

新锐丛书

21 世纪高等学校教材

大学物理学

学习指导

主编 汪晓元

复旦大学出版社

内 容 简 介

这本《大学物理学学习指导》是结合当前高等学校大学物理课程教学改革实际情况和多年教学经验,按照“高等工业院校物理课程教学基本要求”的精神编写的.根据大学物理课程的实际特点,全书分为16章,每章有基本要求、内容提要、解题指导与示例、自测题四个栏目.

本书可与《大学物理学》(复旦大学出版社,2006年版)配套使用,也可作为大学物理、普通物理学的教学或自学的辅导参考书.

引 言

编写一本既符合教学改革的精神,又适合目前我国高等教育实际的大学物理课程的教材,一直被高校的广大物理教师所关注,这是一项具有非常重要意义的工作.近一个世纪以来,由于物理学的发展及其与物理学紧密联系的新技术的出现和广泛应用,使得这项工作变得不容易,甚至比较复杂.许多从事物理教学工作的教师在这方面做了许多有益的尝试和探索,取得了一些成果和经验.我们编写的这套《大学物理学》,就是从物理课程教学改革的需要和教学实际情况出发所做的一种尝试和探索.

本套书根据“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神,借鉴国内、外关于教材建设与改革的经验,结合多年来我们的教学实践编写成的.它包括了工科大学物理课程指导委员会制定的教学基本要求的全部内容,同时,适度介绍了近代物理的知识以及新技术的物理基础.力图使这套书成为既满足各个层次大学物理课程教学及改革的实际需要,又符合高校实际情况,具备鲜明特色的好教材.本教材特点主要有以下几点:

1. 精选经典内容,构建教材新体系.力学部分,省略了高中阶段已经掌握的知识,如直线运动、抛体运动、物体碰撞,主要介绍运动学描述方法及运动定律、定理和守恒定律等,与中学阶段的力学体系既有联系,但又完全不同.同时,把相对论纳入力学部分,使之与经典的时空概念形成鲜明的对照,有助于学生理解掌握.

2. 力求内容现代化.教材中除讲述相对论和量子物理等近代物理内容外,还介绍了许多当前新技术中的基础物理原理,包括熵、全息、光纤通信、激光、超导、能带理论、纳米科学.在通篇教材中,加大了现代化内容的比重,使学生能接触到更多新的物理知识和概念,对提高学生学习物理的兴趣、培养学生的探索精神有益处.

3. 力求内容精炼、综合.抓住主要内容,去粗取精,突出物理学中的重要定律与定理,从物理学发展的过程和教学实际情况的两个方面组织教学内容,精选例题、习题,用基本的、通俗的方法讲述物理内容.力求既满足广大师生的教学需要,又能激发学生的学习兴趣和培养学生的创新能力.

4. 适度开“窗口”、重视科学素质培养. 在现代物理部分大胆地“渗透”一些科技前沿信息,并介绍了非线性物理的一些内容和概念.有些内容对学生学习可能有一定困难,但让学生尽早了解这些内容,有益于激发、培养学生的求知欲望和独立思考能力,提高学生的科学素质.

全套书由武汉理工大学汪晓元教授主编,参加讨论和编写的有赵明、陈德彝、廖红、邓伟明、雷杰、罗来龙、赵黎、黄学洪、杨应平、刘想宁、陈清明、张甫宽等.邓伟明编写质点运动学和原子核物理部分,刘想宁编写质点动力学,罗来龙编写角动量与刚体部分,廖红编写机械振动和机械波,陈德彝编写热学,赵黎编写静电学,雷杰编写相对论和稳恒电流,汪晓元编写稳恒磁场及磁介质,黄学洪编写电磁感应和电磁波,赵明编写光学,杨应平编写量子物理基础,陈清明编写量子物理基础的部分内容及工程新技术的物理基础.《大学物理学学习指导》的相关部分仍由以上教师负责分工编写.全套书由汪晓元负责统稿和定稿.在编写的过程中,参加编写的教师们付出了大量的辛勤劳动,同时得到了许多同行们很好的建议及出版社等方面的大力支持和帮助;复旦大学钱列加教授审查了本书并为本书作序.在此一并表示真诚的感谢.

由于编者水平有限,错误及不妥之处在所难免,请广大师生批评指正,以便今后逐步完善和提高.

编 者
2006 年 3 月

序

物理学是研究物质的组成、性质、运动和相互作用,并以此阐明物质运动规律的科学.它是自然科学中最重要的基础学科之一.物理学的基本概念、方法和知识已被应用到所有的自然科学领域,因此,大学物理是一门不可替代的基础课.

大学生培养从应试教育向素质教育的转变,对大学物理课程提出了新的要求:在传授物理知识的同时,应特别注重向学生传授有关物理学的研究方法和思维方式,以提高学生的科学素质.

物理学内容广泛,难度不一.作为一名理工科大学学生,学习大学物理的时间和精力有限,要想在较短的时间内掌握尽可能多的物理知识,选择一本好的教材尤为重要.

这套教材将传统编写思路发扬光大,兼顾了科学发现的历史顺序和科学本身的逻辑关系.教材由浅入深地讲述了物理学基本概念,形象地描绘了物理模型,适当地介绍了物理学在其他学科和新技术领域的应用,特别是用普通物理的语言讲述了近代物理的内容,使得整套教材的可接受性突出;教材淡化了复杂的数学运算,突出了物理概念的重要性.全套教材的编写紧扣教学大纲,密切联系理工科专业大学物理教学的实际,富有创意和特色.教材选材合理,理论严谨,内容深入浅出,语言通俗易懂,很适合于初学者阅读.

参加本书编写的教师多年来一直从事大学物理教学工作,有着丰富的教学经验,对大学物理课程教学有深刻的认识.该套教材凝聚了编者多年的心血,是一本难得的好书.

本人有感于他们对物理教材建设和大学物理教育所作的努力和贡献,特为之序.



于复旦大学

目 录

第一篇 力 学

第 1 章 运动学.....	1
自测题一	12
第 2 章 运动定律与力学中的守恒定律	18
自测题二	42
自测题三	48
第 3 章 相对论	51
自测题四	60

第二篇 机械振动与机械波

第 4 章 机械振动	63
第 5 章 机械波	72
自测题五	82

第三篇 热 学

第 6 章 气体动理论	85
第 7 章 热力学基础.....	100
自测题六	114

第四篇 电 磁 学

第 8 章 静电场.....	119
自测题七.....	140
第 9 章 稳恒电流与稳恒电场.....	145
第 10 章 稳恒电流的磁场	151
自测题八.....	162
第 11 章 电磁感应	165

第 12 章 电磁场和电磁波	181
自测题九	185

第五篇 波动光学

第 13 章 光的干涉	190
第 14 章 光的衍射	198
第 15 章 光的偏振	205
自测题十	209
自测题十一	212

第六篇 量子物理基础

第 16 章 量子物理基础	215
自测题十二	225
自测题参考答案	227

第1章 运 动 学

基本要求

1. 理解描述运动的三个必要条件:参考系(以及坐标系);合理的物理模型(质点);运动的初始条件.
2. 熟练掌握用矢量描述运动的方法,即掌握位矢 $\mathbf{r}$ 、位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、速度 $\mathbf{v}$ 、加速度 $\mathbf{a}$ 的概念及其在直角坐标系和自然坐标系中的表述方式;能熟练地计算质点做一维、二维运动时的运动学物理量.
3. 掌握用微积分的方法处理运动学中的两类问题.
4. 掌握质点做圆周运动的线量、角量描述.
5. 理解相对运动的有关概念和基本处理方法.

内容提要

一、运动学物理量:位矢 $\mathbf{r}$ 、位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、速度 $\mathbf{v}$ 、加速度 $\mathbf{a}$

1. 在直角坐标系中

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

大小

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

方向

$$\alpha_i = \arctan \frac{i}{r} \quad i = x, y, z$$

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

速率

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

2. 在自然坐标系中

$$\mathbf{v} = v\hat{\tau} = \frac{ds}{dt}\hat{\tau}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

二、圆周运动的角量描述

$$\theta = \theta(t)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}$$

线量与角量的关系

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{R}$$

$$a_t = R\beta$$

三、两类运动学问题

1. 第一类: 已知运动方程, 求速度、加速度. (导数运算)

几何法: 求(或比较) $x-t$ 图、 $v-t$ 图上曲线的斜率.

2. 第二类: 已知加速度函数及初始条件 $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{v}_0$, 求运动方程. (积分运算)

若 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, 即加速度为时间的函数

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt$$

y, z 分量求法同上.

条件合适时可用几何法求解, 即求(或比较) $a-t$ 图、 $v-t$ 图上曲线与坐标轴围成的面积.

若 $a = a(v)$, 以直线运动为例, 由于 $a(v) = \frac{dv}{dt}$, 则

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)} = \int_0^t dt$$

解出 $v=v(t)$, 就可以求出运动方程

$$x = x_0 + \int_0^t v(t) dt$$

若 $a=a(x)$, 由恒等变换

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = \int_{v_0}^v v dv$$

解出 $v=v(x)$, 再由 $v(x) = \frac{dx}{dt}$, 则

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)} = \int_0^t dt$$

就可以解出运动方程了.

四、相对运动的描述方法

1. 约定系统

在地面参考系中建立直角坐标系 $xOyz$, 在对地面以匀速 $\mathbf{u}$ 做直线运动的参考系中建立直角坐标系 $x'O'y'z'$. 取 x 和 x' 轴为沿做相对运动的直线, y 和 y' , z 和 z' 分别平行. 假定, $t=t'=0$ 时刻, O 与 O' 相重合. 以后我们称 O 所在的参考系为惯性系 S ; O' 所在的参考系为惯性系 S' . 这样设定的条件称为约定系统.

2. 伽利略变换

在远小于光速的条件下, 在约定系统中, 两个不同惯性系上的观察者对同一质点运动的描述可能不同(物理量不同), 这两套运动学物理量之间的转换关系称为伽利略变换, 其形式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}t + \mathbf{r}'$$

速度变换(速度合成公式)

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$$

加速度变换

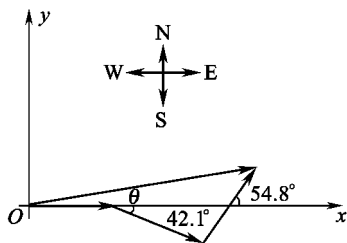
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

投影式见教材式(1-38).

解题指导与示例

例 1-1 一艘巡逻艇离开港口, 并向正东航行了 231 km 的距离, 为躲避暴

风雨,它转向东偏南 42.1° 航行了 209 km ,然后又向东偏北 54.8° 航行了 262 km ,求合位移的大小和方向(忽略地球表面的弯曲,假定所有的位移都位于同一平面内).



例 1-1 图

解 作图、建坐标,将各段位移依次称为 $\Delta \mathbf{r}_i$ ($i=1,2,3$),并将其在图中各坐标轴上投影,计算出投影分量,即

$$\Delta x_1 = 231\text{ km}$$

$$\Delta y_1 = 0$$

$$\Delta x_2 = 209 \cos(-42.1^\circ) = 155\text{ km}$$

$$\Delta y_2 = 209 \sin(-42.1^\circ) = -140\text{ km}$$

$$\Delta x_3 = 262 \cos 54.8^\circ = 151\text{ km}$$

$$\Delta y_3 = 262 \sin 54.8^\circ = 214\text{ km}$$

注意 Δx_2 的角度用 -42.1° 表示,因为从 x 轴正向顺时针度量角度为负(依据右手螺旋法则).合位移 $\Delta \mathbf{r}$ 的两个分量分别为

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 537\text{ km}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 = 74\text{ km}$$

给出了两个分量,合位移就算得到了.但按照题目的要求,必须明确给出合位移的大小和方向

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 542\text{ km}$$

$$\theta = \arctan \frac{74}{537} = 7.8^\circ$$

例 1-2 假设一长雪橇沿一直的雪坡向上滑,速度减慢至瞬时停顿后又往回滑下斜坡,分析雪橇的运动得出其运动方程为

$$x = 18 + 12t - 1.2t^2 \text{ (SI)}.$$

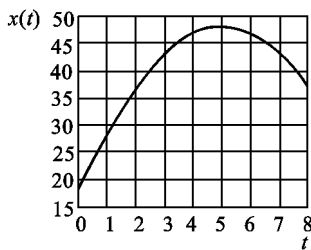
请画出雪橇运动的 $x-t$ 图;

求雪橇在 $1\sim 7\text{ s}$ 间的位移和路程;

求雪橇在 $1\sim 7\text{ s}$ 和 $1\sim 4\text{ s}$ 间的平均速度;

求雪橇速度随时间的函数关系;

求雪橇加速度随时间的函数关系.



例 1-2 图

解 由于运动有往返,找出折返时刻(由 $x-t$ 图可以看出)

令 $\frac{dx}{dt} = 0$ (x 极大点,或者说是速度为零的点)

得 $t=5\text{ s}$ (这结果也可以由 $x-t$ 图看出)
 则

$$\Delta x|_{1\sim 7\text{ s}} = x(7) - x(1) = 14.4\text{ m}$$

$$s|_{1\sim 7\text{ s}} = |x(5) - x(7)| + |x(5) - x(1)| = 24\text{ m}$$

平均速度

$$\bar{v}|_{1\sim 4\text{ s}} = \frac{x(4) - x(1)}{4 - 1} = 6\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{v}|_{1\sim 7\text{ s}} = \frac{x(7) - x(1)}{7 - 1} = 2.4\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(可见在变速运动中,不同时段平均速度大小和方向都可能不一样)

雪橇的速度 $v = \frac{dx}{dt} = (12 - 2.4t)\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

雪橇的加速度 $a = \frac{dv}{dt} = 2.4\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (显然这是匀加速运动)

例 1-3 一质点沿半径为 R 的圆周运动,运动方程为 $s = bt - 0.5ct^2$, b, c 均为常数,且 $b > \sqrt{Rc}$,其切向加速度和法向加速度相等,所经历的最小时间是多少?

解 由于

$$v = \frac{ds}{dt} = b - ct$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -c$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b - ct)^2}{R}$$

故当 $a_\tau = a_n$ 时,则

$$\frac{(b - ct)^2}{R} = |-c|$$

得

$$t_{\min} = \frac{b}{c} - \sqrt{\frac{R}{c}}$$

例 1-4 一做直线运动的质点,其加速度为 $a = -kv$ (k 为常数), $t=0$ 时, $x=0, v=v_0$. 当质点速度减为 v_0/n ($n>1$) 时,求质点经过的距离与质点能够移动的总距离之比.

解 由题设,质点任时刻的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

分离变量,两边积分

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$$

得

$$\ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

所以

$$v = v_0 e^{-kt}$$

再由

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

分离变量,两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$$

得

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = x_{\max} (1 - e^{-kt})$$

式中, $x_{\max} = \frac{v_0}{k}$ 是 $t \rightarrow \infty$ 时的 x 值,即质点能够移动的总距离(物理上不可能有 $t \rightarrow \infty$,这是数学模型上的问题,实际上,用不了很长时间,质点就能达到静止状态.因此, $t \rightarrow \infty$ 在物理上理解为“时间足够长”).

设 t_1 时刻,质点的速度减为 $v_1 = v_0/n$

于是

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{n} = e^{-kt_1}$$

取对数,得

$$t_1 = \frac{\ln n}{k}$$

相应经过的距离 x_1 与 $x_{\max}$ 之比为

$$\frac{x_1}{x_{\max}} = 1 - e^{-\ln n} = 1 - \frac{1}{n}$$

另解 按原题的要求,只要找到 v 与 x 的关系就可以了,无需解出时间函数,这样一来解题过程可以简化.

由加速度的定义,利用恒等变换直接消去 t ,即

$$\begin{aligned} a = \frac{dv}{dt} &= -kv = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \\ -k dx &= dv \end{aligned}$$

两边积分

$$-k \int_0^x dx = \int_{v_0}^v dv$$

得

$$x = \frac{v_0 - v}{k}$$

当 $v=0$ 时, x 达到最大值

$$x_{\max} = \frac{v_0}{k}$$

所以当质点速度减为 $v_0/n (n>1)$ 时, 得

$$\frac{x}{x_{\max}} = \frac{v_0 - v}{k} \bigg/ \frac{v_0}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

可以推出, 在任一时刻, 该质点的位置与速度遵循以下规律

$$\frac{x}{x_{\max}} + \frac{v}{v_0} = 1$$

例 1-5 宽 L 的河流, 流速与离岸的距离成正比, 而两岸处的流速为零, 河中心的流速为 v_0 . 一艘小船以恒定的相对速度 v_r 垂直于水流从一岸驶向另一岸. 在离岸 $L/4$ 处因故突然调头, 以相对速度 $v_r/2$ 垂直于水流驶回本岸. 试求: (1) 小船的运动轨迹; (2) 小船返回后的靠岸点与原出发点之间的距离是多少? (较难的运动学综合题)

分析

(1) 为便于表述, 建立直角坐标系.

(2) 根据题目给定的条件写出河流流速 u 的函数表达式, 再写出已知的船相对水流的速度 v_r 的函数表达式, 于是小船的绝对速度 $v = v_r + u$ 的表达式可得.

(3) 由 v 的两个坐标分量 $v_x = \frac{dx}{dt}$ 及 $v_y = \frac{dy}{dt}$ 的表达式消去 t , 即可得到能确定小船轨迹的微分方程, 然后积分, 得到轨迹方程.

(4) 用同样的方法, 可得到小船返回本岸时的轨迹方程; 全程轨迹得到后, 位移自然可以给出.

解 取平面直角坐标, 沿本岸水流方向为 x 轴, y 轴指向对岸, 坐标原点设于出发点.

设流速

$$u = ky\mathbf{i} \quad (k \text{ 为比例系数})$$

由题意

$$y=0 \text{ 处 } u=0, \quad y=L/2 \text{ 处 } u=v_0$$

得

$$k = 2v_0/L$$

所以

$$u = \frac{2v_0}{L}y\mathbf{i} \quad \left(0 \leq y < \frac{L}{2}\right)$$

小船的相对速度

$$v_r = v_r\mathbf{j}$$

于是, 小船的绝对速度

$$v = u + v_r = \frac{2v_0}{L}y\mathbf{i} + v_r\mathbf{j}$$

相应的坐标分量式为

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2v_0}{L}y \\ v_y = \frac{dy}{dt} = v_r \end{cases}$$

消去 dt , 得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2v_0}{Lv_r} y$$

分离变量

$$dx = \frac{2v_0}{Lv_r} y dy$$

此即关于小船驶出阶段轨迹的微分方程. 两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^y \frac{2v_0}{Lv_r} y dy$$

得

$$x = \frac{v_0}{Lv_r} y^2$$

这是一条抛物线. 在离岸 $L/4$ 处, 小船的坐标为

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{Lv_r} \left(\frac{L}{4} \right)^2 = \frac{v_0 L}{16v_r} \\ y = \frac{L}{4} \end{cases}$$

返回本岸阶段

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_r = \frac{2v_0}{L} y \mathbf{i} - \frac{v_r}{2} \mathbf{j}$$

(注意第二项, 区别矢量和分量的符号表述. 为避免混淆, 这里转而采用大写符号, 以区别前段的运动)

则

$$\begin{cases} v_x = \frac{dX}{dt} = \frac{2v_0}{L} Y \\ v_y = \frac{dY}{dt} = -\frac{v_r}{2} \end{cases}$$

消去 dt , 得

$$\frac{dX}{dY} = -\frac{4v_0}{Lv_r} Y$$

分离变量

$$dX = -\frac{4v_0}{Lv_r} Y dY$$

此即小船返回本岸阶段轨迹的微分方程. 两边积分 (从前段的终点开始)

$$\int_x^X dX = -\int_y^Y \frac{2v_0}{Lv_r} Y dY$$

得

$$X = -\frac{2v_0}{Lv_r} Y^2 + \frac{3v_0 L}{16v_r}$$

这仍然是一条抛物线. 回到本岸时, 小船的坐标为

$$\begin{cases} X = \frac{3v_0 L}{16v_r} \\ Y = 0 \end{cases}$$

若设 $v_0 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_r = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 河宽 $L = 100 \text{ m}$, 运动轨迹如下图所示. 可见, 前段位移的 x 分量为 25 m ; 后段位移的 x 分量为 50 m ; 全程位移为 75 m .



例 1-5 图

例 1-6 猎豹捕羚羊(自动跟踪问题中的轨道与追及时间)问题.

分析

(1) 这类问题一般都很复杂, 即使给出微分方程, 也找不到解析解, 必须采用数值计算方法.

(2) 可以先建立一个最简化模型, 试着给出它的微分方程(常常被称为数学模型, 挑战你的建模能力).

(3) 尝试给出该模型的解析解和数值解, 用计算机绘图给出运动轨迹. 有可能的话, 编写一段计算机程序模拟整个猎捕过程, 这时你可以预先给羚羊设计一个较复杂的逃遁路线, 看看你的模型中猎豹的追捕能力.

建模 将机灵的羚羊换成水面上速率为 v_f 的无人驾驶训练靶艇, 该艇只会做匀速直线运动; 同样将猎豹换成有自动跟踪能力的导弹鱼雷, 其速率 $v = kv_f$ ($k > 1$ 为常数). 取直角坐标系, 沿海岸建 x 轴, y 轴当然指向外海域.

解 设地面直角坐标系.

靶艇 $A(x_f, y_f)$, 运动方程

$$\begin{cases} x_f = v_f t \\ y_f = L \end{cases}$$

导弹 $B(x, y)$ 追踪 $A(x_f, y_f)$ 的效果是它的速度矢量 $\mathbf{v}$ 始终指向目标物 A , 故连线 $\overline{BA}$ 为导弹轨迹的切线, 因而可以考虑建立切线方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y_f - y)}{(x_f - x)}$$

这是 B, A 系统必须满足的相互关系式, 所以它就是我们要的数学模型. x_f 是变量, 所以由此式还不能直接得到轨迹方程, 将其改写为

$$x_f - x = (L - y) \frac{dx}{dy}$$

试着先对 y 求导数(目的是消去变量 x_f , 经验来自于多见、多做、多思考), 得

$$\frac{dx_f}{dy} = (L - y) \frac{d^2 x}{dy^2}$$

由题意

$$v^2 = (kv_f)^2 = k^2 \left(\frac{dx_f}{dt} \right)^2 = k^2 \left(\frac{dx_f}{dy} \frac{dy}{dt} \right)^2$$

又据运动学定义

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

所以

$$k^2 \left(\frac{dx_f}{dy} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2$$

则

$$k(L - y) \frac{d^2 x}{dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}$$

这就是关于 x, y 的二阶常微分方程, 即关于导弹轨迹的常微分方程(方程中已无其他变量).

用降阶法求解, 令

$$u = \frac{dx}{dy}$$

则

$$k(L - y) \frac{du}{dy} = \sqrt{1 + u^2}$$

分离变量

$$k \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dy}{L - y}$$

两边积分(注意 $t=0$ 时, 有 $x=0, y=0$ 及 $u=0$)

$$k \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int_0^y \frac{dy}{L - y}$$

得

$$u + \sqrt{1 + u^2} = \left(\frac{L}{L - y} \right)^{\frac{1}{k}}$$

解出

$$u = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{L - y}{L} \right)^{-\frac{1}{k}} - \left(\frac{L - y}{L} \right)^{\frac{1}{k}} \right]$$

回到 u 的定义, 分离变量

$$dx = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{L - y}{L} \right)^{-\frac{1}{k}} - \left(\frac{L - y}{L} \right)^{\frac{1}{k}} \right] dy$$

两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^y \left[\left(\frac{L - y}{L} \right)^{-\frac{1}{k}} - \left(\frac{L - y}{L} \right)^{\frac{1}{k}} \right] dy$$

得轨迹方程

$$x = \frac{L}{2} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \left(1 - \frac{y}{L} \right)^{1 + \frac{1}{k}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \left(1 - \frac{y}{L} \right)^{1 - \frac{1}{k}} \right] + \frac{\frac{1}{k} L}{1 - \left(\frac{1}{k} \right)^2}$$

导弹击中靶艇时 $y=L$, 代入轨迹方程, 得到击中点的 x 坐标

$$x^* = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \left(\frac{1}{k} \right)^2} L$$

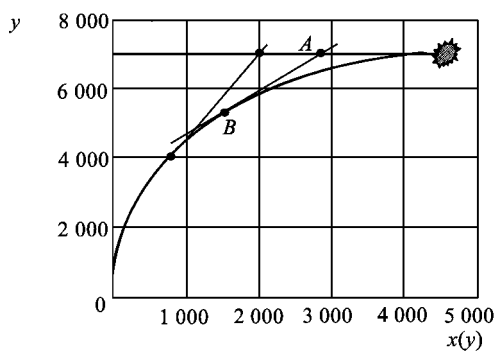
追及时间, 即靶艇到达该坐标点历经的时间, 由

$$x^* = v_f t$$

得

$$t = \frac{x^*}{v_f} = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \left(\frac{1}{k} \right)^2} L / v_f$$

若定义数值: $L=7\,000\text{ m}$, $k=2$, 则靶艇和导弹鱼雷的轨迹见本例图.



例 1-6 图

如果设计其他复杂一些的靶艇运动方式, 同样能建立它的数学模型, 但一般只能做数值计算求其解了.

自 测 题 一

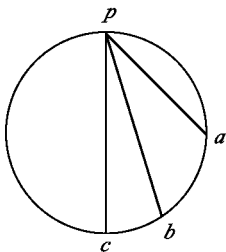
一、选择题

1. 一飞机相对空气的速度大小为 $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 风速为 $56 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 方向从西向东飞行, 则当地面雷达测得飞机速度大小为 $192 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时, 方向是

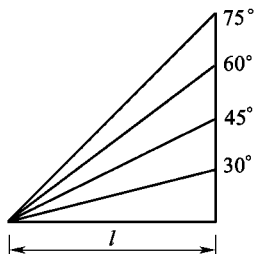
- (A) 南偏西 16.3° . (B) 北偏东 16.3° .
(C) 向正南或向正北. (D) 西偏北 16.3° .
(E) 东偏南 16.3° . []

2. 图中 p 是一圆的竖直直径 pc 的上端点, 一质点从 p 开始分别沿不同的弦无摩擦下滑时, 到达各弦的下端所用的时间相比较是

- (A) 到 a 用的时间最短. (B) 到 b 用的时间最短.
(C) 到 c 用的时间最短. (D) 所用时间都一样. []



选择题 2 图



选择题 3 图

3. 如图所示, 几个不同倾角的光滑斜面, 有共同的底边, 顶点也在同一竖直面上. 若使一物体 (视为质点) 从斜面上端由静止滑到下端的时间最短, 则斜面的倾角应选

- (A) 30° . (B) 45° .
(C) 60° . (D) 75° . []

4. 质点沿半径为 R 的圆周做匀速率运动, 每 t 秒转一圈. 在 $2t$ 秒时间间隔中, 其平均速度大小与平均速率大小分别为

- (A) $\frac{2\pi R}{t}, \frac{2\pi R}{t}$. (B) $0, \frac{2\pi R}{t}$.
(C) $0, 0$. (D) $\frac{2\pi R}{t}, 0$. []

5. 质点做曲线运动, $\mathbf{r}$ 表示位置矢量, s 表示路程, a_t 表示切向加速度, 下列表达式中,

- (1) $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$, (2) $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$,

(3) $ds/dt=v$,

(4) $|d\mathbf{v}/dt|=a$.

(A) 只有(1)、(4)是对的.

(B) 只有(2)、(4)是对的.

(C) 只有(2)是对的.

(D) 只有(3)是对的.

[]

6. 某物体的运动规律为 $dv/dt=-kv^2t$, 式中的 k 为大于零的常数. 当 $t=0$ 时, 初速为 v_0 , 则速度 v 与时间 t 的函数关系是

(A) $v=kt^2/2+v_0$.

(B) $v=-kt^2/2+v_0$.

(C) $\frac{1}{v}=\frac{kt^2}{2}+\frac{1}{v_0}$.

(D) $\frac{1}{v}=-\frac{kt^2}{2}+\frac{1}{v_0}$.

[]

7. 某人骑自行车以速率 v 向西行驶, 今有风以相同速率从北偏东 30° 方向吹来, 试问人感到风从哪个方向吹来?

(A) 北偏东 30° .(B) 南偏东 30° .(C) 北偏西 30° .(D) 西偏南 30° .

[]

8. 一质点在平面上运动, 已知质点位置矢量的表示式为 $\mathbf{r}=at^2\mathbf{i}+bt^2\mathbf{j}$ (其中 a, b 为常量), 则该质点做

(A) 匀速直线运动.

(B) 变速直线运动.

(C) 抛物线运动.

(D) 一般曲线运动.

[]

9. 某人骑自行车以速率 v 向正西方行驶, 遇到由北向南刮的风 (设风速大小也为 v), 则他感到风是从

(A) 东北方向吹来.

(B) 东南方向吹来.

(C) 西北方向吹来.

(D) 西南方向吹来.

[]

10. 一个质点在做匀速率圆周运动时

(A) 切向加速度改变, 法向加速度也改变.

(B) 切向加速度不变, 法向加速度改变.

(C) 切向加速度不变, 法向加速度也不变.

(D) 切向加速度改变, 法向加速度不变.

[]

11. 质点做半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为 (v 表示任一时刻质点的速率)

(A) $\frac{dv}{dt}$.

(B) $\frac{v^2}{R}$.

(C) $\frac{dv}{dt}+\frac{v^2}{R}$.

(D) $\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2\right]^{1/2}$.

[]

12. 在相对地面静止的坐标系内, A, B 两船都以 $2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率匀速行驶, A 船沿 x 轴正向, B 船沿 y 轴正向. 今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系 (x, y 方向单位矢量用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 表示), 那么在 A 船上的坐标系中, B 船的速度 (以 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 为单位) 为

(A) $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$.

(B) $-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$.

(C) $-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

(D) $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

[]

13. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\mathbf{r}(x, y)$ 的端点处, 其速度大小为

(A) $\frac{dr}{dt}$.

(B) $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

(C) $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$

(D) $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ []

二、填空题

1. 一物体在某瞬时,以初速度 $\mathbf{v}_0$ 从某点开始运动,在 Δt 时间内,经一长度为 s 的曲线路径后,又回到出发点,此时速度为 $-\mathbf{v}_0$,则在这段时间内:

(1) 物体的平均速率是_____;

(2) 物体的平均加速度是_____.

2. 质点沿半径为 R 的圆周运动,运动方程为 $\theta = 3 + 2t^2$ (SI),则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n =$ _____;角加速度 $\beta =$ _____.

3. 一质点的运动方程为 $x = 6t - t^2$ (SI),则在 t 由 0 至 4 s 的时间间隔内,质点的位移大小为_____,在 t 由 0 到 4 s 的时间间隔内质点走过的路程为_____.

4. 在一个转动的齿轮上,一个齿尖 P 沿半径为 R 的圆周运动,其路程 s 随时间的变化规律为 $s = v_0 t + bt^2/2$,其中 v_0 和 b 都是正的常量,则 t 时刻齿尖 P 的速度大小为_____,加速度大小为_____.

5. 一质点,以 $\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的匀速率做半径为 5 m 的圆周运动.则该质点在 5 s 内位移的大小是_____,经过的路程是_____.

6. 一质点在平面上做曲线运动,其速率 v 与路程 s 的关系为 $v = 1 + s^2$ (SI),其切向加速度以路程 s 来表示的表达式为 $a_\tau =$ _____ (SI).

7. 一物体做斜抛运动,测得在轨道上升段某点 A 处速度 $\mathbf{v}$ 的大小为 v ,其方向与水平方向夹角成 30° .则物体在 A 点的切向加速度 $a_\tau =$ _____,轨道在 A 点的曲率半径 $\rho =$ _____.

8. 河水自西向东流动,速度为 $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.一轮船在水中航行,船相对于河水的航向为北偏西 30° ,相对于河水的航速为 $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.此时风向为正西,风速为 $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向为_____ (设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度).

9. 已知质点运动方程为 $\mathbf{r} = (5 + 2t - t^2/2)\mathbf{i} + (4t + t^3/3)\mathbf{j}$ (SI),当 $t = 2 \text{ s}$ 时, $\mathbf{a} =$ _____.

10. 质点 P 在一直线上运动,其坐标 x 与时间 t 有如下关系:

$$x = A \sin \omega t \text{ (SI)} \quad (A \text{ 为常数}), \text{求:}$$

(1) 任意 t 时刻质点的加速度 $a =$ _____;

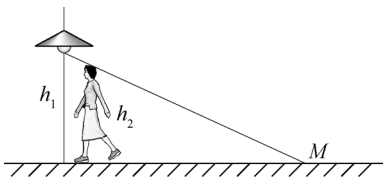
(2) 质点速度为零的时刻 $t =$ _____.

11. 灯距地面高度为 h_1 ,一个人身高为 h_2 ,在灯下以匀速率 v 沿水平直线行走,如图所示.则她的头顶在地上的影子 M 点沿地面移动的速度

$$v_M = \text{_____}.$$

12. 一质点从静止出发沿半径 $R = 1 \text{ m}$ 的圆周运动,其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta = 12t^2 - 6t$ (SI),则质点的角速度 $\omega =$ _____;切向加速度 $a_\tau =$ _____.

13. 距河岸(看成直线)500 m 处有一艘静止的船,船上的探照灯以转速为 $n = 1 \text{ rev} \cdot \text{min}^{-1}$ 转动.当光束与岸边成 60° 角时,光束沿岸边移动的速度 $v =$ _____.



填空题 11 图

14. 一船以速度 v_0 在静水湖中匀速直线航行, 一乘客以初速 v_1 在船中竖直向上抛出一石子, 则站在岸上的观察者看石子运动的轨迹是 _____, 其轨迹方程是 _____.

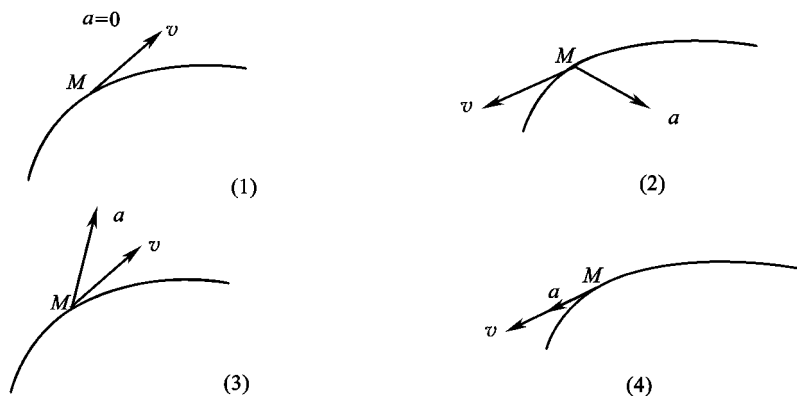
15. 试说明质点做何种运动时, 将出现下述各种情况 ($v \neq 0$):

(1) $a_t \neq 0, a_n \neq 0$, _____;

(2) $a_t \neq 0, a_n = 0$, _____.

a_t, a_n 分别表示切向加速度和法向加速度.

16. 在下列各图中质点 M 做曲线运动, 指出哪些运动是不可能的?



填空题 16 图

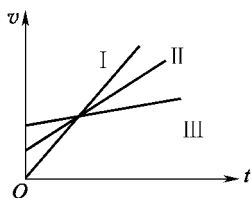
17. 以一定初速度斜向上抛出一个物体, 若忽略空气阻力, 当该物体的速度与水平面的夹角为 θ 时, 它的切向加速度 a_t 的大小为 _____, 法向加速度 a_n 的大小为 _____.

18. 在 x 轴上做变加速直线运动的质点, 已知其初速度为 v_0 , 初始位置为 x_0 , 加速度 $a = Ct^2$ (其中 C 为常量), 则其速度与时间的关系为 $v =$ _____, 运动方程为 $x =$ _____.

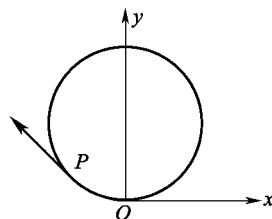
19. 在 $v-t$ 图中所示的三条直线都表示同一类型的运动:

(1) I, II, III 三条直线表示的是 _____ 运动;

(2) _____ 直线所表示的运动的加速度最大.



填空题 19 图

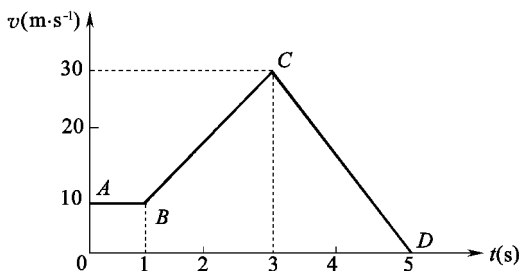


填空题 20 图

20. 一质点 P 从 O 点出发以匀速率 $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 做顺时针转向的圆周运动, 圆的半径为 1 m , 如图所示. 当它走过 $2/3$ 圆周时, 走过的路程是_____, 这段时间内的平均速度大小为_____, 方向是_____.

21. 已知质点的运动方程为 $\mathbf{r} = 4t^2 \mathbf{i} + (2t + 3) \mathbf{j}$, 则该质点的轨道方程为_____.

22. 一质点做直线运动, 其 $v-t$ 曲线如图所示, 则 BC 和 CD 段时间内的加速度分别为_____, _____.



填空题 22 图

23. 一质点从静止出发, 沿半径 $R = 3 \text{ m}$ 的圆周运动, 切向加速度 $a_t = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. 当总加速度与半径成 45° 角时, 所经过的时间 $t =$ _____, 在上述时间内质点经过的路程 $s =$ _____.

24. 一质点沿半径为 0.10 m 的圆周运动, 其角位移 θ 可用下式表示

$$\theta = 2 + 4t^3 \text{ (SI)}.$$

(1) 当 $t = 2 \text{ s}$ 时, 切向加速度 $a_t =$ _____;

(2) 当 a_t 的大小恰为总加速度 a 大小的一半时, $\theta =$ _____.

25. 以初速率 v_0 、抛射角 θ 抛出一物体, 则其抛物线轨道最高点处的曲率半径为_____.

26. 在表达式 $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 中, 位置矢量是_____; 位移矢量是_____.

27. 当一列火车以 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率向东行驶时, 若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30° , 则雨滴相对于地面的速率是_____; 相对于列车的速率是_____.

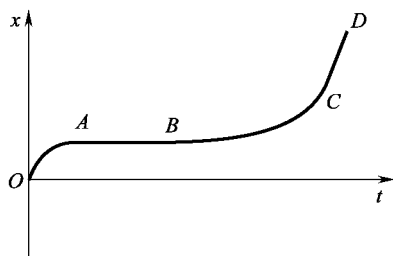
28. 一质点沿半径为 R 的圆周运动, 在 $t = 0$ 时经过 P 点, 此后它的速率按 $v = A + Bt$ (A, B 为正的已知常量) 变化, 则质点沿圆周运动一周再经过 P 点时的切向加速度 $a_t =$ _____, 法向加速度 $a_n =$ _____.

29. 设质点的运动方程为 $\mathbf{r} = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j}$ (式中 R, ω 皆为常量). 则质点的 $\mathbf{v} =$ _____, $d\mathbf{v}/dt =$ _____.

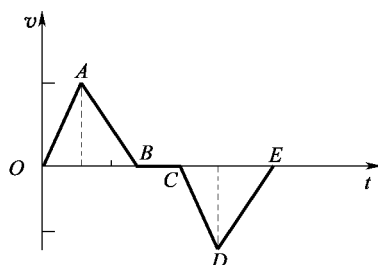
30. 飞轮做加速转动时, 轮边缘上一点的运动方程为 $s = 0.1t^3 \text{ (SI)}$, 飞轮半径为 2 m . 当此点的速率 $v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 其切向加速度为_____, 法向加速度为_____.

三、简答题

1. 一质点做直线运动,其 $x-t$ 曲线如图所示,质点的运动可分为 OA , AB (平行于 t 轴的直线), BC 和 CD (直线) 四个区间. 试问每一区间速度、加速度分别是正值、负值,还是零?



简答题 1 图



简答题 2 图

2. 一人骑自行车沿笔直的公路行驶,其速度图线如图中折线 $OABCDE$ 所示,其中三角形 OAB 的面积等于三角形 CDE 的面积. 问:

- (1) BC 线段和 CD 线段各表示什么运动?
- (2) 自行车所经历的路程等于多少?
- (3) 自行车的位移等于多少?

第2章 运动定律与力学中的守恒定律

基本要求

1. 理解牛顿三定律,掌握用牛顿第二定律解题的基本步骤和方法.
2. 掌握动量定理和动量守恒定律,理解它们与牛顿定律之间的关系.
3. 理解功的定义,掌握变力做功的计算方法.
4. 理解保守力及势能的概念,掌握计算势能的方法.
5. 理解动能定理与功能原理的关系,掌握两者的用法.
6. 理解质点对固定参照点的角动量、力矩的概念.
7. 理解刚体转动惯量的概念,理解力矩的功和刚体定轴转动的动能概念.
8. 掌握刚体定轴转动的转动定律,掌握定轴转动的动能定理.
9. 掌握质点和定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律,并能综合运用三大守恒定律解决一些简单的力学问题.

内容提要

一、牛顿三大定律的表述(略)及相关概念

第一定律 提出了力的确切定义,物体之间相互作用称为力,力是物体运动状态改变的原因,表明物体具有惯性.

第二定律 定量给出力与物体加速度与质量之间的关系式,表明物体的运动状态的改变就是产生了加速度,物体的惯性可用其质量来表征.

第三定律 表明施力物体与受力物体之间作用规律及作用力与反作用力大小相等、方向相反,两力的性质相同.

二、牛顿第二定律的应用

1. 牛顿定律适用条件:惯性系,低速($v \ll c$),宏观质点.
2. 牛顿定律在具体坐标系中的形式.

$$\text{在平面直角坐标系中} \quad \begin{cases} F_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ F_y = m \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

$$\text{平面自然坐标系中} \quad \begin{cases} F_{\tau} = ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} \\ F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

三、惯性系,非惯性系,惯性力

四、动量定理,动量守恒定律

$$1. \text{ 动量} \quad \mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

$$2. \text{ 冲量} \quad \mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt$$

3. 动量定理

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$$

在平面直角坐标系中

$$\begin{cases} I_x = \Delta P_x \\ I_y = \Delta P_y \end{cases}$$

4. 平均力

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot dt = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

5. 动量守恒定律 系统受合外力为零,则 $\sum \mathbf{p}_{i0} = \sum \mathbf{p}_i = \text{常量}$

五、功,动能定理

1. 功的定义

$$A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

在直角坐标系中

$$A = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

2. 动能定理

$$\text{动能} \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{质点动能定理} \quad A = \Delta E_k$$

$$\text{质点系的动能定理} \quad A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = \Delta E_k$$

六、保守力及其功,势能

1. 保守力 $\oint \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} = 0$, 保守力做功与路径无关, 只与始末位置有关.

2. 保守力的功 $A_{\text{保}} = \int \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} = -\Delta E_p$

3. 势能 $E_{pa} = E_{pb} + \int_a^b \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r}$ (求 a 点势能的定义式, E_{pb} 为参考点势能)

七、功能原理、机械能守恒定律

1. 机械能 $E = E_p + E_k$

2. 功能原理 $A_{\text{外}} + A_{\text{非内}} = \Delta E$

3. 机械能守恒定律 当 $A_{\text{外}} = 0, A_{\text{非内}} = 0, \Delta E = 0$

八、力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

力对原点 O 的力矩. 它是使质点绕 O 点转动的外部因素, 与参考点 O 的位置有关.

九、角动量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

质点对原点 O 的角动量. 它描述了质点绕 O 点转动的状态, 与参考点 O 的位置有关.

十、质点的角动量定理

微分形式 $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

积分形式 $\int_{t_0}^t \mathbf{M} dt = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0$

积分形式表明, 作用在质点的角冲量等于质点角动量的增量.

注意 (1) $\mathbf{M}, \mathbf{L}$ 必须相对同一参考点.

(2) 只有在惯性系中, 角动量定理才成立.

十一、角动量守恒定律

若某一过程中 $\mathbf{M} = 0$, 则

$$\mathbf{L} = \text{恒矢量}$$

如果质点上对某点的力矩始终为零, 则质点对该点的角动量守恒. 这里存在两种特例:

(1) 质点所受的合外力总为零, 从而做匀速直线运动, 它对任意一点的角动量都保持不变.

(2) 质点受有心力作用, 质点对有力心的角动量保持不变.

十二、刚体对定轴的转动惯量

对质点系
$$J = \sum m_i r_i^2$$

对定轴刚体
$$J = \int_M r^2 dm$$

式中 r 为质点(或质元 dm)对定轴的转动半径. 转动惯量由三个因素决定: (1)刚体总质量的大小. (2)质量相对转轴的分布. (3)轴的位置. 刚体绕定轴转动时, 它对该轴的转动惯量是一个常量.

转动惯量具有两大特点: (1)可加性: 对同一转轴, 刚体总体的转动惯量为各部分转动惯量之和 $J = \sum J_i$. (2)平行轴定理

$$J = J_c + Md^2$$

式中, J_c 是刚体对过质心的轴的转动惯量, J 是对与之平行的轴的转动惯量, M 为刚体的质量, d 为两平行轴的间距.

十三、刚体的转动定律

$$M = J\beta$$

相对同一转轴, 刚体所获的加速度与作用于刚体的外力矩成正比, 与刚体的转动惯量成反比.

十四、定轴转动的动能定理

1. 转动动能

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

2. 力矩做功

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta$$

3. 动能定理

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2$$

4. 刚体的重力势能 对体积较小的刚体, 其重力势能由质心离零势面的高度 h_c 决定.

$$E_k = mgh_c$$

十五、对定轴的角动量

1. 质点系对定轴的角动量(如对 Z 轴)

$$L = \sum L_i = \sum J_i \omega_i = \sum r_{\perp i} p_i$$

L_i 是各质点对 Z 轴的角动量, L 是系统对 Z 轴的角动量.

2. 系统由质点与绕固定轴转动的刚体组成, 质点对刚体有相对位移, 若它们有相同的角速度 ω , 则

$$L = J\omega$$

此时系统的 J 是变量.

如果系统为绕固定轴转动的刚体, 仍可用上式表示系统的角动量, 此时 J 为常量.

十六、对定轴的角动量定理

1. 质点系

$$\int_{t_0}^t M dt = \sum L_i - \sum L_{i0}$$

2. 有相同角速度的质点系

$$\int_{t_0}^t M dt = J\omega - J_0\omega_0$$

3. 定轴转动的刚体

$$\int_{t_0}^t M dt = J(\omega - \omega_0)$$

十七、对定轴的角动量守恒定律

1. 若质点系所受的合外力矩 $M=0$, 则

$$L = \sum L_i = \text{恒量}$$

2. 系统各质点有相同的角速度, 且 $M=0$, 有

$$J\omega = \text{恒量}$$

此时系统的角速度与转动惯量成反比.

解题指导与示例

1. 牛顿定律及应用

(1) 牛顿定律适用条件. 牛顿定律适用于质点模型和惯性参考系, 分析问题时应在同一惯性系内考虑.

确定一参考系是否为惯性系, 就是在此参考系中观察或做力学实验, 看物体的运动规律(数学形式)是否与牛顿定律一致, 若一致则是惯性系, 否则是非惯性系. 当某一惯性系确定之后, 其他相对此惯性系做匀速直线运动的参考系都是惯

性系.

(2) 建立牛顿运动方程和解题中的关键点. 选择研究对象、分析受力、建立适当的坐标系是三个要点. 受力分析应选在任意时刻, 或任意位置来进行.

物体受的力 $\mathbf{F}$ 一般归类为三种函数形式(以一维为例): $F(t), F(x), F(v)$. 解方程时, 要根据具体受力函数形式和题中要求进行正确的变量代换和变量分离. 一个方程只显含两个变量时, 方能直接积分求解. 例如, $F(x) = m \frac{dv}{dt}$ 方程显含三个变量 x, v, t , 要进行变量代换, 即 $F(x) = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \rightarrow F(x) = mv \frac{dv}{dx}$, 此时显含两个变量, 可积分求解(参考运动学).

2. 动量定理与动量守恒定律

应用动量定理时, 应注意几个环节:

- (1) 选择一个惯性系作为参考系, 建立适当坐标系.
- (2) 正确分析研究对象的受力和始末运动状态.
- (3) 根据动量定理列出坐标分量方程求解.

应用动量守恒定律时应注意:

(1) 正确理解守恒条件, 是 $\sum \mathbf{F}_{\text{外}i} = 0$, 而不是 $\mathbf{I} = 0$. 由牛顿第二定律 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, 再由极值条件 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$, 所以动量守恒量条件是 $\mathbf{F} = 0$, 而不是 $\mathbf{F}$ 的时间积累为零.

(2) 要明确系统之内与系统之外物体, 以便分清内力与外力.

(3) 若外力矢量和不为零, 但外力远小于内力, 亦可用动量守恒定律求近似解. 某个方向上系统合外力分量和为零, 则此方向动量分量守恒.

(4) 研究系统内各物体之间的相对运动关系往往复杂, 要把各物体的各个方向上的动量都统一到同一惯性系中.

3. 功与动能定理

(1) 功. 变力功的计算关键是如何把元功 $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 写出来, 其本质问题是正确理解和把握用微积分的“变与不变”的辩证思维方法: 在曲线路径上有变化的力 $\mathbf{F}(t)$, 在任意 t 时刻 $\mathbf{F}(t)$ 是确定的, 再令在 $\mathbf{F}(t)$ 作用下, 物体发生一个无穷小位移 $d\mathbf{r}$, 在 $d\mathbf{r}$ 上认为 $\mathbf{F}(t)$ 还未来得及变化(不变), 故在 $d\mathbf{r}$ 上的元功为 $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, 这就类似常力在直线上做功的情形. 然后把曲线分割成无数小段, 每段上有元功 dA , 再“连续求和”, 即积分

$$A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(2) 应用动能定理应注意:

动能定理考虑系统所受所有的内力与外力的功之和. 动能定理适于惯性系, 列方程时, 功与动能均相对同一惯性系.

4. 保守力及其功和势能

势能具有相对性, 要确定空间某点 a 处的势能, 必先确定另外一参考点 b 处的势能.

求某点的势能, 先选取参考点 b 及势能值 E_{pb} , 然后从所求点 a 沿任意路径将保守力积分到参考点 b 得保守力的功 $A_{\text{保}}$, 那么 a 点的势能就是 $E_{pa} = A_{\text{保}} + E_{pb}$. 常见的重力势能 (mgh)、弹性势能 ($\frac{1}{2}kx^2$)、引力势能 ($-G\frac{Mm}{r}$), 都是先分别选定地面、弹簧原长、无穷远处为势能零点.

势能是对系统或质点系而言, 因此谈到势能必先适当选择系统.

5. 功能原理及机械能守恒定律

在应用时, 要遵循以下几点:

(1) 选择研究系统或质点组, 分清系统内、外物体, 系统的划分不同, 则内力与外力的成份不同. 例如, 一弹簧谐振子挂在天花板上, 若选弹簧与物体为系统, 重力为外力; 若把地球、弹簧、物体视为系统, 则重力为保守内力.

(2) 选定一惯性系, 分析过程中外力、非保守力的功, 判明是否满足机械守恒条件.

(3) 确定各种势能的参考点与其势能值(或零点势能位置), 明确系统始末状态的机械能.

(4) 列方程求解.

6. 质点的角动量守恒定律的应用

难点在于建立质点角动量的概念. 体现在以下两处:

(1) $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 涉及矢量的矢积, 在数学上增加了难度. 这里应突破: ①用 $L = rpsin(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ 计算其大小, 用右手螺旋法则来判定 $\mathbf{L}$ 的方向. ②在直角坐标中, 用矢积的坐标表示法(即教材中(5-3(a))式)来计算. ③矢量的矢积不满足交换律, 即 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \neq \mathbf{p} \times \mathbf{r}$

(2) 把角动量与动量相区别. 同动量一样, 角动量也是描述质点运动的物理量. 它与动量的区别在于: ①它描述了质点绕参考点的转动状态. ②同一运动质点相对惯性系上不同的点, 有不同角动量.

7. 刚体定轴转动定律

(1) 对轴的力矩的理解与计算.

① 若力的作用线与轴平行或相交,则力对转轴无力矩.

② 转动定律中的 M 是合外力矩,是指每一外力对转轴的力矩之和,而不是合外力对轴的力矩,两者是不同的.例如一对力偶的合力为零,合力对轴的力矩也为零;但两力对转轴的力矩之和,可以不为零.

③ 对轴的力矩受轴的制约,只有两种可能的方向,可以用标量的正、负来区分.

(2) 定轴转动定律.

① 对于质点与绕固定轴转动的刚体构成的系统,多采用隔离物体、受力分析、列出方程(转动定律、牛顿第二定律和约束方程)、联立求解这十六字步骤.

② 刚体受变力矩作用时,可先分离变量,然后对方程两边分别积分.

例如 $M=M(\omega)$,由转动定律

$$M(\omega) = J \frac{d\omega}{dt}$$

分离变量
$$\frac{1}{J} dt = \frac{d\omega}{M(\omega)}$$

两边积分
$$\int_{t_0}^t \frac{1}{J} dt = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{M(\omega)}$$

8. 对轴的动能定理与角动量定理

(1) 对由质点和绕固定轴转动的刚体构成的系统,多数情况下从能量角度考虑问题更简便,可以用对轴的动能定理,或机械能守恒定律解题.

(2) 当力矩 $M=M(t)$ 是时间 t 的函数,用角动量定理

$$\int_{t_0}^t M(t) dt = J\omega - J_0\omega_0$$

更为方便.

9. 角动量守恒定律的应用

(1) 考虑质点与绕固定轴转动的刚体碰撞时,由于转轴对刚体作用力存在,两碰撞物体组成的系统中,动量多不守恒,但对轴的角动量守恒.

(2) 系统中质点对轴的角动量可以用线量 ($L = r_{\perp} mv$),也可以用角量 ($L = mr_i^2 \omega$) 表示.

例 2-1 如本例图所示,斜面物块沿水平面以匀加速度 $a_0 < g$ 运动,质量为 m 的物体沿滑斜面下滑,求斜面对 m 的支承力 N 以及物体的加速度.

解 选地面为惯性系,以 m 为研究对象,设 m 相对地面的加速度为 $\mathbf{a}$,相对斜面加速度为 $\mathbf{a}'$. 则有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$$

m 受重力 $m\mathbf{g}$ 与支承力 $\mathbf{N}$,由牛顿第二定律

$$N + mg = ma$$

建立直角坐标系, 则有分量方程

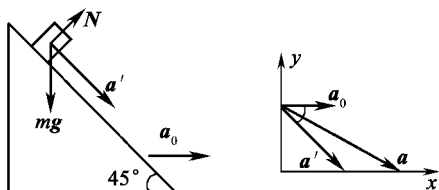
$$N \cos \theta = ma_x$$

$$N \sin \theta - mg = ma_y$$

$$a_x = a_0 + a' \cos \theta$$

$$a_y = -a' \cos \theta$$

联立以上四式(式中 $\theta = 45^\circ$), 得



例 2-1 图

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2} m(a_0 + g)$$

$$a' = \frac{\sqrt{2}}{2} (g - a_0)$$

$$a_x = \frac{a_0 + g}{2}, a_y = \frac{a_0 - g}{2}$$

$$\mathbf{a} = \frac{a_0 + g}{2} \mathbf{i} + \frac{a_0 - g}{2} \mathbf{j}$$

讨论: 此题涉及相对运动, 方程中描述 m 的物理量应统一在选定的惯性系中.

例 2-2 把质量为 m 的物体静止放在水平面上, 物体与平面间的摩擦系数为 μ , 给物体施加一水平方向推力, 该力随时间的变化规律 $F = kt$, 物体在受到该力作用沿直线运动, 求 $t' = \frac{2mg\mu}{k}$ 时刻的速度以及在 $0 \rightarrow t'$ 时间内所通过的距离.

解 物体受到合外力为 $F - mg\mu$, 物体的运动方程为

$$kt - mg\mu = m \frac{dv}{dt}$$

当 $t \leq \frac{mg\mu}{k} = t_0$ 时, 物体所受水平方向的力小于物体所受的摩擦力, 物体不会运动.

当 $t \geq t_0$ 物体开始运动, 其后的运动方程为

$$k(t - t_0) = m \frac{dv}{dt}$$

当 $t = t_0$ 时, 物体速度为零, 分离变量后两边积分

$$\int_0^v dv = \frac{k}{m} \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

解得

$$v = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2} (t - t_0)^2$$

$$\text{当 } t = t' \text{ 时, 则 } v' = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{mg\mu}{k} \right)^2$$

再利用 $v = \frac{dx}{dt}$, 得微分方程

$$dx = v dt = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2} (t - t_0)^2 dt$$

$$\text{两边积分后求得 } x = \frac{k}{6m} (t - t_0)^3$$

其中 $t_0 = \frac{mg\mu}{k}$, 当 $t = t'$ 时, 则

$$x' = \frac{k}{6m} \left(\frac{mg\mu}{k} \right)^3$$

讨论: 此题求路程时要利用中间变量 v , 因此在求解过程中, 应注意把中间过渡物理量随时间(或随空间坐标)的一般关系求出, 便于后续の利用. 若用特定时刻的速度来求距离则不对.

例 2-3 气缸活塞质量为 m (见图), 受力 $f(x)$ 沿 x 轴正向, 且 $f(x) = \frac{k}{x}$, k 为常数. 若活塞在 x_0 处以速度 v_0 压缩气体, 问活塞停止在什么地方?

解 建立如图所示坐标系, 考虑活塞在任意位置 x 处, 列出动力学方程

$$\frac{k}{x} = m \frac{dv}{dt}$$

此式中含 v, t, x 三个变量, 因此需换元, 即得

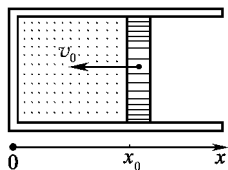
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad v \frac{dv}{dx} = \frac{k}{mx}$$

分离变量, 两边积分

$$\int_{v_0}^0 v dv = \int_{x_0}^x \frac{k}{m} \frac{dx}{x}$$

求得

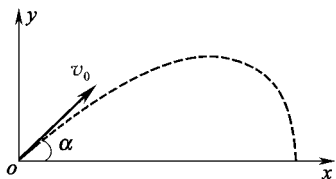
$$x = x_0 e^{-\frac{mv_0^2}{2k}}$$



例 2-3 图

例 2-4 一质量为 m 的物体在重力作用下, 以 v_0 的初速度沿和水平成 α 角的方向抛出, 空气阻力与物体的质量和速度成正比 ($f = -kmv$), 求物体运动的轨迹.

