(2-16)即为相对于结构坐标系 O-xyz 的单元刚度方程,式中 $[k]$ 称为相对于结构坐标系的单元刚度矩阵。将式(2-16)写成展开形式为

$$\begin{Bmatrix} U_i^k \\ V_i^k \\ U_j^k \\ V_j^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{xi}^k & k_{yi}^k & k_{xj}^k & k_{yj}^k \\ k_{yi}^k & k_{yy}^k & k_{yj}^k & k_{yy}^k \\ k_{xj}^k & k_{yj}^k & k_{xi}^k & k_{yi}^k \\ k_{yj}^k & k_{yy}^k & k_{yj}^k & k_{yy}^k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^k \\ v_i^k \\ u_j^k \\ v_j^k \end{Bmatrix} \quad (2-17)$$

式(2-17)中各量的上标 k 表示单元号,对图2-6所示桁架结构中的单元①来说: $k=1$,对单元②来说: $k=2$ 。各量的下标 i, j 表示单元两端节点号,对单元①的两端: $i=1, j=2$ 。对单元②的两端: $i=2, j=3$ 。

考虑到相交于同一节点各单元,在该节点的位移应该相同,并都等于结构在该节点的位移,此即所谓的位移协调条件,亦即在单元①、②的交点2处,单元①的 x, y 方向的位移与单元②的 x, y 方向的位移相同,都等于平面桁架结构2节点的 x, y 方向的位移。因此,在式(2-17)中的位移列阵不需标明单元号,可直接用结构节点的位移,即:

$$\begin{Bmatrix} u_i^k \\ v_i^k \\ u_j^k \\ v_j^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \text{或} \{\delta\}^e = \{\delta\} \quad (2-18)$$

为了进一步了解经坐标变换后单元刚度方程的变化,将式(2-17)写成显式如下,并考虑位移协调条件式(2-18):

$$\begin{Bmatrix} U_i^k \\ V_i^k \\ U_j^k \\ V_j^k \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (2-19)$$

式(2-19)是由式(2-14)右端各矩阵相乘得到。

公式(2-17)、式(2-19)中的节点位移和节点内力,都已变换成与结构坐标系方向一致,如图(2-9(b))所示。这样,就可利用公式(2-17)和式(2-18)建立结构刚度方程。

3. 建立结构刚度方程(或称原始基本方程)

为建立结构刚度方程,必须写出相对于结构坐标系方向的各节点外力(包括节点外载荷,节点支反力)与各节点内力的平衡方程。

对于节点1,由于其 x, y 方向的位移受到约束。因此,单元在该节点 x 方向的合力应该等于支座反力 P_{x1} , y 方向的合力应该等于支座反力 P_{y1} 。本例相交于1节点的仅一个单元,故节

点 1 的 x 方向和 y 方向力的平衡条件为

$$P_{x1} = U_1^1 \quad P_{y1} = V_1^1$$

式中 U_1^1 为节点 1 的 x 方向的内力, V_1^1 为节点 1 的 y 方向的内力, 可由(2-17)、(2-18)两式写出(其他内力也同样), 由此

$$P_{x1} = k_{x1,x1}^1 u_1 + k_{x1,y1}^1 v_1 + k_{x1,x2}^1 u_2 + k_{x1,y2}^1 v_2 \quad (2-20)$$

$$P_{y1} = k_{y1,x1}^1 u_1 + k_{y1,y1}^1 v_1 + k_{y1,x2}^1 u_2 + k_{y1,y2}^1 v_2 \quad (2-21)$$

对于节点 2 来说, x 方向作用外力 P_{x2} , y 方向作用外力 P_{y2} , 故各单元在 2x 节点方向的合力应该等于 P_{x2} , y 方向的合力应该等于 P_{y2} 。相交于节点 2 的有 2 个单元, 故节点 2 在 x 方向和 y 方向的平衡条件为

$$P_{x2} = U_2^1 + U_2^2 \quad P_{y2} = V_2^1 + V_2^2$$

也即

$$\begin{aligned} P_{x2} &= k_{x2,x1}^1 u_1 + k_{x2,y1}^1 v_1 + k_{x2,x2}^1 u_2 + k_{x2,y2}^1 v_2 + k_{x2,x2}^2 u_2 + k_{x2,y2}^2 v_2 + k_{x2,x3}^2 u_3 + k_{x2,y3}^2 v_3 \\ &= k_{x2,x1}^1 u_1 + k_{x2,y1}^1 v_1 + (k_{x2,x2}^1 + k_{x2,x2}^2) u_2 + (k_{x2,y2}^1 + k_{x2,y2}^2) v_2 + k_{x2,x3}^2 u_3 + k_{x2,y3}^2 v_3 \end{aligned} \quad (2-22)$$

$$\begin{aligned} P_{y2} &= k_{y2,x1}^1 u_1 + k_{y2,y1}^1 v_1 + k_{y2,x2}^1 u_2 + k_{y2,y2}^1 v_2 + k_{y2,x2}^2 u_2 + k_{y2,y2}^2 v_2 + k_{y2,x3}^2 u_3 + k_{y2,y3}^2 v_3 \\ &= k_{y2,x1}^1 u_1 + k_{y2,y1}^1 v_1 + (k_{y2,x2}^1 + k_{y2,x2}^2) u_2 + (k_{y2,y2}^1 + k_{y2,y2}^2) v_2 + k_{y2,x3}^2 u_3 + k_{y2,y3}^2 v_3 \end{aligned} \quad (2-23)$$

对于节点 3, x, y 方向的位移受到约束, 因此, 单元在 x 方向的合力应该等于反力 P_{x3} , y 方向的合力应该等于反力 P_{y3} 。相交于节点 3 的仅一个单元, 故节点 3 的 x 方向和 y 方向的平衡条件为

$$P_{x3} = U_3^2 \quad P_{y3} = V_3^2$$

也即

$$P_{x3} = k_{x3,x2}^2 u_2 + k_{x3,y2}^2 v_2 + k_{x3,x3}^2 u_3 + k_{x3,y3}^2 v_3 \quad (2-24)$$

$$P_{y3} = k_{y3,x2}^2 u_2 + k_{y3,y2}^2 v_2 + k_{y3,x3}^2 u_3 + k_{y3,y3}^2 v_3 \quad (2-25)$$

由上面分析可知, 平面桁架结构每个节点具有两个方向的位移(自由度), 可写出两个平衡方程式, 本例题有三个节点, 共写出六个平衡方程式(2-20)~式(2-25)。可见平衡方程数等于节点自由度数。因此, 一个很简单的结构也往往会有几十个方程, 稍微复杂的结构则有几百个甚至几千个方程, 人工计算是不可能的, 但用电子计算机就可以在短时间内解出, 这进一步说明, 有限元法得到广泛作用, 是以使用电子计算机为前提的。

将六个平衡方程写成矩阵形式, 见式(2-26)。其缩写形式见式(2-27)。

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x1,x1}^1 & k_{x1,y1}^1 & k_{x1,x2}^1 & k_{x1,y2}^1 & 0 & 0 \\ k_{y1,x1}^1 & k_{y1,y1}^1 & k_{y1,x2}^1 & k_{y1,y2}^1 & 0 & 0 \\ k_{x2,x1}^1 & k_{x2,y1}^1 & k_{x2,x2}^1 + k_{x2,x2}^2 & k_{x2,y2}^1 + k_{x2,y2}^2 & k_{x2,x3}^2 & k_{x2,y3}^2 \\ k_{y2,x1}^1 & k_{y2,y1}^1 & k_{y2,x2}^1 + k_{y2,x2}^2 & k_{y2,y2}^1 + k_{y2,y2}^2 & k_{y2,x3}^2 & k_{y2,y3}^2 \\ 0 & 0 & k_{x3,x2}^2 & k_{x3,y2}^2 & k_{x3,x3}^2 & k_{x3,y3}^2 \\ 0 & 0 & k_{y3,x2}^2 & k_{y3,y2}^2 & k_{y3,x3}^2 & k_{y3,y3}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2-26)$$

$$\{P\} = [k] \{\delta\} \quad (2-27)$$

式中 $\{P\}$ ——节点外力向量；

$[k]$ ——结构刚度矩阵；

$\{\delta\}$ ——节点位移向量。

式(2-26)、式(2-27)称为结构刚度方程(或称结构的原始基本方程)。由式(2-26)可明显看出,结构某一节点某一方向的刚度是相交于该节点的所有单元相应方向的刚度系数的总和。例如,节点2的x方向的刚度是相交于节点2的单元①和单元②在节点2的x方向的刚度系数的总和,即

$$k_{x2,x2} = k_{x2,x2}^1 + k_{x2,x2}^2$$

其他也是如此,因此,可得出结论:结构节点的刚度是由相交于此节点的所有单元提供。根据这个规律,结构刚度矩阵 $[k]$ 的组合可利用相对于结构坐标系的单元刚度方程(2-17)直接写出。即:首先决定方程中节点力向量和节点位移向量的排列顺序,一般总是按节点号由小到大排列,在同一节点号里,则按x,y,z顺序排列。等号左边的节点力向量和等号右边的节点位移向量一一对应。如:方程(2-27)中,节点力向量的第5项表示作用在节点3的x方向的力,则与之对应的节点位移向量的第五项就表示节点3的x方向的分位移。然后,根据式(2-17)中的刚度系数的下标号码,一一对号写入结构刚度矩阵中相应的位置。下标号码相同的写入同一位置,将其叠加,最后,即得式(2-26)。

4. 刚度矩阵 $[k]$ 的物理意义

为叙述方便,将结构刚度方程用下面形式表示:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

令位移列向量中 $u_j = 1$, 其他各位移为零,则表示结构中除 $u_j = 1$ 外,其他节点位移均被约束,此时,根据公式(2-28)可知,各节点上所产生的节点力如下:

$$f_1 = k_{1j}, f_2 = k_{2j}, \dots, f_i = k_{ij}, \dots, f_n = k_{nj}$$

由此可知,矩阵 $[k]$ 的j列元素 $k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{ij}, \dots, k_{nj}$ 既代表力,也表示对应于 u_j 的各节点的刚度。刚度系数的值愈大,说明这个结构(或单元)愈难以发生变形,因而显得结构愈加刚硬,也说明单元或结构抵抗变形的能力愈强,因而得名为“刚度矩阵”。

5. 刚度矩阵的性质

(1) 刚度矩阵是对称矩阵

刚度矩阵中的系数所体现的刚度特性反映了各节点位移和节点力之间的作用,故刚度系数中的 $k_{11}, k_{22}, \dots, k_{nn}$ 等系数反映节点位移与节点力之间的作用,它们在刚度矩阵中总位于主对角线上(称为主系数),它们的值总是正的。其他系数如 $k_{12}, k_{21}, \dots, k_{ji}$ 等,反映不对应的节点力同节点位移之间的影响,它们总占据主对角线两旁的位置(称为副系数),它们的值可以是正的、负的或者为零。由功的互等定理得知,在对主对角线两边对称位置的各对系数互等,即

$k_{12} = k_{21}, k_{34} = k_{43}, k_{ij} = k_{ji}, \dots$ 。对式(2-26)来说, 则 $k_{y_2, x_1}^1 = k_{x_1, y_2}^1, k_{y_2, x_2}^1 + k_{y_2, x_2}^2 = k_{x_2, y_2}^1 + k_{x_2, y_2}^2, \dots$ 此即是矩阵的对称性。这一性质有利于数值计算, 因为, 使用电子计算机计算时, 需要存储刚度矩阵 $[k]$, 利用这一性质, 即可先令计算机存储矩阵 $[k]$ 中包括对角线在内的右上部分刚度系数, 与右上部分对称的左下部分就不必存储, 这样, 可以节省存储空间。现有的程序中都利用了这一性质。

(2) 结构刚度矩阵 $[k]$ 呈带状分布规律

所谓带状, 就是说非零的刚度系数全都分布在主对角线附近。在结构刚度矩阵 $[k]$ 的每一行中, 自第一个非零元素至最后一个非零元素范围内(中间可能夹杂着零元素)所有元素的总数目称为带宽。自第一个非零元素至对角线元素范围内所有元素的总数则称半带宽。节点编号顺序对带宽有很大影响, 例如如图 2-10 所示桁架结构, 若节点按无括号的编序, 则其刚度矩阵形式如图 2-11(a)所示(矩阵中“ $\times$ ”表示非零元素, 空白表示零元素)。若节点号改为括号中的数字排列, 则 $[k]$ 变为图 2-11(b)所示。即由一条带变为三条带, 总带宽比图 2-11(a)大许多。由上可见, 不同的节点编码, 带宽也不同, 带宽愈小, 则存储量愈少。因此, 对节点进行编码时, 应使相邻节点的码差尽可能小。为了最大限度地缩小带宽, 也可以由计算机软件自动地按带宽最小原则将节点重新编号, 这称为带宽优化。

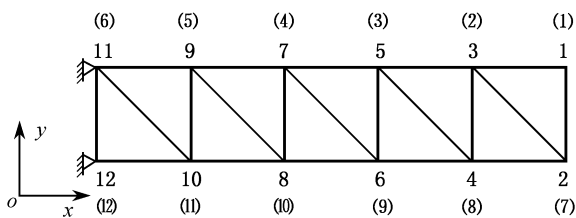


图 2-10 两种节点序号

图 2-10 所示桁架结构, 若节点按无括号的编序, 则其刚度矩阵形式如图 2-11(a)所示(矩阵中“ $\times$ ”表示非零元素, 空白表示零元素)。若节点号改为括号中的数字排列, 则 $[k]$ 变为图 2-11(b)所示。即由一条带变为三条带, 总带宽比图 2-11(a)大许多。由上可见, 不同的节点编码, 带宽也不同, 带宽愈小, 则存储量愈少。因此, 对节点进行编码时, 应使相邻节点的码差尽可能小。为了最大限度地缩小带宽, 也可以由计算机软件自动地按带宽最小原则将节点重新编号, 这称为带宽优化。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\times$	$\times$	$\times$									
2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$								
3	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$							
4		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$						
5			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					
6				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				
7					$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
8						$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
9							$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
10								$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
11									$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
12										$\times$	$\times$	$\times$

(a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	$\times$	$\times$						$\times$					
2	$\times$	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$				
3		$\times$	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$			
4			$\times$	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$		
5			$\times$	$\times$	$\times$						$\times$	$\times$	
6					$\times$	$\times$						$\times$	$\times$
7	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$					
8		$\times$	$\times$				$\times$	$\times$	$\times$				
9			$\times$	$\times$				$\times$	$\times$	$\times$			
10				$\times$	$\times$				$\times$	$\times$	$\times$		
11					$\times$	$\times$				$\times$	$\times$	$\times$	
12						$\times$					$\times$	$\times$	$\times$

(b)

图 2-11 两种带宽

(3) 大型结构刚度矩阵 $[k]$ 是一个稀疏矩阵

所谓稀疏, 就是说有许多刚度系数为零。以图 2-10 所示结构为例, 它的结构刚度矩阵 $[k]$ 如图 2-11(a)所示。如令节点 6 的 x 方向的位移 $u_6 = 1, v_6 = 1$ 其他节点位移被约束为零, 由于节点 6 只与周围 4 个节点(节点 4 5 7 8)有关, 因此只有节点 4 5 6 7 8 产生力。其余节点 1 2 3 9 10 11 12 与节点 6 无直接联系, 不会产生力, 所以 $[k]$ 中对应于位移 u_6 的那一列中与节点 1 2 3 9 10 11 12 有关的系数都是零, 也就是说该列有一半以上系数为零。

在一般梁结构里, 一个节点(梁连接处)上直接相连的梁最多是 10 个左右, 如果结构离散

后节点数有 200 个,则非零点与总节点之比为 10/200,即非零节点仅占 5% 左右。离散单元愈多,则结构刚度的稀疏性就愈突出。

利用矩阵 $[k]$ 的稀疏性,可设法只存储非零元素,从而可大量的节省存储容量。

(4) 结构刚度矩阵 $[k]$ 是奇异矩阵

由公式(2-26)知,结构刚度矩阵 $[k]$ 中的任一行(或任一列)之和均为零,这使刚度方程有无穷多组解答(从物理意义上说这是因为允许结构作整体的刚体运动之故)。因此,在代入结构的边界约束条件之前,结构刚度矩阵是奇异矩阵,不可求逆。

6. 约束条件的处理,建立结构的基本方程,求未知位移

结构刚度方程的一般表达式为 $\{p\} = [k]\{\delta\}$ 。由于结构刚度矩阵 $[k]$ 为奇异矩阵,满足此方程的节点位移 $\{\delta\}$ 的解不是唯一的。因此,为求出结构确定的未知节点位移,需要将公式(2-27)进行修改,即约束条件处理。下面讲三种方法。

(1) 改变结构原始基本方程的排列次序

以图 2-6 所示桁架结构的结构刚度方程(2-26)为例,将公式(2-26)的外力向量中的未知反力 $P_{x1}, P_{y1}, P_{x3}, P_{y3}$ 放到向量的后边,其他各项元素顺次向前移,使力向量中的头 2 项表示已知节点外力,后 4 项表示未知反力。对于节点位移,则根据一一对应原则,其中头 2 项表示未知节点位移,后 4 项表示已知的节点位移(本例题为零)。同时将与之相对应的刚度矩阵的各元素重新对号排列,则公式(2-26)变成公式(2-29)的形式。再将式(2-29)进行分块,用 $\{P_A\}, \{\delta_A\}$ 分别表示头 2 项已知节点外力和未知节点位移,用 $\{P_B\}, \{\delta_B\}$ 分别表示后 4 项未知节点反力和已知节点位移。据此,也将结构刚度矩阵 $[k]$ 分块为 $[k_{AA}], [k_{AB}], [k_{BA}], [k_{BB}]$ 4 个子矩阵,结果得到公式(2-30)。在矩阵和向量内用虚线表示这种分块。

$$\begin{Bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x2,x2}^1 + k_{x2,x2}^2 & k_{x2,y2}^1 + k_{x2,y2}^2 & k_{x2,x1}^1 & k_{x2,y1}^1 & k_{x2,x3}^2 & k_{x2,y3}^2 \\ k_{y2,x2}^1 + k_{y2,x2}^2 & k_{y2,y2}^1 + k_{y2,y2}^2 & k_{y2,x1}^1 & k_{y2,y1}^1 & k_{y2,x3}^2 & k_{y2,y3}^2 \\ k_{x1,x2}^1 & k_{x1,y2}^1 & k_{x1,x1}^1 & k_{x1,y1}^1 & & \\ k_{y1,x2}^1 & k_{y1,y2}^1 & k_{y1,x1}^1 & k_{y1,y1}^1 & & \\ k_{x3,x2}^2 & k_{x3,y2}^2 & & & k_{x3,x3}^2 & k_{x3,y3}^2 \\ k_{y3,x2}^2 & k_{y3,y2}^2 & & & k_{y3,x3}^2 & k_{y3,y3}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2-29)$$

$$\begin{Bmatrix} P_A \\ 2 \times 1 \\ \vdots \\ P_B \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ 2 \times 2 & 2 \times 4 \\ \vdots & \vdots \\ k_{BA} & k_{BB} \\ 4 \times 2 & 4 \times 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ 2 \times 1 \\ \vdots \\ \delta_B \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix} \quad (2-30)$$

分解上式,可得以下二式:

$$\{P_A\} = [k_{AA}]\{\delta_A\} + [k_{AB}]\{\delta_B\} \quad (2-31)$$

$$\{P_B\} = [k_{BA}]\{\delta_A\} + [k_{BB}]\{\delta_B\} \quad (2-32)$$

由于图 2-6 中,节点 1 和节点 3 均被约束。故式(2-31)中的位移向量 $\{\delta_B\}$ 为

$$\{\delta_B\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T = \{0\}$$

由此,式(2-31)可简化为

$$\{P_A\} = [k_{AA}] \{\delta_A\} \quad (2-33)$$

式(2-33)中,向量 $\{P_A\}$ 的各项是已知的(即给定的节点外力 P_{x2}, P_{y2}),向量 $\{\delta_A\}$ 各项为未知的(即 u_2, v_2)。所以,式(2-33)就是关于未知的节点位移 $\{\delta_A\}$ 的联立一次方程组,对它求解,就可以求得未知的节点位移 $\{\delta_A\}$ 。将式(2-33)两边各乘 $[k_{AA}]^{-1}$ 得

$$\{\delta_A\} = [k_{AA}]^{-1} \{P_A\} \quad (2-34)$$

将式(2-34)代入式(2-32),得到

$$\{P_B\} = [k_{BA}] \{\delta_A\} = [k_{BA}] [k_{AA}]^{-1} \{P_A\} \quad (2-35)$$

由式(2-35)可求出未知反力 $\{P_B\}$ 。

这个方法的缺点是要把原先排列好的矩阵打乱重新排列,这给编制程序带来麻烦,并且矩阵求逆后,完全丧失了稀疏、带状特性,从而在机器中要占据大量的存储单元,故目前一般不采用。

为便于编写程序,希望结构刚度矩阵 $[k]$ 在经约束处理后仍保持原来的阶数和排列顺序。为此,可采用下面两种方法,即乘大数法和填零置一法。

2. 乘大数法

在结构刚度矩阵 $[k]$ 中,对应于已知位移 $u_r = \delta_r$ (当位移被约束住时,则 $\delta_r = 0$; δ_r 也可以是给定的强迫位移值)的对角线元素 k_{rr} 上乘以极大数 N 。极大数 N 可根据计算机容量适当选取,取得过大,在计算过程中可能会发生溢出现象;取得太小,又不能精确地给出约束条件,一般取 $N = 10^8$ 。把与约束位移对应的约束反力 P_r 改为 $Nk_{rr}\delta_r$ 。经处理后得方程(2-36)。

$$\begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1r} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2r} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & Nk_{rr} & \dots & k_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nr} & \dots & k_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_r = Nk_{rr}\delta_r \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (2-36)$$

由式(2-36)可知,与 u_r 对应的第 r 个方程变为

$$k_{r1}u_1 + k_{r2}u_2 + \dots + Nk_{rr}u_r + \dots + k_{rn}u_n = Nk_{rr}\delta_r \quad (2-37)$$

用 Nk_{rr} 除上式,由于 N 极大,可以认为 $k_{r1}u_1 + k_{r2}u_2 + \dots + Nk_{rr}u_r + \dots + k_{rn}u_n \approx Nk_{rr}\delta_r$, 因此,除 u_r 和 δ_r 的系数为 1 外,其余各项可以认为都是零。则式(2-37)变成式(2-38)

$$u_r = \delta_r \quad (2-38)$$

这样就把原来的第 r 个平衡方程式改变成为约束条件了,方程(2-36)的右端项全部是已知量,可以用一般方法求解。这种处理方法显然比第一种方法优越,它只要求对有关的主系数和右端项进行改写就行。当然由于上述代换,解答将有误差,严重时可能出现病态方程。

对图 2-6 所示两单元三节点桁架的结构刚度方程(2-26),用乘大数法进行约束处理后,使方程中的第 1、2、5、6 这 4 个平衡方程变为约束条件 $u_r = \delta_r$, 即

$$u_1 = 0; v_1 = 0; u_3 = 0; v_3 = 0$$

因此,使方程(2-26)变成(2-39)所示形成:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{x2,x2}^1 + k_{x2,x2}^2 & k_{x2,y2}^1 + k_{x2,y2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{y2,x2}^1 + k_{y2,x2}^2 & k_{y2,y2}^1 + k_{y2,y2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-39)$$

式中的刚度系数及外力是已知的,故可求出节点 2 处的位移 u_2, v_2 。

(3) 填零置一法

首先在结构刚度矩阵 $[k]$ 中,将对应于已知位移 $u_r = \delta_r$ (δ_r 可以是零或某一给定的强迫位移值)的行和列进行修改,即把主对角线元素 k_{rr} 改为 1,把其他元素均改为零。其次,在力向量 $\{P\}$ 中,与已知位移 $u_r = \delta_r$ 相对应的元素用位移的给定值 δ_r 代入,其他元素都减去给定位移和原来 $[k]$ 中该行相对应元素的乘积。

例如,对 6×6 阶的结构刚度方程来说,若其位移约束情况为

$$u_1 = \delta_1, v_1 = \delta_2, u_3 = \delta_5$$

经用填零置一法处理后,得到下面形式的方程:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ P_{x2} - \delta_1 k_{31} - \delta_2 k_{32} - \delta_5 k_{35} \\ P_{y2} - \delta_1 k_{41} - \delta_2 k_{42} - \delta_5 k_{45} \\ \delta_5 \\ P_{y3} - \delta_1 k_{61} - \delta_2 k_{62} - \delta_5 k_{65} \end{Bmatrix} \quad (2-40)$$

上式右边力向量中的 k_{ij} 表示原来刚度矩阵 $[k]$ 中第 i 行第 j 列的刚度系数,例如 k_{31} 代表第 3 行第 1 列上的刚度系数; k_{45} 代表第 4 行第 5 列上的刚度系数,其它类推。左边矩阵中的 $\times$ 表示 $[k]$ 中在该位置处的刚度系数。用方程(2-40)即可求出未知位移 u_2, v_2, v_3 。

对图 2-6 所示桁架的结构刚度方程用填零置一法处理后,将得到与(2-39)式相同的方程。从而可求出未知位移 u_2, v_2 。这种方法处理简便,解答精度高,因此经常采用。

经过约束处理后的方程(2-36)和(2-40)可用统一的缩写形式表示如下:

$$\{\tilde{P}\} = [\bar{k}] \{\delta\} \quad (2-41)$$

式(2-41)称为结构的基本方程。式中 $[\bar{k}]$ 是经过约束处理后的结构刚度矩阵,它是对称正定矩阵, $\{\tilde{P}\}$ 是经过约束处理后的节点力向量,是已知的外力。由式(2-41)即可解出全部未知节点位移 $\{\delta\}$ 。

必须指出的是,用有限元法分析梁结构时,不允许结构有刚体运动,也不允许结构内部有任何几何可变或瞬时可变部分。因此,要求结构的约束条件必需足够。只有满足了上述要求,基本方程才能有唯一确定的解,也即能求得全部未知节点位移。

7. 节点力和应力的计算

根据前面分析,相对于单元坐标系的节点力 $\{f\}^e$ 可由式 $\{f\}^e = \{k\}^e \{\delta\}^e$ 计算,式中的 $\{\delta\}^e$ 是相对于单元坐标系的,而从基本方程(2-41)求出的位移 $\{\delta\}$ 是相对于结构坐标系的。

由坐标变换一节可知 $\{\bar{\delta}\}^e = [T] \{\delta\}^e$ 。又根据(2-18)式 $\{\delta\}^e = \{\delta\}$ 因此

$$\{\bar{f}\}^e = \{\bar{k}\}^e [T] \{\delta\} \quad (2-42)$$

由式(2-42)即可求出节点力, 根据节点力再按材力中相应的公式计算应力。

由于各类梁结构需考虑的杆端力(节点力)不尽相同, 所以, 应力计算公式也各异。

对桁架结构梁来说, 梁只承受轴向力, 故将求出的轴向力除以梁截面积即可求得正应力。

以图 2-6 所示桁架结构的单元①为例, 将式(2-42)写成显式如下:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1^1 \\ \bar{V}_1^1 \\ \bar{U}_2^1 \\ \bar{V}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (2-43)$$

由式(2-43)求得杆端力为

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^1 &= [(u_1 - u_2)\cos \alpha + (v_1 - v_2)\sin \alpha] \frac{EA}{l} \\ \bar{U}_2^1 &= [(u_2 - u_1)\cos \alpha + (v_2 - v_1)\sin \alpha] \frac{EA}{l} \end{aligned} \quad (2-44)$$

式(2-44)表明, 平面桁架梁只有沿 x 轴的轴向力。杆端轴向力的绝对值相等而符号相反, 即 $\bar{U}_1^1 = -\bar{U}_2^1$, 在决定桁架结构梁的应力时, 习惯上用 $\bar{U}_2^1$, 故梁①的应力为

$$\sigma_x = \frac{\bar{U}_2^1}{A} = \frac{E}{L} [(u_2 - u_1)\cos \alpha + (v_2 - v_1)\sin \alpha] \quad (2-45)$$

对空间刚架结构来说, 梁端部除轴向力外, 还有剪力、弯矩和扭矩。应力计算时, 必须利用空间刚架结构的 $[\bar{k}]$ (见公式(2-53))和 $[T]$ (见公式(2-70)), 再按公式(2-42)求出梁两端全部节点力(相对于单元坐标系的)。由这些节点力, 利用材料力学中求应力的公式, 即可算出梁截面应力。同样, 对其他类型的梁结构来说, 只要采用各自的单元刚度矩阵 $[\bar{k}]$ 和坐标变换矩阵 $[T]$ (见三、四小节)。其梁应力的计算方法类似。

8. 力的平衡检验——支承反力的计算

梁结构的每一节点必需满足力的平衡条件。节点 i 的平衡条件为: 汇交于节点 i 处的所有单元, 在 i 端的内力向量之和 $\sum \{f_i^e\}$ 必须等于作用于此节点的外力向量 $\{P_i\}$ (包括节点外载荷或支承反力), 即

$$\{P_i\} = \sum \{f_i^e\} \quad (2-46)$$

公式(2-46)可用来进行平衡检验和计算支承反力。

(1) 对没有支承约束的节点

如果节点上作用有载荷, 则式(2-46)右边的内力之和应该等于节点载荷; 如果节点上没有载荷, 则内力之和应该等于零。据此, 对节点逐一进行平衡检验, 以验证计算结果的正确性。

(2) 对有支承约束的节点

如果节点是支承约束点, 则作用在节点上的外力 $\{P_i\}$ 为未知的支承反力, 其值等于汇交于

i 节点的所有单元在 i 点的内力之和 $\sum \{f_i^e\}$ 。

9. 有限元位移法分析步骤

以上是平面桁架结构有限元法分析的全过程,现总结如下:

(1) 选定单元类型,将结构进行离散,并对单元和节点分别编号;

(2) 确定单元坐标系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 和结构坐标系 $O-xyz$;

(3) 计算等效节点载荷和综合节点载荷;

(4) 写出相对于单元坐标系的单元刚度方程 $\{\bar{f}\}^e = [\bar{k}]^e \{\bar{\delta}\}^e$

(5) 通过坐标变换求相对于结构坐标系的单元刚度方程:

$$\begin{aligned}\{\bar{\delta}\}^e &= [T][K]\delta]^e \quad \{\bar{f}\}^e = [T][K]f]^e \\ \{f\}^e &= [T]^T[\bar{k}][T][K]\delta]^e = [k]^e\{\delta\}^e\end{aligned}$$

(6) 考虑节点力的平衡条件和位移协调条件,建立结构原始基本方程,即结构刚度方程:

$$\{p\} = [k][K]\delta\};$$

(7) 经约束处理,得结构基本方程 $\{\tilde{p}\} = [\tilde{k}][K]\delta\};$

(8) 解基本方程,求出全部节点位移 $\{\delta\}$,此位移是相对于结构坐标系的;

(9) 求结构各梁两端的节点力 $\{\bar{f}\}^e = [\bar{k}][T][K]\delta\};$

(10) 对结构各节点进行平衡检验 $\{p_i\} = \sum \{f_i^e\};$

(11) 根据杆端节点力求应力 $\{\sigma\}$;

(12) 根据求出的结构节点位移 $\{\delta\}$ 和应力 $\{\sigma\}$,绘制结构变形图和应力图。据此,即可判断所设计结构的刚度和强度。

上述分析步骤不仅适用于平面桁架结构,对各类梁结构同样适用。只是第四步的单元刚度方程 $\{\bar{f}\}^e = [\bar{k}][K]\delta]^e$ 和第五步的坐标变换方程 $\{\bar{\delta}\}^e = [T][K]\delta]^e$ 和 $\{\bar{f}\}^e = [T][K]f]^e$ 的具体内容随不同梁结构而异。这是因为所要考虑的节点力分量和节点位移分量不同所致。因此,用有限元位移法分析时,必须先确定所分析的梁结构属于哪一种类型,再采用相应的单元刚度方程和坐标变换方程。

三、各类梁结构单元刚度方程

杆端单位位移(变形)与杆端力之间的关系(刚度系数)已分别表示在图 2-4 中。利用图 2-4 即可很方便地写出各类梁结构相对于单元坐标系的单元刚度方程(因为这一节只涉及单元坐标系,为书写方便起见,暂时省去各量上面用来表示相对于单元坐标系的记号“—”)。

1. 平面桁架单元

此类结构相对于单元坐标系的单元刚度方程见式(2-2)和式(2-3)。

2. 空间桁架单元

此类单元要考虑的节点位移和节点力如下:

$$\begin{aligned}\{\delta\}^e &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j]^T \\ \{f\}^e &= [U_i \quad V_i \quad W_i \quad U_j \quad V_j \quad W_j]^T\end{aligned}\quad (2-47)$$

由于桁架单元只承受轴向位移和轴向力,因此其相应的刚度系数与平面桁架相同,即:

$$k_{xi,xi} = k_{xj,xj} = EA/l$$

$$k_{xi,xj} = k_{xj,xi} = -EA/l$$

其他刚度系数均为零 故空间桁架单元的刚度方程为：

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (2-48)$$

3. 平面刚架单元

平面刚架单元要考虑的节点力和节点位移如下(见图 2-12)：

$$\{\delta\}^e = [u_i \quad v_i \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad \theta_{zj}]^T \quad (2-49)$$

$$\{f\}^e = [U_i \quad V_i \quad M_{zi} \quad U_j \quad V_j \quad M_{zj}]^T$$

由图 2-4 中的(a)、(b)、(g)、(h)、(f)、(l)分图,可写出平面刚架单元刚度方程(2-50)。

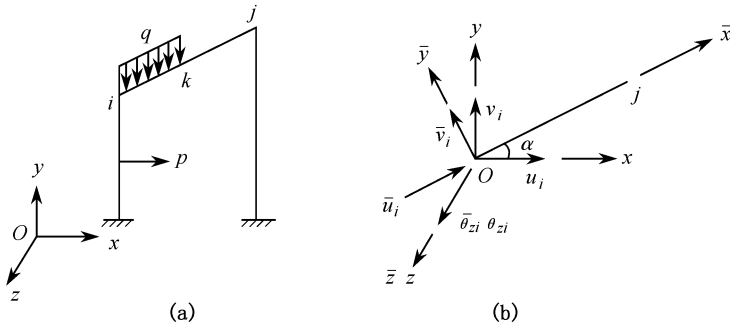


图 2-12 平面刚架单元的节点力和节点位移

(a) 平面刚架结构 (b) 沿 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 及 $O-xyz$ 轴方向的节点位移

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ M_{zi} \\ U_j \\ V_j \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & & & & & \\ 0 & B & & & & \\ 0 & D & E & & & \\ -A & 0 & 0 & A & & \\ 0 & -B & -D & 0 & B & \\ 0 & D & E/2 & 0 & -D & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2-50)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} A &= EA/l \\ B &= 12EJ_z/l^3 \\ D &= 6EJ_z/l^2 \\ E &= 4EJ_z/l \end{aligned} \right\} \quad (2-51)$$

4. 空间刚架单元

空间刚架单元要考虑的节点位移和节点力如下：

$$\begin{aligned} \{\delta\}^e &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}]^T \\ \{f\}^e &= [U_i \quad V_i \quad W_i \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad U_j \quad V_j \quad W_j \quad M_{xj} \quad M_{yj} \quad M_{zj}]^T \end{aligned} \quad (2-52)$$

由图 2-4 中的(a)~(l)分图,可写出空间刚架单元刚度方程(2-53)。

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ U_j \\ V_j \\ W_j \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & & & & & & & & & & & \\ & B & & & & & & & & & & \\ & 0 & e & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & F & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & f & & & & & & & \\ & 0 & 0 & -g & 0 & E & & & & & & \\ -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & & & & & \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 & -D & 0 & B & & & & \\ 0 & 0 & -e & 0 & g & 0 & 0 & 0 & e & & & \\ 0 & 0 & 0 & -F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & & \\ 0 & 0 & -g & 0 & f/2 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & f & \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 & E/2 & 0 & -D & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

式中

$$\begin{cases} F = GJ_x/l \\ e = 12EJ_y/l^3 \\ f = 4EJ_y/l \\ g = 6EJ_y/l^2 \end{cases} \quad (2-54)$$

其他符号见式(2-51)。

5. 平面板架结构单元

此种单元要考虑的节点位移和节点力如下(见图 2-13)：

$$\begin{aligned} \{\delta\}^e &= [w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T \\ \{f\}^e &= [W_i \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad W_j \quad M_{xj} \quad M_{yj}]^T \end{aligned} \quad (2-55)$$

$$\begin{bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ W_j \\ M_{xj} \\ M_{yj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & & & & & \\ & F & & & & \\ & 0 & f & & & \\ -g & 0 & g & e & & \\ & -F & 0 & 0 & F & \\ -g & 0 & f/2 & g & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

式中 F, e, f, g 由公式(2-54)得到。

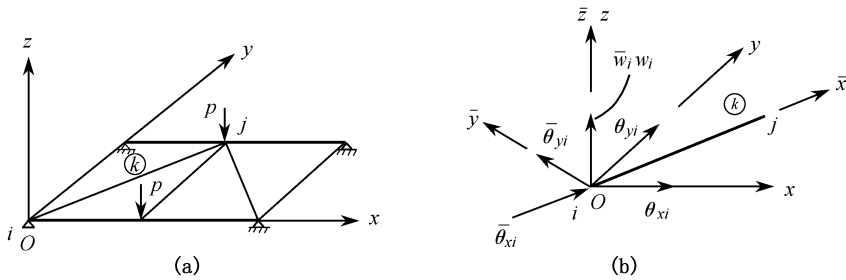


图 2-13 平板架结构单元的节点位移和节点力
(a) 平板架结构 (b) 沿 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 及 $O-xyz$ 轴方向的节点位移

四、各类梁结构坐标变换方程

1. 平面桁架单元

此类单元的节点位移和节点力的坐标变换方程见式(2-8)和式(2-9)。坐标变换矩阵 $[T]$ 见式(2-10)。

由式(2-8)式(2-9)可知节点力和节点位移的变换关系相同,也即变换矩阵 $[T]$ 相同。因此,为节省篇幅,下面只推导节点位移的坐标变换方程。又因坐标变换矩阵 $[T]$ 可由坐标变换方程得知,故不再另外写出。

2. 平面刚架单元

由图 2-12(b)可知,平面刚架单元的一个节点上有三个位移,即 $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\theta}_{zi}$, 其中 $\bar{u}_i, \bar{v}_i$ 与 u_i, v_i 之间的坐标变换与平面桁架相同(见图 2-14)。对于角位移 $\bar{\theta}_{zi}$, 因 $\bar{z}$ 与 z 轴同向,故其变换关系为 $\bar{\theta}_{zi} = \theta_{zi}$ 。因此,平面刚架单元 i 端三个自由度的变换关系见式(2-57):

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha \\ \bar{v}_i &= -u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha \\ \bar{\theta}_{zi} &= \theta_{zi} \end{aligned} \right\} \quad (2-57)$$

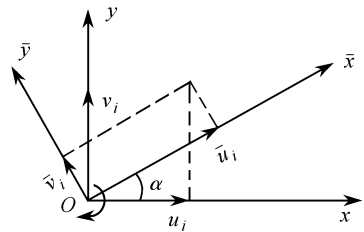


图 2-14 平面刚架节点位移坐标变换

写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (2-58)$$

简写如下

$$\{\bar{\delta}_i\} = [\lambda] \{\delta_i\} \quad (2-59)$$

式中

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

此处 $[\lambda]$ 为平面刚架单元一端的坐标变换矩阵。

其中 l_1, m_1 —— $\bar{x}$ 轴的两个方向余弦；

l_2, m_2 —— $\bar{y}$ 轴的两个方向余弦。

即：

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos(\bar{xx}) = \cos \alpha \\ m_1 &= \cos(\bar{xy}) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ l_2 &= \cos(\bar{yx}) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \\ m_2 &= \cos(\bar{yy}) = \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-61)$$

单元的 j 端也可写出与 i 端同样的转换关系。因此,平面刚架单元的坐标变换方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_{zi} \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_{zj} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{ccc} l_1 & m_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & l_1 & m_1 & 0 \\ & & & l_2 & m_2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{array} \right\} \quad (2-62)$$

缩写为

$$\{\bar{\delta}\}^e = [T][K]\delta^e$$

3. 平面板架单元

建立平面板架的结构坐标系 $O-xyz$ 和单元坐标系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 时,规定必须使 $\bar{z}$ 轴与 z 轴同向,并垂直于板架平面,如图2-15(a)所示(为使讨论坐标变换清楚起见,将(a)图坐标系整个绕 x 轴逆时针转 90° ,得到(b)图)。

由图2-15(b)可见, i 端坐标变换关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_i = w_i \\ \bar{\theta}_{xi} = \theta_{xi} \cos \alpha + \theta_{yi} \sin \alpha \\ \bar{\theta}_{yi} = -\theta_{xi} \sin \alpha + \theta_{yi} \cos \alpha \end{array} \right\} \quad (2-63)$$

对 j 端也可写出同样的变换关系。考虑到式(2-61),平面板架单元的坐标变换方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{w}_j \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & l_1 & m_1 \\ & l_2 & m_2 \\ & & 1 \\ & & & l_1 & m_1 \\ & & & l_2 & m_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \end{array} \right\} \quad (2-64)$$

缩写为

$$\{\bar{\delta}\}^e = [T][K]\delta^e$$

4. 空间刚架单元

空间刚架单元的 i 端在单元坐标系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 中有线位移 $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i$ 和角位移 $\bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}$ 。先

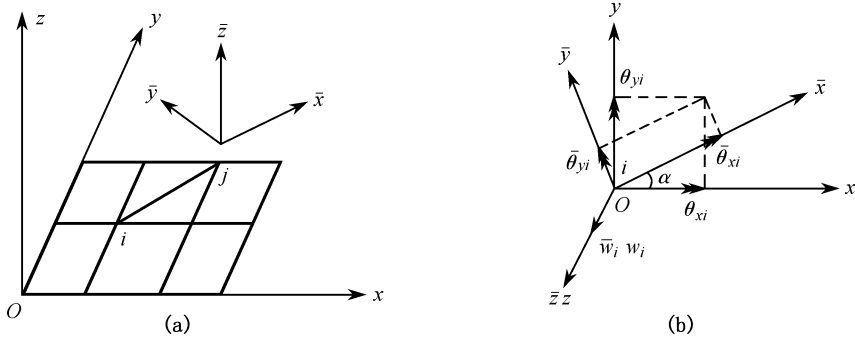


图 2-15 平面板架节点位移坐标变换

讨论节点处三个线位移分量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 。图 2-16 显示出它们在结构坐标系中的情况,并表示出 $\bar{u}$ 在 $O-xyz$ 中的分解。 $\bar{v}, \bar{w}$ 也可作类似的分解,然后合成,可得

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}l_1 + \bar{v}l_2 + \bar{w}l_3 \\ v &= \bar{u}m_1 + \bar{v}m_2 + \bar{w}m_3 \\ w &= \bar{u}n_1 + \bar{v}n_2 + \bar{w}n_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-65)$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}$$

也即

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2-66)$$

对于三个角位移,同样按图 2-16 的方式作矢量分解和合成,得到

$$\begin{Bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \\ \bar{\theta}_z \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \\ \bar{\theta}_z \end{Bmatrix} \quad (2-67)$$

$$\text{令} \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}x) & \cos(\bar{x}y) & \cos(\bar{x}z) \\ \cos(\bar{y}x) & \cos(\bar{y}y) & \cos(\bar{y}z) \\ \cos(\bar{z}x) & \cos(\bar{z}y) & \cos(\bar{z}z) \end{bmatrix} \quad (2-68)$$

空间刚架(三维问题)的坐标变换关系是平面刚架(二维问题)的坐标变换关系的推广。式(2-68)中的 l, m, n 为 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 坐标轴在 $O-xyz$ 坐标系中的方向余弦。即相对应轴夹角的余弦,按式(2-61)类推, $[\lambda]$ 称为方向余弦矩阵。

计及空间刚架两端的节点位移,并令:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} &= \{\delta_i\}; & \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} &= \{\delta_j\} \\ \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} &= \{\theta_i\}; & \begin{Bmatrix} \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} &= \{\theta_j\} \end{aligned} \quad (2-69)$$

则空间刚架单元的坐标变换方程如下：

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{\delta}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\lambda] & & & \\ & [\lambda] & & \\ & & [\lambda] & \\ & & & [\lambda] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2-70)$$

缩写为 $\{\bar{\delta}\}^e = [T][K]\delta^e$

5. 空间桁架单元

由于此类单元节点不传递角变位,只传递线变位,故只要保留式(2-70)中的线位移变换项,即得空间桁架单元的坐标变换方程：

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\delta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\lambda] & \\ & [\lambda] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (2-71)$$

缩写为 $\{\bar{\delta}\}^e = [T][K]\delta^e$

6. 方向余弦矩阵 $[\lambda]$ 的计算

(1) $\bar{x}$ 轴的方向余弦

$\bar{x}$ 轴的三个方向余弦 l_1, m_1, n_1 可以根据单元两端节点坐标值来计算,例如图 2-17 中 $i-j$ 单元,已知 i, j 二点在结构坐标系中的坐标为 $i(x_i, y_i, z_i); j(x_j, y_j, z_j)$ 则单元长度：

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2-72)$$

$$l_1 = \frac{x_j - x_i}{l}; m_1 = \frac{y_j - y_i}{l}; n_1 = \frac{z_j - z_i}{l} \quad (2-73a)$$

(2) $\bar{y}$ 轴和 $\bar{z}$ 轴的方向余弦

①对于平面刚架和平板架 $\bar{y}$ 轴的三个方向余弦为

$$l_2 = -m_1; m_2 = l_1; n_2 = 0 \quad (2-73b)$$

$\bar{z}$ 轴的三个方向余弦为

$$l_3 = 0; m_3 = 0; n_3 = 1 \quad (2-73c)$$

②对于空间桁架,由于梁单元只有轴向位移,故 $\bar{v}_i = \bar{w}_i = 0$ 。因此 $\bar{y}$ 轴和 $\bar{z}$ 轴的方向余弦在计算中没有意义,不用考虑。

③对于空间刚架的梁单元, $\bar{y}$ 轴和 $\bar{z}$ 轴系取梁截面的两个主惯性轴。因此,要根据梁单元在结构坐标系中的位置,至少给出其中一个主惯性轴的三个方向

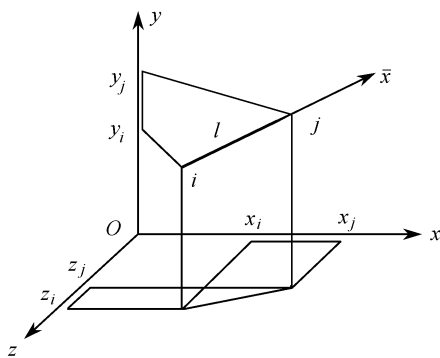


图 2-17 空间单元坐标

余弦,例如 $\bar{y}$ 轴的三个方向余弦,然后可按 $(\bar{z} = \bar{x} \times \bar{y})$ 计算 $\bar{z}$ 轴的三个方向余弦。但在实际上要给出空间刚架每一梁单元的 $\bar{y}$ 轴的三个方向余弦是相当麻烦的,因此,下面介绍一种比较简单的方法,即在任一主惯性轴平面上给定一参考点的方法来确定 $\bar{y}$ 轴和 $\bar{z}$ 轴的方向余弦。

(3) 空间刚架 $[\lambda]$ 矩阵的计算

图 2-18 所示为梁单元 $i-j$, i 点的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , j 点的坐标为 (x_j, y_j, z_j) , 在主惯性轴平面 $(\bar{x}, \bar{y})$ 上任取一点 k (参考点), 其坐标为 (x_k, y_k, z_k) , 利用这三点的坐标就可确定矩阵 $[\lambda]$, 亦即确定单元坐标系三个坐标轴的方向余弦。

若用 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 分别表示单元坐标系中三个坐标轴正向上的矢量, 其单位矢量分别为 $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$; 并用 $\bar{S}'_1, \bar{S}'_2$ 和 $\bar{S}'_3$ 分别表示结构坐标系中三个坐标轴正向上的单位矢量, 并用矢量 $\bar{g}$ 表示 ik 矢量, 则 $\bar{x}, \bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 可以确定如下。

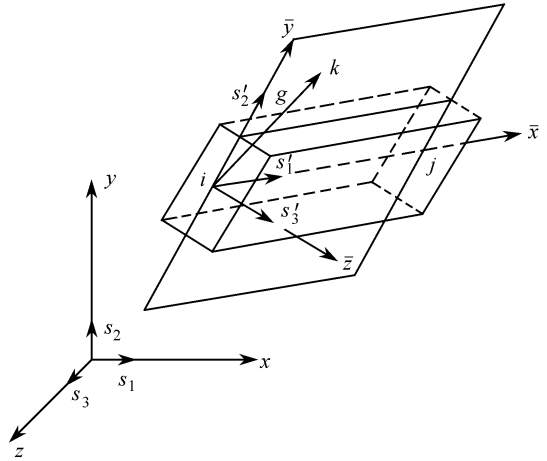


图 2-18 方向余弦计算示意图

首先对矢量 $\bar{x}$ 有

$$\bar{x} = \bar{ij} = A_1 \bar{S}_1 + A_2 \bar{S}_2 + A_3 \bar{S}_3 \quad (2-74)$$

式中

$$A_1 = x_j - x_i; A_2 = y_j - y_i; A_3 = z_j - z_i;$$

对于矢量 $\bar{g}$ 则有:

$$\bar{g} = \bar{ik} = B_1 \bar{S}_1 + B_2 \bar{S}_2 + B_3 \bar{S}_3 \quad (2-75)$$

式中

$$B_1 = x_k - x_i; B_2 = y_k - y_i; B_3 = z_k - z_i;$$

于是可利用矢积求得矢量 $\bar{z}$, 即

$$\bar{z} = \bar{x} \times \bar{g} = C_1 \bar{S}_1 + C_2 \bar{S}_2 + C_3 \bar{S}_3 \quad (2-76)$$

式中

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2; C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3; C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1;$$

最后可得矢量 $\bar{y}$

$$\bar{y} = \bar{z} \times \bar{x} = D_1 \bar{S}_1 + D_2 \bar{S}_2 + D_3 \bar{S}_3 \quad (2-77)$$

式中

$$D_1 = (A_2 A_3) \times B_1 - (A_1 A_3) \times B_2$$

$$D_2 = (A_1 A_3) \times B_2 - (A_1 A_2) \times B_3$$

$$D_3 = (A_1 A_2) \times B_3 - (A_2 A_3) \times B_1$$

其中

$$AA = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2; AB = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

单元坐标系的单位矢量与结构坐标系的单位矢量间的关系即坐标转换关系, 其转换关系是:

$$\bar{S}'_1 = l_1 \bar{S}_1 + m_1 \bar{S}_2 + n_1 \bar{S}_3 \quad (2-78)$$

$$\bar{S}'_2 = l_2 \bar{S}_1 + m_2 \bar{S}_2 + n_2 \bar{S}_3 \quad (2-79)$$

$$\bar{S}'_3 = l_3 \bar{S}_1 + m_3 \bar{S}_2 + n_3 \bar{S}_3 \quad (2-80)$$

将式(2-74)表示的矢量 $\bar{x}$ 除以它的模,即得其单位矢量 $\bar{S}_1$ 的表达式(2-78),比较之可得

$$l_1 = \frac{A_1}{l}, m_1 = \frac{A_2}{l}, n_1 = \frac{A_3}{l} \quad (2-81)$$

式中

$$l = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

同样将式(2-77)表示的矢量 $\bar{y}$ 除以它的模,即得其单位矢量 $\bar{S}_2$ 的表达式(2-79),比较之可得

$$l_2 = \frac{D_1}{Dl}, m_2 = \frac{D_2}{Dl}, n_2 = \frac{D_3}{Dl} \quad (2-82)$$

式中

$$Dl = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}$$

对于式(2-80)表示的单位矢量 $\bar{S}_3$ 可按 $\bar{S}_3 = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ 求得,其方向余弦如下:

$$\left. \begin{aligned} l_3 &= m_1 n_2 - n_1 m_2 \\ m_3 &= n_1 l_2 - l_1 n_2 \\ n_3 &= l_1 m_2 - m_1 l_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-83)$$

将式(2-78)、式(2-79)、式(2-80)三式写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix}$$

即

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

即得空间坐标方向余弦矩阵

$$\{\lambda\} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

式中的方向余弦按式(2-81)、式(2-82)、式(2-83)计算。

已知各类梁结构的单元刚度方程和坐标变换方程,即可按前面总结的有限元位移法分析步骤,对各类梁结构进行计算。

由上面分析可知,平面刚架、平板架,甚至平面桁架、空间桁架,均可看做是空间刚架的特例,其计算方法和步骤完全相同,因此,可编制统一的程序,由计算机执行。

第二节 客车车身结构强度与刚度综合分析

20世纪90年代初,我国轻型客车行业引进了Coaster等基本参考车型。从此,国产轻型客车的发展很快。到目前为止,从3.5~7m,国产轻型客车已形成系列,基本占据了国内市场。

虽然我国的轻型客车生产厂家遍布全国 28 个省、市、自治区,但是车身刚度等设计规范不统一,车身质量问题仍然存在,开裂现象时有发生,严重制约着国产轻型客车的进一步发展。

以往的国产客车车身结构分析偏重强度指标,以结构强度试验结果作为关键指标进行产品定型,而国外汽车企业则将客车车身刚度也作为产品定型的关键指标之一。当按满足刚度准则的要求来确定结构时,则可同时充分满足强度准则。

汽车车身刚度主要是指整体弯曲刚度和整体扭转刚度。弯曲刚度可用车身在铅垂载荷作用下产生的挠度大小来描述,也可以用单位轴距长度最大挠度量评价。扭转刚度可以用车身在扭转载荷作用下产生的扭转角的大小来描述,也可以用单位轴距长度轴间相对扭转角评价。

一、轻型客车车身刚度有限元分析模型

1. 有限元模型

国产轻型客车车身多以半承载式为主。由车架、牛腿及横担焊接而成的车架改制总成作为车体完整骨架的底部基础,车身骨架通过横担和底部基础连接,车架仍然是其主要承载结构。用板单元模拟车架与牛腿,用空间薄壁梁单元模拟车身骨架元件,包括车架改制总成上的横担。横担上梁单元结点与车架或牛腿上板单元的相应结点对应,二者视为刚性连接(用主从结点关系处理)。在轻型客车车身结构刚度有限元分析模型中,不应忽略车身蒙皮,用膜单元模拟车身蒙皮,膜单元上的结点与对应的车身骨架上的梁单元结点归一简化。整个轻型客车车身刚度有限元分析模型包括 2 155 个结点和 2 341 个单元,如图 2-19 所示。

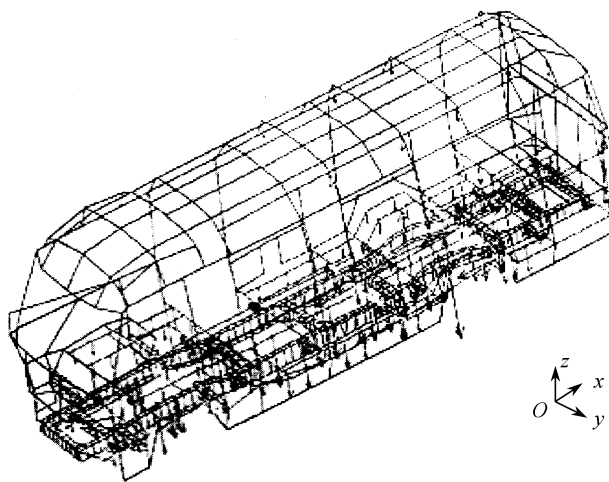


图 2-19 轻型客车车身刚度分析有限元模型、边界条件与载荷分布

2. 边界条件

车身与车架是通过悬架系统、车桥和车轮支承在地面上的。为了更准确地模拟实际使用工况,将悬架元件与车身及车架组合起来分析。某一悬架处的简化方法如图 2-20 所示。

将钢板弹簧等效为一个水平布置的矩形截面梁,并以主从结点关系模拟梁的两端点与对应车架吊耳处结点之间的关系。等效水平梁的宽度 B 取为钢板弹簧的实际宽度,其高度 H 可按式(2-84)选取

$$H = \sqrt[3]{KL^3/4EB} \quad (2-84)$$

式中, K ——钢板弹簧铅垂方向上的装车刚度;
 L ——钢板弹簧活动吊耳与固定吊耳之间的水平距离;
 E ——等效梁材料(一般取为钢材)的弹性模量。

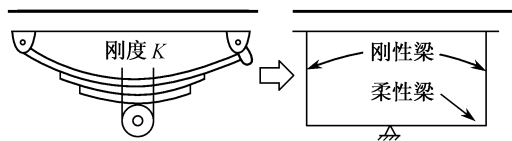


图 2-20 钢板弹簧支承的模拟

有限元分析模型的 4 个支承点分别取在对应 4 个钢板弹簧等效梁的中点。轻型客车车身弯曲刚度和扭转刚度分析工况的边界条件如表 2-1 所示。

表 2-1 有限元模型的边界条件

弯曲刚度分析工况	扭转刚度分析工况
约束右前板簧支撑点的 x 、 y 及 z 自由度 约束右后板簧支撑点的 y 及 z 自由度 约束左前板簧支撑点的 x 及 z 自由度 约束左后板簧支撑点的 z 自由度 释放模型中 4 个板簧支撑点的全部转动自由度	约束左前板簧支撑点的 x 、 y 及 z 自由度 约束右前板簧支撑点的 x 及 z 自由度 约束左后板簧支撑点的 y 及 z 自由度 释放右后板簧支撑点的 x 、 y 、 z 自由度 释放模型中 4 个板簧支撑点的全部转动自由度
注： x 、 y 、 z 均为板簧支承点在整体坐标系中的自由度	

3. 分析载荷

轻型客车车身结构的载荷包括：

- ① 车身自重(可方便地在大型结构分析软件中考虑)。
- ② 安装在车架及车身上的底盘总成及非模型化车身部件的重力,如动力总成、备胎、蓄电池、油箱、车门窗玻璃与密封条、地板等(可分别将总成或部件的重力作为集中载荷分配到对应总成或部件安装点的对应模型结点上)。
- ③ 乘员、座椅、行李及行李架的重力(考虑乘员标准重力为 $65 \times 9.8 \text{ N}$,也分别作为集中载荷分配到对应座椅及行李架安装点的对应结点上)。

轻型客车车身弯曲载荷分布如图 2-19 所示。选取右后轮悬空作为该车扭转刚度分析工况是因为该车后部载荷较大,一个后轮悬空可实现较严重的车身扭转。

4. 有限元模型的试验验证

为验证该车车身结构刚度有限元分析模型的正确性,在整车装备条件下对该车进行弯曲刚度试验。该车车身实测挠度曲线和模型计算挠度曲线分别如图 2-21 中的实线、虚线所示。

由图 2-21 可见,该车车身弯曲刚度计算挠度曲线与试验挠度曲线基本一致(包括车架尾部的反翘现象)。对比可知该车车身实测最大挠度和计算最大挠度都发生在距前轴约 2 m 处,最大挠度值均为 1.8 mm,计算分析与试验分析所得最大挠度误差在 15% 以下。客车车身刚度有限元分析模型是正确的。

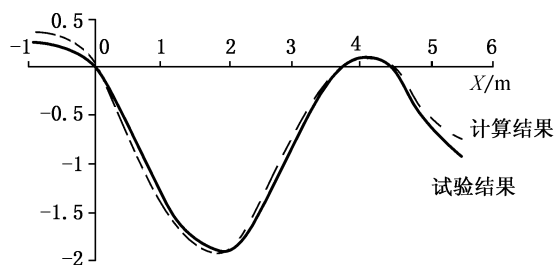


图 2-21 轻型客车车身弯曲刚度曲线

二、制动载荷的等效

货车车架及半承载式大客车车身结构的车架常常发生悬架连接处的车架开裂现象,这与车辆使用中的制动工况有很大关系,有必要分析车架或车身结构在制动载荷条件下的强度指标。

对于钢板弹簧悬架的半承载式客车结构,由车架、牛腿和底横梁焊接而成的车架改制总成是车体完整骨架的底部基础,车身骨架通过底横梁及牛腿与底部基础连接,车架是其主要承载结构。车架通过钢板弹簧与前、后车桥相连,每一车桥的两端装有车轮。一个车轮及其上的钢板弹簧悬架等的结构示意图如图 2-22 所示。

紧急制动时,地面制动力对车体的作用力矩 M 由前后吊耳销附加作用力 ΔF 构成的力偶矩 M 平衡,而

$$M = \Delta F \times S$$

式中 S ——前后吊耳销距;

$$M = F_b R + (F_b - F_u)h$$

式中 R ——车轮半径;

h ——车轮中心到吊耳销的高度;

F_b ——车轮地面制动力,

$$F_b = (m_s + m_u)g\phi;$$

F_u ——非簧载质量产生的惯性力,

$$F_u = m_u g\phi.$$

式中 g ——重力加速度;

ϕ ——路面附着系数,计算时一般取

$$\phi = 0.8;$$

m_s ——簧载质量;

m_u ——非簧载质量。

因此有

$$\Delta F = \frac{g\phi(m_s + m_u)R + m_s g\phi h}{S} \quad (2-85)$$

另外,紧急制动时,地面制动力 F_b 经铰接的吊耳销传到车架上,其值为地面制动力 F_b 与相应非簧载质量惯性力 F_u 之差。

这样,在车架模型前吊耳销处加垂直向下的载荷 ΔF ,在后吊耳销处加垂直向上的载荷 ΔF 在铰接吊耳销处加纵向向后的作用力 $F = F_b - F_u$ 就把制动载荷等效到车体上了。

三、轻型客车小牛腿长度对车体结构的影响分析

在轻型客车车体结构设计中,为了节省材料和降低重量,车架改制总成常采用小牛腿结构。为合理匹配车架与车身之间的连接强度和刚度,研究小牛腿对车体结构强度和结构刚度的影响就十分必要。模型仍采用图 2-19 所示的客车有限元模型。

以小牛腿根部与车架纵梁相交处的节点的应力等为衡量指标,分别考虑弯曲和扭转两种

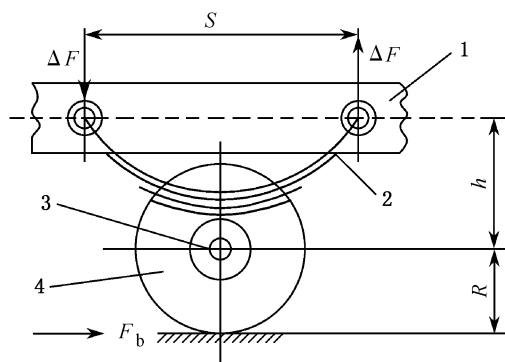


图 2-22 客车钢板弹簧悬架和车轮示意图

1—车架 2—钢板弹簧 3—车桥 4—车轮

工况,小牛腿的长度对各个小牛腿根部弯曲应力和扭转工况应力平均值的影响分别如图 2-23、图 2-24 所示。

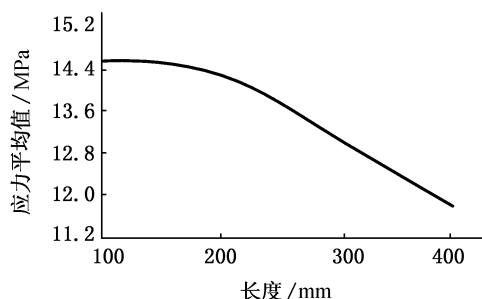


图 2-23 小牛腿长度对根部弯曲工况应力平均值的影响

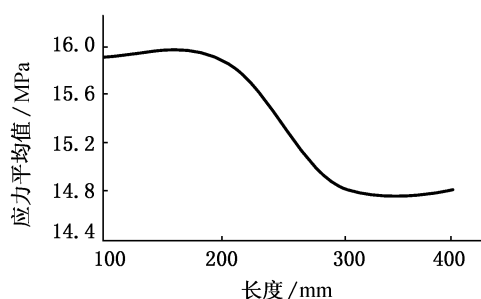


图 2-24 小牛腿长度对根部扭转工况应力平均值的影响

由图 2-23 可知。随着小牛腿长度的增加,各小牛腿根部弯曲工况应力的平均值下降,但开始下降速度缓慢。当小牛腿的长度超过 200 mm 时,弯曲工况应力的平均值下降幅度明显加快。由图 2-24 可知,当小牛腿的长度由 200 mm 增加到 300 mm 时,各小牛腿根部扭转工况应力的平均值急剧下降,但当长度超过 300 mm 时,扭转工况应力的平均值不再下降,反而增加。

小牛腿的长度对各个小牛腿根部弯曲工况应力和扭转工况应力最大值的影响分别如图 2-25 和图 2-26 所示。由图 2-25 可知,随着小牛腿长度的增加,各小牛腿根部弯曲工况应力的最大值下降;当小牛腿长度超过 200 mm 时,弯曲应力最大值下降幅度加快;当小牛腿的长度超过 300 mm 时,弯曲工况应力最大值下降幅度又明显变慢。由图 2-26 可知,随着小牛腿长度的增加,各小牛腿根部扭转工况应力的最大值呈先增加、后急剧下降的趋势。当小牛腿的长度小于 250 mm 时,扭转应力的最大值增加,但增加的幅度不大;当小牛腿的长度超过 250 mm 时,扭转应力的最大值急剧下降。

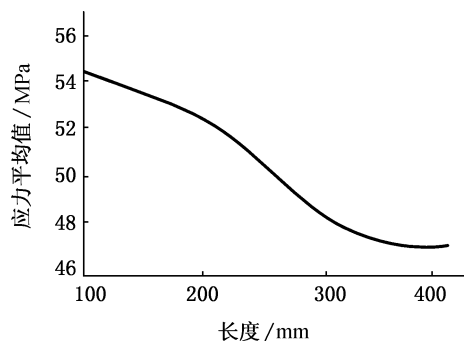


图 2-25 小牛腿长度对根部弯曲工况应力最大值的影响

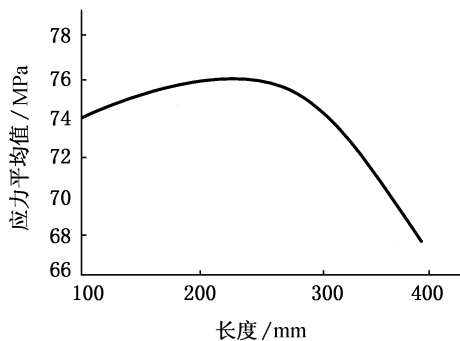


图 2-26 小牛腿长度对根部扭转工况应力最大值的影响

分别用车架竖直方向的最大挠度和车架轴间相对扭角来评价车体结构的弯曲刚度和扭转刚度,小牛腿的长度对车体结构弯曲刚度和扭转刚度的影响如图 2-27 和图 2-28 所示。由图 2-27 和图 2-28 可知,随着小牛腿长度的增加,车架竖直方向的最大挠度和车架轴间相对

扭角下降,但变化不大。表明车体结构弯曲刚度增大,但增大不明显;当小牛腿的长度超过 300 mm 时,车架竖直方向的最大挠度和车架轴间相对扭角下降幅度增大,车体结构弯曲刚度和扭转刚度增大幅度相应增大。

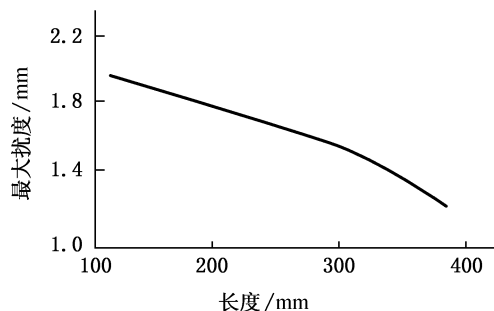


图 2-27 小牛腿的长度对车体结构弯曲刚度的影响

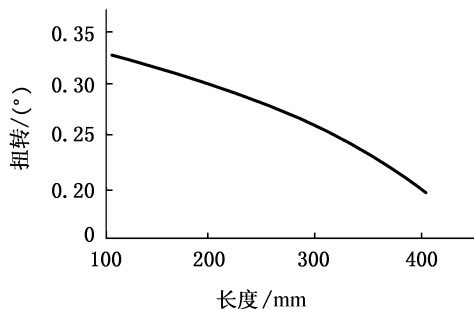


图 2-28 小牛腿的长度对车体结构扭转刚度的影响

由以上分析可知：

(1) 当小牛腿的长度超过 200 mm 时,各小牛腿根部弯曲工况应力的平均值下降,扭转工况应力的最大值增加;当小牛腿的长度超过 300 mm 时,各小牛腿根部扭转工况应力的平均值和弯曲工况应力强的最大值增加,扭转工况应力的最大值急剧下降;当小牛腿的长度在 200 ~ 300 mm 时,各小牛腿根部扭转工况应力的平均值和弯曲工况应力的最大值急剧下降。

(2) 随着小牛腿长度的增加,轻型客车车体结构弯曲刚度增大,但增大幅度不大;当小牛腿的长度超过 300 mm 时,轻型客车车体结构弯曲刚度和扭转刚度增大幅度增大。

(3) 国产某轻型客车的小牛腿根部应力值较低,增加小牛腿的强度还有较大潜力,应改进该车小牛腿设计。

第三节 微型电动车车架结构优化分析

随着环境污染以及全球石油资源短缺问题的日益严峻,传统汽车业面临着极大的危机。为此,开发新型能源的汽车也变成了当今各国汽车工业急需解决的一项重大问题。可以说在清洁能源汽车的设计与开发上,我们与传统汽车强国的差距并不大。因此,要提高我国的汽车工业水平,必须首先从这方面入手。通过对四轮驱动微型电动车车架优化设计的全过程,使读者对汽车车身梁结构强度与刚度优化分析有一个初步的认识。

整个四轮驱动微型电动车车架的设计、分析与优化是基于三维设计软件 UG 和有限元分析软件 Ansys 进行的。车架设计采用了适于电动车承载特点的双层车架;分析了车架的静态强度及刚度,并在满足强度及刚度的条件下对车架结构进行了优化设计,最终经过工艺可行性分析及试制研究,开发出一种适合各种路面行驶的新型电动车车架结构。

一、微型电动车车架结构

1. 车架布置与结构设计

车架结构及动力系统布置方案如图 2-29 所示。

为保证四轮驱动车桥和悬架的空间尺寸要求,车架采用空间脊梁式的结构,由四根贯通的型材杆件形成盒型结构。这种结构既保证了车架具有较大的扭转刚度,又容许车轮有较大的跳动空间。四根直杆成梯形状排列,以满足双横臂独立悬架上下横臂不等长的需求。在车架中部拓展出双层的框架结构,用于支承车身部件及动力系统总成。

该车采用双横臂扭杆弹簧悬架。扭杆弹簧布置在车架上平面,与双横臂独立悬架的较短的上横臂相连,可以减少其传给车架的集中载荷。

车架材料为异型钢管型材,成本低、加工方便。初选异型钢管型材尺寸(单位为 mm)为 $30 \times 30 \times 1.5$,在悬架连接处为 $40 \times 40 \times 2$ 。

2. 车架结构分析

根据车架结构几何特点,利用 Ansys 软件的梁单元建立车架模型,此模型有 758 个节点,812 个单元,如图 2-30 所示。

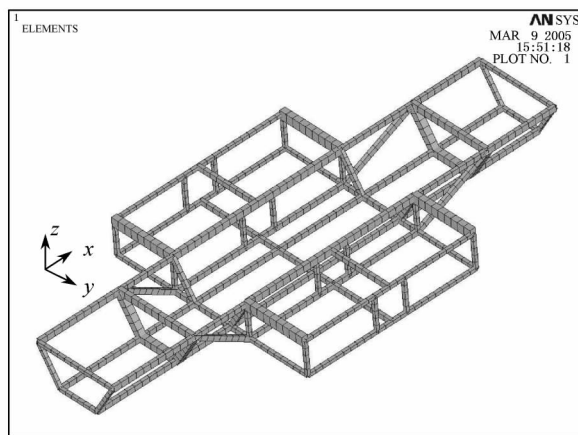


图 2-30 微型电动车车架有限元模型

车架弯曲和弯扭组合工况下的约束如表 2-2 所示。考虑座椅和乘客载荷,并考虑动载系数 2.5,车架两种工况载荷及约束分别如图 2-31、图 2-32 所示。

车架弯曲和弯扭组合工况结构分析结果分别如图 2-33、图 2-34 所示。可见,弯曲工况最大应力发生在车架中部的扭杆弹簧平衡臂的内安装点处,最大压力约为 126 MPa。此处除了安装有电池之外,还有扭杆弹簧的作用,载荷较集中。扭转工况由于右后轮悬空,应力集中在后悬架下横臂后支点处,最大压应力约为 148 MPa。所选车架异型钢管材料为 Q235,其屈服极限为 235 MPa。可见,初步设计车架方案是满足强度要求的,但车架总质量约为 55 kg,为达到

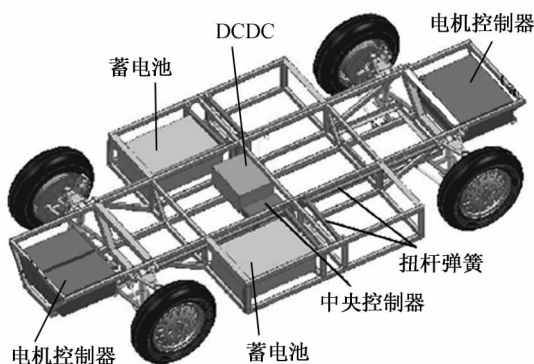


图 2-29 车架结构及动力系统布置方案

扭杆弹簧有结构紧凑、单位质量储能大、非簧载质量小、便于调节的特点,因此在汽车上有很大的应用前景。对于采用扭杆弹簧作为悬架弹性件的车架,车架模型的加载及约束处理与其他悬架形式的模拟方法不同。分析上、下横臂的安装方式和扭杆弹簧传力特点可以发现:由于扭杆弹簧装于上横臂,地面铅垂反力通过车轮、上横臂转变成扭矩传到扭杆弹簧。该扭矩由安装于车架的扭杆弹簧另一端的调节臂来平衡。因此,车架不但在悬架上横臂处承受铅垂方向作用力,而且在扭杆弹簧调节臂两端也承受铅垂方向作用力。

车架轻量化的要求 ,应该在考虑强度和刚度的同时进行车架结构优化设计。

表 2 - 2 车架弯曲和弯扭组合工况约束

工况	左前悬架支点位移	右前悬架支点位移	左后悬架支点位移	右后悬架支点位移
弯曲	上横臂 U_x 、 U_y 、 U_z 下横臂 U_xU_y	上横臂 U_x 、 U_z 下横臂 U_x	上横臂 U_y 、位移 U_z 下横臂 U_y	上横臂 U_z
弯扭组合	上横臂 U_x 、 U_y 、 U_z 下横臂 U_x 、 U_y	上横臂 U_x 、 U_z 下横臂 U_x	上横臂 U_y 、 U_z 下横臂 U_y	

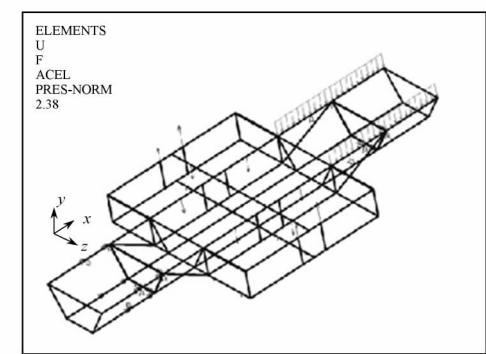


图 2 - 31 弯曲工况载荷分布图

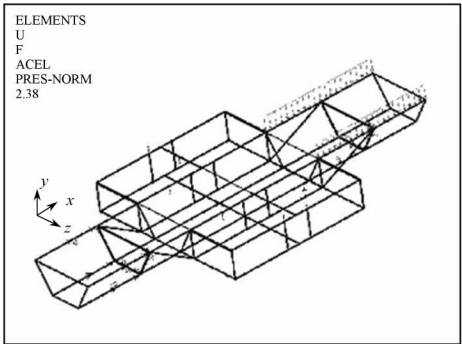


图 2 - 32 弯扭组合工况载荷分布图

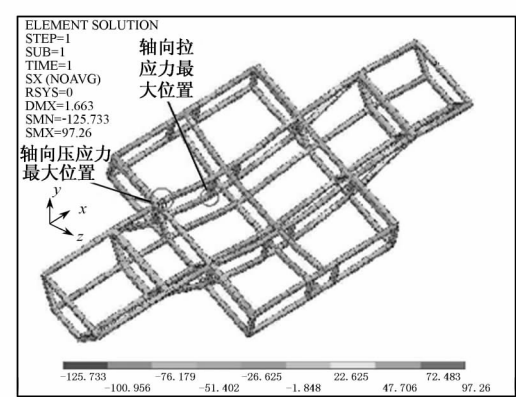


图 2 - 33 弯曲工况应力分布图

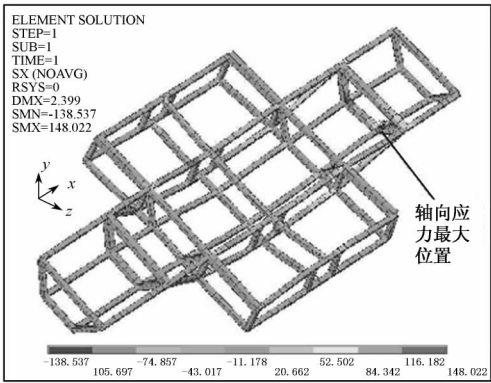


图 2 - 34 弯扭组合工况应力分布图

二、微型电动车车架优化设计

1. 优化参数选择

①设计变量(DV) :即自变量。ANSYS V7.0 优化模块中允许定义不超过 60 个设计变量。设计变量取为车架异型钢管的截面尺寸参数的宽度和高度值。为避免产生二义性 ,不把截面厚度作为设计变量。

②目标函数(OBJ):最终的优化目的。它必须是设计变量的函数,而且只能求其最小值。目标函数取为车架总质量,也可直接以车架模型体积做为目标函数。

③状态变量(SV):用来体现优化的边界条件,也是设计变量的函数。在 ANSYS V7.0 优化模块中用户可以定义不超过 100 个状态变量。状态变量主要为车架结构应力。同时,为避免车身刚度在优化过程中超标,把车架最大位移也看作状态变量的一部分。

2. 优化结果分析

优化初步分析结果表明:车架前后两端横梁和上层中部横梁在优化后应力较小、尺寸达到设计下限。因此,车架前后两端横梁钢管尺寸可以进一步减小,而上层中部横梁可以去掉。上层中部横梁可以去掉后,强度还是满足要求的,而且方便了动力系统和电路的安装布置。综合各工况优化分析设计变量及各状态变量的优化结果,得出了最佳的车架结构设计方案:车架结构最终钢管尺寸参数见表 2-3。优化后车架结构模型如图 2-35 所示。优化后车架质量 $W_t = 46 \text{ kg}$ 。

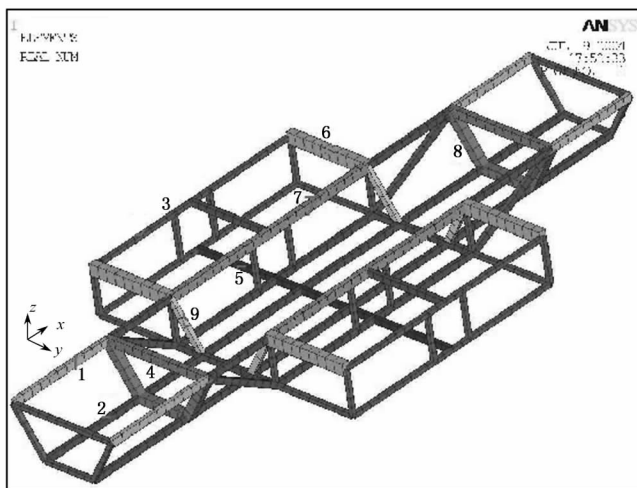


图 2-35 优化后车架有限元模型

表 2-3 优化后车架尺寸参数

mm

截面号 参数 \ 尺寸	1	2	3	4	5	6 角钢	7	8	9
	1	2	3	4	5	6 角钢	7	8	9
宽度	35	30	20	40	30	36	40	40	20
高度	20	20	20	25	20	56	25	40	30
厚度	1.5	1.5	1.5	1.5	2	4	2	2	2

优化后,车架最大应力为 159 MPa,最大竖直位移为 3.7 mm。车架强度和刚度均满足设计要求。优化后,车架最低的弹性模态,即一阶扭转模态频率为 33.9 Hz,大于传统轿车车身体的一阶扭转模态频率。

在工艺设计上,整个车架被分为3个总成,如图2-36所示。可采用二氧化碳保护焊接工艺,而且夹具及其定位都很简单。整车试制及各种场地路面使用表明,该车架工艺简单、结构

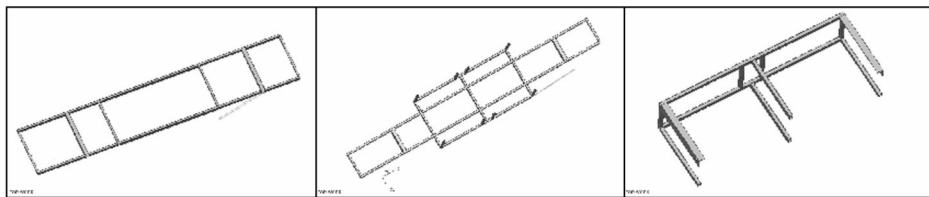


图2-36 车架分总成

设计合理可靠。通过上述分析,我们可以发现:

①扭杆弹簧双横臂独立悬架的车架在进行结构分析时,有限元分析的边界约束处理与加载方式与其他悬架的不同。

②优化设计使该车架质量减少9 kg,同时结构最大应力及低阶模态频率值均满足工程要求。

思考题

1. 有限元方法采用哪些坐标系统?梁单元坐标系如何确定?
2. 什么叫中间载荷?梁单元中间载荷如何处理?
3. 什么是刚度系数?其物理意义是什么?
4. 试写出空间梁单元的广义位移、广义力向量。
5. 试推导平面桁架单元刚度方程。
6. 在有限元方法中,为什么要进行单元坐标变换?
7. 建立梁结构刚度方程的方法是什么?
8. 刚度矩阵中每个元素的物理意义是什么?
9. 刚度矩阵有哪些性质?
10. 约束条件处理方法有哪些?
11. 以平面桁架结构为例,说明有限元分析步骤。
12. 试推导空间刚架单元刚度方程。
13. 试推导空间刚架单元坐标变换方程。
14. 大客车车身结构强度与刚度分析中,边界条件如何处理?常见载荷如何处理?制动载荷如何等效?
15. 微型电动车车架结构优化分析设计变量、状态变量和目标函数一般如何选择?

