

一流学校 一流老师 一流资源



三一丛书

电磁场

要点与解题

马西奎 刘补生 邱捷 王仲奕



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交大教学资源文库 三一丛书

电 磁 场

要点与解题

马西奎 刘补生 邱 捷 王仲奕

西安交通大学出版社
· 西安 ·

内容简介

本书是为了对选用冯慈璋、马西奎主编的《工程电磁场导论》(高等教育出版社)作为教材的教师和学生进行教学或学习辅导而编写的。也是对作者多年教学经验的总结。全书共8章。每章均包括基本内容和公式、重点与难点、典型题解析、自我检测题等4部分。本书侧重对重点与难点的分析,并对精选的典型题进行了详细的分析和解答。本书收集了相当数量的典型题,所选的每道题都力求新颖,并且从分析题意出发,引导出解题的技巧,旨在提高学生分析问题和解决问题的能力。为了强调一些典型的解题方法,本书几乎对每道题都做了注释。

本书可作为大学生学习电磁场的参考书和补充教材,也可供报考硕士研究生的考生使用。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场要点与解题/马西奎等编著. —西安:西安交通大学出版社, 2006. 9
(西安交大教学资源文库. 三一丛书)
ISBN 7-5605-2232-7

I. 电… II. 马… III. 电磁场—高等学校—教学参考资料 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 103793 号

书 名:电磁场要点与解题

编 著:马西奎 刘补生 邱 捷 王仲奕

出版发行:西安交通大学出版社

地 址:西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)

电 话:(029)82668357 82667874(发行部)

(029)82668315 82669096(总编办)

网 址:<http://press.xjtu.edu.cn>

电子邮箱:eibooks@163.com

印 刷:陕西向阳印务有限公司

字 数:300 千字

开 本:880 mm×1 230 mm 1/32

印 张:8.25

版 次:2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-5605-2232-7/TN·90

定 价:13.80 元

版权所有 侵权必究

丛书总序

为了使普通高等学校理工类专业的大学生更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识,我们组织出版了这套“三一”丛书,目的就是提供一流的学习资源,使大家共享一流教师的教学经验和教学成果,为今后的学习打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府,是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一,1999 年被国家确定为我国中西部地区惟一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学,1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名,具有丰富的、一流的教学资源。本丛书均由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编,他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中,深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在,对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究,并将成果体现于书中。

本丛书针对中少学时课程的特点和教学要求,以普通高等学校的学生为主要对象,不拘泥于某一本教材,而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结,取其精华,自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路进行了全面、系统的总结和提炼,按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环

节进行编排。本丛书既可单独使用,也可与其他教材配合使用。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友,帮助您克服困难,进入大学学习的自由王国,并祝您早日成为国家的栋梁之材!

在学习使用过程中,您如果发现书中有不妥之处或有好的建议,敬请批评指正并反馈给我们,我们会进一步改进自己的工作,力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址:<http://press.xjtu.edu.cn>

<http://www.xjtupress.com>

理工医事业部信箱: jdlgy31@126.com

西安交通大学出版社

2006 年 6 月

前 言

电磁场是高等学校电类专业学生的一门重要的技术基础课。只有学好它,才有可能在专业课学习及科研新领域开拓中获得较高的成就。但是,对于初次接触这门课程的大学生来说,在学习时常会遇到这样或那样的困难。学生们往往抱怨:“我理解电磁场的全部理论,但似乎不会解任何习题”。这里,他们把“理解”和“记住”混同起来了。其实,真正的情况更接近于“我记住了电磁场的所有可能的公式,但似乎总不能正确地应用它们来解习题”。为了改进这种情况,我们编写了这本与冯慈璋和马西奎主编的《工程电磁场导论》教材(高等教育出版社)相配套的学习指导书,可以使学生用较少的时间掌握较多的电磁场知识,提高学习的效率。但它既不能代替教材,也不能代替你自己的努力。当然,在一本学习指导书里也不可能说一些有魔力的话,来免去必需的学习时间和解题实践。

本书的编写按《工程电磁场导论》教材的内容和次序,逐章编写。每章均分为以下 4 个部分:

(1) 基本内容和公式

这一部分是对电磁场理论基本内容的简要归纳,提纲挈领,举其大要。

(2) 重点与难点

这一部分强调指出教材中相应章节的要点,指出哪些基本概念、观点和公式是应该牢记的,哪些是应该阅读以求“通晓”但不必牢记的,这实际上是在说明学习电磁场有一个方法问题。

(3) 典型题解析

这一部分列举了许多典型例题,但目的并不仅是给出题解而已,而更着眼于使学生加深对基本概念和基本规律的理解,加强对解题思路

和解题方法的指导。读者从中可以逐步领悟和学会分析电磁场问题的方法,掌握解题的基本步骤和学会解题技巧,总结出各种类型题目的解题方法,开阔解题思路,提高分析问题和解决问题的能力。

(4) 自我检测题

这一部分给出了供学生自行检查学习效果的题目。如果做不出,说明尚未掌握好教材内容,必须认真阅读教材和本书的“重点与难点”部分。

需要指出的是,学习电磁场课程,一定要认真做题。做题不在多而在精。在认真做了一定数量的典型题目(例如,教师指定的)之后,还应再看看一些有关习题的解答。这种做一部分题看一部分题解,即精做和泛看相结合的方法,可以起到巩固、提高和扩大知识的作用。

参加本书编写工作的有马西奎、刘补生、邱捷、王仲奕。在本书的编写中,编者除了总结多年的教学经验外,还参考了若干现有教材和参考书,在许多方面得到启发和教益,在此不再一一指明,特致谢意。

书中难免有疏漏之处,恳请读者批评指正。

编著者

2006 年 5 月于西安交通大学

目 录

丛书总序

前言

第 1 章 静电场

1.1 基本内容和公式	(1)
1.1.1 电场强度·电位	(1)
1.1.2 静电场中的导体和电介质	(3)
1.1.3 静电场基本方程·分界面上的衔接条件	(4)
1.1.4 静电场的边值问题·惟一性定理	(5)
1.1.5 静电场边值问题的几种解法	(6)
1.1.6 部分电容	(8)
1.1.7 静电能量	(9)
1.2 重点与难点	(10)
1.2.1 电场强度和电位及其计算	(10)
1.2.2 求静电场边值问题解的直接积分法	(19)
1.2.3 镜像法和电轴法的实质和步骤	(23)
1.2.4 静电能量的计算	(33)
1.3 典型题解析	(36)
1.4 自我检测题	(60)

第 2 章 恒定电场

2.1 基本内容和公式	(65)
2.1.1 恒定电场基本方程·分界面上的衔接条件	(65)
2.1.2 恒定电场的边值问题·静电比拟	(67)
2.1.3 电导和接地电阻	(68)
2.2 重点与难点	(68)
2.2.1 恒定电场与静电场的异同点	(68)
2.2.2 静电比拟	(69)
2.2.3 电导和接地电阻的计算	(69)
2.3 典型题解析	(70)
2.4 自我检测题	(83)

第3章 恒定磁场

3.1 基本内容和公式	(85)
3.1.1 恒定磁场的基本方程·分界面上的衔接条件	(85)
3.1.2 恒定磁场中的磁矢位、磁位及其边值问题	(87)
3.1.3 电感·磁场能量	(88)
3.2 重点与难点	(89)
3.2.1 磁感应强度、磁场强度及其计算	(90)
3.2.2 磁矢位、磁位及其边值问题	(93)
3.2.3 镜像法	(94)
3.2.4 电感、磁场能量的计算	(95)
3.3 典型题解析	(98)
3.4 自我检测题	(123)

第4章 时变电磁场

4.1 基本内容和公式	(126)
4.1.1 电磁场基本方程组·分界面上的衔接条件	(126)
4.1.2 动态位·达朗贝尔方程	(127)
4.1.3 电磁功率流和坡印廷矢量	(128)
4.1.4 正弦电磁场	(128)
4.1.5 电磁辐射	(129)
4.2 重点与难点	(131)
4.2.1 电磁场基本方程组	(131)
4.2.2 不同媒质分界面上的衔接条件	(133)
4.2.3 坡印廷矢量	(134)
4.2.4 电磁辐射	(135)
4.3 典型题解析	(136)
4.4 自我检测题	(143)

第5章 准静态电磁场

5.1 基本内容和公式	(145)
5.1.1 准静态电磁场的分类和方程	(145)
5.1.2 导电媒质中自由电荷的弛豫过程	(146)
5.1.3 涡流及其方程	(147)

5.1.4	集肤效应·邻近效应·电磁屏蔽	(147)
5.1.5	导体的交流内阻抗	(148)
5.2	重点与难点	(149)
5.3	典型题解析	(149)
5.4	自我检测题	(171)

第6章 平面电磁波的传播

6.1	基本内容和公式	(172)
6.1.1	电磁波动方程	(172)
6.1.2	均匀平面电磁波	(172)
6.1.3	理想介质中的均匀平面电磁波	(173)
6.1.4	导电媒质中的均匀平面电磁波	(173)
6.1.5	平面电磁波的极化	(175)
6.1.6	平面电磁波的反射与折射	(175)
6.1.7	平面电磁波的正入射·驻波	(176)
6.2	重点与难点	(179)
6.2.1	均匀平面电磁波的特性和参数	(179)
6.2.2	均匀平面电磁波的正入射·驻波	(182)
6.2.3	均匀平面电磁波的斜入射	(186)
6.3	典型题解析	(188)
6.4	自我检测题	(197)

第7章 均匀传输线中的导行电磁波

7.1	基本内容和公式	(201)
7.1.1	无损耗均匀传输线方程	(201)
7.1.2	无损耗均匀传输线的正弦稳态解	(202)
7.1.3	无损耗均匀传输线中波的反射与透射	(204)
7.1.4	无损耗均匀传输线的工作状态	(205)
7.1.5	无损耗均匀传输线的入端阻抗	(207)
7.1.6	无损耗均匀传输线的阻抗匹配	(208)
7.1.7	有损耗均匀传输线	(208)
7.2	重点与难点	(210)
7.2.1	无损耗均匀传输线的正弦稳态解和传播特性	(210)
7.2.2	无损耗均匀传输线中波的全反射·驻波	(213)

7.2.3	无损耗均匀传输线的入端阻抗	(214)
7.3	典型题解析	(217)
7.4	自我检测题	(230)
第8章 波导与谐振腔		
8.1	基本内容和公式	(233)
8.1.1	导行电磁波的分类及其一般特性	(233)
8.1.2	矩形波导	(235)
8.1.3	谐振腔	(236)
8.2	重点与难点	(236)
8.2.1	导行电磁波的求解方法	(236)
8.2.2	截止频率和截止波长	(237)
8.3	典型题解析	(237)
8.4	自我检测题	(242)
附录1	西安交通大学电磁场(电气电子类)期末考试试题及参考答案	(244)
附录2	西安交通大学硕士研究生入学综合考试电磁场试题及参考答案	(249)

第 1 章 静电场

相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场,称为静电场。本章将就静电场中的基本概念、基本理论和基本计算方法作较详细的论述。近代电磁场问题能够精确求解的不多,故多借助于静电场方法来得到近似解,所以对静电场方法的掌握十分必要,它是进一步解决电磁场与电磁波问题的基础。

1.1 基本内容和公式

1.1.1 电场强度·电位

1. 库仑定律

库仑定律是静电场的基础。它给出真空中两个相距 R 的点电荷 q_1 (r' 处) 对点电荷 q_2 (r 处) 的作用力

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-1)$$

式中: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m。

在上式中涉及空间的两个点,一个是点电荷 q_1 所在的位置,其坐标为 (x', y', z') , 简称“源点”;另一个是点电荷 q_2 所在的位置,其坐标为 (x, y, z) , 简称“场点”。

2. 电场强度

在静电场中,某 P 点处的电场强度 E (简称场强), 定义为单位正试验电荷在该点所受的作用力。若正试验电荷 q_0 置于电场中某 P 点时受力 F , 则该点处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1-2)$$

位于坐标原点上的点电荷 q 在无限大真空中引起的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (1-3)$$

如果点电荷 q 所在处的坐标为 r' , 则它在点 r 引起的电场强度为

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-4)$$

3. 电位

在静电场中,某 P 点处的电位(用 φ 表示)定义为单位正试验电荷从 P 点移到参考点 Q 过程中静电力所作的功。若正试验电荷 q_0 从 P 点移到 Q 点过程中电场力作功 W ,则 P 点处的电位为

$$\varphi = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{W}{q_0} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-5)$$

当电荷分布不延伸到无限远时,一般把电位参考点 Q 选在无限远处,将会给电位的计算带来很大的方便。这时,任意 P 点的电位为

$$\varphi = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-6)$$

根据式(1-6)和式(1-4),很容易求得点电荷 q 在无限大真空中点 r 引起的电位为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1-7)$$

公式(1-5)是通过电场强度 E 的线积分求电位 φ ,称为 E 和 φ 之间的积分关系。另一方面, E 和 φ 之间也有如下的微分关系

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (1-8)$$

4. 点电荷系和连续分布电荷的场强和电位公式

实验表明,电场强度服从所谓叠加原理,每一电荷所产生的电场不因其它电荷的存在而改变,当空间有许多电荷同时存在时,空间各点的总电场强度等于各个电荷在该点所产生的电场强度的矢量和,即

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_k \quad (1-9)$$

叠加原理对电位也适用,它的数学表达式为

$$\varphi = \sum \varphi_k \quad (1-10)$$

按叠加原理,在 n 个点电荷 $q_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的电场中,某一点处的电场强度 $E(\mathbf{r})$ 和电位 $\varphi(\mathbf{r})$ 分别为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 R_k^2} \mathbf{e}_{R_k} \quad (1-11)$$

和

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 R_k} \quad (1-12)$$

其中, e_{R_k} 是从第 k 个点电荷 q_k 处到场点 r 的矢径 R_k 的单位矢量, R_k 是从第 k 个点电荷 q_k 处到场点 r 的距离。

连续分布电荷的电场强度 $E(r)$ 和电位 $\varphi(r)$ 分别为

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{dq}{R^2} e_{R_k} \quad (1-13)$$

和

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{dq}{R} \quad (1-14)$$

其中, e_R 是从电荷元 dq 到场点的矢径 $R (=r-r')$ 的单位矢量。电荷分布为体分布时, $dq = \rho dV'$, 积分域 Ω 为电荷所在的体积 V' ; 电荷分布为面分布时, $dq = \sigma dS'$, 积分域 Ω 为电荷所在的曲面 S' ; 电荷分布为线分布时, $dq = \tau dl'$, 积分域 Ω 为电荷所在的曲线 l' 。

1.1.2 静电场中的导体和电介质

就静电表现而言, 物质可分为导体和电介质两大类。

1. 静电场中的导体

在静电平衡条件下, 导体有以下几点特性:

(1) 导体内部各点的电场强度处处为零 ($E=0$); 导体表面电场强度垂直于导体表面。这是导体处于静电平衡状态的基本条件, 是考虑静电平衡导体问题的前提和出发点, 应该很好体会。

(2) 导体是等位体, 其表面是等位面。

(3) 导体内部没有电荷分布, 电荷只分布在导体表面 (包括空腔导体的内表面) 上。

2. 静电场中的电介质

电介质对电场的影响可以归结为极化后极化电荷所产生的影响。介质内部和外部的总电场强度应是外场与极化电荷激发的电场的叠加, 因而介质内的总电场强度一般不为零。介质极化的程度用电极化强度 P 表示

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p}{\Delta V} \quad (1-15)$$

介质内部极化电荷的体密度 ρ_p 和表面上极化电荷的面密度 σ_p 与电极化强度 P 间的关系分别为

$$\rho_p = -\nabla \cdot P \quad (1-16)$$

和

$$\sigma_p = P \cdot e_n \quad (1-17)$$

在分析有电介质存在的电场中,通常引入电通量密度 D 。电通量密度 D 、电极化强度 P 和电场强度 E 三者间的关系为

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (1-18)$$

对于各向同性的电介质, P 与 E 有关系式

$$P = \chi \epsilon_0 E \quad (1-19)$$

χ 为电介质的极化率。代入式(1-18),得

$$D = \epsilon E \quad (1-20)$$

ϵ 为电介质的介电常数,且

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1-21)$$

ϵ_r 为电介质的相对介电常数。

1.1.3 静电场基本方程·分界面上的衔接条件

静电场基本方程的积分形式和微分形式分别是

$$\left. \begin{aligned} \oint_l E \cdot dl &= 0 \\ \oiint_S D \cdot dS &= q \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot D &= \rho \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

另外,在不同媒质的分界面上,场量的衔接条件为

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{2t} = E_{1t} \quad (1-24)$$

或者

$$\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (1-25)$$

当两种各向同性的线性电介质分界面上无自由电荷(即 $\sigma=0$)时,若以 α_1 和 α_2 表示 E_1 、 E_2 与 e_n 的夹角,则有静电场中的折射定律

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (1-26)$$

对于导体与电介质的分界面,导体表面上的边界条件为

$$\sigma = D_{2n}, \quad E_{2t} = 0 \quad (1-27)$$

或者

$$\sigma = -\epsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \varphi_2 = \text{常数} \quad (1-28)$$

其中,第一种媒质为导体。 n 为法线方向,且由导体指向电介质。

1.1.4 静电场的边值问题·惟一性定理

1. 静电场的边值问题

在各向同性、线性、均匀电介质中, 电位满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-29)$$

或者拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1-30)$$

静电场问题通常都可以归结为在给定边值条件下(场域边界面 S 的边界条件; 不同媒质分界面上的衔接条件; 自然边界条件), 求解泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题。

在场域的边界面 S 上给定边界条件的方式又可以有以下 3 类。

(1) 已知场域边界面 S 上各点电位的值。即给定

$$\varphi \Big|_S = f_1(S) \quad (1-31)$$

称为第 1 类边界条件。这类问题称为第 1 类边值问题。

(2) 已知场域边界面 S 上各点电位法向导数的值。即给定

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = f_2(S) \quad (1-32)$$

称为第 2 类边界条件。这类问题称为第 2 类边值问题。

(3) 已知场域边界面 S 上各点电位和电位法向导数的线性组合值。即给定

$$\left(\varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) \Big|_S = f_3(S) \quad (1-33)$$

称为第 3 类边界条件。这类问题称为第 3 类边值问题或者混合边值问题。

如果场域伸展到无限远处, 则必须提出所谓无限远处的边界条件。对于电荷分布在有限区域的情况, 则在无限远处电位为有限值, 即

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi = \text{有限值} \quad (1-34)$$

称为自然边界条件。

另外, 当边值问题所定义整个场域中存在不止一种电介质, 但能分成几个均匀的电介质子区域时, 应按各电介质的子区域分别写出泊松方程或拉普拉斯方程。同时, 作为定解条件, 还必须相应地引入不同媒质分界面上的衔接条件。

上述 3 类边值问题的写法陈述如下:

(1) 第 1 类边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{泊松方程或拉普拉斯方程} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_1} (\text{或 } 0), \text{第 1 种电介质中;} \\ \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_2} (\text{或 } 0), \text{第 2 种电介质中;} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\ \text{边值条件} \left\{ \begin{array}{l} \text{各导体上的电位值 } \varphi|_S = f_1(S); \\ \text{不同媒质分界面上的衔接条件;} \\ \text{自然边界条件。} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(2) 第 2 类边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{泊松方程或拉普拉斯方程} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_1} (\text{或 } 0), \text{第 1 种电介质中;} \\ \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_2} (\text{或 } 0), \text{第 2 种电介质中;} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\ \text{边值条件} \left\{ \begin{array}{l} \text{各导体上的电荷量或 } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = f_2(S); \\ \text{不同媒质分界面上的衔接条件;} \\ \text{自然边界条件。} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(3) 第 3 类边值问题,写法类似,不重复了。

2. 惟一性定理

在静电场中,凡满足电位的泊松方程(或拉普拉斯方程)和给定边值条件的解 φ ,必定是给定静电场的惟一解,称为静电场的惟一性定理。

惟一性定理之所以重要,在于它指出了静电场具有惟一解的充要条件,且可用来判定得到的解的正确性。根据此,我们可以尝试任何一种能找到的最方便的方法求解某一问题(那怕是凑),只要这个解满足泊松方程(或拉普拉斯方程)和给定的边值条件,那么这个解就是正确的。任何另一种方法求得的同一问题的解必然是与它完全相同的。

1.1.5 静电场边值问题的几种解法

1. 直接积分法

直接积分法是一种采用常微分方程的求解方法。它适用于一维电场问题。

电位 φ 满足的泊松方程(或拉普拉斯方程)是一个二阶偏微分方程,一般情况

下很难求解。但是,如果空间自由电荷是球面对称、柱面对称或平面对称分布,边界条件和电介质分界面也有类似的对称性,那么电位 φ 只是一个坐标变量的函数,于是泊松方程(或拉普拉斯方程)可化为二阶常微分方程,就可采用积分法直接求解。当然,这类问题原则上也可用高斯定律先求出电场强度 E ,然后应用式(1-5)求得电位 φ 。

2. 镜像法

镜像法是求静电场边值问题解的一种间接方法,其理论依据是惟一性定理。它只适用于场域边界形状比较典型的几种特定情况。

这个方法的出发点,就是用放置在原问题边界外的假想的简单电荷分布(称为镜像电荷)来模拟边界条件(即等效地代替导体表面或介质分界面上真正的电荷分布),把实际上有边界的问题代之以没有边界的问题。

点电荷对导体平面的镜像:一个点电荷 q ,若距离无限大的接地导体平面为 d ,则其镜像电荷为在平面另一侧,距离平面为 d 处的点电荷 $(-q)$ 。

点电荷对无限大电介质分界平面的镜像:对于图 1-1 所示的电介质分界面平面,镜像电荷为

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (1-35)$$



图 1-1 无限大电介质平面的镜像

点电荷对导体球的镜像:一个点电荷 q ,若离半径为 R 的接地导体球的球心为 $d(d > R)$,则其镜像电荷 $(-q')$ 位于球心及 q 所在点的联线上。如图 1-2 所示,距球心为 b ,并且

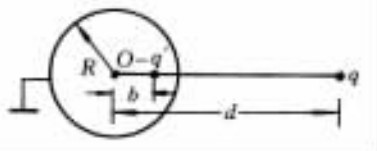


图 1-2 点电荷与导体球面的镜像

$$q' = \frac{R}{d} q, \quad b = \frac{R^2}{d} \quad (1-36)$$

若导体球不接地,则应在球心放置一点电荷 q' ,相当于 3 个点电荷系的计算。又若不接地导体球带电荷 Q ,则 Q 应置于球心,才能保持导体球表面为等位面。

这时球心的电荷为 $(Q+q')$ 。

3. 电轴法

电轴法只能解决带等量异号电荷的两平行圆柱导体间的静电场问题。如图 1-3 所示,其电轴的位置和电位的表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}, h_2 = \frac{d^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d} \\ b &= \sqrt{h_1^2 - a_1^2} = \sqrt{h_2^2 - a_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

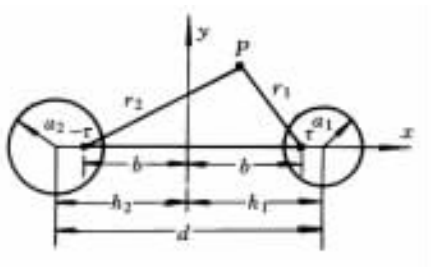


图 1-3 平行圆柱导体传输线

和

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1-38)$$

若两平行圆柱导体的半径相等 $(a_1 = a_2 = a)$,此时 $h_1 = h_2 = h$,且有

$$h^2 - a^2 = b^2 \quad (1-39)$$

1.1.6 部分电容

在各向同性的线性电介质中,如果两个导体电极形成电容器,则其电容

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1-40)$$

式中: U 为两导体电极间的电压, Q 为一个电极上的电荷量。

电容器的电容值由它的电极的几何形状、尺寸,中间填充的电介质及电极间相对位置决定,与其带电量无关。

在各向同性的线性电介质中,对于由多个导体组成的静电独立系统,必须应用“部分电容”来代替电容器的“电容”概念。若在有限区域中有 $n+1$ 个导体,设用 $q_i, \varphi_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 表示第 i 个导体上的电荷量和电位,且把 0 号导体选作电位参考点($\varphi_0 = 0$),这时,有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \cdots + \alpha_{1n} q_n \\ &\cdots \\ \varphi_k &= \alpha_{k1} q_1 + \alpha_{k2} q_2 + \cdots + \alpha_{kn} q_n \\ &\cdots \\ \varphi_n &= \alpha_{n1} q_1 + \alpha_{n2} q_2 + \cdots + \alpha_{nn} q_n \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} \varphi_2 + \cdots + \beta_{1n} \varphi_n \\ &\cdots \\ q_k &= \beta_{k1} \varphi_1 + \beta_{k2} \varphi_2 + \cdots + \beta_{kn} \varphi_n \\ &\cdots \\ q_n &= \beta_{n1} \varphi_1 + \beta_{n2} \varphi_2 + \cdots + \beta_{nn} \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (1-42)$$

式中, α_{ij} 是电位系数, β_{ij} 是感应系数。

式(1-42)也可写成

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{10} U_{10} + C_{12} U_{12} + \cdots + C_{1k} U_{1k} + \cdots + C_{1n} U_{1n} \\ &\cdots \\ q_k &= C_{k1} U_{k1} + C_{k2} U_{k2} + \cdots + C_{k0} U_{k0} + \cdots + C_{kn} U_{kn} \\ &\cdots \\ q_n &= C_{n1} U_{n1} + C_{n2} U_{n2} + \cdots + C_{nk} U_{nk} + \cdots + C_{n0} U_{n0} \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

式中, C_{ij} 称为部分电容, $C_{10}, C_{20}, \cdots, C_{k0}, \cdots, C_{n0}$ 称为自有部分电容; $C_{12}, C_{23}, \cdots, C_{kn}, \cdots$ 等称为互有部分电容。这些部分电容只与各导体的几何形状、大小、相互位置及电介质分布有关, 而与导体的带电量无关。

利用部分电容 C 组成的电容网络, 可以求得多导体系统的等效电容或工作电容。

1.1.7 静电能量

静电场的能量(称为静电能量)定域在静电场中。它是在建立电场过程中, 由外源作功转化而来的。

点电荷系的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k \quad (1-44)$$

式中: q_k 是第 k 个点电荷的电量, 而 φ_k 是除 q_k 以外其余 $(n-1)$ 个点电荷在 q_k 所在处产生的电位。

连续分布电荷系的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho \varphi dV' + \frac{1}{2} \iint_{S'} \sigma \varphi dS' \quad (1-45)$$

式中: V' 是体积电荷 ρ 分布的区域; S' 是面积电荷 σ 分布的表面。

变换式(1-45), 静电能量又可写成

$$W_e = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (1-46)$$

这里, V 是电场存在的整个空间区域。上式表明, 静电能量储存在整个场域内, 其静电能量的体密度(简称静电能量密度)为

$$w'_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (1-47)$$

对于 n 个带电导体系统, 其总静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k \quad (1-48)$$

式中: q_k 是第 k 个导体上的电荷量; φ_k 是第 k 个导体的电位, 它等于本身电荷 q_k 和其他电荷共同产生的电位。

1.2 重点与难点

1.2.1 电场强度和电位及其计算

透彻地理解描述静电场的两个基本物理量: 电场强度 E 和电位 φ 及它们之间的关系, 是本章的重点之一。掌握好求解 E 和 φ 的几种方法是学习中的难点。

1. 电场强度

对于电场强度 E , 要注意以下几点:

(1) 电场强度 E 是一个随着空间点位置不同而变化的矢量函数 $E(x, y, z)$ 。它是由电场本身的性质所决定, 与试验电荷 q_0 无关。改变 q_0 的大小, F 也随之改变, 但比值 F/q_0 不变。

(2) 电场的可观测性是通过它与其他电荷的相互作用力来表现的。电场强度 E 反映了这种作用力的强度, 即 $F = qE$ 。

(3) 一定的电荷分布, 联系着一定的静电场。

静电场基本方程中的第 1 方程 $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 或 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 说明了静电场的一个基本性质——无旋性。所以, 通常又说静电场是无旋场(保守场、位场)。不管电介质如何, 只要是静电场都具有这个性质。第 1 方程反映了静电场对电荷的电场力作功性质: 电荷在静电场中移动时, 电场力要作功, 此功与电荷移动的路径无关, 仅与电荷的初、终点位置有关。

第 2 个方程 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ 或 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (也称高斯定律), 说明静电场是有源场。

从闭合面内穿出的 D 通量可以想象为是从此面内流出的某种流量。当 D 通量大于零时,即有流量流出,说明闭合面内必有流量的源,即 D 线由正的自由电荷发出,终止于负的自由电荷。

应该注意:①高斯定律只告诉我们,穿出闭合面的 D 通量仅由面内的自由电荷决定,与闭合面外部的电荷无关,与闭合面内部的电荷怎么分布也无关;②闭合面 S 上的电场强度 E 是 S 面内、外空间中所有电荷的贡献,不能理解为仅是闭合面 S 所包围电荷产生的电场强度;③ q 是闭合面 S 内电荷的代数和。当 $q > 0$ 时,并不意味着 S 内一定没有负电荷。反之,当 $q < 0$ 时,并不意味着 S 内一定没有正电荷。当 $q = 0$ 时,并不说明 S 内一定没有电荷分布(可能有等量的正、负电荷分布,也可能处处为零)。

高斯定律对静电场是普遍适用的,但只是对电场分布具有某种空间对称性的电场,才能应用此定律来计算电场分布。它也是计算这类具有对称性电场的重要方法,应该牢固掌握。

2. 电位

电位 φ 是从电场力对电荷做功的特征来描述电场的。因为静电场是无旋场 ($\nabla \times E = 0$),电场力做功与路径无关,所以可以引入电位 φ ,有

$$\varphi = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-49)$$

或者

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (1-50)$$

对于电位 φ ,要注意以下几点:

(1) 电场中给定 P 点的电位 φ ,表示单位正电荷由给定 P 点移至参考点 Q 处时电场力所作的功。

(2) 明确电位参考点的作用,电位仅有相对意义。在同一个静电场中,各点电位的大小和正负,与参考点 Q 的选取有关。而两点间的电位差是绝对的,即与参考点 Q 的选取无关。把两点 A 与 B 间的电位差定义为此两点间的电压(用 U 表示),即

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-51)$$

(3) 参考点 Q 的选取是任意的,但一般应遵守这样两个原则:①电位表达式有意义;②电位表达式应尽可能简单。另外,同一静电场中只能选取一个参考点。

所谓“有意义”,就是它能给出场中各点电位的确定值。这可由点电荷的电位表达式

$$\varphi(P) = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right)$$

中体会到。如果取 $r_Q = 0$, 则 $\frac{1}{r_Q} = \infty$, 于是场中各点的电位均为无限大, 无确定的电位值, 上面的电位表达式 $\varphi(P)$ 就失去意义。就是说, 在点电荷的电场中, 不能选取点电荷所在处为参考点。同样, 对于电荷分布延伸到无限远时 (例如, 无限长带电线、无限长带电圆柱面等), 也不能把参考点 Q 选在无限远处。

怎样使表达式简单呢? 仍以点电荷的电位表达式 $\varphi(P)$ 为例来说明, 当 $\frac{1}{r_Q} = 0$ 时, $\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, 其电位表达式最简单, 所以在点电荷的电场中, 选取无限远处为电位参考点 Q 最合适。通常, 当电荷分布不延伸至无限远处时, 一般在理论分析中若把电位参考点 Q 选在无限远处, 将会对电位计算带来很大的方便。这时, 任意 P 点的电位为

$$\varphi = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-52)$$

3. 电场强度的计算方法

这里的主要问题是已知电荷分布, 求解电场中的 E 分布。若这种分布已确定, 则电荷在静电场中的受力、电场力对电荷作的功以及带电体系静电能量的问题就容易解决了。

归纳起来, 计算电场强度 E 分布的方法有 3 种:

(1) 应用场强叠加原理求解电场强度 E 。对点电荷系、连续分布电荷系, 其计算公式分别见式(1-11)和式(1-13)。在学习, 中, 一定要掌握点电荷系和一些比较简单的连续电荷分布系的电场强度的计算方法。

(2) 当电场分布具有某种空间对称性时, 可以利用高斯定律求出电场强度。在学习, 中, 一定要会计算点、线、球形电极的电场。

(3) 用梯度法求电场强度 E 。若电位分布已知, 则可用 $E = -\nabla\varphi$ 求出电场强度分布。但是要注意, 必须求出电位 φ 作为空间分布函数的普遍表达式, 才能用梯度公式计算电场强度 E 的分布。

例 1-1 试求半径为 a , 电荷面密度为 σ 的均匀带电球面的电场。

解 (1) 应用场强叠加原理

(a) 球外电场

如图 1-4 所示, 以 P 点与球心连线为球坐标的极轴 ($\theta = 0$), 则 P 点的坐标为 $(r, 0, 0)$ 。在球面上, P' 点的坐标为 (a, θ', ϕ') , 取面元 $ad\theta' a \sin\theta' d\phi'$, 可把其上的面电荷 $\sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$ 看成一个点电荷, 与 P 点的距离为 R , 这个面电荷在 P 点的电

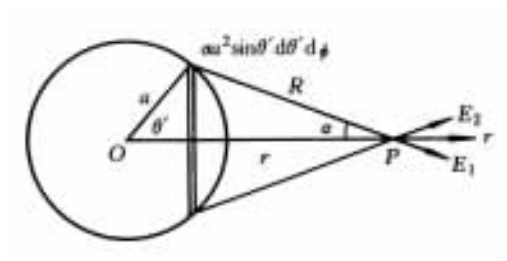


图 1-4 均匀球面电荷外的电场

场 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{R^2}$ 方向为 dE_1 , 而在对称点 $(a, \theta', \phi' + 180^\circ)$ 处的元电荷 $\sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$ 产生一个大小相等的电场, 方向为 dE_2 , 两者合成则得方向为径向 dE_r 的合成电场。故总电场的方向为径向, 它是所有元电荷产生电场的矢量和, 即

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma a^2 \sin\theta' \cos\alpha}{R^2} d\theta' d\phi'$$

因为 $\cos\alpha = (r^2 + R^2 - a^2)/(2rR)$, $\cos\theta' = (r^2 + a^2 - R^2)/(2ra)$, 故 $\sin\theta' d\theta' = -d\cos\theta' = \frac{RdR}{ra}$ 。将上述 E_r 积分的积分变量换为 dR , 当 $\theta' = 0$ 时, $R = r - a$; $\theta' = \pi$ 时, $R = r + a$

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{\sigma a^2 R(r^2 + R^2 - a^2)}{ra \cdot 2rR \cdot R^2} dR d\phi' \\ &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_{r-a}^{r+a} \frac{r^2 + R^2 - a^2}{2r^2 R^2} dR \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2r^2} \right) \left[R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right] \Big|_{r-a}^{r+a} \\ &= \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

即球外电场强度为

$$E(r) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} e_r \quad (1-53)$$

设球面上有电荷总量 q , 则式(1-53)可化为

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (1-54)$$

这说明: 均匀球面电荷在球外建立的电场反比于场点与球心距离的平方, 相当于把球面上的电荷集中到球心所形成的点电荷的电场。

(b) 球内电场

对于球内电场, 上面的积分下限变成 $a - r$, 则

$$E_r(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2r^2} \right) \left[R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right] \bigg|_{a-r}^{a+r} = 0$$

即,球内电场强度为

$$E(r) = 0 \quad (1-55)$$

这说明均匀球面电荷在球内建立的电场恒为 0。

(2) 应用高斯定律

分析:根据电荷分布的球对称性,可知在距球心为 r 的球面上,电场强度的大小相等。至于电场强度的方向,在带电球面上可找到两两对称的小面元,它们的场强合成后是沿半径方向(垂直于半径方向的分量互相抵消),所以均匀带电球面的电场方向也必沿半径方向。

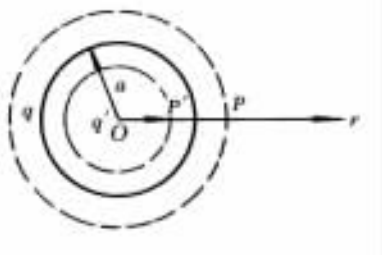


图 1-5 应用高斯定律求均匀球面电荷的电场

经过对称性分析以后,我们就可以选择场强的大小 E 和场强与面元外法线夹角 α 都为恒量的球面作为闭合面 S (这个闭合面常称为高斯面),则可先从高斯定律求出场强的值,再结合最初判别的场强方向,就可得到电场强度 E 的空间分布规律。

球外: $r > a$, 如图 1-5 所示。过 P 点作半径为 r 的球面,并作为高斯面,对这个闭合面,利用高斯定律可写出

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi a^2 \sigma = q$$

$$\text{而} \quad \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 E_r \oiint_S dS = \epsilon_0 E_r 4\pi r^2$$

$$\text{所以} \quad \epsilon_0 4\pi r^2 E_r = 4\pi a^2 \sigma = q$$

$$E_r = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

与最初判别的场强方向相结合,再把 r 视为变量,即得均匀带电球面外的电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

这与式(1-53)、式(1-54)相一致。

球内: $r < a$, 仍用图 1-5, 过 P' 点作半径为 r 的球面为高斯面。对这个高斯面应用高斯定律,可写出

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{即} \quad \epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = 0$$

所以,均匀带电球面内部的电场强度处处为 0

$$E = 0$$

此式与式(1-55)一致。

讨论:

(1) 比较场强叠加原理和高斯定律两种求解方法,可见本例用高斯定律求解比较简单。因此,能用高斯定律时,尽量不用其他方法。

(2) 用高斯定律求场强分布,关键是对称性分析。它只是在电场的对称性已作出分析的基础上可以求出场强 E 的大小,而 E 的方向是在分析场分布的空间对称性时就已经得出的。一般由于电荷分布的对称性导致场强分布的对称性,所以先从电荷分布的对称性开始,最后落实到分析场强分布的对称。而要注意的是场强分布的对称性应包括大小和方向两个方面。

能够利用高斯定律,直接计算的对称性电场有:一根或多根均匀带电长直线形电荷的电场、圆柱形带电导体周围的电场、同轴圆柱面间的电场、无限大带电平面的电场、均匀带电球面和球体的电场等。

无限长均匀带电直线的电场为

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} e_\rho$$

无限长均匀带电圆柱面的电场为

$$E = 0 \quad (\rho < a), \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} e_\rho \quad (\rho > a)$$

无限大均匀带电平面的电场为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

利用上述场强公式,还能方便地得到较复杂带电体的电场分布。

例 1-2 试求半径为 a , 电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体的电场。

解 (1) 应用场强叠加原理

分析:将带电球体分割成无限多个同心薄球壳,每一个均匀带电薄球壳的电荷分布可视为一均匀带电球面。所有薄球壳在同一场点上的元场强(可利用例 1-1 中得到的结果式(1-53)、式(1-54)或式(1-55)求得)的叠加,就是需求的总场强。

(a) 球外场强

如图 1-6(a)所示,薄球壳的厚度为 dr' , 电荷元 $dq = \rho 4\pi r'^2 dr'$ 。它在场点 P 处产生的元场强按均匀带电球面外的场强公式(1-54),有

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r = \frac{\rho 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r = \frac{\rho r'^2 dr'}{\epsilon_0 r^2} e_r$$

对于不同的薄球壳, r' 取不同的值。所以 r' 是积分计算中的变量, 而场点位置 r 是常量。由于球外场强是所有带电球壳的共同贡献, 所以积分要遍及整个球体, 即

$$E = e_r \int_0^a \frac{\rho r'^2}{\epsilon_0 r^2} dr' = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} e_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (r > a)$$

其中, $q (= \frac{4}{3}\pi a^3 \rho)$ 是带电球体的总电量。所以均匀带电球体在球外的电场和等量电荷集中在球心时的电场相同。实际上所分割的每个薄球壳在球体外产生的电场犹如电荷 dq 集中在球心一样, 所以各薄球壳电荷的场强也与把电荷视为集中在球心上一致。因此, 不用积分就可以得出均匀带电球体外的电场。

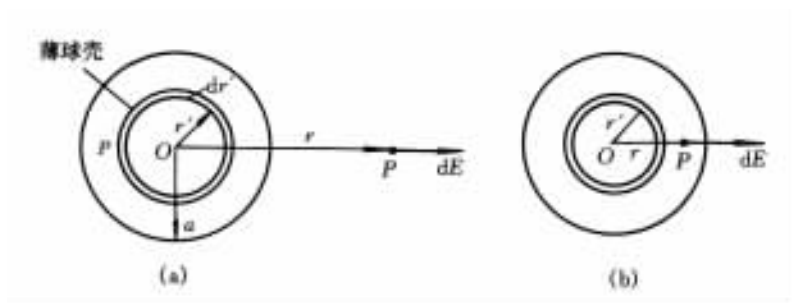


图 1-6 均匀带电球体电荷的电场

(b) 球内电场

如图 1-6(b) 所示, 球内场点 P 离球心距离为 r 。半径 r' ($r' < r$)、厚度 dr' 的带电薄壳的电荷元 $dq = \rho 4\pi r'^2 dr'$, 它在场点 P 处的场强可按均匀带电球面的球外场强公式 (1-54) 计算。半径 r' ($r' > r$) 的带电薄壳在场点 P 处 (P 在薄壳内) 的场强可按均匀带电球面内场强公式 (1-55) 计算, 显然为零。所以半径比 r 大的带电薄壳, 在进行积分计算时不必涉及。于是, 球内场强

$$E = e_r \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} e_r \quad (r < a)$$

实际上, 这就是半径为 r 的球区内的电荷在离球心为 r 处产生的场强。

可以总结出, 应用场强叠加原理求解的基本步骤是: 将连续分布的电荷分割成无穷多个电荷元, 根据此电荷元的场强公式, 在适当的坐标系中写出该电荷元 dq 的电场强度 dE ; 将各个电荷元产生的场强叠加 (积分) 即得到所求的场强分布。使用这种方法应注意: (a) 要重视对称性分析以简化计算; (b) 要正确确定积分的上、下限。

(2) 应用高斯定律

分析:由均匀带电球体电荷分布的球对称性可知,球内外的电场分布也具有球对称性。

在带电球体外作一半径为 $r(r>a)$ 的同心球面 S ,并作为高斯面,在此球面上各点的场强大小相等,方向沿半径。对 S 应用高斯定律,可写出

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$$

而

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 E 4\pi r^2$$

$$\iiint_V \rho dV = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho = q$$

所以

$$\epsilon_0 4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho = q$$

即

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > a)$$

再在带电球体内部作一半径为 $r(r<a)$ 的同心球面 S' 作为高斯面,在此球面 S' 上各点的场强大小相等,且方向沿径向方向为由球心指向该点。对 S' 应用高斯定律,可写出

$$\oiint_{S'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q'$$

$q' (= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho)$ 为高斯面内所包围的电荷。因此,有

$$\epsilon_0 E 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

即

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_r \quad (r < a)$$

4. 电位的计算方法

归纳起来,计算电位 φ 分布的方法有两种:

(1) 应用叠加原理求电位。对点电荷系和连续电荷分布系,其计算公式分别见式(1-12)和式(1-14)。

在学习中,一定要掌握点电荷系和一些较简单的连续电荷分布系的电位计算

方法。

(2) 场强的分布已知或很容易确定时,可根据电位定义,应用场强的线积分计算。但要注意:为使计算简便,应选取适当的积分路径;如果积分路径通过 E 的表达式不同的几个区域,则必须分段积分,在不同的区域中用对应的 E 。

例 1-3 试求半径为 a , 电荷面密度为 σ 的均匀带电球面的电位分布。

解 (1) 应用电位叠加原理

如图 1-7 所示,选择场点 P , z 轴与 OP 重合,球心为坐标原点。用垂直 z 轴的平面把球面分割成无限多个环形带。把每个环形带再看作一个均匀带电的细圆环,其上各电荷元在 P 点所产生的元电位是相等的。各电荷元所产生的元电位的叠加就是环带的电位。因此,环带上的细圆环电荷元 $dq = \sigma 2\pi\rho a d\theta$ 在 P 点产生的元电位

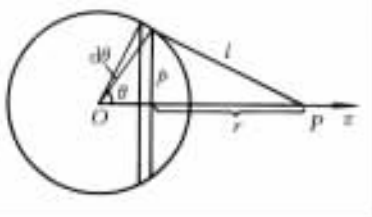


图 1-7 均匀球面电荷的电位

$$dq = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \frac{\rho d\theta}{l}$$

P 点处的总电位是球面上所有环带在该处产生的全部元电位的叠加(积分),即

$$\varphi = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\rho d\theta}{l}$$

因为 $\cos\theta = (z^2 + a^2 - l^2)/(2za)$, $\rho = a\sin\theta$, 故 $d\theta = \frac{ldl}{za\sin\theta}$, $\rho d\theta = \frac{ldl}{z}$ 。将上述 φ 的积分的积分变量换为 dl , 有

$$\varphi = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_{z-a}^{z+a} \frac{1}{l} \frac{ldl}{z} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 z} \int_{z-a}^{z+a} dl = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z} \quad (z \geq a)$$

$$\varphi = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 z} \int_{a-z}^{z+a} dl = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (z \leq a)$$

其中 $q(=4\pi a^2\sigma)$, 是带电球面的总电量。

(2) 应用电位定义式

在例 1-1 中,已得到均匀带电球面的场强分布,则按定义,球面内外的电位分别是

$$\varphi = \int_z^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} dz = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z} \quad (z \geq a)$$

和

$$\varphi = \int_z^a E dz + \int_a^\infty E dz = \int_z^a 0 dz + \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} dz = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (z \leq a)$$

讨论:这一结果说明,均匀带电球面外的电位分布与点电荷的电位分布相同,

相当于把球面上的电荷集中在球心一样;均匀带电球面内的电位为常数,即球面内为一等位区,球内各点的电位与球面上的电位相同。因此,这是均匀带电球面内场强处处为零的必然结果。

1.2.2 求静电场边值问题解的直接积分法

静电场问题大致可分为两种类型:一种是已知电荷的分布求电位,称为分布型问题;另一种是给定边值条件求电位,称为边值型问题。前面介绍的电场强度 E 和电位 φ 的分布问题,都属于第一种类型的计算。这里,讨论求边值问题解的直接积分法。

理解惟一性定理及边界条件的应用是这里的重点。边界条件与泊松方程(或拉普拉斯方程)共同构成静电场的边值问题,对每一具体问题是否能正确地提出并应用边界条件是求解静电场问题的关键和难点。

在求解边值型问题时,首先要根据给定的有关信息(包括:场源电荷分布;电介质分布;场域边界面上的有关条件),正确列写出静电场边值问题。其次,按场域的形状特征选择适当的坐标系,以使边值问题的表达式尽可能简单。

对于某些边值型问题,如果坐标系选得恰当,就可能使电位 φ 仅是一个坐标变量的函数,于是泊松方程可化为二阶常微分方程,其解很容易求得。求解的关键是根据电荷分布和电介质分界面的形状,并按坐标面应和分界面吻合的要求,选取适当的坐标系,然后再判断泊松方程能否简化为常微分方程。也就是说,首先要弄清楚是不是一维问题。

例 1-4 有一厚度为 a 的无限大平面层,其中充满着均匀电荷,其体密度为 ρ ,如图 1-8 所示。试求平面层之内以及平面层以外的各区域的电位和电场强度。

解 选取直角坐标,其坐标原点在带电层厚度的中间。由于电荷分布是呈平面对称分布,故等位面是一系列与带电平板界面平行的平面,则电位 φ 只是 x 的函数,而与 y 和 z 无关。因而该问题是坐标 x 的一维函数。

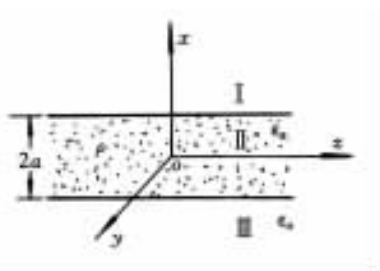


图 1-8 均匀平面层电荷分布的电场

无限大平板把空间分为 I、II、III 3 个区域,如图 1-8 所示。对区域 I 和 III 应用拉普拉斯方程,对区域 II 应用泊松方程,即

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

式中: φ_1 、 φ_2 、 φ_3 分别为区域 I、II、III 中的电位函数。因为 $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, 于是上述的方程就可写成

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} = 0 \quad (x > a)$$

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (-a < x < a)$$

$$\frac{d^2 \varphi_3}{dx^2} = 0 \quad (x < -a)$$

其解分别为

$$\varphi_1 = Ax + B$$

$$\varphi_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 + Cx + D$$

$$\varphi_3 = Ex + F$$

式中有 6 个待定常数, 要由边界条件和电位的性质来确定。

先选定电位的参考点, 令 $x=0$ 处, $\varphi_2|_{x=0}$ (由于电荷分布延伸至无限, 故不能取无限远处为参考点), 可得

$$D = 0$$

又由于对称的关系, 所以 $\varphi(x) = \varphi(-x)$ 。因此, 应有

$$-\frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 + Cx = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 - Cx$$

和

$$Ax + B = -Ex + F$$

为了保证对于所有 x 值, 上面两式左边和右边恒等, 必须使

$$C = 0, \quad A = -E \quad \text{和} \quad B = F$$

在区域的分界面上, $x=a$ 处, 有

$$\varphi_1|_{x=a} = \varphi_2|_{x=a}, \quad \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \bigg|_{x=a} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \bigg|_{x=a}$$

得

$$-\frac{\rho}{2\epsilon_0}a^2 = Aa + B \quad \text{和} \quad A = -\frac{\rho}{\epsilon_0}a$$

从而解出

$$B = \frac{\rho}{2\epsilon_0}a^2$$

把定出的常数代入电位表达式中, 就可得到

$$\varphi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}ax + \frac{\rho}{2\epsilon_0}a^2$$

$$\varphi_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2$$

$$\varphi_3 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}ax + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2$$

根据 $E = -\nabla\varphi$, 得

$$E_1 = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}e_x, \quad E_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}xe_x, \quad E_3 = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}e_x$$

该问题能否应用高斯定律求解, 留给读者完成。

例 1-5 有一半径为 a , 介电常数为 ε 的均匀带电无限长圆柱体, 其单位长度上的电量为 τ , 求它所产生的电位和电场强度。

解 由于电荷均匀分布在无限长圆柱内, 显然电场是柱面对称场(当电荷对称分布的柱面和导体分界面、电介质分界面都是共轴柱面时, 空间电场的等位面是一族和上述柱面同轴的柱面, 我们把这种场称为柱面对称场)。若选取圆柱的轴线为 z 轴的柱坐标系, 则电位 φ 只是 r 的函数, 属一维问题。那么, 在柱体内、外两个区域内, 电位 φ 应满足

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\rho < a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0 \quad (\rho > a)$$

它们的解是

$$\varphi_1 = -\frac{\rho}{4\varepsilon}r^2 + A\ln r + B$$

$$\varphi_2 = C\ln r + D$$

由于在 $r \rightarrow 0$ 时, φ_1 应保持有限, 故必有 $A = 0$ 。选电位参考点, 令 $r = 0$ 处, $\varphi_1 = 0$, 从而 $B = 0$ 。在分界面上, 即 $r = a$ 处, 有

$$\varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

即

$$-\frac{\rho}{4\varepsilon}a^2 = C\ln a + D, \quad -\frac{\rho}{2}a = \varepsilon_0 \frac{C}{a}$$

由此可得

$$C = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}, \quad D = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln a$$

把定出的常数代入电位表达式中, 就可得到

$$\varphi_1 = -\frac{\tau r^2}{4\pi\varepsilon a^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r} - \frac{\tau}{4\pi\epsilon}$$

根据 $E = -\nabla\varphi$, 得

$$E_1 = \frac{\tau r}{2\pi\epsilon a^2} e_r$$

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} e_r$$

例 1-6 求半径为 a , 电量为 Q 的均匀带电球体所产生的电位和电场强度。
球内是介电常数为 ϵ 的电介质, 球外是真空。

解 由于电荷是球面对称的, 当选取球心为原点的球坐标系时, 它所产生的电位就只是 r 的函数, 故电位所满足的方程式可以写成

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi_1}{dr}) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (r < a)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi_2}{dr}) = 0 \quad (r > a)$$

式中 $\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$, 它们的解是

$$\varphi_1 = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon a^3} + \frac{A}{r} + B \quad (r < a)$$

$$\varphi_2 = \frac{C}{r} + D \quad (r > a)$$

令 $r \rightarrow \infty$ 时, $\varphi_2 \rightarrow 0$, 则 $D = 0$ 。

当 $r \rightarrow 0$ 时, φ_1 应有限, 故必有 $A = 0$ 。

在 $r = a$ 处, 有

$$\varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

可得

$$-\frac{Q}{8\pi\epsilon a} + B = \frac{C}{a}, \quad C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

于是

$$B = \frac{Q}{8\pi\epsilon a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

把定出的常数代入电位表达式中, 就可得到

$$\varphi_1 = \frac{Q}{8\pi\epsilon a^3} (a^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (r < a)$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > a)$$

根据 $E = -\nabla\varphi$, 得

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon a^3} e_r \quad (r < a)$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (r > a)$$

从上面 3 个例题中可以看出,判断一个问题能否用一维泊松方程(或拉普拉斯方程)求解,是直接积分法的关键,而利用边界条件和电位的性质来确定解中的待定常数,又是这种方法中十分重要的一环。因此,应当结合上面的例题认真加以琢磨和领会。

与高斯定律一样,直接积分法处理的也是有一定对称性的问题,共同之处都在于先要作对称性的分析。这两种方法的适用范围大致相同,凡是用直接积分法可以处理的问题,原则上也可以用高斯定律求解。

1.2.3 镜像法和电轴法的实质和步骤

镜像法和电轴法的理论依据都是静电场的惟一性定理。因此,熟练地确定点电荷与接地导体(或电介质)平面问题的镜像电荷的大小和位置、点电荷与接地导体球问题的镜像电荷的大小和位置、两平行圆柱导体问题的电轴的位置和电量的大小都是本章的重点。掌握镜像电荷的求法及镜像法的有效区域是这一节的难点。

下面通过例题来说明镜像法和电轴法的实质、解题步骤以及使用时应当注意的地方。

1. 镜像法

镜像法处理问题的特点在于不直接去求解电位所满足的泊松方程,而是在不改变求解区域电荷分布及边界条件的前提条件下,用假想的简单电荷分布(称为镜像电荷)来等效地取代导体面(或电介质分界面)上复杂的感应(极化)电荷对电位的贡献,从而使问题的求解过程大为简化。

在使用镜像法解静电场问题时,应注意适用的区域,不要弄错。在所求电场的区域内,既不能引入镜像电荷也不能改变它的边界条件以及电介质的分布情况,只能在所研究区域之外引入镜像电荷,使之与原给定的电荷一起所产生的电场满足所讨论的边界条件,所求得解也只有在所研究的区域内是正确的,有意义的。

例 1-7 设一点电荷 q 与无限大接地导体平面的距离为 d ,如图 1-9 所示。求:

- (1) 空间的电位分布和电场强度分布;
- (2) 导体平面上的感应电荷面密度 σ ;

(3) 点电荷 q 所受的力。

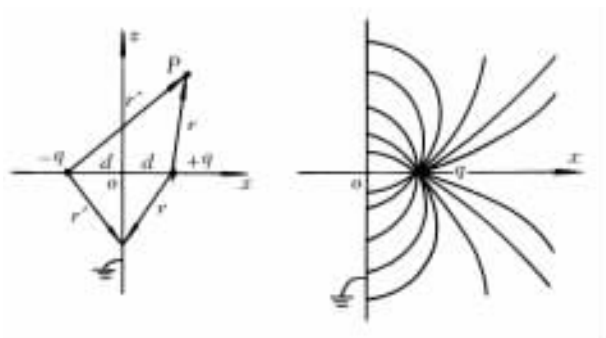


图 1-9 点电荷与无限大接地导体平面

解 (1) 空间的电位分布和电场强度分布

选如图 1-9 所示的直角坐标系。导体平面将整个空间分成两部分。在 $x < 0$ 的空间内, 有 $\nabla^2 \varphi = 0$, 其边界条件是无限远处的电位为 0, 导体平面上的电位也为 0。故

$$\varphi = 0, \quad E = 0 \quad (x < 0)$$

于是, 我们仅须考虑 $x > 0$ 的区域。若在 $x < 0$ 区域内设一个像电荷 $(-q)$, 位置为 $(-d, 0, 0)$ 。则 q 与 $(-q)$ 在 $x = 0$ 平面上的电位叠加为 0, 且不改变 $x > 0$ 区域电荷的分布 (即仍只有点电荷 q)。由于所设的像电荷 $(-q)$ 不改变原问题的条件, 因此它可用来等效导体平面上的感应电荷, 导体平面上方 ($x > 0$) 空间的电场可用 q 与 $(-q)$ 的叠加求得。于是, $x > 0$ 区域内任一点的电位可表示为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad (x > 0)$$

式中: r, r' 分别代表点电荷 $q, (-q)$ 到观察点的距离。而 $x > 0$ 区域内任一点的电场强度可表示为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} e_r - \frac{1}{r'^2} e_{r'} \right) \quad (x > 0)$$

式中: $e_r (= \frac{(x-d)e_x + ye_y + ze_z}{r})$ 和 $e_{r'} (= \frac{(x+d)e_x + ye_y + ze_z}{r'})$ 分别是电荷 $q, (-q)$ 到观察点的单位矢径。

(2) 导体平面上的感应电荷面密度

在计算导体平面上的感应电荷时, 应注意在导体平面上有 $r = r', e_r = (-de_x + ye_y + ze_z)/r, e_{r'} = (de_x + ye_y + ze_z)/r', e_n = e_x$, 于是

$$\sigma = D \cdot e_n = \epsilon_0 E \cdot e_n = \frac{-dq}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

导体平面上总的感应电荷

$$Q = \iint_S \sigma dS = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{-dq r_0 dr_0 d\phi}{2\pi(d^2 + r_0^2)^{3/2}} = -q$$

(3) 点电荷 q 所受的力

点电荷 q 所受的力,就是 q 与其镜像电荷($-q$)之间的作用力。由库仑定律可知,其值为

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

负号表示所受力为吸引力。

这个例子说明,关键的问题是如何寻找等效的像电荷,寻找的依据是方程和边界条件。为了不改变电位所满足的方程,像电荷不能放在所求电位的区域(又称为有效区)。

例 1-8 设两种各向同性的线性电介质各占半个空间(分界面是无限大平面),其介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 。现在分界面两侧对称位置分别置一点电荷 q_1 和 q_2 ,其间距为 $2d$,如图 1-10(a)所示。试求点电荷 q_1 所受力。

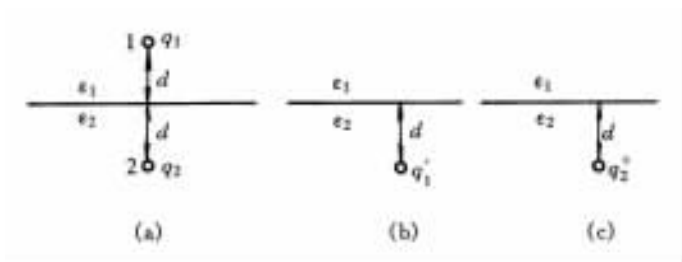


图 1-10 点电荷与无限大电介质分界面

解 若只存在 q_1 ,介质全为 ϵ_1 ,由式(1-35),镜像电荷为

$$q'_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_1$$

如果只存在 q_2 ,它在 ϵ_1 中产生之电场相当于 q''_2 所产生的电场,由式(1-35),得

$$q''_2 = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_2$$

根据库仑定律,直接得出 q_1 所受力为

$$f_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_1(2d)^2} (q'_1 + q''_2) = \frac{q_1}{16\pi\epsilon_1 d^2} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_1 + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_2 \right)$$

请问,点电荷 q_2 所受力是否与点电荷 q_1 所受力相同?

