

一流学校 一流老师 一流资源



三一丛书

数学物理方法

要点与解题

李惜雯 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交大教学资源文库 三一丛书

数学物理方法 要点与解题

李惜雯 编著

西安交通大学出版社

内容提要

本书是根据理工科数学物理方法的教学大纲要求进行编写的,包含复变函数、积分变换、数学物理方程与特殊函数三部分内容。全书共分9章。

每章、节均有基本要求、内容提要及例题解析三部分;每道例题后带有注释,对所用知识及解题思路进行分析和讨论;并在每章最后给出一定量练习题及答案。

本书可作为全日制理工科各专业、电大、函授等各类大学相关专业学生,学习数学物理方法课程,及机类、化工、材料、结构工程等专业硕士研究生学习应用数学基础课程的参考书,也可供从事本类课程教学的中青年教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法要点与解题/李惜雯编著. —西安:西安交通大学出版社,2006.8
(西安交大教学资源文库. 三一丛书)
ISBN 7-5605-2228-9

I. 数… II. 李… III. 数学物理方法—高等学校—教学参考资料 IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 069529 号

书 名:数学物理方法要点与解题

编 著:李惜雯

出版发行:西安交通大学出版社

地 址:西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)

电 话:(029)82668357 82667874(发行部)

(029)82668315 82669096(总编办)

印 刷:陕西宝石兰印务有限责任公司

字 数:281 千字

开 本:880 mm×1 230 mm 1/32

印 张:7.75

版 次:2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-5605-2228-9/O·242

定 价:12.00 元

版权所有 侵权必究

丛书总序

为了使普通高等学校理工类专业的大学生更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识,我们组织出版了这套“三一”丛书,目的就是提供一流的学习资源,使大家共享一流教师的教学经验和教学成果,为今后的学习打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府,是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一,1999 年被国家确定为我国中西部地区惟一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学,1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名,具有丰富的、一流的教学资源。本丛书均由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编,他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中,深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在,对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究,并将成果体现于书中。

本丛书针对中少学时课程的特点和教学要求,以普通高等学校的学生为主要对象,不拘泥于某一本教材,而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结,取其精华,自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路进行了全面、系统的总结和提炼,按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环

节进行编排。本丛书既可单独使用,也可与其他教材配合使用。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友,帮助您克服困难,进入大学学习的自由王国,并祝您早日成为国家的栋梁之材!

在学习使用过程中,您如果发现书中有不妥之处或有好的建议,敬请批评指正并反馈给我们,我们会进一步改进自己的工作,力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址:<http://press.xjtu.edu.cn>

<http://www.xjtupress.com>

理工医事业部信箱: jdlgy31@126.com

西安交通大学出版社

2006 年 6 月

前 言

数学物理方法是大部分理工科专业的必修课程,课程目的在于培养学生运用数学方法分析、解决物理问题的能力。由此决定的本课程特点为:第一,涉及到的数学知识广泛;第二,涉及到的物理概念多;第三,计算较繁。除此之外,一般来说,本课程计划内学时不含习题课。因此,多数学生在学习本课程时感到较微积分等数学课困难。为了帮助学生掌握本课程的基本内容,掌握用数学方法分析、解决物理问题的基本方法,作者根据自己多年的教学经验,精心挑选了 170 道(大)题,并全部亲自推导演算,分析讨论,编成本书。本书力图突出数学概念和物理意义,突出解题思路的分析和知识的内在联系与灵活运用。

在每章、节的前面提出本章、节的基本要求和主要内容,并对每个例题给出注释,对解题的方法与思路进行分析、讨论,以加深读者对知识的深入理解。

本书共分 9 章,第 1~4 章为复变函数部分,与其内容体系大体一致的教材是西安交通大学编写的《复变函数》;第 5 章为积分变换部分,第 6~9 章为数理方程与特殊函数部分,与其内容体系大体一致的教材为原南京工学院编写的《积分变换》、《数学物理方程与特殊函数》。但为了例题编写的方便、集中,本书在内容的组织上作了适当的调整与增减。

为了方便读者,本书在每章编入了一定量的练习题,并附有答案或提示。

由于时间仓促,编写中定有不少错误与不足,敬请读者批评指正。

在本书的编写过程中得到西安交通大学出版社的大力支持,在此致以谢意!

编 者

2006 年 6 月于西安交通大学

目 录

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数的表示与代数运算	(1)
1.1.1 基本要求	(1)
1.1.2 内容提要	(1)
1.1.3 例题解析	(2)
1.2 复平面的点集与点列、复数项级数	(10)
1.2.1 基本要求	(10)
1.2.2 内容提要	(10)
1.2.3 例题解析	(12)
1.3 复变函数	(18)
1.3.1 基本要求	(18)
1.3.2 内容提要	(18)
1.3.3 例题解析	(20)
1.4 初等函数	(29)
1.4.1 基本要求	(29)
1.4.2 内容提要	(29)
1.4.3 例题解析	(31)
1.5 保角映射	(34)
1.5.1 基本要求	(34)
1.5.2 内容提要	(34)
1.5.3 例题解析	(35)
1.6 第 1 章练习题	(51)

第 2 章 复变函数的积分

2.1 复变函数积分概念与 Cauchy 积分定理	(53)
2.1.1 基本要求	(53)
2.1.2 内容提要	(53)

2.1.3	例题解析	(55)
2.2	Cauchy 积分公式及解析函数的任意阶可导性	(66)
2.2.1	基本要求	(66)
2.2.2	内容提要	(66)
2.2.3	例题解析	(66)
2.3	第 2 章练习题	(72)
第 3 章 解析函数的幂级数表示		
3.1	Taylor 级数	(74)
3.1.1	基本要求	(74)
3.1.2	内容提要	(74)
3.1.3	例题解析	(75)
3.2	Laurent 级数	(85)
3.2.1	基本要求	(85)
3.2.2	内容提要	(86)
3.2.3	例题解析	(86)
3.3	第 3 章练习题	(95)
第 4 章 留数定理及其应用		
4.1	单值函数孤立奇点及其分类	(97)
4.1.1	基本要求	(97)
4.1.2	内容提要	(97)
4.1.3	例题解析	(98)
4.2	留数及留数定理	(103)
4.2.1	基本要求	(103)
4.2.2	内容提要	(103)
4.2.3	例题解析	(104)
4.3	第 4 章练习题	(109)
第 5 章 Fourier 变换与 Laplace 变换		
5.1	Fourier 积分与 Fourier 变换	(111)
5.1.1	基本要求	(111)
5.1.2	内容提要	(111)
5.1.3	例题解析	(113)

5.2 Laplace 变换	(126)
5.2.1 基本要求	(126)
5.2.2 内容提要	(126)
5.2.3 例题解析	(128)
5.3 第 5 章练习题	(141)
第 6 章 数学物理方程定解问题	
6.1 泛定方程与定解条件	(143)
6.1.1 基本要求	(143)
6.1.2 内容提要	(143)
6.1.3 例题解析	(144)
6.2 第 6 章练习题	(156)
第 7 章 分离变量法 (Fourier 级数法)	
7.1 齐次边界与齐次方程	(159)
7.1.1 基本要求	(159)
7.1.2 内容提要	(159)
7.1.3 例题解析	(160)
7.2 齐次边界与非齐次方程	(176)
7.2.1 基本要求	(176)
7.2.2 内容提要	(176)
7.2.3 例题解析	(177)
7.3 非齐次边界条件的处理	(185)
7.3.1 基本要求	(185)
7.3.2 内容提要	(185)
7.3.3 例题解析	(186)
7.4 第 7 章练习题	(194)
第 8 章 贝赛尔函数与勒让德多项式	
8.1 贝赛尔函数	(197)
8.1.1 基本要求	(197)
8.1.2 内容提要	(197)
8.1.3 例题解析	(198)
8.2 勒让德多项式	(211)

8.2.1	基本要求	(211)
8.2.2	内容提要	(211)
8.2.3	例题解析	(212)
8.3	第 8 章练习题	(224)

第 9 章 定解问题的其它解法

9.1	行波法与积分变换法	(225)
9.1.1	基本要求	(225)
9.1.2	内容提要	(225)
9.1.3	例题解析	(226)
9.2	Laplace 方程的 Green 函数法	(230)
9.2.1	基本要求	(230)
9.2.2	内容提要	(230)
9.2.3	例题解析	(231)
9.3	第 9 章练习题	(235)

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数的表示与代数运算

1.1.1 基本要求

1. 掌握复数与复平面点的一一对应概念,认识复数的无序性.
2. 掌握复数的三种表示形式及模与辐角概念、共轭复数概念.
3. 熟练掌握复数的代数运算、共轭运算及其几何意义.

1.1.2 内容提要

1. 平面点 (x, y) 与复数 $x + i y = z$ 一一对应. 无穷远点记作 ∞ .
2. 复数的三种表示

①代数式 $z = x + i y$; ②指数式 $z = \rho e^{i\theta}$; ③三角式 $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为 z 的模, 记作 $|z|$, θ 称为 z 的辐角, 记作 $\text{Arg } z$, 将满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ (或 $0 \leq \theta_0 < 2\pi$) 的 θ 值称为 $\text{Arg } z$ 的主值, 记为 $\arg z$. 0 与 ∞ 无辐角. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $|z| = +\infty \Leftrightarrow z = \infty$.

当取 $-\pi < \arg z \leq \pi$ 时, 有关系

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ 且 } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ 且 } y < 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & x < 0 \text{ 且 } y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & x < 0 \text{ 且 } y < 0 \end{cases}$$

3. 代数运算规则

$$1) (x_1 + i y_1) \pm (x_2 + i y_2) = (x_1 \pm x_2) + i (y_1 \pm y_2)$$

$$2) (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\text{或 } z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$3) \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\text{或 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (|z_2| \neq 0)$$

$$4) z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho^n e^{in\theta}$$

特别地, $\rho=1$ 时有 De Moivre 公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$5) \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

4. 距离不等式

$$1) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$2) |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

5. 共轭复数性质

$$1) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad 4) \overline{(\bar{z})} = z$$

$$2) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad 5) z \bar{z} = |z|^2$$

$$3) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad 6) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

1.1.3 例题解析

1-1 给出 $z_0 = -1 + i\sqrt{3}$ 的三角式与指数式表示.

解 这里给出的是 z_0 的代数式表示. 为求得其他两种表示式, 首先应求出其模与辐角.

$$\because |z_0| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\arg z_0 = \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore z_0 = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \quad (\text{三角式表示})$$

$$z_0 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad (\text{指数式表示})$$

注 本题的关键在于求出所给复数的模与辐角, 并且注意点位于第二象限. 故

$$\arg z_0 = \pi + \arctan \frac{y_0}{x_0}.$$

1-2 给出复数 $z_0 = \frac{2i}{-1+i}$ 的代数式、三角式及指数式表示.

解 化简原式, 得到 z_0 的代数式表示

$$z_0 = \frac{2i}{-1+i} = \frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = 1-i \quad (\text{代数式表示})$$

$$\therefore |z_0| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z_0 = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z_0 = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{三角式表示})$$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (\text{指数式表示})$$

注 本题的关键在于简化原表达式, 同时注意点位于第四象限. 故 $\arg z_0 = \arctan \frac{y_0}{x_0}$.

1-3 设 $z_0 \neq 0$, 用 z_0 表示下列点:

- 1) z_0 关于原点的对称点;
- 2) z_0 关于实轴的对称点;
- 3) z_0 关于虚轴的对称点.

解 注意到复数 $z = x + iy$ 与平面点 (x, y) 的一一对应关系及平面点的对称点知识, 设 $z_0 = x_0 + iy_0$. 由 (x_0, y_0) 关于原点的对称点为 $(-x_0, -y_0)$, 关于实轴的对称点为 $(x_0, -y_0)$, 关于虚轴的对称点为 $(-x_0, y_0)$, 得:

- 1) z_0 关于原点的对称点为 $-x_0 + i(-y_0) = -z_0$;
- 2) 关于实轴的对称点为 $x_0 + i(-y_0) = \bar{z}_0$;
- 3) 关于虚轴的对称点为 $-x_0 + iy_0 = -(x_0 - iy_0) = -\bar{z}_0$.

注 1. 本题应用复数与平面点的一一对应关系, 将问题转化为初等数学已知知识;

2. 当 $z_0 = 0$ 时, 上述各对应点为 z_0 本身.

1-4 设 $|b| < 1, |a| = 1$, 证明 $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$.

证 证法一 $\because \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}$, 故只要证明 $|a-b| = |1-\bar{a}b|$ 即可.

$$\therefore |a-b|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

$$\text{由 } |a| = 1, \text{ 得 } |a|^2 = 1$$

$$\therefore |a-b|^2 = 1 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

$$\text{又 } |1-\bar{a}b|^2 = (1-\bar{a}b)(1-\bar{a}\bar{b}) = 1 + |a|^2 |b|^2 - \bar{a}b - \bar{a}\bar{b} = 1 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{a}\bar{b}$$

$\therefore |a-b|^2 = |1-\bar{a}b|^2$. 由模的非负性知 $|a-b| = |1-\bar{a}b|$. 且

$\therefore |a|=1, |b|<1$. 知 $a \neq b$. 从而 $|1-\bar{a}b| \neq 0$.

$$\therefore \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

证法二 $\therefore |a|=1$

$$\therefore \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|a-b|}{|a| |1-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a-a\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a-b|} = 1$$

$\therefore |a|=1, |b|<1 \therefore a \neq b$. 即 $|a-b| \neq 0$.

故上述分式有意义.

证法三 $\therefore |a|=1. \therefore a\bar{a}=1$. 且 $|\bar{a}|=1$. 则有

$$\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a\bar{a}-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|\bar{a}| \cdot |a-b|} = \frac{|a-b|}{|a-b|} = 1$$

(同证法二, $|a-b| \neq 0$).

注 1. 证法一中用复数与其共轭之积表示模的方法是一基本的方法;

2. 证法二采用模之积等于积之模性质;

3. 证法三将原式中的 1 用 $a\bar{a}$ 代换, 再用积之模等于模之积性质;

4. 虽证法一略繁于其它二方法, 但具有一般性.

1-5 设 $|a|<1, |b|<1$, 证明: $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$.

证 证法一 只要证 $|a-b| < |1-\bar{a}b|$ 即可.

$$\therefore |a-b|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

$$|1-\bar{a}b|^2 = (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b}) = 1 + |a|^2 |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

由 $|a|<1, |b|<1$, 得 $(1-|b|^2)|a|^2 < 1-|b|^2$

即

$$|a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2 |b|^2$$

$$\therefore |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2 \Rightarrow \frac{|a-b|^2}{|1-\bar{a}b|^2} < 1$$

即

$$\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$$

证法二 只要证 $|1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 > 0$ 即可.

$$\begin{aligned} \therefore |1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 &= (1+|a|^2|b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b}) - (|a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b}) \\ &= 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2) \end{aligned}$$

由 $|a|<1, |b|<1$. 得 $|a|^2 < 1, |b|^2 < 1$

$$\therefore |1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 > 0$$

注 1. 这两种证法采用了 1-4 题证法一的一般方法;

2. 由上述证明立即可推出, 当 $|a|<1, |b|>1$ (或 $|a|>1, |b|<1$) 时, 有

$$\left| \frac{a-b}{1-ab} \right| > 1.$$

1-6 设 z_1, z_2, z_3 满足 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. 且 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

证明: z_1, z_2, z_3 为内接于单位圆的正三角形三顶点.

证 由条件, z_1, z_2, z_3 均位于以 0 为心, 1 为半径的单位圆周上. 不失一般性,

可设 $z_1 = 1, z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2, z_3 = \cos \theta_3 + i \sin \theta_3$. 则为证结论, 只要证 $\theta_2 = \frac{2}{3}\pi$,

$\theta_3 = -\frac{2}{3}\pi$ 即可.

由 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 得

$$1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0 \quad \text{①}$$

$$\sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0 \quad \text{②}$$

故得 $\sin \theta_2 = -\sin \theta_3 = \sin(-\theta_3) \therefore \theta_3 = -\theta_2$ 代入①得

$$1 + \cos \theta_2 + \cos(-\theta_2) = 1 + 2\cos \theta_2 = 0$$

$$\therefore \cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \quad \therefore \theta_2 = \frac{2}{3}\pi, \quad \theta_3 = -\frac{2}{3}\pi$$

注 本题的关键在于对问题的恰当转化, 否则较为麻烦. 这里的假定不失一般性, 即一般情况下, 作旋转变换 $z' = ze^{-i\theta_1}$ (θ_1 为 z_1 的辐角) 可变为 $z_1 = 1$ 的情形.

1-7 设复数 z_1, z_2, z_3 满足等式 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$. 证明

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$$

证 令: $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \alpha$. (可设 $\alpha \neq 0$, 否则有 $z_1 = z_2 = z_3$. 结论自然成立.)

只要证 $|\alpha| = 1$ 即可.

对原式取模有

$$|z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_1| |z_2 - z_3| \quad (1)$$

在原式两端同时减 1 并取模得

$$\left| \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right|$$

$$\text{故有} \quad |z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_2| |z_3 - z_1| \quad (2)$$

$$(1) \div (2) \text{ 得} \quad \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right|^2 = \left| \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} \right|$$

对比原式即得 $|\alpha|^2 = \frac{1}{|\alpha|} \therefore |\alpha|^3 = 1$, 于是 $|\alpha| = 1$. 由此得证.

注 此题结论说明若三复数满足所给比例等式,则该三点为等边三角形顶点.

1-8 设 $z=x+iy$, 证明: $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x|+|y|$.

证 由 $|z|=|x+iy| \leq |x|+|iy|=|x|+|y|$. 第二个不等式成立. 现证第一个不等式, 即要证 $\sqrt{2}|z| \geq |x|+|y|$.

$$\because |z|^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|$$

$$\therefore 2|z|^2 \geq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x|+|y|)^2$$

于是得

$$\sqrt{2}|z| \geq |x|+|y|$$

注 1. 证明中用到三角不等式.

2. 第一个不等式的等号当且仅当 $x=y$ 时成立. 即 $z=x(1+i)$ ($x \in \mathbb{R}$) 时等号成立; 第二个不等式的等号当且仅当 $xy=0$ 时成立. 即 z 为一实数或纯虚数时成立;

3. 此不等式提供了一个对一般复数模的估计式.

1-9 由等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$ 确定实数 x, y 之值.

解 解法一 化简等式左端为代数式表示

$$\frac{[(x+1)+i(y-3)][5-3i]}{5^2+3^2} = \frac{5x+3y-4}{34} + i \frac{5y-3x-18}{34}$$

则由复数相等的概念可得方程组

$$\begin{cases} \frac{5x+3y-4}{34} = 1 \\ \frac{5y-3x-18}{34} = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 5x+3y=38 \\ -3x+5y=52 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases}$$

解法二 所给等式左端为两复数之商, 由复数的四则运算可得等式

$$(x+1)+i(y-3) = (1+i)(5+3i) = 2+8i$$

可得方程组

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-3=8 \end{cases} \quad \text{即得} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases}$$

注 解法二显然比解法一简便,这种方法既考虑到复数相等的概念,同时也利用了商为积的逆运算这一性质,而解法一仅用了复数相等的概念.

1-10 将下列坐标变换写成复数形式

$$1) \text{ 平移变换 } \begin{cases} x=x_1+a_1 \\ y=y_1+b_1 \end{cases} \quad 2) \text{ 旋转变换 } \begin{cases} x=x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y=x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases}$$

解 令 $z=x+iy$, $z_1=x_1+iy_1$, $\alpha=a_1+ib_1$, 利用复数 $z=x+iy$ 与平面点 (x,y) 之间的一一对应关系可得

1) 平移变换的复数形式为

$$z = z_1 + \alpha$$

2) 旋转变换的复数形式为

$$\begin{aligned} z &= (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) + i(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \\ &= (x_1 + iy_1) \cos \theta + (x_1 + iy_1) i \sin \theta \\ &= (x_1 + iy_1)(\cos \theta + i \sin \theta) = z_1 e^{i\theta} \end{aligned}$$

注 1. 由此题可见,平面上的平移变换与旋转变换公式在复数形式下是极简单的;

2. 由此结果可知,两复数和 $z_1 + \alpha$ 的几何意义是对 z_1 施行平移变换(沿点 α 决定的矢量方向平移 $|\alpha|$ 距离). 而一复数与任一模为 1 的复数相乘,即等于对该复数对应的矢量施行旋转变换(旋转角度即为模为 1 复数的辐角 θ).

1-11 证明恒等式

$$1) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$2) |z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2} \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2} \right|$$

证 1) **证法一** 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\text{则 } |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

证法二

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_2 z_1$$

二式相加得 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

2) 即要证 $|z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}| = 2(|z_1| + |z_2|)$

令 $\sqrt{z_1} = w_1, \sqrt{z_2} = w_2$

则 $|w_1|^2 = |z_1|, |w_2|^2 = |z_2|$

于是

$$|z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| = |w_1^2 + w_2^2 - 2w_1 w_2| = |(w_1 - w_2)^2| = |w_1 - w_2|^2$$

$$|z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}| = |w_1^2 + w_2^2 + 2w_1 w_2| = |(w_1 + w_2)^2| = |w_1 + w_2|^2$$

故由 1) 即得

$$|z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| = 2(|z_1| + |z_2|)$$

注 1. 恒等式 1) 有明显的几何意义: 它表明平行四边形两对角线平方和等于各边平方和.

2. 2) 为 1) 的直接推论. 1) 的证法二较证法一简单些. 证法一由模的定义出发. 证法二用了共轭复数性质.

1-12 已知某正三角形之两顶点 $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$, 求另一顶点.

解 解法一 如图 1.1 所示. 为得到另一顶点 z_3 , 只要将连接 z_1 与 z_2 的线段绕 z_1 点旋转 $\frac{1}{3}\pi$ (或 $-\frac{1}{3}\pi$) 即可. 注意连接 z_1 与 z_2 的向量为 $z_2 - z_1$, 故有

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm i\frac{1}{3}\pi}$$

$$\therefore z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{\pm i\frac{1}{3}\pi}$$

将 $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$ 代入, 得

$$z_3 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

解法二 利用 1-7 题的结果. 如果 z_3 满足关系

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

则 z_3 即为所求. 将 z_1, z_2 值及 $z_3 = x + iy$ 代入, 得

$$\frac{1+i}{(x-1)+iy} = \frac{(1-x)-iy}{(2-x)+i(1-y)}$$

注意由 1-7 题知

$$\left| \frac{1+i}{(x-1)+iy} \right| = \left| \frac{(1-x)-iy}{(2-x)+i(1-y)} \right| = 1$$

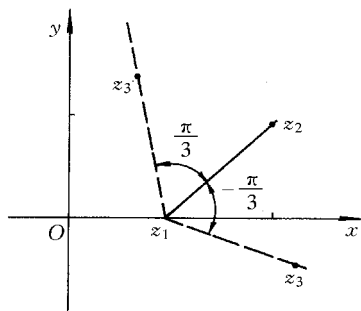


图 1.1

$$\therefore \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ (1-x)^2 + y^2 = (2-x)^2 + (1-y)^2 \end{cases}$$

解之得

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, y = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$$

故

$$z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{和} \quad z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

均满足要求.

注 解法一利用复数的几何性质,为一基本方法.解法二利用 1-7 题的结论.

本题运用了给复数乘模为 1 的复数即等于将此复数对应的矢量旋转一角度的几何性质.

1-13 计算 $\sqrt{1+i}$.

解 解法一 令 $\sqrt{1+i} = x+iy$, 则 $(x+iy)^2 = 1+i$. 由此得

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$\therefore (x^2 + y^2)^2 = 2 \quad \because x^2 + y^2 \geq 0$$

故得 $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$. 与(1)联立,并注意 $xy = \frac{1}{2} > 0$ (即实、虚部同号)得

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$\therefore \sqrt{1+i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\sqrt{2}+1} + i \sqrt{\sqrt{2}-1})$$

解法二 由复数开方运算规则,有

$$\sqrt{1+i} = |1+i|^{1/2} \left[\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right] \quad (k=0,1)$$

当 $k=0$ 时得

$$\begin{aligned} \sqrt{1+i} &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \sqrt[4]{2} \left[\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\sqrt{2}+1} + i \sqrt{\sqrt{2}-1}) \end{aligned}$$

当 $k=1$ 时得

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+i} &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) \right] \\
 &= \sqrt[4]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\sqrt{2}+1} + i \sqrt{\sqrt{2}-1})
 \end{aligned}$$

注 解法一根据复数相等的概念,归结为解实数方程组,而解法二根据复数开方的公式,为求得最后结果,利用了初等数学的半角公式.

1-14 如果复数 $a+ib$ 是实系数方程 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 的根,则 $a-ib$ 一定也是该方程的根.

证 因为 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 均为实数,故 $\bar{a}_0=a_0, \bar{a}_1=a_1, \dots, \bar{a}_n=a_n$. 且 $\overline{(z^k)}=(\bar{z})^k$, 故由共轭复数性质有: $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$. 则由已知 $P(a+ib)=0$. 两端取共轭得

$$\overline{P(a+ib)} = P(\overline{a+ib}) \equiv \bar{0} = 0$$

即 $P(a-ib) \equiv 0$. 故 $a-ib$ 也是 $P(z)=0$ 之根.

注 此题仅通过共轭的运算的简单性质及实数的共轭为其本身即得证. 此结论说明实系数多项式的复零点是成对出现的. 这一点在代数学中早已被大家认识. 特别地, 奇次实系数多项式至少有一个实零点.

1.2 复平面的点集与点列、复数项级数

1.2.1 基本要求

1. 掌握复平面点集的邻域、内点、开集、连通集、区域、单连域、多连域的概念.
2. 掌握复数列(点列)收敛的概念及收敛的充要条件.
3. 掌握复数项级数收敛的概念及收敛的充要条件.
4. 了解无穷远点(复数 ∞)的基本概念及性质.

1.2.2 内容提要

1. **定义 1** 满足不等式 $|z-z_0| < \delta$ 的点集称为 z_0 的 δ -邻域, 记为 $U_\delta(z_0)$; 满足不等式 $0 < |z-z_0| < \delta$ 的点集成为 z_0 的去心 δ -邻域, 记为 $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. 其中 $\delta > 0$.

2. **定义 2** 设有点集 $E, z_0 \in E$, 如果 $\exists \delta > 0$, 使得 $U_\delta(z_0) \subset E$, 则称 z_0 为点集 E 的内点; 若点集 E 的每个点都为 its 内点, 则称 E 为开集.

3. **定义 3** 若点集 E 中任意两点均可用完全属于 E 的折线段相连接, 则称 E

为连通集。

4. 定义 4 连通开集称为区域;对区域 D , 若 $\exists R > 0$, 使得 $D \subset U_R(0)$, 则称 D 为有界域, 否则称为无界域。

5. 定义 5 设有点 P , 如果 $\forall \delta > 0$, 总有 $U_\delta(P) \cap D \neq \emptyset$, 且 $U_\delta(P) \not\subset D$, 则称 P 为 D 的边界点, D 的边界点的全体称为 D 的边界, 记为 ∂D ; 区域 D 与其边界之并集称为闭区域, 记为 $\bar{D}$ 。

6. 定义 6 如果位于区域 D 内的任一条简单闭曲线(与自身不相交的闭曲线)之内部全部属于 D , 则称 D 为单连通区域, 否则称为多连通区域(或复连通区域)。

7. 定义 7 设有复数列 $a_k + ib_k = \alpha_k$, 复数 $A = a + ib$, 如果 $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 自然数 K , 使得只要 $k > K$, 就有 $|(a_k + ib_k) - (a + ib)| < \epsilon$ 。则称复数列 α_k 收敛于复数 A 。记之为 $\alpha_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$, 或者 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = A$ 。

8. 定义 8 复数列 $a_k + ib_k = \alpha_k$ 作成的无穷和式 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + ib_k)$ 称为复数项级数; $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k$ 称为复数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 的前 n 项部分和。

9. 定义 9 S_n 为 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 的部分和序列, $S = R + iI$ 为一复数, 如果 $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S$, 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛于和数 S 。记为 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = S$ 。

10. 定理 1 $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + ib_k) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} a_k \rightarrow a \\ b_k \rightarrow b \end{cases}$

11. 定理 2 $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + ib_k)$ 收敛于 $S = R + iI \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = R \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k = I \end{cases}$

12. 规定 规定复平面上有一个唯一的“无穷远点”, 对应于它的复数是唯一的“无穷大”, 记作 ∞ 。并规定 $|\infty| = +\infty$, ∞ 的实部、虚部及辐角无意义; 不含无穷远点的复平面称为有限平面, 含无穷远点的复平面称为扩充复平面; 设 $\alpha \neq \infty$, 则关于 ∞ 的四则运算规定为:

$$\alpha + \infty = \alpha + \infty = \infty$$

$$\alpha - \infty = \infty - \alpha = \infty$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0, \frac{\infty}{\alpha} = \infty$$

1.2.3 例题解析

1-15 指出下列关系表示的点之轨迹或范围;作出图并说明为何种点集.

1) $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$

2) $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| > 1$

3) $|z-1| \geq 2|z-i|$

4) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$

5) $|z-2| + |z+2| = 5$

解 1) 设 $z = x + iy$, 由条件得: $\sqrt{x^2 + y^2} + x < 1$

即 $x < -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$. 故关系式 $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$ 表示抛物

线 $x = -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$ 的左侧区域, 为一无界单连通区域, 如

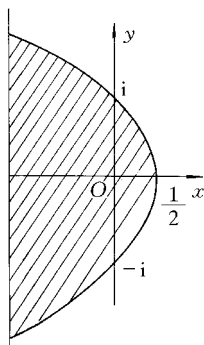


图 1.2

图 1.2 阴影所示.

2) 解法一 设 $z = x + iy$, 则由 $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| > 1$ 得

$$(x-3)^2 + y^2 > (x-2)^2 + y^2$$

故得 $|x-3| > |x-2|$. 由距离的表示式知, 此式表示到 3 之距离大于到 2 之距离的点的全体. 故

关系式 $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| > 1$ 表示直线 $x = \frac{5}{2}$ 左部平面区域,

为一无界单连通区域, 如图 1.3 阴影所示.

解法二 由原式得

$$|z-3| > |z-2|$$

据模的几何意义即可知, 满足此式的 z 为到点 3 之

距离大于到 2 之距离的点之全体. 直线 $\operatorname{Re}(z) = \frac{5}{2}$ 为到该两点距离相等之点的轨

迹. 故满足条件的 z 即为满足条件 $\operatorname{Re}(z) < \frac{5}{2}$ 的无界单连通域.

3) 设 $z = x + iy$, 则原式即为

$$(x-1)^2 + y^2 \geq 4[x^2 + (y-1)^2]$$

$$\text{即 } \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{9}$$

它表示一个以 $-\frac{1}{3} + i\frac{4}{3}$ 为心、 $\frac{\sqrt{8}}{3}$ 为半径的闭圆盘. 即满足条件 $|z-1| \geq 2|z-i|$

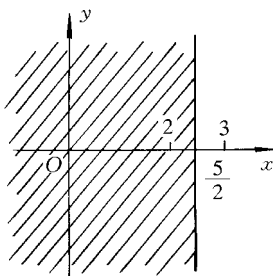


图 1.3

的 z 的全体是闭圆盘

$$\left| z + \left(\frac{1}{3} - i \frac{4}{3} \right) \right| \leq \frac{\sqrt{8}}{3}$$

如图 1.4 所示, 这是一有界闭区域, 且为单连域.

4) 令 $z = x + iy$, 由 $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$ 知

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z - i) = x > 0 \\ \operatorname{Im}(z - i) = y - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \arctan \frac{y-1}{x} = \frac{\pi}{4}$$

即

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

这样的点为 z 平面上从点 $z_0 = i$ 出发 (但不含 z_0 点) 与实轴倾角为 $\frac{\pi}{4}$ 的射线. 此射线作成的点集

既非开集, 也非闭集. 如图 1.5 所示.

5) 解法一 设 $z = x + iy$, 则原条件即为

$$\begin{aligned} |z - 2|^2 &= (5 - |z + 2|)^2 \\ &= 25 + |z + 2|^2 - 10|z + 2| \end{aligned}$$

即 $|z - 2|^2 - |z + 2|^2 - 25 = 10|z + 2|$

由模的定义得

$$\begin{aligned} (8x + 25)^2 &= 100|z + 2|^2 \\ &= 100(x^2 + 4x + 4) + 100y^2 \end{aligned}$$

化简得

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

这是一椭圆, 长半轴为 $\frac{5}{2}$, 短半轴为 $\frac{3}{2}$, 中心在原点, 它是有界闭集 (全部为边界点). 如图 1.6 所示.

解法二 注意到模的几何意义, 满足条件

$$|z - 2| + |z + 2| = 5$$

的点是到 $z_1 = 2$ 与 $z_2 = -2$ 两点距离之和为定长 $= 5$ 的点之轨迹. 由椭圆性质知, 此轨迹即是以 $z_1 = 2, z_2 = -2$ 为焦点, 以 $\frac{5}{2}$ 为长半轴的椭圆.

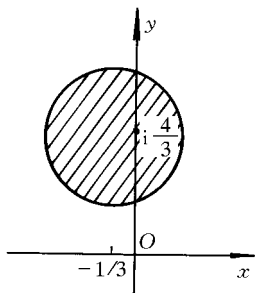


图 1.4

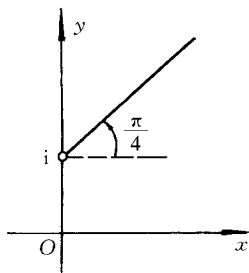


图 1.5

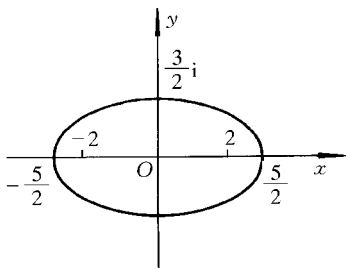


图 1.6

注 1)与 3)直接由模的定义推出; 2)、5)也可由模的定义推出,但直接由模的几何意义出发更简单. 4)中要注意 $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$ 说明点 $z-i$ 在第一象限. 故满足条件的 z 应位于射线 $y=x+1, (x>0)$ 上. (不含射线起点 $z_0=i$), 而不是直线 $y=x+1$ 上.

1-16 证明: 若 $\alpha_n = a_n + ib_n$ 收敛, 则必有界.

证法一 设 $\alpha_n \rightarrow A$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得只要 $n > N$, 就有 $|\alpha_n - A| < \epsilon$. 于是, 当 $n > N$ 时

$$|\alpha_n| = |\alpha_n - A + A| \leq |\alpha_n - A| + |A| < \epsilon + |A|$$

即至多除去 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 之外, 全部 α_n 均位于 $U_R(0)$ 内, 这里 $R = \epsilon + |A|$. 现在令 $M = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|, \epsilon + |A|\}$. 则 $\forall \alpha_n$, 均有 $|\alpha_n| \leq M$. 证毕.

证法二 设 $\alpha_n \rightarrow A = a + ib$, 则

$$\because \alpha_n \rightarrow A \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \end{cases} \quad \text{而} \quad \begin{cases} a_n \rightarrow a \Rightarrow \{a_n\} \text{ 有界} \\ b_n \rightarrow b \Rightarrow \{b_n\} \text{ 有界} \end{cases}$$

$$\therefore \alpha_n \rightarrow A \Rightarrow |\alpha_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ 有界}$$

即 $\exists R > 0$, 使得 $\forall \alpha_n$, 有 $|\alpha_n| < R$. 所以 $\{\alpha_n\}$ 有界.

注 证法一直接运用收敛的定义, 并注意到此定义的几何意义. 直接给出一个界值 M ;

证法二则利用收敛的充要条件将问题转化为 α_n 实部与虚部收敛必有界的已知结论, 从而得到 $|\alpha_n|$ 有界结论.

$$1-17 \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = \begin{cases} 0, & |\alpha| < 1 \\ \infty, & |\alpha| > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ \text{不存在}, & |\alpha| = 1 \text{ 且 } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

证 (1) 当 $|\alpha| < 1$ 时, 设 $\alpha = r \cos \theta + i r \sin \theta, \quad r < 1$.

则

$$\begin{aligned} \alpha^n &= r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta \\ \therefore \begin{cases} r^n \cos n\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ r^n \sin n\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

(2) 当 $|\alpha| > 1$ 时, 因为 $|\alpha^n| = |\alpha|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. 由 ∞ 的性质知, $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$. (注意此时 α^n 的辐角无确定趋势, 这是因为 ∞ 无辐角而言).

(3) 当 $\alpha=1$ 时, $\alpha^n=1$. $\therefore \alpha^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

(4) 当 $|\alpha|=1$, 且 $\alpha \neq 1$, 设 $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$. 则 $\theta \neq 2k\pi (k \text{ 为整数})$.

于是 $\alpha^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos n\theta$ 及 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n\theta$ 无确定值(即不存在)知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n$ 不存在.

注 1. 由此题的证明过程可见, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n$ 存在且为有限值 A 时, 便可转化为求其实、虚部点列极限问题, 且只会有 $A=0$ 与 $A=1$ 两种可能. 前者仅当 $|\alpha| < 1$, 后者仅当 $\alpha=1$; 当 $|\alpha| > 1$ 时, 不能由求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(\alpha^n)$ 或 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(\alpha^n)$ 出发, 因为此时可能发生这两极限均不存在(包括不为 $\pm\infty$)的情形. 但注意 $|\alpha|^n \rightarrow +\infty$ 必发生, 而“模可任意大”正是复数 ∞ 的唯一性质, 它不仅无确定的辐角, 而且也无确定的实、虚部. 故本题证明中用到 $|\alpha^n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \Leftrightarrow \alpha^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \infty$. 与此相对应的一个结果正是 $|\alpha| < 1$ 时得到的

$$|\alpha^n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \alpha^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

2. 本题结果在很多情形下有用.

1-18 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, 其中 $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1+i}{2}\right)^k$, 并由此判断复数项级数

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^k$ 的敛散性.

解 设 $\alpha = \frac{1+i}{2}$. 注意 $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha^k = \alpha(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) = \frac{\alpha(1 - \alpha^n)}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right] = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (\alpha^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0)$$

将 $\alpha = \frac{1+i}{2}$ 代入得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = i$$

由复数项级数收敛的定义可知, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^k$ 收敛于 i . 即 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^k = i$

注 1. 这里的 S_n 即为复数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ 的部分和序列, 求 S_n 之极限中

利用了 $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha^n \rightarrow 0$ 的结论. 由 S_n 极限存在得 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ 收敛结论. 这是最基本的

方法.

2. 由本题证明过程,可顺便得到一今后常用到的基本结果

当 $|\alpha| < 1$ 时,有 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ 或者 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$

1-19 证明:若 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛,则 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛(这时称 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 绝对收敛).

证 设 $\alpha_k = a_k + i b_k$, 则 $|a_k| \leq |\alpha_k|$, $|b_k| \leq |\alpha_k|$. 由正项级数比较判别法, $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ 均收敛, 又由实数项级数知识知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛. 于是由复数项级数收敛的充要条件得 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛.

注 若 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛, 称 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 绝对收敛. 则本题的结论说明复数项级数绝对收敛, 则必收敛. 证明方法用的是实数项级数对应的同一性质. 应注意 $\sum \alpha_k$ 收敛 $\nRightarrow \sum |\alpha_n|$ 收敛, 故不能由 $\sum |\alpha_k|$ 发散推出 $\sum \alpha_k$ 发散.

1-20 判断级数的收敛性, 绝对收敛性.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

解 1) $\because i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} + i \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \right)$$

由实数项级数收敛的狄里赫利判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$ 均收敛. 故

由复数项级数收敛充要条件知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 收敛. 但 $\left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 非绝对收敛.

2) 因 $\left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right|$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ 收敛, 且为绝对收敛.

注 由此两题可见, 对于复数项级数: 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛; 而收敛 $\nRightarrow$ 绝对收

敛. 2) 可作为此种情况的例子.

1-21 判断下列数列的敛散性. 且在收敛时求出极限值.

$$\begin{aligned} 1) \alpha_n &= \frac{1+i}{1-i} \frac{n}{n} & 2) \alpha_n &= \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-n} & 3) \alpha_n &= (-1)^n + \frac{i}{n+i} \\ 4) \alpha_n &= e^{-i\frac{n\pi}{2}}, & 5) \alpha_n &= \frac{1}{n} e^{-i\frac{n\pi}{2}} \end{aligned}$$

解 1) $\because \alpha_n = \frac{1+i}{1-i} \frac{n}{n} = \frac{(1-n^2) + 2ni}{1+n^2} = \frac{1-n^2}{n^2+1} + i \frac{2n}{1+n^2} = a_n + i b_n,$

$$\text{且 } a_n = \frac{1-n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{1+i}{1-i} \frac{n}{n} \text{ 收敛, 且 } \alpha_n \rightarrow -1.$$

$$2) \because \alpha_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{2}}\right)^n. \text{ 令 } \frac{1}{1 + \frac{i}{2}} = \alpha_0. \text{ 则 } \alpha_0 = \frac{4}{5} - i \frac{2}{5}$$

$$\because |\alpha_0| = \sqrt{\frac{20}{25}} < 1, \text{ 故 } \alpha_n = \alpha_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ (由 1-18 题结论).}$$

$$3) \text{ 解法一 设 } \beta_n = \frac{i}{n+i} = \frac{1+ni}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1} + i \frac{n}{n^2+1}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{n^2+1} \rightarrow 0 \\ \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(-1)^n + \beta_n] \text{ 不存在, 即 } \{\alpha_n\} \text{ 不收敛.}$$

解法二 $\because \alpha_n = (-1)^n + \frac{i}{n+i} = \left[(-1)^n + \frac{1}{n^2+1}\right] + i \frac{n}{n^2+1} = a_n + i b_n$

$$\because a_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2+1} \text{ 极限不存在.}$$

$$\therefore \alpha_n \text{ 极限不存在. 即 } \{\alpha_n\} \text{ 不收敛.}$$

$$4) \alpha_n = e^{i\frac{n\pi}{2}} = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}$$

解法一 易见, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{n\pi}{2}$ 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$ 均不存在. 故 $\{\alpha_n\}$ 不收敛.

解法二 设 $\beta = e^{i\frac{\pi}{2}}$. 则 $|\beta| = 1$, 且 $\beta \neq 1$, 由 1-18 题知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta^n$ 不存在.

$$5) \alpha_n = \frac{1}{n} e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} + i \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = a_n + i b_n$$

$$\therefore \text{由} \begin{cases} a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_n = a_n + i b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

注 判断点列极限存在性最基本的方法是利用充要条件转化为对实数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 敛散性判断. 在 2) 与 4) 中则通过运用 1-18 题结论得出结果.

1.3 复变函数

1.3.1 基本要求

1. 掌握定义于区域 D 上的复变量函数 $w=f(z)$ 的定义及其建立的平面点集到平面点集的映射(变换)概念.
2. 掌握复变函数在一点处的极限、连续、可导概念及极限存在、连续、可导的充要条件.
3. 掌握复变函数在一点解析的概念及解析的充要条件. 了解解析函数与调和函数的关系.
4. 掌握函数解析性判定方法.

1.3.2 内容提要

1. **定义 1** 设 D 为一平面区域, 如果存在一确定规则, 使得对 $\forall z \in D$, 有一个或几个相应的复数 w 与之对应, 则称复变数 w 是复变数 z 的函数(简称复变函数), 记作

$$w = f(z), z \in D$$

D 称为定义域. 对应于 D 的一切 w 的集合 D^* 称为值集.

如果每个 $z \in D$ 仅对应一个 w 值, 则称 $f(z)$ 为单值函数; 如果一个 z 值对应两个或两个以上 w 值, 则称 $f(z)$ 为多值函数.

2. 设 $z=x+iy, w=u+iv$. 则 $w=f(z), z \in D$ 建立了 Z 平面上区域 D 与 W 平面上点集 D^* 间的映射. 或者由 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 确定了变换

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

3. **定义 2** 设 $f(z)$ 在 $0 < |z-z_0| < \rho$ 内有定义. 如果存在复数 A , 满足对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (\delta \leq \rho)$ 使得只要 $0 < |z-z_0| < \delta$, 就有 $|f(z)-A| < \epsilon$. 则称 $f(z)$ 在 z_0

点以 A 为极限. 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} A$.

4. 定理一 设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $A = u_0 + i v_0$, $z_0 = x_0 + i y_0$.

则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u_0 \\ v(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v_0 \end{cases}$$

5. 定理二 如果 $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} A$, $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} B$. 则

$$1) [f(z) \pm g(z)] \xrightarrow{z \rightarrow z_0} A \pm B.$$

$$2) f(z)g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} AB.$$

$$3) f(z)/g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} A/B \quad (B \neq 0).$$

6. 定义 3 设 $f(z)$ 在 $U_\rho(z_0)$ 内有定义. 且 $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0)$. 则称 $f(z)$ 在 z_0

处连续.

7. 定理三 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + i y_0$ 处连续

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} \text{ 均在 } (x_0, y_0) \text{ 处连续.}$$

8. 定理四 连续函数的和、差、积、商(分母 $\neq 0$) 仍为连续函数.

9. 定义 4 设 $f(z)$ 在 $U_\rho(z_0)$ 内有定义. 且 $z_0 + \Delta z \in U_\rho(z_0)$.

如果极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在, 则称 $f(z)$ 在点 z_0 处可导. 且记此极限

为 $f'(z_0)$.

10. 定理五 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + i y_0$ 处可导 $\Leftrightarrow$

1° $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 且 2° $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处满足 Cauchy-Riemann 方程(简称 C-R 方程).

$$\text{C-R 方程: } \begin{cases} \left[\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{(x_0, y_0)} \\ \left[\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{(x_0, y_0)} \end{cases}$$

且

$$f'(z_0) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{(x_0, y_0)}$$

10'. 推论 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处具一阶连续偏导且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z_0 处可导.

求导规则与公式: 实函数中关于求导数的规则和公式在复变函数中(可导时)保持不变.

11. 定义 5 设 $f(z)$ 在 $U_\rho(z_0)$ 内有定义, 如果存在 $\delta > 0$ ($\delta \leq \rho$), 使得 $f(z)$

在 $U_\delta(z_0)$ 内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析; 如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

12. 定理六 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + i y_0$ 点解析 $\Leftrightarrow$ 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\begin{cases} 1^\circ u(x, y) \text{ 与 } v(x, y) \text{ 在 } U_\delta(M_0) \text{ 内处处可微, 且} \\ 2^\circ \text{ C-R 方程在 } U_\delta(M_0) \text{ 内处处成立.} \end{cases} \quad (M_0 = (x_0, y_0))$$

$f(z)$ 在区域 D 内处处解析称为 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

13. 定理七 $f(z)$ 在区域 D 内解析 $\Leftrightarrow f(z)$ 在区域 D 内可导.

13'. 推论 $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 D 内具一阶连续偏导, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z) = u + i v$ 在 D 内解析.

14. 定理八 若 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在区域 D 内解析, 则在 D 内有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

即 u, v 为 D 内的调和函数. 且称 $v(x, y)$ 为 $u(x, y)$ 的共轭调和函数.

15. 定理九 解析函数的和、差、积、商 (分母 $\neq 0$) 仍为解析函数.

1.3.3 例题解析

1-22 讨论下列函数在指定点的极限存在性, 若存在求出其值, 并判断在该点的连续性.

$$1) f(z) = 2x + i y^2, z_0 = 2i; \quad 2) f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right), z_0 = 0$$

$$\text{解 } 1) f(z) = u(x, y) + i v(x, y), z_0 = x_0 + i y_0$$

则

$$u(x, y) = 2x, \quad v(x, y) = y^2, \quad (x_0, y_0) = (0, 2),$$

$$\therefore \begin{cases} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} u(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} 2x = 0 \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} v(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 + 4i = 4i$$

又注意

$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) = 4i$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = 4i$$

即 $f(z) = 2x + i y^2$ 在点 $z_0 = 2i$ 处极限存在且连续.

2) 设 $z = x + i y$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right) = \frac{1}{2i} \frac{4ixy}{x^2 + y^2} = 2 \frac{xy}{x^2 + y^2} = u(x, y) + i v(x, y)$$

显然, $v(x, y) \equiv 0$ 在 $(0, 0)$ 点极限存在且连续.

但注意 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 2 \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在, 事实上, 令 $y = kx$. 有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} 2 \frac{xy}{x^2 + y^2} =$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} \frac{2k}{1 + k^2} = \frac{2k}{1 + k^2}$, 对不同 k 值有不同结果, 故知 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 2 \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在.

所以 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ 不存在. 由连续与极限的关系知 $f(z)$ 在 $z=0$ 处极限不存在、不连续.

注 这两个问题均通过极限存在的充要条件将问题转化为两个二元实函数在对应点 (x_0, y_0) 处极限存在性的判断问题, 这是最常用的方法. 在问题 1) 中, 又根据连续的另一等价定义 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 立即得到 $f(z)$ 在 $z_0 = 2i$ 处不仅极限存在, 而且在该点连续的结论; 在 2) 中, $f(z)$ 实际上是一复变量实值函数, 即 $v(x, y) \equiv 0$, 所以由充要条件只需判断一个二元实函数 $u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 点的极限存在性. 由该二元实函数在 $(0, 0)$ 点极限不存在即得 $f(z)$ 在 $z=0$ 处极限的不存在性.

1-23 研究函数 $f(z) = \arg z$ ($-\pi < \arg z \leq \pi$) 在除去 $z=0$ 与 $z=\infty$ 的复平面上的连续性.

解 注意 $f(z) = \arg z = u(x, y) + i v(x, y)$ 为一复变量实值函数.

所以 $v(x, y) \equiv 0$, 且当规定 $-\pi < \arg z \leq \pi$ 时, 有

$$u(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \text{ 且 } y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \text{ 且 } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

由二元实函数 $\arctan \frac{y}{x}$ 的连续性及 $\arctan \frac{y}{x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 知, 在除去 $z=0$ 与 $z=\infty$ 的复平面上, $u(x, y)$ 仅在负实轴上的各点不连续, 在其余点处处连续.

事实上, 对 $\forall x_0 < 0$, 当 (x, y) 分别沿射线 $\begin{cases} x=x_0 \\ y>0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=x_0 \\ y<0 \end{cases}$ 趋近于 $(x_0, 0)$ 时,

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} u(x,y)$ 将有不同值

$$\lim_{\substack{x=x_0 \\ y \rightarrow 0^+}} \arg z = \lim_{\substack{x=x_0 \\ y \rightarrow 0^+}} (\pi + \arctan \frac{y}{x}) = \pi$$

$$\lim_{\substack{x=x_0 \\ y \rightarrow 0^-}} \arg z = \lim_{\substack{x=x_0 \\ y \rightarrow 0^-}} (-\pi + \arctan \frac{y}{x}) = -\pi$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} u(x,y) \text{ 不存在. } (\forall x_0 < 0)$$

从而 $f(z) = \arg z$ 在去掉包含原点的负实轴的复平面上处处连续.

注 这里应当注意,主值分支 $\arg z$ 的主值区间是为保证单值性而规定的,也可作其它主值区间的选择,如规定为 $0 \leq \arg z < 2\pi$ 的情形,则上述不连续点集就成为包含原点的正实轴.

1-24 设 $f(z)$ 在 z_0 处连续,且 $f(z_0) \neq 0$,证明: 存在 $\delta > 0$,使得当 $z \in U_\delta(z_0)$ 时有 $f(z) \neq 0$.

证 证法一 由复数为 0 的充要条件知,只要证明 $\exists \delta > 0$,当 $z \in U_\delta(z_0)$ 时有 $|f(z)| > 0$ 即可. 设 $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $z_0 = x_0 + i y_0$.

因为 $f(z)$ 在 z_0 处连续且 $f(z_0) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases} \text{ 在 } (x_0, y_0) \text{ 处连续且 } u^2(x_0, y_0) + v^2(x_0, y_0) > 0.$$

令 $F(x,y) = u^2(x,y) + v^2(x,y)$, 则 $F(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续且 $F(x_0, y_0) > 0$. 由二元连续函数性质知,存在 $\delta > 0$,使得当 $(x,y) = M \in U_\delta(M_0)$ ($M_0 = (x_0, y_0)$) 时,有 $F(x,y) > 0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0$,当 $z \in U_\delta(z_0)$ 时,有 $|f(z)| > 0 \Leftrightarrow f(z) \neq 0$, $z \in U_\delta(z_0)$.

证法二 由于 $f(z_0) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) \neq 0$,所以至少有 $u(x_0, y_0) \neq 0$ 或 $v(x_0, y_0) \neq 0$ 之一发生,不妨设 $u(x_0, y_0) \neq 0$,又由 $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + i y_0$ 处连续知 $u(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续,由二元连续函数性质, $\exists \delta > 0$,使得当 $M = (x,y) \in U_\delta(M_0)$ ($M_0 = (x_0, y_0)$) 时,有 $u(x,y) \neq 0$,于是,当 $z \in U_\delta(z_0)$ 时, $f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \neq 0$. 证毕.

注 1. 证法一运用复数为 0 $\Leftrightarrow$ 其模为 0 及复变函数在一点连续的充要条件. 而证法二除了运用连续的充要条件外,还用到了复数与 0 相等的概念. 之后,两种证法都将问题转化为二元实函数在点 (x_0, y_0) 连续且不等于零的情况,从而顺利应用实函数的已知结论;

2. 此题结论是在一点连续且非 0 的复变函数的重要性质.

1-25 研究下列函数在任一点处的可导性、解析性.

$$1) f(z) = x^3 - i y^3; \quad 2) f(z) = \bar{z}; \quad 3) f(z) = |z|;$$

$$4) f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

$$\text{解 } 1) \because f(z) = x^3 - i y^3 = u(x, y) + i v(x, y).$$

$$\text{故 } u(x, y) = x^3, v(x, y) = -y^3; \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = -3y^2$$

显见, u, v 在全平面有连续一阶偏导, 故 $u(x, y), v(x, y)$ 全平面处处可微, 又令

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

得 $3x^2 = -3y^2$, 即

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

即, 当且仅当 $x = y = 0$ 时, C-R 方程成立. 所以 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 其它任何点不可导. 由解析的定义可知, $f(z)$ 于全平面处处不解析.

注 由此结果可见, 复变函数可存在孤立的甚至唯一的可导点, 而无孤立的解析点.

$$2) \text{ 解法一 } f(z) = \bar{z} = u + i v, \quad u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

$\because u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 于全平面处处具一阶连续偏导. 故于全平面处处可微.

$$\text{但 } \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1. \text{ 即 C-R 方程处处不成立.}$$

$f(z) = \bar{z}$ 于全平面处处不可导, 全平面处处不解析.

解法二 $f(z) = \bar{z} = x - i y$, 对任一 z_0 , 考虑极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} = \begin{cases} 1, & \Delta x \neq 0, \Delta y = 0 \\ -1, & \Delta x = 0, \Delta y \neq 0 \end{cases}$$

即对任一 z_0 , 上述极限不存在, 由可导定义知, $f(z) = \bar{z}$ 于任一点 z_0 处不可导. 故全平面不解析.

注 1. 由此题可见, 复变函数的实部、虚部于全平面可微不能保证它在任一点的可导性;

2. 解法一通过检验可导的充要条件进行讨论, 而解法二则直接用可导定义进行检验. 当 $f(z)$ 的实虚部易于表出时, 解法一是常用方法; 当 $f(z + \Delta z) - f(z)$ 易于求得时, 也可通过解法二进行讨论.

$$3) f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\text{其中 } u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad v(x, y) \equiv 0.$$

所以,当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$$

因此,对 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, C-R 方程不成立.

而当 $(x, y) = (0, 0)$ 时,由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在,即

$\frac{\partial u(0, 0)}{\partial x}$ 不存在,同理, $\frac{\partial u(0, 0)}{\partial y}$ 不存在. 故 $f(z) = |z|$ 在 $z=0$ 处不可导. 于是 $f(z) = |z|$ 于全平面处处不可导,不解析.

注 在本题讨论中,仍然采用检验可导充要条件的方法,由于 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 均连续,故 u, v 可微,但 C-R 方程处处不成立. 对 $(x, y) = (0, 0)$, 从偏导定义出发,得知 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 不存在,从而 $u(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微,故对平面任一点,可导的充要条件不满足.

$$4) f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 且 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 于全平面连续,故 $f(z)$ 于全平面处处可导,全平面处处解析.

$$\text{又, } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{因此有 } f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z).$$

注 1. 这里用区域解析的充分性条件得到结论;

2. 本题中的 $f(z)$ 是一性质极好的函数: 不仅全平面解析,且具有特性 $f'(z) = f(z)$, 它正是实指数函数 e^x 在复平面的推广,即 $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp z \triangleq e^z$. 但应注意这一推广产生的新性质:

- 1) 由于 $\cos y$ 与 $\sin y$ 以 $2k\pi$ 为周期,使得 e^z 以 $2\pi i$ 的整数倍为周期.
- 2) e^z 可取到除 0 以外的任意复值,包括负值. 这两点是值得注意的.

1-26 证明 如果 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在区域 D 内解析且满足下列条件之一,则 $f(z)$ 必为一常数.

- 1) $f(z)$ 在 D 内为实值.
- 2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析.
- 3) $|f(z)|$ 在 D 内为常数.

4) $\arg f(z)$ 在 D 内为一常数.

5) 在 D 内有 $au(x, y) + bv(x, y) = c$, 其中 a, b, c 是不全为 0 的实常数.

6) $\operatorname{Re}(f(z))$ 或 $\operatorname{Im}(f(z))$ 在 D 内为常数.

7) 在 D 内有 $f'(z) = 0$.

证 首先, 由条件

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在 D 内解析

$$\Leftrightarrow \text{a) } u, v \text{ 均在 } D \text{ 内可微, 且 b) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ 在 } D \text{ 内处处成立.}$$

1) 因为 $f(z)$ 在 D 内取实值, 即 $v(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D$. 于是 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$,

$(x, y) \in D$. 将此结果代入 C-R 方程 b), 得 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, (x, y) \in D$. 所以 $u(x, y)$

$= A, (x, y) \in D$.

即 $f(z) = A \quad z \in D$ (A 为一常数)

2) 由于 $\overline{f(z)} = u(x, y) - i v(x, y) = u(x, y) + i [-v(x, y)]$ 在 D 内解析.

因而除条件 a), b) 成立之外, 条件 c) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ 成立.

联立 b), c) 得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, (x, y) \in D$. 又由 b) 或 c) 得 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

所以在 D 内, 恒有 $u(x, y) = A, v(x, y) = B$. 即 $f(z) = A + i B$ 为常数.

3) 由于 $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \equiv C, (x, y) \in D$.

1° 若 $C = 0$, 则 $|f(z)| \equiv 0, z \in D \Leftrightarrow f(z) \equiv 0, z \in D$.

2° 若 $C \neq 0$, 则由 $u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv C^2 \neq 0$

两端分别关于 x, y 求偏导得:

$$\text{e) } \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

将 b) 代入 e) 得

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

由

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv C^2 \neq 0$$

得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \quad (x, y) \in D$$

代入 b) 得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \quad (x, y) \in D$$

于是

$$u(x, y) \equiv A, \quad v(x, y) \equiv B$$

即

$$f(z) \equiv A + iB, \quad z \in D \quad (A, B \text{ 为任意实常数})$$

4) 因为 $\arg f(z) \equiv \text{常数}$, $z \in D$, 由主值支 $\arg w$ 的表达式得

$$f) \quad \arctan \frac{v(x, y)}{u(x, y)} \equiv \text{常数} = C, \text{ 及 } u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv C^2 \neq 0, (x, y) \in D$$

$$1^\circ \text{ 若 } C=0, \text{ 则 } \begin{cases} v(x, y) \equiv 0 \\ u(x, y) > 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

归为 1) 的情形, 得证.