解 取如本例图所示坐标系, 任意时刻物体运动方程分量式为



例 2-4 图

$$-kmv_x = m \frac{dv_x}{dt} \quad (1)$$

$$-mg - kmv_y = m \frac{dv_y}{dt} \quad (2)$$

$$\text{由式(1)两边积分 } \int_{v_0 \cos \alpha}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -k \int_0^t dt,$$

$$\text{得 } v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \cos \alpha \quad (3)$$

再对式(3)两边积分,得

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (4)$$

$$\text{对式(2)两边积分 } \int_{v_0 \sin \alpha}^{v_y} \frac{dv_y}{g + kv_y} = - \int_0^t dt, \text{ 得}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{k} [(g + kv_0 \sin \alpha) e^{-kt} - g] \quad (5)$$

再对式(5)两边积分,得

$$y = \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t \quad (6)$$

由式(4)、式(6)消去 t , 得轨迹方程

$$y = \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \alpha \right) \frac{x}{v_0 \cos \alpha} + \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

例 2-5 在光滑的水平桌面上, 固定着如本例图所示的半圆形屏障, 半径为 R , 质量为 m 的滑块, 以速度 v_0 沿屏障一端的切线方向进入屏障内, 滑块与屏障间的摩擦系数为 μ . 求: (1) 滑块滑出时的速度和所用时间; (2) 摩擦力做的功.

解 (1) 滑块运动到任意位置受力如图所示, 屏的正压力为 N , 摩擦力 $f = \mu N$, 设此时速度为 v , 用自然坐标列出运动方程.

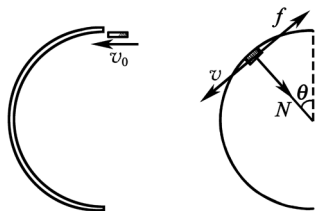
$$\text{法向 } N = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

$$\text{切向 } -f = m \frac{dv}{dt} = -\mu N \quad (2)$$

由式(1)、式(2)得

$$-\mu \frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

题中要求 v , 而式(3)是 $v-t$ 关系, 且题中只知道 m 转过的角度, 故应将式(3)变量代换, 即



例 2-5 图

$$-\mu \frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \cdot \frac{dv}{d\theta}$$

则得

$$\frac{dv}{d\theta} = -\mu v$$

两边积分

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\mu \int_0^\theta d\theta$$

得

$$v = v_0 e^{-\mu\theta} \quad (4)$$

当 $\theta = \pi$ 时, $v = v_0 e^{-\mu\pi}$, 再利用式(3)得

$$dt = -\frac{R}{\mu} \frac{dv}{v^2}$$

两边积分

$$\int_0^t dt = -\frac{R}{\mu} \int_0^v \frac{dv}{v^2}$$

得

$$t = \frac{R}{\mu} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) \quad (5)$$

将 $v = v_0 e^{-\mu\pi}$ 代入式(5), 可求得时间(略).

(2) 摩擦力做的功有两种方法求解.

① 积分方法:

由式(1)、(2)、(4), 得 $f = \mu m \frac{v^2}{R} = \mu m \frac{1}{R} v_0^2 e^{-2\mu\theta}$

摩擦力做功为

$$A_f = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int f ds$$

由弧微分 $ds = R d\theta$, 则有

$$A_f = -\mu m v_0^2 \int_0^\pi e^{-2\mu\theta} d\theta = \frac{m}{2} v_0^2 (e^{-2\mu\pi} - 1)$$

② 用动能定理:

$$A_f = \frac{1}{2} m v_\pi^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m}{2} v_0^2 (e^{-2\mu\pi} - 1)$$

例 2-6 一运动员质量为 M , 手中拿着质量为 m 的篮球, 自地面以仰角 θ 、初速度 v_0 斜向前跳起, 跳至最高点时, 以相对于人的速度 u 将球水平向后抛出, 问运动员向前的距离与不抛球时相比增加多少?

解 以人和球组成的系统为研究对象, 人在最高点(抛球)时, 对地的速度为 $v_1 = v_0 \cos\theta$; 抛球后, 人对地的速度为 v_2 . 人和球组成的系统沿水平方向动量守恒, 即

$$Mv_2 + m(v_2 - u) = (M + m)v_1$$

$$v_2 = v_1 + \frac{m}{M + m}u$$

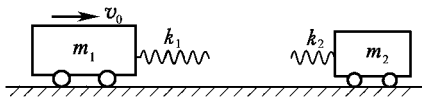
人在水平方向增加的速度为

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{m}{M+m}u$$

所以,人向前的距离比不抛球时增加

$$\Delta x = \Delta v \Delta t = \frac{m}{M+m}u \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

例 2-7 两个带理想弹簧缓冲器的小车质量分别为 m_1 和 m_2 , m_2 不动, m_1 以速度 v_0 与 m_2 碰撞,若已知两车缓冲弹簧的弹性系数分别为 k_1 和 k_2 ,在不计摩擦情况下,求两车相对停止时相互间的作用力多大(弹簧本身质量忽略)?



例 2-7 图

解 小车做弹性碰撞后又分开,在碰撞过程的某一瞬时,两车速度相等均为 v ,达到相对静止,此时两弹簧分别压缩 x_1 和 x_2 ,在整个碰撞过程中动量与机械能守恒,因此有

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \quad (2)$$

由式(1)、(2)解得

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2 \quad (3)$$

由牛顿第三定律,有

$$k_1 x_1 = k_2 x_2 \quad (4)$$

将式(4)代入式(3),得

$$x_1 = \left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1 (k_1 + k_2)} \right]^{\frac{1}{2}} v_0$$

则作用力为

$$k_1 x_1 = \left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right]^{\frac{1}{2}} v_0$$

例 2-8 长为 L 、质量为 m 的匀质软链,放在摩擦系数为 μ 的水平桌面,有长为 l 段下垂到桌面外,且恰好使整个链由静止开始下滑,求整个链滑离桌面时的速度.

解 取如本例图所示坐标系,原点在桌面,开始下滑时下垂段 l ,则满足

$$(L-l)\frac{m}{L}g\mu=l\frac{m}{L}g$$

整理得

$$l=\frac{\mu}{1+\mu}L \quad (1)$$

以链为研究对象,下滑过程中,摩擦力和重力做功,分别用 A_f 与 A_g 表示,则由动能定理有

$$A_f + A_g = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \quad (2)$$

设任意时刻链下垂了 y 段,此时链受摩擦力为

$$f = (L-y)\frac{m}{L}g\mu$$

受到下垂段重力为

$$F = y\frac{m}{L}g$$

则

$$A_f = \int -f dy = -\int_l^L (L-y)\frac{m}{L}g\mu dy = -\frac{\mu m}{2L}g(L-l)^2 \quad (3)$$

$$A_g = \int F dy = \frac{m}{L}g \int_l^L y dy = \frac{1}{2}\frac{m}{L}g(L^2 - l^2) \quad (4)$$

将式(3)、(4)代入式(2),可求得

$$v^2 = (1-\mu)\frac{g}{L}(L-l)^2$$

将式(1)代入,可得

$$v = \sqrt{\frac{gL}{1+\mu}}$$

若把链和地球视为一个系统,则重力为保守内力,显然重力的功等于整个链的重力势能增量的负值,桌面上 $(L-l)$ 段重心下落了 $\frac{1}{2}(L-l)$,下垂 l 段重心下落了 $(L-l)$ 段,则有

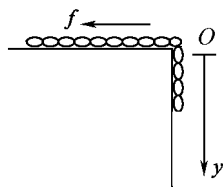
$$A_g = \frac{m}{L}(L-l)g \cdot \frac{1}{2}(L-l) + \frac{m}{L}lg(L-l) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{L}g(L^2 - l^2) = -\Delta E_p$$

由功能原理

$$A_f = \Delta E = \Delta(E_k + E_p)$$

即

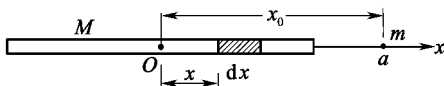
$$A_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{m}{L}g(L^2 - l^2)$$



例 2-8 图

同样,可求得 v . 此例涉及变力的功,动能定理和功能原理. 从解题可见,同一问题可选择不同对象作为研究系统,对应条件发生变化. 此题中用功能原理来解方便些,若消除题中的摩擦力,则系统的机械能守恒.

例 2-9 一匀质细杆,长为 l ,质量为 M ,在杆延长线上距杆中心为 x_0 的 a 点处有质量为 m 的质点. 求:(1) m 受到杆的引力;(2)取无穷远处为引力势能零点,求系统的势能;(3)若取杆心为势能零点,求系统的势能.



例 2-9 图

解 (1) 取如本例图所示坐标系,原点在杆中心,在杆上任意位置 x 处取 dx 微元段,其质量为 dM (视为质点),则由万有引力公式,两质点 dM 与 m 之间的引力大小为

$$dF = G \frac{mdM}{r^2} = G \frac{m dM}{(x_0 - x)^2}$$

其中 $dM = \frac{M}{l} dx$, 积分得到 M 与 m 之间引力大小为

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} G \frac{mM}{l} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} \\ &= G \frac{Mm}{l} \left[\frac{1}{x_0 - \frac{l}{2}} - \frac{1}{x_0 + \frac{l}{2}} \right] \end{aligned}$$

(2) 由势能定义式 $E_{pa} = E_{pb} + \int_a^b \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r}$, 此处 b 点即无穷远处, 且 $E_{pb} = 0$,

则
$$E_{pa} = \int_a^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$\mathbf{F}$ 为 m 受到 M 的引力, 方向与 x 轴相反, 因积分与路径无关, 选直线从 a 积分到 ∞ , 注意 $d\mathbf{r}$ 变为 $dx\mathbf{i}$, 此时 x_0 视为变量, dx 换成 dx_0 , 则

$$\begin{aligned} E_{pa} &= -G \frac{mM}{l} \int_{x_0}^{\infty} \left[\frac{1}{x_0 - \frac{l}{2}} - \frac{1}{x_0 + \frac{l}{2}} \right] dx_0 \\ &= -G \frac{mM}{l} \ln \frac{x_0 + \frac{l}{2}}{x_0 - \frac{l}{2}} \end{aligned}$$

(3) 若取原点为势能零点, 则积分发散, 无解. 由此可见, 尽管理论上势能零

点的选择任意,但实际中应考虑与数学是否矛盾. 本题中这一矛盾的出现源于物理质点模型本身.

例 2-10 初始质量为 m_0 的水滴,在含有饱和水蒸气的空间自由下落,初速为零.在下落过程中,不断有水蒸气凝结在水滴表面上.设水滴的质量随时间线性地增长, $m = m_0 + kt$, k 为常数,试求水滴下落的距离与时间的关系.

解 设 t 时刻水滴质量为 m , 速度为 v . 经 dt 后它的质量增加了 dm , 即为 $m + dm$, 速度变为 $v + dv$, 将 m 与 dm 视为一个系统,应用动量定理有

$$(m + dm)(v + dv) - mv = (mg + gdm)dt$$

略去二阶无穷小,得

$$mdv + vdm = mgdt$$

或

$$d(mv) = mgdt = (m_0 + kt)gdt$$

两边积分

$$\int_0^{mv} d(mv) = \int_0^t (m_0 + kt)gdt$$

得

$$mv = \left(m_0 t + \frac{1}{2}kt^2\right)g = \frac{gt}{2}(m + m_0)$$

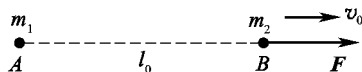
由于 $v = \frac{ds}{dt}$, 则

$$ds = vdt = \frac{gt}{2} \left(1 + \frac{m_0}{m}\right)dt = \frac{g}{2} \left(t + \frac{m_0}{k} - \frac{m_0^2/k}{m_0 + kt}\right)dt$$

两边积分(注意 $t=0, s=0$), 使得

$$s = \frac{g}{2} \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{m_0}{k}t - \frac{m_0^2}{k^2} \ln \left(1 + \frac{k}{m_0}t\right) \right]$$

例 2-11 如本例图 1 所示,在惯性系 S 中有两个质点 A, B , 质量分别为 m_1 与 m_2 , 彼此间有引力. 开始时 A 静止, A, B 相距 l_0 , B 在力 F 的作用下维持速度 v_0 沿直线远离 A 运动 $\left(v_0 < \sqrt{\frac{2Gm_2}{l_0}}, G \text{ 为引力常量} \right)$. 求:



例 2-11 图 1

(1) 两质点的最大距离 l_m ; (2) 从开始到最大距离过程中, 变力 F 所做的功(相对惯性系 S).

解 分析: B 的速度恒定, 而 A 从静止开始在引力作用下加速度运动. A 的速度未达到 v_0 时, A, B 间距越来越大; 当 A 的速度达到 v_0 时, A, B 间距达到最大 l_m . 在 $l_0 \rightarrow l_m$ 过程中, 引力减小, F 也减小, 但 F 的变化规律未知, 若把 m_1 与 m_2 视为一个系统, F 则为外力, 在 S 系中由功能原理可求 F 的功, $A = \Delta E$.

$$\text{系统初始机械能} \quad E_1 = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 - G \frac{m_1 m_2}{l_0}$$

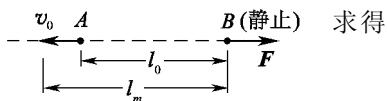
$$\text{系统末态机械能} \quad E_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_0^2 - G \frac{m_1 m_2}{l_m}$$

则有

$$A = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + G m_1 m_2 \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_m} \right) \quad (1)$$

再求 l_m , 求 l_m 要用一定技巧. 由题意, B 相对 S 系做匀速直线运动, 所以以 B 为参考系, B 亦为惯性系. 若从 B 参考系来观察, B 不动, A 则在 l_0 处以 v_0 初速向左做减速运动 (因力引向右, 见本例图 2), 其后相对 B 静止, 此时 A, B 相距 l_m , 且在 B 参考系中看, F 做功为零, 系统的机械能守恒, 即

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - G \frac{m_1 m_2}{l_0} = -G \frac{m_1 m_2}{l_m}$$



例 2-11 图 2

$$l_m = \frac{2Gm_2}{2Gm_2 - l_0 v_0^2} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)中, 求得

$$A = m_1 v_0^2$$

从此例看出 当变力函数未知时, 不能直接用牛顿定律求解, 功能原理显示其独特的威力. 再者, 在不同惯性系中观察问题, 条件可能发生改变, 但功能原理关系不变.

例 2-12 质量为 0.25 kg 的物体, 某一瞬时的位置矢量 $\mathbf{r} = (2.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{k}) \text{ m}$, 此时它的速度 $\mathbf{v} = (-5.0\mathbf{i} + 5.0\mathbf{k}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 受到力 $\mathbf{F} = 4.0\mathbf{j} \text{ N}$ 作用, 那么

(1) 物体对原点的角动量是多少?

(2) 作用在物体上的力对原点的力矩是多少?

解 这里质点的位置矢量 $\mathbf{r}$, 速度 $\mathbf{v}$ 和力 $\mathbf{F}$ 都表示为直角坐标的形式, 因此用矢积的坐标表示法来给出角动量较为方便. 又 $\mathbf{r} = (2.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{k}) \text{ m}$, $\mathbf{v} = (-5.0\mathbf{i} + 5.0\mathbf{k}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $m = 0.25 \text{ kg}$ 及 $\mathbf{F} = 4.0\mathbf{j} \text{ N}$. 根据 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= 0.25 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2.0 & 0.0 & -2.0 \\ -5.0 & 0.0 & 5.0 \end{vmatrix} \\ &= 0.25 [2.0 \times 5.0 - (-2.0) \times (-5.0)] \mathbf{j} = 0 \end{aligned}$$

根据 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, 有

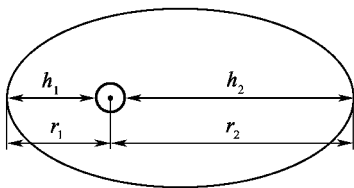
$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 4.0 & 0.0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0.0 & -2.0 \\ 4.0 & 0.0 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
 &= (8.0\mathbf{i} + 8.0\mathbf{k}) (\text{N} \cdot \text{m})
 \end{aligned}$$

例 2-13 我国发射的通信卫星在椭圆形“转移轨道”上运行. 如本例图所示, 此“转移轨道”的近地点高度 $h_1 = 205.5 \text{ km}$, 远地点高度 $h_2 = 35\,835.7 \text{ km}$, 卫星越过近地点时的速率为 $10.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, 取地球半径 $R_e = 6\,378 \text{ km}$. 求:

(1) 卫星越过远地点时的速率;

(2) 卫星在此轨道上运行的周期 [提示: 若 r_1 是卫星在近地点离地球中心的距离, r_2 是卫星在远地点离地球中心的距离, 则椭圆轨道的面积

$$S = \frac{\pi}{2}(r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2}.$$



例 2-13 图

解 按题意, $h_1 = 205.5 \text{ km}$, $h_2 = 35\,835.7 \text{ km}$, 质点近地点的速率为 $v_1 = 10.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $R_e = 6\,378 \text{ km}$

(1) 卫星受有心力作用, 卫星对力心 O 点的角动量守恒, 有

$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$

卫星在远地点的速率

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1 = \frac{R_e + h_1}{R_e + h_2} \cdot v_1 = \frac{6\,378 + 205.5}{6\,378 + 35\,835.7} \times 10.2 = 1.59 (\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$$

(2) 因为卫星对 O 点的角动量守恒, 与行星一样, 卫星位矢在单位时间内扫过的面积 (称为掠面速度) 是一常量, 即

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} v_1 r_1$$

卫星运行周期就是径矢扫过椭圆轨道面积所用的时间. 由椭圆面积

$S = \frac{\pi}{2}(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}$, $r_1 = 6\,383.5\text{ m}$, $r_2 = 42\,213.7\text{ m}$, 有

$$\begin{aligned} T &= \frac{S}{ds/dt} = \frac{\pi(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}}{v_1 r_1} = \frac{\pi(r_1 + r_2)}{v_1} \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \\ &= \frac{\pi(6\,583.5 + 42\,213.7)}{10.2} \sqrt{\frac{42\,213.7}{6\,583.5}} \\ &= 3.805\,8 \times 10^4 (\text{s}) = 10.6 (\text{h}) \end{aligned}$$

例 2-14 质量为 2.0 kg 的质点, $t=0$ 时位于 $\mathbf{r}_0 = (4.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j})\text{ m}$, 其速度为 $\mathbf{v} = (-6.0t^2\mathbf{i})\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求: (1) t 时刻质点对原点的角动量; (2) 此时作用在质点上的力对原点的力矩.

解 (1) 为了求出 t 时刻质点的角动量, 必须先得到 t 时刻位置矢量的表示式, 为此可以从速度的定义出发

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -6.0t^2\mathbf{i}$$

分离变量后, 两边积分得

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r d\mathbf{r} &= \int_0^t (-6.0t^2\mathbf{i}) dt \\ \mathbf{r} - (4.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j}) &= -2.0t^3\mathbf{i} \\ \mathbf{r} &= (4.0 - 2.0t^3)\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j} \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = 2.0[(4.0 - 2.0t^3)\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j}] \times (-6.0t^2\mathbf{i})\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

由于同方向矢量的矢积为零, 且 $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, 得

$$\mathbf{L} = -24.0t^2\mathbf{k}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 根据质点的角动量定理, 有

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(-24.0t^2\mathbf{k}) = -48.0t\mathbf{k} (\text{N} \cdot \text{m})$$

计算完成之后, 讨论一下质点的动量和质点上的受力, 以便与角动量和力矩作比较.

质点的动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = 2.0(-6.0t^2\mathbf{i}) = -12.0t^2\mathbf{i} (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

质点的受力

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -24.0t\mathbf{i} (\text{N})$$

例 2-15 用手指顶一匀质细杆, 长的杆容易保持平衡而短的杆却很难保持

平衡,为什么?

解 设细杆的长为 l , 质量为 m , 细杆与竖直方向的夹角为 θ . 由转动定律

$$mg \frac{l}{2} \sin\theta = \frac{1}{3} ml^2 \beta$$

得

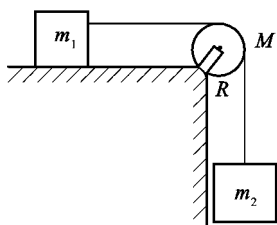
$$\beta = \frac{3g \sin\theta}{2l} \propto \frac{1}{l}$$

这表明, 细杆绕手指转动的角加速度, 与倾角 θ 有关.

在 θ 角相等的条件下, 与杆长 l 成反比. 细杆愈长, 角加速度愈小, 在人的反应时间内, 容易通过减小倾角来调节, 使杆重新达到平衡; 反之, 杆太短, β 太大, 顶杆的人来不及对杆的失衡作出反应, 杆就倒下了.

例 2-16 滑轮可视为半径为 R 、质量为 M 的匀质圆盘, 在本例图中滑轮与绳子间无滑动, 水平面光滑. 若 $m_1 = 50 \text{ kg}$, $m_2 = 200 \text{ kg}$, $M = 15 \text{ kg}$, $R = 0.10 \text{ m}$, 求物体加速度及绳中的张力.

解 运用隔离法分析、联立求解的方法. 重物 m_1 上竖直方向支持力与重力平衡, 沿水平方向, 有



例 2-16 图

$$T_1 = m_1 a_1 \quad (1)$$

对重物 m_2 , 有

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad (2)$$

对滑轮, 它相对转轴的转动惯量是 $J = \frac{1}{2} MR^2$.

由转动定律

$$T_2 R - T_1 R = \frac{1}{2} MR^2 \beta \quad (3)$$

不考虑绳子的伸长, 以下约束方程成立, 即

$$a_1 = a_2 = R\beta \quad (4)$$

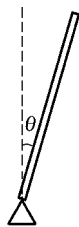
由式(1)、(2)、(3)和式(4)联立, 得

$$\beta = \frac{2m_2 g}{(M + 2m_1 + 2m_2)R}, T_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{M + 2m_1 + 2m_2}, T_2 = \frac{m_2 (M + 2m_1) g}{M + 2m_1 + 2m_2}$$

把 $m_1 = 50 \text{ kg}$, $m_2 = 200 \text{ kg}$, $M = 15 \text{ kg}$, $R = 0.10 \text{ m}$ 代入, 得

$$\beta = 76.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}, a = 7.61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, T_1 = 381 \text{ N}, T_2 = 4.38 \text{ N}$$

例 2-17 如本例图所示, 半径分别为 r_1 和 r_2 、质量为 m_1 和 m_2 的两轮用皮带连接起来, 在主动轮 1 上作用一转动力矩 M_1 (垂直纸面向内), 在从动轮 2 上有一与 M_1 相反的阻力矩 M_2 , 两轮均可视为匀质圆盘. 若皮带不打滑, 且忽略皮



例 2-15 图

带的质量,则两轮的角加速度各为多少?

解 用隔离法分析、联立求解的思路,将图中两轮分成两个绕固定轴转动的刚体来讨论.

对主动轮,它相对 O_1 轴的转动惯量 $J_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2$,由转动定律

$$M_1 + T_1r_1 - T_2r_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\beta \quad (1)$$

对从动轮,它相对 O_2 轴的转动惯量 $J_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2$,于是

$$T_2r_2 - T_1r_2 - M_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2\beta_2 \quad (2)$$

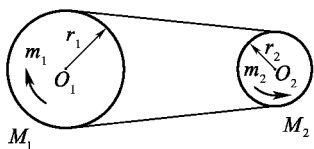
“皮带不打滑”意味着两轮的边缘有相同的切向加速度,以下约束方程成立,

$$\text{即} \quad r_1\beta_1 = r_2\beta_2 \quad (3)$$

由式(1)、(2)和式(3)联立求解,得

$$\text{即} \quad \beta_1 = \frac{2(M_1r_2 - M_2r_1)}{(m_1 + m_2)r_1^2r_2}$$

$$\beta_2 = \frac{2(M_1r_2 - M_2r_1)}{(m_1 + m_2)r_1r_2^2}$$



例 2-17 图

例 2-18 飞轮对中心轴的转动惯量为 J_0 ,初角速度为 ω_0 ,作用在飞轮上的阻力矩为 M (常量).试求:

- (1) 飞轮的角速度减到 $\frac{\omega_0}{2}$ 时,所需的时间 t ;
- (2) 在这一段时间内,飞轮转过的圈数 N ;
- (3) 若阻力矩 $M = a\omega$, a 为常数,再次求解 t 与 N .

解 (1) 这里研究的对象是绕定轴转动的刚体.其转动惯量 J_0 是一个常量,选阻力矩开始作用的瞬时 $t=0$,由定轴的角动量定理,知

$$\int_0^t -Mdt = J_0(\omega - \omega_0)$$

由阻力矩是常数,且 $\omega = \frac{\omega_0}{2}$,有

$$-Mt = J_0\left(\frac{\omega_0}{2} - \omega_0\right)$$

于是,飞轮角速度从 ω_0 减到 $\frac{\omega_0}{2}$ 所需时间为

$$t = \frac{J_0\omega_0}{2M}$$

(2) 由于 $M = \text{常量}$, 故 $\beta = \text{常量}$, 飞轮作匀减速转动, 有

$$-2\beta\theta = \omega^2 - \omega_0^2$$

即

$$-2\frac{M}{J_0}\theta = \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - \omega_0^2$$

得飞轮转过的角度

$$\theta = \frac{3J_0\omega_0^2}{8M}$$

则飞轮转过的圈数

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{3J_0\omega_0^2}{16\pi M}$$

(3) 现在力矩 $M(\theta)$ 是角速度的函数, 则角加速度是变量, 由转动定律知

$$-a\omega = J_0 \frac{d\omega}{dt}$$

分离变量, 两边积分

$$\int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\omega_0/2} -\frac{J_0}{a} \frac{d\omega}{\omega}$$

得

$$t = -\frac{J_0}{a} \ln \frac{\omega_0/2}{\omega_0} = \frac{J_0}{a} \ln 2$$

这就是所求的时间. 求圈数仍由转动定律出发, 对角速度做些变形

$$-a \frac{d\theta}{dt} = J_0 \frac{d\omega}{dt}$$

即

$$d\theta = -\frac{J_0}{a} d\omega$$

两边积分

$$\int_0^\theta d\theta = -\frac{J_0}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_0/2} d\omega$$

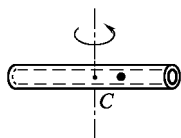
得

$$\theta = \frac{J_0\omega_0}{2a}$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{J_0\omega_0}{4\pi a}$$

例 2-19 如本例图所示, 质量为 0.25 kg 的小球, 可在一根细长均质管中滑动, 管长 1 m , 质量为 1 kg , 可绕过质心 C , 且垂直于管线的铅直轴转动. 设小球通过 C 点时, 管的角速度为 $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 试求小球离开管口时管的角速度.

解 以小球和细管为系统, 小球在管内从转轴移动到管口的过程中, 小球的重力与转轴平行, 外力矩为零, 系统角动量守恒, 即



例 2-19 图

整理得

$$\frac{1}{12}Ml^2\omega_0 = \left[\frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \right] \omega$$

$$\omega = \frac{M\omega_0}{M+3m}$$

把 $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $M = 1.0 \text{ kg}$, $m = 0.25 \text{ kg}$ 代入,

得

$$\omega = 5.71 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

这一角速度是小球离开细杆前, 细杆与小球共同的角速度. 小球离开管口, 系统角动量仍守恒. 小球沿切向飞出, 管的角速度保持不变, 小球对轴的角速度也不变.

例 2-20 一长度为 0.5 m 、质量为 4.0 kg 的匀质细棒, 可绕铅直轴在水平面内转动, 转轴过棒的中心, 棒的初态静止. 一颗 3.0 g 的子弹在棒所在的水平面上飞行, 射向棒的端点, 如本例图所示. 从上向下看, 子弹的方向与棒的夹角为 60° . 如果子弹射入棒端且留在棒中, 射入后子弹和棒的角速度为 $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 求碰撞前子弹的速率.

解 以子弹和细棒为系统. 由于子弹的重力与转轴平行, 外力矩为零. 碰撞过程中, 系统对轴的角动量守恒, 即

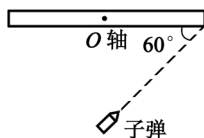
$$mv_0 \frac{l}{2} \sin 60^\circ = \left(\frac{1}{12}Ml^2 + m \frac{l^2}{4} \right) \omega$$

整理得

$$v_0 = \frac{(3m+M)l\omega}{6m\sin 60^\circ}$$

把 $l = 0.50 \text{ m}$, $M = 4.0 \text{ kg}$, $m = 3.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 和 $\omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入, 得

$$v_0 = 1286 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



例 2-20 图

应该特别指出, 系统沿子弹运动方向的动量并不守恒. 这是因为子弹碰撞细杆时, 转轴对细杆有作用力, 这个轴间作用力是外力, 使系统的动量不守恒. 可以做一个演示实验, 体验一下碰撞时转轴对刚体的作用力: 取一根一端有孔的刚性杆, 用一根火柴棒穿过杆上的孔作为转轴, 用拇指和食指捏住火柴棒两端, 让刚性杆悬挂在空中. 然后用锤子轻轻敲击悬挂的刚性杆, 你的手指就会感受到力的作用, 如果敲击太猛, 火柴棒就会折断, 显然, 火柴棒受到了刚性杆的作用力. 由牛顿第三定律, 火柴棒受力的同时, 刚性杆也受到了火柴棒(转轴)的作用力.

例 2-21 如本例图所示, 半径为 R 、质量为 m 的匀质圆盘, 放在粗糙的桌面上, 圆盘可绕其垂直中心轴在水平桌面转动, 圆盘与桌面间的摩擦系数 μ , 初始角速度为 ω_0 , 问:

(1) 经过多长时间后,圆盘才停止转动?

(2) 摩擦阻力共做多少功?

解 (1) 在转动圆盘上取半径为 r 、宽为 dr 的同心圆环,其质量为

$$dm = \sigma 2\pi r dr$$

式中, $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ 是圆盘单位面积上的质量. 该圆环

所受的摩擦力为

$$df = -\mu g dm = -\mu g \sigma 2\pi r dr$$

圆环摩擦力的力矩为

$$dM = r df = -2\pi \mu g \sigma r^2 dr$$

整个圆盘上摩擦力的力矩为

$$M = \int_0^R -2\pi \mu g \sigma r^2 dr = -\frac{2}{3} \pi \mu g \sigma R^3 = -\frac{2}{3} mg \mu R$$

圆盘的转动惯量 $J = \frac{1}{2} m R^2$, 由角动量定理, 即

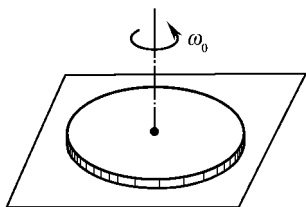
$$\int_0^t -\frac{2}{3} mg \mu R dt = 0 - \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega_0$$

得

$$t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

(2) 根据定轴转动的动能定理, 得

$$A = 0 - \frac{1}{2} J \omega_0^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega_0^2 = -\frac{1}{4} m R^2 \omega_0^2$$



例 2-21 图

自 测 题 二

一、选择题

1. 三个质量相等的小球由两个相同轻弹簧连接, 如图所示, 再用细绳悬于天花板上, 处于静止状态. 将绳子剪断瞬间, 三个小球的加速度分别为

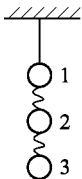
- (A) $a_1 = a_2 = a_3 = g$. (B) $a_1 = g, a_2 = a_3 = 0$.
(C) $a_1 = 2g, a_2 = g, a_3 = 0$. (D) $a_1 = 3g, a_2 = a_3 = 0$. []

2. 如图所示, 质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 射入静止的木块 M , 并陷入木块内, 射入过程中木块不反弹, 则墙壁对木块的冲量为

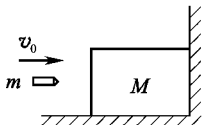
- (A) 0. (B) mv_0 .
(C) $(M+m)v_0$. (D) $-mv_0$. []

3. 质点的质量为 m , 置于光滑固定球面的顶点 A 处, 如图所示. 当它由静止开始下滑到球面上 B 点时, 它的加速度的大小为

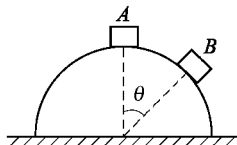
- (A) $a = 2g(1 - \cos\theta)$. (B) $a = g\sin\theta$.
(C) $a = g$. (D) $a = \sqrt{4g^2(1 - \cos\theta)^2 + g^2\sin^2\theta}$. []



选择题 1 图



选择题 2 图



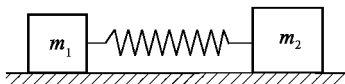
选择题 3 图

4. 如图所示, 两木块质量为 m_1 和 m_2 , 由一轻弹簧连接, 并静止于光滑水平桌面上. 现使两木块靠近而将弹簧压紧, 然后由静止释放. 若弹簧伸长到原长时 m_1 的速率为 v_1 , 则弹簧原来在压缩状态时所具有的势能是

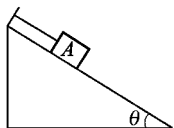
- (A) $\frac{1}{2}mv_1^2$. (B) $\frac{1}{2}m_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_1^2$.
(C) $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2$. (D) $\frac{1}{2}m_1 \frac{(m_1 + m_2)}{m_2} v_1^2$. []

5. 如图所示, 质量为 m 的物体 A 用平行于斜面的细线连接置于光滑的斜面上, 若斜面向左方作加速运动, 当物体开始脱离斜面时, 它的加速度的大小为

- (A) $g\sin\theta$. (B) $g\cos\theta$.
(C) $g\cot\theta$. (D) $g\tan\theta$. []



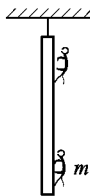
选择题 4 图



选择题 5 图

6. 如图所示,一只质量为 m 的猴,原来抓住一根用绳吊在天花板上的质量为 M 的直杆,悬线突然断开,小猴沿杆子竖直向上爬以保持它离地面的高度不变,此时直杆下落的加速度为

- (A) g . (B) mg/M .
(C) $\frac{M+m}{M}g$. (D) $\frac{M-m}{M}g$. []



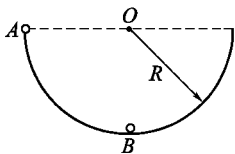
选择题 6 图

7. 质量为 m 的物体自空中落下,它除受重力外,还受到一个与速度平方成正比的阻力的作用.比例系数为 k , k 为正常数.该下落物体的收尾速度(即最后物体做匀速运动时的速度)将是

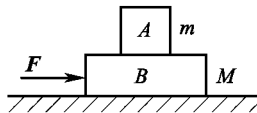
- (A) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$. (B) $\frac{g}{2k}$.
(C) gk . (D) $\sqrt{gk}$. []

8. 如图所示,一质量为 m 的质点,在半径为 R 的半球形容器中,由静止开始自边缘上的 A 点滑下,到达最低点 B 点时,它将对容器的正压力数值为 N ,则质点自 A 滑到 B 的过程中,摩擦力对其做的功为

- (A) $\frac{1}{2}R(N-3mg)$. (B) $\frac{1}{2}R(3mg-N)$.
(C) $\frac{1}{2}R(N-mg)$. (D) $\frac{1}{2}R(N-2mg)$. []



选择题 8 图



选择题 9 图

9. 光滑的水平面上叠放着物体 A 和 B ,质量分别为 m 和 M ,如图所示, A 与 B 之间的静摩擦系数为 μ .若对物体 B 施以水平推力 F ,欲使 A 与 B 一起运动,则 F 应满足

- (A) $0 < F \leq (m+M)g$. (B) $0 < F \leq (\mu m + M)g$.
(C) $0 < F \leq (m+M)\mu g$. (D) $0 < F \leq (m + \mu M)g$. []

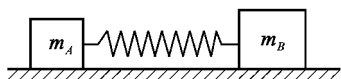
10. 一质点在外力作用下运动时,下述哪种说法正确?

- (A) 质点的动量改变时,质点的动能一定改变.

(B) 质点的动能不变时,质点的动量也一定不变.

(C) 力的冲量是零,外力的功一定为零.

(D) 外力的功是零,外力的冲量一定为零. []



选择题 11 图

11. A, B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B , 且 $m_B = 2m_A$, 两者用一根轻弹簧连接后静止于光滑水平桌面上, 如图所示. 若用外力将两木块推近使弹簧被压缩, 然后将外力撤去, 则此后两木块运动动能之比 E_{kA}/E_{kB} 为

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 2.

(C) $\sqrt{2}$.

(D) $\sqrt{2}/2$. []

12. 体重、身高相同的甲乙两人, 分别用双手握住无摩擦滑轮的绳子各一端, 他们由初速为零向上爬, 经过一定时间, 甲相对绳子的速率是乙相对绳子速率的两倍, 则到达顶点的情况是

(A) 甲先到达.

(B) 已先到达.

(C) 同时到达.

(D) 谁先到达不能确定. []

13. 力 $\mathbf{F} = 12\mathbf{i}$ (SI) 作用于质量 $m = 2\text{ kg}$ 的物体上, 使物体由原点从静止开始运动, 则它在 3 s 末的动量应为

(A) $-5\mathbf{i} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(B) $54\mathbf{i} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(C) $27\mathbf{i} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(D) $-27\mathbf{i} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. []

14. 一根细绳跨过一光滑的定滑轮, 一端挂一质量为 M 的物体, 另一端被人用双手拉着, 人的质量 $m = \frac{1}{2}M$. 若人相对绳子以加速度 a_0 向上爬, 则人相对于地面的加速度 (以竖直向上为正) 是

(A) $(2a_0 + g)/3$.

(B) $-(3g - a_0)$.

(C) $-(2a_0 + g)/3$.

(D) a_0 . []

15. 下列说法正确的是

(A) 若地面为惯性系, 在地面做匀速直线运动的火车是惯性系, 而垂直地做匀速直线飞行的飞机不是惯性系.

(B) 动量定理与动能定理的应用不一定要选择同一惯性系.

(C) 保守力做功与路径无关, 因此只有保守力做功与选择的惯性系无关.

(D) 惯性力是非惯性系中某种真实力的反作用力. []

16. 质量为 m 的质点在外力作用下, 其运动方程为 $\mathbf{r} = A\cos\omega t \mathbf{i} + B\sin\omega t \mathbf{j}$, 式中 A, B, ω 都是正的常数, 则力在 $t_1 = 0$ 到 $t_2 = \pi/(2\omega)$ 这段时间内所作的功为

(A) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2 + B^2)$.

(B) $m\omega^2(A^2 + B^2)$.

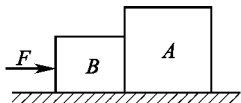
(C) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - B^2)$.

(D) $\frac{1}{2}m\omega^2(B^2 - A^2)$. []

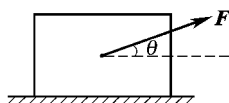
二、填空题

1. 如图所示,在光滑水平桌面上,有两个物体 A 和 B 紧靠在一起,它们的质量分别为 $m_A=2\text{ kg}$, $m_B=1\text{ kg}$. 用一水平力 $F=3\text{ N}$ 推物体 B, 则 B 推 A 的力等于_____;如用同样大小的水平力从右边推 A, 则 A 推 B 的力等于_____.

2. 水平地面上放一物体,它与地面间的滑动摩擦系数为 μ . 现加一恒力 F 如图所示,欲使物体 A 有最大加速度,则恒力 F 与水平方向夹角 θ 应满足_____.



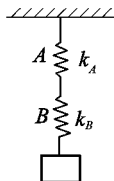
填空题 1 图



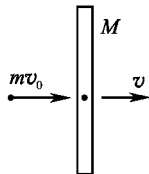
填空题 2 图

3. A, B 两弹簧的倔强系数分别为 k_A 和 k_B , 其质量均忽略不计, 将两弹簧连接起来并竖直悬挂, 如图所示. 当系统静止时, 它们的弹性势能 E_{pA} 和 E_{pB} 之比为_____.

4. 质量为 m 的小球速度为 v_0 , 与一个速度 $v(v < v_0)$ 退行的活动挡板做垂直完全弹性碰撞(设挡板质量 $M \gg m$), 如图所示. 则碰撞后小球的速度 $v =$ _____, 挡板对小球的冲量 $I =$ _____.



填空题 3 图



填空题 4 图

5. 有一个倔强系数为 k 的轻弹簧竖直放置, 下端悬一质量为 m 的小球, 先使弹簧为原长, 而小球恰好与地接触, 再将弹簧上端缓慢地提起, 直到小球刚能脱离地面为止, 在此过程中外力所做的功为_____.

6. 一质量为 m 的质点在指向圆心的平方反比力 $F = -k/r^2$ 的作用下, 做半径为 r 的圆周运动, 此质点的速度 $v =$ _____. 若取距圆心无穷远处为势能零点, 它的机械能 $E =$ _____.

7. 一物体质量为 2 kg , 在合外力 $F = (3 + 2t)i$ (SI) 的作用下, 从静止出发沿水平 X 轴做直线运动, 则当 $t = 1\text{ s}$, 物体的速度 $v =$ _____.

8. 湖面上有一小船静止不动, 船上有一人质量为 60 kg , 如果他在船上向船头走了 4.0 m , 但相对湖底只移动了 3.0 m (水对船的阻力可忽略), 则小船的质量为_____.

9. 一长为 l 、质量为 m 的匀质链条, 放在光滑的桌面上, 若其长度的 $1/5$ 悬挂于桌边下, 将其慢慢拉回桌面, 需做功_____.

10. 光滑水平面上有一轻弹簧, 倔强系数为 k , 弹簧一端固定在 O 点, 另一端拴一个质量



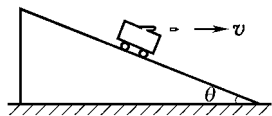
填空题 10 图

为 m 的物体, 弹簧初始时处于自由伸长状态, 若此时给物体 m 一个垂直于弹簧的初速度 v_0 , 如图所示. 则当物体速率为 $\frac{1}{2}v_0$ 时, 弹簧对物体的拉力 $f =$ _____.

11. 力 $\mathbf{F} = 12\mathbf{i}$ (SI) 作用在质量 $m = 2\text{ kg}$ 的物体上, 使物体由原点从静止开始运动, 则它在 3 s 末的动量应为 _____.

12. 已知粒子 A 的质量是粒子 B 的质量的 $\frac{1}{4}$. 开始时, 粒子 A 的速度为 $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, 粒子 B 的速度为 $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, 由于两个粒子相互作用, 粒子 A 的速度变为 $7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, 则此时粒子 B 的速度为 _____.

13. 如图, 有一质量为 M (含炮弹) 的大炮, 在一倾角为 θ 的光滑斜面上下滑, 当它滑到某处速率为 v_0 时, 从炮内沿水平方向射出一质量为 m 的炮弹, 欲使炮车在发射炮弹后的瞬时停止滑动, 则炮弹出口速率 $v =$ _____.

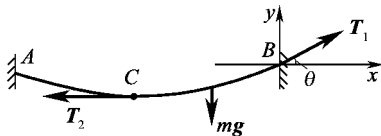


填空题 13 图

14. 一质点在两恒力作用下, 位移为 $\Delta\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ (SI); 在此过程中, 动能增量为 24 J . 已知其中一恒力 $\mathbf{F}_1 = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ (SI), 则另一恒力所做的功为 _____.

三、计算题

1. 一根质量为 m 的晾衣绳两端固定在两墙的同一点上 (见图), 绳两端与水平成 θ 角. 求: (1) 绳两端的张力; (2) 绳最低点的张力 (绳子这种由于自重而形成的曲线叫悬链线).

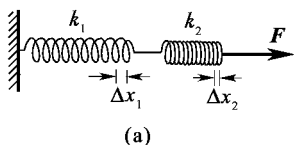


计算题 1 图

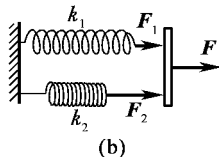
2. 两根弹簧的弹性系数分别为 k_1 和 k_2 .

(1) 试证明: 它们串联起来时 (图 a), 总的弹性系数 $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$;

(2) 试证明: 它们并联起来时 (图 b), 总的弹性系数 $k = k_1 + k_2$.



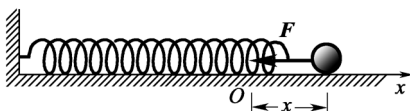
(a)



(b)

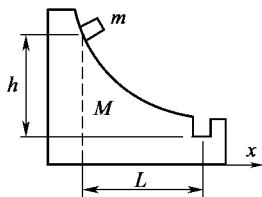
计算题 2 图

3. 一小球在弹簧的作用下做振动 (如图所示), 弹力 $F = -kx$, 而位移 $x = A\cos\omega t$, 其中 k, A, ω 都是常量. 求在 $t = 0$ 到 $t = \pi/(2\omega)$ 的时间间隔内弹力施于小球的冲量.

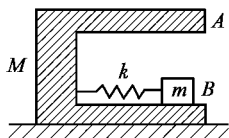


计算题 3 图

4. 质量为 m 的小物体放在质量为 M 的冰块的弧形斜面上, 斜面下端为水平面, 如图所示. 所有接触面的摩擦力可忽略不计, m 从静止滑下来落入下面的凹部而相对 M 静止, 问 M 可滑多远?



计算题 4 图



计算题 6 图

5. 某弹簧不遵守胡克定律, 若施力 F , 则相应伸长为 x , 力与伸长的关系为 $F = 52.8x + 38.4x^2$ (SI). 求:

- (1) 将弹簧从定长 $x_1 = 0.50$ m 拉伸到定长 $x_2 = 1.00$ m 时, 外力所需做的功;
- (2) 将弹簧放在水平光滑桌面上, 一端固定, 另一端系一个质量为 2.17 kg 的物体, 然后将弹簧拉伸到一定长 $x_2 = 1.00$ m, 再将物体由静止释放. 求当弹簧回到 $x_1 = 0.50$ m 时, 物体的速度;
- (3) 此弹簧的弹力是保守力吗?

6. 在质量为 M 的物体 A 的腔内壁上连接一个弹性系数为 k 的轻弹簧, 另一质量为 m 的小物体 B 紧靠着弹簧但不连接, 如图所示. 开始时有外力作用于 B 和 A , 使弹簧被压缩了 Δx , 且处于静止状态, 若各接触面均光滑, 求撤掉外力后物体 A 的反冲速度 u 的大小.

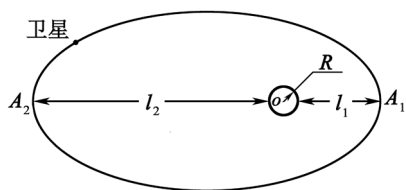
自 测 题 三

一、选择题

- 一质点做匀速率圆周运动时，
 - 它的动量不变，对圆心的角动量也不变。
 - 它的动量不变，对圆心的角动量不断改变。
 - 它的动量不断改变，对圆心的角动量不变。
 - 它的动量不断改变，对圆心的角动量也不断改变。
- 多个力作用在有固定转轴的刚体上，这些力的矢量和为零，则刚体绕该轴转动的角速度将
 - 保持不变。
 - 变大。
 - 变小。
 - 无法确定。
- 长为 l 、质量为 M 的均匀细杆，竖直悬挂在光滑的水平轴上（轴过杆的上部端点），质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射向细杆的下端。设在下面三种情况下杆能够达到的最大摆角分别是 $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ ：(a) 子弹陷入杆内；(b) 子弹失去水平速度而自由下落；(c) 子弹与细杆作完全弹性碰撞后反向折回。判断下面结论中哪个结果是正确的？
 - $\theta_a = \theta_b = \theta_c$ 。
 - $\theta_a > \theta_b > \theta_c$ 。
 - $\theta_a < \theta_b < \theta_c$ 。
 - 无法确定。

二、填空题

- 将一质量为 m 的小球，系于轻绳的一端，绳的另一端穿过光滑水平桌面上的小孔用手拉住。先使小球以角速度 ω_1 在桌面上做半径为 r_1 的圆周运动，然后缓慢将绳下拉，使半径缩小为 r_2 ，在此过程中小球的动能增量是_____。

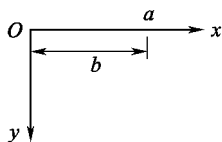


填空题 2 图

- 我国第一颗人造卫星沿椭圆轨道运动，地球的中心 O 为该椭圆的一个焦点（如图所示）。已知地球半径 $R = 6\,378\text{ km}$ ，卫星与地面的最近距离 $l_1 = 439\text{ km}$ ，与地面的最远距离 $l_2 = 2\,384\text{ km}$ 。若卫星在近地点 A_1 的速度 $v_1 = 8.1\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ，则卫星在远地点 A_2 的速度 $v_2 =$ _____。
- 质量为 m 的质点以速度 v 沿一直线运动，则它对直线上任一点的角动量为_____。
- 质量为 m 的质点以速度 v 沿一直线运动，则它对直线外垂直距离为 d 的一点的角动量大小是_____。

5. 哈雷彗星绕太阳的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 它离太阳最近的距离是 $r_1 = 8.75 \times 10^{10} \text{ m}$, 此时它的速率 $v_1 = 5.46 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 它离太阳最远的速率是 $v_2 = 9.08 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 这时它离太阳的距离是 $r_2 =$ _____.

6. 如图所示, x 轴沿水平方向, y 轴竖直向下, 在 $t=0$ 时刻将质量为 m 的质点由 a 处静止释放, 让它自由下落, 则在任意时刻 t , 质点所受的对原点 O 的力矩 $M =$ _____; 在任意时刻 t , 质点对原点 O 的角动量 $L =$ _____.



填空题 6 图

7. 半径 $r=0.6 \text{ m}$ 的飞轮边缘上一点 A 的运动方程为 $s=0.1t^2 \text{ (SI)}$, 当 A 点的速度大小 $v=30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, A 点的切向加速度大小为 _____, 法向加速度的大小为 _____.

8. 三个完全相同的轮子可绕一公共轴转动, 角速度的大小都相等, 但其中一轮的转动方向与另外两个相反, 如果使三个轮子靠近啮合在一起, 系统的动能与原来三个轮子的总动能相比为 _____.

9. 一匀质细杆, 质量为 0.5 kg , 长为 0.40 m , 可绕杆一端的水平轴转动. 若将此杆放在水平位置, 然后从静止开始释放, 杆转动到铅直位置时的动能为 _____, 角速度为 _____.

10. 有一圆板状水平转台, 质量 $M=200 \text{ kg}$ 、半径 $R=3 \text{ m}$, 台上有一人, 质量 $m=50 \text{ kg}$, 当他站在离转轴 $r=1 \text{ m}$ 处时, 转台和人一起以 $\omega_1=1.35 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 的角速度转动. 若轴处摩擦可忽略不计, 当人走到台边时, 转台和人一起转动的角速度 ω 为 _____.

11. 一飞轮的转动惯量为 J , 在 $t=0$ 时的角速度为 ω_0 , 此后飞轮经历制动过程, 阻力矩的大小与角速度 ω 的平方成正比, 比例系数 $k>0$. 当 $\omega = \frac{1}{3} \omega_0$ 时, 飞轮的角加速度 $\beta =$ _____.

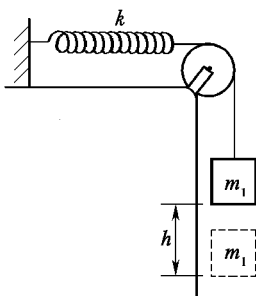
三、计算题

1. 一个质量为 M 、半径为 R 并以角速度 ω 旋转着的飞轮(可看作匀质圆盘), 在某一瞬时突然有一片质量为 m 的碎片从轮的边缘上飞出. 假定碎片脱离飞轮时的瞬时速度方向正好竖直向上, 那么

(1) 问它能上升多高?

(2) 求余下部分的角速度、角动量和转动动能.

2. 如图所示, 一个轻质弹簧的劲度系数为 $k=2.0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 它一端固定, 另一端通过一条水平细线绕过一个定滑轮后, 沿竖直方向和一个质量为 $m_1=80 \text{ g}$ 的物体相连. 定滑轮可看成匀质圆盘, 它的半径 $r=0.05 \text{ m}$, 质量 $m=100 \text{ g}$. 先用手托住物体 m_1 , 使弹簧处于其自然长度, 然后松手. 求物体 m_1 下降 $h=0.5 \text{ m}$ 时的速度多大? 忽略滑轮轴上的摩擦, 并认为绳在滑轮边缘上不打滑.



计算题 2 图

3. 以力 F 将一块粗糙平面紧压在轮上, 平面与轮之间的滑动摩擦系数为 μ , 轮的初角速度为 ω_0 , 问经过多少角度后轮停止转动? 已知轮的半径为 R , 质量为 m , 可看作匀质圆盘, 轴的质量忽略不计, 该压力 F 均匀分布在盘面上.

第3章 相对论

基本要求

1. 理解狭义相对论的两条基本原理及洛伦兹变换式,并能分析和计算相关问题.
2. 理解狭义相对论的时空观,即理解同时的相对性、长度收缩和时间膨胀,并能分析和计算相关问题.
3. 理解狭义相对论动力学的基本规律和结论,并能用来分析和计算简单问题.
4. 了解广义相对论的两条基本原理、主要结论及其实验验证.

内容提要

一、力学相对性原理

在一切惯性系中,力学现象的规律都是相同的,即力学规律具有相同的数学形式.

二、绝对时空观和伽利略变换

时间间隔和长度的测量与参考系(或观察者)无关,叫绝对时空观.

在惯性系 s 和 s' 中,同一事件 p 的时空坐标的变换关系为

$$\begin{aligned} \text{伽利略坐标变换}(s \rightarrow s') & \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \\ \text{伽利略速度变换}(s \rightarrow s') & \begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \end{aligned}$$

带撇量与不带撇量互换, $u \rightarrow -u$ 便得到伽利略逆变换.

力学相对性原理可表述为:经伽利略变换后,牛顿定律的数学形式不变.

三、狭义相对论的两个基本原理

(狭义)相对性原理:在一切惯性系中,物理现象的规律都是相同的,即物理

规律具有相同的数学形式.

光速不变原理:在一切惯性系中,光在真空中的速率都相同,恒为 c .

四、洛伦兹变换

在惯性系 s 和 s' 中,同一事件 p 的时空坐标的变换关系为

$$\begin{aligned} \text{洛伦兹坐标变换}(s \rightarrow s') \quad & \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t &= \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \right. \\ \text{洛伦兹速度变换}(s \rightarrow s') \quad & \left\{ \begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_z &= \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

带撇量与不带撇量互换, $u \rightarrow -u$ 便得到洛伦兹逆变换.

(狭义)相对性原理可表述为:经洛伦兹变换后,物理规律的数学形式不变.

五、狭义相对论的时空观

同时 相对的同时发生在 s' 系中的两个异地事件,在 s 系中观察不是同时的. 只有同时发生在 s' 系中的两个同地事件,在 s 系中观察是同时的.

时间延缓(时钟变慢) 在相对于观察者静止的惯性系中测得两同地事件发生的时间间隔(固有时间)为 τ_0 ,要比对事件发生地有相对运动的惯性系中测得的时间间隔(非固有时间)为 τ 短,其关系为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

长度收缩 物体沿运动方向的长度 L 比其固有长度 L_0 短,其关系为

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

六、相对论质量和相对论动量

质量随物体速度而变化,即

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

相对论动力学方程 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}$

七、相对论中的能量

静能 物体静止时的能量 $E_0 = m_0 c^2$

相对论动能 物体能量的一部分,等于物体由静止运动到速度为 $\mathbf{v}$ 的位置,力对物体所做的功,即

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

总能量 物体的总能量,等于静能与动能之和

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + E_k$$

静能释放 粒子系发生核反应,释放的能量等于粒子系动能的增量

$$\Delta E_k = \Delta m_0 c^2 \quad \Delta m_0 \text{ 叫质量亏损}$$

质能守恒定律 在一个孤立系统内,相对论总能量

$$\sum_i m_i c^2 = \sum_i (E_{ki} + m_{i0} c^2) = \text{恒量}$$

相对论质量守恒定律 在一个孤立系统内,相对论总质量

$$\sum_i m_i = \text{恒量}$$

八、动量和能量关系

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

解题指导与示例

例 3-1 对于由两个质点组成的系统,证明动量守恒定律经伽利略变换后数学形式不变.

解 已知牛顿定律经伽利略变换后数学形式不变,而动量守恒定律可从牛顿定律导出,所以经伽利略变换后数学形式也不变.

设惯性系 s' 相对惯性系 s 以速度 $\mathbf{u}$ 运动,在 s 系中动量守恒定律为

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{恒矢} \quad (1)$$

设两质点在 s' 系的速度分别为 $\mathbf{v}'_1$ 和 $\mathbf{v}'_2$,由伽利略速度变换式得

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{u} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{u} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),得

$$m_1(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{u}) + m_2(\mathbf{v}'_2 + \mathbf{u}) = m \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 + (m_1 + m_2)\mathbf{u} = \text{恒矢}$$

所以

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = \text{恒矢} \quad (3)$$

式(3)说明,动量守恒定律经伽利略变换后数学形式不变.

例 3-2 试用狭义相对论的两个基本原理说明迈克耳逊-莫雷实验的零结果.

解法 1 由相对性原理,在一切惯性系中物理规律都相同,得知光学现象在“以太”参考系与地球参考系中规律相同,具体在迈克耳孙-莫雷实验中是条纹移动数 $\Delta N = \frac{c\delta t}{\lambda}$.

由于光速不变,光线 1 往返的时间

$$t_1 = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c}$$

光线 2 往返的时间

$$t_2 = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c}$$

两光线的时差

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 0$$

将仪器转动 90° 后,时间差

$$\Delta t' = -\Delta t = 0$$

时间差改变

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = 0$$

条纹移动数

$$\Delta N = \frac{c\delta t}{\lambda} = 0$$

解法 2 由相对性原理知道,在惯性系中不能用任何实验(力学的、电磁学的、光学的等)确定系统相对某惯性系(如“以太”)是静止,还是做匀速直线运动.即不能在地球上测出地球相对“以太”的漂移速度 u ,因此“以太”漂移实验得出的是零结果.

例 3-3 一列火车长 0.30 km (火车上观察者测得),以 $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 速度行驶,地面上观察者发现有两个闪电同时击中火车的前后两端.问火车上的观察者测得闪电击中火车前后两端的时间间隔为多少?

解法 1 这是相对论中同时、不同地的两事件的时空变换问题.设地面为 s 系,火车为 s' 系,把两闪电击中火车前后端视为两个事件,击中后端为事件 1,击中前端为事件 2.地面观察者测得两闪电同时击中,即两闪电在 s 系中的时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$.火车的长度是相对火车静止的观察者测得的长度,即两事件在 s' 系中的空间间隔 $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0.30 \times 10^3 \text{ m}$, s' 系相对 s 系的速度即为火车速度.由洛伦兹变换可得两事件时间间隔之间的关系式为

$$t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{u}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

由上式可得火车(s' 系)上的观察者测得两闪电击中火车前后端的时间间隔为

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{u}{c^2}(x'_2 - x'_1) = -9.26 \times 10^{-14} \text{ s}$$

负号说明 $t'_2 < t'_1$,火车上的观察者测得闪电先击中车头 x'_2 处.