例 1-9 一个半径为 R 的导体球上带有电量为 Q 的电荷,在距球心 $d(d > R)$

处有一点电荷 q , 求:

- (1) 空间电位分布;
- (2) 导体球对点电荷 q 的力。

解 本题可以用叠加原理, 在已知的“接地导体球附近的点电荷的电位”基础上求解。先假设导体球接地, 则球上感应电荷所产生的电位可以由式(1-36)所决定的镜像电荷 $(-q')$ 来计算。此时, 导体球上的总感应电荷为 $(-q')$, 然后断开接地线, 在导体球上加电荷 $Q+q'$, 使球上的总电荷为 Q 。为了保持导体球面为等位面, 后加的电荷 $Q+q'$ 必定均匀分布于导体球面, 所以此电荷在球外产生的电位和置于球心的电量为 $Q+q'$ 的点电荷均相同。这样, 原问题就化为 3 个点电荷所构成的系统, 如图 1-11 所示。

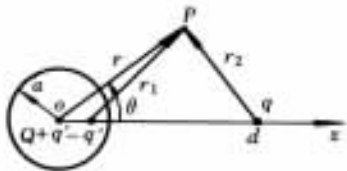


图 1-11 点电荷与导体球间的电场

- (1) 导体球外的电位为图中 3 个点电荷产生的电位的叠加, 即

$$\varphi(r, \theta) = \frac{Q+q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

由式(1-36), 上式可写成

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dQ + Rq}{rd} - \frac{Rq}{d[r^2 + (\frac{R^2}{d})^2 - 2r(\frac{R^2}{d})\cos\theta]^{1/2}} + \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{1/2}} \right] \quad (r \geq R)$$

导体球是一个等位体, 其电位为

$$\varphi(R, \theta) = \frac{dQ + Rq}{4\pi\epsilon_0 Rd}$$

- (2) 导体球对点电荷 q 的力, 是球上电荷产生的电场对 q 的作用, 即点电荷 $Q+q'$ 和 $(-q')$ 对 q 的力。由库仑定律, 直接得出 q 所受之力为

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q+q'}{d^2} + \frac{-q'}{(d-b)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[Q + \frac{R^3 q (R^2 - 2d^2)}{d(d^2 - R^2)^2} \right]$$

例 1-10 一半径为 R 的绝缘不带电的导体球壳内距球心为 d ($d < R$) 处放一点电荷 q , 如图 1-12 所示。试求:

- (1) 球壳内、外空间的电位分布及球壳上的电位;
- (2) 球壳内点电荷 q 所受之力。

解 本题所给出的边界条件是在导体球壳上电位为一常数, 以及球面上的总电荷为 0。即

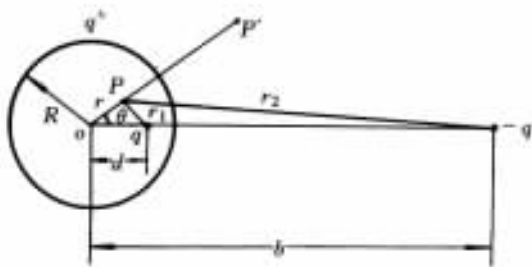


图 1-12 导体球壳内的点电荷

$r = R$ 时, $\varphi = C$ 和 $Q = 0$ 。

由于球内 q 的存在,所以在球壳的内表面感应了与 q 相反符号的电荷(不均匀分布),而在球壳的外表面感应了与 q 相同符号的电荷。此时,球内任一点的电场是由球内的点电荷和球壳内外表面上的感应电荷共同产生。由于球壳内表面的感应电荷的分布未知,所以应用镜像法,设想球壳外离球心为 b 处有一像电荷 $(-q')$,它和球壳内点电荷 q 在导体球壳上共同产生的电位等于零,那么题意中给出的边界条件 $r=R$ 时, $\varphi=C$ 当然是导体球壳外表面上的感应电荷所产生。由于导体壳是球形,所以其外表面上的感应电荷分布是均匀的。

(1) 球壳内、外空间的电位分布及球壳上的电位

根据镜像法原理,镜像电荷的位置及大小由下式确定

$$q' = \frac{b}{R}q, \quad b = \frac{R^2}{d}$$

在导体球壳内表面的感应电荷总量为 $(-q)$,外表面为 $(+q)$,所以 $q'' = +q$ 。这样,导体球壳内任一点 P 的电位由下式决定

$$\varphi_{\text{内}} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

球壳外任一点 P' 的电位以及球壳上的电位由下式决定

$$\varphi_{\text{外}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{和} \quad \varphi_{\text{壳}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

(2) 球壳内点电荷 q 所受的力

因为球壳外表面的感应电荷 $(+q)$ 对球壳内产生的电场为零,故它不对球壳内的点电荷 q 产生力,球壳内的点电荷 q 所受的力是像电荷 $(-q')$ 对它的作用力。由库仑定律,直接得出 q 所受之力为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-qq'}{(b-d)^2} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(R^2 - d^2)^2}$$

2. 电轴法

在实际中,我们常要计算带有等值异号的两个平行圆截面柱形导线周围的电场分布。由于柱形导线表面上的电荷分布不是轴对称的,所以先要找出电荷分布,再计算电场是相当困难的。电轴法是用两根假想的带等量异号电荷的无限长直线(电轴)来代替两个带电柱形导体,这样就求解电荷分布不均匀的带电圆柱产生的电场问题,变成了求解两电轴在所考虑区域内产生的电场问题,而后者是已知的。如果代替以后,仍然保持圆柱体上的边界条件不变,根据惟一性定理,用线电荷算出的周围空间的电位就是两圆柱体周围空间的电位。这个方法的关键是寻找两根线电荷(即电轴)的位置。

用电轴法可以解决下列导体系的静电问题。一对平行导体圆柱(等半径或不等半径);无限大导体平面及与之平行的导体圆柱;一空心导体圆柱包围另一个与之偏心的导体圆柱。

解题的步骤大致为:(a)分出不用电轴法可解的区域和必须用电轴法求解的区域。(b)对于用电轴法求解的区域,要确定电轴的位置和单位长度上的电量 τ 。确定电轴位置使用式(1-37)。而确定电轴单位长度上的电量 τ 时,则需要区别不同的情况:对于给定圆柱导体单位长度电量 $\pm\tau$ 的情况,它就是电轴单位长度上的电量;对于给定两圆柱导体间的电压为 U 的情况,就要由电轴法计算电位的公式分别计算两圆柱面上的电位,由此得到 U 和圆柱面上的 τ 之间的关系,从而也就得到电轴单位长度上的电量 $\pm\tau$ 。(c)电轴的位置和单位长度上的电量一旦定出,所考虑区域内任一点的电位和电场强度立即可以求得。

例 1-11 求两根无限长带等量异号电荷平行直线的电位及等位面分布。

解 设两线电荷单位长度上的电荷分别为 τ 和 $(-\tau)$,两线电荷之间的距离为 $2b$,如图 1-13 所示。如果取 $x=0$ 平面为电位的参考点,则任意点 P 的电位为

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1-56)$$

式中: r_1 、 r_2 分别表示正、负带电线与观察点之间的距离。

在上式中,令 $\frac{r_2}{r_1} = k = \text{常数}$,就得到等位面(线)。取直角坐标如图 1-14 所示,这时

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = k^2 = \frac{(x+b)^2 + y^2}{(x-b)^2 + y^2}$$

整理后,得

$$\left(x - \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2bk}{k^2 - 1}\right)^2$$

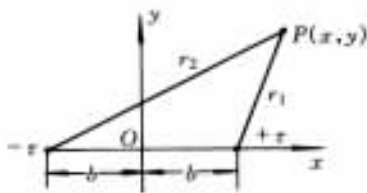


图 1-13 无限长平行直线电荷

这是 xOy 平面上的圆方程,其圆心坐标是

$$x = h = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b, \quad y = 0$$

圆的半径是

$$a = \left| \frac{2bk}{k^2 - 1} \right|$$

k 取不同的数值时就得到不同的等位线。所以两带电直线的等位面(线)是一系列圆柱面,它们与 xOy 平面的交线就是一系列的偏圆心,等位线和电力线如图 1-14 所示。考虑到静电场中导体面是等位面,将图中某一等位面(例如图 1-14 中的半

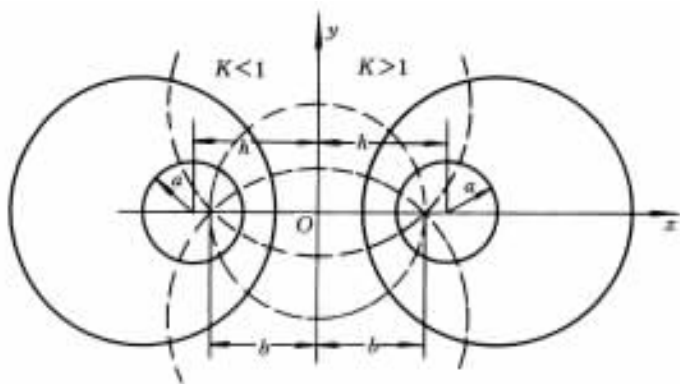


图 1-14 两根等量异号无限长线电荷的等位线

径为 a 的圆柱面),用导体圆柱代替,则不会影响柱外的电位及电场,只要单位长导体柱的面电荷为 $(-\tau)$ 。这样式(1-56)就表示线电荷 τ 及与之平行的带电导体柱(单位长度上的电荷为 $(-\tau)$)产生的电位了(当然,此式只适用于导体柱以外的空间)。这相当于将导体柱上的面电荷用线电荷 $(-\tau)$ (称为电轴)来代替,而求柱外的电场。要注意的是 $(-\tau)$ 不是位于导体的轴线上。现在来确定和一定 k 值对应的等位圆的半径 a 以及圆心的位置 h 和电轴 b 之间的关系。

因为

$$a^2 = \left(\frac{2bk}{k^2 - 1} \right)^2 = \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b \right)^2 - b^2$$

而

$$h = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b$$

所以

$$b^2 = h^2 - a^2$$

上式就可以用来确定电轴的位置。

例 1-12 在真空中, 有两个半径均为 a , 其轴线之间距离为 $2d$ 的平行长直圆柱导体构成的输电线, 如图 1-15 所示。设导体间外加直流电压 U_0 , 试求:

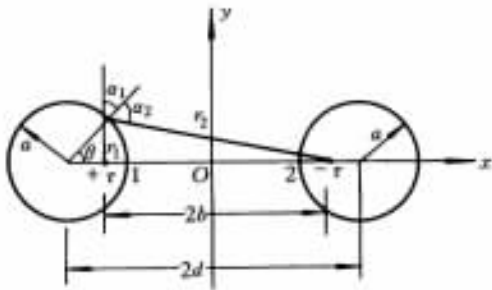


图 1-15 平行圆柱双导体传输线

(1) 单位长度上导线间的电容;

(2) 导体表面的电荷分布。

解 此题用电轴法解较为合适, 而问题的关键是确定电轴的位置和电量。

电轴的位置 $b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{d^2 - a^2}$ 。为确定电轴单位长的电量, 设它们分别为 $\pm \tau$ 。于是, 柱外空间任一点的电位

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

注意到在 1 点: $r_1 = b - (d - a)$, $r_2 = b + (d - a)$

在 2 点: $r_1 = b + (d - a)$, $r_2 = b - (d - a)$

所以两导线内侧 1 和 2 点的电位分别为

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b + (d - a)}{b - (d - a)}, \quad \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b - (d - a)}{b + (d - a)}$$

φ_1 和 φ_2 也就是两条输电线的电位。故

$$U_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{[b + (d - a)]^2}{[b - (d - a)]^2}$$

由此得电轴单位长度的电量为

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_0 U_0}{\ln \frac{[b + (d - a)]^2}{[b - (d - a)]^2}}$$

导线表面上的电荷分布为

$$\sigma = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 \left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_1} \cos\alpha_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_2} \cos\alpha_2 \right)$$

σ 是电荷面密度。由图中看出

$$r_1^2 = a^2 + (d - b)^2 - 2a(d - b)\cos\theta, \quad r_2^2 = a^2 + (d + b)^2 - 2a(d + b)\cos\theta;$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a - (d - b)\cos\theta}{r_1}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{(d + b)\cos\theta - a}{r_2}$$

将这些关系式代入上面的 σ 的表达式,整理之后得

$$\sigma = \frac{\tau[a^2 - (d-b)^2]}{2\pi a[(d-b)^2 + a^2 + 2(d-b)a\cos\theta]}$$

当 $\theta=0$ 时

$$\sigma_{\max} = \frac{\tau(a+d-b)}{2\pi a(a-d+b)}$$

当 $\theta=\pi$ 时

$$\sigma_{\min} = \frac{\tau(a-d+b)}{2\pi a(a+d-b)}$$

单位长度上导线间的电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U_0} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left[\frac{b+(d-a)}{b-(d-a)}\right]^2}$$

例 1-13 半径为 a_1, a_2 的两平行导体圆柱的轴间距离为 $d(d > a_1 + a_2)$, 设它们单位长度上所带的电量分别为 $\pm\tau$ 。试求:

(1) 电位分布;

(2) 单位长度上导线间的电容。

解 在 2 个圆柱导体内部 $E=0$, 可以不再考虑。故只需考虑两圆柱外的空间。由于两圆柱上的电荷分布不均匀, 因此用电轴法求解。

(1) 电位分布

先决定电轴位置。由于两圆柱的半径不相等, 此时电位为零的 $yo z$ 平面到两轴线的距离不相等, 但它到两电轴的距离仍然相等, 如图 1-16 所示。由式 (1-37), 有

$$h_1 = \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}, \quad h_2 = \frac{d^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d}$$

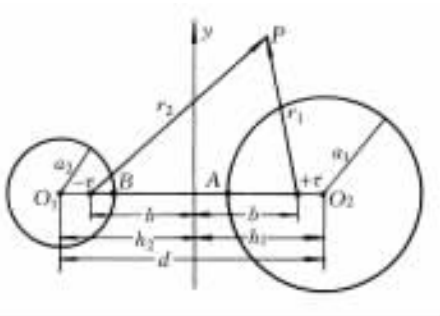


图 1-16 非对称传输线

和

$$b = \left[\left(\frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d} \right)^2 - a_1^2 \right]^{1/2}$$

而电轴每单位长度上的电量就等于给定的圆柱单位长度上的电量 $\pm\tau$ 。于是, 两

圆柱外的空间任一点的电位为

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

注意: r_1, r_2 分别表示正、负电轴到观察点的距离。

(2) 单位长度的电容

先计算两圆柱的电位差。由于圆柱面是等位面, 计算圆柱面上任一点的电位均可。为简单起见, 就取图 1-16 中的 A、B 两点来计算其电位差。

在 A 点, $r_1 = b - (h_1 - a_1), r_2 = b + (h_2 - a_1)$;

在 B 点, $r_1 = b + (h_2 - a_2), r_2 = b - (h_2 - a_2)$ 。

所以

$$\varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b + (h_1 - a_1)}{b - (h_1 - a_1)}, \quad \varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b - (h_2 - a_2)}{b + (h_2 - a_2)}$$

最后得到单位长度上的电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\tau}{\varphi_A - \varphi_B} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{[b + (h_1 - a_1)][b + (h_2 - a_2)]}{[b - (h_1 - a_1)][b - (h_2 - a_2)]}}$$

例 1-14 很长的偏心电缆, 内、外导体的半径分别为 a_1 和 a_2 , 其两轴间的距离为 d , 如图 1-17 所示。试求:

(1) 已知圆柱单位长的电量为 $\pm\tau$ 的情况下, 电位分布;

(2) 已知两圆柱之间的电压 U 的情况下, 电位分布;

(3) 单位长度上导体间的电容。

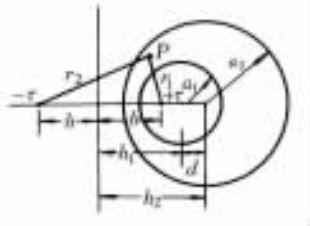


图 1-17 偏心电缆

解 在外导体之外、内导体之内的区域 $E=0$,

可以不再考虑。我们只需考虑两圆柱之间的区域, 仍然用电轴法求解。用放在内圆柱中的电轴($+\tau$)来代替内圆柱面上的电荷的贡献。而等效地代替外圆柱面上电荷的贡献的电轴, 却不能放在两圆柱之间, 因为这样会改变区域内所满足的方程; 更不能放在内圆柱中, 这会改变所给的边界条件 ($\tau = -\epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$), 所以只能放在外圆柱之外。两电轴的位置仍由 $b^2 = h^2 - a^2$ 确定, 即有

$$b^2 = h_1^2 - a_1^2, \quad b^2 = h_2^2 - a_2^2, \quad h_2 - h_1 = d$$

由此可得

$$h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - d^2}{2d}, \quad h_2 = \frac{d^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d}$$

$$b = \left[\left(\frac{a_2^2 - a_1^2 - d^2}{2d} \right)^2 - a_1^2 \right]^{1/2}$$

(1) 当给定两圆柱单位长度的电量为 $\pm\tau$ 时,两电轴单位长的电量也就是 $\pm\tau$ 。
所以电位分布为

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

式中: r_1, r_2 分别表示正、负电轴到观察点的距离。

(2) 当给定两圆柱间的电压为 U 时,先求电轴单位长度的电量 τ 与两圆柱间电压 U 之间的关系。注意到

在 A 点, $r_1 = b - (h_1 - a_1), r_2 = b + (h_1 - a_1)$;

在 B 点, $r_1 = b - (h_2 - a_2), r_2 = b + (h_2 - a_2)$ 。

所以

$$\varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b + (h_1 - a_1)}{b - (h_1 - a_1)}, \quad \varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b + (h_2 - a_2)}{b - (h_2 - a_2)}$$

两导体间的电压

$$U = \varphi_A - \varphi_B$$

这样

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln \frac{[b + (h_1 - a_1)][b - (h_2 - a_2)]}{[b - (h_1 - a_1)][b + (h_2 - a_2)]}}$$

最后得电位分布为

$$\varphi = \frac{U}{\ln \frac{[b + (h_1 - a_1)][b - (h_2 - a_2)]}{[b - (h_1 - a_1)][b + (h_2 - a_2)]}} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

式中: r_1, r_2 分别表示正、负电轴到观察点的距离。

(3) 单位长度上导体间的电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{[b + (h_1 - a_1)][b - (h_2 - a_2)]}{[b + (h_2 - a_2)][b - (h_1 - a_1)]}}$$

1.2.4 静电能量的计算

电荷之间有相互作用力,移动电荷时,电场力要作功,这说明电场内储存有能量;或从另一方面来说,要形成一个带电体系,形成一个电场,外力要对电荷作功,这功就转换为电场的能量,储存在电场中。静电能量实际上是分布在静电场之中的。

静电能量是静电场中的一个重要概念,应深刻理解,掌握静电能量的计算公

式, 会计算电场能量。

在学习中, 首先应注意搞清固有能与互有能这两个概念。由多个带电体组成的体系, 其静电能量等于每个带电体的固有能和各个带电体之间的互有能之和。

设在空间中有两组电荷体系 1 和 2, 它们单独存在时在空间产生的电场强度分别为 E_1 和 E_2 。由叠加原理, 总电场强度为

$$E = E_1 + E_2$$

所以, 总静电能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon E^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon (E_1 + E_2)^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon E_1^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon E_2^2 dV + \iiint_V \epsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV \end{aligned}$$

式中前面两项显然是各电荷体系单独存在时各自的静电能量, 称为电荷体系的固有能。而第 3 项则代表两电荷体系间的相互作用能, 称为互有能。可能看出, 当保持每个带电体系的电荷分布不变, 而改变它们之间的相对位置时, 各带电体系的固有能不变, 变化的却是相互作用能。这就是说, 相互作用能与电荷体系之间的相对位置有关。

互有能可以理解为把每个带电体从现有位置移到无限远离的状态时, 电场力所作的功。例如, 一点电荷 q , 在外场中的势能为 $W = q\varphi$, 式中 φ 为点电荷所在点外电场的电位, 并不包含点电荷本身激发的电位。因此, 这就是点电荷与外场的相互作用能, 即互有能。

若激发外电场的电荷以及带电体, 在本身的形状、大小都不变的条件下, 带电体在外电场中运动也只是相互作用能发生了变化, 而固有能不变。因此, 一般说来, 研究相互作用能具有实际意义。

例 1-15 试求真空中电量为 Q , 半径为 a 的孤立带电导体球的静电能量。

解 我们用 5 种方法来计算。

(1) 用静电能量公式(1-46)计算

由于导体球内场强为零, 静电能量都分布在球外整个电场空间之中, 电场强度 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r, (r > a)$, 电场能量密度为

$$w'_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \quad (r > a)$$

所以总静电能量为

$$W_e = \iiint_V w'_e dV = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

(2) 用静电能量公式(1-45)计算

由于带电量为 Q 的导体球的电位和表面电荷密度分别为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \text{和} \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

所以带电导体球的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \varphi \sigma dS = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^3} \iint_S dS = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

(3) 应用带电导体系统静电能量公式(1-48)计算

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k = \frac{1}{2} Q \varphi = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

(4) 用外力做功过程来计算

静电能量的另一种表示式为

$$W_e = \iiint_V \varphi dq$$

它的含意是:设某一时刻带电体从无限远处已经迁移来了部分电荷,上式中的 φ 就是这部分电荷在继续移来的电荷元 dq 的到达点上所产生的电位。 V 是最终电荷体系所占据的空间。

现在,当导体球带电量达到 q 时,其电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

使导体球上电量继续增加,最终达到 Q ,导体球的静电能量为

$$W_e = \iiint_V \varphi dq = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

(5) 应用电容器的静电能量公式计算

由于孤立导体球的电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

则导体球的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

例 1-16 在半径为 a ,介电常数为 ϵ 的球体中,均匀地分布着电荷体密度为 ρ 的连续电荷。试用如下两种方法计算静电能量:

$$(1) W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV;$$

$$(2) W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV。$$

解 (1) 设球体内、外的电场强度和电位分别为 $E_{\text{内}}、E_{\text{外}}$ 和 $\varphi_{\text{内}}、\varphi_{\text{外}}$,利用高斯定律得

$$\mathbf{E}_{\text{内}} = \frac{\rho r}{3\epsilon} \mathbf{e}_r, \mathbf{E}_{\text{外}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\varphi_{\text{外}} = \int_r^\infty \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$

$$\varphi_{\text{内}} = \int_r^a \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{r} + \int_a^\infty \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho a^2}{6\epsilon} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon} + \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$$

所以

$$\begin{aligned} W_e &= \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{内}}} \epsilon \mathbf{E}_{\text{内}}^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{外}}} \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{外}}^2 dV \\ &= 2\pi\rho^2 a^5 \left(\frac{1}{45\epsilon} + \frac{1}{9\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) W_e &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \left(\frac{\rho a^2}{6\epsilon} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon} + \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0} \right) r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \\ &= 2\pi\rho^2 a^5 \left(\frac{1}{45\epsilon} + \frac{1}{9\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

1.3 典型题解析

1-1 均匀带电圆盘, 半径为 a , 电荷面密度为 σ 。试求边缘上任一点 P 的电位。

解 在圆盘边缘上任取一点 P , 如图 1-18 所示。以该点为圆心, r 为半径, 作一段宽为 dr 的圆弧带, 在带上取一微分段 $r d\theta dr$, 其上的电量是 $\sigma r dr d\theta$, 这一电量在 P 点的电位是 $\frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma dr d\theta}{4\pi\epsilon_0}$, 圆弧带

在 P 点的电位用 $d\varphi$ 表示, 则

$$d\varphi = \int_0^{2\theta} \frac{\sigma dr d\theta}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma dr}{2\pi\epsilon_0}$$

由图看出

$$r = 2a \cos\theta, dr = -2a \sin\theta d\theta$$

代入上式, 并积分, 得 P 点的电位为

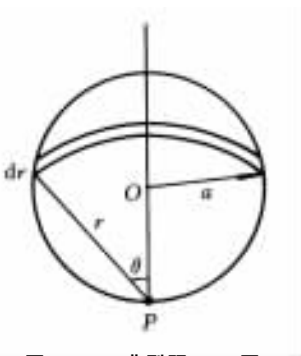


图 1-18 典型题 1-1 图

采用电位叠加原理。巧妙之处是选以 P 点为圆心的圆弧带作为电荷元, 利用其上各点到 P 点的距离均相等, 使得积分相当简单。

$$\begin{aligned}\varphi &= \int d\varphi \\ &= -\frac{a\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \pi}\end{aligned}$$

1-2 一点电荷 q 放在半径为 a 的接地细圆环的轴线上,此电荷离圆环中心的距离为 b ,这时发现环上的感应电荷为 $(-Q)$ 。若周围电介质为空气,试确定此环的电容。

解 设点电荷为 q ,环的电容为 C ,以及 q 在圆环上产生的电位为

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}}$$

利用叠加原理,有

$$-\frac{Q}{C} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

故圆环的电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2} \frac{Q}{q}$$

1-3 在无限大真空中,已知 $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda}$,求对应的电场及电荷分布。

解 (1) 电场强度

$$\begin{aligned}E &= -\nabla\varphi = -e_r \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} e^{-r/\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\lambda} \right) e_r\end{aligned}$$

(2) 电荷分布

已知电位 φ ,由 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ 可以求体电荷分布。不过在 $r=0$ 为 φ 和 E 的奇点。当 $r \neq 0$ 时

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{Q}{4\pi\lambda^2 r} e^{-r/\lambda}$$

在 $r=0$ 处应有点电荷,为确定其电量,先用高斯定律求

叠加原理的利用。环上的电荷 $(-Q)$ 在自身之上产生的电位为 $(-\frac{Q}{C})$ 。

φ 和 E 的奇点处,电荷体密度 ρ 为无限,意味着该点有点电荷。然而,当给定 E 分布,可应用 $\rho = \nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon E)$ 求电荷分布。但应注意在 E 的奇点和突变面处,有点电荷和面电荷分布。

出半径为 r 的球面内的总电荷 Q' ,再由 $\iiint_V \rho dV$ 求此球面内的总体电荷 Q'' ,则 $q = Q' - Q''$

$$Q' = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon_0 r^2 E = Qe^{-r/\lambda} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)$$

$$\begin{aligned} Q'' &= \iiint_V \rho dV = - \int_0^r \frac{Q}{4\pi\lambda^2 r'} e^{-r'/\lambda} 4\pi r'^2 dr' \\ &= Qe^{-r/\lambda} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) - Q \end{aligned}$$

所以 $q = Q' - Q'' = Q$

应用 δ 函数,电荷分布可合写成

$$\rho = -\frac{Q}{4\pi r\lambda^2} e^{-r/\lambda} + Q\delta(r)$$

1-4 在一个接地导体球外附近放一个电量为 q 的点电荷。已知球的半径为 R ,点电荷与球心的距离为 d 。求导体球表面上总的感应电荷 q' 。

解 根据静电感应现象,导体球表面上的感应电荷 q' 是不均匀分布的。为了求出 q' ,我们选择导体球球心 O 的电位来考虑。由于导体球内各点电位相等,所以球心 O 的电位为零。

根据叠加原理,球心电位 φ_0 是点电荷 q 和球面上感应电荷 q' 共同产生的。点电荷 q 在球心 O 产生的电位为

$$\varphi_{01} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

导体球上的感应电荷 q' 在球面上的分布是不均匀的,电荷面密度 σ' 各处不一样,所以感应电荷在球心产生的电位要用积分来表示,即

$$\varphi_{02} = \oint_S \frac{\sigma' dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \oint_S \sigma' dS = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

因此,球心的总电位是

$$\varphi_0 = \varphi_{01} + \varphi_{02} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d} + \frac{q'}{R} \right) = 0$$

解之得

$$q' = -\frac{R}{d}q$$

此题选取一个特殊的电位零点,根据球面上非均匀分布的各处的感应电荷与球心的距离都等于球半径的特点,从而使电位积分可以不考虑感应电荷的具体分布计算出来,这是一个巧妙的方法。

也可以看到,对于非孤立导体,接地导体球上感应电荷一般不为 0,才能保证导体球电位等于零。这一点要引起注意。

讨论:当有 n 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 排列在半径为 d , 中心在球心 O 的圆弧上或者圆周上时, 则感应电荷显然应该是

$$q' = -\frac{R}{d} \sum_{i=1}^n q_i \quad (1)$$

当 n 个点电荷排列在半径为 d 的同心球面上时, 则感应电荷也由上式表示。

所以, 接地导体球外放上带有净电荷为 Q 的同心球面时, 内部的接地导体球面的感应电荷不等于 0, 而是由

$$q' = \frac{-R}{d} Q \quad (2)$$

决定。

现在在接地球外, 放上一内、外半径分别为 b, c 的同心金属球壳, 然后把电荷 Q 传给金属球壳。根据对称性, 3 个球面上的电荷分布都应该是均匀的。若接地内球上的电荷为 q' , 根据高斯定律可知球壳内表面上的电荷 $q_2 = -q'$, 外表面上的电荷为 $q_3 = Q + q'$ 。此时, 接地内球之外出现了两个同心带电球面, 所以内球上的感应电荷可由式(2)决定, 即

$$q' = -\frac{a}{b} q_2 - \frac{a}{c} q_3 = \frac{a}{b} q' - \frac{a}{c} (Q + q')$$

经过整理后, 可得

$$q' = -\frac{ab}{ab + c(b-a)} Q$$

1-5 某一静电场, 电力线的方程是

$$(x-3)dy - (y+2)dx = 0$$

试写出此电场的电位 φ 的表达式。

解 电力线方程的标准形式为

$$E_x dy - E_y dx = 0$$

上式与 $(x-3)dy - (y+2)dx = 0$ 相比较, 可得

$$E_x = x-3, \quad E_y = y+2$$

因为 $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, 故 $x-3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, 积分后得

$$\varphi = -\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) + f(y)$$

再由 $y+2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -f'(y)$, 得

电力线方程与场强的关系, 场强与电位的关系。若用其他方法那将是困难的。

$$f(y) = -\left(\frac{1}{2}y^2 + 2y\right) + C$$

从而电位函数 φ 为

$$\varphi = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x) - \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y\right) + C$$

或写为

$$\varphi = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 3x - 2y + C$$

1-6 如图 1-19 所示,一平板电容器中充填两种电介质,它们的介电常数为 ϵ_0 与 ϵ ,设两极板距离为 d , ϵ_0 区域的厚度为 d_1 , ϵ 区域的厚度为 d_2 。试求:

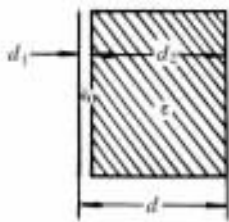


图 1-19 典型题1-6图

(1) ϵ_0 与 ϵ 区域的电场强度表示式;

(2) 若两极板间加电压 1 000 V, $d_1 = 10^{-4}$ m, $d = 10^{-3}$ m,而电介质为云母,其 $\epsilon_r = 6$,问电介质是否会被击穿? (已知空气的击穿场强为 3×10^6 V/m)

解 (1) 略去边缘效应,把板间的电场视为均匀场,设板间加电压 U ,则

$$U = E_0 d_1 + E d_2$$

根据分界面上的衔接条件 $D_{2n} = D_{1n}$,即

$$\epsilon_0 E_0 = \epsilon E$$

联立以上两个方程,并解之得 ϵ_0 区的 E_0 和 ϵ 区的 E 分别为

$$E_0 = \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} d_2}, \quad E = \frac{U}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} d_1 + d_2}$$

(2) 介质是否会被击穿

把 $U = 1\,000$ V, $d_1 = 10^{-4}$ m, $d_2 = (10^{-3} - 10^{-4})$ m, $\epsilon_r = 6$ 代入 E 与 E_0 的表示式中,得

$$E_0 = 4 \times 10^6 \text{ V/m}, E = 0.66 \times 10^6 \text{ V/m}$$

由于 $E_0 > E_{\text{击穿}}$,故 ϵ_0 区被击穿。

但 ϵ_0 区击穿后, ϵ 区的电场强度将会增加,是否被击穿,

平板电容器的
电场公式。

ϵ_0 区击穿后,电
压将全部加在 ϵ
区。

取决于云母的击穿场强。

1-7 有两块平行金属板 A 、 B 的间距为 d 。今在两板之间再放置两块金属板 C 、 D 。 C 、 D 、 A 、 B 相互平行,且间距相等都是 $\frac{d}{3}$,如图 1-20 所示。

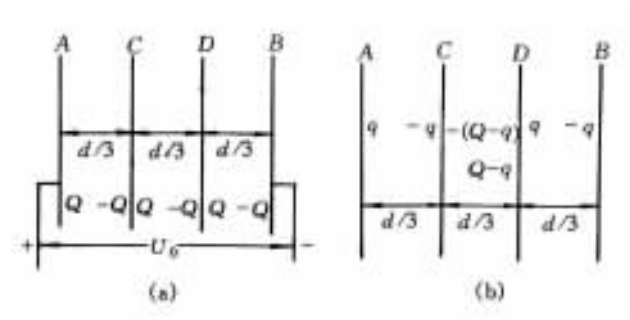


图 1-20 典型题 1-7 图

(1) 现 A 、 B 接到电源,充电到电压 U_0 之后拆去电源。这时, A 、 C 间, C 、 D 间, B 、 D 间电压各为多少? C 、 D 上有无电荷? 如何分布? A 、 C 间, C 、 D 间, D 、 B 间场强各为多少?

(2) 若用导线将 C 、 D 两板连结,随即拆去导线,请再回答上述问题。

(3) 若再用导线将 A 、 B 两板连结,随即拆去导线,请再回答上述问题。

(4) 如果先用导线将 C 、 D 两板连接,再把 A 、 B 接到电源充电到电压 U_0 后,拆去电源,拆去导线,再回答上述问题。

解 (1) 由静电平衡条件知, A 、 B 内侧带等量异号电荷 $\pm Q$, C 、 D 两侧表面也都带有等量异号电荷 $\pm Q$ 。 A 、 C 、 C 、 D 和 D 、 B 间的 3 个区域中有相同的电场

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

因为 $U_0 = 3 \times E \times \frac{d}{3} = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q$

所以 $U_{AC} = U_{CD} = U_{DB} = \frac{1}{3} U_0$

(2) 用导线联接 C 、 D ,则 C 、 D 等电位及 C 、 D 间不存在电

静电平衡条件,
平板电容器的电
场公式。

力线,必然是 C 、 D 内侧的 $\pm Q$ 中和而不带电。再拆去导线,保持以上带电状态。则在 A 、 C 和 B 、 D 间的电场为

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

而 C 、 D 间电场 $E=0$, 并且

$$U_{AC} = U_{DB} = \frac{1}{3}U_0, \quad U_{CD} = 0$$

C 、 D 两板外侧带电分别为 $(-Q)$ 和 $(+Q)$, 两板内侧不带电。

(3) 若再将 A 、 B 两板联接, 随即拆去导线, 则 A 、 B 为等电位, A 、 B 上的电荷将中和一部分, 如图 1-20(b) 所示。

设 A 板剩余电荷为 q , B 板剩余电荷为 $-q$; C 、 D 板电荷又将重新分布。

$$\text{因为 } U_{AC} = U_{BD} + U_{DC}, \quad C_{AC} = C_{BD} = C_{DC}$$

$$\text{所以 } \frac{q}{C_{AC}} = -\frac{q}{C_{BD}} + \frac{Q-q}{C_{DC}}$$

解出得

$$q = \frac{Q}{3}; C、D \text{ 内侧带电量为 } \frac{2}{3}Q$$

所以

$$U_{AC} = E \frac{d}{3} = \frac{Q/3}{\epsilon_0 S} \frac{d}{3} = \frac{dQ}{9\epsilon_0 S} = \frac{1}{9}U_0$$

$$U_{BD} = -\frac{1}{9}U_0 \quad U_{DC} = \frac{\frac{2}{3}Q}{\epsilon_0 S} \frac{d}{3} = \frac{2}{9}U_0$$

(4) 用导线联接 C 、 D 后, 把 A 、 B 充电到 U_0 , 则 A 、 B 内侧带等量异号电荷 $\pm Q'$ 。同理, A 、 C 和 D 、 B 区域中的电场为

$$E = \frac{Q'}{\epsilon_0 S}$$

$$U_0 = 2 \times \frac{d}{3} \times E = \frac{2}{3} \frac{d}{\epsilon_0 S} Q'$$

故带电量

$$Q' = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0$$

若拆去电源和导线, 仍保持原来状态, 则 A 、 C 和 D 、 B 区域中的电场为

$$E = \frac{3}{2} \frac{U_0}{d}$$

C、D 区域中 $E=0$, 因而

$$U_{AC}=U_{DB}=\frac{1}{2}U_0, \quad U_{CD}=0$$

1-8 一同轴线的内导体半径为 a , 外导体的内半径为 b , 外加电压 U_0 , 中间充填 $\epsilon_r = \frac{\rho}{a}$ 的电介质。试求:

- (1) 介质中的 E 、 D 、 P 及 φ ;
- (2) 极化电荷体密度和极化电荷面密度;
- (3) 单位长度之电容。

解 (1) 设内导体表面单位长度上的电荷为 τ , 根据对称性, 由高斯定律求得两圆柱间

$$D = \frac{\tau}{2\pi\rho}e_\rho, \quad E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{a\tau}{2\pi\epsilon_0\rho^2}e_\rho$$

如果以外导体为电位参考点, 则两圆柱间电位

$$\varphi = \int_\rho^b E d\rho = \frac{a\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b} \right)$$

当 $\rho=a$ 时

$$U_0 = \frac{a\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\tau(b-a)}{2\pi\epsilon_0 b}$$

由此得到

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_0 b}{b-a} U_0$$

将它代入 D 、 E 的表示式中, 得

$$D = \frac{\epsilon_0 b U_0}{(b-a)\rho} e_\rho, \quad E = \frac{ab U_0}{(b-a)\rho^2} e_\rho$$

极化强度 P 为

$$P = (\epsilon - \epsilon_0)E = \frac{(\rho-a)\epsilon_0 b U_0}{(b-a)\rho^2} e_\rho$$

(2) 极化电荷体、面密度

在 $\rho=a$ 处, 极化电荷面密度为

$$\sigma_p = P \cdot e_n = e_\rho \frac{(a-a)\epsilon_0 b U_0}{(b-a)a^2} \cdot (-e_\rho) = 0$$

在 $\rho=b$ 处, 极化电荷面密度为

$$\sigma_p = P \cdot e_n = e_\rho \frac{(b-a)\epsilon_0 b U_0}{(b-a)b^2} \cdot e_\rho = \frac{\epsilon_0 U_0}{b}$$

利用 $\sigma_p = P \cdot e_n$
和 $\rho_p = -\nabla \cdot P$
的定义。

极化电荷体密度为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

这里 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, 而 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{1}{\rho^2} \frac{abU_0}{b-a} \right) = -\frac{abU_0}{(b-a)\rho^3}$

将它代入 ρ_p 的表示式中, 得

$$\rho_p = -\frac{ab\epsilon_0 U_0}{(b-a)\rho^3}$$

(3) 单位长度之电容为

$$C_0 = \frac{\tau}{U_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 b}{b-a}$$

利用电容 $C =$

$\frac{q}{U}$ 的定义。

1-9 在一个圆柱形电容器中, 置有两层同轴的绝缘体, 其内导体的半径为 1 cm, 外导体的半径为 4 cm, 内、外两绝缘层的厚度分别为 1 cm 和 2 cm。内、外导体间的电压为 1 000 V (以外导体为电位参考点)。设有一很薄的金属圆柱片放在两绝缘层之间, 为了使两层绝缘体内的最大场强相等, 问金属圆柱片的电位应为多少?

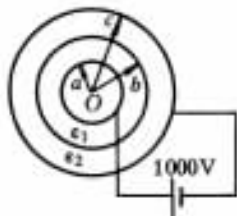


图 1-21 典型题 1-9 图

解 如图 1-21 所示, 设金属圆柱片的电位为 U (电位参考点取在外导体上), 则

$$U = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} \quad (1)$$

内导体与金属圆柱片间的电压为

$$U_0 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{b}{a}$$

现在, 已知内外导体间的电压为 1 000 V。这样, 下面的方程成立

$$1\,000 - U = U_0$$

即

$$1\,000 - U = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{b}{a} \quad (2)$$

联立(1)和(2)式, 解之得

记住圆柱形电容器 (或同轴电缆) 的电场强度 E 和电位 φ 的公式十分重要。

$$\tau_1 = \frac{2\pi\epsilon_1(1\,000 - U)}{\ln(b/a)}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi\epsilon_2 U}{\ln(c/b)}$$

由于

$$E_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1\rho}, \quad E_2 = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_2\rho}$$

欲使 $E_{1\max} = E_{2\max}$ 成立, 则要求在 E_1 中的 $\rho = a$, E_2 中的 $\rho = b$ 时 E_1 与 E_2 相等, 即

$$\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1 a} = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_2 b}$$

代入 τ_1 和 τ_2 并化简, 得

$$\frac{U}{b\ln(c/b)} = \frac{1\,000 - U}{a\ln(b/a)}$$

即

$$\frac{U}{2\ln 2} = \frac{1\,000 - U}{\ln 2}$$

解之得

$$U = 667 \quad \text{V}$$

判定最大场强

$E_{1\max}$ 和 $E_{2\max}$ 出现的地方。

1-10 同轴电缆的结构如图 1-22

所示, 在半径为 a 的圆柱心外边包以两层同轴的绝缘层, 两层绝缘层的交界面的半径为 b 。整个结构被内半径为 c 的金属屏蔽所包围。内层介质的介电常数为 ϵ_1 , 外层为 ϵ_2 , 且 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ 。设 c 为已知, 要使两层绝缘体中的最大场强相等, 且在交界面 b 上出现场强的极值, 问应怎样选择半径 a 和 b ?



图 1-22 典型题

1-10 图

解 由于对称关系, 场强仅是坐标 ρ 的函数 (设电缆很长)。

(1) 根据高斯定律, 可以求得 ϵ_1 区和 ϵ_2 区中的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\rho}, \quad E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2\rho}$$

这里, τ 为内导体表面单位长度上的总电荷。

根据题意, 要使两层绝缘体中的 $E_{\max}$ 相等, 由于

同轴电缆中电场强度 E 和电位 φ 的公式。

判定 $E_{\max}$ 出现

$$E_{1\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1 a}, \quad E_{2\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2 b}$$

所以

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_1 a} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2 b}$$

解之得

$$a = b \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

(2) 设金属屏蔽层为电位参考点, 则 ϵ_2 区的电位

$$\varphi_2 = \int_{\rho}^c \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2 \rho} d\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{c}{\rho}$$

第一层介质中的电位

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{b}{\rho}$$

内导体与金属屏蔽层之间的电压

$$U_{ac} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{c}{b}$$

由此式可得出 τ 的表达式, 并将 τ 代入 $E_{2\max}$ 的表达式中, 得

$$E_{2\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2 b} = \frac{U_{ac}}{2\pi\epsilon_2 b \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right)}$$

将 $a = b \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ 代入上式, 得

$$E_{2\max} = \frac{U_{ac}}{b \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \ln \frac{c}{b} \right)}$$

将 $E_{2\max}$ 对 b 求导数, 并令 $\frac{\partial E_{2\max}}{\partial b} = 0$, 即得电场出现极值的条件

$$\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{\epsilon_2} = 0$$

解后得

$$b = \frac{c}{e} (\epsilon_1 / \epsilon_2)^{\epsilon_2 / \epsilon_1}$$

而

$$a = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} b = \frac{c \epsilon_2}{\epsilon_1 e} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^{\epsilon_2 / \epsilon_1}$$

的地方并得到 $E_{1\max}$ 和 $E_{2\max}$ 的表达式, 然后对 b 求导数, 得极值条件。

由上述两个式子选择 a 和 b 的尺寸,能满足题中的要求。

1-11 一同轴电缆的内导体半径为 a ,外导体内半径为 b ,电缆内充满击穿强度一定的均匀电介质。在 b 一定的条件下,改变 a 时电缆的耐压也将会改变。试求电缆两导体间可忍受最大电压时的 a 值。

解 分析:由于电缆内的场强与半径成反比,所以在内导体表面处介质中场强最大。介质击穿现象应先发生在此表面上。

在 b 一定,电介质的击穿强度一定时,当 a 值减小而使介质厚度 $(b-a)$ 增大时,两导体间的耐压将增大,但同时也将使内导体表面的场强增大。当 a 值增大而使介质厚度 $(b-a)$ 减小时,耐压将减小,但同时也将使导体表面的场强减小。所以,并不是 a 值越小耐压越高,也不是 a 值越大耐压越小。 a 值应存在一个使耐压达到最大的值。

由高斯定律可得,电介质中的场强

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} e_\rho \quad (a < \rho < b)$$

显然, E 是 ρ 的单调下降函数,电介质中场强的最大值

$$E_{\max} = E \Big|_{\rho=a} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon a} \quad (1)$$

电缆内外导体间的电压

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad (2)$$

把式(1)代入式(2),可得 $b, E_{\max}$ 一定时,电压 U 与内导体半径 a 之间的函数关系

$$U = E_{\max} a \ln(b/a) \quad (3)$$

现在 a 是变量, U 不是 a 的单调函数,它存在极值。为了求出 a 取什么数值时电压 U 为最大,则令

$$\frac{dU}{da} = E_{\max} \left(\ln \frac{b}{a} - 1 \right) = 0$$

由此得

$$a = \frac{1}{e} b$$

同心球形电容器也有承受最大电压的问题。在设计时,应使内外球壳的半径之比满足一定的条件。

即内导体半径等于外导体半径的 $1/e$ 时, 电缆的耐压值最高

$$\left(\frac{d^2 U}{da^2} = -\frac{E_{\max}}{a} < 0, \text{极大值} \right)。$$

若电介质是 $E_{\max} = 5 \times 10^4 \text{ V/mm}$ 的聚乙烯, $b = 8.16 \text{ cm}$, 则要使电缆耐压最大就需将内导体的半径设计成

$$a = \frac{1}{e} b = \frac{8.16}{2.72} = 3.0 \quad \text{cm}$$

电缆所承受的最大电压为

$$U = E_{\max} a \ln \frac{b}{a} = 5 \times 10^4 \times 30 = 1.5 \times 10^6 \quad \text{V}$$

1-12 同轴圆柱电容器的内导体半径为 a , 外导体半径为 b ; 两导体间区域 $0 < \phi < \phi_0$ 中充填介电常数为 ϵ 的电介质, 如图 1-23 所示。求单位长度电容。

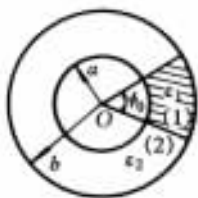


图 1-23 典型题

解 设内导体单位长度表面上带电荷 τ 。分析可见, 电场沿径向, 且在半径为 $\rho (a < \rho < b)$ 的柱面上 E 相等。这种电场分布在介质表面上满足衔接条件, 且仍可由高斯定律求电场。取单位长度柱面, 有

1-12 图

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\phi_0} \epsilon E \rho d\phi + \int_{\phi_0}^{2\pi} \epsilon_0 E \rho d\phi = \tau$$

由此得

$$\epsilon E \phi_0 \rho + \epsilon_0 E (2\pi - \phi_0) \rho = \tau$$

于是

$$E = \frac{\tau}{[\epsilon \phi_0 + \epsilon_0 (2\pi - \phi_0)] \rho} \quad (a < \rho < b)$$

内外导体间的电压

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{\tau}{\epsilon \phi_0 + \epsilon_0 (2\pi - \phi_0)} \ln \frac{b}{a}$$

单位长度电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\epsilon \phi_0 + \epsilon_0 (2\pi - \phi_0)}{\ln(b/a)}$$

分片均匀介质中的电场分布的分析, 常常要想到分界面上的衔接条件。当存在电介质分界面时, 有两种情况可用高斯定律求解: 一是在电介质分界面上只有电场法向分量; 另一是在电介质分界面上只有电场的切向分量。前一种情况 D 成对称分布, 后一种情况 E 成对称分布。应用高斯定律解后一种问题的关键在于, 将 $E_1 = E_2 = E$, $D_1 = \epsilon_1 E$ 和 $D_2 = \epsilon_2 E$ 代入 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ 中。

1-13 内、外半径分别为 a_1 、 a_2 的球形电容器,其间充以介电常数为 ϵ 的电介质。试在下述条件下求电容器内的电位和场强:(1) 已知两极板间的电压为 U ; (2) 已知两极板上的电量为 $\pm Q$ 。

解 (1) 已知两极板间的电压

(a) 用一维泊松方程求解

由于电容器内无电荷分布,而区域的边界条件具有球面对称。取球心为原点的坐标系,则电位 φ 仅为 r 的函数。泊松方程可化简为

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

其解

$$\varphi = \frac{A}{r} + B$$

利用 $r=a_2$ 处, $\varphi=0$; $r=a_1$ 处, $\varphi=U$ 的边界条件;不难确定出

$$A = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} U, \quad B = \frac{-a_1}{a_2 - a_1} U$$

所以

$$\varphi = \frac{a_1 U}{a_2 - a_1} \left(\frac{a_2}{r} - 1 \right)$$

$$E = -\nabla\varphi = \frac{a_1 a_2 U}{a_2 - a_1} \frac{1}{r^2} e_r$$

(b) 用高斯定律求解

由于电量未知,需设两极板上所带的电量为 $\pm Q$ 。在此情况下,不难判断,在极间任一与球形电极同心的球面上,各点的场强的数值应当相等,场强的方向沿径向。由高斯定律,求得

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} e_r$$

电位分布

$$\varphi = \int_r^{a_2} E \cdot dl = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_2} \right)$$

由于已知的是 U ,而不是 Q ,故应将 E 和 φ 中的 Q 换成 U 。注意到

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$$

直接积分法与高斯定律的比较。这个例子不仅反映出两种方法的类似之处,而且还反映出它们的不同特点。究竟选用哪种方法求解,应根据问题所给定的条件决定。

可得

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon} = \frac{a_1 a_2 U}{a_2 - a_1}$$

所以

$$\varphi = \frac{a_1 U}{a_2 - a_1} \left(\frac{a_2}{r} - 1 \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{a_1 a_2 U}{a_2 - a_1} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

(2) 已知两极板的电量为 $\pm Q$

(a) 用一维泊松方程求解

由于电荷在两极板上均匀分布, 电位 φ 只是 r 的函数, 其解仍为

$$\varphi = \frac{A}{r} + B$$

令 $r = a_2$ 处, $\varphi = 0$, 应有 $0 = \frac{A}{a_2} + B$ 。在 $r = a_1$ 处, 由已知条件应有

$$Q = -\epsilon \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = 4\pi\epsilon A$$

由此可得

$$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon}, \quad B = \frac{-Q}{4\pi\epsilon a_2}$$

所以

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_2} \right)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

(b) 用高斯定律求解

在电容器中, 作一半径为 r 的与极板同心的球面为高斯面, 有

$$4\pi r^2 D = Q$$

所以

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\varphi = \int_r^{a_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_2} \right)$$

1-14 一个半径为 a 的电介质球(介电常数为 ϵ), 其中的极化强度 $P = \frac{K}{r} e_r$ 。(1) 计算极化电荷的体密度和面密度;
(2) 计算自由电荷体密度;(3) 计算球内、外的电位。

解 (1) 极化电荷体密度

$$\rho_p = -\nabla \cdot P = -\frac{K}{r^2}$$

极化电荷面密度

$$\sigma_p = P \cdot e_r \big|_{r=a} = \frac{K}{a}$$

(2) 由 $D = \epsilon_0 E + P$, 有

$$\nabla \cdot D = \epsilon_0 \nabla \cdot E + \nabla \cdot P = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \nabla \cdot D + \nabla \cdot P$$

所以, 得 $\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \nabla \cdot D = \nabla \cdot P$ 。又由 $\nabla \cdot D = \rho$ 和 $\nabla \cdot P = -\rho_p$, ρ 为自由电荷体密度, 从而有

$$\rho = -\frac{\rho_p}{\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0} \frac{K}{r^2}$$

(3) 球外的电场强度和电位分别为

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r, \quad \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中: Q 是总自由电荷, 它的值等于 $\iiint_V \rho dV = \frac{\epsilon K}{\epsilon - \epsilon_0} 4\pi a$ 。

电介质球内的电场强度和电位分别为

$$E_i = \frac{P}{\epsilon - \epsilon_0} = \frac{K}{r(\epsilon - \epsilon_0)} e_r$$

$$\varphi_i = \int_r^a E_i \cdot dr + \int_a^\infty E_0 \cdot dr = \frac{K}{(\epsilon - \epsilon_0)} \left(\ln \frac{a}{r} + \epsilon_r \right)$$

极化电荷的体密度、面密度的定义, 电介质本构方程与高斯定律 $\nabla \cdot D = \rho$ 的应用。

1-15 如图 1-24 所示, 电荷体密度为 ρ 的均匀带电球形区域中有一偏心的球形空腔, O_1, O_2 各为球与空腔的中心, 它们相距为 a 。试求此偏心球腔内的电场分布。

解 如果用积分方法求解是很困难的, 用高斯定律直接求解也是不可能的。但若将所给的电荷分布设想为在整个球体内部都充满密度为 ρ 的体电荷, 而在整个小球体内部又有密度为 $(-\rho)$ 的体电荷。对于这样两个对称的电荷分布, 可分

别应用高斯定律求它们产生的电场,然后再叠加,便得到所求的解。即把任意 P 点的电场看作是大实心球体在 P 点产生的场,减去半径为 r 的小实心球体在 P 点的场,计算就简单了。

由高斯定律可求得大、小实心球体在 P 点产生的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r_1 \quad \text{和} \quad E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r_2$$

其中: r_1 和 r_2 分别是从小球心 O_1 、 O_2 到场点 P 的矢径。再按场强叠加原理可得,空腔中的电场强度为

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} a$$

式中: $a = r_1 - r_2 = \overrightarrow{O_1 O_2}$, 是从 O_1 至 O_2 的矢径,是一常矢量。

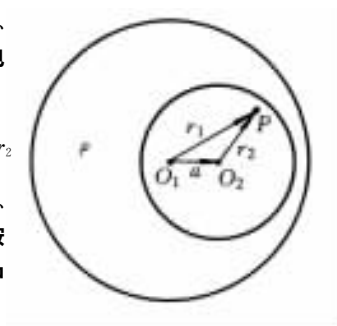


图 1-24 典型题 1-15 图

有些看似不对称性的问题,可以利用叠加原理将其变为几个对称问题。方法是将不对称的电荷分布变为若干个对称的电荷分布,然后分别应用高斯定律求解,再进行叠加。

1-16 设大地上方带有正电荷的雷云与地面之间形成均匀电场 E_0 。试求:

(1) 在图 1-25(a)所示情况下,点 A 处的电位 φ_{A1} ;

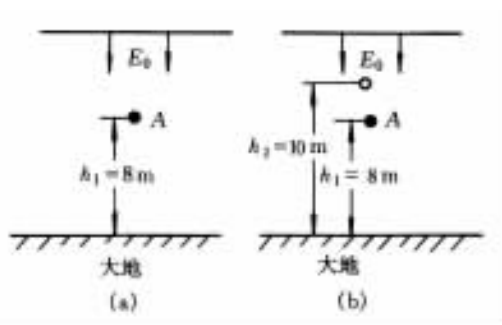


图 1-25 典型题 1-16 图

在电场 E_0 的作用下,由于钢索接地,其上会出现净余感应电荷。

(2) 若在点 A 上方放置有与地面平行的接地钢索(其半径为 $a = 0.5 \text{ cm}$,距地面高度为 $h_2 = 10 \text{ m}$),如图 1-25(b)所

示,再求 A 点处的电位 φ_{A2} ;

(3) 以上两种情况下,点 A 处电位的相对变化 $\Delta\varphi_A/\varphi_{A1}$ 。

解 (1) 点 A 处的电位

$$\varphi_{A1} = h_1 E_0 = 8E_0$$

(2) 设钢索上的感应电荷线密度为 $(-\tau)$,应用镜像法,
($-\tau$) 在钢索上引起的电位为

$$\varphi_{01} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{2h_2}$$

电场 E_0 在钢索处的电位 $\varphi_{02} = h_2 E_0 = 10E_0$ 。由于钢索接地,故有

$$\varphi_{01} + \varphi_{02} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{2h_2} + 10E_0 = 0$$

所以

$$\tau = -\frac{2\pi\epsilon_0 \times 10E_0}{\ln \frac{a}{2h_2}}$$

因此, A 处的电位成为

$$\begin{aligned}\varphi_{A2} &= 8E_0 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} = 8E_0 - \frac{10E_0}{\ln \frac{a}{2h_2}} \ln \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} \\ &= 8E_0 - \frac{10E_0}{\ln \frac{0.005}{20}} \ln \frac{2}{18} = 5.35E_0\end{aligned}$$

(3) 点 A 处的电位相对变化

$$\frac{\Delta\varphi_A}{\varphi_{A1}} = \frac{\varphi_{A1} - \varphi_{A2}}{\varphi_{A1}} = \frac{8E_0 - 5.35E_0}{8E_0} = 33.1\%$$

1-17 已知点电荷 q 位于介质 ϵ_1 与 ϵ_2 分界面上方距离 b 处,左边为一很大的垂直导体壁, q 距离壁面为 a , 已知 $a = \sqrt{3}b$, 如图 1-26 所示。试求 q 受到的静电力。

解 由式(1-35), 镜像电荷

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

如图 1-26(b)所示, 则 q 受力

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_1 (2a)^2} \mathbf{e}_x + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_1 (2b)^2} \mathbf{e}_y$$

先介质平面镜像, 后导体平面镜像。

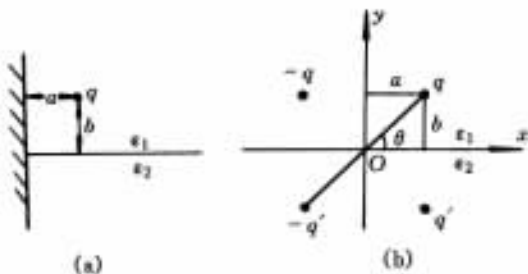


图 1-26 典型题 1-17 图

$$\begin{aligned}
 & -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_1(2\sqrt{a^2+b^2})^2}(\cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y) \\
 & = \frac{q}{16\pi\epsilon_1 b^2} \left[-\left(\frac{q}{3} + \frac{q'a}{8b}\right)\mathbf{e}_x + \left(q' - \frac{q'}{8}\right)\mathbf{e}_y \right]
 \end{aligned}$$

1-18 真空中有一半径为 R_0 的导体球壳(球壳原不带电),有一与导体球壳同心的带电细圆环(如图 1-27 所示),环的半径为 R_1 和电荷线密度为 τ 。试求导体球的电位。

解 为保持球壳为零等电位面,利用镜像法,可在球内放置一带电细圆环($R'_1 < R_0$),这一圆环的电荷线密度由式(1-36),即由下式求得

$$\tau'R'_1 d\theta = -\frac{R_0}{R_1} \tau R_1 d\theta$$

所以
$$\tau' = -\frac{R_0}{R'_1} \tau$$

球内细圆环所带之总电荷为

$$q' = 2\pi R'_1 \tau' = -2\pi R_0 \tau$$

由于球壳不接地,又不带电,故还需在球心 O 点放一与 q' 数值相等、而符号相反的电荷($-q'$),才能使球保持等电位,因而导体球壳的电位

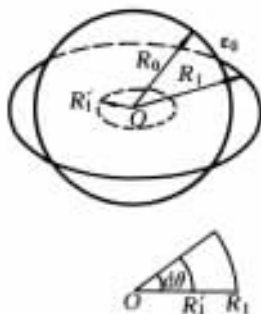


图 1-27 典型题 1-18 图

将带电圆环看成是许多个元电荷段 $\tau R_1 d\theta$, 每个元电荷段当作点电荷处理,再应用镜像法。

$$\varphi = -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{\tau}{2\epsilon_0}$$

1-19 在内半径为 a , 外半径为 c 的导体球壳中, 距球心为 $b(b < a)$ 处有一点电荷 q , 如果: (1) 球壳接地; (2) 球壳不接地, 且带有总电量为 Q 的电荷。试在这两种条件下, 求任一点的电位及 q 所受的力。

解 因为静电场中导体内部 $E=0$, 球壳中有一点电荷 q 时, 不管其位置如何, 恒有 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 其中 S 为球壳层中所取之闭曲面。所以壳内壁 ($r=a$) 上必分布有与 q 异号但量值相等的面电荷, q 发出的电力线全部终止于内壁, 即这两部分电荷产生的电场限于内壁所围区域之内。又由于整个球壳本身是电中性的, 所以球壳外表面 ($r=c$) 必感应出总量与 q 相等且同号的面电荷, 此电荷均匀分布于外表面以使壳层内 $E=0$ 。如果另有外加电荷 Q , 也只能均匀分布于表面。如果球壳接地, 外表面的感应电荷消失, 球壳电位为零, 但腔中的电场不变。根据以上讨论, 可以方便地得到所求解。

(1) 球壳接地

$r \geq a, \varphi = 0, r = a$ 为零电位面, $r < a$ 区域中的电位由 q 及球面 $r=a$ 上的感应电荷所产生。按镜像法, 感应电荷可以用如图 1-28 所示的镜像电荷 q' 来代替, 且

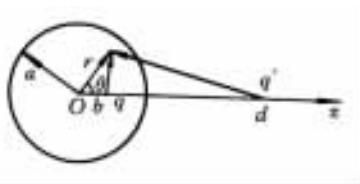


图 1-28 典型题 1-19 图

$q' = -\frac{a}{b}q$, q' 距球心的距离 $d = \frac{a^2}{b}$, 而电位为

$$\varphi = \begin{cases} 0 & (r \geq a) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta)^{1/2}} - \frac{a/b}{[r^2 + (\frac{a^2}{b})^2 - 2r(\frac{a^2}{b})\cos\theta]^{1/2}} \right\} & (r \leq a) \end{cases} \quad (1)$$

q 所受的力, 可以看成 q' 的作用, 因此有

这是一个点电荷 q 在球壳内的镜像问题。此时, 应注意球壳内、外空间电场分布的特性。

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(d-b)^2} = -\frac{q^2 ab}{4\pi\epsilon_0(a^2 - b^2)^2} \quad (2)$$

负号表示力指向镜像电荷,即为吸引力。

(2) 球壳不接地,且带有总电量为 Q

求电位时,可以利用叠加原理,在(1)的基础上,加上外表面上的感应电荷 q 及外加电荷 Q 产生的电位。如前所述, Q 、 q 均匀分布于外表面,所以单独由这些电荷产生的电位为

$$\varphi' = \begin{cases} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 c} & (r \leq c) \\ \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r \geq c) \end{cases}$$

加上式(1)所示的电位,即得所求解。

前面已经指出,球壳外表面上的电荷在 $r < c$ 区域中的电场为零,所以现在 q 所受力不变,仍如式(2)所示。

1-20 如图 1-29 所示,接地无限大导体平面上有一半径为 a 的突起半圆球,该导体面与 $yo z$ 面重合(与纸面垂直),以 x 轴为界,上、下空间分别充填 ϵ_1 和 ϵ_2 的电介质, P 点放一点电荷 q , P 点的坐标为 $(x_0, y_0, 0)$ 。当用镜像法研究 ϵ_1 中的电场时,问镜像电荷的大小和位置各为何?

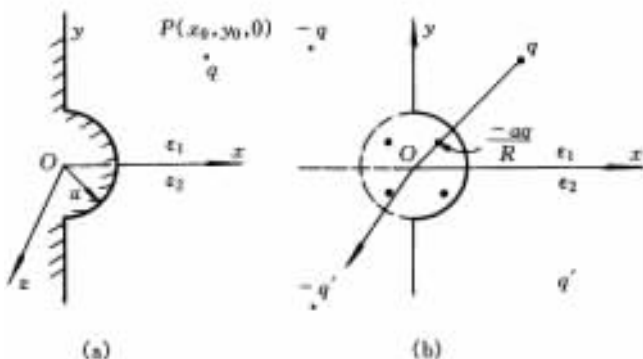


图 1-29 典型题 1-20 图

分别应用介质平面、导体平面和球面镜像。

解 如图 1-29 所示,将介质全部换为 ϵ_1 ,并令 $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$,则 7 个镜像电荷的大小和位置分别为:

$-q$ 在 $(-x_0, y_0, 0)$ 点;

q' 在 $(x_0, -y_0, 0)$ 点;

$-q'$ 在 $(-x_0, y_0, 0)$ 点;

$-\frac{aq}{R}$ 在 $\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 x_0, \left(\frac{a}{R}\right)^2 y_0, 0\right]$ 点;

$\frac{aq}{R}$ 在 $\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 (-x_0), \left(\frac{a}{R}\right)^2 y_0, 0\right]$ 点;

$-\frac{aq'}{R}$ 在 $\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 x_0, \left(\frac{a}{R}\right)^2 (-y_0), 0\right]$ 点;

$\frac{aq'}{R}$ 在 $\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 (-x_0), \left(\frac{a}{R}\right)^2 (-y_0), 0\right]$ 点。

式中: $q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$ 。

1-21 如图 1-30 所示,一半径为 a 的导体球壳,其内部的一半充填电介质。在对称轴上离电介质平面 $\frac{a}{3}$ 处,点电荷不受镜像力作用。试证:电介质的相对介电常数为 $\epsilon_r = 1.54$ (精确到 3 位有效数字)。

解 如图 1-30(b)

所示,设置镜像电荷 q', q_1 和 q'_1 ,即可满足球面和分界面的边界条件。这些镜像电荷及其位置分别为

$$d = \frac{a^2}{a/3} = 3a, q' = -\frac{d}{a} q = -\frac{3a}{a} q = -3q$$

$$q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} q, q'_1 = -\frac{d}{a} q_1 = -\frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} 3q$$

q_1, q'_1 的位置分别与 q, q' 的位置对称于分界面。3 个镜像电荷在点电荷 q 处产生之场强为 0,则 q 不受镜像力作用,即

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{\left(\frac{2}{3}a\right)^2} - \frac{q'}{\left(3a - \frac{a}{3}\right)^2} + \frac{q'_1}{\left(3a + \frac{a}{3}\right)^2} \right] = 0$$

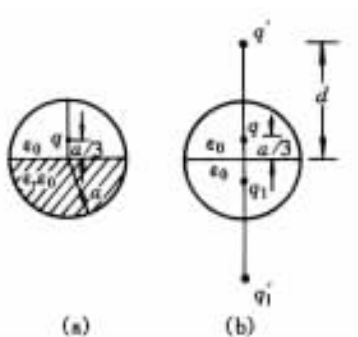


图 1-30 典型题 1-21 图

先介质平面镜像,后球面镜像,或者相反。

$$\frac{\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r}q}{\frac{4}{9}} + \frac{3q}{(3-\frac{1}{3})^2} - \frac{\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r}3q}{(3+\frac{1}{3})^2} = 0$$

解之得

$$\epsilon_r = 1.54$$

1-22 如图 1-31 所示,一半径为 a 的导体球,放置在一无限大接地导体平板上方,球心与导体平板间距离为 b 。证明导体球与导电平板间的电容

$$C = 4\pi\epsilon_0 a \left(1 + r + \frac{r^2}{1-r^2} + \dots \right)$$

式中: $r = \frac{a}{2b}$ 。

解 将地面看成导体平面,由于球及地面的电荷分布均是未知的,不可能直接由电荷来求电场及球、地间的电位差,并从而求出电容。但当球离地面甚远而可将它看成孤立导体球时,其电位 φ_0 与所带电荷 q 的关系为 $\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$,即求电位时可认为电荷集中于球心,此孤立球的电容为

$$C_0 = \frac{q}{\varphi_0} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (1)$$

当球在地面附近时,地面上将有反号的感应电荷,从而使球电位变小。要维持电位不变,则电荷要增加,设此时的电荷为 Q ,则导体球对地的电容是

$$C = \frac{Q}{\varphi_0}$$

由式(1),上式可以写成

$$C = \frac{Q}{q} 4\pi\epsilon_0 a = \frac{Q}{q} C_0 \quad (2)$$

可见 C 取决于比值 $\frac{Q}{q}$,此值可由镜像法求出,只要所得镜像电荷能使球电位为 φ_0 ,地面电位为 0,便是所需的解。

仅在球心的点电荷 q 可使球面电位为 φ_0 ,但不能使地面

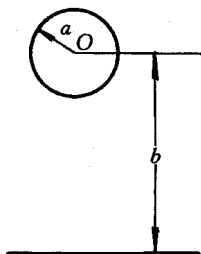


图 1-31 典型题

1-22 图

这是一个多重镜像问题。若边界面不是单一的平面、球面或圆柱面,而是由它们复合成的边界面,对这种问题仅由一个像电荷就不能满足边界条件。为了保证满足边界条件,不仅需要找出原来电荷的像电荷,还需要找到镜像电荷的镜像电荷,即多重镜像。

电位为 0。在地面下 b 处加 $(-q)$, 可使地面 $\varphi=0$, 但又使球面电位偏离 φ_0 。由镜像法知, $(-q)$ 在球面的电位可以由镜像电荷 q_1 来抵消。由式(1-36), 应有 $q_1 =$

$\frac{a}{2b}q$, 并位于球心下方 $d_1 = \frac{a^2}{2b}$ 处, 如图



1-32所示。然而, 现在 q_1 又破坏了地面的零电位, 但由于 $q_1 < q$, 故其影响要小于单由 q 所引起的。再在地面下 $b - \frac{a^2}{2b}$



处引入 $(-q_1)$, 可使地面恢复零电位。接着在球心下引入电荷 $q_2 = \frac{q_1 a}{2b - d_1}$, 又可

图 1-32 典型题

1-22 解图

使球面电位回升到 φ_0 。将上述过程无限继续下去, 可得点电荷的无限系列: $q > q_1 > q_2 > q_3 \dots$ 。可以证明, 这些电荷产生的由无限项级数表示的电位, 维持球电位为 φ_0 时球上的总电荷是其中的镜像电荷之和, 即

$$Q = q + q_1 + q_2 + \dots$$

将 q, q_1 等的表示式代入上式得

$$Q = 4\pi\epsilon_0 a\varphi_0 \left(1 + \frac{a}{2b} + \frac{a^2}{4b^2 - a^2} + \dots \right)$$

由式(2)得电容

$$C = 4\pi\epsilon_0 a \left(1 + r + \frac{r^2}{1 - r^2} + \dots \right)$$

式中: $r = \frac{a}{2b}$ 。

1-23 将介电常数为 ϵ , 内、外半径分别为 a, b 的介质球壳从无限远处移至真空中点电荷的电场中, 并设点电荷位于其球心, 求在此过程中电场力所作的功。

解 没有损耗时, 介质球壳移入点电荷的场中的前后, 静电能量的变化量应等于电场力所作的功。因球对称, 移入介质球壳前后均有

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} e_r$$

仅在区域 $a < r < b$ 中, E 及 W_e 因移入介质而变。在此区域中, 两种情况下的能量密度是

直接计算球壳移动过程中电场力做功是困难的, 但利用能量守恒概念, 要方便得多。

$$w'_{e1} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{D^2}{2\epsilon_0}, \quad w'_{e2} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{D^2}{2\epsilon}$$

介质球壳移入前后静电能量的减少量,即为电场力所作的功

$$\begin{aligned} \Delta w_e &= \iiint_V (w'_{e1} - w'_{e2}) dV = \int_a^b \frac{(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2 (b-a)(\epsilon_r - 1)}{8\pi a b \epsilon} \end{aligned}$$

可以证明:当真空中的电荷分布不变时,在场域中引入任何形状的电介质,静电能量都将变小。

1.4 自我检测题

题 1.1 内半径为 R_1 、外半径为 R_2 的两同心球壳构成的球形电容器,充填均匀电介质,电介质的击穿场强为 E' ,两球间电压为 U 。求:

- (1) 内球的表面电场强度为最小的条件;
- (2) 电介质被击穿的条件。

(答案: (1) $R_1 = \frac{R_2}{2}$; (2) $R_2 < \frac{4U}{E'}$)

题 1.2 在自由空间中,有一半径为 5 cm 的金属球,其上带有 $1 \mu\text{C}$ 的正电荷,在距球心 15 cm 处另外有一正的点电荷,电量也是 $1 \mu\text{C}$ 。求:

- (1) 球心的电位;
- (2) 球外点电荷的作用力;
- (3) 保持球上电荷的符号不变,而仅改变其数值,球对正的点电荷有无可能吸引? 如要成为吸引,条件如何?

(答案: (1) $2.4 \times 10^5 \text{ V}$; (2) 0.37 N ; (3) 球心的电荷小于 $0.03 \mu\text{C}$)

题 1.3 一平行板电容器,极板面积为 S ,一板接地,另一板平移,当板间间隔为 d 时,将之充电至电压为 U_0 ,然后移去电源,使极板间隔增至 nd 。忽略边缘效应。试求:

- (1) 两极板间的电压;
- (2) 计算并证明此时电容器储能的增加等于外力所做的功。

(答案: (1) $U = nU_0$; (2) 略)

题 1.4 一无限大平面,开有一个半径为 a 的圆洞,设平面均匀带电,电荷面密度为 σ 。试求这洞的轴线上离洞心为 x 处的电场强度。

(答案: $\frac{\sigma x}{2\epsilon_0 (a^2 + x^2)^{1/2}}$)

题 1.5 今有一导体球, 半径为 a , 旁边置一点电荷 q , 距离为 d , 且已知 $d = 3a$, 球外介质为空气。试求:

(1) 若导体球带电总量为 0, 球表面何处电场强度最大?

(2) 若导体球带电总量为 Q , 球表面何处电场强度最大?