2° 若 $C \neq 0$, 对 c) 两端分别关于 x, y 求偏导得

$$\begin{cases} \frac{u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2 + v^2} = 0 \\ \frac{u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}}{u^2 + v^2} = 0 \end{cases} \quad (u^2 + v^2 \neq 0) \quad \text{即} \quad \begin{cases} u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

将 b) 代入得

$$\begin{cases} u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

$$\because u^2(x, y) + v^2(x, y) \neq 0, \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

再由 b) 即得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

从而得 $f(z) = A + iB$, $z \in D$ (A, B 为任意实常数)

5) $\because au(x, y) + bv(x, y) = c, (x, y) \in D$, 且 a, b, c 是不全为 0 的实常数.

所以有 $a^2 + b^2 \neq 0$. 于是对上式两端分别关于 x, y 求偏导得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

将 b) 代入得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ b \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

因为 $a^2 + b^2 \neq 0$, 故得
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

再由条件 b) 即得 $\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. 于是得

$f(z) \equiv A + iB, z \in D$ (A, B 为任意实常数)

6) 1° 若 $\operatorname{Im}(f(z)) \equiv C = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内取实值. 即 1) 所证. 若 $\operatorname{Im}(f(z)) \equiv C \neq 0$

即
$$v(x, y) \equiv C, \quad (x, y) \in D$$

则 $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, (x, y) \in D$, 代入 b), 即得

$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, (x, y) \in D, \therefore f(z) = A + iB, z \in D$ (A, B 为任意实常数)

2° 若 $\operatorname{Re}(f(z)) \equiv C$, 即 $u(x, y) \equiv C, (x, y) \in D$.

则 $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$. 则由 b) 知 $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, 即 $f(z) \equiv A + iB, z \in D$.

7) 由于 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$. 所以若在 D 内有 $f'(z) = 0$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$
($x, y) \in D$, 由条件 b) 即得 $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in D$.

所以 $f(z) \equiv A + iB$ (A, B 为任意实常数), $z \in D$.

注 以上各命题的论证均是在 $f(z)$ 于区域 D 上解析的前提下进行的, 否则结论不一定成立. 例如, $f(z) = |z|$ 为一实值函数, 满足条件 1). 但它于全平面不解析 (见 1-26 题, 3)). 显然 $f(z) = |z|$ 在任何区域 D 上不可能取常数值, 即无题中的结论.

1-27 设记号“ $A \rightarrow B$ ”表示 A 蕴含 B , “ $A \nrightarrow B$ ”表示 A 不蕴含 B . 试用这两记号给出下述概念间的关系, 并给出简要论证.

1) (1) $f(z)$ 在区域 D 内解析; (2) $f(z)$ 在区域 D 内可导,

2) (1) $f(z)$ 在 z_0 点极限存在; (2) $f(z)$ 在 z_0 点连续; (3) $f(z)$ 在 z_0 点可导;

(4) $f(z)$ 在 z_0 点解析; (5) $\exists \delta > 0$, 使 $f(z)$ 在 $U_\delta(z_0)$ 内可导; (6) $\exists \delta > 0$, 使 $f(z)$ 在 U_δ 内解析.

解 1) 成立关系, (1) $\Leftrightarrow$ (2). 即(1)与(2)等价. 因为 $f(z)$ 在区域 D 解析, 即在 D 内每点解析. 由解析的定义知, $f(z)$ 在 D 内每点可导. 故(1) $\rightarrow$ (2)成立. 又由区域的概念知, D 的每点均为内点. 即 $\forall z_0 \in D, \exists \delta > 0$, 使 $U_\delta(z_0) \subset D$. 于是由解析定义知, $f(z)$ 在 z_0 处解析又由 $z_0 \in D$ 的任意性知(2) $\rightarrow$ (1).

2) 关系图为(6) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1). 简要论证如下: 由邻域的概念知, 对 $\forall \delta > 0, U_\delta(z_0)$ 为一区域. 故由 1) 知(6) $\Leftrightarrow$ (5). 又由 $f(z)$ 在 z_0 点解析之定义知, (4) $\Leftrightarrow$ (5), (4) $\rightarrow$ (3), 但(3) $\nrightarrow$ (4). 例 $f(z) = x^3 - i y^3$ 在 $z=0$ 处可导, 但不解析(1-26 题. 1)).

下证(3) $\rightarrow$ (2): 因为 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ 存在. 令 $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \alpha(z)$, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha(z) = 0$. 于是 $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$ 故 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 即可导必连续.

但(2) $\nrightarrow$ (3), 例 $f(z) = \bar{z}$ 处处连续. 但无一可导点(1-26 题. 2)).

(2) $\rightarrow$ (1): 由连续定义知 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 故连续必极限存在.

但(1) $\nrightarrow$ (2), 例: 取 $u(x, y) = \frac{|xy|}{|x| + |y|}, (x^2 + y^2 \neq 0), v(x, y) \equiv 0$. 则:

$$|u(x, y)| = u(x, y) = \frac{|x||y|}{|x| + |y|} \leq \frac{|x| \cdot |y|}{|x|} = |y|. \text{ 易见, } u(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0,$$

且 $v(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$, 即 $f(z) = \frac{|xy|}{|x| + |y|}$ 在 $z_0 = 0$ 处极限存在且 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$, 但 $f(0)$ 显然不存在. 故 $f(z)$ 在 $z_0 = 0$ 处不连续. 即(1) $\nrightarrow$ (2).

注 1. 本题的结论是对复变函数在一点或一区域内有关性态关系的一种归纳. 是十分重要的. 证明中用到的几个简单例子(反例)分别证明对应的关系“ $\nrightarrow$ ”. 这种举反例的方法是数学上常用的用来证明关系“ $A \nrightarrow B$ ”的论证方法;

2. 由此题结论可见, 函数 $f(z)$ 在一点 z_0 处极限存在, 连续、可导都是局部性态, 而在一点 z_0 处解析则不然, 因为在 z_0 点解析, 等价于在 z_0 的某一邻域 $U_\delta(z_0) (\delta > 0)$ 内的每点解析. 即不存在孤立的解析点. 但存在孤立的可导点(1-26 题, 1)).

1-28 证明解析函数 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 的实、虚部所确定的曲线族 $u(x, y) = C$ 与 $v(x, y) = B$ 在 $f'(z) \neq 0$ 的点处是正交的. (C, B 为任意实数)

证 因为在 $f'(z) \neq 0$ 处, 有 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \neq 0$. 于是

(1) 对使 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$ 的点 (x, y) , 曲线族 $u(x, y) = C$ 在该点处的切线斜率为

$$k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

曲线族 $v(x, y) = B$ 在该点处的切线斜率为 $k_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}}$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

所以 $k_1 k_2 = -1$. 即曲线族 $u(x, y) = C$ 与 $v(x, y) = B$ 正交.

(2) 对使得 $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ 的点 (x, y) , 曲线族 $u(x, y) = C$ 在该点处切线为铅

直线 ($\because \frac{dx}{dy} = 0$), 而曲线族 $v(x, y) = B$ 在该点处切线为水平线 ($\because \frac{dy}{dx} = 0$), 故二者

正交. 同理, 当 $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 时, 二者也正交.

注 1. 本题证明中用到曲线与曲线正交即为二者在交点处切线的正交这一概念;

2. 本题的结论是解析函数在 $f'(z) \neq 0$ 处的又一性质.

1.4 初等函数

1.4.1 基本要求

1. 掌握复指数函数 $\exp z$ 的定义与性质.
2. 掌握复对数函数 $\text{Ln } z$ 的定义与性质.
3. 掌握复数乘幂 a^b 的定义与计算.
4. 掌握有理幂函数的定义、性质, 了解一般幂函数定义及无穷多值性.
5. 掌握复三角函数、双曲函数定义与性质.

1.4.2 内容提要

1. 1) $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$ 全平面解析, 且 $f'(z) = f(z)$.

2) $\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$.

3) $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ (k 为任意整数).

4) $\begin{cases} |\exp z| = e^x \\ \text{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi \end{cases}$ (k 为任意整数)

5) $\exp z \neq 0$ 常用记号 $\exp z = e^z$.

2. 1) 对给定的 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 w 称为对数函数. 记为 $w = \operatorname{Ln} z$, 它为多值函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$. 称 $\ln|z| + i \arg z$ 为其主值支, 记为 $\ln z$. 其余分支记为 $(\ln z)_k = \ln z + i 2k\pi$. ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). 每一固定 k 对应一 $\operatorname{Ln} z$ 的单值分支. 为 $\exp z$ 的反函数.

2) 有集合等式:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

3) $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ 在除去原点和负实轴的平面区域内解析. 且 $\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}$.

对给定的 k , $(\ln z)_k = \ln z + i 2k\pi$ 在同一区域内解析. 且 $\frac{d(\ln z)_k}{dz} = \frac{d \ln z}{dz}$.

3. 1) 对 $a \neq 0$, 及任意复数 b , 定义 $a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}$.

2) 对正整数 n , 幂函数 $w = z^n$ 全平面内单值、解析. 且 $\frac{dz^n}{dz} = n z^{n-1}$.

3) $w = z^{1/n} = |z|^{1/n} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 有 n 个分支. 均在除去原点和负实轴的复平面内解析.

且 $\frac{dz^{1/n}}{dz} = (e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z})'$. 每个固定分支均为 $w = z^n$ 的反函数.

4) 一般的幂函数: $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$. ($z \neq 0, \alpha$ 为任意复数) 当 $\alpha \neq$ 有理数时, 有无穷多个分支.

4. 1) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 为复余弦、正弦函数.

2) $\cos z$ 与 $\sin z$ 于全平面单值、解析. 以 $2k\pi$ 为周期 (k 为整数).

且 $(\cos z)' = -\sin z, (\sin z)' = \cos z$.

$$3) \begin{cases} \cos^2 z + \sin^2 z = 1, \\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos i y = \operatorname{ch} y, \\ \sin i y = i \operatorname{sh} y, \\ \cos(x + i y) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin(x + i y) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

4) $\cos z, \sin z$ 模无界.

5. 1) $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ 为复双曲余弦、双曲正弦函数.

2) $\operatorname{ch} z$ 与 $\operatorname{sh} z$ 全平面单值、解析. 且

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

$$3) \begin{cases} \operatorname{chi} y = \cos y. \\ \operatorname{shi} y = i \sin y. \\ \operatorname{ch}(x+i y) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y \\ \operatorname{sh}(x+i y) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y \end{cases}$$

1.4.3 例题解析

1-29 证明下列等式

$$1) \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad 2) \overline{\cos z} = \cos \bar{z}, \quad 3) \overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

证 1) $\because e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$$\therefore \overline{e^z} = e^x \cos y - i e^x \sin y = e^x [\cos(-y) + i \sin(-y)] = e^{\bar{z}}$$

$$2) \because \cos z = \cos(x+i y) = \cos x \operatorname{chy} - i \sin x \operatorname{shy}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{\cos z} &= \cos x \operatorname{chy} + i \sin x \operatorname{shy} \\ &= \cos x \operatorname{ch}(-y) - i \sin x \operatorname{sh}(-y) \\ &= \cos(x-i y) = \cos \bar{z} \end{aligned}$$

$$3) \because \sin z = \sin(x+i y) = \sin x \operatorname{chy} + i \cos x \operatorname{shy}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{\sin z} &= \sin x \operatorname{chy} - i \cos x \operatorname{shy} = \sin x \operatorname{ch}(-y) + i \cos x \operatorname{sh}(-y) \\ &= \sin(x-i y) = \sin \bar{z} \end{aligned}$$

注 这里的证明均由各函数的定义及性质得到.

1-30 解下列方程

$$1) \cos z = 0, \quad 2) \sin z = 0, \quad 3) 1 + e^z = 0.$$

解 $\because \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$

$$\therefore e^{iz} + e^{-iz} = 0$$

即 $e^{iz} = -e^{-iz}$. 所以 $e^{i2z} = -1$. 于是由对数函数定义得: $iz = \operatorname{Ln}(-1) =$

$i(2k+1)\pi$. 于是 $z_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, k 为任意整数.

$$2) \because \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

$$\therefore e^{iz} = e^{-iz}. \text{ 即 } e^{i2z} = 1.$$

由对数函数定义得 $i2z = \operatorname{Ln} 1 = i2k\pi$

$\therefore z_k = k\pi$. k 为任意整数.

$$3) \text{ 由 } e^z + 1 = 0 \text{ 得 } e^z = -1.$$

由对数函数定义得

$$z_k = \operatorname{Ln}(-1) = i(2k+1)\pi \quad k \text{ 为任意整数}$$

主值为

$$z_0 = \pi i$$

注 1. 这几题均利用指数函数的反函数(对数函数)之定义得到解决. 注意对数函数的多值性;

2. 由 1) 与 2) 的结果可见, 复变量正、余弦函数的零点与实变量正、余弦函数的零点相同. 即将 $\cos x, \sin x$ 推广到复变量时, 其零点不变. 由 3) 可见: 实变量指数函数 e^x 有一重要性质为 $e^x > 0$, 但推广到复变量时, 此性质变为 $e^z \neq 0$. 即对某些 z , 会发生 $e^z < 0$ 情形.

对应地, 其反函数 $\ln x$ 的性质: “零与负数无对数”在复变量情形下变为“0 无对数”.

1-31 证明, 对任何数(复数、实数) w , 方程 $\cos z = w$ 均有解.

证 在 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 中, 令 $t = e^{iz}$, 则 $\cos z = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$.

且 $t = e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$, 所以 $t \neq 0$. 且 t 可取到任意非 0 值.

于是, 原方程即为 $\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) = w$, 即 $t^2 - 2wt + 1 = 0$. 所以 $t = w + \sqrt{w^2 - 1}$.

(这里 $\sqrt{w^2 - 1}$ 有两个根)

故 $e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$, 由对数函数定义得

$$z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1}) = -i \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

所以 $w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$. 故右端对任意 w 均有意义, 得证.

注 这里的结果说明两点: (1) 复变量余弦函数可取到任意值(复、实值), 而不像实余弦函数取值区间仅为 $[-1, 1]$; (2) 所得结果改变 z 与 w 的位置, 即得 $w = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$. 这正是 $w = \cos z$ 的反函数. 可对 $\sin z$ 进行同样讨论, 此略.

1-32 求 ω , 使对任意 z , 有 $\sin(z + \omega) = \sin z$.

解 由 $\sin z$ 的定义, 即求满足方程

$$e^{i(z+\omega)} - e^{-i(z+\omega)} = e^{iz} - e^{-iz} \text{ 的一切 } \omega \text{ 值.}$$

整理化简即得: $e^{i2z} \cdot e^{i\omega}(1 - e^{-i\omega}) = -(1 - e^{-i\omega})$, 对任意 z 成立. 且因 $e^{i2z} \cdot e^{i\omega} \neq 0$.

故得 $1 - e^{-i\omega} = 0$, 即 $-i\omega = \operatorname{Ln} 1 = i2k\pi$, k 为任意整数.

所以 $\omega = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

注 由此题结果可见, 复变量正、余弦函数为周期函数, 且周期与实变量正、余弦的相同.

1-33 计算下列各值:

$$1) (1+i)^i, \quad 2) 1^z, z=x+iy, \quad 3) \operatorname{Ln}(-i).$$

解 1) $(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + i2k\pi]} = e^{-(\frac{1}{4}+2k)\pi + i \ln\sqrt{2}} \quad (k \text{ 为整数})$

$$2) 1^z = 1^{x+iy} = e^{(x+iy)\operatorname{Ln}1} = e^{(x+iy)(i2k\pi)} = e^{-2k\pi y} (\cos 2k\pi x + i \sin 2k\pi x) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

当 $k=0$ 时得 $1^z = 1$.

$$3) \operatorname{Ln}(-i) = \ln|-i| + i \arg(-i) + i2k\pi = -i\frac{\pi}{2} + i2k\pi. \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

注 1. 以上各题均由定义求得;

2. 值得注意的是: 1 只是 1^z 无穷多个值中的一个值(对应于 $k=0$), 这与实变量函数中的概念不同.

1-34 证明, 当 m 为整数时, $(e^z)^m = e^{mz}$.

证 $(e^z)^m = [e^x (\cos y + i \sin y)]^m = e^{mx} (\cos y + i \sin y)^m.$

由 De Moivre 公式得

$$(e^z)^m = e^{mx} (\cos y + i \sin y)^m = e^{mz}$$

注 本题的证明依赖于 De Moivre 公式. 故结论限于 m 为整数的情形. 但不难证明, 如果约定 $\operatorname{Ln}(\cos \theta + i \sin \theta) = i\theta$ (即只取主值分支), 则 De Moivre 公式可以推广到任意复数 α : $(\cos \theta + i \sin \theta)^\alpha = \cos \alpha\theta + i \sin \alpha\theta$. 于是本题的结果也可推广到 m 为任意复数的情形. (留作习题).

1-35 证明对数函数的下列性质

$$1) \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad 2) \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

证 1) 由对数函数定义有

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln |z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$$

因为 $\ln |z_1 z_2| = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) = \ln |z_1| + \ln |z_2|$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

所以 $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln |z_1| + \ln |z_2| + i (\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$

$$2) \because \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \ln \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + i \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2}$$

且 $\ln \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \ln \frac{|z_1|}{|z_2|} = \ln |z_1| - \ln |z_2|, \quad \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$

所以 $\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \ln |z_1| - \ln |z_2| + i (\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$

注 1. 值得注意的是这两个等式为集合等式. 且对于任意给定的非零 z_1 与 z_2 , 左端和右端都是一个无限集合, 两集合相等即两集合相同. 即左端集合 $\subseteq$ 右端集合且右端集合 $\subseteq$ 左端集合.

2. 由于上述原因, 在这两等式中, 当 $z_1 = z_2 = z \neq 0$ 时, 一定要注意

$$\operatorname{Ln} z^2 = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \neq 2 \operatorname{Ln} z$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z}{z} = \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z \neq 0.$$

因为集合 $\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z$ 表示集合 $\operatorname{Ln} z$ 中任意数与自己相加或与本集合中其它任一数相加所得的结果, 而 $2 \operatorname{Ln} z$ 则是对集合 $\operatorname{Ln} z$ 中每个数 2 倍后得到的结果. 显然, 只能得到

$2 \operatorname{Ln} z \subseteq \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z$, 而不可能得到相反的关系. 例 $z_1 = z_2 = i$, $\operatorname{Ln} i^2 = \operatorname{Ln}(-1) = i(2k+1)\pi$. ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 但 $2 \operatorname{Ln} i = 2 \cdot i(2m + \frac{1}{2})\pi = i(4m+1)\pi$. ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 对任一整数 m_0 , 有整数 $k_0 = 2m_0$ 使得 $i(2k_0+1)\pi = i(4m_0+1)\pi$. 可见 $2 \operatorname{Ln} i \subseteq \operatorname{Ln} i^2$, 反之不然, $\therefore$ 对 $k_1 = 3$, 有 $i(2k_1+1)\pi = i 7\pi$. 但满足 $i(4m+1)\pi = i 7\pi$ 的整数 m 不存在, 即 $\operatorname{Ln} i^2 \not\subseteq 2 \operatorname{Ln} i$. 由此可见 $\operatorname{Ln} i^2 = \operatorname{Ln} i + \operatorname{Ln} i \neq 2 \operatorname{Ln} i$.

同理, $\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z$ 表示给定数 $z (z \neq 0)$ 的一切对数值两两之差的集合. 不仅仅是每个对数值与自身之差的集合. 因此, $\operatorname{Ln} 1 = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z = i 2k\pi \neq 0$, ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1.5 保角映射

1.5.1 基本要求

1. 掌握解析函数 $f(z)$ 当 $f'(z) \neq 0$ 时, $|f'(z)|$ 与 $\operatorname{Arg} f'(z)$ 的几何意义及保角映射概念.

2. 掌握分式线性映射 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 的映射性质.

3. 掌握指数函数 $w = e^z$ 与对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ (任一单值分支) 的映射性质.

4. 掌握幂函数 $w = z^n$ 与 $w = z^{1/n}$ (n 为自然数, 且 $n \geq 2$) (任一单值分支) 的映射性质.

1.5.2 内容提要

1. 设 $w = f(z)$ 在 z_0 处解析, 且 $f'(z_0) \neq 0$. 则: 1) $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 是经过映射 $w = f(z)$ 后, 曲线 C 在 z_0 处的转动角. 它与曲线 C 的形状、方向无关. 2) $|f'(z_0)|$

是经过映射 $w=f(z)$ 后, 曲线 C 在 z_0 处的伸长率. 它与曲线 C 的性状无关.

2. 定义 如果在映射 $w=f(z)$ 下, 保持通过给定点的任意两曲线间之夹角的大小和方向, 则称映射 $w=f(z)$ 在该点是第一类保角映射.

3. 定理一 设 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析, 则映射 $w=f(z)$ 在所有使 $f'(z) \neq 0$ 的点处是第一类保角映射.

4. 定理二 分式线性映射 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 在扩充的复平面上是一一对应的. 处处为第一类保角映射, 且具保圆性 (视直线为半径无穷大的圆周)、保对称性 (关于圆周) 等性质.

5. 定理三 Z 平面上任给三个相异点 z_1, z_2, z_3 和 W 平面上任给三个相异点 w_1, w_2, w_3 , 存在唯一的分式线性映射使 $w(z_k)=w_k$. ($k=1, 2, 3$).

6. 映射 $w=e^z$ 在 Z 平面上处处为第一类保角映射. 它把水平带形区域 $-\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi$ 映为 W 平面的顶点在原点的角形域 $-\pi < \arg w(z) < \pi$, 且此两区域一一对应. 要将带形域保角地映为角形域时, 常采用映射 $w=e^z$.

7. $w=\operatorname{Ln} z = \ln z + i 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 有无穷多个分支. 任意两个相差 $2\pi i$ 的整数倍. 在主值分支 $w=\ln z$ 的映射下, 去掉原点和负实轴的 Z 平面的象是 W 平面上水平带形区域 $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$, 且二者一一对应, 处处保角. 分支 $(\operatorname{Ln} z)_k$ 的象是 $\ln z$ 的象沿 W 平面虚轴方向平移 $2k\pi$ 的结果. 要将角形区域保角地映为带形区域, 常采用对数映射.

8. 映射 $w=z^n$ 把顶点在原点, 开度为 θ , ($0 < \theta \leq \frac{2\pi}{n}$) 的角形区域双方单值且保角地映成顶点在原点, 开度为 $n\theta$ 的角形区域. 要将角形区域映成角形区域, 常用映射 $w=z^n$.

9. 映射 $w=z^{1/n}$ ($n \geq 2$, 自然数), 任意一个有限数 $z \neq 0$, 在映射 $w=z^{1/n}$ 下有 n 个不同的象点, 它们分布在内接于圆周 $|w|=|z|^{1/n}$ 的一个正 n 角形的顶点上. 去掉原点与负实轴的 Z 平面被映成 W 平面上的角形区域 $\frac{-\pi+2k\pi}{n} < \arg w < \frac{\pi+2k\pi}{n}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$), 对固定的 k , 二者双方单值, 保角.

1.5.3 例题解析

1-36 求所给区域在指定映射下的象

1) $\operatorname{Re}(z) > 0, w=i z+i$

2) $\operatorname{Im}(z) > 0, w=(1+i)z$

3) $0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{1}{2}, w=\frac{1}{z}$

4) $\operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0, w=\frac{1}{z}$

5) $\operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < 1, w = \frac{i}{z}$.

解 1) 解法一 所给区域为 Z 平面的右半平面, 注意 $w = i(z+1)$ 可视为 $w_1 = z+1$ 与 $w = i w_1$ 的复合, 前者为沿实轴正向平移单位 1 的平移变换, 后者为旋转变换, 旋转角为 $\frac{\pi}{2}$, 故可知 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 在 $w = i z + i$ 下的象为 $\operatorname{Im} w > 1$. 如图 1.7:

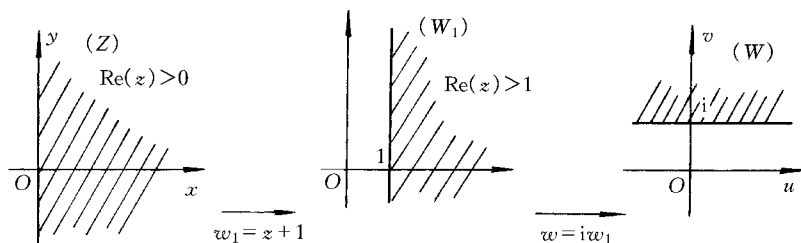


图 1.7

解法二 取 $z = x + i y$. 则 $w = i(z+1) = -y + i(x+1) = u + i v$, $\operatorname{Re}(z) > 0$ 即 $x > 0$.

得 $v = x + 1 > 1 \quad \therefore \operatorname{Re}(z) > 0 \xrightarrow{w = i z + i} \operatorname{Im}(w) > 1.$

2) 解法一 $\operatorname{Im}(z) > 0$ 即为 Z 平面的上半平面, $w = (1+i)z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$. 故可知此映射为伸长及旋转变换, 旋转角度为 $\frac{\pi}{4}$, 伸长率为 $\sqrt{2}$. 故 $\operatorname{Im}(z) > 0$ 的象为 W 平面上、三象限角分线上方区域, 如图 1.8 所示.

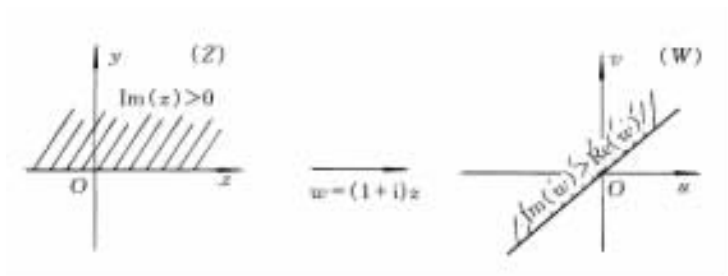


图 1.8

解法二 $\because w = (1+i)z = (x-y) + i(x+y) = u + i v$

$$\therefore \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

$\operatorname{Im}(z) > 0$ 的边界 $\operatorname{Im}(z) = y = 0$ 之象曲线为 $u = v$. 为求上半平面的象, 从 u, v 表达式中消去 x 得 $v - u = 2y$. 由 $y > 0$ 得 $v > u$. 故

$$\operatorname{Im}(z) > 0 \xrightarrow{w = (1+i)z} \operatorname{Im}(w) > \operatorname{Re}(w)$$

3) $0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{1}{2}$ 为水平带域, 其边界为 $y = 0$ 及 $y = \frac{1}{2}$. 首先求出其边界的象曲线.

$$\because w = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{(-y)}{x^2 + y^2} = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\therefore \text{对边界 } y=0, \text{ 有 } \begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{x} \\ v(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{即其象为 } v=0$$

$$\text{对边界 } y=\frac{1}{2}, \text{ 有 } \begin{cases} u(x, \frac{1}{2}) = \frac{x}{x^2 + (\frac{1}{2})^2} \\ v(x, \frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + (\frac{1}{2})^2} \end{cases}$$

$$\therefore u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + (\frac{1}{2})^2} = -2v$$

故得 $u^2 + (v+1)^2 = 1$. $\therefore$ 边界 $y = \frac{1}{2}$ 的象为圆周 $u^2 + (v+1)^2 = 1$.

最后来确定所给区域内部的象:

$$\text{由 } \begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{及 } y > 0, \text{ 知 } v < 0$$

$$\text{又由 } y < \frac{1}{2} \text{ 得 } u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} > -2v = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

故有 $u^2 + (v+1)^2 > 1$.

所以区域 $0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{1}{2}$ 在映射 $w = \frac{1}{z}$ 下的象为 W 平面的下半平面除去圆盘 $u^2 + (v+1)^2 \leq 1$ 所余区域(如图 1.9).

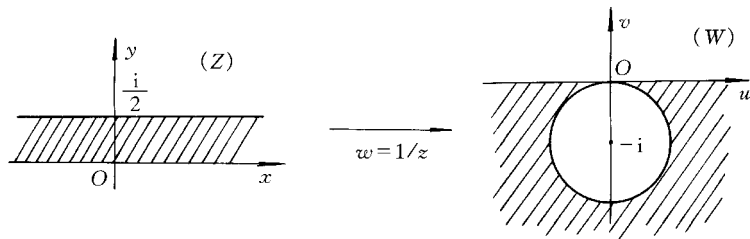


图 1.9

$$4) w = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{(-y)}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

区域 $\operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0$ 之边界为 $l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=y \end{cases}, y > 0; \quad l_2: \begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}, x > 1.$

$$\therefore \begin{cases} u(1, y) = \frac{1}{1+y^2} \\ v(1, y) = \frac{-y}{1+y^2} \end{cases}, y > 0, \text{消去 } y \text{ 得} \quad \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

即 l_1 的象为圆周 $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$.

在 l_2 上, 有 $\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{x}, & x > 1. \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < u < 1 \\ v = 0 \end{cases}$. 故 l_2 的象为 u 轴上线段 $(0, 1)$.

再来求区域 $\operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0$ 内部的象.

$\therefore x > 1,$

$$\therefore \text{由} \begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} \text{得} \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} < \frac{x}{x^2 + y^2} = u$$

即 $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 < \frac{1}{4}$, 所以其象在此圆内部. 又, $y > 0$, 故由 $v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ 知 $v < 0$. 即其象位于 W 的下半平面, 于是, 区域 $\operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0$ 在映射 $w = 1/z$

下的象为 W 平面上的半圆域 $\begin{cases} (u-\frac{1}{2})^2 + v^2 < \frac{1}{4} \\ v < 0 \end{cases}$. 如图 1.10.

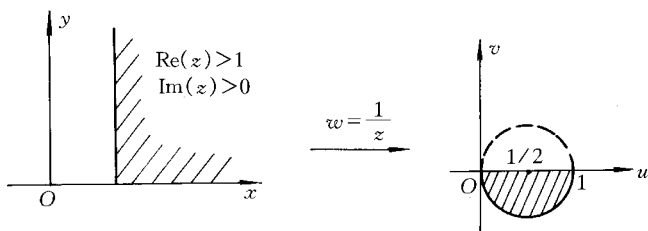


图 1.10

5) 区域 $\text{Re}(z) > 0, 0 < \text{Im}(z) < 1$ 的边界为

$$l_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases} \quad y \in [0, 1], \quad l_2: \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}, \quad x \geq 0, \quad l_3: \begin{cases} x = x \\ y = 1 \end{cases}, \quad x \geq 0,$$

$$w = \frac{i}{z} = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \begin{cases} u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases},$$

由 $\begin{cases} u(0, y) = \frac{1}{y}, y \in (0, 1), \\ v(0, y) = 0 \end{cases}$ 得 l_1 的象为 u 轴上的半射线 $\begin{cases} u = u, u \geq 1, \\ v = 0 \end{cases}$ 又由

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = \frac{1}{x}, x \geq 0 \end{cases} \text{ 知, } l_2 \text{ 的象为上半虚轴 } \begin{cases} u = 0 \\ v = v, v > 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u(x, 1) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x, 1) = \frac{x}{1+x^2} \end{cases} \quad x \geq 0, \text{ 消去 } x \text{ 可得 } l_3 \text{ 的象为半圆周}$$

$$\begin{cases} (u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4} \\ v \geq 0 \end{cases}.$$

对区域内部, $\therefore \begin{cases} \text{Re}(z) = x > 0 \\ \text{Im}(z) = y > 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} u = \frac{y}{x^2 + y^2} > 0 \\ v = \frac{x}{x^2 + y^2} > 0 \end{cases}$

又, $\because y < 1, \therefore u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{y}{x^2 + y^2} = u$. 即 $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 > \frac{1}{4}$.

$\therefore$ 所给区域在 $w = \frac{i}{z}$ 下的象为 W 平面第一象限去掉半圆 $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}, v \geq 0$ 之后的区域. 如图 1.11 所示.

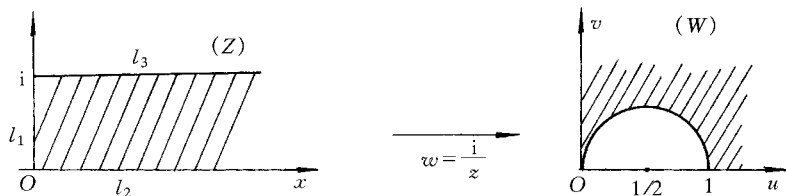


图 1.11

注 1)与 2)既可直接由复数乘法的几何意义得到,也可用解析方法求得 u, v 变化范围.

其它几题所用方法为基本方法. 即先求出区域边界的象. 这里所用方法是将边界曲线方程(参数方程)代入 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 表达式, 从而得到象曲线的参数方程. 消去参数即得象曲线在 u, v 平面上的方程. 之后根据区域表达式(不等式)求得其象区域与象边界的位置关系.

1-37 求将上半平面映为单位圆 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = f(z)$. 并分别满足下列条件:

- 1) $f(i) = 0, f(-1) = 1,$ 2) $f(i) = 0, \arg f'(i) = 0.$

解 1) 注意条件 $f(i) = 0$. 由分式线性映射保对称性知 $z = i$ 关于实轴(视为半径无穷大的圆周)的对称点 $z = -i$ 必映为 $w = 0$ 关于单位圆周 $|w| = 1$ (实轴的象)的对称点 $w = \infty$. 故可设所求分式线性映射为 $w = k \frac{z-i}{z+i}$, 其中 k 为待定常数.

为保证将 $\text{Im}(z) > 0$ 映为 $|w| < 1$. 只要选 k , 使 Z 平面上的实轴映为 W 平面的单位圆周即可. 即当 $z = x \in R$ 时, 应有 $|w| = |k| \left| \frac{x-i}{x+i} \right| = |k| = 1$. 又因为上半平面有一点 $z = i$ 映为 $|w| < 1$ 内一点 $w = 0$. 由分式线性映射的一一对应性知, 在 $|k| = 1$ 时, $\text{Im}(z) > 0 \rightarrow |w| < 1$.

最后, 由条件 $f(-1) = 1$ 可唯一确定 k 值:

$$f(-1) = k \frac{-1-i}{-1+i} = k \frac{1+i}{1-i} = k i = 1$$

得 $k = -i$.

$\therefore w = -i \frac{z-i}{z+i}$ 为所求.

解法二 直接利用公式 $w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$, α 为上半平面任一点. θ 为任一实数. 此

映射将上半平面映为单位圆. 代入条件 $f(i) = 0$ 得 $w = e^{i\theta} \frac{z-i}{z+i}$, 代入条件 $f(-1)$

$= 1$ 得 $-\sin\theta + i \cos\theta = 1$. $\therefore \begin{cases} \sin\theta = -1 \\ \cos\theta = 0 \end{cases}$, $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. 即 $e^{i\theta} = -i$.

$\therefore w = -i \frac{z-i}{z+i}$ 为所求.

注 1. 由此题不难看出, 形如 $w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$ ($\text{Im}(\alpha) \neq 0$) 的映射将 z 平面上的

实轴映为 W 平面的单位圆周, 若 $\text{Im}(\alpha) > 0$, 则 $\text{Im}(z) > 0 \rightarrow |w| < 1$, 若 $\text{Im}(\alpha) < 0$, 则 $\text{Im}(z) < 0 \rightarrow |w| < 1$ (而 $\text{Im}(z) > 0 \rightarrow |w| > 1$), 为了使问题有唯一解, 需加一个补充条件.

2. 解法二直接从公式出发, 故显得较解法一简略. 解法一则是在不知道公式的前提下, 运用分式线性映射性质先导出公式, 进而确定结果. 所以, 解法一是更为基本的方法.

2) 解 同 1) 的讨论, 可设所求映射为 $w = k \frac{z-i}{z+i}$, 其中 $|k| = 1$.

为确定 k , 注意条件 $\arg f'(i) = 0$, 只要选 k , 使 $f'(i) > 0$ 即可.

由 $f'(z) = k \frac{2i}{(z+i)^2}$ 得 $f'(i) = \frac{1}{2}k$,

由 $\begin{cases} f'(i) = \frac{k}{2} > 0 \\ |k| = 1 \end{cases}$ 得 $k = i$.

$\therefore w = i \frac{z-i}{z+i}$ 即为所求.

1-38 求将单位圆映为单位圆的映射. 并分别满足条件

1) $f(\frac{1}{2}) = 0$, $\arg f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ 2) $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(-1) = 1$

解 1) 由条件 $f(\frac{1}{2}) = 0$ 及分式线性映射的保对称性, $z = \frac{1}{2}$ 关于单位圆周 $|z| = 1$ 的对称点 $z = 2$ 必映为 $w = 0$ 关于 $|w| = 1$ 的对称点 $w = \infty$. 于是, 可设 $w =$

$k \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2}$ (k 待定), 又由于 $|z|=1$ 的象为 $|w|=1$. 故在 $|z|=1$ 上, 有

$$|w| = |k| \cdot \frac{\left| z - \frac{1}{2} \right|}{\left| z - 2 \right|} \cdot \left| \bar{z} \right| = \frac{|k|}{2} \cdot \frac{\left| 2 - \bar{z} \right|}{\left| z - 2 \right|} = \frac{|k|}{2} = 1$$

$\therefore |k|=2$. 即当取 $|k|=2$ 时, 映射 $w = k \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2}$ 不仅将 $|z|=1$ 映为 $|w|=1$,

且单位圆内部映为单位圆内部.

$\therefore w(\frac{1}{2})$ 位于 $|w|<1$ 内部, 为唯一确定 k , 注意条件 $\arg f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 只要选 k , 使得 $\begin{cases} \operatorname{Re}(f'(\frac{1}{2})) = 0 \\ \operatorname{Im}(f'(\frac{1}{2})) < 0 \end{cases}$ 即可. $\therefore f'(z) = -\frac{3k}{2} \cdot \frac{1}{(z-2)^2}$

$\therefore f'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}k$ 由 $|k|=2$ 得 $k=2i$.

即 $w = 2i \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2} = i \frac{2z - 1}{z - 2}$ 为所求.

注 本题利用分式线性映射的性质, 先导出满足第一个条件的分式线性映射之一般形式, 进而由第二个条件确定常数 k .

2) 由上题, 可设所求映射为

$$w = k \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2}, \quad |k|=2. \text{ 由条件 } f(-1)=1 \text{ 得 } k \frac{-1 - \frac{1}{2}}{-1 - 2} = \frac{k}{2} = 1. \therefore k=2.$$

又 $\therefore |\alpha| = \frac{1}{2} < 1, \therefore |z| < 1$ 映为 $|w| < 1$. 即 $w = 2 \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2}$ 为所求.

注 2) 直接应用 1) 所推出的结果.

1-39 求出将 Z 平面的右半平面 ($\operatorname{Re}(z) > 0$) 映为 W 平面上单位圆外部 $|w| > 1$ 的分式线性映射的一般式.

解 首先, $z_1 = iz$ 可将 Z 平面的右半平面映为 Z_1 平面的上半平面. 所以只要考虑将 Z_1 上半平面映为 W 平面上单位圆外部的映射即可. 由分式线性映射的一一对应性可知, 将上半平面映为单位圆外部的映射一般式为

$$w = k \frac{z_1 - \alpha}{z - \alpha}, \text{ 其中 } |k| = 1, \operatorname{Im} \alpha < 0.$$

于是, 将 $z_1 = i$ 代入, 得 $w = k \frac{i z - \alpha}{i z - \alpha}, |k| = 1, \operatorname{Im} \alpha < 0$. 即是将 z 平面右半平面映为 W 平面单位圆外部的分式线性映射的一般形式.

1-40 求出将点 $z=1, i, -i$ 依次映为点 $w=1, 0, -1$ 的分式线性映射. 又此映射将单位圆 $|z| < 1$ 映为什么?

解 设 $z_1=1, z_2=i, z_3=-i, w_1=1, w_2=0, w_3=-1$, 于是由条件知, 所求分式线性映射为

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

将 z_k 与 $w_k (k=1, 2, 3)$ 代入得

$$\frac{w - 1}{w - 0} : \frac{-1 - 1}{-1 - 0} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{-i - 1}{-i - i}$$

化简得

$$w = \frac{-1 + 2i}{5} \cdot \frac{z - i}{z - \frac{4 - 3i}{5}}$$

这就是满足 $w_k = f(z_k) (k=1, 2, 3)$ 的分式线性映射.

$z = \frac{4 - 3i}{5}$ 映为 W 平面的 ∞ . 而 $z = \frac{4 - 3i}{5}$ 位于 $|z| = 1$ 上, 故由分式线性映射的保圆性知, $|z| = 1$ 变为直线. 再注意 w_k 与 z_k 的位置, 可知 $|z| = 1$ 映为 W 平面的实轴. 又因为沿方向 $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ 在 $|z| = 1$ 上行进时, 单位圆内部位于行进者左侧, 由分式线性映射保角性, $|z| < 1$ 的象应位于行进者沿方向 $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$ 在 u 轴上行进时的左侧. 故知 $|z| < 1$ 映为 $\operatorname{Im}(w) < 0$. 即下半平面. 或者, 注意 $z=0$ 映为 $\frac{1 - 2i}{5} = w$, 即 $|z| < 1$ 内有一点映为 $\operatorname{Im}(w) < 0$ 内一点, 由分式线性映射的一一对应性, 必有 $|z| < 1$ 映为 $\operatorname{Im}(w) < 0$.

注 这里由唯一决定分式线性映射的基本条件 $w_k = f(z_k) (k=1, 2, 3)$ 求得变换. 并由于 $|z| = 1$ 上有一点 $z = \frac{4 - 3i}{5}$ 映为 w 平面的 ∞ , $|z| = 1$ 上的 z_k 映为 w 平面实轴上的 $w_k (k=1, 2, 3)$. 便可知 $|z| = 1$ 的象为实轴. 上述确定 $|z| < 1$ 的象为 $\operatorname{Im}(w) < 0$ 的两种方法常用.

1-41 求把半圆域 $|z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0$ 映射为单位圆 $|w| < 1$ 的保角映射.

解 设半圆域 $|z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0$ 的直径边界为线段 AB (见图 1.12(a)). 因为

半圆周 $\widehat{AB}$ 与直径 AB 在点 $A(-1,0)$ 处正交. 由分式线性映射保角性与保圆性质, 映射 $z_1 = k \frac{z+1}{z-1}$ 将 $z=1$ 映为 $z_1=\infty$. 将 $z=-1$ 映为 $z_1=0$, 从而将半圆域 $|z|<1, \operatorname{Im}(z)>0$ 映为正交于 $z_1=0$ 的两半直线围成的直角区域, 适当选取常数 k , 可使线段 AB 映为 Z_1 平面的正实轴, 使上述直角区域正好是 Z_1 平面的第一象限, 为此, 只要让 $z=0$ 映为一正实数. 令 $z_1(0) = k \frac{0+1}{0-1} = -k > 0$, 取 $k=-1$ 即可. 于是 $z_1 = -\frac{z+1}{z-1}$ 将半圆域 $|z|<1, \operatorname{Im}(z)>0$ 映为 Z_1 平面的第一象限 (见图 1.12(b)); 而 $z_2 = z_1^2$ 将第一象限映为上半平面 (见图 1.12(c)).

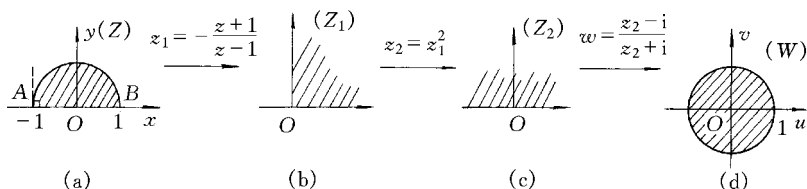


图 1.12

由 1-37 题知, 映射 $w = \frac{z_2-i}{z_2+i}$ 将上半平面映为单位圆 $|w|<1$ (见图 1.12(d)). 复合上述映射, 得

$$w = \frac{z_2-i}{z_2+i} = \frac{z_1^2-i}{z_1^2+i} = \frac{\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2-i}{\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2+i} = \frac{(z+1)^2-i(1-z)^2}{(z+1)^2+i(1-z)^2}$$

即为所求.

注 1. 这里首先注意半圆域直径与半圆周在 A 点正交, 利用分式线性映射保角性与保圆性, 将其映为第一象限区域, 再用幂函数 $f(z)=z^2$ 的性质, 将第一象限映为上半平面, 使问题归为 1-37 题的结果. 这里每个映射均为所论区域内的双方单值, 保角映射.

2. 直接从半圆域用 $f(z)=z^2$ 是错误的, 因为这样只能得到由原点沿正实轴剪开的全扇形域, 而不能得到单位圆 $|w|<1$.

1-42 把下列区域保角且双方单值地映为上半平面. 求出任一这样的映射.

- 1) $\operatorname{Im}(z)>1, |z|<2$ 2) $|z|>2, |z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$
- 3) $|z|<2, |z-1|>1$ 4) $|z|>2, |z-3|>1$
- 5) 沿连结点 $z=0$ 和 $z=ia$ 的线段有割痕的上半平面

6) $|z| > 1$ 且沿虚轴由 i 到 ∞ 有割痕的域

7) $\operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < a$ 8) $|z| > 2, 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{3}{2}\pi$

解 1) 设区域边界圆弧与弦的交点为 A, B , 则易见(由初等数学知识), $z_A = -\sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} + i$, 且边界圆弧 $\widehat{AB}$ 与弦 AB 在 A 点交角为 $\frac{\pi}{3}$. 于是, 由分式线性映射的保圆性与保角性质, 映射 $z_1 = k \frac{z - (-\sqrt{3} + i)}{z - (\sqrt{3} + i)}$ 将 z_A 映为 Z_1 平面的原点, 将 z_B 映为 Z_1 平面的 ∞ , 且只要选取 $k = -1$, 即可将弦段 AB 映为正实轴, 所给弓形区域即映为 Z_1 平面的角形区域 $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{3}$. 又 $w = z_1^3$ 将此角形区域映为上半平面, 如图 1.13 所示.

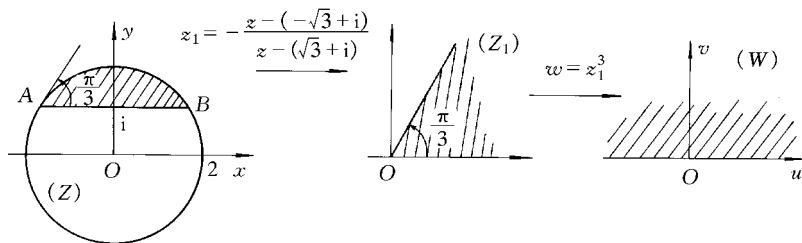


图 1.13

上述两个映射在各自区域内均为双方单值, 保角映射, 故二者复合即为所求

$$w = - \left(\frac{z - (-\sqrt{3} + i)}{z - (\sqrt{3} + i)} \right)^3$$

注 本题的第一步中采用的分式线性映射不是唯一的. 取 $k = -1$ 只是为了使 $z = i$ 映为 $z_1 = 1$, 以保证 AB 弦映为正实轴, 其实 $k < 0$ 均可. 另外, 也可将 z_B 映为原点, z_A 映为 ∞ , 得到相应的结果. 因此满足要求的映射不是唯一的.

2) 设月牙形区域的两个尖点为 z_A, z_B , 则由初等数学知识知:

$$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \text{ 且两圆弧在 } z_B \text{ 点交角为 } \frac{\pi}{4}.$$

同 1), 映射 $z_1 = k \frac{z - (\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{z - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})}$ 将月牙区域映为顶点在原点. 开度为 $\frac{\pi}{4}$ 的角

形区域, 且当取 $k = -i$ 时, 此角形区域即为 $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$. 于是 $w = z_1^4$ 将此角域

映为上半平面(见图 1.14). 二者复合即为所求:

$$w = \left[-i \frac{z - (\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{z - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})} \right]^4 = \left[\frac{z - (\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{z - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})} \right]^4$$

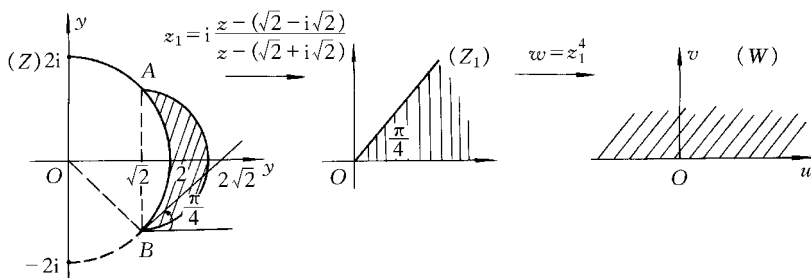


图 1.14

注 这里选 $k = -i$ 是为将弧段 $|z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$ 映为正实轴(将 $z = 2\sqrt{2}$ 映为正实数即可), 从而保证月牙形区域在所给分式线性映射下的象为 $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$. 与 1) 相同, 在这里分式线性映射的保角性与保圆性起着至关重要的作用. 满足条件的映射不唯一.

3) 第一步: 选取适当的分式线性映射, 将两圆切点 $z = 2$ 映为 ∞ , 则由保圆性, 两圆周将映为直线. 且由分式线性映射的一一对应性, 两圆除切点外无公共点. 故象直线在有限复平面内平行, 若取分式线性映射 $z_1 = k \frac{z}{z-2}$, 则小圆周变为过原点的直线, 大圆周变为平行于这条直线的另一条直线. 注意小圆周在 $z = 0$ 处与实轴正交, 故由保角性只要适当选取 k , 使 $z = -2$ 映为实数, 就一定有实轴映为实轴, 小圆周映为在 $z_1 = 0$ 处与实轴正交的直线, 即虚轴. 例如, 取 $k = 1$ 即可. 此时 $z = -2$ 映为 $z_1 = \frac{1}{2}$, 由保角性, 大圆周的象为过 $z_1 = \frac{1}{2}$ 且平行于虚轴的直线. 再注意 $z = i$ 位于所给区域内, 其象点为 $z_1 = \frac{1-2i}{5}$, $\therefore \operatorname{Re} \left(\frac{1-2i}{5} \right) = \frac{1}{5} \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$. 即可见所给区域的象为条形域 $0 < \operatorname{Re} z_1 < \frac{1}{2}$.

第二步: 将此铅直条形域旋转为水平带形域 $0 < \operatorname{Im}(z_2) < \pi$. 为此取旋转伸缩映射 $z_2 = 2\pi i z_1$.

第三步：用指数函数映射 $w = e^{z_2}$ ，将水平带域 $0 < \text{Im}(z_2) < \pi$ 映为上半平面（见图 1.15）。以上每步均为一一映射且保角映射，故复合后即为首求： $w = e^{z_2} = e^{2\pi i z / (z-2)}$

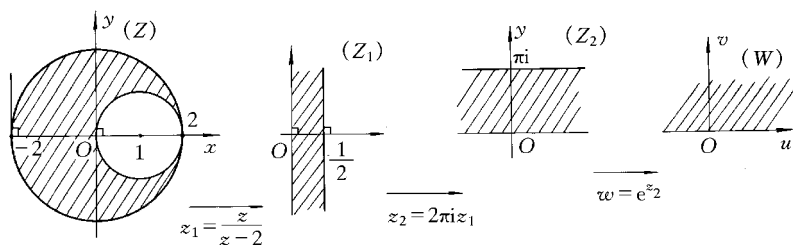


图 1.15

注 1. 在第一步中，为确定两圆所界区域的象之位置，利用分式线性映射的一一对应性知，它不能同时位于任一圆周象直线的两侧，故只要有一点 $z=i$ 的位置被确定，整个区域象的位置将随之确定。这是一种常用的方法。另外，也可用所给区域外任一点的象位置来确定所给区域象的位置，可注意 $z=1$ 不在阴影区域内；它的象为 $z_1=-1$ ，位于 Z_1 平面虚轴左侧，也位于 $z_1=1/2$ 的左侧，故大圆内点之象点均应在 $z_1=1/2$ 左侧，小圆外的点之象点均应在虚轴右侧。从而得到确定；

2. 由于第一步中的分式线性映射的不唯一性，满足条件的映射不唯一。

4) 与 3) 同一思路，这里是二圆外切，取分式线性映射 $z_1 = -\frac{z+2}{z-2}$ ，同 3) 讨论可确定两圆之外部区域的象为铅直条形域 $-3 < \text{Re}(z_1) < 0$ 。经平移并旋转伸缩 $z_2 = \frac{\pi i}{3}(z_1+3)$ ，铅直带域变为宽度为 π 的水平带域 $0 < \text{Im}(z_2) < \pi$ 。再利用指数函数映射 $w = e^{z_2}$ 即映为上半平面（见图 1.16）。

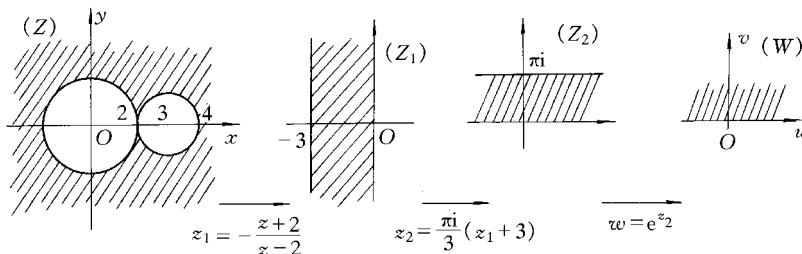


图 1.16

复合上述映射即为所求:

$$w = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{z-4}{z-2}}$$

注 1. 由复合的结果可见,此映射相当于在第一步取 $z_1 = \frac{z-4}{z-2}$ 之后作伸缩并旋转,最后采用指数函数映射;

2. 3)与4)的处理中,一个共同点是将两圆切点映为 ∞ ,从而将两圆映为两平行线,将所给区域映为带形区域.

5) 第一步:取 $z_1 = z^2$, 则有割痕的上半平面的象是从 $z_1 = -a^2$ 沿正实轴剪开的 Z_1 平面(a 为实数). 第二步:取 $z_2 = -(z_1 + a^2)$, 从 $z_1 = -a^2$ 沿正实轴剪开的 Z_1 平面映为从原点沿负实轴剪开的 Z_2 平面. 第三步:取映射 $w = i\sqrt{z_2}$ (取 $\sqrt{z_2}$ 对应于 $k=0$ 的一分支). 则得无割痕的上半平面(见图 1.17). 复合各映射即为所求:

$$w = i\sqrt{-(z^2 + a^2)} = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

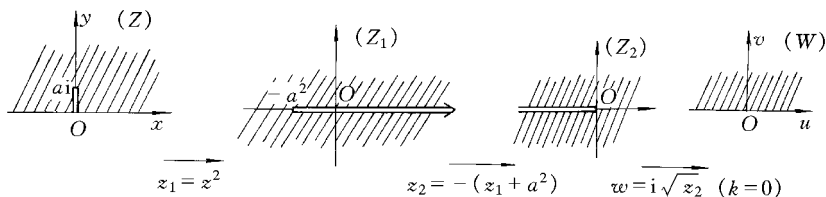


图 1.17

注 注意这里用到映射 $f(z) = \sqrt{z}$, 它有两个单值分支, 为保证单值且保角性, 要指定一确定分支.

6) 第一步:取映射 $z_1 = iz$, $z_2 = i\sqrt{z_1}$, (取 $k=0$ 的一单值分支); 第二步:取分式线性映射 $z_3 = \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$; 第三步:映射 $w = z_3^2$ 即为所求(见图 1.18). 复合后得:

$$w = \left(\frac{\sqrt{i}z + i}{\sqrt{i}z - i} \right)^2.$$

7) 注意到水平带形区域 $0 < \text{Im}z < \pi$ 在指数函数 $f(z) = e^z$ 映射下的象为上半平面及映射的一一对应性, 故可断定半带区 $\text{Re}(z) > 0, 0 < \text{Im}(z) < \pi$ 在指数函数 $f(z) = e^z$ 映射下的象为上半平面内满足模 $= e^x > 1$ 的点之全体. 即为上半平面内单位圆之外的区域, 这就使问题归为 6) 中 Z_2 平面的区域. 故第一步:用伸缩映射

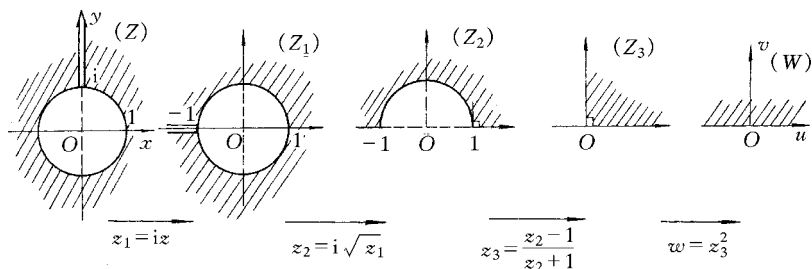


图 1.18

$z_1 = \frac{\pi}{a}z$ 将所给区域映为半带形域 $\operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$; 第二步: $z_2 = e^{z_1}$; 第

三步: $z_3 = \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$; 第四步: $w = z_3^2$ (见图 1.19). 复合各映射即为所求

$$w = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{a}z} - 1}{e^{\frac{\pi}{a}z} + 1} \right)^2$$

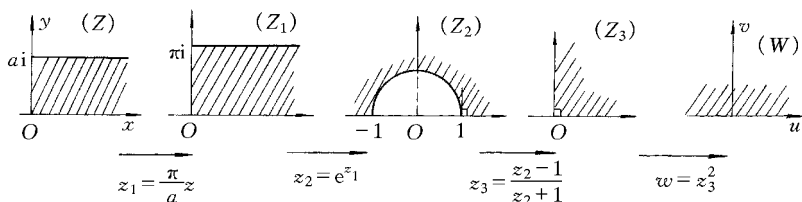


图 1.19

注 1. 由此易于看出, $w = e^z$ 将半带形域 $\operatorname{Re}(z) < 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$ 映为上半单位圆;

2. 上述各步均为双方单值且保角映射, 故复合后的映射满足要求.

8) 为保证保角性, 第一步: 取映射 $z_1 = -iz$;

第二步: $z_2 = z_1^{2/3} e^{i\pi/3}$ (取 $k=0$ 的分支);

第三步: $z_3 = \frac{z_2 - 2^{2/3}}{z_2 + 2^{2/3}}$. 最后取映射 $w = z_3^2$ (见图 1.20). 即为所求

$$w = \left[\frac{z^{2/3} - 2^{2/3}}{z^{2/3} + 2^{2/3}} \right]^2$$

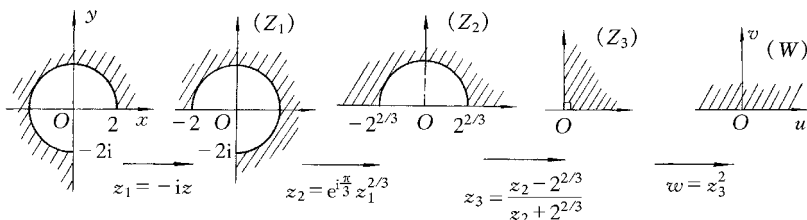


图 1.20

1-43 求出任一双方单值且保角的映射. 使单位圆 $|z| < 1$ 映为铅直条形区域 $0 < \operatorname{Re} w < a$.

解 第一步: 采用分式线性映射将单位圆映为上半平面 (注意分式线性映射全平面双方单值、保角, 故只要取上半平面映为单位圆映射的逆映射即可)

$$z_1 = i \frac{1+z}{1-z}$$

第二步: 用对数函数映射 $z_2 = \ln z_1$ (主值分支) 将上半平面映为宽度为 π 的水平带形区域.

第三步: 经伸缩及旋转变换 $w = \frac{a}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} z_2$, 可将水平带域映为铅直带域 $0 < \operatorname{Re}(z) < a$ (见图 1.21).