解法 2 也可利用式 $t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ 求解.此时应注意,式

中 $x_2 - x_1$ 为地面观察者测得两事件的空间间隔,即 s 系测得的火车长度,而不是火车固有长度.根据相对论,运动物体(火车)有长度收缩效应,把关系式 $x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ 代入上式亦可得与解 1 相同的结果.相比之下解 1 较简便,这是因为解 1 中直接利用了 $x'_2 - x'_1 = 0.30 \text{ km}$ 这一已知条件.

例 3-4 在惯性系 s 中观察到有两个事件发生在同一地点,其时间间隔为 4.0 s ,从另一惯性系 s' 中观察到这两个事件的时间间隔为 6.0 s ,试问从 s' 系测量到这两个事件的空间间隔是多少? 设 s' 系以恒定速率相对 s 系沿 xx' 轴运动.

解 这是相对论中同地、不同时的两事件的时空变换问题. 可以根据时间延缓效应的关系式先求出 s' 系相对 s 系的运动速度 u , 进而得到两事件在 s' 系中的空间间隔 $\Delta x' = u\Delta t'$ (由洛伦兹时空变换同样可得到此结果).

由题意知, 在 s 系中的时间间隔为固有时, 即 $\tau_0 = 4.0 \text{ s}$, 而 $\tau = 6.0 \text{ s}$. 根据时间延缓效应的关系式 $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$, 可得 s' 系相对 s 系的速度为

$$u = \left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^2 \right]^{1/2} c = \frac{\sqrt{5}}{3} c$$

两事件在 s' 系中的空间间隔为

$$\Delta x' = u\tau = 1.34 \times 10^9 \text{ m}$$

例 3-5 一固有长度为 100 m 的火箭相对地球以 $u = 0.8c$ 的速度向右飞行.
 (1) 地球上的观察者测得的火箭长是多少? (2) 若火箭头部发生两次闪光, 地球上的观察者测得其时间间隔为 1 s , 问火箭上的观察者测得的时间间隔是多少?
 (3) 一流星从火箭头部到达尾部, 火箭上的观察者测得时间间隔为 10^{-6} s , 问地球上的观察者测得的时间间隔是多少? 流星的速度多大?

解 (1) 对火箭上的观察者来说火箭是静止的, 其长度是固有长度 $l_0 = 100 \text{ m}$. 对地球上的观察者来说, 火箭是运动的, 速度 $u = 0.8c$, 其长度为非固有长度(动长) l , 由长度收缩公式可得

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 100 \sqrt{1 - \frac{(0.8c)^2}{c^2}} = 0.6 \text{ (m)}$$

(2) 对火箭来说, 两次闪光是同地、不同时的事件, 其时间间隔为固有时间 τ_0 . 对地上观察者来说, 两次闪光是不同地事件, 其时间间隔是非固有时间(运动时) $\tau = 1 \text{ s}$, 由时间延缓公式可得

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 1 \times \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6 \text{ (s)}$$

(3) 设火箭为 s' 系, 地球为 s 系. 流星到达火箭头、尾, 在 s' 系中是两个不同时、不同地的事件, 既不能用时间延缓公式求 s 系的时间间隔, 也不能用长度收缩公式求 s 系的空间间隔, 应该使用普遍的洛伦兹变换公式. 设流星到达火箭头部为事件 1, 到达火箭尾部为事件 2. 取 x 轴的正向向右, 由题设

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = -100 \text{ m}$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 10^{-6} \text{ s}$$

代入洛伦兹变换式

$$\Delta x = \frac{(\Delta x' + u\Delta t')}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = \frac{\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

可得地上测出的两事件的空间间隔和时间间隔

$$\Delta x = \frac{(-100 + 0.8 \times 10^{-6}c)}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \approx 223(\text{m})$$

$$\Delta t = \frac{10^{-6} + \frac{-80c}{c^2}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \approx 1.22 \times 10^{-6}(\text{s})$$

从而,得流星速度

$$v_{\text{流}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx 1.91 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

流星的速度亦可由速度变换公式求出. 设流星相对火箭的速度为 $v_{\text{流}}'$, 根据题设条件容易算出

$$v_{\text{流}}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = -10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

将其代入速度变换公式, 即得

$$v_{\text{流}} = \frac{\frac{v_{\text{流}}' + u}{1 + \frac{v_{\text{流}}' u}{c^2}}}{1 + \frac{-10^8 \times 0.8c}{c^2}} \approx 1.91 \times 10^8 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

计算结果表明, 流星和火箭都是相对地球向右运动, 由于火箭速度大于流星速度, 实际上是火箭追赶流星, 造成流星相对火箭的向左运动.

例 3-6 如果将电子由静止加速到速率为 $0.10c$, 需对它做多少功? 如将电子由速率为 $0.80c$ 加速到 $0.90c$, 又需对它做多少功?

解 在相对论力学中, 动能定理仍然成立, 即 $A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$, 但需注意动能 E_k 不能用 $\frac{1}{2}mv^2$ 表示.

由相对论性的动能表达式和质速关系, 可得当电子速率从 v_1 增加到 v_2 时, 电子动能的增量为

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_{k2} - E_{k1} = (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) \\ &= m_0 c^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{v_2}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} - \left[1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \end{aligned}$$

根据动能定理, 当 $v_1=0, v_2=0.10c$ 时, 外力所做的功为

$$A=\Delta E_k=2.58\times 10^3 \text{ eV}$$

当 $v_1=0.80c, v_2=0.90c$ 时, 外力所做的功为

$$A=\Delta E_k=3.21\times 10^5 \text{ eV}$$

由计算结果可知, 虽然同样将速率提高 $0.1c$, 但后者所做的功比前者要大得多, 这是因为随着速率的增大, 电子的质量也增大.

例 3-7 在宇宙射线中, 能遇到能量为 10^{10} GeV 数量级的质子. 若银河系的直径为 10^5 光年, 分别以银河系和质子为参考系, 计算质子飞越银河系所需的时间 (已知质子的静能 $E_0=938 \text{ MeV}$).

解 由能量的相对论公式 $E=mc^2-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2$, 可以求出质子

对银河系的速度 v . 质子飞越银河系的时间, 以银河系为参考系为非固有时间

(运动时) τ , 以质子为参考系为固有时间 τ_0 , 两者的关系为 $\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

因 $10^{10} \text{ GeV}=10^{13} \text{ MeV}\gg 938 \text{ MeV}$, 故

$$E_k=mc^2-m_0c^2\approx mc^2$$

所以

$$\frac{E_k}{E_0}=\frac{mc^2}{m_0c^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{10^{10}\times 10^3 \text{ MeV}}{938 \text{ MeV}}\approx 10^{10}, \beta=\frac{v}{c}$$

即

$$\sqrt{1-\beta^2}=\frac{1}{10^{10}}\rightarrow 0, \quad \beta\approx 1, \quad v\approx c$$

若以银河系为参考系, 则质子飞越银河系需时间 $\tau=\frac{10^5 \text{ 光年}}{\text{光速}}=10^5 \text{ 年}$; 而在质子参考系中, 它飞越银河系的时间为

$$\tau_0=\tau\sqrt{1-\beta^2}=\frac{10^5}{10^{10}}=10^{-5}(\text{年})\approx 5(\text{min})$$

或者, 质子参考系测得银河系的直径

$$l=l_0\sqrt{1-\beta^2}=10^5\times c\sqrt{1-\beta^2}=\frac{10^5c}{10^{10}}=10^{-5}c$$

则质子飞越银河系的时间

$$\tau_0=\frac{l}{c}=10^{-5}\text{年}\approx 5\text{ min}$$

例 3-8 一粒子静质量为 m_0 , 在沿 x 方向变力 $F=kt$ (k 为恒量) 的作用下由静止开始运动, 求任意 t 时刻的粒子速度 v .

解 在相对论动力学中, 用动力学基本方程及基本规律等求解动力学问题的方法, 与牛顿力学的方法相似.

在相对论中, 力和质点动量的关系是

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

在一维情况下, 可简化为 $F = \frac{dp}{dt}$ 或 $dp = Fdt$, 以 $F=kt$ 代入, 可得

$$dp = kt dt$$

两边积分后得

$$p = \frac{1}{2}kt^2$$

即

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}kt^2$$

解之即得

$$v = \frac{kct^2}{\sqrt{4m_0^2 c^2 + k^2 t^4}}$$

由 $\frac{dx}{dt} = v$, 可求 $x = x(t)$.

自 测 题 四

一、选择题

1. 关于绝对时空观,下列说法中正确的是

- (A) 时间和空间都不变化.
 (B) 时间和物体的空间坐标的测量与参考系无关.
 (C) 时间间隔和长度的测量与参考系无关.
 (D) 时间和物体的空间坐标与物体的运动无关. []

2. 一火箭的固有长度为 L_0 , 相对于地面做匀速直线运动的速度为 v_1 , 火箭上一人从火箭的后端向火箭前端的一个靶子发射一颗相对火箭速度为 v_2 的子弹, 在火箭上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是

- (A) $\frac{L_0}{v_1 + v_2}$. (B) $\frac{L_0}{v_2}$.
 (C) $\frac{L_0}{v_2 - v_1}$. (D) $\frac{L_0}{v_1 \sqrt{1 - (v_1/c)^2}}$. []

3. 宇宙飞船相对于地面以速度 v 做匀速直线飞行, 某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光信号, 经过 Δt (飞船上的钟) 时间后, 被尾部的接收器收到, 则由此可知飞船的固有长度为 (c 表示真空中光速)

- (A) $c\Delta t$. (B) $v\Delta t$.
 (C) $\frac{c\Delta t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$. (D) $c\Delta t \sqrt{1 - (v/c)^2}$. []

4. 有一直尺固定在 s' 系中, 它与 Ox' 轴的夹角 $\theta' = 45^\circ$, 如果 s' 系以速度 u 沿 Ox 方向相对于 s 系运动, s 系中观察者测得该尺与 Ox 轴的夹角

- (A) 大于 45° .
 (B) 小于 45° .
 (C) 等于 45° .
 (D) 当 s' 系沿 Ox 正方向运动时大于 45° , 而当 s' 系沿 Ox 负方向运动时小于 45° . []

5. (1) 对某观察者来说, 发生在某惯性系中同一地点、同一时刻的两个事件, 对于相对该惯性系做匀速直线运动的其他惯性系中的观察者来说, 它们是否同时发生?

(2) 在某惯性系中发生于同一时刻、不同地点的两个事件, 它们在其他惯性系中是否同时发生?

关于上述两个问题的正确答案是

- (A) (1)同时, (2)不同时. (B) (1)不同时, (2)同时.

- (C) (1)同时,(2)同时. (D) (1)不同时,(2)不同时. []

6. 在狭义相对论中,下列说法中哪些是正确的?

- (1) 一切运动物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速.
(2) 质量、长度、时间的测量结果都是随物体与观察者的相对运动状态而改变的.
(3) 在一惯性系中发生于同一时刻、不同地点的两个事件,在其他一切惯性系中也是同时发生的.

(4) 惯性系中的观察者观察一个相对他做匀速直线运动的时钟时,会看到这只钟比相对他静止的相同的时钟走得慢些.

- (A) (1),(2). (B) (1),(2),(3).
(C) (1),(2),(4). (D) (2),(3),(4). []

7. 一宇宙飞船相对地球以 $0.8c$ (c 表示真空中光速) 的速度飞行,一光脉冲从船尾传到船头,飞船上的观察者测得飞船长为 90 m ,地球上的观察者测得光脉冲从船尾发出和到达船头两个事件的空间间隔为

- (A) 90 m . (B) 54 m .
(C) 270 m . (D) 150 m . []

8. 根据相对论力学,动能为 $1/4\text{ MeV}$ 的电子,其运动的速度约等于(c 表示真空中的光速,电子静能 $m_0c^2 = 0.5\text{ MeV}$)

- (A) $0.1c$. (B) $0.5c$.
(C) $0.75c$. (D) $0.85c$. []

9. 某核电站年发电量为 100 亿度,它等于 $36 \times 10^{15}\text{ J}$ 的能量,如果这是由核材料的全部静止能转化而成的,则需要消耗的核材料的质量为

- (A) 0.4 kg . (B) 0.8 kg .
(C) $12 \times 10^7\text{ kg}$. (D) $(1/12) \times 10^7\text{ kg}$. []

二、填空题

1. 力学相对性原理是_____,按照这一原理经_____变换,力学规律的数学形式不变.

2. 惯性系 s 和 s' 的关系如正文中所述, s' 相对 s 的速率为 $0.6c$. 在 s 系中观测,一事件发生在 $t = 2 \times 10^{-4}\text{ s}$, $x = 5 \times 10^3\text{ m}$ 处,则在 s' 系中观测,该事件发生在 $t' = \underline{\hspace{2cm}}\text{ s}$, $x' = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}$ 处.

3. s' 系相对 s 系速度为 $0.8c$, 在 s' 系中观测,一事件发生在 $t'_1 = 0$, $x'_1 = 0$ 处,第二个事件发生在 $t'_2 = 5 \times 10^{-7}\text{ s}$, $x'_2 = -120\text{ m}$ 处,则在 s 系中测得两事件的时空坐标为 $t_1 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ s}$, $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}$; $t_2 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ s}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}$.

4. π^+ 介子是不稳定的粒子,在它自己的参考系中测得平均寿命是 $2.6 \times 10^{-8}\text{ s}$,如果它相对实验室以 $0.8c$ (c 为真空中光速) 的速度运动,那么实验室参考系中测得的 π^+ 介子的寿命是_____ s .

5. 两个惯性系中的观察者 O 和 O' 以 $0.6c$ (c 表示真空中光速) 的相对速度互相接近,如

果 O 测得两者的初始距离是 20 m, 则 O' 测得两者经过时间 $\Delta t' =$ _____ s 后相遇.

6. (1) 在速度 $v =$ _____ 情况下, 粒子的动量等于非相对论动量的两倍;

(2) 在速度 $v =$ _____ 情况下, 粒子的动能等于它的静止能量.

7. 设电子静止质量为 m_0 , 将一个电子从静止加速到速率为 $0.6c$ (c 为真空中光速), 需做功 _____.

8. 一电子以 $0.99c$ 的速率运动 (电子静止质量为 9.11×10^{-31} kg), 则电子的总能量是 _____ J, 电子的经典力学的动能与相对论动能之比是 _____.

三、计算题

1. 观察者甲和乙分别静止于两个惯性系 s 和 s' (s' 系相对于 s 系作平行于 x 轴的匀速度运动) 中, 甲测得在 x 轴上两点发生的两个事件的空间间隔和时间间隔分别为 500 m 和 2×10^{-7} s, 而乙测得这两个事件是同时发生的, 问 s' 系相对于 s 系以多大速度运动?

2. 地面一发射台向东、西两侧距离均为 L_0 的两个接收站 E 与 W 发射信号, 今有一飞机以匀速 u 沿发射台与两接收站的连线由西向东飞行, 试问在飞机上测得两接收站接收到发射台同一信号的时间间隔是多少?

3. 观测者甲和乙分别静止于两个惯性参考系 s 和 s' 中, 甲测得在同一地点发生的两个事件的时间间隔为 4 s, 而乙测得这两个事件的时间间隔为 5 s, 求:

(1) s' 相对于 s 的运动速度;

(2) 乙测得这两个事件发生地点之间的距离.

4. 一艘宇宙飞船的船身固有长度为 $L_0 = 90$ m, 相对于地面以 $u = 0.8c$ (c 为真空中光速) 的匀速度在一观测站的上空飞过.

(1) 观测站测得飞船的船身通过观测站的时间间隔是多少?

(2) 宇航员测得船身通过观测站的时间间隔是多少?

5. 某一宇宙射线中, 介子的动能 $E_k = 7m_0c^2$, 其中 m_0 是介子的静止质量, 试求在实验室中观察到它的寿命是它的固有寿命的多少倍.

第4章 机械振动

基本要求

1. 掌握简谐振动的基本特征,能建立简单谐振动模型的微分方程.
2. 理解描述简谐振动的三个重要参数:振幅、角频率和相位,掌握振幅、周期、频率和相位等概念的物理意义.
3. 掌握描述简谐振动的旋转矢量法,能用以分析和讨论有关的问题.
4. 能根据初始条件写出一维谐振动的运动学方程,并能理解其物理意义.
5. 掌握同方向、同频率简谐振动的合成,了解拍现象.
6. 了解阻尼振动、受迫振动和共振,了解非线性振动.

内容提要

一、振动

1. 机械振动 物体在其平衡位置附近做来回往复的运动,称为机械振动.
2. 简谐振动 一个做往复运动的物体,如果在其平衡位置附近的位移按余弦函数(或正弦函数)的规律随时间变化,这种运动称为简谐振动.

二、简谐振动的特征

1. 简谐振动的动力学特征

做简谐振动的物体受到的力为线性回复力,即

$$F = -kx$$

取系统的平衡位置为坐标原点,则简谐振动的动力学方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

2. 简谐振动的运动学特征

做简谐振动的物体的位置坐标 x 与时间 t 成余弦函数关系,即

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

由上式导出物体的振动速度

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

物体的振动加速度

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

三、简谐振动的特征物理量

1. 振幅 A

物体偏离平衡位置的最大位移的绝对值叫做振幅,它给出了物体运动的范围. 对于给定的振动系统, A 的值由初始条件决定,即

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

2. 周期 T 、频率 ν 和角频率 ω

做简谐振动的物体从某振动状态发生周而复始的一次变化称为一次全振动, 做一次全振动的时间间隔称为振动的周期, 用 T 表示; 周期 T 的倒数 $\nu = 1/T$, 代表物体在单位时间内发生全振动的次数, 称为振动的频率; ω 表示在 2π 秒时间内发生全振动的次数, 称为振动的角频率. 它们都是由振动系统的力学性质决定, 之间的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

3. 相位 $(\omega t + \varphi)$ 及初相位 φ

相位 $(\omega t + \varphi)$ 是描述简谐振动物体瞬间运动状态的物理量; 初相位 φ 是相位的初始值, 它与振动物体的初始状态对应, 其值由初始条件决定, 即

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

四、简谐振动的旋转矢量法

将简谐振动与一旋转矢量对应, 使矢量做逆时针匀速转动. 其长度等于简谐振动的振幅 A ; 其角速度等于简谐振动的角频率 ω ; 当 $t=0$ 时, 它与参考坐标轴的夹角为简谐振动的初相位 φ ; t 时刻它与参考坐标轴的夹角为简谐振动的位相 $(\omega t + \varphi)$. 旋转矢量 A 的末端在参考坐标轴上的投影点的运动, 即代表质点做简谐振动.

五、简谐振动的能量

简谐振动系统既有动能, 又有势能, 它们都随时间变化而变化, 但总的机械

能守恒,即

$$\text{动能 } E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{势能 } E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{机械能 } E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

六、简谐振动的合成

1. 同方向、同频率的简谐振动的合成

合成后仍为同方向、同频率的简谐振动,合振动的振幅和初相位由两分振动的振幅和初相位决定,即

$$\text{振幅 } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\text{初相位 } \varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

当两个简谐振动的相位差为

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

则合振动振幅最大,即 $A = A_1 + A_2$;

当两个简谐振动的相位差为

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

则合振动振幅最小,即 $A = |A_1 - A_2|$.

2. 同方向、不同频率的简谐振动的合成

两振动频率差与这两振动的频率相比很小时,合成后产生拍的现象,拍频 ν' 等于两振动的频率差,即

$$\nu' = |\nu_2 - \nu_1|$$

3. 相互垂直的两个同频率简谐振动的合成

合运动的轨迹通常为椭圆,其具体形状决定于两分振动的相位差和振幅.

4. 相互垂直的两个不同频率简谐振动的合成

两个分振动的频率为简单整数比时,合运动轨迹为李萨如图形.

七、阻尼振动

当振动系统受到各种阻尼作用时,系统的能量将不断减少,振幅也随时间增加而不断减小. 这种系统能量(或振幅)随时间增大而减小的振动,称为阻尼振动.

八、受迫振动

振动系统在周期性外力的持续作用下进行的振动,称为受迫振动.这种周期性的外力称为强迫力.稳态时,振动频率等于强迫力的频率.当强迫力的频率等于振动系统的固有频率时,将发生共振现象.

解题指导与示例

学习本章应重点掌握简谐振动的特征、振动方程以及旋转矢量方法的运用,既要注意对相关概念的理解,又要注意运用概念及理论解决相关的实际问题.

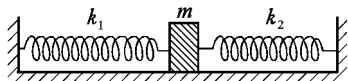
本章主要问题是在加深对简谐振动的特征及规律的理解,题型主要有如下几类:

1. 判断物体是否做简谐振动.可通过对物体的受力分析,看合力是否具有 $F = -kx$ 的形式;或通过对物体的受力分析,建立动力学关系,看是否符合简谐振动的微分方程的形式.

2. 根据系统的力学性质和初始条件,写出振动方程.可通过对已知条件的分析,求出 A 和 φ ,既可用解析法,也可用旋转矢量法.

3. 已知振动方程求描述简谐振动的特征量(如 A, ω, T 等)或振动状态量(如 x, v, E_k, E_p 等).这类问题可通过正确理解各量的物理意义及其相互关系来解决.

例 4-1 如本例图所示,劲度系数分别为 k_1, k_2 的两个弹簧与质量为 m 的物体连接成系统.忽略各种摩擦阻力,问物体的运动是否为简谐振动?



例 4-1 图

解 判断物体运动是否为简谐振动的通常有两种:一是看其受力特点;二是看其运动规律.本题给出了物体的受力情况,因此应从其受力特点来分析:先找出其受力示式,后分析其

受力特点,然后再根据特点来下结论.

以物体的平衡位置为原点 O 作 X 轴.当物体处于 x 位置时,所受合力

$$F = F_1 + F_2 = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x = -kx$$

式中, $k = k_1 + k_2$, 故知物体的运动为简谐振动.

例 4-2 长为 0.5 m 的轻弹簧,上端固定,下端挂一质量为 0.10 kg 的砝码.当砝码静止时,弹簧的长度为 0.6 m .若将砝码上抬,使弹簧缩短到原长后释放,那么

- (1) 证明:砝码的上、下振动为简谐振动;
- (2) 求此简谐振动的振幅和角频率;
- (3) 求此简谐振动的振动方程(从释放开始计时).

解 (1) 建立如本例图所示的坐标系, 设末端挂砝码时弹簧的自由端为坐标原点 O' , 挂砝码后新的平衡位置为点 O , 弹簧的伸长量为 Δl , 于是有

$$mg = k\Delta l \quad (1)$$

设振动中的某一时刻砝码位于 x' 处, 则其所受的合外力

$$F = mg - kx' \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 得

$$F = k\Delta l - kx' = -k(x' - \Delta l) \quad (3)$$

令 $x = x' - \Delta l$, 并以新的平衡位置点 O 建立新坐标轴 Ox , 于是有

$$F = -kx$$

可见, 砝码的运动是以 O 为原点的简谐振动.

(2) 据题意知 $A = \Delta l = 0.10 \text{ m}$, 故

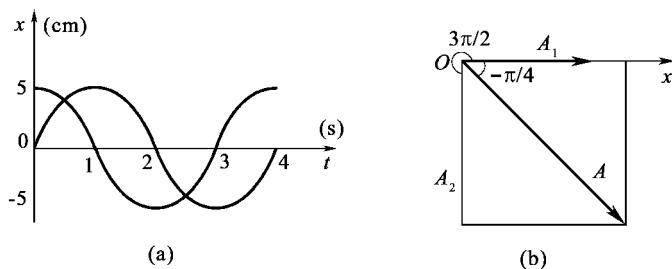
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.10}} = 9.9 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$$

(3) 因 $t=0$ 时, $x_0 = A \cos \varphi = -0.10 \text{ m}$, 即 $\cos \varphi = -1$, 故知 $\varphi = \pi$, 砝码的简谐振动方程为

$$x = 0.10 \cos(9.9t + \pi) \text{ m}$$

例 4-3 两个频率和振幅都相同的简谐振动的 $x-t$ 关系曲线, 如本例图(a)所示. 求:

- (1) 两个简谐振动的相位差;
- (2) 两个简谐振动的合成振动的振动方程.



例 4-3 图

解 (1) 由题给的 $x-t$ 图可知, $A_1 = A_2 = 5 \text{ cm}$, $T = 4 \text{ s}$, $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. 当 $t=0$ 时, 两简谐振动的旋转矢量图如图(b)所示. 利用旋转矢量图示法, 可判定

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$$

(2) 利用旋转矢量法, 可知合成振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

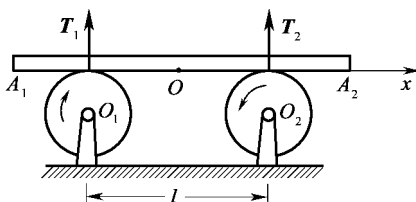
合成振动的初相

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{-A_2}{A_1} = -\frac{\pi}{4}$$

合成振动的角频率与分振动的角频率相同, 都为 $\frac{\pi}{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. 故合成振动的振动方程为

$$x = 5\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}$$

例 4-4 如本例图所示, 一质量为 m 的匀质直杆放在两个迅速旋转的轮上, 两轮旋转方向相反, 轮间距离 $l = 20 \text{ cm}$, 杆与轮之间的摩擦系数 $\mu = 0.18$. 证明: 在此情况下直杆做简谐振动, 并求其振动周期.



例 4-4 图

解 以两轮轮心间距的中心为原点做 X 轴. 当重心由 $x=0$ 处移到 x 处时, 考虑到杆对通过 A_2 的水平轴 (与 X 轴垂直) 无转动, 于是有

$$T_1 l - mg \left(\frac{l}{2} - x \right) = 0 \quad (1)$$

同理, 可得

$$T_2 l - mg \left(\frac{l}{2} + x \right) = 0 \quad (2)$$

由式(1)、式(2)得

$$T_1 - T_2 = -\frac{2mgx}{l} \quad (3)$$

故杆受到的摩擦力 (沿 X 轴)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = T_1 \mu - T_2 \mu = \mu (T_1 - T_2) = -\frac{2\mu mg}{l} x$$

于是有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2\mu g}{l} x = 0$$

所以,杆的运动为简谐振动,其周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = \pi \sqrt{\frac{2 \times 0.2}{0.18 \times 9.8}} = 1.5(\text{s})$$

例 4-5 质量为 0.20 kg 的质点作简谐振动,其振动方程为 $x = 0.60 \sin\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$, 式中 x 以米、 t 以秒计. 求:

- (1) 振动周期;
- (2) 质点初始位置、初始速度;
- (3) 质点在经过 $\frac{A}{2}$, 且向正向运动时的速度和加速度, 以及此时刻质点受的力;
- (4) 质点在何位置时, 其动能、势能相等?

解 (1) 由振动方程 $x = 0.60 \sin\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$ 知, $A = 0.60 \text{ m}$, $\omega = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 故振动周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.14}{5} = 1.26(\text{s})$.

(2) 由振动方程, 得

$$x_0 = -0.60 \text{ m}$$

$$v_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 3.0 \cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(3) 由旋转矢量图知, 此时的相位

$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

速度

$$v = -A\omega \sin\varphi = -0.60 \times 5 \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 2.6(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

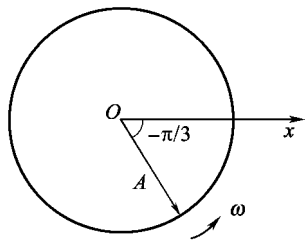
加速度

$$a = -A\omega^2 \cos\varphi = -0.60 \times 5^2 \times \frac{1}{2} = -7.5(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

所受的力

$$F = ma = 0.2 \times (-7.5) = -1.5(\text{N})$$

(4) 设质点在 x 处的动能与势能相等. 由于振动的总能量为常量, 即



例 4-5 图

$E_k + E_p = E$ (常量), 故有

$$E_k = E_p = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

即

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}kA^2$$

解之得

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm 0.42 \text{ m}$$

例 4-6 一光滑平面上的弹簧振子, 劲度系数为 k , 振子质量为 M , 当它做振幅为 A 的谐振动时, 一块质量为 m 的黏土从高度为 h 处自由下落在振子上, 那么

(1) 振子在最远位置处, 黏土落在振子上, 其振动周期和振幅有何变化?

(2) 振子经过平衡位置处, 黏土落在振子上, 其周期与振幅有何变化?

解 (1) 根据水平方向的动量守恒知, 黏土落下与振子相碰后, 振子在水平方向的速度 $v=0$ 不变, 则新系统的振幅

$$A' = x_{\max} = A \text{ (原振子的振幅)}$$

即振幅不变. 而

$$\omega^2 = \frac{k}{M}, \quad \omega'^2 = \frac{k}{M+m} < \omega^2$$

故

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} > \frac{2\pi}{\omega} = T$$

即周期增大.

(2) 此时原振子的速度

$$v = \pm \omega A = \pm A \sqrt{\frac{k}{M}}$$

黏土落下与 M 相碰后, 新系统的速度

$$v' = \frac{Mv}{M+m} = \pm \frac{\sqrt{Mk}}{M+m}A$$

根据机械能守恒定律, 得

$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(M+m)v'^2$$

解之得

$$A' = \sqrt{\frac{M}{M+m}} A < A$$

其周期增大情况与(1)相同.

第5章 机械波

基本要求

1. 理解机械波产生的条件.
2. 掌握描述波动的各物理量的物理意义及其相互关系,并能熟练确定这些量.
3. 掌握由质点的简谐振动方程建立平面简谐波的波动方程的方法以及波动方程的物理意义,理解波形曲线.
4. 了解波动能量传播特征及波的能量、能量密度、能流、能流密度等概念.
5. 理解惠更斯原理和波的叠加原理,掌握波的相干条件,能用相位差或波程差概念来分析和确定相干波叠加后振幅加强和减弱的条件.
6. 理解驻波形成的条件,掌握驻波方程及驻波的波形特征,了解半波损失及其条件.
7. 了解多普勒效应及其产生的原因.

内容提要

一、波动

振动的传播过程称为波动. 通常波动分为两大类:一类是变化的电场和变化的磁场在空间的传播,称为电磁波;一类是机械振动在媒质中的传播,称为机械波. 机械波的产生必须具备两个条件:一是要有作机械振动的物体,称为波源;一是要有传播振动的弹性媒质.

二、描述波动的几个物理量

1. 波速 u

波动是振动状态(即相位)的传播,振动状态在单位时间内传播的距离称为波速,也称相速,用 u 表示. 对于机械波,波速通常由媒质的性质决定.

2. 波动的周期 T 和频率 ν

波动的周期是指一个完整波形通过媒质中某一固定点所需的时间,用 T 表示. 周期的倒数称为频率,波动的频率是指单位时间内通过媒质中某固定点完整波的数目,用 ν 表示. 由于波源每完成一次全振动,就有一个完整的波形发出

去. 所以, 当波源相对于媒质静止时, 波动的周期即为波源振动的周期, 波动的频率即为波源振动的频率. 因此, 波动的周期和频率由波源决定.

3. 波长 λ

同一波线上相邻的相位差为 2π 的两质点之间的距离称为波长, 用 λ 表示. 波长、波速与波动的周期、频率的关系为

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu}$$

三、平面简谐波

平面简谐波的波动方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

波动方程的物理意义:

(1) 当 x 一定时, 波动方程表示在波线的 x 处, 质点简谐振动的振动方程.

(2) 当 t 一定时, 波动方程表示 t 时刻在波线上各质点离开各自平衡位置的分布情况, 对横波而言, 即 t 时刻的波形.

(3) 当 x, t 都变化时, 波动方程表示一沿 X 轴方向传播的一列波的波动情况, 即代表一行波.

四、波的能量

1. 波的能量

$$\text{动能 } dE_k = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$\text{势能 } dE_p = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$\text{机械能 } dE = dE_k + dE_p = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

2. 波的能量密度和平均能量密度

单位体积媒质所具有的能量为波的能量密度, 用 w 表示, 波的能量密度为

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

能量密度在一个周期内的平均值称为波的平均能量密度, 用 $\bar{w}$ 表示, 有

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

3. 波的平均能流

一个周期内通过与波的传播方向垂直的某个面的能量, 用 $\bar{P}$ 表示. 通过 ΔS

的平均能流为

$$\bar{P} = \bar{w}u\Delta S$$

4. 波的平均能流密度

单位时间通过与波的传播方向垂直的单位面积的平均能量为平均能流密度 (也称为波的强度), 用 I 表示, 有

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$

五、惠更斯原理

媒质中波前上的各点, 都可以看作是发射子波的波源, 其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波前, 这就是惠更斯原理. 根据这一原理, 只要知道了某一时刻的波面, 就可以用几何作图的方法来确定下一时刻的波面, 因而解决了波的传播问题.

六、波的叠加原理

几列波相遇时, 保持各自的特点通过媒质中波的叠加区域, 在它们重叠的区域内, 每一质点的振动都是各个波单独引起的振动的合成.

七、波的干涉

1. 干涉现象

当两列(或几列)波在空间某一区域同时传播时, 叠加后的强度在空间这一区域内重新分布, 形成有的地方强度始终加强, 另一些地方强度始终减弱, 整个区域中强度有一稳定分布的现象, 叫波的干涉.

2. 干涉条件

两列波频率相同、振动方向相同及相位差恒定是形成干涉必须满足的相干条件.

干涉加强

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

则合振动的振幅有极大值: $A = A_1 + A_2$, 为相长干涉;

干涉减弱

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

则合振动的振幅有极小值: $A = |A_1 - A_2|$, 为相消干涉.

八、驻波

两列频率、振动方向和振幅都相同, 而传播方向相反的简谐波, 叠加后形成

驻波,其波动方程为

$$y=2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$$

其振幅 $\left| 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ 随 x 作周期变化,因而为分段的独立振动.无波形和能量的传播,有恒定的波腹和波节出现.

$$\text{波节位置 } x=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$\text{波腹位置 } x=\pm k\frac{\lambda}{2} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

波由波疏媒质行进到波密媒质,在分界面反射时会形成波节,相当于反射波在反射点损失了半个波长的波程,这种现象称为半波损失.

九、多普勒效应

观察者和波源之间有相对运动时,观察者测到的频率 ν_r 和波源的频率 ν_s 不同的现象称为多普勒效应,其关系为

$$\nu_r = \frac{u+v_r}{u-v_s} \nu_s$$

当观察者向着波源运动, $v_r > 0$; 当观察者背离波源运动, $v_r < 0$; 波源向着观察者运动时, $v_s > 0$; 波源背离观察者运动时, $v_s < 0$.

解题指导与示例

学习本章应重点掌握平面简谐波的波动方程,以及波的产生、描述、能量及干涉、驻波等问题.

平面简谐波的波动方程以及波的干涉,是本章的重点内容.学习波动方程时,要特别注意理解建立波动方程的思路,要从三个不同角度,即从 x 一定、 t 一定以及 x 和 t 都变化的三个方面去仔细理解波动方程的物理意义.

学习机械波的干涉问题时,要注意掌握波的相干条件,并能熟练地应用相位差或波程差的概念来分析和确定相干波叠加后振幅的极大与极小问题.

对波动特征及规律的理解,大致可分为三类:一类是已知描述波动的一些特征量求波动方程,或是已知波动方程求波的特征量,求解这类问题,关键是要弄清各特征量的相互联系及波动方程的物理意义,并与波动方程的标准式进行比较;另一类是求解波的能量有关问题,这类问题的求解要注意弄清波动能量的特点以及它与振动能量特点的区别;第三类是波的叠加,求解此类问题的关键是要弄清波的相干条件及合振幅与相位差的关系.

例 5-1 已知平面简谐波的波动方程为

$$y = 20 \cos \pi (2.5t - 0.01x) \text{ m}$$

求其波长、周期和波速.

解 知道波动方程求描述波动的物理量,常用的方法是先将波动方程与标准方程进行比较,然后“对号入座”便可求出待求的物理量.

将题设的方程与波动方程的标准式 $y = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ 进行比较,得

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.01\pi, \frac{2\pi}{T} = 2.5\pi$$

解之得

$$\lambda = \frac{2}{0.01} = 200 (\text{m})$$

$$T = \frac{2}{2.5} = 0.8 (\text{s})$$

故波速

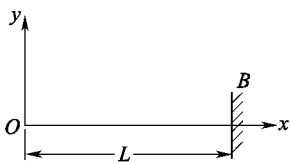
$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{200}{0.8} = 250 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

例 5-2 如本例图所示,某平面波在坐标原点 O 处的振动方程为

$$y_0 = A \cos \omega t$$

设波速为 u ,入射波到达 B 处反射时没有半波损失,求反射面处的入射波和反射波的表达式.

解 由题设条件知,入射波的波动方程为 $y_{\lambda} = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$,波自 O 点传



例 5-2 图

到反射处的时间 $\Delta t = \frac{L}{u}$. 故入射波在反射面处的表达式为

$$y_B = A \cos \omega \left(t - \frac{L}{u} \right)$$

入射波到达反射面后便沿 x 轴的负向传播,到达任意点 x 处所需的时间

$$\Delta t' = \frac{L-x}{u}$$

于是,反射波的波动方程为

$$y_{\text{反}} = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{L-x}{u} \right) - \frac{\omega L}{u} \right]$$

$$= A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) - \frac{2\omega L}{u} \right]$$

例 5-3 一空气正弦波沿直径为 0.14 m 的圆柱形管行进, 波的强度为 $9 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, 频率为 300 Hz, 波速为 $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求:

- (1) 波的平均能量密度和最大能量密度;
- (2) 两相邻的同相面间的波中平均含有的能量.

解 (1) 由题意知, 垂直于波传播方向的面积

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 3.14 \times \left(\frac{0.14}{2} \right)^2 = 1.54 \times 10^{-2} (\text{m}^2)$$

由平均能量密度与波强、波速的关系, 得

$$\bar{w} = \frac{I}{u} = \frac{9 \times 10^{-3}}{300} = 3 \times 10^{-5} (\text{J} \cdot \text{m}^{-3})$$

则最大能量密度

$$w = \rho A^2 \omega^2 = 2\bar{w} = 6 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

(2) 两相邻的同相面间的波中包含的能量就是一个波长的距离中包含的能量, 而

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = \omega_m \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

故

$$\begin{aligned} \bar{w}_\lambda &= \int_0^\lambda w S dx = \int_0^\lambda S \omega_m \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \omega_m S \lambda = \frac{1}{2} \omega_m S \frac{u}{v} \\ &= \frac{6 \times 10^{-5}}{2} \times 0.0154 \times \frac{300}{300} \\ &= 4.62 \times 10^{-7} (\text{J}) \end{aligned}$$

例 5-4 两相干波源 B, C 相距 30 m, 振幅均为 0.01 m, 初相差为 π . 两波源相向发出平面简谐波, 频率均为 100 Hz, 波速均为 $430 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求:

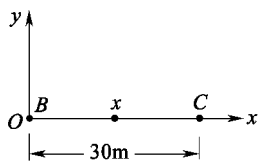
- (1) 两波源的振动方程;
- (2) 两谐波的波动方程;
- (3) 在线段 BC 上, 因干涉而静止的各点的位置.

解 (1) 建立如本例图所示的坐标系. 设波源 B 位于坐标原点 O, 初相 $\varphi_B = 0$, 则波源 C 的初相 $\varphi_C = \pi$. 两波源的振动方程分别为

$$y_B = 0.01 \cos 200\pi t \text{ m}$$

$$y_C = 0.01 \cos(200\pi t + \pi) \text{ m}$$

(2) 设 x 为 B, C 间的任一点, 则两波的波动方程分别为



例 5-4 图

$$y_B = 0.01 \cos 200\pi \left(t - \frac{x}{430} \right) \text{ m}$$

$$\begin{aligned} y_C &= 0.01 \cos \left[200\pi \left(t + \frac{x-30}{430} \right) + \pi \right] \\ &= 0.01 \cos \left[200\pi \left(t - \frac{30-x}{430} \right) + \pi \right] (\text{m}) \end{aligned}$$

(3) 因干涉而静止的点是合振幅有极小值的点,

故

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_B = \pi + \frac{x-30+x}{430} \times 200\pi = (2k+1)\pi$$

解之得

$$x = (15 + 2.15k) \text{ m} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6)$$

例 5-5 本例图中所示为一平面波在 $t=0.5 \text{ s}$ 时的波形, 此时 p 点的振动速度为 $v_p = 4\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求波动方程.

解 由图示可知, $A=1 \text{ m}$, $\lambda=4 \text{ m}$. 由 $|v_p| = \omega A$, 得

$$\omega = \frac{|v_p|}{A} = \frac{4\pi}{1} = 4\pi (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi/\omega} = \frac{4}{2\pi/4\pi} = 8 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

设待求波动方程为 $y = \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$, 由图可见, 当 $t=0.5, x=1 \text{ m}$ 时, $y=-1$, 即

$$\cos \left[4\pi \left(0.5 - \frac{1}{8} \right) + \varphi \right] = -1$$

$$4\pi \left(0.5 - \frac{1}{8} \right) + \varphi = 2k\pi + \pi$$

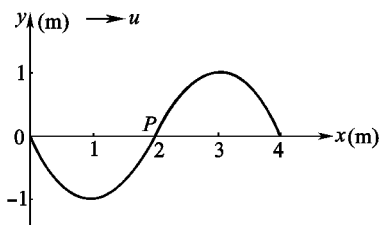
解之得 (取 $k=1$)

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi$$

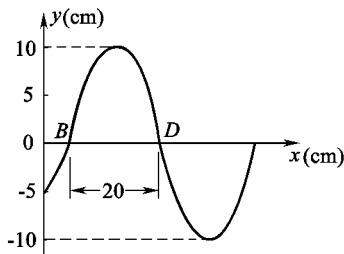
即

$$y = \cos \left[4\pi \left(t - \frac{x}{8} \right) + \frac{3}{2}\pi \right]$$

例 5-6 一沿 X 轴正向传播的平面波在 $t = \frac{1}{3} \text{ s}$ 时的波形如本例图所示, $T=2 \text{ s}$. 求:



例 5-5 图



例 5-6 图

- (1) 此波的波动方程;
 (2) D 点的振动方程.

解 由图知 $T=2\text{ s}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$, $A=10\text{ cm}$, $\lambda=40\text{ cm}$, 波速 $u=\frac{\lambda}{T}=20\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

- (1) 设所求波动方程为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

对 $(0, -5)$ 点, $t=\frac{1}{3}\text{ s}$ 时, $y=-5\text{ cm}$, 且振动速度 $v<0$, 将有关数据代入上述方

程可求得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, 故此波的波动方程为

$$y=0.1\cos\left[\pi\left(t-\frac{x}{0.2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]\text{ m}$$

- (2) 对 D 点, $t=\frac{1}{3}\text{ s}$ 时, $y_D=0$, 且 $v_D>0$, 由(1)的结果可得

$$\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{0.2}\right)+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$$

解之得

$$x=\frac{7}{30}\text{ m}$$

将之代入波动方程, 即得 D 点的振动方程为

$$y_D=0.1\cos\left(\pi t-\frac{5}{6}\pi\right)\text{ m}$$

例 5-7 S_1, S_2 为两个相干波源, 相互间距为 $\frac{\lambda}{4}$, S_1 的相位比 S_2 的超前 $\pi/2$.

如果两波在 S_1 和 S_2 的连线方向上各点强度相同, 均为 I_0 , 求 S_1, S_2 的连线上及 S_1, S_2 外侧各点合成波的强度.

解 设 P 为波源 S_1 外侧任意一点, 相距 S_1 为 r_1 , 相距波源 S_2 为 r_2 , 则 S_1 , S_2 的振动传到 P 点的相位差

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{20} - \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = -\pi\end{aligned}$$

合振幅

$$A = |A_1 - A_2| = 0$$

故

$$I_P = 0$$

设 Q 为 S_2 外侧的任意一点, 同理可求得 S_1, S_2 的振动传到 Q 的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = 0$$

合振幅

$$A = A_1 + A_2 = 2A_1$$

合成波的强度与入射波的强度之比

$$\frac{I_Q}{I_0} = \frac{4A_1^2}{A_1^2} = 4$$

即

$$I_Q = 4I_0$$

例 5-8 两列波在一根很长的细绳上传播, 其波动方程为

$$y_1 = 0.06\cos\pi(x - 4t) \text{ m}$$

$$y_2 = 0.06\cos\pi(x + 4t) \text{ m}$$

- (1) 证明: 细绳上的振动为驻波式振动;
- (2) 求波节和波腹的位置;
- (3) 波腹处的振幅有多大, 在 $x = 1.2 \text{ m}$ 处的振幅为多少?

解 (1) 因合成波的方程

$$\begin{aligned}y &= y_1 + y_2 = 0.06\cos\pi(x - 4t) + 0.06\cos\pi(x + 4t) \\ &= 2 \times 0.06\cos\frac{\pi(x - 4t) + \pi(x + 4t)}{2} \times \cos\frac{\pi(x - 4t) - \pi(x + 4t)}{2} \\ &= 0.12\cos\pi x \cos 4\pi t (\text{m})\end{aligned}$$

故细绳上的振动为驻波式振动.

- (2) 由 $\cos\pi x = 0$, 得 $\pi x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, 故波节位置坐标

$$x = \frac{1}{2}(2k+1) \text{ m} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

由 $|\cos \pi x| = 1$, 得 $\pi x = k\pi$, 故波腹位置坐标

$$x = k \text{ m} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(3) 由合成波方程知, 波腹处的振幅

$$A = 0.12 \text{ m}$$

$x = 1.2 \text{ m}$ 处的振幅

$$A_{1.2} = |0.12 \cos 1.2\pi| = 0.097 \text{ (m)}$$

自 测 题 五

一、选择题

1. 两个质点各自做简谐振动, 它们的振幅相同, 周期也相同. 设第一个质点的振动方程为 $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi)$, 当第一个质点从相对平衡位置的 x 位置坐标处回到平衡位置时, 第二个质点恰在正向最大坐标位置处, 则第二个质点的振动方程为

- (A) $x_2 = A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$. (B) $x_2 = A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$.
 (C) $x_2 = A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{3\pi}{2}\right)$. (D) $x_2 = A \cos(\omega t + \varphi + \pi)$. []

2. 一劲度系数为 k 的轻弹簧截成三等份, 取出其中的两根, 将它们并联在一起, 下面挂一质量为 m 的物体, 则振动系统的频率为

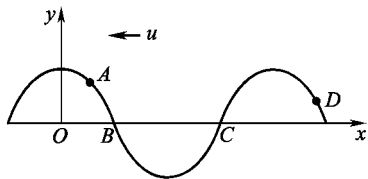
- (A) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$. (B) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{6k/m}$.
 (C) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{3k/m}$. (D) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{k/3m}$. []

3. 一弹簧振子做简谐振动, 总能量为 E_1 . 如果简谐振动的振幅增加为原来的两倍, 重物的质量增加为原来的 4 倍, 则它的总能量 E_1 变为

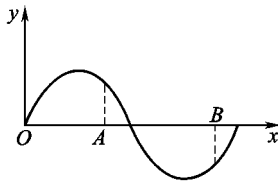
- (A) $E_1/4$. (B) $E_1/2$.
 (C) $2E_1$. (D) $4E_1$. []

4. 以速度 u 沿 x 轴负向传播的横波 t 时刻的波形如图所示, 则该时刻的运动情况是

- (A) A 点的速度大于零. (B) B 点静止不动.
 (C) C 点向下运动. (D) D 点振动速度小于零. []



选择题 4 图



选择题 5 图

5. 一平面简谐波在 t 时刻的波形曲线如图所示. 若此时 A 点处媒质质元的振动动能在增大, 则

- (A) A 点处质元的弹性势能在减小.
 (B) 波沿 x 轴负方向传播.

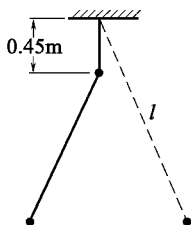
(C) B 点处质元的振动动能减小.

(D) 各点的波的能量密度都不随时间变化.

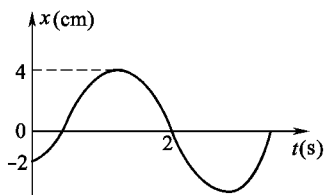
[]

二、填空题

1. 一单摆的悬线长 $l=1.5\text{ m}$, 在顶端固定点的铅直下方 0.45 m 处有一小钉, 如图所示, 则单摆的左、右两侧振幅之比为_____.



填空题 1 图



填空题 2 图

2. 一质点做简谐振动, 其振动曲线如图所示, 则其周期 $T =$ _____, 初相 $\varphi =$ _____.

3. 两个同方向、同频率的简谐振动, 其振动方程分别为

$$x_1 = 6 \times 10^{-2} \cos(5t + \pi/2) \text{ (SI)}$$

$$x_2 = 2 \times 10^{-2} \sin(\pi - 5t) \text{ (SI)}$$

则其合成振动的振幅为_____, 初相为_____.

4. 设 A, B 为简谐波波线上的两点. 已知 B 点的相位比 A 点落后 $\frac{\pi}{3}$, 波长 $\lambda = 3\text{ m}$, 则 A, B 两点相距 $L =$ _____ m .

5. 沿弦线传播的某入射波的表达式为

$$y_1 = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right]$$

在 $x=L$ 处(B 点)发生反射, 反射点为固定端, 设波在传播和反射过程振幅不变, 则反射波的表达式 $y_2 =$ _____.

三、计算题

1. 在一轻弹簧的下端挂一质量 $m_0 = 100\text{ g}$ 的砝码时, 弹簧伸长 8 cm . 现在这根弹簧的下端挂一质量 $m = 250\text{ g}$ 的物体构成一弹簧振子, 将物体从平衡位置向下拉动 4 cm , 并给以向上 $21\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 的初速度(这时 $t=0$), 选 x 轴指向下方, 求其振动方程.

2. 一质点做谐振动, 其振动方程为

$$x = 6 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{\pi}{3} t - \frac{\pi}{4} \right)$$

(1) 当 x 值为多大时, 系统的势能为总能量的一半?

(2) 质点从平衡位置移动到此位置所需的最短时间为多少?

3. 一轻弹簧在 60 N 的拉力下伸长 30 cm, 现将质量为 4 kg 的物体悬挂在该弹簧的下端并使之静止, 再将物体向下拉 10 cm, 然后由静止释放并开始计时. 求:

- (1) 物体的振动方程;
- (2) 物体在平衡位置上方 5 cm 时, 弹簧对物体的拉力.

4. 在一平板上放一质量为 2 kg 的物体, 平板在竖直方向上做谐振动, 其振动周期 $T=0.5\text{ s}$, 振幅 $A=4\text{ cm}$, 初相 $\varphi_0=0$. 求:

- (1) 物体对平板的压力;
- (2) 平板以多大的振幅振动时, 物体开始离开平板?

5. 已知一平面简谐波的方程为

$$y=A\cos\pi(4t-2x)\text{ (SI)}$$

求:

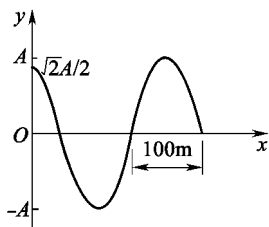
- (1) 该波的波长 λ 、频率 ν 和波速 u ;
- (2) $t=4.2\text{ s}$ 时, 各波峰位置的坐标表达式及此时离坐标原点最近的那个波峰的位置;
- (3) $t=4.2\text{ s}$ 时, 离坐标原点最近的那个波峰通过坐标原点的时刻.

6. 一平面简谐波的频率为 300 Hz, 波速为 $340\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 在截面面积为 $3.00\times 10^{-2}\text{ m}^2$ 的管内空气中传播, 若在 10 s 内通过截面的能量为 $2.70\times 10^{-2}\text{ J}$. 求:

(1) 通过截面的平均能流;

(2) 波的平均能流密度;

(3) 波的平均能量密度.



计算题 7 图

7. 某一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形, 如图所示. 设此简谐波的频率为 50 Hz, 且此时质点在原点的运动方向向下. 求:

(1) 该波的波动方程;

(2) 在距 O 点 100 m 处质点的振动方程与振动速度的表达式.

第6章 气体动理论

基本要求

1. 掌握系统、平衡态、温度、温标、状态方程等概念.
2. 理解气体动理论的基本观点,熟悉统计规律的基本原理.
3. 理解并掌握理想气体的压强公式、温度的统计解释.
4. 理解能量均分定理,掌握理想气体内能的计算.
5. 理解并掌握麦克斯韦速率分布律的意义及其简单应用.
6. 了解麦克斯韦速度分布律和玻尔兹曼分布律,掌握玻尔兹曼分布律的简单应用.
7. 掌握平均自由程和平均碰撞频率及其简单应用.

内容提要

热学是研究大量粒子组成的宏观系统热现象的学科,它是物理学的一个重要部分.所谓热现象,从宏观上讲是指物体的物理性质随温度变化的现象,从微观上讲是与大量粒子的无规则运动有关的现象.热学有两种不同的研究方法.不涉及物质的微观结构,而对现象的直接观测和实验总结出来的热力学定律为基础,用数学演绎和逻辑推理的方法研究热现象的规律的学科叫做热力学;从组成系统的微观结构出发,认为单个粒子遵守牛顿力学规律,大量粒子的集体行为服从统计规律,用统计方法研究热现象的规律的学科叫做统计力学.热力学与统计力学两种研究方法相辅相成,组成了一套完整的热力学理论.气体动理论是统计力学的一个方面,它从气体微观结构的简化模型出发,研究气体平衡态的一些性质.

本书不全面讨论统计力学,只限于讨论其中的气体动理论部分.主要介绍热

学的基本概念和气体动理论的基本观点,建立理想气体的微观模型,导出理想气体的压强公式,解释压强、温度的微观意义和物理本质;介绍能量均分定理,并讨论理想气体的内能;介绍几个统计分布规律,讨论分子的平均自由程和平均碰撞频率.

一、基本概念

热学的研究对象是大量粒子组成的宏观系统,通常称为热力学系统,简称为系统.与系统发生相互作用的外部环境,称为外界.按照系统与外界的相互作用来划分,系统可以分为三类:孤立系统、封闭系统、开放系统.孤立系统与外界无任何相互作用和物质交换;封闭系统与外界有能量交换,但无物质交换;开放系统与外界既有物质交换,又有能量交换.

若一个热力学系统在不受外界影响的条件下,它的宏观性质不随时间变化,这样的状态称为平衡态.这里说的外界影响是指外界对系统既不做功,也不传热.系统处于平衡态时,从微观上看,组成系统的大量粒子仍在不停地做无规则运动(称之为热运动),只是大量粒子热运动的平均效果不随时间变化,从而反映出其宏观性质也不随时间变化.因而把这种平衡称为热动平衡,它与力学中平衡概念是完全不同的概念.

热力学系统处在平衡态时,除用几何参量、力学参量、化学参量和电磁参量描述它外,还须用一个直接表征系统热运动剧烈程度的物理量,即温度描述它.

温度的严格定义依赖于热力学第零定律.热力学第零定律:如果两个物体分别与第三个物体处于热平衡,则它们彼此也必定处于热平衡.热力学第零定律反映出处于同一热平衡态的所有热力学系统都具有一个数值相等的状态函数,把这个函数定义为温度.一切互为热平衡的物体都具有相同的温度,这是温度计测量温度的依据.

温度的数值表示方法称为温标.温标,按是否依赖于具体测温物质的测温属性分为“经验温标”和“热力学温标”.任何一种经验温标的建立,需要包括三个要素:选择某种测温物质的某一测温属性;选定标准点;对测温属性随温度的变化关系作出规定.

常见的摄氏温标选定了两个标准点,即一个大气压下水的冰点为 0 度,沸点为 100 度.规定测温属性随温度作线性变化,因而 0 度和 100 度之间按线性关系标出温度.

经验温标通常规定:测温参量 X 与温度 θ 之间满足线性关系 $\theta = \alpha X$,其中 α 是待定常数;选择水的三相点为标准点,规定标准点的温度为 273.16K;温度公式为

$$\theta = 273.16\text{K} \times \frac{X}{X_3}$$

式中, X_3 表示测温参量在水的三相点的数值.

通常测温参量随温度变化的关系不满足线性关系,使得用不同测温属性,或者不同测温物质的两只温度计测量同一物体的温度时,除了标准点外,温度的数值不同.理想气体温标可以克服这个缺陷.

理想气体定体温度计和定压温度计的公式为

$$T(p) = 273.16\text{K} \times \lim_{p_3 \rightarrow 0} \frac{p}{p_3}$$

$$T(V) = 273.16\text{K} \times \lim_{V_3 \rightarrow 0} \frac{V}{V_3}$$

热力学温标不依赖测温物质和测温属性,称为绝对温标,它是一种理论温标.

温度与状态参量的关系称为状态方程,一般表达式为

$$f(T, p, V) = 0$$

理想气体的状态方程为

$$pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT$$

式中, $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 为普适气体常数, M_{mol} 为气体的摩尔质量.

二、气体动理论的基本观点

气体动理论认为,物质由大量分子或原子这样的粒子组成,分子总是在不停地做无规则运动,分子之间存在相互作用力.

大量粒子的整体行为服从统计规律,而不是力学规律;宏观量是相应微观量的统计平均值;系统处在平衡态时,存在涨落现象.

统计平均值的计算公式为

$$\bar{X} = \sum_i X_i P_i$$

式中, P_i 为物理量 X 取值为 X_i 的概率.

三、理想气体的压强公式

以气体分子热运动为基础,从气体微观结构出发建立理想气体的微观模型,根据力学定律和大量分子的热运动所表现出的统计规律来说明理想气体压强的性质,表明理想气体的压强是由大量气体分子与器壁不断碰撞的结果,是大量气体分子在单位时间内作用于单位面积器壁的平均冲量.

在大量实验事实的基础上概括出的理想气体微观模型认为,理想气体分子

可视为:除碰撞外无相互作用的刚性质点.在此模型基础上,认为单个气体分子遵守力学规律,计算它与器壁碰撞的效果;然后大量采用统计假设,计算大量分子与器壁碰撞的平均效果,可导出理想气体的压强公式为

$$p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2}$$

表达式是一统计规律,而不是力学规律,它清楚地显示了宏观量是微观量的统计平均值.式中,压强 p 是描写整个气体系统的宏观量,而 $\overline{v^2}$ 是分子速率(微观量)平方的平均值.

理想气体压强公式还可表示为

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t$$

其中

$$\bar{\epsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

是气体分子的平均平动动能.