(答案: (1) 球面最靠近 q 之处, $E_{\max} = -0.167 \times \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}$;

(2) 球面与 q 相距最远处, $E_{\max} = 0.3 \times \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}$)

题 1.6 两同心金属球壳, 半径分别为 a 和 b , 中间电介质 ϵ_1 和 ϵ_2 的分界面也为同心球面, 其半径为 c 。电介质 ϵ_1 中有体密度为 ρ 的均匀分布电荷。内球上的电量为 Q 。外球壳上的电量为 $(-Q)$ 。试写出与此静电场对应的边值问题。

(答案:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_1} & (\text{在电介质 1 中}) \\ \nabla^2 \varphi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_2} & (\text{在电介质 2 中}) \\ \oint_S \left(-\epsilon_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) dS = Q & (\text{内球壳表面处}) \\ \left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \end{array} \right\} & (r = c \text{ 处}) \\ \varphi_1 \Big|_{r=a} = 0 & (\text{电位参考点取在内球表面处}) \end{array} \right.$$

题 1.7 无限大导电平板, 厚为 a , 板上部介质为空气 $\epsilon_1 = \epsilon_0$ 。板下部介质的介电常数 $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$, 空气中放置 q_1, q_2 两个点电荷, 位置如图 1-33 所示。求空气中各点的电位 φ (参考点选在平板上) 和点电荷 q_1 所受的电场力。

(答案: (1) 板上方: 镜像电荷位于下方与板上表面的对称的点, 其中的电场由 q_1, q_2 和 $(-q_1), (-q_2)$ 共同产生, 具体表达式略;

(2) 板下方: $E=0, \varphi=0$;

(3) 点电荷 q_1 受 $q_2, (-q_1)$ 和 $(-q_2)$ 的共同作用力, 表达式略)

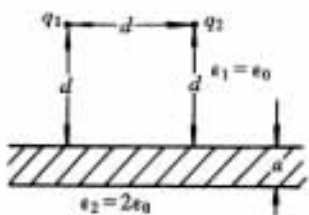


图 1-33 自我检测题 1.7 图

题 1.8 在图 1-34 所示平行板的电容器中, 有体密度为 ρ 的均匀分布电荷。板间电压值为 U_0 。试问下列电位表达式中哪一个是该电场问题的解答。

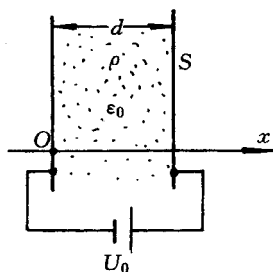


图 1-34 自我检测题 1.8 图

- a. $\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}x^2 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0}d\right)x$;
- b. $\varphi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0}\right)x + \frac{1}{3}U_0$;
- c. $\varphi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0}d\right)x$ 。

(答案: c)

题 1.9 一无限长直金属圆柱薄壳, 其半径 $a = 0.3 \text{ m}$, 平行放置于地面上空, 圆柱壳与地面间的电压为 U_0 , 轴线与地面间的距离为 h 。在圆柱薄壳内离轴线 $r_0 = 0.1 \text{ m}$ 处, 平行放置一长直线导线, 其截面积可以忽略, 电荷线密度为 τ , 如图 1-35 所示。求:

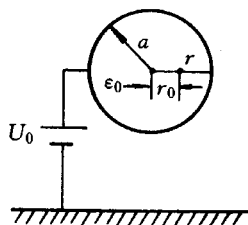


图 1-35 自我检测题 1.9 图

- (1) 圆柱薄壳内部各点的 E 和 φ ;
- (2) 圆柱薄壳外部与地面间各点的 E 和 φ 。

(答案: (1) $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_1}e_{\rho_1} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_2}e_{\rho_2}$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

这里, $(-\tau)$ 位于圆柱薄壳之外的柱轴与 $(+\tau)$ 之连线的延长线上的一点, 距轴线的距离为 $\frac{R^2}{r_0}$ 。 ρ_1 和 ρ_2 分别是计算点与 $(+\tau)$ 和 $(-\tau)$ 的距离。

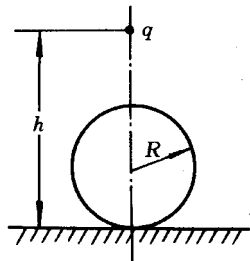
$$(2) E = \frac{U_0}{\ln \frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}} \left(\frac{1}{\rho_1} e_{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} e_{\rho_2} \right)$$

$$\varphi = \frac{U_0}{\ln \frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

其中 $h = 4.0 \text{ m}$, $a = 0.3 \text{ m}$, $b = \sqrt{h^2 - a^2}$

图 1-36 自我检测题 1.10 图

题 1.10 一点电荷 q 位于地面上空 h 处, 其正下方是放于地面上半径为 R 的导体球, 如图 1-36 所示。试说明空气中电场的求解方法。



题 1.11 半径分别为 R_1, R_2 的两长直圆筒同轴放置, 其间电压为 U_0 。今在

这两圆筒间、平行放置另一个厚度极薄、半径为 R 的金属长直圆筒, 轴线间距离为 d , 如图 1-37 所示。试问此圆筒的放入对电场有无影响? 并说明求解这个电场的步骤。

题 1.12 一半径为 a 的导体球壳, 同心地置于半径为 b 的接地导体球壳内。一点电荷 q 放在内球壳中距球心为 d 处, 试求大球壳内的电场强度 E 和电位 φ ?

(答案: (1) 应用镜像法求小球壳内的 E 和 φ , 大球壳对小球壳内的电场强度 E 无影响; (2) 小球壳与大球壳之间, 相当于点电荷置于球心处所产生的电场。)

题 1.13 一个半径为 R 的导体球, 球内部有两个小的球形空腔, 如图 1-38 所示。空腔内各有一带电体, 分别带有电荷 q_1 及 q_2 , 那么球外的电场如何计算? 为什么?

题 1.14 一半径为 R 的长直圆柱导体, 平行放置于地面上空。圆柱导体的轴线离地高度为 h , 导体与地面间电压为 U_0 。求:

- (1) 地面上空各点的电位;
- (2) 单位长度上圆柱导体与地面间的电容。

(答案: (1) 先应用镜像法, 再应用电轴法确定电轴位置, 代入有关公式即得结果 (具体表达式

略); (2) $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b+(h-R)}{b-(h-R)}}$, 式中 $b = \sqrt{h^2 - R^2}$)

题 1.15 今有一长直的、水平放置的同轴圆柱形电容器, 其内外导体的半径分别为 a 和 b , 该电容器放在地面上空离地 d 处。开始时, 内导体带有电量 q_1 , 而外导体带有电量 q_2 , 然后用一根细导线把内导体接地, 由细导线引起的电场畸变可忽略, 为了使内导体短接后, 电容器中储存的能量不变, 问原先电量之比该为多少? 设距离 d 远大于 a 和 b 。

(答案: $\frac{q_1}{q_2} = -\frac{\ln(2d/b)}{\ln(2d/a)}$)

题 1.16 有一个半径为 R_1 的导体球, 位于介电常数为 ϵ_1 的均匀电介质内。该导体球内有一个半径为 R_2 的球形空腔, 空腔内充填介电常数为 ϵ_2 的均匀电介质。球形空腔的中心与导体球的球心相距为 d 。在空腔内, 离空腔中心为 a 处 (a

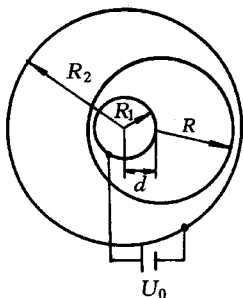


图 1-37 自我检测题 1.11 图

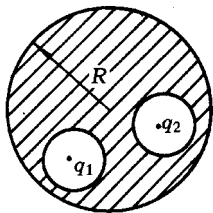


图 1-38 自我检测题 1.13 图

$< R_2$) 放一个点电荷 q 。求整个空间的电场强度 E 和电位 φ 。

(答案:(1) 导体球外的电场相当于点电荷置于导体球表面,在其外部的电场(具体表达式略);(2) 导体球体中的电场为零;(3) 球形空腔内的电场应采用镜像法求解(具体表达式略))

第 2 章 恒定电场

不随时间变化的电流称为恒定电流。在恒定电流的情况下,导电媒质中任一点的电荷分布并不随时间变化,这种电荷产生的电场称为恒定电场。

2.1 基本内容和公式

2.1.1 恒定电场基本方程·分界面上的衔接条件

1. 电流与电流密度

电荷的定向运动形成电流。电流的强弱可用电流强度来描述。其数学表示式为

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (2-1)$$

为了进一步描述导电媒质中每一点处电荷运动的情况,引入电流密度的概念。不同分布的电荷运动时,所形成的电流密度与它们相应的元电流段的表达式,如表 2.1 所示。

表 2.1 电流密度与元电流段

	电流密度(或线电流)	元电流段
电流面密度	$J = \rho v \quad A/m^2$	$J dV \quad Am$
电流线密度	$K = \sigma v \quad A/m$	$K dS \quad Am$
线 电 流	$I = \tau v \quad A$	$I dl \quad Am$

电流密度与相应的电流之间具有以下关系

$$I = \int_l (K \cdot e_n) dl \quad (2-2)$$

$$I = \iint_S J \cdot dS \quad (2-3)$$

2. 电源、恒定电场

要在导电媒质中维持恒定电流,必须存在一个恒定的电场,这样必须将导电媒质与恒定电源相接,由电源不断地提供功率损耗所需的能量。

电源的特性可用它的局外场强 E_e 表示, E_e 与电源电动势的关系为

$$\mathcal{E} = \int_l E_e \cdot dl \quad (2-4)$$

恒定电场是由恒定电源产生的。我们可以将恒定电场分为两部分;一是导电媒质中的恒定电场;另一部分是导电媒质周围电介质中的电场。

3. 欧姆定律和焦耳定律的微分形式

在导电媒质中,电流密度与电场强度间的关系为

$$J = \gamma E \quad (2-5)$$

式(2-5)称为欧姆定律的微分形式。

当导电媒质中有电流流动时,必伴随有功率损耗,其体密度为

$$p = J \cdot E \quad (2-6)$$

式(2-6)称为焦耳定律的微分形式。

4. 恒定电场的基本方程

导电媒质中的恒定电场(电源外)基本方程的积分形式为

$$\oiint_S J \cdot dS = 0 \quad (2-7)$$

$$\oint_l E \cdot dl = 0 \quad (2-8)$$

而微分形式为

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (2-9)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (2-10)$$

基本方程反映了恒定电场的两个基本性质:电流连续性;导电媒质中的恒定电场是保守场。

5. 分界面上的衔接条件

两种不同导电媒质分界面上的衔接条件为

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (2-11)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2-12)$$

恒定电场的折射定律为

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad (2-13)$$

2.1.2 恒定电场的边值问题 · 静电比拟

1. 恒定电场的边值问题

在各向同性的线性导电媒质中, 电位满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{2-14}$$

在两种不同导电媒质分界面上, 电位函数满足的衔接条件为

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{2-15}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \tag{2-16}$$

恒定电场(电源外)问题都可归结为在给定边值条件下, 求解拉普拉斯方程的边值问题。

2. 静电比拟

导电媒质中的恒定电场(电源外, $E_e=0$ 处)和静电场(无电荷分布, $\rho=0$ 处)之间有相似的关系, 如表 2.2 所示。

由表 2.2 中可以看出:(1) 表征两种场的方程具有相同的形式;(2) 两种场中对应的物理量是对偶量, 它们在各自的方程和衔接条件中有相同的地位;(3) 如果两种场具有相似的边界条件, 若已知一种场的解, 通过对偶量替换, 就可以得到另一种场的解, 这种方法称为静电比拟法。

表 2.2 恒定电场($E_e=0$ 处)与静电场($\rho=0$ 处)的情况比较

恒定电场(电源外)	静电场($\rho=0$ 处)	对应物理量
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$	$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$	$\varphi \leftrightarrow \varphi$
$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$	$\boldsymbol{J} \leftrightarrow \boldsymbol{D}$
$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$	$\gamma \leftrightarrow \epsilon$
$\oiint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = I$	$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q$	$I \leftrightarrow q$
$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$	$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$	
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$	
$J_{2n} = J_{1n}$	$D_{2n} = D_{1n}$	
$E_{1t} = E_{2t}$	$E_{1t} = E_{2t}$	

2.1.3 电导和接地电阻

1. 电导

在导电媒质中,两电极间的电导 G 定义为

$$G = \frac{I}{U} \quad (2-17)$$

式中: I 为两电极间流过的电流; U 为两电极间的电压。对于多电极系统,需要引入部分电导的概念。当边界几何形状相同的条件下,它可与静电系统中的部分电容相互比拟。

2. 接地电阻

电流由接地装置流入大地,流向远处或另一接地体所遇到的电阻称为接地电阻。接地电阻的计算,要分析大地中电流的分布。由于接地电阻的存在,当有电流流过大地时,在行人两足之间形成的电压称为跨步电压。在电力系统的接地器附近,要注意危险区。

2.2 重点与难点

深刻理解恒定电流和恒定电场的概念,掌握微分形式的欧姆定律、焦耳定律、恒定电场的基本方程和分界面上的衔接条件,能正确地分析和求解恒定电场的问题,都是这一章的重点。掌握电导和接地电阻的计算方法及恒定电场与静电场的静电比拟方法的应用,则是这一章的难点。

2.2.1 恒定电场与静电场的异同点

静电场是由相对于观察者静止的且电量不随时间变化的电荷所引起的电场。恒定电场是在恒定电流情况下,由分布不随时间变化但做恒定流动的电荷所引起的电场。

在静电场中,导体内部的电场强度为零,导体是等位体,导体表面是等位面,电场强度垂直于导体表面。而在恒定电场中,导电媒质内部的电场强度不为零,导电媒质不再是等位体,其表面也不再是等位面,电场强度也不再垂直于导电媒质的表面。例如,在导电媒质(媒质 1)与理想介质(媒质 2)的分界面上,由于衔接条件 $J_{1n} = J_{2n}$ 、 $J_{2n} = \gamma_2 E_{2n} = 0$ ($\gamma_2 = 0$),所以 $J_{1n} = 0$ 、 $E_{1n} = 0$ 。导电媒质内电场强度沿分界面的切向,即 $E_1 = E_{1t}$ 。再由衔接条件 $E_{2t} = E_{1t}$,可知在理想介质一侧电场强度沿分界面存在切线分量 E_{2t} 。又由于导电媒质一侧存在着恒定流动的面电

荷,此电荷在分界面的理想介质一侧产生电场强度的法线分量 E_{2n} ,因此在理想介质一侧的电场强度 E_2 的方向不垂直于它们的分界面。

由于导电媒质内电荷分布一般未知,故不能用 $\nabla \cdot D = \rho$ 来求解导电媒质内部的电场分布。然而在导电媒质中电流密度 J 比较容易确定,所以将 J 和 E 作为导电媒质中恒定电场的基本场量,用 $\nabla \cdot J = 0$ 和 $\nabla \times E = 0$,作为它们的基本方程。

对于均匀导电媒质(γ 为常数),利用 $\nabla \cdot J = 0$,可以得到其内部不存在自由体电荷密度($\rho = 0$)。但在导电媒质表面或不同导电媒质分界面上,一般存在面电荷分布,其电荷面密度可由分界面上的衔接条件推导出来。

从能量的角度分析,当静电场已经建立起来时,其中各带电体的电量不再随时间变化,也不再需要外界提供能量。而在恒定电场中,导电媒质内的电荷在电场作用下运动要消耗能量,要保持恒定的电流,就必须给导电媒质接上电源,为电荷的恒定流动提供能量。

在某些实际问题中,往往认为良导体表面是等位面。因为良导体的电导率 γ 很大,所以良导体内的 E 很小。在良导体与理想介质分界面上,设良导体为媒质 1,则 $E_{2t} = E_{1t} \ll E_{2n}$,理想介质一侧的 $E_2 \approx E_{2n}$,可以近似把分界面视为等位面,将理想介质中的恒定电场视作静电场。同样,在良导体与不良导体的分界面上,设 $\gamma_1 \gg \gamma_2$,利用恒定电场的折射定律式(2-13),即 $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$,由此可得到 $\theta_2 = 0^\circ$,即不良导体一侧的电场 E_2 几乎垂直于分界面,故也可近似把分界面看作等位面,不良导体中的恒定电场也可视作静电场。

2.2.2 静电比拟

静电比拟的理论依据就是场的惟一性定理。由表 2.2 中可以看出,只要将 J 与 D 、 γ 和 ϵ 相互置换,恒定电场的场方程就变为静电场的场方程。两种场的电位函数均满足拉普拉斯方程,因此如果两种场满足相同的边界条件,也就是说两种场中媒质内导体电极的形状、尺寸、相对位置以及电极上的电位都相同时,这两种场的电位函数必定有相同的解。这样,我们可以通过实验或计算把已经得到的一种场的解,用比拟的方法推广到另一种场中去。应用静电比拟法可以互算电极间的电容和电导;探测复杂几何形状导体间的电位以及应用静电场中的一些方法,来求解恒定电场中的问题等。

2.2.3 电导和接地电阻的计算

1. 电导的计算

通常可采用 3 种方法来计算电导:(1)假设电极间流过电流 I ,然后按 $I \rightarrow J \rightarrow$

$E \rightarrow U \rightarrow G$ 的步骤 (或假设两电极间电压 U , 然后按 $U \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow G$ 的步骤) 求得电导, 这种方法仅适用于场分布具有对称性的情况; (2) 求解恒定电场的边值问题, 得到电位函数 φ , 再按 $\varphi \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow G$ 的步骤计算; (3) 当恒定电场与静电场具有相同的边界条件时, 利用静电比拟, 若已求得静电场中两导体间的电容, 则可由 $\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\epsilon}$ 关系求出两电极间的电导 G 。

2. 接地电阻的计算

接地电阻主要是指电流在大地中流动时所遇到的电阻。由于在远离接地器处, 电流流过的面积大而电流密度很小, 只有在接地器附近电流流过的面积最小, 所以接地电阻主要集中在接地器附近。在计算时, 可以认为电流从接地器流至无限远处, 把接地器视作电极, 无限远处作为零电位点, 这样先求出地中电流的分布, 然后再求出电场的分布。接地电阻为

$$R = \frac{U}{I} \quad (2-18)$$

式中: U 为接地器相对零电位点的电压; I 为经接地器流入大地的电流。

在接地电阻的计算中, 也常用静电比拟的方法。例如: (1) 深埋地中半径为 a 的接地导体球, 由于忽略地面的影响, 又因为 $\gamma_{\text{导体}} \gg \gamma_{\text{土壤}}$, 可以用均匀介质中孤立导体球相比拟。球的电容 $C = 4\pi\epsilon a$, 故电导 $G = 4\pi\gamma a$, 接地电阻 $R = \frac{1}{G} = \frac{1}{4\pi\gamma a}$;

(2) 浅埋地中的接地器, 必须考虑地面的影响。利用镜像法可先求出形状、尺寸、相对位置均相同的导体间的电容, 再利用 $\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\epsilon}$ 可求出相应的接地电阻。如浅埋地中, 可用紧靠地面半球形接地器表示的模型, 先用镜像法视为一个均匀介质中的孤立导体球, 其电容 $C = 4\pi\epsilon a$, 则相应的电导 $G = 4\pi\gamma a$, 由于孤立球相当于两个半球的并联, 其半球的接地电阻应为全球电阻的 2 倍, 故 $R = 2 \times \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\gamma a}$ 。

2.3 典型题解析

2-1 电荷 Q 均匀分布在半径为 a 的球体内部, 球连同电荷一起以某条直径为轴以角速度 ω 旋转。求电流密度并计算分布电流的总和。

解 设球内任一点到球心距离为 r , 转轴与矢径夹角为 θ , 则该点的线速度

$$v = \omega r \sin\theta$$

电荷在球体内均匀分布, 找出任一点绕轴的速度 v , 利用 $J = \rho v$ 即可求解。

球内的电荷体密度

$$\rho = \frac{Q}{(4/3)\pi a^3}$$

该点的电流密度

$$J = \rho v = \frac{3Q\omega r \sin\theta}{4\pi a^3}$$

球内电流为

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{3Q\omega r \sin\theta}{4\pi a^3} r dr d\theta$$

$$I = \frac{3Q\omega}{4\pi a^3} \frac{a^3}{3} \times 2(-\cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

2-2 无限大导电媒质中有恒定电流流过。已知导电媒质中的电场强度为 E , 电导率 $\gamma = \gamma(x, y, z)$ 和介电常数 $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$ 。求媒质中的电荷体密度。

解 因为 $J = \gamma E, \nabla \cdot J = 0$ 可得

$$\nabla \cdot (\gamma E) = \gamma \nabla \cdot E + E \cdot \nabla \gamma = 0$$

$$\nabla \cdot E = -\frac{E \cdot \nabla \gamma}{\gamma}$$

又因为 $\nabla \cdot D = \rho, D = \epsilon E$ 则

$$\rho = \nabla \cdot (\epsilon E) = E \cdot (\nabla \epsilon - \frac{\epsilon \nabla \gamma}{\gamma})$$

化简后, 可得

$$\rho = \gamma E \cdot \left(\frac{\gamma \nabla \epsilon - \epsilon \nabla \gamma}{\gamma^2} \right) = \gamma E \cdot \nabla \frac{\epsilon}{\gamma}$$

这说明在非均匀导电媒质中有体电荷分布。若媒质是均匀的, 即 γ, ϵ 为常数时, $\rho = 0$ 。

2-3 已知 $J = (10y^2 z e_x - 2x^2 y e_y + 2x^2 z e_z)$ A/m² 求:

(1) 穿过面积 $x=3, 2 \leq y \leq 3, 3.8 \leq z \leq 5.2$, 沿 e_x 方向的总电流; (2) 在上述面积中心处电流密度的大小; (3) 在上述面积上 J_x 的平均值。

掌握欧姆定律的微分形式并利用恒定电场的基本方程求解的例子。

熟悉电流密度的定义及它与电流强度之间的关系。

解 (1) 由 $I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

其中 $d\mathbf{S} = dydz\mathbf{e}_x$, 将 $\mathbf{J}$ 代入得

$$I = \int_2^3 dy \int_{3.8}^{5.2} 10y^2 z dz = \int_2^3 5y^2 (5.2^2 - 3.8^2) dy = 399 \text{ A}$$

(2) 该面积中心坐标 $y=2.5, z=4.5, x=3$ 。

所以 $\mathbf{J} = 10 \times (2.5)^2 \times 4.5 \mathbf{e}_x - 2 \times 3^2 \times 2.5 \mathbf{e}_y + 2 \times 3^2 \times 4.5 \mathbf{e}_z$
 $= 281.25 \mathbf{e}_x - 45 \mathbf{e}_y + 81 \mathbf{e}_z \quad \text{A/m}^2$

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{(281.25)^2 + (45)^2 + (81)^2} = 296.121 \text{ A/m}^2$$

(3) J_x 的平均值 $\bar{J}_x$ 为

$$\bar{J}_x = \frac{I}{S} = \frac{399}{(5.2-3.8) \times (3-2)} = 285 \text{ A/m}^2$$

2-4 一平板电容器中有两层媒质, 电导率分别为 γ_1 和 γ_2 。已知第 1 层的厚度为 d_1 , 欲使两层介质的功率损耗相等, 求第 2 层的厚度 d_2 。

解 设第 1 层媒质的功率损耗为 P_1 , 第 2 层媒质的功率损耗为 P_2 , 则

$$P_1 = I^2 / G_1, \quad P_2 = I^2 / G_2$$

要使 $P_1 = P_2$, 则 $G_1 = G_2$ 。利用平板电容器中 $G_1 = \frac{\gamma_1 S}{d_1}, G_2 =$

$\frac{\gamma_2 S}{d_2}$, 则可得到

$$\frac{\gamma_1}{d_1} = \frac{\gamma_2}{d_2}$$

$$d_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} d_1$$

2-5 有一正方体玻璃容器, 容积为 $1\,728 \text{ cm}^3$, 若在相对的内侧贴有两个薄铜片电极, 在容器中充满纯净水, 其电导率 $\gamma = 2 \times 10^{-4} \text{ S/m}$, 比热容 $c = 4.18 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, 若在两电极间加 100 V 电压, 求水温升高的速率。

解 设容器的边长为 d 。因为 $d^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$, 可以求出 $d = 0.12 \text{ m}$ 。

容器内的纯净水是均匀媒质, 则

利用欧姆定律和焦耳定律的例子。

要求水温升高的速率必先知道水中的电功率, 因此应先计算出电流和水中的电导。故利用电压已知先求出电场强度, 进而求出电流密

度,就能计算出电流。

$$E = \frac{U}{d}, \quad J = \gamma E = \frac{\gamma U}{d}$$

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\gamma U}{d} d^2 = \gamma U d$$

水的电阻

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\gamma d}$$

水中的电功率

$$P = I^2 R = \frac{\gamma^2 U^2 d^2}{\gamma d} = \gamma U^2 d$$

水温升高的速率

$$v = \frac{P}{c \cdot m} = \frac{\gamma U^2 d}{c \cdot m} = \frac{10^4 \times 0.12 \times 2 \times 10^{-4}}{4.18 \times 1.728} = 0.033 \quad \text{K/s}$$

2-6 球形电容器的内外半

径分别为 $R_1 = 5 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$, 加有电压 $U = 100 \text{ V}$ 。电容器内有两层均匀介质,其分界面也是同心球面,半径 $R_0 = 8 \text{ cm}$,电介质的电导率分别为 $\gamma_1 = 10^{-10} \text{ S/m}$, $\gamma_2 = 10^{-9} \text{ S/m}$ 。求:球面之间的电流密度、电场强度和电位。

解 根据题意作出图 2-1。

方法(1):利用场的对称性,设内、外

电极之间流过的总电流为 I 。则

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

由 $J = \gamma E$ 可得

$$E_1 = \frac{I}{4\pi\gamma_1 r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_1 \leq r \leq R_0)$$

$$E_2 = \frac{I}{4\pi\gamma_2 r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_0 \leq r \leq R_2)$$

由于

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_0} E_1 dr + \int_{R_0}^{R_2} E_2 dr \\ &= \frac{I}{4\pi} \left[\frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \end{aligned}$$

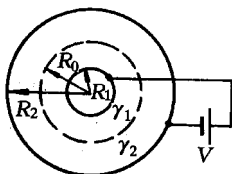


图 2-1 典型题 2-6 图

假设电流为 I , 按 $I \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow U$ 的步骤,由 U 已知,故可解出 I , 进而可求 J 和 E 以及 φ 。

故

$$\frac{I}{4\pi} = \frac{U}{\left[\frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right) \right]} = 1.29 \times 10^{-9} \text{ A}$$

从而

$$\mathbf{J} = 1.29 \times 10^{-9} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{A/m}^2$$

$$\mathbf{E}_1 = 12.9 \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{V/m} \quad (R_1 \leq r \leq R_0)$$

$$\mathbf{E}_2 = 1.29 \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{V/m} \quad (R_0 \leq r \leq R_2)$$

$$\varphi_1 = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_0}^{R_2} E_2 dr = 12.9 \frac{1}{r} - 158.03 \quad \text{V}$$

$$\varphi_2 = \int_r^{R_2} E_2 dr = 1.29 \frac{1}{r} - 12.9 \quad \text{V}$$

方法(2): 直接从恒定电场的边值问题先求出 φ_1 、 φ_2 , 再求电场强度和电流密度。

恒定电场的边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = 0 & (R_1 \leq r \leq R_0) \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 & (R_0 \leq r \leq R_2) \\ \varphi_1|_{r=R_1} = 100 \quad \text{V} \\ \varphi_2|_{r=R_2} = 0 \\ \varphi_1|_{r=R_0} = \varphi_2|_{r=R_0} \\ \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_0} \end{cases}$$

由对称性分析可知, φ_1 、 φ_2 仅为 r 的函数, 建立以球心为坐标原点的球坐标系, 则拉普拉斯方程可写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = 0 \quad (R_1 \leq r \leq R_0)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) = 0 \quad (R_0 \leq r \leq R_2)$$

其通解为

$$\varphi_1 = -\frac{A_1}{r} + A_2 \quad (R_1 \leq r \leq R_0)$$

$$\varphi_2 = -\frac{B_1}{r} + B_2 \quad (R_0 \leq r \leq R_2)$$

利用恒定电场电位函数满足的边值问题可直接求出电位函数 φ , 再利用 $\varphi \rightarrow E \rightarrow J$ 的步骤解答。

利用边界条件确定通解中的待定系数

$$\text{当 } \varphi_1 \Big|_{r=R_1} = 100, \text{得: } 100 = -\frac{A_1}{R_1} + A_2$$

$$\text{当 } \varphi_2 \Big|_{r=R_2} = 0, \text{得: } 0 = -\frac{B_1}{R_2} + B_2$$

$$\text{当 } \varphi_1 \Big|_{r=R_0} = \varphi_2 \Big|_{r=R_0}, \text{得: } -\frac{A_1}{R_0} + A_2 = -\frac{B_1}{R_0} + B_2$$

$$\text{当 } \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_0}, \text{得: } \gamma_1 \frac{A_1}{R_0^2} = \gamma_2 \frac{B_1}{R_0^2}$$

由此方程组可解得

$$A_1 = -12.9, A_2 = -158, B_1 = -1.29, B_2 = -12.9$$

故可得此题的解答为

$$\varphi_1 = 12.9 \frac{1}{r} - 158 \quad (R_1 \leq r \leq R_0)$$

$$\varphi_2 = 1.29 \frac{1}{r} - 12.9 \quad (R_0 \leq r \leq R_1)$$

$$E_1 = -\nabla \varphi_1 = 12.9 \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_1 \leq r \leq R_0)$$

$$E_2 = -\nabla \varphi_2 = 1.29 \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_0 \leq r \leq R_2)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = 1.29 \times 10^{-9} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

2-7 长直同轴电缆,内、外电极半径分别为 R_1, R_3 , 与一电压源相连,如图 2-2 所示。电极间充有介电常数和电导率分别为 ϵ_1, γ_1 和 ϵ_2, γ_2 的两种导电媒质,两种媒质分界面是半径为 R_2 的同轴圆柱面,且 $R_1 < R_2 < R_3$ 。求:(1) 单位长度的漏电流。(2) 两种导电媒质分界面上的自由电荷面密度。

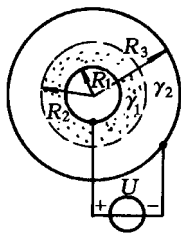


图 2-2 典型题 2-7 图

解 由于电缆内、外电极的电导率远大于其间充填导电媒质的电导率,所以在计算内、外导体间导电媒质中的恒定电场时,可以把内、外电极视为等位体。由对称性可知,媒质中恒定电场仅有径向分量,且 E, J 只与 ρ 有关。在计算单位长

度的漏电导时可用 3 种方法求解。

方法(1): 设单位长度电缆中, 由内导体流向外导体的电流为 I , 则

$$J = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\rho$$

利用分界面上的衔接条件 $J_{1n} = J_{2n}$, 可得

$$J_1 = J_{1n} \mathbf{e}_\rho = J_{2n} \mathbf{e}_\rho = J_2 = J$$

由此可得两种媒质中电场强度为

$$E_1 = \frac{J}{\gamma_1} = \frac{I}{2\pi\gamma_1\rho} \mathbf{e}_\rho \quad (R_1 \leq \rho \leq R_2)$$

$$E_2 = \frac{J}{\gamma_2} = \frac{I}{2\pi\gamma_2\rho} \mathbf{e}_\rho \quad (R_2 \leq \rho \leq R_3)$$

利用 $U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 可得到

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_1 d\rho + \int_{R_2}^{R_3} E_2 d\rho = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right)$$

由此可得

$$J = \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}) \rho} \mathbf{e}_\rho$$

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}) \rho} \mathbf{e}_\rho \quad (R_1 \leq \rho \leq R_2)$$

$$E_2 = \frac{\gamma_1 U}{(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}) \rho} \mathbf{e}_\rho \quad (R_2 \leq \rho \leq R_3)$$

则单位长度的漏电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\gamma_1\gamma_2}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

方法(2): 设两种导电媒质中的电位函数分别为 φ_1 和 φ_2 , 可写出它们满足的边值问题为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (R_1 \leq \rho \leq R_2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (R_2 \leq \rho \leq R_3)$$

$$\varphi_1 \big|_{\rho=R_1} = U$$

假设电流 I , 按 $I \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow U \rightarrow G$ 的步骤求解。

$$\varphi_2 \Big|_{\rho=R_3} = 0$$

$$\varphi_1 \Big|_{\rho=R_2} = \varphi_2 \Big|_{\rho=R_2}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2}$$

微分方程的通解为

$$\varphi_1 = A_1 \ln \rho + B_1 \quad (R_1 \leq \rho \leq R_2)$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln \rho + B_2 \quad (R_2 \leq \rho \leq R_3)$$

代入边界条件确定待定系数,得到

$$\varphi_1 = -\frac{\gamma_2 U \ln \rho}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}} + U \left[1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}} \right]$$

$$\varphi_2 = -\frac{\gamma_1 U \ln \rho}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}} + \frac{\gamma_1 U \ln R_3}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = \frac{\gamma_2 U}{(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}) \rho} \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2 = \frac{\gamma_1 U}{(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}) \rho} \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}) \rho} \mathbf{e}_\rho$$

写出电位函数
满足的边值问题,
求出电位 φ , 按 φ
 $\rightarrow E \rightarrow J \rightarrow I$, 同时
由 $E \rightarrow U$, 最后通
过 $G = \frac{I}{U}$ 可以求
得。

单位长度上通过圆柱面的电流为

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}) \rho} \times 2\pi \rho dz \\ &= \frac{2\pi \gamma_1 \gamma_2 U}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}} \end{aligned}$$

单位长度的漏电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

方法(3): 根据静电比拟法, 与此相同的情况, 同轴电缆线
单位长度的电容

$$C = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \epsilon_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

利用静电比拟

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

将 $C \rightarrow G, \epsilon_1 \rightarrow \gamma_1, \epsilon_2 \rightarrow \gamma_2$, 则单位长度漏电导为

$$G = \frac{2\pi\gamma_1\gamma_2}{\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

进一步求两种媒质分界面上自由电荷的面密度。利用分界面上的衔接条件

$$\begin{aligned}\sigma &= (D_{2n} - D_{1n}) \big|_{\rho=R_2} = (\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n}) \big|_{\rho=R_2} \\ &= \left(\frac{\epsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\epsilon_1}{\gamma_1} \right) J \big|_{\rho=R_2} \\ &= \frac{(\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1) U}{\left(\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \gamma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right) R_2}\end{aligned}$$

相同情况的电缆线我们可以采用静电比拟法,将恒定电场与静电场对偶物理量交换,即可将静电场中得到的结果推广到恒定电场中。

2-8 厚度为 h 的导体平板做成半圆环,如图 2-3 所示。导体的电导率为 γ , 若电极 A、B 的电导率 $\gamma_0 \gg \gamma$, 求半圆环的电阻。如果电极间加电压 U , 求半圆环的功率损耗。

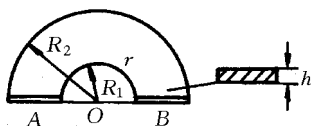


图 2-3 典型题 2-8 图

假设电压 U , 再按 $U \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow R$ 的步骤求得电阻。

解 设 A、B 间的电压为 U , 由对称性分析可知

$$E = \frac{U}{\pi\rho} e_\phi$$

$$J = \gamma E = \frac{\gamma U}{\pi\rho} e_\phi$$

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma U}{\pi\rho} h d\rho = \frac{\gamma h U}{\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

所以半圆环的电阻

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\pi}{\gamma h U \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\text{半圆环的功率损耗 } P = \frac{U^2}{R} = \frac{\gamma h U^2}{\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2-9 两个平行圆柱形铜棒, 轴线间距离为 50 cm, 直径均为 1 cm, 垂直通过厚度为 1 cm 的碳质平面盘, 盘面可以认为很大。已知碳盘的电阻率为 $0.4 \times 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}$, 求铜棒之间碳盘的电阻。

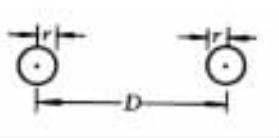


图 2-4 典型题 2-9 图

解 设铜棒轴线间距离为 D , 铜棒的半径为 r , 如图 2-4 所示。

因为 $D \gg r$, 可采用静电比拟法。利用静电场的电轴法先计算单位长度的电容。

设两铜棒单位长度上的电量为 τ 和 $-\tau$ 。则铜棒间的电压为

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D-r}{r} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r}{D-r} = \frac{\tau}{\pi\epsilon} \ln \frac{D-r}{r} \approx \frac{\tau}{\pi\epsilon} \ln \frac{D}{r}$$

单位长度的电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon}{\ln(D/r)}$$

利用静电比拟法 $\frac{C_0}{G_0} = \frac{\epsilon}{\gamma}$, 可得单位长度的电导为

$$G_0 = \frac{\pi\gamma}{\ln(D/r)}$$

由于碳盘厚度 $h = 0.01 \text{ m}$, 所以铜棒之间碳盘的电阻为

$$R = h \frac{1}{G_0} = 5.866 \times 10^{-5} \quad \Omega$$

铜棒的电导率远远大于碳的电导率, 故铜棒可视为等位体, 其表面为等位面。当 $D \gg r$ 时可近似认为等效电轴就是铜棒的几何轴线。采用静电场的电轴法可求出单位长度的电容。

2-10 如图 2-5 所示, 半径为 a 的长直圆柱和无限大平板均由良导体制成, 且平行放置, 圆柱轴线与平板间距离为 h , 其间充满电导率为 γ 的不良导电媒质, 求长直圆柱和无限大平板间单位长度的电阻。

解 采用静电比拟法。先计算相同情况静电系统单位长度的电容。

设板与柱之间的电压为 U ，其中介质的介电常数为 ϵ 。用镜像法可以求出圆柱与像之间相应的电轴位于

$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

处，板与柱间的电压 U 为

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b+h-a}{b-h+a}$$

单位长度的电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b+h-a}{b-h+a}}$$

根据 $\frac{C_0}{G_0} = \frac{\epsilon}{\gamma}$ ，可以得到单位长度的电阻

$$R_0 = \frac{1}{G_0} = \frac{\ln \frac{b+h-a}{b-h+a}}{2\pi\gamma}$$

2-11 由半径为 a 的半球形接地器构成的系统如图 2-6 所示。两接地器之间所加电压为 U ，大地的电导率为 γ 。若 $D \gg a$ ，求：(1) 两电极间的电阻；(2) 流经地中的电流。

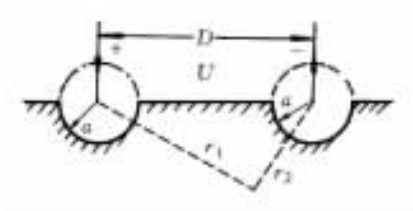


图 2-6 典型题 2-11 图

解 当 $D \gg a$ 时，可以采用孤立导体球电位的计算方法。利用镜像法，作出半球的镜像，如图 2-6 中虚线所示。当流入半球的电流为 I 时，流入全球的电流为 $2I$ 。这样两个孤立导体球的电流分布为

应用镜像法时，像电荷位于无限大平板下方，轴线与平板间距离仍为 h 。由于圆柱与板间电压为 U ，则圆柱与像电荷之间电压为 $2U$ 。求单位长度的电容时，所用 $C_0 = \frac{\tau}{U}$ ，其中 U 为柱与板间电压，这样得到的是柱与板间单位长度的电容。

浅埋地中的接地器必须考虑地面的影响，利用镜像法，用虚拟的像电流来替代地面的影响就可以较方便地求出地中恒定电场的分布。

$$J_1 = \frac{2I}{4\pi r_1^2} \mathbf{e}_{r_1} = \frac{I}{2\pi r_1^2} \mathbf{e}_{r_1}$$

$$J_2 = -\frac{I}{2\pi r_2^2} \mathbf{e}_{r_2}$$

电场强度为

$$E_1 = \frac{I}{2\pi\gamma r_1^2} \mathbf{e}_{r_1}$$

$$E_2 = -\frac{I}{2\pi\gamma r_2^2} \mathbf{e}_{r_2}$$

以无穷远处为零电位点,两接地器的电位分别为

$$\varphi_1 = \int_a^\infty E_1 dr_1 + \int_{D-a}^\infty E_2 dr_2 = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{D-a} \right)$$

$$\varphi_2 = \int_{D-a}^\infty E_1 dr + \int_a^\infty E_2 dr_2 = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{D-a} - \frac{1}{a} \right)$$

两接地器之间的电压

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{\pi\gamma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{D-a} \right)$$

两接地器间的电阻为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\pi\gamma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{D-a} \right)$$

流经地中的电流为

$$I = U/R = \frac{\pi\gamma U a (D-a)}{D-2a}$$

2-12 如图 2-7(a)所示,由良导体制成的球形接地器,埋在一悬崖附近。已知圆球的半径 $a=0.3\text{ m}$,且 $h_1=15\text{ m}$, $h_2=6\text{ m}$,土壤的电导率 $\gamma=10^{-2}\text{ S/m}$,求:(1) 接地电阻;(2) A、B 两点的跨步电压(步长 $l_{AB}=0.8\text{ m}$)。

解 利用镜像法作出的镜像示意图如图 2-7(b)所示。

由于 $a \ll h_2$,所以可采用孤立导体的计算方法,计算 4 个球的电位。设通入的电流为 I ,由于空气中电导率为 0,所以 3 个像电流均为 I 。

每个球(包括镜像)的电流密度均为

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

电场强度均为

不仅要考虑地面对接地器的影响,还应考虑悬崖对接地器的影响。利用镜像法可以

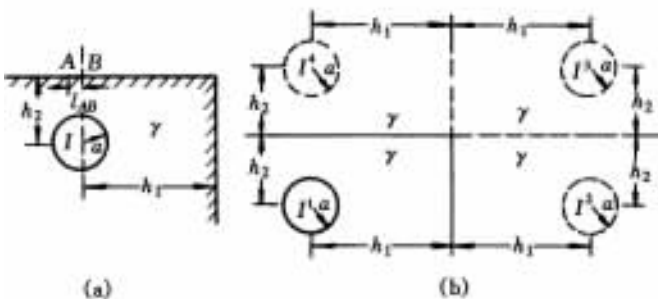


图 2-7 典型题 2-12 图

$$E = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} e_r$$

它们在接地器(球 1)表面产生的电位(以无穷远处为电位参考点)为

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\gamma a}$$

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\gamma(2h_1)}$$

$$\varphi_3 = \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{4h_1^2 + 4h_2^2}}$$

$$\varphi_4 = \frac{I}{4\pi\gamma(2h_2)}$$

接地器的接地电阻为

$$R = \frac{\varphi}{I} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{I} = 27.7 \quad \Omega$$

A、B 两点的电位分别为

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_2^2 + l_{AB}^2}} + \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_2^2 + l_{AB}^2}} + \\ &\quad \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_2^2 + (2h_1 + l_{AB})^2}} + \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_2^2 + (2h_1 + l_{AB})^2}} \\ &= 3.136 I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{I}{4\pi\gamma h_2} + \frac{I}{4\pi\gamma h_2} + \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_2^2 + 4h_1^2}} + \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_2^2 + 4h_1^2}} \\ &= 3.173 I \end{aligned}$$

A、B 两点的跨步电压为

$$U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = 0.037 \text{ V}$$

2.4 自我检测题

题 2.1 同轴电缆内导体半径为 a , 外导体半径 $b = ea$, 其中 $e = 2.718$ 。内、外导体间充满电导率 $\gamma = 10^{-8} \text{ S/m}$ 的电介质, 内、外导体间电压为 10 kV , 求 1 km 长的同轴电缆的漏电流。

(答案: $I = 0.628 \text{ A}$)

题 2.2 一平板电容器有两层介质, 厚度分别为 $d_1 = 4 \text{ mm}$ 和 $d_2 = 2 \text{ mm}$, 已知第 1 层介质的电导率 $\gamma_1 = 10^{-2} \text{ S/m}$, 欲使两层介质的功率损耗相等, 求第 2 层介质的电导率 γ_2 。

(答案: $\gamma_2 = 5 \times 10^{-3} \text{ S/m}$)

题 2.3 球形电容器内、外导体的半径分别为 a 和 b , 其间充满两种媒质, 如图 2-8 所示, 左半部媒质的电导率为 γ_1 , 右半部媒质的电导率为 γ_2 , 若在两导体球壳间通以电流 I , 求球壳间媒质中电流密度的分布。

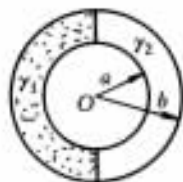


图 2-8 自我检测题 2.3 图

(答案: $J_1 = \frac{\gamma_1 I}{2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)r^2} \mathbf{e}_r$; $J_2 = \frac{\gamma_2 I}{2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)r^2} \mathbf{e}_r$)

题 2.4 半径分别为 a 和 b , 厚度为 d 的扇形, 外电极和内电极间充满电导率 $\gamma = \gamma_0 \frac{\beta}{r}$ 的材料, 其中 $a \gg d, b \gg d$, 如图 2-9 所示。试求两电极间的电导(扇形所对圆心角为 β)。

(答案: $G = \frac{a\gamma_0\beta d}{a-b}$)

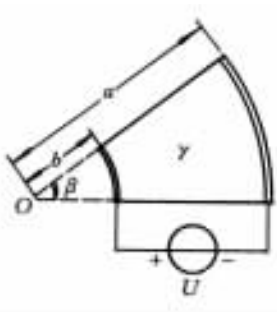


图 2-9 自我检测题 2.4 图

题 2.5 若两介质分界面两侧的介电常数及电导率分别为 ϵ_1, ϵ_2 及 γ_1, γ_2 。已知法向电流密度为 J_n , 则电流流过这一分界面时, 试证明分界面上的自由电荷面密度

$$\sigma = J_n \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)$$

题 2.6 两根金属圆管垂直插入地下, 圆管轴线间距离为 D , 管长 l , 圆管半径均为 a , 且 $a \ll D \ll l$ 。如果土壤的电导率为 γ , 两管外加直流电压 U , 求两管间土壤

的电阻及通过圆管的电流。

$$(\text{答案: } R = \frac{l}{\pi\gamma} \ln \frac{D}{a}, I = \frac{U\pi\gamma}{l \ln \frac{D}{a}})$$

题 2.7 半球形铜电极埋在地表面,其附近有一个直而深的沟壁,如图 2-10 所示。若已知半球的半径 $a=0.5\text{ m}$, $h=10\text{ m}$, 土壤的电导率 $\gamma=10^{-2}\text{ S/m}$ 。

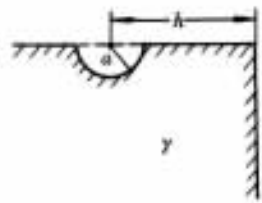
试计算接地电阻。

图 2-10 自我检测题 2.7 图

$$(\text{答案: } R=32\ \Omega)$$

题 2.8 一偏心电缆的内、外导体半径分别为 $a_1=1.0\text{ cm}$, $a_2=2.5\text{ cm}$ 。内外导体轴线间距离为 $d=0.5\text{ cm}$ 。电缆中充满电导率为 $\gamma=2\times 10^{-11}\text{ S/m}$ 的电介质, 计算偏心电缆单位长度的漏电阻。

$$(\text{答案: } R\approx 69\text{ M}\Omega)$$



第 3 章 恒定磁场

由恒定电流激发的磁场称为恒定磁场。由于恒定流动的电荷产生的恒定电场和恒定电流产生的恒定磁场均不随时间变化,因此它们之间彼此没有影响而能独立存在。这样,我们可以分别研究它们的基本规律和特性。

3.1 基本内容和公式

3.1.1 恒定磁场基本方程·分界面上的衔接条件

1. 安培力定律

恒定磁场是由恒定电流产生的。在真空中,两个由细导线构成的电流回路,它们相互之间的安培作用力为

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} \quad (3-1)$$

从场的角度看,电流之间的作用力也是通过周围空间中存在的一种特殊物质——磁场,以有限的速度传递过去的,任何电流都在自己周围产生磁场。磁场对处在其中的任何电流都产生作用力,为此引入磁感应强度,作为描述磁场这一特性的基本物理量。

2. 磁感应强度 B (又称磁通密度)

由毕奥-萨伐尔定律可知,真空中的线电流、面电流、体电流引起的磁感应强度分别为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (3-2)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dS' \quad (3-3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (3-4)$$

3. 媒质的磁化

为了描述媒质的磁化程度,引入磁化强度

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \quad (3-5)$$

媒质的磁化使媒质中出现了磁化电流,媒质对磁场的作用可看作是由磁化电流产生的磁感应强度所致。磁化电流强度 I_m 、磁化电流面密度 J_m 、线密度 K_m 与磁化强度间的关系为

$$I_m = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (3-6)$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3-7)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \quad (3-8)$$

4. 磁场强度 H

这是恒定磁场中引入的又一个基本物理量,它与磁感应强度 B 和磁化强度 M 间的关系为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (3-9)$$

式(3-9)称为媒质的特性方程或本构方程。对于各向同性的线性媒质,由于 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$,故可以导出

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (3-10)$$

式中 μ 为媒质的磁导率。

5. 恒定磁场的基本方程

基本方程的积分形式

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3-11)$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (3-12)$$

基本方程的微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3-14)$$

从中可以看出,恒定磁场的性质与静电场不同。恒定磁场是无源有旋场,磁力线是闭合的曲线。

6. 分界面上的衔接条件

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \text{ 或 } (B_2 - B_1) \cdot e_n = 0 \quad (3-15)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K \text{ 或 } (H_1 - H_2) \times e_n = K \quad (3-16)$$

在两种媒质分界面上,磁感应强度的法线分量是连续的,而磁场强度的法线分量不连续。若分界面上无面电流(即 $K=0$),则磁场强度的切线分量连续,但磁感应强度的切线分量是不连续的。此时,在分界面上的 B 线和 H 线应满足

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3-17)$$

3.1.2 恒定磁场中的磁矢位、磁位及其边值问题

1. 磁矢位及其边值问题

根据磁通连续性 $\nabla \cdot B = 0$, 可以引入一个矢量函数 A 来描述恒定磁场

$$B = \nabla \times A \quad (3-18)$$

$$\nabla \cdot A = 0 \text{ (库仑规范条件)} \quad (3-19)$$

当空间充满均匀媒质,电流分布在有限空间时,磁矢位的计算式为

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{Idl'}{R} \quad (3-20)$$

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{S'} \frac{K dS'}{R} \quad (3-21)$$

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{J dV'}{R} \quad (3-22)$$

磁矢位满足泊松方程或拉普拉斯方程($J=0$ 时)

$$\nabla^2 A = -\mu J \text{ 或 } \nabla^2 A = 0 \quad (J=0 \text{ 时}) \quad (3-23)$$

在两种不同媒质分界面上,磁矢位满足的衔接条件为

$$A_1 = A_2 \quad (3-24)$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times A_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times A_2 \right) \times e_n = K \quad (3-25)$$

对于平行平面磁场,分界面上的衔接条件为

$$A_1 = A_2 \quad (3-26)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} = K \quad (3-27)$$

在平行平面磁场中,等 A 线就是 B 线。

2. 磁位及其边值问题

在没有电流分布的区域($J=0$ 处),由于 $\nabla \times H = 0$ 可以引入磁位 φ_m

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m \quad (3-28)$$

引入磁位可以使某些情况下恒定磁场的计算简化,但它并无物理意义。磁位满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi_m = 0 \quad (3-29)$$

在两种不同媒质分界面上,磁位满足的衔接条件为

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (3-30)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \quad (3-31)$$

3. 镜像法

由场的惟一性定理可知恒定磁场中也可用镜像法。在分界面为无限大平面,磁导率分别为 μ_1, μ_2 的两种媒质中,若媒质 μ_1 中有一无限长直电流 I 平行于分界面,与界面相距为 h ,当求解媒质 μ_1, μ_2 中的磁场时,可引入镜像电流 I', I'' 来代替分界面上的磁化电流

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \quad (3-32)$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \quad (3-33)$$

3.1.3 电感·磁场能量

1. 电感

在各向同性的线性媒质中,回路的磁链和产生这个磁链的电流的比值称为电感。电感可分为内自感、外自感和互感。电感仅与回路的形状、大小、相对位置及媒质特性有关,与电流无关。

计算电感首先要计算闭合回路的磁通,其表示式为

$$\Phi_m = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-34)$$

$$\Phi_m = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3-35)$$

(1) 自感 在导线内部仅与部分电流相交链的磁链(内磁链)与电流的比值称为内自感

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \quad (3-36)$$

完全在导线外部闭合的磁通称为外磁通,相应的磁链(外磁链)与电流的比值称为外自感

$$L_e = \frac{\Psi_e}{I} \quad (3-37)$$

内自感与外自感之和统称自感

$$L = L_i + L_e = \frac{\Psi_i}{I} + \frac{\Psi_e}{I} \quad (3-38)$$

(2) 互感 两个线圈之间,由线圈 1 的电流 I_1 所产生而与线圈 2 回路相交链的磁链 Ψ_{21} 与 I_1 之比,称为线圈 1 对线圈 2 的互感

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad (3-39)$$

同理可得

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \quad (3-40)$$

可以证明

$$M_{21} = M_{12} \quad (3-41)$$

2. 恒定磁场中的能量

在线性媒质中,线电流回路系统的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{j=1}^n M_{kj} I_k I_j \quad (3-42)$$

若是单回路电流,磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (3-43)$$

对于连续电流分布,磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (3-44)$$

磁场能量的体密度 w'_m 为

$$w'_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (3-45)$$

磁场能量还可以表示为

$$W'_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (3-46)$$

3.2 重点与难点

深刻理解磁感应强度、磁场强度以及磁化强度的概念,能熟练掌握恒定磁场的基本方程和分界面上的衔接条件,并能应用安培环路定律以及磁矢位、磁位函

数正确分析和求解恒定磁场的问题,都是这一章的重点。而掌握磁矢位、磁位函数的边值问题以及自感、互感和磁场能量的计算方法,既是这一章的重点,也是难点。

3.2.1 磁感应强度、磁场强度及其计算

1. 用毕奥-萨伐尔定律求磁感应强度

首先要把产生恒定磁场的电流分布看作是电流元段(包括 JdV' 、 KdS' 及 Idl')的集合,空间任一点的磁感应强度为各电流元在该点产生的磁感应强度的矢量和。然后选择适当的坐标系,把矢量形式的毕奥-萨伐尔定律表达式(3-2)或式(3-3)或式(3-4)化为分量积分形式,这里应注意充分利用题目给出的对称性,用右螺旋法则判断出磁感应强度的方向。进行积分求出磁感应强度的各分量,然后再利用矢量和求出该点的磁感应强度。

直接积分求磁感应强度的方法只适用于有限电流分布在无限大均匀媒质之中。由于积分过于复杂就无法求出精确解,所以只能对一些简单而且有一定对称性分布的情况能求得精确解。

例 3-1 磁导率为 μ 的均匀媒质中,有一半径为 a 的载流线圈(图 3-1)。电流强度为 I ,求其轴上任一点 P 处的磁感应强度。

解 首先选择元电流段 Idl ,该电流元在 P 点产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl \times e_r}{r^2}$$

由于 e_r 与 dl 垂直,则

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

dB 的方向如图 3-1 所示。以圆心为坐标原点,建立图示坐标系。由于对称性,电流元(Idl)直径的另一端的电流元也在 P 点产生磁场,它们在垂直于 ρ 的方向上相互抵消,而在 ρ 方向上投影相同,故可写出 dB 的分量形式

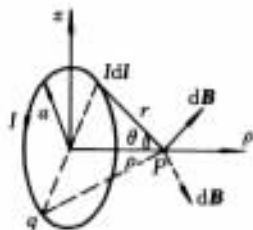


图 3-1 圆形电流的磁场

$$\begin{aligned} dB_{\rho} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\theta = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl}{(a^2 + \rho^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \\ B &= \int dB_{\rho} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi a} \frac{a dl}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu a^2 I}{2(a^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{\mu a^2 I}{2r^3} \end{aligned}$$

方向沿 ρ 正方向。由此可以推出圆心($\rho=0$)处的磁感应强度

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{2a} \mathbf{e}_\rho$$

2. 用安培环路定律求磁场强度(或磁感应强度)

使用安培环路定律式(3-12),求磁场强度必须根据磁场的对称性,选择合适的安培环路,使 H 能提到积分号外或沿回路的某段 H 的方向与回路绕行方向垂直。具体解题步骤如下:

(1) 分析给定问题中磁场的对称性,当磁场分布具有对称性(如轴对称、平面对称等)时,才能用安培环路定律求解。

(2) 选择适当的安培环路使磁场强度 H 在沿该回路积分时,能提到积分号外。因此,如果磁场具有轴对称性时,安培环路宜选以轴为中心的同心圆;当磁场具有平面对称性时,取与平面垂直并对称的矩形回路等。

(3) 求出安培环路所限定面积上穿过的净电流,代入式(3-12)即可求出磁场强度的大小,再用对称性和右螺旋法则判断出 H 的方向。

当有些场分布不具有对称性时,不能直接用安培环路定律求解,但采用补偿法,假想同时有电流密度大小相等、方向相反的两种电流存在,利用叠加原理将一个非对称的磁场表示为两个具有对称性磁场分布的叠加,再利用安培环路定律求解。

例 3-2 在通有电流 I 、半径为 R 的无限长圆柱导体外,充满磁导率为 μ 的均匀媒质,若导体的磁导率为 μ_0 ,求导体内外的磁场强度和磁感应强度。

解 由于是无限长直圆柱,则磁场沿轴线方向无变化,是一个二维磁场的问题,且具有轴对称性。可以利用安培环路定律求解。

选择圆柱坐标系,使其 z 轴与圆柱导体轴线重合,方向与导体中电流方向一致。以 z 轴为中心作半径为 ρ 的圆形回路,根据安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H = I'$$

当 $0 \leq \rho \leq R$ 时

$$I' = \frac{I}{\pi R^2} \pi \rho^2 = \frac{\rho^2}{R^2} I$$

$$H = \frac{\rho I}{2\pi R^2}$$

用右手螺旋法则,判断出 H 沿 $\mathbf{e}_\phi$ 方向,则

$$\mathbf{H} = \frac{\rho I}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\phi$$

当 $\rho \geq R$ 时

$$I' = I$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi, \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi, \mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi$$

此题如果在圆柱导体内有一个半径为 a 的不同轴的圆柱空腔, 两轴线的距离为 b , 如图 3-2 所示。求空腔中的磁感应强度。

解 由于空腔的存在, 磁场分布不再具有轴对称性, 如果假想在空腔处存在电流密度与导体内相同, 但方向相反的两种电流分布, 可以将此问题看成是在半径为 R 的圆柱中, 充满均匀分布电流面密度 J_0 产生的磁场与在空腔中充满均匀分布电流面密度 $(-J_0)$ 产生的磁场的叠加。

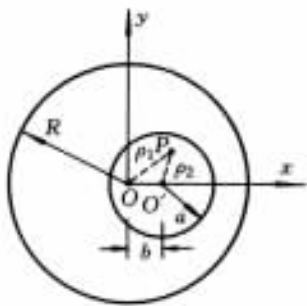


图 3-2 圆柱空腔内的磁场

设导体内流过的电流为 I , 则 $J_0 = \frac{I}{\pi(R^2 - a^2)}$ 。半径为 R 的圆柱导体在 P 点产生的磁场强度为

$$\oint_l \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho_1 H_1 = \pi\rho_1^2 J_0$$

$$H_1 = \frac{\rho_1 J_0}{2}, \quad B_1 = \frac{\mu_0 J_0 \rho_1}{2}$$

方向沿 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\rho_1}$ 的方向。

空腔电流 $(-J_0)$ 在 P 点产生的磁场强度为

$$\oint_l \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho_2 H_2 = -\pi\rho_2^2 J_0$$

$$H_2 = -\frac{\rho_2 J_0}{2}, \quad B_2 = -\frac{\mu_0 J_0 \rho_2}{2}$$

方向沿 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\rho_2}$ 的反方向。

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J_0}{2} \mathbf{e}_z \times (\rho_1 \mathbf{e}_{\rho_1} - \rho_2 \mathbf{e}_{\rho_2})$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{2} \mathbf{e}_z \times b \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 J_0 b}{2} \mathbf{e}_y$$

将 J_0 的大小代入上式可得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 b I}{2\pi(R^2 - a^2)} \mathbf{e}_y$$

3.2.2 磁矢位、磁位及其边值问题

1. 磁矢位及其边值问题

恒定磁场中 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 因此引入磁矢位在恒定磁场中具有普遍意义, 即任何恒定磁场均可用磁矢位 $\mathbf{A}$ 表示。由于 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 并不能惟一确定 $\mathbf{A}$ 的值, 所以引入 $\mathbf{A}$ 还须满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 这样 $\mathbf{A}$ 矢量的分布才是惟一的。此时磁矢位 $\mathbf{A}$ 满足的微分方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

这是矢量形式的泊松方程, 在 $\mathbf{J} = 0$ 的区域中, $\mathbf{A}$ 满足矢量形式的拉普拉斯方程。使用时首先应当能写出它所对应的标量形式的泊松方程(或拉普拉斯方程)。

在直角坐标系中可直接写为

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z$$

但在曲线坐标系(如圆柱坐标系、球坐标系等)中 $(\nabla^2 \mathbf{A})_i \neq \nabla^2 A_i$, 如在圆标系中标量形式 $(\nabla^2 \mathbf{A})_i$ 分别可以写为

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\rho = \nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_z = \nabla^2 A_z$$

球坐标系中 $(\nabla^2 \mathbf{A})_i$ 可以写为

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \left[A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \cot \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{2 \sin \theta} \right]$$

写出了标量形式的方程, 具体求解方程的方法与静电场中求解泊松方程(或拉普拉斯方程)的方法相同。

另外还要能写出磁矢位在分界面上所满足的衔接条件以及边界条件在给定坐标系中的分量形式。当恒定磁场是平行平面场时, 其衔接条件满足式(3-26)和式(3-27)。利用磁矢位边值问题, 求出 $\mathbf{A}$ 就可计算恒定磁场的磁感应强度、磁场强度等。

当有限分布的恒定电流在均匀无限大导磁媒质中, 且具有一定对称性时, 也

可用式(3-20)或式(3-21)或式(3-22)直接积分的方法求出磁矢位。

2. 磁位及其边值问题

在 $J=0$ 的区域由式(3-14)可引入磁位 φ_m 。它满足拉普拉斯方程,可用于求 φ_m 所满足的边值问题的解,进而求出恒定磁场的磁场强度。但应注意的是,在静电场中,电位 φ 具有明确的物理意义,它与静电场的能量有关。而磁位 φ_m 没有明确的物理意义,引入它仅为使某些恒定磁场的求解在数学上得到简化。

磁位函数具有多值性,例如相对 Q 点, P 点的磁位

$$\varphi_{mP} = \int_P^Q \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

其中 Q 为选定的参考点。 φ_{mP} 的值与从 P 点到 Q 点的积分路径有关,只有当规定积分路径不与电流交链,则 H 的线积分就与路径无关了,这样就能消除 φ_m 的多值性。

在恒定磁场中,求解 $\nabla^2 \varphi_m = 0$ 的边值问题,可以借用静电场的解题方法,故关键在于能写出恒定磁场磁位所满足的边界条件。

3.2.3 镜像法

根据场的边值问题解的惟一性定理,在不改变恒定磁场场域内电流分布和边界条件的情况下,用场域外的等效源(电源)代替边界面对场的影响,来简化场的计算的这种方法称之为镜像法,它适用于求解分界面的形状简单(如平面、圆柱面等),场域内电流分布也较简单的情况。例如,磁导率为 μ_1 和 μ_2 的两种均匀媒质分界面为无限大平面,在媒质 μ_1 内有一平行于分界面的无限长直线电流 I ,距分界面的距离为 h ,如图 3-3(a)所示。当求解媒质 μ_1 内的磁场时,可用位于媒质 μ_2

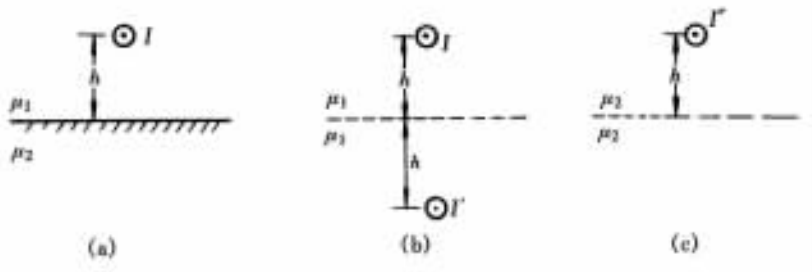


图 3-3 恒定磁场的镜像法

内的镜像电流 I' 来代替分界面上的磁化电流,并将整个空间认为充满磁导率为 μ_1 的媒质,如图 3-3(b)所示。当求解媒质 μ_2 内的磁场时,可用位于媒质 μ_1 内的镜

像电流 I' 来代替电流 I 和分界面上磁化电流对媒质 μ_2 内磁场的作用,并将整个空间认为充满磁导率为 μ_2 的媒质,如图 3-3(c)所示。在满足边界条件的情况下,可得到式(3-32)和式(3-33)。

由式(3-32)和式(3-33)中可以看出, I' 的方向与 I 的方向一致,而 I' 的方向则与 μ_1, μ_2 有关。当 $\mu_2 > \mu_1$ 时, I' 与 I 方向一致,当 $\mu_2 < \mu_1$ 时则相反。若 $\mu_2 \gg \mu_1$ (为一般导磁媒质(空气)与铁磁质分界面)则 $I' \approx I, I'' = 0$ 。由此可知,在媒质 μ_1 中的磁场是由两根等值同向相距 $2h$ 的电流产生,所以在分界面处 H_1 处处与分界面垂直,而在媒质 μ_2 中 $H_2 = 0$,但 $B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{\mu_1 I}{\pi \rho_2}$ 并不为零(ρ_2 为 I' 到媒质 μ_2 内任一点的距离)。若 $\mu_2 \ll \mu_1$ (如电流在铁磁质内)则有 $I' \approx I, I'' \approx 2I$,由此可见,媒质 μ_1 中的磁场是由两根等值反向相距 $2h$ 电流产生的。在分界面处 H_1 处处与分界面相切,而在媒质 μ_2 中是由放在原处数值 2 倍 I 的电流产生的磁场。

3.2.4 电感、磁场能量的计算

1. 电感的计算

计算电感的关键在于计算磁通和磁通链。

(1) 自感的计算

虽然自感是仅与自身回路的形状、大小、相对位置及周围媒质特性有关的物理量,但在计算自感时,常采用假设流过回路的电流为 I ,然后按 $I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi_m \rightarrow \Psi_m \rightarrow L$ 的步骤求得自感 L 。也可以由 $I \rightarrow A \rightarrow \Phi_m \rightarrow \Psi_m \rightarrow L$ 的步骤求得自感。另外还可以应用聂以曼公式来计算导线回路的外自感,即

$$L_e = \frac{\mu_0 N^2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R} \quad (3-47)$$

式中: N 为导线回路的匝数; R 为两元线段 dl_1, dl_2 之间的距离; l_1 为导线回路的轴线,可将电流视为在沿轴线上流动。在计算该导线回路外自感时,把导线回路内侧边沿的边界视为 l_2 ,然后作积分可求得外自感 L_e ,再利用 $L = L_i + L_e$ 求出导线回路的自感。

通常导线回路的尺寸比导线截面尺寸大得多,导线内部的磁场可近似地认为与无限长直导线内部的磁场相同。设导线的半径为 R ,磁导率为 μ_0 ,则应用安培环路定律,可求出导体内部距轴线 ρ 处的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi R^2} e_\phi$ 。这样,导线内部磁场在长为 l 的范围内,穿过 ρ 处宽度为 $d\rho$ 的矩形截面的磁通 $d\Phi_m = B l d\rho$,这部分磁通仅与电流 $I' = \left(\frac{\rho^2}{R^2} I\right)$ 相交链,因此,此处的磁通相对整个电流而言所交

链的匝数 $N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho^2}{R^2}$, 故磁通链为 $d\Psi_{mi} = \frac{\rho^2}{R^2} B l d\rho$ 。由此可得总磁链为

$$\Psi_{mi} = \int d\Psi_{mi} = \int_0^R \frac{\mu_0 I l}{2\pi R^4} \rho^3 d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

