

21 世纪高等学校教材

大学物理学

(下册)

上海交通大学物理教研室 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是上海交通大学物理教研室教师根据 2004 年教育部新颁发的“非物理类理工学科学大学物理课程教学基本要求”，结合多年的教学实践而编写的教材。全书分为两册，上册包括：力学、狭义相对论、机械振动、机械波和热物理学；下册包括：电磁学、波动光学和量子物理学。

本书为非物理专业的大学物理教材，在保持基础扎实、内容简练的基础上，体现了视点高、创意新和内容现代化的特色。本书可作为高等院校工科各专业的大学物理教科书，也可作为综合大学和师范院校非物理专业的教材或参考书。

21 世纪高等学校教材

编审委员会

顾 问： 韩正之

执行主任： 百 文

副 主 任：	胡敬群	高 景	靳全勤	张华隆
	蒋凤瑛	冯 颖	普杰信	程全洲
	潘群娜	杨裕根	徐祖茂	曹天守
	宓一鸣	姜献峰	李 敏	李湘梅
	闫洪亮	陈树平	包奇金宝	刘克成
	白丽媛	戴 兵	张占山	张红梅

前 言

根据 2004 年教育部新颁发的“非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求”，为了适应物理学和科学技术的发展，结合多年的教学实践，我们编写了这套大学物理教材。在编写过程中，我们借鉴了部分国内外新版优秀教材，力求贯彻理论体系少而精、理论联系实际的原则，做到在加强理论基础的叙述、加强对学生分析与解决实际问题能力培养的同时，增加对近代和现代物理学知识、观点的介绍。在教材编写过程中，我们注重把培养学生具有科学的思维能力、辩证分析的能力和科学的研究方法作为目标。同时，我们还注重加强工科大学生的科学素养的培养，拓宽学生的科学视野。

本书采用国际单位制。书中物理量的名称和表示符号尽量采用国家现行标准。

本书分为上下两册，上册包括：力学、狭义相对论、机械振动、机械波、平衡态理论和热力学基础。下册包括：电磁学、波动光学和量子物理学。

目录中带 * 的内容可以作为选讲内容，也适合学生自学。

本书由高景主编。参加编写工作的有：李铜忠（第 1、2、3、4、5、6 章和第 24 章），孙迺疆（第 7、8 章），董占海（第 9、10 章和第 21、22、23 章），袁晓忠（第 11、12、13、14、15、16、17 章），高景（第 18、19、20 章）。张炽伟老师编写了全书各章的思考题和习题。

由于编者水平有限，编写时间较仓促，书中错误之处在所难免。我们衷心希望广大读者提出宝贵意见。

上海交通大学物理教研室

目 录

第 11 章 静电场	1
11.1 电荷	1
11.2 库仑定律	3
11.2.1 电力	3
11.2.2 点电荷	3
11.2.3 库仑定律	4
11.2.4 电力叠加原理	4
11.3 电场强度	5
11.3.1 电场	5
11.3.2 电场强度	5
11.3.3 电场强度的计算	6
11.4 高斯定理	13
11.4.1 电场线	13
11.4.2 电通量	14
11.4.3 高斯定理	15
11.5 高斯定理的应用	17
11.6 环流定理 电势	19
11.6.1 环流定理	20
11.6.2 环流定理的物理意义	20
11.6.3 电势差和电势	21
11.7 电势的计算	22
11.7.1 点电荷电场中的电势	22
11.7.2 点电荷系电场中的电势	22
11.7.3 连续分布电荷电场中的电势	22
11.8 电势与电场强度的关系	25
11.8.1 等势面	25
11.8.2 等势面的性质	26
11.8.3 电势梯度	26

习题 11	29
思考题 11	31

第 12 章 导体电学

34

12.1 静电场中的导体	34
12.1.1 导体的微观结构	34
12.1.2 导体的静电平衡	34
12.1.3 静电平衡下导体上的电荷分布	35
12.1.4 静电屏蔽	37
12.1.5 尖端放电及其应用	37
12.2 电容和电容器	40
12.2.1 孤立导体的电容	40
12.2.2 电容器的电容	41
12.2.3 几种常见的电容器	41
12.2.4 电容器的连接	43
12.3 传导电流	44
12.3.1 电流强度和电流密度	44
12.3.2 欧姆定律的微分形式	45
12.3.3 焦耳定律的微分形式	46
12.4 电动势 稳恒电场	47
12.4.1 电动势	47
12.4.2 稳恒电场	48
12.4.3 电路上两点间的电势差	49
习题 12	50
思考题 12	51

第 13 章 电介质

52

13.1 电介质的极化	52
13.1.1 现象	52
13.1.2 电介质极化的微观模型	52
13.2 极化强度和极化电荷	54
13.2.1 电极化强度	54
13.2.2 极化电荷	55
13.3 介质中的静电场	56

13.3.1	介质中的场强	56
13.3.2	介质中静电场的规律	57
13.3.3	介质电极化率	57
13.4	电位移矢量	58
13.4.1	闭合曲面内的极化电荷	58
13.4.2	电位移矢量	58
13.4.3	电位移矢量的应用	59
13.5	静电场能	60
13.5.1	带电体系的静电能	60
13.5.2	点电荷之间的相互作用能	61
13.5.3	电容器储存的静电能	61
13.5.4	静电场能 电场能量密度	62
习题 13	65
思考题 13	66

第 14 章 稳恒磁场

14.1	磁场的描述	67
14.1.1	基本磁现象	67
14.1.2	磁感应强度及洛伦兹力公式	67
14.2	毕奥-萨伐尔定律	69
14.2.1	毕奥-萨伐尔定律	69
14.2.2	毕奥-萨伐尔定律的应用	70
14.3	磁高斯定理 安培环路定理	75
14.3.1	磁通量	75
14.3.2	磁高斯定理	76
14.3.3	安培环路定理	76
14.3.4	安培环路定理的应用	78
14.4	磁场对载流导线的作用	82
14.4.1	安培力公式	82
14.4.2	载流线圈在磁场中受到的力矩	83
14.4.3	磁力的功	85
14.5	带电粒子的运动	88
14.5.1	运动带电粒子的磁场	88
14.5.2	带电粒子在匀强磁场中的运动	89

14.5.3 霍耳效应	90
习题 14	92
思考题 14	95

第 15 章 磁介质

15.1 顺磁性和抗磁性	97
15.1.1 电子的磁矩	97
15.1.2 磁场中的核外电子	98
15.1.3 抗磁性和顺磁性	98
15.2 磁化强度和磁化电流	100
15.2.1 磁化强度	100
15.2.2 磁化电流	100
15.3 介质中的磁场 磁场强度	102
15.3.1 介质中磁场的高斯定理	103
15.3.2 磁场强度 介质中磁场的安培环路定理	103
15.3.3 各向同性的磁介质	104
15.4 铁磁性	105
15.4.1 铁磁质的磁滞回线	106
15.4.2 铁磁质的理论解释	106
15.4.3 磁材料的应用	107
习题 15	108
思考题 15	109

第 16 章 变化的电磁场

16.1 电磁感应定律	110
16.1.1 电磁感应现象	110
16.1.2 法拉第定律	111
16.2 动生电动势	113
16.2.1 动生电动势的产生	113
16.2.2 洛伦兹力做功问题	115
16.2.3 动生电动势的计算	115
16.3 感生电动势	117
16.3.1 感生电动势和感应电场	117
16.3.2 感应电场的性质	119

16.3.3	涡电流和趋肤效应	120
16.3.4	感生电动势的计算	121
16.4	自感和互感	125
16.4.1	自感	125
16.4.2	互感	126
16.5	电容和电感电路中的暂态过程	129
16.5.1	LR 电路	129
16.5.2	RC 电路	131
16.6	磁场能量	132
16.6.1	自感磁能	132
16.6.2	互感磁能	133
16.7	位移电流	135
16.7.1	位移电流假设	135
16.7.2	全电流定律	137
16.7.3	位移电流性质	138
16.8	麦克斯韦电磁场方程组	140
	习题 16	141
	思考题 16	143
第 17 章 电磁波		145
17.1	电磁波波动方程	145
17.2	电磁波的性质	146
17.2.1	性质	146
17.2.2	坡因廷矢量	148
17.2.3	辐射压强	149
* 17.3	振荡电偶极子的辐射	149
17.3.1	电磁波的产生	149
17.3.2	赫兹实验	151
	习题 17	152
	思考题 17	153
第 18 章 光的干涉		154
18.1	光的相干性	154
18.1.1	光的电磁理论	154

18.1.2	光源的发光机制与特点	156
18.1.3	光的相干性	157
18.2	双缝干涉	159
18.2.1	杨氏双缝实验	159
18.2.2	应用分波阵面方法的其他实验	160
18.3	薄膜干涉	162
18.3.1	薄膜干涉的复杂性	162
18.3.2	等倾干涉条纹	163
18.3.3	等厚干涉条纹	165
18.3.4	增透膜和增反膜	167
18.3.5	迈克尔逊干涉仪	168
习题 18	170
思考题 18	170
第 19 章	光的衍射	173
19.1	光的衍射现象	173
19.1.1	惠更斯-菲涅耳原理	174
19.1.2	单缝夫琅禾费衍射	174
19.2	圆孔衍射和光学仪器的分辨本领	177
19.3	光栅衍射	179
19.3.1	衍射光栅	179
19.3.2	光栅方程	180
19.3.3	光栅光谱和分辨本领	181
* 19.4	X射线的衍射	183
习题 19	185
思考题 19	186
第 20 章	光的偏振	187
20.1	光的偏振现象	187
20.1.1	偏振光和自然光	187
20.1.2	偏振片 马吕斯定律	189
20.2	反射和折射时的偏振现象	191
20.3	晶体的双折射现象	192
20.4	偏振光的获得与检验	194

习题 20	195
思考题 20	195

第 21 章 量子光学基础

197

21.1 引言	197
21.2 普朗克的能量子假说	197
21.2.1 热辐射现象	197
21.2.2 黑体辐射的基本规律	199
21.2.3 普朗克的能量子假说	201
21.3 爱因斯坦的光量子假设	202
21.3.1 光电效应	202
21.3.2 爱因斯坦的光量子假设	203
21.3.3 康普顿效应	205
21.4 氢原子光谱 玻尔理论	209
21.4.1 氢原子光谱实验规律	209
21.4.2 经典原子模型的困难	211
21.4.3 玻尔理论	211
21.5 激光器的工作原理	214
21.5.1 自发辐射、受激辐射和受激吸收	214
21.5.2 粒子数反转和光放大	216
21.5.3 激光器的工作原理	216
习题 21	219
思考题 21	220

第 22 章 量子力学基础

221

22.1 实物粒子的波动性	221
22.1.1 光的波粒二象性	221
22.1.2 德布罗意物质波假设	221
22.1.3 物质波实验验证	223
22.2 波函数及统计解释	224
22.2.1 波函数	224
22.2.2 波函数的统计解释	224
22.2.3 微观粒子的波粒二象性	225
22.3 不确定性关系	226

22.3.1	位置和动量不确定关系	226
22.3.2	能量和时间不确定关系	228
22.4	薛定谔方程	229
22.4.1	薛定谔方程的建立	229
22.4.2	定态薛定谔方程	231
22.5	力学量算符的本征值问题	232
22.5.1	力学量的算符表示	232
22.5.2	算符的本征值问题	233
22.6	薛定谔方程的应用	233
22.6.1	一维无限深势阱中的粒子	234
22.6.2	一维谐振子(抛物线势阱)	238
22.6.3	一维散射问题	240
22.7	氢原子量子理论	242
22.7.1	角动量算符的本征值问题	243
22.7.2	氢原子的能量和电子几率密度	245
22.8	电子的自旋 泡利不相容原理	246
22.8.1	电子的自旋	246
22.8.2	泡利不相容原理	248
	习题 22	249
	思考题 22	250

第 23 章 固体的量子理论 251

23.1	晶体	251
23.2	固体的能带结构	252
23.2.1	能带	252
23.2.2	能带的宽度	254
23.2.3	满带、导带和价带	254
23.2.4	导体、半导体和绝缘体	255
23.3	半导体的电子论	256
23.3.1	近满带和空穴	256
23.3.2	n型半导体和 p型半导体	257
23.3.3	p-n结	258
* 23.4	超导现象	260
23.4.1	零电阻	260

23.4.2	完全抗磁性	261
23.4.3	临界磁场与临界电流	262
23.4.4	两类超导体	262
23.4.5	BCS 理论	263
习题 23		264
思考题 23		265

第 24 章 原子核物理和粒子物理简介 266

24.1	原子核的基本性质	266
24.1.1	原子核的组成	266
24.1.2	原子核的模型	268
24.1.3	核力和介子	269
* 24.2	原子核的量子性质	270
24.2.1	原子核的自旋	270
24.2.2	原子核的磁矩	271
24.2.3	核磁共振	272
24.3	原子核的放射性衰变	273
24.3.1	放射性衰变规律	273
24.3.2	α 衰变	274
24.3.3	β 衰变	275
24.3.4	γ 衰变	276
24.4	核裂变和核聚变	276
24.4.1	原子核的结合能	276
24.4.2	重核的裂变	278
24.4.3	轻核的聚变	280
* 24.5	粒子物理简介	281
24.5.1	粒子及其分类	282
24.5.2	强子的夸克模型	283
24.5.3	基本粒子的相互作用	286
24.5.4	粒子的对称性和守恒定律	287

参考答案		290
------	--	-----

第 11 章 静电场

电量不变的静止电荷产生的场称为静电场,通过本章的学习,要掌握好静电场的有关性质,会用库仑定律及高斯定理计算不同带电系统所产生的静电场。这一章的一条主线是场,爱因斯坦说过:“我们有两种存在,实物和场,场是物理学中出现的新概念,是自牛顿时代以来最重要的发现。用来描述物理现象的最重要的不是带电体,也不是粒子,而是在带电体之间空间的场,这需要用很大的科学想象力才能理解。”场的种类很多:有标量场,如温度场和密度场;有矢量场,如速度场。而更为重要的是所谓的引力场、电磁场、核力场等等,它们是客观实体,有质量、能量和角动量,是物质——一种具有特殊形态的物质。

11.1 电荷

电荷是物质的一种属性。很早人们就发现,用毛皮摩擦过的琥珀能够吸引羽毛、小纸片、头发等轻微物体,如图11-1所示。这时,我们就说琥珀和毛皮这两样物体都已处于带电状态,它们分别带有电。处于带电状态的物体,称为带电体或电荷。使物体带电称为起电,用摩擦的方法使物体带电称为摩擦起电。

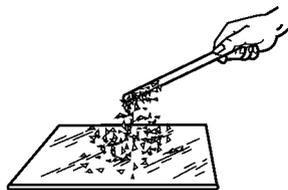


图 11-1

通过对电荷的各种相互作用和效应的研究,人们现在认识到电荷的基本特性有以下几方面:

1. 电荷的正负性

通过大量实验的研究和对物质结构的认识,人们逐步认识到电荷只有两种,即正电荷和负电荷。现在已经知道,宏观物体都是由分子、原子组成的,任何化学元素的原子,从微观上看都含有一个带有正电的原子核和若干带有负电的电子。在正常状态下,原子里电子所带的负电和原子核所带的正电相等,原子内的净电荷为零。不同原子束缚其外围电子的能力是不同的,对电子束缚弱的原子易失去电子而变成正离子,对电子束缚强的原子易得到电子而变成负离子,上述这种现象称为电离。

2. 电荷的量子性

电荷的大小称为电量,它的单位是库仑,用 C 表示。需要强调的是,库仑是一个导出单位,而基本单位是电流强度单位——安培,用 A 表示。它们的关系是 $1\text{C}=1\text{A}\cdot\text{s}$,即 1C 等于 1A 的电流强度在 1s 内流过某截面的电量。

1897 年,汤姆逊(J. J. Thomson)发现了电子。电子是目前实验观测到的带有最小负电荷的粒子,其电量的近代测量值为 $e=1.602\,177\,33\times 10^{-19}\text{C}$ 。

任意带电体的电量都是电子电量 e 的整数倍,而 e 则是电量的一个基本单元。当带电体的电量发生变化时,它只能按 e 的整数倍改变,不能作连续的任意改变。这种电量只能一份一份地取分立的、不连续数值的性质,称为电荷的量子性, e 称为电荷的量子。

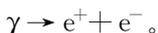
随着人们对物质结构不断深入的认识,发现基本粒子不基本,它们由更小的粒子夸克和反夸克组成,并预计夸克和反夸克的电量应取 $\pm 1/3e$ 或 $\pm 2/3e$ 。现在一些粒子物理实验已间接证明了夸克的存在,只是由于夸克禁闭而未能检测到单个自由的夸克。随着科学技术的发展和人类对物质微观结构认识的提高, e 是电量最小单元这句话可能要被修正,但电荷的量子性是不可动摇的。

3. 电荷的守恒性

大量实验证明,在一个孤立系统中,系统所具有的正、负电荷电量的代数和保持不变,这一性质称为电荷守恒定律。电荷守恒定律与能量守恒定律、角动量守恒定律一样,是自然界中的基本定律。根据电荷守恒定律,电荷不能被创造或消灭,只能被迁移或中和。摩擦起电过程实际上是电荷从一个物体转移到另一个物体的过程,虽然两物体的电中性状态都被打破,各显电性,但一方带正电,另一方就带负电,两物体构成一个系统仍呈电中性。在微观粒子的反应过程中,反应前后的元电荷总数是守恒的,例如有下面这个方程:



表明负电子和正电子在相遇时将湮灭,即转变为中性的光子 γ 。反过来,一个光子与一个重原子核作用时,如光子能量足够大,就可转化为一个正电子和一个负电子,用如下方程表示



在这些反应过程中,正、负电荷总是成对出现或成对消失,并不改变系统中正、负电荷电量的代数和,因而电荷守恒定律仍然有效。

4. 电荷的运动不变性

大量实验表明,电荷的电量与其运动状态无关,具有相对论不变性。例如加速器将电子或质子加速时,随着粒子速度的变化,它们的质量会有明显变化,但电子或质子的电量没有任何变化的痕迹。这也说明电荷是一个非常基本的物理量,需要人们对其进行更深入、更基本的研究。

11.2 库仑定律

11.2.1 电力

带电体间会有相互作用力存在,这种力称为电力,它是电荷的一种对外表现形式,人们对电现象的认识,就是从研究这种相互作用开始的。电力和磁力统称为电磁力,目前已经知道电磁相互作用具有以下一些特征:

(1) 电力远比万有引力强。就质子与电子的相互作用来说,其静电力比万有引力要强 10^{39} 倍。大家都知道这样一个演示实验,即摩擦过的笔或尺,由于带电可将细小物体如头发或纸屑吸起来。头发或纸屑受到整个地球给它的万有引力的作用,但都抵不过一把尺或一支笔上少量电荷对头发或纸屑的静电吸引力,这充分说明电力强于万有引力。

(2) 电磁力是一种长磁力,存在于原子内部和宇宙天体之间,其伸展的范围很大。与此形成鲜明对比的是强相互作用和弱相互作用,它们都是短程力,仅限于在原子核大小的范围内,即 10^{-13} m。

(3) 电磁力有吸引和排斥两种形式,可以被屏蔽掉,这一点和万有引力不同。

(4) 通常,电力比磁力要强很多。当光与物质发生相互作用时,主要是其中的电场分量与物质发生相互作用,故光学中电场分量又称为光矢量。

11.2.2 点电荷

带电体与带电体之间会发生电力相互作用,此电力与电荷之正负,电量之多少,带电体之间相对距离,及它们的尺寸、形状等因素有关,非常复杂。为了简化问题,我们提出点电荷的概念。一个形状和大小可以不计的带电粒子或带电体称为点电荷。在实际研究中,如带电体之间的距离比它们本身的线度大得多时,就可把这些带电体看作点电荷了。点电荷是电学中的一个理想模型,类似于力学中的质点这一概念。

11.2.3 库仑定律

法国物理学家库仑(C. A. Coulomb)首先对电力作了定量的研究。1785年,库仑通过扭秤实验,总结出真空中两个静止的点电荷间相互作用的基本规律,即库仑定律,它可表述为:在真空中两个静止点电荷间的相互作用电力,其方向沿两点电荷的连线,同种电荷相斥,异种电荷相吸,其大小与两点电荷的电量 q_1 和 q_2 的乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比。用数学公式可表示为

$$\boldsymbol{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r, \quad (11-1)$$

式中 \boldsymbol{F} 表示 q_2 对 q_1 的作用力; r 是两点电荷间的相对位矢, r 表示两点电荷间的距离; \boldsymbol{e}_r 表示由 q_2 到 q_1 方向的单位矢量; k 为比例系数,如图11-2所示。

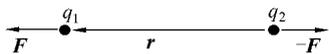


图 11-2

式(11-1)包含了库仑定律的所有内容,电力的大小与点电荷的电量乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比。关于方向可以看到,当 q_1 与 q_2 同号时, \boldsymbol{F} 与 \boldsymbol{e}_r 同向, $-\boldsymbol{F}$ 与 \boldsymbol{e}_r 反向,满足同号相斥;当 q_1 与 q_2 异号时, \boldsymbol{F} 与 \boldsymbol{e}_r 反向, $-\boldsymbol{F}$ 与 \boldsymbol{e}_r 同向,满足异号相吸。

在 SI 制中,距离用 m 作单位,电量用 C 作单位,以实验为基础可定出

$$k = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2。$$

计算时,常取近似值 $k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ 。为了以后的方便,我们引入一个新的常量 ϵ_0 来取代 k ,使 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$,而

$$\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)。 \quad (11-2)$$

式中 ϵ_0 称为真空介电常数(又称真空电容率)。由此可将库仑定律完整地表示成如下的常用形式,即

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{e}_r。 \quad (11-3)$$

人们历来对库仑定律中两个点电荷之间的作用力与其距离平方反比的精确程度和适用范围很感兴趣。根据库仑当时的实验条件,发现力 $F \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}$,其中 $\delta \leq 0.02$ 。到了1971年,威廉斯(E. R. Williams)等人的实验证明 $\delta \leq (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$ 。总之,越来越精确的实验证实,库仑的平方反比律是正确的。另一方面,在 $10^{-15} \sim 10^7 \text{ m}$ 的广大范围内库仑定律被证明是有效的。

11.2.4 电力叠加原理

当空间有多个点电荷存在的时候,实验表明,其中每个点电荷所受的总静电

力应等于所有其他点电荷单独作用的静电力的矢量和,这就是静电力的叠加原理。具体来讲(如图11-3所示),设一个点电荷系由 n 个点电荷组成,则 P 点处电量为 q 的点电荷受到的其他点电荷给它的总静电力为

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{r_i^2} \mathbf{e}_i, \quad (11-4)$$

式中 r_i 和 \mathbf{e}_i 分别表示从点电荷 q_i 到点电荷 q 的距离和方向单位矢量。

库仑定律与电力叠加原理是静电学的基本规律,有了它们,原则上讲,任何带电系统间相互作用力的计算问题都可迎刃而解了。

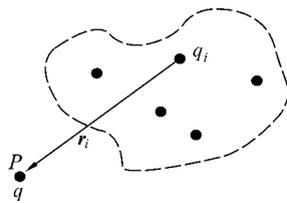


图 11-3

11.3 电场强度

11.3.1 电场

关于电力是如何通过真空从一个电荷作用于另一个电荷的,历史上曾经出现过两种观点。其一是超距作用观点,其二是近距作用观点。按超距作用的观点,假设真空中突然出现两个点电荷 q_1 和 q_2 ,它们之间马上发生电力相互作用。而按近距相互作用的观点,它们之间要过一段时间才发生相互作用。理论和实验都证明近距作用的观点是正确的,电力是通过一种中间物质来传递的,这种中间物质就是电场(如图11-4所示),在真空中它以光速 c 来传递电力相互作用,故电力又称为电场力。产生电场的电荷称为源电荷,若源电荷静止,且电量不变,则产生的电场称为静电场,这是本章重点要研究的对象。



图 11-4

11.3.2 电场强度

源电荷 q 产生静电场,那么如何描述这个电场呢?一个自然的做法是根据此电场对其他电荷作用的电力来定量分析电场,为此引入试验电荷 q_0 。作为试验电荷, q_0 的电量必须很小,避免由于它的引入而影响源电荷的分布,从而使源电荷原来所激发的电场不能保持原状。其次, q_0 的几何尺寸也要很小,使其能精细地反映电场中各点的电场性质,当它被放到电场中时,它的位置在直角坐标系 $Oxyz$ 中可用一组坐标 (x, y, z) 来确定。总结上面两点,我们说,试验电荷是一个电量很小

的点电荷。

如图11-5所示,为了定量描述源电荷 q 产生的电场,放一试验电荷 q_0 到场点 P ,其所受电力为 F 。实验表明 F 的大小与 q_0 成正比,而比值 F/q_0 则与试验电荷无关,是一个仅由源电荷的电场所决定的客观物理量。这样就可用这个物理量来描述电场,称其为电场强度,用 E 来表示,定义为

$$E = \frac{F}{q_0}。 \quad (11-5)$$

令 $q_0 = 1\text{C}$, 我们看到,电场中某场点上的电场强度等于该点处的单位正电荷所受的力。一般说来,不同场点上的电场强度大小和方向各不相同,是空间位置的矢量函数,可表示为 $E(x, y, z)$ 或 $E(\boldsymbol{r})$ 。

在 SI 中,电场强度的单位为 V/m (伏特每米)或 N/C (牛顿每库仑)。

必须强调,电场是一个客观实体,与是否引入试验电荷无关,引入试验电荷的目的只是为了检验电场的存在和描述电场的性质。

11.3.3 电场强度的计算

1. 点电荷的场强

如图11-5所示,先讨论一个最简单的情况,即点电荷 q 在其周围所形成的电场情况。为此放一试验电荷 q_0 到任一场点 P , P 点相对点电荷 q 的位矢为 \boldsymbol{r} 。根据库仑定律, q_0 受到的电场力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{e}_r,$$

再根据电场强度的定义有

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{e}_r, \quad (11-6)$$

式(11-6)即为点电荷的场强公式,它描写点电荷 q 周围空间各点场强的大小和方向。但当 $r=0$ 时, $E \rightarrow \infty$, 此结果无意义。这是因为实际情况并不是这样,点电荷只是一个理想模型,是不存在的,即使在 $r=0$ 处 E 也不会达到无限大。若点电荷带的是正电荷,即 $q > 0$, 则 E 的方向为以 q 为球心沿径向向外;若点电荷带负电,即 $q < 0$, 则 E 的方向为以 q 为球心沿径向向内。 E 的大小与点电荷 q 的电量成正比,与场点到点电荷 q 的距离 r 的平方成反比,电场呈球对称分布。

2. 点电荷系的场强

如图11-6所示,若干点电荷构成一点电荷系,研究其在场点 P 处形成的场强

情况。为此放一试验电荷 q_0 于 P 点, 根据电力叠加原理, 其所受电场力为

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

式中 \mathbf{F}_i 是点电荷系中第 i 个点电荷单独存在时 q_0 受到的电场力。再按电场强度的定义有

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i, \quad (11-7)$$

式中 $\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{q_0}$ 为点电荷系中第 i 个点电荷单独存在时, 在场点 P 处产生的电场强度。

式(11-7)表明: 点电荷系在某点产生的电场强度等于构成这个点电荷系的各个点电荷单独存在时在同一点处产生的电场强度的矢量和, 这一结果称为场强叠加原理。从表面上看场强叠加原理似乎是电力叠加原理的推论, 但以场的观点来看, 场强叠加原理是电场的一个基本性质, 它比电力叠加原理更基本。

根据点电荷产生场强公式(11-6), 可将点电荷系产生的场强公式写为

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_i. \quad (11-8)$$

3. 连续分布电荷系统的场强

如果场点或参考点距源电荷较近, 源电荷本身的尺寸和形状不能忽视, 这时场强如何计算? 尽管从微观上看, 由于电荷的量子性, 电荷的分布总是不连续的, 但由于电荷的最小单元非常小, 从宏观上看我们完全可以将电荷系统上的电荷当作是连续分布的。在处理此类问题时, 可将电荷系统分解为许多无限小的电荷元 dq , 而每个电荷元又能当成点电荷处理, 其所产生电场为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r,$$

式中 r 是 P 点到 dq 的距离(如图11-7所示)。根据场强叠加原理, 整个系统在 P 点产生的场强可用积分计算

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r. \quad (11-9)$$

只要计算出这个积分, 原则上讲任意形状的带电体所产生的场强的计算问题都解决了。但实际上这个积分很难计算, 只有在少数情况下可以严格解出, 这将在以后章节中介绍。

在具体处理此类问题时, 一般有三种情况:

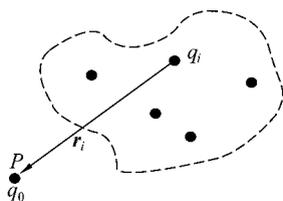


图 11-6

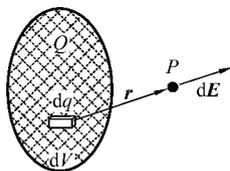


图 11-7

(1) 假如电荷是一个体分布,即分布在三维空间的一个区域内,我们引入电荷体密度来描述其分布,定义为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \quad (11-10)$$

式中 Δq 为 ΔV 中之电荷。这里 $\Delta V \rightarrow 0$ 是指宏观尺度足够小,使 ρ 能精细反映电荷分布的不均匀性,即反映 ρ 随空间位置的变化。但微观上它又足够大,在其中包含大量带电粒子,使电荷可作空间连续分布处理。

(2) 假如电荷分布在一个曲面上,引入电荷面密度

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (11-11)$$

式中 dS 为面积的微元。

(3) 假如电荷分布在一条线上,引入电荷线密度

$$\lambda = \frac{dq}{dl}, \quad (11-12)$$

式中 dl 为长度的微元。

这样,在三种情况下的电荷元就可分别表示为 $dq = \rho dV$, $dq = \rho dS$ 和 $dq = \rho dl$ 。相应的场强计算公式为

$$E = \int \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r, \quad (11-13)$$

$$E = \int \frac{\rho dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r, \quad (11-14)$$

$$E = \int \frac{\rho dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r. \quad (11-15)$$

这些积分是矢量函数的积分,一般处理非常复杂,在具体解决此问题时,要取特定的坐标系,将矢量分解为分量来计算。下面我们介绍几个典型的例题,从中体会并掌握处理此类问题的方法。

例 11-1 有一均匀带电直线,长为 L ,电量为 q ,设线外任一场点 P 离开直线的垂直距离为 d , P 点和直线两端的连线与直线之间的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 。求 P 点的场强。

解 取坐标如图11-8所示,电荷元 dx 的坐标为 x ,其电量为

$$dq = \frac{q}{L} dx = \lambda dx,$$

此电荷元在 P 点产生的场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

电场强度是一个矢量, dE 在此坐标系中的分量分别为 $dE_x = dE \cos \theta$,

$$dE_y = dE \sin \theta_0.$$

进行积分运算, 得到总场强的分量

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta,$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \sin \theta = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta.$$

这两个积分中含有三个变量 x , r 和 θ , 利用三变量之间的几何关系, 可将它们化为一个变量比如 θ 再来积分。利用

$$r = \frac{d}{\sin \theta}, \quad x = -d \cot \theta, \quad dx = \frac{d}{\sin^2 \theta} d\theta,$$

代入以上两个积分, 并确定积分上、下限, 进行积分后得

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1),$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

写成矢量的形式为

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}.$$

对其结果进行讨论:

(1) 当 $d \ll L$ 时, P 点离开带电直线很近, 这时带电直线可看作无限长, 取 $\theta_1 = 0$ 和 $\theta_2 = \pi$ 代入得

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}.$$

(2) 对于半无限长情况, 如图 11-9 所示, 取 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta_2 = \pi$, 得到

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

(3) 当 $d \rightarrow 0$ 时, 分两种情况, 其一是 P 点落在带电直线上, 此时结果发散无意义。另一种情况是 P 点落在带电直线外, 此时结果不确定, 必须按其特殊情况加以处理, 如下例。

例 11-2 如图 11-10 所示, 真空中有一电荷均匀分布的细直棒, 带电量为 $Q (Q > 0)$, 长为 L 。求棒的延长线上 P 点处的电场强度(大小及方向)。

解 将细直棒分成许多电荷元, 长为 dx 的电荷元 dq 在 P 点产生的电场强度的大小为

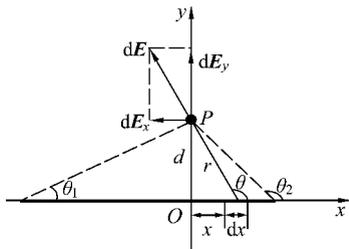


图 11-8

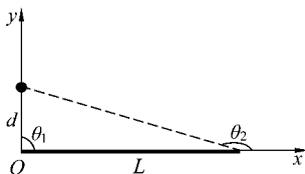


图 11-9

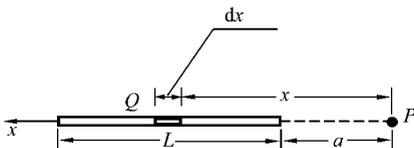


图 11-10

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{Qdx}{4\pi\epsilon_0 Lx^2},$$

积分后得总电场

$$E = \int dE = \int_a^{a+L} \frac{Qdx}{4\pi\epsilon_0 Lx^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a(a+L)},$$

而 P 点的电场强度沿 x 轴负方向。

例 11-3 半径为 R 的均匀带电细圆环, 电量为 Q , 求圆环轴线上任一点的场强。

解 如图11-11所示, 在圆环上任取电荷元 dq , 其在 P 点所产生场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r},$$

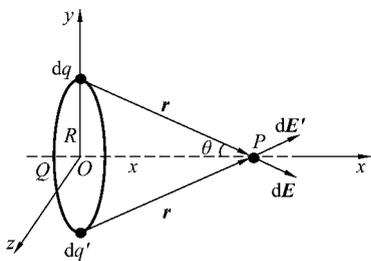


图 11-11

将其分解为垂直分量和平行分量 $dE_x = dE \cos \theta$, $dE_{\perp} = dE \sin \theta$ 。由对称性易知垂直分量相互抵消, 这样可直接得到 $E_{\perp} = 0$ 。因此 P 点场强沿 x 轴的大小为

$$\begin{aligned} E = E_x &= \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \\ &= \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{(Q)} dq = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q, \end{aligned}$$

式中 $\cos \theta = \frac{x}{r}$, 由此得

$$E = \frac{xQ}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}},$$

当 $x=0$ 时, $E=0$, 说明圆环中心处的场强为零。而当 $x \gg R$ 时, 有

$$E \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

说明远离圆环中心处的场强近似等于点电荷的场强。

例 11-4 有一均匀带电的薄圆盘, 半径为 R , 面电荷密度为 σ 。求圆盘轴线上任一点的场强。

解 如图11-12所示, 均匀带电的薄圆盘可分解为不同半径的圆环, 而圆环在

其轴线上任一点的场强可用上一题的结果求得

$$E = \frac{xQ}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}},$$

但 Q 此时对应 $dq = \sigma 2\pi r dr$, R 对应 r , 而 E 对应 dE , 这时有

$$dE = \frac{dqx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{xr dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

不同半径的圆环在 P 点产生电场的方向相同, 故直接进行标量函数的积分即得结果

$$E = \int_0^R \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$

讨论:

(1) 当 $x \ll R$ 时, 有限的均匀带电薄圆盘可视为一无限大均匀带电平面, 其所产生电场为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

它与场点的位置无关, 说明无限大均匀带电平面在其左面或右面形成两个匀强电场。如平面带正电, 则电场从带电平面指向两侧; 如平面带负电, 则电场从两侧指向带电平面。

(2) 图 11-13 为一平行板电容器, 两平行板面的尺寸较板间距大得多, 两板均匀地带上等量异号电荷, 面电荷密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 。根据无限大均匀带电平面产生电场的情况, 以及场强叠加原理, 就可得到平行板电容器不同区域电场分布情况。

在两板内侧

$$E = E_A + E_B = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0};$$

在两板外侧

$$E = E_A - E_B = 0.$$

这就告诉我们, 平行板电容器外无电场, 内部为匀强电场。当然, 这只是一种理想情况, 实际上板面不是无限大的, 会出现边缘效应, 与理想情况有所偏离。

(3) 当 $x \gg R$ 时, 有

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/x^2}} \right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

当场点离开圆盘很远时, 带电圆盘相当于一个点电荷, 这是合理的。

例 11-5 求高为 H , 底面半径为 R 的均匀带电锥体在顶点处的电场强度。

解 如图 11-14 所示, 可以将均匀带电锥体切割成一片一片与底面平行的均匀

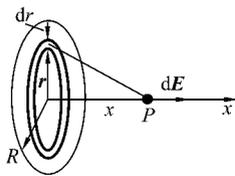


图 11-12

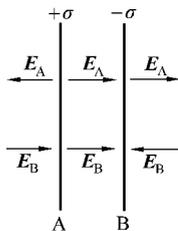


图 11-13

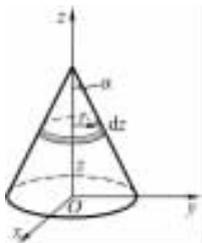


图 11-14

带电圆盘,图示圆盘半径为 r ,厚度为 dz ,坐标为 z ,其带电量为

$$dq = \rho(\pi r^2 dz),$$

而电荷面密度为

$$\sigma = \frac{dq}{\pi r^2} = \rho dz,$$

根据例11-4的公式,它在电锥体顶点处产生的电场强度为

$$dE = \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{H-z}{\sqrt{(H-z)^2 + r^2}} \right),$$

均匀带电锥体顶点处的总场强为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^H \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{H-z}{\sqrt{(H-z)^2 + r^2}} \right) \mathbf{k} \\ &= \int_0^H \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) \mathbf{k} \\ &= \frac{\rho H}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

式中 α 为锥体顶角,显然有关系

$$\cos \alpha = \frac{H-z}{\sqrt{(H-z)^2 + r^2}} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}},$$

这样得到

$$\mathbf{E} = \frac{\rho H}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \right) \mathbf{k}.$$

例 11-6 如图11-15所示,有一无限大均匀带电平面,电荷面密度为 $+\sigma$,在其上开一个半径为 R 的圆孔,求圆孔正前方 P 点的电场强度。

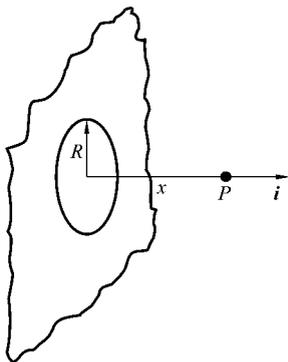


图 11-15

解 本题可用补偿法求解。

在圆孔处填补 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的均匀电荷分布,这样一来对原来的情况没有影响,而原来的电荷分布又可看成由电荷面密度为 $+\sigma$ 的无限大均匀带电平面和电荷面密度为 $-\sigma$ 的半径为 R 的均匀带电圆盘构成。根据场强叠加原理有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{平面}} + \mathbf{E}_{\text{圆盘}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i} + \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{i} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \mathbf{i}. \end{aligned}$$

11.4 高斯定理

在介绍高斯定理之前,先介绍描述电场的两种方法:电场线和电通量。

11.4.1 电场线

在任何电场中,空间各点的场强 E 都有一定的方向。据此,我们可在电场中画出一系列曲线,使得这些曲线上各点的切线方向都与该点处的场强方向一致,这些曲线称为电场线。电场线上的箭头表示线上各点切线应取的正方向,如图11-16所示。

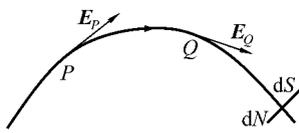


图 11-16

为了使电场线不仅能表示场强的方向,而且能表示场强的大小,在画电场线时作如下规定,即电场中任一点,通过垂直于该点处电场强度的单位面积的电场线根数等于该点处场强的量值,即

$$E = \frac{dN}{dS}, \quad (11-16)$$

式中 $\frac{dN}{dS}$ 称为电场线密度。由此可见,电场线在某点处的切向代表该点场强之方向,而电场线在某点处的密度代表该点场强的大小。

图11-17是按照规定画出来的几种电场的电场线,可以很直观地反映出电场的总体性质。必须指出,电场线实际上并不存在,只是为形象描绘电场的场强分布而使用的一种几何方法。

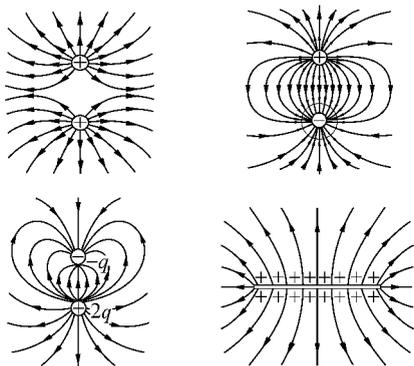


图 11-17

按上述方法画出的电场线具有下述几个性质:

(1) 静电场的电场线发自正电荷或无穷远,终止于负电荷或无穷远,在无电荷处是不中断的。

- (2) 对于静电场不可能出现单一绕向的闭合电场线。
 (3) 任意两条电场线不能相交。

11.4.2 电通量

借助于电场线的概念,可以引入电通量这一物理量。我们说通过电场中任意一个给定面的电场线总根数,即为通过该面的电通量,用 Φ 来表示。下面分两种情况讨论。

1. 匀强电场

如图11-18所示,面积元 dS_{\perp} 与匀强电场垂直,则通过该面积元的电通量为

$$d\Phi = EdS_{\perp},$$

由画电场线的约定可知, $d\Phi$ 即为通过面元 dS_{\perp} 的电场线总根数。

如面积元 dS 与电场不垂直,我们可以用平面的法向单位矢量 e_n 来表示面元 dS 在空间的方位,并用有向面元 $d\mathbf{S}$ 来表示该面元。 $d\mathbf{S}$ 是一个矢量,其大小代表面元的面积 dS ,方向沿 e_n 。如图11-18

所示, e_n 与场强 E 之间夹角为 θ ,面元 dS 在垂直于场强 E 的平面上的投影面积为 dS_{\perp} ,即 $dS_{\perp} = \cos\theta dS$ 。显然通过面元 dS_{\perp} 的电场线必定全部通过面元 dS ,所以通过面元 dS 的电通量也为

$$d\Phi = EdS_{\perp} = E\cos\theta dS,$$

即场强 E 在给定面元法线上的分量与此面元面积的乘积。考虑到矢量点积的定义,有

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

2. 非匀强电场

如图11-19所示,考虑一般的情况,即在非匀强电场中,取一曲面 S ,通过该曲面的电通量为多少呢?可在曲面上任取一面元 dS ,就 dS 很小的局部而言,电场可以认为是匀强的,这样通过该面元的电通量为

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

通过曲面 S 的电通量是通过许许多多面元电通量之和,在极限的情况下,求和变为积分

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S E \cos\theta dS = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (11-17)$$

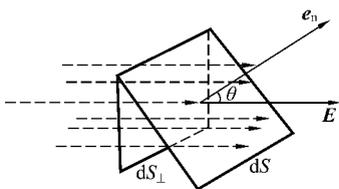


图 11-18

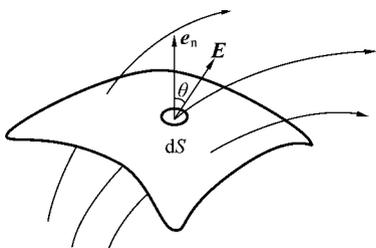


图 11-19

对于闭合曲面记作

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (11-18)$$

最后还要指出,电通量的正、负依赖于曲面法线方向的选取,对于闭合曲面而言,我们约定法线向外为正。这样一来“流出”闭合曲面的电通量为正,“流入”闭合曲面的电通量为负。

11.4.3 高斯定理

高斯(K. F. Gauss)是德国物理学家和数学家,他在理论物理和实验物理以及数学方面均有杰出的贡献。他导出的高斯定理表述了电场中通过任一闭合曲面的电通量与该曲面所包围的源电荷之间的定量关系,是静电场的一条基本定理,也是电磁场理论的基本规律之一。

高斯定理可表述为:在真空中,通过任一闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的所有电量代数和的 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍,即

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (11-19)$$

下面利用库仑定律和场强叠加原理来验证高斯定理。

1. 点电荷在球形高斯面的球心处

如图11-20所示,在真空中有一点电荷 q ,在其周围产生一静电场。以点电荷 q 所在处为球心,以 R 为半径,作一闭合球面,包围这一点电荷。显然,点电荷 q 的电场具有球对称性,球面上

任一点场强大小为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$,方向垂直于球面。这样,通过球面上小面元 dS 的电通量为

$$d\Phi = E \cos 0^\circ dS = \frac{q \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

而通过整个闭合球面的电通量为

$$\Phi = \oiint_S \frac{q dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

在这种情况下高斯定理得以验证。

2. 点电荷在任意形状的高斯面内

我们讨论穿过包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S' 的电通量。如图11-21所示,

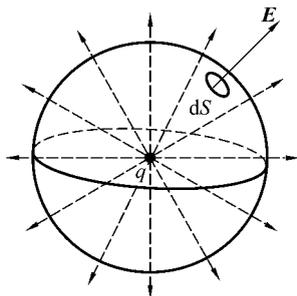


图 11-20

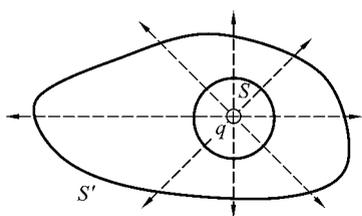


图 11-21

在闭合曲面 S' 的内部作一个以点电荷 q 为球心的球面 S , S' 和 S 之间并无其他电荷, 故电场线不会中断, 有一根电场线穿过 S 曲面就一定穿过 S' 曲面。因此, 通过任意闭合曲面 S' 的电通量等于通过球面 S 的电通量

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0},$$

在这种情况下高斯定理得以验证。

3. 点电荷在高斯面以外

如图11-22所示, 若点电荷在闭合曲面 S 之外, 由于在无电荷的地方电场线不中断, 故有一根电场线穿进闭合曲面 S , 它就一定要穿出, 穿进时对通过闭合曲面的电通量贡献为负, 而穿出时对通过闭合曲面的电通量贡献为正, 这样一正一负对电通量的贡献正好抵消。因此, 在这种情况下, 通过闭合曲面的电通量为零, 即

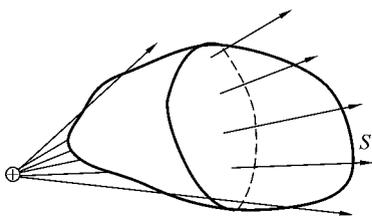


图 11-22

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

在这种情况下高斯定理得以验证。

4. 任意电荷系的静电场

如图11-23所示, 有一点电荷系由 n 个点电荷组成, 其中有 k 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_k 在闭合曲面内, 而点电荷 $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n$ 在闭合曲面外。按场强叠加原理, 空间任意点的场强为

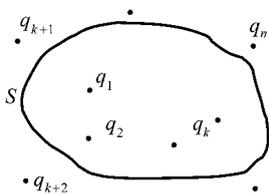


图 11-23

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i,$$

则通过闭合曲面 S 的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} \\ &= \sum_{i=1}^k \oiint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} + \sum_{i=k+1}^n \oiint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

由于点电荷 q_1, q_2, \dots, q_k 在闭合曲面内, 而点电荷 $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n$ 在闭合曲面外,

故 $\sum_{i=1}^k \oiint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\epsilon_0}$, 而 $\sum_{i=k+1}^n \oiint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。这样一来

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\epsilon_0}。$$

我们看到在较一般情况下, 高斯定理得以验证。

必须强调的是, 高斯定理表明通过闭合曲面的电通量, 只与该曲面所包围总电量的代数和有关。但这并不是说闭合曲面上的场强只由曲面所包围的电荷决定, 实际上任意点的场强由全空间所有电荷共同决定。

其次, 高斯定理反映出静电场是有源场。如闭合曲面内含正电荷, 则电通量为正, 有电场线出来; 如闭合曲面内含负电荷, 则电通量为负, 有电场线进去。这说明电场线发自正电荷终止于负电荷, 在没有电荷的地方不中断。具有这种性质的场我们称之为有源场。

最后, 我们说高斯定理从表面上看是从库仑定律中推出来的, 但其地位比库仑定律来得高。库仑定律只适用于静电场, 而高斯定理对于非静电场的情况其形式依然不变。从这个意义上讲, 高斯定理比库仑定律适用范围更广, 也更基本。

11.5 高斯定理的应用

高斯定理从理论上阐明了电场与电荷的关系, 并且在源电荷分布具有一定对称性的条件下, 提供了根据源电荷分布来计算场强的方法。当然, 反过来也可由场强的分布来确定源电荷的分布。

例 11-7 一均匀带电球面, 总电量为 Q , 半径为 R , 求电场强度分布。

解 由于带电体的电荷分布具有球对称性, 故其电场分布也具有球对称性。根据电场分布具有球对称性, 取以球心 O 为球心, 半径为 r 的球面作为高斯面(如图 11-24 虚线所示)。显然在高斯面上各点的场强大小都相等, 场强的方向垂直于高斯面向外($q > 0$)或向内($q < 0$)。经过这样的分析后, 先来求通过高斯面(球面)的电通量

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = E 4\pi r^2,$$

再根据高斯定理有

$$E 4\pi r^2 = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2}。$$

如 $r < R$, $\sum_i q_i = 0$, $E = 0$ 。如 $r > R$, $\sum_i q_i = Q$, $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。即均匀带电球面内

电场强度为零,而其外部的电场等同于所有的电量都集中在球心的一个点电荷所产生的电场。图11-24中还画出了电场强度的 $E-r$ 曲线。

从这个例题中可以看到利用高斯定理根据源电荷分布求电场强度是非常方便的,但关键是要要求源电荷分布具有高度对称性,而且高斯面如何选取也非常重要。设想电荷分布在一个椭球面上或高斯面取成一个椭球面,此时高斯定理 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\epsilon_0}$ 依然成立,但由于电场强度 E 在高斯面上各点大小不相等,或其方向与高斯面上各点法线方向间的夹角各不相同,这就不能把积分 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 写成高斯面上电场强度大小的函数形式,从而由高斯定理将电场强度求出来。

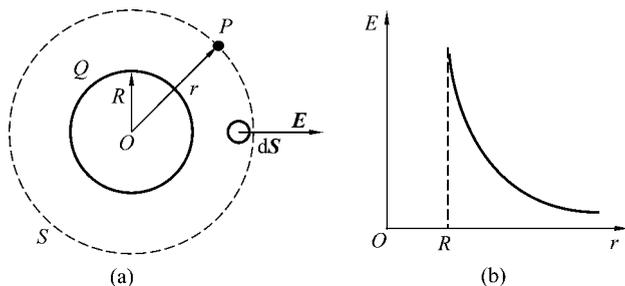


图 11-24

例 11-8 一无限长均匀带电的直线,其线电荷密度为 λ ,求电场强度。

解 源电荷分布以带电导线为轴具有旋转对称性,故其所产生的电场也具有相同的对称性。如图11-25所示,这种对称性意味着任何垂直于长直带电线的同心

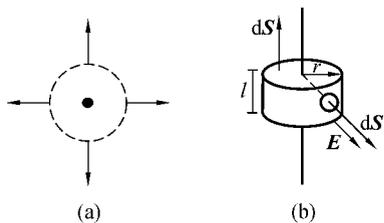


图 11-25

圆周上各点场强的大小都相等,方向只能沿径向向外($\lambda > 0$)或向内($\lambda < 0$)。根据以上对电场对称性的分析,以带电导线为轴作一高为 l ,半径为 r 的柱面,包含上、下两个底面和一个侧面,它们构成一闭合曲面,此闭合曲面即为我们所取的高斯面。由于场强与上、下两个底面平行,故通过它们的电通量为零,只有侧面才有电通量通过,这样易算得

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E2\pi r l.$$

再根据高斯定理有

$$E2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

这与前面讨论过的无限长线电荷的结果一致,但利用高斯定理计算电场强度却方便多了。

例 11-9 一无限大均匀带电平面,面电荷密度为 σ ,求场强分布。

解 对于无限大均匀带电平面而言,从场点到平面的垂线都是系统的旋转对称轴,故任意点电场强度方向都垂直于该带电平面。另一方面,凡离无限大均匀带电平面距离相等的各点处电场强度大小都相同,因为这些点所处的地位都是一样的。根据这样的分析,如图 11-26 所示,我们取与该带电平面垂直的柱面为高斯面,使其面积为 S 的两个底面平行于带电平面,且关于该带电平面左右对称。很显然,通过侧面的电通量为零,而通过两个底面的电通量相同,很容易计算出来,进而求出通过高斯面的电通量

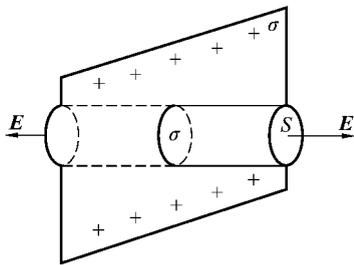


图 11-26

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES,$$

再根据高斯定理有 $2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$, $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 。 $\sigma > 0$,场强方向背离带电平面; $\sigma < 0$,场强方向指向带电平面,带电平面两侧分别为两个匀强电场。

请思考一下,若不是无限大带电平面,而是一个带电圆盘(如图 11-27 所示),上面的处理方法还成立吗?回答是否定的,此时虽然高斯定理



图 11-27

$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\epsilon_0}$ 还是成立的,但由于各点的场

强一般不与圆盘面垂直,且底面上各点场强不同,这使得积分 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 不能用场强来表示,故求不出场强。

11.6 环流定理 电势

前面我们研究了静电场的通量问题——高斯定理,现来研究一下静电场的环流——环流定理,从而证明静电场的保守性,然后引入电势作为描写静电场的另一个物理量。在学习时,大家应该经常联系力学中有关功、能的概念,这样有助于理解下面的内容。

11.6.1 环流定理

真空中有一静电场 E , 在场中任意取一闭合回路 l , 则定义场强 E 沿闭合回路 l 的积分 $\oint_l E \cdot dl$ 为电场 E 沿回路 l 的环流。

对于静电场的环流有所谓的环流定理, 其内容是: 静电场中, 电场强度沿任意闭合回路的环流为零。可用数学公式表示为

$$\oint_l E \cdot dl = 0. \quad (11-20)$$

下面我们对环流定理给以证明。

(1) 设静电场由一点电荷产生, 由库仑定律

$$E = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r,$$

则易证其环流为

$$\oint_l E \cdot dl = \oint_l \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \cdot dl = \oint_l \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = 0.$$

(2) 设电场由 n 个点电荷组成的一点电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 产生, 按场强叠加原理, 空间任意点的场强为各个点电荷单独存在时产生电场强度 E_i 的矢量和

$$E = \sum_{i=1}^n E_i,$$

这样总电场 E 的环流为

$$\oint_l E \cdot dl = \oint_l \sum_{i=1}^n E_i \cdot dl = \sum_{i=1}^n \oint_l E_i \cdot dl = 0.$$

(3) 对于由连续分布电荷产生的静电场, 此连续分布电荷可看成由大量电荷元 dq 所构成的一个点电荷系, 环流定理照样成立。

11.6.2 环流定理的物理意义

在静电场中, 外来点电荷 q_0 受到的静电力为 $F = q_0 E$, 沿闭合回路 l 运动一周, 根据环流定理, 静电力做功为

$$\oint_l F \cdot dl = \oint_l q_0 E \cdot dl = q_0 \oint_l E \cdot dl = 0.$$

由此可见, 静电力做功与路径无关, 这种力称为保守力, 其所对应的场是保守场。静电场是保守场, 还可称为无旋场, 而根据高斯定理, 静电场又是有源场, 所以我们说静电场是一种有源无旋场。

11.6.3 电势差和电势

静电力是保守力,而保守力与势能之间有一一对应的关系,对应静电力这一保守力的势能称为电势能。根据功能原理,通过保守力做功改变系统的势能,静电力所做的功等于系统电势能增量的负值或电势能的减少,即

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(W_b - W_a), \quad (11-21)$$

式中 a 、 b 分别代表 q_0 在电场中的始、末位置,而 W_a 和 W_b 分别代表 q_0 在两位置上的电势能。如 $A_{ab} > 0$, 则 $W_a > W_b$, 即静电力做正功系统电势能减少; 如 $A_{ab} < 0$, 则 $W_a < W_b$, 即静电力做负功系统电势能增加。这样定义的电势能是一个相对量, 为了定出某点的电势能, 必须选择一个电势能的零点, 这个选择具有任意性, 一般选择在离 q_0 无限远处为电势能的零点(比如 b 点), 这样一来 a 点的电势能就唯一定下来了

$$W_a = \int_a^\infty q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

即点电荷 q_0 在电场中任一点 a 的电势能 W_a , 等于将点电荷 q_0 从点 a 移到无限远处的过程中电场力所做的功。一般说来, 这个功可正也可负, 相应的电势能也有正有负。电势能是属于相互作用的整个系统的, 不仅与电场有关还与点电荷 q_0 有关。但是, 比值 $\frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 却仅与场点 a 的位置有关, 而与电荷 q_0 无关。因

此 $\frac{W_a}{q_0}$ 可用来描述电场中某点 a 的性质, 称为 a 点的电势, 用 V_a 来表示, 即

$$V_a = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (11-22)$$

可见, 静电场中某点的电势, 在数值上等于放在该点的单位正电荷的电势能, 或者等于将单位正电荷从点 a 移到无限远处的过程中电场力所做的功。所以, 电势是一个标量, 而其单位为 V(伏特)。我们将任意两点 a 和 b 的电势之差称为电势差, 用 V_{ab} 来表示

$$V_{ab} = V_a - V_b$$

而

$$V_a = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad V_b = \int_b^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

即

$$V_{ab} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_b^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_\infty^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

由此得到

$$V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (11-23)$$

即静电场中 a, b 两点的电势差, 等于单位正电荷从点 a 移到点 b 过程中电场力所做的功。由于电场力是保守力, 这个功和过程是无关系的, 故电势差只与 a, b 两点的位置有关, 与连接它们之间的路径无关。

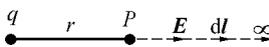
反过来, 知道了电势差后静电力的做功问题就非常简单了, 即

$$A_{ab} = -q_0(V_b - V_a)。 \quad (11-24)$$

11.7 电势的计算

11.7.1 点电荷电场中的电势

点电荷的电场为 $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$, 根据 $V_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 可求 P 点处的电势(如图11-28所示)。此积分与路径无关, 选择一个最简单的, 即沿着径向:



$$\begin{aligned} V_P &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}。 \end{aligned} \quad (11-25)$$

图 11-28

由此可见, 点电荷的电势具有球对称性, q 是正的, 电势也是正的; q 是负的, 电势也是负的。

11.7.2 点电荷系电场中的电势

设电场由 n 个点电荷组成的点电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 产生, 按场强叠加原理, 空间任意点的场强为各个点电荷单独存在时产生电场强度 \mathbf{E}_i 的矢量和

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i,$$

这样, 空间任意点的电势为

$$V = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^\infty \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \int_P^\infty \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n V = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}。 \quad (11-26)$$

此式的含义为: 点电荷系电场在某场点的电势等于各个点电荷电场在同一场点的电势的代数和, 这一结论称为电势叠加原理。

11.7.3 连续分布电荷电场中的电势

对于连续分布电荷系统, 可将其分成无限个电荷元 dq (如图11-29所示), 每个

电荷元可以视为一个点电荷,其在 P 点产生电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r},$$

按电势叠加原理, P 点的总电势为

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (11-27)$$

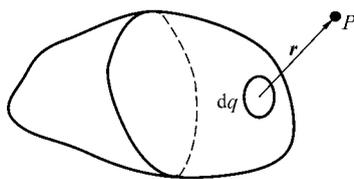


图 11-29

式中积分区间即电荷所在的空间。

总结:计算不同形状电荷系统产生电势的问题一般有两种方法可以处理:其一是电场 E 已知或先求电场 E ,然后由公式 $V_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 来求电势。其二是根据电势叠加原理,由公式 $V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$ 来求电势。到底用哪一种方法,这要具体问题具体分析。用第一种方法,电场 E 要用高斯定理来求,因为由库仑定律来求电场 $E = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$,一定比用公式 $V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$ 来求电势复杂,如果要这样做还不如直接用第二种方法。

例 11-10 均匀带电细圆环,总电量为 q ,半径为 R ,求圆环轴线上任一点的电势。

解 如图11-30所示,在圆环上任取电荷元 dq ,其在圆环轴线上 P 点处产生的电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r},$$

再由电势叠加原理有

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r},$$

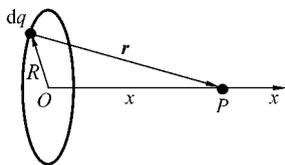


图 11-30

式中 r 不是变量,因为各个电荷元离圆环轴线上 P 点的距离都相同,故易得

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

例 11-11 均匀带电球面,总电量为 q 半径为 R ,求电势分布。

解 前面按高斯定理已经求出均匀带电球面在其内、外产生电场情况可表示为:在球外, $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$;在球内,无电场。如图11-31所示,球面外距球心 r 处 P_1 点的电势为

$$V = \int_{P_1}^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

这相当于球面上所有的电量都集中在球心时,一个点电荷在球面外产生的电

势。在球面内任意取一点 P_2 , 电场强度 E 从 P_2 积分(沿径向)到无限, 即得球内 P_2 点的电势, 由于被积函数 E 是分段的, 故积分也要分段, 即

$$V = \int_{P_2}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^R 0 \cdot dr + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

由此可见, 球内各点电势相同, 就等于球面处的电势。电势随 r 的变化曲线如图 11-31 所示。

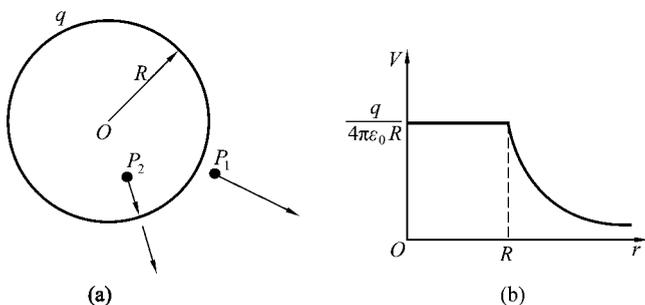


图 11-31

例 11-12 求线电荷密度为 λ 的无限长均匀带电直线的电势分布。

解 无限长均匀带电直线产生的电场强度为: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r$ 。此时如取无限远

处为电势零点, 则计算电势的积分 $V_P = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 会发散, 故只能选有限远点为电势零点。若取距带电直线 r_0 处为电势零点(如图 11-32 所示), 则距带电直线 r 处的电势为

$$\begin{aligned} V_P &= \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_r^{r_0} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}. \end{aligned}$$

图 11-32

由此可见, 对于无限长均匀带电直线, 只能选有限远点为电势零点; 对无限大均匀带电平面, 也只能选有限远点为电势零点。

例 11-13 半径为 R 的均匀带电球体, 带电量为 q 。求电势分布(如图 11-33 所示)。

解 利用高斯定理求得球内、外的电场分布

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r \leq R),$$

$$E_2 = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (r \geq R),$$

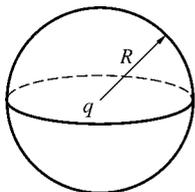


图 11-33

球外一点的电势

$$V_2 = \int_P^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

球内一点的电势

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \int_r^R \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}. \end{aligned}$$

此题也可以用电势叠加原理来求球内、外的电势分布。

例 11-14 对于面电荷密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的两块无限大均匀带电平行平面, 求其电势分布。

解 建立如图 11-34 所示坐标系, 电场强度分布为

$$E = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} & (-a < x < a), \\ 0 & (x < -a, x > a), \end{cases}$$

以 $x=0$ 为势能零点, 则

$$V_{\text{I}} = \int_x^0 E dx = \int_x^{-a} 0 \cdot dx + \int_{-a}^0 \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) dx = -\frac{\sigma x}{\epsilon_0},$$

$$V_{\text{III}} = \int_x^0 E dx = \int_x^a 0 \cdot dx + \int_a^0 \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) dx = \frac{\sigma x}{\epsilon_0},$$

在两个极板间

$$V_{\text{II}} = \int_x^0 \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) dx = \frac{\sigma x}{\epsilon_0}.$$

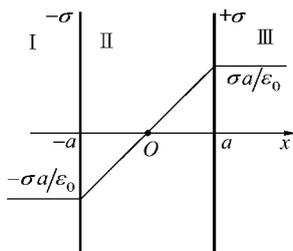


图 11-34

11.8 电势与电场强度的关系

电场强度和电势都是用来描述电场性质的客观物理量, 它们之间有内在联系。前面已经介绍了它们之间的积分关系 $V_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 这使我们能由已知电场求得电势。现在要问一个逆问题, 已知电势如何求电场? 已知电场求电势是积分, 那么已知电势求电场就应该是微分, 问题是到底应该怎么微分, 才能由标量函数电势来得到矢量函数电场, 这是本节的主要内容。为此我们先介绍等势面。

11.8.1 等势面

我们将电场中电势相同的各点形成的曲面称为等势面。显然等势面满足方程: $V(x, y, z) = C$ 。通常约定相邻等势面的电势差为常量, 这样可以得到一系列

的等势面,并使得 $\Delta V_{12} = \Delta V_{23}$ (如图11-35所示)。

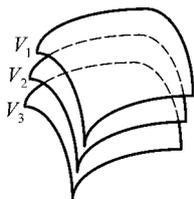


图 11-35

11.8.2 等势面的性质

等势面有以下性质:

(1) 电荷沿等势面移动,电场力不做功。

这是很容易理解的,因为 $A_{ab} = -qV_{ba} = -q \cdot 0 = 0$, 其中 a, b 为等势面上任意两点。

(2) 电场强度与等势面正交;电场线由电势高的地方指向电势低的地方。

在等势面上移动电荷电场力不做功,即 $dA = qE \cdot dl = 0$, 其中 dl 是等势面上的有向线段,由于 dl 是任意的,故在 E 不等于零的情况下,它一定与等势面垂直。另一方面,将带正电的电荷 q 从电势为 V_1 的等势面移动到电势为 V_2 的等势面,电场力做功为 $A_{12} = -q(V_2 - V_1)$ 。如 $V_2 < V_1$, 则 $A_{12} > 0$, 电场力做正功,电场线由等势面 V_1 指向等势面 V_2 。由此可见,电场线由电势高的地方指向电势低的地方。

(3) 相邻等势面间距小处,场强大;间距大处,场强小。

我们可用等势面的疏密情况反映电场的强弱。图11-36画出了不同带电系统的等势面(虚线)和电场线。

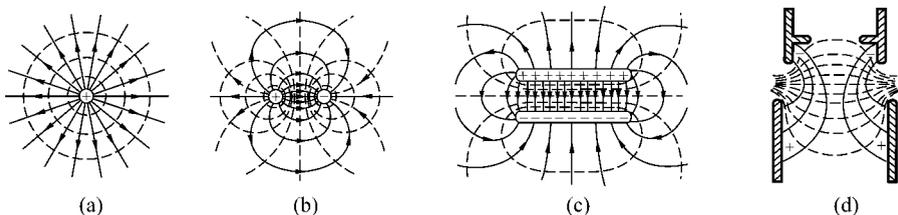


图 11-36

11.8.3 电势梯度

如图11-37所示, e_n 为等势面法线方向,且指向电势增加方向。外来电荷 q 由 P 点沿路径微元 dl 从一个等势面移动到另一个等势面,此过程中电场力做功为

$$dA = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q[(V + dV) - V] = -qdV,$$

或

$$-dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_l dl,$$

式中 E_l 代表 \mathbf{E} 沿 $d\mathbf{l}$ 方向上的分量, 由此可得

$$E_l = -\frac{dV}{dl}. \quad (11-28)$$

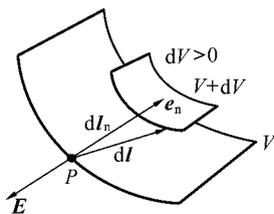


图 11-37

上式表明, 电场强度沿某方向的分量等于电势沿该方向的空间变化率的负值。如路径微元 $d\mathbf{l}$ 沿等势面法线方向 \mathbf{e}_n , 由于 $dl_n < dl$, 所以 $\frac{dV}{dl_n} > \frac{dV}{dl}$, 即沿等势面法线方向电势的空间变化率最大, 其数值应该等于电场强度的大小。考虑到电场强度与等势面垂直, 且指向电势低的地方, 有

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dl_n} \mathbf{e}_n,$$

考虑到电势是空间位置的多元函数, 通常将上式写成偏导数的形式, 即

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial l_n} \mathbf{e}_n. \quad (11-29)$$

将 $\frac{\partial V}{\partial l_n} \mathbf{e}_n$ 称为电势梯度, 它是一个矢量, 方向沿等势面法线方向 \mathbf{e}_n , 大小等于电势沿该方向的空间变化率。这样一来, 电场强度与电势梯度大小相等, 方向相反。

在直角坐标系中, $d\mathbf{l}$ 沿三个坐标轴方向分别取 dx, dy, dz , 则得到电场强度在三个方向上的分量

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

因此, 在直角坐标系中, 我们可以将电场强度写为

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k},$$

引入梯度算子 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, 得到

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

式中 ∇V 是前面提到的电势梯度 $\frac{\partial V}{\partial l_n} \mathbf{e}_n$ 的另一种表达式。

在平面极坐标系中, 类似有

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta,$$

而

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta) \cdot (dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta) = E_r dr + E_\theta r d\theta,$$

因为

$$-dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

对比两式后有

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta},$$

或写成

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right).$$

例 11-15 计算电偶极子电场的电势和电场强度。

解 两点电荷等量异号(+q 和 -q), 相距为 l , 而考查点离点电荷的距离又较 l 大得多, 这样一对点电荷就称为电偶极子。表征电偶极子的特征物理量是它的电偶极矩 \mathbf{p} , 定义为 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, 其中矢量 \mathbf{l} 由负电荷指向正电荷。电偶极子是一个非常重要的模型, 在研究电介质的极化、发射和吸收电磁波以及中性分子间的相互作用力时都要用到这个模型。下面我们来计算一下电偶极子电场的电势和电场强度。

如图 11-38 所示, 正、负电荷在 P 点产生的电势为

$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+},$$

当 $l \ll r$ 时, 有 $r_+ r_- \approx r^2$ 和 $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$, 其中 θ 为位矢 \mathbf{r} 与电矩 \mathbf{p} 之间的夹角。因此有

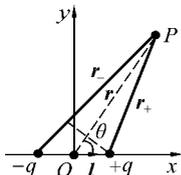


图 11-38

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

下面再来求电场强度。根据平面极坐标系中强度与电势的关系有

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta} = -\frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

写成矢量的形式, 即

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-\mathbf{p} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^2} \right].$$

例 11-6 讨论电偶极子在均匀外电场中受到的作用力和力矩。

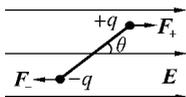


图 11-39

解 如图 11-39 所示, 电偶极子电矩 \mathbf{p} 与均匀外电场夹角为 θ , 电偶极子受到的静电力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_+ + (-q)\mathbf{E}_- = 0,$$

但其受到的合外力矩不为零, \mathbf{F}_+ 和 \mathbf{F}_- 构成一对力偶, 力偶所形

成的力矩与支点的选取无关,易得

$$M = Fl \sin \theta = qEl \sin \theta = pE \sin \theta,$$

考虑到方向关系可将其写成矢量形式:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

例 11-17 半径为 R 的均匀带电细圆环,电量为 q ,求圆环轴线上任一点的电势并由此计算轴线上的场强。

解 如图 11-40 所示,在圆环上任取电荷元 dq ,其在 P 点所产生的电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r},$$

P 点总电势为

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}},$$

由此得

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{xq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}},$$

而由对称性知 $E_y = 0, E_z = 0$ 。

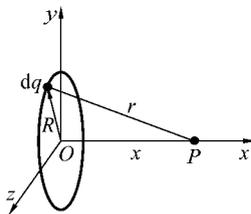


图 11-40

习题 11

11-1 在如图 11-41 所示的直角三角形 ABC 的 A 点上,有电荷 $q_1 = 1.8 \times 10^{-9} \text{C}$, B 点上有电荷 $q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{C}$,试求 C 点的电场强度(设 $BC = 0.04 \text{m}$, $AC = 0.03 \text{m}$)。

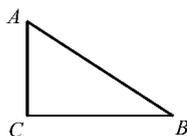


图 11-41

11-2 用细的塑料棒弯成半径为 50cm 的圆环,两端间空隙为 2cm ,电量为 $3.12 \times 10^{-9} \text{C}$ 的正电荷均匀分布在棒上,求圆心处电场强度的大小和方向。

11-3 将一“无限长”带电细线弯成如图 11-42 所示的形状,设电荷均匀分布,电荷线密度为 λ ,四分之一圆弧 AB 的半径为 R ,试求圆心 O 点的场强。

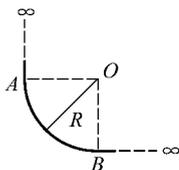


图 11-42

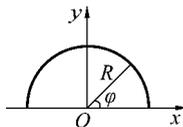


图 11-43

11-4 带电细线弯成半径为 R 的半圆形,如图 11-43 所示。电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \sin \varphi$,式中 λ_0 为一常数, φ 为半径 R 与 x 轴所成的夹角,试求环心 O 处的电场强度。

11-5 一半径为 R 的半球面, 均匀地带有电荷, 电荷面密度为 σ , 求球心 O 处的电场强度。

11-6 图11-44所示是一厚度为 d 的“无限大”均匀带电平板, 电荷体密度为 ρ_0 。求板内、外的场强分布, 并画出场强随坐标 x 变化的图线, 即 $E-x$ 图线(设原点在带电平板的中央平面上, Ox 轴垂直于平板)。

11-7 设电荷体密度沿 x 轴方向按余弦规律 $\rho = \rho_0 \cos x$ 分布在整个空间, 式中 ρ_0 为恒量, 求空间的场强分布。

11-8 在点电荷 q 的电场中, 取一半径为 R 的圆形平面(如图11-45所示), 平面到 q 的距离为 d , 试计算通过该平面的 E 的通量。

11-9 一球体内均匀分布着电荷体密度为 ρ 的正电荷, 若保持电荷分布不变, 在该球体中挖去半径为 r 的一个小球体, 球心为 O' , 两球心间距离 $\overline{OO'} = d$, 如图11-46所示。求:

- (1) 在球形空腔内, 球心 O' 处的电场强度 E_0 ;
- (2) 在球体内 P 点处的电场强度 E 。设 O', O, P 三点在同一直径上, 且 $\overline{OP} = d$ 。

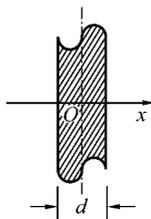


图 11-44

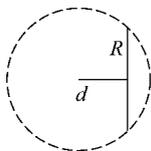


图 11-45

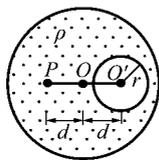


图 11-46

11-10 如图11-47所示, 一锥顶角为 θ 的圆台, 上下底面半径分别为 R_1 和 R_2 , 在它的侧面上均匀带电, 电荷面密度为 σ , 求顶点 O 的电势(以无穷远处为电势零点)。

11-11 图11-48所示为一个均匀带电的球壳, 其电荷体密度为 ρ , 球壳内表面半径为 R_1 , 外表面半径为 R_2 。设无穷远处为电势零点, 求空腔内任一点的电势。

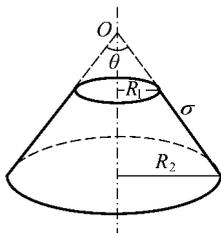


图 11-47

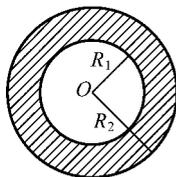


图 11-48

11-12 电荷以相同的电荷面密度 σ 分布在半径为 $r_1 = 10\text{cm}$ 和 $r_2 = 20\text{cm}$ 的两个同心球面上。设无限远处电势为零, 球心处的电势为 $U_0 = 300\text{V}$ 。

- (1) 求电荷面密度 σ ;
- (2) 若要使球心处的电势也为零, 外球面上应放掉多少电荷?

11-13 如图11-49所示, 半径为 R 的均匀带电球面, 带有电荷 q 。沿某一半径方向上有一

均匀带电细线, 电荷线密度为 λ , 长度为 l , 细线左端离球心距离为 r_0 。设球和线上的电荷分布不受相互作用影响, 试求细线所受球面电荷的电场力和细线在该电场中的电势能(设无穷远处的电势为零)。

11-14 一电偶极子的电矩为 p , 放在场强为 E 的匀强电场中, p 与 E 之间夹角为 θ , 如图 11-50 所示。若将此偶极子绕通过其中心且垂直于 p, E 平面的轴转 180° , 外力需做功多少?

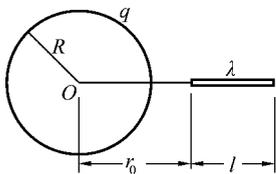


图 11-49

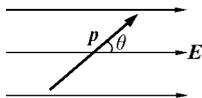


图 11-50

11-15 两根相同的均匀带电细棒, 长为 l , 电荷线密度为 λ , 沿同一条直线放置。两细棒间最近距离也为 l , 如图 11-51 所示。假设棒上的电荷是不能自由移动的, 试求两棒间的静电相互作用力。

11-16 如图 11-52 所示, 一个半径为 R 的均匀带电圆板, 其电荷面密度为 $\sigma (> 0)$ 。今有一质量为 m , 电荷为 $-q$ 的粒子 ($q > 0$) 沿圆板轴线 (x 轴) 方向向圆板运动, 已知在距圆心 O (也是 x 轴原点) 为 b 的位置上时, 粒子的速度为 v_0 , 求粒子击中圆板时的速度(设圆板带电的均匀性始终不变)。

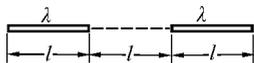


图 11-51

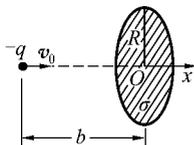


图 11-52

思考题 11

11-1 两个点电荷分别带电 q 和 $2q$, 相距 l , 试问将第三个点电荷放在何处它所受合力为零?

11-2 下列几个说法中哪一个是正确的?

- (A) 电场中某点场强的方向, 就是将点电荷放在该点所受电场力的方向。
- (B) 在以点电荷为中心的球面上, 由该点电荷所产生的场强处处相同。
- (C) 场强方向可由 $E = F/q$ 定出, 其中 q 为试验电荷的电量, q 可正、可负, F 为试验电荷所受的电场力。

11-3 图 11-53 所示为真空中一半径为 R 的均匀带电球面, 总电量为 q ($q < 0$)。今在球面上挖去非常小的一块面积 ΔS (连同电荷), 且假设不影响原来的电荷分布, 则挖去 ΔS 后球心处的电场强度大小和方向。

11-4 三个点电荷 q_1, q_2 和 $-q_3$ 在一直线上, 相距均为 $2R$, 以 q_1 与 q_2 的中心 O 作一半径

为 $2R$ 的球面, A 为球面与直线的一个交点, 如图11-54所示。求:

(1) 通过该球面的电通量 $\oiint E \cdot dS$;

(2) A 点的场强 E_A 。

11-5 有一边长为 a 的正方形平面, 在其中垂线上距中心 O 点 $a/2$ 处, 有一电荷为 q 的正点电荷, 如图11-55所示, 则通过该平面的电场强度通量为多少?

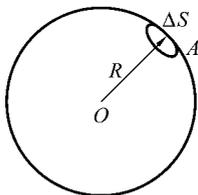


图 11-53

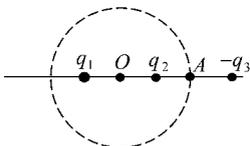


图 11-54

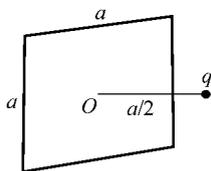


图 11-55

11-6 对静电场高斯定理的理解, 下列四种说法中哪个是正确的?

- (A) 如果通过高斯面的电通量不为零, 则高斯面内必有净电荷
- (B) 如果通过高斯面的电通量为零, 则高斯面内必无电荷
- (C) 如果高斯面内无电荷, 则高斯面上电场强度必处处为零
- (D) 如果高斯面上电场强度处处不为零, 则高斯面内必有电荷

11-7 由真空中静电场的高斯定理 $\oiint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$ 可知下面哪个说法是正确的?

- (A) 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强一定为零
- (B) 闭合面内的电荷代数和不为零时, 闭合面上各点场强一定都不为零
- (C) 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强不一定都为零
- (D) 闭合面内无电荷时, 闭合面上各点场强一定为零

11-8 如图11-56所示为一具有球对称性分布的静电场的 $E-r$ 关系曲线。请指出该静电场是由下列哪种带电体产生的。

- (A) 半径为 R 的均匀带电球面
- (B) 半径为 R 的均匀带电球体
- (C) 半径为 R 、电荷体密度 $\rho = Ar$ (A 为常数) 的非均匀带电球体
- (D) 半径为 R 、电荷体密度 $\rho = A/r$ (A 为常数) 的非均匀带电球体

11-9 如图11-57所示, 在点电荷 q 的电场中, 选取以 q 为中心、 R 为半径的球面上一点 P 处作电势零点, 则与点电荷 q 距离为 r 的 P' 点的电势为

- (A) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$
- (B) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$
- (C) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r-R)}$
- (D) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

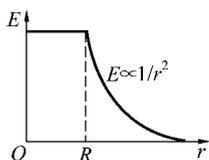


图 11-56

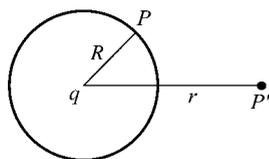


图 11-57

11-10 密立根油滴实验是利用作用在油滴上的电场力和重力平衡而测量电荷的,其电场由两块带电平行板产生。实验中,半径为 r 、带有两个电子电荷的油滴保持静止时,其所在电场的两块极板的电势差为 U_{12} 。当电势差增加到 $4U_{12}$ 时,半径为 $2r$ 的油滴保持静止,则该油滴所带的电荷为多少?

11-11 设无穷远处电势为零,则半径为 R 的均匀带电球体产生的电场的电势分布规律为(图中的 U_0 和 b 皆为常量)图11-58所示中是哪个图?