四、温度的统计解释

理想气体的状态方程可表示为

$$p = nkT$$

与推导出的理想气体的压强公式比较,可得

$$\bar{\epsilon}_t = \frac{3}{2} kT$$

上式给出了宏观量温度与微观量的统计平均值(分子平动动能的平均值)的关系.表明温度是气体分子平均平动动能的量度,表征气体分子热运动剧烈的程度.温度是一个统计量,对少量分子来说,无温度可言.

由理想气体分子平均平动动能的表达式,可以推出

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{mol}}}}$$

上式为理想气体在确定温度下的方均根速率,它是气体分子速率的一种统计平均值.由上式可以看出,虽然从宏观量温度 T 和摩尔质量 M_{mol} 不能求出微观量 v (每个分子的速率),但求出了微观量 v 的一种统计平均值 $\sqrt{\overline{v^2}}$,也就能对气体分子的运动情况得到一些统计的了解.例如,如果计算出的 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 越大,就推知气体中速率大的分子越多.

五、能量均分定理 理想气体的内能

为了确定分子的各种形式运动能量的统计规律,需要引进自由度的概念.

决定一个物体的位置所需要的独立坐标数,叫做这个物体的自由度数.利用这个概念可以确定分子的自由度数.设 i 表示刚性分子的自由度, t 表示分子的平动自由度, r 表示转动自由度,则

$$i = t + r$$

对于单原子分子,只有三个平动自由度,故 $i = 3$.

对刚性双原子分子,既有三个平动自由度又有两个转动自由度,故 $i = 3 + 2 = 5$.

对刚性多原子分子(三个原子以上),有三个平动自由度、三个转动自由度,故 $i = 6$.

平衡态下,分子的各种形式运动能量的统计规律叫做能量均分定理.

在温度为 T 的平衡态下,气体分子每个自由度的平均动能都相等,且等于 $\frac{1}{2}kT$. 所以,分子的平均总动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{i}{2}kT$$

式中, $i = t + r + 2s$ 表示分子的自由度,前两项分别是平动和转动自由度, s 表示振动自由度.对于刚性分子, $s = 0$.

能量均分定理可用于计算物质系统的内能.例如对气体,气体的内能是它所包含的所有分子的动能和分子间相互作用势能之和.对于理想气体,分子间无相互作用,其内能就是所有分子的动能之和,故理想气体的内能为

$$E = N \bar{\epsilon}_k$$

或

$$E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} RT$$

$$\Delta E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R \Delta T$$

可见,理想气体的内能只与温度有关,当其状态变化后,内能的变化只与初态和末态的温度有关,与过程无关.

六、麦克斯韦速率分布率

处在平衡态的气体,其分子以各种不同的速率沿各个方向运动着,而且由于分子间极为频繁的相互碰撞,使每个分子的速度、能量等都不断地发生改变.因此,若在某一特定的时刻去考察某一特定分子,它的速度和能量完全是偶然的,

然而就大量分子的整体而言,在一定的条件下,气体分子的热运动速率、速度和能量等都遵循着一定的统计规律.麦克斯韦速率分布率就是统计规律之一.

在平衡态下,当气体分子间的相互作用可以忽略时,分布在任一速率区间 $v \sim v + dv$ 内的分子数 dN 与总分子数 N 的百分比(比率)为

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

上式就是麦克斯韦速率分布律的表达式.麦克斯韦速率分布函数为

$$f(v) = \frac{dN}{N dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

式中, T 是气体的热力学温度, m 是一个分子的质量, k 是玻尔兹曼常数.表达式的物理意义是:在速率 v 附近,单位速率间隔内的分子数占总分子数的百分比(比率).

以 $f(v)$ 为纵坐标,以速率 v 为横坐标,把速率分布函数表示在图上,所得的曲线就是麦克斯韦速率分布曲线,如图 6-1 所示.

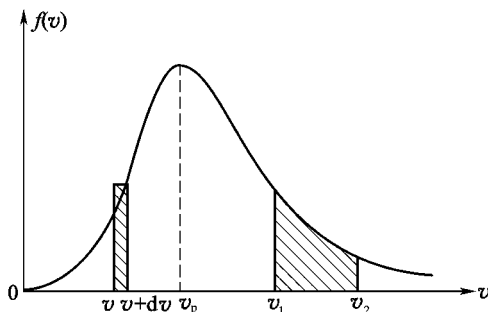


图 6-1 麦克斯韦速率分布曲线

图中窄条(斜线区域)面积 $f(v)dv = \frac{dN}{N dv} dv = \frac{dN}{N}$, 代表分子速率介于 $v \sim v + dv$ 区间的分子数占总分子数的百分比(比率);曲边梯形(直线区域)的面积 $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$, 代表分子速率介于 $v_1 \sim v_2$ 区间的分子数 $\Delta N_{v_1 \sim v_2}$ 占总分子数的百分比(比率),即

$$\frac{\Delta N_{v_1 \sim v_2}}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$$

从概率的观点来看, $\frac{dN}{N}$ 就是一个分子的速率在 v 附近 dv 区间内的概率,

而 $f(v)$ 就是一个分子的速率在速率 v 附近单位速率间隔内的概率. 在概率论中, $f(v)$ 称为分子速率分布的概率密度, 它必须满足归一化条件, 即

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

这意味着速率分布曲线与 v 轴所围的面积为 1.

由麦克斯韦速率分布函数可求出气体分子热运动的三个物理量的统计平均值.

最概然速率 v_p , 它是与 $f(v)$ 极大值对应的速率, 可由下式求出

$$\frac{d}{dv} f(v) = 0$$

即

$$\frac{d}{dv} f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left[e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(-\frac{m}{2kT} 2v \right) v^2 + 2v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right] = 0$$

从而可解得

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{mol}}}$$

最概然速率的物理意义是说速率为 v_p 的分子数目最多.

还可利用 $f(v)$ 计算出方均根速率和平均速率(详见教材)的表达式

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{mol}}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{m}} = \sqrt{\frac{8RT}{M_{mol}}}$$

七、麦克斯韦速度分布律和玻尔兹曼分布律

在平衡态下, 当气体分子间的相互作用可以忽略时, 速度分量 v_x 在区间 $v_x \sim v_x + dv_x$ 内, v_y 在区间 $v_y \sim v_y + dv_y$ 内, v_z 在区间 $v_z \sim v_z + dv_z$ 内的分子数 dN 与总分子数 N 的百分比(比率)为

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-m \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

式中, v_x, v_y, v_z 分别表示气体分子的速度矢量 $\mathbf{v}$ 沿直角坐标 x, y, z 轴上的分量.

令

$$f(\mathbf{v}) = \frac{dN}{N dv_x dv_y dv_z}$$

有

$$f(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}}$$

称为麦克斯韦速度分布函数.

把麦克斯韦速度分布律推广到分子在保守场(例如重力场)中的情况,可得到玻尔兹曼分布律.

当系统在保守力场中处于平衡态时,其中坐标介于区间 $x \sim x+dx, y \sim y+dy, z \sim z+dz$ 内,同时速度介于 $v_x \sim v_x+dv_x, v_y \sim v_y+dv_y, v_z \sim v_z+dv_z$ 内的分子数为

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\epsilon_k + \epsilon_p}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$$

式中, ϵ_k 为分子的平动能, ϵ_p 为分子在保守力场中的势能, n_0 表示在 $\epsilon_p = 0$ 处单位体积内具有各种速度的分子总数. 表达式称为玻尔兹曼分子按能量分布定律,简称玻尔兹曼分布律.

把这个表达式对所有可能的速度积分,考虑速度分布函数的归一化条件,可得

$$dN' = n_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}} dx dy dz$$

上式中的 dN' 表示在坐标区间 $x \sim x+dx, y \sim y+dy, z \sim z+dz$ 内具有各种速度的分子总数. 坐标区间 $x \sim x+dx, y \sim y+dy, z \sim z+dz$ 内单位体积内的分子数为

$$n = \frac{dN'}{dx dy dz} = n_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}}$$

上式为分子按势能的分布规律. 在重力场中, $\epsilon_p = mgz$ (z 轴竖直向上), 在高度为 z 处单位体积内的分子数为

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

利用理想气体压强公式 $p = nkT$ 以及 $\frac{m}{k} = \frac{M_{\text{mol}}}{R}$, 由上式可得等温气压公式

$$p = p_0 e^{-\frac{M_{\text{mol}} g}{RT} z}$$

式中, p_0 表示 $z=0$ 处的压强. 对公式取对数, 可得

$$z = \frac{RT}{M_{\text{mol}} g} \ln \frac{p_0}{p}$$

上式称为高度公式.

八、平均自由程和平均碰撞频率

气体分子在相继两次碰撞间自由通过的路程,称为自由程. 由于气体分子处

在无规则热运动之中,所以分子之间和分子与器壁之间发生极为频繁的碰撞,而且任何一个分子在相继两次碰撞所通过的自由程长短不等,但就极多次的碰撞来说,自由程有一个确定的平均值,称为平均自由程.

气体分子通过各次自由程所需的时间长短也不等.一秒钟内一个分子和其他分子碰撞的平均次数就称为平均碰撞频率,简称为碰撞频率.

碰撞频率 $\bar{Z}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的大小都反映了分子间碰撞的频繁程度,它们的关系为

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$$

若气体分子服从麦克斯韦速度分布律,则碰撞频率为

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n$$

式中, d 为分子的有效直径, $\bar{v}$ 为分子的平均速率, n 为分子的数密度.

分子的平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

注意到 $p = nkT$, 可得

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

令 $\sigma = \pi d^2$ 称为分子的碰撞截面,则相应地有

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \sigma \bar{v} n$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma p}$$

解题指导与示例

例 6-1 科学家皮兰在 1909 年用显微镜观察液体中悬浮乳胶微粒随高度的变化时,在实验地测出了阿伏伽德罗常数量 N_A . 实验中,皮兰使两层乳胶的高度差为 $100 \mu\text{m}$ 时,测得一层乳胶(温度为 300 K)的微粒密度恰好是另一层的两倍.已知胶乳微粒的直径为 $0.32 \mu\text{m}$,乳胶的密度比液体的密度大 $150 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,求 N_A .

解 由玻尔兹曼分布律,得

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta \epsilon_p}{kT}}$$

即

$$\Delta \epsilon_p = kT \ln \frac{n_0}{n}$$

式中, $\Delta\epsilon_p$ 为重力和浮力共同作用下乳胶微粒的势能差, 其大小为

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3 \Delta\rho g \Delta Z$$

故有

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3 \Delta\rho g \Delta Z = k T \ln \frac{n_0}{n}$$

即

$$N_A \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3 \Delta\rho g \Delta Z = R T \ln \frac{n_0}{n}$$

解之得

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{R T \ln \frac{n_0}{n}}{\frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3 \Delta\rho g \Delta Z} \\ &= \frac{8.31 \times 300 \times \ln 2}{\frac{4}{3} \times 3.14 \times \left(\frac{0.32}{2} \times 10^{-6} \right)^3 \times 1.5 \times 10^2 \times 9.8 \times 100 \times 10^{-6}} \\ &= 6.81 \times 10^{23} (\text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

例 6-2 容器中贮存 2 升某双原子分子理想气体, 其压强为 $p = 1.5 \times 10^5$ 帕. 若在高温下气体分子可视为弹性双原子分子, 求该气体的平均平动动能、平均转动动能、平均振动动能、平均动能、气体分子内能.

解 对弹性双原子分子总自由度为 $3 \times 2 = 6$ 个, 其中平动自由度 $t = 3$, 转动自由度 $r = 2$, 振动自由度为 $s = 1$. 设该气体有 N 个分子, 则总平均平动动能

$$E_t = N \frac{3}{2} k T$$

根据 $p = nkT$, 则 $pV = NkT$. 所以
平动动能

$$E_t = \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} \times 1.5 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 450 \text{ (J)}$$

转动动能

$$E_r = N \frac{2}{2} k T = 1.5 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 300 \text{ (J)}$$

振动动能

$$E_s = N \frac{1}{2} k T = \frac{1}{2} \times 1.5 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 150 \text{ (J)}$$

平均动能

$$E_k = N \frac{t+r+s}{2} kT = 900 \text{ (J)}$$

气体分子的内能

$$E = N \frac{t+r+2s}{2} kT$$

$$E = \frac{t+r+2s}{2} pV = \frac{7}{2} \times 1.5 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 1050 \text{ (J)}$$

例 6-3 说明下列各物理量的意义:

- (1) $f(v)dv$; (2) $nf(v)dv$; (3) $Nf(v)dv$;
 (4) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$; (5) $\int_0^\infty vf(v)dv$; (6) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$.

解 (1) $f(v)dv = \frac{dN}{N}$ 表示在平衡态下,处在速率区间 $v \sim v+dv$ 内的分子数占总分子数的比率.

(2) $nf(v)dv = n \frac{dN}{N} = \frac{dN}{V}$ 表示在平衡态下,单位体积中处于速率区间 $v \sim v+dv$ 内的分子数.

(3) $Nf(v)dv + dN$ 表示平衡态下,处在速率区间 $v \sim v+dv$ 内的分子数.

(4) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \frac{\int_{v_1}^{v_2} dN}{N} = \frac{\Delta N}{N}$ 表示在平衡态下,在速率 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数占总分子数的比率.

(5) $\int_0^\infty f(v)dv = \frac{\int_0^\infty vNf(v)dv}{N} = \frac{\int_0^\infty vdN}{N}$ 表示在平衡态下,所有分子的平均速率.

(6) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} dN$ 表示平衡态下,在速率区间 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数.

例 6-4 某种气体分子的平均自由程为 $5 \times 10^{-4} \text{ cm}$,方均根速率为 $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,求分子的碰撞频率.

解 $\bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\lambda}$

因为

$$\frac{\bar{v}}{\sqrt{v^2}} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}}{\sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{mol}}}}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

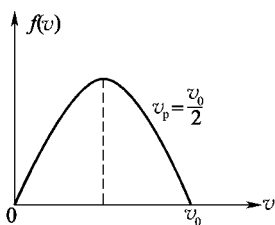
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sqrt{v^2}$$

所以

$$\bar{Z} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sqrt{v^2}}{\lambda} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \times \frac{500}{5 \times 10^{-6}} = 9.2 \times 10^7 (\text{s}^{-1})$$

例 6-5 由 N 个粒子组成的热力学系统, 其速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} c(v-v_0)v & (0 < v < v_0) \\ 0 & (v > v_0) \end{cases}$$



例 6-5 图

- 求: (1) 常数 c ; (2) 做出速率分布示意图; (3) 速率在 v_1 ($v_1 < v_0$) 附近单位速率范围内的粒子数; (4) 速率在 $\frac{v_0}{3} \sim v_0$ 间隔内的粒子数的平均速率; (5) 粒子的最概然速率, 平均速率, 方均根速率.

解 (1) 由分布函数的归一化条件

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

有

$$\int_0^{v_0} c(v-v_0)v dv + \int_{v_0}^{\infty} 0 dv = \frac{1}{3}cv_0^3 - \frac{1}{2}cv_0^3 = 1$$

所以, 常数

$$c = -\frac{6}{v_0^3}, \quad f(v) = \begin{cases} -\frac{6}{v_0^3}(v-v_0)v & (v_0 > v > 0) \\ 0 & (v > v_0) \end{cases}$$

(2) 速率分布示意图图所示.

(3) 速率分布函数为 $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$, 在 v_1 附近单位速率范围内的粒子数为

$$\frac{dN}{dv} = Nf(v_1) = N \left[\frac{-6}{v_0^3}(v_1-v_0) \right] v_1 = -\frac{6N}{v_0^3}(v_1-v_0)v_1$$

(4) 在 $\frac{v_0}{3} \sim v_0$ 间隔内的粒子数为

$$\Delta N = \int_{\frac{v_0}{3}}^{v_0} Nf(v) dv = -\frac{6N}{v_0^3} \int_{\frac{v_0}{3}}^{v_0} (v-v_0)v dv = \frac{20}{27}N$$

在 $\frac{v_0}{3} \sim v_0$ 范围内的粒子数的平均速率为

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\int_{\frac{v_0}{3}}^{v_0} v dN}{\Delta N} = \frac{1}{\Delta N} \int_{\frac{v_0}{3}}^{v_0} N f(v) v dv \\ &= \frac{1}{\Delta N} \int_{\frac{v_0}{3}}^{v_0} N c (v - v_0) v^2 dv = \frac{3}{5} v_0\end{aligned}$$

(5) 粒子的最概然速率

由
$$\frac{df(v)}{dv} = 0, \quad -\frac{12}{v_0^3} + \frac{6}{v_0^2} = 0$$

得

$$v_p = \frac{1}{2} v_0$$

粒子平均速率

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\int_0^\infty v dN}{N} = \frac{1}{N} \int_0^\infty N f(v) v dv \\ &= \int_0^\infty -\frac{6}{v_0^3} (v - v_0) v^2 dv = \frac{1}{2} v_0\end{aligned}$$

粒子的方均根速率

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= \frac{\int_0^\infty v^2 dN}{N} = \frac{1}{N} \int_0^\infty N f(v) v^2 dv \\ &= \int_0^\infty -\frac{6}{v_0^3} (v - v_0) v^3 dv \\ &= 0.3 v_0^2 \\ \sqrt{\overline{v^2}} &= \sqrt{0.3} v_0 \approx 0.55 v_0\end{aligned}$$

例 6-6 若对一容器中的气体进行压缩,并同时对它加热,当气体温度从 27°C 上升到 177.0°C 时,其体积减少了一半.求:

(1) 气体压强的变化;

(2) 分子的平均动能和方均根速率的变化.

解 (1) 由题意,知 $T_1 = 300\text{ K}$, $T_2 = 450\text{ K}$, $V_1 = 2V_2$. 由 $p = nkT$, 得

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{n_2 T_2}{n_1 T_1}$$

由 $V_1 = 2V_2$, 知 $n_2 = 2n_1$, 代入上式, 得

$$p_2 = p_1 \times \frac{2n_1}{n_1} \times \frac{450}{300} = 3p_1$$

(2) 由温度公式, 得

$$\frac{\bar{\epsilon}_{k2}}{\bar{\epsilon}_{k1}} = \frac{\frac{3}{2}kT_2}{\frac{3}{2}kT_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\bar{\epsilon}_{k2} = \bar{\epsilon}_{k1} \frac{T_2}{T_1} = 1.5 \bar{\epsilon}_{k1}$$

由方均根速率公式,可得

$$\frac{\sqrt{v_2^2}}{\sqrt{v_1^2}} = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} = \sqrt{\frac{450}{300}} = 1.22$$

故

$$\sqrt{v_2^2} = 1.22 \sqrt{v_1^2}$$

例 6-7 根据玻尔兹曼分布律,求在一定温度下,大气压随高度的变化规律.

解 设在 $y=0$ 处单位体积内的大气分子数为 n_0 ,根据玻尔兹曼分布律

$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}, n = n_0 e^{-\frac{mgy}{kT}}$$

由理想气体压强

$$p = nkT$$

所以得

$$p = n_0 kT e^{-\frac{mgy}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgy}{kT}}$$

式中, $p_0 = n_0 kT$, 为 $y=0$ 处的压强.

例 6-8 设氢气的温度为 300 K,求氢气分子速率在 $3\,000 \sim 3\,010 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 及 $1\,500 \sim 1\,510 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 之间的分子数的比率.

解 由

$$\frac{m}{k} = \frac{mN_A}{kN_A} = \frac{M_{\text{mol}}}{R}$$

有

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{M_{\text{mol}}}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{M_{\text{mol}} v^2}{2RT}} v^2 dv$$

当 $\Delta v \ll v$ 时,有

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{M_{\text{mol}}}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{M_{\text{mol}} v^2}{2RT}} v^2 \Delta v$$

当 $v = 3\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Delta v = 3\,010 - 3\,000 = 10 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ 时,有

$$\frac{\Delta N}{N} = 4 \times 3.14 \times \left(\frac{2.02 \times 10^{-3}}{2 \times 3.14 \times 8.31 \times 300} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2.02 \times 10^{-3} \times 3\,000^2}{2 \times 8.31 \times 300}} \times 3\,000^2 \times 10$$

$$=0.137\%$$

当 $v=1\,500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\Delta v=1\,510-1\,500=10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta N}{N} &= 4 \times 3.14 \times \left(\frac{2.02 \times 10^{-3}}{2 \times 3.14 \times 8.31 \times 300} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2.02 \times 10^{-3} \times 1\,500^2}{2 \times 8.31 \times 300}} \times 1\,500^2 \times 10 \\ &= 0.526\%\end{aligned}$$

第7章 热力学基础

基本要求

1. 掌握热力学过程、准静态过程、功、内能、热量、热容量、可逆过程、正循环、逆循环、卡诺循环等概念.
2. 熟练掌握热力学第一定律及其对理想气体的应用.
3. 掌握循环效率的定义,掌握卡诺循环效率的计算.
4. 理解热力学第二定律的本质,理解卡诺定理,了解克劳修斯等式、不等式.
5. 理解并掌握熵的定义和熵增加原理.
6. 理解熵的统计意义,了解玻尔兹曼关系.
7. 了解熵与信息的关系,了解自组织现象,了解耗散结构.

内容提要

在第6章中,我们已经初步介绍了统计力学中的气体动理论部分,本章我们将对热力学作简单介绍、讨论.热力学基础介绍的是,作为从热力学研究出发的几个关于自然界的基本法则及其相关知识.

本章首先介绍热力学过程、功、内能和热量等基本概念;然后对作为热力学讨论出发点的热力学第一定律、热力学第二定律,进行了比较详细的讨论.

一、热力学过程

一个处于平衡态的系统与外界交换能量或物质时,系统的状态必然随时间而变.系统的状态随时间变化,称系统经历了一个热力学过程.

热力学过程分为非静态过程和准静态过程.当系统的平衡态被破坏,在没有达到新的平衡态之前,又继续变化,这种过程称为非静态过程.若系统在变化的过程中的每一时刻都处于平衡态,这种过程称为准静态过程.准静态过程是一种理想过程,它使得讨论中可以用系统自身的状态参量来讨论热力学过程中的系统状态的变化,丰富了讨论的数学手段,在热力学中有重要的意义.系统的平衡态被破坏到恢复平衡态所需要的时间,称为弛豫时间.实际过程中,当弛豫时间大大小于系统状态变化所需要的时间时,可以认为这个过程是准静态过程.

二、准静态过程的功

一个无摩擦的准静态过程,系统内的压强与外界的压强相等.当外界对系统做功系统体积发生变化时,外界对系统在无摩擦的准静态过程中所做的元功为

$$dA' = -pdV$$

这是用系统自身的状态参量表示的外界对系统所做的元功.

系统对外界在无摩擦的准静态过程中所做的元功为

$$dA = -dA' = pdV$$

当 $dV > 0$ 时,系统对外做正功;当 $dV < 0$ 时,系统对外做负功,即外界对系统做正功.对于有限过程,系统对外界所做的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

准静态过程的功可用 p - V 图上的曲线表示(如图 7-1 所示).由一维积分的几何意义可知,曲线下的面积为功的大小.当系统经由不同过程由初态到达终态时,曲线的形状不同,曲线下的面积不同,表明功是与过程有关的量,代表过程的特征,不是状态的特征.

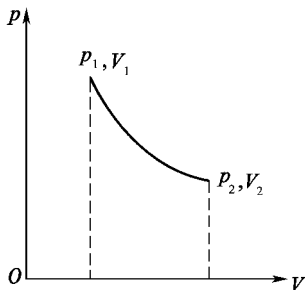


图 7-1

三、内能

在纯粹机械或电磁相互作用下,系统由状态 I 过渡到状态 II,称系统经历了一个绝热过程.

给定初态与终态以后,无论经历什么样的绝热过程,所需要的绝热功的数值相等,也就是说绝热功的数值与路径无关.

根据绝热功的这个特点,定义内能增量为

$$E_2 - E_1 = A'_Q$$

式中, E_1 和 E_2 分别是初态和终态的内能, A'_Q 是外界对系统所作的绝热功.

内能是系统状态的单值函数,确定的状态对应确定的内能值.初态和终态确

定后,无论经历什么样的中间过程,内能的改变是相同的,与过程无关,内能是系统状态的特征.

内能是热力学系统内部状态决定的能量,它包括分子无规则运动动能、分子间相互作用势能、分子原子内的能量以及原子核内的能量等等.

四、热量

对于绝热过程,有

$$E_2 - E_1 - A'_Q = 0$$

对于非绝热过程,有

$$E_2 - E_1 - A' \neq 0 \quad (A': \text{外界对系统的非绝热功})$$

两者之差应该是系统以热量的形式吸收的能量 ΔQ , 则

$$E_2 - E_1 - A' = \Delta Q$$

热量的单位为焦,用符号 J 表示.

系统升高单位温度所吸收的热量称为热容量,用 C 表示,即

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT}$$

热容量的单位是 $J \cdot K^{-1}$. 每摩尔物质的热容量称为摩尔热容,记为 C_{mol}

$$C_{\text{mol}} = C / \frac{M}{M_{\text{mol}}} = C / \mu$$

摩尔热容的单位是 $J \cdot K^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

不同的过程热容量不同,常见的等压过程和等容过程的摩尔热容为

$$C_{p,\text{mol}} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$$

$$C_{V,\text{mol}} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V$$

五、热力学第一定律

它就是能量转换和守恒定律. 即自然界一切物质都具有能量,能量有不同的形式,能够从一种形式转化为另一种形式,从一个物体传递给另一个物体,在转化和传递中,能量的数量不变. 有时它也可表述为:第一类永动机是不可能制造的. 热力学第一定律的表达式为

$$\Delta Q = E_2 - E_1 + A$$

上式适用于初、终态是平衡态的任意过程. 热力学第一定律的微分表达式为

$$dQ = dE + dA$$

上式中, dE 是态函数内能的全微分,而 dQ 和 dA 只是微小过程的微小量.

准静态过程中,则

$$dQ = dE + p dV$$

六、热力学第一定律对理想气体准静态过程的应用
热量的计算

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{\text{mol}} dT$$

或

$$Q = \int (dE + p dV)$$

功的计算

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

或

$$A = \int (dQ - dE)$$

内能的计算

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \int (dQ - p dV)$$

理想气体的内能

$$E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} RT$$

$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R dT = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$$

式中, i 为气体分子的自由度.

理想气体的等容过程

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = 0$$

$$Q = E_2 - E_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{V, \text{mol}} dT$$

$$dQ = dE = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{V, \text{mol}} dT$$

理想气体的等压过程

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

$$Q = E_2 - E_1 + p(V_2 - V_1)$$

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{p,\text{mol}} dT$$

理想气体的等温过程

$$\Delta E = \int dE = \int \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R dT = 0$$

$$Q = \int dA = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

理想气体的等容摩尔热容量为

$$C_{V,\text{mol}} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{dE_{\text{mol}}}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{i}{2} RT \right) = \frac{i}{2} R$$

理想气体的等压摩尔热容量

$$C_{p,\text{mol}} = C_{V,\text{mol}} + R$$

上式称为迈尔方程. 由上式可得

$$C_{p,\text{mol}} = \frac{i+2}{2} R$$

等压摩尔热容与等容摩尔热容之比称为比热容比, 用 γ 表示:

$$\gamma = \frac{C_{p,\text{mol}}}{C_{V,\text{mol}}} = \frac{i+2}{i}$$

理想气体的绝热过程

理想气体准静态绝热过程方程为

$$pV^\gamma = \text{常数}$$

或

$$V^{\gamma-1} T = \text{常数}$$

$$p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = \text{常数}$$

绝热过程的功为

$$A = \int dE = E_2 - E_1$$

准静态绝热过程的功为

$$A = \int p dV = \frac{1}{\gamma-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

七、循环过程

循环可分为正循环和逆循环两种. 正循环和逆循环中能量的转化情况反映了热机和制冷机实现能量转化的基本过程. 在 p - V 图上, 正循环曲线所包围的面积等于系统对外所做的净功. 逆循环曲线所包围的面积等于外界对系统所做的净功. 系统经一循环后, 其内能不变.

正循环效率(即热机效率)的定义为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

式中, A 为系统在一循环中对外所做的净功, Q_1 和 Q_2 分别是系统在一循环中从外界吸收的总热量和向外界放出的总热量, Q_1 和 Q_2 取其绝对值.

制冷机的循环工作系数为

$$\epsilon = \frac{Q_2}{A_{\text{净}}} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

式中, Q_2 是系统在一循环中从低温物体吸收的热量, Q_1 是系统在一循环中向高温物体输送的总热量, $A_{\text{净}}$ 是在一个循环中外界对系统所做的净功, Q_1 和 Q_2 取其绝对值.

效率 η 和制冷工作系数 ϵ 中的 Q_2 是有区别的: η 中的 Q_2 是向外界放出热量的总和; ϵ 中的 Q_2 仅仅是从欲使其降低温度的物体中吸收的那部分热量, 不是系统吸收热量的总和.

八、卡诺循环

由等温加热、绝热膨胀、等温放热和绝热压缩四个过程组成的循环称为卡诺循环, 在 p - V 图上是由两条等温线和两条绝热线构成的循环. 以理想气体为工作物质的卡诺循环的效率为

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

式中, T_1 和 T_2 分别是高温热源和低温热源的温度.

理想气体逆向卡诺循环的制冷工作系数为

$$\epsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

九、可逆过程与不可逆过程

系统由某一状态出发, 经过一个过程到达另一个状态. 如果存在另一个过程, 它能使系统和外界都完全恢复原状(系统回到最初的状态, 同时消除了原过程中对外界引起的一切影响), 则称原过程为可逆过程; 反之, 如果无论用什么方法都不能使系统和外界恢复原状, 则称原过程为不可逆过程.

自然界不存在严格的可逆过程, 但在控制条件下, 如消除摩擦力、黏滞力和电阻等产生耗散效应的因素, 从而避免热效应的情况下, 很多过程可近似地认为是可逆过程. 无摩擦的准静态过程就是可逆过程. 可逆过程的引进, 使得讨论中可以用系统的状态参量讨论过程的变化, 丰富了讨论的数学手段.

十、热力学第二定律

热力学第一定律不能反映过程进行的条件和方向,而热力学第二定律可反映过程进行的条件和方向.热力学第二定律是独立于热力学第一定律的另一条自然界的基本规律.

热力学第二定律有两种表述,即开尔文表述和克劳修斯表述.开尔文表述为:

不可能从单一热源吸热使之完全变为有用功而不产生任何其他影响.

克劳修斯表述为:

热量不可能自动从低温热源传到高温热源而不产生任何其他影响.

开尔文表述的实质是功变热是不可逆过程,克劳修斯表述的实质是热传导是不可逆过程.可以证明,这两种表述是完全等价的.这表明,热力学第二定律的实质是:自然界一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆过程.

从统计的观点来看,热力学第二定律是说,一个不受外界影响的孤立系统,其内部发生的过程总是从概率小的状态向概率大的状态进行,由包含微观状态数目少的宏观态向包含微观状态数目多的宏观态进行.

十一、卡诺定理 克劳修斯等式不等式

卡诺定理有两条:

(1) 工作在相同高温热源和相同低温热源之间的一切可逆机,其效率都相等,与工作物质无关.

(2) 在相同高温热源和相同低温热源之间工作的一切不可逆机,其效率不可能大于可逆机的效率.

卡诺定理为提高热机效率指明了方向,同时也为热力学理论研究提供了桥梁.从卡诺定理可导出克劳修斯等式不等式

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

其中等号对应于可逆循环过程,不等号对应于不可逆循环过程.

十二、熵

热力学第二定律是关于过程方向的规律.它指出,自然界一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆过程.但是,它缺少一个定量的描述.为此,引进一个新的物理量——熵.

根据克劳修斯等式 $\oint \frac{dQ}{T} = 0$ 可以证明,系统经历一个可逆过程从平衡态 A

过渡到平衡态 B , 其积分值 $\int_{\text{可逆} A}^B \frac{dQ}{T}$ 只与初态与终态两个平衡态有关, 而与可逆过程的具体路径无关. 由这个特性可引入态函数熵, 用 S 表示, 其定义为

$$S_B - S_A = \int_{\text{可逆} A}^B \frac{dQ}{T}$$

式中, A 和 B 表示任意两个给定的平衡态, S_A 是系统在平衡态 A 的熵, S_B 是系统在平衡态 B 的熵. 上式定义了两个平衡态的熵差. 熵是态函数, 只与系统的状态有关, 熵的微分表达式为

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

由克劳修斯不等式 $\oint \frac{dQ}{T} < 0$ 可以证明, 对不可逆过程

$$dS > \frac{dQ}{T}$$

综合上两式, 可得

$$dS \geq \frac{dQ}{T}$$

式中, 等号对应于可逆过程, 不等号对应于不可逆过程. 上式也称为热力学第二定律的数学表达式.

十三、熵增加原理

对于孤立系统而言, 或者系统经绝热过程以后, $dQ=0$, 则 $dS \geq 0$. 这表明: 对孤立系统而言, 或者系统经绝热过程以后, 系统的熵永不减少, 这称为熵增加原理. 熵增加原理是比能量守恒定律更重要的自然规律, 它已经突破物理学和自然科学的界限, 进入了信息、生物、经济和社会科学领域, 得到广泛的应用.

十四、熵的统计意义

热力学系统的一个宏观态对应着多个微观态, 不同的宏观态对应的微观态的数目不同. 系统所有可能的微观态出现的概率都相等, 这称为等概率假设. 这个假设是统计物理的唯一假设.

一个宏观态所对应的微观态的数目 Ω , 称为热力学概率. 根据等概率假设, 一个宏观态所对应的微观态数目越多, 它实现的概率就越大, 它的热力学概率也越大.

系统内的热力学过程总是由热力学概率小的状态向热力学概率大的状态发展, 这就是热力学第二定律的统计意义.

玻尔兹曼证明, 态函数熵与宏观态所对应的微观状态数目的关系为

$$S = k \ln \Omega$$

上式称为玻尔兹曼关系，式中 k 是玻尔兹曼常数。关系式清楚表明，态函数熵与宏观态所对应的微观态数目成正比。

微观态数目表征系统状态的无序程度，所以说熵是系统无序程度的量度，这也是熵的统计意义。

十五、熵与信息

通俗地说，语言、符号、图像、声音、数据等可传递和交换的内容，以及人的感觉器官能感觉的一切，统称为信息。信息能够协助信息接受者消除事件的不确定度。

一事件有 $X_1, X_2, \dots, X_N$ 种可能的结果，每一结果出现的概率为 $P_i = P(X_i), i=1, 2, 3, \dots, N$ 。则定义信息量为

$$I = - \sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i$$

对于等概率事件，有

$$I = \log_2 N$$

上式为计算信息量的公式。信息论中定义信息熵为

$$S = -k \sum_{i=1}^N P_i \ln P_i$$

对于等概率事件，有

$$S = K \ln N$$

式中

$$K = \frac{1}{\ln 2} = 1.443$$

可以证明

$$\Delta I = -\Delta S$$

即

信息量的欠缺 = 负熵 (熵的减少)

十六、耗散结构

一定条件下，系统或系统中的一部分由无序状态转向有序状态的现象，称为自组织现象。生命世界和非生命世界广泛存在着自组织现象。自组织现象都发生在非孤立系统内，为了维持自组织现象，系统必须与外界不断地交换物质和能量，称之为耗散结构。

孤立系统、远离平衡态是耗散结构形成的重要条件。

解题指导与示例

例 7-1 室温下一一定量的氧气,其体积为 2.3 L,压强为 1 atm,经一多方过程后体积变为 4.1 L,压强为 0.5 atm. 求:(1)多方指数 n ; (2)氧气膨胀对外做的功;(3)氧气内能的变化;(4)氧气吸收的热量.

解 (1)由多方过程方程

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$$

得

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n = \frac{p_1}{p_2}$$

对上式取对数,得

$$n = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\ln \frac{1}{0.5}}{\ln \frac{4.1}{2.3}} = 1.2$$

(2) 由公式

$$A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$$

得
$$A = \frac{(1 \times 2.3 - 0.5 \times 4.17) \times 1.013 \times 10^5 \times 10^{-3}}{1.2 - 1} = 126.6 \text{ (J)}$$

$$(3) \Delta E = \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$= -63.3 \text{ J}$$

(4) 由热力学第一定律,得

$$Q = \Delta E + A = -63.3 + 126.6 = 63.3 \text{ (J)}$$

例 7-2 一侧壁绝热的气缸内盛 300 mol 氧气,其温度为 300 K,活塞外面的压强 $p_0 = 1.13 \times 10^5 \text{ Pa}$,活塞质量 $m = 100 \text{ kg}$,面积 $S = 0.1 \text{ m}^2$. 开始时,由于汽缸内插销的阻碍,活塞停在距汽缸底部 $l_1 = 1.0 \text{ m}$ 处. 后从汽缸底部缓慢加热,使活塞上升了 0.5 m 的距离. 问:

(1) 汽缸中的气体经历的是什么过程?

(2) 汽缸在整个过程中吸收了多少热量(设汽缸与活塞间的摩擦可忽略不计)?

解 (1) 先是等容加热,后是等压加热.

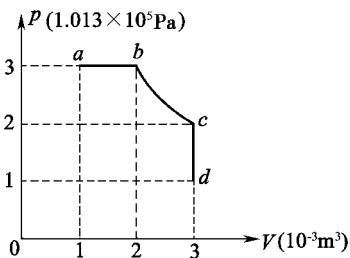
(2) 过程终止时, 气体的温度

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{\frac{M}{M_{\text{mol}}} R} = \frac{1.13 \times 10^5 \times 0.1 \times 1.5}{2 \times 8.31} = 1004.5 \text{ (K)}$$

由热力学第一定律, 得

$$\begin{aligned} Q = \Delta E + \Delta A &= \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) + p_2 (V_2 - V_1) \\ &= 2 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (1004.5 - 300) \\ &= 3.48 \times 10^4 \text{ (J)} \end{aligned}$$

例 7-3 一定质量的双原子气体沿如本例图所示的方向进行, 已知 ab 为等压过程, bc 为等温过程, cd 为等体过程, 求气体在 $abcd$ 过程中做的功、吸的热量及内能的变化.



例 7-3 图

解 过程中做的功为各分过程做功的总和, 即

$$\begin{aligned} A &= A_{ab} + A_{bc} + A_{cd} \\ &= p_a (V_b - V_a) + p_b V_b \ln \frac{V_c}{V_b} + 0 \\ &= 3 \times 1.013 \times 10^5 (2 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3}) + \\ &\quad 3 \times 1.013 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} \times \ln \frac{3 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \\ &= 5.52 \times 10^2 \text{ (J)} \end{aligned}$$

过程中内能的增量

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} R (T_d - T_a) = \frac{i}{2} (p_d V_d - p_a V_a) \\ &= \frac{5}{2} \times 1.013 \times 10^5 (3 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-3}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

吸收的热量

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta A = 0 + 5.52 \times 10^2 = 5.52 \times 10^2 \text{ (J)}$$

例 7-4 1mol 某双原子分子理想气体做如例 7-4 图所示的循环. 求: (1) A , B , C 三态的温度; (2) 一个循环过程中, 系统对外做的功; (3) $A-B$ 过程中的平均摩尔热容量 C_{AB} ; (4) 循环效率.

解 (1) 由 $PV = \gamma RT$, 得

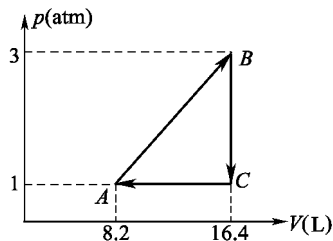
$$T_A = \frac{p_A V_A}{\gamma R} = \frac{8.2}{R} = 100 \text{ K}$$

同理,有

$$T_C = 2T_A = 200 \text{ K}, T_B = 6T_A = 600 \text{ K}$$

(2) 一个循环的功为 ΔABC 的面积,即

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A) \\ &= \frac{1}{2} \times 2p_A \times V_A = RT_A = 831 \text{ J} \end{aligned}$$



例 7-4 图

(3) $A \rightarrow B$ 过程中气体内能变化

$$\Delta E = E_B - E_A = C_V(T_B - T_A) = \frac{5}{2}R \times 5T_A = \frac{25}{2}RT_A$$

$A \rightarrow B$ 过程中气体所做的功

$$A_{AB} = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \times 4p_A \times V_A = 2RT_A$$

$A \rightarrow B$ 过程中气体吸收的热量

$$\text{由} \quad Q = \Delta E + A$$

$$\text{得} \quad Q_{AB} = \Delta E + A_{AB} = \frac{29}{2}RT_A$$

$A \rightarrow B$ 过程中的平均摩尔热容量

因为

$$Q_{AB} = C_{AB}(T_B - T_A)$$

所以

$$C_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_B - T_A} = \frac{\frac{29}{2}RT_A}{5T_A} = \frac{29}{10}R$$

(4) $B \rightarrow C$ 为放热, $C \rightarrow A$ 为放热, $A \rightarrow B$ 为吸热, 故

$$Q_{\text{吸}} = Q_{AB} = \frac{29}{2}RT_A$$

所以

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{RT_A}{\frac{29}{2}RT_A} = \frac{2}{29} = 6.89\%$$

例 7-5 用一块隔板把两个容器隔开, 两个容器内分别盛有不同种类的理想气体, 温度为室温 T , 压强为 p , 一个容器的体积为 V_1 , 另一个容器的体积为 V_2 . 求当把隔板移去, 两种气体均匀混合后的总熵变. 设两种气体混合不发生变化

学变化.

解 气体混合前后的温度均不变,都等于室温 T . 对 V_1 内的气体用等温可逆过程代替,其熵变为

$$\begin{aligned} dS_1 &= \frac{dE + pdV}{T} = \frac{pdV}{T} = \gamma_1 R \frac{dV}{V} \\ \Delta S_1 &= \gamma_1 R \int_1^{v_2+v_1} \frac{dV}{V} = \gamma_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} = \frac{pV_1}{T} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} \end{aligned}$$

对 V_2 内的气体也用等温可逆过程代替,用同样的方法求得

$$\Delta S_2 = \gamma_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} = \frac{pV_2}{T} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

故总熵变

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{pV_1}{T} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \frac{pV_2}{T} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

例 7-6 1.5 mol 氧气在 400 K 和 300 K 之间做卡诺循环. 已知循环中的最小体积为 0.012 m^3 , 最大体积为 0.048 m^3 , 计算气体在此循环中做的功及从高温热源吸收的热量和向低温热源放出的热量.

解 由题意知, $T_1 = 400 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$, $V_a = 0.012 \text{ m}^3$, $V_c = 0.048 \text{ m}^3$, $\frac{M}{M_{\text{mol}}} = 1.5$, $\gamma = 1.4$. 因 bc 为绝热过程, 所以有

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}$$

解之得

$$V_b = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_c = \left(\frac{300}{400} \right)^{\frac{1}{1.4-1}} \times 0.048 = 2.34 \times 10^{-2} (\text{m}^3)$$

因 ab 为等温过程, 所以有

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_{ab} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R T_1 \ln \frac{V_b}{V_a} \\ &= 1.5 \times 8.31 \times 400 \times \ln \frac{0.0234}{0.012} \\ &= 3.33 \times 10^3 (\text{J}) \end{aligned}$$

循环效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{400} = 25\%$$

循环中做的功

$$A = Q_1 \eta = 3.33 \times 10^3 \times 0.25 = 8.33 \times 10^2 (\text{J})$$

循环中放出的热量

$$Q_2 = Q_1 - A = 3.33 \times 10^3 - 8.33 \times 10^2 = 2.50 \times 10^3 \text{ (J)}$$

例 7-7 求质量为 32 g 的氧气由压强为 $2.02 \times 10^5 \text{ Pa}$ 等温下降到 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时的熵变.

解 因过程为等温过程, 所以其熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \ln \frac{p_2}{p_1} \\ &= \frac{32 \times 10^{-3}}{32 \times 10^{-3}} \times 8.31 \times \ln 2 = 5.76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

自 测 题 六

一、选择题

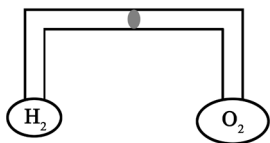
1. 有两个相同的容器,其容积不变,其中一个贮有氢气,另一个贮有摩尔数相同的氦气,它们的压强和温度都不相同.现将 5 J 的热量传给氢气,使之温度升高.若使氦气也升高同样的温度,则应传给氦气的热量为

- (A) 6 J. (B) 5 J. (C) 3 J. (D) 2 J. []

2. 一定质量的理想气体从体积 V_0 膨胀到 $2V_0$ 时,所经历的过程分别为 $a \rightarrow b$:等压过程; $a \rightarrow c$:等温过程; $a \rightarrow d$:绝热过程.则其中吸热最多的过程为

- (A) $a \rightarrow b$. (B) $a \rightarrow c$.
(C) $a \rightarrow d$. (D) $a \rightarrow b$ 和 $a \rightarrow c$ 吸热一样多. []

3. 如图所示,两个大小不同的容器用均匀细管相连,管中有一水银作活塞,大容器装有氧气,小容器装有氢气.当温度相同时,水银滴静止于细管中央,试问此时这两种气体的密度哪个大?



选择题 3 图

- (A) 氧气的密度大.
(B) 氢气的密度大.
(C) 密度一样大.
(D) 无法判断. []

4. 若室内生起炉子后温度从 15°C 升高到 27°C ,而室内气压不变,则此时室内的分子数减少了

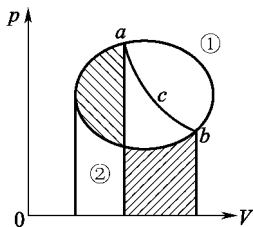
- (A) 0.5%. (B) 4%. (C) 9%. (D) 21%. []

5. 一定量的理想气体,在容积不变的条件下,当温度升高时,分子的平均碰撞次数 $\bar{Z}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化情况是

- (A) $\bar{Z}$ 增大, $\bar{\lambda}$ 不变. (B) $\bar{Z}$ 不变, $\bar{\lambda}$ 增大.
(C) $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都减小. (D) $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都增大. []

6. 一定量的理想气体,从 a 态出发经过①或②过程到达 b 态, acb 为等温线(如题图所示),则①、②过程中外界对系统传递的热量 Q_1, Q_2 是

- (A) $Q_1 > 0, Q_2 > 0$.
(B) $Q_1 < 0, Q_2 < 0$.
(C) $Q_1 > 0, Q_2 < 0$.
(D) $Q_1 < 0, Q_2 > 0$. []



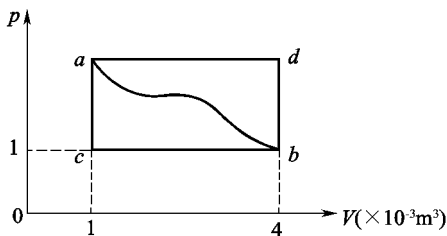
选择题 6 图

7. 在标准状态下,若氧气和氦气的体积比 $V_1/V_2=1/2$,则其内能之比 E_1/E_2 为

- (A) $1/2$. (B) $5/3$.
(C) $5/6$. (D) $3/10$. []

8. 如图所示,一定量的理想气体经历 acb 过程时吸热 200 J ,则经历 $acbda$ 过程时,吸热为

- (A) $-1\ 200\text{ J}$. (B) $-1\ 000\text{ J}$.
(C) -700 J . (D) $1\ 000\text{ J}$. []



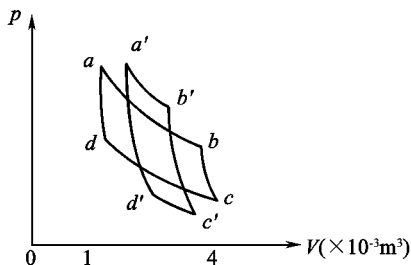
选择题 8 图

9. 关于可逆过程,下列说法中正确的是

- (A) 可逆过程就是可以反向进行的过程.
(B) 凡可反向进行的过程均为可逆过程.
(C) 可逆过程一定是准静态过程.
(D) 准静态过程一定是可逆过程. []

10. 一定量的理想气体,分别进行如题图所示的两个卡诺循环 $abcda$ 和 $a'b'c'd'a'$. 若在 p - V 图上这两个循环曲线所围面积相等,则可以由此得知这两个循环

- (A) 效率相等.
(B) 由高温热源处吸收的热量相等.
(C) 在低温热源处放出的热量相等.
(D) 在每次循环中对外做的净功相等. []



选择题 10 图

11. “气体和单一热源接触做等温膨胀时,吸收的热量全部用来对外做功.”对此结论,有如下几种评论,哪种是正确的?

- (A) 不违反热力学第一定律,但违反热力学第二定律.
 (B) 不违反热力学第二定律,但违反热力学第一定律.
 (C) 违反热力学第一定律,也违反热力学第二定律.
 (D) 不违反热力学第一定律,也不违反热力学第二定律. []

12. 一定量的理想气体向真空做绝热自由膨胀,体积由 V_0 增至 $2V_0$,在此过程中气体的

- (A) 内能不变,熵增加. (B) 内能不变,熵减少.
 (C) 内能不变,熵不变. (D) 内能增加,熵增加. []

13. 在一容积不变的容器中,贮有一定量的理想气体,温度为 T_0 时,气体分子的平均速率为 $\bar{v}_0$,平均碰撞频率为 $\bar{Z}_0$,平均自由程为 $\bar{\lambda}_0$.当气体温度升高到 $4T_0$ 时,其分子的平均速率 $\bar{v}$ 、平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 分别为

- (A) $\bar{v}=4\bar{v}_0, \bar{Z}=4\bar{Z}_0, \bar{\lambda}=4\bar{\lambda}_0$. (B) $\bar{v}=2\bar{v}_0, \bar{Z}=2\bar{Z}_0, \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0$.
 (C) $\bar{v}=2\bar{v}_0, \bar{Z}=2\bar{Z}_0, \bar{\lambda}=4\bar{\lambda}_0$. (D) $\bar{v}=2\bar{v}_0, \bar{Z}=2\bar{Z}_0, \bar{\lambda}=2\bar{\lambda}_0$. []

14. 定量的理想气体其初始温度为 T , 体积为 V . 设该气体的循环由下列三个过程组成:
 (1) 绝热膨胀到体积 $2V$; (2) 等容变化,使温度恢复到 T ; (3) 等温压缩,使体积变为 V . 由此循环必定为

- (A) 气体向外界放热. (B) 气体对外界做正功.
 (C) 气体内能增加. (D) 气体内能减少. []

二、填空题

1. 在推导理想气体压强公式中,体现统计意义的两条假设是

- (1) _____;
 (2) _____.

2. 在定压下加热一定量的理想气体.若使其温度升高 1 K 时,它的体积增加了 0.005 倍,则气体原来的温度是_____.

3. 在相同的温度和压强下,各为单位体积的氢气(视为双原子分子气体)与氮气的内能之比为_____,各为单位质量的氢气与氮气的内能之比为_____.

4. 分子物理学是研究_____,它应用的基本方法是_____方法.

5. 解释名词:

自由度 _____;

准静态过程_____.

6. 用总分子数 N 、气体分子速率 v 和速率分布函数 $f(v)$ 表示下列各量

- (1) 速率大于 v_0 的分子数=_____;
 (2) 速率大于 v_0 的那些分子的平均速率=_____;
 (3) 多次观察某一分子的速率,发现其速率大于 v_0 的概率=_____.

7. 常温、常压下,一定量的某种理想气体(可视为刚性分子,自由度为 i),在等压过程中吸热为 Q ,对外做功为 A ,内能增加为 ΔE ,则

$$A/Q = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta E/Q = \underline{\hspace{2cm}}.$$

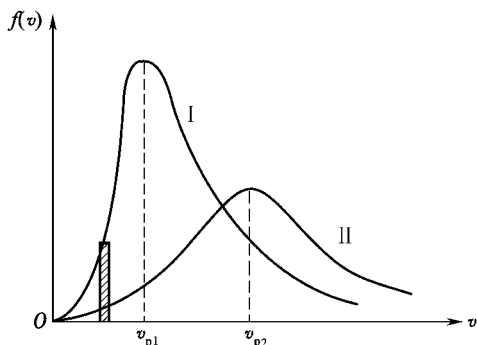
8. 有一卡诺热机,用 29 kg 空气为工作物质,工作在 27°C 的高温热源与 -73°C 的低温热源之间,此热机的效率 $\eta = 33.3\%$. 若在等温膨胀过程中气缸体积增大 2.718 倍,则此热机每一循环所做的功为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (空气的摩尔质量为 $29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$).

9. 氢、氧两气体在某一相同状态下,分子按速率分布的曲线如图所示. 则

(1) 曲线 I 表示 $\underline{\hspace{2cm}}$ 气分子的速率分布曲线,曲线 II 表示 $\underline{\hspace{2cm}}$ 气分子的速率分布曲线;

(2) 画有斜线的小长条面积表示 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 分布曲线下所包围的面积表示 $\underline{\hspace{2cm}}$.



填空题 9 图

10. 从统计的意义来说,不可逆过程实际上是一个 $\underline{\hspace{2cm}}$ 转变过程.

三、计算题

1. 容积为 20 L 、绝热性能极好的瓶子以速率 $v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 匀速运动,瓶子中充有质量为 100 g 的氦气,若瓶子突然停止运动,且全部定向运动能都转变为气体分子的热运动动能,则热平衡后氦气的温度、压强、内能及氦气分子的平均动能各增加了多少?

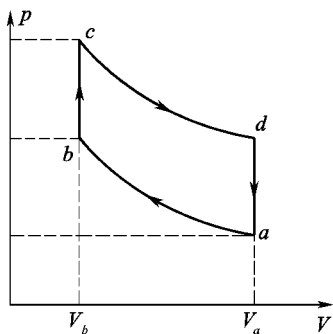
2. 已知某理想气体的定压摩尔热容为 $29.1 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$,求它在 0°C 时的分子平均转动动能.

3. 3 mol 温度为 273 K 的理想气体,先经等温过程使体积膨胀到原来的 5 倍,然后等容加热,使其末态压强恰好等于初态的压强,整个过程传给气体的热量为 $8 \times 10^4 \text{ J}$. 画出此过程的 p - V 图,并求出气体的比热容比 $\gamma = C_p/C_V$ 之值(气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

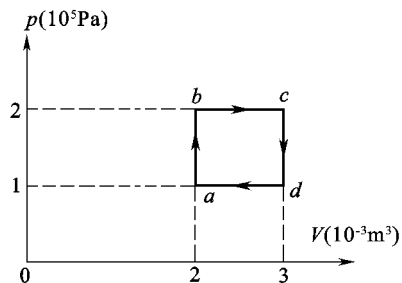
4. 某理想气体的循环如图所示. 其中 $a \rightarrow b$ 及 $c \rightarrow d$ 分别代表绝热压缩及绝热膨胀过程, $b \rightarrow c$ 及 $c \rightarrow a$ 其分别代表等体升温及等体降温过程. 证明:此循环的效率

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_a}{V_b} \right)^{1-\gamma}$$

式中, $\gamma = C_p/C_V$ 为比热容比.



计算题 4 图



计算题 5 图

5. 1 mol 的单原子理想气体的循环如图所示. 求:

- (1) 气体循环一次从外界吸收的总热量;
- (2) 气体循环一次对外界做的净功;
- (3) 证明: $T_a T_c = T_b T_d$.

6. 求 1 mol 理想气体经任一过程由初态 (p_0, V_0, T_0) 变化到末态 (p, V, T) 时的熵变 (设气体的定体摩尔热容为 C_V).

第8章 静 电 场

基本要求

1. 掌握电场强度的概念和场强叠加原理,并能根据电荷分布计算场强.
2. 理解静电场中的高斯定理,熟练掌握利用高斯定理计算场强的方法.
3. 理解静电场中的环路定理,掌握电势和电势差的概念,并能利用电势的定义和电势叠加原理计算电势.
4. 了解场强与电势的微分关系,并能利用该关系求解场强.
5. 理解导体的静电平衡条件及静电平衡下导体的性质及其电荷分布.
6. 理解电容器及其电容的概念,并能计算简单电容器的电容.
7. 理解电介质极化的概念,以及有电介质时的高斯定理和环路定理,掌握利用电介质中的高斯定理求解电位移和场强的方法.
8. 理解电场能量密度的概念,能计算一些电场具有对称性情况下的电场能量.

内容提要

一、库仑定律

在真空中,两个静止点电荷之间的相互作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \boldsymbol{r}$$

式中, $\boldsymbol{r}$ 为施力电荷指向受力电荷的矢径; $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$,称为真空电容率或真空介电常量.

二、电场强度

1. 电场强度(简称场强)

表征电场在给定点性质的物理量,用 $\mathbf{E}$ 表示,它等于单位正电荷在该点所受电场力,即

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

2. 点电荷的场强

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

式中, $\mathbf{r}$ 为点电荷 q 指向场点的矢径.

3. 场强叠加原理

在由 n 个点电荷所组成的点电荷系所激发的电场中,任一点的场强等于各个点电荷单独存在时在该点产生场强的矢量和

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i$$

式中, $\mathbf{r}_i$ 为第 i 个点电荷指向场点的矢径. 若电荷连续分布,则可将其视为无穷多点电荷元 dq 的集合,上式的求和应用积分代替,即

$$\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \mathbf{r}$$

式中, $\mathbf{r}$ 为点电荷元 dq 指向场点的矢径. 对于电荷连续分布的带电线、面和体,电荷元 dq 分别表示为 λdl , σdS 和 ρdV , 其中 λ , σ 和 ρ 分别为电荷线密度、电荷面密度和电荷体密度.

三、真空中的高斯定理

1. 电场线

是为了形象地反映电场的空间分布而引入的概念. 电场线上每一点的切线方向反映了该点场强的方向, 电场线的疏密程度反映了场强的大小.

2. 电通量

通过电场中任一给定曲面 S 的电场线数目称为通过该面的电通量, 用 Φ_e 表示, 其计算式为

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

3. 真空中的高斯定理

在真空中, 通过静电场空间内任一闭合曲面 S 的电通量 Φ_e 等于包围在该闭合曲面内电荷的代数和除以 ϵ_0 , 即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S_{内})} q_i$$

高斯定理说明:静电场是有源场,电场线起迄于正、负电荷.

四、静电场的环路定理

静电场中,电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 沿任一闭合回路 L 的对坐标的曲线积分等于零,即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

静电场的环路定理说明:静电场是保守场,静电力是保守力.

五、电势能 电势

1. 电势能

电荷 q_0 在电场空间中某点 P 所具有的能量,它为 q_0 和电场所组成的系统所共有,用 W_P 表示,在数值上等于将该电荷 q_0 从所在点移至电势能零点的过程中静电力所做的功,即

$$W_P = \int_P^{\text{电势能零点}} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

2. 电势

表征电场在给定点 P 处性质的物理量,用 U_P 表示,在数值上等于将单位正电荷从该点沿任意路径移到电势能零点(亦为电势零点)的过程中静电力所做的功,即

$$U_P = \int_P^{\text{电势零点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

当电荷在有限大小的空间区域分布时,规定 $U_\infty = 0$,则 $U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$.