因此, 长度为 l 的圆柱导体的内自感为

$$L_i = \frac{\Psi_{mi}}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

一般也认为长为 l 的导线回路的内自感均为 $\frac{\mu_0 l}{8\pi}$, 它与导线的粗细无关。

(2) 互感的计算

计算两个导线回路的互感, 常采用假设流过回路 1 的电流为 I_1 , 然后按 $I_1 \rightarrow H_{21} \rightarrow B_{21} \rightarrow \Phi_{m21} \rightarrow \Psi_{m21} \rightarrow M_{21}$ 的步骤求得互感。当然也可以由 $I_1 \rightarrow A_{21} \rightarrow \Phi_{m21} \rightarrow \Psi_{m21} \rightarrow M_{21}$ 的步骤求得互感。另外, 还可以应用聂以曼公式, 即

$$M = M_{21} = M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R} \quad (3-48)$$

进行计算。上式中 N_1 、 N_2 分别为两个导线回路的匝数, R 为两元线段 dl_1 、 dl_2 之间的距离, l_1 、 l_2 为两导线回路的长度。

例 3-3 求两个互相平行且共轴的单匝圆线圈的互感, 其中一个圆线圈半径为 a , 另一个圆线圈半径为 b , 两线圈相距 h , 且 $a \ll h$, 如图 3-4 所示。

解 因为 $a \ll h$, 故半径为 a 的导线回路若通有电流 I_1 时, 可视为一个小磁偶极子, 它在远处产生的磁矢位为

$$A_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi a^2 I}{r^2} \sin\theta \mathbf{e}_\phi$$

由此可以求出 A_{21} 在半径为 b 的回路上产生的磁通链为

$$\Psi_{m21} = \Psi_{m21} = \oint_{l_2} A_{21} \cdot d\mathbf{l} = A_{21} 2\pi b = \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi a^2 I b}{r^2} \sin\theta$$

由图 3-4 中可以看出

$$r = \sqrt{b^2 + h^2}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}}$$

由此可得两线圈的互感为

$$M = M_{21} = M_{12} = \frac{\Psi_{m21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a b^2}{2(b^2 + h^2)^{3/2}}$$

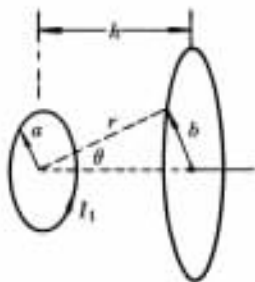


图 3-4 回路间互感的计算

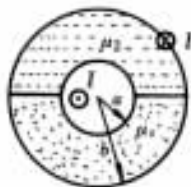
2. 磁场能量的计算

电流回路在恒定磁场中要受到作用力,说明恒定磁场也储存有能量。计算磁场能量有以下几种方法。

对于由 n 个电流回路组成的系统,可以利用式(3-42)计算。若为单个电流回路($n=1$),则 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 。若为两个电流回路组成的系统($n=2$),则 $W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$ 。其中 $\frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2)$ 为两电流回路的自有能, $MI_1 I_2$ 为两个电流回路间的互有能。自有能恒为正,而互有能可正可负,随电流的流向及两电流回路的同名端而定。当电流同时从两电流回路同名端流入(出)时,互有能为正,否则为负。

若能计算出恒定磁场的磁感应强度、磁场强度,则磁场能量密度可由式(3-45)表示。磁场能量可用式(3-46)计算。其中 H 、 B 均为空间某点的磁场强度和磁感应强度,而积分区域 V 为所研究范围内整个磁场分布的区域。

例 3-4 同轴电缆的内导体半径为 a ,外导体的厚度可忽略不计,其半径为 b 。内、外导体之间填充两种不同的导磁媒质,如图 3-5 所示。导体的磁导率为 μ_0 ,当同轴电缆通有电流 I 时,求同轴电缆单位长度所储存的磁场能量,并由此求出该电缆单位长度的自感。



解 先求同轴电缆内外磁场分布。由对称性分析知,可用安培环路定律求解。设内导体轴线沿电流方向为 z 轴,建立圆柱坐标系。

图 3-5 计算同轴电缆的自感

当 $0 \leq \rho \leq a$ 时

$$\oint_l \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{\rho^2}{a^2} I$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\rho I}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi$$

当 $0 \leq \rho \leq b$ 时

$$\oint_l \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = I$$

由于有两种媒质分布,则

$$\int_{\pi}^{2\pi} H_{21} \rho d\phi + \int_0^{\pi} H_{22} \rho d\phi = I$$

$$(H_{21} + H_{22}) \rho \pi = I$$

利用两种媒质分界面上的衔接条件

$$B_{2n} = B_{1n}, \text{即 } \mu_1 H_{21} = \mu_2 H_{22}$$

由此可以得到

$$H_{21} = \frac{\mu_2 I}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} e_\phi, \quad B_{21} = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} e_\phi$$

$$H_{22} = \frac{\mu_1 I}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} e_\phi, \quad B_{22} = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} e_\phi$$

当 $\rho < b$ 时

$$H_3 = 0, \quad B_3 = 0$$

将以上结果代入式(3-46), 求出单位长度储存的磁场能量

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{4\pi^2 a^4} 2\pi \rho d\rho + \frac{1}{2} \left[\int_a^b \frac{\mu_1 \mu_2^2 I^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 \pi^2 \rho^2} \pi \rho d\rho + \int_a^b \frac{\mu_2 \mu_1^2 I^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 \pi^2 \rho^2} \pi \rho d\rho \right] \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2^2 I^2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)^2} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_2 \mu_1^2 I^2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)^2} \ln \frac{b}{a} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2 I^2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

单位长度的自感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a}$$

3.3 典型题解析

3-1 一条宽度为 a 的无限长薄铜片, 有电流均匀通过 (见图 3-6)。求铜片周围任一点的磁场强度。

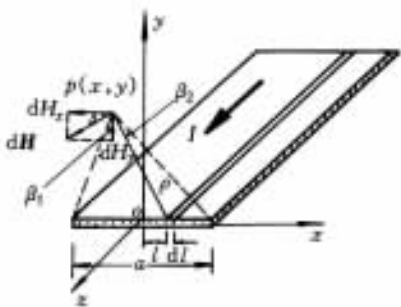


图 3-6 典型题 3-1 图

利用对称性分析, 只要求出薄铜片任一横截面上的磁场分布。首先选择合适的电流元, 找出电流元在截面上任一点的磁场, 将矢量形式分解为分量形

解 由于是薄铜片,可视为面电流,其电流线密度 $K = \frac{I}{a}$ 。选取薄片横截面宽度的中点为坐标原点,电流方向沿 z 轴正方向,如图 3-6 所示。由对称性分析,磁场的分布与 z 轴无关,只需研究 xoy 平面上的磁场分布。在薄铜片 l 处选取电流元 $dI = \frac{I}{a} dl$,该电流元可视为无限长直导线,在 P 点产生的磁场强度为

$$dH = \frac{dI}{2\pi\rho} = \frac{I}{2\pi a} \frac{dl}{\rho}$$

方向由右手螺旋则确定,如图 3-6 所示。将 dH 分解为 x 、 y 方向的两个分量

$$dH_x = \frac{I}{a} \frac{dl}{2\pi\rho} \cos\beta$$

$$dH_y = \frac{I}{a} \frac{dl}{2\pi\rho} \sin\beta$$

其中

$$\rho = \frac{y}{\cos\beta}, \quad \tan\beta = \frac{x-l}{y}$$

$$dl = -\frac{y}{\cos^2\beta} d\beta$$

代入到 dH_x 、 dH_y 之中,并求积分可得

$$dH_x = -\frac{I}{2\pi a} d\beta$$

$$dH_y = -\frac{I}{2\pi a} \frac{\sin\beta}{\cos\beta} d\beta$$

$$H_x = -\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{I}{2\pi a} d\beta = \frac{I}{2\pi a} (\beta_1 - \beta_2)$$

$$H_y = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{I}{2\pi a} \frac{d\cos\beta}{\cos\beta} = \frac{I}{4\pi a} \ln \frac{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2}{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2}$$

P 点的磁场强度为

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{e}_x + H_y \mathbf{e}_y = \frac{I}{2\pi a} (\beta_1 - \beta_2) \mathbf{e}_x + \frac{I}{4\pi a} \ln \frac{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2}{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2} \mathbf{e}_y$$

式,再利用积分公式求出各分量形式的磁场,最后用矢量求和的方法叠加求出总磁场强度。

3-2 载有电流 $I=10$ A 的细导线(见图 3-7),右侧为半径 $R=10$ cm 的半圆弧,上下导线相互平行,并近似为向左侧延伸至无穷远。试求圆弧中心点 O 处的磁感应强度。

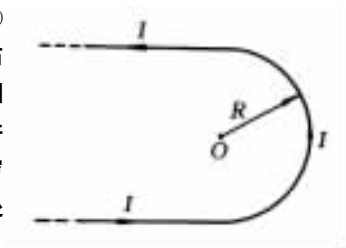


图 3-7 典型题 3-2 图

解 对圆弧中心点 O 的磁感应强度,可认为是半圆弧电流与两条半直线电流,分别在 O 点产生的磁感应强度的叠加。

对于半圆弧在 O 点产生的磁感应强度 B_1 ,可按例 3-1 中所求,方向沿垂直纸面向外。

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

同样一根半长直线在 O 点产生的磁感应强度 B'_2 为

$$B'_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

方向仍沿垂直纸面向外。

故 O 点处的磁感应强度

$$B = B_1 + 2 \times B'_2 \quad B = \frac{\mu_0 I}{4R} + 2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

代入数值得

$$B = 5.1 \times 10^{-5} \quad \text{T}$$

方向沿垂直纸面向外。

叠加原理的应用。

3-3 超导型核磁共振成像装置的磁体被简化为两个空心线圈(图 3-8),在两线圈中间点 O 附近可产生一比较均匀的磁场。若线圈半径 $a=0.5$ m,两线圈相距的距离等于线圈的半径,欲使 O 点的磁感应强度达到 0.6 T,试求线圈的安匝数。

解 O 点处的磁感应强度可视为两线圈产生的磁感应强度的叠加。根据例 3-1 中的结果,一个单匝圆线圈在轴线上产生的磁感应强度为

叠加原理的又一个应用。

$$B'_1 = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3}$$

式中: $r = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2}$; B'_1 的方向沿 e_x 正方向。若为 N 匝线圈产生的磁感应强度, 则

$$B_1 = NB'_1 = \frac{\mu_0 Na^2 I}{2r^3}$$

利用叠加原理可知 O 点的磁感应强度为

$$\begin{aligned} B &= 2 \times B_1 = 2 \times \frac{\mu_0 Na^2 I}{2r^3} \\ &= \frac{\mu_0 NIa^2}{\left(a^2 + (\frac{a}{2})^2\right)^{3/2}} \\ &= 0.6 \text{ T} \end{aligned}$$

由此可得

$$NI = \frac{0.6 \times 5\sqrt{5}a}{8\mu_0} = 3.336 \times 10^5 \text{ 安匝}$$

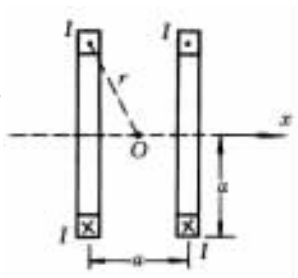


图 3-8 典型题 3-3 图

3-4 有一圆形截面的铁环, 环的内外半径分别为 10 cm 和 12 cm, 铁环的相对磁导率 $\mu_r = 500$ 。环上绕有 50 匝通有电流 2A 的线圈(图 3-9)。忽略漏磁的情况下, 试求环的圆截面内外的磁场强度和磁感应强度。

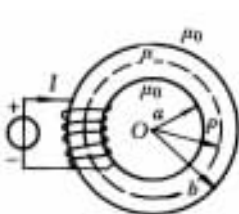


图 3-9 典型题 3-4 图

解 由对称性分析, 此题可用安培环路定律求解。选择以 O 为圆心的圆回路为安培环路, 当 $a \leq \rho \leq b$ 时, 在铁环内部, 则

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

其中 $d\mathbf{l} = \rho d\theta$ 。代入上式可得

$$\int_0^{2\pi} H\rho d\theta = NI$$

安培环路定律的应用, 关键在于选择合适的安培环路。使积分能够计算出来。

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

铁环内部的磁场视为均匀,选取平均半径

$$\rho = \frac{1}{2}(a+b) = 11 \text{ cm} = 0.11 \text{ m}$$

代入 H 中,可得环内磁场分布

$$H = \frac{50 \times 2}{2 \times 3.14 \times 0.11} = 144.69 \text{ A/m}$$

$$B = \mu H = 500 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 144.69 = 9.1 \times 10^{-2} \text{ T}$$

方向沿环切向逆时针绕行的方向。

而在环外,即 $\rho < a$ 和 $\rho > b$ 处

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

则

$$H = 0, \quad B = 0$$

3-5 磁导率为 μ , 厚度为 d 的厚板中心, 有一薄电流片, 其电流线密度为 Ke_z (图 3-10)。厚板周围是自由空间, 求各区域中的 H 、 B 、 M 。

解 从对称性分析, 此题也可用安培环路定律求解。建立如图 3-10 所示的坐标。

在 $-\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}$ 的厚板内,

选取一个对称于薄电流片的矩形安培环路 $ABCD$, 由安培环路定律可知

$$\oint_l \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = Kh$$

分析矩形回路中各段 H 的方向, 可得

$$2H_1 h = Kh$$

$$H_1 = \frac{K}{2} \quad B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu K}{2}$$

用右手螺旋法则判断 H_1 与 B_1 的方向, 写成矢量形式

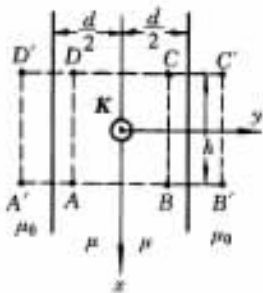


图 3-10 典型题 3-5 图

安培环路定律的应用。

$$\mathbf{H}_1 = \begin{cases} -\frac{K}{2}\mathbf{e}_x & y > 0 \\ \frac{K}{2}\mathbf{e}_x & y < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} -\frac{\mu K}{2}\mathbf{e}_x & y > 0 \\ \frac{\mu K}{2}\mathbf{e}_x & y < 0 \end{cases}$$

在 $y \leq -\frac{d}{2}$ 和 $y \geq \frac{d}{2}$ 厚板之外处, 仍选一个对称于薄电流片的矩形安培环路 $A'B'C'D'$ 。同样可得到

$$H_2 = \frac{K}{2} \quad B_2 = \frac{\mu_0 K}{2}$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{H}_2 = \begin{cases} -\frac{K}{2}\mathbf{e}_x & y > \frac{d}{2} \\ \frac{K}{2}\mathbf{e}_x & y < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2}\mathbf{e}_x & y > \frac{d}{2} \\ \frac{\mu_0 K}{2}\mathbf{e}_x & y < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

最后利用式(3-9)可得

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}$$

将以上结果代入, 得

$$\mathbf{M} = \begin{cases} 0 & |y| > \frac{d}{2} \\ -\frac{K(\mu - \mu_0)}{2\mu_0}\mathbf{e}_x & 0 < y < \frac{d}{2} \\ \frac{K(\mu - \mu_0)}{2\mu_0}\mathbf{e}_x & -\frac{d}{2} < y < 0 \end{cases}$$

3-6 两半径均为 a , 平行放置的长直圆柱导体, 轴线间距离为 d ($d < 2a$)。现将相交部分挖成一空洞, 并且在相交处用绝缘纸隔开。设两导体分别通有面密度为 $J_1 = J_0\mathbf{e}_z$ 和 $J_2 = (-J_0)\mathbf{e}_z$ 的电流(见图 3-11)。试求空洞中的磁场强度 $\mathbf{H}$ 。

解 若将空洞中任一点均视为有 J_1 和 J_2 电流的叠加, 则空洞中的磁场可看作两个长直圆柱分别带有 J_1 、 J_2 电流, 在某点产生磁场的叠加。利用安培环路定律可分别求出两个长直圆柱在 P 点产生的磁场强度

$$H_1 = \frac{\rho_1 J_1}{2} \quad H_2 = \frac{\rho_2 J_2}{2}$$

其方向如图 3-11 所示。

则 P 点的磁场强度为

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

写为分量形式得

$$H_x = H_1 \sin\theta_1 - H_2 \sin\theta_2$$

$$H_y = H_1 \cos\theta_1 + H_2 \cos\theta_2$$

由图 3-11 中可以求得

$$\sin\theta_1 = \frac{y}{\rho_1} \quad \cos\theta_1 = \frac{\frac{d}{2} + x}{\rho_1}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{y}{\rho_2} \quad \cos\theta_2 = \frac{\frac{d}{2} - x}{\rho_2}$$

代入 H_x 、 H_y 式中, 得

$$H_x = \frac{\rho_1 J_1}{2} \cdot \frac{y}{\rho_1} - \frac{\rho_2 J_2}{2} \cdot \frac{y}{\rho_2} = 0$$

$$H_y = \frac{\rho_1 J_1}{2} \cdot \frac{\frac{d}{2} + x}{\rho_1} + \frac{\rho_2 J_2}{2} \cdot \frac{\frac{d}{2} - x}{\rho_2} = \frac{J_0 d}{2}$$

由此可得

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{e}_x + H_y \mathbf{e}_y = \frac{J_0 d}{2} \mathbf{e}_y$$

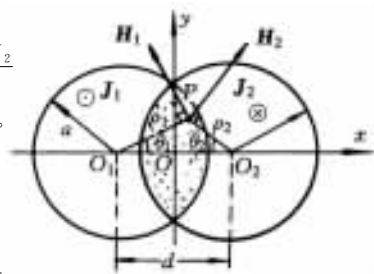


图 3-11 典型题 3-6 图

原题意中要求空洞中的磁场分布不能直接用安培环路定律, 但采用补偿法, 在空洞处加上大小相同, 方向相反的电流, 就可以看作两个长直圆柱电流产生磁场的叠加, 就能使用安培环路定律计算。

3-7 一个薄铁圆盘, 半径为 a , 厚度为 $b(b \ll a)$ (见图 3-12)。在平行于 z 轴方向均匀磁化, 磁化强度为 M 。试求沿圆铁盘轴线上、铁盘内、外的磁感应强度和磁场强度。

解 由于铁盘均匀磁化, 且磁化方向沿 z 正向, 故令 $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$, 其中 M 为常数。由此可知磁化电流面密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$$

铁盘上、下底面的磁化电流线密度

$$K_{m1} = M \times e_n = Me_z \times (\pm e_z) = 0$$

铁盘侧面周边边缘上的磁化电流线密度

度

$$K_m = M \times e_n = Me_z \times e_\rho = Me_\phi$$

这样可将铁圆盘视为相当于 $I = K_m b$ 的圆形磁化电流, 求此电流在各处产生的磁场。又由于 $b \ll a$, 可视为圆环电流产生的磁场。

在铁盘轴线上产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 M b a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{M b a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

B 、 H 的方向沿 z 方向。铁盘内由于 $\mu \gg \mu_0$, 根据式(3-9)可得

$$(1 - \frac{\mu_0}{\mu})B = \mu_0 M$$

$$B \approx \mu_0 M$$

在铁盘内是均匀分布的磁场。

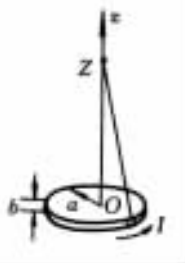


图 3-12 典型题

3-7 图

媒质磁化使媒质中出现磁化电流, 媒质对磁场的作用就是磁化电流产生磁场所引起的。知道磁化强度可以分别求出媒质内部及表面的磁化电流。然后计算磁化电流在真空中产生的磁场。

3-8 两根无限长直细导线, 相距 $2a$, 导线通有相反的电流 I (见图 3-13)。求空间任一点的磁矢位 A 。

解 两根导线产生的磁矢位, 可认为是单根导线产生磁矢位的叠加。设导线长度为 $2l$, 在导线的中点处作 xOy 平面, 选择如图 3-13 所示的坐标系, 当 $l \gg a$ 时单根导线在 P 点产生的磁矢位为

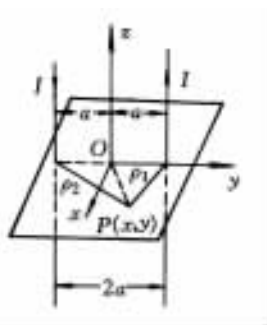


图 3-13 典型题 3-8 图

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{\rho_1^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{L + \sqrt{\rho_1^2 + L^2}}{\rho_1}$$

对于简单的电流分布, 在均匀无限大媒质中可用直接积分的方法求磁矢位。先设电流有限区域分布 (导线长为 $2L$), 再分析趋于很大时的情况 ($L \rightarrow \infty$ 时)。直接积分时, 仍是先确定

当 $L \rightarrow \infty$ 时

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho_1}$$

方向沿 e_z 正方向。同理,另一根导线产生的磁矢位为

$$A_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho_2}$$

方向沿 e_z 负方向。由此可得 P 点的磁矢位

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{2L}{\rho_1} - \ln \frac{2L}{\rho_2} \right) e_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} e_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x^2 + (a+y)^2}{x^2 + (y-a)^2} e_z \end{aligned}$$

电流元 ($I dz$), 求出它在空间产生的磁矢位 ($dA_1 = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi \rho_1} e_z$), 再分析它的方向 (A_1 沿 e_z 正方向), 然后变成标量形式求积分。

3-9 设 $x < 0$ 的半空间充满磁导率为 μ 的均匀媒质, $x > 0$ 的半空间的磁导率为 μ_0 , 现有一无限长直电流 I 沿 z 轴流动, 且处在两种媒质的分界面上 (见图 3-14)。求两种媒质中磁感应强度和磁化电流的分布。

解 由于线电流位于两媒质分界面上, 所以界面上磁场的方向与界面垂直。由分界面上的衔接条件可知 $B_1 = B_2$, $H_1 \neq H_2$ 。由对称性选择以电流为轴线, ρ 为半径的圆环为安培环路, 则

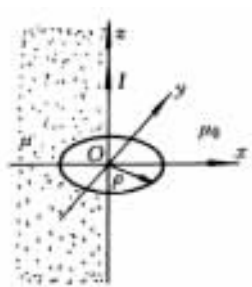


图 3-14 典型题 3-9 图

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\pi \rho H_1 + \pi \rho H_2 = I$$

利用 $H_1 = \frac{B_1}{\mu_1}$, $H_2 = \frac{B_2}{\mu_2}$ 且 $B_1 =$

B , $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu_0$ 代入上式得

$$\pi \rho \left(\frac{B_1}{\mu} + \frac{B_2}{\mu_0} \right) = I$$

$$B = \frac{\mu \mu_0 I}{\pi (\mu_0 + \mu) \rho}$$

由于导磁媒质是均匀的, 所以媒质内部无磁化电流, 在两种媒质的分界面上由于磁场与界面垂直, 故也没有磁化电流线密度, 但在电流与媒质相接触的媒质界面上, 存在磁化电流

由对称性分析, 此题仍可用安培环路定律求解。更重要的是说明在电流产生磁场的作用下, 媒质要磁化, 产生磁化电流, 均匀媒质内部磁化电流一般不存在 ($\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$)。在媒质分界面上, $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$, 若 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{e}_n$ 平行 (即与界面垂直), $\mathbf{K}_m = 0$, 但在均匀媒质与传导电流相接触的媒质界面上, 却存在

I_m 。以 z 轴为轴线作安培环路,则

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_m)$$

由于回路中各点 B 相同,且与 $d\mathbf{l}$ 同方向,故

$$B \cdot 2\pi\rho = \mu_0 (I + I_m)$$

$$I_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I$$

磁化电流。

3-10 3 条相互平行长直细导线,通有电流均为 I , 电流方向如图 3-15 所示。求空间任一点 P 的磁位 φ_m 。

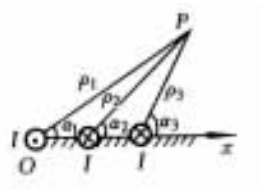


图 3-15 典型题 3-10 图

解 如图 3-15 所示,选择图示坐标。利用 x 轴为磁障面。设每条电流从所在位置沿 x 轴正向的直线上 $\varphi_{mx} = 0$, P 点的磁位可视为每条电流在该点产生磁位的叠加。最左边电流 I 在 P 点产生的磁位为

$$\varphi_{m1} = \int_P^x \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\alpha_1}^0 \frac{I}{2\pi\rho_1} \rho d\alpha = -\frac{I}{2\pi} \alpha_1$$

同理,可以求得

$$\varphi_{m2} = \int_P^x \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\alpha_2}^0 \left(-\frac{1}{2\pi\rho_2}\right) \rho_2 d\alpha = \frac{I}{2\pi} \alpha_2$$

$$\varphi_{m3} = \frac{I}{2\pi} \alpha_3$$

由此可得

$$\varphi_m = \varphi_{m1} + \varphi_{m2} + \varphi_{m3} = \frac{I}{2\pi} (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)$$

长直电流 I 在其周围空间产生的 $H = \frac{I}{2\pi\rho} e_\phi$ 。利用 $\varphi_m = \int_P^Q \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$, 可求出电流在空间的磁位分布。

3-11 铁磁体槽内有一线电流 I (见图 3-16)。若铁磁体的磁导率 $\mu \rightarrow \infty$, 槽和载流导线均可视为无限长, 忽略槽口的边缘效应。试写出槽内磁矢位 A 应满足的微分方程及边界条件。

解 槽内除线电流 I 所在位置之外, 其他区域满足的方程均为拉普拉斯方程。建立如图 3-16 所示的坐标系, 由于 $A = A_z e_z$, 则可得

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0$$

其边界条件为

$$x = \pm a, 0 < y < h, H_y = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

$$y = 0, -a < x < a, H_x = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0$$

而在 $y=h, -a < x < a$ 处, 由于

忽略边缘效应, 可认为 H 线与 x 轴平行。由于槽内各边 $H_t = 0$ (沿界面切向分量为零), 利用安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

即

$$H_x = \frac{I}{2a}, \text{ 故 } \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

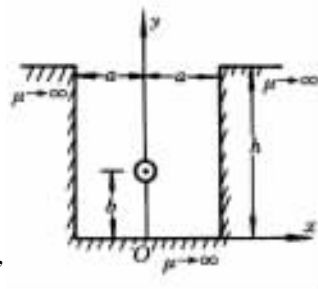


图 3-16 典型题 3-11 图

当铁磁体内部

$\mu \rightarrow \infty$ 时, 其表面为等磁位面, H 的方向与界面垂直, 故界面切向磁场强度分量为 0。对平行平面场

$$\nabla \times A_z \mathbf{e}_z = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{e}_x$$

$$- \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

$$\text{所以 } B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$B_y = - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

当 $H_y = 0$ 时, 即

$$B_y = 0, \text{ 故 } \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0.$$

3-12 应用磁位 φ_m 写出电机定子、转子间气隙中 ABCDEFA 区域内磁场所对应的微分方程及边界条件。定转子的结构剖面图如图 3-17 所示, 并设 $\varphi_{m1} = 100 \text{ A}$, $\varphi_{m2} = 0$ 。

解 定子、转子均为铁磁物质, 其 μ 可视为无穷大, 分别为等磁位面。由对称性将整个气隙中的磁场可视为只需计算 ABCDEFA 区域内的场分布即可。建立如图 3-17 所示的坐标系, 并以 F 为坐标原点。可以看出, 在 ABCDEFA 区域内, 磁位 φ_m 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_m = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0$$

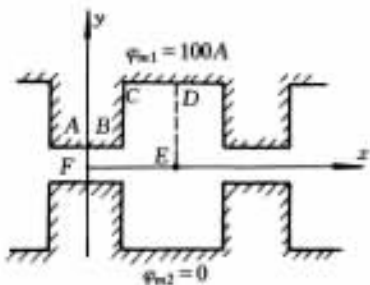


图 3-17 典型题 3-12 图

磁位 φ_m 满足

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m =$$

$$- \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \mathbf{e}_y \right)$$

当 $H_x = 0$, 即

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = 0.$$

边界上所满足的边界条件为沿 $ABCD$ 边界

$$\varphi_m \Big|_{ABCD} = \varphi_{m1} = 100 \quad \text{A}$$

沿 DE 和 FA 两边界 $H_x = 0$ (从对称性分析) 得

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \Big|_{DE, AF} = 0$$

沿 EF 段由于磁位为空隙中对称分布, EF 为空隙的中点联线, 则

$$\varphi_m \Big|_{EF} = \frac{\varphi_{m1} + \varphi_{m2}}{2} = 50 \quad \text{A}$$

3-13 均匀磁化的无限大导磁媒质的磁导率为 μ , 磁感应强度为 B , 若在该媒质内有两个空腔, 空腔 1 形状为一薄盘, 空腔 2 像一长针, 腔内都充有空气 (图 3-18)。试求两空腔中心处磁场强度的比值。

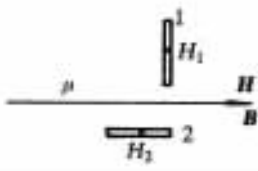


图 3-18 典型题 3-13 图

解 此题由于空腔的形状可以利用边界条件确定空腔内的场分布。

对空腔 1 其中心处的场强与侧边界的场强相同。由于 B 沿其法线方向, 由分界面上的衔接条件 $B_{1n} = B_{2n}$, 可得到中心点的磁感应强度 $B_1 = B, H_1 = \frac{\mu}{\mu_0} H$ 。

对空腔 2 侧面是沿 B 的方向, 由分界面上的衔接条件 $H_{1t} = H_{2t}$, 可得中心点处的磁场强度 $H_2 = H, B_2 = \frac{\mu_0 B}{\mu}$ 。

两空腔中心处磁场强度的比值为

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\frac{\mu}{\mu_0} H}{H} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

空腔场为窄而长形状, 因此中心处的场可近似由侧面边界处的场量来决定。此题为分界面上衔接条件的应用。

3-14 已知钢在某种磁饱和情况下, 磁导率为 $\mu_1 = 2000\mu_0$, 当钢中的磁感应强度 $B_1 = 0.5 \times 10^{-2} \text{ T}$, $\theta_1 = 75^\circ$ 时, 试求此时磁力线由钢进入自由空间一侧后, 磁感应强度 B_2 的大小及 B_2 与法线的夹角 θ_2 (见图 3-19)。

解 自由空间中 $\mu_2 = \mu_0$, 利用分界面上的折射定律可得

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\mu_0}{\mu_1} \tan\theta_1\right) = 0.107^\circ$$

由分界面上的衔接条件 $B_{1n} = B_{2n}$, 则

$$B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2$$

$$B_2 = B_1 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = 0.13 \times 10^{-2} \text{ T}$$

由此可以看出, B_2 近似与分界面垂直。此时, 分界面可近似看作等磁位面。

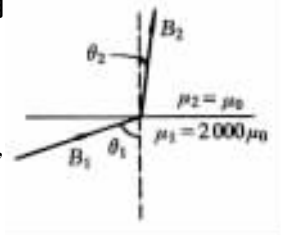


图 3-19 典型题 3-14 图

此题是分界面上衔接条件的又一应用。

3-15 圆柱坐标系中有一个矢量 $F = a_\rho e_\phi$, 它是否可能是磁感应强度 B ? 如果可能, 问它相应的电流密度 J 为何值?

解 要能表示一个恒定磁场的磁感应强度 B , 必须满足 $\nabla \cdot B = 0$ 。

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(a\rho)}{\partial \phi} = 0$$

故该矢量 F 可以表示一个恒定磁场的磁感应强度 B , 它相应的电流密度为

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\mu} \nabla \times F \\ &= \frac{1}{\mu} \left\{ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) e_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) e_\phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) e_z \right\} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 a) e_z \\ &= \frac{2a}{\mu} e_z \end{aligned}$$

3-16 由两种金属材料组成的长直圆柱导线, 其截面如图 3-20 所示。在 $0 < \rho < \rho_1$ 与 $\rho_1 < \rho < \rho_2$ 两种不同材料中, 电流密度分别为 J_1 和 J_2 , 磁导率均为 μ_0 。请写出磁矢位 A 所满足的边值问题, 并求出磁矢位的表达式。

解 可将整个区域分为 3 个部分, 由对称性分析, 磁场分

恒定磁场的基本方程 $\nabla \cdot B = 0$ 是判断某一矢量能否可以作为恒定磁场中的磁感应强度的充要条件。

布沿轴线方向是一样的,故是个平行平面磁场问题。磁矢位满足的微分方程为

$$\nabla^2 A_1 = -\mu_0 J_1 \quad (0 < \rho < \rho_1)$$

$$\nabla^2 A_2 = -\mu_0 J_2 \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

$$\nabla^2 A_3 = 0 \quad (\rho > \rho_2)$$



图 3-20 典型题

3-16 图

由于 J_1 、 J_2 均沿轴线方向,选择圆柱坐标系, A_1 、 A_2 、 A_3 均仅有 e_z 方向的分量,上式可写为标量形式的微分方程

$$\nabla^2 A_1 = -\mu_0 J_1 \quad (0 < \rho < \rho_1)$$

$$\nabla^2 A_2 = -\mu_0 J_2 \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

$$\nabla^2 A_3 = 0 \quad (\rho > \rho_2)$$

各区域的边界条件分别为

$A_1|_{\rho=0} = 0$ ($\rho=0$ 处, A_1 应为有限值,在此选择该点为参考点)

$$A_1|_{\rho=\rho_1} = A_2|_{\rho=\rho_1}$$

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} = \left. \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1}$$

$$A_2|_{\rho=\rho_2} = A_3|_{\rho=\rho_2}$$

$$\left. \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_2} = \left. \frac{\partial A_3}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_2}$$

由于对称性, A_1 、 A_2 、 A_3 仅与 ρ 坐标有关,故可得微分方程的通解为

$$A_1 = -\frac{\mu_0 J_1}{4} \rho^2 + c_1 \ln \rho + c_2$$

$$A_2 = -\frac{\mu_0 J_2}{4} \rho^2 + c_3 \ln \rho + c_4$$

$$A_3 = c_5 \ln \rho + c_6$$

代入边界条件,确定通解中的待定系数:

由 $A_1|_{\rho=0}$, 则 $c_1 = c_2 = 0$, 得 $A_1 = -\frac{\mu_0 J_1}{4} \rho^2$

由 $\left. \frac{\partial A_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} = \left. \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1}$, 得 $c_3 = \frac{\mu_0 \rho_1^2}{2} (J_2 - J_1)$

由 $A_1|_{\rho=\rho_1} = A_2|_{\rho=\rho_1}$, 得 $c_4 = \frac{\mu_0 \rho_1^2}{4} (J_2 - J_1) (1 - 2 \ln \rho_1)$

写出磁矢位的边值问题,即写出所研究几个区域中磁矢位所满足的微分方程及各区域边界上所满足的边界条件。然后利用对称性分析,建立合适的坐标系,并写出标量形式的微分方程求解。

$$\text{由 } \left. \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_2} = \left. \frac{\partial A_3}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_2}, \text{ 得 } c_5 = -\frac{\mu_0 J_2 (\rho_2^2 - \rho_1^2) + J_1 \rho_1^2 \mu_0}{2}$$

$$\text{由 } A_2 \big|_{\rho=\rho_2} = A_3 \big|_{\rho=\rho_2}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} c_6 &= -\frac{\mu_0 J_2}{4} \rho_2^2 + c_3 \ln \rho_2 - c_5 \ln \rho_2 + c_4 \\ &= -\frac{\mu_0 J_2 \rho_2^2}{4} + \frac{\mu_0 J_2 \rho_2^2}{2} \ln \rho_2 + \frac{\mu_0 \rho_1^2}{4} (J_2 - J_1) (1 - 2 \ln \rho_1) \end{aligned}$$

由此可得到 A_1 、 A_2 、 A_3 的表达式。

3-17 一半径为 a 的长直薄导体壳圆柱, 在导体薄层中通有电流线密度 $K = K e_\phi$ (见图 3-21)。求导体薄壳圆柱内外的磁矢位和磁感应强度。

解 由于电流沿导体薄壳 e_ϕ 方向, 故

$$A = A_\phi e_\phi \quad (A_\rho = A_z = 0)$$

圆柱内外 A 所满足的微分方程为

$$\nabla^2 A = 0 \quad \begin{cases} 0 < \rho < a \\ \rho > a \end{cases}$$

写出标量形式的微分方程为

$$(\nabla^2 A)_\phi = \nabla^2 A_\phi + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{\rho^2} = 0$$

$$\text{所以} \quad (\nabla^2 A)_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} = 0 \quad \begin{cases} 0 < \rho < a \\ \rho > a \end{cases}$$

由于对称性, A_ϕ 仅与 ρ 坐标有关, 上式可写为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) - \frac{A_\phi}{\rho^2} = 0 \quad \begin{cases} 0 < \rho < a \\ \rho > a \end{cases}$$

设圆柱导体薄壳内为 $A_{\phi 1}$, 圆柱导体薄壳外为 $A_{\phi 2}$, 写出上式方程的通解为

$$A_{\phi 1} = \frac{c_1}{2} \rho + \frac{c_2}{\rho} \quad (0 < \rho < a)$$

$$A_{\phi 2} = \frac{c_3}{2} \rho + \frac{c_4}{\rho} \quad (\rho > a)$$

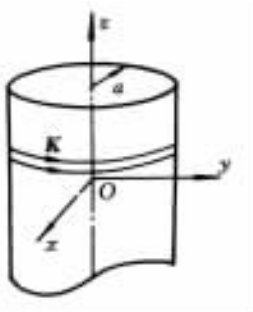


图 3-21 典型题 3-17 图

$A = A_\phi e_\phi$, 要将 $\nabla^2 A = 0$ 写成标量形式, 要注意曲线坐标系的单位矢量的方向并非恒定, 所以正确写出标量形式的微分方程是解题的一个关键。

该问题的边界条件为

$$A_{\phi 1} \Big|_{\rho=0} = 0 \quad (\text{选择参考点})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_l \mathbf{A}_{\phi 2} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_l A_{\phi 2} \rho d\phi \rightarrow \text{有限值}$$

$$A_{\phi 1} \Big|_{\rho=a} = A_{\phi 2} \Big|_{\rho=a}$$

$$\frac{\partial A_{\phi 1}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} - \frac{\partial A_{\phi 2}}{\partial \rho} = \mu_0 K$$

利用边界条件决定通解中的待定系数,得

$$c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

$$c_1 = \frac{\mu_0 K}{2}, \quad c_4 = \frac{\mu_0 K a^2}{2}$$

从而得到薄壳内外的磁矢位为

$$A_1 = \frac{\mu_0 K}{2} \rho e_{\phi} \quad (0 < \rho < a)$$

$$A_2 = \frac{\mu_0 K a^2}{2 \rho} \rho e_{\phi} \quad (\rho > a)$$

薄壳内、外的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_{\phi 1})}{\partial \rho} \mathbf{e}_z = \mu_0 K \mathbf{e}_z \quad (0 < \rho < a)$$

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_{\phi 2})}{\partial \rho} \mathbf{e}_z = 0 \quad (\rho > a)$$

3-18 请给出图 3-22(a)所示区域镜像电流的大小方向及位置,并注明有效区域。

解 镜像电流的大小为

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = I$$

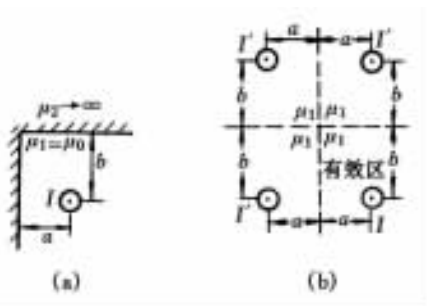


图 3-22 典型题 3-18 图

采用镜像法要注意求解的区域(有效区)。在有效区之外,用镜像电流替代分界面的磁化电流。

其位置、方向及有效区域如图 3-22(b)所示。

3-19 在磁导率 $\mu = 14\mu_0$ 的半无限大导磁媒质的上方, 放置一平行于平面且与平面距离 $d = 10\text{ cm}$ 的长直细导线, 通有电流 $I = 100\text{ A}$, 如图 3-23(a)所示。试求空气区域和导磁媒质 μ 中分别距分界面 5 cm 处 P_1 、 P_2 点的磁感应强度。

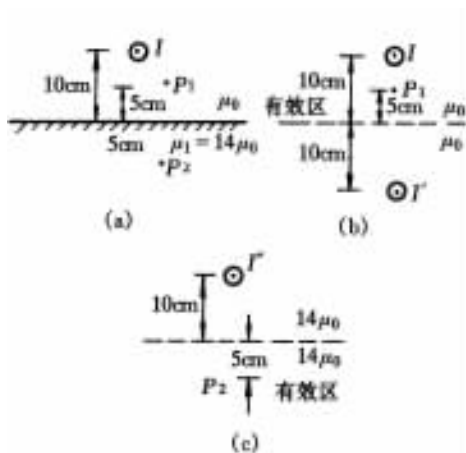


图 3-23 典型题 3-19 图

此题是恒定磁场中镜像法的应用。由于 P_1 、 P_2 点分别在分界面的两侧, 故要分两个有效区分别计算。

解 先求 P_1 点的磁感应强度。此时有效区为上半空间, 镜像电流 $I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I = 86.667\text{ A}$ 。其位置和方向如图 3-23(b)所示。由此得到 P_1 点的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{0.05} - \frac{13}{15} \times \frac{1}{0.15} \right] = 2.844 \times 10^{-4} \quad \text{T}$$

其方向用右手螺旋法则确定。

对于 P_2 点, 有效区在下半空间, 镜像电流 $I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I =$

$\frac{2}{15} \times 100 = 13.33\text{ A}$, 其位置与方向如图 3-23(c)所示。由此得到 P_2 点的磁感应强度为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times 13.33 = 0.178 \times 10^{-4} \quad \text{T}$$

3-20 两种不同导磁媒质的分界面是无限大的平面,且 $\mu_1 = 100\mu_0, \mu_2 = \mu_0$ 。有两个半径均为 a 的细导线圆环与分界面互相平行,分别放置于两个媒质之中,距分界面均为 h 处。两圆环分别载有同样大小,但方向相反的电流 I ,如图 3-24(a)所示。试求在媒质 μ_1 中圆环中心 O 点处的磁感应强度。

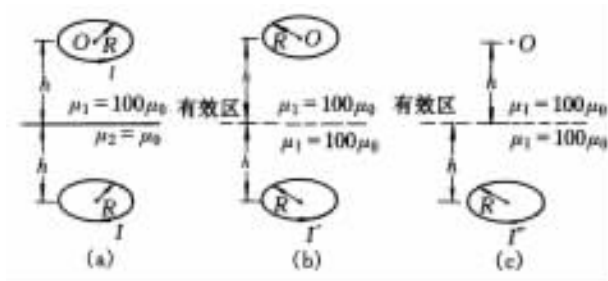


图 3-24 典型题 3-20 图

解 研究对象(O 点)在上半区,故有效区在上半区。对媒质 μ_1 中的圆环电流的镜像电流为

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = -\frac{99}{101} I$$

位置和电流参考方向如图 3-24(b)所示。

根据例 3.1 可知圆环在其轴线上的磁感应强度,由此可得 I 与 I' 在 O 点产生的磁感应强度为

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_1 I}{2R} + \frac{\mu_1 I' R^2}{2(R^2 + 4h^2)^{3/2}} \\ &= \frac{50\mu_0 I}{R} - \frac{50 \times 99(\mu_0 I R^2)}{101(R^2 + 4h^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

处在媒质 μ_2 中的圆环电流对上半区的镜像电流为

$$I'' = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I = \frac{2}{101} I$$

位置和电流方向如图 3-24(c)所示。 I'' 在 O 点产生的磁感应强度为

$$B_2 = -\frac{\mu_1 I'' R^2}{2(R^2 + 4h^2)^{3/2}} = -\frac{100}{101} \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + 4h^2)^{3/2}}$$

O 点的磁感应强度是 B_1 和 B_2 的叠加

$$B = B_1 + B_2 = \frac{50\mu_0 I}{R} \left[1 - \frac{R^3}{(R^2 + 4h^2)^{3/2}} \right]$$

求 O 点的磁感应强度必须考虑媒质 μ_1 中的圆环电流和媒质 μ_2 中的圆环电流以及分界面上磁化电流在 O 点产生的磁感应强度的叠加。利用镜像法,分别作出两个圆环电流的镜像,它们均在有效区之外,如图所示。用镜像电流替代分界面上磁化电流的作用。

3-21 半径为 a , 磁导率为 μ_2 的无限长圆柱周围充满磁导率为 μ_1 的导磁媒质, 一载电流为 I 的长直导线与轴线平行地放在圆柱内, 距轴线中心的距离为 d , 如图 3-25(a) 所示。请给出镜像电流的大小及位置。

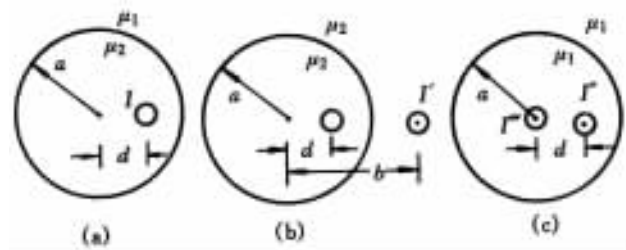


图 3-25 典型题 3-21 图

解 由对称性分析, 磁场分布沿轴线方向是相同的, 故为一个平行平面场。当研究的区域(有效区)是圆柱内时, 镜像电流为

$$I' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I$$

位于圆柱外 P , 距轴心的距离为

$$b = \frac{a^2}{d}$$

如图 3-25(b) 所示。当研究的区域(有效区)是圆柱外部时, 镜像电流分别为

$$I'' = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I$$

$$I'' = I - I' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I$$

如图 3-25(c) 所示。 I'' 位于原来 I 所在位置, I' 位于轴线处。

3-22 试求空心长直导线单位长度的内自感(见图 3-26)。

解 设导线内均匀流过的电流为 I , 由于对称性, 导体内的磁感应强度可利用安培环路定律来计算

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} I$$

恒定磁场中镜像应用的又一例题。注意有效区及镜像电流的大小及位置。

掌握内自感的计算时, 关键在于

$$H = \frac{(\rho^2 - a^2)I}{2\pi(b^2 - a^2)\rho} \quad (a \leq \rho \leq b)$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0(\rho^2 - a^2)I}{2\pi(b^2 - a^2)\rho} \quad (a \leq \rho \leq b)$$

通过 $d\rho$ 处单位长度的磁通为

$$d\Phi_{mi} = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0(\rho^2 - a^2)I}{2\pi(b^2 - a^2)\rho} d\rho$$

由于该磁通只交链电流 I' , 相对总电流 I 而言, 相当交链的匝数

$$N = \frac{I'}{I}$$

由此可知

$$d\Psi_{mi} = Nd\Phi_{mi} = \frac{\mu_0(\rho^2 - a^2)^2 I}{2\pi(b^2 - a^2)^2 \rho} d\rho$$

$$\Psi_{mi} = \int d\Psi_{mi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{(\rho^2 - a^2)^2}{(b^2 - a^2)^2} \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)^2} \left[\frac{1}{4}(b^4 - a^4) - a^2(b^2 - a^2) + a^4 \ln \frac{b}{a} \right]$$

单位长度的内自感

$$L_i = \frac{\Psi_{mi}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi(b^2 - a^2)^2} \left[\frac{1}{4}(b^4 - a^4) - a^2(b^2 - a^2) + a^4 \ln \frac{b}{a} \right]$$



图 3-26 典型题

3-22 图

理解其磁通仅交链了部分电流, 而求内自感时 $L_i = \frac{\Psi_{mi}}{I}$ 分母中的 I 是全部电流。因此磁链与磁通的比值 $N = \frac{I'}{I}$, 必须由 $d\Psi_{mi} = Nd\Phi_{mi}$ 才能正确计算。

3-23 已知一电磁铁的激磁绕组为 N 匝, 衔铁截面积为 S , 磁导率 $\mu \rightarrow \infty$ (见图 3-27), 忽略气隙处的边缘效应, 求此电磁铁系统的自感。

解 设电磁铁激磁绕组中有电流 I , 利用安培环路定律可求出各处的磁场强度

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

由于铁磁质内部 $\mu \rightarrow \infty$, 所以沿铁磁质内部各处 $H \approx 0$, 则可得到气隙处的磁场强度

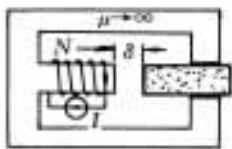


图 3-27 典型题 3-23 图

求此电磁铁的自感, 关键在于求出磁感应强度。由于铁磁质磁导率很大, 近似无穷大, 故铁磁质内部磁场强度可视为 0, 但内部的磁感应强度却不为 0, 计算中先求气隙中的 H , 进而得

$$H = \frac{NI}{\delta}, \quad B = \frac{\mu_0 NI}{\delta}$$

忽略边缘效应,则气隙处的磁场可视为均匀分布。利用分界面上的衔接条件 $B_{1n}=B_{2n}$,可以得到铁磁质内部的磁感应强度

$$B' = \frac{\mu_0 NI}{\delta}$$

激励线圈的磁通链为

$$\Psi_m = N\Phi_m = NBS = \frac{\mu_0 N^2 IS}{\delta}$$

该系统的自感为

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\delta}$$

气隙中的 B ,利用衔接条件,求出电磁铁中铁磁质内部的磁感应强度。

3-24 有一环形铁心线圈,其截面为矩形,圆环的外半径 $R_2=8\text{ cm}$,内半径 $R_1=5\text{ cm}$,矩形截面的宽 $b=2\text{ cm}$,铁心的磁导率 $\mu=125\mu_0$ (见图 3-28)。若要得到 20 mH 的电感,则线圈应该为多少匝?

解 先假设通过线圈的电流为 I ,线圈匝数为 N ,则铁心内

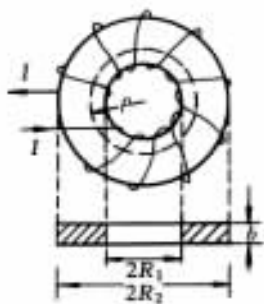


图 3-28 典型题 3-24 图

铁心线圈的自感与匝数有关。先假设有电流 I 通过。然后按 $I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi_m \rightarrow \Psi_m \rightarrow L$ 的步骤先求出自感与 N 的关系,最后求出匝数 N 。

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi\rho}$$

穿过环形铁心线圈矩形截面 $d\rho$ 处的磁通为

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu NI}{2\pi\rho} b d\rho$$

与 N 匝线圈交链的磁通链为

$$d\Psi_m = Nd\Phi_m = \frac{\mu N^2 I}{2\pi\rho} b d\rho$$

由此可得

$$\Psi_m = \int d\Psi_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu N^2 I}{2\pi\rho} b d\rho = \frac{\mu N^2 b I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

环形铁心线圈的自感为

$$L = \frac{\mu N^2 b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

当 $L = 20 \text{ mH}$ 时, 线圈的匝数为

$$N = \sqrt{\frac{2\pi L}{\mu b \ln(R_2/R_1)}} = 292 \quad \text{匝}$$

3-25 一对平行传输线, 其线半径为 a , 相距为 d , 在传输线下方 h 处放置一无限大的铁磁物质, 其相对磁导率为 μ_r , 如图 3-29(a) 所示。求这对平行传输线单位长度的外自感。

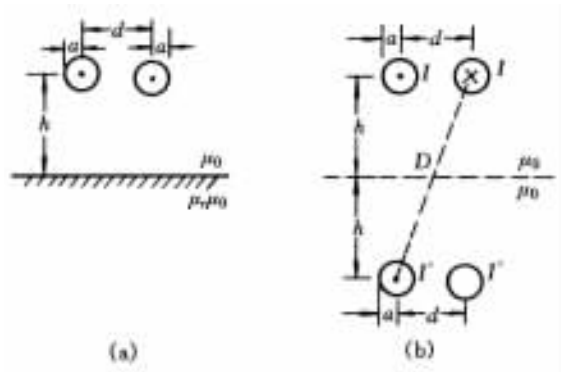


图 3-29 典型题 3-25 图

解 平行传输线下方的无限大铁磁物质必然对平行传输线的磁通会产生影响。分界面上磁化电流的作用, 可用镜像法来考虑。

设平行传输线上通有电流 I , 则在分界面另一侧镜像电流为

$$I' = \frac{\mu_r \mu_0 - \mu_0}{\mu_r \mu_0 + \mu_0} I = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I$$

镜像电流的位置, 电流方向为图 3-29(b) 所示。由于长直导线对其导线外一点的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

系统的自感与线圈回路的形状、大小、相对位置以及周围媒质等情况都有关系。计算自感时, 若周围存在不同的媒质分界面, 就要考虑界面上磁化电流的影响。若界面情况简单, 可用镜像电流替代磁化电流的作用。此题就是例子。

故可求得各电流在平行传输线上产生的磁通和磁链。首先, 计算电流 I 在其单位长度上产生的磁通链为

$$\begin{aligned}\Psi_{m1} = \Phi_{m1} &= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d-\rho} \right) d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a} \right)^2 = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}\end{aligned}$$

镜像电流 I' 在平行传输线的单位长度上产生的磁通链为

$$\Psi_{m2} = \Phi_{m2} = 2 \int_{2h}^D \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\mu_0 (\mu_r - 1) I}{\pi(\mu_r + 1)} \ln \frac{D}{2h}$$

其中 $D = \sqrt{(2h)^2 + d^2}$ 。通过平行传输线单位长度的总磁通链为

$$\Psi_m = \Psi_{m1} + \Psi_{m2} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\ln \frac{d-a}{a} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \ln \frac{D}{2h} \right)$$

平行传输线单位长度上的外自感为

$$L = \frac{\Psi_{m1} + \Psi_{m2}}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{d-a}{a} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \ln \frac{D}{2h} \right)$$

由此可以看出, 当 $\mu_r > 1$ 时, 会使自感增加。

3-26 半径为 a 的长直螺线管, 单位长度上绕有 N 匝线圈, 在螺线管轴线处, 有一半径为 b 的单匝小线圈, 线圈平面的法线 e_n 与螺线管的轴线夹角为 θ (见图 3-30)。若忽略边缘效应, 试求螺线管与小圆环线圈之间的互感。

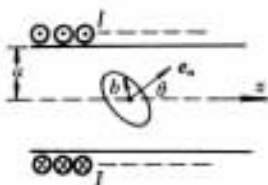


图 3-30 典型题 3-26 图

解 假设螺线管通有如图 3-30 所示方向的电流 I_1 , 则螺线管内的磁感应强度为

$$B = \mu_0 N I_1 e_z$$

式中: N 为螺线管单位长度上线圈的匝数。穿过小线圈的磁通为

$$\Phi_{m21} = B \cdot S = BS \cos \theta = \mu_0 N I_1 \pi b^2 \cos \theta$$

由于是单匝小线圈, 故磁通链为

$$\Psi_{m21} = \Phi_{m21} = \mu_0 N I_1 \pi b^2 \cos \theta$$

螺线管与小圆环线圈之间的互感为

求两线圈之间的互感, 可先设某线圈通有电流 I_1 (以能方便求出另一线圈磁通为选择标准), 按 $I_1 \rightarrow H_{21} \rightarrow B_{21} \rightarrow \Phi_{m21} \rightarrow \Psi_{m21} \rightarrow M$ 的步骤计算。

$$M = \frac{\Psi_{m21}}{I_1} = \pi \mu_0 b^2 N \cos \theta$$

3-27 无限长直导线和一个 N 匝矩形细导线框, 都放置在一个与地面平行且距地面高度为 h 的平面上, 它们的相互位置和尺寸如图 3-31(a) 所示。若大地的磁导率为 $\mu (\mu > \mu_0)$, 试求长直导线与矩形细线框之间的互感。

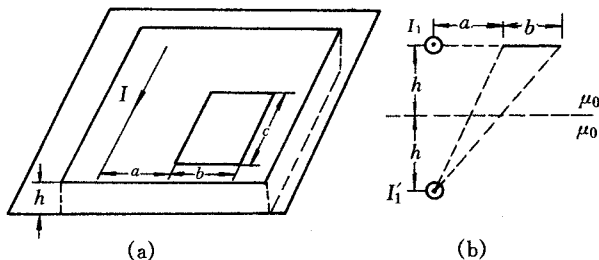


图 3-31 典型题 3-27 图

解 设长直导线上通有电流 I_1 , 由于地面的影响, 线框中的磁通不仅有电流 I_1 产生的磁通, 还有地面上的磁化电流在其上产生的磁通。应用镜像法, 在地面另一侧对称位置用镜像电流

$$I_1' = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I_1$$

在线框上产生的磁通来替代地面磁化电流的作用。 I_1' 位于地面下方 h 处, 如图 3-31(b) 所示。电流 I_1 在矩形线框中产生的磁通链

$$\Psi_{m21} = N\Phi_{m21} = N \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} c d\rho = \frac{\mu_0 N I_1 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

镜像电流 I_1' 在矩形线框中产生的磁通链

$$\begin{aligned} \Psi_{m21}' &= N\Phi_{m21}' = N \int_{(2h)^2+a^2}^{(2h)^2+(a+b)^2} \frac{\mu_0 I_1'}{2\pi\rho} c d\rho \\ &= \frac{\mu_0 N I_1' c}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + (a+b)^2}}{\sqrt{(2h)^2 + a^2}} \end{aligned}$$

矩形线框中的磁通链

$$\Psi_{m2} = \Psi_{m21} + \Psi_{m21}'$$

此题仍是计算互感的问题, 但由于地面的影响, 采用镜像法, 此时矩形线框中的磁通是假设电流 I_1 和 I_1' 的镜像 I_1' 在矩形线框中产生的磁通之和。

$$= \frac{\mu_0 N I_1 c}{2\pi} \left[\ln \frac{a+b}{a} + \frac{\mu - \mu_0}{2(\mu + \mu_0)} \ln \frac{4h^2 + (a+b)^2}{4h^2 + a^2} \right]$$

由此可得到长直导线与矩形线框之间的互感为

$$M = \frac{\Psi_{m2}}{I_1} = \frac{\mu_1 N c}{2\pi} \left[\ln \frac{a+b}{a} + \frac{\mu - \mu_0}{2(\mu + \mu_0)} \ln \frac{4h^2 + (a+b)^2}{4h^2 + a^2} \right]$$

由于 $\mu > 0$, 故有地面的影响时, 将使互感增加。

3-28 半径为 a 的长直实心圆柱导体通有均匀分布的电流 I , 另有一个半径为 b 的长直薄导电圆柱, 筒壁厚度趋近于零, 筒壁也通有均匀分布的电流 I , 电流的流向均沿圆柱轴线方向 (见图 3-32)。若要使两种情况下, 单位长度储存的能量相等, 试求这两个圆柱体半径之比。

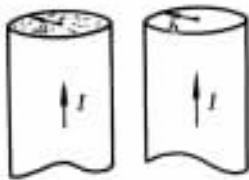


图 3-32 典型题 3-28 图

解 要计算两个圆柱单位长度的磁场能量, 首先要计算出两个圆柱体内、外的磁场分布。由于对称性, 用安培环路定律能方便地确定圆柱内、外的磁场分布, 由

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I'$$

可计算出长直实心圆柱导体周围的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a} \mathbf{e}_\phi & (0 \leq \rho \leq a) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi & (\rho > a) \end{cases}$$

长直空心薄导电圆柱周围的磁场为

$$\mathbf{B}_2 = \begin{cases} 0 & (0 \leq \rho \leq b) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi & (\rho > b) \end{cases}$$

根据能量体密度 $w'_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$, 可以求出圆柱体单位长度所储存的磁场能量为

$$W_{m1} = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_1 dV$$

先计算出场域中各点的 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$, 利用 $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$, 就可计算出所研究区域的磁场能量。求积分时要注意所研究区域的范围, 正确选择积分区域 V 。

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \cdot 2\pi\rho d\rho + \int_a^{\rho_\infty} \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho^2} \cdot 2\pi\rho d\rho \\
 &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{\rho_\infty}{a} \\
 W_{m2} &= \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 dV \\
 &= \int_b^{\rho_\infty} \frac{\mu_0 I^2}{2(2\pi\rho)^2} \cdot 2\pi\rho d\rho \\
 &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{\rho_\infty}{b}
 \end{aligned}$$

要使 $W_{m1} = W_{m2}$, 则

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{\rho_\infty}{a} &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{\rho_\infty}{b} \\
 \frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_\infty}{a} &= \ln \frac{\rho_\infty}{b} \\
 \ln \frac{a}{b} &= \frac{1}{4} \\
 \frac{a}{b} &= 1.284
 \end{aligned}$$

3.4 自我检测题

题 3.1 把一个圆形环状导线沿直径折起来,使两个半圆成一个直角(见图 3-33),环内有电流 I 流过,试求两个半圆的圆心处,磁感应强度的大小和方向。

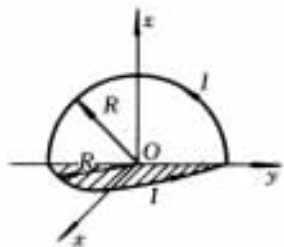


图 3-33 自我检测题 3.1 图

(答案: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$)

题 3.2 下面的矢量函数中哪些可能是磁感应强度? 如果是,求其源变量 $\mathbf{J}$ 。

(1) $\mathbf{F} = -ay\mathbf{e}_x + ax\mathbf{e}_y$

(2) $\mathbf{F} = ar\mathbf{e}_r$

(答案: (1) 是, $\mathbf{J} = \frac{2a}{\mu} \mathbf{e}_z$ 。(2) 不是)

题 3.3 已知半径为 a 的长直圆柱导体内,电流密度 $\mathbf{J} = (\rho^2 + 4\rho)\mathbf{e}_z$ 。试求柱内、外的磁感应强度。

(答案: $0 < \rho < a, \mathbf{H} = \left(\frac{1}{4}\rho^3 + \frac{4}{3}\rho^2 \right) \mathbf{e}_\phi, a \leq \rho, \mathbf{H} = \frac{a^3}{\rho} \left(\frac{a}{4} + \frac{4}{3} \right) \mathbf{e}_\phi$)

题 3.4 厚度为 b 的无限大平面导体, 分布有电流面密度为 J 的电流, 在板中心线某处有一半径为 a 的长直空心圆柱 (图 3-34), 试求圆柱内的磁感应强度。

(答案: $B = -\frac{\mu_0 J}{2} [ye_x + xe_y]$)

题 3.5 已知 $y < 0$ 的区域为导磁媒质, 磁导率 $\mu_2 = 5000\mu_0$, $y > 0$ 的区域为空气。试求: (1) 当空气中的磁感应强度 $B_1 = 0.5e_z - 10e_y$ (mT) 时, 导磁媒质中的磁感应强度 B_2 ; (2) 当导磁媒质中的磁感应强度 $B = 10e_x + 0.5e_y$ (mT) 时, 空气中的磁感应强度 B_1 。

(答案: $2500e_x - 10e_y$ (mT),
 $0.002e_x + 0.5e_y$ (mT))

题 3.6 有一内、外半径分别为 a 、 b 的长直空心圆柱导体, 沿轴向通有电流 Je_z , 请写出磁矢位 A 在圆柱内外各区域所满足的微分方程及边界条件。

题 3.7 一无限长直圆柱形载流导线平行地放在两块无限大平行铁板之间 (图 3-35), 若铁板的磁导率 $\mu \rightarrow \infty$, 请写出图示两板间半域 $ABCDEF$ 内磁矢位 A 所满足的方程及边界条件。

题 3.8 两个无限大的平行平面垂直于 x 轴, 放置在 $x = \pm d$ 的位置上, 平面上通有均匀分布的线密度 $K = \pm K_0 e_z$ 的电流 (见图 3-36), 试建立磁矢位 A 的边值问题, 求解两平面间的磁矢位及磁感应强度。

(答案: $A = \mu_0 K_0 x e_z, B = -\mu_0 K_0 e_y$)

题 3.9 一半径为 a 的长直圆柱导体通有电流面密度 $J = J_0 \frac{\rho}{a} e_z$ 的电流 (e_z 就在圆柱轴线上), 柱内、外磁导率均为 μ_0 , 求长直圆柱导体内、外区域的磁矢位 A 。

(答案: $A_1 = -\frac{\mu_0 J_0}{9a} \rho^3 z \quad (\rho \leq a),$

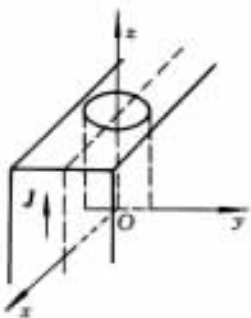


图 3-34 自我检测题 3.4 图

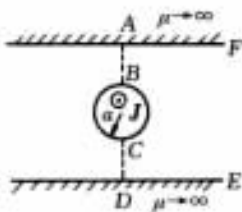


图 3-35 自我检测题 3.7 图

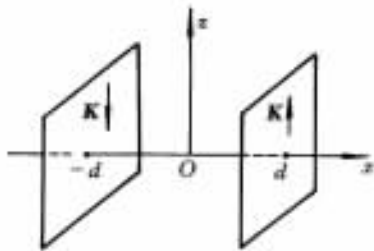


图 3-36 自我检测题 3.8 图

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{3} \left(\ln \frac{a}{\rho} - \frac{1}{3} \right) \mathbf{e}_z$$

题 3.10 一对平行传输线的半径 $a=1.6 \text{ cm}$, 通过的电流 $I=3 \text{ kA}$, 试求当两导线轴线间 $D=10 \text{ cm}$ 时, 每单位长度导体之间的磁通 Φ_m 。

(答案: $\Phi_m = 1.99 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}$)

题 3.11 一对平行传输线 $d=0.5 \text{ m}$, 传输线的半径 $a=0.005 \text{ m}$, 在传输线下方 $h=0.1 \text{ m}$ 处有一平行的无限大铁磁平板, 其相对磁导率 $\mu_r \rightarrow \infty$, 试求平行传输线单位长度的外自感 L 。

(答案: $L = 2.63 \times 10^{-6} \text{ H}$)

题 3.12 在一个圆形截面的圆铁环上, 绕制匝数分别为 N_1 、 N_2 的两个线圈 (见图 3-37), 若铁的磁导率为 μ , 铁环的内外半径分别为 a 和 b , 求这两个线圈的互感。

(答案: $M = \frac{\mu N_1 N_2}{4} (a+b)$)

题 3.13 长直导线旁有一个不共面的单匝矩形图 3-38 自我检测题 3.13 图线圈 (见图 3-38), 请证明它们的互感为

$$M = -\frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{d}{[2b(d^2 - a^2)^{1/2} + b^2 + d^2]^{1/2}}$$

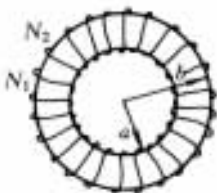
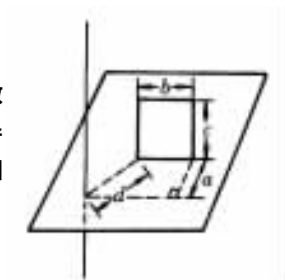


图 3-37 自我检测题 3.12 图



自我检测题 3.13 图

第 4 章 时变电磁场

电磁场基本方程组高度地概括了电磁场的基本特性,揭示了电场与磁场之间的内在联系和转化规律。在时变电磁场中,电场与磁场不再是彼此独立,而是构成统一的电磁场的两个方面;变化的磁场会产生电场,变化的电场会产生磁场,它们两者互为因果关系。时变电磁场的能量守恒定律是坡印廷定理。为了方便计算电磁场,引入动态位函数及其方程。正弦电磁场是时变电磁场的一种特殊形式,在工程中应用很广。