第三章 汽车车身板结构模拟计算

第一节 平面应力问题及其有限元方法

一、基本假设和基本物理量

弹性力学是研究弹性体在载荷及其他外部因素(如温度改变、支座沉陷等)作用下产生的应力、应变和位移。由于应力、应变和位移都是空间坐标的函数,也就是说各个点的应力、应变和位移一般是不相同的,因此在弹性力学里假想物体是由无限多个微小六面体(称为微元体)所组成的。在考虑任一微元体的平衡,写出一组平衡微分方程及边界条件时,未知应力数目总是超过微分方程的个数,所以弹性力学问题都是超静定问题,要求解这类问题还必须考虑微元体的变形条件及应力与应变的关系(相应称为几何方程及物理方程)。平衡微分方程、几何方程和物理方程以及边界条件,称为弹性力学的基本方程。综合考虑这三方面的方程,就有足够数目的微分方程来求解未知的应力、应变和位移,而微分方程求解中出现的常数,则根据边界条件来确定。从取微元体入手,综合考虑静力、几何、物理三方面条件,得出其基本微分方程,再进行求解,最后利用边界条件确定解中的常数,这就是求解弹性力学问题的基本方法。

弹性力学中采用如下基本假设:

(1) 假设物体是连续的

认为在整个物体内部,都被组成该物体的介质所充满,而没有任何空隙。这样,物体中的应力、应变、位移等物理量才可能是连续的,才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。如不连续,则发展成为颗粒弹性力学。

(2) 假设物体是匀质的

认为整个物体在各点都具有相同的物理性质。这样,物体各部分才具有相同的弹性,物体的弹性才不随位置坐标而改变。

(3) 假设物体是各向同性的

认为整个物体在所有各个方向都有相同的物理性质。这样,物体的弹性常数才不随方向而变。反之,称为各向异性,如木材。

(4) 假设物体是完全弹性的

就是说在物体产生变形的外力及其他因素(如温度改变等)去除之后,能完全恢复原形而没有任何剩余变形。这样的材料服从虎克定律,即应变与引起该应变的应力成正比,弹性常数为常量。如不满足,则为塑性力学。

(5) 假设物体的位移和应变是微小的

就是假设物体在外力和其他因素作用下,所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸。这样,在研究物体受力变形后的平衡状态时,可以不考虑物体尺寸的变化,而仍用变形前的尺寸,并且在研究物体变形时,对于变形的二次幂和乘积都可略去不计。这样就使得弹性力学中

的基本微分方程简化为线性的,而且可以应用叠加原理。

满足前四个假定的物体,称为理想弹性体。如全部满足这些假定,则称为理想弹性体的线性问题。

在弹性力学里涉及四个基本物理量:外力、应力、应变和位移。

1. 外力

作用在物体上的外力可分为体积力和表面力两大类。

① 体积力(体力)——分布在物体体积内的力,与物体质量有关(质量力),如重力、惯性力、磁性力等。常用其在单位体积上的体力表示。它在 x, y, z 坐标轴上的投影记做 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 。用矢量表示为 $\{P_V\} = \{\bar{X} \bar{Y} \bar{Z}\}^T$, 对平面问题为 $\{P_V\} = \{\bar{X} \bar{Y}\}^T$ 。符号规定为沿坐标轴的正向为正,反之为负。量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$ 。

② 表面力(面力)——作用在物体表面上的力,如风载荷、水压力、接触力、约束反力等。常用其在单位面积上的面力表示。它在 x, y, z 轴上的投影记做 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 。用矢量表示为 $\{P_A\} = \{\bar{X} \bar{Y} \bar{Z}\}^T$, 对平面问题为 $\{P_A\} = \{\bar{X} \bar{Y}\}^T$ 。符号规定为沿坐标轴的正向为正,反向为负。量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$ 。

2. 应力

一弹性体在外力作用下处于平衡状态。为了研究任意点 $K(x, y, z)$ 的应力情况,用平行于坐标面的平面在 K 点附近取出一无限小的微元体(这样可认为每一面的应力均匀分布)。弹性体其余部分对微元体各面有应力作用。把应力沿坐标轴方向进行分解,对每个侧面来讲,分解为一个正应力和两个剪应力(图 3-1)。

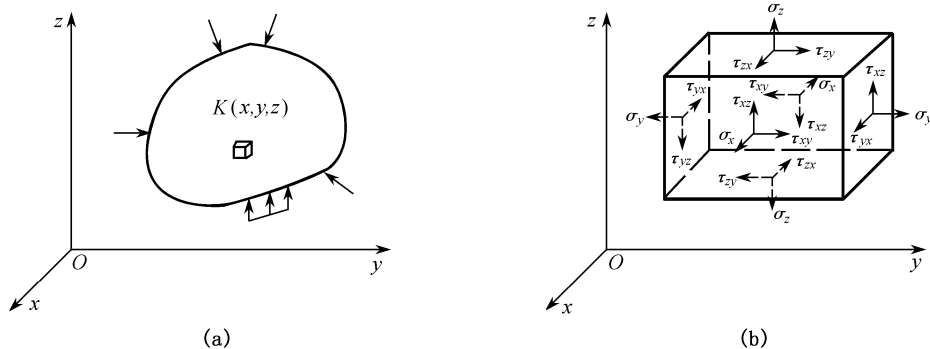


图 3-1 应力分解

① 正应力 σ 是垂直于作用面的应力,用一个角标表示作用面及作用方向。

例如, σ_x 表示作用在垂直于 x 轴的平面上,应力方向与 x 轴平行。

② 剪应力是在作用面内的应力, τ 带有两个角标,第一个角标表示作用面,垂直于哪一个坐标轴,第二个角标表示作用方向,沿哪一个坐标轴。例如, τ_{xy} 表示作用在垂直于 x 轴的平面上,剪应力方向与 y 轴平行。

这样在微元体上共有三个正应力,六个剪应力。

③ 正面、负面与应力正负号规定。如果某个截面的外法线是与坐标轴正方向一致,则称该面为正面。图 3-1(b)中的右、前、上各面均为正面。在正面上的应力,包括正应力和剪应

力,以与坐标轴的正向一致为正,反之为负。

如果某个截面的外法线是与坐标轴的负向一致,则称该面为负面。图 3-1(b)中的左、后、下各面均为负面。在负面上的应力,以与坐标轴的负方向一致时为正,反之为负,所以图 3-1(b)上所示的应力全都是正的。

这样的正负号规定,对于正应力是与材料力学中的规定相同,而对于剪应力则同材料力学的规定相反,这是因为在弹性力学中这样的符号规定将与剪应变符号一致,同时在公式中可以不涉及符号。而材料力学由于要应用莫尔圆的关系,一定要用自己规定的符号。

④ 六个剪应力之间有一定的关系,就是材料力学中的剪应力互等性:作用在两个互相垂直的面上、并且垂直于该两个面交线上的剪应力是互等的,即大小相等,正负号相同。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

这样,在 K 点的应力可用六个分量来表示

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T \quad (3-1)$$

同时可以证明,当在任意一点 $\{\sigma\}$ 为已知时,就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。所以 $\{\sigma\}$ 可以完全确定该点的应力状态。

3. 应变

物体的形状可用它各部分的长度和角度来表示,自然物体形状的改变就可归结为长度的改变和角度的改变。

为了研究物体任一点 K 的变形情况,同样在 K 点附近用平行于坐标面的平面截取一微元体。为了方便,设该微元体的一个顶点与 K 重合,并且 $KA = dx$, $KB = dy$, $KC = dz$, 见图 3-2(a)。

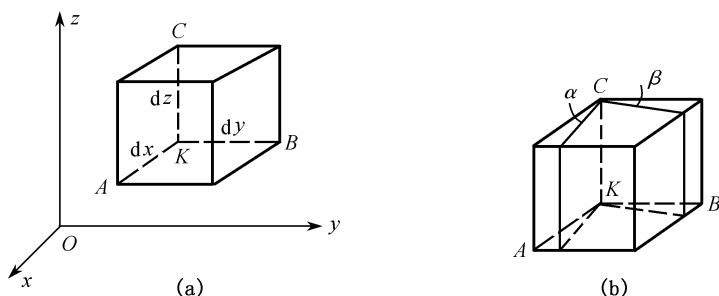


图 3-2 剪应变

微元体变形时,单位长度线段的伸缩称为正应变(线应变),各面之间夹角的改变称为剪应变(角应变)。

线应变与剪应变也可以通过 KA , KB , KC 三条线段长度和夹角的变化来反映。

用 ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z 分别表示 x , y , z 方向的线应变。

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{dx' - dx}{dx}$$

$$\epsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y' - \Delta y}{\Delta y} = \frac{dy' - dy}{dy}$$

$$\epsilon_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z' - \Delta z}{\Delta z} = \frac{dz' - dz}{dz}$$

同理

用 γ_{xy} 表示 x 方向线段(KA)和 y 方向线段(KB)之间夹角的变化,即剪应变。由图3-2(b)所示, γ_{xy} 由两部分组成,即 $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$, γ_{yz} 和 γ_{zx} 可类推。

应变的正负号规定是:线应变以伸长为正,缩短为负。剪应变以直角变小时为正,变大时为负。同应力对应,在 K 点的变形情况可用六个分量来表示

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T \quad (3-2)$$

当这六个分量为已知时,则该点的变形就完全确定了。

4. 位移

位移,即物体位置的移动。物体内任意一点的位移,可以用它在 x, y, z 三轴上的投影 u, v, w 来表示。记为

$$\{f\} = \{u \ v \ w\}^T \quad (3-3)$$

正负号规定是沿坐标轴正向一致为正,反之则为负。

要注意位移有两部分组成:一是周围介质变形使之产生的刚体位移,二是本身变形使内部质点产生的位移。后者与应变有确定的几何关系。

一般而言,弹性体内任意点的体力 $\{P_V\}$ 、面力 $\{P_A\}$ 、应力 $\{\sigma\}$ 、应变 $\{\epsilon\}$ 和位移 $\{f\}$ 都是位置(坐标)的函数。

二、平面应力问题

在工程实际中,任何一种结构都是空间物体,一般的外力都是空间力系。所以,严格地说,任何一种工程结构都不可能是平面物体。但是,如果所研究的结构具有某种特殊的形状,并且承受的是某些特殊的外力,就可以把空间问题简化为近似的平面问题。这样处理,分析和计算的工作量将大为减少,而所得的结果却仍然可以满足工程上对精确度的要求。比如,在大客车车身结构分析中,相对车身骨架而言,蒙皮所受的载荷及其对整个车身结构承载的贡献都可视为平面应力问题。

平面应力问题所考虑的物体是一很薄的等厚度薄板,即该物体在一个方向上的几何尺寸远远小于其余两个方向上的几何尺寸,并且只在板边上承受平行于板面而不沿板厚度变化的面力,在两板面上无外力作用。同时,体力也平行于板面并且不沿厚度变化,如图3-3所示。以薄板的中面为 xy 面,以垂直于中面的任一直线为 z 轴。设薄板的厚度为 h 。因为板面上($z = \pm \frac{h}{2}$)无外力作用,所以有

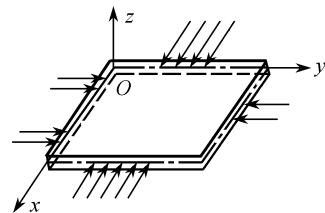


图3-3 等厚度薄板的平面应力

$$(\sigma_z)_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0, \quad (\tau_{yz})_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0, \quad (\tau_{zx})_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0,$$

在板内部这三个应力分量是不为零的(图3-4(a)),但是由于板很薄,外力又不沿厚度变化,薄板不受弯曲作用,应力沿着板的厚度又是连续分布的,所以这些应力肯定很小,可以不计。这样就可以认为在整个板内所有各点上都有 $\sigma_z = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = 0$ 。由于剪应力的互等性,又可得 $\tau_{zy} = 0, \tau_{xz} = 0$ 。在注意到 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ 后,只剩下了在 Oxy 平面内的三个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 所以称这类平面问题为平面应力问题。

应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 严格讲沿厚度有变化,见图3-4(b)。但是我们的计算是取其平均值,即

$$\sigma_x = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad \sigma_y = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

在以后的方程中,相应的应变分量和位移分量也都是取厚度的平均值,但是仍采用原来的记号。这样 σ_x 、 σ_y 、 σ_{xy} 与 z 无关,仅是 x 、 y 的函数。

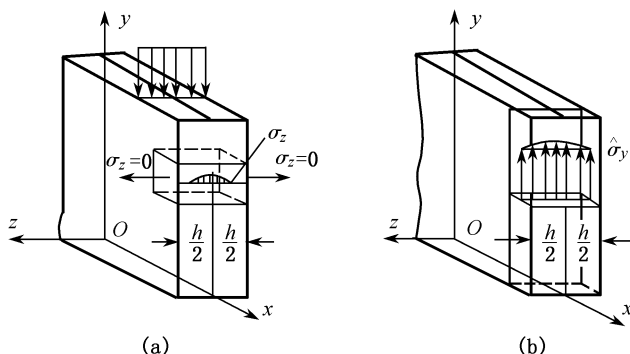


图 3-4 板内部的应力分量

根据广义虎克定律, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0$ 而

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

虽然 ϵ_z 和与它有直接关系的 z 方向位移 w 均不为零,但是它们都不独立,可用其他物理量来表示。

这样经简化分析后,可知平面应力问题的独立参数有八个,它们是

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}\}^T \\ \{\epsilon\} &= \{\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}\}^T \\ \{f\} &= \{u v\}^T \end{aligned} \quad (3-4)$$

并且它们都仅是 x 、 y 的函数,与 z 无关。要注意 $\epsilon_z \neq 0$, $w \neq 0$,但可用其他独立的参数表示。

在工程实际中,受拉力作用的薄板、链条的平面链环(图 3-5)等均可看做是属于平面应力问题。实际应用中,对于厚度稍有变化的薄板,带有加强筋的薄环,平面刚架的节点区域,起重机的吊钩等,只要符合前述载荷特征,也往往按平面问题用有限元作近似计算。

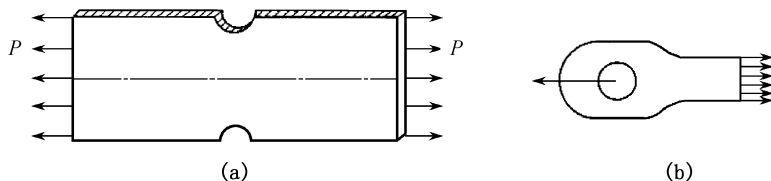


图 3-5 受拉力作用的薄板、链条的平面链环

三、平衡微分方程

首先从静力学方面来考虑平面问题,根据平衡条件导出应力分量与体力分量之间的关系式,也就是平面问题的平衡微分方程式。

不失一般性,从平面应力问题的弹性薄板,或从平面应变问题柱形体中,取出一个微小的平

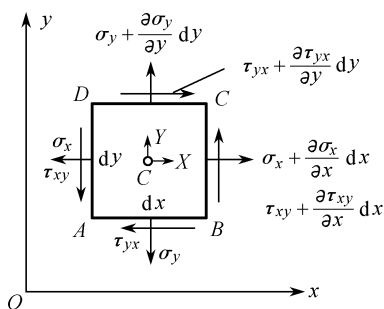


图 3-6 柱形体 z 方向单位截面

行六面体,它在 x 和 y 方向的尺寸分别为 dx 和 dy ,厚度 (z 方向)取为一单位长度(图 3-6)。

一般应力分量是位置坐标 x 和 y 的函数,因此,作用在左右两对面或上下两对面的应力分量不完全相同,而具有小的增量。如,设作用于左面的正应力是 σ_x ,则作用于右面的正应力,由于 x 坐标的改变,将是 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx$ 。同样,如左面的剪应力是 τ_{xy} ,则右面的剪应力将是 $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx$,设下面的正应力及剪应力分别为 σ_y 及 τ_{yx} ,则上

面的正应力及剪应力分别为 $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy$ 及 $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy$ 。因为六面体是微小的,所以它在各面上所受的应力可以认为是均匀分布,作用在对应面的中心。同理,六面体所受的体力,也可以认为是均匀分布,作用在它的体积的中心。根据微元体处于平衡的条件可以得到三个平衡微分方程式。

① 以通过中心 c 并平行于 z 轴的直线为矩轴,列出力矩平衡方程,即 $\sum M_c = 0$

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx \right) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{xy}dy \times 1 \times \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy \right) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{yx}dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0$$

等式两边除以 $dx dy$,并合并同类项,得

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy$$

略去微量项,得出

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3-5)$$

这就再一次证明了剪应力的互等性。

② 以 x 轴为投影轴,列出平衡方程,即 $\sum F_x = 0$ 。

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx \right) dy \times 1 - \sigma_x \cdot dy \times 1 + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy \right) dx \times 1 - \tau_{yx}dx \times 1 + X dx dy \times 1 = 0$$

约简后两边除以 $dx \cdot dy$,得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \quad (3-5a)$$

③ 以 y 轴为投影轴,列出平衡方程,即 $\sum F_y = 0$,类似于式(3-5a)的推导可得

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (3-5b)$$

综合式(3-5a),(3-5b),并注意到 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$,有

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

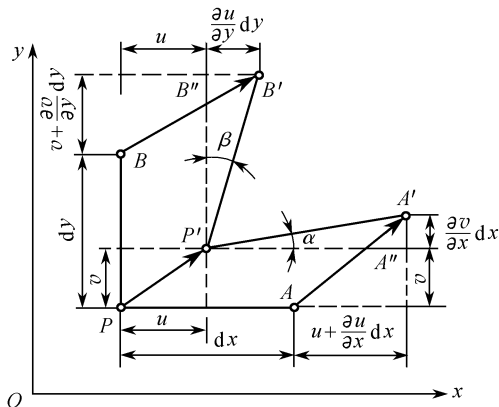
这就是平面应力问题的平衡微分方程式,它表明了应力分量与体力分量之间的关系式。

这两个微分方程中包含三个未知函数： $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ，所以决定应力分量的问题是超静定问题。因此，还必须考虑问题的几何方程和物理方程。

四、几何方程与刚体位移

1. 几何方程

在外力作用下，弹性体内任何一点都将产生位移，并且由于物体的连续性，相邻各点间位移是相互制约的，这显然与变形有关。所以，位移分量和应变分量必有一个确定的几何关系。这就是平面问题的几何方程。



JZ 图 3-7 弹性体内部位移

经过弹性体内部任意一点 P ，沿 x 轴和 y 轴的方向取两个微小长度线段 PA 和 PB ，长度分别为 dx 和 dy 。假定弹性体受力变形后， P, A 和 B 三点分别移到 P', A' 和 B' （图 3-7）。设 P 点位移矢量 $\overline{PP'}$ 在 x, y 方向的分量为 u, v ； A 点位移矢量 $\overline{AA'}$ 和 B 点位移矢量 $\overline{BB'}$ 各分量分别为 $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx, v + \frac{\partial v}{\partial x}dx$ 和 $u + \frac{\partial u}{\partial y}dy, v + \frac{\partial v}{\partial y}dy$ 。

首先来求出线段 PA 和 PB 的正应变，即 ϵ_x 和 ϵ_y ，用位移分量来表示。考虑到小变形假设，可以用 $P'A'$ 代替 $P'A$ 的长度，这相当于略去了 P, A 两点 y 方向位移差引起微线段 PA 的伸缩，因为它是一高阶微量。根据正应变定义，有

$$\epsilon_x = \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - (u + dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

同理可得到线段 PB 的正应变为

$$\epsilon_y = \frac{P'B' - PB}{PB} = \frac{dy + (v + \frac{\partial v}{\partial y}dy) - (v + dy)}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b)$$

现在来求线段 PA 与 PB 之间的直角的改变，也就是剪应变 γ_{xy} ，用位移分量来表示。由图可见，这个剪应变是由两部分组成的：其一是由 y 方向的位移 v 引起的，即 x 方向的线段 PA 的转角 α ；另一部分是由 x 方向的位移 u 引起的，即 y 方向的线段 PB 的转角 β 。根据剪应变定义，有

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

由图 3-7，并注意到小变形假设，有

$$\alpha \approx \frac{A'A''}{P'A'} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{其中 } P'A'' = (1 + \epsilon_x) \cdot PA \approx PA)$$

同理

$$\beta \approx \frac{B'B''}{P'B'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

于是可见, PA 与 PB 之间的直角的改变(以减小时为正), 也就是剪应变 γ_{xy} , 为

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (c)$$

综合(a) (b) (c)三式, 就转化为平面问题中的几何方程, 用矩阵表示, 为

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3-7)$$

它表明了应变分量与位移分量之间的关系。

2. 刚体位移

由几何方程可见, 当物体的位移分量完全确定时, 应变分量即完全确定。反之, 当应变分量完全确定时, 位移分量却不能完全确定。这是因为位移由两部分组成, 一是由物体的变形引起的, 它与应变 $\{\epsilon\}$ 有关; 二是同变形无关的刚体位移。这样, 已知应变分量后, 就不能完全确定位移分量。为了说明这一点, 设应变分量等于零, 即

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \quad (d)$$

时, 来看看位移分量是否也为零, 如不为零, 又如何表示的。

将式(d)代入几何方程(3-7), 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (e)$$

将前二式分别对 x 及 y 积分, 得

$$u = f_1(y), v = f_2(x) \quad (f)$$

其中 f_1 及 f_2 为任意函数。代入(e)中的第三式, 得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx}$$

这一方程的左边是 y 的函数, 而右边是 x 的函数。因此, 只可能两边都等于同一常数 w 。

于是得

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -w, \frac{df_2(x)}{dx} = w$$

积分以后, 得

$$f_1(y) = u_0 - wy, f_2(x) = v_0 + wx \quad (g)$$

其中的 u_0 及 v_0 为任意常数。将式(g)代入式(f), 得位移分量

$$u = u_0 - wy, v = v_0 + wx \quad (3-8)$$

式(3-8)所示的位移, 是“应变为零”时的位移, 也就是所谓“与应变无关的位移”, 因此必然是刚体位移。实际上, u_0 及 v_0 分别为物体沿 x 及 y 轴方向的刚体平移, 而 w 为物体绕 z 轴的刚体转动。下面根据平面运动的原理加以证明。

当三个常数中只有 u_0 不为零时, 由式(3-8)可见, 物体中任意一点的位移分量是 $u = u_0$, $v = 0$ 。这就是说, 物体的所有各点只沿 x 方向移动同样的距离 u_0 。由此可见, u_0 代表物体沿 x 方向的刚体平移。同样可见 v_0 代表物体沿 y 方向的刚体平移。当只有 w 不为零时, 由式

(3-8) 可见, 物体中任意一点的位移分量 $u = -wy$, $v = wx$ 。据此, 坐标为 (x, y) 的任意一点 P 沿着 y 方向移动 wy , 并沿着负 x 方向移动 wy , 如图 3-8 所示, 而组合位移为

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(-wy)^2 + (wx)^2} = w\sqrt{x^2 + y^2} = wr$$

其中 r 为 P 点与 z 轴的距离。组合位移的方向与 y 轴的夹角为 α , 则

$$\tan \alpha = wy/wx = y/x = \tan \theta$$

可见组合位移的方向与径向线段 OP 垂直, 也就是沿着切向。既然物体的所有各点移动的方向都是沿着切向, 而且移动的距离等于径向距离 r 乘以 w , 可见(注意位移是微小的) w 代表物体绕 z 轴的刚体转动。

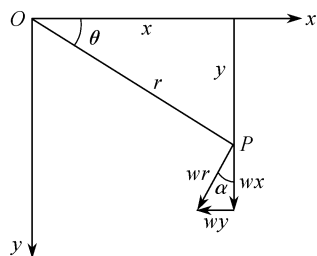


图 3-8 组合位移

既然物体在应变为零时可以有刚体位移, 可见, 当物体发生一定的变形时, 由于约束条件的不同, 它可能具有不同的刚体位移, 因而它的位移并不是完全确定的。在平面问题中, 常数 u_0, v_0, w 的任意性就反映位移的不确定性。而为了完全确定位移, 就必须有三个适当的约束条件来确定这三个常数。

五、物理方程

现在从物理学方面来考虑平面问题的应变分量与应力分量之间的关系式, 也就是平面问题的物理方程。

对于完全弹性的均匀各向同性体, 其应力应变关系已由广义虎克定律给出

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (3-9)$$

式中, E 为材料的弹性模量; G 为剪切弹性模量; μ 为泊松比。这三个弹性常数之间的关系为

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3-10)$$

根据前面的分析, 对于平面应力问题有 $\sigma_z = 0, \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, 由虎克定律可得 $\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$, 以及

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

其余三式, 即为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \quad (3-11)$$

这就是平面应力问题的物理方程式,它给出了平面内的应力分量和应变分量之间的关系,它们与坐标 z 及平面外的各分量无关。

以上的物理方程是用应力分量表示应变分量,在有限元的分析中,常常需要用应变分量表示应力分量,这可直接由式(3-11)得到

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x + \mu\epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (3-12)$$

用矩阵表示为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-12a)$$

在以上已导出的方程中,2个平衡微分方程(式(3-6)),3个几何方程(式(3-7)),3个物理方程(式(3-12)),共8个基本方程,包含8个未知函数:3个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$,3个应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$,2个位移分量 u, v 。基本方程的数目恰好等于未知函数的数目,因此在适当的边界条件下,从基本方程中求解未知函数是可能的。

六、圣维南原理

1. 边界条件

边界条件是结构静力学中确定基本方程唯一解答的主要补充条件之一。按照边界条件的不同,弹性力学问题分为三种边界问题:位移边界问题,应力边界问题和混合边界问题。

(1) 位移边界问题

物体在全部边界上的位移分量是已知的,也就是:在边界 S 上,有

$$u_S = u, v_S = v \quad (3-13)$$

其中 u_S 和 v_S 是位移的边界值, u 和 v 在边界上是坐标的已知函数。这就是平面问题中的所谓位移边界条件。

(2) 应力边界问题

物体在全部边界上所受的力是已知,也就是说,面力分量 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 在边界上的所有各点都是坐标的已知函数。根据斜面上外力与应力分量之间的关系,应用到边界上,外力成为面力分量 $\bar{X}$ 及 $\bar{Y}$,应力分量的边界值用 $(\sigma_x)_S, (\sigma_y)_S, (\tau_{xy})_S$ 表示,于是可得出物体边界上各点的应力分量与面力分量之间的关系式

$$\begin{cases} l(\sigma_x)_S + m(\tau_{yx})_S = \bar{X} \\ m(\sigma_y)_S + l(\tau_{xy})_S = \bar{Y} \end{cases} \quad (3-14)$$

这就是平面问题的应力边界条件。式中, l, m 分别表示边界上外法线方向的方向余弦。

当边界垂直于某一坐标轴时,应力边界条件的形式将得到大大的简化:在垂直于 x 轴的边界上,即 x 为常量的边界上, $l = \pm 1, m = 0$,应力边界条件简化为

$$(\sigma_x)_S = \pm \bar{X} \quad (\tau_{xy})_S = \pm \bar{Y}$$

在垂直于 y 轴的边界上,即 y 为常量的边界上, $l=0, m=\pm 1$, 应力边界条件简化为

$$(\sigma_y)_S = \pm \bar{Y} \quad (\tau_{yx})_S = \pm \bar{X}$$

可见,在这种特殊情况下,应力分量的边界值就等于对应的面力分量(当边界的外法线沿坐标轴正方向时,两者的正负号相同;当边界的外法线沿坐标轴负方向时,两者的正负号相反)。

注意:在垂直于 x 轴的边界上,应力边界条件中并没有 σ_y ;在垂直于 y 轴的边界上,应力边界条件中并没有 σ_x 。这就是说,平行于边界的正应力,他的边界值与面力分量并不直接相关。

(3) 混合边界问题

物体的一部分边界具有已知位移,因而具有位移边界条件,如式(3-13)所示,另一部分边界则具有已知面力,因而具有应力边界条件,如式(3-14)所示。此外,在同一部分边界上还可能出现混合条件,即两个边界条件中的一个为位移边界条件,而另一个则是应力边界条件。例如,设垂直于 x 轴的某一个边界的连杆支承边,图 3-9(a)则在 x 方向有位移边界条件 $u_S = u = 0$,而在 y 方向有应力边界条件 $(\tau_{xy})_S = \bar{Y} = 0$ 。又例如,设垂直于 x 轴的某一个边界是齿槽边,图 3-9(b)则在 x 方向上有应力边界条件 $(\sigma_x)_S = \bar{X} = 0$,而在 y 方向有位移边界条件 $v_S = v = 0$ 。在垂直于 y 轴的边界上,以及与坐标轴斜交的边界上,都可能与此相似的混合边界条件。

2. 圣维南原理

从前面的分析可以看到,对每一个弹性力学平面问题,其 8 个基本方程都是相同的。但是这个结构之所以不同于其他结构,除了形状不同之外,还往往表现在各种各样的边界条件上。在结构分析中常常会有这种情况:在物体的一小部分边界上对外力的分布方式很不明显,仅仅知道其合力,这样很难写出应力边界条件;另外在求解时,要使应力分量、应变分量和位移分量完全满足基本方程,并不是一件很困难的事,但是要严格满足

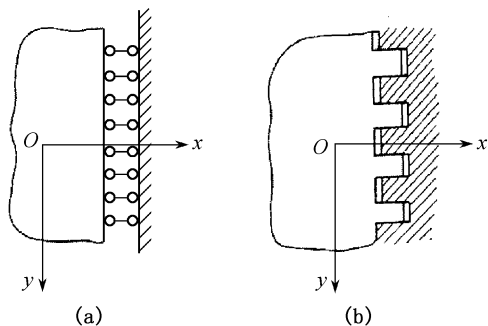


图 3-9 混合边界

各种不同的边界条件却常常发生很大的困难。鉴于此,人们研究了在局部区域上力的作用方式对于弹性力学解答的影响问题,由圣维南提出了局部影响原理(圣维南原理)。圣维南原理指出:如果把物体的某一部(小部分)边界上作用的表面力,变换为分布不同但静力等效的表面力(即主矢量相同,对于同一点的主矩也相同),则表面力作用附近的应力分布将有显著的改变,而远处的应力改变极小,可以忽略不计。

如图 3-10 的(a)和(b)端部的作用力不同,(a)是集中力,(b)是分布载荷,是两个问题,有两种解答。但是如果这两种端部作用力满足静力等效条件,那么这两个问题内力分布的显著差异只发生在端部,而在其余区域内力分布基本相同。由于(a)的精确解答(包括端部边界条件的精确满足)是困难的,而(b)的解答则是十分简单,因而可以用(b)的解答来代替(a)的解答。

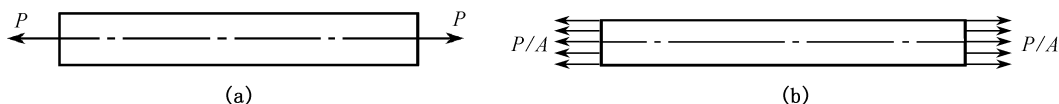


图 3-10 端部应力问题

必须注意：应用圣维南原理，绝不能离开“静力等效”的条件。例如图 3-10(a)所示的构件，如果两端的力 P 不是作用在截面的形心，而是具有一定的偏心距离，那么它同图 3-10(b)就不是静力等效的。这时的应力，就不仅仅两端处有显著差异了，在整个杆件中都不相同。

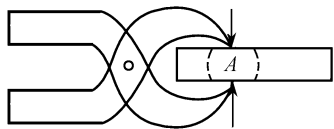


图 3-11 钳子夹钢板或铁丝

当在物体的某一局部区域受一平衡力系作用时，局部影响原理还可以这样叙述：

如果在物体上任一局部区域作用一平衡力系，则这平衡力系在物体内所引起的应力仅局限于平衡力系作用点的附近区域，随着远离作用力区域应力很快地减小。

最明显的实例是用钳子夹钢板或铁丝，虽然压力作用点附近产生很大的应力乃至剪断，但是在用虚线表示的小区域 A 以外，几乎没有应力产生，那里的金属不存在任何受力的痕迹，如图 3-11 所示。

研究表明，应用圣维南原理影响的区域大致与力的作用区域相当。因此，必须注意：只有在当力的作用区域比物体的最小尺寸为小的条件下，才可以应用圣维南原理。

例如，图 3-12 所示为一有双翼板截面的杆件，翼板宽 BC 和截面高 AB 均比杆长 AE 为小，但大大超过腹板的厚度 δ 。该杆一端固定，另一自由端作用一平衡力系，由两个其值相同而方向相反的力矩 $+M$ 与 $-M$ 组成，分别作用在翼板 AD 和 BC 上。由于这里腹板厚度 δ 比平衡力系作用区域 $ABCD$ 的尺寸小得多，这时就不能应用圣维南原理。因为这一对 $\pm M$ 还要引起双翼板截面的扭转，其扭转程度与腹板厚度有关，而且扭转应力一直分布到固定端。

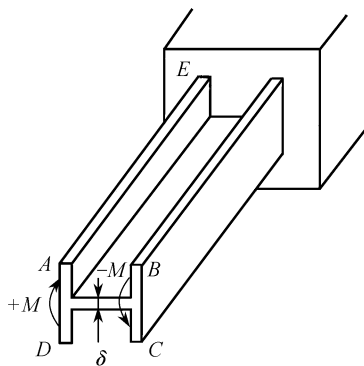


图 3-12 双翼板截面的杆件

要应用圣维南原理，或者腹板厚度 δ 变为与翼板宽度 BC 相当（这时成为实心矩形杆件），或者力矩 $+M$ 和 $-M$ 作用于腹板上任何点处，并且两个力矩平面之间的距离不超过 δ （杆件的最小尺寸），对这两种情形可以应用圣维南原理，认为除平衡力系作用点的附近区域外，其余部分不产生应力。

七、虚位移原理

前面介绍了应用解析法求解弹性力学问题的基本思想。它是在建立弹性力学基本方程以后，寻找在满足已知边界条件下微分方程的解。但是对于某些问题，特别是对于边界条件较复杂，载荷也较复杂的问题，用解析法寻求精确解是非常困难的，有时甚至是不可能的。所以，为了避免求解这种微分方程式时数学上的困难，必须寻求一些近似的解法。能量法就可以提供这种有效的近似解法。在各种能量原理中，虚功原理应用最为方便，它也是有限元方法形成单元刚度矩阵、节点载荷移置等的基础。

虚位移和虚功的概念，在理论力学和材料力学中已作过阐述。

这里，所谓“虚”是指该量是假想的、实际不存在的。因此，虚位移是一种假想加到结构上的可能的、任意的、微小的位移。

其中，所谓可能的是指结构所允许的，即满足结构的约束条件和变形连续条件的位移；所谓任意的是指位移类型（平移、转动）和方向不受限制，但必须是结构所允许的位移；所谓微小

的就是在发生虚位移过程中,各力的作用线保持不变。

在发生虚位移过程中真实力所作的功,称为虚功。

1. 刚体的虚位移原理

刚体的虚位移原理可表述如下:

设刚体上作用任意的平衡力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$, 当发生约束允许的任意微小的刚体位移(虚位移), 并且与各力作用点相应的位移分量分别为 $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_n^*$ 时, 则平衡力系在虚位移上所作的功(虚功)的总和(代数和)恒等于零。用公式表示为

$$W = \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i^* = 0 \quad (3-15)$$

这可用一个较简单的静力学中的刚体杠杆例子来说明。

图 3-13(a)表示一个平衡的杠杆, 对 C 点的力矩平衡方程为

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{b}{a} \quad (3-16)$$

图 3-13(b)表示杠杆绕支点 C 转动时的刚体位移图, Δ_A 与 Δ_B 有如下关系

$$\frac{\Delta_B}{\Delta_A} = \frac{b}{a} \quad (3-17)$$

综合上述平衡关系与几何关系可得

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{\Delta_B}{\Delta_A} \quad (3-18)$$

即

$$F_A \Delta_A - F_B \Delta_B = 0$$

这个结果是以功的形式表达的, 它表示平衡力系在位移上作功时, 功的总和必为零。其实杠杆处于平衡状态时, Δ_A, Δ_B 这两个位移不会发生的。但是如果某种原因发生了, 它一定满足式(3-17)的关系。这就是说在外力作用下, 处于平衡的任何刚体, 如果假定它发生了位移, 由于这位移是虚设的, 故为虚位移, 则物体上所有的力在这个虚位移上所作的总功必等于零。这就是上述虚位移原理。

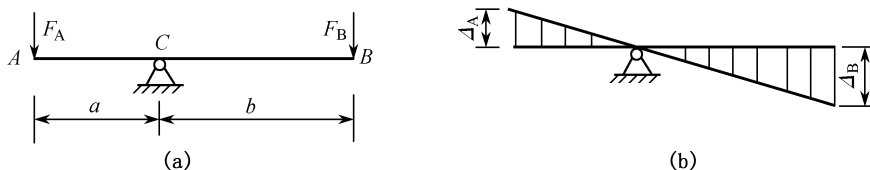


图 3-13 杠杆的虚位移

必须指出, 虚位移原理的应用是有条件的, 它所涉及的两个方面的力和位移都不是随意的。对力而言, 它必须是在产生位移过程中处于平衡的力系; 对位移而言, 它必须是约束所允许的微小位移。图 3-13(b)中的虚位移只能是绕 C 点的转动。此外还可以从图中看出, 力有两种, 一种是在产生虚位移过程中作功的, 称主动力, 如 F_A, F_B 。另一种是不作功的, 称被动力, 如支点反力 R_C 。由于支点 C 没有位移, R_C 作功当然为零。

通过这样的分析, 实际上说明了刚体的虚位移原理, 可归结于平衡力系上所有主动力在相应虚位移上所作功的总和恒等于零。

2. 弹性体的虚位移原理

现讨论虚位移原理用于弹性体的情况。举一个等截面直杆受拉伸的简单例子,如图3-14所示。直杆在载荷 F 作用下处于平衡,杆内各个

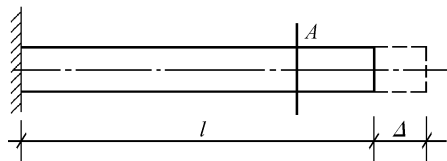


图 3-14 等截面直杆受拉伸

截面上的应力是相等的,即 $\sigma = \frac{F}{A}$,应变为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{EA} \quad \text{载荷作用端点的位移为 } \Delta = \frac{F}{EA}l。$$

如果由于某种原因,作为弹性体的直杆右端发生了沿 x 方向的微小虚位移 Δ^* (将杆再伸

长 Δ^* ,对刚性杆是不允许的)。因为虚位移是微小的,所以这时载荷 F 与应力 σ 保持不变。现看外力所作的功,左端的约束反力由于左端固定而不做功,外力做功只有载荷 F 在虚位移 Δ^* 上所作的功,它等于 $F\Delta^*$ 。由此可见,对一个弹性体来说,当发生约束允许的虚位移时,单是外力在虚位移上所作的功是不等于零的。从能量守恒原理可知,能量可转化,而总能量不变。载荷作虚功 $F\Delta^*$,这能量实际上转化为弹性体的内能了。

(1) 外力功和弹性变形位能的关系

① 外力功。假定加载的方式是平稳的,即载荷是从零逐渐加大,加载过程不发生冲击与振动,同时假定杆件变形限制在弹性范围内。当载荷从零逐渐加大到 F 时,端部位移也从零逐渐加大至 Δ ,两者保持线性关系,如图3-15(a)所示。加载过程中外力所做的功为阴影部分三角形面积,用 W 表示,即

$$W = \frac{1}{2} F\Delta \quad (3-19)$$

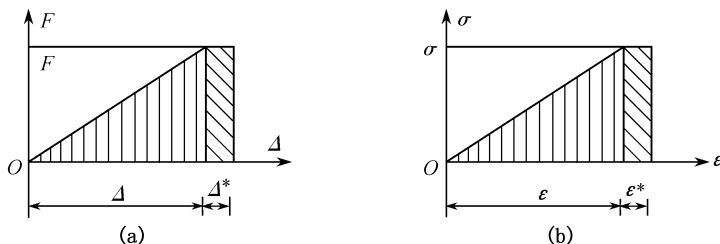


图 3-15 加载过程

② 弹性变形位能。当载荷 F 作用于杆件时,杆件内发生应变和应力。材料变形限制在弹性范围内,应力与应变保持线性关系。和 F 相应的应力和应变为 σ 和 ϵ ,在杆件变形增加时,作为它的一种内能——弹性变形位能也增加了。如杆件未变形的弹性变形位能为零,则应变为 ϵ 时,单位体积的弹性变形位能如图3-15(b)所示的三角形部分,它等于 $\frac{1}{2}\sigma\epsilon$,整个体积的弹性变形能用 U 表示,应有

$$U = \frac{1}{2} \sigma \epsilon A l \quad (3-20)$$

因为 $\sigma = \frac{F}{A}$, $\epsilon = \frac{\Delta}{l}$,代入上式得

$$U = \frac{1}{2} \frac{F}{A} \frac{\Delta}{l} A l = \frac{1}{2} F\Delta \quad (3-20a)$$

于是, $U = W$ 。

上式说明, 外力做功和弹性变形位能是相等的。也就是说, 外力功转化为杆件的弹性变形位能了。反之, 当载荷再逐渐减小至零时, 变形将逐渐恢复至原始状态, 在这过程中弹性变形位能又转化为外力功。

(2) 发生虚位移 Δ^* 时外力功与变形位能的关系

在发生虚位移 Δ^* 时, 外载荷 F 始终不变, 所以外载荷 F 在虚位移 Δ^* 上所做的功为 $F\Delta^*$ 。即图 3-15(a) 上的矩形面积, 它可看作外力功由于虚位移引起的增量 W^* 。另一方面, 虚位移 Δ^* 在杆件内部引起了虚应变 $\left(\frac{\Delta^*}{l}\right)$, 从而使杆件的弹性变形位能也产生了增量, 单位体积的弹性变形位能的增量为 $\sigma \cdot \epsilon^*$, 即图 3-15(b) 上的矩形面积。整个体积的弹性变形位能的增量

$$U^* = \sigma \cdot \epsilon^* \cdot A \cdot l = \frac{F}{A} \frac{\Delta^*}{l} Al = F\Delta^* \quad (3-21)$$

于是, $U^* = W^*$ 。

上式说明, 外力功由于虚位移引起的增量等于整个杆件弹性变形位能由于虚位移引起的增量。

(3) 弹性体的虚位移原理

根据上述分析, 可将弹性体的虚位移原理表示如下:

在外力作用下, 处于平衡状态的弹性体, 当发生约束允许的任意微小的虚位移时, 则外力在虚位移上所作的功等于弹性体的变形位能当虚位移发生时所引起的增量, 亦即等于整个体积内应力在虚应变上所作的功。

对于刚体, 因为应变恒等于零, 所以它的变形位能就恒等于零, 也没有应力在虚应变上作功的问题, 所以刚体虚位移原理可看做是弹性体虚位移原理在刚度为无穷大情况下的一个特例, 因此后者比前者具有更普遍的意义。

(4) 弹性体虚位移原理的一般表达式

引入图 3-16 所示的一个受一组外力作用处于平衡状态的弹性体。它在 i 点所受的外力沿坐标轴分解为 X_i, Y_i, Z_i , 它在 j 点所受的外力沿坐标轴分解为 X_j, Y_j, Z_j 等等, 总结起来用列矩阵 $\{F\}$ 表示, 而这些外力引起的应力用列矩阵 $\{\sigma\}$ 表示

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

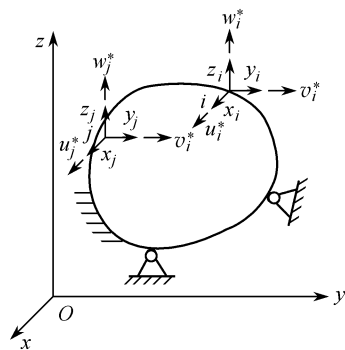


图 3-16 弹性体受力情况

现在假设弹性体发生了某种虚位移, 各个外力作用点相应的位移分量分别为 $u_i^*, v_i^*, w_i^*, u_j^*, v_j^*, w_j^*, \dots$, 以列阵 $\{\Delta^*\}$ 表示, 而引起的虚应变用列阵 $\{\epsilon^*\}$ 表示

$$\{\Delta^*\} = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ w_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ w_j^* \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \varepsilon_z^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{zx}^* \end{Bmatrix}$$

当虚位移发生时,外力在虚位移上所作的功为

$$X_i u_i^* + Y_i v_i^* + Z_i w_i^* + X_j u_j^* + Y_j v_j^* + Z_j w_j^* + \dots = \{\Delta^*\}^T \{F\}$$

同样当虚位移发生时,在弹性体单位体积内应力在相应的虚应变上所作的功为

$$\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^* + \tau_{zx} \gamma_{zx}^* = \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\}$$

因此在整个弹性体内应力在虚应变上所作的功为

$$\iiint_v \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz$$

根据弹性体的虚位移原理,则可得到如下的一般公式

$$\{\Delta^*\}^T \{F\} = \iiint_v \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz \quad (3-22)$$

这就是弹性体的虚功方程,它通过虚位移与虚应变表示了外力与应力之间的关系。

现在以平面应力问题为例来证明之。考虑单位厚度的平板。为简化起见,假定没有体积力和初应力(推广到一般情况并无困难)。如图3-17所示,边界可分为两部分,在 S_u 上,位移等于零,在 S_σ 上,作用着表面力 $\bar{p}$,其分量为 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 。在这一部分的边界条件可写为

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} = \bar{X}, \quad l\tau_{xy} + m\sigma_y = \bar{Y} \quad (a)$$

在外力 $\bar{p}$ 作用下,物体内部产生应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,它们满足平衡微分方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (b)$$

现在假设物体由于某种原因产生了虚位移 u^*, v^* ,根据几何方程,相应的虚应变为

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^* = \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \quad (c)$$

由于上述虚应变,物体内部应力所产生的虚应变能是

$$\begin{aligned} U^* &= \iint \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy \\ &= \iint \left[\sigma_x \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v^*}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (d)$$

由

$$\iint \frac{\partial(\sigma_x u^*)}{\partial x} dx dy = \iint u^* \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \iint \sigma_x \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dy$$

所以式(d)右端第一项为

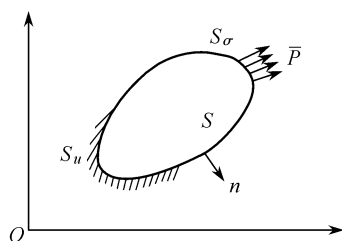


图3-17 单位厚度的平板的虚位移方程

$$\iint \sigma_x \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dy = \iint \frac{\partial(\sigma_x u^*)}{\partial x} dx dy - \iint u^* \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy$$

同理

$$\begin{aligned} \iint \sigma_y \frac{\partial v^*}{\partial y} dx dy &= \iint \frac{\partial(\sigma_y v^*)}{\partial y} dx dy - \iint v^* \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy \\ \iint \tau_{xy} \frac{\partial v^*}{\partial x} dx dy &= \iint \frac{\partial(\tau_{xy} v^*)}{\partial x} dx dy - \iint v^* \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy \\ \iint \tau_{xy} \frac{\partial u^*}{\partial y} dx dy &= \iint \frac{\partial(\tau_{xy} u^*)}{\partial y} dx dy - \iint u^* \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

把上述四式代入式(d),并整理后有

$$\begin{aligned} U^* = - \iint & \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) u^* + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) v^* \right] dx dy + \\ & \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u^*) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} v^*) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v^*) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u^*) \right] dx dy \end{aligned}$$

上式中右端第一个积分由平衡微分方程(b)可知等于零。因此虚应变能 U^* 的表达式简化为

$$U^* = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u^* + \tau_{xy} v^*) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v^* + \tau_{xy} u^*) \right] dx dy \quad (e)$$

由格林定理

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int (lQ + mP) ds \quad (f)$$

式中 l, m 是边界法线的方向余弦, 设

$$Q = \sigma_x u^* + \tau_{xy} v^*, P = \sigma_y v^* + \tau_{xy} u^*$$

由(e), (f)两式, 可得

$$\begin{aligned} U^* &= \int [(\sigma_x u^* + \tau_{xy} v^*)l + (\sigma_y v^* + \tau_{xy} u^*)m] ds \\ &= \int [(l\sigma_x + m\tau_{xy})u^* + (l\tau_{xy} + m\sigma_y)v^*] ds \end{aligned} \quad (g)$$

根据边界条件, 在边界 S_u 上, 由于位移等于零, 所以虚位移 $u^* = 0, v^* = 0$, 上式右端的线积分在 S_u 上应等于零。在边界 S_σ 上, 把式(a)代入, 可得

$$U^* = \int_{S_\sigma} (u^* \bar{X} + v^* \bar{Y}) ds$$

上式左端为弹性体内应力在相应虚应变上作功即虚应变能, 而右端为外力(这里假设只有表面力)在相应虚位移上作功, 即外力虚功, 从而证实了虚位移原理

$$\{\Delta^*\}^T \{F\} = \iiint \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz$$

上述证明过程中, 并没有引用材料的应力 - 应变关系, 所以虚位移原理不但适用于线性材料, 也适用于非线性材料及塑性力学问题。因此, 弹性体的虚位移原理更可一般称为变形体的虚位移原理。只要在实际应用时, 对力系来讲, 应力与外力(体积力和表面力)满足平衡条件; 对位移来讲, 位移是微小的, 满足边界的约束条件, 并且位移与应变之间满足几何方程。

八、平面应力问题的有限元方法

在弹性力学中把物体假设为由无限多个微小六面体(称为微元体)组合而成。通过对任一

微元体的分析,导出了弹性力学的基本方程。结合边界条件求解这些基本方程就得到了描述物体应力、应变和位移的解析解。

但是,弹性力学中的基本方程一般都是高阶的偏微分方程组,要在满足边界条件下精确地求出它们的解,在数学上是相当困难的。现在只是对某些简单的问题有了解答,并非所有问题都能求出。在大量的工程实际问题中,特别是结构的几何形状、载荷情况等比较复杂的问题,要严格按照弹性力学的基本方程精确求解,并不是都能办到,有时甚至是不可能的。因此,在工程实际中往往不得不采用近似解法和数值解法,以求出问题的近似解答。由于所得到的近似数值解常常也能满足工程实际需要,所以现在更多的人正致力于充分应用一些近似数值解法,来解决工程实际问题。

由于计算机的迅猛发展,在各种近似和数值的方法中,有限元方法已成为目前最为有效的结构分析的数值解法。它为弹性力学进一步应用于工程实践赋予了新的生命力。与解析方法中把弹性体认为由无限多微元体组成相反,有限元方法是把弹性体划分为有限大小的、彼此只在有限个点相连接的、有限个单元的组合体来分析的。也就是讲,有限元方法是用一个离散结构来代替连续体,离散结构是由有限个单元组成的集合体。依据被分析物体的几何形状特点及所受载荷的特点,单元可能是平面的,也可能是空间的,也有三角形、四边形、四面体、六面体的,还有直边或曲边的等。单元的顶点,都称为节点,单元边上的点也可取为节点。相邻单元被认为仅在节点处相连接,载荷的传递也仅通过节点进行。这样就把原来的一个连续体变成了一个由有限个单元组成的离散体,同时也就把原来是无限多自由度的体系简化为有限多自由度的体系了。这是真实结构的一个近似力学模拟,整个数值计算就将在这个离散化的模型上进行。

现在一般都取离散体中每个节点的位移作为基本未知量,这称为有限单元位移法。连续体离散化后,先从单元分析着手,选择简单的函数组来近似表示每个单元上真实位移的分布和变化,建立每个单元的刚度方程,然后再组集各单元以建立整个结构的总刚度方程,引入边界约束条件后,求解刚度方程以便得到各节点的位移,以此又可计算各单元的应力。

通过单元的分析 and 集合,得到的总刚度方程是一组有限个代数方程式。只要按照一定的原则进行离散化,合理地选择描述单元的数学模型,当网格逐渐加密时,离散体就能愈益真实地模拟原来的结构。因此,通过求解总刚度方程(代数方程组)所得的数值结果,虽然是近似的,但还是能够反映原来结构的力学状态,满足工程上的需要。

有限元法的三个主要内容就是连续体的离散化、单元分析和整体分析。

九、连续体的网格划分

所谓连续体的离散化,就是假想把分析对象分割成由有限个单元组成的集合体。这些单元仅在节点处连接,单元之间的力仅靠节点传递。所以连续体的离散化又称为网格划分。

在进行网格分割时,可以采用各种单元类型。但是在平面问题的有限元法中,最简单而且又是最常用的单元是三角形单元和矩形单元。如图 3-18(a)所示的一均匀拉伸的带孔等厚度薄板,我们可以将其划分为三角形网格,每个单元都是等厚度三角形平板,连接单元的节点都假想是光滑的平面铰,它只传递集中力,不受弯矩也不传递弯矩。当单元处于曲线边界(这里是圆弧孔边)时,可近似地用直线代替曲线作为三角形的一边。每个单元所受的载荷也要移置到节点上,成为节点载荷(具体移置方法后面要讨论)。同时还要把物体所受的各种形式的

约束条件简化到约束处的节点上去。这样就是为了在连续体离散化后,只在每个单元的节点处受有约束,简化它们的约束条件,便于建立和求解线性代数方程组。实际上,约束简化也可以看做是一种载荷移置,因为从受力角度来看,约束的简化就是把约束反力移置到节点上去。本例中固定边 AB 各点的位移均为零,所以在 AB 边上的各节点处应设置固定铰支座(如图 3-18(b)所示)。

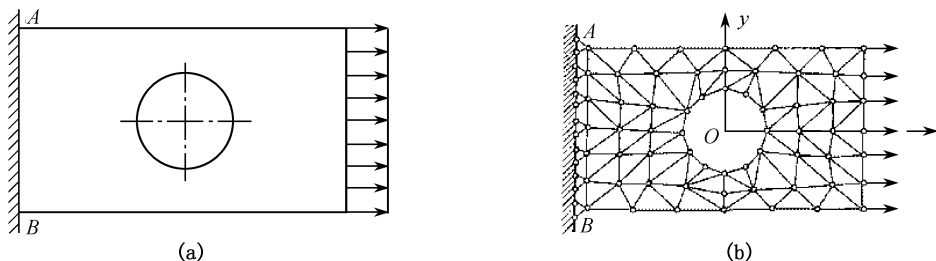


图 3-18

这样,通过单元分割、载荷移置与约束简化,就可把一个形状各异,又受各种形式载荷和各种形式约束的连续弹性体离散为一个仅在节点连接、仅靠节点传力、仅受节点载荷、仅在节点处约束的单元组合体。

把弹性连续体离散为有限单元组合体的过程,是综合运用工程判断力的过程。这个过程中,要决定单元的 shape、大小(网格的疏密)、数目、单元的排列以及约束的设置等,其总的目标是尽可能精确地模拟物体或结构,这关系到整个计算的精度,要特别予以注意。

在有限单元离散即划为网格时,首先要考虑的是单元类型的选择。这主要取决于结构的几何形状、载荷的类型、计算精度的要求以及描述该问题所必需的独立空间坐标的数目。如对于等厚度薄板,当载荷作用线平行于板中面时,一般可作为平面问题采用三角形单元、矩形单元等,而当载荷垂直于板中面时,则应采用板壳元。对同一平面问题,精度要求不高可用三角形单元,精度要求高时则应采用矩形单元或三角形六节点单元。

选择确定单元类型后,接着要考虑单元的大小(即网格的疏密)。它首先是根据精度的要求和计算机的速度与容量来确定大小。从理论上讲,单元越小,网格越密,计算结果精度越高。但要求计算机容量也越大。因此在满足工程要求、保证必要精度条件下,网格划分可粗一些,单元数可少一些。在估计应力水平较高、应力梯度变化较大或重要的部位,单元分割应小些,网格划分也应密些;反之,在应力水平较低、变化平缓部位或次要的部位,单元可取得大些,网格也就稀一些。如图 3-19 所示的结构中,在接近椭圆孔处,由于应力集中,应力梯度变化大,孔周围的单元就取得小些,网格划分得密些;在离孔较远处,应力变化平缓,单元就取得大些。

当分析对象的厚度或者其弹性性质有突变之处,应把突变线作为单元的边界线,同时单元也应取小些。当结构在某些部位受分布载荷或集中载荷作用时,在这些部位的单元同样应当取小些,并尽可能在载荷作用处布置节点以使应力的突变得得到一定程度的反映。

要注意的是,同一个结构上的网格疏密、单元大

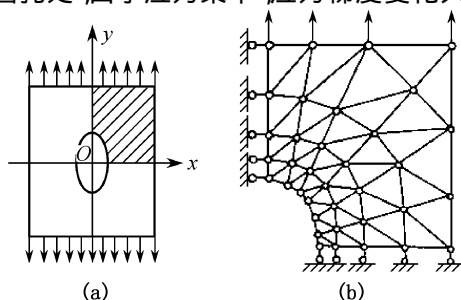


图 3-19 椭圆孔处的单元划分

小要有过渡,避免大小悬殊的单元相邻为伍。还要注意的是,划分单元时各单元的边长尽可能避免不要相差太大。因为各边的长度相差太大是影响计算精度的一个重要原因,故应尽量避免取狭长的单元。如图 3-20 所示的两种分割中,应取图(a)的方式,避免图(b)的划分方式。当然,任一三角形单元的顶点,必须同时为相邻三角形单元的顶点,而不能为相邻三角形单元边上的内点。图 3-21(a)所示是错误的,应如图 3-21(b)所示。

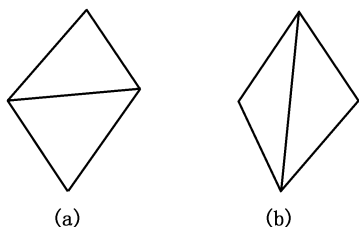


图 3-20

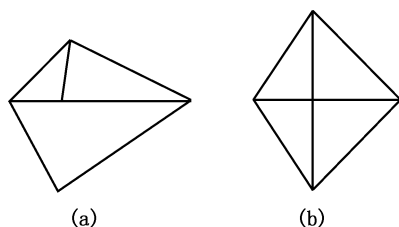


图 3-21

十、三角形单元分析

从现在开始,我们分析一个典型三角形单元的力学特征。从结构的离散体中任意选取一个单元 e ,如图 3-22 所示。三个节点按坐标系的右手法则顺序编号为 i, j, m 。节点坐标分别为 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ 。

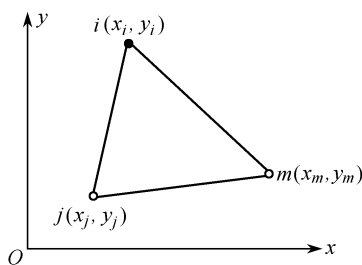


图 3-22 离散体中任意单元

1. 单元的节点位移矩阵和节点力矩阵

由弹性力学平面问题可知,每个节点在其单元平面内的位移可以有两个分量,即

$$\{\Delta_i^e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta_j^e\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta_m^e\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

式中, u_i, v_i 是节点 i 在 x 轴和 y 轴方向的位移分量, u_j, v_j, u_m, v_m 的含义可类推。

整个三角形单元就有六个节点位移分量(图 3-23

(a)), 用列阵表示为

$$\begin{aligned} \{\Delta\}^e &= \{\{\Delta_i^e\}^T \quad \{\Delta_j^e\}^T \quad \{\Delta_m^e\}^T\}^T \\ &= \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m\}^T \end{aligned} \quad (3-23)$$

这就是三角形单元的节点位移矩阵。

与节点位移相对应,每个节点在其单元平面内也有两个节点力分量,即

$$\{F_i^e\} = \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \end{Bmatrix}, \quad \{F_j^e\} = \begin{Bmatrix} X_j^e \\ Y_j^e \end{Bmatrix}, \quad \{F_m^e\} = \begin{Bmatrix} X_m^e \\ Y_m^e \end{Bmatrix}$$

式中, X_i^e, Y_i^e 分别是 i 节点力在 x 轴和 y 轴方向的分量, $X_j^e, Y_j^e, X_m^e, Y_m^e$ 的含义可类推。

整个三角形单元也就有六个节点力分量(图 3-23(b)), 用列阵表示组成三角形单元的节点力矩阵:

$$\{F\}^e = \{\{F_i^e\}^T \quad \{F_j^e\}^T \quad \{F_m^e\}^T\}^T = \{X_i^e \quad Y_i^e \quad X_j^e \quad Y_j^e \quad X_m^e \quad Y_m^e\}^T \quad (3-24)$$

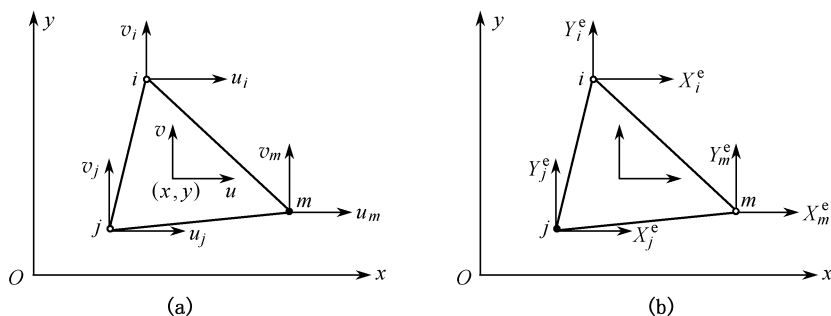


图 3-23 三角形单元的节点位移分量图

在有限元位移法中,节点位移是基本未知量。

单元分析的基本任务是建立单元节点力与节点位移之间的关系。

2. 单元位移模式

有限元法是把原来的连续体用一离散化的若干个单元的集合体来代替,单元与单元之间仅靠节点相连,这样弹性力学基本假设中“假设物体是连续的”已不再满足。但是在每一单元内部,则可认为是符合弹性力学基本假设的,因此弹性力学的基本方程,在每个单元内部同样适用。

根据弹性力学平面问题的解析法,如果弹性体内的位移分量已知,则可由几何方程求得应变分量,再由物理方程求得应力分量。这就是要求知道单元内的位移变化规律,如果只知道每个单元节点的位移,是不能直接求得应变分量和应力分量的。为此,必须首先假定单元内的一个位移函数,即假定位移分量是坐标的某种函数。

由于在整个弹性体内,各点的位移变化情况是非常复杂的,在整个区域里很难选取一个适当的位移函数来表示位移的复杂变化。但是,现在已将整个区域分割成许多单元组成的离散体,由于每个单元比较小,在每个单元的局部范围内就可以采用比较简单的函数来近似表达单元内真实位移,然后把各单元的位移函数连接起来,就可以近似表示整个区域内真实的位移函数。这就像一条光滑曲线可以用许多足够小的直线段连接成折线来模拟一样。

这种化繁为简,联合局部逼近整体的思想,应该说是有限元法的绝妙之处。

(1) 单元位移模式的选取

在选取单元位移模式时,简单的是将单元内任一点的位移分量 u, v 取为坐标 x, y 的多项式。假设其为 x, y 的线性函数,即

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (3-25)$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ 为待定常数。

因为基本未知量是节点位移,所以式(3-25)也要用节点位移矩阵 $\{\Delta\}^e$ 来表示。由于式(3-25)为三角形单元内任一点的位移表达式,所以也适用于节点 i, j, m 。把节点 i, j, m 的坐标 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ 代入,有

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \\
v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\
v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\
v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m
\end{aligned} \quad (3-26)$$

三个节点的六个位移分量的表达式恰好可以确定六个待定常数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ 。求解以上方程,有

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) / 2A \\
\alpha_2 &= (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2A \\
\alpha_3 &= (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) / 2A \\
\alpha_4 &= (a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m) / 2A \\
\alpha_5 &= (b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) / 2A \\
\alpha_6 &= (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) / 2A
\end{aligned} \quad (3-27)$$

式中

$$\begin{aligned}
a_i &= (x_j y_m - x_m y_j), b_i = y_j - y_m, c_i = x_m - x_j \\
a_j &= (x_m y_i - x_i y_m), b_j = y_m - y_i, c_j = x_i - x_m \\
a_m &= (x_i y_j - x_j y_i), b_m = y_i - y_j, c_m = x_j - x_i
\end{aligned} \quad (3-28)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_j y_m + x_m y_i + x_i y_j - x_m y_j - x_i y_m - x_j y_i) \quad (3-29)$$

A 为三角形单元 e 的面积。

式(3-27)代入式(3-25),有

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{2A} [(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) + (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)x + (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m)y] \\
&= \frac{1}{2A} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \\
&= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m
\end{aligned}$$

同理

$$v(x, y) = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m$$

这就是用单元节点位移表示的单元位移模式,用矩阵表示为

$$\begin{aligned}
\{f\}^e &= \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 & \vdots & N_j(x, y) & 0 & \vdots & N_m(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) & \vdots & 0 & N_j(x, y) & \vdots & 0 & N_m(x, y) \end{bmatrix} \{\Delta\}^e
\end{aligned} \quad (3-30)$$

也可简写为

$$\{f\}^e = [N] \{\Delta\}^e \quad (3-30a)$$

式中, I 为二阶单位矩阵。而 N_i, N_j, N_m 由式(3-31)轮换得出

$$N_i(x, y) = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A \quad (i, j, m) \text{ 可以互换} \quad (3-31)$$

再讨论一下 N_i, N_j, N_m 的性质, 把式(3-28)代入 N_i 有

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} [x_j y_m - x_m y_j + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y]$$

在 i, j, m 三个节点上,

$$N_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2A} (x_j y_m + x_i y_j + x_m y_i - x_m y_j - x_i y_m - x_j y_i) = 1$$

$$N_i(x_j, y_j) = \frac{1}{2A} (x_j y_m - x_m y_j + y_j x_j - y_m x_j + x_m y_j - x_j y_j) = 0$$

$$N_i(x_m, y_m) = \frac{1}{2A} (x_j y_m - x_m y_j + y_j x_m - y_m x_m + x_m y_m - x_j y_m) = 0$$

单元中任一点插值函数之和应等于 1, 即: $N_i + N_m + N_j = 1$, 满足单元刚性位移要求。

同理可得 N_j, N_m 在 i, j, m 三个节点上的值为

$$N_j(x_i, y_i) = 0, N_j(x_j, y_j) = 1, N_j(x_m, y_m) = 0$$

$$N_m(x_i, y_i) = 0, N_m(x_j, y_j) = 0, N_m(x_m, y_m) = 1$$

这表明了 N_i, N_j, N_m 在节点处的性质。再对照式(3-30)可以看出, 单元位移模式可以直接通过单元节点位移 $\{\Delta\}^e$ 插值表示出来, 所以 N_i, N_j, N_m 称为位移插值函数。

再来看一下 N_i, N_j, N_m 的物理意义。在式(3-30)中, 令 $u_i = 1, u_j = 0, u_m = 0$, 则

$$u(x, y) = N_i$$

这就表明了 N_i 为 i 节点发生单位位移时, 在单元内部位移的分布规律(见图 3-24)。由于 N_i, N_j, N_m 反映了单元 ijm 的位移形态, 所以称之为形态函数, 简称为形函数。而

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

称为形态矩阵或形函数矩阵。

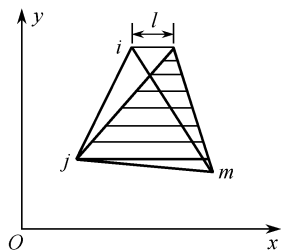


图 3-24 单元内部位移分布图

在有限元法中, 应力矩阵和单元刚度矩阵的建立以及节点载荷的移置等等, 都依赖于单元位移模式。因此, 为了能从有限元法中得到正确的解答, 单元位移模式必须满足收敛条件, 使其能够正确反映弹性体中的真实位移形状。

所谓收敛性是指当单元划分越来越细, 网格越来越密时, 或者当单元大小固定, 而每个单元的自由度数越多时, 有限单元的解答能收敛于精确解。有限元法收敛条件如下:

① 在单元内位移模式必须是连续的, 而在相邻单元公共边界上位移必须协调。

这就要求用来构造单元的位移函数是单值连续的, 并在公共节点上具有相同的位移, 使其能在整个公共边界上具有相同的位移, 相邻单元在受力以后既不互相脱离也不互相侵入(图 3-25), 使得作为有限元计算模型的离散结构仍然保持为连续弹性体。

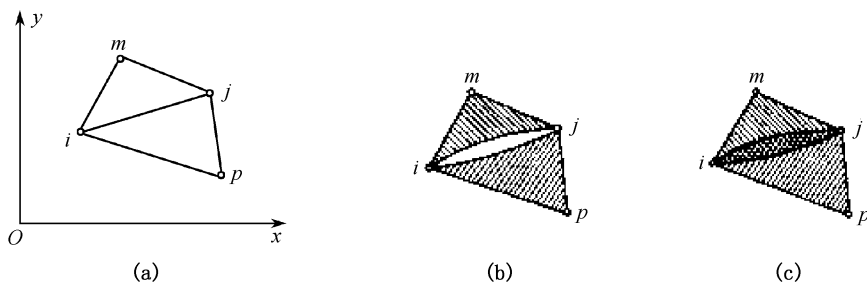


图 3-25 相邻单元的位移

- ② 位移模式必须能反映单元的刚体位移,即 $N_i + N_m + N_j = 1$ 。每一个单元的位移总可以分解为自身变形位移和与本身变形无关的刚体位移两部分。由于一个单元牵连在另一些单元上,其他单元发生变形时必将带动该单元作刚性位移。如悬臂梁的自由端单元跟随相邻单元作刚体位移(图 3-26)。因此,为模拟一个单元的真实位移,选取的单元位移模式,必须包括该单元的刚体位移。

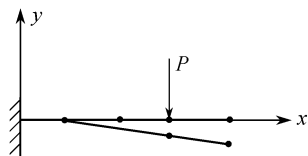


图 3-26 自由端单元的刚体位移

③ 位移模式必须能反映单元的常量应变。每一个单元的应变状态总可以分解为不依赖于单元内各点位置的常应变项和由各点位置决定的变量应变。而且当单元的尺寸较小时,单元中各点的应变趋于相等,单元的变形比较均匀,因而常量应变就成为应变的主要部分。因此,为了正确反映单元的应变状态,单元位移模式必须包括单元的常应变项。

现在来说明前面所选取的位移模式是满足这些条件的。首先,位移函数式(3-25)由于只包含多项式,当然在单元内是坐标 x, y 的连续函数,这就保证了位移在单元内的连续性。而在任意两个相邻单元 ijm 和 ipj 的公共边界 ij 上(见图 3-25(a)),显然在 i 和 j 节点上的两单元位移各是 u_i, v_i 和 u_j, v_j 都是相同的。而式(3-25)所示的位移分量在每个单元中都是坐标的线性函数,在公共边界 ij 上当然也是线性变化,所以上述两个相邻单元在 ij 上的任意一点都具有相同的位移,这就保证了相邻单元之间位移的连续性。

现在再来说明,位移模式(3-25)同时反映了三角形单元的刚体位移和常量应变。为此把式(3-25)改写成

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} y + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} y \\ v = \alpha_4 + \alpha_6 y + \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} x + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} x \end{cases}$$

把上式与式(3-8)比较,可见

$$u_0 = \alpha_1, v_0 = \alpha_4, w = \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2}$$

即 α_1 和 α_4 反映了刚体平动,而 α_5 和 α_3 反映了刚体转动。另一方面,将式(3-25)代入几何方程,得

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5$$

即常量 $\alpha_2, \alpha_6, \alpha_3$ 和 α_5 反映了单元的常应变项。

由上述可得,单元位移模式(3-25)全部满足收敛性的三个条件。

通常把满足收敛性第一个条件的单元称为协调(或连续的)单元。满足收敛性第二与第三条件的,称为完备单元。理论和实践都已证明:条件(b)和(c)是有限元法收敛于正确解答的必要条件,而再加上条件(a)就是充分条件。

从现在发展看,条件(a)不满足也可以(称为不协调单元),甚至有时比与它密切相关的协调单元要好。其原因就在于有限元近似解的性质。由于计算时假设了单元的位移模式,就相当于给单元加进了约束条件,要单元的变形服从所加约束,这样的离散结构模型比真实结构更刚一些。但是,由于不协调单元允许单元分离、重叠,相当于单元又变软了或者形成了铰。这两种影响可能会利弊抵消,从而使不协调单元有时会得到很好的效果。

3. 面积坐标

面积坐标是建立在单元本身上的局部坐标。对某些积分运算,可使计算简化。也可利用面积坐标来构造单元位移模式,对有些问题,比用直角坐标方便简单。

(1) 形函数的几何意义

如图3-27所示,在三角形单元内任取一点 $P(x, y)$, 并分别与三顶点 i, j, m 相连, 则将三角形的面积 A 分割成三个小三角形, 其面积相应记为 A_i, A_j 和 A_m 。显然

$$A = A_i + A_j + A_m$$

而根据形函数的定义,有

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ &= \frac{1}{2A}[x_j y_m - x_m y_j + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y] \\ &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{A_i}{A} \end{aligned} \quad (3-33a)$$

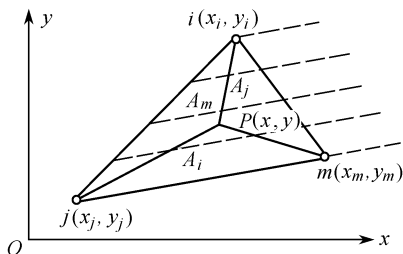


图 3-27

同理

$$N_j = \frac{A_j}{A}, \quad N_m = \frac{A_m}{A} \quad (3-33b)$$

显然,单元形函数 N_i, N_j, N_m 有着明显的几何意义:单元内任一点 (x, y) 的形函数等于该点与三角形顶点相连后形成的小三角形的相应面积与单元面积之比。