3. 点电荷的电势

若规定 $U_\infty = 0$,则点电荷的电势为

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中, r 为点电荷 q 到场点 P 处的距离.

4. 电势叠加原理

由 n 个点电荷所组成的点电荷系所激发的电场中的某一点 P 处的电势等于各点电荷单独存在时在该点产生电势的代数和,即

$$U_P = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

式中, r_i 为点电荷 q_i 到场点 P 的距离. 若电荷连续分布,则可将其视为无穷多点电荷元 dq 的集合,上式的求和应用积分代替,即

$$U_P = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中, r 为点电荷元 dq 到场点 P 处的距离. 对应于电荷在线、面或体上连续分布, 电荷元 dq 分别为 λdl , σdS 和 ρdV , 其中 λ , σ 和 ρ 分别为电荷线密度、电荷面密度和电荷体密度. 必须注意, 以上两式只能在场源电荷在有限大小的区域内分布, 且选取无穷远处为电势零点的情形下适用.

5. 电势差

静电场中任意两点 a 和 b 间的电势之差, 用 U_{ab} 表示, 其表达式为

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

6. 静电力做功与电势差的关系

在静电场中, 将任一电荷 q_0 从 a 点移到 b 点的过程静电力所做的功 A_{ab} 为

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 U_{ab} = q_0 (U_a - U_b) = W_a - W_b$$

六、场强与电势的微分关系

1. 等势面

在电场空间中, 电势相等的点所连成的曲面叫等势面. 电场空间中某点的场强方向与等势面在该点的法线方向一致, 并指向电势降低的方向. 等势面的疏密程度反映了场强的大小.

2. 场强与电势的微分关系

静电场中任意一点的场强等于该点电势梯度的负值, 即

$$\mathbf{E} = -\text{grad}U = -\nabla U$$

七、静电场中的导体

1. 导体的静电平衡条件

导体内部的场强处处为零, 即 $\mathbf{E}_{\text{内}} = 0$.

导体表面处场强的方向处处垂直导体表面, 即 $\mathbf{E}_{\text{表面}} \perp$ 导体表面.

2. 导体的静电平衡的基本性质

场强分布 $\mathbf{E}_{\text{内}} = 0$, $\mathbf{E}_{\text{表面}} \perp$ 导体表面. 此外, 处于静电平衡的导体, 其表面各点处的电荷面密度 σ 与该处表面附近的场强 $\mathbf{E}_{\text{附近}}$ 的大小成正比, 即 $E_{\text{附近}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

电荷分布 处于静电平衡的导体, 其内部各点处的净电荷为零, 电荷只能分布在其表面.

电势分布 处于静电平衡的导体为一等势体, 其表面为一等势面.

八、电容

1. 孤立导体的电容

孤立导体所带的电量 q 与它的电势 U 之比称为孤立导体的电容, 用 C 表示, 即

$$C = \frac{q}{U}$$

2. 电容器的电容

电容器正极板上所带电量 q (负极板所带电量与正极板上的电量等量异号) 与正、负极板电势差 U_{+-} 之比称为电容器的电容, 仍用 C 表示, 即

$$C = \frac{q}{U_{+-}}$$

3. 电容器串联和并联

串联时的等效电容器为

$$C = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$$

并联时的等效电容器为

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

九、静电场中的电介质

1. 电介质的极化

宏观表现 电介质表面及内部(对非均匀电介质)出现极化电荷.

微观机理 有极分子取向极化, 无极分子位移极化, 其本质为电介质分子电偶极矩(固有的或感生的)在外电场的作用下沿外电场方向的有序排列.

2. 电极化强度

表征电介质中某点的极化程度的物理量, 用 $\mathbf{P}$ 表示, 其定义为单位体积内分子电偶极矩的矢量和, 即

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_e}{\Delta V}$$

对各向同性的电介质, 则

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

式中, χ_e 称为电介质的电极化率, ϵ_r 称为电介质的相对电容率或相对介电常数.

3. 电位移

是描述电场性质的辅助物理量, 用 $\mathbf{D}$ 表示. 在电介质中, 电位移矢量 $\mathbf{D}$ 、电

场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和电极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 的普适关系式为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

对各向同性的电介质, 则

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

式中, ϵ 称为电介质的电容率, 或介电常数.

十、电介质中的高斯定理和环路定理

1. 电介质中的高斯定理

通过电场中任一闭合曲面的电位移通量等于该面所包围的自由电荷量的代数和, 即

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{(S \text{ 内})} q_{0i}$$

当自由电荷和电介质的分布都具有一定对称性时, 利用电介质中的高斯定理, 可不必求出极化电荷和电极化强度, 而直接求场强的分布.

2. 电介质中的环路定理

电介质中, 电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 沿任一闭合回路 L 的对坐标的曲线积分等于零, 即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

表明电介质中的静电场仍为保守场.

十一、静电场的能量

1. 带电电容器的能量

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C U_{+-}^2 = \frac{1}{2} q U_{+-}$$

2. 电场的能量

电场能量密度

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

对各向同性的电介质, 则

$$w = DE = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

电场总能量

$$W = \int_{\Omega} w dV$$

积分遍及电场所在的整个空间区域 Ω .

解题指导与示例

对于真空中的静电场,其主要问题是根据场源电荷的分布求场强和电势的分布.

场强的计算方法通常有三种:

一是根据点电荷的场强公式,利用场强叠加原理,通过求和(场源电荷为点电荷系)或积分(场源电荷连续分布)来求解场强的分布.亦可基于某些连续分布电荷的场强公式和场强叠加原理,通过积分去求其他连续分布的电荷所激发的电场.常用的连续分布电荷的场强公式有:

均匀带电 q 、半径为 R 的细圆环轴线上距环心 x 处的场强

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

方向沿轴线;

电荷线密度为 λ 的无限长均匀带电线周围距直线垂直距离为 r 处的场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

方向为垂直于直线的径向;

电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面附近的电场

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

方向垂直于带电平面指向两侧.

二是在场源电荷分布具有球、轴、面对称性的情况时,利用高斯定理求解场强的分布.

三是利用场强与电势的微分关系求场强的分布,即

$$\mathbf{E} = -\text{grad}U = -\nabla U$$

电势的计算方法有两种:

一是根据点电荷的电势公式,利用电势叠加原理,通过求和(场源电荷为有限空间内分布的点电荷系)或积分(场源电荷在有限空间内连续分布)来求解电势的分布.亦可基于某些连续分布电荷的电势公式和电势叠加原理,通过积分去求其他连续分布的电荷的电势.常用的连续分布电荷的电势公式有:

均匀带电 q 、半径为 R 的细圆环轴线上距环心 x 处的电势

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

二是利用电势的定义式,即场强与电势的积分关系,先求场强分布,然后再

求电势分布.

对于静电场中的导体和电介质,要解决的问题主要有:

(1) 导体存在时的电场和电势分布的计算.

在解决这一类问题时,首先要由静电平衡条件和电荷守恒定律分析导体上电荷重新分布的情况,然后再利用上面所介绍的相关方法求解场强和电势的分布.

(2) 求电容.

计算电容器电容的基本方法是:设电容器两极板上分别带电 $\pm q$,求出两极板间的场强 $\mathbf{E}$ 的分布;再由 $U_{+-} = \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$,求出两极板间的电势差;最后根据电容定义 $C = q/U_{+-}$,求出电容.

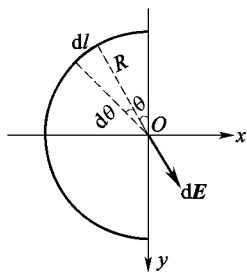
(3) 电介质存在时的电场和电势分布的计算.

有电介质时,由于总场强 $\mathbf{E}$ 为外电场 $\mathbf{E}_0$ 和极化电荷所产生电场 $\mathbf{E}'$ 的矢量和,即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$,一般情况下不易求解.但对于各向同性的电介质,当自由电荷及电介质的分布具有球、轴、面对称性时,则可应用电介质中的高斯定理.先求出电位移矢量 $\mathbf{D}$;再由 $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon\epsilon_0$,求出 $\mathbf{E}$;电势则由场强与电势的积分关系求解.

(4) 计算电场中的能量.

在解决这一类问题时,首先要清楚场的空间分布,在此基础上求出电场能量密度的表达式,通过积分得到整个或部分电场空间中的电场能量.对于带电电容器,亦可利用电容器的储能公式,求得电容器内部电场空间的电场能量.

例 8-1 如例 8-1 图所示,一半径为 R 的半圆形细棒均匀带有正电荷 q ,求环心 O 处的场强和电势.



例 8-1 图

解 场源电荷连续分布,但不具有球、轴、面对称性,所以只能根据点电荷的场强和电势公式,利用场强和电势叠加原理,通过积分来求解场强和电势的分布.

取坐标系如图所示,环心 O 处为坐标原点.在半圆形细棒上取线元 $d\mathbf{l}$,电荷元 $dq = \lambda d\mathbf{l}$, $\lambda = q/\pi R$ 为半圆形细棒上的电荷线密度.由点电荷的场强和电势公式, dq 在环心 O 场强的大小和电势分别为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}, dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

场强的方向如图所示. 由场强的对称性分析, 知场强 E 在 Y 方向的分量为零, 即

$$E_y = 0$$

而

$$dE_x = dE \sin \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta$$

式中, $dl = R d\theta$. 故

$$E = E_x = \int_0^{E_x} dE_x = \int_0^\pi \frac{\lambda \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R} d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

方向沿 X 轴正向.

O 点处的电势为

$$U = \int_0^U dU = \int_0^{\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

例 8-2 如例 8-2 图所示, 半径为 R 的带正电半球面, 电荷面密度为 $\sigma = b \cos^2 \theta$ (b 为常数), 求球心 O 处的场强.

解 场源电荷连续分布, 但不具有球、轴、面对称性. 可将半球面划分为无穷多个与轴线 (x 轴) 垂直的均匀带电细圆环, 然后基于均匀带电细圆环轴线上的场强公式和场强叠加原理, 通过积分去求出带电半球面在球心 O 处 (O 在轴线上) 的场强. 否则, 根据点电荷的场强公式和场强叠加原理, 通过对场强分量的积分求场强, 将是一个对曲面面积的曲面积分问题.

如图所示, 在距球心 O 为 x 处取一个细圆环, 其上均匀带电, 所带电量为

$$dq = \sigma 2\pi r dl = \sigma 2\pi R \sin \theta dl$$

式中, $r = R \sin \theta$ 为细圆环的半径, $dl = R d\theta$. 代入 σ , 有

$$dq = 2\pi R^2 b \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

根据均匀带电细圆环轴线上的场强公式, dq 在

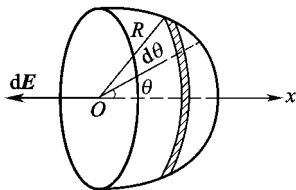
O 处的场强大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R \cos \theta) 2\pi R^2 b \cos^2 \theta \sin \theta}{R^3} d\theta = \frac{b}{2\epsilon_0} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta$$

方向为 x 轴的负向. 由于所有细圆环在 O 点处的场强方向均相同, 都沿 x 轴的负向, 故 O 点处的总场强为对 dE 的直接积分, 即

$$E = \int_0^E dE = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{2\epsilon_0} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{b}{8\epsilon_0}$$

方向为 x 轴的负向.



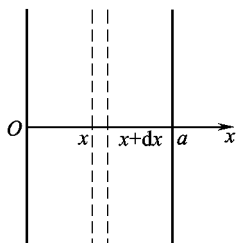
例 8-2 图

例 8-3 如例 8-3 图所示,厚度为 a 的无限大非均匀带电平板,电荷体密度 $\rho=cx$ (c 为常数). 求:

(1) $x \geq 0$ 区域的场强分布;

(2) 选取 $x=0$ 处的为电势零点, $x \geq 0$ 区域的电势分布.

解 由于场源电荷不具有球、轴、面对称性,所以不能利用高斯定理先求场强分布,再由场强与电势的积分关系求电势分布. 又由于场源电荷在非有限区域连续分布,因而也不能直接利用电势叠加原理,通过积分先求电势分布,再由场强与电势的微分关系求场强分布. 但在这里可将无限大非均匀带电平板划分为无穷多个互相平行的无限大均匀带电平面,然后基于无限大均匀带电平面的场强公式和场强叠加原理,通过积分去求出无限大非均匀带电平板场强,进而利用场强与电势的积分关系求电势分布.



例 8-3 图

(1) 如图所示,在 x 与 $x+dx$ 间取一无限大平面,该平面均匀带电,电荷面密度为

$$\sigma = \rho dx$$

由无限大均匀带电平面的场强公式,该带电平面所产生的场强大小为

$$dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} dx = \frac{cx}{2\epsilon_0} dx$$

方向垂直于带电平面指向两侧. 由于所划分的所有带电平面场强的方向均垂直于带电平面指向两侧,因而在 x 点左边的那些带电平面在 x 点处的场强方向沿 x 轴正向,在 x 点右边的那些带电平面在 x 点处的场强方向沿 x 轴负向. 故有

在 $0 \leq x \leq a$ 区域

$$E = \int_0^E dE = \int_0^x \frac{cx}{2\epsilon_0} dx - \int_x^a \frac{cx}{2\epsilon_0} dx = \frac{cx^2}{2\epsilon_0} - \frac{ca^2}{4\epsilon_0}$$

即

$$\mathbf{E} = E\mathbf{i} = \left(\frac{cx^2}{2\epsilon_0} - \frac{ca^2}{4\epsilon_0} \right) \mathbf{i}$$

在 $x > a$ 区域

$$E = \int_0^E dE = \int_0^a \frac{cx}{2\epsilon_0} dx = \frac{ca^2}{4\epsilon_0}$$

即

$$\mathbf{E} = E\mathbf{i} = \frac{ca^2}{4\epsilon_0} \mathbf{i}$$

(2) 取积分路径沿 x 轴方向, 即 $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i}$, 有

在 $0 \leq x \leq a$ 区域

$$U = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_x^0 E dx = \int_x^0 \left(\frac{cx^2}{2\epsilon_0} - \frac{ca^2}{4\epsilon_0} \right) dx = -\frac{cx^3}{6\epsilon_0} + \frac{ca^2x}{4\epsilon_0}$$

在 $x > a$ 区域

$$U = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_x^0 E dx = \int_x^a \frac{ca^2}{4\epsilon_0} dx + \int_a^0 \left(\frac{cx^2}{2\epsilon_0} - \frac{ca^2}{4\epsilon_0} \right) dx = \frac{ca^3}{3\epsilon_0} - \frac{ca^2x}{4\epsilon_0}$$

例 8-4 半径为 R 的无限长圆柱, 柱内电荷体密度为 $\rho = ar - br^2$, r 为某点到圆柱轴线的距离, a, b 为常数. 求:

(1) 圆柱内、外场强的分布;

(2) 圆柱内、外电势的分布(选取轴线处 $U=0$).

解 由于场源电荷分布具有轴对称性, 所以可利用高斯定理先求场强分布, 再由场强与电势的积分关系求电势分布.

(1) 如例 8-4 图所示, 选长为 l 、半径为 r 与圆柱同轴的圆筒面作为高斯面 S , 通过该面的电量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{上下底面}}} E dS \cos \frac{\pi}{2} + \int_{S_{\text{侧面}}} E dS = E 2\pi r l = \sum_{(S \text{ 内})} q_i / \epsilon_0$$

高斯面内电荷的代数和为

$$q = \int_V \rho dV = \begin{cases} \int_0^r (ar - br^2) 2\pi r l dr = 2\pi l \left(\frac{a}{3} r^3 - \frac{b}{4} r^4 \right) & r \leq R \\ \int_0^R (ar - br^2) 2\pi r l dr = 2\pi l \left(\frac{a}{3} R^3 - \frac{b}{4} R^4 \right) & r > R \end{cases}$$

故有

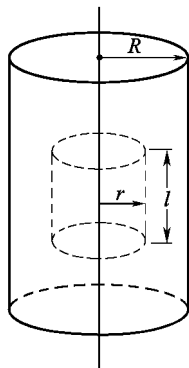
$$E = \begin{cases} \frac{4ar^2 - 3br^3}{12\epsilon_0} & r \leq R \\ \frac{4aR^3 - 3bR^4}{12\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

方向为垂直于圆柱轴线的径向. 写成矢量式为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{4ar - 3br^2}{12\epsilon_0} \mathbf{r} & r \leq R \\ \frac{4aR^3 - 3bR^4}{12\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} & r > R \end{cases}$$

(2) 选积分路径为垂直于圆柱轴线的径向, 即有 $d\mathbf{l} = dr$, 则有圆柱内、外电势的分布为

当 $r \leq R$



例 8-4 图

$$U = \int_r^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^0 \frac{4ar^2 - 3br^3}{12\epsilon_0} dr = -\frac{ar^3}{9\epsilon_0} + \frac{br^4}{16\epsilon_0}$$

当 $r > R$

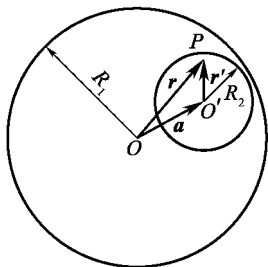
$$\begin{aligned} U &= \int_r^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R \frac{4aR^3 - 3bR^4}{12\epsilon_0 r} dr + \int_R^0 \frac{4ar^2 - 3br^3}{12\epsilon_0} dr \\ &= \frac{4aR^3 - 3bR^4}{12\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} - \frac{aR^3}{9\epsilon_0} + \frac{bR^4}{16\epsilon_0} \end{aligned}$$

例 8-5 如例 8-5 图所示, 在半径为 R_1 、电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体中挖去一个半径为 R_2 的球形空腔, 空腔的中心为 O' , 球心与空腔中心的距离 $OO' = a$. 求空腔内任一点 P 的场强.

解 用积分解决这个问题很复杂. 又因为挖了空腔的带电球体, 其电荷的分布(场源电荷)失去球对称性, 因而不能直接利用高斯定理求场强分布. 在这种情形下, 可考虑用填补法使场源电荷具有对称性后, 再应用高斯定理进行求解. 即设想空腔内均匀分布有体密度为 ρ 和 $-\rho$ 的正负电荷, 这并不影响空间电场分布. 因此, 空间场强的分布可视为由带正电的大球体及带负电的小球体产生的场强的叠加.

设大、小带电球体在 P 点处的场强分别为 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$, 则 P 点处的场强为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$



例 8-5 图

由高斯定理, 有

$$\oint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = E_1 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = E_2 4\pi r'^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r'^3 \rho}{\epsilon_0}$$

即

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, E_2 = \frac{\rho r'}{3\epsilon_0}$$

方向分别沿 $\mathbf{r}$ 和 $-\mathbf{r}'$ (见例 8-5 图). 写成矢量式有

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}, \mathbf{E}_2 = -\frac{\rho \mathbf{r}'}{3\epsilon_0}$$

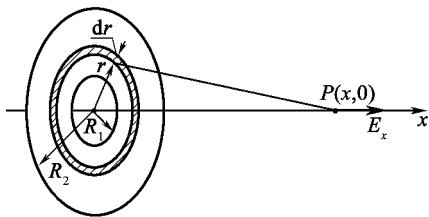
则

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$$

即空腔内的场为均匀场.

例 8-6 将半径为 R_2 的带电圆盘, 在盘心处挖去一半径为 R_1 的小圆孔, 并使圆盘均匀带电, 电荷面密度为 σ . 求这个中空的圆盘轴线上任一点 P 处的场强.

解 场源电荷在有限区域连续分布, 但不具有球、轴、面对称性, 所以不能利用高斯定理求场强分布. 但可将中空带电圆盘划分为无穷多个细圆环, 然后基于均匀带电细圆环轴线上的电势公式和电势叠加原理, 通过积分去求出中空带电圆盘在轴线上的电势, 最后利用场强和电势的微分关系求出场强.



例 8-6 图

如例 8-6 图所示, 在圆盘上取半径为 r 、宽为 dr 的细圆环, 其上带电为

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

根据均匀带电细圆环轴线上的电势公式, dq 在 P 点处的电势为

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}}$$

整个中空带电圆盘在 P 点处的电势为

$$U = \int_0^U dU = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2})$$

故中空带电圆盘在轴线 (X 轴) 上任一点 P 处的场强为

$$\mathbf{E} = -\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} \right) \mathbf{i}$$

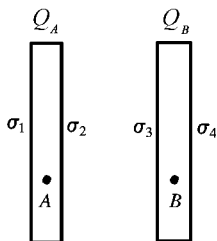
例 8-7 如例 8-7 图所示, 两块靠得很近的平行导体板, 板的面积均为 S , 间距为 d , 带电量分别为 Q_A 和 Q_B . 求: (1) 各板面的电荷面密度; (2) 两极间的电势差.

解 (1) 忽略边缘效应, 各板面上的电荷可认为是均匀分布, 其电荷面密度分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 和 σ_4 (如图所示). 由电荷守恒定律, 可得

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_A$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_B$$

由静电平衡的性质, 可求得四个板面上的电荷在 A, B 导体内的场强为零, 即



例 8-7 图

$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

联立以上四个方程,可求得

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_A + Q_B}{2S} \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_A - Q_B}{2S}$$

由此可以看出:两板的外侧带等量同号的电荷,内侧带等量异号的电荷。

若 $Q_A = -Q_B$, 则 $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$, $\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_A}{S}$, 异号电荷相吸, 电荷只分布在两板内侧表面上, 此时可视为平行板电容器;

若 $Q_A = Q_B$, 则 $\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_A}{S}$, $\sigma_2 = -\sigma_3 = 0$, 同号电荷相斥, 电荷只分布在两板外侧表面上。

(2) 两板间的电场为均匀场, 其场强大小为

$$E = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = \frac{Q_A - Q_B}{2S}$$

方向垂直于板面。两极间的电势差为

$$U_{AB} = U_A - U_B = Ed = \frac{Q_A - Q_B}{2S} d$$

例 8-8 如例 8-8 图所示, 在半径为 R 的金属球外距球心为 a 处放置点电荷 $+Q$, 球内一点 P 到球心的距离为 r 。求:

(1) 感应电荷在 P 点产生的场强;

(2) P 点的电势。

解 (1) P 点的场强是点电荷 Q 在 P 点产生的场强 E_1 与感应电荷在 P 点产生的场强 E_2 的矢量和。在静电平衡时, 金属导体球内任一点的场强为零, 所以

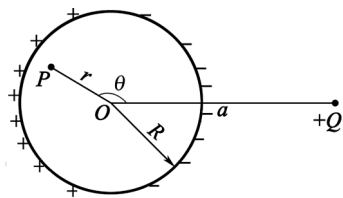
$$E_P = E_1 + E_2 = 0$$

即

$$E_2 = -E_1$$

则 E_2 的大小为

$$E_2 = E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)}$$



例 8-8 图

方向由 P 指向 Q .

(2) 静电平衡时,导体是等势体, P 点的电势 U_P 等于球心的电势 U_O . 感应电荷分布在导体球的表面,任一感应电荷元 dq 在球心的电势为

$$dU_{O1} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

全部感应电荷在球心的电势为

$$U_{O1} = \int_0^{U_{O1}} dU_{O1} = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_q dq$$

根据电荷守恒定律,导体球表面上的感应电荷的代数和为零,即

$$\int_q dq = 0$$

所以

$$U_{O1} = 0$$

点电荷 Q 在 P 点的电势为

$$U_{O2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

故有 P 点的电势为

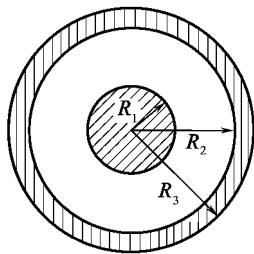
$$U_P = U_O = U_{O1} + U_{O2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

例 8-9 半径为 R_1 的导体球带电量为 q ,球外有一内外半径分别为 R_2, R_3 的同心导体球壳,带电为 Q . 求:

- (1) 场强和电势分布;
- (2) 若用导线连接球和球壳后,电势分布如何?
- (3) 若外球壳接地,球及球壳的电势各为多少?
- (4) 若内球接地,球与球壳间的电势差为多少?

解 (1) 首先必须分析电荷的分布情况. 根据导体静电平衡时电荷的分布情况和电荷守恒定律,可知电荷在半径为 R_1, R_2 和 R_3 的三个球面上作均匀分布,带电量分别为 $q, -q$ 和 $q+Q$. 由于所有电荷(场源电荷)的分布均具有球对称性,所以可以根据高斯定理先求场强分布,再由场强与电势的积分关系求电势分布.

做一半径为 r 的同心球面为高斯面 S ,由高斯定理有



例 8-9 图

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E4\pi r^2 = \sum_{(S \text{ 内})} q_i / \epsilon_0 = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1 \\ q/\epsilon_0 & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ (q+Q)/\epsilon_0 & R_3 < r \end{cases}$$

即

$$E = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{(q+Q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_3 < r \end{cases}$$

方向均沿径向.

选积分路径沿径向, 即 $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$, 由

$$U_r = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

有电势分布为

$$0 < r < R_1$$

$$\begin{aligned} U_r &= \int_r^{R_1} 0 dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} 0 dr + \int_{R_3}^\infty \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_3} \right) = U_{R_1} \end{aligned}$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$\begin{aligned} U_r &= \int_r^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} 0 dr + \int_{R_3}^\infty \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_3} \right) \end{aligned}$$

$$R_2 < r < R_3$$

$$U_r = \int_r^{R_3} 0 dr + \int_{R_3}^\infty \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = U_{R_2} = U_{R_3}$$

$$R_3 < r$$

$$U_r = \int_r^\infty \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(2) 若用导线连接球和球壳后, 半径为 R_1 和 R_2 的球面上所带电为零, 所有电荷 $q+Q$ 全部均匀分布在半径为 R_3 的球面上. 根据高斯定理, 这时的场强分布 (矢量形式) 为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_3 \\ \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & R_3 < r \end{cases}$$

电势分布为

$$\begin{aligned} U_r &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \begin{cases} \int_r^{R_3} 0 dr + \int_{R_3}^\infty \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} & 0 < r < R_3 \\ \int_r^\infty \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r} & R_3 < r \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 若外球壳接地, 则半径为 R_1 和 R_2 的球面上所带电荷分别为 $\pm q$, 半径为 R_3 的球面上的电荷 $q+Q$ 全部与地面电荷中和. 根据高斯定理, 这时的场强分布 (矢量形式) 为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases}$$

此时, 导体球的电势为 (地为电势零点)

$$U_{R_1} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} 0 dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

导体球壳的电势为

$$U_{R_2} = U_{R_3} = 0$$

(4) 若内导体球接地, 则内导体球的电势为零, 即 $U_{R_1} = 0$, 但其表面带电并不为零, 设其为 q' . 则由于静电感应, 外球壳内、外表面将分别带电 $-q'$ 和 $q'+Q$. 此时, 无穷远处电势仍为零, 由(1)问中的结果, 有导体球的电势为

$$U_{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'}{R_1} - \frac{q'}{R_2} + \frac{q'+Q}{R_3} \right)$$

令其为零, 可求得

$$q' = \frac{R_1 R_2 Q}{R_1 R_3 - R_2 R_3 - R_1 R_2}$$

另由(1)问中的结果, 有导体球壳的电势为

$$U_{R_2} = U_{R_3} = \frac{q' + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

代入 q' , 可得导体球壳的电势为

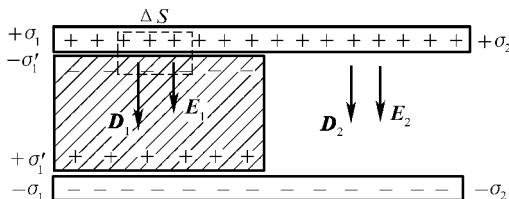
$$U_{R_2} = U_{R_3} = \frac{(R_2 - R_1)Q}{4\pi\epsilon_0(R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3)}$$

故导体球与导体球壳间的电势差为

$$U_{R_1R_2} = U_{R_1} - U_{R_2} = U_{R_1R_3} = U_{R_1} - U_{R_3} = \frac{(R_1 - R_2)Q}{4\pi\epsilon_0(R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3)}$$

例 8-10 如例 8-10 图所示, 平行板电容器两极板的面积为 A , 距离为 d , 板间左半部分空间充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质, 右半部分空间为真空. 已知两极板间的电势差为 U_{+-} , 求:

- (1) 电介质和真空中的电位移及场强;
- (2) 电容器的电容.



例 8-10 图

解 (1) 若忽略边缘效应, 则电容器内部空间的场分布具有平面对称性, 可利用电介质中的高斯定理, 先求电位移的分布, 然后再求场强的分布.

设电容器左、右两部分空间的上、下极板上均匀分布的电荷之面密度分别为 $\pm\sigma_1$ 和 $\pm\sigma_2$ (图中 $\pm\sigma_1'$ 为电介质表面上的极化电荷面密度), 则整个电容器上、下极板所带的电量分别为 $\pm(\sigma_1 + \sigma_2)A/2$. 电介质和真空中的电位移及场强分别用 $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 表示.

在电容器极板间的左半部空间取一底面积为 ΔS 的闭合圆筒面作为高斯面 S , 其侧面与板面垂直, 两底面与极板平行, 且上底面在导体极板内, 下底面在电介质中. 通过高斯面的电位移通量为

$$\oint_S \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{上底}}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{下底}}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{侧面}}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}$$

由于上底面 $S_{\text{上底}}$ 在导体极板内, $\mathbf{E}_1$ 处处为零, 所以 $S_{\text{上底}}$ 上的 $\mathbf{D}_1$ 亦处处为零; 在侧面 $S_{\text{侧面}}$ 上 $\mathbf{D}_1$ 处处与 $d\mathbf{S}$ 垂直, 故通过 $S_{\text{上底}}$ 和 $S_{\text{侧面}}$ 的电位移通量为零, 即有

$$\oint_S \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{下底}}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = D_1 \Delta S$$

包围在此高斯面内的自由电荷的代数和为 $\sigma_1 \Delta S$, 由电介质中的高斯定理有

$$D_1 = \sigma_1$$

即
$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

同理,对于电容器极板间的右半部空间有

$$D_2 = \sigma_2$$

即
$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

由于静电平衡时两导体极板都是等势体,所以电容器左、右两部分两极板间的电势差相等,均为 U_{+-} ,即

$$U_{+-} = E_1 d = \frac{\sigma_1}{\epsilon_r \epsilon_0} d, U_{+-} = E_2 d = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d$$

由此可得

$$D_1 = \sigma_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 U_{+-}}{d}, D_2 = \sigma_2 = \frac{\epsilon_0 U_{+-}}{d}$$

$$E_1 = \frac{U_{+-}}{d}, E_2 = \frac{U_{+-}}{d}$$

D_1, D_2 和 E_1, E_2 的方向均为垂直于极板由上指向下.

(2) 由电容器电容的定义,该平行板电容器的电容为

$$C = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)A/2}{U_{+-}} = \frac{(\epsilon_r + 1)\epsilon_0 A}{2d}$$

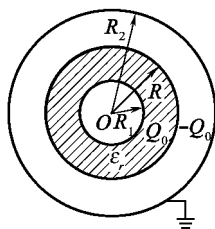
例 8-11 有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的同心金属球壳,内球壳带电量为 Q_0 ,紧靠其外面包一层半径为 R 、相对电容率为 ϵ_r 的电介质,外球壳接地,如例 8-11 图所示. 求:

- (1) 两球壳间的场强分布;
- (2) 两球壳的电势差;
- (3) 两球壳构成的电容器的电容;
- (4) 两球壳间的电场能量.

解 (1) 在本题中,静电平衡时,自由电荷的分布情况为:内球壳的外表面均匀分布有电荷 Q_0 ,外球壳的内表面均匀分布有电荷 $-Q_0$,外球壳的外表面不带电.

因为自由电荷分布是球对称的,电介质表面又是与带电球壳同心的球面(极化电荷的分布亦具有球对称性),因而不会破坏电场分布的球对称性,所以可用电介质中的高斯定理求场强的分布.

做一半径为 r 的同心球面为高斯面 S ,由电介质中的高斯定理有



例 8-11 图

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D4\pi r^2 = \sum_{(S \text{ 内})} q_{0i} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ Q_0 & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases}$$

即

$$D = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q_0}{4\pi r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases}$$

由 $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$, 可得在两球壳间 ($R_1 < r < R_2$) 的场强分布为

$$E = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} & R_2 < r < R \\ \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R < r < R_2 \end{cases}$$

$\mathbf{E}$ 的方向沿径向.

(2) 两球壳的电势差为(取积分路径沿径向)

$$\begin{aligned} U_{R_1 R_2} &= U_{R_1} - U_{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^R \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} dr + \int_R^{R_2} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

(3) 两球壳构成的电容器的电容为

$$C = \frac{Q_0}{U_{R_1 R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R R_1 R_2}{R_2(R - R_1) + \epsilon_r R_1(R_2 - R)}$$

(4) 由两球壳间的场分布, 可得两球壳间的电场能量密度分布为

$$w = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_r\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_r\epsilon_0 E^2 = \begin{cases} \frac{Q_0^2}{32\pi^2\epsilon_r\epsilon_0 r^4} & R_1 < r < R \\ \frac{Q_0^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} & R < r < R_2 \end{cases}$$

两球壳间的电场能量为

$$W = \int_{\Omega} w dV$$

积分遍及电容器的整个内部空间 Ω . 由于电场能量密度分布的球对称性(在与球心距离相同的点上, 能量密度相等), 因而可将积分体积元取为半径为 r , 厚为 dr 的同心薄球壳, 即 $dV = 4\pi r^2 dr$, 由此有

$$W = \int_{R_1}^R w 4\pi r^2 dr + \int_R^{R_2} w 4\pi r^2 dr$$

代入各区间的电场能量密度 w 进行计算, 可得两球壳间的电场能量为

$$\begin{aligned} W &= \int_{R_1}^R \frac{Q_0^2}{32\pi^2\epsilon_r\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr + \int_R^{R_2} \frac{Q_0^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) + \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

两球壳间的电场能量亦可由电容器的储能公式进行计算, 即

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) + \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right)$$

自 测 题 七

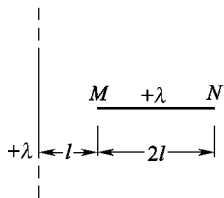
一、选择题

1. 真空中平行相对放置的两板, 分别带电 $+q$ 和 $-q$, 两板相距为 d (d 很小), 面积为 S , 忽略边缘效应, 板间相互作用力为

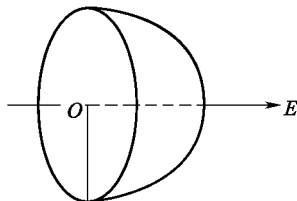
- (A) $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$. (B) $\frac{q^2}{\epsilon_0 S}$. (C) $\frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$. (D) $\frac{q^2}{2\epsilon_0 S^2}$. []

2. 如图所示的无限长直均匀带电细杆旁垂直地放置均匀带电细杆 MN , 两杆电荷线密度均为 $+\lambda$, 尺寸见图. 则 MN 受电场力为

- (A) $\frac{\lambda^2 \ln 3}{2\pi\epsilon_0}$ 沿 MN 方向. (B) $\frac{\lambda^2 \ln 3}{2\pi\epsilon_0}$ 垂直纸面向内.
(C) $\frac{\lambda^2}{\pi\epsilon_0}$ 沿 MN 方向. (D) $\frac{\lambda^2}{\pi\epsilon_0}$ 垂直纸面向内. []



选择题 2 图



选择题 3 图

3. 如图所示, 在场强为 E 的均匀电场中, 有一半径为 R 的半球面, 场强 E 的方向与半球面的轴线平行, 则通过这个半球面的电通量为

- (A) $\pi R^2 E$. (B) $2\pi R^2 E$.
(C) $\sqrt{2}\pi R^2 E$. (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi R^2 E$. []

4. 等腰三角形顶点上各放点电荷 $+q$, $-q$, $+2q$, 顶角角平分线上 P 点距三顶点距离各为 d_1, d_1, d , 如图所示. 将点电荷 Q 从无穷远处移到 P 点, 外力至少要做的功为

- (A) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d_1}$. (B) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{d_1}$.
(C) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{d}$. (D) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{d_1}$. []

5. 在正点电荷 q 的静电场中, 有三个电势不同的等势面 A, B, C , $U_{AB} = U_{BC}$, 如图所示. 下列哪种说法正确?

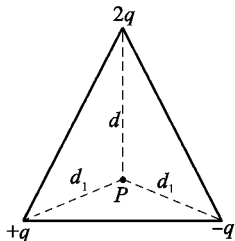
(A) $R_B - R_A < R_C - R_B$.

(B) $R_C - R_B < R_B - R_A$.

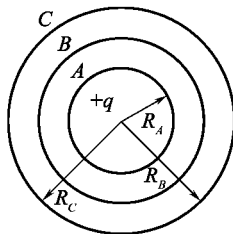
(C) $R_B - R_A = R_C - R_B$.

(D) $U_A < U_B < U_C$.

[]



选择题 4 图



选择题 5 图

6. 如图所示, 两块大导体平板相距较近, 一板带正电, 另一板接地, 则 A, B, C 三点的电势关系是

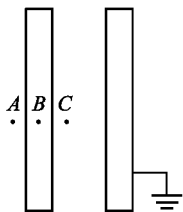
(A) $U_A > U_B > U_C$.

(B) $U_A = U_B > U_C$.

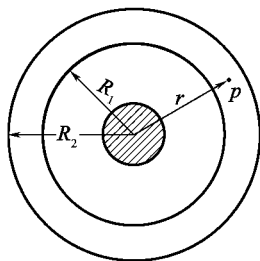
(C) $U_A > U_B = U_C$.

(D) $U_B > U_A = U_C$.

[]



选择题 6 图



选择题 7 图

7. 一均匀带电球体, 带电量为 $+q$, 其外面同心地罩一内、外半径分别为 R_1, R_2 的金属球壳, 如图所示. 取无穷处电势为零, 则在球壳内半径为 r 的 P 点处的场强和电势为

(A) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

(B) $E = 0, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$.

(C) $E = 0, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

(D) $E = 0, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$.

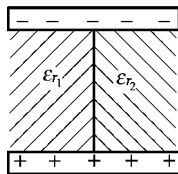
[]

8. 在平行板电容器中充满两种不同的电介质, 如图所示, 且 $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$. 若用 D_1, D_2 和 E_1, E_2 分别表示两种电介质中的电位移和场强的大小, 则它们之间的关系为

(A) $D_1 = D_2, E_1 > E_2$.

(B) $D_1 = D_2, E_1 < E_2$.

(C) $D_1 < D_2, E_1 = E_2$.



选择题 8 图

(D) $D_1 > D_2, E_1 > E_2$. []

9. 一空气平行板电容器电容为 C , 充电至电压为 U , 并维持 U 不变, 移动两板使其距离变为原来的二分之一, 则外力做功为

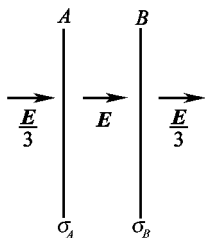
- (A) $\frac{1}{2}CU^2$. (B) $-\frac{1}{2}CU^2$.
(C) CU^2 . (D) $-CU^2$. []

10. 设真空中一均匀带电球面与一均匀带电球体的半径和总电量均相同, 则带电球面的电场能量 W_1 与带电球体的电场能量 W_2 的大小关系为

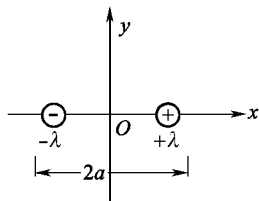
- (A) $W_1 < W_2$. (B) $W_1 = W_2$.
(C) $W_1 > W_2$. (D) 不能确定. []

二、填空题

1. 两块平行的无限大均匀带电平板 A, B , 板间场强为 E , 板外场强为 $E/3$, 如填空题 1 图所示, 则 A, B 两板的电荷面密度分别为 $\sigma_A =$ _____, $\sigma_B =$ _____.



填空题 1 图

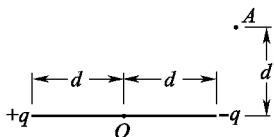


填空题 2 图

2. 两根无限长均匀带电的平行直线与纸面垂直, 相距为 $2a$, 电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$, 如填空题 2 图所示. 则在 y 轴上距原点距离为 a 的各点的场强大小为 _____, 方向沿 _____.

3. 真空中有一半径为 R 的均匀带电球面, 电荷面密度为 σ . 在球面上挖去一小面元 ΔS (ΔS 相对球面面积来说可以看成是一个点), 则挖去 ΔS 后球心处的场强大小为 _____.

4. 有两个电量均为 q 的点电荷, 相距为 $2r$. 若两者电荷同号, 则在它们连线中点处的场强大小为 _____, 电势为 _____; 若两者电荷异号, 则该点场强的大小为 _____, 电势为 _____.



填空题 5 图

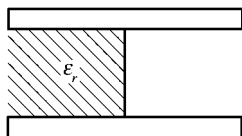
5. 在填空题 5 图所示的静电场中, 把单位负电荷从 O 点移到 A 点电场力做功为 _____, 电势能增量为 _____; 把单位正电荷从 O 点移到无限远处, 电势能增量为 _____.

6. 将一带正电的大导体球 B 移近一个不带电的小导体球 A . 电势高的球是 _____.

7. 两个同心金属球壳, 内、外半径分别为 R_1 和 R_2 , 如果外球壳带电 q , 而内球壳接地, 则

内球壳上电量为_____.

8. 一平行板空气电容器的电容为 C , 现在其一半的空间中插入相对电容率为 ϵ_r 的电介质, 如填空题 8 图所示. 则插入后其电容变为_____; 维持两极板间电压为 U , 在电介质插入过程中, 电源做功为_____.



填空题 8 图

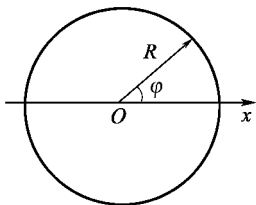
9. 一空气平行板电容器, 其电容值为 C_0 , 充电后电场能量为 W_0 . 在保持与电源连接的情况下, 在两极板间充满相对电容率为 ϵ_r 的各向同性的均匀电介质, 则此时电容值 $C = \underline{\hspace{2cm}}$, 电场能量 $W = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 空气平行板电容器充电后与电源断开, 用均匀电介质充满其间. 则在极板所带的电量 $\pm Q$ 、极板间的电位移和场强的大小 D 和 E 、两板间的电势差 U_{+-} 、电容器的电容 C 、电场的能量密度 w 等几个量中, 保持不变的有_____, 变大的有_____, 变小的有_____.

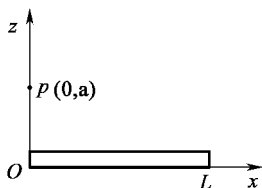
三、计算题

1. 如计算题 1 图所示, 半径为 R 的带电细圆环, 电荷线密度 $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$, λ_0 为常数, φ 是半径 R 与 x 轴的夹角, 求圆环中心处的场强.

2. 半径为 R 的带电球体, 其电荷体密度为 $\rho = \rho_0 r (r \leq R)$, ρ_0 为常数, 求场强和电势分布.

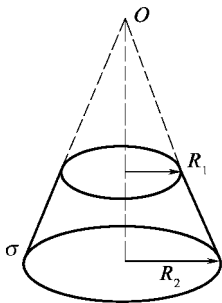


计算题 1 图



计算题 3 图

3. 如计算题 3 图所示, 长 L 的均匀带电细棒带电 Q , 求 Z 轴上一点 $P(0, a)$ 的电势 U_P .



计算题 4 图

4. 一锥顶角为 θ 的圆台, 上、下底面半径分别为 R_1 和 R_2 , 其侧面均匀带电, 电荷面密度为 σ (如计算题 4 图所示), 求点 O 处的场强与电势.

5. 一内外半径分别为 a 和 b 的无限长均匀带电圆柱壳体, 电荷体密度为 ρ , 求场强和电势分布 (轴线处电势 $U=0$).

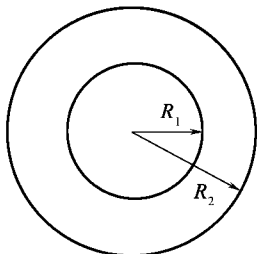
6. 半径为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$) 的两个同心导体球壳互相绝缘, 内球壳带电 $+q$. 求:

(1) 外球壳上的电荷分布及电势;

(2) 把外球壳接地后再重新绝缘, 外球壳上的电荷分布及电势;

(3) 然后再将内球壳接地, 内球壳上的电荷分布及外球壳电势的改变.

7. 有两个同轴圆柱面, 内圆柱面半径为 R_1 , 电势为 U_1 , 外圆柱面半径为 R_2 , 电势为 U_2 , 求两圆柱面间距轴线垂直距离为 r_1 和 r_2 两点的电势差.

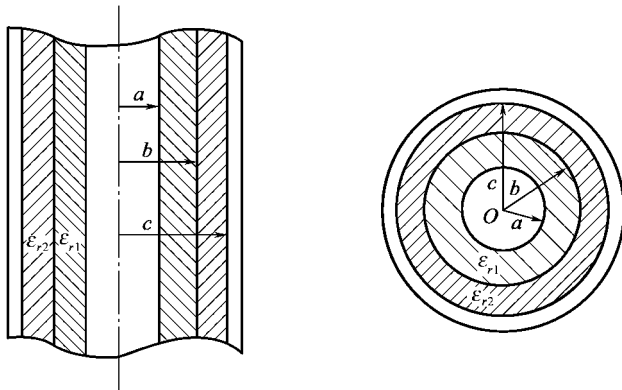


计算题 8 图

8. 在半径为 R_1 的金属球外有一均匀电介质层, 其外半径为 R_2 (如计算题 8 图所示), 电介质的相对电容率为 ϵ_r , 金属球带的电量为 Q . 求:

- (1) 电介质层内外场强分布;
- (2) 电介质层内外电势分布;
- (3) 金属球的电势;
- (4) 该系统所储存的电场能量.

9. 设有一无限长的同轴电缆, 中间有两层相对电容率分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} 的均匀电介质, 电缆尺寸如计算题 9 图所示, 求单位长度电缆的电容.



计算题 9 图

10. 一空气平行板电容器, 空气层厚 1.5 cm, 电压为 39 kV. 若空气的击穿场强为 $3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, 这电容器会被击穿吗? 现将一厚为 0.3 cm 的玻璃板插入此电容器中, 并与两板平行, 若玻璃的相对电容率 $\epsilon_r = 7$, 击穿场强为 $10 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, 这时玻璃会被击穿吗?

第9章 稳恒电流与稳恒电场

基本要求

1. 理解电流强度、电流密度的概念及两者的关系.
2. 理解稳恒电流的概念及形成条件,理解稳恒电场的概念及基本规律.
3. 理解电动势的概念及计算公式.
4. 理解欧姆定律的微分形式.
5. 了解稳恒电路的基本规律.

内容提要

一、电流密度

电流密度是描述导体中电流分布的物理量. 某点电流密度 $\mathbf{j}$ 的方向为该点处正电荷运动的方向, $\mathbf{j}$ 的大小等于通过该点单位垂直面积的电流, 其表达式为

$$j = \frac{dI}{dS \cos \theta}$$

通过某一截面 S 的电流

$$I = \int_S dI = \int_S j dS \cos \theta = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

二、稳恒电流

电流密度不随时间变化的电流叫稳恒电流. 在稳恒电流的情况下, 通过导体内任一截面的电流也不随时间变化.

三、稳恒电场

空间电荷量分布不随时间变化时, 由运动电荷产生的电场叫稳恒电场. 稳恒电场的基本规律是高斯定理和环流定理, 环流定理是电路中电势和电势差概念的理论根据.

稳恒电流和稳恒电场是同时存在的, 它们两者形成的条件是: (1) 电路闭合. (2) 需要稳定电源, 或稳定非静电力. 非静电力的作用效果, 是使正电荷从电势低处移动到电势高处.

四、电动势

电动势是表示电源中非静电力做功本领大小的物理量. 在数值上等于将单位正电荷经电源内部由负极移到正极非静电力所做的功, 即

$$\epsilon = \int_{-\text{内}}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

电动势的方向由负极经电源内部指向正极.

如果在整个回路上均有非静电力, 则电动势等于将单位正电荷沿回路移动一周非静电力所做的功, 即

$$\epsilon = \int_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

电动势的方向为非静电力驱动正电荷运动的方向.

五、欧姆定律的微分形式

通过导体中某一点的电流密度 $\mathbf{j}$ 与该点的电场强度 $\mathbf{E}$ 成正比, 即

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

式中, σ 为导体的电导率.

六、稳恒电流的基本规律

电流为稳恒电流的电路叫稳恒电路, 其基本规律为:

(1) 无支路电路的电流强度相等.

(2) 基尔霍夫第一方程 流入和流出节点的电流的代数和等于零, 即

$$\sum_i I_i = 0.$$

(3) 基尔霍夫第二方程 沿回路绕行一周电势降低(或电势升高)的代数和等于零, 即

$$\sum_i (-\Delta U_i) = 0 \quad \text{或} \quad \sum_i \Delta U_i = 0$$

(4) 一段含源电路的欧姆定律 一段含源电路两端的电势降低等于这段电路上各电阻电势降低之和减去电路中电源的电动势之和, 即

$$U_A - U_B = \sum IR_i - \sum \epsilon_i$$

式中约定: 由 A 到 B 的电流 I 为正, 反之为负. 方向与 AB 相同的电动势 ϵ_i 为正, 反之为负.

解题指导与示例

本章习题有不含源导体的电流和含源导体(或导体回路)的电流两类问题.

解决第一类问题关键是理解电流密度的概念,并涉及电流密度和电阻等物理量的计算.计算电流密度和电阻等物理量时,应注意与稳恒电场相联系,运用欧姆定律的微分形式和高斯定理等规律,也应注意与载流子的运动相联系.解决第二类问题关键是理解电动势的概念,并涉及含源电路的计算.计算含源电路时,应注意稳恒电路基本规律的运用.

例 9-1 金属导体中的电流是由导体内大量自由电子做定向运动形成的.设电子电量的绝对值为 e ,单位体积内的自由电子数为 n (设各处 n 相同),试证明:任一点的电流密度 $\mathbf{j}$ 与电子在该点的定向运动速度 $\mathbf{v}$ (漂移速度)的关系为 $\mathbf{j} = -nev\mathbf{v}$.

解 本题具有一般性,各点的电流密度 $\mathbf{j}$ 与漂移速度 $\mathbf{v}$ 都可以不同,因此用微分法,在一个小区域内 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{v}$ 都可以认为是相同的.如例 9-1 图所示,在导体中取一垂直于 $\mathbf{j}$ 的面元 dS ,在 dt 时间内通过 dS 的电子,应是在底面积为 dS 、长为 vdt 的柱体内的全部电子.该柱体的体积为 $vdt dS$,故在 dt 时间内通过 dS 的电荷量为 $dq = envdt dS$,通过 dS 的电流强度为

$$dI = \frac{dq}{dt} = envdS$$

dS 处电流密度大小为

$$j = \frac{dI}{dS} = env$$

式中, $\mathbf{j}$ 的方向与正电荷的运动方向相同,与 $\mathbf{v}$ 相反.上式写成矢量式为

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v} = (-e)n\mathbf{v}$$

式中, $-e$ 为电子的电量.将 $-e$ 换成载流子的电量 q ,上式为电流密度与载流子漂移速度的一般关系.

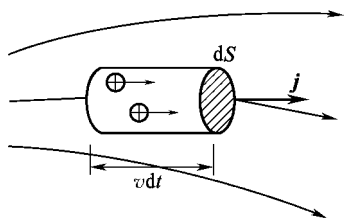
例 9-2 一直径为 1.0cm 的铜质导线,通有 200A 的电流.已知铜中自由电子数密度为 $n = 8.5 \times 10^{28} \text{m}^{-3}$,试计算导线中的电流密度和自由电子的漂移速度.

解 将电流在导线横截面上的分布看成是均匀的,由电流和横截面直径可以计算电流密度,再由电流密度与漂移速度的关系计算漂移速度.实际上,本题计算的是平均电流密度和平均漂移速度.

电流密度

$$j = \frac{I}{S} = \frac{200}{\pi(0.5 \times 10^{-2})^2} = 2.55 \times 10^6 (\text{A} \cdot \text{m}^{-2})$$

由 $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$,得



例 9-1 图 $\mathbf{j}$ 与 $\mathbf{v}$ 的关系

$$v = \frac{j}{en} = \frac{2.55 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 8.5 \times 10^{28}} = 1.87 \times 10^{-3} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

金属导体中自由电子热运动的平均速度约为 $10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 可见电子的漂移速度远小于它的热运动平均速度. 那为什么电路接通后离电源很远的灯泡会立刻亮起来呢? 这是因为电路接通后, 电场以光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 在导体中传播, 正是导体中的电场驱使当地的电子做定向运动形成电流, 所以起主导作用的不是电子的漂移速度, 而是电场的传播速度.

例 9-3 在半径分别为 R_1 和 R_2 的两个金属球壳中间, 充满电阻率为 ρ 的均匀各向同性介质. 若保持两球壳的电势差为 V , 求: (1) 球壳间介质的电阻; (2) 两球壳间的电流; (3) 两球壳间离球心距离为 r 处的场强.

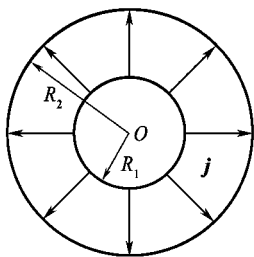
解 本题可在求出两球壳间的电阻后, 由欧姆定律求两球壳间的电流, 再由欧姆定律的微分形式求两球壳间的场强.

(1) 由对称性可知, 两球壳间的电流为径向电流, 电阻为径向电阻, 如例 9-3 图所示. 在介质中任取一同心球壳半径为 $r \sim r + dr$, 球壳面积为 $4\pi r^2$, 厚度为 dr , 由电阻计算公式得球壳的电阻

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

则两球壳间总的电阻

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\rho(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2}$$



例 9-3 图

(2) 由欧姆定律, 得电流强度

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\pi R_1 R_2 V}{\rho(R_2 - R_1)}$$

(3) 离球心 O 距离为 r 处的电流密度为

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{R_1 R_2 V}{\rho(R_2 - R_1) r^2}$$

由于介质均匀各向同性, 电流密度在半径为 r 的球面上均匀分布. 由欧姆定律的微分形式, 得电场强度

$$E = \rho j = \frac{R_1 R_2 V}{(R_2 - R_1) r^2}$$

本题求电流还有一种方法. 在求出稳恒电场的场强 E 后, 由欧姆定律的微分形式求电流密度 j , 再由电流密度 j 与电流强度 I 的关系求 I .

因电荷分布在导体球壳与介质表面上, 由于球对称性, 故电荷分布均匀. 设

两导体球壳上的电荷量分别为 $+Q$ 和 $-Q$,则两球壳间的均强 $\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\mathbf{r}_0$,两球壳的电势差

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}$$

由上式得 $Q = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2 V}{R_2 - R_1}$, 所以

$$\mathbf{E} = \frac{R_1 R_2 V}{(R_2 - R_1) r^2} \mathbf{r}_0$$

由欧姆定律的微分形式 $\mathbf{j} = \frac{\mathbf{E}}{\rho}$, 得

$$\mathbf{j} = \frac{R_1 R_2 V}{\rho(R_2 - R_1) r^2} \mathbf{r}_0$$

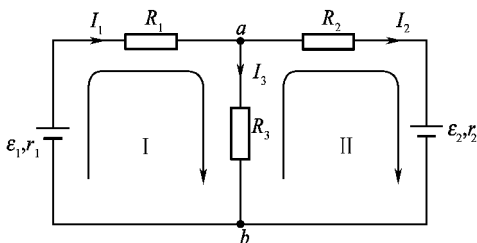
所以 $\mathbf{j}$ 沿径向, 且在球面上均匀分布, 电流为径向电流, 即

$$I = \oiint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S j dS = j 4\pi r^2 = \frac{4\pi R_1 R_2 V}{\rho(R_2 - R_1)}$$

结果与前一种方法相同. 求出电流后, 还可由欧姆定律求电阻, 所得结果也与前一种方法相同.

例 9-4 如例 9-4 图所示的电路, $\epsilon_1=12\text{V}$, $r_1=1\Omega$, $\epsilon_2=8\text{V}$, $r_2=0.5\Omega$, $R_1=3\Omega$, $R_2=1.5\Omega$, $R_3=4\Omega$. 试求通过每个电阻的电流.

解 无分支的电路有三个, 电流分别设为 I_1 , I_2 和 I_3 , 即为通过三个电阻的电流. 节点有两个 a 和 b , 回路有两个 I 和 II. 对节点运用基尔霍夫第一方程(只有一个独立), 对回路运用基尔霍夫第二方程, 共得三个独立方程, 可以解出 I_1 , I_2 和 I_3 .



例 9-4 图

对节点 a 用教材中式(14-12)列方程, 得

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

如果对节点 b 也列电流方程, 所得结果与上式相同, 不是独立方程.

对回路Ⅰ用教材中式(14-14a)列方程,得

$$-\epsilon_1 + I_1 r_1 + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0$$

对回路Ⅱ,可得

$$\epsilon_2 + I_2 r_2 + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$$

如图所示,对整个外面的大回路列基尔霍夫第二方程,就会发现那是上面两个方程的叠加,不是独立方程.

将上面三个方程联立,求解得

$$I_1 = 1.25\text{A}, I_2 = -0.5\text{A}, I_3 = 1.75\text{A}$$

结果中, I_1, I_3 为正值,说明实际电流方向与图中所设相同; I_2 为负值,说明它的实际方向与图中所设方向相反.

第 10 章 稳恒电流的磁场

基本要求

1. 理解磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的概念, 掌握运用毕奥-萨伐尔定律计算磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方法.
2. 掌握安培环路定理及用来计算具有对称性磁场 $\mathbf{B}$ 的方法.
3. 能使用安培定律计算载流导线和回路所受的磁力和磁力矩.
4. 掌握洛伦兹力公式, 并能由此求解带电粒子在均匀电磁场中的运动问题.
5. 了解磁介质磁化的特点及机理, 掌握磁介质中的安培环路定理, 并能利用其求磁介质中具有对称性的磁场分布.

内容提要

一、磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的定义

运动电荷在磁场中受到力的作用, 由此, 定义了磁感应强度

$$B = \frac{F_{\max}}{qv_{\perp}}$$

其方向为小磁针 N 极在此处所指方向.