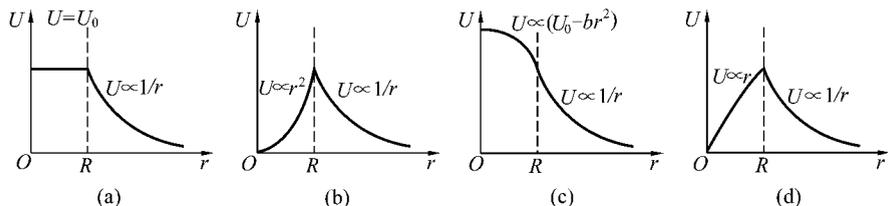


图 11-58

11-12 无限长均匀带电直线的电势零点能取在无穷远吗?

第 12 章 导体电学

通过前一章的学习,我们了解了静电场的基本性质和规律。以此为基础,本章和下一章将进一步讨论在电场中存在某些宏观物体的情况。此时,物体内包含的大量电子、原子核、正负离子等微观带电粒子,在电场作用下将产生运动,从而形成电荷的重新分布,产生一个附加电场,这就是所谓的电场与物质的相互作用。

根据物质导电性能的不同,可将物质大致分为三类:导电性能很好的称为导体;导电性能极差的或不导电的物体称为绝缘体;而导电性能介于导体和绝缘体之间的称为半导体。之所以会这样,是由于这三种物体具有完全不同的微观图像。本章我们将讨论导体与外电场发生相互作用的情况,而下一章将研究电介质与外电场发生相互作用的情况。

12.1 静电场中的导体

12.1.1 导体的微观结构

构成导体的原子外层价电子比较少,原子核对它们的束缚作用比较弱,因而这些价电子容易脱离原子而成为自由电子,同时失去了价电子的原子成为带正电的离子。正离子在导体内部按一定规律分布,形成带正电的晶格点阵。导体内的自由电子都在进行无规则的热运动,就好像是关在容器内的气体分子,故有时称其为自由电子气。当导体未带电或未受到外电场作用时,其内部的自由电子负电荷与晶格离子正电荷平均说来是等量的,在宏观的尺度上,导体内的任何部分都呈电中性。

12.1.2 导体的静电平衡

当导体受到外电场作用时,情况将发生变化。如图12-1所示,导体中的部分自由电子将在外电场作用力的驱动下运动到导体的一端而堆积起来,这一端因为有多余电子而带负电,同时另一端因缺少电子而带正电。由此引起电荷在导体上的重新分布,这种现象称之为静电感应。导体上因静电感应而出现的电荷称为感应电荷。当感应电荷分布达到稳定状态时,导体内部

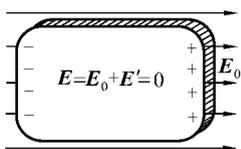


图 12-1

的自由电子将不再有宏观运动,就说导体在外电场中达到了静电平衡。导体在外电场中达到静电平衡的时间非常短,大约只有 $10^{-14} \sim 10^{-13}$ s!那么,在外电场中导体为什么会达到静电平衡呢?这是因为重新分布的电荷也要产生一个电场(E'),这个电场与外电场(E_0)在导体内部是相互抵消的,最终使导体内部电场为零,这样自由电子在导体内部不受电场力,不继续发生宏观运动,导体达到静电平衡状态。通过上面的讨论,导体在静电场中达到静电平衡时具有如下重要性质:

(1) 在导体内部,电场强度处处为零。

这一点很容易得到证明:如导体内部电场强度不为零,自由电子就要受到电场力的作用而产生宏观运动,这与导体处于静电平衡状态相矛盾。故导体在静电场中达到静电平衡时,导体内部电场强度处处为零。

(2) 导体内各点电势相等,即导体是一个等势体,导体的表面是一个等势面,电力线垂直于导体的表面。

如图12-2所示,在处于静电平衡的导体内任意取两点 a 、 b ,由于此时在导体内部电场强度处处为零,两点之电势差为

$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

所以

$$V_a = V_b,$$

即导体内各点电势相等,导体是一个等势体,导体的表面是一个等势面。因为电力线与等势面垂直,也就与导体表面垂直。

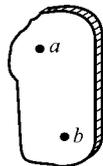


图 12-2

12.1.3 静电平衡下导体上的电荷分布

下面分几种情况讨论静电平衡情况下导体上的电荷分布。

1. 实心导体

如图12-3所示,在导体内任取一高斯面 S ,因为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

由高斯定理,有

$$\sum_{S^{\text{内}}} q = \int_V \rho dV = 0,$$

一般不能得到 $\rho=0$ 的结论,但由于高斯面为任意选取,

故只有一种可能: $\rho=0$ 。由此看到,导体内部没有静电荷,导体所带电荷只能分布在导体表面上。

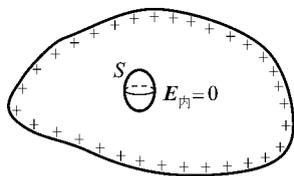


图 12-3

2. 空腔导体(腔中无电荷)

如图12-4所示,有一空腔导体,腔中无电荷,此时电荷在导体上如何分布?与前面证明类似,在静电平衡情况下,导体是一个等势体,其内部没有静电荷,电荷只能分布在外表面或内表面。下面简单说明一下内表面也不可能带电。

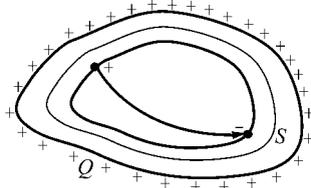


图 12-4

在导体内任取一高斯面 S , 由于高斯面始终处于导体内部, 而导体内部场强为零, 即

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

由高斯定理得

$$Q_{\text{内表面}} = 0.$$

这样的话导体内表面如果带电, 只能是有一部分是正电荷, 而另一部分是等量的负电荷, 而电力线由正电荷指向负电荷。同一根电力线上不同两点电势是不相等的, 这与导体是一个等势体相矛盾, 故这种情况也是不可能出现的。由此可见, 内表面没有宏观电荷分布, 电荷只能分布在外表面。在腔中无电荷时, 腔中不会有电力线, 即场强为零, 这样, 导体(包括空腔在内)是一个等势体。

3. 空腔导体(腔中有电荷)

如图12-5所示, 有一空腔导体, 腔中有电荷 $+q$, 此时电荷在导体上如何分布? 易证明: 除空腔外导体是一个等势体, 导体内部没有静电荷, 电荷只能分布在外表面或内表面。为了确定导体内表面带电的多少, 作如图12-5所示的高斯面, 并设内表面带电 x , 由高斯定理

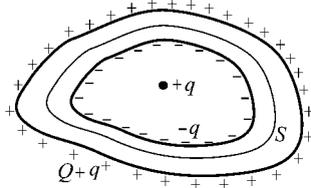


图 12-5

因为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q+x}{\epsilon_0},$$

因为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

故

$$x = -q,$$

即导体内表面带电 $-q$, 如导体原来带电 Q , 则由电荷守恒定律, 导体外表面带电 $Q+q$ 。这里还需强调一点的是: 腔内的电场由 $+q$ 和腔内表面的感应电荷 $-q$ 共同决定。与腔内电荷位置、腔体的几何结构有关。而腔中电荷 $+q$ 和腔内表面的感应电荷 $-q$ 对腔外的电场贡献相互抵消。

12.1.4 静电屏蔽

根据导体腔的静电学性质,可以利用空腔导体对腔内、外进行静电隔离。

1. 空腔导体起到屏蔽外电场的作用

如图12-6所示,为了使仪器不受外电场的影响,可将其用导体壳罩起来,由于静电感应,使壳的外表面带上感应电荷,而感应电荷在腔内产生的电场与外电场抵消,使壳内空间的合电场为零,达到保护仪器设备的目的。

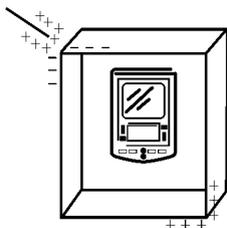


图 12-6

2. 接地的空腔导体可以屏蔽内、外电场的影响

如图12-7所示,为了不使仪器产生的电场影响周围空间,也可将其用导体壳罩起来,并将导体壳接地。这样一来,仪器对外产生的电场所被导体壳内表面电荷产生的电场所抵消,而接地又使得导体壳外表面不带电(外部空间无电荷分布时),对外不产生电场。当然,此时外电场也不会影响仪器。由此可见,接地的空腔导体可以屏蔽内、外电场的相互影响。

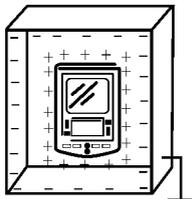


图 12-7

12.1.5 尖端放电及其应用

首先讨论导体表面电荷与导体表面外侧电场间的关系。设导体表面上的电荷面密度为 $\sigma(x, y, z)$, 而导体表面外侧附近的电场强度为 $E(x, y, z)$ 。如图12-8



图 12-8

所示,设 P 是导体外紧靠导体表面的一点,通过 P 作平行于导体表面的面积元 dS ,然后以此面积元为底面作一个穿过导体表面的柱面为高斯面,高斯面的母线与导体表面垂直。因为导体内场强处处为零,导体又是等势体,电力线与导体表面垂直,故通过柱形高斯面下底面及侧面的电通量为零,因此有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{dS} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{(S-dS)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0},$$

式中 E 为 P 点处的场强,而 σ 为靠近 P 点的导体表面的电荷面密度。由此得到

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

考虑到电场的方向后可写为

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_n, \quad (12-1)$$

式中 \mathbf{e}_n 是靠近 P 点的导体表面的法向单位矢量,方向由导体内指向导体外。

需要强调的是,式(12-1)并非意味着导体表面某点处场强 E 仅由该处导体上的面电荷产生,实际上它由全空间所有电荷分布产生的电场的矢量叠加。比如,有没有电荷 Q , P 点处的场强 E 是不同的,当然导体表面电荷的分布也将发生变化, E 和 σ 都变了,但式(12-1)还是成立的。

这里,可能会有这样一个问题:前面讲过无限大均匀带电

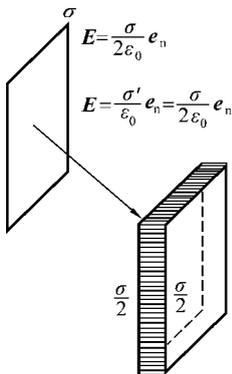


图 12-9

导体平板,电荷面密度为 σ 时,其所产生的电场为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$,

这似乎与式(12-1)有矛盾,怎么来解释这个问题呢?如图12-9所示,无论多薄的导体平板也有两个侧面,面电荷密度 σ 是对两个侧面而言的,其中一个侧面的电荷面密度实际上应为 $\sigma' = \sigma/2$,代入式(12-1)有 $E = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \mathbf{e}_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$,所以,实际上不矛盾(见图12-9)。利用式 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_n$ 计算的电场为总电场,

而用式 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$ 计算的电场为由电荷面密度为 σ 的无限大

均匀带电平板产生的电场。

通过上面的介绍,我们看到导体表面处的场强由导体表面处各点的电荷面密度 σ 所决定,而 σ 在导体表面是如何分布的,这是一个非常复杂的问题。对于与其他物体和电荷距离足够远的所谓孤立导体而言,一般有这样的结论:导体表面处电荷面密度 σ 与该处表面曲率有关,在导体表面曲率为正值,且较大的地方,电荷面密度较

大;在曲率较小部分,电荷面密度较小;当表面凹进时,曲率为负值,电荷面密度更小(如图12-10所示)。

对于具有尖端的带电体,因为尖端的曲率很大,分布的电荷面密度也大,所以它周围的电场很强,当场强超过空气的击穿场强时,就会发生空气被电离的放电现象,称为尖端放电。

例 12-1 电荷面密度为 σ 的无限大带电平面的场中,平行放置一无限大不带电金属平板,求金属板两侧面上的电荷面密度。

解 如图12-11所示,设金属板两侧面上的电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2 ,由电量守恒定律有

$$\sigma_1 = -\sigma_2。$$

在导体内任取一点 P ,显然 σ, σ_1 和 σ_2 在 P 点处产生的场强相互抵消

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0,$$

式中负号是由于我们选取图示 x 轴正向为正。

由此解得

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma。$$

例 12-2 接地导体球附近有一点电荷,如图12-12所示,求导体表面上感应电荷的电量。

解 导体球接地,则其电势为零,当然球心 O 的电势也为零。 O 点的电势由导体表面上感应电荷 Q 和点电荷 q 共同产生。设感应电荷面密度为 σ ,则

$$Q = \int \sigma dS,$$

而其在 O 点产生电势为

$$V_Q = \int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R},$$

根据电势叠加原理有

$$\int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = 0,$$

由此得到

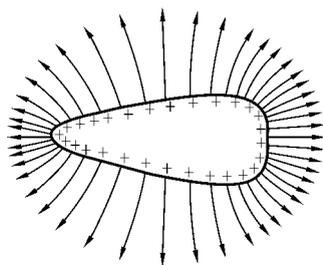


图 12-10

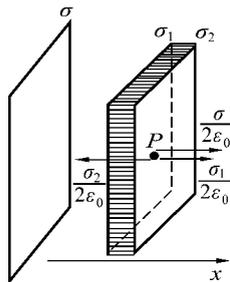


图 12-11

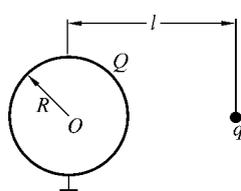


图 12-12

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = 0,$$

即

$$Q = -\frac{R}{l}q.$$

例 12-3 导体占有 $z > 0$ 的半无限大空间, 在导体左侧, 距离导体表面为 a 处有一点电荷 q (如图 12-13 所示), 求导体表面的感应电荷面密度。

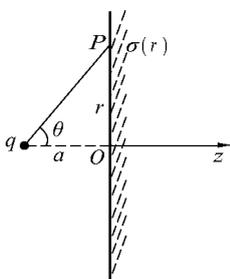


图 12-13

解 在电荷 q 的影响下, 导体表面上将出现感应电荷分布, 该分布对 z 轴具有旋转对称性, 用 $\sigma(r)$ 表示。显然 P 点处导体表面内侧电场强度为零, 则 z 方向的电场强度分量也应为零, 即

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)} \cos\theta + \frac{\sigma(r)}{2\epsilon_0} = 0,$$

式中 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)} \cos\theta$ 为点电荷 q 在 P 点处导体表面内侧产生的电场强度 z 分量, 而 $\frac{\sigma(r)}{2\epsilon_0}$ 为感应面电荷在 P 点处导体表面内侧产生的电场强度 z 分量。由此得到

$$\sigma(r) = -\frac{q \cos\theta}{2\pi(r^2 + a^2)} = -\frac{qa}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

还可求得总的感应面电荷

$$Q = \int \sigma dS = \int_0^{\infty} \sigma(r) 2\pi r dr = -q.$$

12.2 电容和电容器

12.2.1 孤立导体的电容

一个孤立导体周围没有其他物体, 以无穷远处为电势零点, 当其带电量为 q 时, 孤立导体的电势为 V 。实验和理论都证明, 对于任意形状的孤立导体, 当其所带电量增加 k 倍时, 它的电势也将增加 k 倍, 即孤立导体的电势与它所带的电量成正比。我们将孤立导体的电量与其电势之比称为孤立导体的电容, 用 C 来表示, 这样

$$C = \frac{q}{V}. \quad (12-2)$$

真空中孤立导体的电容仅由导体的几何形状和大小决定, 与其所带电量无关。在国际单位制中, 电容的单位是库仑/伏特(C/V), 称为法拉, 用 F 表示:

$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{pF}.$$

例 12-4 求真空中半径为 R 的孤立导体球的电容。

解 设导体球带电 Q , 则其电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

那么导体球电容为

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R,$$

对半径如地球一样的导体球, 其电容为

$$C_E = 4\pi\epsilon_0 R_E = 7.11 \times 10^{-4} \text{F}.$$

由此可见, 法拉是一个很大的单位, 使用中经常用微法(μF)或皮法(pF)。

12.2.2 电容器的电容

若带电导体附近有其他导体存在, 其电势就会受到一定影响。如图 12-14 所示, 带电导体 A 旁有一不带电导体 B, 由于静电感应 B 相对 A 的远近两侧出现等量异号的感应电荷, 当然 A 上的电荷也会向 B 移近。因为 B 上的异号电荷更接近 A, 使 A 的电势比孤立时更低了。由此可见, 因为 B 的存在, 要使 A 保持相同电势, 它就要带上更加多的电荷, 即由于 B 的存在, 使 A 的电容增大了。利用上述性质, 可以制作一个由两导体构成的导体组, 称为电容器。一般使电容器中 A、B 两导体带等量异号电荷 $\pm q$, 这样在两导体间存在电势差 $V_A - V_B$, 而电容器电容的定义为

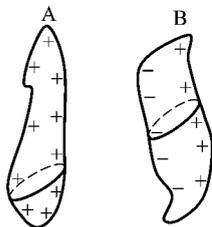


图 12-14

$$C = \frac{q}{V_A - V_B}. \quad (12-3)$$

当 B 移到无限远处时, 式(12-3)与孤立导体电容公式一致。这样定义的电容器的电容决定于导体的形状、大小、相对位置及两导体周围的电介质分布情况。

下面具体介绍几种常见的电容器及其电容的计算。

12.2.3 几种常见的电容器

1. 平行板电容器

平行板电容器是一种较常见的电容器。如图 12-15 所示, 设有两平行的金属极板, 面积都为 S , 两极板内表面间的距离为 d , 且使两极板线度远大于两极

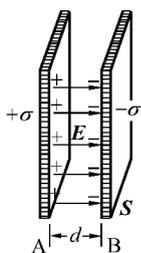


图 12-15

板内表面间的距离。设一个极板带 $+q$ 的电量,另一极板带 $-q$ 的电量,电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 。由于平行板电容器外无电场,故极板外表面无电荷,电荷分布在极板内表面上,而两极板间的场强为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

两极板间的电势差为

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0},$$

所以平行板电容器的电容为

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (12-4)$$

由此可见,电容正比于极板面积,反比于极板间距,与极板间介质性质有关。

2. 球形电容器

如图12-16所示,球形电容器由半径分别为 R_A 和 R_B 的两同心球壳组成,内球壳带电 $+q$,外球壳带电 $-q$ 。根据对称性知,电荷在球面上均匀分布,利用高斯定理得两球壳之间的场强

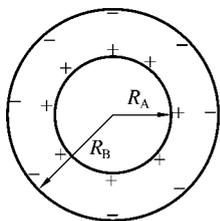


图 12-16

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r,$$

式中 r 为球心到场点的距离。

两球壳间的电势差为

$$\Delta V = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right),$$

所以球形电容器的电容为

$$C = \frac{q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}, \quad (12-5)$$

取 $R_B - R_A = d, R_B - R_A \ll R_A$,则

$$C \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

这与平行板电容器的电容相同。

3. 柱形电容器

如图12-17所示,圆柱形电容器由两个长直同轴导体圆筒组成。设内、外筒单位长度带电量为 $\pm\lambda$,由高斯定理得两圆筒间的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r,$$

而两圆筒间的电势差为

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{\text{内}}^{\text{外}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r \cdot dl = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \end{aligned}$$

圆柱形电容器单位长度的电容为

$$C = \frac{\lambda}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (12-6)$$

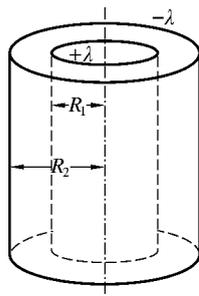


图 12-17

12.2.4 电容器的连接

电容器的连接有串联和并联两种方式。串联连接时(如图12-18所示),各电容上的电量相同,总电压等于各个电容器上的分电压之和,

由此可得总电容和各分电容的关系。根据

$$\begin{aligned} q &= q_1 = q_2 = q_3 = q_4, \\ V &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \\ C &= \frac{q}{V}, \quad V = \frac{q}{C}, \end{aligned}$$

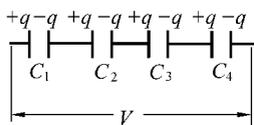


图 12-18

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q}{V_1}, \quad V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad C_2 = \frac{q}{V_2}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \\ C_3 &= \frac{q}{V_3}, \quad V_3 = \frac{q}{C_3}, \quad C_4 = \frac{q}{V_4}, \quad V_4 = \frac{q}{C_4}, \end{aligned}$$

有

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{C_i},$$

即串联电容器总电容的倒数,等于各个电容器电容的倒数之和。

电容器并联连接时(如图12-19所示),每个电容器两极板间的电压相同,总电量为分电量之和

$$\begin{aligned} V &= V_1 = V_2 = V_3, \\ q &= q_1 + q_2 + q_3, \end{aligned}$$

由此得到

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{V} = C_1 + C_2 + C_3,$$

即并联电容器总电容是各个电容器电容之和。

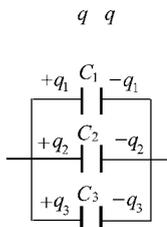


图 12-19

12.3 传导电流

电荷有规则的定向运动形成电流,这电荷可以是金属中的自由电子、电解质溶液中的离子,也可以是半导体材料中的电子和空穴等,它们统称为载流子。这种载流子在材料中定向运动所形成的电流称为传导电流。

12.3.1 电流强度和电流密度

我们规定正电荷的定向运动方向为电流的方向,用电流强度来衡量电流的强弱。如图12-20所示,设 dt 时间内流过导体横截面的电量为 dq ,则导体内的电流强度定义为

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (12-7)$$

即单位时间通过导体横截面的电量。电流强度的单位为安培(A),若电流强度与时间无关,这种电流称为稳恒电流。

电流强度 I 只能说明通过导体横截面总的电流的强弱,它并不能说明导体内各点处电荷的运动情况。为此,需要用电流密度 j 这个物理量来描述电流的空间分布。电流密度是一个矢量,是空间位置的函数 $j(x, y, z)$ 。导体中某点的电流密度的方向与该点的场强 E 的方向相同,由于此时导体不处于静电平衡状态,其内部电场强度一般不为零。电流密度的大小定义为从垂直于电场方向的单位截面上流过的电流强度,即(如图12-21所示)

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (12-8)$$

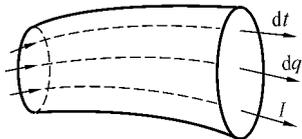


图 12-20

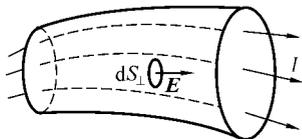


图 12-21

电流密度的单位是 $A \cdot m^{-2}$ 。知道了导体中各点的电流密度,导体中各点电荷的运动情况也就清楚了,这要比用电流强度来描写电荷的运动情况精确得多。

下面我们再来看一下电流密度和电流强度的关系。如图12-22所示,有向面元 dS 与该处电流密度 j 之夹角为 θ ,通过有向面元 dS 的电流强度 dI 与通过面元 dS_{\perp} 的电流强度相等,即

$$dI = jdS_{\perp} = jdS \cos \theta = j \cdot dS,$$

将上式对截面 S 求曲面积分, 可得通过该截面的电流强度为

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (12-9)$$

还可以将电流密度与导体内载流子的漂移运动联系起来。所谓漂移运动是指载流子在电场影响下所作的定向运动, 除此之外, 载流子还作无规则热运动, 无规则热运动不形成宏观电流, 我们这里不考虑。设每个载流子电量为 q , 载流子数密度为 n , 其平均漂移速度的大小为 v_d 。如图 12-23 所示, 在导体内假想一个小柱体, 其底面与该处场强垂直, 母线与该处场强平行, 柱体的长取载流子平均漂移速度的大小 v_d 。显然, 单位时间柱体内的载流子都要通过截面 ΔS , 产生的电流强度为

$$\Delta I = qn v_d \Delta S,$$

根据定义, 电流密度的大小为

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = nq v_d,$$

考虑到方向, 写成矢量式, 即

$$\mathbf{j} = nq \mathbf{v}_d. \quad (12-10)$$

由此可见, 对于 $q > 0$, \mathbf{j} 与 \mathbf{v}_d 同向; 对于 $q < 0$, \mathbf{j} 与 \mathbf{v}_d 反向。

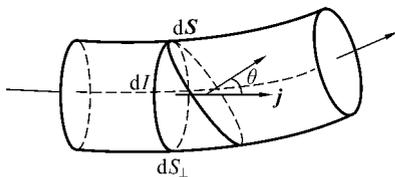


图 12-22

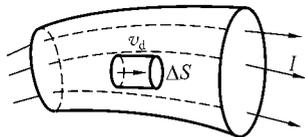


图 12-23

12.3.2 欧姆定律的微分形式

欧姆定律告诉我们, 在阻值为 R 的电阻两端加一电压 $V_1 - V_2$ (如图 12-24 所示), 电阻中形成的电流为

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R},$$

对于柱形材料, 其电阻值 R 可表示为

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

式中 ρ 为电阻率, 与材料的性质和温度有关; l 为电阻的长度; S 为电阻的横截面积。电阻率的倒数称为电导率, 用 γ 表示, 即

$$\gamma = \frac{1}{\rho}.$$

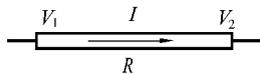


图 12-24

下面讨论欧姆定律的微分形式。如图12-25所示,在导体内假想一个柱体,其底面与该处场强垂直,母线与该处场强平行,柱体的长取为 dl ,横截面积为 dS ,而柱体两横截面间的电势差为 $-dV$ 。根据欧姆定律,柱体内电流为

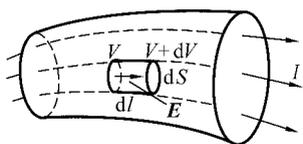


图 12-25

$$dI = -\frac{dV}{R},$$

柱体电阻为

$$R = \rho \frac{dl}{dS}。$$

根据

$$Edl = -dV,$$

有

$$dI = \frac{Edl}{R} = \frac{E}{\rho}dS,$$

即

$$\frac{dI}{dS} = \gamma E。$$

考虑到各点处电流密度 j 和场强 E 平行,有

$$j = \gamma E, \quad (12-11)$$

此即欧姆定律的微分形式。它表明导体中任意一点的电流密度与该点处的电场强度成正比,两者方向平行。

12.3.3 焦耳定律的微分形式

焦耳定律告诉我们,在阻值为 R 的电阻内通有电流 I ,该电阻的热功率为

$$P = I^2 R。$$

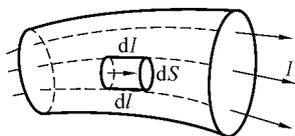


图 12-26

如图12-26所示,在导体内假想一个柱体,其底面与该处场强垂直,母线与该处场强平行,柱体的长取为 dl ,横截面积为 dS ,而柱体内电流为 dI 。该柱体的热功率为

$$dP = (dI)^2 R。$$

单位体积的热功率称为热功率密度,用 ω 表示,显然

$$\omega = \frac{(dI)^2 R}{dS dl},$$

根据

$$R = \rho \frac{dl}{dS},$$

有

$$w = \rho \left(\frac{dI}{dS} \right)^2 = \rho j^2 = \rho (\gamma E)^2 = \gamma E^2, \quad (12-12)$$

此即焦耳定律的微分形式。它表明导体中任意一点处的热功率密度与该点的电场强度的平方成正比。

12.4 电动势 稳恒电场

12.4.1 电动势

根据欧姆定律的微分形式 $j = \gamma E$, 我们知道, 要在导体内形成电流, 就要在导体内维持电场的存在。如图 12-27 所示, 设想有两导体 A 和 B, A 带正电 (+q) 电势高, B 带负电 (-q) 电势低。用导线将 A 和 B 连接起来, 则在连接的瞬时导线中有电流存在, 然而, 很短时间后, 导体 A 和 B 上的正、负电荷中和, 导线中电场消失, 电流终止。由此可见, 为了维持导线中的电流, 必须把已经流到低电势处的正电荷不断地送到高电势处。这需要一种力来完成此任务, 这种力可以是机械的、化学的、磁的作用, 但它决非是静电性质的力。这种力我们统称非静电力, 而能够提供非静电力的装置称为电源。例如干电池、蓄电池、太阳能电池、燃料电池、发电机等就是我们经常使用的电源。

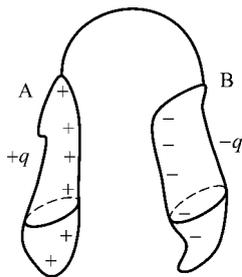


图 12-27

电源都有正、负两个电极, 正极电势高, 负极电势低。如图 12-28 所示, 正电荷在静电力的作用下, 经外电路由正极流向负极, 在此过程中通过对外做功电荷的电势能转化为其他形式的能量 (内能、光能等)。在电源内部, 非静电力又把正电荷从负极移到正极, 在此过程中非静电力要反抗静电力做功, 消耗了机械能或化学能等形式的能量, 又使电荷的电势能增加, 这样进行下去, 就可在电路中形成恒定的电流。

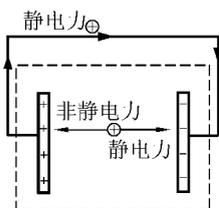


图 12-28

不同电源的非静电力有不同的做功本领, 常用电源的电动势来衡量它。首先, 将非静电力对应成一种非静电场, 并用场强 E_k 来表示, 即

$$E_k = \frac{F_k}{q},$$

式中 F_k 表示电源中电荷 q 所受到的非静电力。电源的电动势定义为

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} E_k \cdot dl, \quad (12-13)$$

即电源电动势是将单位正电荷从电源负极沿内电路移到正极过程中非静电力所

做的功。式中积分上下限的正、负号代表电源的正、负极。电动势 \mathcal{E} 是一个标量, 但以后为电路计算上的方便, 常将从负极到正极的方向定义为电动势的方向。在某些情况下(例如以后要介绍的感生电动势), 非静电力可能存在于整个电流回路中, 此时电动势的计算用闭合回路的积分来表示

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}. \quad (12-14)$$

12.4.2 稳恒电场

前面一章我们介绍了静电场, 它是由静止的电荷产生的, 这里我们又讲了电路中的电场。在稳恒电流的情况下, 即电流密度不随时间的变化而变化, 这两种电场虽然产生的情况不同(稳恒电路中的电场是由运动的只是空间分布保持恒定的电荷产生的), 但它们有许多相似之处。稳恒电路中的电场称为稳恒电场, 稳恒电场与静电场都满足高斯定理和环流定理, 即

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (12-15)$$

和

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (12-16)$$

环流定理告诉我们, 稳恒电场是一个保守场, 也可以引进电势的概念。故与静电场类似, 稳恒电路中两点间的电势差也可用下面的公式计算

$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (12-17)$$

例 12-4 如图12-29所示, 半径为 r_0 的半球形电极埋在大地里, 大地视为均匀的导电介质, 其电导率为 γ , 求接地电阻。

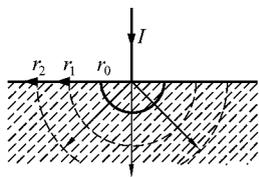


图 12-29

解 将大地分为一层层的薄半球壳, 薄半球壳的厚度为 dr , 面积为 $2\pi r^2$, 则电阻为

$$dR = \frac{dr}{\gamma 2\pi r^2},$$

各个半球壳电阻是串联关系, 故接地电阻为

$$R = \int_r^\infty dR = \int_r^\infty \frac{dr}{\gamma 2\pi r^2} = \frac{1}{\gamma 2\pi r}.$$

还可以计算一下半径为 r_1 和 r_2 两个半球面间的电压。

先计算它们之间的电阻

$$R_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dR = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\gamma 2\pi r^2} = \frac{1}{\gamma 2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

则电压为

$$V_1 - V_2 = IR_{12} = \frac{1}{\gamma 2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

这个电压称为跨步电压,所对应的实际情况是,假如一根高压线落在你旁边的地上,你应该怎么办?千万别紧张,应该单脚独立跳离高压线落地处。如果甩开两脚跑的话,你将被跨步电压击倒。

此题还有另一种解法。显然大地中的电流密度为

$$j = \frac{I}{2\pi r^2},$$

根据欧姆定律的微分形式

$$j = \gamma E,$$

有

$$E = \frac{I}{2\pi\gamma r^2},$$

由此得到跨步电压

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{1}{\gamma 2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

12.4.3 电路上两点间的电势差

我们可以利用公式 $V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 来计算电路上任意两点间的电势差,但实际上,利用非常简单的约定就可计算出电路上任意两点间的电势差。

如图12-30所示,对于电阻而言,任意取一个方向(虚线),如电流方向与该方向一致,则沿该方向电压降低 IR ;反之,如电流方向与该方向相反,则沿该方向电压升高 IR 。

如图12-31所示,对于电动势而言,又任意取一个方向,如电动势方向与该方向一致,则沿该方向电压升高 \mathcal{E} ;反之,如电动势方向与该方向相反,则沿该方向电压降低 \mathcal{E} 。

如图12-32所示,利用上面的约定很容易计算出 a, b 两点之间的电势差为

$$V_b - V_a = -IR - IR' + \mathcal{E}$$

式中 R' 为电源的内阻。

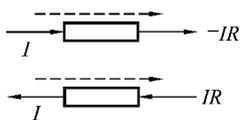


图 12-30

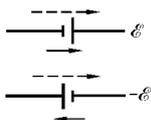


图 12-31

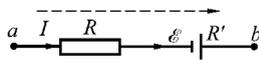


图 12-32

习题 12

12-1 一半径为 0.10m 的孤立导体球,已知其电势为 100V (以无穷远为零电势),计算球表面的电荷面密度。

12-2 两个相距很远的导体,半径分别为 $r_1 = 6.0\text{cm}$, $r_2 = 12.0\text{cm}$,都带有 $3 \times 10^{-8}\text{C}$ 的电量,如果用一导线将两球连接起来,求最终每个球上的电量。

12-3 有一外半径为 R_1 、内半径为 R_2 的金属球壳,在壳内有一半径为 R_3 的金属球,球壳和内球均带电量 q ,求球心的电势。

12-4 一电量为 q 的点电荷位于导体球壳中心,壳的内外半径分别为 R_1 、 R_2 。求球壳内外和球壳上场强和电势的分布,并画出 $E-r$ 和 $V-r$ 曲线。

12-5 两块带有异号电荷的金属板 A 和 B,相距 5.0mm ,两板面积都是 150cm^2 ,电量分别为 $\pm 2.66 \times 10^{-8}\text{C}$,A 板接地,略去边缘效应。求:

(1) B 板的电势;

(2) AB 间离 A 板 1.0mm 处的电势。

12-6 实验表明,在靠近地面处有相当强的电场 E 垂直于地面向下,大小约为 130V/m ,在离地面 1.5km 高空的场强也是垂直向下,大小约为 25V/m 。

(1) 试估算地面上的面电荷密度(设地面为无限大导体平面);

(2) 计算从地面到 1.5km 高空的空气中的平均电荷密度。

12-7 同轴传输线是由两个很长且彼此绝缘的同轴金属圆柱(内)和圆筒(外)构成,设内圆柱半径为 R_1 ,电势为 V_1 ,外圆筒的内半径为 R_2 ,电势为 V_2 。求其离轴为 r 处($R_1 < r < R_2$)的电势。

12-8 图 12-33 所示为一球形电容器,在外球壳的半径 b 及内外导体间的电势差 U 维持恒定的条件下,内球半径 a 为多大时才能使内球表面附近的电场强度最小,并求这个最小电场强度的大小。

12-9 一空气平板电容器,极板 A、B 的面积都是 S ,极板间距离为 d 。接上电源后,A 板电势 $U_A = V$,B 板电势 $U_B = 0$ 。现将一带有电荷 q 、面积也是 S 而厚度可忽略的导体片 C 平行插在两极板的中间位置,如图 12-34 所示,试求导体片 C 的电势。

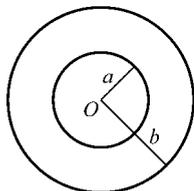


图 12-33

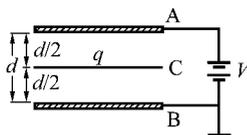


图 12-34

12-10 两金属球的半径之比为 $1:4$,带等量的同号电荷。当两者的距离远大于两球半径时,有一定的电势能。若将两球接触一下再移回原处,则电势能变为原来的多少倍?

思考题 12

12-1 一平行板电容器,两导体板不平行,今使两板分别带有 $+q$ 和 $-q$ 的电荷,有人将两板的电场线画成如图12-35所示,试指出这种画法的错误,你认为电场线应如何分布。



图 12-35

12-2 在“无限大”均匀带电平面 A 附近放一与它平行,且有一定厚度的“无限大”平面导体板 B,如图12-36所示。已知 A 上的电荷面密度为 $+\sigma$,则在导体板 B 的两个表面 1 和 2 上的感生电荷面密度为多少?

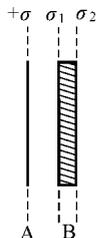


图 12-36

12-3 充了电的平行板电容器两极板(看作很大的平板)间的静电作用力 F 与两极板间的电压 U 之间的关系是怎样的?

12-4 一个未带电的空腔导体球壳,内半径为 R 。在腔内离球心的距离为 d 处($d < R$),固定一点电荷 $+q$,如图12-37所示。用导线把球壳接地后,再把地线撤去。选无穷远处为电势零点,则球心 O 处的电势为多少?

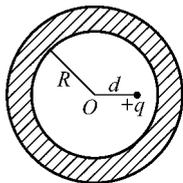


图 12-37

12-5 在一个原来不带电的外表面为球形的空腔导体 A 内,放一带有电荷为 $+Q$ 的带电导体 B,如图12-38所示。则比较空腔导体 A 的电势 U_A 和导体 B 的电势 U_B 时,可得什么结论?

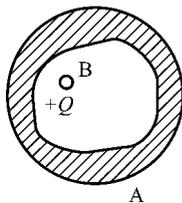


图 12-38

第 13 章 电介质

除导体外,凡处在电场中能与电场发生作用的物质皆可称为电介质。电介质种类很多,有气态电介质、液态电介质和固态电介质,而电阻率非常大的电介质称为理想电介质或绝缘体。电介质具有重要的应用价值,对其电学性质的研究无疑也是非常重要的。

13.1 电介质的极化

13.1.1 现象

(理想)电介质完全不同于导体,其原子或分子中的电子被原子核紧紧地束缚着,介质内部没有可以自由移动的电荷,在外电场作用下,电介质内部的场强可以不等于零。电介质的存在也会影响外电场,因为在外电场中,电介质原子或分子中的正、负电荷可以在原子或分子的线度范围内移动,产生宏观的极化现象。

我们知道,真空中点电荷产生的电场为 $E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}$,而实验告诉我们,同一点电荷在无限大均匀各向同性电介质中的场强为 $E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3}$ ($\epsilon_r > 1$),由于电介质的影响,使得电介质内的场强减小了 ϵ_r 倍, ϵ_r 称为电介质的相对介电常数。又比如有一平行板电容器,内部为真空,将其充电后再断开,极板带电 Q ,则该电容器的场强、电势差和电容分别为 $E_0 = \frac{Q}{S\epsilon_0}$, $V_0 = E_0 d$, $C_0 = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ 。当该平行板电容器充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀各向同性电介质时,电容器相应的场强、电势差和电容分别为 $E = \frac{Q}{S\epsilon_0\epsilon_r}$, $V = Ed$, $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d}$ 。由此可见,场强减小了 ϵ_r 倍,但电容却增加了 ϵ_r 倍,故 ϵ_r 又称为相对电容率。下面从微观角度来说明一下电介质对外场的响应情况。

13.1.2 电介质极化的微观模型

原子或分子是由带正电的原子核与带负电的电子组成的中性电荷系统,从远

比分子线度大得多的距离来看,可以将所有正电荷看作集中在一点上(正电荷中心),将所有负电荷也看作集中在一点上(负电荷中心)。实验表明,电介质分子有两类,当外电场不存在时,一类分子的正电荷中心同负电荷中心重合,这种分子称为无极分子。另一类分子的正电荷中心同负电荷中心不重合,这种分子称为有极分子,每个有极分子可以看成是一个电偶极子,其不为零的电矩称为分子固有电矩。

例如对于氧分子,它由两个氧原子构成,电荷分布具有对称性(如图13-1所示),正电荷中心同负电荷中心重合,属于无极分子。

还比如说对于水分子,它由两个氢原子和一个氧原子构成,虽然具有左右对称性(如图13-2所示),但三个原子不在同一条直线上,正电荷中心同负电荷中心不重合,相当于一个电偶极子,属于有极分子。

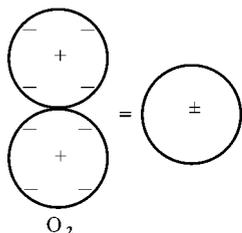


图 13-1

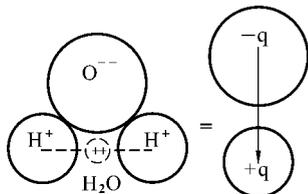


图 13-2

上面介绍的两类电介质对外电场的响应过程是不一样的。如图13-3所示,对于无极分子电介质,未加电场时其分子电矩为零。加了外电场后,分子的正电荷中心同负电荷中心将发生相对位移,每个分子等效于一个电偶极子,其电矩方向沿着外电场方向排列。如电介质的密度是均匀的,分子电矩有规则排列的结果是在电介质内部正、负电荷相互抵消,介质内部无净电荷。但在界面上正、负电荷相互抵消不了,将出现净电荷,称为极化电荷或束缚电荷,这种现象我们称为电极化现象。显然,外电场越强,分子正、负电荷中心拉得越开,其电矩就越大,电介质表面上出现的极化电荷就越多,电极化现象就越强。

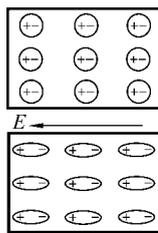


图 13-3

如图13-4所示,对于有极分子电介质,虽然每个分子都有电矩,但是在未加电场时,由于分子作无规则热运动,其分子电矩的排列十分混乱,整个电介质中没有净电荷。当有外场存在时,分子电矩有转向外电场方向的趋势(如图13-5所示)。当然由于分子的无规则热运动,并非所有分子的电矩都严格沿外场方向排列。外场越强,分子电矩的排列就越整齐,电介质表面上出现的极化电荷就越多,电极化

现象就越强。

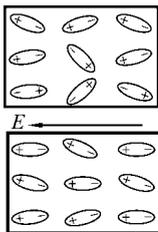


图 13-4

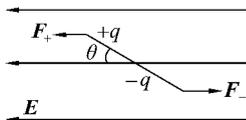


图 13-5

前一类极化是由于电介质分子正、负电荷中心位移而形成的,故称其为位移极化。后一类极化是由于电介质分子电矩不为零,在外电场中转向外场方向而形成的,称它为转向极化。这两种极化虽然从微观上看是不同的,但从宏观看电介质上都会出现极化电荷。故在对电介质的极化作宏观描述时,将不区分两种极化。

13.2 极化强度和极化电荷

13.2.1 电极化强度

为了定量描写电介质极化的程度,引入电极化强度。如图13-6所示,在电介质内取一体积元 ΔV , 无外电场时, ΔV 内分子电矩的矢量和 $\sum_i \mathbf{p}_i = 0$, 其中 \mathbf{p}_i 代

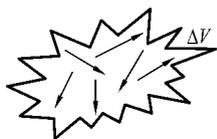


图 13-6

表 ΔV 内第 i 个分子的电矩。有外场时 $\sum_i \mathbf{p}_i \neq 0$, 外场越强, $\sum_i \mathbf{p}_i$ 越大, 反映了介质被极化的程度愈强烈, 且 $\sum_i \mathbf{p}_i$ 与体积元 ΔV 成正比。这样, 可以定义一个新的物理量, 用矢量 \mathbf{P} 表示:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad (13-1)$$

用它来描写电介质的极化情况, 称其为电极化强度。需要强调的是, 宏观上 ΔV 要取得足够小, 使电极化强度 \mathbf{P} 能足够精确地描写空间各点附近电介质的极化程度, 即 \mathbf{P} 一般是空间位置的函数。但从微观上来讲, ΔV 又要取得足够大, 使其内部包含足够多的分子, 只有这样电极化强度 \mathbf{P} 才能真正反映电介质的极化情况。

在 SI 中, 电极化强度 \mathbf{P} 的单位是 $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

当然,真空中的电极化强度 \mathbf{P} 为零,当电介质未极化时,电极化强度 \mathbf{P} 也为零。如电介质各点的电极化强度 \mathbf{P} 都相同,则这种极化被称为均匀极化。

13.2.2 极化电荷

从前面的分析中,知道在外电场中电介质会极化,而在局部出现极化电荷。对于均匀介质,一般其内部无极化电荷,极化电荷只出现在表面或界面上,而这可以用极化电荷面密度的分布来描写。外电场越强,介质被极化的程度愈强烈,电极化强度 \mathbf{P} 也就越大,同时电介质表面或界面上出现的极化电荷也就越多。这隐约告诉我们电极化强度 \mathbf{P} 与极化电荷面密度之间有某种关系。下面我们就来推导这种关系。

如图13-7所示,考虑各向同性均匀电介质的极化(外面为真空)。在电介质表面某处取一个小面元 ΔS ,由于 ΔS 足够小,故可认为 ΔS 处的电介质均匀极化,电极化强度为 \mathbf{P} 。现以 ΔS 为底面,在电介质内割出轴长为 Δx 的一斜柱体,且使其母线与该处的电极化强度 \mathbf{P} 平行,与面元的法线方向 \mathbf{e}_n 的夹角为 θ 。

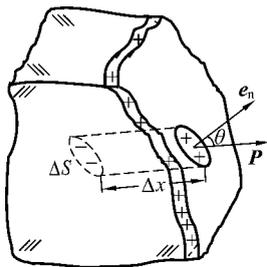


图 13-7

显然斜柱体体积为

$$\Delta V = \Delta S \cdot \Delta x \cos \theta.$$

由于电极化,在斜柱体两端出现极化电荷 $\pm q'$ 。把斜柱体看成一个电偶极子,其电矩的大小,也即斜柱体内分子电矩矢量和的大小为

$$\left| \sum_i \mathbf{p}_i \right| = q' \Delta x = \sigma' \Delta S \Delta x \equiv P \Delta V,$$

由此得到

$$P = \frac{\left| \sum_i \mathbf{p}_i \right|}{\Delta V} = \frac{\sigma' \cdot \Delta S \cdot \Delta x}{\Delta S \cdot \Delta x \cos \theta} = \frac{\sigma'}{\cos \theta}.$$

而 ΔS 上极化电荷面密度为

$$\sigma' = P \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n, \quad (13-2)$$

即电介质表面某处极化电荷面密度 σ' 的大小与该处电极化强度 \mathbf{P} 在表面法线上的分量值相同。

如图13-8所示,在两种电介质的界面上也会出现极化电荷。在电极化强度为 \mathbf{P}_1 的电介质一侧有极化电荷

$$\sigma'_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{n_1},$$

在电极化强度为 \mathbf{P}_2 的电介质一侧有极化电荷

$$\sigma'_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{n_2},$$

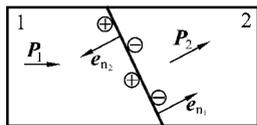


图 13-8

故总的极化电荷面密度为

$$\sigma' = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{n_1} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{n_2},$$

考虑到 $\mathbf{e}_{n_1} = -\mathbf{e}_{n_2}$, 有

$$\sigma' = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{e}_{n_1}.$$

例 13-1 设半径为 R 的均匀介质球发生均匀极化, 已知电极化强度为 \mathbf{P} , 求极化电荷在球心处产生的电场。

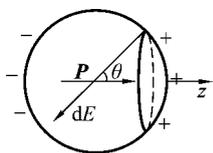


图 13-9

解 如图13-9所示, 球面上极化电荷面密度为

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n = P \cos \theta.$$

球面上极化电荷元 dq' 在球心处产生场强大小为

$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

由对称性知, 只有场强的 z 分量对球心处电场有贡献, 即

$$dE'_z = -dE' \cos \theta = -\frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta.$$

对于宽度为 $Rd\theta$ 、半径为 $R \sin \theta$ 的球带, 它在球心处产生的场强为

$$dE'_z = -\frac{\sigma'(2\pi R \sin \theta)(Rd\theta)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta,$$

对 θ 积分后得到极化电荷在球心处产生的场强

$$E'_z = \int dE'_z = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\sigma'(2\pi R \sin \theta)(Rd\theta)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = -\frac{P}{3\epsilon_0},$$

式中负号表明场强的方向与 z 轴的正方向相反。

13.3 介质中的静电场

13.3.1 介质中的场强

电介质在外电场中要出现电极化现象, 在其表面或内部会出现极化电荷。有电荷就要激发电场, 设极化电荷激发的电场为 E' 。根据场强叠加原理, 某点处的总场强 E 应等于原来该处的外电场 E_0 与极化电荷在该处激发电场的矢量和, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \quad (13-3)$$

外电场 E_0 可以由空间分布的自由电荷产生。例如, 导体由于得到或失去自由电子而带上的电荷。当然, 极化电荷所激发的电场会反过来影响自由电荷的分布, 影响原来的外电场。

13.3.2 介质中静电场的规律

无论是自由电荷还是极化电荷,它们所产生的电场都是保守场,满足静电场的环流定理,即

$$\oint_l \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

$$\oint_l \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

由此得在电介质存在情况下,总电场的环流定理

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

这也就告诉我们在电介质存在情况下,电势及电势能的概念依然有效,电势与场强的关系也依然有效。

在电介质存在的情况下,静电场的高斯定理仍然成立,只不过应该将极化电荷考虑进去,即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_0 + q'), \quad (13-4)$$

式中 q_0 为闭合曲面 S 包围的自由电荷,而 q' 为闭合曲面 S 包围的极化电荷。需要注意的是, ϵ_0 是真空介电常数,电介质的影响已经用极化电荷 q' 表示了。

13.3.3 介质电极化率

实验证明:对于各向同性的介质,当外电场不太强时,介质内任意点的电极化强度与该点的总电场度成正比,即

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (13-5)$$

式中纯数 χ_e 称为介质的电极化率,它与电介质的相对介电常数 ϵ_r 有关系

$$\chi_e = \epsilon_r - 1, \quad (13-6)$$

因此我们有

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}. \quad (13-7)$$

如图13-10所示,在电介质存在的情况下要求总场强 E , 就要知道自由电荷与极化电荷的分布,而极化电荷的分布由电极化强度 P 所决定,电极化强度又与总场强有关系。另一方面,极化电荷反过来又要影响自由电荷的分布。这就告诉我们,在电介质存在的情况下,要求任何一个物理量都是非常困难的。下面引入电位移矢量这一新的物理量,在系统对称性比较高的情况下,它对求解相关问题是有帮助的。

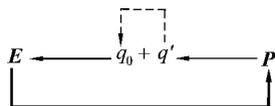


图 13-10

13.4 电位移矢量

13.4.1 闭合曲面内的极化电荷

如图13-11所示,在已极化的介质内任意作一闭合面 S , S 将把电介质分子分为三部分,一部分分子完全处于 S 面内,另一部分分子完全处于 S 面外,第三部分分子穿越 S 面。而只有电偶极矩穿过 S 的分子对 S 内的极化电荷有贡献,穿出了多少极化电荷,闭合面 S 内就留下多少等量异号的极化电荷。穿出的极化电荷可以这样计算,剥去闭合面 S 外的电介质,闭合面 S 成为电介质的外表面,其上极化电荷的面密度为 $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$, 而总的极化电荷,即穿出的极化电荷为

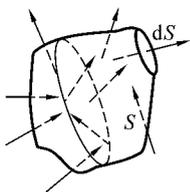


图 13-11

$$\oiint_S \sigma' dS = \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$
 这样闭合面 S 所包围的极化电荷为

$$q' = - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (13-8)$$

13.4.2 电位移矢量

根据高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_0 + q'), \quad (13-9)$$

式中 q' 为高斯面 S 所包围的极化电荷。将式(13-8)代入式(13-9)得

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q_0 - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \right),$$

将其改写为

$$\oiint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = q_0.$$

定义电位移矢量

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (13-10)$$

式中 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{P} 为对应于高斯面 S 上各点的值,由于高斯面选取的任意性,故上式对全空间任意点都有意义。由此得到用电位移矢量表示的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0, \quad (13-11)$$

即电位移矢量通过某一闭合面 S 的电位移通量等于该闭合面 S 所包围的自由电荷的总量。下面对电位移矢量及其相关问题作几点讨论。

(1) 介质中的高斯定理表明:电位移矢量对任意闭合面的通量与该闭合面内

自由电荷有关。但是电位移矢量本身与空间所有的电荷分布有关,包括自由电荷和束缚电荷。

(2) 电位移矢量是描述介质中电场性质的辅助物理量,没有具体的物理意义。电场强度才是描述电场的基本物理量。

(3) 介质中的高斯定理包含了真空中的高斯定理。

在真空中 $P=0$, 因此

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E。$$

根据

$$\oiint_S D \cdot dS = q_0,$$

有

$$\oiint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_0。$$

(4) 电位移矢量与电场强度的关系如下:

对于各向同性的电介质,当外电场不太强时有

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E。$$

代入电位移矢量的定义式 $D = \epsilon_0 E + P$, 得电位移矢量与电场强度的关系

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E, \quad (13-12)$$

式中 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 称为电介质的介电常数。

13.4.3 电位移矢量的应用

利用电位移矢量,在自由电荷分布和电介质在空间分布具有高度对称性的前提下,根据高斯定理 $\oiint_S D \cdot dS = q_0$, 可以计算电介质中的场强和电极化强度。其具体步骤如下:

- (1) 根据自由电荷分布和电介质空间分布对称性分析电位移矢量空间分布特征。
- (2) 根据介质中的高斯定理得到电位移矢量的空间分布。
- (3) 对于各向同性的介质,当外电场不太强时,利用公式 $D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E$ 计算场强的空间分布。
- (4) 利用公式 $P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$ 计算电极化强度,进一步求极化电荷的分布。

下面举一个例子。

例 13-2 半径为 R_1 的球形电极带自由电荷 Q , 在其外部包裹着两层同心均匀电介质球壳, 它们的介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 。试求电介质内各点的场强、电极化强度和极化电荷的分布情况。

解 由对称性知,各场点上的 D 矢量具有球对称分布。如图13-12所示,在电

介质内作半径为 r 的球面作为高斯面 S , 按照高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 D = Q,$$

得到

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

介质 1 中的场强和电极化强度为

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2},$$

$$P_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0)E_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}.$$

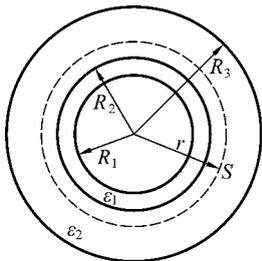


图 13-12

介质 2 中的场强和电极化强度为

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2},$$

$$P_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0)E_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2}.$$

在三个界面上有极化电荷面分布如下:

在 $r=R_1$ 处

$$\sigma'_1 = -P_1|_{r=R_1} = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 R_1^2};$$

在 $r=R_2$ 处

$$\sigma'_2 = (P_1 - P_2)|_{r=R_2} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 R_2^2} - (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 R_2^2};$$

在 $r=R_3$ 处

$$\sigma'_3 = P_2|_{r=R_3} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 R_3^2}.$$

13.5 静电场能

13.5.1 带电体系的静电能

如图13-13所示, 有一带电体系处于状态 a , 该体系的静电能指的是把系统从状态 a 无限分裂到彼此相距无限远的状态过程中静电场力所做的功, 又称为静电势能。体系的静电能还可以作这样的理解, 即把这些带电体从无限远离的状态聚合到状态 a 的过程中, 外力

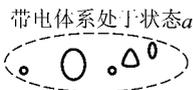


图 13-13

克服静电力所做的功。由此可见,静电能实际上是一种相互作用能。

13.5.2 点电荷之间的相互作用能

下面我们以两个点电荷构成的系统为例来说明点电荷之间的相互作用能。想象两个点电荷 q_1 和 q_2 初始时相距无限远,第一步首先把 q_1 摆在某处,在此过程中外力不做功。第二步再把 q_2 从无限远处移到 P 点(如图13-14所示),在此过程中外力要反抗静电力做功

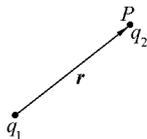


图 13-14

$$W_e = - \int_{\infty}^r q_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = q_2 \int_r^{\infty} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} = q_2 V_2,$$

式中 V_2 为 q_1 在 q_2 所在处产生的电势; W_e 即两个点电荷之间的相互作用能或 q_2 在 q_1 电场中的静电势能。也可以先移动 q_2 再移动 q_1 , 由于静电力是保守力, 做功和过程无关, 故有

$$W_e = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = q_1 V_1,$$

式中 V_1 为 q_2 在 q_1 所在处产生的电势。

为了便于推广, 将两个点电荷之间的相互作用能写成如下对称形式

$$W_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2.$$

推广到 n 个点电荷的系统, 则其相互作用能为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i^n q_i V_i, \quad (13-13)$$

式中 V_i 为除 q_i 以外的电荷在 q_i 处产生的电势。

对于连续分布电荷系统, 用积分代替求和, 即

$$W_e = \frac{1}{2} \int V dq, \quad (13-14)$$

式中 V 为所有电荷在 dq 处产生的电势, 积分在电荷存在的区域进行。

13.5.3 电容器储存的静电能

电容器带电时具有静电能, 下面我们来计算一下。如图 13-15 所示, 电容器 A 和 B 两个极板分别带电 $+Q$ 和 $-Q$, 两极板的电势分别为 V_+ 和 V_- , 两极板的电势差为 $V_c = V_+ - V_-$ 。按照式(13-14)电容器的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \int V dq = \frac{1}{2} \int_0^{+Q} V_+ dq + \frac{1}{2} \int_0^{-Q} V_- dq = \frac{1}{2} (V_+ - V_-) Q,$$

两个积分分别对带正电的极板和带负电的极板进行, 由于极

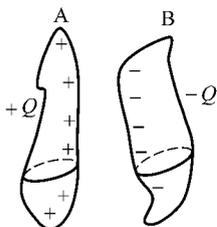


图 13-15

板是等势体,不难算出结果。利用电势差 $V_C = V_+ - V_-$ 和电容、电量的关系,有

$$W_e = \frac{1}{2} V_C Q = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (13-15)$$

这些结果对任何电容器都是正确的,它是计算电容器所储存静电能的普遍公式。

13.5.4 静电场能 电场能量密度

导体带电后必然伴随有静电能量,那么这个能量储存在什么地方或能量是以何种形式储存的呢?从前面的介绍可以看出,电荷好像是能量的携带者。对于静电场这一点还不太清楚,因为电荷与电场同时存在,且都不随时间变化。但对于交变的电磁场如电磁波,在自由空间只有场而无电荷,但有能量的传播,这说明能量是储存在场中的,静电能实际上是一种电场能。下面用平行板电容器来进一步说明此问题。

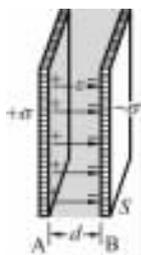


图 13-16

如图13-16所示,平行板电容器带电 Q ,极板面积为 S ,极板间距为 d ,电容器内充满介电常数为 ϵ 的均匀电介质。平行板电容器内的场强为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon},$$

$$\text{式中 } \sigma = \frac{Q}{S}.$$

电容器两极板间电势差为

$$V_C = Ed.$$

利用式(13-15)得电容器的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} V_C Q = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d = \frac{1}{2} D E V, \quad (13-16)$$

式中 $V = Sd$ 为电容器的体积; D 为电位移矢量 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 的大小。式(13-16)告诉我们,静电能均匀分布在平行板内的匀强电场中,所以静电能就是电场能。从式(13-16)还可以得到单位体积的电场能,即电场能密度

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \epsilon E^2. \quad (13-17)$$

这是一个普遍公式,无论电场是否均匀场,也无论电场是静电场还是变化的电场,式(13-17)都适用。对于非匀强电场, w_e 是空间位置的函数,而体积 V_0 中的电场能可以用下面积分来计算

$$W_e = \iiint_{V_0} w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} D E dV$$

例 13-3 计算均匀带电导体球面的静电能。已知球面半径为 R , 总电量为 Q , 球外为真空。

解 这里我们给出三种解法。

解法 1 利用公式

$$W_e = \frac{1}{2} \int_Q V dq。$$

已知 $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, 故

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}。$$

解法 2 根据电场是能量的携带者, 先求电场

$$E = 0 \quad (r < R), \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)。$$

利用公式

$$W_e = \iiint_{V_0} w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} DE dV,$$

得到

$$W_e = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}。$$

解法 3 从定义出发计算, 即在建立系统此状态过程中, 外力克服静电力做的功就是该带电系统的静电能。如图13-17所示, 在某个中间状态时, 导体球带电 q , 其电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}。$$

将 dq 的电量从无限远处移动到球面上, 外力克服静电力需做功

$$dW_e = V dq。$$

整个过程需做功

$$W_e = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}。$$

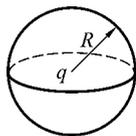


图 13-17

例 13-4 如图13-18所示, 真空中有半径为 r_1 的导体球, 外套同心导体球壳, 内、外半径分别为 R_1 和 R_2 , 内球带电 q , 外球壳不带电, 求下列两种情况下系统静电能的损失:

- (1) 球与球壳用导线相连;
- (2) 将外球壳接地。

解 (1) 外球壳原来不带电, 由于静电感应其内表面带电 $-q$, 而外表面带电 q 。显然只有两个区域有电场, 导体球与导体球壳之间以及导体球壳之外。球

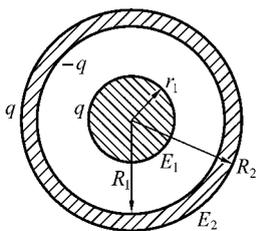


图 13-18

与球壳用导线相连后,导体球上的电荷与球壳内表面上的感应电荷中和,这样一来导体球与导体球壳之间的电场消失,而导体球壳之外的电场不变,损失的静电能即消失的电场所携带的电场能量,可以这样计算:

$$\begin{aligned}\Delta W_1 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{r_1}^{R_1} E_1^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{r_1}^{R_1} \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_1} \right).\end{aligned}$$

(2) 如果是将外球壳接地,则导体球壳之外的电场消失,损失的静电能即消失的电场所携带的电场能量,可以这样计算:

$$\begin{aligned}\Delta W_2 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_2}^{\infty} E_2^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 R_2}.\end{aligned}$$

例 13-5 用能量法求柱形电容器的电容。已知柱形电容器长为 l , 内外半径分别为 a 和 b ($l \gg b$), 中间充满介电常数为 ϵ 的均匀电介质。

解 如图13-19所示, 设内、外圆柱壳分别带电 $\pm q$, 对应电荷线密度为 $\pm \lambda$ 。

利用介质中的高斯定理易得电位移矢量的大小

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

及介质中的场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r},$$

由此得到该系统的静电能

$$W_e = \int_a^b \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\lambda}{2\pi \epsilon r} \right)^2 2\pi r l dr = \frac{\lambda^2 l}{4\pi \epsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

根据

$$W_e = \frac{q^2}{2C}$$

有

$$C = \frac{q^2}{2W_e} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{b}{a}}.$$

例 13-6 求带电量为 Q , 半径为 R 的均匀带电球体的静电能。

解 如图13-20所示, 利用高斯定理得球内电场(虚线为高斯面):

$$\oiint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi R^3/3} \cdot \frac{4\pi r^3/3}{\epsilon_0},$$

即

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r \leq R).$$

同样得球外电场

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R),$$

球内一点电势

$$V = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right).$$

按式(13-14)所求静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \int_Q V dq = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right) \frac{Q}{4\pi R^3/3} 4\pi r^2 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

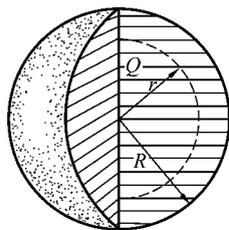


图 13-20

习题 13

13-1 图13-21所示是半径为 R 的介质球,试分别计算下列两种情况下球表面上的极化电荷面密度和极化电荷的总和。已知极化强度为 P (沿 x 轴)。

- (1) $P = P_0$;
- (2) $P = P_0 \frac{x}{R}$ 。

13-2 平行板电容器,板面积为 100cm^2 ,带电量 $\pm 8.9 \times 10^{-7}\text{C}$,在两板间充满电介质后,其场强为 $1.4 \times 10^6\text{V/m}$ 。试求:

- (1) 介质的相对介电常数 ϵ_r ;
- (2) 介质表面上的极化电荷密度。

13-3 面积为 S 的平行板电容器,两板间距为 d ,求:

- (1) 插入厚度为 $\frac{d}{3}$,相对介电常数为 ϵ_r 的电介质,其电容量变为原来的多少倍?
- (2) 插入厚度为 $\frac{d}{3}$ 的导电板,其电容量又变为原来的多少倍?

13-4 在两个带等量异号电荷的平行金属板间充满均匀介质后,若已知自由电荷与极化电荷的电荷面密度分别为 σ_0 与 σ' (绝对值),试求:

- (1) 电介质内的场强 E ;
- (2) 相对介电常数 ϵ_r 。

13-5 电学理论证明:一球形均匀电介质放在均匀外电场中会发生均匀极化。若已知此极化介质的半径为 R ,极化强度为 P 。求极化电荷在球心处产生的场强 E' 。

13-6 一圆柱形电容器,外柱的直径为 4cm ,内柱的直径可以适当选择,若其间充满各向同

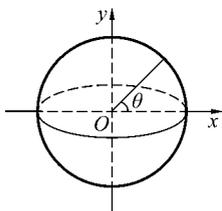


图 13-21

性的均匀电介质,该介质的击穿电场强度大小为 $E_0 = 200\text{kV/cm}$,试求该电容器可能承受的最高电压。

13-7 一平行板电容器,中间有两层厚度分别为 d_1 和 d_2 的电介质,它们的相对介电常数为 ϵ_{r_1} 和 ϵ_{r_2} ,极板面积为 S ,求电容量。

13-8 计算均匀带电球体的静电能,设球体半径为 R ,带电量为 Q 。

13-9 半径为 2.0cm 的导体外套有一个与它同心的导体球壳,球壳的内外半径分别为 4.0cm 和 5.0cm 。当内球带电量为 $3.0 \times 10^{-8}\text{C}$ 时,求:

- (1) 系统储存了多少电能?
- (2) 用导线把壳与球连在一起后电能变化了多少?

13-10 球形电容器内外半径分别为 R_1 和 R_2 ,充有电量 Q :

- (1) 求电容器内电场的总能量;
- (2) 证明此结果与按 $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 算得的电容器所储电能值相等。

13-11 一平行板电容器的板面积为 S ,两板间距离为 d ,板间充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀介质。分别求出下述两种情况下外力所做的功:

- (1) 维持两板上电荷密度 σ_0 不变而把介质取出;
- (2) 维持两板上电压 U 不变而把介质取出。

思考题 13

13-1 介质的极化强度与介质表面的极化面电荷是什么关系?

13-2 不同介质交界面处的极化电荷分布如何?

13-3 介质边界两侧的静电场中 D 及 E 的关系如何?

13-4 真空中两点电荷 q_A, q_B 在空间产生的合场强为 $E = E_A + E_B$,系统的电场能为

$$\begin{aligned} W_e &= \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d\tau \\ &= \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_A^2 d\tau + \iiint_{V_0} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_B^2 d\tau + \iiint_{V_0} \epsilon_0 \mathbf{E}_A \cdot \mathbf{E}_B d\tau. \end{aligned}$$

- (1) 说明等式后面三项能量的意义;
- (2) A、B 两电荷之间的相互作用能是指哪些项?
- (3) 将 A、B 两电荷从给定位置移至无穷远,电场力做功又是哪些项?

第 14 章 稳恒磁场

电现象和磁现象密切相关,通过本章的学习,将了解到磁场是如何产生和如何计算的,电流和磁场有何关系;载流导线在磁场中是如何受力的,载流导线和载流导线之间如何发生相互作用,载流线圈在磁场中受到的力矩如何计算;带电粒子在磁场中如何受力,这有何应用等等。

14.1 磁场的描述

14.1.1 基本磁现象

与电现象一样,人类很早就注意和研究磁现象,比如:磁石具有磁性,具有北极(N)和南极(S),同号磁极相互排斥,异号磁极相互吸引等等。但早期电现象和磁现象的研究是独立的,这一状态一直维持到 1819 年。这一年,奥斯特(H. C. Oersted)发现载流导线会使周围的小磁针偏转。这一现象揭示了电与磁内在本质的联系,以后人们又发现了更多的类似现象。比如:载流导线在磁场中会受到力的作用;载流导线之间存在力的相互作用;运动电荷会产生磁场等等。对这些现象进行分析总结,人们认识到磁现象与电荷的运动密切相关。因为运动具有相对性,故磁现象及磁场具有相对性。

14.1.2 磁感应强度及洛伦兹力公式

电流(运动电荷)在其周围产生磁场,为了描述磁场的特性,我们采用与研究静电场类似的方法。给你一个电场,如何描述它?放一个试验电荷 q 到 p 点,电场对其作用力为 F ,则 P 点处的电场强度定义为 $E = \frac{F}{q}$,它与试验电荷无关,是空间位置的函数,反映一个按空间分布的矢量场。类似地,磁场对外的重要表现是:磁场对引入场中的运动试探电荷、载流导体或永久磁体有磁力的作用,因此我们可以用磁场对运动试验电荷(或载流导体和永久磁体)的作用来描述磁场,并由此引进磁感应强度 B 作为定量描述磁场中各点特性的基本物理量,其地位与电场中的电场强度 E 相当。

如图 14-1 所示,我们在 $Oxyz$ 坐标系中来描述磁场。实验告诉我们如下

几点:

(1) 当试验电荷 q 静止在 P 点时它不受磁力的作用,这说明磁力不同于电力,磁场对静止的电荷不起作用。当运动试验电荷以不同速度 v 通过磁场中 P 点时,电荷所受磁力是不同的。在磁场中的 P 点处存在着一个特定的方向,当电荷沿这特定方向(或其反方向)运动时,磁力为零。显然,这个特定方向与运动试验电荷无关,它反映出磁场本身的一个性质。

(2) 研究表明,磁力始终与试验电荷的运动速度和磁场的方向垂直,即与运动速度与磁场的方向所构成的平面垂直。由此可见,磁力是一种侧向力,它只改变速度的方向,不改变其大小。仅仅改变试验电荷的符号,磁力改变方向。

(3) 为了最终确定磁场(B)的指向,基于上面的分析,我们规定 $qv \times B$ 所决定矢量的方向与运动电荷所受磁力的方向平行,即

$$F // qv \times B.$$

(4) 进一步的实验表明,当试验电荷在 P 点的速度与 B 的方向成 θ 角时, $|F| \propto qv \sin \theta$, 且 $\frac{|F|}{qv \sin \theta}$ 对于确定的场点 P 与 q 、 v 和 θ 无关,只与 P 点的位置有关。

可见此比值反映了该点磁场的性质,规定其为磁感应强度 B 的大小,即 $B = \frac{|F|}{qv \sin \theta}$ 。由此得到 $|F| = qvB \sin \theta$ 。

综上所述,我们定义磁感应强度 B 的大小为 $\frac{|F|}{qv \sin \theta}$, 方向沿零力线(对某点而言,试验电荷沿此线运动不受磁力),其指向由 $F // qv \times B$ 确定。

这样,以实验为基础定义了一个描述磁场的物理量,即磁感应强度 B 。按照这种定义,显然有关系式

$$F = qv \times B. \quad (14-1)$$

此即运动电荷的洛伦兹力公式。应该强调的是,洛伦兹力公式不是定义出来的,它是以实验为基础,在定义了磁感应强度后得到的。

在 SI 中,按上述定义,磁感应强度 B 的单位定为 $N/(A \cdot m)$,用 T(特斯拉)表示。

对于磁场,也可引入磁力线(磁感应强度线)。磁感应强度线上任一点的切线方向和该点处的磁场方向一致,并在线上用箭头标出,而某处通过与磁感应强度垂直的单位面积的磁力线的根数正比于该处磁感应强度的大小。几种不同形状的电流系统所激发的磁场的磁力线如图 14-2 所示。

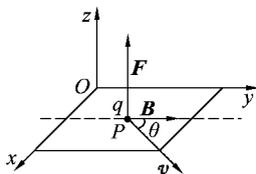


图 14-1

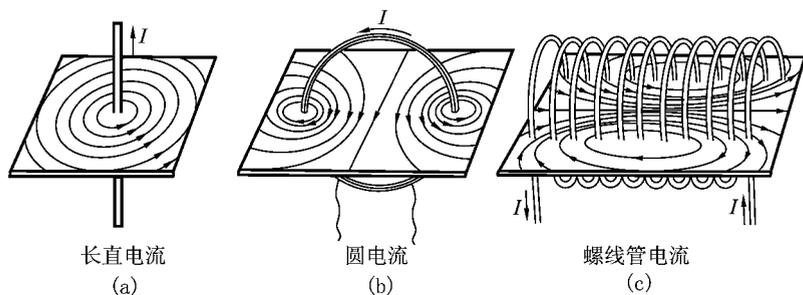


图 14-2

(a) 长直电流; (b) 圆电流; (c) 螺线管电流

14.2 毕奥-萨伐尔定律

14.2.1 毕奥-萨伐尔定律

现讨论由稳恒电流所激发的磁场。如图 14-3 所示, 设真空中有电流强度为 I 的任意形状的载流导线, P 为任意场点, 导线与场点的距离较导线直径大得多, 这种电流称为线电流。那么如何求这段载流导线在 P 点产生的磁感应强度呢?

回想如何计算任意形状的带电体在其周围产生电场的计算问题: 如图 14-4 所示, 先把带电体分割成许多电荷元 dq , 根据库仑定律, 电荷元在 P 点处所激发的场强为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}.$$

再应用场强叠加原理, 便可得出任意带电体产生的电场场强

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}.$$

与此类似, 为了求任意形状的载流导线所激发的磁场, 我们也可以把电流看作是无穷多小段电流的集合。各小段电流称为电流元, 并用矢量 $I d\mathbf{l}$ 来表示, $d\mathbf{l}$ 表示在载流导线上(沿电流方向)所取的有向线元, I 为导线中的电流。电流元就是代表微段电流特征的一个矢量, 而任意形状的线电流所激发的磁场等于构成该线电流的各段电流元所激发磁场的矢量和。毕奥和萨伐尔等人证明, 电流元 $I d\mathbf{l}$ 在空间任一点 P 处所激发的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小为

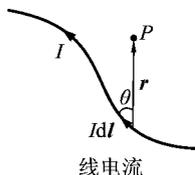


图 14-3

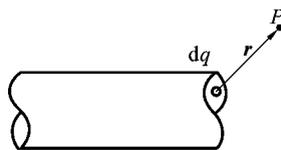


图 14-4

$$d\mathbf{B} = k \frac{Idl \sin \theta}{r^2}, \quad (14-2)$$

式中 r 是从电流元所在处到 P 点的位矢 r 的大小; θ 为电流元 Idl 与位矢 r 之间小于 π 的夹角(如图 14-3 所示)。 $d\mathbf{B}$ 的方向垂直于 Idl 与 r 组成的平面, 指向为由 Idl 经 θ 角转向 r 时右螺旋前进的方向, 即 $d\mathbf{B}$ 的方向沿着矢量 $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ 的方向。由图 14-5 可知, 一个电流元 Idl 所产生磁场的磁力线是以电流元 Idl 所在的直线为轴的一系列同心圆, 磁感应强度方向与电流元方向呈右螺旋关系。

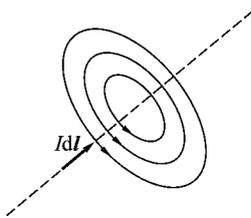


图 14-5

综上所述, 有

$$d\mathbf{B} = k \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

在 SI 中, $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ 称为真空磁导率。这样, 计算电流元激发磁场的基本公式——毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)定律可表示为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (14-3)$$

根据场强叠加原理, 任意线电流所激发的总磁感应强度可以通过如下积分来计算

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (14-4)$$

14.2.2 毕奥-萨伐尔定律的应用

利用毕奥-萨伐尔定律, 原则上可以计算任意电流系统产生磁场的磁感应强度。下面给出三个典型的例题。

1. 直电流的磁场

如图 14-6 所示, 设有一段直载流导线, 其电流强度为 I , 场点 P 到载流导线的距离为 d , 而 P 到载流导线上、下两个端点的连线与 x 轴正方向的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 。试计算这一段直载流导线在场点 P 产生的磁感应强度。

在直载流导线上取电流元 Idz , 根据毕奥-萨伐尔定律, 它在 P 点产生的磁感应强度大小为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idz \sin \theta}{r^2},$$

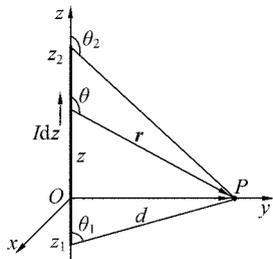


图 14-6

其方向垂直纸面向内。显然,每个电流元在 P 点产生磁场同方向,总磁感应强度方向依然垂直纸面向内,其大小为

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idz \sin \theta}{r^2},$$

式中 r 、 θ 和 z 都是变量,根据它们之间的约束关系,应统一成一个变量 θ (也可以是 r 或 z)后才能计算积分。约束关系为

$$r = \frac{d}{\sin \theta}, \quad z = -d \cot \theta.$$

由此得到

$$dz = \frac{d}{\sin^2 \theta} d\theta,$$

将它们代入积分后有

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin \theta}{d^2} \frac{d d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \end{aligned} \quad (14-5)$$

对于无限长直电流,则取 $\theta_1 \rightarrow 0$, $\theta_2 \rightarrow \pi$,代入上式得到

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}. \quad (14-6)$$

在实际问题中,如直导线的长度远远大于从场点 P 到导线的距离,载流导线就能近似看成无限长。

2. 载流圆线圈轴线上的磁场

如图 14-7 所示,设有载流圆线圈(也称圆电流),其半径为 R ,通以电流 I 。计算它在其轴线上任一点 P 的磁感应强度。

在圆电流上任取一电流元 Idl ,显然电流元与其到轴线上 P 点的矢量 r 之间的夹角为 90° ,按毕奥-萨伐尔定律,这电流元在 P 点产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin 90^\circ.$$

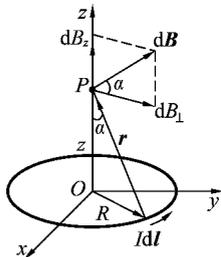


图 14-7

将磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 分解为平行于 z 轴的分量 dB_{\parallel} 和垂直于 z 轴的分量 dB_{\perp} 。由对称性知,各电流元在 P 点产生的磁感应强度的垂直分量 dB_{\perp} 逐对抵消。这样 P 点的总磁感应强度方向平行于对称轴,且与电流方向呈右手螺旋关系,而对平行

分量 dB_z 求积分即可得其大小

$$\begin{aligned} B &= \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \alpha \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (14-7)$$

其中利用了关系式: $\sin \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$ 。

令 $z=0$, 得圆电流中心处的磁感应强度

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (14-8)$$

如场点 P 远离圆心, 即 $z \gg R, z \approx r$, 则有

$$B \approx \frac{\mu_0 IR^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{IS}{z^3}, \quad (14-9)$$

式中 $S = \pi R^2$ 为圆线圈的面积。令 $m = ISe_n, e_n$, 代表线圈平面法向单位矢量, 其方向与电流流向呈右螺旋关系。这样可将式(14-9)写成矢量式

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{m}}{z^3}. \quad (14-10)$$

此式和电偶极子在轴线上场强 $E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ 相似, 其中 $p = ql$ 为电偶极子的电矩。这里, 我们把 m 称为载流线圈的磁矩, 它的大小等于 IS , 它的方向与线圈平面的法线方向相同且与电流呈右螺旋关系。如果线圈有 N 匝, 则磁场加强 N 倍, 这时线圈磁矩要定义为

$$\mathbf{m} = N I S e_n. \quad (14-11)$$

3. 载流长直螺线管轴线上的磁场

如图 14-8 所示, 将载流导线均匀密绕在圆柱面上, 则构成了直螺线管。设螺线管的半径为 R , 电流为 I , 沿螺线管长度方向每单位长度绕有线圈 n 匝。由于螺线管上线圈绕得很紧密, 每匝线圈可近似看作平面线圈。

在轴线上取场点 P 为 x 轴的坐标原点, 将直螺线管分成一片片的。图示一片的位置为 x , 厚度为 dx , 它包含 ndx 匝线圈, 可看成电流为 $Indx$ 的一个圆电流。根据圆电流在其轴线上产生磁场的公式(14-7)有

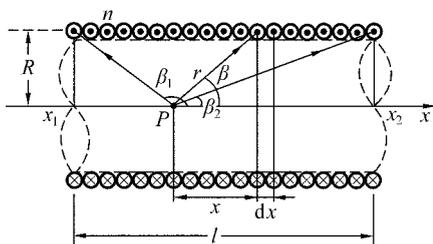


图 14-8

$$dB_p = \frac{\mu_0 R^2 n I dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

而方向与电流方向呈右手螺旋关系,即沿 x 轴的正向。显然每一片圆电流产生的磁场方向都相同,故直螺线管轴线上总磁场的方向与电流方向呈右手螺旋关系,即沿 x 轴的正向,其大小为

$$\begin{aligned} B_p &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 R^2 n I dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1), \end{aligned} \quad (14-12)$$

积分时利用了关系式 $x = R \cot \beta$ 。

对于无限长直螺线管,即螺线管的长度较其直径大得多时,显然 $\beta_1 \rightarrow \pi, \beta_2 \rightarrow 0$, 由此得

$$B = \mu_0 n I. \quad (14-13)$$

这一结果表明:任何绕得很紧密的长螺线管内部轴线上的磁感应强度和点的位置无关。还可以进一步证明,对于不在轴线上的内部各点,磁感应强度的值也等于 $\mu_0 n I$ 。因此,无限长螺线管内部的磁场是均匀的,可以利用螺线管的这一性质来产生匀强磁场。

在长螺线管左端面(或右端面)的圆心处, $\beta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \beta_2 \rightarrow 0$, 故该点处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{2} n I, \quad (14-14)$$

这正好是内部磁感应强度的一半。轴线上各处磁感应强度大小的变化情况如图 14-9 所示,即螺线管外磁场非常弱,而内部磁场基本上是均匀磁场。螺线管越长,这种特点越显著。

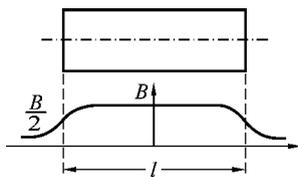


图 14-9

例 14-1 如图 14-10 所示,无限长薄铜片,宽为 a , 电流为 I , 求铜片中心线上方 P 点之磁感应强度。

解 将薄铜片分割成无限多个宽度为 dx 的细窄条, 一个细窄条相当于一个无限长直电流, 其电流强度为 $\frac{I dx}{a}$, 在 P 点产生磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{I dx}{a}.$$

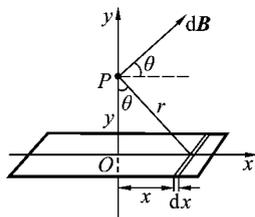


图 14-10

将其分解为平行于 x 轴和平行于 y 轴的分量, 由于铜片关于 y 轴对称, 故平行于 y

轴分量的代数和为零。这样 P 点总磁感应强度方向平行于 x 轴, 大小为

$$\begin{aligned} B &= \int dB_x = \int dB \cdot \cos\theta \\ &= \int \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{Idx}{a} \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$

利用关系式

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = y/\sqrt{x^2 + y^2},$$

有

$$B = \frac{\mu_0 I y}{2\pi a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctan \frac{a}{2y}.$$

当 P 点离铜片很近时, 有近似关系 $y \ll a$, $\arctan \frac{a}{2y} \approx \frac{\pi}{2}$, 由此得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a},$$

此即无限大面电流产生的磁场。

例 14-2 半径为 R 的塑料薄圆盘, 均匀带电 q , 圆盘以角速度 ω 绕通过圆心垂直于盘面的轴旋转, 求圆盘中心处的磁感应强度与圆盘的磁矩。

解 如图 14-11 所示, 将薄圆盘分成一系列同心圆环, 当圆盘旋转时, 一个圆环相当于一个圆电流。对于半径为 r , 宽度为 dr 的圆环, 其电流强度为

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr = \omega \sigma r dr,$$

式中 $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ 为圆盘上的电荷面密度。

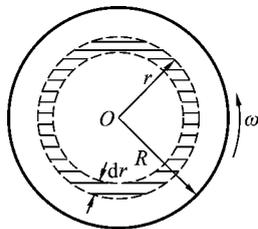


图 14-11

利用圆电流在圆心处产生磁场的公式 $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$, 得到

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r},$$

其方向垂直于盘面向外。每个圆电流产生的磁场同方向, 这也是总磁场方向, 而总磁场的大小为

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}.$$

一个圆环之磁矩为

$$dm = \pi r^2 dI e_n,$$

总磁矩为

$$m = \int dm = \int_0^R \pi r^2 \omega \sigma r e_n dr = \frac{1}{4} \omega q R^2 e_n,$$

式中 e_n 是垂直于盘面向外的单位矢量。

例 14-3 如图 14-12 所示, 两根长直导线沿半径方向引到半径为 R 的铁环上 A 、 B 两点, 并与很远的电源相连。求环中心 O 点的磁感应强度。

解 设 $\angle AOB = \theta$, 铁环单位长度电阻为 λ , 电源电动势为 \mathcal{E} , 则两支路中电流分别为 $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{\lambda R \theta}$ 和 $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\lambda R (2\pi - \theta)}$ 。设 I_1 在 O 点产生磁感应强度 B_1 , I_2 在 O 点产生磁感应强度 B_2 。显然

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \theta}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{E}}{\lambda R^2},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_2 (2\pi - \theta)}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{E}}{\lambda R^2}.$$

由于 B_1 与 B_2 方向相反, 而径向电流在 O 点不产生磁场, 故 O 点处总磁场为零。

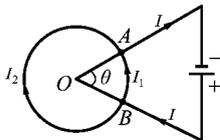


图 14-12

14.3 磁高斯定理 安培环路定理

对于一个矢量场, 一般从两个角度去研究它的性质: 一个是它的通量, 一个是它的环流。对于稳恒磁场而言, 与之相应就有高斯定理和环流定理。

14.3.1 磁通量

类似于电通量, 我们定义穿过某一个曲面的磁力线的根数为通过该曲面的磁通量。如图 14-13 所示, 在外磁场中有一曲面 S , 在其上取一小面元, 通过该小面元的磁通量为

$$d\Phi_m = B \cos \theta dS = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

式中有向面元 dS 大小为 dS , 方向为面元的法线方向, 与面元处磁感应强度方向之间的夹角为 θ 。

所以, 通过曲面 S 的磁通量为

$$\Phi_m = \iint_S d\Phi_m = \iint_S B \cos \theta dS = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (14-15)$$

在 SI 中, 磁通量的单位是 $T \cdot m^2$, 用 Wb (韦伯) 表示。

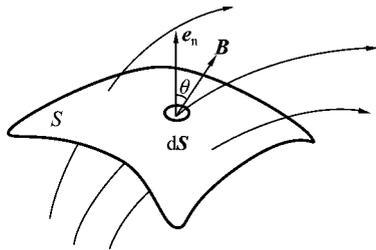


图 14-13

14.3.2 磁高斯定理

对闭合曲面而言,一般规定,向外的指向为正法线的指向,这样通过闭合曲面的磁通量可表示为 $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 。那么,它与产生磁场的电流分布有何关系呢?