4.1 基本内容和公式

4.1.1 电磁场基本方程组·分界面上的衔接条件

电磁场基本方程组是宏观电磁现象的普遍规律,在静止媒质中,其积分形式和微分形式分别为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-1)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-2)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4-3)$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (4-4)$$

和

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4-8)$$

上述方程不受媒质的电磁特性限制。在各向同性、线性媒质中,场量之间的构成方程为

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4-9)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4-10)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (4-11)$$

由电磁场基本方程组的积分形式,从式(4-1)至式(4-4),可以推导出在不同媒质分界面上场量的衔接条件为

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4-12)$$

$$H_{2t} - H_{1t} = K \quad (4-13)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (4-14)$$

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (4-15)$$

4.1.2 动态位·达朗贝尔方程

在时变电磁场中,由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,可引入矢位 $\mathbf{A}$,使得

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4-16)$$

将式(4-16)代入式(4-6),又可引入标位 φ ,使得

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (4-17)$$

这里,称 $\mathbf{A}$ 和 φ 为时变电磁场的动态位。

当 $\mathbf{A}$ 和 φ 满足洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (4-18)$$

时,由电磁场基本方程组的微分形式即可得到 $\mathbf{A}$ 和 φ 满足的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (4-19)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4-20)$$

在无限大的各向同性、线性、均匀媒质中,达朗贝尔方程式(4-19)和式(4-20)的解为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t - \frac{R}{v})}{R} dV' \quad (4-21)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{R}{v})}{R} dV' \quad (4-22)$$

式中: R 为场点 (x, y, z) 到源点 (x', y', z') 之间的距离; $v (= \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}})$ 为电磁波的波

速。积分解式(4-21)和式(4-22)的物理意义是在源点 (x', y', z') 处,时刻 $t' =$

$t - \frac{R}{v}$ 的源产生的电磁场要经过时间 $\frac{R}{v}$ 才能传播到场点 (x, y, z) 处, 这一推迟的时间也就是传递电磁作用所需的时间。空间各点的动态位 A 和 φ 随时间的变化总是落后于激励源的变化, 所以通常又称 A, φ 为推迟位。

4.1.3 电磁功率流和坡印廷矢量

在时变电磁场中, 电磁场以波的方式运动时, 伴随着电磁能量的流动。电磁场的能量转换和守恒定律称为坡印廷定理。由电磁场基本方程组可推导出坡印廷定理的数学表达式为

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J} dV - \iiint_V \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma} dV - \frac{\partial W}{\partial t} \quad (4-23)$$

式中

$$W = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV \quad (4-24)$$

式(4-23)表明, 任意体积内损耗的功率与流出这一体积的功率之和等于单位时间内该体积中减少的电磁能量与该体积内电源提供的功率之和。

$$\text{令} \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (4-25)$$

称 $\mathbf{S}$ 为坡印廷矢量或电磁功率流密度。它表示在单位时间内流过垂直于 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的单位面积上的电磁能量。其方向就是电磁能量传播或流动的方向。

4.1.4 正弦电磁场

按一定频率随时间作正弦变化的电磁场称为正弦电磁场。对于正弦电磁场, 常以复数形式来表示, 例如

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\sqrt{2} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad (4-26)$$

式中

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \dot{E}_x(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + \dot{E}_y(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + \dot{E}_z(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z \quad (4-27)$$

称为电场强度 $\mathbf{E}$ 的复数形式。

用复数形式表示场量时, 电磁场基本方程组可写为如下的复数形式

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \quad (4-28)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \quad (4-29)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (4-30)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} \quad (4-31)$$

且有构成方程

$$\dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}} \quad (4-32)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}} \quad (4-33)$$

$$\dot{\mathbf{J}} = \gamma \dot{\mathbf{E}} \quad (4-34)$$

坡印廷定理的复数形式为

$$-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = \iiint_V \frac{|\dot{\mathbf{J}}|^2}{\gamma} dV + j\omega \iiint_V (\mu |\dot{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon |\dot{\mathbf{E}}|^2) dV - \iiint_V \dot{\mathbf{E}}_e \cdot \dot{\mathbf{J}}^* dV \quad (4-35)$$

上式右边第 1 项表示体积 V 内导电媒质消耗的功率,即有功功率 P ;右边第 2 项表示体积 V 内电磁能量的平均值,即无功功率 Q ;右边最后一项是体积 V 内电源提供的复功率。上式左边表示流入闭合面 S 内的复功率。而

$$\tilde{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \quad (4-36)$$

称为坡印廷矢量 $\mathbf{S}$ 的复数形式。

若体积 V 内不含有电源,式(4-35)可以写为

$$-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\tilde{\mathbf{S}} = P + jQ$$

根据等值的观点,可令 $P = I^2 R$, $Q = I^2 X$ 。因此,正弦电磁场中某一体积 V 内媒质的等效电路参数 R 和 X ,可分别由下面两式计算

$$R = -\frac{1}{I^2} \operatorname{Re} \left[\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\tilde{\mathbf{S}} \right] \quad (4-37)$$

$$X = -\frac{1}{I^2} \operatorname{Im} \left[\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\tilde{\mathbf{S}} \right] \quad (4-38)$$

洛伦兹条件和达朗贝尔方程的复数形式分别为

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} + j\omega\mu\epsilon\dot{\phi} = 0 \quad (4-39)$$

和

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + \beta^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{J}} \quad (4-40)$$

$$\nabla^2 \dot{\phi} + \beta^2 \dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}}{\epsilon} \quad (4-41)$$

式中: $\beta (= \omega \sqrt{\mu\epsilon})$ 称为相位常数。达朗贝尔方程的积分形式的复数形式为

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}(x', y', z') e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (4-42)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\dot{\rho}(x', y', z') e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (4-43)$$

式中: $e^{-j\beta R}$ 为滞后因子。表示相位滞后 βR 。

4.1.5 电磁辐射

电磁辐射是指携带能量的电磁波向远处传播出去而不再返回波源的现象。这里,用一个单元偶极子来说明电磁波的辐射。这是一个基本的电磁波辐射元。实际的辐射系统可以认为是由许多单元偶极子所构成的。

在单元偶极子激发的电磁场中, $r \ll \lambda$ 的区域称为近区(近区常称为似稳区)。在近区,各场量可近似地以下面公式表示

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \dot{H}_\theta = \dot{E}_\theta = 0 \\ \dot{H}_\phi &= \frac{\dot{I} \Delta l \sin \theta}{4 \pi r^2} \\ \dot{E}_r &= 2 \frac{\dot{p} \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \\ \dot{E}_\theta &= \frac{\dot{p} \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \end{aligned} \right\} \quad (4-44)$$

式中: $\dot{p} = \frac{\dot{I} \Delta l}{j \omega}$ 。以上表达式与静态场类似,近区中电场与磁场的分布规律与相应的静电场和恒定磁场相似,推迟效应可以忽略。

$r \gg \lambda$ 的区域称为远区(远区常称为辐射区)。在远区,各场量可近似地以下面的公式表示

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_r &= \dot{H}_\theta = \dot{E}_r = \dot{E}_\phi = 0 \\ \dot{H}_\phi &= j \frac{\dot{I} \Delta l \sin \theta}{2 \lambda r} e^{-j \frac{2 \pi r}{\lambda}} \\ \dot{E}_\theta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} j \frac{\dot{I} \Delta l \sin \theta}{2 \lambda r} e^{-j \frac{2 \pi r}{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (4-45)$$

远区场为辐射场,向空间辐射功率。由以上各式可见, E 和 H 在空间互相垂直,在时间上同相,大小的比值为

$$\frac{E}{H} = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\phi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = 120 \pi \approx 377 \Omega \quad (4-46)$$

称 Z_0 为波阻抗,具有电阻的量纲。

单元偶极子的辐射场具有方向性,通常用方向图因子 $f(\theta, \phi)$ 来表述。电偶极子在 E 平面(电场所在平面)上, $\dot{E}_\theta$ 与 ϕ 角度无关,方向图因子为

$$f_{E\text{平面}}(\theta, \phi) = \frac{E_\theta}{E_{\theta\max}} = \sin \theta \quad (4-47)$$

方向图如图 4-1(a)所示。在 H 平面(即 $\theta = 90^\circ$ 时磁场所在平面)上,方向图因子为

$$f_{H\text{平面}}(\theta, \phi) = \frac{E_\theta}{E_{\theta\max}} = 1 \quad (4-48)$$

方向图如图 4-1(b)所示。有了这样两个相互垂直的切面上的方向图,整个立体的方向性也就基本清楚了,如图 4-1(c)所示。

坡印廷矢量的平均值为

$$S_{av} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I^2 (\Delta l)^2 \sin^2 \theta}{4 \lambda^2 r^2} e_r \quad (4-49)$$

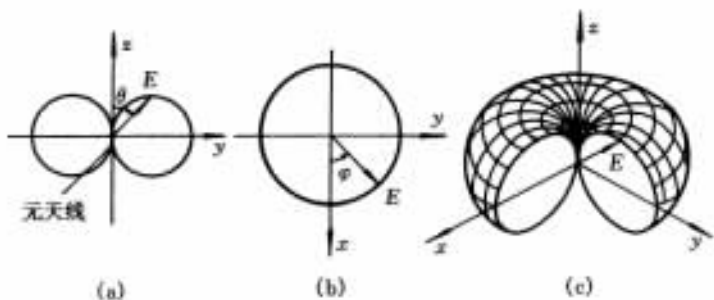


图 4-1 单元偶极子的方向图

上式表示单位面积辐射电磁能的平均值与 $\sin^2 \theta$ 的关系。沿单元偶极子的轴方向上无电磁能的辐射。

单元偶极子在空间辐射的总功率为

$$P = \oint_S \operatorname{Re}[\tilde{\mathbf{S}}] \cdot d\mathbf{S} = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 I^2 \quad (4-50)$$

这个功率辐射出去后不再返回波源。单元偶极子辐射电磁能量的能力常用辐射电阻 R_e 来表示。 R_e 定义为

$$R_e = \frac{P}{I^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \quad (4-51)$$

从上面两式可见, Δl 大时, 辐射功率大, 辐射电阻也大。

4.2 重点与难点

电磁场基本方程组是描述电磁现象的普遍规律, 是求解电磁场与波的基本方程。分界面上的衔接条件是电磁场基本方程组在不同媒质分界面上的表现形式, 在求解电磁场边值问题中起定解作用。牢固掌握电磁场基本方程组的微分、积分形式, 深刻理解其物理意义, 正确理解和使用分界面上的衔接条件都是这一章的重点。

坡印廷定理是电磁场中的能量转换和守恒定律, 坡印廷矢量是电磁场中的一个重要而且很有用的概念。深刻理解坡印廷矢量和坡印廷定理的物理意义, 并能应用它们分析电磁能量的传输情况既是这一章的重点, 又是这一章的难点。

最后, 掌握电磁场的波动方程和推迟效应也是一个重点内容。

4.2.1 电磁场基本方程组

电磁场基本方程组是宏观电磁现象的普遍规律的数学表述, 是电磁理论的核

心和分析求解电磁场问题的基础。它包含了两个重要的概念:① 随时间变化的磁场要产生电场;② 随时间变化的电场要产生磁场。前者是对法拉第电磁感应定律由导体回路推广到媒质中的假想回路而得到的,后者是由引入位移电流的概念而获得的。

1. 位移电流的概念

在时变电磁场中,为了克服 $\nabla \times H = J$ 与 $\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 之间的矛盾,麦克斯韦提出了位移电流 $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$ 这一重要假设,建立了方程

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

由上式可知,麦克斯韦引进的 $\frac{\partial D}{\partial t}$ 与传导电流密度同量纲,是另外一种电流密度,它是由于电场的变化所产生的。

例如,图4-2所示一个平板电容器。在静态中,电容器中没有电流通过。当电压发生变化时,电容器中的电场发生变化,有了位移电流。位移电流的方向是电位移 D 的变化率的方向。在充电过程中,极板上的电荷增加,

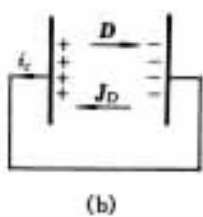
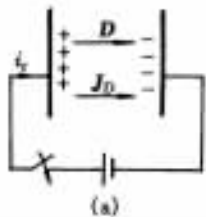


图4-2 电容器的充、放电过程

加, $\frac{\partial D}{\partial t} > 0$, $i_d (= i_c)$ 与 D 的方

向一致,如图4-2(a)所示。在放电过程中,极板上电荷减少, $\frac{\partial D}{\partial t} < 0$, $i_d (= i_c)$ 与 D 的方向相反如图4-2(b)所示。位移电流与传导电流一样,也具有磁效应。但是,如果频率较低,可以忽略位移电流的磁效应。

2. 电磁场基本方程组的应用

电磁场基本方程组(4-1)至式(4-8)适用于普遍情况下的电磁场。在实际应用中,根据电磁场的不同状态:静态、正弦稳态、准静态及似稳态等,有其相应的电磁场基本方程组的简化形式。

静态场是电磁场的一种特殊形式。在静态场中,场量与时间无关,电磁场基本方程组中所有场量对时间的偏导数为零,得到

$$\text{静电场} \quad \nabla \times E = 0 \quad \text{和} \quad \nabla \cdot D = \rho$$

$$\text{恒定电场} \quad \nabla \times E = 0 \quad \text{和} \quad \nabla \cdot J = 0$$

$$\text{恒定磁场} \quad \nabla \times H = J \quad \text{和} \quad \nabla \cdot B = 0$$

可以看出,电场与磁场之间不存在相互作用,它们分别满足彼此独立的方程。例如,直流输电线路,在导线周围的媒质中存在着库仑电场和恒定磁场;在导线内部存在着恒定电场和恒定磁场,也就是说,库仑电场、恒定电场、恒定磁场共存于同一空间。但由于3种场彼此独立,所以可以分别予以计算和分析。

正弦电磁场,是电磁场的又一种特殊形式。在正弦电磁场中,电磁场随时间作正弦变化,电磁场基本方程组可以用复数形式来表示。这样,一个时域场中四维空间问题就可以转化为频域场中的三维空间问题,这种方法在电磁场计算中应用很广。

当位移电流远小于传导电流时,可以忽略位移电流,在电磁场基本方程组式(4-5)至式(4-8)中, $\nabla \times \dot{H} \approx J$,其余方程不变。由于磁场与恒定磁场满足的微分方程相同,故称之为磁准静态场。此时,磁场强度 H 可以用恒定磁场中的求解方法获得,而电场仍用时变场的计算方法求解。

电磁场还有其他状态,这里不一一论述。总之,在解决工程电磁场问题时,首先应该依据电磁场所处的状态来简化电磁场基本方程组,然后选择正确的计算方法解之。

4.2.2 不同媒质分界面上的衔接条件

在时变电磁场中,不同媒质分界面上的衔接条件包括4个关系式,但它们并不是相互独立的,搞清楚这个问题,对正确应用分界面上的衔接条件来进行定解是非常有益的。

在时变电磁场中,分界面上的衔接条件不独立。当满足两个切线分量的衔接条件时,必定满足法线分量的衔接条件。所以,在求解时变电磁场边值问题时,不需要全部应用衔接条件的4个关系式。

下面对两种常见的情况作一些讨论。

(a) 两种理想介质的分界面:在这种分界面上,当电荷面密度 σ 和电流线密度 K 都等于零时,用于定解的衔接条件为

$$E_{2t} = E_{1t} \quad \text{和} \quad H_{2t} = H_{1t} \quad (4-52)$$

例如,分析电磁波在理想介质分界面上的反射与折射时,就要应用这样的衔接条件。

(b) 理想导体与电介质的分界面:在时变电磁场中,理想导体内部的 B 和 H 、 E 和 D 都为零。在这种分界面上,存在着面电荷和面电流,所以,理想导体表面上的边界条件为

$$\begin{cases} E_t = 0 \\ H_t = K \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} D_n = \sigma \\ B_n = 0 \end{cases}$$

由于 σ 和 K 通常是事先不知道的, 所以求解这种边值问题时, 用来定解的衔接条件为

$$E_t = 0 \quad \text{或} \quad B_n = 0 \quad (4-53)$$

例如, 分析电磁波在理想导体表面上的反射问题, 波导和谐振腔中的电磁场, 都要应用这样的边界条件。

最后, 需要说明的是在应用分界面上的衔接条件 $H_{2t} - H_{1t} = K$ 时, 特别要注意磁场的切线分量 H_t 与面电流 K 之间是相互交链的关系。它们都同时位于分界面的切平面上, 但又相互正交, 如图 4-3 所示。如果 H_t 与 K 之间相互平行, 则将有 $H_{2t} = H_{1t}$ 。

例 4-1 已知媒质 1 中的磁场强度为

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z \quad \text{A/m}$$

分界面上有以电流线密度 $K = 2\mathbf{e}_x$ A/m 分布的面电流(图 4-4), 试求媒质 2 中的磁场强度 $\mathbf{H}_2$ 。

解 媒质 1 中 $\mathbf{H}_1$ 在分界面上的切向分量为

$$H_{1x}\mathbf{e}_x + H_{1z}\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_z$$

其中, 与面电流 K 相交链的磁场切线分量为 H_{1z} , 根据式 (4-13) 有

$$H_{2z} - H_{1z} = H_{2z} - 3 = 2 \quad \text{或} \quad H_{2z} = 5$$

由于 H_{1x} 与面电流 K 平行, 所以有

$$H_{2x} = H_{1x} = 1$$

又根据式 (4-15), 有

$$B_{2y} = B_{1y} = \mu_1 H_{1y} = 2\mu_1$$

所以, 有

$$H_{2y} = \frac{1}{\mu_2} B_{2y} = 2 \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

最后, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= H_{2x}\mathbf{e}_x + H_{2y}\mathbf{e}_y + H_{2z}\mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{e}_x + 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

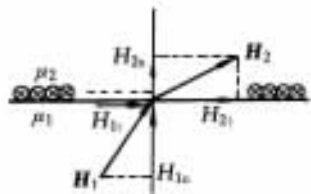


图 4-3 媒质分界面

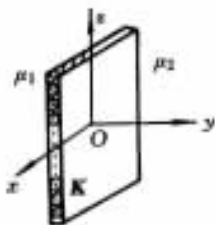


图 4-4 面电流两侧的磁场

4.2.3 坡印廷矢量

在正弦电磁场中, 描述电磁功率流密度的矢量有几种形式: 瞬时坡印廷矢量 $\mathbf{s}$

$= \mathbf{E} \times \mathbf{H}$; 复坡印廷矢量 $\tilde{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$ 和平均坡印廷矢量 $S_{av} = \text{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*]$; 在学习中, 应注意两个问题: (1) 为什么不是用 $\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}$ 定义复坡印廷矢量, 而是用 $\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$; (2) $\mathbf{S}$ 、 $\tilde{\mathbf{S}}$ 和 S_{av} 三者之间有怎样的关系?

对于正弦电磁场, 计算一个周期 T 内 $\mathbf{S}$ 的时间平均值更有实际意义。 $\mathbf{S}$ 的时间平均值定义为

$$S_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dt$$

当场量用复数形式表示时, 有

$$S_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}[\sqrt{2}\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}] \times \text{Re}[\sqrt{2}\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}] dt$$

上式经过积分后, 得

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*]$$

由此定义复坡印廷矢量为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$$

可以看出, $\tilde{\mathbf{S}}$ 与 S_{av} 相互联系, 而与瞬时坡印廷矢量 $\mathbf{S}$ 之间没有直接关系。也就是说, 不能由 $\tilde{\mathbf{S}}$ 的表达式取实部得到 $\mathbf{S}$ 的表达式。定义复坡印廷矢量 $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 在于能方便地计算出 S_{av} 。

4.2.4 电磁辐射

电磁波的辐射问题本质上也是一个边值问题, 解析求解是很困难的, 实际上都是采用近似解法, 并常采用动态位函数 A 和 φ 。在学习中, 重点是掌握单元偶极子激发的电磁场的近区、远区划分及其场的性质, 应理解电磁能量的辐射过程及了解天线阵的工作原理。

单元偶极子辐射是一种最简单同时又是最重要的辐射形式。它的辐射场的特点是: 由式(4-45)可以看出, $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 都与传播方向垂直, 而且 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 彼此垂直, 为横电磁波; $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 都与 r 的一次方成正比, 所以 $S \propto \frac{1}{r^2}$, 辐射的总功率与包围单元偶极子的球面半径 r 无关, 说明这部分电磁能量确实脱离了激发源而辐射出去了。但辐射具有明显的方向性。偶极子轴线方向上没有辐射, 在赤道平面上辐射最强。辐射功率正比于频率的平方, 频率升高, 辐射功率迅速增加。另一方面, 由辐射电阻

$$R_e = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2$$

可见单元偶极子的辐射能力与 $\left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2$ 成正比。要提高辐射能力, 必须使天线的长

度增大到与波长同数量级,但这时的天线已不能用单元偶极子来表示。如半波天线可以看作是多个单元偶极子的组合。单元偶极子激发的电磁场满足叠加原理,而半波天线的辐射场可由它的叠加来求得。必须注意的是,单元偶极子场的叠加并不一定是单元偶极子的辐射。

4.3 典型题解析

4-1 证明动态位 φ 和 A 满足的达朗贝尔方程与电流连续性方程是一致的。

解 动态位 φ 和 A 满足的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\nabla^2 A - \mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \quad (2)$$

对方程(2)等号两边取散度,有

$$\nabla \cdot \nabla^2 A - \nabla \cdot \left(\mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right) = -\nabla \cdot (\mu J) \quad (3)$$

假设媒质是均匀和各向同性的,式(3)可以写为

$$\nabla^2 \nabla \cdot A - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot A) = -\mu \nabla \cdot J \quad (4)$$

将洛伦兹条件 $\nabla \cdot A + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 代入式(4),得

$$\nabla^2 \left(-\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \nabla \cdot J$$

即

$$-\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}) = -\mu \nabla \cdot J \quad (5)$$

将式(1)代入式(5),得

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\rho}{\epsilon} \right) = \nabla \cdot J$$

即

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

式(6)便是电流连续性方程的微分形式,它是由 φ 和 A 所满足的达朗贝尔方程推导而得到,所以说它们是一致的。

要熟悉达朗贝尔方程、洛伦兹条件、电流连续性方程。灵活运用矢量分析的有关公式在这里显示出重要性。

4-2 一个球形电容器,内、外半径分别为 R_1 和 R_2 。内、外导体之间填充微弱导电的电介质,试求电容器中漏电流产生的磁场。

解 由于电容器中的漏电流很小,可以忽略磁场的变化对电场的贡献。因此,有

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \approx -\nabla\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

式(1)与恒定电场的表达形式相同,从而有

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = \frac{i}{4\pi\gamma r^2} \mathbf{e}_r \quad (2)$$

设外导体接地,在半径 $r(R_1 < r < R_2)$ 处,电位为

$$\varphi = \int_r^{R_2} \frac{i}{4\pi\gamma r^2} dr = \frac{i}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

由洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4)$$

根据球的对称性, A_θ 和 A_ϕ 恒等于零。于是,展开式(4),得到

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A_r) = -\mu\epsilon \frac{i}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

即

$$\frac{d}{dr} (r^2 A_r) = -\mu\epsilon \frac{i}{4\pi\gamma} \left(r - \frac{r^2}{R_2} \right)$$

积分后,得到

$$A_r = -\mu\epsilon \frac{i}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R_2} \right) + \frac{C}{r^2} \quad (5)$$

C 为积分常数,在时变电磁场中可以略去。

由式(5)可以看出, A 仅有 A_r 分量,且为 (r, t) 的函数,即 $\mathbf{A} = A_r(r, t) \mathbf{e}_r$ 。因此有

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

这是一个非常有趣的结论:在球形电容器中,漏电流不产生磁场。

这一结论还可以通过 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 证明:由于在球形电容器中, $\mathbf{E} = E_r(r, t) \mathbf{e}_r$,所以在球坐标系下, $\mathbf{E}$ 的旋度等于 0, $\mathbf{B}$ 等于常数。在时变电磁场中,如果没有恒定电流,这个常数必定为 0。

判定电容器中的电场可近似作为恒定电场处理这一点很重要。

4-3 在自由空间中,已知电场强度 E 的表达式为

$$E = E_{xm} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x + E_{ym} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

试求坡印廷矢量 S , S_{av} , 单位体积中的瞬时电磁能量和一个周期内的平均值。

解 根据电磁场基本方程组求出 H , 然后再求坡印廷矢量及其他参量。

电场强度的复数形式为

$$\dot{E} = E_x e^{-j\beta z} \mathbf{e}_x + E_y e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y$$

将上式代入电磁场基本方程组的第 2 方程, 得到

$$\begin{aligned} -j\omega\mu_0 \dot{H} &= \nabla \times \dot{E} = -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \mathbf{e}_y \\ &= j\beta E_y e^{-j\beta z} \mathbf{e}_x - j\beta E_x e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

用 $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 代入上式, 得到

$$\dot{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y e^{-j\beta z} \mathbf{e}_x + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y$$

令 $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, H 的瞬时形式为

$$H = -\frac{E_{ym}}{Z_0} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x + \frac{E_{xm}}{Z_0} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

坡印廷矢量为

$$S = E \times H = \frac{1}{Z_0} (E_{xm}^2 + E_{ym}^2) \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_z$$

坡印廷矢量的平均值为

$$S_{av} = \operatorname{Re}[\dot{E} \times \dot{H}^*] = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_x^2 + E_y^2) = \frac{1}{2Z_0} (E_{xm}^2 + E_{ym}^2)$$

或

$$S_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T (E \times H) dt = \frac{1}{2Z_0} (E_{xm}^2 + E_{ym}^2)$$

空间任一点的电磁能量密度为

$$\begin{aligned} w' &= \frac{1}{2} D \cdot E + \frac{1}{2} B \cdot H \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - \beta z) + \frac{1}{2} \mu_0 H_m^2 \cos^2(\omega t - \beta z) \\ &= \epsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

式中: $E_m = (E_{xm}^2 + E_{ym}^2)^{\frac{1}{2}}$; $H_m = (H_{xm}^2 + H_{ym}^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

对于正弦电磁场, 从电磁场基本方程组第 1 方程或第 2 方程, 由 H (或 E) 求 E (或 H), 采用复数形式最方便。

S , S_{av} 和 $\bar{S}$ 各具有不同的物理意义及用途, 不可混淆。

单位体积内的电磁能量是

$$\begin{aligned}
 W &= \iiint_V \epsilon_0 E_m^2 \cos(\omega t - \beta z) dV \\
 &= \int_0^1 \epsilon_0 E_m^2 \cos(\omega t - \beta z) dz \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2 \left[1 - \frac{1}{2\beta} \sin 2(\omega t - \beta) + \frac{1}{2\beta} \sin 2\omega t \right]
 \end{aligned}$$

W 在一个周期内的平均值为

$$\begin{aligned}
 W_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T w' dt \\
 &= \frac{1}{2T} \epsilon_0 E_m^2 \int_0^T \left[1 - \frac{1}{2\beta} \sin 2(\omega t - \beta z) + \frac{1}{2\beta} \sin 2\omega t \right] dt \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2
 \end{aligned}$$

4-4 有一圆形极板电容器 (见图 4-5), 其中, 填充材料的介电常数为 ϵ 、磁导率为 μ 和电导率为 γ , 外加正弦电压 $u = U_m \sin \omega t$ 。电容器内部可以看成均匀电场。试求: (1) 画出电容器内、外的坡印廷矢量 S 的方向; (2) 用坡印廷定理计算电容器的储能和耗能。

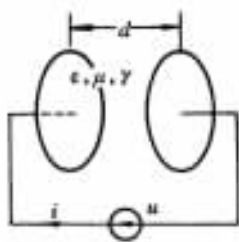


图 4-5 典型题 4-4 图

解 (1) 电容器在充电、放电

两种情况下, 坡印廷矢量 $S = E \times H$ 的方向如图 4-6 所示。

(2) 由于电容器填充有损媒质, 所以电容器不仅储存电能, 还以焦耳热的形式损耗能量, 可以用坡印廷定理来计算这两部分能量。

首先, 计算电场分量和磁场分量。忽略边缘效应, 假设电容器中电场均匀分布, 所以有

$$E = \frac{u}{d} e_z = \frac{U_m}{d} \sin \omega t e_z$$

其复数形式为

$$\dot{E} = \frac{U}{d} e_z$$

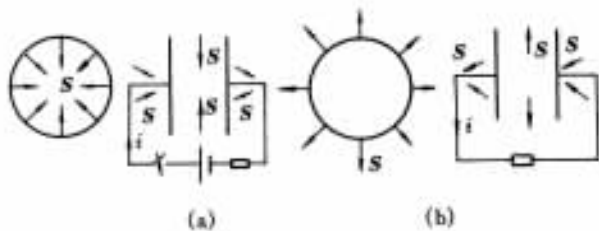


图 4-6 电容器的充、放电情况

(a) 充电情况; (b) 放电情况

由于电容器填充有电导率为 γ 的媒质, 所以有漏电流存在

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{\gamma U_m}{d} \sin \omega t \mathbf{e}_z$$

电容器中的位移电流密度

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \omega \frac{U_m}{d} \cos \omega t \mathbf{e}_z$$

根据全电流定律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S}$$

积分后, 有

$$\begin{aligned} 2\pi\rho H_\phi &= (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \pi \rho^2 \\ &= \left(\frac{\gamma U_m}{d} \sin \omega t + \epsilon \omega \frac{U_m}{d} \cos \omega t \right) \pi \rho^2 \end{aligned}$$

整理后, 磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{AU_m}{2d} \rho \sin(\omega t + \theta) \mathbf{e}_\phi$$

式中: $A = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2 \epsilon^2}$; $\sin \theta = \frac{\omega \epsilon}{A}$; $\cos \theta = \frac{\gamma}{A}$; $\theta = \arctan \frac{\omega \epsilon}{\gamma}$ 。

磁场强度的复数形式为

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{AU}{2d} \rho e^{j\theta}$$

电容器吸收的能量为

$$\begin{aligned} P + jQ &= - \oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \oint_S \left(\frac{U}{d} \cdot \frac{AU}{2d} \rho e^{-j\theta} \right) (-\mathbf{e}_\rho) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \frac{U^2 A a}{2d^2} e^{-j\theta} dS = \frac{a^2 U^2}{d} A \pi e^{-j\theta} \\
&= \frac{a^2 U^2}{d} A \pi (\cos\theta - j \sin\theta) \\
&= \frac{a^2 U^2}{d} A \pi \left(\frac{\gamma}{A} - j \frac{\omega \epsilon}{A} \right) \\
&= \frac{\pi a^2 \gamma}{d} U^2 - j \frac{\pi a^2 \epsilon}{d} \omega U^2 \\
&= \frac{U^2}{R} - j C \omega U^2 = \frac{U^2}{R} + j \frac{U^2}{X_c}
\end{aligned}$$

其中, $P = \frac{U^2}{R}$ 是电容器漏电阻损耗的能量; $Q = \frac{U^2}{X_c}$ 是电容器储存的电能。

ω 较低时, 电容器中的电场可近似用静电场方法计算。

要十分清楚积分

$-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) dS$ 的含义。

4-5 电力变压器
中铁心部分的简化图形如图 4-7 所示。试用坡印廷矢量说明电力变压器长直铁心的能量传输。

解 设副边线圈匝数和电流分别为 N_2 和 i_2 。根据电磁感应定律, 副边线圈中的感应电动势为

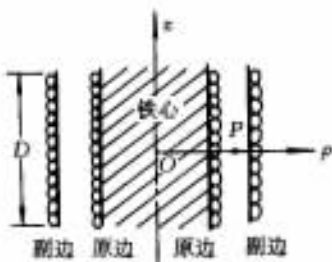


图 4-7 电力变压器铁心

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

式中: ϕ 是副边线圈所交链的全部磁通。那么, 副边的输出功率 $P = i_2 \mathcal{E}_2$ 。变压器的原边与副边之间没有电的联系, 这个能量是通过电磁场由原边传递到副边的, 证明如下:

在原边与副边之间任一点 P 的电场强度可由下式求得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

式中: 感应电场 $\mathbf{E}$ 的方向与电流方向一致; 磁场沿 z 轴方向; 积分路径 L 沿以 ρ (P 点坐标) 为半径的圆周; 与 L 交链的磁通 Φ 是由原边和副边电流共同产生的, 也是副边线圈所交链的全部磁通。上式积分后, 有

不计边缘效应, 电磁场集中在变压器内部。

P 点的磁场仅由副边电流产生。

$$E = \left(-\frac{d\Phi}{dt}\right) \frac{1}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

P 点的磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{N_2 i_2}{D} \mathbf{e}_z$$

P 点的功率流密度

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} &= -\frac{\left(-\frac{d\Phi}{dt}\right) N_2 i_2}{2\pi D} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_r \\ &= \frac{\mathcal{E}_2 i_2}{2\pi D} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

$\mathbf{S}$ 的方向朝向副边, 电磁能量传递给副边线圈。对整个圆柱面积分后, 得传输功率

$$P = \iint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^D \mathbf{S} \cdot (2\pi\rho dz) \mathbf{e}_r = \mathcal{E}_2 i_2$$

这就说明了电磁能量的传输是通过电磁场来完成的。

4-6 已知单元偶极子的电磁场分量为

$$H_\phi = \frac{I\Delta L}{4\pi r} e^{-j\beta r} \left(j\beta + \frac{1}{r}\right) \sin\theta$$

$$E_r = -j \frac{I\Delta L}{2\pi\epsilon\omega r^2} e^{-j\beta r} \left(j\beta + \frac{1}{r}\right) \cos\theta$$

$$E_\theta = -j \frac{I\Delta L}{4\pi\epsilon\omega r} e^{-j\beta r} \left(-\beta^2 + j\frac{\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin\theta$$

试求: (1) 远区与近区场量的表达式;

(2) 计算远区的辐射功率和辐射电阻;

远区与近区的含义。

解 (1) 在近区, $\beta r \ll 1$, 略去 βr 和 $\frac{1}{\beta r}$ 的低次项, 不计推迟效应, 有

$$H_\phi \approx \frac{I\Delta L}{4\pi r^2} \sin\theta$$

$$E_r \approx -j \frac{I\Delta L}{2\pi\epsilon\omega r^3} \cos\theta$$

$$E_\theta \approx -j \frac{I\Delta L}{4\pi\epsilon\omega r^3} \sin\theta$$

在远区, $\beta r \ll 1$, 忽略 $\frac{1}{\beta r}$ 的高次项, 并将 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ 代入, 有

$$\dot{H}_\phi = j \frac{I \Delta L}{2 \lambda r} \sin \theta e^{-j \beta r}$$

$$E_\theta = j \frac{I \Delta L \beta}{2 \lambda \omega \epsilon r} \sin \theta e^{-j \beta r}$$

(2) 坡印廷矢量的复数形式为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* = \left(\frac{I \Delta L}{2 \lambda r} \sin \theta \right)^2 \frac{\beta}{\omega \epsilon} \mathbf{e}_r$$

轴射功率由下式计算

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re} \left[\oint_S \tilde{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{I \Delta L}{2 \lambda r} \right)^2 \frac{\beta}{\omega \epsilon} \sin^2 \theta \cdot 2 \pi r^2 \sin \theta d\theta \\ &= 80 \pi^2 I^2 \left(\frac{\Delta L}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

辐射电阻为

$$R_e = \frac{P}{I^2} = 80 \pi^2 \left(\frac{\Delta L}{\lambda} \right)^2$$

4.4 自我检测题

题 4.1 一圆柱电容器,内、外导体半径分别为 a 和 b ,长为 L 。设外加电压为 $U_0 \sin \omega t$,试证明电容器极板间的总位移电流等于电容器的传导电流。

(答案:略)

题 4.2 已知在空气中

$$\mathbf{E} = 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \mathbf{e}_y \quad \text{V/m}$$

试求磁场强度 $\mathbf{H}$ 和相位常数 β 。

(答案: $\mathbf{H} = 0.23 \times 10^{-3} \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - 54.41z) (-\mathbf{e}_x) - 0.13 \times 10^{-3} \cos(10\pi x) \sin(6\pi \times 10^9 t - 54.41z) \mathbf{e}_z$; $\beta = 54.41 \text{ rad/m}$)

题 4.3 在自由空间中, $\mathbf{E}(z, t) = 50 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x \text{ V/m}$ 。在 z 为常数的平面中,试求穿过半径为 2.5 m 的圆面积内的平均功率。

(答案: $P = 65.1 \text{ W}$)

题 4.4 球形电容器的内、外半径分别为 a 和 b 。当外加电压 $U_m \sin \omega t$ 时,若频率不高,则电容器内的电场分布和静态场情况相同,试求介质中的位移电流密度及穿过半径为 $r(a < r < b)$ 的球面的总位移电流。

(答案: $\mathbf{J}_d = \frac{ab}{a-b} \cdot \frac{\epsilon \omega}{r^2} U_m \cos \omega t$; $i_d = C \omega U_m \cos \omega t$, 式中 $C = 4\pi \epsilon \frac{ab}{a-b}$ 是球形电容

器的电容)

题 4.5 电磁能量自同轴电缆的一端传送到另一端(接负载)。略去电缆的损耗,试用坡印廷矢量证明传输给负载的功率等于加在电缆的电压 u 和通过电缆的电流 i 的乘积。

(答案:略)

题 4.6 同轴电缆内、外导体半径分别为 $a=1\text{ mm}$, $b=4\text{ mm}$ 。忽略电缆损耗,内、外导体之间填充有相对介电常数为 $\epsilon_r=2.25$ 的聚乙烯。已知电缆内的电场强度为

$$E = \frac{100}{r} \cos(10^8 t - \beta z) e_r \quad \text{V/m}$$

式中: z 是沿电缆轴线的长度坐标。试求: (1) 相位常数 β ; (2) 磁场强度 H 的表达式; (3) 内导体表面的电流线密度; (4) 沿轴线 $0 \leq z \leq 1\text{ m}$ 区段中的位移电流。

(答案: (1) $\beta=0.5\text{ rad/m}$; (2) $H = \frac{0.398}{r} \cos(10^8 t - 0.5z) e_\phi\text{ A/m}$;

(3) $K=397.9 \cos(10^8 t - 0.5z) e_z\text{ A/m}$;

(4) $i_d = -1.24 \sin(10^8 t - 0.25)\text{ A}$)

题 4.7 为了在垂直于偶极子天线轴线方向上,距离偶极子天线 100 km 的地方得到电场强度有效值大于 $100\text{ }\mu\text{V/m}$ 的电磁波,试求偶极子天线必须至少辐射多少功率。

(答案:根据远区电磁辐射公式,得到 $\theta=90^\circ$ 方向的电场强度表达式,解出有用参数,再求辐射功率。 $P \geq 2.22\text{ W}$)。

第 5 章 准静态电磁场

电准静态场和磁准静态场统称为准静态电磁场。它们的特点是：都属时变电磁场，但却具有静态场的一些性质。

5.1 基本内容和公式

5.1.1 准静态电磁场的分类和方程

根据忽略 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 还是忽略 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ，准静态电磁场分作电准静态场和磁准静态场两类。

1. 电准静态场的基本方程组

时变电磁场，当可忽略 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 时，称为电准静态场。它的基本方程组（微分形式）为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} \approx 0 \quad (5-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5-4)$$

2. 磁准静态场的基本方程

时变电磁场，当可忽略 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 时，称为磁准静态场。它的基本方程组（微分形式）为

$$\nabla \times \mathbf{H} \approx \mathbf{J} \quad (5-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5-8)$$

5.1.2 导电媒质中自由电荷的弛豫过程

1. 无界均匀导电媒质中自由电荷的弛豫过程

在导电媒质中,自由电荷的弛豫过程是按指数规律衰减的。无界均匀导电媒质的弛豫时间为

$$\tau_e = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (5-9)$$

自由电荷的分布为

$$\rho = \rho_0(x, y, z) e^{-\frac{t}{\tau_e}} \quad (5-10)$$

在电荷的弛豫过程中,导电媒质中的电场是一个典型的电准静态场。在电准静态场近似下,有 $\nabla \times E \approx 0$ 。因此,可以引入电位函数

$$E = -\nabla\varphi \quad (5-11)$$

且有

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5-12)$$

考虑到式(5-10),则有

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\tau_e}} \quad (5-13)$$

这就是支配电位 φ 变化所要求的偏微分方程。如果取

$$\varphi = \varphi_0(x, y, z) e^{-t/\tau_e} \quad (5-14)$$

代入式(5-13)中,有

$$\nabla^2 \varphi_0 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \quad (5-15)$$

显然,这里 $\varphi_0(x, y, z)$ 是 $t=0$ 时,导体内的电位分布。这个结果表明,导电媒质中的电位分布随时间也按指数规律衰减。

2. 导电媒质分界面自由电荷的积累过程

一般而言,在导电媒质分界面上自由电荷的积累过程的分析比较复杂。但由于磁场随时间变化产生的感应电场可忽略,故可按电准静态场分析。

引起过渡过程的原因是导电媒质分界面上 $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ 不为 0。分析这一过程的公式是

导电媒质分界面两侧全电流密度 $(J + \frac{\partial D}{\partial t})$ 的连续性条件,即

$$e_n \cdot (J_1 + \frac{\partial D_1}{\partial t}) - e_n \cdot (J_2 + \frac{\partial D_2}{\partial t}) = 0$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{e}_n \cdot (\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2)] + \mathbf{e}_n \cdot (\gamma_1 \mathbf{E}_1 - \gamma_2 \mathbf{E}_2) = 0 \quad (5-16)$$

需要指出的是:①当电容器极板上电荷或电压突变时,导电媒质分界面上的自由电荷来不及突变仍保持原来的值,两种导电媒质中的电压按电容分配;当进入直流稳态后,电压按电阻(电导)分配。②在低频或工频交流电压的作用下,多层有损介质中的电场稳态值按静电场分析;在直流电压作用下,电场稳态值按恒定电场分析。

5.1.3 涡流及其方程

整块导体处于时变电磁场中,导体内所产生的感应电流称为涡流。这种电流的电流线在导体内总是呈闭合的涡旋状。由于导体电阻可能很小,这种电流可达很大值。它既有有用的一面,也有有害的一面。例如:高频加热炉、电磁阻尼装置等都是利用它的实例;变压器、电机等的铁心不用整块材料,而用互相绝缘的硅钢片叠合而成,就是为了减小涡流所造成的能量损失。

当位移电流产生的磁场远小于外加磁场时,涡流可按磁准静态场处理。此时,磁场强度 $\mathbf{H}$ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 分别满足如下的微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5-17)$$

和

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (5-18)$$

通常把这些方程称为涡流方程,或磁扩散方程。它们是研究在时变情况下,导体中电流流动和磁场分布问题的基础。

当导体中的电流随时间作正弦变化时,方程式(5-17)和(5-18)的复数形式分别是

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = k^2 \dot{\mathbf{H}} \quad (5-19)$$

和

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = k^2 \dot{\mathbf{J}} \quad (5-20)$$

其中

$$k^2 = j\omega\mu\gamma \quad (5-21)$$

5.1.4 集肤效应·邻近效应·电磁屏蔽

1. 集肤效应

随时间变化的电流流过导体时,电流沿导体截面的分布是不均匀的。靠近导

体表面处电流密度最大,愈深入内部,它们愈小。尤其是当频率较高时,电流几乎沿导体表面附近的一薄层中流动。这种现象称为集肤效应。

交流电流在良导体中流动时,其内部电流和电磁场的分布表现出显著的集肤效应现象。工程中常用透入深度 d 表示场量在导体中的集肤程度。对于良导体,透入深度

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} \quad (5-22)$$

在高频时,要考虑到电流和电磁场分布的不均匀问题。

2. 邻近效应

邻近效应是指互相靠近的通有变化电流导体间的相互作用和影响。邻近效应与集肤效应是共存的,它会使导体中的电流分布更不均匀。

3. 电磁屏蔽

在电磁场工程中,用于减弱由某些源产生的空间某个区域内(不包含这些源)的电磁场的结构,称为电磁屏蔽。电磁屏蔽是减弱邻近效应的一种常用措施。在绝大多数情况下,电磁屏蔽由金属(铜、铝、钢)制成。它们利用了导体内的涡流所产生的电磁场,将对外加电磁场起抑制作用,用作对给定区域进行屏蔽。因此,又称为涡流屏蔽。

电磁屏蔽的屏蔽层的厚度 h ,必须接近屏蔽材料透入深度的 $3 \sim 6$ 倍,即 $h \approx 2\pi d$ 。

需要指出的是,涡流方程式(5-17)和(5-18)也是研究集肤效应、邻近效应和电磁屏蔽问题的基础。这是由于涡流是引起集肤效应和邻近效应的根源,而电磁屏蔽则是利用了涡流的作用。

5.1.5 导体的交流内阻抗

在交流情况下,由于集肤效应的出现,电流在导体内部的分布集中于表面附近。尽管导体截面相当大,但大部分未得到利用,实际载流截面面积减小了。因此,在交流情况下,导体的电阻和内电感与直流时不同,交流电阻一定大于直流电阻。

导体的等效交流电路参数 $Z(=R+jX)$ 的计算公式为

$$Z = \frac{-\oint_S (\dot{E} \times \dot{H}^*) \cdot dS}{I^2} \quad (5-23)$$

式中: S 为导体的表面; I 为导体中通过的总电流。

等效交流电路参数 Z 只计算了导体内部电磁场引起的阻抗,故又称 Z 为导体

的交流内阻抗。

5.2 重点与难点

应透彻理解:①电准静态场和磁准静态场的概念及其基本方程组;②涡流及其损耗;③集肤效应、邻近效应和电磁屏蔽概念,这些都是本章的重点。掌握涡流及其损耗、导体的交流内阻抗的初步计算方法是学习中的难点。

在电准静态场近似下,同静态情况相比,只是磁场的方程发生了变化(考虑了位移电流引起的磁场),而电场强度 E 和电位移 D 的方程与静电场中对应的方程完全一样。所不同的是,现在 E 和 D 都是时间的函数,但它们与源 ρ 之间具有瞬时对应关系,即每一时刻,场和源之间的关系类似于静电场中场和源的关系。这样,只要知道电荷分布,就完全可以利用静电场的公式,确定出 E 和 D 。

在磁准静态场近似下,只是电场的方程发生了变化(考虑了电磁感应),而磁场强度 H 和磁感应强度 B 与恒定磁场中对应的方程完全一样。只要知道了电流分布 J ,就完全可以利用恒定磁场的公式,确定出 H 和 B 。

在频率比较低的情况下,导体中的涡流和电磁场分布问题就属于磁准静态场。但涡流不是给定的场量(即方程式(5-5)右边的 J 是未知的),所以无法利用恒定磁场的公式计算 H 和 B 。涡流分布取决于电场,即 $J = \gamma E$,磁场与电场相互激励,故需联立求解电磁场基本方程组。此时,归结为求解涡流方程式(5-17)和(5-18)。步骤大致是:(1)设场量(根据给定的条件简化场量);(2)列涡流方程;(3)获通解;(4)定待定常数(根据给定的边界条件)。

导体的交流内阻抗的计算,也需先求出导体内的磁准静态场分布,然后再利用式(5-23)计算 Z 。

5.3 典型题解析

5-1 介电常数 ϵ 与电导率 γ 均为常数的导体中,起始的电荷体密度为 ρ_0 ,试求 t 时刻电荷体密度 $\rho(t)$ 的表示式。就铜而言,试求 ρ 为 ρ_0 的 $\frac{1}{e}$ 时所需的时间为多少?

解 在具有均匀的介电常数 ϵ 和电导率 γ 的导体中,自由电荷体密度 ρ 满足如下—阶常微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0$$

导电媒质中的自由电荷随时间按指数规律衰减,弛豫时间 $\tau_e = \frac{\epsilon}{\gamma}$ 。

该微分方程的解为

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau_e}$$

式中: ρ_0 为 $t=0$ 时的 ρ ; $\tau_e = \frac{\epsilon}{\gamma}$ 称为弛豫时间。这个结果表明, 导体中的自由电荷的体密度随时间按指数规律衰减, 其衰减的快慢决定于弛豫时间 τ_e 。

$$\text{已知铜的 } \epsilon \approx \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m, } \gamma = 5.8 \times 10^7$$

S/m, 代入上式便得到由 ρ_0 变到 $\frac{\rho_0}{e}$ 的 $\frac{1}{e}$ 时, 所需的时间为

$$t = \frac{\epsilon}{\gamma} \approx 1.5 \times 10^{-19} \text{ s}$$

5-2 内、外导体的半径分别为 a 和 b 的同轴圆柱形电容器, 其长度为 $l (l \gg a, b)$, 充填有电介质 (μ, ϵ) 。若在内外导体间加一电压 $U = U_0 \sin \omega t$, 且由于假定频率不高 (即 ω 不大), 则可以认为电容器内的电场与磁场分布与恒定情况相同。试求:

(1) 电容器中的电场强度 E ;

(2) 证明通过半径为 $\rho (a < \rho < b)$ 的圆柱面的位移电流总值等于电容器引线中的传导电流。

解 根据 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ 的复数形式, 即 $j\dot{\mathbf{B}} = j\mu\dot{\mathbf{H}}$, 由于 ω 很小, 故 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow 0$, 即 $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow 0$ 。由此可见, 在 ω 很低的情况下, 电场是一种无旋场, 即电准静态场, 故电容内的电场可用静电场的方法求解。

(1) 根据静电场的计算, 得同轴圆柱形电容器中的电场为

$$\mathbf{E} = e_\rho \frac{U_0}{\rho \ln(b/a)} \sin \omega t$$

式中: ρ 为距离轴线的半径。

(2) 介质中的位移电流密度为

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = e_\rho \epsilon \omega \frac{U_0}{\rho \ln(b/a)} \cos \omega t$$

穿过半径为 $\rho (a < \rho < b)$ 的圆柱形表面的位移电流总值为

当频率很低时, 电容器中的电场可按静电场的方法计算。

$$i_d = \iint_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = 2\pi\rho \cdot l \cdot \varepsilon\omega \frac{U_0}{\rho \ln(b/a)} \cos\omega t$$

$$= 2\pi l \varepsilon\omega \frac{U_0}{\ln(b/a)} \cos\omega t = C\omega U_0 \cos\omega t$$

式中: $C(= \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)})$ 是圆柱形电容器的电容。

显然,这一结果说明,穿过半径为 $\rho(a < \rho < b)$ 的圆柱形表面的总位移电流 i_d 等于外加电源引线中的传导电流 i , 后者完全可以由电路的计算方法求得。这一例题也说明了“场”和“路”方法的计算结果的一致性。

5-3 长直螺线管半径为 a , 长为 l , 单位长度有 n 匝线圈, 螺管的铁心的磁导率为 μ , 电导率为 γ 。假设线圈中通过电流 $i = I_m \sin\omega t$, 计算铁心内的损耗功率(涡流损耗)。

解 线圈中的正弦电流产生的随时间变化的磁场在铁心中引起感应电流, 从而损耗功率。

为简化计算, $l \gg a$ 时, 可以认为螺管中为均匀场, 且有

$$B = \mu ni$$

在横截面上半径为 r 的任一闭合路径 l 中的感应电动势

$$\mathcal{E} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \mu n I_m \pi r^2 \omega \cos\omega t = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

由此得铁心中的电场强度

$$E_\phi = - \frac{1}{2} \mu n I_m \omega r \cos\omega t$$

于是, 损耗功率

$$P = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

$$= \frac{\gamma}{4} (\mu n I_m \omega \cos\omega t)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz \int_0^a r^3 dr$$

$$= \frac{\gamma}{8} (\mu n I_m \omega a^2)^2 \pi l \cos^2 \omega t$$

平均功率损耗为

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{\gamma l}{16\pi} (\mu n I_m \omega S)^2 = \frac{\gamma}{16\pi l} (\mu n I_m \omega \tau)^2$$

式中: $\tau = Sl = \pi a^2 l$ 为线圈中铁心体积。

当频率很低时, 可以忽略感应电流的贡献。但涡流损耗的计算值与从涡流方程出发得到的结果是有所差别的。

5-4 一平板电容的电极半径为 a 的圆盘, 电极间距离为 $h(h \ll a)$ 。如图 5-1 所示。

(1) 假定极板上电荷均匀分布, 且 $\sigma = \pm \sigma_m \cos \omega t$, 求极板间的电场 E 和磁场 H (忽略边缘效应);

(2) 证明这样的场不满足电磁场基本方程。

解 (1) 在题给条件下, 可用高斯定律求出极板间的电场

$$D = -e_z \sigma_m \cos \omega t \quad (1)$$

$$E = -e_z \frac{\sigma_m}{\epsilon_0} \cos \omega t \quad (2)$$

于是, 极板间的位移电流密度

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = e_z \sigma_m \omega \sin \omega t \quad (3)$$

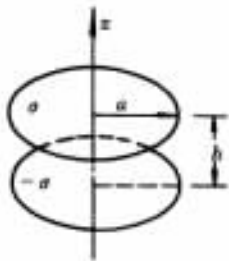


图 5-1 典型题 5-4 图

极板间无传导电流, 由安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$$

得

$$2\pi\rho H_\phi = \pi\rho^2 \sigma_m \omega \sin \omega t$$

$$\mathbf{H} = e_\phi \frac{1}{2} \sigma_m \omega \rho \sin \omega t \quad (4)$$

(2) 取 H 的旋度, 并由式(4), 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= e_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{2} \sigma_m \omega \rho^2 \sin \omega t \right] \\ &= e_z \sigma_m \omega \sin \omega t = \mathbf{J}_d \end{aligned}$$

可见, 所得 H 满足电磁场基本方程组的第 1 方程。但若取式(2)的旋度, 则有

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-e_z \frac{\sigma_m}{\epsilon_0} \cos \omega t) = 0 \neq \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

电磁场基本方程组的第 2 方程不能满足。所以式(2)和式(4)不是严格解。

上述结果是由于我们忽略了 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 的作用, 即忽略了场的波动性, 这和假设极板上电荷均匀分布是一致的。在实际应用

因频率较低, 可按电准静态场处理, 应用静电场的分析方法。

忽略了 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 的作用。

中,在频率不是很高时, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 的作用很小,将其忽略,不致引起明显误差。这就是电准静态场。

5-5 证明无源自由空间仅随时间变化的场,如 $\mathbf{B} = B_m \sin \omega t$, 不满足电磁场基本方程组。若将 t 换成 $(t - \frac{y}{c})$, 则它可以满足电磁场基本方程组。

解 将题给 $\mathbf{B} = B_m \sin \omega t$ 代入 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, 计及 $\mathbf{J} = 0$, 有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{B_m}{\mu_0} \sin \omega t \right) = 0 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

积分得 $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ 为一常矢量, 故 $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = 0$ 。但由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -B_m \omega \cos \omega t \neq 0 \quad (2)$$

所以, 这样的场不满足电磁场基本方程组。对于 $\mathbf{E} = E_m \sin \omega t$ 也有同样的结果。

若将 $\mathbf{B}$ 中的 t 换成 $(t - \frac{y}{c})$, 则

$$\mathbf{B} = B_m \sin \omega(t - \frac{y}{c}) = e_z B_m \sin(\omega t - ky) \quad (3)$$

上式中 $B_m = e_z B_m$, 为计算方便定为 z 方向, 又 $k = \frac{\omega}{c}$, 将式

(3) 代入电磁场基本方程组, 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times \left[e_z \frac{B_m}{\mu_0} \sin(\omega t - ky) \right] \\ &= -e_x \frac{k}{\mu_0} B_m \cos(\omega t - ky) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4)$$

积分之, 得

$$\mathbf{E} = -e_x \frac{B_m}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sin(\omega t - ky) \quad (5)$$

将 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别代入电磁场基本方程组中的 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 两边, 得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \omega B_m \cos(\omega t - ky)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{e}_z \omega B_m \cos(\omega t - ky) = \nabla \times \mathbf{E}$$

可见 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足电磁场的基本方程组。

本题的结果说明, 满足电磁场基本方程组的时变电磁场, 必然是诸如 $(t - \frac{y}{c})$ 之类的时空变量的某种函数。这是因为时变电场和时变磁场不可分割地同时存在并互相激发。但在频率不高时, 却可像静态场那样, 由电流求 $\mathbf{B}$ 而忽略 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 的作用, 或由电压(电荷)求 $\mathbf{E}$ 而不计 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 的贡献。例如, 密绕在长螺管上的线圈中, 通以低频正弦电流, 螺管中 $B = \mu n I_m \sin \omega t$; 平板电容器加低频电压, 其中 $E = \frac{U_m}{d} \sin \omega t$ 等就是这样计算的。这些解都不满足电磁场基本方程组, 但在低频时又足够精确。

$(t - \frac{r}{c})$ 之类的

时空变量的某种函数是时变电磁场解的最一般形式。

5-6 在电磁场基本方程组中, 若忽略 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 或 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 证明矢

位与标位满足泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad \text{和} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

解 若忽略位移电流, 即 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$, 电磁场基本方程组变为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4)$$

由式(3)和(2), 有

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5) \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (6)$$

将以上两式代入式(1)和式(4), 分别有

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (7)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8)$$

若令

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (9)$$

这两个方程再一次说明了准静态电磁场的特性。

可使式(7)和(8)简化为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (10)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (11)$$

若忽略 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 时, 则 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。此时

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

若取 $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

仍可得式(10)和式(11)。所以, 在忽略 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 或 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 时, $\mathbf{A}$ 、 φ 的微分方程与静态场的形式相同(但这里 $\mathbf{A}$ 、 φ 均是坐标及时间的函数)。

5-7 图5-2所示系统沿轴向无限长。 $x=0$ 平面左边的平板电容器延伸到 $x=-\infty$; 上电极向右延伸到 $x=b$ 平面后向下弯曲到 $y=0$, 然后沿 $y=0$ 向左弯曲到 $x=0$ 平面。该系统的下电极电位为 $V(t)$, 上电极接地。区域(a)是自由空间, 而 $x=0$ 平面左边的区域(b)是有损介质(介电常数 ϵ 和电导率 γ)。外施加的电压是一量值为 V_0 的阶跃函数。

(1) 电压已加上很长时间, 求区域(a)和(b)中的电场和电位分布;

(2) 现在要求 $t > 0$ 时的电位 φ 。并证明 $t \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 这一结果变成(a)中的结果。

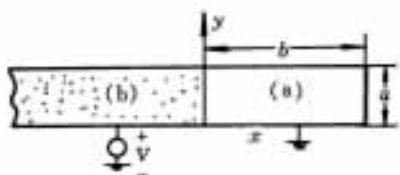


图 5-2 典型题 5-7 图

解 (1) 电压已加上很长时间, 即稳态建立后, 由于区域(a)是自由空间, 其中的电场就是静电场, 电位 φ_a 满足 $\nabla^2 \varphi_a = 0$; 而区域(b)相当于纯电阻, 其中的电场就是恒定电场, 电位 φ_b 也满足 $\nabla^2 \varphi_b = 0$ 。

寻找确定边界条件和应用分离变量法是关键。

分析弛豫过程问题时,要注意应用这两个衔接条件。

根据边界条件: $x=0$ 处, $\frac{\partial \varphi_b}{\partial x}=0$; $y=0$ 处, $\varphi_b=V_0$; $y=a$

处, $\varphi_b=0$, 容易得到 $\nabla^2 \varphi_b$ 的解为

$$\varphi_b = (1 - \frac{y}{a})V_0$$

同理, 根据边界条件: $x=b$ 处, $\varphi_a=0$; $y=0$ 和 $y=b$ 处, $\varphi_a=0$, 得到 $\nabla^2 \varphi_a=0$ 的形式解为

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi(b-x)}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

式中: A_n 为待定常数。

又因在 $x=0$ 处, $\varphi_a=\varphi_b$, 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = (1 - \frac{y}{a})V_0$$

利用三角函数的正交性, 得

$$A_n = \frac{2V_0}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}}$$

(2) $t>0$ 的电位, 即从刚接通瞬间到稳态建立这一过程的电位。在这一瞬变期间, 区域(a)和(b)中的电场属于电准静态场, 电位 φ_a 和 φ_b 仍然满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi=0$ 。取它们的解为如下形式

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sinh \frac{n\pi(b-x)}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (1)$$

和

$$\varphi_b = (1 - \frac{y}{a})V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (2)$$

容易验证, 它们满足第(1)问中给出的边界条件。这里 $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 分别是待定的时间函数。

在 $x=0$ 分界面处, 有衔接条件

$$\varphi_a \Big|_{x=0} = \varphi_b \Big|_{x=0} \quad (3)$$

和

$$e_n \cdot (\gamma_a E_a - \gamma_b E_b) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_a E_a - \epsilon_b E_b) \cdot e_n = 0 \quad (4)$$

利用 $E = -\nabla \varphi$, 并将式(1)、(2)代入式(3), 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = (1 - \frac{y}{a})V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi y}{a}$$

或者

$$A_n(t) \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2V_0}{n\pi} + B_n(t) \quad (5)$$

将式(1)和(2)代入式(4),并利用式(5),得

$$\frac{dB_n(t)}{dt} + \frac{B_n(t)}{\frac{\epsilon_b - \epsilon_a \coth \frac{n\pi b}{a}}{\gamma}} = 0 \quad (6)$$

由此解得

$$B_n(t) = D_n e^{-t/\tau} \quad (7)$$

其中, $\tau = \frac{\gamma}{\epsilon_b - \epsilon_a \coth \frac{n\pi b}{a}}$ 。在 $x=0$ 处,利用 $t=0_+$ 的初始条件

$(\epsilon_a E_a - \epsilon_b E_b) \cdot e_n = 0$, 有

$$\epsilon_a A_n(0) \sinh \frac{n\pi b}{a} = -\epsilon_b D_n \quad (8)$$

又由式(5)知,在 $t=0$ 时,有

$$A_n(0) \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2V_0}{n\pi} + B_0(0)$$

或

$$A_n(0) \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2V_0}{n\pi} + D_n \quad (9)$$

联立方程式(8)和(9)并解之,得

$$D_n = -\frac{2V_0}{n\pi} \frac{\epsilon_a}{(\epsilon_a + \epsilon_b)}$$

代入式(7),有

$$B_n(t) = -\frac{2V_0 \epsilon_a}{n\pi(\epsilon_a + \epsilon_b)} e^{-t/\tau}$$

代入式(5),有

$$A_n(t) = \frac{2V_0}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}} \left(1 - \frac{\epsilon_a}{\epsilon_a + \epsilon_b} e^{-t/\tau}\right)$$

最后,得

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}} \left(1 - \frac{\epsilon_a}{\epsilon_a + \epsilon_b} e^{-t/\tau}\right) \sinh \frac{n\pi(b-x)}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

$$\varphi_b = \left(1 - \frac{y}{a}\right) V_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0 \epsilon_a}{n\pi(\epsilon_a + \epsilon_b)} e^{-t/\tau} e^{\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

很容易证明,在 $t \rightarrow \infty$ 的极限情况下,这一结果变成(1)问中的

结果。

5-8 一个同心球形电容器,内、外半径分别为 R_1 和 R_2 ,如图 5-3 所示。其间充填有损耗的电介质(电导率为 γ ,介电常数为 ϵ),现将电容器充电至电压 U_0 后,拆去电源,试计算拆去电源后,电容器内各点的磁感应强度 B ,并解释所得结果。

解 设电介质中半径为 r 的同心球面上的漏电流为 I ,则电场强度 $E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{4\pi r^2 \gamma}$ 。电位 φ 仅为 r 的函数, J 是传导电流密度。拆去电源 U_0 后,相当于一个电容器对电阻 R 放电,故

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

外导体接地,内导体的电位

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{4\pi \gamma r^2} dr \\ &= \frac{I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{4\pi \gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

当 $t=0$ 时, $\varphi_1 = U_0$, 故

$$I_0 = \frac{4\pi \gamma U_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 4\pi \gamma U_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

而电阻、电容为

$$R = \frac{1}{4\pi \gamma} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}, \quad C = 4\pi \epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

球内的电位分布为

$$\varphi = \frac{I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{4\pi \gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

根据洛伦兹条件,得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \epsilon \mu \frac{I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{4\pi \gamma RC} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

由于 $A_\theta = A_\phi = 0$ 。令 $K = \frac{I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{4\pi \gamma RC} \epsilon \mu$, 应用 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的展开式,得

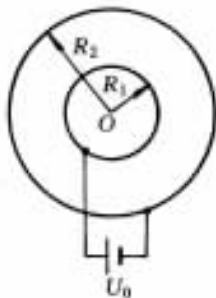


图 5-3 典型题 5-8 图

电准静态场。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) = K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

所以

$$A_r = K \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R_2} \right) + C$$

式中: C 是积分常数, 从而磁感应强度

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

另外一种方法: 从 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 由于 $\mathbf{E}$ 仅与 r 有关, 故

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。 $\mathbf{B}$ 必为常矢量, 但 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{B}$ 为 0, 故磁感应强度为 0。

5-9 平板电容器中充填有两种有损耗的电介质, 厚度各为 a 和 b , 如图 5-4(a) 所示。外加电压 U , 试求电介质 1 和 2 中的电场 $E_1(t)$ 和 $E_2(t)$ 、分界面上的电荷面密度 $\sigma(t)$ 以及电源电流 $i(t)$ 。

电准静态场。

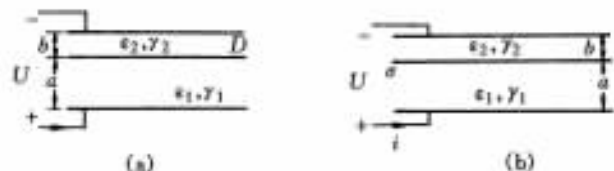


图 5-4 典型题 5-9 图

解 当 $t=0$ 时, 接通阶跃电压 U , 介质分界面上的电荷仍保持为零, 即 $\sigma(0_+) = \sigma(0_-) = 0$ 。所以分界面上的电通量密度和无损耗电容器中的一样仍保持连续, 即 $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$ 。而电压

$$U = \int_0^{a+b} E dx = E_1 a + E_2 b \quad (1)$$

从而可解得 $t=0_+$ 时的电通量密度

$$D(0_+) = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 U}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 b} \quad (2)$$

接通电源瞬时位移电流为冲激电流(无限大), 该电流在极板上产生的电荷面密度为 $\sigma(x=0) = -\sigma(x=a+b) = D$ 。电介质 1 和 2 中的电流密度

$$J_1 = \gamma_1 E_1 = \gamma_1 \frac{D_1}{\epsilon_1}, \quad J_2 = \gamma_2 E_2 = \gamma_2 \frac{D_2}{\epsilon_2} \quad (3)$$

当 $t = \infty$ 时, 建立稳态后, 位移电流为 0, 仅有传导电流, 由电流的连续性, 可得

$$J(t \rightarrow \infty) = \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} \quad (4)$$

分界面上的电荷面密度为

$$\sigma(x=a) = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} \quad (5)$$

这说明, 刚接通的瞬间, 系统为纯电容; 稳态建立后, 系统相当于纯电阻。

在从 $t = 0_+ \rightarrow \infty$ 的瞬变期间, 将电荷守恒定律应用于分界面上, 得

$$J_2 - J_1 + \frac{d}{dt}(D_2 - D_1) = 0$$

$$\text{或} \quad \gamma_2 E_2 - \gamma_1 E_1 + \frac{d}{dt}(\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1) = 0 \quad (6)$$