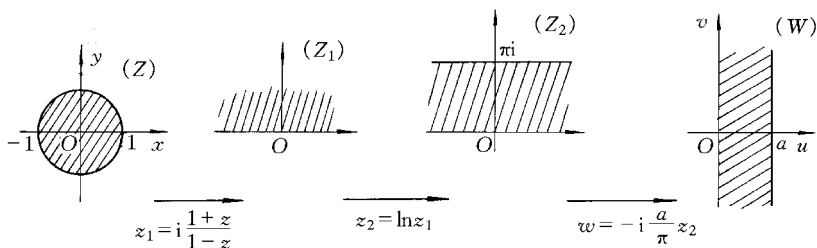


图 1.21

复合后即得所求: $w = -i \frac{a}{\pi} \ln \frac{i+z}{1-z}$.

注 1. 由于我们十分熟悉上半平面映为单位圆的分式线性映射 $w = \frac{z-i}{z+i}$, 并且分式线性映射为全平面双方单值、保角, 故只要求其逆映射, 即为由单位圆映为上半平面的映射. 从上半平面映为带域 $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$ 时, 应采用主值分支 $f(z) = \ln z$;

2. 1-42 题与 1-43 题的各题答案都不是唯一的, 因为所采用变换的不同, 答案不同. 这里必须注意, 无论选怎样的映射, 必须保证每步双方单值且保角. 以上所给的解法侧重于对必须掌握的几种保角映射的练习(分式线性映射、指数与对数函数映射、幂函数 z^n 与 $z^{1/n}$ 映射等).

1.6 第 1 章练习题

1. 下列不等式在复数平面上表示怎样的点集?

- 1) $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$; 2) $2 < |z - z_0| < 3$; 3) $\varphi_0 < \arg z < \varphi_1$;
4) $0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$; 5) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 2$.

(答 1) 平面上由 $x=0$ 与 $x=1$ 所构成的宽度为 1 的铅直带形域; 2) 以 z_0 为心、内半径为 2, 外半径为 3 的圆环域; 3) 顶点在原点, 开度为 $(\varphi_1 - \varphi_0)$ 的角形区域; 4) 宽度为 π 的水平带形域. 边界为 $y=0, y=\pi$. 5) 以 $-\frac{5}{3}=z_0$ 为心, $R=\frac{4}{3}$ 为半径的圆之外部区域).

2. 计算下列各值:

- 1) $(-1+i\sqrt{3})^{10}$; 2) $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$; 3) i^{1+i} ; 4) $\operatorname{Ln}(-2)$.

(答 1) $-512+i512\sqrt{3}$; 2) $2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i3\pi/4+2k\pi}{3}} (k=0,1,2)$; 3) $i e^{1(1/2+2k)\pi}$
($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); 4) $\ln 2 + i(2k+1)\pi, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

3. 按要求表示复数

- 1) 把 e^{1+i} 用代数式, 三角式表示. 2) 把 $\frac{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta - i \sin 3\theta)^3}$ 用代数式, 指数式表

示. 其中 θ 为实数. 3) $1^{\sqrt{2}}$ 用三角式表示.

(答 1) 三角式: $e^{1+i} = e(\cos 1 + i \sin 1)$; 代数式: $e^{1+i} = e \cos 1 + i e \sin 1$.

2) 代数式: $z = \cos 19\theta + i \sin 19\theta$, 此也为三角式. 3) $1^{\sqrt{2}} = \cos 2\sqrt{2}k\pi + i \sin 2\sqrt{2}k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. 推导 C-R 方程的极坐标表达式.

(答 $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$)

5. 判断下列命题的错对:

- 1) 若 c 为实数, 则 $c = \bar{c}$; 2) 若 $\alpha > \beta$, 则 $i^\alpha > i^\beta$;
3) $\arg 0 = 0$. 4) $\frac{1}{i} \bar{z} = \overline{i z}$. 5) $f(z)$ 在 z_0 处可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 处解析.

(答 1) 对. 2) 错(复数不能比较大小). 3) 错(0 无辐角). 4) 对. 5) 错.)

6. 设 $f(z) = \frac{1}{2i} \frac{z}{z} (z \neq 0)$. 证明: $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在.

7. 设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在区域 D 内解析, 且 $v = u^2$, 证明: $f(z)$ 在 D 内为一常数.

8. 解方程 1) $\sin z = 2$. 2) $z^3 = -8$;

(答 1) $z_k = (2k\pi + \frac{\pi}{2}) - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 2) $z_k = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$.
 $k = 0, 1, 2$)

9. 已知 $u(x, y) = e^{-x}(\cos y + y \sin y)$, 求以 $u(x, y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$, 且使 $f(0) = 1$.

(答 $f(z) = ze^{-z} + 1$)

10. 讨论下列函数的连续性, 可导性及解析性.

1) $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$. 2) $f(z) = 2x^3 + 3y^3 i$. 3) $\frac{1}{z^2 - 1}$, 4) $\frac{e^z - 1}{z}$

(答 1) 全平面连续, 仅在 $z=0$ 处可导, 全平面不解析. 2) 全平面连续, 仅在直线 $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$ 上可导, 全平面处处不解析. 3) 在 $z \neq \pm 1$ 处处连续、可导、解析. 4) 在 $z \neq 0$ 处处连续、可导、解析.)

11. 利用 C-R 方程, 证明函数 $e^{\bar{z}}$, $\sin \bar{z}$ 于全平面不解析.

12. 设 $u(x, y) - v(x, y) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$, 且 $f(z) = u + i v$ 解析. 求 $f(z)$.

(答 $f(z) = -i z^3 + (1+i)A$, A 为实常数)

13. 将下列区域映为单位圆.

1) $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

2) 去掉原点与上半虚轴的复平面;

3) 沿 $[0, 1]$ 半径剪开的单位圆;

4) 半带形域 $\begin{cases} 0 < \operatorname{Im}(z) < a \\ R(z) < 0 \end{cases}$.

(答 1) $w = \frac{(z^4 - 1)^2 - i(z^4 + 1)^2}{(z^4 - 1)^2 + i(z^4 + 1)^2}$; 2) $w = \frac{\sqrt{z} + e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{z} - e^{i\frac{\pi}{4}}}$;

3) $w = \left(\frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2$ 4) $w = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{a}z} + 1}{e^{\frac{\pi}{a}z} - 1} \right)^2$

第 2 章 复变函数的积分

2.1 复变函数积分概念与 Cauchy 积分定理

2.1.1 基本要求

1. 掌握复变函数积分的概念与积分存在条件、性质及计算方法.
2. 掌握 Cauchy 积分定理及其推广形式——复合闭路定理, 并会灵活运用之.

2.1.2 内容提要

1. 定义 设 $w=f(z)$ 在区域 D 内有定义, C 为 D 内以 α 为起点、 β 为终点的一条光滑有向曲线. 在 C 上于 α, β 之间任意加分点: $\alpha=z_0, z_1, \dots, z_n=\beta$. 在每弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$) 上任取一点 ξ_k 作和式

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$$

如果当弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$) 的最大长度 $\delta \rightarrow 0$ 时, 上述和式极限存在且不依赖于 $z_k \in C$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) 的取法, 不依赖于 $\xi_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$ 的取法, 则称此极限为 $f(z)$ 沿有向曲线 C 的积分.

记作
$$\int_C f(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k, \quad C \text{ 称为积分路径(线)}$$

当 C 为闭曲线时, 常记
$$\int_C f(z) dz = \oint_C f(z) dz.$$

2. 定理一 若 $f(z)$ 连续, C 光滑, 则 $\int_C f(z) dz$ 一定存在, 且有

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

3. 设光滑曲线 C 的参数方程为 $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [t_a, t_\beta]$.

则
$$\int_C f(z) dz = \int_{t_a}^{t_\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (z(t_a) = \alpha, z(t_\beta) = \beta)$$

4. 积分性质 若下述积分均存在, 则

$$1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz;$$

$$2) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz \quad (k \text{ 为常数});$$

$$3) \int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz;$$

$$4) \text{ 设曲线 } C \text{ 长度为 } L, \text{ 当 } z \in C \text{ 时有 } |f(z)| \leq M \text{ 则 } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq$$

$$\int_C |f(z)| ds \leq ML \text{ (其中 } ds \text{ 为 } C \text{ 的弧微分)}$$

5. 定理二 Cauchy 积分定理 设 D 为有限平面上的单连通区域, $f(z)$ 在 D 内单值、解析, 则对位于 D 内的任一条可求长闭曲线 L , 有 $\oint_L f(z) dz = 0$.

5'. 推论 若 $f(z)$ 为单连通区域 D 内的单值解析函数, 则积分 $\int_C f(z) dz$ 与连接起点与终点的路径无关. 设 z_0 为起点, z 为终点, 可记

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

6. 定理三 设 $f(z)$ 为单连通域 D 内解析函数, $z_0 \in D$, 则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$ 于 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

7. 定理四 设 $\Phi(z)$ 为单连通区域内解析函数 $f(z)$ 的一个原函数 ($\Phi'(z) = f(z)$)

$$\text{则 } \int_{z_0}^z f(z) dz = \Phi(z) \Big|_{z_0}^z = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

8. 定理五 (复合闭路定理) 设 C 为区域 G 内一条简单闭曲线, $C_1, C_2, \dots, C_n$ 为位于 C 内的简单闭曲线, 它们互不相交, 互不包含, 且以 C 与 $C_1 \cdots C_n$ 为边界的区域完全属于区域 G 内, 如果 $f(z)$ 在区域 G 内解析, 则

$$1) \oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz \quad (C \text{ 与 } C_j \text{ 均取正向})$$

$$2) \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad \Gamma = C + C_1^- + \cdots + C_n^-.$$

9. 定理六 (闭路变形原理) 设 $f(z)$ 在区域 G 内解析, C_1, C_2 完全位于 G 内, C_2 位于 C_1 内部. 且以 C_1, C_2 为边界的区域完全位于 G 内, 则

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

(即解析函数沿闭曲线的积分,不因闭曲线在解析区域内连续变形而改变其积分值)

2.1.3 例题解析

2-1 计算 $\int_C |z| dz$, 其中 C 以 $z_0 = -1$ 为起点, $z_1 = 1$ 为终点, 路径为 1) 直线段; 2) 上半单位圆周; 3) 下半单位圆周.

解 1) 因为 C 的参数方程为 $z = x, x \in [-1, 1]$, 所以 $dz = dx$. $|z| = |x|$, 代入积分式

得
$$\int_C |z| dz = \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

2) C 的参数方程为 $z(\theta) = e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$, 故, $dz = ie^{i\theta} d\theta, |z(\theta)| = 1$. 代入积分式并注意起、终点参数值

得
$$\int_C |z| dz = \int_{\pi}^0 ie^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^0 e^{i\theta} d(i\theta) = e^{i\theta} \Big|_{-\pi}^0 = 1 - (-1) = 2$$

3) C 的参数方程为 $z(\theta) = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, 0]$

因而 $dz = ie^{i\theta} d\theta, |z(\theta)| = 1$. 代入积分式并注意起、终点参数值

得
$$\int_C |z| dz = \int_{-\pi}^0 ie^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^0 e^{i\theta} d(i\theta) = e^{i\theta} \Big|_{-\pi}^0 = 1 - (-1) = 2$$

注 将复变函数积分化为定积分时, 首先写出积分路径的参数方程, 并注意路径的起、终点对应的参数值应对应定积分的下限与上限. 由本题结果可见, 一般情况下, 积分与路径是有关的.

2-2 计算积分 $\int_C \operatorname{Im} z dz$, 其中 C 以 0 为起点

1) 连结点 0 与点 $2+i$ 的直线.

2) 连结点 0 与 i 的直线段及连结点 i 与点 $2+i$ 的直线段组成的折线段.

解法一 1) C 的参数方程为

$$z(t) = t + i \frac{t}{2} = (1 + \frac{i}{2})t, t \in [0, 2]$$

$$dz = (1 + \frac{i}{2})dt, \quad \operatorname{Im} z = \frac{t}{2}$$

代入积分式得

$$\int_C \operatorname{Im} z dz = \int_0^2 \frac{t}{2} (1 + \frac{i}{2}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{i}{2}\right) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = 1 + \frac{i}{2}$$

$$2) \because \int_C \operatorname{Im} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z dz \quad (C_1, C_2$$

如图 2.1 所示).

C_1 的参数方程为

$$z(t) = i t, t \in [0, 1], \quad dz = i dt, \quad \operatorname{Im} z = t$$

注意路径起、终点对应参数值, 得

$$\int_{C_1} \operatorname{Im} z dz = \int_0^1 i t dt = i \int_0^1 t dz = \frac{i}{2}$$

C_2 的参数方程为

$$z(t) = t + i, \quad t \in [0, 2], \quad dz = dt, \quad \operatorname{Im} z = 1$$

注意路径的起、终点, 代入积分式得

$$\int_{C_2} \operatorname{Im} z dz = \int_0^2 dt = 2 \quad \therefore \int_C \operatorname{Im} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z dz = \frac{i}{2} + 2$$

解法二 令 $z = x + iy$, 则

$$\operatorname{Im} z = y = u(x, y), \quad v(x, y) = 0, \quad dz = dx + i dy$$

$$\therefore 1) \quad \int_C \operatorname{Im} z dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy = \int_C y dx + i \int_C y dy$$

由第二型线积分化为定积分的方法, 并注意 C 的参数方程 (见解法一) 得

$$\int_C \operatorname{Im} z dz = \int_C y dx + i \int_C y dy = \int_0^2 \frac{x}{2} dx + i \int_0^1 y dy = 1 + \frac{i}{2}$$

同理

$$2) \quad \int_C \operatorname{Im} z dz = \int_C y dx + i \int_C y dy = i \int_0^1 y dy + \int_0^2 1 \cdot dx = \frac{i}{2} + 2$$

注 解法一利用 C 的参数方程, 并注意起、终点参数值, 直接应用公式

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t)) z'(t) dt \quad \text{将积分化为关于参数的定积分进行计算;}$$

解法二通过计算积分定义导出的两个二元实函数的第二型曲线积分来完成的. 当然实变函数第二型曲线积分的计算还是通过化其为定积分来完成的.

对被积函数不解析的情况, 这两种方法均为基本方法.

2-3 计算下列各积分:

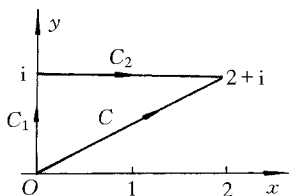


图 2.1

1) $\int_C \operatorname{Re}(z) dz$, C 为以 $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1+i, z_4 = i$ 为顶点的正方形之边,

逆时针方向.

2) $\int_C e^z dz$, C 为单位圆周上起点为 $z = 1$ 终点为 $z = i$ 的弧段.

$$3) (1) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \quad (2) \int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} \quad (3) \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} \quad (4) \int_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right|$$

4) $\int_{|z|=1} z \sin z^2 dz$ C 均取逆时针方向.

解法一 1) 设 $z = x + iy$, 则 $dz = dx + i dy$.

$$\therefore \int_C \operatorname{Re}(z) dz = \int_C x dx + i \int_C x dy = \sum_{k=1}^4 \int_{C_k} x dx + i \int_{C_k} x dy$$

其中 C_k 如图 2.2 所示 ($k=1, 2, 3, 4$).

由二元实函数第二型曲线积分计算法得

$$\begin{aligned} \int_C x dx + i \int_C x dy &= \int_0^1 x dx + i \int_0^1 1 \cdot dy + \int_1^0 x dx + i \int_1^0 0 \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} + 0 = i \end{aligned}$$

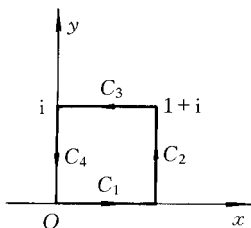


图 2.2

2) 由于 e^z 全平面解析, 故积分 $\int_C e^z dz$ 只与起点、终

点有关, 而与路径无关.

$$\therefore \int_C e^z dz = \int_1^i e^z dz = e^z \Big|_{z=1}^{z=i} = e^i - e^1$$

$$3) (1) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z-0} = 2\pi i$$

$$(2) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = \oint_{|z|=1} 1 \cdot dz = 0 \quad (\text{由 Cauchy 积分定理得})$$

$$(3) \because \text{在 } |z|=1 \text{ 上, } z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \therefore dz = i e^{i\theta} d\theta \text{ 故 } |dz| = d\theta$$

$$\therefore \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{-1}{i} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d(-i\theta) = 0$$

$$(4) \text{在 } |z|=1 \text{ 上有 } z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi], \text{且 } \left| \frac{dz}{z} \right| = \left| \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} \right| = d\theta$$

$$\therefore \int_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right| = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

4) 因为 $z \sin z^2$ 全平面解析单值, 故由 Cauchy 积分定理, $\int_{|z|=1} z \sin z^2 dz = 0$

解法二 1) 逐段写出 C 的参数方程

$$z = z(t), t \in [0, 4]:$$

$$C_1: z = t, t \in [0, 1] \quad C_2: z = 1 + i(t-1), t \in [1, 2]$$

$$C_3: z = (3-t) + i, t \in [2, 3] \quad C_4: z = i(4-t), t \in [3, 4]$$

于是

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Re}(z) dz &= \int_{C_1} \operatorname{Re}(z) dz + \int_{C_2} \operatorname{Re}(z) dz + \int_{C_3} \operatorname{Re}(z) dz + \int_{C_4} \operatorname{Re}(z) dz \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 1 \cdot i dz + \int_2^3 -(3-t) dt + \int_3^4 0 \cdot (-i dt) \\ &= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} + 0 = i \end{aligned}$$

2) 写出 C 的参数方程

$$C: z(t) = \cos t + i \sin t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\therefore e^z = e^{\cos t + i \sin t} = e^{\cos t} [\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)] \quad dz = (-\sin t + i \cos t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_C e^z dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos t} [\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)] (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-e^{\cos t} \cos(\sin t) \cdot \sin t - e^{\cos t} \sin(\sin t) \cdot \cos t] dt \\ &\quad + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-e^{\cos t} \sin(\sin t) \cdot \sin t + e^{\cos t} \cos(\sin t) \cdot \cos t] dt \\ &= [e^{\cos t} \cos(\sin t) + i e^{\cos t} \sin(\sin t)] \Big|_0^{\pi/2} \\ &= e^{\cos t + i \sin t} \Big|_0^{\pi/2} = e^i - e^1 \end{aligned}$$

3) (1) $|z|=1$ 且沿逆时针方向的参数方程为

$$z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi], dz = i e^{i\theta}$$

$$\therefore \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$$(2) \int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = \int_0^{2\pi} i e^{i\theta} d\theta = e^{i\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (e^z \text{ 以 } 2\pi i \text{ 为周期})$$

$$(3) \because |z| = 1 = \bar{z}z$$

$$\therefore \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = \int_{|z|=1} \frac{\bar{z} |dz|}{z\bar{z}} = \int_{|z|=1} \bar{z} |dz|$$

$$z = e^{i\theta}, |dz| = |ie^{i\theta}d\theta| = d\theta$$

$$\therefore \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = \int_{|z|=1} \bar{z} |dz| = \int_0^{2\pi} [\cos\theta - i\sin\theta]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta - i \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

$$(4) \text{ 由积分性质 } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq ML. \quad (\text{其中 } M =$$

$\max_{z \in C} |f(z)|, L \text{ 为 } C \text{ 之弧长}). \text{ 这里 } M = 1, L = 2\pi.$

而

$$\left| \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \right| = |2\pi i| = 2\pi$$

$\therefore$

$$2\pi \leq \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z|} \leq 2\pi$$

即

$$\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z|} = 2\pi$$

$$4) \text{ 令 } z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]. \text{ 则 } dz = ie^{i\theta}d\theta, z \sin z^2 = e^{i\theta} \sin e^{i2\theta}$$

$$\therefore \int_{|z|=1} z \sin z^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \sin e^{i2\theta} \cdot i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin e^{i2\theta} (de^{i2\theta}) = -\frac{1}{2} \cos e^{i2\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

注 1. 对被积函数不解析的情形(例 1))如同 2-2 题中所指出的,一般只能用通过参数方程化为定积分方法或直接用积分定义化为二元函数第二型线积分的方法来解决;

$$2. \text{ 对非单连通区域的解析函数(如 3)(1)). 公式 } \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad (\text{其中 } C$$

围绕 z_0 , 简单、正向、闭) 为一常用的基本结果;

3. 对单连域内解析函数的积分, 虽有别的方法可用, 但最为简便的方法是用 Cauchy 积分定理及其推论.

综上所述, 求复变函数积分时, 首先要注意被积式在怎样的区域内解析, 同时注意积分路径位于怎样的区域, 之后确定适当的方法.

2-4 求下列积分,其路径均为直线段:

$$1) \int_{1-i}^{3+2i} (2z^2 - 5z + 6) dz \quad 2) \int_0^i \frac{z}{z+1} dz$$

解 1) 由于 $f(z) = 2z^2 - 5z + 6$ 于全平面解析,故只要求出 $f(z)$ 的任一原函数即可

$$\int_{1-i}^{3+2i} (2z^2 - 5z + 6) dz = \left(\frac{2}{3} z^3 - \frac{5}{2} z^2 + 6z \right) \Big|_{1-i}^{3+2i} = -\frac{31}{6} + 15i$$

2) 因为 $f(z) = \frac{z}{z+1}$ 在区域 $z \neq -1$ 内解析, $\Phi(z) = z - \ln(z+1)$ 在单连通区域 $\operatorname{Re}(z) > -1$ 内解析,且 $\Phi'(z) = f(z)$ (见图 2.3). 这里 $\ln(1+z)$ 为 $\operatorname{Ln}(1+z)$

的单值分支 (对应于 $\operatorname{Ln} 1 = 0$ 的一支), 于是 $\int_0^i \frac{z}{z+1} dz = \Phi(z) \Big|_0^i = i - \ln(1+i) = -\ln\sqrt{2} + i(1 - \frac{\pi}{4})$.

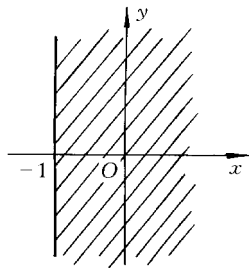


图 2.3

注 1. 以上两题均用到单连通区域解析函数的积分与其原函数的关系. 注意原函数要求单值解析, 故对数函数出现在原函数表达式中时, 要确定其分支.

2. 对单连通区域解析的函数之积分, 因积分与路径无关, 故可选择较简便的路径进行计算.

2-5 计算积分 $\int_l \frac{dz}{z}$ 的值, 其中 l 如图 2.4 所示.

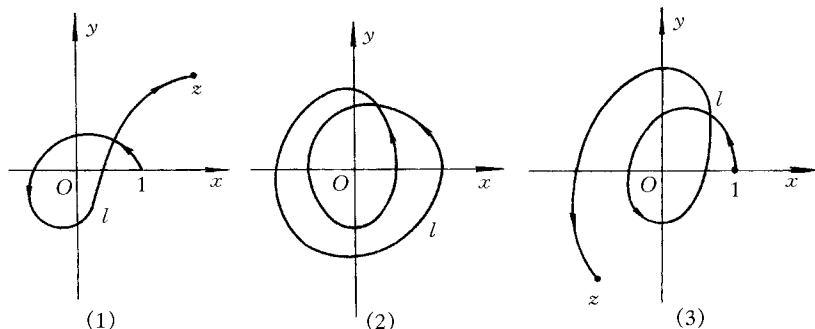


图 2.4

解 (1) 设图中 l 的交点为 A , 围绕原点的简单闭曲线为 C , $\because$ 不含 C 的 l 上的两段曲线完全位于函数(主值分支) $\ln z$ 的单连通解析区域内, 且在该区域有 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, 即在该区域内, 积分与路径无关, 可用原函数在起、终点值表示积分值(参见图 2.5).

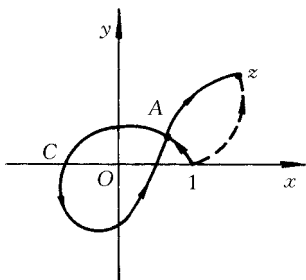


图 2.5

$$\begin{aligned}\therefore \int_l \frac{dz}{z} &= \oint_C \frac{dz}{z} + \int_1^z \frac{dz}{z} \\ &= 2\pi i + \ln z \Big|_1^z = 2\pi i + \ln z\end{aligned}$$

(2) l 由围绕原点的两条简单闭曲线 C_1, C_2 组成, 因为 $\frac{1}{z}$ 在 $z \neq 0$ 区域内解析,

故由闭路变形原理知, $\oint_{C_1} \frac{dz}{z} = \oint_{C_2} \frac{dz}{z}$.

$$\therefore \oint_l \frac{dz}{z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z} = 2 \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = 2 \cdot 2\pi i = 4\pi i$$

(3) 用不经过负实轴的光滑曲线连接起点 1 与终点 z (见图 2.6), 设连线为 l_1 , 则 $l + l_1^{-}$ 为(2)的路径. 注意 l_1 完全位于主值分支 $\ln z$ 的单连通解析区域内, 且 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

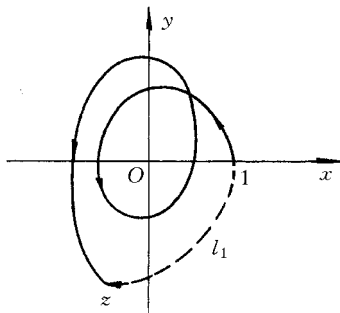


图 2.6

$$\begin{aligned}\therefore \int_l \frac{dz}{z} &= \oint_{l+l_1^{-}} \frac{dz}{z} + \int_{l_1} \frac{dz}{z} \\ &= 4\pi i + \int_1^z \frac{dz}{z} = 4\pi i + \ln z \Big|_1^z \\ &= 4\pi i + \ln z\end{aligned}$$

注 1. 由(1)及(3)的结果可见, 当路径 C 为以 1 作起点, z 作终点且不经过原点的

光滑曲线时, 积分 $\int_C \frac{dz}{z}$ 可表示对数函数 $\ln z$ 的任意分支; 路径不绕原点时, 表示主值分支, 绕过原点且绕 k 周(可正、反向)时, 表示 $(\ln z)_k$. 故这个积分可作为 $\ln z$ 的积分表示式;

2. (3) 不能像(1)一样对待, 即在(3)中 $\int_l \frac{dz}{z} \neq 2\pi i + \int_1^z \frac{dz}{z}$. 因为(3)中的

l 去掉围绕原点的简单闭曲线后, 所余两段曲线中一段与负实轴相交, 对数函数

$\ln z$ (主值分支) 在负实轴上不解析, 即在包含负实轴的任何区域上, $\ln z$ 不是 $\frac{1}{z}$ 的一个原函数, 或者说这种区域不是 $\ln z$ 的单连通解析域, 故沿这两段曲线上的积分

$\neq \int_1^z \frac{dz}{z}$. 为解(3), 我们引入 不经过负实轴的 l_1, l_2 位于 $\ln z$ 的单连通解析域, 故有

$$\int_{l_1} \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

2-6 求下列积分:

$$1) \int_{|z|=1} \operatorname{Re}(z) dz \quad 2) \int_{|z|=1} \operatorname{Im}(z) dz \quad 3) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} \quad 4) \int_{|z|=1} |z-1| \cdot |dz|$$

解 1) 设 $z = \cos \theta + i \sin \theta$

则

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \operatorname{Re}(z) dz &= \int_0^{2\pi} \cos \theta (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos \theta \sin \theta d\theta + i \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{i}{2} \cdot 2\pi = \pi i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{|z|=1} \operatorname{Im}(z) dz &= \int_0^{2\pi} \sin \theta (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = -\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \because \frac{1}{z^2-1} &= \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \cdot \frac{1}{2}. \\ \therefore \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} &= \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = 0 \end{aligned}$$

4) 设 $z = e^{i\theta}$, $|dz| = d\theta$, $|z-1| = 2\cos(\frac{\pi-\theta}{2})$ (见图 2.7 所示.)

$$\begin{aligned} \therefore \int_{|z|=1} |z-1| \cdot |dz| &= 2 \int_0^\pi 2\cos \frac{\pi-\theta}{2} \cdot d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi 2\sin \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned}$$

$$= 8 \int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d \frac{\theta}{2} = -8 \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8$$

注 1. 由 1) 与 2) 可见, 虽然解析函数

$f(z) = z$ 沿任何可求长闭路积分为 0: $\oint_C z dz = 0$. 但其实部与虚部沿 C 的积分并不为 0. 一般地, 设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析, C 为 D 内任一条可求长闭曲线, 则

$$\oint_C f(z) dz = 0 \Rightarrow \oint_C \operatorname{Re}(f(z)) dz = 0,$$

$$\oint_C f(z) dz = 0 \Rightarrow \oint_C \operatorname{Im}(f(z)) dz = 0;$$

2. 3) 的依据是 $\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, 其中 C 为围绕 z_0 的简单正向闭路, 并且, 为

了应用这一结果, 将 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ 写成简单分式;

3. 在 4) 中, 为了表示 $|z - 1|$, 利用了初等几何学的知识, 并注意在 $|z| = 1$ 上的对称性, 便有上述结果.

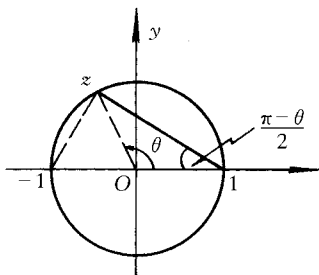


图 2.7

2-7 简单闭曲线 C 应满足怎样的条件可使得下式成立

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0$$

解 注意 $f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$ 为有理函数, 它在除去使分母为 0 的两个点 $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 与 $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 之外, 全平面解析. 所以

(1) 由 Cauchy 积分定理知, 当 C 为不经过且不包围 z_1 和 z_2 的简单闭路时必有

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0;$$

(2) 当 C 同时包围 z_1 与 z_2 在内时, 由复合闭路定理

$$\text{有 } \oint_C \frac{dz}{z^2 + z + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \left(\oint_{c_1} \frac{dz}{z - z_1} - \oint_{c_2} \frac{dz}{z - z_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}i} (2\pi i - 2\pi i) = 0.$$

(3) 除情形 (1), (2) 外, 积分 $\neq 0$.

2-8 计算积分 $\oint_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 4}$, 其中 C : 1) $|z| = 1$, 正向. 2) $|z| = \sqrt{5}$, 正向.

解 1) 注意 $z^2 + 2z + 4$ 的两个零点为 $z = -1 \pm i\sqrt{3}$, 且 $|-1 \pm i\sqrt{3}| = 2 > 1$, 即当积分路径为 $|z| = 1$ (正向) 时, C 本身及其内部均位于 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 4}$ 的解析区域内 (见图 2.8), 故由 Cauchy 积分定理有

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z + 4} = 0$$

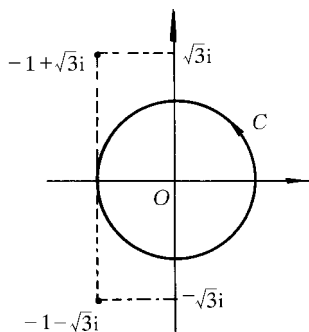


图 2.8

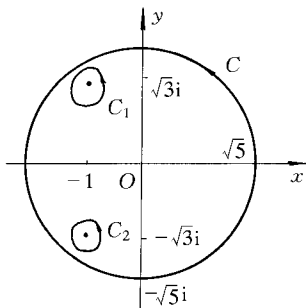


图 2.9

2) $\because |-1 \pm i\sqrt{3}| = 2 < \sqrt{5}$, 故积分路径 $|z| = \sqrt{5}$ (正向) 围绕 $f(z)$ 的两奇点, 由复合闭路定理, 有

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 4} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^2 + 2z + 4} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^2 + 2z + 4}$$

其中 C_1, C_2 如图 2.9 所示. 又

$$\begin{aligned} \because \frac{1}{z^2 + 2z + 4} &= \frac{i}{2\sqrt{3}} \left[\frac{1}{z - (-1 + i\sqrt{3})} - \frac{1}{z - (-1 - i\sqrt{3})} \right] \\ \therefore \text{原积分} &= \frac{i}{2\sqrt{3}} \left[\oint_{C_1} \frac{dz}{z - (-1 + i\sqrt{3})} - \oint_{C_1} \frac{dz}{z - (-1 - i\sqrt{3})} \right] \\ &\quad + \frac{i}{2\sqrt{3}} \left[\oint_{C_2} \frac{dz}{z - (-1 + i\sqrt{3})} - \oint_{C_2} \frac{dz}{z - (-1 - i\sqrt{3})} \right] \\ &= \frac{i}{2\sqrt{3}} (2\pi i - 0) + \frac{i}{2\sqrt{3}} (0 - 2\pi i) = 0 \end{aligned}$$

注 注意 1) 与 2) 的结果均为 0, 但 1) 是因为积分路径 $C: |z| = 1$ 位于 $f(z)$ 的单连通解析区域内, 故由 Cauchy 积分定理得积分 $\oint_C f(z) dz = 0$, 而 2) 中, 积分路径位于 $f(z)$ 的复连通解析区域内, 且 C 内包围 $f(z)$ 的两个奇点, 则由复合闭路

定理, 分别计算 $\oint_{C_1} f(z) dz$ 与 $\oint_{C_2} f(z) dz$, 二者均不为 0, 但相抵消为 0.

2-9 设 C 为不经过 α 与 $-\alpha$ 的正向简单闭路, α 为不等于 0 的任何复数, 试就 C 与 $\alpha, -\alpha$ 的位置关系, 计算积分 $\oint_C \frac{dz}{z^2 - \alpha^2}$.

解 因为 C 不经过 α 及 $-\alpha$, 故 C 与 $\alpha, -\alpha$ 的位置关系有三种可能:

(1) α 与 $-\alpha$ 均位于简单正向闭路 C 之外部 (图 2.10 所示);

(2) α 与 $-\alpha$ 中只有一个位于 C 之外部, 即 C 围绕另一个 (见图 2.11);

(3) C 围绕 α 与 $-\alpha$, 即 $\alpha, -\alpha$ 均位于 C 内部. 在 (1) 情形下, C 位于 $f(z) =$

$\frac{1}{z^2 - \alpha^2}$ 的单连通解析区域内, 故有,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - \alpha^2} = 0$$

在 (2) 情形下, 由于 $\frac{1}{z^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{z + \alpha}$, 若 C 围绕 α , 则

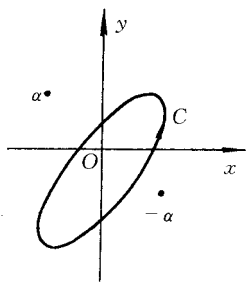


图 2.10

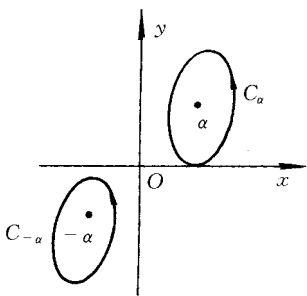


图 2.11

$$\oint_{C_\alpha} \frac{dz}{z^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \oint_{C_\alpha} \frac{dz}{z - \alpha} - 0 = \frac{\pi i}{\alpha}$$

若 C 围绕 $-\alpha$, 则

$$\oint_{C_{-\alpha}} \frac{dz}{z^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \oint_{C_{-\alpha}} \frac{dz}{z - \alpha} - \frac{1}{2\alpha} \oint_{C_{-\alpha}} \frac{dz}{z - (-\alpha)}$$

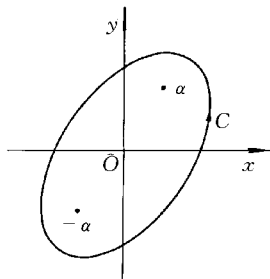


图 2.12

$$= 0 - \frac{1}{2\alpha} \cdot 2\pi i = -\frac{\pi i}{\alpha}$$

在(3)情形下,由复合闭路定理,可作 C_a 围绕 α , C_{-a} 围绕 $-\alpha$,且使 C_a, C_{-a} 均位于 C 内,二者互不相交,不包含,则由(2)有

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - \alpha^2} = \oint_{C_a} \frac{dz}{z^2 - \alpha^2} + \oint_{C_{-a}} \frac{dz}{z^2 - \alpha^2} = \frac{\pi i}{\alpha} - \frac{\pi i}{\alpha} = 0$$

2.2 Cauchy 积分公式及解析函数的任意阶可导性

2.2.1 基本要求

1. 掌握 Cauchy 积分公式的条件、结论及推广形式.
2. 掌握解析函数的任意阶可导性及高阶导数公式.
3. 会运用 Cauchy 积分公式与解析函数高阶导数公式计算闭路积分.

2.2.2 内容提要

1. Cauchy 积分公式: 设 $f(z)$ 在区域 D 内单值、解析, C 为 D 内任一条简单正向闭路, 它本身及其内部 G 完全属于 D , 则对任意 $z \in G$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

2. Cauchy 积分公式对复合闭路的推广

设 $f(z)$ 在区域 D 内单值、解析, C_1, C_2 为 D 内两条简单正向闭路, 且 C_2 位于 C_1 内部, 如果 $\Gamma = C_1 + C_2^-$ 本身及其所围区域 G 完全属于 D , 则对任意 $z \in G$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

3. 定理 区域 D 内解析的函数 $f(z)$ 的导函数 $f'(z)$ 仍在 D 内解析. 且对任一点 $z \in D$ 及任意自然数 k , 有

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

其中 C 为围绕 z 的简单正向闭路, 本身及其内部完全属于 D .

2.2.3 例题解析

2-10 计算下列积分(积分路径均为正向闭路)

$$1) \oint_C \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

(1) C 为只包围 z_1 (或 z_2) 的简单闭曲线, 不经过 z_2 (或 z_1);

(2) C 为包围 z_1, z_2 的简单闭曲线.

$$2) \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz.$$

解 1) (1) 设 C_1 为只围绕 z_1 且不经过 z_2 的简单、正向闭曲线, 则 $\frac{1}{z-z_2}$ 在 C_1 上及其内部解析. 故由 Cauchy 积分公式有

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z-z_2} dz}{z-z_1} = 2\pi i \left. \frac{1}{z-z_2} \right|_{z=z_1} = \frac{2\pi i}{z_1-z_2}$$

同理可知, 当 C_2 为只围绕 z_2 且不经过 z_1 的简单正向闭路时, $\frac{1}{z-z_1}$ 在 C_2 上及其内部解析, 故有

$$\oint_{C_2} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z-z_2} dz}{z-z_1} = 2\pi i \left. \frac{1}{z-z_1} \right|_{z=z_2} = \frac{2\pi i}{z_2-z_1}$$

(2) 当 C 为包围 z_1, z_2 的简单正向闭路时, 由复合闭路定理, 有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} &= \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} + \oint_{C_2} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \\ &= \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z-z_2} dz}{z-z_1} + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z-z_1} dz}{z-z_2} = \frac{2\pi i}{z_1-z_2} + \frac{2\pi i}{z_2-z_1} = 0 \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 分别为(1)中所指.

2) 因为 $\cos z$ 全平面解析, 故积分路径 $|z|=1$ 围绕 $z=0$, 且本身及其内部完全位于 $\cos z$ 的解析区域内, 所以由 Cauchy 积分公式, 有

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z-0} dz = 2\pi i \cdot \cos z|_{z=0} = 2\pi i$$

注 1. 1) 的结果又一次证明了 2-7 题中的(2), 这里用的是 Cauchy 积分公式. 同时对 2-9 题中的(3)也给出了另一种证明方法(不用分成简单分式);

2. 2) 为直接应用 Cauchy 积分公式的简单例子.

2-11 设 C 为正向圆周 $|z|=3$, 计算下列积分值

$$1) \oint_C \frac{dz}{z(z+2)}$$

$$2) \oint_C \frac{z+2}{(z+1)z} dz$$

$$3) \oint_C \frac{z}{(z+1)(z+2)} dz$$

$$4) \oint_C \frac{dz}{z(z+1)^2}$$

解法一 1) 因为 C 围绕 $z_1 = 0$ 与 $z_2 = -2$, 简单、正向、闭, 由 2-10 题 1)

之结果知, $\oint_C \frac{dz}{z(z+2)} = 0$.

2) 因为 C 围绕 $z_1 = 0, z_2 = -1$, 简单、正向、闭, 且 $f(z) = z+2$ 全平面解析, 故由 2-10 题的注释可知

$$\oint_C \frac{z+2}{z(z+1)} dz = 2\pi i \left[\frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} \right] = 2\pi i \cdot \left[\frac{2}{0+1} + \frac{-1+2}{-1-0} \right] = 2\pi i$$

3). 同 2), 这里 $z_1 = -1, z_2 = -2, f(z) = z$.

$$\begin{aligned} \therefore \oint_C \frac{z dz}{(z+1)(z+2)} &= 2\pi i \left[\frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \left[\frac{-1}{-1+2} + \frac{-2}{-2+1} \right] = 2\pi i \end{aligned}$$

解法二 1), 2), 3) 均可用复合闭路定理及 Cauchy 积分公式相结合的方法求解, 此略.

4) 因为 C 包围 $z=0$ 与 $z=-1$, 故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式、高阶导数公式得

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{z(z+1)^2} &= \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+1)^2} dz}{z} + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z}}{(z+1)^2} dz \\ &= 2\pi i \frac{1}{(z+1)^2} \Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z} \right)' \Big|_{z=-1} = 2\pi i - 2\pi i = 0 \end{aligned}$$

注 在 C_1 上的积分应用 Cauchy 积分公式, 在 C_2 上的积分应用解析函数高阶导数公式.

2-12 求下列各积分, 其中 $C: |z| = R > 1$. 正向.

$$1) \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz \quad 2) \oint_C \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^3} dz \quad 3) \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$$

解 1) $\because \cos \pi z$ 全平面解析, $C: |z| = R > 1$ 围绕 $z=1$, 简单、正向、闭, 且本身及其内部完全位于 $\cos \pi z$ 的解析区域内; $\therefore$ 由解析函数高阶导数公式得

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{4!} (\pi^4 \cos \pi z)_{z=1} = -\frac{\pi^5}{12} i$$

2) $\because f(z) = 2z^2 - z + 1$ 于全平面解析 $C: |z| = R > 1$ 围绕 $z=1$, 简单、正

向、闭, 本身及其内部位于 $f(z)$ 解析区域内, 故由解析函数高阶导数公式, 有

$$\oint_C \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} [2z^2 - z + 1]^{(2)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{2} \cdot 4 = 4\pi i$$

3) $\because C: |z|=R>1, \therefore C$ 包围 $z=\pm i$, 简单、正向、闭, 由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z dz}{(z^2+1)^2} + \oint_{C_2} \frac{e^z dz}{(z^2+1)^2}$$

其中 C_1, C_2 分别围绕 $z_1=i, z_2=-i$, 简单、正向、闭, 且均位于 C 内.

$\because C_1$ 本身及其内部完全位于 $g(z)=e^z/(z+i)^2$ 的解析区域内, 由解析函数导数公式有

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z/(z+i)^2}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} \right]'_{z=i} = \frac{\pi}{2} (1-i)e^i$$

同理

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_2} \frac{e^z/(z-i)^2}{(z+i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{e^z}{(z-i)^2} \right]'_{z=-i} = -\frac{\pi}{2} (1+i)e^{-i}$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{\pi}{2} (1-i)e^i - \frac{\pi}{2} (1+i)e^{-i} = i\pi(\sin 1 - \cos 1)$$

注 1), 2) 直接应用高阶导数公式, 3) 则是复合闭路与高阶导数公式相结合.

2-13 设 $f(z)$ 在区域 G 内解析, 且在 G 内有 $f(z) \neq 0$, 又 C 为位于 G 内的任一闭区线, 本身及其内部完全属内 G , 证明

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

证 因为 C 位于 $f(z)$ 的解析区域 G 内, 且本身及其内部完全属于 G , 即 C 上每点为 G 之内点, 故存在单连通区域 $B \subset G$, 使 $f(z)$ 在 B 内解析, 且 C 位于 B 内 (参见图 2.13, 严格证明超出工科本课程大纲). 根据条件知, 当 $z \in B$ 时, $f(z) \neq 0$, 故 $\frac{1}{f(z)}$ 在单连通区域 B 内解析. 又由于解析

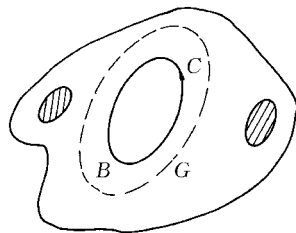


图 2.13

函数的导函数仍解析, 所以 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 B 内解析, 于是, 由 Cauchy 积分定理知

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

注 1. 在题设条件下, 由解析函数的导函数仍解析知 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 G 内解析. 这里 $f(z) \neq 0$ 不可少. 应用此结论时要注意条件;

2. 若在 C 内部含有 $f(z)$ 的零点, 便不能推出 $\frac{1}{f(z)}$ 在 C 内部解析, 从而结论不成立.

例 $f(z) = z^2$, C 为 $|z| = 1$, 则

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 \oint_C \frac{1}{z} dz = 4\pi i \neq 0$$

2-14 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在域 D 内解析, C 为 D 内任一条简单闭曲线, 其内部全部属于 D , 如果 $f(z) = g(z)$ 在 C 上处处成立, 试证, 在 C 内处处有 $f(z) = g(z)$.

证 令 $F(z) = f(z) - g(z)$, 则 $F(z)$ 在 D 内解析, 特别地, 在 C 上及其内部解析. 对 C 内任一点 z_0 , 由 Cauchy 积分公式

有
$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z)}{z - z_0} dz$$

因为在 C 上, $F(z) \equiv 0$, 所以, $F(z_0) = 0$. 由 z_0 为 C 内任一点知, 在 C 上及 C 内, 有 $F(z) \equiv 0$, 即 $f(z) \equiv g(z)$.

注 Cauchy 积分公式表明, 解析函数在其解析区域内任一点的值可通过它在围绕该点且本身及其内部完全位于解析域内的闭曲线上的值来表示, 正因为这样, 当两个函数在这样的闭曲线上取等值时, 就意味着二者在此闭曲线内处处取等值.

2-15 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析, 证明: 存在 $\rho > 0$, 使得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

证 因为 $f(z)$ 在 z_0 点解析, 由解析的定义知, $\exists \delta > 0$, 使得 $f(z)$ 在 $U_\delta(z_0)$ 内处处解析. 任取 $0 < \rho < \delta$, 则圆周 $C_\rho: |z - z_0| = \rho$ 本身及其内部完全位于 $U_\delta(z_0)$ 内, 且 C_ρ 以 z_0 为圆心. 于是, 由 Cauchy 积分公式

有
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{沿 } C_\rho \text{ 正向})$$

又, C_ρ 的参数方程为 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$, 代入积分公式得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{z_0 + \rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

注 此题结果说明,解析函数在解析区域内任一点 z_0 处的值等于它在以该点为圆心的任一圆周上的算术平均值(只要这一圆周本身及其内部位于解析区域内). 故此结果也称作解析函数的平均值公式.

2-16 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1}$, 其中 $C: |z|=2$ 为正向.

解 因为 $z^4-1=0$ 之解为 $z_1=1, z_2=i, z_3=-1, z_4=-i$, 分别作简单正向闭路 C_j 包围 z_j , 使 $C_j (j=1, 2, 3, 4)$ 互不包含, 互不相交, 均位于 $|z|=2$ 内, 则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{dz}{z^4-1} = \sum_{j=1}^4 \oint_{C_j} \frac{dz}{z^4-1}$$

又由 Cauchy 积分公式得: 其中

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{dz}{z^4-1} &= \oint_{C_1} \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \cdot \frac{dz}{(z-z_1)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{(1-i)(1+i)(1+i)} = \frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \frac{dz}{z^4-1} &= -\frac{\pi}{2}, & \oint_{C_3} \frac{dz}{z^4-1} &= -\frac{\pi i}{2}, & \oint_{C_4} \frac{dz}{z^4-1} &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1} &= \sum_{j=1}^4 \oint_{C_j} \frac{dz}{z^4-1} = 0 \end{aligned}$$

2-17 设 $f(z) = \oint_{|\xi|=3} \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z} d\xi$, $|z|<3$. 求 $f'(1+i)$.

解 设 $F(z) = 3z^2+7z+1$. 它在全平面解析, 故对 $|z|<3$ 内任一点 z , 由 Cauchy 积分公式, 有

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=3} \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} f(z) \\ \therefore f(z) &= 2\pi i F(z) \end{aligned}$$

于是,
$$\begin{aligned} f'(1+i) &= 2\pi i F'(1+i) = 2\pi i [6(1+i)+7] \\ &= 2\pi i (13+6i) = 2\pi(-6+13i) \end{aligned}$$

注 本题不是通过在积分号下求导来求 $f'(z)$ 的, 而是利用了 Cauchy 积分公式, 问题变得十分简单明了.

2.3 第2章练习题

1. 计算 $\oint_C |z| \bar{z} dz$, 其中 C 为上半单位圆周与线段 $-1 \leq x \leq 1, y=0$ 组成的

正向闭曲线. (答 πi .)

2. 利用积分 $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}$ 计算定积分 $\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$.

(答 0. 提示: 令 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, 由 $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z+2} = 0$ 分出其虚部.)

3. 沿摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$, 计算积分 $\int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) dz$

(答 $\frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a$.)

4. 计算积分

$$(1) \oint_{|z|=2} \frac{2z^2 - z + 1}{z-1} dz \quad (2) \oint_{|z|=2} \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^5} dz$$

路径取正向. (答 (1) $4\pi i$, (2) 0).

5. 求积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$, 其中 C 取正向, 且

(1) $C: |z| = \frac{1}{2}$ (2) $|z-1| = \frac{1}{2}$ (3) $|z| = 2$

(答 (1) $2\pi i$ (2) $-i\pi e$ (3) $2\pi i - i\pi e$).

6. 沿图 2.14 中所给路径计算积分 $\int_C \frac{dz}{z}$, 其中

C 以 1 为起点, 以 z 为终点.

(答 $-4\pi i + \ln z$)

7. 计算积分 $\oint_{|z-a|=1} (z-a)^n dz$, 路径为正向, n

为整数.

(答 $\begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$)

8. 若 $f(z)$ 在单连通 D 内解析, C 为位于 D 内

任一条光滑闭曲线, 是否可由 $\oint_C f(z) dz = 0$ 推出 $\oint_C \operatorname{Re}(f(z)) dz = 0$ 及

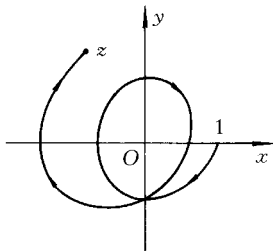


图 2.14

$\oint_C \operatorname{Im}(f(z)) dz = 0$?若能,给出证明,若不能,举例说明之.

9. 计算积分

$$\int_C \frac{2z^2 - 15z + 30}{(z-2)(z-4)^2} dz$$

其中 C 为正向圆周 (1) $|z|=3$ (2) $|z-4|=1$ (3) $|z|=5$.

(答 (1) $4\pi i$ (2) 0 (3) $4\pi i + 0$)

10. 计算积分

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3} dz \quad C: |z|=2, \text{正向}$$

(答 $-\pi i$)

11. 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-\alpha)^3} dz$, C 为正向, 其中 $|\alpha| \neq 1$.

(答 当 $|\alpha| > 1$ 时, 积分 $= 0$, 当 $|\alpha| < 1$ 时, 积分 $= \pi i e^{\alpha}$.)

12. 计算 $\oint_C \frac{e^z}{z^2-1} dz$, $C: |z|=2$ 正向.

(提示: 可用 2-9 题注释. 答 $2\pi i \left[\frac{e}{1-(-1)} + \frac{e^{-1}}{(-1)-1} \right]$.)

13. 求 $\oint_{|z|=1} \frac{z - \sin z}{z^6} dz$, C 为正向 (答 $-\frac{2\pi i}{5!}$)

第 3 章 解析函数的幂级数表示

3.1 Taylor 级数

3.1.1 基本要求

1. 掌握并会运用幂级数的运算及性质.
2. 掌握幂级数收敛半径的性质及求法.
3. 掌握在 z_0 点解析的函数 $f(z)$ 展为 Taylor 级数的方法及收敛半径的确定方法.

3.1.2 内容提要

1. (定理一 Abel 定理), 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在 $z_1 \neq z_0$ 处收敛, 则对满足 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 的一切 z , 级数必绝对收敛; 如果级数在 z_1 处发散, 则对满足 $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ 的一切 z , 级数必发散.

2. 定义 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, 如果存在 $R > 0$, 使得在 $|z - z_0| < R$ 内收敛, 在 $|z - z_0| > R$ 内发散, 则称 $R > 0$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 的收敛半径.

3. 定理二 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$, 则 (1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $R = \frac{1}{\lambda}$; (2) 当 $\lambda = 0$ 时, $R = +\infty$; (3) 当 $\lambda = +\infty$ 时, $R = 0$.

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mu$, 则 (1) 当 $\mu \neq 0$ 时, $R = \frac{1}{\mu}$; (2) 当 $\mu = 0$ 时, $R = +\infty$; (3) 当 $\mu = +\infty$ 时, $R = 0$.

4. 幂级数的运算及性质

1) 设在 $|z - z_0| < r_1$ 内有
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z) \quad (\text{A})$$

在 $|z - z_0| < r_2$ 内有

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = g(z) \quad (B)$$

则在 $|z - z_0| < r = \min(r_1, r_2)$ 内,级数(A),(B)可按多项式进行和、差、积运算,其结果的幂级数之和函数是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积,且其收敛半径 $\geq r$;

当 $b_0 \neq 0$ 时,必 $\exists r^* \leq \min(r_1, r_2)$. 使得在 $|z - z_0| < r^*$ 内有 $g(z) \neq 0$, 则(A)与(B)可进行除法运算((B)为除数)其商在 $|z - z_0| < r^*$ 内收敛于 $f(z)/g(z)$;

2) 设在 $|z - z_0| < r$ 内有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z)$, 在 $|z - z_0| < R$ 内 $g(z)$

解析,且 $|g(z) - z_0| < r$, 则在 $|z - z_0| < R$ 内有

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(z) - z_0)^n$$

3) 在收敛圆内可对幂级数逐项求导、逐项积分,且其收敛半径不变;

4) 收敛幂级数的和函数在收敛圆内解析.

5. 定理三(Taylor 定理) 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析,则存在 $R > 0$, 使得在 $|z - z_0| < R$ 内有 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, 其中 $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, R 为 $f(z)$ 的距 z_0 最近一个奇点到 z_0 之距离. 此展开式唯一.

3.1.3 例题解析

3-1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 2)^n$ 能否在 $z = 0$ 处收敛,而在 $z = 3$ 处发散? 说明理由.

答 不可能. 因为若在 $z = 0$ 处收敛,则由 Abel 定理,在一切满足 $|z - 2| < |0 - 2| = 2$ 的 z 处级数均收敛,显见, $z = 3$ 满足此不等式,故不可能在 $z = 3$ 处发散.

3-2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R , 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n) z^n$ 的收敛半径 $\geq R$.

证 只要证明在 $|z| < R$ 内, $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n) z^n$ 收敛即可(即 $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n) z^n$ 的收敛半径至少为 R).

因为在 $|z| < R$ 内, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛,由 Able 定理,在 $|z| < R$ 内, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| =$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n$ 收敛, 而 $|\operatorname{Re}(a_n)| \leq |a_n|$.

所以 $|\operatorname{Re}(a_n)z^n| \leq |a_n| |z|^n$, 故由正项级数比较判别法知, $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re}(a_n)| \cdot$

$|z|^n$ 在 $|z| < R$ 内收敛, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)z^n$ 在 $|z| < R$ 内必收敛 (绝对收敛必收敛).

注 本题要证 $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)z^n$ 的收敛半径 $\geq R$ (不小于 R), 即要证它的收敛半

径至少为 R , 所以只要证明在 $|z| < R$ 内级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)z^n$ 收敛即可. 值得注意的是, 该级数在 $|z| < R$ 内收敛, 不能说其收敛半径为 R , 因为并不能证明在 $|z| > R$ 内级数发散. 也就是说, 至少在 $|z| < R$ 内收敛. 这里用到的就是收敛半径的性质.

3-3 设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 证明下列三个级数有同一收敛半径: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

证 证法一 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径为 $R = \frac{1}{\lambda}$, ($\lambda \neq 0$),

由收敛幂级数性质, 在 $|z| < R$ 内, 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 可逐项积分、逐项求导, 所得结果收

敛半径不变. 故知 $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 及 $\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ 收敛半

径仍为 $R = \frac{1}{\lambda}$.

当 $\lambda = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $R = +\infty$. 上述性质仍成立.

证法二 $\because \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{n+2} \bigg/ \frac{a_n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

即三个级数的收敛半径相同.

注 证法二虽简单, 但应注意证法一用到的是收敛幂级数的性质, 故证法一

更好一些.

3-4 设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析, 且在 $(-R, R)$ 上取实值, 试说明 $f(z)$ 在 $z_0 = 0$ 点的幂级数展式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的系数为什么一定为实数?

解 在题设条件下, 实变量函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可展为 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其在 $(-R, R)$ 内收敛, 且由 Taylor 定理, 系数 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ 为实系数. 函数 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处也可展为 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, 在 $|z| < R$ 内收敛, 其系数 $b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$. 这里 a_n 中的 $f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$ (1)

$$\text{而 } b_n \text{ 中的 } f^{(n)}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(0)}{z} \quad (2)$$

即(1)中 x 的沿实轴趋于 0, 而(2)中的 z 以任意方式(在平面上)趋于 0. 但当(2)中的极限存在时, 可以任意方式趋于 0 的结果均为此极限值. 特别地, 沿实轴方向趋于 0 时可得到同一结果. 即

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(0)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$

所以 $a_n = b_n$. 从而在题设条件下, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($|z| < R$) 中的系数为实数, 且就是实函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 Taylor 展开式的系数.

注 此题的结果十分有用, 因为基本初等函数 $f(z)$ (即: $\sin z$, $\cos z$, e^z , $\ln(1+z)$ (主值分支), $\tan z$ 等) 均满足在实轴上取实值条件, 且 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析 (各 $f(z)$ 的 R 不同), 于是这些函数在 $z=0$ 点的 Taylor 展式系数即为对应的实函数在 $x=0$ 处展开式系数.

3-5 在 $z=0$ 的邻域将 $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$ 展为 Taylor 级数, 并求收敛半径.

解 因为 $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$ 在 $z \neq 1$ 的区域内解析, 故可在 $z=0$ 的邻域内展为 Taylor 级数, 且收敛半径 $R = |1-0| = 1$.

所以在 $|z| < 1$ 内有展开式 $\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\text{又} \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad |z| < 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad |z| < +\infty \quad (\text{由 3-4 题结论得})$$

由幂级数乘法得

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots) \\ &= 1 + 2z + (1 + \frac{1}{2} + 1)z^2 + (1 + \frac{1}{3!} + 1 + \frac{1}{2!})z^3 + \cdots \\ &= 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \cdots \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

注 1. 由幂数乘法, 可得到 $f(z)$ 展式中的任一项;

2. 由展式可见, 展开式中各项系数 $a_n \geq 1$, 故当 $z = 1$ 时, 右端级数发散,

即 $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \cdots$ 之收敛半径 $R = 1 = \min(1, +\infty)$.