前面介绍的毕奥-萨伐尔定律告诉我们,一个电流元 $I d\mathbf{l}$ 所产生磁场的磁力线是以电流元 $I d\mathbf{l}$ 所在的直线为轴的一系列同心圆,是闭合的,而磁感应强度方向与电流元方向呈右螺旋关系。由此可见,一个电流元所产生磁场的磁力线通过任意闭合面的磁通量为零(如图 14-14 所示)。

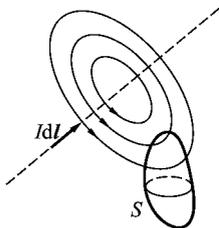


图 14-14

任意电流系统总可以看成是由许许多多电流元构成的,其所产生的磁场通过某一闭合面的磁通量应等于各个电流元产生的磁场通过该闭合面的磁通量之和。由于电流元所产生磁场的磁力线通过任意闭合面的磁通量为零,故任意电流系统产生磁场的磁力线通过任意闭合面的磁通量也为零,即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (14-16)$$

式(14-16)被称为磁高斯定理,是电磁场理论的基本方程之一,与静电学中的高斯

定理 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$ 对比,两者有着本质的区别。在静电场中,由于自然界中存在着独立的正、负电荷,所以电力线有头有尾,它发自正电荷,止于负电荷,这种场称为有源场。由于自然界没有单独的磁单极存在,磁极总是南极、北极成对出现的,而不像电荷可以孤立地以正电荷或负电荷形式存在。这样,磁力线总是无头无尾的闭合线,通过任意闭合面的磁通量为零,即磁场是无源场。

关于磁单极问题,著名物理学家狄拉克曾有过预言,即存在孤立的磁南极或磁北极,这样的基本单元称为磁单极(子)。但实验中至今没有发现磁单极的确切证据。最近一组来自日本、中国、瑞士的科学家报告他们发现了磁单极存在的间接证据。他们在铁磁晶体中观察到反常的霍尔效应,并且认为只有假设存在磁单极,才能解释这种现象。

14.3.3 安培环路定理

对于静电场而言,有环流定理: $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$,这表明静电场是一个保守力场,是一个无旋场,并可由此引入电势这个物理量来描述静电场。对由稳恒电流所激

发的磁场,我们同样要问:磁感应强度沿任一闭合回路的线积分(环流) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 是多少?它和电流有何关系?由于磁力线总是闭合曲线,可以想象,对某些闭合回路,磁感应强度的环流可以不为零。

下面通过一个特例来看此问题,即磁场由长直载流导线产生,并分如下几种情况来计算磁感应强度的环流。

(1) 闭合回路包围长直载流导线,且处于和直流电垂直的某一平面内(如图 14-15(a)所示)。已知长直载流导线周围的磁力线应是一组以导线为中心的同心圆,磁感应强度可表示为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \mathbf{e}_\varphi,$$

式中 r 表示场点离开导线的距离; \mathbf{e}_φ 表示切向单位矢量。如图 14-15(b)所示,显然

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl \cos \theta = Br d\varphi,$$

所以

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l Br d\varphi = \oint_l \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\varphi = \mu_0 I.$$

以上计算结果表明,磁感应强度的环流与闭合回路的形状无关,它只和闭合回路内所包围的电流有关。

如果积分绕行方向相反或电流反向,则 $d\mathbf{l}$ 反向或 \mathbf{B} 反向,结果变成

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I.$$

这说明,所取积分的绕行方向与电流流向满足右螺旋关系,则公式中电流取正号;反之如满足左螺旋关系,则电流取负号。

(2) 闭合回路不包围长直载流导线(如图 14-16 所示)。如果所选闭合回路中没有包围电流,此时我们从 O 点作闭合回路的两条切线,两切点把闭合曲线分割为 l_1 和 l_2 两部分。按上面同样的分析,可以得出

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{l_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{l_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{l_1} d\varphi - \int_{l_2} d\varphi \right) = 0, \end{aligned}$$

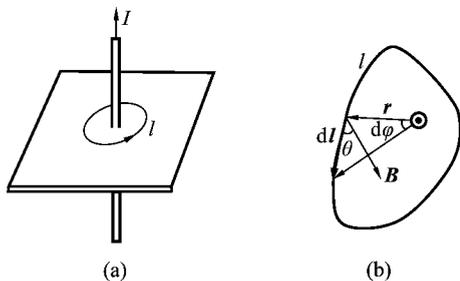


图 14-15

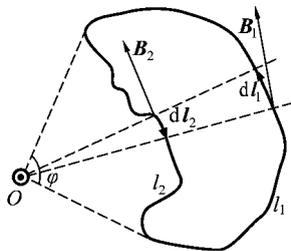


图 14-16

即闭合回路不包围电流时磁感应强度的环流为零。

对于如图 14-17 所示回路包围电流 $N=2$ 次的情况,考虑到积分的绕行方向与电流流向后,有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -N\mu_0 I.$$

如空间有多个电流,根据场叠加原理,则

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_l \left(\sum_i \mathbf{B}_i \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \left(\oint_l \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} \right) \\ &= \mu_0 \sum_i I_i, \end{aligned} \quad (14-17)$$

式中 \mathbf{B}_i 为由电流 I_i 产生的磁感应强度; $\sum_i I_i$ 表示处在积分回路中电流的代数和。式(14-17)表达了电流与它所激发磁场之间的普遍规律,称为安培环路定理,可表述如下:在真空中的稳恒磁场中,沿任何闭合回路磁感应强度的环流,等于真空的磁导率乘以穿过这闭合回路的所有传导电流强度的代数和。

对于安培环路定理我们几点还要强调一下。首先,电流强度的代数和是有正负的,如果所取积分的绕行方向与电流流向满足右螺旋关系,则电流为正,如果所取积分的绕行方向与电流流向满足左螺旋关系,则电流为负。例如,对于图 14-18 的情况,沿该闭合回路磁感应强度的环流为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 - I_2).$$

其次,磁感应强度是由全空间所有电流产生的,但安培环路定理表达式中的电流强度是指穿过闭合回路的电流,不包括闭合回路以外的电流。例如,对于图 14-18 的情况, I_3 也是要产生磁场的,但它并没有穿过闭合回路,故不出现在安培环路定理右面的表达式中。

还有,上述讨论不是安培环路定理的严格证明,只是一种验证或说明。而这里介绍的安培环路定理仅适用于由稳恒电流产生的磁场,对于一段假想的电流它不成立。如果电流随时间变化,则安培环路定理必须修正后才能用。最后,我们看到磁感应强度的环流不一定等于零,这表明磁场不是保守力场,是有旋场,因此一般不能像静电场那样引进电势的概念来描述磁场,这也表明磁场和静电场在本质上是不同的场。

14.3.4 安培环路定理的应用

利用毕奥-萨伐尔定律,原则上可以求解任意电流系统产生磁场的问题,但一般计算非常复杂。当电流分布具有某种对称性时,利用安培环路定理能很简单地

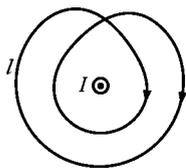


图 14-17

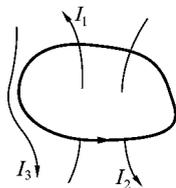


图 14-18

求出磁感应强度分布。下面举几个例子来说明。

1. 无限长圆柱面电流的磁场

如图 14-19 所示, 设圆柱截面的半径为 R , 恒定电流 I 沿轴线方向流动, 并呈轴对称分布。求此电流系统产生磁场的磁感应强度分布。

在圆柱面外取场点 P , P 到轴的距离为 r , 以轴心处为圆心, r 为半径, 作一个圆周为积分回路。由于电流具有轴对称分布, 磁感应强度在回路上各点大小相等。为了分析磁感应强度的方向, 在圆柱面上取平行于轴大小相等的无限长直电流 dI 和 dI' , 且使它们关于连线 OP 上、下对称, 这样它们产生的合磁场一定沿圆形回路的切线方向。整个圆柱面电流都可做这样的对称分割。由此可见, P 点的总磁场也一定沿积分回路的切线方向。

对于该圆形回路, 应用安培环路定理有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R), \quad (14-18)$$

即圆柱面外一点的磁场与全部电流都集中在轴线上的一根无限长线电流产生的磁场是相同的。

对于圆柱面内的场点, 可进行类似处理, 不过此时没有电流通过闭合回路, 即

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = 0,$$

所以

$$B = 0 \quad (r < R), \quad (14-19)$$

即圆柱面内无磁场。

无限长圆柱面电流的磁场随 r 的变化情况如图 14-19 所示。

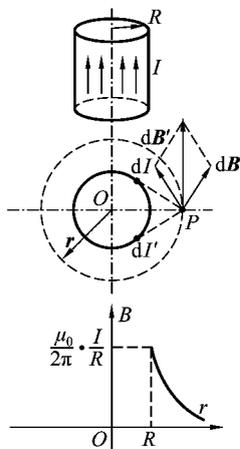


图 14-19

2. 螺绕环电流的磁场

如图 14-20 所示(截面图), 将载流导线均匀密绕在环形圆管上, 则构成了螺绕环。设积分回路半径为 R , 线圈总匝数为 N , 导线中电流为 I 。

由于对称性的缘故, 圆形回路上磁感应强度各点大小相等, 而方向沿圆形积分回路的切线。如积分回路在螺绕

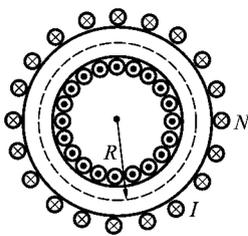


图 14-20

环内,则有电流通过回路 N 次,由安培环路定理有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi R = \mu_0 NI,$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 N}{2\pi} \cdot \frac{I}{R} = \mu_0 nI \quad (\text{环内}), \quad (14-20)$$

式中 $n = \frac{N}{2\pi R}$ 代表单位长度线圈的匝数。

如积分回路在螺绕环外,则通过积分回路的总电流为零,故

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi R = 0,$$

所以 $B=0$ (环外),即螺绕环外无磁场。

3. 无限大平面电流的磁场

如图 14-21 所示,设无限大导体平面中有均匀电流沿板平面流动,此时用电流线密度来描述面电流的强弱。电流线密度定义为通过与电流垂直的单位长度的电流强度,即在面上垂直于电流方向取一个线段 Δl ,通过它的电流强度为 ΔI ,则面上该处的电流线密度为

$$\alpha = \frac{\Delta I}{\Delta l}. \quad (14-21)$$

下面来求电流线密度为 α 的无限大平面电流的磁场。将无限大平面电流分成一对一对关于场点 P 对称的平行排列的无限长线电流,显然一对无限长线电流在 P 点产生的合场强平行于平面向左(如图 14-22 所示,电流垂直于纸面流出),这样总场强平行于平面向左, P 点如果在面的下方,则总场强平行于平面向右。经过这样的对称性分析后,我们取图示的矩形积分回路,长为 l_1 ,宽为 l_2 ,且使 ab 边和 cd 边到平面的距离相等,保证磁感应强度大小在这两条边上相等。对矩形积分回路应用安培环路定理有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2 \int_{l_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_1 + 2 \int_{l_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_2 = \mu_0 \alpha l_1,$$

考虑到 \mathbf{B} 与 $d\mathbf{l}_1$ 平行,与 $d\mathbf{l}_2$ 垂直,得到

$$2Bl_1 = \mu_0 \alpha l_1,$$

$$B = \frac{\mu_0 \alpha}{2}. \quad (14-22)$$

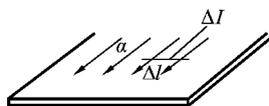


图 14-21

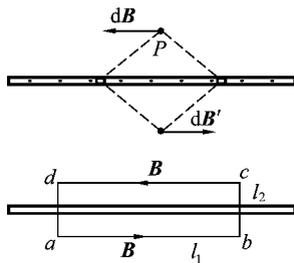


图 14-22

由此可见,无限大平面电流在其两侧都产生匀强磁场,且两侧磁感应强度大小相等,方向相反。

例 14-4 如图 14-23 所示的空心柱形导体,柱的内、外半径分别为 a 和 b ,导体内载有电流 I ,设电流 I 均匀分布在导体横截面上。求导体内部各点($a < r < b$)的磁感应强度大小,并试讨论 $a=0$ 和 $r \geq b$ 时的情况。

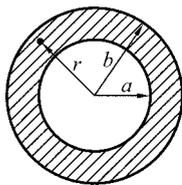


图 14-23

解 作一个半径为 r ($a < r < b$) 的积分回路,应用安培环路定理有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{\pi r^2 - \pi a^2}{\pi b^2 - \pi a^2} I,$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r} \quad (a < r < b).$$

当 $a=0$ 时, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2} r$ 。

作一个半径为 r ($r \geq b$) 的积分回路,应用安培环路定理有

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

所以,当 $r \geq b$ 时, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。

例 14-5 一个无限大均匀载流平面置于外场中,左侧磁感应强度量为 B_1 ,右侧磁感应强度量为 $3B_1$,方向如图 14-24 所示。试求:

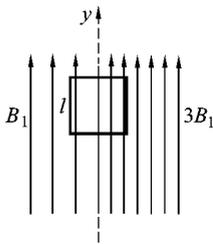


图 14-24

(1) 载流平面上的电流线密度 α ;

(2) 外场的磁感应强度 B_0 。

解 如图所示,作一矩形积分回路。应用安培环路定理有

$$3B_1 l - B_1 l = \mu_0 \alpha l,$$

由此得电流线密度

$$\alpha = \frac{2B_1}{\mu_0}.$$

方向:流出纸面。

设载流平面产生磁场大小为 B ,由场强迭加原理有

$$B_0 + B = 3B_1,$$

$$B_0 - B = B_1,$$

故得

$$B_0 = 2B_1。$$

写成矢量式

$$\mathbf{B}_0 = 2\mathbf{B}_1。$$

14.4 磁场对载流导线的作用

14.4.1 安培力公式

实验指出,放置在磁场中的载流导线要受到磁力的作用,这一现象是由安培首先发现的,故这种力称为安培力。进一步的研究表明,安培力的微观机制是洛伦兹力。我们知道运动电荷在磁场中要受到洛伦兹力的作用,而导线中的电流实际上是大量自由电子定向运动形成的,这些电子都要受到与运动方向垂直的洛伦兹力而产生侧向运动。由于导线的约束作用,电子通过与金属晶格的碰撞将此力传给导线,从宏观上看就是通电导线在磁场中受到安培力的作用。按照这种分析,下面我们从洛伦兹力公式出发来推导出安培力公式。

如图 14-25 所示,我们在载流导线上任取一电流元,由于电流元很小,故其所在处的磁场可看作匀强场。根据洛伦兹力公式,每一个载流子的受力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

式中 q 为载流子电量; v 为载流子漂移速度。

整个电流元受力

$$d\mathbf{F} = nSdl(q\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

式中 S 为导线的横截面积; dl 为电流元长度。

对于导线中的电流密度,有关系

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}, \quad \mathbf{I} = S\mathbf{j}。$$

考虑到

$$d\mathbf{l} // \mathbf{j},$$

得到

$$d\mathbf{F} = Sdl(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (14-23)$$

此即电流元在外磁场中受力的安培力公式。根据安培力公式,原则上讲,一段任意形状的载流导线在磁场中所受磁力的问题已经解决(如图 14-26 所示),即

$$\mathbf{F} = \int_l d\mathbf{F} = \int_l I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}。 \quad (14-24)$$

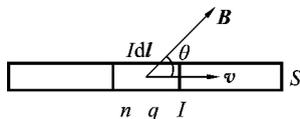


图 14-25

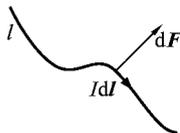


图 14-26

下面应用安培力公式来计算无限长平行载流直导线间的相互作用力。如图 14-27 所示, 设两条平行的载流直导线的垂直距离为 a , 电流分别为 I_1 和 I_2 , 方向相同。按安培力公式, 电流元 $I_2 dl_2$ 所受的安培力大小为

$$dF_2 = B_1 I_2 dl_2,$$

式中 B_1 为电流 I_1 在 $I_2 dl_2$ 处所产生的磁感应强度的大小。这样导线 2 单位长度受力为

$$\frac{dF_2}{dl_2} = B_1 I_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}. \quad (14-25)$$

同理, 可得导线 1 单位长度受力

$$\frac{dF_1}{dl_1} = B_2 I_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}. \quad (14-26)$$

显然, 两个电流同方向的平行载流直导线, 通过磁场的作用, 将互相吸引; 两个电流反向的平行载流直导线, 通过磁场的作用, 将互相排斥。

由于电流比电荷容易测定, 在 SI 中把电流强度的单位安培定为基本单位。安培的定义如下: 真空中相距 1m 的两无限长平行直导线中载有相等的电流时, 若在每米长度导线上的相互作用力正好等于 $2 \times 10^{-7} \text{N}$, 则导线中的电流定义为 1A。

按照这种规定, 可以导出真空磁导率 μ_0 的量值。令 $a = 1\text{m}$, $I_1 = I_2 = 1\text{A}$, 由

$$\frac{dF_1}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = 2 \times 10^{-7} \text{N/m},$$

可得

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}.$$

14.4.2 载流线圈在磁场中受到的力矩

下面我们讨论载流线圈在磁场中受到的安培力及力矩的情况。

1. 匀强磁场中之矩形载流线圈

如图 14-28 所示, 设在磁感应强度为 B 的匀强磁场中, 有一边长分别为 l_1 和 l_2 的刚性矩形载流线圈, 电流强度为 I 。设线圈平面和磁场的方向成任意角 θ , 线圈平面法线方向和磁场的方向成角 φ , 显然 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 。根据安培力公式, 边长为 l_1 的两边受

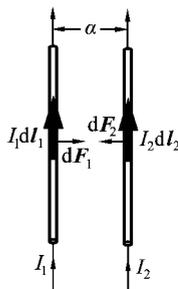


图 14-27

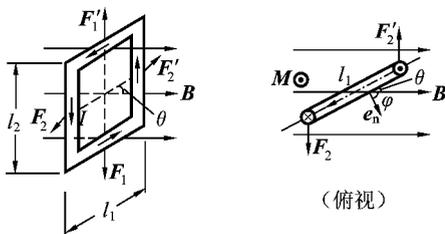


图 14-28

到的安培力大小相等,即

$$F_1 = F'_1 = BIl_1 \sin \theta,$$

它们方向相反,且在一条直线上,对于刚性矩形载流线圈来说不起任何作用。

边长为 l_2 的两边受到的安培力大小也相等,即

$$F_2 = F'_2 = BIl_2,$$

它们方向也相反,但可以不在一条直线上,因此形成了一对力偶,力臂为 $l_1 \cos \theta$ 。

所以安培力产生力矩的大小为

$$M = F_2 l_1 \cos \theta = BIl_1 l_2 \cos \theta = BIS \cos \theta = BIS \sin \varphi,$$

式中 $S = l_1 l_2$ 为线圈的面积。

如果线圈为 N 匝,则载流线圈上产生的力矩为

$$M = NBIS \sin \varphi = mB \sin \varphi,$$

式中 $m = NIS$ 为线圈磁矩的大小。考虑到磁矩、磁感应强度和力矩的方向后,可将上式写为矢量的形式

$$\mathbf{M} = m \mathbf{e}_n \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

还可以讨论一下几种特殊情况:如 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时,线圈平面与磁场平行,此时力矩最大,这个力矩有使 φ 角减小的趋势;如 $\varphi = 0$ 时,线圈平面与磁场垂直,此时力矩为零,线圈处于稳定平衡位置;如 $\varphi = \pi$ 时,力矩虽然也为零,但线圈处于不稳定平衡位置。

2. 匀强磁场中任意形状平面载流线圈

这里讨论更一般的情况,即任意形状的平面载流线圈处于匀强磁场中。此时线圈受到的合外力为

$$\mathbf{F} = \oint_l (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I \left(\oint_l d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = 0.$$

虽然线圈受到的合外力为零,线圈却要受到磁力矩的作用。

如图 14-29 所示,为了分析线圈受到的磁力矩,将面积为 S 的载流线圈看成由许多矩形的细长载流线圈所构成。相邻两个矩形载流线圈长边中的电流大小相等方向相反,它们相互抵消,而短边中的电流可等效表示面积为 S 的载流线圈中的电流。由此可见,所有矩形的细长载流线圈受到的总磁力矩,即为面积为 S 的载流线圈受到的磁力矩。根据前面的讨论,一个矩形的细长载流线圈受到的磁力矩为

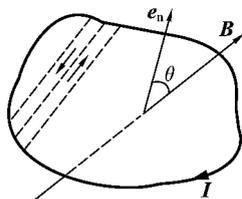


图 14-29

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad d\mathbf{m} = Id\mathbf{S}\mathbf{e}_n,$$

式中 dS 为小矩形的面积; \mathbf{e}_n 为线圈平面的法线方向。

总磁力矩为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int d\mathbf{M} = \int (d\mathbf{m} \times \mathbf{B}) = \left(\int d\mathbf{m} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \left(\int Id\mathbf{S}\mathbf{e}_n \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{e}_n \times \mathbf{B} \int dS \\ &= I\mathbf{S}\mathbf{e}_n \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (14-27)$$

由于外磁场为匀强磁场,故磁感应强度 \mathbf{B} 可拿到积分符号外面去。

总结:平面载流线圈在均匀磁场中任意位置上所受的合力都为零,仅受磁力矩的作用,磁力矩可用公式(14-27)来计算。因此,在均匀磁场中的平面载流线圈只发生转动,不会发生整个线圈的平动。磁场对载流线圈作用力矩的规律是制造各种电动机、动圈式电表和电流计等的基本原理。

14.4.3 磁力的功

载流导线和载流线圈在磁场中要受到安培力和磁力矩的作用。这样,当载流导线和载流线圈的位置与方位改变时,安培力和磁力矩就要做功。下面讨论两个特殊情况。

1. 载流导线在磁场中运动时安培力所做的功

如图 14-30 所示,设有一长为 l 的金属杆放在光滑的平行导轨上构成闭合回路,回路中存在稳恒电流 I ,匀强外磁场的磁感应强度的方向垂直于纸面向外。根据安培力公式,载流导线 ab 在磁场中受到图示安培力的作用,其大小为

$$F = BIl,$$

图 14-30

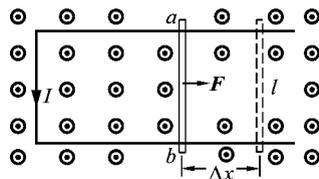
载流导线 ab 运动了 Δx 距离后,安培力做功

$$A = F\Delta x = BIl\Delta x = BI\Delta S = I\Delta\Phi_m,$$

式中 $\Delta\Phi_m = \Phi_f - \Phi_i$ 表示扫过的磁通量或磁通之增量, Φ_f 是通过末状态导线回路的磁通量, Φ_i 是通过初状态导线回路的磁通量。这样,载流导线在磁场中运动时安培力所做的功就可表示为

$$A = I(\Phi_f - \Phi_i), \quad (14-28)$$

即安培力所做功等于回路中的电流强度乘以通过回路磁通量的增量。在利用这个公式时要注意磁通量 Φ_f 和 Φ_i 的正负号,外磁场方向如和电流方向呈右螺旋关



系,磁通量取正,反之则取负。

2. 载流线圈在磁场内转动时磁力矩所做的功

如图 14-31 所示,设有一载流线圈在匀强磁场内转动,线圈中的电流维持不变,其所受到的磁力矩为

$$\mathbf{M} = m\mathbf{e}_n \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

大小为

$$M = ISB \sin \varphi.$$

当线圈转过角度 $d\varphi$ 时,磁力矩做功

$$dA = -BIS \sin \varphi d\varphi,$$

式中负号是因为 $d\varphi > 0$ 时,磁力矩做负功。

当线圈从 φ_1 转到 φ_2 过程中,磁力矩所做总功为

$$A = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} BIS \sin \varphi d\varphi = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi_m, \quad (14-29)$$

式中 $d\Phi_m$ 为线圈转过角度 $d\varphi$ 时,通过线圈磁通量的增量。这样,载流线圈在磁场中转动时磁力矩所做的功也可表示为

$$A = I(\Phi_f - \Phi_i).$$

可以证明,一个任意的闭合电流回路在磁场中改变位置时,即使磁场是非匀强磁场,如果保持回路中电流不变,则磁力或磁力矩所做的功都可按公式 $A = I(\Phi_f - \Phi_i)$ 计算,亦即磁力或磁力矩所做的功等于电流乘以通过载流线圈的磁通量的增量,这是磁力做功的一般表示。

例 14-6 如图 14-32 所示,在同一平面内有一无限长平行薄板和一无限长直线电流,均通有电流 I ,板宽为 a ,直线电流距板中心为 b 。求直线电流单位长度上所受到的磁场力。

解 将无限长平行薄板分成许多宽度为 dx 的无限长直电流,则有

$$dI = \frac{I}{a} dx,$$

x 处宽度为 dx 的无限长直电流在无限长直线电流处产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(b-x)},$$

总磁场为

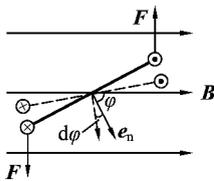


图 14-31

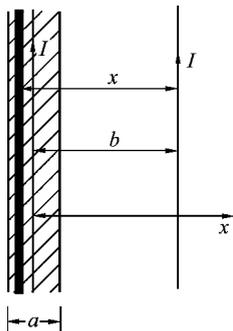


图 14-32

$$B = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi(b-x)a} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{b + \frac{a}{2}}{b - \frac{a}{2}},$$

直线电流单位长度上所受到的磁场力

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ln \frac{b + \frac{a}{2}}{b - \frac{a}{2}}.$$

例 14-7 如图 14-33 所示,在长直载流导线 I_1 的磁场中放置一等腰直角三角形线圈,其中通有电流 I_2 。开始时线圈和长直导线在同一平面内,现将线圈绕 AC 边转过 180° ,保持 I_2 不变,求转动过程中磁力所做的功。

解 利用公式

$$A = I_2 \Delta\Phi_m = I_2 (\Phi_f - \Phi_i),$$

式中 $\Phi_i < 0, \Phi_f > 0$,故

$$A = -I_2 (|\Phi_f| + |\Phi_i|) = -I_2 |\Phi_{ABCB'}|.$$

直流电流产生的磁场通过正方形区域 $ABCB'$ 的磁通量为

$$|\Phi_{ABCB'}| = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{a},$$

故转动过程中磁力所做的功为

$$A = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{a}.$$

例 14-8 内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的圆环,均匀带电 q ,处在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,并以角速度 ω 绕过环心 O ,且垂直环平面的轴线作匀速转动, B 与轴线的夹角为 α ,如图 14-34 所示。求圆环受到的磁力矩为多大?

解 在大圆环上取半径为 r ,宽度为 dr 的小圆环,其磁矩大小为

$$dm = \pi r^2 \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi r dr,$$

圆环总磁矩大小为

$$m = \int dm = \frac{\omega q (R_2^2 + R_1^2)}{4}.$$

由公式 $M = m \times B$,得圆环受到的磁力矩大小为

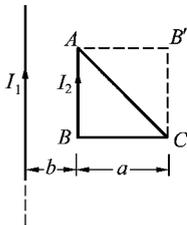


图 14-33

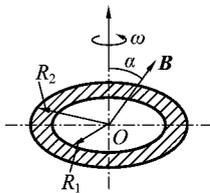


图 14-34

$$M = B \sin \alpha \frac{\omega q (R_2^2 + R_1^2)}{4}.$$

例 14-9 总匝数为 N 的均匀密绕平面圆线圈, 半径由 R_1 绕至 R_2 , 通有电流 I , 放在磁感应强度为 B 的匀强磁场中, 磁场方向与线圈平面平行, 如图 14-35 所示。试求:

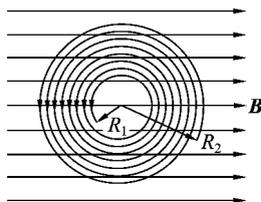


图 14-35

- (1) 该平面线圈磁矩 m 的大小;
- (2) 线圈在该位置所受到的磁力矩大小 M ;
- (3) 线圈在磁力矩作用下转到平衡位置的过程中, 磁力矩所做的功。

解 取半径为 r , 宽度为 dr 的圆环, 其包含线圈匝数为 $\frac{N}{R_2 - R_1} dr$, 对应磁矩大小为

$$dm = \pi r^2 \frac{NI}{R_2 - R_1} dr,$$

总磁矩大小为

$$m = \int_{R_1}^{R_2} \pi r^2 \frac{NI}{R_2 - R_1} dr = \frac{1}{3(R_2 - R_1)} \pi NI (R_2^3 - R_1^3).$$

在转动过程中磁力矩所做的功为

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 Bm \sin \alpha d\alpha = \frac{B}{3(R_2 - R_1)} \pi NI (R_2^3 - R_1^3).$$

14.5 带电粒子的运动

14.5.1 运动带电粒子的磁场

我们知道, 一切磁力和磁场都起源于电荷的运动, 电流所产生的磁场无非是由许多定向运动的带电粒子形成的。这里我们从电流元产生磁场的毕奥-萨伐尔定律出发, 推导出运动电荷与其所激发磁场的关系。

如图 14-36 所示, 考察横截面为 S 的导线上的电流元 Idl , 导线内载流子的电量为 q , 载流子的漂移速度为 v , 而载流子的粒子数密度为 n 。显然

$$I = qn v S,$$

而 $qv \parallel dl$, 所以

$$Idl = qn v S dl.$$

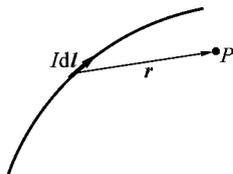


图 14-36

根据毕奥-萨伐尔定律, 得电流元 Idl 在 P 点处产生的磁场

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qnSdlv \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

这个磁场是由电流元 Idl 中所有载流子在 P 点共同产生的, 由于每个载流子在 P 点产生的磁场近似相同, 而电流元共含有 $dN = nSdl$ 个载流子, 故由一个载流子运动而在 P 点产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (14-30)$$

式中 \mathbf{r} 为场点相对载流子的位矢。

图 14-37 给出了两个异号电荷运动时产生磁场的情况。最后还要强调一点的是, 公式 (14-30) 仅适用于电荷运动速度远小于光速的情况。

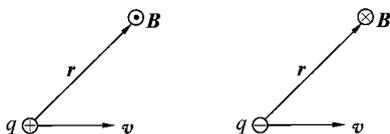


图 14-37

14.5.2 带电粒子在匀强磁场中的运动

带电量为 q 、质量为 m 及速度为 v 的粒子, 在磁感应强度为 B 的匀强磁场中运动时要受到洛伦兹力的作用, 即

$$\mathbf{F} = qv \times \mathbf{B}.$$

粒子的运动方程为

$$m\mathbf{a} = qv \times \mathbf{B}. \quad (14-31)$$

下面讨论几种特殊情况。

1. 粒子运动速度与磁场平行或反平行

由于 $\mathbf{F} = 0$, 故粒子运动状态不变。

2. 初始时刻粒子运动速度与磁场垂直

如图 14-38 所示, 这时粒子将受到与运动方向垂直的洛伦兹力的作用, 其大小为

$$F = qvB,$$

方向垂直于速度 v 及磁感应强度 B 。所以粒子速度的大小不变, 只改变方向, 带电粒子将作匀速率圆周运动, 而洛伦兹力起着向心力的作用, 因此

$$qvB = m \frac{v^2}{R},$$

由此可得粒子的圆形轨道半径

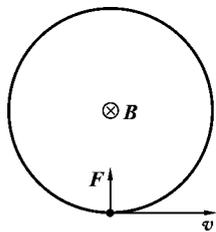


图 14-38

$$R = \frac{mv}{qB}。 \quad (14-32)$$

带电粒子绕圆形轨道一周所需的时间(周期)为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{qB} \quad (14-33)$$

这一周期与带电粒子的运动速度无关。

3. 初始时刻粒子运动速度与磁场成 θ 角

如图 14-39 所示,我们将粒子的速度 v 分解成平行于磁感应强度 B 的分量 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ 和垂直于磁感应强度 B 的分量 $v_{\perp} = v \sin \theta$ 。显然,在平行于磁场方向,粒子以速率 v_{\parallel} 作直线运动,在垂直于磁场方向,粒子以速率 v_{\perp} 作匀速率圆周运动。所以带电粒子合运动的轨道是一条螺旋线,螺旋线的半径为

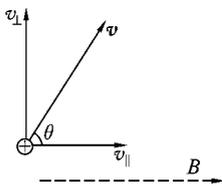


图 14-39

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB}, \quad (14-34)$$

螺距为

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi mv \cos \theta}{qB}, \quad (14-35)$$

周期为

$$T = \frac{2\pi m}{qB}。$$

在自然界中,极光现象就是由于带电粒子在磁场中运动而形成的。地球是一块巨大的磁石,而它的磁极在南北两极附近。我们知道,指南针总是指着南北方向,就是因为受了地磁场的影响。从太阳射来的带电粒子流,也要受到地磁场的影响,而且使带电粒子流聚集在磁极附近,激发高层空气分子的电离,造成绚丽的发光现象。所以极光大多在南北两极附近的上空出现,在北极发生的称为北极光,在北极发生的称为北极光。

14.5.3 霍耳效应

把一载流导体薄板放在磁场中时,如果磁场方向垂直于薄板平面,则在薄板的 S_1 和 S_2 两侧面之间会出现微弱的电势差(如图 14-40 所示)。这一现象是由霍耳(E. C. Hall)在 1879 年首先观察到,称为霍耳效应,而电势差称为霍耳电势差。

实验表明,霍耳电势差的大小与电流 I 及磁感应强度 B 成正比,而与薄片沿磁感应强度方向上的厚度 b 成反比,即

$$V_H = R_H \frac{BI}{b}, \quad (14-36)$$

式中 R_H 是一常量,称为霍耳系数,它与导体的材料有关。下面用导体中载流子在磁场中运动受洛伦兹力作用来说明霍耳效应。

设导体内载流子的电量为 $q > 0$, 载流子的漂移速度为 v , 而载流子的粒子数密度为 n 。载流子所受洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

在此力的作用下,带正电的载流子向 S_1 侧面漂移,这使得在 S_1 侧面有多余正电荷的积累,而 S_2 侧面有多余负电荷的积累,结果在导体内部形成从 S_1 侧面指向 S_2 侧面方向的附加电场 E , 这电场给载流子的作用力 qE 与载流子受到的洛伦兹力相反。当这两个力达到平衡时,载流子不再有横向漂移运动,此时有

$$qvB = qE.$$

如板的宽度为 a , 则附加电场 E 所形成的霍耳电势差为

$$V_1 - V_2 = Ea = Bva.$$

利用关系

$$I = nqvab,$$

得到

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{nq} \cdot \frac{BI}{b}. \quad (14-37)$$

将上式与经验关系式(14-36)比较后得霍耳系数

$$R_H = \frac{1}{nq}. \quad (14-38)$$

如果导体中的载流子带负电,只要把 q 取负值,上面的结论依然成立。因此,实验上只要测定一下霍耳电势差或霍耳系数,不仅可以判定载流子的正、负,还可以测定载流子的浓度,即单位体积中的载流子数 n ,这是非常有价值的。

例 14-10 设一电子质量为 m , 电量为 q , 射入磁感应强度为 B 的匀强磁场, 当它位于 z 轴上 O 点时, 具有与磁场方向成 α 角的速度 v (如图 14-41 所示)。试问:

- (1) 电子在磁力作用下作何种运动? 为什么?
- (2) 当电子再回到 z 轴时, 它沿 z 轴向运动了多少距离?

解 因为电子沿 z 轴作匀速直线运动, 垂直于 z 轴方向作圆周运动, 故电子作螺旋线运动。

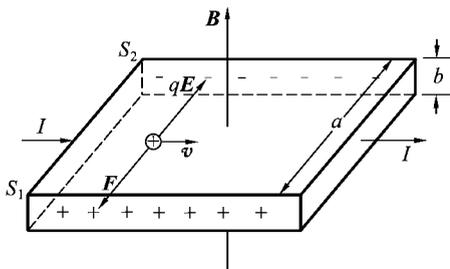


图 14-40

当电子再回到 z 轴时,它沿 z 轴向运动了一个螺距

$$h = v \cos \alpha \times \frac{2\pi n}{qB}.$$

例 14-11 在霍尔效应实验中,宽 1.0cm、长 4.0cm、厚 1.0×10^{-3} cm 的导体沿长度方向载有 3.0A 的电流,当磁感应强度为 $B=1.5$ T 的磁场垂直地通过该薄导体时,产生 1.0×10^{-5} V 的横向霍尔电压(在宽度两端)。试由这些数据求:

- (1) 载流子的漂移速度;
- (2) 每立方厘米的载流子数目。

解 根据

$$qvB = qE,$$

得载流子的漂移速度

$$v = \frac{E}{B} = \frac{V_1 - V_2}{Ba} = \frac{1.0 \times 10^{-5}}{1.5 \times 1.0 \times 10^{-2}} = 6.7 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

根据霍尔电压与载流子的粒子数密度 n 的关系

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{nq} \cdot \frac{BI}{b},$$

得

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{(V_1 - V_2)q} \cdot \frac{BI}{b} = \frac{1}{1.0 \times 10^{-5} \times 1.6 \times 10^{-19}} \cdot \frac{1.5 \times 3}{1.0 \times 10^{-5}} \\ &= 2.81 \times 10^{29} \text{ m}^{-3} = 2.81 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}. \end{aligned}$$

习题 14

14-1 如图 14-42 所示的弓形线框中通有电流 I ,求圆心 O 处的磁感应强度 B 。

14-2 两根长直导线沿半径方向引到铁环上 A 、 B 两点,并与很远处的电源相连,如图 14-43 所示。求环中心 O 点的磁感应强度 B 。

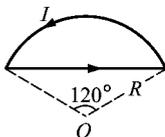


图 14-42

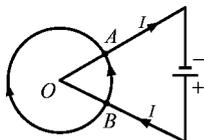


图 14-43

14-3 无限长细导线弯成如图 14-44 所示的形状,其中 c 部分是在 Oxy 平面内半径为 R 的半圆,试求通以电流 I 时 O 点的磁感应强度。

14-4 无限长直圆柱形导体内有一无限长直圆柱形空腔(如图 14-45 所示),空腔与导体的两轴线平行,间距为 a ,若导体内的电流密度均为 j , j 的方向平行于轴线。求腔内任意点的磁感应强度 B 。

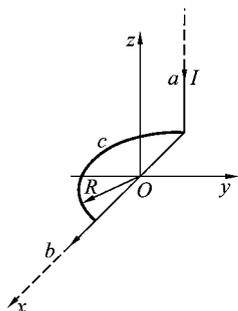


图 14-44

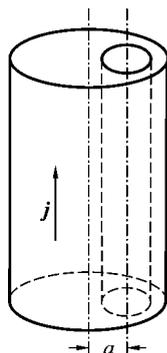


图 14-45

14-5 在半径 $R=1\text{cm}$ 的无限长半圆柱形金属片中,有电流 $I=5\text{A}$ 自下而上通过,如图 14-46 所示。试求圆柱轴线上一点 P 处的磁感应强度的大小。

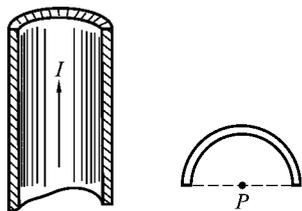


图 14-46

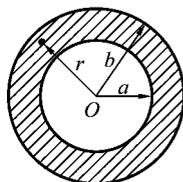


图 14-47

14-6 如图 14-47 所示的空心柱形导体,柱的半径分别为 a 和 b ,导体内载有电流 I ,设电流 I 均匀分布在导体横截面上。证明:导体内部各点 ($a < r < b$) 的磁感应强度 B 由下式给出:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r},$$

试以 $a=0$ 的极限情形来检验这个公式。试问 $r \geq b$ 时又如何?

14-7 一橡皮传输带以速度 v 匀速向右运动,如图 14-48 所示,橡皮带上均匀带有电荷,电荷面密度为 σ 。

- (1) 求橡皮带中部上方靠近表面一点处的磁感应强度 B 的大小;
- (2) 证明对非相对论情形,运动电荷的速度 v 及它所产生的磁场 B 和电场 E 之间满足下述

关系 $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ (式中 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$)。

14-8 一均匀带电长直圆柱体,电荷体密度为 ρ ,半径为 R ,如图 14-49 所示。若圆柱绕其轴线匀速旋转,角速度为 ω 。求:

- (1) 圆柱体内距轴线 r 处的磁感应强度的大小;
- (2) 两端面中心的磁感应强度的大小。

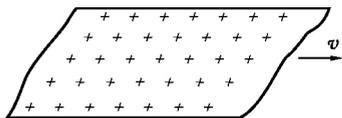


图 14-48

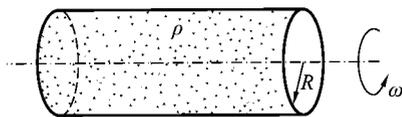


图 14-49

14-9 如图 14-50 所示,两无限长平行放置的柱形导体内通过等值、反向电流 I , 电流在两个阴影所示的横截面的面积皆为 S , 两圆柱轴线间的距离 $O_1O_2 = d$, 试求两导体中部真空部分的磁感应强度。

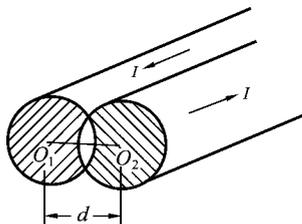


图 14-50

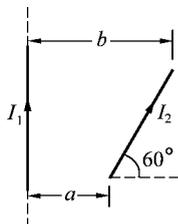


图 14-51

14-10 无限长直线电流 I_1 与直线电流 I_2 共面, 几何位置如图 14-51 所示。试求直线电流 I_2 受到电流 I_1 磁场的作用力。

14-11 设电视显像管射出的电子束沿水平方向由南向北运动, 电子能量为 12000eV , 地球磁场的垂直分量向下, 大小为 $B = 5.5 \times 10^{-5} \text{Wb/m}^2$, 问:

- (1) 电子束将偏向什么方向?
- (2) 电子的加速度是多少?
- (3) 电子束于显像管内在南北方向上通过 20cm 时将偏转多远?

14-12 在电视显像管的电子束中, 电子能量为 12000eV , 这个显像管的取向使电子水平地由南向北运动。该处地球磁场的竖直分量向下, 大小为 $5.5 \times 10^{-5} \text{T}$ 。问:

- (1) 电子束受地磁场的影响将偏向什么方向?
- (2) 电子的加速度是多少?
- (3) 电子束在显像管内在南北方向上通过 20cm 时将偏移多远?

14-13 一半径为 R 的无限长半圆柱面导体, 载有与轴线上的长直导线的电流 I 等值反向的电流, 如图 14-52 所示。试求轴线上长直导线单位长度所受的磁力。

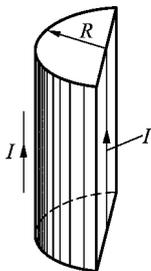


图 14-52

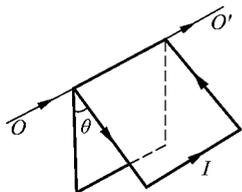


图 14-53

14-14 截面积为 S 、密度为 ρ 的铜导线被弯成正方形的三边,可以绕水平轴 OO' 转动,如图 14-53 所示。导线放在方向竖直向上的匀强磁场中,当导线中的电流为 I 时,导线离开原来的竖直位置偏转一个角度 θ 而平衡。求磁感应强度。

14-15 有一根 U 形导线,质量为 m ,两端浸没在水银槽中,导线水平部分的长度为 l ,处在磁感应强度大小为 B 的均匀磁场中,如图 14-54 所示。当接通电源时,U 导线就会从水银槽中跳起来。假定电流脉冲的时间与导线上升时间相比可忽略。试由导线跳起所达到的高度 h 计算电流脉冲的电荷量 q 。

14-16 半径为 R 的半圆形闭合线圈,载有电流 I ,放在均匀磁场中,磁场方向与线圈平面平行,如图 14-55 所示。求:

- (1) 线圈所受力矩的大小和方向(以直径为转轴);
- (2) 若线圈受上述磁场作用转到线圈平面与磁场垂直的位置,则力矩做功为多少?

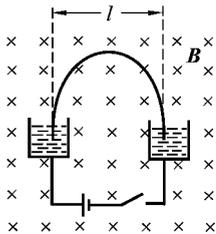


图 14-54

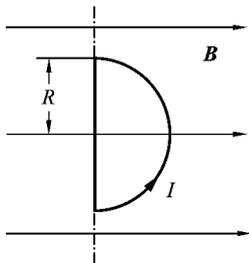


图 14-55

思考题 14

14-1 如图 14-56(a)和(b)所示各有一半径相同的圆形回路 L_1 、 L_2 ,圆周内有电流 I_1 、 I_2 ,其分布相同,且均在真空中,但在(b)图中 L_2 回路外有电流 I_3 , P_1 、 P_2 为两圆形回路上的对应点,则_____。

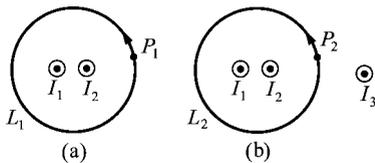


图 14-56

- (A) $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, $B_{P_1} = B_{P_2}$
- (B) $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, $B_{P_1} = B_{P_2}$
- (C) $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, $B_{P_1} \neq B_{P_2}$
- (D) $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, $B_{P_1} \neq B_{P_2}$

14-2 图 14-57 中哪一幅图线能确切描述载流圆线圈在其轴线上任意点所产生的 B 随 x 的变化关系? (x 坐标轴垂直于圆线圈平面,原点在圆线圈中心 O)

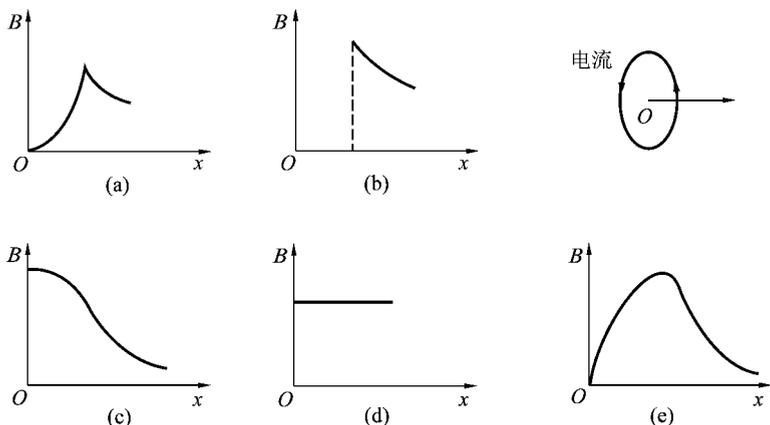


图 14-57

14-3 取一闭合积分回路 L , 使三根载流导线穿过它所围成的面。现改变三根导线之间的相互间隔, 但不越出积分回路, 则_____。

- (A) 回路 L 内的 $\sum I$ 不变, L 上各点的 B 不变
 (B) 回路 L 内的 $\sum I$ 不变, L 上各点的 B 改变
 (C) 回路 L 内的 $\sum I$ 改变, L 上各点的 B 不变
 (D) 回路 L 内的 $\sum I$ 改变, L 上各点的 B 改变

14-4 一载有电流 I 的细导线分别均匀密绕在半径为 R 和 r 的长直圆筒上形成两个螺线管 ($R=2r$), 两螺线管单位长度上的匝数相等。两螺线管中的磁感应强度大小 B_R 和 B_r 应满足_____。

- (A) $B_R=2B_r$ (B) $B_R=B_r$ (C) $2B_R=B_r$ (D) $B_R=4B_r$

14-5 均匀磁场的磁感应强度 B 垂直于半径为 r 的圆面。今以该圆周为边线, 作一半球面 S , 则通过 S 面的磁通量的大小为多少?

14-6 如图 14-58 所示, 匀强磁场中有一矩形通电线圈, 它的平面与磁场平行, 在磁场作用下, 线圈向什么方向转动?

14-7 一均匀磁场, 其磁感应强度方向垂直于纸面, 两带电粒子在磁场中的运动轨迹如图 14-59 所示, 则_____。

- (A) 两粒子的电荷必然同号 (B) 粒子的电荷可以同号也可以异号
 (C) 两粒子的动量大小必然不同 (D) 两粒子的运动周期必然不同

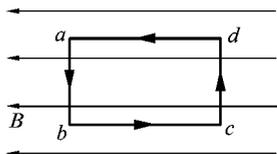


图 14-58

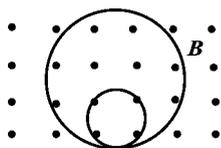


图 14-59

第 15 章 磁介质

凡处在外磁场中能与外磁场发生作用的物质皆可称为磁介质。磁介质种类很多,有气态磁介质、液态磁介质和固态磁介质、这些物质受外磁场的作用而处于所谓的磁化状态,反过来又会对原来的磁场产生影响。磁介质具有重要的应用价值,对其磁学性质的研究无疑也是非常重要的。

15.1 顺磁性和抗磁性

设某电流分布系统在真空中激发的磁场为 B_0 , 那么将同一电流分布系统放置在无限大均匀和各向同性的磁介质中, 磁化了的磁介质会激发附加磁场, 实验告诉我们, 此时总磁场与原来的磁场有关系

$$B = \mu_r B_0,$$

式中 μ_r 称为磁介质的相对磁导率。

根据 μ_r 的不同可以对磁介质进行分类: $\mu_r < 1$, 磁介质中的磁感应强度由于磁介质的存在而被削弱了, 这类磁介质称为抗磁质, 例如水银、铜、铋、硫、氯、氢、银、金、锌、铅等都属于抗磁性物质; $\mu_r > 1$, 磁介质中的磁感应强度由于磁介质的存在而增强了, 这类磁介质称为顺磁质, 例如锰、铬、铂、氮等都属于顺磁性物质; $\mu_r \gg 1$, 磁介质中的磁感应强度由于磁介质的存在增强了成千上万倍, 这类磁介质称为铁磁质, 例如铁、镍、钴等以及这些金属的合金, 此外还有铁氧体等物质。 $\mu_r = 0$, 即这种磁介质将磁场完全排除在外, 这种磁介质具有完全抗磁性, 当物质处于超导状态时, 就具有完全抗磁性。

下面我们从微观上来说明磁介质对外磁场的响应情况。

15.1.1 电子的磁矩

如图 15-1 所示, 当电子以速率 v 在半径为 r 的圆周上绕原子核运动时, 电子的轨道磁矩大小为

$$\mu_l = IS = \frac{ve}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} e v r = \frac{e}{2m} L,$$

式中 $L = mvr$ 为电子绕原子核运动的角动量。考虑到电子带负电, 电子的轨道磁矩与其角动量方向相反, 将上式可写成矢

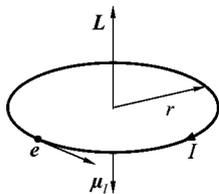


图 15-1

量形式

$$\boldsymbol{\mu}_l = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}. \quad (15-1)$$

对于电子的自旋运动,也有相应的自旋角动量和自旋磁矩,分别用 \mathbf{S} 和 $\boldsymbol{\mu}_s$ 表示。它们之间满足

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{S}. \quad (15-2)$$

按照量子理论,电子的角动量和磁矩都是量子化的,即不连续的,而磁矩的最小量子是

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2,$$

称为玻尔磁子。

15.1.2 磁场中的核外电子

这里我们讨论外磁场中一个核外电子的运动情况。如图 15-2 所示,设外磁场为 \mathbf{B}_0 ,电子轨道运动磁矩为 $\boldsymbol{\mu}_l$,其在磁场中受到的磁力矩为

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{B}_0.$$

按照角动量定理

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt = (\boldsymbol{\mu}_l \times \mathbf{B}_0)dt = -\frac{e}{2m}(\mathbf{L} \times \mathbf{B}_0)dt.$$

很显然, $d\mathbf{L}$ 与 \mathbf{L} 垂直,其结果是在外磁场的作用下,电子绕核运动的轨道平面整个绕外磁场发生进动。电子的进动也相当于一个圆电流,不论电子原来的磁矩与磁场方向之间的夹角是何值,因为电子带负电,这种等效圆电流的磁矩(附加磁矩 $\Delta\boldsymbol{\mu}_l$)的方向永远与外磁场 \mathbf{B}_0 的方向相反(如图 15-2 所示)。这样电子的总磁矩为

$$\boldsymbol{\mu}_e = \boldsymbol{\mu}_l + \Delta\boldsymbol{\mu}_l.$$

另外,在外磁场中,电子的自旋磁矩(角动量)也要绕外磁场方向进动。

15.1.3 抗磁性和顺磁性

分子的磁矩是指分子中所有电子磁矩的矢量和,即

$$\boldsymbol{\mu}_m = \sum_i \boldsymbol{\mu}_{ei},$$

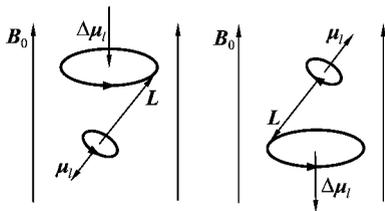


图 15-2

式中 μ_{ei} 为分子中第 i 个电子的磁矩。

原子核也具有磁矩,它是质子在核内的轨道运动以及质子和中子的自旋运动所产生的磁效应。但是,它比电子的磁矩大约小三个数量级,在计算分子或原子的总磁矩时,核磁矩的影响通常可以忽略。分子的磁矩又称为分子固有磁矩,对具有抗磁性的抗磁质而言,其分子固有磁矩等于零。在外磁场中,每个电子由于进动而感应出与外磁场方向相反的附加磁矩,这样抗磁质中每个分子也就具有了一个与外磁场方向相反的附加磁矩,结果在磁体内激发一个和外磁场方向相反的附加磁场,这就是抗磁性的起源(如图 15-3 所示)。抗磁性既然起源于外磁场对电子轨道运动作用的结果,应该在任何原子或分子的结构中都会产生,因此,它是一切磁介质所共有的性质。

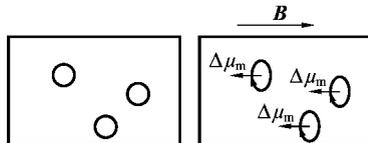


图 15-3

对顺磁质而言,虽然每个分子有一定的固有磁矩,但由于分子的无规则热运动,各个分子磁矩排列的方向是杂乱的,对顺磁质内任何一个宏观小而微观大的体积元来说,其中各分子磁矩的矢量和为零,因而对外界不显示出磁效应。在外磁场的作用下,分子磁矩的大小不改变,但是外磁场的存在使分子磁矩转向外场方向,以保证能量取最低状态。当然,分子热运动又是破坏分子磁矩沿磁场方向有序排列的因素,使之不可能取向完全一致。当达到热平衡时,总的说来分子磁矩将不同程度地沿着外磁场方向排列起来,在宏观上呈现出与外磁场方向相同的附加磁场,使磁介质内的磁场加强(如图 15-4 所示),这就是顺磁质在外场中的磁化情况。

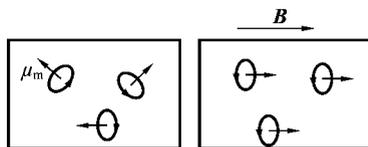


图 15-4

对于顺磁质,受到外磁场的作用后其分子也会产生抗磁性,但在通常情况下,顺磁质分子的附加磁矩要比分子的固有磁矩小很多,所以这些磁介质主要显示出其顺磁性。

磁介质在外磁场中都要出现磁化现象,对于抗磁质而言,这种磁化称为感应磁化,而对于顺磁质而言,这种磁化称为取向磁化。不管哪种磁化,分子磁矩都可以用所谓分子电流来表示。对于均匀的磁介质而言,在磁介质内部分子电流相互抵消,而在其表面分子电流可能抵消不了,形成所谓磁化面电流。在以后讨论磁介质在外磁场中的磁化规律时,可以不再分析介质磁化的微观细节,而用磁化电流等效地去表示磁介质在外磁场中的磁化。

15.2 磁化强度和磁化电流

15.2.1 磁化强度

为了定量描写磁介质在外磁场中的磁化程度,引入磁化强度这一物理量。它是这样定义的,在磁介质内,任取一体积元 ΔV ,无外磁场时,对于抗磁质和顺磁质, ΔV 内分子磁矩的矢量和 $\sum_i \boldsymbol{\mu}_{mi} = 0$,其中 $\boldsymbol{\mu}_{mi}$ 代表 ΔV 内第 i 个分子的磁矩。有外磁场时 $\sum_i \boldsymbol{\mu}_{mi} \neq 0$,外磁场越强, $\sum_i \boldsymbol{\mu}_{mi}$ 越大,反映了磁介质被磁化的程度愈强烈,且 $\sum_i \boldsymbol{\mu}_{mi}$ 与体积元 ΔV 成正比。这样定义一个新的物理量

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{\mu}_{mi}}{\Delta V} \quad (15-3)$$

来描写磁介质的磁化情况,称其为磁化强度。需要强调的是,宏观上 ΔV 要取得足够小,使磁化强度 \boldsymbol{M} 能足够精确地描写空间各点附近磁介质的磁化程度,即 \boldsymbol{M} 一般是空间位置的函数。但从微观上来讲, ΔV 又要取得足够大,使其内部包含足够多的分子,只有这样磁化强度 \boldsymbol{M} 才能真实反映磁介质的磁化情况。

抗磁质磁化后,磁化强度 \boldsymbol{M} 的方向与该处磁场相反,此时磁介质内所激发的附加磁场的方向也与外磁场的方向相反,使总磁场减弱。顺磁质磁化后,磁化强度 \boldsymbol{M} 的方向与该处的磁场一致,此时磁介质内所激发的附加磁场的方向也与外磁场的方向相同,使总磁场增强。

在 SI 中,磁化强度 \boldsymbol{M} 的单位是 $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

当然,真空中的磁化强度 \boldsymbol{M} 为零,当磁介质未磁化时,磁化强度 \boldsymbol{M} 也为零。如磁介质各点的磁化强度 \boldsymbol{M} 都相同,则这种磁化被称为均匀磁化。

15.2.2 磁化电流

均匀和各向同性的磁介质在外磁场中磁化时,在磁介质内部各分子电流相互抵消,而在其表面形成磁化电流。外磁场越强,磁介质表面磁化电流也就越强,同时磁介质的磁化强度 \boldsymbol{M} 也就越大,这隐约告诉我们磁化强度 \boldsymbol{M} 与磁化面电流之间有某种关系,下面就来寻找它们之间的关系。

如图 15-5 所示,假设真空中具有任意形状外表面的磁介质已被磁化,介质表面出现磁化电流。在介质表面上,垂直于电流方向取有向线元 $d\boldsymbol{l}$,有向线元所在处介质的磁化强度 \boldsymbol{M} 与有向线元 $d\boldsymbol{l}$ 之间夹角为 θ 。想像在介质表面附近割出一

个长为 dL ，底面垂直于该处介质中的磁化强度 \mathbf{M} ，且底面积为 ΔS 的小斜柱体。由于此斜柱体很小，可以认为其均匀磁化，各点磁化强度相同。根据前面的分析，斜柱体表面会出现磁化电流，设其总电流强度为 dI' 。这样斜柱体总磁矩的大小，即

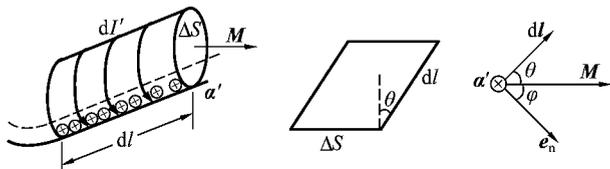


图 15-5

斜柱体内所有分子磁矩的矢量和的大小为

$$\left| \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \right| = \Delta S dI'$$

根据磁化强度的定义有

$$M = \frac{\left| \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \right|}{\Delta V} = \frac{\Delta S dI'}{\Delta S dL \cos \theta}$$

式中 $\Delta V = \Delta S dL \cos \theta$ 为斜柱体总体积。磁化面电流线密度为

$$\alpha' = \frac{dI'}{dL} = M \cos \theta = M \sin \varphi$$

式中 φ 为有向线元 dL 所在处介质表面法线方向 \mathbf{e}_n 与磁介质磁化强度 \mathbf{M} 之间的夹角，显然 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 。考虑到方向，我们可将磁化强度 \mathbf{M} 与磁化面电流线密度 $\boldsymbol{\alpha}'$ 间的矢量关系写为

$$\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \quad (15-4)$$

由此可见，磁介质表面某处磁化电流线密度 $\boldsymbol{\alpha}'$ 等于该处磁化强度 \mathbf{M} 与该处磁介质表面法向单位矢量 \mathbf{e}_n 的矢量积。由此可知，知道了磁介质的磁化情况，会很方便地求出磁介质表面的磁化电流。同时还可以得到如下之重要关系

$$dI' = M dL \cos \theta = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (15-5)$$

或

$$dI' = \alpha' dL = |\mathbf{M} \times \mathbf{e}_n| dL \quad (15-6)$$

如图 15-6 所示，在两种磁介质的界面上也会出现磁化电流。在磁化强度为 \mathbf{M}_1 的磁介质一侧有磁化电流

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{e}_{n1}$$

在磁化强度为 \mathbf{M}_2 的磁介质一侧有磁化电流

$$\boldsymbol{\alpha}'_2 = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{e}_{n2}$$

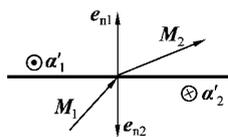


图 15-6

故总的磁化电流线密度为

$$\alpha' = M_1 \times e_{n1} + M_2 \times e_{n2}.$$

考虑到 $e_{n1} = -e_{n2}$, 有

$$\alpha' = (M_1 - M_2) \times e_{n1}. \quad (15-7)$$

例 15-1 一被均匀磁化的介质球, 半径为 R , 磁化强度为 M . 试求:

(1) 沿球面流动的磁化电流线密度 α' 和总磁化电流;

(2) 磁化电流在球心处产生的磁感应强度大小 B' .

解 如图 15-7 所示建立坐标系, 设 M 沿 z 轴正方向.

在 Oxz 平面内, 角度为 θ 处球面上的磁化电流线密度为

$$\alpha' = M \times e_n = M \times e_r,$$

其大小为

$$\alpha' = M \sin \theta.$$

在 θ 和 $d\theta$ 间的环带上的磁化电流

$$dI' = \alpha' R d\theta = MR \sin \theta d\theta,$$

总磁化电流

$$I' = \int_0^\pi MR \sin \theta d\theta = 2MR.$$

上述环带圆电流在球心处的磁感应强度大小为

$$dB' = \frac{\mu_0 (MR \sin \theta d\theta) (R \sin \theta)^2}{2(R^2 \sin^2 \theta + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta,$$

总的磁感应强度大小为

$$B' = \int_0^\pi \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \mu_0 M.$$

可以证明, 在球内任意一点都有 $B' = \frac{2}{3} \mu_0 M$, 即在均匀磁化介质球内的磁场是均匀场。

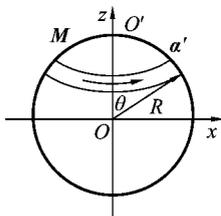


图 15-7

15.3 介质中的磁场 磁场强度

磁介质在外磁场中要出现磁化现象, 在其表面会出现磁化电流。有电流就要激发磁场, 设磁化电流激发的磁场为 B' 。根据场强叠加原理, 某点处的总场强 B , 应等于原来该处的外磁场 B_0 与磁化电流在该处激发磁场的矢量和, 即

$$B = B_0 + B', \quad (15-8)$$

外电场 B_0 可以由传导电流产生。

15.3.1 介质中磁场的高斯定理

无论是传导电流还是磁化电流,它们所产生的磁场的磁力线都是闭合的,是无源场,满足稳恒磁场的磁高斯定理,即

$$\oiint_S \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oiint_S \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

由此得在磁介质存在情况下,总磁场的磁高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (15-9)$$

15.3.2 磁场强度 介质中磁场的安培环路定理

在磁介质存在的情况下,安培环路定理被推广为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i + \mu_0 \sum_i I'_i, \quad (15-10)$$

式中 $\sum_i I_i$ 和 $\sum_i I'_i$ 为闭合回路 l 所包围的传导电流的代数和及磁化电流的代数和。需要注意的是, μ_0 是真空磁导率,磁介质的影响已经由磁化电流 $\sum_i I'_i$ 表示了。

现在遇到的困难与研究电介质的时候类似,即为了求磁场,就要知道磁化电流,而磁化电流由磁化强度决定,磁化强度又与磁场有关,这就使得在磁介质存在的情况下,求磁场、磁化电流或磁化强度中任何一个物理量都十分困难。在讨论电介质在外电场中的极化情况时,引入了一个辅助物理量电位移矢量,由于电位移矢量通过任意闭合曲面的电位移通量只与自由电荷有关,与极化电荷,亦即与电介质无关。因而,在电介质与自由电荷分布具有较高对称性的情况下,电位移矢量比较好求,再由此来求电极化强度及极化电荷。在讨论磁介质在外磁场中的磁化时,为了简化计算,也可类似地引入一个被称为磁场强度的辅助物理量。

如图 15-8 所示,有一长直载流导线通有传导电流 I ,导线外充满均匀和各向同性的磁介质。由于磁介质处于载流导线所产生的磁场中,磁介质就要磁化。对于顺磁质而言,在紧邻导线的介质表面上,将出现方向与传导电流 I 相同的磁化电流 I' ,以使磁场得到加

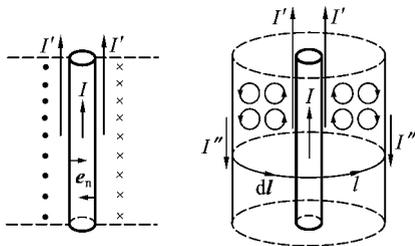


图 15-8

强;对于抗磁质而言,在紧邻导线的介质表面上,将出现方向与传导电流 I 相反的磁化电流,以削弱原来的外磁场。作一个闭合回路 l ,包围传导电流和磁化电流,由磁介质存在情况下的安培环路定理,有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 I'.$$

通过闭合回路 l 作平行于直导线的柱形筒面,并将筒外面的磁介质剥除。由于出现了新的界面,在新的界面处分子电流抵消不了,因而,新的界面上出现与传导电流 I 相反的磁化电流 I'' ,显然 $I' = I''$ 。利用磁化电流 I'' 与筒面磁化强度 \mathbf{M} 的关系式 $dI'' = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$,有

$$I'' = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (15-11)$$

这样安培环路定理可写成

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l},$$

移项后得

$$\oint_l \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I.$$

引入一个被称为磁场强度的辅助物理量

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (15-12)$$

得到用磁场强度表示的安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (15-13)$$

在 SI 中,磁场强度 \mathbf{H} 的单位为 A/m。

15.3.3 各向同性的磁介质

实验证明:对于各向同性的磁介质,当外磁场不太强时,磁介质内任意点的磁化强度与该点处的磁场度成正比,即

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (15-14)$$

式中纯数 χ_m 称为介质的磁化率,它与磁介质的相对磁导率 μ_r 有如下关系:

$$\mu_r = 1 + \chi_m. \quad (15-15)$$

考虑到

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

有

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (15-16)$$

式中 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 称为磁介质的磁导率。

对于顺磁质, $\chi_m > 0$, 磁化强度 \mathbf{M} 和磁场强度 \mathbf{H} 的方向相同; 对于抗磁质, $\chi_m < 0$, 磁化强度 \mathbf{M} 和磁场强度 \mathbf{H} 的方向相反。

例 15-2 在均匀密绕的螺绕环内充满均匀的顺磁介质, 已知螺绕环中的传导电流为 I , 单位长度内匝数为 n , 环的横截面半径比环的平均半径小得多, 磁介质的相对磁导率为 μ_r 。求环内的磁场强度、磁感应强度和磁化面电流线密度。

解 如图 15-9 所示, 在环内任取一点, 过该点作一个与环同心、半径为 r 的圆形回路, 磁场强度 \mathbf{H} 沿此回路的线积分为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI,$$

式中 N 是螺绕环上线圈的总匝数。由对称性可知, 在所取圆形回路上各点磁场强度的大小相等, 方向都沿圆形回路切线方向。于是

$$H2\pi r = NI,$$

则

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = nI.$$

当环内充满均匀磁介质时, 环内的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}.$$

对于真空而言 $\mu_r = 1$, 由此可知, 当环内充满均匀磁介质后, 环内的磁感应强度改变到环内是真空时的 μ_r 倍。在这里要特别指出, 只有在均匀磁介质充满整个磁场时, 才有这种关系。

由磁场强度的定义, 有

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}.$$

根据

$$\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n,$$

得磁化面电流线密度大小

$$\alpha' = M.$$

对于顺磁质, 磁化面电流和导线内传导电流的方向相同; 对于抗磁质, 磁化面电流和导线内传导电流的方向相反。

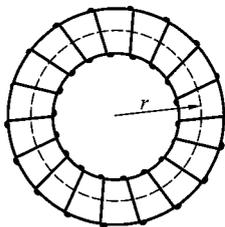


图 15-9

15.4 铁磁性

有些磁介质, 如铁、镍、钴等以及这些金属的合金, 此外还有铁氧化物等物质, 它

们的磁导率很大,放入外磁场中后,会使原来的磁场增强成千上万倍,这类物质称为铁磁质。铁磁质具有奇特的性质,它的磁导率 μ 不是常量,而是与磁场强度 H 有着复杂的函数关系;在撤去外磁场后,铁磁质仍能保留部分磁性。下面我们研究一下铁磁质的磁化情况。

15.4.1 铁磁质的磁滞回线

如图 15-10 所示,在一个原来没有磁化过的环形铁芯上密绕 N 匝线圈构成螺绕环。当线圈通有电流 I 时,应用安培环路定理,得螺绕环内的磁场强度为

$$H = nI,$$

式中 n 为螺绕环单位长度的匝数。

为了测量铁磁质中的磁感应强度 B ,在螺绕环磁芯上切出一个小口子(不要切断导线),用高斯计来测量铁磁质中的磁感应强度。这样,通过改变 I ,也就改变了磁场强度,同时测量出对应的铁磁质内的磁感应强度,从而可以画出所谓的 B - H 磁滞回线。

如图 15-11 所示,从铁磁环未磁化开始,电流增加,磁场强度增加,磁感应强度也逐渐增大(Oa)。电流再增加,磁感应强度迅速增加(ab),然后增加变慢,在 c 点达到饱和。慢慢减小电流,磁场强度相应减小,但在此过程中磁感应强度并不沿原路 Oc 返回,而是沿 cd 变化。当 $H=0$ 时,磁感应强度并不等于零,而保留一定的大小 B_r ,称为剩余磁感应强度。为了消除剩磁,必须在线圈中

通入反向电流,即加上反方向的磁场。当反向磁场 H 等于某一定值 H_c 时, B 才等于零。这个 H_c 值称为材料的矫顽力。如再增强反方向的磁场,材料又可被反向磁化达到反方向的饱和状态(f 点)。逐渐减小电流到零再正向增加,磁感应强度沿 fgc 回到 c 点,形成图示的闭合曲线。此闭合曲线常称为 B - H 磁滞回线,这是由于磁感应强度 B 值的变化总是落后于磁场强度 H 的变化的结果。由此可见,对铁磁质而言磁感应强度与磁场强度之间没有一一对应的关系,磁导率 $\mu = \frac{B}{H}$ 是多值的,与铁磁质的磁化历史有关。

15.4.2 铁磁质的理论解释

铁磁质的磁性不能用一般顺磁质的磁化理论来解释,对其严格的解释要用到

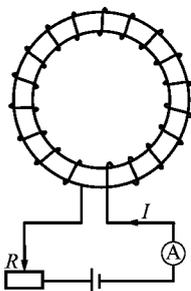


图 15-10

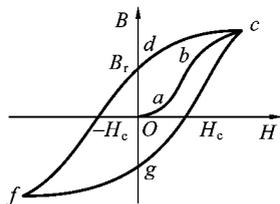


图 15-11

量子力学知识,这里我们只做一个简单的说明。从微观上看,在铁磁质内部存在许多自发饱和磁化的小区域,称为磁畴。根据观察,磁畴的体积约为 $10^{-10} \sim 10^{-8} \text{m}^3$ 数量级,其中约有 $10^{17} \sim 10^{21}$ 个原子。由于相邻原子中电子间存在着非常强的交换耦合作用,使得磁畴中分子磁矩都取同一个方向,这样一个磁畴就具有磁矩,对外有磁性。虽然如此,通常情况下,铁磁质内大量磁畴磁矩的取向是杂乱无章的,故宏观上铁磁质对外不表现出磁性(如图 15-12 所示)。当加一个外磁场时,铁磁质中磁化方向与外磁场方向相近的磁畴的体积会变大,而磁化方向与外磁场方向相反或夹角较大的磁畴的体积会变小,外磁场越强,这种变化就越大,最后当所有磁畴都沿外磁场方向整齐排列时,这时铁磁质就达到了饱和磁化(如图 15-13 所示),大大增强了原磁场。

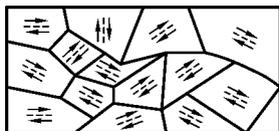


图 15-12

当加一个外磁场时,铁磁质中磁化方向与外磁场方向相近的磁畴的体积会变大,而磁化方向与外磁场方向相反或夹角较大的磁畴的体积会变小,外磁场越强,这种变化就越大,最后当所有磁畴都沿外磁场方向整齐排列时,这时铁磁质就达到了饱和磁化(如图 15-13 所示),大大增强了原磁场。

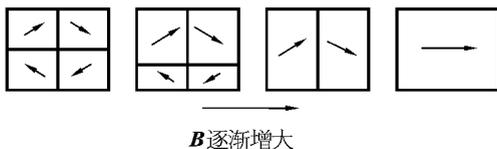


图 15-13

如果撤去外磁场,由于磁滞现象,铁磁质内会出现剩磁 B_r ,这就是永久性磁铁具有磁性的道理。在高温情况下,铁磁质中分子的热运动要瓦解磁畴内磁矩有规则的排列,当温度达到临界温度时,磁畴全部被破坏,铁磁质也就转为普通的顺磁质了。这一现象是由居里(P. Curie)首先发现的,故转变的临界温度称为居里温度。

15.4.3 磁材料的应用

根据磁滞回线的不同,可以将铁磁性材料区分为软磁材料和硬磁材料。

软磁材料的特点是矫顽力小,容易磁化,也容易退磁,其磁滞回线呈细长条形状(如图 15-14 所示)。这种材料可用于制造变压器、继电器、电磁铁、电机以及各种高频电磁元件的铁芯。

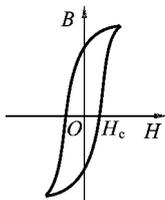


图 15-14

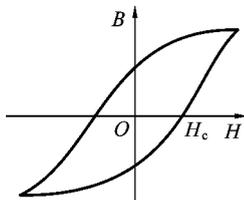


图 15-15

硬磁材料的特点是矫顽力大,剩磁 B_r 也大。这种材料的磁滞回线很宽,磁滞特性显著(如图 15-15 所示)。因此,硬磁材料经磁化后仍能保留很强的剩磁,并且这种剩磁不易消除。这种硬磁材料适合于制成永久磁铁,例如,磁电式电表、永磁扬声器、耳机、小型直流电机以及雷达中的磁控管等用的永久磁铁都是由硬磁材料做成的。

习题 15

15-1 一圆柱形无限长导体,磁导率为 μ ,半径为 R ,通有沿轴线方向的均匀电流 I 。求:

- (1) 导体内任一点的 H 、 B 和 M ;
- (2) 导体外任一点的 H 、 B 。

15-2 螺绕环平均周长 $l=10\text{cm}$,环上绕有线圈 $N=200$ 匝,通有电流 $I=100\text{mA}$ 。试求:

- (1) 管内为空气时 B 和 H 的大小;
- (2) 若管内充满相对磁导率 $\mu_r=4200$ 的磁介质, B 和 H 的大小。

15-3 螺绕环内通有电流 20A ,环上所绕线圈共 400 匝,环的平均周长为 40cm ,环内磁感应强度为 1.0T 。试计算:

- (1) 磁场强度;
- (2) 磁化强度;
- (3) 磁化率;
- (4) 磁化面电流和相对磁导率。

15-4 一永磁环的磁化强度为 M ,磁环上开有一很窄的细缝。求图 15-16 中 1,2 点处的磁感应强度 B 值和磁场强度 H 值。

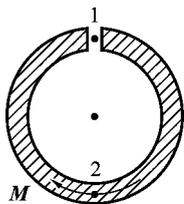


图 15-16

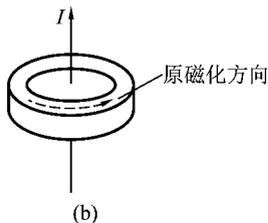
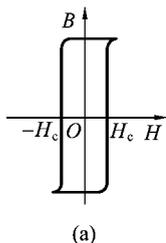


图 15-17

15-5 图 15-17 中的(a)为铁氧体材料的 $B-H$ 磁滞曲线,图(b)为此材料制成的计算机存储元件的环形磁芯。磁芯的内、外半径分别为 0.5mm 和 0.8mm ,矫顽力为 $H_c = \frac{500}{\pi}\text{A/m}$ 。设磁芯的磁化方向如图(b)所示,欲使磁芯的磁化方向翻转,试问:

- (1) 轴向电流如何加?至少加至多大时,磁芯中磁化方向开始翻转?
- (2) 若加脉冲电流,则脉冲峰值至少多大时,磁芯中从内而外的磁化方向全部翻转?