(2) 面积坐标的定义

如果定义三个量 L_i, L_j, L_m , 并使

$$L_i = \frac{A_i}{A}, L_j = \frac{A_j}{A}, L_m = \frac{A_m}{A} \quad (3-34)$$

则称 L_i, L_j, L_m 为点 $P(x, y)$ 的面积坐标。也就是讲,当这三个比值确定后,则 P 点的位置也就确定了。

根据上述定义,表明三角形单元中的形函数 N_i, N_j, N_m 实际上就是面积坐标 L_i, L_j, L_m 。而由定义,明显有

$$L_i + L_j + L_m = 1 \quad (3-35)$$

所以,确定 P 点位置独立的量只有两个,如同用 x, y 两个参数就可以确定 P 点位置一样。

根据定义,也可看到面积坐标是依附在单元上的,是一种局部坐标(也称自然坐标)。在有限元法中,应用局部坐标,有时是非常方便的。

(3) 面积坐标的特征

根据面积坐标的定义,可直接得到在单元三个节点处的面积坐标为

$$\text{节点 } i: L_i = 1, L_j = 0, L_m = 0$$

$$\text{节点 } j: L_i = 0, L_j = 1, L_m = 0$$

$$\text{节点 } m: L_i = 0, L_j = 0, L_m = 1$$

从图 3-27 上也可看出,在平行于 $\bar{j}m$ 边的直线上所有各点有相同的 L_i 值,并且这个值就等于该直线至 $\bar{j}m$ 边的距离与节点 i 至 $\bar{j}m$ 边的距离的比值。

面积坐标与直角坐标间的关系,也可能由面积坐标定义直接得到

$$L_i = \frac{A_i}{A} = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m) \quad (3-36)$$

即

$$\begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_m & b_m & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3-36a)$$

上式是用直角坐标表示面积坐标,有时需要用面积坐标来表示直角坐标。这时,只要将 L_i, L_j 和 L_m 分别乘上 x_i, x_j 和 x_m ,然后相加,并注意到常数 $a_i, b_i, c_i, a_j, b_j, c_j, a_m, b_m, c_m$ 分别是表示三角形面积 A 的行列式(3-29)的代数余子式,不难验证

$$x = x_i L_i + x_j L_j + x_m L_m$$

同理,有

$$y = y_i L_i + y_j L_j + y_m L_m$$

注意到

$$L_i + L_j + L_m = 1$$

则可得到面积坐标与直角坐标之间的变换公式

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} \quad (3-37)$$

当面积坐标的函数 $f(L_i, L_j, L_m)$ 对直角坐标 (x, y) 求导数时,根据复合函数求导规则,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial L_i} + \frac{\partial L_j}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial L_j} + \frac{\partial L_m}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial L_m} = \frac{1}{2A} \left(b_i \frac{\partial f}{\partial L_i} + b_j \frac{\partial f}{\partial L_j} + b_m \frac{\partial f}{\partial L_m} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial L_i}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial L_i} + \frac{\partial L_j}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial L_j} + \frac{\partial L_m}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial L_m} = \frac{1}{2A} \left(c_i \frac{\partial f}{\partial L_i} + c_j \frac{\partial f}{\partial L_j} + c_m \frac{\partial f}{\partial L_m} \right) \end{aligned} \quad (3-38)$$

在计算面积坐标的幂函数在三角形单元上的积分时,可以应用以下积分公式

$$\iint L_i^\alpha L_j^\beta L_m^\gamma dx dy = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A \quad (3-39)$$

式中 α, β, γ 为整数。

计算面积坐标的幂函数沿三角形单元某一边上积分时,可以应用以下积分公式

$$\int L_i^\alpha L_j^\beta ds = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} l \quad (3-40)$$

式中, s 为沿三角形某边上的积分变量; l 为该边的长度。

4. 单元刚度矩阵

本节将利用几何方程、物理方程、虚功方程来推导用节点位移表示单元应变、单元应力和节点力, 最终建立单元刚度矩阵。

(1) 单元应变与单元节点位移的关系

由几何方程(3-7), 并代入单元位移模式(3-25),

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (3-41)$$

可以简写成

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\Delta\}^e \quad (3-41a)$$

其中的矩阵 $[B]$ 可写成分块形式

$$[B] = [[B_i] [B_j] [B_m]] \quad (3-42)$$

而其子块矩阵为

$$[B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (3-43a)$$

$$\text{同理} \quad [B_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (3-43b)$$

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & c_m \\ c_i & b_m \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (3-43c)$$

式(3-41a)即为单元应变与单元节点位移的关系, 矩阵 $[B]$ 称为应变矩阵。对三角形单元, 它的元素都是只与单元的几何性质有关的常量。由式(3-41)可知, 单元内各点的应变分量也都是常量, 因此把三节点三角形单元称为平面问题的常应变单元。

(2) 单元应力与单元节点位移的关系

由物理方程

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

把式(3-41a)代入后, 可得用节点位移表示单元应力的表达式

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{\Delta\}^e = [S] \{\Delta\}^e \quad (3-44)$$

式中, $[S]$ 称为应力矩阵, 它反映了单元应力与节点位移之间的关系, 用分块矩阵表示为

$$\begin{aligned}
 [S] &= [D][B] = [D][B_i][B_j][B_m] \\
 &= [[D][B_i][D][B_j][D][B_m]] = [[S_i][S_j][S_m]] \quad (3-45)
 \end{aligned}$$

子块矩阵为

$$\begin{aligned}
 [S_i] &= [D][B_i] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{E}{2(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (3-46)
 \end{aligned}$$

对于平面应变问题,只需在式(3-46)中把 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 即可。

从式(3-46)可看到,由于弹性矩阵和应变矩阵中的元素都为常量,所以应力矩阵中的元素也为常量。也就是说,在每一单元中,应力分量都是常数,一般把它看作为单元形心处的值。通常不同的单元,应力是不相同的。因此在相邻两单元的公共边界上,应力将有突变,并不连续,这是有限元位移法的不足之处,是应力近似计算的一种表现。但应力突变值,随单元的细分而急剧减小,精度会改善,不影响有限元解答的收敛性。

(3) 单元刚度矩阵

这里直接利用虚功方程来建立刚度方程,因为虚功方程是以功能形式表述的平衡条件。

图 3-28(a)表示了作用于单元 e 上的节点力 $\{F\}^e$, 以及相应的应力分量 $\{\sigma\}$, 它们使单元处于平衡状态。

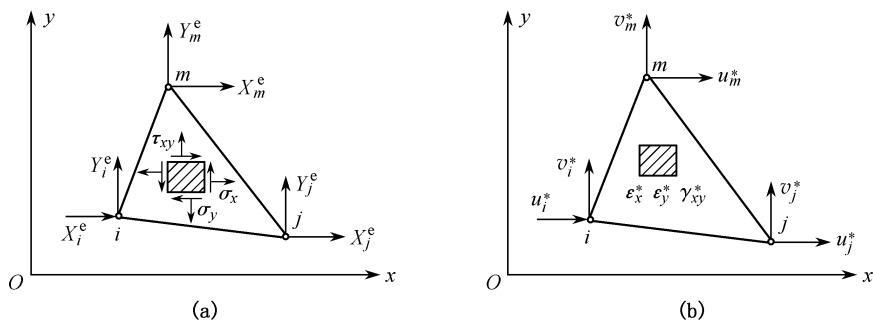


图 3-28 虚位移原理

(a) 节点力 (b) 虚应变

假设单元节点由于某种原因发生相对微小虚位移 $\{\Delta^*\}^e$, 在单元内部引起的虚应变为

$$\{\epsilon^*\} = \{\epsilon_x^* \quad \epsilon_y^* \quad \gamma_{xy}^*\}^T \quad (3-47)$$

如图 3-28(b)所示。现在在单元上只作用单元节点力 $\{F\}^e$, 应用虚功方程, 得

$$(\{\Delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iint_A \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} h dx dy \quad (3-48)$$

由几何方程

$$\{\epsilon^*\} = [B][\Delta^*]^e$$

由物理方程,并忽略虚位移引起的应力变化,有

$$\{\sigma\} = [D][B][\Delta]^e$$

代入后,有

$$\begin{aligned} (\{\Delta^*\}^e)^T \{F\}^e &= \iint_A ([B][\Delta^*]^e)^T [D][B][\Delta^*]^e h dx dy \\ (\{\Delta^*\}^e)^T \{F\}^e &= (\{\Delta^*\}^e)^T \left(\iint_A [B]^T [D][B] h dx dy \right) \{\Delta\}^e \end{aligned}$$

由于虚位移 $\{\Delta^*\}^e$ 是任意的,根据矩阵运算规则,则有

$$\{F\}^e = \left(\iint_A [B]^T [D][B] h dx dy \right) \{\Delta\}^e \quad (3-49)$$

令

$$\{K\}^e = \iint_A [B]^T [D][B] h dx dy \quad (3-50)$$

式(3-49)则为

$$\{F\}^e = [K]\{\Delta\}^e \quad (3-49a)$$

这就是单位刚度方程式,它反映了单元节点力和节点位移之间的关系,这也是单元分析的目的。

矩阵 $[K]$ 称为单元刚度矩阵。由于三角形单元的应变矩阵 $[B]$ 和弹性矩阵 $[D]$ 都是常量阵,所以式(3-50)为

$$[K] = [B]^T [D][B] h \iint_A dx dy = [B]^T [D][B] h A \quad (3-51)$$

式中, h 为单元厚度, A 为单元面积。

矩阵 $[K]$ 写成分块矩阵形式为

$$\begin{aligned} [K] &= [B]^T [D][B] h A = h A \begin{Bmatrix} [B_i]^T \\ [B_j]^T \\ [B_m]^T \end{Bmatrix} [D][B_i][B_j][B_m]^T \\ &= \begin{bmatrix} [K_{ii}^e] & [K_{ij}^e] & [K_{im}^e] \\ [K_{ji}^e] & [K_{jj}^e] & [K_{jm}^e] \\ [K_{mi}^e] & [K_{mj}^e] & [K_{mm}^e] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-52)$$

对平面应力问题,其子块矩阵为

$$\begin{aligned} [K_{rs}^e] &= [B_r]^T [D][B_s] h A \\ &= \frac{Eh}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_i b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ \mu c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m; s = i, j, m) \end{aligned} \quad (3-53)$$

而对平面应变问题,只要将式(3-53)中的 E 以 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 代,而 μ 以 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 代,即可得到

$$\begin{aligned} [K_{rs}^e] &= [B_r]^T [D][B_s] h A \\ &= \frac{E(1-\mu)h}{4(1+\mu)(1-2\mu)A} \begin{bmatrix} b_i b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r c_s & \frac{\mu}{1-\mu} b_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r b_s \\ \frac{\mu}{1-\mu} c_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r b_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(r = i, j, m; s = i, j, m) \quad (3-54)$$

从以上的推导过程中, 我们可以看到节点位移、单元应变、单元应力、节点力四个物理量之间的转换关系, 以及联系节点位移和节点力的单元刚度矩阵形成过程, 即

$$\begin{array}{ccccccc} \{\Delta\}^e & \xrightarrow{[B]} & \{\varepsilon\} & \xrightarrow{[D]} & \{\sigma\} & \xrightarrow{hA[B]^T} & \{F\} \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & [S]=[D][B] & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & [K]^e=[B]^T[D][B]hA & & \end{array}$$

再来看一下单元刚度矩阵中的子块矩阵和元素的力学意义。

把单元刚度方程(3-49)按子块矩阵的形式写, 有

$$\begin{Bmatrix} \{F_i\}^e \\ \{F_j\}^e \\ \{F_m\}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ii}^e] & [K_{ij}^e] & [K_{im}^e] \\ [K_{ji}^e] & [K_{jj}^e] & [K_{jm}^e] \\ [K_{mi}^e] & [K_{mj}^e] & [K_{mm}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_i^e\} \\ \{\Delta_j^e\} \\ \{\Delta_m^e\} \end{Bmatrix} \quad (3-55)$$

展开第一行, 有

$$\{F_i\}^e = [K_{ii}^e] \{\Delta_i^e\} + [K_{ij}^e] \{\Delta_j^e\} + [K_{im}^e] \{\Delta_m^e\} \quad (3-56)$$

令 $\{\Delta_i^e\} = \{\Delta_m^e\} = \{0\}$, $\{\Delta_j^e\} = \{1\}$ 。即 i 节点和 m 节点的位移分量均为零, 而 j 节点的各位移分量产生一单位位移。代入式(3-56)后, 有

$$\{F_i\}^e = [K_{ij}^e]$$

上式说明 $[K_{ij}^e]$ 的力学意义是当 j 节点产生单位位移, 而其他节点位移为零时, 需在 i 节点上产生的节点力。不失一般性, 单元刚度矩阵中的子块矩 $[K_{rs}^e]$ 表示 s 节点产生单位位移时在 r 节点上产生的节点力。

进一步展开式(3-56), 有

$$\begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^{11} & K_{ii}^{12} \\ K_{ii}^{21} & K_{ii}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ij}^{11} & K_{ij}^{12} \\ K_{ij}^{21} & K_{ij}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{im}^{11} & K_{im}^{12} \\ K_{im}^{21} & K_{im}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

并展开第一行, 可得

$$X_i^e = K_{ii}^{11}u_i + K_{ii}^{12}v_i + K_{ij}^{11}u_j + K_{ij}^{12}v_j + K_{im}^{11}u_m + K_{im}^{12}v_m$$

$$\text{令 } u_i = v_i = v_j = u_m = v_m = 0, u_j = 1$$

$$\text{则 } X_i^e = K_{ij}^{11}$$

$$\text{而令 } u_i = v_i = u_j = u_m = v_m = 0, v_j = 1 \text{ 时,}$$

$$\text{则 } X_i^e = K_{ij}^{12}$$

这两式可说明单元刚度矩阵中元素的力学意义是:

K_{ij}^{11} 表示 j 节点 x 方向产生单位位移时在 i 节点 x 方向产生的节点力; K_{ij}^{12} 表示 j 节点 y 方向产生单位位移时在 i 节点 x 方向产生的节点力分量。

不失一般性, 单元刚度矩阵中元素 K_{mp}^{nq} 表示 n 节点 q 方向 (q 取值为 1 或 2, 1 代表 x 方向, 2 代表 y 方向) 产生单位位移时在 m 节点 p 方向 (取值与含意同 q) 产生的节点力分量。

单元刚度矩阵有下述的一些性质:

① 单元刚度矩阵决定于该单元的形状、大小、方位及材料的弹性常数,而与单元的位置无关,即不随单元或坐标轴的平行移动而改变。同时,单元刚度矩阵还特别与所假设的单元位移模式有关,不同的位移模式,将带来不同的单元刚度矩阵。

所以,用有限元法求解,选择适当的单元位移模式和单元形状是提高计算精度的关键。

② 单元刚度矩阵是对称阵,即 $K_{pq}^e = K_{qp}^e$ 这可用功互等定理给出,就是 q 处单位位移给出的 p 处的节点力,等于 p 处的单位位移给出 q 处的节点力。

③ 单元刚度矩阵是奇异矩阵,即 $[K]$ 所对应的行列式 $|K^e|$ 的值等于零。从物理学上讲,由于单元的六个节点力分量组成一个平衡力系,所以它们的主矢量为零。例如

$$X_i^e + X_j^e + X_m^e = 0$$

或 $(K_{ii}^{11} + K_{ji}^{11} + K_{mi}^{11})u_i + (K_{ii}^{12} + K_{ji}^{12} + K_{mi}^{12})v_i + \dots + (K_{im}^{12} + K_{jm}^{12} + K_{mm}^{12})v_m = 0$

由于 $\{\Delta^e\}$ 不恒等于零,所以上式中各项系数必同时为零。也就是单元刚度矩阵中任一列的第 1 3 5 行元素的代数和或者第 2 4 6 行元素的代数和为零。又由行列式性质(某行或某列所有的元素乘以同一个数,加至另一行或另一列的对应元素上,该行列式的值不变),可见任一列元素的代数和为零。这样单元刚度矩阵所对应的行列式的值为零,即不存在逆矩阵。

从另一角度讲,由式(3-49)给定节点位移,可确定节点力。但是若给出节点力,却会由于无逆阵,求不出节点位移。这是由于单元节点位移由两部分组成,其中的刚体运动也会引起节点位移。所以也可以说,没有消除刚体位移,导致单元刚度阵是奇异矩阵。

十一、非节点载荷的移置

根据有限元法的基本原理,载荷都必须作用在节点上。但是在工程实际中,实际载荷又不可能完全是作用在节点上,如自重、惯性力、风载荷等。因此必须把非节点载荷移置到节点上,变换为等效节点载荷,才能进行有限元分析。非节点载荷向节点移置,通常按照静力等效的原则。

所谓静力等效原则,是指原来作用在单元上的载荷与移置到节点上的等效载荷,在单元的任何虚位移上所作的虚功应相等。载荷作这样的变换,会引起误差。但由圣维南原理,这种误差是局部性的,对整体结构影响不大,而且随着单元的逐渐加密,这一影响将逐步缩小。

1. 计算等效节点载荷的一般公式

设在单元 e 内部作用体积力 $\{P_V\} = \{X \ Y\}^T$,沿单元边界作用分布面力 $\{P_A\} = \{\bar{X} \ \bar{Y}\}^e$,而在单元中间某点作用集中力 $\{Q\} = \{Q_x \ Q_y\}^T$,如图 3-29(a)所示,图中 $\{Q\}$ 未画出。

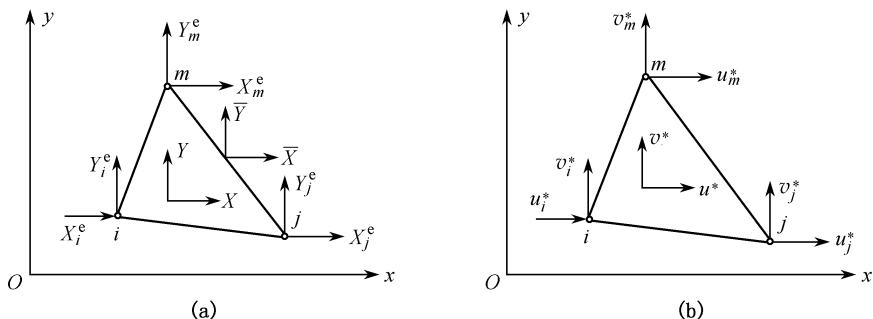


图 3-29 等效节点载荷移置

(a) 单元载荷;(b) 虚位移

设上述载荷向节点移置后,其相应的单元等效节点载荷矩阵为

$$\{P\}^e = \{X_i^e \quad Y_i^e \quad X_j^e \quad Y_j^e \quad X_m^e \quad Y_m^e\}^T$$

假想单元由于某种原因发生了虚位移,如图 3-29(b)所示,此时的单元节点虚位移为

$$\{\Delta^*\}^e = \{u_i^* \quad v_i^* \quad u_j^* \quad v_j^* \quad u_m^* \quad v_m^*\}^T$$

由位移模式,单元内任一点的虚位移为

$$\{f^*\}^e = \{u^* \quad v^*\}^T = [N][\Delta^*]^e$$

根据上述静力等效原则,有

$$(\{\Delta^*\}^e)^T \{P\}^e = (\{f^*\}^e_b)^T \{Q\} + \int_S (\{f^*\}^e)^T \{P_A\} h ds + \iint_A (\{f^*\}^e)^T \{P_V\} h dx dy$$

式中 $\{f^*\}^e_b$ 表示单元位移函数在集中力作用点 b 处取值。

把式(3-30)代入,有

$$(\{\Delta^*\}^e)^T \{P\}^e = (\{\Delta^*\}^e)^T ([N]^T \{Q\} + \int_S [N]^T \{P_A\} h ds + \iint_A [N]^T \{P_V\} h dx dy)$$

由于 $\{\Delta^*\}^e$ 是任意的,所以上述等式两边与其相乘的矩阵应相等,这样就有

$$\{P\}^e = [N]^T \{Q\} + \int_S [N]^T \{P_A\} h ds + \iint_A [N]^T \{P_V\} h dx dy \quad (3-57)$$

这就是等效节点载荷计算式。从中可看出,等效节点载荷与形函数,即单元位移模式密切相关。

2. 常用一些载荷的移置

(1) 集中力

设在单元的 ij 边界上 d 点作用有沿 x 方向的载荷 Q_x ,作用点 d 分别距节点 i、j 为 l_i 和 l_j ,见图 3-30。由式(3-57),可得

$$\{P\}^e = [N]^T \{Q\} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{bmatrix}_d \begin{Bmatrix} Q_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_x N_i \\ 0 \\ Q_x N_j \\ 0 \\ Q_x N_m \\ 0 \end{Bmatrix}_d \quad (3-58)$$

根据形函数与面积坐标的性质,在 d 点,有

$$N_i = L_i = \frac{A_j}{A} = \frac{l_j}{l}, \quad N_j = L_j = \frac{A_i}{A} = \frac{l_i}{l}, \quad N_m = 0$$

式中, l 为三角形单元 ij 边的长度。代入式(3-58)后,有

$$\{P\}^e = \frac{Q_x}{l} \{l_j \quad 0 \quad l_i \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

上式表明,作用在单元边界上的集中力只移置到其相邻的节点上,第三个节点不受力。

移置的结果也表明,它与直接按“合力相等,合力矩相等”这一原则求等效节点力的结果是相同的。所以可以利用这一点,对一些简单的非节点载荷用“直接法”求等效节点载荷,这样更方便。

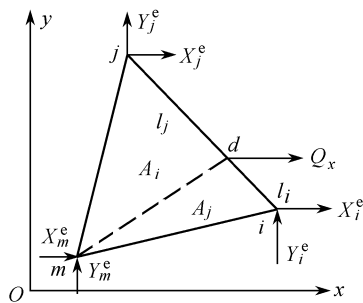


图 3-30 集中力的移置

(2) 分布面力

设在单元的 ij 边界上作用有线性分布的 x 方向的载荷, 在 i 节点上为 q , 而 j 节点处为零, 如图 3-31 所示。

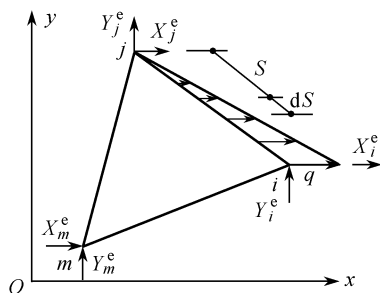


图 3-31 分布面力的载荷移置

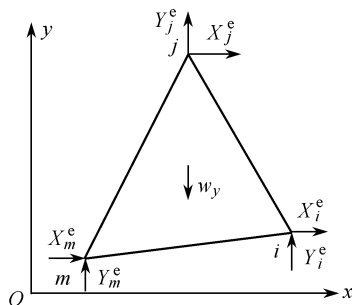


图 3-32 均布体力的载荷移置

取 ij 边界上距 j 节点为 s 的微线段 ds , 则 ds 段中的载荷可看作为集中力, 设为

$$\{dQ_s\} = \begin{Bmatrix} \frac{q}{l}sds \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由前述边界上集中力的移置规律, 该微线段上的载荷转化为节点载荷是

$$\{dP\}^e = \frac{qsds}{l^2} \{s \quad 0 \quad 1-s \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

式中 l 为 ij 边界的长度。这样, 对上式积分可得到等效节点载荷矩阵

$$\begin{aligned} \{P\}^e &= \int_0^l \{s \quad 0 \quad 1-s \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \frac{q}{l^2} sds \\ &= \frac{ql}{2} \left\{ \frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T \end{aligned}$$

上式表明, 在 ij 边界上线性分布面力的合力 $\frac{ql}{2}$, $\frac{2}{3}$ 分配到 i 节点, $\frac{1}{3}$ 分配到 j 节点, 而且与外载荷一样, 都是 x 方向。这结果也与直接按“合力相等、合力矩相等”的转换结果相同。

(3) 分布体力

设在单元内只作用单位体积的体力 $\{P_v\} = (0 \quad -w_y)^T$ 。由式(3-57)可得相应的等效节点载荷矩阵为

$$\begin{aligned} \{P\}^e &= \iint_A [N] \{P_v\} h dx dy \\ &= \iint_A \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -w_y \end{Bmatrix} h dx dy \\ &= \iint_A -w_y \{0 \quad N_i \quad 0 \quad N_j \quad 0 \quad N_m\}^T h dx dy \end{aligned} \quad (3-59)$$

式中, w_y 为常量, 分别对 N_i, N_j, N_m 进行积分运算, 由形函数与面积坐标的关系, 以及根据面积坐标的积分公式, 得

$$\iint_A N_i dx dy = \iint_A L_i dx dy = \frac{1!}{(1+2)!} \cdot 2A = \frac{A}{3}$$

同理

$$\iint_A N_j dx dy = \frac{A}{3}, \iint_A N_m dx dy = \frac{A}{3}$$

代入式(3-59), 得

$$\{P\}^e = -Ahw_y \left\{ 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \right\}^T$$

设 $W_y = Ahw_y$ 为单元的总体力, 则

$$\{P\}^e = \left\{ 0 \quad -\frac{1}{3}W_y \quad 0 \quad -\frac{1}{3}W_y \quad 0 \quad -\frac{1}{3}W_y \right\}^T$$

上式表明, 均布体积力的移置规律是把单元重力平均地分配到三个节点上。

十二、总刚度方程

经过单元分析, 建立了各单元的单元刚度矩阵和节点力矩阵后, 就可以进行结构的整体分析。结构的整体分析必须遵循下列两原则:

第一是整个离散体系的各单元在变形后必须在节点处协调地联结起来。例如与 i 节点相联结的有 n 个单元, 则这 n 个单元在该节点 i 处必须具有相同的节点位移(节点位移连续条件), 即有

$$\{\Delta_i^{(1)}\} = \{\Delta_i^{(2)}\} = \dots = \{\Delta_i^{(n)}\} = \{\Delta_i\} \quad (3-60)$$

第二是组成离散体的各节点必须满足平衡条件。如与 i 节点直接相连的所有各单元作用于该节点上的节点力, 应与作用在该节点上的节点载荷保持平衡, 用公式表示为

$$\sum_e \{F_i^e\} - \{R_i\} = 0 \quad (3-61)$$

式中 $\{F_i^e\} = \{X_i^e \quad Y_i^e\}^T$ 表示单元 e 的 i 节点的节点力矢量, $\sum_e$ 表示直接与节点 i 相连接的所有单元求和。 $\{R_i\} = \{R_{ix} \quad R_{iy}\}^T$ 表示节点 i 上的节点外载荷, 它包括两部分, 一是直接作用在点 i 上的集中力 $\{Q_i\} = \{Q_{ix} \quad Q_{iy}\}^T$, 二是各单元在节点 i 处的等效节点载荷的和, 即

$$\{R_i\} = \{Q_i\} + \sum_e \{P_i^e\} \quad (3-62)$$

如果在 i 节点上既无集中力作用, 直接与 i 节点相联结的各单元也没有等效节点载荷分配到 i 节点上, 则 $\{R_i\}$ 为零矢量, 即 $\{R_i\} = \{0 \ 0\}^T$ 。

整体分析的目的就是根据上述原则建立用节点位移表示的整个离散体系的平衡方程组, 即总刚度方程。

(1) 总刚度方程的形成

现以图 3-33 所示的离散体系为例, 来说明总刚度方程的形成过程。

首先应求出各单元的刚度矩阵, 这样各单元的刚度方程分别为

单元①: $i=1, j=2, m=3$

$$\begin{Bmatrix} \{F_1^{\textcircled{1}}\} \\ \{F_2^{\textcircled{1}}\} \\ \{F_3^{\textcircled{1}}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^{\textcircled{1}}] & [K_{12}^{\textcircled{1}}] & [K_{13}^{\textcircled{1}}] \\ [K_{21}^{\textcircled{1}}] & [K_{22}^{\textcircled{1}}] & [K_{23}^{\textcircled{1}}] \\ [K_{31}^{\textcircled{1}}] & [K_{32}^{\textcircled{1}}] & [K_{33}^{\textcircled{1}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1^{\textcircled{1}}\} \\ \{\Delta_2^{\textcircled{1}}\} \\ \{\Delta_3^{\textcircled{1}}\} \end{Bmatrix} \quad (3-63a)$$

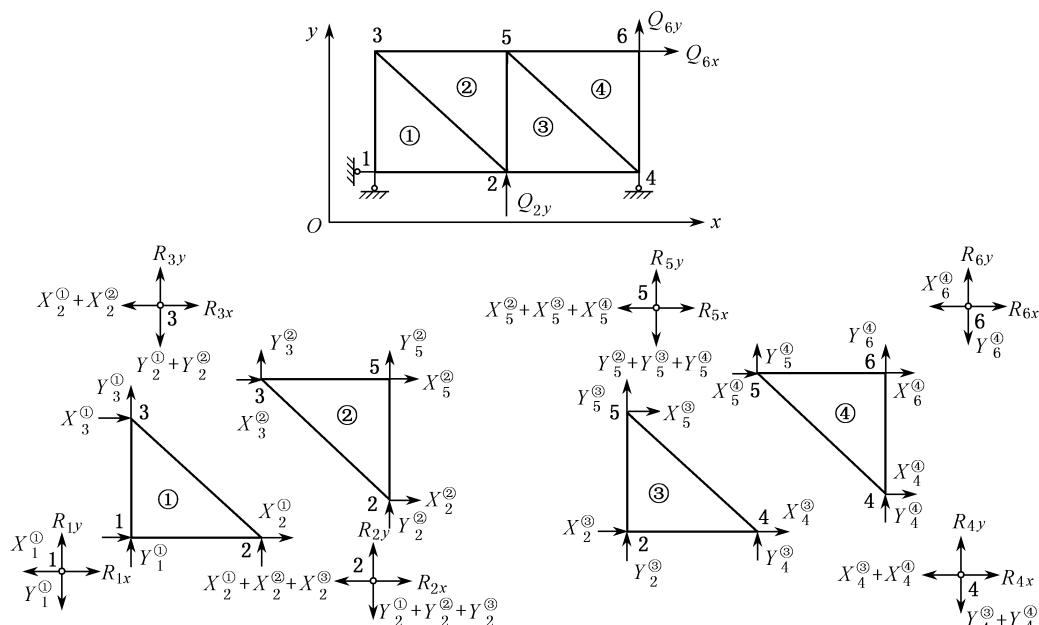


图 3-33 总刚度方程建立过程

单元②: $j=2, j=5, m=3$

$$\begin{Bmatrix} \{F_2^{\textcircled{2}}\} \\ \{F_5^{\textcircled{2}}\} \\ \{F_3^{\textcircled{2}}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{22}^{\textcircled{2}}] & [K_{25}^{\textcircled{2}}] & [K_{23}^{\textcircled{2}}] \\ [K_{52}^{\textcircled{2}}] & [K_{55}^{\textcircled{2}}] & [K_{53}^{\textcircled{2}}] \\ [K_{32}^{\textcircled{2}}] & [K_{35}^{\textcircled{2}}] & [K_{33}^{\textcircled{2}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_2^{\textcircled{2}}\} \\ \{\Delta_5^{\textcircled{2}}\} \\ \{\Delta_3^{\textcircled{2}}\} \end{Bmatrix} \quad (3-63b)$$

单元③: $i=4, j=5, m=2$

$$\begin{Bmatrix} \{F_4^{\textcircled{3}}\} \\ \{F_5^{\textcircled{3}}\} \\ \{F_2^{\textcircled{3}}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{44}^{\textcircled{3}}] & [K_{45}^{\textcircled{3}}] & [K_{42}^{\textcircled{3}}] \\ [K_{54}^{\textcircled{3}}] & [K_{55}^{\textcircled{3}}] & [K_{52}^{\textcircled{3}}] \\ [K_{24}^{\textcircled{3}}] & [K_{25}^{\textcircled{3}}] & [K_{22}^{\textcircled{3}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_4^{\textcircled{3}}\} \\ \{\Delta_5^{\textcircled{3}}\} \\ \{\Delta_2^{\textcircled{3}}\} \end{Bmatrix} \quad (3-63c)$$

单元④: $i=4, j=6, m=5$

$$\begin{Bmatrix} \{F_4^{\textcircled{4}}\} \\ \{F_6^{\textcircled{4}}\} \\ \{F_5^{\textcircled{4}}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{44}^{\textcircled{4}}] & [K_{46}^{\textcircled{4}}] & [K_{45}^{\textcircled{4}}] \\ [K_{64}^{\textcircled{4}}] & [K_{66}^{\textcircled{4}}] & [K_{65}^{\textcircled{4}}] \\ [K_{54}^{\textcircled{4}}] & [K_{56}^{\textcircled{4}}] & [K_{55}^{\textcircled{4}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_4^{\textcircled{4}}\} \\ \{\Delta_6^{\textcircled{4}}\} \\ \{\Delta_5^{\textcircled{4}}\} \end{Bmatrix} \quad (3-63d)$$

接着可建立各节点的平衡方程。由图 3-33 可得到用矩阵表示的平衡方程为

$$\begin{aligned} \{F_1^{\textcircled{1}}\} &= \{R_1\} \\ \{F_2^{\textcircled{1}}\} + \{F_2^{\textcircled{2}}\} + \{F_2^{\textcircled{3}}\} &= \{R_2\} \\ \{F_3^{\textcircled{1}}\} + \{F_3^{\textcircled{2}}\} &= \{R_3\} \\ \{F_4^{\textcircled{3}}\} + \{F_4^{\textcircled{4}}\} &= \{R_4\} \end{aligned} \quad (3-64)$$

$$\{F_5^{(2)}\} + \{F_5^{(3)}\} + \{F_5^{(4)}\} = \{R_5\}$$

$$\{F_6^{(4)}\} = \{R_6\}$$

式中,对应本例情况, $\{R_1\} = \{Q_{1x} \ Q_{1y}\}^T$, $\{R_4\} = \{0 \ Q_{4y}\}^T$, 其中节点力分量理解为支反力, 而 $\{R_2\} = \{0 \ Q_{2y}\}^T$, $\{R_6\} = \{Q_{6x} \ Q_{6y}\}^T$ 为节点外载荷(集中力), 其余 $\{R_3\}$ 和 $\{R_5\}$ 均为零矢量。

将各单元刚度方程式(3-63a)~式(3-63d), 按节点力展开, 并代入式(3-64)中, 利用节点位移连续条件(3-60), 即

$$\{\Delta_1^{(1)}\} = \{\Delta_1\} \quad \{\Delta_2^{(1)}\} = \{\Delta_2^{(2)}\} = \{\Delta_2^{(3)}\} = \{\Delta_2\}$$

$$\{\Delta_3^{(1)}\} = \{\Delta_3^{(2)}\} = \{\Delta_3\} \quad \{\Delta_4^{(3)}\} = \{\Delta_4^{(4)}\} = \{\Delta_4\}$$

$$\{\Delta_5^{(3)}\} = \{\Delta_5^{(4)}\} = \{\Delta_5\} \quad \{\Delta_6^{(4)}\} = \{\Delta_6\}$$

可以得到用节点位移表示的各节点的平衡方程

$$[K_{11}^{(1)}] \{\Delta_1\} + [K_{12}^{(1)}] \{\Delta_2\} + [K_{13}^{(1)}] \{\Delta_3\} = \{R_1\}$$

$$[K_{21}^{(1)}] \{\Delta_1\} + ([K_{22}^{(1)}] + [K_{22}^{(2)}] + [K_{22}^{(3)}]) \{\Delta_2\} + ([K_{23}^{(1)}] + [K_{23}^{(2)}]) \{\Delta_3\} +$$

$$[K_{24}^{(3)}] \{\Delta_4\} + ([K_{25}^{(2)}] + [K_{25}^{(3)}]) \{\Delta_5\} = \{R_2\}$$

$$[K_{31}^{(1)}] \{\Delta_1\} + ([K_{32}^{(1)}] + [K_{32}^{(2)}]) \{\Delta_2\} + ([K_{33}^{(1)}] + [K_{33}^{(2)}]) \{\Delta_3\} + [K_{35}^{(2)}] \{\Delta_5\} = \{R_3\}$$

$$[K_{42}^{(3)}] \{\Delta_2\} + ([K_{44}^{(3)}] + [K_{44}^{(4)}]) \{\Delta_4\} + ([K_{45}^{(3)}] + [K_{45}^{(4)}]) \{\Delta_5\} + [K_{46}^{(4)}] \{\Delta_6\} = \{R_4\}$$

$$([K_{52}^{(2)}] + [K_{52}^{(3)}]) \{\Delta_2\} + [K_{53}^{(2)}] \{\Delta_3\} + ([K_{54}^{(3)}] + [K_{54}^{(4)}]) \{\Delta_4\} +$$

$$([K_{55}^{(2)}] + [K_{55}^{(3)}] + [K_{55}^{(4)}]) \{\Delta_5\} + [K_{56}^{(4)}] \{\Delta_6\} = \{R_5\}$$

$$[K_{64}^{(4)}] \{\Delta_4\} + [K_{65}^{(4)}] \{\Delta_5\} + [K_{66}^{(4)}] \{\Delta_6\} = \{R_6\} \quad (3-65)$$

设

$$[K_{ij}] = \sum_e [K_{ij}^e] \quad (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6) \quad (3-66)$$

即有

$$[K_{11}] = [K_{11}^{(1)}] \quad [K_{12}] = [K_{12}^{(1)}] \quad [K_{13}] = [K_{13}^{(1)}]$$

$$[K_{21}] = [K_{21}^{(1)}] \quad [K_{22}] = [K_{22}^{(1)}] + [K_{22}^{(2)}] + [K_{22}^{(3)}] \quad [K_{23}] = [K_{23}^{(1)}] + [K_{23}^{(2)}]$$

$$[K_{24}] = [K_{24}^{(3)}] \quad [K_{25}] = [K_{25}^{(2)}] + [K_{25}^{(3)}]$$

$$[K_{31}] = [K_{31}^{(1)}] \quad [K_{32}] = [K_{32}^{(1)}] + [K_{32}^{(2)}] \quad [K_{33}] = [K_{33}^{(1)}] + [K_{33}^{(2)}] \quad [K_{35}] = [K_{35}^{(2)}]$$

$$[K_{42}] = [K_{42}^{(3)}] \quad [K_{44}] = [K_{44}^{(3)}] + [K_{44}^{(4)}] \quad [K_{45}] = [K_{45}^{(3)}] + [K_{45}^{(4)}] \quad [K_{46}] = [K_{46}^{(4)}]$$

$$[K_{52}] = [K_{52}^{(2)}] + [K_{52}^{(3)}] \quad [K_{53}] = [K_{53}^{(2)}] \quad [K_{54}] = [K_{54}^{(3)}] + [K_{54}^{(4)}]$$

$$[K_{55}] = [K_{55}^{(2)}] + [K_{55}^{(3)}] + [K_{55}^{(4)}] \quad [K_{56}] = [K_{56}^{(4)}]$$

$$[K_{64}] = [K_{64}^{(4)}] \quad [K_{65}] = [K_{65}^{(4)}] \quad [K_{66}] = [K_{66}^{(4)}]$$

这样, 式(3-65)可写成

$$\sum_{s=1}^6 [K_{ps}] \{\Delta_s\} = \{R_p\} \quad (p = 1, 2, \dots, 6) \quad (3-67a)$$

式中如果 $\{\Delta_s\}$ 没有出现, 则意味着所对应的 $[K_{ps}] = [0]$

写成矩阵形式, 即为

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & & & \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] & [K_{25}] & \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & & [K_{35}] & \\ & [K_{42}] & & [K_{44}] & [K_{45}] & [K_{46}] \\ & [K_{52}] & [K_{53}] & [K_{54}] & [K_{55}] & [K_{56}] \\ & & & [K_{64}] & [K_{65}] & [K_{66}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \{\Delta_2\} \\ \{\Delta_3\} \\ \{\Delta_4\} \\ \{\Delta_5\} \\ \{\Delta_6\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R_1\} \\ \{R_2\} \\ \{R_3\} \\ \{R_4\} \\ \{R_5\} \\ \{R_6\} \end{Bmatrix} \quad (3-67b)$$

上式可简写成

$$[K]\{\Delta\} = \{R\}$$

该式即称为结构的总刚度方程,或称为结构的整体平衡方程组,式中 $\{\Delta\}$ 为结构的节点位移矩阵, $\{R\}$ 为结构的节点载荷矩阵,它的组成由式(3-62)所规定,即

$$\{R_i\} = \{Q_i\} + \sum_e \{P_i^e\}$$

而 $[K]$ 称为结构的总刚度矩阵。

(2) 总刚度矩阵的形成和特征

从总刚度方程的构成可以看到,总刚度方程中关键是结构总刚度矩阵的形成。由上面的实例,不失一般性,可以看出总刚度矩阵中各子块矩阵的组成规律是:矩阵 $[K]$ 中的子阵 $[K_{ij}]$ 是与 i, j 节点直接相连接的各单元刚度矩阵中出现的相应子矩阵 $[K_{ij}^e]$ 的叠加,即

$$[K_{ij}] = \sum_e [K_{ij}^e]$$

如上例中 $[K_{25}]$ 是与节点“2”、“5”直接相连的单元②、③的刚度矩阵中子块 $[K_{25}^2]$ 和 $[K_{25}^3]$ 叠加的结果。

按照上述特点,在计算出单元刚度矩阵之后,就可以按下述方法直接形成总刚度矩阵。在此,以图3-33所示的例子加以说明。

① 计算出结构中所有单元的单元刚度矩阵;

② 根据结构的节点总数 n ,画一个 $n \times n$ 的表格,本例中 $n=6$,则画一个 6×6 的表格,见下表。表格中每一行和每一列分别用 $1, 2, \dots, n$ 编号,则每一方格可表示为总刚度矩阵中的一子块矩阵 $[K_{ij}]$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n$)。

	1	2	3	4	5	6
1	$[K_{11}^1]$	$[K_{12}^1]$	$[K_{13}^1]$			
2	$[K_{21}^1]$	$[K_{22}^1] [K_{22}^2]$ $[K_{22}^3]$	$[K_{23}^1] [K_{23}^2]$	$[K_{24}^3]$	$[K_{25}^2] [K_{25}^3]$	
3	$[K_{31}^1]$	$[K_{32}^1] [K_{32}^2]$	$[K_{33}^1] [K_{33}^2]$		$[K_{35}^2]$	
4		$[K_{42}^3]$		$[K_{44}^3] [K_{44}^4]$	$[K_{45}^3] [K_{45}^4]$	$[K_{46}^4]$
5		$[K_{52}^2] [K_{52}^3]$	$[K_{53}^2]$	$[K_{54}^3] [K_{54}^4]$	$[K_{55}^2] [K_{55}^3]$ $[K_{55}^4]$	$[K_{56}^4]$
6				$[K_{64}^4]$	$[K_{65}^4]$	$[K_{66}^4]$

③ 将每一单元的单元刚度矩阵中的子块矩阵 $[K_{ij}^e]$ 按其下标依次填入上述表格中的第 i

$$\begin{aligned}
 [K_{sr}]^T &= \sum_e [K_{sr}^e]^T = \sum_e ([B_s]^T [D] [B_r])^T hA \\
 &= \sum_e ([B_r]^T [D] [B_s]) hA = \sum_e [K_{rs}^e]^T = [K_{rs}]
 \end{aligned}$$

所以,总刚度矩阵是对称矩阵。这样在实际计算时,只需计算在对角线上以及在某一边的元素。

③ 总刚度矩阵是一个奇异阵。由于结构在外载荷作用下处于平衡状态,因此节点载荷矩阵 $\{R\}$ 分量要满足三个静力平衡方程,反映在总刚度矩阵 $[K]$ 中就存在三个线性相关的行或列,这同单元刚度矩阵类似,所以它是奇异的,不存在逆矩阵。

分析至此我们还没有引进约束条件,也就是讲,结构还存在着刚体位移,这也是通过式(3-67)我们还求不出节点位移的原因。所以在求解总刚度方程前,需要根据约束条件,修正总刚度方程。消除总刚度矩阵的奇异性,然后才能求出节点位移。

④ 总刚度矩阵中主对角线上的元素总是正的。如总刚度矩阵 $[K]$ 中的元素 K_{33}^{11} 表示节点3在x方向产生单位位移而其他位移为零时,在节点3的x方向上产生的力,它自然应顺着位移方向,因而为正号。

十三、边界条件的处理

由于总刚度矩阵是奇异矩阵,不存在逆阵。因此要求得唯一解,必须利用给定的边界条件对总刚度方程进行处理,消除总刚度矩阵的奇异性。边界约束条件的处理实质就是消除结构的刚体位移,以使能求得节点位移。

有单元法中的边界条件也是假定在节点上受到约束。限制线位移的约束是支座链杆。每一个约束条件,将提供一个位移方程 $u_i = \alpha$ (α 为已知量),这使结构少一个特定的位移未知量,但却增加了一个待定的支承反力 R_i 。当 $\alpha = 0$ 时,我们称之为零位移约束,这时的支座链杆为刚性支杆。而当 $\alpha \neq 0$ 时,表现为支座的沉陷,称为非零位移约束。当然非零位移约束也可能是弹性支承,它的处理以后将讲到。

边界约束条件的处理方法有三种。

1. 划行划列法(又称消行降阶法)

当结构的边界条件均是零位移约束时,如对图3-33所示结构,在节点1为固定铰支座,节点4为x方向活动铰支座,即有

$$u_1 = v_1 = v_4 = 0$$

把以上条件引入总刚度方程(3-69)后,在节点位移矩阵 $\{\Delta\}$ 中相应项为零值,在总刚度矩阵中,与位移为零的项所对应的行与列的元素,在求其他节点的位移时将不起作用,因而可以从矩阵 $[K]$ 中划去。这样原来12阶的线性方程,就降低为9阶线性方程组,见式(3-70)。

这种修正总刚度方程的办法,明显降低了矩阵的阶数,对于单元数较少的结构,采用手算时,是比较适用的。但是由于在处理的同时,也明显地改变了总刚度方程的排列顺序,使计算机程序变得复杂,又是不可取的。因此在有限元实用程序中常常不用此方法来处理边界约束条件。

$$\begin{Bmatrix} K_{11}^{11} & K_{11}^{12} & K_{12}^{11} & K_{12}^{12} & K_{13}^{11} & K_{13}^{12} & & & & & & \\ K_{11}^{21} & K_{11}^{22} & K_{12}^{21} & K_{12}^{22} & K_{13}^{21} & K_{13}^{22} & & & & & & \\ K_{21}^{11} & K_{21}^{12} & K_{22}^{11} & K_{22}^{12} & K_{23}^{11} & K_{23}^{12} & K_{24}^{11} & K_{24}^{12} & K_{25}^{11} & K_{25}^{12} & & \\ K_{21}^{21} & K_{21}^{22} & K_{22}^{21} & K_{22}^{22} & K_{23}^{21} & K_{23}^{22} & K_{24}^{21} & K_{24}^{22} & K_{25}^{21} & K_{25}^{22} & & \\ K_{31}^{11} & K_{31}^{12} & K_{32}^{11} & K_{32}^{12} & K_{33}^{11} & K_{33}^{12} & & & K_{35}^{11} & K_{35}^{12} & & \\ K_{31}^{21} & K_{31}^{22} & K_{32}^{21} & K_{32}^{22} & K_{33}^{21} & K_{33}^{22} & & & K_{35}^{21} & K_{35}^{22} & & \\ & & K_{42}^{11} & K_{42}^{12} & & & K_{44}^{11} & K_{44}^{12} & K_{45}^{11} & K_{45}^{12} & K_{46}^{11} & K_{46}^{12} \\ & & K_{42}^{21} & K_{42}^{22} & & & K_{44}^{21} & K_{44}^{22} & K_{45}^{21} & K_{45}^{22} & K_{46}^{21} & K_{46}^{22} \\ & & K_{52}^{11} & K_{52}^{12} & K_{53}^{11} & K_{53}^{12} & K_{54}^{11} & K_{54}^{12} & K_{55}^{11} & K_{55}^{12} & K_{56}^{11} & K_{56}^{12} \\ & & K_{52}^{21} & K_{52}^{22} & K_{53}^{21} & K_{53}^{22} & K_{54}^{21} & K_{54}^{22} & K_{55}^{21} & K_{55}^{22} & K_{56}^{21} & K_{56}^{22} \\ & & & & & & K_{64}^{11} & K_{64}^{12} & K_{65}^{11} & K_{65}^{12} & K_{66}^{11} & K_{66}^{12} \\ & & & & & & K_{64}^{21} & K_{64}^{22} & K_{65}^{21} & K_{65}^{22} & K_{66}^{21} & K_{66}^{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ v_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ \vdots \\ v_2 \\ \vdots \\ u_3 \\ \vdots \\ v_3 \\ \vdots \\ u_4 \\ \vdots \\ v_4 \\ \vdots \\ u_5 \\ \vdots \\ v_5 \\ \vdots \\ u_6 \\ \vdots \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ \vdots \\ R_{1y} \\ \vdots \\ R_{2x} \\ \vdots \\ R_{2y} \\ \vdots \\ R_{3x} \\ \vdots \\ R_{3y} \\ \vdots \\ R_{4x} \\ \vdots \\ R_{4y} \\ \vdots \\ R_{5x} \\ \vdots \\ R_{5y} \\ \vdots \\ R_{6x} \\ \vdots \\ R_{6y} \end{Bmatrix} \quad (3-70)$$

2. 划零置1法(又称消行修正法)

当边界条件不一定是零位移约束,而是已知值时,如对图3-33所示结构,有

$$u_1 = \bar{\alpha}, v_1 = \bar{\beta}, v_4 = \bar{\gamma} \quad (3-71)$$

其中 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 均为已知值,当然也可以为零。用划零置1法可以这样处理:

① 在总刚度矩阵 $[K]$ 中,把与给定节点位移相对应的主对角元上的元素置为1,而该行该列上的其余元素置为零。对式(3-69),则应在 $[K]$ 中把 $K_{11}^{11}, K_{11}^{22}, K_{44}^{22}$ 置为1,而第一行和第一列,第二行和第二列,第八行和第八列中的其余元素均取为零(见式3-72)。

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{22}^{11} & K_{22}^{12} & K_{23}^{11} & K_{23}^{12} & K_{24}^{11} & 0 & K_{25}^{11} & K_{25}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{22}^{21} & K_{22}^{22} & K_{23}^{21} & K_{23}^{22} & K_{24}^{21} & 0 & K_{25}^{21} & K_{25}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{32}^{11} & K_{32}^{12} & K_{33}^{11} & K_{33}^{12} & 0 & 0 & K_{35}^{11} & K_{35}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{32}^{21} & K_{32}^{22} & K_{33}^{21} & K_{33}^{22} & 0 & 0 & K_{35}^{21} & K_{35}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{42}^{11} & K_{42}^{12} & 0 & 0 & K_{44}^{11} & 0 & K_{45}^{11} & K_{45}^{12} & K_{46}^{11} & K_{46}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{52}^{11} & K_{52}^{12} & K_{53}^{11} & K_{53}^{12} & K_{54}^{11} & 0 & K_{55}^{11} & K_{55}^{12} & K_{56}^{11} & K_{56}^{12} \\ 0 & 0 & K_{52}^{21} & K_{52}^{22} & K_{53}^{21} & K_{53}^{22} & K_{54}^{21} & 0 & K_{55}^{21} & K_{55}^{22} & K_{56}^{21} & K_{56}^{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{64}^{11} & 0 & K_{65}^{11} & K_{65}^{12} & K_{66}^{11} & K_{66}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{64}^{21} & 0 & K_{65}^{21} & K_{65}^{22} & K_{66}^{21} & K_{66}^{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ v_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ \vdots \\ v_2 \\ \vdots \\ u_3 \\ \vdots \\ v_3 \\ \vdots \\ u_4 \\ \vdots \\ v_4 \\ \vdots \\ u_5 \\ \vdots \\ v_5 \\ \vdots \\ u_6 \\ \vdots \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \\ R_{2x} - K_{21}^{11}\overline{\alpha} - K_{21}^{12}\overline{\beta} - K_{24}^{12}\overline{\gamma} \\ R_{2y} - K_{21}^{21}\overline{\alpha} - K_{21}^{22}\overline{\beta} - K_{24}^{22}\overline{\gamma} \\ R_{3x} - K_{31}^{11}\overline{\alpha} - K_{31}^{12}\overline{\beta} - K_{34}^{12}\overline{\gamma} \\ R_{3y} - K_{31}^{21}\overline{\alpha} - K_{31}^{22}\overline{\beta} - K_{34}^{22}\overline{\gamma} \\ R_{4x} - K_{41}^{11}\overline{\alpha} - K_{41}^{12}\overline{\beta} - K_{44}^{12}\overline{\gamma} \\ \overline{\gamma} \\ R_{5x} - K_{51}^{11}\overline{\alpha} - K_{51}^{12}\overline{\beta} - K_{54}^{12}\overline{\gamma} \\ R_{5y} - K_{51}^{21}\overline{\alpha} - K_{51}^{22}\overline{\beta} - K_{54}^{22}\overline{\gamma} \\ R_{6x} - K_{61}^{11}\overline{\alpha} - K_{61}^{12}\overline{\beta} - K_{64}^{12}\overline{\gamma} \\ R_{6y} - K_{61}^{21}\overline{\alpha} - K_{61}^{22}\overline{\beta} - K_{64}^{22}\overline{\gamma} \end{array} \right\} \quad (3-72)$$

② 在节点载荷矩阵{R}中,把相应的项用给定的位移值代替,而其余元素,则应从中减去给定的节点位移与[K]中相应的列项的乘积(见式3-72)。

这样的处理,由式(3-72),马上可得到

$$u_1 = \overline{\alpha}, v_1 = \overline{\beta}, v_4 = \overline{\gamma}$$

而且保留了总刚度方程的原有阶数,自然也没有变更方程组的排列顺序。

3. 乘大数法(又称对角元扩大法)

该办法也用于当边界条件不一定为零位移约束时的情形。对图3-33所示结构,也有类似(3-71)式的假定。它的处理办法是:

① 把总刚度矩阵[K]中与给定节点位移相对应的主对角线上的元素乘以相当大的一个数,如 1×10^{15} [K]中的其他元素不变(见式3-73)。

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} K_{11}^{11} \times 10^{15} & K_{11}^{12} & K_{11}^{12} & K_{12}^{12} & K_{11}^{13} & K_{12}^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{21} & K_{11}^{22} \times 10^{15} & K_{12}^{21} & K_{22}^{21} & K_{11}^{23} & K_{12}^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^{31} & K_{21}^{32} & K_{22}^{31} & K_{22}^{32} & K_{11}^{33} & K_{12}^{33} & K_{24}^{11} & K_{24}^{12} & K_{25}^{11} & K_{25}^{12} & 0 & 0 \\ K_{31}^{41} & K_{31}^{42} & K_{32}^{41} & K_{32}^{42} & K_{11}^{43} & K_{12}^{43} & 0 & 0 & K_{35}^{11} & K_{35}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{42}^{11} & K_{42}^{12} & 0 & 0 & K_{44}^{11} & K_{44}^{12} & K_{45}^{11} & K_{45}^{12} & K_{46}^{11} & K_{46}^{12} \\ 0 & 0 & K_{42}^{21} & K_{42}^{22} & 0 & 0 & K_{44}^{21} & K_{44}^{22} \times 10^{15} & K_{45}^{21} & K_{45}^{22} & K_{46}^{21} & K_{46}^{22} \\ 0 & 0 & K_{52}^{11} & K_{52}^{12} & K_{53}^{11} & K_{53}^{12} & K_{54}^{11} & K_{54}^{12} & K_{55}^{11} & K_{55}^{12} & K_{56}^{11} & K_{56}^{12} \\ 0 & 0 & K_{52}^{21} & K_{52}^{22} & K_{53}^{21} & K_{53}^{22} & K_{54}^{21} & K_{54}^{22} & K_{55}^{21} & K_{55}^{22} & K_{56}^{21} & K_{56}^{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{64}^{11} & K_{64}^{12} & K_{65}^{11} & K_{65}^{12} & K_{66}^{11} & K_{66}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{64}^{21} & K_{64}^{22} & K_{65}^{21} & K_{65}^{22} & K_{66}^{21} & K_{66}^{22} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{array} \right\}$$

$$= \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \times K_{11}^{11} \times 10^{15} \\ \bar{\beta} \times K_{11}^{22} \times 10^{15} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ \bar{\gamma} \times K_{44}^{22} \times 10^{15} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \\ R_{6x} \\ R_{6y} \end{Bmatrix} \quad (3-73)$$

② 把节点载荷矩阵{R}中的代替对应项用给定的节点位移与相应的主对角线元素、同一相当大的数(如 1×10^{15})这三项的乘积(见式 3-73)。

这样处理后,如展开式(3-73)的第一个方程,有

$$K_{11}^{11} \times 10^{15} u_1 + K_{11}^{12} v_1 + K_{12}^{11} u_2 + K_{12}^{12} v_2 + K_{13}^{11} u_3 + K_{13}^{12} v_3 + K_{14}^{11} u_4 + K_{14}^{12} v_4 + K_{15}^{11} u_5 + K_{15}^{12} v_5 + K_{16}^{11} u_6 + K_{16}^{12} v_6 = \bar{\alpha} \times K_{11}^{11} \times 10^{15} \quad (3-74)$$

式(3-74)中,由于除包含大数 1×10^{15} 的两项外,其余各项相对都很小,可以略去,即

$$K_{11}^{11} \times 10^{15} \gg K_{1j} \quad (j = 2, 3, \dots, 6)$$

因此,式(3-74)就可以写为

$$K_{11}^{11} \times 10^{15} \times u_1 \approx \bar{\alpha} \times K_{11}^{11} \times 10^{15} \\ u_1 = \bar{\alpha}$$

同理可得到

$$v_1 = \bar{\beta} \\ v_4 = \bar{\gamma}$$

均满足已知位移边界条件。

比较划零置 1 法和乘大数法可以看到,这两种方法都适用于零位移约束和非零位移约束边界条件。但是,当边界条件为零位移约束时,用划零置 1 法更为简捷,而对非零位移约束,用乘大数法更为方便。

用以上方法进行边界约束条件处理后,总刚度方程也得到修正,成为

$$[K^*] \{\Delta\} = \{R^*\} \quad (3-75)$$

这时可以求解,求得节点位移。

十四、计算结果整理及解题步骤

在进行边界约束条件处理后,求解节点位移,这将归结于求解一个大型联立线性方程组。求解方程组在有限元分析过程中将占据计算时间的绝大部分。

求解大型联立线性方程组的方法很多。最常用的是直接法和迭代法。为了避免直接求逆

的计算负担,直接法利用矩阵 $[K]$ 的稀疏和对称特性将它分解为若干个子矩阵,它们的结果等于原始矩阵。然后,通过简单的返回置换获得解矢量。迭代法是引入假设解后迭代直到达到平衡位置(解矢量无变化)。尽管迭代法有减少存储空间的特点,但运算次数大大高于直接法。

还有三种常用的方法,可以发挥矩阵的稀疏性和对称性,它们是带宽法、轮廓法和波前法。这些方法中最古老的是带宽法。它假设矩阵的每一行有一常量(最大)带宽。尽管简化了编码,但存储不必要的零元素所需要的额外空间降低了这种方法的效率和实用性。轮廓法是带宽法的改进和修正。它通过用列代替行并设置带宽变量来控制矩阵,从而克服了存储问题。两种技巧都是调整节点带宽度。但是轮廓法所需要的记忆即完成的操作次数取决于平均宽度而不是带宽法所要求的最大宽度,这显著改善了存储性能。

波前法技术类似于轮廓法,但它的性能取决于单元波前非节点宽度。波前法的优点在于它不像带宽法和轮廓法只限于对称矩阵,并且不必预先组装矩阵。然而大多数波前方案比轮廓法需要更多的硬盘访问并且常常要求更为严格的规模限制。也就是说,波前法并不适用于充分发挥超级计算环境优势所必需的矢量方法。

在这些众多方法中,最适合的应是能充分利用总刚度矩阵对称、稀疏和带状特性,以便能极大地减少计算的存储量和求解时间。自然,在小型计算机上计算时更侧重于减少计算存储量,而大型计算机则着重于减少计算时间。

求解总刚度方程,得到节点位移后,代入方程(3-44)即可求得单元应力。

计算出的节点位移就是结构上各离散点的位移值,据此可直接画出结构的位移分布图线,即变形图。大部分有限元通用程序的后处理中,均能显示出结构计算前后的变形图,一目了然即可看出各部位的变形大小。

而对应力计算结果,则必须进行整理。这是因为对常应变三角形单元,单元中应力也是常量,而不是某一点的应力值,通常把它作为三角形单元形心处的应力。为了由计算结果推出结构上某一点的接近实际的应力值,通常可采用绕节点平均法或两单元平均法。

所谓绕节点平均法,就是把环绕某一节点的各单元常应力加以平均,用以表示该节点的应力。如图2-34中所示节点1的应力,可认为

$$\{\sigma\}_1 = \frac{1}{6} \sum_{e=1}^6 \{\sigma\}_e$$

为了使绕节点平均应力能较真实地表示节点处的实际应力,环绕该节点的各个单元的面积不能相差太大。绕节点平均法比较适用于内节点应力的推算。对边界节点,绕节点法的误差将较大。一般边界节点的应力可由内节点的应力通过插值推算。如图3-34中节点4的应力,可先用绕节点平均法计算出内节点1、2、3的应力,再由这三点的应力用抛物线插值公式推算出节点4的应力。

所谓两单元平均法,就是把两个相邻单元之中的常应力加以平均,用来表示公共边界中点处的应力。如图3-34中,A、B的应力分别为

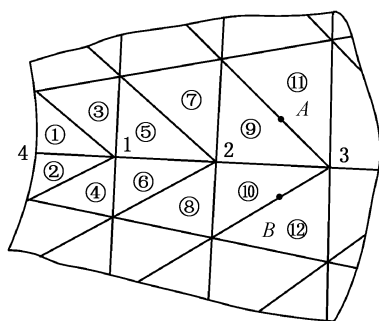


图3-34 绕节点平均法

$$\{\sigma\}_A = \frac{1}{2}(\{\sigma\}^{(9)} + \{\sigma\}^{(11)})$$

$$\{\sigma\}_B = \frac{1}{2}(\{\sigma\}^{(10)} + \{\sigma\}^{(12)})$$

为了使两单元平均法所推算的应力具有较好的表征性,两个相邻单元的面积不应相差太大。

在求出各点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 后,还可求出主应力 σ_1, σ_2 及主方向。这些值都可在图上表达出来,显示出结构内应力分布情况。在大型通用有限元分析程序中,都可以等应力线的形式给出各种应力分量的分布图,供设计人员分析研究。

通过以上应用常应变三角形单元求解平面问题的论述,可以归纳出有限元法分析步骤大致如下:

① 根据具体分析对象,作出结构简图。在此基础上进行有限元离散化,即网格划分,其步骤为:

- a. 选择坐标系,选择单元;
- b. 确定网格大小、疏密,画出网格图;
- c. 边界约束条件和载荷的简化、确定。

即得到分析物体的有限元计算模型。

② 单元分析,目的是求出各单元的刚度矩阵及等效节点载荷矩阵。一般可直接根据各种类型单元的刚度矩阵表示式求出。如对常应变三角形单元,可根据节点坐标值,计算出各单元的面积及常系数 $b_i, c_i, b_j, c_j, b_m, c_m$ 的值,代入式(3-52)后求出各单元的刚度矩阵。

根据各单元所受载荷,利用公式(3-57)移置到各节点上,形成等效节点载荷矩阵。

③ 整体分析,就是将各单元的分析组集成一整体,形成总刚度矩阵 $[K]$ $\{ \Delta \} = \{ R \}$ 。包括:

- a. 组集总刚度矩阵 $[K]$,可利用直接刚度法或其他方法。
- b. 组集结构节点载荷矩阵。这一步也可结合单元分析形成各单元等效节点载荷矩阵时直接组集。

c. 边界约束条件处理,修正总刚度方程,并由此求解得到各节点位移 $\{ \Delta \}$ 。

d. 求单元应力及节点应力。整理计算结果后给出结构变形图及各种应力分量的等值曲线。

十五、平面高次单元

上面讨论的三角形单元简单、适应性强,能够容易适应曲线边界及随意改变单元大小。但是由于只能采用线性位移模式,所以它的计算精度受到限制。为了满足一定的精度要求,需要将单元划分得很小,增加单元数。分析表明,如果采用高次单元位移模式,可以提高计算精度,从而大大减少单元的数目。下面介绍两种平面问题高次单元:六节点三角形单元和矩形单元。

1. 六节点三角形单元

六节点三角形单元是在三节点三角形单元的基础上,把三条边的中点也取为节点而形成的。规定节点 i, j, m 在三角形的三个顶点上,其排列仍按坐标系右手法测定。节点 1、2、3 分别在节点 i, j, m 的对边上,如图 3-35 所示,(a)为网格中的六节点三角形单元,(b)为其节点

编号方式及节点的面积坐标。单元的节点位移矩阵 $\{\Delta\}^e$ 和单元节点力矩阵 $\{F\}^e$ 分别为

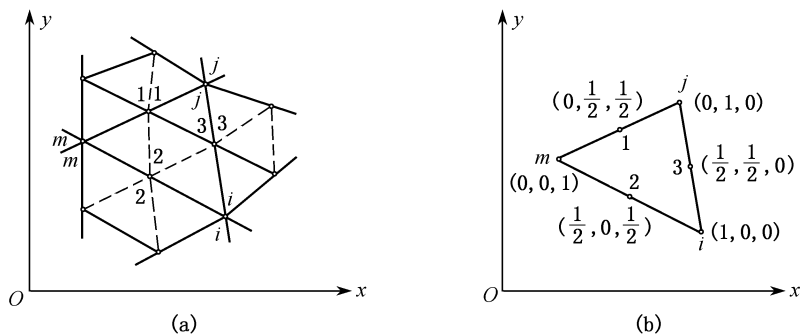


图 3-35 六节点三角形单元

(a) 六节点三角形单元 (b) 节点的面积坐标

$$\{\Delta\}^e = \{ \{\Delta_i^e\}^T \{\Delta_j^e\}^T \{\Delta_m^e\}^T \{\Delta_1^e\}^T \{\Delta_2^e\}^T \{\Delta_3^e\}^T \}^T \quad (3-76)$$

$$\{F\}^e = \{ \{F_i^e\}^T \{F_j^e\}^T \{F_m^e\}^T \{F_1^e\}^T \{F_2^e\}^T \{F_3^e\}^T \}^T \quad (3-77)$$

式中

$$\begin{aligned} \{\Delta_i^e\} &= \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad \{\Delta_j^e\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad \{\Delta_m^e\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ \{\Delta_1^e\} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta_2^e\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta_3^e\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \\ \{F_i^e\} &= \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \end{Bmatrix} \quad \{F_j^e\} = \begin{Bmatrix} X_j^e \\ Y_j^e \end{Bmatrix} \quad \{F_m^e\} = \begin{Bmatrix} X_m^e \\ Y_m^e \end{Bmatrix} \\ \{F_1^e\} &= \begin{Bmatrix} X_1^e \\ Y_1^e \end{Bmatrix} \quad \{F_2^e\} = \begin{Bmatrix} X_2^e \\ Y_2^e \end{Bmatrix} \quad \{F_3^e\} = \begin{Bmatrix} X_3^e \\ Y_3^e \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(1) 单元位移模式

六节点三角形单元有六个节点,单元位移模式可假设为完全的二次多项式

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 \end{cases} \quad (3-78)$$

式中 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, 12)$ 为待定常数。

先讨论一下位移模式的收敛性问题。系数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ 由三节点三角形单元位移模式的收敛性讨论可知,它们反映了单元的刚体位移和常应变,满足解答收敛的完备条件。

为了说明位移模式在相邻单元之间的连续性,设在单元边界上利用式(3-79)

$$x = x_i + s \cos \alpha, y = y_i + s \sin \alpha \quad (3-79)$$

把式(3-78)中第一式的 x, y 坐标变换成自然坐标 s (图 3-36),经整理后该式成为

$$u = \beta_1 + \beta_2 s + \beta_3 s^2$$

可见,在单元边界 ij 上,利用三个节点 $i, j, 3$ 的位移分量 u_i, u_j, u_3 可以确定 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 。因此,在两个相邻单元的公共边界 ij 上,两个单元具有相同的位移函数 u ,这就保证了位移模

式 u 在相邻单元之间的连续性。同样也可证明位移模式 v 也能保证相邻单元之间的连续性。

由上述分析可得,所假设的六节点三角形单元的位移模式是满足收敛性条件,其位移解答是收敛的。

接着进一步分析单元位移模式(3-78)中12个待定常数。仿照三节点三角形单元的分析,可以用六个节点的位移分量来决定12个待定常数,然后再代回式(3-78)求出形函数 $N_r(r=i, j, m, 1, 2, 3)$ 。这一过程是非常繁复的。利用面积坐标的定义以及形函数的性质,我们可以直接将单元位移模式直接用形函数表示

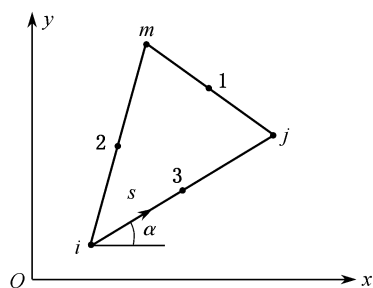


图 3-36 自然坐标下的单元位移模式

$$\{f\}^e = [N][\Delta]^e \quad (3-80)$$

式中,形函数矩阵为

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (3-81)$$

$$N_i = L_i(2L_i - 1) \quad (\text{同理可得 } N_j, N_m)$$

$$N_1 = 4L_j L_m \quad (3-82a)$$

$$N_2 = 4L_i L_m \quad (3-82b)$$

$$N_3 = 4L_i L_j \quad (3-82c)$$

其中, $L_r(r=i, j, m, 1, 2, 3)$ 分别为节点 $i, j, m, 1, 2, 3$ 的面积坐标。显然把它们代入式(3-80)后,立即可得出相应节点的节点位移 $u_r, v_r(r=i, j, m, 1, 2, 3)$ 。

由于形函数 $N_r(r=i, j, m, 1, 2, 3)$ 是面积坐标 L_i, L_j, L_m 的二次式,根据直角坐标和面积坐标的转换关系式(3-36)和式(3-37)可见,式(3-80)和式(3-78)是等同的,同样满足解答的收敛性。

(2) 单元刚度矩阵

把位移模式(3-78)代入几何方程,有

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B][\Delta]^e \quad (3-83)$$

由于

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_m}{\partial x} u_m + \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j + \frac{\partial N_m}{\partial y} v_m + \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j + \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j + \frac{\partial N_m}{\partial y} u_m + \\ &\quad \frac{\partial N_m}{\partial x} v_m + \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3 \end{aligned}$$

所以

$$[B] = [[B_i] [B_j] [B_m] [B_1] [B_2] [B_3]] \quad (3-84)$$

式中

$$[B_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_r}{\partial y} \\ \frac{\partial N_r}{\partial y} & \frac{\partial N_r}{\partial x} \end{bmatrix} (r = i, j, m); [B_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} (k = 1, 2, 3) \quad (3-85)$$

由式(3-82), 并注意到 $L_r = \frac{a_r + b_r x + c_r y}{2A} (r = i, j, m)$, 有

$$\frac{\partial N_r}{\partial x} = \frac{\partial N_r}{\partial L_r} \frac{\partial L_r}{\partial x} = (4L_r - 1) \frac{b_r}{2A} = \frac{b_r}{2A} (4L_r - 1) \quad (r = i, j, m)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial L_j} \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial L_m} \frac{\partial L_m}{\partial x} = 4L_m \frac{b_i}{2A} + 4L_j \frac{b_m}{2A} = \frac{4(b_j L_m + b_m L_j)}{2A}$$

同理 $\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{4(b_i L_m + b_m L_i)}{2A}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{4(b_i L_j + b_j L_i)}{2A}$

同理 $\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{c_r}{2A} (4L_r - 1) \quad (r = i, j, m)$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{4(c_j L_m + c_m L_j)}{2A}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{4(c_i L_m + c_m L_i)}{2A}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{4(c_i L_j + c_j L_i)}{2A}$$

所以

$$[B_r] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_r(4L_r - 1) & 0 \\ 0 & c_r(4L_r - 1) \\ c_r(4L_r - 1) & b_r(4L_r - 1) \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m)$$

$$[B_1] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 4(b_j L_m + L_j b_m) & 0 \\ 0 & 4(c_j L_m + c_m L_j) \\ 4(c_j L_m + c_m L_j) & 4(b_j L_m + L_j b_m) \end{bmatrix} \quad (3-86a)$$

$$[B_2] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 4(b_i L_m + L_i b_m) & 0 \\ 0 & 4(c_i L_m + c_m L_i) \\ 4(c_i L_m + c_m L_i) & 4(b_i L_m + L_i b_m) \end{bmatrix} \quad (3-86b)$$

$$[B_3] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 4(b_i L_j + L_i b_j) & 0 \\ 0 & 4(c_i L_j + c_j L_i) \\ 4(c_i L_j + c_j L_i) & 4(b_i L_j + L_i b_j) \end{bmatrix} \quad (3-86c)$$

由上面二式可知, 应变分量是面积坐标的一次式, 因而也是 x, y 的一次式。也就是说, 单元内的应变是线性变化的, 不再是常量。

把应变表达式代入物理方程, 可得到单元应力表达式

$$\{\sigma\} = [D][\epsilon] = [D][B][\Delta]^e = [S][\Delta]^e \quad (3-87)$$

式中, 应力矩阵

$$[S] = [D][B] = [[S_i][S_j][S_m][S_1][S_2][S_3]] \quad (3-88)$$

其中应力子块矩阵为

$$[S_r] = [D][B_r] = \frac{Eh(4L_r - 1)}{4(1 - \mu^2)A} \begin{bmatrix} 2b_r & 2\mu c_r \\ 2\mu b_r & 2c_r \\ (1 - \mu)c_r & (1 - \mu)b_r \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m)$$

$$\begin{aligned} [S_1] &= [D][B_1] \\ &= \frac{Eh}{4(1 - \mu^2)A} \begin{bmatrix} 8(b_j L_m + L_j b_m) & 8\mu(c_j L_m + L_j c_m) \\ 8\mu(b_j L_m + L_j b_m) & 8(c_j L_m + L_j c_m) \\ 4(1 - \mu)(c_j L_m + L_j c_m) & 4(1 - \mu)(b_j L_m + L_j b_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-89a)$$

$$\begin{aligned} \text{同理} \quad [S_2] &= [D][B_2] \\ &= \frac{Eh}{4(1 - \mu^2)A} \begin{bmatrix} 8(b_i L_m + L_i b_m) & 8\mu(c_i L_m + L_i c_m) \\ 8\mu(b_i L_m + L_i b_m) & 8(c_i L_m + L_i c_m) \\ 4(1 - \mu)(c_i L_m + L_i c_m) & 4(1 - \mu)(b_i L_m + L_i b_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-89b)$$

$$\begin{aligned} [S_3] &= [D][B_3] \\ &= \frac{Eh}{4(1 - \mu^2)A} \begin{bmatrix} 8(b_i L_j + L_i b_j) & 8\mu(c_i L_j + L_i c_j) \\ 8\mu(b_i L_j + L_i b_j) & 8(c_i L_j + L_i c_j) \\ 4(1 - \mu)(c_i L_j + L_i c_j) & 4(1 - \mu)(b_i L_j + L_i b_j) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-89c)$$

应力矩阵 $[S]$ 同样是面积坐标的一次式,也是 x, y 坐标的一次式。也说明了单元中的应力是线性变化,也不再是常量。

单元刚度矩阵的一般表达式我们已根据虚功方程导出,它为

$$[K]^e = \iint_A [B]^T [D][B] h dx dy$$

将应变矩阵 $[B]$ 的表达式代入,并运用积分公式

$$\iint_A L_i^a L_j^b L_m^c dx dy = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A$$

又注意到关系式

$$b_i + b_j + b_m = y_j - y_m + y_m - y_i + y_i - y_j = 0$$

及

$$c_i + c_j + c_m = 0$$

可得单元刚度矩阵为

$$[K]^e = \frac{Eh}{24(1 - \mu^2)A} \begin{bmatrix} F_i & P_{ij} & P_{im} & 0 & -4P_{im} & -4P_{ij} \\ P_{ji} & F_j & P_{jm} & -4P_{jm} & 0 & -4P_{ji} \\ P_{mi} & P_{mj} & F_m & -4P_{mj} & -4P_{mi} & 0 \\ 0 & -4P_{mj} & -4P_{jm} & G_i & Q_{ij} & Q_{im} \\ -4P_{mi} & 0 & -4P_{im} & Q_{ji} & G_j & Q_{jm} \\ -4P_{ji} & -4P_{ij} & 0 & Q_{mi} & Q_{mi} & G_m \end{bmatrix} \quad (3-90)$$

式中

$$\begin{aligned}
 [F_i] &= \begin{bmatrix} 6b_i^2 + 3(1-\mu)c_i^2 & 3(1+\mu)b_ic_i \\ 3(1+\mu)b_ic_i & 6c_i^2 + 3(1-\mu)b_i^2 \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \\
 [G_i] &= \begin{bmatrix} 16(b_i^2 - b_jb_m) + 8(1-\mu)(c_i^2 - c_jc_m) & 4(1+\mu)(b_ic_i + b_jc_j + b_mc_m) \\ 4(1+\mu)(b_ic_i + b_jc_j + b_mc_m) & 16(c_i^2 - c_jc_m) + 8(1-\mu)(b_i^2 - b_jb_m) \end{bmatrix} \\
 &\quad (i, j, m) \\
 [P_{rs}] &= \begin{bmatrix} -2b_ib_s - (1-\mu)c_ic_s & -2\mu b_ic_s - (1-\mu)c_ib_s \\ -2\mu c_ib_s - (1-\mu)b_ic_s & -2c_ic_s - (1-\mu)b_ib_s \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m; s = i, j, m) \\
 [Q_{rs}] &= \begin{bmatrix} 16b_ib_s + 8(1-\mu)c_ic_s & 4(1+\mu)(c_ib_s + b_ic_s) \\ 4(1+\mu)(c_ib_s + b_ic_s) & 16c_ic_s + 8(1-\mu)b_ib_s \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m; s = i, j, m)
 \end{aligned} \quad (3-91)$$

对于平面应变问题,只需在应力矩阵 $[S]$ 和单元刚度矩阵 $[K]$ 中将 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 即可。

(3) 等效节点载荷的计算

由于六节点三角形单元的位移模式是非线性的,所以必须用非节点载荷向节点移置的一般公式来求等效节点载荷,即有

$$\{P\}^e = [N]^T \{Q\} + \int_S [N]^T \{P_A\} h ds + \iint_A [N]^T \{P_V\} h dx dy \quad (3-92)$$