3-6 将下列函数展为 z 的幂级数

1) $e^{\frac{1}{1-z}}$ 2) $\sin^2 z$ 3) $\arctan z$ (取主值 $\arctan 0 = 0$)

4) $\ln(1+z)$ (主值分支, $\ln 1 = 0$) 5) $\sin z$

解 1) 因为 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 故由 Taylor 定理, 可在此圆内将 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 展为 Taylor 级数.

$$\because \frac{1}{1-z} = 1 + \frac{z}{1-z}, \quad \therefore e^{\frac{1}{1-z}} = e \cdot e^{\frac{z}{1-z}}.$$

由 $\frac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots \quad |z| < 1$ 及 $e^\xi = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \cdots \quad |\xi| < +\infty$

用级数代入法得

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-z}} &= e \cdot e^{\frac{z}{1-z}} = e \cdot e^{(z+z^2+z^3+\cdots)} \\ &= e[1 + (z + z^2 + z^3 + \cdots) + \frac{1}{2!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^2 + \frac{1}{3!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \cdots] \\ &= e[1 + z + (1 + \frac{1}{2!})z^2 + (1 + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!})z^3 + (1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{1}{4!})z^4 + \cdots] \\ &= e\left(1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \frac{73}{24}z^4 + \cdots\right) \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

2) $\because \sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z$

由 3-4 题结论知 $\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \cdots \quad |2z| < +\infty$

$$\begin{aligned}\therefore \sin^2 z &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2^2 z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} - \frac{2^6 z^6}{6!} + \cdots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \quad |z| < +\infty.\end{aligned}$$

$$3) \text{ 解法一 } \because \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1$$

逐项积分得

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad |z| < 1$$

(对应于 $\arctan 0 = 0$ 的主值分支)

$$\text{解法二} \quad \text{由 } \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| < 1, \text{ 用 3-4 题结论, 即得}$$

$\arctan z$ 展式及收敛半径.

$$4) \text{ 解法一 } \because \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad |z| < 1$$

在收敛圆内逐项积分, 并取 $\ln(1+z)$ 对应于 $\ln 1 = 0$ 的分支, 得

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \ln(1+z) \quad |z| < 1$$

$$\text{解法二} \quad \text{由 } \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < 1 \text{ 及 3-4 题结论, 即可}$$

得 $\ln(1+z)$ 的展式及收敛半径.

$$5) \text{ 由 3-4 题结论及 } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, |x| < +\infty, \text{ 即得}$$

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad |z| < +\infty\end{aligned}$$

注 1) 用级数代入法, 2) 复合函数关系: ($\cos \xi$, $\xi = 2z$) 及初等函数基本展式,

3), 4) 用逐项积分性质, 5) 用 3-4 题结论. 这些方法均为基本方法, 由展式的唯一

性, 这里得到的展开式即为 $f(z)$ 的 Taylor 展式 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

3-7 将下列函数展为幂级数, 并求收敛半径.

$$1) \frac{1}{\cos z} \text{ 展为 } z \text{ 的幂级数; } 2) \tan z \text{ 展为 } (z - \frac{\pi}{4}) \text{ 的幂级数; } 3) \frac{1}{4-3z} \text{ 展为}$$

$$(z - z_0) \text{ 的幂级数, 这里 } z_0 = 1+i; 4) \frac{1}{(1+z^2)^2} \text{ 展为 } z \text{ 的幂级数.}$$

解 1) 因为 $\cos z$ 在 $z=0$ 处解析, 且 $\cos 0=1 \neq 0$.

所以 $\frac{1}{\cos z}$ 在 $z=0$ 处解析, 故可展为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 又因 $\cos \frac{\pi}{2}=0$, 且 $\frac{\pi}{2}$

为 $\frac{1}{\cos z}$ 的离 $z=0$ 最近的奇点, 所以 $R=\frac{\pi}{2}$.

现用级数除法(待定系数法)求其展式

设 $\frac{1}{\cos z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, 其中 a_j 待定 ($j=0, 1, 2, \dots$)

因为 $\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

由唯一性, 并注意 $\frac{1}{\cos z}$ 为偶函数, 故奇次项系数为 0.

$$\therefore 1 \equiv (a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots)$$

由幂级数乘法得

$$1 \equiv a_0 + (a_2 - \frac{a_0}{2!})z^2 + (\frac{a_0}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_4)z^4 + (\frac{-a_0}{6!} + \frac{a_2}{4!} - \frac{a_4}{2!} + a_6)z^6 + \dots$$

对比系数得

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_2 &= \frac{a_0}{2!} \\ a_4 &= \frac{a_2}{2!} - \frac{a_0}{4!} \\ a_6 &= \frac{a_4}{2!} - \frac{a_2}{4!} + \frac{a_0}{6!} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \\ a_4 &= \frac{5}{24} \\ a_6 &= \frac{61}{720} \\ &\dots \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{61}{720}z^6 + \dots \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

2) 因为 $\tan z$ 在 $z_0 = \frac{\pi}{4}$ 处解析, 距 $\frac{\pi}{4}$ 最近的奇点为 $\frac{\pi}{2}$, 故幂级数 $\tan z =$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \frac{\pi}{4})^n$ 的收敛半径 $R = \frac{\pi}{4}$. 由 Taylor 定理, $a_n = \frac{(\tan z)^{(n)}}{n!} \Big|_{z=\frac{\pi}{4}}$.

因为 $a_0 = \tan z \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = 1$; $a_1 = (\tan z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2 z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = 2$;

$$a_2 = \frac{1}{2!} (\tan z)'' \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2!} \frac{2 \sin z}{\cos^3 z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}(\tan z)_{z=\frac{\pi}{4}}^{(3)} = \frac{1}{3!} \left(\frac{2\cos^2 z + 6\sin^2 z}{\cos^4 z} \right)_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{3};$$

$$a_4 = \frac{1}{4!}(\tan z)_{z=\frac{\pi}{4}}^{(4)} = \frac{1}{4!} \left. \frac{16\sin z \cos^2 z + 24 \sin^3 z}{\cos^5 z} \right|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{10}{3};$$

...

于是
$$\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n = 1 + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \dots$$

$$\left| z - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{\pi}{4}$$

3) $\frac{1}{4-3z}$ 在 $z_0 = 1+i$ 处解析, 故可展为 $(z-z_0)$

的幂级数,

因为 $\frac{1}{4-3z}$ 在有限复平面内有唯一奇点 $z = \frac{4}{3}$

(见图 3.1).

故收敛半径为 $R = \left| \frac{4}{3} - z_0 \right| = \left| \frac{1}{3} - i \right|$

$= \frac{\sqrt{10}}{3}$. 令 $z - z_0 = \xi$, 则 $z = \xi + z_0$.

$$\frac{1}{4-3z} = \frac{1}{4-3\xi-3z_0} = \frac{1}{4-3z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4-3z_0}\xi}$$

$$= \frac{1}{4-3z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4-3z_0} \right)^n \xi^n,$$

$$\left| \frac{3}{4-3z_0} \xi \right| < 1 \Rightarrow |\xi| < \left| \frac{4}{3} - z_0 \right|$$

将 $z_0 = 1+i$ 及 $\xi = z - z_0$ 代入上式得

$$\frac{1}{4-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}} [z - (1+i)]^n, \quad |z - (1+i)| < \frac{\sqrt{10}}{3}$$

4) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 处解析, 且以 $\pm i$ 为奇点, 故可知其 Taylor 展式

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R = 1$.

设 $z^2 = \xi$, 将 $\frac{1}{(1+\xi)^2}$ 展为 ξ 的幂级数, 再代入 $\xi = z^2$ 即可得所求 (由展式唯一性保证).

因为
$$\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n \quad |\xi| < 1$$

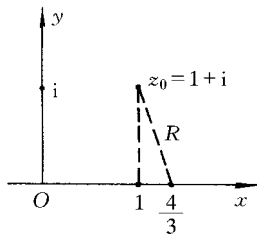


图 3.1

在 $|\xi| < 1$ 内逐项微分得

$$\frac{-1}{(1+\xi)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \xi^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (n+1) \xi^n$$

$$\therefore \frac{1}{(1+\xi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \xi^n \quad | \xi | < 1$$

于是
$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n} \quad | z | < 1$$

注 对 1) 采用幂级数除法, 这里注意在 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内, $\cos z \neq 0$, 故由幂级数除

法, 商的幂级数在 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内等于幂级数之商; 对 2) 采用直接求 Taylor 系数

$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)/n!$ 的方法, 也可以用幂级数除法解得, 但相比之下, 在这里, 直接求系数

法较简单些; 对 3) 采用的是复合函数的展开 $\left(\frac{1}{1-t}, t = \frac{3}{4-3z_0}\xi\right)$; 对 4) 用复合函

数及幂级数逐项求导法之结合.

在所有问题中, 都应注意收敛半径的确定方法.

3-8 计算下列积分: (积分路径均为正向)

$$1) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{1-z}} dz}{z^5} \quad 2) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\arctan z}{z^{99}} dz$$

$$3) \oint_{|z|=\frac{\pi}{4}} \frac{dz}{z^5 \cos z} \quad 4) \oint_{|z-\frac{\pi}{4}|=\frac{\pi}{5}} \frac{\tan z}{(z-\frac{\pi}{4})^5} dz$$

解 1) 因为 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且积分路径 $|z| = \frac{1}{2}$ (正向) 围绕 $z=0$, 本身及其内部完全属于 $|z| < 1$, 故由高阶导数公式知

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} (e^{\frac{1}{1-z}})^{(4)} \Big|_{z=0}$$

又由 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 邻域 Taylor 展开式系数知, 原积分 $= 2\pi i a_4$, a_4 为展式中 z^4 之系数.

所以
$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz = 2\pi i \left(\frac{73}{24}e\right) \quad (3-6 \text{ 题 } 1))$$

2) 因为主值分支 $\arctan z$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 积分路径 $|z| = \frac{1}{2}$ (正向) 本身

及其内部完全位于 $|z| < 1$ 内, 且围绕 $z=0$, 故由高阶导数公式及 $\arctan z$ 在 $z=0$ 邻域 Taylor 展式系数知:

$$\text{原积分} = 2\pi i a_{98} = 0 \quad (\text{偶次幂系数均为 } 0 \quad (3-6 \text{ 题 } 3))$$

3) 因为 $\frac{1}{\cos z}$ 在 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内解析, 且积分路径 $|z| = \frac{\pi}{4}$ 围绕 $z=0$ 简单、正向、闭, 本身及其内部完全属于 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内, 故由高阶导数公式及 $\frac{1}{\cos z}$ 在 $z=0$ 邻域 Taylor 展开式系数知

$$\text{原积分} = 2\pi i a_4 \quad (a_4 \text{ 为 } z^4 \text{ 之系数})$$

$$\text{故有} \quad \text{原积分} = 2\pi i \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{12}\pi i \quad (3-7 \text{ 题 } 1))$$

4) 因为 $\tan z$ 在 $|z - \frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{4}$ 内解析, 且积分路径 $|z - \frac{\pi}{4}| = \frac{\pi}{5}$ 围绕 $z = \frac{\pi}{4}$, 简单、正向、闭, 且本身及其内部完全属于 $|z - \frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{4}$ 内. 故由高阶导数公式和 $\tan z$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 邻域 Taylor 展式系数知

$$\text{原积分} = 2\pi i a_4, \quad a_4 \text{ 为 } \tan z \text{ 在 } z = \frac{\pi}{4} \text{ 邻域展开式中 } (z - \frac{\pi}{4})^4 \text{ 之系数, 由 } 3-7 \text{ 题 } 2) \text{ 知, } a_4 = \frac{10}{3}.$$

$$\text{所以} \quad \text{原积分} = 2\pi i \cdot \frac{10}{3} = \frac{20\pi i}{3}$$

注 1. 以上几题采用同一方法, 即通过函数的 Taylor 展式求积分, 这种方法适用于已知函数展式或用其它方法便于求得展式的情况, 这样作的理论依据是 Taylor 展式的唯一性;

2. 事实上, 在 3-6 与 3-7 各题中, 除 3-7 题 2) 之外, 均没有用求 $f^{(n)}(z_0)$ 的方法去求各展开式, 而是通过幂级数的运算及性质得到 $f(z)$ 的 Taylor 级数的, 这样不仅使展开问题简便, 而且由 3-8 各题可见, 还为我们提供了计算某类闭路积分的方法, 但应注意应用此方法时一定要检验路径是否满足高阶导数公式的条件.

3-9 将下列函数展为 z 的幂级数, 并求出收敛半径.

$$1) f(z) = \int_0^z e^{z^2} dz \quad 2) f(z) = \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$$

解 1) 设 $g(z) = e^{z^2}$, 因为 $g(z)$ 全平面解析, 且有

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} \quad |z| < +\infty$$

由幂级数性质, 逐项积分得

$$f(z) = \int_0^z g(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad |z| < +\infty$$

2) 设 $g(z) = \frac{\sin z}{z}$, 因为 $g(z)$ 在 $z \neq 0$ 处处解析.

且 $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 1$, 故 $z=0$ 为 $g(z)$ 的可去奇点, 令 $h(z) = \begin{cases} g(z), & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$, 则

$h(z)$ 全平面解析.

且由积分定义可知

$$f(z) = \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz = \int_0^z h(z) dz$$

$$\therefore h(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} & 0 < |z| < +\infty \\ 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \Big|_{z=0} & z = 0 \end{cases}$$

即
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \quad |z| < +\infty$$

由幂级数逐项积分性质有

$$f(z) = \int_0^z h(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} z^{2n+1} \quad |z| < +\infty$$

注 1. 本题利用幂级数在收敛圆内可逐项积分且收敛半径不变的性质求得结果;

2. 在 2) 中, 注意 $z=0$ 为 $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点, 从而利用复变函数积分定义, 改变 (或补充定义) 被积函数在有限个点处的函数值不影响其积分结果 (的性质与值).

3-10 求下列函数在指定点的高阶导数

1) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, 求 $f^{(6)}(0)$, $f^{(61)}(0)$

2) $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$, $f^{(101)}(0)$

3) $f(z) = \int_0^z e^{z^2} dz$, 求 $f^{(100)}(0)$, $f^{(99)}(0)$

$$4) f(z) = \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz, \text{求 } f^{(50)}(0), f^{(51)}(0)$$

解 1) $\because \frac{1}{\cos z}$ 在 $z=0$ 处解析, 故在 $z=0$ 处任意阶可导, 由 Taylor 定理知,

$f^{(n)}(0) = n! a_n$, 其中 a_n 为 $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ 在 $z=0$ 邻域 Taylor 展式中的系数.

$$\therefore f^{(6)}(0) = 6! a_6 = 6! \frac{61}{720} = 61, \quad f^{(61)}(0) = 61! a_{61} = 0 \quad (3-7 \text{ 题 } 1))$$

同理, 对 2), 有 $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 处解析.

$$\therefore f^{(100)}(0) = 100! a_{100} = (-1)^{50} \cdot 51 \times 100! = 51 \times 100!$$

$$f^{(101)}(0) = 101! a_{101} = 0 \quad (3-7 \text{ 题 } 4))$$

$$3) \because f(z) = \int_0^z e^{z^2} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad |z| < +\infty$$

$\therefore$ 由 Taylor 定理有

$$f^{(100)}(0) = 100! a_{100} = 0, \quad f^{(99)}(0) = 99! a_{99} = 99! \frac{1}{49! 99} = \frac{98!}{49!}$$

$$4) \because f(z) = \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} z^{2n+1} \quad |z| < +\infty$$

$\therefore$ 由 Taylor 定理有

$$f^{(50)}(0) = 50! a_{50} = 0$$

$$f^{(51)}(0) = 51! \frac{(-1)^{25}}{51 \times 51!} = -\frac{1}{51}$$

注 本题利用所给函数在 $z=0$ 邻域内 Taylor 展式求得各指定 $f^{(n)}(0)$ 的值, 而不需计算对应的闭路积分, 其理论依据为 Taylor 定理及展式的唯一性.

3.2 Laurent 级数

3.2.1 基本要求

1. 了解双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ 收敛的概念及收敛点集结构.
2. 掌握收敛双边幂级数的运算及性质.
3. 掌握圆环域内解析的函数 $f(z)$ 的 Laurent 级数展开方法.
4. 会灵活运用 $f(z)$ 在 $r < |z - z_0| < R$ 内的 Laurent 展式求闭路积分

$\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ 值 (C 围绕 z_0 , 简单, 正向, 闭, 本身位于环域 $r < |z - z_0| < R$ 内, $f(z)$ 在该环域内解析).

3.2.2 内容提要

1. 定义 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ 在 $|z - z_0| > R_1$ 内收敛, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内收敛, 且 $R_1 < R_2$, 则称双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z - z_0)^n$ 在 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内收敛. 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z - z_0)^n$ 称为 Laurent 级数. 其收敛域为圆环域.

2. 性质 收敛的 Laurent 级数在其收敛圆环内绝对收敛, 可逐项积分, 逐项微分, 和函数在其收敛环域内解析.

3. Laurent 定理 在圆环 $r < |z - z_0| < R$ 内解析的函数 $f(z)$ 在这个环域内可用 Laurent 级数表示

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

C 位于圆环域 $r < |z - z_0| < R$ 内, 且围绕 z_0 , 简单、正向、闭 (包括 $r=0$ 及 $R=+\infty$ 情形). 展开式唯一.

3.2.3 例题解析

3-11 将 $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ 在下列圆环域内展为 Laurent 级数.

1) $0 < |z - i| < 2$, 2) $0 < |z + i| < 2$

解 1) $f(z)$ 在 $0 < |z - i| < 2$ 内解析, 由 Laurent 定理, $f(z)$ 在该环域内可展为绝对收敛的 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - i)^n$$

且展开式唯一, 为得到此展式, 注意 $f(z) = \frac{z}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i}$

其中 $\frac{z}{z+i}$ 在 $|z - i| < 2$ 内解析, 故可展为 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - i)^n$

$$\begin{aligned} \because \quad \frac{z}{z+i} &= 1 - \frac{i}{z+i} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n \quad \left| \frac{z-i}{2i} \right| < 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(z) = \frac{z}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n \quad 0 < |z-i| < 2$$

此即所求.

2) $f(z)$ 在环域 $0 < |z+i| < 2$ 内解析, 同 1), 可有 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z+i)^n$, 且

此展式唯一. 注意 $f(z) = \frac{z}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i}$, 其中 $\frac{z}{z-i}$ 在 $|z+i| < 2$ 内解析, 故可展为

Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z+i)^n$

$$\begin{aligned} \because \quad \frac{z}{z-i} &= 1 + \frac{i}{z-i} = 1 + \frac{i}{(z+i)-2i} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z+i}{2i}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i} \right)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i} \right)^n \quad \left| \frac{z+i}{2i} \right| < 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i} \right)^n \quad 0 < |z+i| < 2$$

此即所求.

注 1. Laurent 级数的唯一性指在给定圆环域内解析的 $f(z)$ 的展开式唯一. 对同一个 $f(z)$, 在不同圆环域内的展式是不同的. 这点与唯一性没有矛盾;

2. 从本例题的求解方法可以看出, 这里我们并没有应用系数公式

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

而是通过将 $f(z)$ 中在圆域

$|z - z_0| < r$ 中不解析的因子 (1) 中为 $\frac{1}{z-i}$, (2) 中为 $\frac{1}{z+i}$) 去掉后的部分在 $|z - z_0|$

$< R$ 内作 Taylor 展开, 再将此展式与去掉的因子相乘, 便得到 $f(z)$ 在所给环域内的 Laurent 展开. 而且其系数一定与系数公式值相等, 这是唯一性所保证的. 正因为这样, 在实际展开时, 问题将归结为一个与 $f(z)$ 有关的解析函数在大圆域 $|z - z_0| < R$ 内的 Taylor 展开. 同时, 这种方法还为我们提供了一种求积分

$\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$ 之值的方法. 要注意 C 必须是位于 $r < |z - z_0| < R$ 内, 围绕 z_0 的简单闭曲线.

3-12 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域内展为 Laurent 级数.

$$1) 1 < |z| < 2 \quad 2) |z| > 2$$

解 1) 因为 $f(z) = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)}$, 将 $f(z)$ 在环域 $1 < |z| < 2$ 内展为 Laurent 级数 (见图 3.2), 即要将 $f(z)$ 展为形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$ 的级数, 因为 $f(z)$ 在 $1 < |z| < 2$ 内解析, 由 Laurent 定理, 上述展式存在, 为得到它, 注意 $\frac{1}{z-2}$ 在 $|z| < 2$

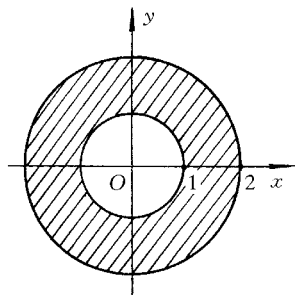


图 3.2

内解析, 且 $\left| \frac{z}{2} \right| < 1$, 故

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad |z| < 2$$

又因 $1 < |z|$, 所以 $\frac{1}{|z|} < 1$.

故

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \quad 1 < |z|$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad 1 < |z| < 2$$

2) 当 $|z| > 2$ 时, 对于 $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ 有

$$0 < \left| \frac{1}{z} \right| < \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

仿 1), 有 $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \quad 1 < 2 < |z|$.

而 $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n}, \quad \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n} \quad |z| > 2$$

注 在这个题目中运用了 Taylor 基本展式 $\frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n, |\xi| < 1$. 因为在 1)

中, $1 < |z| < 2$. 故有 $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ 及 $\left| \frac{z}{2} \right| < 1$, 而在 2) 中, 因为 $|z| > 2$. 故 $\left| \frac{1}{z} \right| < \left| \frac{2}{z} \right| < 1$. 这是在应用上述基本展式时必须注意到的.

3-13 将 $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z| > 1$ 内展为 Laurent 级数.

解 注意 $|z| > 1$, 有 $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$. 而 $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$. 令 $\frac{1}{z} = \xi$, 则 $e^{\frac{1}{1-z}} =$

$e^{-\frac{\xi}{1-\xi}}$, 且当 $|z| > 1$ 时有 $|\xi| < 1$. 于是由 3-6 题 1) 有

$$e^{-\frac{\xi}{1-\xi}} = e^{-(\xi + \xi^2 + \dots)}$$

$$= 1 - (\xi + \xi^2 + \dots) + \frac{1}{2!}(\xi + \xi^2 + \dots)^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}(\xi + \xi^2 + \dots)^n + \dots$$

将 $\xi = \frac{1}{z}$ 代入得

$$e^{\frac{1}{1-z}} = 1 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right)^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right)^n + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \frac{19}{120z^5} + \dots \quad |z| > 1$$

注 本题通过代换 $\xi = \frac{1}{z}$ 将环域 $|z| > 1$ 变为 $0 < |\xi| < 1$, 将 $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ 变为

$\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi}{1-\xi}}$, 后者在 $|\xi| < 1$ 内解析, 故可应用 3-6 题 1) 的结果. (那里是 $\varphi_1(\xi) =$

$e^{\frac{\xi}{1-\xi}}$ 在 $|\xi| < 1$ 内的 Taylor 展开式), 最后还原为 z 的函数 $f(z)$.

3-14 将 $\frac{1}{z^2(z-i)}$ 在下列区域内展为 Laurent 级数.

1) $0 < |z-i| < 1$ 2) $|z-i| > 1$

解 1) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-i}$, 其中 $\frac{1}{z^2}$ 在 $|z-i| < 1$ 内解析, 故可作

Taylor 展开, 注意 $\frac{1}{z^2} = \left(\frac{-1}{z}\right)'$, 而

$$\frac{-1}{z} = i \frac{1}{1 + \frac{z-i}{i}} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{i}\right)^n$$

逐项求导得

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i^{n-1}} n(z-i)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{i^{n+2}} (n+1)(z-i)^n \quad |z-i| < 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{i^{n+2}} (n+1)(z-i)^{n-1} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} i^{n-1} (n+2)(z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 1 \end{aligned}$$

2) 因为 $|z-i| > 1$, 故 1) 中关于 $\frac{1}{z}$ 的展式无效, 但 $\left|\frac{1}{z-i}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{z} &= \frac{1}{z-i+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{i}{z-i}} \\ &= \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} \end{aligned}$$

由环域内收敛 Laurent 级数可逐项求导的性质有

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \left(\frac{-1}{z}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (n+1)(z-i)^{-n-2} \\ \therefore f(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (n+1)(z-i)^{-(n+3)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (n+1)}{(z-i)^{n+3}} \quad 1 < |z-i| < +\infty \end{aligned}$$

注 在本题中, 所求级数应为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-i)^n$ 形式, $f(z)$ 中含有 $\frac{1}{z-i}$ 项, 故只

需将 $\frac{1}{z^2}$ 因子展为 $(z-i)$ 的幂即可. 在 1) 中, 用到 Taylor 级数在收敛圆内逐项求导

的性质, (因为在 $|z-i| < 1$ 内, $\frac{1}{z}$ 可作 Taylor 展开), 而在 2) 中, 虽然 $\frac{1}{z}$ 在 $|z-i|$

$|i| > 1$ 内解析,但不能作 Taylor 展开,只能对 $\frac{1}{1 + \frac{i}{z-i}} = \frac{1}{1+\xi}$ 用基本展式, (此时

$\left| \frac{i}{z-i} \right| < 1$) 得到 $\frac{1}{z}$ 的 Laurent 级数. 之后应用 Laurent 级数在收敛环域内可逐项求导的性质.

这里再次用到 $\frac{1}{1 \pm \xi}$ 的 Taylor 展式, 特别要注意必须满足条件 $|\xi| < 1$. 否则将导致错误.

3-15 下列推导是否正确? 为什么?

用长除法得

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad (1)$$

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots \quad (2)$$

(1)+(2)得

左端 = 0

$$\therefore \text{右端} = \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = 0$$

答 推导不正确, 因为(1)与(2)成立均有条件:

对(1), 只有当 $|z| < 1$ 方能成立, 而对(2), 只有当 $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$, 即 $|z| > 1$ 方能成立, 即(1)与(2)没有同时成立的公共点集, 故二者不能相加 (由 Laurent 级数收敛的定义), 所以上述结果是错误的.

注 由此题告诉我们, Laurent 级数收敛的定义中, 必须要使(1)与(2)有公共收敛域 (此域必定为圆环域). 无公共收敛域的级数 (1): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 与 (2):

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ 不能作成收敛的 Laurent 级数.

同时也告诉我们, 给出一级数时, 要同时给出其收敛域. 后者是前者成立的条件, 不可丢掉.

3-16 利用 Laurent 系数公式, 计算下列函数 $f(z)$ 的积分 $\oint_C f(z) dz$

$$1) \frac{1}{z(z+2)} \quad 2) \frac{z+2}{(z+1)z} \quad 3) \frac{1}{z(z+1)^2} \quad 4) \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

积分路径为正向圆周 $|z|=3$.

解 本题在 2-11 题中已用其它方法解过. 下边用 Laurent 系数公式解之.

$$1) f(z) = \frac{1}{z(z+2)}, C: |z|=3.$$

因为 C 位于环域 $2 < |z| < +\infty$ 内, 围绕 $z=0$, 简单、正向、闭, $\varphi(z) = \frac{1}{z+2}$

在该环域内解析, 由 Laurent 系数公式知 $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z+2} \cdot \frac{dz}{z^{0+1}} = 2\pi i C_0$. C_0 为

$\varphi(z) = \frac{1}{z+2}$ 在环域 $2 < |z| < +\infty$ 内 Laurent 级数的常数项 (0 次幂系数). 注意

$|z| > 2$, 所以 $\left| \frac{2}{z} \right| < 1$.

故

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}}$$

由此可见 $C_0=0$. (展式最高幂为 z^{-1} 项)

即

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

$$2) f(z) = \frac{z+2}{z+1} \cdot \frac{1}{z}, \quad C: |z|=3$$

因为 C 位于环域, $|z| > 1$ 内, 围绕 $z=0$, 简单、正向、闭, 函数 $\varphi(z) = \frac{z+2}{z+1}$ 在该环域内解析, 故由 Laurent 系数公式知,

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{z+2}{z+1} \cdot \frac{dz}{z^{0+1}} = 2\pi i C_0$$

这里 C_0 为 $\varphi(z) = \frac{z+2}{z+1}$ 在环域 $|z| > 1$ 内 Laurent 展式的常数项.

因为

$$\varphi(z) = \frac{z+2}{z+1} = 1 + \frac{1}{z+1} = 1 + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z}}$$

易见, $C_0=1$.

故

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i$$

$$3) f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}, C: |z|=3.$$

因为 C 位于 $|z+1| > 1$ 内, 围绕 $z=-1$, 简单、正向、闭, 函数 $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ 在该环域内解析, 由 Laurent 系数公式

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{(z+1)^{1+1}} = 2\pi i C_1$$

其中 C_1 为 $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ 在区域 $|z+1| > 1$ 内 Laurent 展式的一次幂系数。

因为 $\left| \frac{1}{z+1} \right| < 1$, 所以 $\frac{1}{z} = \frac{1}{z+1-1} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z+1}}$, 易见 $C_1 = 0$ (无 $(z+1)$

之正幂项)。

因此
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

4) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $C: |z|=3$ 位于 $|z+1| > 1$ 内, 围绕 $z=-1$, 简单、

正向、闭, 函数 $\varphi(z) = \frac{z}{z+2}$ 在该区域内解析, 故由 Laurent 系数公式知

$$\oint_C \frac{z dz}{(z+1)(z+2)} = \oint_C \frac{z}{z+2} \cdot \frac{dz}{(z+1)^{0+1}} = 2\pi i C_0$$

C_0 为 $\frac{z}{z+2}$ 在区域 $|z+1| > 1$ 内 Laurent 展式的常数项。

因为 $\frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z+1}} \quad \left| \frac{1}{z+1} \right| < 1$,

所以 $C_0 = 1$, 故

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i$$

注 1. 由这几个题目的讨论可见, Laurent 展式的唯一性使我们有可能通过初等方法获得展开式, 从而获得对应于展式系数的闭路积分值, 故可以说, 我们又多了一种计算闭路积分 (特别是不满足 Cauchy 积分定理条件的) 的方法。这里将路径置身于怎样的区域是重要的。使 C 位于其中, 必须满足 Laurent 系数中 C 的各项要求;

2. 显然, 本题的 $f(z)$ 均很简单, 不用 Laurent 系数公式也很易于求出其积分, 但这里提供的方法在有些情况下是必须的。这方面的例子见 3-17 题 2), 3)。

3-17 计算下列积分 (路径均为正向)

$$1) \oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)} \quad 2) \oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz \quad 3) \oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} dz$$

解 1) 解法一 注意积分路径位于区域 $1 < |z-i| < +\infty$ 内, 围绕 $z=i$,

简单、正向、闭, 且 $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ 在该区域内解析, 故由 Laurent 系数公式知

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)} = \oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{(z-i)^{0+1}} = 2\pi i \cdot C_0$$

其中 C_0 为 $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ 在区域 $1 < |z-i| < +\infty$ 内 Laurent 展开式的常数项, 由 3-14 题 2) 知, $C_0 = 0$.

所以
$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)} = 0$$

解法二 由闭路变形原理

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)} = \oint_{|z|=3} \frac{1}{(z-i)} \cdot \frac{dz}{z^{1+1}}$$

则 $l: |z|=3$ 位于区域 $|z|>1$ 内, 围绕 $z=0$, 简单、正向、闭, $\varphi(z) = \frac{1}{z-i}$ 在该区域内解析.

所以
$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)} = \oint_{|z|=3} \frac{1}{(z-i)} \cdot \frac{dz}{z^{1+1}} = 2\pi i \cdot C_1$$

C_1 为 $\frac{1}{z-i}$ 在 $|z|>1$ 内 Laurent 展式一次幂系数. 注意到在该环域内 $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$.

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z} \right)^n$$

故无正幂项, 所以 $C_1 = 0$. 即原积分 $= 0$.

解法三 由复合闭路定理理解 (略)

2) 注意积分路径位于区域 $|z|>1$ 内, 围绕 $z=0$, 简单、正向、闭, 且 $\varphi(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ 在该区域内解析, 由 Laurent 系数公式知

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz = \oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} \cdot \frac{dz}{z^{4+1}} = 2\pi i \cdot C_4$$

C_4 为 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在区域 $|z|>1$ 内 Laurent 展开式的 z^4 系数, 由 3-13 题知, $C_4 = 0$ (展式中无 z 的正幂项).

故
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz = 0$$

3) 同 2), 且

$$\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} dz = \oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} \cdot \frac{dz}{z^{-1+1}} = 2\pi i \cdot C_{-1}$$

C_{-1} 为 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在区域 $|z|>1$ 内 Laurent 展式中 z^{-1} 的系数, 由 3-13 题知, $C_{-1} = -1$. 即

$$\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} dz = 2\pi i \cdot C_{-1} = -2\pi i$$

注 在 1) 里, 解法一与解法二都是应用 Laurent 系数公式的结果, 而解法三用复合闭路定理、高阶导数公式及 Cauchy 积分公式(略).

但在 2) 里, 从理论上讲, 路径 $|z|=2$ 内围绕被积函数 $\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5}$ 的两个奇点 $z=0$ 与 $z=1$, 可以通过复合闭路定理化为

$$\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} \frac{dz}{z^5} = \oint_{C_0} e^{\frac{1}{1-z}} \frac{dz}{z^{4+1}} + \oint_{C_1} \frac{1}{z^5} e^{\frac{1}{1-z}} dz$$

其中 C_0 与 C_1 分别围绕 $z=0$ 与 $z=1$, 互不相交, 互不包含. 可以看出, 在关于 C_0 的积分中, 可由高阶导数公式求得

$$I_1 = \oint_{C_0} e^{\frac{1}{1-z}} \frac{dz}{z^{4+1}} = \frac{2\pi i}{4!} [e^{\frac{1}{1-z}}]_{z=0}^{(4)}$$

而关于 C_1 的积分, 其它已有的方法不适用, 必须要用 Laurent 级数展开的方法. 也就是说, 第一步用复合闭路定理并没有使问题得到简化, 并没有更接近答案. 故本题的正确解法是 2) 中给出的方法; 对 3) 的处理更明显地看出, 除去用 Laurent 展开法外, 其它已有方法是无能为力的. 问题的根源在于 $z=1$ 为被积函数的本性奇点.

3.3 第 3 章练习题

1. 将 $f(z) = \frac{1}{z^2}$ 在 $z=-1$ 邻域内展为幂级数, 并求收敛半径.

(答 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \quad |z+1| < 1 = R$)

2. 将 $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 邻域展为 Taylor 级数, 并求收敛半径.

(提示: 用待定系数法. 答 $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = 1+z+2z^2+3z^3+5z^4+\cdots$.

$|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} = R$)

3. 将 $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ 在 $z=1$ 邻域内展为 Taylor 级数, 并求收敛半径.

(答 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{2^n} \quad |z-1| < 2 = R$)

4. 将 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展为 Laurent 级数, 并计算积分

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz.$$

(答 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2-n}$; $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i$)

5. 将函数 $\frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ 在下列区域内展为幂级数.

1) $|z| < 1$ 内;

(答 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$.

6. 下列函数能否在给定点的去心邻域内展为 Laurent 级数?为什么?

1) $\cos \frac{1}{z}, z_0 = 0$ 2) $\sec \frac{1}{z-1}, z_0 = 1$ 3) $\frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}, z_0 = 0$

(答 1) 能. 存在 $r > 0$, $f(z)$ 在 $0 < |z| < r$ 内解析; 2) 不能. 不存在 $r > 0$, 使 $f(z)$ 在 $0 < |z-1| < r$ 内解析; 3) 不能. 不存在 $r > 0$, 使 $f(z)$ 在 $0 < |z| < r$ 内解析.)

7. 计算积分:(路径均为正向)

1) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^n} \cos \frac{1}{z} dz, n$ 为自然数.

(答 $n=1$ 时, 积分 $= 2\pi i$ $n > 1$ 时, 积分 $= 0$.)

2) 设 $f(z) = \int_0^z e^{\xi^2} d\xi$, 计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{2n+1}} dz$. (n 为自然数)

(答 积分 $= 0$).

第 4 章 留数定理及其应用

4.1 单值函数孤立奇点及其分类

4.1.1 基本要求

1. 掌握函数孤立奇点的概念、分类方法及各类特性.
2. 掌握函数极点与解析函数零点的关系.
3. 了解无穷远点性态的分类及各类特性.

4.1.2 内容提要

1. 定义 1 设 z_0 为 $f(z)$ 的奇点, 且 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的孤立奇点; 反之, 若 $\forall \delta > 0$, 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内总有 $f(z)$ 的奇点, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点.

2. 孤立奇点分类 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 若 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < r$ ($r > 0$) 内的 Laurent 展式中

- (1) 不含 $(z - z_0)$ 的负幂项;
- (2) 只含有限个 $(z - z_0)$ 的负幂项, 且最低幂次为 $(z - z_0)^{-m}$ 项 (m 为自然数);
- (3) 含有无限多个 $(z - z_0)$ 的负幂项.

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 (1) 可去奇点; (2) 极点, 且为 m 级极点; (3) 本性奇点.

3. 定义 2 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析, 且在 z_0 的邻域 $|z - z_0| < R$ ($R > 0$) 内 Taylor 展开式中最低次幂项为 $C_k(z - z_0)^k$, ($C_k \neq 0, C_0 = C_1 = \dots = C_{k-1} = 0$), 则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶零点; 若 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶零点, 则 z_0 为 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ 的 k 级极点; 反

之, 若 z_0 为 $g(z)$ 的 m 级极点, 则 z_0 为 $\varphi(z) = \frac{1}{g(z)}$ 的 m 阶零点.

4. 孤立奇点性质 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$ 存在;

z_0 为 $f(z)$ 的极点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. 或者 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$;

z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow$ 对任意给定的复数 A , 存在点列 $z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z_0$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A.$$

5. ∞ 性态与分类 若存在 $R > 0$, 使得 $f(z)$ 在环域 $R < |z| < +\infty$ 内解析, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 且视 $\xi = 0$ 为 $f(\frac{1}{\xi}) = \varphi(\xi)$ 的何种类型奇点, 而称 ∞ 为 $f(z)$ 的何种奇点.

4.1.3 例题解析

4-1 设有 $f(z) = \cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$. 能否说 $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点? 为什么?

答 这个级数由两部分组成: 即 $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$. 第一个级数当 $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ 即 $|z| > 1$ 时收敛, 第二个级数当 $\left| \frac{z}{2} \right| < 1$ 即 $|z| < 2$ 时收敛. 于是所给级数在环域

$$1 < |z| < 2 \text{ 内收敛 (成立), 且和函数 } f(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} =$$

$\frac{-1}{z^2 - 3z + 2}$. 显然 $z=0$ 是 $f(z)$ 的解析点. 可见此级数并非在 $z=0$ 的去心邻域内成立. 故不能由其含无限多个负幂项断定 $z=0$ 的性质.

注 此例说明, 判断孤立奇点 z_0 类型虽可从 $f(z)$ 的 Laurent 展开式含有负幂项的情况入手, 但切不可忘掉必须是在 z_0 的去心邻域内的 Laurent 展式, 否则与 z_0 是什么性质的点没有关系.

4-2 证明: 如果 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则 z_0 必为 $f'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点. ($m > 1$)

证 因为 $f(z)$ 在 z_0 点解析, 且 z_0 为其 m 阶零点. 故 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内 Taylor 展式为

$$f(z) = C_m(z-z_0)^m + C_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots \quad \text{其中 } C_m \neq 0, \quad |z-z_0| < R.$$

由 Taylor 级数在收敛圆内可逐项微分性质有

$$f'(z) = C_m m(z-z_0)^{m-1} + C_{m+1}(m+1)(z-z_0)^m + \cdots \quad |z-z_0| < R$$

$$\because C_m \neq 0 \quad \therefore C_m m \neq 0$$

右端即为 $f'(z)$ 在 $|z-z_0| < R$ 内的 Taylor 展开式, 由解析函数零点定义知, $f'(z)$ 以 z_0 为 $m-1$ 阶零点.

注 本证明仅用到解析函数零点定义及幂级数在收敛圆内可逐项求导的性质.

4-3 设 $f(z), g(z)$, 分别满足下列条件之一

- 1) $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 阶和 n 阶零点;
- 2) $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 级和 n 级极点;
- 3) $f(z)$ 在 z_0 点解析或有极点, $g(z)$ 以 z_0 为本性奇点.

试讨论 $f(z)+g(z), f(z)g(z), g(z)/f(z)$ 在 z_0 具有什么性质?

解 1) 设 $f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots, a_m \neq 0.$

$$g(z)=b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots, b_n \neq 0$$

(1) 若 $m > n$, 则 $f(z)+g(z)=b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots+(a_m+b_{n+l})(z-z_0)^{n+l}+\cdots, b_n \neq 0.$ (其中 $l=m-n > 0$), 故 $f(z)+g(z)$ 以 z_0 为 n 级零点. 同理, 若 $n > m$, $f(z)+g(z)$ 以 z_0 为 m 阶零点.

(2) 若 $m=n$, 当 $a_m+b_m \neq 0$ 时,

$$f(z)+g(z)=(a_m+b_m)(z-z_0)^m+\cdots \quad (a_m+b_m \neq 0)$$

即 $f(z)+g(z)$ 在 z_0 有 m 阶零点.

当 $a_m+b_m=0$ 时, $f(z)+g(z)=(a_{m+1}+b_{m+1})(z-z_0)^{m+1}+\cdots+(a_k+b_k)(z-z_0)^k+\cdots$, 设 $a_m+b_m=a_{m+1}+b_{m+1}=\cdots=a_{k-1}+b_{k-1}=0, a_k+b_k \neq 0, (k > m)$. 则 $f(z)+g(z)$ 在 z_0 有 $k > m$ 阶零点.

注意 $f(z)g(z)=[a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots][b_n(z-z_0)^n+\cdots]$
$$=a_mb_n(z-z_0)^{m+n}+\cdots, \quad (a_mb_n \neq 0)$$

故 z_0 为 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

而 $\frac{g(z)}{f(z)}=\frac{b_n(z-z_0)^n+\cdots}{a_m(z-z_0)^m+\cdots}=(z-z_0)^{n-m}\frac{b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots}{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots}$

由于 $a_m \neq 0, b_m \neq 0$

因而 (1) 若 $n > m$, 则 z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $n-m$ 阶零点;

(2) 若 $n < m$, 则 z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $m-n$ 级极点;

(3) 若 $m=n$, 则 z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的可去奇点 (因为 $\frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^m}=1$, 当 $z \neq z_0$

成立).

2) 若 $f(z), g(z)$ 分别以 z_0 为 m, n 级极点, 则它们在 z_0 的去心邻域内 Laurent 级数具有形式

$$f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + a_{-(m-1)}(z-z_0)^{-(m-1)} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + f_1(z), \quad (a_{-m} \neq 0)$$

$$g(z) = b_{-n}(z-z_0)^{-n} + b_{-(n-1)}(z-z_0)^{-(n-1)} + \cdots + b_{-1}(z-z_0)^{-1} + g_1(z), \quad (b_{-n} \neq 0)$$

且 $f_1(z)$ 与 $g_1(z)$ 均在 z_0 点解析.

当 $m \neq n$ 时, $f(z) + g(z)$ 以 z_0 为 $k = \max(m, n)$ 级极点;

当 $m = n$ 时, 若 $a_{-m} + b_{-m} \neq 0$, 则 z_0 为 $f(z) + g(z)$ 的 m 级极点;

若 $a_{-m} + b_{-m} = 0$, 则 z_0 为 $f(z) + g(z)$ 的 $k < m$ 级极点, 或可去奇点 ($a_{-m} + b_{-m} = \cdots = a_{-1} + b_{-1} = 0$ 时为可去奇点).

$$\begin{aligned} \text{因为 } f(z)g(z) &= [a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots][b_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots] \\ &= a_{-m}b_{-n}(z-z_0)^{-(m+n)} + \cdots \quad (a_{-m}b_{-n} \neq 0) \end{aligned}$$

所以, z_0 为 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 级极点.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{g(z)}{f(z)} &= \frac{b_{-n}(z-z_0)^{-n} + b_{-(n-1)}(z-z_0)^{-(n-1)} + \cdots}{a_{-m}(z-z_0)^{-m} + a_{-(m-1)}(z-z_0)^{-(m-1)} + \cdots} \\ &= (z-z_0)^{m-n} \cdot \frac{b_{-n} + b_{-(n-1)}(z-z_0) + \cdots}{a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-z_0) + \cdots}, \quad b_{-n} \neq 0, a_{-m} \neq 0 \end{aligned}$$

所以, 当 $n > m$ 时, z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $n-m$ 级极点; 当 $m > n$ 时, z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点; 当 $m = n$ 时, z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的可去奇点.

3) 设 z_0 为 $f(z)$ 的解析点, 故必有 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. 而 z_0 为 $g(z)$ 的本性奇点, 所以 $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ 不存在 ($\neq \infty$).

故 $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z))$ 不存在. 即 z_0 为 $f(z) + g(z)$ 的本性奇点.

设 $f(z)g(z) = F(z)$, 则 $g(z) = \frac{F(z)}{f(z)}$

$$\text{由于 } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

(1) 若 $f(z_0) \neq 0$, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z)}{f(z)}$ 不存在 ($\neq \infty$). 故 $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z)$ 不存在 ($\neq \infty$). 即 z_0 为 $F(z) = f(z)g(z)$ 的本性奇点.

(2) 若 $f(z_0) = 0$, 假定 $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = B$ 存在, 则当 $B \neq 0$ 时, 应有 $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) =$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z)}{f(z)} = \infty$, 这与 z_0 为 $g(z)$ 本性奇点矛盾, 因而不能有 $B \neq 0$. 若 $B = 0$, 则由 2)

的讨论, $z = z_0$ 应为 $g(z) = \frac{F(z)}{f(z)}$ 的极点, 矛盾.

故, 不会发生 $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = B$ 存在的情形.

(3) 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \infty$, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{F(z)} = 0$. 应有 $g(z) = \frac{F(z)}{f(z)} = \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{1/F(z)}$

$\xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$. 即 z_0 为 $g(z)$ 的极点, 矛盾. 故当 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ 时, 必有 $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z)$ 不存在

($\neq \infty$). 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z)$ 不存在,

因此, z_0 为 $f(z)g(z)$ 的本性奇点.

设 $\frac{g(z)}{f(z)} = h(z)$. 则 $g(z) = h(z)f(z)$, 如同上面讨论, 当 $f(z)$ 以 z_0 为解析

点, $g(z)$ 以 z_0 为本性奇点时, $\frac{g(z)}{f(z)}$ 也以 z_0 为本性奇点.

现设 $f(z)$ 以 z_0 为 m 级极点, $g(z)$ 以 z_0 为本性奇点, 于是在 z_0 的去心邻域内, $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 Laurent 级数为

$$f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + f_1(z) \quad (a_{-m} \neq 0)$$

$$g(z) = \cdots + b_{-k}(z-z_0)^{-k} + \cdots + b_{-1}(z-z_0)^{-1} + g_1(z)$$

f_1, g_1 在 z_0 点解析, $g(z)$ 中含有无限多个 $(z-z_0)$ 的负幂项.

因为 $f(z) + g(z)$ 在 z_0 去心邻域内 Laurent 展式中也含有无限多个 $(z-z_0)$ 的负幂项, 故 z_0 为 $f(z) + g(z)$ 的本性奇点.

所以 $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \varphi(z)$. $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析, 且 $\varphi(z_0) \neq 0$.

则由前段证明, $g(z)\varphi(z)$ 以 z_0 为本性奇点, 于是

$$f(z)g(z) = \frac{g(z)\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

因为 $H(z) = (z-z_0)^m$ 在 z_0 点解析, 且 $H(z_0) = 0$. 故由本题前段证明知, z_0 为 $\frac{g(z)\varphi(z)}{H(z)}$ 的本性奇点, 即 z_0 为 $f(z)g(z)$ 的本性奇点.

又因 $\frac{g(z)}{f(z)} = g(z) \cdot \frac{1}{f(z)}$

而 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点 $\Rightarrow z_0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$.

且 $\frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 点解析 (只要补充定义 $\frac{1}{f(z_0)} = 0$). 由前段证明, $g(z) \cdot \frac{1}{f(z)}$ 以 z_0 为本性奇点.

综合 3) 各种情况所述, 可见, 当 z_0 为 $g(z)$ 的本性奇点时, 无论 z_0 为 $f(z)$ 的解析点还是极点, 均使 z_0 为 $f(z) + g(z), f(z)g(z), \frac{g(z)}{f(z)}$ 的本性奇点.

注 本题证明从奇点分类定义出发, 所得结果对今后很大部分类型问题是有用的.

4-4 判断下列函数有怎样类型的奇点

$$1) \frac{z-1}{z(z^2+4)^2} \quad 2) \sin \frac{1}{1-z} \quad 3) \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \quad 4) \frac{1}{\sin z}$$

解 1) 因为 $f(z) = \frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$ 是一有理函数, 且分子、分母无公共零点, 故分母的零点即为 $f(z)$ 的奇点, 且因分母为多项式, 其零点只有有限多个. 所以其全部为 $f(z)$ 的孤立奇点: $z=0$ 为一级极点, $z=\pm 2i$ 为 $f(z)$ 的二级极点; 又因为 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 所以 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (或解析点——只要定义 $f(\infty)=0$ 即可).

$$2) f(z) = \sin \frac{1}{1-z}, \text{ 令 } \frac{1}{1-z} = \xi,$$

$$\sin \xi = \xi - \frac{1}{3!}\xi^3 + \frac{1}{5!}\xi^5 + \cdots$$

$$\text{所以 } f(z) = -\sin \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3!}(z-1)^{-3} - \frac{1}{5!}(z-1)^{-5} + \cdots,$$

$$0 < |z-1| < +\infty$$

故 $z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

因为 $f(z)$ 在 $0 < |z-1| < +\infty$ 内解析, 故全平面只有 $z=1$ 与 $z=\infty$ 为奇点.

又, $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{1-z} = 0$, 故 ∞ 为可去奇点.

3) 因为 $k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为 $\sin z$ 的一阶零点, 故 $z_k = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为 $\frac{1}{\sin z}$ 的一级极点. 且, 由于 $k\pi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, 故 ∞ 为 $\frac{1}{\sin z}$ 的非孤立奇点.

4) 因为 $z_k = \frac{1}{k\pi} (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为 $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ 的一级极点 (z_k 为 $\sin \frac{1}{z}$ 的一级 0 点), 且 $z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, 所以 0 是 $f(z)$ 的非孤立奇点. 由 4) 知, $\xi=0$ 为 $\frac{1}{\sin \xi}$ 的一级

极点, 故 $z=\infty$ 为 $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ 的一级极点.

注 这里判断奇点类型运用了极点与零点的关系, 本性奇点的定义. 对非孤立奇点, 不是我们研究的主要对象, 不作分类. 注意, 只要有奇点列, 它至少有一个极限点, 该极限点便是一个非孤立奇点.

对本性奇点的判断, 还是依靠函数在该点去心邻域内的 Laurent 展式来进行.

4-5 判断下列函数在无穷远点的性态

$$1) z + \frac{1}{z} \quad 2) \sin z + \frac{1}{z^2}$$

解 1) 因为 $f(z) = z + \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析, 且所给形式即为它在该环域内的 Laurent 展式, 所以 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点 ($z=0$ 为一级极点).

2) 因为 $\sin z + \frac{1}{z^2}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析, 且在此环域内有

$$\sin z + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} + z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5}z^5 \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots$$

即在 ∞ 的去心邻域里的 Laurent 展式中含有无限多个 z 的正幂项, 故 ∞ 为 $\sin z + \frac{1}{z^2}$ 的本性奇点 (0 为二级极点).

注 当 ∞ 为孤立奇点时, 一般直接从函数在 ∞ 的去心邻域内的 Laurent 展式入手, 判断其类型.

4.2 留数及留数定理

4.2.1 基本要求

1. 掌握孤立奇点留数的概念及留数的计算规则.
2. 掌握留数定理及其应用.

4.2.2 内容提要

1. 定义 (1) 设 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内解析, C 为该邻域内围绕 z_0 的简单正向闭路, 则称 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数, 记为 $\text{Res}[f(z), z_0]$.

(2) 设 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内解析, C 位于该邻域内, 围绕 $z = \infty$ 简单、正向、闭, 则称 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$ 为 $f(z)$ 在 ∞ 的留数, 记为 $\text{Res}[f(z), \infty]$.

2. 定理一 (留数定理) 设 $f(z)$ 在区域 G 内除孤立奇点外是解析的, 则 $f(z)$ 沿 G 内的不经过奇点的正向闭路 C 的积分等于 $f(z)$ 在 C 内各奇点的留数和与 $2\pi i$ 之积

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}[f(z), z_k]$$

3. 定理二 若单值函数在扩充复平面内只有孤立奇点, 则它的所有留数之和为零.

4. 留数计算规则

规则 I 设 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

特别地, 若 $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, 其中 $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0, h(z_0) \neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

规则 II 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

当 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点时, $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$. ($z_0 \neq \infty$).

当 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点时, 求其留数的方法一般要在其去心邻域内展为 Laurent 级数, 取其负一次幂系数.

规则 III ∞ 留数的计算: 当 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点时

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

4.2.3 例题解析

4-6 求下列各函数在指定点的留数:

1) $\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}$, 在 $z = \pm 1, \infty$ 处.

2) $\frac{1 - e^{2z}}{z^4}$, 在 $z = 0, \infty$ 处.

3) $\cos \frac{1}{z}$, 在 $z = 0, \infty$ 处.

4) $\frac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)}$, (m 为自然数, $\alpha \neq \beta$), 在 α, β, ∞ 处.

解 1) 因为 $z=1$ 为 $f(z)$ 的一级极点, 故由留数计算规则有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}, 1\right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z+1)^3} = \frac{1}{8}$$

对 ∞ , 由留数计算规则有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}, \infty\right] = -\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(1-z)(1+z)^3}, 0\right] = 0$$

又 $f(z)$ 在扩充复平面内仅有孤立奇点, 故留数和为 0, 于是可得

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}, -1\right] = -\frac{1}{8}$$

2) $f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$, 由留数定义, $\operatorname{Res}[f(z), 0]$ 等于 $(1 - e^{2z})$ 在 $z=0$ 处 Taylor

展式中 z^3 项的系数.

$$\begin{aligned} 1 - e^{2z} &= 1 - \left[1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \dots \right] \\ &= -2z - \frac{(2z)^2}{2!} - \frac{(2z)^3}{3!} - \dots \quad |z| < +\infty \end{aligned}$$

有

$$a_3 = -\frac{4}{3}, \quad \therefore \operatorname{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4}, 0\right] = -\frac{4}{3}$$

注意 $f(z)$ 于扩充复平面内仅有两个奇点, 其留数和为 0, 故 $\operatorname{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4}, \infty\right] = -\frac{4}{3}$.

3) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ 在扩充复平面仅有两个奇点. 注意 $\cos \xi$ 在 $|\xi| < +\infty$ 内 Taylor 展式中只有偶次项.

故 $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内 Laurent 展式中无 z^{-1} 项, 即 $\operatorname{Res}[f(z), 0] = 0$.

且环域 $0 < |z| < +\infty$ 也是 ∞ 的去心邻域. 故上述展式也是 ∞ 处的 Laurent 展式.

因此

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$$

$$4) f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)} = \frac{1}{(z-\alpha)^m} \quad (\alpha \neq \beta, m \text{ 为自然数})$$

$\therefore z = \beta$ 为 $f(z)$ 的一级极点, $(\alpha \neq \beta)$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z), \beta] = \frac{1}{(\beta-\alpha)^m}$$

为求 $\operatorname{Res}[f(z), \alpha]$, 注意 m 为自然数, 只要求 $\frac{1}{z-\beta}$ 在 α 点邻域 Taylor 展开式中 $(z-\alpha)^{m-1}$ 的系数 a_{m-1} 即可

$$\therefore \frac{1}{z-\beta} = \frac{-1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(\beta-\alpha)^{n+1}} (z-\alpha)^n$$

$$\therefore a_{m-1} = \frac{-1}{(\beta-\alpha)^m}, \text{ 故 } \operatorname{Res}[f(z), \alpha] = \frac{-1}{(\beta-\alpha)^m}$$

又由 $f(z)$ 于扩充复平面仅有奇点 α, β, ∞ , 故 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}[f(z), \alpha] - \operatorname{Res}[f(z), \beta] = 0$

注 以上各题的解法均不止此处所给的, 但为了突出留数的概念, 且为了求得最直接、简便的解法, 这里选了上述给出的解法.

例如,在 1) 中,对 $\text{Res}[f(z), -1]$, 可根据 -1 为 $f(z)$ 的三级极点, 按留数计算规则 II 计算, 在求得 ± 1 处留数后再求 ∞ 处留数. 但这样必得求 $\left(\frac{z}{z-1}\right)'_{z=-1}$, 这就不如本题给出的解法简单(避免了求高阶导运算).

在 2) 中, $z=0$ 为 $f(z)$ 的四级极点, 若用规则 II, 应求 $(1-e^{2z})$ 在 $z=0$ 处三阶导. 这两种方法都没有困难, 且较简便, 可任选一种用之, 求得 $z=0$ 点留数, ∞ 的立即可得.

在 3) 中, 显见 $\cos \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 展式只含 $\frac{1}{z}$ 的偶次幂项, 故由留数定义即得结果. 这里对 ∞ 也用了留数定义(而没有用留数和为 0 定理).

在 4) 中, α 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 若按规则 II, 应求 $\frac{1}{z-\beta}$ 的 $m-1$ 级导数, 注意留数定义, 这里避免求高阶导运算, 用初等方法求 $\frac{1}{z-\beta}$ 在 α 邻域 Taylor 展式系数. 比用规则 II 简便; 也可先求 β 处的留数, 然后求 ∞ 处留数, 再用留数和为 0 定理得 α 处的留数, 也是一较简便解法.

4-7 求下列积分(各路径均为正向):

$$1) \oint_{|z|=4} \frac{z^{15} dz}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3};$$

$$2) \oint_C \frac{dz}{1+z^4}, \text{ 其中 } C \text{ 为 } |z|=2 \text{ 上半圆周与实轴 } [-2, 2] \text{ 所组成};$$

$$3) \oint_{|z|=b} \frac{e^z dz}{z^2+a^2}, \quad b > |a|;$$

$$4) \oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz;$$

$$5) \oint_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{dz}{\sin z}.$$

解 1) $\oint_{|z|=4} \frac{z^{15} dz}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$, 在 $|z|=4$ 内有奇点 $\pm i, \pm 2i$, 但在 $|z| >$

4 内仅有奇点 ∞ , 由留数定理及扩充复平面内有限奇点留数和定理知

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=4} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^4 \text{Res}[f(z), z_k] = -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] \\ &= 2\pi i \text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z^2}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2(1+2z^4)^3} \cdot \frac{1}{z}, 0\right] = 2\pi i \end{aligned}$$

2) $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ 在积分路径 C 内有两个奇点 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 且均为 $f(z)$ 的

一级极点, 由留数定理, 注意 $z_k^4 = -1$

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2]) = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_1^3} + \frac{1}{4z_2^3} \right) \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{z_1}{z_1^4} + \frac{z_2}{z_2^4} \right) = -\frac{\pi i}{2} (z_1 + z_2) = -\frac{\pi i}{2} (e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

3) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + a^2}$ 在积分路径 $|z| = b > |a|$ 内有两个一级极点 $z_1 = ai, z_2 = -ai$. 故由留数定理有

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=b} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}[f(z), ai] + \text{Res}[f(z), -ai]) \\ &= \frac{2\pi i}{2ia} [e^{ia} - e^{-ia}] = \frac{2\pi i}{a} \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \frac{2\pi i}{a} \sin a\end{aligned}$$

4) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, 在 $|z| = 1$ 内有唯一本性奇点 $z = 0$, 且由 $\sin \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内 Laurent 级数展开式知 $\text{Res}\left(\sin \frac{1}{z}, 0\right) = 1$

所以 $\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), 0] = 2\pi i$

5) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, 在积分路径 $|z| = \frac{3}{2}\pi$ 内含有 $f(z)$ 的三个一级极点: $z_1 = 0, z_2 = \pi, z_3 = -\pi$.

所以 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}\pi} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), \pi] + \text{Res}[f(z), -\pi])$

$$= 2\pi i [1 - 1 - 1] = -2\pi i$$

注 在 1) 中, 积分路径包围了有限平面上全部奇点, 虽然每个均为极点, 但它们或者为二级, 或者为三级, 若用留数定理计算, 将要对每个奇点的留数给出计算, 计算量较大, 故注意 $f(z)$ 在扩充复平面只有有限个奇点的性质转化为求 $\text{Res}[f(z), \infty]$ 的问题, 这样简便得多; 2), 3), 5) 直接应用留数定理较简便, 因为这几题中所涉及到的奇点均为一级极点, 可直接由留数计算规则 I 求得各点留数; 4) 直接应用留数定义, 因为 $\sin \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展开十分容易看出 z^{-1} 的系数.