思考题 15

- 15-1 何谓顺磁质、抗磁质和铁磁质,它们的区别是什么?
- 15-2 将电介质与磁介质加以比较。
- 15-3 何谓磁滞回线?
- 15-4 在两个分界面,磁感应强度和磁场强度的关系如何?

第 16 章 变化的电磁场

前面几章讨论了静电场和稳恒磁场的基本规律。如果电场和磁场随时间变化,那么将会产生什么规律和结果?这些将是本章所要讨论的问题。

本章主要讨论电磁感应现象及其基本规律。在这个基础上,讨论自感、互感和磁场的能量等问题,最后给出积分形式的麦克斯韦方程组,并建立起统一的电磁场理论。

16.1 电磁感应定律

16.1.1 电磁感应现象

从电磁学的发展史可以看到,最早电现象和磁现象是分开来进行研究的,是相互独立的。1819年奥斯特发现了电流的磁效应,第一次揭示了电现象和磁现象内在的关系。这以后科学家考虑此问题的逆问题,即利用磁场来产生电场,用磁场来产生电流,这就导致了电磁感应现象的发现。对实验进行了系统研究后,英国物理学家法拉第(M. Faraday),在1831年发现了电磁感应现象,并总结为电磁感应定律。法拉第发现,每当通过导线回路中的磁通量发生变化时,回路中就会出现所谓的感应电流,而产生感应电流的电动势称为感应电动势。通过导线回路中的磁通量的变化有多种形式,可以是磁场不变,导线回路运动;也可以是导线回路静止,磁场变化;或者磁场变化,导线回路也运动。一句话,只要通过导线回路中的磁通量发生变化,回路中就会出现感应电流和感应电动势。进一步的研究表明,在导线不成回路的情况下,虽然没有感应电流,感应电动势还是可能存在的,一旦形成回路马上出现电流。法拉第的这些发现更进一步揭示出电现象和磁现象的密切关系,而感应电流的方向可以用楞次定则来确定。

1833年,楞次(H. F. E. Lenz)在进一步概括了大量实验结果的基础上,得出了确定感应电流方向的法则,称为楞次定则。这就是:闭合回路中产生的感应电流具有确定的方向,它总是使感应电流所产生的通过回路的磁通量,去阻碍引起感应电流的磁通量的变化。

如图16-1所示,当用一个条形磁铁棒的N极插入线圈时,线圈中有感应电流通过,根据楞次定则,此感应电流的方向总是使它产生的磁场通过回路的磁通量

阻碍原磁通量的变化,所以线圈中感应电流所产生磁场的磁力线的方向与磁棒的磁力线的方向大体相反。

16.1.2 法拉第定律

法拉第对电磁感应现象作了定量的研究,总结出了电磁感应的基本定律,即法拉第定律。它告诉我们,回路上感应电动势的大小与通过回路的磁通量的变化率成正比,而感应电动势在回路中产生感应电流的方向可由楞次定则判定。其数学表达式为

$$\mathcal{E} = -k \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (16-1)$$

式中 k 为比例系数,负号是楞次定则的要求,用于说明电动势在回路中的方向。在 SI 中, \mathcal{E} 的单位是 V, Φ_m 的单位是 Wb, t 的单位是 s,此时 $k=1$,这样最终可将法拉第定律写为

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (16-2)$$

这里还要讨论何谓通过回路的磁通量?如图 16-2 所示,它是指通过以回路为边线的任意曲面的磁通量。由于曲面 S_1 和曲面 S_2 构成闭合曲面,而磁力线是无头无尾的闭合曲线,有一根磁力线通过曲面 S_1 ,它就要通过曲面 S_2 或反向通过曲面 S_1 ,即通过曲面 S_1 和曲面 S_2 或以回路为边线的任意曲面的磁通量都相等,这个磁通量就定义为通过回路的磁通量。

法拉第定律也可用来说明感应电动势或感应电流的方向。具体操作是这样的:如图 16-3 所示,先任意假设回路一个正的绕行方向,如通过回路的磁力线与正的绕行方向呈右螺旋关系,则磁通量 Φ_m 为正,反之为负。再根据磁场的变化

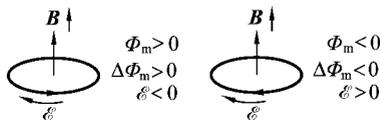


图 16-3

化(向上变大),确定 $\Delta\Phi_m$ 的符号,这样最终把感应电动势 \mathcal{E} 的符号定下来。如果 \mathcal{E} 的符号为正,则感应电动势的方向与一开始假设的方向一致;如果 \mathcal{E} 的符号为负,则感应电动势的方向与一开始假设的方向相反。总结一下即为:先假设回路正方向,从而得到磁通量,再求感应电动势。若感应电动势为正,则它与假设的回路方向相同;若为负,则其方向与假设方向相反。

应该指出,以上所讨论的都是由导线组成的单匝回路,如果回路是由 N 匝线圈串联而成,那么在磁通量变化时,每匝线圈中都将产生感应电动势。如果每匝线圈中通过的磁通量都是相同的,则 N 匝线圈中的总电动势应为各匝线圈中电动

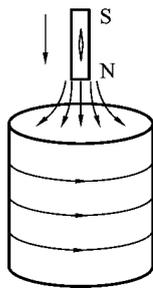


图 16-1

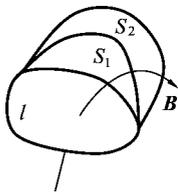


图 16-2

势的总和,即

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(N\Phi_m)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (16-3)$$

式中 $\Psi = N\Phi_m$ 称为通过该线圈的磁通链。如果通过每匝线圈中的磁通量不同,就应该用通过各匝线圈磁通量的总和 $\sum_i \Phi_{mi}$ 来替代 $N\Phi_m$ 。

如果线圈的电阻为 R , 则通过线圈的感应电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi}{dt}. \quad (16-4)$$

由此可以算出从 t_1 到 t_2 这段时间内通过线圈的任一截面的净电量为

$$q = \left| \int_{t_1}^{t_2} Idt \right| = \frac{1}{R} \left| \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi \right| = \frac{1}{R} |\Psi_2 - \Psi_1|, \quad (16-5)$$

式中 Ψ_1 、 Ψ_2 分别为 t_1 、 t_2 时刻通过线圈的磁通链。式(16-5)告诉我们,在一段时间内通过线圈的净电量与磁通链变化的绝对值成正比,而与磁通链变化的快慢无关。通过线圈的净电量 q 可以用冲击电流计来测量,如回路的电阻已知,就可以计算磁通链的变化,这就是磁通计的工作原理。

例 16-1 一长直导线中通有交变电流 $I = I_0 \sin \omega t$, 式中 I 表示瞬时电流, I_0 是电流振幅, ω 是角频率, I_0 和 ω 都是常量。在长直导线旁平行放置 N 匝矩形线圈, 线圈和长直导线在同一平面内。已知线圈长为 l , 宽为 b (如图 16-4 所示)。求任一瞬时线圈中的感应电动势。

解 在某一瞬时, 距直导线为 x 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

选顺时针的转向作为矩形线圈的绕行正方向, 则通过阴影面积 $dS = ldx$ 的磁通量为

$$d\Phi = BdS \cos 0^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx.$$

在该瞬时 t , 通过一匝线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l \sin \omega t}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right).$$

由于电流随时间变化, 通过线圈面积的磁通量也随时间变化, 故线圈中的感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{\mu_0 N l I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \frac{d}{dt} (\sin \omega t)$$

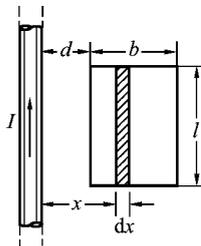


图 16-4

$$= -\frac{\mu_0 N I I_0 \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \cos \omega t。$$

从上式可知,线圈内的感应电动势随时间按余弦规律变化,其方向也随余弦值的正负作逆时针、顺时针的转向变化。

16.2 动生电动势

16.2.1 动生电动势的产生

前面我们讲过,当回路中的磁通量发生变化时,回路中就会产生感应电动势和感应电流。如果不成回路,则无磁通可言,也不会有感应电流。事实证明,对于不成回路的导线,只要它在外磁场运动中切割磁力线,尽管无感应电流存在,但感应电动势还是可能存在的,一旦形成回路就会有感应电流。这种感应电动势因导体在磁场中的运动而产生,称其为动生电动势。下面我们分析一下动生电动势的成因及其计算方法。

如图 16-5 所示,设导线 ab 在不随时间变化的磁场中运动,导线线元 $d\mathbf{l}$ 以速度 \mathbf{v} 切割磁力线,其中带电量为 q 的载流子($q>0$)就会受到洛伦兹力的作用

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}。$$

\mathbf{F} 并不一定与线元 $d\mathbf{l}$ 平行,但由于载流子还要受到导线表面的约束,在洛伦兹力 \mathbf{F} 的作用下,载流子 q 将沿导线从 a 端

向 b 端运动,使 b 端累积正电荷, a 端由于失去正电荷而带负电荷。这样在导线内将形成电场,以后载流子将同时受到洛伦兹力和电场力的作用。当然,开始时洛伦兹力占主导地位,载流子 q 不断在 b 端累积,电场不断增强,这一非常快的过程直到载流子受到的洛伦兹力和电场力达到平衡而终止。此时如果用另一根导线将 a 端和 b 端连接起来,由于形成回路而出现感应电流, b 端和 a 端的正、负电荷中和,电场减小,洛伦兹力又要占主导地位,将电荷 q 从负极移向正极,补充中和掉的电荷。由此可见,在磁场中运动的导线 ab 成了一个电源,而产生电动势的非静电力就是洛伦兹力,这种电动势称为动生电动势。

对于非静电力,定义所谓非静电场强度

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{E}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}。 \quad (16-6)$$

导线 ab 上的总动生电动势为

$$\mathcal{E} = \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}。 \quad (16-7)$$

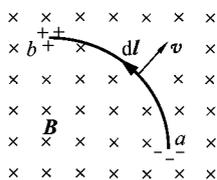


图 16-5

显然 $d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 为导线线元 $d\mathbf{l}$ 上的动生电动势, 它可正可负, 积分出来的总动生电动势 \mathcal{E} 也可正可负, 正的值表明电动势的方向由 a 端指向 b 端, 负的表明电动势的方向由 b 端指向 a 端。这样, 虽然积分方向是任意选取的, 但结果是一致的。

对于导线回路而言, 有

$$\mathcal{E} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (16-8)$$

当然, 在导线回路的情况下, 我们也可以用法拉第电磁感应定律来计算电动势, 这样就有必要讨论两者的一致性, 即证明: 在稳恒磁场中, 动生电动势

$$\mathcal{E} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}.$$

证明: 如图 16-6 所示, 闭合回路在稳恒磁场中运动, 同时其形状也可能发生变化。在 Δt 时间间隔内, 闭合回路由 $l(t)$ 变到 $l'(t+\Delta t)$, 其上线元 $d\mathbf{l}$ 在 Δt 时间间隔内扫过面积为

$$dS = |d\mathbf{l} \times \mathbf{v}| \Delta t,$$

式中 \mathbf{v} 为线元 $d\mathbf{l}$ 之速度。将其看成有向面元, 有

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \Delta t.$$

显然, 左、右底面和侧面构成闭合曲面 S , 对其应用磁高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

即

$$- \iint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t) + \iint_{l'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

负号的出现是因为我们约定闭合曲面 S 法线向外为正, 下标 l 和 l' 表示面积分沿着以闭合回路 l 和 l' 为边界的曲面进行。

利用三个矢量的混合积公式 $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$, 用 $d\mathbf{l}$ 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{B} 分别代替 $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\beta}$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$, 有

$$\oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \Delta t = - \left(\iint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{l'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = - \Delta\Phi_m,$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 则有

$$\mathcal{E} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}.$$

在非闭合回路的情况下, 用公式 $\mathcal{E} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 来计算动生电动势, 法拉第电磁感应定律不适用, 但如果将 $d\Phi_m$ 理解为导线 ab 在 dt 时间间隔内扫过面积

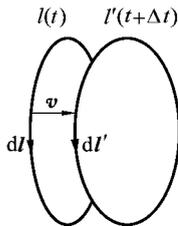


图 16-6

的磁通量,则法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ 同样适用。

16.2.2 洛伦兹力做功问题

从前面的分析知道,产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力,是要做功的。但另一方面还知道,洛伦兹力与运动电荷的速度始终垂直,是不做功的。这样一对矛盾如何解释?下面通过一个例子来简单讨论一下。

如图 16-7 所示,一导体杆放在光滑的平行导轨上构成闭合回路。导体杆受到向右恒力的作用,速度不断增加,由于它在匀强磁场 \mathbf{B} 中运动而产生动生电动势和感应电流,这样载流导体杆在外磁场中又要受到安培力的作用,其方向与外力方向正好相反。随着导体杆速度的增加,回路中感应电流增加,载流导体杆受到的安培力也增加,直到安培力与外力达到平衡后,导体杆在导轨上以速度 v 作匀速直线运动。设导体杆内载流子带电量为 $q(q>0)$,其相对于杆的漂移速度为 u ,这样载流子受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \times \mathbf{B} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2,$$

式中洛伦兹力的一个分力 $\mathbf{f}_1 = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$,方向沿导体杆。洛伦兹力的另一个分力 $\mathbf{f}_2 = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$,方向垂直于导体杆。分力 \mathbf{f}_1 的功率为

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = q(\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = -q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v},$$

式中利用了三个矢量的混合积公式 $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$ 。由此可见,洛伦兹力的总功率为零。在这种情况下,洛伦兹力沿导体杆的分力 $\mathbf{f}_1 = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 做正功,它才是产生动生电动势的非静电力;洛伦兹力垂直于导体杆的分力 $\mathbf{f}_2 = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ 做负功,它的宏观体现是安培力,这样一来前面提出的矛盾就解决了。

总结:外力做正功输入机械能,安培力做负功吸收它,同时感应电动势在回路中做正功又以电能形式输出这个份额的能量。

16.2.3 动生电动势的计算

动生电动势的计算一般有下面几种情况。

如图 16-8 所示,导线回路在磁场中运动,计算动生电动势可用公式

$$\mathcal{E} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

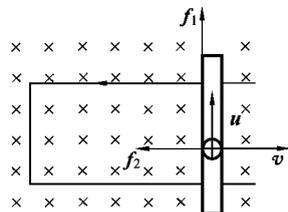


图 16-7

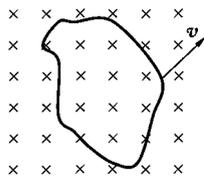


图 16-8

或者用法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

如图 16-9 所示,对于不成回路的一段导线,计算动生电动势可用公式

$$\mathcal{E} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

如果要用法拉第电磁感应定律的话,假想一段静止的导线与原导线构成闭合回路,就可用公式 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ 来计算动生电

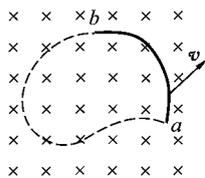


图 16-9

动势了。当然,如果将 $d\Phi_m$ 理解为导线 ab 在 dt 时间间隔内扫过面积的磁通量也可以。

例 16-2 如图 16-10 所示,铜棒 OA 长为 L ,在方向垂直纸面向内的匀强磁场 B 中,沿逆时针方向绕 O 轴转动,角速度为 ω ,求铜棒中动生电动势的大小和方向。

解 当铜棒作匀速转动时,铜棒上各点的速度不相同,因此必须划分小段来考虑。在铜棒上距 O 点为 l 处取长度元 $d\mathbf{l}$,方向从 O 指向 A ,其速率为 $v = \omega l$ 。 $d\mathbf{l}$ 上的动生电动势为

$$d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -vBdl = -B\omega ldl.$$

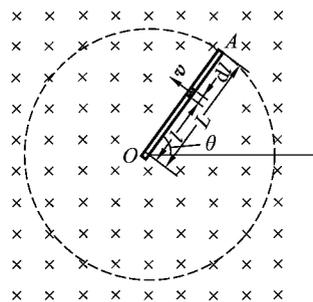


图 16-10

负号是由于 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向由 A 指向 O 的。各小段上 $d\mathcal{E}$ 的方向相同,所以铜棒中总的动生电动势为

$$\mathcal{E} = -\int_0^L B\omega ldl = -\frac{B\omega L^2}{2}.$$

负号说明电动势的方向从 A 到 O 。

此题还有另一解法。设铜棒在 Δt 内所转过的角度为 $\Delta\theta$,则在这段时间内通过铜棒扫过扇形面积的磁通量为

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}BL^2\Delta\theta.$$

所以铜棒中的动生电动势为

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}BL^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}BL^2\omega.$$

方向可由楞次定则确定,结果与上一解法完全一致。

如果是铜盘转动,可以把铜盘想像成由无数根并联的铜棒组合而成,每根铜

棒都类似于 OA 。因为这些铜棒是并联的,所以铜盘的电动势也为 $\mathcal{E} = \frac{1}{2}BL^2\omega$ 。

如果把铜盘的中心和其边缘通过外电路接通,则在磁场中转动的铜盘就能对外供应电流,这种简易的发电机称为法拉第圆盘发电机。

例 16-3 如图 16-11 所示,一长直导线中通有电流 I ,在其附近有一长 l 的金属棒 AB ,以速度 v 平行于长直导线作匀速运动,如棒的近导线一端距离导线 d ,求金属棒中的动生电动势。

解 由于金属棒处在通电导线的非均匀磁场中,因此必须将金属棒分成很多长度元 dx ,这样在每一个 dx 处的磁场可以看作是均匀的,其磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

式中 x 为长度元 dx (方向从 A 指向 B)与长直导线间的距离。根据动生电动势的公式,可知 dx 小段上的动生电动势为

$$d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x} = -Bvdx = -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi x} dx。$$

负号是由于 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向由 B 指向 A 的。由于所有长度元上产生的动生电动势方向都是相同的,所以金属棒中的总电动势为

$$\mathcal{E} = -\int_d^{d+l} \frac{\mu_0 Iv}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(\frac{d+l}{d}\right)。$$

负号说明 \mathcal{E} 的方向与积分方向相反,即从 B 指向 A 的,也就是 A 点的电势比 B 点高。

16.3 感生电动势

16.3.1 感生电动势和感应电场

当磁场不变,导线在其中运动时,导线中会出现感应电动势,即动生电动势,而产生动生电动势的非静电力为洛伦兹力。实验还表明,当导线静止而磁场发生变化时,导线内也会出现感应电动势,这个电动势有别于动生电动势,被称为感生电动势,如果导线是回路则会出现感应电流。我们可以介绍这样一个演示实验,如图 16-12 所示,在通有电流为 I 的螺绕环外套一个接有电流计的导线回路,当电流 I 变化时,螺绕环内的磁场将发生变化,这样通过导线回路的磁通量就要发生变化,根据法拉第电磁感应定律

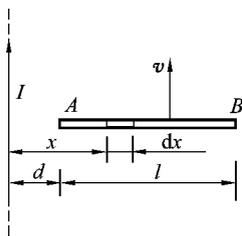


图 16-11

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

导线回路中就要出现感生电动势和感应电流

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

式中 R 为导线回路中的电阻。实验结果显示, 电流计要发生偏转, 说明感应电流的存在。

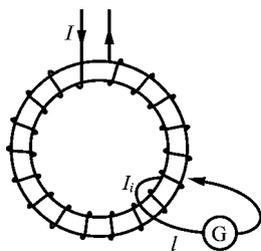


图 16-12

现在我们的问题是: 产生感生电动势的非静电力是什么? 即什么力作用在导线回路中的载流子上使之运动, 使电流计偏转?

作用在电荷上的力无非有两种, 电力或磁力(洛伦兹力), 一般可表示为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

实验告诉我们, 在这种情况下, 产生感生电动势的非静电力一定不是磁力。因为在螺绕环的外面无磁场 $\mathbf{B}=0$, 且导线回路静止 $\mathbf{v}=0$, 故 $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}=0$ 。进一步的研究表明, 当空间存在变化的磁场时, 电荷即使是静止的, 电荷即使在磁场区域之外, 也要受到力的作用。因此, 这种力不可能是磁力, 它本质上来说应该是一种电场力。

为了解释类似现象, 麦克斯韦(J. C. Maxwell)提出了假设: 变化的磁场在其周围激发了一种电场。这种电场称为感应电场。当导线或导线回路处在变化的磁场周围时, 就是由这种电场作用于导体中的自由电荷, 从而在导线中引起感生电动势, 如果是导体回路的话, 还可能出现感应电流。

设感应电场的场强为 \mathbf{E}_i , 它在导线 ab 上产生的感生电动势为

$$\mathcal{E} = \int_a^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}. \quad (16-9)$$

对于导线回路有

$$\mathcal{E} = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}. \quad (16-10)$$

根据法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$, 则有

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (16-11)$$

显然

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

式中 S 表示面积分沿着以闭合回路为边界的任意曲面进行, 而在导线回路静止的条件下, 唯一的变量是磁感应强度 \mathbf{B} 。这样一来我们有

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \iint_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (16-12)$$

式(16-12)揭示出变化磁场与感应电场的关系,是麦克斯韦对电磁学理论做出的杰出贡献之一,是变化电磁场的基本方程之一。

16.3.2 感应电场的性质

静电场和感应电场的共性表现在它们对静止的电荷都有作用,除此之外它们有很大的不同。首先,静电场是由电量不变且静止的电荷产生的,而感应电场则是由变化的磁场产生的。其次,静电场满足环流定理,即 $\oint_l \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$,这说明静电场是保守场,相应地就可以引入电势和电势能的概念。对于感应电场它的环流可以不为零,即 $\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \iint_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$,说明感应电场不是保守场,是有旋场,因此,引入对应的电势和电势能的概念是没有意义的。还有,对于静电场有高斯定理,即 $\oiint_s \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$,说明静电场是有源场,电力线起于正电荷,止于负电荷,在没有电荷的地方不会中断。对于感应电场,麦克斯韦假设 $\oiint_s \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = 0$,即感应电场为无源场,其电力线是无头无尾的闭合曲线,不像静电场电力线起于正电荷,收于负电荷。由此可见,静电场是有源无旋场,而感应电场是无源有旋场,这一点和磁场很像,下面将作进一步说明。

对于稳恒磁场,有安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \mu_0 I \iint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

式中 \mathbf{j} 表示以回路为边界的任意曲面上的电流密度。如图16-13所示,上式表明,传导电流要产生磁场,传导电流是磁场的涡旋中心,磁场与传导电流间呈右螺旋关系。对于感应电场,有

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \iint_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

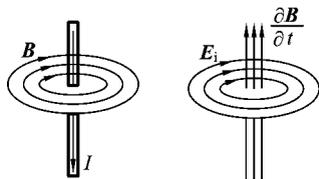


图 16-13

如图16-13所示,上式表明,变化的磁场要产生感应电场,变化的磁场是感应电场的涡旋中心,由于上式中有一个负号,故感应电场与变化的磁场间呈左螺旋关系。在这里,变化的磁场用磁感应强度对时间的一阶导数来表示,即 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$,这是一个矢量函数的导数,求导后还是一个矢量函数,其方向可能与磁感应强度的方向完全不同,因为它还取决于磁感应强度是如何变化的。比如,磁感应强度方向

向上,大小增加,则 $\mathbf{B} // \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; 磁感应强度方向向下,大小减小,则 $\mathbf{B} // \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$ 。

16.3.3 涡电流和趋肤效应

如图 16-14 所示,当绕在一圆柱形铁芯上的线圈中通有交变电流时,铁芯内变化的磁感应强度 \mathbf{B} 会在铁芯内激发感应电场,结果在垂直于磁场的平面内产生绕轴流动的环形感应电流,这种电流在金属体内部自成闭合回路,称为涡电流。

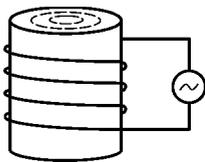


图 16-14

由于大块铁芯的电阻很小,而其横截面大,故涡电流可以很大,在铁芯内将放出大量的焦耳热,这就是感应加热的原理。

由于感应电场产生涡电流,根据欧姆定律的微分形式,涡电流应与感应电场场强成正比,即 $I \propto E_i$ 。感应电场由变化的磁场产生,它与磁感应强度对时间的一阶导数成正比,即 $E_i \propto \frac{\partial B}{\partial t}$ 。磁场由线圈中的交变电流产生,磁感应强度对时间的一阶

导数与交变电流的频率成正比,即 $\frac{\partial B}{\partial t} \propto \omega$ 。涡电流所产生的热功率与涡电流的平方成正比,也就与交变电流频率的平方成正比,即 $P \propto \omega^2$ 。由此可见,当我们使用频率高达几千赫甚至更高频率的交变电流时,铁芯内由于涡电流将放出巨大的热量,可以利用它来冶炼金属。厨房里的电器——电磁灶也利用了这个原理,在其内部有一个线圈,当其中通有交变电流时,会在铁锅底部产生涡电流而产生热量。电磁灶的优点是无明火,干净安全,所炒的菜也比较适合中国人的口味。

当然,事物都是一分为二的,涡电流产生的热效应有其有用的一面,但在有些情况下也有很大的弊害。例如,变压器或电机的铁芯常常因涡电流产生无用的热量,不仅消耗了部分电能,降低了电机的效率,而且会因铁芯严重发热而不能正常工作。为了减小涡流损耗,一般变压器、电机及其他交流仪器的铁芯不采用整块材料,而是用互相绝缘的薄片(如硅钢片)或细条叠合而成,使涡流受绝缘的限制,只能在薄片范围内流动,减小了涡电流,使损耗降低(见图 16-15)。

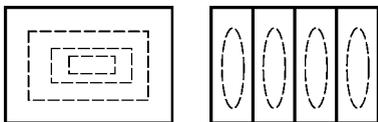


图 16-15

对于直流电路,电流密度在导线的横截面上的分布基本是均匀的。但在高频电流情况下,变化的电流在导线中产生变化的磁场,而变化的磁场又在导线中产生感生电动势和涡电流。如图 16-16 所示,进一步的研究表明,在轴线处涡电流的方向与传导电流的方向近似反方向,这样就削弱了传导电流,而在导线外表面处,涡电流的方向与传导电流的方向近似同方向,这样就加强了传导电流。由此

看来,在高频电流情况下,导体截面上电流密度分布不均匀,愈近导体表面电流密度越大,这种现象被称为趋肤效应。趋肤效应所带来的问题是,载流导线的有效横截面积减小了,无形中增加了导线的电阻。为此,在高频电路中往往使用多股相互绝缘细导线编织成束来代替同样截面积的粗导线,这样增加了导线表面积,也就是增加了载流导线的有效横截面积。另外,在导线表面镀银也可以减小电阻,因为银是一种电阻率很小的材料。还有,既然导线的中心部分几乎没有电流通过,就可以把这中心部分除去以便节约原材料。

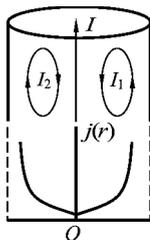


图 16-16

16.3.4 感生电动势的计算

感生电动势的计算有如下几种情况:

对于导线回路,计算感生电动势的有效方法还是法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

这里磁通量 Φ_m 的变化仅仅是由磁场的变化所造成的,当然在导线回路的情况下,法拉第电磁感应定律也可以被用来计算动生电动势;

对于不成回路的一段导线,如果磁场在空间具有较高的对称性,可以先利用公式

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

求出感应电场 E_i 的分布,然后再利用

$$\mathcal{E} = \int_a^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$$

计算导线 ab 上的感生电动势;

还有一种处理方法是这样的,如图 16-17 所示,为了计算导线 acb 上的感生电动势,用虚线假想一个闭合回路 $acbda$,用法拉第电磁感应定律计算整个回路的感生电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \mathcal{E}_{acb} + \mathcal{E}_{bda},$$

由此得

$$\mathcal{E}_{acb} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{bda},$$

这样,问题就归结为计算 bda 上的感生电动势 \mathcal{E}_{bda} ,如果虚线假想的合适,感生电动势 \mathcal{E}_{bda} 非常容易计算,在有的情况下,一下子就可以看出它为零。

若既有动生电动势,又有感生电动势,计算总感应电动势时,对于导线回路的情况用公式

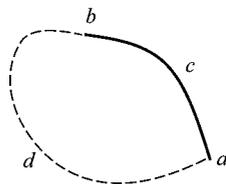


图 16-17

$$\mathcal{E} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}; \quad (16-13)$$

对于不成回路的一段导线用公式

$$\mathcal{E} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_a^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}. \quad (16-14)$$

例 16-4 计算具有轴对称分布变化磁场产生的感应电场。

解 设磁场分布在半径为 R 的圆柱区域内,由场的对称性,知变化磁场所激发的感应电场的电力线都是与圆柱同轴的同心圆。取一个半径为 r 的电力线作为闭合回路 l ,则感应电场场强处处与闭合回路相切(如图 16-18(a)所示),且在该闭合回路上电场强度大小处处相等。根据

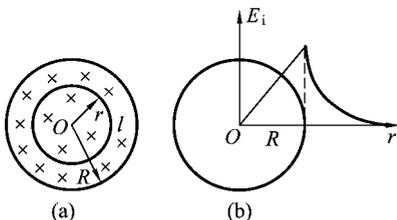


图 16-18

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = E_i 2\pi r = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

对于 $r \leq R$, 有

$$E_i 2\pi r = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \pi r^2, \quad E_i = - \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

式中定义半径为 r 的闭合回路内的平均磁感应强度为 $\bar{B} = \frac{\Phi_m}{\pi r^2}$, Φ_m 为通过半径为 r 的闭合回路的磁通量;

对于 $r > R$, 有

$$E_i 2\pi r = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \pi R^2, \quad E_i = - \frac{R^2}{2r} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

式中定义半径为 R 的闭合回路内的平均磁感应强度为 $\bar{B} = \frac{\Phi_m}{\pi R^2}$, Φ_m 为通过半径为 R 的闭合回路的磁通量,感应电场 E_i 随 r 的变化如图 16-18(b)所示。

例 16-5 讨论电子感应加速器中磁场如何分布才能使电子在被加速的同时不改变其轨道。

解 如图 16-19 所示,电子感应加速器是利用感应电场来加速电子的一种装置。在电磁铁的两极间有一环形真空室,电磁铁受交变电流激发,在两极间产生具有轴对称分布的变化磁场,变化磁场又在真空室内激发感应电场,感应电场的电力线都是与圆柱形区域同轴的同心圆。这时,若用电子枪把电子沿切线方向射入环形真空室,电子将在环形真空室作圆周运动,洛伦兹力提供向心力。同时,电子又在感应电场的作用下沿轨道切向得到加速。下面讨论电子感应加速器中磁

场如何分布才能使电子在被加速的同时不改变其轨道。

利用前一例题的结果, 环形真空室内的感应电场为

$$E = \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

式中 \bar{B} 为半径为 r 的闭合回路内的平均磁感应强度。

电子的运动方程为

$$\frac{d(mv)}{dt} = eE = \frac{er}{2} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

根据洛伦兹力提供向心力, 有

$$\frac{mv^2}{r} = evB, \quad mv = erB,$$

式中 B 为电子轨道上的磁感应强度的大小。将上式微分得

$$\frac{d(mv)}{dt} = er \frac{\partial B}{\partial t},$$

最后得到

$$B = \frac{1}{2} \bar{B}.$$

这是使电子维持在恒定的圆形轨道上加速时磁场必须满足的条件。在电子感应加速器的设计中, 两极间的空隙从中心向外逐渐增大, 就是为了使磁场的分布能满足这一要求。

电子感应加速器电磁铁中的电流作正弦变化, 其所激发的磁场也作正弦变化, 大小和方向都在改变, 这样环形真空室内感应电场方向的变化就一会儿是顺时针, 一会儿是逆时针。图 16-20 从上到下标出了一个周期内磁场的变化情况、感应电场方向的变化情况及电子受洛伦兹力作用情况。仔细分析很容易看出, 只有在第一和第四个 $1/4$ 周期中电子才可能被加速。但是, 在第四个 $1/4$ 周期中, 作为向心力的洛伦兹力由于磁场的变向而背离圆心, 这样就不能维持电子在恒定轨道上作圆周运动。因此, 只有在第一个 $1/4$ 周期中, 才能实现电子的加速。由于电子的质量非常小, 即使在很短的 $1/4$ 周期内也绕行了几十万圈而获得相当高的能量。所以, 在第一个 $1/4$ 周期末, 就要将高能电子引出来, 供科研、医疗和工业生产使用。

例 16-6 一磁感应强度为 B 的匀强磁场, 分布在半径为 R 的长圆柱体内, 设 $B = B_0 t (B_0 > 0)$ 。现有一金属杆长为 R , 放在垂直于磁场的平面内。求金属杆上

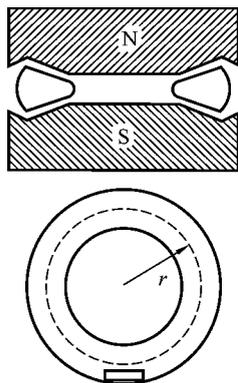


图 16-19

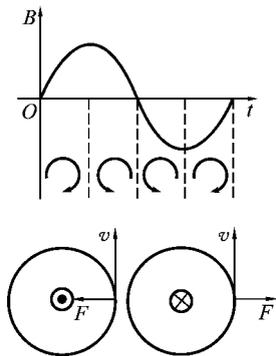


图 16-20

的感生电动势。

解法 1 法拉第电磁感应定律是求解电动势简单而有效的方法,但现在一根金属杆不成回路,不能直接应用法拉第电磁感应定律。但如果加两条线 OA 和 OB ,就可构成等边三角形闭合回路 $OABO$ (如图 16-21(a)),根据法拉第电磁感应定律,该闭合回路上的感生电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{OA} + \mathcal{E}_{OB} = -B_0 \frac{\sqrt{3}}{4} R^2。$$

我们知道,分布在半径为 R 的长圆柱体内的匀强磁场变化时所激发的感应电场的电力线是以磁场中心为圆心的一系列同心圆,感应电场的场强始终与 OA 和 OB 垂直,故 OA 和 OB 边上的感生电动势为

$$\mathcal{E}_{OA} = \int_O^A \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

$$\mathcal{E}_{OB} = \int_O^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

由此得到求金属杆上的感生电动势

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{AB} = -B_0 \frac{\sqrt{3}}{4} R^2。$$

由楞次定则知道感生电动势的方向从 A 到 B 。

解法 2 利用例题 16-4 的结果,知圆柱内的感应电场为

$$E_i = \frac{r}{2} B_0。$$

而感应电场的电力线是以磁场中心为圆心的一系列同心圆。如图 16-21(b)所示, $d\mathbf{l}$ 一段上的感生电动势为

$$d\mathcal{E} = \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \frac{r}{2} B_0 dl \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} R B_0 dl。$$

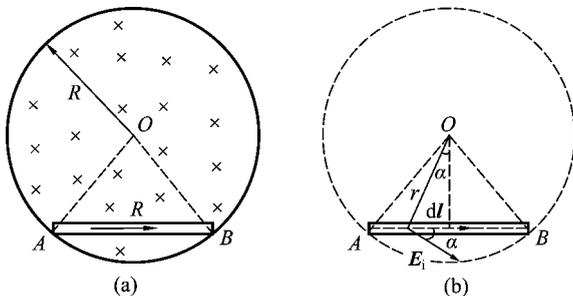


图 16-21

整个金属杆上的感生电动势为

$$\mathcal{E} = \int_A^B d\mathcal{E} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B_0.$$

$\mathcal{E} > 0$, 故感生电动势的方向从 A 到 B 。

例 16-7 如图 16-22 所示, 一匀强磁场分布在长圆柱体内, 导线 AB 恰在直径上。问导线 AB 和导线 CD 上的电动势 \mathcal{E}_{AB} 和 \mathcal{E}_{CD} 是否为零? 两个回路中的感应电流 i_1 和 i_2 是否为零?

解 显然, 感应电场的电力线是以磁场中心为圆心的一系列同心圆, 在磁场外面也存在, 故

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

$$\mathcal{E}_{CD} = \int_C^D \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \neq 0.$$

根据法拉第电磁感应定律, 通过回路 1 的磁通量有变化, 故 $i_1 \neq 0$, 此时 AB 边上虽然无电动势, 但其他边上有电动势且抵消不了。通过回路 2 的磁通量无变化 (始终为零), 故 $i_2 = 0$, 此时 CD 边上虽然有电动势, 但它被其他边上的电动势抵消了。

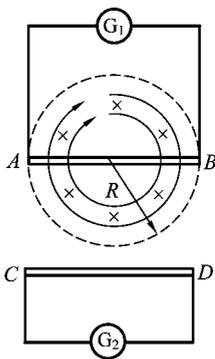


图 16-22

16.4 自感和互感

16.4.1 自感

本节将对线圈中的感应现象作进一步的讨论, 首先考虑自感。这里有一个导线回路或 N 匝线圈, 回路中通有电流 I (如图 16-23 所示)。如果回路中电流发生变化, 或回路大小发生变化, 或回路周围磁介质的情况发生变化, 则由回路电流产生的、通过回路自身的磁通量或磁通链将发生变化。根据法拉第电磁感应定律, 通过回路的磁通量发生变化时, 回路中就会形成感应电动势。在这种情况下, 感应电动势的形成和回路自身的电流相关, 这种电动势被称为自感电动势, 这种现象被称为自感现象。

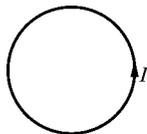


图 16-23

对于一个导线回路或 N 匝线圈, 回路中通有电流 I , 根据毕奥-萨伐尔定律, 由回路自身电流产生的通过回路的磁通链应该与电流 I 成正比, 即

$$\Psi = LI, \quad (16-15)$$

式中 L 被称为回路的自感系数, 简称自感, 它的大小取决于回路的大小、形状以及

周围磁介质的分布情况。

根据法拉第电磁感应定律,回路中的自感电动势为

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}, \quad (16-16)$$

式中 $-L \frac{dI}{dt}$ 表示回路中电流变化引起通过回路磁通量的变化而对自感电动势的贡献; $-I \frac{dL}{dt}$ 表示回路的大小、形状以及周围磁介质的分布情况发生变化而对自感电动势的贡献。

如果自感系数 L 不变,则自感电动势为

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (16-17)$$

式中的负号说明自感电动势的方向与回路中电流变化率的方向相反,即当回路电流减小时, $\mathcal{E}_L > 0$, 自感电动势的方向与回路中电流的方向相同,阻碍回路中电流的减小;当回路电流增加时, $\mathcal{E}_L < 0$, 自感电动势的方向与回路中电流的方向相反,阻碍回路中电流的增加。由此可见,如果回路中电流要变化,回路中激发的自感电动势 \mathcal{E}_L 总是阻碍电流变化,自感系数越大,这种阻碍作用越强,回路中电流越不容易改变。回路的这一性质称为电磁惯性。电磁惯性的大小用回路自感系数 L 来衡量,这类似于力学中物体的惯性,力学中物体惯性的大小用惯性质量 m 来衡量,物体惯性质量越大,其速度越不容易改变。在 SI 中,自感系数的单位是亨利,用符号 H 表示。显然 $1\text{H} = 1\text{Wb}/\text{A}$ 。由于亨利的单位比较大,实用上常用微亨 (μH) 或毫亨 (mH) 作为自感的单位。

关于自感系数的计算,一般有两种方法:其一是从定义出发,设回路中通有电流 I , 计算磁感应强度及磁通链,由公式 $L = \frac{\Psi}{I}$ 计算自感系数;其二,让回路电流有一个变化,设法得到回路中的自感电动势,由公式 $L = -\mathcal{E}_L / (dI/dt)$ 计算自感系数。在实验上这种方法可以很方便地用来测量复杂系统的自感系数。

16.4.2 互感

如图 16-24 所示,设有两个邻近的载流线圈 1 和 2,其中电流强度分别为 I_1 和 I_2 。回路 1 中的电流 I_1 产生一磁场,它的部分磁力线就要通过线圈 2,给线圈 2 一个磁通链 Ψ_{21} 。当线圈 1 中的电流发生变化时或两个线圈的尺寸、距离及周围磁介质情况发生变化时,都将引起 Ψ_{21} 的变化,根据法拉第电磁感应定律,回路 2 中就会出现感应电动势 \mathcal{E}_{21} 。同样,回路 2 中的电流 I_2 也要产生磁场,

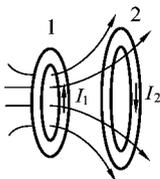


图 16-24

其通过线圈 1 的磁通链为 Ψ_{12} , 当线圈 2 中的电流发生变化时或两个线圈的尺寸、距离及周围磁介质情况发生变化时, 回路 1 中就会出现感应电动势 \mathcal{E}_{12} 。像这样两个载流线圈相互在对方线圈中激发感应电动势的现象称为互感应, 出现的电动势称为互感电动势。

根据毕奥-萨伐尔定律, 显然

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1,$$

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2。$$

理论和实验都证明 $M_{12} = M_{21}$, 可统一用 M 表示, 称为两回路之间的互感, 它取决于两个线圈的尺寸、距离及周围磁介质情况, 其单位与自感的单位相同。

根据法拉第电磁感应定律有

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} - I_1 \frac{dM}{dt},$$

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} - I_2 \frac{dM}{dt}。$$

如互感 M 不变, 即 $\frac{dM}{dt} = 0$, 则

$$\mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}, \quad (16-18)$$

$$\mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}。 \quad (16-19)$$

关于互感的计算, 一般有两种方法: 其一是从定义出发, 给线圈 1 一个电流 I_1 , 计算它给线圈 2 的磁通链 Ψ_{21} , 由公式 $M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$ 计算互感。当然给线圈 2 一个电流 I_2 , 计算它给线圈 1 的磁通链 Ψ_{12} , 由公式 $M = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$ 计算互感。这两种做法结果是一样的, 但有时难易程度是不一样的; 其二, 让线圈 1 电流有一个变化, 设法求其在线圈 2 中激发的互感电动势 \mathcal{E}_{21} , 由公式 $M = \mathcal{E}_{21} / (dI_1/dt)$ 计算互感。在实验上这种方法可以很方便地用来测量两复杂系统间的互感。

例 16-8 如图 16-25 所示, 长为 l 的螺线管横截面积为 S , 其外共轴地均匀密绕两线圈, 匝数分别为 N_1 和 N_2 , 求两线圈的自感和它们之间的互感。

解 设线圈 1 中通有电流 I_1 , 其在螺线管内产生磁场的磁感应强度为

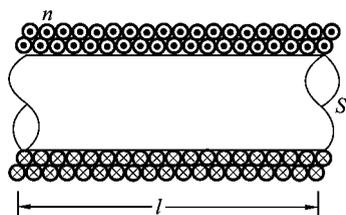


图 16-25

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1。$$

通过线圈 1 的磁通链为

$$\Psi_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S I_1。$$

故线圈 1 的自感为

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S。$$

同理可得线圈 2 的自感为

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} S。$$

线圈 1 的磁场通过线圈 2 的磁通链为

$$\Psi_{21} = N_2 S \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1，$$

故两线圈之间的互感为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S。$$

比较自感和互感后发现它们之间有关系

$$M = \sqrt{L_1 L_2}。$$

这个关系式不具有普遍性,为此我们定义耦合系数

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}。$$

一般情况下, $k < 1$, 而无漏磁时, $k = 1$ 。所谓无漏磁指的是每一个线圈自身的磁通链全部通过另一个线圈。

例 16-9 如图 16-26 所示, 两同心共面线圈, 半径分别为 r_1 和 r_2 ($r_1 \ll r_2$), 小线圈中电流为 $I = kt$, k 为正的常数。求变化磁场在大圆环内激发的感生电动势。

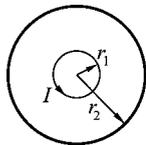


图 16-26

解 给线圈 1 一个电流 I_1 , 计算它给线圈 2 的磁通链 Ψ_{21} , 也可以给线圈 2 一个电流 I_2 , 计算它给线圈 1 的磁通链 Ψ_{12} , 由此计算互感

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}。$$

但给线圈 1 一个电流 I_1 , 不能解析地得到线圈平面内除圆心外任意点的磁感应强度, 更别谈磁通链 Ψ_{21} 了。反过来, 给线圈 2 一个电流 I_2 , 虽然也不能解析地得到线圈平面内除圆心外任意点的磁感应强度, 但由于 $r_1 \ll r_2$, 可以认为小线圈内各点

磁感应强度近似相等,等于线圈 2 中的电流 I_2 在圆心处产生的磁场 B_2 。这样分析以后有

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{B_2 \pi r_1^2}{I_2},$$

其中

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2r_2}。$$

所以

$$M = \frac{\mu_0 \pi r_1^2}{2r_2}。$$

再根据实际情况有

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2}{2r_2} \times k。$$

负号表示大线圈中感生电动势的方向与小线圈中电流的方向相反。

16.5 电容和电感电路中的暂态过程

将一个从 0 突变到 V 的阶跃电压加到阻值为 R 的纯电阻上,则电流随电压同步变化,从 0 突变到 $\frac{V}{R}$ 。将一个阶跃电压加到线圈或电容与电阻串联的电路,电路中的电流有一个变化过程,最后达到稳定状态,此过程称为暂态过程。本节将研究暂态过程的特点和规律。

16.5.1 LR 电路

如图 16-27 所示,一个自感为 L 的线圈与电阻 R 串联后接在电源电动势为 \mathcal{E} 的电路,如电键 K_1 接通而 K_2 断开时,回路上的电压方程为

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L - IR = 0,$$

式中 \mathcal{E}_L 代表自感电动势,其方向阻碍电流的增加:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt},$$

所以

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0。$$

对上式两边求积分,并注意初始条件: $t=0$ 时, $I=0$,于是有

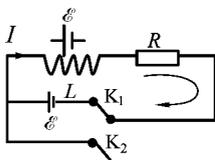


图 16-27

$$\int_0^I \frac{dI}{\frac{\mathcal{E}}{R} - I} = \int_0^t \frac{R}{L} dt,$$

积分并整理后得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (16-20)$$

式(16-20)反映的是 RL 电路接通电源后电路中电流随时间的变化情况,其变化曲线如图 16-28(a)所示。由此可见,接通电源后,由于自感电动势的存在,电流不能立刻达到最大值 $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$,而是按指数规律上升,最后达到稳定。电流增长的快慢由 $\tau = \frac{L}{R}$ 决定,它被称为 RL 电路的时间常数。当 $t = \tau = \frac{L}{R}$ 时

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.63 \frac{\mathcal{E}}{R} = 0.63I_0,$$

即电路中的电流达到稳定值的 63%。当 $t = 5\tau$ 时, $I = 0.994I_0$,即经过 5τ 这段时间后,便可以认为电流已达到稳定值。

当上述电路中的电流达到稳定值 $I = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ 后,在迅速使电键 K_2 接通的同时断开电键 K_1 ,由于电路中 $\mathcal{E} = 0$,回路电压方程为

$$-L \frac{dI}{dt} - IR = 0,$$

考虑到 $t = 0$ 时, $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$,积分并整理后可得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (16-21)$$

式(16-21)是 RL 电路切断电源后电路中电流随时间的变化情况,其变化曲线如图 16-28(b)所示。由此可见,当撤去电源后,电路中电流按指数规律衰减,衰减的快慢也是由时间常数 $\tau = \frac{L}{R}$ 决定。当 $t = \tau = \frac{L}{R}$ 时, $I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1} = 0.37I_0$,即电流下降到 $\frac{\mathcal{E}}{R}$ 的 37%。

如在断开电源时,不接通 K_2 ,这时在 K_1 两端之间的空气隙具有很大的电阻,电路中电流骤然下降为零, dI/dt 的量值很大,在线圈中将产生很大的自感电动势,所形成的高压加在 K_1 两端之间的空气隙上,可能造成火花放电甚至引起火灾。为了避免由此造成的事故,通常可用逐渐增加电阻的方法来断开电路,使电路中的电流慢慢变小。

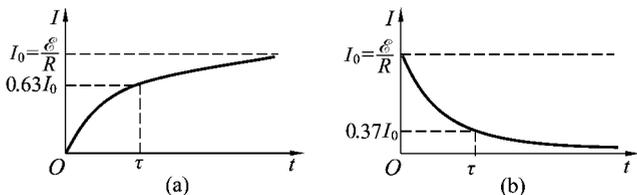


图 16-28

16.5.2 RC 电路

如图 16-29 所示,一个电容为 C 的电容器与电阻 R 串联后接在电源电动势为 \mathcal{E} 的电路中,如电键 K_1 接通而 K_2 断开时,回路上的电压方程为

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0,$$

式中 q 为 t 时刻电容器极板上的电量,而 I 是同一时刻电路中的电流。

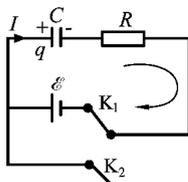


图 16-29

利用 $I = \frac{dq}{dt}$ 得

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - R \frac{dq}{dt} = 0,$$

考虑到 $t=0$ 时, $q=0$, 积分并整理后可得

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad (16-22)$$

$$u_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad (16-23)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (16-24)$$

式(16-22)反映的是 RC 电路接通电源后电路中电容器上的电量随时间的变化情况,其变化曲线如图 16-30(a)所示。由此可见,接通电源后,电容器上的电量不能立刻达到最大值 $q_0 = C\mathcal{E}$, 而是按指数规律上升,最后达到稳定。电量增长的快慢由 $\tau = RC$ 决定,它被称为 RC 电路的时间常数。当 $t = \tau = RC$ 时

$$q = C\mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.63C\mathcal{E} = 0.63q_0,$$

即电容器上的电量达到稳定值的 63%。当 $t = 5\tau$ 时, $q = 0.994q_0$, 即经过 5τ 这段时间后,便可以认为电量已达到稳定值。

当上述电路中的电量达到稳定值 $q = q_0 = C\mathcal{E}$ 后,在迅速使电键 K_2 接通的同时断开电键 K_1 , 由于电路中 $\mathcal{E} = 0$, 回路电压方程为

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0,$$

考虑到 $t=0$ 时, $q=C\mathcal{E}$, 积分并整理后可得

$$q = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (16-25)$$

式(16-25)是 RC 电路切断电源后电路中电量随时间的变化情况, 其变化曲线如图 16-30(b)所示。由此可见, 当撤去电源后, 电路中电容器极板上的电量按指数规律衰减, 衰减的快慢也是由时间常数 $\tau=RC$ 决定。当 $t=\tau=RC$ 时,

$$q = C\mathcal{E}e^{-1} = 0.37q_0,$$

即电量下降到 $C\mathcal{E}$ 的 37%。

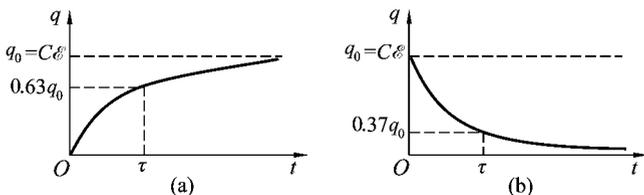


图 16-30

16.6 磁场能量

由电场知识可知, 电场是能量的携带者, 电场的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}DE,$$

这能量存在于电场中, 而电容器是储存电场能的器件。本节中将要看到, 磁场也有能量, 有相应的磁场能量密度, 这能量存在于磁场中, 而载流线圈是储存磁场能的器件。

16.6.1 自感磁能

如图 16-31 所示的 RL 电路, 合上开关 K 后, 电路中的电流从 $I=0$ 逐渐增加到 $I=I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, 回路电压方程为

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L - IR = 0,$$

等式两边同乘 $I dt$ 后得

$$\mathcal{E}I dt = -\mathcal{E}_L I dt + I^2 R dt,$$

式中自感电动势 $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$; $\mathcal{E}I dt$ 的含义是电源在 dt 时间内做的功; $I^2 R dt$ 的含

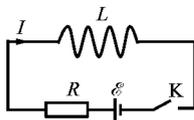


图 16-31

义是 dt 时间内消耗在电阻上的焦耳热; $-\mathcal{E}_L I dt = LI dI$ 的含义是 dt 时间内电源电动势反抗线圈自感电动势所做的功。

电路中的电流从 $I=0$ 逐渐增加到 $I=I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ 的过程中, 这部分总能量为

$$W_m = \int_0^{I_0} LI dI = \frac{1}{2} LI_0^2, \quad (16-26)$$

并转化为载流线圈的能量。由于在线圈中形成电流的同时, 线圈在其周围空间建立了磁场, 磁场也有能量, 电源通过反抗自感电动势所做的功储存在这个磁场中。

由于能量是一个状态量, 与建立这个状态的过程无关, 故自感为 L 的载流线圈, 如其中电流强度为 I , 它就具有 $\frac{1}{2} LI^2$ 的磁场能量, 这个能量又称为线圈的自感磁能。

考虑一长为 l 、横截面面积为 S 、总匝数为 N 的细长直螺线管, 导线内通有电流 I , 而管内充满磁导率为 μ 的均匀磁介质。将公式 $B = \mu \frac{NI}{l}$ 和 $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$ 代入 $\frac{1}{2} LI^2$, 得到

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2 S}{l} \cdot \frac{B^2}{\mu^2 \left(\frac{N}{l}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} BHV,$$

式中 $V = SI$ 为长直螺线管的体积。由于螺线管内磁场近似均匀, 这样单位体积空间中磁场所具有的能量, 即磁场的能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} BH. \quad (16-27)$$

上述磁场能量密度的公式虽是从特例中导出的, 但它对一般的非匀强磁场的情况也适用。

16.6.2 互感磁能

如图 16-32 所示, 设有 1 和 2 两个线圈, 自感分别为 L_1 和 L_2 , 互感为 M 。当电流达到稳定值 I_1 和 I_2 后, 系统的总磁能为多少? 显然, 总磁能只与状态有关, 电流 I_1 和 I_2 一定, 磁场一定, 磁能就一定, 这与电流 I_1 和 I_2 是通过何种途径建立的无关。下面我们就从建立 I_1 和 I_2 的一个特殊途径来计算总磁能。

首先使线圈 2 断开, 将线圈 1 接通, 电路中的电流从 0 逐渐增加到 I_1 , 在此过程中电源电动势 \mathcal{E}_1 克服线圈 1 的自感电动势做功, 转化为线圈 1 自感磁能的能量为 $\frac{1}{2} LI_1^2$ 。然后使线圈 2 接通, 电路中的电流从 0 逐渐增加到 I_2 , 在此过程中调节

线圈 1 回路中的可变电阻, 保证线圈 1 回路中的电流维持 I_1 不变, 而电源电动势 \mathcal{E}_2 克服线圈 2 的自感电动势做功, 转化为线圈 2 自感磁能的能量为 $\frac{1}{2}LI_2^2$ 。当线圈 1 回路中的电流维持 I_1 不变时, 线圈 1 回路对线圈 2 回路没影响, 而线圈 2 回路中变化的电流 i_2 会在线圈 1 回路中激发互感电动势

$$\mathcal{E}_{12} = -M \frac{di_2}{dt},$$

在图示电流的情况下, \mathcal{E}_{12} 的方向与电动势 \mathcal{E}_1 相反。这样, 要保持线圈 1 回路中的电流 I_1 不变时, 电动势 \mathcal{E}_1 就要克服互感电动势 \mathcal{E}_{12} 多做功, 这部分功转化为两个线圈的互感磁能, 其量值为

$$A_{12} = \int -I_1 \mathcal{E}_{12} dt = \int I_1 M \frac{di_2}{dt} dt = \int_0^{I_2} I_1 M di_2 = MI_1 I_2.$$

整个系统的总磁能为

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2. \quad (16-28)$$

如两线圈电流 I_1 和 I_2 产生的磁场相互削弱(如其中一个电流反向), 整个系统的总磁能为

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 - MI_1 I_2. \quad (16-29)$$

自感磁能总是正的, 而互感磁能可正可负, 取决于电流 I_1 和 I_2 产生磁场之间是相互加强还是相互削弱。关于这一点还可以这样看, 设两线圈电流 I_1 和 I_2 产生的磁场分别为 \mathbf{B}_1 、 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{B}_2 、 \mathbf{H}_2 。根据场强叠加原理, 有 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$,

整个系统的总磁能为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \mu \iiint (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) dV \\ &= \frac{1}{2} \mu \iiint (H_1^2 + H_2^2 + 2\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dV, \end{aligned}$$

式中 $\frac{1}{2} \mu \iiint H_1^2 dV$ 和 $\frac{1}{2} \mu \iiint H_2^2 dV$ 分别为两线圈的自感磁能, 它们总是正的;

$\mu \iiint \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 dV$ 为两线圈间的互感磁能, 显然它可正可负, 与 \mathbf{H}_1 、 \mathbf{H}_2 的方向有关。

例 16-10 有一同轴电缆(如图 16-33 所示), 已知其内、外半径分别为 r_1 和 r_2 , 电流强度为 I , 筒间充满磁导率为 μ 的磁介质。求长为 l ($l \gg r_2$) 的电缆内的磁

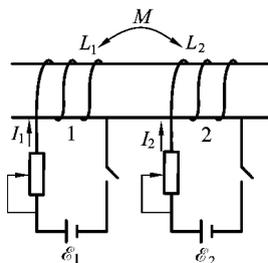


图 16-32

场能量及其自感。

解 由于 $l \gg r_2$, 求磁场分布时可近似将同轴电缆看作无限长。由安培环路定理可知, 筒间磁场强度和磁感应强度的大小为

$$H = \frac{I}{2\pi r}, B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad r_1 < r < r_2. \text{ 其他区域的磁场均为零。}$$

两筒间磁场的能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2}BH = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

在半径为 r 到 $r+dr$, 长为 l 的圆柱壳空间之内的磁能为

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \cdot \frac{dr}{r},$$

对上式积分可得储存在内、外导体间空间内的总磁能

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \int_{r_1}^{r_2} w_m 2\pi r l dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

根据 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$, 得到

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

这是计算系统自感系数的又一种方法。

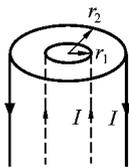


图 16-33

16.7 位移电流

前面已知变化的磁场产生感应电场, 而法拉第电磁感应定律给出了它们之间的定量关系

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

式中 S 表示以闭合回路 l 为边界的任意曲面。现在讨论这个问题的逆问题, 既然变化的磁场可以产生电场, 那么变化的电场会不会也产生磁场呢? 这就是我们要讨论的问题。很多科学研究都是这样, 考虑某一问题的逆问题, 有时会得到意想不到的结果。

16.7.1 位移电流假设

考虑如图 16-34 所示的一个电路, 即一个交变电源接到电容器两极板上, 由于电动势 \mathcal{E} 不断改变着大小和方向, 电路中的电流也不断改变着大小和方向, 电容器一会儿被充电一会儿又放电, 在电路周围存在一个被激发的磁场。假设某一

时刻电容器正在被充电, 传导电流如图所示, 这时取一个积分回路 l , 问磁场强度 \mathbf{H} 沿 l 的环流 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ 为多少? 以积分回路 l 为边界取圆面 S_1 , 有传导电流 I_c 通过 S_1 面, 故有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_1} \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = I_c.$$

如以积分回路 l 为边界取曲面 S_2 , 则无传导电流通过 S_2 面, 故有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_2} \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

这就出现了矛盾, 说明前面介绍的安培环路定理在这种非稳恒电路情况下已不成立了, 它只适用于稳恒电路情况。不难看出, 安培环路定理失效的根本原因是由于传导电流在电容器极板间的中断。现在的问题是, 有电流就会激发磁场, 这个磁场的环流 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ 到底是多少? 是 0 还是 I_c 或其他的值? 也就是说应对稳恒电路情况下的安培环路定理做怎样的修正, 才能使其适用于非稳恒电路的情况?

麦克斯韦分析了这种情况, 他敏锐地注意到在传导电流中断的地方必有电荷的累积, 而电荷的电量是变化的, 故要在其周围激发一个变化的电场。麦克斯韦将图示电路中的两个曲面 S_1 和 S_2 看作一个闭合曲面 S , 它包围着电容器的一个极板, 极板带电 q , 应用高斯定理有

$$q = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

根据电荷守恒定律

$$I_c = \oiint_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

所以

$$\oiint_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = -\oiint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

或

$$\oiint_S \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

显然, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 的地位与传导电流密度 \mathbf{j}_c 相当, 麦克斯韦将其称为位移电流密度, 以 \mathbf{j}_d 代表, 即

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (16-30)$$

位移电流密度等于电位移矢量对时间的变化率, 而通过曲面 S 的位移电流为

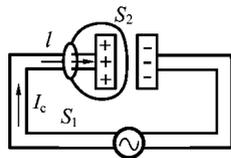


图 16-34

$$I_d = \iint_S \mathbf{j}_d \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (16-31)$$

位移电流的核心是变化的电场,它也可以激发磁场,从这一点上将其称为电流,除此之外,位移电流和传导电流是完全不同的。

令

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (16-32)$$

式中 \mathbf{j}_t 称为全电流密度,而通过曲面 S 的全电流为通过该曲面的传导电流与位移电流之和,即

$$I_t = \iint_S \mathbf{j}_t \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = I_c + I_d.$$

16.7.2 全电流定律

由于 $\iint_S \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$, 这意味着传导电流和位移电流所组成的全电流在空间是连续的不中断的。如图 16-35 所示,当电容器正在被充电或放电时,电路中的传导电流是不连续的,电路中的位移电流也是不连续的,但传导电流与位移电流之和是连续的不中断的。

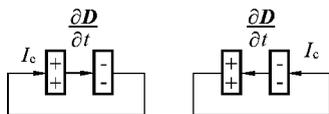


图 16-35

有了全电流的概念后,麦克斯韦将安培环路定理推广为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_t = I_c + I_d \quad (16-33)$$

或

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (16-34)$$

这又称为全电流定律,它告诉我们,磁场强度沿着某一闭合回路的环流等于穿过以该回路为边界的任意曲面的全电流。

如果所涉及的问题中无传导电流,则全电流定律为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (16-35)$$

式 16-35 非常清楚地表明,变化的电场也是要产生磁场的,而根据法拉第电磁感应定律

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

变化的磁场也是要产生电场的,这样电场激发磁场,磁场又激发电场,电磁场就传播出去了。两式正、负号的差异所带来的区别是,变化的电场是磁场的涡旋中心,

呈右螺旋关系,变化的磁场也是电场的涡旋中心,但呈左螺旋关系(如图 16-36 所示)。有了全电流定律,前面的矛盾将不再存在。如图 16-34 所示,如果以积分回路 l 为边界,无论取 S_1 还是取 S_2 ,所得出的磁场强度的环流总是相等的,不会出现前面的矛盾。麦克斯韦位移电流和感应电场的概念是一种理论上的假设,但其正确性已得到了大量实验的验证。

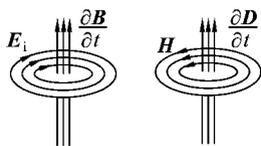


图 16-36

16.7.3 位移电流性质

位移电流被称为电流是因为它和传导电流一样是要产生磁场的,除此之外,它们有本质的区别。位移电流反映的是变化的电场,而传导电流是由载流子的定向运动形成的。在电介质中,根据 $D = \epsilon_0 E + P$, 得位移电流密度

$$j_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (16-36)$$

式中 $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ 纯粹为电场的变化,可以激发磁场,但没有热效应; $\frac{\partial P}{\partial t}$ 反映介质(分子)极化的变化,也可以激发磁场,但有热效应,此热效应由分子电偶极矩方向变化造成,与传导电流的热效应不同。

例 16-11 如图 16-37 所示,圆形平行板电容器,极板半径为 R , 间距远小于半径,用缓变电流 I_c 对其充电,求磁场分布。

解 对于缓变电流,电容器极板上的电荷可看作时刻处于均匀分布状态,极板间的电场可看作匀强电场。根据全电流的连续性,极板间的位移电流等于导线中的传导电流,即

$$I_d = I_c,$$

这样极板间的位移电流密度为

$$j_d = \frac{I_c}{S_0} = \frac{I_d}{S_0} \quad (S_0 = \pi R^2).$$

先求电容器外 P_1 点处的磁场强度。以导线为轴作通过 P_1 点的圆周 l_1 , 由对称性知,该圆周上各点的磁场强度都沿着圆周的切线且大小相等。由全电流定律得

$$\oint_{l_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r_1 H_1 = \iint_{S_1} \mathbf{j}_t \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{j}_t \cdot d\mathbf{S} = I_c,$$

S_1 和 S_2 为以圆周 l_1 为边界的两个曲面,通过它们的全电流的量值都为 I_c 。由此可得

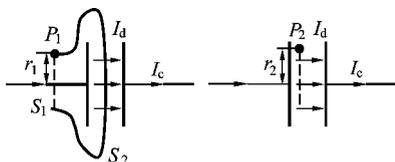


图 16-37

$$H_1 = \frac{I_c}{2\pi r_1}。$$

再求电容器内 P_2 点处的磁场强度。以导线为轴作通过 P_2 点的圆周 l_2 ，由对称性知，该圆周上各点的磁场强度都沿着圆周的切线且大小相等。由全电流定律得

$$\oint_{l_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r_2 H_2 = \pi r_2^2 j_d = \pi r_2^2 \frac{I_c}{S_0}，$$

由此可得

$$H_2 = \frac{I_c r_2}{2\pi R^2}。$$

例 16-12 各向同性均匀无限大介质，已知介电常数及电导率分别为 ϵ 和 γ ，内有半径为 a 的导体球， $t=0$ 时，带电 Q ，求介质中的磁场强度。

解 设导体球上的电量随时间变化为 $q(t)$ ，以无限远处为电势零点，导体球的电势为 $U = \frac{q}{4\pi\epsilon a}$ 。

导体球与无限远处之间的电阻为

$$R = \int_a^\infty dR = \int_a^\infty \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r a}。$$

由欧姆定律及电荷守恒定律有

$$I_c = \frac{U}{R} = \frac{\gamma q}{\epsilon} = \frac{dq}{dt}，$$

利用初条件， $t=0$ 时， $q=Q$ ，得到

$$q = Qe^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}。$$

所以传导电流为

$$I_c = -\frac{dq}{dt} = Q \frac{\gamma}{\epsilon} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}。$$

介质中电位移矢量的大小为

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}。$$

位移电流密度为

$$j_d = -Q \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{1}{4\pi r^2} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}，$$

位移电流为

$$I_d = j_d 4\pi r^2 = -Q \frac{\gamma}{\epsilon} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}。$$

全电流为

$$I_t = I_c + I_d = 0。$$

如图 16-38 所示,位移电流和传导电流大小相等,方向相反,故介质中的磁场强度为零。对此结果的理解不应该是,传导电流产生磁场,而位移电流也产生磁场,这两个磁场相互抵消。实际情况是,传导电流不产生磁场,而位移电流也不产生磁场,故总磁场为零。我们说,球对称分布的电流系统,不管是什么电流,不管电流有多强,它都不产生磁场。

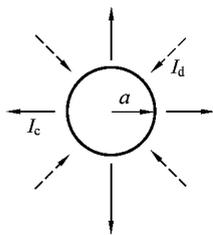


图 16-38

16.8 麦克斯韦电磁场方程组

前面讨论了静电场和稳恒磁场的规律,又介绍了麦克斯韦提出的感应电场和位移电流的概念。在此基础上,麦克斯韦将所有这些知识综合起来,对电磁学理论进行总结,提出了由四个方程所组成的方程组。

麦克斯韦方程组里的第一个方程是

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0。 \quad (16-37)$$

从形式上看这与前面介绍的静电场高斯定理一致,但必须注意,此处电场包括了所有电场,可以是静止电荷产生的电场,也可以是运动电荷产生的电场,或者是变化磁场产生的感应电场。将感应电场考虑进去,静电场高斯定理形式没有变化,这是因为感应电场是无源场,它对任意闭合曲面电通量的贡献为零。

麦克斯韦方程组里的第二个方程是

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0。 \quad (16-38)$$

此即磁高斯定理。但必须注意,这里磁场可以是由所有电流产生的,包括传导电流、位移电流等等。

麦克斯韦方程组里的第三个方程是

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}。 \quad (16-39)$$

这里的电场包括静电场和感应电场,而磁场由全电流产生。

麦克斯韦方程组里的第四个方程是

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}。 \quad (16-40)$$

此即全电流定律,它告诉我们,磁场强度沿着某一闭合回路的环流等于穿过以该回路为边界的任意曲面的全电流。

麦克斯韦方程组里的各个场量并不是独立的,对各向同性介质,各量间的关

系为

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (16-41)$$

当然,麦克斯韦方程组还不包括运动带电粒子在电磁场中的受力公式

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (16-42)$$

对于静电场和稳恒磁场, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, 麦克斯韦方程组简化为

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0,$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c.$$

对于 $I=0, q_0=0$ 的自由空间,麦克斯韦方程组简化为

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

这组方程真正反映了电与磁是相互激发、相互依赖的不可分割的统一整体,即电磁场。依此方程组,麦克斯韦预言了电磁波的存在,并把光波纳入了电磁波的范畴。

习题 16

16-1 直导线中通以交流电,如图 16-39 所示,置于磁导率为 μ 的介质中,已知: $I = I_0 \sin \omega t$, 其中 I_0, ω 是大于零的常量,求与其共面的 N 匝矩形回路中的感应电动势。

16-2 如图 16-40 所示,长直导线中通有电流 $I = 5.0 \text{ A}$, 在与其相距 $d = 0.5 \text{ cm}$ 处放有一矩形线圈,共 1000 匝,设线圈长 $l = 4.0 \text{ cm}$, 宽 $a = 2.0 \text{ cm}$ 。不计线圈自感,若线圈以速度 $v = 3.0 \text{ cm/s}$ 沿垂直于长导线的方向向右运动,线圈中的感生电动势多大?

16-3 电流为 I 的无限长直导线旁有一弧形导线,圆心角为 120° ,几何尺寸及位置如图 16-41 所示。求当圆弧形导线以速度 v 平行于长直导线方向运动时,弧形导线中的动生电动势。

16-4 电阻为 R 的闭合线圈折成半径分别为 a 和 $2a$ 的两个圆,如图 16-42 所示,将其置于

与两圆平面垂直的匀强磁场内,磁感应强度按 $B=B_0 \sin \omega t$ 的规律变化。已知 $a=10\text{cm}$, $B_0=2 \times 10^{-2}\text{T}$, $\omega=50\text{rad/s}$, $R=10\Omega$, 求线圈中感应电流的最大值。

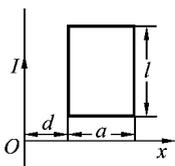


图 16-39

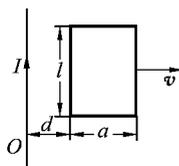


图 16-40

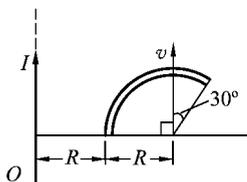


图 16-41

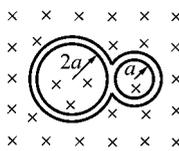


图 16-42

16-5 如图 16-43 所示,半径为 a 的长直螺线管中,有 $\frac{dB}{dt} > 0$ 的磁场,一直导线弯成等梯形的闭合回路 $ABCD$,总电阻为 R ,上底为 a ,下底为 $2a$ 。求:

- (1) AD 段、 BC 段和闭合回路中的感应电动势;
- (2) B, C 两点间的电势差 $U_B - U_C$ 。

16-6 圆柱形匀强磁场中同轴放置一金属圆柱体,半径为 R ,高为 h ,电阻率为 ρ ,如图

16-44 所示。若匀强磁场以 $\frac{dB}{dt} = k(k > 0, k$ 为恒量)的规律变化,求圆柱体内涡电流的热功率。

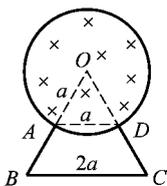


图 16-43

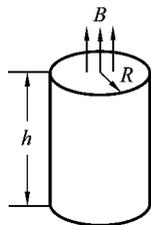


图 16-44

16-7 将金属薄片弯成如图 16-45 所示回路,两端是半径为 a 的圆柱面,中间是边长为 l 、间隔为 d 的两正方形平面,且 $l \gg a, a \gg d$ 。

- (1) 试求该回路的自感系数;
- (2) 若沿圆柱面的轴向加变化磁场 $B=B_0 + kt$,试求回路中的电流 $I(t)$ (回路中的电阻很小,可忽略不计)。

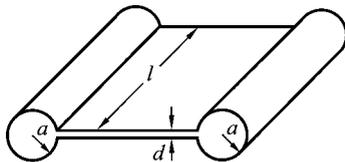


图 16-45

16-8 一螺绕环,每厘米绕 40 匝,铁心截面积 3.0cm^2 ,磁导率 $\mu=200\mu_0$,绕组中通有电流 5.0mA ,环上绕有两匝次级线圈。求:

- (1) 两绕组间的互感系数;
 (2) 若初级绕组中的电流在 0.10s 内由 5.0A 降低到 0 , 次级绕组中的互感电动势。

16-9 如图 16-46 所示, 半径分别为 b 和 a 的两圆形线圈 ($b \gg a$), 在 $t=0$ 时共面放置, 大圆形线圈通有稳恒电流 I , 小圆形线圈以角速度 ω 绕竖直轴转动, 若小圆形线圈的电阻为 R , 求:

- (1) 当小线圈转过 90° 时, 小线圈所受的磁力矩的大小;
 (2) 从初始时刻转到该位置的过程中, 磁力矩所做功的大小。

16-10 一同轴电缆由中心导体圆柱和外层导体圆筒组成, 如图 16-47 所示, 两者半径分别为 R_1 和 R_2 , 导体圆柱的磁导率为 μ_1 , 筒与圆柱之间充以磁导率为 μ_2 的磁介质。电流 I 可由中心圆柱流出, 由圆筒流回。求每单位长度电缆的自感系数。

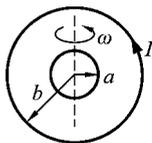


图 16-46

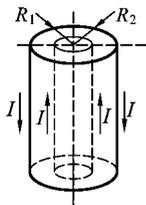


图 16-47

16-11 一电感为 2.0H , 电阻为 10Ω 的线圈突然接到电动势 $\mathcal{E}=100\text{V}$, 内阻不计的电源上, 在接通 0.1s 时, 求:

- (1) 磁场总储存能量的增加率;
 (2) 线圈中产生焦耳热的速率;
 (3) 电池组放出能量的速率。

16-12 在一对巨大的圆形极板 (电容 $C=1.0 \times 10^{-12}\text{F}$) 上, 加上频率为 50Hz , 峰值为 $1.74 \times 10^5\text{V}$ 的交变电压, 计算极板间位移电流的最大值。

思考题 16

16-1 图 16-48 为用冲击电流计测量磁极间磁场的装置。小线圈与冲击电流计相接, 线圈面积为 A , 匝数为 N , 电阻为 R , 其法向 n 与该处磁场方向相同, 将小线圈迅速取出磁场时, 冲击电流计测得感应电量为 q , 试求小线圈所在位置的磁感应强度。

16-2 图 16-49 中 $abcd$ 电路有电阻 R , 其中 bc 段的一部分绕成圆形, 圆形区域有一与回路平面垂直的均匀磁场 B , 在圆形导线的一边施加恒力 F , 由于 a 端固定, 假定该圆开始的半径为 r_0 , 并维持以圆形的方式收缩, 设导线非常柔软, 忽略导线的质量, 问需要多长的时间圆形部分完全闭合?



接冲击电流计

图 16-48

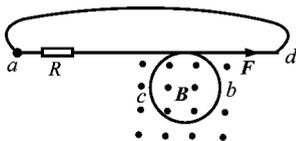


图 16-49

16-3 在磁感应强度为 B 的均匀磁场内,有一面积为 S 的矩形线框,线框回路的电阻为 R (忽略自感),线框绕其对称轴以匀角速度 ω 旋转(如图 16-50 所示)。

- (1) 求在如图位置时线框所受的磁力矩为多大?
- (2) 为维持线框匀角速度转动,外力矩对线框每转一周需做的功为多少?

16-4 一平板电容器充电以后断开电源,然后缓慢拉开电容器两极板的间距,则拉开过程中两极板间的位移电流为多大?若电容器两端始终维持恒定电压,则在缓慢拉开电容器两极板间距的过程中两极板间有无位移电流?若有位移电流,则它的方向怎样?