① 自重的移置。设单元受自重作用,则

$$\{P_V\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -w \end{Bmatrix}$$

由式(3-92),单元的等效节点载荷矩阵为

$$\begin{aligned}
 \{P\}^e &= \iint_A [N]^T \{P_V\} h dx dy \\
 &= \iint_A \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -w \end{Bmatrix} h dx dy \\
 &= -hw \iint_A \{0 \ N_i \ 0 \ N_j \ 0 \ N_m \ 0 \ N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ N_3\}^T dx dy \\
 &= -\frac{Ahw}{3} \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1\}^T
 \end{aligned}$$

设单元的总重量为 $W_y = -Ahw$,则等效节点载荷矩阵为

$$\{P\}^e = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{3}W_y \ 0 \ \frac{1}{3}W_y \ 0 \ \frac{1}{3}W_y \right\}^T$$

上式表明,单元的总体力是平均分配到各边中点的节点1、2、3上,而三角形三个顶点的节点上为零,见图3-37。

② 面力载荷的移置。设在单元 ij 边界上,作用沿 x 方向的按线性变化的面力,在节点 i 上的强度为 q ,在节点 j 上的强度为零,如图3-38所示。这样,其面力矩阵为

$$\{P_A\} = \begin{Bmatrix} qL_i \\ 0 \end{Bmatrix}$$

代入式(3-92)后,有

$$\{P\}^e = \int_{ij} [N] \mathbb{T}_{ij} \begin{Bmatrix} qL_i \\ 0 \end{Bmatrix} h ds \quad (3-93)$$

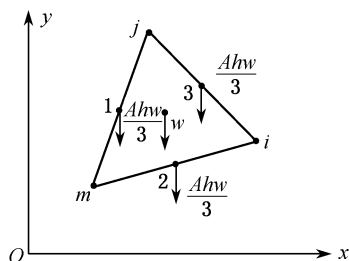


图 3-37 自重的移置

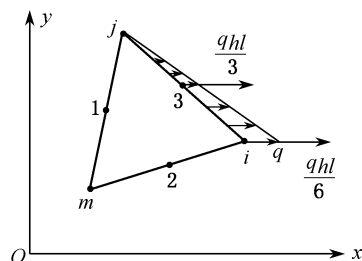


图 3-38 面力载荷的移置

该式的积分是沿 ij 边进行。由于在 ij 边上面积坐标 $L_m = 0$, 所以形函数就简化为

$$N_i = L_i(2L_i - 1), N_j = L_j(2L_j - 1), N_m = 0$$

$$N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 4L_iL_j$$

代入式(3-93)后,有

$$\begin{aligned} \{P\}^e &= \int_{ij} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} qL_i \\ 0 \end{Bmatrix} h ds \\ &= qh \int_{ij} \{N_iL_i \quad 0 \quad N_jL_j \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_3 \quad L_i \quad 0\}^T ds \end{aligned}$$

利用面积坐标的幂函数沿三角形单元某一边积分公式

$$\int L_i^a L_j^b ds = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} l \quad (i, j, m)$$

上式有

$$\{P\}^e = \frac{lhq}{2} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{Bmatrix}^T$$

式中 l 为边 ij 的长度。

上式表明, 总面力 $\frac{lhq}{2}$ 的 $\frac{1}{3}$ 是移置到节点 i 上, 而 $\frac{2}{3}$ 是移置到 ij 边中点 3 上。其余节点载荷分量均为零。

求出六节点三角形单元的单元刚度矩阵和等效节点载荷矩阵后, 即可按前面所述的方法组成结构总刚度方程, 约束处理后求解得节点位移, 再代入物理方程求出单元应力。方法基本是相同的, 这里不再重复。

2. 四节点矩形单元

当结构外形比较规则时, 可以采用四点平面矩形单元。这也是一种精度较高的单元。

假设从离散体系中取出一矩形单元(图 3-39(a))。为了简便, 矩形单元的边界平行坐标轴 x 和 y , 节点的编号从左下角开始按坐标系右手法则编为 i, j, m, p , 边长为 $2a$ 和 $2b$ 。

在矩形单元的分析中,引入无因次局部坐标 ξ, η 。坐标原点取在单元的形心上, ξ 轴和 η 轴分别平行 x 轴和 y 轴。局部坐标 ξ, η 与整体坐标 x, y 的转换关系为

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{a}(x - x_0), x_0 = \frac{1}{2}(x_i + x_j), 2a = x_j - x_i \\ \eta &= \frac{1}{b}(y - y_0), y_0 = \frac{1}{2}(y_i + y_p), 2b = y_p - y_i\end{aligned}\quad (3-94)$$

根据上式,可得到节点 i, j, m, p 的局部坐标分别是 $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$, 见图 3-39(b)所示。

矩形单元的节点位移矩阵 $\{\Delta\}^e$ 和单元节点力矩阵 $\{F\}^e$ 分别为

$$\{\Delta\}^e = \{\{\Delta_i^e\}^T \{\Delta_j^e\}^T \{\Delta_m^e\}^T \{\Delta_p^e\}^T\}^T \quad (3-95)$$

$$\{F\}^e = \{\{F_i^e\}^T \{F_j^e\}^T \{F_m^e\}^T \{F_p^e\}^T\}^T \quad (3-96)$$

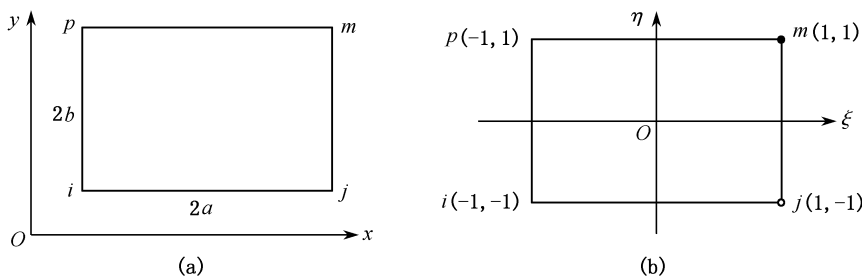


图 3-39 四节点矩形单元

式中

$$\{\Delta_i^e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \text{同理可知} \{\Delta_j^e\}, \{\Delta_m^e\}, \{\Delta_p^e\}$$

$$\{F_i^e\} = \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \end{Bmatrix}, \text{同理可得} \{F_j^e\}, \{F_m^e\}, \{F_p^e\}$$

(1) 单元位移模式

由于矩形单元有四个节点,相应应有八个自由度,所以取单元位移模式为双线性函数,即

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 \xi + \alpha_7 \eta + \alpha_8 \xi \eta \end{cases} \quad (3-97)$$

式中 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 为待定系数。

为求出 α_i , 可把四个节点的局部坐标值代入,有

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ u_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ u_p = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \end{cases}$$

求解上述方程式,得

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}(u_i + u_j + u_m + u_p)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}(-u_i + u_j + u_m - u_p)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4}(-u_i - u_j + u_m + u_p)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4}(u_i - u_j + u_m - u_p)$$

代入式(3-97)后,并整理得

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)u_i + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)u_j + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)u_m + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)u_p = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p$$

同理也可求得

$$v(\xi, \eta) = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_p v_p$$

其中

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (i = j, m, p) \quad (3-98)$$

这样,单元的位移模式可写为

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_p \end{bmatrix} \{\Delta\}^e = [N][\Delta]^e \quad (3-99)$$

下面讨论一下位移模式的收敛性问题。由于式(3-97)中包含常数项和 ξ, η 的一次项 $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7$, 所以与三角形常应变单元分析一样可知,它们反映了单元的刚体位移和常应变状态,满足解答收敛的完备条件。在单元的四条边界上, ξ 与 η 分别是常量,因而单元位移函数的边界上分别是 η 与 ξ 线性函数。这样相邻单元公共边界上的位移由该边界上的两个节点的位移完全确定,也是线性变化的。这就保证了相邻单元在公共边上位移的连续性,满足解答收敛的协调条件。因此矩形单元是完备的协调单元。

(2) 单元刚度矩阵

将位移模式(3-97)代入几何方程,可得单元应变为

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{Bmatrix} b \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ a \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ a \frac{\partial u}{\partial \eta} + b \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{Bmatrix}$$

$$= [[B_i] [B_j] [B_m] [B_p]] [\Delta]^e = [B][\Delta]^e \quad (3-100)$$

式中子块矩阵 $[B_i]$ 为

$$[B_r] = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b \frac{\partial N_r}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & a \frac{\partial N_r}{\partial \eta} \\ a \frac{\partial N_r}{\partial \eta} & b \frac{\partial N_r}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} b \xi_r (1 + \eta_r \eta) & 0 \\ 0 & a \eta_r (1 + \xi_r \xi) \\ a \eta_r (1 + \xi_r \xi) & b \xi_r (1 + \eta_r \eta) \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m, p)$$

由物理方程可得单元应力

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{\Delta\}^e = [D] [I] [B_i] [B_j] [B_m] [B_p] \{\Delta\}^e \\ &= [[S_i] [S_j] [S_m] [S_p]] [I] \{\Delta\}^e = [S] \{\Delta\}^e\end{aligned}\quad (3-102)$$

对平面应力问题, 应力子块矩阵 $[S_r]$ 为

$$\begin{aligned}[S_r] &= [D] [B_r] \\ &= \frac{E}{4ab(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} b\xi_r(1+\eta_r\eta) & \mu a\eta_r(1+\xi_r\xi) \\ \mu b\xi_r(1+\eta_r\eta) & a\eta_r(1+\xi_r\xi) \\ \frac{1-\mu}{2} a\eta_r(1+\xi_r\xi) & \frac{1-\mu}{2} b\xi_r(1+\eta_r\eta) \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m, p) \quad (3-103)\end{aligned}$$

对于平面应变问题, 只需在上式中将 E 代入以 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 代之以 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 即可。

由式(3-101)和式(3-103)可见, 矩形单元的应变与应力都是线性变化的, 所以它比三角形常应变单元能较好地反映结构内实际的应力和位移变化情况, 计算精度通常比三角形常应变单元高些。

单元刚度矩阵可由虚功方程导出的一般形式得到, 其中注意到局部坐标与整体坐标的关系式, 有

$$\begin{aligned}[K] &= \iint_A [B]^T [D] [B] h dx dy \\ &= abh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_i]^T \\ [B_j]^T \\ [B_m]^T \\ [B_p]^T \end{bmatrix} [D] [I] [B_i] [B_j] [B_m] [B_p] d\xi d\eta \\ &= \begin{bmatrix} [K_{ii}^e] & [K_{ij}^e] & [K_{im}^e] & [K_{ip}^e] \\ [K_{ji}^e] & [K_{jj}^e] & [K_{jm}^e] & [K_{jp}^e] \\ [K_{mi}^e] & [K_{mj}^e] & [K_{mm}^e] & [K_{mp}^e] \\ [K_{pi}^e] & [K_{pj}^e] & [K_{pm}^e] & [K_{pp}^e] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3-104)$$

其中每一子块矩阵具体表示为

$$\begin{aligned}[K_{rs}^e] &= abh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_r]^T [D] [B_s] h d\xi d\eta \\ &= \frac{E}{4(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} \xi_r \xi_s \left(1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s\right) + & \mu \xi_r \eta_s + \frac{1-\mu}{2} \eta_r \xi_s \\ \frac{1-\mu}{2} \frac{a}{b} \eta_r \eta_s \left(1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s\right) & \\ \mu \eta_r \xi_s + \frac{1-\mu}{2} \xi_r \eta_s & \frac{a}{b} \eta_r \eta_s \left(1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s\right) + \\ & \frac{1-\mu}{2} \frac{b}{a} \xi_r \xi_s \left(1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s\right) \end{bmatrix} \quad (3-105)\end{aligned}$$

其中 $r, s = i, j, m, p$ 。对平面应变问题, 也是在上式中将 E 用 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 代, μ 用 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 代即可。

(3) 等效节点力的计算

① 体力的位移。设单元受均匀体力 $\{P_V\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$ 作用(如图 3-40), 则等效节点力矩阵为

$$\begin{aligned} \{P\}^e &= \iint_A [N]^T \{P_V\} h dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_m & 0 \\ 0 & N_m \\ N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} h ab d\xi d\eta \\ &= \left\{ \frac{W_x}{4} \quad \frac{W_y}{4} \quad \frac{W_x}{4} \quad \frac{W_y}{4} \quad \frac{W_x}{4} \quad \frac{W_y}{4} \quad \frac{W_x}{4} \quad \frac{W_y}{4} \right\}^T \end{aligned}$$

式中, $W_x = 2a \times 2bhX$, $W_y = 2a \times 2bhY$ 分别为单元在 x 方向与 y 方向的总体力。

上式表明, 整个物体所受体力平均移置到四个节点上。

② 均匀面力的移置。如图 3-41 设单元在 $\eta = 1$ 边界上作用均匀表面力 $\{P_A\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Y \end{Bmatrix}$, 则等效节点载荷矩阵为

$$\{P\}^e = \int_S [N]^T \{P_A\} h ds = \int_{-1}^1 [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ Y \end{Bmatrix} h a d\xi$$

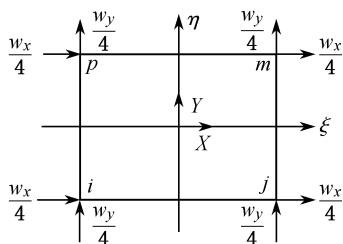


图 3-40 体力的位移

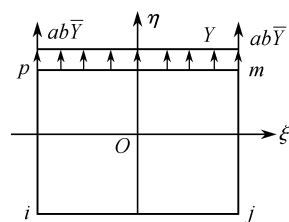


图 3-41 均匀面力的移置

注意到形函数矩阵在 $\eta = 1$ 边界上取值。在 $\eta = 1$ 边界上, 有

$$N_i(\xi, 1) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 - 1) = 0$$

同理

$$N_j(\xi, 1) = \frac{1}{4}(1 + \xi_j \xi)(1 - 1) = 0$$

$$\int_{-1}^1 N_m(\xi, 1) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1 + \xi_m \xi)(1 + 1) d\xi = 1$$

同理

$$\int_{-1}^1 N_p(\xi, 1) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1 + \xi_p \xi)(1 + 1) d\xi = 1$$

所以代回上式后, 有

$$\begin{aligned}\{P\}^e &= \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}(2ah\bar{Y}) \quad 0 \quad \frac{1}{2}(2ah\bar{Y}) \right\}^T \\ &= \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\bar{W}_y \quad 0 \quad \frac{1}{2}\bar{W}_y \right\}^T\end{aligned}$$

式中, $\bar{W}_y = 2ah\bar{Y}$ 为单元 $\eta = 1$ 边界上 y 方向的总面力。

矩形单元比常应变三角形单元有较高的精度,但是由于它不能适应曲线边界和斜边界,也不便于在不同部位上采用不同大小分级的单元,因此在工程实际中使用不多。一般它可与三角形单元混合使用或用任意四边形的等参元代替。

在本节中,介绍了三种不同形式的单元。它们在使用中各有其优缺点。从对非均匀性及曲线边界的适应性讲,三角形单元最好,六节点三角形单元次之,而矩形单元适应性最差。而从计算精度以及单元数(同一问题,节点数大致相同时)来讲,六节点三角形单元最好,三角形单元较差,单元数也多。但是由于六节点三角形单元节点多,因此在刚度方程中关联的节点位移也多,自然在总刚度矩阵中带宽较大,占有计算机的容量也大。所以在选择单元时,还应综合考虑结构几何形状、计算精度要求及计算机容量几方面。

第二节 等参元基本概念

计算单元刚度阵时,需要积分运算。对于简单的单元,如二力杆单元可以容易地求出显式积分结果。对于复杂形状的单元,如二维、三维或板壳问题的单元很难得出显式积分结果,通常采用数值积分进行近似计算。由于数值积分要求积分区域必须是规则的,通常采用坐标变换的方法把不规则的单元形状变换到所谓自然坐标中。在自然坐标中,单元的形状是规则的,数值积分也是方便的。

以二力杆为例,说明什么是等参元及其公式推导的过程。

一、坐标变换

图 3-42 给出二力杆单元在单元坐标系 x 和自然坐标系 ξ 中的位置。单元的形状由 x 坐标中 (x_1, x_2) 区域变到 ξ 坐标系 $(-1, 1)$ 区域中。这个变换是通过下面形函数插值公式给出的

$$x(\xi) = N_1 x_1 + N_2 x_2 \quad (3-106)$$

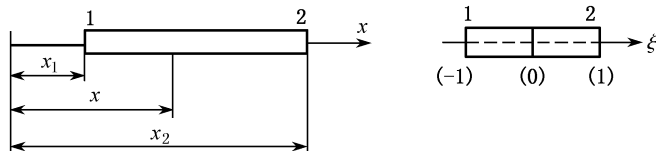


图 3-42 单元坐标变换

其中 $N_i, i = 1, 2$ 称为形函数,具体形式如下

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\end{aligned} \quad (3-107)$$

显然,这个形函数具有插值函数的性质

$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3-108)$$

二、高斯数值积分

定积分的数值计算有许多格式,其中高斯数值积分的算法是有限元中常采用的一种算法。这里给出它的计算公式

$$\int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i \phi(\xi_i) \quad (3-109)$$

式中 $\phi(\xi)$ ——关于自然坐标 ξ 的函数;

W_i ——权系数;

ξ_i ——积分点的坐标;

n ——积分点的个数。

若 $\phi(\xi)$ 是小于或等于 $2n-1$ 阶的多项式,则使用 n 点的高斯积分公式是精确的。高斯积分点及相应的权系数由表 3-1 给出。

表 3-1 高斯积分点及权系数

n	ξ_i	W_i
1	$\xi_1 = 0$	2
2	$\xi_1, \xi_2 = \pm 0.577350$	1
3	$\xi_1, \xi_3 = \pm 0.774596$ $\xi_2 = 0$	$5/9 (= 0.555\dots)$ $8/9 (= 0.888\dots)$

三、等参元公式推导

以二力杆单元为例,说明什么是等参元及其等参元公式的推导步骤。

在自然坐标系 ξ 中,单元位移场仍可用节点位移插值表示

$$u(\xi) = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e \quad (3-110)$$

其中, N_1 和 N_2 是自然坐标 ξ 的函数,它与形函数式(3-107)相同。

通常把这种位移场与坐标变换用相同插值函数的单元称为等参元。

在 ξ 坐标系中求应变位移关系矩阵 $[B]$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{du(\xi)}{dx} = \frac{d[N]}{dx} \{\delta\}^e \\ &= \left[\frac{dN_1(\xi)}{dx} \quad \frac{dN_2(\xi)}{dx} \right] \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (3-111)$$

根据复合函数求导法则计算 $[B]$ 阵元素

$$\frac{dN_i(\xi)}{dx} = \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \bigg/ \frac{dx}{d\xi} \quad (i = 1, 2) \quad (3-112)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi}(N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2) \\
 &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi}x_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi}x_2 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i}{d\xi}x_i
 \end{aligned} \quad (3-113)$$

计算公式表明 $[B]$ 矩阵是 ξ 的函数。单元刚度矩阵可以进行坐标变换和数值积分

$$\begin{aligned}
 [k] &= \int_{x_1}^{x_2} [B]^T [D] [B] A dx \\
 &= \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] A \frac{dx}{d\xi} d\xi \\
 &= \sum_{i=1}^n \left([B]^T [D] [B] A \frac{dx}{d\xi} \right)_{\xi_i} W_i
 \end{aligned} \quad (3-114)$$

形函数式(3-107)代入式(3-113)得

$$\frac{dx}{d\xi} = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2} \quad (3-115)$$

此式代入式(3-112)得

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{dN_1}{d\xi} \bigg/ \frac{dx}{d\xi} = -\frac{1}{2} \bigg/ \frac{1}{2} = -\frac{1}{1}, \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{1}$$

因此 $[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{bmatrix}$ 把 $[B]$ 矩阵代入式(3-114)式并取一点高斯积分,则

$$\begin{aligned}
 [k] &= \left([B]^T [D] [B] A \frac{dx}{d\xi} \right)_{\xi_1=0} \cdot 2 \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{bmatrix} A \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{EA}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

这个例子说明等参元的算法与以前算法结果是一样的。读者以后会发现,这里给出的等参元算法很容易推广到二维和三维等参元中。

第三节 薄板弯曲问题及其有限元方法

对于平板弯曲的计算有两种理论。一种是经典的薄板理论,一种是厚板理论。基于这两种理论可以推导出两类板弯曲单元。为了叙述简单,通常把板弯曲单元称为板单元,而以前的平面应力单元称为膜单元。对于板的厚薄,通常是用板厚 t 与跨距 L 的比值来判断的。当 $t/L < 0.1$ 时为薄板,否则为中厚板或厚板。

在薄板理论中,根据 Kirchhoff 假设,用一个变量,即板中面横向位移 w 就能完全描述板的应变状态。根据这个理论建立单元刚度阵时不仅要求单元间位移 w 连续,而且要求单元间转角即 w 的一阶导数也连续。满足这种连续(通常称为 C_1 阶连续)的位移函数在单元内很难选择,这就给构造板单元造成了困难。由于位移函数有多种选择,从而提出了多种板单元。本章

从实用的角度出发,给出目前比较好的两种单元,一个是3节点三角形板单元,一个是可变节点任意四边形单元。

在厚板理论中,板的应变状态需要三个独立变量描述。这些变量是横向位移 w 和中面法线绕 x 轴和 y 轴的转角 θ_x 和 θ_y 。根据 Mindlin 厚板理论, $\theta_y \neq \partial w / \partial x$, $\theta_x \neq \partial w / \partial y$ (在薄板理论中等式成立)。用这三个变量来描述板的位移场使得单元位移场的选择变得容易了,这是因为单元间的连续条件只要求 w 和 θ_x 与 θ_y 连续,而不要求它们的导数也连续。这样的连续通常称为 C_0 阶连续,在单元内构造 C_0 阶连续的位移场当然比构造 C_1 阶连续位移场容易。

这种厚板单元的另一个优点是它能考虑厚板横向剪力的影响。这是因为转角 θ 中包含了横向剪力引起的角应变。从实用性出发,本节给出了一个4~9可变节点四边形厚板等参元,该单元经过改进后也能计算薄板,因此,它是一个厚薄通用的单元。

一、薄板弯曲理论

取板的中面为 xy 坐标面, z 轴垂直于中面,如图3-43所示。其中 t 为板厚, L 为板的跨距。对于薄板, $t/L < 0.1$ 。

当板受有垂直于板中面的外力时,板的中面将发生弯扭变形,从而变成一个曲面。板变形的同时,在板的横截面上将存在内力——弯矩和扭矩。

分析薄板弯曲问题时,与材料力学中分析直梁弯曲问题相似,也采用一些假设,从而使问题得到简化。对于薄板,这些假设是:①板的法线没有伸缩;②板的法线在板变形后仍垂直于中曲面;③板内各点没有平行于中面的位移;④垂直于板面挤压应力可以不计。

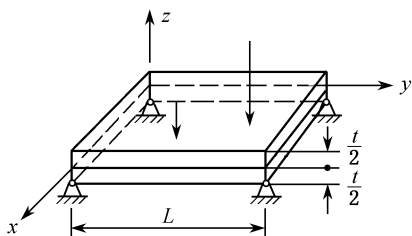


图 3-43 板弯曲

假设①可以表示成 $\epsilon_z = 0$, 即 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 从而板的横向位移可写成 $w = w(x, y)$, 这表明中面法线上各点具有相同的 w 。通常称 w 函数曲面为挠度曲面。

假设②表示板的法线(z 方向线段)与 x 和 y 方向线段都保持垂直,没有剪应变,即 $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{zx} = 0$ 。根据应变位移关系

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zx} = 0$$

从而有

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

对 z 积分,得

$$v = - z \frac{\partial w}{\partial y} + f_1(x, y) \quad u = - z \frac{\partial w}{\partial x} + f_2(x, y)$$

式中 f_1 和 f_2 是任意函数,根据假设③,即 $z=0$ 时 $u=v=0$,可以定出 $f_1=f_2=0$,从而有

$$u = - z \frac{\partial w}{\partial x}, v = - z \frac{\partial w}{\partial y}$$

把此式代入板内各点应变位移关系式中,有

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

在小变形时,式中 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 和 $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 分别代表薄板中曲面在 x 方向和 y 方向的曲率,而 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ 代表了在 x 和 y 方向的扭率。这三个量完全确定了板内各点的应变,通常用矩阵符号表示如下

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-116)$$

再用记号 $\{\epsilon\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]^T$ 则

$$\{\epsilon\} = z\{\chi\} \quad (3-117)$$

假设④表明,板内各层之间无挤压应力 σ_z ,因此,板内各点的应力只有 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 三个应力分量,这与平面应力问题类似。应力应变关系写成矩阵形式是

$$\{\sigma\} = [D_p]\{\epsilon\} \quad (3-118)$$

式中 $\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$, $[D_p]$ 为应力应变关系矩阵,它与平面应力问题中的相同,即

$$[D_p] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \text{对称} & \\ \mu & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-119)$$

将式(3-117)代入式(3-118),得

$$\{\sigma\} = z[D_p]\{\chi\} \quad (3-120)$$

为了求板的内力与应力关系,从板内切取一个微元体来研究,它在 x 和 y 方向的宽度都是 1,如图 3-44 所示。在垂直于 x 轴的横截面上,正应力是 σ_x ,它与 z 坐标成正比,因此可以合成一个力偶,这个力偶矩就是这个横截面上的弯矩(单位宽度上的弯矩)。通常把这个弯矩记为 M_x 。类似地, σ_y 合成弯矩 M_y , τ_{xy} 和 τ_{yx} 合成扭矩 M_{xy} 和 M_{yx} 。由于剪应力互等,因此 $M_{xy} = M_{yx}$ 。若用矩阵符号 $\{M\}$ 表示这些内力,则

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-121)$$

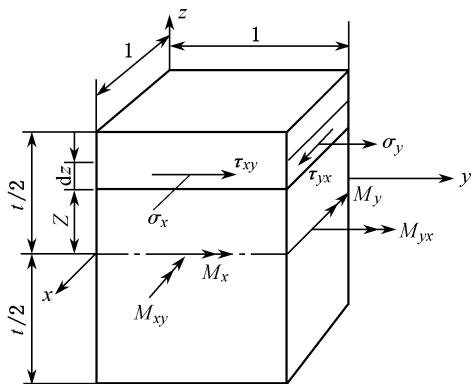


图 3-44 薄板微元体应力与内力

由图 3-44 中可见 $\{M\}$ 是 $\{\sigma\}$ 对中面力矩的合成, 即

$$\{M\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \{\sigma\} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 [D_p] \{\chi\} dz = \frac{t^3}{12} [D_p] \{\chi\}$$

引用记号

$$[D_b] = \frac{t^3}{12} [D_p] = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-122)$$

则

$$\{M\} = [D_b] \{\chi\} \quad (3-123)$$

式中 $[D_b]$ 称为板的应力应变关系矩阵, 它等于平面应力问题中的 $[D_p]$ 乘以 $t^3/12$ 。

根据 $[D_b]$ 与 $[D_p]$ 之间的关系, 不难由式(3-123)与式(3-119)求出

$$\{\sigma\} = \frac{12z}{t^3} \{M\} \quad (3-124)$$

当 $z = \pm \frac{t}{2}$ 时, 可求得板上下表面的应力值

$$\{\sigma_m\} = \pm \frac{6}{t^2} \{M\} \quad (3-125)$$

类似于平面应力问题, 还可在上或下表面的任意点处计算其主应力 σ_1, σ_2 和主方向。

以上给出了建立薄板单元时需要用到的一些公式。读者应注意到板与平面应力问题二者的相似性。在板单元的公式推导上及其单元的程序设计上都可利用这种相似性。

二、三角形薄板单元

1. 坐标变换

图 3-45 给出一个任意形状的三角形板单元, 节点号 1, 2, 3 按逆时针排序。单元坐标系为 xy , 自然坐标系为 $\xi\eta$ 。类似于平面应力单元, 单元坐标变换可写成

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 L_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3-126)$$

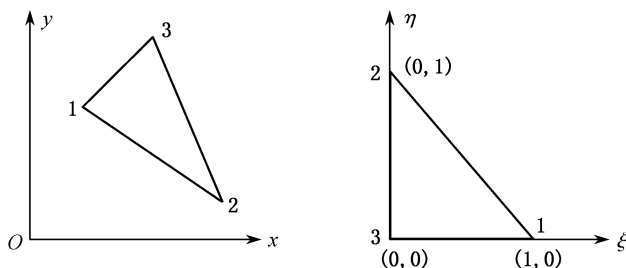


图 3-45 三角形板单元

式中 L_i 为面积坐标, 它由下式定义

$$L_1 = \xi$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \eta \\ L_3 &= 1 - \xi - \eta \end{aligned} \quad (3-127)$$

容易验证, 这个面积坐标具有插值函数的性质

$$L_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3-128)$$

2. 假设位移场

薄板节点位移为 w_i 、 θ_{xi} 和 θ_{yi} , 如图 3-46 所示。线位移 w 沿 z 轴正向为正, 角位移按右手螺旋法则标出的矢量(用双箭头表示)沿坐标轴正向为正。

根据薄板理论, 节点 i 的位移可以表示为

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (3-129)$$

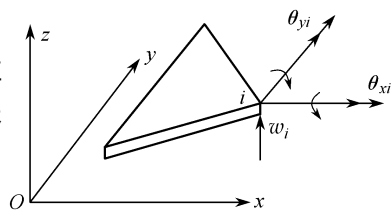


图 3-46 薄板节点位移

单元节点位移可以写成

$$\{\delta\}^e = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}]^T \quad (3-130)$$

单元内任意点的位移 w 用节点位移插值表示如下

$$w = [N] \{\delta\}^e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \{\delta\}^e \quad (3-131)$$

其中 $[N_1]$ 、 $[N_2]$ 和 $[N_3]$ 为插值函数, 它们是 1×3 的行阵

$$\begin{aligned} [N_1] &= [N_{11} \quad N_{12} \quad N_{13}] \\ [N_2] &= [N_{21} \quad N_{22} \quad N_{23}] \\ [N_3] &= [N_{31} \quad N_{32} \quad N_{33}] \end{aligned} \quad (3-132a)$$

其插值函数具体形式如下

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \\ N_{12} &= b_3 (L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - b_3 (L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ N_{13} &= c_3 (L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - c_2 (L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \end{aligned} \right\} \quad (3-132b)$$

其中

$$b_2 = y_3 - y_1, c_2 = x_1 - x_3, b_3 = y_1 - y_2, c_3 = x_2 - x_1$$

$[N_2]$ 和 $[N_3]$ 可通过下标循环 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 写出。

3. 应变位移矩阵 B

现在, 应重新定义薄板弯曲的应变和应力。原则是要求这个应变和应力的标量给出内力功。因此, 可以把应变定义为前面已经定义的曲率和扭率 $\{\chi\}$ 相应的应力即为弯矩 $\{M\}$ 。

所要求的 $[B]$ 矩阵, 即是 $\{\chi\}$ 与单元节点位移 $\{\delta\}^e$ 的关系。

将式(3-132)代入式(3-116), 可得

$$\{\chi\} = [B] \{\delta\}^e = [B_1 B_2 B_3] \{\delta\}^e \quad (3-133a)$$

式中

$$[B_i] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2[N_i]}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2[N_i]}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2[N_i]}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3-133b)$$

显然, $[B]$ 矩阵需要计算插值函数 $[N_i]$ 的二阶导数。由于 $[N_i]$ 是 $L_i (i = 1, 2, 3)$ 的函数, 它们对 x 和 y 的偏导数用到复合函数求导法则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3} \\ &= \frac{1}{2\Delta} (b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3}) \end{aligned} \quad (3-134a)$$

类似的有

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial L_3}) \quad (3-134b)$$

再求一次导数可得二阶导数公式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{4\Delta^2} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] [H] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (3-135a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_1 \quad c_2 \quad c_3] [H] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (3-135b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_1 \quad c_2 \quad c_3] [H] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (3-135c)$$

式中 $[H]$ 为二阶微分算子

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_1} & \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} & \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2 \partial L_1} & \frac{\partial^2}{\partial L_2 \partial L_2} & \frac{\partial^2}{\partial L_2 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_3 \partial L_1} & \frac{\partial^2}{\partial L_3 \partial L_2} & \frac{\partial^2}{\partial L_3 \partial L_3} \end{bmatrix} \quad (3-136)$$

将式(3-132)中的 N_{11} , N_{12} 和 N_{13} 等分别代入微分矩阵 $[H]$ 中可得具体函数矩阵

$$[H_{11}] = \begin{bmatrix} 2L_2 + 2L_3 & & \\ 2L_1 - 2L_3 & -2L_1 & \text{对称} \\ 2L_1 - 2L_3 & 0 & -2L_1 \end{bmatrix} \quad (3-137a)$$

$$[H_{12}] = \begin{bmatrix} 2b_3L_2 + 2b_2L_3 & \text{对称} \\ 2b_3L_1 + \frac{1}{2}(b_3 - b_2)L_3 & 0 \\ \frac{1}{2}(b_3 - b_2)L_2 - 2b_2L_1 & \frac{1}{2}(b_3 - b_2)L_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-137b)$$

$$[H_{13}] = \begin{bmatrix} 2c_3L_2 - 2c_2L_3 & \text{对称} \\ 2c_3L_1 + \frac{1}{2}(c_3 - c_2)L_3 & 0 \\ \frac{1}{2}(c_3 - c_2)L_2 - 2c_2L_1 & \frac{1}{2}(c_3 - c_2)L_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-137c)$$

以上公式对于编写计算[B]矩阵的计算机程序已经足够了,因此不用进一步写出显式。

4. 单元刚度矩阵

前面已经求出了[B]矩阵,而板的应力应变关系矩阵[D_b]已由式(3-122)给出。这时可以计算板的单元刚度矩阵

$$[k] = \int_{A_e} [B]^T [D_b] [B] t dx dy \quad (3-138)$$

其中 A_e 是三角形的区域。由于被积函数是面积坐标的多项式,因此下面的公式是有用的

$$\iint_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta \quad (3-139)$$

式中 Δ 为三角形面积。利用这个公式,读者可以求出刚度矩阵(3-138)的显式,不过,这个显式很繁。类似于平面应力三角形单元,采用哈默数值积分来计算还是方便的。

5. 单元等效节点力

等效节点载荷用列阵表示为

$$\{R\}^e = [F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad F_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad F_{z3} \quad M_{x3} \quad M_{y3}]^T$$

式中,力的分量分别与单元节点位移的分量相对应。

当单元受有均布的法向载荷 q 时,需要计算它的等效节点载荷。这个等效节点载荷可用等效节点力的通式计算

$$\{R\}^e = \int_{A_e} [N]^T q dx dy = q \int_{A_e} [N_{11} N_{12} N_{13} N_{21} N_{22} \dots N_{33}]^T dx dy$$

将形函数 N_{ij} 的具体表达式(3-132(b))代入,利用公式(3-139)对各个元素进行积分,得

$$\{R\}^e = q\Delta \left[\frac{1}{3} \quad \frac{b_2 - b_3}{24} \quad \frac{c_2 - c_3}{24} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{b_3 - b_1}{24} \quad \frac{c_3 - c_1}{24} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{b_1 - b_2}{24} \quad \frac{c_1 - c_2}{24} \right]^T \quad (3-140)$$

6. 单元精度分析

为了考察板单元的精度,通常选用有解析解的板,例如以方板为例进行有限元计算。图3-47给出一方板,其中心受一集中横向力 P 作用,求板中点的挠度。

已知 L = 10, t = 0.1, E = 1092 × 10⁵, μ = 0.3, P = 1。根据文献,中心挠度的计算公式如下:

$$W_{\max} = \beta PL^2 / D \quad (3-141)$$

其中

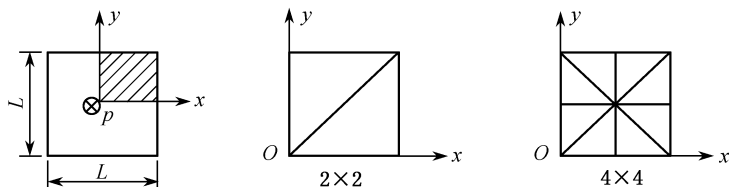


图 3-47 方板及其单元划分

$$D = Et^3/12(1 - \mu^2)$$

$$\beta = 0.011\ 60 \quad (\text{简支时})$$

$$\beta = 0.005\ 60 \quad (\text{固支时})$$

把本例已知数据代入公式(3-141)中得 $w_{\max} = \beta$ 。因此,本例的解析解即是 β 。

有限元计算结果列入表 3-2 中。

表 3-2 方板中心挠度计算结果 (三角形单元)

网格	节点总数	简支板	固支板
2×2	4	0.013 02	0.005 16
4×4	9	0.012 31	0.005 40
解析解	—	0.011 60	0.005 60

计算结果表明,随着网格加密,解析解收敛于精确解。对于较粗的网格剖分,其计算误差在 5% 左右。目前,这个单元是较好的三角形薄板单元。

三、任意四边形薄板单元

1. 坐标变换和二阶雅可比矩阵

把坐标系 xy 中的任意四边形(图 3-48(a))变换为自然坐标系 $\xi\eta$ 中的正方形(图 3-48(b)),可以采用如下的双线性坐标变换公式:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3-142)$$

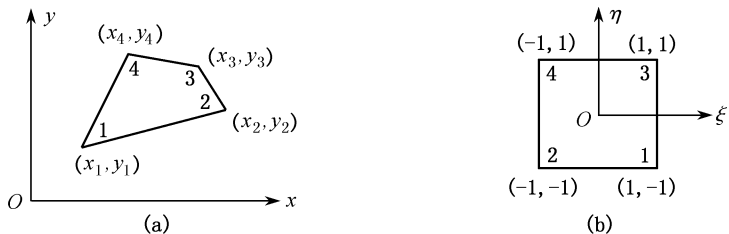


图 3-48 四边形单元坐标变换

式中, N_i 为形函数,它们与平面应力问题中的形函数相同。

其一阶偏导数有如下关系:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-143)$$

其中

$$[J_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

称为一阶雅可比矩阵。

其二阶偏导数具有如下关系：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} = [J_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (3-144)$$

式中，

$$\alpha = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{4}$$

$$\beta = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}$$

$[J_2]$ 为二阶雅可比矩阵，其形式如下：

$$[J_2] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3-145)$$

二阶雅可比矩阵的行列式为

$$|J_2| = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^3 = |J_1|^3 \quad (3-146)$$

它是一阶雅可比矩阵行列式的三次方。当 $|J_2| \neq 0$ 时，二阶雅可比矩阵的逆矩阵为

$$[J_2]^{-1} = \frac{1}{|J_1|^2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & -2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & -2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3-147)$$

若 $\alpha = \beta = 0$ ，即为平行四边形情况：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [J_2]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3-148)$$

若 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 即为任意四边形情况:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [J_2]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \alpha' \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta' \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3-149)$$

其中

$$\alpha' = \frac{\left(\alpha \frac{\partial y}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)}{|J_1|}, \quad \beta' = \frac{\left(\alpha \frac{\partial y}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)}{|J_1|} \quad (3-150)$$

2. 假设位移场

板节点位移为 $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$, 其方向规定与三角形单元一样, 对于四边形板单元(图 3-49)节点位移可以写成

$$\{\delta\}^e = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]^T$$

$$= [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}]^T$$

设单元位移场为

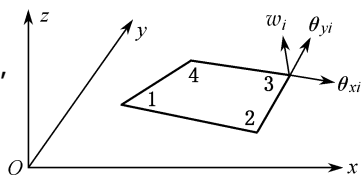


图 3-49 四边形板单元

$$w = [N] \{\delta\}^e = [N_1 N_{x1} N_{y1} N_2 N_{x2} N_{y2} N_3 N_{x3} N_{y3} N_4 N_{x4} N_{y4}] \{\delta\}^e \quad (3-151)$$

式中 $N_1, N_{x1}, N_{y1}, \dots, N_{y4}$ 是插值函数, 其形式如下:

$$\left. \begin{aligned} [N_1 N_{x1} N_{y1}] &= X_1 Y_1 [X_1 Y_1 - X_2 Y_2 + 2 X_1 X_2 + 2 Y_1 Y_2 \\ &\quad y_{21} X_1 X_2 + y_{41} Y_1 Y_2 - x_{21} X_1 X_2 - x_{41} Y_1 Y_2] / 16 \\ [N_2 N_{x2} N_{y2}] &= X_2 Y_1 [X_2 Y_1 - X_1 Y_2 + 2 X_1 X_2 + 2 Y_1 Y_2 \\ &\quad - y_{21} X_1 X_2 + y_{32} Y_1 Y_2 - x_{21} X_1 X_2 - x_{32} Y_1 Y_2] / 16 \\ [N_3 N_{x3} N_{y3}] &= X_2 Y_2 [X_2 Y_2 - X_1 Y_1 + 2 X_1 X_2 + 2 Y_1 Y_2 \\ &\quad - y_{34} X_1 X_2 - y_{32} Y_1 Y_2 - x_{34} X_1 X_2 + x_{32} Y_1 Y_2] / 16 \\ [N_4 Y_{x4} N_{y4}] &= X_1 Y_2 [X_1 Y_2 - X_2 Y_1 + 2 X_1 X_2 + 2 Y_1 Y_2 \\ &\quad y_{34} X_1 X_2 - y_{31} Y_1 Y_2 - x_{34} X_1 X_2 + x_{41} Y_1 Y_2] / 16 \end{aligned} \right\} \quad (3-152)$$

其中

$$X_1 = 1 + \xi, X_2 = 1 - \xi, Y_1 = 1 + \eta, Y_2 = 1 - \eta, x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j$$

可以验证, 上述插值函数具有下面特点, 在节点(1 2 3 4)处

$$w = w_i, \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_{xi}, -\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_{yi}$$

沿两相邻单元的公共边 ij 的 w 是 ξ 或 η 的三次式。可以证明, 在公共边上两个单元有完全相同的三次曲线, 从而保证了单元间挠度的连续性。但是, 单元间的法向导数是不相同的。因此, 这个单元是不协调元。

3. 应变位移矩阵[B]与刚度矩阵[k^e]

将位移 w 的表达式(3-151)代入曲率计算公式可得到[B]矩阵

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\}^e$$

写成分块形式[B] = [B₁ B₂ B₃ B₄] 其中

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & \frac{2\partial^2 N_{xi}}{\partial x \partial y} & \frac{2\partial^2 N_{yi}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [A] [C_i] \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3-153)$$

式中

$$[A] = \frac{-1}{|J_1|} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & -2\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & -2\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -2\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -2\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & 2\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \end{bmatrix}$$

$$[C_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} - \alpha' \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial \xi \partial \eta} - \alpha' \frac{\partial N_{xi}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial N_{xi}}{\partial \eta} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial \xi \partial \eta} - \alpha' \frac{\partial N_{yi}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial N_{yi}}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} [k]_e &= \int_{A_e} [B]^T [D] [B] dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J_1| d\xi d\eta \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 ([B]^T [D] [B] |J_1|)_{\xi_i \eta_j} W_i W_j \end{aligned} \quad (3-154)$$

4. 等效节点力

单元等效节点力记为

$$\{r\}_e = [F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad F_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad \dots \quad F_{z4} \quad M_{x4} \quad M_{y4}]^T$$

如果单元受有法向分布载荷 q 则

$$\{r\}_e = \int_{A_e} [N]^T q dx dy \quad (3-155)$$

其中积分可采用高斯数值积分计算。

5. 单元精度分析

仍选用上节方板算例来考察这里的四边形薄板单元。网格剖分如图 3-50 所示,计算结果列入表 3-3。计算结果表明,解是收敛的,且精度较高。

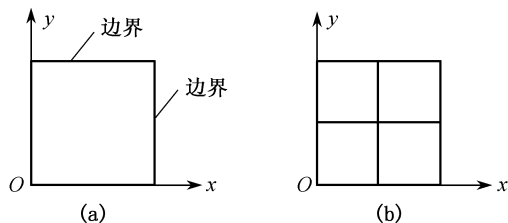


图 3-50 方板单元剖分

表 3-3 方板中心挠度计算结果(四边形单元)

网格	节点总数	简支板	固支板
1 × 1	4	0.013 94	0.006 25
2 × 2	9	0.012 36	0.005 92
解析解	-	0.011 60	0.005 60

第四节 电动轿车车身结构静态特性综合评价及其优化

像绝大多数传统轿车一样,电动车车身也采用承载式车身结构,车身的结构特性直接影响轿车性能。轿车车身结构必须有足够的强度以保证其可靠性,也必须有足够的刚度来保证其上安装的各总成的正常工作,因此,电动车车身结构的分析及其优化设计十分重要。为了保证电动汽车具有内燃机汽车车身结构的承载能力和可靠性,必须在研究过程中采用先进的分析手段。应用有限元方法进行轿车车身结构分析能为电动车车身结构改造设计提供必要的保障。

国内外对轿车车身结构的分析都表明,轿车白车身的强度是整车可靠性的关键,而且其刚度对整车的贡献也最大,达到 60% 以上。为此,本节采用有限元法对某电动改装车车身焊接总成的强度和刚度进行了分析和优化,以供相关设计研究参考。

一、分析模型建立

有限元分析模型准确与否,模型规模控制得是否适度,对轿车车身结构分析是非常关键的。由于轿车车身的结构是由不同形状、不同厚度的薄壁板壳零件组成,而且结构和形状都很复杂。为了对车身结构进行比较准确的计算分析,现代轿车车身结构分析的有限元模型一般采用板壳单元模型,即整个车身全部采用板壳单元进行离散建立的模型。本分析对象包括原型车车身壳体(车身焊接总成)、改装车的车架及地板,如图 3-51 所示。本分析模型主要采用 ANSYS 软件的四节点壳单元建立有限元模型,少部分为三角形单元。

建立模型过程中通常都要对结构进行简化,这一简化要以忠实结构主要的力学特性为前提。现代轿车多采用全承载式车身,车体骨架结构由车体结构件以及覆盖件焊接而成;主要承载零部件及总成包括前纵梁、后纵梁、门槛、顶盖、地板、A 柱、B

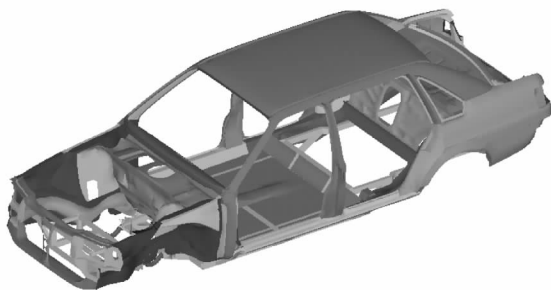


图 3-51 车身壳体 CAD 图

柱、C柱、后风窗支柱、前轮罩、后轮罩、前塔型支承、后塔型支承、后翼子板、后围板及包裹架等。而保险杠主要是用于轿车碰撞时的吸能元件,前翼子板的设计也是主要从外形、维修要求及安全性出发的,它们都是用螺钉与车体骨架连接的,在建立模型时一般不考虑这些零件。我们的目的在于分析整个车身的刚度和薄弱环节等力学特性,过于细致地描述一些非关键结构的细节,不但增加建模的难度和单元的数目,并会使有限元模型的单元尺寸变化过于剧烈,而影响计算精度。车身结构中有的小尺寸结构,如小孔、开口、翻边、小筋和小凸台,它们的设计目的通常是为了局部过渡或者工艺上避让一些管线,而对整体刚度和强度影响不大,因此,在建模过程中作简化处理。而为了安装零部件方便而设置的尺寸较大的孔基本都有翻边,对整体刚度和局部强度影响较大,不能忽略。

轿车车身结构分析有限元模型单元数量和尺寸直接影响其前后处理工作和计算效率。对于每个具体零件,根据它的具体结构,如翻边的大小,结构变化的复杂程度等来划分单元。对于比较平坦的大面和曲率变化小的曲面结构,如顶盖、地板等可以适当地加大单元的尺寸。而对于一些不大的翻边,则只能缩小单元的尺寸。对于结构初步分析的大应力部位,单元网格要进一步细化。本次车身结构静态分析的单元基本尺寸定为 50 mm。

对初步建立的模型进行了修正。模型修正的基本原则是充分体现实际结构的主要关键力学特征,即尽可能详细模拟对整体抗弯和抗扭刚度贡献大的筋等结构。首先,进行单元网格规范化,并减少三角形单元比例。单元质量检查规范见表 3-4。其次,修正了门口和窗口翻边的厚度。根据资料,建立总体模型时,可将板间焊点以一致节点处理,以较厚板的厚度做单元几何常数。但以这种方法处理门口和窗口翻边,会给轿车车身壳体静态刚度分析带来约 9% 的误差。在模型修正时,可将门口和窗口处的焊接边以实际双板厚度处理。另外,对于初步试算应力较大区域的模型网格进行了细化,如在车身轮罩及车架弯梁处等。最终模型的单元总数为 34 943,节点总数为 32 205,三角形单元个数为 3 320,三角形单元比例为 9.5%,如图 3-52 和 3-53 所示。

表 3-4 单元质量检查规范

四边形单元 翘曲角/(°)	单元边长比	四边单元 最小内角/(°)	四边单元 最大内角/(°)	三角单元 最小内角/(°)	三角单元 最大内角/(°)	单元最小 尺寸/mm
< 20	< 10	> 30	< 140	> 17	< 146	> 5

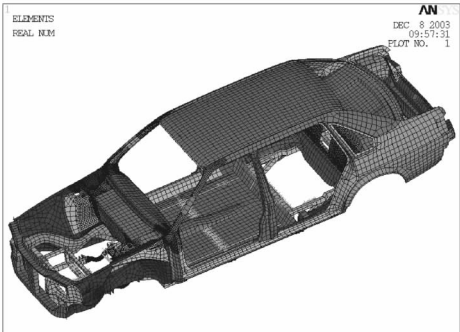


图 3-52 整体模型示意图

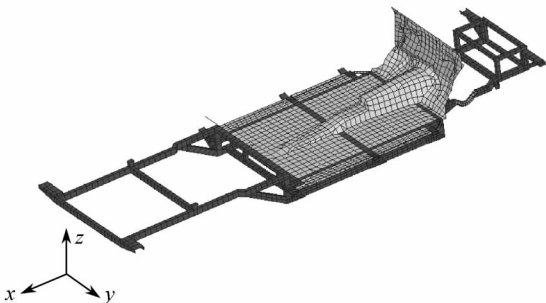


图 3-53 改制车架示意图

二、分析模型验证

参考上海大众的轿车白车身试验方法,扭转工况采用加载梁在前轴施加 6 450 Nm 的扭矩,模拟实车满载时一个前轮悬空的工况。后塔形支承处的 6 个自由度都约束,加载梁中点处约束 X、Y、Z 三个方向的位移和 Y、Z 两个方向的转动自由度。模型载荷与约束如图 3-54 所示。车架上的试验和计算测点布置如图 3-55 所示。

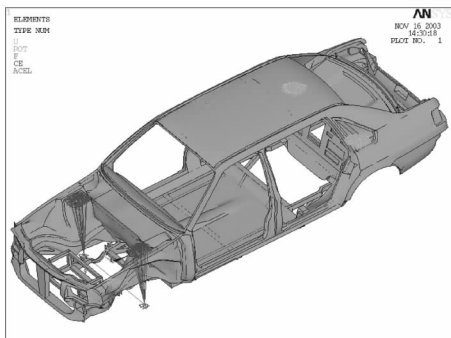


图 3-54 模型载荷与约束

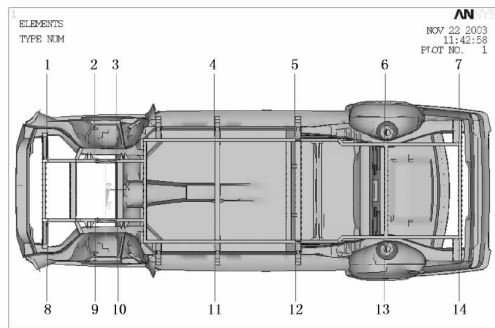


图 3-55 模型验证工况测点布置

图 3-56 给出验证工况下白车身扭转角计算及实验曲线。车身最大扭转角计算值为 34°；而实验值为 39°，车身扭转刚度为 9 434 Nm/(°)。车身最大扭转角是原车型相关值的 1.6 倍。说明改装车车身设计扭转刚度偏低,需要通过车身结构优化设计来提高车身扭转刚度值。

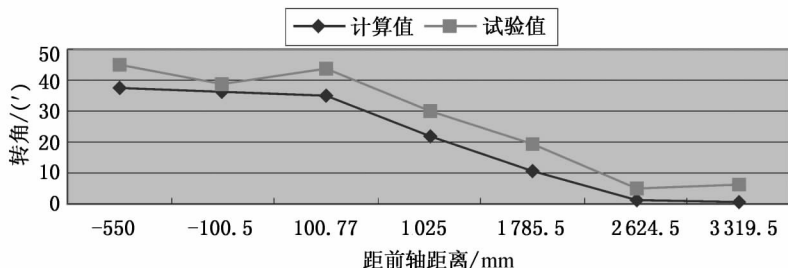


图 3-56 验证工况下白车身扭转角曲线

扭转工况的主要大应力点的计算值和实验值如表 3-5 所示,白车身模型验证工况下的计算应力大小和趋势均与试验值吻合。计算模型的扭转刚度和强度误差分别约为 13% 和 20%；说明模拟分析模型精度较好,可用于结构刚度和强度预测分析和结构优化设计分析。实验弯曲工况分析结果也充分验证了有限元模型的准确性。

最终上车身模型采用板壳单元有限元模型,而车架采用空间梁单元模拟。有限元模型如图 3-57 所示,共有 15 148 个节点,15 688 个板单元,322 个梁单元。

表 3-5 大应力点计算值和实验值

大应力部位	计算值 /MPa	试验值 /MPa
A 柱下端	118.95	84.167 6
A 柱上端	- 84.012	- 70.518 8
D 柱上部	77.974	67.003 2
后隔板	- 100.85	- 103.193

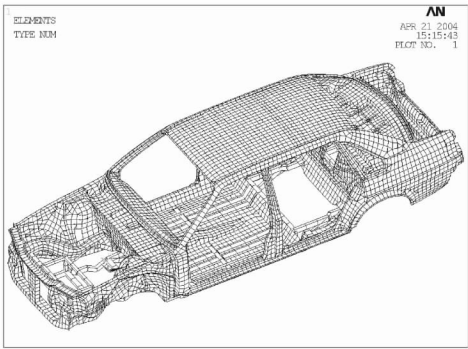


图 3-57 有限元模型

三、车身结构静态载荷综合评价

1. 车身结构强度分析

车身结构强度分析主要考虑较恶劣的实际弯扭组合工况。模拟汽车右后轮悬空状态，并考虑 1.5 倍的动态载荷系数。计算分析所得上车身等效应力分析结果如图 3-58 所示。该工况下上车身的最大应力值为 189.16 MPa，它发生在后隔板开口部位。其他大应力点位置还有：车身右前纵梁后加强梁、右前塔形支承点附近、右前轮罩与披水板相焊接的部位、前风窗下横梁右端根部、A 柱外板根部、左后纵梁与车架焊接处和左后内轮罩及塔型支承。这些部位均是汽车右后轮悬空时车身上对抗扭贡献较大零件的端部或开口处。车身结构最大应力值小于材料弹性极限值 210 MPa，满足工程要求。实际弯扭组合工况下车架应力分析结果如图 3-59 所示，最大应力发生在左边车架后纵梁部位，大小为 - 92.63 MPa。此外应力较大位置还有右前牛腿处、车架前部圆管与横梁连接根部、车架双层结构的右后竖梁与后座椅横梁连接的根部。这些部位应力较大主要原因是该工况右后轮悬空，右后塔型支承承担的载荷分别由右前和左后塔型支承承担，而车架的这些大应力位置比较靠近前、后塔型支承。

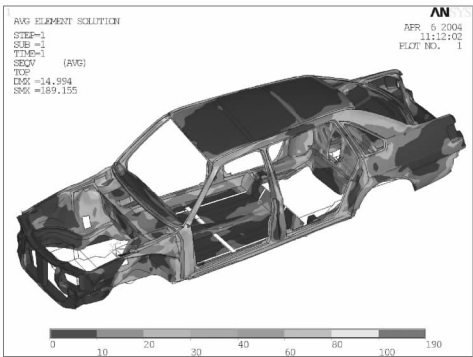


图 3-58 弯扭组合工况上车身等效应力分布

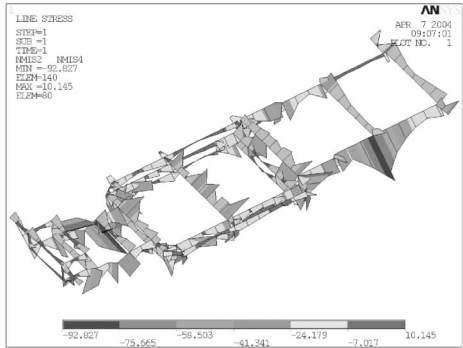


图 3-59 弯扭组合工况车架应力图

2. 车架力流分析

因为是基于现生产车型的改造设计，对车架结构的分析与评价有特别重要的实际意义。

车架力流分析主要考虑车架结构的轴向力以及其所受弯矩的分布情况,两种工况下车架总的弯矩分布分别如图 3-60、图 3-61 所示,其中较大的力流部件见表 3-6。在实际载荷两种工况下,车架结构的轴向力都比较小,由轴向力引起的应力值最大也只有 13 MPa。引起车架应力的主要是弯矩,在车架后纵梁靠近车身后纵梁焊接部位弯矩尤其大。前牛腿、后牛腿等位置也有较大的弯矩,这主要是因为这些部位靠近车身塔型支承位置,传递较大的载荷。

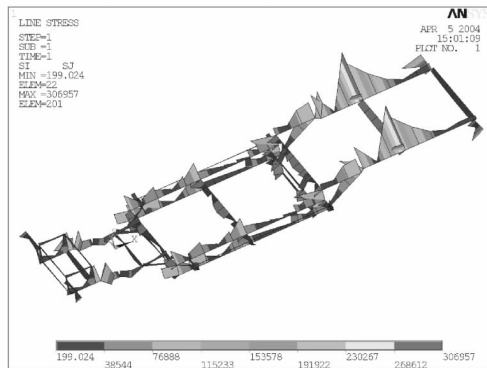


图 3-60 弯曲工况车架弯矩分布图

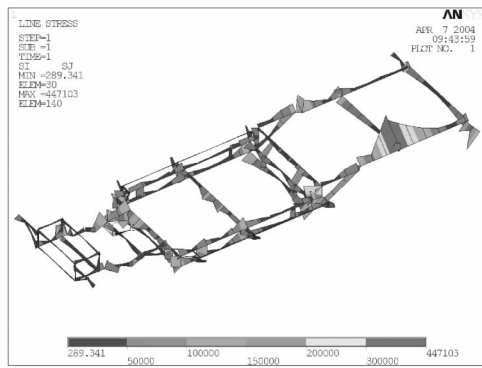


图 3-61 弯扭组合工况车架弯矩分布图

表 3-6 车架大力流部件

载 荷	工 况	实际载荷弯曲工况		实际载荷弯扭组合工况	
		位置	大小	位置	大小
轴向力 /N		中部右下纵梁	4 853	中部左下纵梁	6 111
y 向弯矩 $M_y / (N \cdot mm)$		车架右后纵梁	306 954	车架左后纵梁	445 359
z 向弯矩 $M_z / (N \cdot mm)$		车架右后牛腿	- 134 227	车架左后牛腿	- 261 575

可见,在本次设计的车架结构梁截面尺寸基本相同的情况下,图 3-61 与图 3-59 有很好的对应。图 3-61 对指导车架截面的设计有更直接的应用价值。从两种工况下总的弯矩以及应力分布来看,车架前舱受载较小,可对截面参数进行优化;中部边上的圆管受载更小,可考虑将其去掉;中部双层结构受载均匀且也不是很大,也可进行优化;后部纵梁及与车身连接的各牛腿梁承受较大载荷,是优化设计的关键部件。在该车架结构及分析工况下,最大应力绝对值只有 92 MPa 左右,远小于材料的许用应力 210 MPa,车架截面优化余地较大。

四、车身结构静态特性综合评价

1. 车身结构刚度分析

最终刚度分析中使用与试验扭转工况中相同的分析对象、约束及载荷。图 3-62 给出了车身变形相对扭转角的计算和试验值。车身扭转刚度计算得最大扭转角为 33.5', 考虑试验工况扭矩 6 450 Nm, 扭转刚度计算值为 11 545 Nm/(°), 而相应的实验最大扭转角为 35.4', 扭转刚度为 10 925 Nm/(°), 误差 5.7%。进一步验证了模型的正确性。可见,改造后车身结构扭转刚度约为改造前的扭转刚度值的 1.2 倍。虽然这一刚度值可以满足电动轿车使用要求,但改造增加的车架对车身的刚度贡献显然不如预料的大。

2. 车架承载度分析

车架承载度可用整个车身受外力作用后车架的应变能和整个车身结构的总应变能之比来定义。各工况车架承载度见表 3- 7。总体上讲 ,该车车架的承载度较小 ,尤其在关键的弯扭组合工况下 ,车架承载度小。与车身结构刚度分析结论完全一致 ,改造的车架对车身刚度的提高效果不是最佳。

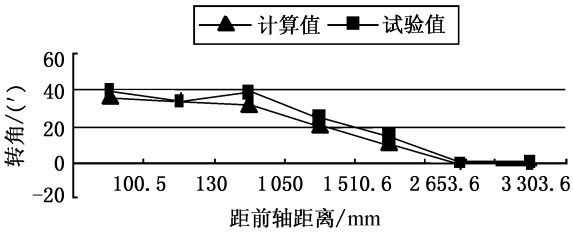


图 3- 62 车身扭转变形角

表 3- 7 实际载荷工况车架承载度

工 况	总变形能 /(N·mm)	车架变形能 /(N·mm)	车架承载度 /%
实际载荷弯曲工况	8 271.67	2 143.25	25.91
实际载荷弯扭工况	37 732.1	5 255.59	13.93

以上分析可以发现：

- ① 相对车身结构强度分析而言 ,车身结构力流分析不考虑截面 ,更直观。综合分析车身结构强度和力流 ,可更充分和合理地指导车架截面的设计。
- ② 车架承载度可以合理地确定车架对车身刚度的贡献水平 ,分析车架结构及其与车身连接强度的合理性。
- ③ 综合评价车身结构静态特性 ,很容易得出改进车身结构静态特性的方向。

五、电动改装轿车车身结构优化分析

1. 分析工况

电动改装车簧载质量为 1 912 kg。其中 ,动力系统装备及乘客质量见表 3- 8 ,按照其在车架上安装点的位置加载。其余质量为车身壳体、四门两盖、车身附件及内外饰质量 ,均布加载到车身模型上 ,当量质密度为 $2.77 \times 10^{-8} \text{ t/mm}^3$ 。

表 3- 8 动力系统总成及乘客载荷 kg

燃料电池组	蓄电池组	高压接线盒	电 机	DC/AC
96	120	5	76.3	16
高压 DC/DC	低压 DC/DC	前排乘客	后排乘客	电池执行单元
30	9.3	150	225	200

静态优化分析时 ,兼顾动态载荷的影响 ,取电动车动载荷因子 1.5 ,修正重力加速度 $1.5 \times 9\,800 \text{ mm/s}^2$ 。边界约束考虑实际使用常见的弯曲和弯扭组合(右后轮悬空)载荷工况。为避免边界约束点引起应力集中 ,在每处塔型支承的约束都分布在多个节点上 ,各工况边界约束见表 3- 9。

表 3-9 各工况边界约束

不同位置的支承	弯曲工况	弯扭组合工况
左前塔型支承	x, y, z	x, y, z
右前塔型支承	x, z	x, z
左后塔型支承	x, z	y, z
右后塔型支承	z	

2. 优化变量选取

因为本模型单元类型为板壳单元,设计变量选择板的厚度值。其上下限定义考虑制造工艺的要求,并以原始厚度为参考。初步分析的大应力部位、悬架支承等关键部位都选为设计变量组,并且选择尽可能多的设计变量组。

这里主要研究电动改装车强度和刚度问题,以模型计算分析的薄弱环节的单元等效应力和整个模型中能充分描述其弯曲及扭转刚度的关键位置的位移为状态变量。而且在每个设计变量组上都选大应力单元做状态变量,以防止设计部件厚度单调最小化。考虑到所用材料物理性质及汽车产品工程要求,应力状态变量仅取上限 210 MPa。考虑到一般轿车车身工程刚度规范,弯曲及弯扭组合优化工况的位移状态变量都仅取下限,下面给出的具体优化数值参考了 SANTANA2000 有关实验数据。同时考虑到轻量化目标,在车身结构优化问题中,选取模型重量为优化目标,以获取最佳车身壳体板料厚度,使在保证结构强度和刚度要求的前提下,结构轻量化。各变量计算容差控制综合考虑计算效率和优化可行性。

3. 优化结果分析

为了综合分析各设计部件应力和车身关键位置位移的优化结果,最终优化值的选取综合考虑了弯曲工况和弯扭组合工况的设计部件厚度的优化结果。对仅有一个优化工况的部件,就取其优化结果数值;对同时存在两个优化工况的部件,一般取其较大的优化结果数值。考虑塔型支承及轮罩的工艺可行性,在保证局部强度和整体刚度要求的前提下,经过试算取两工况优化结果的平均值。最终确定的各部件厚度取值如表 3-10 所示。板厚需加大的板件分布见图 3-63,板厚可减小的板件分布见图 3-64。

表 3-10 各部件优化厚度值

mm

部件名称	初 值	弯曲工况优化值	弯扭组合工况优化值	综合优化值
车架方管	3.0	1.0	1.0	1.0
车架圆管	2.0	1.0	1.0	1.0
前纵梁	1.5	1.2	1.0	1.2
前挡泥板	0.8	1.0	1.0	1.0
前塔型支座	1.5	3.0	1.5	3.0
前围上盖板	0.75	0.7	0.7	0.7
前地板	1.2	0.7	1.2	1.2
门槛外板	0.8	0.7	0.7	0.7

续表

部件名称	初 值	弯曲工况优化值	弯扭组合工况优化值	综合优化值
门槛前加强板	1.0	0.8	0.7	0.8
门槛后加强板	0.8	0.8	0.7	0.8
门槛内板	0.8	0.8	0.7	0.8
门槛后段内板	0.8	0.8	0.7	0.8
车身侧框	0.8	0.7	1.0	1.2
A 柱内板上段	0.8	1.0	1.0	1.0
后纵梁	1.75	1.75	1.0	1.75
后纵梁加强板	1.5	1.5	1.0	1.5
后塔型支座	1.5	3.0	5.0	4.0
右后内轮罩	0.8	2.0	0.7	2.0
左后内轮罩	0.8	1.0	2.0	2.0
右后外轮罩	0.8	0.8	0.7	0.8
左后外轮罩	0.8	1.0	0.7	0.8
后隔板	0.7	1.0	1.0	1.0

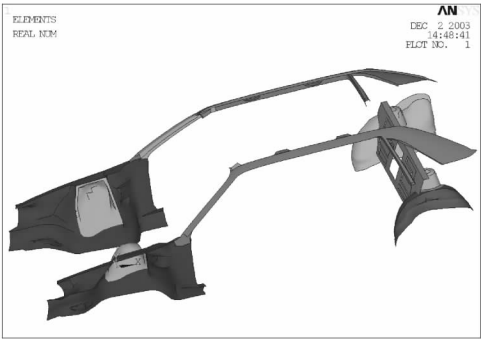


图 3- 63 厚度加大的板件

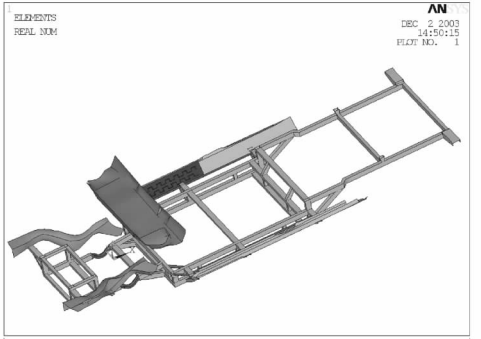


图 3- 64 厚度减小的板件

优化后 ,弯曲工况车架纵梁上关键点 Z 向位移最大值为 0.889 mm ,小于设定的工程上限 0.9 mm ;车身等效应力最大值为 119.8 MPa ,发生在车架上。优化后 ,弯扭组合工况车身右后塔型支座上的控制点 Z 向位移最大值为 8.598 mm ,小于设定的工程上限(9 mm) ;车身等效应力最大值为 187.4 MPa ,发生在车身侧围上 ,小于所用材料的弹性极限值(210 MPa)。优化后 ,模型当量质量为 795 kg ,较优化前模型的当量质量减轻了 175 kg ,实际质量减轻约 49 kg。

由以上可知：

- ① 本节的板结构优化方法同时优化了结构刚度、强度和重量。充分说明：有限元方法数据信息充分 ,不但可以有效地在汽车产品设计阶段预估结构特性 ,而且在其模型经验证后 ,以其进行优化设计 ,可显著提高可靠性。
- ② 在传统车型上改造开发电动车时 ,车身 A 立柱、C 立柱、顶盖侧边梁、前后轮罩及塔型支承需要加强。而由于增加了车架 ,车身原前纵梁及门槛等可以适当减弱。

③ 在现生产传统车型上改造开发电动车新产品,既可以缩短产品开发周期,又减少新产品生产投入。这一开发方式技术上也是可行的。

思考题

1. 弹性力学基本假设有哪些?弹性力学基本方程有哪些?
2. 平面应力问题的独立参数有哪些?
3. 试推导平面应力问题的平衡微分方程。
4. 试推导平面应力问题的几何方程。
5. 试写出平面应力问题三角形单元位移向量和单元力向量。
6. 什么叫位移插值函数?为什么要引入位移插值函数?
7. 试推导平面应力问题三角形单元位移插值函数。
8. 平面应力问题三角形单元自然坐标如何定义?其与直角坐标间的关系如何?
9. 试推导平面应力问题三角形单元应变矩阵。
10. 试推导平面应力问题三角形单元单元刚度矩阵。
11. 试述单元刚度矩阵性质。
12. 举例说明平面应力问题等效节点载荷与形函数的关系。
13. 试建立图 3-33 结构模型的总刚度方程。
14. 模型的节点应力如何计算?
15. 薄板的基本假设有哪些?试推导薄板应变位移关系。
16. 试推导薄板内力位移关系。
17. 写出三角形薄板单元位移向量。
18. 以自然坐标写出三角形薄板单元插值函数。
19. 板单元质量检查项目有哪些?一般检查规范如何?
20. 什么是半承载式车身承载度?