4-8 将 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ 在环域 $0 < |z| < \pi$ 内展为 Laurent 级数:

解 因为 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ 以 $z=0$ 为一级极点, 故可知在 0 点的去心邻域 $0 < |z|$

$< \pi$ 内的 Laurent 展式应具形式

$$f(z) = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots \quad (1)$$

又因 $a_{-1} = \text{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 0\right) = 1$, 及 $f(z)$ 为 z 的奇函数, 故展式中无偶次项 (偶次项系数均为 0),

所以 (1) 形式为

$$f(z) = z^{-1} + a_1z + a_3z^3 + a_5z^5 + \cdots \quad (2)$$

因此, 由展开式的唯一性, 有

$$\begin{aligned} 1 &= (z^{-1} + a_1z + a_3z^3 + a_5z^5 + \cdots) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) \\ &= 1 + (a_1 - \frac{1}{3!})z^2 + (\frac{1}{5!} + a_3 - \frac{a_1}{3!})z^4 + (\frac{1}{7!} + \frac{a_1}{5!} - \frac{a_3}{3!} + a_5)z^6 + \cdots \end{aligned}$$

所以

$$a_1 = \frac{1}{3!}, \quad a_3 = \frac{a_1}{3!} - \frac{1}{5!}, \quad a_5 = \frac{a_3}{3!} - \frac{a_1}{5!} - \frac{1}{7!}, \cdots$$

$$\text{解得 } \therefore a_1 = \frac{1}{3!}, \quad a_3 = \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}, \quad a_5 = \frac{1}{(3!)^3} - \frac{2}{5!3!} - \frac{1}{7!}$$

...

将所得系数值代入 (2) 即得所求

$$\frac{1}{\sin z} = z^{-1} + \frac{1}{3!}z + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^3 + \left[\frac{1}{(3!)^3} - \frac{2}{3!5!} - \frac{1}{7!} \right] z^5 + \cdots \quad 0 < |z| < \pi$$

注 展式用待定系数法得到. 其所以此法有效, 完全依赖于 $\frac{1}{\sin z}$ 以 $z=0$ 为一级

极点, 由一级极点定义知, $\frac{1}{\sin z}$ 在 $z=0$ 去心邻域内 Laurent 展式的首项为 $a_{-1}z^{-1}$. 由此题知道, 对以 z_0 为 k 级极点的函数 $f(z)$, 在 z_0 去心邻域内 Laurent 展式均可用待定系数法求得 (展式首项为 $a_{-k}(z-z_0)^{-k}$).

4-9 计算积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz, \quad k = 5, k = 4, -5, -2.$$

解 因为积分路径 $|z|=1$ 位于环域 $0 < |z| < \pi$ 内, 且围绕 $z=0$, 简单、正向、

闭, $\frac{1}{\sin z}$ 在该环域内解析, 故可知所求积分为

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^k \sin z} = 2\pi i a_{k-1}$$

其中 a_{k-1} 为 $\frac{1}{\sin z}$ 在环域 $0 < |z| < \pi$ 内 Laurent 展式 z^{k-1} 项的系数.

因此 $k = 5$ 时, $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_4 = 0$ (上述展式中无偶次幂项).

$k = 4$ 时, $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_3 = 2\pi i \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right]$.

$k = -5$ 时, $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_{-6} = 0$ (无偶次幂项).

$k = -2$ 时, $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_{-3} = 0$ ($\frac{1}{\sin z}$ 以 0 为一级极点).

注 这里所给的积分不能应用以往的闭路积分算法, 只能依靠 $\frac{1}{\sin z}$ 在对应环域内的 Laurent 展式进行计算. 由此看到, Laurent 级数系数公式有时会被反过来应用: 不是靠计算积分求得展式的系数, 而是用其它方法 (比如用待定系数法得到 $\frac{1}{\sin z}$ 在 $0 < |z| < \pi$ 内展式) 得到展式, 再利用展式求得系数公式中的闭路积分. 由 4-9 题及 4-10 题可见, $\frac{1}{\sin z}$ 在 $0 < |z| < \pi$ 中 Laurent 展式是一基本结果.

4.3 第 4 章练习题

1. 求出下列函数的奇点, 并对孤立奇点指出类型.

$$1) \frac{e^{z+\frac{1}{z}}}{z^2} \quad 2) \frac{e^{z^2}-1}{z^3} \quad 3) \cos z + \frac{1}{z} \quad 4) e^z \quad 5) \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$$

(答 1) $0, \infty$ 均为本性奇点; 2) 0 为一级极点, ∞ 为本性奇点; 3) 0 为一级极点, ∞ 为本性奇点; 4) ∞ 为唯一奇点, 且为本性奇点; 5) 0 为非独立奇点, $z_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为一级极点, ∞ 为可去奇点.

2. 求下列函数在指定点的留数

$$1) \frac{e^{z^2}-1}{z^3} \text{ 在 } 0 \text{ 点.} \quad 2) \cos z + \frac{1}{z} \text{ 在 } \infty \text{ 点.} \quad 3) \frac{z^3 \sin z}{(1-e^z)^3} \text{ 在 } \infty \text{ 点.}$$

$$4) \frac{1}{\cos \frac{1}{z}} \text{ 在 } \infty \text{ 点.} \quad 5) \frac{z-3}{z^3+5z^2} \text{ 在 } 0 \text{ 点.}$$

(答 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) $\frac{8}{25}$.)

3. 求下列积分值: (路径为正向)

$$1) \oint_{|z|=1} \frac{z^3 \sin z}{(1 - e^z)^3} dz \quad 2) \oint_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z}} dz.$$

(答 1) 0; 2) πi)

4. 计算积分 $\oint_{|z|=\frac{5}{2}\pi} \frac{dz}{z^4 \sin z}$

(答 $2\pi i \left[-\frac{15}{8\pi^4} + \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right]$)

5. 将 $\frac{1}{\cos z}$ 在 $0 < |z - \frac{\pi}{2}| < \pi$ 内展为 Laurent 级数, 并计算积分

$$\oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \cos z}$$

(提示: 令 $z - \frac{\pi}{2} = \xi$, 则 $\cos z = -\sin \xi$, 利用 $\frac{1}{\sin z}$ 在 $0 < |z| < \pi$ 的展式.)

答 $\frac{1}{\cos z} = -\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{3!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) - \left[\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{1}{5!} \right] \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \dots$

$(0 < \left| z - \frac{\pi}{2} \right| < \pi; \text{积分} = -\frac{2}{3}\pi i)$

第5章 Fourier 变换与 Laplace 变换^①

5.1 Fourier 积分与 Fourier 变换

5.1.1 基本要求

1. 了解 F-氏积分定理, F-氏积分公式; 掌握 F-氏变换概念.
2. 掌握 F-氏变换基本性质并会灵活运用.
3. 掌握卷积概念及卷积定理的应用; 了解相关函数与能量谱密度概念及相互关系.
4. 掌握 δ -函数的 F-氏变换及其应用.
5. 掌握用 F-氏变换解微分方程的步骤.

5.1.2 内容提要

1. F-氏积分定理 若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足

(1) 在任一有限区间上满足狄氏条件;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 收敛, 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega = \begin{cases} f(t), & t \text{ 为 } f(t) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}, & t \text{ 为 } f(t) \text{ 间断点} \end{cases}$$

并称此积分为 $f(t)$ 的 Fourier 积分 (F-氏积分).

2. 定义 1 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ 称为 $f(t)$ 的 F-氏变换. 记为 $\mathcal{F}[f(t)]$;

$|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的频谱 (振幅频谱).

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

^① 本章中正体 j 均为虚数单位.

称为 $F(\omega)$ 的 F-氏逆变换, 记为 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$. $F(\omega)$ 与 $f(t)$ 构成 F-氏变换对.

3. F-氏变换基本性质 (对广义 F-氏变换照样成立)

1) 线性性质

$$\mathcal{F}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{F}[f_1] + \beta \mathcal{F}[f_2], \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[aF_1 + bF_2] = a\mathcal{F}^{-1}[F_1] + b\mathcal{F}^{-1}[F_2], \quad (a, b \text{ 为常数})$$

2) 位移性质

$$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)]$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega \pm \omega_0)] = e^{\mp j\omega_0 t} \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

3) 微分性质

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \mathcal{F}[f(t)] \quad \frac{d}{d\omega} F(\omega) = \mathcal{F}[-jtf(t)]$$

4) 积分性质

$$f(t) = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

(当 $\int_{-\infty}^t f(t) dt$ 满足 F-氏积分定理条件时有 $F(0) = 0$, 右端只有第一项)

5) 乘积定理: 若 $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1]$, $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2]$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega$$

($\overline{F(\omega)}$ 为 $F(\omega)$ 的共轭函数), 称 $\overline{F_1(\omega)} F_2(\omega)$ 为互能量密度, 记为

$$S_{21}(\omega) = \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) = \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) = S_{12}(\omega)$$

6) 能量积分: 若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f]$, 则乘积定理为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

称 $|F(\omega)|^2$ 为 $f(t)$ 的能量谱密度, 记为 $S(\omega) = |F(\omega)|^2$.

4. 定义 2 设 $f_1(t), f_2(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$ 为 f_1 与 f_2 的相关函数, 记为 $R_{12}(\tau)$,

$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt$ 称为 $f(t)$ 的自相关函数.

$$1) R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau);$$

$$2) R(\tau) = R(-\tau);$$

$$3) R(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[F^{-1}[S(\omega)]]; \quad 4) R_{12}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[F^{-1}[S_{12}(\omega)]].$$

5. 定义3 设 $f_1(t), f_2(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ 为 f_1 与 f_2 的卷积, 记为 $f_1 * f_2$.

6. 卷积性质 1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$;

2) $f * [f_1 + f_2] = f * f_1 + f * f_2$;

3) $f * [g * h] = [f * g] * h$;

4) 卷积定理: 设 $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1], F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2]$, 则

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad \mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

7. δ -函数 $\delta(t - t_0)$ 为一广义函数, 它不是和 t 的值产生对应 (谈 δ -函数的数值是无意义的), 而是和满足一定条件的定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $\varphi(t)$ 产生对应

$$K[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = \varphi(t_0)$$

8. δ -函数的性质

1) $\delta(t) = \delta(-t)$;

2) $K[a\varphi_1 + b\varphi_2] = aK[\varphi_1] + bK[\varphi_2]$;

3) δ -函数的导数定义为

$$K'[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta'(t - t_0) dt = K[-\varphi'(t)]$$

4) $\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = K[e^{-j\omega t}] = e^{-j\omega t_0}$;

5) $\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} K[e^{j\omega t}] = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$;

由性质 4), 5) 定义的 F-氏变换、逆变换称为广义 F-氏变换、逆变换.

5.1.3 例题解析

5-1 证明: 若 $f(t)$ 满足 F-氏积分定理, 则当 $f(t)$ 为奇函数时, 有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega$$

其中 $B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau$;

当 $f(t)$ 为偶函数时, 有 $f(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega$, 其中 $A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau$. 并由此定义 F-氏正、余弦变换.

证 因为 $f(t)$ 满足 F-氏积分定理条件,故当 $f(t)$ 为奇函数时,有

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = -2j \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau$$

此为 ω 的奇函数,但为复值.

所以
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{j}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega$$

将 $F(\omega)$ 代入得

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega. \quad (1)$$

令 $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau = B(\omega)$ 得: $f(t) = \int_0^{+\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega$

同理可证,当 $f(t)$ 为偶函数时,有

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau \right] \cos \omega t d\omega \quad (2)$$

令 $A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau$

有
$$f(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega$$

在(1)中,令 $F_S(\omega) = \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \mathcal{F}_S[f]$. 则

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_S(\omega) \sin \omega t d\omega = \mathcal{F}_S^{-1}[F_S(\omega)]$$

称 $F_S(\omega) = \mathcal{F}_S[f]$ 为 $f(t)$ 的 F-氏正弦变换, $\mathcal{F}_S^{-1}[F_S(\omega)]$ 为 $F_S(\omega)$ 的 F-氏正弦逆变换.

在(2)中,令 $F_C(\omega) = \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \mathcal{F}_C[f]$. 则

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_C(\omega) \cos \omega t d\omega = \mathcal{F}_C^{-1}[F_C(\omega)]$$

称 $F_C(\omega) = \mathcal{F}_C[f]$ 为 $f(t)$ 的 F-氏余弦变换, $\mathcal{F}_C^{-1}[F_C(\omega)]$ 为 $F_C(\omega)$ 的 F-氏余弦逆变换.

注 1. 由本题结论推导过程可见,当 $f(t)$ 为奇函数时,其 F-氏变换为复值函数,为了用实数形式表达,常常引入 F-氏正弦变换与逆变换,对应地,也得到在 $f(t)$ 为偶函数时的 F-氏余弦变换与逆变换.

注意 $|F(\omega)| = 2|F_S(\omega)|$ 及 $|F(\omega)| = 2|F_C(\omega)|$.

2. 当 $f(t)$ 仅定义于 $[0, +\infty)$, 且满足 F-氏积分定理条件时, 总可以将 $f(t)$ 展为 F-氏正弦积分, 也可以将 $f(t)$ 展为 F-氏余弦积分, 可求其 F-氏正弦变换, 也可求其 F-氏余弦变换, 为此, 只要将 $f(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上作相应的奇或偶延拓. 这正像对定义于 $[0, l]$ 上的函数 (满足狄氏条件), 可作 F-氏正弦级数展开, 也可作 F-氏余弦级数展开的基本思想一样.

3. 在 $f(t)$ 的 F-氏正、余弦积分表达式

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_S(\omega) \sin \omega t d\omega \quad f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_C(\omega) \cos \omega t d\omega$$

中, 左端的 $f(t)$, 当 t 为间断点时, 应理解为 $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$. 因为此时右端即为 $f(t)$ 的 F-氏积分公式.

5-2 设 $f(t) = e^{-|t|}$, 求 $\mathcal{F}[f]$ 及 $f(t)$ 的 F-氏积分表达式.

解 $\because f(t) = e^{-|t|}$ 为一偶函数.

$$\therefore \mathcal{F}_C[f] = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \omega t dt = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

$$\text{于是} \quad F(\omega) = 2F_C(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

因为 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故由 F-氏积分表达式有

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega$$

由此可得含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

注 本题中的 $f(t)$ 为一在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的偶函数, 由 F-氏余弦变换与 F-氏余弦逆变换可得到结果.

$$5-3 \quad \text{求单个矩形脉冲 } f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{\tau}{2} \\ E, & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \text{ 的频谱、积分表达式, 并} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

求含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega$ 值.

解 因为 $\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$.

注意 $f(t)$ 为 t 的偶函数, 故有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ &= 2 \int_0^{\tau/2} E \cos \omega t dt \\ &= 2E \cdot \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega} = F(\omega)\end{aligned}$$

$$1^\circ |F(\omega)| = 2E \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega} \right| = E\tau \cdot \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega \tau/2} \right|, \quad \omega \in (-\infty, +\infty)$$

当 $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$ 时, $|F(\omega)| = 0$. 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $|F(\omega)| \rightarrow E\tau$. $|F(\omega)|$ 的草图如图 5.1

所示(由对称性, 只作 $\omega \geq 0$).

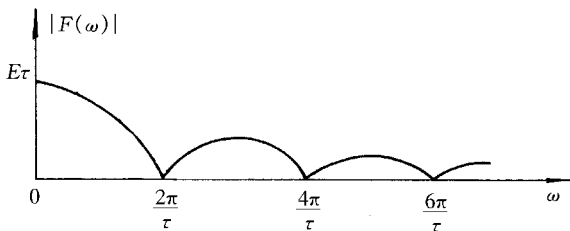


图 5.1

$$2^\circ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cos \omega t d\omega + j \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega \right]$$

因为 $F(\omega)$ 为 ω 的偶函数, 故 $f(t)$ 的积分表达式为

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2E}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega} \cos \omega t d\omega \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

3° 由 F -氏积分定理, 有

$$\frac{2E}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} E, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ \frac{E}{2}, & |t| = \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ \frac{\pi}{4}, & |t| = \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

特别地, 当 $\tau=2$ 时, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

注 1. 由 $f(t)$ 的频谱 $|F(\omega)|$ 可见, $\omega \in (-\infty, +\infty)$, 即 ω 可取到一切值, 且 $|F(\omega)|$ 为 ω 的连续函数, 说明单个脉冲函数 $f(t)$ 含有从 $0 \sim +\infty$ 的一切频率, 频谱为连续谱. 所以, 脉冲电波到达任何无线电接收系统 (无论接收系统调谐到何种频率), 都会产生噪声. 本题 1° 的结果给这一物理现象一种合理的解释;

2. 由函数 $f(t)$ 的 F- 氏积分表达式可得到含参变量广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} d\omega \text{ 的值.}$$

5-4 设 $F(\omega) = \frac{A}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$, 求 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ ($A > 0$).

解

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega + \omega_0) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega \right] \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} [e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}] \frac{A}{2\pi} \cdot \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

注 1. 易见, 所给 $|F(\omega)|$ 不是 ω 的连续函数, 而是线谱 (如图 5.2 所示).

这是因为它的原象函数 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 是周期函数;

2. $\cos \omega_0 t$ 与 $\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ 构成一 F- 氏变换对.

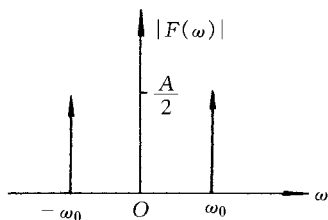


图 5.2

5-5 设 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, 求 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$.

解
$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi e^{j\omega t} \delta(\omega) d\omega = e^{j\omega t} \Big|_{\omega=0} = 1$$

即 $f(t) = 1$ 与 $2\pi\delta(\omega)$ 构成一 F- 氏变换对

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

注 1. 这里可以看出, 广义函数 δ - 函数对应的 F- 氏变换, F- 氏逆变换已不是 F- 氏积分定理意义下的, 故称为广义 F- 氏变换. 因为在古典意义 F- 氏变换下,

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$ 是无意义的;

2. 因为 $\mathcal{F}[1] = F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$. 可见常数 1 的频谱为在 $\omega = 0$ 点强度为 2π 的脉冲 $2\pi\delta(\omega)$ (图 5.3).

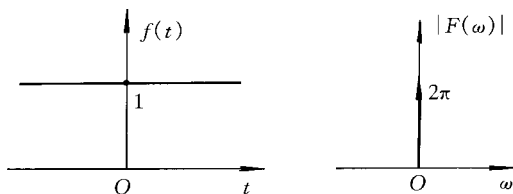


图 5.3

5-6 求 $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$.

解 因为 $\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$, 由 F- 氏变换线性性质有

$$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = \frac{1}{2j} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2j} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt \right] \\
&= \frac{1}{2j} [2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)] \\
&= \frac{\pi}{j} [\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]
\end{aligned}$$

注 $\sin \omega_0 t$ 的 F-氏变换也是广义的,并应用了 $\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$ 及象函数的位移性质.

5-7 设 $f(t)$ 是以 T 为周期的非正弦函数,且在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足狄氏条件.求 $\mathcal{F}[f(t)]$.

解 因为 $f(t)$ 以 T 为周期,设 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,则由 Fourier 级数理论知, $f(t)$ 可展为 Fourier 级数,其复指数形式为 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$.

$$\begin{aligned}
\therefore \mathcal{F}[f] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-n\omega_0)t} \cdot dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi C_n \delta(\omega-n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\omega-n\omega_0) = F(\omega)
\end{aligned}$$

注 在本题中,我们假定可逐项积分,关于这样作的合理性超出了工程数学课程的范围,不作讨论.

5-8 设 $F(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$, 求 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \therefore \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin \omega}{\omega}\right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 1 \\ \frac{1}{4}, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \quad (\text{见 5-3 题结果})
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin \omega}{\omega}\right] = f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

注 这里应当注意,含参变量广义积分 $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega$ 对任意 t 收敛;当

$|t| = 1$ 时, 收敛于 $\frac{1}{4}$; 当 $|t| < 1$ 时收敛于 $\frac{1}{2}$; 当 $|t| > 1$ 时, 收敛于 0.

由此确定 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ 时, 只要注意让 $f(t)$ 在 $|t| \neq 1$ 时与 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ 相等即可, 而在 $|t| = 1$ 时, 可给 $f(t)$ 任意值, 或不给其定义, 这样并不影响等式 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$ 的正确性. 因为 F-氏积分公式中, 左端积分收敛于 $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$. 与 $f(t)$ 在间断点处是否有意义及定义是什么无关.

5-9 求符号函数 $\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ 的 F-氏变换.

解 解法一 注意 $\operatorname{sgn} t = u(t) - u(-t)$, 其中 $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. 且 $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(-t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) e^{-j(-\omega)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{j(-\omega)} + \pi\delta(-\omega) = -\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \quad (\delta(\omega) = \delta(-\omega))\end{aligned}$$

故 $\mathcal{F}[\operatorname{sgn} t] = \mathcal{F}[u(t)] - \mathcal{F}[u(-t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) - \left[-\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{2}{j\omega}$

解法二 因 $\mathcal{F}[\operatorname{sgn} t] = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn} t \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 -1 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = I_1 + I_2$

其中 $I_2 = \mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$. 在 I_1 中令 $t = -\tau, dt = -d\tau$. 得

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-\infty}^0 -1 \cdot e^{-j\omega t} dt = - \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-j(-\omega)\tau} d\tau \\ &= -\mathcal{F}[u(t)]_{-\omega} = -\left[\frac{1}{j(-\omega)} + \pi\delta(-\omega)\right] = \frac{1}{j\omega} - \pi\delta(\omega), \quad (\delta(-\omega) = \delta(\omega))\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{F}[\operatorname{sgn} t] = I_1 + I_2 = \frac{2}{j\omega}$$

注 本题解法一的关键在于用关系式 $\operatorname{sgn} t = u(t) - u(-t)$. $u(t)$ 称为单位阶跃函数, 且利用已知变换 (广义) $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ (此式的证明在一般教材中可找到).

解法二直接从 $\text{sgn } t$ F- 氏变换定义出发, 并注意 $\mathcal{F}[u(t)] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$.

5-10 设 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 证明

$$1) \mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

$$2) \mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

并利用此结果, 求下列函数的 F- 氏变换:

$$1) f(t) = u(t) \sin \omega_0 t; \quad 2) f(t) = e^{-\beta t} u(t) \cos \omega_0 t. \quad (\beta > 0)$$

解 首先证明上述两个公式.

证法一 因为 $\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$ 由 F- 氏变换线性性质, 有

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] + \mathcal{F}[f(t) e^{-j\omega_0 t}] \}$$

又由 F- 氏逆变换位移性质得:

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0), \quad \mathcal{F}[f(t) e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega + \omega_0)$$

于是

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

同理

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}].$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] &= \frac{1}{2j} \{ \mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] - \mathcal{F}[f(t) e^{-j\omega_0 t}] \} \\ &= \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

证法二 由象函数位移性质有

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] = f(t) e^{j\omega_0 t} = f(t) \cos \omega_0 t + j f(t) \sin \omega_0 t$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega + \omega_0)] = f(t) e^{-j\omega_0 t} = \overline{f(t) e^{j\omega_0 t}}$$

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] + j \mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = F(\omega - \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] - j \mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = F(\omega + \omega_0)$$

故得

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

用 1), 2) 可计算下列 F- 氏变换

$$(1) f(t) = u(t) \sin \omega_0 t$$

$$\therefore \mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) = F(\omega)$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} - \pi\delta(\omega + \omega_0) \right] \\ &= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

$$(2) f(t) = e^{-\beta t} u(t) \cos \omega_0 t$$

$$\therefore \mathcal{F}[e^{-\beta t} u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\beta + j\omega)t} \cdot dt = \frac{1}{\beta + j\omega} = F(\omega)$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\beta + j(\omega + \omega_0)} \right] \\ &= \frac{\beta + j\omega}{(\beta + j\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

注 1. 证法一应用欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ 及象函数的位移性质; 证法二直接利用象函数位移性质, 用 $F(\omega \pm \omega_0)$ 表示 $\mathcal{F} \begin{bmatrix} f(t) \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix}$.

2. 值得注意的是在证法二中, 表示式 $\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] \pm j\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = F(\omega \mp \omega_0)$ 不能推出关系 $\operatorname{Re} F(\omega \mp \omega_0) = \mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t]$ 及 $\operatorname{Im} F(\omega \mp \omega_0) = \pm \mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t]$. 因为 $\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t]$ 和 $\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t]$ 在一般情况下仍为实变量 ω 的复值函数.

5-11 利用 F-氏变换性质, 求下列函数的 F-氏变换

$$1) f(t) = e^{j\omega_0 t} u(t - t_0), \quad 2) f(t) = e^{j\omega_0 t} t u(t),$$

解 1) 解法一 $\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} u(t - t_0)]$

因为 $\mathcal{F}[u(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[u(t)] = e^{-j\omega t_0} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$ (变换的位移性质)

所以 $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} u(t - t_0)] = e^{-j(\omega - \omega_0)t_0} \left[\frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0) \right]$
(象函数位移性质)

解法二 因为 $f(t) = e^{j\omega_0 t} u(t - t_0) = e^{j\omega_0(t - t_0)} u(t - t_0) \cdot e^{j\omega_0 t_0}$

且 $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} u(t)] = \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0)$ (象函数位移性质)

所以

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0(t - t_0)} u(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} u(t)] = e^{-j\omega t_0} \left[\frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0) \right]$$

(变换的位移性质)

于是

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} u(t-t_0)] &= e^{j\omega_0 t_0} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 (t-t_0)} u(t-t_0)] \\ &= e^{-j(\omega-\omega_0)t_0} \left[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \text{ 解法一 因为 } \mathcal{F}[tu(t)] &= j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[u(t)] = j \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]' \\ &= \frac{-1}{\omega^2} + \pi j \delta'(\omega)\end{aligned}$$

(象函数的微分性质)

所以

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t} tu(t)] = \frac{-1}{(\omega-\omega_0)^2} + \pi j \delta'(\omega-\omega_0)$$

(象函数位移性质)

$$\text{解法二 因为 } \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} u(t)] = \mathcal{F}[u(t)]_{\omega-\omega_0} = \frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0)$$

(象函数位移性质)

$$\begin{aligned}\text{所以 } \mathcal{F}[t \cdot e^{j\omega_0 t} u(t)] &= j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} u(t)] = j \left[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0) \right]' \\ &= \frac{-1}{(\omega-\omega_0)^2} + j\pi\delta'(\omega-\omega_0)\end{aligned}$$

(象函数的微分性质)

注 解法一是对 $u(t)$ 用变换的位移性质, 得到 $\mathcal{F}[u(t-t_0)] = F(\omega)$, 再对 $F(\omega)$ 应用象函数(逆变换)的位移性质.

而解法二是对 $u(t)$ 先用象函数的位移性质得到 $e^{j\omega_0 t} u(t)$ 的象, 之后对 $e^{j\omega_0 t} u(t)$ 用变换的位移性质得到 $e^{j\omega_0 (t-t_0)} u(t-t_0)$ 的象. 乘常数因子 $e^{j\omega_0 t_0}$ 后得所求.

$$5-12 \text{ 设 } f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}, \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & t \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}. \text{ 求 } f_1 * f_2.$$

$$\text{解 因为 } f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

$$\text{且 } f_1(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > t \\ e^{-(t-\tau)} & \tau \leq t \end{cases}, \quad f_2(\tau) = \begin{cases} \sin \tau, & \tau \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \tau \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

1° 当 $t \leq 0$ 时, $f_1(t-\tau) \neq 0$ 区间 $\tau \leq t$ 与 $f_2(\tau) \neq 0$ 区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 无非空交集(图

5.4).

因为

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau = 0$$

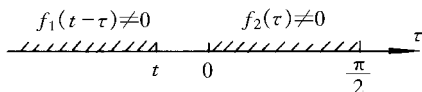


图 5.4

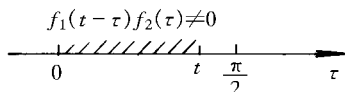


图 5.5

2° 当 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f_1(t-\tau) \neq 0$ 区间 $\tau \leq t$ 与 $f_2(\tau) \neq 0$ 区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 有非空交集 $[0, t]$ (图 5.5).

于是

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t})$$

3° 当 $t > \frac{\pi}{2}$ 时, $f_1(t-\tau) \neq 0$ 区间 $\tau \leq t$ 与 $f_2(\tau) \neq 0$ 区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 有非空交集 $[0, \frac{\pi}{2}]$ (图 5.6).

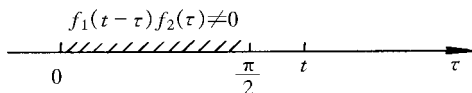


图 5.6

故

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau \\ &= e^{-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\tau} \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} e^{-t} (1 + e^{\frac{\pi}{2}}) \end{aligned}$$

综上所述得

$$f_1 * f_2 = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t}), & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2}e^{-t}(1 + e^{\frac{\pi}{2}}), & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

注 求卷积运算类似于相关函数的计算, 这里 $\tau \in (-\infty, +\infty)$ 为积分变量, $t \in (-\infty, +\infty)$ 为参变量. 应根据 t 的不同值确定 $f_1(t-\tau)f_2(\tau)$ 或 $f_1(\tau)f_2(t-\tau) \neq 0$ 的积分区间. 以图示出较好.

5-13 设 $f(t)$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$, 求 $f(t) * u(t)$, 并求 $\mathcal{F}[f * u(t)]$.

解
$$f_1 * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau \geq t \end{cases}$$

对任意 $t \in (-\infty, +\infty)$, $f(\tau) \neq 0$ 与 $u(t-\tau) \neq 0$ 的公共区间为 $\tau < t$.

于是
$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$$

由卷积定理, 有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \mathcal{F}[f(t) * u(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[u(t)]$$

设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = F(\omega) \cdot \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

注 1. 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \pi F(0)\delta(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \pi F(0)\varphi(0)$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi F(\omega)\delta(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \pi F(0)\varphi(0)$$

(其中 $\varphi(\omega)$ 为任意连续函数, 且当 $|\omega|$ 足够大时取零值).

由 δ -函数的定义知

$$\pi F(\omega)\delta(\omega) = \pi F(0)\delta(\omega)$$

2. 应当注意, 由于 δ -函数是广义函数, 不能谈 δ -函数的“函数值”, 故一个函

数与 δ -函数“乘积”是没有意义的, 只能在积分式 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0)dt = \varphi(t_0)$ 下谈

δ -函数对其它函数的作用效果. 正因为这样, $\pi F(\omega)\delta(\omega)$ 是没有意义的. 应当写为 $\pi F(0)\delta(\omega)$. 它表示在 $\omega = 0$ 处有强度 $\pi F(0)$ 的 δ -函数;

3. $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 的 F- 氏变换中包含一在 $\omega = 0$ 处强度为 $\pi F(0)$ 的脉冲项.

但当函数 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = g(t)$ 满足 F- 氏积分定理条件时, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$ 收敛,

从而有 $|g(t)| \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = 0$. 此时有 $\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) =$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

所以 $F(0) = 0$. 故当 $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 满足 F- 氏积分定理条件时, 表达式中的脉冲项不出现;

4. 这里得到的结果即为 F- 氏变换的积分性质, 包括了广义与古典意义下的积分性质.

5.2 Laplace 变换

5.2.1 基本要求

1. 掌握 Laplace 变换概念与存在定理(条件与结论).
2. 掌握 L- 氏变换的基本性质并会灵活运用.
3. 掌握反演公式及其应用.
4. 掌握用 L- 氏变换解微分方程的步骤.

5.2.2 内容提要

1. 定义 设 $f(t)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且满足条件(A): (1) 当 $t < 0$ 时, $f(t) \equiv 0$; (2) 在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上, $f(t)$ 至多只有有限个第一类间断点; (3) 存在常数 $c \geq 0, M > 0$, 使得 $|f(t)| \leq Me^{ct}$. $t \in [0, +\infty)$ (c 称为 f 的增长指数). 则

称含复参变量广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换.

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数. 记为 $\mathcal{L}[f] = F(s)$. $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的象原函数, 记为 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$.

2. 定理一 (L- 氏变换存在定理) 若 $f(t)$ 满足条件(A), 则 $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ 在半平面 $\text{Re}(s) = \beta > c$ 上存在, 且为 S 的解析函数.

3. L-氏变换基本性质

1) 线性性质 α, β 为常数, $\mathcal{L}[f_1] = F_1(s), \mathcal{L}[f_2] = F_2(s)$. 则

$$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

2) 微分性质 设 $\mathcal{L}[f] = F(s)$, $(\operatorname{Re}(s) > c)$ 则

$$\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0) \quad (\operatorname{Re}(s) > c)$$

3) 象函数微分性质

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)] \quad (\operatorname{Re}(s) > c)$$

4) 积分性质

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f] \quad (\operatorname{Re}(s) > c)$$

5) 象函数积分性质

若 $\mathcal{L}[f] = F(s)$, 且 $\int_s^\infty F(s) ds$ 收敛, 则

$$\int_s^\infty F(s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

6) 位移性质

设 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ $(\operatorname{Re}(s) > c)$, 则

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a) \quad (\operatorname{Re}(s-a) > c)$$

7) 延迟性质

设 $\mathcal{L}[f] = F(s)$, 则对任一 $\tau \geq 0$, 有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$$

8) 卷积定理

1° 设当 $t < 0$ 时, 有 $f_1(t) \equiv f_2(t) \equiv 0$, 则

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

2°

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}[f_1] \cdot \mathcal{L}[f_2]$$

4. 反演公式

1) 设 $\mathcal{L}[f] = F(s)$, $\operatorname{Re}(s) = \beta$, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (t > 0, \beta > c)$$

称为 L-氏变换反演公式, 右端积分称为 L-变换反演积分.

2) 定理二 若 $F(s) = \mathcal{L}[f]$ 在有限复平面内只有有限个奇点 $s_1, s_2, \dots, s_n$, 且

$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s) e^{st}, s_k], \quad t > 0$$

5.2.3 例题解析

5-14 试确定实数 m , 使 $\mathcal{L}[t^m]$ 存在, 并求 $\mathcal{L}[t^m]$.

解

因为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^m] &= \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \int_0^1 t^m e^{-st} dt + \int_1^{+\infty} t^m e^{-st} dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

在 I_1 中, $|e^{-s}|$ 有界, 且仅当 $m > -1$ 时 I_1 收敛, 在 I_2 中, 对 $\operatorname{Re}(s) > 0$, 对任意实数 m , 均收敛. 故当 $m > -1$ 时, $\mathcal{L}[t^m]$ 存在.

1° 当 $m > 0$ 时, 令 $st = z$, 有

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \frac{1}{s^{m+1}} \int_0^{\infty} z^m e^{-z} dz$$

右端的积分除 m 为自然数外, 被积函数 $z^m e^{-z} = g(z)$ 在 $z=0$ 处不解析 (且为非孤立奇点). 现对 $\epsilon > 0$, 考虑积分 $\int_{\epsilon}^{\infty} z^m e^{-z} dz$ (当 $m > 0$ 不为自然数时, 取 z^m 的主值分支).

因为 $g(z)$ 在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 内解析, 故对 $\epsilon > 0$ 积分与路径无关. 于是 $\int_{\epsilon}^{\infty} z^m e^{-z} dz =$

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} x^m e^{-x} dx.$$

注意 $\int_{\epsilon}^{+\infty} x^m e^{-x} dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx = \Gamma(m+1)$. 即

$$\int_0^{\infty} z^m e^{-z} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} z^m e^{-z} dz = \Gamma(m+1)$$

所以 $\int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad (m > 0), \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$

2° 当 $m=0$ 时, $\mathcal{L}[t^m] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} = \frac{\Gamma(0+1)}{s^{0+1}}$.

3° 当 $m \in (-1, 0)$ 时, 因为 $m+1 > 0$, 由 1° 得

$$\mathcal{L}[t^{m+1}] = \frac{\Gamma(m+2)}{s^{m+2}} = \frac{(m+1)\Gamma(m+1)}{s^{m+2}}$$

且 $t^m = \frac{1}{m+1} [t^{m+1}]', t^{m+1}|_{t=0} = 0$. 于是由微分性质与线性性质有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{1}{m+1}(t^{m+1})'\right] &= \frac{1}{m+1} \cdot s\mathcal{L}(t^{m+1}) \\ &= \frac{s}{m+1} \cdot \frac{(m+1)\Gamma(m+1)}{s^{m+2}} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0\end{aligned}$$

综合 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ 得, 当 $m > -1$ 时

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

注 1. 当 $m > 0$ 时, 通过 $g(z) = z^m e^{-z}$ 在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 内解析, 将 $\int_{\epsilon}^{\infty} g(z) dz$ ($\epsilon > 0$) 化为沿实轴积分 $\int_{\epsilon}^{+\infty} g(x) dx$, 且利用 Γ -函数的定义得到结果; 当 $m = 0$ 时由 L-氏变换定义得到结果; 当 $m \in (-1, 0)$ 时, 利用 L-氏变换微分性质及 $m > 0$ 的结果得到结果.

2. Γ -函数指由含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{m-1} dt$ 所定义的函数 $\Gamma(m)$. (其中 $m > 0$). 其基本性质为递推关系 $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$, 当 m 为自然数时, 有 $\Gamma(m+1) = m!$, 由定义可知 $\Gamma(1) = 1$. 由定义及概率积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ 可得 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

5-15 用 δ -函数的定义给出 $\mathcal{L}[\delta(t)]$ 的定义.

解 由于 δ -函数为一广义函数, 且唯一有意义的是关系式

$$K[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t-t_0) dt = \varphi(t_0)$$

为求 $\mathcal{L}[\delta(t)]$, 现令 $\varphi(t) = \begin{cases} e^{-st}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, 定义 $\mathcal{L}[\delta(t)] = K[\varphi]$.

由此定义可得 $\mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-s} |_{t=0} = 1$.

注 注意 δ -函数的定义, 故 $\mathcal{L}[\delta(t)]$ 可看成广义函数 $\delta(t)$ 对函数

$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-st}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 的作用效果.

由此得 $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-st_0} |_{t=t_0} = e^{-st_0} \mathcal{L}[\delta(t)]$. ($t_0 \geq 0$), 这与 L-氏变换延迟性质相一致.

5-16 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. $\operatorname{Re}(s) > c$, 试对 $a > 0, b \geq 0$, 导出 $\mathcal{L}[f(at-b)]$ 与

$F(s)$ 的关系.

解 因为 $\mathcal{L}[f(at-b)] = \int_0^{+\infty} f(at-b)e^{-st} dt$. 令 $at-b = \xi$, 则 $t = \frac{1}{a}(\xi+b)$,

$dt = \frac{1}{a}d\xi$. 注意当 $t < 0$ 时有 $f(t) = 0$,

所以

$$\mathcal{L}[f(at-b)] = \frac{1}{a} \int_{-b}^{+\infty} f(\xi) e^{-s\frac{1}{a}(\xi+b)} d\xi = \frac{1}{a} e^{-\frac{bs}{a}} \int_0^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{s}{a}\xi} d\xi = \frac{1}{a} e^{-\frac{bs}{a}} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

注 当 $b=0$ 时, 有 $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$. 称为 L -氏变换的相似性质; 注意到

$f(at-b) = f[a(t-\frac{b}{a})]$, 可见本题给出的是相似性质与延迟性质之结合情形. ($a > 0, b \geq 0$)

5-17 求下列函数的 L -氏变换

1) $(t-1)^2 e^t$ 2) $\frac{t}{2a} \sin at$ (a 为实数) 3) $u(3t-5)$

4) $u(1-e^{-t})$ 5) $\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$ 6) $t \int_0^t e^{-3t} \sin 2t dt$

7) $\int_0^t t e^{-3t} \sin 2t dt$ 8) $f(t) = \begin{cases} 3, & t \in (0, 2) \\ -1, & t \in [2, 4] \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}$

9) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t < \pi \\ t, & t \geq \pi \end{cases}$

解 1) **解法一** 取 $f(t) = (t-1)^2 e^t$. 可对 t^2 用延迟性质之后, 对 $(t-1)^2$ 再用位移性质

由 $\mathcal{L}[(t-1)^2] = e^{-s} \mathcal{L}[t^2] = e^{-s} \frac{\Gamma(2+1)}{s^{2+1}} = \frac{2!}{s^3} e^{-s} = F_1(s) \quad \operatorname{Re}(s) > 0$

得到 $\mathcal{L}[(t-1)^2 e^t] = F_1(s-1) = \frac{2!}{(s-1)^3} e^{-(s-1)} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$

解法二 $f(t) = (t-1)^2 e^t = (t-1)^2 e^{t-1} e$. 可对 t^2 用位移性质之后, 再对 $t^2 e^t$ 用延迟性质

由 $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^3}$ 得到 $\mathcal{L}[t^2 e^t] = \frac{2!}{(s-1)^3} = F_1(s)$

故

$$\mathcal{L}[(t-1)^2 e^t] = e \cdot \mathcal{L}[(t-1)^2 e^{t-1}] = e \cdot e^{-s} F_1(s) = \frac{2!}{(s-1)^3} e^{-(s-1)} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

2) 首先由分部积分可得到

$$\mathcal{L}[\sin at] = \int_0^{+\infty} \sin at e^{-s} dt = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \int_0^{+\infty} \sin at e^{-s} dt = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \mathcal{L}[\sin at].$$

因为 $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2} = F_1(s) \quad \operatorname{Re}(s) > 0$

于是,由象函数的微分性质,有

$$\mathcal{L}[t \sin at] = -F'_1(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

所以 $\mathcal{L}\left[\frac{t}{2a} \sin at\right] = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$

3) 令 $u(3t-5) = f(t)$, 设 $\mathcal{L}[u(t)] = F_1(s)$. 则由 5-16 题得

$$\mathcal{L}[u(3t-5)] = \frac{1}{3} e^{-\frac{5}{3}s} F_1\left(\frac{s}{3}\right)$$

而 $\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} = F_1(s)$

所以 $\mathcal{L}[u(3t-5)] = \frac{1}{3} e^{-\frac{5}{3}s} \cdot \frac{1}{s/3} = e^{-\frac{5}{3}s} \cdot \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$

4) $f(t) = u(1 - e^{-t})$.

解法一 注意 $u(1 - e^{-t}) = \begin{cases} 1, & 1 - e^{-t} > 0 \\ 0, & 1 - e^{-t} < 0 \end{cases}$, 即 $u(1 - e^{-t}) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

因为 $u(1 - e^{-t}) \equiv u(t)$

于是 $\mathcal{L}[u(1 - e^{-t})] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$

解法二 由定义有 $\mathcal{L}[u(1 - e^{-t})] = \int_0^{+\infty} u(1 - e^{-t}) e^{-st} dt$

令 $1 - e^{-t} = \xi$, 得 $e^{-st} = (1 - \xi)^s, \quad dt = \frac{d\xi}{1 - \xi}$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u(1 - e^{-t}) e^{-st} dt &= \int_0^1 u(\xi) (1 - \xi)^{s-1} d\xi = \int_0^1 (1 - \xi)^{s-1} d\xi \\ &= -\frac{(1 - \xi)^s}{s} \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

5) $f(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$.

解法一 设 $f_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}$, 则由 5-14 题知

$$\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

由位移性质得 $\mathcal{L}\left[\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s-2}} \quad \operatorname{Re}(s) > 2$

解法二 由定义有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\right] &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(s-2)t} dt \\ &= \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{(s-2)^{-\frac{1}{2}+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{s-2}} \quad \operatorname{Re}(s) > 2 \end{aligned}$$

$$6) f(t) = t \int_0^t e^{-3t} \sin 2t dt$$

$$\mathcal{L}[e^{-3t} \sin 2t] = \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} \quad \operatorname{Re}(s) > -3$$

由积分性质有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-3t} \sin 2t dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[e^{-3t} \sin 2t] = \frac{2}{s[(s+3)^2 + 2^2]} = F_1(s) \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

又由象函数微分性质得

$$\mathcal{L}[f(t)] = -F'_1(s) = \frac{2(3s^2 + 12s + 13)}{s^2[(s+3)^2 + 4]^2} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$7) f(t) = \int_0^t t e^{-3t} \sin 2t dt$$

因

$$\mathcal{L}[t \sin 2t] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin 2t] = \left[\frac{-2}{s^2 + 2^2} \right]' = \frac{4s}{(s^2 + 2^2)^2} = F_1(s) \quad (\text{象函数微分性质})$$

得到 $\mathcal{L}[e^{-3t} t \sin 2t] = \frac{4(s+3)}{[(s+3)^2 + 4]^2} \quad (\text{位移性质})$

于是

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-3t} t \sin 2t dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[e^{-3t} t \sin 2t] = \frac{4(s+3)}{s[(s+3)^2 + 4]^2} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$8) f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0, 2) \\ -1, & t \in [2, 4) \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}$$

由 L-氏变换定义有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^2 f(t)e^{-st} dt + \int_2^4 f(t)e^{-st} dt + \int_4^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= 3 \cdot \frac{e^{-s}}{-s} \Big|_{t=0}^2 + (-1) \cdot \frac{e^{-s}}{-s} \Big|_{t=2}^4 + 0 \\ &= \frac{3}{s} \left(1 - \frac{e^{-2s}}{s}\right) + \frac{e^{-4s} - e^{-2s}}{s} = \frac{3 - 4e^{-2s} + e^{-4s}}{s}\end{aligned}$$

所以
$$\mathcal{L}[f] = \frac{3 - 4e^{-2s} + e^{-4s}}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$9) f(t) = \begin{cases} \sin t, & t < \pi \\ t, & t > \pi \end{cases}$$

解法一 由 L-氏变换定义有

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\pi} f(t)e^{-st} dt + \int_{\pi}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\pi} \sin te^{-st} dt + \int_{\pi}^{+\infty} te^{-st} dt$$

分别对右端两积分用分部积分法得

$$\int_0^{\pi} \sin te^{-st} dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2}, \quad \int_{\pi}^{+\infty} te^{-st} dt = \frac{\pi e^{-s\pi}}{s} + \frac{e^{-s\pi}}{s^2}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \frac{1}{1 + s^2} + \frac{e^{-s\pi}}{1 + s^2} + \frac{e^{-s\pi}}{s^2} + \frac{e^{-s\pi}}{s} \\ &= \frac{1}{1 + s^2} + e^{-\pi s} \left(\frac{1}{1 + s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \quad \operatorname{Re}(s) > 0\end{aligned}$$

解法二

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t - \pi < 0 \\ t, & t - \pi > 0 \end{cases} = \sin t + \begin{cases} 0, & t - \pi < 0 \\ t - \sin t, & t - \pi > 0 \end{cases}$$

右端第二项可写为 $(t - \sin t)u(t - \pi)$, 这里 $u(t)$ 为单位阶跃函数, 为对其应用延迟性质, 注意 $\sin t = -\sin(t - \pi)$ 得

$$\begin{aligned}(t - \sin t)u(t - \pi) &= [(t - \pi) + \sin(t - \pi) + \pi]u(t - \pi) \\ &= (t - \pi)u(t - \pi) + \sin(t - \pi) \cdot u(t - \pi) + \pi u(t - \pi)\end{aligned}$$

于是 $f(t) = \sin t + (t - \pi)u(t - \pi) + \sin(t - \pi) \cdot u(t - \pi) + \pi u(t - \pi)$.

故由线性性质与延迟性质, 立即可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[(t - \pi)] + \mathcal{L}[\sin(t - \pi)] + \pi \mathcal{L}[u(t - \pi)] \\ &= \frac{1}{1 + s^2} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{e^{-\pi s}}{1 + s^2} + \pi \frac{e^{-\pi s}}{s}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+s^2} + e^{-\pi s} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{1+s^2} + \frac{\pi}{s} \right] \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

注 1. 以上各题均是通过运用 L-氏变换性质求解的,可见性质的灵活运用会得到不同的解题思路;

2. 由 L-氏变换存在定理知道,若 $\mathcal{L}[f]=F(s)$ 存在,则 $F(s)$ 在 $\operatorname{Re}(s)>c$ 内解析. 其中 c 为 $f(t)$ 的增长指数. 实际中,我们并不便对所给 $f(t)$ 求出与其对应的增长指数 c . 但注意象函数 $F(s)$ 是含复参量广义积分 $\mathcal{L}[f]$ 定义的复变函数,它的定义域满足两条性质

(1) 其结构为半平面 $\operatorname{Re}(s)>c$. (c 为某一实数);

(2) $F(s)$ 在定义域内解析.

由此,当我们利用性质或查表法求得 $F(s)$ 时,便可依据这两条性质确定出 $F(s)$ 的定义域,正如本题中对各 $f(t)$ 的象函数后边注明的 $\operatorname{Re}(s)>c_1$,但注意这个 c_1 一般不大于存在定理中所说的 c ,这是因为存在定理的条件是充分的. 例如,对自然数 m ,由 5-14 题,有 $\mathcal{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}$. 由此得 $\operatorname{Re}(s)>0=c_1$,但又可估计出 $|t^m| < m! e^t$,即存在定理中的 $c=1$;

3. 求 $f(t)$ 的 L-氏变换时,一定要在结果中标明 $F(s)$ 的定义域;

4. 对 9),解法一由定义出发,并计算 $[0, \pi]$ 上定积分与 $[\pi, +\infty)$ 上广义积分得到结果;解法二则利用 $f(t)$ 的变形,将其写为 $f(t)=\sin t+\varphi(t-\pi)u(t-\pi)$ 形式,再用变换的延迟性质得到结果. 应当注意,因为每个接受 L-氏变换的函数 $f(t)$ 满足 $t<0$ 时 $f(t)\equiv 0$.

故 $\mathcal{L}[\varphi(t-\pi)u(t-\pi)]=\mathcal{L}[\varphi(t-\pi)]$. 即在考虑 L-氏变换时,等式 $\varphi(t-\pi)u(t-\pi)=\varphi(t-\pi)$ 成立.

5-18 利用 L-氏变换求下列广义积分值

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} dt \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-t} dt \quad 3) \int_0^{+\infty} e^{-3t} \cos 2t dt$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} \cos bt - e^{-mt} \cos nt}{t} dt \quad (a, b, m, n \text{ 为实数且 } a > 0, m > 0)$$

$$5) \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt \quad (\text{其中 } \operatorname{erf} \sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\xi^2} d\xi \text{ 称为误差函数})$$

$$6) \int_0^{+\infty} J_0(t) dt (\text{其中 } J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \text{ 称为第一类零阶 Bessel 函})$$

数)

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \quad 8) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot e^{-\sqrt{2}t} \operatorname{sh} t dt$$

解 1) 令 $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, 则

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-t}] - \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (\text{位移性质}) \quad \operatorname{Re}(s) > -1$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\right]_{s=0} = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right] dx = \ln \frac{x+1}{x+2} \Big|_0^{+\infty} = \ln 2 \end{aligned}$$

(注意被积函数在 $\operatorname{Re}(s) > -1$ 内解析, 故积分与路径无关, 取沿实轴积分)

$$\begin{aligned} 2) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt &= \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos t}{t}\right]_{s=1} = \int_1^{\infty} \mathcal{L}[1 - \cos t] ds \\ &= \int_1^{\infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}\right] ds \\ &= \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\right] dx = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

(注意被积函数在 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 内解析, 故积分与路径无关, 取沿实轴积分)

$$3) \int_0^{+\infty} e^{-3t} \cos 2t dt = \mathcal{L}[\cos 2t]_{s=3} = \frac{s}{s^2 + 4} \Big|_{s=3} = \frac{3}{13}$$

$$\begin{aligned} 4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} \cos bt - e^{-mt} \cos nt}{t} dt &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{-at} \cos bt - e^{-mt} \cos nt}{t}\right]_{s=0} \\ &= \int_0^{\infty} (\mathcal{L}[e^{-at} \cos bt] - \mathcal{L}[e^{-mt} \cos nt]) ds \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} - \frac{s+m}{(s+m)^2 + n^2}\right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + b^2} - \frac{x+m}{(x+m)^2 + n^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x+a)^2 + b^2}{(x+m)^2 + n^2} \Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + b^2}{m^2 + n^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{m^2 + n^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

(注意被积函数 $\operatorname{Re}(s) > c = \max(-a, -m)$ 内解析, 故积分与路径无关, 取沿实轴积分)

$$5) \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt = \mathcal{L}[\operatorname{erf} \sqrt{t}]_{s=1} \quad \text{查 L- 氏变换表可得 } \mathcal{L}[\operatorname{erf} \sqrt{t}] = \frac{1}{s \sqrt{s+1}}$$

所以
$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt = \left. \frac{1}{s \sqrt{s+1}} \right|_{s=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6) \int_0^{+\infty} J_0(t) dt = \mathcal{L}[J_0(t)]_{s=0}$$

查变换表可得
$$\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

所以
$$\int_0^{+\infty} J_0(t) dt = \left. \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \right|_{s=0} = 1$$

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = -\left. \frac{\sin^2 t}{t} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt \quad (\text{分部积分})$$

注意 $\frac{\sin^2 t}{t} = \sin t \cdot \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, 有
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \mathcal{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]_{s=0}$$

$$= \int_0^{\infty} \mathcal{L}[\sin 2t] ds = \int_0^{\infty} \frac{2}{s^2+4} ds = \arctan \frac{s}{2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{取 } \arctan \frac{s}{2})$$

主值分支)

$$\begin{aligned} 8) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\sqrt{2}t} \operatorname{sh} t dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot e^{-\sqrt{2}t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin t}{t} e^{-(\sqrt{2}-1)t} - \frac{\sin t}{t} e^{-(\sqrt{2}+1)t} \right] dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]_{s=\sqrt{2}-1} - \mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]_{s=\sqrt{2}+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \mathcal{L}[\sin t] ds = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{s^2+1} ds \\ &= \frac{1}{2} [\arctan(\sqrt{2}+1) - \arctan(\sqrt{2}-1)] \end{aligned}$$

注意
$$\tan[\arctan(\sqrt{2}+1) - \arctan(\sqrt{2}-1)] = \frac{(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)}{1 + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 1$$

所以
$$\arctan(\sqrt{2}+1) - \arctan(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{4}$$

于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\sqrt{2}t} \operatorname{sh} t dt = \frac{1}{2} [\arctan(\sqrt{2}+1) - \arctan(\sqrt{2}-1)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

注 1. 在 1) 中不可将积分分为两项, 即 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt \neq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$.

因为右端两项积分均不存在(发散)(因为 $\mathcal{L}[t^m]$ 仅当 $m > -1$ 存在). 同理, 2) 与 4) 也不可分为两项;

2. 对 7) 的解法, 采取了先分部积分, 然后使用象函数积分性质的方法, 使

$\mathcal{L}\left[\frac{\sin^2 t}{t^2}\right]_{s=0} = \mathcal{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]_{s=0}$, 左端只要应用一次象函数的积分性质即可, 使问题简化(注意 $\mathcal{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right]_{s=0}$ 是存在的, 因为 $t=0$ 不是 $\frac{\sin at}{t}$ 的奇点).

3. 对 5) 及 6) 应用了查 L-氏变换表的方法, 在工程技术实际应用中, 这是一常用方法.

5-19 求下列函数的 L-氏逆变换.

1) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$

2) $F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$

3) $F(s) = \frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}$

4) $F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$

5) $F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13}$

6) $F(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$

7) $F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

解 1) 因 $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}$, 且 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t$.

由卷积定理有 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos t * \cos t = \int_0^t \cos \tau \cos(t-\tau) d\tau$
$$= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t + \cos(2\tau-t)] d\tau = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t)$$

2) $F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4} = \frac{s+3}{(s+1)[(s+1)^2+3]}$

$$= \frac{1}{(s+1)^2+3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+3} \quad (\text{部分分式})$$

于是利用位移性质、线性性质及已知的基本变换式可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}\right]=\frac{e^{-t}}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}\right]=\frac{2}{3}e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right]=\frac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{3}t$$

所以 $\mathcal{L}[F(s)] = \frac{e^{-t}}{3}[2 + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t] = f(t)$

3) $F(s) = \frac{2s^2 - 5s - 5}{(s+1)(s-1)(s-2)}$, $s_1 = 1, s_2 = -1, s_3 = 2$ 分别为 $F(s)$ 的一级极点, 故也为 $F(s)e^s$ 的一级极点, 且 $F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$, 故由反演公式可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^s ds \\ &= \text{Res}[F(s)e^s, s_1] + \text{Res}[F(s)e^s, s_2] + \text{Res}[F(s)e^s, s_3] \\ &= 4e^t + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{3}e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ 因为 } F(s) &= \ln \frac{s+1}{s-1} = \int_s^\infty \left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right] ds = 2 \int_s^\infty \mathcal{L}\left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right] ds \\ &= 2 \int_s^\infty \mathcal{L}[\text{sht}] ds = 2\mathcal{L}\left[\frac{\text{sht}}{t}\right] \end{aligned}$$

所以 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{2\text{sht}}{t}$

$$5) F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2} = 2 \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{3} \frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

因为

$$\mathcal{L}^{-1}\left[2 \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right] = 2e^{-2t}\cos 3t \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3} \frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] = \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

所以 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-2t}\left[2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right]$

$$6) F(s) = \frac{1}{(s+1)^4} = \frac{\Gamma(3+1)}{(s+1)^{3+1}} \cdot \frac{1}{\Gamma(3+1)} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{\Gamma(3+1)}{(s+1)^{3+1}}$$

由位移性质及 $\mathcal{L}[t^3] = \frac{\Gamma(3+1)}{s^{3+1}}$, 得

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(3+1)}{(s+1)^{3+1}}\right] = e^{-t} \cdot t^3$$

所以

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{3!} e^{-t} t^3 = \frac{1}{6} e^{-t} t^3$$

$$7) F(s) = \frac{s^2 - a^2}{[s^2 + a^2]^2} = \frac{s}{s^2 + a^2} \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{a}{s^2 + a^2} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2}$$

由卷积定理得

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos at * \cos at - \sin at * \sin at \\ &= \int_0^t \cos a\tau \cos a(t-\tau) d\tau - \int_0^t \sin a\tau \sin a(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t [\cos a\tau \cos (at - a\tau) - \sin a\tau \sin (at - a\tau)] d\tau \\ &= \int_0^t \cos [a\tau + (at - a\tau)] d\tau = t \cos at \end{aligned}$$

注 由上面几个例子可见,求 L-氏逆变换的方法是灵活的,要具体题目具体选择简便合适的方法. 1) 与 7) 我们采用卷积定理,若对这两题用反演公式,注意 $F(s)$ 极点(从而也是 $F(s)e^{st}$ 的极点)均为二级的,运算较麻烦; 2) 与 5) 采用了部分分式法,将 $F(s)$ 分解为几个简单分式(在有理域内分解),从而使每个简单分式可用基本变换与基本性质求得其逆变换,化简了问题,虽然在这两问题中,极点均为一级的,但注意到都有两个复极点,若用反演公式,计算其留数时也会导致较麻烦的运算; 对 3), $F(s)$ 有三个实一级极点(也是 $F(s)e^{st}$ 的实一级极点),故应用反演公式,通过求 $F(s)e^{st}$ 在极点处留数得到 $f(t)$,较之分解为部分分式为简单. 但要注意,在用此方法时不能丢掉条件 $F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$; 6) 则为直接应用位移性质及 $\mathcal{L}[t^3]$ 的简单情形. 显然不必用反演公式; 4) 不能用反演公式,它不满足定理的条件,我们将它变形后应用象函数积分性质得到结果,因为 $F(s)$ 在其定义域(必为单连域)内解析,可作为某函数的原函数看待.

5-20 求下列卷积

$$1) u(t-a) * f(t) \quad 2) \delta(t-a) * f(t) \quad (a \geq 0)$$

解 1) 注意卷积定义及当 $t < 0$ 时有 $f(t) = 0$.

$$u(t-a) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-a) f(t-\tau) d\tau$$

其中 $u(\tau-a) = \begin{cases} 0, & \tau < a \\ 1, & \tau > a \end{cases}; f(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > t \\ \neq 0, & \tau < t \end{cases}$

1° 当 $t \leq a$ 时, $f(t-\tau)u(\tau-a) = 0$. (二者无公共非 0 区间), 如图 5.7 所示.