16-5 图 16-51 中的(a)为一量值随时间减小、方向垂直纸面向内的变化电场,均匀分布在圆柱形区域内。试在图 16-51 的(b)中画出:

- (1) 位移电流的大致分布和方向;
- (2) 磁场的大致分布和方向。

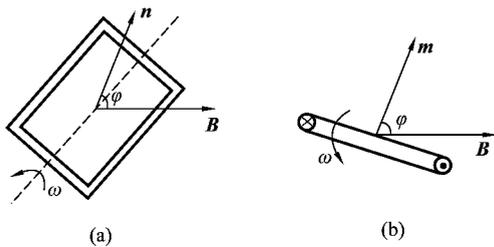


图 16-50

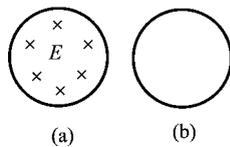


图 16-51

16-6 试写出与下列内容相应的麦克斯韦方程的积分形式:

- (1) 电力线起始于正电荷终止于负电荷;
- (2) 磁力线无头无尾;
- (3) 变化的电场伴有磁场;
- (4) 变化的磁场伴有电场。

第 17 章 电磁波

麦克斯韦电磁学理论最大的成功之处在于预言了电磁波的存在,即电场激发磁场,磁场又激发电场,电磁场以波动的形式传播。该理论还说明了光的电磁波本质,把光现象和电磁现象给统一起来了。

17.1 电磁波波动方程

根据自由空间电磁场麦克斯韦方程组

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

结合各向同性介质中各量间的关系

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

经过繁复的数学处理,可以得到电场和磁场满足的两个偏微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯算符。

如图 17-1 所示,若设电场方向沿 y 轴方向,磁场方向沿 z 轴方向,此时电场和磁场满足的两个简化了的偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (17-1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (17-2)$$

我们已经学过波动理论,知道任何物理量,如果其随时空的变化满足波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

这个物理量就以波动的形式沿 x 轴方向(或反方向)传播,而传播速度为 u 。将式(17-1)和式(17-2)与波动方程比较后,知道电场和磁场分量以波的形式沿 x 轴方向

传播,这种波就是电磁波,其波速为 $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 。式(17-1)

和式(17-2)被称为电磁波波动方程。

在真空中,电磁波的传播速度为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 2.997\,966\,7 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

电磁波的传播速度与光在真空中的传播速度精确地一致,故麦克斯韦认为:光的本质是电磁波。

17.2 电磁波的性质

17.2.1 性质

如图 17-2 所示,假设开始时在 Oyz 平面内,电场分量沿 y 轴方向作谐振动

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

此振动产生一系列沿 x 轴正方向传播的平面简谐行波,其波动式为

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (17-3)$$

形成电磁波时,电场和磁场相互激发,它们是不独立的。当电场沿 y 轴方向振动时,磁场沿 z 轴方向振动,电磁波沿 x 轴方向传播。还可以证明(过程从略),此时电场和磁场满足如下关系(在真空中)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (17-4)$$

将波动式 $E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$ 代入,积分后得

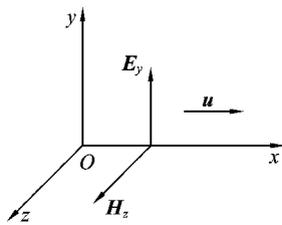


图 17-1

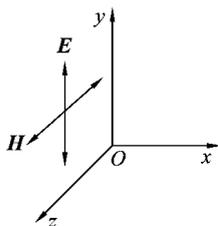


图 17-2

$$H = -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial E}{\partial x} dt = \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (17-5)$$

式中 $H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$ 。不定积分中的常数已经略去，因为这里仅仅考虑变化的电磁场。

如果电波沿 x 轴反方向传播，其波动式为

$$E = E_0 \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right). \quad (17-6)$$

由于关系式(17-4)的约束，磁场分量的波动式不是

$$H = H_0 \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right),$$

而是

$$H = -H_0 \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right). \quad (17-7)$$

在图 17-3 中我们画出了沿 x 轴正方向传播的平面简谐电磁波的情形。

根据上面的讨论，我们对电磁波的性质作如下总结：

(1) 电磁波的横波性。电磁波的电场分量和磁场分量与其传播速度垂直，故电磁波是横波。

(2) 电磁波的偏振性。电磁波的电场分量和磁场分量都在各自的平面内振动，这种性质称为电磁波的偏振性。电场 E 、磁场 H 和电磁波传播速度 u 之间呈右螺旋关系，即 $u // E \times H$ 。

(3) E 和 H 的同相位性。电场 E 和磁场 H 同步变化，同时达到最大，同时变到最小。任一时刻，任一空间位置， E 和 H 的大小始终满足关系

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E, \quad (17-8)$$

或

$$B = \frac{1}{c} E. \quad (17-9)$$

用振幅来表示即 $H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$ 或 $B_0 = \frac{1}{c} E_0$ 。

(4) 在真空中电磁波波速为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

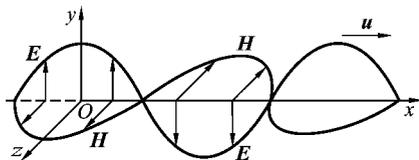


图 17-3

在均匀介质中电磁波波速为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{n}。 \quad (17-10)$$

由此得介质折射率的理论表达式

$$n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}。 \quad (17-11)$$

17.2.2 坡因廷矢量

我们用能流密度来衡量波在传播过程中能量的流动,定义为单位时间通过与波的传播方向垂直的单位面积的能量,而电磁波的能流密度称为坡因廷矢量,用 S 表示,其大小为

$$S = \omega u, \quad (17-12)$$

式中 u 是电磁波的波速; ω 是电磁波的能量密度。

电磁波包含电场分量和磁场分量,其能量密度应该是电场能量密度与磁场能量密度之和,即

$$\omega = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2。$$

利用 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$, 得到

$$\frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon}E \sqrt{\mu}H,$$

$$\frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\mu}H \sqrt{\epsilon}E。$$

因为 $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, 最终可以得到

$$S = EH。$$

坡因廷矢量的方向反映了电磁波能量的传播方向,与波速的方向一致。考虑到电场 E 、磁场 H 和电磁波传播速度 u 之间呈右螺旋关系,即 $u \parallel E \times H$, 而电场 E 和磁场 H 相互垂直,所以有

$$S = E \times H。 \quad (17-13)$$

电场 E 、磁场 H 和坡因廷矢量 S 之间的方向关系如图 17-4 所示。

能流密度对时间的平均值称为波强,用 I 表示,这样电磁波的波强为

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0^2 = \frac{1}{2}E_0H_0。 \quad (17-14)$$

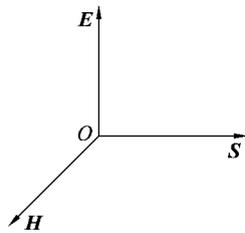


图 17-4

如图 17-5 所示,我们可以从坡因廷矢量 S 的角度来说明电容器是如何被充电的。一个电容器正在被充电,极板间电场方向向下,而电流产生的磁场方向与电流方向呈右螺旋关系,根据 $S = E \times H$,知道坡因廷矢量从电容器的四周流入。

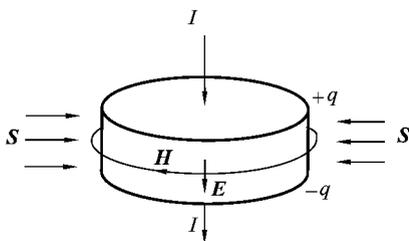


图 17-5

17.2.3 辐射压强

电磁波也是一种物质,它有质量、动量和能量。根据爱因斯坦的质能关系,电磁波的质量密度为

$$m = \frac{\omega}{c^2},$$

式中 ω 为电磁波的能量密度。

电磁波的动量密度,即单位体积中电磁波的动量为

$$p = \frac{\omega}{c}.$$

当电磁波入射到物质表面时,会对物质表面施加压力而形成压强,这个压强称为辐射压强。如图 17-6 所示,电磁波垂直入射到物质表面并被完全吸收,根据单位时间电磁波动量的改变可以求出 ΔS 面积上受到的压力为

$$F = pc\Delta S.$$

压强为

$$P = \frac{F}{\Delta S} = pc = \omega.$$

辐射压强虽然很小,但已有许多事实证明了它的存在。如图 17-7 所示,彗星在接近太阳时形成的彗发,其原因之一就是太阳辐射压强的作用。

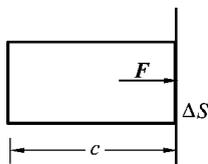


图 17-6

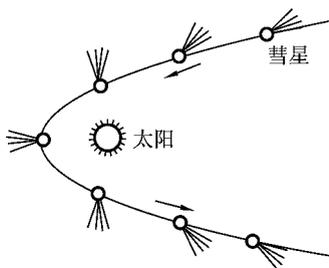


图 17-7

* 17.3 振荡电偶极子的辐射

17.3.1 电磁波的产生

根据前面的讨论知道,变化的电场与变化的磁场之间会相互激发。假设在空间某区域有变化的电场,那么在邻近区域会有磁场被激发,这磁场又可以激发电

场,如此进行下去,变化的电磁场就以有限的速度在空间传播,形成电磁波(如图 17-8 所示)。

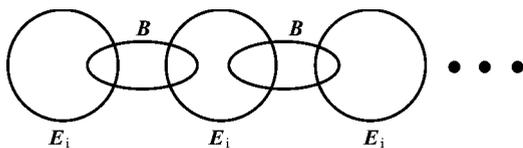


图 17-8

一个电量不变且静止的电荷只产生静电场而没有磁场,当然不能

向外辐射电磁波。理论和实验都证明,做匀速直线运动的电荷虽然产生磁场,但也不会向外辐射电磁波。只有电荷作加速运动时,才要向外辐射电磁波。

在实际中,通过振荡电偶极子来向外辐射电磁波。电偶极子由一对正、负点电荷组成,其特征物理量是电矩 p ,当电矩随时间按正弦或余弦规律变化,则称之为振荡电偶极子。分子内离子的相对振动,天线上电荷的振动都可看成振荡电偶极子。在振荡电偶极子中,正、负电荷都在作加速运动,所以振荡电偶极子要向外辐射电磁波。图 17-9 示意出振荡电偶极子辐射电磁波的电力线和磁力线的分布。

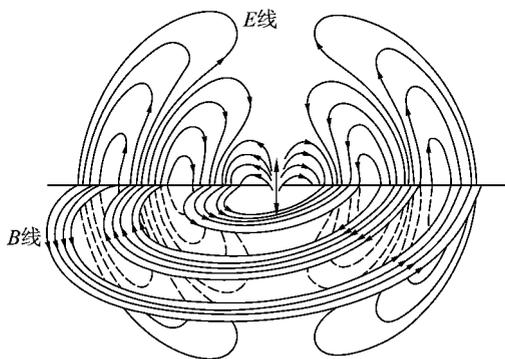


图 17-9

利用麦克斯韦方程组,经过复杂的计算,可以求出振荡电偶极子周围某点 P 处 t 时刻的电场强度和磁场强度

$$E = -\frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], \quad (17-15)$$

$$H = -\frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi c r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (17-16)$$

如图 17-10 所示, θ 为电磁波传播方向与电偶极子电矩 p 之间的夹角, r 为参考点到电偶极子的距离, p_0 为电偶极子电矩的幅值,而 ω 为电偶极子的振荡频率。

还可以求出坡因廷矢量的大小为

$$S = EH = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]. \quad (17-17)$$

在一个球面上,坡因廷矢量随 θ 的变化如图 17-11 所示。

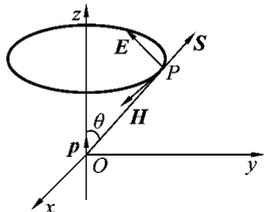


图 17-10

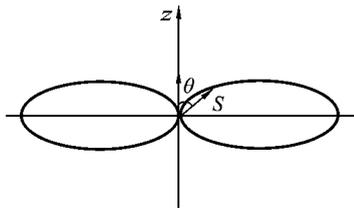


图 17-11

振荡电偶极子的辐射功率等于坡因廷矢量在一个球面上的积分,即

$$P = \iint_{\text{球面}} S r^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

其平均功率为

$$\bar{P} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (17-18)$$

17.3.2 赫兹实验

1888年,赫兹(H. R. Hertz)利用实验方法证实了电磁波的存在,验证了麦克斯韦电磁学理论的正确性。赫兹设计的实验装置如图 17-12 所示,C 是一个感应线圈,产生的周期性高压加在 A 和 B 两个铜棒上,铜棒间留有小的缝隙。当电压升高到缝隙间的空气被击穿时,就有电流往复通过缝隙而发生火花,这就相当于一个振荡电偶极子,会向外辐射电磁波。由于能量的损失,电流不断减小,向外辐射的电磁波是减幅振荡,最后辐射停止。停顿一小段时间后,高压又把空气击穿,产生下一个电磁波脉冲。在感应线圈附近再放置两个与铜棒 A 和 B 类似的铜棒 C 和 D,调节取向和缝隙,由于电磁共振,铜棒 C 和 D 的缝隙间会发出微弱的火花,由此证实了电磁波的存在。

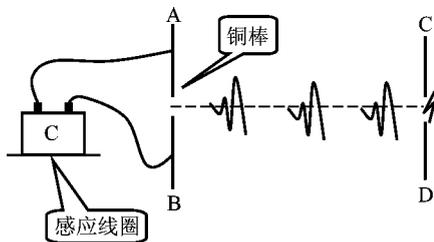


图 17-12

由于能量的损失,电流不断减小,向外辐射的电磁波是减幅振荡,最后辐射停止。停顿一小段时间后,高压又把空气击穿,产生下一个电磁波脉冲。在感应线圈附近再放置两个与铜棒 A 和 B 类似的铜棒 C 和 D,调节取向和缝隙,由于电磁共振,铜棒 C 和 D 的缝隙间会发出微弱的火花,由此证实了电磁波的存在。

例 17-1 证明圆形平板电容器充电时每单位时间内从侧面输入的电磁能正好等于所储能量随时间的增加率。

证明 如图 17-13 所示,电容器正在被充电时,极板间位移电流方向向下,而电流产生的磁场(由全电流

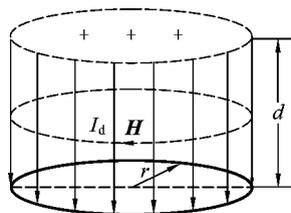


图 17-13

产生)方向与电流方向呈右螺旋关系。根据 $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, 知道坡因廷矢量从电容器的四周流入。单位时间输入电容器的电磁能等于坡因廷矢量沿着电容器侧面的积分, 即

$$P = \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}.$$

取虚线回路积分, 由全电流定律有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I_t = I_d.$$

通过回路的位移电流为

$$I_d = S \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt},$$

式中 S 为电容器极板的面积; E 是电容器极板间的电场强度。

这样虚线回路上磁场强度的大小为

$$H = \frac{I_d}{2\pi r} = \frac{r}{2} \epsilon_0 \frac{dE}{dt},$$

单位时间输入电容器的电磁能为

$$P = 2\pi r d E H = \pi r^2 d \epsilon_0 E \frac{dE}{dt}.$$

另一方面, 电容器静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \pi r^2 d,$$

电容器静电能量随时间的增加率为

$$\frac{dW_e}{dt} = \pi r^2 d \epsilon_0 E \frac{dE}{dt} = P.$$

命题得证。

习题 17

17-1 已知电磁波在空气中的波速为 $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$, 试计算下列各种频率的电磁波在空气中的波长:

- (1) 上海人民广播电台使用的一种频率 $\nu=990 \text{ kHz}$;
- (2) 我国第一颗人造地球卫星播放东方红乐曲使用的无限电波的频率 $\nu=20.009 \text{ MHz}$;
- (3) 上海电视台八频道使用的图像载波频率 $\nu=184.25 \text{ MHz}$ 。

17-2 一电台辐射电磁波, 若电磁波的能量均匀分布在以电台为球心的球面上, 功率为 10^5 W , 求离电台 10 km 处电磁波的坡印廷矢量和电场分量的幅值。

17-3 真空中沿 x 正方向传播的平面余弦波, 其磁场分量的波长为 λ , 幅值为 H_0 。在 $t=0$ 时刻的波形如图 17-14 所示。

- (1) 写出磁场分量的波动表达式;
 (2) 写出电场分量的波动表达式,并在图中画出
 $t=0$ 时刻的电场分量波形;
 (3) 计算 $t=0$ 时, $x=0$ 处的坡印廷矢量。

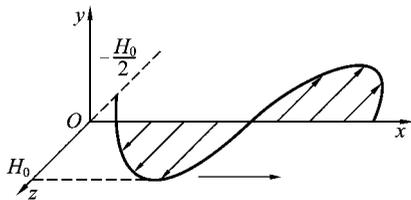


图 17-14

- 17-4 氦氖激光器发出的圆柱形激光束,功率为 10 mW,光束截面直径为 2 mm,求该激光的最大电场强度和磁感应强度。

思考题 17

17-1 试述电磁波的性质。

17-2 图 17-15(a)为一 LC 电路, C 为圆形平行板电容器, L 为长直螺线管,图(b)及图(c)分别表示电容器放电时平行板电容器的电场分布和螺线管内的磁场分布。

- (1) 在图(b)内画出电容器内部的磁场分布和坡印廷矢量分布。
 (2) 在图(c)内画出螺线管内部的电场分布和坡印廷矢量分布。

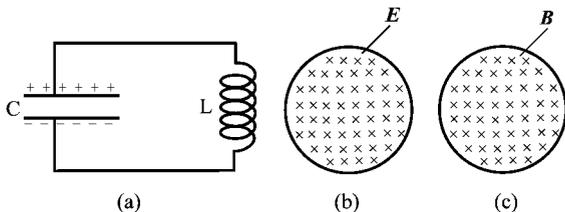


图 17-15

17-3 如图 17-16 所示,同轴电缆内外半径分别为 a 和 b ,用来作为电源 \mathcal{E} 和电阻 R 的传输线,电缆本身的电阻忽略不计。

- (1) 求电缆中任一点 ($a < r < b$) 处的坡印廷矢量 S 。
 (2) 求通过电缆横截面的能流,该结果说明什么物理图像?

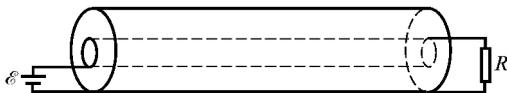


图 17-16

第 18 章 光的干涉

光学是物理学各学科中最古老的学科之一。光学的发展已有三千多年的历史,一直可以追溯到公元前一千多年。但直到 17 世纪前半叶,人们对于光的认识仅限于光的直线传播及光的反射、折射现象,而未涉及光是什么这个问题。

17 世纪下半叶,牛顿提出光的微粒说:光由微小的物质颗粒组成,粒子在均匀媒质中按力学定律作匀速直线运动。光微粒极轻,因此地球对它的引力根本表现不出来。根据微粒说,牛顿很容易地解释了反射定律(粒子与壁的弹性碰撞),但解释折射定律便显得牵强(假设当粒子撞在光密媒质表面的瞬间,媒质会对粒子施加一个瞬时的吸引力,从而使光偏离原来的飞行方向)。

在牛顿发表光的微粒说 10 年之后,惠更斯提出了光的波动说,他把光看成是机械振动在一种假想的特殊媒质(以太)中的传播,并由此解释了一些常见的光的现象。但在当时由于牛顿所具有的巨大的权威使得这一理论并未引起大多数人的重视。直到 19 世纪初,托马斯·杨通过双缝干涉实验,观察到了直边衍射现象,为波动说提供了充分的实验依据。1815~1826 年间,菲涅尔完成了关于光的波动说理论,波动说逐渐代替了微粒说。

19 世纪中叶,麦克斯韦在电磁场理论的基础上提出了光的电磁波理论,人们才逐渐认识到光是波长大约在 $0.4\sim 0.7\mu\text{m}$ 范围内的电磁波。应用麦克斯韦电磁波理论可以普遍解释光在两种媒质的分界面上发生的反射、折射现象,也能够满意地解释光的干涉、衍射和偏振等光学现象。

但在 19 世纪末和 20 世纪初,当科学实验研究深入到微观领域时,在一些新的实验事实(如共振荧光、黑体辐射、光电效应等)面前,光的电磁理论遇到了无法克服的困难,这使光学的概念发生了从连续到量子化的飞跃。1905 年爱因斯坦提出了光子假说,完满地解释了光与物质相互作用时表现出粒子性的实验事实。从此,光的量子说登上了历史舞台,使人们认识到,光具有波粒二象性。

18.1 光的相干性

18.1.1 光的电磁理论

19 世纪 60 年代,麦克斯韦在前人工作的基础上建立了电磁场理论,并给出

了描述电磁场基本性质的方程组——麦克斯韦方程组。由麦克斯韦方程组可知光是一种电磁波,传播着的电磁场,即电场矢量 E 和磁场矢量 H 都以波的形式传播。在这两个矢量中对人的眼睛或感光仪器(如照相底片等)起作用的主要是电场矢量 E ,因此,在描述光波中的振动矢量时,用 E 矢量来表示,称为光矢量。能够引起人眼视觉的电磁波称为可见光。可见光的波长大致在 $400 \sim 760\text{nm}$ 之间,不同波长的可见光引起的色觉不同,波长与颜色的对应关系如表 18-1 所示。

表 18-1 波长与颜色的对应关系(单位:nm)

红	橙	黄	绿	青	蓝	紫
760	630	600	570	500	450	430
						400

只包含单一波长的光,称为单色光,这是一种理想化的光波。严格的单色光是不存在的,任何光源所发出的光波都有一定的频率(或波长)范围,即包含着在此范围内的各种不同的频率(或波长)成分,且各种频率(或波长)所对应的强度也不同。可以以频率 ν (或波长 λ)为横坐标,强度 I 为纵坐标表示这种频率(或波长)与强度间的关系,称为光谱曲线(或称谱线),如图 18-1 所示。谱线所对应的波长范围越窄,则称光的单色性越好。通常用强度下降到 $I_0/2$ 的两点之间的频率(或波长)范围 $\Delta\nu$ (或 $\Delta\lambda$)作为单色性好坏的物理量。

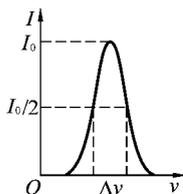


图 18-1

由麦克斯韦理论可知,单色光波在真空中的传播速度 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$,其中 ϵ_0 和 μ_0 分别为真空的介电系数与真空的磁导率,将它们的值代入即得光在真空中的传播速度为 $2.99794 \times 10^8 \text{m/s}$ 。当光波在介质中传播时,根据麦克斯韦理论同样可得光的传播速度 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ 。当介质中的光波不很强时,对大多数介质近似有 $\mu_r \approx 1$ 。将 $\frac{c}{u} = n$ 定义为介质的折射率,它与介质的电磁性质密切相关。对于均匀各向同性介质,可以认为相对介电常数 ϵ_r 是确定的常数,因而 n 的数值也是一定的。真空的折射率 $n=1$,大多数固体的折射率约为 1.5,即在固体中光的速率约减慢 33%。表 18-2 列出了一些物质的折射率。

表 18-2 一些物质对 $\lambda=5.9 \times 10^2 \text{ nm}$ 的钠黄光的折射率

介 质	折 射 率	介 质	折 射 率
空气	1.0003	火石	1.58
水	1.33	锌冕玻璃	1.52
二硫化碳	1.63	聚乙烯	1.52
金刚石	2.42	熔融石英	1.46
重火石玻璃	1.89	蓝宝石	1.77
轻钡玻璃	1.58	氯化钠	1.53

18.1.2 光源的发光机制与特点

能够发射在可见光波段辐射的物体称为光源。此外,能够反射别的物体发出的辐射的物体也可看作是光源,称为次级光源。各种光源的激发方式不同:常见的有利用热能激发的,这样的光源称为热光源;有利用电能激发引起发光的,称为电致发光;有利用光激发引起发光的,称为光致发光;有由于化学反应而发光的,称为化学发光。此外,还有受激辐射的激光光源。

普通光源发光的机理是处于激发态的原子(或分子)的自发辐射,即光源中的原子吸收了外界能量而处于能量比较高的状态(激发态),这些激发态是极不稳定的,电子在激发态上存在的时间平均只有 $10^{-11} \sim 10^{-8} \text{ s}$,随后,原子就会自发地回到能量较低的状态(低激发态或基态)以保持系统的稳定。在此过程中原子将多余的能量以电磁波(光波)的形式向外辐射出去。每个原子的发光是间歇的,一个原子经一次发光后,只有在重新获得足够能量后才会再次发光。每次发光的持续时间极短,约为 10^{-8} s 。原子发射的是一段频率一定、振动方向一定、长度有限的光波,称为光波列。在普通光源中,各个原子的激发和辐射参差不齐,各自独立,是一种随机过程,因而不同原子在同一时刻所发出的波列在频率、振动方向和相位上各自独立,同一原子在不同时刻所发出的波列之间频率、振动方向和相位也各不相同。

由于普通光源发出的光波列长度有限,根据傅里叶分析可知,一列有限长的周期性波列是由无数列振幅不同、频率连续变化的简谐波叠加的结果。所以它的频率就有一定大小的频宽,即有一定大小的谱线宽度。因此,普通光源发出的光波是含有很多不同波长的复合光,称为复色光。除激光外,实际光源的光波一般都不是单色光。在实际使用中,常用各种方法将光波波长限制在一定的小范围内,即一定的 $\Delta\nu$ (或 $\Delta\lambda$) 范围内,这种光称为准单色光。

理论上可以证明,对于长度为 Δx 的光波列, $\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi$, 其中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是波矢, 因为

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta \lambda,$$

故有

$$\Delta x \cdot \Delta \lambda \approx \lambda^2. \quad (18-1)$$

由此可见, 当 $\Delta x \rightarrow \infty$ 时, $\Delta \lambda \rightarrow 0$, 即波列长度越大, 单色性越好, 当波列长度趋于无穷大时, 便得到理想的单色光波。

18.1.3 光的相干性

在讨论机械波时已知两列波相遇发生干涉现象的条件是: 振动频率相同、振动方向相同和相位差恒定。但在实验中发现, 从两个独立的同频率的单色普通光源发出的光相遇, 却不能得到干涉图样, 下面对此作一简单的分析。

设两个振动方向相同、频率相同的单色光在空间某一点相遇, 它们的光矢量的大小分别为

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t + \varphi_{10}), E_2 = E_{20} \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

叠加后合成的光矢量的大小为 $E = E_1 + E_2$ 。从而合成光矢量的量值为

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

式中

$$E_0 = \sqrt{E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})},$$

在观测时间内, 平均光强 I 正比 E^2 的时间平均值, 即

$$I \propto \overline{E_0^2} = \overline{E_{10}^2} + \overline{E_{20}^2} + 2E_{10}E_{20} \overline{\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}.$$

如果这两束同频率的单色光分别由两个独立的普通光源发出的, 由于光源中原子或分子发光的独立性和随机性, 两光波间的相位差 $\Delta\varphi$ 也将随机地变化, 并等几率地取 $0 \sim 2\pi$ 间的所有值。因此, 在所观测的时间内

$$\overline{\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} = 0,$$

由此得

$$\overline{E_0^2} = \overline{E_{10}^2} + \overline{E_{20}^2},$$

即

$$I = I_1 + I_2.$$

上式表明两束光重合后的光强等于两束光分别照射时的光强 I_1 和 I_2 之和, 把这种情况称为光的非相干叠加。

如果这两束光来自同一光源而使它们的相位差始终保持恒定,则其合成后的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}), \quad (18-2)$$

此时 $\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 将不随时间而变, $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 被称为干涉项, 这种情况称为光的相干叠加。

由式(18-2)可知, 由于两光束间存在着相位差, 合成后的光强不仅取决于两束光的光强 E_1 和 E_2 , 还与两束光之间的相位差 $\Delta\varphi$ 有关。当两束光在空间不同位置相遇时, 由于在这些位置离光源的距离不同, 因此其相位差 $\Delta\varphi$ 也将不同, 在空间各个不同点处的光强将发生连续变化, 即光强在空间重新分布。

当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, 在这些位置光强最大, 称为干涉相长。当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, 在这些位置光强最小, 称为干涉相消。如果 $I_1 = I_2$, 那么合成后的光强为

$$I = 2I_1(1 + \cos\Delta\varphi) = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (18-3)$$

光强 I 随相位差 $\Delta\varphi$ 的变化情况如图 18-2 所示, 这就是光的干涉现象。

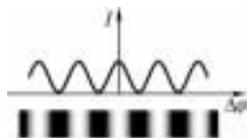


图 18-2

综上所述, 我们把能产生相干叠加的两束光称为相干光, 相干叠加必须满足振动频率相同、方向相同、相位差恒定的条件。只有从同一光源的同一部分发出的光, 通过某些装置进行分束后, 才能获得符合相干条件的相干光。在实验中, 为了获得明显清晰的干涉现象, 参与叠加的两束光除了要满足上述相干条件外, 两束光的强度也不能相差太大。为说明这一点, 我们定义干涉条纹的可见度如下:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad (18-4)$$

式中 I_{\max} 与 I_{\min} 分别为干涉相长与干涉相消时的光强; I_1 、 I_2 分别为参与干涉的两束光的光强。根据定义, 应有 $0 \leq V \leq 1$ 。当 $I_1 = I_2$ 时, $V = 1$, 当 $I_1 \ll I_2$ 时, $V \rightarrow 0$ (如图 18-3 所示)。即当两束光的光强相差太大时, 虽然从理论上说仍能产生干涉, 但此时干涉相长与干涉相消间的光强差很小, 背景十分明亮, 条纹会很不清, 以至于无法分辨。由此可知, 要获得明显清晰的干涉条纹, 必须要求两束光的光强不能相差太大。

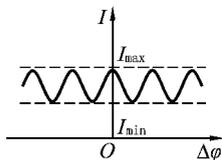


图 18-3

18.2 双缝干涉

18.2.1 杨氏双缝实验

获得相干光的基本方法是把由光源上同一点发出的光分为两束,让它们经过不同的路径后叠加,由于这两束光的相应部分都来自同一发光原子的同一次发光,即光源发出的光中的每一个光波列都分成两个相干的波列,因而这两束光是满足相干条件的相干光。

1801年,托马斯·杨利用上述基本思想通过实验研究了光的干涉现象。这一实验为光的波动理论建立了实验基础。

杨氏双缝实验的装置如图 18-4 所示。在普通单色光源后放一狭缝 S , S 相当于一个线光源, S 后再放置与 S 平行而且等距离的两平行狭缝 S_1 和 S_2 , 两缝间距很小,由 S 发出的光的波阵面同时到达 S_1 和 S_2 , S_1 和 S_2 构成两个相干光源,从 S_1 和 S_2 发出的光波在空间叠加,从而产生干涉现象。如果在双缝后置一屏幕,在屏上将出现一系列稳定的明暗相间的干涉条纹。这些条纹与狭缝平行,条纹间的距离彼此相等。

实验中,由 S_1 和 S_2 发出的光满足相干光的条件。由于 S_1 和 S_2 是从 S 发出的波阵面上取出的两部分,所以把这种获得相干光的方法称为分波阵法。

当用波长为 λ 的单色光垂直入射于双缝实验装置时,观察屏上干涉条纹的分布可作如下分析。设实验装置置于空气中,如图 18-4 所示,在观察屏上取坐标 Ox ,坐标原点 O 与 S_1 和 S_2 的距离相等, P 为屏上距 O 为 x 的任意一点。由于 S_1 和 S_2 同相位,从它们发出光波的初相相同,为简单起见设为零。到达 P 点的两光波间光程差为

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta, \quad (18-5)$$

因为 $d \ll L$, 所以 θ 很小,有

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{L},$$

故

$$\delta = r_2 - r_1 \approx \frac{xd}{L}. \quad (18-6)$$

根据波的干涉条件,当光程差为波长的整数倍,即 $\delta \approx \frac{xd}{L} = \pm k\lambda$ 时,两光波的合振

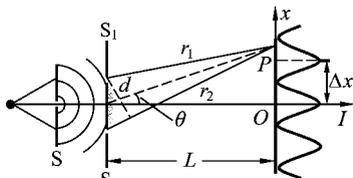


图 18-4

动加强,屏上 P 点处出现干涉明条纹。其位置为

$$x = \pm k \frac{L\lambda}{d} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (18-7)$$

式中 k 称为条纹的级次。 $k=0$ 的明条纹称为零级明纹或中央明纹,对应的光程差为零,位于 $x=0$ 处。在其两侧对称地分布着 $k=1, 2, 3, \dots$ 级明条纹。

当光程差为半波长的奇数倍,即 $\delta \approx \frac{xd}{L} = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 时,两光波的合振动减弱,屏上 P 点处为干涉暗条纹,其位置为

$$x = \pm(2k+1)\frac{L\lambda}{2d} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)。 \quad (18-8)$$

由式(18-7)和式(18-8)可得,屏上相邻两明条纹(或暗条纹)间的距离均为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{L\lambda}{d}。 \quad (18-9)$$

因此屏上两相邻明条纹(或暗条纹)间距离相等,即条纹等间距分布。

若用白光(复色光)垂直入射时,由式(18-7)可知,在屏上 $x=0$ 处,由于 $k=0$,不同波长的光在此作非相干叠加,故中央明纹为白色。在 $k \neq 0$ 处,由于 $x \propto \lambda$,不同波长的同一级明条纹在屏上的位置将相互错开,从而形成彩色的条纹分布。进一步考虑到 $\Delta x \propto \lambda$,可知级次越高,错开程度越大,由于不同波长的光之间不相干,它们在屏上是简单的光强叠加,因此随着离原点 O 的距离增加,条纹宽度也将增加,当宽度增加到一定时,相邻条纹将发生重叠,从而使条纹可见度下降以致消失(如图 18-5 所示)。

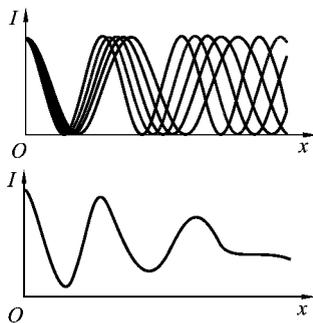


图 18-5

18.2.2 应用分波阵面方法的其他实验

历史上,有很多利用分波阵面的方法获得干涉现象的实验,这些实验的基本思想与杨氏实验类似。

洛埃于 1834 年提出了一种简单的观察干涉的装置,如图 18-6 所示。 MN 为一块平玻璃板,用作反射镜, S 是一狭缝光源,从光源发出的光波,一部分掠射(即入射角接近 90°)到平玻璃板上,经玻璃表面反射到达屏上;另一部分直接射到屏上。反射光可看成是由虚光源 S_2 发出的。 S 和 S_2 构成一对相干光源,它们也是分割波阵面得到的。

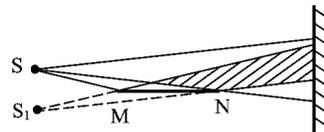


图 18-6

该装置在几何构型上与杨氏试验类似,因此干涉条纹的分析与杨氏实验相同。图

中画有阴影的区域表示相干光在空间叠加的区域,这时在屏上可以观察到明暗相间的干涉条纹。

在洛埃德镜实验中发现,当把观察屏移到和反射镜边缘 N 接触时,这时从 S 和 S_1 发出的光到达 N 的光程相等,该处应该出现明纹,但实验结果却是暗纹,其他的条纹也有相应的变化。这说明由镜面反射出来的光和直接射到屏上的光在 N 处的相位相反,即相位差为 π 。由于直射光的相位不会变化,所以只能认为光从空气射向玻璃平板发生反射时,反射光的相位改变了 π 。应用光的电磁理论,可以得出与实验一致的结论,当光以 0° 或接近 90° 的入射角从折射率较小的光疏介质入射到折射率较大的光密介质表面(垂直入射或掠入射)反射时,反射波的相位与入射波的相位间会产生 π 的相位突变,这一变化导致了反射光的光程在反射过程中附加了半个波长,这一现象被称为半波损失。

菲涅耳也进行了很多类似实验,其中比较主要的有双棱镜实验和双面镜实验。双棱镜实验装置如图 18-7 所示。双棱镜的截面是一个等腰三角形,两底角各约 1° 。左右由狭缝光源 S 发出的光波,经双棱镜折射后分为两束相干光,这两束光可等效地看做由两个虚光源 S_1 和 S_2 发出,在这两束光的重叠区域内将发生干涉,把观察屏放在这一区域中,屏上将出现干涉图样。由于棱镜的底角很小, S_1 和 S_2 之间的距离也很小,因此其几何构型也与杨氏双缝实验相似,同样可以用相同方法进行分析。

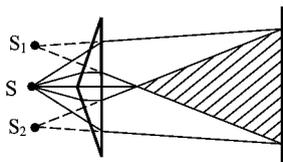


图 18-7

菲涅耳双镜由两个夹角很小的平面镜组成,如图 18-8 所示。从狭缝光源 S 发出的光波,经平面镜 M_1 和 M_2 反射后,分成向不同方向传播的两束光,等效于从两相干虚光源 S_1 和 S_2 发出的光,由于 M_1 和 M_2 之间的夹角很小,在两波交叠区域内将产生干涉。

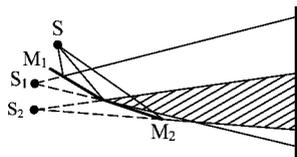


图 18-8

例 18-1 如图 18-9 所示,一射电望远镜的天线设在湖岸上,距湖面高度为 h 。对岸地平线上方有一颗恒星正在升起,发出波长为 λ 的电磁波。当天线第一次接收到电磁波的一个极大强度时,恒星的方位与湖面所成的角度 θ 为多大?

解 天线接收到的电磁波一部分直接来自恒星,另一部分经湖面反射,这两部分电磁波满足相干条件,天线接收到的极大强度是它们干涉的结果。

设电磁波在湖面上 A 点反射,由几何关系,并考虑到在水面反射时存在着半波损失,有

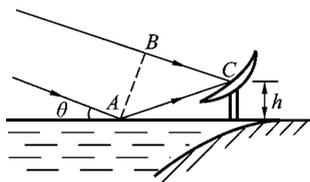


图 18-9

$$\delta = AC - BC \pm \frac{\lambda}{2},$$

$$AC - BC = \frac{h}{\sin\theta}(1 - \cos 2\theta) = 2h \sin\theta,$$

故

$$\delta = 2h \sin\theta + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

取 $k=1$, 即得 $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{4h}\right)$ 。

例 18-2 用薄云母片 ($n=1.58$) 覆盖在杨氏双缝的任一条缝上, 这时屏上的零级明纹移到原来的第七级明纹处。如果入射光波长为 550nm , 问云母片的厚度为多少?

解 如图 18-10 所示, 设原来的第七级明纹在 P 点处, 则

$$r_2 - r_1 = 7\lambda.$$

插入云母片后, P 处为零级明纹, 考虑到云母片很薄, 光通过它的路程近似为其厚度, 所以有

$$r_2 - (r_1 - d + nd) = 0.$$

由上面两式可得

$$7\lambda = d(n-1),$$

故

$$d = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 550 \times 10^{-9}}{1.58-1} = 6.6 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

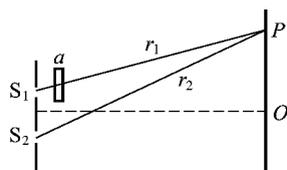


图 18-10

18.3 薄膜干涉

18.3.1 薄膜干涉的复杂性

日常生活中经常能见到各种薄膜干涉现象, 如阳光照射下的肥皂膜、水面上的油膜以及许多昆虫(如蜻蜓、蝴蝶等)翅膀上所呈现出来的彩色花纹。薄膜干涉现象是由于光在薄膜的两个表面上反射后在空间的一些区域内相遇而产生的。薄膜干涉时, 由于反射波和透射波的能量是由入射波的能量分出来的, 因此可以认为入射波的振幅被“分割”成若干部分, 这样获得相干光的方法被称为分振幅法。

薄膜干涉不仅与薄膜的表面形状有关, 如膜的厚度是否均匀、表面本身是否

平整等等;同时与光的照射方式也密切相关,如所用的光源是否可以看作点光源、光的入射角度如何等等。正是由于形成薄膜干涉的条件丰富多样,导致了薄膜干涉情况的复杂性。由于条件不同,所产生的干涉条纹形状各异,能产生干涉的区域也各不相同,可能在薄膜表面,可能在无穷远处,也可能在空间某一特定区域。在实际中,比较简单而应用较多的是厚度不均匀薄膜表面上出现的等厚干涉条纹和厚度均匀的薄膜在无穷远处形成的等倾干涉条纹。

18.3.2 等倾干涉条纹

考虑点光源照射到表面平整、厚度均匀的薄膜上产生的干涉条纹。如图 18-11 所示,设薄膜的折射率为 n_2 ,置于折射率为 n_1 ($n_1 > n_2$) 的介质中,薄膜厚度为 d 。由点光源发出的一条光线以某一入射角 i 入射到薄膜的上表面,一部分被上表面反射,另一部分折射进入下表面,被下表面反射后又经过折射回到入射空间。当薄膜厚度很小时,由反射和折射定律可知,在入射空间的两条反射光线相互平行,因此只能在无穷远处相交而产生干涉。实际应用时,通常利用透镜将这两条光线聚焦在透镜的焦平面上,以获得干涉条纹。严格说来,一束入射光在薄膜内可相继发生多次反射和折射,应考虑多束反射光和折射光间的干涉,但由于经多次反射后光的强度将迅速下降,因此在通常情况下不予考虑,并认为参与干涉的两光束振幅相等。

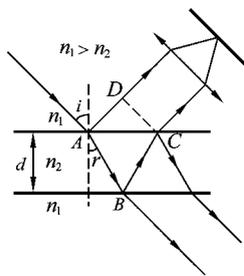


图 18-11

如图 18-11 可知,在薄膜上、下表面反射后的两束平行光线之间的光程差为

$$\delta = n_2(AB + BC) - n_1AD + \frac{\lambda}{2},$$

其中出现 $\frac{\lambda}{2}$ 是因为光在薄膜下表面反射时出现了半波损失。由几何关系

$$AB = BC = d/\cos r, \quad AD = AC \sin i = 2d \cdot \tan r \cdot \sin i,$$

可得两束光的光程差为

$$\begin{aligned} \delta &= 2n_2 \frac{d}{\cos r} - 2n_1 d \cdot \tan r \cdot \sin i + \frac{\lambda}{2} \\ &= \frac{2n_2 d}{\cos r} (1 - \sin^2 r) + \frac{\lambda}{2} = 2n_2 d \cos r + \frac{\lambda}{2}, \end{aligned} \quad (18-10)$$

利用折射定律 $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, 式(18-10)可改写为

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}. \quad (18-11)$$

当光程差为波长的整数倍时,即

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (18-12)$$

时,两反射光干涉相长, k 为明条纹的级次。

当光程差是半波长的奇数倍时,即

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (18-13)$$

时,反射光干涉相消, k 为暗条纹的级次。

同样的分析也适用于透射光的干涉情况。如图 18-11 所示,由于在 B 处被反射的光将经 C 点再一次反射后经过折射进入透射空间,与由 B 处直接折射进入透射空间的光形成平行的相干光束,因此它们之间的光程差为

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}.$$

式中不出现附加光程差是因为在下表面和上表面的两次反射都是由光密介质向光疏介质入射而被反射,每次反射均产生半波损失,其结果是两束光之间的光程差附加了一个波长,对应的位相差为 2π ,即相位相同。由此可见,透射光产生的干涉条纹将与反射光产生的干涉条纹互补,即当一束光入射到薄膜,若在反射光中是干涉相长的,则在透射光中必然是干涉相消,反之亦然。这是能量守恒定律在光的干涉现象中的必然表现。

由式(18-11)可知,对于厚度均匀的薄膜,光程差是由入射角 i 决定的。所有相同倾角入射的光经薄膜的上、下表面反射后产生的相干光束都有相同的光程差,从而对应于干涉图样中的一条条纹,故将此类干涉条纹称为等倾条纹。

在实验上获得等倾干涉条纹的装置如图 18-12 所示。从光源 S 发出的光入射到半透半反射的平面镜 M 上,被 M 反射的部分光射向薄膜,再被薄膜上、下表面反射,透过 M 和透镜 L 会聚到光屏上。 S 发出的沿不同方向传播的光只要以相同入射角 i 入射到薄膜表面上的光线应该在同一圆锥面上,它们的反射光在屏上会聚在同一个圆周上。因此,整个干涉图样是由一些明暗相间的同心圆环组成的。

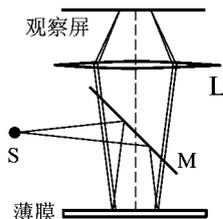


图 18-12

等倾干涉图样的特点可由式(18-11)予以分析,当入射角 i 越大时,光程差 δ 越小,相应的干涉级也越低。由图 18-12 可见,半径越大的圆环对应的 i 也越大,所以等倾干涉图样中心处的干涉级最高,越向外干涉级越低。此外,从中央向外各相邻明纹或相邻暗纹的间距也不同,呈内疏外密分布,如图 18-13 所示。

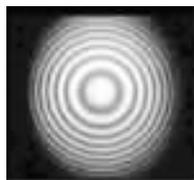


图 18-13

通常实验中所用的光源为面光源,面光源上每一点发出的光都要产生一组相

应的干涉条纹,由于方向相同的平行光都将被透镜会聚到焦平面上同一点,所以由光源上不同点发出的光线,只要入射角相同,它们所形成的条纹将重叠在一起。所以,干涉条纹的总光强是面光源上所有点发出的光产生的干涉条纹光强的非相干叠加,这样就使干涉条纹更加明亮。

18.3.3 等厚干涉条纹

当用平行光照射到表面平整、厚度不均匀的薄膜上时,产生的干涉条纹将出现在薄膜的上表面,通常我们在肥皂膜、油膜表面看到的就是这一类干涉条纹。在实验室中,通常利用平行光垂直入射获得此类干涉条纹,最常见的是劈形膜和牛顿环的干涉。

1. 劈形膜的干涉

劈形膜由两个平整的表面组成,两个面之间有一个角度很小的夹角,简称劈尖,如图 18-14 所示。当平行光垂直入射时,在膜的上下表面产生的反射光可以在膜的上表面处相遇而产生干涉。由于劈的顶角很小,可以近似把在上下表面反射的两束光看作均沿垂直方向向上传播,由此可得两反射光之间的光程差为

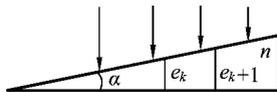


图 18-14

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}, \quad (18-14)$$

式中 e 是薄膜上某一位置处的厚度; $\frac{\lambda}{2}$ 是两反射光线之一在反射时由于半波损失而产生的附加光程差。由干涉极大与极小的条件可知

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{干涉极大,} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{干涉极小.} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

由上式可看到,对应于一定的级次 k ,无论是明条纹还是暗条纹都对应着一一定的薄膜厚度 e ,即在膜厚相同的地方是同一级条纹。正是由于这一特征,我们将其称之为等厚干涉条纹。由于劈形膜的厚度仅由距劈尖棱边的长度决定,因此劈尖干涉条纹应为平行于棱边的直条纹,在劈尖的棱边处为零级暗条纹,条纹级次随膜厚的增加而增加。若相邻两干涉条纹所对应的厚度分别为 e_k 和 e_{k+1} ,如图 18-14 所示,则相邻条纹所对应的薄膜厚度之差为

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n},$$

相邻条纹的间距

$$l = \frac{e_{k+1} - e_k}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \approx \frac{\lambda}{2n\alpha}.$$

显然,干涉条纹是等间距的,而且 α 越小,干涉条纹越疏; α 越大,干涉条纹越密。如果劈尖的夹角太大,干涉条纹将密集得无法看清,因此劈尖干涉只能在 α 很小时才能看到。

由上述结论可知,如果已知劈尖的夹角,那么,测出干涉条纹的间距 l ,就可以测出单色光的波长。同样,如果已知单色光的波长,那么就可以测出微小的角度。利用这个原理,可以测定细丝的直径或薄片的厚度。利用等厚干涉原理还可以检测物体表面的平整度。比如,在凹凸不平的玻璃板上放一块光学平板玻璃块,根据所显示的等厚干涉条纹的形状和间距,能够判断其表面的情况。

2. 牛顿环

牛顿环装置如图 18-15 所示,曲率半径为 R 的平凸透镜置于平板玻璃上,两者间形成厚度不均匀的空气膜。当单色平行光垂直地入射时,可以形成一组等厚干涉条纹。条纹是以接触点 O 为圆心的一组间距不等的同心圆环,称为牛顿环(图 18-16)。

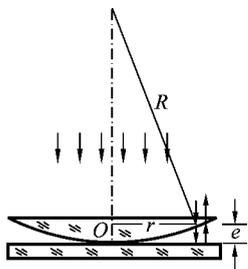


图 18-15

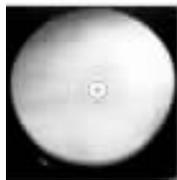


图 18-16

由于透镜的曲率半径很大,因此在空气膜上下表面反射的两束光的光程差与劈形膜的情形相似,可表示为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2},$$

当 $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ 时为明条纹, $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 时为暗条纹。

在中心接触点 O ,由于膜厚为零,由上面的暗纹条件可知,牛顿环的中心是一个暗斑,由中心沿半径向外,由于膜厚的变化是非线性的,因此条纹将呈内疏外密分布。由图 18-15 可以看到

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2Re - d^2 \approx 2eR,$$

所以

$$e = \frac{r^2}{2R}.$$

由此得牛顿环明纹和暗纹的半径分别为

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \text{明纹,}$$

$$r = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \text{暗纹.}$$

对于第 k 级和第 $k+1$ 级的暗环

$$r_k^2 = kR\lambda,$$

$$r_{k+m}^2 = (k+m)R\lambda,$$

$$r_{k+m}^2 - r_k^2 = mR\lambda,$$

由此可得透镜的曲率半径

$$R = \frac{1}{m\lambda}(r_{k+m}^2 - r_k^2) = \frac{1}{m\lambda}(r_{k+m} - r_k)(r_{k+m} + r_k).$$

在实验中,通常是通过测量明环或暗环的直径来达到测量透镜曲率半径的目的,这主要是因为牛顿环中心是一个暗斑,因此无法准确地确定圆心位置,给准确测量半径带来困难。

18.3.4 增透膜和增反膜

在比较复杂的光学系统中,由于存在着多个透镜,光在这些透镜的表面反射将导致光能量的严重损失。为了减少入射光在透镜表面反射时所引起的损失,常在镜面上镀一层厚度均匀的透明薄膜,利用薄膜的干涉效应使反射光减到最小,这样的薄膜称为增透膜。同样,在某些场合下,需要提高反射率,如激光器谐振腔的反射镜,其反射率要达到 99% 以上。为此目的,同样可以在镜片表面镀膜以增加反射率,这样的薄膜称为增反膜。

如图 18-17 所示,设膜的厚度为 e ,光垂直入射时薄膜两表面反射光的光程差等于 $2ne$,由于在膜的上下表面反射时都有相位突变,结果没有附加的相位差,于是两反射光干涉相消时应满足关系

$$\begin{array}{c} n_1 & n_1 < n_2 < n_3 \\ \hline n_2 \\ \hline n_3 \end{array}$$

图 18-17

$$2ne = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

由于反射光相消,因而透射光加强。

同理可知,如果

$$2ne = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots),$$

则反射光加强,成为高反膜。

必须指出,上述结果是在某一特定波长情况下得到的,因此一定厚度的膜对于不同波长是不可能全部满足增加反射的条件的,为了使较宽波长范围的光都能达到增反的目的,通常采用在表面上交替镀以多层高、低折射率膜的方法。

例 18-3 如用白光垂直入射到空气中厚为 320nm 的肥皂膜上(其折射率 $n=1.33$),问肥皂膜呈现什么色彩?

解 由于是垂直入射,因此经薄膜上下表面反射后光程差为

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

其中考虑了由空气入射到薄膜表面反射时的半薄损失。由上式得

$$\lambda = \frac{2nd}{k - 1/2},$$

取 $k=1, 2, 3$ 分别代入上式,得

$$\lambda_1 = 4nd = 1700(\text{nm}) \quad (\text{红外}),$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{3}nd = 567(\text{nm}) \quad (\text{黄色}),$$

$$\lambda_3 = \frac{4}{5}nd = 341(\text{nm}) \quad (\text{紫外}),$$

肥皂膜呈黄色。

例 18-4 平面单色光垂直照射在厚度均匀的油膜上,油膜覆盖在玻璃板上。所用光源波长可以连续变化,观察到 500nm 与 700nm 波长的光在反射中消失。油膜的折射率为 1.30 ,玻璃折射率为 1.50 ,求油膜的厚度。

解 由于光由空气入射到油膜反射时以及由油膜入射到玻璃时都存在半薄损失,因此光程差为两倍的油膜厚度与油膜折射率的乘积。设油膜厚度为 d ,则由题意可写出

$$2n_1d = (2k+1)\frac{\lambda_1}{2}, \quad 2n_1d = [2(k-1)+1]\frac{\lambda_2}{2},$$

故 $(2k+1)\frac{\lambda_1}{2} = (2k-1)\frac{\lambda_2}{2}$,

将 $\lambda_1=500\text{nm}$, $\lambda_2=700\text{nm}$ 代入后解得 $k=3$ 。故有 $d = 6.73 \times 10^{-4}\text{mm}$ 。

18.3.5 迈克尔逊干涉仪

迈克尔逊干涉仪的基本思想是分振幅方法,其结构如图 18-18 所示。平面反射镜 M_1 和 M_2 安置在相互垂直的两臂上, M_2 固定不动, M_1 可沿臂的方向作微小移动。与一臂成 45° 安置有两块完全相同的平行平板玻璃 G_1 和 G_2 。 G_1 为半透半反镜,可以将入射光分成强度相等的透射光 1 和反射光 2, G_2 起补偿光程的作用,

使分束后的光线 1 与光线 2 一样,两次通过平板玻璃,从而保证光线 1' 和 2' 会聚时的光程差与 G_1 的厚度无关。透射光 1 被 M_1 反射后又被分束器反射,成为光线 1' 进入观察系统 E。 M'_1 是 M_1 对 G_1 反射所成的虚像,光线 1' 犹如反射自 M'_1 。反射光 2 则被 M_2 反射后又经分束器透射,成为光线 2' 进入观察系统 E。所以 1' 和 2' 是相干光,它们相遇时可以形成干涉现象。

当 M_1 和 M_2 相互严格垂直时, M'_1 和 M_2 之间形成厚度均匀的空气膜,这时可以观察到等倾干涉现象。当 M_1 和 M_2 不严格垂直时, M'_1 和 M_2 之间形成空气劈尖,可以观察等厚干涉现象。

迈克尔逊干涉仪可精确测定微小位移。当 M_1 的位置发生微小变化时, M'_1 和 M_2 之间的空气劈保持夹角不变,但厚度发生变化。在 E 处可观察到等厚干涉条纹的平移。当 M_1 (M'_1) 的位置变化了半个波长时,视场中某一处将移过一个明(或暗)条纹。当连续移过 N 个干涉条纹时, M_1 移动的距离为 $N \frac{\lambda}{2}$ 。

迈克尔逊干涉仪既可以用来观察各种干涉现象及其条纹变动的情况,也可以用来对长度及光谱线的波长和精细结构等进行精密的测量。同时,它还是许多近代干涉仪的原型。为此,迈克尔逊获得 1907 年的诺贝尔物理学奖。

例 18-5 当把折射率为 $n=1.40$ 的薄膜放入迈克尔逊干涉仪的一臂时,如果产生 7 条纹的移动,求薄膜的厚度(已知钠光的波长为 $\lambda=589.3\text{nm}$)。

解 设未放入薄膜时光程差为零,放入薄膜后光程差

$$\Delta\delta = 2(n-1)t = \Delta k\lambda,$$

故

$$t = \frac{\Delta k \cdot \lambda}{2(n-1)} = \frac{7 \times 589.3 \times 10^{-9}}{2(1.4-1)} = 5.154 \times 10^{-6} \text{m}.$$

例 18-6 用钠灯($\lambda_1=589\text{nm}$, $\lambda_2=589.6\text{nm}$)作为迈克尔逊干涉仪的光源,首先调整干涉仪得到最清晰的条纹,然后移动反射镜 M_1 ,条纹逐渐模糊,至干涉现象第一次消失时, M_1 由原来位置移动了多少距离?

解 这是不同波长的两组干涉条纹的非相干叠加。条纹最清晰时两组相干光各自的相位差均为 2π 的整数倍,随着光程差增加,两组相干光的相位差也在变化,但变化的快慢程度不同,两组条纹将相互错开,由于是非相干叠加,条纹变模糊。当两组相干光的相位差相差 π 时,条纹消失。故有

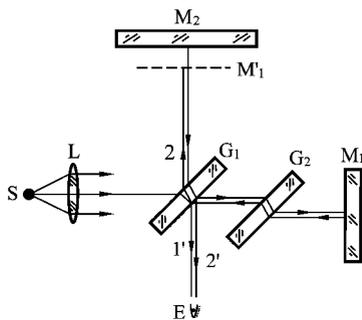


图 18-18

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot 2d - \frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot 2d = \pi,$$

$$d = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)^{-1} = 0.145 \text{mm}.$$

习题 18

18-1 杨氏双缝的间距为 0.2mm, 距离屏幕为 1m。求:

- (1) 若第一级明纹距离为 7.5mm, 求入射光波长。
- (2) 若入射光的波长为 6000Å, 求相邻两明纹的间距。

18-2 图 18-19 为用双缝干涉来测定空气折射率 n 的装置。实验前, 在长度为 l 的两个相同密封玻璃管内都充以一大气压的空气。现将上管中的空气逐渐抽去。

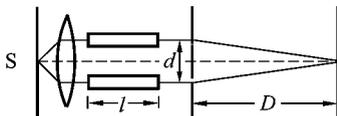


图 18-19

- (1) 问光屏上的干涉条纹将向什么方向移动。
- (2) 当上管中空气完全抽到真空, 发现屏上波长为 λ 的干涉条纹移过 N 条。计算空气的折射率。

18-3 在图 18-20 的光路中, S 为光源, 透镜 L_1 、 L_2 的焦距都为 f 。求:

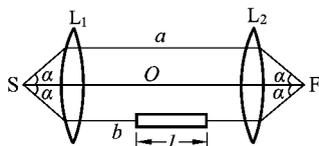


图 18-20

- (1) 图中光线 SaF 与光线 SOF 的光程差为多少?
- (2) 若光线 SbF 路径中有长为 l , 折射率为 n 的玻璃, 那么该光线与 SOF 的光程差为多少?

18-4 在玻璃板(折射率为 1.50)上有一层油膜(折射率为 1.30)。已知对于波长为 500nm 和 700nm 的垂直入射光都发生反射相消, 而这两波长之间的波长光反射相消, 求此油膜的厚度。

18-5 一块厚 $1.2\mu\text{m}$ 折射率为 1.50 的透明膜片。设以波长介于 400~700nm 的可见光垂直入射, 求反射光中哪些波长的光最强?

18-6 用 $\lambda=589.3\text{nm}$ 的光垂直入射到楔形薄透明片上, 形成等厚条纹, 已知膜片的折射率为 1.52, 等厚条纹相邻纹间距为 5.0mm, 求楔形面间的夹角。

18-7 人造水晶珥钻戒是用玻璃(折射率为 1.50)做材料, 表面镀上一氧化硅(折射率为 2.0)以增强反射, 要增强 $\lambda=560\text{nm}$ 垂直入射光的反射, 求镀膜厚度。

18-8 由两平玻璃板构成的一密封空气劈尖, 在单色光照射下, 形成 4001 条暗纹的等厚干涉, 若将劈尖中的空气抽空, 则留下 4000 条暗纹, 求空气的折射率。

18-9 用钠灯($\lambda=589.3\text{nm}$)观察牛顿环, 看到第 k 条暗环的半径为 $r=4\text{mm}$, 第 $k+5$ 条暗环半径 $r=6\text{mm}$, 求所用平凸透镜的曲率半径 R 。

18-10 当把折射率为 $n=1.40$ 的薄膜放入迈克尔逊干涉仪的一臂时, 如果产生了 7.0 条条纹的移动, 求薄膜的厚度(已知钠光的波长为 $\lambda=589.3\text{nm}$)。

思考题 18

18-1 在劈尖的干涉实验中, 相邻明纹的间距_____ (填相等或不等), 当劈尖的角度增

加时,相邻明纹间的距离将_____ (填增加或减小),当劈尖内介质的折射率增加时,相邻明纹间的距离将_____ (填增加或减小)。

18-2 图 18-21 为一干涉膨胀仪示意图,上下两平行玻璃板用一对热膨胀系数极小的石英柱支撑着,被测样品 W 在两玻璃板之间,样品上表面与玻璃板下表面间形成一空气劈尖,在以波长为 λ 的单色光照射下,可以看到平行的等厚干涉条纹。当 W 受热膨胀时,条纹将_____。

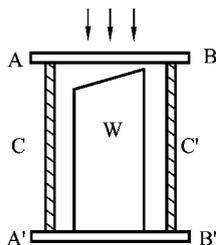


图 18-21

- (A) 条纹变密,向右靠拢
- (B) 条纹变疏,向上展开
- (C) 条纹疏密不变,向右平移
- (D) 条纹疏密不变,向左平移

18-3 如图 18-22 所示,在一块光学平玻璃片 B 上,端正地放一锥顶角很大的圆锥形平凸透镜 A,在 A、B 间形成劈尖角 φ 很小的空气薄层。当波长为 λ 的单色平行光垂直地射向平凸透镜时,可以观察到在透镜锥面上出现干涉条纹。求:

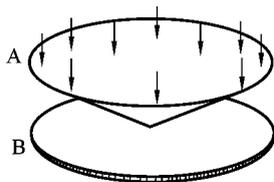


图 18-22

- (1) 画出干涉条纹的大致分布并说明其主要特征;
- (2) 计算明暗条纹的位置;
- (3) 若平凸透镜稍向左倾斜,干涉条纹有何变化?用图表示。

18-4 若待测透镜的表面已确定是球面,可用观察等厚条纹半径变化的方法来测定透镜球面半径比标准样规所要求的半径是大还是小。如图 18-23 所示,若轻轻地从上面向下按样规,则图_____ 中的条纹半径将缩小,而图_____ 中的条纹半径将增大。

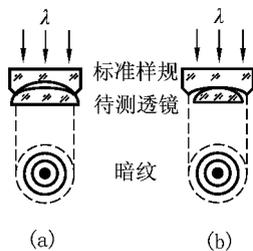


图 18-23

18-5 图 18-24 中的(a)为检查块规的装置, G_0 为标准块规, G 为上端面待测的块规,用波长为 λ 的平行光垂直照射,测得平晶与块规之间空气劈尖的干涉条纹如图 18-24(b)所示,对于与 G_0 和 G 的条纹间距分别为 l_0 和 l ,且 $l_0 < l$ 。若将 G 转过 180° ,两侧条纹均比原来密。

- (1) 判断并在图(c)中画出 G 规上端面的形貌示意图;
- (2) 求 G 规左、右侧与 G_0 的高度差。

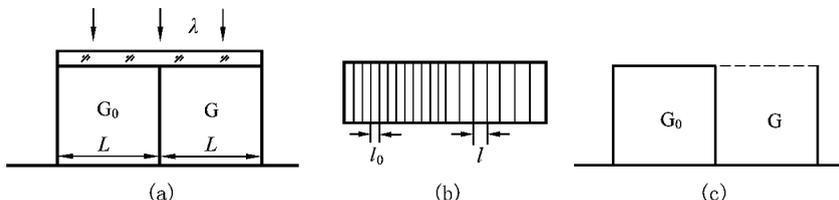


图 18-24

18-6 如图 18-25 所示,牛顿环装置中平凸透镜与平板玻璃间留有一厚度为 e_0 的气隙,若

已知观测所用的单色光波长为 λ , 平凸透镜的曲率半径为 R 。

(1) 试导出 k 级明条纹和暗条纹的公式;

(2) 若调节平凸透镜与平板玻璃靠近, 试述此过程中牛顿环将如何变化?

(3) 试判别在调节过程中, 在离开中心 r 处的牛顿环某干涉条纹宽度 Δr_k 与 e 的厚度有无关系? 叙述简明理由, 并算出在该处的条纹宽度。

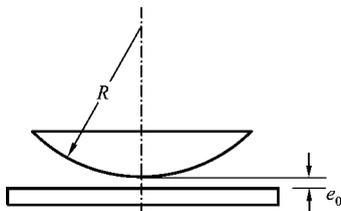


图 18-25

18-7 登月宇航员声称在月球上唯独能够用肉眼分辨

地球上的人工建筑是中国的长城。你依据什么可以判断这句话是真是假? 需要哪些数据?

第 19 章 光的衍射

19.1 光的衍射现象

光的衍射现象是指当光在传播过程中遇到障碍物后会偏离原来的直线传播方向,并在绕过障碍物后空间各点的光强会产生一定规律分布的现象,图 19-1 是光经过圆孔和狭缝后的衍射图像,这是光的波动性的具体表现。

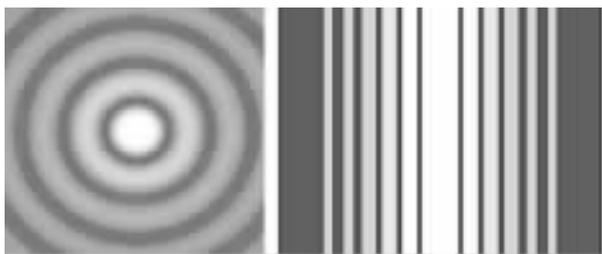


图 19-1

由于光波的波长很短,因此在一般情况下,光的衍射现象并不明显。实验表明,只有当障碍物的大小与光的波长可以相比拟时,才能观察到衍射现象。

观察衍射现象的实验装置一般由光源、衍射屏和观察屏三部分组成。根据三者间相互距离的不同,通常将衍射分为两类:一类是衍射屏离光源和观察屏的距离为有限远时的衍射,称为菲涅耳衍射(如图 19-2 所示);另一类是衍射屏与光源和观察屏的距离都是无穷远的衍射,也就是照射到衍射屏上的入射光和离开衍射屏的衍射光都是平行光的衍射,称为夫琅禾费衍射(如图 19-3

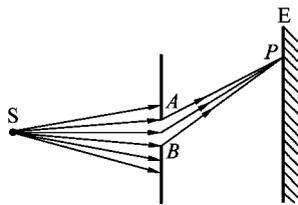


图 19-2

(a)所示),夫琅禾费衍射可用两个会聚透镜来实现(如图 19-3(b)所示)。由于在大多数光学仪器中出现的主要是夫琅禾费衍射,而且其分析与计算比菲涅耳衍射简单,因此本章只讨论夫琅禾费衍射。

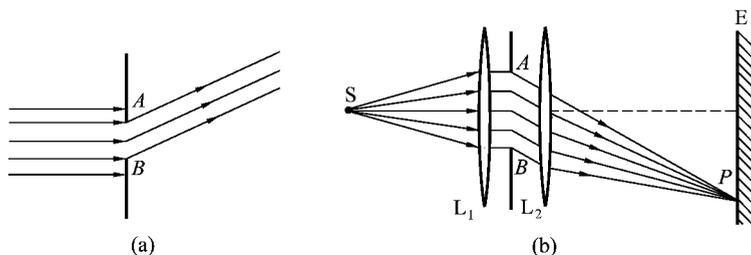


图 19-3

19.1.1 惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯原理可以对波经过障碍物后偏离原来的直线传播方向的现象做定性解释,但不能解释为什么光经过障碍物衍射后空间各点的光强将发生明暗相间的分布。菲涅耳在惠更斯原理的基础上,引入子波的相干叠加思想,进一步发展了惠更斯原理。菲涅耳假定:波在传播过程中,从同一波阵面上各点发出的子波,经传播而在空间某点相遇时,将产生相干叠加。菲涅耳对惠更斯原理的发展,不仅使人们可以对衍射问题进行定量地描述,同时也揭示了衍射现象的本质。这个发展了的惠更斯原理称为惠更斯-菲涅耳原理。

19.1.2 单缝夫琅禾费衍射

单缝夫琅禾费衍射如图 19-4 所示。单色线光源 S 置于透镜 L_1 的焦平面上,经透镜 L_1 成为平行光,并垂直照射在与线光源平行的狭缝 AB 上,狭缝宽度为 a ,光通过狭缝后由于衍射,将向各方向传播,衍射光偏离与狭缝所在平面法线的倾角 φ 称为衍射角。入射到狭缝上的平面波波阵面上只有处于狭缝 AB 间的波阵面可通过狭缝,根据惠更斯原理,波阵面 AB 上所有次波波源都向各个方向发射次波,所有衍射角 φ 相同的衍射光线经透镜 L_2 后将会聚在置于其焦平面处的观察屏 E 上。按照菲涅耳的思想, AB 上所有的次波源都是相干波源,且初相位相同(不妨设为零),它们在 L_2 的焦平面上某处相遇时将发生干涉。

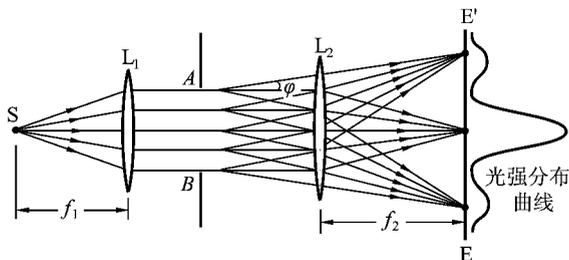


图 19-4

观察屏上任意位置 P 处的光振动决定于到达 P 的所有次波的光程差,如图 19-5 所示。作一些平行于 AC 的平面,使相邻平面间距等于入射光的半波长,即 $\frac{\lambda}{2}$ 。如果这些平面将单缝处的波阵面 AB 分成 AA_1 、 A_1A_2 、 A_2B 等整数个波带(如图 19-6 所示),由于各个波带的面积相等,所以各个波带在 P 点引起的光振动振幅近乎相等。两相邻的波带上,任何两个相应点所发出的子波的波程差总是 $\frac{\lambda}{2}$,亦即相位差总是 π 。由于透镜不产生附加相位差,所以经透镜聚焦后到达 P 点时相位差仍然是 π 。因此任意两个相邻波带所发出的子波在 P 点引起的光振动将相互抵消。由此可见,对应于一定角度 φ ,当单缝可分成偶数个波带时,所有波带的作用相互抵消,在 P 点处将出现暗纹;如果单缝可分成奇数个波带,其中偶数个波带作用相互抵消,剩下的一个波带由于未被抵消,在 P 点处将出现明纹。由于最边缘的两条衍射光间的光程差为

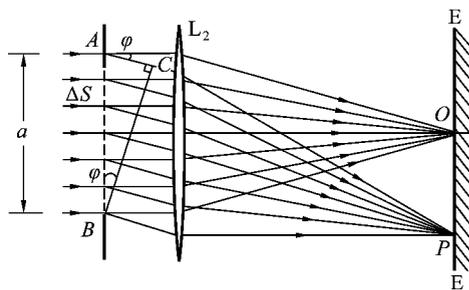


图 19-5

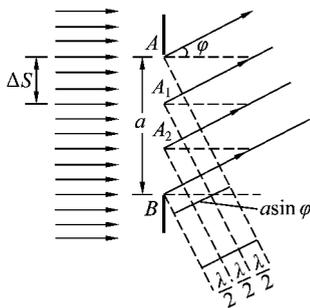


图 19-6

$$\overline{AC} = a \sin \varphi,$$

因此上述结果可表示为,当 φ 满足

$$a \sin \varphi = 2k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (19-1)$$

时为暗纹。在两个第一级($k = \pm 1$)暗纹之间的区域,即 φ 满足

$$-\lambda < a \sin \varphi < \lambda$$

的范围为中央明纹。当 φ 满足

$$a \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (19-2)$$

时为其他各级明纹。在近轴条件下, φ 角很小, $\sin \varphi \approx \varphi$,第一级暗条纹的衍射角

$$\varphi_{\pm 1} = \pm \frac{\lambda}{a},$$

由此可得中央明纹的角宽度为

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_{-1} = 2 \frac{\lambda}{a}. \quad (19-3)$$

在观察屏上,中央明纹的线宽度为

$$l_0 \approx f\Delta\varphi_0 = 2f \frac{\lambda}{a}, \quad (19-4)$$

式中 f 是 L_2 的焦距。同理可得,相邻两暗纹中心(或明纹中心)的角宽度为

$$\Delta\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{\lambda}{a}. \quad (19-5)$$

中央明纹的宽度是其他各级明纹宽度的两倍。

对任意衍射角 φ 而言, AB 一般不能正好分成整数个波带,此时,衍射光经透镜聚焦后,在屏幕上形成介于最明和最暗之间的中间区域。单缝衍射的光强分布如图 19-7 所示,其特征为中央明条纹(即零级明纹)最亮,同时也最宽。其他各级明纹的光强随着级数的增大而逐渐减小。这是由于随着 φ 角的增大,产生子波的波阵面上划分出的波带数也增加,而未被抵消的波带面积仅占单缝面积的一小部分,从而导致了光强的迅速下降。

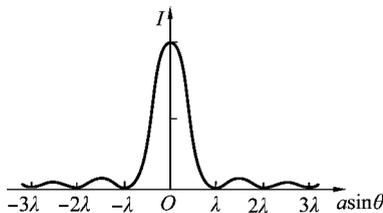


图 19-7

由式(19-4)可知,入射光波长 λ 一定时,缝宽 a 越小,中央明纹越宽,衍射越显著。反之,随着 a 的扩大,各级条纹将逐渐向中央靠近,当 $a \gg \lambda$ 时,密集得将无法分辨,此时在屏幕上出现单缝的几何像。当缝宽一定时,如果用白光入射,由于衍射角 φ 正比于波长,除中央明纹中心因各单色光非相干地重叠在一起仍为白色外,各级明条纹都由紫到红地向两侧对称排列,形成衍射光谱。

例 19-1 在缝宽为 $a=0.10\text{mm}$ 的单缝后放一焦距为 50cm 的会聚透镜,用平行绿光($\lambda=546.0\text{nm}$)垂直照射单缝,求位于透镜焦平面处屏幕上的中央明条纹及第二级明条纹宽度。

解 观察屏上明条纹的线宽度由相邻两个暗纹中心的距离决定。在观察屏上取坐标轴 Ox 向上为正,坐标原点在透镜焦点处。设屏上第 k 级暗纹的位置为 x ,由单缝夫琅禾费衍射暗纹条件

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda.$$

因 φ 很小,故有

$$\sin \varphi \approx \tan \varphi = \frac{x}{f},$$

即

$$x_k = k \frac{f}{a} \lambda,$$

令 $k = \pm 1$, 得中央明纹线宽度

$$\Delta x_0 = x_1 - x_{-1} = 2 \frac{f}{a} \lambda = 5.46 \text{mm}.$$

第 k 级明纹宽度

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = (k+1) \frac{f}{a} \lambda - k \frac{f}{a} \lambda = \frac{f}{a} \lambda.$$

各级明纹宽度 Δx_k 相等, 与级次 k 无关。所以, 第二级明纹宽度

$$\Delta x_2 = \frac{f}{a} \lambda = 2.73 \text{mm}.$$

19.2 圆孔衍射和光学仪器的分辨本领

1. 夫琅禾费圆孔衍射

当用小圆孔代替夫琅禾费衍射装置中的单缝时, 在屏上将出现夫琅禾费圆孔衍射图样, 如图 19-8 所示。夫琅禾费圆孔衍射图样中心是一个大而亮的圆斑, 称为爱里斑。如果增大圆孔的直径直至 $d \gg \lambda$, 衍射图样将向中心靠拢, 最后成为一个亮斑, 这就是孔的几何像。圆孔衍射现象普遍存在于光学仪器中, 如照相机、望远镜、显微镜及人眼的瞳孔。所有对波阵面有限制的孔径, 都会产生衍射现象, 从而影响光学仪器分辨物体细节的能力。

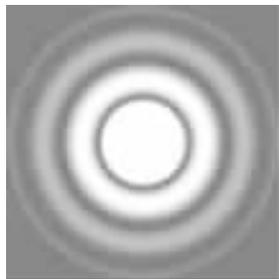


图 19-8

由理论计算可得, 第一级暗纹的衍射角 θ_1 满足下式:

$$\sin \theta_1 = 0.61 \frac{\lambda}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{d},$$

式中 r 和 d 是圆孔的半径和直径。爱里斑的角半径 θ_0 就是第一级暗纹所对应的衍射角, 有

$$\theta_0 = \sin \theta_1 = 0.61 \frac{\lambda}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{d}. \quad (19-6)$$

若透镜焦距为 f , 则爱里斑的半径为

$$R = f \tan \theta_1 \approx f \theta_0.$$

由此可知, λ 越大或 d 越小, 衍射现象就越明显, 当 $\frac{\lambda}{d} \ll 1$ 时, 衍射现象可忽略。爱

里斑中集中了全部衍射光强的 84%，第一级亮环只占 7.2%，其他亮环则更小。

2. 光学仪器的分辨本领

如图 19-9 所示,由物体上的两个点发出的光线通过透镜(或人眼的瞳孔)时,将发生衍射,因此在透镜的焦平面(如视网膜)上所成的不是严格的几何像点,而是两个衍射斑。由于这两束光是由物体不同部分发出的,因而为非相干光,在它们的重叠区域内合光强为两束光光强的简单相加。如果这两个物点相距很近,而它们形成的衍射圆斑又比较大,以致两个圆斑绝大部分互相重叠,那么就分辨不出是两个物点了。如果圆斑足够小,或两者间距离足够远,那么两圆斑虽有重叠但也能分辨,如图 19-10 所示。

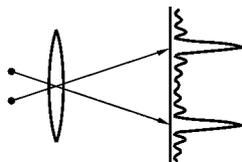


图 19-9

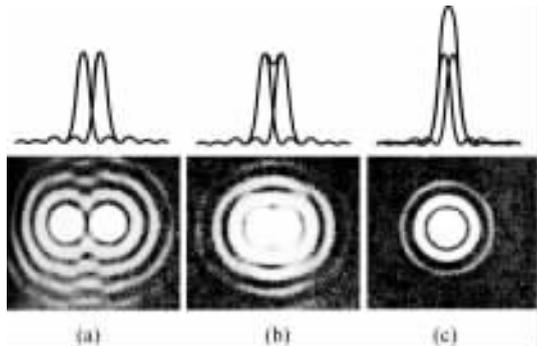


图 19-10

对一个光学仪器来说,如果一个点光源的衍射图样的中央最亮处刚好与另一个点光源的衍射图样的第一个最暗处相重合(图 19-10(b)),这时两衍射图样重叠区的光强合成光强曲线(凹陷处)约为单个衍射图样的中央最大光强的 80%，一般人的眼睛刚能分辨出这是两个光点的像。可以认为此时这两个点光源恰好为这一光学仪器所分辨。将此条件称为瑞利判据。由此可求出两物点的距离作为光学仪器能分辨的两物点的最小距离。

以圆孔形透镜为例,“恰能分辨”的两点光源的两衍射图样中心之间的距离,应等于爱里斑的半径。此时,两点光源在透镜处所张的角称为最小分辨角,用 $\delta\theta$ 表示(如图 19-11 所示)。对于直径为 d 的圆孔衍射图样而言,爱里斑的角半径 θ_0 由下式给出:

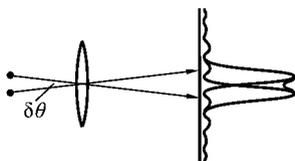


图 19-11

$$\theta_0 \approx \sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{d}.$$

最小分辨角 $\delta\theta$ 可表示为

$$\delta\theta = \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{d}, \quad (19-7)$$

即最小分辨角的大小由仪器的孔径 d 和光波的波长 λ 决定。在光学中,常将光学仪器的最小分辨角的倒数称为仪器的分辨本领(或分辨率)。

式(19-7)表明,提高光学仪器分辨本领的有效途径是增大透镜的直径或采用较短的光波波长。在天文观测中,为了提高望远镜的分辨本领,必须加大透镜的直径,哈勃望远镜主镜的直径达 2.4m。同理,若所用光的波长 λ 越短,分辨本领也越高。因此,利用波长约 10^{-3} nm 的电子束,可以制成最小分辨距离达 0.1nm 的电子显微镜。其放大倍数可达几万乃至几百万,远大于光学显微镜的放大率。

19.3 光栅衍射

19.3.1 衍射光栅

在一块平玻璃上刻划 $N+1$ 条等间距的平行线,就构成了一块 N 条狭缝的光栅。相邻两条刻线之间的玻璃就是一条狭缝,如果用单色平行光照射这 N 条狭缝,则等效于 N 个以相同相位振动的波源。因此屏上的光强应分为 N 个相干点源发出的光的相干叠加,如图 19-12 所示。

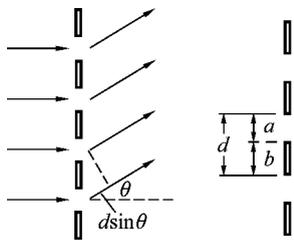


图 19-12

设透光部分宽度为 a ,不透光部分宽度为 b ,将光栅的周期为 $d=(a+b)$ 称为光栅常数。普通光栅在 1cm

长度范围内可有几百乃至上万条透光缝,光栅常数为 $d=\frac{1}{N}$,这里 N 为缝数。

光栅衍射的光强分布如图 19-13 所示,其基本特征如下:① 存在着一系列被称做主极大的细而明亮的明条纹,在主极大间较宽的范围内,分布着一些称做次极大的光强很弱的明条纹;② 主极大的位置与狭缝数目 N 无关,随着 N 增加,条纹宽度变窄,强度增加;③ 相邻主极大间有 $(N-1)$ 个极小和 $(N-2)$ 个次极大,当 N 很大时,由于次极大强度很弱,以致于无法看清时,形成了较宽的暗背景;④ 主极大的光强在空间有一定分布,如图 19-13 中虚线所示,其形状与单缝衍射光强分布相同。这主要是因为有一定的缝宽,因而通过每一狭缝的光都产生了单缝衍射

所致。

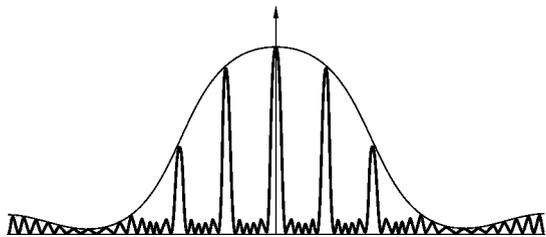


图 19-13

当用白光照射时,由于入射光中包含着各种不同的波长成分,它们之间是非相干的,因此每个波长的光都会形成各自的衍射光强分布,而不同波长的光形成的各级主极大在空间位置不同,从而形成了光栅光谱。由于每一谱线都细而明亮,很容易被分辨开,从而使衍射光栅成为一种重要的分光元件。

19.3.2 光栅方程

在不考虑单缝衍射效应的情况下,观察屏上的光强分布为

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \quad (19-8)$$

式中 $\varphi = kd\sin\theta$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; d 为光栅常数; θ 为衍射角。由式(19-8)可知,当分母为零时,即

$$\varphi_n = \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (19-9)$$

时,光强取极大值, $I = NI_0$ 。此时

$$kd\sin\theta_n = \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (19-10)$$

$$d\sin\theta_n = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (19-11)$$

式(19-11)称为光栅方程,它给出了光栅衍射主极大的角位置 θ_n 。这一条件从图 19-12 上可以很容易地看出来。要使所有平行光线都是同相位的,相邻光线之间的光程差就必须都等于 $n\lambda$ 。由于每对光线的光程差均为 $d\sin\theta$,因此主极大必然满足式(19-11)。

由式(19-8)可知,当分子为零时可以得到暗条纹所满足的条件,即

$$N\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm m\pi \quad (m = 1, 2, \dots, m \neq N, 2N, \dots), \quad (19-12)$$

相应地有

$$d\sin\theta_m = \pm \frac{m}{N}\lambda. \quad (m = 1, 2, \dots, m \neq N, 2N, \dots), \quad (19-13)$$

为暗条纹所满足的光程差条件。比较式(19-11)和式(19-13)可知,在 k 和 $(k+1)$ 两个主极大之间存在着 $m=kN+1, kN+2, \dots, [(k+1)N-1]$ 共 $N-1$ 个暗纹,可以想见,在这 $N-1$ 个暗纹间一定还存在着 $N-2$ 个次极大。

若进一步考虑到单缝衍射的效应,由于单缝衍射光强分布与单缝位置无关,因此通过 N 个缝的衍射分布图样在屏上相互重叠。由于通过各缝的光是相干光,因此是相干叠加,从而形成光栅条纹。由此可见,光栅衍射主极大的光强分布是多缝干涉与单缝衍射效应的效应,这被称为多缝干涉光强分布受到了单缝衍射光强分布的调制。光栅衍射主极大光强的包络线形状由单缝衍射的光强分布决定。如图 19-14 所示。

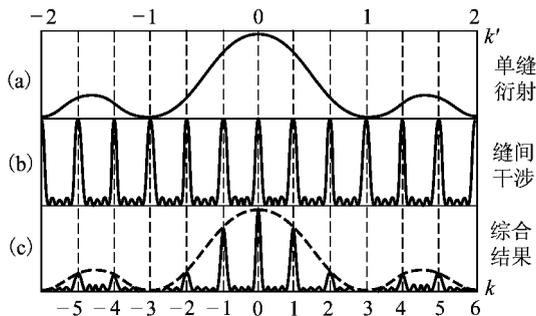


图 19-14

由图 19-14 可以看到,在 $k=\pm 3, \pm 6$ 处,本应出现的主极大由于单缝衍射的调制作用而出现了缺失,我们把这种现象称为缺级现象。在出现缺级的衍射方向上,衍射角 θ 应同时满足光栅衍射主极大和单缝衍射极小的条件,即

$$(a+b)\sin\theta = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

和

$$a\sin\theta = \pm n'\lambda \quad (n' = 1, 2, \dots),$$

由上两式可得缺级条件

$$n = \pm \frac{a+b}{a}n' \quad (n' = 1, 2, \dots). \quad (19-14)$$

19.3.3 光栅光谱和分辨本领

1. 光栅光谱

由光栅方程(式(19-11))可知,当波长不同时,同一级主极大的衍射角不同

$$\sin\theta_n = \pm \frac{n\lambda}{d} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

即在光栅常数和级次均确定的情况下,衍射角随波长增加而增加,而在 $n=0$ 时,衍射角与波长无关。因此,当用白光照射时,在屏上将出现除中央零级条纹是白色条纹外,其他各级条纹都将由紫至红地向两侧排列,从而出现衍射光谱。并且随着级次的增加,同一级光谱中各不同波长成分的主极大间距也将变大,如图 19-15 所示。



图 19-15

2. 光栅的分辨本领

光栅分辨波长差为 $\Delta\lambda$ 的两条谱线的能力称光栅的分辨本领,其定义为

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (19-15)$$

按照瑞利判据,当波长为 λ 的 k 级主极大与同级光谱中波长为 $\lambda + \Delta\lambda$ 的第一个极小的角位置重合时,这两条谱线恰可分辨。由式(19-11)和式(19-13)有

$$k\lambda = \frac{kN-1}{N}(\lambda + \Delta\lambda).$$

由此可得光栅的分辨本领为

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx kN - 1 \approx kN. \quad (19-16)$$

光栅的分辨本领决定于光谱的级次 k 和光栅的缝数 N 的乘积。一般光栅的缝数达几千甚至上万条,因此其分辨不同波长的能力很强。同时可以看到,在缝数一定的情况下,级次越高,分辨本领也越强。但由于受单缝衍射调制的影响,级次高的衍射主极大强度将急剧下降。一般而言,不宜靠利用高级次的条纹来提高分辨率。

例 19-2 波长为 600nm 的单色光垂直入射到一光栅上,相邻的两条明纹分别出现在 $\sin\theta=0.20$ 与 $\sin\theta=0.30$ 处,第四级缺级。试问:

- (1) 光栅常数多大?
- (2) 狭缝的最小宽度为多大?