第四章 汽车车身结构动力分析

第一节 结构动力分析的有限元法基础

前面各章有限元分析中,作用在结构上的载荷都是与时间 t 无关的静载荷,应力和应变仅随坐标位置而异。然而,汽车在工作过程中,作用在结构上的载荷,除静载荷外,还有与时间 t 有关的动载荷。因此,相应的位移、应变和应力不仅随坐标位置而变,而且还随时间 t 的变化,为了解汽车车身的动力特性,可以用动力问题的有限元法进行分析。

一、动力基本方程的建立

当结构上作用有随时间 t 而变化的动载荷时,结构将产生随时间 t 而变化的位移、速度和加速度。根据达朗贝尔原理,对任何系统,其所有作用力(弹性力、激振力、阻尼力)以及惯性力之和必为零。为此,如引入相应的惯性等作用,就可以将结构的动力问题化为相应的静力问题,也即将其转化为结构的平衡问题来处理。

下面我们就采取与静力有限元分析相同的方法和步骤对动力问题进行分析。首先将结构离散化,即将结构分割成为有限个单元的组合物,从中取任一单元 e ,先导出单元体 e 的动力学方程,然后,在此基础上建立起结构整体的有限元动力学基本方程。

结构在动载荷作用下,考虑惯性力和阻尼力(假设阻尼力与速度成正比)时,单元 e 中单位体积上(单元内任一点)的动力学方程为(根据达朗贝尔原理)

$$[k] \{u(t)\} = \{p(t)\} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u(t)\} - v \frac{\partial}{\partial t} \{u(t)\} \quad (4-1)$$

式中 $[k] \{u(t)\}$ 是弹性力, $\{p(t)\}$ 是激振力; $-\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u(t)\}$ 是惯性力; $-v \frac{\partial}{\partial t} \{u(t)\}$ 是阻尼力。 ρ 是材料密度,即单位体积内质量, v 是阻尼系数,即单位速度下单位体积内的阻尼力, $\{u(t)\}$ 为单元 e 中单位体积上(任意一点)的位移。在动力问题中,仍可用前面分析静力问题时所采用的公式表示

$$\{u(t)\} = [N] \{\delta(t)\}^e \quad (4-2)$$

式中 $[N]$ 是相应单元(桁架、梁、板、壳等)的形函数矩阵,它只是坐标 x, y, z 的函数,与时间 t 无关。因此,它的表达式与静力分析中的形函数矩阵完全一样。将式(4-2)代入式(4-1),得

$$[K] [N] \{\delta(t)\}^e = \{p(t)\} - \rho [N] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta(t)\}^e - v [N] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta(t)\}^e \quad (4-3)$$

为将单元 e 中单位体积上的力按等效原则转移到单元节点上,可利用载荷移置的一般公式求得单元 e 的动力学方程如下

$$\int [N]^T [k] [N] dV \{\delta(t)\}^e = \int [N]^T \{p(t)\} dV - \int [N]^T \rho [N] dV \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta(t)\}^e$$

$$- \int [N]^T v [N] dV \frac{\partial}{\partial t} \{\delta(t)\}^e \quad (4-4)$$

引入下列记号：

单元 e 的刚度矩阵

$$[k]^e = \int [N]^T [k] [N] dV \quad (4-4a)$$

单元 e 的质量矩阵

$$[m]^e = \int [N]^T \rho [N] dV \quad (4-4b)$$

单元 e 的阻尼矩阵

$$[c]^e = \int [N]^T v [N] dV \quad (4-4c)$$

单元 e 的节点速度

$$\{\dot{\delta}(t)\}^e = \frac{\partial}{\partial t} \{\delta(t)\}^e \quad (4-4d)$$

单元 e 的节点加速度

$$\{\ddot{\delta}(t)\}^e = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta(t)\}^e \quad (4-4e)$$

单元 e 的节点激振力

$$\{R(t)\}^e = \int [N]^T \{p(t)\} dV \quad (4-4f)$$

则公式(4-4)可改写成如下公式：

$$\{R(t)\}^e = [k]^e \{\delta(t)\}^e + [m]^e \{\ddot{\delta}(t)\}^e + [c]^e \{\dot{\delta}(t)\}^e \quad (4-5)$$

将单元动力学方程(4-5)进行组合叠加,得到结构整体动力平衡方程如下：

$$[M] \{\ddot{\delta}(t)\} + [C] \{\dot{\delta}(t)\} + [K] \{\delta(t)\} = \{R(t)\} \quad (4-6)$$

公式(4-6)即为结构整体有限元动力基本方程(以后简称动力方程)。式中 $\{R(t)\}$ 为作用在结构节点上的动载荷列阵(外力) $\{\delta(t)\}$ 、 $\{\dot{\delta}(t)\}$ 和 $\{\ddot{\delta}(t)\}$ 分别为整个结构的节点位移列阵、节点速度列阵和节点加速度列阵。 $[K]$ 、 $[M]$ 、 $[C]$ 分别为结构的总刚度矩阵、总质量矩阵和总阻尼矩阵。

为解动力方程(4-6),以得到结构各节点的位移 $\{\delta(t)\}$,首先必须解决以下两个问题：

第一,建立结构的质量矩阵 $[M]$ 、阻尼矩阵 $[C]$ 和刚度矩阵 $[K]$ ；

第二,采用有效的方法求解结构对动力激励的响应。

二、质量矩阵

在动态有限元分析中,单元的质量矩阵 $[M]^e$ 有两种形式,即一致质量矩阵和集中质量矩阵。

单元的一致质量矩阵保持着结构的真实质量分布,它取决于单元的类型与形函数的形式,由公式(4-4b)计算。

单元的集中质量矩阵是把单元的分布质量按等效的原则离散,并把它集中(凝聚)在节点上。这样处理的单元质量称为集中质量或凝聚质量,其矩阵称为集中质量矩阵。离散的原则是要求不改变原物体(单元)的质量中心。设单元的密度为 ρ ,则单元的集中质量矩阵为

$$[m] = \int \rho [\Psi]^T [\Psi] dV \quad (4-7)$$

式中 $[\Psi]$ 是函数 Ψ_i 的矩阵, Ψ_i 在分配给节点 i 的区域为 1, 在域外为零。由于分配给各节点的区域不能交错, 所以, 由式(4-7)计算的集中质量矩阵通常是对角线矩阵。下面讨论几种典型单元的质量矩阵。

(一) 一致质量矩阵(也称协调质量矩阵)

1. 梁单元的质量矩阵

① 图 4-1 为杆端仅受剪力和弯矩的梁单元 ij , 两端线位移 u_1, u_3 , 角位移 u_2, u_4 。梁的长度为 l , 单位长度质量为 ρ , 其位移函数为

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (4-8)$$

因此, 单元的形函数如下:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \\ N_2 &= x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ N_3 &= 3 - \frac{x^3}{l^2} - \frac{2}{l^3}x^2 \\ N_4 &= -\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l}x^3 \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

将式(4-9)代入式(4-4b), 得

$$[m] = \rho \int_0^l [N]^T [N] dx = \rho \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & & & \\ \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & & \\ \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & \frac{13l}{35} & \\ -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

② 端部既承受轴向力、剪力又承受弯矩的平面刚架结构中的任一梁单元(图 4-2), 其端部位移为 $u_1 \sim u_6$, 则其质量矩阵

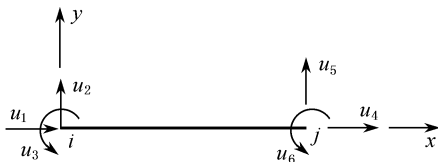


图 4-2 同时承受轴向力的梁单元

$$[m] = \rho l \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} & & & & \\ 0 & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & & & \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \\ 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & \\ 0 & -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & 0 & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (4-11)$$

2. 常应变三角形单元的质量矩阵

设常应变三角形单元的质量密度为 ρ , 面积为 A , 厚度为 t (图 4-3)。其形函数为

$$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_k]$$

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad ; i = i, j, k$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

代入(4-4b), 得一致质量矩阵

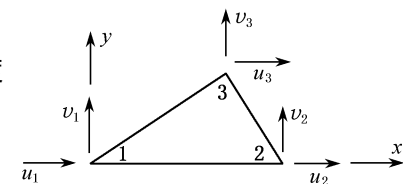


图 4-3 常应变三角形单元的质量矩阵

$$[m] = \frac{W}{3g} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (4-12)$$

$\rho A t = W/g$

式中

(二) 集中质量矩阵

1. 等截面梁单元

等截面梁单元的质量为 $m = \rho l$, 质量中心在梁单元的中心处, 为遵循质量中心不变的原则, 两端节点应分配 $m/2$ 的质量。因此, 质量矩阵为

$$[m] = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

2. 等厚度三角形单元

等厚度三角形单元的质量 $m = \rho A t$, 式中 ρ 为单元材料密度, A 为三角形单元面积, t 为单元厚度。为使质量中心不变, 单元质量应平均分配到三个节点上, 每个节点的质量应为

$$m_i = \frac{1}{3} \rho A t \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4-14)$$

写成单元质量矩阵如下

$$[m] = \frac{1}{3} \rho A t \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

上述两种不同形式的质量矩阵(一致质量矩阵, 集中质量矩阵), 在单元数目相同条件下, 计算精度相差不多。但由于集中质量矩阵是对角阵。可简化动力计算, 节省计算机计算时间, 因此, 在实际计算中, 往往采用集中质量矩阵。

用同样方法, 可求得其他各类单元的质量矩阵。结构的整体质量矩阵 $[M]$ 由单元质量矩阵集合而得。

三、阻尼矩阵

在工程上经常采用下面两种形式的阻尼矩阵。

1. 比例阻尼

所谓比例阻尼是指阻尼矩阵正比于质量矩阵或正比于刚度矩阵或正比于它们两者的线性组合。

若假定阻尼力正比于质点运动速度, 则根据振动理论可导出单元阻尼矩阵正比于单元质量矩阵, 即

$$[c] = \alpha [m] \quad (4-16)$$

若假定阻尼力正比于应变速度, 则可导出单元阻尼矩阵正比于单元刚度矩阵, 即

$$[c] = \beta [k] \quad (4-17)$$

有的文献建议把单元阻尼矩阵取为

$$[c] = [m] \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s ([m]^{-1} [k])^s \quad (4-18)$$

式中, α_s 是常系数。实际计算中, 大多在上式中只取前面两项, 即 $s = 0, 1$, 于是得到用整体质量矩阵 $[M]$ 和整体刚度矩阵 $[K]$ 的线性组合来表示整体阻尼矩阵 C 的公式, 如下:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (4-19)$$

式中, 系数 α 和 β 可由下式确定

$$\alpha = \frac{2(\xi_i \omega_j - \xi_j \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)(\omega_j - \omega_i)} \cdot \omega_i \omega_j \quad (4-20)$$

$$\beta = \frac{2(\xi_j \omega_j - \xi_i \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)(\omega_j - \omega_i)} \quad (4-21)$$

式中, ω_i 和 ω_j 分别为第 i 和第 j 个固有频率, ξ_i 和 ξ_j 分别为第 i 和第 j 个振型阻尼比, 即实际阻

尼与该振型的临界阻尼的比值。当 $\xi_i = \xi_j = \xi$ 时,

$$\alpha = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j}\xi \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \quad (4-22)$$

用质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 表示阻尼矩阵式(4-19)时,可节省机器的存储,因为不必再专门存储阻尼矩阵 $[C]$ 。

2. 振型阻尼

利用振型的正交性质,可得到下面所示整体阻尼矩阵

$$[C] = [M] \left[\sum_{i=1}^n 2\xi_{ii}\omega_i \{\delta_N\}_i \{\delta_N\}_i^T \right] [M] \quad (4-23)$$

式中, ξ_{ii} 为各阶振型阻尼比,为简单起见,假定各阶振型的阻尼比是相同的,即 $\xi_{ii} = \xi$; ω_i 为第 i 阶固有频率; $\{\delta_N\}_i$ 为正则化振型矩阵的第 i 列。

从式(4-23)可以看出各阶振型阻尼对阻尼矩阵的贡献。希望采用几项阻尼比,就可以在上式中包括几项,未用到的振型阻尼比,可令其为零。阻尼比 ξ_{ii} 的数值与结构类型、材料性质和振型有关,约在 0.02 ~ 0.20 范围内变化。表 4-1 列出了轿车车身阻尼比的试验值。

表 4-1 轿车车身阻尼比试验值

振动模式	阻尼比 ξ_{ii}
第一个对称模式	0.03
第二个对称模式	0.03
第一个反对称模式	0.05
第二个反对称模式	0.04

上面讨论了求解动力方程时所要解决的质量矩阵和阻尼矩阵问题,对于结构的刚度矩阵 $[K]$ 与静力问题有限元分析时建立的结构总刚度矩阵 $[K]$ 完全相同,这里不再复述。

四、特征值和特征向量

特征值和特征向量的求解是有限元动力分析中一个很重要的内容,下面详细讨论。

1. 特征值和特征向量的概念

动力方程(4-6)的无阻尼自由振动方程可写成如下形式(为以后书写方便,省略表示各量随时间变化的 (t)):

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = 0 \quad (4-24)$$

众所周知,上式的解为

$$\{\delta\}_i = \{\delta_M\}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (4-25)$$

式中, ω_i 和 φ_i 表示第 i 个振型的固有频率和相位角; $\{\delta\}_i$ 表示第 i 个振型的诸位移列阵; $\{\delta_M\}_i$ 表示第 i 个振型的位移最大值或振幅向量。对于被研究的结构,若是一个具有 n 个自由度的系统,则可写成如下形式:

$$\{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}_i \quad \{\delta_M\}_i = \begin{Bmatrix} \delta_{m1} \\ \delta_{m2} \\ \vdots \\ \delta_{mn} \end{Bmatrix}_i \quad (4-26)$$

将式(4-25)代入式(4-24)得代数方程组如下:

$$([K] - \omega_i^2[M])\{\delta_M\}_i = 0 \quad (4-27)$$

因为结构做自由振动时,各节点的振幅不可能全为零,所以公式(4-27)中括号内的行列式之值必为零,即

$$|[K] - \omega_i^2[M]| = 0 \quad (4-28)$$

此式即为系统的特征方程,其展开形式为

$$|[K] - \omega_i^2[M]| = \begin{vmatrix} K_{11} - \omega_i^2 M_{11} & K_{12} - \omega_i^2 M_{12} & \cdots & K_{1n} - \omega_i^2 M_{1n} \\ K_{21} - \omega_i^2 M_{21} & K_{22} - \omega_i^2 M_{22} & \cdots & K_{2n} - \omega_i^2 M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} - \omega_i^2 M_{n1} & K_{n2} - \omega_i^2 M_{n2} & \cdots & K_{nn} - \omega_i^2 M_{nn} \end{vmatrix} \quad (4-29)$$

解此项列式得最高阶为 $(\omega_i^2)^n$ 的多项式。可解出不相等的 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ 等 n 个根,称此根为特征值,开方后即得固有频率 ω_i 值。具有 n 个自由度的系统,即可求得 n 个固有频率。

将已求得特征值 ω_i^2 代入方程(4-27)即可求出对应于 ω_i^2 的 n 个振幅值 $\delta_{m1i}, \delta_{m2i}, \dots, \delta_{mni}$ 之间的比例关系(称振幅比)。这表明结构按第 i 阶固有频率 ω_i 作自由振动时,各振幅值之间具有确定的相对比值,即对每一频率 ω_i 结构具有一定的振动形态。

对应于每个特征值 ω_i^2 的振幅向量(用 $\{\delta_M\}_i$ 表示)称为特征向量,由于 $\{\delta_M\}_i$ 中各元素($\delta_{m1i}, \delta_{m2i}, \dots, \delta_{mni}$)的比值完全确定了系统振动的形态,故又称作为第 i 阶主振型或固有振型。

已知特征向量中各元素的比值,因此,若规定其中某一元素,例如 $\delta_{mni} = 1$,或规定元素中最大的一个值为1,即可确定其他各元素值,这种确定振型的方法,称为归一化,归一化了的特征向量又称振型向量。

对于 n 个自由度模型,如果将所有振型向量按列置放,可得如下形式的 $n \times n$ 阶振型矩阵或称模态矩阵:

$$[\delta_M] = [\{\delta_M\}_1 \{\delta_M\}_2 \cdots \{\delta_M\}_n] = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{m1} \\ \delta_{m2} \\ \vdots \\ \delta_{mn} \end{Bmatrix}_1 & \begin{Bmatrix} \delta_{m1} \\ \delta_{m2} \\ \vdots \\ \delta_{mn} \end{Bmatrix}_2 & \cdots & \begin{Bmatrix} \delta_{m1} \\ \delta_{m2} \\ \vdots \\ \delta_{mn} \end{Bmatrix}_n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (4-30)$$

2. 固有振型的正交性

为求解结构的振动响应,需要利用由固有振型的正交性所求得的某些固有关系。

① 利用固有振型的正交性对 $[M]$ 、 $[K]$ 进行适当运算,使得 $[M]$ 、 $[K]$ 对角化,成为主质量矩阵 $[M_z]$ 、主刚度矩阵 $[K_z]$,即

$$\{\delta_M\}_j^T [M] \{\delta_M\}_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ [M_z] & i = j \end{cases} \quad (4-31)$$

$$\{\delta_M\}_j^T [K] \{\delta_M\}_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ [K_z] & i = j \end{cases} \quad (4-32)$$

式中 $[M_z]$ 、 $[K_z]$ 均为对角阵,分别称为主质量矩阵、主刚度矩阵。

主刚度矩阵与主质量矩阵之比等于固有频率的平方,即

$$[K_z] = [M_z]\omega^2 \quad (4-33)$$

对于第 i 阶而言,则有

$$\omega_i = \frac{K_{zi}}{M_{zi}} \quad (4-34)$$

② 利用正则化振型矩阵 $[\delta_N]$ 对 $[M]$ 、 $[K]$ 进行运算,可使 $[M]$ 成为单位矩阵, $[K]$ 成为特征值矩阵。下面先定义正则化振型矩阵 $[\delta_N]$ 。

将主质量 M_{zi} 开平方所得的根,称为正则化因子 μ_i 。即

$$\mu_i = \sqrt{M_{zi}} = \sqrt{\{\delta_M\}_i^T [M] \{\delta_M\}_i} \quad (4-35)$$

用 μ_i 去除振型矩阵(4-30)中对应的列,所得新矩阵称做对质量归一化的振型矩阵,亦称正则化振型矩阵或正则振型矩阵,用 $[\delta_N]$ 表示。可以证明,利用 $[\delta_N]$ 对质量矩阵进行计算,可使质量矩阵变为单位矩阵。

$$[\delta_N]^T [M] [\delta_N] = [M_N] = [I] \quad (4-36)$$

利用 $[\delta_N]$ 对刚度矩阵进行运算,可使刚度矩阵变为特征值矩阵:

$$\begin{aligned} [\delta_N]^T [K] [\delta_N] &= [\delta_N]^T [M] [\delta_N] \omega^2 \\ [K_N] &= [M_N] \omega^2 = [I] \omega^2 \end{aligned} \quad (4-37)$$

$$[\delta_N]^T [K] [\delta_N] = [K_N] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} = [\omega^2] \quad (4-38)$$

式(4-31)~式(4-38)的推导见振动理论,此处从略。

③ 正则化振型矩阵的逆矩阵。

在进行振动分析时,常要用到正则振型的逆矩阵 $[\delta_N]^T$ 。对式(4-36)前乘 $([\delta_N]^{-1})^T$,得

$$([\delta_N]^{-1})^T [\delta_N]^T [M] [\delta_N] = ([\delta_N]^{-1})^T$$

将此式转置,因质量矩阵是对称矩阵,于是得出

$$[\delta_N]^{-1} = [\delta_N]^T [M] \quad (4-39)$$

用式(4-39)即可方便地求出正则振型的逆矩阵。

3. 计算特征值和特征向量的方法

由振动理论知,具有 n 个自由度的系统,求特征值的方程是 n 次的。目前,对高次特征方程的求解,还没有一种方法对于所有情况都是最佳的,因此本文将讨论三种不同的方法,即逆迭代法,它适合于只要求少数几个特征值和特征向量的情况。转换方法,就是变换为典型方程,使矩阵对角化来计算特征值和特征向量,这是一个很有效的方法。减缩方法,就是用减少自由度的办法来降低所要求解的特征值问题阶数的方法。下面分别加以说明。

(1) 逆迭代法

逆迭代法是一种收敛至最低振动频率的迭代方法,反复求解方程

$$[K]X_{k+1} = MX_k \quad (4-40)$$

直到向量收敛至最低振型为止。将式(4-40)和式(4-27)比较,可见

$$X_k = \omega^2 X_{k+1} \quad (4-41)$$

因此,这个方法同时给出特征值和特征向量。

由于逆迭代法只能算出最低振型,故在使用上受到限制。为使收敛至任何一个振型,采用“移动”的逆幂法,即令

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \Delta\omega^2 \quad (4-42)$$

代入式(4-27),得

$$\begin{aligned} [K] \{\delta_M\}_i &= (\omega_0^2 + \Delta\omega^2) [M] \{\delta_M\}_i \\ ([K] - \omega_0^2 [M]) \{\delta_M\}_i &= \Delta\omega^2 [M] \{\delta_M\}_i \end{aligned} \quad (4-43)$$

公式(4-43)与公式(4-27)比较,其差别只是用 $[K] - \omega_0^2 [M]$ 取代了 $[K]$

为在计算机上实现这一方法,通常采用下列步骤:

- ① 计算并分解经修正的刚度矩阵,如式(4-44)所示。

$$([K] - \omega_0^2 [M]) = U^T D U \quad (4-44)$$

- ② 以质量矩阵前乘一个初始估计的特征向量 x_0 ,如式(4-45)所示。

$$y_0 = [M] x_0 \quad (4-45)$$

- ③ 用向前消元和向后回代过程求解方程

$$U^T D U x_{k+1} = y_k \quad (4-46)$$

以计算特征向量的下一个估计值 x_1 (在以后的各步中为 x_{k+1})

- ④ 以质量矩阵前乘这一估计向量

$$y_{k+1} = [M] x_{k+1} \quad (4-47)$$

- ⑤ 由式(4-31),式(4-32)和式(4-33)来估算特征值

$$\Delta\omega_{k+1}^2 = \frac{x_{k+1}^T ([K] - \omega_0^2 [M]) x_{k+1}}{x_{k+1}^T [M] x_{k+1}} = \frac{x_{k+1}^T y_k}{x_{k+1}^T y_{k+1}} \quad (4-48)$$

⑥ 将向量 y_{k+1} 正则化(或选定比例),并重复第3至第6步,直到特征收敛为止。一旦算出一固定振型,即将 x_{k+1} 正则化并将特征值加到移位频率的平方 ω_0^2 上。

这种算法允许求解某一频率范围内的特征值,而不一定是最低特征值。

(2) 转换方法

即将求特征值和特征向量的方程转换为标准形式

$$[A] \{x\} = \lambda \{x\} \quad (4-49)$$

式中 $[A]$ 是一个对称正定方程, λ_i 和 $\{x_i\}$ 是实数方程 $[A]$ 的特征值和特征向量。下面设法把式(4-27)变换为式(4-49)。

- ① 对于集中质量矩阵,如果质量矩阵 $[M]$ 为对角阵时,令

$$\{\delta_M\} = [M]^{-\frac{1}{2}} \{x\} \quad (4-50)$$

代入式(4-27),并两边左乘 $[M]^{-\frac{1}{2}}$,得

$$[M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}} \{x\} = \omega_i^2 [M]^{-\frac{1}{2}} [M]^{-\frac{1}{2}} \{x\} \quad (4-51)$$

再令

$$[A] = [M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}} \quad (4-52)$$

$$\lambda = \omega^2 \quad (4-53)$$

则式(4-27)变换为

$$[A] \{x\} = \lambda \{x\} \quad (4-54)$$

② 对于一致质量矩阵,质量矩阵不是对角阵,可用两种方法进行。

a. 对质量矩阵进行三角分解。由于 $[M]$ 是对称正定的,作三角分解如下:

$$[M] = [L][I]L^T \quad (4-55)$$

令

$$\{\delta_M\} = [L^{-1}]^T \{x\} \quad (4-56)$$

代入式(4-27),并两边左乘 $[L^{-1}]$,得

$$[L^{-1}][K][L^{-1}]^T \{x\} = \omega^2 \{x\} \quad (4-57)$$

再令

$$[A] = [L^{-1}][K][L^{-1}]^T \quad (4-58)$$

$$\lambda = \omega^2 \quad (4-59)$$

则式(4-27)变换为

$$[A] \{x\} = \lambda \{x\} \quad (4-60)$$

b. 对刚度矩阵进行三角分解。将 $[K]$ 分解为(K 是对称正定矩阵)

$$[K] = [L][I]L^T \quad (4-61)$$

令

$$\{\delta_M\} = [L^{-1}]^T \{x\} \quad (4-62)$$

代入式(4-27),并两边左乘 $[L^{-1}]$,得

$$[I] \{x\} = \omega^2 [L^{-1}][M][L^{-1}]^T \{x\} \quad (4-63)$$

再令

$$[A] = [L^{-1}][M][L^{-1}]^T \quad (4-64)$$

$$\lambda = 1/\omega^2 \quad (4-65)$$

则式(4-27)变换为

$$[A] \{x\} = \lambda \{x\}$$

对标准方程(4-49)可用雅可比方法求解。一旦算出特征向量 $\{x\}$,必须按式(4-50),式(4-56)或式(4-62)计算 $\{\delta_M\}$ 。

(3) 减缩方法。用有限元法进行结构计算时,计算网格的疏密,一般决定于应力计算精度的需要,往往具有大量自由度。当我们进行动力分析时,因为结构体在动载荷激励下产生共振时,往往是只对少数几个低阶振型才会产生危险。因此,只需要知道头几个固有频率和振型而不必求出全部频率和振型。在此情况下,可采用运动凝聚法或 Guyan 减缩法。它借助约束方程将某些自由度和另外一些自由度联系起来,因而减小了问题的规模。

比较简单的减少自由度的方法是先根据应力分析的需要划分网格,然后,假定质量只集中在少数选定的节点上,从而就可使所要求解的特征值问题有较小的阶数。

设整个结构非零质量的自由度为 δ_1 ,零质量自由度为 δ_2 ,公式(4-27)可分块如下:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (4-66)$$

展开上式,可得如下用 $\{\delta_1\}$ 表示 $\{\delta_2\}$ 的公式:

$$\{\delta_2\} = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{\delta_1\} \quad (4-67)$$

再代回式(4-66),得到

$$[[K_{11}] - [K_{12}][K_{22}^{-1}][K_{21}]]\{\delta_1\} = \omega^2[M_{11}]\{\delta_1\} \quad (4-68)$$

将括号内的值用 $[\bar{K}_{11}]$ 表示,得到

$$[\bar{K}_{11}]\{\delta_1\} = \omega^2[M_{11}]\{\delta_1\} \quad (4-69)$$

这样,就得到了一个阶数较低的特征值问题。

为了说明这个方法的有效性,下面给出一计算实例,对一端固定的、边长为 a 的正方形板,采用几种不同方案的降阶处理,把自由度从 90 一直降低到 6,详见图 4-4。

① 为没有缩减的平板自由度 90;

② 为缩减成自由度 54,在“·”处的节点保留三个自由度($\omega, \theta_x, \theta_y$),其余节点的全部自由度均消去;

③ 为缩减成自由度 18,在 X 处的节点,保留一个挠度自由度 ω ,其余节点自由度均消去;

④ 为缩减成自由度 6,在 X 处的节点,保留一个挠度自由度 ω ,其余节点自由度均消去。

计算结果表明,前四个自振频率改变不大,见表 4-2。

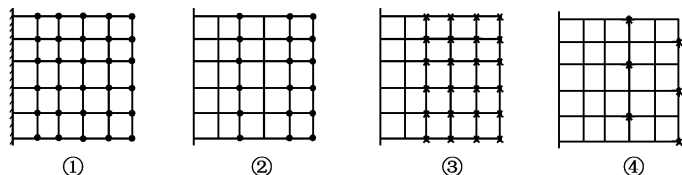


图 4-4 正方形板的主自由度位置

表 4-2 正方形板的无量纲频率 ($\omega_i = \omega \sqrt{D/\rho h a^4}$)

频率阶数	准确值	自由度数/个			
		90	54	18	6
1	3.494	3.469	3.470	3.470	3.473
2	8.547	8.535	8.540	8.54	8.604
3	21.440	21.450	21.559	21.296	22.690
4	27.460	27.059	27.215	27.215	29.490

式中 ω_i 为 i 次固有频率, ρ 为材料密度, h 为板的厚度, $D = Eh^3/12(1 - \mu)$, E 为材料弹性模量, μ 为泊松比。

此外,子空间迭代法、Givens 法和 Householder 法,也是求解特征值和特征向量的比较有效的方法。

五、动力响应问题

如有激励力作用于结构,必然会产生动力响应。对于用有限元法分析的结构来说,其动力响应的求解,一般可采用两种方法,即振型叠加法和逐步积分法。

1. 振型叠加法(模态叠加法)

用振型叠加法解动力方程时,是利用上节所述的结构振型的正交性,使动力方程解耦,变成一组独立的微分方程。每一个自由度有一个方程,解出这些方程之后,将结果叠加,即得结构的总响应。

首先研究无阻尼自由振动方程,其表达式为

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (4-70)$$

用 $\{\delta_N\}^T$ 前乘方程(4-70),并在 $\{\ddot{\delta}\}$ 与 $\{\delta\}$ 前面插进 $[I] = \{\delta_N\}\{\delta_N\}^{-1}$,则有

$$\{\delta_N\}^T [M]\{\delta_N\}\{\delta_N\}^{-1}\{\ddot{\delta}\} + \{\delta_N\}^T [K]\{\delta_N\}\{\delta_N\}^{-1}\{\delta\} = 0 \quad (4-71)$$

引用 $\{\delta_N\}^T [M]\{\delta_N\} = [M_N] = [I]$ 及 $\{\delta_N\}^T [K]\{\delta_N\} = [K_N] = [\omega^2]$ 的关系,则上式可写成

$$[I]\{\ddot{X}_N\} + [\omega^2]\{X_N\} = 0 \quad (4-72)$$

令

$$\{\ddot{X}_N\} = \{\delta_N\}^{-1}\{\ddot{\delta}\} \quad (4-73)$$

$$\{X_N\} = \{\delta_N\}^{-1}\{\delta\} \quad (4-74)$$

则式(4-72)成为

$$[I]\{\ddot{X}_N\} + [\omega^2]\{X_N\} = 0 \quad (4-75)$$

式(4-75)中的 $\{X_N\}$ 为用正则化振型矩阵 $\{\delta_N\}$ 进行坐标变换后确定的新坐标,称为正则坐标。

正则坐标向量和原坐标向量之间的坐标变换关系为

$$\{\delta\} = [\delta_N]\{X_N\} \quad (4-76)$$

同样,可写出

$$\{\ddot{\delta}\} = [\delta_N]\{\ddot{X}_N\} \quad (4-77)$$

将式(4-75)写成展开形式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_{N_1} \\ \ddot{X}_{N_2} \\ \ddot{X}_{N_3} \\ \vdots \\ \ddot{X}_{N_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \omega_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{N_1} \\ X_{N_2} \\ X_{N_3} \\ \vdots \\ X_{N_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-78)$$

或写成另一种形式

$$\ddot{X}_{Ni} + \omega_{iX_{Ni}}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-79)$$

公式(4-75),式(4-78),式(4-79)三式是相等的,它们给出了 n 个独立的二阶微分方程。

采用正则坐标的一个显而易见的优点就是换算后的刚度矩阵 $[K_N]$ 的对角线各元素给出了诸特征值,这对振动响应计算将是重要的。可利用式(4-79)算出正则坐标的位移向量 $\{X_{Ni}\}$,再用关系式(4-76),将其变换回到原来坐标位移向量 $\{\delta\}$ 。

一般运动结构均属于有阻尼受迫振动,要求解下面形式的动力方程

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{R_\delta\}$$

如果引进正则坐标 $\{X_N\}$,则变为

$$[M_N]\{\ddot{X}_N\} + [C_N]\{\dot{X}_N\} + [K_N]\{X_N\} = \{R_N\} \quad (4-80)$$

式(4-80)中 $\{\ddot{X}_N\}$ 和 $\{X_N\}$ 前的系数矩阵 $[M_N]$ 、 $[K_N]$ 都是对角线矩阵(见公式(4-36)、式(4-37))。式中 $[C_N]$ 是正则坐标的阻尼矩阵,称主阻尼矩阵,是由原坐标阻尼矩阵 $[C]$ 变换而来的,即:

$$[C_N] = \{\delta_N\}^T [C] \{\delta_N\} \quad (4-81)$$

当阻尼矩阵 C 采用比例阻尼时,使 C_N 成为对角阵如下:

$$[C_N] = \begin{bmatrix} \alpha + \beta\omega_1^2 & & & \\ & \alpha + \beta\omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha + \beta\omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (4-82)$$

这样,式(4-80)即可写成 n 个独立的彼此无联系的微分方程

$$\ddot{X}_{Ni} + (\alpha + \beta\omega_i^2)X_{Ni} + \omega_i^2 X_{Ni} = q_{Ni} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-83)$$

式中 q_{Ni} 表示对应于第 i 个正则坐标的广义激振力。

由式(4-83)解出正则坐标的位移向量 $\{X_N\}$ 后,再利用关系式(4-76),将其变换回到原来坐标的位移向量 $\{\delta\}$ 。若阻尼矩阵 $[C]$ 采用振型阻尼时,也同样能使 $[C_N]$ 成为对角阵,从而同样能写成 n 个独立的微分方程。

式(4-83)相当于一个自由度系统的动力响应方程。当激振力为一般周期力时,应将激振力函数展成傅立叶级数后,再按振型叠加法进行求解。当激振力是非周期函数时,可应用杜哈梅积分。在求得各阶响应后,再进行叠加,即可求得结构的总响应。

求出各节点位移 $\{\delta\}$ 后,即可用公式

$$\{\sigma(t)\} = [D][B]\{\delta(t)\} \quad (4-84)$$

计算结构在 t 时刻的动应力。式中 $[D]$ 为应力应变关系矩阵, $[B]$ 为应变与位移关系矩阵。

采用振型叠加法求解动力响应问题,其计算精度可达到很高,但它要求出各阶振型模态,所以计算程序比较复杂。实际经验表明,激振力所能激起的只是激振频率相对较低的一部分振型,绝大部分高阶振型的影响很小,可略去不计。因此,只要将前 m 阶振型的响应叠加,便得到结构的响应。经验证明,对汽车车身的动力应叠加前十二阶即可。

2. 逐步积分法

逐步积分法又称直接积分法,它的基本思想是根据动力学方程,由时刻 t 的状态向量 $\{\ddot{\delta}_t\}$ 、 $\{\dot{\delta}_t\}$ 和 $\{\delta_t\}$ 计算时刻 $t + \Delta t$ 的状态向量 $\{\ddot{\delta}_{t+\Delta t}\}$ 、 $\{\dot{\delta}_{t+\Delta t}\}$ 和 $\{\delta_{t+\Delta t}\}$ 。逐步积分法不仅在空间上采用有限元的离散化方法,而且在时间上也采用了离散化方法,即把时间周期 T 分为 $T/n = \Delta t$ 的 n 个间隔。下面介绍常用的威尔逊 θ 法。

威尔逊 θ 法的基本假设认为加速度在时间间隔 $t \sim t +$

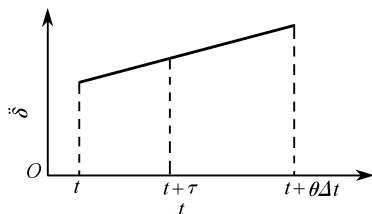


图 4-5 线性加速度假设

Δt 内呈线性变化(见图 4-5)。设 τ 为时间增量,其中 $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$,有

$$\{\ddot{\delta}_{t+\tau}\} = \{\ddot{\delta}_t\} + \frac{\tau}{\theta \Delta t}(\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} - \{\ddot{\delta}_t\}) \quad (4-85)$$

积分式(4-85)得

$$\{\dot{\delta}_{t+\tau}\} = \{\dot{\delta}_t\} + \tau\{\ddot{\delta}_t\} + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t}(\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} - \{\ddot{\delta}_t\}) \quad (4-86)$$

$$\{\delta_{t+\tau}\} = \{\delta_t\} + \tau\{\dot{\delta}_t\} + \frac{\tau^2}{2}\{\ddot{\delta}_t\} + \frac{\tau^3}{6\theta \Delta t}(\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} - \{\ddot{\delta}_t\}) \quad (4-87)$$

设式(4-86)和式(4-87)中的 $\tau = \theta \Delta t$,得 $t + \theta \Delta t$ 时刻的速度和位移

$$\{\dot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} = \{\dot{\delta}_t\} + \frac{\theta \Delta t}{2}(\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} + \{\ddot{\delta}_t\}) \quad (4-88)$$

$$\{\delta_{t+\theta \Delta t}\} = \{\delta_t\} + \theta \Delta t\{\dot{\delta}_t\} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6}(\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} + 2\{\ddot{\delta}_t\}) \quad (4-89)$$

由此可以得到用 $\{\delta_{t+\theta \Delta t}\}$ 表示 $\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\}$ 和 $\{\dot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\}$ 的式子

$$\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2}(\{\delta_{t+\theta \Delta t}\} - \{\delta_t\}) - \frac{6}{\theta \Delta t}\{\dot{\delta}_t\} - 2\{\ddot{\delta}_t\} \quad (4-90)$$

$$\{\dot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} = \frac{3}{\theta \Delta t}(\{\delta_{t+\theta \Delta t}\} - \{\delta_t\}) - 2\{\dot{\delta}_t\} - \frac{\theta \Delta t}{2}\{\ddot{\delta}_t\} \quad (4-91)$$

把式(4-89)式(4-90)和式(4-91)代入动力方程(4-6)得

$$[M]\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} + [C]\{\dot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\} + [K]\{\delta_{t+\theta \Delta t}\} = \{R_{t+\theta \Delta t}\} \quad (4-92)$$

其中

$$\{R_{t+\theta \Delta t}\} = \{R_t\} + \theta(\{R_{t+\Delta t}\} - \{R_t\}) \quad (4-93)$$

把式(4-90)和式(4-91)代入式(4-92)并加以整理,可得:

$$[\bar{K}]\{\delta_{t+\theta \Delta t}\} = \{\bar{R}_{t+\theta \Delta t}\} \quad (4-94)$$

式中

$$[\bar{K}] = [K] + \frac{3}{\theta \Delta t}[C] + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2}[M] \quad (4-95)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{R}_{t+\theta \Delta t}\} = & \{R_{t+\theta \Delta t}\} + [M]\{2\{\ddot{\delta}_t\} + \frac{6}{\theta \Delta t}\{\dot{\delta}_t\} + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2}\{\delta_t\}\} + \\ & [C]\left(\frac{\theta \Delta t}{2}\{\ddot{\delta}_t\} + 2\{\dot{\delta}_t\} + \frac{3}{\theta \Delta t}\{\delta_t\}\right) \end{aligned} \quad (4-96)$$

由式(4-96)式(4-95)和式(4-94)可解出 $\{\delta_{t+\theta \Delta t}\}$,将它代入式(4-90)可以解出加速度 $\{\ddot{\delta}_{t+\theta \Delta t}\}$ 将它代入式(4-85)式(4-86)和式(4-87),并取 $\tau = \Delta t$ 进行运算,便可得到 $\{\ddot{\delta}_{t+\Delta t}\}$ $\{\dot{\delta}_{t+\Delta t}\}$ 和 $\{\delta_{t+\Delta t}\}$ 。

威尔逊 θ 法的实际计算步骤如下:

(1) 初始计算

① 确定初始值 $\{\delta_0\}$ $\{\dot{\delta}_0\}$ 和 $\{\ddot{\delta}_0\}$;

② 选择时间步长 Δt 和计算积分常数 $\theta \geq 1.37$;

$$a_0 = 6/\theta^2 \Delta t^2; a_1 = 3/\theta \Delta t; a_2 = 2a_1;$$

$$a_3 = \theta \Delta t/2; a_4 = a_0/\theta; a_5 = -a_2/\theta;$$

$$a_6 = 1 - 3/\theta; a_7 = \Delta t/2; a_8 = \Delta t^2/6。$$

③ 形成等效刚度矩阵：

$$[\bar{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$$

④ 将 $[\bar{K}]$ 三角化,即

$$[\bar{K}] = [L][G][L]^T$$

(2) 对每个时间步长进行计算

① 计算 $t + \theta\Delta t$ 时刻的等效载荷：

$$\{\bar{R}_{t+\theta\Delta t}\} = \{R_{t+\theta\Delta t}\} + [M]\{a_0\{\delta_t\} + a_2\{\delta_t\} + 2\{\ddot{\delta}_t\}\} + [C]\{a_1\{\delta_t\} + 2\{\delta_t\} + a_3\{\ddot{\delta}_t\}\}$$

② 求 $t + \theta\Delta t$ 时刻的位移：

$$[L][G][L]^T\{\delta_{t+\theta\Delta t}\} = \{\bar{R}_{t+\theta\Delta t}\}$$

③ 求 $t + \Delta t$ 时刻的加速度、速度和位移：

$$\{\ddot{\delta}_{t+\Delta t}\} = a_4\{\delta_{t+\theta\Delta t}\} - \{\delta_t\} + a_5\{\delta_t\} + a_6\{\ddot{\delta}_t\}$$

$$\{\delta_{t+\Delta t}\} = \{\delta_t\} + a_7(\{\ddot{\delta}_{t+\Delta t}\} + \{\ddot{\delta}_t\})$$

$$\{\delta_{t+\Delta t}\} = \{\delta_t\} + \Delta t\{\delta_t\} + a_8(\{\ddot{\delta}_{t+\Delta t}\} + 2\{\ddot{\delta}_t\})$$

④ 计算 $t + \Delta t$ 时刻的应力：

$$\{\sigma_{t+\Delta t}\} = [D][B]\{\delta_{t+\Delta t}\} \quad (4-97)$$

威尔逊 θ 法对于解决复杂结构的响应问题证明效果良好,无条件稳定,对线性和非线性问题都适用。对于大多数问题取 $\theta = 1.4$,即可得出满意的结果。

第二节 汽车车身结构模态分析

汽车车身结构本身是一个无限多自由度的振动系统,在外界的时变激励作用下将产生振动。当外界激振频率与系统固有频率接近时,将产生共振。共振不仅使乘员感到很不舒适,带来噪声和部件的早期疲劳损坏,还会破坏车身表面的保护层和车身的密封性,从而削弱抗腐蚀性能。车身作为一个多自由度的弹性系统,其固有振动频率也就相应表现为无限多的固有模态,其低阶模态振型多为整体振型,如整体扭转、弯曲振型,高阶模态振型多为一些局部共振振型,如地板振型、车顶振型和侧围外板振型等。有时,由于车身的局部刚度低,也有一些局部振型在低频范围内出现,或与整车振型同时出现。合理的车身模态分布对提高整车的可靠性和 NVH 性能等有着十分重要的意义。

汽车在行驶中常因路面不平、车速和运动方向的变化,车轮、发动机和传动系的不平衡,以及齿轮的冲击等产生各种外部和内部激励,从而极易产生整车和局部的强烈振动。在汽车设计过程中,要使各系统的固有振动频率避开外界激励产生的频率范围,保证汽车良好的工作性能。

一、轿车车身梁结构模态分析

轿车产品开发初期,车身结构细节尚不确定,但车身主要梁结构件的布置及尺寸是初步确定的。现代车身工程一般以这些初定的车身梁结构预测车身结构的低阶模态参数等指标,并进行必要的主要梁结构改进设计。某轿车的开发初期的车身梁单元有限元模型如图 4-6 所示,包括 372 个梁单元,658 个节点。

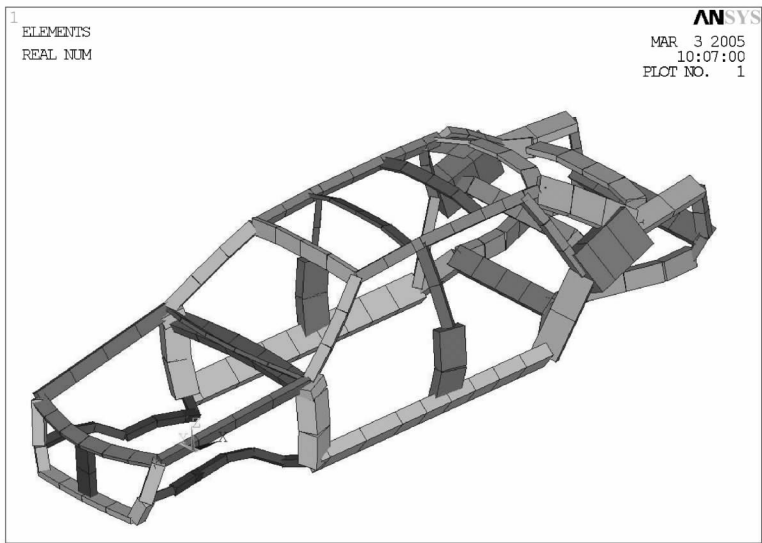


图 4- 6 某轿车车身有限元模型

在此模型的基础上不加任何约束与载荷 ,用分块兰索斯(block Lanczos)方法计算此车身分元模型的自由—自由模态。表 4- 3 给出了车身主要低阶模态的计算结果 ,绕 x 轴的一阶扭转模态 ,频率为 27.04 Hz ;车身绕 y 轴一阶弯曲模态 ,频率为 43.18 Hz。

表 4- 3 车身梁模型模态分析

振形描述	频率 /Hz	振形图
绕 X 轴一阶扭转模态	27.04	
绕 Y 轴一阶弯曲模态	43.18	

由该表可以看出车架前部较弱 ,振型相对位移大 ,需要增强。

二、电动轿车车身结构模态分析

对于电动轿车而言 ,其驱动装置以电机代替了发动机。一般电机动平衡较好 ,故电动轿车设计开发应该主要考虑主减速器及其后续的传动系统和行驶系统的转动部件的转动不平衡量

引起的额外激励。某改装轿车电机的最高转速是 10 000 r/min,其主减速器减速比 1:10,主减速器及其后续的传动系统和行驶系统的转动部件的最高工作频率为 16.7 Hz。因此车身体壳体的低阶模态频率应控制在 16.7 Hz 以上。

对该车身壳体有限元模型分别进行模态分析。用 Block Lanczos 方法计算车身壳体自由—自由边界条件下的模态,由于在自由边界状态下,前六阶振型频率基本为零。模拟时,计算初始频率可设为 1 Hz 以消除自由刚体模态。

该车车身壳体模型计算得出绕 x 轴的一阶扭转模态频率 32.66 Hz,振型如图 4-7 所示。绕 y 轴一阶弯曲模态频率 49.67 Hz,振型如图 4-8 所示。图 4-9 给出了低阶频率 36.27 Hz 时出现的前舱横向摆动局部振型。说明改制车身前舱部位较弱,对前舱设备的安装可能会造成负面影响,应提高车身前部的刚度。

该车的车身壳体的低阶固有频率均高于 16.7 Hz,说明该车车身壳体的低阶模态频率分布是合理的。参考 CA7220 轿车车身壳体主要模态频率:一阶扭转 25 Hz 和一阶竖直弯曲 40 Hz,该电动轿车车身的主要低阶模态频率均高于传统同级别轿车的车身相关频率值,有一定的裕度,不必进行进一步优化提高。

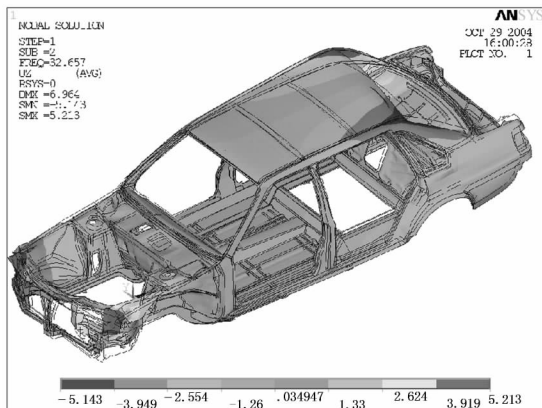


图 4-7 某电动轿车车身壳体一阶扭转振型图

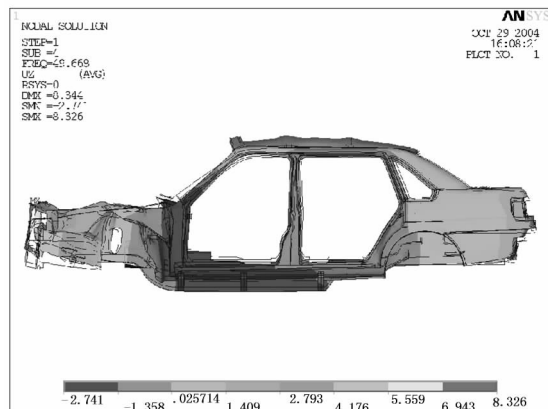


图 4-8 某电动轿车车身壳体一阶弯曲振型图

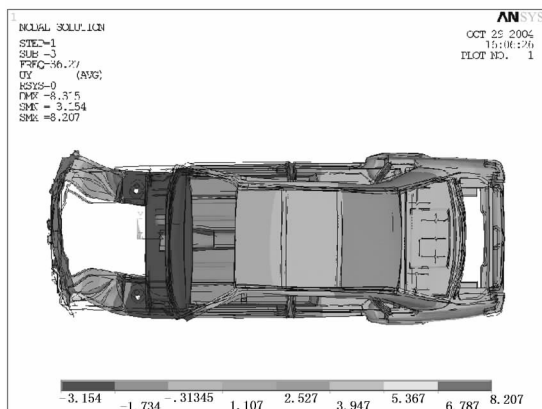


图 4-9 某电动轿车车身壳体前舱局部振型图

三、微型电动车车身板梁组合结构模态分析

如图 4-10 所示将某微型电动车车身结构的几何模型通过 IGES 格式导入有限元前处理软件 Hypermesh 中首先进行几何信息清理,整理出主要承载结构件的几何。再进行网格化,将型材骨架以梁单元模拟,将电瓶盒等以板单元模拟。板梁的焊接关系的处理,在该模型中采用共用节点法来模拟。

采用基本单元边长 50 mm 进行网格划分,在局部需要细化的地方单元边长为 10 mm。模型共有板单元 10 526 个,梁单元 717 个。车身体有限元模型如图 4-11。

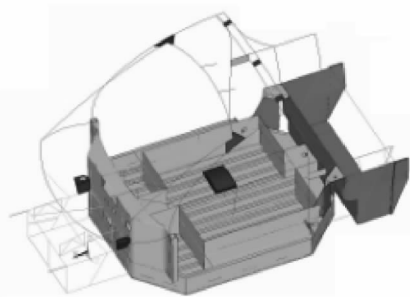


图 4-10 某电动车车身骨架简化几何模型

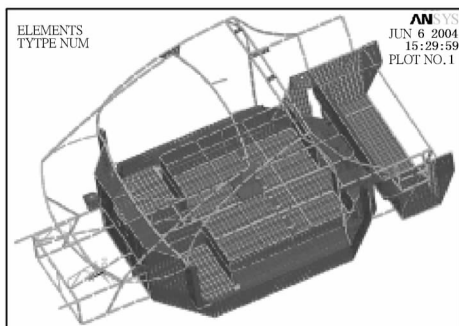


图 4-11 某电动车车身体有限元模型

在 ANSYS 软件中用 Block Lanczos 算法计算自由—自由边界条件下车身的主要低阶模态。由于在有限元建模中省略了车身的细小特征以及面漆,所以在模态分析时需要有限元模型进行必要的修改,以消除质量误差。例如通过测量得到试验车身的质量为 147 kg,而在密度取 $7.8 \times 10^{-9} \text{ t/mm}^3$ 时计算得车身的有限元模型质量为 124.86 kg,可将车身计算模型当量质密度取为 $9.18 \times 10^{-9} \text{ t/mm}^3$ 。计算时提取模态数为 6 阶,各阶模态振形及频率值见表 4-4。

表 4-4 车身模态列表

模态阶数	频率 f/Hz	振型描述
1	27.31	上车身骨架横弯模态
2	39.80	车身骨架整体一阶扭转模态
3	52.56	行李厢底板一阶竖直弯曲模态
4	58.51	行李厢底板二阶竖直弯曲模态
5	67.71	行李厢底板三阶竖直弯曲模态
6	67.80	车身骨架整体一阶竖直弯曲模态

模拟分析得到的车身骨架整体模态如图 4-12 和图 4-13。

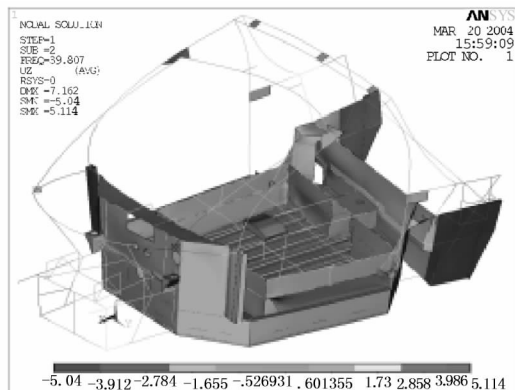


图 4-12 车身骨架整体一阶扭转模态

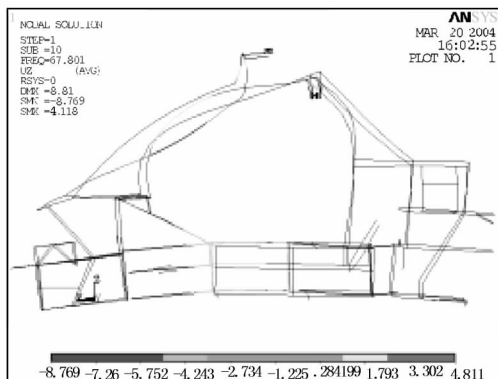


图 4-13 车身骨架整体一阶竖直弯曲模态

可见,该车身上车身骨架刚度较低,这与现行电动车的基础承载式车身结构特点相对应。

另外,该车身行李舱刚度也较低,其承载行李的能力只是象征性的。

第三节 车身结构低阶模态修改灵敏度分析

一、轿车车身模态修改灵敏度计算分析

车身结构模态分析是轿车新产品开发中结构分析的主要内容。尤其是车身结构的低阶弹性模态,它不仅反映了汽车车身的整体刚度性能,而且是控制汽车常规振动的关键指标,应作为汽车新产品开发的强制性考核内容。

与实验模态分析方法不同,有限元等数值模拟技术可以在汽车设计初期预测车身结构的模态参数,尽可能避免相关设计缺陷,及时修改及优化设计方案,从而大大缩短产品开发周期。

为同时保证必要的车身结构强度与刚度指标,一般的模态参数修改方案是将车身结构低阶弹性模态频率提高到一定的水平。一种途径是应用密度小的材料,如铝、塑料及超轻钢等做车身材料,以降低关注模态的模态质量;另一种途径是合理修改关键零件的结构形式与尺寸,以提高关注模态的模态刚度。第一种途径受到生产成本、材料特性及生产工艺等影响,应用较少。在用第二种途径进行车身结构模态参数修改时,关键是找出影响低阶关注模态的灵敏零件,然后通过增加板厚而提高整体抗弯或抗扭刚度等措施来改进该模态。

20世纪80年代末期,国外开始了结构修改灵敏度在汽车车身设计中的应用研究。国内尚少见相关资料。本节建立了国产某中级轿车车身焊接总成的模态分析有限元模型,并利用该模型对该车车身主要低阶弹性模态进行了结构修改灵敏度分析。

1. 轿车车身低阶模态分析的有限元模型

在轿车车身几何模型的基础上,建立车身模态分析有限元模型。建立模型的原则是在保证准确反映结构模态特性(包括整体弯曲及扭转刚度等)的前提下进行必要的简化,以获得必要的计算精度,并尽可能降低计算量与计算复杂性。该车采用典型承载车身结构,车门、发动机罩、座椅、保险杠、前翼子板及车身附件等装配在车身焊接总成上,它们对车身整体抗弯及抗扭刚度的贡献可以忽略;车身结构零件中的小孔、圆角、翻边及凸台等局部结构对车身整体刚度的影响也可以忽略。主要考虑两个方面零部件,一是空间基本完整闭合的梁类结构件,包括前后纵梁、门槛、门柱、窗柱、前后风窗上横梁、门上横梁、前横梁及锁板;二是板类内外覆盖件,包括顶盖、地板、轮罩、后挡板及悬挂固定座等。

针对车身结构模态及其修改灵敏度分析,未深入考虑结构焊点及立柱接头等柔度的影响。

相关资料表明,有限元板单元对轿车车身刚度及低阶模态计算分析是较准确的主要单元类型。为降低求解规模,以四边形单元为主,在结构变化及过渡区采用少数三角形单元。对轿车车身刚度及低阶模态计算,合理模型的基本自由度规模为18000左右。为此取单元基本边长为50mm。对门槛等梁类结构件及其与覆盖件的过渡区,单元边长之比控制在1:5左右。汽车车身低阶模态分析有限元网格如图4-14所示,共5987个结点和6386个单元。依实际结构确定各单元厚度。钢材的杨氏模量、泊松比及质密度分别为210MPa、0.3及7850kg/m³。

在轿车车身结构低阶模态分析中多采用自由-自由边界条件,采用ANSYS软件对该模型进行了模态计算分析,所得前两阶弹性模态如表4-5所示。该计算结果与该生产厂进行的该车身实验模态分析结果基本吻合。

表 4-5 轿车车身低阶模态参数

弹性模态号	模态频率/Hz	模态振型
1	25.125	一阶扭转
2	40.370	竖直一阶弯曲

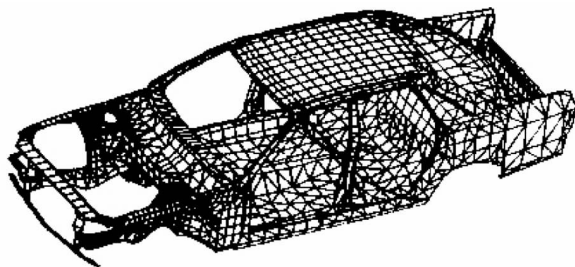


图 4-14 轿车车身结构低阶模态分析有限元网格

2. 车身模态修改灵敏度计算分析

(1) 基本理论

设 ω_i 及 $\{u_i\}$ 分别是车身结构第 i 个模态的固有频率与振型向量, 则它们满足

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{u_i\} = \{0\} \quad (4-98)$$

其中 $[K]$ 与 $[M]$ 分别为结构模型的总刚度与总质量矩阵, 其维数即为结构模型自由度数。

$\omega_{i,j}$, $\{u_{i,j}\}$, $[K_j]$ 及 $[M_j]$ 分别为 ω_i , $\{u_i\}$, $[K]$ 及 $[M]$ 对某设计变量 b (如板厚等) 的偏导数, 则对式(4-98)求导得

$$([K_j] - 2\omega_i\omega_{i,j}[M] - \omega_i^2[M_j])\{u_i\} + ([K] - \omega_i^2[M])\{u_{i,j}\} = \{0\} \quad (4-99)$$

用 $\{u_i\}^T$ 左乘上式, 并考虑

$$\{u_i\}^T([K] - \omega_i^2[M])\{u_{i,j}\} = 0 \quad (4-100)$$

及

$$\{u_i\}^T[M]\{u_i\} = 1 \quad (4-101)$$

有

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2\omega_i} \{u_i\}^T([K_j] - \omega_i^2[M_j])\{u_i\} \quad (4-102)$$

有限元方法中 $[K]$ 及 $[M]$ 分别由单元刚度矩阵 $[K^e]$ 及单元质量矩阵 $[M^e]$ 组装而成, 即

$$[K] = \sum [K^e]$$

$$[M] = \sum [M^e]$$

上两式对参数 b 求导有

$$[K_j] = \sum [K_j^e]$$

$$[M_j] = \sum [M_j^e]$$

其中 $[K_j^e]$ 和 $[M_j^e]$ 分别为 $[K^e]$ 和 $[M^e]$ 对设计参数 b 的导数矩阵, 则式(4-102)变为

$$\omega_{i,j} = \frac{\sum \{u_i^e\}^T ([K_{ij}] - \omega_i^2 [M_{ij}]) \{u_i^e\}}{2\omega_i} = \sum \omega_{i,j}^e \quad (4-103)$$

即

$$\omega_{i,j}^e = \frac{\{u_i^e\}^T ([K_{ij}^e] - \omega_i^2 [M_{ij}^e]) \{u_i^e\}}{2\omega_i} \quad (4-104)$$

其中 $\omega_{i,j}^e$ 为 ω_i 关于第 e 个单元的设计参数 b 的灵敏度。因为各单元板厚不同, 实际应用中式(4-104)更实用。

对于一般有限元板壳单元, 其单元刚度矩阵可表示为

$$[K^e] = [K_m^e] + [K_b^e] = Eb_e [K_1^e] + Eb_e^3 [K_2^e] \quad (4-105a)$$

其中 $[K_m^e]$ 和 $[K_b^e]$ 分别表示单元的膜刚度和弯曲刚度成分, E 为材料杨氏模量, $[K_1^e]$ 和 $[K_2^e]$ 为与 Eb_e 及无关的单元常数矩阵。对式(4-105a)求导, 有

$$\begin{aligned} [K_j^e] &= E [K_1^e] + 3Eb_e^2 [K_2^e] \\ &= \frac{E}{\sqrt{3}b_e} \sqrt{3}b_e [K_1^e] + \frac{E}{\sqrt{3}b_e} (\sqrt{3}b_e)^3 [K_2^e] \\ &= Fa_e [K_1^e] + Fa_e^3 [K_2^e] \end{aligned} \quad (4-105b)$$

一般有限元板壳单元的单元质量矩阵可表示为

$$[M^e] = \rho A_e b_e [M_1^e] \quad (4-106)$$

其中 ρ 为材料质密度, A_e 为单元中性面积, $[M_1^e]$ 为与 b_e 无关的单元常数矩阵。对式(4-106)求导, 有

$$[M_j^e] = \rho A_e [M_1^e] = \frac{\rho}{\sqrt{3}b_e} A_e (\sqrt{3}b_e) [M_1^e] = qA_e a_e [M_1^e] \quad (4-107)$$

由式(4-105b)及式(4-107)可知, 只要简单地将材料参数 E , ρ 及板厚参数 b_e 改为 F , q 及 a_e , 并重新计算单元的刚度及质量矩阵, 即可由式(4-104)计算模型第 i 阶模态频率对单元 e 的板厚参数 b_e 的灵敏度。其计算量较小。

(2) 灵敏度计算与分析

基于以上方法, 分别计算了该车车身结构第一阶扭转及第一阶竖直弯曲模态频率对车身各板件单元厚度的灵敏度。为了灵敏度数值分析方便起见, 分别将车身结构组件的各单元灵敏度值求和。

① 扭转工况:

该车车身结构第一阶扭转模态频率对车身各结构件厚度的灵敏度分布如图 4-15 所示。较大灵敏度的结构件的统计如表 4-6 所示。

可见 A 柱的加强对提高车身第一阶扭转模态频率最有效, 而且 A 柱外板比其内板更有效。除 A 柱以外, 后座椅下横梁、中地板、门槛、前轮罩后板构成了车身基本抗扭承载区, 该区结构件的加强对提高车身一阶扭转模态频率十分有效。远离振型节面的结构的进一步加强, 反而对提高车身一阶扭转模态频率不利, 如锁板、后翼子板加强板、前横梁、后翼子板、后围上下连接板、前下横梁、前纵梁、前侧内板。即使刚刚超出上述车身基本抗扭承载区的结构件也是如此, 如后地板与后悬架固定座。除倾角较大的 A 立柱之外, 车身基本抗扭承载区以上的结构件的进一步加强均对提高车身一阶扭转模态频率不利。如顶盖、水槽、B 柱、转向柱横梁。

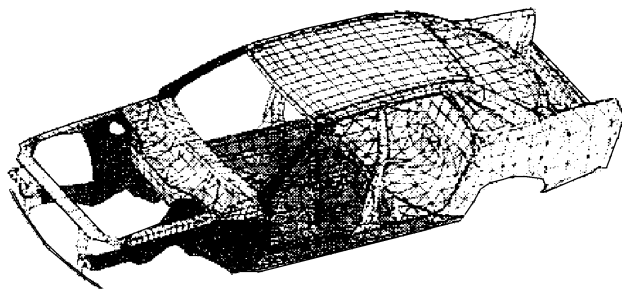


图 4-15 车身第一阶扭转模态频率对车身结构件厚度的灵敏度

表 4-6 对车身第一阶扭转模态频率的灵敏结构件

结构件名称	抗扭灵敏度/(Hz·m ⁻¹)	结构件名称	抗扭灵敏度/(Hz·m ⁻¹)
A 柱外板	5 775	加强板 - 后翼子板	- 300
A 柱内板	2 262	B 柱内板及外板	- 295
前轮罩后板	993	转向柱横梁	- 287
门槛外板	441	支架 - 端板	- 251
中地板	441	前横梁	- 239
后座椅下横梁	205	后翼子板	- 220
顶盖	- 1 246	后围上下连接板	- 202
锁板	- 527	后悬挂固定板	- 174
水槽	- 351		

表 4-6 中未列出的结构件的加强对车身的一扭模态频率影响不大。考虑结构整体修改工艺性等其他性能,可对这些件的结构及尺寸适当地修改。但同时注意这些件的进一步加强对车身整体质量的增大有影响。

② 弯曲工况：

该车车身结构第一阶竖直弯曲模态频率对车身各结构件厚度的灵敏度分布如图 4-16 所示。较大灵敏度的结构件的统计如表 4-7 所示。

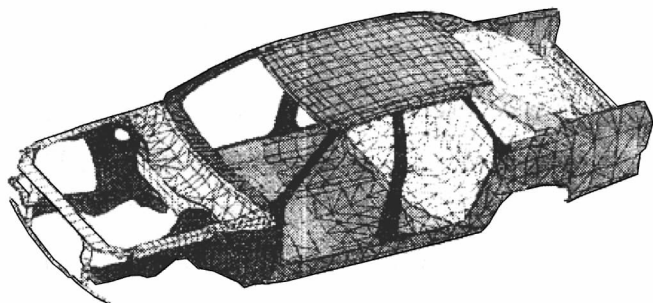


图 4-16 车身第一阶竖直弯曲模态频率对车身结构件厚度的灵敏度

表 4-7 对车身第一阶弯曲模态频率的灵敏结构件

结构件名称	抗扭灵敏度/(Hz·m ⁻¹)	结构件名称	抗扭灵敏度/(Hz·m ⁻¹)
A 柱外板	1 846	C 柱内板	347
后风窗支柱内板	1 705	C 柱外板	326
B 柱外板	1 691	加强板 - 转向柱横梁	259
B 柱内板	1 356	后座椅下横梁	220
A 柱内板	1 070	前地板	188
前轮罩内板	979	外横梁	111
转向柱衡量	775	包裹架 - 后挡板	- 146
后翼子板	551	后围封闭板	- 265
门槛外板	533	锁板	- 438
中地板	466	前下横梁	- 593
顶盖	420	后围上下连接板	- 892
加强板 - 后翼板	381		

可见,由于车身第一阶竖直弯曲模态有两个相距较远的振型截面,该模态的灵敏结构件较多。由车身上部的顶盖,下部的地板、中地板及门槛,前及后部的转向柱横梁、后座椅下横梁、前轮罩后板及前悬挂固定座,以及侧面的 A、B、C 立柱及后风窗立柱构成了车身空间基本抗弯盒。该基本抗弯盒的结构件的加强是提高车身第一阶弯曲模态频率十分有效。

后围上下连接板、前下横梁与锁板等远离振型节面的车头及车尾结构件的进一步加强对提高车身第一阶竖直弯曲模态频率十分不利。与车身第一阶扭转模态频率灵敏度分析对比可知,A 立柱及基本抗扭承载区的结构件的加强是提高车身第一阶竖直弯曲及第一阶扭转模态频率均十分有效。它们是车身低阶模态频率修改的最关键结构件。这就是欧美汽车行业将车身扭转刚度指标作为产品开发关键项的原因之一。

3. 车身结构模态频率灵敏度分析的应用及结论

车身结构模态频率灵敏度分析,不仅可以直接应用于设计中提高车身结构的低阶模态频率,而且对其他车身结构设计与分析工作也有重要的参考价值。

现代中、低级轿车设计时,为了加大行李布置空间,有的在后隔板上设计一个大孔。由上述分析可知,这种承载式车身后部刚度较大,在后挡板上设计一个大孔不会对车身刚度及低阶振动特性造成不利的影响。

现代中、低档轿车设计时,常希望降低门槛的高度。上述分析说明,门槛对车身刚度及低阶振动特性影响较大,不能随意减小门槛断面尺寸及板厚。为减小 A 立柱盲区而试图减小 A 立柱断面尺寸时也要注意类似问题。

国内现生产个别中级轿车在部分地区使用中,发生前悬挂固定座开裂现象。上述分析表明,前悬挂固定座对车身第一阶弯曲模态频率影响很大。若设计不合理,车身会在个别使用工况下产生较大竖直振动,而引起悬挂固定座早期开裂。

因此得出以下结论:

① 后座椅下横梁、中地板、门槛与前轮罩后板构成了车身基本抗扭承载区。该基本抗扭承载区与 A 立柱结构件的加强可提高车身第一阶扭转模态频率十分有效。

② 以乘客舱结构件为主的顶盖、前地板、中地板、门槛、转向柱横梁、后座椅下横梁、前轮罩后板、前悬挂固定座、A、B、C 立柱及后风窗立柱构成了车身空间基本抗弯盒。该基本抗弯盒结构件的加强可提高车身第一阶竖直弯曲模态频率十分有效。

③ 车身基本抗扭承载区结构件及 A 立柱是车身低阶模态频率修改的最关键结构件。

④ 车身结构模态频率灵敏度分析在车身设计中有较宽的应用范围。

二、轻型货车横向振动分析与控制

在中国轻型货车产量大幅度增加的同时,仍存在着轻型货车临界转速的摆头现象。轻型货车的横向振动,不仅影响驾驶员的乘坐舒适性,而且使汽车临界状态下的操纵性显著降低。由于涉及的总成及结构件较多,整车的振动特性分析比较复杂,迄今为止的实际产品开发,一直是先做样车,通过重复试验分析来控制振动现象。为了缩短新车型研制周期,有必要推广应用模拟分析与动力优化技术,以便在设计阶段更合理地估计各种动力现象和进行结构优化设计。已有的关于汽车横向振动的研究,主要针对转向轮摆振及其控制进行分析。其结论为轻型货车横向振动的深入研究提供了必要条件。本节采用数值模拟分析与动力优化技术,分析了某轻型货车的横向振动现象,并介绍了该振动的控制方法。

1. 轻型货车横向振动模拟计算分析

在轻型货车中,具有大质量与大惯性矩的驾驶室及动力总成通过橡胶块联结于车架,而车厢则直接通过螺栓联结于车架。在建立轻型货车的振动分析模型时,必须合理考虑这些因素的作用。而受计算量等的限制,建立模拟分析模型时,也要对实际结构进行必要的简化,抓住主要问题进行分析。本节的分析对象是载重量为 1.25 t 的国产某双排座轻型货车,该车存在 105 km/h 车速的横向振动现象。由于货车车厢对车架的静态及动态特性影响较大,建立车架的动力分析模型时必须考虑车厢的作用。模拟分析模型中的车架及车厢部分以板单元模拟为主。整个有限元分析模型包括 736 个节点和 754 个板单元,见图 4-17。另外以 67 个梁单元模拟货厢底板横梁。因为驾驶室及动力总成在常见的汽车工作频率范围 (2 ~ 20

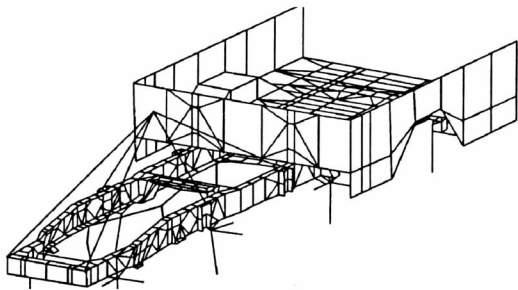


图 4-17 轻型货车横向振动模拟分析的有限元模型

Hz) 之内表现出刚体运动,考虑驾驶室(6 个悬置点)及动力总成(3 个悬置点)的质量和惯性矩,以质量弹簧模型加入车架模型,其橡胶块的工作刚度可由实验确定。油厢与备胎等以集中质量加于车架模型的相应位置。考虑车架的支承条件对车架弹性模态计算分析影响不大,本分析中,悬架每个吊耳处的铅垂自由度以弹簧单元模拟。弹簧单元铅垂刚度取为相应悬架静刚度的一半。每个吊耳处的其他自由度完全约束。

模态计算分析中,未考虑结构、悬架及各悬置的阻尼。轻型货车的振动特性分析一般在空载状态下进行。在满足分析需要的前提下,仅计算 20 Hz 以下的结构振动模态。在图 4-18 模

态计算结果中,包括车厢栏板的局部弹性模态和驾驶室与动力总成的局部刚体模态。图中仅以车架表示该车低阶弹性模态的计算结果,图中虚线表示平衡位置。其中,第一阶横向弯曲振动模态的一个振型节点处在动力总成前悬置和驾驶室中悬置之间,其另一个振型节点约在驾驶室后悬架支承中心,其频率值为 11.80 Hz。驾驶室横向刚体振动模态(未给出振型图)的频率值为 11.20 Hz,致使这两阶振动模态高度耦合。在临界转速下的转向轮摆振激励作用下,会发生严重的汽车横向振动。这与该车在约 105 km/h 车速(考虑轮胎尺寸可知,该车速下转向轮摆振频率约为 11.70 Hz)附近发生驾驶室严重横向振动的现象一致。

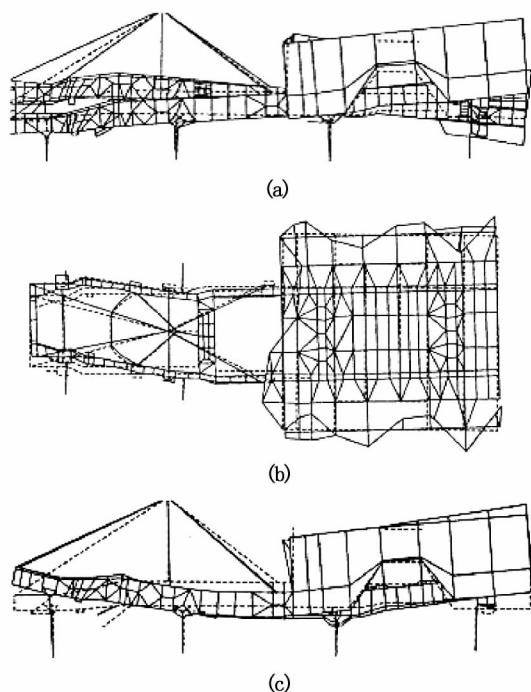


图 4-18 轻型货车车架低阶弹性模态计算结果
(a) 一阶扭转 8.17 Hz; (b) 侧向一弯 11.80 Hz; (c) 竖向一弯 12.84 Hz

2. 动力优化分析方法

在车辆的实际设计中,采用结构动力优化方法确定结构形状与尺寸,以使车辆各部件满足它们动力特性的目标值。为了避免发生较强的驾驶室与车架横向耦合共振,产品开发阶段应该合理地调配结构质量、驾驶室悬置刚度及车架刚度。如果车辆存在该耦合共振,除了控制转向轮摆振以外,有效地改进措施是:通过修改驾驶室悬置橡胶垫的特性使驾驶室横向振动的固有频率降低,或者通过合适的加强方案提高车架的横向弯曲固有频率。前者受到驾驶室悬置一般设计要求的限制,所以,一般以后者为主,不但使车架横向第一阶弯曲振动模态频率高于转向轮摆振临界频率的 120%,而且避免与驾驶室横向振动刚体模态频率相近。应用上一小节中的求灵敏度的理论方法,计算了该轻型货车车架水平侧向第一阶弯曲振动固有频率对车架各板单元厚度的灵敏度。灵敏度分布情况如图 4-19 所示,图中仅注出灵敏度值大于 0.038 Hz/cm 的单元。纵梁上、下翼板灵敏度分布基本相同,仅注出上翼板单元的灵敏度值。可见,关注模态的两个振型节点附近的车架单元对提高该模态频率值较灵敏,车架纵梁单元较横

梁单元灵敏,纵梁翼板较腹板灵敏。利用这一结果,可以在满足目标固有频率的前提下,通过对局部结构的加强,使车架总质量增加值最小。

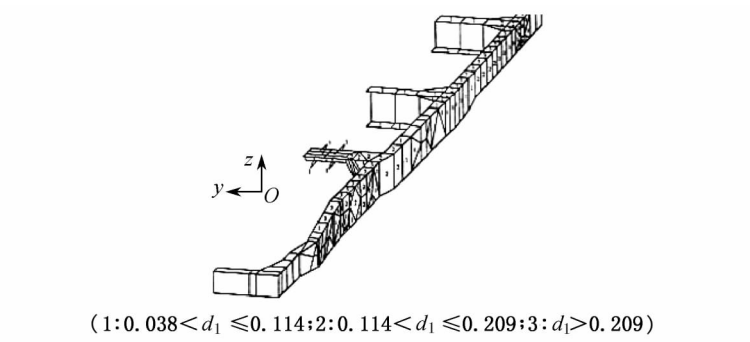


图 4-19 车架侧向一弯固有频率对单元厚度的灵敏度(单位: $\text{Hz} \cdot \text{cm}^{-1}$)

第四节 SRV 行李架结构动力响应仿真分析

随着人们生活节奏和休闲方式的改变,旅行车(SRV)作为一款能满足多样生活需求的休闲轿车越来越受到购车族的青睐。其车顶的搁物行李架是其结构功能中的一个闪光点,它在汽车行驶极端工况下的动态响应不仅影响行李安置的稳固性,也对车身振动有较大影响。因此在设计初期,建立有效的仿真模型,预测其在特殊行驶条件下的动力响应,对产品的开发应用有很大的指导意义。

本节基于某旅行车实车试验数据,建立了车顶行李架 CAE 仿真模型。通过确定仿真边界条件以及激励的加载方式等,修正了有限元分析模型。利用 ANSYS 软件中内嵌的 LS-DYNA 求解器对模型进行了动力响应分析。

一、车顶行李架 CAE 模型

有限元分析模型中建立的各实物部件主要包括:简化的车顶盖、行李架导轨、行李架横向支架和等效行李,同时模拟了各结构件间的连接。单元以 3 节点或 4 节点壳单元为主。整个模型节点总数为 53 141,壳单元总数为 43 279,材料属性均按实际属性设定。整体模型如图 4-20 所示。

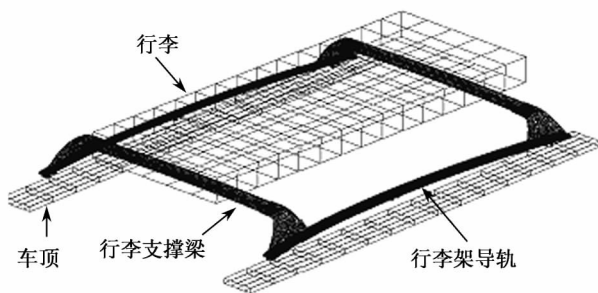


图 4-20 行李架模型示意图

1. 行李架试验

为了修正有限元分析模型,进行了车辆行驶过程中前及后车轮分别陷入凹坑的工况试验。从实际试验中获得车辆 B 柱上端 X 向以及 Z 向的加速度信号,同时获得了行李架导轨和车顶在前后两处(如图 4-21 所示 2a 和 2b、4a 和 4b)的相对位移数据。

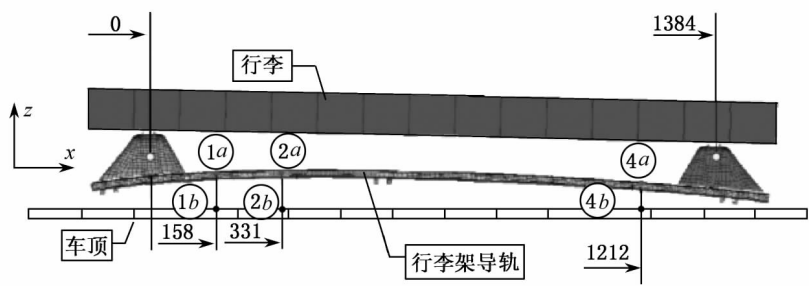


图 4-21 实车试验测点位置示意图

2. 激励输入方式处理

(1) 激励输入位置的确定

试验中获得的 B 柱上端 X 向以及 Z 向的加速度信号对整个车身行驶中的加速度具有典型意义。鉴于模型规模和考查的主要对象,将整个车顶作为激励输入部件。具体方法为:将车顶部件设为刚体,在车顶几何中心处增加激励施加节点。由于同时有 X 和 Z 两个方向的加速度输入,模拟分析的激励施加点是在垂直方向上相当靠近的两个节点(垂直距离为 2~3 mm)。并将激励施加点同车顶部件上各个节点刚性连接,这样,整个车顶的加速度基本就是试验中 B 柱上端的加速度。加载示意图见图 4-22。

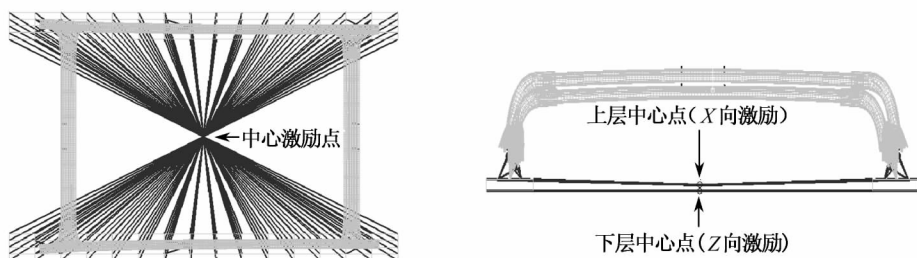


图 4-22 加载位置及方式

(2) 激励输入时间段的确定

实车试验中的 B 柱上端加速度信号历经了车辆前后轮分别陷入凹坑内,总共约为 0.3 s。这个过程可视为汽车先后受到两次短期冲击,且两次冲击的激励和响应性质类似。试验加速度信号如图 4-23 和图 4-24 所示,计算机仿真输入截取了 7.9~8.6 s 这一段数据,并分为前后相等的两个时间段(约为 350 ms),分两次进行车辆前后轮分别陷入凹坑的动力响应模拟计算。

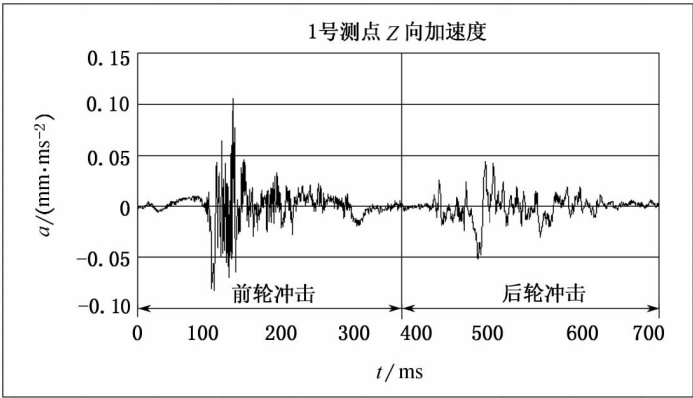


图 4- 23 1 号测点 Z 向加速度

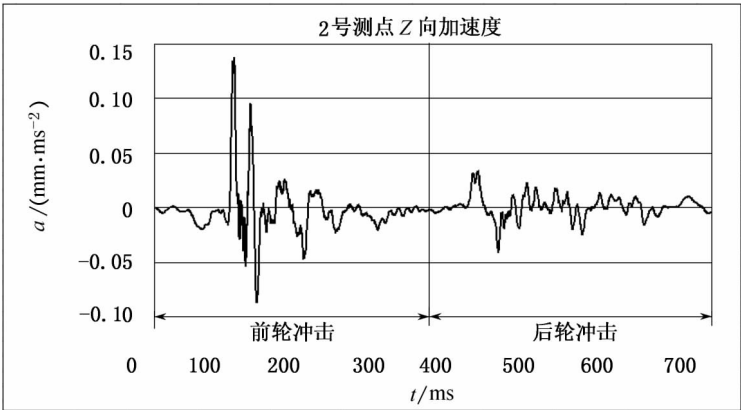


图 4- 24 2 号测点 X 向加速度

3. 模型修正方法

试算发现观测点处垂向相对位移的仿真值与试验值相差较大。根据结构动力分析有限元基本方程

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

(4 - 108)

进一步研究了模型中各种影响阻尼阵和刚度阵等的因素 ,尤其是各部件间的连接方式的模拟对分析模型的影响 ,具体模型修正内容见表 4 - 8。

表 4- 8 模型修正内容

修改内容	原始模型	修改方式	对仿真结果影响	最终处理
某一材料属性	单位制错误	统一单位制	有影响	选用修改值
系统阻尼	软件缺省值	工程常用值	影响甚微	保留原始模型
行李与其支撑横梁连接及接触定义	两点刚性连接且定义摩擦系数	多点刚性连接并修改摩擦系数	无影响	保留原始模型
行李架导轨与车顶连接件间减振元件	模拟弹簧减振元件	修改弹簧刚度	有一定影响	保留原始模型
行李架导轨与车顶连接方式	导轨安装处单点刚性连接	前后安装处各增加一刚性连接点	影响很大	选用修改方式

二、动力响应分析

1. 前轮陷坑模拟计算分析

车顶激励施加点作用的加速度信号直接来源于试验数据,图 4-25 和图 4-26 分别显示了激励施加点同顶盖上单元节点间 X 和 Z 向的加速度偏差。可见,两者的加速度基本一致。