二、载流线圈的磁矩

$$\mathbf{p}_m = I \mathbf{S} \mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$ 为载流线圈正法线方向的单位矢量.

三、毕奥-萨伐尔定律

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

它表示真空中的电流元 $I d\mathbf{l}$, 在与它相距为 $\mathbf{r}$ 处产生的磁感应强度. 式中, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$. 根据磁场的叠加原理, 可以计算整个载流导线产生的磁场 $\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$, 计算的关键在于矢量性和叠加性.

四、几种典型电流的磁场

1. 载流直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$

式中, a 为场点与载流直导线的垂直距离, β_1, β_2 分别为载流直导线始端和末端到场点 P 的连线与垂线 $\overline{OP}$ 成的夹角. 当转向与电流方向相同时, β 为正; 否则, 为负.

2. “无限长”载流直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

3. 载流圆线圈轴线上任一点的磁场

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + X^2)^{3/2}}$$

式中, R 为圆线圈的半径, x 为轴上场点到圆心的距离, $\mathbf{B}$ 方向沿轴向.

圆心处的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

4. 载流密绕直螺线管内部的磁场

$$B = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

式中, n 为单位长度的线圈匝数, β_2, β_1 表示场点到螺线管两端的连线夹角.

对长直螺线管

$$B = \mu_0 n I$$

五、安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

1. 正确完整理解安培环路定理, 式中 $\mathbf{B}$ 是空间所有电流产生的, 只是在 L 外的电流对 $\mathbf{B}$ 的环流无贡献.

2. 安培环路定理对稳恒磁场普遍成立. 具体用来计算 $\mathbf{B}$ 时, 磁场必须具备对称性. 选取合适的积分路径, 以便将 $\mathbf{B}$ 从积分号内提出, 建立 B 与电流的代数方程, 求出 B .

六、安培定律

电流元 $I d\mathbf{l}$ 在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的磁场中, 受到的磁力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

注意矢量运算, $\mathbf{B}$ 是外磁场, 利用矢量叠加求 $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}$$

因此要选择适当的坐标系, 把矢量化成标量计算, 求出合力.

七、载流线圈在磁场中所受磁力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$$

式中, $\mathbf{p}_m$ 为载流平面线圈的磁矩, $\mathbf{B}$ 为外磁场. 这个力矩的作用总是使 $\mathbf{p}_m$ 转向 $\mathbf{B}$, 最后趋向与 $\mathbf{B}$ 方向一致效果, 我们称稳定平衡状态.

八、带电粒子在电磁场中的运动

1. 带电粒子运动时, 在磁场中受到力的作用, 称为洛伦兹力

$$\mathbf{f} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

2. 带电粒子在均匀磁场中的运动

当带电粒子以垂直于均匀磁场 $\mathbf{B}$ 方向进入磁场, 粒子在垂直于磁场的平面内做圆周运动, 则半径为

$$R = \frac{mv}{qB}$$

周期为

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

如果粒子运动速度与 $\mathbf{B}$ 成 θ 角, 粒子做沿磁场方向的螺旋运动, 那么螺旋线半径为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

螺距为

$$h = \frac{2\pi m}{qB} v_{\parallel} = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$

九、磁介质中的安培环路定理

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

在磁介质中, 通过引入辅助物理量 $\mathbf{H}$, 使得在磁介质中计算 $\mathbf{B}$ 变得简单, 对于对称性的磁场, 可用磁介质中安培环路定理来计算磁场分布.

十、运动电荷的磁场计算

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

对于运动电荷的磁场计算,除了用上式计算外,也可以把运动电荷等效电流,再利用毕奥定律计算.

十一、霍耳效应

霍耳电压差 $V_M - V_N$ 与薄片内通过的电流 I 及磁感应强度 B 成正比,与薄片厚度 d 成反比.即

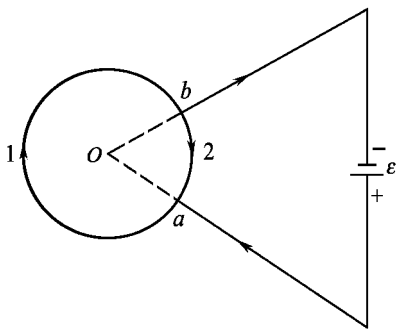
$$V_M - V_N = R_H \frac{IB}{d}$$

式中, $R_H = \frac{1}{nq}$, 称为霍耳系数,霍耳效应在许多领域有广泛应用.

解题指导与示例

本章习题涉及三个主要内容:(1)关于磁场的计算;(2)电流在磁场中受力及带电粒子在磁场中运动;(3)磁介质中的磁场计算.

关于磁感应强度的计算,方法通常有三种:(1)用毕奥-萨伐尔定律直接求(先计算电流元的磁场,同时注意其场的矢量性,然后积分);(2)用安培环路定理求,这种方法主要适用于电流分布具有对称性,使磁场具有对称性,可以选择适当的回路,使积分方程运算简约为代数方程,使计算变得十分简便,其关键是对称性的分析,积分回路的选取,使 $\mathbf{B}$ 可以从积分 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 中提出来,建立关于 B 的代数方程;(3)直接用载流导体的磁场公式,利用场强叠加原理计算.在计算磁场和电流受力及带电粒子在磁场中的运动,所涉及的都是矢量问题.解决这类问题,一般选好坐标系,把矢量化为标量处理.在磁介质中,磁场的计算,利用辅助物理量磁场强度 $\mathbf{H}$,进而利用关系 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ 计算磁感应强度.下面通过举例分析说明,以利于学习和掌握本章的主要内容.



例 10-1 图

例 10-1 两根长直导线沿一铁环的半径方向从远处引于铁环 a, b 两点,方向如本例图所示,求 O 点的 $\mathbf{B}$.

解 此题可用毕奥-萨伐尔定律和磁场的叠加原理计算 O 点的 $\mathbf{B}$.

因两直线过 O 点,其上的电流对 O 点磁场无贡献.因此只需计算两弧上电流对 O 点的贡献.设对应于两段弧的弧长分别为 l_1 和 l_2 ,其上流过的电流分别为 I_1 和 I_2 ,由圆弧电

流的磁场公式得, l_1, l_2 弧在 O 点的场分别是

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \cdot \frac{l_1}{2\pi R}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R} \cdot \frac{l_2}{2\pi R}$$

根据电流 I 与 $\mathbf{B}$ 的关系知, $\mathbf{B}_1$ 与 $\mathbf{B}_2$ 反向, 所以

$$B_O = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} (I_1 l_1 - I_2 l_2)$$

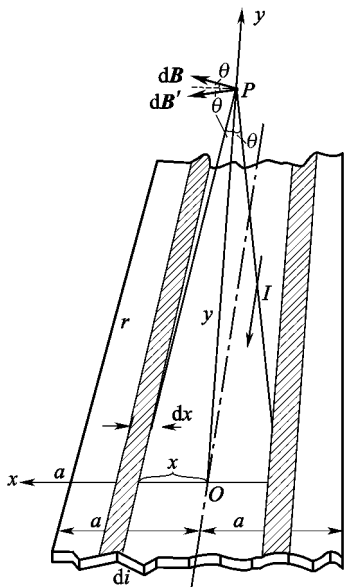
而两弧组成并联回路, 电压 $V_1 = V_2$, 故有

$$I_1 l_1 = I_2 l_2$$

因此得

$$B_O = 0$$

例 10-2 如本例图所示, 电流 I 均匀地流过宽为 $2a$ 的“无限长”薄金属板, 试求通过板的中线并与板面垂直的平面上一点 P 的磁感应强度 B .



例 10-2 图

解 如图所示, 将薄板分成许多宽为 dx 的细长条, 每根细长条电流为 $dI = I \frac{dx}{2a}$, 由此“无限长”载流薄板可看成由许多相互平行、紧密相挨的“无限长”直流导线所构成. 在板的 x 轴上距中心 x 处, 取一宽为 dx 的细长条, 它在 P 处磁感应强度 $d\mathbf{B}$, 其大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}$$

$d\mathbf{B}$ 方向垂直于 $\mathbf{r}$ 和细长条的电流流向所构成的平面. 另外, 由于对称性, 在薄板的另一对称处可取一对应的细长条载流导线, 在 P 处的磁感应强度 $d\mathbf{B}'$, 且 $d\mathbf{B}$, $d\mathbf{B}'$ 在 y 轴上的分量相互抵消, 在 x 轴上的分量方向相同, 沿 x 轴正向. 因此, 从以上分析得 P 点磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小为

$$B = \int dB_x = \int dB \cos\theta = \int \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \frac{y}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int \frac{y dx}{r^2}$$

由图知, $r^2 = y^2 \sec^2 \theta$, $x = y \tan \theta$, $dx = y \sec^2 \theta d\theta$, 代入得

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int \frac{dx}{y \sec^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\arctan \frac{a}{y}}^{+\arctan \frac{a}{y}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \arctan \frac{a}{y}$$

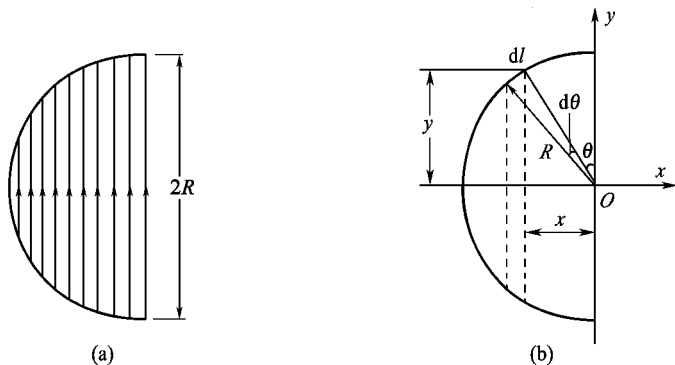
讨论特殊情况: 如果为“无限大”薄板, $a \rightarrow \infty$, 但仍维持 I 不变, 则

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4a} = \frac{\mu_0}{2} i$$

式中, $i = \frac{I}{2a}$ 为单位宽度上的电流.

以上求电流连续分布的薄板的场,事实上仍然使用的是毕奥-萨伐尔定律和场强叠加原理,只不过此种情况下,不是使用最初的原始定律的形式,而是利用了“无限长”载流导线产生场的公式结果,分析场分布的特征后,积分而求解的.在物理学的解题中,经常用到这种方法,下面一题也是用与此相类似的方法.

例 10-3 在半径为 R 的木质半球上,单层均匀密绕细导线共 N 匝,线圈平面彼此平行,如例 10-3 图(a)所示. 设通过的电流为 I ,求球心 O 处的磁感应强度 B .



例 10-3 图

解 将沿球面螺旋线电流看成为许多半径不同的圆电流的集合,线圈沿圆弧上均匀分布,如图(b)所示,在弧上取一弧 dl ,其上的线圈匝数

$$dN = \frac{N}{\pi R} dl = \frac{2N}{\pi R} dl = \frac{2N}{\pi R} R d\theta = \frac{2N}{\pi} d\theta$$

这 dN 匝圆电流在 O 处的场,根据圆电流在轴线上的磁场公式,有

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{I y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cdot dN = \frac{\mu_0}{2} \frac{I y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cdot \frac{2N}{\pi} d\theta$$

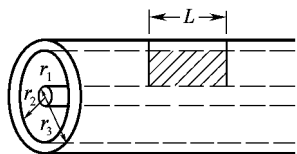
方向沿 x 轴负向.

由于各圆电流在 O 点的磁感应强度方向相同,因此可以直接积分. 由几何关系图知, $x^2 + y^2 = R^2$, $y = R \cos \theta$, 代入得

$$B = \int dB = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 NI}{\pi} \frac{R^2 \cos^2 \theta}{R^3} d\theta = \frac{\mu_0 NI}{\pi R} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0 NI}{4R}$$

例 10-4 一长直电缆由导体圆柱和一同轴的导体圆筒构成. 使用时, 电流 I 从导体圆柱体流入, 从另一导体流回. 设电流都均匀地分布在横截面上, 圆柱的

半径为 r_1 , 筒的内外半径分别为 r_2 和 r_3 , r 为到轴线的垂直距离. 求: (1) 磁感应强度分布; (2) 通过长度为 L 的一段截面(图中阴影区)的磁通量.



例 10-4 图

解 (1) 根据电流分布的特点知道, 磁场分布有轴对称性, 以轴为圆心, r 为半径, 作一圆形闭合回路 L , 由对称性知 L 回路上任一点磁感应强度大小相等, 方向沿回路切线. 根据安培环路定理

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R \cdot B = \mu_0 \sum I_i$$

则

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum I_i$$

$$\text{当 } r < r_1 \quad \sum I_i = \frac{I}{\pi r_1^2} \pi r^2 = \frac{r^2}{r_1^2} I, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$$

$$\text{当 } r_1 < r < r_2 \quad \sum I_i = I, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

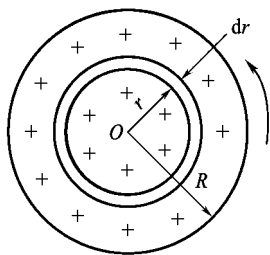
$$\text{当 } r_2 < r < r_3 \quad \sum I_i = I - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} I, \quad B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right)$$

$$\text{当 } r > r_3 \quad \sum I_i = 0, \quad B_4 = 0$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \Phi_m &= \int_0^{r_1} B_1 L dr + \int_{r_1}^{r_2} B_2 L dr = \int_0^{r_1} \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} L dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} L + \frac{\mu_0 I}{2\pi} L \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} L \left(1 + 2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \end{aligned}$$

例 10-5 如本例图所示, 半径为 R 的均匀带电圆盘, 面电荷密度为 σ . 当盘以角速度 ω 绕其中心轴 OO' 旋转时, 求盘心 O 点的 B 值.

解法 1 当带电盘绕 O 轴转动时, 电荷在运动, 因而产生磁场. 可将圆盘看成许多同心圆环的组合, 而每一个带电圆环转动时相当于一圆电流. 以 O 为圆



例 10-5 图

心、 r 为半径、宽为 dr 的圆环, 此环上电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

此环转动时, 其等效电流为

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} \cdot dq = \omega \sigma r dr$$

此电流在环心 O 处产生的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \omega \sigma dr}{2}$$

其方向沿轴线. 因此, 整个圆盘在盘心 O 处产生的磁感应强度大小为

$$B = \int dB \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma dr = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma R$$

解法 2 根据运动电荷的磁感应强度计算公式 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$, 求解. 在圆盘上取一半径为 r 、宽为 dr 的圆环, 电量 $dq = \sigma 2\pi r dr$, $v = r\omega$, 则

$$dB = \frac{\mu_0 r \omega dq}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi r} \sigma \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr$$

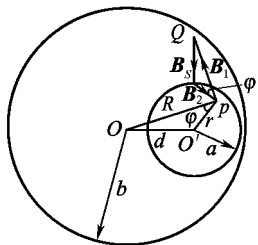
方向垂直于盘面向上. 同样可得

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

例 10-6 如图, 直长圆柱形导体内, 挖一个无限长圆柱形空腔, 轴线与导体轴线平行. 设空腔和导体半径分别为 a 和 b , 两轴间距 d ($b > a + d$), 电流 I 在截面上均匀分布. (1) 求 O 和 O' 处磁感应强度; (2) 证明: 空腔内磁场是均匀的.

解 本题宜采用“补偿法”解. 若对导体细分割成许多细长导线组成, 再用叠加方法求磁场, 比较复杂. 由题意知, 电流密度 $j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$, 圆柱形空洞中无电流, 可以理解为同时存在着两个等值反向的电流, 因此空洞内同时存在电流密度为 $\pm j$ 的电流. 那么, 空间各点磁场就可看成是一个半径为 b 、电流密度为 $+j$ 的长圆柱体电流与一个轴心位于 O' 的半径为 a 、电流密度为 $-j$ 的长圆柱电流产生的磁场的叠加. “补偿法”本质上仍是用场强叠加原理求解的方法.

(1) 由安培环路定理, 在腔内大圆柱体在 O 处产生磁场为 0, 只有小圆柱体在 O 处产生的场强. 由安培环路定理, 以 O' 为圆心作一过 O 的圆环回路, 则



例 10-6 图

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_0 2\pi b = \mu_0 j \pi a^2$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 j}{2b} a^2 = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi b(b^2 - a^2)}$$

同理, 小圆柱体在 O' 产生的场强均为零, 得

$$B_{O'} = \frac{\mu_0 d}{2} j = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(b^2 - a^2)}$$

(2) 在空腔内任一点 P , 距 O 轴距离为 R , 距 O' 轴距离为 r , 大圆柱体电流在 P 处的 B_1 大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} R$$

同理, 小圆柱体电流在 P 处大小均为

$$B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

根据叠加原理

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$$

得

$$\begin{aligned} B^2 &= B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos\varphi \\ &= \frac{\mu_0 R^2}{4} j^2 + \frac{\mu_0 r^2}{4} j^2 - \frac{2\mu_0 R r j^2}{4} \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} = \frac{\mu_0^2 d^2}{4} j^2 \end{aligned}$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 d}{2} j = \frac{\mu_0 Id}{2\pi(b^2 - a^2)}$$

$\mathbf{B}$ 的方向确定

因为

$$\frac{B_1}{R} = \frac{B_2}{r} = \frac{B}{d}$$

所以

$$\triangle PSQ \sim \triangle PO'O$$

又因为

$$PQ \perp PO, PS \perp PO'$$

所以

$$QS \perp OO'$$

因此,空腔内为均匀磁场,大小为 $\frac{\mu_0 Id}{2\pi(b^2 - a^2)}$,方向与 O' 处场方向一样,与 OO' 两轴垂直.

例 10-7 如例 10-7 图所示,一半径为 R 的半圆形弧线电流 I ,在均匀磁场中, $\mathbf{B}$ 的方向与圆弧确定的平面平行,求弧电流受磁力对 y 轴的力矩.

解 取一电流元 Idl ,则在磁场中受的磁力大小为 $dF = BIdl \sin\theta = BIR \sin\theta d\theta$,方向为垂直纸面向里,其对 y 轴的力矩为

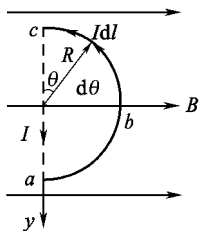
$$dM = dFR \sin\theta = BIR^2 \sin\theta d\theta$$

方向为沿 y 轴负向.而各电流元受到的磁力对 y 轴的力矩方向相同,整个圆弧电流所受的磁力对 y 轴的力矩大小为

$$M = \int dM = BIR^2 \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2} \pi R^2 IB$$

方向沿 y 轴负向.

如果设想一段长为 $2R$ 的载流 I 的直导线与此半圆弧线连成闭合电流回路,那么直导线电流对 y 轴无力矩,此闭合电流回路所受的磁力矩即是圆弧电流受的力矩,表示为



例 10-7 图

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} = \frac{\pi}{2} R^2 I_n \times \mathbf{B}$$

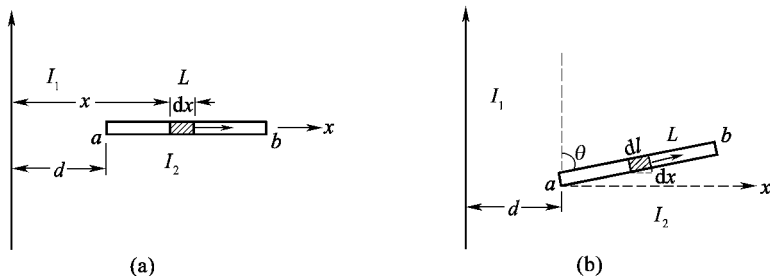
其中, 大小为 $M = \frac{\pi}{2} R^2 IB$, 方向为 $\mathbf{n} \times \mathbf{B}$ 方向即 y 轴负向. 由此得出的结果相同, 并且更为简便.

例 10-8 在一长直载流导线旁有一长为 L 导线 ab , 其上载电流分别为 I_1 和 I_2 , a 端到直导线距离为 d . 求:

- (1) 当导线 ab 与长直导线垂直时, ab 受力;
- (2) 当导线 ab 与长直导线成一角度 θ 时, ab 受力.

解 取如例 10-8 图(a)所示坐标系, 直导线在距其为 x 处, 产生磁感应的强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$



例 10-8 图

其方向垂直纸面向里. 电流元 $I_2 dx$ 受安培力大小为

$$df = I_2 B dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx$$

df 方向垂直 ab , 且各电流元受力方向相同, 故 ab 受力为

$$f = \int_L df = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

(2) 如例 10-8 图(b)所示, 电流元 $I_2 dl$ 所受安培力 df 大小为

$$df = I_2 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \frac{dx}{\sin\theta}$$

df 方向垂直于 ab , 且各电流元之受力方向一致, 故导线 ab 受力为

$$f = \int_L df = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin\theta} \int_d^{d+L \sin\theta} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin\theta} \ln \frac{d+L \sin\theta}{d}$$

例 10-9 一“无限长”圆柱形直导线外包有一层相对磁导率为 μ_r 的圆筒形磁介质, 导线半径为 R_1 , 磁介质外圆筒半径为 R_2 . 若直导线中通以电流 I , 求磁介质内、外磁场分布.

解 在与直导线相垂直的平面上取一闭合圆形回路, 其半径为 r , 由于磁场具有对称性, 由安培环路定理有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \cdot H = I$$

当 $R_1 < r < R_2$, 磁介质内一点有

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r}$$

则磁感应强度

$$B_1 = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r}$$

对磁介质外一点 ($r > R_2$), 磁场强度为 $H_2 = \frac{I}{2\pi r}$, 而在磁介质外 $\mu_r = 1$, 可得

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

自 测 题 八

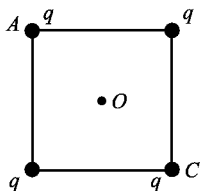
一、选择题

1. 如图所示,边长为 a 的正方形的四个角上固定有四个电量均为 q 的点电荷. 此正方形以角速度 ω 绕 AC 轴旋转时,在中心 O 点产生的磁感强度大小为 B_1 ;此正方形同样以角速度 ω 绕过 O 点垂直于正方形平面的轴旋转时,在 O 点产生的磁感强度的大小为 B_2 . 则 B_1 与 B_2 间的关系为

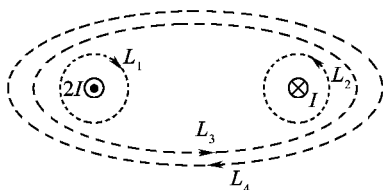
- (A) $B_1 = B_2$. (B) $B_1 = 2B_2$.
(C) $B_1 = \frac{1}{2}B_2$. (D) $B_1 = B_2/4$. []

2. 边长为 L 的一个导体方框上通有电流 I ,则此框中心的磁感强度

- (A) 与 L 无关. (B) 正比于 L^2 .
(C) 与 L 成正比. (D) 与 L 成反比.
(E) 与 I^2 有关. []



选择题 1 图



选择题 3 图

3. 如图所示,流出纸面的电流为 $2I$,流进纸面的电流为 I ,则下述各式中哪一个是正确的?

- (A) $\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2I$. (B) $\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$.
(C) $\oint_{L_3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -I$. (D) $\oint_{L_4} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -I$. []

4. 无限长直圆柱体,半径为 R ,沿轴向均匀流有电流. 设圆柱体内 ($r < R$) 的磁感强度为 B_i ,圆柱体外 ($r > R$) 的磁感强度为 B_e ,则有

- (A) B_i, B_e 均与 r 成正比.
(B) B_i, B_e 均与 r 成反比.
(C) B_i 与 r 成反比, B_e 与 r 成正比.
(D) B_i 与 r 成正比, B_e 与 r 成反比. []

5. 一电荷为 q 的粒子在均匀磁场中运动,下列哪种说法是正确的?

(A) 只要速度大小相同,粒子所受的洛伦兹力就相同.

(B) 在速度不变的前提下,若电荷 q 变为 $-q$,则粒子受力反向,数值不变.

(C) 粒子进入磁场后,其动能和动量都不变.

(D) 洛伦兹力与速度方向垂直,所以带电粒子运动的轨迹必定是圆. []

6. 有一半径为 R 的单匝圆线圈,通以电流 I ,若将该导线弯成匝数 $N = 2$ 的平面圆线圈,导线长度不变,并通以同样的电流,则线圈中心的磁感强度和线圈的磁矩分别是原来的

(A) 4 倍和 $1/8$.

(B) 4 倍和 $1/2$.

(C) 2 倍和 $1/4$.

(D) 2 倍和 $1/2$. []

二、填空题

1. 一磁场的磁感强度为 $\mathbf{B} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (SI), 则通过一半径为 R , 开口向 z 轴正方向的半球壳表面的磁通量的大小为 _____ Wb.

2. 真空中有一载有稳恒电流 I 的细线圈, 则通过包围该线圈的封闭曲面 S 的磁通量 $\Phi =$ _____. 若通过 S 面上某面元 dS 的元磁通为 $d\Phi$, 而线圈中的电流增加为 $2I$ 时, 通过同一面元的元磁通为 $d\Phi'$, 则 $d\Phi : d\Phi' =$ _____.

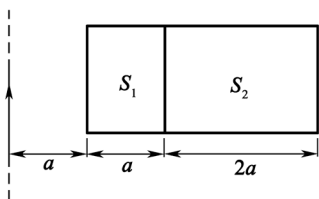
3. 一质点带有电荷 $q = 8.0 \times 10^{-10}$ C, 以速度 $v = 3.0 \times 10^5$ m $\cdot$ s $^{-1}$, 在半径为 $R = 6.00 \times 10^{-3}$ m 的圆周上做匀速圆周运动. 则该带电质点在轨道中心所产生的磁感强度 $B =$ _____, 该带电质点轨道运动的磁矩 $p_m =$ _____ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H $\cdot$ m $^{-1}$).

4. 如图所示, 在无限长直载流导线的右侧有面积为 S_1 和 S_2 的两个矩形回路, 两个回路与长直载流导线在同一平面, 且矩形回路的一边与长直载流导线平行. 则通过面积为 S_1 的矩形回路的磁通量与通过面积为 S_2 的矩形回路的磁通量之比为 _____.

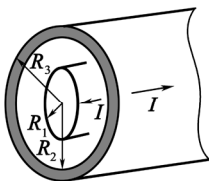
5. 有一同轴电缆, 其尺寸如图所示, 它的内、外两导体中的电流均为 I , 且在横截面上均匀分布, 但两者电流的流向正相反. 则

(1) 在 $r < R_1$ 处磁感强度大小为 _____;

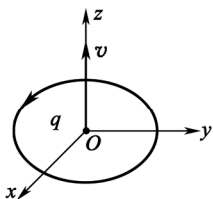
(2) 在 $r > R_3$ 处磁感强度大小为 _____.



填空题 4 图



填空题 5 图



填空题 6 图

6. 如图所示, 一半径为 R 、通有电流为 I 的圆形回路, 位于 Oxy 平面内, 圆心为 O . 一带正电荷为 q 的粒子, 以速度 v 沿 z 轴向上运动, 当带正电荷的粒子恰好通过 O 点时, 作用于圆形回路上的力为 _____, 作用在带电粒子上的力为 _____.

7. 两个带电粒子, 以相同的速度垂直磁感线飞入匀强磁场, 它们的质量之比是 $1 : 4$, 电

荷之比是 $1:2$, 它们所受的磁场力之比是 _____, 运动轨迹半径之比是 _____.

8. 一带电粒子平行磁感线射入匀强磁场, 则它做 _____ 运动. 一带电粒子垂直磁感线射入匀强磁场, 则它做 _____ 运动. 一带电粒子与磁感线成任意交角射入匀强磁场, 则它做 _____ 运动.

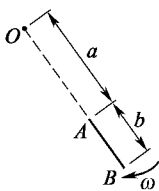
三、计算题

1. 如图所示, 均匀带电刚性细杆 AB , 线电荷密度为 λ , 绕垂直于直线的轴 O 以 ω 角速度匀速转动 (O 点在细杆 AB 延长线上). 求:

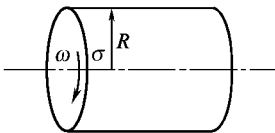
- (1) O 点的磁感强度 B_0 ;
- (2) 系统的磁矩 p_m ;
- (3) 若 $a \gg b$, 求 B_0 及 p_m .

2. 如图所示, 一半径为 R 的均匀带电无限长直圆筒, 面电荷密度为 σ . 该筒以角速度 ω 绕其轴线匀速旋转, 试求圆筒内部的磁感强度.

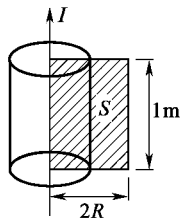
3. 一无限长圆柱形铜导体 (磁导率 μ_0), 半径为 R , 通有均匀分布的电流 I . 今取一矩形平面 S (长为 1 m , 宽为 $2R$), 位置如图中画斜线部分所示, 求通过该矩形平面的磁通量.



计算题 1 图



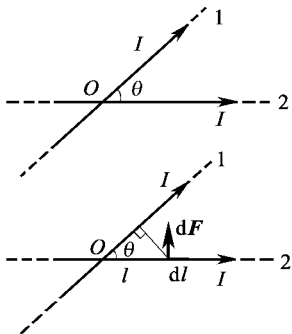
计算题 2 图



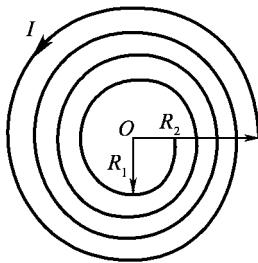
计算题 3 图

4. 如图所示, 两根相互绝缘的无限长直导线 1 和 2 绞接于 O 点, 两导线间夹角为 θ , 通有相同的电流 I . 试求单位长度的导线所受磁力对 O 点的力矩.

5. 如图所示, 有一密绕平面螺旋线圈, 其上通有电流 I , 总匝数为 N , 它被限制在半径为 R_1 和 R_2 的两个圆周之间. 求此螺旋线中心 O 处的磁感强度.



计算题 4 图



计算题 5 图

第11章 电磁感应

基本要求

1. 深刻理解法拉第电磁感应定律和楞次定律,并能熟练地运用其计算感应电动势的大小和判断感应电动势的方向.
2. 掌握感生电场的概念,了解感生电场与静电场的异同,以及产生动生电动势的非静电力和产生感生电动势的非静电力.熟练掌握动生电动势和感生电动势的计算方法,领会感应电动势的相对性.
3. 了解自感和互感现象的产生及其规律,掌握简单情形下自感系数和互感系数的计算.
4. 理解磁场具有能量,掌握自感磁能、磁能密度和磁场能量的计算方法.

内容提要

本章主要研究电磁感应现象及其基本规律.首先讨论了从实验的基础上总结出的法拉第电磁感应定律和楞次定律,然后依据产生感应电动势的非静电力的不同分别讨论了动生电动势和感生电动势,最后介绍了自感和互感以及磁场的能量.其中,法拉第电磁感应定律与感应电动势的计算是本章重点.

一、电磁感应定律

1. 法拉第电磁感应定律

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11-1)$$

2. 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向,总是使得感应电流所产生的、通过回路面积的磁通量去反抗,或者补偿引起感应电流的磁通量的变化.

二、动生电动势与感生电动势

1. 动生电动势

一段任意形状的导线 L 在磁场中运动时,则

$$\epsilon = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (11-2)$$

整个闭合导线回路 L 都在磁场中运动时, 则

$$\epsilon = \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (11-3)$$

2. 感生电动势

一段任意形状的导线 L 静止处在变化磁场激发的感生电场中时, 则

$$\epsilon = \int_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} \quad (11-4)$$

整个闭合回路 L 静止处在同一感生电场中时, 则

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (11-5)$$

三、自感应与互感应

1. 自感应

自感系数

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (11-6)$$

自感电动势

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (11-7)$$

2. 互感应

互感系数

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \quad (11-8)$$

互感电动势

$$\epsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (11-9)$$

$$\epsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (11-10)$$

四、磁场能量

1. 自感磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (11-11)$$

2. 磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{u} = \frac{1}{2} u H^2 = \frac{1}{2} BH \quad (11-12)$$

3. 磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V BH dV \quad (11-13)$$

解题指导与示例

由内容提要可以知道,本章几乎所有内容都直接或间接地与磁通量的计算和磁感应强度的分布有关,而穿过任一闭合回路的磁通量更是与磁感应强度的分布直接联系,所以要顺利解答本章的一般性习题就必须掌握常见电流产生的磁场分布.重点掌握具有轴对称性分布电流产生的磁感应强度分布.这类电流产生的磁感应强度的特点一般说来,其大小也具有轴对称性,其方向与电流方向之间形成右手螺旋关系,因此很容易由安培环路定理计算得出.

通过任一闭合回路磁通量的计算,除了要已知磁感的分布外,还需要知道该回路的几何尺寸以及回路在磁场中的位置.包围面积为 S 的闭合回路放在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中时,穿过该回路的磁通量很容易计算,为 $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$. 同一闭合回路放在非均匀磁场中时,需要把回路围成面积 S 无限细分为许多小面元 dS . 视解决问题的方便而选取小面元正法线方向后,先求出穿过任一小面元的磁通为 $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$,再由 $\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 求出穿过回路包围面积的总磁通量. 下面图 11-1 给出的是本章习题中常出现的闭合回路放在常见的非均匀磁场中的情形. 其中,图(a)、图(b)、图(c)的非均匀磁场都由无限长直导线电流 I 所产生,各闭合回路都与通有电流的导线共面,如图建立坐标系后,容易由安培环路定理求出磁感应强度大小的分布为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; 图(d)中磁感大小的分布,由已知给出为 $B = kr$, 式中 k 为一常数,磁感方向垂直于纸面向里.

为了计算方便,在图 11-1 中的所有情形下,都取闭合回路所包围的平面面积的正法线方向与该平面所在处的 $\mathbf{B}$ 同方向. 于是图(a)情形下,依据磁场分布的特点任取小面元 $dS = ldr$, 穿过小面元的磁通量为 $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr$, 穿过闭合回路的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr$$

图(b)情形下,依据磁场分布的特点,任取小面元 $dS = (r-a) \tan\alpha dr$, 穿过它的磁通量为 $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r-a) \tan\alpha dr$, 通过闭合回路的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r-a) \tan\alpha dr$$

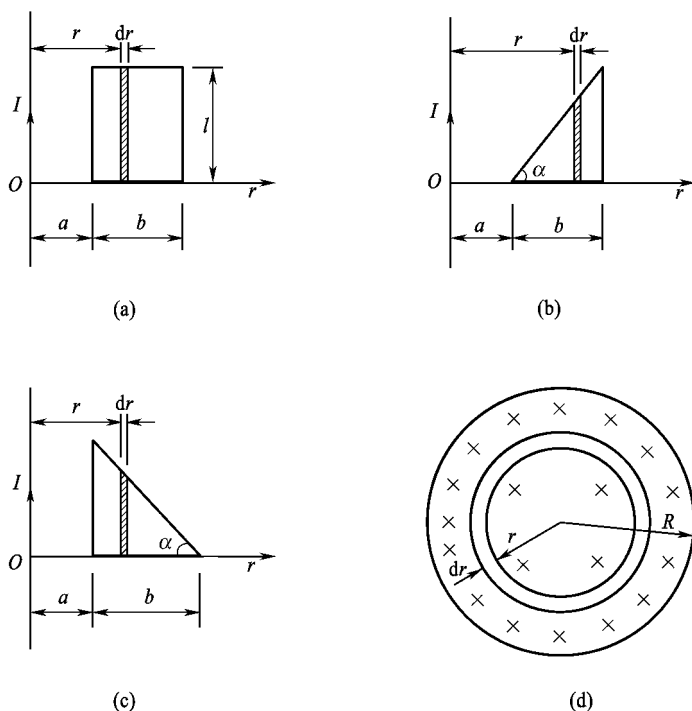


图 11-1

图(c)情形下,依据磁场分布的特点,任取小面元 $dS = (a+b-r)\tan\alpha dr$,通过小面元的磁通量为 $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(a+b-r)\tan\alpha dr$,通过闭合回路的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(a+b-r)\tan\alpha dr$$

图(d)情形下,依据磁场分布的特点,任取小面元 $dS = 2\pi r dr$,通过该面元的磁通量为 $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = kr \cdot 2\pi r dr$,通过半径为 R 的同心圆闭合回路的磁通量为

$$\Phi = \int_0^R kr \cdot 2\pi r dr$$

掌握了计算磁通量的一般方法后,再来解答本章习题就会觉得容易许多.

一、电磁感应定律

1. 法拉第电磁感应定律

该定律在国际单位制中的数学表达式为 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$. 它表明,无论何种原因使

通过任一闭合回路的磁通量发生变化时,该回路中产生的感应电动势都与磁通量对时间的变化率成正比.即感应电动势的大小为 $|\epsilon| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$,取决于回路磁通量变化率的大小,而与通过回路的磁通量多少无关.定律表达式中的负号是用来决定闭合回路中感应电动势方向的,其方法为:首先选定闭合回路所包围面积的正法线方向 $\mathbf{n}$,在此基础上计算 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$.当算出的 $\epsilon > 0$,就表示感应电动势方向与 $\mathbf{n}$ 形成右手螺旋关系;当算出的 $\epsilon < 0$,则表示感应电动势方向与 $\mathbf{n}$ 形成左手螺旋关系.

用上述方法确定的感应电动势的方向与用楞次定律确定的感应电动势(感应电流)的方向完全一致,因此常说法拉第电磁感应定律中的负号是楞次定律的数学表示.所以计算 ϵ 时,可以先只计算其大小 $|\epsilon|$,然后再用楞次定律判定其方向.

对于 N 匝回路串联绕制而成的导线线圈,若穿过各匝回路的磁通量分别为 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$,则线圈中总的电动势应等于各匝回路的电动势之和,即

$$\begin{aligned}\epsilon &= -\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} - \dots - \frac{d\Phi_N}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) = -\frac{d\Psi}{dt}\end{aligned}$$

式中, $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N = \sum_{i=1}^N \Phi_i$ 称为磁通链.如果穿过线圈各匝的磁通量相同,均为 Φ ,则 $\Psi = N\Phi$,于是

$$\epsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (11-14)$$

当线圈回路的电阻为 R 时,回路中的感应电流为

$$I = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} \quad (11-15)$$

从 t_1 到 t_2 这段时间内,流过线圈导线上任一横截面的感应电量为

$$\begin{aligned}q &= \left| \int_{t_1}^{t_2} I dt \right| = \frac{1}{R} \left| \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi \right| \\ &= \frac{1}{R} |\Psi_2 - \Psi_1| \quad (11-16)\end{aligned}$$

必须注意,如果电路不闭合,则无感应电流,但感应电动势仍能产生.

2. 楞次定律

楞次定律是关于确定闭合回路中感应电流(感应电动势)方向的定律.用其

判断感应电流方向的一般步骤为:

- (1) 确定引起感应电流的原磁通量 Φ 是如何变化的.
- (2) 如果原磁通量 Φ 增加, 则感应电流所产生的通过回路面积的磁通量 Φ' 与 Φ 反向; 如果 Φ 减小, 则 Φ' 与 Φ 同向.
- (3) 用右手伸直的大拇指指向 Φ' 的方向, 则余下的弯曲四指回转方向就是闭合回路中感应电流(感应电动势)的方向.

二、动生电动势与感生电动势

当磁场静止不随时间变化, 而导线闭合回路或其中的一部分在磁场中运动时, 引起穿过回路的磁通量发生变化, 由此感应的电动势称为动生电动势. 当导线闭合回路静止不动, 穿过回路的磁通量变化仅仅是由于磁场变化而引起时, 回路中产生的电动势称为感生电动势. 按照法拉第电磁感应定律, 不论什么原因, 只要穿过闭合回路的 Φ 发生变化, $\frac{d\Phi}{dt}$ 就不等于零, 就有感应电动势 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 产生. 因此, 对于闭合回路, 无论是只单独产生动生电动势, 或只单独产生感生电动势, 还是这两种电动势同时存在, 都可以用 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 来计算感应电动势. 另一方面, 从产生动生电动势和感生电动势各自的非静电力出发, 按照电动势的定义, 还可以得出动生电动势和感生电动势的另一种计算方法.

1. 动生电动势

当导线在磁场 $\mathbf{B}$ 中以速度 $\mathbf{v}$ 运动时, 导线中的自由电子随着导线一起运动, 应具有附加速度 $\mathbf{v}$, 所以受到相应的洛伦兹力 $\mathbf{f} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. 这时, 导线中非静电场的场强就是单位正电荷所受的洛伦兹力, 即

$$\mathbf{E}_k = -\frac{\mathbf{f}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

于是按照电动势的定义, 当整个导线闭合回路 L 都在磁场 $\mathbf{B}$ 中以速度 $\mathbf{v}$ 运动时, 动生电动势为

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

当一段导线 L 在磁场 $\mathbf{B}$ 中以速度 $\mathbf{v}$ 运动时, 动生电动势为

$$\epsilon = \int_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

由以上两式计算出的动生电动势: 若 $\epsilon > 0$ 时, 则表示动生电动势方向与积分方向相同; 若 $\epsilon < 0$, 则表示动生电动势方向与积分方向相反.

2. 感生电动势

当磁场 $\mathbf{B}$ 随时间变化时,在其周围空间激发感生电场.感生电场的电力线是闭合的,其环流不为零,因此感生电场是无源有旋场,不同于静电场是有源无旋场.感生电场产生于变化磁场的周围空间,而不论这个空间是真空,还是存在电介质或导体.但有导体存在时,由于感生电场 $\mathbf{E}_r$ 对电荷 q 有作用力 $\mathbf{f}_r = q\mathbf{E}_r$,便驱使导体中的自由电荷运动.所以在感生电场存在的空间,亦即变化的磁场周围空间放置静止不动的导体,在导体中产生感生电动势的非静电力是感生电场对电荷的作用力.

于是按照电动势的定义,当导线闭合回路 L 静止处在变化的磁场周围空间时,感生电动势为

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l}$$

另一方面按照法拉第电磁感应定律,有

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

所以

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

式中, Φ 是穿过以闭合回路 L 为边界的任意曲面 S 的磁通量. 等式最右边一项中的负号表示 $\mathbf{E}_r$ 与 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 在方向上形成左手螺旋关系,即用左手伸直的大拇指指向 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 的方向,则余下的弯曲四指回转方向就是 $\mathbf{E}_r$ 线的转向.

当一段不闭合的导线 L 静止处在变化的磁场周围空间时,感生电动势为

$$\epsilon = \int_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l}$$

最后必须指出,因为运动与静止是具有相对性的,与参考系的选择有关,所以动生电动势与感生电动势也具有相对性. 在一个参考系中观察到的动生电动势(感生电动势),在另一个参考系中观察可能是感生电动势(动生电动势),或既有动生电动势又有感生电动势. 但不管观察到的电动势属于哪一类,只要各参考系间的相对速度比光速小得多时,计算的结果就完全相同.

三、自感应与互感应

1. 自感应

当 N 匝线圈组成的回路中通有电流 I 时,就有这一电流产生的磁通量穿过回路本身包围的面积. 如果回路周围空间没有铁磁性物质,那么穿过回路本身的

磁通链 Ψ 与电流 I 成正比,即

$$\Psi = LI$$

式中, L 称为线圈的自感系数,它与电流 I 无关. 计算 L 时,可先假定回路通以电流 I ,再计算穿过回路的 Ψ 后,代入 $L = \frac{\Psi}{I}$ 即可.

自感 L 的量值取决于线圈的大小、形状、匝数及周围介质的磁导率,当这些因素都保持不变时, L 为一常量. 这时,因流过回路自身的电流发生变化而引起穿过回路自身的磁通链变化,从而在回路中自身激起的自感电动势为

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

式中,负号表示回路中的自感电动势总是反抗回路中的电流变化. 即:当 $\frac{dI}{dt} > 0$ 时, $\epsilon_L < 0$, 这时表明回路中电流增加时自感电动势方向与电流方向相反;当 $\frac{dI}{dt} < 0$ 时, $\epsilon_L > 0$, 这时表明回路中电流减小时自感电动势方向与电流方向相同.

2. 互感应

两个相邻的线圈 1 与线圈 2, 分别通有电流 I_1 与 I_2 时, 会分别引起穿过对方线圈回路的磁通链 Ψ_{21} 与 Ψ_{12} . 当两线圈周围没有铁磁性物质时, 有

$$\Psi_{21} = MI_1, \Psi_{12} = MI_2$$

式中, M 称为两线圈的互感系数, 其值与电流无关. 要求 M 时, 可先假定任一线圈通以电流, 再计算由此引起的穿过另一线圈回路的磁通链, 最后代入下式

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad \text{或} \quad M = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

得出结果. 至于假定哪一个线圈通以电流, 要视具体情况计算方便而定.

两线圈间的互感系数与两线圈回路的大小、形状、匝数、相对位置以及周围磁介质的磁导率有关, 当这些因素都保持不变时, M 为一常量. 这时, 因两个线圈中的电流变化而分别引起穿过对方线圈回路的磁通链变化, 从而在对方线圈中激发的互感电动势为

$$\epsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\epsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

实际问题中, 通常可取上面两式的绝对值计算互感电动势的大小, 而互感电动势的方向则由楞次定律来确定.

四、磁场能量

1. 自感磁能

自感系数为 L 的线圈通有电流 I 时,具有自感磁能

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

如果已知线圈的自感磁能 W_m ,则由上式可得

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

该式为计算自感 L 提供了另一种方法.

2. 磁场能量密度

为了描述磁场能量在空间的分布,引入磁场能量密度这一物理量,定义为磁场中单位体积的能量,其表达式为

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$

上式对各向同性非铁磁性介质中的任何磁场都是普遍适用的.

3. 磁场能量

磁场的能量储存在磁场分布的空间中,计算磁场能量时,一般先求出磁感应强度的分布函数 $\mathbf{B}$,然后计算磁能密度 w_m . 再按磁能密度或磁感分布的特点,将磁场分布的空间相应地细分为无数个体积元 dV ,计算 dV 中磁场的能量 $dW_m = w_m dV$. 最后将所有体积元中的磁场能量都加起来,即

$$\begin{aligned} W_m &= \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V BH dV \end{aligned}$$

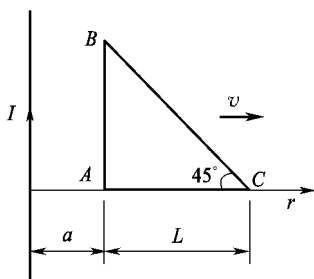
式中的积分区域 V 是磁场分布的所有空间.

例 11-1 如本例图所示,一单匝等腰直角三角形刚性线圈与通有电流 I 的无限长直导线共面,并以匀速率 v 水平向右运动,求该线圈在图示位置时的动生电动势.

解 这是一个求闭合回路中动生电动势的问题,对这类问题,通常有两种解法.

解法 1 用动生电动势公式 $\epsilon = \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$

计算. 积分沿回路顺时针方向进行,则



例 11-1 图

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_C^A (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_A^B \left(v \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right) \cos 0^\circ dl + \int_B^C \left(v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) \cos \frac{3\pi}{4} dl + \int_C^A \left(v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) \cos \frac{\pi}{2} dl \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} vL - \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} \cos \frac{\pi}{4} \frac{dr}{\cos \frac{\pi}{4}} + 0 \\
&= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left(\frac{L}{a} - \ln \frac{a+L}{a} \right)
\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon > 0$, 所以其方向与积分方向相同, 即沿回路顺时针方向.

解法 2 用法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 计算. 取线圈回路所包围平面面积的正法向垂直于纸面向里, 则当 t 时刻线圈 AB 边离直导线的距离为 x 时, 穿过线圈所围面积的磁通量为

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_x^{x+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (x+L-r) \tan 45^\circ dr \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[(x+L) \ln \frac{x+L}{x} - L \right]
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x) &= -\frac{d\Phi(x)}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{x+L}{x} - \frac{L}{x} \right) v \\
&= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left(\frac{L}{x} - \ln \frac{x+L}{x} \right)
\end{aligned}$$

当 $x=a$ 时, 线圈中的动生电动势为

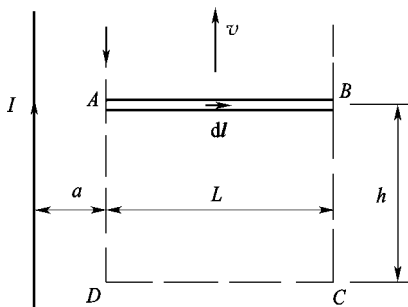
$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left(\frac{L}{a} - \ln \frac{a+L}{a} \right)$$

因为 $\varepsilon > 0$, 所以其方向与线圈回路包围的平面面积的正法向形成右手螺旋关系, 即沿回路的顺时针方向. 也可由楞次定律来确定方向.

对于上述所用的两种方法, 在解法 1 中需要注意矢量的叉积和点积的运算规则, 将回路按照矢量 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 与矢量 $d\mathbf{l}$ 的夹角不同进行分段积分来计算 $\varepsilon = \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$, 并要注意在各个分段积分中 $\mathbf{B}$ 的大小的表达式可能不同. 最后

在各分段积分运算前要各自统一积分变量,在这一过程要注意各段中 $d\mathbf{l}$ 与 $d\mathbf{r}$ 的关系. 在解法 2 中,不同时刻 t 线圈所处位置 x 不同,穿过线圈回路的磁通量 Φ 也不同,所以磁通量 Φ 是 t 的复合函数. 于是有 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt}$, 而 $\frac{dx}{dt} = v$ 又为已知,因此关键是写出磁通量关于线圈所处位置 x 的函数表达式 $\Phi = \Phi(x)$.

例 11-2 如例 11-2 图所示,一长为 L 的刚性直导线 AB 与通有电流 I 的无限长直导线在同一平面内,且相互垂直,直导线 AB 的左端与载流导线的距离为 a . 求当导线 AB 以速率 v 垂直向上平动时,该导线上的动生电动势.



例 11-2 图

解 这是求一段非闭合导线上动生电动势的问题,对这类问题,也有两种解法.

解法 1 用动生电动势公式 $\epsilon = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 计算. 在直导线 AB 上任取一线元 $d\mathbf{l}$, 距离载流导线为 r , 方向从 A 指向 B , 则该线元上的电动势为

$$d\epsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB \cos \pi dl = -vB dl = -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r} dr$$

直导线 AB 上的动生电动势为

$$\epsilon = \int_A^B d\epsilon = \int_a^{a+L} -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$$

因为 $\epsilon < 0$, 所以动生电动势的方向从 B 指向 A .

解法 2 添加辅助导线组成闭合回路, 用法拉第电磁感应定律 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 计算. 如图所示, 作辅助导线 $ADCB$, 使导线 AB 构成一闭合回路. 设任一时刻 t 闭合回路的高为 h , 则有 $\frac{dh}{dt} = v$. 取闭合回路围成平面面积的正法向 $\mathbf{n}$ 垂直于纸面向里, 则有

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$$

电动势为

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dh} \frac{dh}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$$

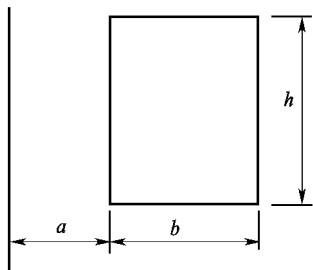
由 $\epsilon < 0$, 表明 ϵ 的方向与 $\mathbf{n}$ 形成左手螺旋关系. 因为所作辅助导线 $ADCB$ 相对于电流 I 产生的磁场都是静止的, 其上不会产生电动势, 所以求出的 ϵ 就是导线 AB 上的动生电动势, 且与 $\mathbf{n}$ 形成左手螺旋关系的电动势方向具体到 AB 上就是从 B 指向 A .

比较上述两种方法可知, 在这种情况下, 动生电动势的计算采用解法 1 比较简便. 如果采用解法 2 时, 要注意一般情况下都使所作辅助导线相对于磁场不动. 因此其上动生电动势为零, 这样会使解决问题变得简单些 (如本例). 但若按照题设条件添加的辅助导线不能在磁场中静止时, 则应尽可能使作出的辅助导线上的动生电动势比较好求 (见教材中例 17-3).

例 11-3 一长直导线和一矩形线圈共面, 各相关尺寸如例 11-3 图所示.

求: (1) 当长直导线通有电流 $I_1 = I_0 \sin \omega t$ 时, 矩形线圈中感应电动势的大小;

(2) 当矩形线圈中通有电流 $I_2 = I_0 \cos \omega t$ 时, 直导线中感应电动势的大小.



例 11-3 图

解 (1) 这是一个求闭合回路中感生电动势的问题, 一般都用法拉第电磁感应定律 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 计算. 于是有

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} h dr \\ &= \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \\ &= \frac{\mu_0 h I_0 \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \end{aligned}$$

所以

$$|\epsilon| = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 h \omega I_0}{2\pi} |\cos \omega t| \ln \frac{a+b}{a}$$

(2) 利用上面求出的 Φ , 可得长直导线和矩形线圈的互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I_1} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

当矩形线圈通有电流 $I_2 = I_0 \cos \omega t$ 时, 因互感系数与电流无关, 所以长直导

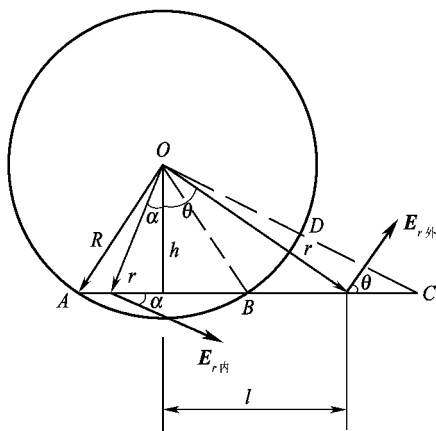
线中的感应电动势的大小为

$$|\epsilon| = \left| -M \frac{dI_2}{dt} \right| = \frac{\mu_0 h \omega I_0}{2\pi} \left| \sin \omega t \right| \ln \frac{a+b}{a}$$

在本例(2)中,无法用(1)中的方法计算长直导线的感应电动势,而是利用了两线圈周围没有铁磁性物质时,两线圈的互感系数相等,且与电流无关的性质.先通过长直导线通以电流 I_1 求出互感系数,再用计算互感电动势的方法得出题目所求.这也告诉我们,如果要计算两线圈的互感系数,先假定哪一个线圈通以电流需要分析具体情况.假定合适则计算简便,否则计算就复杂,甚至无法计算.如本例中,如果想通过矩形线圈通以电流来计算互感系数,则按题设条件将无法算出.

例 11-4 半径为 R 的圆柱形空间内分布有沿圆柱轴线方向的均匀磁场,磁场方向垂直纸面向里,变化率 $\frac{dB}{dt} > 0$. 有一长度为 $2R$ 的金属杆放在如例11-4图所示的位置,其中一半位于磁场内,一半位于磁场外,求该金属杆上的感生电动势.

解 这是求一段导线上感生电动势的问题,对这类问题,通常有两种解法.



例 11-4 图

解法 1 用感生电动势公式 $\epsilon = \int_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l}$ 计算.

根据磁场分布的轴对称性可知, $\mathbf{E}_r$ 线是围绕圆柱轴线,且在圆柱截面上的一系列同心圆. 取任一半径为 r 的同心圆为积分回路 L' , 并设该回路包围面积 S

的正法向与磁场同方向. 则由 $\oint_{L'} \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$, 可得感生电场的分布为

$$\mathbf{E}_{r内} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

$$\mathbf{E}_{r外} = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \quad (r \geq R)$$

式中, 负号表明 $\mathbf{E}_r$ 与 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 在方向上形成左手螺旋关系, 即当 $\frac{dB}{dt} > 0$ 时, $\mathbf{E}_r$ 沿同心圆的逆时针切线方向.

于是金属杆上的 AB 段的感生电动势为

$$\int_A^B \mathbf{E}_{r内} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cos\alpha dl$$

由图上几何关系, 可得 $r \cos\alpha = h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$, 代入上式得

$$\int_A^B \mathbf{E}_{r内} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\sqrt{3}}{4} R \frac{dB}{dt} dl = \frac{\sqrt{3}}{4} R \frac{dB}{dt} \int_A^B dl = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{dB}{dt}$$

金属杆上 BC 段的感生电动势为

$$\int_B^C \mathbf{E}_{r外} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^C \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \cos\theta dl = \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} \int_B^C \frac{\cos\theta}{r} dl$$

由图上几何关系, 得 $l = h \tan\theta$, 两边微分有 $dl = \frac{h}{\cos^2\theta} d\theta$, 即 $\cos\theta dl = \frac{h}{\cos\theta} d\theta = r d\theta$,

代入上式, 得

$$\int_B^C \mathbf{E}_{r外} \cdot d\mathbf{l} = \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} \int_B^C \frac{1}{r} r d\theta = \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{12} R^2 \frac{dB}{dt}$$

所以, 所求金属杆上的感生电动势为

$$\epsilon = \int_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}_{r内} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{E}_{r外} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right) R^2 \frac{dB}{dt}$$

因为 $\epsilon > 0$, 所以电动势方向从 $A \rightarrow C$.

解法 2 添加辅助导线组成闭合回路, 用法拉第电磁感应定律 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 计算. 如图中所示, 作辅助线 OA, OC 组成闭合回路 $OACO$, 穿过该回路围成面积的磁通量, 实际上只是穿过三角形 OAB 围成面积 S_1 的磁通量与穿过扇形 OBD 围成面积 S_2 的磁通量之和. 因此, 取整个闭合回路围成面积的正法向 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{B}$ 同方向时, 穿过该回路的磁通量为

$$\Phi = (S_1 + S_2) B = \left(\frac{1}{2} Rh + \frac{1}{2} R^2 \frac{\pi}{6} \right) B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R^2 + \frac{\pi}{12} R^2 \right) B$$

所以

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12}\right)R^2 \frac{dB}{dt}$$

因为 $\mathbf{E}_r$ 线是以 O 为圆心的一系列同心圆,所以在辅助线 OA 与 OC 上 $\mathbf{E}_r$ 处处与之垂直. 因此辅助线 OA, OC 上的感生电动势均为零,故所求出闭合回路 $OACO$ 上的感生电动势 ϵ 就是金属杆 AC 上的感生电动势. 式中的负号表示感生电动势的方向与 $\mathbf{n}$ 成左手螺旋关系,具体到金属杆 AC 上是从 A 指向 C .

比较上面两种方法可知,用解法 2 比较简便. 采用该方法时,要注意辅助线的作法,应使其上的电动势为零或比较好求. 但对于一段导线上感生电动势的计算,解法 1 所用的方法是基本方法. 采用这种方法时,必须先求出感生电场的分布,包括 $\mathbf{E}_r$ 的大小和方向,这样才能计算 $\epsilon = \int_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l}$.