解 由光栅方程和单缝衍射极小所满足的条件有

$$(a+b)\sin\theta = k\lambda, \quad (a+b) = 4a,$$

由此得

$$\sin\theta = \frac{k\lambda}{4a},$$

按题意有

$$\sin\theta_k = \frac{k\lambda}{4a} = 0.20, \quad \sin\theta_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{4a} = 0.30,$$

联立后得

$$\frac{(k+1)\lambda}{4a} = \frac{k\lambda}{4a} + \frac{\lambda}{4a} = 0.20 + \frac{\lambda}{4a} = 0.30,$$

解得

$$a = \frac{\lambda}{4(0.30 - 0.20)} = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad (a+b) = 6.0 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

例 19-3 设计一平面光栅,要求当用白光垂直入射时,能在 30° 的衍射方向上看到 600nm 波长的第二级主极大,但在该方向上 400nm 波长的第三级主极大不出现。

解 由光栅方程 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$, 因为在 30° 的方向能看到 600nm 波长的第二级主极大, 所以有

$$(a+b) = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{\sin 30^\circ} = 24 \times 10^{-4} \text{ mm}.$$

而在该方向上 400nm 波长的第三级主极大不出现, 因此得到

$$k = \frac{24 \times 10^{-4} \sin 30^\circ}{4 \times 10^{-4}} = 3.$$

可见在 30° 的方向应能看到 400nm 波长的第三级主极大, 为使其不出现, 必须是在该位置上存在缺级现象, 即在 30° 方向上 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$ 和 $a\sin\theta = k'\lambda$ 同时成立, 故

$$k = \frac{a+b}{a} k' = 3.$$

以 $(a+b) = 24 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 代入得

$$a = \frac{24 \times 10^{-4}}{3} k' = 8 \times 10^{-4} k'.$$

当 $k' = 1$ 时, $a = 8 \times 10^{-4} \text{ mm}$, $b = 16 \times 10^{-4} \text{ mm}$; 当 $k' = 2$ 时, $a = 16 \times 10^{-4} \text{ mm}$, $b = 8 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 。

请思考, 为什么不能取 $k' \geq 3$?

* 19.4 X 射线的衍射

X 射线是伦琴在 1895 年发现的。它是在高速电子撞击某些固体时产生的一种波长很短、穿透力很强的电磁波, 其波长约为 0.1nm 数量级。对于这样短的波长, 通常的光学光栅已毫无用处。

1912年劳厄利用薄片晶体作为衍射光栅,直接观察到了X射线的衍射图样。图19-16是实验示意图。劳厄所拍摄的第一张X射线通过晶体后的衍射照片如图19-17所示。研究表明,这些具有某种对称性的斑点是由晶体衍射线的主极大形成的,被称为劳厄斑。X射线通过晶体衍射的图样表明,晶体具有周期性结构,可以抽象成由许多周期排列的格点组成的点阵。

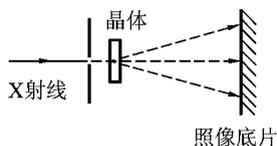


图 19-16

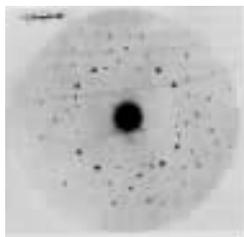


图 19-17

布拉格把晶体的空间点阵简化,当作反射光栅处理。想像晶体是由一系列的平行的原子层(称为晶面)所构成的,如图19-18所示。各原子层(或晶面)之间的距离为 d ,称为晶面间距。当一束单色平行的X射线以掠射角 θ 入射到晶面上时,一部分将为表面层原子所散射,其余部分将为内部各原子层所散射。但是,在各原子层所散射的射线中,只有沿镜反射方向的射线的强度为最大。上下两原子层所发出的反射线的光程差为

$$\delta = AC + CB = 2d\sin\theta.$$

显然,各层散射射线相互加强而形成亮点的条件是

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (19-17)$$

上式称为布拉格公式(或布拉格条件)。

一个晶格点阵可以有許多不同取向的晶面族,如图19-19所示, aa 、 bb 和 cc 分别表示不同取向的晶面族,它们的晶面间距各不相同。对一束入射X射线而言,不同的晶面族有不同的掠射角,只有满足布拉格条件的晶面族才能形成劳厄斑点。

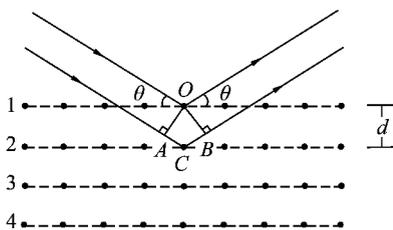


图 19-18

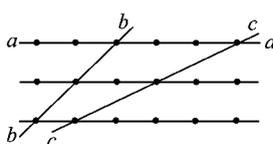


图 19-19

X射线的衍射,已广泛地用来解决两个方面的问题。当晶体的晶格常数或晶面间距已知时,可利用X射线衍射测出X射线的波长。反之,用已知波长的X射线在晶体上衍射,可以测定晶体的晶格常数,这是进行晶体结构分析的重要手段。图19-20是利用X射线在DNA上衍射所获得的图像,由此可以分析其结构。

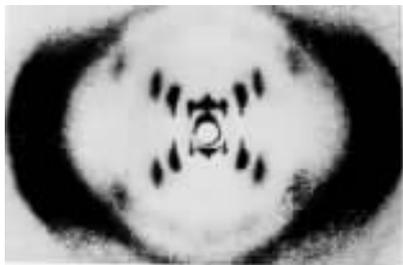


图 19-20

习题 19

19-1 波长为 546nm 的平行光垂直照射在缝宽为 0.437mm 的单缝上,缝后有焦距为 40cm 的凸透镜,求透镜焦平面上出现的衍射中央明纹的线宽度。

19-2 波长为 500nm 和 520nm 的两种单色光同时垂直入射在光栅常数为 0.002cm 的光栅上,紧靠光栅后用焦距为 2m 的透镜把光线聚焦在屏幕上。求这两束光的第三级谱线之间的距离。

19-3 在通常的环境中,人眼的瞳孔直径为 3mm 。设人眼最敏感的光波长为 $\lambda=550\text{nm}$,人眼最小分辨角为多大?如果窗纱上两根细丝之间的距离为 2.0mm ,人在多远处恰能分辨。

19-4 已知氯化钠晶体的晶面距离 $d=0.282\text{nm}$,现用波长 $\lambda=0.154\text{nm}$ 的 X 射线射向晶体表面,观察到第一级反射主极大,求 X 射线与晶体所成的掠射角。

19-5 如能用一光栅在第一级光谱中分辨在波长间隔 $\Delta\lambda=0.18\text{nm}$,发射中心波长 $\lambda=656.3\text{nm}$ 的红双线,则该光栅的总缝数至少应为多少?

19-6 一缝间距 $d=0.10\text{mm}$,缝宽 $a=0.02\text{mm}$ 的双缝,用波长 $\lambda=600\text{nm}$ 的平行单色光垂直入射,双缝后放一焦距 $f=2.0\text{m}$ 的透镜,求:(1) 单缝衍射中央亮条纹的宽度内有几条干涉主极大条纹;(2) 在这双缝的中间再开一条相同的单缝,中央亮条纹的宽度内又有几条干涉主极大?

19-7 一个平面透射光栅,当用光垂直入射时,能在 30° 角的衍射方向上得到 600nm 的第二级主极大,并且第二级主极大上能分辨 $\Delta\lambda=0.05\text{nm}$ 的两条光谱线,但不能得到 400nm 的第三级主极大,求:(1) 此光栅的透光部分的宽度 a 和不透光部分的宽度 b ;(2) 此光栅的总缝数 N 。

19-8 波长 400nm 到 750nm 的白光垂直照射到某光栅上,在离光栅 0.50m 处的光屏上测得第一级彩带离中央明条纹中心最近的距离为 4.0cm ,求:(1) 第一级彩带的宽度;(2) 第三级的哪些波长的光与第二级光谱的光相重合。

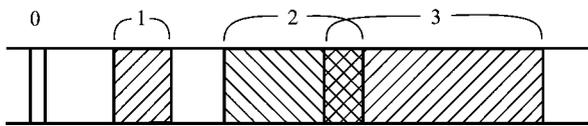


图 19-21

19-9 如要用衍射光栅区别氢原子巴尔末系第 11 和第 12 条谱线,光栅的分辨本领应多大?如光栅常数为每毫米 200 条的光栅,要想在第 2 级中能分辨这两条谱线,这光栅的宽度至少多宽?(提示,巴尔末系数第 11 和 12 条谱线由量子数 n 分别为 13 和 14 到 n 为 2 的跃迁所产生。)

19-10 用每毫米 500 条栅纹的光栅,观察钠光谱线 ($\lambda=5900\text{\AA}$)。问:(1) 光线垂直入射;(2) 光线以入射角 30° 入射时,最多能看到几级条纹?

思考题 19

- 19-1 要分辨出天空中遥远的双星,为什么要用直径很大的天文望远镜?
- 19-2 使用蓝色激光在光盘上进行数据读写较使用红色激光有何优越性?
- 19-3 光栅形成的光谱较玻璃棱镜所形成的色散光谱有何不同?
- 19-4 孔径相同的微波望远镜和光学望远镜相比较,哪个分辨本领更大?为什么?
- 19-5 登月宇航员声称在月球上唯独能够用肉眼分辨地球上的人工建筑是长城。你依据什么可以判断这句话是否真的?需要哪些数据?

第 20 章 光的偏振

20.1 光的偏振现象

光的电磁理论指出,光是电磁波,光的振动矢量(称电矢量或光矢量 E)与光的传播方向垂直。但是,在垂直于光的传播方向平面内,光矢量 E 还可能有各种不同的振动状态。我们把光在与传播方向相垂直的平面内的各种振动状态称为光的偏振。偏振现象是横波区别于纵波的一个标志。

20.1.1 偏振光和自然光

通常将光在垂直于传播方向的平面内的振动状态分为五种偏振态,分别为线片振台(或称线偏振光)、椭圆偏振态(椭圆偏振光)、圆片振台(圆偏振光)、自然光和部分偏振光。

1. 线偏振光

在光的传播过程中,如果光振动矢量 E 始终保持在一个确定的平面内(如图 20-1 所示),这样的光称为线偏振光,光矢量振动所在平面称为偏振面。在与光传播相垂直的平面内,线偏振光的偏振面表现为一直线(如图 20-2 所示)。我们也可用图 20-3 中的短线和点分别表示在纸面内和垂直于纸面的光矢量的振动方向。

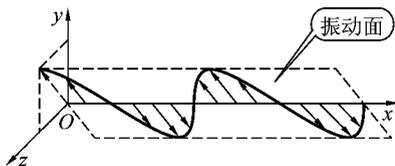


图 20-1

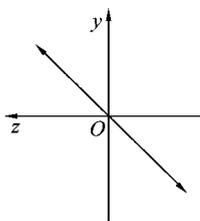


图 20-2



图 20-3

对于在 Oyz 平面内沿任一方向振动的线偏振光而言,我们总是可以把它看做是两束分别沿 y 和 z 方向振动的,相位差为 0 或 π 的线偏振光的叠加。

2. 椭圆偏振光和圆偏振光

迎着光的传播方向看,在 Oyz 平面内光矢量绕着光的传播方向旋转,其旋转角速度对应光的角频率;光矢量端点的轨迹是一个椭圆(或圆),称这种光为椭圆(或圆)偏振光,如图 20-4 所示。当迎着光的传播方向看时,如果光矢量的旋转方向作顺时针转动时,称为右旋椭圆(或圆)偏振光,反之则为左旋椭圆(或圆)偏振光。

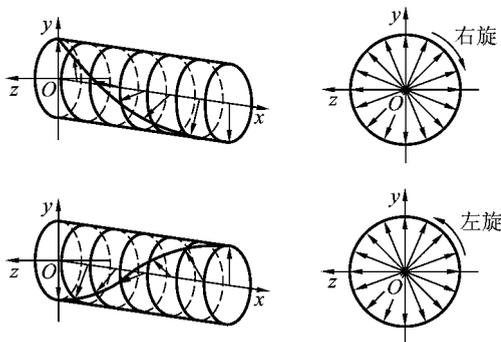


图 20-4

椭圆偏振光和圆偏振光都可看做是由两个振动面相互垂直,存在确定相位差的线偏振光的叠加而成的,设沿 y 和 z 方向振动的两偏振光分别为

$$E_y = E_{y0} \cos[\omega t - kx + \varphi_1], \quad (20-1)$$

$$E_z = E_{z0} \cos[\omega t - kx + \varphi_2], \quad (20-2)$$

则当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \neq 0, \pi$ 时,两线偏振光的合成结果为椭圆偏振光;当 $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 且两相互垂直的线偏振光振幅相等时,合成结果为圆偏振光;当 $\Delta\varphi = 0, \pi$ 时,合成结果为线偏振光。因此,线偏振光、圆偏振光都是椭圆偏振光在一定条件下的特例。

3. 自然光

在以自发辐射作为发光机制的普通光源中,大量原子的同时辐射出光波列,每个光波列的频率、相位、振动方向、波列长度均不同。就其振动方向而言,在迎着光传播方向看,其具有轴对称性(如图 20-5 所示)。这种由普通光源发出的、大量原子随机发射的光波列的集合,构成了自然光。

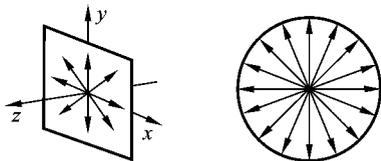


图 20-5

由于每一个光矢量都可以看做是两个相互垂直的光矢量的叠加,因此自然光可以看做是两个振动方向互相垂直、没有恒定相位关系的独立光矢量的叠加,它们的振幅相等,光强各占总光强的一半,即一束自然光可分解为两束振动方向相

互垂直的、等幅的、不相干的线偏振光(如图 20-6 所示)。

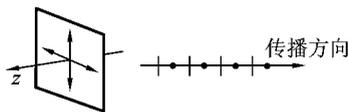


图 20-6

4. 部分偏振光

部分偏振光可以看做是线偏振光、椭圆偏振光、圆偏振光和自然光的混合光,在部分偏振光中光矢量的振动方向不具有轴对称分布,而是在某一方向占优势,如图 20-7 所示。



图 20-7

20.1.2 偏振片 马吕斯定律

如果将自然光中沿某一方向振动的成分去除而只留下沿一特定方向的振动成分,则可以得到偏振光,从自然光获得偏振光的过程称为起偏,产生起偏作用的光学元件称为起偏器。偏振片是一种常用的起偏器,只有沿某个方向的光矢量或光矢量振动沿该方向的分量才能通过偏振片。偏振片的这种起偏作用是由于在某些天然或人造材料内部存在着一个特定的方向,当光通过这些材料时,某方向的光振动被吸收而消失,而与其相垂直的另一方向的光振动因吸收很小而得以通过。当自然光入射到用这种材料制成的光学元件时,就会由于吸收而得到与吸收方向垂直的线偏振光。这样的元件就称为偏振片,偏振片上能通过光振动的方向称偏振化方向。

如图 20-8 所示,两个平行放置的偏振片 P_1 、 P_2 ,它们的偏振化方向为 L_1 、 L_2 (如图 20-8 所示),当自然光垂直入射到偏振片 P_1 后,透过的光将成为线偏振光,其振动方向平行于 P_1 的偏振化方向,强度 I_1 等于入射自然光强度 I_0 的一半。该线偏振光再入射到偏振片 P_2 上,如果

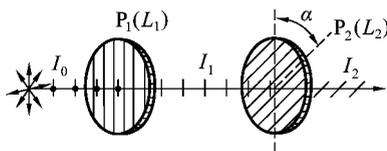


图 20-8

P_2 的偏振化方向平行于 P_1 的偏振化方向,则透过偏振片 P_2 的光强最强;如果 P_2 的偏振化方向垂直于 P_1 的偏振化方向,则光强最弱,称为消光。将偏振片 P_2 绕光的传播方向慢慢转动,可以看到透过偏振片 P_2 的光强将随偏振片 P_2 的转动而出现明暗变化,可见偏振片 P_2 可起到检验入射光是否偏振光的作用,故称为检偏器。

如图 20-9 所示,设 A_1 为入射线偏振光光矢量的振幅, L_2 是检偏器 P_2 的偏振化方向, L_1 是起偏器 P_1 的偏振化方向。入射光矢量的振动方向与 L_2 方向间的夹角为 α ,将光振动分解为平行于 L_2 和垂直于 L_2 的两个分振动,它们的振幅分别为 $A_1 \cos \alpha$ 和

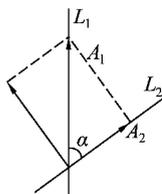


图 20-9

$A_1 \sin \alpha$ 。因为只有平行分量可以透过偏振片 P_2 ，所以透射光的振幅 A_2 和光强 I_2 分别为

$$A_2 = A_1 \cos \alpha$$

和

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha. \quad (20-3)$$

由式(20-3)可知,当 $\alpha=0^\circ$ 或 180° 时, $I_2=I_1$, 光强最强, 当 $\alpha=90^\circ$ 或 270° 时, $I_2=0$, 这时没有光从检偏器射出, 即此处为消光位置。式(20-3)被称为马吕斯定律。根据马吕斯定律的结论, 我们可以利用偏振片来检验一束光是否为线偏振光, 其方法是让待检验的光垂直入射到一偏振片, 以光线为轴旋转偏振片, 并观察出射光强, 如果在出射过程中出射光强出现强弱变化, 并存在消光位置, 则一定是线偏振光。

例 20-1 两块性质完全相同的偏振片 P_1 、 P_2 平行放置, 其通光方向 L_1 、 L_2 间夹角为 $\pi/6$ 。光强为 I_0 的自然光垂直入射, 经过第一块偏振片后的光强为 $0.32I_0$, 求经过第二块偏振片后的出射光强。

解 光强经偏振片 P_1 后小于 $0.5I_0$, 说明偏振片有吸收。其透过率

$$\gamma = \frac{0.32I_0}{0.5I_0} = 0.64。$$

由马吕斯定律, 通过偏振 P_2 后的出射光强为

$$I = \gamma I_1 \cos^2 \alpha = 0.64 \times 0.32I_0 \cos^2 30^\circ = 0.15I_0。$$

例 20-2 一束光由自然光和线偏振光混合而成。当它垂直通过一偏振片时, 透射光的强度随偏振片的转动而变化, 其最大光强是最小光强的 5 倍。问入射光中自然光和线偏振光的强度各占入射光强度的百分之几?

解 设自然光和偏振光的强度分别为 I_0 和 I_1 , 自然光通过偏振片后的强度为 $I_0/2$, 线偏振光通过偏振片后的强度为 $I_1 \cos^2 \alpha$, 则透射偏振光的总强度 I 为

$$I = \frac{1}{2}I_0 + I_1 \cos^2 \alpha,$$

式中 α 为入射偏振光的振动方向与偏振片的偏振化方向间的夹角。

由此得

$$I_{\max} = \frac{1}{2}I_0 + I_1, I_{\min} = \frac{1}{2}I_0,$$

按题意有

$$I_{\max} = 5I_{\min},$$

解得

$$I_1 = 2I_0,$$

因此自然光所占百分比为

$$\frac{I_1}{I_0 + I_1} = \frac{I_0}{3I_0} = \frac{1}{3},$$

线偏振光所占百分比为

$$\frac{I_0}{I_0 + I_1} = \frac{2I_0}{3I_0} = \frac{2}{3}.$$

20.2 反射和折射时的偏振现象

实验表明,自然光在两种介质的分界面上反射和折射时,反射光和折射光都将成为部分偏振光;在特定情况下,反射光为振动方向垂直于入射面的线偏振光。

布儒斯特总结出如下规律:当自然光以一定的角度入射到两种媒质表面时,反射光与折射光之间恰好垂直,此时反射光为垂直于入射面的线偏振光。相应的入射角 i_B 称为布儒斯特角(起偏角)

$$i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}. \quad (20-4)$$

如图 20-10 所示,当自然光以布儒斯特角 i_B 入射时,由折射定律

$$n_1 \sin i_B = n_2 \sin r,$$

式中 r 为折射角。

因为

$$i_B + r = \frac{\pi}{2},$$

故有

$$\sin r = \cos i_B,$$

即得 $i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$ 。这一关系被称为布儒斯特定律。

必须指出,当自然光按起偏角入射时,在经过一次反射、折射后,反射光虽然是完全偏振光,但光强很弱,对于单独一个玻璃面来说,垂直于入射面振动的光只能被反射一小部分(约 15%),因此折射光(即透射光)是部分偏振光。在实际应用中,为了增强反射光的强度和折射光的偏振化程度,可以把玻璃片叠起来,成为玻璃

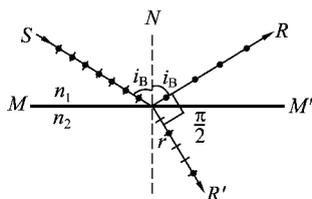


图 20-10

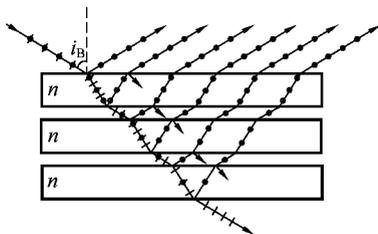


图 20-11

片堆(如图 20-11 所示),当光经过多个表面的折射和反射后,折射光与反射光都是线偏振光。利用玻璃片堆在起偏角下的反射和折射,都可以获得偏振光。同样,利用它们也可以检查偏振光。

20.3 晶体的双折射现象

在自然界中存在着一些晶态物质,当光入射到这些透明晶体如方解石(CaCO_3)上时,会在晶体内产生两束沿不同方向传播的折射光,这种现象称为晶体的双折射现象。

实验证明,晶体内的这两束折射光线中一束遵守通常的折射定律,称为寻常光,通常用 o 表示(称为 o 光)。另一束光不遵守折射定律,称为非常光,用 e 表示(称为 e 光),甚至在入射角 $i=0$ 时,寻常光沿原方向前进,而非常光一般不沿原方向前进,如图 20-12 所示,这时,如果将晶体以入射光线为轴旋转,将发现 o 光不动,而 e 光却随着晶体的旋转而转动起来。

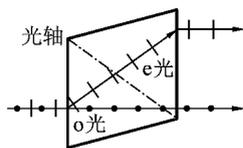


图 20-12

当改变光的入射方向时,可以发现在晶体内部有一个特殊方向,当光沿着这个方向传播时将不产生双折射现象,这个特殊方向称为晶体的光轴。必须强调的是,光轴并不是在晶体内的某一个轴,而是一个方向,晶体内所有平行于此方向的直线都是光轴。在光轴方向上 o 光和 e 光的折射率相等,传播速度也相同。某些晶体(如方解石、石英等)内只有一个这样的方向,这些晶体称为单轴晶体;而某些晶体(如云母、硫磺等)内有两个这样的方向,称为双轴晶体。下面我们仅讨论单轴晶体情况。

在晶体中,把包含光轴和任一已知光线所组成的平面称为晶体中该光线的主平面。由 o 光和光轴所组成的平面,称为 o 光的主平面;由 e 光和光轴所组成的平面,称为 e 光的主平面。

实验发现, o 光和 e 光都是线偏振光,它们的光矢量的振动方向不同, o 光的振动方向垂直于它对应的主平面;而 e 光的振动方向则在它对应的主平面内。一般情况下, o 光和 e 光的主平面并不重合,但当光轴位于入射面内时,这两个主平面是重合的。

光在晶体中传播时出现的双折射现象,来源于晶体结构上的各向异性。具体说来是由于介电系数 ϵ 与方向有关,因而导致了在晶体中沿各不同方向传播的光速不同,即光在晶体内传播速度的大小和光矢量与光轴间的相对取向密切相关。如图 20-13 所示,寻常光在晶体中传播时其光矢量方向始终

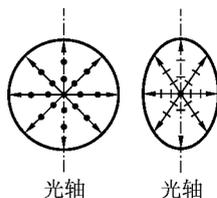


图 20-13

与光轴垂直,因此其速率在各个方向上相同,在晶体中任意一子波源所发出的子波波面是一球面。非常光在晶体中传播时其光矢量方向与光轴间的夹角随传播方向而异,因此其速率在各个方向上是不同的,在晶体中任一子波源发出的子波波面可以证明是个旋转椭球面。两束光只有在沿光轴方向上传播时,它们的速率才是相等的,因此上述两子波波面在光轴上相切。在垂直于光轴的方向上,两束光的速率相差最大。

根据惠更斯原理,可利用作图方法画出 \circ 光和 e 光在晶体内的传播方向。如图 20-14 所示,当平行光入射到晶体表面时,在晶体内激发出相应的 \circ 光和 e 光,其波阵面分别为球面与旋转椭球面,它们在光轴方向上相切。作出某时刻 t 晶体内所有 \circ 光的子波源发出的子波的公切面(包络面),即为 \circ 光的波阵面,同样也可做出同一时刻所有 e 光的子波源发出的子波的公切面,得到 e 光的波阵面。从子波源向子波波面与公切面的切点做连线,该连线方向就是晶体中 \circ 光和 e 光的传播方向。

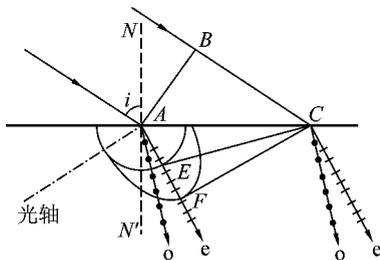


图 20-14

当按一定方式切割双折射晶体,使光轴与晶体表面平行,并以平行光垂直入射于这些晶体表面时,晶体内光振动方向互相垂直的 \circ 光和 e 光的传播方向如图 20-15 所示。在这两种情况下,进入晶体后相互垂直的两束光在空间并未分开,但这并不表明此时不存在双折射现象。必须看到,在这种情况下,相互垂直的两束线偏振光在晶体内的传播速度并不一致,两者的波阵面不重合。若经过一定厚度的晶体后,同时出射的这两束线偏振光之间将存在着光程差(或相位差),这一现象在实际应用中很有意义。

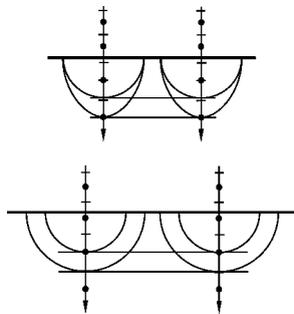


图 20-15

设晶体厚度为 d ,则由于 \circ 光和 e 光的传播速度不同,即折射率不同,因此由晶体出射的两束光之间将存在着一定的光程差 $\delta = (n_o - n_e)d$,相应的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d.$$

在实验室中经常用到以上述方式切割而成的晶片,称为波片。当波片的厚度 d 一定而使两束出射光间的相位差 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$,即波片厚度满足

$$(n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{4},$$

时,称为四分之一波片。当波片的厚度满足

$$(n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{2},$$

即两束出射光间的相位差 $\Delta\varphi = \pi$ 时,称为二分之一波片。必须注意无论是四分之一波片还是二分之一波片,都是对一定的波长而言。

20.4 偏振光的获得与检验

当一束线偏振光通过四分之一波片后,由于在两个相互垂直的振动成分之间引入了附加的相位差 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$,因此两个相互垂直振动成分之间的相位差将为 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$,由于这两束相互垂直的线偏振光在空间重叠,因此合成的结果是使这两束相互垂直的线偏振光叠加而成为椭圆或圆偏振光。

当一束线偏振光通过二分之一波片后,由于在两个相互垂直的振动成分之间引入了附加的相位差 $\Delta\varphi = \pi$,因此两个相互垂直振动成分之间的相位差将仍为 0 或 π ,所以合成的结果将仍是线偏振光,只是其振动方向将转过 2α 角,这里 α 是入射线偏振光振动方向与光轴之间的夹角,如图 20-16 所示是线偏振光垂直纸面(即晶体表面)入射的情况。椭圆(或圆)偏振光经过四分之一或二分之一波片出射后的情况也可以按上述方法分析。

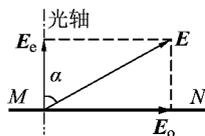


图 20-16

自然光通过波片后仍为自然光,其原因在于:自然光为大量原子、分子间歇发光的总效应,无确定的相位与偏振关系。因此通过波片后出射的仍为大量无规的椭圆、圆偏和线偏,其总效果仍为无规振动,所以还是自然光。

由上述讨论可知,利用四分之一波片,可以由一束线偏振光获得椭圆(或圆)偏振光,为了获得圆偏振光,除了利用四分之一波片外,还要求入射的线偏振光的振动方向与光轴方向成 $\frac{\pi}{4}$ 角(如图 20-16 所示),其理由请读者自行考虑。

例 20-3 在两个偏振化方向相同的偏振片 P_1 、 P_2 之间平行地插入一厚度 $d = 0.01\text{mm}$ 的波片,其光轴方向与偏振化方向之间夹角为 $\pi/4$ 。以白光入射,出射光中缺少哪些波长的光?(设对于可见光范围的所有波长有 $n_o - n_e = 0.172$)

解 入射光经第一块偏振片 P_1 后为线偏振光,若对于某一波长,波片恰为半波片,则经过该波片后此波长的光将不能透过第二块偏振片 P_2 。

由于

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = (2k + 1)\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

故

$$\lambda = \frac{2(n_o - n_e)d}{2k + 1} = \frac{34.4 \times 10^{-4}}{2k + 1}.$$

以 $k=2, 3$ 代入, 即得: $\lambda=688 \text{ nm}, 491.4 \text{ nm}$ 。

习题 20

20-1 从某湖水表面反射来的日光正好是完全偏振光, 已知湖水的折射率为 1.33。推算太阳在地平面上的仰角, 并说明反射光中光矢量的振动方向。

20-2 自然光投射到叠在一起的两块偏振片上, 则两偏振片的偏振化方向夹角为多大才能使:

- (1) 透射光强为入射光强的 $1/3$;
- (2) 透射光强为最大透射光强的 $1/3$ (均不计吸收)。

20-3 设一部分偏振光由一自然光和一 线偏振光混合构成。现通过偏振片观察到这部分偏振光在偏振片由对应最大透射光强位置转过 60° 时, 透射光强减为一半, 试求部分偏振光中自然光和线偏振光两光强各占的比例。

20-4 由钠灯射出的波长为 589.0 nm 的平行光束以 50° 角入射到方解石制成的晶片上, 晶片光轴垂直于入射面且平行于晶片表面, 已知折射率 $n_o=1.65, n_e=1.486$ 。求:

- (1) 在晶片内 o 光与 e 光的波长;
- (2) o 光与 e 光两光束间的夹角。

20-5 在偏振化方向正交的两偏振片 P_1, P_2 之间, 插入一晶片, 其光轴平行于表面且与起偏器的偏振化方向成 35° 夹角, 求:

- (1) 由晶片分成的 o 光和 e 光强度之比;
- (2) 经检偏器 P_2 后上述两光的强度之比。

20-6 把一个楔角为 0.33° 的石英劈尖 (光轴平行于棱) 放在偏振化方向正交的两偏振片之间。用 $\lambda=654.3 \text{ nm}$ 的红光垂直照射, 并将透射光的干涉条纹显示在屏上。已知石英的折射率 $n_o=1.5419, n_e=1.5509$, 计算相邻干涉条纹的间距。

思考题 20

20-1 用偏振片怎样来区分自然光、部分偏振光和线偏振光?

20-2 如图 20-17 所示, 玻璃片堆 A 的折射率为 n , 二分之一波片 C 的光轴与 y 轴夹角为 30° , 偏振片 P 的偏振化方向沿 y 轴方向, 自然光沿水平方向入射。

- (1) 欲使反射光为完全偏振光, 玻璃片堆 A 的倾角 θ 应为多少? 在图中画出反射光的偏振态;
- (2) 若将部分偏振光看作自然光与线偏振光两部分

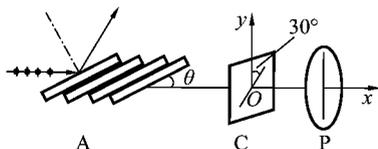


图 20-17

的叠加,则经过 C 后线偏振光的振动面有何变化?说明理由;

(3) 若透射光中自然光的光强为 I , 偏振光的光强为 $3I$, 计算透过 P 后的光强。

20-3 在如图 20-18 所示的装置中, P_1 、 P_2 为两个正交的偏振片, C 为四分之一波片, 其光轴与 P_1 的偏振化方向夹角为 60° , 强度为 I 的单色自然光垂直入射于 P_1 。

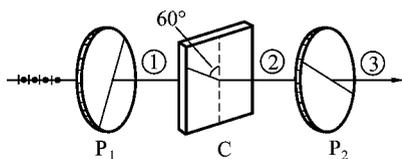


图 20-18

(1) 试述①、②、③各区光的偏振态;

(2) 计算①、②、③各区的光强。

20-4 如图 20-19 所示的偏振光干涉装置中, C 是劈尖角很小的双折射晶片, 折射率 $n_e > n_o$, P_1 、 P_2 的偏振化方向相互正交, 与光轴方向皆成 45° 角。若以波长为 λ 的单色自然光垂直照射, 试讨论:

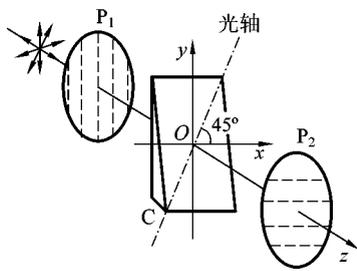


图 20-19

(1) 通过晶片 C 不同厚度处出射光的偏振态;

(2) 经过偏振片 P_2 的出射光干涉相长及相消位置与劈尖厚度 d 之间的关系, 并求干涉相长的光强与入射光光强之比;

(3) 若转动 P_2 的偏振化方向到与 P_1 的偏振化方向平行时, 干涉条纹如何变化? 为什么?

第 21 章 量子光学基础

21.1 引言

经典物理学发展到 19 世纪末期,可以说是达到了相当完美、相当成熟的程度。牛顿力学预言了海王星的存在,麦克斯韦的电磁场理论预言了电磁波的存在,光的本质是电磁波,热力学系统的宏观和微观理论已经发展得比较成熟,物理学的一系列伟大成就使当时的物理学家坚信,物理学理论已经发展到了臻于完美的地步。正如英国著名物理学家汤姆逊在回顾物理学所取得的伟大成就时所说,物理大厦已经落成,所剩只是一些修饰工作。然而,从 19 世纪末到 20 世纪初,有一系列重大的实验发现都无法用经典物理学的理论来解释,其中包括黑体辐射、光电效应、康普顿散射、固体的比热容以及原子的光谱等。1900 年,普朗克为了解决黑体辐射遇到的理论困难,提出了量子的概念。为了解决波动理论无法解释的光电效应实验,爱因斯坦发展了普朗克理论,提出了光量子的假说,并成功地将量子的概念应用到了固体上,解释了固体比热容的实验规律。康普顿的 X 射线散射实验进一步证实了爱因斯坦的光量子假说。玻尔在普朗克和爱因斯坦的光量子基础上,提出了原子的量子模型,成功地揭开了原子光谱之谜。

21.2 普朗克的能量量子假说

21.2.1 热辐射现象

1. 热辐射的基本概念

所有物体在任何温度下都要发射电磁波,这种与温度有关的辐射称为热辐射。所辐射的电磁波的波长和强度与物体的温度有关,还与物体的性质、表面形状有关。

为了描述物体辐射电磁能量的能力,定义物体单位表面在单位时间内发出的波长在 λ 附近单位波长间隔内的电磁波的能量为单色辐出度,记为 M_λ ,即

$$M_\lambda(T) = \frac{dE_\lambda}{d\lambda}, \quad (21-1)$$

将式(21-1)对所有波长积分,可得物体从单位面积上所辐射的各种波长的总辐射功率,称为物体的总辐出度,简称为辐出度,用 $M(T)$ 表示

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(T) d\lambda. \quad (21-2)$$

为了描述物体对辐射的吸收能力和反射能力,定义物体吸收的能量 E^a 与外界入射的能量 E^i 之比为物体的吸收比,即

$$\alpha(T) = \frac{E^a}{E^i}. \quad (21-3)$$

物体反射的能量 E^r 与外界入射的能量 E^i 之比为物体的反射比

$$R(T) = \frac{E^r}{E^i}. \quad (21-4)$$

定义物体在 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 的波段内吸收的能量 dE_{λ}^a 与该波段范围入射的能量 dE_{λ}^i 之比为单色吸收比

$$\alpha(\lambda, T) = \frac{dE_{\lambda}^a}{dE_{\lambda}^i}. \quad (21-5)$$

物体在 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 的波段内反射的能量 dE_{λ}^r 与该波段范围入射的能量 dE_{λ}^i 之比为单色反射比

$$R(\lambda, T) = \frac{dE_{\lambda}^r}{dE_{\lambda}^i}. \quad (21-6)$$

由于入射的能量不是吸收就是反射,故

$$dE_{\lambda}^i = dE_{\lambda}^r + dE_{\lambda}^a$$

或

$$\alpha(\lambda, T) + R(\lambda, T) = 1. \quad (21-7)$$

若 $\alpha(\lambda, T) = 1$, 物体吸收了所有入射的能量,称这种物体为黑体。

黑体是一个理想模型,在不透明材料围成的空腔上开一个小孔,电磁波从该小孔射入,由于在盒内壁的反射,很难再由该小孔射出,该小孔可认为是黑体的表面(如图21-1所示)。显然,黑体的吸收比和单色吸收比皆为100%,黑体能吸收各种频率的电磁波。

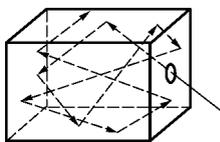


图 21-1

2. 基尔霍夫定律

1860年,基尔霍夫发现,在温度一定时物体在某波长 λ 处的单色辐出度与单色吸收比的比值与材料及材料表面的性质无关,仅取决于物体的温度和波长,即

$$\frac{M_1(\lambda, T)}{\alpha_1(\lambda, T)} = \frac{M_2(\lambda, T)}{\alpha_2(\lambda, T)} = \dots = M_B(\lambda, T), \quad (21-8)$$

式(21-8)中,不同的下标对应不同的材料, $M_B(\lambda, T)$ 为与材料无关的普适函数。称这一结论为基尔霍夫(Kirchhoff)定律。

该定律说明,同一个物体的发射本领和吸收本领有内在联系,一个好的发射体一定也是好的吸收体。

21.2.2 黑体辐射的基本规律

对于黑体,由于吸收系数等于 1,黑体的单色辐出度等于普适函数 $M(\lambda, T) = M_B(\lambda, T)$,寻找黑体的单色辐出度是热辐射理论的一个中心问题。

黑体单色辐出度的实验规律如图 21-2 所示,在温度一定时黑体的单色辐出度与波长有关,并存在一极大值 λ_m ,当温度升高时,所对应的极值波长 λ_m 下降。全波段黑体辐射规律是基于以下几个实验规律逐步建立的。

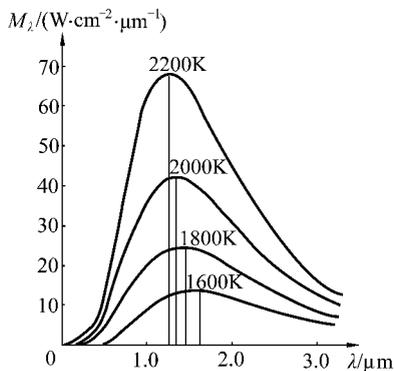


图 21-2

1. 斯特藩-玻耳兹曼定律

斯特藩(J. Stefan)和玻耳兹曼(L. Boltzmann)分别在实验和理论上证明:温度为 T 的黑体的总辐出度与温度的四次方成正比

$$M_B(T) = \sigma T^4, \quad (21-9)$$

式中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ 称为斯特藩常量。称这一规律为斯特藩-玻耳兹曼定律。

2. 维恩位移定律

黑体单色辐出度的极值波长 λ_m 与黑体温度 T 之积为常数,即

$$T\lambda_m = b, \quad (21-10)$$

式中 $b=2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ 为维恩常数,该规律称为维恩(W. Wien)位移定律。

斯特藩-玻耳兹曼定律和维恩位移定律是遥感、高温测量和红外追踪等技术的物理基础。若能测出黑体单色辐出度的极值波长 λ_m ,由维恩位移定律可以推测该黑体的温度,恒星的有效温度常常是通过这种方法测量的。例如,从太阳的光谱可测得 $\lambda_m \approx 0.49 \mu\text{m}$,由此可推算太阳的温度约为 5900K 。

3. 维恩公式

维恩在 1896 年从理论上导出黑体单色辐出度的数学表达式,他认为空腔内的热平衡辐射是由一系列驻波振动组成的,每一频率的驻波振动可对应相同频率的简谐振子,空腔中的电磁波可等效为一系列不同频率的简谐振子,简谐振子的能量分布服从经典的类似于麦克斯韦速度分布律,基于以上观点,再利用经典统计理论可得单色辐出度为

$$M_\lambda(T) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-c_2/(\lambda T)}, \quad (21-11)$$

式中 c_1, c_2 为常数,这就是维恩公式(非前面的维恩位移定律)。维恩公式在短波段与实验相符,当波长较长时与实验偏差较大。

4. 瑞利-金斯公式

瑞利(L. Rayleigh)和金斯(J. Jeans)从经典电动力学出发,利用能量均分定理得到的单色辐出度为

$$M_\lambda(T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}, \quad (21-12)$$

式中 $k=1.380658 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 为玻尔兹曼常数; c 为真空中的光速。瑞利-金斯的结果在长波波段与实验相符(如图21-3),在短波波段(紫外区)与实验有明显的差别。特别地,当波长趋于零时,辐出度趋于无穷大,在历史上称为“紫外灾难”。

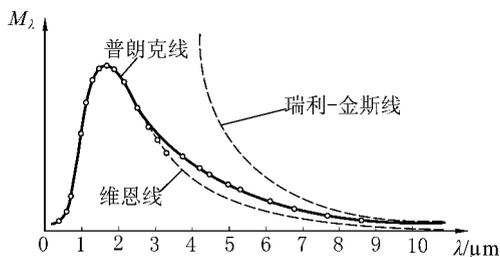


图 21-3

5. 普朗克公式

普朗克利用内插法,使两个波段分别与维恩公式和瑞利-金斯公式一致,得到了正确的黑体辐射公式

$$M_0(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}, \quad (21-13)$$

式中 $c_1 = 2\pi hc^2 = 3.7417749 \times 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2$; $c_2 = hc/k = 0.01438769 \text{ m} \cdot \text{K}$ 。将它们分别称为第一和第二辐射常数, $h = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 称为普朗克常数。式(21-13)也可用频率改写为如下形式

$$M_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (21-14)$$

将式(21-13)或(21-14)称为普朗克公式。普朗克公式虽然是一个半经验公式,但在全波段与实验结果惊人符合。随后普朗克从理论上导出了这一公式,在推导时必须用到能量子假说。

21.2.3 普朗克的能量子假说

普朗克为了从理论上解释他所得到的半经验公式大胆地假设:振子振动的能量是不连续的,只能取最小能量 ϵ 的整数倍

$$\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \dots, n\epsilon, \dots \quad (21-15)$$

式中 n 为整数,称为量子数。对于频率为 ν 的振子最小能量

$$\epsilon = h\nu \quad (21-16)$$

称为能量子, h 为普朗克常数。

利用经典电动力学,黑体的单色辐出度为

$$M_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \bar{\epsilon},$$

式中 $\bar{\epsilon}$ 为频率为 ν 的振子的平均能量,按玻尔兹曼能量分布律,能量为 $\epsilon_n = nh\nu$ 的振子出现的概率正比于玻耳兹曼因子 $e^{-\epsilon_n/kT}$,所以振子的平均能量为

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

故

$$M_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

这就是普朗克公式。

从经典的观点看,能量子的假设是不可思议的,就连普朗克本人也感到难以相信。他曾宣称谐振子的能量是量子化的,而不必认为辐射场本身也是量子化的。他花了毕生精力试图回到经典理论的体系中,但最后证明还是徒劳的,直到1905年爱因斯坦为了解释光电效应,在普朗克量子假设的基础上提出了光子概念后,量子假设才逐渐被人们接受。



图 21-4

普朗克(Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858~1947)(如图21-4所示)是德国物理学家,量子物理学的开创者和奠基人,因他对量子理论的杰出贡献,在1918年获得诺贝尔物理学奖。

21.3 爱因斯坦的光量子假设

21.3.1 光电效应

1. 光电效应

1888年,德国物理学家霍尔瓦克斯(Wilhelm Hallwachs)发现,当用紫外光照射抛光的金属锌时会失去负电荷,这一实验其实最早是由赫兹(H. Hertz)在1887年进行的,但他没有进一步研究。1899年,勒纳德(P. Lenard)通过荷质比的测定,证明了金属所发射的是电子。

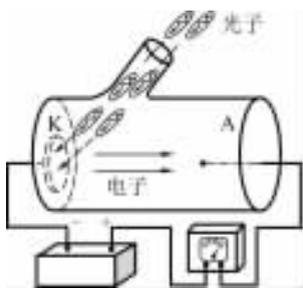


图 21-5

光照射在金属及其化合物的表面上发射电子的现象称为光电效应。图21-5为光电效应的实验装置示意图,在抽成真空的容器中装有阴极K和阳极A,阴极K为金属板,在阳极A和阴极K之间加上电压,当单色光通过石英窗口照射到金属板上时,在阴极金属表面会逸出电子,称这种电子为光电子,电路中出现的电流

称为光电流。通过改变所加的电压大小、方向、照射光的频率和强度,可以分析光电流与这些因素的关系。

2. 光电效应的实验规律

勒纳德在他所做的实验中总结出了如下一系列重要规律:

(1) 不管入射光强有多大,只有当入射光频率 ν 大于一定的频率 ν_0 时,才会产生光电效应,称 ν_0 为截止频率或红限频率;

(2) 当入射光的频率给定后 ($\nu > \nu_0$),光电流与入射光强成正比(如图 21-6 所示);

(3) 在入射光强一定时光电流会随 U 增大,最后达到一饱和值 i_m ,饱和电流与入射光强 I 成正比(如图 21-7 所示)。

当电压为零时光电流并不为零,甚至反向电压不太大时仍有光电流存在,当反向电压大到一定数值 U_a 时光电流完全变为零。称 U_a 为遏止电压。遏止电压随入射光频率的增加而增加,两者成线性关系,与入射光强无关(如图 21-8 所示),即

$$U_a = K\nu - U_0 \quad (21-17)$$

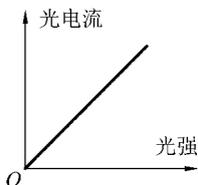


图 21-6

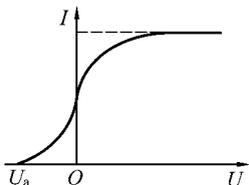


图 21-7

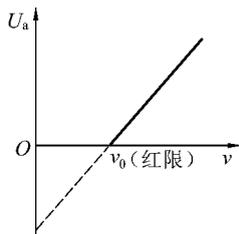


图 21-8

(4) 光电效应是瞬时发生的。无论入射光如何弱,光电子在光照射的瞬间可产生,从光照射阴极到光电子逸出这一过程不超过 10^{-9} s。

21.3.2 爱因斯坦的光量子假设

1. 经典物理学所遇到的困难

(1) 按照光的经典电磁理论,光波的能量与光的强度或振幅有关,与频率无关。一定强度的光照射金属表面一定时间后,只要电子吸收足够的能量即可逸出金属表面,与光的频率无关,更不存在截止频率。

(2) 若用极微弱的光照射,阴极电子积累能量达到能够挣脱表面束缚能量(逸出功) A 需要一段时间,理论计算表明,用光强为 1mW 的光照射逸出功为 1eV 的金属,从光照射阴极到光电子逸出这一过程要大约等待十几分钟,光电效应不可能瞬时发生。

2. 爱因斯坦光量子假设

为了解释光电效应,爱因斯坦在普朗克能量子假设的基础上提出了光量子假

设。普朗克认为在空腔中的电磁波的能量是量子化的,爱因斯坦将这一假设扩展到了自由空间中,不管是在空腔中还是在自由空间中,光是由一颗一颗的光子(光子)组成。每个光子的能量与其频率成正比,即

$$E = h\nu. \quad (21-18)$$

一个光子只能整个地被电子吸收或放出(物质只能将光子“整体吞咽”),光子具有“整体性”。爱因斯坦根据他在相对论中提出的能量动量 $p=E/c$ 关系,提出光量子的动量和波长有关系

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (21-19)$$

通常人们称式(21-18)和式(21-19)为普朗克-爱因斯坦关系。

在光子假设的基础上可很容易解释光电效应。根据能量守恒定律,只有光子的能量大于金属表面的逸出功,电子吸收光子后才能逸出金属表面形成光电流,电子离开金属表面时具有的初动能应等于

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A, \quad (21-20)$$

式(21-20)即为光电效应方程。

电子离开金属表面的动能至少为零,故当 $\nu < A/h$ 时,不发生光电效应,可发生光电效应的最小频率即红限频率

$$\nu_0 = \frac{A}{h}. \quad (21-21)$$

只要入射光的频率大于红限频率,光电效应可瞬时发生。不同金属的逸出功 A 不同,则红限频率不同。表21-1给出了几种金属的逸出功和红限频率。

表 21-1 金属的逸出功和红限频率

金属		逸出功 A/eV	截止频率 $\nu_0/(10^{14}\text{Hz})$
铯	Cs	1.94	4.69
铷	Rb	2.13	5.15
钾	K	2.25	5.44
钠	Na	2.29	5.53
钙	Ca	3.20	7.73
铍	Be	3.90	9.40
汞	Hg	4.53	10.95
金	Au	4.80	11.60

电子吸收频率为 ν 的光子后初动能若不为零,则有光电流产生,只有加上反向电压,电子的运动受到抑制,光电流才会为零。显然,遏止电压和初动能之间应有关系

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU_a, \quad (21-22)$$

结合式(21-20)有

$$U_a = \frac{h\nu - A}{e}. \quad (21-23)$$

可见遏止电压与光子频率成线性关系。

爱因斯坦的光量子理论成功地解释了光电效应,为此他获得了 1921 年的诺贝尔物理学奖。

美国物理学家密立根(R. A. Millikan)极力反对爱因斯坦的光子假说,花了 10 年时间测量光电效应,得到了遏止电压和光子频率的严格线性关系,并由直线斜率的测量测得普朗克常数的精确值,测量值与热辐射和其他实验测得的 h 值符合得很好。由于他在研究元电荷和光电效应方面突出的成绩,密立根获得了 1923 年的诺贝尔物理学奖。

例 21-1 已知铯的逸出功 $A = 1.9\text{eV}$,用钠黄光 $\lambda = 589.3\text{nm}$ 照射铯。计算:

- (1) 黄光的能量、质量和动量;
- (2) 铯在光电效应中释放的光电子的动能;
- (3) 铯的遏止电压、红限频率。

解 (1) 黄光的能量、质量和动量分别为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3.4 \times 10^{-19}\text{J},$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = 3.8 \times 10^{-36}\text{kg},$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = 1.1 \times 10^{-27}\text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

- (2) 铯在光电效应中释放的光电子的动能为

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = h\nu - A = 2.9 \times 10^5\text{eV}.$$

- (3) 铯的遏止电压为

$$U_a = \frac{E_k}{e},$$

红限频率为

$$\nu_0 = \frac{A}{h} = 4.6 \times 10^{14}\text{Hz}.$$

21.3.3 康普顿效应

除光电效应外,光的量子性还表现在光散射的康普顿(A. H. Compton)效应

上,该效应是光显示出其粒子性的又一著名实验。1922年到1923年,康普顿研究了X射线在石墨上的散射,发现在散射的X射线中不但存在与入射线波长相同的射线,同时还存在波长大于入射线波长的射线成分,称这一现象为康普顿效应。

康普顿从实验上证实了爱因斯坦提出的关于光量子具有动量的假设,证明了X光具有粒子性。为此康普顿获得了1927年诺贝尔物理学奖。

1. 康普顿散射的实验装置

康普顿散射的实验装置如图21-9所示,X光源发出的X射线经过光阑射向散射物质,固定入射的X光波长(设为 λ_0),在不同的 θ 方向探测散射光的波长(设为 λ)。

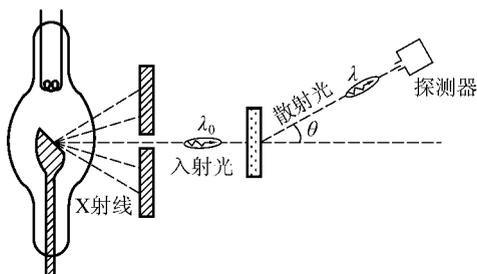


图 21-9

2. 实验规律

实验的主要结论如下:

(1) 散射光除原波长 λ_0 外,还出现了波长大于 λ_0 的新散射波长 λ (图21-10);

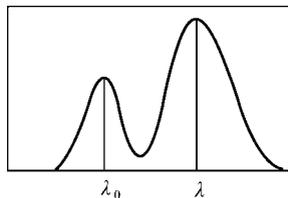


图 21-10

(2) 波长差 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 随散射角的增大而增大(如图21-11所示);

(3) 新波长的谱线强度随散射角 θ 的增加而增加,但原波长的谱线强度降低(如图21-11所示);

(4) 对不同的散射物质,只要在同一散射角下,波长的改变量 $\lambda - \lambda_0$ 都相同,与散射物质无关(如图21-12所示)。

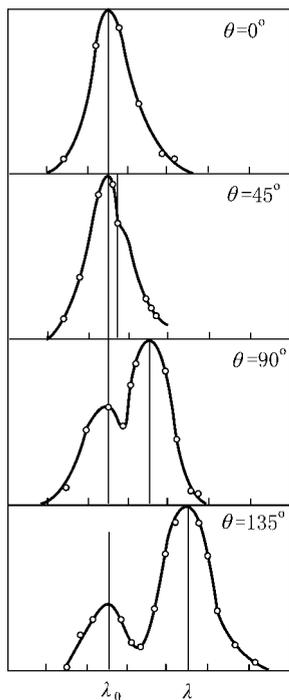


图 21-11

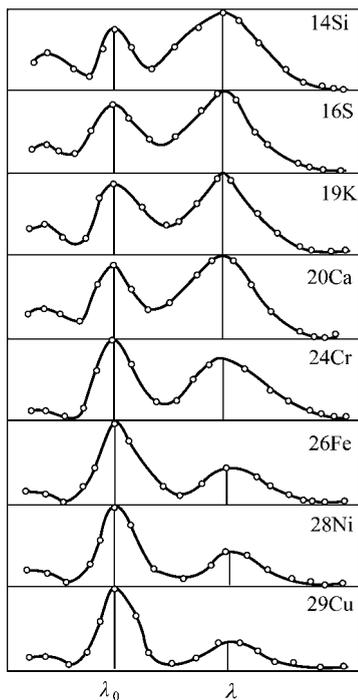


图 21-12

3. 康普顿效应的理论解释

用经典电磁理论是无法解释康普顿效应的,如果入射的 X 光是某种波长的电磁波,散射光的波长是不会改变的,经典电磁理论不能解释散射光中有新的波长成分。

康普顿认为 X 光的散射应是光子与原子内电子碰撞的结果。X 射线光子与原子内层电子发生弹性碰撞,由于内层电子与原子核结合较为紧密(大约为 keV 数量级),散射实际上可以看作是发生在光子与质量很大的整个原子间的碰撞,光子基本上不失去能量,保持原波长不变。但是当 X 射线光子与原子外层电子发生弹性碰撞时,由于外层电子与原子核结合较弱(约为几个 eV),与 X 光子相比,这些电子近似可看成为静止的“自由”电子,当光子与这些电子碰撞时,光子会失去部分能量,使频率下降,波长增大,这就是康普顿效应中新波长出现的原因。

康普顿的成功也不是一帆风顺的,起先他认为散射光频率的改变是由于“混进来了某种荧光辐射”,在计算中起先只考虑能量守恒,后来才认识到还要用动量守恒。

下面给出康普顿效应的定量计算结果, X 射线光子与静止的自由电子弹性碰撞, 动量守恒为

$$\frac{h}{\lambda_0} \mathbf{n}_0 = \frac{h}{\lambda} \mathbf{n} + m\mathbf{v}. \quad (21-24)$$

能量守恒为

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2. \quad (21-25)$$

考虑到 X 射线光子的能量较大, 电子的速度可能也很大, 应该考虑相对论效应, 即电子的质量应取为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (21-26)$$

联立式(21-24)~(21-26), 可得 X 射线光子经过与电子碰撞后波长增量为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (21-27)$$

式中 $\lambda_c = h/m_0c = 0.024262\text{\AA}$ 称为康普顿波长, 为与散射物质的种类无关的普适常量。式(21-27)和实验结果符合得很好。

应该说明, 只有当入射光的波长 λ_0 与康普顿波长 λ_c 可比拟时, 康普顿效应才显著, 因此要用 X 射线才能观察到康普顿散射。因可见光波长比康普顿波长大得多 ($\Delta\lambda/\lambda_0 \sim (10^{-5} \sim 10^{-6})$), 用可见光基本观察不到康普顿散射。

康普顿效应中的自由电子不能像光电效应那样吸收光子而是散射光子, 若静止的自由电子完全吸收了光子, 电子的速度可能达到光速, 这是不可能的。

例 21-2 已知入射波长为 λ_0 。

- (1) 求在 θ 方向观测到的散射光波长;
- (2) 计算相应康普顿散射反冲电子的动量与动能。

解 (1) 如图 21-13 所示, 在 θ 方向观测到的散射光波长的增量为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

波长为

$$\lambda = \Delta\lambda + \lambda_0 = \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

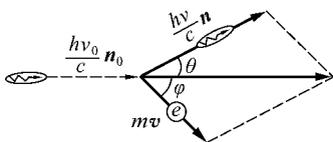


图 21-13

- (2) 由动量守恒

$$\mathbf{p} = \frac{h\nu_0}{c} \mathbf{n}_0 - \frac{h\nu}{c} \mathbf{n},$$

可得动量分量为

$$p_x = \frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c} \cos \theta = \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \cos \theta,$$

$$p_y = -\frac{h\nu}{c} \sin \theta = -\frac{h}{\lambda} \sin \theta.$$

由能量守恒可得电子的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = hc \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0}.$$

例 21-3 在康普顿效应中,入射光子的波长为 $3 \times 10^{-3} \text{ nm}$,反冲电子的速度为光速的 60%,求散射光子的波长和散射角。

解 由能量守恒得

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2,$$

将相对论质量速度公式(21-26)代入有

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}c^2$$

或

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} + \frac{m_0c}{h} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right),$$

而 $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1.25$, 所以散射光波长为 $\lambda' = 4.34 \times 10^{-12} \text{ m}$ 。

再由关系

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

可得散射角满足关系

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\Delta\lambda m_0c}{2h}} = 0.543,$$

最后得散射角为 $\theta = 65.7^\circ$ 。

21.4 氢原子光谱 玻尔理论

爱因斯坦的光量子理论给出了光的量子性,这里自然会引出一个问题:发光的原子本身是否具有量子行为?

21.4.1 氢原子光谱实验规律

原子光谱是原子内部结构的直接反映,不同的原子有不同的特征光谱,1885年,巴耳末(J. J. Balmer)发现,氢原子光谱前四条谱线的波长(位于可见光区)如



图 21-14

图21-14所示,可归纳成一个简单的公式

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, 6), \quad (21-28)$$

式中 $\tilde{\nu}$ 为波长的倒数

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} \quad (21-29)$$

称为波数, $R = 1.096\,776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 为里德伯(Rydberg)常量。随后在紫外区发现氢原子光谱满足

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots), \quad (21-30)$$

称为赖曼(T. Lyman)系。在红外区发现了帕邢(F. Paschen)系

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, 6, \dots), \quad (21-31)$$

布拉开(F. Brackett)系

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, 7, \dots), \quad (21-32)$$

和普芳德(H. A. Pfund)系

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, 8, \dots). \quad (21-33)$$

将这些公式合并可以表示为更普遍的形式

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = T(m) - T(n), \quad (21-34)$$

式中 n, m 为正整数,称为里兹(W. Ritz)合并原理,是由里兹在1908年得到的。将

$$T(m) = \frac{R_H}{m^2} \quad (21-35)$$

称为光谱项。在式(21-34)中,给定 m 后, n 只能取 $n = m+1, m+2, \dots$ 。 m 取不同值时给出不同光谱系, n 不同对应于不同谱线(如图21-15所示)。

除了发现上述的氢原子光谱的实验规律以外,1895年,伦琴(Wilhelm Röntgen)发现了X射线的存在。1897年,汤姆逊(J. J. Thomson)从实验上确认了电子的存在。1910年,密立根用油滴实验精确地测定了电子电荷。1909年,卢瑟福(E. Rutherford)的 α 粒子散射实验中发现部分大角度散射事例(如图21-16),并又由此提出了原子的核结构模型:原子中带正电的部分集中在很小的区域($< 10^{-14} \text{ m}$)中,原子质量主要集中在带正电的部分,形成原子核,电子绕着原子核转动如同行星绕太阳转动一样满足开普勒三定律,又称太阳系模型。1913年,盖革和马斯顿在卢瑟福的指导下作了进一步的实验,证明了卢瑟福原子模型

的正确性。

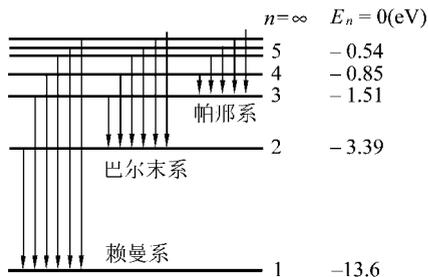


图 21-15

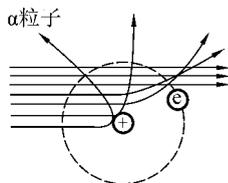


图 21-16

21.4.2 经典原子模型的困难

原子核结构模型很好地解释了 α 粒子散射实验,但却使经典理论陷入困境:首先按照经典电磁理论,加速带电粒子一定要辐射电磁波,绕核旋转的电子的动能越来越小,最后电子被吸引到原子核上,得出原子是不稳定的结论。其次,核结构模型无法解释原子的线状光谱问题,按照经典电磁理论,电子作圆周运动会辐射电磁波,由于辐射能量损失,电子运动半径会越来越小。若电子作圆周运动的周期为 T ,发射的电磁波的周期也应该是 T ,电子的周期由于运动半径越来越小是连续变化的,所以按卢瑟福的原子模型,原子辐射的电磁波应该是连续谱,不应该是非连续的线状光谱。

1912年,玻尔来到卢瑟福的实验室,参加了 α 粒子散射实验的研究工作,并深深地为卢瑟福的原子结构及其稳定性问题所吸引,玻尔将原子的核结构模型与爱因斯坦的光量子假设结合起来,于1913年以“原子构造和分子构造”为题,接连发表了三篇划时代的论文,提出了他的氢和类氢原子模型,并为此获得了1922年的诺贝尔物理学奖。

21.4.3 玻尔理论

1. 玻尔假设

玻尔原子模型主要有如下三个内容:

(1) 定态条件:电子绕原子核作圆周运动,但不辐射能量,是稳定的状态,称为定态,每一个定态对应于电子的一个能级(图21-17(a));

(2) 频率条件:当原子从某一能量状态跃迁到另一能量状态产生电磁辐射(图21-17(b)、(c)),且电磁波的频率满足条件

$$h\nu = E_m - E_n. \quad (21-36)$$

(3) 角动量量子化条件:电子绕原子核作圆周运动时,角动量是量子化的,角动量的取值为

$$mv_n r_n = \frac{h}{2\pi}, \quad (21-37)$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$ 。

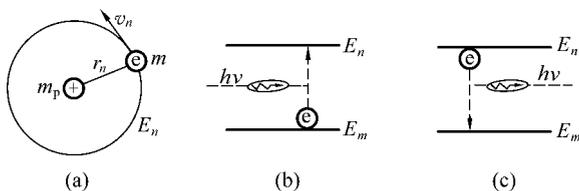


图 21-17

2. 氢原子光谱的玻尔理论

利用玻尔理论结合经典理论可很好地解释氢原子光谱规律。电子绕原子核做圆周运动,静电力作为向心力,即

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}. \quad (21-38)$$

再利用玻尔的角动量量子化条件

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi}, \quad (21-39)$$

由式(21-38)和式(21-39),立即得到氢原子的半径为

$$r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = n^2 r_1, \quad (21-40)$$

式中

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = a_0 = 0.053 \text{ nm} \quad (21-41)$$

称为玻尔半径。

氢原子的能量为电子的动能和电子与原子核相互作用势能之和,即

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (21-42)$$

而 $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$, 代入上式有

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \quad (21-43)$$

将氢原子半径公式(21-40)代入,有

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}, \quad (21-44)$$

或

$$E = E_n = \frac{E_1}{n^2}, \quad (21-45)$$

式中 $n=1, 2, \dots, n$ 为整数, $E_1 = -13.6\text{eV}$ 为氢原子基态能(电离能)。

氢原子在两能态跃迁,所放出的光子的频率为

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (21-46)$$

式中 $R_H = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.097373 \times 10^7 \text{m}^{-1}$ 为里德伯恒量。

应该说明,玻尔理论只是半经典理论,在经典的理论上生硬地强加了一个量子化条件,不是一个自成体系的完整理论,这是玻尔理论的不足之一。除此以外,它也不能解释复杂原子的光谱,不能计算光谱线相对强度。要更准确地描述原子的行为需要量子力学。但玻尔的量子论仍然受到普遍的重视,其主要原因是:1)它能够解释氢原子光谱的主要特征;2)玻尔提出的一些基本概念,例如原子能量的量子化和量子跃迁的概念以及频率条件等,至今仍然是正确的;3)打开了人们认识原子的大门。

例 21-4 如用能量为 12.6eV 的电子轰击氢原子,将产生哪些光谱线?

解 设原子在该能量的轰击下跃迁到第 n 个能态上,则有关系

$$\Delta E = E_n - E_1 = \frac{E_1}{n^2} - E_1,$$

将 $E_1 = -13.6\text{eV}$ 和 $\Delta E = 12.6\text{eV}$ 代入上式,可解出

$$n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 12.6}} \approx 3.69.$$

用 12.6eV 的电子轰击氢原子,只能使原子所处的最高能级为 $n=3$,在该能态上可以向低能级跃迁,所以可能的能级跃迁

$$3 \rightarrow 1: \frac{1}{\lambda_1} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 0.975 \times 10^7,$$

波长为

$$\lambda_1 = 1.025 \times 10^{-7} \text{m}.$$

$$3 \rightarrow 2: \frac{1}{\lambda_2} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 0.975 \times 10^7,$$

波长为

$$\lambda_2 = 1.216 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

$$2 \rightarrow 1: \frac{1}{\lambda_3} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 0.152 \times 10^7,$$

波长为

$$\lambda_3 = 6.579 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

21.5 激光器的工作原理

与普通光源(像蜡烛、太阳、白炽灯等)相比,激光光源有一系列优点,如方向性好,发散角可以小到 10^{-4} rad;单色性好,线宽只有 $\Delta\lambda \sim 10^{-8} \text{ \AA}$;强度大,脉冲瞬时功率可达 $\sim 10^{14} \text{ W}$ 。激光器的种类也很多,有固体激光器,如红宝石激光器;有气体激光器,如氦氖气体激光器、二氧化碳气体激光器;有半导体激光器,如激光二极管;还有液体激光器等。

由于激光的单色性好、方向性强、相干性高等一系列优点,使得激光的应用范围很广。包括测距、准直、定向等激光测量;焊接、钻孔、切割等激光加工;激光对有机物产生的光、热、压力等进行激光医疗手术;还有激光通信、信息存储等等。

为了说明激光器的工作机理,先介绍原子的自发辐射、受激辐射和受激吸收的概念,然后简要介绍激光器的结构和工作原理。

21.5.1 自发辐射、受激辐射和受激吸收

处于激发态的原子可自发从高能态跃迁到低能态而发光,称为自发辐射(图21-18(a))。原子吸收光子后可发生两种过程:从高能态跃迁到低能态,称为受激辐射(图21-18(b)),也可由低能态跃迁到高能态,称为受激吸收(图21-18(c))。

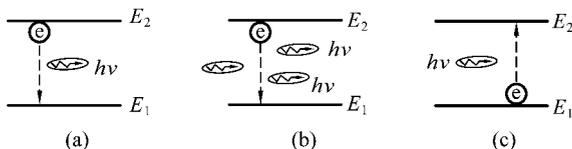


图 21-18

1. 原子在能级上的统计分布

由大量原子组成的系统,当温度不太低时,原子并不是全部处在同一状态上,而是处在各种各样的能级上,原子数目按能级的分布服从玻耳兹曼统计分布:

$$N_n \propto e^{-\frac{E_n}{kT}}. \quad (21-47)$$

若 $E_2 > E_1$, 则两能级上的原子数目之比

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}} < 1。$$

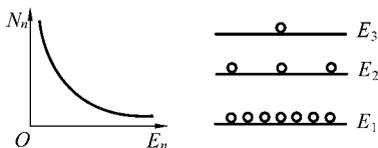


图 21-19

例 21-5 对于氢原子, $E_n = -\frac{E_1}{n^2}$, 求在常温下 ($T=300\text{K}$) 处在第一激发态的氢原子数与处在基态的原子数比。

解 因原子数目按能级的分布服从玻耳兹曼统计分布, 故

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}} = e^{-395} \ll 1。$$

可见几乎所有电子都处于基态上。

2. 自发辐射

设 E_1 、 E_2 分别为原子的基态能量和某激发态的能量, N_1 、 N_2 为处于 E_1 、 E_2 能级的原子数。因自发辐射, 单位时间内从 E_2 能级跃迁到 E_1 能级的原子数应与处在 E_2 能级的原子数成正比, 即

$$-\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{自发}} = A_{21}N_2。 \quad (21-48)$$

将 A_{21} 称为爱因斯坦自发发射系数, 其意义为单个原子在单位时间内发生自发辐射的概率。对于自发辐射, 各原子辐射的光是相互独立的, 是非相干的。

3. 受激辐射

当频率为 $\nu = (E_2 - E_1)/h$ 的外来光入射时, 会引起高能态的原子跃迁到低能态。单位时间内, 从能级 E_2 跃迁到能级 E_1 的原子数应与 N_2 成正比

$$\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{\text{受激辐射}} = W_{21}u(\nu)N_2, \quad (21-49)$$

式中 W_{21} 称为受激辐射系数; $u(\nu)$ 为在频率 $\nu = (E_2 - E_1)/h$ 附近, 单位频率间隔的外来光的能量密度。

受激辐射光与外来入射光的频率、偏振方向、相位及传播方向均相同, 故称受激辐射光和入射光是全同光子, 受激辐射具有光放大的作用。

4. 受激吸收

当频率为 $\nu = (E_2 - E_1)/h$ 的外来光入射时,也会引起低能态的原子跃迁到高能态。从 E_1 跃迁到 E_2 的原子数

$$\left(\frac{dN_{12}}{dt}\right)_{\text{受激吸收}} = W_{12}u(\nu)N_1, \quad (21-50)$$

式中 W_{12} 为吸收系数,爱因斯坦从理论上给出

$$W_{12} = W_{21}. \quad (21-51)$$

21.5.2 粒子数反转和光放大

若要产生激光,必须对光进行放大,但由前面的分析可知,在一般情况下,发光媒质中只有少数原子处在激发态上,当一束光射入媒质后,可同时引起受激吸收和受激辐射。设在基态的原子数有 N_1 个,激发态有 N_2 个,因为 $N_1 > N_2$,由关系式(21-49)~(21-51)有

$$\left(\frac{dN_{12}}{dt}\right)_{\text{受激吸收}} > \left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{\text{受激辐射}},$$

即有更多的原子吸收入射光被激发,最终效果在宏观上表现为对光的吸收,达不到对光的放大目的。如果原子的分布是 $N_2 > N_1$,称粒子数分布反转,且有关系

$$\left(\frac{dN_{12}}{dt}\right)_{\text{受激吸收}} < \left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{\text{受激辐射}},$$

最终效果是受激辐射占主导地位,宏观上表现为对外辐射,可实现光的放大。处于粒子数反转分布的介质称为激活介质,它是激光器的工作物质。

21.5.3 激光器的工作原理

1. 激光器的结构

一台激光器主要由三部分组成:工作物质、光学谐振腔和激励能源。红宝石激光器的工作物质为两面带有反射镜的红宝石棒(如图 21-20 所示),氙灯为激励

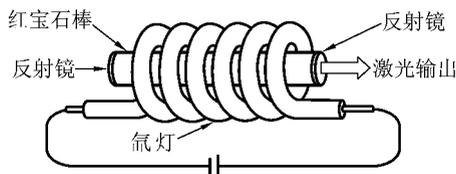


图 21-20

能源,两反射镜构成一光学谐振腔。

2. 工作物质粒子数反转的实现

不同种类的激光器实现激活介质粒子数反转的方式不同。例如,对于氦氖气体激光器,粒子数反转主要是利用氦原子的亚稳态实现的。一般原子的激发态寿命为 10^{-8}s ,但也有些激发态的寿命长达 10^{-3}s 甚至长达 1s ,称这种长寿命的激发态为亚稳态。

为叙述简单,假设原子只有三个能级 E_1 、 E_2 和 E_3 ,其中 E_2 为亚稳态,称为三能级模式。在激励能源的激励下,处在基态 E_1 上的粒子被抽运到激发态 E_3 上(如图21-21所示),由于激发态 E_3 的寿命很短,粒子通过碰撞很快以无辐射的方式从 E_3 态转移到亚稳态 E_2 上(如图21-22所示),这样一方面 E_2 能级上的粒子数增多,另一方面处在 E_1 态上的粒子数减少,使得 $N_2 > N_1$,结果出现了粒子数反转(如图21-23所示),工作物质被激活。

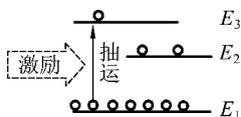


图 21-21

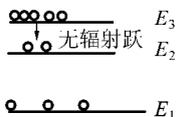


图 21-22

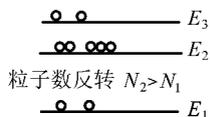


图 21-23

实际工作物质原子能级结构要比这复杂的多,可能存在几对能级之间的粒子数分布反转,相应会有发射几种波长的激光。例如,氦氖激光器可以发射 $0.6328\mu\text{m}$ 、 $1.15\mu\text{m}$ 和 $3.39\mu\text{m}$ 等波长的激光。

3. 光学谐振腔的作用

光有激活介质还不是一台激光器,激活介质内部自发辐射的光初始是杂乱无章的非相干光,而且辐射的光在传播方向上是各向同性的。若在工作物质两侧加上反射镜,其中一面镜子的反射率很高,几乎为 100% ,为了让激光输出,另一面镜子是部分反射的(如图21-24所示)。这样由于反射镜的作用,只有传播方向与轴线平行的光才会在两个镜面之间往复反射、连锁放大,形成稳定的激光,最后从部分反射镜输出,凡偏离轴线的光会散射出工作物质之外,不会被放大而形成激光。这就是说,光学谐振腔具有对激光束选择方向的作用。

谐振腔的第二个作用是选频。图21-25为氦氖激光器氦原子的 $0.6328\mu\text{m}$ 受激辐射光的谱线自然展宽示意图,自然宽度高达 $\Delta\nu \approx 1.3 \times 10^9\text{Hz}$,单色性很差。但加上谐振腔后,可以只让满足共振条件的某几种单色光得到放大,其他频率的光被抑制,从而达到选频的目的。

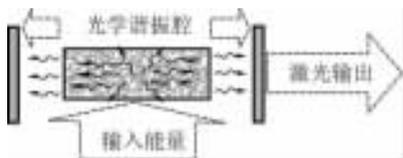


图 21-24

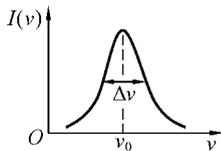


图 21-25

设谐振腔的长度为 L , 可以被放大的光一定满足驻波条件(共振条件), 即

$$nL = k \frac{\lambda_k}{2}, \quad (21-52)$$

式中 $k=1, 2, 3, \dots$ 为整数; n 为谐振腔内媒质的折射率; λ_k 为真空中的波长(如图 21-26 所示)。也可将上式写为

$$\lambda_k = \frac{2nL}{k}, \quad (21-53)$$

频率为

$$\nu_k = \frac{c}{\lambda_k} = k \frac{c}{2nL}. \quad (21-54)$$

可见, 在光学谐振腔内只有某些频率的光才能形成稳定的驻波, 称每一个谐振频率为振动纵模(如图 21-27 所示)。

相邻两个纵模频率的间隔为

$$\Delta\nu_k = \frac{c}{2nL}. \quad (21-55)$$

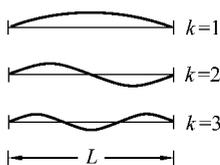


图 21-26

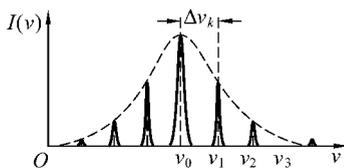


图 21-27

例如, 对于 $L \sim 1\text{m}$ 的氦氖激光器, $\Delta\nu \approx 1.5 \times 10^8 \text{ Hz}$, 波长为 $0.6328 \mu\text{m}$ 的谱线宽度为 $\Delta\nu = 1.3 \times 10^9 \text{ Hz}$, 在该线宽内可以存在的纵模个数为

$$N = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_k} = \frac{1.3 \times 10^9}{1.5 \times 10^8} \approx 8.$$

利用加大纵模频率间隔 $\Delta\nu_k$ 的方法, 可以使谱线宽度 $\Delta\nu$ 区间中只存在几个甚至一个纵模频率。比如将谐振腔管长 L 缩短到 0.1m , 则纵模频率间隔增大 $\Delta\nu_k = 1.5 \times 10^9 \text{ Hz}$, 由于 $\Delta\nu_k > \Delta\nu$, 在 $\Delta\nu$ 区间中, 只可能存在一个纵模(如图 21-28 所示), 最后使激光具有极好的单色性。

总之, 光学谐振腔主要有如下三个作用: 1) 使激光具有极好的方向性(沿轴

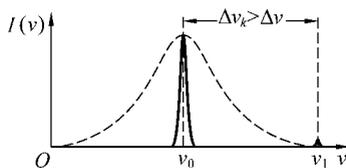


图 21-28

线); 2) 增强光放大作用(“延长”了工作物质); 3) 使激光具有极好的单色性(选频)。

4. 增益系数

此外,为了形成激光,激光器谐振腔必须具有一定的增益。受激辐射光在激光器的媒质内来回传播时,一方面可以被放大,媒质对光的放大作用可用增益系数描述;另一方面,由于媒质对光的吸收和散射以及反射镜的透射和吸收等因素,还存在损耗。如果损耗大于增益,不能形成激光,所以要想形成激光,谐振腔的增益系数必须大于某个阈值。

习题 21

21-1 测量星体表面温度的方法之一是将其看作黑体,测量它的峰值波长 λ_m ,利用维恩定律便可求出 T 。已知太阳、北极星和天狼星的 λ_m 分别为 $0.50 \times 10^{-6} \text{ m}$ 、 $0.43 \times 10^{-6} \text{ m}$ 和 $0.29 \times 10^{-6} \text{ m}$,试计算它们的表面温度。

21-2 宇宙大爆炸遗留在宇宙空间的均匀背景辐射相当于温度为 3K 的黑体辐射。试计算:

- (1) 此辐射的单色辐出度的峰值波长;
- (2) 地球表面接收到此辐射的功率。

21-3 已知 2000K 时钨的辐出度与黑体的辐出度之比为 0.259 。设灯泡的钨丝面积为 10cm^2 ,其他能量损失不计,求维持灯丝温度所消耗的电功率。

21-4 天文学中常用热辐射定律估算恒星的半径。现观测到某恒星热辐射的峰值波长为 λ_m ;辐射到地面上单位面积的功率为 W 。已测得该恒星与地球间的距离为 l ,若将恒星看作黑体,试求该恒星的半径。(维恩常量 b 和斯忒藩常量 σ 均为已知)

21-5 分别求出红光($\lambda = 7 \times 10^{-5} \text{ cm}$), X 射线($\lambda = 0.25 \text{ \AA}$), γ 射线($\lambda = 1.24 \times 10^{-2} \text{ \AA}$) 的光子的能量、动量和质量。

21-6 100W 钨丝灯在 1800K 温度下工作。假定可视其为黑体,试计算每秒钟内,在 5000\AA 到 5001\AA 波长间隔内发射多少个光子?

21-7 波长为 1\AA 的 X 射线在石墨上发生康普顿散射,如在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处观察散射光。试求:

- (1) 散射光的波长 λ' ;

(2) 反冲电子的运动方向和动能。

21-8 在氢原子被外来单色光激发后发出的巴耳末系中,仅观察到三条光谱线,试求这三条谱线的波长以及外来光的频率。

21-9 一个氢原子从 $n=1$ 的基态激发到 $n=4$ 的能态。

(1) 计算原子所吸收的能量;

(2) 若原子回到基态,可能发射哪些不同能量的光子?

(3) 若氢原子原来静止,则从 $n=4$ 直接跃回到基态时,计算原子的反冲速率。

21-10 砷化镓半导体激光器(GaAlAs),发射 $\lambda=8.0 \times 10^3 \text{ nm}$ 红外光,功率为 5.0 mW ,计算光子的产生率。

思考题 21

21-1 在光电效应实验中,用光强相同、频率分别为 ν_1 和 ν_2 的光做伏安特性曲线。已知 $\nu_2 > \nu_1$,那么它们的伏安特性曲线应该是图21-29中的哪个图?

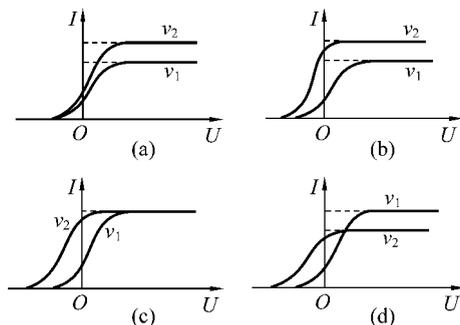


图 21-29

21-2 试比较光电效应与康普顿效应之间的异同。

21-3 用可见光照射能否使基态氢原子受到激发?为什么?