即 $f(t) * u(t-a) = 0$.

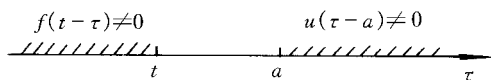


图 5.7

2° 当 $t > a$ 时,二者公共非 0 区间为 $[a, t]$, 如图 5.8 所示.

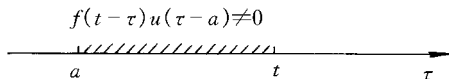


图 5.8

$$f(t) * u(t-a) = \int_a^t f(t-\tau)u(\tau-a)d\tau = \int_a^t f(t-\tau)d\tau$$

综合 1°, 2° 得 $f(t) * u(t-a) = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ \int_a^t f(t-\tau)d\tau, & t > a \end{cases}$

$$2) \delta(t-a) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\delta(\tau-a)d\tau = f(t-a) \begin{cases} = 0, & t < a \\ \neq 0, & t \geq a \geq 0 \end{cases} \quad (\text{由}$$

δ -函数定义)

5-21 用 L-氏变换法求解常微分方程或含参变量积分

1) 求 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^2 + a^2} d\omega$.

2) 解初值问题: $\begin{cases} \dot{T}(t) + a^2 \omega^2 T(t) = g(t), \\ T(0) = 0 \end{cases} \quad (g(t) \text{ 已知})$

解 1) 对 $I(t)$ 取拉氏变换, 并交换积分次序

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I(t)] &= \mathcal{L}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^2 + a^2} d\omega\right] = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\left[\frac{\cos \omega t}{\omega^2 + a^2}\right] d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s \int_0^{+\infty} \frac{(\omega^2 + a^2) - (\omega^2 + s^2)}{(\omega^2 + a^2)(s^2 + \omega^2)(a^2 - s^2)} d\omega \\
&= \frac{s}{a^2 - s^2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\omega^2 + s^2} - \frac{1}{\omega^2 + a^2} \right] d\omega \\
&= \frac{s}{a^2 - s^2} \left[\frac{1}{s} \arctan \frac{\omega}{s} - \frac{1}{a} \arctan \frac{\omega}{a} \right]_{\omega=0}^{+\infty} \\
&= \frac{s}{a^2 - s^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a - s}{as} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{s + a}
\end{aligned}$$

得到

$$I(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\pi}{2a} \frac{1}{s + a} \right] = \frac{\pi}{2a} e^{-at}$$

2) 对初值问题 $\begin{cases} \dot{T}(t) + a^2 \omega^2 T(t) = g(t) \\ T(0) = 0 \end{cases}$ 取 $\mathcal{L}$ -氏变换, 并注意 $T(0) = 0$, 由微

分性质, 得

$$s\mathcal{L}[T(t)] + a^2 \omega^2 \mathcal{L}[T(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$$

所以

$$\mathcal{L}[T(t)] = \frac{1}{s + a^2 \omega^2} \mathcal{L}[g(t)]$$

由卷积定理得

$$T(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + a^2 \omega^2} \right] * g(t) = e^{-a^2 \omega^2 t} * g(t) = \int_0^t g(\tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$$

此即初值问题之解.

注 由 1) 可见, $f(\omega, t)$ 关于变量 t 的 $\mathcal{L}$ -氏变换存在, 则计算 $I(t) = \int_0^{+\infty} f(\omega, t) d\omega$ 时可在两端先关于变量 t 作 $\mathcal{L}$ -氏变换, 并注意假定可在积分号下对 $f(\omega, t)$ 作变换 (积分交换次序条件已超出工科数学要求, 这里不讨论), 可能积分 $\int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f(\omega, t)] d\omega$ (s 为参量) 较原积分易于计算, 则得到 $\mathcal{L}[I(t)] = \tilde{I}(s)$, 再对 $\tilde{I}(s)$ 取逆变换即得 $I(t)$; 在 2) 中所给方法更为常用, 且方程阶数可更高, (只要是线性方程), 通过取 $\mathcal{L}$ -氏变换求得微分方程解的象函数, 再取逆变换即得所求. 这部分进一步的应用将在数理方程部分进行展开.

5.3 第 5 章练习题

$$1. \text{ 设 } \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \begin{cases} 1 - \omega, & \omega \in [0, 1] \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}. \quad 1) \text{ 求 } f(t); \quad 2) \text{ 求 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi.$$

(答 1) $f(t) = \frac{2(1 - \cos t)}{\pi t^2}$ 2) 提示: 在 $\mathcal{F}_c[f(t)]$ 中令 $\omega \rightarrow 0$, 答 $\frac{\pi}{2}$)

2. 设 $f(t) = e^{-|t|} \cos t$. 1) 求 $\mathcal{F}[f(t)]$ 及 $f(t)$ 的 F- 氏积分表达式; 2) 求含参

变量积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega$ 值.

(答 1) $2 \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}$; $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega$; 2) $\frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t$)

3. $f(t) = \frac{1}{2} [\delta(t+a) + \delta(t-a) + \delta(t+\frac{a}{2}) + \delta(t-\frac{a}{2})]$. 求 $\mathcal{F}[f(t)]$.

(答 $\cos a\omega + \cos \frac{a}{2}\omega$)

4. 设 $f(t)$ 在 $[0, T]$ 上逐段连续, 且 $f(t) = f(t+T)$ ($t > 0$), 求 $\mathcal{L}[f(t)]$, 并指出其定义域.

(提示: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nST}$ 仅当 $|e^{-ST}| < 1$ 收敛. 答 $\mathcal{L}[f(t)] =$

$$\frac{1}{1 - e^{-ST}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.)$$

5. 求 $\mathcal{L}[t^2 \cos 2t]$. (答 $\frac{2s^3 - 24s}{(s^2 + 4)^3}$)

6. 求 $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} \right]$. (提示: 用卷积定理. 答 $\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\xi^2} d\xi$)

7. 求 $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s-12}{(s^2+8)(s-1)} \right]$. (答 $\cos 2\sqrt{2}t + \sqrt{2} \sin 2\sqrt{2}t - e^t$)

第 6 章 数学物理方程定解问题

6.1 泛定方程与定解条件

6.1.1 基本要求

1. 了解三类典型方程的推导方法并掌握三类典型方程的类型特征.
2. 了解定解条件的推导方法与一、二、三类边界条件的数学形式.
3. 掌握三类典型方程确定的定解问题的物理解释(即对给定的定解问题能给出对应的物理模型,对给定的具体物理问题能写出其定解问题).

6.1.2 内容提要

1. 泛定方程描述物理问题的共性,它的推导建立在所研究物理量服从的物理定律(如能量守恒定律、动量守恒定律、质量守恒定律等)基础上.推导的具体方法与主要步骤大致如下:

(1) 建立适当的坐标系,并确定所研究的物理量(未知函数) $u(M, t)$ (或 $u(M)$);

(2) 在所研究的系统内部(不能含边界)任取一微元,对其应用相应的物理定律,分析该微元与邻近部分之间的作用关系,并忽略次要因素,舍弃高阶项;

(3) 将上述分析结果化简整理,得未知函数 $u(M, t)$ (或 $u(M)$)所满足的偏微分方程(注意微元的任意性).即为泛定方程.

2. 典型泛定方程分为三类

1) 波动方程

$$\frac{\partial^2 u(M, t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta_k u(M, t) + f(M, t)$$

2) 热传导方程(扩散方程) ($k=1, 2, 3$)

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial t} = a^2 \Delta_k u(M, t) + f(M, t)$$

3) 稳恒场方程

$$\Delta_k u(M) = g(M) \quad M \in G \subset R^k (G \text{ 为 } R^k \text{ 的区域}) \quad (k=2, 3)$$

其中 $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. f, g 均为已知函数.

三类典型方程均为二阶、线性偏微分方程. 当 $f(M, t) \equiv 0, g(M) \equiv 0$ 时, 对应的方程为齐次的, 否则称为非齐次的.

3. 定解条件描述物理问题的特性(个性), 与泛定方程一起, 构成描述具体物理问题的定解问题(数学模型). 定解条件包括边界条件与初始条件.

1) 初始条件 描述与时间有关物理过程的初始状态:

(1) 波动方程需要两个初始条件: 初始位移与初始速度;

(2) 热传导方程需要一个初始条件: 初始温度分布(溶液初始浓度等);

(3) 稳恒场方程不需要初始条件, 因为稳恒场与时间无关.

2) 边界条件 描述具体物理问题的边界约束状态. 每个边界点只需一个边界条件.

(1) 本课程只涉及线性边界条件, 且仅涉及以下三类

第一类边界条件 直接给出未知函数在边界上的值

$$u(M, t) \big|_{M_0 \in \Gamma} = h(M_0, t)$$

第二类边界条件 直接给出未知函数沿边界外法线方向 n 的变化率

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial n} \bigg|_{M_0 \in \Gamma} = h(M_0, t)$$

第三类边界条件: 给出未知函数与其沿边界外法线方向变化率二者的某线性组合在边界上的值

$$\left[u(M, t) + \sigma \frac{\partial u(M, t)}{\partial n} \right]_{M_0 \in \Gamma} = h(M_0, t)$$

h 为已知函数, 当 $h \equiv 0$ 时, 对应的边界条件称为齐次的, 否则称为非齐次的. 对于无边区域不需要边界条件.

对于稳恒场情形, 上述边界条件左、右端均不含 t .

(2) 边界条件的推导方法、主要步骤与泛定方程的大致相同, 但所取微元必须含边界, 且在分析微元与邻近部分之间作用时必须分析其与系统外的介质间关系; 最后令所取微元(包含边界)趋于 0, 即得边界条件的数学表达式.

6.1.3 例题解析

6-1 有一均匀细杆, 一端固定, 另一端沿杆的轴线方向被拉长 e 而静止, 突然放手任其振动, 试推导其纵振动方程与定解条件.

解 泛定方程的推导:

1° 设杆长为 l , 建立坐标系如下: 使 OX 轴的方向沿着杆. 原点取为杆的固定端 $x=0$, 要研究杆上任一点 $x \in (0, l)$ 在任一时刻 $t > 0$ 的纵向位移函数 $u(x, t)$ 所

服从的规律.

2° 考虑杆上微元 B 段: $[x, x + \Delta x]$ (即在平衡状态端面, 横坐标为 x 与 $x + \Delta x$) 如图 6.1. 设 t 时刻 B 段端面纵向位移为 $u(x, t)$ 及 $u(x + \Delta x, t)$, (即 B 段端面横坐标为 $x + u(x, t)$ 与 $(x + \Delta x) + u(x + \Delta x, t)$), 则时刻 t , B 段端面的相对延伸率为 $u_x(x, t)$ 与 $u_x(x + \Delta x, t)$. 于是由虎克定律, B 段左边的 A 段及右边的 C 段通过端面对 B 段的作用力分别为 $-ESu_x(x, t)$ 及 $ESu_x(x + \Delta x, t)$ (该力沿轴向指向平

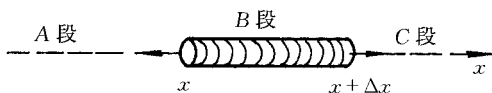


图 6.1

衡位置), 其中 E 为杨氏模量, S 为端面面积. 由牛顿第二定律, 有

$$ES[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x$$

(其中 ρ 为杆断面密度) 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}$$

3° 令 $\Delta x \rightarrow 0$ (并假定 $u(x, t)$ 具二阶连续偏导) 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

记 $\frac{E}{\rho} = a^2$. 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < l$$

这就是杆在平衡位置具有横坐标 $x \in (0, l)$ 的横截面的纵向位移量 $u(x, t)$ 所满足的微分方程. 它是一维齐次波动方程.

定解条件的推导:

1° 初始条件

由题设条件, 在 $t=0$ 时, 杆被拉长 e . 故单位长度拉长为 $\frac{e}{l}$, 由此得平衡位置

具有横坐标 x 的横截面在 $t=0$ 时的位置为 $\frac{e}{l}x$, 且初始速度为 0. 即

$$u(x, 0) = \frac{e}{l}x \quad x \in [0, l]$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad x \in [0, l]$$

2° 边界条件

由一端固定及坐标系选取法知任意时刻 $t, x=0$ 点位移为 0, 即 $u(0, t)=0$. 为考虑右端边界条件, 取微元 $[l-\Delta x, l], (0<\Delta x\ll 1)$, (即在平衡状态, 该微元的端面横坐标为 $l-x$ 与 l) 如图 6.2.

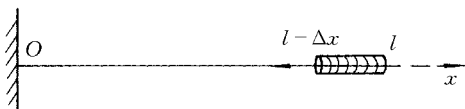


图 6.2

设 t 时刻 ($t>0$), 其端面纵向位移为 $u(l-\Delta x, t), u(l, t)$. 则时刻 t , 其端面相对延伸率为 $u_x(l-\Delta x, t), u_x(l, t)$. 由题设及虎克定律, 该微元仅受位于它左边杆的部分之作用力

$$F = -ESu_x(l-\Delta x, t)$$

由牛顿第二定律, 有

$$-ESu_x(l-\Delta x, t) = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 得 $u_x(l, t)=0$, 这就是右端的边界条件, 即自由端的数学形式.

由此可得, 对应于所论杆的纵振动的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{e}{l}x, & x \in [0, l] \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

注 方程与边界条件的推导中, 都是对所取微元进行运动方向受力分析, 并用牛顿第二定律(动量守恒定律), 最后令 $\Delta x \rightarrow 0$. 注意泛定方程推导中, 限定 $x \in (0, l), t > 0$, 即不包括边界与初始时刻, 故定解问题中方程成立范围为 $x \in (0, l), t > 0$.

6-2 设某溶质在均匀且各向同性的溶液中扩散, t 时刻它在溶液中点 (x, y, z) 处的浓度为 $N(x, y, z, t)$. 已知溶质在单位时间流过曲面 S 上单位面元的质量 m 服从 Nernst 定律: $m = -D \operatorname{grad} N \cdot n$. 其中 D 为扩散系数, n 为 S 的外法矢. 试推导 $N(x, y, z, t)$ 满足的微分方程.

解 建立适当坐标系, 设溶液充满区域 $G \subset R^3$, 点 $M \in G$ 具坐标 (x, y, z) , 在

G 内任取一体积微元 $V \subset G$, 设其界面为封闭曲面 S , 分析 V 内外溶质质量的关系: 设任意时刻 $t > 0$, V 内任一点 (x, y, z) 的浓度为 $N(x, y, z, t)$, 由 Nernst 定律, 在时段 $[t, t+dt]$ 内, 通过界面 S 的面积微元 ds 从 V 内流出的溶质质量为

$$dm = -D \text{grad} N \cdot n ds dt = -D \text{grad} N \cdot ds dt$$

($ds = n ds$). 由溶液为均匀且各向同性知, D 为常数. 于是, 在任意时段 $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$ 内, 通过 V 的界面 S 流入 V 的溶质质量应为

$$m_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_S D \text{grad} N \cdot dS = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V D \text{div grad} N dV \quad (\text{奥-高公式})$$

同时, V 内任一点 (x, y, z) 处的浓度由 t_1 时刻的 $N(x, y, z, t_1)$ 增至 t_2 时刻的 $N(x, y, z, t_2)$, 因此, V 内所含溶质质量在时段 $[t_1, t_2]$ 内的增量为

$$\begin{aligned} m_2 &= \iiint_V \rho [N(x, y, z, t_2) - N(x, y, z, t_1)] dV = \iiint_V dV \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{\partial N}{\partial t} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \rho \frac{\partial N(x, y, z, t)}{\partial t} dV \quad (\text{假定可交换积分次序}) \end{aligned}$$

其中 ρ 为溶液的体密度, 当溶液均匀时, ρ 为常数.

由质量守恒定律得 $m_1 = m_2$

$$\text{即} \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V D \text{div grad} N dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \rho \frac{\partial N}{\partial t} dV$$

由 $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$ 的任意性及 $V \subset G$ 的任意性, 并假定 $N(x, y, z, t)$ 具二阶连续编导, 则得

$$\rho \frac{\partial N}{\partial t} = D \text{div grad} N = D \Delta_3 N \quad (\Delta_3 \text{ 为三维 Laplace 算子})$$

令 $\frac{D}{\rho} = a^2$. 即得浓度函数 $N(x, y, z, t)$ 满足的微分方程

$$\frac{\partial N}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right) = a^2 \Delta_3 N \quad (x, y, z) \in G$$

这就是溶质在均匀且各向同性溶液中扩散时, 其浓度函数所满足的方程, 这是一三维热传导方程, 也称为三维扩散方程.

注 1. 在此方程的推导中, 对所取微元进行溶质质量变化分析, 并用质量守恒定律, 注意此时得到的是积分形式, 又由时段 $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$ 及微元 $V \subset G$ 的任意性, 被积式的连续性, 即得到所求微分方程;

2. 推导中用到奥-高公式的矢量形式;

3. Nernst 定律 $dm = -D \text{grad} N \cdot n ds dt$ 中的负号表明溶质流向与溶液浓

度 $N(x, y, z, t)$ 的梯度反向, 即由高浓度向低浓度扩散.

6-3 设长为 l 的均匀细直杆的侧面与外界无热交换, 开始时, 杆上同一截面具同一温度. 且一端有一稳恒热流注入, 另一端在零度的介质中自由冷却, 试推导杆的传热方程及定解条件.

解 注意到杆上同一横截面上具同一温度. 故可取轴线上各点的温度代表其所在截面上各点的温度. 于是, 问题为一维传热问题.

1° 取 OX 轴沿杆的轴线, 杆的左端点取为坐标原点, 则另一端坐标为 $x=l$. 要求杆上任一点 $x \in (0, l)$ 在任一时刻 $t > 0$ 的温度 $u(x, t)$ 满足的方程.

2° 在杆上任取微元 $B: [x, x + \Delta x] \subset (0, l)$, (且 $0 < \Delta x \ll 1$) (即微元 B 的端面横坐标为 x 及 $x + \Delta x$), 分析微元 B 段与其相邻的 A 段, C 段热量间的关系:

由 Fourier 热力学定律, 在单位时间内, 沿 B 之端面外法线方向通过 B 端面单位面积元的热量分别为 ($m_{\text{左}}, m_{\text{右}}$ 分别表左、右端面通过热量)

$$m_{\text{左}} = -k \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}(x) = -k \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_x$$

$$m_{\text{右}} = -k \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}(x + \Delta x) = -k \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x+\Delta x}$$

注意 $\mathbf{n}(x)$ 与 OX 轴反向, $\mathbf{n}(x + \Delta x)$ 与 OX 轴同向, k 为内导热系数, 当杆均匀且各向同性时, k 为常数.

故
$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_x = - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x+\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

则
$$m_{\text{左}} = -k \left(\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_x \right) = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$m_{\text{右}} = -k \left(\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x+\Delta x} \right) = -k \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}$$

于是 dt 时段内通过 B 的两端面流入微元 B 的热量

$$dm_1 = -(m_{\text{左}} + m_{\text{右}}) S dt = k \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) S dt$$

(由于杆为均匀直杆, 故任一横断面面积相等, 记为 S) 设 $u(x, t)$ 具二阶连续偏导, 则可有

$$dm_1 = k \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] S dt = k \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx \cdot S dt$$

在任意时段 $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$ 内, 通过 B 的两端面流入微元 B 内的热量为

$$m_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_x^{x+\Delta x} S k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx$$

同时,在此时段内, B 段内各点温度由 $u(x, t_1)$ 升高为 $u(x, t_2)$. 为此所需热量为

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho S[u(x, t_2) - u(x, t_1)]dx = m_2$$

其中 c 为杆的比热, 当杆为均匀且各向同性时, c 为常数, ρ 为截面面密度. 由于假定 $u(x, t)$ 具二阶连续偏导, 故可有

$$m_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$$

3° 由能量守恒得: $m_1 = m_2$. 即

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_x^{x+\Delta x} Sk \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

由 $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$ 与 $[x, x+\Delta x] \subset (0, l)$ 的任意性及被积式的连续性得

$$Sk \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\rho S \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{即} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令 $\frac{k}{c\rho} = a^2$. 得

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad x \in (0, l), t > 0$$

此即温度函数 $u(x, t)$ 所满足的微分方程. 这是一维热传导方程(齐次).

下边推导定解条件

1° 初始条件 由题设, 杆的初始温度已知, 故可将各横截面温度表为其横坐标 x 的已知函数, 设为 $\varphi(x)$.

即得 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]$

2° 边界条件 由题设, 现假定左端有一稳恒热流注入, 右端在零度的介质中自由冷却, 来导出各自的数学表达形式.

首先注意, 稳恒热流即不为依时间而变的热流. 设单位时间通过 $x=0$ 端面单位面积进入杆的热量为 q . 则由 Fourier 热力学定律

$$-[-k \operatorname{grad} u \cdot n(0)] = q \quad \text{即} \quad k \operatorname{grad} u \cdot n(0) = q$$

注意 $n(0)$ 与 OX 轴反向, 故有

$$k \operatorname{grad} u \cdot n(0) = k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=0} = -k \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = q$$

即 $-k \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = q$ 为左端边界条件, 这是第二类非齐次边界条件;

对右端, 设其端面在 t 时刻温度为 $u(l, t)$, 由不同介质间热交换的牛顿冷却定律, 在单位时段内通过杆右端面单位面积散失到介质中的热量与它们的温差成正比

比: $Q_1 = h[u(l, t) - \theta]$. θ 为介质的温度, 由题设 $\theta = 0$, 所以 $Q_1 = hu(l, t)$, h 为杆对介质的外导热系数. 由热量守恒知杆通过右端界面散失到介质中的热量恰为同一单位时段内由杆内传到端面的热量

$$Q_2 = -k \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}(l) = -k \frac{\partial u(l, t)}{\partial n} = -k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}$$

即
$$Q_1 = Q_2: hu(l, t) = -k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}$$

所以
$$k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + hu(l, t) = 0$$

或写为
$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \sigma u(l, t) = 0 \quad (\sigma = \frac{h}{k})$$

这就是右端在零度介质中自由冷却的数学描述形式, 为第三类齐次边界条件.

综上所述, 可得所论杆的热传导定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l] \\ -k \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = q, & \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \sigma u(l, t) = 0, & (\sigma = \frac{h}{k}) \end{cases} \quad t \geq 0$$

注 1. 方程推导中对所取微元进行热量变化分析, 应用到 Fourier 热力学实验定律, 之后应用能量守恒定律. 得到的是积分形式, 又由 $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty)$ 及 $[x, x + \Delta x] \subset (0, l)$ 的任意性, 被积式的连续性, 即得微分方程.

2. 在一维问题中, 要注意两端之外法线方向实际上平行于 OX 轴方向, 故左端的与 OX 轴反向, 右端的即 OX 轴方向, 这点在推导本题边界条件与方程时都用到了.

3. Fourier 热力学实验定律 $d\theta = -k \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n} ds dt$ 中的负号表明热流方向与温度梯度方向相反, 即热流由高温流向低温. 热力学中称矢量 $\mathbf{g} = -k \operatorname{grad} u$ 为热流密度矢量 (k 为导热系数) 其方向与温度梯度反向.

4. 本例中无热源, 所得方程为齐次的, 若有热源 (例如某放热或吸热化学反应杆) 则得到非齐次方程.

5. 本例中介质温度为零度, 若在温度为 $\theta \neq 0$ 的介质中自由冷却, 得到的将是第三类非齐次边界条件.

6. 在自由冷却条件 $k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + hu(l, t) = 0$ 中, 若 $h \gg k$, 即在边界上与介质热交换能力远远大于内导热能力, 则条件近似于 $u(l, t) = 0$. 即边界具介质温度

(当介质为 $\theta \neq 0$ 度时有 $u(l, t) = \theta$); 当 $k \gg h$ 时, 即内导热能力远远大于边界与介质热交换能力, 则有 $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$, 即绝热条件. 可见, 第一类、二类边界条件是第三类边界条件的特例.

6-4 设有单位质点置于点 Q 处, 物体 V 的质量体密度为连续函数 $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, 试推导 Q 点处单位质点对 V 的万有引力势函数所满足的方程(Q 点在 V 外).

解 建立坐标系, 设 Q 点坐标为 (x, y, z) , V 内任一点坐标为 (ξ, η, ζ) . $u(x, y, z)$ 为质量体 V 受单位质点引力势函数.

在 V 内任取一微元 dV , 其质量为 $\rho(\xi, \eta, \zeta)dV$. ((ξ, η, ζ) 为 dV 内任一点, 见图 6.3). 则由牛顿万有引力定律, 该微元与单位质点间的引力为

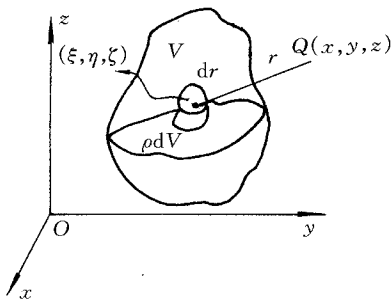


图 6.3

$$dF = \frac{G\rho}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dV = \left(\frac{G\rho}{r^3}(x-\xi), \frac{G\rho}{r^3}(y-\eta), \frac{G\rho}{r^3}(z-\zeta) \right)$$

其中 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ 为微元 dV 到点 $Q(x, y, z)$ 的距离, G 为引力常数.

于是, 质量体与单位质点间的引力为 $F(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$, 其中各分量为

$$F_x(x, y, z) = \iiint_V G\rho(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{(x-\xi)}{r^3} dV$$

$$F_y(x, y, z) = \iiint_V G\rho(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{(y-\eta)}{r^3} dV$$

$$F_z(x, y, z) = \iiint_V G\rho(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{(z-\zeta)}{r^3} dV$$

(积分变量为 ξ, η, ζ)

由 Q 点位于 V 之外可知, F_x, F_y, F_z 均为含参变量 x, y, z 的常义积分.

在积分号下求偏导, 易得: $\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \equiv 0$. (可见, 万有引力场是一管形场)

另一方面, 由物理学知识知, 微元 dV 与单位质点的引力势为 $du = -\frac{G\rho}{r} dV$. 于是单位质点对质量体 V 的引力势函数为

$$u(x, y, z) = \iiint_V -\frac{G\rho}{r} dV.$$

此势函数也是一含参变量 x, y, z 的常义积分. 为求其满足的方程,

注意
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \iiint_V G\rho(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{(x-\xi)}{r^3} dV = F_x(x, y, z)$$

同理
$$\frac{\partial u}{\partial y} = F_y(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = F_z(x, y, z)$$

即
$$\operatorname{gradu}(x, y, z) = F(x, y, z)$$

由此可见, 万有引力场还是一梯度场. 于是有

$$\operatorname{div} \operatorname{gradu}(x, y, z) = \operatorname{div} F(x, y, z) \equiv 0$$

$\therefore u(x, y, z)$ 满足二阶、线性、齐次定常偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta_3 u = 0$$

(Δ_3 为三维 Laplace 算子) 此即三维 Laplace 方程.

注 1. 此方程的推导中, 在 V 中任取一微元, 视其质量集中于其内一点 (ξ, η, ζ) , 即视 dV 为一质量为 $\rho(\xi, \eta, \zeta)dV$ 的质点, 然后在其与单位质点构成的系统中应用牛顿万有引力定律, 之后用三重(常义)积分得到总引力、总引力势.

为得到引力势函数满足的方程, 充分运用了物理知识:

牛顿引力场为管形场, 且为梯度场. 本例中涉及到的物理知识较多, 且有一些场论的初步知识. 此例可作为导出三维 Laplace 方程的典型例子.

2. 当 Q 在 V 内时, 推导将涉及三重含参量广义积分, 此略.

6-5 设长为 l 的均匀细弦作微小横振动, 其两端束缚在与弦平衡位置垂直的弹簧上, 弹性系数分别为 k_0 与 k_l . 试推导两端边界条件的数学表达式.

解 考虑微元弦段 $[0, \Delta x]$, 设任意时刻此段弧被张力 T 拉伸, (当弦为均匀时, T 为常数), $x=0$ 端位移为 $u(0, t)$, 其方向与 Ou 同向, 因此产生的弹簧恢复力与 Ou 反向且 $F_0 = -k_0 u(0, t)$ (虎克定律) 注意此时弧段 $[0, \Delta x]$ 为 x 的增长曲线(见图 6.4(a)), 故有 $\frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} > 0$, 于是张力 T 在 Ou 方向投影为 $T \sin \alpha(\Delta x, t)$.

由于弦作微小横振动, 所以 $\sin \alpha \sim \tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, 应用牛顿第二定律得

$$T \sin \alpha(\Delta x, t) + F_0 = T \frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} - k_0 u(0, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x \quad (\rho \text{ 为线密度})$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 并假定 $u(x, t)$ 具二阶连续偏导, 得

$$T \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} - k_0 u(0, t) = 0$$

当 $x=0$ 端处于受压状态时(见图 6.4(b)), 注意此时 $\frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} < 0$, 张力在 ou

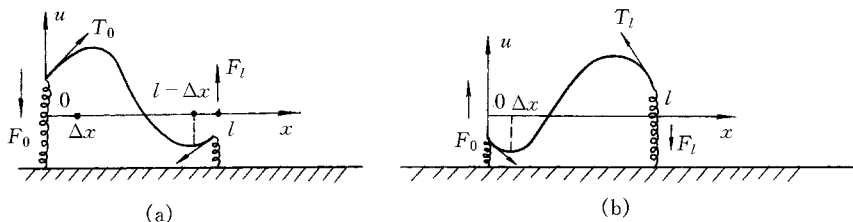


图 6.4

方向投影仍为 $T \sin \alpha(\Delta x, t) = T \frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x}$, 且此时 $x=0$ 端位移 $u(0, t)$ 与 ou 反向, 故恢复力 F_0 与 ou 同向: $F_0 = -k_0 u(0, t)$ 于是仍有

$$T \sin \alpha(\Delta x, t) + F_0 = T \frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} - k_0 u(0, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 仍有 $T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - k_0 u(0, t) = 0$

对 $x=l$ 端, 考虑微元 $[l-\Delta x, l]$ 受力情况: 当弹簧处于受压状态时(图 6.4(a)), 位移 $u(l, t)$ 与 ou 反向, 弹簧恢复力 F_l 与 ou 同向, 故有 $F_l = -k_l u(l, t)$, 且此时弧段 $[l-\Delta x, l]$ 关于 x 单调增, 故

$$\sin \alpha(l-\Delta x, t) \sim \tan \alpha(l-\Delta x, t) = \frac{\partial u(l-\Delta x, t)}{\partial x} > 0$$

$\therefore$ 张力 T 在 ou 方向投影为 $-T \frac{\partial u(l-\Delta x, t)}{\partial x}$, 于是应用牛顿第二定律, 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 有

$$T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + k_l u(l, t) = 0$$

同理, 当 $x=l$ 端处于拉伸状态时(图 6.4(b)), 有 $\frac{\partial u(l-\Delta x, t)}{\partial x} < 0$. 张力 T 在 ou 方向投影仍为 $-T \frac{\partial u(l-\Delta x, t)}{\partial x}$, 位移 $u(l, t)$ 与 ou 同向, 回复力 F_l 与 ou 反向: $F_l = -k_l u(l, t)$. 于是应用牛顿第二定律(令 $\Delta x \rightarrow 0$), 仍有 $T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + k_l u(l, t) = 0$.

综上所述, 在题设条件下, 弹性支承的左端与右端边界条件数学形式分别为

$$T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - k_0 u(0, t) = 0$$

$$T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + k_l u(l, t) = 0$$

这是第三类齐次边界条件.

注 1. 在推导过程中,选取微元必须包含端点.

2. 对微元受力情况进行分析时除用到牛顿第二定律,还要注意应用虎克定律.

3. 在所得条件中(例如左端),如果成立条件 $k_0 \gg T$ (即弹簧很硬,其弹性系数远远大于弦之张力),则左端边界条件可近似为 $k_0 u(0, t) = 0$. 即 $u(0, t) = 0$, 相当于 $x=0$ 端固定.

反之,若有 $k_0 \ll T$, (即弹簧很软,其回复系数远远小于弦的张力),则有

$$T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$$

即 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$, 这相当于自由端,由此可见,固定端与自由端条件可视为弹性支承的两特殊情形.

6-6 设长为 l 的均匀细弦两端固定,初始位移为 0,开始时,在 $x=c$ 处受到冲量 k ,写出定解问题.

解 泛定方程为波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (0, l), t > 0$$

由边界固定知

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

由初始位移为零知

$$u(x, 0) = 0$$

由开始时在 $x=c$ 处受到冲量 k 知,对足够小的 $\epsilon > 0$,弦段 $[c-\epsilon, c+\epsilon]$ 上的动量改变量即为冲量 k ,即有

$$2\epsilon\rho \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = k, \quad x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$$

其中 ρ 为弦的线密度,均匀弦的 ρ 为常数. 由此得

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} \frac{k}{2\epsilon\rho}, & x \in [c-\epsilon, c+\epsilon] \\ 0, & x \in [0, l]/[c-\epsilon, c+\epsilon] \end{cases} \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

于是,对应的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} \frac{k}{2\epsilon\rho}, & x \in [c-\epsilon, c+\epsilon] \\ 0, & x \in [0, l]/[c-\epsilon, c+\epsilon] \end{cases} & \epsilon \rightarrow 0 \end{cases}$$

注 1. 这里用到冲量的物理概念.

2. 结果也可表为 δ -函数: $u_t(x, 0) = \frac{k}{\rho} \delta(x - c)$.

6-7 试给出一个由下列定解问题描述的物理模型:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \\ u|_{\sqrt{x^2+y^2}=a} = \theta_1 & a < \sqrt{x^2+y^2} < b \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=b} = 0 \end{cases} \\
 2) \quad & \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + f(x, y), & t > 0, a < \sqrt{x^2+y^2} < b \\ u \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=a} = u_1(t), & t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=b} = 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & a < \sqrt{x^2+y^2} < b \end{cases}
 \end{aligned}$$

解 1) 注意泛定方程是二维非齐次 Laplace 方程(也称为 Poisson 方程),且区域为圆环域. 故该定解问题描述圆环域 $a < \sqrt{x^2+y^2} < b$ 内稳恒热场的温度分布规律,该热场具稳恒热源,在内边界上保持 θ_1 度,在外边界上绝热.

2) 泛定方程为二维热传导方程,区域为圆环域. 它描述圆环域 $a < \sqrt{x^2+y^2} < b$ 内热传导过程,该热场具稳恒热源,初始温度分布已知,内边界温度(随时间变化)已知,外边界绝热.

注 1. 这种问题的解决分两部分:第一部分,注意泛定方程的类型,以此确定物理问题的共性;第二部分,注意定解条件,特别是边界约束,以此确定物理问题的个性(特性). 即从方程(包括非齐次项在内)到定解条件的每个等式,均要给出恰当的物理解释.

2. 本题中,1)与2)均为圆环域 $a < \sqrt{x^2+y^2} < b$ 内的热过程,但1)描述达到稳态时的温度分布规律,2)描述未达到稳态时的热传导过程,故后者与初始状态有关. 前者与初始状态无关(与时间无关).

3. 在实际求解过程中,上述两问题均应采用极坐标,使边界条件表达更为简便.

6-8 写出描述下面物理模型的定解问题.

设一圆膜边界固定,周围介质阻力可忽略不计,且该膜初始偏移与速度均为径向对称分布,试给出描述由这种初始状态引起的膜的微小横振动的定解问题.

解 首先注意膜作无阻尼微小横振动,且此振动完全由径向对称分布(即与角度无关)的初始状态引起,故膜上各点任一时刻位移应与角度无关,即也应是径向对称分布的,故设 $u(r,t)$ 为膜上半径为 r 的点在时刻 t 的位移函数,则对应的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & R < r \leq 0, \quad t > 0 \\ u(R,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(r,0) = \varphi(r), \\ u_r(r,0) = \psi(r), & 0 < r < R \end{cases}$$

注 1. 对给定的物理问题要先确定其共性,由此确定泛定方程的类型.之后分析物理问题的特性,即边界约束情况、初始状态,以此确定定解条件.

2. 本题中要注意初始条件为径向对称分布这一条件,意味着初始条件只依赖于圆膜上点到圆心的距离 r ,与角度无关,从而位移与角度无关,使方程表达简化;另外,这里注意区域为圆域,故采用极坐标系.

6.2 第 6 章练习题

1. 有一长为 l 的均匀细杆,侧面与外界无热交换.杆内有强度随时间连续变化的热源,设在同一截面上具同一热源强度及初始温度,且杆的一端保持零度,另一端绝热,试推导定解问题.

$$(\text{答}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x \in (0,l), t > 0 \\ u(0,t) = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l] \end{cases}$$

2. 有一长为 l 的均匀细弦,一端固定,另一端为弹性支承,设弦上各点受有垂直于平衡位置的外力,外力线密度已知,开始时,弦 $\frac{l}{2}$ 处受到冲量 I 作用,试写出其定解问题.

$$(\text{答}) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & x \in (0,l), t > 0 \\ u(0,t) = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - \frac{l}{2}) & x \in [0,l] \end{cases}$$

3. 设有高为 h , 半径为 R 的圆柱体, 圆柱体内有稳恒热源, 且上、下底面温度已知, 圆柱侧面绝热, 写出描述稳恒热场分布的定解问题.

(答

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r, \theta, z) & r \in [0, R), \theta \in [0, 2\pi), z \in (0, h) \\ u|_{z=0} = A, \quad u|_{z=h} = B \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

4. 设有定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (-\infty, +\infty), t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

试给出其对应的物理模型.

(答 该定解问题描述无界弦在初始扰动下的波动规律.)

5. 设有定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x < a, 0 < y < b; t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y), & 0 < x < a, 0 < y < b \end{cases}$$

给出与其对应的物理模型.

(答 边界固定的矩形膜的自由振动, 其初始位移与初始速度已知.)

6. 设有定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 \leq r < R, 0 < \theta < \alpha \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\alpha} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = B, & \theta \in [0, \alpha] \end{cases}$$

(答 扇形区域 $0 \leq r < R, 0 < \theta < \alpha$ 的稳恒热场分布, 场内无热源, 其边界 $\theta = 0, \theta = \alpha$ 上保持零度. 边界 $r = R$ 上有稳恒热流注入.)

7. 设有定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right), & 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = f(r, \theta), & 0 \leq r < R, \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

给出其描述的物理模型.

(答 描述半径为 R 的圆域内热传导过程, 初始温度分布已知, 边界绝热).

第7章 分离变量法(Fourier 级数法)

7.1 齐次边界与齐次方程

7.1.1 基本要求

1. 掌握分离变量法的适用范围及解题步骤.
2. 掌握齐次一维波动方程与热传导方程在各类齐次边界条件下对应的固有值问题、固有值、固有函数系及形式解的结构(以第一、二类边界条件为主).
3. 掌握圆域、圆环域、扇形域、部分圆环域及矩形区域上 Laplace 方程边值问题的固有值问题、固有值、固有函数系及形式解结构.

7.1.2 内容提要

1. 分离变量法(Fourier 级数法)的实质即为将时间变量(在稳恒方程中为部分空间变量)视为参变量、将解展为空间变量(稳恒方程中为某一空间变量)的 Fourier 级数,或者说将解按固有函数系展开,展式中每项为变量分离形式;此法适用于满足下述条件的定解问题:

1) 方程与边界条件为线性的; 2) 边界条件为齐次的(圆域、圆环域例外); 3) 区域为有界的, 规则的(即区域边界易于由简单方程表出).

泛定方程	边界条件	固有值问题	固有值	固有函数系
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $x \in (0, l)$ $t > 0$ 或 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $x \in (0, l)$ $t > 0$	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 > 0$ $n = 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$ $n = 1, 2, \dots$
	$u(0, t) = 0$ $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2 > 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2l}\pi x$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$ $u(l, t) = 0$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X(l) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2 > 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2l}\pi x$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \geq 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x$ $n = 0, 1, 2, \dots$

2. $[0, l]$ 上一维波动方程、热传导方程对应的固有值问题、固有值、固有函数系(第一、二类边界条件):

3. 二维 Laplace 方程边值问题的固有值问题, 固有值、固有函数系:

区 域	边界条件	固有值问题	固有值	固有函数系
$0 < r < R$ $0 < \theta < \alpha$	$u _{\theta=0} = u _{\theta=\alpha} = 0$ $u _{r=R} = f(\theta)$	$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = (\frac{n\pi}{\alpha})^2 > 0$ $n = 1, 2, \dots$	$\Phi_n(\theta) = \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta$ $n = 1, 2, \dots$
$R_1 < r < R_2$ $0 < \theta < \alpha$	$u _{\theta=0} = u _{\theta=\alpha} = 0$ $u _{r=R_1} = f_1(\theta)$ $u _{r=R_2} = f_2(\theta)$	$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = (\frac{n\pi}{\alpha})^2 > 0$ $n = 1, 2, \dots$	$\Phi_n(\theta) = \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta$ $n = 1, 2, \dots$
$0 \leq \theta < 2\pi$ $0 \leq r < R$	$u _{r=R} = f(\theta)$ $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$	$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta) \end{cases}$	$\lambda_n = n^2 \geq 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\{\Phi_n(\theta)\}$ $= \{1, \cos n\theta, \sin n\theta\}_{n=0}^{\infty}$
$0 \leq \theta < 2\pi$ $R_1 < r < R_2$	$u _{r=R_1} = f_1(\theta)$ $u _{r=R_2} = f_2(\theta)$ $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$	$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta) \end{cases}$	$\lambda_n = n^2 \geq 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\{\Phi_n(\theta)\}$ $= \{1, \cos n\theta, \sin n\theta\}_{n=0}^{\infty}$
$0 < x < a$ $0 < y < b$	$u(0, y) = u(a, y) = 0$ $u(x, 0) = \varphi(x)$ $u(x, b) = \psi(x)$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2 > 0$ $n = 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x$ $n = 1, 2, \dots$
	$u(0, y) = \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = 0$ $u(x, 0) = \varphi(x)$ $u(x, b) = \psi(x)$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = (\frac{2n+1}{2a}\pi)^2 > 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2a}\pi x$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0$ $u(x, 0) = \varphi(x)$ $u(x, b) = \psi(x)$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = (\frac{2n+1}{2a}\pi)^2 > 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2a}\pi x$ $n = 0, 1, 2, \dots$
	$u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0$ $u(x, 0) = \varphi(x)$ $u(x, b) = \psi(x)$	$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$	$\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2 \geq 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{a}x$ $n = 0, 1, 2, \dots$
注: 1. 固有值问题由一组齐次边界条件确定, 与另一组边界条件无关; 2. 上述两组边界条件可对调位置.				

7.1.3 例题解析

7-1 用分离变量法解定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = A \sin \frac{5\pi}{l} x, & x \in (0, l) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = A \sin \frac{5\pi}{l} x, \quad x \in (0, l) \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (4)$$

解 解法一 令

$$u(x, t) = T(t)X(x) \quad (5)$$

将(5)式代入(1)得 $T(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$

$$\text{即} \quad \frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \stackrel{\text{令}}{=} -\lambda$$

并将(5)代入(2)得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (7)$$

$$\text{及} \quad \ddot{T}(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (8)$$

解(6)–(7),即求使(6)–(7)具非零解的 λ 值及对应的非零解.

当 $\lambda \leq 0$ 时,无非0解,当 $\lambda > 0$ 时,解得

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots; \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

此即对应于定解问题(1)–(4)的固有值、固有函数系.将 λ_n 代入(8),得

$$\ddot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{其通解为} \quad T_n(t) = C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{由此即得(5)为} \quad u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

迭加之,得形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (9)$$

为确定 C_n, D_n ,令(9)满足(3)、(4),得

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) = A \sin \frac{5\pi}{l} x \quad (10)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \equiv 0 \quad (11)$$

由 Fourier 展式的唯一性知

$$C_n = \begin{cases} A, & n = 5 \\ 0, & n \neq 5 \end{cases} \quad (12)$$

$$D_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

将(12), (13)代入(9)得

$$u(x, t) = A \cos \frac{5a\pi}{l} t \sin \frac{5\pi}{l} x, \quad x \in (0, l), t > 0$$

解法二 由于分离变量的实质是将解关于固有函数系展开(Fourier 级数), 且注意到边界条件为第一类齐次的, 故该问题对应的固有值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

固有值为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

固有函数系为

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (5)$$

将(5)式代入(1)得 $T_n(t)$ 满足的方程

$$\ddot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = 0 \quad (6)$$

令(5)满足(3)–(4)得 $T_n(t)$ 满足

$$T_n(0) = \varphi_n \quad (7)$$

$$\dot{T}_n(0) = \psi_n \quad (8)$$

这里 φ_n, ψ_n 为 $u(x, 0) = \varphi(x)$ 与 $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 关于固有函数系 $\{X_n(x)\}_1^\infty$ 展开式的系数

$$\varphi(x) = A \sin \frac{5\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\psi(x) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

由 Fourier 展式唯一性, 得

$$\varphi_n = \begin{cases} A, & n = 5 \\ 0, & n \neq 5 \end{cases}, \quad \psi_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

代入(7), (8), 并与(6)联立得

$$\begin{cases} \ddot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} T_n(0) = \begin{cases} A, & n = 5 \\ 0, & n \neq 5 \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{T}_n(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

$$T_n(t) = 0, \quad n \neq 5$$

解之得

$$T_5(t) = A \cos \frac{5a\pi}{l} t$$

于是

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = \begin{cases} A \cos \frac{5a\pi}{l} t \sin \frac{5\pi}{l} x, & n = 5 \\ 0, & n \neq 5 \end{cases}$$

$$\therefore u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = T_5(t) X_5(x) = A \cos \frac{5a\pi}{l} t \sin \frac{5\pi}{l} x$$

注 1. 解法一是按分离变量法的步骤做的. 由此步骤中可以看出, 仅当边界条件为齐次的才可推得(7)成立, 从而与(6)联立得到固有值问题. 称(6)–(7)的非0解为固有函数, 使(6)–(7)有非0解的 λ 值为固有值. (关于固有值问题的有关结论, 在一般数理方程教材中均可找到, 此处不再介绍.)

2. 由分离变量得到 $u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x)$ 后, 进行叠加, 得到形式解 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, 这种做法的合理性在于方程与边界条件的线性及齐次性, 从而叠加原理成立. 这正是线性问题的特征;

3. 解法一中, 由初始条件得到(10), (11). 一般情况下, 应将 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 关于固有函数系展开

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x)$$

分别代入(10), (11), 由 Fourier 级数展式的唯一性, 对比两端同阶项系数, 可得

$$\begin{cases} C_n = \varphi_n \\ D_n = \frac{l}{an\pi} \psi_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在本例中, 似乎没有上述过程, 其实这是因为题中所给的 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 已经是固有函数系 $\{\sin \frac{n\pi}{l} x\}_{n=1}^{\infty}$ 的展开形式, 其中

$$\varphi_n = \begin{cases} A, & n = 5 \\ 0, & n \neq 5 \end{cases} \quad \psi_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. 解法二从分离度量法的实质出发, 并注意到边界条件为第一类齐次的, 即可得到由它决定的固有值问题. 固有值及固有函数系, 从而令形式解为 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, 并将此形式解代入泛定方程及初始条件, 便得到 $T_n(t)$ 满足的常微分方程初值问题(6)–(8). 当然, 也必须将 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 关于固有函数系展开. 解法二与解法一比较, 省略了分离变量法的一些中间过程. 但重要的是解法二适用于方程为非齐次的情形.

5. 由解法一可以看出, 固有值问题只与泛定方程中未知函数对空间变量的

导数及齐次边界条件的类型有关,而与未知函数关于时间变量的导数无关,故当泛定方程换为热传导方程、边界条件不变时,固有值问题、固有值、固有函数系均不会变.

7-2 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u_x(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l] \end{cases} \quad (4)$$

解 解法一 用分离变量法解, 令

$$u(x, t) = T(t)X(x) \quad (5)$$

将(5)代入(1), (2), 得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} X(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

及

$$\ddot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (8)$$

解(6)–(7)得

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l} \pi \right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x$$

将 λ_n 代入(8)解得

$$T_n = C_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi a t + D_n \frac{2n+1}{2l} \pi a t \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\therefore u_n(x, t) = T_n(t)X(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

叠加得

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi a t + D_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi a t \right] \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \quad (9)$$

令(9)满足(3), (4)得

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \quad (10)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{2n+1}{2l} \pi a \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \quad (11)$$

由 Fourier 级数展式唯一性知, C_n 与 D_n 分别为 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 关于 $\left\{ \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \right\}_{n=0}^{\infty}$ 的展开式系数.

$$\therefore C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{2l}{(2n+1)\pi a} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx \\ &= \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

所以,带有系数(12)~(13)的(9)即为定解问题(1)~(4)的形式解.

解法二 注意边界条件的类型及齐次性,可知其对应的固有值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

解之得固有值为

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2$$

固有函数系为

$$X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

故可设(1)~(4)的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \quad (7)$$

将(7)代入(1),并令其满足(3)~(4),得

$$\begin{cases} \ddot{T}_n(t) + \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2 a^2 T_n(t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{T}_n(0) = \psi_n \end{cases} \quad (10)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

其中

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

解(8)~(10)得

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi a t + \frac{2l}{(2n+1)\pi a} \psi_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi a t \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

将(13)代入(7)得

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi a t + \frac{2l}{(2n+1)\pi a} \psi_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi a t \right] \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \quad (14)$$

带有系数(11)~(12)的形式解(14)即为所求。

注 与 7-1 题相比,这里边界条件一端为第一类,一端为第二类,所以固有值问题、固有值、固有函数系均发生了变化。

7-3 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, l) \end{cases} \quad (3)$$

解 解法一

$$\text{令} \quad u(x, t) = T(t)X(x) \quad (4)$$

将(4)代入(1),(2)分离变量得

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{及} \quad \dot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (7)$$

解(5)~(6)得固有值

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{固有函数系} \quad X_n = \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

将 λ_n 代入(7)解得

$$T_0(t) = C_0 = \frac{C_0}{2}, \quad T_n(t) = C_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \quad n = 1, 2, \dots$$

所以,(1)~(3)的形式解为

$$u(x, t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (8)$$

令(8)满足(3)得

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (9)$$

(9)即为 $\varphi(x)$ 在 $[0, l]$ 上的 Fourier 余弦展式。

$$C_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) dx \quad (10)$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11)$$

带有系数(10)~(11)的(8)即为所求.

解法二 注意两端均为第二类齐次边界条件,故解 $u(x,t)$ 可按固有函数系

$\{1, \cos \frac{n\pi}{l} x\}_{n=1}^{\infty}$ 展为

$$u(x,t) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (4)$$

令(4)满足(1),(3),得

$$\frac{\dot{T}_0(t)}{2} + \sum_0^{\infty} [\dot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t)] \cos \frac{n\pi}{l} x = 0 \quad (5)$$

$$\frac{T_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \quad (6)$$

由 Fourier 展式唯一性得

$$\begin{cases} \dot{T}_0(t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} T_0(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) dx = \varphi_0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} T_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \varphi_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (10)$$

解(7)~(8)及(9)~(10)得

$$\begin{cases} T_0(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) dx = \varphi_0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} T_n(t) = T_n(0) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} = \varphi_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \end{cases} \quad (12)$$

将(11),(12)代入(4)得

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{n\pi}{l} x$$

注 1. 解法一直接由分离变量形式入手,导出固有值问题、固有值、固有函数系,解法二则是从解按固有函数系展开出发,并注意两端均为第二类齐次边界条件;

2. 本题中固有值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ ($n=0, 1, \dots$),即 $\lambda_0=0$ 是一个固有值,对应的固

有函数为 $X_0 = \text{常数}$ (取为 1).

7-4 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\alpha} = 0, & 0 < r < R \\ u|_{r=R} = f(\theta), & 0 < \theta < \alpha \end{cases} \quad (1)$$

解 注意到方程关于未知函数为线性齐次的,且在 $\theta=0$ 与 $\theta=\alpha$ 边界上具线性齐次边界条件,故可用分离变量法求解.为此,设(1)有非零解

$$u(r, \theta) = F(r)\Phi(\theta) \quad (4)$$

代入(1)并分离变量得

$$\frac{r^2 F''(r) + rF'(r)}{-F(r)} = \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} \stackrel{\text{令}}{=} -\lambda$$

即

$$r^2 F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0 \quad (5)$$

$$\Phi''(\theta) + \lambda \Phi(\theta) = 0 \quad (6)$$

令(4)满足(2)得

$$\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \quad (7)$$

(6)与(7)联立得

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda \Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\quad (7)$$

注意问题的物理意义知,在 $r=0$ 处,应满足条件

$$|u(0, \theta)| \text{ 有界, 故 } |F(0)| < +\infty \quad (5)'$$

(5)与(5)'联立

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0 \\ |F(0)| < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$(5)'$$

(5)是一个二阶齐次欧拉方程,所带条件(5)'不具可叠加性.

故应由(6)~(7)确定 λ 值,即(6)(7)为定解问题(1)~(3)的固有值问题.解(6)~(7)得固有值

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

固有函数系

$$\Phi_n(\theta) = \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad n = 1, 2, \dots$$

将 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ 代入(5),解(5)-(5)':令 $r = e^t$. 在(5)中变换自变量为 t ,得

$$\frac{d^2 F_n}{dt^2} - \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} F_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

其通解为
$$F_n = C_n e^{\frac{n^2 \pi^2}{a} t} + D_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{a} t} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

即
$$F_n(r) = C_n r^{\frac{n\pi}{a}} + D_n r^{-\frac{n\pi}{a}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

由条件(5)'得 $D_n = 0$.

$$\therefore F_n(r) = C_n r^{\frac{n\pi}{a}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

于是
$$u_n(r, \theta) = C_n r^{\frac{n\pi}{a}} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

叠加之得

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\frac{n\pi}{a}} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad (8)$$

令(8)满足(3)得

$$u(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R^{\frac{n\pi}{a}} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} = f(\theta) \quad (9)$$

(9)表明 $C_n R^{\frac{n\pi}{a}}$ 即为 $f(\theta)$ 在 $[0, \alpha]$ 上 Fourier 正弦展式的系数, 即

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} d\theta = C_n R^{\frac{n\pi}{a}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore C_n = \frac{2}{\alpha R^{\frac{n\pi}{a}}} \int_0^{\alpha} f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} d\theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

代入(8)即得定解问题(1)~(3)的解.

注 1. 本问题是张角为 α , 半径为 R 的扇形区域稳恒热场的温度分布问题. 泛定方程为二维 Laplace 方程的极坐标形式. 由于在边界 $\theta=0$ 与 $\theta=\alpha$ 上具有齐次边界条件, 故通过分离变量后可得到固有值问题(6)~(7), 其形式与两端固定的弦振动问题对应的固有值问题完全一样;

2. 分离变量后得到 $F(r)$ 的方程(5), 这是一个二阶齐次欧拉方程. 通过自变量代换 $r=e^t$, 即可化为常系数线性齐次方程. 注意到问题的物理意义, 应有 $|u(0, \theta)|$ 有界, 从而得(5)', 此条件称为自然边界条件.

7-5 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & a < r < b, 0 < \theta < \alpha & (1) \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\alpha} = 0, & a < r < b & (2) \\ u|_{r=a} = f_1(\theta), & 0 < \theta < \alpha & (3) \\ u|_{r=b} = f_2(\theta), & 0 < \theta < \alpha & (4) \end{cases}$$

解 比较本问题与 7-4 题所不同在于这里是张角为 α 的部分圆环区域. 故代

替 7-4 题中条件 $|u(0, \theta)| < +\infty$ 的是边界条件 $u|_{r=a} = f_1(\theta)$.

对于(5), 这里没有条件(5)', 这样, 用分离变量法解(1)~(4). 设 $u(r, \theta) = F(r)\Phi(\theta)$, 代入(1), 并分离变量后得固有值问题

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{及} \quad r^2 F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0 \quad (6)$$

解(5)-(6)得固有值 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{\alpha})^2 \quad (n=1, 2, \dots)$

固有函数系为 $\Phi_n(\theta) = \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta \quad (n=1, 2, \dots)$

将 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{\alpha})^2$ 代入(7), 解得通解为

$$F_n(r) = C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}, \quad n=1, 2, \dots$$

于是, (1)~(4)的形式解为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}) \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta \quad (8)$$

令(8)满足(3), (4)得

$$u(a, \theta) = f_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}) \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta \quad (9)$$

$$u(b, \theta) = f_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n b^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}) \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta \quad (10)$$

(9), (10)右端分别是 $f_1(\theta)$ 与 $f_2(\theta)$ 在 $[0, \alpha]$ 上的 Fourier 正弦展开式. 于是有

$$\begin{cases} C_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f_1(\theta) \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta d\theta = f_{1n} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} C_n b^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n b^{-\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f_2(\theta) \sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta d\theta = f_{2n} \end{cases} \quad (12)$$

$$(n=1, 2, \dots)$$

这是关于 C_n, D_n 的线性(非齐次)代数方程组. 且

$$\because a \neq b, \therefore \text{系数行列式 } D = (ab)^{\frac{n\pi}{\alpha}} (b^{-\frac{n\pi}{\alpha}} - a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}) \neq 0$$

故由(11)~(12)可唯一确定 C_n, D_n

$$C_n = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f_{1n} & a^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \\ f_{2n} & b^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$D_n = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a^{\frac{n\pi}{a}} & f_{1n} \\ b^{\frac{n\pi}{a}} & f_{2n} \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$n = (1, 2, \dots)$$

当 $f_1(\theta)$ 与 $f_2(\theta)$ 不全为 0 时, C_n 与 D_n 不全为 0, 定解问题(1)~(4)有非零形式解(8), 系数由(13)~(14)给出.

注 1. 当 $f_1(\theta) = f_2(\theta) = 0$ 时, 显见, 由 $D \neq 0$ 知, (11)~(12)的唯一解为 $C_n = D_n = 0, n = 1, 2, \dots$, 从而(8)给出的即为零解. 这正是 Laplace 第一边值问题解的唯一性所包含的结果——Laplace 方程零边值问题只有零解;

2. 由于这里的区域不含点 $r=0$, 故形式解的结构与 7-4 题的不同: $F_n(r) = C_n r^{\frac{n\pi}{a}} + D_n r^{-\frac{n\pi}{a}}$, 不能推出 $D_n = 0$; 但由于固有值问题相同, 所以二者的解均为关于固有函数系 $\{\sin \frac{n\pi}{a}\theta\}_{n=1}^{\infty}$ 的展开式. (关于变量 θ 在区间 $[0, a]$ 上的 Fourier 正弦展开式);

3. 可以看出, 7-4 题与 7-5 题的固有值问题只与 $\theta=0$ 及 $\theta=a$ 边界上的边界条件有关. 圆弧边界上的条件则在确定系数时被用到.

7-6 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b & (1) \\ u|_{x=0} = g(y), & 0 < y < b & (2) \\ u|_{x=a} = h(y), & 0 < y < b & (3) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), & 0 < x < a & (4) \\ u|_{y=b} = \psi(x), & 0 < x < a & (5) \end{cases}$$

解 这是矩形域上的 Laplace 方程第一边值问题(第一类边界条件). 由叠加原理, 原问题的解可分为

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

其中, $v(x, y)$ 满足定解问题 $(A)_1$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b & (1)_1 \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = 0, & 0 < y < b & (2)_1 \\ v|_{y=0} = \varphi(x), & & (3)_1 \\ v|_{y=b} = \psi(x), & 0 < x < a & (4)_1 \end{cases}$$

$w(x, y)$ 满足定解问题 $(A)_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b & (1)_2 \\ w|_{x=0} = g(y), & & (2)_2 \\ w|_{x=a} = h(y), & 0 < y < b & (3)_2 \\ w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0 & 0 < x < a & (4)_2 \end{cases}$$

则在 $(A)_1$ 与 $(A)_2$ 中均有一组边界满足齐次边界条件.