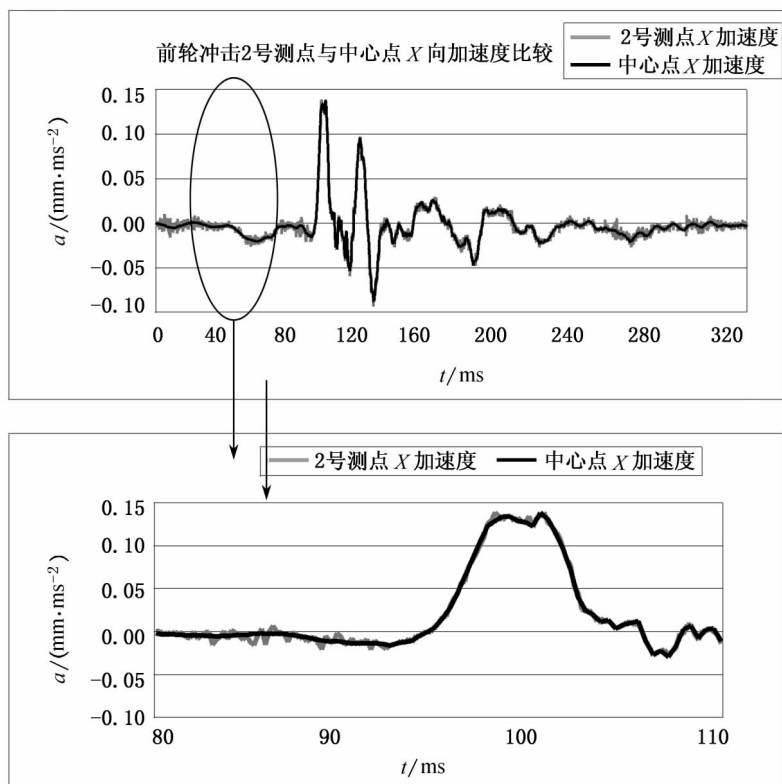


图 4-25 X 向加速度

关注位置的模拟分析 Z 向相对位移同试验的比较,如图 4-27 所示。

2. 后轮陷坑模拟计算分析

验证激励施加点同顶盖上单元节点间的加速度偏差,两者基本一致,如图 4-28 和图 4-29 所示。

所关注测点的模拟分析 Z 向相对位移同试验的比较,如图 4-30 所示。

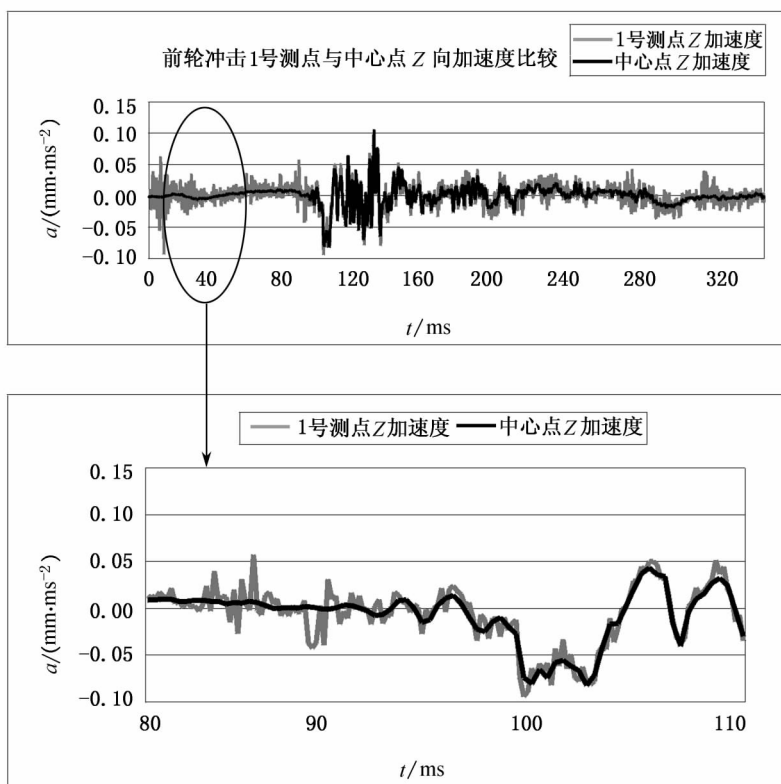


图 4-26 Z 向加速度

可见,中心输入点加速度信号与有限元模型中试验观测点处获得的信号能很好的吻合,说明该种加载方式是行之有效的。模型修改后,所关注测点处的行李架导轨与车顶间相对位移仿真值达到了试验范围,并能基本拟合试验所得曲线。两者存在的偏差是由CAE模型建立过程中的简化产生的,是可以被接受的。

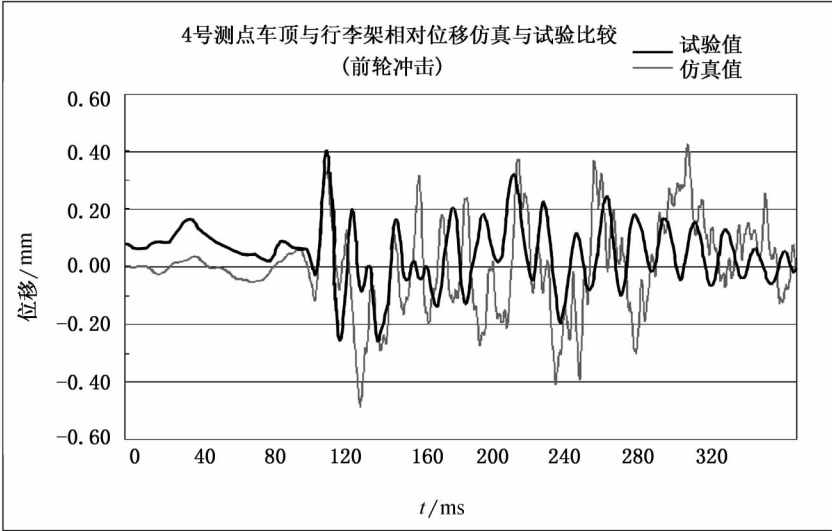
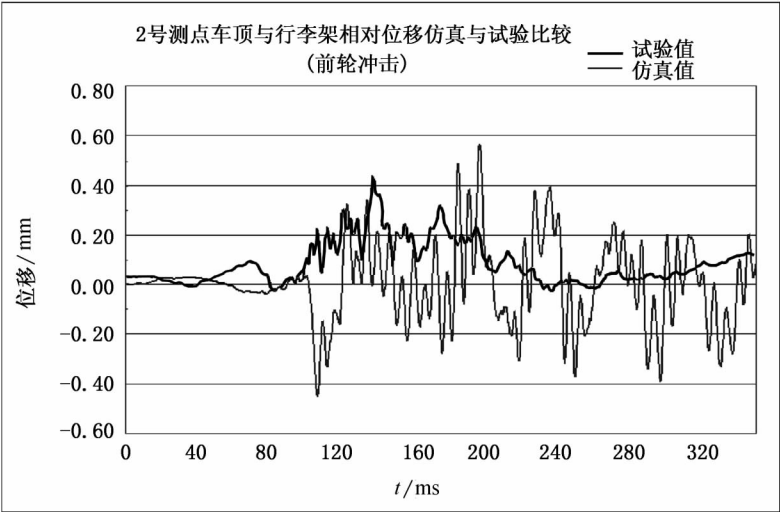


图 4-27 前轮陷坑车顶与行李架之间相对位移

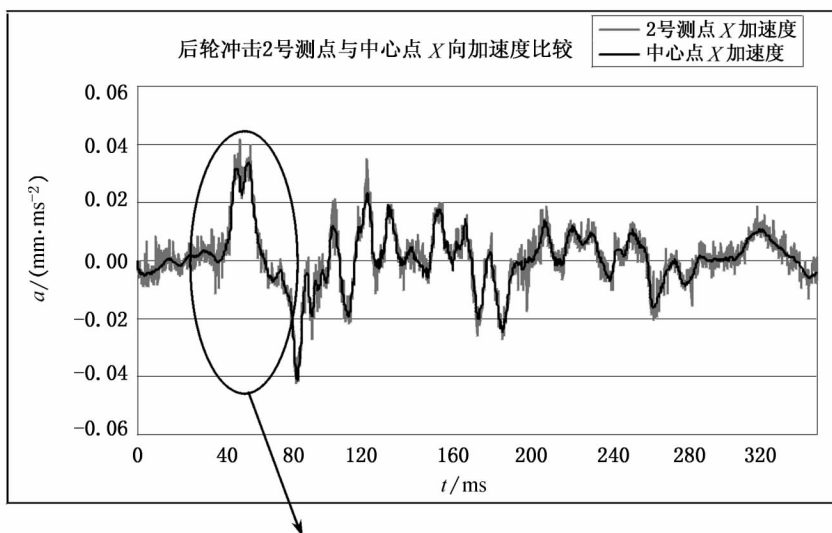


图 4-28 X 向加速度

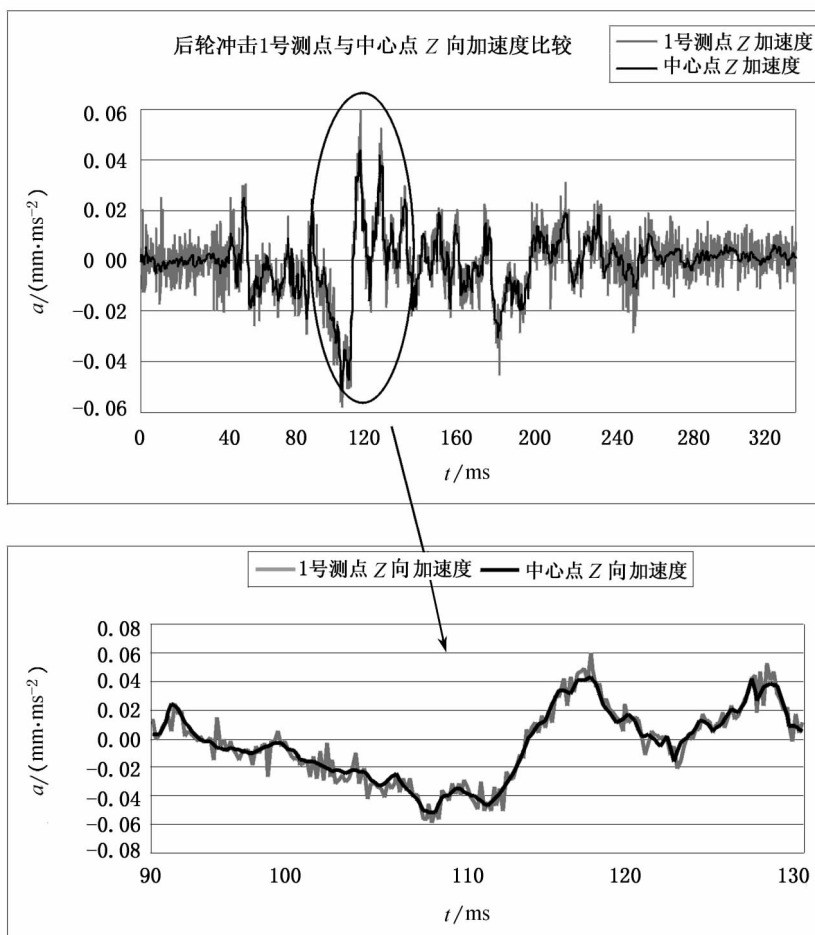


图 4-29 Z 向加速度

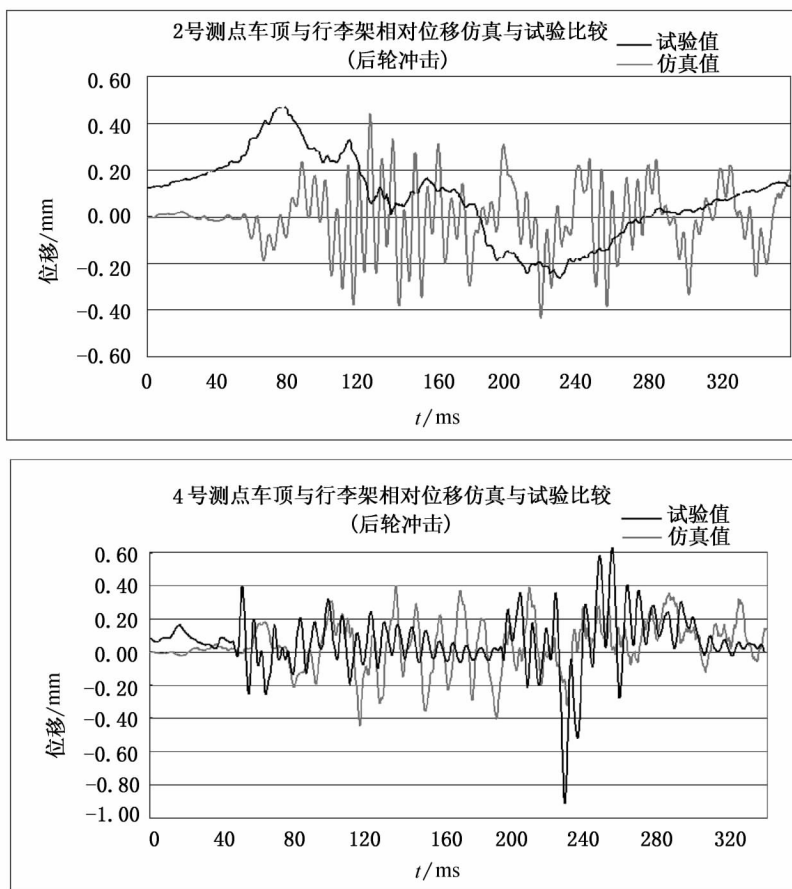


图 4-30 后轮陷坑车顶与行李架之间相对位移

思考题

1. 写出单元动力学方程,并说明其各矩阵与向量的计算方法。
2. 如何计算一致质量矩阵和集中质量矩阵?
3. 如何选择使用比例阻尼和振型阻尼?如何计算比例阻尼和振型阻尼?
4. 有哪些特征值和特征向量的计算方法?各有什么优缺点?
5. 结构动力响应有哪些计算方法?各有什么优缺点?
6. 试推导车身结构模态修改灵敏度公式,并说明其中各矩阵与向量的计算方法。
7. 轿车白车身主要抗扭和抗弯结构件分别有哪些?
8. 轻型货车横向振动的原因是什么?
9. SRV 行李架动力响应分析激励如何选择?

第五章 汽车车身结构强度与刚度试验

第一节 汽车车身结构试验技术

非电量电测法是一种将被测非电物理量(如位移、速度、加速度、力、应力、应变、温度和流量等)转换成电量(如电阻、电流、电压、电容和电感等),然后用电测量仪器对此电量进行测量的方法。通常将非电量转换成电量的元件称为敏感元件(亦称变换元件),根据不同非电量的特点设计成的变换装置称为传感器。将传感器通过测量电路与电测量系统相接,组成电测量系统。敏感元件和传感器的输出电量必须与被测非电物理量有单值函数关系,并尽可能成为线性关系。这一测量系统一般由非电量信号的变换、电信号的传输与放大、电信号的显示与记录三部分组成,见图 5-1。

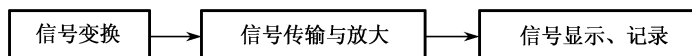


图 5-1 电测量系统框图

由传感器获得的信号一般很微弱,要经过放大器放大后,才能传送给显示和记录装置进行显示、记录。对于不同的传感器,其相应的放大器也不同。如对电阻应变片,其放大器为电阻应变仪;对压电式加速度传感器,其放大器为电荷放大器。另外,信号在传输过程中,还要注意防止干扰。

有各种不同的显示、记录信号的方法和装置。现代电测量技术中广泛采用的记录装置为多磁道磁带记录仪。

从敏感元件变换方式来看,可以直接变换,也可以间接变换;从能量转换的角度而言,分为有源变换和无源变换两类,见图 5-2。

非电物理量电测法的优点是:电信号容易传输和放大,可进行遥测和实现测试过程的自动化;被测电信号可直接用图像显示仪、数字显示仪、磁带记录器和磁盘记录器等进行显示和记录,易于存储和再现,并能随时通过信号分析处理仪器进行分析处理,便于多个参数的同步测量和记录;并且能够测量高速变化的物理量。

一、电阻应变片基本原理与类型

电阻应变片简称应变片,它是一种将应变变化转换成电阻变化的传感器。

1. 电阻应变片的构造和类型

电阻应变片的种类繁多,形式也各种各样,但其基本结构大体相同。现以丝绕式应变片为例说明如下,见图 5-3。

电阻应变片由敏感元件(又称敏感栅)1、基底 2 和 3 及引出线 4 组成。敏感元件是用来感

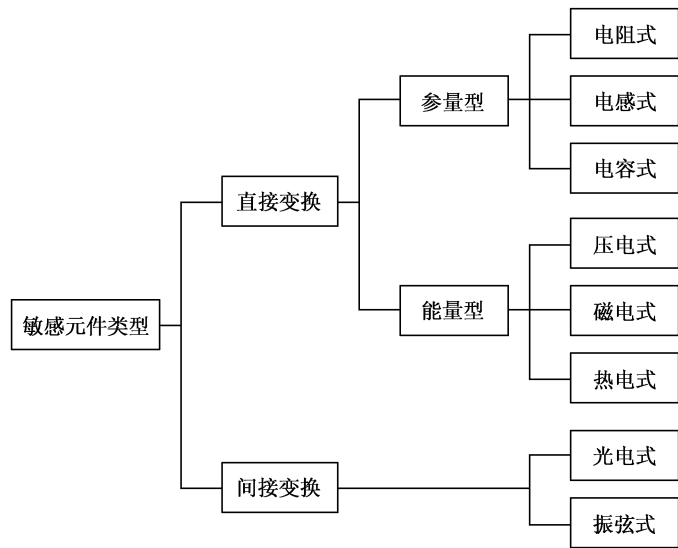


图 5-2 敏感元件分类图

受应变的,由直径为 0.02~0.03 mm 的合金电阻丝绕制而成,然后用粘接剂把它贴在上基底 3 和下基底 2 之间。基底是用来固定、保护丝栅,传递应变并使敏感栅与试件之间绝缘。敏感栅两端焊有引线 4,用以和测量电路相连。引出线的材料多用 $\phi 0.15 \sim 0.3 \text{ mm}$ 镀锡软铜丝。图 5-3 中 L 为敏感栅栅长, B 为栅宽。

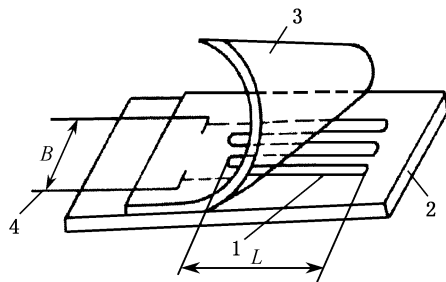


图 5-3 丝绕式电阻应变片构造
1-电阻丝 2、3-覆盖层 4-引出线

电阻应变片的种类很多,通常分为丝栅式应变片、箔式应变片和半导体应变片三类。丝栅式应变片有两种:圆角丝栅式应变片和直角丝栅式应变片,见图 5-4(a)、(b)所示。圆角丝栅式应变片是最早出现的片种。这种应变片容易安装,价格便宜,但在常温应变测试中正被箔式应变片取代。直角丝栅式应变片虽有横向效应小的特点,但由于有较之更好的箔式应变片的出现,而没有得到广泛地应用。箔式应变片见图 5-4(c)示,它具有横向效应小、散热性能好、允许通过的电流大、易于制造成各种用途的形状和尺寸的片形、疲劳寿命长、柔性好等特点,是一种很有发展前途的应变片。半导体应变片(图 5-4(d)示)具有灵敏系数大、横向效应小、可制成小尺寸应变片等优点,但是,电阻灵敏系数的温度稳定性差,在测量较大应变时,非线性严重。

2. 金属丝的应变电阻效应

应变片测取应变的工作原理是基于金属丝的应变电阻效应,即金属丝的电阻值随其机械变形而变化的一种物理特性。

由物理学知,金属导线的电阻为

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{5-1}$$

式中 ρ ——导线的电阻率,单位为 $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$;

L ——导线长度,单位为 m ;

A ——导线横截面积,单位为 mm^2 。

由(5-1)式知,改变等式右边参数的其中一个值或几个值,都将引起电阻的变化。电阻丝在受力后,其电阻的变化率和电阻丝产生的应变成正比

$$\frac{dR}{R} = K_0 \epsilon \quad (5-2)$$

式中 $\epsilon = \frac{dL}{L}$ 为纵向应变,比例常数 K_0 称为电阻丝的灵敏系数。

金属丝的应变电阻效应曲线见图 5-5,部分金属丝材灵敏系数见表 5-1,常用应变电阻合金性能见表 5-2。

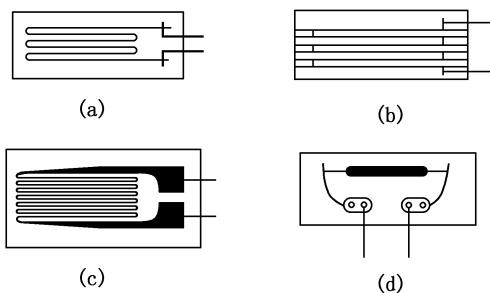


图 5-4 几种常用的电阻应变片

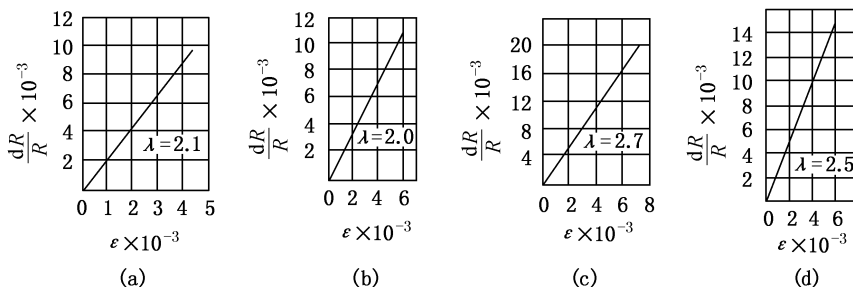


图 5-5 金属丝的应变电阻效应曲线

(a)未退火的康铜丝; (b)退火后的康铜丝; (c)未退火的镍铬丝; (d)退火后的镍铬丝

表 5-1 部分金属丝材灵敏系数

材料	成分	灵敏系数 K_0 (拉伸)			
		硬态		软态(已退火)	
		小变形	大变形	小变形	大变形
铜	Cu(电解纯)	2.6	2.6	2.2	2.2
银	Ag	2.9	2.4	3.0	2.3
康铜	55Cu 45Ni	-	-	2.0	-
镍铬	80Ni 200Cr	2.4	1.9	-	-
铁铬镍	67Fe 26Cr 6Ni	-	-	4.28	2.0

表 5- 2 常用应变电阻合金材料性能

合金类型	牌号或名称	成分		比阻 $\rho/$ $(\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1})$	电阻温度系数 ρ_t $/(10^{-6} \cdot ^\circ\text{C}^{-1})$	灵敏系数 K_0
		元素	所占百分比 / %			
铜镍合金	康铜	Cu Ni	55 45	0.45 ~ 0.52	± 20	1.9 ~ 2.1
铁镍铬合金		Fe Ni Cr Mo	55.5 36 8 0.5	0.84	300	3.6
镍铬合金	镍克洛姆 V	Ni Cr	80 20	1.0 ~ 1.1	110 ~ 130	2.1 ~ 2.3
镍铬合金	6J22(卡玛)	Ni Cr Fe Al	74 20 8 3	1.24 ~ 1.42	± 20	2.4 ~ 2.6
	2.4 ~ 2.6	6J23	Ni Cr Al Cu	75 20 3 2	1.24 ~ 1.42	± 20
铁铬铝合金	70Cr25Al5	Fe Cr Al	70 25 5	1.3 ~ 1.5	30 ~ 40	2.8
贵金属及合金	铂	Pt Ir	80 20	1.0 ~ 1.1	110 ~ 130	2.1 ~ 2.3
	铂 - 铱	Pt Ir	80 20	0.32	850	6.0
	铂 - 钨	Pt W	92 8	0.68	227	3.5
	镍	Ni	100	0.08 ~ 0.09	6 000	- 2.1

3. 变形的传递

将金属丝粘贴在试件表面 ,试件在外力作用下将产生纵向、横向和剪切变形。这些变形通过黏结剂传递给金属丝 ,从而引起金属丝变形 ,有图 5- 6(a)。在这一变形传递过程中 ,金属丝的变形情况为 :

① 因金属丝 L 较长 ,直径 D 很细 ,它对试件变形无约束力 ,故金属丝沿纵向只能随黏结剂变形而相应变形 ,即金属丝的纵向应变基本上就是试件的纵向应变。

② 黏结剂在试件纵向变形及横向变形作用下 ,均将相应出现横向应变 ,金属丝在黏结剂横向应变的作用下 ,截面积亦将发生改变。在应变片的变形传递过程中金属丝横截面的改变极为微小 ,可略而不计。

③ 试件剪切应变同样要传递到黏结剂内 ,从而导致金属丝横截面相对位置发生改变 ,但对 L 和 D 均无影响 ,故不致引起金属丝电阻的改变。

综上所述可知 ,金属丝仅仅反映试件的纵向变形 ,而与试件的横向变形关系甚微 ,可忽略不计。

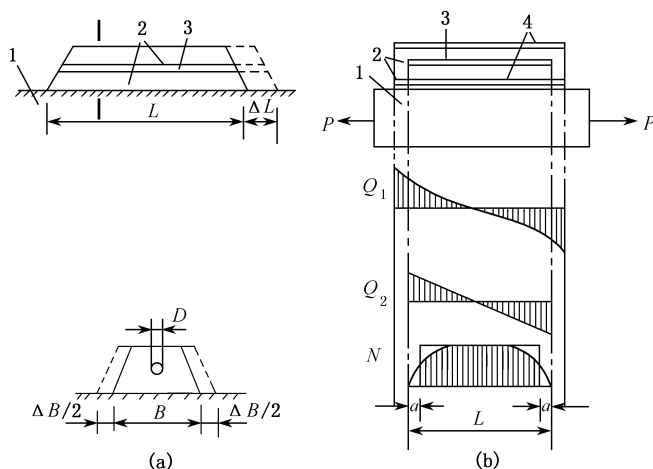


图 5-6 变形的传递

1 - 试件 2 - 胶层 3 - 电阻丝 4 - 基底

对于应变片,试件上的应变要通过试件和应变片基底之间的胶层、基底以及位于基底和敏感栅之间的胶层传给电阻丝,且依据剪应力形式进行传递。理论分析和实验表明,两端的剪应力最大,中点的剪应力为零,见图 5-6(b)。这是因为正中截面处不发生位移,故剪应力为零;其两侧位移反向,故剪应力反号,端部位移最大,故剪应力最大。图中 Q_1 表示基底所受剪力, Q_2 表示敏感栅金属丝所受剪力。敏感栅所受轴向力为沿轴向剪应力之和,其分布如图 5-6 中轴力 N 所示。

应变片贴于试件表面后,虽然不能绝对实现敏感栅感受的变形和试件测点处的实际变形完全一致,但实践证明只要我们使用的黏结剂性能良好,注意粘贴质量(特别是应变片两端剪力较大处的粘贴质量,这一点对于基底较短的应变片尤为重要),力求做到胶层匀薄,应变片仍可非常准确地传递试件的变形,获得较高的测量结果。

4. 电阻应变片的横向效应

由于在实用中电阻应变片不是做成单丝,而是制成各种线型,因而使得电阻丝不仅仅沿应变片主轴排列,而且是轴向与横向连续排列。横向排列的电阻丝也同样参与变形,其阻值发生变化,遂产生横向效应,此时的应变片电阻变化率由两部分组成。

$$\frac{dR}{R} = K_\alpha \epsilon_\alpha + K_\beta \epsilon_\beta = K_\alpha (\epsilon_\alpha + C \epsilon_\beta) = K \epsilon_\alpha \quad (5-3)$$

式中 ϵ_α 和 ϵ_β 分别为沿应变片轴向和横向的应变; K_α 和 K_β 分别为应变片轴向和横向灵敏度系数; C 为应变片灵敏度系数比值, $C = K_\beta / K_\alpha$ 。

当试件承受单向拉伸时 $\epsilon_\beta = -\mu \epsilon_\alpha$, 组成应变片敏感栅的电阻丝的灵敏度系数 $K_0 = K_\alpha + K_\beta$; $K = K_0(1 - \mu C) / (1 + C)$ 称为电阻应变片的灵敏度系数。制造厂生产的电阻应变片,对产品表明的灵敏度系数即指 K 值而非电阻丝材料的灵敏度系数 K_0 。

K 值与 C 及 K_0 值有关。 C 值视电阻应变片敏感栅的线型而定,成型准确与否对 C 值有影响; K_0 受诸多因素的影响。因此,理论计算往往不能正确地反映出实际的 K 值,故通常用试验测定。

5. 电阻应变片主要参数与指标

(1) 应变片的规格

电阻应变片的规格是以敏感元件的长度 L 和宽度 B 表示为 $B \times L$, 如 $2 \times 2, 3 \times 5$ 等。

(2) 应变片电阻值

指应变片没有安装, 不受外力, 于室温下测定的电阻值。它有名义阻值和平均名义阻值之分。名义阻值已有统一标准, 取为 $60, 120, 250, 500, 1\,000\ \Omega$ 等阻值。常用的应变片的名义阻值为 $120\ \Omega$ 。实际上每一应变片的阻值都不等于名义阻值, 它们之间存在着偏差。批量出厂的应变片是根据该批阻值的平均值作为名义阻值的, 故称平均名义阻值。试验时, 应尽可能选择平均名义阻值一样的应变片接桥, 偏差一般不要超过 $\pm 0.5\ \Omega$, 否则电桥不易平衡。

(3) 灵敏系数

应变片灵敏系数的名义值是通过抽样试验获得的, 每一个应变片的实际灵敏系数和它均有偏差。试验时, 务必在同一个试验中采用同一灵敏系数的应变片, 并根据灵敏系数值的大小, 决定是否需要修正应变读数。

(4) 测量应变范围

通常在 $10^{-6} \sim 2 \times 10^{-2}$ 的范围内, 均可使用。

二、电阻应变仪基本原理与类型

电阻应变片仅将试件应变量的变化转换成电阻的变化, 还必须将电阻的变化通过一定的测量线路, 再由仪器显示出来。电阻应变仪就是用来完成这个双重任务的。即它不仅是显示仪器, 同时也具备了测量线路。

电测法测量的电量不外乎电流或电压。为提高测量的灵敏度与精确度, 往往要把被测的电量放大, 然后再由显示记录仪器进行显示或记录。应变仪测量应变的过程如下:

$$\varepsilon \xrightarrow{\text{电阻应变片}} \Delta R \xrightarrow{\text{电桥}} \Delta I (\Delta U) \xrightarrow{\text{放大}} \text{显示或记录}$$

下面就讨论电阻应变仪的各个部分。

1. 电阻应变仪工作原理

由于供桥电压的不同, 电桥分为直流电桥和交流电桥。直流电桥又分为电压输出桥、电流输出桥和功率输出桥。

(1) 直流电桥的基本原理

图 5-7 示为直流惠斯登电桥。

在直流电源电动势 U 的作用下, 由于 R_1, R_2, R_3, R_4 的作用会使 B, D 两点之间产生电位差。由克希霍夫定律得

$$\begin{cases} I_3 R_3 + (I_3 - I_g) R_4 = U \\ I_1 R_1 = I_g R_g + I_3 R_3 \\ (I_3 - I_g) R_4 = (I_1 + I_g) R_2 + I_g R_g \end{cases}$$

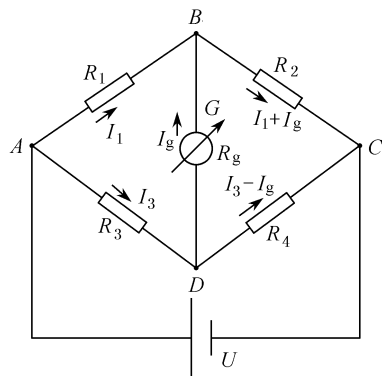


图 5-7 直流惠斯登电桥

$$I_g = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_g (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)} U \quad (5-4)$$

则 B, D 两端的电位差为

$$U_{BD} = I_g R_g = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + \frac{1}{R_g} [R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)]} U \quad (5-5)$$

这里 R_g 是电阻应变仪放大器的输入电阻, 是相当大的。当 $R_g \gg R_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 时, 式(5-4)、式(5-5)可简化为

$$I_g = 0$$

$$U_{BD} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \cdot U \quad (5-6)$$

这时电桥输出信号是电压, 称为电压输出桥。

欲使电桥平衡, 即 $U_{BD} = 0$ (或 $I_g = 0$), 需有

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (5-7)$$

对半桥接法 ($R_1 = R_2 = R'$, $R_3 = R_4 = R''$) 和全桥接法 ($R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$) 均满足电桥平衡条件式(5-7)。

设 R_1 为应变片, 贴在试件上, 对半桥接法, 当试件未变形时, $U_{BD} = 0$; 当试件变形后, R_1 变为 $R'_1 = R_1 \pm \Delta R_1$ 。

式(5-6)变为

$$U_{BD} = \frac{\pm \Delta R_1}{2(2R_1 \pm \Delta R_1)} U \quad (a)$$

对全桥接法, 如 R_1 变为 $R_1 \pm \Delta R_1$, 则式(5-6)变为

$$U_{BD} = \frac{\pm \Delta R_1}{2(2R_1 \pm \Delta R_1)} U \quad (b)$$

假定 $\Delta R \ll R_1$ 或 R'_1 , 则分母中的 ΔR_1 项可略去。那么, 不论是半桥接法, 还是全桥接法, 均得到

$$U_{BD} = \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} \cdot U = \frac{1}{4} K \epsilon U \quad (5-8)$$

说明 $U_{BD} \propto \epsilon$ 。应该指出, 这个线性关系的成立, 是假定 $\Delta R \ll R_1$ 或 R'_1 的条件成立而得到的, 且要求 U, K 均保持为常数。

(2) 平衡电桥与直读法和零读法方式

从上面的讨论可知, 在一定条件下, U_{BD} 与 ϵ 成正比, 只要读出 U_{BD} 的值即可推算出 ϵ 值, 即试件应变被测定。利用这种原理来测量的电桥, 称为不平衡电桥, 这种测量方式称为直读法。直读法要求检流计 G 有很大的读数范围, 且无法避免式(5-8)的非线性误差。

为避免直读法的缺点, 静态电阻应变仪大都采用平衡电桥与零读法的方式。由式(5-7)可知电桥平衡应满足 $R_1 R_4 = R_2 R_3$ 。当 R_1 变化时, 可以改变其他桥臂的阻值使 U_{BD} 仍为零值。图 5-8 所示为平衡电桥, 图中 R_1 为电阻应变片初始阻值。 R_3 、 R_4 由一个滑动电阻代替。设电桥原始处于平衡状态, 则

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{a}{b} = \frac{R_1}{R_2} \quad (c)$$

若 R_1 变为 $R_1 + \Delta R$, 则使 D 点向右移动一段距离 Z , 使电桥再度平衡, 此时有

$$\frac{R'_3}{R'_4} = \frac{a + Z}{b - Z} = \frac{R_1 + \Delta R}{R_2} \quad (d)$$

解(c),(d)式得

$$Z = \frac{b \cdot \Delta R}{R_1 + R_2 + \Delta R}$$

当 $R_2 = R_1$ 时,且 $\Delta R \ll R_1$ 有

$$Z = \frac{b}{2} \cdot \frac{\Delta R}{R_1} = \frac{1}{2} b k \epsilon \quad (5-9)$$

说明 Z 与 ϵ 成正比,只要在滑动电阻(亦称电桥平衡装置)上标出应变刻度,即可读得应变值。用这种测量方法时,检流计只是用来判别电桥是否平衡,又由于检流计指针指零,故称为零读法。

(3) 电桥特性和温度补偿

设测量电桥的四臂皆为工作应变片,参看图 5-7。未受载时,电桥处于平衡状态;受载后,四个桥臂阻值同时发生变化,变化量分别为 ΔR_1 ΔR_2 ΔR_3 ΔR_4 。由式(5-6)式可得

$$U_{BD} = U \frac{(R_1 + \Delta R_1)(R_4 + \Delta R_4) - (R_2 + \Delta R_2)(R_3 + \Delta R_3)}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2)(R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4)} \quad (f)$$

应变片电阻的变化很小,一般不超过 10^{-2} ,即 $\Delta R_i \ll R_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$),上式分母中略去 ΔR_i 项和 ΔR_i 的二次项,分子中略去 ΔR_i 的二次项,简化为

$$U_{BD} = U \frac{(R_1 \Delta R_4 + R_4 \Delta R_1) - (R_2 \Delta R_3 + R_3 \Delta R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (5-10)$$

对于全桥接法, $R_i = R$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 则上式变为

$$U_{BD} = \frac{U}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R} - \frac{\Delta R_2}{R} - \frac{\Delta R_3}{R} + \frac{\Delta R_4}{R} \right) = \frac{UK}{4} (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4) \quad (5-11a)$$

对于半桥接法, $R_1 = R_2 = R'$, $R_3 = R_4 = R''$, 则式(5-10)可写成

$$U_{BD} = \frac{U}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R'} - \frac{\Delta R_2}{R'} - \frac{\Delta R_3}{R''} + \frac{\Delta R_4}{R''} \right) = \frac{UK}{4} (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4) \quad (5-11b)$$

由式(5-11),得到电桥加减特性:对于电桥四个臂的电阻变化 ΔR_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的正负号,若相邻臂为异号,相对臂为同号,电桥输出电压增大(相加),否则减小(相减)。只要能预先知道工作应变片所感受的机械应变之间的关系,利用电桥的加减特性,采取适当的桥路接法,即能提高电桥的读数灵敏度(电桥输出电压增加),又能起温度补偿作用。

前述曾经论及温度效应必须消除。消除温度效应影响的措施,叫做温度补偿。利用电桥加减特性,温度补偿并不困难。只要再用一片应变片作为补偿片,把它贴在一块与被测构件材料相同但不受力的试件上。将此试件和被测构件放在一起,使它们处于同一温度场。贴在构件上的应变片叫工作片。在电桥的连接上,使工作片与补偿片处于相邻的桥臂中。因为工作片和补偿片的温度始终相同,所以它们因温度变化所致的电阻变化相同。又因为它们处于电桥相邻的两臂,这种电阻变化相互抵消,所以温度效应的影响被消除了。应注意的是,工作片和补偿片的材料、阻值和灵敏度系数应相同。

表 5-3 列出了电桥特性实用实例。对这些实例分析后,可以明显看出,灵活应用电桥特性,进行巧妙地布片和接桥,不但能提高测量灵敏度,还能同时达温度补偿的目的。这是应变测量技术中的重要技巧。

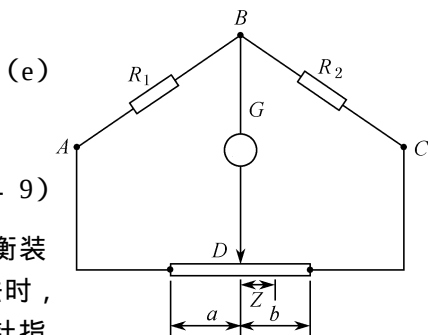
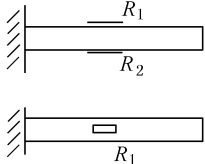
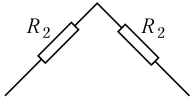
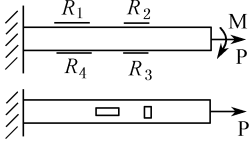
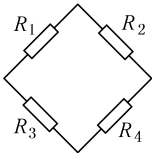
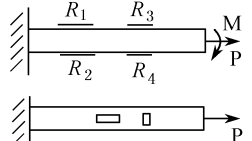
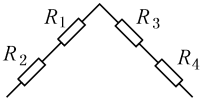
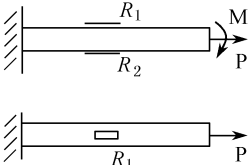
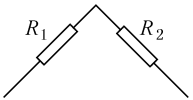


图 5-8 平衡电桥

表 5- 3 常用布片与接桥实例

测量要求	受力及布片	接桥图	电阻变化 ΔR				输出电压 $\frac{U}{U_0}$	灵敏度 $\frac{\Delta R U_0}{4R}$ 倍数	温度补偿
			拉(压)	弯	扭(剪)	温度			
温度补偿						ΔR_{t1} ΔR_{t2}	0		能
测拉除弯			ΔR_1 $-\Delta R_2$ $-\Delta R_3$ ΔR_4	$\Delta R'_1$ $-\Delta R'_2$ $\Delta R'_3$ $-\Delta R'_4$		ΔR_{t1} ΔR_{t2} ΔR_{t3} ΔR_{t4}	$\frac{2(1+\mu)\Delta R}{4R}$	$2(1+\mu)$	能
测拉除弯			ΔR_1 ΔR_2 $-\Delta R_3$ $-\Delta R_4$	$\Delta R'_1$ $-\Delta R'_2$ $-\Delta R'_3$ $\Delta R'_4$		ΔR_{t1} ΔR_{t2} ΔR_{t3} ΔR_{t4}	$\frac{(1+\mu)\Delta R}{4R}$	$(1+\mu)$	能
测拉除弯			ΔR_1 $\Delta R'_2$	ΔR_1 $-\Delta R'_2$		ΔR_{t1} ΔR_{t2}	$\frac{2\Delta R'}{4R}$	2	能

测量要求	受力及布片	接桥图	电阻变化 ΔR				输出电压 $\frac{U}{U_0}$	灵敏度 $\frac{\Delta R U_0}{4R}$ 倍数	温度补偿
			拉(压)	弯	扭(剪)	温度			
测弯除拉			ΔR_1 ΔR_2 ΔR_3 ΔR_4	$\Delta R'_1$ $-\Delta R'_2$ $\Delta R'_3$ $-\Delta R'_4$		ΔR_{t1} ΔR_{t2} ΔR_{t3} ΔR_{t4}	$\frac{4\Delta R'}{4R}$	4	能
测扭除拉弯			ΔR_1 ΔR_2 ΔR_3 ΔR_4	$\Delta R'_1$ $-\Delta R'_2$ $\Delta R'_3$ $-\Delta R'_4$	$\Delta R''_1$ $-\Delta R''_2$ $-\Delta R''_3$ $-\Delta R''_4$	ΔR_{t1} ΔR_{t2} ΔR_{t3} ΔR_{t4}	$\frac{4\Delta R''}{4R}$	4	能
测剪应力				$\Delta R_1 = Qa_1$ $\Delta R_2 = Qa_2$	$\Delta R_1 - \Delta R_2$ $(a_1 - a_2)Q$	ΔR_{t1} ΔR_{t2}	$\frac{(a_1 - a_2)Q}{4R}$		能

(4) 双桥电路

对图 5-8 所示电桥,只有一半桥臂进行测量,另一半用于读数。为使四个桥臂都用于测量以提高电桥的灵敏度,静态应变仪大都采用双桥电路,如图 5-9 所示。图中 A、B、C、D 为测量电桥。A'、B'、C'、D' 为读数电桥。

两电桥原先处于平衡状态。设 R_1 由于受到应变而变至 $R_1 + \Delta R$, 则 BD 间产生电压差 U_{BD} , 此时读数桥仍处于平衡状态,故检流计 G 偏转。只要适当调整读数桥各桥臂阻值,就可产生电压差 U'_{BD} , 当 U'_{BD} 与 U_{BD} 大小相等方向相反时,检流计复零。算出读数电桥各臂电阻的比值,就可得知 $\frac{\Delta R_1}{R_1}$ 的数值。不仅如此,对 R_2 、 R_3 和 R_4 发生变化或 $R_i (i=1, 2, 3, 4)$ 间组合同时发生变化,读数电桥总可以给出使检流计重新复零时的桥臂电阻比值。将这种桥臂电阻比值标以相应的应变刻度,即可直接读出应变数值。

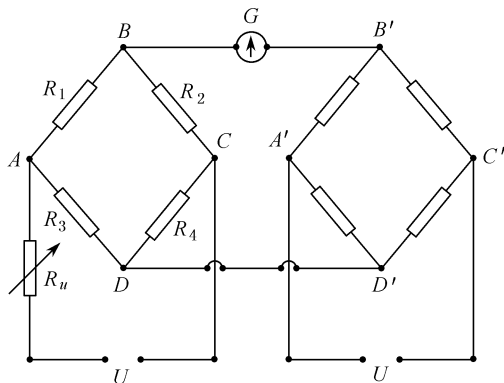


图 5-9 双桥电路

但是,这样的读数电桥只适用于电阻应变片的灵敏度系数 K 为某一定值的情况。为使双桥电路适用于不同的 K 值,在测量电桥中放置有一个可变电阻 R_u (也可置于读数桥中),使测量电桥(或读数电桥)的供桥电压能够调节。而由式(5-8)可知,当 K 值不同时只要维持 KU_{AC} 为一常数即可。

2. 载波放大原理

应变测量中电桥输出信号很微弱,一般需要放大后方可测量。直流放大器稳定性差,易产生零点漂移,且制造复杂,造价高。因此,应变仪中多采用交流放大器,即交流供桥,载波放大方式。

(1) 交流电桥

图 5-10 示一交流电桥,供桥电压 U 是一交流电压。电路中应考虑电感电容的影响。各桥臂的阻抗包括直流电阻 R 元件及导线的分布电容 C 和分布电感 L ,分别以 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 表示之。

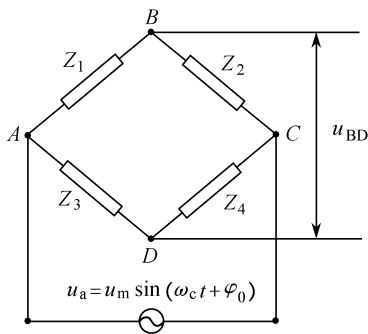


图 5-10 交流电桥

参见式(5-7),交流电桥的平衡条件为:

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \quad (5-12)$$

由电工学知, $Z_k = R_k + jX_k (k=1, 2, 3, 4)$ 其中 X 为电抗,包括感抗 $\omega_c L$ 及容抗 $1/\omega_c C$ 两部分。则由上式得

$$R_1 R_4 - X_1 X_4 + j(R_1 X_4 + R_4 X_1) = R_2 R_3 - X_2 X_3 + j(R_2 X_3 + R_3 X_2)$$

实部、虚部分别相等。

$$\begin{cases} R_1 R_4 - X_1 X_4 = R_2 R_3 - X_2 X_3 \\ R_1 X_4 + R_4 X_1 = R_2 X_3 + R_3 X_2 \end{cases} \quad (5-13)$$

可见,交流电桥的平衡不像直流电桥那样,只调节各桥臂电阻比是不行的,必须既调节电阻比又调节电抗比,故欲使交流电桥平衡,必须耐心地、仔细地、反复地调节电阻比与电抗比。

一般情况下,在电阻应变仪中,可以不考虑感抗。因为实践表明,分布电感对应变仪的影响很小,主要是分布电容的影响。在交流电桥中,两邻近导体,导体与机壳之间,都存在着一定的分布电容,甚至从电阻应变片引出的两根导线之间也会产生分布电容。故对较长的导线,最好是把两根导线绞成辫子,以减少分布电容,并将导线固定,以消除由于导线移动而发生分布电容的改变。由于载波频率在测量过程中保持不变,故可认为分布电容引起的容抗不随工作应变片的变形而改变,测量前如已预调平衡,即可消除其对应变仪的影响。

(2) 交流电桥的调幅作用

在直流电桥中,工作应变片处在拉伸或压缩状态,用桥臂电阻比即可鉴定。在交流电桥中,则必须用鉴别相位的方法。

为使概念更加清晰,先来分析交流电桥仅具纯电阻的情况。将图 5-10 中 Z_i 换成 R_i ,设 R_i 为工作应变片阻值,各桥臂阻值比恰好使电桥平衡。现 R_1 受到拉伸,阻值变为 $R_1 + \Delta R (\Delta R > 0)$,参照式(5-8),则电桥输出电压 u_{BD} 为

$$u_{BD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R} u_a = \frac{K\epsilon}{4} U_m \sin(\omega_c t + \varphi_0) \quad (5-14a)$$

式中, u_a, U_m ——载波电压的瞬时值和最大值;

ω_c ——载波电压的圆频率;

φ_0 ——载波电压的初相位;

t ——时间。

同理,当工作应变片受到压缩而阻值变为 $R_1 - \Delta R (\Delta R > 0)$ 时,有

$$\begin{aligned} u_{BD} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{-\Delta R}{R_1} u_a = -\frac{K\epsilon}{4} U_m \sin(\omega_c t + \varphi_0) \\ &= \frac{K\epsilon}{4} U_m \sin(\omega_c t + \varphi_0 + \pi) \end{aligned} \quad (5-14b)$$

可见,当电阻变化量 ΔR 具有不同符号时,输出信号 u_{BD} 的相位相差 180° ,而输出电压的幅度相同。图 5-11 中(b),(c)给出了(5-14)式的波形。

当然,交流电桥具有电抗。因此 $\Delta R/R$ 应改为阻抗的相对变化 $\Delta Z/Z_1$ 。但 $\Delta Z \propto \Delta R$,所以当 ΔR 具有不同符号时,相应的输出电压仍然相差 180° 。

如应变是动态的,采用直流电桥零读法就不可能及时读出 ΔR 的瞬时变化值,而用交流电桥,则可利用示波器或记录仪把动态应变显示或记录下来。下面来分析动态应变时交流电桥输出信号的波形。

设工作应变片的波形呈简谐变化,即

$$\epsilon_n = \epsilon_m \sin \omega t$$

则

$$\Delta R_n = \Delta R_m \sin \omega t$$

式中 ϵ_n, ϵ_m 分别为简谐应变的瞬时值和最大值, $\Delta R_n, \Delta R_m$ 分别为工作应变片电阻变化的瞬时值和最大值, ω 为简谐应变的圆频率。

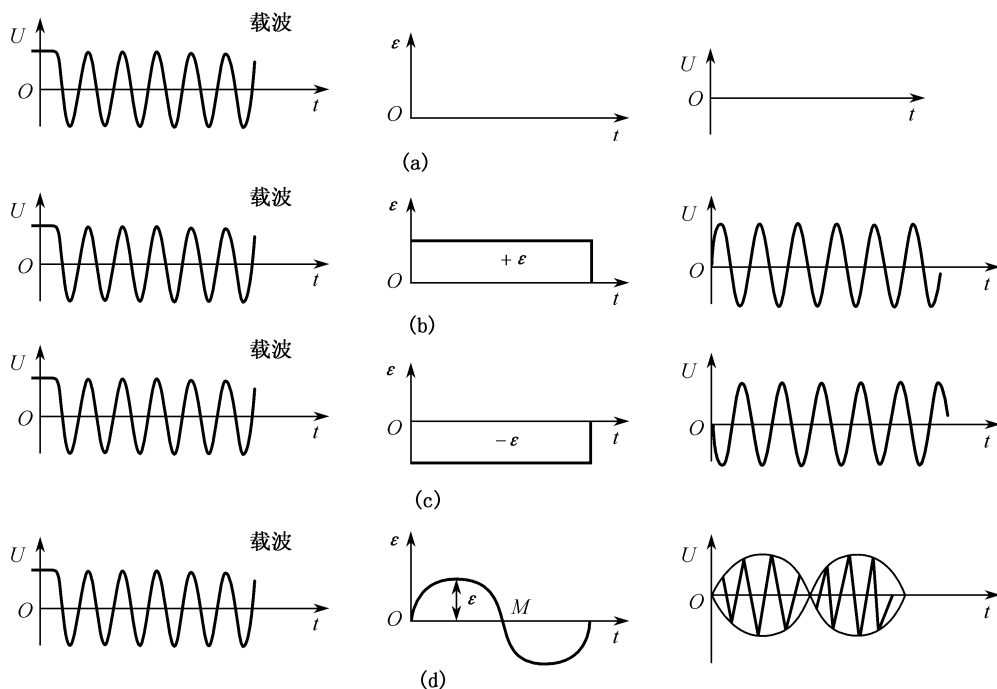


图 5-11 调幅作用

(a) 无应变 ;(b) 正应变 ;(c) 负应变 ;(d) 动应变

这时交流电桥输出信号为

$$\begin{aligned}
 u_{BD} &= \frac{1}{4} \frac{\Delta R_m}{R_1} \sin \omega t \cdot U_m \sin(\omega_c t + \varphi_0) \\
 &= \frac{K_{\epsilon m}}{8} U_m \cos(\omega_c t - \omega t + \varphi_0) - \frac{K_{\epsilon m}}{8} U_m \cos(\omega_c t + \omega t + \varphi_0)
 \end{aligned} \quad (5-15)$$

这表明,当应变呈简谐变化时,电桥输出是一调幅波,见图 5-13 中(d)所示。把供桥交流电压波称为载波,把应变信号波称为调制波。调制波使载波的幅度受到调制成为调幅波。如果动应变不呈简谐形式,例如试件受到突然的撞击,则可用其他数学分析方法来做理论分析,这里从略。

电桥输出信号很小,小应变时为微伏的数量级,大应变时也不过是毫伏的数量级,需要多级放大,以便测量记录。

供桥电压的频率关系到放大器、振荡器、滤波器等的设计。现在应变仪采用的载波频率为 2 000 Hz,有的高达 4 000 ~ 6 000 Hz。采用高频载波对动态测量较为有利,因为一般结构内的动态应变,其频率在 100 Hz 以下,对 4 000 Hz 或 5 000 Hz 来说,它所占的比例极小,放大器相对通频带较窄,利于设计频率响应好、性能好的放大器。供桥电压取决于电阻应变片的阻值及其允许安全电流的大小,一般在 2V 左右。供桥电压由振荡器产生。

3. 相敏检波原理

交流电桥的输出信号是调幅波,其频率为载波频率,幅度则按应变信号变化。经过放大的调幅波,其波形并不改变。为得到放大的应变信号,要从调幅波中把高频载波去掉,还原成

应变信号的波形,此过程称为解调,或称检波。

电阻应变仪所采用的检波器不同于一般调幅波用的检波器。因为,不仅要由调幅波中得出应变波幅度的大小(即应变的数值),还要鉴别它的相位(即应变的正负),能够同时鉴别相位的检波器称为相敏检波器。

图 5-12 是一个由四只特性相同的二极管构成的桥式全波相敏检波器原理图。由放大器输入的信号 u_ϵ 经变压器 B_1 耦合,加在电桥两端。由振荡器来的参考电压 u_r 经变压器 B_2 耦合加在电桥的另两端。 u_r 的频率与供桥电压频率相同,因而也与放大后的应变调幅波 u_ϵ 的频率相同。在幅度上, $u_r > u_\epsilon$ 。

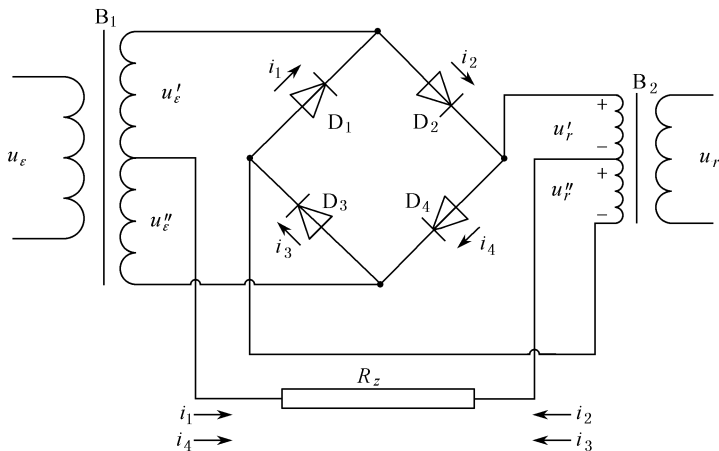


图 5-12 桥式全相敏检波器原理

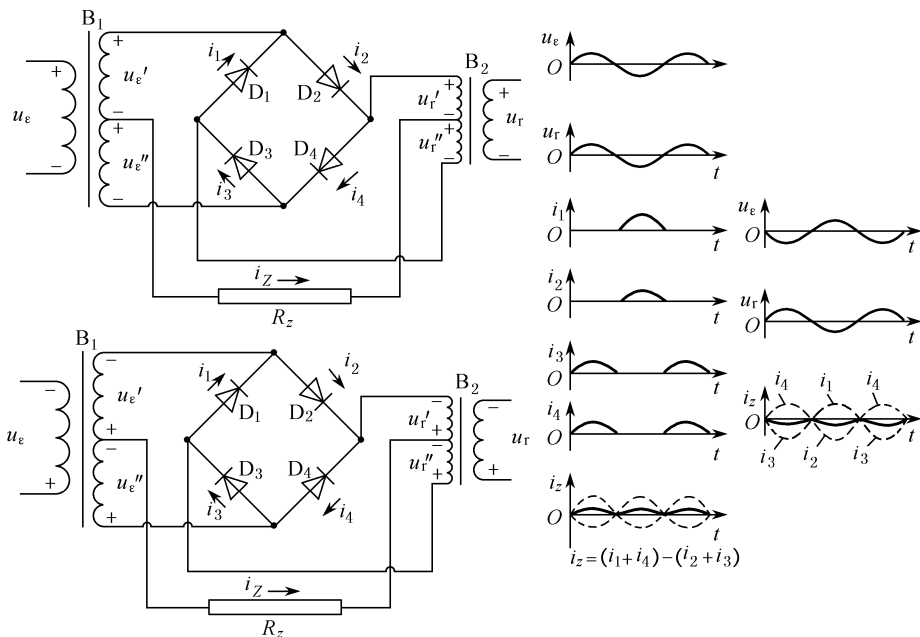
① 当 $u_\epsilon = 0$ 时,由 u_r 的作用,在正半周(极性如图 5-12 中所示)时 D_3 和 D_4 导通,电流 i_3 和 i_4 以相反的方向流过负载 R_z 。只要变压器 B_2 的抽头处于中心,则 $u'_r = u''_r$ 。又因 D_3 、 D_4 的特性相同,则 $i_3 = i_4$,所以 $i_z = 0$ 。同理,在负半周时 D_1 和 D_2 导通,且 $i_1 = i_2$,仍然有 $i_z = 0$ 。

② 当 u_ϵ 与 u_r 同相时,在正半周(极性如图 5-13 所示)时 D_3 、 D_4 导通(因 $u_r > u_\epsilon$,故二极管是否导通决定于 u_r)。但这时作用在 D_3 两端的电压是 $(u''_r - u'_\epsilon)$ 。作用在 D_4 两端的电压是 $(u'_r + u''_\epsilon)$ 。因此 $i_4 > i_3$, $i_z = i_4 - i_3$ 自左端流向右端。在负半周时 D_1 、 D_2 导通(参见图 5-13)。由于作用在 D_1 上的电压为 $(u''_r + u'_\epsilon)$ 。而作用在 D_2 上的电压为 $(u'_r - u''_\epsilon)$,故 $i_1 > i_2$, $i_z = i_1 - i_2$ 仍自 R_z 左端流向右端。

可见,只要 u_ϵ 与 u_r 相同, i_z 的方向就由左向右,而其数值显然取决于 u_ϵ 的大小(u_r 为一定值)。图 5-13 还给出了 i_z 的波形。

③ 同理,当 u_ϵ 与 u_r 相位相差 180° 时,在正半周仍是 D_3 、 D_4 导通,但作用在 D_3 上的电压是 $(u''_r + u''_\epsilon)$ 而 D_4 上为 $(u'_r - u'_\epsilon)$ 。故 $i_z = i_3 - i_4$ 自 R_z 的右端流向左端。在负半周时 D_1 、 D_2 导通,作用在 D_1 上的电压为 $(u''_r - u'_\epsilon)$ 而 D_2 上为 $(u'_r + u''_\epsilon)$ 。 $i_z = i_2 - i_1$ 仍自右端流向左端。图 5-13 也表示 u_ϵ 与 u_r 相位相差 180° 时 i_z 的波形。

以上仅是一个定性的分析,经相敏检波后的波形是脉动的,如果二极管特性不一致,或者变压器抽头偏离中心位置,还会产生载频泄漏,导致检波后的波形具有更高的频率成分,故需用低通滤波器滤波。

图 5-13 u_e 与 u_r 相位相差 180° 时 i_z 的波形

4. 电阻应变仪的基本组成

电阻应变仪组成部分的多少,各组成部分具体采用何种线路,取决于测量对象的要求。换言之,电阻应变仪按测量对象的不同要求,分成若干类别。通常分为静态、动态、超动态及静动态电阻应变仪。

用来测量静应变的电阻应变仪,叫做静态电阻应变仪。典型的静态电阻应变仪的组成见图 5-14。这是采用双桥电路的应变仪。YJ-5 型静态电阻应变仪的组成即为这种形式。YJ-5 设有大调、中调和微调三种旋钮。大调分 20 挡,每挡 $1000 \mu\epsilon$ 。测量范围为 $\pm 10000 \mu\epsilon$;中调也分 20 挡,每挡 $100 \mu\epsilon$,测量范围 $\pm 1000 \mu\epsilon$;微调分 200 格,每格 $1 \mu\epsilon$ 。测量范围 $\pm 100 \mu\epsilon$ 。YJ-5 机设电阻 R 、电容 C 预调平衡装置。为适应不同灵敏度系数的应变片,设置了灵敏度系数调节器($K=1.8 \sim 2.6$)。配备有 20 点 P20R-5 型预调平衡箱,并设有多机连用同步播头。

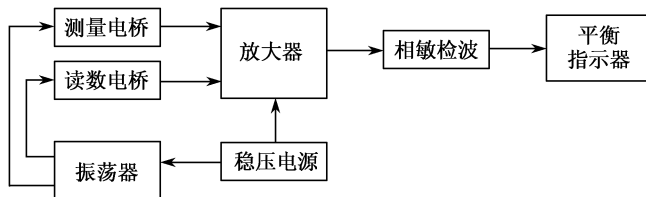


图 5-14 静态电阻应变仪

动态电阻应变仪的组成见图 5-15, YD-15 型动态电阻应变仪就是这种组成结构。YD-15 也设有 R 、 C 预调平衡装置和多机联用同步播头。YD-15 本体分 4 线、8 线两种机型。

使用电阻应变仪时,应按各台仪器的说明书的要求,进行操作和维护。表 5-4 给出一些国产电阻应变仪的性能数据。

表 5 - 4 国产电阻应变仪及其技术指标

技术指标	静 态			静 动 态		动 态			
	YJ - 5	YJB - 1A	YJS - 14	YJD - 1	YJD - 7	Y6D - 2	Y6D - 3A	Y8DB - 5	YD - 15
预调箱点数	20	20	自动 400	20	20	—	—	—	—
测量线数	—	—	最快测速 10 点/s	1 线	1 线	6 线	6 线	8 线	4 线 8 线
测量范围 / $\mu\epsilon$	$\pm 11\ 100$	$\pm 10\ 000$	A $\pm 19\ 998$ B $\pm 19\ 999$	静 $\pm 16\ 000$ 动 $\pm 2\ 000$	静 $\pm 15\ 500$ 动 $\pm 6\ 000$	$\pm 6\ 400$	$\pm 10\ 000$	$\pm 10\ 000$	$\pm 10\ 000$
桥源电压 /V	0.7~1.5	0.8	—	1.1	2	1, 2, 3	3	2	3
载 频 /kHz	0.53	0.80	—	2	1	5	10	50	10
工作频率 /Hz	—	—	—	0~200	0~100	0~500	0~1500	0~10 000	0~1 500
应 变 片 灵敏度系数	1.8~2.6	2.0 固定	1.5~3	1.95~2.60	1.92~2.60	2	2	2	2
应变片阻值 / Ω (标准为 120 Ω)	100~600	100~1 000	60~1 000	100~600	100~600	120	60~1 000	60~600	100~600
电阻平衡范围	$\pm 0.6\Omega$	$\pm 2000\mu\epsilon$	自动	$\pm 1.2\Omega$	—	$\pm 0.6\Omega$	$\pm 1\Omega$	$\pm 0.3\Omega$	$\pm 0.6\Omega$
电容平衡范围 /pF	$\pm 2\ 000$	$\pm 2\ 000$	4 700	2 000	2 000	2 000	$\pm 1\ 500$	$\pm 1\ 200$	$\pm 2\ 000$
零 漂 / $\mu\epsilon$	(4h) < ± 3	(4h) < ± 1	(4h) A 挡 12 B 挡 8	(4h) < ± 5	(4h) < ± 5	(4h) < ± 5	(4h) < ± 5	(0.5h) < ± 5	(2h) < ± 5
动 漂 %	—	—	—	(2h) < ± 3	(2h) < ± 3	0.5h < ± 1	0.5h < ± 1	0.5h < ± 1	0.5h < ± 1
灵 敏 度 /(mA· $\mu\epsilon^{-1}$)	分辨率 1	分辨率 1	1/字	分辨率 静 动 5 0.05	分辨率 静 动 5 0.05	0.1(20 Ω)	0.1(15 Ω)	0.1(15 Ω)	0.01(50 Ω)(1k Ω 时 为 10mV/ $\mu\epsilon$)

续表

技术 指标 型 号	静 态			静 动 态		动 态			
	YJ - 5	YJB - 1A	YJS - 14	YJD - 1	YJD - 7	Y6D - 2	Y6D - 3A	Y8DB - 5	YD - 15
最大线性电流 输出 /mA	—	—	—	0 ~ 5	0 ~ 1	0 ~ 10	0 ~ 50	0 ~ 20	- 30 ~ 30(12Ω) (1kΩ 时为 - 1 ~ 1V)
配用记录仪器 型号	—	—	—	SC - 1	SC - 1	SC - 10 SC - 16	SC - 16	SC - 10 SC - 16	SC - 16 SZ - 4 小型 磁带记录器
振幅特性误差 /%	—	—	—	± 3	± 3	± 1	± 1	± 1	± 1 ± 2
频率特性误差 /%	—	—	—	± 3	± 3	± 3	± 3	2 (5kHz) 10 (10kHz)	± 6 ± 10
1με 标定误差	—	—	—	—	—	< 1%	< 1%	< 1%	< 1%
重 量 /N	185	45	约 300	83	80	100	500	270	130 200

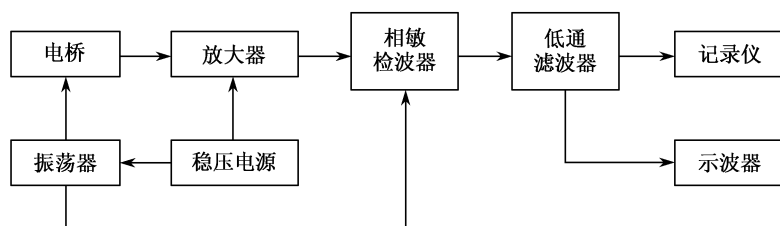


图 5-15 动态电阻应变仪

应变仪的一些部分需要稳压电源,解调后的信号还要求滤波。电阻应变仪采用的放大线路、振荡线路、滤波线路、稳压电压等,其原理属于工业电子学的范畴,这里不再赘述了。

三、电阻应变仪的使用方法

(一) 应变仪的工作过程、应变仪中的电桥和预调平衡箱

1. 应变仪的工作过程

上面已经讲过,应变仪一般由电桥、放大器、相敏检波器、滤波器、振荡器、稳压电源和指示表等主要单元组成。

图 5-16 所示为一般应变仪的工作过程。振荡器 1 产生数千赫的等幅正弦波,如图中 b 所示,做为电桥的电源和供给相敏检波器做参考电压。当应变片上的应变为 $f(t)$ 时,如图中 a 所示,电桥输出微弱的调幅波,见图中 c 所示。该调幅波经放大器 2 放大后,见图中 d,经相敏检波器 3 检波后,见图中 e,再经滤波器 4 滤掉载波,便得到放大的应变信号 $f(t)$,如图中 f 所示。这种信号便可推动指示表 5 显示或同时推动记录装置把信号记录下来。

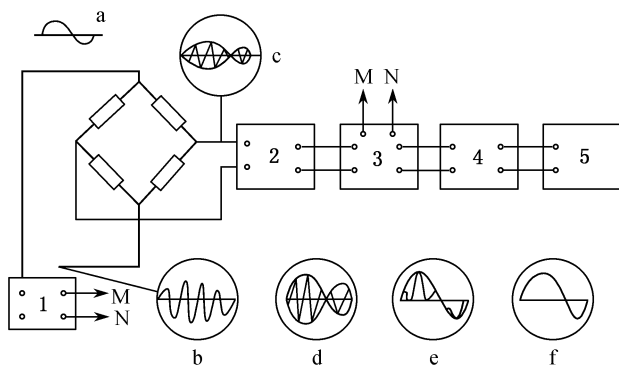


图 5-16 应变仪的工作过程

1- 振荡器 2- 放大器 3- 相敏检波器 4- 滤波器 5- 指示或记录装置

应变仪按它能测量的物理频率,即应变仪的工作频率分类如下:

- ① 静态应变仪——工作频率为 0 Hz。用以测量静态物理量。
- ② 静动态应变仪——工作频率在 0 ~ 200 Hz。用来测量静态物理量或变化频率在 200 Hz 以下的物理量。

③ 动态应变仪——工作频率在 $0 \sim 4\,000\text{ Hz}$ 。用来测量变化频率在 $4\,000\text{ Hz}$ 以下的物理量。

④ 超动态应变仪——工作频率在 $0 \sim 30\text{ kHz}$ 。

应变仪还可分为直流电桥应变仪和交流电桥应变仪及方波供桥应变仪等。

2. 应变仪中的电桥

(1) 电桥电路

图 5-17(a) 是 YD-15 型动态应变的电桥部分线路图。2、4 端为供桥端，1、3 端为输出端，直接接至放大器输入变压器 B。实际上电桥是一只桥盒，如图中 5-17(b)、(c) 所示，组成桥臂的两只精密无感电阻 R_0 在桥盒中，贴在试件上测量点处的应变片，经导线与桥盒相接，构成电桥。

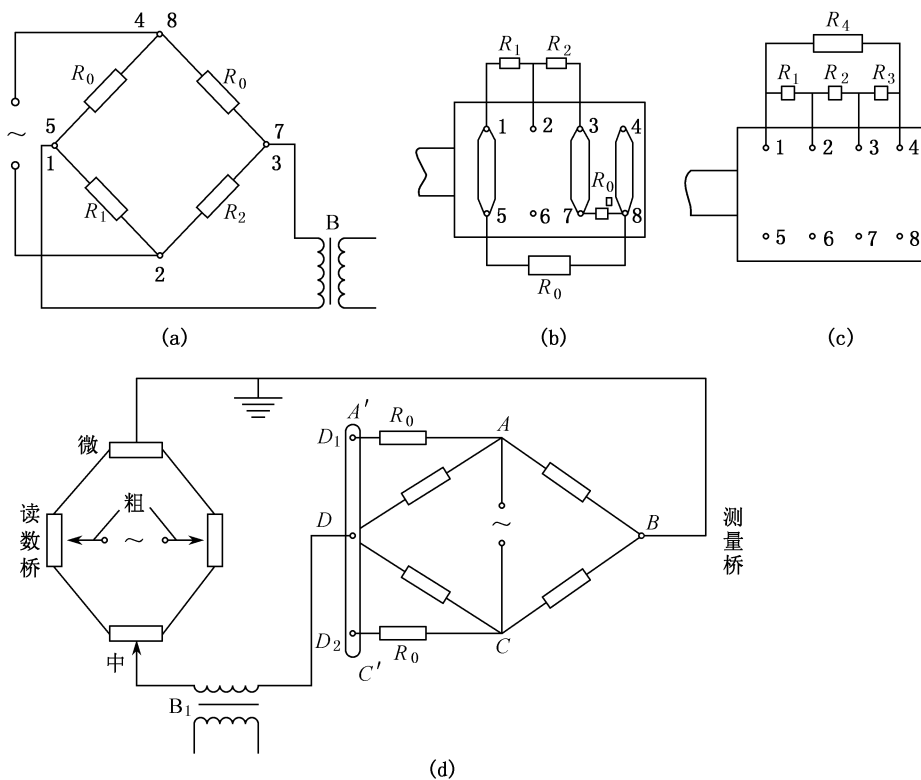


图 5-17 应变仪的电桥电路

电桥盒上有八只接线柱，1、2、3、4 号接线柱与线路图中 1、2、3、4 端相对应，5、6、7、8 端已在桥盒中接好两只 R_0 ，正确地接桥方法如下：

半桥接法 如图 5-17(b) 所示，接线柱 1、2 接入应变片（测量片） R_1 ，2、3 号接线柱接入温度补偿片 R_2 （也可是测量片 R_2 ），接线柱 1-5、3-7、4-8 用短接片短接。

全桥接法 如图 5-17(c) 所示，除掉短接片，将四只应变片按要求接成桥形后，四个公共端分别接入桥盒 1、2、3、4 号接线柱上即可。

图 5-17(d) 为 YJ-5 静态应变仪的电桥电路图。静态应变仪多采用双电桥结构，由测量

桥和读数桥组成,在测量桥上接应变片。双桥结构的好处,是由于采用专用的读数桥,测量精度较高,测量范围较大,如 YJ-5 量程为 $\pm 11\ 100\ \mu\epsilon$,可以实现全桥接法的测量。读数桥由微调、中调和粗调三挡,测量桥由应变片及应变仪内两只精密无感电阻构成。YJ-5 接桥方法为:

半桥接法时,应变片接 AB、BC 接线柱间, D_1 、 D_2 接线柱接短接片。

全桥接法时,取掉短接片,在 ABCD 四只接线柱上接应变片。

(2) 电桥平衡电路

图 5-18(a)是 YD-15 应变仪的电阻、电容平衡电路图。 W 为电阻平衡调解, C_2 为电容平衡调解。

图 5-18(b)是 YJ-5 应变仪电桥平衡电路,电阻平衡部分的 R_3 接在 D_2 上,电容平衡部分接在精密无感电阻构成的半桥中。当取掉短接片进行全桥接法时,仪器上的电阻平衡装置不起作用,由预调平衡箱上的电阻平衡装置来完成。

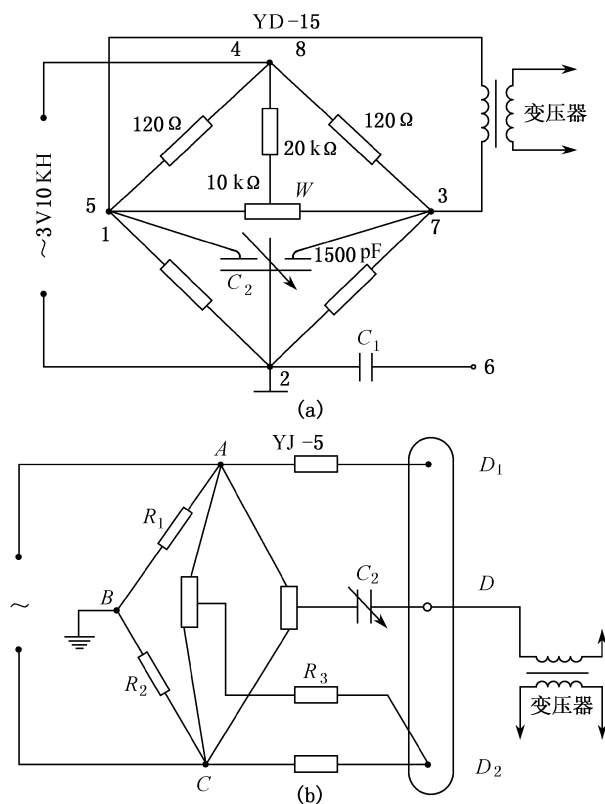


图 5-18 应变仪的电桥平衡电路图

3. 预调平衡箱

对车身结构进行静强度试验时,需要测量应变的点往往多达几百个,预调平衡接线箱就是用来解决用一台静态应变仪进行多点测量的辅助设备。预调平衡箱具有预调平衡装置,可对各点进行预调平衡。

图 5-19 是调节桥臂阻值的预调平衡箱原理图。图中仅给出了半桥接法时的情形。 $K_1 \sim$

K_4 系一四刀多掷刷型开关。 CZ_1 与 CZ_2 是插座,通过电缆分别与应变仪和另一台预调平衡箱相连接(多台组合使用时)。接线箱有 20 组 A、B、C、D 接线柱,工作应变片接在 A、B 柱间,温度补偿片接在 B、C 柱间。刷型开关置于“0”位时,接线箱不工作,而置于“1”~“20”中任一位置时,则该编号的应变片半桥和电阻应变仪上的半桥组合成一个完整的测量电桥。如图 5-19 (b)与(c)所示,亦即由 R_1' 、 R_2' 、 R_3 、 R_4 组成测量电桥。 R_a 和 R_d 起电阻预调平衡作用。当刷型开关置于“校”位置时,两精密无感电阻 R_0 代替外接电阻应变片,用以检查平衡箱与应变仪的连接是否正常。国产 P20R-5 型预调平衡箱即按此原理设计制造,其预调平衡范围为 $\pm 2500\mu\epsilon$,调整误差为 $\pm 5\%$,重复误差小于 $2\mu\epsilon$ 。

由于箱内没有对每一路设电容平衡电路,要使它照顾到 20 点,使之都达到电容平衡是不可能的。因此,接线时应考虑分布电容的影响,务必使工作片与补偿片的测量导线的路径、长度均相同,并把导线绞合、固定起来。