方程(1)与(6)联立, 得 E_1 的常微分方程

$$\frac{dE_1}{dt} + \frac{E_1}{\tau} = \frac{\gamma_2 U}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 b} \quad (7)$$

式中: $\tau = \frac{\epsilon_1 b + \epsilon_2 a}{\gamma_1 b + \gamma_2 a}$ 。利用 $t = 0_+$ 的初始条件, 即可解得电场

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 b} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8)$$

$$E_2 = \frac{\gamma_1 U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{\epsilon_1 U}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 b} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9)$$

分界面上的电荷面密度为

$$\sigma(x=a) = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2)}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) U \quad (10)$$

显然, $t = 0$ 时, $\sigma = 0$; $t = \infty$ 时, 与上面求得的 σ 也相同。

电源电流 $i(t)$

$$\begin{aligned} i(t) &= (\gamma_1 E_1 + \epsilon_1 \frac{dE_1}{dt}) l d = (\gamma_2 E_2 + \epsilon_2 \frac{dE_2}{dt}) l d \\ &= \left[\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} + (\gamma_1 - \frac{\epsilon_1}{\tau}) \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 b} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} \right) \right] U l d \end{aligned}$$

这个方程在分析片均匀导电媒质中的电荷弛豫问题时非常重要。

$$e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 b} \delta(t)] l d U$$

上式中最后一项是 $t=0$ 瞬时, 冲激电流在极板上堆集的电
荷。式中 $\delta(t)$ 为冲激函数。

5-10 在典型题5-9中, 该系统接通直流电压已达稳
态。当该系统(1)突然断开; (2)突然短路时, 试求电场强度、
电压、电流和分界面上的自由电荷面密度。

解 (1) 突然断开电源, 相当于电容器对电阻的放电, 每
一区的电场强度为

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad E_2 = \frac{\gamma_1 U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$\text{式中: } \tau_1 = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}; \quad \tau_2 = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}.$$

电压和分界面上的电荷面密度, 按下列规律衰减

$$U_0 = E_1 a + E_2 b = \frac{U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} (\gamma_2 a e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \gamma_1 b e^{-\frac{t}{\tau_2}})$$

$$\sigma = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \frac{U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} (\epsilon_2 \gamma_1 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \epsilon_1 \gamma_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}})$$

(2) 突然短路, 电压 $U=0$, 由上题得

$$E_1 a + E_2 b = 0 \quad \text{和} \quad \frac{dE_1}{dt} + \frac{E_1}{\tau} = 0$$

式中: $\tau = \frac{\epsilon_1 b + \epsilon_2 a}{\gamma_1 b + \gamma_2 a}$ 。 $t=0$ 瞬间, 分界面上的电荷不突变, 故有

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1) = - \left(\frac{\epsilon_2 a}{b} + \epsilon_1 \right) E_1 = \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) U}{\gamma_2 a + \gamma_1 b}$$

$$E_1 = - \frac{E_2 b}{a} = - \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) b U}{(\epsilon_2 a + \epsilon_1 b)(\gamma_2 a + \gamma_1 b)} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

短路电流和分界面上的自由电荷面密度分别为

$$i = \left[\left(\frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 b + \epsilon_2 a} \right)^2 \frac{a b U}{(\gamma_2 a + \gamma_1 b)} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 U}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 b} \delta(t) \right] l d$$

$$\sigma = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2)}{\gamma_2 a + \gamma_1 b} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

典型题 5-9 的
等值电路对这里
的分析很有用。
请画出等值电路,
并应用电路方法
分析。

5-11 在典型题5-9中, 把阶跃电压换为正弦电压 $U =$
 $U_m \sin \omega t$ 。试求稳态情况下, 分界面上的电荷和总电流。

解 在正弦稳态情况下, 典型题 5-9 解中的方程式(1)

对典型题 5-9

和(6)的对应复数形式为

$$\dot{E}_1 a + \dot{E}_2 b = U_0$$

和 $\gamma_2 \dot{E}_2 - \gamma_1 \dot{E}_1 + j\omega(\epsilon_2 \dot{E}_2 - \epsilon_1 \dot{E}_1) = 0$

其解答为

$$\frac{\dot{E}_1}{\gamma_2 + j\omega\epsilon_2} = \frac{\dot{E}_2}{\gamma_1 + j\omega\epsilon_1} = \frac{U_0}{[b(\gamma_1 + j\omega\epsilon_1) + a(\gamma_2 + j\omega\epsilon_2)]}$$

分界面上的电荷分布为

$$\dot{\sigma} = \epsilon_2 \dot{E}_2 - \epsilon_1 \dot{E}_1 = \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) U_0}{[b(\gamma_1 + j\omega\epsilon_1) + a(\gamma_2 + j\omega\epsilon_2)]}$$

如果频率远大于时间常数的倒数,即 $\omega \gg \frac{\gamma_1}{\epsilon_1}$ 和 $\omega \gg \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$, 则分界

面上面电荷为零。

通过极板的总电流为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= (\gamma_1 + j\omega\epsilon_1) \dot{E}_1 l d \\ &= \frac{l d (\gamma_1 + j\omega\epsilon_1) (\gamma_2 + j\omega\epsilon_2) U_0}{[b(\gamma_1 + j\omega\epsilon_1) + a(\gamma_2 + j\omega\epsilon_2)]} \end{aligned}$$

5-12 有一半径为 a 的无限长圆柱,介电常数为 ϵ_2 ,电导率为 γ_2 ;该圆柱放在介电常数为 ϵ_1 ,电导率为 γ_1 的无限大媒质中。一均匀电场 $E = E_0 e_x$,在 $t=0$ 时,突然作用于该系统, e_x 与圆柱轴线垂直。试求电位 φ 、电场强度 E 和分界面上的电荷面密度 σ 。并求 $t=0$ 和 $t=\infty$ 时的电场强度。

解 $t=0$ 时,和无损耗介质一样,介质的分界面上无面电荷,边界条件为

$$\sigma(r=a) = D_r(r=a_+) - D_r(r=a_-) = 0$$

或 $\epsilon_1 E_r(r=a_+) = \epsilon_2 E_r(r=a_-)$ (1)

$t=\infty$ 时的稳态解仅与电导率有关,在圆柱分界面上电流是连续的,故有

$$\gamma_1 E_r(r=a_+) = \gamma_2 E_r(r=a_-) \quad (2)$$

$r \rightarrow \infty$ 处,电场为 E_0 ,利用这一边界条件,得

$$E(r \rightarrow \infty) = E_0 e_x = E_0 (e_r \cos \alpha - e_\alpha \sin \alpha) \quad (3)$$

由这一边界条件,可在圆柱坐标系拉普拉斯方程的解中,选择 $n=1$ 。为使 $r=0$ 处是有限值,且考虑到 $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, -\alpha)$ 的对称关系,所以解答形式为

的等值电路,应用正弦电路方法,也能得到相同的结果。

开始时两媒质中的电场都可看成与无损耗介质一样,随着面电荷的积累,电场趋近于和恒定电场一致,它们按电导率分布。

$$\varphi(r, a) = \begin{cases} A(t)r \cos \alpha & (r \leq a) \\ [B(t)r + C(t)/r] \cos \alpha & (r \geq a) \end{cases} \quad (4)$$

$$E = -\nabla \varphi = \begin{cases} -A(t)[\cos \alpha e_r - \sin \alpha e_a] & (r < a) \\ -[B(t) - C(t)/r^2] \cos \alpha e_r & \\ +[B(t) + C(t)/r^2] \sin \alpha e_a & (r > a) \end{cases} \quad (5)$$

式中: $A(t)$ 、 $B(t)$ 和 $C(t)$ 分别是待定的时间函数。

利用边界条件式(3), 从式(5)中, 得 $B(t) = -E_0$

在 $r=a$ 处, 有 $\varphi(r=a_+) = \varphi(r=a_-)$

$$\text{即} \quad Aa = Ba + C/a \quad (6)$$

在 $r=a$ 的分界面上, 由于电荷守恒, 得

$$J_r(r=a_+) - J_r(r=a_-) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

$$\text{或} \quad \gamma_1 E_r(r=a_+) - \gamma_2 E_r(r=a_-) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_1 E_r(r=a_+) -$$

$$\epsilon_2 E_r(r=a_-)] = 0$$

将式(5)中 e_r 方向分量和式(6)中 A 均代入上式, 得

$$\frac{dC}{dt} + \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) C = \frac{-a^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} [\epsilon(t)(\gamma_1 - \gamma_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{d\epsilon(t)}{dt}] \quad (7)$$

式中: $\epsilon(t)$ 为阶跃函数, 故上式右边最后一项为冲激函数, C 的

初始值 $C(t=0) = -a^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0$ 。解之得 C 的解为

$$C(t) = a^2 E_0 \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} + \frac{2(\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\epsilon_1 + \epsilon_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (8)$$

$$\text{式中: } \tau = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\gamma_1 + \gamma_2}。$$

再由式(6), 得 $A(t) = -E_0 + C(t)/a^2$

将 $A(t)$ 、 $B(t)$ 和 $C(t)$ 代入式(4)、(5), 即得 φ 和 E 的表达式。

分界面上的电荷面密度为

$$\begin{aligned} \sigma(r=a) &= \epsilon_1 E_r(r=a_+) - \epsilon_2 E_r(r=a_-) \\ &= \frac{2(\gamma_2 \epsilon_1 - \gamma_1 \epsilon_2)}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cos \alpha \end{aligned}$$

若有 $\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}$, 则分界面上无自由面电荷出现。

$t=0$ 时, 电场强度为

仿照静态场的解形式, 但由于是弛豫过程, 所以待
定常数 A 等是随
时间变化的函数。

$$E(t=0) = \begin{cases} \frac{2\epsilon_1 E_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} & (r < a) \\ E_0 \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) \cos \alpha e_r - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) \sin \alpha e_r \right] & (r > a) \end{cases}$$

$t = \infty$ 时, 电场的稳态解为

$$E(t = \infty) = \begin{cases} \frac{2\gamma_1 E_0}{\gamma_1 + \gamma_2} & (r < a) \\ E_0 \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) \cos \alpha e_r - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) \sin \alpha e_r \right] & (r > a) \end{cases}$$

5-13 图5-5所示一薄铜板($b \gg a$), 其电导率 $\gamma = 5.6 \times 10^7$ S/m, 通有电流 $i(t) = 5\sqrt{2} \cos 10^5 t$ A。 $b = 50$ cm, $a = 1$ cm, 求电流密度 J 随 x 变化的曲线。

解 因薄铜板沿 y, z 方向的尺寸远大于它的厚度, 故其中的电磁场分布, 除 y 和 z 向两端局部范围内有较大的变化外, 在中间部分可假定电磁场的分布沿 y 向和 z 向是不变的, 即只随 x 方向变化。又由于电流沿 z 方向流动, 所以电流密度 J 也只有分量 J_z , 即 $J = J_z e_z$ 。代入式(5-20), 得

$$\frac{d^2 J_z}{dx^2} = k^2 J_z \quad (1)$$

这个方程的通解是

$$J_z = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx} \quad (2)$$

式中: $k^2 = j\omega\mu\gamma$ 。显然, 电流在 $x=0$ 平面的两侧分布应是对称的, 故有 $C_1 = C_2 = C/2$ 。因此, 式(2)可改写成

$$J_z = C \cosh kx \quad (3)$$

如果设薄铜板截面流过的总电流的复振幅为 $\dot{I}$, 则应有

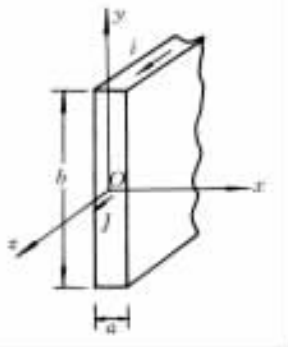


图5-5 典型题5-13图

判定电流的方向和它随哪一个坐标变量变化, 处理得好才会使问题得以解决。这在作时变电流问题的计算时常常是需要的。

$$\dot{I} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} J_z b dx = bC \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cosh kx dx = \frac{2bC}{k} \sinh \frac{ka}{2}$$

所以,得

$$C = \frac{k\dot{I}}{2b \sinh \frac{ka}{2}}$$

于是得薄铜板中的电流密度

$$J_z = \frac{k\dot{I}}{2b \sinh \frac{ka}{2}} \cosh kx \quad (4)$$

代入题中给出的已知数据: $\omega = 10^5$ rad/s, $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $\gamma = 5.6 \times 10^7$ S/m, $b = 0.5$ m, $a = 0.01$ m, $\dot{I} = 5$ A, 得

$$J_z = 2.24 e^{-j132^\circ} \cosh[1876(1+j)x] \quad \text{A/m}^2$$

从上式看出,电流密度沿 x 方向的分布是不均匀的,愈靠近表面愈大,在中心点处为极小值。

5-14 一块长为 a , 宽为 b 和厚为 D 的硅钢块,如图 5-6(a)所示。有 $B(t)e_z$ 穿过,试求材料的涡流损耗公式。如把整块钢分成片状,尺寸不变,如图 5-6(b)所示,问涡流损耗公式又为何?

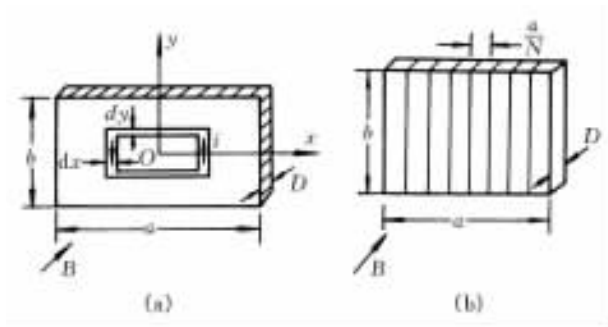


图 5-6 典型题 5-14 图

解 如图 5-6(a)所示,设穿过硅钢块的磁通量是均匀的。在钢块中取一矩形面积 $4xy$,则穿过该面积的磁通 $\Phi = -4xyB(t)$,式中忽略了感应电流所产生的磁场,负号表示与

这里忽略了感应电流所产生的磁场,因此与从涡流方程出发得到的结果是有差别的。

$B(t)$ 的方向相反。该回路的电阻

$$R_x = \frac{4}{\gamma D} \left(\frac{y}{dx} + \frac{x}{dy} \right) = \frac{4}{\gamma D} \frac{b}{a} \frac{x}{dx} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

γ 为硅钢的电导率。由电磁感应定律, 对该回路有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = iR_x = -\frac{d\Phi}{dt} = 4xy \frac{dB}{dt} = \frac{4b}{a} x^2 \frac{dB}{dt}$$

上面式子用了 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 关系。该回路消耗的功率

$$dP = i^2 R_x = \frac{4Dx^3 \gamma b \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dx}{a \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}$$

整块硅钢消耗的功率(即涡流损耗)为

$$P = \int_0^{\frac{a}{2}} dP = \frac{bDa^3 \gamma \left(\frac{dB}{dt} \right)^2}{16 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}$$

设钢块分成 N 片, 各片间绝缘, 每片的涡流损耗仍为上式, 但 a 应换成 $\frac{a}{N}$ 。全部涡流损耗应是一片的 N 倍, 即

$$P = \frac{\gamma bDa^3 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2}{16N^2 \left[1 + \left(\frac{a}{Nb} \right)^2 \right]}$$

5-15 图5-7示出一交流电机铁心上的导线槽, 槽内导线为铜, 电导率 $\gamma = 5.8 \times 10^7$ S/m。已知 $h = 1.5$ cm, $b = 0.5$ cm, $\mu_{Fe} = \infty$, $I = 100$ A, $f = 50$ Hz。求

(1) 电流密度;

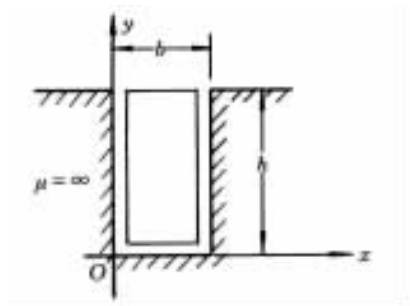


图 5-7 典型题 5-15 图

(2) 单位长度上所消耗的功率;

(3) 单位长度导线的交流内阻抗,交流电阻与直流电阻的比值。

解 (1) 电流密度

槽内导体中电流密度 J 只有 J_z 分量,从而电场 E 也只有 E_z 分量。磁场强度 H 只有 H_x 分量,这是因为假定铁心的 μ_{Fe} 是无限大,导体电流产生的槽漏磁通垂直地从槽侧面穿出,平行地跨过槽宽而在铁心内闭合。又因槽宽 b 很小,所以可假定磁场即 $\dot{H}_x$ 只随 y 方向变化。将 $\dot{H} = \dot{H}_x e_x$ 代入式(5-19),得

$$\frac{d^2 \dot{H}_x}{dy^2} = k^2 \dot{H}_x \quad (1)$$

式中: $k^2 = j\omega\mu\gamma$ 。其解答是

$$\dot{H}_x = C_1 e^{-ky} + C_2 e^{ky} \quad (2)$$

由于认为铁心的 $\mu_{Fe} = \infty$,故铁心中的 $\dot{H} = 0$ 。因此,有边界条件

$$y=h \text{ 处, } \dot{H}_x = \frac{\dot{I}}{b}; y=0 \text{ 处, } \dot{H}_x = 0$$

其中 $\dot{I}$ 为导体电流的复振幅。利用这一边界条件,求得

$$C_2 = -C_1 = \frac{\dot{I}}{2b \sinh kh}$$

代入式(2),得

$$\dot{H}_x = \frac{\dot{I}}{b} \frac{\sinh ky}{\sinh kh}$$

由 $J = \nabla \times \dot{H}$,得电流密度为

$$\dot{J}_z = -\frac{\dot{I}k}{b} \frac{\cosh ky}{\sinh kh}$$

代入题中给出的已知数据: $\omega = 100 \pi \text{ rad/s}$, $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $h = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$, $b = 0.5 \times 10^{-2} \text{ m}$, 及 $\dot{I} = 100$,得

$$\dot{J}_z = 1169 e^{j46.8^\circ} \cosh[(107 + j107)y] \text{ kA/m}^2$$

(2) 单位长度上所消耗的功率

$$P_e = \int_0^h \frac{|\dot{J}_z|^2}{\gamma} b dy = 3.385 \text{ W/m}$$

(3) 交流内阻抗

导体中的电场强度和磁场强度分别为

$$\dot{E}_z = \frac{\dot{J}_z}{\gamma} = -\frac{\dot{I}k}{b\gamma} \frac{\cosh ky}{\sinh kh}$$

$$\dot{H}_x = \frac{\dot{I}}{b} \frac{\sinh ky}{\sinh kh}$$

在现在的情况下,坡印廷矢量的方向沿 y 轴,并且其通量只在导体底面($y=h$)才不为零。应用式(5-23),有

$$Z=R+jX=\frac{-(\dot{E}_z \dot{H}_x^*) \Big|_{x=0} \times b}{|\dot{I}|^2} = \frac{k}{b\gamma} \frac{\cosh kh}{\sinh kh}$$

代入题中已给出的数据,得

$$Z=R+jX=3.83 \times 10^{-4} (1+j) \quad \Omega/\text{m}$$

同时,我们知道,矩形导体单位长度的直流电阻是

$$R_0 = \frac{1}{\gamma ha} = 2.3 \times 10^{-4} \quad \Omega/\text{m}$$

因此,交流电阻与直流电阻的比值是

$$\frac{R}{R_0} = 1.67 \text{ 倍}$$

对问题作定性分析很重要,但需要积累经验。

功率损耗密度

$$p'_e = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*$$

5-16 一半径为 R_i ,厚度为 Δ 的薄导体圆柱壳,放在一大导体圆柱壳内(半径为 R_0),如图 5-8 所示。设圆柱的长度 l 远大于半径 R_0 。在 $t=0$,一阶跃电流 I_0 加于大圆柱导体。试求小圆柱壳内的磁场强度 H_i 为何?

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

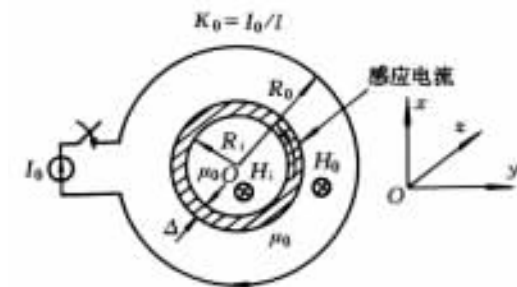


图 5-8 典型题 5-16 图

解 阶跃电流 I_0 加入后,大圆柱壳上出现了一电流线密

度为 $K_0 = \frac{I_0}{l}$ 的面电流分布。在大圆柱壳外部磁场为 0; 在 $R_i < r < R_0$ 区域内, 有

$$H_0 = \frac{I_0}{l} \quad (R_i < r < R_0)$$

是均匀的。由于小圆柱薄壳内有感应电流, 其方向与大圆柱壳的电流方向相反。又因 $\Delta \ll R_i$, 故感应电流可看作面电流

$$K_i = \gamma \Delta E$$

式中: γ 为电导率。在小圆柱薄壳的界面上, 由分界面上的衔接条件, 得

$$H_i - H_0 = K_i = \gamma \Delta E$$

应用电磁感应定律于薄壳内部, 得

$$E \cdot 2\pi R_i = -\mu_0 \frac{d(\pi R_i^2 H_i)}{dt} = -\mu_0 \pi R_i^2 \frac{dH_i}{dt}$$

由 $H_0 = \frac{I_0}{l}$ 和 $H_i - H_0 = \gamma \Delta E$ 两式, 解出 E , 代入上式, 得

$$\frac{dH_i}{dt} + \frac{H_i}{\tau_m} = \frac{I_0}{l\tau_m}$$

式中: $\tau_m = \frac{\mu_0 R_i \gamma \Delta}{2}$, 时间常数 τ_m 实际上是薄壳的自感和其电阻之比, 即

$$L = \frac{\Phi}{KI} = \frac{\mu_0 \pi R_i^2 H}{KI} = \frac{\mu_0 \pi R_i^2}{l}, \quad R = \frac{2\pi R_i}{\gamma \Delta l}$$

所以 $\tau_m = \frac{L}{R}$

解 H_i 满足的微分方程, 并满足 $t=0$ 时, $H_i=0$ 的初始条件, 得

$$H_i = \frac{I_0}{l} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}})$$

随着时间的增长, 薄壳中电流很快衰减, 于是外磁场进入薄壳, 在 $t=\infty$ 的稳定情况下, $H_i = H_0 = \frac{I_0}{l}$, 各处磁场相同。

5-17 一薄壁方筒, 如图5-9所示。其电导率为 γ , 磁导率为 μ_0 , 壁厚为 Δ , 方截面边长为 a , 筒长很长。在 $t=0$ 时, 由于外加磁通 Φ_m 突然减至 0, 感生一面电流, 其面电流的线密度

为 K_0 。试证 $t > 0$ 时 $K_S(t) = K_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$, 这里 $\tau_m = \mu_0 \gamma \Delta a / 4$ 。

解 起初 $t = 0_+$ 时, 外加磁通 Φ_m 突然减至 0, 故薄壁方筒外部空间的磁场 $H_0 = 0$ 。但由于薄壁方筒中感应电流 K_0 的作用, 方筒所围内部空间的磁场 H_i 不会突变, 仍保持为原值。随后当 $t > 0$ 时, 随着感应电流的衰减, H_i 逐渐减少, 直至消失。在这个过程中, 根据连续性条件, 有

$$H_i = K_S \quad (1)$$

式中, K_S 是薄壁方筒中面电流的线密度, 如图 5-9 所示。若薄壁方筒的厚度记作 Δ , 则

$$K_S = \gamma E \Delta \quad (2)$$

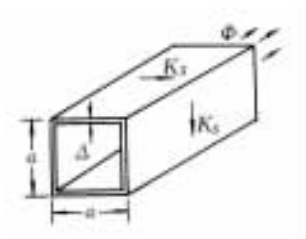


图 5-9 典型题 5-17 图

在薄壁方筒内取回路 l , 根据电磁感应定律, 得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

将式(2)代入上式, 并假定薄壁方筒所围空间内 H_i 分布均匀, 则得

$$K_S \oint_l \frac{dl}{\gamma \Delta} = - \mu_0 \frac{dH_i}{dt} a^2 \quad (4)$$

再将式(1)代入上式并整理后, 得

$$\tau_m \frac{dK_S}{dt} + K_S = 0 \quad (5)$$

式中: $\tau_m = \mu_0 \gamma \Delta a / 4$ 。一阶微分方程的解为

$$K_S = K_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}} \quad (6)$$

式中: K_0 是 K_S 在 $t = 0$ 时的值。这个结果表明, $t > 0$ 时,

$K_S(t) = K_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$, 这里 $\tau_m = \mu_0 \gamma \Delta a / 4$ 。

5.4 自我检测题

题 5.1 为了减小铁磁材料中的涡流损耗,通常电工设备中的铁心都由硅钢片叠制而成。试问在图 5-10(a)和(b)所示的给定 B 的情况下,铁心叠片应采用哪种结构形式?为什么?

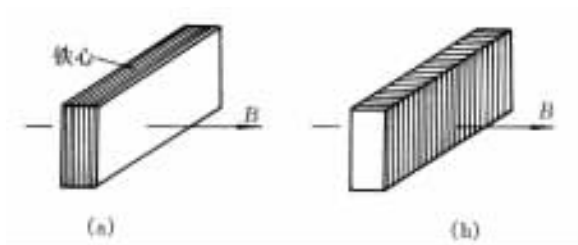


图 5-10 自我检测题 5.1 图

题 5.2 采用静电屏蔽、磁屏蔽和电磁屏蔽措施时,屏蔽体的材料与厚度各应如何选取?

题 5.3 试分析在高频情况下,为什么导线可采用空心管状结构。

题 5.4 若在一面积很大的黄铜板上,镀上一层 0.015 cm 厚的银,设 $\gamma_{\text{银}} = 6.2 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。求:

- (1) 当频率 $f = 1 \text{ MHz}$ 时,单位长度、单位宽度内的交流内阻抗 Z ;
- (2) 当频率 $f = 100 \text{ MHz}$ 时,单位长度、单位宽度内的交流内阻抗 Z ;
- (3) 当频率 $f = 10^4 \text{ Hz}$ 时,能否利用解决前两问问题时的公式计算交流内阻抗。

(答案:(1) $Z = 2.52 \times 10^{-4} (1+j) \Omega$; (2) $Z = 2.52 \times 10^{-3} (1+j) \Omega$; (3) 当 $f = 10^4 \text{ Hz}$ 时,透入深度 $d = 0.064 \text{ m} > 0.015 \times 10^{-2} \text{ m}$,所以不能用计算前两问的公式来求交流内阻抗)。

第 6 章 平面电磁波的传播

在时变电磁场中,电场和磁场之间存在着耦合,这种耦合以波动的形式存在于空间中,即在空间有电磁场的传播。变化电磁场在空间的传播称为电磁波。平面电磁波是时变电磁场存在的一种最基本形式。本章主要讨论均匀平面电磁波在不同媒质中的传播规律和特性。重点讨论随时间作正弦变化的情况。

6.1 基本内容和公式

6.1.1 电磁波动方程

在线性均匀各向同性的媒质中,正弦电磁波满足的波动方程的复数形式为

$$\nabla^2 \dot{E} = k^2 \dot{E} \quad (6-1)$$

和

$$\nabla^2 \dot{H} = k^2 \dot{H} \quad (6-2)$$

式中

$$k = \sqrt{j\omega\mu\gamma - \omega^2\mu\epsilon} = \alpha + j\beta \quad (6-3)$$

称为波的传播常数, α 和 β 分别是衰减常数和相位常数。

6.1.2 均匀平面电磁波

平面电磁波是指等相面为平面的电磁波。如果等相面上各点的场强都相等,称为均匀平面电磁波。

在均匀平面电磁波中,电场 E 和磁场 H 除了与时间 t 有关外,仅与传播方向的坐标变量有关,沿传播方向没有电场 E 和磁场 H 的分量(即为横电磁波,记为 TEM 波),且 E 与 H 到处相垂直。 $E \times H$ 指向波传播的方向。

当波沿 x 轴方向传播时,均匀平面电磁波的电磁场分量 $E_x = H_x = 0$ 。设电场只有分量 E_y ,则磁场只有分量 H_z 。在正弦情况下,由方程式(6-1)和(6-2)得均匀平面电磁波的电场 E 和磁场 H 的波动方程为

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dx^2} = k^2 \dot{E}_y \quad (6-4)$$

和

$$\frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} = k^2 \dot{H}_z \quad (6-5)$$

6.1.3 理想介质中的均匀平面电磁波

在理想介质中,电导率 $\gamma=0$ 。波传播常数 k 仅有虚部,即

$$k = j\beta = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (6-6)$$

沿 x 方向传播的正弦均匀平面电磁波的复数形式表达式为

$$\dot{E}_y(x) = \dot{E}_y^+ e^{-j\beta x} + \dot{E}_y^- e^{j\beta x} \quad (6-7)$$

$$\dot{H}_z(x) = \dot{H}_z^+ e^{-j\beta x} + \dot{H}_z^- e^{j\beta x} \quad (6-8)$$

上列两式中的第 1 项表示沿 $(+x)$ 方向传播的入射波;第 2 项表示沿 $(-x)$ 方向传播的反射波。与它们相应的瞬时表达式为

$$E_y(x,t) = \sqrt{2}E_y^+ \cos(\omega t - \beta x + \varphi_+) + \sqrt{2}E_y^- \cos(\omega t + \beta x + \varphi_-) \quad (6-9)$$

$$H_z(x,t) = \sqrt{2}H_z^+ \cos(\omega t - \beta x + \varphi_+) + \sqrt{2}H_z^- \cos(\omega t + \beta x + \varphi_-) \quad (6-10)$$

这就是理想介质中均匀平面电磁波的正弦稳态解。

在理想介质中,均匀平面电磁波的电场和磁场之比值

$$\frac{\dot{E}_y^+}{\dot{H}_z^+} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_0, \quad \frac{\dot{E}_y^-}{\dot{H}_z^-} = -Z_0 \quad (6-11)$$

Z_0 称为理想介质的波阻抗,在研究波的传播问题时,是个很有用的参量。

此外,在理想介质中,均匀平面电磁波的电场能量密度和磁场能量密度相等,

且 $E \times H$ 的值等于电磁能量密度与相速($v = \frac{\omega}{\beta}$)的乘积。

6.1.4 导电媒质中的均匀平面电磁波

导电媒质的电导率 $\gamma \neq 0$ 。波的传播常数 k 既有虚部,也有实部。即

$$k = \alpha + j\beta$$

其中

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right)} \quad (6-12)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right)} \quad (6-13)$$

沿 x 方向传播的正弦均匀平面电磁波的复数形式表达式为

$$\dot{E}_y(x) = \dot{E}_y^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \dot{E}_y^- e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (6-14)$$

$$\dot{H}_z(x) = \dot{H}_z^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \dot{H}_z^- e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (6-15)$$

与它们相应的瞬时表达式为

$$E_y(x, t) = \sqrt{2}E_y^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_E^+) + \sqrt{2}E_y^- e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_E^-) \quad (6-16)$$

$$H_z(x, t) = \sqrt{2}H_z^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_H^+) + \sqrt{2}H_z^- e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_H^-) \quad (6-17)$$

在导电媒质中,波阻抗 Z_0 不再是实数而是复数。在入射波中,有

$$Z_0 = \frac{\dot{E}_y^+}{\dot{H}_z^+} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = |Z_0| e^{j\varphi} \quad (6-18)$$

在反射波中,有

$$Z_0 = \frac{-\dot{E}_y^-}{\dot{H}_z^-} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad (6-19)$$

上列两式中

$$\epsilon' = \epsilon(1 - j \frac{\gamma}{\omega\epsilon}) \quad (6-20)$$

ϵ' 称为导电媒质的等效介电常数。

上列各式表明,平面电磁波在导电媒质中传播时,其场量的振幅随行进距离的增加而按指数规律衰减。而且电场、磁场在空间同一位置存在着相位差。在式(6-16)和(6-17)中,有

$$\varphi_E^+ - \varphi_H^+ = \varphi \quad \text{和} \quad \varphi_E^- - \varphi_H^- = -\varphi \quad (6-21)$$

1. 低损耗介质中的波

对于导电媒质,如果满足条件 $\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \ll 1$, 则称为低损耗介质。这时,各参数可分别近似为

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (6-22)$$

和

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (6-23)$$

2. 良导体中的波

良导体是指 $\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1$ 的导电媒质。这时,有

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \quad (6-24)$$

和

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ \quad (6-25)$$

6.1.5 平面电磁波的极化

空间固定点上,平面电磁波的电场强度 E 的取向随时间变化的方式称为平面电磁波的极化。

一般情况下, E 可分解为两个正交分量

$$E(x, t) = E_{1m} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \mathbf{e}_y + E_{2m} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_2) \mathbf{e}_z \quad (6-26)$$

一般说来, 电场 E 的端点随时间变化的轨迹为一椭圆, 称为椭圆极化波。

当 $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \pi$ 时, 为一直线极化波。 E 与 y 轴的夹角为 $\alpha = \arctan(\frac{E_{2m}}{E_{1m}})$ 。

当 $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$, 且 $E_{1m} = E_{2m}$ 时, 为一圆极化波。

6.1.6 平面电磁波的反射与折射

均匀平面电磁波传播到不同媒质的分界面处, 要发生反射和折射现象。一般的分析方法是将入射波分解为垂直极化波和平行极化波来分别处理。

1. 反射和折射定律

如图 6-1 所示, 由分界面上的衔接条件, 可导出

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (6-27)$$

和

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \quad (6-28)$$

式中: θ_1, θ'_1 与 θ_2 为入射角、反射角和折射角。 n_1 和 n_2 分别为介质 1 和 2 的折射率。

2. 反射系数和折射系数

对于垂直极化波, 反射系数和折射系数分别为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{\perp}^-}{E_{\perp}^+} = \frac{Z_{02} \cos\theta_1 - Z_{01} \cos\theta_2}{Z_{02} \cos\theta_1 + Z_{01} \cos\theta_2} \quad (6-29)$$

$$T_{\perp} = \frac{E_{\perp}'}{E_{\perp}^+} = \frac{2Z_{02} \cos\theta_1}{Z_{02} \cos\theta_1 + Z_{01} \cos\theta_2} \quad (6-30)$$

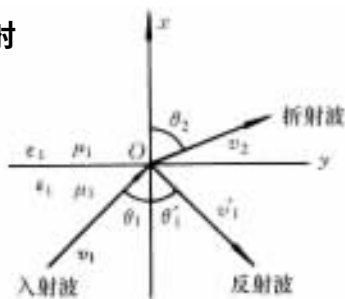


图 6-1 不同媒质分界面发生波的反射与折射

对于平行极化波,反射系数和折射系数分别为

$$\Gamma_{//} = \frac{E_{//}^-}{E_{//}^+} = \frac{Z_{02} \cos \theta_2 - Z_{01} \cos \theta_1}{Z_{02} \cos \theta_2 + Z_{01} \cos \theta_1} \quad (6-31)$$

$$T_{//} = \frac{E_{//}'}{E_{//}^+} = \frac{2Z_{02} \cos \theta_1}{Z_{02} \cos \theta_2 + Z_{01} \cos \theta_1} \quad (6-32)$$

3. 临界角和布儒斯特角

当波由光密媒质入射到光疏媒质,即 $n_1 > n_2$, 且入射角等于或大于 θ_c 时,发生全反射。通常把 θ_c 称为临界角,它表示为

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (6-33)$$

对于平行极化波,存在一个特殊的入射角 θ_B , 可使 $\Gamma_{//} = 0$, 无反射而发生全折射。通常把 θ_B 称为布儒斯特角。 θ_B 表示为

$$\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (6-34)$$

一个任意方向极化的平面电磁波以 θ_B 入射到分界面上时,反射波中只有垂直极化波,而波的平行极化分量已全折射了,具有极化滤波的作用。

4. 良导体表面上的反射与折射

当平面电磁波由理想介质入射到良导体表面上,在良导体表面上反射波电场与入射波电场等值反相,即

$$\Gamma_{//} \approx -1, \quad \Gamma_{\perp} \approx -1 \quad (6-35)$$

和

$$T_{\perp} \ll 1, \quad T_{//} \ll 1 \quad (6-36)$$

表明无论什么极化波在良导体内的折射波都是很小的,差不多是全反射。此外,有

$$\sin \theta_2 \approx 0, \quad \text{或} \quad \theta_2 \approx 0 \quad (6-37)$$

这表明,对于良导体不管入射角 θ_1 如何,透入的电磁波都是近似地沿表面的法向方向传播。

6.1.7 平面电磁波的正入射·驻波

当平面电磁波的入射方向和两种媒质分界面垂直时,则称为正入射。这时, $\Gamma_{\perp} = \Gamma_{//} = \Gamma$ 和 $T_{\perp} = T_{//} = T$ 。它们分别为

$$\Gamma = \frac{E^-}{E^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (6-38)$$

和

$$T = \frac{E'}{E^+} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (6-39)$$

显然 $T=1+\Gamma$

1. 对理想导体的正入射

平面电磁波由理想介质垂直入射到理想导体表面上,将产生全反射,即 $\Gamma=-1$ 和 $T=0$ 。理想介质中的合成波为驻波,其电场强度和磁场强度为

$$E_y(x, t) = 2\sqrt{2}E_0 \sin\beta x \cos(\omega t - 90^\circ) \quad (6-40)$$

$$H_z(x, t) = \frac{2\sqrt{2}E_0}{Z_{01}} \cos\beta x \cos\omega t \quad (6-41)$$

在驻波中,电场 E_y 和磁场 H_z 都在空间某些固定位置有零或最大值。零值点称为波节点,而最大值点称为波腹点。电场的波节点和磁场的波腹点出现在 $x = -\frac{n\lambda}{2}$

($n=0, 1, 2, \dots$)处,电场的波腹点和磁场的波节点出现在 $x = -\frac{(2n+1)\lambda}{4}$ ($n=0, 1, 2, \dots$)处。电场(或磁场)的相邻波节点间距离为 $\lambda/2$,相邻波腹点间距离也为 $\lambda/2$,但波节点和相邻的波腹点之间距离为 $\lambda/4$ 。

驻波中电场和磁场在空间上错开了 $\lambda/4$,在时间上有 90° 的相位差。因此,没有平均功率传输,只有电能和磁能间的互相交换,且只能限制在波节点和相邻波腹点之间的 $\lambda/4$ 空间范围内进行。

2. 对理想介质的正入射·驻波比

当平面电磁波由理想介质 1 垂直入射到理想介质 2 表面上时,不会发生全反射。可利用式(6-38)和式(6-39)分别计算它们分界面上的反射系数和折射系数。

理想介质 2 中的电磁波是沿(+x)方向传播的等幅行波。但是,理想介质 1 中的合成电磁波既有行波分量,又有驻波分量,称合成波为行驻波,其电场强度和磁场强度为

$$\dot{E}_1(x) = \dot{E}^+ e^{-j\beta_1 x} (1 + \Gamma e^{j2\beta_1 x}) \quad (6-42)$$

$$\dot{H}_1(x) = \frac{\dot{E}^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 x} (1 - \Gamma e^{j2\beta_1 x}) \quad (6-43)$$

上列两式表明:①当 $\Gamma > 0$ 时,电场的最大值是 $|\dot{E}^+|(1+\Gamma)$,它出现在 $x_{\max} = -\frac{n\lambda_1}{2}$ ($n=0, 1, 2, \dots$)处;电场的最小值是 $|\dot{E}^+|(1-\Gamma)$,它出现在 $x_{\min} = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4}$ ($n=0, 1, 2, \dots$)处;②当 $\Gamma < 0$ 时,电场的最大值是 $|\dot{E}^+|(1-\Gamma)$,它出

现在 $x_{\max} = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4}$ 处; 电场的最小值是 $|\dot{E}^+|(1+|\Gamma|)$, 它出现在 $x_{\min} = -\frac{n\lambda_1}{2}$ 处。总之, 在入射波与反射波两者相位相同处, 它们直接相加取最大值 $E_{1\max} = |\dot{E}^+|(1+|\Gamma|)$; 而在入射波与反射波两者相位相反处, 它们直接相减取最小值 $E_{1\min} = |\dot{E}^+|(1-|\Gamma|)$ 。

驻波比 S 定义为空间电场强度最大值与最小值之比。 S 表示为

$$S = \frac{E_{1\max}}{E_{1\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad (6-44)$$

3. 对多层理想介质分界面的正入射

关于分界面为平面的多层理想介质的反射问题, 可以应用分界面上的衔接条件来处理, 也可应用入端阻抗的概念进行讨论。

设有 3 种不同理想电介质, 以平面 $x=-d$ 和 $x=0$ 限定的电介质, 其介电常数为 ϵ_2 , 它的两边分别充满介电常数为 ϵ_1 和 ϵ_3 的介质。平面电磁波从 $x < -d$ 的介质 1 垂直入射到此电介质层上, 如图 6-2 所示。

应用入端阻抗 $Z(x)$ 的概念来求这一多层介质分界面的反射问题是十分方便的。 $x=-d$ 右边介质 2 中的任意点 x 处, 合成波的电场强度与磁场强度的比值 $Z(x)$ 为

$$Z(x) = \frac{\dot{E}_2(x)}{\dot{H}_2(x)} = Z_{02} \frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)} \quad (6-45)$$

式中: $Z(x)$ 为 x 处的入端阻抗; $\Gamma(x) = \Gamma e^{j2\beta_2 x}$, 且 $\Gamma = (Z_{03} - Z_{02}) / (Z_{03} + Z_{02})$ 。

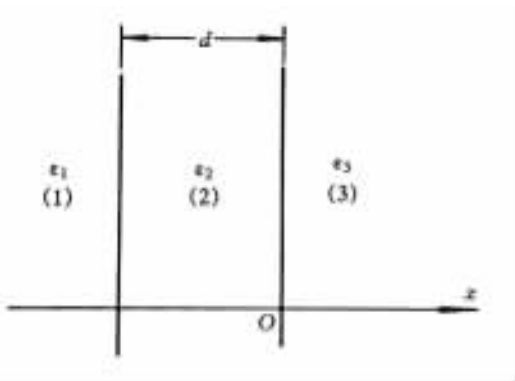


图 6-2 多层理想介质分界面的正入射

入端阻抗 $Z(x)$ 表示了有分界面时, 两侧介质性质对电场和磁场关系的影响, 可用 $Z(x)$ 等值替代该处及其右方所有不同媒质的共同特性。也就是说, 如果用波阻抗 $Z_0 = Z(x)$ 的均匀半无限大介质, 来代替该处沿 $(+x)$ 方向向右的所有媒质时, 它对 x 处左方电磁波的作用与原来介质的影响是相同的。如图 6-2 中介质 1 的波, 它在 $x=-d$ 处遇到了介质不连续的情况, 而这种不连续性可用具有波阻抗 $Z_0 = Z(-d)$ 的半无限大介质来表征。

因此,当 $Z_{03} = Z_{01} \neq Z_{02}$ 时,取介质层(ϵ_2)的厚度为

$$d = \frac{n\lambda_2}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-46)$$

在 $x = -d$ 分界面不发生反射。这种介质层称为半波介质窗。雷达天线罩的设计就用的是这一原理。

而当 $Z_{03} \neq Z_{01}$ 时,取介质层(ϵ_2)的厚度为

$$d = \frac{(2n+1)\lambda_2}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-47)$$

和

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_{03}} \quad (6-48)$$

在 $x = -d$ 分界面处也不发生反射。

6.2 重点与难点

本章的重点是:①均匀平面电磁波的性质以及它在理想介质和导电媒质中的传输规律;②描述波传播特性的参量(例如,波传播常数 $k = \alpha + j\beta$, 波阻抗 Z_0 等)的物理意义;③均匀平面电磁波对理想导体、理想介质的垂直入射及波在这种情况下传播规律;④驻波及其性质。

由于电磁波的反射与折射所涉及到的的是两种不同的媒质,不再是无限均匀,经分界面的反射、折射、叠加,波也可能由原来最简单的 TEM 波变成驻波、行驻波等,其物理现象和概念、公式都变得难于理解和繁复,所以这也是本章的难点。

6.2.1 均匀平面电磁波的特性和参数

1. 均匀平面电磁波的传播特性

均匀平面电磁波在理想介质中传播时,其传播特性可归纳如下:

- (1) E 和 H 都垂直于波的传播方向,是一个 TEM 波;
- (2) $E \perp H$, $E \times H$ 沿波传播的方向。坡印廷矢量 S 的方向与波传播方向一致;
- (3) E 与 H 同相位,振幅比为波阻抗 Z_0 ;
- (4) 波在传播过程中无衰减,波形不变化。波的传播常数为 $k = j\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$,

相速为 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, 波长 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$;

- (5) 波中的电场能量密度 w'_e 等于磁场能量密度 w'_m , 能速与相速相等。

均匀平面电磁波在导电媒质中传播时,其传播特性可归纳如下:

- (1) E 和 H 都垂直于波的传播方向,是一个 TEM 波;

- (2) $E \perp H, E \times H$ 沿波传播的方向。坡印廷矢量 S 的方向与波传播方向一致;
- (3) E 与 H 不同相, 振幅之比为波阻抗 Z_0 的模;
- (4) 波在传播过程中有衰减, 波形发生变化。波的传播常数既有实部又有虚部, 即 $k = \alpha + j\beta$, 相速 v 和波长 λ 都随频率而变化;
- (5) 波中的电场能量密度 w'_e 和磁场能量密度 w'_m 不相等。

上面分别归纳了均匀平面电磁波在理想介质中和导电媒质中的传播特性, 掌握和区别两者的同异点对学习将会有很大的帮助。

2. 均匀平面电磁波传播特性的参数

(1) 波传播常数 k

波传播常数 k 是描述电磁波传播特性的一个非常重要的物理量。 k 的大小直接影响和反映着电磁波的相位、波速、波长、衰减及波形变化等等。

在理想介质中, 有

$$k = j\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}, \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$$

各种频率的电磁波都可以无衰减地在理想介质中传播, 电磁波的相速都不随频率的改变而变化。

在导电媒质中, 有

$$k = \alpha + j\beta$$

由于在导电媒质中, α 和 β 都是 ω 的复杂函数, 所以波衰减的程度和相速 $v = \omega/\beta(\omega)$ 都为频率的函数, 把这种现象称为色散。色散会使导电媒质中传播的电磁波的波形发生畸变。

(2) 波阻抗 Z_0

波阻抗 Z_0 反映了均匀平面电磁波中电场、磁场的相对大小和相位关系。

在理想介质中, 有

$$Z_0 = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

波阻抗为实数, 仅与介质的特性有关, 电场和磁场同相位。

在导电媒质中, 波阻抗

$$Z_0 = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [1 + (\frac{\gamma}{\omega\epsilon})^2]^{1/4} e^{j\varphi}$$

为复数, H 和 E 不同相位。 H 比 E 落后相位

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan(\frac{\gamma}{\omega\epsilon})$$

波阻抗 Z_0 的大小和相角都是 ω 的函数。

波阻抗的引入可以方便讨论和处理电磁波的反射和折射问题。

例 6-1 已知一电磁波的电场强度的瞬时表达式为

$$E = E_0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0) e_x$$

问它是否是一均匀平面电磁波,其传播方向和磁场强度 H 沿着什么方向。

解 将 $E = E_0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0) e_x$ 与式(6-9)相比,可看出这是一均匀平面电磁波的电场强度瞬时表达式的标准形式。所以,该电磁波是一均匀平面电磁波,其传播方向沿 z 方向,磁场强度 H 沿 y 方向。

例 6-2 设真空中一均匀平面电磁波的磁场强度为

$$H = H_m (e_y + e_z) \cos(\omega t - \pi x) \quad \text{A/m}$$

求:(1)波的传播方向;(2)波长和频率;(3)电场强度;(4)坡印廷矢量。

解

(1) 由 H 的表达式可见,波的传播方向沿 $(+x)$ 方向。

(2) 由 H 的表达式知,相位常数

$$\beta = \pi \quad \text{rad/m}$$

所以

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2 \quad \text{m}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{2} = 1.5 \times 10^8 \quad \text{Hz}$$

(3) 由 $E = (H \times e_x) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, 有

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m (-e_z + e_y) \cos(\omega t - \pi x) \quad \text{V/m}$$

(4) 坡印廷矢量为

$$S = E \times H = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m^2 \cos^2(\omega t - \pi x) e_x \quad \text{W/m}^2$$

例 6-3 一均匀平面电磁波从海水表面($x=0$)向海水中 $(+x)$ 方向传播,在 $x=0$ 处, $E = 100 \cos(10^7 \pi t) e_y \quad \text{V/m}$ 。已知海水的 $\epsilon_r = 80, \mu_r = 1, \gamma = 4 \text{ S/m}$ 。求:(1)衰减常数、相位常数、波阻抗、相位速度、波长、透入深度;(2) E 的振幅衰减至表面值的 1% 时,波传播的距离;(3) $x = 0.8 \text{ m}$ 处, E 和 H 的表达式。

解 根据题意,有

$$\omega = 10^7 \pi \quad \text{rad/s}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \times 10^6 \quad \text{Hz}$$

$$\frac{\gamma}{\omega \epsilon} = \frac{4}{10^7 \pi \times \left(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \right) \times 80} = 180 \gg 1$$

所以海水可视作良导体。

$$(1) \alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{10^7 \pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4}{2}} = 8.89 \text{ (Np/m 或 rad/m)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{10^7 \pi \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \angle 45^\circ = \pi \quad \Omega \angle 45^\circ$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^7 \pi}{8.89} = 3.53 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{8.89} = 0.707 \text{ m}$$

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8.89} = 0.112 \text{ m}$$

(2) 设 x_1 为波振幅衰减至 1% 时波传播的距离, 则

$$e^{-\alpha x_1} = 0.01$$

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} \ln 100 = \frac{1}{8.89} \ln 100 = 0.518 \text{ m}$$

(3) E 的瞬时表达式为

$$E(x, t) = 100e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) e_y \quad \text{V/m}$$

在 $x = 0.8 \text{ m}$ 时

$$E(0.8, t) = 0.082 \cos(10^7 \pi t - 7.11) e_y \quad \text{V/m}$$

$$\text{所以 } H(0.8, t) = \frac{0.082}{|Z_0|} \cos(\omega t - 0.8\beta - \frac{\pi}{4}) e_z$$

$$= 0.026 \cos(10^7 \pi t - 1.61) e_z \quad \text{A/m}$$

以上计算说明, 5 MHz 的平面电磁波在海水中衰减很快。因此, 海水中的无线电通讯必须使用低频无线电波。但即使在低频情况下, 如 $f = 50 \text{ Hz}$, 可计算得到透入深度 $d = 35.6 \text{ m}$, 说明海底的远距离无线电通讯仍然很困难。

6.2.2 均匀平面电磁波的正入射·驻波

均匀平面电磁波对理想导体、理想介质的垂直入射, 是最简单最基本的特殊问题。在学习中应牢固掌握波在这种情况下的传播规律, 有什么样的物理图像; 熟练掌握推演过程, 有哪些公式和结论; 了解波对分层介质垂直入射的求解方法。

均匀平面电磁波在媒质分界面处的反射与折射问题的求解, 关键是分界面上衔接条件的应用, 它是研究这类问题的基础。

例 6-4 均匀平面电磁波频率 $f = 100 \text{ MHz}$, 从空气正入射到 $x = 0$ 的理想导体平面上, 设入射波电场沿 y 方向, 振幅 $E_m = 6 \text{ mV/m}$ 。试写出: (1) 入射波的电场和磁场; (2) 反射波的电场和磁场; (3) 在空气中合成波的电场和磁场; (4) 空气中离理想导体表面第 1 个电场波腹点的位置。

解 (1) 入射波的电场和磁场的瞬时表达式

$$\mathbf{E}^+(x, t) = E_m \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{H}^+(x, t) = \frac{E_m}{Z_{01}} \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_z$$

式中: $E_m = 6 \times 10^{-3} \text{ V/m}$; $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/m}$; $Z_0 = 377 \Omega$; $\omega = 2\pi \times 10^8 \text{ Hz}$ 。因此

$$\mathbf{E}^+(x, t) = 6 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x) \mathbf{e}_y \quad \text{V/m}$$

$$\mathbf{H}^+(x, t) = 1.59 \times 10^{-5} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x) \mathbf{e}_z \quad \text{A/m}$$

(2) 理想导体引起全反射, 即在 $x=0$ 处

$$E^- = -E^+ \quad \text{和} \quad H^- = H^+$$

所以, 反射波的电场和磁场的瞬时表达式

$$\mathbf{E}^-(x, t) = -6 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x) \mathbf{e}_y \quad \text{V/m}$$

$$\mathbf{H}^-(x, t) = 1.59 \times 10^{-5} \cos(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x) \mathbf{e}_z \quad \text{A/m}$$

(3) 空气中合成波的电场和磁场的瞬时表达式

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}^+(x, t) + \mathbf{E}^-(x, t)$$

$$= 12 \times 10^{-3} \sin \frac{2\pi}{3} x \sin(2\pi \times 10^8 t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_y \quad \text{V/m}$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}^+(x, t) + \mathbf{H}^-(x, t)$$

$$= 3.18 \times 10^{-5} \cos \frac{2\pi}{3} x \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_z \quad \text{A/m}$$

(4) 在空气中, 离理想导体表面第 1 个电场波腹点发生在

$$x = -\frac{\lambda}{4} = -\frac{3}{4} \text{ m}$$

例 6-5 一均匀平面电磁波自空气中正入射到半无限大的理想介质表面上。已知在空气中, 合成波的驻波比为 3, 理想介质内波的波长是空气波长的 $1/6$, 且介质表面上为合成波电场最小点。求理想介质的相对磁导率 μ_r 和相对介电常数 ϵ_r 。

解 因为驻波比

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 3$$

由此解出

$$|\Gamma| = \frac{1}{2}$$

因为介质表面是合成电场的最小值点,故 $\Gamma = -\frac{1}{2}$ 。而反射系数

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

式中: $Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$; $Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$ 。因此,得

$$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1}{3} \quad \text{或} \quad \frac{\mu_r}{\epsilon_r} = \frac{1}{9}$$

又理想介质内波的波长

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{6}$$

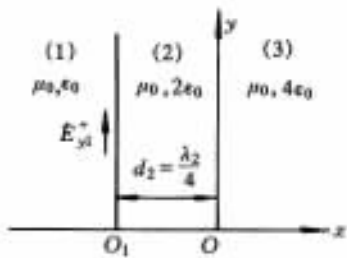
得

$$\mu_r \epsilon_r = 36$$

因此,不难求得理想介质的相对磁导率和相对介电常数分别是

$$\mu_r = 2 \quad \text{和} \quad \epsilon_r = 18$$

例 6-6 图 6-3 表示场域中有 3 种不同的理想介质,分别用(1)、(2)和(3)表示,各媒质的物理参数已标明在图上。介质(2)的厚度为 $d_2 = \lambda_2/4$ 。在介质(1)中有一 y 轴取向的直线极化波向 $(+x)$ 方向前进,已知频率为 100 MHz, $\dot{E}_{y1}^+ = 100 \text{ V/m} \angle 0^\circ$ 。试求:



(1) 计算 O_1 处的电场强度和磁场强度的比值 $Z(O_1)$;

(2) 写出区域(2)中电场强度和磁场强度的复数形式和瞬时形式;

(3) 写出区域(1)中电场强度和磁场强度的复数形式,并从能量的观点说明(1)中不出现反射波。

图 6-3 1/4 波长变换器

解 本题从计算介质(2)和(3)分界面上的反射系数入手比较方便,并把坐标原点 O 取在该分界面上,如图 6-3 所示。

先计算各区域中介质的波阻抗,它们分别为

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega, \quad Z_{02} = \frac{377}{\sqrt{2}} = 266.62 \Omega, \quad Z_{03} = \frac{377}{2} = 185.5 \Omega, \quad \text{原点的}$$

反射系数(介质(2)中)

$$\Gamma_2(O) = \frac{Z_{03} - Z_{02}}{Z_{03} + Z_{02}} = -0.1716$$

O_1 点的反射系数(介质(2)中)

$$\Gamma_2(O_1) = \Gamma_2(O) e^{-j2\beta_2 \frac{\lambda_2}{4}} = \Gamma_2(O) e^{-j\pi} = 0.1716$$

(1) $x = -d_2$ 处的入端阻抗

$$Z(O_1) = Z(-\frac{\lambda_2}{4}) = Z_{02} \frac{1 + \Gamma_2(O_1)}{1 - \Gamma_2(O_1)} = 266.62 \frac{1 + 0.1716}{1 - 0.1716} = 377 \quad \Omega$$

这也就是 O_1 处电场强度和磁场强度的比值。

(2) 由于 O_1 处的入端阻抗为 $Z(O_1) = 377 \Omega$, 所以可用自由空间等效代替介质(2)和(3)的作用。因而在 $x = -d_2$ 处的反射系数为 0, 这表明在区域(1)中不出现反射波。根据边界条件可知

$$\dot{E}_{y1}(-d_2) = \dot{E}_{y1}^+ = \dot{E}_{y2}(-d_2)$$

即

$$\dot{E}_{y2}(-d_2) = 100 \text{ V/m} \angle 0^\circ$$

又介质(2)中

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = 2\pi \times 10^8 \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 2.96 \text{ rad/m}$$

电场强度和磁场强度的复数形式

$$\dot{E}_{y2}(x) = \dot{E}_{y2}^+ e^{-j\beta_2 x} (1 + \Gamma_2(O) e^{j2\beta_2 x})$$

$$\dot{H}_{z2}(x) = \frac{\dot{E}_{y2}^+}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 x} (1 + \Gamma_2(O) e^{j2\beta_2 x})$$

由 $\dot{E}_{y2}(-d_2) = 100 \text{ V/m} \angle 0^\circ$, 有

$$\dot{E}_{y2}^+ e^{j\beta_2 \frac{\lambda_2}{4}} (1 + 1.1716) = 100 \text{ V/m} \angle 0^\circ$$

得

$$\dot{E}_{y2}^+ = \frac{100 \angle 0^\circ}{j1.176} = -j85.35$$

所以

$$\dot{E}_{y2}(x) = 85.35 e^{-j(1.57 + 2.96x)} - 14.65 e^{-j(1.57 - 2.96x)} \quad \text{V/m}$$

$$\dot{H}_{z2}(x) = 0.32 e^{-j(1.57 + 2.96x)} + 0.0549 e^{-j(1.57 - 2.96x)} \quad \text{A/m}$$

电场强度和磁场强度的瞬时形式

$$E_{y2}(x, t) = \sqrt{2} \times 85.35 \cos(\omega t - 2.96x - 1.57) - \sqrt{2} \times 14.65 \cos(\omega t + 2.96x - 1.57) \quad \text{V/m}$$

$$H_{z2}(x, t) = \sqrt{2} \times 0.32 \cos(\omega t - 2.96x - 1.57) + \sqrt{2} \times 0.0549 \cos(\omega t + 2.96x - 1.57) \quad \text{A/m}$$

(3) 介质(1)中只有沿(+x)方向的入射波,

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = 2.094 \text{ rad/m}$$

电场强度和磁场强度的复数形式

$$\dot{E}_{y1}(x) = \dot{E}_{y1}^+ e^{-j\beta_1(x+d_2)}$$

$$\dot{H}_{z1}(x) = \frac{\dot{E}_{y1}^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1(x+d_2)}$$

因为 $Z(O_1) = 377 \Omega$ 和介质(1)的波阻抗相等,这相当于在该处的介质均匀,不发生反射,即由介质(1)中的入射波携带的能量全部送入介质(2),这种状态称为匹配状态。

6.2.3 均匀平面电磁波的斜入射

当入射波的传播方向与媒质分界面法线方向间的夹角,即入射角 $\theta_1 \neq 0$ 时,称为斜入射。在斜入射中,会发生一种既重要又奇特的反射和折射现象——全反射。它已经在实际中有许多应用,光纤通信就是其中之一。

发生全反射的条件是电磁波从介电常数大的介质投射到介电常数小的介质,且入射角 $\theta_1 \geq$ 临界角 θ_c 。由式(6-28)的 $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$ (一般介质的 $\mu \approx \mu_0$) 得

知,由于 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, 所以 $\theta_2 > \theta_1$ 。当 $\theta_1 = \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ 时, $\theta_2 = 90^\circ$; 当 $\theta_1 > \theta_c$, 则有

$\sin\theta_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin\theta_1 > 1$, θ_2 不再是实角,而为虚角,这时就发生了全反射现象。

应该注意的是,在全反射的情况下,仍有折射波存在,但它只存在于分界面的介质 2 一侧附近的一薄层内,而且是一种沿着平行于分界面方向传播的所谓表面波。因此,它已不是通常意义上的折射波。这种表面波的平均能流只有平行于分界面方向的分量。沿分界面法线方向透入介质 2 中的平均能流密度为 0,但其瞬时值并不为 0,说明此时第 2 种介质起着吞吐电磁能量的作用。在每个前半周期内,入射波携带的电磁能量透入第 2 种介质,在分界面附近薄层内储存起来;在每个后半周期内,该部分能量又被释放出来变为反射波能量,返回第 1 种介质。正是由于这样的过程的不断发生,在分界面附近形成了沿界面流动的电磁能流。因此,折射波沿分界面法线方向成为衰减波的原因也在这里,它不同于导电媒质中存在的衰减(造成波的衰减是因导电媒质中存在着传导电流)。在全反射时,第 2 种介质中不存在传导电流,所以波的衰减只能是由于透入的电磁能量不断有所返回第 1 种介质造成的,两者有着本质的区别。

另一方面,从反射系数中也可认识全反射这一奇特物理现象的内涵。从反射系数的表达式可知,反射波与入射波存在相位差,这表明反射波是由透入到第 2 种介质的波返回时生成的。

和理想介质情况一样,应用分界面上的衔接条件也可以解决波在导电媒质分

界面上的斜入射问题。但是,一般说来,计算是相当复杂的。

例 6-7 介电常数分别为 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 的 3 种理想介质的分界面为相互平行的无限大平面,均匀平面电磁波由介质 1 以入射角 θ_1 斜入射到分界面 1,设平面波由分界面 2 透入介质 3 的折射角为 θ_3 。

(1) 若波从介质 3 以入射角 θ_3 入射到分界面 2,证明由分界面 1 透入介质 1 的折射角为 θ_1 ,即射线是可逆的;

(2) 若 $\epsilon_1 = \epsilon_3$,证明入射线和从中间介质射出的折射线平行;

(3) 若 $\epsilon_1 = \epsilon_3$,介质 2 的厚度为 d ,求图 6-4(b)中两射线的平移距离 l 。

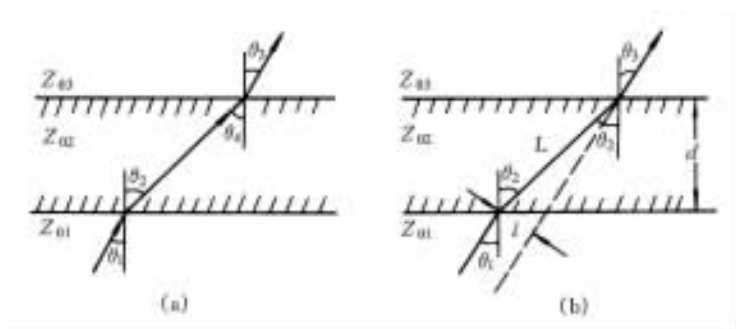


图 6-4 有限厚度介质的反射与折射

解 (1) 如图 6-4(a)所示,根据式(6-28),在分界面 1 处有

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2$$

介质 2 中的折射波又以 θ_2 入射角射向分界面 2,同理,根据式(6-28),在分界面 2 上有

$$\sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 = \sqrt{\epsilon_3} \sin \theta_3$$

合并上面两式,得

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 = \sqrt{\epsilon_3} \sin \theta_3$$

若从介质 3 以 θ_3 入射,仍由上式联系 θ_1 和 θ_3 ,这就证明了射线是可逆的。

事实上,对于分界面是平行的无限大平面的多层介质,就有

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 = \sqrt{\epsilon_3} \sin \theta_3 = \dots$$

(2) 由上式,当 $\epsilon_1 = \epsilon_3$ 时,有 $\theta_1 = \theta_3$,说明 1、3 两介质中的射线是平行的。

(3) 如图 6-4(b)所示,当 $\epsilon_1 = \epsilon_3$ 时,有 $\theta_1 = \theta_3$ 。因此,两射线间的距离

$$l = L \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

而

$$L = \frac{d}{\cos \theta_2}$$

于是

$$l = \frac{d}{\cos\theta_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{d}{\cos\theta_2} (\sin\theta_2 \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_1) = d \left(\frac{\sin\theta_1 \cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_1}} - \sin\theta_1 \right)$$

例 6-8 已知在空气中有一圆极化波, 现有一厚度较厚的介质板, 介质板的相对介电常数 $\epsilon_r = 80$ 。若要利用这块介质从上述圆极化波中取出线性极化的输出功率, 应采取什么办法?