21-4 氢原子的赖曼系是原子由激发态跃迁至基态而发射的谱线系,为使处于基态的氢原子发射此线系中最大波长的谱线,则向该原子提供的能量至少应为多少?

21-5 用玻尔氢原子理论判断,氢原子巴耳末系(向第 1 激发态跃迁而发射的谱线系)中最小波长与最大波长之比为多少?

21-6 根据氢原子理论推导类氢离子(核电荷数为 Z_e ,核外只剩最后一个电子)轨道半径,电子绕核运动的线速度及原子的能级和电子跃迁时所发射单色光的频率公式。

第 22 章 量子力学基础

22.1 实物粒子的波动性

22.1.1 光的波粒二象性

光的干涉和衍射现象是光的波动性的直接证据,光电效应和康普顿效应又说明光具有粒子行为。这就是说,在某些情况下光突出显示出波动性,而在另一些情况下则突出显示出粒子性,将这种现象称为光的波粒二象性。

频率为 ν 、波长为 λ 的光波对应的光子的能量、动量分别为

$$\varepsilon = h\nu,$$

和
$$p = \frac{h}{\lambda},$$

由质能关系 $\varepsilon = mc^2$, 还可求得光子的质量为

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}。$$

22.1.2 德布罗意物质波假设

光波具有粒子性,那么实物粒子具有波动性吗?德布罗意(L. V. de Broglie)从光具有波粒二象性出发,认为实物粒子也应具有波动性。年轻的德布罗意于 1924 年在巴黎大学提交的博士论文中提出了与光的波粒二象性对称的思想:具有能量 E 和动量 p 的实物粒子具有波动性,所联系的波的频率 ν 和波长 λ 为

$$E = h\nu, \quad (22-1)$$

和
$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (22-2)$$

式中 λ 称为德布罗意波长,这就是著名的德布罗意假设。对应的波被称为物质波或德布罗意波。此假说当时纯粹是理论推测,德布罗意相信这种波动性可以从电子在晶体上散射这样的实验中检查到,后来于 1927 年确实由戴维逊(C. J. Davisson)和革末(L. H. Germer)完成了这样的实验。于是,德布罗意在 1929 年获得了诺贝尔物理学奖。

例 22-1 估算 $m=1\text{g}$, $v=1\text{cm/s}$ 的实物粒子的波长。

解 由于粒子速度不高,可不考虑相对论效应

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{10^{-3} \times 10^{-2}} = 6.62 \times 10^{-29} (\text{m}).$$

可见粒子对应的波长实在太小,其波动性根本无法表现出来。

例 22-2 用 $U=150\text{V}$ 的电压加速电子(电子的静质量为 $m=9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$)后,求电子波长。

解 虽然电子的质量小,但因加速电压不是很高,本题亦可不考虑相对论效应,加速后电子获得的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU,$$

速度为

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

波长为

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}} \quad (22-3)$$

或

$$\lambda \approx \frac{1.225}{\sqrt{U}} (\text{nm}). \quad (22-4)$$

将 $U=150\text{V}$ 代入式(22-4),可得 $\lambda=0.1\text{nm}$,与晶体中原子间距的数量级相当,故可通过类似于晶体对 X 射线的衍射,实现晶体对电子的衍射。

例 22-3 德布罗意把物质波假设用于氢原子,认为电子在经典的圆轨道上运动时,对应一个环形驻波(如图22-1所示),也就是说,圆周运动一定满足驻波条件,周长为物质波波长的整数倍,即

$$2\pi r = n\lambda,$$

式中 $n=1,2,3,\dots$ 为整数。对应的半径为

$$r = n \frac{\lambda}{2\pi} = n \frac{h}{2\pi mv},$$

角动量为

$$L = rmv = n \frac{h}{2\pi}.$$

上式正是玻尔的量子化条件。德布罗意用物质波的概念成功地解释了玻尔提出的轨道量子化条件。

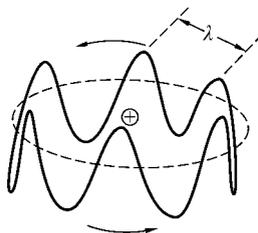


图 22-1

22.1.3 物质波实验验证

1. 戴维逊-革末实验

1927 年, 贝耳电话公司实验室的戴维逊 (C. J. Davisson) 和革末 (L. H. Germer) 研究电子在镍单晶上的衍射, 实验装置如图 22-2 所示, 电子枪发射的电子束经过电压 U 加速后, 投射到镍的晶面上, 经晶面散射后进入探测器, 进入探测器的电子数目可由电流计测出。

镍单晶相当于“光栅”(如图 22-3 所示), 假如电子具有波动性, 电子经过晶体散射后在不同方向应表现出衍射特征, 像分析 X 射线经过晶体的衍射, 电子衍射应满足布喇格公式

$$2d\sin\theta = k\lambda. \quad (22-5)$$

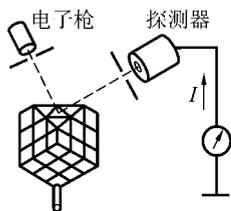


图 22-2

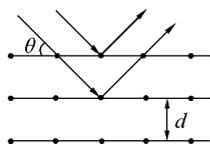


图 22-3

凡满足上式的探测方向, 电流计中应出现电流的极大值。将式 (22-4) 代入式 (22-5) 有

$$2d\sin\theta = k \frac{12.25}{\sqrt{U}},$$

式中 $k=1, 2, 3, \dots$ 或

$$\sqrt{U} = k \frac{12.25}{2d\sin\theta} = \frac{12.25}{2d\sin\theta}, 2 \times \frac{12.25}{2d\sin\theta}, 3 \times \frac{12.25}{2d\sin\theta}, \dots \quad (22-6)$$

若固定 θ 角, 在增大加速电压时, 会多次满足电流极大条件。图 22-4 为实验结果, 探测电流随着电压的增大, 确实呈现出震荡形式的变化, 验证了电子运动具有波动性。

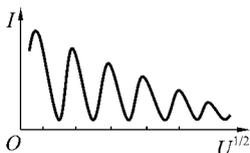


图 22-4

2. 其他实验

1927年,英国物理学家汤姆逊(G. P. Thomson)做了电子通过金多晶薄膜的衍射实验,1937年,戴维逊与汤姆逊获诺贝尔物理学奖;1961年,约恩逊(C. Jönsson)运用铜箔中形成的2~5条细缝得到了电子的多缝干涉图样;1930年,艾斯特曼(Estermann)、斯特恩(Stern)和他们的同事们证实了普通原子具有波动性;后来其他实验又验证了质子、中子等实物粒子都具有波动性。

22.2 波函数及统计解释

22.2.1 波函数

既然粒子具有波动性,应该有描述波动性的函数——波函数。奥地利物理学家薛定谔(E. Schrödinger)在1925年提出用波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 描述粒子运动状态。按德布罗意假设:能量为 E 、动量为 p 的“自由粒子”沿 x 方向运动时,对应的物质波应为“单色平面波”,波函数为

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (22-7)$$

利用关系 $E = \hbar\omega$ 和 $p = \hbar k$ ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$),可将波函数改写为

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}, \quad (22-8)$$

式中 ψ_0 为待定常数。若粒子为三维自由运动,则波函数可表示为

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p \cdot \mathbf{r} - Et)}. \quad (22-9)$$

22.2.2 波函数的统计解释

对应粒子波动性的波函数作为一个重要的新概念登上量子力学舞台后,其本身的物理意义却模糊不清,使许多物理学家感到迷惑不解而大伤脑筋。波函数的物理意义是什么?究竟粒子的什么性质在波动?爱因斯坦为了解释光具有的粒子和波的二象性,把光波的强度解释为光子出现的几率密度。玻恩(M. Born)在这个观念的启发下,将其推广到函数上:将 $|\Psi|^2$ 认为是电子(或其他粒子)的几率密度,即波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 的物理意义为,波函数的模的平方(波的强度)

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \Psi(\mathbf{r}, t)^* \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (22-10)$$

代表在时刻 t 、空间 \mathbf{r} 处单位体积中微观粒子出现的概率,其中 $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ 是 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 的复共轭,将德布洛意波也称为概率波。

玻恩给出的波函数统计解释,是量子力学的基本原理之一。为此他在 1954 年获得了诺贝尔物理学奖。

量子力学建立以后,爱因斯坦和玻尔争论了近 30 年。以玻尔为首,包括海森堡、狄拉克、玻恩的哥本哈根学派认为:宇宙中事物偶然性是根本的,必然性是偶然性的平均表现。以爱因斯坦为首,包括薛定谔、德布罗意学派认为:自然规律根本上是决定论的,“上帝肯定不是用掷骰子来决定电子应如何运动的!”。但实验事实和现代物理的成就更偏爱玻尔的观点。

应该说明:

(1) 波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 不同于经典波的波函数,波函数本身无直接物理意义,有意义的是其模方。

(2) 在时刻 t 、空间 \mathbf{r} 点处,体积元 dV 中发现微观粒子的概率为

$$\rho(\mathbf{r}, t)dV = \Psi(\mathbf{r}, t)^* \Psi(\mathbf{r}, t)dV = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV,$$

粒子在空间各点的概率总和应为 1,即

$$\int_{\Omega} \Psi^*(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t)dV = 1, \quad (22-11)$$

式中 Ω 为全空间,将式(22-11)称为波函数的归一化条件。

(3) 按照玻恩对波函数的统计解释,波函数应该是单值、有限和连续的,称为波函数满足的自然条件。

(4) 对单个粒子, $|\Psi|^2$ 给出粒子的概率分布密度。对 N 个粒子, $N|\Psi|^2$ 给出粒子数的分布密度;在体积元 dV 中发现的粒子数为

$$dN = N\Psi(\mathbf{r}, t)^* \Psi(\mathbf{r}, t)dV。$$

22.2.3 微观粒子的波粒二象性

如何理解微观粒子的波粒二象性?一个光子,怎么能够有频率呢?爱因斯坦在他生命快结束时还在考虑“什么是光量子”这个问题。

我们可以很容易地建立经典波的图像,例如水面波的图像;也可以很容易建立经典粒子的图像,例如,一粒花生豆、一粒沙子等的图像。如何能将具有波动性的光看成粒子?又如何将一个电子看为一系列波呢?要回答这些问题,或许应该反思我们以往的经典经验和感觉,不能将粒子和波的图像仅局限在我们可以感觉的范围内,要扩大波和粒子的内涵。

所谓粒子性就是指整体性、不可分割性,要与经典粒子的概念区分开来,经典粒子有确定的轨道,但量子粒子没有轨道的概念。所谓波动性是指粒子状态的可叠加性,对应地会出现“干涉”、“衍射”等波特有的现象,但这又不是经典的波,并不对应某真实物理量的波动。

波粒二象性是指波动具有粒子性的一面,粒子也有波的一面。波动性和粒子性是寓于一体的,在一些情况下,实物粒子突出显示出其粒子特性,而在另一些情况下,则突出显示出波动特性。光的直线传播规律、反射和折射规律反映了光的粒子性,而光的干涉、衍射现象和光在物质表面的穿透现象反映了光的波动性。微观粒子的波粒二象性,更像光在几何光学和物理光学中所表现的双重性。

在历史上有人认为电子的波动性是大量电子相互影响的结果,然而,电子双缝衍射实验表明,即使入射电子流极其微弱,以致让入射电子几乎一个一个地通过单缝,底片上出现一个一个的点子(图22-5(a)),开始时点子无规则分布,说明电子具有“粒子性”,随着电子数增大,逐渐形成衍射图样(图22-5(b)、(c)),说明单个电子具有波动性。这一波动性是单个电子重复许多次相同实验表现出的统计结果,也可以说是许多电子在同一个实验中的统计结果。电子的波动性是单个电子具有的,不是大量电子相互影响的结果。

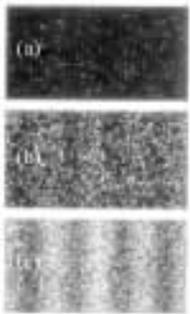


图 22-5

不能简单地将电子看成波包,若果真是这样,组成波包的不同频率的单色波的速度由于色散会各不相同,最后导致波函数在空间的分布不稳定,实际情况并不是这样的。

22.3 不确定性关系

22.3.1 位置和动量不确定关系

按照经典波动理论,约束在空间某区域内的波不可能是单色的,不可能具有唯一的波长或唯一的动量。这一结论对物质波同样正确,被束缚在某区域的粒子不可能具有确定的动量,即粒子的坐标和动量不能同时取确定值,即存在一个不确定关系。1927年海森堡(W. Heisenberg)提出了著名的位置-动量不确定关系

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (22-12)$$

下面以电子的单缝衍射为例说明这一不确定关系。如图22-6所示,如果把单缝看成对电子坐标的测量仪器,缝的宽度 Δx 相当于对电子坐标测量的不确定度。按照波动理论,电子单缝衍射“中央亮纹”的半角宽度为

$$\Delta x \sin \varphi = \pm \lambda$$

或

$$\varphi \approx \sin \varphi \approx \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

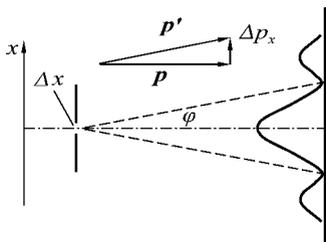


图 22-6

落在中央亮纹不同位置处的电子可以认为具有不同的 p_x 分量,也就是说单缝的存在使电子在 x 方向的动量分量出现不确定性,落在中央处的电子的 p_x 分量为零,落在中央亮纹边缘处的电子的 $p_x = \Delta p_x$,且有

$$\Delta p_x = |p' - p| \approx \varphi p = \frac{\lambda}{\Delta x} p = \frac{h}{\Delta x},$$

所以两者乘积近似有

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim h.$$

可见,对坐标 x 测量得越精确(Δx 越小),动量不确定性 Δp_x 就越大(衍射越厉害),电子的坐标和动量不能同时确定。如果不限制电子坐标(自由电子),电子的动量可以取确定值(单色平面波)。对三维运动,不确定关系为

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar/2, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar/2. \end{cases} \quad (22-13)$$

不确定性与测量没有关系,是微观粒子波-粒二象性的体现。不确定性的物理根源是粒子的波动性。

不确定关系对测量或观测精度提出了限制。在经典物理学中,测量仪器对被测对象的影响一般很小,通常可以忽略,即使不能忽略,也可以预见。如用眼睛“观测”足球的过程实际涉及光子与足球的碰撞过程,在该过程中足球将光子反射到了眼睛,光子与足球的碰撞改变了足球的位置和动量,这些改变显然可以被忽略。但是,当观测原子或电子时,光子对这些量子小系统的影响就不能忽略,也不能预见光子对这些小系统运动状态的准确影响。例如在单缝衍射实验中,对电子位置测得越准确(缝越窄),对动量带来的影响就越不确定。从原理上,无法预见测量对微观量子系统带来的影响,最后限制了测量或观测的精度。

例 22-4 氦氖激光器发光波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, 谱线宽度为 $\Delta \lambda = 10^{-9} \text{ nm}$, 求激光的相干长度。

解 由于激光的谱线宽度不为零,所以激光的波列长度不是无限长。当激光

光子沿 x 方向传播时,它的 x 坐标的不确定可以认为是相干长度。由关系

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

可得

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda, \quad (22-14)$$

谱线展宽导致光子动量的不确定 Δp_x 与 $\Delta \lambda$ 有关,将式(22-13)代入式(22-14)有

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad (22-15)$$

最后得激光的相干长度为

$$\Delta x \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 400\text{km}。$$

22.3.2 能量和时间不确定关系

不确定关系还存在于能量和时间之间。由于光波列长度与原子发光的寿命 Δt 之间有如下关系:

$$\Delta x = c\Delta t,$$

将上式代入激光光子位置-动量不确定性关系中有

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2,$$

上式变为

$$c\Delta t \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2,$$

将动量换为光子的能量,立即可得能量和时间的不确定性关系为

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2。 \quad (22-16)$$

例 22-5 原子在激发态的寿命为 10^{-8}s ,求原子谱线自然宽度。

解 利用时间能量不确定关系,原子从该激发态跃迁时所辐射的光子能量不确定范围为

$$\Delta E \geq \hbar/(2\Delta t) \approx 1 \times 10^{-7} \text{eV},$$

所以谱线宽度为

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} \approx 1 \times 10^8 \text{Hz}。$$

原子处在激发态的寿命越长,辐射光的谱线宽度越小。

例 22-6 求氢原子电子的轨道速度的不确定范围,并与电子的轨道运动速度 10^6m/s 比较。

解 氢原子中电子的空间不确定范围大致为玻尔半径的大小,利用不确定关系可得电子动量的不确定范围为

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{a_0},$$

速度不确定范围为

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{\hbar}{2m} \frac{1}{a_0} \approx 10^6 \text{ (m/s)}.$$

速度的不确定度与电子本身的速度可以比拟,其波动性十分明显,不能用轨道概念描述电子的运动。

22.4 薛定谔方程

按照经典波动理论,波动的物理量满足如下形式的波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

式中 V 为波速。

物质波的波动方程是什么?德布洛意关于电子波动性的假设提出后,年轻的奥地利物理学家薛定谔(E. Schrödinger)就开始思考波函数所满足的方程,并得到了这个方程,为此薛定谔获得了 1933 年的诺贝尔物理学奖。这一方程像经典力学中的牛顿方程一样,是量子力学中的基本方程,称为薛定谔方程。

22.4.1 薛定谔方程的建立

自由粒子的波函数为

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}, \quad (22-17)$$

关于波函数对时间微分得

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi(x, t)$$

或

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = E \Psi(x, t). \quad (22-18)$$

式(22-18)说明,将波函数对时间求导后再乘以因子 $i\hbar$, 所得结果相当于对波函数直接乘以能量,故称 $\hat{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 为能量算符。对波函数取坐标微分得

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = i \frac{p_x}{\hbar} \Psi(x, t)$$

或

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = p_x \Psi(x, t). \quad (22-19)$$

式(22-19)说明,将波函数对坐标求导后再乘以因子 $-i\hbar$,所得结果相当于对波函数直接乘以动量,故称 $\hat{p}_x \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ 为动量算符。对式(22-19)用动量算符再作用一次可得

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\hat{p}_x^2}{\hbar^2} \Psi(x,t),$$

由于能量动量有关系

$$E = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \quad (22-20)$$

故联立式(22-18)~式(22-20)可得

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\hat{p}_x^2}{\hbar^2} \Psi(x,t) = -\frac{2m}{\hbar^2} E \Psi(x,t) = -\frac{2m}{\hbar^2} i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t},$$

即

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t). \quad (22-21)$$

这就是自由粒子的薛定谔方程。

把自由粒子推广到非自由粒子(势场中的粒子),设粒子处在势函数为 $U(x,t)$ 的势场中,粒子的能量为

$$E = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + U(x,t), \quad (22-22)$$

对应的算符为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,t), \quad (22-23)$$

称为能量算符或哈密顿算符。并认为有关系

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,t) \right] \Psi(x,t) = \hat{H} \Psi(x,t) = E \Psi(x,t).$$

结合式(22-18)有

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \hat{H} \Psi(x,t). \quad (22-24)$$

这就是含时薛定谔方程。

将一维势场中的粒子推广到三维势场 $U(\mathbf{r},t)$ 中,粒子的能量为

$$E = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} + U(\mathbf{r},t),$$

哈密顿算符为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(\mathbf{r},t).$$

令

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \\ \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\quad (22-25)$$

薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (22-26)$$

这就是三维情形下的含时薛定谔方程。

在以上分析过程中,薛定谔方程是从特殊情况进行推广后得到的,故上面并不是对薛定谔方程的推导过程,而是一个“猜导”过程,薛定谔方程的正确性只能由实验检验。事实上,式(22-26)没有考虑到相对论效应,认为粒子的速度不是很大,是描述非相对论性实物粒子的波函数所满足的方程。当粒子速度很高时,还要对该方程修改。

22.4.2 定态薛定谔方程

若微观粒子处在稳定的势场中,则势能函数 U 与时间无关,称这类问题为定态问题。例如:自由运动粒子相当于处在势能为零的势场中,即

$$U(r) = 0.$$

氢原子中的电子所处的势场为

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

此时哈密顿算符与时间无关,薛定谔方程可用分离变量法求解。在这种方法中,通常将波函数 Ψ 分离为空间坐标函数和时间函数的乘积,即

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi(\mathbf{r}) T(t),$$

代入薛定谔方程中

$$i\hbar \frac{dT(t)}{dt} \Phi(\mathbf{r}) = [\hat{H}\Phi(\mathbf{r})] T(t)$$

或

$$i\hbar \frac{dT(t)}{dt} \frac{1}{T(t)} = \frac{1}{\Phi(\mathbf{r})} \hat{H}\Phi(\mathbf{r}).$$

在上式中,等式左边可得只含变量 t ,右边只含变量 r ,对任意的 (t, r) 上式成立,该等式左右两边只能是与时间和空间均无关的常数,设该常数为 E ,则有

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{dT(t)}{dt} &= ET(t), \\ \hat{H}\Phi(\mathbf{r}) &= E\Phi(\mathbf{r}).\end{aligned}$$

第一个方程是关于变量为 t 的微分方程,解为

$$T(t) \propto e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (22-27)$$

是一个与时间有关的振动因子。

第二个方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right] \Phi(x, y, z) = E\Phi(x, y, z) \quad (22-28)$$

是关于变量 (x, y, z) 的微分方程,称为定态薛定谔方程,又称为能量算符的本征方程。其解 $\Phi(x, y, z)$ 与粒子所处的外力场 U 和边界条件有关,若求得该方程的解,则可将波函数表示为两部分的乘积

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et},$$

粒子出现在空间的几率

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\Phi(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|^2 = |\Phi(\mathbf{r})|^2.$$

粒子出现在空间的几率与时间无关,这就是称为定态的原因。上式说明,定态问题最后归结为求解定态薛定谔方程的解。

22.5 力学量算符的本征值问题

22.5.1 力学量的算符表示

力学量的算符表示是量子力学的又一基本假设。在量子力学中,系统的任何力学量均对应一算符,力学量所能取的值是其相应算符的本征值。

经典物理中的动量 p , 在量子力学中对应一动量算符 $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, 对一维运动, 动量算符为

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

坐标对应的坐标算符就是它自己

$$\hat{r} = \mathbf{r}.$$

对一维运动

$$\hat{x} = x,$$

动量算符的平方为

$$\mathbf{p}^2 = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = (-i\hbar\nabla) \cdot (-i\hbar\nabla) = -\hbar^2 \nabla^2.$$

所以动能算符可表示为

$$\hat{E}_k = \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2m} = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m}.$$

能量算符可表示为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + U(\boldsymbol{r})$$

或

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\boldsymbol{r})。$$

因为角动量为 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, 所以角动量算符为

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}。 \quad (22-29)$$

角动量分量算符为

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, \\ \hat{L}_y &= z\hat{p}_x - x\hat{p}_z, \\ \hat{L}_z &= x\hat{p}_y - y\hat{p}_x, \end{aligned} \quad (22-30)$$

角动量平方算符

$$\hat{L}^2 = \hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{L}} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2。 \quad (22-31)$$

22.5.2 算符的本征值问题

利用定态薛定谔方程求解能量和波函数实际上是一个能量算符的本征值问题。称

$$\hat{H}\Phi(\boldsymbol{r}) = E\Phi(\boldsymbol{r}) \quad (22-32)$$

为能量算符的本征值方程。 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 为能量算符的本征函数, E 为能量算符的本征值, $\Phi(\boldsymbol{r})$ 所描述的粒子状态为本征态。

为了使波函数单值、连续、有限, 在求解能量算符的本征值方程时, 能量的取值受到了限制。例如, 对于处在束缚态势场中的粒子能量只能取一系列的分立值:

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots。$$

同理, 通过求解动量算符、角动量算符的本征方程可得到相应算符的本征函数和本征值。

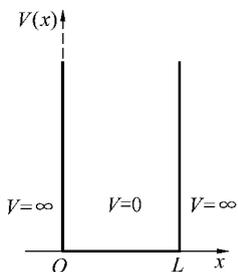
22.6 薛定谔方程的应用

薛定谔方程的应用例子很多, 大致可将这些例子分为两类: 粒子被束缚在某势场中, 处理势阱中的粒子问题; 自由粒子入射到某势垒上, 处理势垒对粒子的散射问题。

求解薛定谔方程步骤是:先确定粒子的哈密顿量,据此在全空间写出粒子的能量本征方程,最后利用波函数的自然条件确定能量本征值和波函数。

22.6.1 一维无限深势阱中的粒子

金属中的电子由于金属表面势能(势垒)的束缚,被限制在一个有限的空间范围内运动。如果金属表面势垒很高,可以将金属表面看为一刚性盒子的壁。若只考虑一维运动,金属就是一维的刚性盒子,其势能函数(如图22-7所示)可简化为



$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L), \\ \infty & (x < 0, x > L), \end{cases} \quad (22-33)$$

称其一为一维无限深方势阱。

在势阱内,定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi_i(x) = E \Phi_i(x). \quad (22-34)$$

图 22-7

令 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, 得

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dx^2} + k^2 \Phi_i = 0,$$

该方程的解为

$$\Phi_i(x) = C \sin(kx + \delta), \quad (22-35)$$

式中待定常数 C 和 δ 由波函数的自然条件确定。

在势阱外,定态薛定谔方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \infty\right) \Phi_e(x) = E \Phi_e(x).$$

按照波函数的自然条件,等式的右边应是有限的,在任意位置等式左边也应有限,必然要求乘积 $\infty \cdot \Phi_e(x)$ 有限,为了满足该条件,在势阱外的波函数只能是零

$$\Phi_e(x) \equiv 0. \quad (22-36)$$

波函数在阱壁上应连续,所以

$$\Phi_i(0) = \Phi_e(0) = 0, \quad (22-37)$$

$$\Phi_i(L) = \Phi_e(L) = 0. \quad (22-38)$$

由式(22-37)可得

$$C \sin \delta = 0,$$

由于 C 不为零,故有

$$\delta = 0.$$

由式(22-38)可得

$$C \sin kL = 0,$$

由上式有

$$kL = n\pi$$

或

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad (22-39)$$

式中 $n=1, 2, \dots$ 为整数。 n 不能取零, 否则在阱内波函数处处为零。 n 不能取负整数, 因为当 n 改变符号时, 粒子的能量和几率分布不改变, 所以 n 和 $-n$ 描述的是粒子的同一状态。

粒子的能量(能量本征值)为

$$E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = n^2 E_1, \quad (22-40)$$

式中

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (22-41)$$

式(22-40)说明, 势阱中粒子能量取分立值, 能量是量子化的, 不同能量对应不同的能级(如图22-8所示), 能量间隔为

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (2n+1)E_1 = (2n+1) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

微观粒子的质量越大, 粒子的能级间隔越小; 势阱宽度越宽, 能级间隔越小。对宏观粒子或非束缚粒子, 粒子的能量可以连续取值。对于束缚粒子, 能量的最小值并不等于零, 最低能量或称零点能为($n=0$)

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

零点能不为零, 这是粒子波动性的必然结果。

势阱中粒子的动量为

$$p_n = \pm \sqrt{2mE_n} = \pm n \frac{h}{2L}, \quad (22-42)$$

波长为

$$\lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{2L}{n}. \quad (22-43)$$

这说明势阱中粒子的每一个能量本征态, 正好对应于德布罗意波的一个特定波长的驻波。

常数 C 由归一化条件确定

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$$

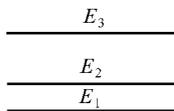


图 22-8

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2 dx = \int_0^L C^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1,$$

由此式可得

$$C = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

最后将式(22-35)和式(22-36)合并写为

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x & (0 \leq x \leq L), \\ 0 & (0 > x, x > L). \end{cases}$$

粒子在阱内的波函数为

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= \Phi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin kx \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \\ &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{L}} (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \\ &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{L}} [e^{-\frac{i}{\hbar} (E t - \rho x)} - e^{-\frac{i}{\hbar} (E t + \rho x)}]. \end{aligned} \quad (22-44)$$

波函数为频率相同、波长相同、传播方向相反的两单色平面波的叠加,叠加的结果一定是形成驻波。由关系式(22-43)可得

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}.$$

该式说明,阱宽为驻波半波长的整数倍。粒子在势阱中的几率分布为

$$\rho(x) = \Phi^2(x) = \begin{cases} \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} & (0 \leq x \leq L), \\ 0 & (0 > x, x > L). \end{cases} \quad (22-45)$$

如图 22-9 给出了 $n=1, 2, 3, 4$ 时的定态波函数及其模平方。

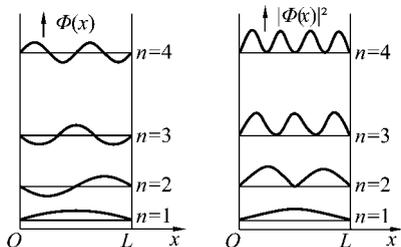


图 22-9

例 22-7 已知质量为 m 的一维粒子的波函数为

$$\Psi_n(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-i\alpha_n t/\hbar} & (0 < x < L), \\ 0 & (x \leq 0, x \geq L), \end{cases}$$

式中 $\alpha_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$, $n=1, 2, 3, \dots$ 为整数。

- (1) 求基态和第 4 激发态的能量；
- (2) 求粒子的几率密度分布函数；
- (3) 求粒子在基态和第 2 激发态时的最可几位置。

解 由波函数可知, 粒子处在宽度为 L 的势阱中, 因为

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_n(x, t)}{\partial t} = \alpha_n \Psi_n(x, t),$$

所以粒子的能级为

$$E_n = \alpha_n.$$

- (1) 当 $n=1$ 时, 对应基态的能量为

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

当 $n=5$ 时为第 4 激发态, 对应的能量为

$$E_5 = 5^2 E_1 = \frac{25\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

- (2) 波函数的模平方或对应几率密度为

$$\Psi_n^*(x, t) \Psi_n(x, t) = \begin{cases} \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} & (0 < x < L), \\ 0 & (x \leq 0, x \geq L). \end{cases}$$

(3) 最可几位置对应几率密度的极值位置, 几率密度的一阶导数应为零。因为基态几率密度为

$$|\Psi_1|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L},$$

令

$$\frac{d|\Psi_1|^2}{dx} = 0,$$

得

$$\frac{2\pi}{L^2} 2 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \frac{2\pi}{L^2} \sin \frac{2\pi x}{L} = 0,$$

由此可解出最可几位置为

$$x = 0, \frac{L}{2}, L.$$

在这三个位置中,可以验证只有 $x=L/2$ 时几率密度最大。

第二激发态的几率密度为

$$\frac{d|\Psi_3|^2}{dx} = 0,$$

可解出最可几位置为

$$x = 0, \frac{L}{6}, \frac{L}{3}, \frac{L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{5L}{6}, L.$$

在这些位置中只有 $x = \frac{L}{6}, \frac{L}{2}, \frac{5L}{6}$ 三个位置粒子的几率密度最大。

22.6.2 一维谐振子(抛物线势阱)

晶体中原子围绕平衡位置做小振动时可近似认为是谐振动,势函数为

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

哈密顿量

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2.$$

定态薛定谔方程

$$\left(-\frac{\hbar^2 d^2}{2m dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\right)\Phi(x) = E\Phi(x)$$

或

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\Phi = 0.$$

利用级数展开法可求解该微分方程。在求解时,因波函数满足自然条件,进一步限制了能量 E 的取值。此处给出主要结论:

1. 谐振子能量

能量 E 是量子化的

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (22-46)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (22-47)$$

能量间隔均匀(如图 22-10 所示)

$$\hbar\omega = h\nu.$$

最低能量(零点能)为

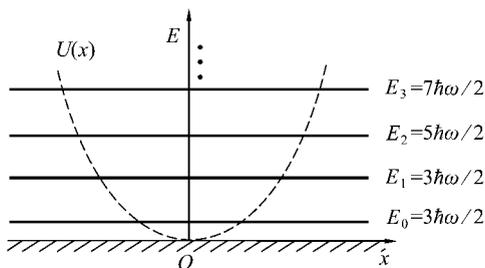


图 22-10

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega。$$

与普朗克假设不同,此处零点能不为零。

2. 谐振子波函数

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{2n\sqrt{\pi n!}} \right)^{1/2} H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},$$

式中 H_n 是厄密(Hermite)多项式,最高阶为 $(\alpha x)^n$ 。例如,前几个波函数为

$$\Phi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

$$\Phi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \cdot 2(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

$$\Phi_2(x) = \left(\frac{\alpha}{8\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} [2 - 4(\alpha x)^2] e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

.....

图 22-11 给出了当 $n=0, 1, 2$ 和 9 时谐振子几率密度分布,当 $n \rightarrow \infty$ 时,量子几率分布趋于经典几率分布(图 22-10(d)中的虚线所示)。

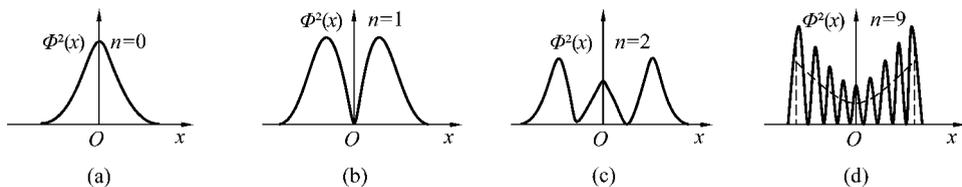


图 22-11

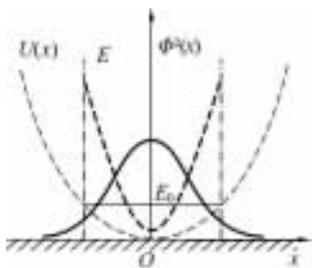


图 22-12

图22-12给出了谐振子的势能曲线(细虚线)、经典谐振子的几率密度(粗虚线)和量子谐振子的几率密度分布(实线)。量子谐振子与经典谐振子的几率分布有明显的区别:能量为 E_0 经典振子粒子沿阱壁只能爬升到 E_0 高度(竖直点划线与势能曲线的交点),这时粒子的动能为零,然后被阱壁反弹回去。但是能量为 E_0 量子振子,粒子沿阱壁爬升的高度可以大于 E_0 (竖直点划线的外侧),或说能量为 E_0 的粒子可以穿入阱壁内部,这是无法用经典物理解释的。

22.6.3 一维散射问题

现在考虑一个能量为 E 的粒子,从远处入射到某给定势场中,确定粒子的波函数和位置分布。下面分无限宽和有限宽台阶势垒两种情况讨论。

1. 矩形台阶势垒

电子在遇到金属的表面时势能会骤然升高,若将其简化为一个矩形台阶,则势能函数为

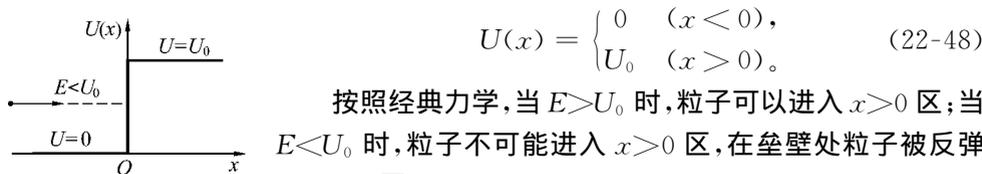


图 22-13

按照经典力学,当 $E > U_0$ 时,粒子可以进入 $x > 0$ 区;当 $E < U_0$ 时,粒子不可能进入 $x > 0$ 区,在垒壁处粒子被反弹回 $x < 0$ 区。

量子力学结果如何?下面通过求解薛定谔方程来寻找答案。

在 $x < 0$ 区域,薛定谔方程为

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + k_1^2 \Phi = 0,$$

式中 $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ 。

在 $x > 0$ 区域,薛定谔方程为

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - k_2^2 \Phi = 0,$$

式中 $k_2^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$ 。

设在两个区域的解应分别为

$$\Phi_1(x) = Ae^{+ik_1x} + Be^{-ik_1x},$$

$$\Phi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{+k_2x}.$$

当 $x \rightarrow \infty$, 由波函数 Φ_2 有限可得系数 $D=0$, 所以在两个区域的波函数分别为

$$\Phi_1(x) = Ae^{+ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad (22-49)$$

$$\Phi_2(x) = Ce^{-k_2x}. \quad (22-50)$$

波函数各部分的含义很明确(如图22-14所示): Ae^{+ik_1x} 代表入射波; Be^{-ik_1x} 为反射波; Ce^{-k_2x} 为透入势垒中的衰减波。也就是说, 一个总能量 E 的粒子, 可以透入 $U > E$ 的势垒中, 这是经典理论无法解释的。

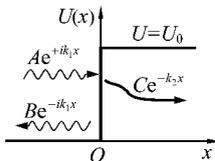


图 22-14

2. 隧道效应(势垒贯穿)

若自由粒子遇到的势是有限高和有限宽的势垒, 即势能为

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & (0 < x < a), \\ 0 & (x < 0, x > a). \end{cases} \quad (22-51)$$

如图 22-15 所示。在求解薛定谔方程时要分三个区域, 在势垒的左侧区域, 波函数为

$$\Phi_1(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx},$$

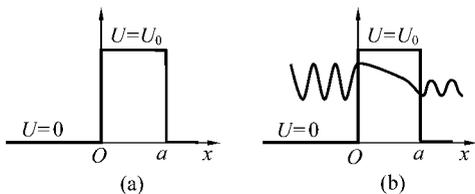


图 22-15

式中 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 波函数由入射波和反射波组成。

在势垒中波函数为

$$\Phi_2(x) = De^{-k'x} + Fe^{+k'x},$$

式中 $k' = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$, 波函数为透入势垒中指数衰减的波。

在势垒的右侧区域, 波函数为

$$\Phi_3(x) = Ce^{+ikx}$$

为透射过势垒向右传播的波。

待定常数 B, C, D, F 由波函数所满足的下列边界条件确定：

$$\begin{aligned}\Phi_1(0) &= \Phi_2(0), \\ \Phi_2(a) &= \Phi_3(a), \\ \Phi'_1(0) &= \Phi'_2(0), \\ \Phi'_2(a) &= \Phi'_3(a).\end{aligned}$$

若定义反射系数 R 为反射波的强度与入射波的强度之比,透射系数 T 为透射波的强度与入射波的强度之比,则可以证明

$$\begin{aligned}R &= \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{(k^2 + k'^2)^2 \sin^2 k'a}{(k^2 + k'^2)^2 \sin^2 k'a + 4k^2 k'^2}, \\ T &= \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 k'^2}{(k^2 + k'^2)^2 \sin^2 k'a + 4k^2 k'^2}.\end{aligned}$$

上两式表明,粒子入射到势垒上时,有一定的几率被反射,同时亦有一定的几率穿过势垒,称为隧道效应或势垒贯穿(如图22-15所示)。可以证明:当 $k'a \gg 1$ 时,粒子隧穿势垒的几率为

$$T \approx e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}. \quad (22-52)$$

若粒子的质量越小、势垒越窄或自由粒子的能量与势垒高度相差越小,则穿透率 T 越大。扫描隧穿显微镜(STM)是可以观测原子的超高分辨显微镜,当用探针在样品表面扫描时,样品表面和针尖之间形成了电子的势垒,间隙越小势垒宽度越窄,隧道电流 I 越大,通过测量隧道电流,可反推出样品表面和探针距离,最后绘出样品表面形貌图。

22.7 氢原子量子理论

氢原子中的电子在中心力场中运动,势能为

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

哈密顿量为

$$\hat{H} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U.$$

在球坐标系中上式变为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + U(r), \quad (22-53)$$

式中 \hat{L}^2 为电子绕核的轨道角动量平方算符,且有

$$\hat{L}^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{\hat{L}_z^2}{\sin^2\theta}, \quad (22-54)$$

式中 \hat{L}_z 为轨道角动量的 z 分量算符, 且有

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (22-55)$$

22.7.1 角动量算符的本征值问题

1. 角动量的量子化

通过求解 \hat{L}^2 和 \hat{L}_z 的本征方程, 可得到相应的本征函数和本征值, 具体过程此处忽略。此处只给出主要结论。

算符 \hat{L}^2 和 \hat{L}_z 的共同本征函数为 $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$, 称为球谐函数, 且有如下本征值方程

$$\hat{L}^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi),$$

式中 $l=0, 1, 2, \dots$ 为整数, 当 l 取定后, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 。以下给出前几个球谐函数

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{1,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}, \\ &\dots \end{aligned}$$

\hat{L}^2 的本征值为

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2,$$

式中 $l=0, 1, 2, \dots$ 称为角量子数。角动量的大小为

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = 0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \dots. \quad (22-56)$$

角动量的取值是量子化的, 最小值可取零, 这一点与玻尔假设不同。

\hat{L}_z 的本征值可取

$$L_z = m\hbar, \quad (22-57)$$

式中 $m=-l, -l+1, \dots, l-1, l$ 称为磁量子数, 或

$$L_z = 0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \dots, \pm l\hbar, \quad (22-58)$$

对于一定的角量子数 l , 角动量的大小确定, 但角动量的分量还不确定, 磁量子数 m 可取 $(2l+1)$ 个值, 角动量在空间 z 方向投影有 $(2l+1)$ 种可能, 角动量在空间的

取向也是量子化的。

角动量空间量子化可用经典矢量模型来描述,想像一长度为 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ 的经典矢量 L 绕 z 轴的进动,且该矢量在 z 轴的投影 L_z 在范围 $-l\hbar$ 到 $l\hbar$ 之间(图22-16),不同的 L_z 对应进动矢量 L 所在的圆锥面的顶角不同(如图22-17所示),半顶角的可能取值为

$$\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}。$$

若电子的 L_z 取定值,由于进动,角动量矢量在圆锥面上的方位角 φ 可以取 2π 范围内的任意值,方位角 φ 完全不确定,这实际上正对应 L_z 和 φ 所满足的不确定关系。量子理论中由于测不准关系的限制,电子绕原子核的角动量方向在任何时刻均是不确定的。

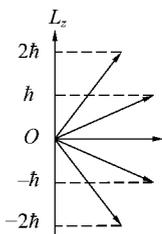


图 22-16

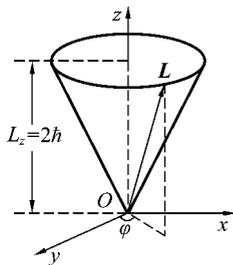


图 22-17

以上矢量模型完全是为了使角动量空间取向量子化的描述更形象,是一种辅助的描述方法。

2. 塞曼效应

在没有外磁场时,氢原子从第一激发态($l=1$)跃迁到基态($l=0$)时,发射光谱只有一条谱线。但在外磁场中发现,该条谱线分裂为三条,称光谱的这种分裂现象为塞曼(Zeeman)效应。这一效应证明了角动量空间取向是量子化的。

电子绕原子核运动时,会形成电流,从而有磁矩,很容易证明,轨道角动量和轨道磁矩之间有关系

$$\boldsymbol{\mu}_l = -\frac{e}{2m_0}\mathbf{L}。 \quad (22-59)$$

若加上外磁场,由于电子有轨道磁矩,在外磁场中的附加磁能为磁矩 $\boldsymbol{\mu}_l$ 在外磁场中的势能,即

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu}_l \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m_0}\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m_0}L_z B = m\left(\frac{e\hbar}{2m_0}\right)B。$$

由于磁量子数 m 可以取三个不同值, 导致第一激发态分裂为三个能级

$$\Delta E = \begin{cases} -\frac{e\hbar B}{2m_0} & (m = -1), \\ 0 & (m = 0), \\ \frac{e\hbar B}{2m_0} & (m = 1). \end{cases}$$

所以氢原子从第一激发态的三个能级跃迁到基态时, 谱线会分裂为三条。

22.7.2 氢原子的能量和电子几率密度

定态薛定格方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Phi(r, \theta, \varphi) = E\Phi(r, \theta, \varphi)。$$

利用分离变量法可将电子的波函数表示为

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r}Y(\theta, \varphi),$$

式中 $Y(\theta, \varphi)$ 为球谐函数; $R(r)$ 称为径向波函数。

下面将略去具体求解过程, 而直接给出主要结论:

(1) 电子的能量本征值为分立的

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{n^2} = -13.6 \frac{1}{n^2} (\text{eV}),$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$ 为整数, 称为主量子数。

(2) 电子轨道角动量量子数只能取

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1。$$

例如, 若电子处在基态, $n=1$, 角量子数只能取 $l=0$; 若电子处在第一激发态, $n=2$, 角量子数可取 $l=0, 1$ 两个值; 若电子处在第二激发态, $n=3$, 角量子数可取 $l=0, 1, 2$ 三个可能值。

(3) 在空间点 (r, θ, φ) 处, 小体积元 dV 中电子出现的概率为

$$|\Phi_{nlm}(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = |u_{nl}(r)|^2 |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi,$$

一般与 r, θ, φ 有关。上式对方向积分后给出电子处在 $r \sim r+dr$ 球壳的几率 (描述电子径向几率分布), 即

$$W_{nl}(r)dr = \left[\int |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega \right] R_{nl}^2(r)r^2 dr,$$

由于球谐函数是归一的, $\int |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = 1$, 所以

$$W_{nl}(r)dr = R_{nl}^2(r)r^2 dr = u_{nl}^2(r)dr,$$

式中 $u_{nl}^2(r) = r^2 R_{nl}^2(r)$ 称为电子的径向几率密度。电子径向波函数的前几个为

$$\begin{aligned} R_{1,0} &= \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} 2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \\ R_{2,0} &= \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right), \\ R_{2,1} &= \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{a_0 \sqrt{3}} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right), \\ &\dots \end{aligned}$$

式中 $a_0 = \varepsilon_0 h^2 / (\pi m e^2)$ 为玻耳半径。

不同于经典的轨道概念,电子沿径向的几率分布是连续的。在基态,电子在 $r = a_0$ 处出现的几率最大,与经典轨道对应。可以证明,电子径向几率分布的极大位置满足关系

$$r_n = n^2 a_0.$$

图22-18给出了 $n=1, 2$ 和 3 的径向几率分布。

(4) 电子在 (θ, φ) 附近的立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 内的几率为

$$\begin{aligned} W_{nl}(\theta, \varphi) d\Omega &= \left[\int_0^\infty R_{nl}^2(r) r^2 dr \right] |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega \\ &= |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \end{aligned}$$

图22-19给出了 $[(l, m) = (0, 0)]$ 和 $[(l, m) = (1, 0)]$ 时的径向分布几率,特别是电子处在基态时,径向几率分布是球对称的。

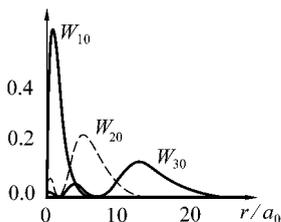


图 22-18

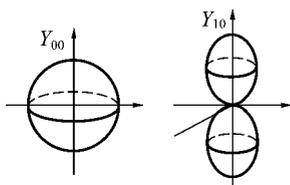


图 22-19

22.8 电子的自旋 泡利不相容原理

22.8.1 电子的自旋

如果电子角动量是量子化的,则对应的电子磁矩也是量子化的。按照电磁学知识,一个磁偶极子在不均匀外磁场中会受到作用力。如果原子磁矩在空间的取

向是连续的,那么原子束经过不均匀磁场发生偏转,在照相底片上得到连成一片的原子沉积;如果原子磁矩在空间取向是量子化的,那么原子束经过不均匀磁场发生偏转,在照相底片上得到分立的原子沉积。1921 年斯特恩-盖拉赫为了检验电子角动量是量子化而专门设计了一个实验,实验装置如图 22-20 所示,银原子射线源通过狭缝形成很细一束原子射线,进入不均匀磁场后打到底片上,整个装置放在真空中,他们先后用银原子和氢原子做了类似的实验。实验发现,在不加外磁场时,底片上沉积一条正对狭缝的痕迹,加上外磁场后呈现出上下对称的两条沉积,这说明电子角动量的空间取向是量子化的。但按照空间量子化理论,当 l 一定时, m 有 $(2l+1)$ 种可能,由于 $(2l+1)$ 是奇数,原子束通过不均匀外磁场后应有奇数条,而不可能只有两条。根据实验制备的原子来看,绝大多数原子处在基态,这时原子的总角动量为零,对氢原子只有一个 $1s$ 电子,其轨道磁矩为零,原子束不应分裂。

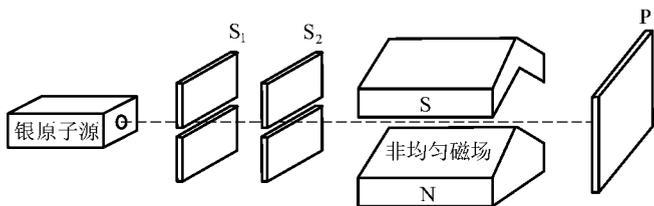


图 22-20

1925 年,乌伦贝克(G. E. Uhlenbeck)和哥德斯密特(S. A. Goudsmit)在分析上述实验的基础上假设:电子除了“轨道”运动还有一种内秉的运动,称为自旋。相应地有自旋角动量 S 和自旋磁矩 μ 。若自旋“轨道量子数”取 $s = \frac{1}{2}$ (s 称为自旋量子数),则电子的自旋运动的描述和轨道角动量的描述相同,即

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar,$$

电子自旋角动量在 z 方向(外磁场方向)的分量取

$$S_z = s\hbar, -s\hbar = -\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}$$

或

$$S_z = m_s\hbar,$$

式中 m_s 称为自旋磁量子数, $m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}$ 。

图 22-21 所示的陀螺运动图像表示电子在外磁场中的两种自旋运动状态。但应该说明,这种图像正像轨道运动图像一样,是借用了经典的描述方法,是很不确切的。电子的自旋运动是一种内部“固有的”运动,是相对论效应的必然结果,经

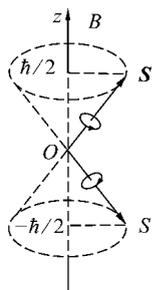


图 22-21

典物理学是无法理解电子有内部结构的,电子自旋运动无经典运动与之对应。

用电子自旋的概念,很容易解释斯特恩-盖拉赫实验。银原子的原子序数 $Z=47$,处在基态时,内层共 46 个电子,两两配对后既无轨道角动量又无自旋角动量。最外层的价电子因为处在 $l=0$ 的状态,其轨道角动量也为零,但因该价电子未配对,自旋角动量不为零,有自旋磁矩,基态银原子的磁矩就是它的最外层的价电子的自旋磁矩。在外磁场中由于原子磁矩有两种取向,经过非均匀磁场磁力的作用在屏上就出现两条痕迹,这就是斯特恩-盖拉赫的实验结果。

泡利不相容原理

22.8.2 泡利不相容原理

1. 费米子和玻色子

实验表明,现在所发现的大多数微观粒子的自旋量子数取半整数,如电子、中子、质子,它们的自旋均为 $s=1/2$;此外也有一些基本粒子的自旋取整数,如:氦核和光子的自旋 $s=1$, π 介子和 K 介子的自旋为 $s=0$ 。按照自旋的取值可以将微观粒子分为费米子和玻色子。凡自旋量子数取半整数($s=1/2, 3/2, \dots$)的粒子称为费米子。凡自旋量子数取整数($s=0, 1, \dots$)的粒子称为玻色子。

2. 氢原子的四个量子数

考虑到电子的自旋运动后,氢原子中的电子运动状态可由四个量子数确定,这四个量子数分别为:

(1) 主量子数 n ,它的可能取值为 $n=1, 2, 3, \dots$,电子的能量主要由主量子数决定。

(2) 轨道角量子数 l ,当 n 取值确定后,可能的取值为 $l=0, 1, 2, \dots, n-1$,共有 n 种可能值。一般情况下,若电子的主量子数 n 确定,而角量子数 l 取不同值时电子能量也略有不同。

(3) 轨道磁量子数 m_l ,当 l 取值确定后,可能的取值为 $m_l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$,共有 $(2l+1)$ 种可能值,它决定电子轨道角动量在外磁场中的指向。

(4) 自旋磁量子数 m_s ,可能的取值只有两个 $m_s=\pm 1/2$,它决定电子自旋角动量在外磁场中的指向。

至于自旋量子数 $s=1/2$,因只有一个可能的取值,就不作为运动状态的标志了。

3. 泡利不相容原理

1925 年泡利(Pauli)发现,不可能有两个或两个以上的电子处在同一量子状态,即不能有两个电子具有完全相同的 (n, l, m_l, m_s) ,将其称为泡利不相容原理。费米子服从泡利不相容原理,但玻色子不受该原理的限制。

习题 22

22-1 计算下列客体具有 10MeV 动能时的物质波波长:

- (1) 电子;
- (2) 质子。

22-2 计算在彩色电视显像管的加速电压作用下电子的物质波波长,已知加速电压为 25.0kV。

- (1) 用非相对论公式;
- (2) 用相对论公式。

22-3 一中子束通过晶体发生衍射。已知晶面间距 $d=7.32 \times 10^{-2}$ nm,中子的动能 $E_k=4.20$ eV,求对此晶面簇反射方向发生一级极大的中子束的掠射角。

22-4 以速度 $v=6 \times 10^3$ m/s 运动的电子射入场强为 $E=5$ V/cm 的匀强电场中加速,为使电子波长 $\lambda=1\text{\AA}$,电子在此场中应该飞行多长的距离?

22-5 设电子的位置不确定度为 0.1\AA ,计算它的动量的不确定度;若电子的能量约为 1keV,计算电子能量的不确定度。

22-6 氢原子的吸收谱线 $\lambda=4340.5\text{\AA}$ 的谱线宽度为 10^{-2}\AA ,计算原子处在被激发态上的平均寿命。

22-7 若红宝石发出中心波长 $\lambda=6.3 \times 10^{-7}$ m 的短脉冲信号,时距为 1ns(10^{-9} s),计算该信号的波长宽度 $\Delta\lambda$ 。

22-8 设粒子作圆周运动,试证其不确定性关系可以表示为 $\Delta L \Delta\theta \geq \hbar$,式中 ΔL 为粒子角动量的不确定度, $\Delta\theta$ 为粒子角位置的不确定度。

22-9 计算一维无限深势阱中基态粒子处在 $x=0$ 到 $x=L/3$ 区间的几率。设粒子的势能分布函数为

$$\begin{cases} U(x) = 0 & (0 < x < L), \\ U(x) = \infty & (x < 0 \text{ 和 } x > L). \end{cases}$$

22-10 一个质子放在一维无限深阱中,阱宽 $L=10^{-14}$ m。求:

- (1) 质子的零点能量有多大?
- (2) 由 $n=2$ 态跃迁到 $n=1$ 态时,质子放出多大能量的光子?

22-11 对应于氢原子中电子轨道运动,试计算 $n=3$ 时氢原子可能具有的轨道角动量。

22-12 氢原子处于 $n=2, l=1$ 的激发态时,原子的轨道角动量在空间有哪些可能取向?并计算各种可能取向的角动量与 z 轴的夹角?

思考题 22

22-1 证明玻尔理论中氢原子中的电子轨道是电子德布罗意波长的整数倍。

22-2 为什么说电子既不是经典意义的波,也不是经典意义的粒子?

22-3 图22-22中所示为电子波干涉实验示意图, S 为电子束发射源,发射出沿不同方向运动的电子, F 为极细的带强正电的金属丝,电子被吸引后改变运动方向,下方的电子折向上方,上方的电子折向下方,在前方交叉区放一电子感光板 A , S_1 、 S_2 分别为上、下方电子束的虚电子源, $S_1S_2=SS_2$,底板 A 离源 S 的距离为 D ,设 $D \gg a$,电子的动量为 p 。试求:

- (1) 电子几率密度最大的位置;
- (2) 相邻暗条纹的距离(近似计算)。

22-4 在一维势箱中运动的粒子,它的一个定态波函数如图22-23(a)所示,对应的总能量为 $4eV$,若它处于另一个波函数(如图22-23(b)所示)的态上时,它的总能量是多少?粒子的零点能是多少?

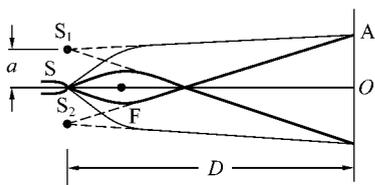


图 22-22

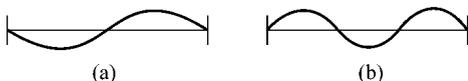


图 22-23

22-5 图 22-24 中所示为一有限深势阱,宽为 a ,高为 U 。

- (1) 写出各区域的定态薛定谔方程和边界条件;
- (2) 比较具有相同宽度的有限深势阱和无限深势阱中粒子的最低能量值的大小。

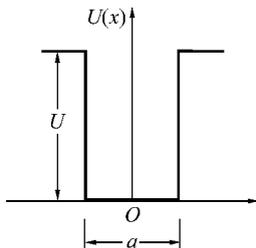


图 22-24

22-6 在钠光谱中,主线系的第一条谱线(钠黄线)是由 $3p \sim 3s$ 之间的电子跃迁产生的,它由两条谱线组成,波长分别为 $\lambda_1 = 5889.963 \text{ \AA}$ 和 $\lambda_2 = 5895.930 \text{ \AA}$,试用电子自旋来解释产生双线的原因。

第 23 章 固体的量子理论

本章将利用前面学过的量子力学理论处理由多个原子构成的系统——固体系统。固体可以分为晶体和非晶体,本章主要讨论晶体。

固体物理学是很多学科的基础,如半导体、微电子、纳米技术、超导、激光、信息和通信等很多学科都与固体物理学有关。

23.1 晶体

晶体是指由大量分子、原子或离子有规则地在空间作周期性的排列而形成的空间点阵(简称晶格)。晶体具有确定的熔点,物理性质具有各向异性:如热导率、电导率、磁化率、折射率等沿不同方向的测量值可能是不同的。

按空间点阵的形状和对称性可将晶体分为各种晶格,有简单立方格子、体心立方格子、面心立方格子等等。图23-1给出了相应三种形式的晶格原子的排列情况,例如,Cu、Ag、Al为面心结构,Li、Na、K为体心立方结构。

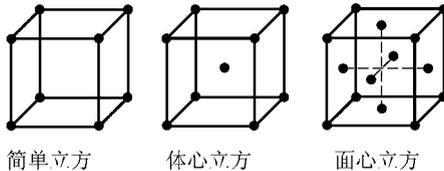


图 23-1

按分子或原子的结合力性质可将晶体分为以下几种:

离子晶体:原子的结合力为库仑力,结合力强度中等,例如 NaCl 为离子晶体,如图23-2所示。

共价晶体:原子的结合力为共价键,例如金刚石的结构由两个面心结构套叠而成,结合力强,是共价晶体,如图23-3所示。

分子晶体:原子的结合力为范德瓦耳斯力,例如固态 CO_2 、 HCl 等为分子晶体。

金属晶体:原子的结合力与共价键类似,例如体心立方 Li、Na、K,面心立方 Cu、Ag、Au、Al 等属于金属晶体。

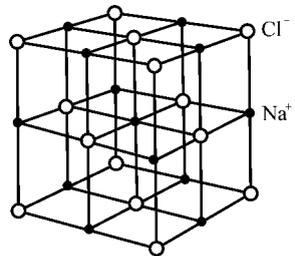


图 23-2

还有其他结构的晶体,如石墨结构(如图23-4所示)、 C_{60} 结构(图23-5为正20面体切除12个顶角后得到32面体的 C_{60} 结构)、氢键晶体(冰)等。

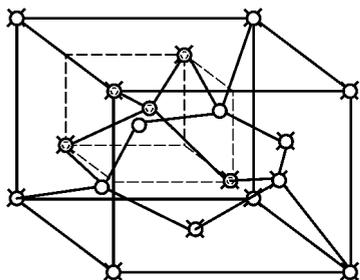
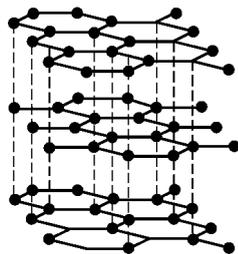
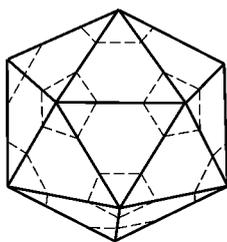


图 23-3

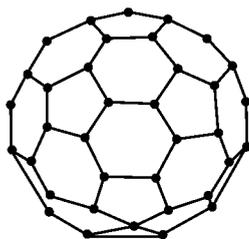


石墨结构

图 23-4



二十面体

 C_{60}

23-5

23.2 固体的能带结构

23.2.1 能带

我们知道孤立原子的能级是分立的,电子在各个能级上的分布遵从泡利不相容原理,例如一个孤立铜原子的29个电子按如下规律

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$$

填充各个能级。

单个原子的势能曲线如图23-6所示,两个原子的势能曲线如图23-7实线所示。当两个原子靠近时,它们的价电子将逐渐感觉到另一个原子的存在,每个价电子同时受到两个离子电场的作用,能量发生少许的变化。当两个原子靠得很近时,外层电子的波函数将会重叠起来,由于波函数的重叠,单原子时电子的每一个能级变为能量接近的两个能级,或者说能级分裂开了。准确地讲,这时并不是两个孤立的单电子原子,而是具有很多个电子的双原子系统(对铜原子来说是具有

58 个电子的双原子系), 原来的每一个能级全部要分裂为两个, 电子的填充仍然服从泡利不相容原理。

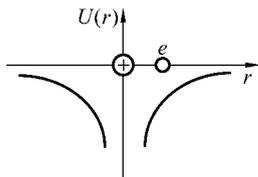


图 23-6

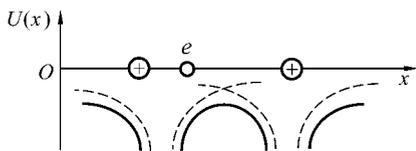


图 23-7

当 N 个原子做有规则排列而形成晶体时(如图23-8所示), 晶体内形成了如图23-9的周期性势场, 原来单原子的一个能级分裂成 N 个很接近的新能级。处于 N 个相互靠得很近的新能级上的电子不再具有相同的能量。由于晶体中原子数目 N 非常大, 所形成的 N 个新能级中相邻两能级间的能量差很小, 其数量级为 10^{-22} eV, 几乎可以看成是连续的, 通常称它为能带。单原子的每一个能级均变成一个能带, 例如, 对于金属铜, 有 $1s$ 带、 $2s$ 带、 $2p$ 带等(如图23-10所示)。

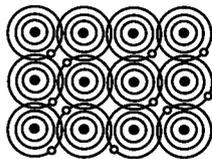


图 23-8

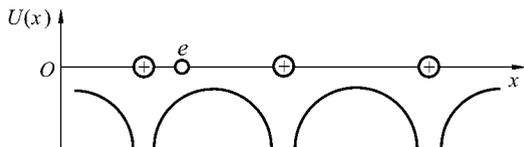


图 23-9

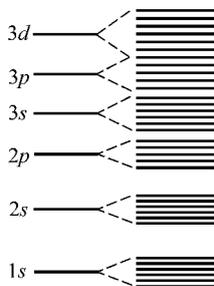


图 23-10

关于能带的成因, 可通过求解薛定谔方程自然得到, 为此先介绍共有化电子的概念。对于原子的内层电子来说, 相当处在图23-9的各个势阱中, 由于能量小, 相对来说势垒宽度宽、高度高。因此, 穿透势垒的概率十分微小, 基本上仍可看做是束缚在各自离子的周围, 或者说内层电子的波函数几乎不重叠。但对于具有能量较大的价电子, 其能量超过了势垒的高度, 完全可以在晶体中自由运动, 而不受特定离子的束缚。还有一些能量接近势垒高度的电子, 虽不能越过势垒, 但却可以通过隧道效应面进入到相邻的原子中去。这样, 晶体内便出现了一批属于整个晶体原子所共有的电子, 这种由晶体中原子的周期性排列而使价电子不再为单个原子所有的现象, 称为电子共有化。电子在晶体中的运动, 相当于共有化电子在

周期性势场中的运动,通过求解周期性势场中的薛定谔方程,可得到周期性势场中运动的电子的能量本征值,结果是只能取一系列能带所许可的能量,而在两个相邻能带之间,可以有一个不存在电子稳定能态的能量区域,这个区域就称为禁带。

23.2.2 能带的宽度

晶体的每一个能带具有一定的能量范围,称为能带宽度。对于一定的晶体,由于原子内层的电子受到其他原子的影响小,外层的电子受到的影响大,所以由不同壳层的电子能级分裂形成的能带宽度各不相同,内层电子能级对应的能带很窄,而外层电子能级对应的能带较宽。原子间距(晶体点阵间距)越小,原子之间相互影响越大,能带越宽。所以能带的宽度与晶格常数、能带序数(s 带、 p 带、 d 带……)等因数有关。图23-11为 N 个钠原子结合为晶体时各能带宽度与晶格常数的关系图,当钠原子距离远大于 r_0 时,各能带宽度为零,与孤立的单原子能级结构一样,不过钠晶体的每一个能级是由 N 个孤立钠原子能级叠合而成的。当钠原子距离逐渐减小,能级开始分裂,当达到 r_0 时, $3s$ 带和 $3p$ 带甚至交叠起来,这称为能带的交叠。距离进一步减小,越来越多的能带会发生交叠。

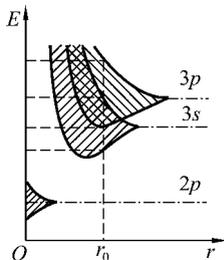


图 23-11

23.2.3 满带、导带和价带

由上所述,能带中的能级数取决于组成晶体的原子数 N , 每个能带中能容纳的电子数可以由泡利不相容原理确定。由于每个能级可以填入自旋相反的两个电子,则 $1s, 2s$ 等 s 能带最多只能容纳 $2N$ 个电子。同理可知, $2p, 3p$ 等 p 能带可容纳 $6N$ 个电子, d 能带可容纳 $10N$ 个电子等。

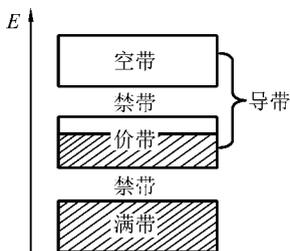


图 23-12

按照能量最小原理,电子从最低的能带开始填充(如图23-12所示)。深层能级对应的能带是被电子填满的,对应的能带为满带;最外层价电子对应的能带为价带,该带可以是满带,也可以是被电子部分填充的;价带之上的能带没有分布电子,称这些带为空带。紧靠价带的空带又称为导带。

满带中的电子不能起导电作用。下面以一维晶体为例说明:现在考察一晶体,设只有一个能带被电子填

满,其他能带全是空带,当晶体未加外电场,由于对称性,满带中的电子沿正反两个方向运动的电子数完全对称,相互抵消,不形成电流。当晶体加上外电场时,同时假定外电场不是很强,认为电子的状态不会在不同能带间跃迁,只能在同一能带中不同能级中变化。由于外电场的存在,晶体的对称性被打破,所有的电子动量(或物质波的动量)均会沿着电场力方向增加,顺着和逆着电场方向运动的电子的状态均发生变化,但该能带的状态又是被电子填满的,没有多余的状态让电子“灵活”地去占据。若沿外场方向动量增量的电子数增多,沿反方向动量增量的电子数必然也要增多,以保证满带中的所有状态始终没有空态,结果沿两个方向运动的电子仍然对称,与不加电场时情况相同,对电流无贡献。

相反,如果晶体的某能带中的能级没有全部被电子填满,正反方向运动的电子各自均有空余的状态让电子灵活地变化,在外电场的作用下,沿两个方向运动的电子由于相对外电场的不对称性,导致了两种电子对能级的占据的不对称性,表现为正反方向电子的电流不能相互抵消,因而形成电流,这样的能带又称为导带。

如果由于某种原因(如热激发或光激发等),价带中有些电子被激发而进入空带,这时价带和空带均变为不满带而成为导带。有的晶体由于某种原因能带互相重叠,未交叠前本来是满带,交叠后变为导带。

23.2.4 导体、半导体和绝缘体

凡是电阻率为 $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 以下的物体,称为导体,电阻率为 $10^8 \Omega \cdot \text{m}$ 以上的物体,称为绝缘体,而半导体的电阻率则介乎导体与绝缘体之间。硅、硒、锗、硼等元素以及硒、锗、硫的化合物、各种金属氧化物和其他许多无机物质都是半导体。

禁带的宽度对晶体的导电性起着相当重要的作用。从能带结构及电子的填充情况来看,导体:价带不满(如图23-13所示)或价带与空带有交叠现象(如图23-14所示)。半导体:价带满,但带隙小(如图23-15所示)。绝缘体:价带满,且带隙大(如图23-16所示)。



图 23-13

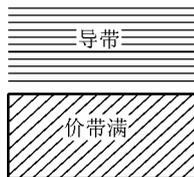


图 23-14

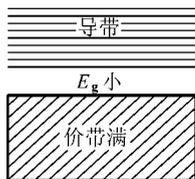


图 23-15

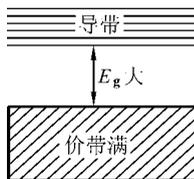


图 23-16

从能带结构上看,半导体与绝缘体在本质上是没有什么差别的,半导体和绝缘体都具有充满电子的满带和隔离导带与满带的禁带。半导体的禁带较窄,禁带宽度 E_g 约 $0.1 \sim 1.5 \text{ eV}$; 绝缘体的禁带较宽,禁带宽度 E_g 约 $3 \sim 6 \text{ eV}$ 。

对于禁带较窄的半导体,由于电子的热运动,有相当数量的电子很容易从电子填满的价带越过禁带,激发到导带里去,这时价带不满、导带不空,半导体具有导电性。热激发到导带去的电子数越多,电阻率越小。但因绝缘体的禁带一般很宽,在一般温度下,从满带热激发到导带的电子数是微不足道的,这样,它对外的表现是电阻率大。

导体和半导体比较,它们不仅在电阻率的数量上有所不同,而且还存在着质的区别。对于 Li 、 Na 、 K 等金属的 $2s$ 、 $3s$ 、 $4s$ 带是部分填满的,它们表现出导体特性。但对于二价金属,如 Mg 、 Be 、 Zn 等,可以推算它们的最高能带是满带,本应该是绝缘体,但实际表现出的是金属特性,原因是这些满带和它们的导带交叠在一起形成一个统一的不满能带,最终成为导体。

23.3 半导体的电子论

23.3.1 近满带和空穴

当半导体中少数电子从满带跃迁到导带中去后,在满带中留出了一些空的状态,通常称为空穴。这一近满带电子系统的运动行为可等价地用空穴的运动行为替代:在近满带中,由于电子几乎全部充满能级,只留出少数的空穴,当电子在电场作用下逆着电场方向移动时,电子将跃入相邻的空穴,而在它们原先的位置上留下了一新的空穴,这些空穴随后又会被逆着电场方向运动的电子所占据,由此看来,近满带中大量电子的运动相当于少数空穴顺着电场方向的移动。根据是否以空穴导电为主可将半导体分为本征半导体、 n 型半导体和 p 型半导体。

对于不含杂质的纯净半导体称为本征半导体。当本征半导体价带电子被激发到空的导带上去时,价带出现空穴,导带上出现电子,且导带上的电子和价带上

的空穴总是成对出现的。在外电场作用下,既有发生在导带中的电子的定向运动,又有发生在价带中的空穴的定向运动,它兼具有电子导电和空穴导电两种类型,这类导电性称为本征导电。温度升高价带上会有更多的电子被激发到导带上,所以本征半导体的导电性随温度升高而迅速增大。

23.3.2 n 型半导体和 p 型半导体

杂质半导体是指在纯净的半导体中掺有杂质,它的导电性因掺杂将发生显著的改变,掺杂既可提高半导体的导电能力,还能改变半导体的导电机构。杂质半导体包括:n 型半导体和 p 型半导体两类。

在四价本征半导体(如硅)中掺入五价杂质(如砷)形成电子型半导体,称为 n 型半导体(如图 23-17 所示)。掺入的五价砷原子将在晶体中替代硅的位置构成与硅相同的四电子结构,结果就多出一个电子在杂质离子的电场范围内运动。量子力学的计算表明,这个杂质的能级是在禁带中,且靠近导带,能量差远小于禁带宽度。因在硅内,砷原子只是极少数,它们被准晶体点阵分隔开,所以在图中采用不相连续的线段表示这个杂质能级,每个短线代表一个杂质原子的能级(如图 23-18 所示)。杂质价电子在杂质能级上时,并不参与导电,但是,在受到热激发时,由于这能级接近导带底,杂质价电子极易向导带跃迁,向导带供给电子,所以这种杂质能级又称为施主能级。即使掺入很少的杂质,也可使半导体导带中自由电子的浓度比同温度下纯净半导体导带中的自由电子浓度大很多倍,这就大大增强了半导体的导电性能。它的导电主要以电子导电为主。

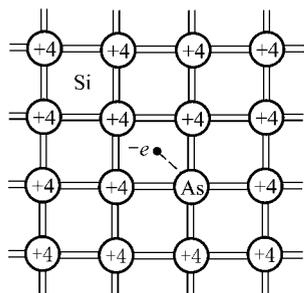


图 23-17

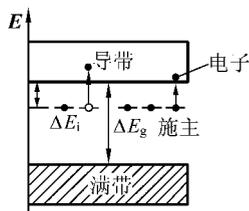


图 23-18

在四价的本征半导体硅中掺有三价杂质(如镓)后形成 p 型半导体(如图 23-19 所示)。计算表明,这时杂质能级离满带顶极近(如图 23-20 所示),满带中的电子只要接受很小一份能量,就可跃入这个杂质能级,使满带中产生空穴。由于这种杂质能级是接受电子的,所以称为受主能级。这种掺杂使半导体满带中空穴浓度较纯净半导体空穴浓度增加了许多倍,从而使半导体导电性能增强。它的导

电主要以空穴导电为主。

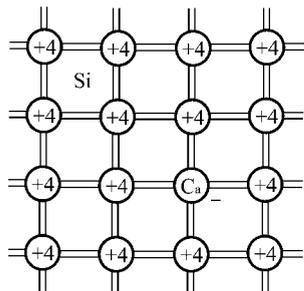


图 23-19

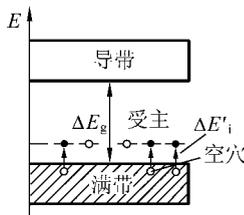


图 23-20

半导体电阻率的温度特性与导体也有很大区别,导体的电阻率随温度的升高而增大,但半导体的电阻率随温度的变化关系恰好与导体相反,半导体的电阻率

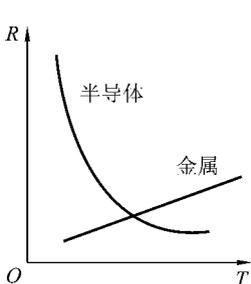


图 23-21

随温度的升高而下降,其主要原因是由于杂质半导体的施主能级(或受主能级)与导带(或价带)能量差很小,只有 10^{-2}eV 的数量级,随着温度的升高,受激进入导带的电子数(或价带的空穴数)增多,最终导致电阻的下降。有些半导体的载流子数目对温度变化十分灵敏,因而其电阻率随温度的变化灵敏地变化,利用半导体材料这一性质可以制成对温度、热量的反应极敏感的电阻,称之为热敏电阻,在无线电技术、远距离控制与测量、自动化等许多部门都有广泛的应用价值。

改变温度可以使半导体的电阻率改变,用光照射半导体也可以使半导体的电阻率改变,称这一现象为光电导。半导体在光照下,半导体中的电子吸收光子的能量,可能引起电子从满带向导带的跃迁,也可能引起电子从施主能级向导带跃迁、或者电子从满带向受主能级跃迁,所有这些都造成载流子数的增加,从而增加电导。

23.3.3 p-n 结

在半导体内,由于掺杂不同,电子和空穴的密度在两类半导体中并不相同,即 p 区中空穴多而电子少, n 区中电子多而空穴少。将 p 型半导体和 n 型半导体相互接触, n 区中的电子将向 p 区中扩散(如图 23-22(a) 所示), p 区中的空穴将向 n 区中扩散,结果在交界处形成正负电荷的积累(如图 23-22(b) 所示),在 p 区是负电,而在 n 区是正电。这些电荷在交界处形成一电偶层,称这一结构为 p-n 结,厚度约为 10^{-7}m 。

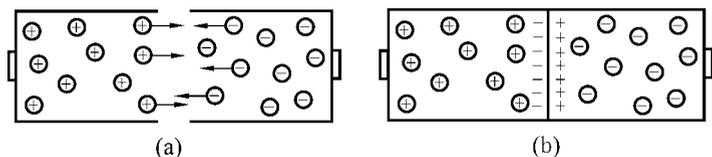


图 23-22

显然,在 p-n 结内出现由 n 区指向 p 区的电场(称为内建场),电偶层的电场阻碍电子和空穴的进一步扩散,最后形成一稳定的电势差。此时在 p-n 结处, n 区相对于 p 区有电势差 U_0 , 称为接触电势差,通常为 $0.1 \sim 1.0 \text{eV}$ 。p-n 结处的电势是由 p 区向 n 区递增的,它阻碍着 n 区的电子进入 p 区,同时也阻碍着 p 区的空穴进入 n 区,通常把这一势垒区称为阻挡层。

由于 p-n 结中阻挡层的存在,把电压加到 p-n 结两端时,阻挡层处的电势差将发生改变。如把正极接到 p 端,负极接到 n 端,称为正向偏压,外电场方向与 p-n 结中的电场方向相反,使结中电场减弱,势垒高度降低,阻挡层变薄,有利于空穴向 n 区运动,电子向 p 区运动,形成由 p 区流向 n 区的正向宏观电流,外加电压增加,电流也随之增大(如图 23-24 所示)。

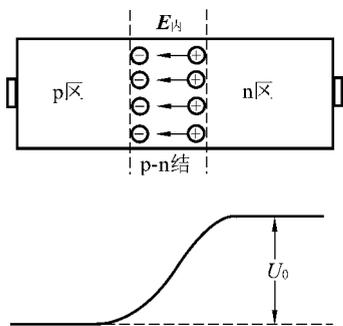


图 23-23

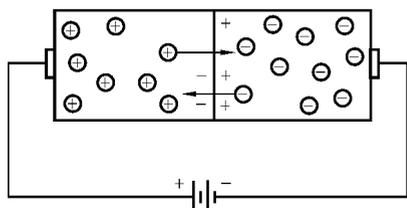


图 23-24

反过来,如果把正极接到 n 端,负极接到 p 端(一般称为反向联接,如图 23-25 所示),外电场方向与 p-n 结中的电场方向相同。这时结中电场增强,势垒升高,阻挡层增厚。于是 n 区中的电子和 p 区的空穴更难通过阻挡层。但是 p 区中的少量电子和 n 区的少量空穴在结区电场的作用下却有可能通过阻挡层,分别向对方流动,形成了由 n 区向 p 区的反向电流。反向电流一般很小,电路几乎被阻断,这就是二极管的单向导电性。

p-n 结两端电压和流过结的电流关系如图 23-26 所示,称为 p-n 结的伏安特性曲线。

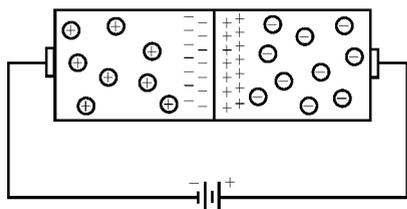


图 23-25

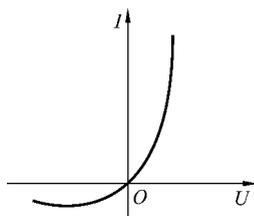


图 23-26

* 23.4 超导电现象

许多金属、合金甚至陶瓷材料,在低于某个临界温度时,电阻完全消失,固体的这种零电阻性质称为超导电性,它是人们特别感兴趣的性质之一。

23.4.1 零电阻

1911年,荷兰物理学家昂尼斯(H. Kammerlingh-Onnes)在研究各种金属在低温时的电阻率变化时,首次观测到了超导电性。他发现,当温度降到4.2K附近时,汞样品的电阻突然降到零,如图23-27所示。高于该温度时,电阻率有限,低于该温度时,电阻率小到实际上等于零的值。我们称超导材料电阻降为零的温度称为转变温度或临界温度,通常用 T_c 表示,当 $T > T_c$ 时,超导材料所处的状态与正常的金属一样,称为正常态;而当 $T < T_c$ 时,昂尼斯猜测超导材料处于一种新的状态,称为超导态。昂尼斯因这一现象的发现,于1913年获得了诺贝尔物理学奖。不但纯汞,对于加入锡后的汞合金也具有这种性质,昂尼斯把这种性质称为超导电性。具有超导电性的材料称为超导体。

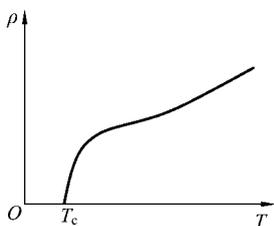


图 23-27

超导电性的发现,开辟了研究和应用超导电性质的新领域。从那时起,人们已发现在正常压强下有近30种元素、许多合金和化合物具有超导电性。表23-1列出了一些超导元素和较重要的合金以及它们的临界温度。

表 23-1 一些超导元素及其临界温度

元 素	T_c/K	元 素	T_c/K
W	0.012	Pb-In	3.39~7.26
Be	0.026	Pb-Bi	8.4~8.7

(续表)

元 素	T_c/K	元 素	T_c/K
Cd	0.515	Nb-Ti	9.3~10.02
Al	1.174	Nb-Zr	10.8~11
In	3.416	MoC	14
Ta	4.48	V_3Ga	18.8
V	5.3	Nb_3Sn	18.1
Pb	7.201	Nb_3Al	18.8
Nb	9.26	Nb_3Ge	23.2

从表23-1中可以看出,各种元素的临界温度相差很大,从 W 的 $T_c=0.012K$ 到 Nb_3Ge 化合物的 $T_c=23.2K$ 不等。若能获得临界温度接近室温的超导材料,将非常有用。为实现这一目标,人们已经付出了很多努力。

1986年,IBM 苏黎世实验室发现临界温度达 35K 的 Ba-La-Ca-O 系列超导材料,随后包括我国在内的科学家们发现 Y-Ba-Ca-O 系列超导临界温度高到 90K 以上,称这些材料为高温超导材料。