例 11-5 如例 11-5 图所示,在垂直图面的圆柱形空间内有一随时间均匀变化的匀强磁场 $\mathbf{B}$,其方向垂直纸面向里. 在图面内有两根相交于圆心 O 点夹角为 60° 的固定直导线 OA 与 OB ,另有一半半径为 r 的半圆环形导线在两根固定直导线上以速度 $\mathbf{v}$ 匀速滑动, $\mathbf{v}$ 的方向沿角 AOB 的平分线并指向 O 点. 在时刻 t ,半圆环的圆心正好与 O 点重合,此时磁感应强度大小随时间的变化率为 $k > 0$,求此时半圆环导线与两根直导线所围成的闭合回路 $OCDO$ 中的感应电动势 ϵ .

解 闭合回路 $OCDO$ 中的感应电动势由感生电动势 ϵ_1 和动生电动势 ϵ_2 两部分叠加而成,即

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

式中, ϵ_1 由涡旋电场所形成,它相当于半圆环导线处于 t 时刻所在位置静止不动时,回路 $OCDO$ 中的感生电动势. 取顺时针方向为闭合回路 $OCDO$ 的绕行正向,则有

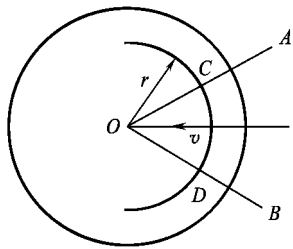
$$\epsilon_1 = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{k\pi r^2}{6}$$

由 $\epsilon_1 < 0$,表明其方向与所设正向相反,即沿闭合回路的逆时针方向.

CD 弧上的动生电动势等于 $\overline{CD}$ 弦上的动生电动势,所以

$$\epsilon_2 = \int_C^D (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB \overline{CD} = vBr$$

由 $\epsilon_2 > 0$,表明其方向沿圆弧从 C 指向 D . 于是



例 11-5 图

$$\epsilon = vBr - \frac{k\pi r^2}{6} = r\left(vB - \frac{k\pi r}{6}\right)$$

若 $vB > \frac{k\pi r}{6}$, 则 ϵ 的方向沿闭合回路的顺时针方向; 若 $vB < \frac{k\pi r}{6}$, 则 ϵ 的方向沿闭合回路的逆时针方向; 若 $vB = \frac{k\pi r}{6}$, 则 $\epsilon = 0$.

对于闭合回路中的感应电动势既含有动生电动势, 又含有感生电动势的情况, 可以直接应用法拉第电磁感应定律 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 计算 (见教材中例 17-1). 实际上当磁场为均匀磁场时, 有

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = -\left[\frac{dB}{dt} \cdot S \cos\theta + B \frac{d(S \cos\theta)}{dt}\right]$$

式中, 等号最右边第一项对应的是感生电动势, 第二项对应的是动生电动势. 本例中, 因为闭合回路所围面积 S 随时间 t 的变化关系不容易找出, 所以动生电动势是应用公式 $\epsilon = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 进行计算的. 在具体计算中, 又利用了任意形状弯曲导线在匀强磁场中平动时, 其上的电动势与其封口直导线作相同平动时产生的电动势大小相等这一性质, 使计算过程变得简单.

第 12 章 电磁场和电磁波

基本要求

1. 掌握位移电流的概念, 会计算简单情况下的位移电流. 理解全电流的概念, 并能在简单情况下利用全电流定律计算磁场的分布.
2. 了解麦克斯韦方程组积分形式中各方程的物理意义.
3. 了解平面电磁波的主要性质, 领会振荡电偶极子与振荡电路产生电磁波的基本原理.

内容提要

本章主要研究电磁场和电磁波. 首先介绍了位移电流的概念和全电流定律; 然后对电磁学中的所有基本规律进行了总结, 归纳成麦克斯韦方程组; 最后介绍了电磁波的产生及平面电磁波的主要性质.

一、位移电流 全电流定律

1. 位移电流

位移电流密度

$$\mathbf{j}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (12-1)$$

位移电流强度

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-2)$$

2. 全电流定律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I + I_D = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} \quad (12-3)$$

二、麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (12-4)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-5)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12-6)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (12-7)$$

三、在自由空间传播的平面电磁波的主要性质

1. 电场 $\mathbf{E}$ 与磁场 $\mathbf{H}$ 的振动方向相互垂直, 且均与电磁波的传播方向垂直, 这说明电磁波是横波.

2. 沿给定方向传播的电磁波, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别在各自的平面上振动, 这种特性称为偏振性, 说明电磁波是偏振波.

3. $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 同相位地变化, 这表明 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的量值同地、同时达到最大, 同地、同时减到最小, 且同地、任一时刻都有关系 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$.

4. 电磁波传播速度 u 的方向与 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向相同, u 的大小为 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, 由介质的介电常数 ϵ 和磁导率 μ 所决定. 真空中

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = c \quad (12-8)$$

这一结果与真空中光速的实验值相符, 表明光波的本质就是电磁波.

解题指导与示例

位移电流, 实际上是一种能产生磁场的变化电场. 当空间存在随时间变化的电场时, 电场中任一点的位移电流密度 $\mathbf{j}_D$ 就等于该点的电位移 $\mathbf{D}$ 对时间的变化率, 即 $\mathbf{j}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$. 位移电流密度是矢量, 其大小为 $j_D = \left| \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right|$. 其方向与 $\frac{d\mathbf{D}}{dt}$ 的方向相同, 即当 D 值增加时, $\mathbf{j}_D$ 与 $\mathbf{D}$ 同方向; 当 D 值减小时, $\mathbf{j}_D$ 与 $\mathbf{D}$ 反方向.

通过变化电场中任一截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量对时间的变化率, 即 $I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$. 位移电流在激发磁场方面与传导电流激发磁场的规律相同, 两者只在这一点上等效. 而在其他方面存在根本的区别, 是完全不同的物理量.

位移电流的引入, 扩充了电流连续性的概念. 对于某一截面, 单纯的传导电流、运流电流或位移电流不一定连续, 但三者的代数和, 即全电流总是连续的. 这时, 安培环路定理就推广成为全电流定律, 即

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I + I_0 = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

麦克斯韦方程组是电磁场普遍规律的高度概括和总结,是电磁场理论的基本方程.

其积分形式中的第一个方程(12-4)式表明在任何电场中,通过任意封闭曲面的电位移通量等于该闭曲面所包围的自由电荷的代数和.式中, $\mathbf{D}$ 包括静电场的电位移 $\mathbf{D}_1$ 和感生电场的电位移 $\mathbf{D}_2$.

第二个方程(12-5)式表明在任何电场中,电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过以该曲线为边界的任意曲面的磁通量对时间变化率的负值.式中, $\mathbf{E}$ 包括由自由电荷产生的静电场和 $\mathbf{E}_1$ 和变化磁场产生的感生电场 $\mathbf{E}_2$.由于静电场的环流恒为零,所以该式实际上揭示了变化磁场与涡旋电场的关系.

第三个方程(12-6)式表明在任何磁场中,通过任意闭合曲面的磁通量恒等于零.式中, $\mathbf{B}$ 包括稳恒磁场 $\mathbf{B}_1$ 和变化电场激发的磁场 $\mathbf{B}_2$.

第四个方程(12-7)式就是全电流定律,它表明在任何磁场中,磁场强度沿任意闭合曲线的线积分等于穿过以该曲线为边界的任意曲面的全电流.既表示在一般情况下磁场由传导电流、运流电流和位移电流共同产生,又揭示了变化电场与涡旋磁场的关系.

例 12-1 一平行板电容器的两极板由半径为 5.0 cm 的两圆导体片分别构成,两极板之间为空气.当电容器充电时,两极板间的电场强度变化率为 $\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{12} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. 求:(1)两极板间的位移电流;(2)两板边缘的磁感应强度的大小.

解 (1) 忽略边缘效应,可认为两极板间的电场是均匀的.取两极板间任一截面的正法向与电场方向相同,则按位移电流的定义,有

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}) = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times 3.14 \times 0.05^2 \times 1.0 \times 10^{12} \\ &= 6.95 \times 10^{-2} (\text{A}) \end{aligned}$$

(2) 取半径为 $r = 0.05 \text{ m}$ 的圆为积分回路 L ,应用全电流定律,并注意到 $\sum I = 0$,则有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I_D$$

所以

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 6.95 \times 10^{-2}}{2\pi \times 0.05} = 2.78 (\text{T})$$

本例在(1)中算出 $I_D > 0$,表明 I_D 的流向与电场方向相同.在(2)中要注意

积分回路 L 之所以取半径为 r 的圆, 是因为若以电容器两极板中心连线为轴, 由电场分布的轴对称性可知磁场分布也具有轴对称性. 因此变化电场产生的磁力线是围绕两极板中心连线的一系列同心圆, 并且磁力线回转方向与位移电流方向之间为右手螺旋关系, 同一条磁力线上各点处 $\mathbf{H}$ 的大小相等. 当积分方向沿磁力线回转方向时, 才有 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I_D$.

此例说明, 只有当磁场分布具有一定的对称性时, 才能应用全电流定律求出磁场强度的大小. 所以在利用全电流定律求磁场时, 首先必须对问题作对称性分析, 根据磁场的对称性选取适当的积分回路, 以便使积分 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ 中的 $\mathbf{H}$ 能以标量形式从积分号内提出来, 变复杂的积分运算为简单的代数运算.

例 12-2 圆柱形电容器内, 外导体截面半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 中间充满介电常数为 ϵ 的电介质. 当两极板间的电压随时间的变化为 $\frac{dU}{dt} = k$ 时 (k 为常数), 求介质内距圆柱轴线为 r 处的位移电流密度的大小.

解 圆柱形电容器电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

所以内导体带电量为

$$q = CU = \frac{2\pi\epsilon LU}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

忽略边缘效应, 由高斯定理可得

$$D2\pi rL = q$$

所以

$$D = \frac{q}{2\pi rL} = \frac{\epsilon U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

故 r 处位移电流密度的大小为

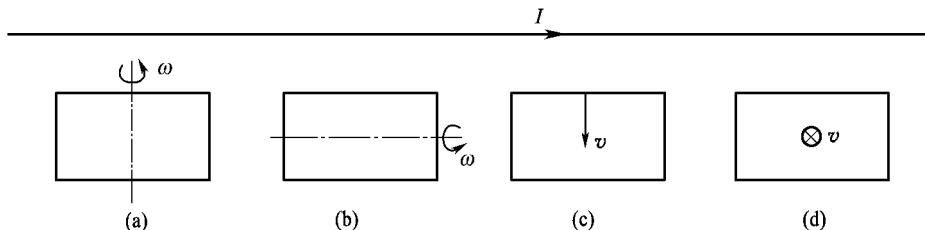
$$j_D = \left| \frac{dD}{dt} \right| = \frac{\epsilon}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \left| \frac{dU}{dt} \right| = \frac{\epsilon |k|}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

自测题九

一、选择题

1. 如选择题1图所示,一矩形线圈,放在一无限长载流直导线附近,开始时线圈与导线在同一平面内,矩形的长边与导线平行.若矩形线圈以图(a)、(b)、(c)、(d)所示的四种方式运动,则在开始瞬间,以哪种方式运动的矩形线圈中的感应电流最大?

- (A) 以图(a)所示方式运动. (B) 以图(b)所示方式运动.
(C) 以图(c)所示方式运动. (D) 以图(d)所示方式运动. []



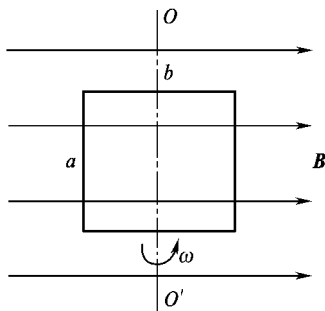
选择题1图

2. 半径为 a 的圆线圈置于磁感强度为 B 的均匀磁场中,线圈平面与磁场方向垂直,线圈电阻为 R .当把线圈转动使其法向与 B 的夹角 $\alpha = 60^\circ$ 时,线圈中已通过的电量与线圈面积及转动的时间的关系是

- (A) 与线圈面积成正比,与时间无关.
(B) 与线圈面积成正比,与时间成正比.
(C) 与线圈面积成反比,与时间成正比.
(D) 与线圈面积成反比,与时间无关. []

3. 一矩形线框边长为 a , 宽为 b , 置于均匀磁场中,线框绕 OO' 轴以匀角速度 ω 旋转(如选择题3图所示).设 $t=0$ 时,线框平面处于纸面内,则任一时刻感应电动势的大小为

- (A) $2abB|\cos\omega t|\omega$.
(B) abB .
(C) $\frac{1}{2}abB|\cos\omega t|\omega$.
(D) $abB|\cos\omega t|\omega$.

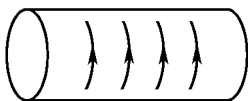


选择题3图

(E) $abB|\sin\omega t|\omega$.

[]

4. 如选择题 4 图所示,空气中有一无限长金属薄壁圆筒,在表面上沿圆方向均匀地流着一层随时间变化的面电流 $i(t)$,则



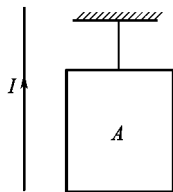
选择题 4 图

- (A) 圆筒内均匀地分布着变化磁场和变化电场.
 (B) 任意时刻通过圆筒内假想的任一球面的磁通量和电量均为零.
 (C) 沿圆筒外任意闭合环路上磁感应强度的环流不为零.
 (D) 沿圆筒内任意闭合环路上电场强度的环流为零. []

5. 在长直导线附近挂着一块方形薄金属片 A,其重量很轻,A 与直导线共面如选择题 5 图.当长直导线中突然通以大电流 I 时,由于电磁感应,薄片 A 中将产生涡电流,而 A 片在开始瞬间将

- (A) 向右运动.
 (B) 只作转动.
 (C) 向左运动.
 (D) 不动.

[]



选择题 5 图

6. 自感为 0.25H 的线圈中,当电流在 $(1/16)\text{s}$ 内由 2A 均匀减少到零,线圈中自感电动势的大小为

- (A) $7.8 \times 10^{-3}\text{V}$. (B) 2.0V .
 (C) 8.0V . (D) $3.1 \times 10^{-2}\text{V}$.

[]

7. 两个相距不太远的平面圆线圈,怎样放置可使其互感系数近似为零? 设其中一线圈的轴线恰过另一线圈的圆心.

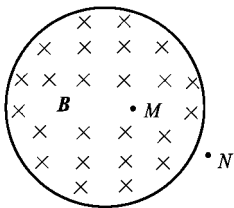
- (A) 两线圈的轴线互相平行. (B) 两线圈的轴线成 45° 角.
 (C) 两线圈的轴线互相垂直. (D) 两线圈的轴线成 30° 角.

[]

8. 有两个长直密绕螺线管,长度及线圈匝数均相同,半径分别为 r_1 和 r_2 ,管内充满均匀介质,其磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 . 设 $r_1:r_2=1:2$, $\mu_1:\mu_2=2:1$,当将两只螺线管串联在电路中通电稳定后,其电感量之比 $L_1:L_2$ 与磁能之比 $W_{m1}:W_{m2}$ 分别为

- (A) $1:1$ 与 $1:1$. (B) $1:2$ 与 $1:1$.
 (C) $1:2$ 与 $1:2$. (D) $2:1$ 与 $2:1$.

[]



选择题 10 图

9. 在下列情况下,哪种情况的位移电流为零?

- (A) 电场不随时间而变化.
 (B) 电场随时间而变化.
 (C) 交流电路.
 (D) 在接通直流电路的瞬时.

[]

10. 均匀磁场被局限在圆柱形空间内,且随时间而变化. 选择题 10 图所示为圆柱形截面,M,N 分别为圆柱形空间内、外两点, E_M 和 E_N 分别表示这两点的有旋电场强度,则

(A) $E_M=0, E_N=0$.

(B) $E_M=0, E_N \neq 0$.

(C) $E_M \neq 0, E_N=0$.

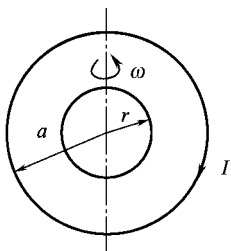
(D) $E_M \neq 0$, 和 $E_N=0$.

[]

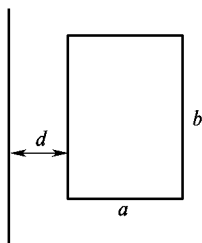
二、填空题

1. 在磁感强度为 B 的磁场中, 以速率 v 垂直切割磁力线运动的一长度为 L 的金属杆, 相当于_____, 它的电动势为_____, 产生此电动势的非静电力是_____.

2. 如填空题 2 图所示, 一半径为 r 的很小的金属圆环, 在初始时刻与一半径为 a ($a \gg r$) 的大圆环共面且共心. 在大圆环通以恒定的电流 I , 方向如图所示时, 如果小圆环以匀角速度 ω 绕其任一方向的直径转动, 并设小圆环的电阻为 R . 则任一时刻 t 通过小圆环的磁通量 $\varphi =$ _____, 小圆环中的感应电流 $I =$ _____.



填空题 2 图



填空题 5 图

3. 用导线制成一半径为 $r=10\text{ cm}$ 的闭合圆形线圈, 其电阻 $R=10\Omega$, 均匀磁场 B 垂直于线圈平面. 欲使电路中有一稳定的感应电流 $i=0.01\text{ A}$, B 的变化率 $\text{d}B/\text{d}t =$ _____.

4. 无限长直通电螺线管的半径为 R , 设其内部的磁场以 $\text{d}B/\text{d}t$ 的变化率增加, 则在螺线管内离开轴线距离为 r ($r < R$) 处的涡旋电场的强度为_____.

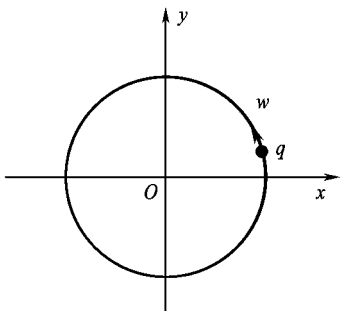
5. 如填空题 5 图所示, 一长直导线旁有一长为 b 、宽为 a 的矩形线圈, 线圈与导线共面, 长度为 b 的边与导线平行, 线圈与导线的互感系数为_____.

6. 无限长密绕直螺线管通以电流 I , 内部充满均匀、各向同性的磁介质, 磁导率为 μ_0 , 其上单位长度绕有 n 匝导线. 则管内部的磁感应强度为_____, 内部的磁能密度为_____.

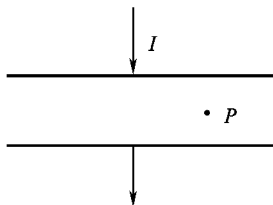
7. 有两个长度相同、匝数相同、截面积不同的长直螺线管, 通以相同大小的电流. 现在将小螺线管完全放入大螺线管里(两者轴线重合), 且使两者产生的磁场方向一致, 则小螺线管内的磁能密度是原来的_____倍. 若使两螺线管产生的磁场方向相反, 则小螺线管中的磁能密度为_____ (忽略边缘效应).

8. 一根长直导线输入电流 I , I 均匀分布在它的横截面上, 则导体内部单位长度的磁场能量为_____.

9. 如填空题 9 图所示, 一电量为 q 的点电荷, 以匀角速度 ω 做圆周运动, 圆周半径为 R . 设 $t=0$ 时, q 所在点的坐标为 $x_0=R, y_0=0$. 以 i, j 分别表示 x 轴与 y 轴上的单位矢量, 则圆心处 O 点位移电流密度为_____.



填空题 9 图

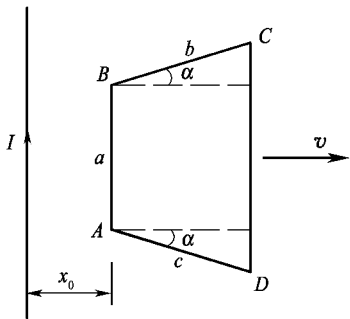


填空题 10 图

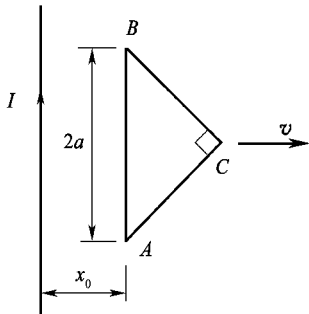
10. 如填空题 10 图所示, 平行板电容器, 从 $q=0$ 开始充电, 极板某点 P 处电场强度方向 _____, 磁场强度方向 _____.

三、计算题

1. 如计算题 1 图所示, 一长直导线通有稳恒电流 I , 旁边有一共面梯形框 $ABCD$, 其中 AB 边与直导线平行且长度为 a , AD 边和 BC 边与水平方向夹角均为 α , 且长度均为 b . 整个线框以速度 v 向右运动, 求图示瞬间线框中的感应电动势.

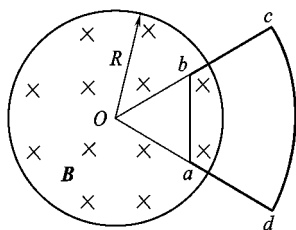


计算题 1 图

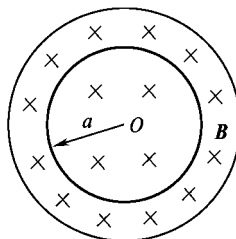


计算题 2 图

2. 如计算题 2 图所示, 电流为 I 的长直导线旁有一共面的等腰直角三角形框 ABC , 其中 AB 边与长直导线平行, 求当整个线框以速度 v 向右平动到图中所示位置时的动生电动势.
3. 如计算题 3 图所示, 均匀磁场 $\mathbf{B}$ 被限制在半径 $R=10\text{ cm}$ 的无限长圆柱空间内, 方向垂直纸面向里. 设磁场以 $\text{dB}/\text{dt}=1\text{ T}\cdot\text{S}^{-1}$ 的匀速率增加, 已知 $\theta=\frac{1}{3}\pi$, $\overline{oa}=\overline{ob}=6\text{ cm}$, 求固定的等腰圆弧回路 $abcd$ 中感生电动势的大小和方向.
4. 两根横截面半径都为 a 的平行长圆柱形直导线属于同一回路, 圆柱轴线间相距为 d . 设两导线内部的磁通量都可略去不计, 求这一对导线长为 l 的一段的自感系数.
5. 如计算题 5 图所示, 一长圆柱状磁场, 磁场方向沿轴线并垂直图面向里, 磁场大小既



计算题 3 图



计算题 5 图

随到轴线的距离 r 成正比变化, 又随时间 t 作正弦变化, 即 $B = B_0 r \sin \omega t$, B_0, ω 均为常数. 若在磁场中放一半径为 a 的金属圆环, 环心在柱状磁场的轴线上, 求金属环中的感生电动势.

第13章 光的干涉

基本要求

1. 掌握光波的一般知识、光的干涉现象,以及产生干涉现象的条件.了解获得相干光的两种基本方法,即分波阵面法和分振幅法.
2. 理解光程和光程差的概念,掌握光程差和相位差的关系,以及干涉加强和干涉减弱的条件.掌握光在两个介质交界面反射时的相位突变规律,以及所引起的附加光程差.
3. 掌握杨氏双缝干涉、薄膜干涉、劈尖干涉和牛顿环干涉的实验装置、相干光的光路、干涉条纹的基本特征,并能熟练计算相应的光程差,得到干涉明、暗条纹所满足的条件.
4. 了解增透膜和增反膜的工作原理,了解干涉膨胀仪的工作原理,了解迈克耳逊干涉仪的构造、工作原理和主要应用.

内容提要

一、光的波动性质

光是一种电磁波,可见光的波长范围在 $400\text{ nm}\sim 760\text{ nm}$ 之间.在介质中,光的波长为真空中波长的 n 分之一, n 为介质的折射率,即

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

二、光源及相干光源

两束光如果振动方向相同、频率相同、在相遇点相位相同,或者有恒定的相位差,则这两束光为相干光.普通光源中,由于原子或分子发光是彼此独立的,且具有间歇性,所发出的波列不满足上述的相干条件,因此不同光源或者是同一光

源的不同部分发出的光是非相干的. 获得相干光的方法是将同一光源的同一部分所发出的光波分为两束, 这两束光满足相干条件. 这样产生相干光的装置有两种类型: (1) 分波阵面法, 是将同一光源所发出光的波阵面分为两部分, 这两个子波源就是相干光源, 它们所产生的次级波经过不同的路径在空间相遇, 就会产生干涉现象. (2) 分振幅法, 是将入射光的振幅(即能量)分为两个不同部分, 当这些部分的光在空间相遇, 也会产生干涉.

三、光程与光程差

光在媒质中走过的几何路程与该媒质折射率的乘积, 称为光程. 即

$$\text{光程} = nr, \quad \text{光程差 } \delta = n_1 r_1 - n_2 r_2$$

光程差与相位差的关系为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

光程和光所通过的几何路程是两个不同的概念. 引入光程的概念后, 就可以把光在不同媒质里面的传播统一地折算成光在真空中的传播, 这给讨论光的干涉带来很大的方便. 在利用光程概念讨论干涉问题时, 应当注意: (1) 两束相干光在空间通过不同媒质相遇时, 其干涉情况与两束光的光程差有关, 而不是与两束光的几何路程差有关. (2) 理想透镜不产生附加的光程差.

四、半波损失(相位突变)

光从光疏媒质向光密媒质入射时, 在反射光中会产生半波损失, 而折射光中不存在半波损失. 半波损失的实质是产生了 π 的相位突变. 在考虑半波损失时, 应当注意: (1) 产生半波损失必须满足两个条件, 一是反射光; 二是光必须是从光疏媒质入射到光密媒质时, 在交界面上的反射. (2) 如果两列光波在界面上都存在半波损失, 则附加光程差为 $\lambda/2 + \lambda/2 = \lambda$, 根据波动的周期性可知, 此时不需要考虑附加光程差.

五、干涉明纹、暗纹条件

$$\text{明纹} \quad \begin{array}{ll} \text{相位差} & \Delta\varphi = \pm 2k\pi \\ \text{光程差} & \delta = \pm k\lambda \end{array} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{暗纹} \quad \begin{array}{ll} \text{相位差} & \Delta\varphi = \pm (2k+1)\pi \\ \text{光程差} & \delta = \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} \end{array} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

以上公式适用于任何两束光产生干涉的情况, 因此是讨论光的干涉问题的基础.

六、杨氏双缝干涉

$$\text{光程差} \quad \delta = nxd/D$$

明纹中心坐标 $x = \pm 2kD\lambda/2nd$

暗纹中心坐标 $x = \pm (2k+1)D\lambda/2nd$

相邻明(暗)纹间隔 $\Delta x = D\lambda/nd$

双缝干涉条纹的特点是等间隔对称分布. 在使用上述公式时, 要注意: (1) 光源到两个缝的距离必须相等. 如果不相等, 则还需要考虑在双缝干涉屏之前两束光的光程差. (2) 确定了光源和虚光源之间的距离以及它们到观察屏的距离, 就可以用上述公式讨论菲涅耳双镜和洛埃镜的干涉情况, 只是在洛埃镜中, 两束光的光程差中需要考虑半波损失.

七、薄膜干涉

光程差

$$\begin{aligned} (1) \text{ 反射光 } \delta_r &= \begin{cases} 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} & (n_1 < n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 > n_3) \\ 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \lambda/2 & (n_1 < n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 < n_3) \end{cases} \\ (2) \text{ 透射光 } \delta_t &= \begin{cases} 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \lambda/2 & (n_1 < n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 > n_3) \\ 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} & (n_1 < n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 < n_3) \end{cases} \end{aligned}$$

注意: (1) 上式中半波损失 $\lambda/2$ 之前取正号, 还是负号, 只影响干涉条纹的级次. (2) 式中, λ 为光在真空中的波长. (3) 上式是薄膜干涉的基本公式, 不仅适用于厚度均匀的薄膜, 也适用于厚度不均匀的薄膜, 如劈尖、牛顿环等情形. (4) 薄膜干涉通常是一种等倾干涉.

八、劈尖干涉

当光垂直照射在劈尖上时, 反射光的光程差为

$$\delta_r = \begin{cases} 2n_2 e & (n_1 < n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 > n_3) \\ 2n_2 e + \lambda/2 & (n_1 < n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 < n_3) \end{cases}$$

相邻明纹(或暗纹)对应薄膜的厚度差

$$\Delta e = \lambda/2n_2$$

相邻明纹(或暗纹)间隔

$$\Delta l = \lambda/2n_2 \theta$$

注意: (1) 劈尖干涉是一种等厚干涉, 其条纹为平行于底边的等间隔明、暗相间直线条纹. (2) 同一条纹上各点对应劈尖的厚度都相等, 这一点也是根据条纹形状判断各处劈尖厚度的依据. (3) 上公式适用于任意媒质所组成的劈尖.

九、牛顿环

$$\text{明环半径 } r = \sqrt{\frac{2k-1}{2}} R\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

暗环半径 $r = \sqrt{kR\lambda}$ ($k=0,1,2,\dots$)

牛顿环干涉条纹为明暗相间、里疏外密的一组同心圆形条纹,其中心为一暗斑,即第0级暗纹.

十、迈克尔逊干涉仪

M_1 和 M_2' 严格平行时,为等倾干涉条纹.当动镜移动半个波长时,则中心涨出,或陷入一个条纹. M_1 和 M_2' 不严格平行时,为等厚干涉条纹,当动镜移动半个波长时,则条纹平行移动一个条纹的距离.动镜移动距离和条纹移动数目之间有关系,表示为

$$l = N \frac{\lambda}{2}$$

解题指导和示例

本章的习题主要分为两种类型.第一类是计算有关干涉条纹的静态分布、位置、条纹间隔等问题.此类问题通常比较简单,掌握了基本概念和基本公式一般就可以比较顺利地解答了.其解题思路为:

- (1) 确定相干光.
- (2) 确定相干区域.
- (3) 计算光程差.
- (4) 根据光程差写出干涉明、暗纹条件.
- (5) 确定条纹级次、条纹间隔等.

其中,计算光程差是解题的关键,而分析和确定相干光和相干区域是解题的基础.

第二类问题是有关干涉条纹的移动问题.解此类问题要抓住一个关键,即当条纹移动一个条纹间隔时,两束相干光的光程差改变了一个波长.这一规律对于双缝、薄膜、劈尖、牛顿环,以及迈克尔逊干涉仪等装置中干涉条纹的移动都是适用的.以双缝干涉为例,如图13-1所示,当将光源S竖直上移时,中央明纹(即光程差为0的两束相干光会聚处)将向下移动,而移动光源并不改变条纹间隔,因此整个干涉条纹图样也向下移动.再如用透明介质片遮住缝 s_2 ,如图13-2所示,则缝 s_2 所发出光束的光程将增加,其附加光程为 $(n-1)t$.式中, n 为介质片折射率, t 为介质片厚度.因此,可以判断中央明纹也将向下移动,移动距离应当满足

$$x = \frac{D(n-1)t}{d}$$

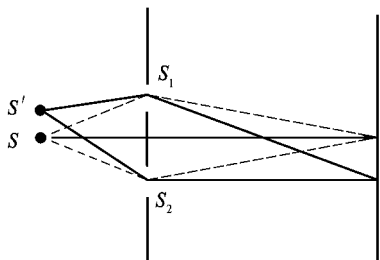


图 13-1 光源移动

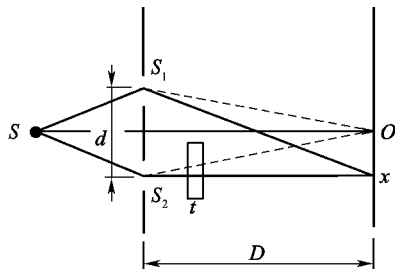


图 13-2 加介质片

例 13-1 如图 13-2 所示,用折射率为 1.58 的薄云母片遮盖双缝中的其中一条缝 S_2 ,则原来中央明纹中心现在变成了第七级明纹中心,如果所用入射光波长为 550 nm,求云母片的厚度 t .

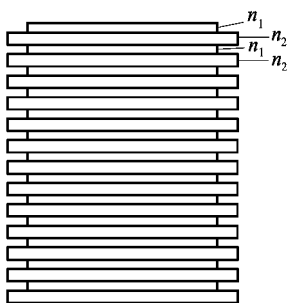
解 当用薄云母片遮盖缝 S_2 时,相干光束的附加光程差为 $(n-1)t$,由于产生了七个条纹的移动,因此有

$$(n-1)t = 7\lambda$$

得

$$t = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 550 \times 10^{-9}}{1.58-1} = 6.64 \times 10^{-6} \text{ (m)}$$

例 13-2 如图,氦氖激光器中的谐振腔反射镜,要求对波长 632.8 nm 的单色光反射率达 99% 以上,为此在反射镜的玻璃表面上交替镀上硫化锌 ZnS ($n_1 = 2.35$) 和低折射率的材料氟化镁 MgF_2 薄膜 ($n_2 = 1.38$) 共 13 层,求每层膜的最小厚度.



例 13-2 图

解 当波长为 632.8 nm 的单色光垂直入射硫化锌薄膜时,反射光的光程差应当满足

$$\delta = 2d_1 n_1 + \lambda/2 = k\lambda \quad k=1, 2, 3, \dots$$

因此硫化锌薄膜的最小厚度为

$$d_1 = \frac{(2k-1)\lambda}{4n_1} \Big|_{k=1} = 67.3 \text{ nm}$$

同理,可以求得氟化镁薄膜厚度为

$$d_2 = \frac{(2k-1)\lambda}{4n_2} \Big|_{k=1} = 114.6 \text{ nm}$$

例 13-3 平板玻璃上有一厚度均匀的肥皂膜,其折射率为 1.30,玻璃折射率为 1.50.一平行单色光垂直入射肥皂膜,若单色光的波长连续可调,则可连续观察到 500 nm 与 700 nm 这两个波长的单色光在反射中消失.求肥皂膜的厚度.

解 依题意,肥皂膜上、下两个表面的反射光中都有半波损失,因此该薄膜干涉中反射光的干涉相消的条件为

$$2ne = (2k+1)\lambda/2 \quad (k=0,1,2,3,\dots) \quad (1)$$

式中, n 为肥皂膜的折射率.

当 $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ 时,有

$$2ne = (2k_1+1)\lambda_1/2 = 500\lambda_1 + 250 \quad (2)$$

当 $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$ 时,有

$$2ne = (2k_2+1)\lambda_2/2 = 700\lambda_2 + 350 \quad (3)$$

由式(2)、(3),可得

$$5k_1 - 7k_2 = 1 \quad (4)$$

又因为 λ_1, λ_2 为两个相邻的干涉相消光的波长,因此 k_1, k_2 为两个连续的整数,即

$$k_1 - k_2 = 1 \quad (5)$$

联立式(4)、(5),解得

$$k_1 = 3, k_2 = 2$$

代入式(2),求得肥皂膜厚度为

$$e = \frac{k_1\lambda_1 + 250}{2n} = \frac{3 \times 500 + 250}{2 \times 1.3} = 673.1 \text{ (nm)}$$

例 13-4 折射率为 1.60 的两块标准平板玻璃之间形成一个空气劈尖,用波长 600 nm 的单色光垂直入射,产生等厚干涉图样. 当在劈尖内充满折射率为 1.40 的液体时,发现明纹间隔缩小了 $\Delta l = 0.5 \text{ mm}$,求劈尖角为多大?

解 相邻明纹间隔为

$$l = \lambda / 2n\theta$$

当劈尖中介质折射率 n 变化时,相邻明纹间隔的变化为

$$\Delta l = l_1 - l_2 = \lambda / 2n_1\theta - \lambda / 2n_2\theta$$

式中, $n_1 = 1.00, n_2 = 1.40$. 因此有

$$\theta = \frac{\lambda}{2\Delta l} \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) = 1.7 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

例 13-5 曲率半径为 R 的平凸透镜放在一标准玻璃平板上面,当以单色光垂直照射透镜时,观察反射光的干涉条纹. 如果测得牛顿环的第 m 条和第 n 条明环之间的距离为 l ,求入射光的波长.

解 由牛顿环明纹公式

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k=1,2,3,\dots$$

得

$$r_m = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}}, r_n = \sqrt{\frac{(2n-1)R\lambda}{2}}$$

所以

$$l = |r_m - r_n| = \left| \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)R\lambda}{2}} \right|$$

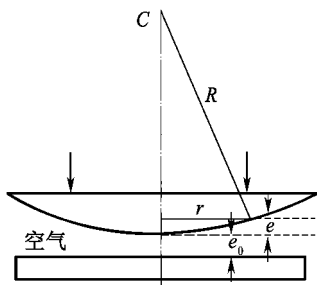
上式平方,得

$$l^2 = R\lambda [m+n-1 - \sqrt{(2m-1)(2n-1)}]$$

即

$$\lambda = \frac{l^2}{R[m+n-1 - \sqrt{(2m-1)(2n-1)}]}$$

例 13-6 如例 13-6 图所示,牛顿环装置的平凸透镜与平板玻璃有一高度为 e_0 的间隙. 现用波长为 λ 的单色光垂直照射,已知平凸透镜的曲率半径为 R ,试求反射光形成的牛顿环各暗环半径为多少?



例 13-6 图

解 设暗环半径为 r . 由图中几何关系可知

$$e = r^2 / 2R \quad (1)$$

再根据反射光干涉减弱的条件,有

$$2e + 2e_0 + \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}(2k+1)\lambda \quad (2)$$

将式(1)代入,得

$$r = \sqrt{R(k\lambda - 2e_0)}$$

式中, k 为正整数,且 $k > 2e_0 / \lambda$.

例 13-7 一射电望远镜的天线架设湖岸上,距离湖面高度为 h ,对岸地平线上方有一恒星正在升起,恒星所发出光波的波长为 λ . 试求当天线测得第一次干涉极大时,恒星所在的最小角位置.

解 如例 13-7 图所示,直射光与经过湖面的反射光在 O 点相遇时,其光程差为

$$\delta = BO - AO + \lambda/2$$

式中

$$BO = h / \sin\theta$$

$$AO = BO \cos 2\theta = h \cos 2\theta / \sin\theta$$

代入上式,得

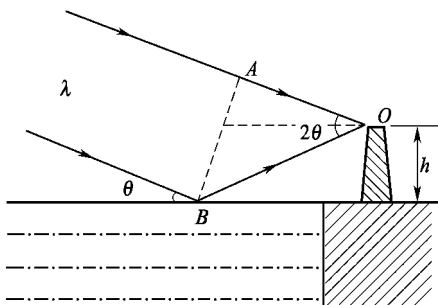
$$\delta = \frac{h}{\sin\theta} - \frac{h\cos 2\theta}{\sin\theta} + \frac{\lambda}{2} = 2h\sin\theta + \frac{\lambda}{2}$$

反射光干涉加强满足条件

$$\delta = 2h\sin\theta + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

对测得的第一次干涉极大, 取 $k=1$, 代入上式, 即为恒星所在的最小角 $\theta_{\min}$

$$\theta_{\min} = \arcsin \frac{\lambda}{4h}$$



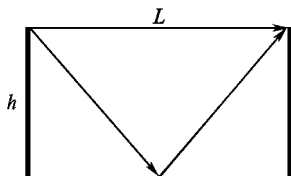
例 13-7 图

例 13-8 移动通讯发射台发出的

无线电波可能直接传到手机, 也可能经地面反射后传到手机, 这样在有些地方可能引起相消干涉而使信号减弱. 设一手机和发射机分别位于高度是 60 m 的高楼上, 工作频率为 98 MHz, 如例 13-8 图所示. 若要求不引起相消干涉, 两楼间的水平地面的最大宽度是多少 (注意无线电波在地面反射时有半波损失)?

解 手机处信号干涉相消的条件是直接的入射波和通过地面的反射波在相遇处产生的波程差为 $(2k+1)\lambda/2$.

由图可知, 直射波和反射波在相遇处波程差为



例 13-8 图

$$\delta = 2\sqrt{h^2 + L^2/4} - L + \lambda/2$$

应当满足

$$\delta = 2\sqrt{h^2 + L^2/4} - L + \lambda/2 = k\lambda + \lambda/2$$

即

$$2\sqrt{h^2 + L^2/4} - L = k\lambda$$

显然, 当 $2\sqrt{h^2 + L^2/4} - L < \lambda$ 时, 不会产生干

涉相消, 因此解不等式, 可得

$$L > 2h^2/\lambda - \lambda/2$$

对于频率为 98 MHz 的电磁波, 其波长 $\lambda = 3 \times 10^8 / 98 \times 10^6 = 3.06 \text{ (m)}$, 代入上述不等式, 得

$$\lambda > 2351 \text{ m}$$

第14章 光的衍射

基本要求

1. 了解光的衍射现象的基本特征,以及菲涅耳衍射和夫琅和费衍射的区别.理解惠更斯-菲涅耳原理,了解应用该原理处理光的衍射问题的一般方法.
2. 掌握单缝夫琅和费衍射条纹的分布规律,掌握用菲涅耳半波带法分析条纹的产生和分布规律,能大致画出单缝衍射的光强分布曲线.
3. 了解光栅衍射图样的基本特征及其成因,掌握光栅公式的应用.理解光栅光谱的缺级现象,掌握缺级公式.
4. 了解衍射对光学仪器分辨率的影响,理解瑞利判据,会计算最小分辨角和光学仪器的分辨率.
5. 了解 X 射线的衍射现象,理解布喇格公式的物理意义.

内容提要

一、惠更斯-菲涅耳原理

同一波阵面上各点可以当作子波源,这些子波源所发出的子波在空间相遇时,能够相互叠加而产生干涉现象.利用该原理,可以计算衍射图样的光强分布.

二、单缝夫琅和费衍射

1. 衍射条纹特征:中央明纹(零级明纹)最亮,其宽度为其他明纹宽度的两倍.各级明条纹的光强随级次的增大而减小.当白光入射时,中央明纹为白色,两侧的各级明纹为彩色,靠近中央的为紫色,远离中央的为红色,有时会产生各级条纹之间的重叠交错.条纹的级次有限,其最高级次 $k_{\max}$ 为

$$k_{\max} < \frac{a}{\lambda}$$

即 k 取不大于 a/λ 的整数.

2. 半波带方法:将衍射光中的最大光程差分为半波长的若干倍,与此同时也将单缝所在波面分为同样的等份数,每个等份称为一个半波带,而半波带数目为

$$N=2a\sin\theta/\lambda$$

3. 明、暗条纹中心位置

$$\text{暗纹} \quad a\sin\theta=\pm k\lambda, \quad k=1,2,3,\cdots$$

$$\text{明纹} \quad a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k=1,2,3,\cdots$$

注意:上述明纹公式中,不包括中央明纹,即零级明纹.

4. 条纹宽度

$$\text{中央明纹线宽度} \quad \Delta x_0=2\lambda f/a$$

$$\text{中央明纹角宽度} \quad \Delta\theta=2\lambda/a$$

$$\text{其他明纹线宽度} \quad \Delta x=x_{k+1}-x_k=\lambda f/a$$

$$\text{其他明纹角宽度} \quad \Delta\theta=\lambda/a$$

三、光栅衍射

1. 光栅衍射图样特征及成因:光栅衍射图样的特点是明条纹明亮而尖锐,称为主极大;两明纹之间存在很宽的暗区,在暗区中还存在光强较弱的 $N-2$ 个次极大.光栅衍射是单缝衍射和缝间干涉综合效应.由于光栅中各缝的单缝衍射图样是重叠在一起的,因此光栅衍射明纹光强是单缝衍射明纹光强的 N^2 倍, N 为光栅的缝数;另外,多缝干涉的结果又使两个主极大之间有 $N-2$ 个次极大和 $N-1$ 个暗纹.

2. 光栅方程

当平行光垂直入射到光栅时,屏幕上主极大条纹的位置为

$$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda, \quad k=0,1,2,3,\cdots$$

当平行光斜入射时,有

$$(a+b)(\sin\theta\pm\sin\varphi)=\pm k\lambda, \quad k=0,1,2,3,\cdots$$

式中, θ 为衍射角(均取正), φ 为入射角.当入射光和衍射光在法线同侧时, $\sin\varphi$ 前取正号;若在异侧,则取负号.

3. 缺级条件

在多光束干涉极大的方向上同时满足单缝衍射极小的话,则该方向的主极大就会缺失,我们把这称为缺级现象.显然,缺级时必须同时满足条件

$$\begin{cases} d\sin\theta=k\lambda \\ a\sin\theta=k'\lambda \end{cases}$$

因此,所缺失的主极大级次 k 和单缝衍射暗纹级次 k' 之间有关系

$$k=\frac{d}{a}k', \quad k'=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

上式意味着:第 k 级干涉主极大落在第 k' 级衍射极小的位置上,产生了缺级.

四、光学仪器的分辨率

1. 圆孔夫琅和费衍射爱里斑角半径

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

2. 瑞利判据

两光点对透镜中心所张的角等于爱里斑角半径时,通过该透镜恰好能够分辨出这两个光点,将其称为最小分辨角,即

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

3. 光学仪器的分辨率

$$R = \frac{1}{\delta\theta} = 0.82 \frac{D}{\lambda}$$

五、X 射线衍射

布喇格公式

$$2d\sin\varphi = k\lambda$$

式中, d 为晶格常数, φ 为掠射角.

解题指导和示例

例 14-1 一束波长为 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 的平行单色光垂直照射在一个单缝上,缝宽为 $a = 0.5 \text{ mm}$,缝后紧挨着的薄透镜焦距为 $f = 1 \text{ m}$. 求:(1)中央明纹的角宽度;(2)中央明纹的线宽度;(3)第一级与第二级暗纹之间的距离;(4)如果在屏幕上离中央亮纹中心为 3.5 mm 处的 P 点为一亮纹,试求 P 处亮纹的级数;(5)从 P 处看,对该光波而言,狭缝处的波面可分割成几个半波带?

解 (1)中央明纹的角宽度

$$\Delta\theta_0 = \frac{2\lambda}{a} = 2 \times \frac{0.5 \mu\text{m}}{0.5 \times 10^3 \mu\text{m}} = 2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

(2)中央明纹的线宽度

$$\Delta x_0 \approx f\Delta\theta_0 = 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

(3)第一级暗纹与第二级暗纹之间的距离

$$\Delta x_{21} \approx f \left(\frac{2\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a} \right) = 1 \times (2 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3}) \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

(4)由明纹公式

$$a \sin \theta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

以及明纹坐标

$$x = f \tan \theta \approx f \sin \theta$$

求得该条纹级次

$$k = \frac{ax}{\lambda f} - \frac{1}{2} = 3$$

(5) 当 $k=3$ 时, 衍射光中的最大光程差为

$$a \sin \theta = (2k+1) \frac{\lambda}{2} = 7 \times \frac{\lambda}{2}$$

因此, 狭缝处波阵面可分成七个半波带.

例 14-2 单色平行光垂直照射在宽度为 0.308 mm 的单缝上, 用焦距为 12.62 cm 的测微目镜测得中央明纹两侧第五级暗纹之间的距离为 0.2414 cm, 求入射光的波长.

解 第 k 级暗纹到中央明纹中心的距离为

$$x = k \frac{f\lambda}{a}$$

因此, 中央明纹两侧第五级暗纹之间的距离为

$$\Delta x = x_5 - x_{-5} = 10 \frac{f\lambda}{a}$$

所以

$$\lambda = \frac{a\Delta x}{10f} = \frac{0.308 \times 10^{-3} \times 0.2414 \times 10^{-2}}{10 \times 12.62 \times 10^{-2}} = 589 \text{ (nm)}$$

例 14-3 一双缝间距 $d=0.10$ mm, 每个缝宽为 $a=0.02$ mm, 用波长 $\lambda=480$ nm 平行单色光垂直入射双缝, 在缝后放置焦距为 $f=50$ cm 透镜. 试求: (1) 透镜焦平面屏上干涉明条纹间距; (2) 单缝衍射中央亮纹宽度; (3) 单缝衍射中央明纹范围内可以看到干涉主极大的数目.

解 (1) 干涉明条纹间隔

$$\begin{aligned} \Delta x &= f(\tan \theta_{k+1} - \tan \theta_k) \approx f(\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) \\ &= f \left(\frac{k+1}{d} \lambda - \frac{k}{d} \lambda \right) = \frac{f\lambda}{d} \\ &= 2.4 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 单缝衍射中央明纹宽度为

$$\Delta x_0 = \frac{2f\lambda}{a} = 2.4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(3) 单缝衍射第一级暗纹为

$$a \sin \theta = \lambda$$

双缝干涉的第 k 级明纹为

$$d \sin \theta = k \lambda$$

因此

$$k = d/a = 5$$

又 $k=5$ 满足缺级条件, 实际上观察不到. 因此在单缝衍射中央明纹范围内可以看到干涉主极大的级次为: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, 一共九条明纹.

例 14-4 白光垂直入射到每厘米有 4 000 条缝的光栅上, 问: (1) 用此光栅能产生多少级完整光谱? (2) 可产生多少级不重叠光谱?

解 光栅常数 $d = 1/4\,000 \text{ cm} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}$

(1) 完整光谱系指同一级次的所有波长光主极大都出现. 由于紫光波长短, 出现级次多, 红光波长长, 出现级次少, 故应以红光波长来计算完整光谱的级次. 则

$$d \sin \theta = k \lambda_R < d$$

得

$$k < d/\lambda_R = \frac{2.5 \times 10^{-6}}{7.6 \times 10^{-7}} = 3.28$$

因此可以看见 3 级完整的光谱.

(2) 不重叠的光谱要求某级次红光的衍射角不大于高一级次紫光的衍射角. 因此有

$$k \lambda_R \leq (k+1) \lambda_P$$

故

$$k \leq \frac{\lambda_P}{\lambda_R - \lambda_P} = 1.1$$

因此只能看见 1 级不重叠光谱.

例 14-5 在垂直入射光栅的平行光中, 有两种波长成分 λ_1 和 λ_2 , 已知 $\lambda_2 = 4861 \text{ Å}$, λ_1 的第三级光谱线与 λ_2 的第四级光谱线在离中央明纹中心 5 mm 处重叠, 且 λ_1 的第五级光谱线缺级, 所用透镜焦距为 0.5 m. 求: (1) λ_1 为多少? (2) 光栅常数 $(a+b)$ 为多少? (3) 光栅的最小缝宽 a 为多少? (4) 能观察到 λ_1 的多少条光谱线?

解 (1) 由光栅方程

$$(a+b) \sin \theta = k \lambda$$

在重叠处有

$$(a+b) \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$$

因此

$$\lambda_1 = \frac{k_2}{k_1} \lambda_2 = \frac{4}{3} \times 4\,861 = 6\,481 (\text{\AA})$$

(2) 光栅常数($a+b$)为

$$(a+b) = \frac{k_1 \lambda_1}{\sin \theta} \approx \frac{f}{x} k_1 \lambda_1 = \frac{0.5}{5 \times 10^{-3}} \times 3 \times 6.481 \times 10^{-7} = 1.94 \times 10^{-4} (\text{m})$$

(3) 当第 k 级光谱线缺级时,应当满足

$$\frac{(a+b)}{a} = \frac{k}{k'}$$

最小缝宽相应于 $k'=1$, 即第 k 级干涉明纹由于落在单缝衍射的第一级暗纹上而缺级.

因此最小缝宽为

$$a_{\min} = \frac{(a+b)}{k} = \frac{1.94 \times 10^{-4}}{5} = 3.88 \times 10^{-5} (\text{m})$$

(4) 由于

$$k\lambda = (a+b) \sin \theta < (a+b)$$

故最高级次为

$$k < \frac{a+b}{\lambda_1} = \frac{1.94 \times 10^{-4}}{6.481 \times 10^{-7}} \approx 299$$

又其中缺级的最高级次为 295, 一共有 $2 \times \frac{295}{5} = 118$ 条谱线缺级. 因此实际可能观察到的谱线数目为 $2 \times 299 + 1 - 118 = 481$ 条.

例 14-6 用波长为 $5\,900 \text{\AA}$ 的平行单色光照射每厘米有 5 000 条刻痕的衍射光栅, 则(1) 当垂直入射时; (2) 当入射光与光栅平面的法线方向成 30° 角入射时. 求所观察到条纹的最高级次.

解 光栅常数为

$$(a+b) = \frac{1 \times 10^{-2}}{5\,000} = 2 \times 10^{-6} (\text{m})$$

(1) 当入射光垂直入射时, 有

$$(a+b) \sin \theta = k\lambda < (a+b)$$

故

$$k < \frac{(a+b)}{\lambda} = \frac{2 \times 10^{-6}}{5.9 \times 10^{-7}} = 3.39$$

因此可以看见条纹的最高级次为 3 级.

(2) 当平行光以 φ 入射时, 0 级条纹在和入射光线平行的透镜副光轴方向,

级次最大的明条纹对应的衍射光和入射光线在光栅平面的同侧,此时有光栅方程

$$(a+b)(\sin\theta+\sin\varphi)=k\lambda$$

当 $\theta=90^\circ$ 时,有

$$\begin{aligned} k &= \frac{(a+b)(\sin\theta+\sin\varphi)}{\lambda} = \frac{(a+b)(1+\sin30^\circ)}{\lambda} \\ &= \frac{2 \times 10^{-6} \times (1+0.5)}{5.9 \times 10^{-7}} = 5.08 \end{aligned}$$

此时可以看见条纹的最高级次为 5 级.

例 14-7 据说间谍卫星上的照相机能清楚识别地球上汽车的牌照号码,那么(1)如果需要识别牌照上字画间的距离为 5 cm,在 160 km 高空卫星上的照相机的角分辨率应为多大?(2)此照相机的孔径需要多大(光的波长按 500 nm 计)?

解 (1) 设字画间距为 l ,相机镜头与地面距离为 L . 则最小分辨角为

$$\delta\theta = \frac{l}{L} = \frac{5 \times 10^{-2}}{160 \times 10^3} = 3.125 \times 10^{-7} \text{ (rad)}$$

(2) 由 $\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, 可知此照相机孔径

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\delta\theta} = 1.22 \times \frac{5 \times 10^{-7}}{3.125 \times 10^{-7}} = 1.952 \text{ (m)}$$

第15章 光的偏振

基本要求

1. 了解光的偏振现象,理解自然光、线偏振光和部分偏振光的区别与表示方法.
2. 理解起偏器和检偏器的工作原理与作用.掌握马吕斯定律,能熟练应用该定律计算偏振光通过检偏器后的光强变化.
3. 了解光在反射和折射时偏振状态的变化.掌握布儒斯特定律,能应用该定律计算起偏角,了解利用反射和折射获得偏振光的方法.
4. 了解双折射现象,理解双折射现象中寻常光和非寻常光的区别.了解双折射光线中的偏振状态,以及利用双折射获取偏振光的方法,理解光轴、主截面和光线主平面的概念.

内容提要

一、光的偏振状态

光波是横波,偏振是横波特有的现象.通常光波具有五种偏振状态:自然光、线偏振光、部分偏振光、椭圆偏振光和圆偏振光.

二、偏振片的起偏和检偏

用能够吸收其他方向光振动,而只让某一方向光振动通过的物质制成的透明薄片,称为偏振片.偏振片允许通过的光振动方向,称为偏振片的偏振化方向.

当强度为 I_0 的自然光通过偏振片时,只有平行于偏振化方向的光振动能够通过,因此透射光为线偏振光,透射光强为 $I_0/2$,这就是偏振片的起偏作用.

当线偏振光通过偏振片时,在偏振片的旋转过程中,透射光的光强作周期性变化,这就是偏振片的检偏作用.

三、马吕斯定律

如果入射到检偏器的线偏振光光强为 I_0 ,则透射光的光强 I 为

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

式中, α 为线偏振光的振动方向和检偏器的偏振化方向之间的夹角.注意:自然

光入射到检偏器上,其透射光强为入射光强的一半,而与夹角 α 无关.

四、布儒斯特定律

自然光入射到两种介质的交界面时,反射光中垂直于入射面的光振动占多数,折射光中平行于入射面的光振动占多数,且反射光的偏振化程度与入射角 i 有关.当入射角等于某个特定值 i_0 时,反射光成为振动方向垂直于入射面的线偏振光.入射角 i_0 满足下式

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

式中, $n_{21} = n_2/n_1$ 为介质 2 对介质 1 的相对折射率, i_0 称为起偏振角或布儒斯特角.

五、双折射现象

当光线入射各向异性晶体时,通常会产生两束折射光.一束满足普通的折射定律,且为垂直于自己主平面的偏振光,称之为寻常光(o 光);另一束不满足折射定律,且为平行于自己主平面的偏振光,称为非寻常光(e 光).

六、双折射晶体

1. 晶体的光轴 在双折射晶体中有一个确定的方向,沿着该方向 o 光和 e 光的折射率相同,不产生双折射现象,这个方向称为晶体的光轴.只有一个光轴的晶体称为单轴晶体,有两个光轴的晶体称为双轴晶体.

2. 晶体的主截面 光轴与任一天然晶面的法线所构成的平面,称为晶体的主截面.

3. 光线的主平面 光轴与晶体内任一折射光线所构成的平面,称为该光线的主平面.

解题指导和示例

例 15-1 自然光入射到两个相互重叠的偏振片上,如果透射光强为:(1)透射光最大强度的三分之一;(2)入射光强度的三分之一.求两偏振片偏振化方向之间的夹角.

解 设入射的自然光强为 I_0 ,经过第一个偏振片后成为线偏振光,其光强为 $I_1 = I_0/2$.由马吕斯定律,经过第二个偏振片后,透射光强 I_2 为

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

式中, α 为两偏振片偏振化方向的夹角.其最大透射光强为 $I_{\max} = I_0/2$

(1) 当 $I_2 = I_{\max}/3$ 时,有

$$I_{\max}/3 = I_{\max} \cos^2 \alpha$$

得

$$\alpha = 54.74^\circ$$

(2) 当 $I_2 = I_0/3$ 时,有

$$I_0/3 = I_0/2 \cos^2 \alpha$$

得

$$\alpha = 35.26^\circ$$

例 15-2 三块偏振片叠放在一起,第一块和第三块的偏振化方向垂直,第二块和第一块的偏振化方向夹角为 θ . 强度为 I_0 的自然光入射到第一块偏振片上,求通过这组偏振片的透射光强是多少?

解 自然光通过第一个偏振片,成为线偏振光,其光强为

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

通过第二个偏振片后,其光强为

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta$$

当通过第三个偏振片后,透射光强为

$$I_3 = I_2 \cos^2 (90^\circ - \theta) = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\theta$$

例 15-3 一束光为自然光和线偏振光混合而成,让它垂直通过一偏振片,以入射光束为轴线旋转该偏振片,测得透射光强度的最大值是最小值的 5 倍. 求入射光束中自然光与线偏振光的光强之比.