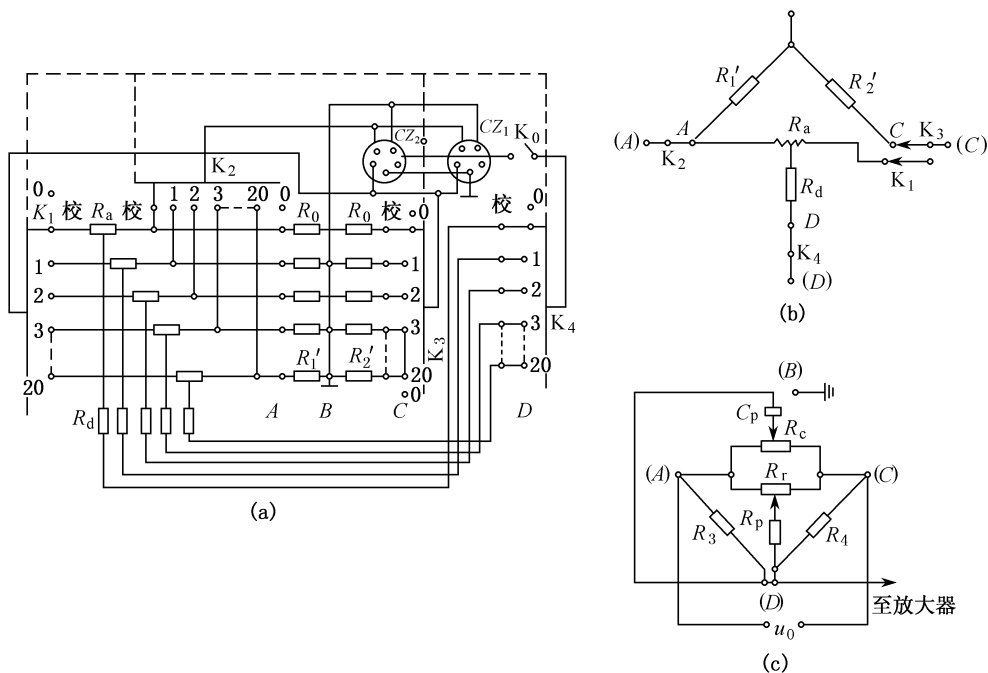


图 5-19 预调平衡箱原理图

(二) 应变仪的使用要领

1. 正确接桥

就是按半桥接法或全桥接法,把贴在测点处的工作应变片和温度补偿片,正确地连接到应变仪上或电桥盒上。

2. 负载阻抗匹配

电阻应变仪常与光线示波器或磁带记录仪配套使用,以便将放大的信号记录下来。光线示波器的振动子和磁带记录仪是应变仪的负载。

应变仪必须按设计负载阻抗数值接入负载,否则将会影响应变仪的频率特性等性能。

动态应变仪一般设有低阻输出端和高阻输出端。如 YD-15 应变仪低阻输出端可连接光栅示波器振动物子,其高阻输出端可直接与磁带记录仪连接。

3. 预调平衡

预调平衡就是在测量前,没有测量信号输入应变仪时,调节应变仪使其输出端没有输出。因为电桥中电阻应变片间阻值有差异,接桥导线间存在分布电容等,所以虽然没有测量信号输入,电桥初始状态也是不平衡的,这种不平衡便导致输出端有输出,在正式测量前应予以消除,这就是预调平衡的目的。预调平衡是应变仪使用的重要环节。预调平衡包括电阻平衡和电容平衡两项,应变仪都设有电阻平衡旋钮和电容平衡旋钮,预调平衡时应按各应变仪的使用说明书的要求进行操作。

4. 应变测量

(1) 衰减器的使用

衰减器的作用是扩大应变仪的测量范围,保证放大器工作在线性区。如 YD-15 型应变仪,无衰减时,最大测量范围是 $100 \mu\epsilon$,信号在此范围内能予以线性放大。采用衰减 100 倍后,测量范围扩大至 $10\,000 \mu\epsilon$ 。这是因为 $10\,000 \mu\epsilon$ 范围内的信号,被衰减 100 倍后,实际输入放大的信号仍相当在 $100 \mu\epsilon$ 范围内,从而保证放大器工作在线性区。

动态电阻应变仪的衰减器都设有不同级衰减挡。如 YD-15 型应变仪设有 0、1、3、10、30、100 倍衰减挡。当衰减器指 1 时,信号不被衰减;当衰减器指 0 时,信号全部被衰减掉;当衰减器指其他各挡位置时,信号被衰减相应的倍数。

衰减器挡位的确定方法,是根据以往测量经验或试测,估计出测量信号的最大变化范围,衰减器就放置在与此测量范围相对应的挡位上。

(2) 标定装置及其使用

动态电阻应变仪设有标定装置,标定装置的作用是给出标定信号,当进行应变测量时,标定信号就是标准应变信号,用它作为衡量测量信号大小的标准尺度。

① 标定原理:应变仪标定装置的原理,是给电桥一个臂并联一定阻值的精密无感分流电阻,使该桥臂产生电阻变化,亦即产生标准模拟应变信号,见图 5-20(a)所示,在开关 S 闭合前,电桥平衡,桥臂 1 的电阻值为 R_g ,桥臂 1 在开关 S 闭合后的阻值为 $\frac{R_g R_s}{R_g + R_s}$,电阻变化量为

$$\Delta R = R_g - \frac{R_g \cdot R_s}{R_g + R_s} = \frac{R_g^2}{R_g + R_s}$$

由关系式 $\frac{\Delta R}{R} = -K\epsilon$,可确定电桥输出的等效应变。

$$[\epsilon] = \frac{1}{K} \cdot \frac{R_g}{R_g + R_s} \quad (5-16a)$$

根据此关系式,对 $[\epsilon] = 100, 1\,000, 5\,000$ 可以设计出不同的标定挡(即不同阻值分流电阻 R_s):

$$R_s = \left(\frac{1}{K[\epsilon]} - 1 \right) R_g \quad (5-16b)$$

图 5-20(b)中,双联开关 K 置于“1”位置为应变仪正常工作状态,测量电桥 A 的输出信号送给应变仪中的放大器;开关 K 置于“2”位置为标定工作状态,标定电桥 T 的输出信号送给放

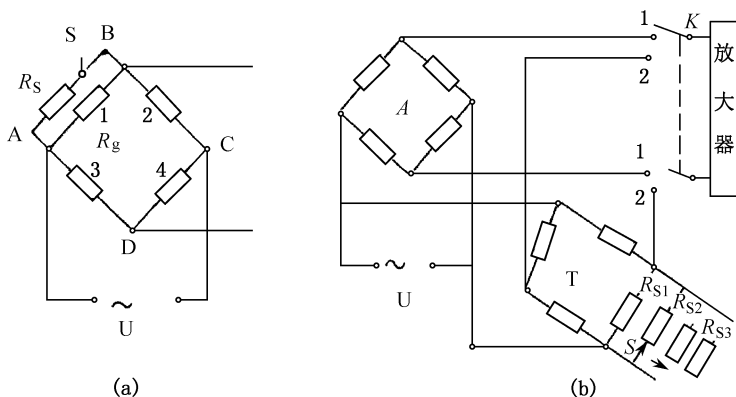


图 5-20 应变仪标定

A—测量电桥, T—标空电桥

大器, 测量电桥 T 的一个臂上同时并联多只精密无感电阻 R_{Si} ($i = 1, 2, 3, \dots$), 当开关 K 置于“2”位置, 标定开关 S 分别接通 R_{Si} , 电桥就会产生各种标准应变信号——即标定信号。

② 标定方法: 首先确定标定挡的位置, 被测信号变化范围估定后, 标定挡的位置应确定在与测量范围相近的挡位上。并且标定挡位与衰减挡位应是相互对应的, 例如衰减挡放在 10 位置上, 标定挡应放在 1 000 位置上, 以保证放大器工作在线性区内。其次, 挡位确定后, 便可使记录器慢速运动, 拨动标定开关, 在记录纸上或磁带上给出阶梯状标定曲线, H_2 和 H_4 为负应变的标定曲线高度, 通常的作法是取 $|H_1| = |H_2| = |H_3| = |H_4| = \varepsilon_0$, 如 $|H_1| = 1\,000\ \mu\varepsilon$ 。这样的标定过程应在测量前后各进行一次, 如图 5-21 示, 以便比较测量前后的仪器状态变化情况。

(3) 测量过程

应变仪预调平衡后, 按被测信号大小选定衰减挡和相应的标定挡, 给出标定曲线, 便可进入测量过程。测量时, 先使记录纸或磁带按选定的速度运行, 然后输入被测信号, 测量中应密切注视记录信号的变化有否异常, 记录完毕时, 应再次做出标定曲线, 观察应变仪电桥平衡状态, 一切正常后, 本次测量结束, 准备下一次测量。

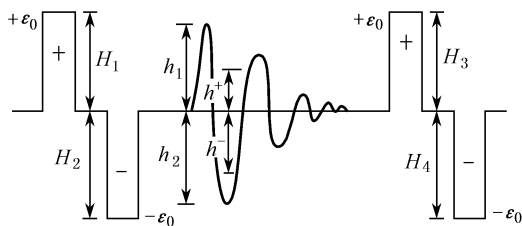


图 5-21 标定曲线和实测曲线

5. 应变计算及修正

(1) 应变计算

经测量过程获得如图 5-21 所示的记录曲线, 将实测曲线与标定曲线比较, 便可计算出实测曲线上任意点对应的应变值。首先确定标定常数 C, 用下列公式计算:

$$C_+ = \frac{\varepsilon_0}{\left(\frac{H_1 + H_3}{2}\right)} \quad \text{或} \quad C_- = \frac{\varepsilon_0}{\left(\frac{H_2 + H_4}{2}\right)} \quad (5-27)$$

式中 ε_0 ——与标定曲线高度对应的标准应变值;

$\frac{H_1 + H_3}{2}$ 或 $\frac{H_2 + H_4}{2}$ ——测量前后两次标定曲线幅度的平均值, 前者为正应变, 后者为负应变的平均值。

所以,正应变标定常数 C_+ 和负应变标定常数 C_- 是标定曲线单位高度对应的应变值。
记录曲线上某点对应的应变值,等于应变标定常数乘以该点的高度

$$\epsilon_{h+} = C_+ h_+ \text{ 或 } \epsilon_{h-} = C_- h_-$$

正应变最大值

$$\epsilon_{M+} = C_+ h_1 = \frac{\epsilon_0}{\left(\frac{H_1 + H_3}{2}\right)} h_1$$

负应变最大值

$$\epsilon_{M-} = C_- h_2 = \frac{\epsilon_0}{\left(\frac{H_2 + H_4}{2}\right)} h_2$$

对由磁带记录的标定曲线和实测曲线,将信号输送给专用处理机进行分析处理时,有些专用处理机要对标定曲线进行 5 次或 7 次采样,求出标定常数。这就要求对测量前后的标定进行适当的调整,如相应标定 5 次或 7 次,或延长标定曲线记录时间。

(2) 测得应变值的修正

由标定装置工作原理知,是给桥臂并联电阻使之产生电阻变化而模拟标准应变的。对常用的国产电阻应变仪,并联电阻的阻值设计是按 $\Delta R = KR\epsilon$ 关系式,按 $K=2$, $R=120\ \Omega$ 条件下计算的。因此,标定装置的模拟标准应变信号只适用于 $K=2$, $R=120\ \Omega$ 标准电阻应变片。当使用 $K \neq 2$, $R \neq 120\ \Omega$ 的应变片,连接应变片到电桥的电线超过 5 m 以上时,如果仍然用应变仪标定装置给出的标准应变信号计算应变标定常数,则对计算结果必须按以下公式予以修正。

$$\epsilon = \frac{\epsilon_n K_0}{K_n K_r K_l} \quad (5-28)$$

式中 ϵ ——修正后的正确应变值;

ϵ_n ——按标定装置给出的标定曲线算出的应变;

K_0 ——标准灵敏度系数, $K_0=2$;

K_n ——实验采用的应变片灵敏度系数;

K_r ——由应变仪制造厂给出的修正曲线查得的修正系数,它随应变片阻值 R 不同而不同;

K_l ——由应变仪制造厂给出的修正曲线查得的修正系数,它随接桥导线的长度不同而不同。

在要求较高的场合,系数 K_r , K_l 可按实际状况测得。

第二节 汽车车身结构强度与刚度试验方法

一、车身结构静强度和刚度试验

车身结构静强度和刚度试验的目的是考察典型静态工况下,车身结构的应力分布与薄弱环节,以及整车刚度指标。其中,典型工况主要是弯曲与扭转工况。

(一) 试验准备工作

1. 选择测点位置

静强度试验的目的是测取车身结构在各种静载工况下的应力分布,找出强度薄弱部位。这就要求测量应力(应变)的点越多越好,往往多达几百,例如大客车车身结构静强度试验的测点一般有 250 个左右。但有时受测量仪器条件的限制,不能进行上百测点的测量时,可精选一批测点进行测量。这主要根据车身结构有限元计算结果、该车型实际使用损坏情况或相似车车身结构的使用情况、试验资料来选择受力大的部位作为应变测量点。也可辅以其他定性试验方法选择测点,如脆漆法,因为脆性涂料涂在试件表面上,当拉伸主应力超过某一限度时,脆性涂料就会沿与拉伸主应力垂直的方向上产生裂纹,从而可定性地评价试件的强度。根据以往汽车使用损坏情况和所进行的车身结构强度试验的资料来看,车身结构发生断裂及受力大的部位多在骨架交叉焊接处。如大客车而言,乘客门上下四角处,前后桥上方窗框四角处,底架上发动机支承部位及四副钢板弹簧的前后吊耳支承处等部位是受力大的部位,断裂损坏容易在这些部位处产生。

应变测点选定后,就可进一步选定电阻应变片的粘贴部位。对于蒙皮,应变片粘贴在外表面;对于骨架构件断面,可通过分析断面上的应力分布确定贴片位置,因为骨架构件主要承受拉压和弯曲载荷。这样来考虑图 5-22 所示的断面形状上的应力分布,大应力值总是在断面四角上,故贴片位置也选在四角上。

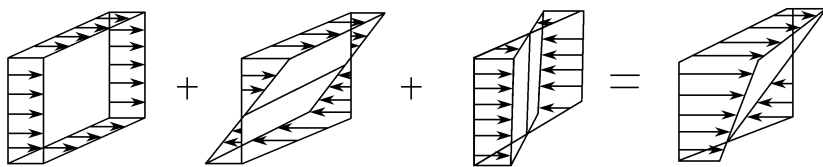


图 5-22 断面应力分布

刚度试验的挠度、转角测量点(或称位移测量点)一般选在半承载式车身的汽车车架或全承载式车身底架或地板上平齐的特征点上。参见图 5-23。

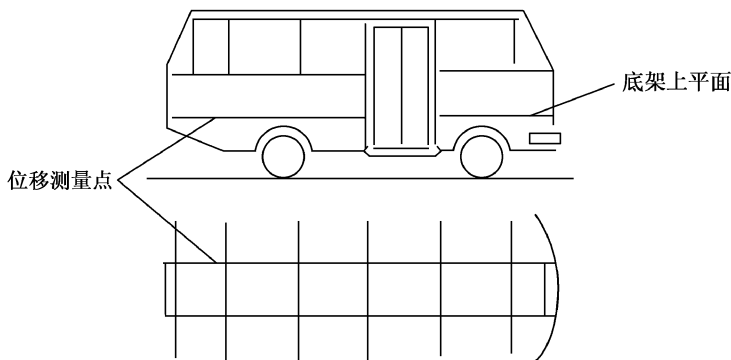


图 5-23 测量点位置选取

2. 应变片、导线和测量仪器

因为电阻应变片反映的是其敏感栅长度范围内的平均应变,所以应尽量选小规格的应变片用于测量应变。车身结构强度试验常用的电阻应变片的规格是 2×3 、 3×5 等。由于受电阻应变仪的限制,一般选名义阻值为 $120\ \Omega$ 的应变片。

应变片在粘贴前,应预检阻值并分组。为保证测量电桥易于预调平衡,同一桥路中的应变片阻值相差不能超过 $\pm 0.2\ \Omega$ 。

贴片质量直接影响到测量结果的准确性,故要求应变片粘贴方位必须准确,应变片与试件间不允许有气泡,对某些测点部位要进行磨光处理及去锈、去污和去油处理。

粘贴电阻应变片是应变测量的第一项工作,应予以足够重视。

粘贴工序大致如下:

- ① 选择电阻应变片,包括筛选、分组。
- ② 试件表面处理,去油、去污、去锈及磨光。表面不宜过分光滑,最好用细砂纸打出微小的交叉细纹来。
- ③ 划线,在要贴应变片的部位轻轻地划出定位线。
- ④ 涂胶粘贴,胶合剂多用502胶。
- ⑤ 检查,包括外观检查,应变片电阻及绝缘电阻的测量。胶层固化后,应变片阻值应无明显变化。绝缘电阻是检验胶层干燥固化程度的标志。胶层完全干燥固化后,绝缘电阻可达 $10^4\ M\Omega$ 。对一般的测量,绝缘电阻应大于 $100\ M\Omega$ 。胶层固化后的外观检查,主要看片下(尤其是敏感栅下)有无气泡和未粘住的地方。可将应变片接入应变仪,使指针位于零点,然后用铅笔有橡皮头的一端轻敲应变片,注意指针的反应。若指针不能复零,则表明应变片未完全贴牢,应刮去重贴。
- ⑥ 固定、焊接导线。应变片到应变仪之间的测量导线要沿途固定好,动态测量时此项工作尤为重要,以减少由于导线晃动而产生的分布电容的影响。导线应尽量选金属屏蔽线,以防止外界电磁场的干扰。为避免导线挪动时损坏电阻应变片,建议测量导线与应变片引出线之间使用接线端子,见图5-24。焊好后应再用万用表检查各片连接导线的阻值,与试件间的绝缘电阻,并用手轻拉导线,看仪表指针是否抖动,对有抖动的导线应进一步妥善固定好。

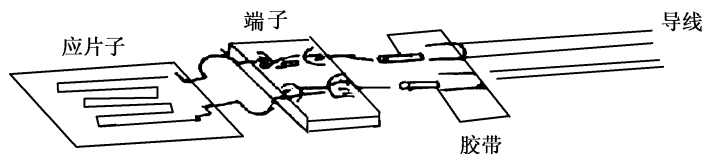


图 5-24 接线端子

⑦ 应变片保护。实际测量中,应变片可能处于多样的环境中,有时要求对贴好的应变片采取相应的保护措施,如防潮湿保护、防腐蚀保护,并兼有一定的机械保护作用。

静强度试验所用电阻应变仪,多选用 YJ-5 型静态电阻应变仪,并配以 20 点的 P20R-5 预调平衡箱。可一机带多台预调平衡箱,也可选用 YJS-14 静态数字电阻应变仪,配有测点转换箱,电阻、电容预调平衡及测点转换均自动完成,可同时测量 400 点。静应变测量系统见图 5-25。

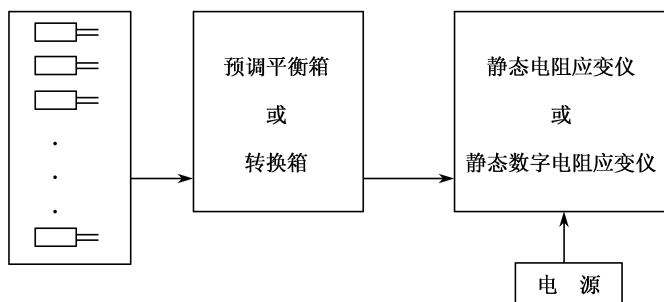


图 5-25 静应变测量系统

测量导线应尽量取同一长度,以保证同一桥路中的导线电阻一致,否则会影响电桥预调平衡。

为实现电容预调平衡,对于采用公共温度补偿的多点测量而言,各测量片和补偿片导线的分布电容 ΔC 之差应尽可能相同,且不能超过应变仪的电容平衡调节量 $C_{\max}$,即 $\Delta C_1 = \Delta C_2 = \Delta C_3 = \dots \Delta C_i \leq C_{\max}$,应变仪才能调至统一的平衡状态。为满足这一条件,则要求测量片和补偿片导线的品种、规格、长度、路径和引出方式均应相同。

对于动态应变测量,或在电磁场干扰严重的场所,应采用多芯金属屏蔽线,最好采用橡胶套金属屏蔽多芯绞合线,不用平行线。这是因为平行线受电桥干扰产生的感应电流大,而绞合线相邻导体的感应电流在应变片回路中可以相互抵消。同时,还要考虑屏蔽和接地,这是测量系统抑制电磁噪声干扰的两种主要方法。屏蔽接地方法和接地点应以干扰最小为准,是以仪器端接地还是应变片端接地,应根据试验决定。有时采用将导线屏蔽套接应变仪机壳;有时采用导线屏蔽套在应变片端接地(试件),不接应变仪机壳。不管是哪种接地方式,都要防止导线屏蔽套两端接地或多点接地。当两点或多点接地时,屏蔽套上就会有干扰电流通过,形成干扰信号。

3. 对车身的要求

对装配成整车的车身结构,为便于粘贴应变片,可要求对蒙皮不喷漆和不要安装内、外饰。在进行试验准备工作前,应整车行驶 1 000 ~ 2 500 km,以消除装配焊接等残余应力。对未装配成整车的车身骨架,在进行试验准备工作前应进行振动处理。

为使车身各部分变形达到谐调状态,并减小应变滞后的影响,应对试验车身进行预加载 3 次(最好超载 5% ~ 10%)。

在完成试验各项准备工作之后,要对应变片和导线进行编号,并绘制测点分布图,以备将来对车身结构进行强度、刚度分析评价时用。

对精度要求高的应变测量,可对所选用的应变片进行抽样标定,以确定应变片所反映的指示应变值与实际应变值之间的关系,进而就可对强度试验的应变测量结果进行必要的修正。应变片抽样应不少于 6 片,把它们粘贴在等强度梁或弯矩梁上,分级加载。所标定的最大应变值应包容车身结构所承受的最大应变值(即所有测点中的最大应变值),并依据标定数据绘制平均标定曲线,如图 5-26 所示,作为应变修正的依据。

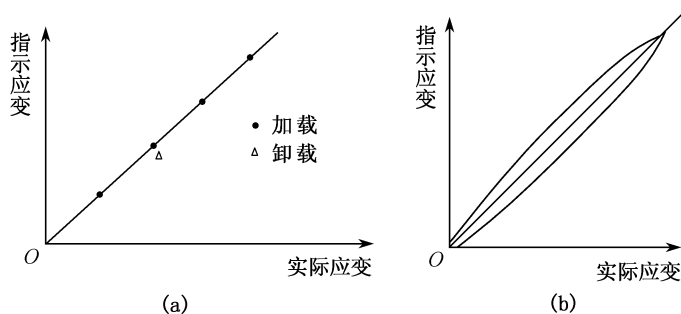


图 5-26 标定曲线
(a) 某一片的标定曲线 ;(b) 平均标定曲线

(二) 静弯曲强度、刚度试验

本项试验的目的是测量汽车车身结构在弯曲工况下的应力(应变)分布状态和变形情况。

1. 支承方式

(1) 整车状态支承方式

将被测汽车停泊在水平位置上或支承起来呈水平状态。

(2) 骨架车身支承方式

一般可分为：① 车身前后端支承法；
② 前、后轴中心位置支承法；
③ 与悬架同样方式的支承法等。

2. 加载方式

根据试验目的而定(或额定满载——应满足轴荷分配,或超载、或均布、或集中载荷)。通常试验载荷用金属重块、沙袋或加载装置实现。

3. 测量程序

① 按各仪器使用说明书接线,仪器预热,电阻应变仪预调平衡。

② 加试验载荷后,稳定 10 min,使车身变形达到稳定状态。

③ 开始测量。对用静态电阻应变仪(如 YJ-5 型应变仪配备 P20R-5 型预调平衡箱)测量应变,在进行应变读数时,要求既准确又快速,对所有测点一次连续测完,中间不要有任何停顿;对用静态数字应变仪(如 YJS-14 型应变仪)则不存在这些问题。关于弯曲挠度的测量可用高度千分尺等机械方法测量各位测点的实际垂直位移值,绘制成图,即可得到车身弯曲挠度图。

④ 测量完毕,卸去试验载荷。

⑤ 为使数据可靠,上述①~④试验过程最好重复 3~5 次。几次应变测量结果之差在 $\pm 20 \mu\epsilon$ 以内,便可认为误差中在正常值范围内。

(三) 静扭转强度、刚度试验

目的是测量车身结构在扭转工况下的应力分布状态和扭转变形情况。

1. 支承和加扭转载荷的方式

(1) 整车的支承、加扭方式

① 将被测试车停泊在水平场地上,试验时顶起一个前轮或后轮,逐渐抬高,直到另一个前轮(或后轮)处于临界离地状态;

② 将四个车轮支承在一个水平高度上,试验时撤掉其中一个车轮的支承,使其处于悬空状态;

③ 在②项支承方式下,位于对角线上的车轮顶起或悬空,但这种加扭方式难以控制被试车的平衡。

(2) 骨架车身(无悬架车桥系统)的支承加扭方式

一般放置在车身扭转试验台上,按扭转试验目的可作空车扭转、满载扭转或超载扭转。

2. 测量程序

与静弯曲强度、刚度试验的测量程序基本相同,只是在第④步测量弯曲挠度代之以测量车身结构扭转变形。这可以通过在变形测点上安装角度量规或高度千分尺测量。对测量数据进行必要的数学处理就可得到车身结构各个特征截面上的相对扭转角。若能测出所加扭矩值,则可得到扭转刚度。

二、车身结构动态强度试验

车身结构动态强度试验的目的是考察车身结构薄弱环节应力的具体变化情况,进而估计车身结构疲劳寿命。

(一) 试验准备工作

1. 测点选择

用于动应变测量的测点是在静强度试验结果的基础上选择的。根据以往车身结构强度的结果,有这样一个规律:静应力大多数的部位其动应力一定大,但动应力大的部位静应力并不一定大。所以,在选择动应变测点时,除选静应力大的测点外,还应选一些关键部位、易发生断裂部位上的测点,如门框上下四角处、前后桥上方窗立柱上下焊接处、悬架前后吊耳附近、牛腿等部位。实际运行断裂损坏部位资料和以往动强度试验结果已证明,对影响结构寿命的动应力大的部位进行动应变测量,就可以为评价整个车身的动强度和疲劳寿命提供充分资料。

另外,选择动应变测点时,还应考虑到所选用的动态应变仪和磁带记录器的通道数的限制,一般选择20个左右比较合适。

2. 仪器选择及测量系统

总是希望同步记录下全部测点的动应变信号,所以选用的动态应变仪和磁带记录器通道数越多越好。如全部测点不能同步记录,也应使分组同步记录的分组数尽量少。

另外,动应变测量是在汽车行驶过程中进行,所以还应考虑所选仪器是否便于在汽车上安装固定。

由于动态应变仪的供桥频率较高,应变片和引出导线分布电容对桥路平衡的影响很大,所以在导线选择和布线时,要求比静态测量更加严格。连接导线应以应变仪一端为准将全部导线拉齐、绑扎成束,沿荫凉、干燥、温度比较恒定的路径引至被测结构。如有条件,最好采用多

股电缆或将导线成束穿入圆管内(钢管或塑料管),以减小恶劣气候或环境的影响。

对动应变测量系统,还应设置良好的屏蔽和接地。

当使用多台动态应变仪同时测量时,常会出现互相干扰现象,其原因有:各台应变仪所接应变片导线互相交混、杂乱无章,或各台应变仪的载频不等且不同步。处理时,首先将各应变仪所接应变片导线分开,并扎成一束相互间隔足够距离引至应变仪,然后接上仪器同步线,干扰应当消除或大大减小。如不能达到此效果,则应调整振荡器输出,使各台应变仪载频相等。动应变测量系统如图 5-27 所示。

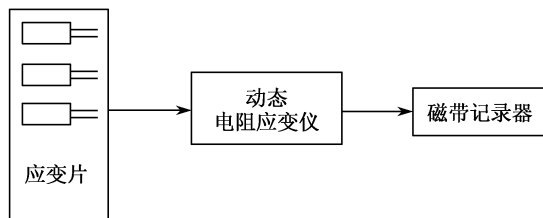


图 5-27 动应变测量系统

3. 试验道路和车速的选择

车身结构动强度试验目的,是为了获得汽车在各种路面上行驶时,车身关键部位的载荷时间历程,为载荷或应力/应变统计、车身结构疲劳寿命估计、疲劳强度模拟试验载荷谱提供依据。

但是,实际行驶时的车身结构动强度或疲劳强度问题是复杂的,要确定一个完全满意的试验条件和试验方法是很困难的。为了确定试验条件和方法,首先要尽可能多地获得在各种道路和行驶条件下,车身各部位暴露出来的疲劳强度问题的大量资料,这些资料只有在长距离的汽车实际运行中,用统计方法整理得到。

在可视为稳定过程(指在比较短的,路面状况均匀的直线路段上行驶)的车速及路面条件下,得到的车身载荷频度分布非常近似正态分布,载荷时间历程也可认为是平稳的各态历经的。这一点已由实验证明。所以,在记录载荷时间历程时,对各种试验道路和各种行驶车速只相应记录行驶 1 km 或 2 km 的载荷历程即可满足载荷频度统计需要。

为了使试验更具典型化,常选择坏路面作为行驶试验用路面,其路面的凹凸程度在实际行驶可能存在的范围内是严酷的。通常选用的试验道路有:被试车经常行驶的典型道路(如市内公路、市郊公路、乡镇山区公路等)、砂石路及鹅卵石路等。试验车速根据试验目的而定。

考虑到车身结构动强度的对比评价问题,则要求试验道路路面状况长期无变化,即试验道路要固定化,这样才能在预先确定的试验条件(路面、车速范围等)基础上实施评价标准。在一般公路上路面状况和交通状况经常变化,要作定量的比较判断较为困难。因此,目前无论欧美或日本都采用专门的试验道路,按一定的标准进行试验。这种专门试验道路采用所谓坏路,比利时块石路,卵石路,砂砾路或混合路等,均设置在大型汽车试验场内。

另外,最近的趋势是新车型的研制周期日趋缩短,迫切需要在短期内考察车身结构的动强度。已经做过的试验研究表明,后面将要介绍的路障试验法是一种行之有效的方法。

(二) 测量方法和步骤

动态应变测量的方法与应变仪和记录器有密切关系,应严格遵照各仪器使用说明书进行操作,通常可按以下步骤进行:

1. 电桥盒连接

将应变片连接导线引至动态应变仪后,即可按测量要求在电桥盒上进行桥路连接(全桥或半桥)经检查可靠后,方可将电桥盒导线插头接入应变仪。同时处理屏蔽和接地。

2. 仪器连接

按说明书要求把电桥盒、电源和磁带记录器接入应变仪,并使各开关和旋钮置于要求位置。经检查无误后,方可打开电源。

3. 平衡调节

打开电源,让应变仪工作。检查“电源”、“桥源”等指示是否正常。如正常,则可开始电阻、电容预调平衡。

4. 标定

标定前,应根据估计被测应变的大小和精度要求,以及应变和记录器的技术性能,把衰减挡放到适当位置,使之在标定和测量时,应变仪的输出电流或电压在其最大线性输出电流或电压的范围内和在磁带记录器最大额定输入电压范围内。如对被测应变的估计不准,可通过预备试验先将衰减挡放在最大值(衰减最多)的位置上,然后被试车在试验道路上行驶,观察各测点动应变的大小,逐渐减小衰减挡,直至信号大小达到上述要求为止。

5. 记录试验说明

用磁带记录器专门语言磁道记录试验编号、对象、工况、环境、测点位置及编号,还要记录动态应变仪衰减挡和标定挡的挡位、磁带记录器带速、初始计数器数码等。同时,为以后处理数据方便起见,应将上述关于试验的说明记在试验记录本上。

6. 测量

标定后先让被试车在试验道路上行驶起来,达到试验车速后,开启磁带记录器进行记录。这时要注意,动态应变仪在测量时和标定时的衰减挡要相同,否则无比较价值,标定失去意义。测量时应随时观察各测点动应变信号,若发现干扰或信号不理想,应及时进行补测或重测。

7. 示测

如有必要可选用一台电子示波器,测量时把动应变信号接入电子示波器,进行波形显示,以便观察各测点动应变的波形、振幅、频率和相位。动应变测量系统如图 5-28 所示。

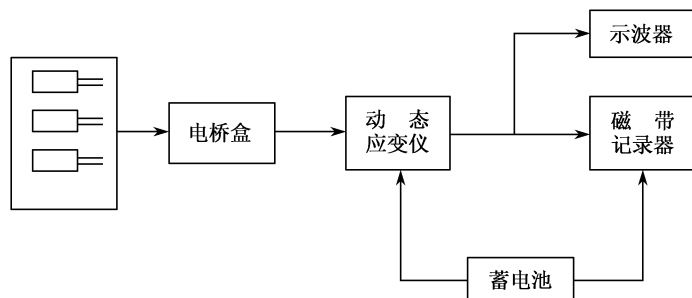


图 5-28 动应变测量系统

三、车身结构强度路障试验

车身结构强度路障试验,就是利用人造凸块模拟汽车行驶时遇到的恶劣道路条件,它是车身结构动态强度试验的一种简单有效的替代试验。通过凸块的不同布置,造成汽车承受弯曲、扭转、弯扭组合等不同工况、测取车身结构在各种工况下的应变(应力)响应信号,据此对车身强度进行评价。

实践证明,这种试验方法简单、周期短、费用低、经济效益高,能快速查明车身结构的薄弱环节,容易得到车身结构上的最大动应力。同时,也是选择车身结构动强度试验测点的有效方法。通过路障试验对测点进行筛选,可大大地减少动强度试验的工作量。下面介绍路障试验有关参数的选择。

1. 路障形状

选择梯形路障为好,其前、后沿角度依据轮胎规格和路障高度而定,通过对矩形、梯形、正弦形及三角形等不同形状路障对车身结构作用强度进行分析,并综合考虑汽车通常遇到的障碍物(石头、土包等,或突然陷入凹坑,或越过铁道路口)。路障顶部都有一水平面,得出梯形路障更能反映实际的越障情况,参见图 5-29。

2. 路障布置

已进行的车身结构强度路障试验结果表明,两后轮同时驶过路障(后弯工况),对车身结构造成最严重的影响,其次为斜对称扭转工况(前左轮后右轮或前右轮后左轮同时通过路障)。在路障试验中,只需考虑后弯和对扭这两种工况就足以查明整个车身的动强度问题。建议路障设置取如图 5-30 所示的布置方案。图中 B 为轮距, L 为轴距, $A = (1.5 \sim 4)L$ 。

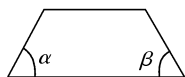


图 5-29 梯形路障

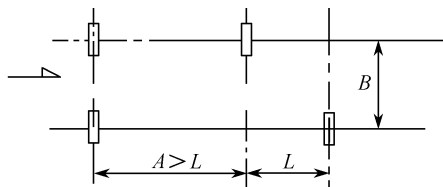


图 5-30 路障布置方案

3. 试验车速

试验车速上限可选最高速的 70%, 试验车速下限可选 20 km/h。

4. 路障高度

路障高度是影响车身结构动应力的重要因素,应根据悬架的动挠度和试验车速上限决定。一般来说,路障高度可选悬架动挠度的下限。当试验车速提高时,应适当减小路障高度。

根据已有路障试验结果,发现路障试验得到的各测点最大动应力幅值普遍高于道路试验得到的最大动应力幅值。因此,在研究结构疲劳强度时,只需对路障试验暴露出来的大应力的结构部位进行测量和数据处理就足够了。

由于路障试验的最大优点就是方法简便、快速而准确,所以可以在样车试制阶段进行该项试验以便初步评价车身结构的动强度。

四、疲劳强度基础知识及随机载荷的统计处理

为了在车身结构动态强度试验的基础上估计车身结构的疲劳寿命,必须应用疲劳强度的基础知识,并对车身结构动态强度试验所得的随机应力进行统计处理。

(一) 疲劳破坏及疲劳曲线

实际运行中,车身结构承受交变载荷(亦称随机载荷)作用,车身骨架的断裂破坏大部分是疲劳断裂。机械零部件在循环交变应力下的疲劳破坏,与在静应力下的失效有本质的区别。静强度失效,是由于在零部件的危险截面中,产生过大的残余变形或最终断裂。在静强度计算中,所用的材料强度指标是屈服极限 σ_s 和强度极限 σ_b ,计算的出发点是截面上平均应力。而疲劳破坏是由于在零部件局部高应力区,较弱的晶粒在变应力作用下形成微裂纹,然后发展成宏观裂纹,裂纹继续扩展导致最终的疲劳破坏。在疲劳强度计算中,所用的材料强度指标是疲劳极限 σ_r ,计算的出发点是局部最高应力(或称峰值应力),而材料的疲劳极限 σ_r 小于 σ_s 和 σ_b 。

疲劳破坏的过程分为三个阶段:①疲劳裂纹的形成;②疲劳裂纹的扩展;③瞬时断裂。材料在多次重复的变应力作用下,虽然工作应力的最大值小于材料的强度极限,但由于在材料的局部造成某些永久性的变形,从而产生裂纹并且最终断裂。疲劳断裂是由循环变应力、拉应力和塑性应变同时作用而造成的。循环变应力使裂纹形成,拉应力使裂纹扩展,塑性应变影响着整个疲劳过程。

为研究构件在交变载荷作用下的强度问题,有必要对材料或构件进行疲劳试验。由于影响疲劳强度的因素是复杂的,随机载荷的统计特性对材料强度都有影响,所以要完全模拟实际载荷的试验是非常困难的。在实验室中进行疲劳试验,一般只能模拟实际载荷的某些主要特性,典型的疲劳试验是在等幅交变载荷作用下的试验。以这样的载荷对一批试验进行疲劳加载,使试件上产生幅值为 σ_i 的交变应力,记录各试件直至破坏时的应力循环次数,取其均值 N_i 作为材料(或试件)在 σ_i 水平下的疲劳寿命,以不同的 σ_i 进行一系列的试验,最后可作疲劳寿命 N_i 与交变应力 σ_i 的关系图,如图 5-31 所示 S-N 曲线,即材料的疲劳强度与寿命的曲线,这里 S 表示广义应力。疲劳寿命 N_i 和交变应力 σ_i 有下列关系:

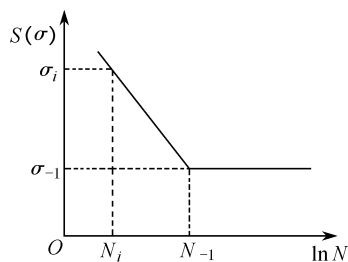


图 5-31 S-N 曲线

$$\sigma_i^k N_i = C \quad (5-29)$$

式中, C 为常数; K 由直线的斜率决定。

图中的水平线段表示当交变应力 σ_i 小于某一定值时,任凭载荷循环次数再增加,试件亦不发生破坏。此时的交变应力幅值记为 σ_{-1} ,称为持久疲劳极限应力,相应于 σ_{-1} 的最小循环次数记为 N_{-1} ,对于钢材 N_{-1} 约为 $10^6 \sim 10^7$ 次。

(二) 疲劳损伤积累

疲劳损伤是指当材料承受高于疲劳极限应力 σ_{-1} 的循环应力 σ_i 时,每一循环都使材料产

生一定量的损伤。这种损伤是能积累的,把这一积累考虑为 $\frac{n_i}{N_i}$ 的形式,当损伤积累到临界值(一定值)时,发生疲劳破坏。有多种关于疲劳损伤积累理论,最著名的是线性损伤积累理论。

疲劳破坏是一种由于材料中裂纹扩展最后导致构件断裂破坏,线性损伤积累理论认为,裂纹是均匀地随载荷循环次数而扩展,即损伤程度和寿命周比成正比,寿命周比即为 $\frac{n_i}{N_i}$,其中 N_i 是交变应力幅值为 σ_i 时的疲劳寿命, n_i 是 σ_i 实际作用的循环次数。各个应力幅值下产生的损伤程度可以线性叠加,当寿命周比之和等于1时,试件产生破坏,即试件疲劳破坏的条件为

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = 1$$

(三) 随机载荷的统计处理

实测载荷谱的统计处理中,处理方法有统计峰值的,有统计幅值的,目的是要获得峰值或幅值的概率分布,为估算构件寿命提供依据。

随机载荷的统计处理主要采用两类方法,计数法和功率谱法。对疲劳强度而言,最主要的是幅值的变化,因为应力(或应变)幅值是疲劳损伤积累法则中的主要因素,所以对随机载荷的统计处理常用计数法。

目前,随机载荷统计计数法有十多种,对于同一载荷时间历程,采用不同的计数法进行分析,所得的寿命值存在着很大差别,所以,了解和分析各种计数法是很有必要的。

1. 峰值计数法

这种计数法对载荷时间历程的各极大值(峰值)和极小值(谷值)分别进行统计,对于一个典型的窄带随机过程,由于每个载荷循环的峰与谷在平均值的两侧(图5-32(a)),所以这种方法提供了载荷时间历程的主要信息。但是对于宽带随机过程,这种计数法得到的峰值分布,与影响疲劳寿命的主要因素幅值分布,相差很大,例如图5-32(b)所示的波形,用峰值计数法记录了三个非常接近的极大值,而从疲劳损伤的观点,应该将它看成由一个大的循环载荷,叠加上两个小的循环载荷而成。

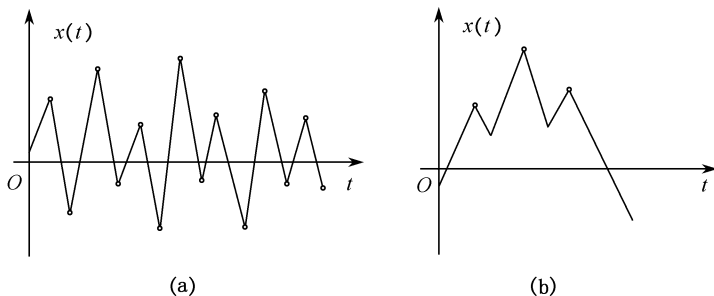


图 5-32 峰值计数法

2. 幅度计数法

幅度是随机载荷两极值之间(极大值与极小值之间)的差值,并定义从极小值上升到极大值时,幅度为正值,从极大值下降到极小值时,幅度是负的,如图5-33中的 r_1 、 r_3 、 r_5 等是正幅

度,而 r_2 、 r_4 、 r_6 等为负幅度。幅度计数法虽然统计了载荷幅值(载荷幅值 $a_i = \frac{r_i}{2}$),但把载荷平均值完全忽略了。疲劳破坏虽然是应力幅值起主要作用,但是平均应力对疲劳损伤也是有影响的,这是幅度计数法的缺点。

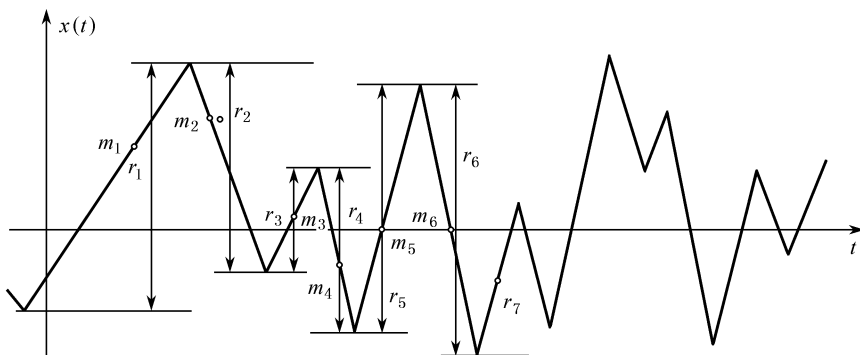


图 5-33 幅度统计法

为了弥补幅度计数法未能考虑载荷平均值对疲劳的影响,而发展了幅度均值计数法和幅度对均值计数法。幅度均值计数法中,除了像上面方法一样将幅度值 r_i 统计记录下来外,还把每个幅度值相应的平均值 m_i 统计记录下来,这样就弥补了幅度计数法将平均值略去不计之不足。在幅度对均值计数法中,将数值相等而符号相反的幅度,成对地统计记录下来,并记下相应的均值,这种计数法不仅记下了幅度对,同时也记下了均值,较全面地描述了对疲劳损伤有影响的载荷变化特性。

3. 雨流法

雨流法与幅度对均值计数法虽然方法不同,但对同一个实测的载荷所得的统计结果是非常接近的,见图 5-34,雨流法的统计数规则为:

- ① 雨流法依次从每个峰(谷)的内侧开始,顺着斜坡往下流,在下一个峰(谷)落下,直到对面有一个比它开始点更大的峰(谷)时为止(峰谷值以绝对值计);
- ② 当雨流遇到来自上层斜面落下的雨流时就截止;
- ③ 按上述规定取出所有的全循环进行统计计数,直到剩下的载荷时间历程成为发散收敛型为止;
- ④ 将剩下的发散收敛性载荷时间历程,改成等效的收敛发散型,再进行第二阶段计数,总数等于两个阶段计数之和。

现在详细说明一下雨流法在图 5-34 所示的一小段载荷时间历程上的应用。

- ① 雨流从峰 1 的内侧开始,在峰 2 落下,由于对面有一个比峰 1 更大的峰 3,于是雨流就停止,取出半循环 1—2;
- ② 雨流又从峰 2 的内侧开始,在峰 3 落下,由于峰 4 比峰 2 更大,雨流停止,取出半循环 2—3;
- ③ 雨流又从峰 3 的内侧开始,在峰 4 落下,由于对面的峰 5 和峰 7 都比峰 3 小,故一直沿着 4—4'—8 的路径在峰 8 落下,因为对面的峰 9 比峰 3 大,故雨流停止,取出半循环 3—4—4'—8;

④ 雨流又从峰 4 的内侧开始,在峰 5 落下,由于峰 8 比峰 4 大,雨流停止,记下半循环 4—5;

⑤ 雨流又从峰 5 的内侧开始,在峰 6 落下,由于遇到来自上层斜面峰 4 的雨流 4—4'—8,于是雨流也就在 4' 处停止,记下半循环 5—6—6'—4',这样,半循环 4—5 和 4—6—6'—4' 就形成全循环 4—5—6—6'—4' ;

⑥ 雨流又从峰 6 的内侧开始,在峰 7 落下,由于峰 8 比峰 6 大,雨流停止,记下半循环 6—7 ;

⑦ 雨流又从峰 7 的内侧开始,由于遇到上层斜面峰 5 落下的雨流 5—6—6'—4',故而流在 6 处停止,记下半循环 7—6。这样,半循环 6—7 与 7—6 形成全循环 6—7—6 ;

⑧ 雨流又从峰 8 的内侧开始,在峰 9 落下,由于只截取了一个小段载荷时间历程,假设雨流在峰 9 落下时就停止,于是取出半循环 8—9,对于截取长的载荷时间历程,雨流还将继续下去。

这样,取出了两个全循环 4—5—6—6'—4 和 6—7—6,剩下四个半循环 1—2、2—3、3—4—4'—8 及 8—9。剩下的半循环有两种处理办法:一种办法,以正或负斜率各记下它们的幅度和均值,用幅度均值法进行统计处理;另一种办法,采用雨流法第二阶段的计数办法。

现在考察图 5-35,当峰 1 与峰 9 的值相等时,称

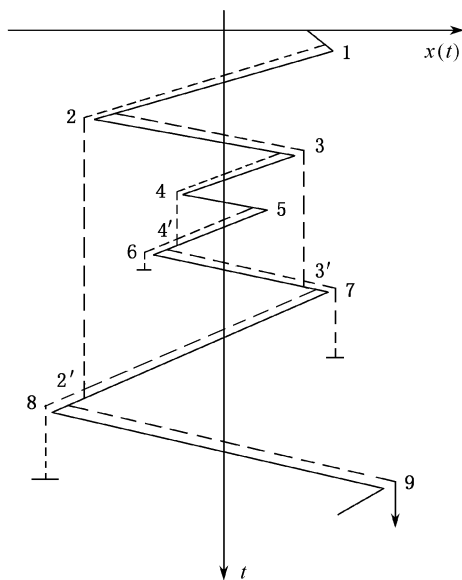


图 5-35 雨流法对收敛发散型的计数

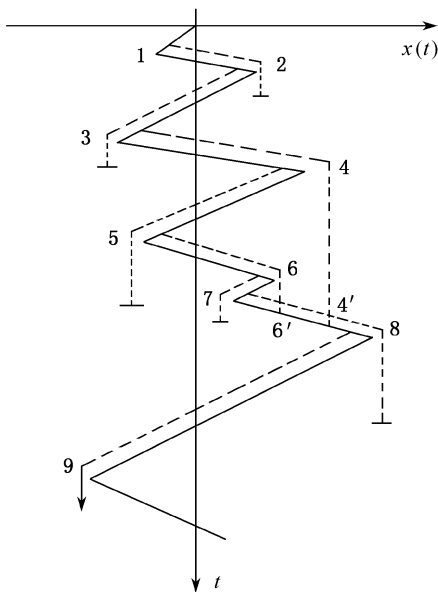


图 5-34 雨流法

它为收敛发散标准型。对于这种类型的载荷时间历程,可以用雨流法分解为若干个全循环而没有剩余,图 5-35 中可以取出 1—2—2'—8 与 8—9 组成一个全循环,2—3—3'—7 与 7—2' 组成第二个全循环,3—4—4'—6 与 6—3' 组成第三个全循环,4—5 与 5—4' 组成第四个全循环,没有剩余。

另一方面,对于图 5-36(a)所示的载荷时间历程,称之为发散收敛型。对这种载荷时间历程,用雨流法不能取出全循环。假设疲劳损伤与加载次序无关,这样图 5-36(a)所示的发散收敛型,可以交换成图 5-36(b)所示的收敛发散型,经过这样变换后,就可以用雨流法按图 5-35 所示分解成若干个全循环而没有剩余。

综上所述,雨流法可以分成两个阶段计数。第一个阶段,按照图 5-34 所示的步骤取出若干个全循环,剩下一个发散收敛型的载荷时间历程,第二个阶段,将这个剩下的发散收敛型载荷时间历程转换成与之疲劳损伤等效的收敛发散型,再用雨流法取出全循环。雨流法的全部统计计数,等于这两部分之和。

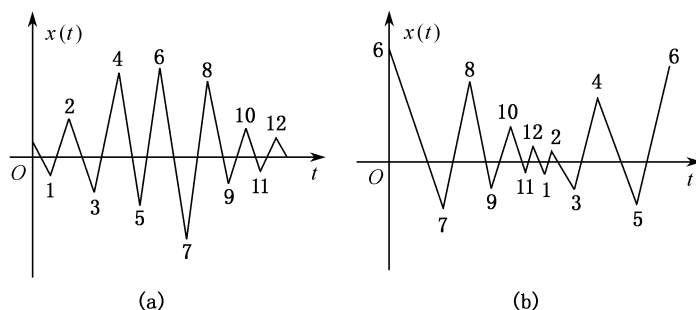


图 5-36 载荷时间历程的变换

(a) 发散收敛型 ;(b) 收敛发散型

上面介绍了多种统计计数法,从疲劳损伤观点来看,雨流法和幅度对均值计数法最合理,因为这两种方法,记下了循环变应力的全部主要信息。

第三节 轿车车身结构静态刚度台架试验

随着人们对环境和能源问题的重视,汽车设计正向着环保、节能与安全方向发展。世界各大汽车厂家纷纷投入巨大的财力和物力致力于电动车的研制与开发,近年来有了较大的发展。电动轿车车身是一种新型结构,有较重的电池等总成,简单地在传统车型上改造很难获得优化结构。现在国外研究较多的是蒙皮骨架式电动轿车车身结构。这种车身结构与传统轿车车身结构有很大的不同,其结构型式与主要性能指标、杆件布置及截面尺寸参数等都有待研究。车身刚度是较强度要求更严格的设计指标,它是车身抵抗较恶劣的扭转工况载荷的关键保证指标。本试验的目的是检验国内某一电动改装车白车身的静态刚度,验证有限元分析模型的准确性,并为有限元模型的进一步修正提供参考依据。

(一) 试验对象

试验对象完整性如表 5-5 所示。

表 5-5 试验白车身附件列表

序号	车身零部件名称	有	无
1	前桥(刚性悬挂)	✓	
2	黏结玻璃(前后风窗)		✓
3	油漆	✓	
4	上蜡	✓(车身)	✓(车架)
5	四门二盖		✓
6	前翼子板		✓
7	后翼子板	✓	
8	密封条		✓

续表

序号	车身零部件名称	有	无
9	车顶内板		✓
10	前保险杠及支架		✓
11	后保险杠及支架		✓
12	后桥(刚性悬挂)		✓

(二) 试验准备

如图 5 - 39 ,试验台架的 T 型支架通过改制悬架与车身相连 ,T 型支架及改制悬架的位置可根据车辆的轴距和轮距进行调节 ,前桥约束及加载原理如图 5 - 38 所示。

该车实际前悬架采用双横臂独立悬架。试验中 ,采用类似麦弗逊悬架的连接形式。下横臂一端与 T 型试验支架螺栓相连 ,一端与车身用螺栓连接。用刚性杆替代减振器及螺旋弹簧装置 ,刚性杆一端与下横臂球头连接 ,一端与车身螺旋弹簧支座螺栓连接。

车身后悬架螺旋弹簧支座用螺栓直接与试验台架支撑螺杆连接。

为防止车身悬架弹簧支座在加载中破坏 ,在其与连接件间夹有橡胶垫。

安装好的车身 ,必须做水平校正。

(三) 试验载荷

(1) 扭转工况

最大扭转载荷 :

$M = 0.5 \times \text{前轴最大负荷} \times \text{轮距} = 0.5 \times 8\,967 \times 1.414 = 6\,340(\text{Nm})$

(2) 弯曲工况

该车满载质量 2 018.5 kg ,当量加载 930 kg。

(四) 试验方法

1. 静态扭转刚度测量

车身静态扭转刚度测量约束示意图见图 5 - 37。后塔型支承被刚性固定 ,前面通过 T 型加载梁在前悬架支承点施加扭矩 ,见图 5 - 38 ,加力杆通过力传感器施加载荷到 T 型试验支架上 ,最终传到车身上 ,力矩为 $M = F \times L$ 。实际试验加载如图 5 - 39 所示。

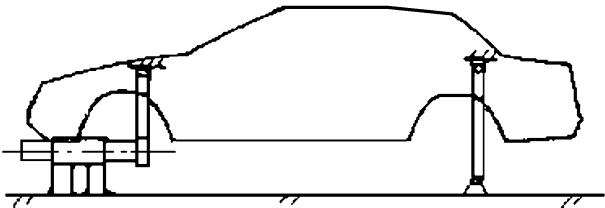


图 5 - 37 轿车白车身扭转刚度测量约束示意图

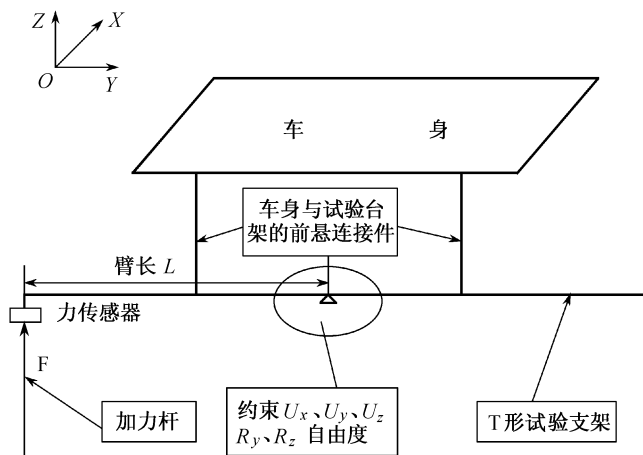


图 5-38 前悬与试验台架连接以及加载示意图



图 5-39 试验扭转工况加载系统图

具体测量方法如下：

(1) 测量点布置原则和布置位置

布点原则：车架纵梁上能体现总体刚度的部位。

布点位置：车架纵梁底部关键位置，如图 5-40 所示。

(2) 测量准备(预加载)

测量开始之前，使车身受到相当于最大载荷值一半的载荷快速向两侧扭转，以消除车身下沉现象对测量结果的影响。

(3) 等级加载

① 通过 T 形加载梁在前轴上逐级施加力矩。

② 加载分为左边加载和右边加载两部分。

③ 载荷等级见表 5-6。

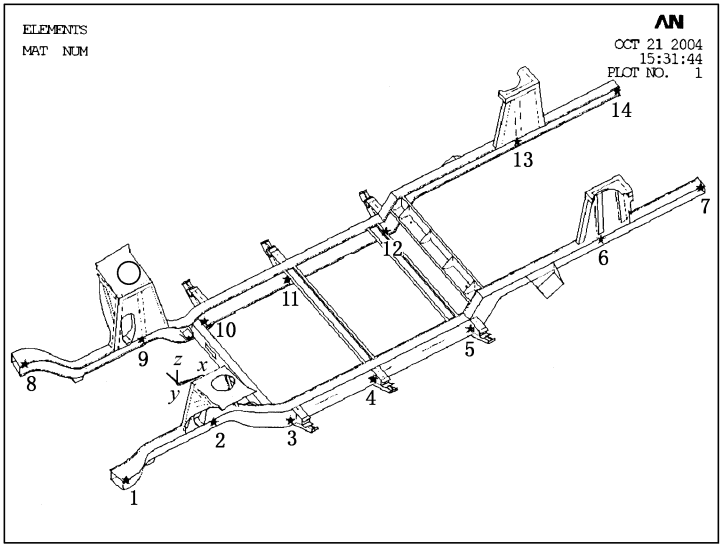


图 5-40 扭转工况测点布置图

表 5-6 扭转载荷等级列表

等级	1	2	3	4
载荷(kg)	200	400	550	650

2. 静态弯曲刚度测量

车身静态弯曲刚度测量约束示意图见图 5-41。约束前后塔形支撑处的所有自由度。实际试验等级加载如图 5-42、5-43 所示,分别在前座椅和后座椅处施加载荷,测量具体方法如下。

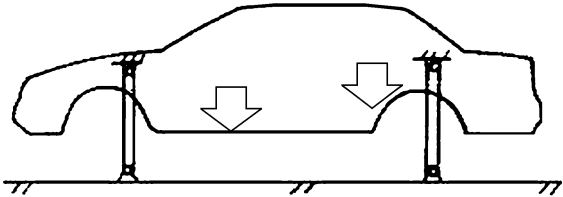


图 5-41 轿车车身弯曲刚度测量约束形式示意

(1) 测量点布置原则和布置位置

布点原则:车架上能体现总体刚度的部位。

布点位置:车架纵梁底部,以及前后座椅横梁底部等位置,如图 5-44 所示。测点基本位置坐标见表 5-7。



图 5- 42 弯曲工况 300 kg 加载



图 5- 43 弯曲工况 925 kg 加载

表 5- 7 静态弯曲工况测点坐标

测点编号	X 坐标	Y 坐标	Z 坐标
1	- 705	- 543	140
2	0	- 389	51
3	475	- 464	- 169
4	1 050	- 464	- 169
5	1 730	- 454	- 169

续表

测点编号	X 坐标	Y 坐标	Z 坐标
6	2 650	- 454	31
7	3 350	- 454	31
8	1 050	417	- 49
9	1 050	205	- 49
10	1 050	0	- 49
11	1 812	417	- 49
12	1 812	205	- 49
13	1 812	0	- 49

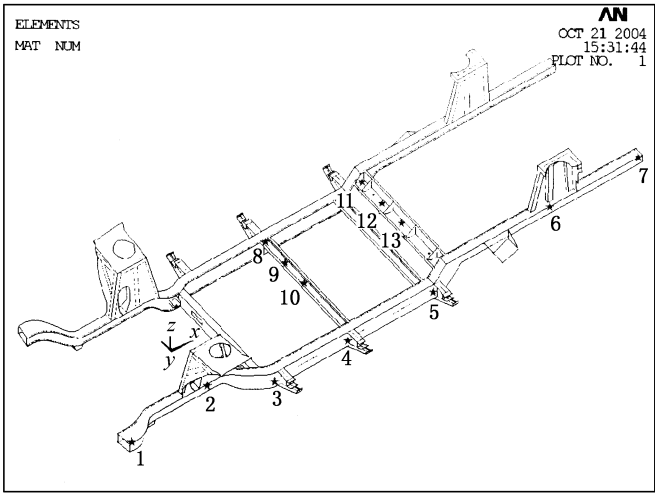


图 5-44 弯曲工况车架测点布置图

(2) 测量准备预加载

测量开始之前,使车身受到相当于最大载荷值一半的载荷反复加载(2~3次),以消除车身下沉现象对测量结果的影响。

(3) 分级加载

- ① 均匀加载于前后座椅上。
- ② 逐级加载,直到最大载荷。
- ③ 载荷等级见表 5-8。

表 5-8 静态弯曲载荷等级列表

等级	1	2	3
载荷/kg	300	600	930

(4) 试验仪器、设备和元件

加载装置 :白车身静态加载试验台架 ,BLR - 1 拉/压力传感器 ,导线 ,标准砂袋 ,标准配重块。

数据采集仪器 :YJ - X4 型静态电阻应变仪 ,百分表。

(五) 试验数据采集

1. 静态扭转工况

静态扭转分为左边等级加载和右边等级加载两种工况 ,其中对每种工况分别进行三组重复测量 ,每组测量均包括加载和卸载两种读数 ,并分别取其中较好的两组数据进行分析。表 5 - 9 给出了第一组左边加载和卸载各测点的位移。表 5 - 10 给出了左、右边加载和卸载各测点相对扭转角的平均值 ,图 5 - 45 给出了其相应转角曲线。表 5 - 11 给出了各载荷工况下前桥和后桥之间的转角及其扭转刚度。

表 5 - 9 第一组左边加载、卸载各测点位移

mm

加载工况对应测点位移									
测点编号	载荷等级				测点编号	载荷等级			
	200 kg	400 kg	550 kg	650 kg		200 kg	400 kg	550 kg	650 kg
1	- 2.77	- 5.54	- 7.5	- 8.85	8	1.74	3.48	4.79	5.66
2	- 1.99	- 3.98	- 5.36	- 6.26	9	0.77	1.54	2.2	2.71
3	- 1.75	- 3.5	- 4.77	- 5.58	10	1.07	2.14	2.99	3.62
4	- 1.51	- 3.02	- 4.04	- 4.71	11	0.93	1.86	2.56	3.02
5	- 0.94	- 1.88	- 2.47	- 2.86	12	0.45	0.9	1.3	1.58
6	- 0.06	- 0.12	- 0.15	- 0.18	13	0.02	0.04	0.07	0.1
7	- 0.07	- 0.14	- 0.1	- 0.09	14	- 0.05	- 0.1	- 0.11	- 0.14
卸载工况对应测点位移									
测点编号	载荷等级				测点编号	载荷等级			
	200 kg	400 kg	550 kg	650 kg		200 kg	400 kg	550 kg	650 kg
1	- 2.68	- 5.36	- 7.24	- 8.27	8	1.53	3.06	4.39	5.21
2	- 1.85	- 3.7	- 5.01	- 5.71	9	0.75	1.5	2.23	2.78
3	- 1.62	- 3.24	- 4.41	- 5.06	10	0.97	1.94	2.85	3.47
4	- 1.34	- 2.68	- 3.66	- 4.2	11	0.83	1.66	2.39	2.85
5	- 0.88	- 1.76	- 2.41	- 2.71	12	0.48	0.96	1.37	1.66
6	- 0.03	- 0.06	- 0.11	- 0.15	13	0.02	0.04	0.09	0.12
7	0.05	0.1	0.12	0.11	14	- 0.01	- 0.02	- 0.03	- 0.07

表 5- 10 左边加载和右边加载平均相对扭转角 (°)

测点编号	左边加载载荷等级				测点编号	右边加载载荷等级			
	200 kg	400 kg	550 kg	650 kg		200 kg	400 kg	550 kg	650 kg
1 ~ 8	12.98	26.10	35.63	41.71	1 ~ 8	12.71	25.35	35.75	41.34
2 ~ 9	11.68	23.35	31.94	37.46	2 ~ 9	11.80	23.60	32.50	39.23
3 ~ 10	9.88	19.75	27.11	31.86	3 ~ 10	10.24	20.49	28.48	34.32
4 ~ 11	8.31	16.62	22.61	26.23	4 ~ 11	8.30	16.60	23.02	27.50
5 ~ 12	4.90	9.78	13.29	15.37	5 ~ 12	4.78	9.56	12.97	15.51
6 ~ 13	0	0	0	0	6 ~ 13	0	0	0	0
7 ~ 14	- 0.31	- 0.63	- 1.12	- 1.48	7 ~ 14	- 0.68	- 1.36	- 1.85	- 2.26

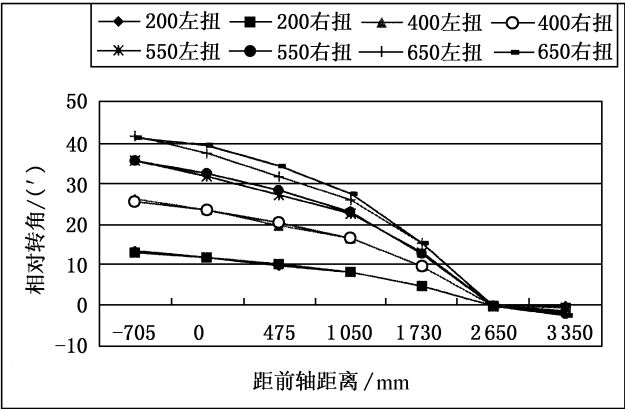


图 5- 45 左边加载和右边加载平均相对扭转角

表 5- 11 各载荷工况下前后桥之间相对扭转角以及扭转刚度

序号	转矩 /Nm	转角 / (°)	扭转刚度 / (Nm·(°) ⁻¹)
1	1 960	11.74	10 017
2	3 920	23.48	10 017
3	5 390	32.22	101037
4	6 370	38.34	9 969

2. 静态弯曲工况

静态弯曲工况分别进行 300 kg、600 kg、925 kg 等级加载，前两等级分别在前后座椅相对位置均匀加载，前后各加一半。第三级由于实际条件限制前座椅加载 450 kg，后座椅加载 475 kg，这主要是考虑到实际满载情况下后座椅承受较大载荷。等级加载各测点的位移见表 5- 12。

图 5-46 给出了各等级载荷情况下左纵梁弯曲变形位移曲线。

表 5-12 静态弯曲工况等级加载各测点位移

mm

测点号	300 kg 加载测点位移	600 kg 加载测点位移	925 kg 加载测点位移
1	0.1	0.19	0.28
2	0	0	0
3	- 0.12	- 0.257	- 0.38
4	- 0.26	- 0.53	- 0.78
5	- 0.34	- 0.67	- 1.03
6	0	0	0
7	- 0.01	- 0.02	0.12
8	- 0.23	- 0.46	- 0.77
9	- 0.51	- 1.02	- 1.65
10	- 0.64	- 1.28	- 2.06
11	- 0.34	- 0.67	- 1.03
12	- 0.37	- 0.73	- 1.16
13	- 0.43	- 0.86	- 1.32

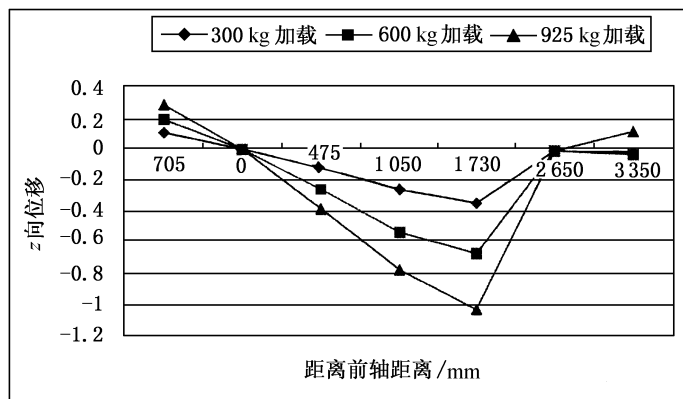


图 5-46 静态弯曲工况各等级载荷下左纵梁弯曲位移图

（六）试验结果分析

试验结果中,包含有前后悬架橡胶垫等引起的误差。消除这些误差后,该车身扭转刚度为 9 848.6 Nm/(°),该车车身扭转刚度较高。桑塔纳 2000 的白车身扭转刚度为 9 000 Nm/(°),轴距为 2 656 mm,桑塔纳 2000 的车身相对扭转刚度为 3 388 Nm/(°)。该电动车的轴距为 1 760 mm,则该电动车的相对扭转刚度为 5 596 Nm/(°),是桑塔纳 2000 车身相对扭转刚度的 1.65 倍。因此与传统轿车相比,该车车身的相对扭转刚度也较高。

思考题

1. 车身静态强度试验所用的主要仪器有哪些？
2. 电阻应变片的工作原理是什么？其主要指标有哪些？
3. 电阻应变片应用中要注意的事项有哪些？
4. 电阻应变仪有哪些主要组成部分？其主要指标有哪些？其使用要领有哪些？
5. 为什么测量前电阻应变仪要预调平衡？电阻应变仪的电桥接法有哪几种？
6. 试述电阻应变仪的电桥特性。
7. 试推导表 5-3 中例 1、2、3 的输出电压。
8. 什么是载波、调制波和调幅波？
9. 车身结构强度和刚度试验测点的选择原则有哪些？
10. 车身动态强度试验道路和车速如何选择？
11. 车身动态强度试验所用的主要仪器有哪些？
12. 什么是路障试验？
13. 如何估计车身结构的疲劳寿命？
14. 轿车车身结构刚度台架试验载荷如何确定？

第六章 汽车车身结构模态试验

第一节 概 述

汽车行驶时,作用在汽车各部件上的载荷都是动载荷,即它是时间的函数。因此,结构上的相应位移、应力和应变不仅随其在结构中的空间位置变化,同时也随时间而变化。若所受动载荷的频率与结构的某些固有频率接近时,结构将产生强烈的振动,从而引起很高的动应力,造成早期疲劳破坏或产生不允许的大变形。为了在汽车使用中避免共振、降低噪声、确保安全可靠,需要知道结构振动的固有频率及其相应的振型。

模态是振动系统特性的一种表征,它为构成各种工程结构复杂振动的那些最简单或最基本的振动形态。通过模态试验可以得到固有频率和模态振型等振动系统的模态参数,为振动系统动态设计以及故障诊断提供依据。

第二节 汽车车身结构模态试验技术

结构动力学从理论上可以计算出结构的固有频率、固有振型和广义质量等动力特性。模态试验是用试验的方法测出结构的动力特性。

由于车身结构的复杂性,理论计算得到的动力特性往往要由动态试验来检验其结果的准确性和精确性,因而动态试验更显得重要。

为测定结构的动力特性,常用激振器使结构或其支承装置发生简谐振动,即迫使结构产生强迫振动。通过对结构强迫振动的测量,再经过数据处理后,即可得到所需结果。图 6 - 1 是表示这种试验系统的原理图。

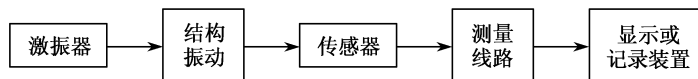


图 6 - 1 结构动力特性测量原理

一、激振器基本原理与类型

用变速电动机带动偏心重量,利用偏心重量的离心力,即可制成所谓惯性式激振器。用变速电动机驱动曲柄滑块结构,并带动一刚度合适的弹簧沿弹簧轴线作正弦运动,弹簧的另一端和试件相连,即成所谓弹簧式激振器。用一小型电磁激振器(亦称力矩电机)带动液压伺服阀阀杆,使阀杆按正弦规律运动,从而将油泵从油箱内抽出的高压油,按正弦规律伺服阀分别送入一液压激振器的两个油腔,液压激振器的活塞杆便按正弦规律运动,产生正弦规律的力,这种系统称为电液激振器。最常用的激振器是利用电磁力使试件作纯正弦运动,称为电磁激振

器,本节仅介绍动圈式电磁激振器。

动圈式电磁激振器的构造原理见图 6-2。圆柱形线圈可沿其自身轴线移动,线圈处在一个很强的径向磁场内。当交流电通过线圈时,产生交变的电磁感应力,此力由和线圈相连的顶杆传给试件。

对于低频激振($< 25\text{r/s}$),交流电可由一调速性能很好的发电机供给;对于高频激振,则常用信号发生器产生所需频率的纯正弦交变电压,经功率放大器放大,使其有足够的能量,再送入激振器(参见图 6-3)。为保证激振力不随结构阻抗(振动时的机械阻抗)的变化而变化,功率放大器应具有高的输出阻抗,即输出的电流应是定电流,而电压则视负载大小而定;这和一般功率放大器不同。使用这种系统,可得到相当稳定的激振频率,如采用合适的线路并匹配得当,则一个功率放大器可同时供给若干个激振器使用。

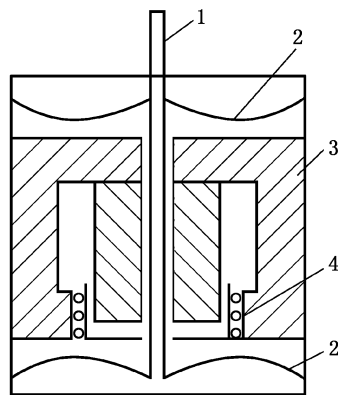


图 6-2 动圈式电磁激振器的构造原理

1—顶杆 2—弹簧 3—磁铁 4—线圈



图 6-3 高频激振的产生过程

激振力的大小可由电磁感应定律推得,

$$F = 0.102 B L i \times 10^4 \quad (6-1)$$

式中, F 为电磁感应力(kg); B 为磁感应强度(高斯); L 为线圈长度(m); i 为电流强度(A)。

振动时激振运动部分将产生惯性力、弹性力、阻尼力,故由顶杆传给试件的激振力是 F 与诸力之差。为使激振器传给顶杆的力为纯正弦的,则应使:

① 输入的交流电流为纯正弦波,且振幅稳定。

② 永久磁场产生的磁感应强度稳定不变,这要求:①仪器壳体有良好的磁屏蔽,不受外界磁场的干扰;②顶杆行程应加控制,使得线圈活动在磁场的均匀部分;③采用补偿线圈,以抵消作用线圈因自感而产生的磁场变化。

③ 支持弹簧刚度很小弹性力可忽略。但应具有一定的初压力以保证顶杆与试件的接触,故宜采用非线性弹簧或将顶杆与试件固接。

④ 运动部分的质量和阻尼很小,因而可略去惯性力及阻尼的影响。

⑤ 不发生局部共振,例如支持弹簧本身的共振,顶杆和试件连接部分的共振。局部共振发生后,将改变力的传递。

根据以上所述,激振器的使用范围受下列因素的限制:由最大允许电流所限制的最大激振力;由磁场均匀部分的长度及仪器所需间隙限制的最大行程;在顶杆和试件不能分离的条件下,由弹簧初压力限制的最大加速度;由局部共振限制的最大激振频率。在选用激振器时,应以产品性能为依据。

为改进激振器的性能,消除运动部分惯性力及弹性力的影响,人们制造出一种补偿式激振器,其运动部分支持弹簧的刚度是可调的。使用时若激振频率为 ω ,则将运动部分的固有频率

ω_E^* 也调整到 ω ,这样 ,运动部分的惯性力与弹性力相互抵消。当运动部分的阻尼很小时 ,线圈的电磁感应力就如实地传递到试件上去。顶杆传递给试件的力可表为

$$F = F_0 + BLI_m \sin \omega t A [m_E \times (\omega^2 - \omega_E^{*2}) \sin(\omega t - \varphi) - D_E \omega \times \cos(\omega t - \varphi)] \quad (6-2)$$

式中 , F_0 为弹簧初压力 ; A 为振动行程 ; m_E 为激振器运动部分的质量 ; $m_E \omega_E^{*2}$ 为激振器运动部分

支持弹簧的刚度 ; D_E 为激振器运动部分的阻尼系数。其他符号与式(6-1)意义相同。由式(6-2)可见 ,如 $\omega_E^* = \omega$,且 D_E 很小时 ,有 :

$$F = F_0 + BLI_m \sin \omega t \quad (6-3)$$

二、测量用传感器与电荷放大器基本原理与类型

任何一个振动过程 ,都可以用振动幅值的时间历程来描述。而振动幅值的时间历程又常以振动的位移、速度和加速度随时间变化的过程来表示。因此 ,从被测振动参数的角度 ,测振用传感器可分为位移传感器、速度传感器和加速度传感器三类。由于振动的位移、速度和加速度之间存在着微分和积分的关系 ,即

$$\text{加速度: } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{速度: } v = \frac{dx}{dt} = \int a dt$$

$$\text{位移: } x = \int v dt = \int \left(\int a dt \right) dt$$

显然 ,在利用其中一种传感器测振时 ,通过测量电路中微积分电路可获得其他两个参数随时间变化的过程。

测振传感器按动力的传递可分为两类 :相对式和绝对式测振传感器。相对式测振传感器 ,选取空间某一固定点作为参考点 ,测量物体相对于参考点的振动量 ;绝对式测振传感器以大地不动坐标体系为参考系 ,测量时传感器固定在振动物体的测点上 ,这类传感器为惯性式的 ,工作原理如图 6-4 所示。本节着重介绍惯性式测振传感器的工作原理和压电式加速度传感器。

1. 惯性式测振传感器工作原理

传感器壳体 1 固定在测点 2 处 ,质量块 3 的质量为 m ,弹性支承 4 的刚性系数为 k ,阻尼器 5 的阻尼系数为 C ,系统平衡微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = -m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

令 $\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$, $\omega_n \sqrt{\frac{k}{m}}$ 得系统的频率响应函数为

$$\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{(\omega / \omega_n)^2}{1 - (\omega / \omega_n)^2 + j2\xi(\omega / \omega_n)}$$

则幅频特性表达式为

$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \frac{(\omega / \omega_n)^2}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega / \omega_n)]^2}}$$

相频特性表达式为

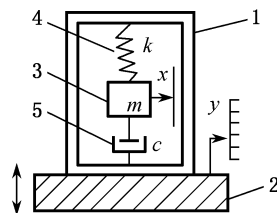


图 6-4 惯性式测振传感器原理图

1—壳体 2—测点 3—质量块

4—弹性支承 5—阻尼器

$$\phi = -\arctan \frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

下面分析位移、速度和加速度测振传感器的动态特性。首先分析它们的幅频特性。若位移传感器的系统输入 $y = y_0 \sin \omega t$ 输出 x (如图 6-4 所示)。

由于位移测振传感器的幅频特性为

$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (6-4)$$

由图 6-5 可见, 只有当 $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ 时, 振幅比趋于恒定值, 不产生振幅畸变; 当 $\xi = 0.7$ 时, $\frac{X_0}{Y_0}$ 趋于

恒定值较快, 因此惯性式位移传感器设计时取 $\xi = 0.6 \sim 0.7$, $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ 。

将式(6-4)分子分母同乘以 ω 得

$$\frac{X\omega}{Y\omega} = \frac{\left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}} \quad (6-5)$$

该式为速度测振传感器幅频特性表达式, 输入为被测运动速度, 输出为质量块相对壳体的速度。同理可知, 欲使质量块相对壳体速度如实地反映被测速度, 应取 $\xi = 0.6 \sim 0.7$, 且 $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ 。

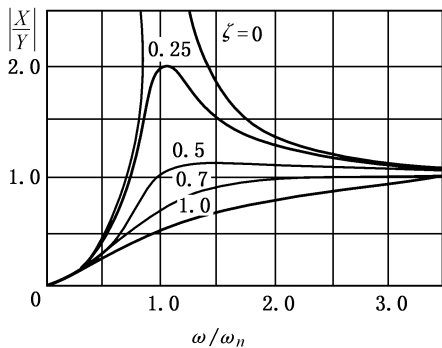


图 6-5 位移传感器幅频特性曲线

当传感器的输入等于被测加速度 $a = \frac{d^2 y}{dt^2}$, 输出为质量块相对壳体位移 x 时, 加速度测振传感器的幅频特性表达式为

$$\left| \frac{X}{a} \right| = \left| \frac{X}{y\omega^2} \right| = \frac{\left[\frac{1}{\omega_n^2} \right]^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}} \quad (6-6)$$