解 将圆极化波从介质板的一面以角度 θ_B 入射, 这样反射波电场中只有垂直极化分量, 而全部平行极化分量及部分垂直极化分量就透入到介质板内, 构成一椭圆极化波。为使它们不再在介质板的另一面被反射, 可在这一表面上覆盖以适当的金属膜, 使其波阻抗与介质板的波阻抗相等, 这样介质板内的椭圆极化波将无反射地进入金属薄膜被吸收掉。 θ_B 计算如下

$$\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arctan \sqrt{\epsilon_r} = \arctan \sqrt{80} = 83.0^\circ$$

6.3 典型题解析

6-1 设有一频率为 300 MHz, 电场强度最大值为 0.1 V/m 的均匀平面电磁波在水中沿 x 方向传播。已知水的相对磁导率 $\mu_r = 1$, 相对介电常数 $\epsilon_r = 78$, 且水为理想介质。设水面的电场强度初始值为零, 且水在 x 方向可看作伸展到无限远。试写出水中电场强度和磁场强度的瞬时表达式。

解 在水中传播的电磁波的相速、波长、相位常数分别为

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78}} = 0.34 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.34 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 0.113 \text{ m}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.5 \text{ rad/m}$$

水的波阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{78}} = 42.7 \text{ } \Omega$$

可得

$$E_y(x, t) = 0.1 \cos(\omega t - 55.5x + \phi) \text{ V/m}$$

请注意均匀平面电磁波的 v, λ, β, Z_0 与 f 和 μ, ϵ 间的关系。电场强度 E 和磁场强度 H 瞬时表达式的标准形式。

又因在水面上,即在 $x=0$ 处, $t=0$ 时的电场 $E_y(0,0)=0$, 所以初相角 $\phi=\frac{\pi}{2}$ 。因此,水中电场强度和磁场强度的瞬时表达式分别为

$$E_y(x,t)=0.1\sin(6\pi\times 10^8t-55.5x) \quad \text{V/m}$$

$$H_z(x,t)=\frac{E_y(x,t)}{Z_0}=2.34\times 10^{-3}\sin(6\pi\times 10^8t-55.5x)$$

A/m

6-2 已知空气中传播的均匀平面电磁波的磁场强度

$H=\frac{2.5}{\pi}\sin(6\pi\times 10^8t-2\pi z)(e_x+e_y)$ A/m。试求:(1) 平面电磁波的频率、相速、波长、相位常数和传播方向;(2) 平面电磁波的电场强度 E 的表达式;(3) 坡印廷矢量。

解 (1) 由 H 的表达式得

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{6\pi\times 10^8}{2\pi}=3\times 10^8 \quad \text{Hz}$$

$$\beta=2\pi \quad \text{rad/m}$$

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{6\pi\times 10^8}{2\pi}=3\times 10^8 \quad \text{m/s}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{2\pi}=1 \quad \text{m}$$

该平面电磁波向 z 方向传播。

(2) 空气的波阻抗为

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=377 \quad \Omega$$

因为 H 有 H_x 和 H_y 两个分量,所以 E 也有 E_x 和 E_y 两个分量,且

$$E_x=Z_0 H_y, \quad E_y=-Z_0 H_x$$

这样,平面电磁波的电场强度 E 的表达式

$$E=300\sin(6\pi\times 10^8t-2\pi z)(e_x-e_y) \quad \text{V/m}$$

(3) 坡印廷矢量

$$S=E\times H=477.46\sin^2(6\pi\times 10^8t-2\pi z)e_z \quad \text{W/m}^2$$

应掌握从 E 或 H 的表达式中求出 f 、 β 、 v 和 λ 的方法。

可看成是向 z 方向传播的两组平面波。 E_x 和 H_y 构成一组, E_y 和 H_x 构成另一组。

6-3 设有一导电媒质,沿 y 方向及 z 方向为无限大,而沿 x 方向有 10 m 深。已知有一沿 y 轴取向而向 x 方向传播

的直线极化波进入该导体,在 $x=0^+$ 处的电场强度为 $\dot{E}_{y0}=30\text{ V/m}\angle 0^\circ$;该导电媒质的 $\mu_r=1, \epsilon_r=1$ 及 $\gamma=58\text{ S/m}$,电磁波频率为 $f=30\text{ MHz}$ 。计算其中的电磁场分布。

解 由于

$$\left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2 = \left(\frac{58}{2\pi \times 30 \times 10^6 \times 8.854 \times 10^{-12}}\right)^2 \\ = 1.211 \times 10^9 \gg 1$$

所以该媒质为良导体。衰减常数为

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 30 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 58}{2}} \\ = 82.881\text{ Np/m}$$

和

$$e^{-\alpha x} = e^{-82.881 \times 10} \approx 0$$

由于 α 较大,所以当电磁波传播到 $x=10\text{ m}$ 处时,电场强度已衰减到近于零。这意味着在该系统中可以不考虑反射波的存在,因而

$$\dot{E}_y = \dot{E}_{y0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\dot{H}_z = \frac{\dot{E}_{y0}}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

式中

$$\beta = \alpha \approx 82.881\text{ rad/m}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 30 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{58}} \angle 45^\circ \\ = 2.021 \angle 45^\circ\ \Omega$$

电场强度和磁场强度的瞬时表达式为

$$E_y(x, t) = 30\sqrt{2}e^{-82.881x} \cos(2\pi \times 30 \times 10^6 t - 82.881x)\text{ V/m}$$

$$H_z(x, t) = 14.84\sqrt{2}e^{-82.881x} \cos(2\pi \times 30 \times 10^6 t - 82.881x - 45^\circ)\text{ A/m}$$

6-4 平面电磁波垂直入射到金属表面上,证明透入金属的电磁能量全部转化为焦耳热。

解 金属内电场强度和磁场强度为

$$\dot{E} = \dot{E}_0 e^{-\alpha x - j\beta x}$$

$$\dot{H} = \frac{\beta - j\alpha}{\omega\mu_0} \mathbf{e}_x \times \dot{E}$$

判断是否属于良导体这一点,在解导电媒质中的电磁波问题时非常重要。

良导体中电场强度 E 和磁场强度 H 的表达式要熟悉。

坡印廷定理和焦耳定律微分形式的应用。

坡印廷矢量的时间平均值为

$$S_{av} = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_0^2 e^{-2ax} \mathbf{e}_x$$

当 $x=0$ 时

$$S_{av}(0) = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_0^2 \mathbf{e}_x = \frac{\gamma}{2\alpha} E_0^2 \mathbf{e}_x$$

上面用到了公式 $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}$ 。

导体内电流引起的焦耳热损耗功率密度为

$$\gamma E^2 = \gamma \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* = \gamma E_0^2 e^{-2ax}$$

单位表面积下,导体内部总的热损耗平均功率为

$$P = \gamma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2ax} dx = \frac{\gamma}{2\alpha} E_0^2$$

故

$$P = S_{av}(0)$$

命题得证。

6-5 一圆极化平面电磁波的电场 $\dot{\mathbf{E}} = E_m e^{-j\beta_0 x} (\mathbf{e}_y + j\mathbf{e}_z)$ V/m,从空气垂直入射到 $\mu_r = 1, \epsilon_r = 4$ 的理想介质表面上。求:(1) 反射波和折射波的电场;(2) 它们分别属于什么极化波?

解 (1) 空气和介质的波阻抗分别为

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \quad \Omega, \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 60\pi \quad \Omega$$

故反射系数和折射系数分别为

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = -\frac{1}{3}$$

$$T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2}{3}$$

介质中的相位常数

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r} = 2\beta_0$$

得反射波为

$$\dot{\mathbf{E}}^- = \Gamma \dot{\mathbf{E}}^+(0) e^{j\beta_0 x} = -\frac{1}{3} E_m e^{j\beta_0 x} (\mathbf{e}_y + j\mathbf{e}_z) \quad \text{V/m}$$

折射波为

这类题一般从定义出发去解。

$$\dot{E}' = T\dot{E}^+(0)e^{-j2\beta_0 x} = \frac{2}{3}E_m e^{-j2\beta_0 x}(e_y + je_z) \quad \text{V/m}$$

(2) 反射波为左旋圆极化波。而折射波为右旋圆极化波。

6-6 一均匀平面电磁波从理想介质 1 正入射到理想介质 2 的分界面上,若两种介质的 $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ 。求:(1) 使入射波能量的 10% 被反射时,两种介质的相对介电常数之比 $\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}$ 的值;(2) 使入射波能量的 10% 被透入介质 2 时,两种介质的相对介电常数之比 $\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}$ 的值。

利用坡印廷矢量、反射系数、折射系数的公式。

解 (1) 反射波的坡印廷矢量平均值为

$$S_{av}^- = \frac{|\Gamma|^2}{Z_{01}}(E^+)^2 = 0.1 \times \frac{1}{Z_{01}}(E^+)^2$$

所以

$$|\Gamma|^2 = 0.1$$

取

$$\Gamma = \sqrt{0.1} = 0.316$$

又因

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}}$$

所以

$$1 - \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} = 0.1 \times (1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}})$$

得

$$\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = 0.269$$

(2) 透射波的坡印廷矢量平均值为

$$S'_{av} = \frac{T^2}{Z_{02}}(E^+)^2 = 0.1 \frac{1}{Z_{02}}(E^+)^2$$

所以

$$T = \sqrt{0.1} = 0.316$$

又因

$$T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}}$$

所以

$$1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} = \frac{2}{T}$$

得

$$\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} = \frac{2}{T} - 1 = 5.329$$

$$\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = 28.4$$

6-7 频率为10 GHz 的机载雷达,有一个 $\epsilon_r = 2.25$ 的介质薄板构成的天线罩,假设其介质损耗可以忽略不计,为使用它对垂直入射到罩上的电磁波不产生反射,问该介质薄板应取多厚?

半波介质窗。

解 利用式(6-46),有介质板的厚度

$$d = \frac{n\lambda_2}{2} = \frac{n\lambda_0}{2\sqrt{\epsilon_r}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

取最薄情况,今取 $n=1$,得

$$d = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{C}{2f\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^{10} \times \sqrt{2.25}} = 1 \text{ cm}$$

这个结果利用了入端阻抗的半波重复性。

6-8 在 $\epsilon_3 = 5\mu_0, \mu_3 = \mu_0$ 的玻璃表面上涂一层薄膜,以消除红外线(波长 $\lambda = 0.75 \mu\text{m}$)。设玻璃和薄膜都可视为理想介质,试确定薄膜的厚度 d 和介电常数 ϵ_2 。

1/4 波长变换

解 由于薄膜两侧分别为空气和玻璃,它们的波阻抗 Z_{01} 和 Z_{03} 不相等,由式(6-48)应取薄膜的波阻抗 Z_{02} 满足关系式

器,注意关系式

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_{03}}$$

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_{03}} = \sqrt{377 \times \frac{377}{\sqrt{5}}} = 252.12 \quad \Omega$$

又因

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}}$$

所以,得

$$\epsilon_2 = \frac{\mu_0}{Z_{02}^2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{(252.12)^2} = 2.236\epsilon_0$$

薄膜的厚度应取为

$$d = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{0.75}{4\sqrt{2.236}} = 0.125 \quad \mu\text{m}$$

6-9 如图 6-5 所示,在场域中有 4 种不同的媒质,分别用(1)、(2)、(3)和(4)表示。它们表示在理想导体的表面上涂覆 $\lambda_3/4$ 厚度的理想介质层,而在理想介质和空气之间涂以厚度为 d_2 的良导电媒质,这种介质可以消除从理想导体表面产生的波反射。试确定消除理想导体表面反射波的条件。

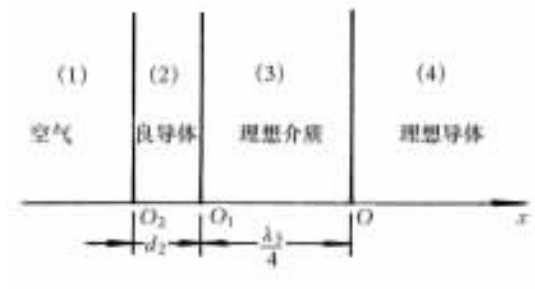


图 6-5 理想导体表面反射波的消除

解 本题从计算入端阻抗入手比较方便,并把坐标原点 O 取在理想导体表面上。

先计算各区域中的波阻抗,它们分别为

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = 377 \quad \Omega$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\gamma_2}} \angle 45^\circ \quad \Omega$$

$$Z_{03} = \sqrt{\frac{\mu_3}{\epsilon_3}} \quad \Omega$$

$$Z_{04} = \sqrt{\frac{\omega\mu_4}{\gamma_4}} \angle 45^\circ = 0 \quad \Omega$$

原点的反射系数(媒质(3)中)

$$\Gamma_3(0) = \frac{Z_{04} - Z_{03}}{Z_{04} + Z_{03}} = -1$$

O_1 点的反射系数(媒质(3)中)

$$\Gamma_3(-\frac{\lambda_3}{4}) = \Gamma_3(0)e^{-j2\beta_3\frac{\lambda_3}{4}} = \Gamma_3(0)e^{-j\pi} = 1$$

入端阻抗 $Z(x)$ 的含意和应用。
 $Z(x)$ 在分析平面电磁波垂直入射于多层介质问题时,十分有用。也是一种最简单的办法。

由式(6-45)不难推知, $x = -\frac{\lambda_3}{4}$ 处的入端阻抗为

$$Z(-\frac{\lambda_3}{4}) = Z_{03} \frac{1 + \Gamma_3(-\frac{\lambda_3}{4})}{1 - \Gamma_3(-\frac{\lambda_3}{4})} = Z_{03} \frac{1+1}{1-1} = \infty$$

这样, O_1 点的反射系数(媒质(2)中)

$$\Gamma_2(-\frac{\lambda_3}{4}) = \frac{Z(-\frac{\lambda_3}{4}) - Z_{02}}{Z(-\frac{\lambda_3}{4}) + Z_{02}} = 1$$

O_2 点的反射系数(媒质(2)中)

$$\Gamma_2(-\frac{\lambda_3}{4} - d_2) = \Gamma_2(-\frac{\lambda_3}{4}) e^{-j2\beta_2 d_2} = e^{-j2\beta_2 d_2}$$

那末, $x = -\frac{\lambda_3}{4} - d_2$ 处的入端阻抗为

$$\begin{aligned} Z(-\frac{\lambda_3}{4} - d_2) &= Z_{02} \frac{1 + \Gamma_2(-\frac{\lambda_3}{4} - d_2)}{1 - \Gamma_2(-\frac{\lambda_3}{4} - d_2)} = Z_{02} \frac{1 + e^{-j2\beta_2 d_2}}{1 - e^{-j2\beta_2 d_2}} \\ &= \frac{Z_{02}}{j \tan \beta_2 d_2} \end{aligned}$$

若良导电媒质薄膜的厚度 d_2 远小于透入深度 d , 则 $\beta_2 d_2$

$\ll 1$ 。因此, $x = -\frac{\lambda_3}{4} - d_2$ 处的入端阻抗可近似为

$$Z(-\frac{\lambda_3}{4} - d_2) \approx \frac{Z_{02}}{j\beta_2 d_2}$$

为消除反射, 应有

$$Z_{01} = Z(-\frac{\lambda_3}{4} - d_2) = \frac{Z_{02}}{j\beta_2 d_2}$$

考虑到

$$j\beta_2 = \sqrt{j\omega\mu_2\gamma_2}, \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\gamma_2}} \angle 45^\circ$$

所以

$$Z_{01} = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\gamma_2}} \angle 45^\circ}{(\sqrt{j\omega\mu_2\gamma_2})d_2} = \frac{1}{\gamma_2 d_2}$$

得

$$d_2 = \frac{1}{\gamma_2 Z_{01}} = \frac{1}{\gamma_2 377} = \frac{0.002653}{\gamma_2}$$

如果良导电薄膜为铜, $\gamma_2 = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, 则

$$d_2 = 45.7 \text{ pm}$$

6-10 垂直极化的平面电磁波从水下投射至大气分界面。入射角 $\theta_1 = 20^\circ$, 对于淡水 $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ 。试求: (1) 临界角 θ_c ; (2) 反射系数 $\Gamma_\perp$; (3) 折射系数 $T_\perp$ 。

解 (1) 当非磁性介质 $\epsilon_r = 81 > \epsilon_0$ 时, 临界角为

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \arcsin \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}} = \arcsin \frac{1}{9} = 6.38^\circ$$

(2) 两种介质的波阻抗分别为

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{1}{9} Z_{02}$$

由折射定律式(6-28), 有

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\epsilon_0}} = 9$$

$$\sin \theta_2 = 9 \sin \theta_1 = 3.078$$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = -j2.91 \quad (\text{取负号})$$

所以

$$\Gamma_\perp = \frac{Z_{02} \cos \theta_1 - Z_{01} \cos \theta_2}{Z_{02} \cos \theta_1 + Z_{01} \cos \theta_2} = e^{j38^\circ}$$

(3) 折射系数

$$T_\perp = \frac{2Z_{02} \cos \theta_1}{Z_{02} \cos \theta_1 + Z_{01} \cos \theta_2} = 1.89e^{j19^\circ}$$

直接应用有关的公式。

6-11 一个等腰直角三角形的玻璃棱镜用来做光学仪器。玻璃的 $\epsilon_r = 4$ 。计算相对于入射功率, 有多少百分比的功率经棱镜反射回来。

功率百分比的含意。

解 如图 6-6 所示。临界角 $\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\epsilon_0}} = 30^\circ$ 。由于在棱镜里, 入射角皆为 45° , 所以在棱镜里皆为全反射。

空气和玻璃的波阻抗分别为

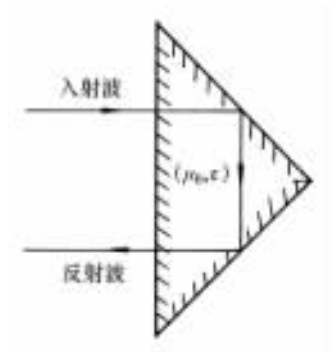


图 6-6 三棱镜的反射

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \quad \Omega$$

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = 60\pi \quad \Omega$$

从空气到玻璃的功率透入百分比

$$\alpha_1 = \frac{Z_{02}}{Z_{01}} T_1^2 = \frac{120\pi}{60\pi} \left(\frac{2 \times 60\pi}{120\pi + 60\pi} \right)^2 = \frac{8}{9}$$

从玻璃到空气的功率透入百分比

$$\alpha_2 = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} T_2^2 = \frac{60\pi}{120\pi} \left(\frac{2 \times 120\pi}{120\pi + 60\pi} \right)^2 = \frac{8}{9}$$

所以相对于入射功率,经棱镜反射回来的功率百分比为

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \approx 80\%$$

6.4 自我检测题

题 6.1 一均匀平面电磁波在空气中传播,其电场强度为 $E = 100 \cos(\omega t - \beta z) e_x$ 。试说明:(1)波的传播方向;(2)磁场强度 H 的表达式;(3)坡印廷矢量 S 的表达式。

(答案:(1)(+z)方向;(2) $H = \frac{100}{377} \cos(\omega t - \beta z) e_y$;(3) $S = \frac{10^4}{377} \cos^2(\omega t - \beta z) e_x$)

题 6.2 有一均匀平面电磁波的电场 $E_1 = E_m \cos(\omega t - \beta x)$,从媒质 1 正入射到一半无限大的导电媒质 2,已知在分界面处 $\Gamma = -0.5$, $T = 0.5$,求媒质 1 与导电媒质 2 中的电场强度。

(答案: $E_{y1}=0.5E_{1m}\cos(\omega t-\beta x)+E_{1m}\sin\beta x\sin\omega t, E'_{y2}=0.5E_{1m}e^{-a_2x}\cos(\omega t-\beta_2x)$)

题 6.3 一均匀平面电磁波, 在空气中沿 x 轴正方向传播, 其频率为 100 MHz, 电场强度的幅值为 $E_{ym}=1\times 10^{-2}$ V/m。求波阻抗、波速、相位常数、波长、磁场强度的瞬时表达式。

(答案: $Z_0=377\ \Omega, v=3\times 10^8$ m/s, $\beta=\frac{2\pi}{3}$ rad/m, $\lambda=3$ m,

$$H_z(x,t)=2.65\times 10^{-5}\cos(2\pi\times 10^8t-\frac{2\pi}{3}x)\text{ A/m})$$

题 6.4 试叙述均匀平面电磁波在理想介质与导体中传播特性的差异点, 并画出 t 为某定值时 E 与 H 沿 x 方向(波的传播方向)的分布图。

(答案: (略))

题 6.5 有一个垂直且穿出纸面(设为 z 轴)的行波, 由两个线性极化波 $E_x=3\cos\omega t$ 和 $E_y=2\cos(\omega t+90^\circ)$ 组成。

- (1) 证明合成波是椭圆极化波;
- (2) 求椭圆的长短轴之比;
- (3) 说明它是右旋极化波还是左旋极化波。

(答案: (1)(略); (2) 1.5; (3) 左旋波)

题 6.6 设一均匀平面电磁波在一良导体内传播, 其传播速度为光在自由空间波速的 0.1% 且波长为 0.3 mm, 设该良导体的磁导率为 μ_0 。试决定该平面波的频率及良导体的电导率。

(答案: $f=1$ GHz, $\gamma=1.11\times 10^5$ S/m)

题 6.7 设空间有一沿 x 轴取向的线性极化波, 正入射于一理想导体的表面, 设理想导体表面和 xoy 平面相重合, 且 z 轴的正方向指向其内部。已知 $\dot{E}_{x1}^+=200e^{j10^\circ}$ 。

- (1) 求电场强度和磁场强度的反射分量和透入分量的复数形式;
- (2) 求理想导体表面的面电流密度;
- (3) 写出电场强度和磁场强度的瞬时表达式。

(答案: (1) $\dot{E}_{x1}^-(z)=-200e^{j(\beta z+10^\circ)}$ V/m, $\dot{H}_{y1}^-(z)=0.53e^{j(\beta z+10^\circ)}$ V/m, $\dot{E}_2=\dot{H}_2=0$; (2) $K=1.06\sqrt{2}\sin(\omega t+10^\circ)e_x$ A/m; (3) $E_1(x,t)=-400\sqrt{2}\sin\beta z\cos(\omega t+10^\circ)e_x$ V/m, $H_1(x,t)=1.06\sqrt{2}\cos\beta z\sin(\omega t+10^\circ)e_y$ A/m。)

题 6.8 设在空气中有一频率为 100 MHz 的沿 x 轴取向的线性极化波正入射于厚度 $d_2=\frac{3\lambda_2}{8}$ 的塑料体的表面, 各区域的参数示于图 6-7 中, 设已知 $\dot{E}_{x1}=100\angle 0^\circ$ 。

(1) 求 O_3 处的电场强度和磁场强度的比值, 及其(2)、(3)分界面处的反射系数和折射系数。

(2) (1)、(2)分界面处的反射系数及 O_1 处的电场强度和磁场强度的比值。

(3) 写出区域(2)中的电场强度和磁场强度的相量形式。

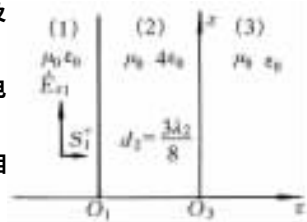


图 6-7 自我检测题 6.8 图

(答案: (1) $Z(O_3) = Z_{03} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \quad \Omega$,

$$\Gamma(O) = \frac{1}{3}, T(O) = \frac{4}{3};$$

$$(2) Z(O_1) = 188.5 \angle 36.87^\circ \Omega, \Gamma(O_1) = \frac{1}{3}j;$$

$$(3) \dot{E}_{2x} = 94.87 e^{j2.04^\circ} e^{-j\frac{4\pi}{3}z} (1 + \frac{1}{3} e^{j\frac{8\pi}{3}z}) \quad \text{V/m},$$

$$\dot{H}_{2y} = 0.503 e^{j2.04^\circ} e^{-j\frac{4\pi}{3}z} (1 - \frac{1}{3} e^{j\frac{8\pi}{3}z}) \quad \text{A/m}$$

题 6.9 已知 $H_1 = 2 \cos(\omega t - \beta_1 z) e_y$ A/m, 在 $\epsilon_{r1} = 4, \mu_{r1} = 1$ 和 $\gamma_1 = 0$ 的媒质中传播, $z=0$ 处为该媒质和另一媒质的分界面, 后者的 $\epsilon_{r2} = 2, \mu_{r2} = 5$ 和 $\gamma_2 = 0$, 设 $f = 5000$ MHz。

(1) 决定媒质 1 中的 $E_{1\max}$ 和 $E_{1\min}$ 。

(2) 决定媒质 1 中的驻波比。

(3) 决定输入媒质 2 中的平均功率密度。

(答案: (1) $E_{1\max} = 573.04 \quad \text{V/m}, E_{1\min} = 180.96 \quad \text{V/m};$

$$(2) S = 3.17;$$

$$(3) 275.44 \quad \text{W/m}^2)$$

题 6.10 均匀平面波在空气中的 $\lambda = 3$ cm, 正入射到玻璃纤维罩上, 罩的 $\epsilon_r = 4.9, \gamma = 0$ 。求不发生波反射时罩的厚度。

(答案: 0.68 cm)

题 6.11 如图 6-8 所示, 均匀平面电磁波自空气投射到截面为直角三角形

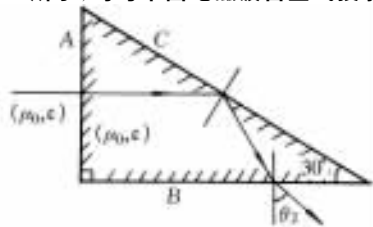


图 6-8 自我检测题 6.11 图

的棱镜的 A 面,棱镜的介电常数及磁导率分别为 ϵ 和 μ_0 。

(1) 若要求从 C 面穿出的平均功率为 0,求 ϵ 的最小值;

(2) 就(1)求出的 ϵ ,确定波从 B 面透出时的折射角 θ_2 ;

(3) 如设入射波电场垂直于纸面,求由 B 面垂直穿出的平均功率密度与入射到 A 面的平均功率密度之比(不计多重反射)。

(答案:(1) $\epsilon_{\min}=1.333$; (2) $\theta_2=35.3^\circ$; (3) 0.85)

第 7 章 均匀传输线中的导行电磁波

传输线是用于传输电磁能量和信号的各种形式传输系统的总称。这里只介绍传输横电磁波(TEM)的双导体传输线。例如,平行双导体传输线、同轴传输线和带状传输线等。

本章将从用积分量电压 u 和电流 i 表示的均匀传输线基本方程出发,对传输线终端接不同负载的沿线电压和电流分布规律作较详细的论述。着重讨论均匀传输线方程的解在正弦稳态下的性质,重点讨论了无损耗传输线中的驻波及其特点,还分析讨论了匹配状态下传输线的特点。

7.1 基本内容和公式

7.1.1 无损耗均匀传输线方程

这里对讨论的均匀双导体传输线作如下假设:

- (1) 线间横向距离比波长小得多,其间的推迟效应不考虑;
- (2) 构成传输线的导体是理想导体,既无损耗,也无电磁波的透入,导体间的介质也是理想介质;
- (3) 不考虑辐射能量,坡印廷矢量 S 仅有与传播方向一致的轴向分量。

在上述假设条件下,沿线导行的电磁波为横向电磁波(TEM波),电场强度 E 和磁场强度 H 无轴向分量。 E 和 H 都在横截面内。由此可以得出如下两个结论。

(1) 构成传输线的两根导体间,TEM波的横向电场,在任何时刻,在传输线的任一横截面的分布,同导体间加以适当的直流电压(即与此时刻该处导体间的电压相同)所产生的二维空间静电场一样。

(2) 构成传输线的两根导体间,TEM波的横向磁场,在任何时刻,在传输线的任一横截面的分布,同沿导体通过适当的直流电流所产生的二维恒定磁场的空间分布是相同的。(适当的直流电流即指与该时刻导体中通过的电流一致。)

若取传输线的两根导体的轴线与 z 方向一致,则在 $z = \text{常数}$ 的任一横截面内,均匀传输线中电压、电流和场量之间的关系可表示成

$$u(z, t) = \int_1^2 \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} \quad (7-1)$$

和

$$i(z, t) = \oint_{l_1} \mathbf{H}_T \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (7-2)$$

式中的积分路径如图 7-1 所示。

可以导出,用电压和电流表示的无损耗均匀传输线的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (7-3)$$

和

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7-4)$$

式中: L_0 为沿传输线轴向每单位长度的外电感; C_0 为沿传输线轴向每单位长度的电容。 L_0 和 C_0 分别可采用恒定磁场和静电场的方法计算。

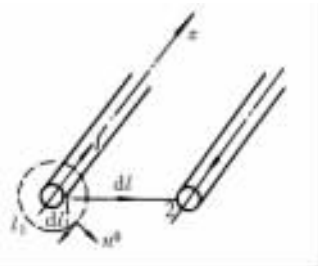


图 7-1 电压 u 和电流 i 的积分路径

7.1.2 无损耗均匀传输线的正弦稳态解

1. 正弦稳态解

将式(7-3)和式(7-4)分别对 t 和 z 求偏导数,然后综合在一起,可得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (7-5)$$

同理,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7-6)$$

由此可见,无损耗均匀传输线中的电压和电流都满足波动方程。

在正弦稳态的情况下,方程式(7-5)和(7-6)的复数形式为

$$\frac{d^2 \dot{U}(z)}{dz^2} = k^2 \dot{U}(z) \quad (7-7)$$

和

$$\frac{d^2 \dot{I}(z)}{dz^2} = k^2 \dot{I}(z) \quad (7-8)$$

式中

$$k = j\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \quad (7-9)$$

方程式(7-7)的通解为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \dot{U}^- e^{j\beta z} \quad (7-10)$$

式中: $\dot{U}^+$ 和 $\dot{U}^-$ 为积分常数(不是距离 z 的函数),要根据边界条件确定,设 $\dot{U}^+ = \dot{U}^+ e^{j\psi^+}$ 和 $\dot{U}^- = \dot{U}^- e^{j\psi^-}$,则电压的瞬时解为

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= \sqrt{2}U^+ \sin(\omega t - \beta z + \phi_+) + \sqrt{2}U^- \sin(\omega t + \beta z + \phi_-) \\
 &= \sqrt{2}U^+ \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \phi_+\right] + \sqrt{2}U^- \sin\left[\omega\left(t + \frac{z}{v}\right) + \phi_-\right] \quad (7-11)
 \end{aligned}$$

式中

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (7-12)$$

式(7-11)中的第1项表示向(+z)方向传播的电压入射波,而第2项表示向(-x)方向传播的电压反射波。不论是入射波还是反射波,随着波的前进,相位都滞后。 β 描述相位的改变率,故称为相位常数。 v 是电压波的相速。

同理,可得方程式(7-8)的通解为

$$\dot{I}(z) = \dot{I}^+ e^{-j\beta z} + \dot{I}^- e^{j\beta z} \quad (7-13)$$

这里 $\dot{I}^+$ 和 $\dot{I}^-$ 也是需要根据边界条件确定的积分常数。

积分常数 $\dot{U}^+$ 、 $\dot{U}^-$ 与 $\dot{I}^+$ 、 $\dot{I}^-$ 间有下列关系式

$$\frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_0, \quad \frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-} = -Z_0 \quad (7-14)$$

Z_0 称为传输线的特性阻抗。

将式(7-14)代入式(7-13),有

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_0} e^{j\beta z} \quad (7-15)$$

2. 不同边界条件下正弦稳态解的形式

若已知始端电压电流 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{I}_1$,且取终端为坐标原点,则可将 $z = -l$ 及 $\dot{U}(-l) = \dot{U}_1$, $\dot{I}(-l) = \dot{I}_1$ 代入式(7-10)和式(7-15),确定出积分常数 $\dot{U}^+$ 和 $\dot{U}^-$ 。最后,得电压、电流的沿线分布分别为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_1 \cos\beta(l+z) - jZ_0 \dot{I}_1 \sin\beta(l+z) \quad (7-16)$$

和

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_1 \cos\beta(l+z) - j \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \sin\beta(l+z) \quad (7-17)$$

若已知终端电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$,仍以终端作为坐标原点,同理可得电压、电流的沿线分布分别为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_2 \cos\beta z - jZ_0 \dot{I}_2 \sin\beta z \quad (7-18)$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_2 \cos\beta z - j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin\beta z \quad (7-19)$$

3. 无损耗均匀传输线的参数

无损耗均匀传输线的参数分为两类:一类称为原参数 L_0 和 C_0 ;另一类称为副

参数,如 β 和 Z_0 。

原参数 L_0 和 C_0 由传输线的几何尺寸、相互位置及周围媒质的物理特性决定,可采用静态场中的计算方法来计算。

副参数 β 和 Z_0 与原参数之间的关系分别由式(7-9)和式(7-14)给出。

考察 $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$,可能会认为,当乘积 $L_0 C_0$ 无限减小时,相速可无限增大,其实不然。可以证明,对于任何截面的长直理想导体构成的双导体传输线,有 $L_0 C_0 = \mu \epsilon$,所以沿无损耗传输线传播的电压波、电流波的相速和在无损耗周围媒质中的相速相等。

在无损耗均匀传输线中,相速 v 和特性阻抗 Z_0 都是与频率无关的常数,这些特点对信号的传输来说是个显著的优点。在没有反射波的条件下,沿线各处的电压、电流与传输线始端处的电压、电流的波形相同。

7.1.3 无损耗均匀传输线中波的反射与透射

当电压波、电流波传播到传输线的不均匀处,要发生反射和透射现象。在接有阻抗值不同于传输线特性阻抗值的负载处及两对特性阻抗值不同的传输线的连接处(如图 7-2 所示),都是不均匀处的例子。

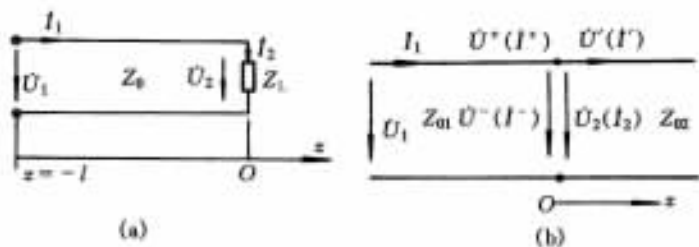


图 7-2 传输线的不均匀处

1. 反射系数

如图 7-2(a)所示,设特性阻抗为 Z_0 的传输线终端接有阻抗为 Z_L 的负载,则不难得到在负载端处的电压反射波 $\dot{U}^-$ 和电压入射波 $\dot{U}^+$ 的比值为

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} \quad (7-20)$$

Γ_L 称为传输线终端处的电压反射系数。

式(7-20)所表达的反射系数,同样适用于图 7-2(b)所示的两对均匀传输线的连接处。设第 1 对传输线的特性阻抗为 Z_{01} ,第 2 对传输线的特性阻抗为 Z_{02} ,

且长度为无限长, 这样有

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (7-21)$$

Γ_L 称为两对传输线连接处的反射系数。

2. 透射系数

在图 7-2(b) 所示的两对传输线的连接处, 电压透射波 $\dot{U}'$ 与电压入射波 $\dot{U}^+$ 的比值为

$$\tau = \frac{\dot{U}'}{\dot{U}^+} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (7-22)$$

τ 称为透射系数。

7.1.4 无损耗均匀传输线的工作状态

传输线的工作状态是指电压波和电流波沿线的分布状态。它完全取决于传输线终端所接的负载。接入不同负载阻抗(反射系数不同), 传输线上将出现行波、驻波和行驻波 3 种不同的工作状态。

1. 行波状态

行波状态是指传输线上无反射波出现, 只有入射波的工作状态。这时反射系数 $\Gamma_L = 0$, 这种工作状态也称为匹配状态。

在行波状态下, 沿传输线上的电压和电流分布分别为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} \quad (7-23)$$

和

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} e^{-j\beta z} \quad (7-24)$$

沿传输线传输的平均功率为

$$P = \frac{(\dot{U}^+)^2}{Z_0} \quad (7-25)$$

这是入射波携带的功率, 它全部为负载所吸收。

2. 驻波状态

驻波状态是指传输线上出现全反射现象, 反射波与入射波相叠加, 在传输线上形成了驻波。当 $Z_L = 0$, 或 $Z_L = \infty$, 或 $Z_L = \pm jX_L$ 时, $|\Gamma_L| = 1$, 即当传输线终端短路或开路或接纯电抗性负载时, 都将产生全反射。这里, 将仅以 $Z_L = 0$ 的终端短路传输线为例, 说明传输线工作于驻波状态时的特性。

当终端短路时, $\Gamma_L = -1$ 。这时沿传输线上电压、电流波的瞬时表达式为

$$u(z, t) = 2\sqrt{2}U^+ \sin\beta z \cos(\omega t - 90^\circ) \quad (7-26)$$

和

$$i(z, t) = \frac{2\sqrt{2}U^+}{Z_0} \cos\beta z \cos\omega t \quad (7-27)$$

可以看出,沿线电压、电流分布有以下特点:

(1) 传输上电压、电流的振幅都是位置 z 的函数,且出现最大值(波腹)和零值(波节)。

在 $z = -\frac{n\lambda}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 处为电压的波节点或电流的波腹点;在 $z = -\frac{(2n+1)\lambda}{4}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 处为电压的波腹点或电流的波节点。电压波和电流波在空间上相差 $\lambda/4$ 。

(2) 电压波和电流波都是振幅沿 z 呈正弦变化的振动,表现为两相邻波节点之间的电压(或电流)随时间作同相振动,而波节点两侧电压(或电流)作反相振动。

(3) 传输线上各点的电压和电流在时间上有 90° 的相位差,故传输线上不发生能量传输的过程,这说明入射波所携带的能量全部被反射回去。因此,沿线在电压与电流波节点之间 $\lambda/4$ 空间范围内,电能与磁能不断互相交换。

对于终端开路或接纯电抗负载的情况,传输线上的驻波特性与终端短路时是相同的,区别只是波腹点和波节点在线上的位置不同。

3. 行驻波状态

当传输线终端所接的负载阻抗 Z_L 不等于特性阻抗 Z_0 时,负载端的反射系数 $0 < |\Gamma_L| < 1$,表示负载端发生反射但非全反射。线上一部分入射波和反射波合成而形成驻波,其余部分仍为行波。传输线的这种工作状态称为行驻波状态。

在行驻波状态下,电压、电流有效值的沿线分布在最大值 $U_{\max}$ 和最小值 $U_{\min}$ 之间波动。定义沿线的电压最大值 $U_{\max}$ 和最小值 $U_{\min}$ 之比为驻波比 S ,即

$$S = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{U^+ + U^-}{U^+ - U^-} \quad (7-28)$$

驻波比 S 也可用反射系数 Γ_L 表示成

$$S = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \quad (7-29)$$

在传输线上入射波电压和反射波电压相位相同的点处。它们直接相加,出现电压最大值;而相位相反的点处出现电压最小值。可以得到,负载端与出现第 1 个电压最小值处的距离为

$$|z|_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} \quad (7-30)$$

根据以上分析,可从实验数据计算出传输线中电磁波的波长 λ ,信号源的频率 f 及负载阻抗 Z_L 等。由相邻两个最小值读数之间的距离 $|\Delta z|$ 可得出波长 $\lambda = 2|\Delta z|$;又可以从 $\lambda f = v$ 算出频率 $f = v/\lambda$ 。根据电压表的最大读数和最小读数,

计算出驻波比 $S = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}$,由式(7-29)可算出反射系数的绝对值

$$|\Gamma_L| = \frac{S-1}{S+1} \quad (7-31)$$

再根据测量值 $|z|_{\min}$ 按式(7-30)计算出 Γ_L 的辐角 φ_L 。最后,由

$$Z_L = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} Z_0 \quad (7-32)$$

得出负载阻抗 Z_L 。式中的特性阻抗 Z_0 既可事先计算也可进行测量。

7.1.5 无损耗均匀传输线的入端阻抗

传输线的入端阻抗定义为:输入端的电压相量和电流相量的比值,记作 Z_{in} 。设传输线的长度为 l ,可以求得其从始端向负载端看进去的入端阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{2\pi l}{\lambda}} \quad (7-33)$$

可见,入端阻抗 Z_{in} 除了和传输线的特性阻抗 Z_0 及工作频率 f 有关外,还和传输线的长度 l 及负载阻抗 Z_L 有关。 Z_{in} 随传输线长度 l 作周期变化,每增长 $1/2$ 波长, Z_{in} 重复一次,即 $Z_{in}(l + \frac{n\lambda}{2}) = Z_{in}(l)$ 。

终端短路时,传输线的入端阻抗为

$$Z_{in} = jZ_0 \tan \frac{2\pi l}{\lambda} = jX_i \quad (7-34)$$

而当终端开路时,传输线的入端阻抗为

$$Z_{in} = -jZ_0 \cot \frac{2\pi l}{\lambda} = jX_i \quad (7-35)$$

上述两式表明,一段终端短路或开路的无损耗均匀传输线的入端阻抗 Z_{in} 具有纯电抗的性质。而电抗的性质和大小,随线的长度 l 变化。

当终端接纯电抗性负载时,传输线的入端阻抗 Z_{in} 也呈电抗的性质。

对于终端接匹配负载 $Z_L = Z_0$ 的情况,无损耗均匀传输线的入端阻抗为

$$Z_{in} = Z_0$$

上式表明,当负载阻抗 Z_L 和特性阻抗 Z_0 相等时,沿传输线各处的入端阻抗 Z_{in} 和

特性阻抗 Z_0 相等。

7.1.6 无损耗均匀传输线的阻抗匹配

当负载阻抗与特性阻抗相等时,即 $Z_L = Z_0$,称为传输线工作在匹配状态。使传输线工作在匹配状态的方法主要有以下两种。

1. $\lambda/4$ 阻抗变换器

将 $1/4$ 波长的无损耗均匀传输线串联在主传输线(设它的特性阻抗为 Z_{01})和负载 R 之间(见图 7-3),使负载 R 和主传输线的特性阻抗 Z_{01} 相匹配。可以得到, $1/4$ 波长线的特性阻抗 Z_0 应为

$$Z_0 = \sqrt{R_0 Z_{01}} \quad (7-36)$$

上式中的 Z_0 和 Z_{01} 都是实数,因此只有当负载阻抗为纯电阻负载时,才能使用 $\lambda/4$ 阻抗变换器,以达到负载匹配的目的。

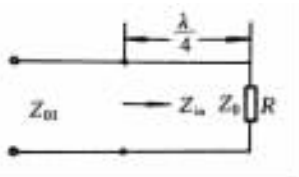


图 7-3 $1/4$ 波长变换器

2. 单短截线变换器

若要负载阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ 和特性阻抗为 Z_0 的传输线相匹配,可利用在主传输线上并接一段特性阻抗亦为 Z_0 的单短截线来实现,如图 7-4 所示,称为单短截线阻抗匹配法。这种短接线称为单短截线变换器。

对于单短截线变换器,通过调节 l_1 和 l_2 ,使下式成立

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_{i1}} + \frac{1}{Z_{i2}} \quad (7-37)$$

才能使负载阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ 和传输线的特性阻抗 Z_0 相匹配。

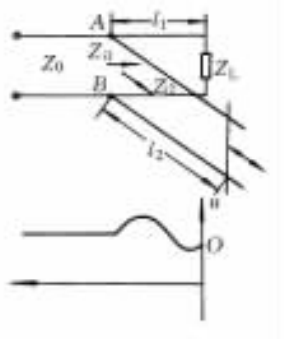


图 7-4 单短截线变换器

7.1.7 有损耗均匀传输线

实际的传输线是有损耗的。损耗主要是传输线导体的损耗及导体之间介质的损耗。即导体本身有电阻,导体之间的介质有漏电导,这个电阻和电导如均匀地分布在整个传输线的长度上,称这样的传输线为有损耗均匀传输线。

1. 有损耗均匀传输线的方程及其解

有损耗均匀传输线的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial z} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 I = 0 \quad (7-38)$$

和

$$\frac{\partial i}{\partial z} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + G_0 U = 0 \quad (7-39)$$

式中: R_0 是传输线每单位长度导体的电阻, G_0 是传输线每单位长度导体之间介质的漏电导。

若电压和电流随时间作正弦变化, 不难导出它们分别满足如下复数形式的微分方程

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dz^2} = k^2 \dot{U} \quad (7-40)$$

和

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dz^2} = k^2 \dot{I} \quad (7-41)$$

式中

$$k = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta \quad (7-42)$$

称为传播常数。 $\dot{U}$ 和 $\dot{I}$ 的通解形式为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-kz} + \dot{U}^- e^{kz} \quad (7-43)$$

和

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} e^{-kz} + \frac{\dot{U}^-}{Z_0} e^{kz} \quad (7-44)$$

式中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad (7-45)$$

称为传输线的特性阻抗。

设 $\dot{U}^+ = U^+ e^{j\varphi_+}$ 和 $\dot{U}^- = U^- e^{j\varphi_-}$, 则电压的瞬时表达式为

$$u(z, t) = \sqrt{2} U^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_+) + \sqrt{2} U^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_-) \quad (7-46)$$

可见电压沿线的分布与无损耗线上的完全相似, 但它的振幅随着波的前进按指数规律衰减。 α 称为衰减常数, β 称为相位常数。

2. 不同边界条件下正弦稳态解的形式

若已知有损耗均匀传输线始端的电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$, 且取终端为坐标原点, 则可确定出式(7-43)和式(7-44)中的积分常数 $\dot{U}^+$ 和 $\dot{U}^-$, 最后得电压、电流的沿线分布分别为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_1 \cosh k(l+z) - \dot{I}_1 Z_0 \sinh k(l+z) \quad (7-47)$$

和

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_1 \cosh k(l+z) - \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \sinh k(l+z) \quad (7-48)$$

若已知有损耗均匀传输线终端的电压 $\dot{U}_2$ 和 $\dot{I}_2$, 仍取终端为坐标原点, 可得电压、电流的沿线分布分别为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_2 \cosh kz - \dot{I}_2 Z_0 \sinh kz \quad (7-49)$$

和

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_2 \cosh kz - \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sinh kz \quad (7-50)$$

3. 有损耗均匀传输线的入端阻抗

有损耗均匀传输线的入端阻抗为

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh kl}{Z_0 + Z_L \tanh kl} \quad (7-51)$$

4. 无畸变线

若有损耗均匀传输线的原参数 L_0 、 C_0 、 R_0 和 G_0 间满足如下关系式

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0} \quad (7-52)$$

则称有损耗均匀传输线为无畸变线。式(7-52)称为无畸变条件。

在无畸变条件下, 有损耗均匀传输线的副参数分别为

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} \quad (7-53)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \quad (7-54)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (7-55)$$

7.2 重点与难点

无损耗均匀传输线方程是分析传输线中导行电磁波问题的出发点和基础。因此, 无损耗均匀传输线的正弦稳态分析、波的反射和透射、不同负载时电压、电流沿线分布的规律和入端阻抗都是这一章的重点, 而全反射、驻波和行驻波是这一章的难点。

7.2.1 无损耗均匀传输线的正弦稳态解和传播特性

若已知传输线终端的电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$, 以终端作为坐标原点, 则可得沿线电

压和电流的正弦稳态解为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_2 \cos \beta z - j Z_0 \dot{I}_2 \sin \beta z \quad (7-56)$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_2 \cos \beta z - j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta z \quad (7-57)$$

若已知传输线终端的电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$, 以终端作为坐标原点, 则可得沿线电压和电流的正弦稳态解为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_1 \cos \beta(l+z) - j Z_0 \dot{I}_1 \sin \beta(l+z) \quad (7-58)$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_1 \cos \beta(l+z) - j \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \sin \beta(l+z) \quad (7-59)$$

上面的两组正弦稳态解表示式都是已知终端电压和电流, 或始端电压和电流, 计算距传输线终端 z 处的电压和电流的一般公式。它们是整个传输线分析的基础, 应该牢记。

正弦稳态解说明: ①传输线上的电压、电流不仅随时间作周期性变化, 也随坐标点 z 作周期性变化; ②沿线电压和电流的分布不仅受传输线本身原参数 L_0 和 C_0 的影响, 而且受始端和终端边界条件的影响, 当负载阻抗 Z_L 取不同的值时, 就要改变传输线的传播特性, 这是由于终端电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$ 与负载阻抗 Z_L 间受关系式 $\dot{U}_2 = Z_L \dot{I}_2$ 的约束。

例 7-1 一段长度为 $\lambda/2$ 的无损耗均匀传输线, 已知终端电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$, 求始端电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 。

解 利用正弦稳态解式(7-56)和式(7-57), 有

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos\left(-\frac{\beta\lambda}{2}\right) - j Z_0 \dot{I}_2 \sin\left(-\frac{\beta\lambda}{2}\right) = -\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos\left(-\frac{\beta\lambda}{2}\right) - j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin\left(-\frac{\beta\lambda}{2}\right) = -\dot{I}_2$$

这表明传输线的始端电压和电流与终端的电压和电流分别大小相等, 但相位相反。对于无损耗均匀传输线, 每隔 $\lambda/2$ 空间距离, 线上的电压和电流的大小都重复出现一次。但相位相反。 $\lambda/2$ 线很像一个“反相器”。

例 7-2 无损耗均匀传输线在正弦电源作用下工作, 线长 $l=100\text{ m}$, 特性阻抗 $Z_0=300\ \Omega$, 波长 $\lambda=600\text{ m}$, 终端开路, 始端电压有效值 $U_1=100\text{ V}$ 。求线路中点的(距始端 50 m 处)电压有效值及电流有效值。

解 由于终端开路, 故终端电流 $\dot{I}_2=0$ 。令 $\dot{U}_1=100\text{ V} \angle 0^\circ$, 利用式(7-56)得

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos(-\beta l)$$

这里 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。则

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cos \beta l} = \frac{\dot{U}_1}{\cos \frac{2\pi}{\lambda} l} = \frac{100}{\cos 60^\circ} = 200\text{ V} \angle 0^\circ$$

把 $\dot{I}_2=0, \dot{U}_2=200 \text{ V} \angle 0^\circ$ 和 $z=-50 \text{ m}$ 代入式(7-56)和式(7-57), 则线路中点电压和电流分别为

$$\dot{U}(-50) = \dot{U}_2 \cos\left(\frac{-2\pi \times 50}{\lambda}\right) = 100\sqrt{3} = 173.21 \text{ V}$$

$$\dot{I}(-50) = -j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin\left(\frac{-2\pi \times 50}{\lambda}\right) = j \frac{200}{300} \sin \frac{\pi}{6} = j \frac{1}{3} \text{ A}$$

所以线路中点电压有效值和电流有效值分别是

$$U(-50) = 173.21 \text{ V}$$

$$I(-50) = 0.333 \text{ A}$$

例 7-3 架空无损耗双线传输线为 75 MHz 的电源馈电, 若终端电压为 100 V。试分别求出: (1) 终端匹配; (2) 终端开路这两种情况下距终端为 1 m, 2 m, 4 m 处的电压; (3) 若测得此传输线的特性阻抗为 300 Ω , 试问其单位长度的电感和电容各是多少?

解 $f=75 \times 10^6 \text{ Hz}, v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \lambda = v/f = \frac{3 \times 10^8}{75 \times 10^6} = 4 \text{ m}$

所以 $z = -1 \text{ m} = \frac{-1}{4}\lambda, z = -2 \text{ m} = \frac{-2}{4}\lambda, z = -4 \text{ m} = -\lambda$ 。

(1) 终端匹配时, 传输线工作在行波状态, 在所有各 z 处都有 $U=100 \text{ V}$ 。

(2) 终端开路时, 传输线工作在驻波状态。

$z = \frac{-\lambda}{4}$ 处为驻波波节, $U=0$;

$z = \frac{-\lambda}{2}$ 处为驻波波腹, $\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta z = \dot{U}_2 \cos \pi = -\dot{U}_2$, 因此 $U=100 \text{ V}$;

$z = -\lambda$ 处为驻波波腹, $\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta z = \dot{U}_2 \cos 2\pi = \dot{U}_2$, 因此 $U=100 \text{ V}$ 。

(3) 无损耗均匀传输线的特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad L_0 = C_0 Z_0^2 \quad (1)$$

$$\text{又} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad L_0 = \frac{1}{C_0 v^2} \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$C_0 = \frac{1}{Z_0 v} = \frac{1}{300 \times 3 \times 10^8} = \frac{1}{9} \times 10^{-10} \text{ F/m}$$

$$L_0 = C_0 Z_0^2 = \frac{1}{9} \times 10^{-10} \times 300^2 = 10^{-6} \text{ H/m}$$

7.2.2 无损耗均匀传输线中波的全反射·驻波

无损耗均匀传输线终端接有纯电抗负载、或开路、或短路时,都能发生全反射从而形成驻波。

当终端短路时,终端为电流的波腹点、电压的波节点,而从终端计算起,每隔 $\lambda/4$ 处,电流和电压的波节点和波腹点相继交替出现。

当终端开路时,终端为电流的波节点、电压的波腹点,而从终端计算起,每隔 $\lambda/4$ 处,电流和电压的波腹点和波节点也相继交替出现。

如果终端接有纯电容或纯电感负载,则从能量的角度分析,很容易得知沿线电压、电流也按驻波分布,但这时负载端既不是电压的波节点也不是电流的波节点。

驻波是由终端的全反射波和入射波合成而形成的。从能量的角度来看,由于终端短路、开路或接纯电抗负载时,终端不吸收任何能量,因而以入射波形式传播来的能量在终端全部以反射波的形式向始端回送,它与入射波合成形成了电压和电流沿线的驻波分布。但由于能量不能通过波节点传递,所以驻波的存在说明能量不会沿着传输线从电源继续不断地输送给负载,而储存在电压、电流波节点间的电、磁能量随着时间的推移不断地相互转换。

例 7-4 一无损耗均匀传输线分别接有不同负载时,在线上都要产生驻波,设第 1 个 $U_{\min}$ (即波节) 分别位于:

- (1) 负载端;
- (2) 离负载 $\lambda/4$ 处;
- (3) 负载和 $\lambda/4$ 距离之间;
- (4) $\lambda/4$ 和 $\lambda/2$ 之间。

试说明不同状态下的各负载具有什么特点(如感抗或容抗或纯电阻等)。

解 由于只有当终端为无损耗负载时,才会发生全反射,在传输线上形成驻波。因此,终端只可能是短路、开路或纯电抗负载。

- (1) 终端为短路。
- (2) 终端为开路。

(3) 当 $U_{\min}$ 位于负载和 $\lambda/4$ 距离之间时,可以想象, $U_{\max}$ 位于终端以外 $z=l' < \lambda/4$ 处,即原电路等效于图 7-5(a) 所示的情况。由图中的等效性可知, $Z_L = -jZ_0 \cot \beta l'$, 所以终端为纯电容负载。

(4) 当 $U_{\min}$ 位于 $\lambda/4$ 和 $\lambda/2$ 之间时,可以想象位于终端以外 $z=l' < \frac{\lambda}{4}$ 处为一个 $U_{\min}$, 即原电路等效于图 7-5(b) 所示的情况。由于等效性, $Z_L = jZ_0 \tan \beta l'$, 即

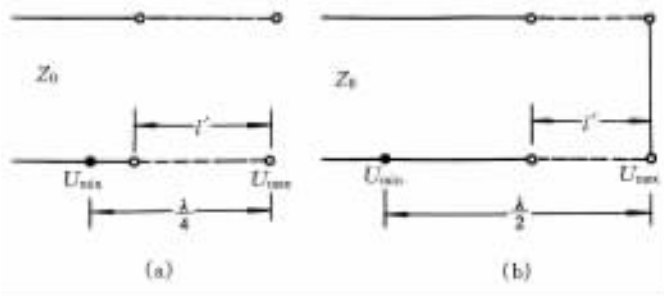


图 7-5 终端接有电抗负载传输线的等效

终端为纯电感负载。

7.2.3 无损耗均匀传输线的入端阻抗

入端阻抗 Z_{in} 在传输线的计算中十分有用。从传输线的始端来看,一段传输线可用它在始端的入端阻抗等值替代。例如,如果要分析电源分配给传输线始端的电压、电流或功率等问题时,可用传输线始端的入端阻抗 Z_{in} 等值替代该传输线,如图 7-6 所示。图中 E 表示电源的电压,而 Z_g 表示电源的内阻抗。

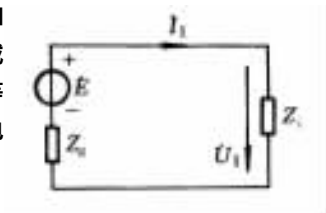


图 7-6 传输线的电路等效

传输线始端的电压、电流可分别表示成

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_g + Z_{in}} Z_{in} \quad \text{和} \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_g + Z_{in}} \quad (7-60)$$

传输线的平均输入功率为

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi \quad (7-61)$$

式中: φ 为 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{I}_1$ 之间的相位差,即为 Z_{in} 的阻抗角。

例 7-5 一无损耗均匀传输线的始端接有电压源 $U_0 \sqrt{2} \cos \omega t$, 内电阻为 R_i , 终端接有纯电抗负载 jX 。已知线长为 l , 特性阻抗 $Z_0 = 377 \Omega$ 。试:

- (1) 决定沿线电压和电流的分布;
- (2) 若无损耗传输线的始端接有电流源 $\sqrt{2} I_2 \cos \omega t$, 内电导为 g_i , 重新回答 (1)。

解 (1) 设沿线电压、电流的分布为

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}) \\ \dot{I}(z) &= \frac{\dot{U}^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{j\beta z}) \end{aligned}$$

其中

$$\Gamma_L = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = e^{-j2\varphi_1}$$

所以,得

$$\dot{U}(z) = 2\dot{U}^+ e^{-j\varphi_1} \cos(\beta z - \varphi_1)$$

$$\dot{I}(z) = -j \frac{2\dot{U}^+}{Z_0} e^{-j\varphi_1} \sin(\beta z - \varphi_1)$$

而传输线的入端阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}(-l)}{\dot{I}(-l)} = -jZ_0 \cot(\beta l + \varphi_1)$$

又因为

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + R_i} U_0 = \frac{-jZ_0 \cot(\beta l + \varphi_1)}{-jZ_0 \cot(\beta l + \varphi_1) + R_i} U_0$$

和

$$\dot{U}_1 = \dot{U}(-l) = 2\dot{U}^+ e^{-j\varphi_1} \cos(\beta l + \varphi_1)$$

所以,得

$$2\dot{U}^+ e^{-j\varphi_1} = \frac{Z_0 U_0}{Z_0 \cos(\beta l + \varphi_1) + jR_i \sin(\beta l + \varphi_1)}$$

最后得沿线电压、电流的分布为

$$\dot{U}(z) = \frac{Z_0 U_0 \cos(\beta z - \varphi_1)}{Z_0 \cos(\beta l + \varphi_1) + jR_i \sin(\beta l + \varphi_1)}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{-jU_0 \sin(\beta z - \varphi_1)}{Z_0 \cos(\beta l + \varphi_1) + jR_i \sin(\beta l + \varphi_1)}$$

(2) 由于电流源与内导并联可以等效变换为电压源与内阻串联,其中

$$U_0 = \frac{I_0}{g_i}, \quad R_i = \frac{1}{g_i}$$

代入(1)所得电压、电流表达式中的 U_0 和 R_i , 即可得最终的结果。

终端短路或开路的无损耗均匀传输线,始端的入端阻抗和集中参数电路中的电感或电容元件,其基本物理过程的特性相同,因此它们可当作电路元件或电路的基本环节使用,这在微波领域中已得到了广泛地应用。例如,可用短于 $\lambda/4$ 的终端短路线实现超高频的电感元件,用等于 $\lambda/4$ 的短路线作为理想的并联谐振电路,可用短于 $\lambda/4$ 的终端开路线实现超高频的电容元件,用等于 $\lambda/4$ 的开路线作为理想的串联谐振电路等。

例 7-6 在工作波长为 λ 的高频电路中,为了得到 $300\ \Omega$ 的感抗,利用特性阻抗为 $75\ \Omega$ 的终端短路线来实现,问所需的传输线的长度为多少? 又若想获得 $300\ \Omega$ 的容抗,则该传输线又应取多长?

解 无损耗均匀传输线短路时的入端阻抗公式为

$$Z_{\text{in}} = jZ_0 \tan \frac{2\pi l}{\lambda}$$

要求 Z_{in} 为感性, 即 $Z_{\text{in}} = jX = j300$

$$j300 = j75 \tan \frac{2\pi l}{\lambda}, \quad \tan \frac{2\pi l}{\lambda} = 4$$

$$\tan \frac{2\pi}{\lambda} \left(l + \frac{n\lambda}{2} \right) = 4 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

电抗元件应取最短的线, 取 $n=0$, 即

$$\tan \frac{2\pi l}{\lambda} = 4, \quad \frac{2\pi l}{\lambda} = 0.422\pi$$

所以 $l = 0.211\lambda$

如果 Z_{in} 为容性, 即 $Z_{\text{in}} = -j300$

$$-j300 = j75 \tan \frac{2\pi l}{\lambda}$$

$$\tan \frac{2\pi l}{\lambda} = -4, \quad \frac{2\pi l}{\lambda} = \pi - 0.422\pi$$

所以 $l = 0.289\lambda$

沿传输线上入端阻抗的两个特殊值, 分别记为 $Z_{\text{in}, \text{max}}$ 和 $Z_{\text{in}, \text{min}}$, 在计算中也十分重要。根据分析可知

$$U_{\text{max}} = U^+ (1 + |\Gamma_L|), \quad U_{\text{min}} = U^+ (1 - |\Gamma_L|)$$

和

$$I_{\text{max}} = \frac{U^+}{Z_0} (1 + |\Gamma_L|), \quad I_{\text{min}} = \frac{U^+}{Z_0} (1 - |\Gamma_L|)$$

U_{max} 和 I_{max} 及 U_{min} 和 I_{min} 分别出现在传输线的同一位置, 而且该处的电压和电流同相。因此, 有

$$Z_{\text{in}, \text{max}} = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{min}}} = \frac{U^+ (1 + |\Gamma_L|)}{\frac{U^+}{Z_0} (1 - |\Gamma_L|)} = Z_0 S \quad (7-62)$$

和

$$Z_{\text{in}, \text{min}} = \frac{U_{\text{min}}}{I_{\text{max}}} = \frac{U^+ (1 - |\Gamma_L|)}{\frac{U^+}{Z_0} (1 + |\Gamma_L|)} = \frac{Z_0}{S} \quad (7-63)$$

上面两式说明, 传输线上电压最大值 U_{max} 处和电压最小值 U_{min} 处, 入端阻抗总为实数, 可用一纯电阻等值替代。由此可知, 当终端接纯电阻负载 R_L 时, 终端将出现电压的最大值或最小值。出现最大值时, 有

$$R_L = Z_0 S, \quad \text{且 } R_L > Z_0 \quad (7-64)$$

出现最小值时, 有

$$R_L = \frac{Z_0}{S}, \quad \text{且 } R_L < Z_0 \quad (7-65)$$

例 7-7 有一无损耗均匀传输线, 长度为 75 m, 媒质的 $\epsilon_r = 1$ 和 $\mu_r = 4$, 传输线的特性阻抗 $Z_0 = 300 \Omega$, 始端电压 $u = 100 \sin(6\pi \times 10^6 t) \text{ V}$, 今终端接上电阻负载后, 测得沿线的驻波系数 $S = 1.8$, 且终端电压为最大值。试求:

- (1) 该传输线上电压波的相速 v 和波长 λ ;
- (2) 负载电阻 R_L 的值及它吸收的功率 P ;
- (3) 始端电流的有效值。

解 (1) 电压波的相速 v 和波长 λ 为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{4}} = 1.5 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1.5 \times 10^8}{\frac{6\pi \times 10^6}{2\pi}} = 50 \quad \text{m}$$

(2) 由题意知, 终端电压为最大值, 所以

$$R_L = Z_0 S = 300 \times 1.8 = 540 \quad \Omega$$

又因长度 $l = 75 \text{ m}$ 为 $\frac{\lambda}{2} = 25 \text{ m}$ 的整数倍, 所以传输线始端的入端阻抗 $Z_{in} = R_L = 540 \Omega$, 输入传输线的平均功率

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi = U_1^2 \cos\varphi / R_L = \frac{(100/\sqrt{2})^2 \cos 0^\circ}{540} = 9.26 \quad \text{W}$$

由于传输线没有损耗, 这些功率全部为负载电阻 R_L 所吸收。

(3) 由于 $Z_{in} = R_L = 540 \Omega$, 所以始端电流的有效值

$$I_1 = \frac{100/\sqrt{2}}{540} = 0.131 \quad \text{A}$$

7.3 典型题解析

7-1 双导体架空线, 可看成是无损耗的均匀传输线。

已知特性阻抗 $Z_0 = 500 \Omega$, 线长 $l = 7.5 \text{ m}$, 现始端施以正弦电压, 其有效值 $U_1 = 100 \text{ V}$, 频率 $f = 15 \text{ MHz}$, 终端接以容抗为 $X = 500 \Omega$ 的电容器。求入端阻抗和始端电流有效值。

解

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + jZ_0 \tan\beta l}$$

套 Z_{in} 的公式, 并利用 Z_{in} 的等值性。

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \times 15 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 0.1\pi \quad \text{rad/m}$$

所以

$$\begin{aligned} Z_{\text{in}} &= 500 \times \frac{-j500 + j500 \tan 0.75\pi}{500 + j(-j500) \tan 0.75\pi} \\ &= 500 \times \frac{-j500 - j500}{500 - 500} \\ &= \infty \\ I_1 &= \frac{U_1}{|Z_{\text{in}}|} = 0 \end{aligned}$$

7-2 有一长为 50 km, 特性阻抗为 377Ω 的无损耗均匀传输线, 终端接有电阻为 200Ω 的负载。已知始端电源电压为 300 V, 电源频率为 300 MHz。求负载上的电压及它吸收的功率。

解 因为是无损耗均匀传输线, 故

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \cos \beta l - j \dot{I}_1 Z_0 \sin \beta l$$

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

而
$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \times 300 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 2\pi \quad \text{rad/m}$$

所以

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L}{Z_0} = 200 \quad \Omega$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 = 300 \quad \text{V} \angle 0^\circ$$

$$P = \frac{U_2^2}{R_L} = \frac{(300)^2}{200} = 450 \quad \text{W}$$

沿线电压、电流分布与始端电压、电流的关系。还有 Z_{in} 的等值性。

7-3 如图 7-7 所示, 已知 $Z_{01} = 50 \Omega$, $Z_{02} = 50 \Omega$, $Z_{03} = 75 \Omega$, 设 P_i 为交界处的入射功率。求:

- (1) 传输线 1 中的反射功率;
- (2) 传输线 2 中的入射功率;
- (3) 传输线 3 中的入射功率。

解 (1) 交界处的反射系数为

$$|\Gamma_L| = \left| \frac{Z_{23} - Z_{01}}{Z_{23} + Z_{01}} \right|$$

本题主要是利用反射系数和透射系数, 入射波、反射波和透射波携带功率的表达式。

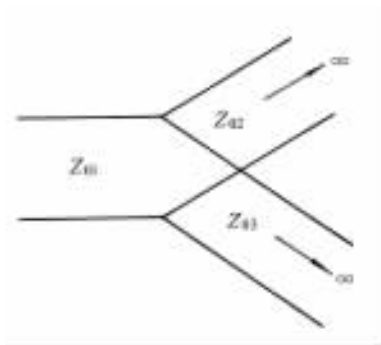


图 7-7 传输线的分叉

由于

$$Z_{23} = \frac{Z_{02} \times Z_{03}}{Z_{02} + Z_{03}} = \frac{75 \times 50}{75 + 50} = 30 \quad \Omega$$

得

$$|\Gamma_L| = \left| \frac{30 - 50}{30 + 50} \right| = 0.25$$

交界处的入射功率

$$P_i = \frac{(U^+)^2}{Z_{01}}$$

传输线 1 中的反射功率

$$P_r = \frac{(U^-)^2}{Z_{01}} = \frac{(|\Gamma_L| U^+)^2}{Z_{01}} = 0.0625 P_i$$

(2) 传输线 2 中的入射功率

$$P_2 = \frac{(\tau U^+)^2}{Z_{02}} = \frac{(0.75 U^+)^2}{50} = 0.5625 P_i$$

(3) 传输线 3 中的入射功率

$$P_3 = \frac{(\tau U^+)^2}{Z_{03}} = \frac{(0.75 U^+)^2}{75} = 0.375 P_i$$

7-4 100 kV 的矩形电压波和 400 A 的电流波, 沿着无损耗的架空传输线传播。线路终端接到高压变压器的输入端, 变压器的波阻抗 $Z_{02} = 2000 \Omega$ 。求

- (1) 在架空线与变压器接头处的反射系数和透射系数;
- (2) 电磁波传到架空线和变压器接头处的电压和电流;

特性阻抗 Z_0 的含意。

(3) 变压器起始部分绕组的耐压至少需要多少伏?