23.4.2 完全抗磁性

1933年,两位德国物理学家迈斯纳(W. F. Meissner)和奥赫森菲尔德(R. Ochsenfeld)发现,对于超导体,当从正常态变到超导态后,原来穿过超导体的磁通被完全排出到超导体外(如图23-28所示),在超导体内磁感应强度为零,称这一现象为迈斯纳效应。

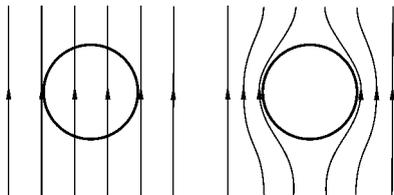


图 23-28

由于在超导体内有

$$\mathbf{B} = 0,$$

再由关系 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \mathbf{M}$ 可得

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H},$$

若将上式写为 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, 可得磁化率为

$$\chi_m = -1.$$

这说明超导体具有完全抗磁性。

将一理想导体(电阻率为零)放在外磁场中,利用电磁感应定律可以证明:外加磁场的变化不会改变通过理想导体的磁通量,通过理想导体的磁通量可以是非零的常数,但不一定总是零,与其变化历史及外磁场的作用历史有关。可见,完全抗磁性是超导体独立于零电阻性质的另一基本性质。换句话说,超导体并不能简单地看为理想导体。零电阻和完全抗磁性是判断超导体是否处在超导态的两个必要条件。

23.4.3 临界磁场与临界电流

昂尼斯在观测到超导电性质后不久便发现,外加磁场可以破坏超导态,即使在临界温度之下,当逐渐增加外磁场时,超导样品会由超导态而转为正常态,这种破坏超导态所需的最小磁场强度称为临界磁场,以 H_c 表示。临界磁场与材料的种类和超导态所处的温度有关。人们发现临界磁场与温度的关系可用如下的经验公式描述(如图23-29所示)

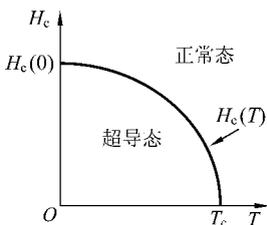


图 23-29

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (23-1)$$

式中 $H_c(0)$ 表示 $T=0\text{K}$ 时的临界磁场。不同材料的 $H_c(0)$ 不同。

在无外磁场时,让超导体通上电流,这电流也将产生磁场,当该电流超过一定数值 I_c 后,电流在超导体表面所产生的磁场强度超过 H_c ,超导态也可被破坏, I_c 称为超导体临界电流。临界电流与温度的关系如下:

$$I_c(T) = I_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (23-2)$$

式中 $I_c(0)$ 表示 $T=0\text{K}$ 时超导体的临界电流。

23.4.4 两类超导体

若超导体在 $H > H_c$ 时,由超导态直接转变为正常态,这种超导体称为第 I 类超导体。还有一类超导体,在低于临界温度的一定温度下,有两个临界磁场 H_{1c} 和 H_{2c} ,当材料处在磁场 $H < H_{1c}$ 下时,为超导态;当磁场增强至 $H > H_{1c}$ 时,它们不是从超导态直接转变为正常态,而是超导态和正常态混杂的混合态,直到磁场 $H > H_{2c}$ 时才完全转变为正常态。这类超导体称为第 II 类超导体。

当第 II 类超导体处于混合态时。整个材料是超导的,但在材料内部出现许多沿外磁场方向、半径极小的圆柱形正常态区域,可称为正常芯。这些正常芯排列

成一种周期性的规则图案(如图23-31所示)。每根正常芯表面上围绕着涡旋状电流,这些电流屏蔽了芯中的磁场对外面超导区的作用。因此正常芯好像是外磁场的通道。实验证明,在每条芯中的磁通量都相等,且有一个确定的值 Φ_0 ,即

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2, \quad (23-3)$$

式中 h 为普朗克常量; e 为电子的电荷量,这说明磁通量是量子化的。当外磁场增加时,不能增加每根正常芯内的磁通量,只能增加正常芯的数目。磁场越强,正常芯越多越密,直到磁场增大到 H_{2c} 时,正常芯将充满整个材料而使材料全部转变为正常态。

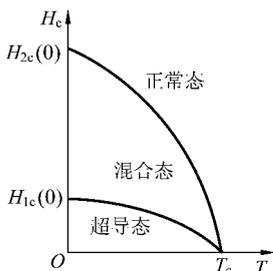


图 23-30

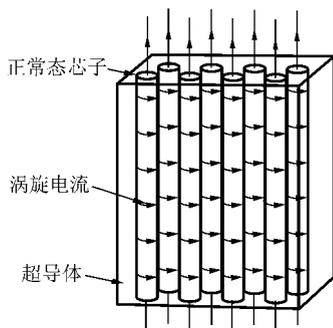


图 23-31

23.4.5 BCS 理论

超导电性的微观理论是由巴丁(J. Bardeen)、库珀(L. V. Cooper)和施里佛(J. R. Schrieffer)在 1957 年提出的,简称 BCS 理论,为此他们三人共同获得 1972 年诺贝尔物理学奖。

现在考虑这样一种情况:设想有两个电子,它们的运动方向相反,但存在相互吸引作用,由于吸引作用它们被束缚在一起,形成电子对,称这样的电子对为库珀对,当温度 $T < T_c$ 时,超导体内存在大量的库珀对。如果开始某一库珀对的总动量为 P ,这样的库珀对在晶体中运动时,由于动量守恒,库珀对之间的作用不会改变库珀对的总动量(而晶格的作用最终归结为库珀对中两电子的相互作用),从而维持了恒定的电流

$$\mathbf{j} = ne \frac{\mathbf{P}}{2m},$$

式中 n 为库珀对数密度; m 为电子质量。可见,只要金属中的载流子是由这些束缚在一起的库珀对组成,则金属处在超导态。关于库珀对的成因,对于低温超导电性现在已经公认为是晶格振动的贡献,对于高温超导电性,现在还有许多问题有

待解释。下面给出低温超导体中库珀对的成因。

电子在晶格中运动时,它把近邻的正离子吸向自己(这就是通常所说的电子-晶格相互作用或电-声相互作用),使得电子被正离子包围起来,这称为电子的离子屏蔽(如图23-32所示)。

设想有两个电子1和2,在彼此靠得很近处通过,由于离子屏蔽作用,电子2感受不到电子1的排斥作用,相反,等效地感受到的是吸引作用(如图23-33所示),这就是形成库珀对所需要的吸引作用。

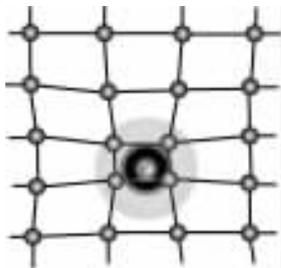


图 23-32

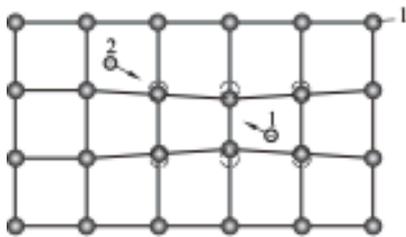


图 23-33

研究表明,组成库珀对的两个电子的平均距离约为 10^{-6} m,而晶格的晶格间距约为 10^{-10} m,即库珀对在晶体要伸展到几千个原子的范围。库珀对是作为整体与晶格作用的。当温度低于临界温度时,会有更多的库珀对形成,当温度逐渐升高,这些库珀对会逐渐解体,直到大于临界温度时,所有的库珀对解体。

习题 23

23-1 铜、银、金、铝、铂等许多金属的晶格均为面心立方点阵结构。其边长 a 称为晶格常数,一般晶格常数并不一定代表原子间的最近距离。

- (1) 分析面心立方点阵中每个原子周围有几个最近邻原子;
- (2) 求最近邻原子间的距离与晶格常数的关系。

23-2 晶格常数为 a 的一维晶体中,电子布洛赫波函数为

$$\Psi(x) = e^{ikx}u(x), \quad u(x+Na) = u(x)$$

写出位于 $x-a$ 和 $x+a$ 附近的电子布洛赫波函数。

23-3 n型半导体 Si 中含有杂质磷 P 原子。在计算施主能级时,作为初级近似,可看作一个电子围绕离子 P^+ 运动,好似一个浸没在无限大电介质 Si 中的一个类氢原子。已知 Si 的相对介电常数 $\epsilon_r = 11.5$,求此半导体的施主基态能级。

23-4 钒 V 是第一类超导体,天然钒中同位素 V^{51} 占 99.76%, V^{50} 占 0.24%,它们的质量分别为 50.9440u 和 49.9472u。已知天然钒的转变温度为 5.300K,试根据超导体的同位素效应: $M^{1/2}T_c = C$ (M 为同位素质量, T_c 为转变温度, C 为常量),计算钒 V^{50} 的转变温度。

23-5 已知硅的禁带宽度为 1.14eV,金刚石的禁带宽度为 5.33eV,求能使之发生光电导

的入射光最大波长。

23-6 发光二极管的半导体材料能隙为 1.9eV , 求它所发射光的波长。

思考题 23

23-1 晶体的四种主要类型的结合键各有什么特征？

23-2 如何从泡利不相容原理来说明当原子结合成晶体时原子能级会发生分裂？

23-3 当电子能量处在禁带之中时, 电子的布洛赫波矢是复数, 这电子为什么不能存在于晶体中？

23-4 能级与能带有何不同？固体的能带是怎么形成的？

23-5 从能带结构来看导体、绝缘体、半导体有什么差异？

23-6 掺杂与加热均能使半导体的电导率增加, 但两者有何不同？

23-7 本征半导体与杂质半导体导电机构有何不同？

23-8 本征半导体掺何种杂质即可成为 n 型半导体, 它的多数载流子是什么？又怎样成为 p 型半导体？它的多数载流子是什么？

23-9 p-n 结为何有单向导电性？

23-10 超导态的两个互相独立的基本属性是什么？

23-11 什么是超导体的临界温度、临界磁场和临界电流？

23-12 何谓迈斯纳效应？超导体与电阻率为零的理想导体有何不同？

23-13 超导材料和技术有哪些应用？超导磁体比传统电磁铁有什么优越性？

第 24 章 原子核物理和粒子物理简介

1911 年,卢瑟福根据实验事实提出了原子的核结构模型,原子核具有原子的全部正电荷和原子的绝大部分质量。之后,原子核很快就成为人们新的研究对象。原子核物理学是研究原子核的结构、性质、内部运动、核辐射以及原子核相互作用、相互转化的科学。有关核的理论的快速发展,使人们认识到了核的极其广泛的实际应用,同时也把人类社会推进到原子能时代。

在 20 世纪 30 年代,人们已经认识到原子核也是有结构的,原子核由质子和中子组成。于是电子、质子、中子、光子等成为构成千变万化的物质世界的基本单元,当时人们称之为“基本”粒子。从 20 世纪 50 年代起,实验上发现了数以百计的新粒子。这样,所谓的“基本”粒子越来越多,使得人们不得不重新检讨关于基本粒子的认识。现今,人们已经知道,这些基本粒子并不是物质世界的最基本单元,它们大多也是有其内部结构的。所谓“基本粒子”一词只反映了我们对客观世界认识阶梯上的某一层面而已。有关这些粒子的内部结构及其相互作用、相互转化规律的研究,逐步发展成为新的学科,称为粒子物理学。

本章将简单介绍原子核物理学和粒子物理学的一些基本内容。

24.1 原子核的基本性质

24.1.1 原子核的组成

原子核是由质子(p)和中子(n)组成的。质子和中子统称为核子,它们都是自旋为 $1/2$ 的费米子,服从费米-狄拉克统计规律。氢原子核只包含一个质子,它具有最小的电荷数和质量数,其他原子核包含与原子序数相同数目的质子和数目不少于质子数的中子组成。原子核由如下一般形式表示

$${}^A_Z X_N,$$

其中 Z 表示原子序数或质子数(亦即电子数); N 为中子数; $A = Z + N$ 表示原子核的质量数或核子数。电荷数 Z 和质量数 A 是标志原子核特征的两个重要物理量。 A 为奇数的原子核是自旋为半整数的费米子; A 为偶数的原子核是自旋为整数的玻色子,服从玻色-爱因斯坦统计规律。对于轻核,中子数和质子数近乎相等;对于重核,中子数约为质子数的 1.5 倍,这是由核子之间作用力的性质所决定的。

我们知道,中子不带电,质子带正电荷,其电量与电子电量在数值上相等。因此,原子核带有正电荷,其电量 q 等于电子电量 e 的绝对值的整数倍,即 $q=Z|e|$ 。

Z 和 A 都相同的原子核称为某种核素,实验上还发现了大量的 Z 相同而 A 不同的原子核,这些 Z 相同而 A 不相同的原子核称为某种核素的同位素。例如氢有三种同位素,即 ${}^1_1\text{H}$ (氢)、 ${}^2_1\text{H}$ (氘)和 ${}^3_1\text{H}$ (氚)。同一元素的同位素有几乎完全相同的化学性质,但由于它们有不同的中子数,其核的性质就会有较大的差别。如 ${}^1_1\text{H}$ 、 ${}^2_1\text{H}$ 和 ${}^3_1\text{H}$ 的物理性质就有很大的差异。

原子核的质量同原子的质量(包括原子核的质量和核外各电子的质量)相差极小,因此常用原子的质量来表示相应原子核的质量。在原子核物理中,通常情况下,我们不用国际单位制中的千克去度量原子核的质量,而是采用特殊的“原子质量单位”。规定碳的同位素 ${}^{12}_6\text{C}$ 处于基态时的静止质量的 $1/12$ 作为1个“原子质量单位”,以 u 表示,即

$$1u = m_{{}^{12}_6\text{C}}/12 = 1.6605402 \times 10^{-27} \text{kg}, \quad (24-1)$$

或按照爱因斯坦质能关系表示成如下形式

$$1u = 931.49432 \text{MeV}/c^2, \quad (24-2)$$

式中 $1\text{MeV}=1 \times 10^6 \text{eV}$, $1\text{eV}=1.60217733 \times 10^{-19} \text{J}$ 。表24-1中列出了一些同位素的原子质量。

表 24-1 同位素的原子质量

同位素	原子质量/ u	同位素	原子质量/ u
${}^1_1\text{H}$	1.007276	${}^{13}_6\text{C}$	13.003354
${}^2_1\text{H}$	2.013553	${}^{14}_7\text{N}$	14.003074
${}^3_1\text{H}$	3.016050	${}^{15}_7\text{N}$	15.000108
${}^3_2\text{He}$	3.016030	${}^{16}_8\text{O}$	15.994915
${}^4_2\text{He}$	4.001506	${}^{17}_8\text{O}$	16.999133
${}^6_3\text{Li}$	6.015126	${}^{19}_9\text{F}$	18.998405
${}^7_3\text{Li}$	7.016005	${}^{23}_{11}\text{Na}$	22.989773
${}^9_4\text{Be}$	9.012186	${}^{63}_{29}\text{Cu}$	62.929594
${}^{10}_5\text{B}$	10.12939	${}^{120}_{50}\text{Sn}$	119.902198
${}^{11}_5\text{B}$	11.009305	${}^{184}_{74}\text{W}$	183.951025
${}^{12}_6\text{C}$	12.00000	${}^{238}_{92}\text{U}$	238.04861

由表24-1可见,原子的质量以“原子质量单位”计量时都接近于某一个整数,

这个整数就是该原子的原子核质量数 A 。中子的质量为 $m_n = 1.008\,664\,904u$ 。

要说明的是,原子质量 $M(Z, A)$ 与原子核质量 $m(Z, A)$ 是不同的。主要是相差了核外的电子质量以及与原子结合能 $B_c(Z)$ 对应的质量,即

$$M(Z, A) = m(Z, A) + Zm_e - B_c(Z)/c^2. \quad (24-3)$$

例如,对于氢原子,我们有 $B_c(Z) = 13.6\text{eV}$, 则

$$m_H c^2 + 13.6\text{eV} = m_p c^2 + m_e c^2.$$

24.1.2 原子核的模型

最早获得有关原子核信息的实验是卢瑟福用 α 粒子轰击金箔的散射实验。由于 α 粒子与金原子核间的作用主要是电磁作用,原子核线度 R 的数量级可通过下式估计:

$$\frac{1}{2} m_\alpha v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2|e|)(79|e|)}{2R}, \quad (24-4)$$

式中 $\frac{1}{2} m_\alpha v^2$ 为 α 粒子的动能; $2|e|$ 、 $79|e|$ 分别为 α 粒子和金原子核的电量。对于 α 粒子的入射动能 5.3MeV , α 粒子和金原子核的最小距离约为 42.9fm ($1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$)。由此,我们可以通过实验数据估算出被 α 粒子轰击的原子核的大小。

由于 α 粒子的能量比较小, α 粒子很难真正到达原子核,因此,所获得的原子核的信息是不准确的。为了获得原子核的进一步信息,可以采用其他一些方法。人们利用加速器获得高能电子或质子,把高能电子或质子作为核探针轰击原子核。由于电子与原子核间的作用主要是电磁作用,高能电子不仅能测定原子核的半径,还能提供原子核中电荷的分布情况。我们也可以用中子作为核探针。由于中子不带电,它能更容易接近或进入原子核。当入射中子的能量 $E < 10\text{MeV}$ 时,其德布罗意波长大于原子核的大小,无法测出原子核半径,而 $E > 40\text{MeV}$ 的高能中子又由于穿过原子核的时间很短,结果不容易测量。所以,人们通常用能量为 $E = 10 \sim 40\text{MeV}$ 的中子束轰击原子核。中子与原子核的散射实验可以提供原子核中核物质分布的信息。

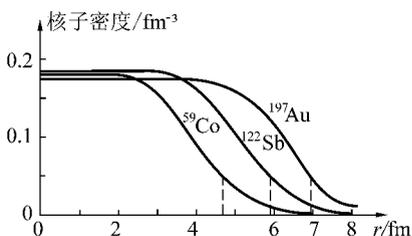


图 24-1

图24-1是一些原子核的物质分布图。可以看出:①核的密度几乎是均匀的;②其密度几乎与原子核的质量无关。

实验表明,大部分原子核是旋转椭球形状,但其长轴和短轴的比一般不大于 $5/4$,与球形差别不大,可以把这些原子核近似地看作球形。有一些原子核本身就具有球对称

性,如 ${}^{16}_8\text{O}$ 等。通过对大量实验数据的分析,卢瑟福和查德威克发现原子核的体积总是正比于质量数 A 。若把原子核可看作球形,设其半径为 R ,则有如下经验公式

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (24-5)$$

式中 $R_0 \approx 1.2 \text{fm}$ 。根据此经验公式,我们可以估算出 ${}^{12}_6\text{C}$ 、 ${}^{16}_8\text{O}$ 、 ${}^{107}_{47}\text{Ag}$ 和 ${}^{238}_{92}\text{U}$ 原子核的半径分别为

$$R_{{}^{12}_6\text{C}} \approx 1.2 \times 12^{1/3} = 2.7 \text{fm},$$

$$R_{{}^{16}_8\text{O}} \approx 1.2 \times 16^{1/3} = 3.0 \text{fm},$$

$$R_{{}^{107}_{47}\text{Ag}} \approx 1.2 \times 107^{1/3} = 5.7 \text{fm},$$

$$R_{{}^{238}_{92}\text{U}} \approx 1.2 \times 238^{1/3} = 7.4 \text{fm}.$$

历史上,人们提出了多种关于核结构的模型。主要有液滴模型、费米气体模型和核的壳层模型。液滴模型把原子核看成是一个带电的液滴,由核子组成。原子核的半径随着核子数增多而增大,维持其密度不变。费米气体模型把核子看成几乎没有相互作用的气体分子,因为核子是费米子,原子核就可视作费米气体。

关于原子核的壳层模型思想,主要来源于实验上的一些特别现象。实验表明,如果原子核中质子或中子为某些特定数值或两者均符合这些数值时,原子核就异常稳定,人们将这些特殊数值称为“幻数”。迄今已经发现的幻数有 2, 8, 20, 28, 50, 82 和 126。自然界广泛存在的氢、氧、钙、镍、锡、铝的质子和中子都符合幻数条件,它们原子核中的质子和中子以集体形式充满了某些“能级”,因此这些元素异常稳定。

幻数的存在是原子核有“壳层结构”的反映,表示相同的粒子以集团的形式构成结合状态,就会出现某种秩序,并且决定原子核的性质。1949年,德国的核物理学家迈耶(M. G. Mayer)等人引入核子的轨道和自旋耦合作用的概念,圆满解释了这种现象。因此获得了 1963 年诺贝尔物理学奖。

24.1.3 核力和介子

大家知道,原子核是由核子组成的,而质子之间有着很强的库仑排斥力存在。在电磁作用和万有引力的基础上无法解释为什么自然界存在着大量稳定的原子核。因此,核子之间必须有很强的吸引力存在,这就是核力。实验结果表明,核力具有以下重要性质:

(1) 核力是吸引力,在近距离(约 2fm)时大于电磁力。距离小于 0.4fm 时,它表现为斥力。

(2) 核力是人们已知的最强的相互作用力。

(3) 核力是短程力, 力程小于等于 3fm 。

(4) 核力具有“饱和”的性质。也就是说, 一个核子只能和它紧邻的核子有核力的相互作用。

(5) 核力与核子的带电状况无关。无论中子之间, 还是质子之间, 或质子和中子之间, 核力的大小和特性都相同。

1935年, 汤川秀树(H. Yukawa)提出了关于核力的模型, 认为如同电磁作用是带电粒子通过交换光子 γ 而实现的一样, 核力也是一种交换力, 核子之间通过交换 π 介子实现核力作用, 如图24-2和图24-3所示。

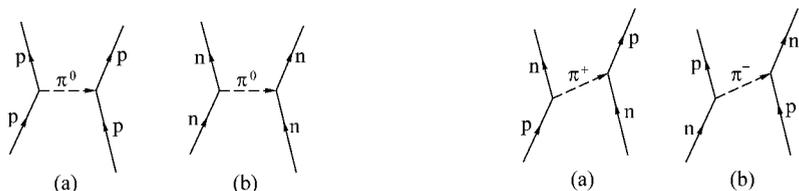


图 24-2

图 24-3

π 介子有三种电荷状态, 即 π^+ (带正电)、 π^0 (电中性) 和 π^- (带负电)。因此, 核子交换 π 介子可以有以下几种形式: 中子与中子之间和质子与质子之间交换的是 π^0 介子, 如图24-2所示。在质子与中子之间交换的是 π^{\pm} 介子, 如图24-3所示。在图24-3(a)所示的过程中, 质子放出一个 π^+ 介子同时转化为中子, 中子吸收 π^+ 介子同时转化为质子。在图24-3(b)所示的过程中, 中子放出一个 π^- 介子同时转化为质子, 质子吸收 π^- 介子同时转化为中子。

π 介子是在 1947 年被发现的, 质量大约为 $140\text{MeV}/c^2$, 是电子质量的近 280 倍。

要说明的是: 虽然核力的介子交换理论可以定性解释一些核现象, 但是核力并不是自然界的基本相互作用力。按照夸克理论, 强相互作用发生在夸克之间, 夸克通过交换胶子实现夸克间的强相互作用。核力实际上是夸克间的强相互作用力在核子层次上的综合体现, 因此核力的表现很复杂。

* 24.2 原子核的量子性质

24.2.1 原子核的自旋

我们知道, 原子核是由核子组成的, 每个核子都是自旋为 $1/2$ 的费米子, 对应于自旋角动量 $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ 。同时, 每个核子在原子核内还有轨道运动, 具有一定的轨道

角动量。原子核的总角动量(或称核自旋 \hat{L})由核子间的角动量的耦合而成。实验表明,当原子核的质量数 A 为偶数时,原子核的角动量是 \hbar 的整数倍;当原子核的质量数 A 为奇数时,原子核的角动量是 \hbar 的半整数倍。

24.2.2 原子核的磁矩

核子的自旋运动有相应的磁效应,表现为有一定的磁矩。实验测得质子的磁矩为

$$M_p = 2.793 \frac{e\hbar}{2m_p} = 2.793\mu_p, \quad (24-6)$$

式中

$$1\mu_p = \frac{e\hbar}{2m_p}. \quad (24-7)$$

式 μ_p 称为核磁子。因为质子质量比电子约大 1836 倍,核磁子要比电子的玻尔磁子小 1836 倍。

中子虽然不带电荷,但它的磁矩不为零,实验测得中子的磁矩为

$$M_n = -1.913 \frac{e\hbar}{2m_p} = -1.913\mu_p, \quad (24-8)$$

式中负号表示磁矩方向与自旋角动量的方向相反。

因为核子在原子核内部的运动很复杂,原子核的磁矩不是核内核子的磁矩之和。比如,对于氕核 ${}^1_1\text{H}$, 其中的质子和中子的磁矩之和为 $0.87981\mu_p$, 而实验测得氕核磁矩的值为 $0.857483\mu_p$, 两者并不相等。到目前为止人们还不太清楚原子核内部核子的具体运动规律,因此也不清楚核子的自旋磁矩和轨道磁矩是如何耦合起来的。

我们将少数原子核的自旋和磁矩值列于表 24-2 中。

实验表明,核自旋量子数 j 总是取 $0, 1/2, 1, 3/2$ 等整数或半整数,而且发现核自旋量子数与原子核质量数 A 有关。当原子核的质量数 A 为奇数时,核有半整数的自旋;当原子核的质量数为偶数时,核有整数的自旋。

表 24-2 原子核的自旋和磁矩

原子核	自旋量子数	磁 矩	原子核	自旋量子数	磁 矩
${}^2_1\text{H}$	1	$+0.8565\mu_p$	${}^{16}_8\text{O}$	0	—
${}^6_3\text{Li}$	1	$-0.8213\mu_p$	${}^{23}_{11}\text{Na}$	$3/2$	$+1.16\mu_p$
${}^7_3\text{Li}$	$3/2$	$+3.2532\mu_p$	${}^{39}_{19}\text{K}$	$3/2$	$+1.136\mu_p$
${}^{14}_7\text{N}$	1	$+0.403\mu_p$	${}^{113}_{49}\text{In}$	$9/2$	$+1.16\mu_p$

24.2.3 核磁共振

当在物质所在的恒定磁场区域再叠加一个与恒定磁场相垂直的超高频电磁波时,如果恒定磁场的强度与电磁波的频率满足一定条件时,物质会强烈吸收高频电磁波的现象称为磁共振现象。

磁共振现象的理论可简述如下:原子中电子的轨道磁矩和自旋磁矩合成原子总磁矩,它与相应的原子总角动量之比称为磁旋比 γ 。在外磁场 B 中,原子总磁矩 M 受磁力矩 $M \times B$ 的作用,使原子绕磁场方向进动,其进动角频率 $\omega_L = \gamma B$,称为拉莫尔进动角频率。由于角动量的空间量子化,原子受恒定外磁场 B 作用而进动引起的附加能量使原子的基态能级劈裂成几个能级(具体情况与原子的角动量量子数有关),当超高频电磁波的频率 ν 调整到一个量子的能量 $h\nu$ 刚好等于原子在磁场中的相邻能级差时,电磁波能量便被强烈吸收,这就是磁共振现象。

当 M 是核磁矩时,所发生的磁共振现象就称为核磁共振。核磁共振现象来源于原子核的自旋角动量在外加磁场作用下的进动。原子核进动的频率由外加磁场的强度和原子核本身的性质决定。原子核发生进动的能量与磁场、原子核磁矩以及磁矩与磁场的夹角相关。根据量子力学原理,原子核磁矩与外加磁场之间的夹角并不是连续分布的,而是由原子核的磁量子数决定的,原子核磁矩的方向只能在这些磁量子数之间跳跃,而不能平滑地变化,这样就形成了一系列的能级。当原子核在外加磁场中接受其他来源的能量输入后,就会发生能级跃迁,也就是原子核磁矩与外加磁场的夹角会发生变化。这种能级跃迁是获取核磁共振信号的基础。

为了让原子核自旋的进动发生能级跃迁,需要为原子核提供跃迁所需要的能量,这一能量通常是通过外加射频场(高频电磁波)来提供的。当外加射频场的频率与原子核自旋进动的频率相同的时候,射频场的能量才能够有效地被原子核吸收。因此,某种特定的原子核在给定的外加磁场中,只吸收某一特定频率射频场提供的能量,这样就形成了一个核磁共振信号。

因为核磁矩只有原子磁矩的不到 $1/1000$,所用电磁波的频率比上述顺磁体所用电磁波的频率也要小三个数量级。

实验中,通常有两种办法实现核磁共振:①保持外磁场 B 不变,而连续改变入射电磁波的频率;②用一定频率的电磁波照射而调节磁场的强弱。核磁共振时,样品吸收电磁波的能量,被接收器接收,记录在以频率为横坐标的记录纸上,成为核磁共振谱。

人们在发现核磁共振现象之后很快就产生了实际用途,化学家利用分子结构对氢原子周围磁场产生的影响,发展出了核磁共振谱,用于解析分子结构。随着

时间的推移,核磁共振谱技术不断发展,从最初的一维氢谱发展到二维核磁共振谱等高级谱图,核磁共振技术解析分子结构的能力也越来越强。进入 20 世纪 90 年代以后,人们甚至发展出了依靠核磁共振信息确定蛋白质分子三级结构的技术,使得溶液相蛋白质分子结构的精确测定成为可能。

另一方面,医学家们发现水分子中的氢原子可以产生核磁共振现象,利用这一现象可以获取人体内水分子分布的信息,从而精确绘制人体内部结构。1973 年,开发出了基于核磁共振现象的成像技术(MRI),并且成功地绘制出了一个活体蛤蜊的内部结构图像。随着 MRI 技术日趋成熟,应用范围日益广泛,成为一项常规的医学检测手段,广泛应用于帕金森氏症、多发性硬化症等脑部与脊椎病变以及癌症的治疗和诊断。2003 年,保罗·劳特伯尔(P. C. Lauterbur)和彼得·曼斯菲尔(S. P. Mansfield)因为他们在核磁共振成像技术方面的贡献获得了当年度的诺贝尔生理学 and 医学奖。

核磁共振效应已经广泛地应用在科学技术的各个领域里,利用核磁共振效应制成的各种测试设备,已成为进行物理、化学及其他科学研究的标准实验方法之一。核磁共振技术是直接测定原子核磁矩和研究固体结构的重要方法,通过对固体样品核磁共振谱线的研究,可以深入了解物质的结构,从而为新材料的开发提供实验依据。

24.3 原子核的放射性衰变

在人们发现的 2000 多种同位素中,大多数原子核是不稳定的。不稳定的原子核会自发地蜕变成另一种原子核,同时放出各种射线,这种现象称为放射性衰变。

1896 年,贝克勒耳(H. Becquerel)首先发现了天然铀的放射性现象,被认为是核物理的开始。1934 年,约里奥·居里夫妇(F. & I. Joliot-Curie)发现了人工放射性,为人工制备放射性元素以及核放射性的应用开辟了广阔前景。

迄今为止,人们已发现的核放射性衰变模式主要有 α 衰变、 β 衰变和 γ 衰变。

24.3.1 放射性衰变规律

不稳定原子核会自发地发生衰变,放射出 α 粒子、 β 粒子和 γ 光子等。当同一类核素的许多放射性原子核放在一起时,我们不能预测某个原子核在某个时刻将发生衰变,但对于整个放射性物质来说,原子核的衰变是一种统计规律,衰变事件数 dN 和衰变时间 dt 成正比,即

$$- \frac{dN}{N} = \lambda dt \quad (24-9)$$

或

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (24-10)$$

式中负号表示为未衰变的原子核数目随着时间增大而减少; λ 是核的衰变常量, 对不同的原子核, λ 不同。 $R = -\frac{dN}{dt}$ 称为核的衰变率或活度。在国际单位制中, R 的单位是贝可(Bq)。1Bq 表示单位时间内有 1 个核衰变。放射性活度 R 的另一个常用单位是居里(Ci), 规定当某一物质每秒有 3.7×10^{10} 次核衰变时, 其放射性活度为 1Ci。则有

$$1\text{Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{Bq}. \quad (24-11)$$

将式(24-9)积分后可得

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (24-12)$$

式中 N_0 是 $t=0$ 时刻放射源中原子核的总数目; $N(t)$ 表示 t 时刻放射源中原子核的数目。衰变常量 λ 表示单位时间内一个原子核发生衰变的概率, 表征了某种放射性核衰变的快慢。

有时候, 人们也用半衰期表征放射性衰变的快慢。所谓半衰期, 是放射性核素衰变掉一半所需要的时间, 通常用 $T_{1/2}$ 表示。根据定义, 我们有

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

则有

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \quad (24-13)$$

$T_{1/2}$ 是放射性同位素的特征常数, 它与外界因素无关。表24-3列出了几种放射性同位素核的半衰期。

表 24-3 几种放射性同位素的半衰期

同位素	衰变方式	半衰期	同位素	衰变方式	半衰期
^3H	β	12.4a	^{64}Cu	β	12.7h
^{14}C	β	5568a	^{142}Ce	α	5×10^{15} a
^{42}K	β	12.4h	^{212}Po	α	3×10^{-7} s
^{60}Co	β	5.27a	^{238}U	α	4.51×10^9 a

24.3.2 α 衰变

不稳定核自发地放出氦核 ^4_2He (即 α 粒子)而发生转变的过程称为 α 衰变。

α 衰变一般表示为



在 α 衰变过程中,母核 X 失去 2 个单位的正电荷,因此衰变成电荷比母核 X 少 2 个电荷单位的原子核 Y。原子核 Y 在周期表上的位置将向前移 2 位,其质量数应减小 4。比如, ${}_{88}^{226} \text{Ra}$ (镭)核的 α 衰变过程为



而 ${}_{86}^{226} \text{Rn}$ (氡)核的 α 衰变过程为



在 α 衰变过程中,若母核 X 原来静止,根据能量守恒定律我们有

$$m_X c^2 = m_Y c^2 + m_\alpha c^2 + E_\alpha + E_r, \quad (24-15)$$

式中 m_X 、 m_Y 和 m_α 分别是母核、子核和 α 粒子的静止质量。 E_α 和 E_r 分别为粒子的动能和子核的反冲动能。

定义 E_α 与 E_r 之和为“ α 衰变能”,记作 E_0 。则

$$E_0 = E_\alpha + E_r = [m_X - (m_Y + m_\alpha)]c^2. \quad (24-16)$$

比如,在典型的核反应



中,共释放能量 $E_0 = 4.26 \text{MeV}$ 。对于不同原子核的 α 衰变过程,释放出的 α 粒子能量不同,但是对于某一种原子核,在任何时候,其 α 衰变过程中释放出的 α 粒子能量都相同。

原子核的 α 衰变可以由量子力学的隧穿理论做出定性的解释。可以考虑如下简单模型: α 粒子在核内受到核力和电磁力的共同作用,而在核外, α 粒子主要受到电磁力的排斥作用。因核力是吸引力,在核内又远大于电磁力,则 α 粒子感受到的作用势能可由如图 24-4 中粗线示意,在核表面附近形成一个势垒。原子核衰变时释放的 α 粒子动能远低于势垒的高度。尽管如此,按量子力学的隧穿理论, α 粒子仍有一定的概率从核内逃出。

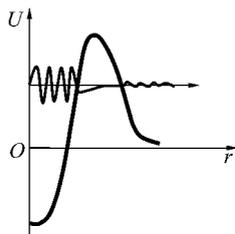
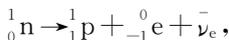


图 24-4

24.3.3 β 衰变

在核的 β 衰变过程中释放出一个电子,原子核的电荷数 Z 增加 1 而质量数 A 不变。人们认识到,这样的 β 衰变过程中所释放出的电子并不是原来就存在于原子核内的,而是在原子核中发生了如下核子的衰变过程:



即中子衰变成一个质子、一个电子和一个反电子中微子。中微子是不带电的自旋为 $1/2$ 的费米子。按照现代宇宙学理论,中微子曾在宇宙形成初期大量产生,是宇宙中最为丰富的粒子。中微子与物质的相互作用很弱,因此实验上检测很困难,并且地球对于中微子来说是完全“透明”的。

核的 β 衰变可一般表示为

$${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^A Y + {}_{-1}^0 e + \bar{\nu}_e. \quad (24-17)$$

实验上还发现了如下核的衰变过程



这称为核的正 β 衰变。核的正 β 衰变一般表示

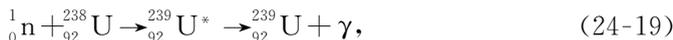
$${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + {}_{+1}^0 e + \nu_e. \quad (24-18)$$

正 β 衰变过程的物理机制现在还不完全明确,我们不能认为正 β 衰变是由于核内的一个质子衰变成为中子引起的。到目前为止实验上还没有发现过质子的衰变事例,人们估计质子的寿命大于 2×10^{32} 年。因此,我们不能用质子衰变过程解释核的正 β 衰变。

24.3.4 γ 衰变

一般情况下,原子核发生 α 、 β 衰变时,原子核往往处于激发态。处于激发态的原子核向低激发态或基态跃迁过程中,会放出 γ 光子,这样的衰变过程称为 γ 衰变。

例如



式中 ${}_0^1 n$ 是慢中子; ${}_{92}^{239} \text{U}^*$ 是 ${}_{92}^{239} \text{U}$ 的激发态; γ 是反应过程中放出的 γ 射线。 γ 射线的能量远远大于通常的原子过程中放出的光子能量。

常用的放射源 ${}^{60}\text{Co}$ 的 β 衰变过程中,先衰变到 ${}^{60}\text{Ni}$ 的激发态,然后向低激发态及其基态的跃迁过程中可以释放出能量分别为 1.17MeV 和 1.33MeV 两种 γ 射线。说明 ${}^{60}\text{Ni}$ 的高激发态能量(即高于基态的能量)是 $1.17\text{MeV} + 1.33\text{MeV} = 2.50\text{MeV}$ 。

24.4 核裂变和核聚变

24.4.1 原子核的结合能

我们知道,原子的结合能是 eV 量级,它所对应的是原子核与核外电子的电磁相互作用能量。原子核是由质子和中子组成,核子间存在比电磁相互作用大得多

的核力。可以想像,原子核的结合能要比原子的结合能大得多,一般都是 MeV 的量级。

把质子和中子结合成稳定的原子核时,核力作正功,使原子核处于低能量状态,同时放出能量。同样,要把一个稳定的原子核分成单个质子和中子体系,外界就必须提供足够的能量,克服核力的作用。这个能量在数值上应和其反过程放出的能量相同。通常称之为原子核的结合能,用 E_B 表示。比如,对于 ${}^1_2\text{H}$ 核有

$$m_{{}^1_2\text{H}}c^2 + E_B = m_n c^2 + m_p c^2,$$

结合能为

$$\begin{aligned} E_B &= (m_n c^2 + m_p c^2) - m_{{}^1_2\text{H}}c^2 \\ &= (939.56563 + 938.27331)\text{MeV} - 1875.61339\text{MeV} \\ &\approx 2.23\text{MeV}. \end{aligned}$$

实验证实,对于 ${}^1_2\text{H}$ 核,当 γ 射线光子具有 2.23MeV 时,就能将其分解为自由的中子和质子。图24-5形象地说明了这一过程。

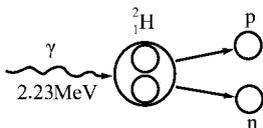


图 24-5

以自由核子静能作为参考,原子核 ${}^A_Z\text{X}$ 的结合能满足

$$m(Z, A)c^2 + E_B(Z, A) = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2,$$

即

$$E_B(Z, A) = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - m(Z, A)c^2 = \Delta mc^2, \quad (24-20)$$

式中

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A) \quad (24-21)$$

称为原子核质量亏损。由于原子核的质量一般不能直接测量,因此在计算原子核结合能时,我们通常用原子的质量去计算。如原子核 ${}^A_Z\text{X}$ 的质量亏损为

$$\Delta m = Zm_{\text{H原子}} + (A - Z)m_n - m_{\text{X原子}}, \quad (24-22)$$

式中 $m_{\text{H原子}}$ 表示 ${}^1_1\text{H}$ 原子的质量; $m_{\text{X原子}}$ 表示 ${}^A_Z\text{X}$ 原子的质量。

不同原子核的结合能不同,有的稳定,有的不稳定,这与原子核的比结合能有关。比结合能定义为原子核中单个核子的平均结合能,即

$$\epsilon = \frac{E_B}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A}. \quad (24-23)$$

核子的比结合能愈大,原子核就愈稳定。图24-6示意了各种原子核的比结合能,

其中横轴表示原子核所包含的核子数。

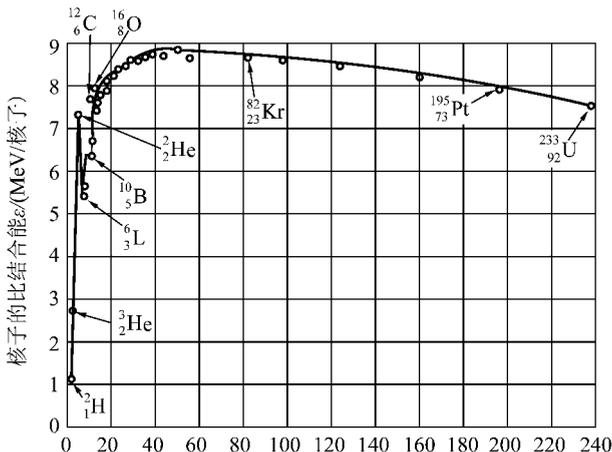
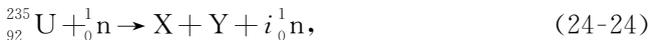


图 24-6

可以看出轻核和重核的比结合能较小,大多数中等质量原子核的比结合能比较大,所以中等质量的原子核最为稳定。利用上述性质,我们就可以有效地利用原子核的结合能。可能的方法是使重核裂变成中等质量的原子核或使轻核聚变成中等质量的原子核。这两种核反应过程中,都会有一定量的核子结合能释放出来。

24.4.2 重核的裂变

原子核裂变最早是在 1938 年由哈恩(O. Hahn)和斯特拉斯曼(F. Strassmann)发现的。1932 年,查德威克发现中子后,人们用中子照射原子核产生了一些新的放射性元素。1939 年,哈恩和斯特拉斯曼从反应物中分离出了 $_{57}\text{La}$ 和 $_{56}\text{Ba}$ 的同位素,并认为它们是由超铀元素分裂出来的。一个典型的重核的裂变过程是



式中 X、Y 是可能的核裂变碎片对; i 是裂变过程中可能放出的中子数目。对于 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 核的不同裂变过程, i 的取值是不同的。平均来讲, $i=2.47$ 。 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 核裂变后形成的“碎片对”(X, Y)有许多种,碎片对的质量分布如图 24-7 所示。图中纵轴表示 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 的不同裂变产物的百分数。

可以看出, ${}_{92}^{235}\text{U}$ 核分成质量数为 95 和 140 的碎片的可能性最大。具体过程为



裂变时形成的原子核具有过多的中子,所以裂变产物仍然是不稳定的。通过以下

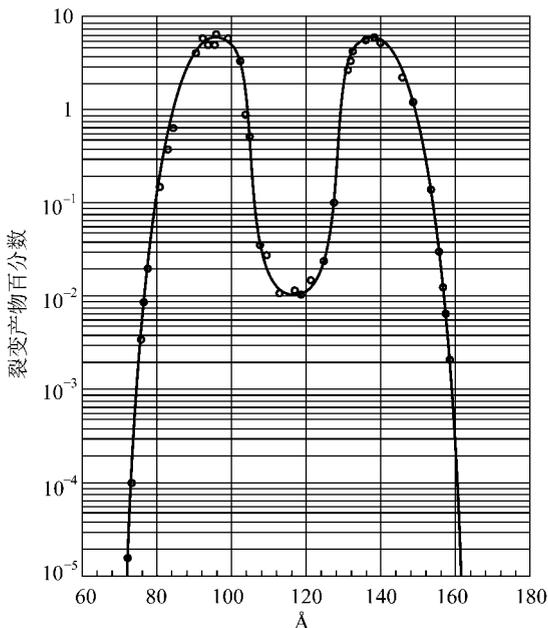
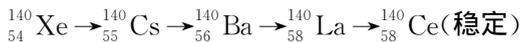
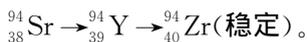


图 24-7

一系列的衰变,最终转变为具有中等质量的稳定的原子核,如



和

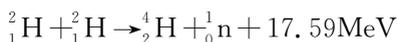
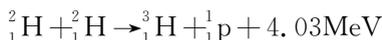
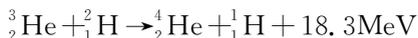
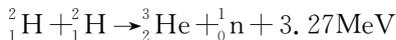


根据质量亏损定义,可以计算出在 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 的裂变过程中放出大约 200MeV 的巨大能量。这一能量除了少部分被中微子带走外,大部分能量以衰变产物的动能形式释放出来。这些能量最后绝大部分转变为热能,可以被收集利用。

如果铀核在裂变过程中放出的中子全都被别的铀核吸收,又会引起新的裂变过程,形成铀核裂变的链式反应。由于裂变是释放原子核结合能的反应,因此,链式反应将剧烈地释放能量,这就是核爆炸。原子弹中发生的爆炸过程就是不断增强的核裂变链式反应情况。如果人为控制每个原子核裂变时产生的中子中只有一个中子引起新的裂变,就能维持稳定的链式反应。核反应堆中发生的裂变过程就是这种情况。在动力反应堆中,原子核的裂变反应释放出来的能量最终被转换成热能或电能,被人们和平利用。目前,全世界投入商业运营的核电站已经超过 400 多座,使人们看到了核能利用的美好前景。

24.4.3 轻核的聚变

从图24-6可以看出,由于轻核的比结合能很小,因此当轻核通过核反应结合成质量较大的原子核时也能释放出巨大的能量。这种核反应称为轻核聚变。我们发现,在轻核区, ${}^2_1\text{H}$ 和 ${}^3_2\text{He}$ 的比结合能比 ${}^4_2\text{He}$ 、 ${}^9_4\text{Be}$ 、 ${}^{12}_6\text{C}$ 、 ${}^{16}_8\text{O}$ 等原子核的比结合能小很多。所以,当把 ${}^2_1\text{H}$ 和 ${}^3_2\text{He}$ 等轻原子核结合成上述几种原子核时,就能获得巨大的能量。典型的核聚变反应过程有



可以看出,就单个核子在核反应中平均释放出的能量来讲,聚变反应比裂反应的能量释放大得多。比如,在 ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ 中共释放17.59MeV的能量,平均每个核子释放出4.40MeV。而在 ${}^1_0\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{235}_{92}\text{U}$ 核裂变过程中共放出200MeV的能量,平均每个核子释放出0.85MeV的能量,两者相差数倍。另外, ${}^2_1\text{H}$ 作为海水的一个成分,可以认为是取之不尽的。因此,核聚变有着更加广阔的应用前景。

在核聚变反应过程中,由于 ${}^2_1\text{H}$ 核间的库仑排斥作用, ${}^2_1\text{H}$ 核间有很高的库仑势垒,估算为

$$U_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2R} \sim 10^5\text{eV}. \quad (24-25)$$

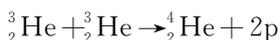
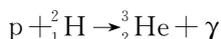
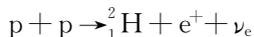
要实现核聚变反应, ${}^2_1\text{H}$ 核必须具有一定的动能来克服这个势垒。但是,按照量子力学理论,当 ${}^2_1\text{H}$ 核的动能比库仑势垒低时,由于隧穿效应,仍有一定数目 ${}^2_1\text{H}$ 核可以穿过势垒,导致聚变反应发生。比如,太阳中心的温度为 $T=1.7 \times 10^7\text{K}$,对应的核热运动平均能量为 $\bar{E}_k = \frac{3}{2} k_B T \sim 1.9 \times 10^3\text{eV}$ 。这个动能远远小于 $U_C \sim 10^5\text{eV}$ 。但是,按照麦克斯韦分布律,有少量的 ${}^2_1\text{H}$ 核具有比 \bar{E}_k 大很多的动能,再考虑到隧穿效应,太阳内部具有实现核聚变反应的条件。

上述通过热运动能量克服库仑势垒实现核聚变的方法称为热核聚变。氢弹的爆炸机制就是热核聚变反应。氢弹的中的热核聚变反应是不可控反应,能量释放的时间极短。

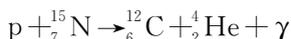
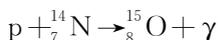
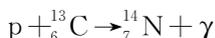
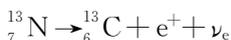
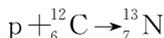
要实现可控核聚变,除了上述条件外,还需要以下几个条件:①温度足够高,可以使氘离子化成为 ${}^2_1\text{H}$ 核和 e^- 的等离子体;②核的数密度足够大,以保证足够大的核

子碰撞频率;③对等离子体约束持续足够长的时间。这种约束通常是通过磁约束的办法实现的,成功的方法有托克马克热核聚变装置。科学家也进行了其他的方法来实现核聚变反应,如激光聚变和常温核聚变等。

恒星的能量来源于核聚变。巨大的星体物质的巨大引力会在恒星内部产生巨大的压强,使其中的各种元素处于高温的等离子状态,具备产生核聚变反应的条件。恒星中的热核聚变主要有两种循环过程,分别是质子-质子循环和碳-氮循环,即



和



质子-质子循环的反应结果是将四个质子结合成一个氦核,放出的能量大约 26.7MeV。在太阳中,质子-质子循环的周期约为 $3 \times 10^9 \text{a}$ 。碳-氮循环的反应结果也是将四个质子结合成一个氦核,碳和氮的数目没有变化,它们只起一种中间作用。一个碳-氮循环释放出来的能量仍然是 26.7MeV。在太阳中,碳-氮循环的周期大约为 $6 \times 10^6 \text{a}$ 。

* 24.5 粒子物理简介

20 世纪 50 年代以前,人们对原子和原子核的研究取得了丰硕的成果。当时的物理学揭示了物质世界的微观构成,解释了几乎所有的实验现象。这些突出的成就使得人们认为电子、质子、中子、光子、 π 介子等粒子是构成千变万化的物质世界的基本单元,统称为“基本粒子”。

从 20 世纪 50 年代起,实验发现了更多的“新粒子”。因此,“基本粒子”家族越来越庞大,使得人们不得不重新审视关于基本粒子的观念和理论。1964 年,美国物理学家马雷·盖尔曼(M. Gellman)等提出新的理论:认为质子和中子并非物

质世界最基本的单元,它们是由一种更小层次的夸克组成的。从此,经过物理学家不断的丰富和完善,发展成为崭新的粒子物理学。

24.5.1 粒子及其分类

在 20 世纪,实验上发现了大量的粒子和它们的反粒子,人们习惯称之为基本粒子。反粒子和正粒子有相同的质量、自旋和寿命,但有相反的荷电性质和磁性性质。反粒子和正粒子相互作用时会发生湮灭现象。

按照粒子的性质一般可分为:①规范粒子;②轻子;③介子;④重子,如表 24-4 所示。表中 Δ^* 表示核子的共振态,包括 Δ^+ 、 Δ^0 和 Δ^{++} 等粒子,分别带 $\pm 1, 0$ 和 $+2$ 个单位的电荷。

表 24-4 常见粒子分类表

粒子种类、名称	符号	质量/(MeV/ c^2)	电荷	自旋	奇异数	
规范粒子	光子	γ	0	1	0	
	中间玻色子	W^\pm	83.0×10^3	± 1	1	0
		Z^0	93.8×10^3	0	1	0
轻子	电子及电子中微子	e^-	0.511	-1	1/2	0
		ν_e	$\sim 10^{-6}$	0	1/2	0
	μ 子及 μ 中微子	μ^-	105.7	-1	1/2	0
		ν_μ	$\sim 10^{-6}$	0	1/2	0
	τ 子及 τ 中微子	τ^-	1784	-1	1/2	0
		ν_τ	$\sim 10^{-6}$	0	1/2	0
介子	π 介子	π^\pm	139.6	± 1	1/2	0
		π^0	135.0	0	0	0
	K 介子	K^\pm	493.7	± 1	0	± 1
		K^0	497.7	0	0	1
		J/ψ	3100	0	0	0
	γ	9458	0	1	0	
重子	核子	p	938.3	1	1/2	0
		n	939.6	0	1/2	0
		Δ^*	1232	*	3/2	0
	超子	Λ^0	1115.6	0	1/2	-1
		Σ^+	1189.4	1	1/2	-1
		Ω^-	1672.2	-1	3/2	-3

规范粒子是传递各种基本作用的媒介粒子。在实验上已经确认的有 γ 光子、 W^\pm 和 Z^0 粒子等。粒子通过交换 γ 光子实现相互间的电磁相互作用,通过交换 W^\pm 和 Z^0 粒子实现相互间的弱作用。规范粒子的自旋都是整数,是玻色子,因此

它们又称为规范玻色子(Gauge boson),满足玻色-爱因斯坦统计规律。

轻子(Lepton)最早得名于这些粒子较“轻”,如电子、 μ 子等,它们与重子相对。但是,后来实验上发现的 τ 子并不“轻”,其质量比质子的质量还大。现在人们知道,轻子(包括它们的反粒子)共有 12 个

$$\begin{cases} (e^-, \nu_e), (\mu^-, \nu_\mu), (\tau^-, \nu_\tau) \\ (e^+, \bar{\nu}_e), (\mu^+, \bar{\nu}_\mu), (\tau^+, \bar{\nu}_\tau) \end{cases} \quad (24-26)$$

它们的自旋都是 1/2,是费米子,满足费米-狄拉克统计规律。现在轻子的确切定义是不参与强相互作用的费米子。至今,人们尚未发现轻子有任何的内部结构特征。

所有的轻子两两构成一代,共分为三代,即 (e^-, ν_e) 、 (μ^-, ν_μ) 和 (τ^-, ν_τ) ,分别与夸克的三代相对应(以后将讨论)。它们可直接参与弱作用,带电的轻子还参与电磁相互作用。中微子(以及反中微子)只参与弱作用,因为中微子与物质的作用非常小,它们几乎可以自由穿透地球,所以仪器很难检测到。直到 1962 年才由丹拜(G. Danby)等人在布鲁克海文实验室中得到证实。

强子(Hadron)是指相互间有强相互作用的粒子,包括介子和重子,前者是玻色子,后者是费米子。强子也参与弱相互作用,荷电强子也参与电磁相互作用。重子包括核子(如质子和中子)和超子(如 Λ^0 、 Σ^+ 和 Ω^-)。人们已经发现,强子有内部结构,并提出了强子的夸克模型(下节将讨论)。

20 世纪 50 年代,人们在宇宙线中发现了一些具有奇怪性质的粒子,它们就是 K 介子、 Λ 超子、 Σ 超子和 Ξ 超子,还有后来发现的 Ω 超子,这些粒子统称奇异粒子。奇异粒子与其他粒子不同之处在于:①这些粒子的产生过程非常迅速,而衰变过程却是缓慢的弱相互作用。②这些粒子总是成对地产生。因此,人们通过对实验事实的分析,除给这些粒子标以质量、电荷、自旋和磁矩等性质外,又引入一个称为“奇异数”的量子数来反映它们的奇异性质。在粒子反应过程中,奇异数可以守恒,也可以不守恒。一般说来,强相互作用过程中奇异数守恒,而弱相互作用中奇异数不守恒。

24.5.2 强子的夸克模型

人们最早认识到强子具有内部结构是从核子的磁矩的实验测量值与理论预言存在巨大差距开始的。1932 年,斯特恩测得质子的磁矩为 $2.79\mu_p$,后来又测得中子的磁矩为 $-1.91\mu_p$,它们的数值都远离狄拉克理论的预言。特别是不带电的中子居然也有磁矩!这只能使人猜想核子有内部结构。

1956 年,霍夫斯塔特(R. Hofstadter)用高速电子轰击质子时,发现质子的电荷有分布,电荷半径约为 0.7fm 。后来又发现,中子虽然呈中性,但内部也有电荷

分布,电荷分布半径为 0.8fm 。因此,人们认为核子不是点粒子。

1964年,美国物理学家马雷·盖尔曼(M. Gellman)等大胆地提出新理论:质子和中子并非是最基本的颗粒,它们是由一种更微小的东西——夸克(很多中国物理学家称其为“层子”)构成的。最初解释强相互作用粒子的理论需要三种夸克,称为夸克的三种味,它们分别是上夸克(up-quark,简称u夸克)、下夸克(down-quark,简称d夸克)和奇异夸克(strange-quark,简称s夸克)。1974年发现了 J/ψ 粒子,要求引入第四种夸克——粲夸克(charm-quark,简称c夸克)。1977年发现了 Υ 粒子,要求引入第五种夸克底夸克(bottom-quark,简称b夸克)。1994年发现第六种夸克顶夸克(top-quark,简称t夸克),现在人们相信世界上只存在六种夸克,称为夸克的六种“味”,如表24-5所示。

表 24-5 夸克的基本性质

符 号	中文名称	英文名称	电荷(e)	质量(GeV/c^2)	自 旋	重子数
u	上夸克	up	+2/3	0.004	1/2	1/3
d	下夸克	down	-1/3	0.008	1/2	1/3
c	粲夸克	charm	+2/3	1.5	1/2	1/3
s	奇异夸克	strange	-1/3	0.15	1/2	1/3
t	顶夸克	top	+2/3	176	1/2	1/3
b	底夸克	bottom	-1/3	4.7	1/2	1/3

夸克理论认为,夸克具有分数电荷,是电子电量的 $2/3$ 或 $-1/3$ 倍。所有夸克都是自旋为 $1/2$ 的费米子。所有的重子都是由三个夸克组成的,反重子则是由三个相应的反夸克组成的。比如质子 = uud, 中子 = udd。

夸克理论还预言了存在一种由三个奇异夸克组成的粒子 = sss, 这种粒子于 1964 年在氢气泡室中观测到,称为 ω^- 粒子。顶夸克、底夸克、奇异夸克和粲夸克等由于质量太大,很短的时间内就会衰变成上夸克或下夸克。所以,人们日常生活中的物质完全由上夸克和下夸克组成。

夸克理论还认为,介子是由一个夸克和一个反夸克组成的束缚态。例如,日本物理学家汤川秀树预言的 π^+ 介子是由一个上夸克和一个反下夸克($u\bar{d}$)组成的, π^- 介子则是由一个反上夸克和一个下夸克组成的($\bar{u}d$),而 π^0 介子是由($u\bar{u}$ 或 $d\bar{d}$)构成。

表24-6列出了部分介子和重子构成的夸克谱,其中每个强子夸克谱括号外的小箭头表示夸克自旋之间相互关系,↑表示夸克的自旋“向上”,↓表示夸克的自旋“向下”。

表 24-6 强子的夸克谱

介 子	重 子
$\pi^+ = (u\bar{d})_{\uparrow\downarrow}$	$p = (uud)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$
$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})_{\uparrow\downarrow}$	$n = (udd)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$
$\pi^- = (d\bar{u})_{\uparrow\downarrow}$	$\Sigma^+ = (uus)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$
$K^+ = (u\bar{s})_{\uparrow\downarrow}$	$Z^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(uds + sdu)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$
$K^- = (s\bar{u})_{\uparrow\downarrow}$	$Z^- = (dds)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$
$K^0 = (d\bar{s})_{\uparrow\downarrow}$	$\Xi^0 = (uss)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$
$K^0 = (s\bar{d})_{\uparrow\downarrow}$	$\Xi^- = (dss)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$
$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})_{\uparrow\downarrow}$	$\Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(sdu - sud)_{\uparrow\uparrow\downarrow}$

夸克除了具有“味”的特性外,还具有三种“色”的特性,分别是红、绿和蓝,用 R、G、B 来标记。这里“色”并非指夸克真的具有颜色,而是借“色”这一词形象地描述夸克本身的一种物理属性。导致人们引入“色”自由度来描述夸克的原因是这样的:因为夸克是费米子(自旋 1/2),它们组成一个系统时应遵守泡利不相容原理。比如质子中有两个 u 夸克,按照泡利不相容原理,这两个 u 夸克不允许处于同一状态。又如中子中有两个 d 夸克, Ω^- 中有两个 s 夸克,也不允许处于同一状态。为了解决这个问题,人们对每个夸克引入一个新的量子数,用“色”来表示。例如 Ω^- 就可用一个红 s 夸克、一个绿 s 夸克和一个蓝 s 夸克组成,虽然这三个 s 夸克的自旋取向等都相同,但因其“色”自由度不同,因而并不违反泡利不相容原理。

夸克理论认为,一般物质是没有“色”的,组成重子的三种夸克的“颜色”分别为红、绿和蓝,因此叠加在一起就成了无色的。计入 6 种味和 3 种色的属性,有 18 种夸克,另有它们对应的 18 种反夸克。因此,共有 36 种不同的夸克。

自夸克模型提出以来,人们企图利用各种办法寻找自由夸克。但是,人们的各种尝试都是失败的。然而,夸克模型的结果与一系列实验事实相符得很好,使得人们相信夸克是存在的。那么,自然界中为什么没有自由夸克呢?为了解释实验现象,夸克理论认为,所有夸克都是被囚禁在粒子内部的,不存在单独的、自由的夸克。这就是描述夸克相互作用规律的量子色动力学中的渐近自由的理论,又称为“夸克禁闭”理论。

与轻子的三代

$$\left(\nu_e\right), \left(\nu_\mu\right), \left(\nu_\tau\right) \quad (24-27)$$

相对应,六味夸克也可以分成对应的三代,即

$$\left(\begin{matrix} u \\ d \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} s \\ c \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix}\right) \quad (24-28)$$

每一代轻子和夸克具有类似的性质,比如它们间的弱相互作用规律相同。

人们把规范粒子(共 12 种,包括 γ 光子, W^\pm 、 Z^0 粒子和描述夸克强相互作用的 8 种胶子)、12 种轻子和 36 种夸克一起统称为基本粒子。现在,基本粒子共有 60 种(注:描述引力作用的引力子不包括在内,实验上还没有发现引力子存在的证据)。

24.5.3 基本粒子的相互作用

人们认为,基本粒子世界中存在着四种基本相互作用,即引力相互作用、电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用。表 24-7 列出了四种相互作用力的相对强度和作用力程的比较。

表 24-7 四种基本相互作用性质

	强 力	电磁力	弱 力	万有引力
相对强度	1	10^{-2}	10^{-12}	10^{-40}
作用力程	10^{-15} m	长程	$<10^{-17}$ m	长程

四者之中,最弱的是引力,但它是长程力,按距离的平方而衰减,对于天文学中巨大尺度的现象极其重要。在微观物理中,由于粒子的质量都很小,粒子间的引力作用是及其微弱的,因此可以忽略不计。

电磁力是处处都有的,电磁相互作用在经典物理学中人们就作了深入的研究。所有带电粒子都参与电磁相互作用,这种作用通过电磁场交换 γ 光子来实现,作用时间约为 10^{-6} s。电磁作用力的大小随着粒子间距离的增加而逐渐减小。电磁作用是对凝聚态物理学中众多现象负责的唯一基本作用力。

当人们对物质结构的探索进入到比原子还小的亚微观领域中时,发现在核子之间存在一种强力。正是这种力把原子内的一些质子以及中子紧紧地束缚在一起,形成原子核。强力是比电磁力更强的基本力,两个相邻质子之间的强力比电磁力大 10^2 倍。强力是一种短程力,其作用力程很短。粒子之间距离超过 10^{-15} m 时,强力小得可以忽略;小于 10^{-15} m 时,强力占主要支配地位;而且直到距离减小到大约 0.4×10^{-15} m 时,它都表现为引力。距离再减小,强力就表现为斥力。强

相互作用的时间极短(约为 10^{-23} s)。夸克通过强相互作用结合成强子,夸克通过交换胶子而实现彼此间的强相互作用。1978 年,丁肇中领导的实验小组在德国汉堡电子同步加速器中心,观察到所谓胶子“三喷注”现象,为胶子的存在提供了一个实验证据。

在微观领域中,人们还发现一种短程力,称为弱力。弱力可以引起粒子之间的某些过程。弱相互作用分两种,一种是有轻子(电子 e , 中微子 ν_e 等)参与的反应,例如中子和原子的放射性衰变。另一种是 K 介子和 Λ 超子的衰变。这两种相互作用的强度都比强相互作用弱 10^{14} 倍,相互作用时间约为 $10^{-6} \sim 10^{-8}$ s,相对于强相互作用来讲是缓慢的过程。基本粒子通过交换中间玻色子 W^\pm 和 Z^0 实现彼此间的弱相互作用。

爱因斯坦一生最大的愿望就是追求世界的和谐、简洁和统一,他企图把万有引力和电磁力统一起来,但一直没有成功。20 世纪 60 年代,格拉肖(S. L. Glashow)、温伯格(S. Weinberg)和萨拉姆(A. Salam)在杨振宁等人提出的规范场理论基础上,提出了弱力与电磁力相统一的理论,并在 20 世纪 80 年代得到了欧洲核子中心的实验证明,这是物理学发展史上的一个里程碑。

大统一理论方案尝试将统一扩大到包括强力在内,通常称为大统一理论。人们提出了各种各样的大统一理论模型,但也一直没有得到实验的支持。更进一步统一的尝试也在进行,例如雄心勃勃的超弦理论,不仅越出标准模型的框架对众多现象给予微观的解释,并最终将引力纳入进来。当今在粒子物理学家的圈子里正热烈地讨论所谓的“万事万物的理论”(Theory of everything),表明了物理学家追求最终统一的愿望。这类理论的难度极大,而其致命伤是可被参照的实验数据难以获得,而且称之为“万事万物的理论”这一名称并不恰当,容易引起误解。这类寻根问底的理论会对粒子物理学和宇宙论产生深远的影响是毫无疑问的,但对其他物理科学的价值究竟如何,则尚属可疑。

24.5.4 粒子的对称性和守恒定律

在经典物理学范围内,有几个大家熟知的守恒定律,包括能量(质量)守恒、动量守恒、角动量守恒和电荷守恒。能量(动量)守恒是与系统的时间(空间)平移不变性相关的,而角动量守恒与系统的空间旋转不变性联系的。每一个守恒定律都对应于物理系统所具有的某一个对称性。

对称性和守恒定律也是粒子物理学研究中的重要课题。实验表明,在粒子运动、衰变、转化(包括产生和湮灭)等过程中,系统仍满足动量守恒、角动量守恒、能量守恒和电荷守恒定律。此外,还有一些特殊的守恒定律,如重子数守恒、轻子数守恒、奇异数守恒、同位旋守恒等。

下面我们分别介绍几种在粒子物理领域中新的守恒定律。

1. 重子数守恒

我们首先赋予每个基本粒子一个重子数,用 B 表示。对所有的重子(包括核子和超子等), $B=+1$; 对所有的反重子, $B=-1$; 对所有的介子和轻子, $B=0$; 对于所有的夸克, $B=+1/3$; 对于所有的反夸克, $B=-1/3$ 。那么,以下的过程都是重子数守恒律允许的,如

$$\begin{cases} \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \\ \Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0 \end{cases}$$

和

$$p + p \rightarrow \begin{cases} p + n + \pi^+ \\ p + p + \pi^0 \\ p + n + \pi^+ + \pi^0 \\ p + p + \pi^+ + \pi^- \end{cases}$$

而如下过程重子数不守恒

$$\begin{aligned} p &\rightarrow e^+ + \gamma \\ p + p &\rightarrow p + \pi^+ \\ p + p &\rightarrow p + p + n \end{aligned}$$

因此,这些过程都是不能发生的。

2. 轻子数守恒

从粒子反应过程中,人们也总结出了轻子数守恒定律。赋予每个轻子以不同的轻子数,如:对于 e^- 、 ν_e , $L_e=1$, 对于 e^+ 、 $\bar{\nu}_e$, $L_e=-1$ 。对于 μ^- 、 ν_μ , $L_\mu=1$ 对于 μ^+ 、 $\bar{\nu}_\mu$, $L_\mu=-1$ 。

对于 τ^- 、 ν_τ , $L_\tau=1$, 对于 τ^+ 、 $\bar{\nu}_\tau$, $L_\tau=-1$ 。这样,下列各过程都是允许的:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ \mu^- &\rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e \end{aligned}$$

而如下过程都是禁止的

$$\begin{aligned} e^- + p &\rightarrow n + \bar{\nu}_e \\ p &\rightarrow e^+ + \gamma \end{aligned}$$

另外,在如下过程中

$$\begin{aligned} \nu_\mu + n &\rightarrow e^- + p \\ \bar{\nu}_\mu + p &\rightarrow e^+ + n \end{aligned}$$

虽然它们并不违反熟知的守恒律,重子数也保持守恒,但轻子数不守恒,人们从来没有观察到这样的反应过程。

迄今为止,在任何粒子反应过程中尚未发现重子数和轻子数守恒律破坏的例子。

3. 同位旋守恒

核子间具有核力相互作用,其根本原因是核子内部夸克间有强相互作用。如果忽略电磁相互作用的话,质子和中子可以认为是同一种客体(核子),只不过质子和中子是核子的不同状态而已。因此,人们赋予核子一个新的量子数——同位旋,用 I 表示, $I = \frac{1}{2}$ 。质子和中子的同位旋 z 分量分别为 $I_z = +1/2$ 和 $-1/2$ 。它们的电荷数、重子数和同位旋间满足如下关系

$$Q = I_z + \frac{1}{2}B. \quad (24-29)$$

同样,对于 π 介子, $I = 1$,其同位旋 z 分量为 $I_z = +1, 0$ 和 -1 ,分别对应于 π^+ 、 π^0 和 π^- 。在不同的粒子反应过程中,同位旋的变化 ΔI 和 ΔI_z 有不同的选择定则。

4. 奇异数守恒

20 世纪 50 年代,人们发现了一类具有奇异特性的粒子,如 K 、 Λ 、 Σ 、 Ξ 和 Ω 子等,统称为奇异粒子。这些粒子在强相互作用过程中产生,而只在弱相互作用过程中衰变。为了描述这类粒子的奇异性质,在 1953 年,西岛和盖尔曼等人提出,这些粒子除了质量、电荷、自旋、重子数和轻子数等量子数以外,还应有新的量子数,称之为奇异数 S 。对于不同的奇异粒子赋予不同的奇异数(如表 24-4 所列)。并且,他们假定奇异数在强相互作用过程和电磁作用过程中守恒,而在弱相互作用过程中不守恒。按照奇异数守恒定律, $K^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ 过程是禁止的。奇异数和其他量子数的关系是

$$S = 2(Q - I_z) - B. \quad (24-30)$$

在粒子物理学中还有其他一些守恒定律,如:宇称守恒(弱相互作用过程中不成立)、CPT 不变性(C——电荷共轭不变性;P——空间反演不变性;T——时间反演不变性)等。

参 考 答 案

习题 11

11-1 $E=3.24 \times 10^4 \text{ N/C}$, 和 BC 夹角 33.7° 。

11-2 0.72 V/m , 方向指向空隙。

11-3 $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ 。

11-4 $\mathbf{E} = -\frac{\lambda_0}{8\epsilon_0 R} \mathbf{j}$ 。

11-5 $\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \mathbf{i}$ 。

11-6 $E_1 = \rho x / \epsilon_0 \quad \left(-\frac{1}{2}d \leq x \leq \frac{1}{2}d\right)$,

$E_2 = \rho \cdot d / (2\epsilon_0) \quad \left(|x| > \frac{1}{2}d\right)$ 。

E - x 图线如图 1

11-7 $E = \rho_0 \sin x / \epsilon_0$ 。

11-8 $\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$ 。

11-9 (1) $\frac{\rho d}{3\epsilon_0}$, 方向从 O 指向 O' ; (2) $\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(d - \frac{r^3}{4d^2}\right)$, 径向。

11-10 $\frac{\sigma(R_2 - R_1)}{2\epsilon_0}$ 。

11-11 $\frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$ 。

11-12 (1) $8.85 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$; (2) $6.67 \times 10^{-9} \text{ C}$ 。

11-13 $\frac{q\lambda l}{4\pi\epsilon_0 r_0(r_0+l)}$, 方向沿 x 正方向。 $\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0+l}{r_0}\right)$ 。

11-14 $2pE \cos\theta$ 。

11-15 整个右棒在电场中受力为: $\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4}{3}$, 方向沿 x 轴正向; 左棒受力: $F' = -F$ 。

11-16 $\sqrt{v_0^2 + \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} (R+b - \sqrt{R^2+b^2})}$ 。

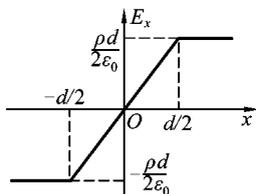


图 1

习题 12

12-1 $8.85 \times 10^{-9} \text{C/m}^2$ 。

12-2 $Q_1 = 2 \times 10^{-8} \text{C}, Q_2 = 4 \times 10^{-8} \text{C}$ 。

12-3 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right)$ 。

12-4 $E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, 0 < r < R_1; E_2 = 0, R_1 < r < R_2; E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, r > R_2;$

$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}, R_1 \geq r > 0; V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}, R_2 \geq r > R_1;$

$V_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, r \geq R_2$ 。

12-5 (1) -996V ; (2) -199V 。

12-6 (1) $-1.15 \times 10^{-9} \text{C/m}^2$; (2) $6.2 \times 10^{-13} \text{C/m}^3$ 。

12-7 $V_1 - (V_1 - V_2) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$ 。

12-8 $a = \frac{b}{2}, \frac{4U}{b}$ 。

12-9 $[V + qd / (2\epsilon_0 S)] / 2$ 。

12-10 $\frac{16}{25} W_0$ 。

习题 13

13-1 (1) 0; (2) $\frac{4\pi R^2}{3} P_0$ 。

13-2 (1) 7.1; (2) $7.6 \times 10^{-9} \text{C/cm}^2$ 。

13-3 (1) $\frac{3\epsilon_r}{1+2\epsilon_r} C_0$; (2) $\frac{3}{2} C_0$ 。

13-4 (1) $\frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0}$; (2) $\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'}$ 。

13-5 $\frac{P}{3\epsilon_0}$, 方向与 P 相反。

13-6 147kV 。

13-7 $\frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}}}$ 。

13-8 $\frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$ 。

13-9 (1) $18.2 \times 10^{-5} \text{J}$; (2) $8.1 \times 10^{-5} \text{J}$ 。

13-11 (1) $\frac{\sigma_0^2 S d}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$; (2) $\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{2d} U^2 (1 - \epsilon_r)$ 。

习题 14

14-1 大小: $\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi R} - \frac{\mu_0 I}{6R}$, 方向向里。

14-2 0。

14-3 $-\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{j} + \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{k}$ 。

14-4 $\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{a}$ 。

14-5 $6.37 \times 10^{-5} \text{T}$ 。

14-7 (1) $\frac{1}{2} \mu_0 \sigma v$ 。

14-8 (1) $\frac{\mu_0 \omega \rho (R^2 - r^2)}{2}$; (2) $\frac{\mu_0 \omega \rho R^2}{4}$ 。

14-9 $\frac{\mu_0 I d}{2S}$ 。

14-10 $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{b}{a}$ 。

14-11 (1) 东; (2) $6.27 \times 10^{14} \text{m/s}^2$; (3) $2.98 \times 10^{-3} \text{m}$ 。

14-12 (1) 偏向东; (2) $6.28 \times 10^{14} \text{m/s}^2$; (3) 3mm。

14-13 $\frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$ 。

14-14 $\frac{2\rho_0 g S}{I} \tan \theta$ 。

14-15 $\frac{m}{Bl} \sqrt{2gh}$ 。

14-16 (1) $M = \frac{1}{2} \pi R^2 IB$; (2) $A = \frac{1}{2} \pi R^2 IR$ 。

习题 15

15-1 (1) $\frac{Ir}{2\pi R^2}$, $\frac{\mu Ir}{2\pi R^2}$, $\frac{(\mu_r - 1)Ir}{2\pi R^2}$; (2) $\frac{I}{2\pi r}$, $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。

15-2 (1) 200A/m, $2.5 \times 10^{-4} \text{T}$; (2) 200A/m, 1.05T。

- 15-3 (1) $2.0 \times 10^4 \text{ A/m}$; (2) $7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$; (3) 38.8;
 (4) $3.1 \times 10^5 \text{ A}$, 39.8。
 15-4 $\mu_0 M$, $\mu_0 M$, M , 0。
 15-5 (1) 0.5A; (2) 0.8A。

习题 16

- 16-1 $-\frac{\mu N I_0 l \omega}{2\pi} \cos \omega t \ln \frac{d+a}{d}$ 。
 16-2 $6.86 \times 10^{-6} \text{ V}$ 。
 16-3 $\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{5}{2}$ 。
 16-4 $9.42 \times 10^{-3} \text{ A}$ 。
 16-5 (1) $\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \frac{dB}{dt}$, $\frac{\pi a^2}{6} \frac{dB}{dt}$, $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})a^2 \frac{dB}{dt}$, 逆时针方向;
 (2) $-(\frac{\pi + \sqrt{3}}{10})a^2 \frac{dB}{dt}$ 。
 16-6 $\frac{\pi k^2 h}{8\rho} R^4$ 。
 16-7 (1) $\mu_0 d + \frac{2\mu_0 \pi r^2}{l}$; (2) $-\frac{kl}{\mu_0} t$ 。
 16-8 (1) $6.03 \times 10^{-4} \text{ H}$; (2) $3.02 \times 10^{-2} \text{ V}$ 。
 16-9 (1) $\frac{\mu_0^2 \pi^2 a^4 \omega I^2}{4Rb^2}$; (2) $\frac{\mu_0^2 \pi^3 a^4 \omega I^2}{16Rb^2}$ 。
 16-10 $L = \frac{\mu_1}{8\pi} + \frac{\mu_2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ 。
 16-11 (1) 238J/s; (2) 152J/s; (3) 390J/s。
 16-12 $5.46 \times 10^{-5} \text{ A}$ 。

习题 17

- 17-1 (1) 303m; (2) 14.99m; (3) 1.63m。
 17-2 $1.59 \times 10^{-2} \text{ J/(m}^2 \cdot \text{s)}$, $2.45 \times 10^{-2} \text{ V/m}$ 。
 17-3 (1) $H_z = H_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) + \frac{2}{3} \pi \right]$;
 (2) $E_y = \mu_0 c H_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) + \frac{2}{3} \pi \right]$; (3) $\frac{1}{4} \mu_0 c H_0^2$, x 正向。
 17-4 $1.55 \times 10^2 \text{ V/m}$, $5.16 \times 10^{-6} \text{ T}$ 。

习题 18

18-1 (1) 5000\AA ; (2) 3mm 。

18-2 (1) 下; (2) $1+N\lambda/l$ 。

18-3 (1) 0; (2) $(n-1)l$ 。

18-4 $6.73\times 10^{-7}\text{m}$ 。

18-5 $k=6,655\text{nm}$; $k=7,554\text{nm}$; $k=8,480\text{nm}$; $k=9,424\text{nm}$ 。

18-6 0.002° 。

18-7 $0.07\mu\text{m}$ 。

18-8 1.00025。

18-9 6.79m 。

18-10 $5.154\times 10^{-6}\text{m}$ 。

习题 19

19-1 $1.0\times 10^{-3}\text{m}$ 。

19-2 0.006m 。

19-3 $2.2\times 10^{-4}\text{rad}$, 9.1m 。

19-4 0.276rad 。

19-5 3647。

19-6 (1) 9; (2) 5。

19-7 (1) $a=800\text{nm}$, $b=1600\text{nm}$; (2) $N=6000$ 。

19-8 (1) 3.5cm ; (2) $400\sim 500\text{nm}$ 。

19-9 $300, 0.75\text{mm}$ 。

19-10 (1) 最多能看到 $k=3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ 级条纹;
(2) 最多能看到 $k=5, 4, 3, 2, 1, 0, -1$ 级条纹。

习题 20

20-1 36.94° , 垂直于入射面。

20-2 (1) 35.26° ; (2) 54.74° 。

20-3 1:1。

20-4 (1) 356.97nm , 396.37nm ; (2) 3.37° 。

20-5 (1) 0.49; (2) 1:1。

20-6 12.6mm 。

习题 21

21-1 5794K, 6737K, 9990K。

21-2 (1) $9.66 \times 10^{-4} \text{ m}$; (2) $2.34 \times 10^9 \text{ W}$ 。

21-3 235W。

21-4 $\frac{l\lambda_m}{b^2} \sqrt{\frac{W}{\sigma}}$ 。

21-5 $2.84 \times 10^{-19} \text{ J}$, $9.47 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{ m/s}$, $3.16 \times 10^{-36} \text{ kg}$;

$7.96 \times 10^{-15} \text{ J}$, $2.65 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{ m/s}$, $8.84 \times 10^{-32} \text{ kg}$;

$1.06 \times 10^{-13} \text{ J}$, $5.35 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{ m/s}$, $1.78 \times 10^{-30} \text{ kg}$ 。

21-6 5.6×10^{13} 个。

21-7 (1) 0.1024nm; (2) 291eV, 44.3°。

21-8 656.3nm, 486.1nm, 434nm, $3.15 \times 10^{15} \text{ Hz}$ 。

21-9 (1) 12.78eV; (2) 0.66eV, 2.55eV, 12.8eV, 1.89eV, 12.1eV, 10.2eV;

(3) 4.07m/s。

21-10 $2.0 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$ 。

习题 22

22-1 (1) $1.2 \times 10^{-13} \text{ m}$; (2) $9.1 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。

22-2 (1) $7.8 \times 10^{-12} \text{ m}$; (2) $7.7 \times 10^{-12} \text{ m}$ 。

22-3 10.9° 。

22-4 30.1cm。

22-5 $1.24 \times 10^{-15} \text{ J}$ 。

22-6 $6.3 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。

22-7 $1.3 \times 10^{-3} \text{ nm}$ 。

22-9 0.195。

22-10 (1) $3.29 \times 10^{-13} \text{ J}$; (2) $9.87 \times 10^{-13} \text{ J}$ 。

22-11 $0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar$ 。

22-12 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$ 。

习题 23

23-1 (1) 12; (2) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 。

23-2 $\psi(x \pm a) = e^{\pm ika} \psi(x)$ 。

23-3 -0.10eV 。

23-4 5.352K 。

23-5 $1.1\times 10^{-6}\text{m}, 2.3\times 10^{-7}\text{m}$ 。

23-6 $6.5\times 10^{-7}\text{m}$ 。