以 $\frac{X}{a}\omega_n^2 = \left| \frac{X}{Y\omega^2} \right| \omega_n^2$ 为纵坐标的幅频特性曲线如图 6-6。由图中可见, 当 $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ 时, $\frac{X_0}{a_0}$ 趋于恒定, 即质量块相对壳体位移和被测加速度之比不随频率比而变化; 当 $\xi = 0.6 \sim 0.7$ 时幅值比恒定的工作频带较宽, 此时 $\frac{X_0}{a_0}\omega_n^2 = 1$ 则, $X_0 = \frac{1}{\omega_n^2} a_0$ 说明质量块位移与被测加速度成正比。因此, 设计加速度传感器应取 $\xi = 0.6 \sim 0.7$, 且 $\frac{\omega}{\omega_n} \leq 0.2 \sim 0.4$ 。

下面分析测振传感器的相频特性, 图 6-7 为它们的相频特性曲线。由曲线可知, 当 $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ 时, $\phi \approx 180^\circ$, 而当 $\xi = 0.7$ 且 $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ 时, 相位差 ϕ 和频率之比近似直线, 成比例关系。

当传感器满足 $\xi = 0.7$, $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$, 输入为单一频率振动时, 显然输出波形将滞后输入一个相

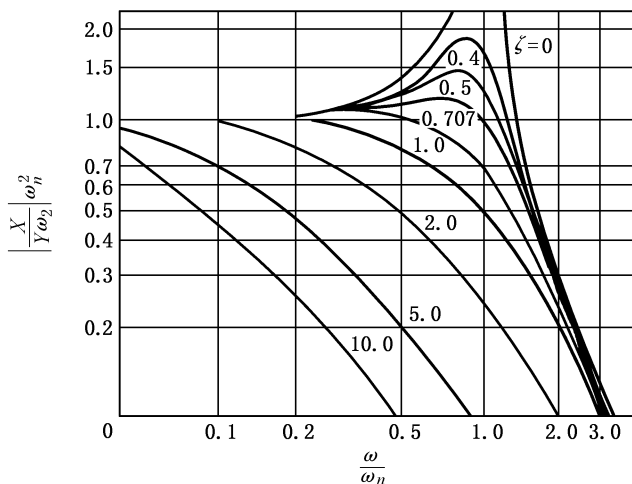


图 6-6 加速度传感器的幅频特性曲线

位差,而当输入为由多个谐波组成的复合振动或随机振动时,由于 ϕ 和频率比成比例关系,而不会因相位差引起波形畸变,对此作如下说明:

设一被测振动 $y(t)$, 其傅氏展开式形式为

$$y(t) = \sum_{i=1} y_i \sin i\omega t$$

若传感器满足 $\xi = 0.7$, 且 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 在要求范围内, 则幅值比恒定, 只有相位差, 所以输出 $x(t)$ 的形式为

$$x(t) = \sum_{i=1} x_i \sin(i\omega t + \phi_i)$$

由于相位差 ϕ_i 和频率比 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 成比例, 比例系数设为 α 即 $\phi_i = \alpha \cdot \frac{i\omega}{\omega_n}$ 则

$$x(t) = \sum_{i=1} x_i \sin\left(i\omega t + \alpha \frac{i\omega}{\omega_n}\right) = \sum_{i=1} x_i \sin\left[i\omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega_n}\right)\right]$$

这时由于幅值比恒定且趋于 1, 即 $\frac{x_i}{y_i} = 1$,

$$\text{则 } x_i = y_i$$

$$\text{令 } t + \frac{\alpha}{\omega_n} = t'$$

$$\text{得 } x(t) = \sum_{i=1} y_i \sin i\omega t$$

可见输出没有因相位差发生畸变, 只是在总的时间上有所延迟。

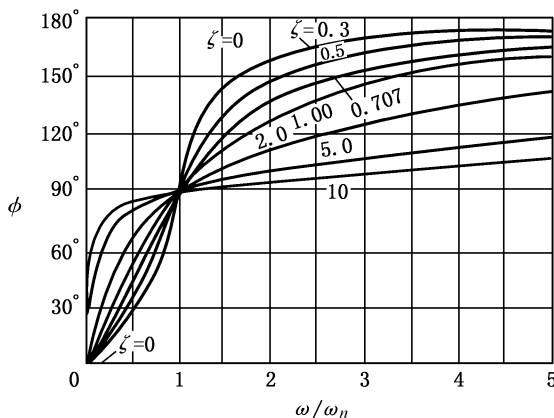


图 6-7 测振传感器相频特性曲线

2. 压电式加速度传感器

压电式加速度传感器是以某些物质的压电效应为基础的。

所谓压电效应是物质在受机械力作用而发生变形时,其表面产生电荷的现象,见图 6-8,或者在电场的作用下物质变形的现象。前者常称为顺压电效应,后者常称为逆压电效应。压电式变换器利用了这些物质的顺压电效应。

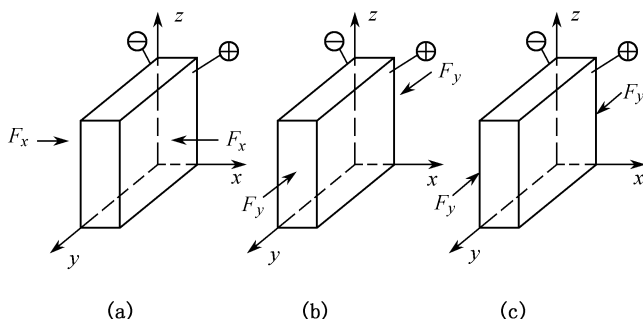


图 6-8 几种形式的压电效应
(a) 纵向效应 (b) 横向效应 (c) 切向效应

具有这种压电效应的物质很多,天然形成的晶体有石英、电气石等,某些盐类如酒石酸钾钠、磷酸铵等,近年来又制成了人工的多晶陶瓷,如钛酸钡、锆钛酸铅等。

压电晶体不但有纵向压电效应和横向压电效应,而且很多压电晶体还具有剪切压电效应和体积应变效应,因而它可以制成各种不同支承形式和受力状态的变换器,见图 6-9 所示。

根据压电晶体压电效应的不同,压电式加速度传感器可分为中心压电效应式、体压电效应式、剪切压电效应式及弯曲压电效应式。下面以图 6-10 的中心压电效应式加速度传感器来说明其工作原理。两块压电晶片 1 中间安放导电铜盘 2,在压电晶体的上方利用弹簧 4 固定质量块 3,为了防止在测量过程中质量块脱离压电晶体片,必须给弹簧一定的预紧力。整个组件安装在厚基座壳体 6 内,基座上有供使用时安装传感器的螺孔或电磁吸铁。

当传感器满足 $\omega \ll \omega_n$ 时,质量块的相对位移正比于被测加速度,其值等于压电晶体片的变形量 x 。当被测振动加速度为 $a = a_0 \sin(\omega t + \varphi)$ 时,作用在压电晶体上的力

$$F = CX = \beta C \frac{a_0}{\omega_n^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (6-7)$$

式中, C ——压电晶体片的刚度;

β ——质量块位移和被测加速度之比的比例常数,对图 6-10 而言 $\beta = 1$ 。

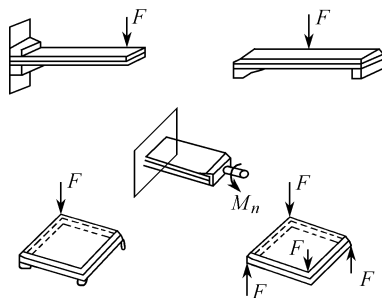


图 6-9 压电晶体变换器的各种受力形式

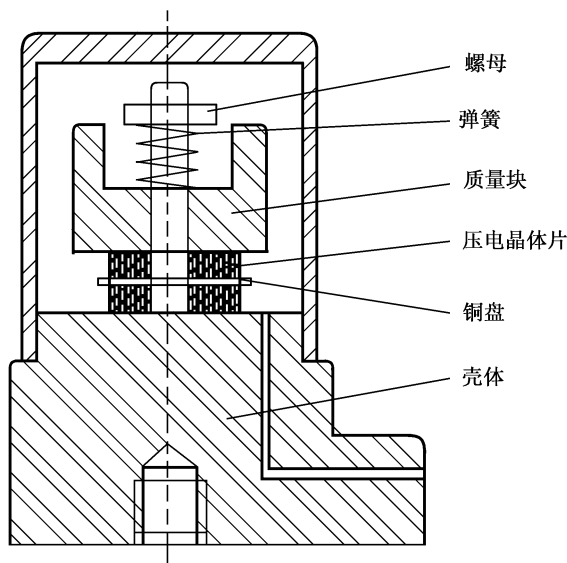


图 6-10 中心压电效应式加速度传感器

压电晶体片受力后产生的电荷为

$$q = KF = K\beta C \frac{a_0}{\omega_n^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (6-8)$$

式中, K 为压电常数。

显然, 在 K, β, C, ω_n 一定时, 传感器产生的电荷和被测加速度成正比。

由于压电晶体加速度传感器没有阻尼器, 空气阻尼引起的阻尼率又很小, 常为 $\xi = 0.01 \sim 0.05$, 因此, 相位差几乎为零。它与被测频率也几乎无关, 因而不会引起相位畸变。

3. 电荷放大器

由于压电式变换器的输出阻抗非常高, 并且其输出信号是数量很小的电荷, 因此必须采用输入阻抗极高的一种放大器与之相配合, 否则压电变换器产生的电荷就要经放大器的输入电阻释放掉。采用通常的电压放大器同压电变换器配合时, 其缺点是: 由变换器到放大器间的传输电缆电容对测量结果影响很大, 传输距离较短, 测量频率响应的下限不宜做得很低。因而往往采用电荷放大器与压电变换器相配合。电荷放大器的优点是, 对传输电缆电容不敏感, 传输距离可达数百米, 并且低频响应好, 可做到 0.003 Hz 或更低, 因而适于低频或超低频测量。然而电荷放大器的缺点是内部噪声较大, 而且成本较高。

图 6-11 为压电变换器、电缆和电荷放大器等效电路图。现忽略电阻 R_t 和 R_{f_0} , q_t 为在压电变换器内部电容 C_t 和在电缆分布电容 C_c 上储蓄的电荷, q_f 为在反馈电容 C_f 上储蓄的电荷。压电变换器所产生的电荷, 全部被储蓄在电容 C_t 、 C_c 以及 C_f 上, 则存在如下关系式:

$$\begin{cases} e_o = -K e_i \\ e_i - e_o = \frac{q_f}{C_f} \\ e_i = \frac{q_t}{C_t + C_c} \end{cases} \quad (6-9)$$

由此得到

$$\begin{cases} q = q_f \frac{C_t + C_c}{C_f} \cdot \frac{1}{1+K} \\ e_i = \frac{q_f}{C_f} \cdot \frac{1}{1+K} \\ e_o = -\frac{q_f}{C_f} \cdot \frac{1}{1+K} \end{cases} \quad (6-10)$$

当运算放大器的放大倍数十分大时,即 $K \gg 1$, 则由上式得

$$\begin{cases} e_i \approx 0 \\ q_t \approx 0 \\ e_o \approx -\frac{q_f}{C_f} \end{cases} \quad (6-11)$$

由此可见,当 K 充分大时,输入电压 e_i 接近零;压电变换器产生的电荷 ($q_f + q_t$),可以认为就等于储蓄在反馈电容 C_f 上的电荷 q_f ,这样一来,输出电压 e_o 便同压电变换器产生的电荷 q_f 成比例,实现了对电荷的直接测量;并且输出电压 e_o 的灵敏度只取决于反馈电容 C_f ,而同变换器内部电容以及电缆的分布电容无关。因此电荷放大器对电缆电容不敏感,传输距离可达数百米。

由于输出灵敏度取决于 C_f ,所以,电荷放大器的灵敏度调节,都是采用切换运算放大器反馈电容 C_f 的办法。 C_f 一般为 $10 \text{ pF} \sim 0.1 \mu\text{F}$ 。 C_f 越小电荷放大器的灵敏度越高,但 C_f 不能过小,否则 $q_t \approx 0$ 和 $e_i \approx 0$ 的关系将不成立。

其次,电荷放大器的传输特性取决于反馈电容 C_f 和反馈电阻 R_f 。电荷放大器的下限截止频率 f_c 为

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_f C_f}$$

R_f 可以取 $10^{10} \Omega$,这样,电荷放大器的下限频率可做得很低。低频响应好,不但可以测量超低频信号,而且电荷放大器可以进行静态校准。通常电荷放大器都设置内标定装置。

由于下限截止频率 f_c 取决于 R_f ,因而电荷放大器的下限频率调节都采用切换反馈电阻 R_f 的方法。

电荷放大器对电荷很敏感,因而噪声电荷将引起干扰,所以电荷放大器的输入端,要采取妥善的屏蔽、接地措施。

电荷放大器在输出端,通常都设置有低通和高通滤波器,以便选择所需频率,抑制掉其他频率成分。

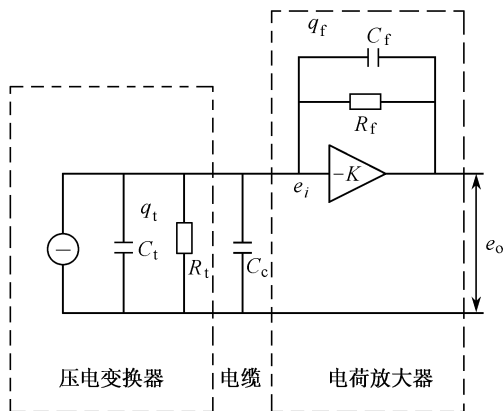


图 6-11 压电变换器、电缆、电荷放大器等效电路图

第三节 汽车车身结构模态试验方法

一、结构固有振动特性的基本概念

1. 结构的固有振动特性

从力学观点看,车身结构是一弹性体,具有无限多自由度。但在研究车身各种动力现象时,常把它简化成一具有 n 个自由度的线弹性系统。认为结构阻尼是黏性阻尼时,车身结构的动力方程可写成

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (6-12)$$

式中 $[M]$ ——结构的广义质量矩阵,为 $n \times n$ 阶;

$[C]$ ——结构的广义阻尼矩阵,为 $n \times n$ 阶;

$[K]$ ——结构的广义刚度矩阵,为 $n \times n$ 阶;

$\{X\} \{\dot{X}\} \{\ddot{X}\}$ ——结构广义坐标的位移、速度和加速度列阵;

$\{F\}$ ——结构承受的广义外力列阵。

设对应系统 n 个固有频率的振型矢量为

$$\{Z_1\} = \begin{Bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \\ \vdots \\ Z_{n1} \end{Bmatrix}, \{Z_2\} = \begin{Bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} \\ \vdots \\ Z_{n2} \end{Bmatrix}, \dots, \{Z_n\} = \begin{Bmatrix} Z_{1n} \\ Z_{2n} \\ \vdots \\ Z_{nn} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

由振型矢量所构成的主振型矩阵为

$$[Z] = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad (6-13)$$

利用主振型的正交性,有

$$[Z]^T [M] [Z] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ & M_2 \\ 0 & & M_3 \end{bmatrix} = \text{diag}[M_i] \quad (b)$$

$$[Z]^T [K] [Z] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ & K_2 \\ 0 & & K_3 \end{bmatrix} = \text{diag}[K_i] \quad (c)$$

这里 $\text{diag}[M_i]$ 、 $\text{diag}[K_i]$ 都是对角矩阵。结构的第 i 阶固有频率为

$$\omega_i^* = \sqrt{K_i / M_i}$$

结构内部的阻尼规律很复杂,通常在结构各固有振型之间存在阻尼耦合,但对阻尼较小的结构,常可略去其耦合作用。假设阻尼矩阵 $[C]$ 满足条件

$$[Z]^T[C][Z] = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \end{bmatrix} = \text{diag}[C_i] \quad (e)$$

则利用下述坐标变换

$$\{X\} = [Z]\{q\} \quad (6-14)$$

可使方程(6-12)解耦。

将式(6-14)代入式(6-12),再前乘以 $[Z]^T$,有

$$[Z]^T[M][Z]\{q''\} + [Z]^T[C][Z]\{q'\} + [Z]^T[K][Z]\{q\} = [Z]^T\{F\}$$

$$\text{diag}[M_i]\{q''\} + \text{diag}[C_i]\{q'\} + \text{diag}[K_i]\{q\} = \{P\} \quad (6-15)$$

式中 $\{P\} = [Z]^T\{F\}$ 。方程(6-15)已取得解耦形式,因此称 $\{q\}$ 为系统的主坐标,而变换式(6-14)称为主坐标变换。

结构的广义质量、广义刚度和广义阻尼是进行各种动力响应计算时所需的动力参数,结构的固有振型,相应于固有振型的固有频率仅和结构本身的特性有关,称为结构的固有振动特性。它们既可通过计算也可通过试验来确定。对重要结构一般以试验结果为设计依据。

2. 固有振型的分离

n 个自由度系统的振动是由 n 个独立的位移坐标确定的,若使这 n 个坐标的振动规律相同,即这 n 个坐标的位移保持一定的比例关系,则系统呈现一定的振动模式。

对阻尼较小的结构,可以近似地认为实际结构在自由振动时,能保持它的固有振型及固有频率不变(严格地说,在阻尼的作用下,结构的振动频率略有减小,振幅不断衰减)。为了保持稳定的振幅以便测量,必须加上一定的激振力,使结构做强迫振动。下面就来研究使强迫振动呈现一定的固有振型的问题。

设 $\{X\}$ 为结构振动的位移,系统各阶固有振型为 $\{Z_i\}$,以 q_i 表示第 i 阶主坐标($i=1, 2, \dots, n$),则系统发生第 i 阶主振动时的运动方程即为(6-15)式。

在一般情况下,系统的振动可表示为各阶主坐标的叠加。若以 t 表示时间,则

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n a_i \{Z_i\} q_i(t) \quad (a)$$

式中 a_i 是由初始条件决定的常数。

我们的目的是使它能只出现单一的第 i 阶固有振型,即

$$\begin{cases} \{x(t)\} = \{Z_i\} q_i(t) \\ q_i(t) \neq 0, q_k(t) = 0 (k \neq i) \end{cases} \quad (b)$$

为了只出现第 i 阶固有振型,只要使激振力仅包含第 i 阶固有振型的广义力,而对其它所有振型的广义力均为零,即在式(6-15)式中使

$$\begin{cases} P_i = (K_i + j c_i \omega - M_i \omega^2) q_i \\ P_k \neq 0 \quad (k = i) \end{cases} \quad (6-16)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ 。这也就是说,使激振力和所有其他固有振型正交即可。

现在来研究它对阻尼耦合的影响。对阻尼较小的结构, $[C]$ 矩阵的元素比起 $\text{diag}[M_i]$ 或 $\text{diag}[K_i]$ 矩阵的元素来说是较小的量。假定振动频率等于第 i 阶固有频率,并远离其他固有

频率,当激振力满足式(6-16)时,所得到的强迫振动,主要是 $q_i(t)$ 一项, $[C]$ 矩阵非对角元素的耦合作用所引起的其他振型的振动很小,可以略去不计。

如果激振频率正好等于第 i 阶固有频率,并远离其他固有频率,则式(6-15)中第 i 阶固有振型下系统的弹性力将与惯性力互相平衡。为使强迫振动只含 q_i 一项,激振力的分布应和该振型下阻尼力的分布一致,亦即

$$P_i \propto C_{ji} \quad (6-17)$$

如果不一致就会引起其他振型的振动。不过即使 P_i 和 P_j 属同一数量级,且 F_i 不满足式(6-17),其所引起的第 j 阶振型的振动比第 i 阶的仍要小得多。

因此,只要激振力频率等于第 i 阶固有频率,其分布不和第 i 阶固有振型正交($P_i \neq 0$),结构就发生这一固有振型的共振,而其他固有振型的振动较小。

总之,当激振力为任意分布时,一个多自由度系统的强迫振动,一般包括各固有振型的振动,但当激振频率达到第 i 阶固有频率而和其他固有频率相差较多时,则发生第 i 阶共振,可近似地把结构各点合成振动的振幅作为第 i 阶固有振型的振幅。当激振力的分布只包含第 i 阶固有振型的广义力而和其他振型正交时,只有在阻尼矩阵为对角线矩阵时,结构的振动才呈现单纯的第 i 阶固有振型,否则,由于阻尼耦合也要引起其他固有振型的振动,但阻尼耦合所引起的振动很小,因而可以略去。当结构的两个固有频率相当接近时,应使激振力的分布和其中的一个正交,从而分离出这两个固有振型来。为了要得到共振时纯粹的第 i 阶固有振型,则激振力的分布应满足式(6-17),而不是符合该振型下的惯性力分布。

当然,在预先不知道结构固有振动特性的情况下,不易找到合适的激振力分布,在试验中往往要经过反复调整。

二、车身结构固有振动特性的测定

车身结构固有振动特性的测定,大都是在台架上进行共振试验。此外,还可采用其他方法,例如,结构在平衡位置受到突然冲击或从变形状态突然释放。前者会引起高阶固有振型的自由衰减振动,后者会引起低阶固有振型的自由衰减振动。利用这两种试验,可测定结构的固有频率和阻尼,由于这种衰减振动是由若干固有振型叠加而成,故不宜用来测定固有振型。又如,使结构先达共振状态,突然截断激振力,可引起结构单一固有振型的自由衰减振动。随着瞬态振动与随机振动测试方法的不断发展,已出现瞬态激振与随机激振的方法。下面简要介绍利用台架共振试验来测定车身结构固有振动特性的方法。

(一) 试件支撑

测定车身结构的固有振动特性时,希望车身结构的振动是完全自由而不受任何约束作用的。这就要求支撑对试件的作用力是一平衡车身结构重量的常数,而其在振动时额外引起的弹性力、惯性力、阻尼力等都很小,均可略去不计。支撑件本身的质量、阻尼可以做得很小,但既要它产生较大的静载荷又同时具有很小的刚度(致使产生的弹性力可以忽略),则比较困难。理论分析和实践均已表明,当车身结构在支撑件上的固有频率与车身结构所关注的固有频率之比小于 $1/3$ 时,测量得到的车身结构固有频率的误差小于 1% ,支撑件的弹性力对车身结构固有频率和固有振型的影响即可忽略。

为满足上述要求,常用的方法有:橡皮绳悬挂、线性弹簧支持或悬挂。用这样的方法,可使

支撑的固有频率很低,参见图 6-12。

(二) 激振系统

1. 激振信号

激振是通过激振器实现的,激振器由功率放大器来控制。在研究车身结构振动时,最重要的一方面是分析较低阶固有模态。

功率放大器是按照输入信号来控制激振器的。输入信号有多种,其激振效果也不一样,常用的有以下几种:

(1) 正弦波扫描

这是最典型的输入信号,并能取得较好的结果。该方法是用正弦波信号在试验频率范围(对车身结构一般在 $0 \sim 200 \text{ Hz}$)对试件进行频率扫描。然后,再对试件固有频率的部位及其,周围逐点进行细致的扫描,以便得到更加精确的结果。

正弦波扫描可以是缓慢而连续的,有利于提高分析精度。但是大多数正弦扫描信号发生器是离散步进式的,也就是说激振信号频率不是连续变化的,而是以步进式改变,这时一般要求步进频率增量要小于傅立叶变换时的分析频带带宽,否则试验分析处理会失败。

(2) 脉冲法

一般采用锤击法可以得到传递函数,但是锤击法重复性较差。

用计算机输出脉冲信号控制激振器,脉冲信号的峰值、脉宽等参数可以严格控制,比较稳定。但是脉冲信号法像锤击法一样,由于能量较小,可能丢失模态,而且精度较差。

(3) 白噪声激振

利用白噪声发生器发出的信号控制激振器,其特点是信号的功率谱是平直的,能量均匀分布在很宽的频率范围内。例如用 $0.2 \sim 200 \text{ Hz}$ 的白噪声信号来控制激振,这对于车身结构激振试验是比较合适的。

(4) 伪随机信号激振

采用计算机或一些数字仪器发生的随机信号,大多是伪随机信号,是周期性的。信号的周期与采样时间取得一致时,可以减少泄漏现象。虽然功率谱不像白噪声那样平直,但是没有明显过大的起伏。该方法基本上具备了白噪声激振的特点。

2. 激振方法

由于单点激振能量有限,对于较大的测试对象,一些远离激振点的测量信号的结果往往误差较大,所得到的传递函数的相干函数值也较低,从而影响模态参数识别的精度。近年来所提出的多点激振法可以避免激振点布置在某阶模态振型的节点上,而测不出这阶模态的缺点。因为一般不可能将几个激振器安装在同一模态的节点上,而多点激振能量较大,不易漏掉可能的模态。

若激振点正好处在某固有振型的节点上或非常接近时,该振型的振动就不会产生。因此,单点激振的激振点通常放在车身的前端或后端等处,这些地方不可能是节点的位置。对多点

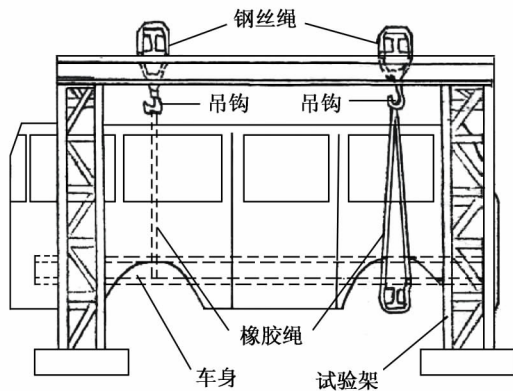


图 6-12 用橡皮绳将大客车车身吊起

激振,测量车身结构固有振动特性多采用两点激振或四点激振。两点激振或四点激振的激振点一般对称地布置在车身左右两侧。

(三) 测量

测量车身结构的固有频率,实际上就是测定试验共振频率。对于单点或多点激振,利用结构某一点的振幅共振即可确定共振频率,这种点称为测量点。为提高可靠性,可多选几个测量点。测量时,通过激振器激振,首先在整个频率范围内(对大多数车身结构为 $0 \sim 200 \text{ Hz}$)粗测一遍振幅,频率间隔可大些,能观察出各共振高峰区域即可。然后在共振区域附近,进行精确测量,频率间隔取小些,例如 0.1 Hz 或更小,使之能够正确测出共振频率,使结构保持在某一共振频率下,测出各测量点的振幅及相位,即可求得其振型。

测量点的数目视车身的大小及振型阶次而定,考虑到蒙皮刚度较小,测量点选在车身结构的骨架上。

确定结构固有振动特性的具体测量方法与分析方法多种多样,其原理各不相同。但是,它们都是以结构受迫振动时的特征为基础,其出发点都是结构振动的基本动力方程。结构的固有振动特性既然是结构固有的性质,当然不应随着测量及分析的方法不同而有所差异。但是,由于各种方法都采用了各种假设,因而都含有一定的误差。实践证明,当线性假设基本成立时,对于小阻尼单自由度系统,各种方法所得结果基本相同;对于多自由度系统,在小阻尼情况下,只要实现单一模态,各法的误差都不很大。

第四节 数据处理

随着微电子技术和信号处理技术的发展,在工程测试中,数字信号处理方法得到广泛的应用,已成为测试系统中的重要部分。从传感器获取的测试信号中大多数为模拟信号,进行数字信号处理前,一般要对信号作预处理和数字化处理。测试中的数字信号处理系统如图 6-13 所示。

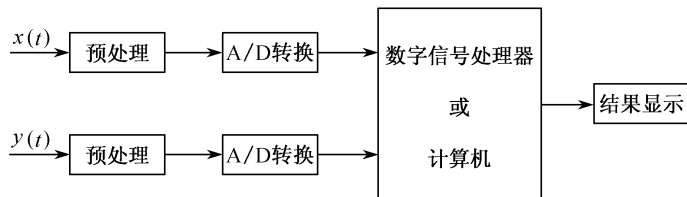


图 6-13 数字信号处理系统

(1) 预处理

预处理是指在数字处理前,对信号用模拟的方法进行的处理。把信号变成适于数字处理的形式,以减小数字处理的困难。如对输入信号的幅值进行处理,使信号幅值与 A/D 转换器的动态范围相适应,衰减信号中不感兴趣的高频成分,减小混频的影响,隔离信号中的直流分量,消除趋势项及直流分量的干扰等项处理。

(2) A/D 转换

A/D 转换是将预处理以后的模拟信号变为数字信号,存入到指定的地方。其核心是 A/D

转换器。信号处理系统的性能指标与其有密切关系。

(3) 分析计算

对采集到的数字信号进行分析和计算,可用数字运算器件组成信号处理器完成,也可用通用计算机。目前分析计算速度很快,已近乎达到“实时”。

(4) 结果显示

一般采用数据和图形显示结果。

一、采样、量化和相干性分析

数字化包括两个不同的工作:采样与量化。采样就是将连续信号转化为离散数据的过程,而量化就是把采样点上的数据值转换成数字值。

1. 采样

对数据作分析时,采样通常是等间隔进行的。因此,问题就是如何确定一个适当的采样区间。一方面,采样点靠得太近会产生相关和大量多余的数据,从而不必要地增加计算工作量和成本;另一方面,采样点离得太远,就会在原始数据中间引起低频、高频分量的混淆,这通常就称为混淆问题。它在具有模——数转换的数字处理中,是一个潜在的误差源,但在直接对数据作模拟处理时不会出现。为了使采样的数据不发生混淆,采样频率应等于或大于信号最高频率的两倍,即 $f_s \geq 2f_m$,或者说采样间隔不大于信号最小周期的 $1/2$,即 $T_s \leq \frac{1}{2} T_m$ 。

2. 量化

量化是用有限个允许值近似地代替精确值。通常,量化有截尾和舍入两种方法。所谓截尾,是将二进制数的多余位舍掉。所谓舍入,是将二进制数的多余位舍去或舍去后再在最低有效位上加 1,这与十进制中的四舍五入法相似。

若取信号 $x(t)$ 可能出现的最大值为 A ,量化单位为 Δ 。当信号 $x(t)$ 落在某一小间隔内,经过舍入法而变为有限值时,将会产生量化误差 $\epsilon(n)$ 。量化误差的最大值为 $\pm \Delta/2$,可以认为量化误差在 $(-\Delta/2, \Delta/2)$ 区间各点出现的概率是相等的,其概率密度为 $1/\Delta$,均值为零。可以求得其标准差 σ_s 为 0.29Δ 。显然,量化单位 Δ 越大,则量化误差越大。对信号采集时,量化增量的大小与 A/D 转换器位数有关。如 8 位的 A/D 转换器 Δ 最大为 A/D 转换器允许的工作电压幅值的 $1/256$ 。

3. 相干性分析

相干性是评价系统的输入信号和输出信号之间的因果关系,即输出信号的功率谱中有多少是输入量引起的响应,在许多场合中是十分重要的。通常用相干函数来描述这种因果关系。

如果相干函数为零,表示输出信号与输入信号不相干。当相干函数为 1 时,表示输出信号与输入信号完全相干,系统不受干扰而且系统是线性的。相干函数在 $0 \sim 1$ 之间,则表明有如下三种可能:①测试中有外界噪声干扰;②输出是输入和其他输入的综合输出;③联系输入和输出的系统是非线性的。

二、均值、概率密度、相关函数数字处理

1. 均值

设数值序列 $\{u_n\}$ 是由平稳且各态历经过程的样本 $u(t)$ 经采样得到(图 6-14) $\{u(t)\}$ 的

均值由下式估计

$$m_u = \bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \quad (6-18)$$

式中, $N = \frac{T_r}{\Delta t}$ 为数据总数; T_r 为一样本记录长度(以 s 为单位); Δt 为采样间隔。

由统计学知, m_u 是 m_u 的无偏估计。

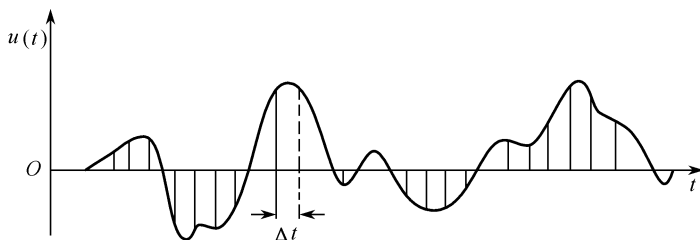


图 6-14 $u(t)$ 采样曲线

在数学计算机上, 计算 $\bar{u}$ 的常用算法有:

(1) 直接算法

利用算术平均值 $\bar{u}$ 的定义式(6-18)直接计算。

(2) 递推算法

令 $\bar{u}_0 = u_{0n}$ 对 $n = 1, 2, \dots, N-1$ 计算中间均值

$$\bar{u}_n = \frac{n}{n+1} \bar{u}_{n-1} + \frac{1}{n+1} u_n = \bar{u}_{n-1} + \frac{1}{n+1} (u_n - \bar{u}_{n-1}) \quad (6-19)$$

最后得 $\bar{u} = \bar{u}_{N-1}$ 。

(3) 二次均值算法

$$\bar{u}^* = \bar{u} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (u_n - \bar{u}) \quad (6-20)$$

比较上述三种算法可知, 直接法的计算量最少; 递推法可随时获得一系列中间均值 $\bar{u}_n$, 便于实时处理; 二次均值算式(6-20)中第二项, 是为了消除数学计算机处理时大量数据舍入误差的影响而采取的措施, 从而提高了均值计算的精度, 但需对原始数据进行二次处理。因此, 只有当计算精度要求高, 数据量极多时, 才宜采用。

实用中, 为了简化其他统计量的计算, 经常把原始序列 $\{u_n\}$ 转化为零均值序列, 令

$$x(t) = u(t) - \bar{u}$$

则 $x(t)$ 就是从原始样本得到的零均值样本, 它的数值序列 $\{X_n\}$ ($m_x = \bar{x} = 0$) 为

$$x_n = x(t_0 + n\Delta t) = u_n - \bar{u} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6-21)$$

本节以后诸式, 除另行注明外, 均系式(6-21)给出的零均值数值序列。

2. 概率密度函数

$\{x(t)\}$ 的概率密度函数由下式估计

$$f(x) = \frac{N_x}{N_w} \quad (6-22)$$

其中, W 是以 x 为中心的窄区间, N_x 是数据落入 $(x \pm W/2)$ 的个数, N 为数据总数。

如果要计算数据范围 $[a, b]$ 内的概率密度, 可按下列步骤计算:

(1) 分 $[a, b]$ 为 K 个分区间, 每个分区间的宽度为 $W = \frac{b-a}{K}$

第 i 个区间的上端点为

$$d_i = a + iw, i = 0, 1, 2, \dots, K$$

其中 $d_0 = a$; $d_K = b$;

(2) 对数值序列 $\{x_n\}$ 进行分组, 设

$N_0 = [\text{满足 } x \leq d_0 \text{ 的数据个数}]$;

$N_1 = [\text{满足 } d_0 < x \leq d_1 \text{ 的数据个数}]$;

$\vdots$

$N_i = [\text{满足 } d_{i-1} < x \leq d_i \text{ 的数据个数}]$;

$\vdots$

$N_K = [\text{满足 } d_{K-1} < x \leq d_K \text{ 的数据个数}]$;

$N_{K+1} = [\text{满足 } x > d_K \text{ 的数据个数}]$

于是数据序列被分成 $K+2$ 组, 且 $N = \sum_{i=0}^{K+1} N_i$

数字计算机上实现上述分组的方法之一, 是依下列步骤检查每个 x_n 的值:

① 如果 $x_n \leq a$, 对 N_0 加上整数 1;

② 如果 $a < x_n \leq b$, 计算 $I = (x_n - a)/W$ 。然后选择 i 为大于或等于 I 的最小整数, 对 N_i 加上整数 1;

③ 如果 $x_n > b$, 对 N_{K+1} 加上整数 1。

(3) 分组完毕后, 即可按式(6-22)计算概率密度

$$f(x_i) = \frac{N_i}{NW} = \frac{N_i}{N} \frac{K}{b-a} \quad (i = 1, 2, \dots, K) \quad (6-23)$$

式中, x_i 定义在每个分区间的中点上, 即 $x_i = a + (i - \frac{1}{2})W$ 。

如果需要得到某范围 $(d_{i-1} < x \leq d_i)$ 的概率, 可按下式计算

$$p(d_{i-1} < x \leq d_i) = \frac{N_i}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, K+1) \quad (6-24)$$

如果需要得到概率分布函数, 则按下式计算

$$F(d_i) = p(x \leq d_i) = \sum_{j=0}^i p_j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^i N_j \quad (i = 1, 2, \dots, K) \quad (6-25)$$

3. 自相关函数

数字法计算相关函数, 有两种方法: 第一种是直接由 $\{x_n\}$ 计算, 第二种是先计算功率谱密度, 再以功率谱密度进行傅氏逆变换求得。这里仅介绍第一种方法。

设数值序列 $\{x_n\} (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ 得自零均值样本 $x(t)$, 则 $\{x(t)\}$ 在时移 $\tau = r\Delta t$ 处的自相关函数由下式估计

$$R_r = R_x(r\Delta t) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=0}^{N-r-1} x_n x_{n+r} \quad (6-26)$$

式中, r ——时移数;

m ——最大时移数, $m = \frac{\tau_{\max}}{\Delta t}$, $\tau_{\max}$ 是最大时移量。

由统计原理可知, 式(6-26)确定的 R_r 是 R_r 的无偏估计。

4. 互相关函数

互相关函数的计算也有两种方法, 这里仅介绍直接计算法。

设 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 是来自两个平稳样本 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的数值序列, 它们的互相关函数(在 $\tau = r\Delta t$ 时)用下式计算

$$\begin{cases} R_{xy}(r\Delta t) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=0}^{N-r-1} x_n y_{n+r} \\ R_{yx}(r\Delta t) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=0}^{N-r-1} y_n x_{n+r} \end{cases} \quad (6-27)$$

式中, r, m 的意义同式(6-26)。

三、谱密度函数

1. 窗函数的概念

从有限长度样本得到的谱密度原始估计值 $\tilde{S}_x(f)$ (区别于后述的经平滑处理的估计值 $S_x(f)$) 用下式计算

$$\tilde{S}_x(f) = \int_{-\tau_m}^{\tau_m} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6-28)$$

式中 τ_m ——相关函数 $R_x(\tau)$ 的最大时移。

式(6-28)是用有限区间的积分来估计真实谱密度 $S_x(f)$ 。可以把 $\tilde{S}_x(f)$ 看成是 $S_x(f)$ 在 $[-\tau_m, \tau_m]$ 区间截断的结果, 这种截断必然导致误差的产生, 是谱处理时必须考虑的一个问题。

式(6-28)可以改写为

$$\tilde{S}_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6-29)$$

式中矩形函数

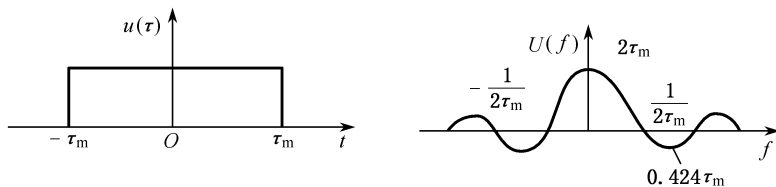
$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq \tau_m \\ 0 & |\tau| > \tau_m \end{cases} \quad (6-30)$$

$u(\tau)$ 的傅氏变换为

$$u(f) = \begin{cases} 2\tau_m \frac{\sin 2\pi f\tau_m}{2\pi f\tau_m} & (f \neq 0) \\ 2\tau_m & (f = 0) \end{cases} \quad (6-31)$$

它们的图形如图 6-15 所示, 根据傅氏变换的卷积定理, 式(6-29)可写为

$$\begin{aligned} \tilde{S}_x(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f') U(f - f') df' \\ &= 2\tau_m \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f') \frac{\sin 2\pi(f - f')\tau_m}{2\pi(f - f')\tau_m} df' \quad (f' \neq f) \end{aligned} \quad (6-32)$$

图 6-15 $\mu(\tau)$ 和 $u(f)$ 的图形

式中, $S_x(f)$ 为 $R_x(\tau)$ 的傅氏交换。

式(6-32)表明, $\tilde{S}_x(f)$ 是 $S_x(f)$ 在整个频率域上与 $U(f)$ 卷积的结果 ($f' = f$ 时, $\tilde{S}_x(f) = 2\tau_m \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$)。通常, 把矩形函数称为窗函数, 它在时域上的 $u(\tau)$ 称为矩形时移窗, 在频域 $U(f)$ 上称为矩形谱窗。时移窗和谱窗互为傅氏变换。

2. 泄漏的概念

谱密度处理时, 矩形窗函数的存在, 使 $\tilde{S}_x(f)$ 相对于 $S_x(f)$ 产生畸变。例如, 设正弦函数 $x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$, 有

$$S_x(f) = \frac{A_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{A_0^2}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (6-33)$$

即频率为 f_0 的正弦波的双边功率谱是在频率 $\pm f_0$ 处的两个脉冲函数。如果以单边功率谱表示, 有

$$G_x(f) = \frac{A_0^2}{2} \delta(f - f_0) \quad (f \geq 0) \quad (6-34)$$

以式(6-33)代入式(6-34)得

$$\tilde{S}_x(f) = \frac{A_0^2}{2} \tau_m \left[\frac{\sin 2\pi(f - f_0)\tau_m}{2\pi(f - f_0)\tau_m} + \frac{\sin 2\pi(f + f_0)\tau_m}{2\pi(f + f_0)\tau_m} \right] \quad (6-35)$$

对于 $f > 0$ 情况, 令 f_0 和 τ_m 满足 $0 \ll \frac{1}{\tau_m} < f_0$, 则有

$$\tilde{S}_x(f) \approx \frac{A_0^2 \tau_m}{2} \frac{\sin 2\pi(f - f_0)\tau_m}{2\pi(f - f_0)\tau_m} \quad (6-36)$$

相应的单边功率谱为

$$\tilde{G}_x(f) \approx A_0^2 \tau_m \frac{\sin 2\pi(f - f_0)\tau_m}{2\pi(f - f_0)\tau_m} \quad (6-37)$$

它们在 $f = f_0$ 处达最大值, 即有

$$\tilde{G}_x(f) |_{\max} = \tilde{G}_x(f_0) = \lim_{f \rightarrow f_0} \frac{A_0^2 \tau_m \sin 2\pi(f - f_0)\tau_m}{2\pi(f - f_0)\tau_m} = A_0^2 \tau_m$$

$G_x(f)$ 及 $\tilde{G}_x(f)$ 的图形如图 6-16 所示。由图可知, 由于积分区间的有限性, 使 $G_x(f)$ 在 f_0 处的脉冲, 变成以 f_0 为中心的 $\frac{\sin \theta}{\theta}$ 型连续函数。这个连续函数在原来的脉冲位置 f_0 处达到最大值 $A_0^2 \tau_m$, 从而形成谱曲线的主峰称为主瓣。在主瓣两侧还出现一系列小峰, 称为副瓣。这意味着, 原来集中于一个频率的功率, 由于副瓣的存在, 被分散到一个较宽的频率范围上, 这种

功率分散的效应称为泄漏。泄漏效应的产生,降低了谱估计的精度。

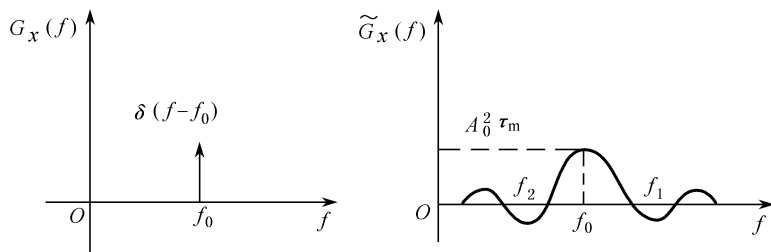


图 6-16 正弦函数的理论谱 $G_x(f)$ 及 $\tilde{G}_x(f)$ 原始估计谱

上述特例可以推广至任意类型的函数。图 6-17 是某一任意函数谱估计时泄漏效应的影响示意图。图中 (a) 为某随机过程的真实单边功率谱, (b) 为谱窗 $U(f')$ 。按卷积的图解方法得到原始估计值 $\tilde{G}_x(f)$ (见图 6-17(e) 上的细实线, 粗实线为 $G_x(f)$)。由图看到, 原来比较光滑的 $G_x(f)$ 曲线, 经用谱窗 $U(f)$ 卷积之后, 得到的是一条具有“皱波”的非光滑曲线。皱波的形成, 完全是因为谱窗函数在主瓣两侧出现正负相间的副瓣, 使 $\tilde{G}_x(f)$ 偏离 $G_x(f)$ 所致, 这种偏离就是统计误差中的方差项, 因此, 为了减少统计误差, 必须抑制泄漏。

3. 抑制泄漏的措施

从图 6-17 还可以看到, 泄漏的过程取决于谱窗副瓣的大小。较小的副瓣, 使乘积 $G_x(f') \times U(f_0 - f')$ 曲线下的负面积较小, 于是 $\tilde{G}_x(f)$ 曲线具有较小的皱波。因此, 为了抑制泄漏, 应选择副瓣较小的谱窗函数。

工程上, 提出了多种形式的谱窗, 常用的有哈宁 (Hanning) 窗和海明 (Hamming) 窗。

(1) 哈宁窗

哈宁时移窗的函数式为

$$d(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m} \right] & |\tau| \leq \tau_m \\ 0 & |\tau| > \tau_m \end{cases} \quad (6-38)$$

相应的谱窗为

$$D(f) = \frac{1}{2} U(f) + \frac{1}{4} U(f - \frac{1}{2\tau_m}) + \frac{1}{4} U(f + \frac{1}{2\tau_m}) \quad (6-39)$$

从上式可以看到, 哈宁谱窗是由一个压低了 $1/2$ 的矩形谱窗 $U(f)$ 和两个各左右位移 $\frac{1}{2\tau_m}$ 、峰高为 $\frac{1}{4} U(f)$ 的谱窗叠加而成。图 6-18 为 $D(f)$ 的图形, 图中虚线是三个变异矩形谱窗。

比较图 6-15 与图 6-18 可知, 矩形谱窗 $U(f)$ 的主瓣高为 $2\tau_m$, 宽为 $\frac{1}{\tau_m}$, 第一副瓣的高约为主瓣高的 20%, 而 $D(f)$ 谱窗的主瓣高为 τ_m , 宽为 $\frac{2}{\tau_m}$, 第一副瓣高约主瓣高的 2.4%。可见, 哈宁窗的副瓣有明显的降低, 达到了抑制泄漏的目的。但是它的主瓣宽却加大了一倍, 这就是说, 减少泄漏是以展宽主瓣为代价的。主瓣的展宽意味着分析带宽扩展, 从而使功率谱图形的

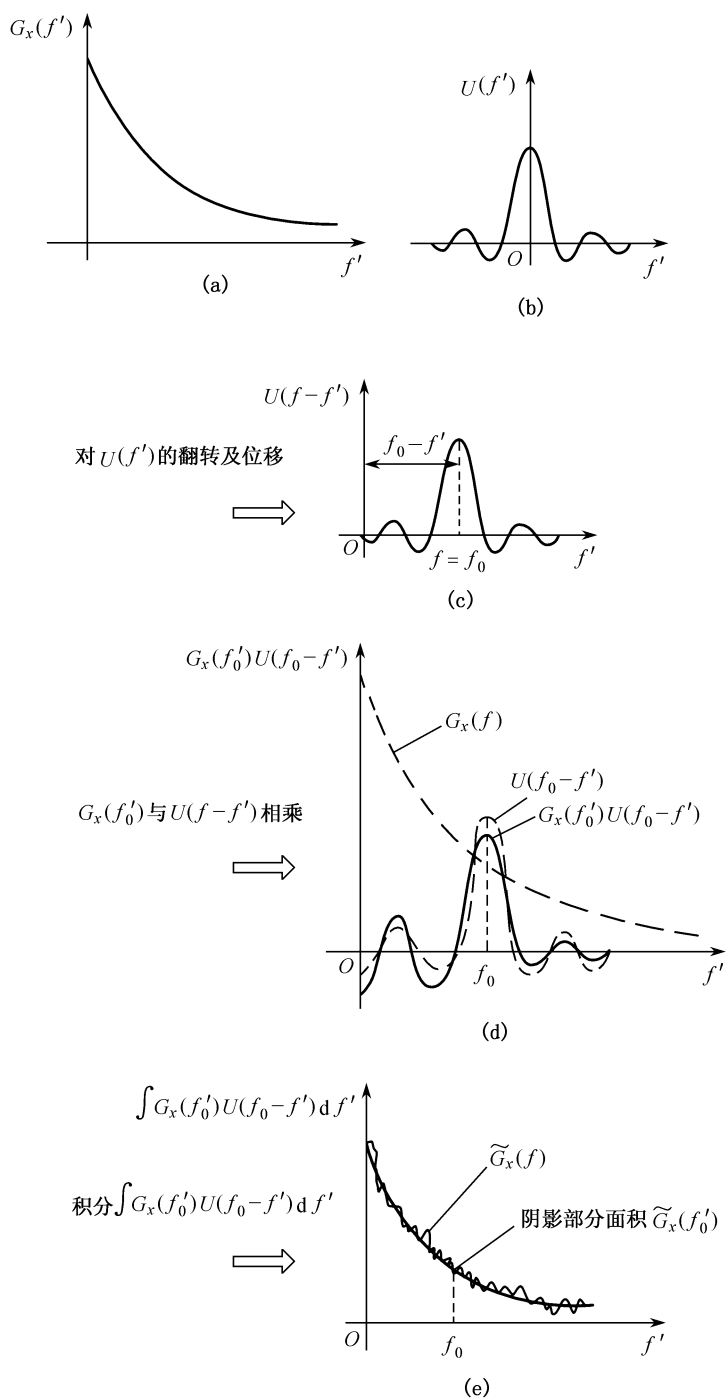


图 6-17 泄漏效应对谱估计的影响

(a) 随机过程单边功率谱 ;(b) 窗谱 ;(c) 翻转及位移后的窗谱 ;
 (d) 相乘后的图形(实线) ;(e) 卷积后的图形

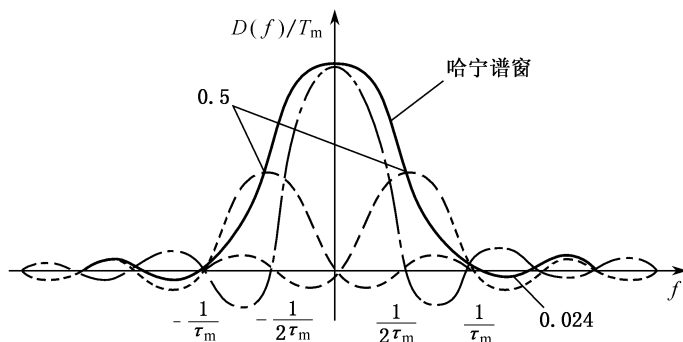


图 6-18 哈宁谱窗的构成

分辨能力降低。所以,为了减小统计误差中的方差项误差,必须抑制泄漏,降低副瓣高度,但导致主瓣展宽,分辨力降低,增大偏度误差。反之,为了提高谱分析的分辨力,减小偏度误差,需要收缩主瓣宽度,但导致副瓣加大,泄漏增加。因此,功率谱处理时,往往需要在提高分辨力减少泄漏两者之间作折衷考虑。

2. 海明窗

海明时移窗的函数式为

$$w(\tau) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi \tau}{\tau_m} & |\tau| \leq \tau_m \\ 0 & |\tau| > \tau_m \end{cases} \quad (6-40)$$

相应的海明谱窗为

$$W(f) = 0.54U(f) + 0.23U(f - \frac{1}{2\tau_m}) + 0.23U(f + \frac{1}{2\tau_m}) \quad (6-41)$$

式(6-41)和式(6-39)比较,两者结构一样,只是前者的系数作了调整,以进一步抑制泄漏,压低副瓣高。海明谱窗的主瓣宽与哈宁窗一样,但主瓣高约为 $1.08\tau_m$,第一副瓣高接近于零。因此,减少泄漏的效果更好一些。

功率谱处理时,究竟选用哪种窗函数为宜,应根据相关函数的类型及对谱处理的精度要求,并结合处理的实践经验决定。

必须指出,泄漏效应并没有使随机过程的总功率有所损失。例如,由式(6-33)得正弦函数均方值的真值为

$$\varphi_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = \frac{A_0^2}{2}$$

由式(6-35)得

$$\varphi_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = \frac{A_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin 2\pi(f - f_0)\tau_m}{2\pi(f - f_0)\tau_m} + \frac{\sin 2\pi(f + f_0)\tau_m}{2\pi(f + f_0)\tau_m} \right] df = \frac{A_0^2}{2}$$

可见,随机过程的功率并无损失。

4. 数字序列的窗函数

采用数字技术进行功率谱分析时,需把上述连续函数的窗,泄漏的概念推广到离散数字序

列的范畴。

设离散自相关函数为 $R_{xr} = R_x(r\Delta t) = E(X_n X_{n+r})$ (X_n, X_{n+r} 是连续信号 $x(t)$ 第 n 点和 $n+r$ 点的采样值。时移数 $r = \frac{\tau}{\Delta t}$ 可取 $-\infty < r < +\infty$ 的整数), 则单边功率谱的离散形式可写为

$$G_x(f) = 2\Delta t \sum_{r=-\infty}^{+\infty} R_{xr} \cos(2\pi f r \Delta t) \quad (6-42)$$

对于有限长度记录, 时移 t 只能取有限区间 $-\tau_m$ 到 τ_m , 故单边功率谱的原始估计值为

$$\tilde{G}_x(f) = 2\Delta t \sum_{r=-m}^m R_{xr} \cos(2\pi f r \Delta t) \quad (6-43)$$

式中, $m = \frac{\tau_m}{\Delta t}$ 为最大时移数。

同连续情形一样, 上式可改写为

$$\tilde{G}_x(f) = 2\Delta t \sum_{r=-m}^m u_r R_{xr} \cos(2\pi f r \Delta t)$$

把频率区间 $[0, \frac{1}{2\Delta t}]$ 作 m 等分, 得离散频率 $0, \frac{1}{2\Delta t m}, \frac{2}{2\Delta t m}, \dots, \frac{k}{2\Delta t m}, \dots, \frac{m}{2\Delta t m}$ (其中 $K = 0, 1, \dots, m$) 故 $2\pi f r \Delta t = \frac{\pi k r}{m}$ 。代入上式并简写 $\tilde{G}_x(f) = \tilde{G}_x(\frac{k}{2\Delta t m}) = \tilde{G}_x$ 则有

$$\tilde{G}_x(f) = 2\Delta t \sum_{r=-m}^m u_r R_{xr} \cos \frac{\pi k r}{m} \quad (6-44)$$

式中 u_r 为矩形数字时移窗, 由下式定义

$$u_r = \begin{cases} 1 & |r| \leq m \\ 0 & |r| > m \end{cases} \quad (6-45)$$

相应的离散傅氏变换

$$U_k = 2m\Delta t \frac{\sin \pi k}{\pi k} \quad (6-46)$$

称为矩形数字谱窗。

数字序列的谱窗, 泄漏的概念类同于连续情形, 并有相应的哈宁数字窗和海明数字窗。

1. 哈宁数字窗

哈宁数字时移窗为

$$d_r = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi r}{m}) & |r| \leq m \\ 0 & |r| > m \end{cases} \quad (6-47)$$

哈宁数字谱窗为

$$D_K = \frac{1}{2} U_k + \frac{1}{4} U_{k-1} + \frac{1}{4} U_{k+1} \quad (6-48)$$

2. 海明数字窗

海明数字时移窗为

$$w_r = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi r}{m} & |r| \leq m \\ 0 & |r| > m \end{cases} \quad (6-49)$$

海明数字谱窗为

$$W_K = 0.54U_k + 0.23U_{k-1} + 0.23U_{k+1} \quad (6-50)$$

5. 平滑处理

前述抑制泄漏的措施,是通过原始数据选用适当的窗函数达到。反映在频域上的效果是 $\tilde{G}_x(f)$ 的皱波减小。实际上这一效果也可以从另一角度达到,用矩形时移窗得到 $\tilde{G}_x(f)$ 或 $\tilde{G}_k$, 然后对 $\tilde{G}_x(f)$ 或 $\tilde{G}_k$ 进行光滑。数据处理中,常把原始估计值在频域上进行光滑化的措施称为平滑处理。平滑的结果得到一条较为光滑的曲线,从而减少了谱处理的统计误差。

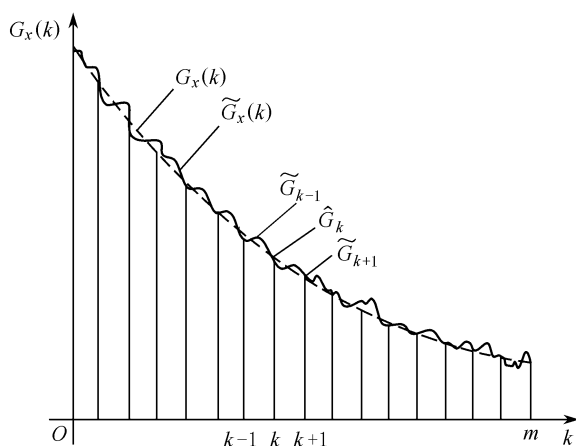


图 6-19 平滑处理示意图

图 6-19 是 $\tilde{G}_x(k)$ 平滑处理示意图,图中实线是 $\tilde{G}_x(k)$,虚线是 $G_x(k)$ 。平滑处理时,对于 $f_k = \frac{k}{2m\Delta t}$ 处的 $\tilde{G}_k$ 值,参考前后两点 $f_{k-1} = \frac{k-1}{2m\Delta t}$ 和 $f_{k+1} = \frac{k+1}{2m\Delta t}$ 处的 $\tilde{G}_{k-1}$ 和 $\tilde{G}_{k+1}$ 值,以圆滑过渡为准进行修正,称修正后的估计值为平滑估计值,记为 G_k ,以区别于未经平滑的原始估计值 $\tilde{G}_k$ 。

平滑处理时, G_k 用下式计算

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\tilde{G}_{k-1} + \tilde{G}_k) + \frac{1}{2} (\tilde{G}_k + \tilde{G}_{k+1}) \right] \\ &= \frac{1}{4} \tilde{G}_{k-1} + \frac{1}{2} \tilde{G}_k + \frac{1}{4} \tilde{G}_{k+1} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \quad (6-51)$$

在 $k=0$ 及 $k=m$ 处取

$$\begin{cases} G_0 = \frac{1}{2} [\tilde{G}_0 + \tilde{G}_1] \\ G_m = \frac{1}{2} [\tilde{G}_{m-1} + \tilde{G}_m] \end{cases} \quad (6-52)$$

式(6-51)和式(6-52)是平滑处理中常用的公式,但不是唯一的。

6. 抑制泄漏与平滑处理的关系

为了建立两种方法的内在联系,先分析选用哈尔数字窗得到的 G_k^* ,参考式(6-44)得

$$\begin{aligned} G_k^* &= 2\Delta t \sum_{r=-}^{+} d_r R_{xr} \cos \frac{\pi kr}{m} \\ &= 2\Delta t \left[d_0 R_{x0} + 2 \sum_{r=1}^{m-1} d_r R_{xr} \cos \frac{\pi kr}{m} + (-1)^k d_m R_{xm} \right] \end{aligned} \quad (6-53)$$

从式(6-47)得 $r=0$ 时 $d_0=0$; $r=m$ 时 $d_m=0$, 于是

$$G_k^* = 2\Delta t \left(R_{x0} + 2 \sum_{r=1}^{m-1} d_r R_{xr} \cos \frac{\pi kr}{m} \right) \quad (6-54)$$

在 $k=0$ 处,有

$$G_0^* = 2\Delta t \left[R_{x0} + \sum_{r=1}^{m-1} (1 + \cos \frac{\pi r}{m}) R_{xr} \right] \quad (6-55)$$

另一方面,如果采用矩形数字窗,由式(6-44)得到 $k=0$ 处的原始估计值为

$$\tilde{G}_0 = 2\Delta t \left[R_{x0} + 2 \sum_{r=1}^{m-1} R_{xr} + R_{xm} \right] \quad (6-56)$$

在 $k=1$ 处有

$$\tilde{G}_1 = 2\Delta t \left[R_{x0} + 2 \sum_{r=1}^{m-1} R_{xr} \cos \frac{\pi r}{m} - R_{xm} \right] \quad (6-57)$$

若按式(6-52)进行平滑处理,得

$$G_0 = \frac{1}{2} (\tilde{G}_0 + \tilde{G}_1) = 2\Delta t \left[R_{x0} + \sum_{r=1}^{m-1} R_{xr} (1 + \cos \frac{\pi r}{m}) \right]$$

把上式与式(6-55)比较,得

$$G_0 = G_0^*$$

同理,可证明

$$G_m = G_m^*$$

$$G_k = G_k^*$$

可见,用哈宁窗作抑制泄漏处理,与 $\tilde{G}_x(f)$ 在频域上作平滑处理等价。数据处理时,是对原始数据进行抑制泄漏处理,还是在频域上作平滑处理,可视数据处理的方便决定。

第五节 微型电动轿车车身结构试验模态分析

本节介绍某一骨架式电动轿车车身结构的模态试验的具体应用。

1. 试验测量和分析系统

试验测量分析系统由三大部分组成:试验激振系统、响应拾振系统、模态分析和处理系统,具体的组成方式如图6-20和图6-21所示。其中试验激振系统包括信号发生器、功率放大器和激振器;响应拾振系统包括加速度传感器、力传感器、电荷放大器及智能信号采集处理系统;模态分析和处理系统主要是DASP2000模态分析软件。

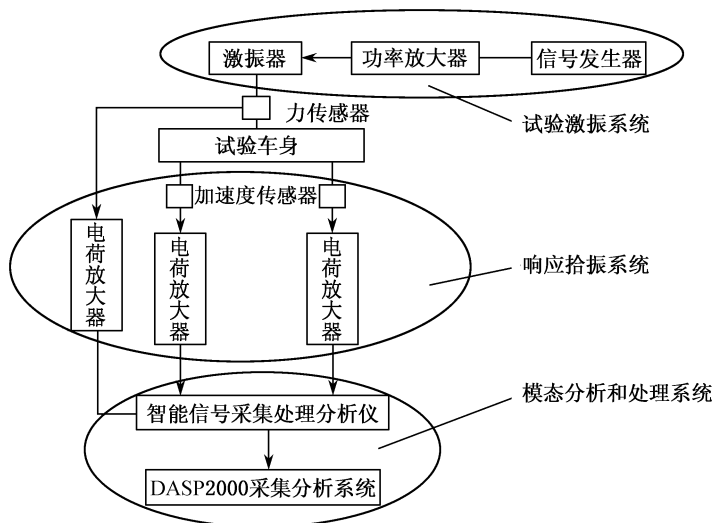


图 6-20 试验测量分析系统连接关系

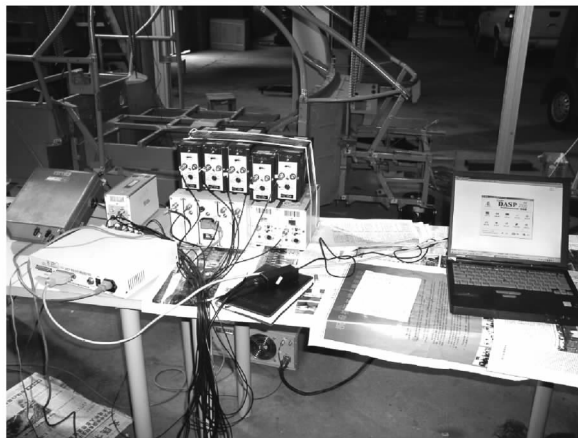


图 6-21 试验测量分析系统连接关系照片

2. 试验步骤

(1) 试验数据采集点的布置原则

测点布置原则：

- ① 所布测点在 DASP 软件中的连线应能显示车身骨架形状 如图 6-22 所示。
- ② 所布点应处于车身刚度较大位置，一般为车身骨架上。对于钣金件，则布置在筋上。

(2) 选取激振拾振方式与激振点

激振拾振方法：单点激振多点拾振的方法。在车身铅垂方向进行激振和拾振。

激振信号：频率在 0 ~ 150 Hz 之间的白噪声。

激振点选取：激振点选在刚度大的车头位置，可以同时避开主要振型的节面，如图 6-23 所示。

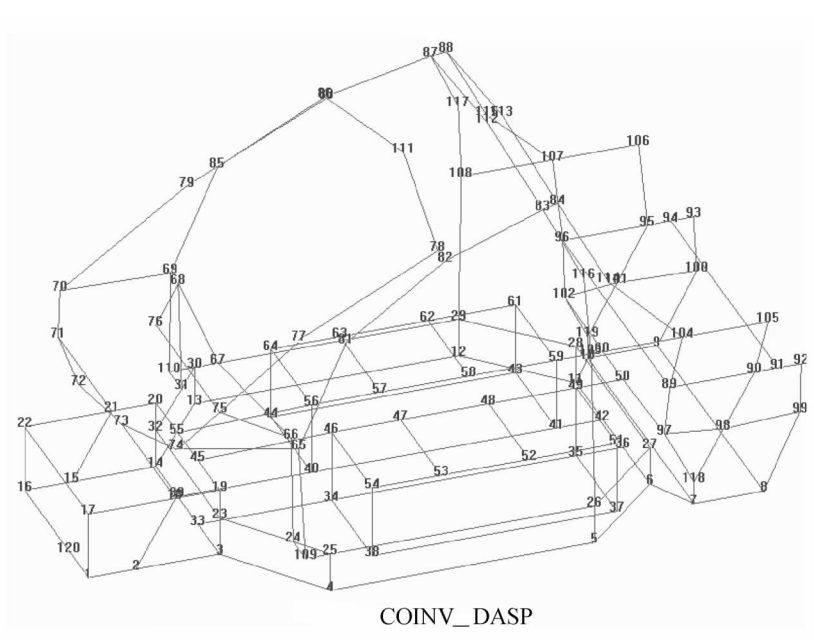


图 6-22 测点连线(测点数为 120 个)

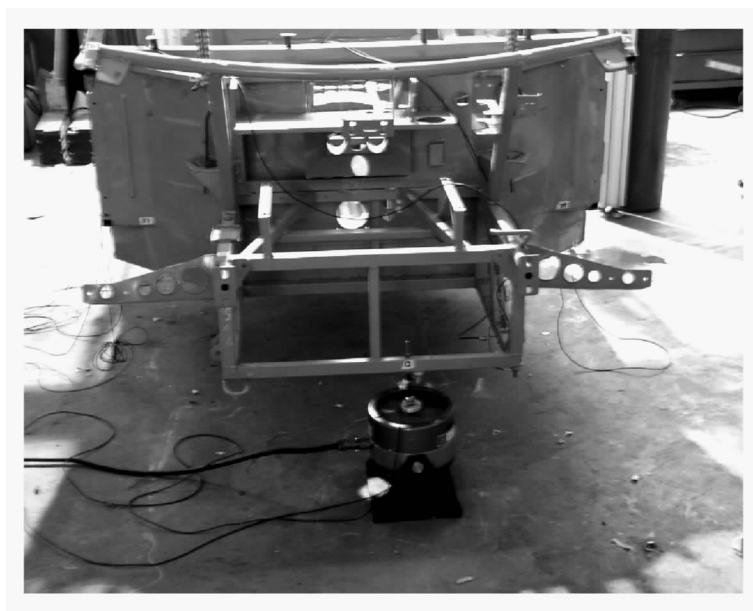


图 6-23 铅垂方向激振器同车身的连接

(3) 车身支承

采用悬吊频率为 1 Hz 的 4 点支撑方式,用 4 根橡皮绳在车身的悬架螺旋弹簧支座处把车身悬挂起来,支承型式如图 6-24 所示。

(4) 布置试验仪器,做试验仪器标定

(5) 进行数据采集

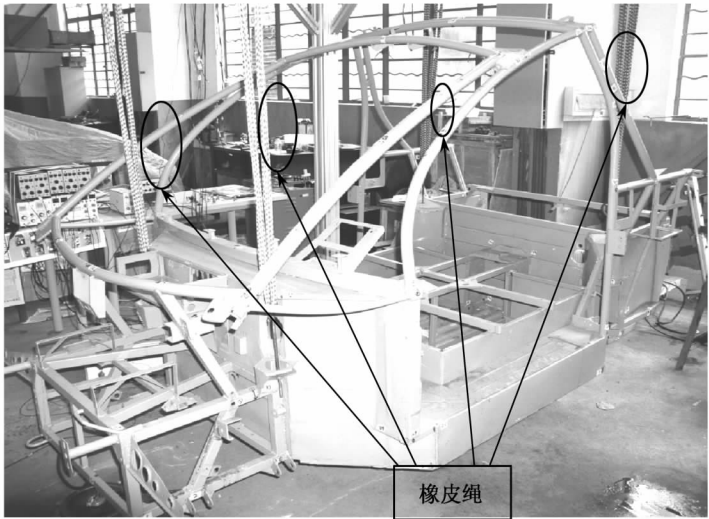


图 6- 24 车身支承型式

采样频率为 500 Hz。信号平均次数为 100 次。每一批拾振传感器为 8~10 个 ,通过移动传感器分批进行测量。虽然大大增加了试验工作量 ,但可以减小传感器附加质量的影响 ,提高测试精度。

(6) 在 DASP 软件中处理试验数据

3. 数据处理及试验模态分析

各测点的传递函数试验数据处理与试验数据的采集现场同步进行 ,每采好一批信号 ,当场观察其信号的相干性 ,只有峰值频率的相干系数在 0.8 以上的信号才有效 ,对符合要求的信号马上进行传递函数的处理 ,这样可以提高试验数据的准确率 ,避免数据不合要求后的重复试验。最后完成车身及部件的模态定阶及拟合工作。

通过铅垂方向激振、加速度测试及分析 ,采用传递函数集总平均后定阶处理 ,拟合后的模态参数如表 6- 1 所示。

表 6- 1 铅垂方向低阶振动模态参数

阶数	频率 /Hz	模态刚度	模态阻尼	阻尼比 / %
1	1.592	1.00E + 02	7.40E - 01	7.396
2	35.982	5.11E + 04	1.81E + 00	0.801
3	53.532	1.13E + 05	1.56E + 00	0.463
4	62.290	1.53E + 05	2.67E + 00	0.683
5	65.304	1.68E + 05	2.29E + 00	0.557
6	73.119	2.11E + 05	2.57E + 00	0.56
7	77.183	2.35E + 05	2.70E + 00	0.557
8	83.599	2.76E + 05	1.56E + 00	0.297
9	89.729	3.18E + 05	3.26E + 00	0.578
10	93.897	3.48E + 05	2.88E + 00	0.488
11	99.960	3.94E + 05	2.23E + 00	0.355
12	103.819	4.26E + 05	1.75E + 00	0.268

试验测得前十阶模态振型描述如表 6 - 2 所示。车身工程中关注的一阶扭转和一阶竖直弯曲模态振型图如图 6 - 25 和图 6 - 26 所示。图中虚线表示未变形模型 ,实线表示变形后模型。

表 6 - 2 前十阶模态振型描述表

阶数	频率 /Hz	模态振型描述
1	1.592	悬吊模态
2	35.982	车身一阶扭转模态
3	53.532	电瓶盒后部竖直弯曲模态
4	62.290	电瓶盒前中部竖直弯曲模态
5	65.304	车身一阶竖直弯曲模态
6	73.119	上车身骨架局部模态
7	77.183	上车身骨架局部模态
8	83.599	行李仓局部模态
9	89.729	电瓶盒竖直弯曲模态
10	93.897	仪表板与上车身骨架局部模态

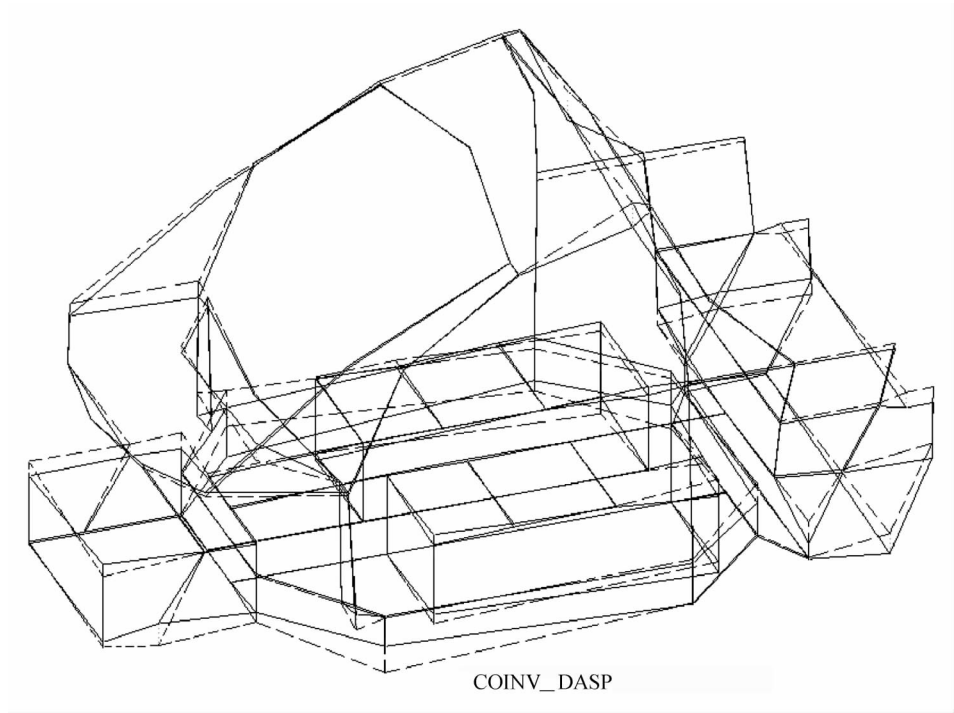


图 6 - 25 车身一阶扭转模态(35.982 Hz)

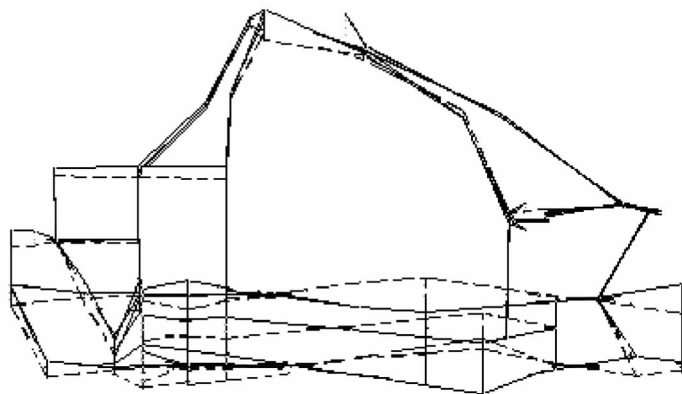


图 6-26 车身一阶竖直弯曲模态(65.304 Hz)

4. 误差分析

(1) 悬挂误差

为了模拟车身的自由支承状态,在模态试验中用柔软的橡皮绳悬挂车身,在数据处理中得到此次试验的第一阶模态值为 1.592 Hz,这就是由橡皮绳悬挂所带来的悬挂误差。由于该频率值远小于一阶扭转频率 35.982 Hz 的五分之一,所以此次试验中由于橡皮绳悬挂所带来的误差可以忽略。

(2) 传感器附加质量误差

在此次试验中,每批数据的采集都只用了 8~10 个传感器,而且在每批数据的测点都较分散,将由传感器附加质量带来的误差减到了最小。

(3) 外部干扰

由于在每批试验数据采集后都实时进行了数据的相干性分析,只有峰值频率的相干系数在 0.8 以上,才认为试验数据可靠,因此认为试验中由于外部干扰带来的误差影响较小。

5. 试验结果分析

该车身的一阶扭转频率达到 36 Hz,一阶竖弯频率为 65 Hz。将该车的模态数据与国内某些小汽车的相关数据进行对比,可以发现该车车身骨架的扭转、弯曲模态值都较高,说明这种空间骨架式的身结构刚性较传统车身要大。在电动汽车当中,与同类车身结构的大宇 DEV3 一阶扭转频率 25 Hz 相比,该车车身刚性也较大(见表 6-3)。

表 6-3 各车辆整体模态对比

	本试验车型	桑塔纳改型皮卡	NJ6400 汽车	大宇 DEV3
一阶扭转频率/Hz	36	21.5	15.6	25
一阶弯曲频率/Hz	65.3	28	25.6	-

从整体模态和局部模态的数值及其分布来看,该车整体模态值高,局部模态分布呈车身的前后弱,中间强,上车身弱,下车身强的态势。这样的局部模态分布是十分合理的,既有利于支承较重的电池,又能使车身骨架结构更加轻量化。

思考题

1. 汽车车身结构模态试验主要仪器、设备和传感元件有哪些？
2. 电磁激振器的主要参数有哪些？
3. 压电式加速度传感器为什么必须匹配电荷放大器一起工作？
4. 什么是车身结构固有振动特性？
5. 测量车身结构固有振动特性时, 如何进行固有振型分离？
6. 测量车身结构固有振动特性时, 如何进行支承？
7. 测量车身结构固有振动特性时, 常用哪些激振信号？测点如何选择？
8. 随机信号处理的采样原则是什么？随机信号处理的常见处理参数有哪些？
9. 功率谱密度处理时, 为什么要选用窗函数？如何选择？

参考文献

- 1 马钊英,王家林. 机械工程结构强度计算有限元基础. 长春:吉林科学技术出版社, 1990
- 2 李杰敏. 汽车拖拉机试验学. 北京:机械工业出版社, 1995
- 3 卢耀祖,周中坚. 机械与汽车结构的有限元分析. 上海:同济大学出版社, 1997
- 4 高云凯等. 轿车车身模态修改灵敏度计算分析. 汽车工程, 2001, 23(5)
- 5 高云凯等. 轻型货车横向耦合振动分析与控制. 中国公路学报, 2001, 14(3)
- 6 高云凯等. 微型电动轿车身骨架结构分析. 汽车工程, 2003, 25(5)
- 7 高云凯等. 电动改装轿车车身结构优化设计分析. 汽车工程, 2005, No.1