解 设入射光中自然光的光强为 I_1 , 线偏振光的光强为 I_2 . 自然光通过偏振片后的光强为 $\frac{1}{2} I_1$. 当偏振片的偏振化方向转到和线偏振光振动方向一致时,线偏振光全部通过(不考虑吸收),此时具有最大光强;当偏振化方向转到和线偏振光振动方向垂直时,线偏振光全部不能通过,此时具有最小光强. 因此有

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_1 + I_2$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_1 + 0$$

依题意,有 $I_{\max} = 5I_{\min}$, 代入得

$$\frac{1}{2} I_1 + I_2 = 5 \times \frac{1}{2} I_1$$

即

$$I_1 : I_2 = 1 : 2$$

例 15-4 一束自然光从空气入射到一平板玻璃上,入射角为 56.5° ,测得此时的反射光为线偏振光,求此玻璃的折射角以及折射光线的折射角.

解 由于反射光是线偏振光,因此入射角 56.5° 是布儒斯特角. 根据布儒斯特定律

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

因此玻璃折射率为

$$n_2 = n_1 \tan i_0 = 1 \times \tan 56.5^\circ = 1.51$$

又布儒斯特角与折射角之间满足

$$i_0 + \gamma = 90^\circ$$

故此时折射角为

$$\gamma = 90^\circ - 56.5^\circ = 33.5^\circ$$

自测题十

一、选择题

1. 真空中波长为 λ 的单色光, 在折射率为 n 的均匀透明媒质中, 从 A 点沿某一路径传播到 B 点, 路径的长度为 l , A, B 两点光振动相位差记为 $\Delta\varphi$. 则

(A) 当 $l=3\lambda/2$, 有 $\Delta\varphi=3\pi$.

(B) 当 $l=3\lambda/(2n)$, 有 $\Delta\varphi=3n\pi$.

(C) 当 $l=3\lambda/(2n)$, 有 $\Delta\varphi=3\pi$.

(D) 当 $l=3n\lambda/2$, 有 $\Delta\varphi=3n\pi$. []

2. 在双缝实验中, 设缝是水平的, 若双缝所在的平板稍微向上平移, 其他条件不变, 则屏上的干涉条纹

(A) 向下平移, 且间距不变.

(B) 向上平移, 且间距不变.

(C) 不移动, 但间距改变.

(D) 向上平移, 且间距改变. []

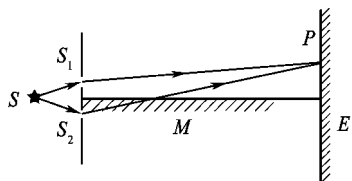
3. 在双缝干涉中, 屏幕 E 上的 P 点处是明条纹. 若将缝 s_2 盖住, 并在 s_1, s_2 连线的垂直平分面处放一反射镜 M , 如图所示, 则此时

(A) P 点处仍为明条纹.

(B) P 点处为暗条纹.

(C) 不能确定 P 点处是明条纹, 还是暗条纹.

(D) 无干涉条纹. []



选择题 3 图

4. 一束波长为 λ 的单色光由空气垂直入射到折射率为 n 的透明薄膜上, 透明薄膜放在空气中, 要使反射光得到干涉加强, 则薄膜最小的厚度为

(A) $\lambda/4$.

(B) $\lambda/(4n)$.

(C) $\lambda/2$.

(D) $\lambda/(2n)$. []

5. 单色平行光垂直照射在薄膜上, 经上、下两表面反射的两束光发生干涉. 若薄膜的厚度为 e , 且 $n_1 < n_2 > n_3$, λ_1 为入射光在 n_1 中的波长, 则两束光的光程差为

(A) $2n_2e$.

(B) $2n_2e - \lambda_1/(2n_1)$.

(C) $2n_2e - (1/2)n_1\lambda_1$.

(D) $2n_2e - (1/2)n_2\lambda_1$. []

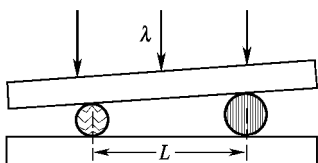
6. 两块玻璃构成空气劈尖, 左边为棱边, 用单色平行光垂直入射, 若上面的平玻璃慢慢向上平移, 则干涉条纹

(A) 向棱边方向平移, 条纹间隔变小.

(B) 向棱边方向平移, 条纹间隔变大.

- (C) 向棱边方向平移, 条纹间隔不变.
 (D) 向远离棱边的方向平移, 条纹间隔不变.
 (E) 向远离棱边的方向平移, 条纹间隔变小.

[]



选择题 7 图

7. 如图所示, 两个直径有微小差别的彼此平行的滚柱之间的距离为 L , 夹在两块平晶的中间, 形成空气劈尖. 当单色光垂直入射时, 产生等厚干涉条纹, 如果滚柱之间的距离 L 变小, 则在 L 范围内干涉条纹的

- (A) 数目减少, 间距变大.
 (B) 数目不变, 间距变小.
 (C) 数目增加, 间距变小.
 (D) 数目减少, 间距不变.

[]

8. 在牛顿环实验装置中, 曲率半径为 R 的平凸透镜与平玻璃板在中心恰好接触, 它们之间充满折射率为 n 的透明介质, 垂直入射到牛顿环装置上的平行单色光在真空中的波长为 λ , 则反射光形成的干涉条纹中暗环半径 r_k 的表达式为

- (A) $r_k = \sqrt{k\lambda R}$. (B) $r_k = \sqrt{k\lambda R/n}$.
 (C) $r_k = \sqrt{kn\lambda R}$. (D) $r_k = \sqrt{k\lambda/(Rn)}$.

[]

9. 若把牛顿环装置(都是用折射率为 1.52 的玻璃制成的)由空气搬入折射率为 1.33 的水中, 则干涉条纹

- (A) 中心暗斑变成亮斑.
 (B) 变疏.
 (C) 变密.
 (D) 间距不变.

[]

10. 在迈克耳孙干涉仪的一条光路中, 放入一折射率为 n 、厚度为 d 的透明薄片, 放入后, 这条光路的光程改变了

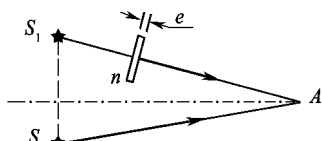
- (A) $2(n-1)d$. (B) $2nd$.
 (C) $2(n-1)d + \lambda/2$. (D) nd .
 (E) $(n-1)d$.

[]

二、填空题

1. 波长为 λ 的平行单色光斜入射到距离为 d 的双缝上, 入射角为 θ , 在屏中央 O 处($\overline{S_1O} = \overline{S_2O}$)两束相干光的位相差为_____.

2. 如图所示, 假设有两个同相的相干点光源 S_1 和 S_2 , 发出波长为 λ 的光. A 是它们连线的中垂线上的一点. 若在 S_1 与 A 之间插入厚度为 e 、折射角为 n 的薄玻璃片, 则两光源发出的光在 A 点的位相差 $\Delta\varphi =$ _____; 若已知 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, $n = 1.5$, A 点恰为第四级明纹中心, 则 $e =$ _____ $\text{\AA}$.



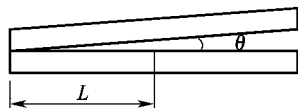
填空题 2 图

3. 把双缝干涉实验装置放在折射率为 n 的媒质中, 双缝到观察屏的距离为 D , 两缝间的

距离为 d ($d \ll D$), 入射光在真空中的波长为 λ , 则屏上干涉条纹中相邻明纹的间距是_____.

4. 在空气中有一劈尖形透明物, 劈尖角 $\theta = 1.0 \times 10^{-4}$ 弧度, 在波长 $\lambda = 7000 \text{ \AA}$ 的单色光垂直照射下, 测得两相邻干涉条纹间距 $l = 0.25 \text{ cm}$, 此透明材料的折射率 $n =$ _____.

5. 用波长为 λ 的单色光垂直照射到如图所示的空气劈尖上, 从反射光中观察干涉条纹. 距顶点为 L 处是暗条纹, 使劈尖角 θ 连续变大, 直到该点处再次出现暗条纹为止, 劈尖角的改变量 $\Delta\theta$ 是_____.



填空题 5 图

6. 波长为 λ 的单色光垂直照射到劈尖薄膜上, 劈尖角为 θ , 劈尖薄膜的折射率为 n , 第 k 级明条纹与第 $k+5$ 级明纹的间距是_____.

7. 若在迈克耳孙干涉仪的可动反射镜 M 移动 0.620 mm 的过程中, 观察到干涉条纹移动了 2300 条, 则所用光波的波长为_____ $\text{\AA}$.

8. 在迈克耳孙干涉仪的可动反射镜平移一微小距离的过程中, 观察到干涉条纹恰好移动 1848 条, 所用单色光的波长为 $5461 \text{ \AA}$. 由此可知, 反射镜平移的距离等于_____ mm (给出四位有效数字).

9. 在迈克耳孙干涉仪的一支光路上, 垂直于光路放入折射率为 n 、厚度为 h 的透明介质薄膜, 与未放入此薄膜时相比较, 两光束光程差的改变量为_____.

三、计算题

1. 白色平行光垂直入射到间距为 $d = 0.25 \text{ mm}$ 的双缝上, 距离 50 cm 处放置屏幕, 分别求第一级和第五级明纹彩色带的宽度 (设白光的波长范围是 $4000 \text{ \AA}$ 到 $7600 \text{ \AA}$, 这里说的“彩色带宽度”指两个极端波长的同级明纹中心之间的距离).

2. 在双缝干涉实验中, 波长 $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ 的单色平行光垂直入射到间距 $d = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$ 的双缝上, 屏到双缝的距离 $D = 2 \text{ m}$. 求: (1) 中央明纹两侧的两条第十级明纹中心的间距; (2) 用一厚度为 $e = 6.6 \times 10^{-6} \text{ m}$ 、折射率为 $n = 1.58$ 的玻璃片覆盖一缝后, 零级明纹将移到原来的第几级明纹处?

3. 用白光垂直照射置于空气中厚度为 $0.50 \mu\text{m}$ 的玻璃片. 玻璃片的折射率为 1.50 , 在可见光范围内 ($4000 \text{ \AA} \sim 7600 \text{ \AA}$), 哪些波长的反射光有最大限度的增强?

4. 在牛顿环装置中, 把玻璃平凸透镜和平面玻璃 (设玻璃折射率 $n_1 = 1.50$) 之间的空气 ($n_2 = 1.00$) 改换成水 ($n_2' = 1.33$), 求第 k 个暗环半径的相对改变量 $(r_{k+1} - r_k) / r_k$.

自测题十一

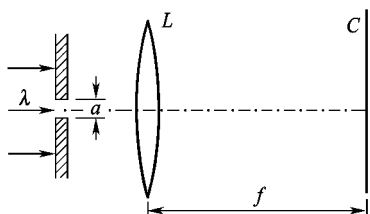
一、选择题

1. 在单缝夫琅和费衍射实验中, 波长为 λ 的单色光垂直入射到宽度为 $a=4\lambda$ 的单缝上, 对应于衍射角 30° 的方向, 单缝处波阵面可分成的半波带数目为

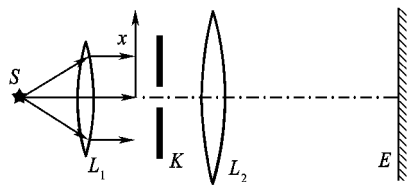
- (A) 2 个. (B) 4 个.
(C) 6 个. (D) 8 个. []

2. 在如图所示的单缝夫琅和费衍射装置中, 设中央明纹的衍射角范围很小. 若使单缝宽度 a 变为原来的 $3/2$, 同时使入射的单色光的波长 λ 变为原来的 $3/4$, 则屏幕 C 上单缝衍射条纹中央明纹的宽度 Δx 将变为原来的

- (A) $3/4$ 倍. (B) $2/3$ 倍.
(C) $9/8$ 倍. (D) $1/2$ 倍.
(E) 2 倍. []



选择题 2 图



选择题 3 图

3. 在如图所示的单缝夫琅和费衍射实验中, 将单缝 K 沿垂直于光的入射方向 (在图中的 x 方向) 稍微平移, 则

- (A) 衍射条纹移动, 条纹宽度不变. (B) 衍射条纹移动, 条纹宽度变动.
(C) 衍射条纹中心不动, 条纹变宽. (D) 衍射条纹不动, 条纹宽度不变.
(E) 衍射条纹中心不动, 条纹变窄. []

4. 若星光的波长按 $5500 \text{ \AA}$ 计算, 孔径为 127 cm 的大型望远镜所能分辨的两颗星的最小角距离 θ (从地上一点看两星的视线间夹角) 是

- (A) $3.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$. (B) $1.8 \times 10^{-4} \text{ rad}$.
(C) $5.3 \times 10^{-5} \text{ rad}$. (D) $5.3 \times 10^{-7} \text{ rad}$. []

5. 一束平行单色光垂直入射到光栅上, 当光栅常数 ($a+b$) 为下列哪种情况时 (a 代表每条缝的宽度), $k=3, 6, 9$ 等级次的主极大均不出现?

- (A) $a+b=2a$. (B) $a+b=3a$.

- (C) $a+b=4a$. (D) $a+b=6a$. []

6. 若用衍射光栅准确测定一单色可见光的波长,在下列各种光栅常数的光栅中选用哪一种最好?

- (A) 1.0×10^{-1} mm. (B) 5.0×10^{-1} mm.
(C) 1.0×10^{-2} mm. (D) 1.0×10^{-3} mm. []

7. 在某元素的特征光谱中,含有波长分别为 $\lambda_1 = 450$ nm 和 $\lambda_2 = 750$ nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) 的光谱线. 在光栅光谱中,这两种波长的谱线有重叠现象,重叠处 λ_2 的谱线的级次数将是

- (A) 2,3,4,5 ... (B) 2,5,8,11 ...
(C) 2,4,6,8 ... (D) 3,6,9,12 ... []

8. 一束由自然光和线偏光组成的复合光通过一偏振片,当偏振片转动时,最强的透射光是最弱的透射光光强的 16 倍. 则在入射光中,自然光的强度 I_1 和偏振光的强度 I_2 之比 $I_1 : I_2$ 为

- (A) 2 : 15. (B) 15 : 2.
(C) 1 : 15. (D) 15 : 1. []

9. 一束平行入射面振动的线偏振光以起偏角入到某介质表面,则反射光与折射光的偏振情况是

- (A) 反射光与折射光都是平行入射面振动的线偏光.
(B) 反射光是垂直入射面振动的线偏光,折射光是平行入射面振动的线偏光.
(C) 反射光是平行入射面振动的线偏光,折射光是垂直入射面振动的线偏光.
(D) 折射光是平行入射面振动的线偏光 []

10. 自然光以入射角 $i = 58^\circ$ 从真空入射到某介质表面时,反射光为线偏光,则这种物质的折射率为

- (A) $\cot 58^\circ$. (B) $\tan 58^\circ$.
(C) $\sin 58^\circ$. (D) $\cos 58^\circ$. []

二、填空题

1. 惠更斯引入_____的概念提出了惠更斯原理,菲涅耳再用_____的思想补充了惠更斯原理,发展成了惠更斯-菲涅耳原理.

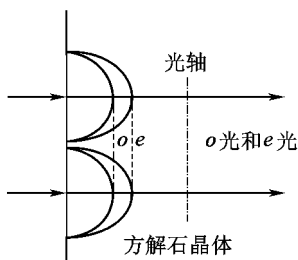
2. 如果单缝夫琅和费衍射的第一级暗纹发生在衍射角为 30° 的方位上,所用单色光波长 $\lambda = 5 \times 10^3 \text{ \AA}$, 则单缝宽度为_____m.

3. 平行单色光垂直入射于单缝上,观察夫琅和费衍射. 若屏上 P 点处为第二级暗纹,则单缝处波面相应地可划分为_____个半波带;若将单缝宽度减小一半, P 点将是_____级_____纹.

4. 用波长为 $5461 \text{ \AA}$ 的平行单色光垂直照射到一透射光栅上,在分光计上测得第一级光谱线的衍射角 $\theta = 30^\circ$, 则该光栅每一毫米上有_____条刻痕.

5. 可见光的波长范围是 $400 \sim 760 \text{ nm}$, 用平行的白光垂直入射到平面透射光栅上时,它产生的不与另一级光谱重叠的完整的可见光光谱是第_____级光谱.

6. 一束平行单色光垂直入射到一光栅上,若光栅的透明缝宽度 a 与不透明部分宽度 b



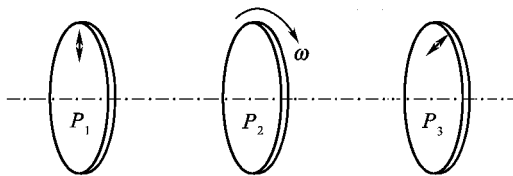
填空题 7 图

相等,则可能看到的衍射光谱的级次为_____.

7. 一束平行光,在真空中波长为 589 nm ($1\text{ nm}=10^{-9}\text{ m}$),垂直入射到方解石晶体上,晶体的光轴和表面平行,如图所示.已知方解石晶体对此单色光的折射率为 $n_o=1.658$, $n_e=1.486$.则此光在该晶体中分成的寻常光的波长 $\lambda_o=$ _____,非寻常光的波长 $\lambda_e=$ _____.

8. 某块火石玻璃的折射率是 1.65 ,现将这块玻璃浸没在水中($n=1.33$),欲使从这块火石玻璃表面反射到水中的光是完全偏振的,则光由水射向玻璃的入射角应为_____.

9. 两平行放置的偏振化方向正交的偏振片 P_1 与 P_3 之间平行地加入一块偏振片 P_2 , P_2 以入射光线为轴以角速度 ω 匀速转动,如图所示.光强为 I_0 的自然光垂直入射到 P_1 上, $t=0$ 时, P_2 与 P_1 的偏振化方向平行.则 t 时刻透过 P_1 的光强 $I_1=$ _____,透过 P_2 的光强 $I_2=$ _____,透过 P_3 的光强 $I_3=$ _____.



填空题 9 图

三、计算题

1. 单缝宽度为 0.05 mm ,用波长为 $6000\text{ \AA}$ 的平行单色光垂直入射.求下面两种情况下第一级暗纹的衍射角:(1)整个装置处于空气中;(2)整个装置处于折射率为 1.62 的介质中.

2. 一衍射光栅对白光所产生的第一级彩色光谱的宽度为 6.0 cm ,透镜焦距为 1.00 m ,求此光栅的光栅常数为多少?

3. 波长为 $6000\text{ \AA}$ 的平行单色光垂直入射一光栅,有两个相邻主极大分别出现在 $\sin\theta=0.2$ 和 $\sin\theta=0.3$ 处,第四级主极大缺级.求:(1)光栅常数;(2)光栅狭缝的最小宽度;(3)在观察屏上实际呈现的所有主极大级次.

4. 两块偏振片叠在一起,其偏振化方向成 30° 角,由强度相同的自然光和线偏振光混合而成的光束垂直入射在偏振片上.已知两种成分的入射光透射后强度相等,那么

(1) 若不计偏振片对透射分量的反射和吸收,求入射光中线偏振光光矢量振动方向与第一个偏振片偏振化方向之间的夹角;

(2) 仍如上一问,求透射光与入射光的强度之比;

(3) 若每个偏振片对透射光的吸收率为 5% ,再求透射光与入射光的强度之比.

第 16 章 量子物理基础

基本要求

1. 了解斯特藩-玻尔兹曼定律、维恩位移定律及普朗克量子假设.
2. 理解光电效应和康普顿效应,以及爱因斯坦光子论对这两个效应的解释.
3. 理解氢原子光谱的实验规律及玻尔的氢原子理论,理解定态能级和能级跃迁决定谱线频率这两个重要量子思想,了解玻尔理论的意义及局限性.
4. 理解德布罗意物质波的假设及实验证实,掌握电子波长的计算.
5. 了解描述微观粒子运动状态的波函数及统计解释.
6. 了解定态薛定谔方程,理解一维无限深势阱和隧道效应.
7. 了解不确定关系,并会简单应用.
8. 了解氢原子的量子力学处理方法.
9. 了解斯特恩-盖拉赫实验及电子自旋.
10. 了解泡利不相容原理、能量最低原理及原子的电子壳层结构.

内容提要

一、黑体辐射基本定律和普朗克量子假设

黑体是能完全吸收入射辐射的物体,有最大的发射本领.

黑体辐射的两条实验规律:

1. 斯特藩-玻尔兹曼定律

$$M(T) = \sigma T^4$$

式中, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, 称为斯特藩-玻尔兹曼常数.

2. 维恩位移定律

$$T\lambda_m = b$$

式中, $b = 2.989 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$, 称为维恩常数. 公式表明, 峰值波长 λ_m 随温度升高向短波方向移动.

3. 普朗克量子假设

黑体是由带电谐振子组成, 这些谐振子辐射电磁波并和周围的电磁场交换能量; 谐振子的能量是最小能量 $\epsilon = h\nu$ 的整数倍. 其中, $\epsilon = h\nu$, 称为能量子; $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 称为普朗克常量.

二、光电效应的实验规律

实验发现, 光电效应表现出四条规律:

1. 入射光的频率一定时, 饱和光电流与光强成正比.
2. 光电子的最大初动能与入射光的频率成线性关系, 与入射光的强度无关.
3. 光电效应存在一个红限 ν_0 , 如果入射光的频率 $\nu < \nu_0$, 便不会产生光电效应.
4. 光电流与光照射几乎是同时发生的, 延迟时间在 10^{-9} s 以下.

三、光子量子假设与爱因斯坦方程

1. 爱因斯坦认为: 光是由以光速运动的光量子组成, 在频率为 ν 的光波中, 光子的能量

$$\epsilon = h\nu$$

光子的静质量为零, 动量为

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

2. 入射的光子被电子吸收, 使电子能量增加 $h\nu$. 电子把一部分能量用于脱离金属表面时所需要的逸出功, 另一部分为逸出电子的初动能. 即

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$$

四、康普顿效应

康普顿效应的实验规律:

1. 散射线中除了和原波长 λ_0 相同的谱线外, 还有一种波长 $\lambda > \lambda_0$.
2. 波长差 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, 随散射角 θ 的增大而增加, 其增加量为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

3. $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 与散射物质无关,但散射光中原波长 λ_0 的强度随散射物的原子序数增加而增大,而 λ 的光强则相对减小.

利用光量子理论对康普顿效应能给予很好的解释,而康普顿效应则进一步证实了光的量子性.

五、光的波粒二象性

光既具有波动性,又具有粒子性.光的波动性可以用波长 λ 和频率 ν 描述,光的粒子性可以用光子的质量、能量和动量描述,其关系可以表示为:

$$\text{光子能量} \quad \epsilon = h\nu$$

$$\text{光子动量} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{光子质量} \quad m = \frac{h\nu}{c^2}$$

光子的静质量为零.

六、玻尔的氢原子理论

1. 氢原子光谱的实验规律

实验发现,氢原子光谱系的波数可以写成

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

对应于不同的 m 和 n 值,可以得到不同的线系,如:

$m=1, n=2,3,4, \dots$ 赖曼系

$m=2, n=3,4, \dots$ 巴尔末系

$m=3, n=4,5, \dots$ 帕邢系

2. 玻尔的基本假设

(1) 定态假设:原子中的电子只能在一些半径不连续的轨道上做圆周运动.在这些轨道上,电子虽做加速运动,但不辐射能量,因而处于稳定状态,称为定态.

(2) 轨道角动量量子化假设:电子在定态轨道上运动时,其角动量只能取 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍,即

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi}, \quad n=1,2,3, \dots$$

(3) 频率条件假设:电子从某一定态向另一定态跃迁时,将发射(或吸收)光子,其频率表示为

$$h\nu = E_n - E_m$$

3. 氢原子的轨道半径和能级

$$r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

七、德布罗意假设

德布罗意通过分析经典力学和光学的某些对应关系,提出了实物粒子具有波动性的假设.他认为,一切实物粒子都具有波动性.对于静质量为 m_0 、速度为 v 的实物粒子,其波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

八、波函数

描述微观粒子运动状态的函数 $\Psi(r, t)$. 从统计的角度来讲,波函数模的平方代表着微观粒子在空间某点出现的概率.因此,波函数也称为概率波.

波函数遵从归一化条件,即

$$\iiint_V \Psi(r, t) \Psi^*(r, t) dV = 1$$

波函数必须满足单值、有限、连续三个标准化条件.

九、不确定关系

由于微观粒子具有波动性,其位置和动量不能同时被精确确定.其不确定量 Δx 和 Δp_x 的乘积不小于某一常量,即

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

上式表明,如果用经典的坐标和动量来描述微观粒子的运动,则必然存在这种不确定关系.一个量测得越精确,另一个量就测得越不精确.

能量和时间也有类似的测不准关系,即

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

十、薛定谔方程

波函数随时间变化所满足的方程,其形式为

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(r, t)$$

对于定态,即势函数不随时间而变化,其波函数满足的方程

$$\hat{H}\Psi(r)=E\Psi(r)$$

称为定态薛定谔方程. 式中, $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+U(r)$ 称为哈密顿算符, E 为微观粒子的能量, m 为粒子的质量.

十一、一维无限深势阱

势能函数

$$U(x)=\begin{cases} 0 & (0<x<L) \\ \infty & (x\leq 0, x\geq L) \end{cases}$$

能量

$$E_n=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

波函数

$$\begin{cases} \Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x & (\text{阱内}) \\ \Psi_n(x)=0 & (\text{阱外}) \end{cases}$$

粒子在势阱中各点的概率密度

$$P_n(x)=|\Psi_n(x)|^2=\frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi}{L}x$$

十二、氢原子

氢原子的势函数

$$U(r)=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

1. 解定态薛定谔方程的结果

能量量子化

$$E_n=\frac{me^4}{8\epsilon_0^2\hbar^2n^2}=-\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

角动量量子化

$$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l=0,1,2,\cdots,n-1$$

角动量空间量子化

$$L_z=m_l\hbar, \quad m_l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm l$$

电子自旋角动量

$$S=\sqrt{s(s+1)}\hbar$$

2. 原子中电子运动由四个量子数决定

(1) 主量子数 $n=1,2,3,\cdots$ 它确定原子中电子的能量.

(2) 角量子数 $l=0,1,2,3,\cdots,n-1$, 它确定电子轨道角动量的值.

(3) 轨道磁量子数 $m_l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm l$, 它确定轨道角动量在空间任一方向上分量的量子化.

(4) 自旋磁量子数 $m_s=\pm \frac{1}{2}$, 它决定电子自旋角动量在空间任一方向上分量的量子化.

十三、原子的电子壳层结构

多电子原子核外电子的分层排布遵循两条基本原理.

1. 泡利不相容原理

不可能有两个, 或两个以上的电子占据四个量子数完全相同的量子态.

2. 能量最低原理

(1) 原子系统处于正常态时, 每个电子趋向于占据可能的最低能级.

(2) 原子中, 主量子数为 n 的壳层最多能容纳电子数为 $2n^2$.

(3) l 支壳层中, 最多可容纳的电子数为 $2(2l+1)$.

解题指导与示例

量子物理基础这一部分涉及的题目都是一些基础题, 只要掌握了基本的内容, 一般都能正确解答. 所以, 可以通过示例理解、掌握其方法, 重点放在基本内容、基本现象、基本规律的学习方面.

例 16-1 假设太阳的表面温度为 $5\,700\text{ K}$, 并设太阳直径为 $1.4\times 10^9\text{ m}$, 计算太阳每秒损失的静质量.

解 根据斯特藩-玻尔兹曼定律

$$E_0 = \sigma T^4$$

可以得到太阳的总发射本领(单位时间内、单位面积上所辐射的能量)

$$E_0 = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times 5\,700^4 = 5.99 \times 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

所以, 太阳表面每秒辐射的总能量为

$$E = E_0 S = E_0 \cdot (4\pi R^2) = 5.99 \times 10^7 \times \pi \times (1.4 \times 10^9)^2 = 3.69 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

由爱因斯坦质能关系 $E = m_0 c^2$

得太阳每秒损失的静质量为

$$m_0 = \frac{E}{c^2} = \frac{3.69 \times 10^{26}}{(3 \times 10^8)^2} = 4.1 \times 10^9 (\text{kg} \cdot \text{s}^{-1})$$

例 16-2 已知铯的红限为 $\nu_0 = 4.8 \times 10^{14}$ Hz, 逸出功 $A = 1.9$ eV, 用钠黄光 $\lambda = 589.3$ nm 照射铯. 试求:

- (1) 黄光光子的能量、质量和动量;
- (2) 铯在光电效应中释放的光电子的初速度;
- (3) 铯的遏止电压多大? 若改用 $\lambda' = 500.0$ nm 的光照射, 其遏止电压又为多少?

解 (1) $E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = 3.4 \times 10^{-19}$ J

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = 3.8 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = 1.1 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(2) v = \sqrt{\frac{2}{m}(h\nu - A)} = 8.8 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(3) \text{遏止电压满足} \quad eU = \frac{1}{2}mv^2$$

则 $U = \frac{mv^2}{2e} = 2.19 \text{ V}$

$$\text{由} \quad h \frac{c}{\lambda} = eU + A$$

波长变化后 $h \frac{c}{\lambda'} = eU' + A$

有 $U' = U + \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) = 2.56 \text{ V}$

例 16-3 在与波长为 0.01 nm 的 X 射线束成某个角度 φ 的方向, 康普顿效应引起的波长改变为 0.0024 nm, 试求角度 φ 及这时传递给反冲电子的能量.

解 由康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\varphi)$$

$$\text{则} \quad \cos\varphi = 1 - \frac{\Delta\lambda}{h/m_0 c} = 1 - \frac{0.0024}{0.00243} \approx 0$$

$$\text{得} \quad \varphi = 90^\circ$$

设传给反冲电子的能量为 E_x , 根据能量守恒定律

$$h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + mc^2$$

$$\text{得} \quad E_K = mc^2 - m_0 c^2 = h\nu_0 - h\nu = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{hc(\lambda - \lambda_0)}{\lambda\lambda_0} \\
 &= \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 0.024 \times 10^{-10}}{0.1 \times 10^{-10} \times (0.024 + 0.1) \times 10^{-10}} \\
 &= 3.85 \times 10^{-15} \text{ (J)} = 2.4 \times 10^4 \text{ (eV)}
 \end{aligned}$$

例 16-4 已知氢原子光谱的某一线系的极限波长为 364.7 nm, 其中有一谱线的波长为 656.5 nm. 试由玻尔理论求出与该波长相对应的原子初态与末态的能级, 以及电子的轨道半径.

解 用 m, n 分别表示始、末态的量子数, 极限波长应为从量子数 $n = \infty$ 跃迁到主量子数 m 时所辐射的光波长, 即

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{R}{m^2}$$

$$m = \sqrt{R\lambda_\infty} = \sqrt{3.674 \times 10^{-9} \times 1.097 \times 10^7} = 2$$

该谱线系为巴耳末系.

$$\text{由} \quad \frac{1}{\lambda_n} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$n = \sqrt{\frac{R\lambda_n\lambda_\infty}{\lambda_n - \lambda_\infty}} = \sqrt{\frac{1.097 \times 10^7 \times 6.565 \times 10^{-9} \times 3.647 \times 10^{-9}}{(6.565 - 3.647) \times 10^{-9}}} = 3$$

由

$$\begin{cases} E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \\ r_n = 0.053n^2 \text{ nm} \end{cases}$$

当初态 $n = 3$ 时, 得

$$E_3 = -1.51 \text{ eV}, \quad r_3 = 0.477 \text{ nm}$$

当末态 $n = 2$ 时, 得

$$E_2 = -3.4 \text{ eV}, \quad r_2 = 0.212 \text{ nm}$$

例 16-5 设电子的初速度为零, 不考虑相对论效应, 求电子经 100 V 电压加速后的德布罗意波长; 若考虑相对论效应, 试证明: 当电势差为 U 时, 电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{eU(eU + 2m_0c^2)}}$$

解 不考虑相对论效应, 电子经电势差 U 加速后的动能为

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = eU$$

得电子的动量为

$$p = \sqrt{2m_0 eU}$$

则电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.60 \times 10^{-19} \times 100}} = 0.103 \text{ (nm)}$$

考虑到相对论效应时,由相对论能量与动量关系 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, 并利用 $E = m_0 c^2 + eU$, 得

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2}} = \sqrt{\frac{eU(eU + 2m_0 c^2)}{c^2}}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{eU(eU + 2m_0 c^2)}}$$

例 16-6 一光子的波长为 300 nm, 如果测得 $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-6}$, 求光子位置的不确定量.

解 由 $p = \frac{h}{\lambda}$, 有

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda_2} - \frac{h}{\lambda_1} = \frac{h(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{h \Delta \lambda}{\lambda^2}$$

由不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, 得

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta p} = \frac{\hbar}{2} \frac{\lambda^2}{h \Delta \lambda} = \frac{300 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 10^{-6}} = 2.39 \times 10^{-2} \text{ (m)}$$

例 16-7 一维运动的粒子处在 $\Psi(x) = \begin{cases} A x e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ 描写的状态, 其中 λ 为大于零的常数. (1) 将此波函数归一化; (2) 求粒子几率密度分布函数; (3) 问在何处找到粒子的几率最大.

解 (1) 由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

得

$$\int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$

所以

$$A = 2\lambda^{3/2}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 2\lambda^{3/2} x e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 几率密度为

$$\omega(x) = |\Psi(x)|^2 = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(3) 由几率密度最大满足的条件 $\left| \frac{d\omega(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0$, 得

$$4\lambda^3 (2x_0 e^{-2\lambda x_0} - 2\lambda x_0^2 e^{-2\lambda x_0}) = 0$$

$$\lambda x_0 = 1, \quad x_0 = \frac{1}{\lambda}$$

即在 $x_0 = \frac{1}{\lambda}$ 处找到粒子的几率最大.

例 16-8 求角量子数 $l=2$ 的体系的 L 和 L_z 之值, 以及 L 和 Z 轴方向的最小夹角.

解 由角动量量子化公式, 可得电子的轨道角动量

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2(2+1)}\hbar$$

它在 z 轴上的投影

$$L_z = m_l \hbar \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2)$$

故 L_z 的可取值为 $0, \pm \hbar, \pm 2\hbar$.

因为

$$\cos \theta_{\min} = \frac{L_z}{L} = \frac{2\hbar}{\sqrt{6}\hbar} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

所以

$$\theta_{\min} = 35.26^\circ$$

自测题十二

一、选择题

1. 当照射光的波长从 400 nm 变到 300 nm 时,对同一金属,在光电效应实验中测得的遏止电压将

- (A) 减小 0.56 V. (B) 增大 0.165 V.
(C) 减小 0.34 V. (D) 增大 1.035 V. []

2. 用频率为 ν_1 的单色光照射某一种金属时,测得光电子的最大动能为 E_{k1} ;用频率为 ν_2 的单色光照射另一种金属时,测得光电子的最大动能为 E_{k2} . 如果 $E_{k1} > E_{k2}$, 那么

- (A) ν_1 一定大于 ν_2 . (B) ν_1 一定小于 ν_2 .
(C) ν_1 一定等于 ν_2 . (D) ν_1 可能大于也可能小于 ν_2 . []

3. 普朗克量子假设是为了解释

- (A) 光电效应实验规律而提出的.
(B) X 射线散射的实验规律而提出的.
(C) 黑体辐射的实验规律而提出的.
(D) 原子光谱的规律性而提出的. []

4. 在康普顿散射实验中,如果设反冲电子的速度为光速的 60%,则因散射使电子获得的能量是其静止能量的

- (A) 2 倍. (B) 1.5 倍.
(C) 0.5 倍. (D) 0.25 倍. []

5. 氩($Z=18$)原子基态的电子组态是

- (A) $1s^2 2s^8 3p^8$. (B) $1s^2 2s^2 2p^6 3d^8$.
(C) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. (D) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. []

6. 不确定关系式 $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$, 表示在 x 方向上

- (A) 粒子位置不能确定. (B) 粒子动量不能确定.
(C) 粒子位置和动量都不能确定. (D) 粒子位置和动量不能同时确定. []

二、填空题

1. 在氢原子发射光谱的巴耳末线系中,有一频率为 6.15×10^{14} Hz 的谱线,是氢原子从能级 $E_n =$ _____ eV 跃迁到能级 $E_k =$ _____ eV 而发生的.

2. 波长为 400 nm 的平面光波朝 x 轴正向传播.若波长的相对不确定量 $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 10^{-5}$,则光

子动量数值的不确定量 $\Delta p_x =$ _____, 而光子坐标的最小不确定量 $\Delta x =$ _____.

3. 从太阳光谱的实验中, 测得单色辐射出射度峰值所对应的波长为 $0.5 \mu\text{m}$, 则由此估算的太阳表面的温度为 _____ K ($b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$).

4. 描述微观粒子运动的波函数为 $\Psi(r, t)$, 则 $\Psi(r, t)\Psi^*(r, t)$ 表示 _____, $\Psi(r, t)$ 必须满足的条件是 _____, 其归一化条件是 _____.

5. 多电子原子中电子的排列遵循 _____ 和 _____.

6. 原子内电子的量子态由 n, l, m_l, m_s 四个量子数表示. 当 n, l, m_l 一定时, 不同量子态数目为 _____; 当 n, l 一定时, 不同量子态数目为 _____; 当 n 一定时, 不同量子态数目为 _____.

7. 一电子具有 $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率, 动量的不确定量为 0.1% . 当确定电子的位置时, 其不确定量 Δx 至少为 _____.

8. 已知钾的逸出功为 2.0 eV , 如果用波长为 360 nm 的光照射到钾上. 则光电效应的遏止电压值为 _____, 从钾表面逸出的光电子的最大速度为 _____.

三、计算题

1. 以波长为 410 nm 的单色光照射某一金属产生光电效应, 其逸出光电子的最大初动能为 1.0 eV , 求能使该金属产生光电效应的单色光的最大波长是多少?

2. 处于基态的氢原子被外来单色光激发后发出的光仅有三条谱线, 问此外来光的频率为多少?

3. 假设电子运动速度与光速可以比拟. 则当电子动能等于它静止能量的 2 倍时, 其德布罗意波长为多少?

4. 一粒子在无限深势阱中运动, 波函数为 $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ ($0 < x < a$). 求粒子处于 $n=1$ 的状态时, 在 $0 \sim a/4$ 区间发现该粒子的概率.

自测题参考答案

自 测 题 一

一、选择题

1. (C) 2. (D) 3. (B) 4. (B) 5. (D) 6. (C) 7. (C)
8. (B) 9. (C) 10. (B) 11. (D) 12. (B) 13. (D)

二、填空题

1. $\frac{S}{\Delta t}; -\frac{2v_0}{\Delta t}$
2. $16Rt^2 (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}); 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$
3. $8\text{m}; 10 \text{ m}$
4. $v_0 + bt; \sqrt{b^2 + (v_0 + bt)^4 / R^2}$
5. $10 \text{ m}; 5\pi \text{ m}$
6. $2\text{s}^3 + 2\text{s}$
7. $a_\tau = g \cos 60^\circ; \rho = v^2 / g \sin 60^\circ$
8. 南偏东 30°
9. $-i + 4j (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$
10. $-A\omega^2 \sin \omega t (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}); (2n+1)\pi / (2\omega) (\text{s}) (n=0, 1, \dots)$
11. $v_M = h_1 v / (h_1 - h_2)$
12. $4t^3 - 3t^2 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}); 12t^2 - 6t (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$
13. $69.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
14. 抛物线 $y = \frac{v_1 x}{v_0} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$
15. 变速率曲线运动; 变速率直线运动
16. (1)、(3)、(4)是不可能的
17. $g \sin \theta; g \cos \theta$
18. $v_0 + Ct^3/3; x_0 + v_0 t + Ct^4/12$
19. 匀加速直线; I
20. $4.19 \text{ m}; 4.13 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 与 x 轴成 60°
21. $x = (y-3)^2$

22. $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $-15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 23. 1 s ; 1.5 m
 24. $4.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; 3.15 rad
 25. $v_0^2 \cos^2 \theta / g$
 26. $\mathbf{r}; \Delta \mathbf{r}$
 27. $17.3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 28. B ; $(A^2/R) + 4\pi B$
 29. $-\omega R \sin \omega t \mathbf{i} + \omega R \cos \omega t \mathbf{j}$; 0
 30. $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $450 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

三、简答题

1. OA 区间: $v > 0, a < 0$; AB 区间: $v = 0, a = 0$;
 BC 区间: $v > 0, a > 0$; CD 区间: $v > 0, a = 0$.
 2. (1) BC 线段 $v = 0$, 表示自行车静止;
 CD 线段 $v < 0, a < 0$, 表示自行车沿与出发时的反方向作匀加速直线运动.
 (2) 自行车经历的路程等于 $\triangle OAB$ 面积的 2 倍, 其中 $\triangle OAB$ 的面积等于前进的路程, $\triangle CDE$ 的面积等于返回的路程.
 (3) 位移为零.

自 测 题 二

一、选择题

1. (D) 2. (D) 3. (D) 4. (D) 5. (C) 6. (C) 7. (A)
 8. (B) 9. (C) 10. (C) 11. (B) 12. (C) 13. (B) 14. (A)
 15. (C) 16. (C)

二、填空题

1. $2N; 1N$
 2. $\tan \theta = \mu$
 3. $\frac{E_{PA}}{E_{PB}} = \frac{k_B}{k_A}$
 4. $2v - v_0$; $-2m(v_0 - v)$
 5. $\frac{m^2 g^2}{2k}$
 6. $\sqrt{k/(mr)}$; $-k/(2r)$
 7. $2\mathbf{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 8. 180 kg

9. $\frac{1}{50}mgl$

10. $\frac{1}{2}v_0 \sqrt{3mk}$

11. $36i \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

12. $i - 5j$

13. $v = \frac{Mv_0}{m \cos \theta}$

14. 12 J

三、计算题

1. (1) $T_1 = mg/2 \sin \theta$; (2) $T_2 = mg/2 \tan \theta$

2. 略

3. $I = -\frac{kA}{\omega}$

4. $S = \frac{m}{m+M}L$

5. (1) 31 J ; (2) $5.34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

6. $u = \sqrt{\frac{mk}{M(M+m)}} \Delta x$

自 测 题 三

一、选择题

1. (C) 2. (D) 3. (C)

二、填空题

1. $\frac{1}{2}mr_1^2\omega_1^2\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}-1\right)$

2. $6.3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

3. 零

4. mvd

5. $5.26 \times 10^{12} \text{ m}$

6. $mgbk; mgbtk$

7. $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

8. $1/9$

9. $0.98 \text{ J}; 8.57 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

10. $0.95 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

11. $-k\omega_0^2/9 \text{ J}$

三、计算题

1. (1) $R^2\omega^2/2g$; (2) ω 不变, $(0.5MR^2 - mR^2)\omega, \frac{1}{2}(0.5MR^2 - mR^2)\omega^2$

2. $1.48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3. $3mR\omega_0^2/8\mu F$

自 测 题 四

一、选择题

1. (C) 2. (B) 3. (A) 4. (A) 5. (A) 6. (C) 7. (C)
8. (C) 9. (A)

二、填空题

2. $2.375 \times 10^{-4} \text{ s}; -3.875 \times 10^4 \text{ m}$

3. $0, 0; 3 \times 10^{-7} \text{ s}, 0$

4. 4.33×10^{-8}

5. 8.89×10^{-8}

6. $\frac{\sqrt{3}}{2}c; \frac{\sqrt{3}}{2}c$

7. $\frac{1}{4}m_0c^2$

8. $5.8 \times 10^{-13}; 8.04 \times 10^{-2}$

三、计算题

1. $3.6 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. $\frac{2L_0v}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}$

3. $1.8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; 9 \times 10^8 \text{ m}$

4. $2.25 \times 10^{-7} \text{ s}; 3.75 \times 10^{-7} \text{ s}$

5. $8\tau_0$

自 测 题 五

一、选择题

1. (B) 2. (B) 3. (D) 4. (D) 5. (B)

二、填空题

1. 1 : 1.2
2. 3.43 s; $-\frac{2}{3}\pi$
3. 4×10^{-2} m; $\frac{\pi}{2}$
4. 0.5
5. $A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \left(\varphi + \pi - 2\pi \frac{2L}{\lambda} \right) \right]$

三、计算题

1. $x = 0.05 \cos(75 + 0.64)$ (SI)
2. (1) $\pm 4.24 \times 10^{-2}$ m; (2) 0.75 s
3. (1) $x = 0.1 \cos(7.07t)$ (SI); (2) 29.2 N
4. (1) $19.6 - 1.28\pi^2 \cos 4\pi t$ (SI); (2) 6.21 cm
5. (1) 1 m, 2 Hz, $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
(2) $x = (k - 8.4) \text{ m}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), -0.4 m ;
(3) 0.2 s
6. (1) $2.70 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$; (2) $9.00 \times 10^{-2} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$; (3) $2.65 \times 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
7. (1) $y = A \cos \left[2\pi \left(50t + \frac{x}{200} \right) + \frac{\pi}{4} \right]$;
(2) $y = A \cos \left(100\pi t + \frac{5\pi}{4} \right)$, $v = -100\pi A \sin \left(100\pi t + \frac{5\pi}{4} \right)$

自 测 题 六

一、选择题

1. (C) 2. (A) 3. (A) 4. (B) 5. (A) 6. (A) 7. (C)
8. (B) 9. (C) 10. (D) 11. (C) 12. (A) 13. (B) 14. (A)

二、填空题

1. (1) 沿空间各方向运动的分子数目相等; (2) $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$
2. 200 K
3. 5/3; 10/3
4. 物质热现象和热运动规律的学科; 统计
5. 确定一个物体在空间的位置所需要的独立坐标的数目; 系统所经历的所有状态都无限接近于平衡状态的过程。

$$6. (1) \int_{v_0}^{\infty} Nf(v)dv; \quad (2) \int_{v_0}^{\infty} Nf(v)dv / \int_{v_0}^{\infty} f(v)dv; \quad (3) \int_{v_0}^{\infty} f(v)dv$$

$$7. A/Q = \frac{2}{i+2}; \quad \Delta E/Q = \frac{i}{i+2}$$

$$8. 8.31 \times 10^5 \text{ J}$$

9. (1) 氧, 氮;

(2) 速率在 $v \sim v + \Delta v$ 范围内的分子数占总分子数的百分率;

(3) 速率在 $0 \sim \infty$ 范围内的分子数的百分率的总和

10. 热力学概率小的状态向热力学概率大的状态

三、计算题

1. 依题意, 得

$$\frac{M}{\mu} R \Delta T = \frac{1}{2} M v^2$$

所以

$$\Delta T = \frac{\mu v^2}{2R} = 6.42 \text{ K}$$

$$\Delta p = 6.67 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$\Delta E = 2000 \text{ J}$$

$$\bar{\epsilon}_t = 1.33 \times 10^{-22} \text{ J}$$

2. 设该分子的平均转动能为 E_r .

因为 $C_p = \frac{3+r}{2}R + R$, 其中 r 是气体分子的转动自由度.

所以

$$r = \frac{2(C_p - R)}{R} - 3 = 2$$

又因为

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{r}{2} kT$$

所以

$$\bar{\epsilon}_r = 3.77 \times 10^{-21} \text{ J}$$

3. A 至 C 过程为等温过程

$$\text{则} \quad Q_1 = A = \frac{M}{\mu} R T \ln \frac{5V_0}{V_0} = 10954 \text{ J}$$

C 至 B 过程为等容过程

$$\text{则} \quad Q_2 = \frac{M}{\mu} C_V \Delta T$$

由题意得

$$P_B = P_A \quad P_C = \frac{1}{5} P_A$$

所以

$$T_B = 5T_C = 1365 \text{ K}$$

$$\Delta T = 4T_C = 1092 \text{ K}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q = 8 \times 10^4 \text{ J}$$

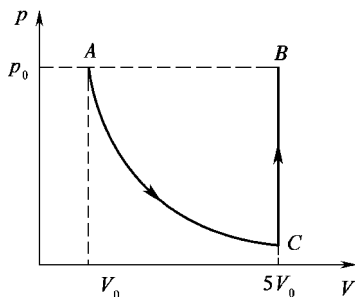
则

$$Q_2 = Q - Q_1 = 69046 \text{ J}$$

所以

$$C_V = \frac{Q_2}{3\Delta T} = 21.1 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\gamma = C_p / C_V = \frac{C_V + R}{C_V} = 1.39$$



4. 略

5. (1) 由理想气体状态方程, 得

$$pV = RT$$

所以

$$T_b = \frac{p_b V_b}{R} = \frac{400}{R}$$

同理, 得

$$T_c = \frac{p_c V_c}{R} = \frac{600}{R}$$

$$T_a = \frac{p_a V_a}{R} = \frac{200}{R}$$

$$T_d = \frac{300}{R}$$

a 至 b 过程吸热为

$$Q_1 = C_V \Delta T = 300 \text{ J}$$

b 至 c 过程吸热为

$$Q_2 = 500 \text{ J}$$

所以

$$Q = 800 \text{ J}$$

(2) 对外界做的净功, 即是 $abcd$ 所围成的面积, 则

$$A = 200 (\text{J})$$

$$(3) \text{ 由 } T_b = \frac{p_b V_b}{R} = \frac{400}{R}, T_c = \frac{p_c V_c}{R} = \frac{600}{R}, T_a = \frac{p_a V_a}{R} = \frac{200}{R}, T_d = \frac{p_d V_d}{R} = \frac{300}{R}$$

可知

$$T_a T_c = T_b T_d$$

$$6. \Delta S = R \ln \frac{V}{V_0} + C_V R \ln \frac{T}{T_0}$$

自 测 题 七

一、选择题

1. (C) 2. (A) 3. (A) 4. (C) 5. (A) 6. (B) 7. (D)
8. (D) 9. (B) 10. (A)

二、填空题

1. $\frac{4}{3}\epsilon_0 E_0; -\frac{2}{3}\epsilon_0 E_0$
2. $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}; x$ 轴负向
3. $\frac{\Delta S \sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ (方向由球心指向 ΔS)
4. $0, \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}; \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}, 0$
5. $-\frac{(5-\sqrt{5})}{20\pi\epsilon_0 d}, \frac{(5-\sqrt{5})q}{20\pi\epsilon_0 d}; 0$
6. B 球
7. $-\frac{R_1}{R_2}q$
8. $\frac{\epsilon_r+1}{2}C; \frac{\epsilon_r+1}{2}CU^2$
9. $\epsilon_r C_0; \epsilon_r W_0$
10. $\pm Q, D; C; E, U_{+-}, w$

三、计算题

1. $\mathbf{E} = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R} \mathbf{i}$
2. $r < R \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_0 r}{4\epsilon_0} \mathbf{r}, U = \frac{\rho_0 (R^3 - r^3)}{12\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0}; \quad r > R \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, U = \frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0 r}$
3. $U_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{a}$
4. $E_O = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \sin \theta \ln \frac{R_2}{R_1}$, 方向沿圆台轴线指向 O 点; $U_O = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1)$
5.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{\rho(r^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} & a < r \leq b; \\ \frac{\rho(b^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} & b < r \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ -\frac{\rho}{4\epsilon_0} \left(r^2 - a^2 - 2b^2 \ln \frac{r}{a} \right) & a < r \leq b \\ -\frac{\rho}{4\epsilon_0} \left(r^2 - a^2 + 2b^2 \ln \frac{r}{a} - 2a^2 \ln \frac{r}{a} \right) & b < r \end{cases}$$

6. (1) 电荷分布: 内表面 $-q$ 、外表面 $-q$, $U_{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$;

(2) 电荷分布: 内表面 $-q$ 、外表面 0 , $U_{R_2} = 0$;

(3) 电荷分布: 内表面 0 、外表面 $\frac{R_1}{R_2}q$, $\Delta U_{R_2} = \frac{R_1 - 2R_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} q$

7. $U_{r_1 r_2} = (U_1 - U_2) \ln \frac{r_2}{r_1} / \ln \frac{R_2}{R_1}$

8. (1)

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r \leq R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & R_1 < r \leq R_2; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & r > R_2 \end{cases}$$

(2)

$$U = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right) & r \leq R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right) & R_1 < r \leq R_2; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & R_2 < r \end{cases}$$

(3) $U_{R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$;

(4) $W = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$

9. $C = \frac{2\pi\epsilon_{r_1}\epsilon_{r_2}\epsilon_0}{\epsilon_{r_2} \ln \frac{b}{a} + \epsilon_{r_1} \ln \frac{c}{b}}$

10. $2.5 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1} < 3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, 不会被击穿; 此时空气层的场强为 $3.14 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1} > 3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, 空气层首先被击穿, 电容器两极板间的电压全部加在厚为 0.3 cm 的电介质玻璃板上, 玻璃板内的场强为 $13 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1} > 10 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, 玻璃板亦会被击穿。

自 测 题 八

一、选择题

1. (C) 2. (C) 3. (D) 4. (D) 5. (B) 6. (B)

二、填空题

1. $R^2 c$
2. 0; 1 : 2
3. $6.67 \times 10^{-7} \text{ T}$; $7.20 \times 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
4. 1 : 1
5. (1) $\mu_0 r I / (2\pi R_1^2)$; (2) 0
6. 0; 0
7. 1 : 2; 1 : 2
8. 匀速直线; 匀速率圆周; 等距螺旋线, 垂直纸面向内, $\mu_0 I / (4\pi R)$

三、计算题

1. (1) $B_0 = \int dB_0 = \frac{\lambda \omega \mu_0}{4\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda \omega \mu_0}{4\pi} \ln \frac{a+b}{a}$;
 (2) $\lambda \omega [(a+b)^3 - a^3] / 6$;
 (3) $B_0 = \frac{\mu_0 \omega \lambda b}{4\pi a} = \frac{\omega \mu_0 q}{4\pi a}, p_m = \frac{\lambda \omega}{6} a^3 \cdot \frac{3b}{a} = \frac{1}{2} q \omega a^2$
2. $B = \mu_0 R \sigma \omega$, 方向平行于轴线朝右
3. $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$
4. $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi \sin \theta}$
5. $\frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1}$

自 测 题 九

一、选择题

1. (C) 2. (A) 3. (D) 4. (B) 5. (A) 6. (C) 7. (C)
8. (C) 9. (A) 10. (C)

二、填空题

1. 一个电源; vBL ; 洛伦兹力
2. $\frac{\mu_0 I}{2a} \pi r^2 \cos \omega t$; $\frac{\mu_0 I}{2aR} \pi r^2 \omega \sin \omega t$
3. $-3.19 \text{ T} \cdot \text{S}^{-1}$
4. $-\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$
5. $\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$

6. $\mu_0 n I; \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}$

7. 4; 0

8. $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$

9. $\mathbf{j}_D = \frac{q\omega}{4\pi R^2} (\sin\omega t \mathbf{i} - \cos\omega t \mathbf{j})$

10. 向下; 垂直纸面向外

三、计算题

1. $\epsilon = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left(\frac{a}{x_0} + 2 \tan\alpha \ln \frac{x_0 + b \cos\alpha}{x_0} - \frac{a + 2b \sin\alpha}{x_0 + b \cos\alpha} \right)$

2. $\epsilon = \frac{\mu_0 I v}{\pi} \left(\frac{a}{x_0} - \ln \frac{x_0 + a}{x_0} \right)$

3. $|\epsilon| = 3.7 \times 10^{-3} \text{ V}$, 沿回路逆时针方向

4. $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$

5. $\epsilon = -\frac{2}{3} \pi a^3 B_0 \omega \cos\omega t$ (当 $\cos\omega t > 0$ 时, ϵ 沿回路逆时针方向; 当 $\cos\omega t < 0$ 时, ϵ 沿回路顺时针方向)

自 测 题 十

一、选择题

1. (C) 2. (B) 3. (B) 4. (B) 5. (C) 6. (C) 7. (B)
8. (B) 9. (C) 10. (A)

二、填空题

1. $2\pi d \sin\theta / \lambda$
2. $2\pi(n-1)e/\lambda; 4 \times 10^4$
3. $D\lambda/dn$
4. 1.40
5. $\lambda/(2L)$
6. $5\lambda/(2n\theta)$
7. 5391
8. 0.5046
9. $2(n-1)h$

三、计算题

1. 第一级彩色明纹宽度

$$\Delta x_1 = D\Delta\lambda/a = 0.72 \text{ mm}$$

第五级彩色明纹宽度

$$\Delta x_5 = 5D\Delta\lambda/a = 3.6 \text{ mm}$$

$$2. (1) \Delta x = x_{k_2} - x_{k_1} = (k_2 - k_1)D\lambda/a = 20D\lambda/a = 0.11 \text{ m};$$

$$(2) k = (n-1)e/\lambda = 6.96 \approx 7$$

3. 在可见光范围内,最大限度增强的反射光波长为

$$\lambda = 6000 \text{ \AA}, \quad \lambda = 4286 \text{ \AA}$$

4. 暗环半径

$$\frac{r_k - r'_k}{r_k} = \frac{\sqrt{kR\lambda/n_2} - \sqrt{kR\lambda/n'_2}}{\sqrt{kR\lambda/n_2}}$$

自测题十一

一、选择题

1. (B) 2. (D) 3. (D) 4. (D) 5. (B) 6. (D) 7. (D)
8. (A) 9. (D) 10. (B)

二、填空题

1. 子波;子波干涉
2. 1×10^{-6}
3. 4; 第一, 暗
4. 916
5. 一
6. $0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$
7. 355 nm; 396 nm
8. 51.13°
9. $I_0/2; I_0 \cos^2 \omega t/2; I_0 \cos^2 \omega t \sin^2 \omega t/2$ (或 $I_0 \sin^2(2\omega t)/8$)

三、计算题

1. (1) $1.2 \times 10^{-2} \text{ rad}$; (2) $0.74 \times 10^{-2} \text{ rad}$
2. $6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$
3. (1) $6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$; (2) $1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$; (3) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$, 共 15 个主极大
4. (1) $\alpha = 45^\circ$; (2) 透射光与入射光的强度之比: 3/8; (3) 考虑吸收后, 透射光与入射光的强度之比为 0.338

自测题十二

一、选择题

1. (D) 2. (A) 3. (C) 4. (D) 5. (C) 6. (C)

二、填空题

1. $-0.85 \text{ eV}, -3.4 \text{ eV}$
2. $1.66 \times 10^{-33} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}; 63.7 \text{ mm}$
3. $5\,796 \text{ K}$
4. 微观粒子在空间出现的概率;有限、单值和连续; $\iiint_V \Psi(r, t) \Psi^*(r, t) dV = 1$
5. 泡利不相容原理和能量最低原理
6. $2; 2(2l+1); 2n^2$
7. 0.3 mm
8. $1.45, 7.2 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

三、计算题

1. 610 nm 2. $2.92 \times 10^{15} \text{ Hz}$ 3. $8.58 \times 10^{-13} \text{ m}$ 4. 0.091