在 $(A)_1$ 中, 令 $(1)_1$, 有变量分离形式解 (非零)

$$v(x, y) = X(x)Y(y)$$

代入 $(1)_1$ 与 $(2)_1$ 得

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (5)_1 \\ X(0) = X(a) = 0 & (6)_1 \end{cases}$$

及

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (7)_1$$

$(5)_1 \sim (6)_1$ 即为定解问题 $(A)_1$ 的固有值问题, 解之得

固有值为 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$

固有函数系数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x \quad (n = 1, 2, \dots)$

将 λ_n 值代入 $(7)_1$ 解得通解

$$\bar{y}_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

于是 $(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}) \sin \frac{n\pi}{a}x \quad (n = 1, 2, \dots)$

叠加之得

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}) \sin \frac{n\pi}{a}x \quad (8)$$

令 (8) 满足 $(3) \sim (4)$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(C_n + D_n) \sin \frac{n\pi}{a}x] = \varphi(x) \quad (9)_1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}) \sin \frac{n\pi}{a}x = \psi(x) \quad (10)_1$$

$\therefore$

$$\begin{cases} C_n + D_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{a}x dx = \varphi_n & (11)_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = \frac{2}{a} \int_0^a \psi(x) \sin \frac{n\pi}{a}x dx = \psi_n & (12)_1 \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

这是关于 C_n, D_n 的二元一次代数方程组, 其系数行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{n\pi}{b}b} & e^{-\frac{n\pi}{a}a} \end{vmatrix} \neq 0$, 故可

由 $(11)_1 \sim (12)_1$ 唯一确定 C_n, D_n .

带有 $(11)_1 \sim (12)_1$ 的 $(8)_1$ 即为 $(A)_1$ 的解.

同理, $(A)_2$ 的解为

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}) \sin \frac{n\pi}{b}y$$

其中 A_n, B_n 满足关系

$$\begin{cases} A_n + B_n = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi}{b}y dy = g_n \\ A_n e^{\frac{n\pi}{b}a} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi}{b}y dy = h_n \end{cases}$$

$\therefore$ 原问题的解为 $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$, $v(x, y), w(x, y)$ 如上给出.

注 1. 本问题的特点是方程及区域关于 x, y 的对称性, 故虽然边界条件为非齐次的, 但利用线性问题叠加原理, 将问题分为 $(A)_1$ 与 $(A)_2$, 均带有一组齐次边界条件, 从而可用分离变量法;

2. 当矩形区域上两组对边上边界条件类型不同时仍可用本题方法处理. 只是不同类型边界条件得到不同的固有值问题、固有值及固有函数系.

7-7 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < R, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_{r=R} = f(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2)$$

解 这是圆域上的 Laplace 方程第一边值问题. 设 (1) 具有变量分离形式解

$$u = F(r)\Phi(\theta) \quad (3)$$

将 (3) 代入 (1) 得

$$\frac{F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)}{-\frac{1}{r^2}F(r)} = \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} \stackrel{\text{令}}{=} \lambda$$

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) \\ \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{及} \quad \begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} |F(0)| < +\infty \end{cases} \quad (7)$$

这里条件(5)是由区域的形状及 $u(r, \theta)$ 的单值性决定的. 即 $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$ 成立. ($r \in (0, R]$).

而条件(7)是由问题的物理意义决定的, 即 $u(r, \theta)$ 在圆心处有界. 问题(4)~(5)称为定解问题(1)~(2)的固有值问题. 解(4)~(5)得: $\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\Phi_0(\theta) = 1, \Phi_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(a_n, b_n 为任意常数)

将 λ_n 代入(6)~(7)解得

$$\begin{aligned} F_0(r) &= A'_0 \quad (A'_0 \neq 0 \text{ 为任意常数}) \\ F_n(r) &= A'_n r^n \quad (A'_n \neq 0 \text{ 为任意常数}) \quad n = 1, 2, \dots \\ \therefore u_0(r, \theta) &= F_0(r) \Phi_0(\theta) = A'_0 = \frac{A_0}{2}, \\ u_n(r, \theta) &= F_n(r) \Phi_n(\theta) = A'_n r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

叠加得

$$u_n(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sin n\theta \quad (8)$$

令(8)满足(2)得

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^n \cos n\theta + B_n R^n \sin n\theta$$

右端即为 $f(\theta)$ 的 Fourier 完全展式. 由于 $f(\theta)$ 定义在 $[0, 2\pi]$ 上, 故应有 $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$, 于是有

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad (9)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

带有系数(9)~(11)的(8)即为定解问题(1)~(2)的解.

注 1. 本题为圆域上 Laplace 方程第一边值问题, 由上讨论可见确定其固有值问题的不是边界条件. 而是区域的形状所提供的周期性条件 $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$, 同时考虑到物理问题的解应是单值的. 此条件称为自然周期性条件;

另外, 同样出于物理问题的考虑, 解函数 $u(r, \theta)$ 在圆心处满足有界性条件, 从而得到条件(7).

7-8 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & \rho_1 < r < \rho_2, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u|_{r=\rho_1} = f_1(\theta), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u|_{r=\rho_2} = f_2(\theta), \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (3)$$

解 这是圆环域 $\rho_1 < r < \rho_2$ 上 Laplace 方程第一边值问题. 同上例, 解的周期性条件成立: $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$. 但无 $r=0$ 处的有界性条件. 故

令 $u(r, \theta) = F(r)\Phi(\theta)$. 其中 $\Phi(\theta)$ 与 $F(r)$ 分别满足

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta) \end{cases} \quad (5)$$

及

$$r^2 F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0 \quad (6)$$

由 (4) ~ (5) 得固有值 $\lambda_n = n^2$ 及固有函数系为 $\Phi_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, n = 0, 1, 2, \dots$. 将 λ_n 代入 (6) 解得

$$F_0(r) = A'_0 + B'_0 \ln r = \frac{A_0 + B_0 \ln r}{2} \quad F_n(r) = A'_n r^n + B'_n r^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore u_0(r, \theta) = F_0(r)\Phi_0(\theta) = \frac{A_0 + B_0 \ln r}{2}$$

$$\begin{aligned} u_n(r, \theta) &= F_n(r)\Phi_n(\theta) = (A'_n r^n + B'_n r^{-n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

叠加得

$$u(r, \theta) = \frac{A_0 + B_0 \ln r}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta \quad (7)$$

令 (7) 满足 (2), (3) 得

$$\frac{A_0 + B_0 \ln \rho_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho_1^n + B_n \rho_1^{-n}) \cos n\theta + (C_n \rho_1^n + D_n \rho_1^{-n}) \sin n\theta = f_1(\theta)$$

$$\frac{A_0 + B_0 \ln \rho_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho_2^n + B_n \rho_2^{-n}) \cos n\theta + (C_n \rho_2^n + D_n \rho_2^{-n}) \sin n\theta = f_2(\theta)$$

$$\therefore \begin{cases} A_0 + B_0 \ln \rho_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta \\ A_0 + B_0 \ln \rho_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) d\theta \end{cases} \quad (8)$$

$$(9)$$

$$\begin{cases} A_n \rho_1^n + B_n \rho_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \cos n\theta d\theta \\ A_n \rho_2^n + B_n \rho_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) \cos n\theta d\theta \end{cases} \quad (10)$$

$$(11)$$

$$\begin{cases} C_n \rho_1^n + D_n \rho_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \sin n\theta d\theta & (12) \\ C_n \rho_2^n + D_n \rho_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) \sin n\theta d\theta & (13) \end{cases}$$

因为 $\rho_1 \neq \rho_2$, 所以上述三个关于 $A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n$ 的线性非齐次代数方程组存在唯一解.

故定解问题(1)~(3)的解由(7)给出, 系数由(8)~(13)给出.

注 与 7-7 题相比, 区域由圆域变为圆环域, 自然周期性条件仍成立, 所以固有值问题不变, 但 $r=0$ 不在区域内, 所以无圆心处的有界性条件, 致使解关于固有函数系的展开式系数 $F_n(r)$ 的结构发生了变化.

7.2 齐次边界与非齐次方程

7.2.1 基本要求

1. 掌握线性非齐次方程的叠加原理.
2. 掌握齐次边界条件下非齐次方程的固有函数展开法.

7.2.2 内容提要

1. 定解问题

$$\begin{cases} A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (AB = 0, A + B = 1) & (1) \\ h_0 u(0, t) + k_0 u_x(0, t) = 0, & (h_0, k_0 \text{ 不全为 } 0) & (2) \\ h_l u(l, t) + k_l u_x(l, t) = 0, & (h_l, k_l \text{ 不全为 } 0) & (3) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & & (4) \\ Au_t(x, 0) = A\psi(x) & & (5) \end{cases}$$

的解可按固有函数系 $\{X_n(x)\}$ 展开为

$$u(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x)$$

其中 $\{X_n(x)\}$ 为对应于 $f(x, t) \equiv 0$ 时(1)~(5)的固有函数系, 此解法被称为固有函数法.

2. 定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(P), & P \in D \\ u|_r = g(M), & M \in \Gamma \end{cases}$$

的解可按固有函数系 $\{\Phi_n\}$ 展开, 其中 $\{\Phi_n\}$ 为定解问题 $\begin{cases} \Delta u=0, & P \in D \\ u_r=g(M), M \in \Gamma \end{cases}$ 的固有函数系.

7.2.3 例题解析

7-9 设 $u(x, t)$ 为定解问题

$$(A) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) & x \in (0, l), \quad t > 0 \\ h_0 u(0, t) + k_0 u_x(0, t) = 0 & t \geq 0 \\ h_l u(l, t) + k_l u_x(l, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x \in [0, l] \end{cases}$$

的解. $w(x, t)$ 与 $v(x, t)$ 分别为定解问题 $(A)_1, (A)_2$ 的解

$$(A)_1 \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & x \in (0, l), \quad t > 0 \\ h_0 w(0, t) + k_0 w_x(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ h_l w(l, t) + k_l w_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ w(x, 0) = \varphi(x), \\ w_t(x, 0) = \psi(x) & x \in [0, l] \end{cases}$$

$$(A)_2 \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in (0, l) \quad t > 0 \\ h_0 v(0, t) + k_0 v_x(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ h_l v(l, t) + k_l v_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = 0, \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in [0, l] \end{cases}$$

证明 $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$.

证 由 $(A)_1$ 与 $(A)_2$ 的泛定方程有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \end{aligned} \quad x \in (0, l), \quad t > 0$$

由微分运算的线性性质, 二式相加得

$$\frac{\partial^2 (w+v)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (w+v)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad x \in (0, l), t > 0$$

即 $w(x, t) + v(x, t)$ 满足 (A) 的泛定方程. 又由 $(A)_1$ 与 $(A)_2$ 的边界条件有

$$h_0 w(0, t) + k_0 w_x(0, t) = 0, \quad h_l w(l, t) + k_l w_x(l, t) = 0$$

$$h_0 v(0, t) + k_0 v_x(0, t) = 0, \quad h_l v(l, t) + k_l v_x(l, t) = 0$$

$$\therefore h_0 [w(0, t) + v(0, t)] + k_0 [w_x(0, t) + v_x(0, t)] = 0$$

$$h_l [w(l, t) + v(l, t)] + k_l [w_x(l, t) + v_x(l, t)] = 0 \quad t \geq 0$$

即 $w(x, t) + v(x, t)$ 满足(A)的边界条件.

最后, 由(A)₁ 与(A)₂ 的初始条件有

$$w(x, 0) = \varphi(x) \quad w_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]$$

$$v(x, 0) = 0 \quad v_t(x, 0) = 0$$

所以

$$w(x, 0) + v(x, 0) = \varphi(x)$$

$$w_t(x, 0) + v_t(x, 0) = \psi(x) \quad x \in [0, l]$$

即 $w(x, t) + v(x, t)$ 满足(A)的初始条件. 于是由定解问题(A)的解的唯一性知

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

注 1. 本题所证的即是线性偏微分方程叠加原理在具体问题(A)中的表现形式. 此结论为求解定解问题(A)提供了具体方法. 此方法的物理意义为: 强迫振动的弦上任一点的位移是由外力所引起的位移与由初始扰动引起的位移之叠加;

2. 此证明中只用到方程及边界条件的线性性质及边界条件的齐次性, 并不涉及方程对时间变量导数的阶数, 故所得结论对热传导方程、Poisson 方程同样适用.

7-10 用固有函数法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) & x \in (0, l), t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_t(x, 0) = 0 & x \in [0, l] \end{cases} \quad (4)$$

解 注意边界条件为第一类齐次的, 其对应的固有函数系为 $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}_{n=1}^{\infty}$, 故

可设(1)~(4)的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (5)$$

将 $f(x, t)$ 按固有函数系展开

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (6)$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l}x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

将(5),(6)代入(1),则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t)] \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

由 Fourier 级数展式唯一性,对比两端同阶项系数,得

$$\dot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

再令(5)满足(3),(4)得

$$u(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0$$

$$u_t(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0$$

$$T_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

$$\dot{T}_n(0) = 0 \quad (9)$$

(7),(8),(9)联立,并用 Laplace 变换法解得

$$\mathcal{L}[T_n(t)] = \frac{1}{S^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}} \cdot \mathcal{L}[f_n(t)] = \frac{l}{an\pi} \cdot \frac{\frac{an\pi}{l}}{S^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}} \cdot \mathcal{L}[f_n(t)]$$

两端取 Laplace 逆变换并用卷积定理得

$$T_n(t) = \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(t-\tau) \sin \frac{an\pi}{l} \tau d\tau \quad (n = 1, 2, \dots)$$

代入(5)即得定解问题(1)~(4)的解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(t-\tau) \sin \frac{an\pi}{l} \tau d\tau \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x$$

注 1. 本题解法称为固有函数法,固有函数系是由对应的齐次问题的固有值问题决定的;

2. 当泛定方程变为热传导方程时, $T_n(t)$ 满足的将是一阶常微分方程初值问题;当边界条件类型变化时,将影响固有函数系的变化.

7-11 解定解问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad x \in (0, l), t > 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in [0, l] \end{array} \right. \quad (3)$$

解 解法一 由例 7-9,原问题的解为

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

其中 $w(x, t)$ 为问题 $(A)_1$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & x \in (0, l), \quad t > 0 \end{cases} \quad (1)'$$

$$\begin{cases} w_x(0, t) = w_x(l, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)'$$

$$\begin{cases} w(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, l] \end{cases} \quad (3)'$$

的解. $v(x, t)$ 为问题 $(A)_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) & x \in (0, l), \quad t > 0 \end{cases} \quad (1)''$$

$$\begin{cases} v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)''$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0 & x \in [0, l] \end{cases} \quad (3)''$$

的解.

由 7-3 题知

$$w(x, t) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (4)'$$

其中

$$\varphi_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) dx \quad (5)'$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6)'$$

对 $(A)_2$, 注意边界条件为第二类齐次的, 由固有函数法可设其解为

$$v(x, t) = \frac{H_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (4)''$$

将 $f(x, t)$ 按固有函数系 $\{1, \cos \frac{n\pi}{l} x\}_{n=1}^{\infty}$ 展开, 并将 $(4)''$ 代入 $(1)''$ 得

$$\frac{\dot{H}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{H}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} H_n(t)] \cos \frac{n\pi}{l} x = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

对比两端同阶项系数得

$$\dot{H}_0(t) = f_0(t) \quad (5)''_1$$

$$\dot{H}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} H_n(t) = f_n(t) \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)''_1$$

其中

$$f_0(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) dx$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

再令 $(4)''$ 满足 $(3)''$ 得

$$H_0(0) = 0 \quad (5)''_2$$

$$H_n(0) = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)''_2$$

联立 $(5)_1'' \sim (5)_2'', (6)_1'' \sim (6)_2'',$ 并解之得

$$H_0(t) = \int_0^t f_0(\tau) d\tau \quad (7)''$$

$$H_n(t) = \int_0^t f_n(t-\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \tau} d\tau \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)''$$

将 $(7)'', (8)''$ 代入 $(4)''$ 即得定解问题 $(A)_2$ 的解

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_0(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(t-\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \tau} d\tau \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x$$

所以, 原问题的解

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^t f_0(\tau) d\tau + \varphi_0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_n(t-\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \tau} d\tau + \varphi_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \right) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

解法二 由固有函数法, 设定解问题 $(1) \sim (3)$ 的解为

$$u(x, t) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (4)$$

将 $f(x, t), \varphi(x)$ 关于固有函数系展开

$$f(x, t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (5)$$

其中

$$f_0(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) dx$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (6)$$

其中

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x, t) dx$$

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x, t) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

将 $(4), (5)$ 代入 (1) , 并比较左、右两端同阶项系数得

$$\dot{T}_0(t) = f_0(t) \quad (7)_1$$

$$\dot{T}_n(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)_1$$

将(4), (6)代入(3)并比较左、右两端同阶项系数得

$$T_0(0) = \varphi_0 \quad (7)_2$$

$$T_n(0) = \varphi_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)_2$$

分别联立(7)₁~(7)₂, (8)₁~(8)₂, 并解之得

$$T_0(t) = \int_0^t f_0(\tau) d\tau + \varphi_0 \quad (9)$$

$$T_n(t) = \int_0^t f_n(t-\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \tau} d\tau + \varphi_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

将(9), (10)代入(4)得

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^t f_0(\tau) d\tau + \varphi_0 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(t-\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \tau} d\tau + \varphi_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \right] \cos \frac{n\pi}{l} x$$

注 1. 此问题是一有界杆的热传导问题, 杆的两端绝热, 杆内有热源及非零初始温度. 解法一将问题分为两部分的叠加: 一部分只有热源, 初始温度为 0, 另一部分无热源, 但有非零初始温度; 解法二则直接用固有函数法求解. 所得结果正是解法一中两部分的叠加;

2. 在解法二中, 对应于 $T_0(t)$ 与 $T_n(t)$ 的常微分方程初值问题, 不仅方程为非齐次的, 且初值也是非零的. 一般用 Laplace 变换法求解较简单. 特别对泛定方程为波动方程时更是这样.

7-12 用固有函数法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sin \frac{2\pi}{\alpha} \theta + 2 \sin \frac{4\pi}{\alpha} \theta, & 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha \quad (1) \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\alpha} = 0, & r \in [0, R] \quad (2) \\ u|_{r=R} = \varphi(\theta), & \theta \in [0, \alpha] \quad (3) \end{cases}$$

解 注意在边界 $\theta=0$ 与 $\theta=\alpha$ 上的边界条件, 可知对应的固有函数系为

$$\Phi_n(\theta) = \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

故可设定解问题(1)~(3)的形式解为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad (4)$$

将(4)代入(1), 并注意(1)的右端已是固有函数系 $\{\sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta\}_{n=1}^{\infty}$ 的展开形式, 比较两端同阶项系数得

$$F''_n(r) + \frac{1}{r} F'_n(r) - \frac{1}{r^2} \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} F_n(r) = \begin{cases} 0, & n \neq 2, 4 \\ 1, & n = 2 \\ 2, & n = 4 \end{cases}$$

即

$$r^2 F_n''(r) + rF_n'(r) - \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} F_n(r) = \begin{cases} 0, & n \neq 2, 4 \\ r^2, & n = 2 \\ 2r^2, & n = 4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

再令(4)满足(3),并将 $\varphi(\theta)$ 按 $\{\sin \frac{n\pi}{\alpha}\theta\}_{n=1}^{\infty}$ 展开得

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(R) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta = \varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

即

$$F_n(R) = \varphi_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

再注意 $u(r, \theta)$ 在 $r=0$ 处的有界性,得有界性条件

$$|F_n(0)| < +\infty \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

(5), (6), (7) 联立

$$\text{当 } n \neq 2, 4 \text{ 时} \quad \begin{cases} r^2 F_n''(r) + rF_n'(r) - \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} F_n(r) = 0 \\ F_n(R) = \varphi_n \\ |F_n(0)| < +\infty \end{cases}$$

解之得

$$F_n(r) = \varphi_n \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \quad (n \neq 2, 4) \quad (8)$$

当 $n=2, 4$ 时, (5) 为二阶非齐次欧拉方程

$$r^2 F_2''(r) + rF_2'(r) - \frac{4\pi^2}{\alpha^2} F_2(r) = r^2$$

$$r^2 F_4''(r) + rF_4'(r) - \frac{16\pi^2}{\alpha^2} F_4(r) = 2r^2$$

令 $r = e^t$ 求得通解为

$$F_2(r) = C_2 r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + D_2 r^{-\frac{2\pi}{\alpha}} + \frac{\alpha^2}{4(\alpha^2 - \pi^2)} r^2 \quad (9)$$

$$F_4(r) = C_4 r^{\frac{4\pi}{\alpha}} + D_4 r^{-\frac{4\pi}{\alpha}} + \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 4\pi^2)} r^2 \quad (10)$$

将(6), (7) ($n=2, 4$) 代入(9), (10)得

$$F_2(r) = [\varphi_2 - \frac{\alpha^2}{4(\alpha^2 - \pi^2)} R^2] \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}} + \frac{\alpha^2}{4(\alpha^2 - \pi^2)} r^2 \quad (11)$$

$$F_4(r) = [\varphi_4 - \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 4\pi^2)} R^2] \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{4\pi}{\alpha}} + \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 4\pi^2)} r^2 \quad (12)$$

带有系数(8), (11), (12)的(4)即为所求. 其中 φ_n 由(6)给出.

注 1. 由所得结果可以看出, 带有热源及非零边界条件的稳恒热场温度分布

也是两部分组成的:一部分由稳恒热源引起,一部分由圆弧边界温度引起;

2. 由于泛定方程为非齐次的,故对应的方程(5)是非齐次的.且一般应将(1)的右端函数 $g(r, \theta)$ 按固有函数系展开.本题中所给右端为已展形式.且仅含两项,故方程(5)中 $n \neq 2, 4$ 时成为齐次的;

3. 非齐次欧拉方程的解法与齐次的相同:通过自变量代换,将方程化为常数情形.但带有特殊右端,可用待定系数法求得一个特解.与齐次方程通解相加构成非齐次欧拉方程的通解.

7-13 解定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = -x^2 y & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 & (1) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0 & (2) \end{cases}$$

解 用固有函数法解,因条件(2)为第一类齐次边界条件.故可设(1)~(3)的解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

将(1)右端函数关于 $\{\sin \frac{n\pi}{b} y\}_{n=1}^{\infty}$ 展开

$$-x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

其中 $f_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b -x^2 y \sin \frac{n\pi}{b} y dy = \frac{(-1)^n}{n\pi} 2bx^2 \quad (n=1, 2, \dots)$, 将(4)、(5)代入

(1)、(3)得 $X_n(x)$ 满足的常微分方程边值问题

$$\begin{cases} X_n''(x) - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X_n(x) = \frac{(-1)^n}{n\pi} 2bx^2 & (6) \\ X_n(0) = 0 & (6)' \\ X_n(a) = 0 & (6)'' \end{cases}$$

(6)的通解为

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi}{b} x} + D_n e^{-\frac{n\pi}{b} x} + (-1)^{n-1} \left(\frac{2b^3}{n^3 \pi^3} x^2 + \frac{4b^5}{n^5 \pi^5} \right) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (7)$$

令(7)满足(6)', (6)''得

$$\begin{aligned} D_n &= -C_n + (-1)^n \frac{4b^5}{n^5 \pi^5} \\ 2C_n &= [(-1)^{n-1} \frac{4b^5}{n^5 \pi^5} (e^{-\frac{n\pi a}{b}} - 1) + (-1)^n \frac{2b^3}{n^3 \pi^3} a^2] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \end{aligned} \quad (8)$$

代入(4)得

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \left[\frac{4b^5}{n^5 \pi^5} \left(e^{-\frac{n\pi}{b}a} - 1 \right) - \frac{2b^3}{n^3 \pi^3} a^2 \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{4b^5}{n^5 \pi^5} \left(e^{-\frac{n\pi}{b}x} - 1 \right) + (-1)^{n-1} \frac{2b^3}{n^3 \pi^3} x^2 \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

注 1. 解法中选取边界条件(2)或(3)定固有函数系本应是平等的(二者均为齐次, 第一类), 但考虑到方程右端函数为 $-x^2 y$, 若按 $\{\sin \frac{n\pi}{b} y\}_{n=1}^{\infty}$ 展开时, 是一次函数的展开问题, 而按 $\{\sin \frac{n\pi}{b} x\}_{n=1}^{\infty}$ 展开时则成为二次函数展开问题, 所以选择了前者;

2. 常微分方程(6)为二阶常系数非齐次方程, 因非齐次项为多项式形式(属特殊右端类), 故用待定系数法(令有一形如 $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 的特解), 可求得一个特解. 与齐次方程通解之和即为(6)的通解;

7.3 非齐次边界条件的处理

7.3.1 基本要求

1. 掌握第一、第二类非齐次边界条件的齐次化方法.
2. 掌握稳恒非齐次问题(泛定方程、边界条件中非齐次项均不依赖 t) 的齐次化方法.

7.3.2 内容提要

1. 未知函数 $u(x, t)$. 满足非齐次边界条件时, 作未知函数代换

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

适当选择函数 $w(x, t)$, 使新未知函数 $v(x, t)$ 满足齐次边界条件, 将问题化为 $v(x, t)$ 的带有齐次边界条件的定解问题(归为 7.1 或 7.2). 满足条件的 $w(x, t)$ 不唯一, 对第一、二类边界条件, $w(x, t)$ 的选择可按下表进行.

2. 当非稳恒问题的泛定方程的非齐次项与边界条件的非齐次项均不依赖于 t 时, 称为稳恒非齐次问题. 可通过未知函数代换

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

适当选取 $w(x)$, 使 $v(x, t)$ 满足齐次方程、齐次边界条件的定解问题.

边界条件	$u(0, t) = \theta_1(t)$ $u(l, t) = \theta_2(t)$	$u(0, t) = \theta_1(t)$ $u_x(l, t) = \theta_2(t)$	$u_x(0, t) = \theta_1(t)$ $u(l, t) = \theta_2(t)$	$u_x(0, t) = \theta_1(t)$ $u_x(l, t) = \theta_2(t)$
$w(x, t)$ 选取方法 (不唯一)	令 $\begin{cases} w(x, t) = A(t)x + B(t) \\ w(0, t) = \theta_1(t) \\ w(l, t) = \theta_2(t) \end{cases}$	令 $\begin{cases} w(x, t) = A(t)x + B(t) \\ w(0, t) = \theta_1(t) \\ w_x(l, t) = \theta_2(t) \end{cases}$	$\begin{cases} w(x, t) = A(t)x + B(t) \\ w_x(0, t) = \theta_1(t) \\ w(l, t) = \theta_2(t) \end{cases}$	令 $\begin{cases} w_x(x, t) = A(t)x + B(t) \\ w_x(0, t) = \theta_1(t) \\ w_x(l, t) = \theta_2(t) \end{cases}$
$w(x, t)$ 可取为 (不唯一)	$\frac{\theta_1(t)}{l} + \frac{x}{l}[\theta_2(t) - \theta_1(t)]$	$\theta_2(t)x + \theta_1(t)$	$\theta_2(t) - (l-x)\theta_1(t)$	$\frac{x^2}{2l}[\theta_2(t) - \theta_1(t)] + \theta_1(t)x$

7.3.3 例题解析

7-14 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = \sin \omega t, & t \geq 0 \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

解 令 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 其中 $w = \frac{x}{l} \sin \omega t$. 则 $v(x, t)$ 满足定解问

题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 x}{l} \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0 \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ v_t(x, 0) = -\frac{\omega}{l} x, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

由 7-9 题知, $v(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t)$. 其中 $v_1(x, t)$ 与 $v_2(x, t)$ 分别满足定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \\ v_1(0, t) = v_1(l, t) = 0 \\ v_1(x, 0) = 0 \\ v_{1t}(x, 0) = -\frac{\omega}{l} x \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 x}{l} \sin \omega t \\ v_2(0, t) = v_2(l, t) = 0 \\ v_2(x, 0) = v_{2t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

解之得

$$v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\omega l}{a(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{l} at \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$v_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\omega^2 l}{a(n\pi)^2} \left\{ \frac{\sin \omega t + \sin \omega_n t}{\omega + \omega_n} - \frac{\sin \omega t - \sin \omega_n t}{\omega - \omega_n} \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

其中 $\omega_n = \frac{an\pi}{l} \quad (n=1, 2, \dots)$.

所以, 原问题的解 $u(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t) + \frac{x}{l} \sin \omega t$

注 1. 由本题可看出, 对非齐次边界条件齐次化后, 新的未知函数满足的泛定方程一般为非齐次的 (若原泛定方程有非齐次项, 则非齐次项将会发生变化, 若原泛定方程为齐次的, 则新未知函数的泛定方程将可能产生非齐次项), 使问题归结为 7.2 所讨论过的情形;

2. 在本题中, 注意边界条件表明 $x=l$ 一端作周期运动, 周期为 ω , 由 $v_2(x, t)$ 的表达式可见

$$\frac{\sin \omega t - \sin \omega_n t}{\omega - \omega_n} = t \cos \frac{\omega + \omega_n}{2} t \cdot \sin \frac{\omega - \omega_n}{2} t \Big/ \frac{\omega - \omega_n}{2} t \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_n} t \cos \omega_n t$$

即若 $x=l$ 处振动频率 ω 与某一固有频率十分接近时, 将会随 $t \rightarrow +\infty$ 引起振幅无限增大现象——共振现象. 共振将给工程建筑及机件结构等带来重大破坏作用, 故要注意避免发生 $\omega \rightarrow \omega_n$ 的情况.

7-15 将定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = \theta_1(t), u_x(l, t) = \theta_2(t) & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l$$

化为齐次边界条件.

解 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 且令 $w(x, t)$ 满足条件

$$\begin{cases} w(x, t) = A(t)x + B(t) \\ w(0, t) = \theta_1(t) \\ w_x(l, t) = \theta_2(t) \end{cases} \quad A(t), B(t) \text{ 待定}$$

可取 $w(x, t) = \theta_2(t)x + \theta_1(t)$, 则 $v(x, t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} - [\ddot{\theta}_2(t)x + \ddot{\theta}_1(t)] & 0 < x < l, t > 0 & (1) \\ v(0, t) = v_x(l, t) = 0 & 0 \leq t & (2) \\ v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = \varphi(x) - [\theta_2(0)x + \theta_1(0)] = \varphi_1(x) & 0 \leq x \leq l & (3) \\ v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - w_t(x, 0) = \psi(x) - [\dot{\theta}_2(0)x + \dot{\theta}_1(0)] = \psi_1(x) & 0 \leq x \leq l & (4) \end{cases}$$

$v(x, t)$ 满足齐次边界条件非齐次泛定方程的定解问题. 由 7.2 可求其解. 原问题的解

$$u(x, t) = v(x, t) + \theta_2(t)x + \theta_1(t)$$

注 1. 由上述结果可见, 若 $\theta_1(t)$ 及 $\theta_2(t)$ 为 t 的一次多项式, 则所作代换 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ 可将泛定方程与边界条件同时化为齐次的. 问题将归为 7.1 所讨论类型, 一般情况下, 泛定方程将是非齐次的;

2. 代换中的 $w(x, t)$ 不唯一, 但应尽量选关于 x 的低阶形式, 例如还可取 $w_1(x, t) = \frac{\theta_2(t)}{2l}x^2 + \theta_1(t)$, 代换 $u(x, t) = v(x, t) + w_1(x, t)$ 也可将边界齐次化, 但 $w_1(x, t)$ 是 x 的二次式, 将导致 $\alpha^2 w_{xx} \neq 0$, 即使 θ_1, θ_2 是 t 的一次式, 也会使泛定方程产生非齐次项, 且也可能使 $\varphi_1(x), \psi_1(x)$ 的幂升高, 增加计算量.

7-16 将定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = \theta_1(t) \\ u(l, t) = \theta_2(t) & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

化为齐次边界条件.

解 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 并令

$$\begin{cases} w(x, t) = A(t)x + B(t) \\ w_x(0, t) = \theta_1(t) \\ w(l, t) = \theta_2(t) \end{cases}$$

解得 $A(t) = \theta_1(t), B(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)l$.

$$\therefore w(x, t) = \theta_2(t) - (l-x)\theta_1(t)$$

则 $v(x, t)$ 满足齐次边界问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - [\theta_2(t) - (l-x)\theta_1(t)] & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0, t) = v(l, t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = \varphi_1(x) \\ v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - w_t(x, 0) = \psi_1(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

由 7.2, 易于解出 $v(x, t)$, 可得原问题解

$$u(x, t) = v(x, t) + \theta_2(t) - (l-x)\theta_1(t)$$

注 由所得结果可见, 对热传导方程, 即使 $\theta_1(t), \theta_2(t)$ 是 t 的一次函数, 边界条件齐次化后, 泛定方程也将成为非齐次的, 而且非齐次项完全来自于 $w_t (\because w_{xx} = 0)$.

7-17 将定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = \theta_1(t) \\ u_x(l, t) = \theta_2(t) & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

化为齐次边界条件.

解 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 令 $w(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} w_x(x, t) = A(t)x + B(t) \\ w_x(0, t) = \theta_1(t) \\ w_x(l, t) = \theta_2(t) \end{cases}$$

有 $w_x(x, t) = \theta_1(t) + \frac{x}{l}[\theta_2(t) - \theta_1(t)]$.

$$\therefore w(x, t) = \theta_1(t)x + \frac{x^2}{2l}[\theta_2(t) - \theta_1(t)]$$

则 $v(x, t)$ 满足齐次边界问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + \left[\frac{a^2}{l}(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_1 x - \frac{x^2}{2l}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \right] & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = \varphi_1(x) \\ v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - w_t(x, 0) = \psi_1(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

由 7.2 可求得 $v(x, t)$.

$$u(x, t) = v(x, t) + \theta_1(t)x + \frac{x^2}{2l}[\theta_2(t) - \theta_1(t)]$$

注 由此题结果可见, 在所作代换中, $w(x, t)$ 是 x 的二次函数. 一般而言, 这是不可避免的(只有当 $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta(t)$ 时, 才可有 $w(x, t) = \theta(t)x$ 为 x 的一次式), 所以 $v(x, t)$ 的泛定方程中非齐次项不仅有由 w_t 引起的, 还有由 $a^2 w_{xx}$ 引起的. 即一般情况下, 上述代换后, 泛定方程将成为非齐次的, 由 7.2 方法可求解.

7-18 应如何解下列定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \varphi(x, y) & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y) \\ u|_{x=a} = \psi_1(y) & 0 \leq y \leq b \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi_2(x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = \psi_2(x) & 0 \leq x \leq b \end{cases}$$

解 此问题为矩形域上的 Poisson 问题,且边界条件为非齐次的,为了得到齐次边界条件的定解问题,运用叠加原理,设

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

其中 $v(x, y), w(x, y)$ 分别满足定解问题

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta v = f(x, y) & 0 < x < a, 0 < y < b \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = 0 & 0 \leq y \leq b \\ v_y|_{y=0} = \varphi_2(x) & 0 \leq x \leq a \\ v_y|_{y=b} = \psi_2(x) & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

与

$$(II) \quad \begin{cases} \Delta w = 0 & 0 < x < a, 0 < y < b \\ w|_{x=0} = \varphi_1(y) & 0 \leq y \leq b \\ w|_{x=a} = \psi_1(y) & 0 \leq y \leq b \\ w_y|_{y=0} = w_y|_{y=b} = 0 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

则 $v(x, y)$ 满足带有一组齐次边界条件的 Poisson 方程边值问题, $w(x, y)$ 满足带有一组齐次边界条件的 Laplace 方程边值问题,故由 7.2 可解得 $v(x, y)$,由 7.1 可解得 $w(x, y)$.

注 由上述讨论可见,矩形域上的 Poisson 方程或 Laplace 方程的非齐次边值问题不需作函数代换,只要应用叠加原理,即可分为两个带有一组齐次边界条件的问题.这里利用了区域的形状及泛定方程形式关于 x, y 的对称性.

7-19 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = A, & t \geq 0, A, B \text{ 为常数} \\ u|_{x=l} = B, & \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

解 解法一 注意到泛定方程与边界条件的非齐次项均不依赖 t ,故可设

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

则 $v(x, t)$ 满足泛定方程

$$v_t = a^2 v_{xx} + [a^2 w''(x) + f(x)]$$

若选 $w(x)$,使其满足

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + f(x) = 0 & (1) \\ w(0) = A & (2) \\ w(l) = B & (3) \end{cases}$$

便可使方程与边界条件同时齐次化. 将 $f(x) = x$ 代入, 解得

$$\begin{cases} w(x) = -\frac{x^3}{3a^2} + C_1x + C_2 \\ w(0) = A \\ w(l) = B \end{cases}$$

$$\therefore w(x) = -\frac{x^3}{6a^2} + \left(\frac{B-A}{l} + \frac{l^2}{6a^2}\right)x + A$$

则 $v(x, t)$ 满足齐次方程、齐次边界的定解问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = u(x, 0) - w(x) = \varphi(x) - w(x) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

解得

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (5)$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

$$\therefore u(x, t) = v(x, t) + \left[-\frac{x^3}{6a^2} + \left(\frac{B-A}{l} + \frac{l^2}{6a^2}\right)x + A\right] \quad (7)$$

解法二 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$. 且取 $w(x)$ 满足

$$\begin{cases} w(0) = A \\ w(l) = B \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} w(0) = A \\ w(l) = B \end{cases} \quad (2)$$

可取

$$w(x) = A + \frac{B-A}{l}x \quad (3)$$

于是 $v(x, t)$ 满足齐次边界问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + x \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x) - w(x) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

令

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (4)$$

$$\varphi_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l [\varphi(x) - w(x)] \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

则由固有函数法可得

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{1n} e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} + f_n \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} (t-\tau)} d\tau \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (6)$$

其中 φ_{1n}, f_n 由(4), (5)给出.

注 1. 解法一选择代换函数 $w(x)$ 既满足非齐次边界条件, 又使其消去泛定方程中的非齐次项, 从而使新未知函数满足齐次方程、齐次边界条件, 这种方法一般只适用于泛定方程与边界条件中的非齐次项均不依赖 t 的情况, (否则将导致十分复杂的代换函数), 这种类型的非齐次问题称为稳恒非齐次问题(注意泛定方程本身并不是稳恒方程!);

2. 解法二所采取的代换, 只将边界条件齐次化, 故所得 $w(x)$ 比解法一中的 $w(x)$ 形式简单, 次数低, 从而可避免如解法一中计算 C_n 时遇到的积分(6)的麻烦(积分(6)被积式会有 x 的三次项). 但要计算两个次数较低的函数的积分——解法二中的(4), (5). 当然, 如果原定解问题中的 $\varphi(x)$ 已是 x 较高次的函数, 解法一显然优于解法二.

7-20 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + be^{-ax} & 0 < x < l, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3)$$

解 解法一 用固有函数法解(略).

解法二 注意泛定方程的非齐次项与 t 无关. 故可设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$. 令 $w(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + be^{-ax} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} w(0) = w(l) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

解得

$$\begin{cases} w(x) = -\frac{b}{a^2 \alpha^2} e^{-\alpha x} + Ax + B \\ w(0) = 0 \\ w(l) = 0 \end{cases}$$

得

$$A = \frac{b}{la^2 \alpha^2} (e^{-\alpha l} - 1), \quad B = \frac{b}{a^2 \alpha^2}$$

可取

$$w(x) = -\frac{b}{a^2 \alpha^2} e^{-\alpha x} + \frac{b}{la^2 \alpha^2} (e^{-\alpha l} - 1)x + \frac{b}{a^2 \alpha^2} \quad (6)$$

则 $v(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - w(x) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

解得

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (7)$$

其中
$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l [\varphi(x) - w(x)] \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (8)$$

原定解问题(1)~(3)的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x + w(x) \quad (9)$$

其中 $w(x)$ 由(6)给出, C_n 由(8)给出.

注 1. 本题解法二采用稳恒非次问题处理方法使泛定方程化为齐次的, 且保持边界条件齐次性;

2. 解法二当边界条件换为其它类型或泛定方程换为波动方程时同样适用.

7-21 应如何解定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(y) & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{x=0} = \varphi(y) \\ u|_{x=a} = \psi(y) & 0 \leq y \leq b \\ u|_{y=0} = A \\ u|_{y=b} = B & 0 \leq x \leq a, A, B \text{ 为常数} \end{cases}$$

解 解法一 区域为矩形, 方程为 Poisson 方程, 故可按 7-18 题的方法求解.

解法二 注意泛定方程的非齐次项及 $y=0, b$ 边界上的非齐次项均与 x 无关, 故可设

$$u(x, y) = v(x, y) + w(y) \quad (1)$$

且令 $w(y)$ 满足
$$\begin{cases} w''(y) - f(y) = 0 \\ w(0) = A \\ w(b) = B \end{cases} \quad (2)$$

设 $\int_0^b f(y) dy = F(y)$, 可解得

$$w(y) = F(y) + \frac{1}{b} [B - A + F(0) - F(b)]y + [A - F(0)]$$

则 $v(x, y)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & 0 < x < a, 0 < y < b \\ v|_{x=0} = u|_{x=0} - w(y) = \varphi(y) - w(y) = \varphi_1(y) \\ v|_{x=a} = u|_{x=a} - w(y) = \psi(y) - w(y) = \psi_1(y) \\ v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0 & 0 \leq y \leq b \\ & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

由 7-7 题的 $(A)_2$ 可解出 $v(x, y)$.

原定解问题解

$$u(x, y) = v(x, y) + w(y)$$

注 1. 原定理问题是矩形域上 Poisson 方程边值问题. 由于泛定方程的非齐次项及一组边界上的非齐次项均与 x 无关, 类似于 7-19 题. 可选择代换函数 $w(y)$ 使泛定方程与边界条件同时齐次化.

2. 在矩形域 Poisson 方程定解问题中, x, y 地位平等. 故当方程非齐次项为不依赖于 y 的函数, 且在边界 $x=0, a$ 上的非齐次边界条件也不依赖于 y 时, 可作代换 $u(x, y) = v(x, y) + w(x)$. 选择 $w(x)$ 使方程与边界条件同时齐次化.

7.4 第 7 章练习题

1. 长为 l 的均匀细杆, 两端保持零度, 杆上初始温度分布为 $\varphi(x) = bl^2 x(l-x)$, 求解细杆上任一点在任一时刻温度.

(答 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$, 其中 $C_n = \frac{4bl^4}{n^3 \pi^3} (1 - \cos n\pi)$)

2. 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = v_0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

(答 $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \frac{2n+1}{2l} a \pi t \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x$, $B_n = \frac{8lv_0}{a\pi^2 (2n+1)^2}$)

3. 在半径为 R 的圆内求解 Laplace 方程, 设其边界上满足 $u|_{r=R} = A + B \sin \varphi$.

(答 $u(r, \varphi) = A + \frac{B}{R} r \sin \varphi$)

4. 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = At & t \geq 0 \\ u(l, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

(答 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x + \frac{l-x}{l} At$, 其中 $B_n = \frac{2A}{an\pi l} \int_0^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$)

5. 解线性齐次定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \beta u, & 0 < x < l, t > 0, \beta > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x < l \end{cases}$$

$$(\text{答}) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{(\beta - \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2})t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

6. 解定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = u_0 \sin \frac{3\pi}{b} y & 0 \leq y \leq b \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = u_0 \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

(答) $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$, 其中

$$v(x, y) = \frac{u_0}{2 \operatorname{sh} \frac{2\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{a} y \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{u_0 \operatorname{sh} \frac{4\pi}{a} y}{2 \operatorname{sh} \frac{4\pi b}{a}} \sin \frac{4\pi x}{a},$$

$$w(x, y) = u_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{3\pi}{b} x}{\operatorname{sh} \frac{3\pi a}{b}} \sin \frac{3\pi}{b} y$$

7. 解定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 < r < R, 0 < \varphi < \pi \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 & 0 < r \leq R \\ u(R, \varphi) = f(\varphi) & 0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

$$(\text{答}) \quad u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n A_n \sin n\varphi, \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 1,$$

2, \dots)

$$8. \text{ 将定解问题 } \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = A & t \geq 0, A, B \text{ 为常数} \\ u(l, t) = B \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

化为齐次边界, 齐次方程.

(答 令 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$.

取 $w(x) = [F(x) - F(l)] + [A - F'(0)](x - l) + B$. 其中 $F(x) =$

$$\int \left[- \int \frac{f(x)}{a^2} dx \right] dx$$

9. 选适当的 $w(y)$, 作代换 $u(x, y) = v(x, y) + w(y)$. 解下列问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(y) & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{x=0} = \varphi(y) & 0 \leq y \leq b \\ u|_{x=a} = \psi(y) & 0 \leq y \leq b \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

(答 $w(y) = F(y) + \frac{1}{b}[F(0) - F(b)]y - F(0)$,

$F(y) = \int [\int f(y) dy] dy$))

第 8 章 贝塞尔函数与勒让德多项式

8.1 贝塞尔函数

8.1.1 基本要求

1. 了解贝塞尔方程的导出及其幂级数解法.
2. 掌握第一类贝塞尔函数递推公式、零点性质.
3. 了解贝塞尔函数系 $\left\{ J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) \right\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $[0, R]$ 上带权重 r 的正交性及其模;

掌握 $\left\{ J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r \right) \right\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $[0, R]$ 上带权重 r 的正交性及其模.

4. 掌握函数 $f(x)$ 的 Fourier-Bessel 级数展开法.

8.1.2 内容提要

1. 在柱坐标系下对拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程进行分离变量, 将导出 n 阶 Bessel 方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

其满足在 $x=0$ 处有界性的解称为第一类 n 阶 Bessel 函数

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (n \geq 0)$$

2. 第一类 Bessel 函数的递推公式

1) $dJ_0(x) = -J_1(x)dx$

2) $d[xJ_1(x)] = xJ_0(x)dx$

3) $d[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)dx$

4) $d[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)dx$

5) $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$

6) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x).$

3. $J_n(x)$ 零点性质

- 1) $J_n(x)$ 有可列无穷多单重实零点, 且关于原点对称分布;
 2) $J_n(x)$ 的零点与 $J_{n+1}(x)$ 的零点相间分布;
 3) $\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \pi$ ($\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$ 的第 m 个正零点.)
 4. $\{J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $[0, R]$ 上带权重 r 正交

$$\int_0^R r J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right) dr = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)}) = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}), & m = k \end{cases}$$

其中 $\int_0^R r J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) dr = \frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})$ 的平方根称为 $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)$ 的模.

5. 设 $f(r)$ 在 $[0, R]$ 上具一阶连续导及逐段连续二阶导. 且满足边界条件

$$f(R) = 0, \quad |f(0)| < +\infty$$

则有
$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right), \quad 0 < r < R$$

其中
$$A_m = \frac{1}{\frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})} \int_0^R r f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) dr$$

8.1.3 例题解析

8-1 计算下列定积分

$$1) \int_0^R r^3 J_0(r) dr \quad 2) \int_0^R r^3 J_3(r) dr$$

解 1) 应用递推公式 $d[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) dx$ 及分部积分法可有

$$I = \int_0^R r^3 J_0(r) dr = \int_0^R r^2 \cdot r J_0(r) dr = \int_0^R r^2 d[r J_1(r)]$$

$$\begin{aligned} 224 \quad &= r^2 \cdot r J_1(r) \Big|_0^R - 2 \int_0^R r^2 J_1(r) dr = R^3 J_1(R) - 2 \int_0^R d[r^2 J_2(r)] \\ &= R^3 J_1(R) - 2r^2 J_2(r) \Big|_0^R = R^3 J_1(R) - 2R^2 J_2(R) \end{aligned}$$

由 $J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$ 得

$$I = (R^3 - 4R) J_1(R) + 2R^2 J_0(R)$$

2) 应用递推公式 $d[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) dx$ 及分部积分法有

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^R r^3 J_3(r) dr = - \int_0^R r^5 [-r^{-2} J_3(r) dr] = - \int_0^R r^5 d[r^{-2} J_2(r)] \\
&= -r^5 \cdot r^{-2} J_2(r) \Big|_0^R + 5 \int_0^R r^4 \cdot r^{-2} J_2(r) dr \\
&= -R^3 J_2(R) - 5 \int_0^R r^3 [-r^{-1} J_2(r) dr] \\
&= -R^3 J_2(R) - 5 \int_0^R r^3 d[r^{-1} J_1(r)] \\
&= -R^3 J_2(R) - 5r^3 \cdot r^{-1} J_1(r) \Big|_0^R + 15 \int_0^R r^2 \cdot r^{-1} J_1(r) dr \\
&= -R^3 J_2(R) - 5R^2 J_1(R) + 15 \int_0^R r J_1(r) dr
\end{aligned}$$

又由 $J_1(x) dx = -d[J_0(x)]$ 及 $J_0(x)$ 的表达式可有

$$\begin{aligned}
I &= -R^3 J_2(R) - 5R^2 J_1(R) - 15 \int_0^R r dJ_0(r) \\
&= -R^3 J_2(R) - 5R^2 J_1(R) - 15R J_0(R) + 15 \int_0^R J_0(r) dr
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^R J_0(r) dr &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \int_0^R r^{2k} dr = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \frac{R^{2k+1}}{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} R^{2k+1}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
I &= -R^3 J_2(R) - 5R^2 J_1(R) - 15R J_0(R) + 15 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} R^{2k+1} \\
&= -7R^3 J_1(R) + (R^3 - 15R) J_0(R) + 15 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} R^{2k+1}
\end{aligned}$$

注 1. 上述两积分均是应用 Bessel 函数的递推公式及分部积分方法计算的, 这是计算 Bessel 函数积分的基本方法, 故灵活、熟练运用递推公式是计算 Bessel 函数积分的必要前提;

2. 由本题结果可见, 最后结果的化简也依赖于递推公式, 一般来说, 应将计算结果中 Bessel 函数的阶数尽量化为零阶、一阶的, 因为在工程上有零阶与一阶

Bessel 函数表可查;

3. 在 2) 的最后出现积分 $\int_0^R J_0(r) dr$ 不能靠递推公式计算其值, 但注意 $J_0(x)$ 为整个数轴上收敛的普通幂级数, 由幂级数性质, 可逐项积分, 故积分 2) 含有一在 R 点取值的无穷级数.

8-2 计算不定积分

$$1) \int r^4 J_1(r) dr \quad 2) \int J_3(r) dr \quad 3) \int r^2 J_2(r) dr$$

解 1) 应用递推公式 $d[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) dx$ 及分部积分法可有

$$\begin{aligned} I &= \int r^4 J_1(r) dr = \int r^2 \cdot r^2 J_1(r) dr \\ &= r^2 \cdot r^2 J_2(r) - 2 \int r^3 J_2(r) dr = r^4 J_2(r) - 2 \int d[r^3 J_3(r)] \\ &= r^4 J_2(r) - 2r^3 J_3(r) + c \quad c \text{ 为任意常数.} \end{aligned}$$

由 $J_3(r) = \frac{4}{r} J_2(r) - J_1(r)$ 及 $J_2(r) = \frac{2}{r} J_1(r) - J_0(r)$ 得

$$I = r^2(8 - r^2)J_0(r) + 4r(r^2 - 4)J_1(r) + c$$

2) 应用递推公式 $d[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) dx$ 及分部积分法得

$$\begin{aligned} I &= \int J_3(r) dr = \int r^2 \cdot r^{-2} J_3(r) dr = - \int r^2 d[r^{-2} J_2(r)] \\ &= - (r^2 \cdot r^{-2} J_2(r) - 2 \int r \cdot r^{-2} J_2(r) dr) \\ &= - J_2(r) + 2 \int r^{-1} J_2(r) dr = - J_2(r) - 2 \int d[r^{-1} J_1(r)] \\ &= - J_2(r) - 2r^{-1} J_1(r) + c = - \frac{2}{r} J_1(r) + J_0(r) - \frac{2}{r} J_1(r) + c \\ &= - \frac{4}{r} J_1(r) + J_0(r) + c \end{aligned}$$

3) 应用递推公式 $d[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) dx$ 及分部积分法得

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 J_2(r) dr = \int r^3 \cdot r^{-1} J_2(r) dr = - \int r^3 d[r^{-1} J_1(r)] \\ &= - r^3 \cdot r^{-1} J_1(r) + 3 \int r^2 \cdot r^{-1} J_1(r) dr \\ &= - r^2 J_1(r) + 3 \int r[-dJ_0(r)] = - r^2 J_1(r) - 3[rJ_0(r) - \int J_0(r) dr] \end{aligned}$$

由 8-2 题结果得

$$\int r^2 J_2(r) dr = - r^2 J_1(r) - 3rJ_0(r) + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} r^{2k+1} + c$$

c 为任意常数.

注 1. 与 8-1 题相同, 计算含 Bessel 函数的不定积分也是利用递推公式及分部积分方法, 并应将结果化简.

2. 注意递推公式的一组微分公式, 并由 8-1 题, 8-2 题的结果可知, 在计算积分 $\int x^k J_s(x) dx$ 中, 当 k, s 为整数, 且 $k+s \geq 0$, 则 1°, 若 $k+s$ 为奇数, 经过递推公式中的微分公式, 可直接计算得结果; 2° 若 $k+s$ 为偶数, 经过递推公式中的微分公式, 将导出积分 $\int J_0(r) dx$, 不能再用递推公式, 必得通过对幂级数 $J_0(x)$ 逐项积分求得最终结果. 这两种情形在 8-1 题与 8-2 题中均有具体例子.

8-3 证明下列各式

$$1) J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x} J_0'(x)$$

$$2) J_2(x) + 3J_0'(x) + 4J_0'''(x) = 0$$

证 1) 证法一 对递推公式 $[x^{-n} J_n(x)]' = -x^{-n} J_{n+1}(x)$, 将左端展开得

$$-nx^{-n-1} J_n(x) + J_n'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (1)$$

在 (1) 中取 $n=1$ 得

$$-\frac{J_1(x)}{x} + J_1'(x) = -J_2(x)$$

即

$$J_2(x) = \frac{J_1(x)}{x} - J_1'(x) \quad (2)$$

又由递推公式有

$$-J_0'(x) = J_1(x) \quad (3)$$

将 (3) 代入 (2) 得:

$$J_2(x) = -\frac{J_0'(x)}{x} + J_0''(x)$$

此即所求.

证法二 在递推公式 $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$ 中取 $n=1$ 得

$$J_0(x) = J_2(x) + 2J_1'(x)$$

即

$$J_2(x) = J_0(x) - 2J_1'(x) \quad (1)$$

又

$$-J_0'(x) = J_1(x) \quad (2)$$

将 (2) 代入 (1) 得

$$J_2(x) = J_0(x) + 2J_0''(x) \quad (3)$$

由递推公式 $[xJ_1]' = xJ_0(x)$ 展开左端得

$$J_1(x) + xJ_1'(x) = xJ_0(x) \quad (4)$$

将 (2) 代入 (4) 得

$$J_0(x) = -\frac{J'_0(x)}{x} + J''_0(x) \quad (5)$$

将(5)代入(3)得

$$J_2(x) = -\frac{J'_0(x)}{x} + J''_0(x)$$

2) 证 在递推公式 $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$ 中取 $n=2$ 得

$$J_3(x) = J_1(x) - 2J'_2(x) \quad (1)$$

取 $n=1$ 并两端求导得

$$J'_2(x) = J'_0(x) - 2J''_1(x) \quad (2)$$

(2)代入(1)得

$$J_3(x) = J_1(x) - 2J'_0(x) + 4J''_1(x) \quad (3)$$

又

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (4)$$

(4)代入(3)得

$$J_3(x) = -3J'_0(x) - 4J'''_0(x)$$

即

$$J_3(x) + 3J'_0(x) + 4J'''_0(x) = 0$$

注 本题证明方法是利用递推公式,并用 $J_0(x)$ 及其各阶导表示高阶 Bessel 函数. 证法不是唯一的.

8-4 证明

$$\int x^n J_0(x) dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2}J_0(x) dx$$

证 利用递推关系 $d[xJ_1(x)] = xJ_0(x)dx$ 及关系 $J_1(x) = -J'_0(x)$, 并用分部积分法有

$$\begin{aligned} \int x^n J_0(x) dx &= \int x^{n-1} x J_0(x) dx = \int x^{n-1} d[xJ_1(x)] \\ &= x^{n-1} \cdot xJ_1(x) - (n-1) \int x^{n-2} \cdot xJ_1(x) dx \\ &= x^n J_1(x) + (n-1) \int x^{n-1} dJ_0(x) \\ &= x^n J_1(x) + (n-1)[x^{n-1}J_0(x) - (n-1) \int x^{n-2}J_0(x) dx] \\ &= x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2}J_0(x) dx \end{aligned}$$

注 1. 本题结果给出了积分 $\int x^n J_0(x) dx$ 的递推公式:

$$I_n = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2 I_{n-2}$$

2. 由此递推公式可见,当 n 为奇数时,最终一项积分将为 $\int xJ_0(x) dx =$

$\int d[xJ_l(x)] = xJ_1(x) + c$. 即 I_n 完全可用 $J_1(x), J_0(x)$ 表达. 当 n 为偶数时, 最终一项积分将为 $\int J_0(x) dx$. 只能通过幂级数 $J_0(x)$ 的逐项积分得到结果.

8-5 设 $\mu_m^{(1)}$ 是 $J_1(x)$ 的第 m 个正零点, $(m=1, 2, \dots)$, 将函数 $f(x)=x$ ($0 < x < 1$) 展为 $J_1(\mu_m^{(1)}x)$ 的 Fourier-Bessel 级数.

解 函数系 $\{J_1(\mu_m^{(1)}x)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $[0, 1]$ 上构成正交系, 且其模平方 $L_m^2 = \int_0^1 x^2 J_1^2(\mu_m^{(1)}x) dx = \frac{1}{2} J_0^2(\mu_m^{(1)}) = \frac{1}{2} J_2^2(\mu_m^{(1)}), (m=1, 2, \dots)$. 故设

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_1(\mu_m^{(1)}x)$$

由正交性得

$$A_m = \frac{1}{\frac{1}{2} J_0^2(\mu_m^{(1)})} \int_0^1 x \cdot f(x) J_1(\mu_m^{(1)}x) dx \quad (m=1, 2, \dots)$$

由递推关系 $d[x^2 J_2(x)] = x^2 J_1(x) dx$ 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot f(x) J_1(\mu_m^{(1)}x) dx &= \int_0^1 x^2 \cdot J_1(\mu_m^{(1)}x) dx = \frac{1}{[\mu_m^{(1)}]^3} \int_0^1 d[(\mu_m^{(1)}x)^2 J_2(\mu_m^{(1)}x)] \\ &= \frac{1}{[\mu_m^{(1)}]^3} \cdot (\mu_m^{(1)}x)^2 J_2(\mu_m^{(1)}x) \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{\mu_m^{(1)}} J_2(\mu_m^{(1)}). \end{aligned}$$

在递推关系 $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$ 中, 取 $n=1$, 令 $x = \mu_m^{(1)}$, 得 $J_2(\mu_m^{(1)}) = -J_0(\mu_m^{(1)})$

$$\therefore A_m = \frac{2}{J_0^2(\mu_m^{(1)})} \frac{1}{\mu_m^{(1)}} J_2(\mu_m^{(1)}) = \frac{-2}{\mu_m^{(1)} J_0(\mu_m^{(1)})}$$

于是, 所求展式为

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{\mu_m^{(1)} J_0(\mu_m^{(1)})} J_1(\mu_m^{(1)}x) \quad 0 < x < 1$$

注 1. 首先应注意, 若 $\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$ 的第 m 个正零点, 则函数系 $\{J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}x)\}_{m=1}^{\infty}$

在区间 $[0, a]$ 上构成正交系, 其模平方为 $L_m^2 = \int_0^a x J_n^2(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}x) dx = \frac{1}{\frac{a^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})}$,

$(m=1, 2, \dots)$. 对本题说, $n=1, a=1$;

2. 由 Fourier-Bessel 级数可展性条件知, 被展开函数 $f(x)$ 应在 $[0, a]$ 的边界上满足边界条件 $f(a)=0, |f(0)| < +\infty$. 在 $(0, a)$ 内具一阶连续导及二阶逐段

连续导. 则 $f(x)$ 可关于 $\{J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}x)\}_{m=1}^{\infty}$ 展为 (绝对且一致收敛的) Fourier-Bessel 级

$$数 f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}x).$$

在本题中, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内满足可展性条件, 有 $|f(0)| < +\infty$, 而不满足 $f(1) = 0$ 条件, 但只要考虑函数 $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x=1 \\ f(x), & x \in [0, 1) \end{cases}$. 由于 $f_1(x)$ 完全满足可展性条件, 故应有

$$f_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_1(\mu_m^{(1)}x), \quad 0 < x < 1$$

其中

$$A_m = \frac{1}{L_m^2} \int_0^1 x f_1(x) J_1(\mu_m^{(1)}x) dx$$

由定积分知识可知, 在此积分中, 改变被积函数在有限多个点处的函数值, 积分值不变. 故当用 $f(x)$ 替换 $f_1(x)$ 时, 积分值不变, 在 $0 < x < 1$ 内, $f(x) = f_1(x)$. 故 $f_1(x)$ 的展式即 $f(x)$ 的展式.