解 (1) 架空线的特性阻抗

$$Z_{01} = \frac{u^+}{i^+} = \frac{100 \times 10^3}{400} = 250 \Omega$$

所以在接头处, 反射系数

$$\Gamma_L = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2000 - 250}{2000 + 250} = 0.7778$$

透射系数

$$\tau = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2 \times 2000}{2000 + 250} = 1.7778$$

(2) 接头处的电压

$$\begin{aligned} u &= u^+ + u^- = 100 \times 10^3 + 0.7778 \times 100 \times 10^3 \\ &= 177.78 \text{ kV} \end{aligned}$$

接头处的电流

$$i = i^+ + i^- = \frac{1}{Z_{01}}(u_1^+ - u_1^-) = 88 \text{ A}$$

(3) 变压器起始部分绕组的耐压至少需 178 kV, 一般应再扩大一倍。

7-5 特性阻抗 $Z_0 = 100 \Omega$, 长度为 $\lambda/8$ 的无损耗传输线, 终端接有 $Z_L = (200 + j300) \Omega$ 的负载, 始端接有电压为 $500 \text{ V} \angle 0^\circ$, 内阻为 $R_i = 100 \Omega$ 的电源。求:

(1) 传输线始端的电压;

(2) 负载吸收的平均功率;

(3) 终端的电压。

解 (1) 首先求始端的入端阻抗

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8}} \\ &= 100 \times \frac{200 + j300 + j100 \tan 45^\circ}{100 + j(200 + j300) \tan 45^\circ} \\ &= (50 - j150) \Omega \end{aligned}$$

传输线始端的电压

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + R_i} \dot{E} = \frac{50 - j150}{100 + 50 - j150} \times 500$$

传输线电源端的等效电路。

$$= 372.68 \text{ V} \angle -26.56^\circ$$

(2) 输入传输线的平均功率

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi = \left| \frac{\dot{U}_1}{Z_{\text{in}}} \right|^2 \text{Re } Z_{\text{in}}$$

$$= \frac{372.68^2}{50^2 + 150^2} \times 50 = 277.78 \text{ W}$$

由于传输线是无损耗的,因此输入传输线的平均功率全部为负载所吸收。即

$$P_L = P = 277.78 \text{ W}$$

(3) 由于传输线任一点的电压

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_1 \cos \beta(l+z) - jZ_0 \dot{I}_1 \sin \beta(l+z)$$

$$= \dot{U}_1 \cos \beta(l+z) - jZ_0 \frac{\dot{U}_1}{Z_{\text{in}}} \sin \beta(l+z)$$

代入上面(1)求得的 $\dot{U}_1$ 和 Z_{in} , 并取 $z=0$, 则得终端的电压

$$\dot{U}_2 = \dot{U}(0)$$

$$= 372.68 \angle -26.56^\circ \times \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} - j \frac{100}{50 - j150} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} \right)$$

$$= 424.92 \text{ V} \angle -33.69^\circ$$

7-6 已知空气中一无损耗均匀传输线的长度为 1.5 m, 特性阻抗 $Z_{01} = 100 \Omega$, 相速 $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, 终端负载阻抗 $Z_L = 10 \Omega$ 。在距终端 0.75 m 处, 接另一特性阻抗 $Z_{02} = 100 \Omega$, 长为 0.75 m 的无损耗均匀传输线(终端短路), 如图 7-8 所示。始端所接正弦电压源的电压 $U_s(t) = 10 \cos 2 \times 10^8 \pi t \text{ V}$ 。求稳态运行下的始端电流有效值。

解 从 ab 处看进去短路线的入端阻抗

$$Z_{\text{in}} = jZ_{02} \tan \beta l$$

其中 $l = 0.75 \text{ m}$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2 \times 10^8 \pi}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/m}$$

所以

$$Z_{\text{in}} = j100 \tan \left(\frac{2\pi}{3} \times 0.75 \right) = j100 \tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

可见短路线对特性阻抗为 Z_{01} 的传输线的工作状态无影

利用入端阻抗 Z_{in} , 解这类题是一种常用的方法。

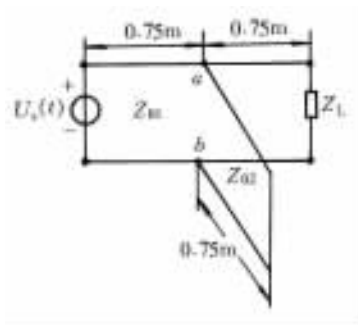


图 7-8 单短截线

响。又始端电压和电流为

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta l + j \dot{I}_2 Z_{01} \sin \beta l$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{01}} \sin \beta l$$

其中 $l = 1.5 \text{ m}$, $\cos \beta l = \cos(\frac{2\pi}{3} \times 1.5) = -1$, $\sin \beta l = 0$ 。所以

$$\dot{U}_1 = -\dot{U}_2, \quad \text{即} \quad \dot{U}_2 = -\dot{U}_1$$

和 $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$

而 $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_L}$, 最后得

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_L}$$

则稳态运行下始端电流的有效值

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_L} = \frac{10/\sqrt{2}}{10} = 0.707 \text{ A}$$

7-7 已知特性阻抗 $Z_0 = 300 \Omega$ 的无损耗均匀传输线上的驻波比 $S = 2.0$, 距负载最近的电压最小点离终端 0.3λ , 试求:

- (1) 终端的反射系数 Γ_L ;
- (2) 负载阻抗 Z_L ;
- (3) 线上入端阻抗为纯电阻的位置及电阻值。

解 (1) 终端的反射系数 $\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L}$ 与驻波比 S 的关系为

这是利用传输线测量负载 Z_L , 其计算步骤比较规则。

$$|\Gamma_L| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

又

$$\varphi_L = \frac{4\pi}{\lambda} |z|_{\min} - \pi$$

$$|z|_{\min} = 0.3\lambda$$

所以

$$\varphi_L = \frac{4\pi}{\lambda} \times 0.3\lambda - \pi = 0.2\pi$$

所以

$$\Gamma_L = \frac{1}{3} e^{j0.2\pi} = 0.27 + j0.196$$

(2) 负载阻抗

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} = 300 \times \frac{1 + 0.27 + j0.196}{1 - 0.27 - j0.196} = (466 +$$

j206) Ω

(3) 线上入端阻抗为纯电阻的位置,应在电压最小值点或最大值点处。因此,距终端

$$l = 0.3\lambda + \frac{(2n-1)\lambda}{2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

处为电压最小值点,有

$$R = Z_{in, \min} = \frac{Z_0}{S} = \frac{300}{2} = 150 \quad \Omega$$

而在距终端

$$l = 0.3\lambda + \frac{(2n-1)\lambda}{4} \quad (n=1, 2, \dots)$$

处为电压最大值点,有

$$R = Z_{in, \max} = Z_0 S = 300 \times 2 = 600 \quad \Omega$$

请想一想,为什么是这样的?

7-8 一特性阻抗 $Z_{01} = 50 \Omega$ 的无损耗均匀传输线,其终端接有特性阻抗为 Z_{02} 的半无限长无损耗均匀传输线,现由一未知频率的正弦电源供电,测得驻波比 $S = 3$,波速 $v = 10^8$ m/s,且相邻的电压最小值分别发生于离连接处 15 cm 和 25 cm 处。求半无限长线的特性阻抗 Z_{02} 和电源频率 f 。

解 (1) 半无限长线的特性阻抗

$$Z_{02} = Z_{01} \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = Z_{01} S$$

而已测得 $S = 3$, 所以

连接处是电压的最大值点,所以 $Z_{02} > Z_{01}$ 。

$$Z_{02} = 3Z_{01} = 150 \quad \Omega$$

(2) 两相邻的电压最小值点处应相距 $\lambda/2$,

$$\text{即} \quad \frac{\lambda}{2} = 25 - 15 = 10 \quad \text{cm}, \quad \lambda = 20 \quad \text{cm}$$

所以, 电源频率

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{10^8}{0.2} = 5 \times 10^8 \quad \text{Hz}$$

7-9 有一特性阻抗 $Z_0 = 50 \Omega$ 的无损耗均匀传输线, 导体间媒质的参数 $\epsilon_r = 2.25, \mu_r = 1$, 终端接有 $R_L = 1 \Omega$ 的电阻负载。当 $f = 100 \text{ MHz}$ 时, 其线长为 $\lambda/4$, 试计算:

- (1) 线的几何长度;
- (2) 负载端的反射系数;
- (3) 驻波比, 并问第 1 个 $U_{\min}$ 出现在何处;
- (4) 传输线的入端阻抗。

$$\text{解} \quad (1) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.25}} = 2 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2 \quad \text{m}$$

所以, 线的几何长度

$$l = \frac{\lambda}{4} = 0.5 \quad \text{m}$$

(2) 负载端的反射系数

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{1 - 50}{1 + 50} = -0.961$$

(3) 驻波比

$$S = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = \frac{1 + 0.961}{1 - 0.961} = 50.28$$

为什么?

当负载为纯电阻时, Γ_L 为实数, $U_L = U^+ (1 + \Gamma_L)$ 。若 $R_L > Z_0$ 时, $\Gamma_L > 0, U_L = U^+ (1 + \Gamma_L) = U_{\max}$; 若 $R_L < Z_0$ 时, $\Gamma_L < 0, U_L = U^+ (1 + \Gamma_L) = U_{\min}$ 。这里 $R_L < Z_0$, 所以终端为 $U_{\min}$ 。 $U_{\min}$ 位于 $z = -\frac{n\lambda}{2}$ 处 ($n = 0, 1, 2, \dots$)。

(4) 传输线的入端阻抗

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = \frac{Z_0^2}{R_L} = \frac{50^2}{1} = 2500 \quad \Omega$$

7-10 (1) 一无损耗同轴传输线向一电偶极子天线馈电, 设同轴线介质的介电常数为 ϵ , 磁导率为 μ_0 , 内、外导体的半径分别为 a 和 b ($b/a=100$)。测出的驻波比 $S=4$, 电压最小值处距天线馈电点的距离为 0.28 m , $f=112 \text{ MHz}$, 求天线的辐射电阻。

(2) 如果用电流表代替电压表, 则在何处量得最大值和最小值, 它们的电流之比是多少?

解 (1) 首先根据同轴传输线的尺寸计算其特性阻抗, 有

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln 100$$

式中的 ϵ_r 可以这样来求得, 因天线的等效参数(辐射电阻)为纯电阻, 又测得电压最小处离天线馈电点的距离为 0.28 m , 所以

$$\lambda = 4 \times 0.28 = 1.12 \quad \text{m}$$

因而

$$v = f\lambda = 112 \times 10^6 \times 1.12 = 1.25 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

在空气中波的传播速度为 $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$, 而 $v/c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}$, 所以

$$\epsilon_r = \left(\frac{v}{c}\right)^{-2} = \left(\frac{1.25 \times 10^8}{3 \times 10^8}\right)^{-2} = 5.76$$

代入 Z_0 的表示式中, 得

$$Z_0 = 115.13 \quad \Omega$$

天线的辐射电阻

$$R_e = Z_L = Z_0 \frac{1 + \left| \frac{\Gamma_L}{\Gamma_L} \right|}{1 - \left| \frac{\Gamma_L}{\Gamma_L} \right|} = SZ_0 = 4 \times 115.3 = 460.5 \quad \Omega$$

(2) 如果用电流表代替电压表, 则电压的最小值处即电流的最大值处, 所以离天线馈电点 0.28 m 处出现电流的最大值, 0.56 m 处出现电流的最小值。且

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = 4$$

7-11 特性阻抗 $Z_{01} = 150 \Omega$ 的无损传输线通过长度为 $\lambda/4$, 特性阻抗为 Z_0 的无损传输线与 250Ω 的电阻负载相接, 决定 Z_0 使负载和特性阻抗为 150Ω 的线相匹配。

解 从 $\lambda/4$ 线的接入处向负载看进去的入端阻抗

$$Z_{\text{in}} = \frac{Z_0^2}{R}$$

为使 $Z_{01} = 150 \Omega$ 的传输线与 250Ω 的负载相匹配, 必须取

$$Z_{01} = Z_{\text{in}}$$

即 $Z_0 = \sqrt{Z_{01}R} = \sqrt{150 \times 250} = 193.6 \Omega$

7-12 若上题中的负载为 $Z_L = 250 + j100 \Omega$ 的阻抗, 能否用 $\lambda/4$ 的传输线使负载和 $Z_{01} = 150 \Omega$ 传输线相匹配? 如果要达到匹配该怎么办?

解 当负载不是纯电阻时, 不能单靠 $\lambda/4$ 的无损传输线实现匹配的目的, 可采用以下两种办法:

(1) 在紧靠负载与传输线之间插入一段特性阻抗为 Z_0 的 $\lambda/4$ 线, 并且还在 ab 两点间并接一电抗负载 jB , 如图 7-9 所示。从 ab 向 $\lambda/4$ 传输线看去的入端阻抗

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

为使达到匹配的目的, 在 ab 结点处应有

$$\frac{1}{Z_{01}} = \frac{1}{Z_{ab}} + \frac{1}{jB}$$

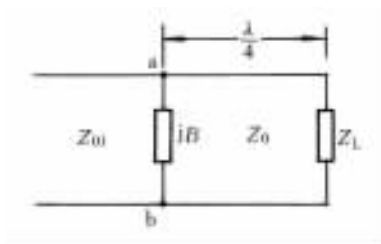


图 7-9 $\lambda/4$ 变换器

$1/4$ 波长阻抗变换器。

jB 集中参数元件和单短截线阻抗变换器起相同的作用。

即
$$\frac{1}{150} = \frac{250 + j100}{Z_0^2} + \frac{1}{jB}$$

令实部、虚部分别相等,得到

$$\frac{1}{150} = \frac{250}{Z_0^2}, \quad Z_0 = \sqrt{250 \times 150} = 193.6 \quad \Omega$$

$$\frac{1}{B} = \frac{100}{Z_0^2}, \quad B = \frac{250 \times 150}{100} = 375 \quad \Omega$$

可用一段长度介于 $0 \sim \lambda/4$ 的无损耗短路线来实现上述的阻抗负载。

(2) 也可以将例 7-12 中的 $\lambda/4$ 线向电源端移动一段距离,使向负载端看去的入端阻抗为一实数,然后再把 $\lambda/4$ 线接入该处,就可达到匹配状态。

7-13 特性阻抗 $Z_0 = 50 \Omega$ 的无损耗均匀传输线接有负载 $R_L = 73 \Omega$ (如图 7-10 所示),要使传输线和负载匹配,求用作单短截线变换器的短接无损线的长度 l 及其和负载端的距离 d 。已知短接线的特性阻抗 $Z_0 = 50 \Omega$ 。

解 设负载离单短截线的距离为 d 。从 A、B 两点向负载及单短截线看,所得的入端阻抗分别为

$$Z_d = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{2\pi d}{\lambda}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{2\pi d}{\lambda}}$$

和

$$Z_l = jZ_0 \tan \frac{2\pi l}{\lambda}$$

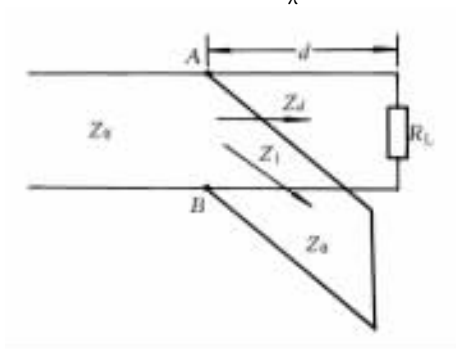


图 7-10 单短截线变换器

应熟悉单短截线阻抗变换器的有关计算要点。

欲使负载和传输线匹配,应有

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_d} = \frac{1}{Z_0}$$

代入 $Z_0 = 50$ 和 $Z_L = R_L = 73$ 。并令 $\tan \frac{2\pi}{\lambda}d = x$, 则从上式得

$$\frac{1}{50} = \frac{50 + j73x}{50(73 + j50x)} - j \frac{1}{50 \tan \frac{2\pi}{\lambda}l}$$

根据实部、虚部分别相等, 将上式分解成两个实数方程

$$5329 + 2500x^2 = 3650 + 3550x^2$$

$$2829x \tan \frac{2\pi}{\lambda}l = 5329 + 2500x^2$$

解得

$$x = \pm 1.208, \quad \text{取 } x = 1.208$$

所以 $d = \arctan 1.208 \times \frac{\lambda}{2\pi} = 0.14\lambda$

而

$$\tan \frac{2\pi}{\lambda}l = \frac{5329 + 2500x^2}{2829x} = 2.63$$

所以 $\frac{2\pi}{\lambda}l = 1.207$

即 $l = \frac{1.207}{2\pi}\lambda = 0.192\lambda$

7-14 已测得一个有损耗的传输线在 100 MHz 时的参数为: $Z_0 = 50 \Omega$, $\alpha = 0.01 \text{ rad/m}$, $\beta = 0.8\pi \text{ rad/m}$, 求该传输线的 R_0 、 L_0 、 G_0 和 C_0 。

$$\text{解} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = 50$$

是一实数, 故上式分子及分母的相角相同,

$$\text{即有} \quad \frac{\omega L_0}{R_0} = \frac{\omega C_0}{G_0}$$

这是一无畸变线。因此, 应该有

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 50 \quad \Omega$$

这一步是关键。

$$\text{由} \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

即

$$0.8\pi = 2\pi \times 10^8 \sqrt{L_0 C_0}$$

由 L_0 和 C_0 的上面两个方程,解得

$$L_0 = 0.2 \mu\text{H/m}, \quad C_0 = 80 \text{ pF/m}$$

又由 $\alpha = R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$, 可得

$$R_0 = \frac{0.01}{8.69} \times 50 = 0.058 \Omega/\text{m}$$

其中 α 是无量纲量, 当 $\alpha = 1 \text{ Np/m}$, 波传播 1 m 后, 单位振幅衰减至 e^{-1} , 因此 $1 \text{ Np/m} = 20 \lg \alpha = 8.69 \text{ dB}$ 。

$$\text{最后 } G_0 = \frac{R_0 C_0}{L_0} = 23.2 \mu\text{S/m}$$

7-15 一高压输电线的长 $l = 300 \text{ km}$, 传输线的原参数为 $R_0 = 0.06 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1.4 \times 10^{-6} \text{ H/m}$, $G_0 = 3.75 \times 10^{-11} \text{ S/m}$, $C_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, 频率 $f = 50 \text{ Hz}$, 终端接纯电阻负载, 终端电压为 220 kV , 电流为 455 A 。求始端的电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 。

解 特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = 396 e^{j3.51^\circ} \Omega$$

传播常数

$$k = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = 112.2 \times 10^{-8} e^{j85.74^\circ}$$

由于终端是纯电阻负载, 所以

$$\dot{U}_2 = 220 \text{ kV}, \quad \dot{I}_2 = 455 \text{ A}$$

可以得到, 始端的电压和电流为

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh kl + Z_0 \dot{I}_2 \sinh kl = 2.2267 \times 10^5 e^{j15.8^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh kl + \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sinh kl = 484.28 e^{j22.6^\circ} \text{ A}$$

7-16 有一根长度为 4 m 的传输线, 测得终端开路和短路时的入端阻抗分别为 $250 \Omega \angle -50^\circ$ 和 $360 \Omega \angle 20^\circ$, 频率为 11.4 MHz , 试求:

- (1) 传输线的 Z_0 , α 和 β ;
- (2) 传输线的 R_0 , L_0 , G_0 和 C_0 。

有损耗线上任意点的电压、电流与终端电压、电流的关系与无损耗线很类似。

利用有损耗线入端阻抗的公式。

解 (1) 对于短路线, $Z_L = 0$, 入端阻抗

$$Z_{\text{ins}} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh kl}{Z_0 + Z_L \tanh kl} = Z_0 \tanh kl$$

对于开路线, $Z_L = \infty$, 入端阻抗

$$Z_{\text{ino}} = Z_0 \frac{1}{\tanh kl}$$

所以, 传输线的特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{Z_{\text{ins}} Z_{\text{ino}}} = \sqrt{250 \angle -50^\circ \times 360 \angle 20^\circ} = 300 \angle -15^\circ \Omega$$

由 $Z_{\text{ins}} = Z_0 \tanh kl = 360 \angle 20^\circ$, 可求得

$$kl = \operatorname{artanh} \frac{360 \angle 20^\circ}{300 \angle -15^\circ} = \operatorname{artanh} 1.2 \angle 35^\circ = 0.558 + j0.95$$

所以

$$k = (0.558 + j0.95)/4 = 0.139 + j0.238$$

即

$$\alpha = 0.139 \text{ Np/m}, \beta = 0.238 \text{ rad/m}$$

(2) 由 $Z_0 k = R_0 + j\omega L_0$, 得

$$R_0 = 58.68 \quad \Omega/\text{m}, L_0 = 0.81 \quad \mu\text{H}/\text{m}$$

又由 $\frac{k}{Z_0} = G_0 + j\omega C_0$, 得

$$G_0 = 0.242 \quad \text{mS}/\text{m}, C_0 = 12.34 \quad \text{pF}/\text{m}$$

7.4 自我检测题

题 7.1 一无损耗传输线的特性阻抗 $Z_0 = 70 \Omega$, 终端接负载阻抗 $Z_L = (100 - j50) \Omega$, 求: (1) 传输线终端的反射系数; (2) 传输线上的电压、电流表示式。

(答案: $\Gamma_L = 0.328 e^{j42.65^\circ}$)

题 7.2 把一电压 $V(t) = 10 \cos 8000\pi t$ V, 内阻抗 $Z_g = (40 + j30) \Omega$ 的电源接到一特性阻抗为 50Ω 的无畸变线传输线上, 此线长为 50 km , 单位长度的电阻为 $0.5 \Omega/\text{m}$, 单位长度的电感为 $1.1 \times 10^{-2} \text{ H}/\text{m}$, 另一端为匹配负载, 求: (1) 线上各点的瞬时电压和电流; (2) 负载端的瞬时电压和电流; (3) 传输至负载的平均功率。

(答案: (1) $u(z, t) = \frac{5\sqrt{10}}{3} e^{-0.01z} \cos(8000\pi t - 5.58z - 18.435) \text{ V}$

$$i(z, t) = \frac{1}{3\sqrt{10}} e^{-0.01z} \cos(8000\pi t - 5.58z - 18.435) \quad \text{A}$$

$$(2) u(50000, t) = \frac{5\sqrt{10}}{3} e^{-500} \cos(8000\pi t - 128.16) \quad \text{V}$$

$$i(50000, t) = \frac{1}{3\sqrt{10}} e^{-500} \cos(8000\pi t - 128.16) \quad \text{A}$$

$$(3) P = \frac{5}{18} e^{-1000} \quad \text{W}$$

题 7.3 一无损耗的 $\lambda/4$ 传输线, 特性阻抗为 Z_0 , 一端被接以感性负载 $Z_L = R_L + jX_L$ 。(1) 证明其入端阻抗相当于一电阻 R_i 和一电容 X_i 的并联;(2) 求出输入端与输出端的电压大小的比值。

$$(\text{答案: } (1) R_i = \frac{Z_0^2}{R_L}, X_i = \frac{Z_0^2}{X_L}; (2) \sqrt{\left| \frac{Z_{in}}{Z_L} \right|}.)$$

题 7.4 一无损耗均匀传输线, 特性阻抗为 Z_0 , 一端接一负载 Z_L 。(1) 以 Z_0 , Z_L 表示出驻波比 S ;(2) 求从最大电压处看向负载的入端阻抗, 以 S 和 Z_0 表示;(3) 求从最小电压处看向负载的入端阻抗, 以 S 和 Z_0 表示。

$$(\text{答案: } (2) Z_0 S; (3) \frac{Z_0}{S})$$

题 7.5 有一段特性阻抗为 $Z_0 = 500 \Omega$ 的无损耗传输线, 当其终端短路时, 测得始端的入端阻抗为 250Ω 的感抗, 求该传输线的长度。如果该传输线的终端为开路, 长度又该为多少。

$$(\text{答案: 短路时: } 0.074\lambda; \text{开路时: } 0.324\lambda)$$

题 7.6 已知传输线在 1 GHz 时的分布参数为: $R_0 = 10.4 \Omega/\text{m}$; $C_0 = 8.35 \times 10^{-12} \text{ F/m}$; $L_0 = 1.33 \times 10^{-6} \text{ H/m}$; $G_0 = 0.8 \times 10^{-6} \text{ S/m}$ 。试求传输线的特性阻抗、衰减常数、相位常数、传输线上的波长及传播速度。

$$(\text{答案: } Z_0 = 399.1 \Omega; \alpha = 0.0132 \text{ Np/m}; \beta = 20.94 \text{ rad/m}; \lambda = 0.3 \text{ m}; v = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$$

题 7.7 设特性阻抗为 100Ω 的无损耗传输线上的驻波比 $S = 3$ 。当负载离第 1 个电压最小值点的距离为 20 cm 时, 相邻两个电压最小值间的距离是 50 cm 。试确定该传输线的反射系数和负载阻抗。

$$(\text{答案: } \Gamma_L = 0.5e^{-j0.2\pi}; Z_L = 213.43e^{j-37.5^\circ} \Omega)$$

题 7.8 无损耗均匀传输线, 其长度 $l < \frac{\lambda}{4}$ 。当终端短路时, 测得其入端阻抗 $Z_{ins} = j500 \Omega$; 当终端开路时, $Z_{ino} = -j500 \Omega$ 。求该线的特性阻抗 Z_0 和线长 l 。

$$(\text{答案: } Z_0 = 500 \Omega; l = \frac{\lambda}{8})$$

题 7.9 一特性阻抗为 $Z_0 = 600 \Omega$ 的无损耗传输线, 终端接有阻抗为 $Z_L = (800 + j450) \Omega$ 的负载, 为使该传输线工作在匹配状态, 在线中接入一最短长度为 d 的短路线和 $\lambda/4$ 阻抗变换器, 如图 7-11 所示。试确定短路线的长度 d 和 $\lambda/4$ 阻抗变换器的特性阻抗 Z_{01} 。设短路线的特性阻抗也为 $Z_0 = 600 \Omega$, 传输线上电磁波的波长 $\lambda = 20 \text{ m}$ 。

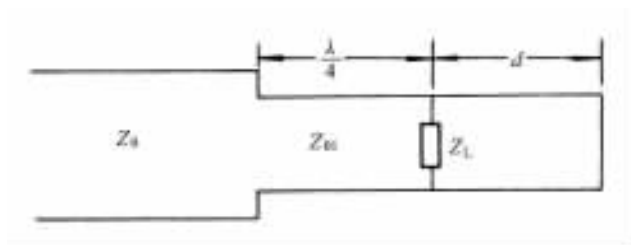


图 7-11 自我检测题 7.9 图

(答案: $d = 5.96 \text{ m}$, $Z_{01} = 795 \Omega$)

题 7.10 设有一同轴电缆, 内、外导体都由理想导体组成, 且半径分别为 a 和 b , 中间为理想介质, 其物理参数 $\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$ 。内、外导体间接有正弦电压 $u(t)$, 其频率为 f 。试写出在匹配状态下电场强度和磁场强度的复数形式和瞬时形式。

(答案: $\dot{E}_r = \frac{\dot{U}}{\rho \ln(b/a)} e_\rho$, $\dot{H}_\tau = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \frac{\dot{U}}{\rho \ln(b/a)} e_\varphi$, $E(\rho, t) = \frac{\sqrt{2}U}{\rho \ln(b/a)} \sin(\omega t - \beta z) e_\rho$, $H(\rho, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \frac{\sqrt{2}U}{\rho \ln(b/a)} \sin(\omega t - \beta z) e_\varphi$, 其中 $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0}$, $\omega = 2\pi f$)

题 7.11 设长度为 $\lambda/4$ 的无损耗均匀传输线联接如图 7-12 所示。若要使电源发出最大功率, 试确定集中参数 B 的值及电源内阻 R_g 。

(答案: $B = 25 \Omega$, $R_g = 25 \Omega$)

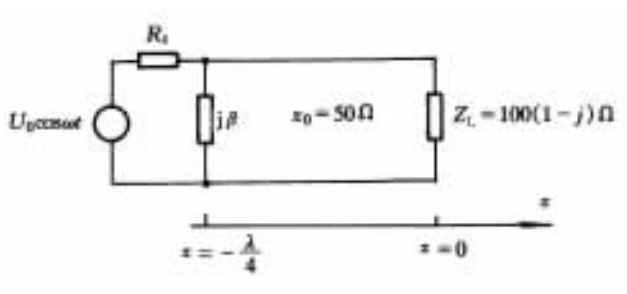


图 7-12 自我检测题 7.11 图

第 8 章 波导与谐振腔

第 6 章中所讨论的平面电磁波是假定在无限空间中传播的。本章将讨论平面电磁波在有界空间中的传播,着重讨论波导管中电磁波的传播特性,然后再介绍谐振腔。

8.1 基本内容和公式

8.1.1 导行电磁波的分类及其一般特性

1. 导行电磁波的分类

由理想导体、理想介质构成的均匀波导中的导行电磁波的电场和磁场,都满足波动方程

$$\nabla^2 \dot{E} + k^2 \dot{E} = 0 \quad \text{和} \quad \nabla^2 \dot{H} + k^2 \dot{H} = 0 \quad (8-1)$$

式中: $k(=\omega \sqrt{\mu\epsilon})$ 是波数。设波沿 z 方向传播,且无反射,那么波导内的电场分量 $\dot{E}$ 和磁场分量 $\dot{H}$ 可分别表示成

$$\dot{E} = E(x, y)e^{-\gamma z} \quad \text{和} \quad \dot{H} = H(x, y)e^{-\gamma z} \quad (8-2)$$

且 $E(x, y)$ 和 $H(x, y)$ 分别满足微分方程

$$\nabla_t^2 E(x, y) + k_c^2 E(x, y) = 0 \quad (8-3)$$

$$\nabla_t^2 H(x, y) + k_c^2 H(x, y) = 0 \quad (8-4)$$

式中

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \quad (8-5)$$

可以将场的横向分量用纵向分量表示如下

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_x &= \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ H_y &= -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

可见,只要求解出纵向场分量 E_z 和 H_z ,即可由公式(8-6)求得全部 4 个横向场分量。这一求解波导中导行电磁波问题的方法,通常称为纵向场法。

纵向场分量 E_z 和 H_z 分别满足方程式(8-3)和(8-4),即

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad \text{和} \quad \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (8-7)$$

根据电场强度 E 和磁场强度 H 沿波前进方向的纵向分量的存在情况,将波导中传播的导行电磁波分为 3 种波型。

(1) 若 $E_z = H_z = 0$,称为 TEM 波。

空心金属波导管中不能传输 TEM 波。传输 TEM 波必须要有两个以上的导体。例如双线传输线、同轴线等。

(2) 若 $E_z \neq 0$,而 $H_z = 0$,称为 TM 波。

(3) 若 $E_z = 0$,而 $H_z \neq 0$,称为 TE 波。

空心金属波导管中只能传输 TM 波和 TE 波。

2. 波导管中导行电磁波传播的一般特性

无论是 TM 波还是 TE 波,其传播特性都由式(8-5)决定。此时, $k_c^2 \neq 0$,将式(8-5)改写成

$$\gamma = \begin{cases} j \sqrt{k^2 - k_c^2} = j\beta & (k > k_c) \\ \sqrt{k_c^2 - k^2} = \alpha & (k < k_c) \end{cases} \quad (8-8)$$

当 $k > k_c$ 时, γ 为纯虚数,波导中的场为传播模式。

当 $k < k_c$ 时, γ 为实数,波导中的场为非传播模式。

当 $k = k_c$ 时, $\gamma = 0$,对应的频率为截止频率 f_c ,且有

$$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{或} \quad f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (8-9)$$

对应的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$$

故只有当 $\lambda < \lambda_c$ (或 $f > f_c$) 时,相应的模式才能传输。

当工作频率 f 大于截止频率 f_c 时,

$$\gamma = j\beta \quad (8-10)$$

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (8-11)$$

β 称为电磁波传输的相位常数。此时,波导波长 λ_g 为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (8-12)$$

在波导内,波传播的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} \quad (8-13)$$

8.1.2 矩形波导

矩形波导中传播的 TE 波的各场分量为

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) A_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{E}_y &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{H}_x &= \frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{H}_y &= \frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) A_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{H}_z &= A_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (8-14)$$

矩形波导中传播的 TM 波的各场分量为

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) A_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{E}_y &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{E}_z &= A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{H}_x &= \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ \dot{H}_y &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) A_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

在式(8-14)和式(8-15)中,有

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (8-16)$$

所以,矩形波导的截止频率为

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (8-17)$$

相应的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (8-18)$$

具有最长截止波长(或最低截止频率)的模式,称为最低模式,也称为主模。其他模式都称为高次模。

TE_{10} 模是矩形波导中的主模。

8.1.3 谐振腔

谐振腔是一种适用于高频的谐振元件。理想导体构成的谐振腔中的电场,可解波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0 \quad (8-19)$$

并由理想导体的边界条件及 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 而求得。

对于尺寸为 $a \times b \times l$ 的矩形谐振腔,其中沿 x 、 y 、 z 方向的电磁波都是驻波。如果选择 z 轴为参考的“传播方向”,也存在相对于 z 轴的 TE 模和 TM 模。它们的谐振频率都是

$$(f_0)_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2} \quad (8-20)$$

对应的谐振波长为

$$(\lambda_0)_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}} \quad (8-21)$$

8.2 重点与难点

导行电磁波的求解方法是本章的重点。应该掌握如何应用场的边界条件、波动方程来求解导行电磁波的场分量。

波导中导行电磁波的传播特性和有关的参数是学习中的难点之一。应重点掌握“截止”的物理意义。对于表征传播特性的参数,例如波导波长 λ_g 和波导波速 v_p ,要理解它们的物理意义,明确它们与波在无界空间的波长 λ 和波速 v 有什么关系。

矩形谐振腔内的电磁振荡模式及其振荡频率或波长的计算公式也是本章的重点。

8.2.1 导行电磁波的求解方法

纵向场法是求解波导中导行电磁波问题的一个基本方法,也是普遍采用的方法。它是先求出纵向场分量 E_z 和 H_z 满足的波动方程的边值问题解,然后根据电磁场基本方程组的两个旋度方程,由 E_z 和 H_z 即可求得场的横向分量。

8.2.2 截止频率和截止波长

在表征波导中导行电磁波传播特性的主要参数中经常出现截止波长 λ_c 、波导波长 λ_g 和工作波长 λ 这 3 个参数,它们之间容易混淆。

首先应该明确,工作波长 λ 是指频率为 f 的平面电磁波在无界空间中的波长,且有 $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{f}$ 。

截止波长 λ_c 是由波导的几何形状大小和波型所决定的,而与波导中的介质无关。它与截止频率 f_c 之间有关系式,即 $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{v}{f_c}$ 。定义 $\gamma = 0 (k = k_c)$ 时,对应的频率为截止频率 f_c 。 f_c 是一个临界频率,这是因为当 $f < f_c$ 时, γ 为纯实数。由式(8-2)可见,场量沿 z 方向很快衰减,为非传播模式;只有当 $f > f_c$ 时, γ 为纯虚数,场量沿 z 方向才能传播。因此,由 $\lambda = \frac{v}{f}$, $\lambda_c = \frac{v}{f_c}$, 可见只有当工作波长 $\lambda < \lambda_c$ 时,波导中才能有传播波。

波导波长 λ_g 是指在波导内,沿 z 方向上相位相差 2π 的两点间的距离,有 $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} > \lambda$ 。这是因为在波导中电磁波的传播是曲折向前的,而在无界空间中电磁波是沿直线向前传播的,所以波导波长 λ_g 大于工作波长 λ 。

可以这样说,工作波长 λ 和截止波长 λ_c 分别对应于工作频率 f 和截止频率 f_c ;波导波长 λ_g 对应于工作频率 f (设波导波长 λ_g 对应于频率 f_g ,在波导中有 $f_g = \frac{v_p}{\lambda_g} = \frac{v}{\lambda} = f$)。

8.3 典型题解析

8-1 试说明为什么矩形波导内不能传播 TEM 波。

解 矩形波导内不存在 TEM 波。这是因为如果内部存在 TEM 波,则在波传播的方向上没有磁场和电场的分量,磁场在波导的横截面内自行闭合。根据全电流定律,闭合回线上的磁场的环路积分应等于与回线交链的轴向传导电流 J 和位移电流 J_d 。在波导管中, J 不存在,那么必有轴向位移电流 $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$,这说明有轴向的电场存在,这与 TEM 波的定义是矛盾的,所以不存在 TEM 波。下面给出定量分析。

TEM 波的特征。

在波导管中,电磁波满足方程

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \quad (1)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \quad (2)$$

假设波导管中可以传播 TEM 波,波沿 z 方向传播,则应该有 $\dot{E}_z=0$ 和 $\dot{H}_z=0$ 。

设 $\dot{H}_z=0$

则 $\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_x\mathbf{e}_x + \dot{H}_y\mathbf{e}_y$

代入式(1),得

$$j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\dot{H}_x}{\partial z}\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

即有 $\dot{E}_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}\right) \neq 0 \quad (3)$

反之,设 $\dot{E}_z=0$

则 $\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x\mathbf{e}_x + \dot{E}_y\mathbf{e}_y$

代入式(2),得

$$-j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} = -\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\dot{E}_x}{\partial z}\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{E}_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

即有 $\dot{H}_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{E}_x}{\partial y}\right) \neq 0 \quad (4)$

式(3)和式(4)是与 TEM 波的假设相互矛盾的,所以在波导管中不存在 TEM 波。从定量分析还可以看出,凡是满足方程式(1)和式(2)的任何形状的波导管都不传输 TEM 波。

8-2 矩形波导的横截面尺寸为 $a=22.86\text{ mm}$, $b=10.16\text{ mm}$,将自由空间波长为 2 cm 、 3 cm 和 5 cm 的信号接入此波导,问能否传输?若能传输,出现哪些波型?

解 当工作波长小于截止波长时,波才能在波导中传输。因此,首先计算截止波长

主模 $\text{TE}_{10} \quad \lambda_c = 2a = 45.72\text{ mm} = 4.572\text{ cm}$

$\text{TE}_{01} \quad \lambda_c = 2b = 20.32\text{ mm} = 2.032\text{ cm}$

$\text{TE}_{11}, \text{TE}_{11} \quad \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{22.86^2} + \frac{1}{10.16^2}}} = 18.56\text{ mm} = 1.856\text{ cm}$

由此可见,该波导不能传输波长为 5 cm 的信号;可以传输 3 cm 波长的信号,但只有 TE_{10} 波;可以传输 2 cm 波长的信号,波的模式为 TE_{10} 和 TE_{01} 波。

截止频率 f_c 和截止波长 λ_c 的物理意义在这里显示出重要性。

8-3 试设计工作波长 $\lambda=10\text{ cm}$ 的矩形波导管, 波导材料为紫铜, 波导内充满空气。要求 TE_{10} 波的工作频率至少有 30% 的安全系数, 即 $1.3f_{c_1} \leq f \leq 0.7f_{c_2}$ 。此处, f_{c_1} 和 f_{c_2} 分别表示 TE_{10} 波和高阶模式的截止频率。

解 主模 TE_{10} 和高次模 TE_{01} 和 TE_{20} 的截止频率分别为

$$\text{TE}_{10} \quad f_{c_{10}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c}{2a} \quad (1)$$

$$\text{TE}_{20} \quad f_{c_{20}} = \frac{c}{a} \quad (2)$$

$$\text{TE}_{01} \quad f_{c_{01}} = \frac{c}{2b} \quad (3)$$

式中: $c(=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}})$ 为光速, 其他高次模的截止频率均小于 $f_{c_{20}}$

和 $f_{c_{01}}$, 这里不讨论。

根据题意, 有

$$1.3f_{c_{10}} \leq f \leq 0.7f_{c_{20}} \quad (4)$$

和 $1.3f_{c_{10}} \leq f \leq 0.7f_{c_{01}} \quad (5)$

工作频率 $f=\frac{c}{\lambda}$, 将式(1)~(3)代入不等式式(4)和式(5)中, 可以得到

$$\frac{10}{7}a < \lambda < \frac{2}{1.3}a \quad (6)$$

和 $\frac{20}{7}b < \lambda < \frac{2}{1.3}a \quad (7)$

已知工作波长 $\lambda=10\text{ cm}$, 所以由式(6)得到

$$\frac{2}{1.3}a > 10, \quad \text{即} \quad a > 6.5\text{ cm}$$

$$\frac{10}{7}a < 10, \quad \text{即} \quad a < 7\text{ cm}$$

取 $a=6.8\text{ cm}$ 。

由式(7), 得到

$$\frac{2}{1.3}a > 10, \quad \text{即} \quad a > 6.5\text{ cm}$$

$$\frac{20}{7}b > 10, \quad \text{即} \quad b < 3.5\text{ cm}$$

通常取 $a=2b$, 因此设计波导的尺寸为 $a \times b = 6.8\text{ cm} \times 3.4\text{ cm}$ 。

根据工作波长, 找出它的左右近邻波型的截止频率 f_{c_1} 和 f_{c_2} , 在满足条件 $f_{c_1} < f < f_{c_2}$ 时的波导尺寸最佳。通常还要满足 $a=2b$ 的条件。

8-4 一理想导体矩形波导,波导尺寸 $a \times b = 2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ 。

试求传输频率为 $3 \times 10^{10} \text{ Hz}$ 的电磁波;写出 TE_{10} 型波导的场分量表达式、波导壁的面电荷密度 σ 及电流线密度 K 。

解 首先要计算出 TE_{10} 模的传播常数,再根据式(8-14)写出场分量表达式。

角频率 $\omega = 2\pi f = 6\pi \times 10^{10} \text{ rad/s}$
传播常数为

$$k_c = \frac{\pi}{a} = 157.08$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = 608.4 \text{ rad/m}$$

各场分量分别为

$$\dot{E}_x = \dot{E}_z = \dot{H}_y = 0$$

$$\dot{E}_y = -j1.508 \times 10^3 A_{10} \sin(157.08x) e^{-j608.4z}$$

$$\dot{H}_x = j3.87 A_{10} \sin(157.08x) e^{-j608.4z}$$

$$\dot{H}_z = A_{10} \cos(157.08x) e^{-j608.4z}$$

场量的瞬时形式为

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$E_y = 1.508 \sqrt{2} \times 10^3 A_{10} \sin(157.08x) \sin(\omega t - 608.4z)$$

$$H_x = -3.87 \sqrt{2} A_{10} \sin(157.08x) \sin(\omega t - 608.4z)$$

$$H_z = \sqrt{2} A_{10} \cos(157.08x) \cos(\omega t - 608.4z)$$

由于电场仅有 y 方向分量,根据理想导体表面电荷分布 $\sigma = D \cdot e_n$ 判断,只有波导的上下顶面才有面电荷分布。

面电荷密度为

$$\sigma \Big|_{y=0} = \epsilon_0 E_y$$

$$= 1.35 \sqrt{2} \times 10^{-8} A_{10} \sin(157.08x) \sin(\omega t - 608.4z) \text{ C/m}^2$$

$$\sigma \Big|_{y=b} = -\epsilon_0 E_y$$

$$= -1.35 \sqrt{2} \times 10^{-8} A_{10} \sin(157.08x) \sin(\omega t - 608.4z) \text{ C/m}^2$$

面电流分布根据 $K = e_n \times H$, 电流线密度为

$$K \Big|_{x=0} = -H_z e_y = -\sqrt{2} A_{10} \cos(\omega t - 608.4z) e_y \text{ A/m}$$

直接应用公式求场分量表达式。根据理想导体与理想介质分界面上的衔接条件,确定波导壁的面电荷和面电流分布。

$$\mathbf{K} \Big|_{x=a} = H_z \mathbf{e}_y = -\sqrt{2} A_{10} \cos(\omega t - 608.4z) \mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \Big|_{y=0} &= \mathbf{e}_y \times \mathbf{H} = H_z \mathbf{e}_x - H_x \mathbf{e}_z \\ &= \sqrt{2} A_{10} \cos(157.08x) \cos(\omega t - 608.4z) \mathbf{e}_x \\ &\quad + 3.87 \sqrt{2} A_{10} \sin(157.08x) \sin(\omega t - 608.4z) \mathbf{e}_z \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \Big|_{y=b} &= -\mathbf{e}_y \times \mathbf{H} = -H_z \mathbf{e}_x + H_x \mathbf{e}_z \\ &= -\sqrt{2} A_{10} \cos(157.08x) \cos(\omega t - 608.4z) \mathbf{e}_x \\ &\quad - 3.87 \sqrt{2} A_{10} \sin(157.08x) \sin(\omega t - 608.4z) \mathbf{e}_z \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

图 8-1(a) 给出了 TE_{10} 波的电力线和磁力线分布图。图 8-1(b) 给出了当 $t=0$ 时的面电流示意图。

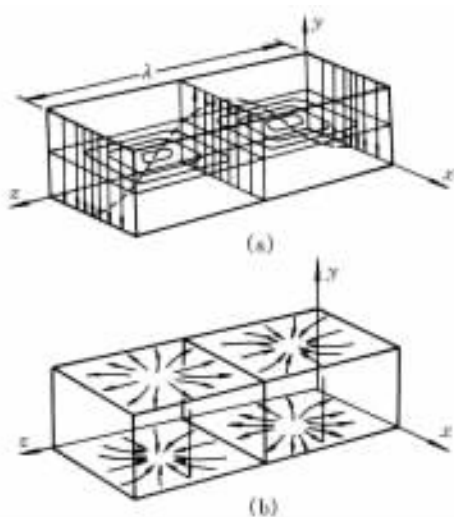


图 8-1 典型题 8-4 图

8-5 由空气填充的矩形谐振腔, 尺寸为 $a=25 \text{ mm}$, $b=12.5 \text{ mm}$, $l=60 \text{ mm}$, 谐振于 TE_{102} 模式。若在腔内填充介质, 则在同一工作频率将谐振于 TE_{103} 模式。试求介质的相对介电常数 ϵ_r 。

直接应用矩形

解 矩形谐振腔的谐振频率公式为

$$(f_0)_{mnp} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

代入已知条件,得 TE_{102} 模的谐振频率为

$$(f_0)_{102} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{25 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{60 \times 10^{-3}}\right)^2} = 7.8 \times 10^9 \text{ Hz}$$

根据题目条件, TE_{103} 的谐振频率与 TE_{102} 的谐振频率相同,则有

$$7.8 \times 10^9 = \frac{3 \times 10^8}{2 \sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{1}{25 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{3}{60 \times 10^{-3}}\right)^2}$$

解得相对介电常数

$$\epsilon_r = 1.52$$

谐振腔的谐振频率公式。

8-6 设计一矩形谐振腔,使谐振频率 1 GHz 和 1.5 GHz 分别谐振于 TE_{101} 和 TE_{102} 两个模式上。

解 空气矩形谐振腔的谐振频率为

$$(f_0)_{mnp} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

TE_{101} 和 TE_{102} 模的谐振频率分别为

$$1 \times 10^9 = 1.5 \times 10^8 \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{l}\right)^2} \quad (1)$$

$$1.5 \times 10^9 = 1.5 \times 10^8 \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{l}\right)^2} \quad (2)$$

联立求解式(1)和式(2),得

$$a = 20 \text{ cm}, \quad l = 23 \text{ cm}$$

通常取 $a = 2b$, 所以 $b = \frac{a}{2} = 10 \text{ cm}$ 。最终矩形谐振腔的几何尺寸为 $a \times b \times l = 20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 23 \text{ cm}$ 。

直接应用谐振腔的谐振频率公式,但通常取长宽尺寸为 $a = 2b$ 。

8.4 自我检测题

题 8.1 矩形波导截面尺寸 $a \times b = 23 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$, 波导内充满空气, 信号源频率为 10 kHz。试求: (1) 波导中可以传播的模式; (2) 该模式的截止频率 f_c 、相位

常数 β 、波导波长 λ_g 及相速 v_p 。

(答案: (1) TE_{10} 波; (2) $f_c = 6.52 \times 10^9 \text{ Hz}$, $\beta = 1.59 \times 10^2 \text{ rad/m}$, $v_p = 3.95 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\lambda_g = 3.95 \times 10^{-2} \text{ m}$)

题 8.2 为什么一般矩形波导(主要传播 TE_{10} 波)测量线的纵向槽开在波导宽壁的中线上?

(提示: 波导宽壁的中线是纵向电流分布)

题 8.3 设矩形波导截面尺寸 $a \times b = 2.28 \text{ mm} \times 1.01 \text{ cm}$ 。试计算 TE_{10} 、 TE_{01} 和 TE_{11} 模波导的截止波长。若将此波导改为谐振腔 TE_{101} 模, 谐振频率 $f_0 = 10^{10} \text{ Hz}$ 。试求谐振腔的长度。

(答案: (1) $\lambda_{c_{10}} = 4.57 \text{ cm}$, $\lambda_{c_{01}} = 2.02 \text{ cm}$, $\lambda_{c_{11}} = 1.9 \text{ cm}$; (2) $l = 1.77 \text{ cm}$)

题 8.4 矩形波导管的截面尺寸为 $a \times b = 31.75 \text{ mm} \times 15.875 \text{ mm}$, 内部充满相对介电常数 $\epsilon_r = 4$ 的电介质。试求在什么频率下波导管只能通过 TE_{10} 模, 而其他波型不能通过?

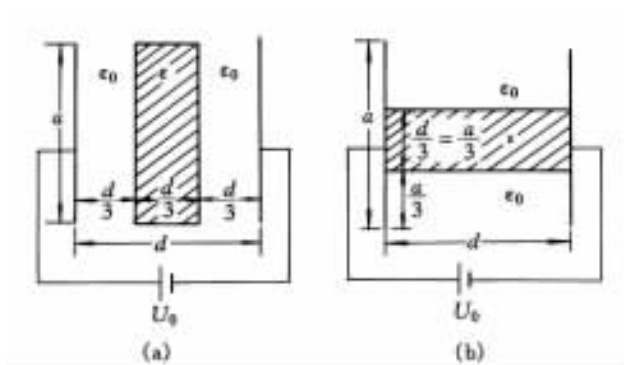
(答案: $2.362 \times 10^6 \text{ Hz} < f < 4.724 \times 10^6 \text{ Hz}$)

附录 1

西安交通大学电磁场(电气电子类) 期末考试试题及参考答案

(一) (15 分) 一平行板电容器(极板面积 $S=a \times b$, b 为极板宽度, 极板间距离为 $d=a$), 今在其内分别如附图 1-1(a)、(b) 所示, 插入一块厚度为 $\frac{d}{3}$ 、宽度为 b 的电介质(介电常数为 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$)。设外施电压为 U_0 , 不考虑平行板电容器的边缘效应, 各就附图 1-1(a)、(b) 所示的两种情况, 求:

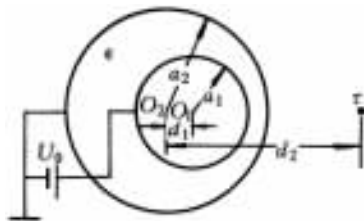
- (1) 电容器内 E 、 D 的分布;
- (2) 极板上的电荷面密度分布 σ ;
- (3) 极板间的吸引力 f 。



附图 1-1

(二) (20 分) 一内、外导体半径为 a_1 、 a_2 的偏心电缆, 其二轴线间的距离为 d_1 , 内、外导体间外施电压 U_0 (外导体接地)。在离外导体轴线为 d_2 处, 平行放置有一线电荷 τ , 半径可忽略不计的导线, 如附图 1-2 所示。求:

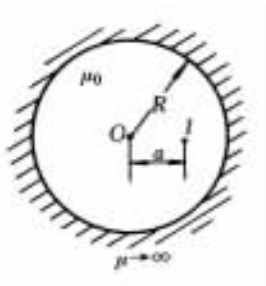
- (1) 电缆内、外场的分布 (E 、 φ);
- (2) 电缆内、外导体间每单位长度的电容;



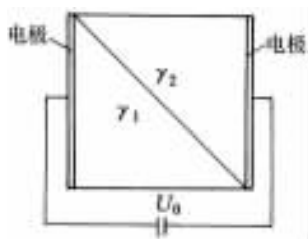
附图 1-2

(3) 现若电缆内介质 ϵ 为非理想电介质, 有漏电流, 其电导率为 γ , 则每单位长度的电导为多少?

(三) (15 分) 在一内半径为 R 的铁磁圆柱体内 (设其磁导率 $\mu \rightarrow \infty$), 平行放置有一线电流 I , 此线电流与铁磁圆柱体轴线相距为 a 。求: 空心铁磁圆柱体内任一点 $P(x, y)$ 处的磁感应强度 B (提示: 可用类比法求解), 如附图 1-3 所示。



附图 1-3



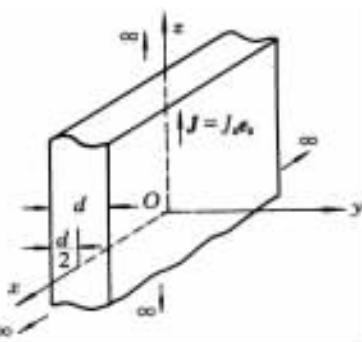
附图 1-4

(四) (12 分) 写出以下边值问题:

(1) 二平行电极间导电媒质由如附图 1-4 所示的两种导电媒质 γ_1 和 γ_2 组成 (这两种导电媒质的厚度相同), 电极间外施电压为 U_0 ;

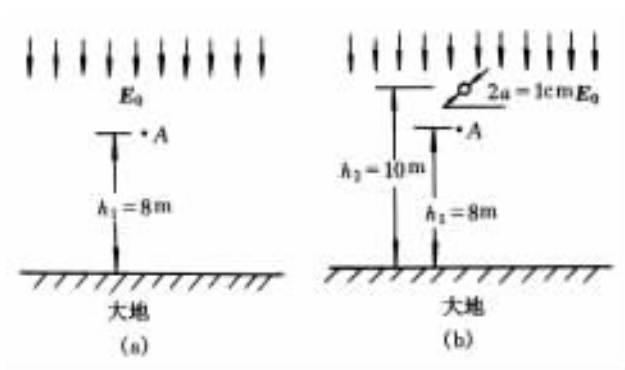
(2) 一块无限大的铝板如附图 1-5 所示, 其磁导率为 μ , 其中通过的电流密度为 $J = J_z e_z$ 。

(五) (15 分) 设大地上方带有正电荷的雷云在雷云与地面之间形成均匀电场 E_0 。试求:



附图 1-5

(1) 在附图 1-6(a)所示情况下,点 A 处的电位 φ_{A1} ;



附图 1-6

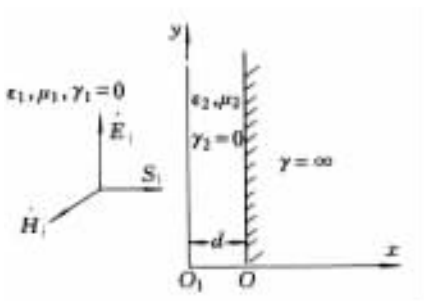
(2) 若在点 A 上方放置有与地面平行的接地钢索(其直径为 $2a = 1 \text{ cm}$, 距地面高度为 $h_2 = 10 \text{ m}$), 如附图 1-6(b)所示, 再求点 A 处的电位 φ_{A2} ;

(3) 以上两种情况下点 A 处的电位相对变化量 $\Delta\varphi_A/\varphi_{A1}$ 。

(六) (8 分) 试述单元偶极子(设为正弦电流)激励的远区场的特点; 若令该单元偶极子的电偶极矩为 $p = q\Delta l$, 角频率为 ω , 流过的电流为 $i = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ 。试写出远区场中电场强度和磁场强度的表达式。

(七) (15 分) 设有一厚度为 d 的理想介质, 右侧表面涂覆有一层理想导体。现有一线性极化(角频率为 ω 的正弦函数)的均匀平面电磁波, 从左侧正入射于该介质平表面上, 如附图 1-7 所示。试求:

- (1) 三层媒质中的电场和磁场的复数表达式;
- (2) 媒质 (μ_2, ϵ_2) 中的入射波 $\dot{E}_{y2}^+$;
- (3) 每一区域中的坡印廷矢量的瞬时表达式。



附图 1-7

[参 考 答 案]

(一) 答案:

图 a 情况:

$$(1) E_{\text{介}} = \frac{3U_0}{(1+2\epsilon_r)a}, \quad E_{\text{空}} = \frac{3\epsilon_r U_0}{(1+2\epsilon_r)a}, \quad D_{\text{介}} = D_{\text{空}} = \frac{3\epsilon_r \epsilon_0 U_0}{(1+2\epsilon_r)a}$$

$$(2) \sigma = \frac{3\epsilon_r \epsilon_0 U_0}{(1+2\epsilon_r)a}$$

$$(3) f = \frac{1}{2} \frac{9\epsilon_r^2 \epsilon_0 U_0^2}{(1+2\epsilon_r)^2} \cdot \frac{b}{a}$$

图 b 情况:

$$(1) E_{\text{介}} = E_{\text{空}} = \frac{U_0}{a}, \quad D_{\text{介}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 U_0}{a}, \quad D_{\text{空}} = \frac{\epsilon_0 U_0}{a}$$

$$(2) \sigma_{\text{介}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 U_0}{a}, \quad \sigma_{\text{空}} = \frac{\epsilon_0 U_0}{a}$$

$$(3) f = \frac{1}{6} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 U_0^2 b}{a} + \frac{1}{3} \frac{\epsilon_0 U^2 b}{a} = \frac{(\epsilon_r + 2)}{6} \frac{\epsilon_0 U_0^2 b}{a}$$

(二) 答案:

(1) 提示: 电缆内部的电场不受线电荷 τ 的影响, 可直接应用电轴法计算(略)。同理, 电缆外部的电场不受内外导体间电压源的影响。

(2) 内、外导体间每单位长度的电容

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{[b+(h_1-a_1)][b-(h_2-a_2)]}{[b+(h_2-a_2)][b-(h_1-a_1)]}}$$

其中, $h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - d_1^2}{2d_1}$, $h_2 = \frac{d_1^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d_1}$, $b = \sqrt{h_1^2 - a_1^2} = \sqrt{h_2^2 - a_2^2}$

(3) 每单位长度的电导

$$G = \frac{N}{\epsilon} C \quad (\text{静电比拟})$$

(三) 答案: 提示: 可采用与静电场中相似的电轴法。

(四) 答案:

(1) 设媒质 1 和 2 中的电位分别为 φ_1 和 φ_2 , 则边值问题为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (\text{在媒质 1 中}) \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (\text{在媒质 2 中}) \\ \varphi_1(0, y) = U_0 \\ \varphi_2(a, y) = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{(x, 0)} = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{(x, a)} = 0 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{在两种媒质分界面上}) \\ N_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = N_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (\text{在两种媒质分界面上}) \end{array} \right.$$

(2) 恒定磁场边值问题为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 A_z}{dy^2} = -\mu J_z \quad \left(-\frac{d}{2} < y < +\frac{d}{2}\right) \\ \left. \frac{dA_z}{dy} \right|_{y=\pm \frac{d}{2}} = \frac{\mu d}{2} J_z \end{array} \right.$$

(五) 答案: (1) $\varphi_{A1} = h_1 E_0 = 8E_0$

(2) $\varphi_{A2} = 5.35E_0$

(3) $\Delta\varphi_A/\varphi_{A1} = 33.1\%$

(六) 答案: (略, 详见冯慈璋、马西奎主编《工程电磁场导论》(北京: 高等教育出版社, 2000 年 6 月) 第 171 ~ 172 页中的式(4-90))

(七) 答案: (略)

附录 2

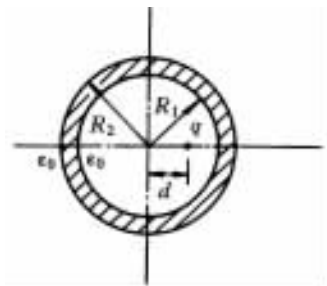
西安交通大学硕士研究生入学综合考试 电磁场试题及参考答案

(一) (12 分) 请写出电磁场基本方程组的积分形式和微分形式, 并简要说明各方程的物理意义。

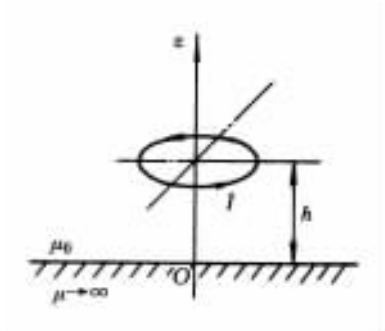
(二) (15 分) 如附图 2-1 所示, 在一原来不带电的导体球壳内距球心为 d 处, 放入一电量为 q 的点电荷, 若以无穷远为电位参考点, 试求:

- (1) 球壳的电位;
- (2) 球心的电位;
- (3) 点电荷 q 所受的力。

(三) (8 分) 如附图 2-2 所示, 在一块很大的铁磁材料上方, $z=h$ 的平面内, 有一载有恒定电流 I 的电流圆环。试定性说明此线圈的自感和受力情况, 与将此线圈放在无限大的空气中的情况相比较, 发生了怎样的变化?

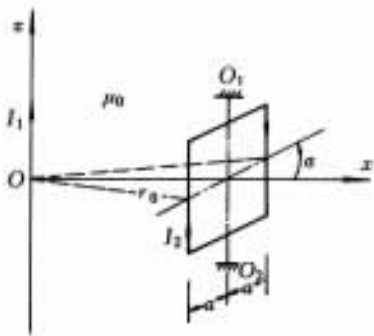


附图 2-1



附图 2-2

(四) (12 分) 沿 z 轴的长直电流 I_1 旁边有一正方形线框, 边长为 $2a$, 载有电流 I_2 , 方向如附图 2-3 所示。线框中心到 z 轴的距离为 r_0 , 线框可绕平行于 z 轴的轴线 O_1O_2 转动, 当线框平面与 x 轴的夹角为 α 时, 试求:



附图 2-3

- (1) 长直导线与线框间的互感 M ;
- (2) 线框所受的转矩。

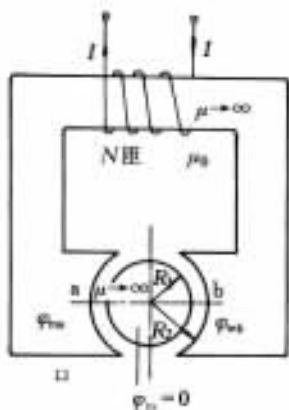
(五) (6 分) 如附图 2-4 所示为一磁电式仪表的铁心结构, N 、 I 为已知。设气隙很小, 可忽略边缘效应, 若取圆柱铁心的标量磁位 $\varphi_m = 0$, 试问:

- (1) 铁心中的磁场强度 H 等于多少?
- (2) 图中 a、b 两极的标量磁位 φ_{ma} 和 φ_{mb} 各等于多少?

(六) (8 分) 试述一小电偶极子天线的近区场特征、远区条件以及它的远区场与均匀平面波相比的异同点。

(七) (12 分) 自由空间中一均匀平面波的电场为 $\dot{E} = (j100e_x + 100e_y)e^{-j\frac{\pi}{3}z}$ V/m, 试问:

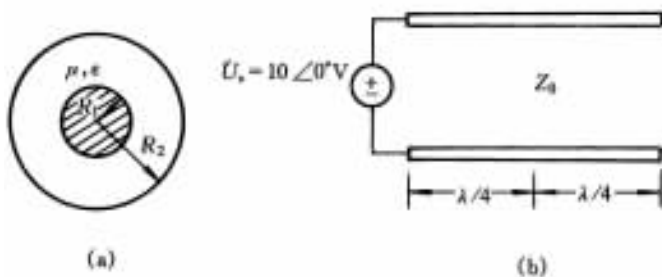
- (1) 此电磁波的极化状态;
- (2) 其波速 v , 传播方向, 相位常数 β , 波长 λ , 频率 f ;
- (3) 写出磁场强度 H 的复数表达式和瞬时表达式。



附图 2-4

(八) (15 分) 一同轴电缆如附图 2-5(a) 所示, 内、外半径分别为 $R_1 = 0.6$ mm, $R_2 = 3.92$ mm, 且内、外导体均可看作是理想导体。内外导体间的电介质为聚乙烯 ($\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$)。若长度为半波长的这种同轴电缆, 终端开路, 始端加一频率为 100 MHz, 电压 $\dot{U}_s = 10 \text{ V} \angle 0^\circ$ 的电压源, 如附图 2-5(b) 所示。试求:

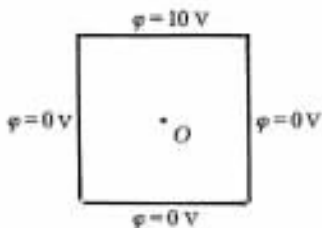
- (1) 此同轴电缆的特性阻抗 Z_0 ;
- (2) 电磁波在此同轴电缆中传播的相速 v 和相位常数 β ;
- (3) 距终端 $\lambda/4$ 处的电压和电流相量, 以及终端电压的瞬时表达式。



附图 2-5

(九) (6 分) 收音机中用于 465 kHz 的中频变压器采用厚度约 0.75 mm 的铝壳屏蔽罩。试问这种铝材料是否适用于作为工频电源变压器的电磁屏蔽壳? 若不行,请在下列几种材料中选一种适用的材料,并给出所需要的材料厚度。铜: $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, \gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$; 铝: $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, \gamma = 3.82 \times 10^7 \text{ S/m}$; 铁: $\epsilon_r = 1, \mu_r = 10^4, \gamma = 1.03 \times 10^7 \text{ S/m}$; 有机玻璃: $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, \gamma < 10^{-12} \text{ S/m}$ 。

(十) (6 分) 由 4 块铜电极围成的一正方形场域,如附图 2-6 所示。试分析场域中心 O 点的电位 φ_0 等于多少? 并说明理由(设:场域中的媒质为线性、各向同性的均匀媒质)。



附图 2-6

[参考答案]

(一) 答案: (略)

(二) 答案: (1) 球壳的电位 $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

(2) 球心的电位 $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

(3) 点电荷 q 所受的力 $f = \frac{q^2 d}{4\pi\epsilon_0 R_1^3}$ (吸引力)

(三) 答案: 与将此线圈放在无限大的空气中的情况相比较, 线圈的自感增加, 受力增加。

(四) 答案: (1) $M = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + a^2 + 2r_0 a \cos \alpha}}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos \alpha}}$

(2) $-\frac{2\mu_0 r_0 a^2 (r_0^2 + a^2) I_1 I_2 \sin \alpha}{\pi [r_0^2 + a^2]^2 - 4r_0^2 a^2 \cos^2 \alpha}$

(五) 答案: (1) 铁心中的磁场强度 H 为零

(2) $\varphi_{ma} = \frac{NI}{2}, \quad \varphi_{mb} = -\frac{NI}{2}$

(六) 答案: (略: 参见冯慈璋、马西奎主编《工程电磁场导论》(北京: 高等教育出版社, 2000 年 6 月) 第 171 ~ 172 页)

(七) 答案: (1) 圆极化波

(2) $v = 3 \times 10^8$ m/s; 波沿 $+z$ 方向前进;

$\beta = \frac{\pi}{3}$ rad/m, $\lambda = 6$ m, $f = 5 \times 10^7$ Hz

(3) $\mathbf{H} = \frac{(-100\mathbf{e}_x + j100\mathbf{e}_y)}{377} e^{-j\frac{\pi}{3}z}$ A/m

(八) 答案: (1) $Z_0 = 75.08 \Omega$

(2) $v = 2 \times 10^8$ m/s, $\beta = \pi$ rad/m

(3) 距终端 $\lambda/4$ 处的电压为零, 电流为 $\frac{2}{15} A$ 终端电压的瞬时表达式

$u(0, t) = 10\sqrt{2}\cos 10^8 t$

(九) 答案: 铝不可以用作工频电源变压器的电磁屏蔽壳。应选铁, 厚度为铁中透入深度 d 的 3 ~ 6 倍。

(十) 答案: $\varphi_0 = 2.5$ V, 可用差分格式 $\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$ 得到解释。