这意味着 $f(x)$ 仅仅在右端点处不满足取零值边界条件时, 并不影响它的可展性及展开系数的计算结果. 但在 $x=0$ 处的有界性条件是不可缺的.

8-6 设 $\alpha_i (i=1, 2, \dots)$ 是方程 $J_0(2x)=0$ 的正根, 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

展为 Bessel 函数 $J_0(\alpha_i x)$ 的级数.

解 设 $\mu_m^{(0)}$ 是 $J_0(x)$ 的第 m 个正零点, 则由题设有 $J_0(2\alpha_m) = 0$, 因而 $\alpha_m = \frac{\mu_m^{(0)}}{2}$. 问题即要将所给 $f(x)$ 按 $\{J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x)\}_{m=1}^{\infty}$ 展为级数.

如 8-5 题所指出, 函数系 $\{J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x)\}_{m=1}^{\infty}$ 在区间 $[0, 2]$ 上构成正交系. 其模平方

$$L_m^2 = \int_0^1 x J_0^2(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x) dx = \frac{4}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)}) = 2 J_1^2(2\alpha_m) \quad (m=1, 2, \dots)$$

设 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x)$. 由正交性得

$$A_m = \frac{1}{L_m^2} \int_0^2 x f(x) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{2} x\right) dx$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cdot f(x) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{2} x\right) dx &= \int_0^1 x \cdot 1 \cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{2} x\right) dx + 0 \\ &= \int_0^1 x J_0(\alpha_m x) dx = \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^1 d[(\alpha_m x) J_1(\alpha_m x)] \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2} \cdot (\alpha_m x) J_1(\alpha_m x) \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) \end{aligned}$$

$$\therefore A_m = \frac{1}{2J_1^2(2\alpha_m)} \cdot \frac{J_1(\alpha_m)}{\alpha_m} = \frac{J_1(\alpha_m)}{2\alpha_m J_1^2(2\alpha_m)}$$

于是, 所求展式为

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_m)}{2\alpha_m J_1^2(2\alpha_m)} J_0(\alpha_m x).$$

注 本题的关键在于注意 α_i 与 $J_0(x)$ 第 i 个正零点关系. 从而得以确定函数系 $\{J_0(\alpha_m x)\}_{m=1}^{\infty}$ 在区间 $[0, 2]$ 上构成正交系, 并求得其模平方 L_m^2 .

8-7 设 $\mu_m^{(1)}$ 为 $J_1(x)$ 的第 m 个正零点, 将 $f(x) = 1 - \frac{x^2}{R^2}$ 在 $[0, R]$ 关于 $\{1,$

$J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x)\}_{m=1}^{\infty}$ 展开.

解 设 $f(x) = A_0 \cdot 1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x)$.

由 $\{1, J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $[0, R]$ 上的正交性得

$$A_0 = \frac{1}{L_0^2} \int_0^R x \cdot f(x) \cdot 1 dx = \frac{2}{R^2} \int_0^R x (1 - \frac{x^2}{R^2}) dx = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L_m^2} \int_0^R x \cdot f(x) \cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x\right) dx \\ &= \frac{1}{L_m^2} \left(\int_0^R x \cdot 1 \cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x\right) dx - \int_0^R x \cdot \frac{x^2}{R^2} J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x\right) dx \right) \\ &= \frac{-1}{L_m^2} \int_0^R \frac{x^3}{R^2} J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x\right) dx = \frac{-1}{R^2 L_m^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\mu_m^{(1)}}{R})^4} \int_0^R \left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x\right)^3 J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x\right) d\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} x\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{R^2 L_m^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\mu_m^{(1)}}{R})^4} \cdot \{[(\mu_m^{(1)})^3 - 4\mu_m^{(1)}]J_1(\mu_m^{(1)}) + 2(\mu_m^{(1)})^2 J_0(\mu_m^{(1)})\}$$

$$= \frac{-4}{(\mu_m^{(1)})^2 J_0(\mu_m^{(1)})}$$

所以

$$1 - \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4}{[(\mu_m^{(1)})^2 J_0(\mu_m^{(1)})] J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}x)}$$

注 1. 注意函数关于 $\{1, J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}x)\}_{m=1}^{\infty}$ 展开式中含有常数项, 正像 Fourier

余弦展式中有常数项一样, 该常数项即为函数关于正交函数系中元素 1 的系数 A_0 ;

2. 本题 $f(x) = 1 - \frac{x^2}{R^2}$, 计算 $A_m (m=1, 2, \dots)$ 时, 积分 $\int_0^R x f(x) J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}x) dx$

中第一项 $\int_0^R x \cdot 1 \cdot J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}x) dx$ 为 0. 利用了元素 1 与元素 $J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}x)$ 在 $[0, R]$ 上的正交性 ($m=1, 2, \dots$), 第二项经变量代换可化为 8-1 题的 1).

8-8 用分离变量法解定解问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad 0 < r < R, t > 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad |u|_{r=0} < +\infty \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad 0 < r < R \end{array} \right. \quad (4)$$

解 令

$$u(r, t) = F(r)T(t) \quad (5)$$

将(5)代入(1)并分离变量得

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)}{F(r)} \stackrel{\text{令}}{=} \lambda$$

于是有

$$\ddot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \lambda F(r) = 0 \quad (7)$$

令(5)满足(2)得

$$F'(R) = 0 \quad (7)_1$$

$$|F(0)| < +\infty \quad (7)_2$$

(7)、(7)₁、(7)₂ 联立得带有第二类齐次边界条件及自然有界性条件的固有值问题:

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0 \\ F'(R) = 0 \\ |F(0)| < +\infty \end{cases} \quad \begin{matrix} (7) \\ (7)_1 \\ (7)_2 \end{matrix}$$

当 $\lambda=0$ 时, (7) 成为普通常微分方程

$$[rF'_0(r)]' = 0$$

其通解为 $F_0(r) = D_0 \ln r + C_0$. C_0, D_0 任意常数.

令其满足 (7)₁ 与 (7)₂ 得

$$D_0 = 0, \quad C_0 \neq 0 \text{ 任意}$$

即当 $\lambda_0=0$ 时, (7), (7)₁, (7)₂ 的非零解 $F_0 = C_0 \neq 0$. 为方便, 取 $F_0 = 1$.

当 $\lambda > 0$ 时 (7) 为零阶 Bessel 方程. 其通解为

$$F(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + D_1 Y_0(\sqrt{\lambda}r)$$

其中 $J_0(x), Y_0(x)$ 分别为第一类、第二类零阶 Bessel 函数

由 (7)₂ 知, $D_1 = 0$. 故 $C_1 \neq 0$

由 (7)₁ 有 $F'(R) = C_1 \sqrt{\lambda} J'_0(\sqrt{\lambda}R) = -C_1 \sqrt{\lambda} J_1(\sqrt{\lambda}R) = 0$.

故得 $J_1(\sqrt{\lambda}R) = 0$ 因此 $\sqrt{\lambda}R = \mu_m^{(1)} \quad (m=1, 2, \dots), \mu_m^{(1)}$ 为 $J_1(x)$ 是第 m 个正零点.

由此得

$$\lambda_m = \left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}\right)^2, \quad F_m(r) = C_1 J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}r\right) \quad (\text{取 } C_1 = 1)$$

于是该解问题的固有值为 $\{0, \left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}\right)^2\}_{m=1}^\infty$, 固有函数系为 $\{1, J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}r\right)\}_{m=1}^\infty$.

将 λ 值代入 (6) 得

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t \quad T_m(t) = A_m \cos \frac{\mu_m^{(1)}}{R} at + B_m \sin \frac{\mu_m^{(1)}}{R} at$$

$$\therefore u_m(r, t) = T_m(t) F_m(r) \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{叠加得 } u(r, t) = (A_0 + B_0 t) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos \frac{\mu_m^{(1)}}{R} at + B_m \sin \frac{\mu_m^{(1)}}{R} at] J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right) \quad (8)$$

令 (8) 满足 (3) 得

$$u(r, 0) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right) = 0$$

由固有函数系的正交性得

$$A_0 = A_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

令(8)满足(4)得

$$u_t(r, 0) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m^{(1)}}{R} a \cdot B_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right) = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad (9)$$

由 8-7 题结果得

$$B_0 = \frac{1}{2}, \quad \frac{\mu_m^{(1)}}{R} a \cdot B_m = \frac{-4}{[\mu_m^{(1)}]^2 J_0(\mu_m^{(1)})}$$

$$\therefore B_0 = \frac{1}{2} \quad B_m = \frac{-4R}{a \cdot [\mu_m^{(1)}]^3 J_0(\mu_m^{(1)})}$$

于是

$$u(r, t) = \frac{t}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4R}{a [\mu_m^{(1)}]^3 J_0(\mu_m^{(1)})} \sin \frac{\mu_m^{(1)}}{R} at \cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right)$$

注 由本题求解过程可见,用分离变量法求解圆膜振动问题导出的固有值问题(7)~(7)₂ 为 Bessel 方程的边值问题(且当膜的位移与 θ 无关时还为零阶 Bessel 方程),这是与第 7 章中的固有值问题所不同之处. 正因为这一点,这里的解是关于 Bessel 函数系的展开形式,而不是三角函数的展开形式. 注意方法的本质没有任何改变.

8-9 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < r < R, 0 < z < h \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u|_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u|_{z=h} = A, \end{cases} \quad A \text{ 为常数}, 0 < r < R \quad (4)$$

解 这是高为 h , 半径为 R 的圆柱区域内的 Laplace 方程第一边值问题.

用分离变量法解. 设

$$u(r, z) = Z(z)F(r) \quad (5)$$

将(5)代入(1)并分离变量得

$$\frac{F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)}{F(r)} = \frac{-Z'(z)}{Z(z)} \stackrel{\text{令}}{=} \lambda$$

有

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \lambda F(r) = 0 \quad (6)$$

$$Z'(z) - \lambda Z(z) = 0 \quad (7)$$

令(5)满足(2)得

$$F(R) = 0 \quad (6)$$

并注意有 $|u(0, z)| < +\infty$ 得

$$|F(0)| < +\infty \quad (6)_2$$

联立 (6), (6)₁, (6)₂ 得固有值问题

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0 & (6) \\ F(R) = 0 & (6)_1 \\ |F(0)| < +\infty & (6)_2 \end{cases}$$

解之得固有值为 $\lambda_m = (\frac{\mu_m^{(0)}}{R})^2$, 固有函数系为 $F_m(r) = J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)$ ($m=1, 2, \dots$)

其中 $\mu_m^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的第 m 个正零点.

将 λ_m 值代入 (7) 得

$$Z_m''(z) - (\frac{\mu_m^{(0)}}{R})^2 Z_m(z) = 0$$

解得

$$Z_m(z) = A_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{R}z} + B_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}z}$$

所以

$$u_m(r, z) = Z_m(z)F_m(r)$$

叠加得

$$u(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{R}z} + B_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}z}) J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r) \quad (8)$$

令 (8) 满足 (3), (4) 得

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m) J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r) = 0 \quad (9)$$

$$u(r, h) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{R}h} + B_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}h}) J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r) = A \quad (10)$$

由 (9), (10) 得

$$\begin{cases} A_m + B_m = 0 \\ A_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{R}h} + B_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}h} = C_m \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots$$

其中

$$C_m = \frac{A}{R^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^R r \cdot 1 \cdot J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r) dr = \frac{2}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})}$$

解得

$$B_m = -A_m$$

$$2A_m = C_m / \sinh \frac{\mu_m^{(0)}}{R}h$$

将 A_m, B_m 值代入(8)得

$$u(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{R} z}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{R} h} J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r \right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2A}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{R} z}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{R} h} J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r \right)$$

注 由于本问题为圆柱内 Laplace 方程第一边值问题,且未知函数与 θ 无关.

故由分离变量法得到的形式解是关于固有函数系 $\{J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r)\}_{m=1}^{\infty}$ 的展开式.

8-10 解定解问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad 0 < r < R, t > 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |u|_{r=0} < +\infty \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad 0 < r < R \end{array} \right. \quad (4)$$

解 这是一个圆盘的瞬时温度分布问题.其边界绝热,初始温度已知,且温度分布与 θ 无关.用分离变量法解.由 8-8 题知,对应的固有值问题为

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(R) = 0 \end{array} \right. \quad (5)_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |F(0)| < +\infty \end{array} \right. \quad (5)_2$$

$T(t)$ 满足方程

$$\dot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

解(5)~(5)₂ 得固有值为 $\{0, (\frac{\mu_m^{(1)}}{R})^2\}_{m=1}^{\infty}$, 固有函数系为 $\{1, J_0(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r)\}_{m=1}^{\infty}$

其中 $\mu_m^{(1)}$ 为 $J_1(x)$ 的第 m 个正零点.

(6)的解为

$$T_0(t) = A_0 \quad A_0 \text{ 为任意常数}$$

$$T_m(t) = A_m e^{-\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} a\right)^2 t} \quad A_m \text{ 为任意常数}$$

(1)~(4)的形式解为

$$u(r, t) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right) \quad (7)$$

令(7)满足(4)得

$$u(r, 0) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right) = 1 - \frac{r^2}{R^2}$$

由 8-7 题结果有

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_m = \frac{-4}{\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 J_0\left(\mu_m^{(1)}\right)} \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\therefore u(r, t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4}{\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 J_0\left(\mu_m^{(1)}\right)} e^{-\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right)$$

注 1. 由于圆盘边界满足第二类边界条件, 故固有值及固有函数系与 8-8 题的相同, 解的表达式中含有常数项;

2. 由 8-8 题~8-10 题各题可看出, 当用分离变量求解圆盘上的热传导、圆膜的振动及圆柱域内的稳恒热场问题时, 所导出的固有值问题是 Bessel 方程固有值问题, 且当问题与 θ 无关时(径向对称分布), 将是零阶 Bessel 方程固有值问题. 其固有函数系是零阶 Bessel 函数系 $\{J_0(\sqrt{\lambda_m} r)\}$ 或者 $\{1, J_0(\sqrt{\lambda_m} r)\}$, 视边界条件为第一或者第二类而定.

8.2 勒让德多项式

8.2.1 基本要求

1. 了解勒让德方程的导出及其幂级数解法.
2. 了解不同阶的勒让德多项式 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 在 $[-1, 1]$ 上的正交性及其模平方.
3. 掌握勒让德多项式的递推公式.
4. 掌握函数 $f(x)$ 的广义 Fourier 级数展开法.

8.2.2 内容提要

1. 在球坐标系下, 对拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程进行分离变量, 且当所研究问题以极轴为对称时, 将得到 n 阶勒让德方程

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + n(n+1)P(x) = 0 \quad -1 < x < 1$$

当 n 为整数时, 其满足在 $x = \pm 1$ 处有界的解为多项式

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{2^n \cdot m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \quad -1 < x < 1$$

$$\text{其中 } M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}; \quad \text{或 } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

称 $P_n(x)$ 为勒让德(Legendre)多项式.

2. 不同阶数的勒让德多项式在 $[-1, 1]$ 上构成正交函数系

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

其中 $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$ 的平方根称为 $P_n(x)$ 的模.

3. 勒让德多项式的递推公式

$$1) (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$2) (2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$$

$$3) P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

4. 若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具一阶连续导及逐段连续二阶导, 且在端点处有界, 则有广义 Fourier 级数展式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x) \quad -1 < x < 1$$

$$\text{其中 } f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

8.2.3 例题解析

8-11 证明: 1) $P_n(1) = 1$ 2) $P_n(-1) = (-1)^n$ 3) $P_{2n-1}(0) = 0$

$$4) P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2}$$

证 1) 记 $(x-1)^n = u$, $(x+1)^n = v$

$$\text{则 } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} [uv]^{(n)}$$

由乘积高阶导的莱布尼茨公式得

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} [u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + \dots + uv^{(n)}]$$

注意括号内除第一项外, 其余各项均含有因子 $(x-1)$, 故在上式中令 $x=1$, 可得

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n \cdot n!} u^{(n)} v \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^n \cdot n!} n! (x+1)^n \Big|_{x=1} = 1$$

2) 同理,在表达式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} [u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + uv^{(n)}]$$

中,括号内除最后一项外,其余各项均含有因子 $(x+1)$.故在上式中令 $x=-1$,可得

$$\begin{aligned} P_n(-1) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} uv^{(n)} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2^n \cdot n!} n! (x-1)^n \Big|_{x=-1} \\ &= \frac{n!}{2^n \cdot n!} (-2)^n = (-1)^n \end{aligned}$$

$$3) \because P_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{2^n \cdot m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m},$$

$$\text{其中 } M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $n=2k-1$ ($k=1,2,\cdots$)时, $P_{2k-1}(x)$ 中最低次幂为 $x^{2k-1-2(k-1)}=x$,其系数(对应于 $m=k-1$)为

$$a_1 = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} (k-1)! k!} \neq 0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

即 $P_{2k-1}(x)$ 中不含常数项,所以 $P_{2k-1}(0)=0$

4) 由3)可知, $P_{2k}(x)$ 最低次幂为 $x^{2k-2k}=x^0$,其系数(对应于 $m=k$)为

$$a_0 = \frac{(-1)^k (4k-2k)!}{2^{2k} \cdot k! (2k-k)! (2k-2k)!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \neq 0 \quad (k=0,1,\cdots)$$

即 $P_{2k}(x)$ 中含有常数项 $a_0 \neq 0$.

$$\therefore P_{2k}(0) = a_0 = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2}$$

注 1. 本题的证明均从 $P_n(x)$ 表达式出发,但不同目的采用不同表达式的形式;1),2)用有限和形式难易求出,采用微分形式,并用高阶微分公式即得结果;3),4)即要确定 $P_{2n}(x)$ 与 $P_{2n-1}(x)$ 是否含有常数项,故采用有限和形式;

2. 本题结果可作为 $P_n(x)$ 的常用性质.

8-12 证明 $P_{2n}(x)$ 为偶函数, $P_{2n-1}(x)$ 为奇函数.

证 由 $P_{2n}(x)$ 与 $P_{2n-1}(x)$ 的表达式易见

$$P_{2n}(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0$$

$$P_{2n-1}(x) = b_{2n-1}x^{2n-1} + b_{2n-3}x^{2n-3} + \cdots + b_1x$$

$$\therefore P_{2n}(x) = P_{2n}(-x) \quad -1 < x < 1$$

$$P_{2n-1}(x) = -P_{2n-1}(-x) \quad -1 < x < 1$$

注 由此可见, $P_{2n}(x)$ 仅含偶次幂, $P_{2n-1}(x)$ 仅含奇次幂. 本结果又是 $P_n(x)$ 的一常用性质. 且 8-11 题 3), 4) 直接可由此得出.

8-13 设 k 为正整数, 证明:

$$x^{2k} = A_{2k}P_{2k}(x) + A_{2k-2}P_{2k-2}(x) + \cdots + A_0P_0(x)$$

$$x^{2k-1} = A_{2k-1}P_{2k-1}(x) + A_{2k-3}P_{2k-3}(x) + \cdots + A_1P_1(x)$$

证 设 n 为正整数, 则 x^n 在 $[-1, 1]$ 上满足广义 Fourier 级数可展条件, 故有

$$x^n = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(x) \quad -1 < x < 1 \quad (1)$$

其中

$$A_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 x^n P_m(x) dx \quad (2)$$

首先, 注意 $P_m(x)$ 的奇偶性及积分区间的对称性, 可知, 当 n 与 m 奇偶性相反时,

(2) 的被积式为 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 故积分值为 0.

于是有

$$x^{2k} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} P_{2m}(x) \quad -1 < x < 1 \quad (3)$$

$$x^{2k-1} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1} P_{2m-1}(x) \quad (4)$$

其次, 再来证当 $n < m$, 且 n, m 奇偶性相同时, 有 $\int_{-1}^1 x^n P_m(x) dx = 0$.

$$\therefore I = \int_{-1}^1 x^n P_m(x) dx = \frac{1}{2^m \cdot m!} \int_{-1}^1 x^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx, \text{ 由分部积分}$$

$$I = \frac{1}{2^m \cdot m!} \left\{ x^n \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m \right|_{-1}^1 - n \int_{-1}^1 x^{n-1} d \left[\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (x^2 - 1)^m \right] \right\}$$

注意 $(x^2 - 1)^m = (x-1)^m (x+1)^m$ 以 $x = \pm 1$ 为 m 级零点, 故其 $m-1$ 阶导函数以 $x = \pm 1$ 为一级零点, 所以 $\{ \cdot \}$ 中第一项为 0, 即

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-n}{2^m \cdot m!} \int_{-1}^1 x^{n-1} d\left[\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(x^2-1)^m\right] \\
&= \frac{-n}{2^m \cdot m!} \left\{ x^{n-1} \cdot \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(x^2-1)^m \right|_{-1}^1 - (n-1) \int_{-1}^1 x^{n-2} d\left[\frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}}(x^2-1)^m\right] \right\} \\
&= \dots = \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^m \cdot m!} \int_{-1}^1 \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(x^2-1)^m \cdot dx \\
&= \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^m \cdot m!} \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}(x^2-1)^m \Big|_{-1}^1 = 0 \quad (m > n)
\end{aligned}$$

(因为 $(x^2-1)^m$ 以 $x=\pm 1$ 为 m 级零点, 其 $m-n-1$ 阶导函数以 $x=\pm 1$ 为 $(n+1)$ 级零点, 故 $I=0$), 于是由(2)可知, 当 $m>n$ 时, $A_m=0$, 即(3), (4)应取形式

$$x^{2k} = \sum_{m=0}^k A_{2m} P_{2m}(x) = A_0 P_0(x) + \dots + A_{2k} P_{2k}(x) \quad -1 < x < 1 \quad (6)$$

$$x^{2k-1} = \sum_{m=1}^k A_{2m-1} P_{2m-1}(x) = A_1 P_1(x) + \dots + A_{2k-1} P_{2k-1}(x) \quad -1 < x < 1 \quad (7)$$

注 1. 本题证明分两步: 第一步, 利用 $P_n(x)$ 奇偶性由(1)得到(3), (4); 第二步, 证明

当 $n < m$ 时, (n, m 为正整数), $\int_{-1}^1 x^n P_m(x) dx = 0$. 由(3), (4)得到(5), (6). 这步证明中运用 $P_m(x)$ 微分表达形式及分部积分法;

2. 本题结果说明, 单项式 x^n 在 $[-1, 1]$ 上的广义 Fourier 级数只含有限多项, 最高次项勒让德多项式为 $P_n(x)$. 又当 n 为奇数时, 这有限多项均为奇次勒让德多项式. 当 n 为偶数时, 这有限多项均为偶次勒让德多项式.

8-14 利用 8-13 题结果, 将 1) $f(x)=x^2$, 2) $f(x)=x^3$ 在 $(-1, 1)$ 上展为广义 Fourier 级数.

解 解法一 1) 由 8-13 题, 可设

$$x^2 = A_0 P_0(x) + A_2 P_2(x) \quad (1)$$

由 8-12 题知

$$P_0(x) = 1$$

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_0$$

代入(1)得

$$x^2 = A_2 a_2 x^2 + (A_2 a_0 + A_0)$$

由展开式唯一性得

$$\begin{cases} A_2 a_2 = 1 \\ A_2 a_0 + A_0 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A_2 = \frac{1}{a_2} \\ A_0 = -A_2 a_0 = -\frac{a_0}{a_2} \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

注意 $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, 由 $P_2(x)$ 表达式故可得 $a_2 = \frac{3}{2}, a_0 = -\frac{1}{2}$. 代入 (2), (3)

即得

$$A_2 = \frac{2}{3}, \quad A_0 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \quad -1 < x < 1$$

$$2) \text{ 设 } x^3 = A_1 P_1 + A_3 P_3(x) \quad (1)$$

由 8-12 题, 有

$$P_1(x) = x \quad P_3(x) = a_3 x^3 + a_1 x$$

代入 (1) 得

$$x^3 = A_3 a_3 x^3 + (A_3 a_1 + A_1)x$$

由展开式唯一性得

$$\begin{cases} A_3 a_3 = 1 \\ A_1 + a_1 A_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

解得

$$A_3 = \frac{1}{a_3}, \quad A_1 = -a_1 A_3$$

$$\text{因为 } P_3(x) = \sum_{m=0}^1 \frac{(-1)^m (6-2m)!}{2^3 m! (3-m)! (3-2m)!} x^{3-2m} = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$\text{即 } a_3 = \frac{5}{2} \quad a_1 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{因此 } A_3 = \frac{1}{a_3} = \frac{2}{5}, \quad A_1 = -a_1 A_3 = \frac{3}{5}$$

于是

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) \quad -1 < x < 1$$

$$\text{解法二 } 1) \text{ 设 } x^2 = A_2 P_2(x) + A_0 P_0(x).$$

设 $P_2(x)$ 的系数 (按由高次到低次项顺序) 组成 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $P_0(x)$ 的系数组成

列向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \end{pmatrix}$, x^2 的系数组成列向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

因为 $|(\alpha_1 \alpha_2)| \neq 0$, 所以 A_2, A_0 为线性代数方程组 $(\alpha_1 \quad \alpha_2) \begin{pmatrix} A_0 \\ A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的唯

一解. 由矩阵的初等变换及 α_1, α_2 可得

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

所以
$$A_2 = \frac{2}{3} \quad A_0 = \frac{1}{3}$$

即
$$x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \quad -1 < x < 1$$

2) 用上述方法, 令 $P_3(x)$ 的系数组成一维列向量 α_1 , $P_1(x)$ 的系数组成一维列向量 α_2 , x^3 的系数组成一维列向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

所以
$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) \quad -1 < x < 1$$

注 1. 解法一与解法二均为待定系数法. 但解法一立足于 8-13 题结果, 由所求展式两端均为 x 的多项式, 比较同次幂系数, 即得结果;

解法二将问题化为线性方程组, 通过初等变换, 求得结果, 当已列出 $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ 的系数表时, 此法可方便求得直至 x^n 的广义 Fourier 展开式;

2. 解法二还可推广到多项式的展开系数计算.

8-15 将 x^4 在 $(-1, 1)$ 展为广义 Fourier 级数.

解 由 8-13 题结果知

$$x^4 = A_4 P_4(x) + A_2 P_2(x) + A_0 P_0(x)$$

为求系数 A_4, A_2, A_0 , 依次以 $P_4(x)$ 的系数、 $P_2(x)$ 的系数、 $P_0(x)$ 的系数 (由高次到低次项) 组成三维列向量作三阶阵 K

$$K = \begin{pmatrix} \frac{35}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{30}{8} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

并解线性非齐次方程组

$$K \begin{bmatrix} A_4 \\ A_2 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{得} \quad \begin{bmatrix} A_4 \\ A_2 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{35} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore x^4 = \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{4}{7}P_2(x) + \frac{1}{5}P_0(x)$$

注 由此可见将单项式 x^k 按函数系 $\{P_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$ 展开的问题, 即计算积分

$$\frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x^k P_l(x) dx \quad (l \leq k) \text{ 问题可转化为解线性代数方程组问题, 只要利用 } P_0(x)$$

$\cdots P_k(x)$ 的系数作成相应的方程组系数矩阵即可简单求得结果.

8-16 计算积分 $\frac{2l+1}{2} \int_0^1 P_0(x) P_l(x) dx.$

解 设 $I = \int_0^1 P_0(x) P_l(x) dx$, 则原积分 $= \frac{2l+1}{2} I.$

1° 当 l 为偶数时, 由 $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 的正交性并注意 $P_0(x) = 1$, 有

$$I = \int_0^1 P_0(x) P_l(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_0(x) P_l(x) dx = \begin{cases} 0, & l \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1, & l = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{原积分} = \begin{cases} 0, & l \text{ 为偶数}, l \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & l = 0 \end{cases}$$

2° 当 $l = 2n+1$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 时, 不能用上述正交性. 由递推公式

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1} [P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)]$$

得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 P_0(x) P_l(x) dx = \frac{1}{2(2n+1)+1} \int_0^1 [P'_{2(n+1)}(x) - P'_{2n}(x)] dx \\ &= \frac{1}{2(2n+1)+1} [P_{2(n+1)}(x) - P_{2n}(x)] \Big|_0^1 \end{aligned}$$

由 8-11 题结果知

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2(2n+1)+1} [P_{2n}(0) - P_{2(n+1)}(0)] \\ &= \frac{(-1)^n}{2(2n+1)+1} (4n+3) \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2 (2n+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2(2n+1)+1} (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\text{原积分} = \frac{2(2n+1)+1}{2} I = (-1)^n \frac{4n+3}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \quad n=0,1,2,\cdots$$

于是

$$\frac{2l+1}{2} \int_0^1 P_0(x) P_l(x) dx = \begin{cases} 0, & l=2n \quad (n=1,2,\cdots) \\ \frac{1}{2}, & l=0 \\ (-1)^n \frac{(4n+3)}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}, & l=2n+1, (n=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

注 多项式族 $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 在 $[-1,1]$ 上构成正交系, 本题积分区间为 $[0,1]$. 不能用正交系性质, 但由偶函数在对称区间上积分性质及 $P_{2n}(x)$ 为偶函数, 当 l 为偶数时便可用正交性得结果, 但当 l 为奇数时, 积分不能转化为 $[-1,1]$ 上的积分, 在这种情况下应用递推公式, 直接积分出结果.

$$8-17 \quad \text{计算积分} \frac{2l+1}{2} \int_0^1 x P_l(x) dx.$$

$$\text{解} \quad \text{设} \quad I = \int_0^1 x P_l(x) dx.$$

1° 当 $l=2n+1 \quad (n=0,1,2,\cdots)$ 时, $P_l(x)=P_{2n+1}(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的奇函数.

故

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x P_{2n+1}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_1(x) P_{2n+1}(x) dx$$

由正交性知

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x P_{2n+1}(x) dx = 0 \quad n=1,2,\cdots$$

当 $n=0$ 时

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x P_1(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{原积分} = \begin{cases} 0 & \text{当 } l=2n+1 \quad (n=1,2,\cdots) \\ \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} & \text{当 } l=1 \end{cases}$$

2° 当 $l=2n$ 时, $(n=1,2,\cdots)$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x P_{2n}(x) dx = \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \int_0^1 x \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \left[x \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} (x^2-1)^{2n} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} (x^2-1)^{2n} dx \end{aligned}$$

注意 $\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(x^2-1)^{2n}$ 以 $x=1$ 为一级零点. 故被积出部分为 0, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{-1}{2^{2n} \cdot (2n)!} \int_0^1 \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(x^2-1)^{2n} dx \\ &= \frac{-1}{2^{2n} \cdot (2n)!} \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(x^2-1)^{2n} \Big|_{x=0}^{x=1} \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(x^2-1)^{2n}$ 以 $x=1$ 为二级零点, 故

$$I = \frac{1}{2^{2n} \cdot (2n)!} \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(x^2-1)^{2n} \Big|_{x=0}$$

$\therefore (x^2-1)^{2n}$

$$= x^{4n} + \dots + a_{2n}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}2n(2n-1)\dots[2n-(n-1)+1]}{(n-1)!}x^{2n-2} + \text{低次}$$

项

$$\therefore \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(x^2-1)^{2n} \Big|_{x=0} = \frac{(-1)^{n+1}2n \cdot (2n-1) \dots (n+2) \cdot (2n-2)!}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2^{2n} \cdot (2n)!} \cdot \frac{(-1)^{n+1}2n(2n-1)\dots(n+2) \cdot (2n-2)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2^{2n} \cdot (2n)!} \cdot \frac{(-1)^{n+1}(2n)! \cdot (2n-2)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n-3)!!}{(2n+2)!!} \end{aligned}$$

$$\text{故原积分} = \frac{4n+1}{2}I = \frac{4n+1}{2} \cdot (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!} \quad (n=1, 2, \dots)$$

当 $l=0$ 时, $P_l(x) = P_0(x) = 1$

$$\therefore \int_0^1 xP_0(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$\text{原积分} = \frac{1}{2} \int_0^1 xP_0(x)dx = \frac{1}{4}$$

综合以上结果, 得

$$\frac{2l+1}{2} \int_0^1 xP_l(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{4}, & l=0 \\ 0, & l=2n+1, n=1, 2, \dots \\ \frac{1}{2}, & l=1 \\ (-1)^{n+1} \frac{4n+1}{2} \frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}, & l=2n, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

注 1. 本题与 8-16 题属同一类问题, 解法也一样. 在本题的情况 2° 中, 虽也可用递推公式求解, 但这里考虑到通过一次分部积分即可直接积出, 故采用了

$P_l(x)$ 的微分形式表达式.

8-18 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 1 < x < 0 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展为广义 Fourier 级数.

解 设 $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(x)$.

则
$$A_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \frac{2m+1}{2} \int_0^1 x P_m(x) dx$$

由 8-17 题结果有

$$f(x) = \frac{1}{4} P_0(x) + \frac{1}{2} P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+1) \cdot (2n-3)!!}{2(2n+2)!!} P_{2n}(x)$$

注 本题直接应用 8-17 题的结果, 使得问题简单, 否则必需重复 8-17 题计算过程方可得结果.

8-19 在半径为 1 的球内求调和函数 u , 使其在球面上取值 $3\cos 2\theta + 1$.

解 注意边界条件 $f(\theta)$ 与 φ 无关, 即问题为球内轴对称问题, 故可设 $u = u(r, \theta)$. 其定解问题为

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u|_{r=1} = 3\cos 2\theta + 1 \end{cases}$$

用球坐标表示, 有

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u}{\partial r} + \cot \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u|_{r=1} = 3\cos 2\theta + 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases} \quad (1)$$

用分离变量法解, 令

$$u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta) \quad (3)$$

代入(1)并分离变量得

$$\frac{r^2 R''(r) + 2rR'(r)}{R(r)} = \frac{\cot \theta \cdot \Phi'(\theta) + \Phi''(\theta)}{-\Phi(\theta)} \stackrel{\text{令}}{=} n(n+1)$$

则有

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0 \\ |R(0)| < +\infty \end{cases} \quad (4)$$

及

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \cot \theta \cdot \Phi'(\theta) + n(n+1)\Phi(\theta) = 0 \\ \left| \Phi(\theta) \right|_{\substack{\theta=0 \\ \theta=\pi}} < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

在(5)中, 令 $\cos \theta = x$, 则 $x \in (-1, 1)$, 并令 $\Phi(\theta) = \Phi(\cos^{-1} x) = P(x)$, (5) $\sim$ (5)' 化

为

$$\begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + n(n+1)P(x) = 0 & (6) \\ \left| P(x) \right|_{x=\pm 1} < +\infty & (6)' \end{cases}$$

(6)~(6)'即为定解问题(1)~(2)的固有值问题,(6)为勒让德方程,由(6)'知,其固有值 $n(n+1)$ 中 n 应取整数.且固有函数系为勒让德多项式 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

即 $\{\Phi_n(\theta) = P_n(\cos\theta)\}_{n=0}^{\infty}$

(4)~(4)'的通解为 $C_n r^n \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$\therefore u_n(r, \theta) = C_n r^n P_n(\cos\theta) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

叠加得

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta) \quad (7)$$

令(7)满足(2)得

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) = 3\cos 2\theta + 1 = 6\cos^2\theta - 2$$

$$\text{即} \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) = 6x^2 - 2$$

由 8-14 题的解法二

$$6x^2 - 2 = C_2 P_2(x) + C_0 P_0(x)$$

其中 C_a, C_0 满足

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_a \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

解之得

$$C_2 = 4, \quad C_0 = 0$$

代入(7)得

$$u(r, \theta) = 4r^2 P_2(\cos\theta) = 4r^2 \cdot \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = 2r^2(3\cos^2\theta - 1)$$

注 1. 球域内 Laplace 方程边值问题用分离变量法解时(轴对称情形),将导致勒让德方程固有值问题.即解的表达式是关于勒让德多项式的展开式(广义 Fourier 级数);

2. 由边界条件确定系数时,采用了 8-14 题的解法二.

8-20 在半径为 1 的球外部求调和函数 u ,使其在球面上满足 $u|_{r=1} = \cos^2\theta$.
且 $r \rightarrow +\infty$ 时, $u \rightarrow 0$.

解 定解问题为

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u}{\partial r} + \cot \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & r > 1, 0 < \theta < \pi \\ u|_{r=1} = \cos^2 \theta, & 0 < \theta < \pi \\ u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$

解 用分离变量法,同前题,可得

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R = 0 \\ R(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

及固有值问题

$$\begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + n(n+1)P(x) = 0 \\ |P(x)|_{x=\pm 1} < +\infty \end{cases}$$

(这里 $P(\cos \theta) = \Phi(\theta)$)

(4)~(4)'的通解为

$$R_n(r) = C_n r^{-(n+1)}$$

故(1)~(3)的解为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$$

令(6)满足(2)得

$$u(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta) = \cos^2 \theta$$

$$\text{即} \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) = x^2$$

由 8-14 题 1) 得

$$x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} P_0(x), \quad -1 < x < 1$$

$$\text{即知 } C_0 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{3}, \quad C_n = 0, \quad n \neq 0, 2$$

$$\begin{aligned} \therefore u(r, \theta) &= \frac{1}{3} r^{-1} P_0(\cos \theta) + \frac{2}{3} r^{-3} P_2(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{3} r^{-1} + \frac{2}{3} r^{-3} \cdot \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ &= \frac{1}{3} r^{-1} + \frac{1}{3} r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

注 由于本题是 Laplace 方程第一边值外问题,故应注意自然边界条件

$$u \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

8.3 第 8 章练习题

1. 证明递推公式

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

2. 在第一类边界条件下, 将 $f(r) = u_0$ (常数) 在 $(0, R)$ 上展为 Fourier-Bessel 级数.

(答 $u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2u_0}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r)$. $\mu_m^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的第 m 个正零点)

3. 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), & x^2 + y^2 < R^2 \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ u|_{x^2 + y^2 = R^2} = 0, & t > 0 \end{cases}$$

(答 $u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\left(\frac{\mu_m^{(0)} a}{R}\right)^2 t} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r)$, $C_m = \frac{\int_0^R r \varphi(r) J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r) dr}{R^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}$)

4. 求解球内定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < a, \quad 0 < \theta < \pi \\ u|_{r=a} = \cos^4 \theta, & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

(答 $u(r, \theta) = \frac{1}{5} P_0(\cos \theta) + \frac{4}{7} (\frac{r}{a})^2 P_2(\cos \theta) + \frac{8}{35} (\frac{r}{a})^4 P_4(\cos \theta)$)

5. 将 $f(x) = x^5$ ($-1 < x < 1$) 展为广义 Fourier 级数.

(答 $x^5 = \frac{8}{63} P_5(x) + \frac{4}{9} P_3(x) + \frac{3}{7} P_1(x)$)

第 9 章 定解问题的其它解法

9.1 行波法与积分变换法

9.1.1 基本要求

1. 掌握一维波动方程初值问题的达朗贝尔公式及其物理意义.
2. 了解三维波动方程初值问题的泊松公式及其物理解释, 并与二维情形比较, 认识区别.
3. 掌握定解问题的积分变换解法.

9.1.2 内容提要

1. 一维波动方程的初值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (1)$$

(1)的通解为

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (4)$$

f_1, f_2 为任意二阶可微函数.

(1)~(3)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (5)$$

(5)称为一维波动方程的初值问题的达朗贝尔公式.

其物理意义为: 初始扰动总是以行波方式沿 x 轴正负两方传播出去, 弦上任一点任一时刻的状态是上述左、右行波的叠加; 方程中的 a 为波的传播速度.

2. 三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u, & -\infty < x, y, z < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & -\infty < x, y, z < +\infty \end{cases} \quad (1)$$

的解为
$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{at} ds + \iint_{S_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{at} ds \right) \quad (4)$$

其中 $M = (x, y, z) \in R^3, \xi = x + at\beta_1, \eta = y + at\beta_2, \zeta = z + at\beta_3, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 为球面 S_{at}^M 的单位外法矢. S_{at}^M 为以 M 为心、 at 为半径的球面. 此公式称为三维波动方程初值问题的泊松公式.

其物理意义: (1) 空间任一点 M 在任意时刻 $t > 0$ 的状态完全由以该点为心, at 为半径的球面上初始状态决定; (2) 三维空间的局部有界域内的初始扰动导致空间各点在有限时段内受扰, 无持续后效. (3) 三维空间局部初始扰动的传播有清晰的前锋与后锋(波速为 a). 即惠更斯原理成立.

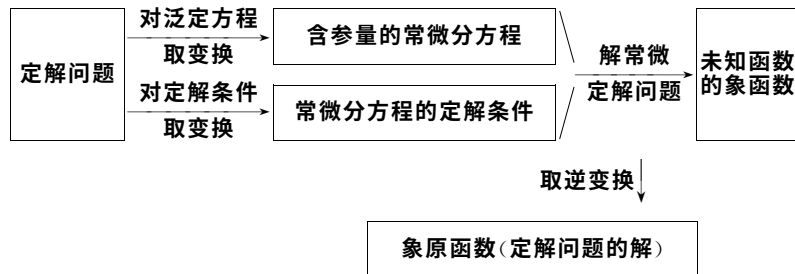
3. 当 $\varphi(x, y, z)$ 与 $\psi(x, y, z)$ 与 z 无关时, 泊松公式可化为二重积分形式:

$$u(M, t) = u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_{C_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \iint_{C_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right)$$

其中 C_{at}^M 是以 $M = (x, y)$ 为心, at 为半径的圆盘域, ξ, η 为该圆盘内的点. 此公式称为二维波动方程初值问题的泊松公式.

与三维相比, 不同点在于局部初始扰动对二维空间任一点的扰动有持续后效. 波的传播有清晰的前锋而无后锋, 此现象称为波的扩散. 即二维空间的波动, 惠更斯原理不成立.

4. 用积分变换法解定解问题主要步骤: 选择适当的变换



9.1.3 例题解析

9-1 解边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y, & x > 1, y > 0 \\ u|_{y=0} = x^2, & x > 1 \\ u|_{x=1} = \cos y, & y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

(3)

解 解法一 对(1)两端积分得通解

$$u(x, y) = \frac{x^3 y^2}{6} + \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \quad (4)$$

其中 $\varphi_1(y), \varphi_2(x)$ 为任意二阶可导函数.

令(4)满足(2), (3)得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(x) = x^2 \\ u(1, y) = \frac{y^2}{6} + \varphi_1(y) + \varphi_2(1) = \cos y \end{cases}$$

解得

$$\varphi_1(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} - 1 + \varphi_1(0) \quad (5)$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - \varphi_1(0) \quad (6)$$

将(5), (6) 代入(4) 得 $u(x, y) = \frac{x^3 y^2}{6} - \frac{y^2}{6} + x^2 + \cos y - 1$

解法二 用积分变换法解, 注意边界条件(2)可视为关于自变量 y 的初始条件, 故应选关于 y 的拉氏变换.

设 $\mathcal{L}[u] = U(x, s)$, s 为参量.

在(1)的两端关于 y 取 L -氏变换, 并利用微分性质得

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] = S\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=0} = \mathcal{L}[x^2 y] = x^2 \frac{1}{S^2}$$

对(2)两端关于 x 求导得 $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=0} = 2x$. 代入上式得

$$S \frac{dU}{dx} - 2x = x^2 \cdot \frac{1}{S^2} \quad (4)'$$

对(3)两端取 L -氏变换

$$U(x, s) \big|_{x=1} = \frac{s}{s^2 + 1} \quad (5)'$$

(4)', (5)' 联立, 解得

$$U(x, s) = \frac{x^3}{3s^3} + \frac{x^2}{s} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} \quad (6)'$$

对(6)'取 L -氏逆变换得

$$u(x, y) = \frac{x^3 y^2}{6} + x^2 + \cos y - 1 - \frac{y^2}{6}$$

注 1. 由于方程(1)具可直接积分形式, 故得解法一. 这里要注意偏微分方程关于一个自变量积分一次, 结果中的“积分常数”是相对于积分变量而言的, 即该“积分常数”应是另一自变量的任意可微函数. 所以二阶偏微分方程的通解中应含有两个任意函数. (二阶可微);

2. 解法二关于变量 y 取 L-氏变换时, 要注意微分性质在此的具体形式为

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] = S\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=0} = S\frac{dU}{dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=0}$$

即

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \neq S\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] - u\bigg|_{y=0}$$

由条件(2)可得 $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=0}$.

9-2 求上半平面内静电场的电位

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0, -\infty < x < +\infty \\ u\big|_{y=0} = f(x), & -\infty < x < +\infty \\ \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

解 用积分变换法解, 对(1)~(3)两端关于变量 x 取 F-氏变换, 得象函数 $U(\omega, y)$ 的二阶常微分方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dy^2} - \omega^2 U(\omega, y) = 0 \\ U(\omega, 0) = \mathcal{F}[f] = F(\omega) \\ U(\omega, y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

$$(6)$$

(4)之通解为

$$U(\omega, y) = C_1 e^{\omega y} + C_2 e^{-\omega y}$$

由(5)得

$$U(\omega, y) = C_1 e^{\omega y} + (F(\omega) - C_1) e^{-\omega y}$$

由(6)知, 当 $\omega > 0$ 时有 $C_1 = 0$. 即

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{-\omega y}$$

当 $\omega < 0$ 时有 $C_1 = F(\omega)$. 即

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{\omega y}$$

故可得

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{-|\omega|y}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\omega|y}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\omega|y} \cdot e^{j\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\omega y} \cdot e^{j\omega x} d\omega + \int_0^{+\infty} e^{-\omega y} \cdot e^{j\omega x} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{y - jx}{y^2 + x^2} + \frac{y + jx}{y^2 + x^2} \right] = \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)} \end{aligned}$$

由卷积定理有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[U(\omega, y)] = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\omega|y}]] \\ &= f(x) * \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2 + (x - \tau)^2} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

注 由于区域的无界性, 应用积分变换求解较好. 注意边界条件, 若关于变量

用 L -氏变换,一方面初始条件不具备两个,另一方面象函数为二阶常微分方程,定解条件也不够两个,故不宜用 L -氏变换,应选 F -氏变换.

9-3 用积分变换法解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad -\infty < x < +\infty \quad (3)$$

解 对(1)~(3)两端关于变量 x 取 F -氏变换,得

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dt^2} = -\omega^2 U(\omega, t) \end{cases} \quad (4)$$

$$U(\omega, 0) = \Phi(\omega) \quad (5)$$

$$U_t(\omega, 0) = \Psi(\omega) \quad (6)$$

(4)的通解为

$$U(\omega, t) = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} \quad (7)$$

令(7)满足(5), (6), 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \Phi(\omega) \\ C_1 - C_2 = \frac{\Psi(\omega)}{j\omega} \end{cases}$$

因

$$C_1 = \frac{1}{2} [\Phi(\omega) + \frac{\Psi(\omega)}{j\omega}] \quad C_2 = \frac{1}{2} [\Phi(\omega) - \frac{\Psi(\omega)}{j\omega}]$$

于是

$$U(\omega, t) = \frac{1}{2} [\Phi(\omega) + \frac{\Psi(\omega)}{j\omega}] e^{j\omega t} + \frac{1}{2} [\Phi(\omega) - \frac{\Psi(\omega)}{j\omega}] e^{-j\omega t} \quad (8)$$

(8)两端取 F -氏逆变换得(由积分性质, 位移性质)

$$\begin{cases} u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(\omega, t)] \\ = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\omega) e^{j\omega t} + \Phi(\omega) e^{-j\omega t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}[\frac{\Psi(\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} - \frac{\Psi(\omega)}{j\omega} e^{-j\omega t}] \\ = \frac{1}{2} [\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi \end{cases}$$

注 本题用积分变换法解时,只能关于变量 x 取 F -氏变换,因为若关于变量 t 取拉氏变换,虽然初始条件具备,但变换后得到象函数的二阶常微分方程却无定解条件,故不可取.

9.2 Laplace 方程的 Green 函数法

9.2.1 基本要求

1. 掌握第一、二 Green 公式及调和函数积分表示式.
2. 掌握调和函数的基本性质.
3. 掌握 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数定义与物理意义.
4. 掌握半空间、球域的 Green 函数, 并会求解该域上的 Laplace 方程第一边值问题.

9.2.2 内容提要

设 $D \subset R^3$ 为有界域, S 为其足够光滑的封闭界面, u, v 在 D 内具二阶连续偏导, 在 $\bar{D}$ 上具一阶连续偏导.

1. 第一 Green 公式

$$\oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v dV + \iiint_D u \Delta v dV \quad (1)$$

第二 Green 公式

$$\iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dV = \oint_S (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) dS \quad (2)$$

2. 调和函数基本性质

1) 积分公式

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right] dS \quad M, M_0 \in D$$

r_{MM_0} 为 M 到 M_0 的距离.

$$2) \oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

3) 平均值公式

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S_R^{M_0}} u dS$$

$S_R^{M_0}$ 是以 M_0 为心 R 为半径且完全含于 D 的球面.

$$4) \begin{cases} \Delta u = 0 & M \in D \\ u|_{M \in S} = f \end{cases}, \text{解若存在, 必唯一.}$$

3. 定义 若在区域 D 内函数 $G(M, M_0)$ 满足条件

- 1) $M \neq M_0$ 时, $\Delta G = 0$;

$$2) G(M, M_0)|_{M \in S} = 0;$$

$$3) \text{ 在 } D \text{ 内, } G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v(M, M_0), \text{ 其中 } v(M, M_0) \text{ 满足}$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{M \in S} = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}|_{M \in S} \end{cases}$$

则称 $G(M, M_0)$ 为区域 D 上 Laplace 第一边值问题的 Green 函数.

4. 特殊区域的 Green 函数

$$1) D = \{(x, y, z) | -\infty < x, y < +\infty, z > 0\}.$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} \right)$$

其中 $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D, \quad M_1 = (x_0, y_0, -z_0)$

$$2) D = \{(x, y, z) | r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R\}.$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_{MM_1}} \right)$$

其中 $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$

$$3) D = \{(x, y) | \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < R\}.$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_{MM_1}} \right) \quad \rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$4) D = \{(x, y) | -\infty < x < +\infty, y > 0\}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{1}{r_{MM_1}} \right), M_0 = (x_0, y_0) \in D, M_1 = (x_0, -y_0)$$

5. 第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D \\ u|_{M \in S} = \varphi(M), & M \in S \end{cases}$$

之解可用 Green 函数表为

$$1) u(M_0) = - \iint_S \varphi(M) \frac{\partial}{\partial n} G(M, M_0) ds \quad M_0 \in D \subset R^3$$

$$2) u(M_0) = \int_{\Sigma} u(M) \frac{\partial}{\partial n} G(M, M_0) dl \quad M_0 \in D \subset R^2$$

Σ 为 D 的光滑封闭边界线.

9.2.3 例题解析

9-4 证明平面 Green 公式

$$\iint_D (v \Delta u - u \Delta v) d\sigma = \int_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

其中 C 为 D 的边界曲线, ds 为弧微分.

证 平面 Green 公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_C P dx + Q dy$$

由第一、二型线积分关系. 设 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ 为 C 上任一点处单位切矢量 τ . 则上式可写为

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_C P dx + Q dy = \int_C (P \cos\alpha + Q \cos\beta) ds \quad (1)$$

现今

$$P(x, y) = -u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad Q(x, y) = u \frac{\partial v}{\partial x}$$

代入上式得

$$\iint_D u \Delta v d\sigma + \iint_D \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v d\sigma = \int_C \left[-u \frac{\partial v}{\partial y} \cos\alpha + u \frac{\partial v}{\partial x} \cos\beta \right] ds \quad (2)$$

交换 u, v 位置, 由(1)又可得

$$\iint_D v \Delta u d\sigma + \iint_D \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v d\sigma = \int_C \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \cos\alpha + v \frac{\partial u}{\partial x} \cos\beta \right) ds \quad (3)$$

(2) - (3) 得

$$\iint_D [u \Delta v - v \Delta u] d\sigma = \int_C v \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial x} \cos\beta \right] ds + \int_C u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos\beta - \frac{\partial v}{\partial y} \cos\alpha \right) ds$$

注意法矢量 n 与切矢量 τ 的关系, 有

$$\cos\beta = \cos(n, x), \quad \cos\alpha = -\cos(n, y)$$

代入上式得

$$\begin{aligned} \iint_D [u \Delta v - v \Delta u] d\sigma &= \int_C -v \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) \right] ds \\ &\quad + \int_C u \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds \\ &= \int_C [-v \operatorname{grad} u \cdot n_0 + u \operatorname{grad} v \cdot n_0] ds = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \end{aligned}$$

即

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

此即所证.

注 本证明中注意利用第一、二型线积分关系化得(1), 注意切矢量 τ 与法矢量 n 的关系. 给出 P, Q 形式与三维推导相同.

9-5 验证 $u = \ln \frac{1}{r}$ 是二维 Laplace 方程的基本解.

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

证 将 $\Delta u=0$ 写为极坐标形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (r \neq 0)$$

$$u = \ln \frac{1}{r} = -\ln r \quad \text{因} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}$$

代入方程

$$\text{左} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + 0 = 0 = \text{右}$$

注 $u = \ln \frac{1}{r}$ 在 $r \neq 0$ 即 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 的任何点处满足 $\Delta u=0$, 其作用、地

位同 $u = \frac{1}{r}$ 在三维 Laplace 方程解中的作用 ($r =$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}).$$

9-6 求证圆域 $x^2 + y^2 < R$ 的 Green 函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{M_1 M}} \right)$$

其中 M_1 为 M_0 关于圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的对称点.

解 设在圆域 D_R 内任一点 M_0 处放置一电量为 $-\epsilon_0$ 的点电荷, 圆的外壳(圆周)接地, 来求圆内任一点 M 处的电位. 由物理知识知(参见图 9.1), $M \in D_R$ 处的电位由两部分叠加而成: 一部分是由 M_0 处产生的电位(等于 $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$), 另一部分则是由 M_0 处点

电荷在内壳(C 内侧)引起的感应电荷产生的电位. 当 M 位于边界上时, 二者叠加结果为

0. 故求 Green 函数即是求 D_R 内任一点 M 处的电位.

为了求出感应电位. 注意感应电位 v 在 D_R 内处处满足

$$\Delta v = 0$$

而在边界上应与 $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ 抵消. 即

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & M \in D_R \\ v \Big|_{M \in C_R} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \Big|_{M \in C_R} \end{cases}$$

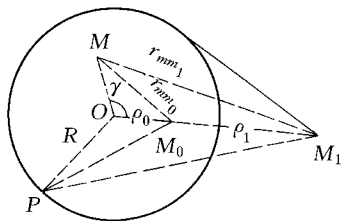


图 9.1

现设想 C_R 只是一几何曲线(而不是一屏蔽壳). 在 D_R 外部某点放置一相反电荷, 使它在 C_R 上产生的电位能抵消 $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$. 于是考虑到 M_0 关于 C_R 对称点 M_1 满足几何关系 $\rho_1 \rho_0 = R^2$. (ρ_1, ρ_0 同解法一). 且当点 $P \in C_R$ 时, 有几何关系

$$\frac{1}{r_{PM_0}} = \frac{R}{\rho_0 r_{PM_1}}$$

故有

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM_1}}$$

即在圆内点 M_0 处置一电量为 $-\epsilon_0$ 的点电荷且圆周接地的效果相当于无屏蔽外壳时在 M_0 处及其关于 C_R 的对称点 M_1 处分别放置一 ϵ_0 电量与 ϵ_0 电量点电荷的效果. 而后者在 D_R 内任一点 M 处产生的电位为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{R}{\rho_0 r_{MM_1}} \right)$$

此即 D_R 内的 Green 函数.

注 本解法从物理背景出发, 寻求感应电位的数学替代表达式, 即从数学上用以替代“接地”的效果. 本解法有利于认识 Green 函数的物理意义.

9-7 设有圆域 $r < R$ 上的 Laplace 方程第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=R} = \sin \frac{\theta}{4}, & \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

试问此问题是否有解, 为什么?

答 由调和函数基本性质知, 此问题有解的必要条件是

$$\oint_{C_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

但这里有

$$\oint_{C_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{4} \cdot R d\theta = R \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{4} d\theta = 4R (-\cos \frac{\theta}{4}) \Big|_0^{2\pi} = 4R \neq 0$$

所以, 此题无解.

注 此题应用调和函数基本性质 $\oint_{C_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (三维情形为 $\oiint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$). 所

给边界条件不满足此性质, 故得无解结论.

9-8 设 $u(r, \theta)$ 为单位圆上的调和函数, 若有 $u|_{r=1} = \cos \theta$, 求 u 在圆心处的值.

解 由调和函数平均值公式有(二维)

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_{R^0}^{M_0}} u ds = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u R d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

即圆心处值为 0.

注 本解法从调和函数平均值公式出发,导出所求结果.

9-9 试应用 Green 第二公式,给出三维 Poisson 方程第二边值问题有解的必要条件.

解 设有第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(M) & M \in D \subset R^3 \quad (D \text{ 有界}) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{M \in S} = h(M) \end{cases} \quad (1)$$

在第二 Green 公式

$$\iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dV = \oint_S \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$

中,令 $v \equiv 1$, u 为(1)的解,则有

$$- \iiint_D \Delta u dV = \oint_S - \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$\text{即} \quad \iiint_D f(M) dV - \oint_S h(M) ds = 0 \quad (2)$$

(2)即为三维 Poisson 方程第二边值问题(1)有解的必要条件,也称为相容性条件.

注 1. 此条件的导出较简单,(类似于性质 $\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$). 但意义在于给出了 Poisson 方程第二边值问题有解的必要条件,即泛定方程的非齐次项 $f(M)$ 与边界条件 $h(M)$ 的相容性限制. 说明问题(1)中的 $f(M)$ 与 $h(M)$ 不能随便给,否则可能无解.

2. 用完全类似的方法,可导出二维 Poisson 方程第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(M), & M \in D \subset R^2 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{M \in C} = h(M), & M \in C \end{cases}$$

的相容性条件为

$$\iint_D f(M) d\sigma - \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

9.3 第 9 章练习题

1. 给出一维波动方程初值问题达朗贝尔公式,三维及二维波动方程初值问题

2. 用积分变换法解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = -a\varphi'(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

(答 $u(x, t) = \varphi(x - at)$)

3. 在半平面 $y > 0$ 内解狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, y > 0 \\ u|_{y=0} = f(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

(答 $u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{dx}{(x-x_0)^2 + y_0^2}$)

4. 在 5 中, 若 $f(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases}$ u_1, u_2 为常数. 求解半平面 $y > 0$ 内的狄氏问题.

(答 $u(x_0, y_0) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{\pi} \arctan \frac{x_0}{y_0}$)